Suite I - Die StrukturGebende

Teil 6: Essays 41-48

$\overset{\textbf{ir}}{M}$. M_Intervalle. `HOIR`-Notation. Satz vom Minimum. Satz vom Maximum. InfZwischenWertSatz. SupZwischenWertSatz.

Andreas Unterreiter

13. September 2011

irreflexiv M. $\overset{\textbf{ir}}{M}$.
Intervalle.
`HOIR`-**Notation**.

Ersterstellung: 07/03/07 **Letzte Änderung: 09/06/11**

41-1. Mit der folgenden Definition wird, wie sich später herausstellt, die größte, in M enthaltene irreflexive Klasse in die Essays eingeführt:

41-1(Definition)

1) $\overset{\mathbf{ir}}{M} = (M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id}$.

2) "$\mathfrak{C}$ **irreflexiv** M" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \overset{\mathbf{ir}}{M} .$$

41-2. Im folgenden Satz werden einige grundlegende Eigenschaften von irreflexiv M fest gehalten:

41-2(Satz)

a) $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ *irreflexiv* M.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *irreflexiv* M" *und* "$\mathfrak{D}$ *irreflexiv* M" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) *Aus* "$w \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$" *folgt* "$\exists \Omega, \Psi : (w = (\Omega, \Psi)) \wedge (\Omega\_M\_\Psi) \wedge (\Omega \neq \Psi)$".

d) *Aus* "$(p, q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$" *folgt* "$p\_M\_q$" *und* "$p \neq q$".

e) *Aus* "p_M_q" *und* "$p \neq q$" *folgt* "$(p, q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$".

<u>Beweis</u> **41-2** `a)`

Aus "$\overset{\mathbf{ir}}{M}=\overset{\mathbf{ir}}{M}$"

folgt via **41-1(Def)**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ irreflexiv M.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ irreflexiv M) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ irreflexiv M).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ irreflexiv $M\ldots$"
folgt via **41-1(Def)**: $\mathfrak{C}=(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ irreflexiv M"
folgt via **41-1(Def)**: $\mathfrak{D}=(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C}=(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D}=(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}$"
folgt: $\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$.

`c)` `VS` gleich $w\in\overset{\mathbf{ir}}{M}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w\in\overset{\mathbf{ir}}{M}$" und
aus "$\overset{\mathbf{ir}}{M}=(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}$"
folgt: $w\in(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}$.

`2:` Aus `1`"$w\in(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}$"
folgt via **5-3**: $(w\in(M^{-1})^{-1})\wedge(w\notin\mathsf{id})$.

`3:` Aus `2`"$w\in(M^{-1})^{-1}\ldots$"
folgt via **11-3**: $\exists\Psi,\Omega:(w=(\Omega,\Psi))\wedge((\Psi,\Omega)\in M^{-1})$.

`4:` Aus `3`"$\ldots(\Psi,\Omega)\in M^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(\Omega,\Psi)\in M$.

`5:` Aus `4`"$(\Omega,\Psi)\in M$"
folgt: Ω_M_Ψ.

`6.1:` Es gilt: $(\Omega=\Psi)\vee(\Omega\neq\Psi)$.

`Fallunterscheidung`

...

<u>Beweis **41-2**</u> `c)`

...

`Fallunterscheidung`

`6.1.1.Fall` $\Omega = \Psi$.

`7:` Aus `5`"Ω_M_Ψ"
folgt via **30-2**: Ω Menge.

`8:` Aus `7`"Ω Menge"
folgt via **0-22**: $\Omega \in \mathcal{U}$.

`9:` Aus `8`"$\Omega \in \mathcal{U}$" und
aus `6.1.1.Fall`"$\Omega = \Psi$"
folgt via **20-10**: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`10:` Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}} = \mathsf{id}$.

`11:` Aus `9`"$(\Omega, \Psi) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$" und
aus `10`"$\mathsf{id}_{\mathcal{U}} = \mathsf{id}$"
folgt: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{id}$.

`12:` Aus `3`"$\ldots w = (\Omega, \Psi) \ldots$" und
aus `11`"$(\Omega, \Psi) \in \mathsf{id}$"
folgt: $w \in \mathsf{id}$.

`13:` Es gilt `12`"$w \in \mathsf{id}$".
Es gilt `2`"$\ldots w \notin \mathsf{id}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\Omega \neq \Psi$.

`6.1.2.Fall` $\Omega \neq \Psi$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$\Omega \neq \Psi$"

`6.2:` Aus `3`"$\exists \Psi, \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots w = (\Omega, \Psi) \ldots$",
aus `5`"Ω_M_Ψ" und
aus `A1` gleich "$\Omega \neq \Psi$"
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi: \quad w = (\Omega, \Psi) \;\wedge\; \Omega\_M\_\Psi \;\wedge\; \Omega \neq \Psi.$$

<u>Beweis **41-2**</u> `d)` `VS` gleich $(p,q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Omega, \Psi : ((p,q) = (\Omega, \Psi)) \wedge (\Omega\_M\_\Psi) \wedge (\Omega \neq \Psi)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega\_M\_\Psi \ldots$"
folgt via **30-2**: $(\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge})$.

`3:` Aus `1`"$\ldots (p,q) = (\Omega, \Psi) \ldots$",
aus `2`"Ω Menge… " und
aus `2`"$\ldots \Psi$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Psi)$.

`4.1:` Aus `3`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1`"$\ldots \Omega\_M\_\Psi \ldots$"
folgt: p_M_Ψ.

`4.2:` Aus `3`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1`"$\ldots \Omega \neq \Psi$"
folgt: $p \neq \Psi$.

`5.1:` Aus `4.1`"p_M_Ψ" und
aus `3`"$\ldots q = \Psi$"
folgt: p_M_q.

`5.2:` Aus `4.2`"$p \neq \Psi$" und
aus `3`"$\ldots q = \Psi$"
folgt: $p \neq q$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(p\_M\_q) \wedge (p \neq q)$.

<u>Beweis **41-2**</u> `e)` `VS` gleich $(p\_M\_q) \wedge (p \neq q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p\_M\_q\ldots$"
folgt: $(p,q) \in M$.

`2:` Aus `1`"$(p,q) \in M$"
folgt via **11-4**: $(p,q) \in (M^{-1})^{-1}$.

`3.1:` Es gilt: $((p,q) \in \mathsf{id}) \vee ((p,q) \notin \mathsf{id})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $(p,q) \in \mathsf{id}$.

`4:` Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`5:` Aus `3.1.1.Fall`"$(p,q) \in \mathsf{id}$" und
aus `4`"$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $(p,q) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`6:` Aus `5`"$(p,q) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt via **20-10**: $p = q$.

`7:` Es gilt `6`"$p = q$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots p \neq q$".
Ex falso quodlibet folgt: $(p,q) \notin \mathsf{id}$.

`3.1.2.Fall` $(p,q) \notin \mathsf{id}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$(p,q) \notin \mathsf{id}$"

`3.2:` Aus `2`"$(p,q) \in (M^{-1})^{-1}$" und
aus `A1` gleich "$(p,q) \notin \mathsf{id}$"
folgt via **5-3**: $(p,q) \in (M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id}$.

`4:` Via **41-1(Def)** gilt: $(M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} = \overset{\mathbf{ir}}{M}$.

`5:` Aus `3.2`"$(p,q) \in (M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id}$" und
aus `4`"$(M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} = \overset{\mathbf{ir}}{M}$"
folgt: $(p,q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$.

$\square$

41-3. Im folgenden Satz wird das in **41-2** `cd)` enthaltene Kriterium mit Hilfe der Relations-Notation benutzerfreundlicher reformuliert:

41-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q$.

`ii)` *“*p_M_q*” und “*$p \neq q$*”.*

Beweis **41-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q$”
folgt: $(p, q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$.

`2:` Aus `1`“$(p, q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$”
folgt via **41-2**: $(p\_M\_q) \wedge (p \neq q)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p\_M\_q) \wedge (p \neq q)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p\_M\_q \dots$” und
aus `VS` gleich “$\dots p \neq q$”
folgt via **41-2**: $(p, q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$.

`2:` Aus `1`“$(p, q) \in \overset{\mathbf{ir}}{M}$”
folgt: $p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q$.

$\square$

41-4. Im folgenden Kriterium wird ein Zusammenhang zwischen "p_M_q" und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" hergestellt:

41-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` p_M_q.

`ii)` "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" *oder* "$(p\_M\_q) \wedge (p = q)$".

Beweis **41-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich p_M_q.

`1:` Es gilt: $(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q) \vee (\neg(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q$.

Aus `1.1.Fall`“$p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q$”
folgt: $(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q) \vee ((p\_M\_q) \wedge (p = q))$.

`1.2.Fall` $\neg(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q)$.

`2.1:` Es gilt: $(p = q) \vee (p \neq q)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $p = q$.

`2.1.2.Fall` $p \neq q$.

`3:` Aus `VS` gleich “p_M_q” und
aus `2.1.2.Fall`“$p \neq q$”
folgt via **41-3**: $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q$.

`4:` Es gilt `3`“$p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q$” .
Es gilt `1.2.Fall`“$\neg(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q)$” .
Ex falso quodlibet folgt: $p = q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$p = q$”

`2.2:` Aus `VS` gleich “p_M_q” und
aus `A1` gleich “$p = q$”
folgt: $(p\_M\_q) \wedge (p = q)$.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q) \vee ((p\_M\_q) \wedge (p = q))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_q) \vee ((p\_M\_q) \wedge (p = q))$.

Beweis **41-4** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \vee ((p\_M\_q) \wedge (p = q))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \vee ((p\_M\_q) \wedge (p = q))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$.

Aus `1.1.Fall`“$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$”
folgt via **41-3**: p_M_q.

`1.2.Fall` $(p\_M\_q) \wedge (p = q)$.

Aus `1.2.Fall`
folgt: p_M_q.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: p_M_q.

□

41-5. Im folgenden Satz ist in `a)` die im folgenden wichtige Aussage, wonach aus "p_M_q" entweder "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" oder "$p = q$" folgt, festgehalten. Aussage `b)` besagt, dass wenn nicht einmal "p_M_q" gilt, auch nicht "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" gelten kann. In `cd)` wird "$\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$" thematisiert:

> **<u>41-5(Satz)</u>**
>
> `a)` *Aus "p_M_q" folgt "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" oder "$p = q$".*
>
> `b)` *Aus "$\neg(p\_M\_q)$" folgt "$\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)$".*
>
> `c)` $\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.
>
> `d)` *Aus "$p = q$" folgt "$\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)$" und "$\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$".*

<u>Beweis **41-5**</u> `a)` `VS` gleich p_M_q.

`1:` Aus `VS` gleich "p_M_q"
folgt via **41-4**: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \vee ((p\_M\_q) \wedge (p = q))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q)$.

`b)`

`1:` Via **41-3** gilt: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \Rightarrow (p\_M\_q)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(p\_M\_q)) \Rightarrow (\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q))$.

Beweis **41-5** c)

1: Es gilt: $(p \underset{}{\overset{\mathbf{ir}}{M}} p) \vee (\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} p))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \overset{\mathbf{ir}}{M} p$.

2: Aus 1.1.Fall“$p \overset{\mathbf{ir}}{M} p$”
folgt via **41-3**: $p \neq p$.

3: Es gilt 2“$p \neq p$” .
Es gilt “$p = p$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} p)$.

1.2.Fall $\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} p)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} p)$.

d) VS gleich $p = q$.

1: Via des bereits bewiesenen c) gilt: $\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} p)$.

2.1: Aus 1“$\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} p)$” und
aus VS gleich “$p = q$”
folgt: $\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} q)$.

2.2: Aus 1“$\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} p)$” und
aus VS gleich “$p = q$”
folgt: $\neg(q \overset{\mathbf{ir}}{M} p)$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(\neg(p \overset{\mathbf{ir}}{M} q)) \wedge (\neg(q \overset{\mathbf{ir}}{M} p))$.

□

41-6. Es gilt $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M$ und hieraus werden in Bezug auf die Definitions- und Bildbereiche von $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ und M einige Schlussfolgerungen gezogen. Ausserdem gilt $\overset{\mathbf{ir}}{M}=(\overset{\mathbf{ir}}{M^{-1}})^{-1}$:

41-6(Satz)

a) $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M$.

b) $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathbf{ir}}{M}) \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

c) $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathbf{ir}}{M}) \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

d) *Aus* “p_ $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _q” *folgt* “$p \in \mathsf{dom}\, M$”.

e) *Aus* “p_ $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _q” *folgt* “$q \in \mathsf{ran}\, M$”.

f) $\overset{\mathbf{ir}}{M}=(\overset{\mathbf{ir}}{M^{-1}})^{-1}$.

Beweis **41-6** `a)`

`1:` $\overset{\mathbf{ir}}{M} \overset{\mathbf{41-1(Def)}}{=} (M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} \overset{\mathbf{5-5}}{\subseteq} (M^{-1})^{-1}.$

`2:` Via **13-3** gilt: $(M^{-1})^{-1} \subseteq M.$

`3:` Aus `1`"$\overset{\mathbf{ir}}{M} \ldots \subseteq (M^{-1})^{-1}$" und
aus `2`"$(M^{-1})^{-1} \subseteq M$"
folgt via **0-6**: $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M.$

`bc)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M.$

`2.b):` Aus `1`"$\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M$"
folgt via **7-10**: $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathbf{ir}}{M}) \subseteq \mathsf{dom}\,M.$

`2.c):` Aus `1`"$\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M$"
folgt via **7-10**: $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathbf{ir}}{M}) \subseteq \mathsf{ran}\,M.$

`de)` `VS` gleich $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$"
folgt via **41-3**: $p\_M\_q.$

`2.c):` Aus `1`"p_M_q"
folgt via **30-2**: $p \in \mathsf{dom}\,M.$

`2.d):` Aus `1`"p_M_q"
folgt via **30-2**: $q \in \mathsf{ran}\,M.$

`f)`

`1:` $(\overset{\mathbf{ir}}{M^{-1}})^{-1} \overset{\mathbf{41-1(Def)}}{=} (((M^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} \overset{\mathbf{13-3}}{=} (M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} \overset{\mathbf{41-1(Def)}}{=} \overset{\mathbf{ir}}{M}.$

`2:` Aus `1`"$(\overset{\mathbf{ir}}{M^{-1}})^{-1} = \ldots = \overset{\mathbf{ir}}{M}$"
folgt: $\overset{\mathbf{ir}}{M} = (\overset{\mathbf{ir}}{M^{-1}})^{-1}.$

□

41-7. $\overset{\textbf{ir}}{M}$ ist die größte irreflexive Relation, die in M enthalten ist:

<u>41-7(Satz)</u>

a) $\overset{\textbf{ir}}{M}$ *irreflexiv.*

b) $\overset{\textbf{ir}}{M}$ *Relation.*

c) $\overset{\textbf{ir}}{M} \subseteq M$.

d) *Aus "r irreflexiv" und "r Relation" und "$r \subseteq M$" folgt "$r \subseteq \overset{\textbf{ir}}{M}$".*

Beweis **41-7** `a)`

`1:` $(\overset{\mathbf{ir}}{M})\cap\mathsf{id}\overset{\mathbf{41-1(Def)}}{=}((M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id})\cap\mathsf{id}\overset{\mathbf{KG\cap}}{=}\mathsf{id}\cap((M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id})\overset{\mathbf{5-10}}{=}0.$

`2:` Aus `1` "$(\overset{\mathbf{ir}}{M})\cap\mathsf{id}=\ldots=0$"
folgt via **30-25**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ irreflexiv.

`b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha\in\overset{\mathbf{ir}}{M}.$

Aus `Thema1` "$\alpha\in\overset{\mathbf{ir}}{M}$"
folgt via **41-2**: $\exists\Omega,\Psi:\alpha=(\Omega,\Psi).$

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha:(\alpha\in\overset{\mathbf{ir}}{M})\Rightarrow(\exists\Omega,\Psi:\alpha=(\Omega,\Psi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ Relation.

`c)` Via **41-6** gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M}\subseteq M.$

`d)` `VS` gleich $(r$ irreflexiv$)\wedge(r$ Relation$)\wedge(r\subseteq M).$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ Relation$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots r\subseteq M$"
folgt via **13-3**: $r\subseteq(M^{-1})^{-1}.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "r irreflexiv$\ldots$"
folgt via **30-25**: $r\cap\mathsf{id}=0.$

`2:` Aus `1.1` "$r\subseteq(M^{-1})^{-1}$" und
aus `1.2` "$r\cap\mathsf{id}=0$"
folgt via **5-10**: $r\subseteq(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}.$

`3:` $r\overset{2}{\subseteq}(M^{-1})^{-1}\setminus\mathsf{id}\overset{\mathbf{41-1(Def)}}{=}\overset{\mathbf{ir}}{M}.$

`4:` Aus `3`
folgt: $r\subseteq\overset{\mathbf{ir}}{M}.$

$\square$

41-8. In M_Ketten folgt aus $\neg(p\_M\_q)$ die Aussage $q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$ und aus $\neg(p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q)$ folgt q_M_p:

41-8(Satz)

Aus "K ist M_Kette" und "$p \in K$" und "$q \in K$" und ...

`a)` *... und "$\neg(p\_M\_q)$" folgt "$q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$".*

`b)` *... und "$\neg(p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q)$" folgt "$q\_M\_p$".*

Beweis **41-8** `a)` `VS` gleich $(K \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (p \in K) \wedge (q \in K) \wedge (\neg(p\_M\_q))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette... ",
aus `VS` gleich "$\dots p \in K \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots \neg(p\_M\_q)$"
folgt via **30-71**: $p \neq q$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette... ",
aus `VS` gleich "$\dots p \in K \dots$",
aus `VS` gleich "$\dots q \in K \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots \neg(p\_M\_q)$"
folgt via **30-71**: q_M_p.

`2:` Aus `1.1`
folgt: $q \neq p$.

`3:` Aus `1.2`"q_M_p" und
aus `2`"$q \neq p$"
folgt via **41-3**: $q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$.

<u>Beweis **41-8**</u> `b)` `VS` gleich $(K \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (p \in K) \wedge (q \in K) \wedge (\neg(p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q))$.

`1:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette..." ,
aus `VS` gleich "$\ldots p \in K \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in K \ldots$"
folgt via **30-68(Def)**: $(p\_M\_q) \vee (q\_M\_p)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p_M_q.

`2:` Aus `1.1.Fall`"p_M_q"
folgt via **41-5**: $(p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q)$.

`3:` Aus `2`"$(p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \neg(p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q)$"
folgt: $p = q$.

`4:` Aus `VS` gleich "K ist M_Kette..." ,
aus `VS` gleich "$\ldots p \in K \ldots$" und
aus `3`"$p = q$"
folgt via **30-71**: q_M_p.

`1.2.Fall` q_M_p.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: q_M_p.

□

41-9. In M_Ketten gilt $p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q$ oder $p = q$ oder $q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$. Auch gilt dort p_M_q oder $q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$:

41-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *K ist M_Kette.*

$\rightarrow$) $p \in K$.

$\rightarrow$) $q \in K$.

Dann folgt:

a) "$p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q$" *oder* "$p = q$" *oder* "$q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$".

b) "p_M_q" *oder* "$q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$".

Beweis **41-9** a)

1: Aus $\rightarrow$)"K ist M_Kette",
aus $\rightarrow$)"$p \in K \ldots$" und
aus $\rightarrow$)"$\ldots q \in K$"
folgt via **30-68(Def)**: $(p\_M\_q) \vee (q\_M\_p)$.

2: Via **41-5** gilt: $(p\_M\_q) \Rightarrow ((p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q))$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $((p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q)) \vee (q\_M\_p)$.

4: Via **41-5** gilt: $(q\_M\_p) \Rightarrow ((q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p) \vee (q = p))$.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $((p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q)) \vee ((q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p) \vee (q = p))$.

6: Aus 5
folgt: $((p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q) \vee (q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p)) \vee (q = p)$.

7: Aus 6
folgt: $(p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q) \vee (q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p)$.

Beweis **41-9** `b)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "K ist M_Kette",
aus $\rightarrow$) "$p \in K \dots$" und
aus $\rightarrow$) "$\dots q \in K$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$"
folgt via **41-3**: p_M_q.

`3:` Aus `2`
folgt: $(p\_M\_q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`1.2.Fall` $p = q$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "K ist M_Kette",
aus $\rightarrow$) "$p \in K \dots$" und
aus `1.2.Fall` "$p = q$"
folgt via **30-71**: p_M_q.

`3:` Aus `2`
folgt: $(p\_M\_q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`1.3.Fall` $q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$.

Aus `1.3.Fall`
folgt: $(p\_M\_q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(p\_M\_q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

□

`HOIR`-Notation. Anstelle von “$x_- \overset{\mathbf{ir}}{\preceq} {}_-y$” - wobei “$\preceq$” auch durch ein anderes in der **Liste der KlassenVariablen, Teil 2**, erscheinendes Symbol ersetzt werden kann - wird “$x \prec y$” geschrieben. Eine Verwechslung mit einer KlassenVariablen ist nicht möglich, da für “$\preceq$” - und für alle anderen in der **Liste der KlassenVariablen, Teil 2**, erscheinenden Symbole - *keine* Rekursiv-Eigenschaft vorliegt:

<u>`HOIR`-Notation</u>

1) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \prec \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&_- \overset{\mathbf{ir}}{\preceq} {}_-\overline{\&}$ ” .

2) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \lhd \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&_- \overset{\mathbf{ir}}{\unlhd} {}_-\overline{\&}$ ” .

3) Sind “ $\&$ ” und “ $\overline{\&}$ ” Klassen, so gilt

$\boxed{\text{“ } \& \sqsubset \overline{\&} \text{ ”}}$ genau dann, wenn: “ $\&_- \overset{\mathbf{ir}}{\sqsubseteq} {}_-\overline{\&}$ ” .

41-10. Nun betreten die abgeschlossenen, die offenen und die halboffenen M_Intervalle von a bis b die Essays:

...

...

41-10(Definition)

1) $[a \overset{M}{|} b]$

$$= \mathtt{41.0}(a, M, b) \; = \{\omega : (a\_M\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **abgeschlossenes** M**_Intervall von** a **bis** b"
genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} b].$$

3) $]a \overset{M}{|} b[$

$$= \mathtt{41.1}(a, M, b) \; = \{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)\}.$$

4) "$\mathfrak{C}$ **offenes** M**_Intervall von** a **bis** b"
genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} =]a \overset{M}{|} b[.$$

5) $]a \overset{M}{|} b]$

$$= \mathtt{41.2}(a, M, b) \; = \{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}.$$

6) "$\mathfrak{C}$ **linkshalboffenes** M**_Intervall von** a **bis** b"
genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} =]a \overset{M}{|} b].$$

7) $[a \overset{M}{|} b[$

$$= \mathtt{41.3}(a, M, b) \; = \{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}.$$

8) "$\mathfrak{C}$ **rechtshalboffenes** M**_Intervall von** a **bis** b"
genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} b[.$$

41-11. Die in **41-10(Def)** eingeführten M_Intervalle werden nun ein wenig konkretisiert:

41-11(Satz)

a) $[a \overset{M}{|} b]$ *abgeschlossenes* M_*Intervall von* a *bis* b.

b) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *abgeschlossenes* M_*Intervall von* a *bis* b*"*
und "$\mathfrak{D}$ *abgeschlossenes* M_*Intervall von* a *bis* b*"*
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

c) $]a \overset{M}{|} b[$ *offenes* M_*Intervall von* a *bis* b.

d) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *offenes* M_*Intervall von* a *bis* b*"*
und "$\mathfrak{D}$ *offenes* M_*Intervall von* a *bis* b*"*
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

e) $]a \overset{M}{|} b]$ *linkshalboffenes* M_*Intervall von* a *bis* b.

f) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *linkshalboffenes* M_*Intervall von* a *bis* b*"*
und "$\mathfrak{D}$ *linkshalboffenes* M_*Intervall von* a *bis* b*"*
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

g) $[a \overset{M}{|} b[$ *rechtshalboffenes* M_*Intervall von* a *bis* b.

h) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *rechtshalboffenes* M_*Intervall von* a *bis* b*"*
und "$\mathfrak{D}$ *rechtshalboffenes* M_*Intervall von* a *bis* b*"*
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

<u>Beweis</u> **41-11** `a)`

Aus "$[a \overset{M}{|} b] = [a \overset{M}{|} b]$" folgt via **41-10(Def)**:

$[a \overset{M}{|} b]$ abgeschlossenes M_Intervall von a bis b.

`b)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ abgeschlossenes M_Intervall von a bis b
$\wedge$($\mathfrak{D}$ abgeschlossenes M_Intervall von a bis b).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ abgeschlossenes M_Intervall von a bis $b\ldots$"
folgt via **41-10(Def)**: $\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} b]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ abgeschlossenes M_Intervall von a bis b"
folgt via **41-10(Def)**: $\mathfrak{D} = [a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} b]$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = [a \overset{M}{|} b]$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)`

Aus "$]a \overset{M}{|} b[\; = \;]a \overset{M}{|} b[$" folgt via **41-10(Def)**:

$]a \overset{M}{|} b[$ offenes M_Intervall von a bis b.

`d)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ offenes M_Intervall von a bis b
$\wedge$($\mathfrak{D}$ offenes M_Intervall von a bis b).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ offenes M_Intervall von a bis $b\ldots$"
folgt via **41-10(Def)**: $\mathfrak{C} = \;]a \overset{M}{|} b[$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ offenes M_Intervall von a bis b"
folgt via **41-10(Def)**: $\mathfrak{D} = \;]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \;]a \overset{M}{|} b[$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \;]a \overset{M}{|} b[$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

<u>Beweis</u> **41-11** `e)`

Aus “$]a\overset{M}{|}b] =]a\overset{M}{|}b]$” folgt via **41-10(Def)**:

$]a\overset{M}{|}b]$ linkshalboffenes M_Intervall von a bis b.

`f)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ linkshalboffenes M_Intervall von a bis b
$\wedge$($\mathfrak{D}$ linkshalboffenes M_Intervall von a bis b).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ linkshalboffenes M_Intervall von a bis $b\ldots$”
folgt via **41-10(Def)**: $\mathfrak{C} =]a\overset{M}{|}b]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots\mathfrak{D}$ linkshalboffenes M_Intervall von a bis b”
folgt via **41-10(Def)**: $\mathfrak{D} =]a\overset{M}{|}b]$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathfrak{C} =]a\overset{M}{|}b]$” und
aus `1.2`“$\mathfrak{D} =]a\overset{M}{|}b]$”
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`g)`

Aus “$[a\overset{M}{|}b[= [a\overset{M}{|}b[$” folgt via **41-10(Def)**:

$[a\overset{M}{|}b[$ rechtshalboffenes M_Intervall von a bis b.

`h)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ rechtshalboffenes M_Intervall von a bis b
$\wedge$($\mathfrak{D}$ rechtshalboffenes M_Intervall von a bis b).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ rechtshalboffenes M_Intervall von a bis $b\ldots$”
folgt via **41-10(Def)**: $\mathfrak{C} = [a\overset{M}{|}b[$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots\mathfrak{D}$ rechtshalboffenes M_Intervall von a bis b”
folgt via **41-10(Def)**: $\mathfrak{D} = [a\overset{M}{|}b[$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathfrak{C} = [a\overset{M}{|}b[$” und
aus `1.2`“$\mathfrak{D} = [a\overset{M}{|}b[$”
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

41-12. Die in **41-10(Def)** in die Essays eingeführten M_Intervalle werden unter dem Oberbegriff "M_Intervall von a bis b" zusammengefasst:

41-12(Definition)

"$\mathfrak{C}$ **ist** M**_Intervall von** a **bis** b" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} b] \quad \text{oder} \quad \mathfrak{C} =]a \overset{M}{|} b[$$

$$\text{oder} \quad \mathfrak{C} =]a \overset{M}{|} b] \quad \text{oder} \quad \mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} b[\quad .$$

41-13. Die in **41-12(Def)** in die Essays eingeführten M_Intervalle von a bis b werden nun ein wenig konkretisiert:

41-13(Satz)

a) $[a \overset{M}{|} b]$ *ist* M*_Intervall von* a *bis* b*.*

b) $]a \overset{M}{|} b[$ *ist* M*_Intervall von* a *bis* b*.*

c) $]a \overset{M}{|} b]$ *ist* M*_Intervall von* a *bis* b*.*

d) $[a \overset{M}{|} b[$ *ist* M*_Intervall von* a *bis* b*.*

Beweis **41-13**

1.a): Aus “$[a \overset{M}{|} b] = [a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-12(Def)**: $[a \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall von a bis b.

1.b): Aus “$]a \overset{M}{|} b[=]a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **41-12(Def)**: $]a \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall von a bis b.

1.c): Aus “$]a \overset{M}{|} b] =]a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-12(Def)**: $]a \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall von a bis b.

1.b): Aus “$[a \overset{M}{|} b[= [a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **41-12(Def)**: $[a \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall von a bis b.

□

41-14. Nun werden die M_Intervalle ab a und die M_Intervalle bis b in die Essays eingeführt:

41-14(Definition)

1) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$

$$= \mathtt{41.4}(a, M) \;= \{x : a\_M\_x\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **abgeschlossenes** M**_Intervall ab** a" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

3) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$

$$= \mathtt{41.5}(a, M) \;= \{x : a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_x\}.$$

4) "$\mathfrak{C}$ **offenes** M**_Intervall ab** a" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

5) $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$

$$= \mathtt{41.6}(M, b) \;= \{x : x\_M\_b\}.$$

6) "$\mathfrak{C}$ **abgeschlossenes** M**_Intervall bis** b" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \langle\cdot \overset{M}{|} b].$$

7) $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$

$$= \mathtt{41.7}(M, b) \;= \{x : x\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b\}.$$

8) "$\mathfrak{C}$ **offenes** M**_Intervall bis** b" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$$

41-15. Die M_Intervalle ab a und die M_Intervalle bis b werden nun ein wenig konkretisiert:

41-15(Satz)

a) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *abgeschlossenes M_Intervall ab a.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ abgeschlossenes M_Intervall ab a"*
und "$\mathfrak{D}$ abgeschlossenes M_Intervall ab a"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *offenes M_Intervall ab a.*

d) *Aus "$\mathfrak{C}$ offenes M_Intervall ab a"*
und "$\mathfrak{D}$ offenes M_Intervall ab a"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

e) $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *abgeschlossenes M_Intervall bis b.*

f) *Aus "$\mathfrak{C}$ abgeschlossenes M_Intervall bis b"*
und "$\mathfrak{D}$ abgeschlossenes M_Intervall bis b"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

g) $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ *offenes M_Intervall bis b.*

h) *Aus "$\mathfrak{C}$ offenes M_Intervall bis b"*
und "$\mathfrak{D}$ offenes M_Intervall bis b"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

<u>Beweis **41-15**</u> `a)`

Aus "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" folgt via **41-14(Def)**:

$$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ abgeschlossenes } M\_\text{Intervall ab } a.$$

`b)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ abgeschlossenes M_Intervall ab a $\wedge(\mathfrak{D}$ abgeschlossenes M_Intervall ab $a)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ abgeschlossenes M_Intervall ab $a \ldots$"
folgt via **41-14(Def)**: $\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ abgeschlossenes M_Intervall ab a"
folgt via **41-14(Def)**: $\mathfrak{D} = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)`

Aus "$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" folgt via **41-14(Def)**:

$$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{ offenes } M\_\text{Intervall ab } a.$$

`d)` `VS` gleich $(\mathfrak{C}$ offenes M_Intervall ab $a) \wedge (\mathfrak{D}$ offenes M_Intervall ab $a)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ offenes M_Intervall ab $a \ldots$"
folgt via **41-14(Def)**: $\mathfrak{C} =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ offenes M_Intervall ab a"
folgt via **41-14(Def)**: $\mathfrak{D} =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

<u>Beweis **41-15**</u> `e)`

Aus "$\langle\cdot \overset{M}{|} b] = \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" folgt via **41-14(Def)**:

$\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ abgeschlossenes M_Intervall bis b.

