Beiträge zur flugmechanischen Modellierung in zeitvariablen, räumlichen Windfeldern für die Echtzeit-Flugsimulation

von

Dipl.-Ing. Wolfgang Rüther-Kindel

aus Lemförde

von der Fakultät für Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
- Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Beiträge zur flugmechanischen Modellierung in zeitvariablen, räumlichen Windfeldern für die Echtzeit-Flugsimulation

von

Dipl.-Ing. Wolfgang Rüther-Kindel

aus Lemförde

von der Fakultät für Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
- Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. J. Siegmann
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. K. Wilhelm
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. R. Luckner
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. G. Hüttig

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 29. September 2006

Berlin 2007

D 83

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Flugmechanik und Flugregelung am Institut für Luft- und Raumfahrt der Technischen Universität Berlin.

Mein erster Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. K. Wilhelm, der die Arbeit auch nach Beendigung seiner aktiven Tätigkeit am Institut und meinem Ausscheiden mit großem Interesse und Engagement weiter betreut hat. Besonders möchte ich mich bei ihm für seine stete Ermunterung und Unterstützung bedanken, ohne die ich diese Arbeit wohl nicht erfolgreich beendet hätte. Herrn Prof. Siegmann danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes. Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Luckner und Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Hüttig danke ich für ihre Bereitschaft, die Gutachtertätigkeit zu übernehmen. Durch Ihren persönlichen Einsatz konnte die wissenschaftliche Aussprache äußerst zeitnah erfolgen – hierfür möchte ich mich herzlich bedanken.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinen Kollegen im Fachgebiet Flugmechanik und Flugregelung, Herrn Dipl.-Ing. Markus Dahms, Herrn Dipl.-Ing. Oliver Schmidt, Herrn Dr.-Ing. Lars Böger und Herrn Dipl.-Ing. Matthias Vyshnevsky sowie den Studenten, die im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten Beiträge zu dieser Arbeit geleistet haben. Die gute Atmosphäre am Fachgebiet mit vielen Diskussionen wird mir stets in Erinnerung bleiben. Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Zentrums für Flugsimulation Berlin und von Lufthansa Flight Training Berlin, die für die Betreuung des A330/A340-Flugsimulators und seiner Forschungseinrichtung verantwortlich sind, namentlich Herrn Thomas Funke und Mike Hauptvogel. Mein Dank gilt ferner den Mitarbeitern von CAE Electronics in Montréal, die unschätzbare Hilfe bei der Implementation des am Fachgebiet entwickelten flugmechanischen Modells in die komplexe Simulationsumgebung leisteten. Hier möchte ich speziell Herrn Daniel Auger erwähnen, der sich sehr für das Projekt eingesetzt hat. Mein Dank gilt ferner Herrn Prof. Dr. L. Ungvári (Präsident der TFH Wildau) und Herrn Prof. Dipl.-Ing. T. Mirre (Dekan des Fachbereichs Ingenieurwesen / Wirtschaftingenieurwesen) für ihre Unterstützung, meine Dissertation parallel zu meiner Tätigkeit an der TFH Wildau fertig stellen zu können.

Ganz besonders möchte ich mich bei meiner Frau Margarete und meiner Tochter Carolyn bedanken, die in den letzten Jahren auf so vieles verzichtet haben. Bei meinen Schwiegereltern Hilde und Wilhelm Rüther bedanke ich mich für ihre vielfältige Unterstützung und der Nutzung der „Studierstube“ in Dallgow.

Widmung

Ich widme diese Arbeit meinen Eltern Gisela und Ing. Georg Kindel. Sie haben mich immer in allen meinen Plänen und Wünschen tatkräftig unterstützt. Die vielen Anregungen haben bei mir schon in frühester Kindheit den Traum vom Fliegen geweckt, der mich stets geleitet hat.

Übersicht

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, mit dem die aerodynamischen Lastverteilungen an einem Flugzeug in der Echtzeitsimulation berechnet werden können. Im Unterschied zu bisherigen Lösungsansätzen erfolgt die Berücksichtigung der flugmechanischen Freiheitsgrade vollständig nichtlinear, so dass die Anwendung nicht auf kleine Abweichungen von einem Arbeitspunkt beschränkt ist sondern die gesamte Flugenveloppe umfassen kann.

Das vorgestellte Verfahren basiert auf der Tragflächentheorie von TRUCKENBRODT. Vom zu simulierenden Flugzeug müssen lediglich der Grundriss des Tragflügels sowie seine Verwindung und die Profilskelettlinien bekannt sein. Als Ergebnis erhält man ein Gleichungssystem, das die Verteilungen der aerodynamischen Beiwerte für Auftrieb und Nickmoment eines Tragflügels als Funktionen der als bekannt vorausgesetzten Anstellwinkelverteilung liefert. Die Lösung erfolgt durch eine einfache Matrizenoperation, so dass der benötigte Rechenzeitbedarf relativ gering ist. Da in der Anstellwinkelverteilung sowohl elastische Verformungen als auch räumliche Windfelder berücksichtigt werden können, ist das Verfahren vielfältig einsetzbar. Das Gleichungssystem wird für Tragflügel entwickelt, gilt aber in entsprechender Weise auch für Höhenleitwerke.

Die Genauigkeit des Tragflächenverfahrens kann verbessert werden, wenn weitere, höherwertige aerodynamische Daten zur Verfügung stehen. Die Korrekturmaßnahmen erfolgen in mehreren Schritten und beinhalten die Berücksichtigung von Profilkenngrößen wie Nullanstellwinkel, Nullmoment und Auftriebsanstieg, die Korrektur der Auftriebs- und Nickmomentenverteilungen aus bekannten Referenzzuständen sowie eine Kalibration der Gesamtbeiwerte für bestimmte Flugzustände.

Durch weitere Erweiterungen können die Ausschläge von Steurflächen berücksichtigt, beliebige Verteilungen des Geschwindigkeitsbetrages erfasst und instationäre Effekte einbezogen werden. Durch die verschiedenen Ergänzungen werden bei der Bestimmung der Lastverteilungen auch nichtlineare Effekte weitgehend berücksichtigt.

Das als Lifting Surface Method LSM bezeichnete Verfahren wurde auf dem Airbus A330/A340 Trainingssimulator des Zentrums für Flugsimulation Berlin ZFB implementiert. Die Qualität des Verfahrens wird durch Vergleich mit Flugversuchsergebnissen eines modernen Verkehrsflugzeuges demonstriert. Die durch das vorgestellte aerodynamische Modell bedingten zusätzlichen Einsatzmöglichkeiten des Simulators werden durch beispielhafte Ergebnisse aus Pilotenversuchen mit einem elastischen Flugzeug sowie beim Einflug in eine Wirbelschleppe unter Beweis gestellt.

Durch das Tragflächenverfahren wird das Einsatzspektrum von Flugsimulatoren sowohl für Forschungs- als auch für Trainingsanwendungen entscheidend erweitert, da insbesondere das Flugzeugverhalten in komplexen, dynamischen Windszenarien (Wirbelschleppen, Gewitter, Scherwinde) mit hoher Güte simuliert werden kann als auch Flugeigenschaftsuntersuchungen flexibler Flugzeuge mit Piloten ermöglicht werden.

Die mögliche Reduzierung auf die Betrachtung einer „Delta-Aerodynamik“ ermöglicht eine einfache Implementierung in nahezu alle vorhandenen Flugsimulatoren. Dieses Vorgehen wurde bereits im Rahmen von Forschungsprojekten mehrfach erfolgreich angewendet. Da beim Tragflächenverfahren der numerische Aufwand durch die Anzahl der berücksichtigten Stützstellen und durch die unterschiedlichen, wählbaren Stufen zur Genauigkeitssteigerung bestimmt wird, ist eine einfache Anpassung an unterschiedliche Aufgabenstellungen möglich.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen xi

1 Einleitung 1
1.1 Entwicklung des Luftverkehrs 1
1.2 Sicherheitsabstände beim Landeanflug – Wirbelschleppen 2
1.3 Neue Großraumflugzeuge 4
1.4 Ziel der Arbeit 5

2 Einführung in die Echtzeit-Flugsimulation 7
2.1 Einsatzgebiete von Flugsimulatoren 7
2.2 Grundlagen der Flugsimulation 8

3 Flugmechanische Modellierung für die Echtzeit-Flugsimulation 13
3.1 Grundlagen 13
3.2 Aerodynamische Modelle für die Echtzeit-Simulation 14
3.3 Windmodelle für die Echtzeit-Simulation 19
3.4 Strukturmodelle für die Echtzeit-Simulation 27

4 3D-Aerodynamikmodell für Echtzeitanwendungen 33
4.1 Einführung 33
4.2 Tragflächentheorie nach TRUCKENBRODT 34
4.3 Echtzeit Modellierung 41
4.4 Gesamtbeiwerte 43

5 Erhöhung der Genauigkeit 45
5.1 Allgemeines 45
5.2 Druckverteilungen 46
5.3 Profilkennwerte 46
5.3.1 Berücksichtigung von Nullanstellwinkel und Nullmoment 46
5.3.2 Berücksichtigung des Auftriebsanstieges 48
5.3.3 Berücksichtigung des Profilneutralpunktes 49
5.4 Korrektur der Verteilungen 50
5.4.1 Grundlagen 50
5.4.2 Korrektur der Auftriebsverteilung 51
5.4.3 Korrektur der Nickmomentenverteilung 55
5.5 Kalibration der Gesamtbeiwerte 57
5.5.1 Grundlagen 57
5.5.2 Kalibration des Auftriebes und des Nickmomentes 59
5.5.3 Kalibration des Widerstandes, des Rollmomentes und des Nickmomentes 63
5.6 Delta-Aerodynamik 64
5.6.1 Grundlagen 64
5.6.2 Anstellwinkelverteilung 66
5.6.3 Beiwerte 68

6 Erweiterungen des Tragflächenverfahrens 69
6.1 Berücksichtigung von Geschwindigkeitsänderungen 69
6.1.1 Zirkulation, Wirbeldichte und Beiwerte 69
6.2 Berücksichtigung von Steuerflächen 74

6.2.1 Auswirkungen von Steuerflächen ... 74
6.2.2 Änderung der Profilwölbung bei kleinen Klappenausschlägen ... 75
6.2.3 Änderung der Profiltiefe ... 76
6.2.4 Zuordnung zu den Multhopp-Stützstellen ... 77
6.2.5 Erweiterung auf große Klappenausschläge ... 80
6.3 Instationäre Aerodynamik ... 81
6.3.1 Grundlagen ... 81
6.3.2 Aufbereitung des Gleichungssystems ... 82
6.3.3 Übertragungsfunktionen ... 85
6.3.4 Filterung im Zeitbereich ... 87
6.3.5 Rechenergebnisse und Rechenzeitbedarf ... 88

7 Anwendungen auf dem A330/A340-Flugsimulator ... 91
7.1 Implementation ... 91
7.1.1 Modifikationen und Erweiterungen ... 91
7.1.2 Einbindung des Tragflächenverfahrens ... 92
7.2 Simulationsergebnisse ... 99
7.2.1 Elastisches Flugzeug ... 99
7.2.2 Einflug in Wirbelschleppen ... 106

8 Zusammenfassung und Ausblick ... 111
8.1 Zusammenfassung ... 111
8.2 Erweiterungen und Ausblick ... 112

Literatur ... 117

Anhang A Induzierter Abwind eines Flügels ... 123

Anhang B Integration der Verteilungsfunktion G(x,y;y´) ... 127

Anhang C Quadraturverfahren nach MULTHOPP ... 131

Anhang D Wirbeldichte in Profiltiefenrichtung ... 135
D.1 Grundlagen ... 135
D.2 Einflussfunktionen ... 137
D.3 Grund- und Nullverteilung ... 138
D.4 Einsetzen in die Integralgleichung ... 140

Anhang E Bestimmung der örtlichen Beiwerte ... 141

Anhang F Bestimmung der Gesamtbeiwerte ... 147
F.1 Kräfte ... 147
F.1.1 Auftrieb ... 147
F.1.1.1 homogene Anströmung ... 147
F.1.1.2 Berücksichtigung von lokalen Änderungen der Anströmrichtung ... 149
F.1.1.3 Berücksichtigung von Änderungen des Betrages der Anströmung ... 151
F.1.2 Widerstand ... 152
F.1.2.1 induzierter Widerstand in homogener Anströmung ... 152
F.1.2.2 Widerstand mit Berücksichtigung von Änderungen der Anströmrichtung ... 156
F.1.2.3 Widerstand mit Berücksichtigung von Änderungen des Betrages der Anströmung ... 159
F.2 Momente ... 160
F.2.1 Allgemeine Betrachtungen ... 160
F.2.2 Momente bei identischem Geschwindigkeitsbetrag ... 164
F.2.3 Berücksichtigung von Änderungen des Betrages der Anströmung ... 170

Anhang G Zusammenhang $\partial z_{Skelett}/\partial x \rightarrow \alpha_{0P}$, c_{m025} 171

Anhang H Korrektur der Verteilungen 175
H.1 Korrektur der Nickmomentenverteilung 175
H.2 Zusammenfassung der Korrekturen für Auftrieb und Nickmoment 176

Anhang I Kalibration der Gesamtbeiwerte 179
I.1 Kalibration des Nickmomentes 179
I.2 Zusammenfassung der Kalibration von Auftrieb und Nickmoment 187

Anhang J Geschwindigkeitskinematik 191
J.1 Grundlagen 191
J.2 Bahngeschwindigkeit 192
J.3 Windgeschwindigkeit 193
J.4 Anströmgeschwindigkeit 194
J.5 Berücksichtigung nichtlinearer Effekte 195

Anhang K Berücksichtigung von Geschwindigkeitsverteilungen 201
K.1 Zirkulation, Wirbeldichte und Beiwerte 201
K.2 Kinematische Strömungsbedingung 203
K.3 Bestimmung der Verteilungsfunktion 205
K.4 Aufstellen des Gleichungssystems 208

Anhang L Instationäre Aerodynamik 211
L.1 Grundlagen 211
L.2 Ergebnisse der Doublet-Lattice-Methode 213
L.3 Bode-Diagramm – Amplituden- und Phasengang 215
L.4 Bestimmung der Filterfunktionen 219
L.5 Genauigkeit und Rechenzeitbedarf 223
L.6 Vergleichsrechnungen mit höherwertigem Verfahren 229

Anhang M Modellierung von Wirbelschleppen 231

Anhang N Lösung der Glauert-Integrale 235

Anhang O Grundlagen der aerodynamischen Modellierung 241
O.1 Tragflächentheorie 241
O.1.1 Einführung 241
O.1.2 Grundlagen der Tragflächentheorie 243
O.1.3 Induzierter Abwind am Flügel 244
O.2 Wirbeldichteverteilung in Spannweitenrichtung 247
O.3 Wirbeldichteverteilung in Profiltiefenrichtung (Einheitsfunktionen) 250
O.3.1 Ansatz von GLAUERT und TRUCKENBRODT 250
O.3.2 Örtliche Beiwerte, Bedeutung der Koeffizienten a_n 252
O.3.3 Einflussfunktionen 254
O.3.4 Verteilungsfunktion 255
O.3.5 Aufpunkte zur Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung 256

Anhang P Flugzeugdaten 259
P.1 Flügelgeometrie eines UHCA-Entwurfes 259

P.2 Abmessungen des simulierten Flugzeuges 260
P.3 Flugzustand 262
P.4 Wirbelschleppenparameter 263

Bezeichnungen

Lateinische Formelzeichen

a_0, a_1, a_n	Koeffizienten des GLAUERT-Ansatzes für die Wirbeldichteverteilung
a_0, a_1	Koeffizienten der Filterfunktionen der instationären Aerodynamik
A	Auftrieb
A	Amplitude
A_{db}	Amplitude in Dezibel
$\underline{\underline{A}}$	Systemmatrix
b	Spannweite
b_0, b_1	Koeffizienten der Filterfunktionen der instationären Aerodynamik
$b_{K,\upsilon}$	Klappenbreite innerhalb des Elementarflügels υ
b_υ	Breite des Elementarflügels υ
$b_{\upsilon n}$	MULTHOPP-Koeffizienten
$\underline{\underline{B}}$	Matrix zur Berechnung der Verteilung des induzierten Anstellwinkels
$\underline{\underline{B}}$	Steuermatrix
$\underline{c}$	Verteilungen der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte
$\underline{c}_0$	Nullverteilungen der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte (bei jeweils $\alpha_{P,\upsilon} = 0$)
$\underline{c}_{kor}$	korrigierte Verteilungen der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte
$\underline{c}_{kal}$	kalibrierte Verteilungen der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte
c_a	örtlicher Auftriebsbeiwert
c_{a0}	örtlicher Nullauftriebsbeiwert
c_{a0}^*	örtlicher Auftriebsbeiwert bei Gesamtanstellwinkel $\alpha_{R0} = 0$
$c_{a\alpha}$	örtlicher Auftriebsanstieg
c_w	örtlicher Widerstandsbeiwert
c_{wi}	örtlicher Beiwert des induzierten Widerstandes
c_{wp}	Profilwiderstandsbeiwert
c_m	örtlicher Nickmomentenbeiwert
c_{m0}	örtlicher Nullmomentenbeiwert
c_{m0}^*	örtlicher Null-Nullmomentenbeiwert bei Gesamtanstellwinkel $\alpha_{R0} = 0$
$c_{m\alpha}$	örtlicher Nickmomentenanstieg
c_p	Druckbeiwert
C_A	Auftriebsbeiwert
C_{A0}	Nullauftriebsbeiwert (bei $\alpha = 0$)
$C_{A\alpha}$	Auftriebsanstieg
C_W	Widerstandsbeiwert
C_{Wi}	Beiwert des induzierten Widerstandes
$C_{x\,(y,z)}$	Kraftbeiwert in x-Richtung (y-, z-Richtung)
C_L	Rollmomentenbeiwert
C_M	Nickmomentenbeiwert
C_{M0}	Nullmomentenbeiwert (bei $C_A = 0$)

C_{M0}^{*}	Null-Nullmomentenbeiwert (bei $\alpha = 0$)
$C_{M\alpha}$	Nickmomentenanstieg
C_N	Giermomentenbeiwert
$d\underline{m}$	Vektor der örtlichen Momenteninkremente $(dl, dm, dn)^T$
ds	Streckeninkrement
D	Dämpfung
DP	Druckpunkt
DP^*	Druckpunkt bei reibungsloser Strömung (ohne Profilwiderstand)
$\underline{\underline{D}}$	Dämpfungsmatrix
e	Abstand von der induzierenden Stelle y' ($e = y - y'$)
$\underline{\underline{E}}$	Störmatrix
$\underline{F}$	Schubkraft
$\underline{F}^K$	Massenkraft
f	Frequenz
$g(\xi,\eta;\eta')$	dimensionslose Verteilungsfunktion
F(s)	Übertragungsfunktion der Filter für die instationäre Aerodynamik
$F(j\omega)$	Frequenzgang der Filter für die instationäre Aerodynamik
G(x,y;y')	Verteilungsfunktion
$\underline{G}$	Gewichtskraft
$\underline{\underline{G}}$	instationäre Matrix des Tragflächenverfahrens
h_0, h_1, h_n	dimensionslose Einheitsfunktionen
H_0, H_1	dimensionslose Einflussfunktionen (siehe i, j)
H	Höhe
i	dimensionslose Einflussfunktion (identisch mit H_0)
$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$	Einheitsvektoren
i_F	Einstellwinkel des Flügels
I_x	Trägheitsmoment um die x-Achse
$\underline{\underline{I}}$	Trägheitstensor
j	dimensionslose Einflussfunktion ($j = 4\ H_1$)
k(x,y)	Wirbeldichte
$k_{0a,\upsilon}$, $k_{1a,\upsilon}$	örtliche Korrekturterme der Auftriebsverteilung
$k_{0m,\upsilon}$, $k_{1m,\upsilon}$	örtliche Korrekturterme der Nickmomentenverteilung
$\underline{k}_0$	Vektor mit Korrekturtermen $k_{0a,\upsilon}$ und $k_{0m,\upsilon}$
$\underline{\underline{k}}_1$	Matrix mit Korrekturtermen $k_{1a,\upsilon}$ und $k_{1m,\upsilon}$
K	Koeffizient der Filterfunktionen der instationären Aerodynamik
$\underline{\underline{K}}$	Matrix des Tragflächenverfahrens (vor der Invertierung)
K_{0a}, K_{1a}	Kalibrationsterme des Gesamtauftriebes (des Flügels)
$K_{0a}^{*}{}_{\upsilon}$	örtlicher Kalibrationsterm der Auftriebsverteilung
K_{0m}, K_{1m}	Kalibrationsterme des Gesamtnickmomentes (des Flügels)
$K_{0m}^{*}{}_{\upsilon}$	örtlicher Kalibrationsterm der Nickmomentenverteilung

