Suite I - Die StrukturGebende

Teil 2: Essays 6-12

Geordnetes Paar. (p, q). PaarAxiom I. PaarAxiom II. Binär-Cartesisches Produkt. $x \times y$. Binär-Cartesisches Axiom. IdentitätsSatz Geordnete Paare. $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Definitions-Bereich. $\mathsf{dom}\, x$. Bild-Bereich. $\mathsf{ran}\, x$. $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ Axiom. x (nicht-)injektiv. Bild von E unter x. $x[E]$. (Keine) Relation (in x). Relation invers x^{-1}. Urbild von E unter x. $x^{-1}[E]$.

Andreas Unterreiter

13. September 2011

Geordnetes Paar. (p,q).
PaarAxiom I. **PaarAxiom II**.
Binär-Cartesisches Produkt. $x \times y$.
Binär-Cartesisches Axiom.
IdentitätsSatz Geordnete Paare. **IGP**.
$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ersterstellung: 11/09/05 **Letzte Änderung: 10/04/11**

6-1. Es werden **geordnete Paare** in das LebensWerk eingeführt, indem erstmalig eine Zeichenkette von der Form "(p, q)" auftritt, in der, von links nach rechts gelesen, erst eine linke runde Klammer, dann eine KlassenVariable - später auch ein KlassenTerm oder ein Parameter -, dann ein Komma, dann eine weitere KlassenVariable - später auch ein KlassenTerm oder ein Parameter - und dann eine rechte runde Klammer erscheint. Derlei Zeichenketten gelten hiermit als zulässiger Bestandteil der Essays, das heißt, aus höchstens zwei KlassenVariablen oder KlassenTermen oder Parametern wird auf die angegebene Weise, die durchaus ähnlich zu der Konstruktion von KlassenTermen ist, eine neue Klasse - siehe **PaarAxiom I** - kreiert.
Klarer Weise sind in der Literatur auch mengentheoretische Definitionen geordneter Paare zu finden. Auf derlei Konstruktionen wird in den Essays auch aus Zeit- und Aufwand-Ersparnisgründen verzichtet.
Statt dessen werden geordnete Paare eben als Zeichenkette eingeführt und der Umgang mit geordneten Paaren wird via **PaarAxiom I** und **PaarAxiom II** regelmentiert:

6-1(Definition)

"$\mathfrak{C}$ **geordnetes Paar von** p **und** q" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = (p, q).$$

PaarAxiom I. Geordnete Paare sind via `a)` stets Klassen.
Geordnete Paare sind via `b)` genau dann Mengen, wenn die beteiligten Klassen Mengen sind. In `b)` von **PaarAxiom I** wird somit *auch* gesagt, dass jedes geordnete Paar von Klassen - als Menge - eine Klasse ist. Dass via `c)` kein geordnetes Paar gleich der leeren Menge ist, ist eine technische, doch wichtige Annahme. In `def)` wird gesagt, dass sich die "allgemeine Ersetzungsregel" - wonach in einem Term oder einer Aussage stets Gleiches durch Gleiches ersetzt werden kann - auch auf geordnete Paare ausdehnt. Vor allem `d)`, wo es um simultanes Gleichsein geht, kürzt im Folgenden Einiges ab.
Die Umkehrung von Aussage `d)` wird unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass es sich bei p, q, w, v um *Mengen* handelt, in **PaarAxiom II** in die Essays eingeführt.
Darüber hinausgehende Aussagen über Konsequenzen aus der Gleichheit geordneter Paare werden bis auf Weiteres nicht getroffen. In **PaarAxiom I** wird nichts über geordnete Paare, in denen mindestens eine Unmenge auftritt, gesagt. Gemäß `ab)` sind derartige Klassen Unmengen. Ein mögliches klassentheoretisches Modell wäre es, alle geordnete Paare, in denen mindestens eine Unmenge auftritt gleich dem Universum $\mathcal{U}$ zu setzen:

PaarAxiom I

`a)` $\forall \alpha, \beta : (\exists \Omega : \Omega = (\alpha, \beta))$.

`b)` *"(p, q) Menge" genau dann, wenn "p Menge" und "q Menge".*

`c)` $\forall \alpha, \beta : 0 \neq (\alpha, \beta)$.

`d)` *Aus "$p = w$" und "$q = v$" folgt "$(p, q) = (w, v)$".*

`e)` *Aus "$p = w$" folgt "$(p, q) = (w, q)$".*

`f)` *Aus "$q = v$" folgt "$(p, q) = (p, v)$".*

6-2. Da via **PaarAxiom I** fest gelegt ist, dass es sich bei geordneten Paaren um Klassen handelt, kann auf die "Reflexivität" der Gleichheit von Klassen zurück gegriffen werden und unter Einbeziehung von **6-1(Def)** folgen in wenig überraschender Weise Aussage `ab)`. Aussagen `cd)` sind einfache Folgerungen aus **PaarAxiom I** `b)`:

<u>6-2(Satz)</u>

`a)` *(p, q) geordnetes Paar von p und q.*

`b)` *Aus "$\mathfrak{C}$ geordnetes Paar von p und q"
und "$\mathfrak{D}$ geordnetes Paar von p und q"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

`c)` *Aus "p Unmenge" folgt "(p, q) Unmenge".*

`d)` *Aus "q Unmenge" folgt "(p, q) Unmenge".*

<u>Beweis **6-2**</u> `a)`

Aus "$(p, q) = (p, q)$"
folgt via **6-1(Def)**: (p, q) geordnetes Paar von p und q.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ geordnetes Paar von p und q)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ geordnetes Paar von p und q).

`1.1:` Aus →) "$\mathfrak{C}$ geordnetes Paar von p und $q \ldots$"
folgt via **6-1(Def)**: $\mathfrak{C} = (p, q)$.

`1.2:` Aus →) "$\ldots \mathfrak{D}$ geordnetes Paar von p und q"
folgt via **6-1(Def)**: $\mathfrak{D} = (p, q)$.

`2:` Aus `1.1` "$\mathfrak{C} = (p, q)$" und
aus `1.2` "$\mathfrak{D} = (p, q)$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

Beweis **6-2** `c)` `VS` gleich p Unmenge.

`1:` Es gilt: $((p,q) \text{ Menge}) \vee ((p,q) \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` (p,q) Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall`“(p,q) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: p Menge.

`3:` Es gilt `2`“p Menge”.
Es gilt `VS` gleich “p Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: (p,q) Unmenge.

`1.2.Fall` (p,q) Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: (p,q) Unmenge.

`d)` `VS` gleich q Unmenge.

`1:` Es gilt: $((p,q) \text{ Menge}) \vee ((p,q) \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` (p,q) Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall`“(p,q) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: q Menge.

`3:` Es gilt `2`“q Menge”.
Es gilt `VS` gleich “q Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: (p,q) Unmenge.

`1.2.Fall` (p,q) Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: (p,q) Unmenge.

□

PaarAxiom II. Die erwartete Regel “geordnete Paare sind genau dann gleich, wenn sie koordinatenweise gleich sind” wird nun in der interessanteren Richtung - aus der Gleichheit der geordneten Paare folgt unter Zu-Grunde-Legung von Mengen die Gleichheit der involvierten Mengen - in die Essays eingeführt. Die weniger interessante Richtung ist die durch **PaarAxiom I** verfügbare ErsetzungsRegel.
In **PaarAxiom II** wird *nichts* darüber ausgesagt, was aus der Aussage “$(p, q) = (w, v)$” folgt, wenn mindestens eine der Klassen p, q, w, v eine Unmenge ist.
Wie in **6-9** gezeigt wird, können die Voraussetzungen von **PaarAxiom II** dahingehend abgeschwächt werden, dass nur die “Mengen-Eigenschaft” von w und v gefordert wird:

PaarAxiom II

Es gelte:

$\rightarrow)$ $(p, q) = (w, v)$.

$\rightarrow)$ p *Menge.*

$\rightarrow)$ q *Menge.*

$\rightarrow)$ u *Menge.*

$\rightarrow)$ v *Menge.*

Dann folgt “$p = w$” *und* “$q = v$”.

6-3. Das **binär-cartesische Produkt von** x **und** y besteht genau aus jenen geordneten Paaren, deren "erste Koordinate" aus x und deren "zweiten Koordinate" aus y ist. Die Definition des binären, cartesischen Produktes kommt ohne sprachlichen Bezug zu "Koordinaten" eines geordneten Paares aus. Somit kann bis auf Weiteres auf eine Definition der "ersten" und "zweiten" Koordinate eines geordneten Paares verzichtet werden:

6-3(Definition)

1) $x \times y$

$$= \mathsf{6.0}(x,y) = \{(\lambda,\mu) : (\lambda \in x) \wedge (\mu \in y)\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **binär-cartesisches Produkt von** x **und** y"

genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x \times y.$$

6-4. Da es sich bei dem neu eingeführten Objekt - hier: das binär-cartesische Produkt von x und y - entsprechend der Konvention der Essays um eine Klasse handelt, kann nüchtern die folgende Aussage zur Kenntnis genommen werden:

6-4(Satz)

a) $x \times y$ *binär-cartesisches Produkt von* x *und* y.

b) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *binär-cartesisches Produkt von* x *und* y*"*
und "$\mathfrak{D}$ *binär-cartesisches Produkt von* x *und* y*"*
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

Beweis **6-4** a)

Aus "$x \times y = x \times y$"
folgt via **6-3(Def)**: $x \times y$ binär-cartesisches Produkt von x und y.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ binär-cartesisches Produkt von x und y)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ binär-cartesisches Produkt von x und y).

1.1: Aus →) "$\mathfrak{C}$ binär-cartesisches Produkt von x und y ..."
folgt via **6-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x \times y$.

1.2: Aus →) "... $\mathfrak{D}$ binär-cartesisches Produkt von x und y"
folgt via **6-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x \times y$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = x \times y$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = x \times y$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

6-5. Es folgt ein Kriterium für das "Element-Sein" einer Klasse in einem binär-cartesischen Produkt:

6-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äxuivalent:*

`i)` $w \in x \times y$.

`ii)` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

Beweis **6-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $w \in x \times y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in x \times y$" und
aus "$x \times y = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Omega \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Psi \in y \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

`2:` Aus `1.1`"Ω Menge" und
aus `1.2`"Ψ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Ψ) Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots w = (\Omega, \Psi)$" und
aus `2`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt: w Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$" und
aus `2`"w Menge"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$.

`5:` aus `4`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\} = x \times y$"
folgt: $w \in x \times y$.

$\square$

6-6. Die Aussagen “$(p, q) \in x \times y$” und “$(p \in x) \wedge (q \in y)$” sind äquiyalent:

6-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquiyalent:*

`i)` $(p, q) \in x \times y$.

`ii)` “$p \in x$” *und* “$q \in y$”.

Beweis **6-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(p, q) \in x \times y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(p, q) \in x \times y$”
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(p, q) \in x \times y$”
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

`2.1:` Aus `1.1`“(p, q) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p$ Menge$) \wedge (q$ Menge$)$.

`2.2:` Aus `1.2`“$\ldots \Omega \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.3:` Aus `1.2`“$\ldots \Psi \in y \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

`3:` Aus `1.2`“$\ldots (p, q) = (\Omega, \Psi)$”,
aus `2.1`“p Menge$\ldots$”,
aus `2`“$\ldots q$ Menge”,
aus `2.2`“Ω Menge” und
aus `2.3`“Ψ Menge”
folgt via **PaarAxiom II**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Psi)$.

`4.1:` Aus `3`“$p = \Omega \ldots$” und
aus `1.2`“$\ldots \Omega \in x \ldots$”
folgt: $p \in x$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots q = \Psi$” und
aus `1.2`“$\ldots \Psi \in y \ldots$”
folgt: $q \in y$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(p \in x) \wedge (q \in y)$.

<u>Beweis</u> **6-6** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in x) \wedge (q \in y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt: $\exists p : p \in x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in y$"
folgt: $\exists q : q \in y$.

`2:` Aus `1.1` "$\exists p : p \in x$",
aus `1.2` "$\exists q : q \in y$" und
aus "$(p, q) = (p, q)$"
folgt: $\exists p, q : (p \in x) \wedge (q \in y) \wedge ((p, q) = (p, q))$.

`3:` Aus `2` "$\exists p, q : (p \in x) \wedge (q \in y) \wedge ((p, q) = (p, q))$"
folgt via **6-5**: $(p, q) \in x \times y$.

$\square$

6-7. Es folgen vier Aussagen über Inklusions-Eigenschaften binär-cartesischer Produkte. Die Beweis-Reihenfolge ist `d) - a) - b) - c)`:

6-7(Satz)

`a)` *Aus* "$x \subseteq z$" *folgt* "$x \times y \subseteq z \times y$".

`b)` *Aus* "$y \subseteq w$" *folgt* "$x \times y \subseteq x \times w$".

`c)` *Aus* "$x \subseteq z$" *folgt* "$x \times x \subseteq z \times z$".

`d)` *Aus* "$x \subseteq z$" *und* "$y \subseteq w$" *folgt* "$x \times y \subseteq z \times w$".

Beweis **6-7** `d)` `VS` gleich $(x \subseteq z) \wedge (y \subseteq w)$.

`Thema1` $\alpha \in x \times y$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in x \times y$" folgt via **6-5**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$$

`3.1:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in x \ldots$" und aus `VS` gleich "$x \subseteq z \ldots$" folgt via **0-4**: $\Omega \in z$.

`3.2:` Aus `2` "$\ldots \Psi \in y \ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq w$" folgt via **0-4**: $\Psi \in w$.

`4:` Aus `3.1` "$\Omega \in z$" und aus `3.2` "$\Psi \in w$" folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in z \times w$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und aus `4` "$(\Omega, \Psi) \in z \times w$" folgt: $\alpha \in z \times w$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \times y) \Rightarrow (\alpha \in z \times w)$.

Konsezuenz via **0-2(Def)**: $x \times y \subseteq z \times w$.

<u>Beweis</u> **6-7** `a)` `VS` gleich $x \subseteq z$.

`1:` Via **0-6** gilt: $y \subseteq y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq z$" und
aus `1`"$y \subseteq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \times y \subseteq z \times y$.

`b)` `VS` gleich $y \subseteq w$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq w$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \times y \subseteq x \times w$.

`c)` `VS` gleich $x \subseteq z$.

Aus `VS` gleich "$x \subseteq z$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \times x \subseteq z \times z$.

$\square$

BinärCartesisches Axiom. Zum Abschluss der allgemeinen, einführenden Betrachtungen binär-cartesischer Produkte wird axiomatisch fest gelegt, dass das binär-cartesische Produkt zweier Mengen eine Menge ist:

Binär-Cartesisches Axiom

Aus "x Menge" und "y Menge" folgt "$x \times y$ Menge".

6-8. In `abc)` sind Aussagen über das "Element-Sein" in $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ zu finden. Aussagen `b)` und `c)` ergeben ein Kriterium für "$(p,q)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$". Aussagen `def)` liefern ein Kriterium für "$(p,q)\notin\mathcal{U}\times\mathcal{U}$":

6-8(Satz)

`a)` *Aus* "$w\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$" *folgt*

$$\text{"}\exists\Omega,\Psi:(\Omega\ \textit{Menge})\wedge(\Psi\ \textit{Menge})\wedge(w=(\Omega,\Psi))\text{"}.$$

`b)` *Aus* "p *Menge*" *und* "q *Menge*" *folgt* "$(p,q)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$".

`c)` *Aus* "$(p,q)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$" *folgt* "$p$ *Menge*" *und* "q *Menge*".

`d)` *Aus* "p *Unmenge*" *folgt* "$(p,q)\notin\mathcal{U}\times\mathcal{U}$".

`e)` *Aus* "q *Unmenge*" *folgt* "$(p,q)\notin\mathcal{U}\times\mathcal{U}$".

`f)` *Aus* "$(p,q)\notin\mathcal{U}\times\mathcal{U}$" *folgt* "$p$ *Unmenge*" *oder* "q *Unmenge*".

Beweis **6-8** `a)` `VS` gleich $w\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$"
folgt via **6-5**: $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in\mathcal{U})\wedge(\Psi\in\mathcal{U})\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots\Omega\in\mathcal{U}\ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots\Psi\in\mathcal{U}\ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

`3:` Aus `1`"$\exists\Omega,\Psi\ldots$",
aus `2.1`"Ω Menge",
aus `2.2`"Ψ Menge" und
aus `1`"$\ldots w=(\Omega,\Psi)$"
folgt: $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\text{ Menge})\wedge(\Psi\text{ Menge})\wedge(w=(\Omega,\Psi))$.

<u>Beweis **6-8**</u> `b)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt via **0-19**: $p \in \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…q Menge"
folgt via **0-19**: $q \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"$p \in \mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$q \in \mathcal{U}$"
folgt via **6-6**: $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`c)` `VS` gleich $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-6**: $(p \in \mathcal{U}) \wedge (q \in \mathcal{U})$.

`2.1:` Aus `1`"$p \in \mathcal{U} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots q \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`d)` `VS` gleich p Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Unmenge"
folgt via **6-2**: (p, q) Unmenge.

`2:` Aus `1`"(p, q) Unmenge"
folgt via **0-1**: $(p, q) \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`e)` `VS` gleich q Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "q Unmenge"
folgt via **6-2**: (p, q) Unmenge.

`2:` Aus `1`"(p, q) Unmenge"
folgt via **0-1**: $(p, q) \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Beweis **6-8** `f)` `VS` gleich $(p,q)\notin\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge})\wedge(q \text{ Menge})$
$\vee$
$(p \text{ Unmenge})\vee(q \text{ Unmenge})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $(p \text{ Menge})\wedge(q \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$(p \text{ Menge})\wedge(q \text{ Menge})$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(p,q)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

`3:` Es gilt `2`“$(p,q)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$” .
Es gilt `VS` gleich “$(p,q)\notin\mathcal{U}\times\mathcal{U}$” .
Ex falso quodlibet folgt: $(p \text{ Unmenge})\vee(q \text{ Unmenge})$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(p \text{ Unmenge})\vee(q \text{ Unmenge})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$(p \text{ Unmenge})\vee(q \text{ Unmenge})$.

□

6-9. Im **IGP: IdentitätsSatz Geordnete Paare** werden die Voraussetzungen von **PaarAxiom II** abgeschwächt.
In **6-9** wird erstmalig in einem Satz der Essays die Notation von "abgesetzten, alternativen Voraussetzungen" - hier sind es die Voraussetzungen "(p, q) Menge" oder "(w, v) Menge" oder "p, q Mengen" oder "w, v Mengen" - verwendet. Hierbei handelt es sich um eine Notation, mit deren Hilfe Wiederholungen von Sätzen "ähnlicher Bauart" vermieden werden. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - d) - e) - f) - a) - b)`:

6-9(Satz) (IGP: IdentitätsSatz Geordnete Paare)

Es gelte:

$\rightarrow$) $(p, q) = (w, v)$.

$\rightarrow$)

(p, q) *Menge.*
oder
(w, v) *Menge.*
oder
"p Menge" und "q Menge".
oder
"w Menge" und "v Menge".

Dann folgt:

`a)` $p = w$.

`b)` $q = v$.

`c)` p *Menge.*

`d)` q *Menge.*

`e)` w *Menge.*

`f)` v *Menge.*

<u>Beweis **6-9**</u>

`1.1:` Nach $\rightarrow$) “ ” gilt:

$$(p,q) \text{ Menge} \vee (w,v) \text{ Menge} \vee (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \vee (w \text{ Menge}) \wedge (v \text{ Menge}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` (p,q) Menge

`2:` Aus `1.1.1.Fall` “(p,q) Menge” und
aus $\rightarrow$) “$(p,q)=(w,v)$”
folgt: (w,v) Menge.

`3:` Aus `1.1.1.Fall` “(p,q) Menge” und
aus `2`
folgt: $((p,q) \text{ Menge}) \wedge ((w,v) \text{ Menge})$.

`1.1.2.Fall` (w,v) Menge

`2:` Aus $\rightarrow$) “$(p,q)=(w,v)$” und
aus `1.1.2.Fall` “(w,v) Menge”
folgt: (p,q) Menge.

`3:` Aus `2` und
aus `1.1.2.Fall` “(w,v) Menge”
folgt: $((p,q) \text{ Menge}) \wedge ((w,v) \text{ Menge})$.

...

Beweis **6-9** . . .

. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`1.1.3.Fall` $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$

`2:` Aus `1.1.3.Fall` "$(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`3:` Aus →) "$(p, q) = (w, v)$" und
aus `2` "(p, q) Menge"
folgt: (w, v) Menge.

`4:` Aus `2` "(p, q) Menge" und
aus `3` "$(w, v$ Menge"
folgt: $((p, q) \text{ Menge}) \wedge ((w, v) \text{ Menge})$.

`1.1.4.Fall` $(w \text{ Menge}) \wedge (v \text{ Menge})$

`2:` Aus `1.1.4.Fall` "$(w \text{ Menge}) \wedge (v \text{ Menge})$"
folgt via **PaarAxiom I**: (w, v) Menge.

`3:` Aus →) "$(p, q) = (w, v)$" und
aus `2` "(w, v) Menge"
folgt: (p, q) Menge.

`4:` Aus `3` "(p, q) Menge" und
aus `2` "(w, v) Menge"
folgt: $((p, q) \text{ Menge}) \wedge ((w, v) \text{ Menge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

`A1` | "$((p, q) \text{ Menge}) \wedge ((w, v) \text{ Menge})$"

. . .

<u>Beweis **6-9**</u> ...

`1.2:` Aus `A1` gleich “(p,q) Menge... ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.3:` Aus `A1` gleich “...(w,v) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(w \text{ Menge}) \wedge (v \text{ Menge})$.

`2.1:` Aus →) “$(p,q) = (w,v)$” ,
aus `1.2`“p Menge... ” ,
aus `1.2`“...q Menge” ,
aus `1.3`“w Menge... ” und
aus `1.3`“...v Menge”
folgt via **PaarAxiom II**: $(p = w) \wedge (q = v)$.

`2.c):` Aus `1.2`
folgt: p Menge.

`2.d):` Aus `1.2`
folgt: q Menge.

`2.e):` Aus `1.3`
folgt: w Menge.

`2.f):` Aus `1.3`
folgt: v Menge.

`3.a):` Aus `2.1`
folgt: $p = w$.

`3.b):` Aus `2.1`
folgt: $q = v$.

□

6-10. Wie in **6-8** vorweggenommen, liegt der Verdacht nahe, dass es sich bei dem nachfolgenden KlassenTerm um $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ handelt. Dass dies genau so ist, zeigt sich in **6-11**:

6-10(Definition)

$$\mathtt{6.1}() = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}.$$

6-11. Der KlassenTerm `6.1()` ist gleich $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$. Obwohl der Ausdruck "`6.1()`" *nicht* in **6-11** vorkommt, wird die Definition von `6.1()` angegeben. Dies geschieht, um klar zu machen, dass der in **6-11** auftretende KlassenTerm durch keine "implizite Definition" in die Essays eingeführt wird, sondern, da mit einer eigenen Nummer versehen, in einer vorangehenden Definition erstmalig fest gelegt wurde:

6-11(Satz)

$$\mathcal{U}\times\mathcal{U} = \{(\lambda,\mu) : (\lambda\ \mathit{Menge}) \wedge (\mu\ \mathit{Menge})\}.$$

6-10(Def) $\{(\lambda,\mu) : (\lambda\ \mathit{Menge}) \wedge (\mu\ \mathit{Menge})\}$.

Beweis **6-11**

`Thema1.1` $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-8**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `2.2`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge})$
$\wedge(\alpha = (\Omega, \Psi))$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt:
$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge})$
$\wedge(\omega = (\Omega, \Psi))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$
$= \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$"
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge}))\}$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | "$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$"

<u>Beweis **6-11**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$” und
aus “$\{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$”
folgt:
$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$.

`3:` aus `2`“$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$” und
aus `3`“$\ldots \Psi$ Menge”
folgt via **6-8**: $(\Omega, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `4`“$(\Omega, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$” und
aus `A2` gleich “$\{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$\mathcal{U} \times \mathcal{U} = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \text{ Menge}) \wedge (\mu \text{ Menge})\}$.

$\square$

6-12. Es folgen fünf Resultate über $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Aussage `e)` wird im Zusammenhang mit Relationen gebraucht:

6-12(Satz)

`a)` $0 \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`b)` $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$.

`c)` $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

`d)` $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`e)` $x \times y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Beweis **6-12** `a)`

`1:` Es gilt: $(0 \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \vee (0 \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-8**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (0 = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Es gilt 2"$0 = (\Omega, \Psi)$" .
Via **PaarAxiom I** gilt "$0 \neq (\Omega, \Psi)$" .
Ex falso quodlibet folgt: $0 \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $0 \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`b)` Via **0-18** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$.

Beweis **6-12** `c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $0 \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \in \mathcal{U}$" und
aus `1.1`"$0 \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **0-10**: $\mathcal{U} \neq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **0-10**: $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`e)`

`1.1:` Via **0-18** gilt: $x \subseteq \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **0-18** gilt: $y \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"$x \subseteq \mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$y \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **6-7**: $x \times y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

$\square$

6-13. Es folgen sechs Aussagen über binär-cartesische Produkte, in denen die leere Menge eine Rolle spielt. Aussagen `c)` und `d)` ergeben ein Kriterium für "$x \times y = 0$" und Aussagen `e)` und `f)` ergeben ein Kriterium für "$0 \neq x \times y$". Die BeweisReihenfolge ist `a) - b) - e) - f) - c) - d)`:

6-13(Satz)

`a)` $x \times 0 = 0$.

`b)` $0 \times y = 0$.

`c)` *Aus "$x \times y = 0$" folgt "$x = 0$" oder "$y = 0$".*

`d)` *Aus "$x = 0$" oder "$y = 0$" folgt "$x \times y = 0$".*

`e)` *Aus "$0 \neq x \times y$" folgt "$0 \neq x$" und "$0 \neq y$".*

`f)` *Aus "$0 \neq x$" und "$0 \neq y$" folgt "$0 \neq x \times y$".*

Beweis **6-13** `a)`

`Thema1` $\alpha \in x \times 0$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in x \times 0$"
folgt via **6-5**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in 0) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$$

`3:` Es gilt 2 "$\ldots \Psi \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\Psi \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x \times 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \times 0) \Rightarrow (\alpha \notin x \times 0)$.

Konsequenz via **0-19**: $x \times 0 = 0$.

<u>Beweis **6-13**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in 0 \times y.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in 0 \times y$"
folgt via **6-5**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in 0) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$$

`3:` Es gilt `2`"$\ldots \Omega \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 0 \times y.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0 \times y) \Rightarrow (\alpha \notin 0 \times y).$

Konsequenz via **0-19**: $0 \times y = 0.$

`e)` `VS` gleich $0 \neq x \times y.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \times y$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x \times y.$

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x \times y$"
folgt via **6-5**: $\exists \Psi, \Phi : (\Psi \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (\Omega = (\Psi, \Phi)).$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in x \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x.$

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Phi \in y \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq y.$

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$

<u>Beweis **6-13**</u> `f)` `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y$"
folgt via **0-20**: $\exists \Psi : \Psi \in y$.

`2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi \in y$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in x \times y$.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \Psi) \in x \times y$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x \times y$.

`cd)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $(0 \neq x \times y) \Rightarrow ((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $((0 \neq x) \wedge (0 \neq y)) \Rightarrow (0 \neq x \times y)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(0 \neq x \times y) \Leftrightarrow ((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$.

`3:` Aus `3`
folgt: $(x \times y = 0) \Leftrightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$.

`4.c):` Aus `3`
folgt: $(x \times y = 0) \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$.

`4.d):` Aus `3`
folgt: $((x = 0) \vee (y = 0)) \Rightarrow (x \times y = 0)$.

$\square$

Definitions-Bereich. $\mathsf{dom}\, x$.
Bild-Bereich. $\mathsf{ran}\, x$.
$\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 07/05/11**

7-1. Der **Definitions-Bereich von** x besteht genau aus jenen Mengen ω, für die es Ω gibt, so dass $(\omega, \Omega) \in x$. In **7-2** stellt sich heraus, dass dieses Ω eine Menge ist. Klarer Weise ist hier die Reihenfolge, in der ω und Ω im geordneten Paar erscheinen, von Bedeutung. Die umgekehrte Reihenfolge tritt beim Bild-Bereich von x auf, siehe **7-3(Def)**.
Die Abkürzung "$\mathsf{dom}\, x$" für den Definitions-Bereich von x erinnert an die englische Bezeichnung "domain" für "Definitions-Bereich".
Interessanter Weise wird der Definitions-Bereich für *beliebige* Klassen x in die Essays eingeführt. Dies geschieht ungeachtet der Tatsache, dass in den meisten vertrauten Anwendungen Definitions-Bereiche für Relationen oder Funktionen betrachtet werden:

7-1(Definition)

1) $\mathsf{dom}\, x$

$$= 7.0(x) = \{\omega : (\exists \Omega : (\omega, \Omega) \in x)\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Definitions-Bereich von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{dom}\, x.$$

7-2. Klarer Weise ist "$\mathsf{dom}\,x$" der Definitions-Bereich von x, siehe a). In c) wird die definierende Eigenschaft von $\mathsf{dom}\,x$ in einer kurzen, in Beweisen leicht zu verwendenden Aussage zusammengefasst.
Gemäß d) ist jede Klasse mit nicht-leerem Definitions-Bereich eine nicht-leere Klasse. In **7-11** ist ergänzend hierzu fest gestellt, dass es nicht-leere Klassen - nämlich zunmindest "$\{0\}$" - mit leerem Definitions-Bereich gibt:

7-2(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,x$ *Definitions-Bereich von* x.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *Definitions-Bereich von* x"
und "$\mathfrak{D}$ *Definitions-Bereich von* x"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,x$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega$ *Menge*$) \wedge ((p, \Omega) \in x)$.

d) *Aus* "$0 \neq \mathsf{dom}\,x$" *folgt* "$0 \neq x$".

Beweis **7-2** `a)`

Aus “$\mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **7-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, x$ Definitions-Bereich von x.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Definitions-Bereich von x) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Defintions-Bereich von x).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ Definitions-Bereich von $x \ldots$”
folgt via **7-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{dom}\, x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots \mathfrak{D}$ Definitions-Bereich von x”
folgt via **7-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathfrak{C} = \mathsf{dom}\, x$” und
aus `1.2`“$\mathfrak{D} = \mathsf{dom}\, x$”
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{dom}\, x$” und
aus “$\mathsf{dom}\, x = \{\omega : (\exists \Omega : (\omega, \Omega) \in x)\}$”
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\omega, \Omega) \in x)\}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\omega, \Omega) \in x)\}$”
folgt: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in x$.

`3:` Aus `2`“$(p, \Omega) \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: (p, Ω) Menge.

`4:` Aus `3`“(p, Ω) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`5:` Aus `2`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `4`“Ω Menge” und
aus `2`“$\ldots (p, \Omega) \in x$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((p, \Omega) \in x)$.

`d)` `VS` gleich $0 \neq \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\exists \Psi : (\Psi \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

$\square$

7-3. Der **Bild-Bereich von** x besteht genau aus jenen Mengen ω, für die es Ω gibt, so dass $(\Omega, \omega) \in x$. In **7-4** stellt sich heraus, dass dieses Ω eine Menge ist. Klarer Weise ist hier die Reihenfolge, in der die Mengen Ω und ω im geordneten Paar erscheinen, von Bedeutung. Die umgekehrte Reihenfolge tritt beim Definitions-Bereich von x auf, siehe **7-1(Def)**.
Die Abkürzung "$\mathsf{ran}\, x$" für den Bild-Bereich von x erinnert an die englische Bezeichnung "range" für "Bild-Bereich".
Interessanter Weise wird der Bild-Bereich für *beliebige* Klassen x in die Essays eingeführt. Dies geschieht ungeachtet der Tatsache, dass in den meisten vertrauten Anwendungen Bild-Bereiche für Relationen oder Funktionen betrachtet werden:

7-3(Definition)

1) $\mathsf{ran}\, x$

$$= \mathsf{7.1}(x) = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega, \omega) \in x)\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Bild-Bereich von** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{ran}\, x.$$

7-4. Klarer Weise ist "$\mathsf{ran}\,x$" der Bild-Bereich von x, siehe `a)`. In `c)` wird die definierende Eigenschaft von $\mathsf{ran}\,x$ in einer kurzen, in Beweisen leicht zu verwendenden Aussage zusammengefasst.
Gemäß `d)` ist jede Klasse mit nicht-leerem Bild-Bereich eine nicht-leere Klasse. In **7-11** ist ergänzend hierzu fest gestellt, dass es nicht-leere Klassen - nämlich zunmindest "$\{0\}$" - mit leerem Bild-Bereich gibt:

7-4(Satz)

`a)` $\mathsf{ran}\,x$ *Bild-Bereich von* x.

`b)` *Aus* "$\mathfrak{C}$ *Bild-Bereich von* x" *und* "$\mathfrak{D}$ *Bild-Bereich von* x" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

`c)` *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\,x$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega$ *Menge*$) \wedge ((\Omega, q) \in x)$".

`d)` *Aus* "$0 \neq \mathsf{ran}\,x$" *folgt* "$0 \neq x$".

Beweis **7-4** `a)`

Aus "$\mathsf{ran}\, x = \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **7-3(Def)**: $\mathsf{ran}\, x$ Bild-Bereich von x.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Bild-Bereich von $x \wedge$ ($\mathfrak{D}$ Bild-Bereich von x).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Bild-Bereich von $x \ldots$"
folgt via **7-3(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{ran}\, x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Bild-Bereich von x"
folgt via **7-3(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \mathsf{ran}\, x$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)` `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{ran}\, x$" und
aus "$\mathsf{ran}\, x = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega, \omega) \in x)\}$"
folgt: $q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega, \omega) \in x)\}$.

`2:` Aus `1`"$q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega, \omega) \in x)\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega, q) \in x$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: (Ω, q) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω, q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `4`"Ω Menge" und
aus `2`"$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, q) \in x)$.

`e)` `VS` gleich $0 \neq \mathsf{ran}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\exists \Psi : (\Psi \text{ Menge}) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (\Psi, \Omega) \in x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x$.

$\square$

7-5. Hier sind hinreichende Bedingungen für das "Element-Sein" im Definitions- oder Bild-Bereich zu finden:

7-5(Satz)

Aus "$(p,q)\in x$" folgt "$p\in\mathsf{dom}\,x$" und "$q\in\mathsf{ran}\,x$".

Beweis **7-5**

`1.1:` Aus →) "$(p,q)\in x$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus →) "$(p,q)\in x$"
folgt: $\exists p:(p,q)\in x$.

`1.3:` Aus →) "$(p,q)\in x$"
folgt: $\exists q:(p,q)\in x$.

`2:` Aus `1.1` "(p,q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p$ Menge$)\wedge(q$ Menge$)$.

`3.1:` Aus `1.2` "$\exists p:(p,q)\in x$" und
aus `2` "$\ldots q$ Menge"
folgt: $q\in\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega,\omega)\in x)\}$.

`3.2:` Aus `1.3` "$\exists q:(p,q)\in x$" und
aus `2` "p Menge$\ldots$"
folgt: $p\in\{\omega:(\exists\Omega:(\omega,\Omega)\in x)\}$.

`4.a):` Aus `3.2` "$p\in\{\omega:(\exists\Omega:(\omega,\Omega)\in x)\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega:(\omega,\Omega)\in x)\}=\mathsf{dom}\,x$"
folgt: $p\in\mathsf{dom}\,x$.

`4.b):` Aus `3.1` "$q\in\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega,\omega)\in x)\}$" und
aus "$\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega,\omega)\in x)\}=\mathsf{ran}\,x$"
folgt: $q\in\mathsf{ran}\,x$.

□

7-6. Via Negation folgen aus **7-5** hinreichende Bedingungen für " $(p,q)\notin x$" :

7-6(Satz)

Aus "$p\notin \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$q\notin \mathsf{ran}\, x$" *folgt* "$(p,q)\notin x$" .

Beweis **7-6**

1: Via **7-5** gilt: $((p,q)\in x)\Rightarrow((p\in \mathsf{dom}\, x)\wedge(q\in \mathsf{ran}\, x))$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg((p\in \mathsf{dom}\, x)\wedge(q\in \mathsf{ran}\, x)))\Rightarrow(\neg((p,q)\in x))$.

3: Aus 2 folgt: $((p\notin \mathsf{dom}\, x)\vee(q\notin \mathsf{ran}\, x))\Rightarrow((p,q)\notin x)$.

□

7-7. Aus den folgenden sechs Aussagen ist ersichtlich, dass Definitions- und Bild-Bereich eng miteinander verwoben sind. Aussagen `b)` und `e)` ergeben ein Kriterium für "$0 \neq \mathsf{dom}\, x$" und "$0 \neq \mathsf{ran}\, x$". Aussagen `c)` und `f)` folgen aus `b)` und `e)` via Negation und ergeben ein Kriterium für "$\mathsf{dom}\, x = 0$" und "$\mathsf{ran}\, x = 0$". Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - d) - e) - c) - f)`:

7-7(Satz)

`a)` *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((p, \Omega) \in x)$".

`b)` *Aus* "$0 \neq \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$0 \neq \mathsf{ran}\, x$".

`c)` *Aus* "$\mathsf{dom}\, x = 0$" *folgt* "$\mathsf{ran}\, x = 0$".

`d)` *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\, x$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, q) \in x)$".

`e)` *Aus* "$0 \neq \mathsf{ran}\, x$" *folgt* "$0 \neq \mathsf{dom}\, x$".