`f)` `VS` gleich $\mathfrak{C}$ abgeschlossenes M_Intervall bis b
$\wedge$($\mathfrak{D}$ abgeschlossenes M_Intervall bis b).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ abgeschlossenes M_Intervall bis $b\ldots$"
folgt via **41-14(Def)**: $\mathfrak{C} = \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ abgeschlossenes M_Intervall bis b"
folgt via **41-14(Def)**: $\mathfrak{D} = \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`g)`

Aus "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[= \langle\cdot \overset{M}{|} b[$" folgt via **41-14(Def)**:

$\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ offenes M_Intervall bis b.

`h)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ offenes M_Intervall bis b) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ offenes M_Intervall bis b).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ offenes M_Intervall bis $b\ldots$"
folgt via **41-14(Def)**: $\mathfrak{C} = \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ offenes M_Intervall bis b"
folgt via **41-14(Def)**: $\mathfrak{D} = \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \langle\cdot \overset{M}{|} b[$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

41-16. Die in **41-14(Def)** in die Essays eingeführten M_Intervalle werden unter den Oberbegriffen "M_Intervall von a" und "M_Intervall bis b" zusammengefasst:

41-16(Definition)

1) "$\mathfrak{C}$ **ist** M**_Intervall ab** a" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \quad \text{oder} \quad \mathfrak{C} =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \quad .$$

2) "$\mathfrak{C}$ **ist** M**_Intervall bis** b" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \langle\cdot \overset{M}{|} b] \quad \text{oder} \quad \mathfrak{C} = \langle\cdot \overset{M}{|} b[\quad .$$

41-17. Nun werden die M_Intervalle ab a und die M_Intervalle bis b ein wenig konkretisiert:

41-17(Satz)

a) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *ist* M*_Intervall ab* a.

b) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *ist* M*_Intervall ab* a.

c) $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *ist* M*_Intervall bis* b.

d) $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ *ist* M*_Intervall bis* b.

Beweis **41-17**

1.a): Aus "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-16(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall ab a.

1.b): Aus "$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-16(Def)**: $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall ab a.

1.c): Aus "$\langle\cdot \overset{M}{|} b] = \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-16(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall bis b.

1.d): Aus "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[= \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-16(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall bis b.

□

41-18. Als - wie sich noch herausstellt: “größtes” - M_Intervall wird das “globale M_Intervall” in die Essays eingeführt:

41-18(Definition)

1) $\langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$

$$= (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M).$$

2) “**$\mathfrak{C}$ globales M_Intervall**” genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle.$$

41-19. Wenig überraschend ist $\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$ das M_Intervall:

41-19(Satz)

a) $\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$ *globales M_Intervall.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ globales M_Intervall" und "$\mathfrak{D}$ globales M_Intervall" folgt "$\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$".*

Beweis **41-19** a)

Aus "$\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle = \langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$"

folgt via **41-18(Def)**: $\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$ globales M_Intervall.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ globales M_Intervall) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ globales M_Intervall).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ globales M_Intervall..."
folgt via **41-18(Def)**: $\mathfrak{C} = \langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

1.2: Aus VS gleich "...$\mathfrak{D}$ globales M_Intervall"
folgt via **41-18(Def)**: $\mathfrak{D} = \langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

2: Aus 1.1"$\mathfrak{C} = \langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$" und
aus 1.2"$\mathfrak{D} = \langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

41-20. Alle bisher eingeführten M_Intervalle werden unter dem Oberbegriff "M_Intervall" zusammengefasst:

41-20(Definition)

"$\mathfrak{C}$ **ist** M**_Intervall**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$$

oder

$\exists \Omega, \Psi : \mathfrak{C}$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ

oder $\exists \Omega : \mathfrak{C}$ ist M_Intervall ab Ω

oder $\exists \Psi : \mathfrak{C}$ ist M_Intervall bis Ψ.

41-21. Nun wird ein Überblick über alle M_Intervalle gegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `i) - a) - b) - c) - d) - e) - f) - g) - h) - j)`:

41-21(Satz)

a) $[a \overset{M}{|} b]$ *ist M_Intervall.*

b) $]a \overset{M}{|} b[$ *ist M_Intervall.*

c) $]a \overset{M}{|} b]$ *ist M_Intervall.*

d) $[a \overset{M}{|} b[$ *ist M_Intervall.*

e) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *ist M_Intervall.*

f) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *ist M_Intervall.*

g) $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *ist M_Intervall.*

h) $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ *ist M_Intervall.*

i) $\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *ist M_Intervall.*

j) *Aus “I ist M_Intervall”*

folgt “$\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]$” *oder* “$\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[$”
oder “$\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]$” *oder* “$\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[$”
oder “$\exists\Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$” *oder* “$\exists\Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
oder “$\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]$” *oder* “$\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[$”
oder “$I = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$”.

<u>Beweis **41-21**</u> `abcdefghi)`

`1.1:` Via **41-13** gilt: $[a \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall von a bis b.

`1.2:` Via **41-13** gilt: $]a \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall von a bis b.

`1.3:` Via **41-13** gilt: $]a \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall von a bis b.

`1.4:` Via **41-13** gilt: $[a \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall von a bis b.

`1.5:` Via **41-17** gilt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall ab a.

`1.6:` Via **41-17** gilt: $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall ab a.

`1.7:` Via **41-17** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall bis b.

`1.8:` Via **41-17** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall bis b.

`1.i):` Via **41-20(Def)** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall.

...

<u>Beweis **41-21**</u> `abcdefghi)`

...

`2.1:` Aus `1.1`

folgt: $\exists\Omega,\Psi: [a\overset{M}{|}b]$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

`2.2:` Aus `1.2`

folgt: $\exists\Omega,\Psi:]a\overset{M}{|}b[$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

`2.3:` Aus `1.3`

folgt: $\exists\Omega,\Psi:]a\overset{M}{|}b]$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

`2.4:` Aus `1.4`

folgt: $\exists\Omega,\Psi: [a\overset{M}{|}b[$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

`2.5:` Aus `1.5`

folgt: $\exists\Omega: [a\overset{M}{|}\cdot\rangle$ ist M_Intervall ab Ω.

`2.6:` Aus `1.6`

folgt: $\exists\Omega:]a\overset{M}{|}\cdot\rangle$ ist M_Intervall ab Ω.

`2.7:` Aus `1.7`

folgt: $\exists\Psi: \langle\cdot\overset{M}{|}b]$ ist M_Intervall bis Ψ.

`2.8:` Aus `1.8`

folgt: $\exists\Psi: \langle\cdot\overset{M}{|}b[$ ist M_Intervall bis Ψ.

...

<u>Beweis **41-21**</u> `abcdefghi)`

...

`3.a):` Aus `2.1` "$\exists\Omega,\Psi : [a \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ"

folgt via **41-20(Def)**: $[a \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall.

`3.b):` Aus `2.2` "$\exists\Omega,\Psi :]a \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ"

folgt via **41-20(Def)**: $]a \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall.

`3.c):` Aus `2.3` "$\exists\Omega,\Psi :]a \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ"

folgt via **41-20(Def)**: $]a \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall.

`3.d):` Aus `2.4` "$\exists\Omega,\Psi : [a \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ"

folgt via **41-20(Def)**: $[a \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall.

`3.e):` Aus `2.5` "$\exists\Omega : [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall ab Ω"

folgt via **41-20(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall.

`3.f):` Aus `2.6` "$\exists\Omega :]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall ab Ω"

folgt via **41-20(Def)**: $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist M_Intervall.

`3.g):` Aus `2.7` "$\exists\Psi : \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall bis Ψ"

folgt via **41-20(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ist M_Intervall.

`3.h):` Aus `2.8` "$\exists\Psi : \langle\cdot \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall bis Ψ"

folgt via **41-20(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ ist M_Intervall.

<u>Beweis **41-21**</u> `j)` `VS` gleich I ist M_Intervall.

`1:` Aus `VS` gleich "I ist M_Intervall"

folgt via **41-20(Def)**:
$$I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$$
$$\vee \quad (\exists \Omega, \Psi : I \text{ ist } M\text{\_Intervall von } \Omega \text{ bis } \Psi)$$
$$\vee \quad (\exists \Omega : I \text{ ist } M\text{\_Intervall ab } \Omega)$$
$$\vee \quad (\exists \Psi : I \text{ ist } M\text{\_Intervall bis } \Psi).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

Aus `1.1.Fall`"$I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$"

folgt:
$$(\exists \Omega, \Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists \Omega, \Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(\exists \Omega, \Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists \Omega, \Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(\exists \Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle) \vee (\exists \Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle)$$
$$\vee(\exists \Psi : I = \langle \cdot \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists \Psi : I = \langle \cdot \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle).$$

...

<u>Beweis **41-21**</u> `j) VS` gleich I ist M_Intervall.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\exists\Omega,\Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

`2:` Aus `1.2.Fall`"... I ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt via **41-12(Def)**:
$$(I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[) \vee (I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[).$$

`3:` Aus `1.2.Fall`"$\exists\Omega,\Psi$..." und
aus `2`
folgt:
$$\exists\Omega,\Psi : (I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[) \vee (I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[).$$

`4:` Aus `3`
folgt:
$$(\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[) \vee (\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[).$$

`5:` Aus `4`
folgt:
$$(\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(\exists\Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (\exists\Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$$
$$\vee(\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(I = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).$$

...

<u>Beweis **41-21**</u> `j)` `VS` gleich I ist M_Intervall.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\exists\Omega : I$ ist M_Intervall ab Ω.

`2:` Aus `1.3.Fall` "... I ist M_Intervall ab Ω"
folgt via **41-16(Def)**: $(I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`3:` Aus `1.3.Fall` "$\exists\Omega$..." und
aus `2`
folgt: $\exists\Omega : (I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\exists\Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (\exists\Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`5:` Aus `4`
folgt:
$$(\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(\exists\Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (\exists\Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)$$
$$\vee(\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[)$$
$$\vee(I = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).$$

...

Beweis **41-21** `j) VS` gleich I ist M_Intervall.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $\exists\Psi : I$ ist M_Intervall bis Ψ.

`2:` Aus `1.4.Fall`"...I ist M_Intervall bis Ψ"
folgt via **41-16(Def)**: $(I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]) \vee (I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[)$.

`3:` Aus `1.4.Fall`"$\exists\Psi$..." und
aus `2`
folgt: $\exists\Psi : (I = [\Psi \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (I =]\Psi \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\exists\Psi : I = [\Psi \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (\exists\Psi : I =]\Psi \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`5:` Aus `4`
folgt:
$$\begin{aligned}&(\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[)\\ &\vee(\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[)\\ &\vee(\exists\Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (\exists\Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)\\ &\vee(\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[)\\ &\vee(I = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).\end{aligned}$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$\begin{aligned}&(\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[)\\ &\vee(\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[)\\ &\vee(\exists\Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (\exists\Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle)\\ &\vee(\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]) \vee (\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[)\\ &\vee(I = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).\end{aligned}$$
$\square$

41-22. Nun werden die M_Intervalle bezüglich "topologischer" Eigenschaften in Gruppen zusammengefasst:

41-22(Definition)

1) "$\mathfrak{C}$ **abgeschlossenes** M**_Intervall**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$$

oder

$$\exists \Omega, \Psi : \mathfrak{C} = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]$$

$$\text{oder} \quad \exists \Omega : \mathfrak{C} = [\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle$$

$$\text{oder} \quad \exists \Psi : \mathfrak{C} = \langle \cdot \overset{M}{|} \Psi].$$

2) "$\mathfrak{C}$ **offenes** M**_Intervall**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$$

oder

$$\exists \Omega, \Psi : \mathfrak{C} =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[$$

$$\text{oder} \quad \exists \Omega : \mathfrak{C} =]\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle$$

$$\text{oder} \quad \exists \Psi : \mathfrak{C} = \langle \cdot \overset{M}{|} \Psi[.$$

3) "$\mathfrak{C}$ **linkshalboffenes** M**_Intervall**" genau dann, wenn gilt:

$$\exists \Omega, \Psi : \mathfrak{C} =]\Omega \overset{M}{|} \Psi].$$

4) "$\mathfrak{C}$ **rechtshalboffenes** M**_Intervall**" genau dann, wenn gilt:

$$\exists \Omega, \Psi : \mathfrak{C} = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[.$$

41-23. In dem folgenden, wenig überraschenden Resultat werden die Konzepte von **41-22(Def)** umgesetzt:

41-23(Satz)

a) $\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$ *abgeschlossenes M_Intervall.*

b) $[a\overset{M}{|}b]$ *abgeschlossenes M_Intervall.*

c) $[a\overset{M}{|}\cdot\rangle$ *abgeschlossenes M_Intervall.*

d) $\langle\cdot\overset{M}{|}b]$ *abgeschlossenes M_Intervall.*

e) $\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$ *offenes M_Intervall.*

f) $]a\overset{M}{|}b[$ *offenes M_Intervall.*

g) $]a\overset{M}{|}\cdot\rangle$ *offenes M_Intervall.*

h) $\langle\cdot\overset{M}{|}b[$ *offenes M_Intervall.*

i) $]a\overset{M}{|}b]$ *linkshalboffenes M_Intervall.*

j) $[a\overset{M}{|}b[$ *rechtshalboffenes M_Intervall.*

<u>Beweis **41-23**</u>

1.a): Aus "$\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-22(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$ abgeschlossenes M_Intervall.

1.b): Aus "$\exists\Omega,\Psi : [a \overset{M}{|} b] = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]$"
folgt via **41-22(Def)**: $[a \overset{M}{|} b]$ abgeschlossenes M_Intervall.

1.c): Aus "$\exists\Omega : [a \overset{M}{|} \cdot\rangle = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-22(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ abgeschlossenes M_Intervall.

1.d): Aus "$\exists\Psi : \langle\cdot \overset{M}{|} b] = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]$"
folgt via **41-22(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ abgeschlossenes M_Intervall.

1.e): Aus "$\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-22(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$ offenes M_Intervall.

1.f): Aus "$\exists\Omega,\Psi :]a \overset{M}{|} b[=]\Omega \overset{M}{|} \Psi[$"
folgt via **41-22(Def)**: $]a \overset{M}{|} b[$ offenes M_Intervall.

1.g): Aus "$\exists\Omega :]a \overset{M}{|} \cdot\rangle =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-22(Def)**: $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ offenes M_Intervall.

1.h): Aus "$\exists\Psi : \langle\cdot \overset{M}{|} b[= \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[$"
folgt via **41-22(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ offenes M_Intervall.

1.i): Aus "$\exists\Omega,\Psi :]a \overset{M}{|} b] =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]$"
folgt via **41-22(Def)**: $]a \overset{M}{|} b]$ linkshalboffenes M_Intervall.

1.j): Aus "$\exists\Omega,\Psi : [a \overset{M}{|} b[= [\Omega \overset{M}{|} \Psi[$"
folgt via **41-22(Def)**: $[a \overset{M}{|} b[$ rechtshalboffenes M_Intervall.

$\square$

41-24. Abgeschlossene, offene, links- und rechtshalboffene M_Intervalle sind - wenig überraschend - M_Intervalle:

41-24(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$)

I abgeschlossenes M_Intervall.

oder

I offenes M_Intervall.

oder

I linkshalboffenes M_Intervall.

oder

I rechtshalboffenes M_Intervall.

Dann folgt "I ist M_Intervall".

Beweis **41-24**

1: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: I abgeschlossenes M_Intervall $\vee$(I offenes M_Intervall) $\vee$(I linkshalboffenes M_Intervall) $\vee$(I rechtshalboffenes M_Intervall).

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **41-24**

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` I abgeschlossenes M_Intervall

2: Aus `1.1.Fall` "I abgeschlossenes M_Intervall"

folgt via **41-22(Def)**:

$$I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle \\ \vee \\ \exists \Omega, \Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi] \\ \vee \\ \exists \Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle \\ \vee \\ \exists \Psi : I = \langle \cdot \overset{M}{|} \Psi].$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle.$

Aus `2.1.Fall` "$I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

`2.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi].$

3: Aus `2.2.Fall` "$\ldots I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi]$"
folgt via **41-12(Def)**: I ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

4: Aus `2.2.Fall` "$\exists \Omega, \Psi \ldots$" und
aus 3 "I ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

5: Aus 4 "$\exists \Omega, \Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

...

...

Beweis **41-24**

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` I abgeschlossenes M_Intervall

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $\exists\Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-16(Def)**: I ist M_Intervall ab Ω.

`4:` Aus `2.3.Fall`"$\exists\Omega\ldots$" und
aus `3`"I ist M_Intervall ab Ω"
folgt: $\exists\Omega : I$ ist M_Intervall ab Ω.

`5:` Aus `4`"$\exists\Omega : I$ ist M_Intervall ab Ω"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

`2.4.Fall` $\exists\Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]$.

`3:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi]$"
folgt via **41-16(Def)**: I ist M_Intervall bis Ψ.

`4:` Aus `2.4.Fall`"$\exists\Psi\ldots$" und
aus `3`"I ist M_Intervall bis Ψ"
folgt: $\exists\Psi : I$ ist M_Intervall bis Ψ.

`5:` Aus `4`"$\exists\Psi : I$ ist M_Intervall bis Ψ"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: I ist M_Intervall.

...

Beweis **41-24**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ I offenes M_Intervall

2: Aus 1.2.Fall"I offenes M_Intervall"
folgt via **41-22(Def)**:

$$I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle \vee \exists \Omega, \Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[\vee \exists \Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot \rangle \vee \exists \Psi : I = \langle \cdot \overset{M}{|} \Psi[.$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle.$

Aus 2.1.Fall"$I = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\exists \Omega, \Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[.$

3: Aus 2.2.Fall"$\ldots I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[$"
folgt via **41-12(Def)**: I ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

4: Aus 2.2.Fall"$\exists \Omega, \Psi \ldots$" und
aus 3"I ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

5: Aus 4"$\exists \Omega, \Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

...

...

<u>Beweis **41-24**</u>

...

`Fallunterscheidung`

`1.2.Fall` I offenes M_Intervall

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $\exists \Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

3: Aus `2.3.Fall` "$\ldots I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-16(Def)**: I ist M_Intervall ab Ω.

4: Aus `2.3.Fall` "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 3 "I ist M_Intervall ab Ω"
folgt: $\exists \Omega : I$ ist M_Intervall ab Ω.

5: Aus 4 "$\exists \Omega : I$ ist M_Intervall ab Ω"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

`2.4.Fall` $\exists \Psi : I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[.$

3: Aus `2.4.Fall` "$\ldots I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[$"
folgt via **41-16(Def)**: I ist M_Intervall bis Ψ.

4: Aus `2.4.Fall` "$\exists \Psi \ldots$" und
aus 3 "I ist M_Intervall bis Ψ"
folgt: $\exists \Psi : I$ ist M_Intervall bis Ψ.

5: Aus 4 "$\exists \Psi : I$ ist M_Intervall bis Ψ"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: I ist M_Intervall.

...

Beweis **41-24**

...

`Fallunterscheidung`

`1.3.Fall` I linkshalboffenes M_Intervall

2: Aus `1.3.Fall` "I linkshalboffenes M_Intervall"
folgt via **41-22(Def)**: $\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]$.

3: Aus 2 "$\ldots I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]$"
folgt via **41-12(Def)**: I ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

4: Aus 2 "$\exists\Omega,\Psi \ldots$" und
aus 3 "I ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt: $\exists\Omega,\Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

5: Aus 4 "$\exists\Omega,\Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

`1.4.Fall` I rechtshalboffenes M_Intervall

2: Aus `1.4.Fall` "I rechtshalboffenes M_Intervall"
folgt via **41-22(Def)**: $\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[$.

3: Aus 2 "$\ldots I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[$"
folgt via **41-12(Def)**: I ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

4: Aus 2 "$\exists\Omega,\Psi \ldots$" und
aus 3 "I ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt: $\exists\Omega,\Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ.

5: Aus 4 "$\exists\Omega,\Psi : I$ ist M_Intervall von Ω bis Ψ"
folgt via **41-20(Def)**: I ist M_Intervall.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: I ist M_Intervall.

□

41-25. Nun werden Kriterien für die Zugehörigkeit zu den verschiedenen M_Intervallen angegeben:

41-25(Satz)

a) "$p \in [a \overset{M}{|} b]$" *genau dann, wenn* "$a\_M\_p$" *und* "$p\_M\_b$".

b) "$p \in]a \overset{M}{|} b[$" *genau dann, wenn* "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$" *und* "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$".

c) "$p \in]a \overset{M}{|} b]$" *genau dann, wenn* "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$" *und* "$p\_M\_b$".

d) "$p \in [a \overset{M}{|} b[$" *genau dann, wenn* "$a\_M\_p$" *und* "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$".

e) "$p \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *genau dann, wenn* "$a\_M\_p$".

f) "$p \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *genau dann, wenn* "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$".

g) "$p \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" *genau dann, wenn* "$p\_M\_b$".

h) "$p \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$" *genau dann, wenn* "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$".

i) "$p \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *genau dann, wenn* "$p \in \mathsf{dom}\, M$" *oder* "$p \in \mathsf{ran}\, M$".

<u>Beweis **41-25**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $p \in [a \overset{M}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in [a \overset{M}{|} b]$" und
aus "$[a \overset{M}{|} b] = \{\omega : (a\_M\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (a\_M\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (a\_M\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$"
folgt: $(a\_M\_p) \wedge (p\_M\_b)$.

`a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(a\_M\_p) \wedge (p\_M\_b)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a\_M\_p\ldots$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$(a\_M\_p) \wedge (p\_M\_b)$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (a\_M\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (a\_M\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$" und
aus "$\{\omega : (a\_M\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\} = [a \overset{M}{|} b]$"
folgt: $p \in [a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis</u> **41-25** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \,]a \overset{M}{|} b[.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \,]a \overset{M}{|} b[$" und
aus "$]a \overset{M}{|} b[= \{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)\}.$

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)\}$"
folgt: $(a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b).$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b).$

`1:` Aus `VS` gleich "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p \ldots$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$(a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)\}.$

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)\}$" und
aus "$\{\omega : (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)\} = \,]a \overset{M}{|} b[$"
folgt: $p \in \,]a \overset{M}{|} b[.$

<u>Beweis **41-25**</u> `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \,]a \overset{M}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \,]a \overset{M}{|} b]$" und
aus "$]a \overset{M}{|} b] = \{\omega : (a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$"
folgt: $(a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p) \wedge (p\_M\_b)$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p) \wedge (p\_M\_b)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p \ldots$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$(a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p) \wedge (p\_M\_b)$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\}$" und
aus "$\{\omega : (a\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_\omega) \wedge (\omega\_M\_b)\} = \,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt: $p \in \,]a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis</u> **41-25** `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $$p \in [a \overset{M}{|} b[.$$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in [a \overset{M}{|} b[$" und
aus "$[a \overset{M}{|} b] = \{\omega : (a \_ M \_ \omega) \wedge (\omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)\}$"
folgt: $$p \in \{\omega : (a \_ M \_ \omega) \wedge (\omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)\}.$$

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (a \_ M \_ \omega) \wedge (\omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)\}$"
folgt: $$(a \_ M \_ p) \wedge (p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b).$$

`d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $$(a \_ M \_ p) \wedge (p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b).$$

`1:` Aus `VS` gleich "$a \_ M \_ p \ldots$"
folgt via **30-2**: $$p \text{ Menge}.$$

`2:` Aus `VS` gleich "$(a \_ M \_ p) \wedge (p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $$p \in \{\omega : (a \_ M \_ \omega) \wedge (\omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)\}.$$

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : (a \_ M \_ \omega) \wedge (\omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)\}$" und
aus "$\{\omega : (a \_ M \_ \omega) \wedge (\omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)\} = [a \overset{M}{|} b[$"
folgt: $$p \in [a \overset{M}{|} b[.$$

<u>Beweis</u> **41-25** `e)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $p \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{\omega : a\_M\_\omega\}$"
folgt: $p \in \{\omega : a\_M\_\omega\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : a\_M\_\omega\}$"
folgt: a_M_p.

`e)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich a_M_p.

`1:` Aus `VS` gleich "a_M_p"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "a_M_p" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : a\_M\_\omega\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : a\_M\_\omega\}$" und
aus "$\{\omega : a\_M\_\omega\} = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $p \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis</u> **41-25** `f)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\qquad p \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus "$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{\omega : a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega\}$"
folgt: $\qquad p \in \{\omega : a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega\}.$

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega\}$"
folgt: $\qquad a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p.$

`f)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\qquad a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p.$

`1:` Aus `VS` gleich "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$"
folgt via **30-2**: $\qquad p$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $\qquad p \in \{\omega : a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega\}.$

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega\}$" und
aus "$\{\omega : a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\omega\} = \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $\qquad p \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

<u>Beweis</u> **41-25** `g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$" und
aus "$\langle\cdot \overset{M}{|}\, b] = \{\omega : \omega\_M\_b\}$"
folgt: $p \in \{\omega : \omega\_M\_b\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : \omega\_M\_b\}$"
folgt: p_M_b.

`g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich p_M_b.

`1:` Aus `VS` gleich "p_M_b"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "p_M_b" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : \omega\_M\_b\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : \omega\_M\_b\}$" und
aus "$\{\omega : \omega\_M\_b\} = \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$"
folgt: $p \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$.

Beweis **41-25** `h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$" und
aus "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[= \{\omega : \omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b\}$"
folgt: $p \in \{\omega : \omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : \omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b\}$"
folgt: $p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$.

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : \omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : \omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b\}$" und
aus "$\{\omega : \omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b\} = \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt: $p \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

<u>Beweis **41-25**</u> `i)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$" und
aus "$\langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle = (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt: $p \in (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`2:` Aus `1`"$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: $(p \in \mathsf{dom}\, M) \vee (p \in \mathsf{ran}\, M)$.

`i)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p \in \mathsf{dom}\, M) \vee (p \in \mathsf{ran}\, M)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p \in \mathsf{dom}\, M) \vee (p \in \mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: $p \in (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`2:` Aus `1`"$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus "$(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$"
folgt: $p \in \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

$\square$

41-26. Jedes M_Intervall ist eine TeilKlasse von $\mathsf{dom}\,M$ oder von $\mathsf{ran}\,M$ oder von $(\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)$:

<u>41-26(Satz)</u>

a) $[a \overset{M}{|} b] \subseteq (\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

b) $]a \overset{M}{|} b[\subseteq (\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

c) $]a \overset{M}{|} b] \subseteq (\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

d) $[a \overset{M}{|} b[\subseteq (\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

e) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

f) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

g) $\langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

h) $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \mathsf{dom}\,M$.

i) $\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq (\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)$.

j) *Aus "I ist M_Intervall" folgt "$I \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$".*

<u>Beweis **41-26**</u> `a)`

`Thema1`		$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]$.
`2:`	Aus `Thema1` "$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]$" folgt via **41-25**:	$(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_M\_b)$.
`3.1:`	Aus 2 "$a\_M\_\gamma \ldots$" folgt via **30-2**:	$\gamma \in \mathsf{ran}\, M$.
`3.2:`	Aus 2 "$\ldots \gamma\_M\_b$" folgt via **30-2**:	$\gamma \in \mathsf{dom}\, M$.
`4:`	Aus `3.2` "$\gamma \in \mathsf{dom}\, M$" und aus `3.1` "$\gamma \in \mathsf{ran}\, M$" folgt via **2-2**:	$\gamma \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]) \Rightarrow (\gamma \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{M}{\mid} b] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Beweis **41-26** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in]a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus `Thema1` "$\gamma \in]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\gamma) \wedge (\gamma_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}b)$.

3.1: Aus 2 "$a_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\gamma \ldots$"
folgt via **41-6**: $\gamma \in \mathsf{ran}\, M$.

3.2: Aus 2 "$\ldots \gamma_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}b$"
folgt via **41-6**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 3.2 "$\gamma \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus 3.1 "$\gamma \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-2**: $\gamma \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

<u>Beweis **41-26** `c)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad \gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $\qquad (a \_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_ \gamma) \wedge (\gamma \_ M \_ b)$.

`3.1:` Aus 2 "$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma \ldots$"
folgt via **41-6**: $\qquad \gamma \in \mathsf{ran}\, M$.

`3.2:` Aus 2 "$\ldots \gamma \_ M \_ b$"
folgt via **30-2**: $\qquad \gamma \in \mathsf{dom}\, M$.

`4:` Aus `3.2` "$\gamma \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `3.1` "$\gamma \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **2-2**: $\qquad \gamma \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad]a \overset{M}{|} b] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Beweis **41-26** `d)`

`Thema1` $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b).$

`3.1:` Aus 2“$a\_M\_\gamma \ldots$”
folgt via **30-2**: $\gamma \in \mathsf{ran}\, M.$

`3.2:` Aus 2“$\ldots \gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$”
folgt via **41-6**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, M.$

`4:` Aus `3.2`“$\gamma \in \mathsf{dom}\, M$” und
aus `3.1`“$\gamma \in \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **2-2**: $\gamma \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M).$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M).$

`e)`

`Thema1` $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $a\_M\_\gamma.$

`3:` Aus 2“a_M_γ”
folgt via **30-2**: $\gamma \in \mathsf{ran}\, M.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in \mathsf{ran}\, M).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\, M.$

Beweis **41-26** `f)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle.$
`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$” folgt via **41-25**:	$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma.$
`3:` Aus 2“$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma$” folgt via **41-6**:	$\gamma \in \mathsf{ran}\, M.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in \mathsf{ran}\, M).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\, M.$

`g)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b].$
`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]$” folgt via **41-25**:	$\gamma \_ M \_ b.$
`3:` Aus 2“$\gamma \_ M \_ b$” folgt via **30-2**:	$\gamma \in \mathsf{dom}\, M.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]) \Rightarrow (\gamma \in \mathsf{dom}\, M).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{\mid} b] \subseteq \mathsf{dom}\, M.$

<u>Beweis</u> **<u>41-26</u>** `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[.$

`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$”
folgt via **41-25**: $\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b.$

`3:` Aus 2“$\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$”
folgt via **41-6**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, M.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[) \Rightarrow (\gamma \in \mathsf{dom}\, M).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|}\, b[\subseteq \mathsf{dom}\, M.$

`i)`

`1:` $\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle \overset{\mathbf{41-18(Def)}}{=} (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) \overset{\mathbf{0-6}}{\subseteq} (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M).$

`2:` Aus `1`
folgt: $\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M).$

Beweis **41-26** `j)` `VS` gleich I ist M_Intervall.