$K_{2m,\upsilon}$	örtlicher Kalibrationsterm der Nickmomentenverteilung
$\underline{K}_0$	Vektor mit Kalibrationstermen $K_{0a}{}^{*}{}_{\upsilon}$ und $K_{0m}{}^{*}{}_{\upsilon}$
$\underline{\underline{K}}_1$	Kalibrationsmatrix mit Korrektur- und Kalibrationstermen $k_{1a,\upsilon}$, $k_{1m,\upsilon}$, K_{1a} und K_{1m}
$\underline{\underline{K}}_2$	Kalibrationsmatrix mit Kalibrationstermen K_{2m}
$\underline{K}_{kal}$	korrigierte und kalibrierte Nullverteilung inklusive Einstellwinkel & Verwindung
ℓ	Profiltiefe
ℓ_μ	Bezugsflügeltiefe
ℓ^*	Ersatz-Profiltiefe (berücksichtigt tatsächlichen Auftriebsanstieg des Profils)
L	Rollmoment
$\underline{\underline{L}}$	Matrix des Tragflächenverfahrens (nach der Invertierung)
$\underline{\underline{L}}^*$	umsortierte Matrix des Tragflächenverfahrens (für die instationäre Aerodynamik, Schlag- und Nickbewegung)
$L_{i,j}$	Koeffizienten der Matrix $\underline{\underline{L}}$
$L_{i,j}{}^*$	Koeffizienten der Matrix $\underline{\underline{L}}^*$
$\underline{\underline{L}}_{kal}$	kalibrierte Matrix des Tragflächenverfahrens (einschließlich von Korrekturen)
$\underline{\underline{L}}_{kor}$	Matrix des Tragflächenverfahrens, ermittelt mit ℓ^*-Werten
m	Masse
m	Laufvariable (des betrachteten Knotens des Finite Elemente Modells)
$m^A{}_y$	aerodynamische Torsions-Streckenlast
M	Anzahl der Multhopp-Schnitte
M	Nickmoment
$\underline{M}$	Momentenvektor
$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix
$\underline{M}^A$	aerodynamisches Moment
$\underline{M}^F$	Schubmoment
$\underline{M}^K$	Massenmoment
Ma	Machzahl
n	Laufvariable (des betrachteten Elementarflügels des Aerodynamikmodells)
N	Anzahl der Knoten (des Finite Elemente Modells)
N	Normalkraft
N	Nickmoment
NP	Neutralpunkt
p	Drehgeschwindigkeitskomponente um die x-Achse
p	Druck
$p^A{}_x$	aerodynamische Streckenlast in x-Richtung
$p^A{}_z$	aerodynamische Streckenlast in z-Richtung
$\underline{\tilde{p}}$	Vektor der Anregungen (eines FE-Knotens)
P(x,y)	Aufpunkt
q	Drehgeschwindigkeitskomponente um die y-Achse

$\underline{\tilde{q}}$	Vektor der generalisierten Koordinaten (eines FE-Knotens)
r	Drehgeschwindigkeitskomponente um die z-Achse
r	Radius
$\underline{\tilde{r}}$	Vektor der generalisierten Anregungen (eines FE-Knotens)
q_n	Anzahl von Streifen (Stützstellen), die einem FE-Knoten n zugeordnet sind
Q	Querkraft
$\underline{r}_{j,f}$	Ortsvektor des Aufpunktes j bezogen auf das flugzeugfeste Koordinatensystem
$\underline{R}_{SPg}$	Ortsvektor vom erdfesten Referenzpunkt zum Referenzpunkt des Flugzeuges im g-Koordinatensystem
$\underline{R}_{j,g}$	Ortsvektor vom erdfesten Referenzpunkt zum Aufpunkt j im g-Koordinatensystem
$\underline{R}^A$	Luftkraftresulierende
s	Halbspannweite
s	Laplaceoperator
$\underline{s}_p$	Ortsvektor im profilfesten Koordinatensystem
S	Flügelfläche
$\underline{\underline{S}}$	Steifigkeitsmatrix
SP	Schwerpunkt
t	Zeit
T	Zeitintervall
T	Tangentialkraft
$\underline{\underline{T}}_{fa}$	Transformationsmatrix aerodynamisch → flugzeugfest
$\underline{\underline{T}}_{fg}$	Transformationsmatrix geodätisch → flugzeugfest
u	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
$\underline{u}(t)$	Vektor der Steuergrößen
$\underline{\tilde{u}}$	Vektor der Verschiebungen (eines FE-Knotens)
v	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
$\underline{V}$	Geschwindigkeitsvektor
$\underline{\underline{V}}$	Matrix mit Geschwindigkeitsvektoren
$\underline{V}_A$	Anströmgeschwindigkeit
$\underline{V}_K$	Bahngeschwindigkeit
$\underline{V}_W$	Windgeschwindigkeit
w	Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung
w_i	am Flügel selbst induzierter Abwind (x = x')
W	Widerstand
W_i	induzierter Widerstand
W_K	kinematischer Widerstand (bei einem räumlichen Windfeld)
W_P	Profilwiderstand
x	Koordinate
x'	Koordinate der induzierenden Stelle
$\underline{x}(t)$	Vektor der Zustandsgrößen

x_N	Neutralpunkt
X	dimensionslose Koordinate in Profiltiefenrichtung
X	Kraftkomponente in x-Richtung
y	Koordinate
y’	Koordinate der induzierenden Stelle
Y	dimensionslose Koordinate in Spannweitenrichtung
z	Koordinate
$\underline{z}(t)$	Vektor der Störgrößen
Z	Kraftkomponente in z-Richtung

Griechische Formelzeichen

α	Anstellwinkel
α_0	Nullanstellwinkel
α_i	induzierter Anstellwinkel
α_F	örtlicher Anstellwinkel zwischen örtlicher Anströmung und Flügelbezugsebene
α_P	örtlicher Anstellwinkel zwischen örtlicher Anströmung und örtlicher Profilsehne
$\alpha^*_{Skelett}$	örtlicher Ersatz-Anstellwinkel der Skelettlinie unter Berücksichtigung des Betrages der örtlichen Anströmgeschwindigkeit
β	Schiebewinkel
χ	Bahnazimut
Δ	Delta-Größe
$\Delta\underline{c}_0$	Nullverteilung infolge Einstellwinkel und Verwindung
$\Delta\underline{c}_{0,K}$	Änderung der Nullverteilung infolge Klappenausschlag
$\Delta\alpha_{Flex}$	örtlicher Zusatzanstellwinkel infolge Elastizität
$\Delta\alpha_K$	örtlicher Zusatzanstellwinkel infolge Starrkörperdrehung
$\Delta\alpha^*_P$	örtlicher Ersatz-Anstellwinkel bei Änderung der Profiltiefe infolge Klappenausschlag
$\Delta\alpha_W$	örtlicher Zusatzanstellwinkel infolge Windfeld
$\Delta\alpha_V$	örtlicher Zusatzanstellwinkel infolge Windfeld und Elastizität
ε	dimensionsloser Abstand von der induzierenden Stelle η’ ($\varepsilon = \eta - \eta$’)
$\varepsilon_{VF,\upsilon}$	örtliche Verwindung des Flügels (Flight-Shape)
$\varepsilon_{VF,Jig,\upsilon}$	örtliche Verwindung des Flügels (in der Bauvorrichtung = Jig-Shape)
η	dimensionlose Koordinate in y-Richtung
η	Höhenruderausschlag
η’	dimensionlose Koordinate der induzierenden Stelle
η_K	Klappenausschlag
φ	Polarkoordinate in Profiltiefenrichtung (positiv von vorne nach hinten laufend)
φ	Phasenwinkel (bei der instationären Aerodynamik)
γ	dimensionslose Zirkulation
Γ	Zirkulation
κ	Korrekturfaktor der Klappenwirksamkeit

μ	dimensionslose Zirkulation in Profiltiefenrichtung
λ_K	relative Klappentiefe
Λ	Streckung
υ	kinematische Zähigkeit
$\underline{\Omega}$	Drehgeschwindigkeitsvektor
$\underline{\Omega}_K$	Drehgeschwindigkeitsvektor des Flugzeuges gegenüber der Erde
ω	Kreisfrequenz
ω^*	reduzierte Frequenz
ϑ	Polarkoordinate in Spannweitenrichtung (positiv von rechts nach links laufend)
Φ	Rollwinkel, Hängewinkel
$\Phi(t)$	WAGNER-Funktion $\Phi(t)$
Ψ	Azimut
$\Psi(t)$	KÜSSNER-Funktion
ρ	Luftdichte
σ	Schubeinstellwinkel
σ_W	Standardabweichung der Windgeschwindigkeit
Θ	Längslagewinkel
ξ	dimensionlose Koordinate in x-Richtung
ζ	dimensionlose Koordinate in z-Richtung

tiefgestelle Indizes

25	auf den ℓ/4-Punkt (des Profils) bezogen; am ℓ/4-Punkt
50	am ℓ/2-Punkt
a	aerodynamisch
a	außen
A	Anströmung
DLM	Doublet-Lattice-Methode
DP	Druckpunkt
e	experimentell
eff	effektiv
f	flugzeugfest
f	freier Wirbel
fl	flügelfest
EA	elastische Achse
F	Flügel
Flex	Flexibilität (Elastizität)
FR	Flügel-Rumpf-Kombination
FW	Fahrwerk
g	geodätisch
g	gebundener Wirbel
H	Höhenleitwerk
HK	Hinterkante
i	induziert

i	innen
j	betrachteter Aufpunkt
k	bahnfest
kal	kalibriert
kor	korrigiert
K	Bahngröße
K	Klappe
LSM	Tragflächenverfahren (Lifting Surface Method)
m	mittlere Größe
n	induzierender Schnitt
Nase	auf die Flügelnase bezogen
Nick	Nickbewegung
NP	Neutralpunkt
o	Oberseite
p	profilfest
P	Profil
Platte	ebene Platte
PM	Panelverfahren (Panel Method)
R0	Referenzzustand (für Korrektur, ohne Drehung, ohne Windfeld und ohne Flexibilität)
Ref0	Referenzzustand (für Kalibration, ohne Drehung, ohne Windfeld u. ohne Flexibilität)
Rot	Rotation
Starr	Starrkörper
Skelett	Skelettlinie des (örtlichen) Profils
Schlag	Schlagbewegung
SP	Schwerpunkt
t	tangential
turb	Turbulenzanteil
Tab	Tabellenaerodynamik
TW	Triebwerk
u	Unterseite
VK	Vorderkante
W	Wind
υ	betrachteter Elementarflügel (betrachteter Flügelschnitt)
∞	ungestört (im Unendlichen)

hochgestellte Indizes

’	induzierende Stelle
*	an der Hinterkante
**	am ℓ/4-Punkt
A	aerodynamisch
K	kinetisch
T	transponiert

allgemeine Vereinbarungen

$\dot{x}$	zeitliche Ableitung der Größe x
$\ddot{x}$	zweite zeitliche Ableitung der Größe x
$\underline{x}$	Vektor
$\overline{x}$	Mittelwert der Größe x
$\hat{x}$	Laplace-Transformierte von x
$\vec{x}$	rotierender, komplexer Zeiger der Größe x
dx	Inkrement der Größe x
d/dx	Ableitung nach der Größe x
$\partial/\partial x$	partielle Ableitung nach der Größe x
$\overset{(C)}{\int}$	CAUCHY'scher Hauptwert
$\sum_{n=l}^{M}{}'$	Summe ohne Berücksichtigung des Terms n = υ

Abkürzungen

CDB	Common Data Base
CFD	Computational Fluid Dynamics
DIN	Deutsches Institut für Normung
DLM	Doublet Lattice Method
FAA	Federal Aviation Agency
FBM	Full Potential Boundary Layer Method
FEM	Finite Elemente Methode
FFS	Full Flight Simulator
FMR	Fachgebiet für Flugmechanik und Flugregelung des ILR
IATA	International Air Transport Association
ICAO	International Civil Aviation Organisation
ILR	Institut für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin
LN	Luftfahrtnorm
LSM	Lifting Surface Method
MOSIS	Modular Simulation Software
PM	Panel Method
RPK	Revenue Passenger Kilometers
ZFB	Zentrum für Flugsimulation Berlin

1 Einleitung

1.1 Entwicklung des Luftverkehrs

Das langfristige Wachstum des Luftverkehrs wird sich auch in der Zukunft fortsetzen – in dieser grundsätzlichen Aussage stimmen heute alle Prognosen überein. Getragen wird das kontinuierliche, starke Wachstum des Luftverkehrs einerseits durch die Globalisierung der Industrie und andererseits durch die Liberalisierung des Luftverkehrs, die zu mehr Konkurrenz und sinkenden Preisen bei verbessertem Angebot führt. Bei einer prognostizierten Wachstumsrate von ca. 5% wird alle 15 Jahre eine Verdoppelung erreicht, siehe Bild 1.1.

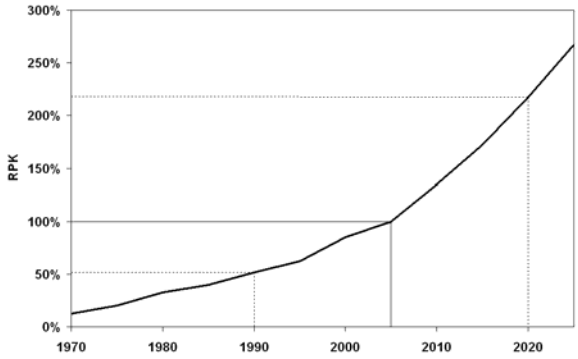

Bild 1.1 Entwicklung des Weltluftverkehrs in bezahlten Sitzkilometern RPK [Zimmermann/IATA 2005]

Der Luftverkehr bleibt damit eine der Wachstumsbranchen. Das starke Wachstum stellt Flughäfen, Airlines, Flugsicherung und Flugzeughersteller vor neue Herausforderungen. Einerseits muss die steigende Nachfrage befriedigt werden und andererseits zwingt die verschärfte Konkurrenz zur Ausschöpfung aller Einsparpotentiale. Das starke Wachstum hat insbesondere für die Flughäfen drastische Konsequenzen. So benötigen nach Angaben der Association of European Airlines 26 der 29 größten Flughäfen in Europa zusätzliche Terminalkapazitäten, 25 müssten ihre Runway-Kapazitäten erhöhen [Wolf 1998]. Bei den Airlines führt der steigende Kostendruck unter Anderem zur Bildung von Hubstrukturen mit großen internationalen Drehkreuzen sowie der Bildung von globalen Allianzen – der Langstreckenverkehr wird auf relativ wenige Flughäfen konzentriert, mittlere und kleinere Flughäfen übernehmen Zubringerdienste. Diese Konzentration auf Drehkreuze zwingt Flughäfen zur Einführung neuer Verfahren, wie z.B. den Zwei-Schwellenbetrieb auf einer Bahn am Flughafen Frankfurt/Main.

Damit befinden wir uns in einer Situation, in der ein stetig wachsender Luftverkehr auf eine kaum wachsende Bodeninfrastruktur trifft. Es ist daher nur logisch, dass sich an dieser Schnittstelle zunehmend Probleme ergeben. Waren die Gefährdungssituationen in der Vergangenheit noch geprägt durch niedrige Wolkendecke, schlechte Sicht, Vereisung sowie ungenügende Kenntnis verschiedener Windphänomene wie Scherwinde oder Gewitter-Fallwinde und damit dem System Luftverkehr von außen als Störgrößen aufgeprägt, sind die heutigen Probleme mehr vom System Luftverkehr selbst verursacht. Zur Lösung des beschriebenen Kapazitätsproblems gibt es prinzipiell mehrere Möglichkeiten:

1) Reduzierung der Wachstumsrate des Luftverkehrs,
2) Neubau bzw. Ausbau von Flughäfen,
3) Erhöhung der Transportkapazität pro Flugzeug,
4) Erhöhung des Durchsatzes von Flugzeugen durch Reduzierung der Sicherheitsabstände.

Regulatorische Eingriffe zur Reduzierung bzw. zur Beschränkung des Luftverkehrs scheiden aus, da sie einerseits unter arbeitsmarktpolitischen Gesichtspunkten kontraproduktiv sind und andererseits unsere moderne Lebensweise ein immer höheres Maß an Mobilität verlangt, wobei diese auch im Freizeitbereich eine immer größere Bedeutung hat. Der Neu- bzw. Ausbau von Flughäfen ist aus politischen Gründen heutzutage kaum möglich bzw. extrem langwierig. Dies ist zwar ein gesellschaftspolitischer Widerspruch in sich, aber eine Änderung dieser Situation ist nicht zu erwarten.

Damit konzentrieren sich die Maßnahmen auf die beiden letztgenannten Punkte. Beide Ansätze stehen in engem Zusammenhang zueinander, da die angewandten Regeln zur Festlegung des Sicherheitsabstandes von Flugzeugen im Anflugbereich im Wesentlichen auf Basis der Masse der beteiligten Flugzeuge erfolgt. Vereinfacht bedeutet diese Regelung, dass kleinere Flugzeuge einen größeren Abstand zu einem vorausfliegenden großen Flugzeug einhalten müssen als zwei aufeinander folgende gleich große Flugzeuge. Diese vom Prinzip her leicht einsichtige Regelung bedeutet aber auch, dass unter Umständen die Kapazität eines Flughafens durch größere Flugzeuge gar nicht oder nicht im gewünschten Maße gesteigert werden kann, da der Vorteil der höheren Transportkapazität einzelner Flugzeuge eventuell durch größere Abstände zu nachfolgenden Flugzeugen wieder aufgezehrt werden kann oder zumindest reduziert wird. Dies heißt nicht, dass das Problem auch mit diesen Maßnahmen nicht zu lösen ist, es bedeutet vielmehr, dass die Zusammenhänge sehr komplex sind und einen ganzheitlichen Ansatz erfordern. Folgerichtig misst daher das Airbus Konsortium dem Thema „Sicherheitsabstände" bei der Entwicklung des Airbus A380 eine große Bedeutung zu und das Thema „Wirbelschleppen" ist seit mehreren Jahren Gegenstand umfangreicher EU-Forschungsprojekte.

1.2 Sicherheitsabstände beim Landeanflug – Wirbelschleppen

Die Sicherheitsabstände wurden in den 70'er Jahren eingeführt, da mit den damals neuen Großraumflugzeugen (Boeing B747, Douglas DC10) zunehmend Gefährdungssituationen infolge von Wirbelschleppen auftraten. Solche Wirbelschleppen entstehen hinter jeder auftriebserzeugenden Fläche als Folge der Zirkulationsverteilung über der Spannweite, siehe Bild 1.2 [Heintsch 1994, Heintsch/Kindel 1994, www.Airliners.net 2006].

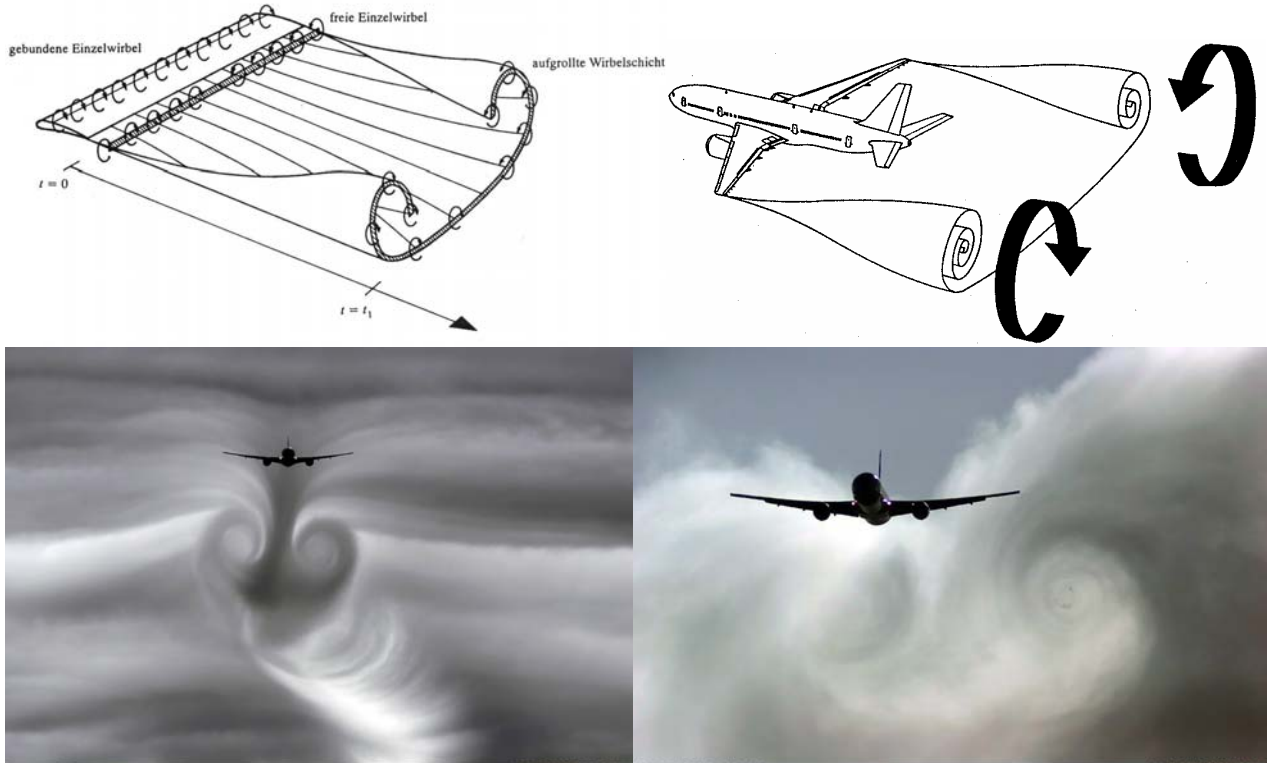

Bild 1.2 Die Entstehung von Wirbelschleppen [Heintsch 1994, Heintsch/Kindel 1994, www.Airliners.net 2006]

Hinter dem wirbelerzeugenden Flugzeug entsteht damit ein räumliches Geschwindigkeitsfeld mit sehr großen Amplituden und abrupten Vorzeichenwechseln, siehe Bild 1.3. Die Ausdehnungen in Querrichtung sind in Größenordnung der Flügelspannweite und damit relativ klein, während die Ausdehnung in Längsrichtung mehrere Kilometer beträgt.