`f)` *Aus* "$\mathsf{ran}\, x = 0$" *folgt* "$\mathsf{dom}\, x = 0$".

Beweis **7-7** `a)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (p, \Omega) \in x$"
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{ran}\, x$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\Omega \in \mathsf{ran}\, x$" und
aus `1.2`"$\ldots (p, \Omega) \in x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((p, \Omega) \in x)$.

`b)` `VS` gleich $0 \neq \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in \mathsf{ran}\, x \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{ran}\, x$.

<u>Beweis **7-7**</u> `d)` `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, q) \in x$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2"$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus `1.2`"$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, q) \in x)$.

`e)` `VS` gleich $0 \neq \mathsf{ran}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$.

`3:` Aus 2"$\ldots \Psi \in \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\, x$.

`c)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, x = 0$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq \mathsf{ran}\, x) \vee (\mathsf{ran}\, x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq \mathsf{ran}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $0 \neq \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Es gilt 2"$0 \neq \mathsf{dom}\, x$".
Es gilt `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, x = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{ran}\, x = 0$.

`1.2.Fall` $\mathsf{ran}\, x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ran}\, x = 0$.

<u>Beweis **7-7**</u>

`f)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\, x = 0.$

`1:` Es gilt: $(0 \neq \mathsf{dom}\, x) \vee (\mathsf{dom}\, x = 0).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $0 \neq \mathsf{dom}\, x.$

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $0 \neq \mathsf{ran}\, x.$

`3:` Es gilt `2`"$0 \neq \mathsf{ran}\, x$".
Es gilt `VS` gleich "$\mathsf{ran}\, x = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{dom}\, x = 0.$

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\mathsf{dom}\, x = 0.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\mathsf{dom}\, x = 0.$

$\square$

7-8. Es folgen zwei Aussagen über $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ und $\mathsf{dom}\, x$, $\mathsf{ran}\, x$:

7-8(Satz)

a) $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$.

b) *Aus "$\mathsf{dom}\, x$ Menge" und "$\mathsf{ran}\, x$ Menge" folgt "$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ Menge".*

<u>Beweis **7-8**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-8**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `2`“$\alpha \in x \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in x$.

`5:` Aus `4`“$(\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **7-5**: $(\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\Psi \in \mathsf{ran}\, x)$.

`6:` Aus `5`“$\Omega \in \mathsf{dom}\, x \ldots$” und
aus `5`“$\ldots \Psi \in \mathsf{ran}\, x$”
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$.

`7:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `6`“$(\Omega, \Psi) \in (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$”
folgt: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$.

`b)`

`1.1:` Aus →)“$\mathsf{dom}\, x$ ist ein Menge” und
aus →)“$\mathsf{ran}\, x$ Menge”
folgt via **Binär-Cartesisches Axiom**: $(\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$ Menge.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$.

`2:` Aus `1.2`“$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$” und
aus `1.1`“$(\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ Menge.

□

$\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom.** Intuitiv betrachtet haben weder $\mathsf{dom}\,x$ noch $\mathsf{ran}\,x$ mehr Elemente als x. Also erscheint das $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ Axiom recht kanonisch:

$\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**

Aus "x Menge" folgt "$\mathsf{dom}\,x$ Menge" und "$\mathsf{ran}\,x$ Menge".

7-9. Vier unmittelbare Folgerungen aus dem $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**. Klarer Weise ist `b)` ein Spezialfall von `a)` und `d)` ist ein Spezialfall von `c)`. Diese Spezialfälle werden in die Essays aufgenommen, um spätere Beweise ein wenig abzukürzen. Die Präsentation der logischen Umformungen, die im Beweis zum Tragen kommen, ist auf ein Minimum reduziert:

7-9(Satz)

`a)` *Aus* "$\mathsf{dom}\,x$ *Unmenge*" *folgt* "x *Unmenge*".

`b)` *Aus* "$\mathsf{dom}\,x = \mathcal{U}$" *folgt* "$x$ *Unmenge*".

`c)` *Aus* "$\mathsf{ran}\,x$ *Unmenge*" *folgt* "x *Unmenge*".

`d)` *Aus* "$\mathsf{ran}\,x = \mathcal{U}$" *folgt* "$x$ *Unmenge*".

Beweis **7-9** a)

1: Via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom** gilt: $(x \text{ Menge}) \Rightarrow (\mathsf{dom}\, x \text{ Menge})$.

2: Aus 1
folgt: $(\mathsf{dom}\, x \text{ Unmenge}) \Rightarrow (x \text{ Unmenge})$.

b) VS gleich $\mathsf{dom}\, x = \mathcal{U}$.

1: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

2: Aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, x = \mathcal{U}$" und
aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: $\mathsf{dom}\, x$ Unmenge.

3: Aus 2"$\mathsf{dom}\, x$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen a): x Unmenge.

c)

1: Via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom** gilt: $(x \text{ Menge}) \Rightarrow (\mathsf{ran}\, x \text{ Menge})$.

2: Aus 2
folgt: $(\mathsf{ran}\, x \text{ Unmenge}) \Rightarrow (x \text{ Unmenge})$.

d) VS gleich $\mathsf{ran}\, x = \mathcal{U}$.

1: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

2: Aus VS gleich "$\mathsf{ran}\, x = \mathcal{U}$" und
aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: $\mathsf{ran}\, x$ Unmenge.

3: Aus 2"$\mathsf{ran}\, x$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen c): x Unmenge.

□

7-10. Sowohl Definitions- als auch Bild-Bereich vergrössern sich, wenn zu einer umfassenderen Klasse übergegangen wird:

7-10(Satz)

a) *Aus* "$x \subseteq y$" *folgt* "$\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, y$".

b) *Aus* "$x \subseteq y$" *folgt* "$\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathsf{ran}\, y$".

Beweis **7-10** `a)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x)$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$" und
aus →) "$x \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $(\alpha, \Omega) \in y$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha, \Omega) \in y$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

Beweis **7-10** `b) VS` gleich $x \subseteq y$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.
`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$" folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$" folgt via **7-4**:	$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.
`3:` Aus `2.2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und aus →) "$x \subseteq y$" folgt via **0-4**:	$(\Omega, \alpha) \in y$.
`4:` Aus `3`"$(\Omega, \alpha) \in y$" folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\, y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

$\square$

7-11. Definitions- und Bild-Bereich von $0, \mathcal{U}$ und $\{0\}$ werden ermittelt. Wenig überraschend gilt via `abcd)`, dass Definitions- und Bild-Bereich der leeren Menge gleich der leeren Menge ist und dass Definitions- und Bild-Bereich des Universums gleich dem Universum ist. Via `e)` steht fest, dass eine Klasse - hier ist es "$\{0\}$" - einen leeren Definitions-Bereich haben kann, ohne gleich der leeren Menge zu sein. Ähnlich steht via `f)` steht fest, dass eine Klasse - hier ist es "$\{0\}$" - einen leeren Bild-Bereich haben kann, ohne gleich der leeren Menge zu sein. In `gh)` wird schließlich als Konsequenz von `ab)` dargelegt, dass aus $0 \neq \mathsf{dom}\, x$ oder $0 \neq \mathsf{ran}\, x$ die Aussage $0 \neq x$ folgt:

7-11(Satz)

- `a)` $\mathsf{dom}\, 0 = 0$.
- `b)` $\mathsf{ran}\, 0 = 0$.
- `c)` $\mathsf{dom}\, \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- `d)` $\mathsf{ran}\, \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- `e)` "$0 \neq \{0\}$" *und* "$\mathsf{dom}\, \{0\} = 0$".
- `f)` "$0 \neq \{0\}$" *und* "$\mathsf{ran}\, \{0\} = 0$".
- `g)` *Aus* "$0 \neq \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$0 \neq x$".
- `h)` *Aus* "$0 \neq \mathsf{ran}\, x$" *folgt* "$0 \neq x$".

Beweis **7-11** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{dom}\, 0$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, 0$" folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in 0)$.

`3:` Es gilt `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in 0$".
Via **0-19** gilt "$(\alpha, \Omega) \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{dom}\, 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, 0) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{dom}\, 0)$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\, 0 = 0$.

<u>Beweis **7-11**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\, 0.$

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\, 0$”
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in 0).$

`3:` Es gilt `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in 0$” .
Via **0-19** gilt “$(\Omega, \alpha) \notin 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{ran}\, 0.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, 0) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{ran}\, 0).$

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\, 0 = 0.$

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}.$

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2`“α Menge” und
aus `2`“α Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (α, α) Menge.

`4:` Aus `3`“(α, α) Menge”
folgt via **0-19**: $(\alpha, \alpha) \in \mathcal{U}.$

`5:` Aus `4`“$(\alpha, \alpha) \in \mathcal{U}$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, \mathcal{U}.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, \mathcal{U}).$

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\, \mathcal{U} = \mathcal{U}.$

Beweis **7-11** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2`“α Menge” und
aus `2`“α Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (α, α) Menge.

`4:` Aus `3`“(α, α) Menge”
folgt via **0-19**: $(\alpha, \alpha) \in \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4`“$(\alpha, \alpha) \in \mathcal{U}$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Beweis **7-11** `e)`

`1:` Via **1-5** gilt: $0 \neq \{0\}$.

`2:` Es gilt: $(0 \neq \mathsf{dom}\,\{0\}) \vee (\mathsf{dom}\,\{0\} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $0 \neq \mathsf{dom}\,\{0\}$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$0 \neq \mathsf{dom}\,\{0\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{dom}\,\{0\}$.

`4:` Aus `3` "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,\{0\}$"
folgt via **7-2**: $\exists \Psi : (\Psi \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \Psi) \in \{0\})$.

`5:` Aus `4` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $(\Omega, \Psi) = 0$.

`6:` Es gilt `5` "$(\Omega, \Psi) = 0$".
Via **PaarAxiom I** gilt "$0 \neq (\Omega, \Psi)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{dom}\,\{0\} = 0$.

`2.2.Fall` $\mathsf{dom}\,\{0\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$\mathsf{dom}\,\{0\} = 0$"

`3:` Aus `1` "$0 \neq \{0\}$" und
aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,\{0\} = 0$"
folgt: $(0 \neq \{0\}) \wedge (\mathsf{dom}\,\{0\} = 0)$.

Beweis **7-11** `f)`

1: Via **1-5** gilt: $0 \neq \{0\}$.

2: Es gilt: $(0 \neq \mathsf{ran}\,\{0\}) \vee (\mathsf{ran}\,\{0\} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $0 \neq \mathsf{ran}\,\{0\}$.

3: Aus `2.1.Fall` "$0 \neq \mathsf{ran}\,\{0\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{ran}\,\{0\}$.

4: Aus 3 "$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\,\{0\}$"
folgt via **7-4**: $\exists \Psi : (\Psi \text{ Menge}) \wedge ((\Psi, \Omega) \in \{0\})$.

5: Aus 4 "$\ldots (\Psi, \Omega) \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $(\Psi, \Omega) = 0$.

6: Es gilt 5 "$(\Psi, \Omega) = 0$".
Via **PaarAxiom I** gilt "$0 \neq (\Psi, \Omega)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{ran}\,\{0\} = 0$.

`2.2.Fall` $\mathsf{ran}\,\{0\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$\mathsf{ran}\,\{0\} = 0$"

3: Aus 1 "$0 \neq \{0\}$" und
aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,\{0\} = 0$"
folgt: $(0 \neq \{0\}) \wedge (\mathsf{ran}\,\{0\} = 0)$.

Beweis **7-11** g) VS gleich $0 \neq \mathsf{dom}\, x$.

1: Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = 0$.

2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathsf{dom}\, 0 = 0$.

3: Aus 1.1.Fall "$x = 0$" und aus 2 "$\mathsf{dom}\, 0 = 0$" folgt: $\mathsf{dom}\, x = 0$.

4: Es gilt 3 "$\mathsf{dom}\, x = 0$". Es gilt VS gleich "$0 \neq \mathsf{dom}\, x$". Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x$.

1.2.Fall $0 \neq x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $0 \neq x$.

h) VS gleich $0 \neq \mathsf{ran}\, x$.

1: Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = 0$.

2: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\mathsf{ran}\, 0 = 0$.

3: Aus 1.1.Fall "$x = 0$" und aus 2 "$\mathsf{ran}\, 0 = 0$" folgt: $\mathsf{ran}\, x = 0$.

4: Es gilt 3 "$\mathsf{ran}\, x = 0$". Es gilt VS gleich "$0 \neq \mathsf{ran}\, x$". Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x$.

1.2.Fall $0 \neq x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $0 \neq x$.

$\square$

7-12. Es wird die Klasse aller Definitions-Bereiche der Elemente einer gegebenen Klasse definiert. **7-12** und **7-14** sind ähnliche Definitionen:

7-12(Definition)

$$\mathsf{7.2}(X) = \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{dom}\,\Omega))\}.$$

7-13. In a) ist eine notwendige Bedingung für "$w \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$" formuliert. In b) findet sich Hinreichendes für "$\mathsf{dom}\,w \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$". Bemerkenswerter Weise wird weder in a) noch in b) eine "Mengen-Eigenschaft" gefordert. **7-13** und **7-15** sind in Formulierung und Beweis-Führung ähnlich:

7-13(Satz)

a) *Aus* "$w \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = \mathsf{dom}\,\Omega) \wedge (\Omega \in X)$".

b) *Aus* "$x \in X$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,x \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$).

7-12(Def) $\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis</u> **7-13** `a)` `VS` gleich $w \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$" und
aus "$\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{dom}\,\Omega))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{dom}\,\Omega))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{dom}\,\Omega))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (w = \mathsf{dom}\,\Omega)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (w = \mathsf{dom}\,\Omega) \wedge (\Omega \in X)$.

`b)` `VS` gleich $x \in X$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt: $\exists x : x \in X$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`2:` Aus `1.2`"x Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\,x$ Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\exists x : x \in X$" und
aus "$\mathsf{dom}\,x = \mathsf{dom}\,x$"
folgt: $\exists x : (x \in X) \wedge (\mathsf{dom}\,x = \mathsf{dom}\,x)$.

`4:` Aus `3`"$\exists x : (x \in X) \wedge (\mathsf{dom}\,x = \mathsf{dom}\,x)$" und
aus `2`"$\mathsf{dom}\,x$ Menge"
folgt: $\mathsf{dom}\,x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{dom}\,\Omega))\}$.

`6:` Aus `5`"$\mathsf{dom}\,x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{dom}\,\Omega))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{dom}\,\Omega))\} = \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,x \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

$\square$

7-14. Es wird die Klasse aller Bild-Bereiche der Elemente einer gegebenen Klasse definiert. **7-14** und **7-12** sind ähnliche Definitionen:

7-14(Definition)

$$\mathsf{7.3}(X) = \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{ran}\,\Omega))\}.$$

7-15. In a) ist eine notwendige Bedingung für "$w \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$" formuliert. In b) findet sich Hinreichendes für "$\mathsf{dom}\,w \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$". Bemerkenswerter Weise wird weder in a) noch in b) eine "Mengen-Eigenschaft" gefordert. **7-15** und **7-13** sind in Formulierung und Beweis-Führung ähnlich:

7-15(Satz)

a) *Aus* "$w \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = \mathsf{ran}\,\Omega) \wedge (\Omega \in X)$".

b) *Aus* "$x \in X$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,x \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$).

7-14(Def) $\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis</u> **7-15** `a)` `VS` gleich $w \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$" und
aus "$\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{ran}\,\Omega))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{ran}\,\Omega))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{ran}\,\Omega))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (w = \mathsf{ran}\,\Omega)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (w = \mathsf{ran}\,\Omega) \wedge (\Omega \in X)$.

`b)` `VS` gleich $x \in X$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt: $\exists x : x \in X$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`2:` Aus `1.2`"x Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\,x$ Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\exists x : x \in X$" und
aus "$\mathsf{ran}\,x = \mathsf{ran}\,x$"
folgt: $\exists x : (x \in X) \wedge (\mathsf{ran}\,x = \mathsf{ran}\,x)$.

`4:` Aus `3`"$\exists x : (x \in X) \wedge (\mathsf{ran}\,x = \mathsf{ran}\,x)$" und
aus `2`"$\mathsf{ran}\,x$ Menge"
folgt: $\mathsf{ran}\,x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{ran}\,\Omega))\}$.

`6:` Aus `5`"$\mathsf{ran}\,x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{ran}\,\Omega))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \mathsf{ran}\,\Omega))\} = \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
folgt: $\mathsf{ran}\,x \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

$\square$

7-16. Es werden Definitions- und Bild-Bereiche im Zusammenhang mit Vereinigung und Durchschnitt untersucht. Während Definitions- und Bild-Bereich der Vereinigung jeweils gleich der Vereinigung der Definitions- und Bild-Bereiche ist, liegen die Verhältnisse bei dem Durchschnitt anders. Es steht lediglich die Aussage, dass der Definitions- und Bild-Bereich des Durchschnitts jeweils eine Teil-Klasse des Durchschnitts der Definitions- und Bild-Bereiche ist, zur Verfügung. Beispiele, die zeigen, dass die "TeilKlassen-Aussagen" beim Durchschnitt nicht ohne Weiteres durch Gleichungen ersetzt werden können, sind im Folgenden zu finden, siehe auch **7-17(Bem)**:

7-16(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(\bigcup X) = \bigcup \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

b) $\mathsf{dom}\,(\bigcap X) \subseteq \bigcap \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

c) $\mathsf{ran}\,(\bigcup X) = \bigcup \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

d) $\mathsf{ran}\,(\bigcap X) \subseteq \bigcap \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

e) $\mathsf{dom}\,(x \cup y) = (\mathsf{dom}\,x) \cup (\mathsf{dom}\,y)$.

f) $\mathsf{dom}\,(x \cap y) \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$.

g) $\mathsf{ran}\,(x \cup y) = (\mathsf{ran}\,x) \cup (\mathsf{ran}\,y)$.

h) $\mathsf{ran}\,(x \cap y) \subseteq (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,y)$.

7-12(Def) $\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

7-14(Def) $\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Beweis **7-16** a)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup X)$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup X)$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in \bigcup X)$.

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \bigcup X$"
folgt via **1-12**: $\exists \Psi : ((\alpha, \Omega) \in \Psi) \wedge (\Psi \in X)$.

4.1: Aus 3 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \Psi \ldots$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\Psi$.

4.2: Aus 3 "$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **7-13**: $\mathsf{dom}\,\Psi \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

5: Aus 4.1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,\Psi$" und
aus 4.2 "$\mathsf{dom}\,\Psi \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup X)) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\mathsf{dom}\,(\bigcup X) \subseteq \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}\text{”}}$

Beweis **7-16** `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$”
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\})$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$”
folgt via **7-13**: $\exists \Psi : (\Omega = \mathsf{dom}\,\Psi) \wedge (\Psi \in X)$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$” und
aus `3`“$\ldots \Omega = \mathsf{dom}\,\Psi \ldots$”
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\Psi$.

`5:` Aus `4`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,\Psi$”
folgt via **7-2**: $\exists \Phi : (\Phi \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Phi) \in \Psi)$.

`6:` Aus `5`“$\ldots (\alpha, \Phi) \in \Psi$” und
aus `3`“$\ldots \Psi \in X$”
folgt via **1-12**: $(\alpha, \Phi) \in \bigcup X$.

`7:` Aus `6`“$(\alpha, \Phi) \in \bigcup X$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup X)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup X))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\} \subseteq \mathsf{dom}\,(\bigcup X)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\,(\bigcup X) \subseteq \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$” und
aus `A2` gleich “$\bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\} \subseteq \mathsf{dom}\,(\bigcup X)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\bigcup X) = \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Beweis **7-16** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcap X)$.

`2.1`: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcap X)$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2`: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcap X)$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in \bigcap X)$.

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\beta \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

`4`: Aus `Thema3` "$\beta \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
folgt via **7-13**:
$\exists \Psi : (\beta = \mathsf{dom}\,\Psi) \wedge (\Psi \in X)$.

`5`: Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \bigcap X$" und
aus `4` "$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **1-13**: $(\alpha, \Omega) \in \Psi$.

`6`: Aus `5` "$(\alpha, \Omega) \in \Psi$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\Psi$.

`7`: Aus `6` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,\Psi$" und
aus `4` "$\ldots \beta = \mathsf{dom}\,\Psi \ldots$"
folgt: $\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema3`:

`A1`	"$\forall \beta : (\beta \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$"

`4`: Aus `A1` gleich
"$\forall \beta : (\beta \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcap X)) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\,(\bigcap X) \subseteq \bigcap\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Beweis **7-16** `c)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcup X)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcup X)$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \bigcup X)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \bigcup X$"
folgt via **1-12**: $\exists \Psi : ((\Omega, \alpha) \in \Psi) \wedge (\Psi \in X)$.

`4.1:` Aus `3` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \Psi \ldots$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **7-15**: $\mathsf{ran}\,\Psi \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

`5:` Aus `4.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$" und
aus `4.2` "$\mathsf{ran}\,\Psi \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcup X)) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\,(\bigcup X) \subseteq \bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$"

<u>Beweis</u> **7-16** c) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\})$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
folgt via **7-15**: $\exists \Psi : (\Omega = \mathsf{ran}\,\Psi) \wedge (\Psi \in X)$.

4: Aus 2 "$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus 3 "$\ldots \Omega = \mathsf{ran}\,\Psi \ldots$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$.

5: Aus 4 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$"
folgt via **7-4**: $\exists \Phi : (\Phi \text{ Menge}) \wedge ((\Phi, \alpha) \in \Psi)$.

6: Aus 5 "$\ldots (\Phi, \alpha) \in \Psi$" und
aus 3 "$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **1-12**: $(\Phi, \alpha) \in \bigcup X$.

7: Aus 6 "$(\Phi, \alpha) \in \bigcup X$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcup X)$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcup X))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\bigcup X)\text{”}}$

1.3: Aus A1 gleich "$\mathsf{ran}\,(\bigcup X) \subseteq \bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$" und
aus A2 gleich "$\bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\bigcup X)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\bigcup X) = \bigcup\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Beweis **7-16** d)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcap X)$.

2.1: Aus Thema1"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcap X)$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

2.2: Aus Thema1"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcap X)$"
folgt via **7-4**: $\exists\Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \bigcap X)$.

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\beta \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

4: Aus Thema3"$\beta \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
folgt via **7-15**:
$\exists\Psi : (\beta = \mathsf{ran}\,\Psi) \wedge (\Psi \in X)$.

5: Aus 2.2"$\ldots(\Omega, \alpha) \in \bigcap X$" und
aus 4"$\ldots\Psi \in X$"
folgt via **1-13**: $(\Omega, \alpha) \in \Psi$.

6: Aus 5"$(\Omega, \alpha) \in \Psi$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$.

7: Aus 6"$\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$" und
aus 4"$\ldots\beta = \mathsf{ran}\,\Psi\ldots$"
folgt: $\alpha \in \beta$.

Ergo Thema3:

A1	"$\forall\beta : (\beta \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$"

4: Aus A1 gleich
"$\forall\beta : (\beta \in \{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und
aus 2.1"α Menge"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\bigcap X)) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\bigcap X) \subseteq \bigcap\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis **7-16**</u> `e)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \cup y)$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \cup y)$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x \cup y)$.

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x \cup y$"
folgt via **2-2**: $((\alpha, \Omega) \in x) \vee ((\alpha, \Omega) \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(\alpha, \Omega) \in x$.

4: Aus `3.1.Fall` "$(\alpha, \Omega) \in x$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

5: Aus 4 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)$.

`3.2.Fall` $(\alpha, \Omega) \in y$.

4: Aus `3.2.Fall` "$(\alpha, \Omega) \in y$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, y$.

5: Aus 4 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \cup y)) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\,(x \cup y) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)$"

Beweis **7-16** `e)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \vee (\alpha \in \mathsf{dom}\, y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x)$.

`4:` Aus `3`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$”
folgt via **2-2**: $(\alpha, \Omega) \in x \cup y$.

`5:` Aus `4`“$(\alpha, \Omega) \in x \cup y$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, (x \cup y)$.

`2.2.Fall` $\alpha \in \mathsf{dom}\, y$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$\alpha \in \mathsf{dom}\, y$”
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in y)$.

`4:` Aus `3`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in y$”
folgt via **2-2**: $(\alpha, \Omega) \in x \cup y$.

`5:` Aus `4`“$(\alpha, \Omega) \in x \cup y$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, (x \cup y)$.

`Ende Fallunterscheidung`
In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \mathsf{dom}\, (x \cup y)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, (x \cup y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$(\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y) \subseteq \mathsf{dom}\, (x \cup y)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\, (x \cup y) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)$” und
aus `A2` gleich “$(\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y) \subseteq \mathsf{dom}\, (x \cup y)$” folgt
via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, (x \cup y) = (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)$.

<u>Beweis **7-16** `f)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \cap y)$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \cap y)$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x \cap y)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x \cap y$"
folgt via **2-2**: $((\alpha, \Omega) \in x) \wedge ((\alpha, \Omega) \in y)$.

`4.1:` Aus `3` "$(\alpha, \Omega) \in x \ldots$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in y$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, y$.

`5:` Aus `4.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus `4.2` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \cap y)) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\,(x \cap y) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

Beweis **7-16** g)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cup y)$.

2: Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cup y)$”
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x \cup y)$.

3: Aus `2.2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x \cup y$”
folgt via **2-2**: $((\Omega, \alpha) \in x) \vee ((\Omega, \alpha) \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(\Omega, \alpha) \in x$.

4: Aus `3.1.Fall`“$(\Omega, \alpha) \in x$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,x$.

5: Aus 4“$\alpha \in \mathsf{ran}\,x$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\mathsf{ran}\,x) \cup (\mathsf{ran}\,y)$.

`3.2.Fall` $(\Omega, \alpha) \in y$.

4: Aus `3.2.Fall`“$(\Omega, \alpha) \in y$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,y$.

5: Aus 4“$\alpha \in \mathsf{ran}\,y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\mathsf{ran}\,x) \cup (\mathsf{ran}\,y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in (\mathsf{ran}\,x) \cup (\mathsf{ran}\,y)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cup y)) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{ran}\,x) \cup (\mathsf{ran}\,y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1`	“$\mathsf{ran}\,(x \cup y) \subseteq (\mathsf{ran}\,x) \cup (\mathsf{ran}\,y)$”

Beweis **7-16** g) ...

`Thema1.2` $\alpha \in (\mathsf{ran}\, x) \cup (\mathsf{ran}\, y)$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in (\mathsf{ran}\, x) \cup (\mathsf{ran}\, y)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathsf{ran}\, x) \vee (\alpha \in \mathsf{ran}\, y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **2-2**: $(\Omega, \alpha) \in x \cup y$.

`5:` Aus `4` "$(\Omega, \alpha) \in x \cup y$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cup y)$.

`2.2.Fall` $\alpha \in \mathsf{ran}\, y$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$\alpha \in \mathsf{ran}\, y$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in y)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in y$"
folgt via **2-2**: $(\Omega, \alpha) \in x \cup y$.

`5:` Aus `4` "$(\Omega, \alpha) \in x \cup y$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cup y)$.

`Ende Fallunterscheidung`
In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cup y)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{ran}\, x) \cup (\mathsf{ran}\, y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cup y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$(\mathsf{ran}\, x) \cup (\mathsf{ran}\, y) \subseteq \mathsf{ran}\,(x \cup y)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(x \cup y) \subseteq (\mathsf{ran}\, x) \cup (\mathsf{ran}\, y)$" und
aus `A2` gleich "$(\mathsf{ran}\, x) \cup (\mathsf{ran}\, y) \subseteq \mathsf{ran}\,(x \cup y)$" folgt
via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(x \cup y) = (\mathsf{ran}\, x) \cup (\mathsf{ran}\, y)$.

Beweis **7-16** `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cap y)$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cap y)$”
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x \cap y)$.

`3:` Aus `2.2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x \cap y$”
folgt via **2-2**: $((\Omega, \alpha) \in x) \wedge ((\Omega, \alpha) \in y)$.

`4.1:` Aus `3`“$(\Omega, \alpha) \in x \ldots$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,x$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in y$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,y$.

`5:` Aus `4.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,x$” und
aus `4.2`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,y$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,y)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \cap y)) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(x \cap y) \subseteq (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,y)$.

$\square$

7-17. Wie in den folgenden vier Beispielen dargelegt, können die "TeilKlassen-Aussagen" von **7-16**`bdfh)` nicht ohne Weiteres durch Gleichungen ersetzt werden:

7-17.Bemerkung

- Die Gleichung
  "$\mathsf{dom}\,(\bigcap X) = \bigcap\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Gleichung
  "$\mathsf{ran}\,(\bigcap X) = \bigcap\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Gleichung
  "$\mathsf{dom}\,(x \cap y) = (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Gleichung
  "$\mathsf{ran}\,(x \cap y) = (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,y)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

7-18. Laut folgendem Beispiel ist die Gleichung
“$\mathsf{dom}\,(\bigcap X) = \bigcap\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$” nicht ohne Weiteres verfügbar:

<u>7-18.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $X = \{\{(p,p)\},\{(p,q)\}\}$.

Dann folgt:

a) $\bigcap X = 0$.

b) $\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\} = \{\{p\}\}$.

c) $\mathsf{dom}\,(\bigcap X) = 0$.

d) $\bigcap\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}) = \{p\}$.

e) $\mathsf{dom}\,(\bigcap X) \neq \bigcap\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Ad a): Da p, q Mengen sind und $p \neq q$ gilt, folgt $(p,p) \neq (p,q)$, woraus sich via **1-6** ergibt, dass es kein Element in $\bigcap X$ geben kann.

7-19. Laut folgendem Beispiel ist die Gleichung
"$\mathsf{ran}\,(\bigcap X) = \bigcap\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

7-19.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $X = \{\{(p, q)\}, \{(q, q)\}\}$.

Dann folgt:

a) $\bigcap X = 0$.

b) $\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\} = \{\{q\}\}$.

c) $\mathsf{ran}\,(\bigcap X) = 0$.

d) $\bigcap\{\mathsf{ran}\,\lambda : \lambda \in X\}) = \{q\}$.

e) $\mathsf{dom}\,(\bigcap X) \neq \bigcap\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in X\}$.

Ad a): Da p, q Mengen sind und $p \neq q$ gilt, folgt $(p, q) \neq (q, q)$, woraus sich via **1-6** ergibt, dass es kein Element in $\bigcap X$ geben kann.

7-20. Laut folgendem Beispiel ist die Gleichung
"$\mathsf{dom}\,(x \cap y) = (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$" nicht ohne Weiteres verfügbar:

7-20.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $y = \{(p, q)\}$.

Dann folgt:

a) $x \cap y = 0$.

b) $\mathsf{dom}\,x = \{p\}$.

c) $\mathsf{dom}\,y = \{p\}$.

d) $\mathsf{dom}\,(x \cap y) = 0$.

e) $(\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y) = \{p\}$.

f) $\mathsf{dom}\,(x \cap y) \neq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$.

7-21. Laut folgendem Beispiel ist die Gleichung “$\mathsf{ran}\,(x \cap y) = (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,y)$” nicht ohne Weiteres verfügbar:

7-21.BEISPIEL

Es gelte:

$\longrightarrow$) p Menge.

$\longrightarrow$) q Menge.

$\longrightarrow$) $p \neq q$.

$\longrightarrow$) $x = \{(p, q)\}$.

$\longrightarrow$) $y = \{(q, q)\}$.

Dann folgt:

a) $x \cap y = 0$.

b) $\mathsf{ran}\,x = \{q\}$.

c) $\mathsf{ran}\,y = \{q\}$.

d) $\mathsf{ran}\,(x \cap y) = 0$.

e) $(\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,y) = \{q\}$.

f) $\mathsf{ran}\,(x \cap y) \neq (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,y)$.

7-22. Es folgen acht Aussagen über Definitions- und Bild-Bereich binärer, cartesischer Produkte. Dabei kommt der leeren Menge eine Sonderrolle zu:

7-22(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(x \times y) \subseteq x$.

b) *Aus* "$0 \neq y$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(x \times y) = x$".

c) $\mathsf{dom}\,(x \times 0) = 0$.

d) $\mathsf{dom}\,(0 \times y) = 0$.

e) $\mathsf{ran}\,(x \times y) \subseteq y$.

f) *Aus* "$0 \neq x$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(x \times y) = y$".

g) $\mathsf{ran}\,(x \times 0) = 0$.

h) $\mathsf{ran}\,(0 \times y) = 0$.

Beweis **7-22** a)

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \times y)$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \times y)$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x \times y)$.

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x \times y$"
folgt via **6-6**: $\alpha \in x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \times y)) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\,(x \times y) \subseteq x$.

<u>Beweis</u> **7-22** `b)` `VS` gleich $0 \neq y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq y$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in y$.

> $\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\alpha \in x$.
>
> `3:` Aus `Thema2`"$\alpha \in x$" und
> aus `1.1`"$\ldots \Omega \in y$"
> folgt via **6-6**: $(\alpha, \Omega) \in x \times y$.
>
> `4:` Aus `3`"$(\alpha, \Omega) \in x \times y$"
> folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \times y)$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \times y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}x \subseteq \mathsf{dom}\,(x \times y)\text{"}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(x \times y) \subseteq x$.

`2:` Aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(x \times y) \subseteq x$" und aus
`A1` gleich "$x \subseteq \mathsf{dom}\,(x \times y)$" folgt
via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(x \times y) = x$.

`c)`

`1:` $\mathsf{dom}\,(x \times 0) \stackrel{\mathbf{6-13}}{=} \mathsf{dom}\,0 \stackrel{\mathbf{7-11}}{=} 0$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathsf{dom}\,(x \times 0) = 0$.

`d)`

`1:` $\mathsf{dom}\,(0 \times y) \stackrel{\mathbf{6-13}}{=} \mathsf{dom}\,0 \stackrel{\mathbf{7-11}}{=} 0$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathsf{dom}\,(0 \times y) = 0$.

<u>Beweis **7-22**</u> `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \times y)$.
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \times y)$” folgt via **7-4**:	$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x \times y)$.
`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x \times y$” folgt via **6-6**:	$\alpha \in y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \times y)) \Rightarrow (\alpha \in y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(x \times y) \subseteq y$.

`f)` `VS` gleich $0 \neq x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x$” folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$	$\alpha \in y$.
`3:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega \in x$” und aus `Thema2`“$\alpha \in y$” folgt via **6-6**:	$(\Omega, \alpha) \in x \times y$.
`4:` Aus `3`“$(\Omega, \alpha) \in x \times y$” folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \times y)$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \times y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}y \subseteq \mathsf{ran}\,(x \times y)\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{ran}\,(x \times y) \subseteq y$.

`2:` Aus `1.2`“$\mathsf{ran}\,(x \times y) \subseteq y$” und aus `A1` gleich “$y \subseteq \mathsf{ran}\,(x \times y)$” folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(x \times y) = y$.

Beweis **7-22** `g)`

`1:` $\mathsf{ran}\,(x \times 0) \stackrel{\textbf{6-13}}{=} \mathsf{ran}\,0 \stackrel{\textbf{7-11}}{=} 0.$

`2:` Aus `1` folgt: $\mathsf{ran}\,(x \times 0) = 0.$

`h)`

`1:` $\mathsf{ran}\,(0 \times y) \stackrel{\textbf{6-13}}{=} \mathsf{ran}\,0 \stackrel{\textbf{7-11}}{=} 0.$

`2:` Aus `1` folgt: $\mathsf{ran}\,(0 \times y) = 0.$

$\square$

7-23. Es ist vermutlich wenig überraschend, dass $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ keine Menge ist:

7-23(Satz)

$$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \textit{ Unmenge.}$$

Beweis **7-23**

1: Via **0-18** gilt: $0 \neq \mathcal{U}$.

2: Aus 1"$0 \neq \mathcal{U}$"
folgt via **7-22**: $\mathsf{dom}\,(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

3: Aus 2"$\mathsf{dom}\,(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \mathcal{U}$"
folgt via **7-9**: $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ Unmenge.

$\square$

7-24. Die folgenden zwei Aussagen sind als Kombination vorhergehender Resultate einfach zu beweisen:

7-24(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq y \cap \mathsf{dom}\,x$.

b) $\mathsf{ran}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq z \cap \mathsf{ran}\,x$.

Beweis **7-24** a)

1: Via **7-16** gilt: $\mathsf{dom}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,(y \times z))$.

2: Via **7-22** gilt: $\mathsf{dom}\,(y \times z) \subseteq y$.

3: Aus 2"$\mathsf{dom}\,(y \times z) \subseteq y$"
folgt via **2-15**: $(\mathsf{dom}\,(y \times z)) \cap \mathsf{dom}\,x \subseteq y \cap \mathsf{dom}\,x$.

4: Via **KG**$\cap$ gilt: $(\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,(y \times z)) = (\mathsf{dom}\,(y \times z)) \cap \mathsf{dom}\,x$.

5: Aus 1"$\mathsf{dom}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,(y \times z))$" und
aus 4"$(\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,(y \times z)) = (\mathsf{dom}\,(y \times z)) \cap \mathsf{dom}\,x$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq (\mathsf{dom}\,(y \times z)) \cap \mathsf{dom}\,x$.

6: Aus 5"$\mathsf{dom}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq (\mathsf{dom}\,(y \times z)) \cap \mathsf{dom}\,x$" und
aus 3"$(\mathsf{dom}\,(y \times z)) \cap \mathsf{dom}\,x \subseteq y \cap \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq y \cap \mathsf{dom}\,x$.

b)

1: Via **7-16** gilt: $\mathsf{ran}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,(y \times z))$.