`1:` Aus "I ist M_Intervall"

folgt via **41-21**: "$\exists\Omega,\Psi: I=[\Omega\overset{M}{|}\Psi]$" oder "$\exists\Omega,\Psi: I=]\Omega\overset{M}{|}\Psi[$"

oder "$\exists\Omega,\Psi: I=]\Omega\overset{M}{|}\Psi]$" oder "$\exists\Omega,\Psi: I=[\Omega\overset{M}{|}\Psi[$"

oder "$\exists\Omega: I=[\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle$" oder "$\exists\Omega: I=]\Omega\overset{M}{|}\cdot\rangle$"

oder "$\exists\Psi: I=\langle\cdot\overset{M}{|}\Psi]$" oder "$\exists\Psi: I=\langle\cdot\overset{M}{|}\Psi[$"

oder "$I=\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$".

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega,\Psi: I=[\Omega\overset{M}{|}\Psi]$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:

$[\Omega\overset{M}{|}\Psi]\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots I=[\Omega\overset{M}{|}\Psi]$" und

aus `2`"$[\Omega\overset{M}{|}\Psi]\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$"

folgt: $I\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`4:` Via **2-7** gilt: $(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)$.

`5:` Aus `3`"$I\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$" und

aus `4`"$(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)$"

folgt via **0-6**: $I\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)$.

`6:` Via **41-18(Def)** gilt: $(\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)=\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

`7:` Aus `5`"$I\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)$" und

aus `6`"$(\mathsf{dom}\,M)\cup(\mathsf{ran}\,M)=\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$"

folgt: $I\subseteq\langle\cdot\overset{M}{|}\cdot\rangle$.

...

Beweis **41-26** `j)` `VS` gleich I ist M_Intervall.

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall $\exists\Omega,\Psi: I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[$.

2: Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$$]\Omega \overset{M}{|} \Psi[\subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M).$$

3: Aus 1.2.Fall "$\ldots I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi[$" und
aus 2 "$]\Omega \overset{M}{|} \Psi[\subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt: $I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

4: Via **2-7** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

5: Aus 3 "$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus 4 "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-6**: $I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

6: Via **41-18(Def)** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

7: Aus 5 "$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus 6 "$(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $I \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

...

Beweis **41-26** `j)` `VS` gleich I ist M_Intervall.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\exists\Omega, \Psi : I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:

$$]\Omega \overset{M}{|} \Psi] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M).$$

`3:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots I =]\Omega \overset{M}{|} \Psi]$" und
aus `2`"$]\Omega \overset{M}{|} \Psi] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt: $I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`4:` Via **2-7** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`5:` Aus `3`"$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `4`"$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-6**: $I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`6:` Via **41-18(Def)** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`7:` Aus `5`"$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `6`"$(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $I \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

...

<u>Beweis **41-26**</u> `j)` `VS` gleich $\qquad I$ ist M_Intervall.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $\qquad \exists \Omega, \Psi : I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:

$$[\Omega \overset{M}{|} \Psi[\subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M).$$

`3:` Aus `1.4.Fall` "$\ldots I = [\Omega \overset{M}{|} \Psi[$" und
aus `2` "$[\Omega \overset{M}{|} \Psi[\subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt: $\qquad I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`4:` Via **2-7** gilt: $\qquad (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`5:` Aus `3` "$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `4` "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-6**: $\qquad I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`6:` Via **41-18(Def)** gilt: $\qquad (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

`7:` Aus `5` "$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `6` "$(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$"
folgt: $\qquad I \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

...

Beweis **41-26** `j)` `VS` gleich I ist M_Intervall.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.5.Fall` $\exists \Omega : I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:

$[\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Aus `1.5.Fall` "$\ldots I = [\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `2` "$[\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt: $I \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`4:` Via **2-7** gilt: $\mathsf{ran}\, M \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`5:` Aus `3` "$I \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus `4` "$\mathsf{ran}\, M \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-6**: $I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`6:` Via **41-18(Def)** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`7:` Aus `5` "$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `6` "$(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $I \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

...

Beweis **41-26** `j)` `VS` gleich I ist M_Intervall.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.6.Fall}}$ $\exists\Omega : I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt:

$$]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\, M.$$

`3:` Aus `1.6.Fall`"... $I =]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `2`"$]\Omega \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt: $I \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`4:` Via **2-7** gilt: $\mathsf{ran}\, M \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`5:` Aus `3`"$I \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus `4`"$\mathsf{ran}\, M \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-6**: $I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

`6:` Via **41-18(Def)** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`7:` Aus `5`"$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `6`"$(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $I \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

...

Beweis **41-26** `j) VS` gleich I ist M_Intervall.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.7.Fall` $\exists \Psi : I = \langle \cdot \overset{M}{|} \Psi]$.

2: Via des bereits bewiesenen `g)` gilt:

$\langle \cdot \overset{M}{|} \Psi] \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

3: Aus `1.7.Fall` "$\ldots I = \langle \cdot \overset{M}{|} \Psi]$" und
aus 2 "$\langle \cdot \overset{M}{|} \Psi] \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt: $I \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

4: Via **2-7** gilt: $\mathsf{dom}\, M \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

5: Aus 3 "$I \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus 4 "$\mathsf{dom}\, M \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-6**: $I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$.

6: Via **41-18(Def)** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

7: Aus 5 "$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus 6 "$(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$"
folgt: $I \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} \cdot \rangle$.

...

Beweis **41-26** `j)` `VS` gleich I ist M_Intervall.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.8.Fall` $\exists\Psi: I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[.$

`2:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt:
$\langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[\subseteq \mathsf{dom}\, M.$

`3:` Aus `1.8.Fall`"$\ldots I = \langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[$" und
aus `2`"$\langle\cdot \overset{M}{|} \Psi[\subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt: $I \subseteq \mathsf{dom}\, M.$

`4:` Via **2-7** gilt: $\mathsf{dom}\, M \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M).$

`5:` Aus `3`"$I \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus `4`"$\mathsf{dom}\, M \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **0-6**: $I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M).$

`6:` Via **41-18(Def)** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`7:` Aus `5`"$I \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus `6`"$(\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $I \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`1.9.Fall` $I = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Via **0-6** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`3:` Aus `1.9.Fall`"$I = \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `2`"$\langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $I \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $I \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

□

41-27. Im folgenden Satz mit umfangreichem Beweis sind Inklusionen zwischen M_Intervallen gesammelt:

41-27(Satz)

a) $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *und* $[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *und* $[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

b) $]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$ *und* $]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} b]$ *und* $]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[$

und $]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *und* $]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$

und $]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *und* $]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$

und $]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

c) $]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$

und $]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *und* $]a \overset{M}{|} b] \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$

und $]a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$

und $]a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) $[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$

und $[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$

und $[a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *und* $[a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$

und $[a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

e) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

f) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ *und* $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

g) $\langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

h) $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ *und* $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis</u> **41-27** `a)`

`Thema1.1` $\qquad \gamma \in [a \overset{M}{\mid} b].$

2: Aus `Thema1.1`“$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]$”
folgt via **41-25**: $\qquad (a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_M\_b).$

3: Aus 2“$a\_M\_\gamma \ldots$”
folgt via **41-25**: $\qquad \gamma \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema1.1`: $\qquad \forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad \boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}[a \overset{M}{\mid} b] \subseteq [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle\text{”}}$

`Thema1.2` $\qquad \gamma \in [a \overset{M}{\mid} b].$

2: Aus `Thema1.2`“$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]$”
folgt via **41-25**: $\qquad (a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_M\_b).$

3: Aus 2“$\ldots \gamma\_M\_b$”
folgt via **41-25**: $\qquad \gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b].$

Ergo `Thema1.2`: $\qquad \forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad \boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}[a \overset{M}{\mid} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} b]\text{”}}$

...

<u>Beweis **41-27**</u> `a)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$	$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]$.
`2:` Aus `Thema1.3`“$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]$” folgt via **41-25**:	a_M_γ.
`3:` Aus 2“a_M_γ” folgt via **30-2**:	$\gamma \in \mathsf{ran}\, M$.
`4:` Aus 3 folgt:	$(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M)$.
`5:` Aus 4“$(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M)$” folgt via **41-25**:	$\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} \cdot \rangle$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]) \Rightarrow (\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} \cdot \rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A3} \mid \text{“} [a \overset{M}{\mid} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\mid} \cdot \rangle \text{”}}$

`1.4:` Aus `A1`,
aus `A2` und
aus `A3`
folgt: $([a \overset{M}{\mid} b] \subseteq [a \overset{M}{\mid} \cdot \rangle) \wedge ([a \overset{M}{\mid} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\mid} b]) \wedge ([a \overset{M}{\mid} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\mid} \cdot \rangle)$.

Beweis **41-27** `b)`

`Thema1.1` $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[.$

`1:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **41-25**: $(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma) \wedge (\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b).$

`2.1:` Aus `1`“$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma \ldots$”
folgt via **41-3**: $a\_M\_\gamma.$

`2.2:` Aus `1`“$\ldots \gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$”
folgt via **41-3**: $\gamma\_M\_b.$

`3:` Aus `2.1`“a_M_γ” und
aus `2.2`“γ_M_b”
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b].$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{|} b]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$”

...

Beweis **41-27** `b)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} b[\,.$
`1:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} b[$” folgt via **41-25**:	$(a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma) \wedge (\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b).$
`2:` Aus `1`“$\ldots \gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$” folgt via **41-3**:	$\gamma\_M\_b.$
`3:` Aus `1`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma \ldots$” und aus `2`“$\gamma\_M\_b$” folgt via **41-25**:	$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} b]\,.$

Ergo `Thema1.2`: $$\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} b[) \Rightarrow (\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} b]).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $$\boxed{\texttt{A2}\Big|\ \text{“}]a \overset{M}{\mid} b[\, \subseteq \,]a \overset{M}{\mid} b]\text{”}}$$

...

<u>Beweis **41-27**</u> `b)`

...

`Thema1.3` $\gamma \in \mathopen{]}a \overset{M}{|} b\mathclose{[}.$

`1:` Aus `Thema1.3`“$\gamma \in \mathopen{]}a \overset{M}{|} b\mathclose{[}$”

folgt via **41-25**: $(a{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}\gamma) \wedge (\gamma{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}b).$

`2:` Aus `1`“$a{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}\gamma \ldots$”

folgt via **41-3**: $a{\_}M{\_}\gamma.$

`3:` Aus `2`“$a{\_}M{\_}\gamma$” und

aus `1`“$\ldots \gamma{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}b$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \mathopen{[}a \overset{M}{|} b\mathclose{[}.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \gamma : (\gamma \in \mathopen{]}a \overset{M}{|} b\mathclose{[}) \Rightarrow (\gamma \in \mathopen{[}a \overset{M}{|} b\mathclose{[}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` “$\mathopen{]}a \overset{M}{|} b\mathclose{[} \subseteq \mathopen{[}a \overset{M}{|} b\mathclose{[}$”

`1.4:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `A1` gleich “$\mathopen{]}a \overset{M}{|} b\mathclose{[} \subseteq [a \overset{M}{|} b]$” und

aus `1.4`“$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **0-6**: `A4` “$\mathopen{]}a \overset{M}{|} b\mathclose{[} \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

...

Beweis **41-27** `b)`

...

`Thema1.5` $\gamma \in]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `Thema1.5`“$\gamma \in]a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-25**: $a_- \overset{\mathbf{ir}}{M} \gamma$.

`3:` Aus 2“$a_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-\gamma$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1.5`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A5` | “$]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

`1.6:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `A1` gleich “$]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$” und

aus `1.6`“$[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”

folgt via **0-6**: `A6` | “$]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”

...

<u>Beweis **41-27**</u> `b)`

...

`Thema1.7` $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `Thema1.5`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-25**: $\gamma\,\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,b.$

`3:` Aus `2`“$\gamma\,\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,\_b$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

Ergo `Thema1.5`: $\forall\gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A7` “$]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$”

`Thema1.8` $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `Thema1.3`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-25**: $a\,\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,\_\gamma.$

`3:` Aus `2`“a_M_γ”

folgt via **41-6**: $\gamma \in \mathsf{ran}\,M.$

`4:` Aus `3`

folgt: $(\gamma \in \mathsf{dom}\,M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\,M).$

`5:` Aus `4`“$(\gamma \in \mathsf{dom}\,M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\,M)$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema1.8`: $\forall\gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A8` “$[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

...

<u>Beweis **41-27**</u> `b)`

...

`1.9:` Aus `A1`,
aus `A2`,
aus `A3`,
aus `A4`,
aus `A5`,
aus `A6`,
aus `A7` und
aus `A8`
folgt:

$$(]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]) \wedge (]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} b]) \wedge (]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[)$$
$$\wedge (]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$$
$$\wedge (]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \wedge (]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[)$$
$$\wedge (]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).$$

`c)`

`Thema1.1`	$\gamma \in]a \overset{M}{|} b].$

`1:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma) \wedge (\gamma \_ M \_ b).$

`2:` Aus `1`"$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma \ldots$"
folgt via **41-3**: $a \_ M \_ \gamma.$

`3:` Aus `2`"$a \_ M \_ \gamma$" und
aus `1`"$\ldots \gamma \_ M \_ b$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b].$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{|} b]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"

...

Beweis **41-27** `c)`

...

`1.2`: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2`: Aus `A1` gleich "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$" und aus `1.2`"$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **0-6**: `A2` | "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

`Thema1.3` $\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$.

`2`: Aus `Thema1.3`"$\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$"

folgt via **41-25**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma) \wedge (\gamma \_ M \_ b)$.

`3`: Aus 2"$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma \ldots$"

folgt via **41-25**: $\gamma \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` | "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

`1.4`: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`2`: Aus `A1` gleich "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$" und aus `1.4`"$[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **0-6**: `A4` | "$]a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"

...

Beweis **41-27** `c)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.5}}$	$\gamma \in \,]a \overset{M}{\vert} b]$.
`2:` Aus `Thema1.3`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{\vert} b]$”	
folgt via **41-25**:	$a \mathbin{\_} \overset{\mathbf{ir}}{M} \mathbin{\_} \gamma$.
`3:` Aus 2“$a \mathbin{\_} M \mathbin{\_} \gamma$”	
folgt via **41-6**:	$\gamma \in \mathsf{ran}\, M$.
`4:` Aus 3	
folgt:	$(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M)$.
`5:` Aus 4“$(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M)$”	
folgt via **41-25**:	$\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{\vert} \cdot \rangle$.

Ergo `Thema1.5`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{\vert} b]) \Rightarrow (\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{\vert} \cdot \rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A5} \,\Big\vert\, \text{“}]a \overset{M}{\vert} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\vert} \cdot \rangle\text{”}}$

`1.6:` Aus `A1`,
aus `A2`,
aus `A3`,
aus `A4` und
aus `A5`
folgt:

$$(]a \overset{M}{\vert} b] \subseteq [a \overset{M}{\vert} b])$$
$$\wedge (]a \overset{M}{\vert} b] \subseteq [a \overset{M}{\vert} \cdot \rangle) \wedge (]a \overset{M}{\vert} b] \subseteq \,]a \overset{M}{\vert} \cdot \rangle)$$
$$\wedge (]a \overset{M}{\vert} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\vert} b])$$
$$\wedge (]a \overset{M}{\vert} b] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\vert} \cdot \rangle).$$

Beweis **41-27** `d)`

`Thema1.1` $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[.$

`1:` Aus `Thema1.1` "$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **41-25**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b).$

`2:` Aus `1` "$\ldots \gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b \ldots$"

folgt via **41-3**: $\gamma\_M\_b.$

`3:` Aus `1` "$a\_M\_\gamma \ldots$" und

aus `2` "γ_M_b"

folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b].$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{|} b]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1}\,|\ \text{"} [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b] \text{"}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `A1` gleich "$[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$" und

aus `1.2` "$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **0-6**: $\boxed{\texttt{A2}\,|\ \text{"} [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{"}}$

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b].$

`2:` Aus `A1` gleich "$[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$" und

aus `1.3` "$[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **0-6**: $\boxed{\texttt{A3}\,|\ \text{"} [a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b] \text{"}}$

...

<u>Beweis **41-27**</u> `d)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.4}}$ $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[.$

2: Aus `Thema1.4` "$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_b).$

3: Aus 2 "$\ldots \gamma\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_b$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

Ergo `Thema1.4`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A4} \Big| \text{“} [a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[\text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.5}}$ $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[.$

2: Aus `Thema1.5` "$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $a\_M\_\gamma.$

3: Aus 2 "a_M_γ"
folgt via **30-2**: $\gamma \in \mathsf{ran}\, M.$

4: Aus 3
folgt: $(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M).$

5: Aus 4 "$(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema1.5`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A5} \Big| \text{“} [a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle \text{”}}$

...

<u>Beweis **41-27**</u> `d)`

...

`1.6:` Aus `A1`,
aus `A2`,
aus `A3`,
aus `A4` und
aus `A5`
folgt:

$$\begin{aligned}&([a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b])\\ &\wedge([a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)\\ &\wedge([a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \wedge ([a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[)\\ &\wedge([a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).\end{aligned}$$

`e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `Thema1`“$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $a\_M\_\gamma.$

`3:` Aus 2“a_M_γ”
folgt via **30-2**: $\gamma \in \mathsf{ran}\, M.$

`4:` Aus 3
folgt: $(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M).$

`5:` Aus 4“$(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M)$”
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma : (\gamma \in [a \overset{b}{|} \cdot\rangle M) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

<u>Beweis **41-27**</u> `f)`

`Thema1.1`	$\gamma \in \rbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$.
`2:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in \rbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$” folgt via **41-25**:	$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$.
`3:` Aus `2`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$” folgt via **41-3**:	a_M_γ.
`4:` Aus `3`“a_M_γ” folgt via **41-25**:	$\gamma \in \lbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\gamma : (\gamma \in \rbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in \lbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` “$\rbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \lbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\lbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `A1` gleich “$\rbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \lbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$” und
aus `1.2`“$\lbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$”
folgt via **0-6**: `A2` “$\rbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$”

`1.3:` Aus `A1` und
aus `A2`
folgt: $(\rbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \lbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \wedge (\rbrack a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} \cdot\rangle)$.

Beweis **41-27** g)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

2: Aus Thema1 "$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: γ_M_b.

3: Aus 2 "γ_M_b"
folgt via **30-2**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 3
folgt: $(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M)$.

5: Aus 4 "$(\gamma \in \mathsf{dom}\, M) \vee (\gamma \in \mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ergo Thema1: $\forall \gamma : (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Beweis **41-27** `h)`

`Thema1.1` $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b.$

`3:` Aus `2`"$\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$"
folgt via **41-3**: $\gamma \_ M \_ b.$

`4:` Aus `3`"$\gamma \_ M \_ b$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b].$

Ergo `Thema1.1`: $\forall\gamma : (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `A1` gleich "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus `1.2`"$\langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-6**: `A2` "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus `A2` gleich "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $(\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \wedge (\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle).$

$\square$

41-28. a ist weder in $]a \overset{M}{|} b[$ noch in $]a \overset{M}{|} b]$ noch in $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$. Analog gilt, dass b weder in $]a \overset{M}{|} b[$ noch in $[a \overset{M}{|} b[$ nooch in $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b) - f) - d) - e)`:

41-28(Satz)

a) $a \notin\ ]a \overset{M}{|} b[$.

b) $a \notin\ ]a \overset{M}{|} b]$.

c) $a \notin\ ]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) $b \notin\ ]a \overset{M}{|} b[$.

e) $b \notin [a \overset{M}{|} b[$.

f) $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

<u>Beweis **41-28**</u> `c)`

`1:` Es gilt: $(a \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee (a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $a \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$a \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_a$.

`2.2:` Via **41-5** gilt: $\neg(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_a)$.

`3:` Es gilt `2.2`“$\neg(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_a)$” .
Es gilt `2.1`“$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_a$” .
Ex falso quodlibet folgt: $a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.2.Fall` $a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`a)`

`1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b[\,\subseteq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2`“$a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `1`“$]a \overset{M}{|} b[\,\subseteq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **0-4**: $a \notin \,]a \overset{M}{|} b[$.

`b)`

`1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2`“$a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `1`“$]a \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **0-4**: $a \notin \,]a \overset{M}{|} b]$.

Beweis **41-28** `f)`

`1:` Es gilt: $(b \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[) \vee (b \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $b \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$b \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$”
folgt via **41-25**: $b\,\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,\_\,b$.

`2.2:` Via **41-5** gilt: $\neg(b\,\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,\_\,b)$.

`3:` Es gilt `2.2`“$\neg(b\,\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,\_\,b)$” .
Es gilt `2.1`“$b\,\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,\_\,b$” .
Ex falso quodlibet folgt: $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

`1.2.Fall` $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

`d)`

`1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|}\, b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

`3:` Aus 2“$b \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$” und
aus `1`“$]a \overset{M}{|}\, b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$”
folgt via **0-4**: $b \notin\,]a \overset{M}{|}\, b[$.

Beweis **41-28** `e)`

`1:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`3:` Aus `2`“$b \notin \langle\cdot \overset{M}{|} b[$” und
aus `1`“$[a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$”
folgt via **0-4**: $b \notin [a \overset{M}{|} b[$.

$\square$

41-29. Im Hinblick auf **41-28** liegt die Frage nahe, ob - etwa - stets "$a \in [a \overset{M}{|} b]$" gilt. Hier ist **41-25** zu beachten, wonach "$a \in [a \overset{M}{|} b]$" genau dann, wenn a_M_a. Da dies nicht immer der Fall sein muss - etwa wenn M *nicht* reflexiv ist - ist die folgende Bemerkung nicht überraschend, wonach nur aus "$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$" keineswegs auf "$a \in [a \overset{M}{|} b]$" geschlossen werden kann. Beispiele hierzu folgen:

41-29.Bemerkung

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (a \in [a \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (a \in [a \overset{M}{|} b[)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (b \in [a \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (b \in]a \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

41-30. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass aus "$0 \neq [a \overset{M}{\mid} b]$" nicht notwendiger Weise "$a \in [a \overset{M}{\mid} b]$" folgt:

<u>41-30.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ a Menge.

$\rightarrow)$ b Menge.

$\rightarrow)$ $a \neq b$.

$\rightarrow)$ $M = \{(a, b), (b, b)\}$.

Dann folgt:

a) $[a \overset{M}{\mid} b] = \{b\}$.

b) $0 \neq [a \overset{M}{\mid} b]$.

c) $a \notin [a \overset{M}{\mid} b]$.

41-31. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass aus "$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$" nicht notwendiger Weise "$a \in [a \overset{M}{|} b[$" folgt:

<u>41-31.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(a, c), (c, b)\}$.

Dann folgt:

a) $[a \overset{M}{|} b[= \{c\}$.

b) $0 \neq [a \overset{M}{|} b[$.

c) $a \notin [a \overset{M}{|} b[$.

Ad "a, b" : In diesem Beispiel kann auch "$a = b$" gelten. Es wurden aber verschiedene Bezeichnungen gewählt, um die kontext-bezogene Notation "$[a \overset{M}{|} b[$" beizubehalten.

41-32. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass aus “$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” nicht notwendiger Weise “$a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” folgt:

41-32.BEISPIEL

Es gelte:

→) a Menge.

→) c Menge.

→) $a \neq c$.

→) $M = \{(a,c)\}$.

Dann folgt:

a) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

b) $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

c) $a \notin [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

41-33. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass aus "$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$" nicht notwendiger Weise "$b \in [a \overset{M}{|} b]$" folgt:

<u>41-33.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) a Menge.

→) b Menge.

→) $a \neq b$.

→) $M = \{(a,a),(a,b)\}$.

Dann folgt:

a) $[a \overset{M}{|} b] = \{a\}$.

b) $0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

c) $b \notin [a \overset{M}{|} b]$.

41-34. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass aus "$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$" nicht notwendiger Weise "$b \in \,]a \overset{M}{|} b]$" folgt:

<u>41-34.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(a, c), (c, b)\}$.

Dann folgt:

a) $]a \overset{M}{|} b] = \{c\}$.

b) $0 \neq [a \overset{M}{|} b[$.

c) $b \notin [a \overset{M}{|} b[$.

Ad "a, b": In diesem Beispiel kann auch "$a = b$" gelten. Es wurden dennoch verschiedene Bezeichnungen gewählt, um die kontext-bezogene Notation "$]a \overset{M}{|} b]$" beizubehalten.

41-35. Im folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass aus "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" nicht notwendiger Weise "$b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" folgt:

<u>41-35.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) b Menge.

→) c Menge.

→) $b \neq c$.

→) $M = \{(c, b)\}$.

Dann folgt:

a) $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = \{c\}$.

b) $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

c) $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

41-36. Es folgen einige erwartete Darstellungen von M_Intervallen als binärere Durchschnitt anderer M_Intervalle:

<u>**41-36(Satz)**</u>

a) $[a \overset{M}{|} b] = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

b) $]a \overset{M}{|} b[=]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

c) $]a \overset{M}{|} b] =]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

d) $[a \overset{M}{|} b[= [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

<u>Beweis **41-36**</u> a)

`Thema1.1` $\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus Thema1.1 "$\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_M\_b)$.

3.1: Aus 2 "$a\_M\_\gamma \ldots$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

3.2: Aus 2 "$\ldots \gamma\_M\_b$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

4: Aus 3.1 "$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus 3.2 "$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **2-2**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

Ergo Thema1.1: $\forall\gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

...

<u>Beweis</u> **41-36** `a)`

...

`Thema1.2` $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **2-2**: $(\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b])$.

`3.1:` Aus 2“$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots$”
folgt via **41-25**: a_M_γ.

`3.2:` Aus `Thema2`“$\ldots \gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-25**: γ_M_b.

`4:` Aus `3.1`“a_M_γ” und
aus `3.2`“γ_M_b”
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` “$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$” und
aus `A2` gleich “$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $[a \overset{M}{|} b] = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **41-36** `b)`</u>

`Thema1.1` $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-25**: $(a\,\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\,\gamma) \wedge (\gamma\,\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\,b).$

`3.1:` Aus `2`“$a\,\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\,\gamma \dots$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`3.2:` Aus `2`“$\dots \gamma\,\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\,b$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

`4:` Aus `3.1`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und

aus `3.2`“$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$”

folgt via **2-2**: $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$]a \overset{M}{|} b[\,\subseteq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[$”

...

Beweis **41-36** `b)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[.$
`2:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$”	
folgt via **2-2**:	$(\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \wedge (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[).$
`3.1:` Aus `2`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \ldots$”	
folgt via **41-25**:	$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma.$
`3.2:` Aus `Thema2`“$\ldots \gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$”	
folgt via **41-25**:	$\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b.$
`4:` Aus `3.1`“$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma$” und	
aus `3.2`“$\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$”	
folgt via **41-25**:	$\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} b[.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[) \Rightarrow (\gamma \in \,]a \overset{M}{\mid} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[\subseteq \,]a \overset{M}{\mid} b[\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$]a \overset{M}{\mid} b[\subseteq \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$” und
aus `A2` gleich “$]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[\subseteq \,]a \overset{M}{\mid} b[$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $]a \overset{M}{\mid} b[= \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[.$

<u>Beweis **41-36**</u> `c)`

`Thema1.1` $\qquad \gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1.1` “$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **41-25**: $\qquad (a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma) \wedge (\gamma\_M\_b)$.

`3.1:` Aus `2` “$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma \ldots$”

folgt via **41-25**: $\qquad \gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3.2:` Aus `2` “$\ldots \gamma\_M\_b$”

folgt via **41-25**: $\qquad \gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`4:` Aus `3.1` “$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und

aus `3.2` “$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”

folgt via **2-2**: $\qquad \gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

Ergo `Thema1.1`: $\qquad \forall\gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad \boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}]a \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]\text{”}}$

...

Beweis **41-36** `c)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b].$

`2:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”

folgt via **2-2**: $(\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]).$

`3.1:` Aus 2“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots$”

folgt via **41-25**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma.$

`3.2:` Aus `Thema2`“$\ldots \gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”

folgt via **41-25**: $\gamma\_M\_b.$

`4:` Aus `3.1`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$” und

aus `3.2`“γ_M_b”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b].$

Ergo `Thema1.2`: $\forall\gamma : (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\Big|\; \text{“}]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$]a \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b]$” und

aus `A2` gleich “$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $]a \overset{M}{|} b] = \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b].$

Beweis **41-36** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\qquad\gamma \in [a \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-25**: $(a\_M\_\gamma) \wedge (\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b).$

`3.1:` Aus `2`“$a\_M\_\gamma \ldots$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

`4:` Aus `3.1`“$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und

aus `3.2`“$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$”

folgt via **2-2**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall\gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \Big| \text{“} [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} b[\text{”}}$

...

Beweis **41-36** `d)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[.$
`2:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$” folgt via **2-2**:	$(\gamma \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \wedge (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[).$
`3.1:` Aus 2“$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \ldots$” folgt via **41-25**:	$a\_M\_\gamma.$
`3.2:` Aus `Thema2`“$\ldots \gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$” folgt via **41-25**:	$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b.$
`4:` Aus `3.1`“a_M_γ” und aus `3.2`“$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$” folgt via **41-25**:	$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b[.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall\gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \Big| \text{“} [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[\subseteq [a \overset{M}{\mid} b[\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$[a \overset{M}{\mid} b[\subseteq [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$” und
aus `A2` gleich “$[a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[\subseteq [a \overset{M}{\mid} b[$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $[a \overset{M}{\mid} b[= [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[.$

□

41-37. Falls ein M_Intervall von a bis b nichtleer ist, dann muss $a \in \mathsf{dom}\, M$ und $b \in \mathsf{ran}\, M$ gelten:

41-37(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$)

$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq]a \overset{M}{|} b[$.

oder

$0 \neq]a \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$.

Dann folgt:

a) $a \in \mathsf{dom}\, M$.

b) $b \in \mathsf{ran}\, M$.

Beweis **41-37**

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:

$$0 \neq [a \overset{M}{|} b] \vee 0 \neq]a \overset{M}{|} b[\vee 0 \neq]a \overset{M}{|} b] \vee 0 \neq [a \overset{M}{|} b[.$$

Beweis **41-37** ...

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $\qquad 0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus `1.1.1.Fall`“$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **0-20**: $\qquad \exists \Omega : \Omega \in [a \overset{M}{|} b]$.

3: Aus `A2` gleich “$\ldots \Omega \in [a \overset{M}{|} b]$” ”

folgt via **41-25**: $\qquad (a\_M\_\Omega) \wedge (\Omega\_M\_b)$.

4.1: Aus 3“$a\_M\_\Omega \ldots$”

folgt via **30-2**: $\qquad a \in \mathsf{dom}\, M$.

4.2: Aus 3“$\ldots \Omega\_M\_b$”

folgt via **30-2**: $\qquad b \in \mathsf{ran}\, M$.

5: Aus 4.1 und

aus 4.2

folgt: $\qquad (a \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (b \in \mathsf{ran}\, M)$.

`1.1.2.Fall` $\qquad 0 \neq]a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus `1.1.2.Fall`“$0 \neq]a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **0-20**: $\qquad \exists \Omega : \Omega \in]a \overset{M}{|} b[$.

3: Aus `A2` gleich “$\ldots \Omega \in]a \overset{M}{|} b[$” ”

folgt via **41-25**: $\qquad (a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\Omega) \wedge (\Omega\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b)$.

4.1: Aus 3“$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\Omega \ldots$”

folgt via **41-6**: $\qquad a \in \mathsf{dom}\, M$.

4.2: Aus 3“$\ldots \Omega\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$”

folgt via **41-6**: $\qquad b \in \mathsf{ran}\, M$.

5: Aus 4.1 und

aus 4.2

folgt: $\qquad (a \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (b \in \mathsf{ran}\, M)$.