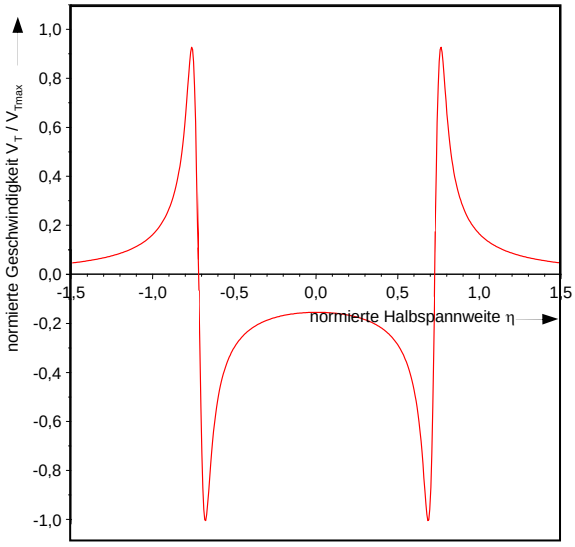

Bild 1.3 Die Geschwindigkeitsverteilung in einer Wirbelschleppe [Kulwatz/Kindel 1999]

Ein maßgebender Parameter für die Zirkulationsverteilung ist der erzeugte Auftrieb des wirbelerzeugenden Flugzeugs und damit sein Gewicht. Die Reaktion eines in einen Wirbel einfliegenden Flugzeuges wird wesentlich durch seine Massenträgheit und seine Flügelspannweite bestimmt. Um eine einfach handhabbare Regelung einführen zu können, bietet sich daher die Staffelung von Flugzeugen auf Grund ihrer maximalen Abfluggewichte an, die in den 70'er Jahren als Resultat umfangreicher Untersuchungen von der US-amerikanische Federal Aviation Agency FAA eingeführt wurde. Diese gewichtsbezogene Einteilung ist auch heute noch die Grundlage für die verschiedenen nationalen Regelungen, die auf den Empfehlungen der ICAO basieren, siehe Bild 1.4.

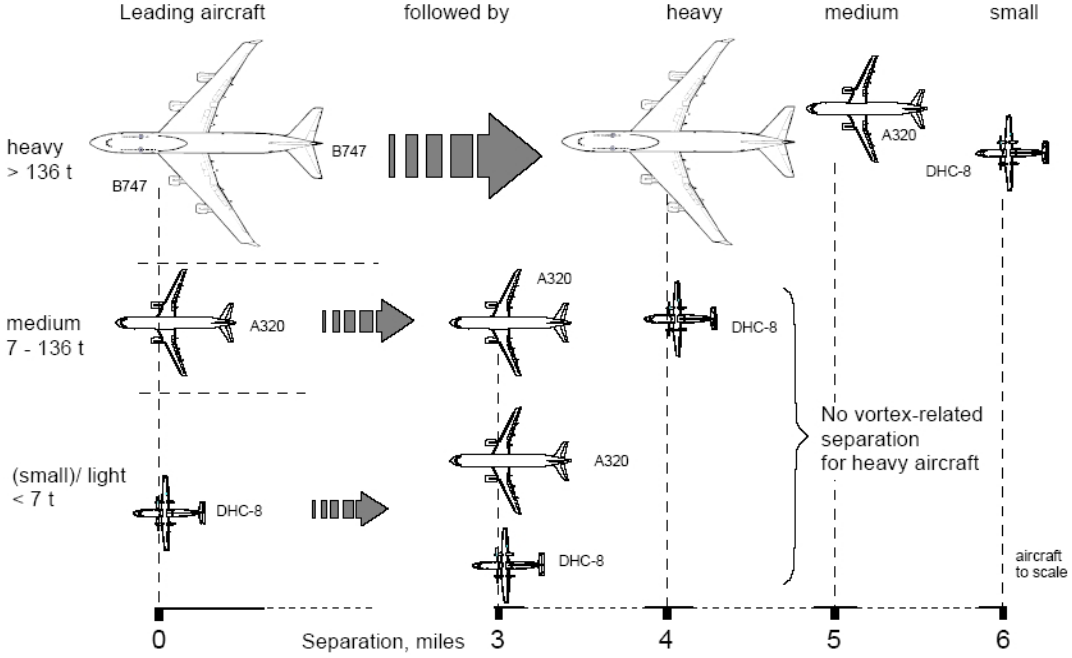

Bild 1.4 Die Wirbelschleppenstaffelung [de Bruin et al. 2003]

Diese einfache Regelung hat sich in der Vergangenheit bewährt und zu einer deutlichen Reduzierung wirbelschleppenbedingter Gefährdungen geführt [Heintsch 1994]. In den letzten Jahren hat sich jedoch gezeigt, dass das Gewicht allein kein ausreichendes Kriterium für eine sichere Staffelung ist, da bei bestimmten Flugzeugtypen die durch sie verursachten Wirbel stärker sind als erwartet. Dies hat z.B. für die Boeing B757 zu speziellen, vergrößerten Abstandsforderungen geführt – offensichtlich kann insbesondere die Lebensdauer von erzeugten Wirbeln durch das aerodynamische Design erheblich beeinflusst werden. Dies wird inzwischen bei der Entwicklung neuer Großraumflugzeuge wie z.B. dem Airbus A380 von vorneherein berücksichtigt, um den mit der Gewichtserhöhung verbundenen

kontraproduktiven Effekt der Wirbelverstärkung durch flankierende Maßnahmen möglichst zu vermeiden.

Sowohl die Entstehung und Ausbreitung von Wirbelschleppen als auch ihre Auswirkungen auf nachfolgende Flugzeuge stellen bereits jeweils für sich betrachtet äußerst komplexe Prozesse dar, deren Erforschung noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden kann. Da die bereits geschilderten Probleme in Bezug auf die Kapazitätserhöhung von Flughäfen dringend nach Lösungen verlangen, wurde die Untersuchung von Wirbelschleppen in den letzten Jahren erheblich intensiviert (z.B. EU-Vorhaben C-Wake, S-Wake und I-Wake).

1.3 Neue Großraumflugzeuge

Der harte Preiswettbewerb der Fluggesellschaften zwingt zur Nutzung jeden Einsparpotentials. Um die Kosten pro Sitzplatzkilometer weiter reduzieren zu können, wurden von den beiden großen zivilen Flugzeugherstellern Airbus und Boeing Konzepte für neue Großraumflugzeuge mit einem maximalen Abfluggewicht von bis zu 550 t untersucht. Von Airbus wurde im Jahr 2000 das hieraus hervorgegangene Projekt A380 offiziell gestartet und im April 2005 wurde der Erstflug absolviert. Bei der Entwicklung derartiger neuer Großraumflugzeuge, hier als "Macrobody" bezeichnet, sind eine Vielzahl neuer Aufgaben zu lösen. Neben den bereits angedeuteten Möglichkeiten zur günstigen Beeinflussung von Wirbelschleppen sind hier auch aeroelastische Problemstellungen zu betrachten. Da die Steifigkeit der Flugzeugstruktur nicht im gleichen Maße wie die Abmessungen erhöht werden kann, treten erhebliche elastische Verformungen auf. Diese elastischen Verformungen sowie Begrenzungen aufgrund der vorhandenen Flughafen-Infrastruktur legen die Maximalabmessungen eines solchen Macrobody auf ca. 80 m Spannweite und ca. 80 m Gesamtlänge fest. Bild 1.5 zeigt als Beispiel den A380 mit einer Spannweite von 79,8 m und einer Länge von 72,7 m bei einem MTOW von ca. 560 t im Vergleich zum A340 und A320 [Wiedemann 1995/Airbus 2006]. Beim A340-600 beträgt die Rumpflänge sogar 75,3 m, so dass auf Grund des im Vergleich zum A380 wesentlich schlankeren Bauform (Rumpfdurchmessers 5,6 m statt 8,7 m beim A380) die aeroelastischen Effekte noch stärker in Erscheinung treten.

		A320-100	A340-200	A380-800
Total Length	[m]	37,57	58,57	72,73
Total Span	[m]	33,91	60,30	79,75
Total High	[m]	11,76	21,50	24,18
Wing Area	[m²]	122,4	363,0	845
Tail Area	[m²]	31,0	71,5	210
Fin Area	[m²]	21,5	45,2	120
Seats	[-[	76	303	555
Payload	[t]	19,3	43,9	91,0
MTOW	[t]	73,5	257,0	560,0

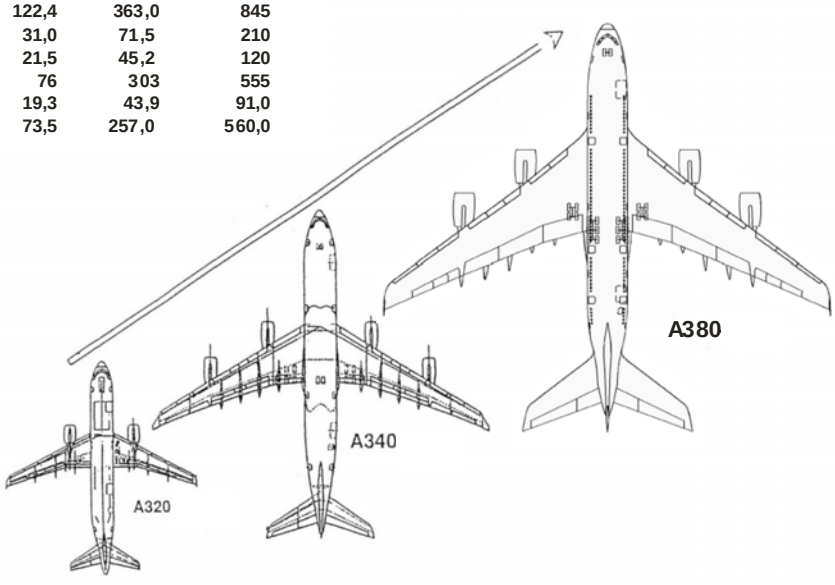

Bild 1.5 Größenvergleich A380 – A340 – A320 [Wiedemann 1995/Airbus 2006]

Aus flugmechanischer Sicht sind insbesondere drei Problemstellungen von besonderer Bedeutung. Erstens liegen die niedrigsten Struktur-Eigenfrequenzen solcher Flugzeuge im 1-Hertz-Bereich und damit im selben Frequenzbereich wie die flugmechanischen Freiheitsgrade sowie die Steueraktivität

des Piloten, so dass mit deutlichen Koppelungseffekten gerechnet werden muss. Zweitens können insbesondere durch die elastische Torsion des Flügels die Wirkungen konventioneller Querruder erheblich reduziert werden. Drittens wird durch elastische Verformungen die lokale Anströmung beeinflusst, so dass sich Veränderungen in den aerodynamischen Lastverteilungen insgesamt ergeben, siehe Bild 1.6. Hierbei sind nicht nur statische Verformungen zu berücksichtigen sondern auch die Auswirkungen dynamischer Verformungen. Die lokale Anströmung wird dabei sowohl durch Torsion als auch durch Schlagbewegungen beeinflusst.

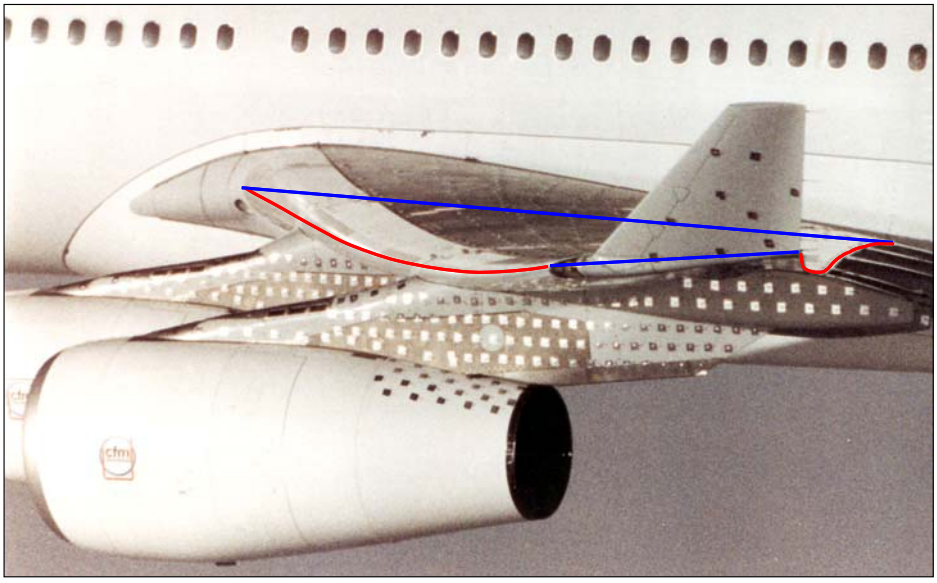

Bild 1.6 Elastische Flügelverformungen im Flug [Airbus]

Die genannten Phänomene haben erhebliche Auswirkungen auf die Flugeigenschaften und Steuerbarkeit sowie die Strukturbelastungen solcher Flugzeuge. Die bisher an Verkehrsflugzeuge gestellten Flugeigenschaftsforderungen sind unter Umständen nur schwer zu erfüllen, so dass überprüft werden muß, ob diese in der bisherigen Form aufrecht erhalten werden müssen. Die Untersuchung der Flugeigenschaften von Macrobody Flugzeugen ist daher Gegenstand von Forschungsvorhaben. Ziel hierbei ist einerseits eine Verbesserung des Kenntnisstandes auf dem Gebiet der Steuerung und Regelung solcher Flugzeuge und andererseits die Erstellung einer Flugeigenschaftsdatenbasis aufgrund detaillierter Sensitivitätsuntersuchungen.

1.4 Ziel der Arbeit

Bei den genannten Problemstellungen sind Teilgebiete nur durch experimentelle Versuche unter Einschluss von Piloten zu bearbeiten. Hierzu gehören insbesondere die Untersuchung von Flugzeugreaktionen beim Einflug in Wirbelschleppen und die Untersuchung der Flugeigenschaften sehr großer, flexibler Flugzeuge. Zur Vermeidung von echten Gefährdungssituationen und aus Gründen der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse sowie des noch gar nicht real existierenden Versuchsträgers (der A380 war in der Zeitspanne der bearbeiteten Projekte noch im Entwurfsstadium), können solche Untersuchungen nur mit Hilfe eines Flugsimulators durchgeführt werden. Dies bedeutet, dass der gesamte zu untersuchende flugdynamische Prozess durch ein mathematisches Modell abgebildet werden muss.

Sowohl zur Beschreibung komplexer Strömungsvorgänge als auch zur Beschreibung des aeroelastischen Verhaltens von Flugzeugstrukturen sind aufwändige Rechenverfahren verfügbar, die allerdings bei der Nachbildung der genannten Problemstellungen auch heute noch zum Teil an Grenzen stoßen, wie z.B. die vollständige Beschreibung aller aerodynamischen Effekte eines Flugzeuges in Landekonfiguration. Die Komplexität der nachzubildenden Prozesse für die Echtzeit-Flugsimulation geht über das bislang übliche weit hinaus. Durch die Einbeziehung des Piloten als zentrales Element in die Untersuchungen muss der simulierte Prozess in Echtzeit ablaufen, d.h. der Zeitmaßstab der Simula-

tion muss mit dem realen Ablauf übereinstimmen. Diese Anforderung begrenzt den möglichen Umfang der mathematischen Modelle bzw. stellt hohe Ansprüche an die erforderliche Rechenleistung.

Das Ziel der Arbeit besteht darin, ein mathematisches Modell zur Bestimmung der aerodynamischen Lastverteilungen für ein flexibles Flugzeug bei beliebigen, räumlichen Anströmungszuständen zu entwickeln und ihre Tauglichkeit durch die Implementation auf dem A330/A340-Flugsimulator an der TU Berlin nachzuweisen. Die aerodynamische Modellierung muss so gestaltet sein, dass mit begrenztem Aufwand vorhandene Flugsimulatoren durch Einfügung von Zusatzmodulen um die gewünschten Eigenschaften erweitert werden können. Neben reinen Forschungsanwendungen wird damit auch eine Nutzung in der Pilotenausbildung möglich. Dies stellt einen nicht unwesentlichen Aspekt zur Verbesserung der Flugsicherheit durch bessere Simulationsmodelle in der Pilotenausbildung dar. Das mögliche Anwendungsspektrum wird hierdurch enorm erweitert.

Durch die Forderung nach Echtzeitfähigkeit kommen nur relativ einfache Verfahren in Betracht. Trotz dieser Beschränkung müssen die zu entwickelnden Verfahren das wirkliche Geschehen genau genug nachbilden. Als genau genug soll hierbei verstanden werden, dass die wesentlichen Effekte korrekt wiedergegeben werden. Effekte, die vom Piloten nicht wahrgenommen werden können bzw. die das Gesamtverhalten nur in geringem Maße beeinflussen und für eine flugmechanische Beurteilung nicht maßgebend sind, können unberücksichtigt bleiben. Die entwickelten Modelle erheben damit nicht den Anspruch, das reale Geschehen in allen Feinheiten am besten zu beschreiben – das Ziel ist vielmehr, die genannten Prozesse für Echtzeitanwendungen möglichst gut zu beschreiben und einer Untersuchung auf Flugsimulatoren mit Piloten überhaupt erst zugänglich zu machen. Hierbei sind durch die aktuellen technischen Randbedingungen (Rechenkapazität) Grenzen gesetzt, die sich allerdings durch die technische Entwicklung ständig nach oben verschieben. Das vorgestellte Verfahren kann hieran einfach angepasst werden und so mit den technischen Möglichkeiten mitwachsen.

2 Einführung in die Echtzeit-Flugsimulation

2.1 Einsatzgebiete von Flugsimulatoren

Begriffsdefinition
Flugsimulatoren werden für verschiedene Zwecke eingesetzt. Ihr Einsatzspektrum reicht vom Pilotentraining bis zum Entertainementbereich. Eine wesentliche Eigenschaft ist jedoch allen Einsatzkategorien gemeinsam: Ein Flugsimulator soll den Piloten in eine Flugsituation versetzen, in der er interaktiv unter möglichst realistischen Bedingungen eine gestellte Aufgabe lösen soll. Der Handlungsablauf wird also durch den Piloten bestimmt. Geräte ohne diese Eingriffsmöglichkeit werden hier nicht betrachtet. Sie sind mehr dem Begriff „Kino“ zuzuordnen, auch wenn ihre technische Ausstattung durchaus der eines Flugsimulators vergleichbar sein kann.

Einsatzgebiete von Flugsimulatoren
Je nach Einsatzgebiet können Flugsimulatoren in folgende vier Kategorien eingeordnet werden, wobei mitunter auch Mischformen zu finden sind:

1) Pilotentraining,
2) Forschung,
3) Entwicklung,
4) Entertainement.

Aus diesen verschiedenen Kategorien ergeben sich unterschiedliche Anforderungen. Unter einem **Trainingssimulator** sollen hier so genannte „Full-Flight-Simulatoren“ für die Pilotenausbildung verstanden werden, die einem realen Flugzeugmuster so nahe wie möglich kommen müssen, siehe Bild 2.1. Der Pilot soll sich möglichst nicht vergegenwärtigen, dass er sich in einem Simulator befindet – seine Reaktionen wären dann unter Umständen nicht dieselben wie im realen Flugzeug, der Trainingseffekt wäre reduziert. Der gerätetechnische Aufwand ist daher sehr hoch, die Kosten (ohne Gebäude) liegen in der Größenordnung von 15-20 Mio. €. Zur Sicherstellung der notwendigen Realitätstreue ist eine Zulassung durch die Luftfahrtbehörden erforderlich.

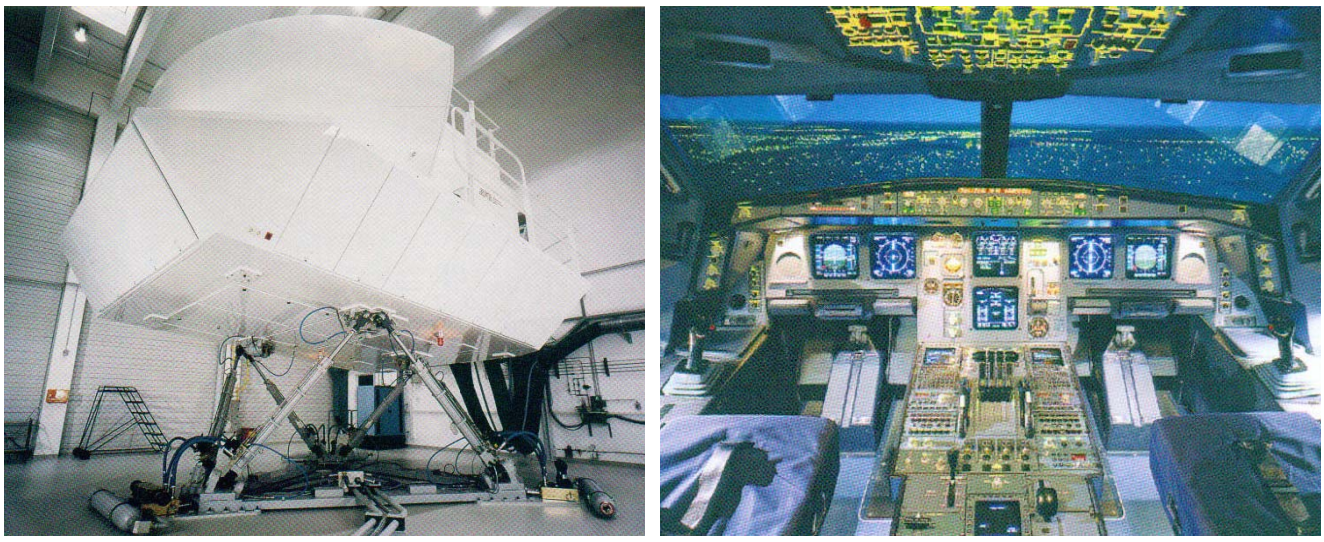

Bild 2.1 Moderner Flugsimulator für das Pilotentraining
Airbus A330/A340 Full-Flight-Simulator des Zentrums für Flugsimulation Berlin ZFB [ZFB]

Bei einem **Forschungssimulator** liegt der Einsatzschwerpunkt auf Grundlagenuntersuchungen wie z.B. Flugeigenschaften, Anflugverfahren bei schlechtem Wetter, Einsatz neuer Navigationssysteme, neue Crew-Konzepte etc. Sie werden von Forschungsinstituten und Universitäten betrieben. Da die Untersuchungsthemen sehr vielfältig sind und in kurzem Wechsel bearbeitet werden, ist ein hohes Maß an Flexibilität gefordert. An die technische Ausstattung werden im Vergleich zu Trainingssimulatoren in der Regel erheblich geringere Anforderungen gestellt. Insbesondere in Bezug auf Umfang und Qua-

lität der Geräusch-, Sicht- und Bewegungssimulation können bzw. müssen häufig deutliche Abstriche gemacht werden. Daher ist die Tauglichkeit eines Forschungssimulators für eine spezielle Aufgabe stets kritisch zu hinterfragen.