2: Via **7-22** gilt: $\mathsf{ran}\,(y \times z) \subseteq z$.

3: Aus 2"$\mathsf{ran}\,(y \times z) \subseteq z$"
folgt via **2-15**: $(\mathsf{ran}\,(y \times z)) \cap \mathsf{ran}\,x \subseteq z \cap \mathsf{ran}\,x$.

4: Via **KG**$\cap$ gilt: $(\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,(y \times z)) = (\mathsf{ran}\,(y \times z)) \cap \mathsf{ran}\,x$.

5: Aus 1"$\mathsf{ran}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq (\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,(y \times z))$" und
aus 4"$(\mathsf{ran}\,x) \cap (\mathsf{ran}\,(y \times z)) = (\mathsf{ran}\,(y \times z)) \cap \mathsf{ran}\,x$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq (\mathsf{ran}\,(y \times z)) \cap \mathsf{ran}\,x$.

6: Aus 5"$\mathsf{ran}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq (\mathsf{ran}\,(y \times z)) \cap \mathsf{ran}\,x$" und
aus 3"$(\mathsf{ran}\,(y \times z)) \cap \mathsf{ran}\,x \subseteq z \cap \mathsf{ran}\,x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(x \cap (y \times z)) \subseteq z \cap \mathsf{ran}\,x$.

$\square$

injektiv.
nicht-injektiv.
Bild von E **unter** x. $x[E]$.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 11/04/11**

8-1. Die Konzepte der Injektivität und der Nicht-Injektivität werden für beliebige Klassen eingeführt. Die Phrasen “x **injektiv**” und “x **nicht-injektiv**” sind zwar grammatikalisch unvollständig, jedoch bestechen sie durch Kürze im Gebrauch:

8-1(Definition)

1) “x **injektiv**” genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\gamma, \beta) \in x)) \Rightarrow (\alpha = \gamma).$$

2) “x **nicht-injektiv**” genau dann, wenn gilt:

$$\neg(x \text{ injektiv}).$$

8-2. Es wird fest gestellt, welche Klassen mit welchen Eigenschaften existieren, wenn x nicht-injektiv ist. Die Liste dieser Eigenschaften ist durchaus beeindruckend und ohne Hilfsmittel kaum in gut lesbare Form zu bringen. So wird der Lesbarkeit halber ein weiteres Ausdrucksmittel in die Essays eingeführt. Es besteht aus einer Liste von Eigenschaften, die mit Nummern, die "`e.`" folgen, versehen ist und der eine verbal formulierte Existenzaussage vorangestellt ist:

8-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *x nicht-injektiv.*

Dann gibt es Ω, Ψ, Φ, so dass gilt:

`e.1)` $(\Omega, \Psi) \in x$.

`e.2)` $(\Phi, \Psi) \in x$.

`e.3)` $\Omega \neq \Phi$.

Beweis **8-2**

`1:` Aus $\rightarrow)$ "x nicht-injektiv"
folgt via **8-1(Def)**: $\neg(x \text{ injektiv})$.

`2:` Aus `1` "$\neg(x \text{ injektiv})$"
folgt via **8-1(Def)**: $\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\gamma, \beta) \in x)) \Rightarrow (\alpha = \gamma))$.

`3:` Aus `2`
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi, \Phi :$$
$$(\Omega, \Psi) \in x$$
$$\wedge \quad (\Phi, \Psi) \in x$$
$$\wedge \quad \Omega \neq \Phi.$$

□

8-3. Um nachzuweisen, dass x nicht-injektiv ist, sind drei Klassen mit speziellen Eigenschaften aufzutreiben:

8-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $(p, q) \in x$.

$\rightarrow\!)$ $(w, q) \in x$.

$\rightarrow\!)$ $p \neq w$.

Dann folgt "x nicht-injektiv".

Beweis **8-3**

1: Es gilt: $(x \text{ injektiv}) \vee (\neg(x \text{ injektiv}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x injektiv.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "x injektiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$(p, q) \in x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$(w, q) \in x$"
folgt via **8-1(Def)**: $p = w$.

3: Es gilt 2"$p = w$".
Es gilt $\rightarrow\!)$ "$p \neq w$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(x \text{ injektiv})$.

`1.2.Fall` $\neg(x \text{ injektiv})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$\neg(x \text{ injektiv})$"

2: Aus `A1` gleich "$\neg(x \text{ injektiv})$"
folgt via **8-1(Def)**: x nicht-injektiv.

$\square$

8-4. Jede TeilKlasse einer injektiven Klasse ist injektiv. Jede Klasse, die eine nicht-injektive Klasse umfasst, ist nicht-injektiv:

8-4(Satz)

a) *Aus “$x \subseteq y$” und “y injektiv” folgt “x injektiv”.*

b) *Aus “$x \subseteq y$” und “x nicht-injektiv” folgt “y nicht-injektiv”.*

Beweis **8-4** a) `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (y \text{ injektiv})$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\gamma, \beta) \in x)$.

`2.1`: Aus `Thema1` “$(\alpha, \beta) \in x \ldots$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq y$”
folgt via **0-4**: $(\alpha, \beta) \in y$.

`2.2`: Aus `Thema1` “$\ldots (\gamma, \beta) \in x$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq y$”
folgt via **0-4**: $(\gamma, \beta) \in y$.

`3`: Aus →) “y injektiv”,
aus `2.1` “$(\alpha, \beta) \in y$” und
aus `2.2` “$(\gamma, \beta) \in y$”
folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\gamma, \beta) \in x)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: x injektiv.

<u>Beweis **8-4**</u> `b)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (x \text{ nicht-injektiv})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ nicht-injektiv"
folgt via **8-2**: $\exists \Omega, \Psi, \Phi : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Phi, \Psi) \in x) \wedge (\Omega \neq \Phi)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y \ldots$"
folgt via **0-4**: $(\Omega, \Psi) \in y$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots (\Phi, \Psi) \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y \ldots$"
folgt via **0-4**: $(\Phi, \Psi) \in y$.

`3:` Aus `2.1`"$(\Omega, \Psi) \in y$",
aus `2.2`"$(\Phi, \Psi) \in y$" und
aus `1`"$\ldots \Omega \neq \Phi$"
folgt via **8-3**: y nicht-injektiv.

$\square$

8-5. Das **Bild von** E **unter** x besteht aus genau jenen Mengen ω, für die es ein Ω gibt, so dass $\Omega \in E$ und $(\Omega, \omega) \in x$. Obwohl hauptsächlich bei Relationen und Funktionen verwendet, wird das Bild von E unter x für ansonsten beliebige Klassen E und x definiert. Interessanter Weise liegen schon in diesem Fall viele der im Zusammenhang mit Relationen oder Funktionen erwarteten Resultate vor:

8-5(Definition)

1) $x[E]$

$$= 8.0(E, x) = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Bild von** E **unter** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x[E].$$

8-6. Das Bild von E unter x ist $x[E]$ - und das Bild von E unter x ist eindeutig bestimmt:

8-6(Satz)

a) *$x[E]$ Bild von E unter x.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Bild von E unter x" und "$\mathfrak{D}$ Bild von E unter x" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **8-6** a)

Aus "$x[E] = x[E]$"
folgt via **8-5(Def)**: $x[E]$ ist das Bild von E unter x.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ Bild von E unter x) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Bild von E unter x).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Bild von E unter $x\ldots$"
folgt via **8-5(Def)**: $\mathfrak{C} = x[E]$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ Bild von E unter x"
folgt via **8-5(Def)**: $\mathfrak{D} = x[E]$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = x[E]$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = x[E]$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

8-7. Es werden drei notwendige Bedingungen für "$q \in x[E]$" angegeben:

8-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $q \in x[E]$.

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

`e.1)` $\Omega \in E$.

`e.2)` $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`e.3)` $(\Omega, q) \in x$.

Beweis **8-7**

1: Aus $\rightarrow$)"$q \in x[E]$" und
aus "$x[E] = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}$"
folgt: $q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}$.

2: Aus 1"$q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, q) \in x)$.

3: Aus 2"$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 2"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$",
aus 3"$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt: $\exists \Omega :$

$$\Omega \in E$$

$$\wedge \quad \Omega \in \mathsf{dom}\, x$$

$$\wedge \quad (\Omega, q) \in x.$$

□

8-8. Im folgenden Satz wird die - vermutlich erwartete - hinreichende Bedingung für “$q \in x[E]$” gegeben:

8-8(Satz)

Aus “$(p,q) \in x$” und “$p \in E$” folgt “$q \in x[E]$”.

Beweis **8-8** `VS` gleich $((p,q) \in x) \wedge (p \in E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in x \ldots$”
folgt: $\exists p : (p,q) \in x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`2.1:` Aus `1.1`“$\exists p \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots p \in E$” und
aus `VS` gleich “$(p,q) \in x \ldots$”
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge ((p,q) \in x)$.

`2.2:` Aus `1.2`“(p,q) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: q Menge.

`3:` Aus `2.1`“$\exists p : (p \in E) \wedge ((p,q) \in x)$” und
aus `2.2`“q Menge”
folgt: $q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega,\omega) \in x))\}$.

`4:` Aus `3`“$q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega,\omega) \in x))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega,\omega) \in x))\} = x[E]$”
folgt: $q \in x[E]$.

$\square$

8-9. Ohne allzu viel Rücksicht auf die Notationen von **8-9** zu nehmen wird das Bild von x unter E wird grösser, wenn "x" oder "E" durch größere Klassen ersetzt wird:

8-9(Satz)

a) *Aus* "$E \subseteq e$" *folgt* "$x[E] \subseteq x[e]$".

b) *Aus* "$x \subseteq y$" *folgt* "$x[E] \subseteq y[E]$".

c) *Aus* "$x \subseteq y$" *und* "$E \subseteq e$" *folgt* "$x[E] \subseteq y[e]$".

Beweis **8-9** a) VS gleich $E \subseteq e$.

Thema1 $\alpha \in x[E]$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in x[E]$" folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x))$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und aus VS gleich "$E \subseteq e$" folgt via **0-4**: $\Omega \in e$.

4: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und aus 3 "$\Omega \in e$" folgt via **8-8**: $\alpha \in x[e]$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in x[e])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[E] \subseteq x[e]$.

<u>Beweis **8-9**</u> `b)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in x[E]$.
`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in x[E]$" folgt via **8-7**:	$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.
`3:` Aus `2` "$\dots (\Omega, \alpha) \in x$" und aus `VS` gleich "$x \subseteq y$" folgt via **0-4**:	$(\Omega, \alpha) \in y$.
`4:` Aus `3` "$(\Omega, \alpha) \in y$" und aus `2` "$\dots \Omega \in E \dots$" folgt via **8-8**:	$\alpha \in y[E]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in y[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[E] \subseteq y[E]$.

`c)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (E \subseteq e)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y \dots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x[E] \subseteq y[E]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots E \subseteq e$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $y[E] \subseteq y[e]$.

`2:` Aus `1.1` "$x[E] \subseteq y[E]$" und
aus `1.2` "$y[E] \subseteq y[e]$"
folgt via **0-6**: $x[E] \subseteq y[e]$.

□

8-10. Das Bild von E unter x hat Einiges mit $\mathsf{dom}\, x$ und $\mathsf{ran}\, x$ zu tzn:

<u>**8-10(Satz)**</u>

a) *Aus "$q \in x[E]$" folgt "$q \in \mathsf{ran}\, x$".*

b) $x[E] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

c) $x[E] = x[E \cap \mathsf{dom}\, x]$.

d) $x[\mathsf{dom}\, x] = \mathsf{ran}\, x$.

<u>Beweis **8-10**</u> `a)` `VS` gleich $q \in x[E]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in x[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega, q) \in x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt via **7-5**: $q \in \mathsf{ran}\, x$.

`b)`

`Thema1` $\alpha \in x[E]$.

Aus `Thema1`"$\alpha \in x[E]$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[E] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

<u>Beweis **8-10** `c)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x[E]$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x[E]$"
folgt via **8-7**:
$$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x).$$

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus `3`"$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[E \cap \mathsf{dom}\, x]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in x[E \cap \mathsf{dom}\, x])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}x[E] \subseteq x[E \cap \mathsf{dom}\, x]\text{”}}$

`1.2:` Via **2-7** gilt: $E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq E$.

`2:` Aus `1.2`"$E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq E$"
folgt via **8-9**: $x[E \cap \mathsf{dom}\, x] \subseteq x[E]$.

`3:` Aus `A1` gleich "$x[E] \subseteq x[E \cap \mathsf{dom}\, x]$" und
aus `2`"$x[E \cap \mathsf{dom}\, x] \subseteq x[E]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x[E] = x[E \cap \mathsf{dom}\, x]$.

Beweis **8-10** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\, x.$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$”
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x.$

`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$”
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x.$

`4:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$” und
aus `3`“$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[\mathsf{dom}\, x].$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, x) \Rightarrow (\alpha \in x[\mathsf{dom}\, x]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{ran}\, x \subseteq x[\mathsf{dom}\, x]\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $x[\mathsf{dom}\, x] \subseteq \mathsf{ran}\, x.$

`2:` Aus `1.2`“$x[\mathsf{dom}\, x] \subseteq \mathsf{ran}\, x$” und
aus `A1` gleich “$\mathsf{ran}\, x \subseteq x[\mathsf{dom}\, x]$” folgt
via **GleichheitsAxiom**: $x[\mathsf{dom}\, x] = \mathsf{ran}\, x.$

□

8-11. Es folgen zwei hinreichende Bedingungen für "$x[E]$ Menge". Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

> **8-11(Satz)**
>
> `a)` *Aus "x Menge" folgt "$x[E]$ Menge".*
>
> `b)` *Aus "$\mathsf{ran}\, x$ Menge" folgt "$x[E]$ Menge".*

Beweis **8-11** `b)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\, x$ Menge.

`1:` Via **8-10** gilt: $x[E] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1`"$x[E] \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $x[E]$ Menge.

`a)` `VS` gleich x Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\, x$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x[E]$ Menge.

□

8-12. Es sind sechs Aussagen über das Bild von E unter x angegeben, in denen x oder E gleich 0 oder gleich $\mathcal{U}$ ist:

8-12(Satz)

a) $x[0] = 0$.

b) $0[E] = 0$.

c) $x[\mathcal{U}] = \mathsf{ran}\, x$.

d) *Aus* "$0 \neq E$" *folgt* "$\mathcal{U}[E] = \mathcal{U}$".

e) $\mathcal{U}[0] = 0$.

f) $0[\mathcal{U}] = 0$.

Beweis **8-12** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x[0]$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in x[0]$" folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

3: Es gilt 2 "$\dots \Omega \in 0 \dots$". Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$". Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x[0]$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in x[0]) \Rightarrow (\alpha \notin x[0])$.

Konsequenz via **0-19**: $x[0] = 0$.

Beweis **8-12** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in 0[E]$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in 0[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in 0)$.

`3:` Es gilt `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in 0.$"
Via **0-19** gilt "$(\Omega, \alpha) \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 0[E]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0[E]) \Rightarrow (\alpha \notin 0[E])$.

Konsequenz via **0-19**: $0[E] = 0$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$"
folgt via **0-19**: $\Omega \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus `3`"$\Omega \in \mathcal{U}$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[\mathcal{U}]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, x) \Rightarrow (\alpha \in x[\mathcal{U}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\, x \subseteq x[\mathcal{U}]$"

`1.2:` Via **8-10** gilt: $x[\mathcal{U}] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1.2`"$x[\mathcal{U}] \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\, x \subseteq x[\mathcal{U}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x[\mathcal{U}] = \mathsf{ran}\, x$.

<u>Beweis **8-12**</u> `d)` `VS` gleich $0 \neq E$.

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `3` "Ω Menge" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, α) Menge.

`5:` Aus `4` "(Ω, α) Menge"
folgt via **0-19**: $(\Omega, \alpha) \in \mathcal{U}$.

`6:` Aus `5` "$(\Omega, \alpha) \in \mathcal{U}$" und
aus `2.2` "$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in \mathcal{U}[E]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}[E])$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathcal{U}[E] = \mathcal{U}$.

`e)` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathcal{U}[0] = 0$.

`f)` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $0[\mathcal{U}] = 0$.

$\square$

8-13. Das Kriterium bezieht sich auf “$x[E]=0$” :

8-13(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $x[E]=0$.

ii) $E\cap\mathsf{dom}\,x=0$.

Beweis **8-13** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ VS gleich $x[E]=0$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha\in E\cap\mathsf{dom}\,x$.

2: Aus Thema1“$\alpha\in E\cap\mathsf{dom}\,x$”
folgt via **2-2**: $(\alpha\in E)\wedge(\alpha\in\mathsf{dom}\,x)$.

3: Aus 2“$\ldots\alpha\in\mathsf{dom}\,x$”
folgt via **7-2**: $\exists\Omega:(\alpha,\Omega)\in x$.

4: Aus 3“$\ldots(\alpha,\Omega)\in x$” und
aus 2“$\alpha\in E\ldots$”
folgt via **8-8**: $\Omega\in x[E]$.

5: Aus 4“$\Omega\in x[E]$” und
aus VS gleich “$x[E]=0$”
folgt: $\Omega\in 0$.

6: Es gilt 5“$\Omega\in 0$” .
Via **0-19** gilt “$\Omega\notin 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha\notin E\cap\mathsf{dom}\,x$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha:(\alpha\in E\cap\mathsf{dom}\,x)\Rightarrow(\alpha\notin E\cap\mathsf{dom}\,x)$.

Konsequenz via **0-19**: $E\cap\mathsf{dom}\,x=0$.

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{i)}}$ VS gleich $E\cap\mathsf{dom}\,x=0$.

1: $x[E]\stackrel{\mathbf{8-10}}{=}x[E\cap\mathsf{dom}\,x]\stackrel{\mathtt{VS}}{=}x[0]\stackrel{\mathbf{8-12}}{=}0$.

2: Aus 1
folgt: $x[E]=0$.

□

8-14. Durch Negation der Aussagen von **8-13** folgt ein Kriterium für "$0 \neq x[E]$" :

8-14(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq x[E]$.

ii) $0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x$.

Beweis **8-14**

1: Via **8-13** gilt: $(x[E] = 0) \Leftrightarrow (E \cap \mathsf{dom}\, x = 0)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x[E] = 0)) \Leftrightarrow (\neg(E \cap \mathsf{dom}\, x = 0))$.

3: Aus 2
folgt: $(0 \neq x[E]) \Leftrightarrow (0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x)$.

□

8-15. Im folgenden Kriterium geht es um die Frage, wann q *kein Element* von $x[E]$ ist:

8-15(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $q \notin x[E]$.

`ii)` *“q Unmenge” oder “$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x)$”.*

Beweis **8-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $q \notin x[E]$.

`1:` Aus `VS` gleich “$q \notin x[E]$” und
aus “$x[E] = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}$”
folgt: $q \notin \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}$.

`2:` Aus `1`“$q \notin \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}$”
folgt: $(q \text{ Unmenge}) \vee (\neg(\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, q) \in x))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(q \text{ Unmenge}) \vee (\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(q \text{ Unmenge}) \vee (\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x))$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $(\neg(q \text{ Menge})) \vee (\neg(\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, q) \in x)))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\neg((q \text{ Menge}) \wedge (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, q) \in x))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\neg(q \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $q \notin \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}$.

`5:` Aus `4`“$q \notin \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \omega) \in x))\} = x[E]$”
folgt: $q \notin x[E]$.

$\square$

8-16. Via Negation folgt aus **8-15** Hinreichendes für “$q \notin x[y]$” :

8-16(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\forall\alpha : (\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x)$.

Dann folgt “$q \notin x[E]$”.

Beweis **8-16**

1: Es gilt: $(q \in x[E]) \vee (q \notin x[E])$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $q \in x[E]$.

2: Aus `1.1.Fall` “$q \in x[E]$” folgt via **8-7**: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, q) \in x)$.

3: Aus 2“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und aus 2“$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x \ldots$” folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 3“$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x \ldots$” und aus $\rightarrow)$“$\forall\alpha : (\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x)$” folgt: $(\Omega, q) \notin x$.

5: Es gilt 4“$\ldots (\Omega, q) \notin x$”.
Es gilt 2“$(\Omega, q) \in x$.”
Ex falso quodlibet folgt: $q \notin x[E]$.

`1.2.Fall` $q \notin x[E]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $q \notin x[E]$.

□

8-17. Die folgenden Aussagen betreffen Folgerungen aus "$q \notin x[E]$", wobei q eine Menge ist und jeweils eine Zusatzprämisse zur Verfügung steht:

8-17(Satz)

a) *Aus "q Menge" und "$q \notin x[E]$" und "$p \in E$" folgt "$(p, q) \notin x$".*

b) *Aus "q Menge" und "$q \notin x[E]$" und "$(p, q) \in x$" folgt "$p \notin E$".*

Beweis **8-17** a) VS gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (q \notin x[E]) \wedge (p \in E)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q \notin x[E] \ldots$"
folgt via **8-15**: $(q \text{ Unmenge}) \vee (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x))$.

2: Aus 1"$(q \text{ Unmenge}) \vee (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x))$" und
aus VS gleich "q Menge..."
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x)$.

3: Aus VS gleich "$\ldots p \in E$" und
aus 2"$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow ((\alpha, q) \notin x)$"
folgt: $(p, q) \notin x$.

b) VS gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (q \notin x[E]) \wedge ((p, q) \in x)$.

1: Es gilt: $(p \in E) \vee (p \notin E)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \in E$.

2: Aus VS gleich "q Menge..."
aus VS gleich "$\ldots q \notin x[E] \ldots$" und
aus 1.1.Fall"$p \in E$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $(p, q) \notin x$.

3: Es gilt 2"$(p, q) \notin x$".
Es gilt VS gleich "$\ldots (p, q) \in x$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin E$.

1.2.Fall $p \notin E$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $p \notin E$.

□

8-18. Mit der folgenden Definition wird ein erster Weg für KlassenAlgebra mit Bildern von X unter E frei gemacht. Bei "$\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$" handelt es sich um die Klasse aller Bilder einer festen Klasse E unter den Mengen λ aus einer Klasse X. Die Begriffsbildung ist ähnlich zu, aber ungleich der Definition **8-22**:

8-18(Definition)

$$\mathsf{8.1}(X, E) = \{\lambda[E] : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega[E]))\}.$$

8-19. In `a)` wird einiges gesagt, was aus "$w \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$" folgt. In `b)` wird fest gestellt, dass aus "$w \in E$" die Aussage "$w[X] \in \{\lambda[X] : \lambda \in E\}$" folgt. Interessanter Weise wird in beiden Aussagen keine "Mengen-Eigenschaft" voraus gesetzt:

8-19(Satz)

`a)` *Aus* "$w \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = \Omega[E]) \wedge (\Omega \in X)$".

`b)` *Aus* "$x \in X$" *folgt* "$x[E] \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$".

8-18(Def) $\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis</u> **8-19** `a)` `VS` gleich $w \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$" und
aus "$\{\lambda[E] : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega[E]))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega[E]))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega[E]))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (w = \Omega[E])$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (w = \Omega[E]) \wedge (\Omega \in X)$.

`b)` `VS` gleich $x \in X$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt: $\exists x : x \in X$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`2:` Aus `1.2`"x Menge"
folgt via **8-11**: $x[E]$ Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\exists x : x \in X$" und
aus "$x[E] = x[E]$"
folgt: $\exists x : (x \in X) \wedge (x[E] = x[E])$.

`4:` Aus `3`"$\exists x : (x \in X) \wedge (x[E] = x[E])$" und
aus `2`"$x[E]$ Menge"
folgt: $x[E] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega[E]))\}$.

`5:` Aus `4`"$x[E] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega[E]))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega[E]))\} = \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$"
folgt: $x[E] \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

$\square$

8-20. Die Diskussion von **8-21** wird durch die folgenden Resultate, in denen es um "$(\bigcap X)[0]$", um "$\{\lambda[E] : \lambda \in 0\}$" und um "$\{\lambda[0] : \lambda \in X\}$" geht, vorbereitet. Aussagen `ab)` sind einfache Spezialisierungen von **8-12** und werden, weil sie gut in den Kontext passen, angegeben:

<u>**8-20(Satz)**</u>

`a)` $(\bigcap X)[0] = 0$.

`b)` $(\bigcap 0)[0] = 0$.

`c)` $\{\lambda[E] : \lambda \in 0\} = 0$.

`d)` $\bigcap\{\lambda[E] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$.

`e)` $\{\lambda[0] : \lambda \in X\} \subseteq \{0\}$.

`f)` *Aus "$0 \neq X$" folgt "$\{\lambda[0] : \lambda \in X\} = \{0\}$".*

`g)` *Aus "$0 \neq X$" folgt "$\bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in X\} = 0$".*

8-18(Def) $\{\lambda[E] : \lambda \in 0\}$ *und* $\{\lambda[0] : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis **8-20**</u> `a)`

Via **8-12** gilt: $(\bigcap X)[0] = 0$.

`b)`

Via **8-12** gilt: $(\bigcap 0)[0] = 0$.

Beweis **8-20** `c)`

`Thema1` $\alpha \in \{\lambda[E] : \lambda \in 0\}$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda[E] : \lambda \in 0\}$"
folgt via **8-19**: $\exists \Omega : (\alpha = \Omega[E]) \wedge (\Omega \in 0)$.

`3:` Es gilt `2`"$\ldots \Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{\lambda[E] : \lambda \in 0\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda[E] : \lambda \in 0\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\lambda[E] : \lambda \in 0\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{\lambda[E] : \lambda \in 0\} = 0$.

`d)`

`1:` $\bigcap\{\lambda[E] : \lambda \in 0\} \stackrel{\text{c)}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\bigcap\{\lambda[E] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$.

`e)`

`Thema1` $\alpha \in \{\lambda[0] : \lambda \in X\}$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda[0] : \lambda \in X\}$"
folgt via **8-19**: $\exists \Omega : (\alpha = \Omega[0]) \wedge (\Omega \in X)$.

`3:` Via **8-12** gilt: $\Omega[0] = 0$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega[0] \ldots$" und
aus `3`"$\Omega[0] = 0$"
folgt: $\alpha = 0$.

`5:` Via **1-5** gilt: $0 \in \{0\}$.

`6:` Aus `4`"$\alpha = 0$" und
aus `5`"$0 \in \{0\}$"
folgt: $\alpha \in \{0\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda[0] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \{0\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\lambda[0] : \lambda \in X\} \subseteq \{0\}$.

<u>Beweis</u> **8-20** `f)` `VS` gleich $0 \neq X.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq X$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in X.$

`2:` Aus `1`"$\Omega \in X$"
folgt via **8-19**: $\Omega[0] \in \{\lambda[0] : \lambda \in X\}.$

`3:` Via **8-12** gilt: $\Omega[0] = 0.$

`4:` Aus `3`"$\Omega[0] = 0$" und
aus `2`"$\Omega[0] \in \{\lambda[0] : \lambda \in X\}$"
folgt: $0 \in \{\lambda[0] : \lambda \in X\}.$

`5:` Aus `4`"$0 \in \{\lambda[0] : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq \{\lambda[0] : \lambda \in X\}.$

`6:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\{\lambda[0] : \lambda \in X\} \subseteq \{0\}.$

`7:` Aus `6`"$\{\lambda[0] : \lambda \in X\} \subseteq \{0\}$" und
aus `5`"$\{0\} \subseteq \{\lambda[0] : \lambda \in X\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{\lambda[0] : \lambda \in X\} = \{0\}.$

`g)` `VS` gleich $0 \neq X.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq X$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\{\lambda[0] : \lambda \in X\} = \{0\}.$

`2:` $\bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in X\} \stackrel{1}{=} \bigcap\{0\} \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} 0.$

`3:` Aus `2`
folgt: $\bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in X\} = 0.$

$\square$

8-21. Gemäß `a)` ist das Bild von E unter der Vereinigung von X gleich der Vereinigung der Bilder von E unter den Elementen von X. Diese Gleichung überträgt sich gemäß `f)` üblicher Weise *nicht* auf die Durchschnittsbildung. In `b)` wird bewiesen, dass das Bild von E unter dem Durchschnitt von X *eine TeilKlasse* des Durchschnitts der Bilder von E unter den Elementen von X ist. In `cde)` werden drei spezielle Fälle angegeben, in denen die "TeilKlassen-Aussage" von `b)` durch eine "Gleichheits-Aussage" ersetzt wird:

8-21(Satz)

`a)` $(\bigcup X)[E] = \bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$,

`b)` $(\bigcap X)[E] \subseteq \bigcap\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

`c)` *Aus "p Menge" folgt "$(\bigcap X)[\{p\}] = \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$".*

`d)` *Aus "$0 \neq X$" folgt "$(\bigcap X)[0] = \bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in X\} = 0$".*

`e)` *Aus "$0 \neq X$" folgt "$(\bigcap X)[\{p\}] = \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$".*

`f)` "$(\bigcap 0)[0] \neq \bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in 0\}$" *und*

"$(\bigcap 0)[0] = 0$" *und* "$\bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$".

8-18(Def) $\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$ *und* $\{\lambda[0] : \lambda \in X\}$ *und* $\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$ *und* $\{\lambda[0] : \lambda \in 0\}$.

<u>Beweis</u> **8-21** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in (\bigcup X)[E]$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (\bigcup X)[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \bigcup X)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \bigcup X$"
folgt via **1-12**: $\exists \Psi : ((\Omega, \alpha) \in \Psi) \wedge (\Psi \in X)$.

`4.1:` Aus `3` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \Psi \ldots$" und
aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in \Psi[E]$.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **8-19**: $\Psi[E] \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

`5:` Aus `4.1` "$\alpha \in \Psi[E]$" und
aus `4.2` "$\Psi[E] \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\bigcup X)[E]) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(\bigcup X)[E] \subseteq \bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$"

Beweis **8-21** `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\})$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$"
folgt via **8-19**: $\exists \Psi : (\Omega = \Psi[E]) \wedge (\Psi \in X)$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus `3`"$\ldots \Omega = \Psi[E] \ldots$"
folgt: $\alpha \in \Psi[E]$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \in \Psi[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge ((\Phi, \alpha) \in \Psi)$.

`6:` Aus `5`"$\ldots (\Phi, \alpha) \in \Psi$" und
aus `3`"$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **1-12**: $(\Phi, \alpha) \in \bigcup X$.

`7:` Aus `6`"$(\Phi, \alpha) \in \bigcup X$" und
aus `5`"$\ldots \Phi \in E \ldots$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in (\bigcup X)[E]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in (\bigcup X)[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcup X)[E]$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(\bigcup X)[E] \subseteq \bigcup\{\lambda[E] : X \in X\}$" und
aus `A2` gleich "$\bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcup X)[E]$" folgt
via **GleichheitsAxiom**: $(\bigcup X)[E] = \bigcup\{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis **8-21** `b)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in (\bigcap X)[E]$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in (\bigcap X)[E]$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in (\bigcap X)[E]$”
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \bigcap X)$.

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\beta \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

`4:` Aus `Thema3.1`“$\beta \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$”
folgt via **8-19**: $\exists \Psi : (\beta = \Psi[E]) \wedge (\Psi \in X)$.

`5:` Aus `2.2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \bigcap X$” und
aus `4`“$\ldots \Psi \in X$”
folgt via **1-13**: $(\Omega, \alpha) \in \Psi$.

`6:` Aus `5`“$(\Omega, \alpha) \in \Psi$” und
aus `2.2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **8-8**: $\alpha \in \Psi[E]$.

`7:` Aus `6`“$\alpha \in \Psi[E]$” und
aus `4`“$\ldots \beta = \Psi[E] \ldots$”
folgt: $\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema3.1`:

`A1`	“$\forall \beta : (\beta \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$”

`3.2:` Aus `A1` gleich
“$\forall \beta : (\beta \in \{\lambda[E] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\bigcap X)[E]) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap \{\lambda[E] : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(\bigcap X)[E] \subseteq \bigcap \{\lambda[E] : \lambda \in X\}$.

Beweis **8-21** `c)` `VS` gleich p Menge.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $\beta \in X$.

`3:` Aus `Thema2.2`“$\beta \in X$”
folgt via **8-19**: $\beta[\{p\}] \in \{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`4:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \bigcap\{\lambda[p\}] : \lambda \in X\}$” und
aus `3`“$\beta[\{p\}] \in \{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$”
folgt via **1-13**: $\alpha \in \beta[\{p\}]$.

`5:` Aus `4`“$\alpha \in \beta[\{p\}]$”
folgt via **8-7**: $\exists\Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \beta)$.

`6:` Aus `5`“$\ldots\Omega \in \{p\}\ldots$”
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`7:` Aus `6`“$\Omega = p$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \alpha) = (p, \alpha)$.

`8:` Aus `7`“$(\Omega, \alpha) = (p, \alpha)$” und
aus `5`“$\ldots(\Omega, \alpha) \in \beta$”
folgt: $(p, \alpha) \in \beta$.

Ergo `Thema2.2`: `A1` | “$\forall\beta : (\beta \in X) \Rightarrow ((p, \alpha) \in \beta)$”

`3:` Aus `VS` gleich “p Menge” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (p, α) Menge.

`4.1:` Aus `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in X) \Rightarrow ((p, \alpha) \in \beta)$” und
aus `3`“(p, α) Menge”
folgt via **1-13**: $(p, \alpha) \in \bigcap X$.

`4.2:` Aus `VS` gleich “p Menge”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

...

<u>Beweis **8-21**</u> `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

...

`5:` Aus `4.1`"$(p, \alpha) \in \bigcap X$" und
aus `4.2`"$p \in \{p\}$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in (\bigcap X)[\{p\}]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in (\bigcap X)[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcap X)[\{p\}]$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\bigcap X)[\{p\}] \subseteq \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`2:` Aus `1.2`"$(\bigcap X)[\{p\}] \subseteq \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$" und
aus `A2` gleich "$\bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcap X)[\{p\}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\bigcap X)[\{p\}] = \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`d)` `VS` gleich $0 \neq X$.

`1.1:` Via **8-12** gilt: $(\bigcap X)[0] = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq X$"
folgt via **8-20**: $\bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in X\} = 0$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\bigcap X)[0] = \bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in X\} = 0$.

<u>Beweis **8-21**</u> `e)` `VS` gleich $0 \neq X$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

Aus `1.1.Fall` “p Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(\bigcap X)[\{p\}] = \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall` “p Unmenge”
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`3:` Aus `VS` gleich “$0 \neq X$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(\bigcap X)[0] = \bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in X\}$.

`4:` $(\bigcap X)[\{p\}] \stackrel{2}{=} (\bigcap X)[0] \stackrel{3}{=} \bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in X\} \stackrel{2}{=} \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\bigcap X)[\{p\}] = \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\bigcap X)[\{p\}] = \bigcap\{\lambda[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`f)`

`1.1:` Via **8-12** gilt: $(\bigcap 0)[0] = 0$.

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \neq \mathcal{U}$.

`1.3:` Via **8-20** gilt: $\bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt:

$$(\bigcap 0)[0] \neq \bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in 0\}$$
$$\wedge \quad (\bigcap 0)[0] = 0$$
$$\wedge \quad \bigcap\{\lambda[0] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}.$$

□

8-22. Bei “$\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$” handelt es sich um die Klasse aller Bilder von Elementen einer festen Klasse $\mathfrak{E}$ unter einer festen Klasse x. Die Begriffsbildung ist ähnlich zu, aber ungleich der Definition **8-18**. Aus diesem Grund wird auch die anonsten eher unhandliche Variabel “$\mathfrak{E}$” eingesetzt:

8-22(Definition)

$$\mathsf{8.2}(\mathfrak{E}, x) = \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{E}) \wedge (\omega = x[\Omega]))\}.$$

8-23. In `a)` wird Notwendiges aus "$w \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" gefolgert. In `bc)` wird von "$E \in x$" ausgegangen und es wird jeweils eine Zusatzbedinung formuliert, um auf "$x[E] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" schließen zu können. Beide Zusatzbedingungen fordern eine "Mengen-Eigenschaft" ein:

8-23(Satz)

`a)` *Aus "$w \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" folgt "$\exists \Omega : (w = x[\Omega]) \wedge (\Omega \in \mathfrak{E})$".*

`b)` *Aus "$E \in \mathfrak{E}$" und "$x[E]$ Menge" folgt "$x[E] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$".*

`c)` *Aus "$E \in \mathfrak{E}$" und "x Menge" folgt "$x[E] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$".*

8-22(Def) $\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

<u>Beweis</u> **8-23** `a)` `VS` gleich $w \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" und
aus "$\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{E}) \wedge (\omega = x[\Omega]))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{E}) \wedge (\omega = x[\Omega]))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{E}) \wedge (\omega = x[\Omega]))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{E}) \wedge (w = x[\Omega])$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (w = x[\Omega]) \wedge (\Omega \in \mathfrak{E})$.

`b)` `VS` gleich $(E \in \mathfrak{E}) \wedge (x[E]$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathfrak{E} \ldots$"
folgt: $\exists E : E \in \mathfrak{E}$.

`2:` Aus `1`"$\exists E : E \in \mathfrak{E}$" und
aus "$x[E] = x[E]$"
folgt: $\exists E : (E \in \mathfrak{E}) \wedge (x[E] = x[E])$.

`3:` Aus `2`"$\exists E : (E \in \mathfrak{E}) \wedge (x[E] = x[E])$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x[E]$ Menge"
folgt: $x[E] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{E}) \wedge (\omega = x[\Omega])\}$.