...

Beweis **41-37** ...

Fallunterscheidung

...

1.1.3.Fall $0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1.1.3.Fall"$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \,]a \overset{M}{|} b]$.

3: Aus A2 gleich "$\ldots \Omega \in \,]a \overset{M}{|} b]$" "
folgt via **41-25**: $(a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\Omega) \wedge (\Omega\_M\_b)$.

4.1: Aus 3"$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\Omega \ldots$"
folgt via **41-6**: $a \in \mathsf{dom}\, M$.

4.2: Aus 3"$\ldots \Omega\_M\_b$"
folgt via **30-2**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $(a \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (b \in \mathsf{ran}\, M)$.

1.1.4.Fall $0 \neq [a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus 1.1.4.Fall"$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in [a \overset{M}{|} b[$.

3: Aus A2 gleich "$\ldots \Omega \in [a \overset{M}{|} b[$" "
folgt via **41-25**: $(a\_M\_\Omega) \wedge (\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)$.

4.1: Aus 3"$a\_M\_\Omega \ldots$"
folgt via **30-2**: $a \in \mathsf{dom}\, M$.

4.2: Aus 3"$\ldots \Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$"
folgt via **41-6**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $(a \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (b \in \mathsf{ran}\, M)$.

...

<u>Beweis **41-37**</u> ...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(a \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (b \in \mathsf{ran}\, M)\text{”}}$

`1.a):` Aus `A1`
folgt: $a \in \mathsf{dom}\, M.$

`1.b):` Aus `A1`
folgt: $b \in \mathsf{ran}\, M.$

□

41-38. Das M_Intervall $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist genau dann nicht leer, wenn $a \in \mathsf{dom}\, M$. Ist das M_Intervall $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ nicht leer, dann gilt $a \in \mathsf{dom}\, M$. Analoges gilt für $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$ und $\langle \cdot \overset{M}{|} b[$:

41-38(Satz)

a) *"*$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$*" genau dann, wenn "*$a \in \mathsf{dom}\, M$*".*

b) *Aus "*$0 \neq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$*" folgt "*$a \in \mathsf{dom}\, M$*".*

c) *"*$0 \neq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$*" genau dann, wenn "*$b \in \mathsf{ran}\, M$*".*

d) *Aus "*$0 \neq \langle \cdot \overset{M}{|} b[$*" folgt "*$b \in \mathsf{ran}\, M$*".*

Beweis **41-38** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: a_M_Ω.

3: Aus 2"a_M_Ω"
folgt via **30-2**: $a \in \mathsf{dom}\, M$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $a \in \mathsf{dom}\, M$.

1: Aus VS gleich "$a \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (a, \Omega) \in M$.

2: Aus 1"$\ldots (a, \Omega) \in M$"
folgt: a_M_Ω.

3: Aus 2"a_M_Ω"
folgt via **41-25**: $\Omega \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

4: Aus 3"$\Omega \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Beweis **41-38** `b)` `VS` gleich $$0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **0-20**: $$\exists \Omega : \Omega \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

`2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **41-25**: $$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \Omega.$$

`3:` Aus `2`“$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \Omega$”

folgt via **41-6**: $$a \in \mathsf{dom}\, M.$$

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b].$$

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”

folgt via **0-20**: $$\exists \Omega : \Omega \in \langle\cdot \overset{M}{|} b].$$

`2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”

folgt via **41-25**: $$\Omega \_ M \_ b.$$

`3:` Aus `2`“$\Omega \_ M \_ b$”

folgt via **30-2**: $$b \in \mathsf{ran}\, M.$$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $$b \in \mathsf{ran}\, M.$$

`1:` Aus `VS` gleich “$b \in \mathsf{ran}\, M$”

folgt via **7-7**: $$\exists \Omega : (\Omega, b) \in M.$$

`2:` Aus `1`“$\ldots (\Omega, b) \in M$”

folgt: $$\Omega \_ M \_ b.$$

`3:` Aus `2`“$\Omega \_ M \_ b$”

folgt via **41-25**: $$\Omega \in \langle\cdot \overset{M}{|} b].$$

`4:` Aus `3`“$\Omega \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”

folgt via **0-20**: $$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b].$$

<u>Beweis **41-38**</u> `d)` `VS` gleich $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $\Omega_{\text{-}} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}b$.

`3:` Aus `2`"$\Omega_{\text{-}} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}b$"
folgt via **41-6**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

$\square$

41-39. Falls $a \notin \mathsf{dom}\, M$, dann sind alle M_Intervalle von a bis b und alle M_Intervalle ab a leer. Die Beweis-Reihenfolge ist `e) - a) - b) - c) - d) - f)`:

41-39(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $a \notin \mathsf{dom}\, M$.

Dann folgt:

`a)` $[a \overset{M}{|} b] = 0$.

`b)` $]a \overset{M}{|} b[= 0$.

`c)` $]a \overset{M}{|} b] = 0$.

`d)` $[a \overset{M}{|} b[= 0$.

`e)` $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

`f)` $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

<u>Beweis **41-39**</u>

`1.1:` Es gilt: $(0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \vee ([a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`“$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$” folgt via **41-38**: $a \in \mathsf{dom}\, M$.

`3:` Es gilt 2“$a \in \mathsf{dom}\, M$” .
Es gilt $\rightarrow$) “$a \notin \mathsf{dom}\, M$” .
Ex falso quodlibet folgt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

`1.1.2.Fall` $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “ $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$ ”

`1.2:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.3:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.4:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.5:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.e):` Aus `A1` gleich “ $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$ ”
folgt: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

`1.6:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

...

Beweis **41-39**

...

2.1: Aus 1.2 “ $[a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus A1 gleich “ $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$ ”
folgt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq 0.$

2.2: Aus 1.3 “ $]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus A1 gleich “ $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$ ”
folgt: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq 0.$

2.3: Aus 1.4 “ $]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus A1 gleich “ $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$ ”
folgt: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq 0.$

2.4: Aus 1.5 “ $[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus A1 gleich “ $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$ ”
folgt: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq 0.$

2.5: Aus 1.6 “ $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus A1 gleich “ $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$ ”
folgt: $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq 0.$

...

<u>Beweis **41-39**</u>

...

`3.a):` Aus `2.1`“ $[a \overset{M}{|} b] \subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$[a \overset{M}{|} b] = 0.$$

`3.b):` Aus `2.2`“ $]a \overset{M}{|} b[\subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$]a \overset{M}{|} b[= 0.$$

`3.c):` Aus `2.3`“ $]a \overset{M}{|} b] \subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$]a \overset{M}{|} b] = 0.$$

`3.d):` Aus `2.4`“ $[a \overset{M}{|} b[\subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$[a \overset{M}{|} b[= 0.$$

`3.f):` Aus `2.5`“ $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0.$$

$\square$

41-40. Falls $b \notin \mathsf{ran}\, M$, dann sind alle M_Intervalle von a bis b und alle M_Intervalle bis b leer. Die Beweis-Reihenfolge ist `e) - a) - b) - c) - d) - f)`:

41-40(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $b \notin \mathsf{ran}\, M$.

Dann folgt:

a) $[a \overset{M}{|} b] = 0$.

b) $]a \overset{M}{|} b[= 0$.

c) $]a \overset{M}{|} b] = 0$.

d) $[a \overset{M}{|} b[= 0$.

e) $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$.

f) $\langle\cdot \overset{M}{|} b[= 0$.

<u>Beweis **41-40**</u>

`1.1:` Es gilt: $(0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \vee (\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`“$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-38**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

`3:` Es gilt 2“$b \in \mathsf{ran}\, M$” .
Es gilt →) “$b \notin \mathsf{ran}\, M$” .

Ex falso quodlibet folgt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$.

`1.1.2.Fall` $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$”

`1.2:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.3:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.4:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.5:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.e):` Aus `A1` gleich “$\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$”
folgt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$.

`1.6:` Via **41-27** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

...

Beweis **41-40**

...

`2.1:` Aus `1.2` “ $[a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ” und

aus `A1` gleich “ $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$ ”

folgt: $[a \overset{M}{|} b] \subseteq 0.$

`2.2:` Aus `1.3` “ $]a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ” und

aus `A1` gleich “ $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$ ”

folgt: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq 0.$

`2.3:` Aus `1.4` “ $]a \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ” und

aus `A1` gleich “ $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$ ”

folgt: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq 0.$

`2.4:` Aus `1.5` “ $[a \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ” und

aus `A1` gleich “ $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$ ”

folgt: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq 0.$

`2.5:` Aus `1.6` “ $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ” und

aus `A1` gleich “ $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$ ”

folgt: $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq 0.$

...

<u>Beweis **41-40**</u>

...

`3.a):` Aus `2.1` “ $[a \overset{M}{|} b] \subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$[a \overset{M}{|} b] = 0.$$

`3.b):` Aus `2.2` “ $]a \overset{M}{|} b[\subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$]a \overset{M}{|} b[= 0.$$

`3.c):` Aus `2.3` “ $]a \overset{M}{|} b] \subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$]a \overset{M}{|} b] = 0.$$

`3.d):` Aus `2.4` “ $[a \overset{M}{|} b[\subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$[a \overset{M}{|} b[= 0.$$

`3.f):` Aus `2.5` “ $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq 0$ ”

folgt via **0-18**: $$\langle\cdot \overset{M}{|} b[= 0.$$

□

41-41. a ist eine untere M_Schranke jeder nicht leeren TeilKlasse der M_Intervalle von a bis b oder der M_Intervalle ab a:

41-41(Satz)

Es gelte:

$$\rightarrow) \quad \begin{array}{l} 0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]. \\ \hline \text{oder} \\ 0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[. \\ \hline \text{oder} \\ 0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]. \\ \hline \text{oder} \\ 0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[. \\ \hline \text{oder} \\ 0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle. \\ \hline \text{oder} \\ 0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle. \end{array}$$

Dann folgt "a untere M_Schranke von E".

Beweis **41-41**

1: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$

$\vee\ (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[)$

$\vee\ (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b])$

$\vee\ (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[)$

$\vee\ (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$

$\vee\ (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`Thema2.1` $\gamma \in E$.

3: Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$.

4: Aus 3"$\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: a_M_γ.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall\gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"

2.2: Aus `1.1.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall\gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"
folgt via **35-3**: a untere M_Schranke von E.

...

Beweis **41-41**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

`Thema2.1` $\gamma \in E$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in]a \overset{M}{|} b[$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$.

`5:` Aus `4`"$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$"
folgt via **41-3**: a_M_γ.

Ergo `Thema2.1`: `A1` "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"
folgt via **35-3**: a untere M_Schranke von E.

...

Beweis **41-41**...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\gamma \in E$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.3.Fall`"$\ldots E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma$.

`5:` Aus `4`"$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\gamma$"
folgt via **41-3**: a_M_γ.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"
folgt via **35-3**: a untere M_Schranke von E.

...

Beweis **41-41**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[.$

`Thema2.1` $\gamma \in E.$

`3:` Aus `Thema2.1`“$\gamma \in E$” und
aus `1.4.Fall`“$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **0-4**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[.$

`4:` Aus `3`“$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **41-25**: $a\_M\_\gamma.$

Ergo `Thema2.1`: `A1` | “$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$”

`2.2:` Aus `1.4.Fall`“$0 \neq E \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$”
folgt via **35-3**: a untere M_Schranke von E.

...

Beweis **41-41**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.5.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`Thema2.1` $\gamma \in E$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.5.Fall`"$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: a_M_γ.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"

`2.2:` Aus `1.5.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"
folgt via **35-3**: a untere M_Schranke von E.

...

Beweis **41-41**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.6.Fall` $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`Thema2.1` $\gamma \in E.$

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.6.Fall`"$\ldots E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`4:` Aus `3`"$\gamma \in]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma.$

`5:` Aus `4`"$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$"
folgt via **41-3**: $a\_M\_\gamma.$

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"

`2.2:` Aus `1.6.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"
folgt via **35-3**: a untere M_Schranke von E.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: a untere M_Schranke von E.

□

41-42. b ist eine obere M_Schranke jeder nicht leeren TeilKlasse der M_Intervalle von b bis b oder der M_Intervalle ab b:

41-42(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$)

$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

oder

$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

oder

$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

Dann folgt "b obere M_Schranke von E".

<u>Beweis **41-42**</u>

`1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$

$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[)$

$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b])$

$\vee \quad (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[)$

$\vee \quad (0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b])$

$\vee \quad (0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`Thema2.1` $\gamma \in E$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: γ_M_b.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-3**: b obere M_Schranke von E.

...

Beweis **41-42**. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`1.2.Fall` $0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b[.$

`Thema2.1` $\gamma \in E.$

`3:` Aus `Thema2.1`“$\gamma \in E$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **0-4**: $\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[.$

`4:` Aus `3`“$\gamma \in \,]a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **41-25**: $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b.$

`5:` Aus `4`“$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$”
folgt via **41-3**: $\gamma\_M\_b.$

Ergo `Thema2.1`: `A1` | “$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$”

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq E \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$”
folgt via **35-3**: b obere M_Schranke von E.

. . .

Beweis **41-42**. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`1.3.Fall` $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$.

`Thema2.1` $\gamma \in E$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.3.Fall`"$\ldots E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: γ_M_b.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-3**: b obere M_Schranke von E.

. . .

Beweis **41-42**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

`Thema2.1` $\gamma \in E$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.4.Fall`"$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$.

`5:` Aus `4`"$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$"
folgt via **41-3**: γ_M_b.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"

`2.2:` Aus `1.4.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-3**: b obere M_Schranke von E.

...

Beweis **41-42**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.5.Fall` $0 \neq E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`Thema2.1` $\gamma \in E$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.5.Fall`"$\ldots E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: γ_M_b.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"

`2.2:` Aus `1.5.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-3**: b obere M_Schranke von E.

...

Beweis **41-42**...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.6.Fall}}$ $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\gamma \in E$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\gamma \in E$" und
aus `1.6.Fall`"$\ldots E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$.

`5:` Aus `4`"$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_a$"
folgt via **41-3**: γ_M_b.

Ergo `Thema2.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall\gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)\text{”}}$

`2.2:` Aus `1.6.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall\gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-3**: b obere M_Schranke von E.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: b obere M_Schranke von E.

□

41-43. a ist eine untere M_Schranke der nicht leeren M_Intervalle von a bis b und der nicht leeren M_Intervalle ab a. b ist eine obere M_Schranke der nicht leeren M_Intervalle von a bis b und der nicht leeren M_Intervalle bis b:

<u>41-43(Satz)</u>

a) *Aus* "$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$" *folgt* "*a untere* M_*Schranke von* $[a \overset{M}{|} b]$" *und* "*b obere* M_*Schranke von* $[a \overset{M}{|} b]$".

b) *Aus* "$0 \neq]a \overset{M}{|} b[$" *folgt* "*a untere* M_*Schranke von* $]a \overset{M}{|} b[$" *und* "*b obere* M_*Schranke von* $]a \overset{M}{|} b[$".

c) *Aus* "$0 \neq]a \overset{M}{|} b]$" *folgt* "*a untere* M_*Schranke von* $]a \overset{M}{|} b]$" *und* "*b obere* M_*Schranke von* $]a \overset{M}{|} b]$".

d) *Aus* "$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$" *folgt* "*a untere* M_*Schranke von* $[a \overset{M}{|} b[$" *und* "*b obere* M_*Schranke von* $[a \overset{M}{|} b[$".

e) *Aus* "$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *folgt* "*a untere* M_*Schranke von* $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

f) *Aus* "$0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *folgt* "*a untere* M_*Schranke von* $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

g) *Aus* "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" *folgt* "*b obere* M_*Schranke von* $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

h) *Aus* "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$" *folgt* "*b obere* M_*Schranke von* $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$".

<u>Beweis **41-43**</u> `a)` `VS` gleich $0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$"

folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`2.1:` Aus `1`"$0 \neq [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"

folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

`2.2:` Aus `1`"$0 \neq [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"

folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

(a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$) $\wedge$ (b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$).

`b)` `VS` gleich $0 \neq]a \overset{M}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq]a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **0-20**: $0 \neq]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

`2.1:` Aus `1`"$0 \neq]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

`2.2:` Aus `1`"$0 \neq]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

(a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$) $\wedge$ (b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$).

<u>Beweis **41-43**</u> `c)` `VS` gleich $0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **0-20**: $0 \neq \,]a \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]$.

`2.1:` Aus `1`“$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

`2.2:` Aus `1`“$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b] \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

(a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$) $\wedge$ (b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$).

`d)` `VS` gleich $0 \neq [a \overset{M}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

`2.1:` Aus `1`“$0 \neq [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

`2.2:` Aus `1`“$0 \neq [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

(a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$) $\wedge$ (b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$).

Beweis **41-43** `e)` `VS` gleich $0\neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich " $0\neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ "
folgt via **0-20**: $0\neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1` " $0\neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ "
folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`f)` `VS` gleich $0\neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich " $0\neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ "
folgt via **0-20**: $0\neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1` " $0\neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ "
folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`g)` `VS` gleich $0\neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich " $0\neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ "
folgt via **0-20**: $0\neq \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1` " $0\neq \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ "
folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`h)` `VS` gleich $0\neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich " $0\neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$ "
folgt via **0-20**: $0\neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `1` " $0\neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$ "
folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

$\square$

41-44. Es folgt ein Kriterium, dass a eine untere M_Schranke der M_Intervalle von a bis b und der M_Intervalle ab a ist:

41-44(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` $a \in \mathsf{dom}\, M$.

`ii)` a *untere* M_*Schranke von* $[a \overset{M}{|} b]$.

`iii)` a *untere* M_*Schranke von* $]a \overset{M}{|} b[$.

`iv)` a *untere* M_*Schranke von* $]a \overset{M}{|} b]$.

`v)` a *untere* M_*Schranke von* $[a \overset{M}{|} b[$.

`vi)` a *untere* M_*Schranke von* $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`vii)` a *untere* M_*Schranke von* $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Beweis **41-44** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $a \in \mathsf{dom}\, M$.

`Thema1.1` $\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$

Aus `Thema1.1` "$\gamma \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: a_M_γ.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"

`1.2`: Aus `VS` gleich "$a \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"
folgt via **35-1(Def)**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **41-44**</u> `ii) ⇒ iii)` `VS` gleich a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

`1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b[\ \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1`“$]a \overset{M}{|} b[\ \subseteq [a \overset{M}{|} b]$” und

aus `VS` gleich “a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **35-6**: a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

`iii) ⇒ iv)` `VS` gleich a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **35-1(Def)**: $a \in \mathsf{dom}\, M$.

`Thema1.2` $\gamma \in\ ]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in\ ]a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **41-25**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$.

`3:` Aus `2`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$”
folgt via **41-3**: a_M_γ.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | “$\forall \gamma : (\gamma \in\ ]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$”

`1.3:` Aus `1.1`“$a \in \mathsf{dom}\, M$” und

aus `A1` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in\ ]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$”

folgt via **35-1(Def)**: a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

Beweis **41-44** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ VS gleich a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

`1.1:` Aus VS gleich "a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **35-1(Def)**: $a \in \mathsf{dom}\, M$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$.

Aus Thema1.2"$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: a_M_γ.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"

`1.3:` Aus 1.1"$a \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"
folgt via **35-1(Def)**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}}$ VS gleich a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

`1.1:` Aus VS gleich "a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **35-1(Def)**: $a \in \mathsf{dom}\, M$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Aus Thema1.2"$\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: a_M_γ.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"

`1.3:` Aus 1.1"$a \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (a\_M\_\gamma)$"
folgt via **35-1(Def)**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis **41-44**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{vii)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $\qquad a$ untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\texttt{1:}$ Via **41-27** gilt: $\qquad]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\texttt{2:}$ Aus $\texttt{1}$ "$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus $\texttt{VS}$ gleich "a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **35-6**: $\qquad a$ untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\boxed{\boxed{\texttt{vii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $\qquad a$ untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Aus $\texttt{VS}$ gleich "a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **35-1(Def)**: $\qquad a \in \mathsf{dom}\, M$.

$\square$

41-45. Es folgt ein Kriterium, dass b eine obere M_Schranke der M_Intervalle von a bis b und der M_Intervalle bis b ist:

<u>**41-45(Satz)**</u>

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi), vii) *sind äquivalent:*

i) $b \in \mathsf{ran}\, M$.

ii) b *obere* M*_Schranke von* $[a \overset{M}{\mid} b]$.

iii) b *obere* M*_Schranke von* $]a \overset{M}{\mid} b[$.

iv) b *obere* M*_Schranke von* $]a \overset{M}{\mid} b]$.

v) b *obere* M*_Schranke von* $[a \overset{M}{\mid} b[$.

vi) b *obere* M*_Schranke von* $\langle\cdot \overset{M}{\mid} b]$.

vii) b *obere* M*_Schranke von* $\langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$.

<u>Beweis **41-45**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $b \in \mathsf{ran}\, M$.

`Thema1.1` $\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]$

Aus Thema1.1 "$\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]$"
folgt via **41-25**: γ_M_b.

Ergo Thema1.1: A1 | "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"

1.2: Aus VS gleich "$b \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{\mid} b]) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-1(Def)**: b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{\mid} b]$.

Beweis **41-45** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

1: Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1"$]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$" und
aus VS gleich "b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **35-6**: b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

1.1: Aus VS gleich "b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **35-1(Def)**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$.

Aus Thema1.2"$\gamma \in]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: γ_M_b.

Ergo Thema1.2: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\forall \gamma : (\gamma \in]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)\text{"}}$

1.3: Aus 1.1"$b \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-1(Def)**: b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **41-45**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **35-1(Def)**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in [a \overset{M}{|} b[$"
> folgt via **41-25**: $\gamma\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_b$.
>
> `3:` Aus `2`"$\gamma\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_b$"
> foglt via **41-3**: γ_M_b.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{"}\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)\text{"}}$

`1.3:` Aus `1.1`"$b \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-1(Def)**: b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}}$ `VS` gleich b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **35-1(Def)**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.
>
> Aus `Thema1.2`"$\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
> folgt via **41-25**: γ_M_b.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{"}\forall \gamma : (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)\text{"}}$

`1.3:` Aus `1.1`"$b \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\gamma\_M\_b)$"
folgt via **35-1(Def)**: b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **41-45**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{vii)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

$\texttt{1:}$ Via **41-27** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[\ \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

$\texttt{2:}$ Aus $\texttt{1}$ "$\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[\ \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$" und

aus $\texttt{VS}$ gleich "b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$"

folgt via **35-6**: b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[$.

$\boxed{\boxed{\texttt{vii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[$.

Aus $\texttt{VS}$ gleich "b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[$"
folgt via **35-1(Def)**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

$\square$

41-46. Jedes M_Infimum einer nicht leeren TeilKlasse der M_Intervalle von a bis b oder der M_Intervalle ab a ist in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$:

41-46(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ inf *ist* M_*Infimum von* E.

$\rightarrow)$

$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

oder

$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

oder

$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

oder

$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Dann folgt “$inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$*”.*

Beweis **41-46**

1: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:

$$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[)$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b])$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[)$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\qquad 0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1.1.Fall "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$" folgt via **41-41**: $\qquad a$ untere M_Schranke von E.

3: Aus $\rightarrow$) "inf ist M_Infimum von E" und aus 2 "a untere M_Schranke von E" folgt via **36-1(Def)**: $\qquad a\_M\_inf$.

4: Aus 3 "a_M_inf" folgt via **41-25**: $\qquad inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

1.2.Fall $\qquad 0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus 1.2.Fall "$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$" folgt via **41-41**: $\qquad a$ untere M_Schranke von E.

3: Aus $\rightarrow$) "inf ist M_Infimum von E" und aus 2 "a untere M_Schranke von E" folgt via **36-1(Def)**: $\qquad a\_M\_inf$.

4: Aus 3 "a_M_inf" folgt via **41-25**: $\qquad inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

...

Beweis **41-46**. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`1.3.Fall` $0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus `1.3.Fall` "$0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von E.

3: Aus →) "inf ist M_Infimum von E" und
aus 2 "a untere M_Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: a_M_inf.

4: Aus 3 "a_M_inf"
folgt via **41-25**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.4.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus `1.4.Fall` "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von E.

3: Aus →) "inf ist M_Infimum von E" und
aus 2 "a untere M_Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: a_M_inf.

4: Aus 3 "a_M_inf"
folgt via **41-25**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.5.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus `1.5.Fall` "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von E.

3: Aus →) "inf ist M_Infimum von E" und
aus 2 "a untere M_Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: a_M_inf.

4: Aus 3 "a_M_inf"
folgt via **41-25**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

. . .

<u>Beweis **41-46**</u>...

`Fallunterscheidung`

...

`1.6.Fall` $0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus `1.6.Fall`"$0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-41**: a untere M_Schranke von E.

3: Aus →) "inf ist M_Infimum von E" und
aus 2"a untere M_Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: a_M_inf.

4: Aus 3"a_M_inf"
folgt via **41-25**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

□

41-47. Jedes M_Supremum einer nicht leeren TeilKlasse der M_Intervalle von a bis b oder der M_Intervalle bis b ist in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$:

41-47(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sup ist M_Supremum von E.*

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

oder

$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

oder

$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

oder

$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

Dann folgt "$sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

Beweis **41-47**

`1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:

$$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[)$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b])$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[)$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b])$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von E.

`3:` Aus $\rightarrow$) "*sup* ist M_Supremum von E" und
aus `2`"b obere M_Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: *sup*_M_b.

`4:` Aus `3`"*sup*_M_b"
folgt via **41-25**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.2.Fall` $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von E.

`3:` Aus $\rightarrow$) "*sup* ist M_Supremum von E" und
aus `2`"b obere M_Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: *sup*_M_b.

`4:` Aus `3`"*sup*_M_b"
folgt via **41-25**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

...

Beweis **41-47**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus `1.3.Fall`“$0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von E.

3: Aus →) “sup ist M_Supremum von E” und
aus 2“b obere M_Schranke von E”
folgt via **36-1(Def)**: sup_M_b.

4: Aus 3“sup_M_b”
folgt via **41-25**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.4.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus `1.4.Fall`“$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von E.

3: Aus →) “sup ist M_Supremum von E” und
aus 2“b obere M_Schranke von E”
folgt via **36-1(Def)**: sup_M_b.

4: Aus 3“sup_M_b”
folgt via **41-25**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.5.Fall` $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

2: Aus `1.5.Fall`“$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von E.

3: Aus →) “sup ist M_Supremum von E” und
aus 2“b obere M_Schranke von E”
folgt via **36-1(Def)**: sup_M_b.

4: Aus 3“sup_M_b”
folgt via **41-25**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

...

Beweis **41-47**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.6.Fall` $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[.$

2: Aus `1.6.Fall`“$0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$”
folgt via **41-42**: b obere M_Schranke von E.

3: Aus →) “*sup* ist M_Supremum von E” und
aus 2“b obere M_Schranke von E”
folgt via **36-1(Def)**: *sup*_M_b.

4: Aus 3“*sup*_M_b”
folgt via **41-25**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|}\, b]$.

□

41-48. Jedes M_Infimum eines nicht leeren M_Intervalls von a bis b oder eines nicht leeren M_Intervalls ab a ist in $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$:

41-48(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$" *und* "$inf$ *ist* M_*Infimum von* $[a \overset{M}{|} b]$" *folgt* "$inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

b) *Aus* "$0 \neq]a \overset{M}{|} b[$" *und* "$inf$ *ist* M_*Infimum von* $]a \overset{M}{|} b[$" *folgt* "$inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

c) *Aus* "$0 \neq]a \overset{M}{|} b]$" *und* "$inf$ *ist* M_*Infimum von* $]a \overset{M}{|} b]$" *folgt* "$inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

d) *Aus* "$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$" *und* "$inf$ *ist* M_*Infimum von* $[a \overset{M}{|} b[$" *folgt* "$inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

e) *Aus* "$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *und* "$inf$ *ist* M_*Infimum von* $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *folgt* "$inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

f) *Aus* "$0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *und* "$inf$ *ist* M_*Infimum von* $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" *folgt* "$inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

Beweis **41-48** a) VS gleich $(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von } [a \overset{M}{|} b])$.

1: Aus VS gleich “$0 \neq [a \overset{M}{|} b] \ldots$”

folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1“$0 \neq [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$” und

aus VS gleich “$\ldots inf$ ist M_Infimum von $[a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **41-46**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

b) VS gleich $(0 \neq]a \overset{M}{|} b[) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von }]a \overset{M}{|} b[)$.

1: Aus VS gleich “$0 \neq]a \overset{M}{|} b[\ldots$”

folgt via **0-20**: $0 \neq]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus 1“$0 \neq]a \overset{M}{|} b[\subseteq]a \overset{M}{|} b[$” und

aus VS gleich “$\ldots inf$ ist M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-46**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

c) VS gleich $(0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von }]a \overset{M}{|} b])$.

1: Aus VS gleich “$0 \neq]a \overset{M}{|} b] \ldots$”

folgt via **0-20**: $0 \neq]a \overset{M}{|} b] \subseteq]a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1“$0 \neq]a \overset{M}{|} b] \subseteq]a \overset{M}{|} b]$” und

aus VS gleich “$\ldots inf$ ist M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **41-46**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) VS gleich $(0 \neq [a \overset{M}{|} b[) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von } [a \overset{M}{|} b[)$.