Unter einem **Entwicklungssimulator** wird ein Flugsimulator verstanden, der im Rahmen der Entwicklung eines neuen Flugzeugmusters vom Flugzeughersteller oder Zulieferer eingesetzt wird. Auf ein Bewegungssystem wird dabei häufig verzichtet. Die Aufgaben an einen solchen Entwicklungssimulator ändern sich daher mit der fortschreitenden Entwicklung eines neuen Flugzeugmusters. Zu Beginn wird er z.B. für Voruntersuchungen in der Konzeptphase eingesetzt, später evtl. für Details der Cockpitauslegung. Ein Entwicklungssimulator muss daher ähnlich wie ein Forschungssimulator fortlaufend an seine neuen Aufgaben angepasst werden, er wird aber im Zuge der Flugzeugentwicklung immer detaillierter und dem realen Flugzeug ähnlicher.

Als **Entertainement-Simulatoren** sollen hier alle Flugsimulatoren verstanden werden, die reinen Unterhaltungszwecken dienen. Dieser Bereich hat in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen. Sowohl die Ausstattung als auch die Qualität der Software wurde stark verbessert. Durch die Möglichkeit der Einbindung immer komplexerer Ausstattungspakete (Instrumentierung, Bedienelemente, Außensichtdarstellung) kann der Übergang zu Trainingssimulatoren durchaus fließend sein. Der Begriff „Entertainment“ ist deshalb hier ausdrücklich nicht abqualifizierend zu interpretieren, denn auch Trainingssimulatoren werden gelegentlich auch für reine Unterhaltungszwecke eingesetzt.

2.2 Grundlagen der Flugsimulation

Prinzipieller Aufbau eines Flugsimulators
Ein Flugsimulator besteht prinzipiell aus den folgenden drei Hauptkomponenten, siehe Bild 2.2:

a) Simulationsrechner mit Echtzeit-Betriebssystem und Software
b) Interfacesystem
c) Cockpit

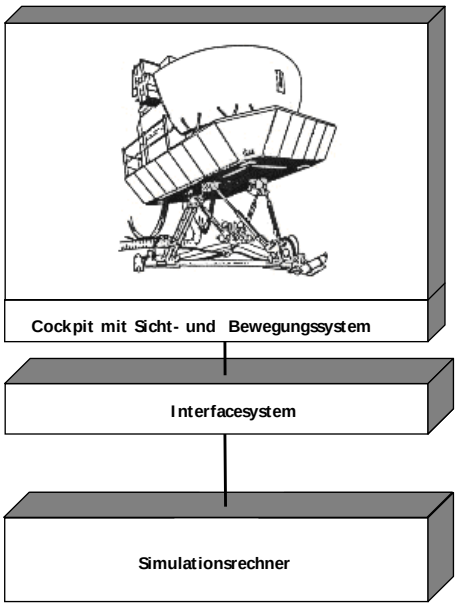

Bild 2.2 Prinzipieller Aufbau eines Flugsimulators

Je nach Einsatzzweck können insbesondere an Geräusch-, Sicht- und Bewegungssimulation die Anforderungen sehr unterschiedlich sein. So wird z.B. bei Forschungs- und Entwicklungssimulatoren häufig auf ein Bewegungssystem verzichtet und die Darstellung der Sicht auf ein relativ enges Sichtfeld begrenzt (z.B. ca. 45° statt ca. 180°).

Mathematische Grundlagen

Die Bewegungsgleichungen eines Flugzeuges sind nichtlinear und stark miteinander verkoppelt, so dass geschlossene analytische Lösungen nur unter Einführung von erheblichen Vereinfachungen für Sonderfälle möglich sind, z.B. Beschränkung auf stationäre Gleichgewichtszustände oder symmetrische Flugzustände. Solche Einschränkungen sind für Flugsimulationsanwendungen nicht akzeptabel, da hier die dynamische Bewegung des Flugzeuges im Raum mit allen sechs Starrkörper-Freiheitsgraden wiedergegeben soll. Die Lösung der Differentialgleichungen erfolgt daher durch schrittweise numerische Integration. Das Grundprinzip der numerischen Integration besteht darin, einen Flugzustand zum Zeitpunkt t_2 aus dem Zustand sowie den zeitlichen Ableitungen zum Zeitpunkt t_1 zu ermitteln. Dieses Prinzip wird am einfachsten beim so genannten EULER-Verfahren deutlich:

$$\underline{x}(t_2) = \underline{x}(t_1) + \dot{\underline{x}}(t_1)\Delta t \tag{2.01}$$

$\underline{x}(t)$ Zustandsvektor zum Zeitpunkt t
$\dot{\underline{x}}(t)$ zeitliche Ableitung des Zustandsvektors zum Zeitpunkt t
Δt Zeitinkrement

Der Wert des Zeitinkrementes (und damit die Simulationstaktrate) ist abhängig von der höchsten wiederzugebenden Frequenz. Er liegt bei Flugsimulatoren typischerweise bei ca. 20 ms, die Taktrate beträgt damit ca. 50 Hz. Zum Start der Simulation ($t = t_0$) wird durch eine Trimmrechnung ein stationärer Ausgangszustand ermittelt ($\dot{\underline{x}}(t < t_0) = \underline{0}$). Erst danach wird der eigentliche Echtzeitprozess gestartet.

Zur numerischen Integration sind eine Vielzahl von Verfahren entwickelt worden, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll [Schöne 1974, Schmidt 1980, Jacob 1982]. Allen Verfahren gemeinsam ist, dass sie (neben der Bestimmung des Anfangszustandes) die Bereitstellung der zeitlichen Ableitung des Zustandsvektors erfordern. Im Unterschied zum oben beschriebenen einfachen EULER-Verfahren werden bei Verfahren höherer Ordnung auch Informationen über die Krümmung der Zeitverläufe der einzelnen Zustandsgrößen verarbeitet, so dass eine höhere Genauigkeit und eine bessere numerische Stabilität erreicht werden kann.

In der Echtzeit-Flugsimulation wird das Flugzeug üblicherweise als quasi-starrer Körper betrachtet. Seine Bewegungsmöglichkeiten umfassen damit 6 Freiheitsgrade, jeweils 3 translatorische und 3 rotatorische. Die Formulierung der Bewegungsgleichungen führt damit auf 6 Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich in ein System von 12 Differentialgleichungen erster Ordnung umformen lassen. Die Bewegungsgleichungen ergeben damit die Ableitung des Zustandsvektors als Funktion des Zustandes selbst sowie der Steuer- und Störgrößen:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f\left(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{z}(t)\right) \tag{2.02}$$

$\underline{u}(t)$ Vektor der Steuergrößen zum Zeitpunkt t
$\underline{z}(t)$ Vektor der Störgrößen zum Zeitpunkt t

Unter Steuergrößen sollen alle gezielte Eingangsgrößen in den Prozess verstanden werden (durch den Piloten oder durch einen Flugregler hervorgerufen), während als Störgrößen alle ungewollten Eingangsgrößen bezeichnet werden, wie z.B. Wind, elastische Verformungen etc. Wie bereits erwähnt, sind die Bewegungsgleichungen nach Gl. (2.02) stark nichtlinear und miteinander verkoppelt, d.h. die Ableitung einer Komponente des Vektors $\dot{\underline{x}}(t)$ ist eine Funktion aller Komponenten der Vektoren $\underline{x}(t)$, $\underline{u}(t)$ und $\underline{z}(t)$. Dieser komplexe Zusammenhang stellt für die Lösung von Gl. (2.02) kein grundsätzliches Problem dar, bedeutet aber einen hohen Aufwand bei deren mathematischer Formulierung und ist mit einem erheblichen numerischen Aufwand innerhalb des Simulationsprozesses verbunden.

Bewegungsgleichungen

Die Beschreibung als quasi-starrer Körper ist für viele Flugzeuge ausreichend. Die auftretenden statischen Strukturverformungen (z.B. des Tragflügels) können durch vom Staudruck abhängige Zusatzfaktoren in den aerodynamischen Beiwerten des Gesamtflugzeugs berücksichtigt werden – Strukturschwingungen und Zeitverzögerungen werden hierbei jedoch nicht erfasst. Die auftretenden Eigenschwingungsformen heutiger Transportflugzeuge liegen in der Regel, bezogen auf die Flugzeugeigen-

bewegungen, in einem vergleichsweise hohen Frequenzbereich und sind bei niedrigen Fluggeschwindigkeiten gut gedämpft, so dass diese vereinfachte Betrachtung zu guten Ergebnissen führt. Die Bewegungsgleichungen erhält man aus der Formulierung des Kräfte- und Momentengleichgewichts[1]:

$$-\underline{F}^{K} = \underline{G} + \underline{F} + \underline{R}^{A} \tag{2.03}$$

$$-\underline{M}^{K} = \underline{M}^{F} + \underline{M}^{A} \tag{2.04}$$

Die auf der linken Seite enthaltene Massenkraft $\underline{F}^{K}$ bzw. das Massenmoment $\underline{M}^{K}$ erhält man durch den Impuls- bzw. den Drallsatz – auf der rechten Seite stehen die äußeren Kräfte bzw. Momente infolge Gewicht $\underline{G}$, Schub $\underline{F}$ bzw. $\underline{M}^{F}$ und Aerodynamik $\underline{R}^{A}$ bzw. $\underline{M}^{A}$. Üblicherweise wird zur Formulierung von Gl. (2.03) bzw. Gl. (2.04) das flugzeugfeste Koordinatensystem gewählt, da hierbei der Trägheitstensor konstant ist und damit das Massenmoment besonders einfach zu formulieren ist. Da der Ursprung im Schwerpunkt liegt, entfällt in Gl. (2.04) das Gewichtsmoment.

Für die Massenkraft bzw. das Massenmoment gilt[2]:

$$\underline{F}_{f}^{K} = -m\begin{bmatrix}\dot{u}_K\\ \dot{v}_K\\ \dot{w}_K\end{bmatrix}_f - m\begin{bmatrix}q w_K - r v_K\\ r u_K - p w_K\\ p v_K - q u_K\end{bmatrix}_f \tag{2.05}$$

$$\underline{M}_{f}^{K} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz}\\ 0 & I_y & 0\\ -I_{xz} & 0 & I_z\end{bmatrix}_f \begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\\ \dot{r}\end{bmatrix}_f + \begin{bmatrix} qr(I_z - I_y) - pqI_{xz}\\ rp(I_z - I_y) + (p^2 - r^2)I_{xz}\\ pq(I_z - I_y) + qrI_{xz}\end{bmatrix}_f = \tag{2.06}$$

u_K, v_K, w_K Komponenten des Bahngeschwindigkeitsvektors $\underline{V}_K$ (Translation des Flugzeuges gegenüber der Erde)

p, q, r Komponenten des Drehgeschwindigkeitsvektors $\underline{\Omega}_K$ ((Rotation des Flugzeuges gegenüber der Erde)

I_x, I_y, I_z, I_{xz} Komponenten des Trägheitstensors

Die äußeren Kräfte bzw. Momente werden zunächst jeweils in einem für ihre physikalische Beschreibung günstigen Koordinatensystem formuliert (gekennzeichnet durch die Indizes g für geodätisch, f für flugzeugfest und a für aerodynamisch):

$$\underline{G}_g = \begin{bmatrix}0\\0\\G\end{bmatrix} \qquad \underline{F}_f = \begin{bmatrix}\cos\sigma\\0\\-\sin\sigma\end{bmatrix} F \qquad \underline{R}_a^A = \begin{bmatrix}-A\\Q\\-W\end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_f^F = \begin{bmatrix}0\\r_F\\0\end{bmatrix} F \qquad \underline{M}_a^A = \begin{bmatrix}L^A\\M^A\\N^A\end{bmatrix} \tag{2.07}$$

G Gewichtskraft

F Schub

σ Schubeinstellwinkel

A, Q, W Komponenten der Luftkraft Auftrieb, Querkraft, Widerstand

L^A. M^A, N^A Komponenten des Luftmomentes Rollmoment, Nickmoment, Giermoment

r_F Schubradius (Hebelarm der Schubkraft zum Schwerpunkt)

[1] Die hier verwendeten Bezeichnungen sind in der LN 9300 bzw. in der DIN 9300 definiert.

[2] Es gelten folgende Vereinfachungen: starres Flugzeug, Koordinatenursprung im Schwerpunkt, symmetrisches Flugzeug, Drall rotierender Teile ist klein und ändert sich nicht.

Mit den entsprechenden Transformationsmatrizen, die z.B. [LN 9300 1970] entnommen werden können, werden die Kräfte bzw. Momente in das flugzeugfeste Koordinatensystem transformiert und man erhält:

Kräftegleichgewicht:

$$m\begin{bmatrix}\dot{u}_K\\ \dot{v}_K\\ \dot{w}_K\end{bmatrix}_f + m\begin{bmatrix}q\,w_K - r\,v_K\\ r\,u_K - p\,w_K\\ p\,v_K - q\,u_K\end{bmatrix}_f = mg\begin{bmatrix}-\sin\Theta\\ \sin\Phi\cos\Theta\\ \cos\Phi\cos\Theta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\sigma\\ 0\\ -\sin\sigma\end{bmatrix}F + \begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-W\\ Q\\ -A\end{bmatrix}_a \tag{2.08}$$

Momentengleichgewicht:

$$\begin{bmatrix}I_x & 0 & -I_{xz}\\ 0 & I_y & 0\\ -I_{xz} & 0 & I_z\end{bmatrix}_f\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\\ \dot{r}\end{bmatrix}_f + \begin{bmatrix}qr(I_z - I_y) - pqI_{xz}\\ rp(I_z - I_y) + (p^2 - r^2)I_{xz}\\ pq(I_z - I_y) + qrI_{xz}\end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix}0\\ r_F\\ 0\end{bmatrix}F + \begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L^A\\ M^A\\ N^A\end{bmatrix}_a \tag{2.09}$$

Φ, Θ, Φ Lagewinkel (Eulerwinkel) des Flugzeuges gegenüber der Erde
α, β Anstell- und Schiebewinkel (Anströmwinkel des Flugzeuges)

Dieses Gleichungssystem wird vervollständigt durch die Geschwindigkeitskinematik

$$\underline{V}_{Kf} = \underline{V}_f + \underline{V}_{Wf} \tag{2.10}$$

$$\underline{V}_{Kf} = \begin{bmatrix}u_K\\ v_K\\ w_K\end{bmatrix}_f \qquad \underline{V}_f = \begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{V}_{Wf} = \begin{bmatrix}\cos\Theta\cos\Psi & \cos\Theta\sin\Psi & -\sin\Theta\\ \sin\Phi\sin\Theta\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi & \sin\Phi\cos\Theta\\ \cos\Phi\sin\Theta\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi & \cos\Phi\cos\Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_W\\ v_W\\ w_W\end{bmatrix}_g \tag{2.11}$$

$\underline{V}$ Fluggeschwindigkeitsvektor (Translation des Flugzeuges gegenüber der Luft)
$\underline{V}_W$ Windgeschwindigkeitsvektor (Translation der Luft gegenüber der Erde)
u_W, v_W, w_W Komponenten des Windgeschwindigkeitsvektors $\underline{V}_W$

Ferner gilt zwischen den zeitlichen Änderungen der Eulerwinkel und den flugzeugfesten Drehgeschwindigkeiten der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix}\dot{\Phi}\\ \dot{\Theta}\\ \dot{\Psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta\\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi\\ 0 & \sin\Phi/\cos\Theta & \cos\Phi/\cos\Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}_f \tag{2.12}$$

Der A330/A340-Full-Flight-Simulator an der TU Berlin

Wie bereits dargelegt ist eine wesentliche Grundlage für Untersuchungen zum Einfluss von Wirbelschleppen bzw. für Flugeigenschaftsuntersuchungen die Beurteilung durch den Piloten. Der Idealvorstellung, dass ein Flugsimulator die Realität so gut wie nur möglich nachbilden soll, kommt ein moderner Trainingssimulator am nächsten. Die Forderung nach einer gewissen Flexibilität zur Anpassung an Forschungsaufgaben steht dazu im Widerspruch, da hierdurch Zulassungsfragen für die Zertifizierung als Trainingssimulator berührt werden.

Dieser grundsätzliche Konflikt zwischen Trainings- und Forschungssimulation wurde am A330/A340-Flugsimulator des Zentrums für Flugsimulation Berlin ZFB elegant gelöst. Bild 2.3 gibt einen Eindruck von der Komplexität der Systemarchitektur dieses Simulators [ZFB 2001]. Zusätzlich zu den Systemkomponenten eines Trainingssimulators (Cockpit, Instruktorstation, Sichtsytem, Bewegungssystem, Interfacesystem, Simulationsrechner) wurde dieser von vorneherein um einen zweiten Simulationsrechner und um ein Interface zur Einbindung versuchsspezifischer Hardwarekomponenten erweitert. Diese als Scientific Research Facility SRF bezeichnete Erweiterung kann modular zugeschaltet werden. Der Forschungsrechner ist ein direktes Abbild des Simulationsrechners für den Trainingsbe-

trieb und enthält die vollständige Simulationssoftware. Zulassungsprobleme werden so umgangen, da Modifikationen für Forschungszwecke ausschließlich auf dem Forschungsrechner erfolgen. Da auch nachgeschaltete Subsysteme wie z.B. das Bewegungssystem ihre Software per Download vom Simulationsrechner erhalten, sind so selbst tief greifende Modifikationen möglich. Im Trainingsbetrieb ist der Simulationsrechner 1 zugeschaltet, während im Forschungsbetrieb auf den Simulationsrechner 2 umgeschaltet wird. Zusätzlich kann für besonders rechenzeitintensive Anwendungen auf einen weiteren, externen Simulationsrechner 3 umgeschaltet werden. Dieser dritte Rechner wurde im Rahmen des BMBF-Vorhabens „Flugeigenschaften sehr großer, elastischer Flugzeuge“ FEGEF, Förderkennzeichen 20A9503C, beschafft und in die komplexe Infrastruktur integriert.