`4:` Aus `3`"$x[E] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{E}) \wedge (\omega = x[\Omega])\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{E}) \wedge (\omega = x[\Omega])\} = \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$"
folgt: $x[E] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`c)` `VS` gleich $(E \in \mathfrak{E}) \wedge (x$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge"
folgt via **8-11**: $x[E]$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \in \mathfrak{E} \ldots$" und
aus `1`"$\ldots x[E]$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x[E] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

□

8-24. Es folgt eine Gleichung, die bei weiteren klassenalgebraischen Untersuchungen von “$\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$” hilfreiche Beispiele liefert:

8-24(Satz)

$$\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = 0.$$

8-22(Def) $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$.

Beweis **8-24**

`Thema1` $\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$.

2: Aus `Thema1`“$\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$”
folgt via **8-23**: $\exists\Omega : (\alpha = x[\Omega]) \wedge (\Omega \in 0)$.

3: Es gilt 2“$\ldots\Omega \in 0$”.
Via **0-19** gilt “$\Omega \notin 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in 0\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{x[\lambda] : \lambda \in 0\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = 0.$

□

8-25. Gemäß `a)` ist die Vereinigung der Bilder der Elemente einer Klasse y unter x eine TeilKlasse des Bildes der Vereinigung von y unter x. In `bc)` wird jeweils eine "Mengen-Eigenschaft" gefordert, die zur Konsequenz hat, dass aus der "TeilKlassen-Aussage" von `a)` eine "Gleichheits-Aussage" wird. Es bleibt in **8-25** offen, ob es Klassen x, y mit "$\bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in y\} \neq x[\bigcup y]$" gibt. Diese Frage wird in **8-26** beantwortet, wo mit Hilfe von $\mathcal{U}$ gezeigt wird, dass diese Ungleichung tatsächlich auftreten kann:

8-25(Satz)

`a)` $\bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq x[\bigcup \mathfrak{E}]$.

`b)` *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (x[\alpha]$ *Menge*)" *folgt*

"$x[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$".

`c)` *Aus* "x *Menge*" *folgt* "$x[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$".

8-22(Def) $\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

<u>Beweis</u> **8-25** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$"
folgt via **1-12**: $\exists\Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\})$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$"
folgt via **8-23**: $\exists\Psi : (\Omega = x[\Psi]) \wedge (\Psi \in \mathfrak{E})$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus `3`"$\ldots \Omega = x[\Psi] \ldots$"
folgt: $\alpha \in x[\Psi]$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \in x[\Psi]$"
folgt via **8-7**: $\exists\Phi : (\Phi \in \Psi) \wedge ((\Phi, \alpha) \in x)$.

`6:` Aus `5`"$\ldots \Phi \in \Psi \ldots$" und
aus `3`"$\ldots \Psi \in \mathfrak{E}$"
folgt via **1-12**: $\Phi \in \bigcup \mathfrak{E}$.

`7:` Aus `5`"$\ldots (\Phi, \alpha) \in x$" und
aus `6`"$\Phi \in \bigcup \mathfrak{E}$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[\bigcup \mathfrak{E}]$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}) \Rightarrow (\alpha \in x[\bigcup \mathfrak{E}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq x[\bigcup \mathfrak{E}]$.

Beweis **8-25** `b)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (x[\alpha] \text{ Menge})$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in x[\bigcup \mathfrak{E}]$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in x[\bigcup \mathfrak{E}]$”
folgt via **8-7**: $\exists\Omega : (\Omega \in \bigcup \mathfrak{E}) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \bigcup \mathfrak{E} \ldots$”
folgt via **1-12**: $\exists\Psi : (\Omega \in \Psi) \wedge (\Psi \in \mathfrak{E})$.

`4.1:` Aus `3`“$\ldots \Psi \in \mathfrak{E}$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (x[\alpha] \text{ Menge})$”
folgt: $x[\Psi]$ Menge.

`4.2:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \beta) \in x$” und
aus `3`“$\ldots \Omega \in \Psi \ldots$”
folgt via **8-8**: $\beta \in x[\Psi]$.

`5:` Aus `3`“$\ldots \Psi \in \mathfrak{E}$” und
aus `4.1`“$x[\Psi]$ Menge”
folgt via **8-23**: $x[\Psi] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`6:` Aus `4.2`“$\beta \in x[\Psi]$” und
aus `5`“$x[\Psi] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$”
folgt via **1-12**: $\beta \in \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\beta : (\beta \in x[\bigcup \mathfrak{E}]) \Rightarrow (\beta \in \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$x[\bigcup \mathfrak{E}] \subseteq \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}) \subseteq x[\bigcup \mathfrak{E}]$.

`2:` Aus `A1` gleich “$x[\bigcup \lambda] \subseteq \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$” und
aus `1.2`“$\bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq x[\bigcup \mathfrak{E}]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

<u>Beweis **8-25**</u> `c)` `VS` gleich x Menge.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathfrak{E}$.

Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **8-11**: $x[\alpha]$ Menge.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge)"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge)"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

□

8-26. Es wird die offene Frage, ob es $y,\mathfrak{E}$ mit “$y[\bigcup\mathfrak{E}]\neq\bigcup\{y[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}$” gibt, unter Verwendung von $y=\mathcal{U}$ positiv geklärt.
Die Prämisse von d) ist “$0\neq\mathfrak{E}\neq\{0\}$”. Hiermit ist naürlich “$(0\neq\mathfrak{E})\wedge(\mathfrak{E}\neq\{0\})$” gemeint. Diese Notation ist im Vergleich zu der ausführlichen Schreibweise knackiger und wird immer wieder eingesetzt:

8-26(Satz)

a) $\{\mathcal{U}[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}\subseteq\{0\}$.

b) $\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}=0$.

c) *Aus* “$\mathcal{U}[\bigcup\mathfrak{E}]=\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}$” *folgt* “$\mathfrak{E}=0$” *oder* “$\mathfrak{E}=\{0\}$”.

d) *Aus* “$0\neq\mathfrak{E}\neq\{0\}$” *folgt* “$\mathcal{U}[\bigcup\mathfrak{E}]\neq\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}$”.

e) “$\mathcal{U}[\bigcup\mathcal{U}]\neq\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda]:\lambda\in\mathcal{U}\}$” *und*

“$\mathcal{U}[\bigcup\mathcal{U}]=\mathcal{U}$” *und* “$\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda]:\lambda\in\mathcal{U}\}=0$”.

8-22(Def) $\{\mathcal{U}[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}$ *und* “$\{\mathcal{U}[\lambda]:\lambda\in\mathcal{U}\}$”.

Beweis **8-26** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$"
folgt via **8-23**: $\exists \Omega : (\alpha = \mathcal{U}[\Omega]) \wedge (\Omega \in \mathfrak{E})$.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = \mathcal{U}[\Omega] \ldots$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt: $\mathcal{U}[\Omega]$ Menge.

`4.1:` Es gilt: $(0 \neq \Omega) \vee (\Omega = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $0 \neq \Omega$.

`5:` Aus `4.1.1.Fall`"$0 \neq \Omega$"
folgt via **8-12**: $\mathcal{U}[\Omega] = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `5`"$\mathcal{U}[\Omega] = \mathcal{U}$" und
aus `3`"$\mathcal{U}[\Omega]$ Menge"
folgt: $\mathcal{U}$ Menge.

`7:` Es gilt `6`"$\mathcal{U}$ Menge".
Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt "$\mathcal{U}$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $\Omega = 0$.

`4.1.2.Fall` $\Omega = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\Omega = 0$"

...

Beweis **8-26** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.
...	
`4.2`: Aus `2.2`“$\ldots \alpha = \mathcal{U}[\Omega] \ldots$” und aus `A1` gleich “$\Omega = 0$” folgt:	$\alpha = \mathcal{U}[0]$.
`5`: Via **8-12** gilt:	$\mathcal{U}[0] = 0$.
`6.1`: Aus `4.2`“$\alpha = \mathcal{U}[0]$” und aus `5`“$\mathcal{U}[0] = 0$” folgt:	$\alpha = 0$.
`6.2`: Via **1-5** gilt:	$0 \in \{0\}$.
`7`: Aus `6.1`“$\alpha = 0$” und aus `6.2`“$0 \in \{0\}$” folgt:	$\alpha \in \{0\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}) \Rightarrow (\alpha \in \{0\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq \{0\}$.

`b)`

`1`: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq \{0\}$.

`2`: Aus `1`“$\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq \{0\}$”
folgt via **1-15**: $\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq \bigcup\{0\}$.

`3`: Via **1-14** gilt: $\bigcup\{0\} = 0$.

`4`: Aus `2`“$\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq \bigcup\{0\}$” und
aus `3`“$\bigcup\{0\} = 0$”
folgt: $\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq 0$.

`5`: Aus `4`“$\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq 0$”
folgt via **0-18**: $\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} = 0$.

Beweis **8-26** `c)` `VS` gleich $\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" und
aus `1`"$\bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} = 0$"
folgt: $\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] = 0$.

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] = 0$"
folgt via **8-13**: $(\bigcup \mathfrak{E}) \cap (\mathsf{dom}\, \mathcal{U}) = 0$.

`4:` Via **7-11** gilt: $\mathsf{dom}\, \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`5:` $0 \stackrel{3}{=} (\bigcup \mathfrak{E}) \cap (\mathsf{dom}\, \mathcal{U}) \stackrel{4}{=} (\bigcup \mathfrak{E}) \cap \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \bigcup \mathfrak{E}$.

`6:` Aus `5`"$0 = \ldots = \bigcup \mathfrak{E}$"
folgt: $\bigcup \mathfrak{E} = 0$.

`7:` Aus `5`"$\bigcup \mathfrak{E} = 0$"
folgt via **1-18**: $(\mathfrak{E} = 0) \vee (\mathfrak{E} = \{0\})$.

`d)` `VS` gleich $0 \neq \mathfrak{E} \neq \{0\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathfrak{E} \neq \{0\}$"
folgt: $(0 \neq \mathfrak{E}) \wedge (\mathfrak{E} \neq \{0\})$.

`2:` Es gilt: $\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$
$\vee$
$\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] \neq \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] = \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(\mathfrak{E} = 0) \vee (\mathfrak{E} = \{0\})$.

`4:` Es gilt `3`"$(\mathfrak{E} = 0) \vee (\mathfrak{E} = \{0\})$".
Es gilt `1`"$(0 \neq \mathfrak{E}) \wedge (\mathfrak{E} \neq \{0\})$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] \neq \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`2.2.Fall` $\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] \neq \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathcal{U}[\bigcup \mathfrak{E}] \neq \bigcup \{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

<u>Beweis **8-26** `e)`</u>

`1.1:` Via **0-18** gilt: $0 \neq \mathcal{U}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0$.

`1.3:` Via **1-14** gilt: $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus `1.3`"$\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$"
folgt: $0 \neq \bigcup \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq \bigcup \mathcal{U}$"
folgt via **8-12**: $\mathcal{U}[\bigcup \mathcal{U}] = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$\mathcal{U}[\bigcup \mathcal{U}] = \mathcal{U}$",
aus `1.1`"$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$\bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0$"
folgt:

$$\mathcal{U}[\bigcup \mathcal{U}] \neq \bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathcal{U}\}$$

$$\wedge \quad \mathcal{U}[\bigcup \mathcal{U}] = \mathcal{U}$$

$$\wedge \quad \bigcup\{\mathcal{U}[\lambda] : \lambda \in \mathcal{U}\} = 0.$$

□

8-27. Das Bild des Durchschnitts von $\mathfrak{E}$ unter x ist eine Teilklasse des Durchschnitts der Bilder der Elemente von $\mathfrak{E}$ unter x. Der Frage, ob es Klassen gibt, wo "Ungleichheit" oder "Gleichheit" an Stelle von "TeilKlasse" tritt, wird in **8-28** und **8-29** mit dem Ergebnis, dass wohl beides möglich ist, nachgegangen. Ein Beispiel für die Gleichheit steht via **8-29** erst dann zur Verfügung, wenn eine *injektive Menge* angegeben werden kann. Injektive Mengen gibt es, doch die entsprechenden Beispiele - genauer: injektive Funktionen, die Mengen sind - folgen erst später. In **8-29** werden Klassen, für die Ungleichheit besteht, angegeben:

8-27(Satz)

$$x[\bigcap\mathfrak{E}] \subseteq \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}.$$

8-22(Def) $\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

Beweis **8-27**

`Thema1` $\alpha\in x[\bigcap\mathfrak{E}]$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha\in x[\bigcap\mathfrak{E}]$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha\in x[\bigcap\mathfrak{E}]$”
folgt via **8-7**: $\exists\Omega:(\Omega\in\bigcap\mathfrak{E})\wedge((\Omega,\alpha)\in x)$.

`Thema3.1` $\beta\in\{x[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}$.

`4:` Aus `Thema3.1`“$\beta\in\{x[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}$”
folgt via **8-23**: $\exists\Psi:(\beta=x[\Psi])\wedge(\Psi\in\mathfrak{E})$.

`5:` Aus `2.2`“$\ldots\Omega\in\bigcap\mathfrak{E}\ldots$” und
aus `4`“$\ldots\Psi\in\mathfrak{E}$”
folgt via **1-13**: $\Omega\in\Psi$.

`6:` Aus `2.2`“$\ldots(\Omega,\alpha)\in x$” und
aus `5`“$\Omega\in\Psi$”
folgt via **8-8**: $\alpha\in x[\Psi]$.

`7:` Aus `6`“$\alpha\in x[\Psi]$” und
aus `4`“$\ldots\beta=x[\Psi]\ldots$”
folgt: $\alpha\in\beta$.

Ergo `Thema3.1`:

`A1` | “$\forall\beta:(\beta\in\{x[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\})\Rightarrow(\alpha\in\beta)$”

`3.2:` Aus `A1` gleich “$\forall\beta:(\beta\in\{x[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\})\Rightarrow(\alpha\in\beta)$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt via **1-13**: $\alpha\in\bigcap\{x[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha:(\alpha\in x[\bigcap\mathfrak{E}])\Rightarrow(\alpha\in\bigcap\{x[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[\bigcap\mathfrak{E}]\subseteq\bigcap\{x[\lambda]:\lambda\in\mathfrak{E}\}$.
□

8-28. Obwohl die Formulierung etwas anders lautet, wird im folgenden Satz sicher gestellt, dass für jede *injektive Menge* x und für jede nichtleere Klasse $\mathfrak{E}$ die Gleichung "$x[\bigcap \mathfrak{E}] = \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" besteht. Im Satz wird anders gefordert, dass für jede Menge $\alpha \in \mathfrak{E}$ die Klasse $x[\alpha]$ eine Menge sein muss. Dies ist via **8-11** der Fall, wenn x eine Menge ist:

8-28(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *x injektiv.*

$\rightarrow$) $0 \neq \mathfrak{E}$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (x[\alpha]$ *Menge*$)$.

Dann folgt "$x[\bigcap \mathfrak{E}] = \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$".

8-22(Def) $\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

<u>Beweis **8-28**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`2:` Aus →) “$0 \neq \mathfrak{E}$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathfrak{E}$.

`3:` Aus `2.2`“$\ldots \Omega \in \mathfrak{E}$” und
aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge)”
folgt: $x[\Omega]$ Menge.

`4:` Aus `2.2`“$\ldots \Omega \in \mathfrak{E}$” und
aus `3`“$x[\Omega]$ Menge”
folgt via **8-23**: $x[\Omega] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`5:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$” und
aus `4`“$x[\Omega] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$”
folgt via **1-13**: $\beta \in x[\Omega]$.

`6:` Aus `4`“$\beta \in x[\Omega]$”
folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in \Omega) \wedge ((\Psi, \beta) \in x)$.

`7:` Aus `6`“$\ldots \Psi \in \Omega \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

...

Beweis **8-28** ...

`Thema1.1` $\beta \in \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

...

`Thema8.1` $\gamma \in \mathfrak{E}$.

`9:` Aus `Thema8.1` "$\gamma \in \mathfrak{E}$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge)"
folgt: $x[\gamma]$ Menge.

`10:` Aus `Thema8.1` "$\gamma \in \mathfrak{E}$" und
aus `9` "$x[\gamma]$ Menge"
folgt via **8-23**: $x[\gamma] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`11:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" und
aus `10` "$x[\gamma] \in \{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$"
folgt via **1-13**: $\beta \in x[\gamma]$.

`12:` Aus `11` "$\beta \in x[\gamma]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Phi : (\Phi \in \gamma) \wedge ((\Phi, \beta) \in x)$.

`13:` Aus →) "x injektiv",
aus `12` "$\ldots (\Phi, \beta) \in x$" und
aus `6` "$\ldots (\Psi, \beta) \in x$"
folgt via **8-1(Def)**: $\Phi = \Psi$.

`14:` Aus `13` "$\Phi = \Psi$" und
aus `12` "$\ldots \Phi \in \gamma \ldots$"
folgt: $\Psi \in \gamma$.

Ergo `Thema8.1`: `A2` "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (\Psi \in \gamma)$"

...

Beweis **8-28** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

...

`8.2`: Aus `A2` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathfrak{E}) \Rightarrow (\Psi \in \gamma)$" und
aus `7`"Ψ Menge"
folgt via **1-13**: $\Psi \in \bigcap \mathfrak{E}$.

`9`: Aus `6`"$\ldots (\Psi, \beta) \in x$" und
aus `8.2`"$\Psi \in \bigcap \mathfrak{E}$"
folgt via **8-8**: $\beta \in x[\bigcap \mathfrak{E}]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}) \Rightarrow (\beta \in x[\bigcap \mathfrak{E}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A3} \mid \text{“}\bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq x[\bigcap \mathfrak{E}]\text{”}}$

`1.2`: Via **8-27** gilt: $x[\bigcap \mathfrak{E}] \subseteq \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

`2`: Aus `1.2`"$x[\bigcap \mathfrak{E}] \subseteq \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" und
aus `A3` gleich "$\bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\} \subseteq x[\bigcap \mathfrak{E}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x[\bigcap \mathfrak{E}] = \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$.

□

8-29. Aussagen `abc)` bereiten `d)` vor. Im Beweis von `b)` wird der als hilfreich titulierte Satz **8-24** verwendet. In `d)` wird mit "$x = \mathfrak{E} = 0$" ein Beispiel für "$x[\bigcap \mathfrak{E}] \neq \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" gegeben. In diesem Zusammenhang ist interessant, dass via **8-27** die Aussage "$x[\bigcap \mathfrak{E}] \subseteq \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in \mathfrak{E}\}$" gilt:

8-29(Satz)

`a)` $x[\bigcap 0] = \mathsf{ran}\, x$.

`b)` $\bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$.

`c)` *Aus* "$x[\bigcap 0] = \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$" *folgt* "$\mathsf{ran}\, x = \mathcal{U}$".

`d)` "$0[\bigcap 0] \neq \bigcap\{0[\lambda] : \lambda \in 0\}$"

und "$0[\bigcap 0] = 0$" *und* "$\bigcap\{0[\lambda] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$".

8-22(Def) $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$.

<u>Beweis</u> **8-29** `a)`

`1:` $$x[\bigcap 0] \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} x[\mathcal{U}] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} \mathsf{ran}\, x.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$x[\bigcap 0] = \mathsf{ran}\, x.$$

`b)`

`1:` $$\bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} \stackrel{\mathbf{8-24}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$\bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}.$$

`c)` `VS` gleich $$x[\bigcap 0] = \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}.$$

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $$x[\bigcap 0] = \mathsf{ran}\, x.$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $$\bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}.$$

`2:` Aus `1.1` “$x[\bigcap 0] = \mathsf{ran}\, x$” und
aus `VS` gleich “$x[\bigcap 0] = \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$”
folgt: $$\mathsf{ran}\, x = \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}.$$

`3:` Aus `2` “$\mathsf{ran}\, x = \bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$” und
aus `1.2` “$\bigcap\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$”
folgt: $$\mathsf{ran}\, x = \mathcal{U}.$$

`d)`

`1.1:` Via **8-12** gilt: $$0[\bigcap 0] = 0.$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $$\bigcap\{0[\lambda] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}.$$

`1.3:` Via **0-18** gilt: $$0 \neq \mathcal{U}.$$

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $$0[\bigcap 0] \neq \bigcap\{0[\lambda] : \lambda \in 0\}$$
$$\wedge \quad 0[\bigcap 0] = 0$$
$$\wedge \quad \bigcap\{0[\lambda] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}.$$

□

Bild von E unter x:

$\cup, \cap, \setminus, \Delta$.

x injektiv.

$x[\{p\}]$.

$(x \times y)[E]$.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 13/04/11**

9-1. In `a)` wird gesagt, dass das Bild von E unter der binären Vereinigung von x und y gleich der binären Vereinigung der Bilder von E unter x und unter y ist. Gemäß `b)` ist das Bild von E unter dem binären Durchschnitt eine TeilKlasse des binären Durchschnitts der Bilder von E unter x und unter y. Dass hier an Stelle der " TeilKlassen-Aussage" auch eine " Gleichheits-Aussage" treten kann, wird in `c)` bewiesen. Gemäß `c)` ist das Bild von Singelton p unter dem binären Durchschnitt von x und y *gleich* dem binären Durchschnitt der Bilder von Singelton p unter x und unter y. In **9-1** wird nichts weiter darüber ausgesagt, ob die " TeilKlassen-Aussage" von `b)` auch eine " Ungleichheits-Aussage" sein kann. Genaueres hierzu in der folgenden Bemerkung und dem anschließenden Beispiel:

9-1(Satz)

`a)` $(x \cup y)[E] = (x[E]) \cup (y[E])$.

`b)` $(x \cap y)[E] \subseteq (x[E]) \cap (y[E])$.

`c)` $(x \cap y)[\{p\}] = (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$.

Beweis **9-1** a)

`Thema1.1` $\alpha \in (x \cup y)[E]$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in (x \cup y)[E]$"
folgt via **8-7**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x \cup y).$$

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x \cup y$"
folgt via **2-2**: $((\Omega, \alpha) \in x) \vee ((\Omega, \alpha) \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(\Omega, \alpha) \in x$.

4: Aus 3.1.Fall "$(\Omega, \alpha) \in x$" und
aus 2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[E]$.

5: Aus 4 "$\alpha \in x[E]$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x[E]) \cup (y[E])$.

`3.2.Fall` $(\Omega, \alpha) \in y$.

4: Aus 3.2.Fall "$(\Omega, \alpha) \in y$" und
aus 2.2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in y[E]$.

5: Aus 4 "$\alpha \in y[E]$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x[E]) \cup (y[E])$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$\alpha \in (x[E]) \cup (y[E]).$$

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cup y)[E]) \Rightarrow (\alpha \in (x[E]) \cup (y[E]))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(x \cup y)[E] \subseteq (x[E]) \cup (y[E])\text{”}}$

Beweis **9-1** `a)` ...

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`1.3:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

`2.1:` Aus `1.2` "$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **8-9**: $x[E] \subseteq (x \cup y)[E]$.

`2.2:` Aus `1.3` "$y \subseteq x \cup y$"
folgt via **8-9**: $y[E] \subseteq (x \cup y)[E]$.

`3:` Aus `2.1` "$x[E] \subseteq (x \cup y)[E]$" und
aus `2.2` "$y[E] \subseteq (x \cup y)[E]$"
folgt via **2-12**: $(x[E]) \cup (y[E]) \subseteq (x \cup y)[E]$.

`4:` Aus `A1` gleich "$(x \cup y)[E] \subseteq (x[E]) \cup (y[E])$" und
aus `3` "$(x[E]) \cup (y[E]) \subseteq (x \cup y)[E]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cup y)[E] = (x[E]) \cup (y[E])$.

`b)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y$.

`2.1:` Aus `1.1` "$x \cap y \subseteq x$"
folgt via **8-9**: $(x \cap y)[E] \subseteq x[E]$.

`2.2:` Aus `1.2` "$x \cap y \subseteq y$"
folgt via **8-9**: $(x \cap y)[E] \subseteq y[E]$.

`3:` Aus `2.1` "$(x \cap y)[E] \subseteq x[E]$" und
aus `2.2` "$(x \cap y)[E] \subseteq y[E]$"
folgt via **2-12**: $(x \cap y)[E] \subseteq (x[E]) \cap (y[E])$.

Beweis **9-1** `c)`

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`Thema2.1` $\alpha \in (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\alpha \in (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x[\{p\}]) \wedge (\alpha \in y[\{p\}])$.

`4.1:` Aus `3`"$\alpha \in x[\{p\}] \ldots$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \alpha \in y[\{p\}]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in \{p\}) \wedge ((\Psi, \alpha) \in y)$.

`5.1:` Aus `4.1`"$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`5.2:` Aus `4.2`"$\ldots \Psi \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Psi = p$.

`6.1:` Aus `5.1`"$\Omega = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \alpha) = (p, \alpha)$.

`6.2:` Aus `5.2`"$\Psi = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \alpha) = (p, \alpha)$.

`7.1:` Aus `6.1`"$(\Omega, \alpha) = (p, \alpha)$" und
aus `4.1`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt: $(p, \alpha) \in x$.

`7.2:` Aus `6.2`"$(\Psi, \alpha) = (p, \alpha)$" und
aus `4.2`"$\ldots (\Psi, \alpha) \in y$"
folgt: $(p, \alpha) \in y$.

`8:` Aus `7.1`"$(p, \alpha) \in x$" und
aus `7.2`"$(p, \alpha) \in y$"
folgt via **2-2**: $(p, \alpha) \in x \cap y$.

...

...

Beweis **9-1** `c)` ...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

...

`Thema2.1` $\alpha \in (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$.

...

`9:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`10:` Aus `8`"$(p, \alpha) \in x \cap y$" und
aus `9`"$p \in \{p\}$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in (x \cap y)[\{p\}]$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])) \Rightarrow (\alpha \in (x \cap y)[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` | "$(x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}]) \subseteq (x \cap y)[\{p\}]$"

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$(x \cap y)[\{p\}] \subseteq (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$.

`3:` Aus `2.2`"$(x \cap y)[\{p\}] \subseteq (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$" und
aus `A3` gleich "$(x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}]) \subseteq (x \cap y)[\{p\}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cap y)[\{p\}] = (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`"p Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`3:` $(x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}]) \stackrel{3}{=} (x[0]) \cap (y[0]) \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0 \cap y[0] \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} y[0] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0$
$\stackrel{\mathbf{8-12}}{=} (x \cap y)[0] \stackrel{2}{=} (x \cap y)[\{p\}]$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \cap y)[\{p\}] = (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \cap y)[\{p\}] = (x[\{p\}]) \cap (y[\{p\}])$.

□

9-2. Wie aus Beispiel **9-3** ableitbar, kann die “TeilKlassen-Aussage” von **9-1**`b)` nicht ohne Weiteres in eine Gleichung übergeführt werden:

9-2.Bemerkung

Die Gleichung
“$(x \cap y)[E] = (x[E]) \cap (y[E])$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

9-3. Wie an Hand des folgenden Beispiels klar wird, kann die "TeilKlassen-Aussage" von **9-1**`b)` nicht ohne Weiteres in eine Gleichung übergeführt werden:

<u>9-3.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $y = \{(q, p)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p, q\}$.

Dann folgt:

a) $x \cap y = 0$.

b) $x[E] = \{p\}$.

c) $y[E] = \{p\}$.

d) $(x \cap y)[E] = 0$

e) $(x[E]) \cap (y[E]) = \{p\}$.

f) $(x \cap y)[E] \neq (x[E]) \cap (y[E])$.

9-4. In `a)` wird gesagt, dass KlassenDifferenz der Bilder von E unter x und unter y eine TeilKlasse des Bildes von E unter der KlassenDifferenz von x und y ist. In `b)` wird unter Verwendung von **9-1** bewiesen, dass das Bild von E unter $x\Delta y$ gleich der Vereinigung der Bilder von E unter $x \setminus y$ und $y \setminus x$ ist. Gemäß `c)` ist die symmetrische KlassenDifferenz der Bilder von E unter x und unter y eine TeilKlasse des Bildes von E unter $x\Delta y$. Es wird nichts weiter darüber ausgesagt, ob die "TeilKlassen-Aussage" von `ac)` auch eine "Gleichheits-" oder "Ungleichheits-Aussage" sein kann. Weitere Aussagen hierzu folgen in der nachfolgenden Bemerkung und den anschließenden Beispielen:

9-4(Satz)

`a)` $(x[E]) \setminus (y[E]) \subseteq (x \setminus y)[E]$.

`b)` $((x \setminus y)[E]) \cup ((y \setminus x)[E]) = (x\Delta y)[E]$.

`c)` $(x[E])\Delta(y[E]) \subseteq (x\Delta y)[E]$.

Beweis **9-4** `a)`

`Thema1` $\alpha \in (x[E]) \setminus (y[E])$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in (x[E]) \setminus (y[E])$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in (x[E]) \setminus (y[E])$”
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x[E]) \wedge (\alpha \notin y[E])$.

`3:` Aus `2.2`“$\alpha \in x[E] \ldots$”
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`4:` Aus `2.1`“α Menge”,
aus `2.2`“$\ldots \alpha \notin y[E]$” und
aus `3`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **8-17**: $(\Omega, \alpha) \notin y$.

`5:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$” und
aus `4`“$(\Omega, \alpha) \notin y$”
folgt via **5-3**: $(\Omega, \alpha) \in x \setminus y$.

`6:` Aus `5`“$(\Omega, \alpha) \in x \setminus y$” und
aus `3`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **8-8**: $\alpha \in (x \setminus y)[E]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x[E]) \setminus (y[E])) \Rightarrow (\alpha \in (x \setminus y)[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(x[E]) \setminus (y[E]) \subseteq (x \setminus y)[E]$.

`b)`

`1:` $((x \setminus y)[E]) \cup ((y \setminus x)[E]) \stackrel{\mathbf{9-1}}{=} ((x \setminus y) \cup (y \setminus x))[E] \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} (x \Delta y)[E]$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((x \setminus y)[E]) \cup ((y \setminus x)[E]) = (x \Delta y)[E]$.

Beweis **9-4** `c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x[E]) \setminus (y[E]) \subseteq (x \setminus y)[E]$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(y[E]) \setminus (x[E]) \subseteq (y \setminus x)[E]$.

`1.3:` Via **5-27** gilt: $(x[E])\Delta(y[E]) = ((x[E]) \setminus (y[E])) \cup ((y[E]) \setminus (x[E]))$.

`2:` Aus `1.1`“$(x[E]) \setminus (y[E]) \subseteq (x \setminus y)[E]$” und
aus `1.2`“$(y[E]) \setminus (x[E]) \subseteq (y \setminus x)[E]$”
folgt via **2-13**:
$$((x[E]) \setminus (y[E])) \cup ((y[E]) \setminus (x[E])) \subseteq ((x \setminus y)[E]) \cup ((y \setminus x)[E]).$$

`3:` $$(x[E])\Delta(y[E]) \stackrel{1.3}{=} ((x[E]) \setminus (y[E])) \cup ((y[E]) \setminus (x[E])) \stackrel{2}{\subseteq} ((x \setminus y)[E]) \cup ((y \setminus x)[E]) \stackrel{b)}{=} (x\Delta y)[E].$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x[E])\Delta(y[E]) \subseteq (x\Delta y)[E]$.

□

9-5. Wie bereits vorab zu **9-4** fest gestellt und wie in den nachfolgenden Beispielen untermauert wird, können die Aussagen **9-4**`ac)` nicht ohne Weiteres in Gleichungen verwandelt werden:

9-5.Bemerkung

- Die Gleichung
  "$(x[E]) \setminus (y[E]) = (x \setminus y)[E]$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Gleichung
  "$(x[E])\Delta(y[E]) = (x\Delta y)[E]$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

9-6. Es folgt ein Beispiel, das belegt, dass **9-4**`a)` nicht ohne Weiteres als Gleichung zur Verfügung steht:

<u>9-6.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $y = \{(q, p)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p, q\}$.

Dann folgt:

`a)` $x[E] = \{p\}$.

`b)` $y[E] = \{p\}$.

`c)` $x \setminus y = x$.

`d)` $(x[E]) \setminus (y[E]) = 0$.

`e)` $(x \setminus y)[E] = \{p\}$.

`f)` $(x[E]) \setminus (y[E]) \neq (x \setminus y)[E]$.

9-7. Es folgt ein Beispiel, das belegt, dass **9-4**`c)` nicht ohne Weiteres als Gleichung zur Verfügung steht:

<u>9-7.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $y = \{(q, p)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p, q\}$.

Dann folgt:

a) $x[E] = \{p\}$.

b) $y[E] = \{p\}$.

c) $x \Delta y = \{(p, p), (q, p)\}$.

d) $(x[E]) \Delta (y[E]) = 0$.

e) $(x \Delta y)[E] = \{p\}$.

f) $(x[E]) \Delta (y[E]) \neq (x \Delta y)[E]$.

9-8. In `a)` wird gezeigt, dass das Bild von $E \cup e$ unter x gleich der binären Vereinigung der Bilder von E und e unter x ist. Im "Durchschnitts-Pendant" `b)` von `a)` wird gesagt, dass das Bild von $E \cap e$ unter x eine TeilKlasse des binären Durchschnitts der Bilder von E und e unter x ist. Gemäß `c)` wird aus der "TeilKlassen-Aussage" von `b)` eine "Gleichheits-Aussage", wenn x injektiv ist. Es wird nichts weiter darüber ausgesagt, ob die "TeilKlassen-Aussage" von `b)` auch eine "Ungleichheits-Aussage" sein kann. Weitere Aussagen hierzu sind der anschließenden Bemerkung und dem darauf folgenden Beispiel zu entnehmen:

9-8(Satz)

`a)` $x[E \cup e] = (x[E]) \cup (x[e])$.

`b)` $x[E \cap e] \subseteq (x[E]) \cap (x[e])$.

`c)` *Aus "x injektiv" folgt "$x[E \cap e] = (x[E]) \cap (x[e])$".*

Beweis **9-8** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in x[E \cup e]$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x[E \cup e]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E \cup e) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \cup e \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in E) \vee (\Omega \in e)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\Omega \in E$.

`4:` Aus `2.2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus `3.1.Fall`"$\Omega \in E$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[E]$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \in x[E]$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x[E]) \cup (x[e])$.

`3.2.Fall` $\Omega \in e$.

`4:` Aus `2.2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus `3.2.Fall`"$\Omega \in e$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[e]$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \in x[e]$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x[E]) \cup (x[e])$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in (x[E]) \cup (x[e])$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E \cup e]) \Rightarrow (\alpha \in (x[E]) \cup (x[e]))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x[E \cup e] \subseteq (x[E]) \cup (x[e])$"

<u>Beweis **9-8**</u> `a)` ...

`1.2:` Via **2-7** gilt: $E \subseteq E \cup e$.

`1.3:` Via **2-7** gilt: $e \subseteq E \cup e$.

`2.1:` Aus `1.2` "$E \subseteq E \cup e$"
folgt via **8-9**: $x[E] \subseteq x[E \cup e]$.

`2.2:` Aus `1.3` "$e \subseteq E \cup e$"
folgt via **8-9**: $x[e] \subseteq x[E \cup e]$.

`3:` Aus `2.1` "$x[E] \subseteq x[E \cup e]$" und
aus `2.2` "$x[e] \subseteq x[E \cup e]$"
folgt via **2-12**: `A2` | "$(x[E]) \cup (x[e]) \subseteq x[E \cup e]$"

`1.4:` Aus `A1` gleich "$x[E \cup e] \subseteq (x[E]) \cup (x[e])$" und
aus `A2` gleich "$(x[E]) \cup (x[e]) \subseteq x[E \cup e]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x[E \cup e] = (x[E]) \cup (x[e])$.

`b)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $E \cap e \subseteq E$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $E \cap e \subseteq e$.

`2.1:` Aus `1.1` "$E \cap e \subseteq E$"
folgt via **8-9**: $x[E \cap e] \subseteq x[E]$.

`2.2:` Aus `1.2` "$E \cap e \subseteq e$"
folgt via **8-9**: $x[E \cap e] \subseteq x[e]$.

`3:` Aus `2.1` "$x[E \cap e] \subseteq x[E]$" und
aus `2.2` "$x[E \cap e] \subseteq x[e]$"
folgt via **2-12**: $x[E \cap e] \subseteq (x[E]) \cap (x[e])$.

Beweis **9-8** `c)` `VS` gleich x injektiv.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (x[E]) \cap (x[e])$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in (x[E]) \cap (x[e])$" folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in (x[E]) \cap (x[e])$" folgt via **2-2**: $(\alpha \in x[E]) \wedge (\alpha \in x[e])$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\alpha \in x[E] \ldots$" folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha \in x[e]$" folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in e) \wedge ((\Psi, \alpha) \in x)$.

`4:` Aus `VS` gleich "x injektiv", aus `3.1`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und aus `3.2`"$\ldots (\Psi, \alpha) \in x$" folgt via **8-1(Def)**: $\Omega = \Psi$.

`5:` Aus `4`"$\Omega = \Psi$" und aus `3.2`"$\ldots \Psi \in e \ldots$" folgt: $\Omega \in e$.

`6:` Aus `3.1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und aus `5`"$\Omega \in e$" folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap e$.

`7:` Aus `3.1`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und aus `6`"$\Omega \in E \cap e$" folgt via **8-8**: $\alpha \in x[E \cap e]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x[E]) \cap (x[e])) \Rightarrow (\alpha \in x[E \cap e])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x[E]) \cap (x[e]) \subseteq x[E \cap e]$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $x[E \cap e] \subseteq (x[E]) \cap (x[e])$.