1: Aus VS gleich “$0 \neq [a \overset{M}{|} b[\ldots$”

folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus 1“$0 \neq [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[$” und

aus VS gleich “$\ldots inf$ ist M_Infimum von $[a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-46**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis **41-48**</u> e) VS gleich $(0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (inf \text{ ist } M\_\text{Infimum von } [a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots$"

folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus 1"$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus VS gleich "$\ldots inf$ ist M_Infimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **41-46**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

f) VS gleich $(0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (inf \text{ ist } M\_\text{Infimum von }]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \ldots$"

folgt via **0-20**: $0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus 1"$0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus VS gleich "$\ldots inf$ ist M_Infimum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **41-46**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\square$

41-49. Jedes M_Supremum eines nicht leeren M_Intervalls von a bis b oder eines nicht leeren M_Intervalls bis b ist in $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$:

41-49(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$" *und* "*sup ist* M*_Supremum von* $[a \overset{M}{|} b]$" *folgt* "$sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

b) *Aus* "$0 \neq]a \overset{M}{|} b[$" *und* "*sup ist* M*_Supremum von* $]a \overset{M}{|} b[$" *folgt* "$sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

c) *Aus* "$0 \neq]a \overset{M}{|} b]$" *und* "*sup ist* M*_Supremum von* $]a \overset{M}{|} b]$" *folgt* "$sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

d) *Aus* "$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$" *und* "*sup ist* M*_Supremum von* $[a \overset{M}{|} b[$" *folgt* "$sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

e) *Aus* "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" *und* "*sup ist* M*_Supremum von* $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$" *folgt* "$sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

f) *Aus* "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$" *und* "*sup ist* M*_Supremum von* $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$" *folgt* "$sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

Beweis **41-49** `a)` `VS` gleich $(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von } [a \overset{M}{|} b])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq [a \overset{M}{|} b] \ldots$"

folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq [a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$" und

aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von $[a \overset{M}{|} b]$"

folgt via **41-47**: $sup \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`b)` `VS` gleich $(0 \neq\,]a \overset{M}{|} b[) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von }]a \overset{M}{|} b[)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq\,]a \overset{M}{|} b[\ldots$"

folgt via **0-20**: $0 \neq\,]a \overset{M}{|} b[\subseteq\,]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq\,]a \overset{M}{|} b[\subseteq\,]a \overset{M}{|} b[$" und

aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **41-47**: $sup \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`c)` `VS` gleich $(0 \neq\,]a \overset{M}{|} b]) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von }]a \overset{M}{|} b])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq\,]a \overset{M}{|} b] \ldots$"

folgt via **0-20**: $0 \neq\,]a \overset{M}{|} b] \subseteq\,]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq\,]a \overset{M}{|} b] \subseteq\,]a \overset{M}{|} b]$" und

aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b]$"

folgt via **41-47**: $sup \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`d)` `VS` gleich $(0 \neq [a \overset{M}{|} b[) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von } [a \overset{M}{|} b[)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq [a \overset{M}{|} b[\ldots$"

folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq [a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b[$" und

aus `VS` gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von $[a \overset{M}{|} b[$"

folgt via **41-47**: $sup \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **41-49**</u> e) VS gleich $(0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \wedge (sup$ ist M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b])$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b] \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1"$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus VS gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-47**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

f) VS gleich $(0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[) \wedge (sup$ ist M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[)$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[\ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

2: Aus 1"$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$" und
aus VS gleich "$\ldots sup$ ist M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-47**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

□

41-50. Die Ermittlung der M_Infima oder der M_Suprema eines M_Intervalls von a bis b ist ohne Weiteres nicht möglich. Beispiel hierzu folgen:

41-50.Bemerkung

- Die Aussage
  “$(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (a$ ist M_Infimum von $[a \overset{M}{|} b])$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (b$ ist M_Supremum von $[a \overset{M}{|} b])$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$(0 \neq]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (a$ ist M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b[)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$(0 \neq]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (b$ ist M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b[)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$(0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (a$ ist M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b])$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$(0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (b$ ist M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b])$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$(0 \neq [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (a$ ist M_Infimum von $[a \overset{M}{|} b[)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$(0 \neq [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (b$ ist M_Supremum von $[a \overset{M}{|} b[)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

41-51. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, folgt aus "$0 \neq [a \overset{M}{\mid} b]$" nicht ohne Weiteres, dass
a ein M_Infimum von $[a \overset{M}{\mid} b]$ ist *oder* dass b ein M_Supremum von $[a \overset{M}{\mid} b]$ ist:

<u>41-51.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq b$.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(a, c), (c, c), (c, b)\}$.

Dann folgt:

`a)` $0 \neq [a \overset{M}{\mid} b] = \{c\}$.

`b)` a, c untere M_Schranken von $[a \overset{M}{\mid} b]$.

`c)` b, c obere M_Schranke von $[a \overset{M}{\mid} b]$.

`d)` a kein M_Infimum von $[a \overset{M}{\mid} b]$.

`e)` b kein M_Supremum von $[a \overset{M}{\mid} b]$.

Ad `d)`: Da c eine untere M_Schranke von $[a \overset{M}{\mid} b]$ ist, müsste, wenn a ein M_Infimum von $[a \overset{M}{\mid} b]$ wäre, c_M_a gelten.
Ad `e)`: Da c eine obere M_Schranke von $[a \overset{M}{\mid} b]$ ist, müsste, wenn b ein M_Supremum von $[a \overset{M}{\mid} b]$ wäre, b_M_c gelten.

41-52. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, folgt aus “$0 \neq]a \overset{M}{|} b[$” nicht ohne Weiteres, dass

a ein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b[$ ist *oder* dass b ein M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b[$ ist:

<u>41-52.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq b$.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(a,c),(c,c),(c,b)\}$.

Dann folgt:

`a)` $0 \neq]a \overset{M}{|} b[= \{c\}$.

`b)` a, c untere M_Schranken von $]a \overset{M}{|} b[$.

`c)` b, c obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

`d)` a kein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b[$.

`e)` b kein M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b[$.

Ad `d)`: Da c eine untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$ ist, müsste, wenn a ein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b[$ wäre, c_M_a gelten.

Ad `e)`: Da c eine obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$ ist, müsste, wenn b ein M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b[$ wäre, b_M_c gelten.

41-53. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, folgt aus "$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$" nicht ohne Weiteres, dass
a ein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b]$ ist *oder* dass b ein M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b]$ ist:

<u>41-53.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq b$.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(a,c),(c,c),(c,b)\}$.

Dann folgt:

a) $0 \neq \,]a \overset{M}{|} b] = \{c\}$.

b) a, c untere M_Schranken von $]a \overset{M}{|} b]$.

c) b, c obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

d) a kein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b]$.

e) b kein M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b]$.

Ad d): Da c eine untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$ ist, müsste, wenn a ein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b]$ wäre, c_M_a gelten.
Ad e): Da c eine obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$ ist, müsste, wenn b ein M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b]$ wäre, b_M_c gelten.

41-54. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, folgt aus “$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$” nicht ohne Weiteres, dass

a ein M_Infimum von $[a \overset{M}{|} b[$ ist *oder* dass b ein M_Supremum von $[a \overset{M}{|} b[$ ist:

41-54.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq b$.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(a, c), (c, c), (c, b)\}$.

Dann folgt:

`a)` $0 \neq [a \overset{M}{|} b[= \{c\}$.

`b)` a, c untere M_Schranken von $[a \overset{M}{|} b[$.

`c)` b, c obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

`d)` a kein M_Infimum von $[a \overset{M}{|} b[$.

`e)` b kein M_Supremum von $[a \overset{M}{|} b[$.

Ad `d)`: Da c eine untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$ ist, müsste, wenn a ein M_Infimum von $[a \overset{M}{|} b[$ wäre, c_M_a gelten.

Ad `e)`: Da c eine obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$ ist, müsste, wenn b ein M_Supremum von $[a \overset{M}{|} b[$ wäre, b_M_c gelten.

41-55. Auch die Ermittlung der M_Infima eines M_Intervalls ab a oder der M_Suprema eines M_Intervalls bis b ist ohne Weiteres nicht möglich. Beispiele hierzu folgen:

41-55.Bemerkung

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (a$ ist M_Infimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (a$ ist M_Infimum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (b$ ist M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (b$ ist M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

41-56. Im folgenden Beispiel wird belegt, dass aus $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ - oder aus $0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ - nicht notwendiger Weise folgt, dass a ein M_Infimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ - dass a ein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ - ist:

<u>41-56.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) a Menge.

→) c Menge.

→) $a \neq c$.

→) $M = \{(a, c), (c, c)\}$.

Dann folgt:

a) $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

b) a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

c) a kein M_Infimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) $0 \neq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

e) a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

f) a kein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ad `c)`: Wenn a ein M_Infimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ wäre, dann müsste a_M_a gelten, siehe **36-3**.
Ad `f)`: Wenn a ein M_Infimum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ wäre, dann müsste a_M_a gelten, siehe **36-3**.

41-57. Im folgenden Beispiel wird belegt, dass aus $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$ - oder aus $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b[$ - nicht notwendiger Weise folgt, dass b ein M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$ - dass b ein M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[$ - ist:

<u>41-57.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(c, c), (c, b)\}$.

Dann folgt:

a) $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b] = \{c\}$.

b) b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

c) b kein M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$.

d) $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b[= \{c\}$.

e) b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[$.

f) b kein M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[$.

Ad c): Wenn b ein M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b]$ wäre, dann müsste b_M_b gelten, siehe **36-4**.

Ad f): Wenn b ein M_Supremum von $\langle\cdot \overset{M}{|}\ b[$ wäre, dann müsste b_M_b gelten, siehe **36-4**.

41-58. Nun werden spezielle M_Intervalle auf spezielle M_Minima und M_Maxima untersucht.
Die jeweilige "Element-Aussage" ist im Hinblick auf **41-29(Bem)** nicht trivial, da etwa nicht unbedingt "$a \in [a \overset{M}{|} b]$" gelten muss:

41-58(Satz)

a) *"a ist M_Minimum von* $[a \overset{M}{|} b]$*" genau dann, wenn "*$a \in [a \overset{M}{|} b]$*".*

b) *"a ist M_Minimum von* $[a \overset{M}{|} b[$*" genau dann, wenn "*$a \in [a \overset{M}{|} b[$*".*

c) *"a ist M_Minimum von* $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$*" genau dann, wenn "*$a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$*."*

d) *"b ist M_Maximum von* $[a \overset{M}{|} b]$*" genau dann, wenn "*$b \in [a \overset{M}{|} b]$*".*

e) *"b ist M_Maximum von* $]a \overset{M}{|} b]$*" genau dann, wenn "*$b \in]a \overset{M}{|} b]$*".*

f) *"b ist M_Maximum von* $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$*" genau dann, wenn "*$b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$*."*

Beweis **41-58** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} b]$.

Aus VS gleich "a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: $a \in [a \overset{M}{|} b]$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $a \in [a \overset{M}{|} b]$.

1: Aus VS gleich "$a \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1 "$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-43**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

3: Aus 2 "a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$" und
aus VS gleich "$a \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} b]$.

<u>Beweis **41-58**</u> b) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} b[$.

Aus VS gleich "a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **38-1(Def)**: $a \in [a \overset{M}{|} b[$.

b) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $a \in [a \overset{M}{|} b[$.

1: Aus VS gleich "$a \in [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus 1"$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-43**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

3: Aus 2"a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$" und
aus VS gleich "$a \in [a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **38-1(Def)**: a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} b[$.

c) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Aus VS gleich "a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **38-1(Def)**: $a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

c) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

1: Aus VS gleich "$a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus 1"$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-43**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus 2"a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus VS gleich "$a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **38-1(Def)**: a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Beweis **41-58** d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\qquad b$ ist M-Maximum von $[a \overset{M}{|} b]$.

Aus VS gleich "b ist M-Maximum von $[a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad b \in [a \overset{M}{|} b]$.

d) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\qquad b \in [a \overset{M}{|} b]$.

1: Aus VS gleich "$b \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $\qquad 0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1"$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-43**: $\qquad b$ obere M-Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

3: Aus 2"b obere M-Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$" und
aus VS gleich "$b \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad b$ ist M-Maximum von $[a \overset{M}{|} b]$.

e) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\qquad b$ ist M-Maximum von $]a \overset{M}{|} b]$.

Aus VS gleich "b ist M-Maximum von $]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad b \in\,]a \overset{M}{|} b]$.

e) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\qquad b \in\,]a \overset{M}{|} b]$.

1: Aus VS gleich "$b \in\,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $\qquad 0 \neq\,]a \overset{M}{|} b]$.

2: Aus 1"$0 \neq\,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-43**: $\qquad b$ obere M-Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

3: Aus 2"b obere M-Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$" und
aus VS gleich "$b \in\,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: $\qquad b$ ist M-Maximum von $]a \overset{M}{|} b]$.

Beweis **41-58** `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich b ist M_Maximum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

Aus `VS` gleich "b ist M_Maximum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **38-1(Def)**: $b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **0-20**: $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **41-43**: b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `2`"b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und

aus `VS` gleich "$b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **38-1(Def)**: b ist M_Maximum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

$\square$

41-59. Auch im Fall, dass die jeweiligen Intervalle nicht leer sind, muss weder $[a \overset{M}{|} b]$ noch eines der angegebenen Intervalle ein M_Minimum oder ein M_Maximum haben:

41-59.Bemerkung

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} b[)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $[a \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $]a \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

41-60. An Hand einer fest gewählten Klasse M wird klar gemacht, dass auch wenn einige spezielle M_Intervalle $\neq 0$ sind, diese M_Intervalle kein M_Minimum oder M_Maximum haben müssen:

...

41-60.

...

41-60.BEISPIEL

Es gelte:

→) a Menge.

→) b Menge.

→) c Menge.

→) $a \neq c$.

→) $b \neq c$.

→) $M = \{(a, c), (c, b)\}$.

Dann folgt:

a) $0 \neq [a \overset{M}{|} b] = \{c\}$.

b) $0 \neq]a \overset{M}{|} b] = \{c\}$.

c) $0 \neq [a \overset{M}{|} b[= \{c\}$.

d) $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

e) $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b] = \{c\}$.

f) $[a \overset{M}{|} b]$ hat weder M_Minimum noch M_Maximum.

g) $]a \overset{M}{|} b]$ hat kein M_Maximum.

h) $[a \overset{M}{|} b[$ hat kein M_Minimum.

i) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ hat kein M_Minimum.

j) $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ hat kein M_Maximum.

...

41-60.

...

Ad `fghij)`: Nur c kommt als M-Minimum oder M-Maximum von $\{c\}$ in Frage, siehe **38-23**. Falls c ein M-Minimum oder ein M-Maximum wäre, dann müsste via **38-3/4** die Aussage c_M_c gelten.
Ad "a, b": In diesem Beispiel kann auch "$a = b$" gelten. Es wurden aber verschiedene Bezeichnungen gewählt, um die kontext-bezogenen Notationen
"$[a \overset{M}{|} b]$" etc. beizubehalten.

41-61. Von den in **41-58** *nicht* diskutierten M_Intervallen ist a kein M_Minimum oder b kein M_Maximum. Das heisst aber nicht, dass diese M_Intervalle nicht doch ein M_Minimum oder ein M_Maximum haben können - siehe nachfolgende Bemerkung:

41-61(Satz)

a) *a kein M_Minimum von* $]a \overset{M}{|} b[$.

b) *a kein M_Minimum von* $]a \overset{M}{|} b]$.

c) *a kein M_Minimum von* $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) *b kein M_Maximum von* $]a \overset{M}{|} b[$.

e) *b kein M_Maximum von* $[a \overset{M}{|} b[$.

f) *b kein M_Maximum von* $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

<u>Beweis **41-61**</u> `a)`

`1:` Via **41-28** gilt: $a \notin \,]a \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `1` “$a \notin \,]a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **38-14**: a kein M_Minimum von $]a \overset{M}{|} b[.$

`b)`

`1:` Via **41-28** gilt: $a \notin \,]a \overset{M}{|} b].$

`2:` Aus `1` “$a \notin \,]a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **38-14**: a kein M_Minimum von $]a \overset{M}{|} b[.$

`c)`

`1:` Via **41-28** gilt: $a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `1` “$a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **38-14**: a kein M_Minimum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`d)`

`1:` Via **41-28** gilt: $b \notin \,]a \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `1` “$b \notin \,]a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **38-15**: b kein M_Maximum von $]a \overset{M}{|} b[.$

`e)`

`1:` Via **41-28** gilt: $b \notin [a \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `1` “$b \notin [a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **38-15**: b kein M_Maximum von $[a \overset{M}{|} b[.$

`f)`

`1:` Via **41-28** gilt: $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

`2:` Aus `1` “$b \notin \langle\cdot \overset{M}{|} b[$”

folgt via **38-15**: b kein M_Maximum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[.$

□

41-62. Wie an Hand folgenden Beispiels belegt, kann etwa $]a \overset{M}{|} b[$ sowohl ein M_Minimum als auch ein M_Maximum haben - *obwohl* in **41-61** gesagt ist, dass hierfür weder a als M_Minimum noch b als M_Maximum zur Vefügung stehen:

41-62.Bemerkung

- Die Aussage
  "$]a \overset{M}{|} b[$ hat kein M_Minimum"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$]a \overset{M}{|} b]$ hat kein M_Minimum"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ hat kein M_Minimum"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$]a \overset{M}{|} b[$ hat kein M_Maximum"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$[a \overset{M}{|} b[$ hat kein M_Maximum"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ hat kein M_Maximum"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

41-63. An Hand einer fest gewählten Klasse M wird klar gemacht, dass etwa $]a \overset{M}{|} b[$ durchaus ein M_Minimum oder ein M_Maximum haben kann:

<u>41-63.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ a Menge.

$\rightarrow)$ b Menge.

$\rightarrow)$ c Menge.

$\rightarrow)$ $a \neq c$.

$\rightarrow)$ $b \neq c$.

$\rightarrow)$ $M = \{(a, c), (c, c), (c, b)\}$.

Dann folgt:

a) $0 \neq\ ]a \overset{M}{|} b[\ = \{c\}$.

b) $0 \neq\ ]a \overset{M}{|} b] = \{c\}$.

c) $0 \neq [a \overset{M}{|} b[\ = \{c\}$.

d) $0 \neq\ ]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

e) $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[\ = \{c\}$.

f) c ist M_Minimum von $]a \overset{M}{|} b[$, von $]a \overset{M}{|} b]$ und von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

g) c ist M_Maximum von $]a \overset{M}{|} b[$, von $[a \overset{M}{|} b[$ und von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

Ad fg): Via **38-23** folgt aus c_M_c,
dass c sowohl M_Minimum als auch M_Maximum von $\{c\}$ ist.

r Relation in x: $\overset{\mathbf{ir}}{r}$.

r_Intervalle.

Ersterstellung: 08/03/07 **Letzte Änderung: 27/05/11**

42-1. Falls r eine Relation in x ist, dann ist auch $\overset{\mathbf{ir}}{r}$ eine Relation in x und jedes r_Intervall ist eine TeilKlasse von x:

42-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

Dann folgt:

a) $\overset{\mathbf{ir}}{r}$ *Relation in* x.

b) $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathbf{ir}}{r}) \subseteq x$.

c) $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathbf{ir}}{r}) \subseteq x$.

d) $[a \overset{r}{|} b] \subseteq x$.

e) $]a \overset{r}{|} b[\subseteq x$.

f) $]a \overset{r}{|} b] \subseteq x$.

g) $[a \overset{r}{|} b[\subseteq x$.

h) $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x$.

i) $]a \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x$.

j) $\langle\cdot \overset{r}{|} b] \subseteq x$.

k) $\langle\cdot \overset{r}{|} b[\subseteq x$.

l) $\langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x$.

<u>Beweis **42-1**</u> `abc)`

`1.1:` Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

`1.2:` Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-17**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq x$.

`2.1:` Via **41-6** gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{r} \subseteq r$.

`2.2:` Via **41-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathbf{ir}}{r}) \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

`2.3:` Via **41-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathbf{ir}}{r}) \subseteq \mathsf{ran}\, r$.

`3.a):` Aus →) "r Relation in x" und
aus `2.1` "$\overset{\mathbf{ir}}{r} \subseteq r$"
folgt via **10-20**: $\overset{\mathbf{ir}}{r}$ Relation in x.

`3.b):` Aus `2.2` "$\mathsf{dom}\,(\overset{\mathbf{ir}}{r}) \subseteq \mathsf{dom}\, r$" und
aus `1.1` "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\,(\overset{\mathbf{ir}}{r}) \subseteq x$.

`3.c):` Aus `2.3` "$\mathsf{ran}\,(\overset{\mathbf{ir}}{r}) \subseteq \mathsf{ran}\, r$" und
aus `1.2` "$\mathsf{ran}\, r \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(\overset{\mathbf{ir}}{r}) \subseteq x$.

<u>Beweis **42-1** `defg)`</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) “ r Relation in x ”
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x.$

`2:` $[a \overset{r}{|} b] \overset{\mathbf{41-26}}{\subseteq} (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r) \overset{\mathbf{2-7}}{\subseteq} \mathsf{dom}\, r \overset{\mathbf{1}}{\subseteq} x.$

`3.d):` Aus `2`
folgt via **0-6**: $[a \overset{r}{|} b] \subseteq x.$

`3.1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{r}{|} b[\subseteq [a \overset{r}{|} b].$

`3.2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{r}{|} b] \subseteq [a \overset{r}{|} b].$

`3.3:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{r}{|} b[\subseteq [a \overset{r}{|} b].$

`4.e):` Aus `3.1` “ $]a \overset{r}{|} b[\subseteq [a \overset{r}{|} b]$ ” und
aus `3.d)` “ $[a \overset{r}{|} b] \subseteq x$ ”
folgt via **0-6**: $]a \overset{r}{|} b[\subseteq x.$

`4.f):` Aus `3.2` “ $]a \overset{r}{|} b] \subseteq [a \overset{r}{|} b]$ ” und
aus `3.d)` “ $[a \overset{r}{|} b] \subseteq x$ ”
folgt via **0-6**: $]a \overset{r}{|} b] \subseteq x.$

`4.g):` Aus `3.3` “ $[a \overset{r}{|} b[\subseteq [a \overset{r}{|} b]$ ” und
aus `3.d)` “ $[a \overset{r}{|} b] \subseteq x$ ”
folgt via **0-6**: $[a \overset{r}{|} b[\subseteq x.$

<u>Beweis **42-1**</u> `hi)`

`1:` Aus →) “r Relation in x”
folgt via **10-17**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq x.$

`2:` $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle \overset{\mathbf{41-26}}{\subseteq} \mathsf{ran}\, r \overset{1}{\subseteq} x.$

`3.h):` Aus 2
folgt via **0-6**: $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x.$

`3.1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{r}{|} \cdot\rangle.$

`4.i):` Aus `3.1` “$]a \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$” und
aus `3.h)` “$[a \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x$”
folgt via **0-6**: $]a \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x.$

`jk)`

`1:` Aus →) “r Relation in x”
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x.$

`2:` $\langle \cdot \overset{r}{|} b] \overset{\mathbf{41-26}}{\subseteq} \mathsf{dom}\, r \overset{1}{\subseteq} x.$

`3.j):` Aus 2
folgt via **0-6**: $\langle \cdot \overset{r}{|} b] \subseteq x.$

`3.1:` Via **41-27** gilt: $\langle \cdot \overset{r}{|} b[\subseteq \langle \cdot \overset{r}{|} b].$

`4.k):` Aus `3.1` “$\langle \cdot \overset{r}{|} b[\subseteq \langle \cdot \overset{r}{|} b]$” und
aus `3.j)` “$\langle \cdot \overset{r}{|} b] \subseteq x$”
folgt via **0-6**: $\langle \cdot \overset{r}{|} b[\subseteq x.$

<u>Beweis **42-1** `1)`</u>

`1:` Aus →) “r Relation in x”
folgt via **10-17**: $(\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$” und
aus `1`“$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$”
folgt via **2-12**: $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r) \subseteq x$.

`3:` $\langle \cdot \overset{r}{|} \cdot \rangle \overset{\mathbf{41-18(Def)}}{=} (\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r) \overset{2}{\subseteq} x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\langle \cdot \overset{r}{|} \cdot \rangle \subseteq x$.

□

42-2. Falls r Relation in x ist, dann ist jedes r_Intervall eine TeilKlasse von x:

42-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *I ist r_Intervall.*

Dann folgt "$I \subseteq x$".

Beweis **42-2**

1: Aus $\rightarrow$) "I ist r_Intervall"
folgt via **41-21**:
$$(\exists \Omega, \Psi : I = [\Omega \overset{r}{|} \Psi]) \vee (\exists \Omega, \Psi : I =]\Omega \overset{r}{|} \Psi[)$$
$$\vee (\exists \Omega, \Psi : I =]\Omega \overset{r}{|} \Psi]) \vee (\exists \Omega, \Psi : I = [\Omega \overset{r}{|} \Psi[)$$
$$\vee (\exists \Omega : I = [\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle) \vee (\exists \Omega : I =]\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle)$$
$$\vee (\exists \Psi : I = \langle\cdot \overset{r}{|} \Psi]) \vee (\exists \Psi : I = \langle\cdot \overset{r}{|} \Psi[)$$
$$\vee (I = \langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists \Omega, \Psi : I = [\Omega \overset{r}{|} \Psi]$.

2: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x"
folgt via **42-1**: $[\Omega \overset{r}{|} \Psi] \subseteq x$.

3: Aus `1.1.Fall` "$\ldots I = [\Omega \overset{r}{|} \Psi]$" und
aus 2 "$[\Omega \overset{r}{|} \Psi] \subseteq x$"
folgt: $I \subseteq x$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : I =]\Omega \overset{r}{|} \Psi[$.

2: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x"
folgt via **42-1**: $]\Omega \overset{r}{|} \Psi[\subseteq x$.

3: Aus `1.2.Fall` "$\ldots I =]\Omega \overset{r}{|} \Psi[$" und
aus 2 "$]\Omega \overset{r}{|} \Psi[\subseteq x$"
folgt: $I \subseteq x$.

...

<u>Beweis **42-2**</u> ...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\exists\Omega,\Psi : I =]\Omega \overset{r}{|} \Psi].$

2: Aus →) “r Relation in x”
folgt via **42-1**: $]\Omega \overset{r}{|} \Psi] \subseteq x.$

3: Aus `1.3.Fall` “... $I =]\Omega \overset{r}{|} \Psi]$” und
aus 2 “$]\Omega \overset{r}{|} \Psi] \subseteq x$”
folgt: $I \subseteq x.$

`1.4.Fall` $\exists\Omega,\Psi : I = [\Omega \overset{r}{|} \Psi[.$

2: Aus →) “r Relation in x”
folgt via **42-1**: $[\Omega \overset{r}{|} \Psi[\subseteq x.$

3: Aus `1.4.Fall` “... $I = [\Omega \overset{r}{|} \Psi[$” und
aus 2 “$[\Omega \overset{r}{|} \Psi[\subseteq x$”
folgt: $I \subseteq x.$

`1.5.Fall` $\exists\Omega : I = [\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle.$

2: Aus →) “r Relation in x”
folgt via **42-1**: $[\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x.$

3: Aus `1.5.Fall` “... $I = [\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle$” und
aus 2 “$[\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x$”
folgt: $I \subseteq x.$

`1.6.Fall` $\exists\Omega : I =]\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle.$

2: Aus →) “r Relation in x”
folgt via **42-1**: $]\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x.$

3: Aus `1.6.Fall` “... $I =]\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle$” und
aus 2 “$]\Omega \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x$”
folgt: $I \subseteq x.$

...

Beweis **42-2** . . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`1.7.Fall` $\exists \Psi : I = \langle \cdot \overset{r}{|} \Psi]$.

2: Aus →) “r Relation in x”
folgt via **42-1**: $\langle \cdot \overset{r}{|} \Psi] \subseteq x$.

3: Aus `1.7.Fall` “$\ldots I = \langle \cdot \overset{r}{|} \Psi]$” und
aus 2 “$\langle \cdot \overset{r}{|} \Psi] \subseteq x$”
folgt: $I \subseteq x$.

`1.8.Fall` $\exists \Psi : I = \langle \cdot \overset{r}{|} \Psi [$.

2: Aus →) “r Relation in x”
folgt via **42-1**: $\langle \cdot \overset{r}{|} \Psi [\subseteq x$.

3: Aus `1.8.Fall` “$\ldots I = \langle \cdot \overset{r}{|} \Psi [$” und
aus 2 “$\langle \cdot \overset{r}{|} \Psi [\subseteq x$”
folgt: $I \subseteq x$.

`1.9.Fall` $I = \langle \cdot \overset{r}{|} \cdot \rangle$.

2: Aus →) “r Relation in x”
folgt via **42-1**: $\langle \cdot \overset{r}{|} \cdot \rangle \subseteq x$.

3: Aus `1.9.Fall` “$I = \langle \cdot \overset{r}{|} \cdot \rangle$” und
aus 2 “$\langle \cdot \overset{r}{|} \cdot \rangle \subseteq x$”
folgt: $I \subseteq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $I \subseteq x$.

□

42-3. Falls r eine Relation in x ist, dann ist via **42-1** auch $\overset{\mathbf{ir}}{r}$ eine Relation in x und das folgende Resultat ist konsequenter Weise wenig verblüffend:

42-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *r Relation in x.*

$\rightarrow)$ $p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{r}{}_{-}q$.

Dann folgt:

`a)` $p \in x$.

`b)` $q \in x$.

Beweis **42-3**

`1:` Aus $\rightarrow)$ "r Relation in x"
folgt via **42-1**: $\overset{\mathbf{ir}}{r}$ Relation in x.

`2.a):` Aus `1`"$\overset{\mathbf{ir}}{r}$ Relation in x" und
aus $\rightarrow)$ "$p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{r}{}_{-}q$"
folgt via **34-1**: $p \in x$.

`2.b):` Aus `1`"$\overset{\mathbf{ir}}{r}$ Relation in x" und
aus $\rightarrow)$ "$p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{r}{}_{-}q$"
folgt via **34-1**: $q \in x$.

□

M reflexiv in z: M_Intervalle.

r Relation in x *und* r reflexiv in x: $\overset{\mathbf{ir}}{r}$.

untere und obere r_Schranken von 0.

untere und obere r_Schranken von x.

r_Intervalle.

Ersterstellung: 08/03/07 **Letzte Änderung: 02/06/11**

43-1. Hier wird unter der Voraussetzung, dass M reflexiv in z ist und $a \in z$ gilt, untersucht, welche "M_Schranken-Eigenschaften" a für die M_Intervalle von a bis b und die M_Intervalle ab a hat. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - d) - f) - e)`:

43-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M reflexiv in z.*

$\rightarrow$) *$a \in z$.*

Dann folgt:

`a)` *a untere M_Schranke von* $[a \overset{M}{|} b]$.

`b)` *a untere M_Schranke von* $]a \overset{M}{|} b[$.

`c)` *a untere M_Schranke von* $]a \overset{M}{|} b]$.

`d)` *a untere M_Schranke von* $[a \overset{M}{|} b[$.

`e)` *a ist M_Minimum von* $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`f)` *a untere M_Schranke von* $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis **43-1**</u>

1: Aus →) "M reflexiv in z"
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus →) "$a \in z$" und
aus 1 "$z \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **0-4**: $a \in \mathsf{dom}\, M$.

3.a): Aus 2 "$a \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-44**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

3.b): Aus 2 "$a \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-44**: a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

3.c): Aus 2 "$a \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-44**: a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

3.d): Aus 2 "$a \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-44**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

3.1: Aus 2 "$a \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-44**: a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

3.f): Aus 2 "$a \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-44**: a untere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

4: Aus →) "M reflexiv in z" und
aus →) "$a \in z$"
folgt via **30-17(Def)**: a_M_a.

5: Aus 4 "a_M_a"
folgt via **41-25**: $a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

6.e): Aus 3.1 "a untere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus 5 "$a \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **38-1(Def)**: a ist M_Minimum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

□

43-2. Hier wird unter der Voraussetzung, dass M reflexiv in z ist und $b \in z$ gilt, untersucht, welche "M_Schranken-Eigenschaften" b für die M_Intervalle von a bis b und die M_Intervalle bis b hat. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - d) - f) - e)`:

43-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M reflexiv in z.*

$\rightarrow)$ *$b \in z$.*

Dann folgt:

a) *b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.*

b) *b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.*

c) *b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.*

d) *b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.*

e) *b ist M_Maximum von $\langle \cdot \overset{M}{|} b]$.*

f) *b obere M_Schranke von $\langle \cdot \overset{M}{|} b[$.*

Beweis **43-2**

1: Aus →) "M reflexiv in z"
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus →) "$b \in z$" und
aus 1 "$z \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-4**: $b \in \mathsf{ran}\, M$.

3.a): Aus 2 "$b \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-45**: b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b]$.

3.b): Aus 2 "$b \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-45**: b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b[$.

3.c): Aus 2 "$b \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-45**: b obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} b]$.

3.d): Aus 2 "$b \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-45**: b obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} b[$.

3.1: Aus 2 "$b \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-45**: b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

3.f): Aus 2 "$b \in \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-45**: b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

4: Aus →) "M reflexiv in z" und
aus →) "$b \in z$"
folgt via **30-17(Def)**: b_M_b.