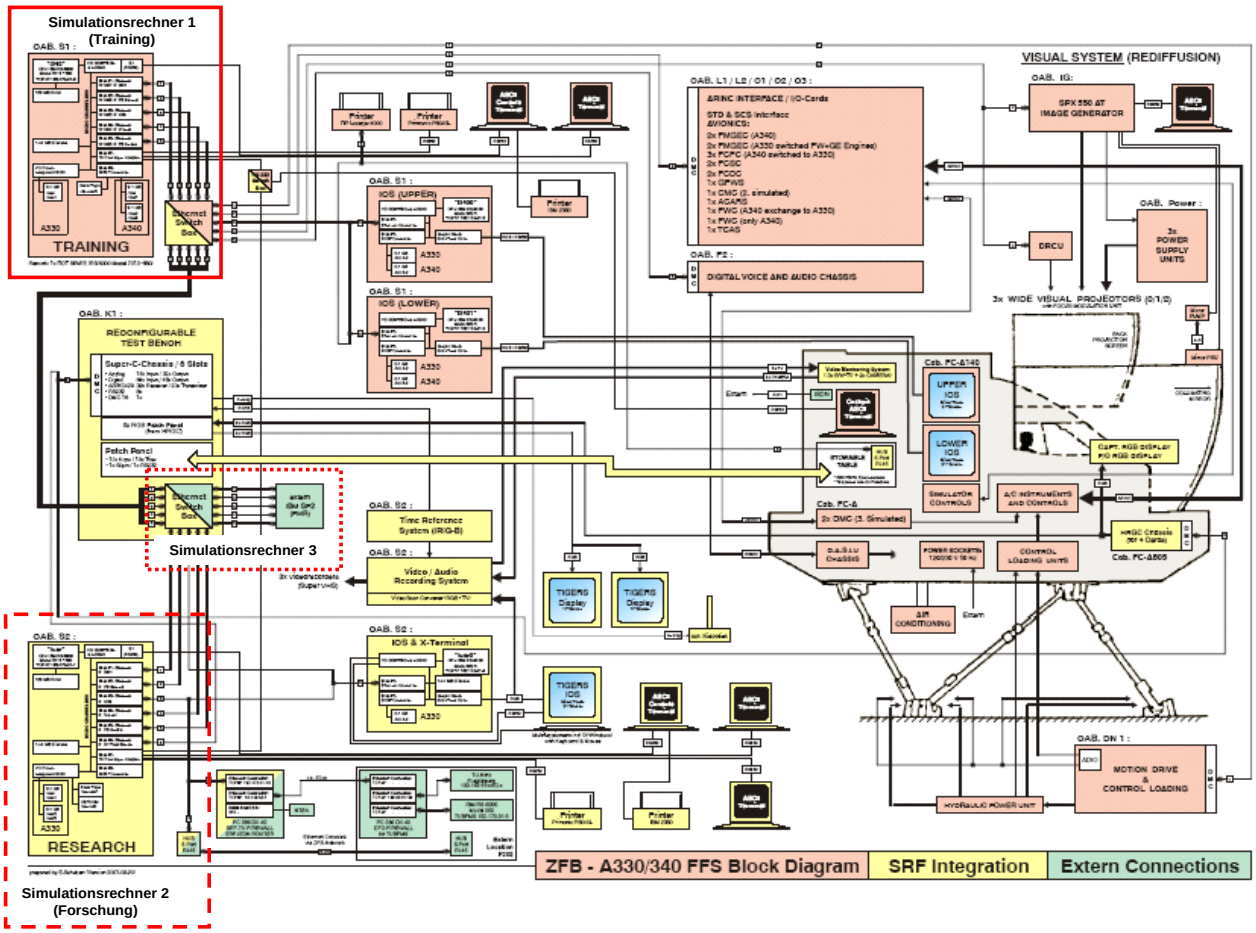

Bild 2.3 Systemarchitektur des A330/A340-Simulators mit SRF des ZFB [ZFB]

Zusätzlich zur SRF-Erweiterung bietet dieser Simulator die Möglichkeit, sowohl einen Airbus A330 als auch einen A340 nachzubilden. Dies wird durch modularen Austausch von Hardwarekomponenten im Cockpit und im Avioniksystem sowie Umschalten in der Software ermöglicht. Durch seine Zulassung als Full-Flight-Simulator (FFS) entsprechend FAA Level D erfüllt der A330/A340-Simulator die höchsten Anforderungen. Da die beiden Flugzeugmuster A330/A340 bei Großraumflugzeugen den aktuellen Stand der Technik darstellen, ist er zudem eine ideale Grundlage für Untersuchungen mit modernen Verkehrsflugzeugen.

Dieser Aspekt sollte nicht vernachlässigt werden, da bei allen Simulatorversuchen grundsätzlich zunächst sichergestellt sein muss, dass die jeweiligen Piloten auch mit dem Flugzeug gut vertraut sind. Diese notwendige Eingewöhnung kann auf ein Minimum reduziert werden, wenn zum einen der Simulator tatsächlich vollständig alle Bedienelemente aufweist, wie sie ein Pilot kennt und zum anderen das simulierte Flugzeugmuster weit verbreitet ist. Beim A330/A340-Simulator des ZFB wird dies noch dadurch unterstützt, dass dieser im täglichen Betrieb für die Pilotenausbildung eingesetzt wird und somit den Piloten erstens als qualifiziertes Tool bekannt und vertraut ist und zweitens ein einfacher, direkter Kontakt zur Gewinnung von erfahrenen Verkehrspiloten für Simulatorversuche sehr erleichtert wird.

3 Flugmechanische Modellierung für die Echtzeit-Flugsimulation

3.1 Grundlagen

Bei der flugmechanischen Beschreibung der Bewegungsabläufe von Flächenflugzeugen spielt die Berücksichtigung des Windeinflusses eine wesentliche Rolle. Eine realistische Nachbildung verschiedener Windszenarien ist sowohl für das Pilotentraining als auch für die Forschung von großer Bedeutung. Für den Zusammenhang zwischen der Bahngeschwindigkeit $\underline{V}_K$ (Bewegung des Flugzeugs gegenüber der Erde), der Fluggeschwindigkeit $\underline{V}_A$ (Bewegung des Flugzeugs gegenüber der umgebenden Luft) und dem Wind $\underline{V}_W$ (Bewegung der Luft gegenüber der Erde) gilt:

$$\underline{V}_K = \underline{V}_A + \underline{V}_W \tag{3.01}$$

Der Einfluss von Wind auf die Flugzeugbewegung wird deutlicher, wenn man diese einfache Beziehung nach dem Anströmvektor $\underline{V}_A$ auflöst:

$$\underline{V}_A = \underline{V}_K - \underline{V}_W \tag{3.02}$$

Änderungen des Windvektors wirken sich direkt auf die Fluggeschwindigkeit (Anströmung) aus, da sich die Bahngeschwindigkeit infolge der Massenträgheit nur langsam ändern kann. Diese Änderung der Anströmung betrifft sowohl den Betrag V als auch die Richtung (Anstellwinkel α und Schiebewinkel β). Die Berücksichtigung in den flugmechanischen Bewegungsgleichungen Gl. (2.08) erfolgt durch eine konsequente Unterscheidung von Bahngeschwindigkeit $\underline{V}_K$ bzw. ihrer Komponenten u_K, v_K und w_K auf der linken Seite des Gleichungssystems und Fluggeschwindigkeit $\underline{V}_A$, ausgedrückt durch V, α und β, die in die aerodynamischen Kräfte (und Momente) auf der rechten Seite des Gleichungssystems eingehen.

Eine Windstörung führt daher zu unmittelbaren Änderungen in den aerodynamischen Kräften und Momenten. Die hierdurch hervorgerufenen Beschleunigungen wiederum bewirken durch ihre zeitliche Integration eine Änderung des Bahngeschwindigkeitsvektors. Eine Windstörung wirkt sich damit zunächst sofort auf den Kräfte- und Momentenhaushalt aus, langfristig jedoch auf die Flugbahn. In Bezug auf die Flugsicherheit sind damit

a) schnelle, große Windstörungen besonders gefährlich, weil sie direkt, ohne nennenswerte Verzögerungen das Kräfte- und Momentengleichgewicht stören und
b) langsame, mittlere Windstörungen unter Umständen gefährlich, weil sie zunächst durch ihre geringen Auswirkungen auf die Fluggeschwindigkeit schlecht erkannt werden, aber in ihrer zeitlichen Auswirkung die Flugbahn erheblich beeinflussen können.

Die Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen Flugzeug und Atmosphäre spielt daher insbesondere bei Flugsicherheitsszenarien eine herausragende Rolle. Für Echtzeitanwendungen kommen bislang jedoch nur relativ einfache Modellansätze zum Einsatz. Eine Unterteilung dieser Modelle kann nach der Anzahl der berücksichtigten aerodynamischen Aufpunkte vorgenommen werden:

a) Ein-Punkt-Modell,
b) Zwei-Punkt-Modell,
c) Vier-Punkt-Modell,
d) Streifenmethode.

Die ersten drei werden auch als konzentrierte Modelle bezeichnet, da die aerodynamischen Kräfte nicht als verteilte Lasten ermittelt werden – dies ist erst bei der Streifenmethode möglich. Der grundsätzliche Zusammenhang zur Berücksichtigung des Windeinflusses auf die Flugzeugbewegung entsprechend Gl. (3.02) ist zwar sehr einfach, wird aber in der Praxis durch unsaubere Definitionen häufig erheblich erschwert. Die Ursache hierfür liegt darin, dass nicht immer korrekt zwischen Bahngeschwindigkeit und Fluggeschwindigkeit unterschieden wird. Ist bereits eine Flugsimulationssoftware erstellt, bei der in der Vergabe der Variablennamen keine strikte Unterscheidung zwischen diesen verschiedenen physikalischen Größen eingehalten wurde, ist eine spätere Berücksichtigung des Windeinflusses mit so großem Aufwand verbunden, dass eine Modifikation praktisch nicht mehr möglich ist. Dies ist leider in der Trainingssimulation häufig der Fall.

3.2 Aerodynamische Modelle für die Echtzeit-Simulation

Allgemeines
Unter dem aerodynamischen Modell eines Flugsimulationsprogrammes wird derjenige Teil der Software verstanden, der sämtliche aerodynamische Kräfte und Momente als Funktionen aller Einflussgrößen zur Verfügung stellt:

$$\underline{C} = \underline{G}\left(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{u}, \underline{z}, Ma, Re\right) \tag{3.03}$$

mit dem Vektor $\underline{C}$

$$\underline{C} = \left[C_X; C_Y; C_Z; C_l; C_m; C_n\right]^T \tag{3.04}$$

C_i dimensionslose Kraft- bzw. Momentenbeiwerte
$\underline{G}$ nichtlineare Vektorfunktion

Die Formulierung des Zusammenhangs zwischen den Eingangsgrößen und den Ausgangsgrößen (die aerodynamischen Beiwerte) in Gl. (3.03) kann auf vielfältige Art und Weise erfolgen. Sie ist in erster Linie davon abhängig, welche aerodynamischen Daten in einem konkreten Fall zur Verfügung stehen. Es soll zwischen folgenden Modellierungsvarianten unterschieden werden:

a) generische, parametrische Modelle
b) spezifische Modelle

Spezifische Modelle können sein

- analytische Modelle
- Tabellenaerodynamik

Generische Modelle sind flugzeugunspezifisch formuliert. Die Festlegung auf ein spezielles Flugzeug erfolgt erst durch die Vergabe von Zahlenwerten für bestimmte Parameter. Durch die allgemeine Formulierung sind solche Modelle typischerweise in Form von analytischen Gleichungen formuliert. Sie zeichnen sich im Allgemeinen durch einen relativ einfachen und übersichtlichen Aufbau aus. Die verwendeten Gleichungen können aerodynamischen oder flugmechanischen Lehrbüchern entnommen werden [Schlichting/Truckenbrodt II 1969, Schänzer 1979, Wilhelm 1999, Etkin 1996].

Spezifische Modelle sind, wie der Name bereits andeutet, nur für ein Flugzeugmuster gültig. Hierbei wird der Tatsache Rechnung getragen, dass die aerodynamischen Eigenschaften von einer Vielzahl von Parametern abhängig sind und eine allgemeine Formulierung fast zwangsläufig zu Vereinfachungen und damit Ungenauigkeiten führen muss. Hochgenaue Aerodynamikmodelle fallen daher im Allgemeinen in diese Kategorie. Da die in Gl. (3.03) in der Funktion $\underline{G}$ enthaltenen Zusammenhänge hochgradig nichtlinear und komplex sind, ist bei hohen Anforderungen an die Genauigkeit des Modells eine rein mathematische Formulierung kaum möglich bzw. würde zu sehr komplexen Funktionen führen. Da hier die Grenzen durch die Forderung nach Echtzeitfähigkeit relativ eng gezogen sind, wird deshalb auf eine so genannte Tabellenaerodynamik zurückgegriffen. Hierbei werden in der Zeitschleife der Simulation anstatt der Lösung analytischer Gleichungen lediglich vorab berechnete Tabellen ausgelesen und interpoliert. Die Komplexität der Zusammenhänge spielt damit keine Rolle.

Die Eingangsgrößen (Stützstellen) für diese Tabellen sind Flugzustands- sowie Steuergrößen, als Ergebnis erhält man die aerodynamischen Beiwerte. Um die Tabellen und die notwendigen Such- und Interpolationsalgorithmen nicht zu komplex werden zu lassen, werden die verschiedenen Einflussgrößen einzeln behandelt und die einzelnen Terme anschließend überlagert. Im Aerodynamikmodell des A340-FFS wird z.B. der Auftriebsbeiwert wie folgt gebildet:

$$\begin{aligned} C_A = {} & \Delta_\alpha C_A + \Delta_\beta C_A + \Delta_q C_A + \Delta_{\dot\alpha} C_A + \Delta_\xi C_A + \Delta_\eta C_A + \Delta_{Spoiler} C_A \\ & + \Delta_{TW} C_A + \Delta_{FW} C_A + \Delta_{Schubumkehr} C_A + \Delta_{Boden} C_A + \Delta_{Lastvielfaches} C_A \end{aligned} \tag{3.05}$$

Die Ausdrücke $\Delta_i C_A$ stellen den Anteil der jeweiligen Einflussgröße i am Gesamtbeiwert C_A dar. Jeder Anteil $\Delta_i C_A$ wird durch zumindest eine Tabelle bereitgestellt, kann allerdings auch wieder durch meh-

rer Anteile zusammengesetzt werden, z.B. beim Beitrag Anstellwinkels α durch getrennte Behandlung der Flügel-Rumpf-Kombination und des Höhenleitwerks:

$$\Delta_{\alpha} C_A = \Delta_{\alpha FR} C_A + \Delta_{\alpha H} C_A \tag{3.06}$$

Der Aufbau der Gleichungen ist sehr einfach, lediglich die Vielzahl der Tabellen und ihre Optimierung in Bezug auf eine schnelle Auswertung führen auch hier zu einer gewissen Komplexität. Ein wesentlicher Vorteil der Tabellenaerodynamik liegt darin, dass die darin enthaltenen Zusammenhänge sowohl auf Ergebnissen aufwendiger CFD-Verfahren aufbauen können als auch Messergebnisse aus Flugversuchen beinhalten können. Sie haben sich daher überall dort durchgesetzt, wo eine hohe Genauigkeit des Modells gefordert ist, wie dies insbesondere bei der Trainingssimulation der Fall ist.

Ein Nachteil der Tabellenaerodynamik ist ihre geringe Flexibilität. Modifikationen der aerodynamischen Eigenschaften in den Tabellen selbst sind relativ aufwendig umzusetzen. Hier sind analytische Modelle eindeutig im Vorteil, da nur relativ wenige Parameter modifiziert werden müssen. Je nach Art des Programmaufbaus kann sogar eine Neu-Kompilierung vermieden werden. Diese hohe Flexibilität macht diese Modelle insbesondere für Forschungsanwendungen besonders geeignet, bei denen die aerodynamische Charakteristik häufig modifiziert werden muss.

Neben der Einteilung nach der Art des Aufbaus aerodynamischer Modelle erfolgt eine Klassifizierung nach dem Grad der „aerodynamischen Diskretisierung“ – anschaulich formuliert: eine Einteilung nach der Anzahl der Punkte, die zur Beschreibung des Anströmungszustandes betrachtet werden. Hierunter ist nicht die Tatsache zu verstehen, dass jeder umströmte Körper das ihn umgebende Strömungsfeld beeinflusst und damit an jedem Oberflächenpunkt des Körpers ein anderer Strömungszustand herrscht – dies ist in den aerodynamischen Beiwerten bereits enthalten, so dass die Beschreibung der Anströmung auf die Betrachtung eines Referenzpunktes reduziert werden kann. Nicht enthalten sind jedoch Effekte, die sich durch räumliche Windfelder, dynamische Verformungen der Struktur und durch dynamische Übergangsvorgänge z.B. bei schnellen Klappenausschlägen ergeben. Die Berücksichtigung dieser Phänomene erfordert die Betrachtung des Anströmungszustandes in mehreren Punkten. Der Grad der Komplexität des aerodynamischen Modells wird hierdurch wesentlich beeinflusst.

Ein-Punkt-Modell

Trotz der im Allgemeinen weit entwickelten Modelle zur Simulation der Flugzeugbewegung im Raum ist das Ein-Punkt Modell immer noch weit verbreitet. Wesentliche Ursachen hierfür sind zum einen die geringen Anforderungen an die Komplexität der erforderlichen aerodynamischen Daten und die Einfachheit der flugmechanischen Gleichungen. Beim Ein-Punkt-Modell wird, wie schon die Bezeichnung sagt, der Anströmungszustand nur für einen Referenzpunkt ermittelt und damit der Windvektor entlang der Abmessungen des Flugzeugs als konstant angesehen. Als Referenzpunkt wird in der Regel der Schwerpunkt gewählt, dies kann aber auch der Neutralpunkt oder jeder andere flugzeugfeste Punkt sein.

Dieses einfachste Modell liefert gute Ergebnisse, solange die Wellenlängen der Windstörungen im Vergleich zu den Flugzeugabmessungen klein sind. Für praktische Anwendungen bedeutet dies, dass zur Beschreibung des Einflusses von Windstörungen, die ausschließlich die niederfrequente Eigenform der Flugzeuglängsbewegung (Phygoide) anregen, das Ein-Punkt-Modell gut geeignet ist.

Zwei-Punkt-Modell

Beim Zwei-Punkt-Modell wird die Anströmung an zwei Referenzpunkten betrachtet – üblicherweise die Neutralpunkte des Flügels (bzw. der Flügel-Rumpf-Kombination) und des Höhenleitwerks. Hiermit lassen sich bereits in der Längsbewegung Windstörungen erfassen, die die Größenordnung der Flugzeugabmessungen erreichen. Der Einfluss einer Windstörung auf die schnelle Anstellwinkelschwingung wird durch das Zwei-Punkt-Modell daher richtig erfasst. Auch der Einfluss des Tragflügels auf das Höhenleitwerk (bei konventionellen Drachenkonfigurationen) einschließlich instationärer Effekte kann mit diesem Modellansatz modelliert werden [Kaufmann 1986]. Da sich beide Referenzpunkte in der Flugzeugsymmetrieebene befinden, können auch bei diesem Modell keine unsymmetri-

schen Windverteilungen berücksichtigt werden – der Einfluss eines gleich verteilten Schiebewinkels kann jedoch wiedergegeben werden.

Die heute in der Flugsimulation in der Regel eingesetzten aerodynamischen Modelle fallen in diese Kategorie. Die in Gl. (3.06) am Beispiel des Einflusses des Anstellwinkels auf den Auftriebsbeiwert dargestellte Aufteilung in Flügel-Rumpf-Kombination und in Höhenleitwerk ist typisch und entspricht der klassischen flugmechanischen Betrachtungsweise. Von einem echten Zwei-Punkt-Modell kann jedoch erst gesprochen werden, wenn die beiden betrachteten Referenzpunkte auch außerhalb des eigentlichen Aerodynamikmodells verfügbar sind um diese z.B. mit unterschiedlichen Windeinflüssen beaufschlagen zu können – die beiden Referenzpunkte müssen also „nach außen sichtbar“ sein. Ist dies nicht der Fall, handelt es sich effektiv nur um ein Ein-Punkt-Modell, da lediglich Laufzeiteffekte zwischen Flügel und Höhenleitwerk berücksichtigt werden.

Vier-Punkt-Modell

Das Vier-Punkt-Modell stellt gewissermaßen eine Erweiterung des Zwei-Punkt-Modells auf die Seitenbewegung dar. Die beiden zusätzlichen Referenzpunkte liegen z.B. an der linken bzw. rechten Tragflügelspitze, siehe Bild 3.1 [Kaufmann/Kindel 1990]. Beim Vier-Punkt-Modell kann mit den üblicherweise vorliegenden Daten eines Zwei-Punkt-Modells gearbeitet werden, d.h. es ist keine besondere aerodynamische Beschreibung erforderlich. Hierbei wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass es für die aerodynamischen Kräfte gleichgültig ist, ob sich das Flugzeug gegenüber der Luft oder ob sich die umgebende Luftmasse gegenüber dem Flugzeug bewegt. Die in den vier Referenzpunkten ermittelten Geschwindigkeitsvektoren können genutzt werden, um hieraus einen Vektor für die Rotationsgeschwindigkeit des Windfeldes zu bestimmen. In Analogie zu Gleichung (3.01) kann die Rotation des Flugzeuges gegenüber der umgebenden Luft aus der Differenz zwischen der Rotation des Flugzeugs gegenüber der Erde und der Rotation der Luftmasse gegenüber der Erde ermittelt werden:

$$\underline{\Omega}_A = \underline{\Omega}_K - \underline{\Omega}_W \tag{3.07}$$

mit den Drehgeschwindigkeitsvektoren

$$\underline{\Omega}_A = \begin{bmatrix} p_A \\ q_A \\ r_A \end{bmatrix} \qquad \underline{\Omega}_K = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \qquad \underline{\Omega}_W = \begin{bmatrix} p_W \\ q_W \\ r_W \end{bmatrix} \tag{3.08}$$

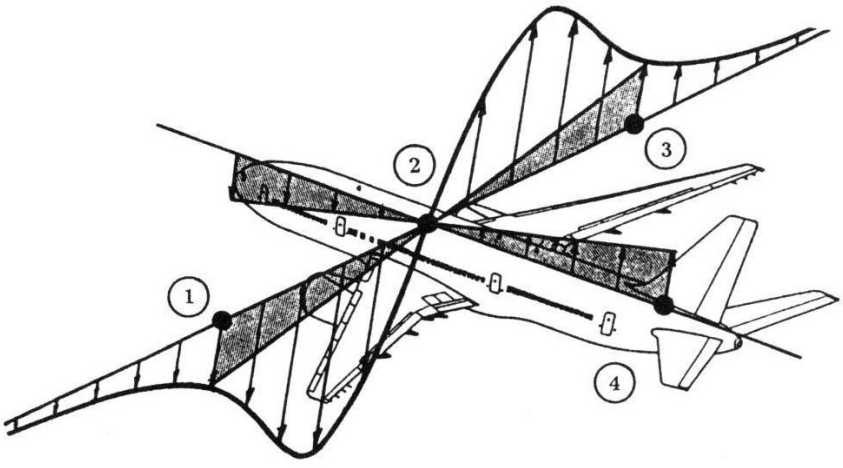

Bild 3.1 Referenzpunkte des Vier-Punkt-Modells [Kaufmann/Kindel 1990]

Die Komponenten des ermittelten Rotationsgeschwindigkeitsvektors $\underline{\Omega}_A$ werden in den aerodynamischen Gleichungen in identischer Weise verwendet wie sonst üblicherweise die Komponenten des Rotationsgeschwindigkeitsvektors $\underline{\Omega}_K$. Die allgemeine Form der Beschreibung der aerodynamischen Kräfte und Momente in der üblichen Form

$$\underline{R}^{A} = \frac{\rho}{2} V^2 S \cdot f(Ma, \alpha, \beta, p, q, r, \eta, \eta_K, \xi, \zeta ...)$$
$$\underline{M}^{A} = \frac{\rho}{2} V^2 S \, \ell_\mu \cdot f(Ma, \alpha, \beta, p, q, r, \eta, \eta_K, \xi, \zeta ...) \quad (3.09)$$

wird ersetzt durch

$$\underline{R}^{A} = \frac{\rho}{2} V^2 S \cdot f(Ma, \alpha, \beta, p_A, q_A, r_A, \eta, \eta_K, \xi, \zeta ...)$$
$$\underline{M}^{A} = \frac{\rho}{2} V^2 S \, \ell_\mu \cdot f(Ma, \alpha, \beta, p_A, q_A, r_A, \eta, \eta_K, \xi, \zeta ...) \quad (3.10)$$

Hier sei ausdrücklich darauf hingewiesen, das hierzu die in der Flugmechanik üblichen Gleichungen zur Beschreibung der aerodynamischen Kräfte und Momente nicht neu formuliert werden müssen sondern das in den Gleichungen die Komponenten des Vektors $\underline{\Omega}_K$ durch die Komponenten des Vektors $\underline{\Omega}_A$ ersetzt werden. Der mathematische Aufwand zur Implementation des Vier-Punkt-Modells auch in eine bereits existierende Software ist daher relativ gering, wenn bereits von vorneherein auf eine Unterscheidung zwischen Bahn- und Fluggeschwindigkeit geachtet wurde.