`1.3:` Aus `1.2`"$x[E \cap e] \subseteq (x[E]) \cap (x[e])$" und aus `A1` gleich "$(x[E]) \cap (x[e]) \subseteq x[E \cap e]$" folgt via **GleichheitsAxiom**: $x[E \cap e] = (x[E]) \cap (x[e])$.

□

9-9. Wie in **9-8**`c)` fest gestellt, wird aus **9-8**`b)` eine Gleichung, wenn x injektiv ist. In Beispiel **9-10** wird hierzu ergänzend klar gemacht, dass **9-8**`b)` nicht ohne Weiteres als Gleichung zur Verfügung steht:

9-9.Bemerkung

Die Gleichung
"$x[E \cap e] = (x[E]) \cap (x[e])$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

9-10. An Hand des folgenden Beispiels wird geklärt, dass die “TeilKlassen-Aussage” von **9-8**`b)` nicht ohne Weiteres als Gleichung verfügbar ist:

<u>9-10.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) p Menge.

→) q Menge.

→) $p \neq q$.

→) $x = \{(p, p), (q, p)\}$.

→) $E = \{p\}$.

→) $e = \{q\}$.

Dann folgt:

`a)` $E \cap e = 0$.

`b)` $x[E] = \{p\}$.

`c)` $x[e] = \{p\}$.

`d)` $x[E \cap e] = 0$.

`e)` $(x[E]) \cap (x[e]) = \{p\}$.

`f)` $x[E \cap e] \neq (x[E]) \cap (x[e])$.

9-11. In a) wird gesagt, dass die KlassenDifferenz der Bilder von E und e unter x eine TeilKlasse des Bildes von $E \setminus e$ unter x ist. Gemäß b) wird für injektive x aus dieser "TeilKlassen-Aussage" eine "Gleichheits-Aussage" . Dass die binäre Vereinigung der Bilder von $E \setminus e$ und $e \setminus E$ unter x gleich dem Bild von $E\Delta e$ unter x ist, wird in c) gesagt. Gemäß d) ist die symmetrische KlassenDifferenz der Bilder von E und e unter x eine TeilKlasse des Bildes von $E\Delta e$ unter x. In e) wird geeeigt, dass aus dieser "TeilKlassen-Aussge" eine "Gleichheits-Aussage" wird, wenn x injektiv ist. Es wird nichts weiter darüber ausgesagt, ob die "TeilKlassen-Aussagen" von ad) auch "Ungleichheits-Aussagen" sein können. Weitere Aussagen hierzu sind in der anschließenden Bemerkung und den folgenden Beispielen zu finden:

9-11(Satz)

a) $(x[E]) \setminus (x[e]) \subseteq x[E \setminus e]$.

b) *Aus "x injektiv" folgt "$(x[E]) \setminus (x[e]) = x[E \setminus e]$".*

c) $(x[E \setminus e]) \cup (x[e \setminus E]) = x[E\Delta e]$.

d) $(x[E])\Delta(x[e]) \subseteq x[E\Delta e]$.

e) *Aus "x injektiv" folgt "$(x[E])\Delta(x[e]) = x[E\Delta e]$".*

<u>Beweis **9-11** `a)`</u>

`Thema1` $\alpha \in (x[E]) \setminus (x[e])$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (x[E]) \setminus (x[e])$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (x[E]) \setminus (x[e])$"
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x[E]) \wedge (\alpha \notin x[e])$.

`3:` Aus `2.2` "$\alpha \in x[E] \ldots$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`4:` Aus `2.1` "α Menge",
aus `2.2` "$\ldots \alpha \notin x[e]$" und
aus `3` "$(\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **8-17**: $\Omega \notin e$.

`5:` Aus `3` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4` "$\Omega \notin e$"
folgt via **5-3**: $\Omega \in E \setminus e$.

`6:` Aus `3` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus `5` "$\Omega \in E \setminus e$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[E \setminus e]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x[E]) \setminus (x[e])) \Rightarrow (\alpha \in x[E \setminus e])$.

Konsequene via **0-2(Def)**: $(x[E]) \setminus (x[e]) \subseteq x[E \setminus e]$.

<u>Beweis **9-11**</u> `b)` `VS` gleich x injektiv.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x[E \setminus e]$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x[E \setminus e]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E \setminus e) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \setminus e \ldots$"
folgt via **5-3**: $(\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin e)$.

`4.1:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus `3` "$\Omega \in E \ldots$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[E]$.

`4.2:` Es gilt: $(\alpha \in x[e]) \vee (\alpha \notin x[e])$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **9-11** `b)` `VS` gleich x injektiv.

...

`Thema1.1` $\alpha \in x[E \setminus e]$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.2.1.Fall` $\alpha \in x[e]$.

`5:` Aus `4.2.1.Fall`“$\alpha \in x[e]$”
folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in e) \wedge ((\Psi, \alpha) \in x)$.

`6:` Aus `VS` gleich “x injektiv”,
aus `2`“$\ldots(\Omega, \alpha) \in x$” und
aus `5`“$\ldots(\Psi, \alpha) \in x$”
folgt via **8-1(Def)**: $\Omega = \Psi$.

`7:` Aus `7`“$\Omega = \Psi$” und
aus `5`“$\ldots \Psi \in e \ldots$”
folgt: $\Omega \in e$.

`8:` Es gilt `7`“$\Omega \in e$”.
Es gilt `3`“$\ldots \Omega \notin e$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x[e]$.

`4.2.2.Fall` $\alpha \notin x[e]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$\alpha \notin x[e]$”

`4.3:` Aus `4.1`“$\alpha \in x[E]$” und
aus `A1` gleich “$\alpha \notin x[e]$”
folgt via **5-3**: $\alpha \in (x[E]) \setminus (x[e])$.

...

Beweis **9-11** `b)` `VS` gleich x injektiv.

...

Ergo `Thema1.1`: $\forall E : (\alpha \in x[E \setminus e]) \Rightarrow (\alpha \in (x[E]) \setminus (x[e]))$.

Konsequene via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}x[E \setminus e] \subseteq (x[E]) \setminus (x[e])\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x[E]) \setminus (x[e]) \subseteq x[E \setminus e]$.

`2:` Aus `1.2` “$(x[E]) \setminus (x[e]) \subseteq x[E \setminus e]$” und
aus `A2` gleich “$x[E \setminus e] \subseteq (x[E]) \setminus (x[e])$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x[E]) \setminus (x[e]) = x[E \setminus e]$.

`c)`

`1:` $(x[E \setminus e]) \cup (x[e \setminus E]) \stackrel{\textbf{9-8}}{=} x[(E \setminus e) \cup (e \setminus E)] \stackrel{\textbf{5-27}}{=} x[E \Delta e]$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x[E \setminus e]) \cup (x[e \setminus E]) = x[E \Delta e]$.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x[E]) \setminus (x[e]) \subseteq x[E \setminus e]$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x[e]) \setminus (x[E]) \subseteq x[e \setminus E]$.

`2:` Aus `1.1` “$(x[E]) \setminus (x[e]) \subseteq x[E \setminus e]$” und
aus `1.2` “$(x[e]) \setminus (x[E]) \subseteq x[e \setminus E]$”
folgt via **2-13**:
$$((x[E]) \setminus (x[e])) \cup ((x[e]) \setminus (x[E])) \subseteq (x[E \setminus e]) \cup (x[e \setminus E]).$$

`3:` $$(x[E])\Delta(x[e]) \stackrel{\textbf{5-27}}{=} (x[E] \setminus x[e]) \cup (x[e] \setminus x[E]) \stackrel{2}{\subseteq} (x[E \setminus e]) \cup (x[e \setminus E]) \stackrel{\text{c)}}{=} x[E \Delta e].$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x[E])\Delta(x[e]) \subseteq x[E \Delta e]$.

<u>Beweis **9-11**</u> `e)` `VS` gleich x injektiv.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x injektiv"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x[E]) \setminus (x[e]) = x[E \setminus e]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x injektiv"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x[e]) \setminus (x[E]) = x[e \setminus E]$.

`2:` $(x[E])\Delta(x[e]) \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} ((x[E]) \setminus (x[e])) \cup ((x[e]) \setminus (x[E]))$
$\stackrel{1.1}{=} (x[E \setminus e]) \cup ((x[e]) \setminus (x[E])) \stackrel{1.2}{=} (x[E \setminus e]) \cup (x[e \setminus E]) \stackrel{\mathrm{c)}}{=} x[E\Delta e]$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x[E])\Delta(x[e]) = x[E\Delta e]$.

□

9-12. Die “TeilKlassen-Aussagen” **9-11**`ad)` können, wie sich aus den nachfolgenden Beispielen ergibt, nicht ohne Weiteres durch Gleichungen ersetzt werden:

9-12.Bemerkung

- Die Gleichung
“$(x[E]) \setminus (x[e]) = x[E \setminus e]$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Gleichung
“$(x[E])\Delta(x[e]) = x[E\Delta e]$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

9-13. Wie aus folgendem Beispiel ersichtlich, kann **9-11**`a)` nicht ohne Weiteres zu einer Gleichung verschärft werden:

<u>9-13.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p, p), (q, p)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p\}$.

$\rightarrow$) $e = \{q\}$.

Dann folgt:

`a)` $E \setminus e = \{p\}$.

`b)` $x[E] = \{p\}$.

`c)` $x[e] = \{p\}$.

`d)` $x[E \setminus e] = \{p\}$.

`e)` $(x[E]) \setminus (x[e]) = 0$.

`f)` $(x[E]) \setminus (x[e]) \neq x[E \setminus e]$.

9-14. Wie aus folgendem Beispiel ersichtlich, kann **9-11**`d)` nicht ohne Weiteres zu einer Gleichung verschärft werden:

9-14.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p,p),(q,p)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p\}$.

$\rightarrow$) $e = \{q\}$.

Dann folgt:

`a)` $E \Delta e = \{p,q\}$.

`b)` $x[E] = \{p\}$.

`c)` $x[e] = \{p\}$.

`d)` $x[E \Delta e] = \{p\}$.

`e)` $(x[E])\Delta(x[e]) = 0$.

`f)` $(x[E])\Delta(x[e]) \neq x[E \Delta e]$.

9-15. Spätestens wenn "$x(p)$" in die Essays eingeführt wird, kommt "$x[\{p\}]$" eine ausgezeichnete Bedeutung zu. Hier wird ein Kriterium für "$q \in x[\{p\}]$" präsentiert:

9-15(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $q \in x[\{p\}]$.

`ii)` *"$\{q\} \subseteq x[\{p\}]$" und "q Menge".*

`iii)` $(p, q) \in x$.

`iv)` *"$(p, q) \in x$" und "p Menge" und "q Menge".*

Beweis **9-15** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $q \in x[\{p\}]$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$q \in x[\{p\}]$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$q \in x[\{p\}$"
folgt via **1-8**: $\{q\} \subseteq x[\{p\}]$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `1.1`
folgt: $(\{q\} \subseteq x[\{p\}]) \wedge (q \text{ Menge})$.

Beweis **9-15** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(\{q\} \subseteq x[\{p\}]) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **1-3**: $q \in \{q\}$.

`2:` Aus `1`"$q \in \{q\}$" und
aus `VS` gleich "$\{q\} \subseteq x[\{p\}] \ldots$"
folgt via **0-4**: $q \in x[\{p\}]$.

`3:` Aus `2`"$q \in x[\{p\}]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge \wedge((\Omega, q) \in x)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`5:` Aus `4`"$\Omega = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, q) = (p, q)$.

`6:` Aus `5`"$(\Omega, q) = (p, q)$" und
aus `3`"$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt: $(p, q) \in x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(p, q) \in x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`2:` Aus `1`"(p, q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in x$",
aus `2`"p Menge…" und
aus `2`"$\ldots q$ Menge"
folgt: $((p, q) \in x) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $((p, q) \in x) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge…"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in x \ldots$" und
aus `1`"$p \in \{p\}$"
folgt via **8-8**: $q \in x[\{p\}]$.

$\square$

9-16. Die hier definierte Klasse ist gleich $x[\{p\}]$, siehe **9-18**:

9-16(Definition)

$$\mathsf{9.0}(p, x) = \{\omega : (p, \omega) \in x\}.$$

9-17. Die folgende Aussage kann gelassen zur Kenntnis genommen werden. Ihre Bedeutung wird erst im Zusammenhang mit "$x(p)$" und "$y(p)$" klar. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt sind "$x(p)$" und "$y(p)$" noch nicht definiert:

9-17(Satz)

Aus "$x \subseteq y$" folgt "$\{\omega : (p, \omega) \in x\} \subseteq \{\omega : (p, \omega) \in y\}$".

9-16(Def) $\{\omega : (p, \omega) \in x\}$ *und* $\{\omega : (p, \omega) \in y\}$.

Beweis **9-17** `VS` gleich $x \subseteq y$.

`Thema1` $\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}$"
folgt: $(p, \alpha) \in x$.

`3:` Aus `2` "$(p, \alpha) \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-6**: $(p, \alpha) \in y$.

`4:` Aus `3` "$(p, \alpha) \in y$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in y\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (p, \omega) \in x\} \subseteq \{\omega : (p, \omega) \in y\}$.

$\square$

9-18. Es gilt $x[\{p\}] = \{\omega : (p,\omega) \in x\}$:

9-18(Satz)

$$x[\{p\}] = \{\omega : (p,\omega) \in x\}.$$

9-16(Def) $\{\omega : (p,\omega) \in x\}$.

Beweis **9-18**

`Thema1.1` $\alpha \in x[\{p\}]$.

`2.1`: Aus `Thema1`“$\alpha \in x[\{p\}]$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2`: Aus `Thema1`“$\alpha \in x[\{p\}]$”
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge ((\Omega,\alpha) \in x)$.

`3`: Aus `2.2`“$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$”
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`4`: Aus `3`“$\Omega = p$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega,\alpha) = (p,\alpha)$.

`5`: Aus `4`“$(\Omega,\alpha) = (p,\alpha)$” und
aus `2.2`“$\ldots (\Omega,\alpha) \in x$”
folgt: $(p,\alpha) \in x$.

`6`: Aus `5`“$(p,\alpha) \in x$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt: $\alpha \in \{\omega : (p,\omega) \in x\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (p,\omega) \in x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$x[\{p\}] \subseteq \{\omega : (p,\omega) \in x\}$”

...

<u>Beweis **9-18**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}$”
folgt: $(p, \alpha) \in x$.

`3:` Aus `2`“$(p, \alpha) \in x$”
folgt via **9-15**: $\alpha \in x[\{p\}]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in x[\{p\}])$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\{\omega : (p, \omega) \in x\} \subseteq x[\{p\}]$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$x[\{p\}] \subseteq \{\omega : (p, \omega) \in x\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\omega : (p, \omega) \in x\} \subseteq x[\{p\}]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x[\{p\}] = \{\omega : (p, \omega) \in x\}$.

□

9-19. Mit der folgenden Aussage wird die Äquivalenz von "$p \in \mathsf{dom}\, x$" und "$x(p)$ Menge" vorbereitet. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt ist "$x(p)$" noch nicht definiert:

9-19(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`ii)` $0 \neq x[\{p\}]$.

Beweis **9-19** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$" folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (p, \Omega) \in x$" folgt via **9-15**: $\Omega \in x[\{p\}]$.

`3:` Aus `2`"$\Omega \in x[\{p\}]$" folgt via **0-20**: $0 \neq x[\{p\}]$.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $0 \neq x[\{p\}]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x[p\}]$" folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x[\{p\}]$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x[\{p\}]$" folgt via **9-15**: $(p, \Omega) \in x$.

`3:` Aus `2`"$(p, \Omega) \in x$" folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

□

9-20. Via Negation ergibt sich aus **9-19** die folgende Äquivalenz:

9-20(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

ii) $x[\{p\}] = 0$.

Beweis **9-20**

1: Via **9-19** gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \Leftrightarrow (0 \neq x[\{p\}])$.

2: Aus 1 folgt: $(p \notin \mathsf{dom}\, x) \Leftrightarrow (x[\{p\}] = 0)$.

$\square$

9-21 Es werden Folgerungen aus "x injektiv" in Bezug auf $x[E] \cap x[e]$ und auf $(x[\{p\}]) \cap (x[\{q\}])$ gezogen:

9-21(Satz)

Aus "x injektiv" und ...

a) *... und "$E \cap e = 0$" folgt "$(x[E]) \cap (x[e]) = 0$".*

b) *... und "$0 \neq (x[E]) \cap (x[e])$" folgt "$0 \neq E \cap e$".*

c) *... und "$p \neq q$" folgt "$(x[\{p\}]) \cap (x[\{q\}]) = 0$".*

d) *... und "$0 \neq (x[\{p\}]) \cap (x[\{q\}])$"*
folgt "$p = q$" und "p Menge" und "q Menge".

Beweis **9-21** a) VS gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (E \cap e = 0)$.

1.1: Aus VS gleich "x injektiv ..."
folgt via **9-8**: $x[E \cap e] = (x[E]) \cap (x[e])$.

1.2: Aus VS
folgt: $E \cap e = 0$.

2: $(x[E]) \cap (x[e]) \overset{1.1}{=} x[E \cap e] \overset{1.2}{=} x[0] \overset{\mathbf{8-12}}{=} 0$.

3: Aus 2
folgt: $(x[E]) \cap (x[e]) = 0$.

<u>Beweis **9-21**</u> `b)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (0 \neq (x[E]) \cap (x[e]))$.

`1:` Es gilt: $(E \cap e = 0) \vee (0 \neq E \cap e)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \cap e = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "x injektiv..." und
aus `1.1.Fall` "$E \cap e = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x[E]) \cap (x[e]) = 0$.

`3:` Es gilt `2` "$(x[E]) \cap (x[e]) = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$0 \neq (x[E]) \cap (x[e])$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq E \cap e$.

`1.2.Fall` $0 \neq E \cap e$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq E \cap e$.

`c)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (p \neq q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \neq q$"
folgt via **2-33**: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "x injektiv..." und
aus `1` "$\{p\} \cap \{q\} = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x[\{p\}]) \cap (x[\{q\}]) = 0$.

`d)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (0 \neq (x[\{p\}]) \cap (x[\{q\}]))$.

`1:` Aus `VS` gleich "x injektiv..." und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq (x[\{p\}]) \cap (x[\{q\}])$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $0 \neq \{p\} \cap \{q\}$.

`2:` Aus `1` "$0 \neq \{p\} \cap \{q\}$"
folgt via **2-33**: $(p = q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

$\square$

9-22. In Umkehrung von **9-21**`cd)` werden zwei hinreichende, auf "$(x[\{\alpha\}])\cap(x[\{\beta\}])$" basierende Aussagen für "x injektiv" formuliert:

9-22(Satz)

a) *Aus* "$\forall\alpha,\beta: ((\alpha\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\alpha\neq\beta))$
$\Rightarrow ((x[\{\alpha\}])\cap(x[\{\beta\}])=0)$"

folgt "x injektiv".

b) *Aus* "$\forall\alpha,\beta: ((\alpha\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(0\neq(x[\{\alpha\}])\cap(x[\{\beta\}]))$
$\Rightarrow (\alpha=\beta)$"

folgt "x injektiv".

<u>Beweis **9-22**</u> `a)` `VS` gleich $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((x[\{\alpha\}]) \cap (x[\{\beta\}]) = 0)$.

`Thema1` $((\gamma, \delta) \in x) \wedge ((\epsilon, \delta) \in x)$.

`2:` Es gilt: $(\gamma \neq \epsilon) \vee (\gamma = \epsilon)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\gamma \neq \epsilon$.

`3.1:` Aus `Thema1` "$(\gamma, \delta) \in x \ldots$" folgt via **7-5**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, x$.

`3.2:` Aus `Thema1` "$(\gamma, \delta) \in x \ldots$" folgt via **9-15**: $\delta \in x[\{\gamma\}]$.

`3.3:` Aus `Thema1` "$\ldots (\epsilon, \delta) \in x$" folgt via **7-5**: $\epsilon \in \mathsf{dom}\, x$.

`3.4:` Aus `Thema1` "$\ldots (\epsilon, \delta) \in x$" folgt via **9-15**: $\delta \in x[\{\epsilon\}]$.

`4.1:` Aus `3.1`, aus `3.3` und aus `2.1.Fall` folgt: $(\gamma \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\epsilon \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\gamma \neq \epsilon)$.

`4.2:` Aus `3.2` "$\delta \in x[\{\gamma\}]$" und aus `3.4` "$\delta \in x[\{\epsilon\}]$" folgt via **2-2**: $\delta \in (x[\{\gamma\}]) \cap (x[\{\epsilon\}])$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((x[\{\alpha\}]) \cap (x[\{\beta\}]) = 0)$" und aus `4.1` "$(\gamma \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\epsilon \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\gamma \neq \epsilon)$" folgt: $(x[\{\gamma\}]) \cap (x[\{\epsilon\}]) = 0$.

`6:` Aus `4.2` "$\delta \in (x[\{\gamma\}]) \cap (x[\{\epsilon\}])$" und aus `5` "$(x[\{\gamma\}]) \cap (x[\{\epsilon\}]) = 0$" folgt: $\delta \in 0$.

`7:` Es gilt `6` "$\delta \in 0$". Via **0-19** gilt "$\delta \notin 0$". Ex falso quodlibet folgt: $\gamma = \epsilon$.

`2.2.Fall` $\gamma = \epsilon$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\gamma = \epsilon$.

...

<u>Beweis</u> **9-22** `a)` `VS` gleich $\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\alpha\neq\beta))$
$\Rightarrow((x[\{\alpha\}])\cap(x[\{\beta\}])=0)$.

...

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma,\delta,\epsilon:((((\gamma,\delta)\in x)\wedge((\epsilon,\delta)\in x))\Rightarrow(\gamma=\epsilon)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: x injektiv.

`b)` `VS` gleich $\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(0\neq(x[\{\alpha\}])\cap(x[\{\beta\}]))$
$\Rightarrow(\alpha=\beta)$.

`1:` Aus `VS` folgt:
$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\alpha\neq\beta))\Rightarrow((x[\{\alpha\}])\cap(x[\{\beta\}])=0)$.

`2:` Aus `1` "$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\alpha\neq\beta))$
$\Rightarrow((x[\{\alpha\}])\cap(x[\{\beta\}])=0)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x injektiv.

□

9-23. Gemäß `a)` ist das Bild von E unter $x \times y$ eine TeilKlasse von y. In `b)` und `c)` wird `a)` unter zusätzlichen Voraussetzungen präzisiert. Falls $0 \neq x \cap E$, dann ist das Bild von E unter $x \times y$ gleich y, siehe `b)`, während gemäß `c)` aus $x \cap E = 0$ die Aussage $(x \times y)[E] = 0$ folgt:

9-23(Satz)

`a)` $(x \times y)[E] \subseteq y$.

`b)` *Aus* "$0 \neq x \cap E$" *folgt* "$(x \times y)[E] = y$".

`c)` *Aus* "$x \cap E = 0$" *folgt* "$(x \times y)[E] = 0$".

Beweis **9-23** `a)`

`Thema1` $\alpha \in (x \times y)[E]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (x \times y)[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x \times y)$.

`3:` Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x \times y$"
folgt via **6-6**: $\alpha \in y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \times y)[E]) \Rightarrow (\alpha \in y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(x \times y)[E] \subseteq y$.

<u>Beweis **9-23**</u> `b)` `VS` gleich $0 \neq x \cap E$.

`Thema1.1` $\alpha \in y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cap E$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x \cap E$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in x \cap E$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in x) \wedge (\Omega \in E)$.

`4:` Aus `3`"$\Omega \in x \ldots$" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in y$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \alpha) \in x \times y$.

`5:` Aus `4`"$(\Omega, \alpha) \in x \times y$" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in (x \times y)[E]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \in (x \times y)[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$y \subseteq (x \times y)[E]$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x \times y)[E] \subseteq y$.

`1.3:` Aus `1.2`"$(x \times y)[E] \subseteq y$" und
aus `A1` gleich "$y \subseteq (x \times y)[E]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \times y)[E] = y$.

Beweis **9-23** `c)` `VS` gleich $x \cap E = 0.$

`Thema1` $\alpha \in (x \times y)[E].$

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (x \times y)[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x \times y).$

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x \times y$"
folgt via **6-6**: $(\Omega \in x) \wedge (\alpha \in y).$

`4:` Aus `3` "$\Omega \in x$" und
aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in x \cap E.$

`5:` Aus `4` "$\Omega \in x \cap E$" und
aus `VS` gleich "$x \cap E = 0$"
folgt: $\Omega \in 0.$

`6:` Es gilt `5` "$\Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin (x \times y)[E].$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \times y)[E]) \Rightarrow (\alpha \notin (x \times y)[E]).$

Konsequenz via **0-19**: $(x \times y)[E] = 0.$

$\square$

Relation. Relation in x. Keine Relation. Keine Relation in x.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 27/05/11**

10-1. Wie schon an Hand der folgenden Definition vermutet werden kann, sind Relationen genau jene Klassen, die *ausschließlich* aus *geordneten Paaren von Mengen* bestehen. Diese Vermutung wird in **10-2** und **10-3** rigoros bestätigt. Zur genaueren Klassifizierung von Relationen ist es hilfreich, eventuell zu Grunde liegende Klassen anzugeben. Dies geschieht durch den Begriff “Relation in x” . Mitunter ist es von Bedeutung fest zu stellen, dass eine Klasse *keine* Relation oder *keine* Relation *in* x ist. Die kanonische Definition, wann eine Klasse keine Relation oder keine Relation in x ist, erfolgt ebenfalls hier.

10-1(Definition)

1) “r **Relation**” genau dann, wenn gilt:

$$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$$

2) “r **Relation in** x” genau dann, wenn gilt:

$$r \subseteq x \times x.$$

3) “r **keine Relation**” genau dann, wenn gilt:

$$\neg(r \text{ Relation}).$$

4) “r **keine Relation in** x” genau dann, wenn gilt:

$$\neg(r \text{ Relation in } x).$$

10-2. Falls r eine Relation ist, so gibt es zu jedem Element x von r zwei *Mengen* $\Omega \in \mathsf{dom}\, r$ und $\Psi \in \mathsf{ran}\, r$, so dass $x = (\Omega, \Psi)$:

10-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation.*

$\rightarrow$) $w \in r$.

Dann gibt es Ω, Ψ, *so dass gilt:*

e.1) $\Omega \in \mathsf{dom}\, r$.

e.2) $\Psi \in \mathsf{ran}\, r$.

e.3) $w = (\Omega, \Psi)$.

<u>Beweis</u> **10-2**

1: Aus →) "r Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus →) "$w \in r$" und
aus 1 "$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **0-4**: $w \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

3: Aus 3 "$w \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-8**: $\exists \Omega, \Psi : w = (\Omega, \Psi)$.

4: Aus 3 "$w = (\Omega, \Psi)$" und
aus →) "$w \in r$"
folgt: $(\Omega, \Psi) \in r$.

5: Aus 4 "$(\Omega, \Psi) \in r$"
folgt via **7-5**: $(\Omega \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\Psi \in \mathsf{ran}\, r)$.

6: Aus 3 "$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus 5 "$\Omega \in \mathsf{dom}\, r \ldots$",
aus 5 "$\ldots \Psi \in \mathsf{ran}\, r$" und
aus 3 "$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi : \quad \Omega \in \mathsf{dom}\, r \quad \wedge \quad \Psi \in \mathsf{ran}\, r \quad \wedge \quad w = (\Omega, \Psi).$$

□

10-3. r ist genau dann eine Relation, wenn jedes Element von r ein geordnetes Paar (von Mengen) ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $r = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$:

10-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` r *Relation.*

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

`iii)` $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \textit{ Menge}) \wedge (\Psi \textit{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`iv)` $r = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Beweis **10-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich r Relation.

`1:` Aus `VS` gleich "r Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\alpha \in r$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \in r$" und
aus `1`"$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-8**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Beweis **10-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in r$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\beta \in r$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\beta \in r$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$"
folgt: $\exists\Omega, \Psi : \beta = (\Omega, \Psi)$.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots \beta = (\Omega, \Psi)$" und
aus `2.1`"β Menge"
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$)$.

`5:` Aus `2.2`"$\exists\Omega, \Psi \ldots$",
aus `4`"Ω Menge$\ldots$",
aus `4`"$\ldots \Psi$ Menge" und
aus `2.2`"$\ldots \beta = (\Omega, \Psi)$"
folgt:
$$\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\beta = (\Omega, \Psi)).$$

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in r) \Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\beta = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz: $\forall\alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

Beweis **10-3** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$

`VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in r$.

`2:` Aus `Thema1`"$\beta \in r$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in r)$
$\Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$"
folgt: $\exists\Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\beta = (\Omega, \Psi))$.

`3.1:` Aus `2`"…Ω Menge…"
folgt via **0-19**: $\Omega \in \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2`"…Ψ Menge…"
folgt via **0-19**: $\Psi \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1`"$\Omega \in \mathcal{U}$" und
aus `3.2`"$\Psi \in \mathcal{U}$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus `2`"…$\beta = (\Omega, \Psi)$" und
aus `4`"$(\Omega, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt: $\beta \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in r) \Rightarrow (\beta \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **2-10**: $r = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $r = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$r = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$"
folgt: $r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = r$.

`2:` Aus `1`"$r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = r$"
folgt via **2-10**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1`"$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-1(Def)**: r Relation.

$\square$

10-4. Es folgen drei Aussagen über Relationen. Jede Relation r ist gemäß `a)` eine TeilKlasse von $(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$ und gemäß `b)` eine Relation in $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$. Via `c)` wird fest gestellt, dass jede Relation eine Relation in $\mathcal{U}$ ist:

10-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation.*

Dann folgt:

a) $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

b) r *Relation in* $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$.

c) r *Relation in* $\mathcal{U}$.

Beweis **10-4** `a)`

`Thema1` $\alpha \in r$.

2: Aus `VS` gleich "r Relation" und
aus `Thema1`"$\alpha \in r$"
folgt via **10-2**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\Psi \in \mathsf{ran}\, r) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$$

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, r \ldots$" und
aus 2"$\ldots \Psi \in \mathsf{ran}\, r \ldots$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

4: Aus 2"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus 3"$(\Omega, \Psi) \in (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$"
folgt: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

Beweis **10-4** b)

1: Aus →) “ r Relation ” folgt via des bereits bewiesenen a): $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

2.1: Via **2-7** gilt: $\mathsf{dom}\, r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$.

2.2: Via **2-7** gilt: $\mathsf{ran}\, r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$.

3: Aus 2.1 “ $\mathsf{dom}\, r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$ ” und aus 4 “ $\mathsf{ran}\, r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$ ” folgt via **6-7**:

$$(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r) \subseteq ((\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)) \times ((\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)).$$

6: Aus 1 “ $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$ ” und aus 5 “ $(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r) \subseteq ((\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)) \times ((\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r))$ ” folgt via **0-6**: $r \subseteq ((\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)) \times ((\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r))$.

7: Aus 6 “ $r \subseteq ((\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)) \times ((\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r))$ ” folgt via **10-1(Def)**: r Relation in $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$.

c)

1: Aus →) “ r Relation ” folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus 1 “ $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ” folgt via **10-1(Def)**: r Relation in $\mathcal{U}$.

□

10-5. Jede Relation, deren Definitions- *und* Bild-Bereich eine Menge ist, ist eine Menge:

<u>10-5(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ r *Relation.*

$\rightarrow)$ $\mathsf{dom}\, r$ *Menge.*

$\rightarrow)$ $\mathsf{ran}\, r$ *Menge.*

Dann folgt "r Menge".

<u>Beweis **10-5**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$\mathsf{dom}\, r$ Menge" und
aus $\rightarrow)$ "$\mathsf{ran}\, r$ Menge"
folgt via **BinärCartesischesAxiom**: $(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$ Menge.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "r Relation"
folgt via **10-4**: $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

`2:` Aus `1.2` "$r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus `1.1` "$(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: r Menge.

$\square$

10-6. Jede TeilKlasse einer Relation Relation:

<u>**10-6(Satz)**</u>

Aus "r Relation" und "$s \subseteq r$" folgt "s Relation".

<u>Beweis **10-6**</u> `VS` gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (s \subseteq r)$.

`1`: Aus `VS` gleich "r Relation…"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2`: Aus `VS` gleich "…$s \subseteq r$" und
aus `1`"$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **0-6**: $s \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3`: Aus `2`"$s \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-1(Def)**: s Relation.

□

10-7. Via **2-7** gilt $r \cap s \subseteq r$ und via **10-6** ist jede TeilKlasse einer Relation eine Relation. Also ist $r \cap s$ eine Relation, wenn r eine Relation ist. Dies ist die Aussage von `a)`. Mit ähnlichen Argumenten wird in `b)` gezeigt, dass $r \setminus s$ eine Relation ist, wenn r eine Relation ist:

10-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation.*

Dann folgt:

`a)` *“$r \cap s$ Relation” und “$s \cap r$ Relation”.*

`b)` $r \setminus s$ *Relation.*

Beweis **10-7** `a)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $r \cap s \subseteq r$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $s \cap r \subseteq r$.

`2.1:` Aus $\rightarrow$) “r Relation” und
aus `1` “$r \cap s \subseteq r$”
folgt via **10-6**: $r \cap s$ Relation.

`2.2:` Aus $\rightarrow$) “r Relation” und
aus `1` “$s \cap r \subseteq r$”
folgt via **10-6**: $s \cap r$ Relation.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(r \cap s \text{ Relation}) \wedge (s \cap r \text{ Relation})$.

`b)`

`1:` Via **5-5** gilt: $r \setminus s \subseteq r$.

`2:` Aus $\rightarrow$) “r Relation” und
aus `1` “$r \setminus s \subseteq r$”
folgt via **10-6**: $r \setminus s$ Relation.

$\square$

10-8. Gemäß `a)` ist die binäre Vereinigung von Relationen eine Relation. Aus dieser Aussage, aus **5-28**, wonach die symmetrische KlassenDifferenz eine Teil-Klasse der binären Vereinigung ist, und aus **10-6** folgt, dass die symmetrische Differenz von Relationen eine Relation ist. Dies ist die Aussage von `b)`:

10-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation.*

$\rightarrow$) s *Relation.*

Dann folgt:

`a)` $r \cup s$ *Relation.*

`b)` $r\Delta s$ *Relation.*

Beweis **10-8** `a)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$)“r Relation”
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$)“s Relation”
folgt via **10-1(Def)**: $s \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`“$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `1.2`“$s \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **2-12**: $r \cup s \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“$r \cup s \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **10-1(Def)**: $r \cup s$ Relation.

`b)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$)“r Relation” und
aus $\rightarrow$)“s Relation”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $r \cup s$ Relation.

`1.2:` Via **5-28** gilt: $r\Delta s \subseteq r \cup s$.

`2:` Aus `1.1`“$r \cup s$ Relation” und
aus `1.2`“$r\Delta s \subseteq r \cup s$”
folgt via **10-6**: $r\Delta s$ Relation.

□

10-9. Die Vereinigung einer Klasse von Relationen Relation. Interessanter Weise kann diese Klasse durchaus leer sein:

10-9(Satz)

Aus "$\forall\alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\alpha$ *Relation*$)$" *folgt* "$\bigcup R$ *Relation*".

Beweis **10-9** `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\alpha \text{ Relation})$.

`Thema1.1` $\beta \in \bigcup R$.

2: Aus `Thema1.1` "$\beta \in \bigcup R$"
folgt via **1-12**: $\exists\Omega : (\beta \in \Omega) \wedge (\Omega \in R)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in R$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\alpha \text{ Relation})$"
folgt: Ω Relation.

4: Aus 3 "Ω Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $\Omega \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

5: Aus 2 "$\ldots \beta \in \Omega$" und
aus 4 "$\Omega \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\beta : (\beta \in \bigcup R) \Rightarrow (\beta \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\bigcup R \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"

1.2: Aus `A1` gleich "$\bigcup R \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-1(Def)**: $\bigcup R$ Relation.

□

10-10. Enthält eine Klasse auch nur eine Relation, so ist der Durchschnitt dieser Klasse als TeilKlasse *dieser* Relation - siehe **1-15** - eine Relation, siehe **10-6**. Interessanter Weise kann hier die zu Grunde Klasse nicht leer sein. Sonst könnte sie keine Relation beinhalten:

10-10(Satz)

Aus "r Relation" und "$r \in R$" folgt "$\bigcap R$ Relation".

Beweis **10-10** `VS` gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (r \in R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots r \in R$"
folgt via **1-15**: $\bigcap R \subseteq r$.

`2:` Aus `VS` gleich "r Relation$\ldots$" und
aus `1`"$\bigcap R \subseteq r$"
folgt via **10-6**: $\bigcap R$ Relation.

□

10-11. Wenn alle Elemente einer *nicht leeren* Klasse Relationen sind, dann ist der Durchschnitt dieser Klasse eine Relation:

10-11(Satz)

Es gelte:

→) $\forall \alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\alpha \textit{ Relation})$.

→) $0 \neq R$.

Dann folgt "$\bigcap R$ Relation".

Beweis **10-11**

1: Aus →) "$0 \neq R$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in R$.

2: Aus 1 "$\ldots \Omega \in R$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\alpha \text{ Relation})$"
folgt: Ω Relation.

3: Aus 2 "Ω Relation" und
aus 1 "$\ldots \Omega \in R$"
folgt via **10-10**: $\bigcap R$ Relation.