5: Aus 4 "b_M_b"
folgt via **41-25**: $b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

6.e): Aus 3.1 "b obere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und
aus 5 "$b \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: b ist M_Maximum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

□

43-3. Falls M reflexiv in z ist, dann gilt $z \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$:

43-3(Satz)

Aus "M reflexiv in z" folgt "$z \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

Beweis **43-3** VS gleich M reflexiv in z.

1: Aus VS gleich "M reflexiv in z"
folgt via **30-18**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: $$z \overset{1}{\subseteq} \mathsf{dom}\, M \overset{\mathbf{2-7}}{\subseteq} (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, M) \overset{\mathbf{41-18(Def)}}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle.$$

3: Aus 2
folgt via **0-6**: $z \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

□

43-4. Aus “$p\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_q$” folgen für reflexive Relationen r in x die Aussagen p_r_p und q_r_q:

43-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

$\rightarrow$) $p\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_q$.

Dann folgt:

a) p_r_p.

b) q_r_q.

Beweis **43-4**

1: Aus $\rightarrow$) “$p\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_q$”
folgt via **41-3**: p_r_q.

2.a): Aus $\rightarrow$) “r Relation in x”,
aus $\rightarrow$) “r reflexiv in x” und
aus 1 “p_r_q”
folgt via **34-11**: p_r_p.

2.b): Aus $\rightarrow$) “r Relation in x”,
aus $\rightarrow$) “r reflexiv in x” und
aus 1 “p_r_q”
folgt via **34-11**: q_r_q.

$\square$

43-5. In reflexiven Relation r in x ist p *genau dann* Element von x, wenn p untere r_Schranke der leeren Menge ist und dies ist genau dann der Fall, wenn p obere r_Schranke der leeren Menge ist:

43-5(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $p \in x$.

`ii)` *p untere r_Schranke von* 0.

`iii)` *p obere r_Schranke von* 0.

Beweis **43-5** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ `VS` gleich $p \in x$.

Aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x" und
aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **37-3**: p untere r_Schranke von 0.

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$ `VS` gleich p untere r_Schranke von 0.

`1`: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus `VS` gleich "p untere r_Schranke von 0"
folgt via **37-1**: $p \in x$.

`2`: Aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x" und
aus `1`"$p \in x$"
folgt via **37-3**: p obere r_Schranke von 0.

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}$ `VS` gleich p obere r_Schranke von 0.

Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus `VS` gleich "p obere r_Schranke von 0"
folgt via **37-1**: $p \in x$.

$\square$

43-6. Eine reflexive Relation r in x ist genau dann nicht leer, wenn 0 eine untere r_Schranke hat und dies ist genau dann der Fall, wenn 0 eine obere r_Schranke hat:

43-6(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) r *reflexiv in* x.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq x$.

`ii)` $\exists \Omega : \Omega$ *untere* r*_Schranke von* 0.

`iii)` $\exists \Omega : \Omega$ *obere* r*_Schranke von* 0.

Beweis **43-6** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x.$

1: Aus `VS` gleich “$0 \neq x$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x.$

2: Aus →) “r Relation in x”,
aus →) “r reflexiv in x” und
aus 1 “$\ldots \Omega \in x$”
folgt via **43-5**: Ω untere r_Schranke von $0.$

3: Aus 1 “$\exists \Omega \ldots$” und
aus 2 “Ω untere r_Schranke von 0”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ untere r_Schranke von $0.$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : \Omega$ untere r_Schranke von $0.$

1: Aus →) “r Relation in x”,
aus →) “r reflexiv in x” und
aus `VS` gleich “$\ldots \Omega$ untere r_Schranke von 0”
folgt via **43-5**: Ω obere r_Schranke von $0.$

2: Aus `VS` gleich “$\exists \Omega \ldots$” und
aus 1 “Ω obere r_Schranke von 0”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere r_Schranke von $0.$

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : \Omega$ obere r_Schranke von $0.$

1: Aus →) “r Relation in x” und
aus `VS` gleich “$\ldots \Omega$ obere r_Schranke von 0”
folgt via **37-1**: $\Omega \in x.$

2: Aus 1 “$\Omega \in x$”
folgt via **0-20**: $0 \neq x.$

□

43-7. In reflexiven Relationen r in x ist p genau dann ein r_Infimum von 0, wenn p ein r_Supremum von x ist:

43-7(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *p ist r_Infimum von 0.*

`ii)` *p ist r_Supremum von x.*

Beweis **43-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich p ist r_Infimum von 0.

`1`: Aus `VS` gleich "p ist r_Infimum von 0"
folgt via **36-12**: p ist r_Supremum von $\mathsf{dom}\, r$.

`2`: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
$\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

`3`: Aus `1`"p ist r_Supremum von $\mathsf{dom}\, r$" und
aus `2`"$\mathsf{dom}\, r = x$"
folgt: p ist r_Supremum von x.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich p ist r_Supremum von x.

`1`: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

`2`: Aus `VS` gleich "p ist r_Supremum von x" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, r = x$"
folgt: p ist r_Supremum von $\mathsf{dom}\, r$.

`3`: Aus `2`"p ist r_Supremum von $\mathsf{dom}\, r$"
folgt via **36-12**: p ist r_Infimum von 0.

□

43-8. In reflexiven Relationen r in x ist u genau dann ein r_Supremum von 0, wenn u ein r_Infimum von x ist:

43-8(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

→) *r Relation in x.*

→) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *p ist r_Supremum von 0.*

`ii)` *p ist r_Infimum von x.*

Beweis **43-8** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich p ist r_Supremum von 0.

1: Aus `VS` gleich "p ist r_Supremum von 0"
folgt via **36-12**: p ist r_Infimum von $\mathsf{ran}\, r$.

2: Aus →) "r Relation in x" und
→) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

3: Aus 1 "p ist r_Infimum von $\mathsf{ran}\, r$" und
aus 2 "$\mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: p ist r_Infimum von x.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich p ist r_Infimum von x.

1: Aus →) "r Relation in x" und
aus →) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

2: Aus `VS` gleich "p ist r_Infimum von x" und
aus 1 "$\mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: p ist r_Infimum von $\mathsf{ran}\, r$.

3: Aus 2 "p ist r_Infimum von $\mathsf{ran}\, r$"
folgt via **36-12**: p ist r_Supremum von 0.

□

43-9. In reflexiven Relationen r in x hat 0 genau dann kein r_Infimum, wenn x kein r_Supremum hat:

<u>**43-9(Satz)**</u>

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *0 hat kein r_Infimum.*

`ii)` *x hat kein r_Supremum.*

<u>Beweis **43-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich 0 hat kein r_Infimum.

1: Aus VS gleich "0 hat kein r_Infimum"
folgt via **36-26**: $\mathsf{dom}\, r$ hat kein r_Supremum.

2: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

3: Aus 1"$\mathsf{dom}\, r$ hat kein r_Supremum" und
aus 2"$\mathsf{dom}\, r = x$"
folgt: x hat kein r_Supremum.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich x hat kein r_Supremum.

1: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, r = x$.

2: Aus VS gleich "x hat kein r_Supremum" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, r = x$"
folgt: $\mathsf{dom}\, r$ hat kein r_Supremum.

3: Aus 2"$\mathsf{dom}\, r$ hat kein r_Supremum"
folgt via **36-26**: 0 hat kein r_Infimum.

□

43-10. In reflexiven Relationen r in x hat 0 genau dann kein r_Supremum, wenn x kein r_Infimum hat:

> **43-10(Satz)**
>
> *Unter den Voraussetzungen ...*
>
> $\rightarrow$) *r Relation in x.*
>
> $\rightarrow$) *r reflexiv in x.*
>
> *... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*
>
> `i)` *0 hat kein r_Supremum.*
>
> `ii)` *x hat kein r_Infimum.*

Beweis **43-10** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich 0 hat kein r_Supremum.

`1`: Aus `VS` gleich "0 hat kein r_Supremum"
folgt via **36-26**: $\mathsf{ran}\, r$ hat kein r_Infimum.

`2`: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

`3`: Aus `1`"$\mathsf{ran}\, r$ hat kein r_Infimum" und
aus `2`"$\mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: x hat kein r_Infimum.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich x hat kein r_Infimum.

`1`: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, r = x$.

`2`: Aus `VS` gleich "x hat kein r_Infimum" und
aus `1`"$\mathsf{ran}\, r = x$"
folgt: $\mathsf{ran}\, r$ hat kein r_Infimum.

`3`: Aus `2`"$\mathsf{ran}\, r$ hat kein r_Infimum"
folgt via **36-26**: 0 hat kein r_Supremum.

□

43-11. In reflexiven Relationen r in x gibt es recht einfache Kriterien dafür, dass a ein r_Minimum von $[a \overset{r}{|} b]$ und b ein r_Maximum von $[a \overset{r}{|} b]$ ist:

43-11(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *äquivalent:*

`i)` a_r_b.

`ii)` $a \in [a \overset{r}{|} b]$.

`iii)` $b \in [a \overset{r}{|} b]$.

`iv)` *a ist r_Minimum von* $[a \overset{r}{|} b]$.

`v)` *b ist r_Maximum von* $[a \overset{r}{|} b]$.

Beweis **43-11** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich a_r_b.

`1:` Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x" und
aus `VS` gleich "a_r_b"
folgt via **34-11**: a_r_a.

`2:` Aus 2"a_r_a" und
aus `VS` gleich "a_r_b"
folgt via **41-25**: $a \in [a \overset{r}{|} b]$.

<u>Beweis **43-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $a \in [a \overset{r}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a \in [a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-25**: a_r_b.

`2:` Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r reflexiv in x" und
aus `1` "a_r_b"
folgt via **34-11**: b_r_b.

`3:` Aus `1` "a_r_b" und
aus `2` "b_r_b"
folgt via **41-25**: $b \in [a \overset{r}{|} b]$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $b \in [a \overset{r}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$b \in [a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-25**: a_r_b.

`2:` Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r reflexiv in x" und
aus `1` "a_r_b"
folgt via **34-11**: a_r_a.

`3:` Aus `2` "a_r_a" und
aus `1` "a_r_b"
folgt via **41-25**: $a \in [a \overset{r}{|} b]$.

`4:` Aus `3` "$a \in [a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-58**: a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} b]$.

<u>Beweis **43-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ VS gleich a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} b]$.

1: Aus VS gleich "a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: $a \in [a \overset{r}{|} b]$.

2: Aus 1"$a \in [a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-25**: a_r_b.

3: Aus →)"r Relation in x",
aus →)"r reflexiv in x" und
aus 2"a_r_b"
folgt via **34-11**: b_r_b.

4: Aus 2"a_r_b" und
aus 3"b_r_b"
folgt via **41-25**: $b \in [a \overset{r}{|} b]$.

5: Aus 4"$b \in [a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-58**: b ist M_Maximum von $[a \overset{r}{|} b]$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich b ist M_Maximum von $[a \overset{r}{|} b]$.

1: Aus VS gleich "b ist M_Maximum von $[a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **38-1(Def)**: $b \in [a \overset{r}{|} b]$.

2: Aus 1"$b \in [a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-25**: a_r_b.

□

43-12. Aus a_r_b folgt für reflexive Relationen in x, dass $[a \overset{r}{|} b]$ nicht leer ist:

43-12(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *r reflexiv in x.*

→) *a_r_b.*

Dann folgt "$0 \neq [a \overset{r}{|} b]$".

Beweis **43-12**

1: Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r reflexiv in x" und
aus →) "a_r_b"
folgt via **43-11**: $a \in [a \overset{r}{|} b]$.

2: Aus 1 "$a \in [a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{r}{|} b]$.

□

43-13. Es ist keine Nachlässigkeit, dass in **43-11** eine Implikation und keine Äquivalenz steht. Das belegende Beispiel folgt:

43-13.Bemerkung

Die Aussage
“$((r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ reflexiv in } x) \wedge (0 \neq [a \overset{r}{|} b])) \Rightarrow (a\_r\_b)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

43-14. Mit dem folgenden Beispiel wird belegt, dass es x, a, b und reflexive Relationen in x gibt, so dass $0 \neq [a \overset{r}{|} b]$ und $\neg(a\_r\_b)$:

<u>43-14.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq b$.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $x = \{a, b, c\}$.

$\rightarrow$) $r = \{(a, a), (a, c), (c, c), (c, b), (b, b)\}$.

Dann folgt:

a) r Relation in x.

b) r reflexiv in x.

c) $0 \neq [a \overset{r}{|} b] = \{c\}$.

d) $\neg(a\_r\_b)$.

Ad d): Zum Nachweis von $\neg(a\_r\_b)$ werden die Voraussetzungen $a \neq b \neq c \neq a$ benötigt.

43-15. In reflexiven Relationen r in x gibt es recht einfache Kriterien dafür, dass a ein r_Minimum von $[a \overset{r}{|} b[$ und b ein r_Maximum von $]a \overset{r}{|} b]$ ist:

43-15(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$.

`ii)` $a \in [a \overset{r}{|} b[$.

`iii)` $b \in]a \overset{r}{|} b]$.

`iv)` *a ist r_Minimum von* $[a \overset{M}{|} b[$.

`v)` *b ist r_Maximum von* $]a \overset{M}{|} b]$.

Beweis **43-15** `i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "r Relation in x",
aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x" und
aus `VS` gleich "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$"
folgt via **43-4**: a_r_a.

`2:` Aus 2"a_r_a" und
aus `VS` gleich "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$"
folgt via **41-25**: $a \in [a \overset{r}{|} b[$.

<u>Beweis **43-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $a \in [a \overset{r}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a \in [a \overset{r}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $a \_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_ b$.

`2:` Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r reflexiv in x" und
aus `1` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_ b$"
folgt via **43-4**: $b \_ r \_ b$.

`3:` Aus `1` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_ b$" und
aus `2` "$b \_ r \_ b$"
folgt via **41-25**: $b \in]a \overset{r}{|} b]$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $b \in]a \overset{r}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$b \in]a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $a \_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_ b$.

`2:` Aus →) "r Relation in x",
aus →) "r reflexiv in x" und
aus `1` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_ b$"
folgt via **43-4**: $a \_ r \_ a$.

`3:` Aus `2` "$a \_ r \_ a$" und
aus `1` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_ b$"
folgt via **41-25**: $a \in [a \overset{r}{|} b[$.

`4:` Aus `3` "$a \in [a \overset{r}{|} b[$"
folgt via **41-58**: a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} b[$.

Beweis **43-15** $\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}$ `VS` gleich a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich “a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} b[$”
folgt via **38-1(Def)**: $a \in [a \overset{r}{|} b[$.

`2:` Aus `1`“$a \in [a \overset{r}{|} b[$”
folgt via **41-25**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$.

`3:` Aus $\longrightarrow$)“r Relation in x”,
aus $\longrightarrow$)“r reflexiv in x” und
aus `2`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$”
folgt via **43-4**: b_r_b.

`4:` Aus `2`“$a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$” und
aus `3`“b_r_b”
folgt via **41-25**: $b \in]a \overset{r}{|} b]$.

`5:` Aus `4`“$b \in]a \overset{r}{|} b]$”
folgt via **41-58**: b ist M_Maximum von $]a \overset{r}{|} b]$.

$\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich b ist M_Maximum von $]a \overset{r}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich “b ist M_Maximum von $]a \overset{r}{|} b]$”
folgt via **38-1(Def)**: $b \in]a \overset{r}{|} b]$.

`2:` Aus `1`“$b \in]a \overset{r}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$.

$\square$

43-16. Aus $a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$ folgt für reflexive Relationen r in x, dass $[a \overset{r}{|} b[$ und $]a \overset{r}{|} b]$ nicht leer sind:

> **<u>43-16(Satz)</u>**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow)$ *r Relation in x.*
>
> $\rightarrow)$ *r reflexiv in x.*
>
> $\rightarrow)$ *$a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$.*
>
> *Dann folgt:*
>
> `a)` $0 \neq\,]a \overset{r}{|} b]$.
>
> `b)` $0 \neq [a \overset{r}{|} b[$.

<u>Beweis **43-16**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "r Relation in x",
aus $\rightarrow)$ "r reflexiv in x" und
aus $\rightarrow)$ "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$"
folgt via **43-15**: $a \in [a \overset{r}{|} b[$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "r Relation in x",
aus $\rightarrow)$ "r reflexiv in x" und
aus $\rightarrow)$ "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{r}\_b$"
folgt via **43-15**: $b \in\,]a \overset{r}{|} b]$.

`2.a):` Aus `1.2` "$b \in\,]a \overset{r}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $0 \neq\,]a \overset{r}{|} b]$.

`2.b):` Aus `1.1` "$a \in [a \overset{r}{|} b[$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{r}{|} b[$.

$\square$

43-17. Es ist keine Nachlässigkeit, dass in **43-15** Implikationen und keine Äquivalenzen stehen. Die belegenden Beispiele folgen:

<u>43-17.Bemerkung</u>

- Die Aussage
  "$((r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ reflexiv in } x) \wedge (0 \neq]a \overset{r}{|} b])) \Rightarrow (a\_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_b)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ reflexiv in } x) \wedge (0 \neq [a \overset{r}{|} b[)) \Rightarrow (a\_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_b)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

43-18. Mit dem folgenden Beispiel wird belegt, dass es x, a, b und reflexive Relationen in x gibt, so dass $0 \neq \,]a \overset{r}{|} b]$ und $\neg(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_b)$ *und* dass $0 \neq [a \overset{r}{|} b[$ und $\neg(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_b)$:

<u>43-18.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $x = \{a, b, c\}$.

$\rightarrow$) $r = \{(a, a), (a, c), (c, c), (c, b), (b, b)\}$.

Dann folgt:

a) r Relation in x.

b) r reflexiv in x.

c) $0 \neq \,]a \overset{r}{|} b] = \{c\}$.

d) $0 \neq [a \overset{r}{|} b[= \{c\}$.

d) $\neg(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{r} \_b)$.

Ad “ a, b” : Es kann auch $a = b$ gelten.

43-19. Für reflexive Relationen r in x sind die Aussagen $c \in x$, $c \in [c \overset{r}{|} \cdot\rangle$ und $c \in \langle\cdot \overset{r}{|} c]$ äquivalent:

<u>**43-19(Satz)**</u>

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $c \in x$.

`ii)` $c \in [c \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`iii)` $c \in \langle\cdot \overset{r}{|} c]$.

<u>Beweis</u> **<u>43-19</u>** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $c \in x.$

`1:` Aus `1`“r reflexiv in x” und
aus `VS` gleich “$c \in x$”
folgt via **30-17(Def)**: $c\_r\_c.$

`2:` Aus `1`“c_r_c”
folgt via **41-25**: $c \in [c \overset{r}{|} \cdot\rangle.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $c \in [c \overset{r}{|} \cdot\rangle.$

`1:` Aus `VS` gleich “$c \in [c \overset{r}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $c\_r\_c.$

`2:` Aus `1`“c_r_c”
folgt via **41-25**: $c \in \langle\cdot \overset{r}{|} c].$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $c \in \langle\cdot \overset{r}{|} c].$

`1:` Aus →)“r Relation in x”
folgt via **42-1**: $\langle\cdot \overset{r}{|} c] \subseteq x.$

`2:` Aus `VS` gleich “$c \in \langle\cdot \overset{r}{|} c]$” und
aus `1`“$\langle\cdot \overset{r}{|} c] \subseteq x$”
folgt via **0-4**: $c \in x.$

$\square$

43-20. Wenn c_r_d für eine reflexive Relation r in x, dann ist c in den r_Intervallen ab c und bis c. Analoges gilt für d:

<u>43-20(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

$\rightarrow$) *c_r_d.*

Dann folgt:

a) $c \in [c \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

b) $c \in \langle\cdot \overset{r}{|} c]$.

c) $d \in [d \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

d) $d \in \langle\cdot \overset{r}{|} d]$.

<u>Beweis **43-20**</u>

`1.1:` Aus →) " r Relation in x " und
aus →) " c_r_d "
folgt via **34-1**: $c \in x$.

`1.2:` Aus →) " r Relation in x " und
aus →) " c_r_d "
folgt via **34-1**: $d \in x$.

`2.a):` Aus →) " r Relation in x ",
aus →) " r reflexiv in x " und
aus `1.1` " $c \in x$ "
folgt via **43-19**: $c \in [c \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`2.b):` Aus →) " r Relation in x ",
aus →) " r reflexiv in x " und
aus `1.1` " $c \in x$ "
folgt via **43-19**: $c \in \langle\cdot \overset{r}{|} c]$.

`2.c):` Aus →) " r Relation in x ",
aus →) " r reflexiv in x " und
aus `1.2` " $d \in x$ "
folgt via **43-19**: $d \in [d \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`2.d):` Aus →) " r Relation in x ",
aus →) " r reflexiv in x " und
aus `1.2` " $d \in x$ "
folgt via **43-19**: $d \in \langle\cdot \overset{r}{|} d]$.

□

43-21. In den speziellen Fällen, wo r eine reflexive Relation in x ist, ist $0 \neq [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$ äquivalent dazu, dass a ein r_Minimum von $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle$ ist:

> **<u>43-21(Satz)</u>**
>
> *Unter den Voraussetzungen ...*
>
> $\rightarrow\!)$ *r Relation in x.*
>
> $\rightarrow\!)$ *r reflexiv in x.*
>
> *... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*
>
> `i)` $0 \neq [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.
>
> `ii)` *a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.*

<u>Beweis **43-21**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: a_r_Ω.

`3:` Aus $\rightarrow\!)$"r Relation in x",
aus $\rightarrow\!)$"r reflexiv in x" und
aus `2`"a_r_Ω"
folgt via **43-20**: $a \in [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `3`"$a \in [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-58**: a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

Aus `VS` gleich "a ist r_Minimum von $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **38-3**: $0 \neq [a \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

□

43-22. In den speziellen Fällen, wo r eine reflexive Relation in x ist, ist $0 \neq \langle \cdot \overset{r}{|} b]$ äquivalent dazu, dass b ein r_Maximum von $\langle \cdot \overset{r}{|} b]$ ist:

43-22(Satz)

Unter den Voraussetzungen . . .

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

. . . sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq \langle \cdot \overset{r}{|} b]$.

`ii)` *b ist r_Maximum von $\langle \cdot \overset{r}{|} b]$.*

Beweis **43-22** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \langle \cdot \overset{r}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \langle \cdot \overset{r}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \langle \cdot \overset{r}{|} b]$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \langle \cdot \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-25**: Ω_r_b.

`3:` Aus $\rightarrow$)"r Relation in x",
aus $\rightarrow$)"r reflexiv in x" und
aus `2`"Ω_r_b"
folgt via **43-20**: $b \in \langle \cdot \overset{r}{|} b]$.

`4:` Aus `3`"$b \in \langle \cdot \overset{r}{|} b]$"
folgt via **41-58**: b ist r_Maximum von $\langle \cdot \overset{r}{|} b]$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich b ist r_Maximum von $\langle \cdot \overset{r}{|} b]$.

Aus `VS` gleich "b ist r_Maximum von $\langle \cdot \overset{r}{|} b]$"
folgt via **38-4**: $0 \neq \langle \cdot \overset{r}{|} b]$.

□

43-23. Falls r eine reflexive Relation in x ist, dann gilt $\langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle = x$:

<u>43-23(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *r reflexiv in x.*

Dann folgt "$\langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle = x$".

<u>Beweis **43-23**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "r Relation in x"
folgt via **42-1**: $\langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "r reflexiv in x"
folgt via **43-3**: $x \subseteq \langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1` "$\langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle \subseteq x$" und
aus `1.2` "$x \subseteq \langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\langle\cdot \overset{r}{|} \cdot\rangle = x$.

□

M transitiv: $\overset{\textbf{ir}}{M}$.

M_Intervalle.

untere Schranke. obere Schranke.

Infimum. Supremum.

Minimum. Maximum.

Ersterstellung: 08/03/07 **Letzte Änderung: 05/05/11**

44-1. Falls M transitiv ist, dann gelten zu **30-38** ähnliche Aussagen fpr $\overset{\mathbf{ir}}{M}$:

<u>**44-1(Satz)**</u>

Aus "M transitiv" und ...

a) ... *und* "p_M_q" *und* "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$" *folgt* "$p\_M\_w$".

b) ... *und* "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" *und* "$q\_M\_w$" *folgt* "$p\_M\_w$".

c) ... *und* "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" *und* "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$" *folgt* "$p\_M\_w$".

<u>Beweis **44-1**</u> `a)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (p\_M\_q) \wedge (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$"
folgt via **41-3**: q_M_w.

`2:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_q \ldots$" und
aus `1` "q_M_w"
folgt via **30-38**: p_M_w.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \wedge (q\_M\_w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q \ldots$"
folgt via **41-3**: p_M_q.

`2:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `1` "p_M_q" und
aus `VS` gleich "$\ldots q\_M\_w$"
folgt via **30-38**: p_M_w.

`c)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \wedge (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q \ldots$"
folgt via **41-3**: p_M_q.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$"
folgt via **41-3**: q_M_w.

`2:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `1.1` "p_M_q" und
aus `1.2` "q_M_w"
folgt via **30-38**: p_M_w.

□

44-2. Wie an Hand folgenden Beispiels belegt, kann **44-1** nicht ohne Weiteres verschärft werden:

44-2.Bemerkung

- Die Aussage
  "$((M \text{ transitiv}) \wedge (p\_M\_q) \wedge (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)) \Rightarrow (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((M \text{ transitiv}) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \wedge (q\_M\_w)) \Rightarrow (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((M \text{ transitiv}) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \wedge (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)) \Rightarrow (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-3. Das nachfolgende Beispiel belegt unter anderem, dass auch wenn M transitiv ist, aus $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$ und $q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$ nicht notwendiger Weise $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$ folgt:

<u>44-3.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) "p_M_q" und "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$" und "$\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$" .

c) "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" und "$q\_M\_p$" und "$\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$" .

d) "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" und "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$" und "$\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$" .

Ad "$\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$" : Dies gilt via **41-5** stets.

44-4. An **44-3(BSP)** fällt auf, dass - mit den Bezeichnungen von **44-1** - die Aussage "$\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)$" wegen $p = w$ gilt. Dies ist, wie der folgende, das Thema bis auf Weiteres abrundende Satz, zeigt, kein Zufall:

44-4(Satz)

Aus "M transitiv" und "$p \neq w$" und ...

a) *... und "p_M_q" und "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$" folgt "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$".*

b) *... und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" und "$q\_M\_w$" folgt "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$".*

c) *... und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" und "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$" folgt "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$".*

<u>Beweis **44-4**</u> `a)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (p \neq w) \wedge (p\_M\_q) \wedge (q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `VS` gleich "…p_M_q…" und
aus `VS` gleich "…$q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_w$"
folgt via **44-1**: p_M_w.

`2:` Aus `1`"p_M_w" und
aus `VS` gleich "…$p \neq w$…"
folgt via **41-3**: $p\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_w$.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (p \neq w) \wedge (p\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_q) \wedge (q\_M\_w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `VS` gleich "…$p\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_q$…" und
aus `VS` gleich "…q_M_w"
folgt via **44-1**: p_M_w.

`2:` Aus `1`"p_M_w" und
aus `VS` gleich "…$p \neq w$…"
folgt via **41-3**: $p\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_w$.

`c)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (p \neq w) \wedge (p\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_q) \wedge (q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `VS` gleich "…$p\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_q$…" und
aus `VS` gleich "…$q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_w$"
folgt via **44-1**: p_M_w.

`2:` Aus `1`"p_M_w" und
aus `VS` gleich "…$p \neq w$…"
folgt via **41-3**: $p\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_w$.

□

44-5. Falls M transitiv ist und eines der M_Intervalle von a bis b nicht leer ist, dann gilt a_M_b:

44-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ $0 \neq [a \overset{M}{|} b]$. *oder* $0 \neq]a \overset{M}{|} b[$. *oder* $0 \neq]a \overset{M}{|} b]$. *oder* $0 \neq [a \overset{M}{|} b[$.

Dann folgt "a_M_b".

<u>Beweis **44-5**</u>

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:

$$(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \vee (0 \neq]a \overset{M}{|} b[) \vee (0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \vee (0 \neq [a \overset{M}{|} b[).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

`1.1.2.Fall` $0 \neq]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `1.1.2.Fall`"$0 \neq]a \overset{M}{|} b[$" und
aus 2"$]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

`1.1.3.Fall` $0 \neq]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `1.1.3.Fall`"$0 \neq]a \overset{M}{|} b]$" und
aus 2"$]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

`1.1.4.Fall` $0 \neq [a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `1.1.4.Fall`"$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$" und
aus 2"$[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} b]$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$"

...

<u>Beweis **44-5**</u>

...

`1.2:` Aus `A1` gleich “$0 \neq [a \overset{M}{|} b]$”

folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in [a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1.2`“$\ldots \Omega \in [a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $(a \_ M \_ \Omega) \wedge (\Omega \_ M \_ b)$.

`3:` Aus →)“M transitiv”,
aus `2`“$a \_ M \_ \Omega \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \_ M \_ b$”
folgt via **30-38**: $a \_ M \_ b$.

□

44-6. Wie durch nachfolgendes Beispiel belegt, kann **44-5** nicht ohne Weiteres verschärft werden:

44-6.Bemerkung

- Die Aussage
  “$((M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq \rbrack a \overset{M}{|} b\lbrack)) \Rightarrow (a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$((M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq \rbrack a \overset{M}{|} b\rbrack)) \Rightarrow (a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$((M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq \lbrack a \overset{M}{|} b\lbrack)) \Rightarrow (a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-7. Im folgenden Beispiel wird unter anderem dargelegt, dass es transitive M und nicht leere M_Intervalle $]a \overset{M}{|} b[$ gibt, ohne dass $a_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}b$ gilt:

<u>44-7.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $0 \neq \,]a \overset{M}{|} a[\, = \{c\}$.

c) $0 \neq \,]a \overset{M}{|} a]\, = \{c\}$.

d) $0 \neq \,[a \overset{M}{|} a[\, = \{c\}$.

e) $\neg(a_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}a)$.

Ad e): Via **41-5** gilt stets $\neg(a_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}a)$.

44-8. An **44-7(BSP)** fällt auf, dass - mit den Bezeichnungen von **44-5** - die Aussage "$\neg(a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b)$" wegen $a = b$ gilt. Dies ist, wie der folgende, das Thema bis auf Weiteres abrundende Satz, zeigt, kein Zufall:

<u>**44-8(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ $a \neq b$.

$\rightarrow)$

$$0 \neq [a \overset{M}{|} b].$$

oder

$$0 \neq]a \overset{M}{|} b[.$$

oder

$$0 \neq]a \overset{M}{|} b].$$

oder

$$0 \neq [a \overset{M}{|} b[.$$

Dann folgt "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$".

<u>Beweis **44-8**</u>

1: Aus $\rightarrow)$ "M transitiv" und
aus $\rightarrow)$ "$(0 \neq [a \overset{M}{|} b]) \vee (0 \neq]a \overset{M}{|} b[) \vee (0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \vee (0 \neq [a \overset{M}{|} b[)$"
folgt via **44-5**: a_M_b.

2: Aus 1"a_M_b" und
aus $\rightarrow)$ "$a \neq b$"
folgt via **41-3**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$.