Mit dem Vier-Punkt-Modell können prinzipiell alle relevanten Windeinflüsse auf die Flugzeugbewegung berücksichtigt werden, wobei die kleinsten erfassbaren Wellenlängen der Windstörung in der Größenordnung der Flugzeugabmessungen liegen. Diese Modellierung ist damit zur Beschreibung von Windeinflüssen mittlerer Wellenlänge auf alle Starrkörper-Freiheitsgrade geeignet – aeroelastische Effekte und Auswirkungen kurzwelliger Windstörungen wie z.B. der Einflug in Wirbelschleppen können hiermit jedoch nicht untersucht werden – auch Böenlasten sind mit diesem Modell nicht zu ermitteln. Zur Untersuchung dieser Einflüsse ist eine weitere, erhebliche Verfeinerung des aerodynamischen Modells erforderlich, die einen neuen Ansatz erfordert.

Streifenmethode

Die Berücksichtigung kleinerer Wellenlängen von Windstörungen ist gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Zahl von Referenzpunkten, an denen die räumliche Verteilung der Windvektoren berücksichtigt wird. Bei der Streifenmethode wird der Tragflügel (bzw. das Höhenleitwerk) in eine endliche Anzahl von Streifen in Spannweitenrichtung unterteilt. Der Gesamtauftrieb des Tragflügels ergibt sich aus

$$A_F = \frac{\rho}{2} \sum_{n=1}^{M} V_n^2 \, S_n \, c_{aF,n} \quad (3.11)$$

Der Auftriebsbeiwert eines Flügelstreifens ergibt sich aus

$$c_{a,n} = c_{a0,i} + c_{a\alpha,n} \alpha_n \quad (3.12)$$

$c_{a,n}$	örtlicher Auftriebsbeiwert des Flügelstreifens n
$c_{a0,n}$	Nullauftriebsbeiwert des Flügelstreifens n
$c_{a\alpha,n}$	Auftriebsanstieg des Flügelstreifens n

Mit dem lokalen Anstellwinkel:

$$\alpha_n = \alpha - \Delta\alpha_{W,n} - \Delta\alpha_{K,n} - \varepsilon_F - \varepsilon_n \quad (3.13)$$

α_n	örtlicher Anstellwinkel
α	Anstellwinkel des Flugzeugs (berücksichtigt bereits $\underline{V}_W$)
$\Delta\alpha_{W\,n}$	örtlicher Zusatzanstellwinkel infolge Rotation des Windfeldes $\underline{\Omega}_W$
$\Delta\alpha_{K\,n}$	örtlicher Zusatzanstellwinkel infolge Rotation des Flugzeuges $\underline{\Omega}_K$
ε_F	Flügeleinstellwinkel
ε_n	örtliche Verwindung / Verformung

Die lokalen Kenngrößen jedes Flügelstreifens $c_{a0,n}$ und $c_{a\alpha,n}$ müssen für das betreffende Flugzeug bestimmt werden. In der Flugsimulation wird für die Berechnung der aerodynamischen Kräfte und Momente üblicherweise ein vom Flugzeughersteller erstellter Datensatz verwendet. Da die in heutigen Flugsimulatoren verwendeten aerodynamischen Modelle üblicherweise Zwei-Punkt-Modelle sind, sind in der Regel keine Daten über örtliche Beiwerte bzw. örtliche Derivativa vorhanden. Die für die Streifenmethode erforderlichen örtlichen Nullauftriebsbeiwerte und Auftriebsanstiege müssen daher zusätzlich bestimmt werden. Liegen diese Daten nicht vor, müssen entweder Kompromisse in Bezug auf die Genauigkeit eingegangen werden oder aufwendigere aerodynamische Verfahren eingesetzt werden. Eine einfache Methode ist die Berechnung der örtlichen Kenngrößen aus denen des Gesamtflügels unter Einführung von Wichtungsfaktoren W_i [Escande 2001]:

$$c_{a0F,n} = C_{A0F} W_n$$
$$c_{a\alpha F,n} = C_{A\alpha F} W_n \qquad (3.14)$$

W_n Wichtungsfaktor für das Streifenelement n

Ist die Auftriebsverteilung über der Spannweite unbekannt, kann als erste Näherung eine elliptische Zirkulationsverteilung zu Grunde gelegt werden [Escande, 2001]. Da die Anzahl der Streifen beliebig gewählt werden kann, ist eine hohe Auflösung möglich, allerdings ausschließlich in Spannweitenrichtung – kleinräumige Änderungen der Anströmverhältnisse in Profiltiefenrichtung können nicht erfasst werden. Diese Einschränkung kann jedoch häufig in Kauf genommen werden. Für dieses Modell sind gute Ergebnisse bei einfachen Flügelgeometrien zu erwarten (Rechteckflügel, Einfach-Trapezflügel), da hierfür zur Bestimmung der Wichtungsfaktoren zum Teil die Auftriebsverteilung aus der Literatur entnommen werden kann, z.B. [Schlichting/Truckenbrodt 1969]. Die Qualität der Streifenmethode wurde durch Vergleich mit Windkanalmessungen demonstriert [de Bruin et al. 2003], allerdings wurde hierzu lediglich eine Konfiguration mit einem einfachen Rechteckflügel verwendet, so dass die Ergebnisse keine Rückschlüsse auf gepfeilte Flügelkonfigurationen erlauben.

Ein wesentlicher Nachteil der Streifenmethode ist, dass die Betrachtung der einzelnen Streifen völlig unabhängig voneinander erfolgt – ein Streifenelement „weiß“ nichts darüber, was in seiner „Nachbarschaft“ passiert. Diese fehlende gegenseitige Induktion kann jedoch zu erheblichen Verfälschungen führen, insbesondere, wenn die Änderungen in der Anströmung von Streifen zu Streifen groß sind. Die tatsächliche Zirkulationsverteilung kann dann deutlich von der angenommenen (elliptischen) Zirkulationsverteilung abweichen. Der Vorteil der beliebigen Auflösung in Spannweitenrichtung zur Berücksichtigung kurzwelliger Störungseinflüsse geht dadurch teilweise wieder verloren. Ein Vorteil der Streifenmethode liegt in ihrer Einfachheit verbunden mit geringen numerischen Anforderungen. Sie wird in verschiedenen Projekten in der Echtzeitsimulation von Wirbelschleppeneinflügen eingesetzt [de Bruin et al. 2003].

3.3 Windmodelle für die Echtzeit-Simulation

Allgemeines
Die in der Flugsimulation heute verwendeten Windmodelle sind von sehr unterschiedlicher Komplexität. Allerdings wird der Grad der Komplexität nicht in erster Linie durch die Anzahl der „Messpunkte“ festgelegt, sondern eher durch die zu beschreibenden Wetterphänomene. Eine Klassifizierung der Modelle erfolgt daher sinnvollerweise anhand der Anzahl der unabhängigen Parameter.

Unter Wind sollen hier alle Luftmassenbewegungen verstanden werden, die von außen auf ein Flugzeug einwirken – der vom Flügel am Höhenleitwerk induzierte Abwind fällt damit nicht unter diese Definition. Die von einem Flugzeug erzeugte Wirbelschleppe ist für ein nachfolgendes Flugzeug jedoch äußerlich bedingt und wird daher ebenfalls als (künstlicher) Wind angesehen – dies gilt gleichermaßen auch für vertikale Luftströmungen über einem Kühlturm.

Ganz allgemein sind für die Entstehung des (natürlichen) Windes Luftdruckunterschiede in der Horizontalebene maßgeblich, die durch unterschiedliche Sonneneinstrahlung entstehen Die Erde wird dadurch von einem im langjährigen Mittel relativ konstanten System von Tief- und Hochdruckgebieten umgeben, die in breitenkreisparallelen Zonen angeordnet sind, siehe Bild 3.2. Diese großräumigen Druckgebilde steuern den horizontalen Luftmassentransport, siehe Bild 3.3.

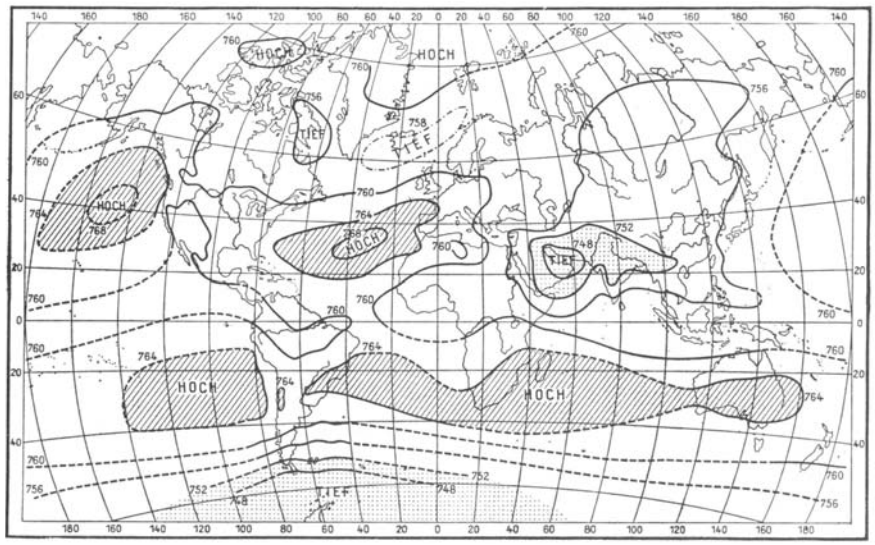

Bild 3.2 Langjährige mittlere Druckverteilung auf der Erde im Juli [England/Ulbricht 1990]

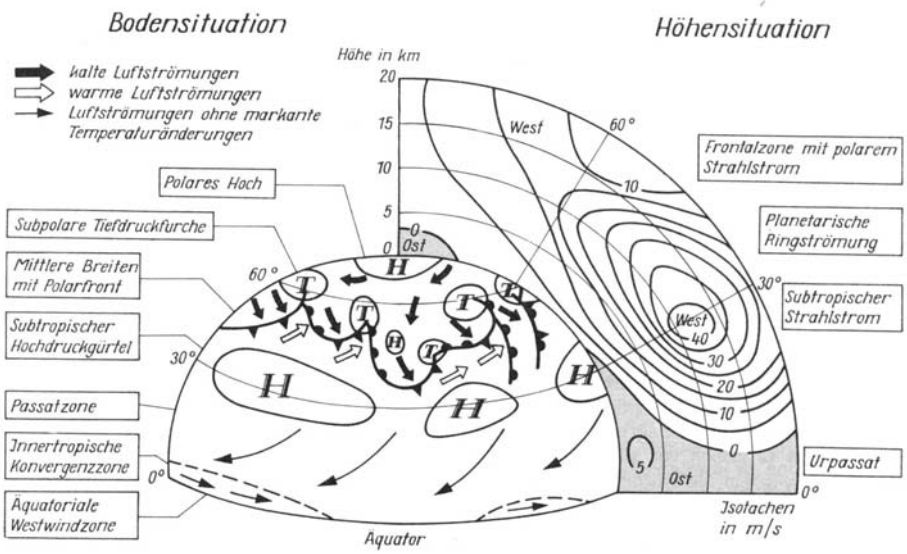

Bild 3.3 Schema der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre [England/Ulbricht 1990]

Die auftretenden Windgeschwindigkeiten können beträchtlich sein – die in Höhen von ca. 11 km auftretenden Jetstreams weisen typischerweise Windgeschwindigkeiten von ca. 300 km/h auf [Schänzer 1995]. Durch die horizontalen Ausgleichsströmungen entstehen in der Folge auch Vertikalbewegungen, die ebenfalls großräumig angelegt sind. Den großräumigen Luftmassenbewegungen ist eine Vielfalt von kleinräumigen Bewegungen überlagert, z.B. durch lokale unterschiedliche Aufwärmung über Land- und Seegebieten.

Wind und Turbulenz

Neben dem Begriff „Wind“ wird häufig auch der Begriff „Turbulenz“ verwendet. Eine eindeutige Trennung beider Begriffe ist nicht immer möglich, da es keine allgemein akzeptierte Definition für „Turbulenz“ gibt. Im Allgemeinen werden unter Turbulenz kleinräumige, kurzwellige Windfelder verstanden, die sich regellos verhalten und die sich daher nur durch statistische Methoden beschreiben lassen. Zur mathematischen Beschreibung atmosphärischer Bewegungen für Flugsimulationsanwendungen werden diese daher in eine mittlere Windgeschwindigkeit und in eine turbulente Bewegung zerlegt [Schänzer 1995]:

$$\underline{V}_W = \underline{V}_{Wm} + \underline{V}_{Wturb} \tag{3.15}$$

Die Bestimmung des mittleren Windes erfolgt durch Mittelwertbildung. Hierbei wird ein Zeitraum in der Größenordnung von einigen 10 Minuten gewählt, da das Spektrum gemessener Windgeschwindigkeiten in diesem Bereich typischerweise eine deutliche Lücke aufweist, wie Bild 3.4 zeigt.

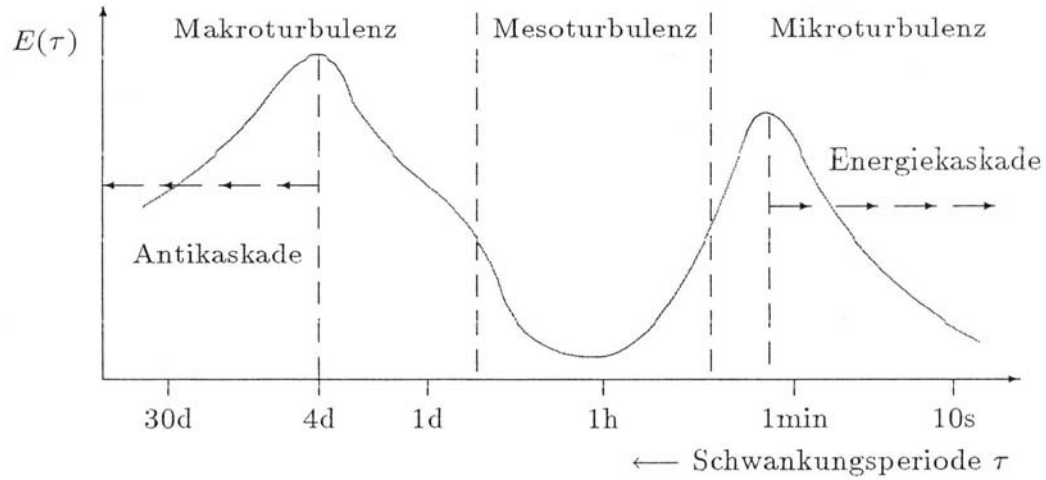

Bild 3.4 Lücke im Turbulenzspektrum [Etling 1993]

Für die mittlere Windgeschwindigkeit gilt damit

$$\underline{V}_{Wm} = \frac{1}{T}\int_0^T \underline{V}_W(t)\,dt \tag{3.16}$$

Da Turbulenz ein stochastischer Prozess ist, werden ihre Eigenschaften mathematisch am besten durch die Varianz beschrieben, die ein Maß für die Regellosigkeit ist:

$$\sigma_W^2 = \frac{1}{T}\int_0^T V_{Wturb}^2(t)\,dt \tag{3.17}$$

Je kleiner die Varianz desto turbulenzärmer ist die Atmosphäre. Einen Eindruck von der Größenordnung der Standardabweichung in der Atmosphäre vermittelt die subjektive Beurteilung von Piloten bei verschiedenen Versuchsflügen [Schänzer 1995]:

	$\sigma_W < 0{,}55$ m/s	keine Turbulenz
0,56 m/s	$< \sigma_W < 0{,}80$ m/s	schwache bis mittlere Turbulenz
0,81 m/s	$< \sigma_W < 1{,}50$ m/s	starke Turbulenz
1,51 m/s	$< \sigma_W$	extrem starke Turbulenz

Sowohl der mittlere Wind als auch die Luftturbulenz sind vektorielle Größen, wie auch Gl. (3.15) zeigt. Die Beziehungen der drei Vektorkomponenten untereinander sind hierbei bestimmten Gesetzmäßigkeiten unterworfen, die von der Art des zu beschreibenden Windphänomens abhängig sind. Diese Zusammenhänge kommen in den im Folgenden beschriebenen Modellen zum Ausdruck. Nähere Angaben zu Böenmodellen können JAR 25, MIL-F 8587 bzw. MIL-F 1797 A entnommen werden.

Eindimensionale Windmodelle

Unter eindimensionalen Modellen sollen Windmodelle verstanden werden, die lediglich durch einen unabhängigen Parameter bestimmt sind. Hierzu zählen in erster Linie Bodengrenzschicht-Modelle, bei denen in Abhängigkeit von der Flughöhe der Windvektor in Betrag Richtung beschrieben wird. Eine Hauptursache für das Entstehen des horizontalen Windes sind durch unterschiedliche Temperaturen entstehende großräumige Druckunterschiede in der Atmosphäre. Durch den Einfluss der Bodenreibung und der Corioliskraft ändern sich hierbei innerhalb der Bodengrenzschicht Betrag und Richtung des Windvektors. Aufgetragen über der Höhe beschreibt der Windvektor einen spiralförmigen Verlauf, der nach seinem Entdecker auch als EKMAN-Spirale bezeichnet wird. Eine gute Approximation der turbulenten Bodenströmung ist der von PRANDTL formulierte Ansatz [Prandtl 1965]:

$$u_W = V_G \left(\frac{H}{H_G} \right)^m$$
$$w_W = u_W \left(\frac{H}{H_G} - 1 \right) \tan \Delta\chi_{W,G} \tag{3.18}$$

Der Index „G“ kennzeichnet hierbei den Zustand am Rande der Grenzschicht. Der Exponent m ist eine Funktion der Bodenbeschaffenheit und liegt typischerweise im Wertebereich zwischen 0,1 und 0,4. Für den Ablenkwinkel des Windes zwischen Boden und Grenzschichtrand gilt nach PRANDTL:

$$\tan \Delta\chi_{W,G} = \sqrt{m(m+2)} \tag{3.19}$$

mit der Definition

$$\Delta\chi_{W,G} = \chi_{WG} - \chi_{W,H=0} \tag{3.20}$$

Für den Exponenten m wird von SWOLINSKY [Swolinsky 1986] eine Näherung angegeben, die sowohl die Bodenrauhigkeit als auch Stabilitätseinflüsse der Atmosphäre berücksichtigt:

$$m = 0{,}345 + 0{,}096 \lg H_0 + 0{,}016 (\lg H_0)^2 + 10{,}7 \frac{dt}{dH} \tag{3.21}$$

Hierbei ist die Bodenrauhigkeit H_0 in m und der Temperaturgradient dt/dH in [K/m] einzusetzen. Für die Bodenrauhigkeit können nach SWOLINSKY folgende Werte angegeben werden:

Tabelle 3.1 Bodenrauhigkeiten [Swolinsky 1986]

Geländetyp	**glatt**	**mittelrauh**	**rauh**	**sehr rauh**
Bezeichnung	Eis – Watt – Schnee – Meer	kurzes Gras – Gras – Weiden – Felder	Felder mit Bäumen – Wälder – Vororte	Städte
H_0 [m]	10^{-5} – $4*10^{-4}$ – 10^{-3} – 0,02	0,001 – 0,03 – 0,07 – 0,2	1,0 – 1,5	1,0 – 4,0

Bei üblichen Exponenten m zwischen 0,1 und 0,4 ist damit mit Ablenkwinkeln zwischen 24° und 45° zu rechnen. Bild 3.5 zeigt beispielhaft ein höhenabhängiges Windprofil entsprechend Gl. (3.19) bis Gl. (3.22) für eine Bodenrauhigkeit von H_0 = 1 m und einer gewählten Grenzschichtdicke von H_G = 500 m mit V_G = 20 m/s bei neutraler Atmosphäre mit dt/dH = -0,0065 K/m. Man erkennt deutlich mit abnehmender Höhe die zunehmende Richtungsänderung des Horizontalwindes nach links.