□

10-12. Jede TeilKlasse eines binären, cartesischen Produkts ist eine Relation, genauer, eine Relation in der binären Vereinigung der am binären, cartesischen Produkt beteiligten Klassen. Die TeilKlasse kann durchaus leer sein. In etwas versteckter Weise ist in **10-12** die Umkehrung von **10-4**a) zu finden. Wenn im jetzigen a) die Wahl $x = \mathsf{dom}\, r$ und $y = \mathsf{ran}\, r$ getroffen wird, so folgt aus "$r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$" die Aussage "$r$ Relation". Also gibt es in Kombination von **10-4** und **10-12** mit "r Relation genau dann, wenn $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$" ein Kriterium für "$r$ Relation":

10-12(Satz)

a) *Aus "$r \subseteq x \times y$" folgt "r Relation".*

b) *Aus "$r \subseteq x \times y$" folgt "r Relation in $x \cup y$".*

Beweis **10-12** VS gleich $r \subseteq x \times y$.

1: Via **6-12** gilt: $x \times y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus VS gleich "$r \subseteq x \times y$" und
aus 1"$x \times y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **0-6**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

3.a): Aus 2"$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-1(Def)**: r Relation.

4.1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

4.2: Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

5: Aus 4.1"$x \subseteq x \cup y$" und
aus 4.2"$y \subseteq x \cup y$"
folgt via **6-7**: $x \times y \subseteq (x \cup y) \times (x \cup y)$.

6: Aus VS gleich "$r \subseteq x \times y$" und
aus 5"$x \times y \subseteq (x \cup y) \times (x \cup y)$"
folgt via **0-6**: $r \subseteq (x \cup y) \times (x \cup y)$.

7: Aus 6"$r \subseteq (x \cup y) \times (x \cup y)$"
folgt via **10-1(Def)**: r Relation in $x \cup y$.

□

10-13. Es folgen drei (in Bezug auf **10-12**: weitere) Aussagen über "Relations-Eigenschaften" binärer, cartesischer Produkte:

10-13(Satz)

a) *$x \times y$ Relation.*

b) *Aus "$x \subseteq z$" und "$y \subseteq z$" folgt "$x \times y$ Relation in z".*

c) *$x \times y$ Relation in $x \cup y$.*

Beweis **10-13** a)

1: Via **0-6** gilt: $x \times y \subseteq x \times y$.

2: Aus 1"$x \times y \subseteq x \times y$"
folgt via **10-12**: $x \times y$ Relation.

b) VS gleich $(x \subseteq z) \wedge (y \subseteq z)$.

1: Aus VS gleich "$x \subseteq z \dots$" und
aus VS gleich "$\dots y \subseteq z$"
folgt via **6-7**: $x \times y \subseteq z \times z$.

2: Aus 1"$x \times y \subseteq z \times z$"
folgt via **10-1(Def)**: $x \times y$ Relation in z.

c)

1: Via **0-6** gilt: $x \times y \subseteq x \times y$.

2: Aus 1"$x \times y \subseteq x \times y$"
folgt via **10-12**: $x \times y$ Relation in $x \cup y$.

□

10-14. Es wird fest gestellt, dass jede Relation in x eine Relation ist. Dies liefert a posteriori eine Rechtfertigung dafür eine "Relation in x" eben als "Relation" zu bezeichnen:

10-14(Satz)

Aus "r Relation in x" folgt "r Relation".

Beweis **10-14** `VS` gleich r Relation in x.

`1:` Aus `VS` gleich "r Relation in x"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

`2:` Via **6-12** gilt: $x \times x \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1`"$r \subseteq x \times x$" und
aus `2`"$x \times x \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **0-6**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-1(Def)**: r Relation.

□

10-15. Wenn bei einer Relation Definitions- und Bild-Bereich identisch sind, dann ist diese Relation sowohl eine Relation in ihrem Definitions-Bereich als auch in ihrem Bild-Bereich:

10-15(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, r = \mathsf{ran}\, r$.

Dann folgt:

a) r *Relation in* $\mathsf{dom}\, r$.

b) r *Relation in* $\mathsf{ran}\, r$.

Beweis **10-15**

1.1: Aus $\rightarrow$) "r Relation"
folgt via **10-4**: r Relation in $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$.

2.1: $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r) \overset{\rightarrow)}{=} (\mathsf{ran}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r) \overset{\mathbf{2-14}}{=} \mathsf{ran}\, r$.

2.2: $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r) \overset{\rightarrow)}{=} (\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{dom}\, r) \overset{\mathbf{2-14}}{=} \mathsf{dom}\, r$.

3.a): Aus 1"r Relation in $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus 2.2"$(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{dom}\, r) = \ldots = \mathsf{dom}\, r$"
folgt: r Relation in $\mathsf{dom}\, r$.

3.b): Aus 1"r Relation in $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus 2.1"$(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{dom}\, r) = \ldots = \mathsf{ran}\, r$"
folgt: r Relation in $\mathsf{ran}\, r$.

$\square$

10-16. Nun wird über jede Relation r in x gesagt, dass r auch eine Relation in y ist, wenn $x \subseteq y$. Konsequenter Weise ist "x" durch die Aussage "r Relation in x" *nicht eindeutig* fest gelegt. Auch wird fest gestellt, dass wenn r Relation in x *und* Relation in y ist, r Relation in $x \cap y$ ist:

10-16(Satz)

a) *Aus "r Relation in x" und "$x \subseteq y$" folgt "r Relation in y".*

b) *Aus "r Relation in x" und "r Relation in y" folgt "r Relation in $x \cap y$".*

Beweis **10-16** a) VS gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (x \subseteq y)$.

1.1: Aus VS gleich "r Relation in $x \ldots$"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots x \subseteq y$"
folgt via **6-7**: $x \times x \subseteq y \times y$.

2: Aus 1.1"$r \subseteq x \times x$" und
aus 1.2"$x \times x \subseteq y \times y$"
folgt via **0-6**: $r \subseteq y \times y$.

3: Aus 2"$r \subseteq y \times y$"
folgt via **10-1(Def)**: r Relation in y.

Beweis **10-16** `b)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \text{ Relation in } y)$.

`Thema1` $\alpha \in r$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x\ldots$"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots r$ Relation in y"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq y \times y$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in r$" und
aus `1.1`"$r \subseteq x \times x$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in x \times x$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in r$" und
aus `1.2`"$r \subseteq y \times y$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in y \times y$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \in x \times x$"
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`4:` Aus `2.2`"$\alpha \in y \times y$" und
aus `3`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $(\Omega, \Psi) \in y \times y$.

`5:` Aus `4`"$(\Omega, \Psi) \in y \times y$"
folgt via **6-6**: $(\Omega \in y) \wedge (\Psi \in y)$.

`6.1:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in x \ldots$" und
aus `5`"$\Omega \in y \ldots$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in x \cap y$.

`6.2:` Aus `3`"$\ldots \Psi \in x \ldots$" und
aus `5`"$\ldots \Psi \in y$"
folgt via **2-2**: $\Psi \in x \cap y$.

`7:` Aus `6.1`"$\Omega \in x \cap y$" und
aus `6.2`"$\Psi \in x \cap y$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in (x \cap y) \times (x \cap y)$.

`8:` Aus `3`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `7`"$(\Omega, \Psi) \in (x \cap y) \times (x \cap y)$"
folgt: $\alpha \in (x \cap y) \times (x \cap y)$.

...

<u>Beweis **10-16**</u> `b)` ...

...

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\alpha \in (x \cap y) \times (x \cap y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $r \subseteq (x \cap y) \times (x \cap y)$.

Konsequenz via **10-1**: r Relation in $x \cap y$.

$\square$

10-17. Die in **10-16** angesprochene Nicht-Eindeutigkeit von “x”, wenn nur bekannt ist, dass r eine Relation in x ist, hat auch einen Vorteil. Wie nun fest gestellt wird, muss von einer Relation nur bekannt sein, dass Definitions- und Bild-Bereich *TeilKlasse* - und nicht etwa gleich - einer Klasse x sind, um folgern zu können, dass diese Relation eine Relation in x ist. Interessanter Weise ist “$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$” und “$\mathsf{ran}\, r \subseteq x$” auch notwendig dafür, dass r eine Relation in x ist:

10-17(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *“r Relation in x”.*

`ii)` *“r Relation” und “$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$” und “$\mathsf{ran}\, r \subseteq x$”.*

<u>Beweis **10-17**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich r Relation in x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "r Relation in x"
folgt via **10-14**: r Relation.

`1.2:` Aus `VS` gleich "r Relation in x"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

`2.1:` Aus `1.2`"$r \subseteq x \times x$"
folgt via **7-10**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq \mathsf{dom}\,(x \times x)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$r \subseteq x \times x$"
folgt via **7-10**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq \mathsf{ran}\,(x \times x)$.

`3.1:` Via **7-22** gilt: $\mathsf{dom}\,(x \times x) \subseteq x$.

`3.2:` Via **7-22** gilt: $\mathsf{ran}\,(x \times x) \subseteq x$.

`4.1:` Aus `2.1`"$\mathsf{dom}\, r \subseteq \mathsf{dom}\,(x \times x)$" und
aus `3.1`"$\mathsf{dom}\,(x \times x) \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

`4.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{ran}\, r \subseteq \mathsf{ran}\,(x \times x)$" und
aus `3.2`"$\mathsf{ran}\,(x \times x) \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq x$.

`5:` Aus `1`"r Relation",
aus `4.1`"$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$" und
aus `4.2`"$\mathsf{ran}\, r \subseteq x$"
folgt: $(r \text{ Relation}) \wedge (\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "r Relation…"
folgt via **10-4**: r Relation in $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$"
folgt via **2-12**: $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r) \subseteq x$.

`3:` Aus `1`"r Relation in $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus `2`"$(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, r) \subseteq x$"
folgt via **10-16**: r Relation in x.

□

10-18. In Analogie zu **10-3** handelt es sich bei r genau dann um eine Relation in x, wenn es zu jedem $\alpha \in r$ Mengen Ω, Ψ in x mit $\alpha = (\Omega, \Psi)$ gibt und dies ist genau dann der Fall, wenn $r = r \cap (x \times x)$:

10-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` r *Relation in* x.

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)))$.

`iii)` $r = r \cap (x \times x)$.

Beweis **10-18** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich r Relation in x.

`Thema1` $\alpha \in r$.

`2:` Aus `VS` gleich "r Relation in x"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

`3:` Aus `Thema1`"$\alpha \in r$" und
aus `2`"$r \subseteq x \times x$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in x \times x$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \in x \times x$"
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)))$.

Beweis **10-18** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$

`VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)))$.

`Thema1` $\beta \in r$.

2: Aus `Thema1` "$\beta \in r$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in r)$
$\Rightarrow (\exists\Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$"
folgt: $\exists\Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in x) \wedge (\beta = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in x \ldots$" und
aus 2 "$\ldots \Psi \in x \ldots$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in x \times x$.

4: Aus 2 "$\ldots \beta = (\Omega, \Psi)$" und
aus 3 "$(\Omega, \Psi) \in x \times x$"
folgt: $\beta \in x \times x$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in r) \Rightarrow (\beta \in x \times x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

Konsequenz via **2-10**: $r \cap (x \times x) = r$.

Konsequenz: $r = r \cap (x \times x)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $r = r \cap (x \times x)$.

1: Aus `VS` gleich "$r = r \cap (x \times x)$"
folgt: $r \cap (x \times x) = r$.

2: Aus 1 "$r \cap (x \times x) = r$"
folgt via **2-10**: $r \subseteq x \times x$.

2: Aus 1 "$r \subseteq x \times x$"
folgt via **10-1(Def)**: r Relation in x.

□

10-19. Nun werden drei grundlegende Aussagen über Relationen in x notiert:

10-19(Satz)

Aus "r Relation in x" und ...

a) *... und "$0 \neq r$" folgt "$0 \neq x$".*

b) *... und "$x = 0$" folgt "$r = 0$".*

c) *... und "x Menge" folgt "r Menge".*

<u>Beweis **10-19**</u> `a)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (0 \neq r)$.

`1:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq r$" und
aus `1`"$r \subseteq x \times x$"
folgt: $0 \neq r \subseteq x \times x$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq r \subseteq x \times x$"
folgt via **0-20**: $0 \neq x \times x$.

`4:` Aus `3`"$0 \neq x \times x$"
folgt via **6-13**: $0 \neq x$.

`b)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x = 0$"
folgt via **6-13**: $x \times x = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "r Relation in $x \ldots$"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

`3:` Aus `2`"$r \subseteq x \times x$" und
aus `1`"$x \times x = 0$"
folgt: $r \subseteq 0$.

`4:` Aus `3`"$r \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $r = 0$.

`c)` `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (x \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge"
folgt via **BinärCartesisches Axiom**: $x \times x$ Menge.

`1.2:` Aus →)"r Relation in x"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

`2:` Aus `1.2`"$r \subseteq x \times x$" und
aus `1.1`"$x \times x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: r Menge.

□

10-20. Jede TeilKlasse einer Relation in x Relation in x:

10-20(Satz)
Aus "r Relation in x" und "$s \subseteq r$" folgt "s Relation in x".

Beweis **10-20**

1: Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

2: Aus →) "$s \subseteq r$" und
aus 1 "$r \subseteq x \times x$"
folgt via **0-6**: $s \subseteq x \times x$.

3: Aus 2 "$s \subseteq x \times x$"
folgt via **10-1(Def)**: s Relation in x.

□

10-21. In Ähnlichkeit zu **10-7** sind durch binären Durchschnitt und KlassenDifferenz aus einer Relation in x gewonnene Klassen Relationen in x:

10-21(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

Dann folgt:

a) *"$r \cap s$ Relation in x" und "$s \cap r$ Relation in x".*

b) *$r \setminus s$ Relation in x.*

Beweis **10-21** a)

1.1: Via **2-7** gilt: $r \cap s \subseteq r$.

1.2: Via **2-7** gilt: $s \cap r \subseteq r$.

2.1: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus 1.1"$r \cap s \subseteq r$" folgt via **10-20**: $r \cap s$ Relation in x.

2.2: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus 1.2"$s \cap r \subseteq r$" folgt via **10-20**: $s \cap r$ Relation in x.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(r \cap s \text{ Relation in } x) \wedge (s \cap r \text{ Relation in } x)$.

b)

1: Via **5-5** gilt: $r \setminus s \subseteq r$.

2: Aus $\rightarrow$)"r Relation in x" und
aus 1"$r \setminus s \subseteq r$"
folgt via **10-20**: $r \setminus s$ Relation in x.

□

10-22. Gemäß **10-8** ist die binäre Vereinigung und die symmetrische KlassenDifferenz von Relationen wieder eine Relation. Bei Relationen in x und y liegen die Dinge ein wenig verwickelter. Auch ist der binäre Durchschnitt von Relationen in x und y eine Relation in $x \cap y$:

10-22(Satz)

Es gelte:

→) r *Relation in* x.

→) s *Relation in* y.

Dann folgt:

a) $r \cap s$ *Relation in* $x \cap y$.

b) $r \cup s$ *Relation in* $x \cup y$.

c) $r \Delta s$ *Relation in* $x \cup y$.

Beweis **10-22** a)

1.1: Aus →)“r Relation in x”
folgt via **10-21**: $r \cap s$ Relation in x.

1.2: Aus →)“s Relation in y”
folgt via **10-21**: $r \cap s$ Relation in y.

2: Aus 1.1“$r \cap s$ Relation in x” und
aus 1.2“$r \cap s$ Relation in y”
folgt via **10-16**: $r \cap s$ Relation in $x \cap y$.

<u>Beweis **10-22** `b)`</u>

`1.1:` Aus →) “r Relation in x”
folgt via **10-17**: $(r \text{ Relation}) \wedge (\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

`1.2:` Aus →) “s Relation in y”
folgt via **10-17**: $(s \text{ Relation}) \wedge (\mathsf{dom}\, s \subseteq y) \wedge (\mathsf{ran}\, s \subseteq y)$.

`2.1:` Aus `1.1`“r Relation ... ” und
aus `1.2`“s Relation... ”
folgt via **10-8**: $r \cup s$ Relation.

`2.2:` Aus `1.1`“$\ldots \mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$” und
aus `1.2`“$\ldots \mathsf{dom}\, s \subseteq y \ldots$”
folgt via **2-13**: $(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{dom}\, s) \subseteq x \cup y$.

`2.3:` Aus `1.1`“$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$” und
aus `1.2`“$\ldots \mathsf{ran}\, s \subseteq y$”
folgt via **2-13**: $(\mathsf{ran}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, s) \subseteq x \cup y$.

`3.1:` Via **7-16** gilt: $\mathsf{dom}\,(r \cup s) = (\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{dom}\, s)$.

`3.2:` Via **7-16** gilt: $\mathsf{ran}\,(r \cup s) = (\mathsf{ran}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, s)$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathsf{dom}\,(r \cup s) = (\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{dom}\, s)$” und
aus `2.2`“$(\mathsf{dom}\, r) \cup (\mathsf{dom}\, s) \subseteq x \cup y$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(r \cup s) \subseteq x \cup y$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\mathsf{ran}\,(r \cup s) = (\mathsf{ran}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, s)$” und
aus `2.3`“$(\mathsf{ran}\, r) \cup (\mathsf{ran}\, s) \subseteq x \cup y$”
folgt: $\mathsf{ran}\,(r \cup s) \subseteq x \cup y$.

`5:` Aus `2.1`“$r \cup s$ Relation”,
aus `4.1`“$\mathsf{dom}\,(r \cup s) \subseteq x \cup y$” und
aus `4.2`“$\mathsf{ran}\,(r \cup s) \subseteq x \cup y$”
folgt via **10-17**: $r \cup s$ Relation in $x \cup y$.

<u>Beweis</u> **10-22** `c)`

`1.1:` Aus →) "r Relation in x"
folgt via **10-21**: $r \setminus s$ Relation in x.

`1.2:` Aus →) "s Relation in y"
folgt via **10-21**: $s \setminus r$ Relation in y.

`2:` Aus `1.1` "$r \setminus s$ Relation in x" und
aus `1.2` "$s \setminus r$ Relation in y"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(r \setminus s) \cup (s \setminus r)$ Relation in $x \cup y$.

`3:` Via **5-27** gilt: $r\Delta s = (r \setminus s) \cup (s \setminus r)$.

`4:` Aus `3` "$r\Delta s = (r \setminus s) \cup (s \setminus r)$" und
aus `2` "$(r \setminus s) \cup (s \setminus r)$ Relation in $x \cup y$"
folgt: $r\Delta s$ Relation in $x \cup y$.

$\square$

10-23. In Spezialiserung von **10-22** ist die binäre Vereinigung und die symmetrische Klassendifferenz von Relationen in *derselben* Klasse x jeweils eine Relation in x. Ein analoges Resultat gilt auch für den binären Durchschnitt, doch ist dieses Resultat unter schwächeren Voraussetzungen - damit $r \cap s$ eine Relation in x ist, muss nur r eine Relation in x sein, s muss nicht einmal eine Relation sein - in **10-21** zu finden, so dass sich eine weitere Erwähnung erübrigt:

10-23(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *s Relation in x.*

Dann folgt:

a) *$r \cup s$ Relation in x.*

b) *$r \Delta s$ Relation in x.*

Beweis **10-23** a)

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "s Relation in x"
folgt via **10-22**: $r \cup s$ Relation in $x \cup x$.

2: Via **2-14** gilt: $x \cup x = x$.

3: Aus 1 "$r \cup s$ Relation in $x \cup x$" und
aus 2 "$x \cup x = x$"
folgt: $r \cup s$ Relation in x.

b)

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x" und
aus $\rightarrow$) "s Relation in x"
folgt via **10-22**: $r \Delta s$ Relation in $x \cup x$.

2: Via **2-14** gilt: $x \cup x = x$.

3: Aus 1 "$r \Delta s$ Relation in $x \cup x$" und
aus 2 "$x \cup x = x$"
folgt: $r \Delta s$ Relation in x.

□

10-24. In Erweiterung der auf *binäre* Vereinigungen bezogenen Aussage von **10-23** und in Ähnlichkeit zu **10-9** bezieht sich **10-25** auf die Vereinigung von Relationen "in individuellen Klassen". Bemerkenswerter Weise sind die in der Prämisse auftretenden Relationen via **ElementAxiom** Mengen, während die Relation $\bigcup R$ der Schlussfolgerung keine Menge sein muss. Ähnliches gilt für die Klassen Ω der Prämisse. Diese müssen wieder via **ElementAxiom** Mengen sein, während die in der Schlussfolgerung auftretende Klasse $\bigcup X$ keine Menge sein muss. Hier manifestiert sich auch ein Unterschied zu **10-23**, wo sich die binäre Vereinigung auf Relationen bezieht, die Unmengen oder Relationen in Unmengen sein können:

10-24(Satz)

Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\exists \Omega : (\alpha \textit{ Relation in } \Omega) \wedge (\Omega \in X))$"

folgt "$\bigcup R \textit{ Relation in } \bigcup X$".

<u>Beweis **10-24**</u> `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\exists\Omega : (\alpha \text{ Relation in } \Omega) \wedge (\Omega \in X))$"

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in \bigcup R$.

`2:` Aus `Thema1`"$\beta \in \bigcup R$"
folgt via **1-12**: $\exists\Psi : (\beta \in \Psi) \wedge (\Psi \in R)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in R$" und
aus `VS` gleich
"$\forall\alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\exists\Omega : (\alpha \text{ Relation in } \Omega) \wedge (\Omega \in X))$"
folgt: $\exists\Phi : (\Psi \text{ Relation in } \Phi) \wedge (\Phi \in X)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Phi \in X$"
folgt via **1-15**: $\Phi \subseteq \bigcup X$.

`5:` Aus `3`"$\ldots \Psi$ Relation in $\Phi \ldots$" und
aus `4`"$\Phi \subseteq \bigcup X$"
folgt via **10-16**: Ψ Relation in $\bigcup X$.

`6:` Aus `5`"Ψ Relation in $\bigcup X$"
folgt via **10-1(Def)**: $\Psi \subseteq (\bigcup X) \times (\bigcup X)$.

`7:` Aus `2`"$\ldots \beta \in \Psi \ldots$" und
aus `6`"$\Psi \subseteq (\bigcup X) \times (\bigcup X)$"
folgt via **0-4**: $\beta \in (\bigcup X) \times (\bigcup X)$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in \bigcup R) \Rightarrow (\beta \in (\bigcup X) \times (\bigcup X))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup R \subseteq (\bigcup X) \times (\bigcup X)$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: $\bigcup R$ Relation in $\bigcup X$.

$\square$

10-25. Wenn eine Klasse von Relationen in einer festen Klasse x gegeben ist, dann ist die Vereinigung dieser Klasse von Relationen wieder eine Relation in x. Im Vergleich zu **10-24** fällt auf, dass die in **10-24** auftretenden Relationen via **ElementAxiom** Relationen in *Mengen* sind, während im jetzigen Satz x auch eine Unmenge sein kann. Dessen ungeachtet sind die im jetzigen Satz in der Prämisse auftretenden Relationen - wieder via **ElementAxiom** - Mengen, während $\bigcup R$ eine Unmenge sein kann.

10-25(Satz)

Aus "$\forall \alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\alpha$ Relation in $x)$" folgt "$\bigcup R$ Relation in x".

Beweis **10-25** `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\alpha$ Relation in $x)$.

`Thema1` $\beta \in \bigcup R$.

2: Aus `Thema1`"$\beta \in \bigcup R$"
folgt via **1-12**: $\exists \Psi : (\beta \in \Psi) \wedge (\Psi \in R)$.

3: Aus 2"$\ldots \Psi \in R$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in R) \Rightarrow (\alpha$ Relation in $x)$"
folgt: Ψ Relation in x.

4: Aus 3"Ψ Relation in x"
folgt via **10-1(Def)**: $\Psi \subseteq x \times x$.

5: Aus 2"$\ldots \beta \in \Psi \ldots$" und
aus 4"$\Psi \subseteq x \times x$"
folgt via **0-4**: $\beta \in x \times x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \bigcup R) \Rightarrow (\beta \in x \times x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup R \subseteq x \times x$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: $\bigcup R$ Relation in x.

$\square$

10-26. Der folgende Satz ist das Analogon zu **10-10** mit Relationen in x:

10-26(Satz)

Aus "r Relation in x" und "$r \in R$" folgt "$\bigcap R$ Relation in x".

Beweis **10-26** `VS` gleich $(r \text{ Relation in } x) \wedge (r \in R)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots r \in R$"
folgt via **1-15**: $\bigcap R \subseteq r$.

`2`: Aus `VS` gleich "r Relation in $x\ldots$" und
aus `1` "$\bigcap R \subseteq r$"
folgt via **10-20**: $\bigcap R$ Relation in x.

□

10-27. Es folgt eine einfache, notwendige Bedingung dafür, dass ein *geordnetes Paar* Element einer Relation in x ist. Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine ansonsten beliebige Klasse Element einer Relation in x ist, ist in **10-18** zu finden:

10-27(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) $(p, q) \in r$.

Dann folgt:

a) $p \in x$.

b) $q \in x$.

Beweis **10-27**

1: Aus $\rightarrow$) "r Relation in x"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq x \times x$.

2: Aus $\rightarrow$) "$(p, q) \in r$" und
aus 1 "$r \subseteq x \times x$"
folgt via **0-4**: $(p, q) \in x \times x$.

3: Aus 2 "$(p, q) \in x \times x$"
folgt via **6-6**: $(p \in x) \wedge (q \in x)$.

4.a): Aus 3
folgt: $p \in x$.

4.b): Aus 3
folgt: $q \in x$.

□

10-28. In enger logischer Verquickung mit **10-27** wird mit dem folgenden Satz eine einfache, hinreichende Bedingung dafür gegeben, wann ein geordnetes Paar *nicht* Element einer Relation in x sein kann:

10-28(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation in* x.

$\rightarrow$) $p \notin x$.

Dann folgt:

a) $(p, q) \notin r$.

b) $(q, p) \notin r$.

Beweis **10-28** a)

1: Es gilt: $((p,q) \in r) \vee ((p,q) \notin r)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(p,q) \in r$.

2: Aus →) "r Relation in x" und
aus `1.1.Fall` "$(p,q) \in r$"
folgt via **10-27**: $(p \in x) \wedge (q \in x)$.

3: Es gilt 2"$p \in x \dots$" .
Es gilt →) "$p \notin x$" .
Ex falso quodlibet folgt: $(p,q) \notin r$.

`1.2.Fall` $(p,q) \notin r$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p,q) \notin r$.

b)

1: Es gilt: $((q,p) \in r) \vee ((q,p) \notin r)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(q,p) \in r$.

2: Aus →) "r Relation in x" und
aus `1.1.Fall` "$(q,p) \in r$"
folgt via **10-27**: $(q \in x) \wedge (p \in x)$.

3: Es gilt 2"$\dots p \in x$" .
Es gilt →) "$p \notin x$" .
Ex falso quodlibet folgt: $(q,p) \notin r$.

`1.2.Fall` $(q,p) \notin r$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(q,p) \notin r$.

□

10-29. Es folgt ein Kriterium für "r keine Relation" :

10-29(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *r keine Relation.*

`ii)` $r \not\subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Beweis **10-29**

`1:` Via **10-1(Def)** gilt: $(r \text{ Relation}) \Leftrightarrow (r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(r \text{ Relation})) \Leftrightarrow (\neg(r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}))$.

`3:` Aus `2` folgt via **10-1(Def)**: $(r \text{ keine Relation}) \Leftrightarrow (\neg(r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}))$.

`4:` Aus `3` folgt via **0-3**: $(r \text{ keine Relation}) \Leftrightarrow (r \not\subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

$\square$

10-30. Dass, wie in `a)` gesagt wird, 0 eine Relation ist, konnte schon an mehreren Stellen antizipiert werden. Dass das Universum gemäß `b)` *keine* Relation ist liegt daran, dass es - zumindest im Rahmen der Essays - mindestens eine Menge gibt, die *nicht* ein geordnetes Paar von Mengen ist. In der Tat ist gemäß **PaarAxiom I** und **0$\mathcal{U}$Axiom** die leere Menge eine Menge, die *nicht* ein geordnetes Paar von Mengen ist:

10-30(Satz)

`a)` 0 *Relation.*

`b)` $\mathcal{U}$ *keine Relation.*

Beweis **10-30** `a)`

`1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$0 \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-1(Def)**: 0 Relation.

`b)`

`1:` Via **6-12** gilt: $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-29**: $\mathcal{U}$ keine Relation.

□

Relation invers zu x. x^{-1}.
Urbild von E **unter** x. $x^{-1}[E]$.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 14/04/11**

11-1. Die **Relation invers zu** x besteht genau aus jenen geordneten Paaren (p,q) von Mengen, für die $(q,p) \in x$ gilt. Die Bezeichnung *Relation* invers zu x wird in **11-7** gerechtfertigt. Dort stellt sich heraus, dass x^{-1} in der Tat eine Relation ist. Bemerkenswerter Weise ist die Relation invers zu x für beliebige Klassen x definiert. Insbesondere wird in der Definition *nicht* voraus gesetzt, dass x eine Relation ist:

11-1(Definition)

1) x^{-1}

$$= \mathtt{11.0}(x) = \{(\mu,\lambda) : (\lambda,\mu) \in x\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((\Omega,\Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Psi,\Omega)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Relation invers zu** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x^{-1}.$$

11-2. Wenig überraschend ist x^{-1} die Relation invers zu x:

11-2(Satz)

a) *x^{-1} Relation invers zu x.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Relation invers zu x" und "$\mathfrak{D}$ Relation invers zu x" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **11-2** a)

Aus "$x^{-1} = x^{-1}$"
folgt via **11-1(Def)**: x^{-1} ist die Relation invers zu x.

b) VS gleich $(\mathfrak{C}$ Relation invers zu $x) \wedge (\mathfrak{D}$ Relation invers zu $x)$.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Relation invers zu $x \ldots$"
folgt via **11-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x^{-1}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Relation invers zu x"
folgt via **11-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x^{-1}$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = x^{-1}$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = x^{-1}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

11-3. Es folgt eine notwendige Bedingung für “$w \in x^{-1}$” :

<u>**11-3(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in x^{-1}$.

Dann gibt es Ω, Ψ, *so dass gilt:*

`e.1)` $w = (\Psi, \Omega)$.

`e.2)` $(\Omega, \Psi) \in x$.

`e.3)` $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`e.4)` $\Omega \in \mathsf{ran}\, (x^{-1})$.

`e.5)` $\Psi \in \mathsf{ran}\, x$.

`e.6)` $\Psi \in \mathsf{dom}\, (x^{-1})$.

Beweis **11-3**

1: Aus →) “ $w \in x^{-1}$ ” und
aus “ $x^{-1} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Psi, \Omega))\}$ ”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (w = (\Psi, \Omega))$.

2.1: Aus 1 “ $\ldots (\Omega, \Psi) \in x$ ”
folgt via **ElementAxiom**: (Ω, Ψ) Menge.

2.2: Aus →) “ $w \in x^{-1}$ ” und
aus 1 “ $\ldots w = (\Psi, \Omega)$ ”
folgt: $(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$.

2.3: Aus 1 “ $\ldots (\Omega, \Psi) \in x \ldots$ ”
folgt via **7-5**: $(\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\Psi \in \mathsf{ran}\, x)$.

3.1: Aus 2.1 “ (Ω, Ψ) Menge ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$)$.

3.2: Aus 2.2 “ $(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$ ”
folgt via **7-5**: $(\Psi \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})) \wedge (\Omega \in \mathsf{ran}\,(x^{-1}))$.

4: Aus 1 “ $\exists \Omega, \Psi \ldots$ ” ,
aus 1 “ $\ldots w = (\Psi, \Omega)$ ” ,
aus 1 “ $\ldots (\Omega, \Psi) \in x \ldots$ ” ,
aus 2.3 “ $\Omega \in \mathsf{dom}\, x \ldots$ ” ,
aus 3.2 “ $\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$ ” ,
aus 2.3 “ $\ldots \Psi \in \mathsf{ran}\, x$ ” und
aus 3.2 “ $\Psi \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}) \ldots$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi:$$

$$w = (\Psi, \Omega)$$

$$\wedge \quad (\Omega, \Psi) \in x$$

$$\wedge \quad \Omega \in \mathsf{dom}\, x$$

$$\wedge \quad \Omega \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$$

$$\wedge \quad \Psi \in \mathsf{ran}\, x$$

$$\wedge \quad \Psi \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}).$$

□

11-4. Im folgenden Satz wird ein auch in dieser Form erwartetes Kriterium für “$(q,p) \in x^{-1}$” und ein vielleicht weniger erwartetes Kriterium für “$(p,q) \in (x^{-1})^{-1}$ gegeben:

11-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(p,q) \in x$.

`ii)` $(q,p) \in x^{-1}$.

`iii)` $(p,q) \in (x^{-1})^{-1}$.

Beweis **11-4** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(p,q) \in x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in x$”
folgt: $\exists p, q : (p,q) \in x$.

`2:` Aus `1.1`“(p,q) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`3.1:` Aus `2`“$\ldots q$ Menge” und
aus `2`“p Menge$\ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: (q,p) Menge.

`3.2:` Aus `1.2`“$\exists p, q \ldots$”,
aus `VS` gleich “$(p,q) \in x$” und
aus “$(q,p) = (q,p)$”
folgt: $\exists p, q : ((p,q) \in x) \wedge ((q,p) = (q,p))$.

`4:` Aus `3.2`“$\exists p, q : ((p,q) \in x) \wedge ((q,p) = (q,p))$” und
aus `3.1`“(q,p) Menge”
folgt: $(q,p) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Psi, \Omega)))\}$.

`5:` Aus `4`“$(q,p) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Psi, \Omega)))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Psi, \Omega)))\} = x^{-1}$”
folgt: $(q,p) \in x^{-1}$.

Beweis **11-4** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(q,p) \in x^{-1}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(q,p) \in x^{-1}$"
folgt via **ElementAxiom**: (q,p) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(q,p) \in x^{-1}$"
folgt: $\exists q,p : (q,p) \in x^{-1}$.

`2:` Aus `1.1`"(q,p) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(q$ Menge$) \wedge (p$ Menge$)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots p$ Menge" und
aus `2`"q Menge$\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: (p,q) Menge.

`4:` Aus `1.2`"$\exists q,p : (q,p) \in x^{-1}$" und
aus "$(p,q) = (p,q)$"
folgt: $\exists q,p : ((q,p) \in x^{-1}) \wedge ((p,q) = (p,q))$.

`5:` Aus `4`"$\exists q,p : ((q,p) \in x^{-1}) \wedge ((p,q) = (p,q))$" und
aus `3`"(p,q) Menge"
folgt: $(p,q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((\Omega,\Psi) \in x^{-1}) \wedge (\omega = (\Psi,\Omega)))\}$.

`6:` Aus `5`"$(p,q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((\Omega,\Psi) \in x^{-1}) \wedge (\omega = (\Psi,\Omega))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((\Omega,\Psi) \in x^{-1}) \wedge (\omega = (\Psi,\Omega))\} = (x^{-1})^{-1}$"
folgt: $(p,q) \in (x^{-1})^{-1}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in (x^{-1})^{-1}$" und
aus "$(x^{-1})^{-1} = \{\omega : \exists \Omega, \Psi : ((\Omega,\Psi) \in x^{-1}) \wedge (\omega = (\Psi,\Omega))\}$"
folgt: $(p,q) \in \{\omega : \exists \Omega, \Psi : ((\Omega,\Psi) \in x^{-1}) \wedge (\omega = (\Psi,\Omega))\}$.

`2:` Aus `1`"$(p,q) \in \{\omega : \exists \Omega, \Psi : ((\Omega,\Psi) \in x^{-1}) \wedge (\omega = (\Psi,\Omega))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : ((\Omega,\Psi) \in x^{-1}) \wedge ((p,q) = (\Psi,\Omega))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (\Omega,\Psi) \in x^{-1} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: (Ω,Ψ) Menge.

`4:` Aus `3`"(Ω,Ψ) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$)$.

`5:` Aus `2`"$\ldots (p,q) = (\Psi,\Omega)$",
aus `4`"$\ldots \Psi$ Menge" und
aus `4`"Ω Menge$\ldots$"
folgt via **IGP**: $(p = \Psi) \wedge (q = \Omega)$.

...

Beweis **11-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p, q) \in (x^{-1})^{-1}$.

...

`6:` Aus `5`“$\ldots q = \Omega$” und
aus `5`“$p = \Psi \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(q, p) = (\Omega, \Psi)$.

`7:` Aus `6`“$(q, p) = (\Omega, \Psi)$” und
aus `2`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x^{-1} \ldots$”
folgt: $(q, p) \in x^{-1}$.

`8:` Aus `7`“$(q, p) \in x^{-1}$” und
aus “$x^{-1} = \{\omega : \exists \Phi, \Upsilon : ((\Phi, \Upsilon) \in x) \wedge (\omega = (\Upsilon, \Phi))\}$”
folgt: $(q, p) \in \{\omega : \exists \Phi, \Upsilon : ((\Phi, \Upsilon) \in x) \wedge (\omega = (\Upsilon, \Phi))\}$.

`9:` Aus `1`“$(q, p) \in \{\omega : \exists \Phi, \Upsilon : ((\Phi, \Upsilon) \in x) \wedge (\omega = (\Upsilon, \Phi))\}$”
folgt: $\exists \Phi, \Upsilon : ((\Phi, \Upsilon) \in x) \wedge ((q, p) = (\Upsilon, \Phi))$.

`10:` Aus `9`“$\ldots (\Phi, \Upsilon) \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: (Φ, Υ) Menge.

`11:` Aus `10`“(Φ, Υ) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi$ Menge$) \wedge (\Upsilon$ Menge$)$.