$\square$

44-9. Falls M transitiv ist, dann ist jedes M_Infimum und jedes M_Supremum einer nicht leeren TeilKlasse eines M_Intervalls von a bis b in $[a \overset{M}{|} b]$:

44-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *transitiv.*

$\rightarrow$) *c ist M_Infimum von E.* *oder* *c ist M_Supremum von E.*

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$. *oder* $0 \neq E \subseteq\,]a \overset{M}{|} b[$. *oder* $0 \neq E \subseteq\,]a \overset{M}{|} b]$. *oder* $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

Dann folgt "$c \in [a \overset{M}{|} b]$".

<u>Beweis **44-9**</u>

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:

$$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[)$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b])$$
$$\vee \quad (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`1.1.2.Fall` $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `1.1.2.Fall`"$\ldots E \subseteq]a \overset{M}{|} b[$" und
aus `2`"$]a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`4:` Aus `1.1.2.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `3`"$E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt: $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`1.1.3.Fall` $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `1.1.3.Fall`"$\ldots E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$" und
aus `2`"$]a \overset{M}{|} b] \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`4:` Aus `1.1.3.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `3`"$E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt: $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

...

Beweis **44-9**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.1.4.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

2: Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

3: Aus `1.1.4.Fall` "$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$" und
aus 2 "$[a \overset{M}{|} b[\subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

4: Aus `1.1.4.Fall` "$0 \neq E \ldots$" und
aus 3 "$E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt: $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: A1 | "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"

...

<u>Beweis **44-9**</u>

...

`1.2:` Nach "$\rightarrow\rangle$ *oder*" gilt:

$$c \text{ ist } M\_\text{Infimum von } E \vee c \text{ ist } M\_\text{Supremum von } E.$$

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` c ist M_Infimum von E.

`3.1:` Aus `1.2.1.Fall`"c ist M_Infimum von E" und
aus `A1` gleich "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-46**: $c \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq E \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`4.1:` Aus `3.1`"$c \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: a_M_c.

`4.2:` Aus `3.2`"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `A1` gleich "$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in [a \overset{M}{|} b]$.

`4.3:` Aus `1.2.1.Fall`"c ist M_Infimum von E" und
aus `3.2`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **36-3**: c_M_Ω.

`5:` Aus `4.2`"$\Omega \in [a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: Ω_M_b.

`6:` Aus $\rightarrow\rangle$"M transitiv",
aus `4.3`"c_M_Ω" und
aus `5`"Ω_M_b"
folgt via **30-38**: c_M_b.

`7:` Aus `4.1`"a_M_c" und
aus `6`"c_M_b"
folgt via **41-25**: $c \in [a \overset{M}{|} b]$.

...

<u>Beweis **44-9**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.2.Fall` c ist M_Supremum von E.

`3.1:` Aus `1.2.2.Fall`“c ist M_Supremum von E” und
aus `A1` gleich “$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-47**: $c \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`3.2:` Aus `A1` gleich “$0 \neq E \ldots$”
folgt via **0-20**: $\exists\Omega : \Omega \in E$.

`4.1:` Aus `3.1`“$c \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-25**: c_M_b.

`4.2:` Aus `3.2`“$\ldots \Omega \in E$” und
aus `A1` gleich “$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **0-4**: $\Omega \in [a \overset{M}{|} b]$.

`4.3:` Aus `1.2.2.Fall`“c ist M_Supremum von E” und
aus `3.2`“$\ldots \Omega \in E$”
folgt via **36-4**: Ω_M_c.

`5:` Aus `4.2`“$\Omega \in [a \overset{M}{|} b]$”
folgt via **41-25**: a_M_Ω.

`6:` Aus →) “M transitiv”,
aus `5`“a_M_Ω” und
aus `4.3`“Ω_M_c”
folgt via **30-38**: a_M_c.

`7:` Aus `6`“a_M_c” und
aus `4.1`“c_M_b”
folgt via **41-25**: $c \in [a \overset{M}{|} b]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $c \in [a \overset{M}{|} b]$.

□

44-10. Wie aus folgendem Beispiel ersichtlich kann **44-9** nicht ohne Weiteres verschärft werden:

44-10.Bemerkung

- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv}) \wedge (\text{inf ist } M\text{\_Infimum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (\text{inf} \in \,]a \overset{M}{|} b[)\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv}) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (inf \in \,]a \overset{M}{|} b])\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv}) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (inf \in [a \overset{M}{|} b[)\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv}) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (sup \in \,]a \overset{M}{|} b[)\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv}) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (sup \in \,]a \overset{M}{|} b])\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  $$\text{“}(M \text{ transitiv}) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (sup \in [a \overset{M}{|} b[)\text{”}$$
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-11. Im folgenden Beispiel wird unter anderem fest gestellt, dass es a, b, c, E und transitive M gibt, so dass c ein M_Infimum von E mit $0 \neq E \subseteq\,]a \overset{M}{|} b[$ mit $c \notin\,]a \overset{M}{|} b[$ ist:

<u>44-11.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) a Menge.

→) b Menge.

→) c Menge.

→) $a \neq b$.

→) $a \neq c$.

→) $b \neq c$.

→) $M = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

→) $E = \{c\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) "$0 \neq E \subseteq\,]a \overset{M}{|} b[\, = \{c\}$" und
"$0 \neq E \subseteq\,]a \overset{M}{|} b] = \{b, c\}$" und
"$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[\, = \{a, c\}$"

c) "a ist M_Infimum von E" und "$a \notin\,]a \overset{M}{|} b[$" und "$a \notin\,]a \overset{M}{|} b]$" .

d) "b ist M_Infimum von E" und "$b \notin\,]a \overset{M}{|} b[$" und "$b \notin [a \overset{M}{|} b[$" .

e) "b ist M_Supremum von E" und "$b \notin\,]a \overset{M}{|} b[$" und "$b \notin [a \overset{M}{|} b[$" .

f) "a ist M_Supremum von E" und "$a \notin\,]a \overset{M}{|} b[$" und "$a \notin\,]a \overset{M}{|} b]$" .

44-12. Gemäß nachfolgendem Beispiel kann **44-9** mit den dort verwendeten Notationen auch im Fall $E =]a \overset{M}{|} b[$ etc. nicht ohne Weiteres verschärft werden:

44-12.Bemerkung

- Die Aussage
“$(M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq]a \overset{M}{|} b[) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von }]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (inf \in]a \overset{M}{|} b[)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
“$(M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von }]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (inf \in]a \overset{M}{|} b])$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
“$(M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq [a \overset{M}{|} b[) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von } [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (inf \in [a \overset{M}{|} b[)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
“$(M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq]a \overset{M}{|} b[) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von }]a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (sup \in]a \overset{M}{|} b[)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
“$(M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq]a \overset{M}{|} b]) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von }]a \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (sup \in]a \overset{M}{|} b])$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
“$(M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq [a \overset{M}{|} b[) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von } [a \overset{M}{|} b[) \Rightarrow (sup \in [a \overset{M}{|} b[)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-13. Im folgenden Beispiel wird unter anderem fest gestellt, dass es a, b, c und transitive M gibt, so dass c ein M_Infimum von $0 \neq]a \overset{M}{|} b[$ mit $c \notin]a \overset{M}{|} b[$ ist:

<u>44-13.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) a Menge.

→) b Menge.

→) c Menge.

→) $a \neq b$.

→) $a \neq c$.

→) $b \neq c$.

→) $M = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) "$0 \neq]a \overset{M}{|} b[= \{c\}$" und
"$0 \neq]a \overset{M}{|} b] = \{b, c\}$" und
"$0 \neq [a \overset{M}{|} b[= \{a, c\}$"

c) "a ist M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b[$" und "$a \notin]a \overset{M}{|} b[$" .

d) "b ist M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b[$" und "$b \notin]a \overset{M}{|} b[$" .

e) "a ist M_Infimum von $]a \overset{M}{|} b]$" und "$a \notin]a \overset{M}{|} b]$" .

f) "a ist M_Supremum von $]a \overset{M}{|} b]$" und "$a \notin]a \overset{M}{|} b]$" .

g) "b ist M_Infimum von $[a \overset{M}{|} b[$" und "$b \notin [a \overset{M}{|} b[$" .

h) "b ist M_Supremum von $[a \overset{M}{|} b[$" und "$b \notin [a \overset{M}{|} b[$" .

44-14. Falls M transitiv ist und falls o eine obere M_Schranke einer nicht leeren TeilKlasse von $\llbracket a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ (oder von $\rrbracket a \overset{M}{|} \cdot\rangle$) ist, dann folgt $o \in \llbracket a \overset{M}{|} \cdot\rangle$:

<u>44-14(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) *o obere M_Schranke von E.*

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq \llbracket a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

oder

$0 \neq E \subseteq \rrbracket a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Dann folgt "$o \in \llbracket a \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

<u>Beweis **44-14**</u>

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \vee 0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.1.2.Fall` $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `1.1.2.Fall`"$\ldots E \subseteq]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus `2`"$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `1.1.2.Fall`"$0 \neq E \ldots$" und
aus `3`"$E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

...

Beweis **44-14**

...

`1.2`: Aus `A1` gleich "$0 \neq E \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`2.1`: Aus →) "o obere M_Schranke von E" und
aus `1.2` "$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: Ω_M_o.

`2.2`: Aus `1.2` "$\ldots \Omega \in E$" und
aus `A1` gleich "$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3`: Aus `2.2` "$\Omega \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: a_M_Ω.

`4`: Aus →) "M transitiv",
aus `3` "a_M_Ω" und
aus `2.1` "Ω_M_o"
folgt via **30-38**: a_M_o.

`5`: Aus `5` "a_M_o"
folgt via **41-25**: $o \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

$\square$

44-15. Unter Bezug auf das folgende Beispiel ist fest zu stellen, dass **44-14** nicht ohne Weiteres verschärft werden kann:

44-15.Bemerkung

Die Aussage

“$(M \text{ transitiv}) \wedge (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$

$$\Rightarrow (o \in \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$$”

ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-16. Es folgt ein Beispiel, in dem eine transitive Klasse M angegeben wird, so dass $o = a$ eine obere M_Schranke von E mit $0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist, aber $o \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ gilt:

44-16.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) a Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $a \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(a, a), (a, c), (c, c), (c, a)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{c\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

c) $0 \neq E \subseteq \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) a obere M_Schranke von E.

e) $a \notin \,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ad $a \neq c$: Diese Voraussetzung garantiert $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

44-17. Gemäß nachfolgendem Beispiel kann **44-14** mit den dort verwendeten Notationen auch im Fall $E = \rbrack a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ nicht ohne Weiteres verschärft werden:

<u>44-17.Bemerkung</u>

Die Aussage

“$(M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq \rbrack a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \rbrack a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$

$\Rightarrow (o \in \rbrack a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$”

ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-18. Es folgt ein Beispiel, in dem eine transitive Klasse M angegeben wird, so dass $o = a$ eine obere M_Schranke des nicht leeren Intervalls $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist, aber $o \notin\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ gilt:

<u>44-18.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ a Menge.

$\rightarrow)$ c Menge.

$\rightarrow)$ $a \neq c$.

$\rightarrow)$ $M = \{(a,a),(a,c),(c,c),(c,a)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $0 \neq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

c) a obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) $a \notin\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ad $a \neq c$: Diese Voraussetzung garantiert $0 \neq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

44-19. Wird **44-14** mit den dort eingesetzten Notationen auf $E = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ angewendet, dann ist das folgende, verschärfte Resultat verfügbar:

44-19(Satz)

Es gelte:

→) *M transitiv.*

→) $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

→) *o obere M_Schranke von* $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Dann folgt "o Maximum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$*".*

Beweis **44-19**

1: Aus →) "$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **0-20**: $0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus →) "M transitiv",

aus →) "o obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus 1 "$0 \neq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **44-14**: $o \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus →) "o obere M_Schranke von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und

aus 2 "$o \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **38-1(Def)**: o ist M_Maximum von $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

□

44-20. Unter Bezugnahme auf das folgende Beispiel kann fest gestellt werden, dass es transitive M und nicht leere Intervalle $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ mit oberer M_Schranke o gibt, so dass o *kein* M_Maximum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist:

<u>44-20.Bemerkung</u>

Die Aussage

"$(M$ transitiv$) \wedge (0 \neq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle) \wedge (o$ obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$

$\Rightarrow (o$ ist M_Maximum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle)$"

ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-21. Es folgt ein Beispiel, in dem eine transitive Klasse M angegeben wird, so dass $o = a$ eine obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ mit $0 \neq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist, aber o *kein* M_Maximum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ ist:

<u>44-21.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) a Menge.

→) c Menge.

→) $a \neq c$.

→) $M = \{(a,a),(a,c),(c,c),(c,a)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $0 \neq\,]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$.

c) a obere M_Schranke von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) a kein M_Maximum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ad $a \neq c$: Diese Voraussetzung garantiert $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$ und $a \notin \{c\}$, so dass a via **38-1(Def)** nicht als M_Maximum von $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = \{c\}$ in Frage kommt.

44-22. Falls M transitiv ist und falls u eine untere M_Schranke einer nicht leeren TeilKlasse von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$ (oder von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$) ist, dann folgt $u \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$:

44-22(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *transitiv.*

$\rightarrow$) u *untere* M_*Schranke von* E.

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$. *oder* $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

Dann folgt "$u \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$".

<u>Beweis **44-22**</u>

`1.1:` Nach "→) *oder*" gilt: $0 \neq E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b] \vee 0 \neq E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b[$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`1.1.2.Fall` $0 \neq E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b[$.

`2:` Via **41-27** gilt: $\langle \cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `1.1.2.Fall` "$\ldots E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b[$" und aus `2` "$\langle \cdot \overset{M}{|} b[\subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$" folgt via **0-6**: $E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`4:` Aus `1.1.2.Fall` "$0 \neq E \ldots$" und aus `3` "$E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$" folgt: $0 \neq E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"

...

Beweis **44-22**

...

`1.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq E \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`2.1:` Aus →) "u untere M_Schranke von E" und
aus `1.2` "$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: u_M_Ω.

`2.2:` Aus `1.2` "$\ldots \Omega \in E$" und
aus `A1` gleich "$\ldots E \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `2.2` "$\Omega \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: Ω_M_b.

`4:` Aus →) "M transitiv",
aus `2.1` "u_M_Ω" und
aus `3` "Ω_M_b"
folgt via **30-38**: u_M_b.

`5:` Aus `5` "u_M_b"
folgt via **41-25**: $u \in \langle \cdot \overset{M}{|} b]$.

□

44-23. Unter Bezug auf das folgende Beispiel ist fest zu stellen, dass **44-22** nicht ohne Weiteres verschärft werden kann:

44-23.Bemerkung

Die Aussage

"$(M \text{ transitiv}) \wedge (u \text{ untere } M\_\text{Schranke von } E) \wedge (0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b[\!])$

$\Rightarrow (u \in \langle\cdot \overset{M}{|}\ b[\!])$"

ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-24. Es folgt ein Beispiel, in dem eine transitive Klasse M angegeben wird, so dass $u = b$ eine untere M_Schranke von E mit $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$ ist, aber $u \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$ gilt:

<u>44-24.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(b,b),(b,c),(c,c),(c,b)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{c\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $\langle\cdot \overset{M}{|}\, b[\, = \{c\}$.

c) $0 \neq E \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

d) b untere M_Schranke von E.

e) $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

Ad $b \neq c$: Diese Voraussetzung garantiert $\langle\cdot \overset{M}{|}\, b[\, = \{c\}$.

44-25. Gemäß nachfolgendem Beispiel kann **44-22** mit den dort verwendeten Notationen auch im Fall $E = \langle\cdot \overset{M}{|}\ b[\![$ nicht ohne Weiteres verschärft werden:

<u>44-25.Bemerkung</u>

Die Aussage

"$(M \text{ transitiv}) \wedge (0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\ b[\![) \wedge (u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \langle\cdot \overset{M}{|}\ b[\![)$
$\Rightarrow (u \in \langle\cdot \overset{M}{|}\ b[\![)$"

ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-26. Es folgt ein Beispiel, in dem eine transitive Klasse M angegeben wird, so dass $u = b$ eine untere M_Schranke des nicht leeren Intervalls $\langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$ ist, aber $u \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$ gilt:

<u>44-26.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) b Menge.

$\rightarrow$) c Menge.

$\rightarrow$) $b \neq c$.

$\rightarrow$) $M = \{(b,b),(b,c),(c,c),(c,b)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[\,= \{c\}$.

c) b untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

d) $b \notin \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[$.

Ad $b \neq c$: Diese Voraussetzung garantiert $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|}\, b[\,= \{c\}$.

44-27. Wird **44-22** mit den dort eingesetzten Notationen auf $E = \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ angewendet, dann ist das folgende, verschärfte Resultat verfügbar:

44-27(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *M transitiv.*

$\rightarrow\!)$ $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

$\rightarrow\!)$ *u untere M_Schranke von* $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

Dann folgt "u Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$*".*

Beweis **44-27**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **0-20**: $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "M transitiv",

aus $\rightarrow\!)$ "u untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und

aus 1 "$0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **44-22**: $u \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

3: Aus $\rightarrow\!)$ "u untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$" und

aus 2 "$u \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"

folgt via **38-1(Def)**: u ist M_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

□

44-28. Unter Bezugnahme auf das folgende Beispiel kann fest gestellt werden, dass es transitive M und nicht leere Intervalle $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ mit unterer M_Schranke u gibt, so dass u *kein* M_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ ist:

44-28.Bemerkung

Die Aussage

"$(M$ transitiv$) \wedge (0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[) \wedge (u$ untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[)$

$\Rightarrow (u$ ist M_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[)$"

ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

44-29. Es folgt ein Beispiel, in dem eine transitive Klasse M angegeben wird, so dass $u = b$ eine untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ mit $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[$ ist, aber u *kein* M_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$ ist:

<u>44-29.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ b Menge.

$\rightarrow)$ c Menge.

$\rightarrow)$ $b \neq c$.

$\rightarrow)$ $M = \{(b,b),(b,c),(c,c),(c,b)\}$.

Dann folgt:

a) M transitiv.

b) $0 \neq \langle\cdot \overset{M}{|} b[= \{c\}$.

c) b untere M_Schranke von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

d) b kein M_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[$.

Ad $b \neq c$: Diese Voraussetzung garantiert $\langle\cdot \overset{M}{|} b[= \{c\}$ und $b \notin \{c\}$, so dass b via **38-1(Def)** nicht als M_Minimum von $\langle\cdot \overset{M}{|} b[= \{c\}$ in Frage kommt.

M_Kette: Minimum. Maximum. minimales Element. maximales Element.

Ersterstellung: 25/04/07 **Letzte Änderung: 05/05/11**

45-1. Wenn in einer M_Kette K ein Element $p \in K$ von keinem anderen Element von K "bezüglich M echt untertroffen", dann ist p ein M_Minimum:

45-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *K ist M_Kette.*

$\rightarrow$) $p \in K$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_p))$.

Dann folgt "p ist M_Minimum von K".

Beweis **45-1**

1.1: Aus →) "K ist M_Kette"
folgt via **30-69**: $K \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus →) "$p \in K$" und
aus 1.1 "$K \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **0-4**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}p \in \mathsf{dom}\, M\text{"}}$

Thema1.2 $\beta \in K$.

2: Aus Thema1.2 "$\beta \in K$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_p))$"
folgt: $\neg(\beta\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

3: Aus →) "K ist M_Kette",
aus Thema1.2 "$\beta \in K$",
aus →) "$p \in K$" und
aus 2 "$\neg(\beta\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$"
folgt via **41-8**: p_M_β.

Ergo Thema1.2: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\forall \beta : (\beta \in K) \Rightarrow (p\_M\_\beta)\text{"}}$

1.3: Aus A1 gleich "$p \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus A2 gleich "$\forall \beta : (\beta \in K) \Rightarrow (p\_M\_\beta)$"
folgt via **35-1(Def)**: p untere M_Schranke von K.

2: Aus 1.3 "p untere M_Schranke von K" und
aus →) "$p \in K$"
folgt via **38-1(Def)**: p ist M_Minimum von K.

□

45-2. Wenn in einer M_Kette K ein Element $p \in K$ von keinem anderen Element von K "bezüglich M echt übertroffen", dann ist p ein M_Maximum:

<u>45-2(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *K ist M_Kette.*

$\rightarrow)$ $p \in K$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\alpha))$.

Dann folgt "p ist M_Maximum von K".

Beweis **45-2**

`1.1:` Aus →) “K ist M_Kette”
folgt via **30-69**: $K \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`2:` Aus →) “$p \in K$” und
aus `1.1` “$K \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **0-4**: `A1` | “$p \in \mathsf{ran}\, M$”

`Thema1.2` $\beta \in K$.

`2:` Aus `Thema1.2` “$\beta \in K$” und
aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha))$”
folgt: $\neg(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta)$.

`3:` Aus →) “K ist M_Kette”,
aus `Thema1.2` “$\beta \in K$”,
aus →) “$p \in K$” und
aus `2` “$\neg(p\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta)$”
folgt via **41-8**: β_M_p.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | “$\forall \beta : (\beta \in K) \Rightarrow (\beta\_M\_p)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$p \in \mathsf{ran}\, M$” und
aus `A2` gleich “$\forall \beta : (\beta \in K) \Rightarrow (\beta\_M\_p)$”
folgt via **35-1(Def)**: p obere M_Schranke von K.

`2:` Aus `1.3` “p obere M_Schranke von K” und
aus →) “$p \in K$”
folgt via **38-1(Def)**: p ist M_Maximum von K.

□

45-3. Im folgenden Satz wird fest gestellt, dass in M_Ketten M_minimale Elemente und M_Minima übereinstimmen. Die Beweis-Reihenfolge ist `ii) - i) - ii)`:

> **45-3(Satz)**
>
> *Unter der Voraussetzung ...*
>
> →) *K ist M_Kette.*
>
> *... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*
>
> `i)` *p ist M_minimales Element von K.*
>
> `ii)` *p ist M_Minimum von K.*

Beweis **45-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich p ist M_Minimum von K..

Aus `VS` gleich "p ist M_Minimum von K"
folgt via **40-1**: p ist M_minimales Element von K.

Beweis **45-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich p ist M_minimales Element von K..

`1.1:` Aus `VS` gleich "p ist M_minimales Element von K"
folgt via **39-1(Def)**: `A1` | "$p \in K$"

`Thema1.2` $\alpha \in K$.

`2:` Aus →) "K ist M_Kette",
aus `Thema1.2` "$\alpha \in K$" und
aus `A1` gleich "$p \in K$"
folgt via **30-68(Def)**: α_M_p $\vee$ p_M_α.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` α_M_p.

Aus `VS` gleich "p ist M_minimales Element von K",
aus `Thema1.2` "$\alpha \in K$" und
aus `2.1.Fall` "α_M_p"
folgt via **39-1(Def)**: p_M_α.

`3.2.Fall` p_M_α.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: p_M_α.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (p$_$M$_$\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$p \in K$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (p$_$M$_$\alpha)$"
folgt via **38-6**: p ist M_Minimum von K.

□

45-4. Im folgenden Satz wird fest gestellt, dass in M_Ketten M_maximale Elemente und M_Maxima übereinstimmen. Die Beweis-Reihenfolge ist `ii) - i) - ii)`:

> **45-4(Satz)**
>
> *Unter der Voraussetzung ...*
>
> →) *K ist M_Kette.*
>
> *... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*
>
> `i)` *p ist M_maximales Element von K.*
>
> `ii)` *p ist M_Maximum von K.*

Beweis **45-4** `ii) ⇒ i)` `VS` gleich p ist M_Maximum von K.

Aus `VS` gleich "p ist M_Maximum von K"
folgt via **40-1**: p ist M_maximales Element von K.

Beweis **45-4** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ VS gleich p ist M_maximales Element von K.

1.1: Aus VS gleich "p ist M_maximales Element von K"
folgt via **39-1(Def)**: A1 | "$p \in K$"

Thema1.2 $\alpha \in K$.

2: Aus →) "K ist M_Kette",
aus A1 gleich "$p \in K$" und
aus Thema1.2 "$\alpha \in K$"
folgt via **30-68(Def)**: $p\_M\_\alpha \vee \alpha\_M\_p$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall p_M_α.

Aus →) "p ist M_maximales Element von K",
aus Thema1.2 "$\alpha \in K$" und
aus 2.1.Fall "p_M_α"
folgt via **39-1(Def)**: α_M_p.

3.2.Fall α_M_p.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: α_M_p.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"

1.3: Aus A1 gleich "$p \in K$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"
folgt via **38-7**: p ist M_Maximum von K.

□

M antiSymmetrisch: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$.

keine untere Schranke.

keine obere Schranke.

Infimum. Supremum.

minimales Element. maximales Element.

M_Kette.

M transitiv *und* antiSymmetrisch: vermehrend. verringernd.

Infimum. Supremum.

$\overset{\mathbf{ir}}{M}$.

M_Intervalle.

Ersterstellung: 20/02/06 **Letzte Änderung: 25/05/11**

46-1. Nun werden einige Konsequenzen für $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ gezogen, wenn M antiSymmetrisch ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a - c) - b)`:

<u>46-1(Satz)</u>

Aus "M antiSymmetrisch" und ...

`a)` *... und "$p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q$" folgt "$\neg(q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p)$".*

`b)` *... und "p_-M_-q" folgt "$\neg(q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p)$".*

`c)` *... und "$p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q$" folgt "$\neg(q_-M_-p)$".*

<u>Beweis **46-1**</u> `ac)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p \overset{\mathbf{ir}}{\_M\_} q)$.

`1:` Es gilt: $(q\_M\_p) \vee (\neg(q\_M\_p))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` q_M_p.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \overset{\mathbf{ir}}{\_M\_} q$"
folgt via **41-3**: p_M_q.

`3.1:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…",
aus `2`"p_M_q" und
aus `1.1.Fall`"q_M_p"
folgt via **30-47**: $p = q$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$p \overset{\mathbf{ir}}{\_M\_} q$"
folgt via **41-3**: $p \neq q$.

`4:` Es gilt `3.1`"$p = q$".
Es gilt `3.2`"$p \neq q$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(q\_M\_p)$.

`1.2.Fall` $\neg(q\_M\_p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$\neg(q\_M\_p)$"

`2.a):` Aus `A1` gleich "$\neg(q\_M\_p)$"
folgt via **41-5**: $\neg(q \overset{\mathbf{ir}}{\_M\_} p)$.

`2.c):` Aus `A1`
folgt: $\neg(q\_M\_p)$.

Beweis **46-1** `b) VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p\_M\_q)$.

`1:` Es gilt: $(q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_p) \vee (\neg(q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_p))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_p$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_p$"
folgt via **41-3**: q_M_p.

`3.1:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch ... ",
aus `VS` gleich "$\dots p\_M\_q$" und
aus `2` "q_M_p"
folgt via **30-47**: $p = q$.

`3.2:` Aus `1.1.Fall` "$q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_p$"
folgt via **41-3**: $q \neq p$.

`4:` Es gilt `3.1` "$p = q$".
Es gilt `3.2` "$q \neq p$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_p)$.

`1.2.Fall` $\neg(q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(q\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_p)$.

□

46-2. Falls M antiSymmetrisch ist, dann hat x höchstens ein M_Infimum und wenn inf ein M_Infimum von x ist, dann gibt es keine untere M_Schranke p von x mit $inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$ und ausserdem gilt für alle $\alpha \in x$ die Aussage $\neg(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_inf)$. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

46-2(Satz)

Aus "M antiSymmetrisch"
und "inf ist M_Infimum von x"
und ...

`a)` *... und "j ist M_Infimum von x" folgt "$inf = j$".*

`b)` *... und "$inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$" folgt "$p$ keine untere M_Schranke von x".*

`c)` *... und "$\alpha \in x$" folgt "$\neg(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_inf)$".*

Beweis **46-2** `a)` `VS` gleich (M antiSymmetrisch) $\wedge(inf$ ist M_Infimum von $x) \wedge (j$ ist M_Infimum von $x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "... inf ist M_Infimum von x ..." und
aus `VS` gleich "... j ist M_Infimum von x"
folgt via **36-6**: $(inf\_M\_j) \wedge (j\_M\_inf)$.

`2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch... ",
aus `1`"inf_M_j ..." und
aus `1`"... j_M_inf"
folgt via **30-47**: $inf = j$.

`c)` `VS` gleich (M antiSymmetrisch) $\wedge$ (inf ist M_Infimum von x) $\wedge$ $(\alpha \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "... inf ist M_Infimum von x ..." und
aus `VS` gleich "... $\alpha \in x$"
folgt via **36-3**: inf_M_α.

`2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch... " und
aus `1`"inf_M_α"
folgt via **46-1**: $\neg(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_inf)$.

Beweis **46-2** `b)` `VS` gleich

$$(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (inf \text{ ist } M\text{\_Infimum von } x) \wedge (inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p).$$

`1.1:` Es gilt: p untere M_Schranke von x $\vee$ $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` p untere M_Schranke von x.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots inf$ ist M_Infimum von $x \ldots$" und aus `1.1.1.Fall` "p untere M_Schranke von x" folgt via **36-1(Def)**: p_M_inf.

`2.2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…" und aus `VS` gleich "$\ldots inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$" folgt via **46-1**: $\neg(p\_M\_inf)$.

`3:` Es gilt `2.1` "p_M_inf". Es gilt `2.2` "$\neg(p\_M\_inf)$". Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

`1.1.2.Fall` $\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\neg(p$ untere M_Schranke von $x)$" folgt via **35-1(Def)**: p keine untere M_Schranke von x.

□

46-3. Falls M antiSymmetrisch ist, dann hat x höchstens ein M_Supremum und wenn sup ein M_Supremum von x ist, dann gibt es keine obere M_Schranke p von x mit $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$ und ausserdem gilt für alle $\alpha \in x$ die Aussage $\neg(sup\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha)$. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

<u>**46-3(Satz)**</u>

Aus "M antiSymmetrisch"
und "sup ist M_Supremum von x"
und ...

`a)` *... und "s ist M_Supremum von x" folgt "$sup = s$".*

`b)` *... und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$" folgt "$p$ keine obere M_Schranke von x".*

`c)` *... und "$\alpha \in x$" folgt "$\neg(sup\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha)$".*

<u>Beweis **46-3**</u> `a)` `VS` gleich (M antiSymmetrisch) $\wedge$(sup ist M_Supremum von x) $\wedge$ (s ist M_Supremum von x).

`1:` Aus `VS` gleich "... sup ist M_Supremum von x ..." und
aus `VS` gleich "... s ist M_Supremum von x"
folgt via **36-6**: $(sup\_M\_s) \wedge (s\_M\_sup)$.

`2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch... ",
aus `1`"sup_M_s ..." und
aus `1`"... s_M_sup"
folgt via **30-47**: $sup = s$.

`c)` `VS` gleich (M antiSymmetrisch) $\wedge$ (sup ist M_Supremum von x) $\wedge$ ($\alpha \in x$).

`1:` Aus `VS` gleich "... sup ist M_Supremum von x ..." und
aus `VS` gleich "... $\alpha \in x$"
folgt via **36-4**: α_M_sup.

`2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch... " und
aus `1`"α_M_sup"
folgt via **46-1**: $\neg(sup\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha)$.

Beweis **46-3** `b)` `VS` gleich

$$(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (sup \text{ ist } M\text{\_Supremum von } x) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup).$$

`1.1:` Es gilt: p obere M_Schranke von x $\vee$ $\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` p obere M_Schranke von x.

`2.1:` Aus `VS` gleich "… sup ist M_Supremum von x …"
und aus `1.1.1.Fall` "p obere M_Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: sup_M_p.