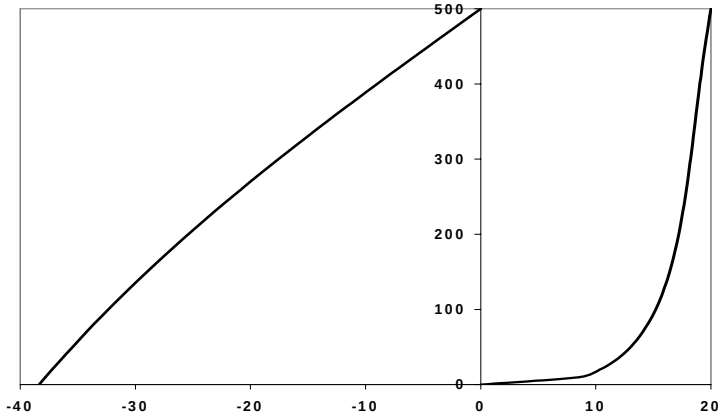

Bild 3.5 Turbulente Bodenströmung nach PRANDTL

Zwei- und dreidimensionale Windmodelle

Bei zwei- und dreidimensionalen Windmodellen kommt neben der Höhe als unabhängiger Variable eine Entfernungsangabe bzw. eine x-y-Ortsangabe als weitere unabhängige Variablen hinzu. Ein typisches Beispiel hierfür sind Fronten und Gewitterfallwinde (Microbursts), siehe Bild 3.6. Hierbei wird die Geschwindigkeitsverteilung durch mehrere Ringwirbel erzeugt. Die Anordnung dieser Ringwirbel wird durch einen Optimierungsprozess so gewählt, dass eine vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung im interessierenden Bereich möglichst gut wiedergegeben wird – das zu simulierende Geschwindigkeitsfeld muss also bekannt sein. Bei deutlichen Abweichungen vom Sollbereich können jedoch völlig unrealistische Windvektoren ermittelt werden. Durch die relativ geringe Anzahl benötigter Ringwirbel ist das Modell auch auf älteren Rechnern echtzeitfähig. Da die Wellenlängen moderat sind, genügt für die aerodynamische Modellierung häufig bereits ein Vier-Punkt-Modell.

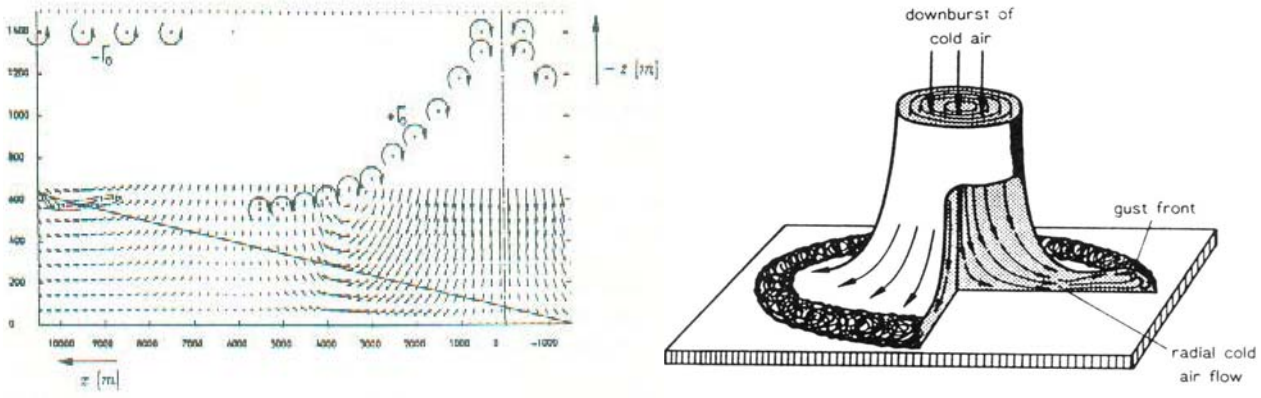

Bild 3.6 Microburst Modell [Bauschat 1988]

Vierdimensionale Windmodelle

Bei Windphänomenen, die zeitlich signifikanten Änderungen unterliegen, kommt als weiterer unabhängiger Parameter die Zeit hinzu. Ein bekanntes Beispiel hierfür sind die bereits erwähnten Wirbelschleppen. Die zunächst annähernd ebene Wirbelschicht rollt sich bereits kurz hinter dem Flügel zu zwei entgegengesetzt rotierenden Wirbeln auf, siehe Bild 3.7. Fliegt ein nachfolgendes Flugzeug in eine solche Wirbelschleppe ein, werden an diesem durch die räumliche Verteilung der Windvektoren in der Wirbelschleppe Zusatzkräfte und Momente induziert, siehe Bild 3.8. Die Stärke der Wirbel

hängt direkt vom Auftrieb des Wirbel erzeugenden Flugzeuges ab sowie vom Abstand zwischen den Flugzeugen und damit dem Wirbelalter. Die in den Wirbeln enthaltene Rotationsenergie kann erheblich sein und die Flugbahn von nachfolgenden Flugzeugen unter Umständen stark beeinflussen.

Bild 3.7 Entstehung einer Wirbelschleppe [Internet]

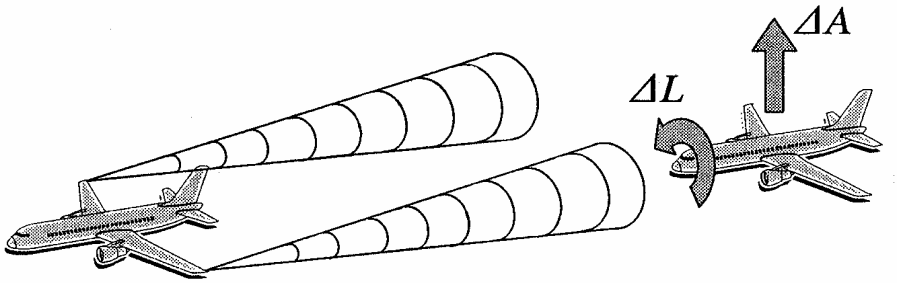

Bild 3.8 Wirbelinduzierte aerodynamische Zusatzkräfte und Momente [Heintsch 1994]

Der Aufrollvorgang zu diskreten Einzelwirbeln erfolgt innerhalb einer Flugstrecke von ca. 10 Spannweiten und dauert damit bei großen Flugzeugen im Landeanflug ca. 5 bis 10 Sekunden, der folgende Ausbreitungsvorgang und der sich anschließende Zerfallsprozess liegen in der Größenordnung von 2 bis 3 Minuten [Heintsch 1994]. Der Einflussbereich auf nachfolgende Flugzeuge erstreckt sich bei einer typischen Anfluggeschwindigkeit von ca. 65 m/s auf ca. 12 km und ist damit in guter Übereinstimmung mit dem Staffelungsabstand von 6 nm für kleine Flugzeuge hinter großen Flugzeugen.

Die relativ kurze Lebensdauer von Wirbelschleppen und ihr sehr schneller Entstehungsprozess machen deutlich, welche zeitliche Dynamik in diesem Prozess enthalten ist. Der zeitliche Einfluss auf den Charakter des Strömungsfeldes am Ort eines einfliegenden Flugzeugs muss daher bei der mathematischen Modellierung berücksichtigt werden. Die bislang verwendeten Modelle zur Beschreibung von Wirbelschleppen waren hierzu nicht geeignet, da ihr Einsatzgebiet mehr auf eine möglichst präzise Beschreibung des Prozesses an sich ausgerichtet war und nicht auf den Einsatz für Echtzeitanwendungen auf einem Flugsimulator.

Ein neuer Ansatz, der insbesondere für die Echtzeitflugsimulation geeignet ist, wurde von HEINTSCH [Heintsch 1994] vorgeschlagen[3]. Das Verfahren beruht auf einem zweistufigen Vorgehen. Zunächst wird ausgehend von der Zirkulationsverteilung der wirbelerzeugenden Fläche das Wirbelsystem durch eine Vielzahl von diskreten Einzelwirbeln modelliert (Einzelwirbelsimulation). Für dieses Wirbelsystem wird das Strömungsfeld durch numerische Integration der Bewegungsgleichungen der Wirbelströmung berechnet. Für eine wirklichkeitsgetreue Nachbildung des zeitlichen Ablaufes einer Wirbelströmung muss eine sehr feine räumliche (Anzahl der Wirbel) und zeitliche (Integrationsschrittweite) Diskretisierung gewählt werden. Der damit verbundene hohe numerische Aufwand ist mit heute standardmäßig eingesetzten Simulationsrechnern nicht unter Echtzeitbedingungen lösbar. Dies wird bei der von HEINTSCH vorgeschlagenen Methode dadurch umgegangen, dass in einer zweiten Stufe das mit der Einzelwirbelsimulation berechnete Strömungsfeld in mehreren Schnittebenen senkrecht zur Wirbelachse durch einfache analytische Funktionen approximiert wird. Die Parameter dieser Näherungsfunktionen ändern sich mit dem Abstand zum Wirbel erzeugenden Flugzeug und sind damit eine Funk-

[3] Weitere Ansätze wurden von Rankine, Proctor, Bernham/Hallock, Rosenhead und Winkelmans veröffentlicht.

tion der Zeit. Sie lassen sich nach HEINTSCH ebenfalls durch analytische Funktionen darstellen, die für jeden Flugzeugtyp durch einen Optimierungsprozess zu bestimmen sind. Das Verfahren der Einzelwirbelsimulation ist in Anhang M näher beschrieben, hier soll lediglich auf die echtzeitfähige Approximation eingegangen werden.

Als Grundlage seiner Approximation wählt HEINTSCH einen Ansatz von OSEEN [Oseen 1911], der später auch von LAMB veröffentlicht wurde. Hiernach ergibt sich für die durch einen Wirbel mit der Zirkulation Γ_0 induzierte Tangentialgeschwindigkeit:

$$V_t(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4vt}}\right) \tag{3.22}$$

Der erste Term enthält stellt den Potentialwirbelansatz dar, der zweite Term stellt eine Erweiterung um einen Zähigkeitsanteil dar, der die beim Potentialwirbel für r → 0 gegen Unendlich gehende induzierte Tangentialgeschwindigkeit auf Null zurückführt, siehe Bild 3.9 links. Dieser einfache Ansatz beschreibt zwar die Geschwindigkeitsverteilung als Funktion des Abstandes r zur Wirbelachse grundsätzlich richtig, im Vergleich zum Ergebnis der Einzelwirbelsimulation treten jedoch erhebliche Abweichungen auf, siehe Bild 3.9 rechts.

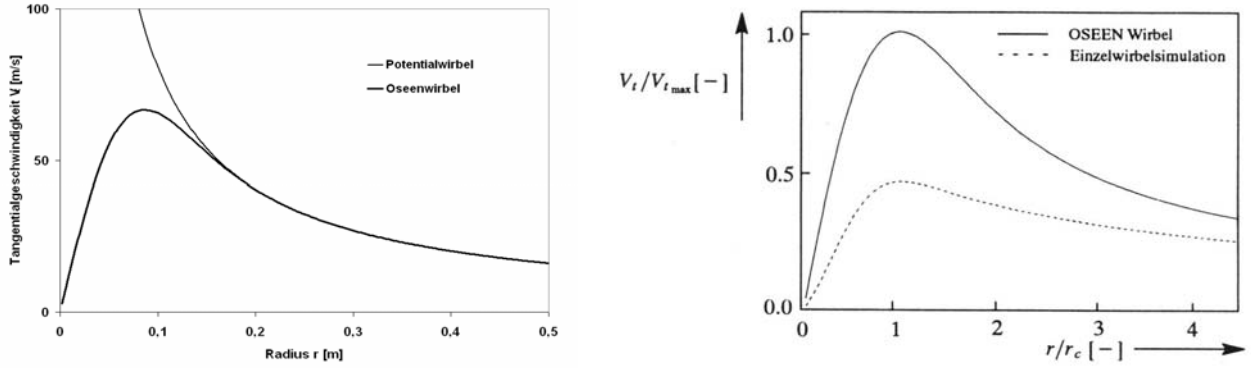

Bild 3.9 Vergleich verschiedener Wirbelmodelle
Potentialwirbel – OSEEN-Wirbel und Einzelwirbelsimulation und OSEEN-Wirbel [Heintsch 1994]

Zur Anpassung der Geschwindigkeitsverteilung an die Ergebnisse der Einzelwirbelsimulation schlägt HEINTSCH einen erweiterten Ansatz vor:

$$V_t(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{A_1(t)^2}}\right) F(r,t) \tag{3.23}$$

Der Modellparameter $A_1(t)$ dient zur Anpassung des Kernradius, die zu identifizierende Funktion F(r,t) dient zur Angleichung der Geschwindigkeitsverteilung. HEINTSCH zeigt, dass die Funktion F(r,t) durch eine erweiterte Arkustangensfunktion angenähert werden kann, so dass schließlich folgt:

$$V(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{A_1(t)^2}}\right) \underbrace{A_2(t)\left[\arctan\left(|r|\, A_3(t)\right) + A_4(t)\right]}_{F(r,t)} \tag{3.24}$$

Die Parameter $A_i(t)$ können durch einen Optimierungsalgorithmus bestimmt werden. Da ihr Zeitverhalten ähnlich ist und einen stetigen Verlauf zeigt, können sie wiederum durch einfache analytische Funktionen mit teilweise identischen Ansätzen nachgebildet werden:

$$A_1(t) = \frac{a_{11}}{a_{12}+t} + a_{13}t + a_{14} \qquad A_2(t) = a_{21}\left(\frac{a_{23}+t}{a_{22}+t}\right)^4 + a_{24}$$
$$A_3(t) = \frac{a_{31}}{a_{32}+t} + a_{33}t + a_{34} \qquad A_4(t) = a_{41}\left(\frac{a_{43}+t}{a_{42}+t}\right)^4 + a_{44} \tag{3.25}$$

Die Zahlenwerte der Einflussparameter a_i sind vom Flugzeugtyp und von der Konfiguration abhängig und können nicht allgemein angegeben werden[4]. HEINTSCH zeigt, dass die mit diesem einfachen Gleichungssystem beschriebene Wirbelschleppenströmung sehr gut mit der Einzelwirbelsimulation übereinstimmt – die maximalen Abweichungen in der induzierten Tangentialgeschwindigkeit zwischen beiden Modellen liegen während der gesamten Lebensdauer der Wirbel unterhalb von 3%. Bild 3.10 [Heintsch 1994] zeigt exemplarisch Ergebnisse eines solchen Vergleiches für drei Flugzeugmuster verschiedener Größenklassen bei einem Wirbelalter von t = 20 s – die Unterschiede sind kaum erkennbar, lediglich im Bereich der Maximalgeschwindigkeit sind geringfügige Abweichungen sichtbar.

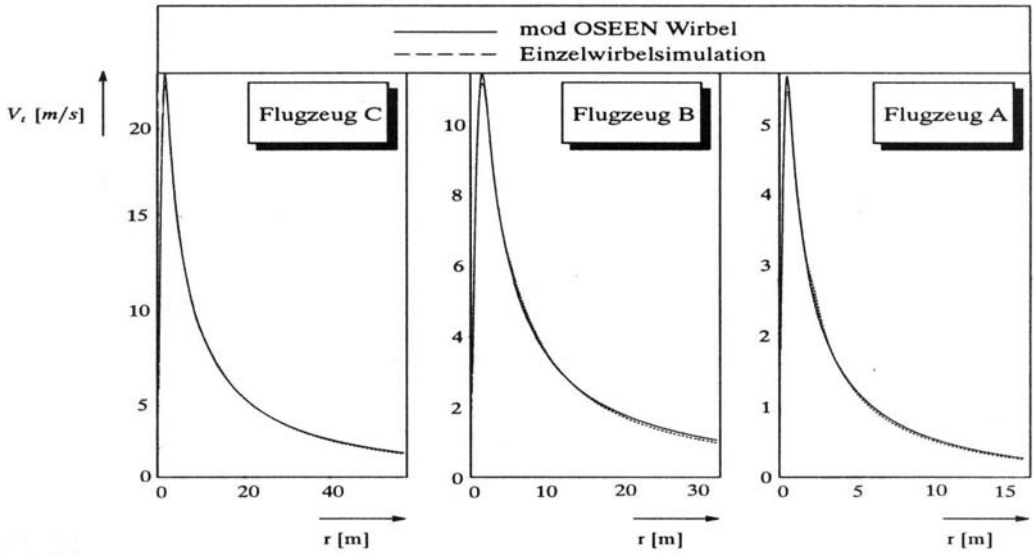

Bild 3.10 Vergleich Einzelwirbelsimulation/Wirbelmodell nach HEINTSCH [Heintsch 1994]
Flugzeug A: m = 5,50 t, b = 16 m, Flugzeug B: m = 60 t, b = 34 m, Flugzeug C: m = 265 t, b = 60 m

Ein wesentlicher Aspekt des Alterungsprozesses von Wirbelschleppen besteht in der Wechselwirkung mit atmosphärischer Turbulenz, die zur Dissipation von Zirkulation aus der Wirbelströmung in die Atmosphäre führt. Damit wird der Wirbelströmung Energie entzogen und der Zerfallsprozess beschleunigt. Dieser Einfluss ist in der Einzelwirbelsimulation nicht berücksichtigt. Nach einem Ansatz von DONALDSON [Donaldson 1973] lässt sich der Einfluss atmosphärischer Turbulenz auf den Alterungsprozess eines aufgerollten Wirbelpaares einfach beschreiben:

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \, e^{-0{,}4\frac{\sigma t}{s'}} \tag{3.26}$$

Dabei ist σ die Standardabweichung der Atmosphärenturbulenz, Γ_0 die Anfangszirkulation zum Zeitpunkt t = 0 und s' der halbe Abstand der beiden Wirbelkerne nach Abschluss des Aufrollprozesses:

$$s' = \frac{\pi}{4} s \tag{3.27}$$

Gl. (3.26) zeigt einerseits, dass mit zunehmendem Grad an Atmosphärenturbulenz der Alterungsprozess beschleunigt wird, aber andererseits auch von der Spannweite des wirbelerzeugenden Flugzeugs abhängig ist. Damit ist bei großen und schweren Flugzeugen im Vergleich zu kleinen und leichten Flugzeugen nicht nur die Zirkulation der Wirbelschleppe stärker, sondern zusätzlich auch die Lebensdauer größer. Da Gl. (3.24) nicht mehr eine Betrachtung der Einzelwirbel darstellt sondern die gesamte

[4] Die Koeffizienten für die drei Beispielflugzeuge können Anhang P entnommen werden.

Wirbelströmung beschreibt, ist der Ansatz nach Gl. (3.26) zur Beschreibung des Dissipationsprozesses auch hierauf anwendbar. Man erhält damit schließlich

$$V(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{A_1(t)^2}}\right) A_2(t)\left[\arctan\left(|r|\, A_3(t)\right) + A_4(t)\right] e^{-0{,}4\frac{\sigma\, t}{s'}} \tag{3.28}$$

Bild 3.11 zeigt exemplarisch die mit diesem Modell ermittelte Wirbel induzierte Tangentialgeschwindigkeit für drei Flugzeuge unterschiedlicher Größe jeweils ohne Turbulenz (links) und bei schwacher Turbulenz mit σ = 0,6 m/s (rechts) sowie bei unterschiedlichem Wirbelalter von t = 10 s bis t = 200 s.