`12:` Aus `9`“$\ldots (q, p) = (\Upsilon, \Phi)$”,
aus `11`“$\ldots \Upsilon$ Menge” und
aus `11`“Φ Menge...”
folgt via **IGP**: $(q = \Upsilon) \wedge (p = \Phi)$.

`13:` Aus `12`“$\ldots p = \Phi$” und
aus `12`“$q = \Upsilon \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, q) = (\Phi, \Upsilon)$.

`14:` Aus `13`“$(p, q) = (\Phi, \Upsilon)$” und
aus `9`“$\ldots (\Phi, \Upsilon) \in x \ldots$”
folgt: $(p, q) \in x$.

□

11-5. Via Negation ergibt sich aus **11-4** ein Kriterium für “$(q,p) \notin x^{-1}$” und für “$(p,q) \notin (x^{-1})^{-1}$”:

11-5(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) $(p,q) \notin x$.

ii) $(q,p) \notin x^{-1}$.

iii) $(p,q) \notin (x^{-1})^{-1}$.

Beweis **11-5**

1: Via **11-4** gilt: $((p,q) \in x) \Leftrightarrow ((q,p) \in x^{-1}) \Leftrightarrow ((p,q) \in (x^{-1})^{-1})$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg((p,q) \in x)) \Leftrightarrow (\neg((q,p) \in x^{-1})) \Leftrightarrow (\neg((p,q) \in (x^{-1})^{-1}))$.

3: Aus 2 folgt: $((p,q) \notin x) \Leftrightarrow ((q,p) \notin x^{-1}) \Leftrightarrow ((p,q) \notin (x^{-1})^{-1})$.

$\square$

11-6. Je größer die Klasse, desto größer ist die Relation invers zu dieser Klasse:

11-6(Satz)

Aus "$x \subseteq y$" *folgt* "$x^{-1} \subseteq y^{-1}$".

Beweis **11-6** `VS` gleich $x \subseteq y$.

`Thema1` $\alpha \in x^{-1}$.

`2`: Aus `Thema1`"$\alpha \in x^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x)$.

`3`: Aus `2`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $(\Omega, \Psi) \in y$.

`4`: Aus `3`"$(\Omega, \Psi) \in y$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in y^{-1}$.

`5`: Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `4`"$(\Psi, \Omega) \in y^{-1}$"
folgt: $\alpha \in y^{-1}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in y^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x^{-1} \subseteq y^{-1}$.

□

11-7. Wie in **11-1** angekündigt, ist x^{-1} eine Relation. Der Definitions-Bereich von x^{-1} ist der Bild-Bereich von x. Der Bild-Bereich von x^{-1} ist der Definitions-Bereich von x:

11-7(Satz)

a) *x^{-1} Relation.*

b) $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$.

c) $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$.

d) *Aus "r Relation in E" folgt "r^{-1} Relation in E".*

Beweis **11-7** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x^{-1}$.

1: Aus `Thema1` "$\alpha \in x^{-1}$" folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Psi, \Omega)$.

2: Aus 1 folgt: $\exists \Psi, \Omega : \alpha = (\Psi, \Omega)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x^{-1}) \Rightarrow (\exists \Psi, \Omega : \alpha = (\Psi, \Omega))$.

Konsequenz via **10-3**: x^{-1} Relation.

Beweis **11-7** `b)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x^{-1}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(\Omega, \alpha) \in x$.

`4:` Aus `3` "$(\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{ran}\, x$"

`Thema1.2` $\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **11-4**: $(\alpha, \Omega) \in x^{-1}$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha, \Omega) \in x^{-1}$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

Beweis **11-7** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$" folgt via **7-4**:	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x^{-1}$.
`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x^{-1}$" folgt via **11-4**:	$(\alpha, \Omega) \in x$.
`4:` Aus `3` "$(\alpha, \Omega) \in x$" folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\mathsf{ran}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{dom}\, x\text{"}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.
`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$" folgt via **7-2**:	$\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x$.
`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$" folgt via **11-4**:	$(\Omega, \alpha) \in x^{-1}$.
`4:` Aus `3` "$(\Omega, \alpha) \in x^{-1}$" folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x^{-1}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{ran}\,(x^{-1})\text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{ran}\,(x^{-1})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\, x$.

<u>Beweis **11-7**</u> `d)` `VS` gleich r Relation in E.

`1:` Aus `VS` gleich "r Relation in E"
folgt via **10-17**: $(\mathsf{dom}\, r \subseteq E) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq E)$.

`2.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: r^{-1} Relation.

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(r^{-1}) = \mathsf{ran}\, r$.

`2.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{ran}\,(r^{-1}) = \mathsf{dom}\, r$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\mathsf{dom}\,(r^{-1}) = \mathsf{ran}\, r$" und
aus `1`"$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq E$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(r^{-1}) \subseteq E$.

`3.2:` Aus `2.3`"$\mathsf{ran}\,(r^{-1}) = \mathsf{dom}\, r$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, r \subseteq E \ldots$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(r^{-1}) \subseteq E$.

`4:` Aus `2.1`"r^{-1} Relation",
aus `3.1`"$\mathsf{dom}\,(r^{-1}) \subseteq E$" und
aus `3.2`"$\mathsf{ran}\,(r^{-1}) \subseteq E$"
folgt via **10-17**: r^{-1} Relation in E.

$\square$

11-8. Die folgenden vier Resultate erwachsen einerseits **7-7**, wo notwendige Bedingungen für "$x \in \mathsf{dom}\, y$" und "$x \in \mathsf{ran}\, y$" zu finden sind, andererseits resultieren sie aus **11-8**, wo die Gleichungen "$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$" und "$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\, x$" zu finden sind:

11-8(Satz)

a) *Aus* "$q \in \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})) \wedge ((\Omega, q) \in x^{-1})$".

b) *Aus* "$q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, q) \in x)$".

c) *Aus* "$p \in \mathsf{ran}\, x$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})) \wedge ((p, \Omega) \in x^{-1})$".

d) *Aus* "$p \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((p, \Omega) \in x)$".

Beweis **11-8** a) VS gleich $q \in \mathsf{dom}\, x$.

1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus VS gleich "$q \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus 1"$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $q \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$.

3: Aus 2"$q \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})) \wedge ((\Omega, q) \in x^{-1})$.

b) VS gleich $q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

2: Aus VS gleich "$q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $q \in \mathsf{ran}\, x$.

3: Aus 2"$q \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, q) \in x)$.

c) VS gleich $p \in \mathsf{ran}\, x$.

1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

2: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{ran}\, x$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $p \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

3: Aus 2"$p \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})) \wedge ((p, \Omega) \in x^{-1})$.

d) VS gleich $p \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$.

1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$" und
aus 1"$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus 2"$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((p, \Omega) \in x)$.

$\square$

11-9. Da x^{-1} nur aus jenen Elementen von x gebildet wird, die geordnete Paare von Mengen sind ist es intuitiv klar, dass x^{-1} nicht mehr Elemente als x enthalten kann. Konsequenter Weise ist die Aussage, dass sich eine eventuell vorhandene "Mengen-Eigenschaft" von x auf x^{-1} "vererbt" nicht allzu überraschend. Auch ist zu erwarten, dass eine ähnliche Aussage für *Unmengen* nicht ohne Weiteres zur Verfügung steht - und dass es jedoch schwierig sein wird, dies zu beweisen, da hierzu eine Umenge zu finden ist, die lediglich eine *Menge* geordneter Paare enthält:

11-9(Satz)

Aus "x Menge" folgt "x^{-1} Menge".

Beweis **11-9**

`1.1:` Via **11-7** gilt: x^{-1} Relation.

`1.2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$.

`1.3:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$.

`1.4:` Aus →) "x Menge"
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\,x$ Menge.

`1.5:` Aus →) "x Menge"
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{ran}\,x$ Menge.

`2.1:` Aus `1.2` "$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$" und
aus `1.5` "$\mathsf{ran}\,x$ Menge"
folgt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1})$ Menge.

`2.2:` Aus `1.3` "$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$" und
aus `1.4` "$\mathsf{dom}\,x$ Menge"
folgt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1})$ Menge.

`3:` Aus `1.1` "x^{-1} Relation",
aus `2.1` "$\mathsf{dom}\,(x^{-1})$ Menge" und
aus `2.2` "$\mathsf{ran}\,(x^{-1})$ Menge"
folgt via **10-5**: x^{-1} Menge.

□

11-10. Während $0^{-1} = 0$ von `a)` wenig überrascht, ist die Aussage "$\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" von `b)` doch die eine oder andere ergänzende Überlegung Wert. Zuerst bedeutet die Gleichheit der Parameter $\mathcal{U}^{-1}$ und $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$, dass alle Resultate, die für $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ gelten - etwa gilt via **6-12** die Aussage "$\mathcal{U}\times\mathcal{U} \neq \mathcal{U}$" - auch für $\mathcal{U}^{-1}$ gelten - etwa "$\mathcal{U}^{-1} \neq \mathcal{U}$" - und dass es demzufolge eingermaßen ineffizient wäre, die für $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ geltenden Aussagen nochmals für $\mathcal{U}^{-1}$ zu formulieren. Wenn in Beweisen eine Aussage für $\mathcal{U}^{-1}$ gebraucht wird, die nur für $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ verfügbar ist, so wird erst **11-10** mit "$\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" zitiert, dann wird das gebrauchte Resultat für $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ zitiert und dann wird in diesem Resultat "$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$" durch "$\mathcal{U}^{-1}$" ersetzt.
Als Ausnahme dieses Vorgehens wird in `b)` die Aussage "$\mathcal{U}^{-1} \neq \mathcal{U}$" erwähnt. Via **10-30** ist bekannt, dass $\mathcal{U}$ *keine* Relation. Andererseits muss via **11-7** die Relation invers zu $\mathcal{U}$ eine Relation sein. Schon alleine hieraus ergibt sich $\mathcal{U}^{-1} \neq \mathcal{U}$ - und diese Aussage könnte auch aus **6-12** gewonnen werden, wenn dort "$\mathcal{U}\times\mathcal{U}$" durch "$\mathcal{U}^{-1}$" ersetzt wird.
Via **10-1(Def)** ist bekannt, dass *jede* Relation eine TeilKlasse von $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ ist und da andererseits - etwa via **10-1(Def)** und via **0-6**, wonach $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ - die Klasse $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ eine Relation ist, ist $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ die "größte" Relation. Demnach sagt `b)`, dass $\mathcal{U}^{-1}$ zwar nicht die *größte Klasse* - dies wäre via **0-18** das Universum $\mathcal{U}$ - aber doch die *größte Relation* ist. Da ausserdem - etwa via **6-12** - die Inklusion "$\mathcal{U}\times\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$" gilt, liegt ein Indiz dafür vor, dass zumindest bei einigen Klassen x die Relation invers zu x die *größte* in x enthaltene Relation ist. Dass dies generell der Fall ist, wird in Essay **#13** gezeigt. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

<u>11-10(Satz)</u>

`a)` $0^{-1} = 0.$

`b)` $\mathcal{U}^{-1} \neq \mathcal{U}.$

`c)` $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$

Beweis **11-10** `a)`

`Thema1` $\alpha \in 0^{-1}$.

`2`: Aus `Thema1`"$\alpha \in 0^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in 0)$.

`3`: Es gilt `2`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in 0$".
Via **0-19** gilt "$(\Omega, \Psi) \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 0^{-1}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0^{-1}) \Rightarrow (\alpha \notin 0^{-1})$.

Konsequenz via **0-19**: $0^{-1} = 0$.

<u>Beweis</u> **11-10** `c)`

`1.1:` Via **11-7** gilt: $\mathcal{U}^{-1}$ Relation.

`2:` Aus `1.1`“$\mathcal{U}^{-1}$ Relation”
folgt via **10-1(Def)**: `A1` “$\mathcal{U}^{-1} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”

`Thema1.2` $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-8**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Psi$ Menge$\ldots$” und
aus `2`“$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: (Ψ, Ω) Menge.

`4:` Aus `3`“(Ψ, Ω) Menge”
folgt via **0-19**: $(\Psi, \Omega) \in \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4`“$(\Psi, \Omega) \in \mathcal{U}$”
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in \mathcal{U}^{-1}$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `5`“$(\Omega, \Psi) \in \mathcal{U}^{-1}$”
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` “$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{-1}$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{U}^{-1} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `A2` gleich “$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{-1}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Via **6-12** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1`“$\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `2`“$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$”
folgt: $\mathcal{U}^{-1} \neq \mathcal{U}$.

□

11-11. Im Folgenden geht es um Vereinigung und Durchschnitt von Klassen, deren Elemente Relationen invers zu Elementen einer gegebenen Klasse sind. Die hier angegebene Definition ist zugleich vorbereitend als auch themenstellend:

11-11(Definition)

$$\mathsf{11.1}(X) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}))\}.$$

11-12. In Erläuterung zu **11-11** als auch zur Erleichterung im Umgang mit der in **11-11** definierten Klasse `11.1`(X) folgt einerseits eine notwendige Bedingung für $w \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$ - siehe `a)` - als auch eine hinreichende Bedingung für $x^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$:

11-12(Satz)

`a)` *Aus* "$w \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = \Omega^{-1}) \wedge (\Omega \in X)$".

`b)` *Aus* "$x \in X$" *folgt* "$x^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$".

11-11(Def) $\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

Beweis **11-12** `a)` `VS` gleich $w \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$" und
aus "$\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (w = \Omega^{-1})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (w = \Omega^{-1}) \wedge (\Omega \in X)$.

`b)` `VS` gleich $x \in X$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt: $\exists x : x \in X$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`2:` Aus `1`"x Menge"
folgt via **11-9**: x^{-1} Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\exists x : x \in X$" und
aus "$x^{-1} = x^{-1}$" folgt: $\exists x : (x \in X) \wedge (x^{-1} = x^{-1})$.

`4:` Aus `3`"$\exists x : (x \in X) \wedge (x^{-1} = x^{-1})$" und
aus `2`"x^{-1} Menge"
folgt: $x^{-1} \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}))\}$.

`5:` Aus `4`"$x^{-1} \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}))\} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$"
folgt: $x^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

$\square$

11-13. Die folgende Gleichung ist bei den anschließenden Untersuchungen von Vereinigung und Durchschnitt von $\{\lambda^{-1} : \lambda \in x\}$ hilfreich. Insbesondere liefert die hier angegebene Klasse an einer wichtigen Stelle den Nachweis, dass eine "TeilKlassen-Aussage" nicht ohne Weiteres durch eine Gleichung ersetzt werden kann:

11-13(Satz)

$$\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\} = 0.$$

11-11(Def) $\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}$.

Beweis **11-13**

`Thema1` $\alpha \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}$"
folgt via **11-12**: $\exists \Omega : (\alpha = \Omega^{-1}) \wedge (\Omega \in 0)$.

3: Es gilt 2 "$\ldots \Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\} = 0$.

□

11-14. In `a)` wird gezeigt, dass die Relation invers zu der Vereinigung einer Klasse X ist gleich der Vereinigung der Relationen invers zu den Elementen von X. Gemäß `bcd)` liegen die Verhältnisse bei der Durchschnittsbildung etwas komplizierter. Zunächst gilt via `b)`, dass die Relation invers zum Durchschnitt einer Klasse X eine *TeilKlasse* des Durchschnitts der Relationen invers zu den Elementen von X. Wenn hier $X = 0$ gesetzt wird, gilt via `c)` Ungleichheit dieser beiden Klassen, so dass ohne Weiteres *nicht* Gleichheit auftritt. Dieses Weitere ist via `d)` verblüffend einfach. Gemäß `d)` ist nämlich das in `c)` erwähnte Beispiel auch die einzige Ausnahme, denn wenn $0 \neq X$ gilt, dann ist die Relation invers zu $\bigcap X$ gleich dem Durchschnitt der Klasse aller Relationen invers zu X:

11-14(Satz)

`a)` $(\bigcup X)^{-1} = \bigcup\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`b)` $(\bigcap X)^{-1} \subseteq \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`c)` "$(\bigcap 0)^{-1} \neq \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}$"

und "$(\bigcap 0)^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" *und* "$\bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$".

`d)` *Aus* "$0 \neq X$" *folgt* "$(\bigcap X)^{-1} = \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$".

11-11(Def) $\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$ *und* $\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}$.

Beweis **11-14** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (\bigcup X)^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in (\bigcup X)^{-1}$”
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in \bigcup X)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in \bigcup X$”
folgt via **1-12**: $\exists \Phi : ((\Omega, \Psi) \in \Phi) \wedge (\Phi \in X)$.

`4.1:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in \Phi \ldots$”
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in \Phi^{-1}$.

`4.2:` Aus `3`“$\Phi \in X$”
folgt via **11-12**: $\Phi^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`5:` Aus `4.1`“$(\Psi, \Omega) \in \Phi^{-1}$” und
aus `4.2`“$\Phi^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$”
folgt via **1-12**: $(\Psi, \Omega) \in \bigcup \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$” und
aus `5`“$(\Psi, \Omega) \in \bigcup \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$”
folgt: $\alpha \in \bigcup \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\bigcup X)^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$(\bigcup X)^{-1} \subseteq \bigcup \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$”

<u>Beweis **11-14**</u> `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \bigcup\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \bigcup\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\})$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$"
folgt via **11-12**: $\exists \Psi : (\Omega = \Psi^{-1}) \wedge (\Psi \in X)$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus `3`"$\ldots \Omega = \Psi^{-1} \ldots$"
folgt: $\alpha \in \Psi^{-1}$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \in \Psi^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Phi, \Upsilon : (\alpha = (\Upsilon, \Phi)) \wedge ((\Phi, \Upsilon) \in \Psi)$.

`6:` Aus `5`"$\ldots (\Phi, \Upsilon) \in \Psi$" und
aus `3`"$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **1-12**: $(\Phi, \Upsilon) \in \bigcup X$.

`7:` Aus `6`"$(\Phi, \Upsilon) \in \bigcup X$"
folgt via **11-4**: $(\Upsilon, \Phi) \in (\bigcup X)^{-1}$.

`8:` Aus `5`"$\ldots \alpha = (\Upsilon, \Phi) \ldots$" und
aus `7`"$(\Upsilon, \Phi) \in (\bigcup X)^{-1}$"
folgt: $\alpha \in (\bigcup X)^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in (\bigcup X)^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\bigcup\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcup X)^{-1}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(\bigcup X)^{-1} \subseteq \bigcup\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$" und
aus `A2` gleich "$\bigcup\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcup X)^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\bigcup X)^{-1} = \bigcup\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis **11-14**</u> `b)`

`Thema1` $\alpha \in (\bigcap X)^{-1}$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in (\bigcap X)^{-1}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in (\bigcap X)^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in \bigcap X)$.

`Thema3` $\beta \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`4:` Aus `Thema3`"$\beta \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$"
folgt via **11-12**: $\exists \Phi : (\beta = \Phi^{-1}) \wedge (\Phi \in X)$.

`5:` Aus `2.2`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in \bigcap X$" und
aus `4`"$\ldots \Phi \in X$"
folgt via **1-13**: $(\Omega, \Psi) \in \Phi$.

`6:` Aus `5`"$(\Omega, \Psi) \in \Phi$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in \Phi^{-1}$.

`7:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `6`"$(\Psi, \Omega) \in \Phi^{-1}$"
folgt: $\alpha \in \Phi^{-1}$.

`8:` Aus `7`"$\alpha \in \Phi^{-1}$" und
aus `4`"$\ldots \beta = \Phi^{-1} \ldots$"
folgt: $\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema3`:

`A1` | "$\forall \beta : (\beta \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$"

`2.3:` Aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\bigcap X)^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(\bigcap X)^{-1} \subseteq \bigcap \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis **11-14** `c)`</u>

`1.1:` $$(\bigcap 0)^{-1} \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}^{-1}.$$

`1.2:` $$\bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\} \stackrel{\mathbf{11-13}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}.$$

`2.1:` Via **11-10** gilt: $$\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$$

`2.2:` Via **11-10** gilt: $$\mathcal{U}^{-1} \neq \mathcal{U}.$$

`3.1:` Aus `1.1`“$(\bigcap 0)^{-1} = \ldots = \mathcal{U}^{-1}$” und
aus `2.1`“$\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt: $$(\bigcap 0)^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$$

`3.2:` Aus `1.1`“$(\bigcap 0)^{-1} = \ldots = \mathcal{U}^{-1}$”,
aus `2.2`“$\mathcal{U}^{-1} \neq \mathcal{U}$” und
aus `1.2`“$\bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\} = \ldots = \mathcal{U}$”
folgt: $$(\bigcap 0)^{-1} \neq \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}.$$

`4:` Aus `3.2`“$(\bigcap 0)^{-1} \neq \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}$”,
aus `3.1`“$(\bigcap 0)^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” und
aus `1.2`“$\bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\} = \ldots = \mathcal{U}$”
folgt: $$(\bigcap 0)^{-1} \neq \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\}$$
$$\wedge \quad (\bigcap 0)^{-1} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$$
$$\wedge \quad \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}.$$

<u>Beweis **11-14**</u> `d)` `VS` gleich $0 \neq X$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq X$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in X$.

`Thema2` $\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`3:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega \in X$"
folgt via **11-12**: $\Omega^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`4:` Aus `Thema2`"$\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$" und
aus `3`"$\Omega^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \Omega^{-1}$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \in \Omega^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Psi, \Phi : (\alpha = (\Phi, \Psi)) \wedge ((\Psi, \Phi) \in \Omega)$.

`6:` Aus `5`"$\ldots \alpha = (\Phi, \Psi) \ldots$" und
aus `Thema2`"$\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$"
folgt: $(\Phi, \Psi) \in \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`Thema7.1` $\beta \in X$.

`8:` Aus `Thema7.1`"$\beta \in X$"
folgt via **11-12**: $\beta^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`9:` Aus `6`"$(\Phi, \Psi) \in \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$" und
aus `8`"$\beta^{-1} \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-13**: $(\Phi, \Psi) \in \beta^{-1}$.

`10:` Aus `9`"$(\Phi, \Psi) \in \beta^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Phi) \in \beta$.

Ergo `Thema7.1`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in X) \Rightarrow ((\Psi, \Phi) \in \beta)$"

`7.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in X) \Rightarrow ((\Psi, \Phi) \in \beta)$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq X$"
folgt via **1-13**: $(\Psi, \Phi) \in \bigcap X$.

`8:` Aus `7.2`"$(\Psi, \Phi) \in \bigcap X$"
folgt via **11-4**: $(\Phi, \Psi) \in (\bigcap X)^{-1}$.

`9:` Aus `5`"$\ldots \alpha = (\Phi, \Psi) \ldots$" und
aus `8`"$(\Phi, \Psi) \in (\bigcap X)^{-1}$"
folgt: $\alpha \in (\bigcap X)^{-1}$.

...

Beweis **11-14** `d)` `VS` gleich $0 \neq X$.

...

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in (\bigcap X)^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcap X)^{-1}\text{”}}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\bigcap X)^{-1} \subseteq \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

`2:` Aus `1.2`“$(\bigcap X)^{-1} \subseteq \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$” und
aus `A2` gleich “$\bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcap X)^{-1}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\bigcap X)^{-1} = \bigcap\{\lambda^{-1} : \lambda \in X\}$.

□

11-15. Mit der folgenden Begriffsbildung wird Einiges erleichtert. Als Phrase kommt das hier definierte **Urbild von** E **unter** x weder in den folgenden Sätzen noch in den folgenden Definitionen vor. Damit steht das Urbild von E unter x auf einer Stufe mit dem "Bild von E unter x" von **8-5(Def)**. Klarer Weise ist das Urbild von E unter x gleich dem Bild von E unter x^{-1}:

11-15(Definition)

"$\mathfrak{C}$ **Urbild von** E **unter** x" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x^{-1}[E].$$

11-16. In durchaus erwarteter Weise ist $x^{-1}[E]$ das Urbild von E unter x:

11-16(Satz)

a) $x^{-1}[E]$ *Urbild von* E *unter* x.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}$ *Urbild von* E *unter* x" *und* "$\mathfrak{D}$ *Urbild von* E *unter* x" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

Beweis **11-16** a)

Aus "$x^{-1}[E] = x^{-1}[E]$"
folgt via **11-15(Def)**: $x^{-1}[E]$ ist das Urbild von E unter x.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ Urbild von E unter x) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Urbild von E unter x).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Urbild von E unter $x\ldots$"
folgt via **11-15(Def)**: $\mathfrak{C} = x^{-1}[E]$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ Urbild von E unter x"
folgt via **11-15(Def)**: $\mathfrak{D} = x^{-1}[E]$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = x^{-1}[E]$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = x^{-1}[E]$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

11-17. Das Urbild der leeren Menge unter jeder Klasse ist die leere Menge, siehe `ae)`. Das Urbild jeder Klasse unter der leeren Menge ist die leere Menge, siehe `bf)`. Das Urbild des Universums unter einer Klasse ist der Definitions-Bereich dieser Klasse, siehe `c)`. Das Urbild jeder nicht leeren Klasse unter dem Universum ist das Universum, siehe `d)`. Der enge Bezug zu **8-12** ist nicht zu leugnen.

11-17(Satz)

a) $x^{-1}[0] = 0$.

b) $0^{-1}[x] = 0$.

c) $x^{-1}[\mathcal{U}] = \mathsf{dom}\, x$.

d) *Falls* “$0 \neq x$”, *dann* “$\mathcal{U}^{-1}[x] = \mathcal{U}$”.

e) $\mathcal{U}^{-1}[0] = 0$.

f) $0^{-1}[\mathcal{U}] = 0$.

<u>Beweis **11-17**</u> `a)` Via **8-12** gilt: $x^{-1}[0]=0.$

`b)`

`1:` $0^{-1}[x] \stackrel{\mathbf{11-10}}{=} 0[x] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0.$

`2:` Aus `1`
folgt: $0^{-1}[x]=0.$

`c)`

`1:` $x^{-1}[\mathcal{U}] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} \mathsf{ran}\,(x^{-1}) \stackrel{\mathbf{11-7}}{=} \mathsf{dom}\,x.$

`2:` Aus `1`
folgt: $x^{-1}[\mathcal{U}]=\mathsf{dom}\,x.$

`d)` `VS` gleich $0\neq x.$

`1.1:` Via **11-10** gilt: $\mathcal{U}^{-1}=\mathcal{U}\times\mathcal{U}.$

`1.2:` Via **2-17** gilt: $\mathcal{U}\cap x=x.$

`2:` Aus `1.2`“$\mathcal{U}\cap x=x$” und
aus `VS` gleich “$0\neq x$”
folgt: $0\neq\mathcal{U}\cap x.$

`3:` Aus `2`“$0\neq\mathcal{U}\cap x$”
folgt via **9-12**: $(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[x]=\mathcal{U}.$

`4:` Aus `1.1`“$\mathcal{U}^{-1}=\mathcal{U}\times\mathcal{U}$” und
aus `3`“$(\mathcal{U}\times\mathcal{U})[x]=\mathcal{U}$”
folgt: $\mathcal{U}^{-1}[x]=\mathcal{U}.$

`e)` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathcal{U}^{-1}[0]=0.$

`f)` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $0^{-1}[\mathcal{U}]=0.$

$\square$

11-18. Aussagen `ab)` sind via **0-6** Spezialfälle von `c)`. In `c)` wird gesagt, dass aus “$x \subseteq y$” und “$E \subseteq e$” Inklusion $x^{-1}[E] \subseteq y^{-1}[e]$ folgt. Ungeachtet dieser Implikationen ist die Beweis-Reihenfolge `a) - b) - c)`. Aussage `a)` wiederholt **8-9**`a)` mit “x^{-1}” an Stelle von “x”. **8-9** wird auch beim Beweis von `bc)` verwendet:

11-18(Satz)

`a)` *Aus “$E \subseteq e$” folgt “$x^{-1}[E] \subseteq x^{-1}[e]$”.*

`b)` *Aus “$x \subseteq y$” folgt “$x^{-1}[E] \subseteq y^{-1}[E]$”.*

`c)` *Aus “$x \subseteq y$” und “$E \subseteq e$” folgt “$x^{-1}[E] \subseteq y^{-1}[e]$”.*

Beweis **11-18** `a)` `VS` gleich $E \subseteq e$.

Aus `VS` gleich “$E \subseteq e$”
folgt via **8-9**: $x^{-1}[E] \subseteq x^{-1}[e]$.

`b)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq y$”
folgt via **11-6**: $x^{-1} \subseteq y^{-1}$.

`2:` Aus `1`“$x^{-1} \subseteq y^{-1}$”
folgt via **8-9**: $x^{-1}[E] \subseteq y^{-1}[E]$.

`c)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (E \subseteq e)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq y \ldots$”
folgt via **11-6**: $x^{-1} \subseteq y^{-1}$.

`2:` Aus `1`“$x^{-1} \subseteq y^{-1}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots E \subseteq e$”
folgt via **8-9**: $x^{-1}[E] \subseteq y^{-1}[e]$.

□

11-19. Es werden die Aussagen von **8-10** für “x^{-1}” an Stelle von “x” unter Verwendung von **11-7**, wonach $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$ und $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$ gilt, adaptiert. Gemäß a) ist jedes Element des Urbilds von E unter x in $\mathsf{dom}\,x$. Das Urbild von E unter x ist eine TeilKlasse von $\mathsf{dom}\,x$, siehe b) und ist via c) außerdem gleich dem Urbild von $E \cap \mathsf{ran}\,x$ unter x. Wie in d) gesagt, ist das Urbild von $\mathsf{ran}\,x$ unter x gleich $\mathsf{dom}\,x$:

11-19(Satz)

a) *Aus* “$p \in x^{-1}[E]$” *folgt* “$p \in \mathsf{dom}\,x$”.

b) $x^{-1}[E] \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

c) $x^{-1}[E] = x^{-1}[E \cap \mathsf{ran}\,x]$.

d) $x^{-1}[\mathsf{ran}\,x] = \mathsf{dom}\,x$.

<u>Beweis **11-19**</u> `a)` `VS` gleich $p \in x^{-1}[E]$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in x^{-1}[E]$”
folgt via **8-10**: $p \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$.

`2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$.

`3:` Aus `1`“$p \in \mathsf{ran}\,(x^{-1})$” und
aus `2`“$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$”
folgt: $p \in \mathsf{dom}\,x$.

`b)`

`1:` $x^{-1}[E] \overset{\mathbf{8-10}}{\subseteq} \mathsf{ran}\,(x^{-1}) \overset{\mathbf{11-7}}{=} \mathsf{dom}\,x$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x^{-1}[E] \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

`c)`

`1:` $x^{-1}[E] \overset{\mathbf{8-10}}{=} x^{-1}[E \cap \mathsf{dom}\,(x^{-1})] \overset{\mathbf{11-7}}{=} x^{-1}[E \cap \mathsf{ran}\,x]$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x^{-1}[E] = x^{-1}[E \cap \mathsf{ran}\,x]$.

`d)`

`1:` $x^{-1}[\mathsf{ran}\,x] \overset{\mathbf{11-7}}{=} x^{-1}[\mathsf{dom}\,(x^{-1})] \overset{\mathbf{8-10}}{=} \mathsf{ran}\,(x^{-1}) \overset{\mathbf{11-7}}{=} \mathsf{dom}\,x$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x^{-1}[\mathsf{ran}\,x] = \mathsf{dom}\,x$.

$\square$

11-20. Falls x oder $\mathsf{dom}\,x$ eine Menge ist, dann ist das Urbild jeder Klasse unter x eine Menge. Dieses Resultat ist eine Kombination der vorhergehenden Aussagen **8-11** und **11-7** und **11-9**:

11-20(Satz)

a) *Aus "x Menge" folgt "$x^{-1}[E]$ Menge".*

b) *Aus "$\mathsf{dom}\,x$ Menge" folgt "$x^{-1}[E]$ Menge".*

Beweis **11-20** a) VS gleich x Menge.

1: Aus VS gleich "x Menge"
folgt via **11-9**: x^{-1} Menge.

2: Aus 1"x^{-1} Menge"
folgt via **8-11**: $x^{-1}[E]$ Menge.

b) VS gleich $\mathsf{dom}\,x$ Menge.

1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,x = \mathsf{ran}\,(x^{-1})$.

2: Aus VS gleich "$\mathsf{dom}\,x$ Menge" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,x = \mathsf{ran}\,(x^{-1})$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1})$ Menge.

3: Aus 2"$\mathsf{ran}\,(x^{-1})$ Menge"
folgt via **8-11**: $x^{-1}[E]$ Menge.

□

11-21. In der folgenden Aussage wird eine notwendige Bedingung dafür gegeben, dass eine Klasse p im Urbild von E unter x ist. Die Formulierung ist ähnlich zu **8-7**:

11-21(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $p \in x^{-1}[E]$.

Dann gibt es Ω, *so dass gilt:*

`e.1)` $\Omega \in E$.

`e.2)` $\Omega \in \mathsf{ran}\, x$.

`e.3)` $(p, \Omega) \in x$.

Beweis **11-21**

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x^{-1}[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})) \wedge ((\Omega, p) \in x^{-1})$.

`2.1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, p) \in x^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(p, \Omega) \in x$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}) \ldots$" und
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $\Omega \in \mathsf{ran}\, x$.

`4:` Aus `1`"$\exists \Omega : \Omega \in E \ldots$",
aus `3`"$\Omega \in \mathsf{ran}\, x$" und
aus `2.2`"$(p, \Omega) \in x$"
folgt: $\exists \Omega$:

$$\Omega \in E$$

$$\wedge \quad \Omega \in \mathsf{ran}\, x$$

$$\wedge \quad (p, \Omega) \in x.$$

$\square$

11-22. Es folgt eine im Folgenden oft verwendete hinreichende Bedingung für "$p \in x^{-1}[E]$" . Die Formulierung ähnelt **8-8**:

11-22(Satz)

Aus "$(p, q) \in x$" *und* "$q \in E$" *folgt* "$p \in x^{-1}[E]$".

Beweis **11-22** `VS` gleich $((p, q) \in x) \wedge (q \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in x \dots$"
folgt via **11-4**: $(q, p) \in x^{-1}$.

`2:` Aus `1`"$(q, p) \in x^{-1}$" und
aus `VS` gleich "$\dots q \in E$"
folgt via **8-8**: $p \in x^{-1}[E]$.

□

11-23. Als Wegbereitung für Betrachtungen von Vereinigung und Durchschnitt von Urbildern von einer vorgegebenen Klasse unter den Elementen einer anderen Klasse wird die Klasse aller Urbilder von y unter den Elementen von x definiert:

11-23(Definition)

$$\mathsf{11.2}(X, E) = \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}[E]))\}.$$

11-24. Zur Vereinfachung des Umgangs mit der in **11-23** definierten Klasse $\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$ wird eine notwendige Bedingung für $w \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$ und Hinreichendes für $x^{-1}[E] \in \{\lambda^{-1}[X] : \lambda \in E\}$ bewiesen:

11-24(Satz)

a) *Aus* "$w \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = \Omega^{-1}[E]) \wedge (\Omega \in X)$".

b) *Aus* "$x \in X$" *folgt* "$x^{-1}[E] \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$".

11-23(Def) $\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

Beweis **11-24** `a)` `VS` gleich $w \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$" und
aus "$\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}[E]))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}[E]))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}[E]))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (w = \Omega^{-1}[E])$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (w = \Omega^{-1}[E]) \wedge (\Omega \in X)$.

`b)` `VS` gleich $x \in X$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in X$"
folgt: $\exists x : x \in X$.

`2.1:` Aus `1.1`"x Menge"
folgt via **11-20**: $x^{-1}[E]$ Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\exists x : x \in X$" und
aus "$x^{-1}[E] = x^{-1}[E]$"
folgt: $\exists x : (x \in X) \wedge (x^{-1}[E] = x^{-1}[E])$.

`3:` Aus `2.2`"$\exists x : (x \in X) \wedge (x^{-1}[E] = x^{-1}[E])$" und
aus `2.1`"$x^{-1}[E]$ Menge"
folgt: $x^{-1}[E] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}[E]))\}$.

`4:` Aus `3`"$x^{-1}[E] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}[E]))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in X) \wedge (\omega = \Omega^{-1}[E]))\} = \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$"
folgt: $x^{-1}[E] \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

$\square$

11-25. Mit Aussagen `ac)` - Aussage `b)` ist eine Vorbereitung auf `c)` - stehen Hilfsmittel zur Verfügung, um im nachfolgenden Satz nachzuweisen, dass das Urbild von einer Klasse unter dem Durchschnitt einer anderen Klasse mitunter ungleich dem Durchschnitt der Urbilder der einen Klasse unter den Elementen der anderen Klasse ist:

11-25(Satz)

`a)` $\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in 0\} = 0$.

`b)` $\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\} \subseteq \{0\}$.

`c)` *Aus* "$0 \neq X$" *folgt* "$\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\} = \{0\}$".

11-23(Def) $\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in 0\}$ *und* $\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}$.

Beweis **11-25** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in 0\}$.

`2`: Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in 0\}$"
folgt via **11-24**: $\exists \Omega : (\alpha = \Omega^{-1}[E]) \wedge (\Omega \in 0)$.

`3`: Es gilt 2"$\ldots \Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in 0\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in 0\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in 0\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in 0\} = 0$.