`2.2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…" und
aus `VS` gleich "… $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$"
folgt via **46-1**: $\neg(sup\_M\_p)$.

`3:` Es gilt `2.1` "sup_M_p".
Es gilt `2.2` "$\neg(sup\_M\_p)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$.

`1.1.2.Fall` $\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\neg(p$ obere M_Schranke von $x)$"
folgt via **35-1(Def)**: p keine obere M_Schranke von x.

□

46-4. Falls M antiSymmetrisch ist und falls μin ein M_minimales Element von x ist, dann ist jedes Element von x, das "von μin bezüglich M übertroffen wird" gleich μin:

<u>46-4(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *M antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) *μin ist M_minimales Element von x.*

$\rightarrow$) *$p \in x$.*

$\rightarrow$) *p_M_μin.*

Dann folgt "$p = \mu in$".

<u>Beweis **46-4**</u>

1: Aus $\rightarrow$) "μin ist M_minimales Element von x",
aus $\rightarrow$) "$p \in x$" und
aus $\rightarrow$) "p_M_μin"
folgt via **39-1(Def)**: μin_M_p.

2: Aus $\rightarrow$) "M antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow$) "p_M_μin" und
aus 1 "μin_M_p"
folgt via **30-47**: $p = \mu in$.

□

46-5. Falls M antiSymmetrisch ist und falls μax ein M_maximales Element von x ist, dann ist jedes Element von x, das "μax bezüglich M übertrifft" gleich μax:

> **46-5(Satz)**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow$) *M antiSymmetrisch.*
>
> $\rightarrow$) *μax ist M_maximales Element von x.*
>
> $\rightarrow$) *$p \in x$.*
>
> $\rightarrow$) *μax_M_p.*
>
> *Dann folgt "$p = \mu ax$".*

Beweis **46-5**

1: Aus $\rightarrow$) "μax ist M_maximales Element von x",
aus $\rightarrow$) "$p \in x$" und
aus $\rightarrow$) "μax_M_p"
folgt via **39-1(Def)**: p_M_μax.

2: Aus $\rightarrow$) "M antiSymmetrisch",
aus 1 "p_M_μax" und
aus $\rightarrow$) "μax_M_p"
folgt via **30-47**: $p = \mu ax$.

□

46-6. Falls K eine M_Kette mit antiSymmetrischer M ist, dann hat K höchstens ein M_minimales Element:

46-6(Satz)

Es gelte:

→) M *antiSymmetrisch.*

→) K *ist* M*_Kette.*

→) μin *ist* M*_minimales Element von* K.

→) μ *ist* M*_minimales Element von* K.

Dann folgt "$\mu in = \mu$*".*

Beweis **46-6**

1.1: Aus →) "K ist M_Kette" und
aus →) "μin ist M_minimales Element von K"
folgt via **45-3**: μin ist M_Minimum von K.

1.2: Aus →) "K ist M_Kette" und
aus →) "μ ist M_minimales Element von K"
folgt via **45-3**: μ ist M_Minimum von K.

2.1: Aus 1.1 "μin ist M_Minimum von K"
folgt via **38-6**: μin ist M_Infimum von K.

2.2: Aus 1.2 "μ ist M_Minimum von K"
folgt via **38-6**: μ ist M_Infimum von K.

3: Aus 1 "M antiSymmetrisch",
aus 2.1 "μin ist M_Infimum von K" und
aus 2.2 "μ ist M_Infimum von K"
folgt via **46-2**: $\mu in = \mu$.

□

46-7. Falls K eine M_Kette mit antiSymmetrischer M ist, dann hat K höchstens ein M_maximales Element:

46-7(Satz)

Es gelte:

→) *M antiSymmetrisch.*

→) *K ist M_Kette.*

→) *μax ist M_maximales Element von K.*

→) *μ ist M_maximales Element von K.*

Dann folgt "$\mu ax = \mu$".

Beweis **46-7**

`1.1:` Aus →) "K ist M_Kette" und
aus →) "μin ist M_maximales Element von K"
folgt via **45-4**: μax ist M_Maximum von K.

`1.2:` Aus →) "K ist M_Kette" und
aus →) "μ ist M_maximales Element von K"
folgt via **45-4**: μ ist M_Maximum von K.

`2.1:` Aus `1.1` "μax ist M_Maximum von K"
folgt via **38-7**: μax ist M_Supremum von K.

`2.2:` Aus `1.2` "μ ist M_Maximum von K"
folgt via **38-7**: μ ist M_Supremum von K.

`3:` Aus `1` "M antiSymmetrisch",
aus `2.1` "μax ist M_Supremum von K" und
aus `2.2` "μ ist M_Supremum von K"
folgt via **46-3**: $\mu in = \mu$.

□

46-8. Falls M antiSymmetrisch ist und falls eine Klasse x *sowohl* ein M_Minimum *als auch* ein M_minimales Element hat, dann sind diese beiden Elemente von x gleich:

46-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) *min ist M_Minimum von x.*

$\rightarrow$) *μin ist M_minimales Element von x.*

Dann folgt "min = μin".

Beweis **46-8**

1: Aus $\rightarrow$) "min ist M_Minimum von x" und
aus $\rightarrow$) "μin ist M_minimales Element von x"
folgt via **40-4**: $(min\_M\_\mu in) \wedge (\mu in\_M\_min)$.

2: Aus $\rightarrow$) "M antiSymmetrisch",
aus 1 "$min\_M\_\mu in \ldots$" und
aus 1 "$\ldots \mu in\_M\_min$"
folgt via **30-47**: $min = \mu in$.

□

46-9. Falls M antiSymmetrisch ist und falls eine Klasse x *sowohl* ein M_Maximum *als auch* ein M_maximales Element hat, dann sind diese beiden Elemente von x gleich:

> **46-9(Satz)**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow$) *M antiSymmetrisch.*
>
> $\rightarrow$) *max ist M_Maximum von x.*
>
> $\rightarrow$) *μax ist M_maximales Element von x.*
>
> *Dann folgt "$max = \mu ax$".*

Beweis **46-9**

1: Aus $\rightarrow$) "max ist M_Maximum von x" und
aus $\rightarrow$) "μax ist M_maximales Element von x"
folgt via **40-5**: $(max\_M\_\mu ax) \wedge (\mu ax\_M\_max)$.

2: Aus $\rightarrow$) "M antiSymmetrisch",
aus 1 "$max\_M\_\mu ax \ldots$" und
aus 1 "$\ldots \mu ax\_M\_max$"
folgt via **30-47**: $max = \mu ax$.

□

46-10. Falls M antiSymmetrisch ist und falls für ein $p \in x$ die Aussage $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$ gilt, dann ist q *kein* M_minimales Element von x. Ähnliches gilt für Klassen, die keine M_maximalen Elemente von x sind:

46-10(Satz)

Aus "M antiSymmetrisch" und ...

a) *... und "$p \in x$" und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$"*
folgt "q kein M_minimales Element von x".

b) *... und "$p \in x$" und "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$"*
folgt "q kein M_maximales Element von x".

Beweis **46-10** `a)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p \in x) \wedge (p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q)$.

`1:` Es gilt: q ist M_minimales Element von x $\vee(\neg(q$ ist M_minimales Element von $x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` q ist M_minimales Element von x.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q$" folgt via **41-3**: p_M_q.

`3:` Aus `1.1.Fall` "q ist M_minimales Element von x", aus `VS` gleich "$\ldots p \in x \ldots$" und aus `2` "p_M_q" folgt via **39-1(Def)**: q_M_p.

`4:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…" und aus `VS` gleich "$\ldots p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q$" folgt via **46-1**: $\neg(q\_M\_p)$.

`5:` Es gilt `4` "$\neg(q\_M\_p)$".
Es gilt `3` "q_M_p".
Ex falso quodlibet folgt: q kein M_minimales Element von x.

`1.2.Fall` $\neg(q$ ist M_minimales Element von $x)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(q$ ist M_minimales Element von $x)$" folgt via **39-1(Def)**: q kein M_minimales Element von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: q kein M_minimales Element von x.

Beweis **46-10** `b)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p \in x) \wedge (q \_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_ p)$.

`1:` Es gilt: q ist M_maximales Element von x $\vee(\neg(q$ ist M_maximales Element von $x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` q ist M_maximales Element von x.

`2:` Aus `VS` gleich "… $q \_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_ p$"
folgt via **41-3**: q_M_p.

`3:` Aus `1.1.Fall` "q ist M_maximales Element von x",
aus `VS` gleich "… $p \in x$ …" und
aus `2` "q_M_p"
folgt via **39-1(Def)**: p_M_q.

`4:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…" und
aus `VS` gleich "… $q \_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_ p$"
folgt via **46-1**: $\neg(p\_M\_q)$.

`5:` Es gilt `4` "$\neg(p\_M\_q)$".
Es gilt `3` "p_M_q".
Ex falso quodlibet folgt: q kein M_maximales Element von x.

`1.2.Fall` $\neg(q$ ist M_maximales Element von $x)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(q$ ist M_maximales Element von $x)$"
folgt via **39-1(Def)**: q kein M_maximales Element von x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
q kein M_maximales Element von x.

□

46-11. Das folgende, auf transitive *und* antiSymmetrische Klassen M zutreffende Resultat für M_vermehrende Klassen ist ein Hilfsresultat für Späteres:

46-11(Satz)

Es gelte:

→) M *transitiv.*

→) M *antiSymmetrisch.*

→) w *ist* M*_vermehrend auf* E.

→) $0 \neq y \subseteq E$.

→) *sup ist* M*_Supremum von* y.

→) $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$.

Dann gibt es Ω, Ψ*, so dass gilt:*

e.1) $\Omega \in y$.

e.2) $(\Omega, \Psi) \in w$.

e.3) $\neg(\Psi\_M\_p)$.

Beweis **46-11**

1: Es gilt: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha,\beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_M\_p)$
$\vee$
$\exists\Omega,\Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega,\Psi) \in w) \wedge (\neg(\Psi\_M\_p))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha,\beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_M\_p)$.

3: Aus →) " M transitiv ",
aus →) " w ist M_vermehrend auf E ",
aus →) " $0 \neq y \subseteq E$ " und
aus 1.1.Fall " $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha,\beta) \in w)) \Rightarrow (\beta\_M\_p)$ "
folgt via **37-18**: p obere M_Schranke von y.

4: Aus →) " sup ist M_Supremum von v " und
aus 3 " p obere M_Schranke von v "
folgt via **36-1(Def)**: sup_M_p.

5: Aus 1 " $\ldots M$ antiSymmetrisch " und
aus 4 " sup_M_p "
folgt via **46-1**: $\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup)$.

6: Es gilt 5 " $\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup)$ ".
Es gilt →) " $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$ ".
Ex falso quodlibet folgt:
$\exists\Omega,\Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega,\Psi) \in w) \wedge (\neg(\Psi\_M\_p))$.

2.2.Fall $\exists\Omega,\Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega,\Psi) \in w) \wedge (\neg(\Psi\_M\_p))$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\exists\Omega,\Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega,\Psi) \in w) \wedge (\neg(\Psi\_M\_p))$.

□

46-12. Das folgende, auf transitive *und* antiSymmetrische Klassen M zutreffende Resultat für M_verringernde Klassen ist ein Hilfsresultat für Späteres:

46-12(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) *M antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) *w ist M_verringernd auf E.*

$\rightarrow$) $0 \neq y \subseteq E$.

$\rightarrow$) *inf ist M_Infemum von y.*

$\rightarrow$) $inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$.

Dann gibt es Ω, Ψ, so dass gilt:

e.1) $\Omega \in y$.

e.2) $(\Omega, \Psi) \in w$.

e.3) $\neg(p\_M\_\Psi)$.

<u>Beweis **46-12**</u>

1: Es gilt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (p\_M\_\beta)$
$\vee$
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \Psi) \in w) \wedge (\neg(p\_M\_\Psi))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (p\_M\_\beta)$.

3: Aus →) "M transitiv",
aus →) "w ist M_verringernd auf E",
aus →) "$0 \neq y \subseteq E$" und
aus 1.1.Fall "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (p\_M\_\beta)$"
folgt via **37-19**: p untere M_Schranke von y.

4: Aus →) "inf ist M_Infimum von y" und
aus 3 "p untere M_Schranke von y"
folgt via **36-1(Def)**: p_M_inf.

5: Aus 1 "… M antiSymmetrisch" und
aus 4 "p_M_inf"
folgt via **46-1**: $\neg(inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

6: Es gilt 5 "$\neg(inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$".
Es gilt →) "$inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \Psi) \in w) \wedge (\neg(p\_M\_\Psi))$.

`2.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \Psi) \in w) \wedge (\neg(p\_M\_\Psi))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \Psi) \in w) \wedge (\neg(p\_M\_\Psi))$.

□

46-13. Das folgende Spezialisierung von **46-11** für M_vermehrende Funktionen ein Hilfsresultat für Späteres:

46-13(Satz)

Es gelte:

→) *M transitiv.*

→) *M antiSymmetrisch.*

→) *f ist M_vermehrend auf E.*

→) *f Funktion.*

→) $0 \neq y \subseteq E$.

→) *sup ist M_Supremum von y.*

→) $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$.

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

`e.1)` $\Omega \in y$.

`e.2)` $\neg(f(\Omega)\_M\_p)$.

<u>Beweis **46-13**</u>

1: Aus →) "M transitiv",
aus →) "M antiSymmetrisch",
aus →) "f ist M_vermehrend auf E",
aus →) "$0 \neq y \subseteq E$",
aus →) "sup ist M_Supremum von y" und
aus →) "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$"
folgt via **46-11**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\neg(\Psi\_M\_p))$.

2: Aus →) "f Funktion" und
aus 1 "$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

3: Aus 1 "$\ldots \neg(\Psi\_M\_p)$" und
aus 2 "$\Psi = f(\Omega)$"
folgt: $\neg(f(\Omega)\_M\_p)$.

4: Aus 1 "$\exists \Omega \ldots$",
aus 1 "$\ldots \Omega \in y \ldots$" und
aus 3 "$\neg(f(\Omega)\_M\_p)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\neg(f(\Omega)\_M\_p))$.

□

46-14. Das folgende Spezialisierung von **46-12** für M_verringernde Funktionen ein Hilfsresultat für Späteres:

46-14(Satz)

Es gelte:

→) *M transitiv.*

→) *M antiSymmetrisch.*

→) *f ist M_verringernd auf E.*

→) *f Funktion.*

→) $0 \neq y \subseteq E$.

→) *inf ist M_Infimum von y.*

→) $inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$.

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

e.1) $\Omega \in y$.

e.2) $\neg(p\_M\_f(\Omega))$.

Beweis **46-14**

1: Aus →) "M transitiv",
aus →) "M antiSymmetrisch",
aus →) "f ist M_verringernd auf E",
aus →) "$0 \neq y \subseteq E$",
aus →) "inf ist M_Infimum von y" und
aus →) "$p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_inf$"
folgt via **46-12**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\neg(p\_M\_\Psi))$.

2: Aus →) "f Funktion" und
aus 1 "$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

3: Aus 1 "$\ldots \neg(p\_M\_\Psi)$" und
aus 2 "$\Psi = f(\Omega)$"
folgt: $\neg(p\_M\_f(\Omega))$.

4: Aus 1 "$\exists \Omega \ldots$",
aus 1 "$\ldots \Omega \in y \ldots$" und
aus 3 "$\neg(p\_M\_f(\Omega))$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\neg(p\_M\_f(\Omega)))$.

□

46-15. Wenn M sowohl transitiv als auch antiSymmetrisch ist, dann ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ transitiv:

<u>46-15(Satz)</u>

Aus "M transitiv" und "M antiSymmetrisch" folgt "$\overset{\mathbf{ir}}{M}$ transitiv".

Beweis **46-15** `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch})$.

`Thema1` $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta) \wedge (\beta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma)$.

`2.1:` Es gilt: $(\alpha = \gamma) \vee (\alpha \neq \gamma)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $\alpha = \gamma$.

`3.1:` Aus `2.1.1.Fall` "$\alpha = \gamma$" und
aus `Thema1` "$\ldots \beta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$"
folgt: $\beta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots M$ antiSymmetrisch" und
aus `Thema1` "$\ldots \alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta \ldots$"
folgt via **46-1**: $\neg(\beta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha)$.

`4:` Es gilt `3.1` "$\beta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha$".
Es gilt `3.2` "$\neg(\beta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \neq \gamma$.

`2.1.2.Fall` $\alpha \neq \gamma$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\alpha \neq \gamma$"

`2.2:` Aus `VS` gleich "M transitiv…",
aus `A1` gleich "$\alpha \neq \gamma$",
aus `Thema1` "$\ldots \alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta \ldots$" und
aus `Thema1` "$\ldots \beta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma$"
folgt via **44-4**: $\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\ \gamma$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta) \wedge (\beta\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\gamma).$$

Konsequenz via **30-30(Def)**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ transitiv in $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **30-30(Def)**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ transitiv.

□

46-16. Wenn M transitiv und antiSymmetrisch ist, dann folgt - unter anderem - aus $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q\_M\_w$ die Aussage $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$:

<u>**46-16(Satz)**</u>

Aus "M transitiv" und "M antiSymmetrisch" und ...

a) *... und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$" folgt "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$".*

b) *... und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" und "$p\_M\_w$" folgt "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$".*

c) *... und "p_M_q" und "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$" folgt "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$".*

<u>Beweis **46-16**</u> a)

VS gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \wedge (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)$.

1: Aus VS gleich "M transitiv..." und
aus VS gleich "...M antiSymmetrisch..."
folgt via **46-15**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ transitiv.

2: Aus 1"$\overset{\mathbf{ir}}{M}$ transitiv",
aus VS gleich "...$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$..." und
aus VS gleich "...$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$"
folgt via **30-38**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$.

<u>Beweis **46-16** `b)`</u>

`VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q) \wedge (q\_M\_w)$.

`1.1:` Es gilt: $(p = w) \vee (p \neq w)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $p = w$.

`2.1:` Aus `1.1.1.Fall` "$p = w$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q\_M\_w$"
folgt: q_M_p.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots M$ antiSymmetrisch$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q \ldots$"
folgt via **46-1**: $\neg(q\_M\_p)$.

`3:` Es gilt `2.1` "q_M_p".
Es gilt `2.2` "$\neg(q\_M\_p)$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \neq w$.

`1.1.2.Fall` $p \neq w$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$p \neq w$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "M transitiv$\ldots$",
aus `A1` gleich "$p \neq w$",
aus `VS` gleich "$\ldots p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_q \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q\_M\_w$"
folgt via **44-4**: $p\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_w$.

<u>Beweis **46-16** `c)`</u>

`VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p\_M\_q) \wedge (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w)$.

`1.1:` Es gilt: $(p = w) \vee (p \neq w)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $p = w$.

`2.1:` Aus `1.1.1.Fall` "$p = w$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_q \ldots$"
folgt: w_M_q.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots M$ antiSymmetrisch$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w \ldots$"
folgt via **46-1**: $\neg(w\_M\_q)$.

`3:` Es gilt `2.1` "w_M_q".
Es gilt `2.2` "$\neg(w\_M\_q)$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \neq w$.

`1.1.2.Fall` $p \neq w$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$p \neq w$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "M transitiv$\ldots$",
aus `A1` gleich "$p \neq w$",
aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_q \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$"
folgt via **44-4**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_w$.

□

46-17. Falls M transitiv und antiSymmetrisch ist, dann folgt - unter anderem - aus $0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$, dass $a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$ gilt:

<u>46-17(Satz)</u>

Es gelte:

→) M *transitiv.*

→) M *antiSymmetrisch.*

→) $0 \neq \,]a \overset{M}{|} b[.$

oder

$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b].$

oder

$0 \neq [a \overset{M}{|} b[.$

Dann folgt "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$*".*

<u>Beweis **46-17**</u>

`1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(0 \neq \,]a \overset{M}{|} b[\,) \vee (0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]\,) \vee (0 \neq [a \overset{M}{|} b[\,)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \,]a \overset{M}{|} b[$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \,]a \overset{M}{|} b[$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \,]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \Omega) \wedge (\Omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b)$.

`4:` Aus $\rightarrow$) "M transitiv",
aus $\rightarrow$) "M antiSymmetrisch",
aus `3` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \Omega \ldots$" und
aus `3` "$\ldots \Omega \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$"
folgt via **46-16**: $a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$.

`1.2.Fall` $0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$0 \neq \,]a \overset{M}{|} b]$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \,]a \overset{M}{|} b]$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \,]a \overset{M}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \Omega) \wedge (\Omega \_ M \_ b)$.

`4:` Aus $\rightarrow$) "M transitiv",
aus $\rightarrow$) "M antiSymmetrisch",
aus `3` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \Omega \ldots$" und
aus `3` "$\ldots \Omega \_ M \_ b$"
folgt via **46-16**: $a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ b$.

...

Beweis **46-17**...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $0 \neq]a \overset{M}{|} b[$.

2: Aus `1.3.Fall`“$0 \neq [a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in [a \overset{M}{|} b[$.

3: Aus 2“$\ldots \Omega \in [a \overset{M}{|} b[$”

folgt via **41-25**: $(a\_M\_\Omega) \wedge (\Omega\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b)$.

4: Aus →) “M transitiv”,
aus →) “M antiSymmetrisch”,
aus 3“$a\_M\_b \ldots$” und
aus 3“$\ldots \Omega\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$”
folgt via **46-16**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_b$.

□

46-18. Falls M transitiv und antiSymmetrisch ist, dann kann $]a \overset{M}{|} b]$ durch kein M_Supremum einer nicht leeren TeilKlasse von $]a \overset{M}{|} b]$ verlassen werden:

46-18(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *M transitiv.*

$\rightarrow$) *M antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$.

$\rightarrow$) *sup ist M_Supremum von E.*

Dann folgt "$sup \in]a \overset{M}{|} b]$".

<u>Beweis **46-18**</u>

`1.1:` Aus →) “ $0 \neq E \ldots$ ”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`1.2:` Aus →) “ sup ist M_Supremum von E ” und
aus →) “ $0 \neq E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$ ”
folgt via **41-47**: $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

`2.1:` Aus `1.1` “ $\ldots \Omega \in E$ ” und
aus →) “ $\ldots E \subseteq]a \overset{M}{|} b]$ ”
folgt via **0-4**: $\Omega \in]a \overset{M}{|} b]$.

`2.2:` Aus `1.2` “ $sup \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$ ”
folgt via **41-25**: sup_M_b.

`2.3:` Aus →) “ sup ist M_Supremum von E ” und
aus `1.1` “ $\ldots \Omega \in E$ ”
folgt via **36-4**: Ω_M_sup.

`3:` Aus `2.1` “ $\Omega \in]a \overset{M}{|} b]$ ”
folgt via **41-25**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\Omega$.

`4:` Aus →) “ M transitiv ” ,
aus →) “ M antiSymmetrisch ” ,
aus `3` “ $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_\Omega$ ” und
aus `2.3` “ Ω_M_sup ”
folgt via **46-16**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_sup$.

`5:` Aus `4` “ $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_sup$ ” und
aus `2.2` “ sup_M_b ”
folgt via **41-25**: $sup \in]a \overset{M}{|} b]$.

□

46-19. Falls M transitiv und antiSymmetrisch ist, dann kann $[a \overset{M}{|} b[$ durch kein M_Infimum einer nicht leeren TeilKlasse von $[a \overset{M}{|} b[$ verlassen werden:

<u>46-19(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *M transitiv.*

$\rightarrow)$ *M antiSymmetrisch.*

$\rightarrow)$ $0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$.

$\rightarrow)$ *inf ist M_Infimum von E.*

Dann folgt "$inf \in [a \overset{M}{|} b[$".

<u>Beweis **46-19**</u>

`1.1:` Aus →) “$0 \neq E \ldots$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E.$

`1.2:` Aus →) “inf ist M_Infimum von E” und
aus →) “$0 \neq E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **41-46**: $inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle.$

`2.1:` Aus `1.1` “$\ldots \Omega \in E$” und
aus →) “$\ldots E \subseteq [a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **0-4**: $\Omega \in [a \overset{M}{|} b[.$

`2.2:` Aus `1.2` “$inf \in [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $a\_M\_inf.$

`2.3:` Aus →) “inf ist M_Infimum von E” und
aus `1.1` “$\ldots \Omega \in E$”
folgt via **36-3**: $inf\_M\_\Omega.$

`3:` Aus `2.1` “$\Omega \in [a \overset{M}{|} b[$”
folgt via **41-25**: $\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b.$

`4:` Aus →) “M transitiv”,
aus →) “M antiSymmetrisch”,
aus `2.3` “inf_M_Ω” und
aus `3` “$\Omega\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$”
folgt via **46-16**: $inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b.$

`5:` Aus `2.2` “a_M_inf” und
aus `4` “$inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_b$”
folgt via **41-25**: $inf \in [a \overset{M}{|} b[.$

□

Satz vom Minimum.
Satz vom Maximum.

Ersterstellung: 08/03/07 **Letzte Änderung: 07/05/11**

47-1. Mit dem **Satz vom Minimum** wird sicher gestellt, dass jede nicht leere, endliche M_Kette einer transitiven Klasse K ein M_Minimum hat:

47-1(Satz) (Satz vom Minimum)

Es gelte:

→) *M transitiv*

→) *K ist M_Kette.*

→) $0 \neq K$.

→) *K endlich.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von K.".

Beweis **47-1**

`1:` Aus →) "M transitiv",
aus →) "$0 \neq K$" und
aus →) "K endlich"
folgt via **Satz vom minimalen Element**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von K.

`2:` Aus →) "K ist M_Kette" und
aus `1` "... Ω ist M_minimales Element"
folgt via **45-3**: Ω ist M_Minimum von K.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega$ ..." und
aus `2` "Ω ist M_Minimum von K"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von K.

□

47-2. Mit dem **Satz vom Maximum** wird sicher gestellt, dass jede nicht leere, endliche M_Kette einer transitiven Klasse K ein M_Maximum hat:

47-2(Satz) (Satz vom Maximum)

Es gelte:

→) *M transitiv*

→) *K ist M_Kette.*

→) $0 \neq K$.

→) *K endlich.*

Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von K.".

Beweis **47-2**

1: Aus →) "M transitiv",
aus →) "$0 \neq K$" und
aus →) "K endlich"
folgt via **Satz vom maximalen Element**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von K.

2: Aus →) "K ist M_Kette" und
aus 1 "... Ω ist M_maximales Element"
folgt via **45-4**: Ω ist M_Maximum von K.

3: Aus 1 "$\exists \Omega$ ..." und
aus 2 "Ω ist M_Maximum von K"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von K.

□

InfZwischenWertSatz.
SupZwischenWertSatz.

Ersterstellung: 21/02/06 **Letzte Änderung: 07/05/11**

48-1. Der **InfZwischenWertSatz** ist vor allem in jenen Fällen von Interesse, in denen ein M_Infimum einer M_Kette K mit antiSymmetrischer M betrachtet wird, das *nicht* in K ist. Denn in diesem Fall folgt aus dem **InfZwischenWert-Satz**, dass dieses M_Infimum "beliebig gut durch Elemente der Kette von oben M_approximiert" werden kann:

48-1(Satz) (InfZwischenWertSatz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) K *ist* M_*Kette.*

$\rightarrow$) inf *ist* M_*Infimum von* K.

$\rightarrow$) $p \in K$.

$\rightarrow$) $inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$.

Dann gibt es ξ, *so dass gilt:*

e.1) $\xi \in K$.

e.2) inf_M_ξ.

e.3) $\xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$.

<u>Beweis **48-1**</u>

`1.1:` Es gilt: $$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)) \vee \exists\xi : (\xi \in K) \wedge (\xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p))$.

`2.1:` Aus $\rightarrow)$"K ist M_Kette",
aus $\rightarrow)$"$p \in K$" und
aus `1.1.1.Fall`"$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p))$"
folgt via **45-1**: p ist M_Minimum von K.

`2.2:` Aus $\rightarrow)$"M antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow)$"inf ist M_Infimum von K" und
aus $\rightarrow)$"$inf\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$"
folgt via **46-2**: p keine untere M_Schranke von K.

`3.1:` Aus `2.1`"p ist M_Minimum von K"
folgt via **38-1(Def)**: p untere M_Schranke von K.

`3.2:` Aus `2.2`"p keine untere M_Schranke von K"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(p$ untere M_Schranke von $K)$.

`4:` Es gilt `3.1`"p untere M_Schranke von K."
Es gilt `3.2`"$\neg(p$ untere M_Schranke von $K)$."
Ex falso quodlibet folgt: $\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (\xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`1.1.2.Fall` $\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (\xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (\xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$"

`1.2:` Aus $\rightarrow)$"inf ist M_Infimum von K" und
aus `A1` gleich "$\ldots \xi \in K \ldots$"
folgt via **36-3**: inf_M_ξ.

`2:` Aus `A1` gleich "$\exists\xi : \xi \in K \ldots$",
aus `1.2`"inf_M_ξ" und
aus `A1` gleich "$\ldots \xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$"
folgt: $\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (inf\_M\_\xi) \wedge (\xi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

□

48-2. Der **SupZwischenWertSatz** ist vor allem in jenen Fällen von Interesse, in denen ein M_Supremum einer M_Kette K mit antiSymmetrischer M betrachtet wird, das *nicht* in K ist. Denn in diesem Fall folgt aus dem **SupZwischenWert-Satz**, dass dieses M_Supremum "beliebig gut durch Elemente der Kette von unten M_approximiert" werden:

48-2(Satz) (SupZwischenWertSatz)

Es gelte:

→) M *antiSymmetrisch.*

→) K *ist* M_*Kette.*

→) *sup ist* M_*Supremum von* K.

→) $p \in K$.

→) $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$.

Dann gibt es ξ, *so dass gilt:*

e.1) $\xi \in K$.

e.2) $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi$.

e.3) ξ_M_sup.

Beweis **48-2**

`1.1:` Es gilt: $\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha))$ $\vee$ $\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha))$.

`2.1:` Aus →) “K ist M_Kette”,
aus →) “$p \in K$” und
aus `1.1.1.Fall` “$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\neg(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha))$”
folgt via **45-2**: p ist M_Maximum von K.

`2.2:` Aus →) “M antiSymmetrisch”,
aus →) “sup ist M_Supremum von K” und
aus →) “$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_sup$”
folgt via **46-3**: p keine obere M_Schranke von K.

`3.1:` Aus `2.1` “p ist M_Maximum von K”
folgt via **38-1(Def)**: p obere M_Schranke von K.

`3.2:` Aus `2.2` “p keine obere M_Schranke von K”
folgt via **35-1(Def)**: $\neg$(p obere M_Schranke von K).

`4:` Es gilt `3.1` “p obere M_Schranke von K.”
Es gilt `3.2` “$\neg$(p obere M_Schranke von K).”
Ex falso quodlibet folgt: $\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi)$.

`1.1.2.Fall` $\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi)$”

`1.2:` Aus →) “sup ist M_Supremum von K” und
aus `A1` gleich “$\ldots \xi \in K \ldots$”
folgt via **36-4**: ξ_M_sup.

`2:` Aus `A1` gleich “$\exists\xi : \xi \in K \ldots$”,
aus `A1` gleich “$\ldots p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi$” und
aus `1.2` “ξ_M_sup”
folgt: $\exists\xi : (\xi \in K) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\xi) \wedge (\xi\_M\_sup)$.

□

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.