Beweis **11-25** `b)`

`Thema1` $\alpha \in \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}$"
folgt via **11-24**: $\exists \Omega : (\alpha = \Omega^{-1}[0]) \wedge (\Omega \in X).$

`3:` Via **11-17** gilt: $\Omega^{-1}[0] = 0.$

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega^{-1}[0] \ldots$" und
aus `3`"$\Omega^{-1}[0] = 0$"
folgt: $\alpha = 0.$

`5:` Via **1-5** gilt: $0 \in \{0\}.$

`6:` Aus `4`"$\alpha = 0$" und
aus `5`"$0 \in \{0\}$"
folgt: $\alpha \in \{0\}.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \{0\}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\} \subseteq \{0\}.$

`c)` `VS` gleich $0 \neq X.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq X$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in X.$

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in X$"
folgt via **11-24**: $\Omega^{-1}[0] \in \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}.$

`3:` Via **11-17** gilt: $\Omega^{-1}[0] = 0.$

`4:` Aus `2`"$\Omega^{-1}[0] \in \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}$" und
aus `3`"$\Omega^{-1}[0] = 0$"
folgt: $0 \in \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}.$

`5:` Aus `4`"$0 \in \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}.$

`6:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\} \subseteq \{0\}.$

`7:` Aus `6`"$\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\} \subseteq \{0\}$" und
aus `5`"$\{0\} \subseteq \{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\} = \{0\}.$

$\square$

11-26. Das Urbild von E unter der Vereinigung von x ist die Vereinigung der Urbilder von E unter den Elementen von X, siehe `a)`. Gemäß `b)` ist das Urbild von E unter dem Durchschnitt von X eine *TeilKlasse* des Durchschnitts der Urbilder von E unter den Elementen von X. Falls p eine Menge ist, dann ist gemäß `c)` das Urbild von $\{p\}$ unter dem Durchschnitt von X *gleich* dem Durchschnitt der Urbilder von $\{p\}$ unter den Elementen von X. In `d)` wird gezeigt, dass wenn p eine Unmenge ist und wenn X nicht leer ist, das Urbild von $\{p\}$ - diese Klasse ist klarer Weise die leere Menge - unter dem Durchschnitt von X *gleich* dem Durchschnitt der Urbilder von $\{p\}$ unter den Elementen von X ist. In der Tat stellt sich heraus, dass beide angesprochenen auf "Durchschnitts-Bildung" beruhenden Klassen gleich der leeren Menge sind. Gemäß `e)` kann an Stelle der "TeilKlassen-Aussage" von `c)` auch eine Ungleichung treten - nämlich dann, wenn für eine Unmenge p die Klassen $(\bigcap 0)^{-1}[\{p\}]$ und $\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in 0\}$ betrachtet werden. Dieses Beispiel zeigt auch, dass auf die Voraussetzung "$0 \neq X$" in `d)` *nicht* verzichtet werden kann:

11-26(Satz)

`a)` $(\bigcup X)^{-1}[E] = \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

`b)` $(\bigcap X)^{-1}[E] \subseteq \bigcap\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

`c)` *Aus "p Menge" folgt* "$(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] = \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$".

`d)` *Aus "$0 \neq X$" und "p Unmenge"*

folgt "$(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] = \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$"

und "$(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] = 0$"

und "$\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\} = 0$".

`e)` *Aus "p Unmenge" folgt* "$(\bigcap 0)^{-1}[\{p\}] \neq \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in 0\}$"

und "$(\bigcap 0)^{-1}[\{p\}] = 0$"

und "$\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$".

11-23(Def) $\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$ *und* $\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$
und $\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in 0\}$.

Beweis **11-26** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in (\bigcup X)^{-1}[E]$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in (\bigcup X)^{-1}[E]$"
folgt via **11-21**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\alpha, \Omega) \in \bigcup X)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (\alpha, \Omega) \in \bigcup X$"
folgt via **1-12**: $\exists \Psi : ((\alpha, \Omega) \in \Psi) \wedge (\Psi \in X)$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **11-24**: $\Psi^{-1}[E] \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots (\alpha, \Omega) \in \Psi \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **11-22**: $\alpha \in \Psi^{-1}[E]$.

`5:` Aus `4.2`"$\alpha \in \Psi^{-1}[E]$" und
aus `4.1`"$\Psi^{-1}[E] \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\bigcup X)^{-1}[E]) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(\bigcup X)^{-1}[E] \subseteq \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$"

<u>Beweis **11-26**</u> `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-12**: $\exists\Omega : (\alpha \in \Omega) \wedge (\Omega \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\})$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\} \ldots$"
folgt via **11-24**: $\exists\Psi : (\Omega = \Psi^{-1}[E]) \wedge (\Psi \in X)$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus `3`"$\ldots \Omega = \Psi^{-1}[E] \ldots$"
folgt: $\alpha \in \Psi^{-1}[E]$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \in \Psi^{-1}[E]$"
folgt via **11-21**: $\exists\Phi : (\Phi \in E) \wedge ((\alpha, \Phi) \in \Psi)$.

`6:` Aus `5`"$\ldots (\alpha, \Phi) \in \Psi$" und
aus `3`"$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **1-12**: $(\alpha, \Phi) \in \bigcup X$.

`7:` Aus `6`"$(\alpha, \Phi) \in \bigcup X$" und
aus `5`"$\ldots \Phi \in E \ldots$"
folgt via **11-22**: $\alpha \in (\bigcup X)^{-1}[E]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\alpha : (\alpha \in \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in (\bigcup X)^{-1}[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcup X)^{-1}[E]\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(\bigcup X)^{-1}[E] \subseteq \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$" und
aus `A2` gleich "$\bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcup X)^{-1}[E]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\bigcup X)^{-1}[E] = \bigcup\{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

Beweis **11-26** `b)`

`Thema1` $\alpha \in (\bigcap X)^{-1}[E]$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (\bigcap X)^{-1}[E]$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (\bigcap X)^{-1}[E]$"
folgt via **11-21**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\alpha, \Omega) \in \bigcap X)$.

`Thema3.1` $\beta \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

`4:` Aus `Thema3.2` "$\beta \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$"
folgt via **11-24**:
$\exists \Psi : (\beta = \Psi^{-1}[E]) \wedge (\Psi \in X)$.

`5:` Aus `2.2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \bigcap X$" und
aus `4` "$\ldots \Psi \in X$"
folgt via **1-13**: $(\alpha, \Omega) \in \Psi$.

`6:` Aus `5` "$(\alpha, \Omega) \in \Psi$" und
aus `2.2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **11-22**: $\alpha \in \Psi^{-1}[E]$.

`7:` Aus `6` "$\alpha \in \Psi^{-1}[E]$" und
aus `4` "$\ldots \beta = \Psi^{-1}[E] \ldots$"
folgt: $\alpha \in \beta$.

Ergo `Thema3.1`:

`A1` | "$\forall \beta : (\beta \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$"

`3.2:` Aus `A1` gleich
"$\forall \beta : (\beta \in \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in \beta)$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \bigcap \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\bigcap X)^{-1}[E]) \Rightarrow (\alpha \in \bigcap \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(\bigcap X)^{-1}[E] \subseteq \bigcap \{\lambda^{-1}[E] : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis **11-26**</u> `c)` `VS` gleich p Menge.

`Thema1.1` $\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`Thema2.1` $\beta \in X$.

`3:` Aus `Thema3.1` "$\beta \in X$"
folgt via **11-24**:
$\beta^{-1}[\{p\}] \in \{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`4:` Aus `Thema1.1`
"$\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$" und
aus `3` "$\beta^{-1}[\{p\}] \in \{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$"
folgt via **1-13**: $\alpha \in \beta^{-1}[\{p\}]$.

`5:` Aus `4` "$\alpha \in \beta^{-1}[\{p\}]$"
folgt via **11-21**:
$\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in \beta)$.

`6:` Aus `5` "$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Omega = p$.

`7:` Aus `6` "$\Omega = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega) = (\alpha, p)$.

`8:` Aus `7` "$(\alpha, \Omega) = (\alpha, p)$" und
aus `5` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \beta$"
folgt: $(\alpha, p) \in \beta$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in X) \Rightarrow ((\alpha, p) \in \beta)$"

...

Beweis **11-26** `c)` `VS` gleich p Menge.

...

`Thema1.1` $\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

...

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2.2`“α Menge” und
aus `VS` gleich “p Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (α, p) Menge.

`4:` Aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in X) \Rightarrow ((\alpha, p) \in \beta)$” und
aus `2.2`“(α, p) Menge”
folgt via **1-13**: `A2` | “$(\alpha, p) \in \bigcap X$”

`2.3:` Aus →)“p Menge”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`3:` Aus `A2` gleich “$(\alpha, p) \in \bigcap X$” und
aus `2.3`“$p \in \{p\}$”
folgt via **11-22**: $\alpha \in (\bigcap X)^{-1}[\{p\}]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}) \Rightarrow (\alpha \in (\bigcap X)^{-1}[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` | “$\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcap X)^{-1}[\{p\}]$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] \subseteq \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

`2:` Aus `1.2`“$(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] \subseteq \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$” und
aus `A3` gleich “$\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\} \subseteq (\bigcap X)^{-1}[\{p\}]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] = \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\}$.

<u>Beweis **11-26**</u> `d)` `VS` gleich $(0 \neq X) \wedge (p \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`2.1:` $(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] \stackrel{1}{=} (\bigcap X)^{-1}[0] \stackrel{\mathbf{11-17}}{=} 0$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq X \ldots$"
folgt via **11-25**: $\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\} = \{0\}$.

`3:` $\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\} \stackrel{1}{=} \bigcap\{\lambda^{-1}[0] : \lambda \in X\} \stackrel{2.2}{=} \bigcap\{0\} \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} 0$.

`4:` Aus `2.1`"$(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] = \ldots = 0$" und
aus `3`"$\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\} = \ldots 0$"
folgt: $(\bigcap X)^{-1}[\{p\}] = \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\} = 0$

$\wedge \quad (\bigcap X)^{-1}[\{p\}] = 0$

$\wedge \quad \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in X\} = 0$.

`e)` `VS` gleich p Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\} = 0$.

`2.1:` $(\bigcap 0)^{-1}[\{p\}] \stackrel{1}{=} (\bigcap 0)^{-1}[0] \stackrel{\mathbf{11-17}}{=} 0$.

`2.2:` $\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in 0\} \stackrel{\mathbf{11-25}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}$.

`3:` Via **0-18** gilt: $0 \neq \mathcal{U}$.

`4:` Aus `2.1`"$(\bigcap 0)^{-1}[\{p\}] = \ldots = 0$",
aus `3`"$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus `2.2`"$\bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in 0\} = \ldots = \mathcal{U}$"
folgt: $(\bigcap 0)^{-1}[\{p\}] \neq \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in 0\}$

$\wedge \quad (\bigcap 0)^{-1}[\{p\}] = 0$

$\wedge \quad \bigcap\{\lambda^{-1}[\{p\}] : \lambda \in 0\} = \mathcal{U}$.

□

Urbild von E unter x: $\cup, \cap, \setminus, \Delta$.

$x^{-1}[\{p\}]$.

$(x \times y)^{-1}$.

$(x \times y)^{-1}[E]$.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 15/04/11**

12-1. Es folgen vier Aussagen über die wechselseitige Beziehung der klassentheoretischen Grundoperationen und der Relation invers zu einer Klasse. In `a)` wird gesagt, dass die Relation invers zur binären Vereinigung von x und y gleich der binären Vereinigung der Relationen invers zu x und zu y ist. Gemäß `b)` ist die Relation invers zum binären Durchschnitt von x und y gleich dem binären Durchschnitt der Relationen invers zu x und zu y. Wie in `c)` gesagt ist die Relation invers zu der KlassenDifferenz von x und y gleich der KlassenDifferenz der Relation invers zu x und der Relation invers zu y. Schließlich ist gemäß `d)` auch die Relation invers zu der symmetrischen KlassenDifferenz von x und y gleich der symmetrischen KlassenDifferenz der Relation invers zu x und der Relation invers zu y:

12-1(Satz)

`a)` $(x \cup y)^{-1} = (x^{-1}) \cup (y^{-1})$.

`b)` $(x \cap y)^{-1} = (x^{-1}) \cap (y^{-1})$.

`c)` $(x \setminus y)^{-1} = (x^{-1}) \setminus (y^{-1})$.

`d)` $(x \Delta y)^{-1} = (x^{-1}) \Delta (y^{-1})$.

Beweis **12-1** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in (x \cup y)^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in (x \cup y)^{-1}$”
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x \cup y)$.

`3:` Aus `1.1`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x \cup y$”
folgt via **2-2**: $((\Omega, \Psi) \in x) \vee ((\Omega, \Psi) \in y)$.

`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **12-1** `a)` ...

`Thema1.1` $\alpha \in (x \cup y)^{-1}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.1.Fall` $(\Omega, \Psi) \in x$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$(\Omega, \Psi) \in x$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `4`"$(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$"
folgt: $\alpha \in x^{-1}$.

`6:` Aus `5`"$\alpha \in x^{-1}$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x^{-1}) \cup (y^{-1})$.

`3.2.Fall` $(\Omega, \Psi) \in y$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$(\Omega, \Psi) \in y$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in y^{-1}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `4`"$(\Psi, \Omega) \in y^{-1}$"
folgt: $\alpha \in y^{-1}$.

`6:` Aus `5`"$\alpha \in y^{-1}$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in (x^{-1}) \cup (y^{-1})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in (x^{-1}) \cup (y^{-1})$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cup y)^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in (x^{-1}) \cup (y^{-1}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x \cup y)^{-1} \subseteq (x^{-1}) \cup (y^{-1})$"

Beweis **12-1** `a)` ...

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`1.3:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

`2.1:` Aus `1.2` "$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **11-6**: $x^{-1} \subseteq (x \cup y)^{-1}$.

`2.2:` Aus `1.3` "$y \subseteq \ldots x \cup y$"
folgt via **11-6**: $y^{-1} \subseteq (x \cup y)^{-1}$.

`3:` Aus `2.1` "$x^{-1} \subseteq (x \cup y)^{-1}$" und
aus `2.2` "$y^{-1} \subseteq (x \cup y)^{-1}$"
folgt via **2-12**: $(x^{-1}) \cup (y^{-1}) \subseteq (x \cup y)^{-1}$.

`4:` Aus `A1` gleich "$(x \cup y)^{-1} \subseteq (x^{-1}) \cup (y^{-1})$" und
aus `3` "$(x^{-1}) \cup (y^{-1}) \subseteq (x \cup y)^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cup y)^{-1} = (x^{-1}) \cup (y^{-1})$.

`b)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y$.

`2.1:` Aus `1.1` "$x \cap y \subseteq x$"
folgt via **11-6**: $(x \cap y)^{-1} \subseteq x^{-1}$.

`2.2:` Aus `1.2` "$x \cap y \subseteq y$"
folgt via **11-6**: $(x \cap y)^{-1} \subseteq y^{-1}$.

`3:` Aus `2.1` "$(x \cap y)^{-1} \subseteq x^{-1}$" und
aus `2.2` "$(x \cap y)^{-1} \subseteq y^{-1}$"
folgt via **2-12**: | `A1` | "$(x \cap y)^{-1} \subseteq (x^{-1}) \cap (y^{-1})$" |

<u>Beweis</u> **12-1** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in (x^{-1}) \cap (y^{-1})$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (x^{-1}) \cap (y^{-1})$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x^{-1}) \wedge (\alpha \in y^{-1})$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \in x^{-1} \ldots$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \alpha \in y^{-1}$"
folgt: $(\Psi, \Omega) \in y^{-1}$.

`5:` Aus `4.2`"$(\Psi, \Omega) \in y^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in y$.

`6:` Aus `3`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$" und
aus `5`"$(\Omega, \Psi) \in y$"
folgt via **2-2**: $(\Omega, \Psi) \in x \cap y$.

`7:` Aus `6`"$(\Omega, \Psi) \in x \cap y$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in (x \cap y)^{-1}$.

`8:` Aus `3`"$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `7`"$(\Psi, \Omega) \in (x \cap y)^{-1}$"
folgt: $\alpha \in (x \cap y)^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x^{-1}) \cap (y^{-1})) \Rightarrow (\alpha \in (x \cap y)^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: | `A2` | "$(x^{-1}) \cap (y^{-1}) \subseteq (x \cap y)^{-1}$" |

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(x \cap y)^{-1} \subseteq (x^{-1}) \cap (y^{-1})$" und
aus `A2` gleich "$(x^{-1}) \cap (y^{-1}) \subseteq (x \cap y)^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cap y)^{-1} = (x^{-1}) \cap (y^{-1})$.

Beweis **12-1** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (x \setminus y)^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in (x \setminus y)^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x \setminus y)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in x \setminus y$"
folgt via **5-3**: $((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Psi) \notin y)$.

`4.1:` Aus `3`"$(\Omega, \Psi) \in x \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots (\Omega, \Psi) \notin y$"
folgt via **11-5**: $(\Psi, \Omega) \notin y^{-1}$.

`5:` Aus `4.1`"$(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$" und
aus `4.2`"$(\Psi, \Omega) \notin y^{-1}$"
folgt via **5-3**: $(\Psi, \Omega) \in (x^{-1}) \setminus (y^{-1})$.

`6:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `5`"$(\Psi, \Omega) \in (x^{-1}) \setminus (y^{-1})$"
folgt: $\alpha \in (x^{-1}) \setminus (y^{-1})$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \setminus y)^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in (x^{-1}) \setminus (y^{-1}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(x \setminus y)^{-1} \subseteq (x^{-1}) \setminus (y^{-1})\text{”}}$

Beweis **12-1** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in (x^{-1}) \setminus (y^{-1})$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in (x^{-1}) \setminus (y^{-1})$”
folgt via **5-3**: $(\alpha \in x^{-1}) \wedge (\alpha \notin y^{-1})$.

`3:` Aus `2`“$\alpha \in x^{-1} \ldots$”
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x)$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \alpha \notin y^{-1}$”
folgt: $(\Psi, \Omega) \notin y^{-1}$.

`5:` Aus `4`“$(\Psi, \Omega) \notin y^{-1}$”
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \notin y$.

`6:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$” und
aus `5`“$(\Omega, \Psi) \notin y$”
folgt via **5-3**: $(\Omega, \Psi) \in x \setminus y$.

`7:` Aus `6`“$(\Omega, \Psi) \in x \setminus y$”
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in (x \setminus y)^{-1}$.

`8:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$” und
aus `7`“$(\Psi, \Omega) \in (x \setminus y)^{-1}$”
folgt: $\alpha \in (x \setminus y)^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x^{-1}) \setminus (y^{-1})) \Rightarrow (\alpha \in (x \setminus y)^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}(x^{-1}) \setminus (y^{-1}) \subseteq (x \setminus y)^{-1}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$(x \setminus y)^{-1} \subseteq (x^{-1}) \setminus (y^{-1})$” und
aus `A2` gleich “$(x^{-1}) \setminus (y^{-1}) \subseteq (x \setminus y)^{-1}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \setminus y)^{-1} = (x^{-1}) \setminus (y^{-1})$.

`d)`

`1:` $(x \Delta y)^{-1} \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} ((x \setminus y) \cup (y \setminus x))^{-1} \stackrel{\text{a)}}{=} ((x \setminus y)^{-1}) \cup ((y \setminus x)^{-1})$
$\stackrel{\text{c)}}{=} ((x^{-1}) \setminus (y^{-1})) \cup ((y^{-1}) \setminus (x^{-1})) \stackrel{\mathbf{5-27}}{=} (x^{-1}) \Delta (y^{-1})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \Delta y)^{-1} = (x^{-1}) \Delta (y^{-1})$.

□

12-2. Es folgen fünf Resultate, die Adaptionen von **9-1** und - teilweise - von **9-4** für Urbilder an Stelle von Bildern sind. Gemäß `a)` ist das Urbild unter der binären Vereinigung gleich der binären Vereinigung der Urbilder. Diese Gleichung geht, wie in `b)` gesagt, für den binären Durchschnitt in eine "TeilKlassen-Aussage" über. Das Urbild unter dem binären Durchschnitt kann auch *gleich* dem binären Durchschnitt der Urbilder sein. Als Beispiel hierfür werden in `c)` die jeweiligen Urbilder von Singelton p betrachtet. In `d)` wird gezeigt, dass die Klassen-Differenz der Urbilder eine *TeilKlasse* des Urbilds unter der KlassenDifferenz ist. Dieses Resultat wird in `e)` auch für die *symmetrische* KlassenDifferenz bewiesen. Dass die Aussagen `bde)` nicht ohne Weiteres als Gleichungen verfügbar sind, wird in der nachfolgenden Bemerkung und den anschließenden Beispielen diskutiert:

12-2(Satz)

`a)` $(x \cup y)^{-1}[E] = (x^{-1}[E]) \cup (y^{-1}[E])$.

`b)` $(x \cap y)^{-1}[E] \subseteq (x^{-1}[E]) \cap (y^{-1}[E])$.

`c)` $(x \cap y)^{-1}[\{p\}] = (x^{-1}[\{p\}]) \cap (y^{-1}[\{p\}])$.

`d)` $(x^{-1}[E]) \setminus (y^{-1}[E]) \subseteq (x \setminus y)^{-1}[E]$.

`e)` $(x^{-1}[E]) \Delta (y^{-1}[E]) \subseteq (x \Delta y)^{-1}[E]$.

Beweis **12-2** a)

1: $$(x \cup y)^{-1}[E] \overset{\mathbf{12-1}}{=} (x^{-1} \cup y^{-1})[E] \overset{\mathbf{9-1}}{=} (x^{-1}[E]) \cup (y^{-1}[E]).$$

2: Aus 1 folgt: $$(x \cup y)^{-1}[E] = (x^{-1}[E]) \cup (y^{-1}[E]).$$

b)

1: $$(x \cap y)^{-1}[E] \overset{\mathbf{12-1}}{=} (x^{-1} \cap y^{-1})[E] \overset{\mathbf{9-1}}{\subseteq} (x^{-1}[E]) \cap (y^{-1}[E]).$$

2: Aus 1 folgt: $$(x \cap y)^{-1}[E] \subseteq (x^{-1}[E]) \cap (y^{-1}[E]).$$

c)

1: $$(x \cap y)^{-1}[\{p\}] \overset{\mathbf{12-1}}{=} (x^{-1} \cap y^{-1})[\{p\}] \overset{\mathbf{9-1}}{=} (x^{-1}[\{p\}]) \cap (y^{-1}[\{p\}]).$$

2: Aus 1 folgt: $$(x \cap y)^{-1}[\{p\}] = (x^{-1}[\{p\}]) \cap (y^{-1}[\{p\}]).$$

d)

1: $$(x^{-1}[E]) \setminus (y^{-1}[E]) \overset{\mathbf{9-4}}{\subseteq} (x^{-1} \setminus y^{-1})[E] \overset{\mathbf{12-1}}{=} (x \setminus y)^{-1}[E].$$

2: Aus 1 folgt: $$(x^{-1}[E]) \setminus (y^{-1}[E]) \subseteq (x \setminus y)^{-1}[E].$$

e)

1: $$(x^{-1}[E])\Delta(y^{-1}[E]) \overset{\mathbf{9-4}}{\subseteq} (x^{-1}\Delta y^{-1})[E] \overset{\mathbf{12-1}}{=} (x\Delta y)^{-1}[E].$$

2: Aus 1 folgt: $$(x^{-1}[E])\Delta(y^{-1}[E]) \subseteq (x\Delta y)^{-1}[E].$$

$\square$

12-3. Wie an Hand der folgenden Beispiele klar wird, sind statt der "TeilKlassen-Aussagen" von **12-2**`bde)` nicht ohne Weiteres Gleichungen verfügbar:

12-3.Bemerkung

- Die Gleichung
  "$(x \cap y)^{-1}[E] = (x^{-1}[E]) \cap (y^{-1}[E])$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Gleichung
  "$(x^{-1}[E]) \setminus (y^{-1}[E]) = (x \setminus y)^{-1}[E]$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Gleichung
  "$(x^{-1}[E])\Delta(y^{-1}[E]) = (x\Delta y)^{-1}[E]$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

12-4. Mit dem folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass in **12-2**`b)` nicht ohne Weiteres eine Gleichung zu erwarten ist:

12-4.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $y = \{(p, q)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p, q\}$.

Dann folgt:

`a)` $(x \cap y)^{-1} = 0$.

`b)` $x^{-1}[E] = \{p\}$.

`c)` $y^{-1}[E] = \{p\}$.

`d)` $(x \cap y)^{-1}[E] = 0$.

`e)` $(x^{-1}[E]) \cap (y^{-1}[E]) = \{p\}$.

`f)` $(x \cap y)^{-1}[E] \neq (x^{-1}[E]) \cap (y^{-1}[E])$.

12-5. Mit dem folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass in **12-2**`d)` nicht ohne Weiteres eine Gleichung zu erwarten ist:

12-5.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p, p)\}$.

$\rightarrow$) $y = \{(p, q)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p, q\}$.

Dann folgt:

`a)` $x \setminus y = \{(p, p)\}$.

`b)` $(x \setminus y)^{-1} = \{(p, p)\}$.

`c)` $x^{-1}[E] = \{p\}$.

`d)` $y^{-1}[E] = \{p\}$.

`e)` $(x^{-1}[E]) \setminus (y^{-1}[E]) = 0$.

`f)` $(x \setminus y)^{-1}[E] = \{p\}$.

`g)` $(x^{-1}[E]) \setminus (y^{-1}[E]) \neq (x \setminus y)^{-1}[E]$.

12-6. Mit dem folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass in **12-2**`e)` nicht ohne Weiteres eine Gleichung zu erwarten ist:

<u>12-6.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $x = \{(p,p)\}$.

$\rightarrow$) $y = \{(p,q)\}$.

$\rightarrow$) $E = \{p,q\}$.

Dann folgt:

`a)` $x\Delta y = \{(p,p),(p,q)\}$.

`b)` $(x\Delta y)^{-1} = \{(p,p),(q,p)\}$.

`c)` $x^{-1}[E] = \{p\}$.

`d)` $y^{-1}[E] = \{p\}$.

`e)` $(x^{-1}[E])\Delta(y^{-1}[E]) = 0$.

`f)` $(x\Delta y)^{-1}[E] = \{p,q\}$.

`g)` $(x^{-1}[E])\Delta(y^{-1}[E]) \neq (x\Delta y)^{-1}[E]$.

12-7. In Adaption von **9-15** für “y^{-1}” an Stelle von “y” werden zwei hinreichende Bedingungen für $z \in y^{-1}[\{x\}]$ angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `i) - iii) - iv) - ii) - i)`:

12-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in x^{-1}[\{q\}]$.

`ii)` “$\{q\} \subseteq x[\{p\}]$” *und* “q *Menge*”.

`iii)` $(p, q) \in x$.

`iv)` “$(p, q) \in x$” *und* “p *Menge*” *und* “q *Menge*”.

<u>Beweis</u> **12-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $p \in x^{-1}[\{q\}]$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in x^{-1}[\{q\}]$”
folgt via **9-15**: $(q, p) \in x^{-1}$.

`2:` Aus `1`“$(q, p) \in x^{-1}$”
folgt via **11-4**: $(p, q) \in x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(p, q) \in x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(p, q) \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`2:` Aus `1`“(p, q) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p$ Menge$) \wedge (q$ Menge$)$.

`3:` Aus `VS` gleich “$(p, q) \in x$”,
aus `2`“p Menge…” und
aus `2`“…q Menge”
folgt: $((p, q) \in x) \wedge (p$ Menge$) \wedge (q$ Menge$)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $((p, q) \in x) \wedge (p$ Menge$) \wedge (q$ Menge$)$.

Aus `VS` gleich “$((p, q) \in x) \wedge (p$ Menge$) \wedge (q$ Menge$)$”
folgt via **9-15**: $(\{q\} \subseteq x[\{p\}]) \wedge (q$ Menge$)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\{q\} \subseteq x[\{p\}]) \wedge (q$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(\{q\} \subseteq x[\{p\}]) \wedge (q$ Menge$)$”
folgt via **9-15**: $(p, q) \in x$.

`2:` Aus `1`“$(p, q) \in x$”
folgt via **11-4**: $(q, p) \in x^{-1}$.

`3:` Aus `2`“$(q, p) \in x^{-1}$”
folgt via **9-15**: $p \in x^{-1}[\{q\}]$.

□

12-8. Mit der folgenden Definition wird das "Urbild-Analogon" zu der in **9-16(Def)** definierten Klasse $\{\omega : (p, \omega) \in x\}$ in die Essays eingeführt:

12-8(Definition)

$$\mathsf{12.0}(q, x) = \{\omega : (\omega, q) \in x\}.$$

12-9. Je größer die Klasse x ist, desto größer ist die Klasse $\{\omega : (\omega, q) \in x\}$. Ein analoges Resultat für $\{\omega : (p, \omega) \in x\}$ ist in **9-17** zu finden:

<u>**12-9(Satz)**</u>

Aus "$x \subseteq y$" *folgt* "$\{\omega : (\omega, q) \in x\} \subseteq \{\omega : (\omega, q) \in y\}$".

12-8(Def) $\{\omega : (\omega, q) \in x\}$ *und* $\{\omega : (\omega, q) \in y\}$.

<u>Beweis **12-9**</u> `VS` gleich $x \subseteq y$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\}$.

`2.1`: Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2`: Aus `Thema1`"$\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\}$"
folgt: $(\alpha, q) \in x$.

`3`: Aus `2.2`"$(\alpha, q) \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **0-4**: $(\alpha, q) \in y$.

`4`: Aus `3`"$(\alpha, q) \in y$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in y\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega, q) \in x\} \subseteq \{\omega : (\omega, q) \in y\}$.

□

12-10. Im folgenden Satz wird in Ähnlichkeit zu **9-18** die Gleichung $x^{-1}[\{q\}] = \{\omega : (\omega, q) \in x\}$ etabliert:

12-10(Satz)

$$x^{-1}[\{q\}] = \{\omega : (\omega, q) \in x\}.$$

12-8(Def) $\{\omega : (\omega, q) \in x\}$.

Beweis **12-10**

`Thema1.1` $\alpha \in x^{-1}[\{q\}]$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x^{-1}[\{q\}]$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in x^{-1}[\{q\}]$”
folgt via **11-21**: $\exists\Omega : (\Omega \in \{q\}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x)$.

`3:` Aus `2.2`“$\ldots \Omega \in \{q\} \ldots$”
folgt via **1-6**: $\Omega = q$.

`4:` Aus `3`“$\Omega = q$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega) = (\alpha, q)$.

`5:` Aus `4`“$(\alpha, \Omega) = (\alpha, q)$” und
aus `2.2`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$”
folgt: $(\alpha, q) \in x$.

`6:` Aus `5`“$(\alpha, q) \in x$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in x^{-1}[\{q\}]) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\})$.

Konsexuenz via **0-2(Def)**: $x^{-1}[\{q\}] \subseteq \{\omega : (\omega, q) \in x\}$.

...

Beweis **12-10** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“ $\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\}$ ”
folgt: $(\alpha, q) \in x$.

`3:` Aus `2`“ $(\alpha, q) \in x$ ”
folgt via **11-4**: $(q, \alpha) \in x^{-1}$.

`4:` Aus `3`“ $(q, \alpha) \in x^{-1}$ ”
folgt via **9-15**: $\alpha \in x^{-1}[\{q\}]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega, q) \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1}[\{q\}])$.

Konsexuenz via **0-2(Def)**: `A2` | “ $\{\omega : (\omega, q) \in x\} \subseteq x^{-1}[\{q\}]$ ”

`1.3:` Aus `A1` gleich “ $x^{-1}[\{q\}] \subseteq \{\omega : (\omega, q) \in x\}$ ” und
aus `A2` gleich “ $\{\omega : (\omega, q) \in x\} \subseteq x^{-1}[\{q\}]$ ”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x^{-1}[\{q\}] = \{\omega : (\omega, q) \in x\}$.

□

12-11. $q \in \mathsf{ran}\, x$ ist genau dann der Fall, wenn $0 \neq x^{-1}[\{q\}]$:

12-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $q \in \mathsf{ran}\, x$.

`ii)` $0 \neq x^{-1}[\{q\}]$.

Beweis **12-11** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\, x$.

`1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\, x = \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{ran}\, x$" und
aus `1`"$\mathsf{ran}\, x = \mathsf{dom}\,(x^{-1})$"
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

`3:` Aus `2`"$q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$"
folgt via **9-19**: $0 \neq x^{-1}[\{q\}]$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq x^{-1}[\{q\}]$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x^{-1}[\{q\}]$"
folgt via **9-19**: $q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

`1.2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1.1`"$q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $q \in \mathsf{ran}\, x$.

□

12-12. Via Negation ergibt sich aus **12-11** ein Kriterium für $x^{-1}[\{q\}] = 0$:

12-12(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $q \notin \mathsf{ran}\, x$.

ii) $x^{-1}[\{q\}] = 0$.

Beweis **12-12**

1: Via **12-11** gilt: $(q \in \mathsf{ran}\, x) \Leftrightarrow (0 \neq x^{-1}[\{q\}])$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(q \in \mathsf{ran}\, x)) \Leftrightarrow (\neg(0 \neq x^{-1}[\{q\}]))$.

3: Aus 2 folgt: $(q \notin \mathsf{ran}\, x) \Leftrightarrow (x^{-1}[\{q\}] = 0)$.

$\square$

12-13. Wie vermutlich erwarten werden konnte ist die Relation invers zu $x \times y$ gleich $y \times x$, siehe `a)`. Bei nochmaligem "Invertieren" ergibt sich wieder $x \times y$, siehe `b)`:

<u>**12-13(Satz)**</u>

`a)` $(x \times y)^{-1} = y \times x$.

`b)` $((x \times y)^{-1})^{-1} = x \times y$.

<u>Beweis **12-13**</u> `a)`

`Thema1.1` $\qquad \alpha \in (x \times y)^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x \times y)^{-1}$"
folgt via **11-3**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x \times y).$$

`3:` Aus `2` "$\dots (\Omega, \Psi) \in x \times y$"
folgt via **6-6**: $\qquad (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in y)$.

`4:` Aus `3` "$\dots \Psi \in y$" und
aus `3` "$\Omega \in x \dots$"
folgt via **6-6**: $\qquad (\Psi, \Omega) \in y \times x$.

`5:` Aus `2` "$\dots \alpha = (\Psi, \Omega) \dots$" und
aus `4` "$(\Psi, \Omega) \in y \times x$"
folgt: $\qquad \alpha \in y \times x$.

Ergo `Thema1.1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in (x \times y)^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in y \times x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A1` | "$(x \times y)^{-1} \subseteq y \times x$"

Beweis **12-13** a) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in y \times x.$
2: Aus Thema1.2"$\alpha \in y \times x$" folgt via **6-6**:	$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in y) \wedge (\Psi \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$
3: Aus 2"$\ldots \Psi \in x$" und aus 2"$\ldots \Omega \in y \ldots$" folgt via **6-6**:	$(\Psi, \Omega) \in x \times y.$
4: Aus 3"$(\Psi, \Omega) \in x \times y$" folgt via **11-4**:	$(\Omega, \Psi) \in (x \times y)^{-1}.$
5: Aus 2"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und aus 4"$(\Omega, \Psi) \in (x \times y)^{-1}$" folgt:	$\alpha \in (x \times y)^{-1}.$

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in y \times x) \Rightarrow (\alpha \in (x \times y)^{-1}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\text{A2} \mid \text{“}y \times x \subseteq (x \times y)^{-1}\text{”}}$

Thema1.3: Aus A1 gleich "$(x \times y)^{-1} \subseteq y \times x$" und
aus A2 gleich "$y \times x \subseteq (x \times y)^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \times y)^{-1} = y \times x.$

b)

1: $((x \times y)^{-1})^{-1} \stackrel{\text{a)}}{=} (y \times x)^{-1} \stackrel{\text{a)}}{=} x \times y.$

2: Aus 1
folgt: $((x \times y)^{-1})^{-1} = x \times y.$

□

12-14. Die folgenden drei Aussagen ergeben sich als Kombination von **9-12** und **12-14**. Gemäß `a)` ist das Urbild jeder Klasse unter $x \times y$ eine TeilKlasse von x. Falls $0 \neq x \cap y$, so ist für jede Klasse E das Urbild von y unter $E \times x$ gleich E, siehe `b)`. Wie in `c)` gesagt, folgt aus $x \cap y = 0$, dass das Urbild von y unter $E \times x$ gleich der leeren Menge ist:

12-14(Satz)

`a)` $(x \times y)^{-1}[E] \subseteq x$.

`b)` *Aus* "$0 \neq y \cap E$" *folgt* "$(x \times y)^{-1}[E] = x$".

`c)` *Aus* "$y \cap E = 0$" *folgt* "$(x \times y)^{-1}[E] = 0$".

Beweis **12-14** `a)`

`1:` $(x \times y)^{-1}[E] \stackrel{\mathbf{12-13}}{=} (y \times x)[E] \stackrel{\mathbf{9-23}}{\subseteq} x.$

`2:` Aus `1` folgt: $(x \times y)^{-1}[E] \subseteq x.$

`b)` `VS` gleich $0 \neq y \cap E.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq y \cap E$" folgt via **9-23**: $(y \times x)[E] = x.$

`2:` $(x \times y)^{-1}[E] \stackrel{\mathbf{12-13}}{=} (y \times x)[E] \stackrel{1}{=} x.$

`3:` Aus `2` folgt: $(x \times y)^{-1}[E] = x.$

`c)` `VS` gleich $y \cap E = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$y \cap E = 0$" folgt via **9-23**: $(y \times x)[E] = 0.$

`2:` $(x \times y)^{-1}[E] \stackrel{\mathbf{12-13}}{=} (y \times x)[E] \stackrel{1}{=} 0.$

`3:` Aus `2` folgt: $(x \times y)^{-1}[E] = 0.$

□

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.