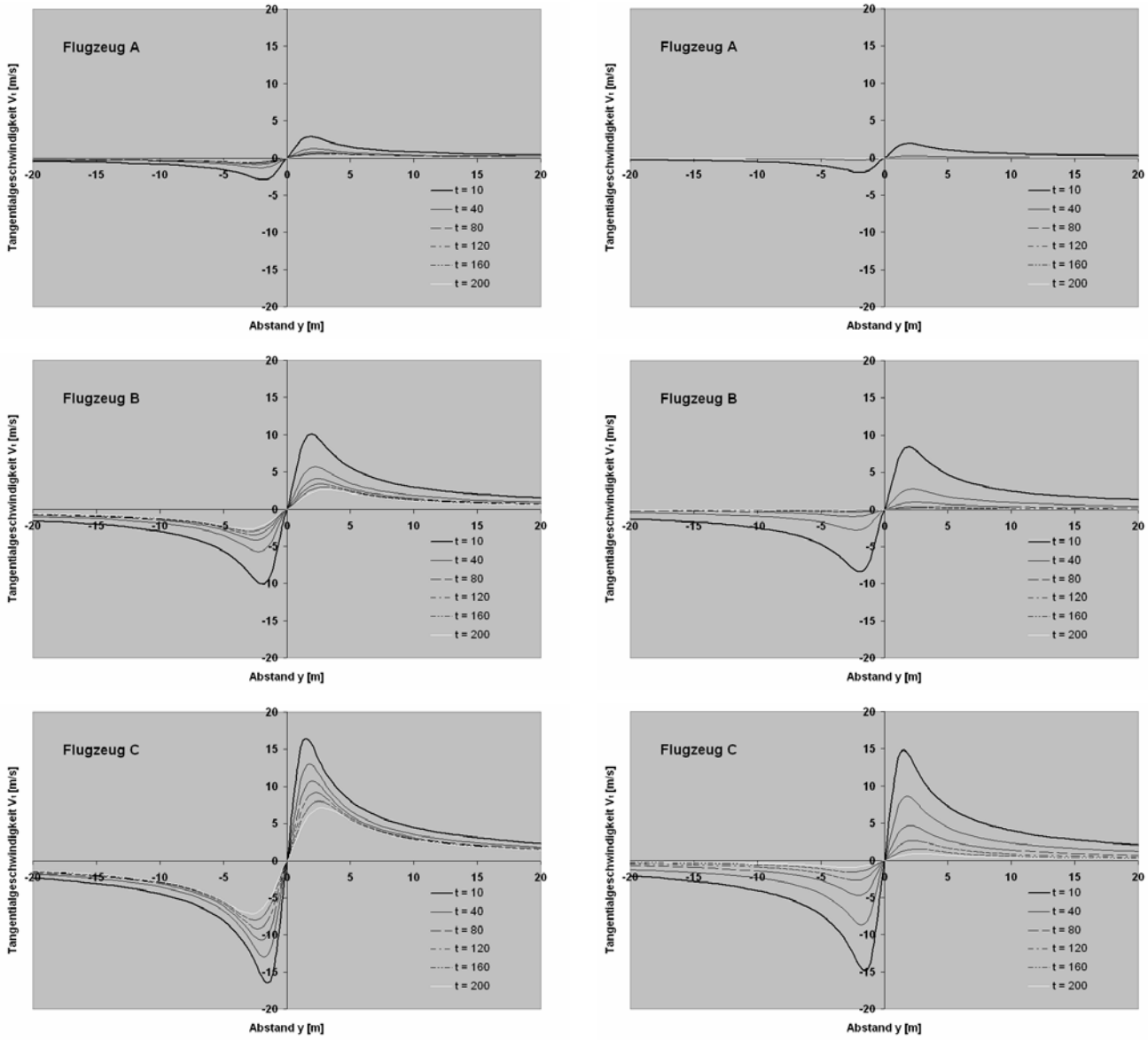

Bild 3.11 Wirbelmodell nach HEINTSCH
Flugzeug A: m = 5,50 t, b = 16 m, Flugzeug B: m = 60 t, b = 34 m, Flugzeug C: m = 265 t, b = 60 m

Mit den konstanten Einflussparametern a_i stellen die Gl. (3.25), Gl. (3.27) und Gl. (3.28) die vollständige Beschreibung der Wirbelschleppenströmung dar. Dieses HEINTSCH'sche Wirbelschleppenmodell erfordert nur einen geringen numerischen Aufwand während des Echtzeitprozesses. Der eigentliche Aufwand liegt in der Bestimmung der Modellparameter und wurde damit aus dem Echtzeitprozess in ein Pre-Processing verlagert, so dass eine Implementation auf nahezu jedem Flugsimulator möglich ist.

3.4 Strukturmodelle für die Echtzeit-Simulation

Allgemeines
Bei heute üblichen Echtzeit-Flugsimulationsmodellen wird das Flugzeug als quasi-starrer Körper angenommen. Diese Beschreibung ist ausreichend, wenn die Eigenfrequenzen der Strukturverformungen sich deutlich von den flugmechanischen Eigenformen unterscheiden, so dass keine nennenswerten Kopplungseffekte auftreten. Bei größeren Transportflugzeugen werden die auftretenden statischen Strukturverformungen für flugmechanische Untersuchungen durch vom Staudruck abhängige Zusatzfaktoren (Flex-Faktoren) in den aerodynamischen Beiwerten des Gesamtflugzeugs berücksichtigt – Strukturschwingungen werden hierbei nicht erfasst. Die auftretenden aeroelastischen Eigenschwingungsformen liegen meistens, bezogen auf die flugmechanischen Eigenbewegungen, in einem vergleichsweise hohen Frequenzbereich und sind bei niedrigen Fluggeschwindigkeiten ausreichend gedämpft, so dass diese vereinfachte Betrachtung zu guten Ergebnissen führt.

Mit zunehmender Flugzeuggröße nehmen auch die Verformungen immer mehr zu. So werden für einen Macrobody z.B. im Reiseflug eine Durchbiegung des Flügels von ca. 3,5 m und eine Torsion von ca. 6,5° [Wiedemann 1995] erwartet. Gleichzeitig nehmen die Struktur-Eigenfrequenzen ab, so dass erhebliche Wechselwirkungen mit den flugmechanischen Eigenformen zu erwarten sind und die quasistationäre Berücksichtigung elastischer Verformungen nicht mehr zulässig ist. Die zunehmenden Einflüsse von Strukturverformungen betreffen daher gleichermaßen das statische wie auch das dynamische Flugzeugverhalten. Das mathematische Modell eines Macrobody muss daher sowohl die flugmechanischen Eigenformen als auch die aeroelastischen Effekte in ihren dynamischen Wechselwirkungen richtig wiedergeben. Für Flugeigenschaftsuntersuchungen mit Piloten auf einem Flugsimulator müssen die aeroelastischen Effekte allerdings nur insoweit enthalten sein, als sie Auswirkungen auf das flugmechanische Verhalten oder auf die Arbeitsweise des Piloten bzw. des Flugsteuerungssystems haben – das Flatterverhalten oder auch das Roll-Ratcheting sind hier nicht von Interesse.

Die Berücksichtigung aeroelastischer Effekte bedeutet eine erhebliche Erhöhung des Modellierungsaufwandes, da zusätzlich zur Bewegung des Flugzeuges im Raum die dynamischen Verformungen des Flugzeuges einschließlich der daraus resultierenden aerodynamischen Wechselwirkungen zu bestimmen sind. Die Modellentwicklung lässt sich in die beiden Bereiche

- Struktur und
- Aerodynamik.

unterteilen. Beide Modelle sind eng miteinander gekoppelt, da die Aerodynamik den wesentlichen Anteil der Strukturlasten liefert und andererseits das Strukturmodell den geometrischen Verformungszustand definiert, der wiederum für die aerodynamische Lastverteilung maßgeblich ist. Besonders wichtig für beide Modelle ist die Berücksichtigung der flugmechanischen Freiheitsgrade, die nichtlinear eingehen. Die Beschreibung der aerodynamischen Modellierung ist zentraler Gegenstand dieser Arbeit und wird in den nachfolgenden Kapiteln ausführlich dargestellt, während die Modellierung der Struktur hier lediglich in ihren wesentlichen Grundzügen beschrieben wird.

Lineare Gesamtmodelle
Für ausgewählte Forschungs- und Entwicklungsaufgaben werden bereits auch in der Echtzeit-Flugsimulation dynamische Strukturmodelle eingesetzt. Hierbei handelt es sich jedoch um rein lineare Modelle, bei denen die linearisierten Bewegungsgleichungen der Flugzeug-Starrkörperbewegung um weitere (elastische) Freiheitsgrade erweitert wurden [Krag 1984], [Potthoff 1987], [Luckner/Fuhrmann 1988]. Das Gleichungssystem in Zustandsform hat die Gestalt

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t) \tag{3.29}$$

Im einfachen Beispiel der Flugzeuglängsbewegung (reine Bewegung in der Flugzeugsymmetrieebene) enthält der Zustandsvektor z.B. die Größen [Krag 1984]:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{w} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{\Theta} \\ \hdashline \Delta\dot{\xi}_1 \\ \Delta\dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ \hdashline A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta\Theta \\ \hdashline \Delta\xi_1 \\ \Delta\xi_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} \\ \hdashline B_{51} & B_{52} & B_{53} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \eta \\ \eta_K \\ \eta_{Sp} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Hierbei beschreiben die ersten vier Zustandsgrößen die Flugzeug-Starrkörperbewegung und ξ_1 und ξ_2 sind die beiden Zustandsgrößen (als generalisierte Koordinaten) der ersten Struktur-Eigenform[5]. Die Matrizenelemente A_{ij} (i = 5-6, j = 5-6) und B_{ik} bestehen aus den generalisierten Dämpfungen und den generalisierten Steifigkeiten[6], in denen wiederum die Eigenform enthalten ist. Die relevanten Eigenformen müssen daher bekannt sein und werden z.B. aus Standschwingungsversuchen oder Finite Elemente Modellen bestimmt. Das durch Gl. (3.30) beschriebene Modell eines flexiblen Flugzeuges erfordert nur einen relativ geringen numerischen Rechenaufwand. Als lineares Modell ist es jedoch auf kleine Abweichungen um einen Arbeitspunkt beschränkt, so dass seine Anwendungsmöglichkeiten eng begrenzt sind. Bei der hier vorgesehenen Anwendung im Flugsimulator ist jedoch mit deutlichen Abweichungen von einem gewählten Referenzzustand zu rechnen, so dass ein rein lineares Modell nicht ausreichend ist. Diese Nachteile können durch halb-nichtlineare Modelle teilweise vermieden werden [Luckner/Dehmel 1990]**.**

Finite-Elemente-Modelle

In der Strukturdynamik hat sich die Finite-Elemente-Methode FEM als Standardverfahren durchgesetzt [Gasch/Knothe 1989]. Hierbei wird die zu modellierende Struktur in Elemente zerlegt und die Gesamtverformungen Element für Element aus den Einzelverformungen zusammengesetzt. Bild 3.12 zeigt exemplarisch ein relativ grobes Finite-Elemente-Modell eines Flugzeuges, wobei die einzelnen Elemente durch die Knotenpunkte gebildet werden, an denen die Massen und Schnittkräfte konzentriert werden. Man erhält ein System von linearen, gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung der Form:

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{\tilde{u}}} + \underline{\underline{D}}\,\dot{\underline{\tilde{u}}} + \underline{\underline{S}}\,\underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{p}} \tag{3.31}$$

$\underline{\tilde{u}}$ Verschiebungen bzw. Drehungen (Ordnung Nx1)

$\underline{\tilde{p}}$ Anregungen (Ordnung Nx1)

$\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{S}}$ Massen-, Dämpfungs-, Steifigkeitsmatrix (jeweils Ordnung NxN)

Der Vektor $\underline{\tilde{p}}$ enthält die auf jedes Element wirkenden äußeren Anregungen, die im Wesentlichen aus den aerodynamischen Lasten und den Gewichtskräften bestehen, aber auch Schubeinflüsse enthalten können. Diese sind wiederum von den Verschiebungen $\underline{\tilde{u}}$ bzw. von den Verschiebungsgeschwindigkeiten $\dot{\underline{\tilde{u}}}$ abhängig. Die Nichtlinearitäten sind damit lediglich in $\underline{\tilde{p}}$ enthalten. Die Ordnung N ergibt sich aus der Anzahl der verwendeten Elemente.

Die Finite-Elemente-Methode lässt sich auf sehr komplizierte Strukturen anwenden, wobei zur genauen Erfassung einer Flugzeugzelle mehre tausend Elemente erforderlich sein können. Man erhält ein Gleichungssystem der Ordnung N, wobei N sich unmittelbar aus der Anzahl der Elemente und deren jeweiligen Freiheitsgrade ergibt. Die Ordnung ergibt sich daher aus der Komplexität der Struktur und nicht aus dem Grad der benötigten Eigenformen. Ein solches Modell liefert sehr gute Ergebnisse, ist aber bei den heute zur Verfügung stehenden Rechenleistungen um mehrere Größenordnungen von der Echtzeitfähigkeit entfernt.

[5] Hier ist lediglich eine Eigenform als System zweiter Ordnung enthalten, weitere sind hier nicht berücksichtigt.

[6] Eine ausführliche Beschreibung kann z.B. [Krag 1984] entnommen werden.

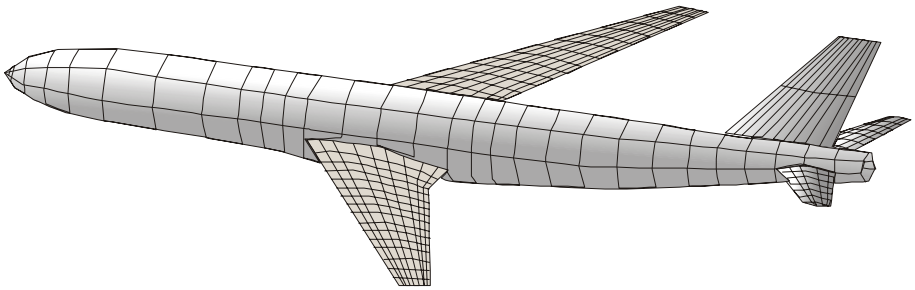

Bild 3.12 Finite-Elemente-Modell eines Flugzeuges [Buxbaum 1997]

Bild 3.13 zeigt als Ergebnis einer solchen FE-Modellierung drei typische Eigenformen des Flügels mit Triebwerken eines sehr großen, viermotorigen Verkehrsflugzeuges. Durch die Pylonanordnung der Triebwerke vorne unterhalb der Tragfläche kommt es zu einem deutlichen Einfluss der Triebwerksnickbewegungen auf einen Großteil der gesamten Flügelstruktur. Diese komplexen Wechselwirkungen sind durch einfache Balkenmodelle des Flügels kaum realistisch wiederzugeben.

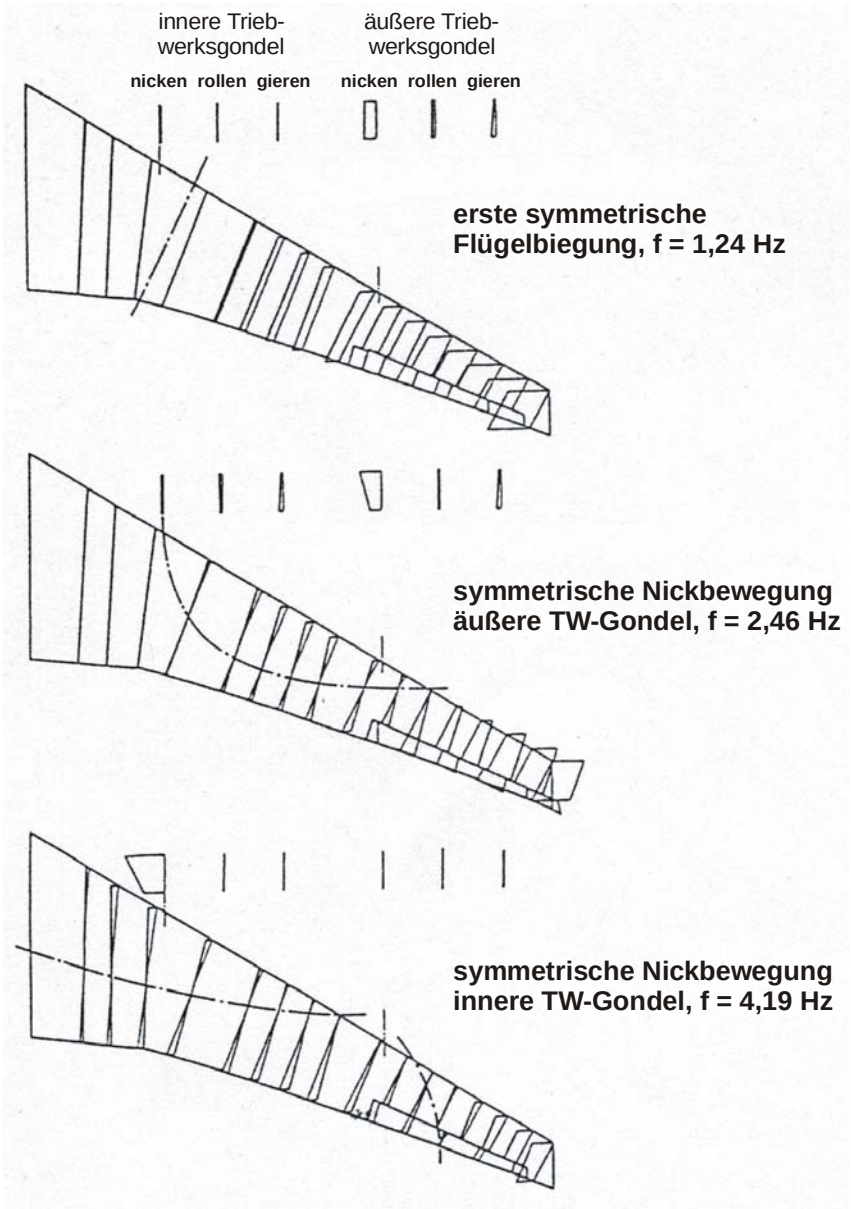

Bild 3.13 Typische Eigenformen eines sehr großen, viermotorigen Verkehrsflugzeuges
erste sym. Flügelbiegung sowie sym. Nickbewegung der äußeren und der inneren Triebwerke [Försching 1994]

kondensiertes, echtzeitfähiges Finite-Elemente-Modell

Im Rahmen des BMBF finanzierten Verbundvorhabens „Dynamik des flexiblen Flugzeugs“ wurde im Teilprojekt „Flugeigeneigenschaften sehr großer, flexibler Flugzeuge“ ein echtzeitfähiges Strukturmodell entwickelt, dass auf einem komplexen FE-Modell aufbaut. Ausgehend von einem FE-Halbmodell mit ca. 100000 Freiheitsgraden wird in einem mehrstufigen Reduktionsprozess ein reduziertes Elastikmodell mit 11 symmetrischen und 13 anti-metrischen Freiheitsgraden erzeugt[7], siehe Bild 3.14.

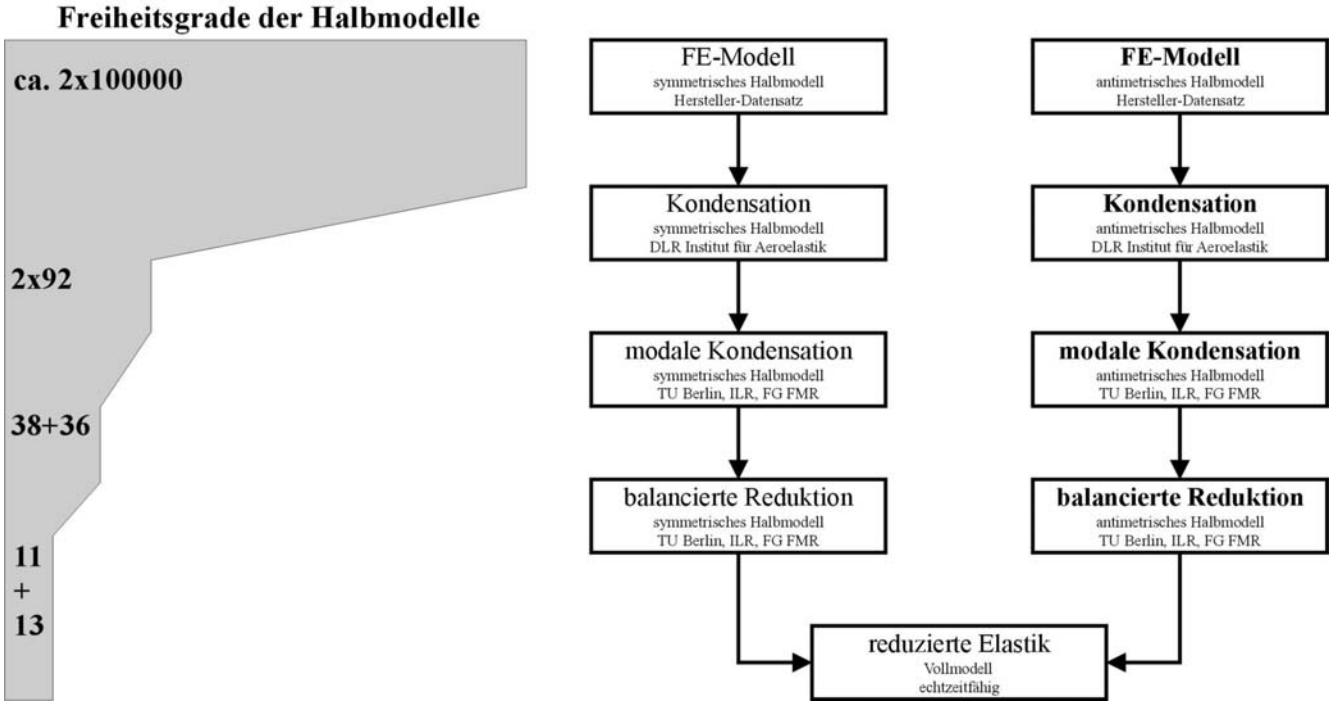

Bild 3.14 Reduktionsschema zur Erzeugung des Strukturmodells

Das verkoppelte Gleichungssystem des FE-Modells nach Gl. (3.31) bestehend aus N Differentialgleichungen 2. Ordnung für die N Freiheitsgrade kann in einen Satz entkoppelter Differentialgleichungen für N Ein-Freiheitsgradsysteme umgeformt werden [Gasch/Knothe 1987]:

$$\underline{\underline{M}}_{diag}\,\ddot{\underline{\tilde{q}}} + \underline{\underline{D}}_{diag}\,\dot{\underline{\tilde{q}}} + \underline{\underline{S}}_{diag}\,\underline{\tilde{q}} = \underline{\tilde{r}} \tag{3.32}$$

$\underline{\tilde{q}}$ generalisierte Koordinaten (Ordnung N**ä**1)
$\underline{\tilde{r}}$ generalisierte Anregungen (Ordnung N**ä**1)
$\underline{\underline{M}}_{diag}$ generalisierte Massenmatrix (Ordnung N**ä**N)
$\underline{\underline{D}}_{diag}$ generalisierte Dämpfungsmatrix (Ordnung N**ä**N)
$\underline{\underline{S}}_{diag}$ generalisierte Steifigkeitsmatrix (Ordnung N**ä**N)

Die Matrizen sind hierbei nur noch diagonal besetzt und der Vektor $\underline{\tilde{q}}$ setzt sich aus den Lösungsanteilen der N Eigenformen zusammen. In der Regel werden nicht die Verschiebungen der einzelnen Elemente benötigt sondern Gesamtverformungen, so dass der Verschiebungsvektor durch eine geringere Zahl von L Freiheitsgraden ausgedrückt werden kann. Dies kann durch eine Transformation erreicht werden:

$$\underline{\tilde{v}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\tilde{q}} \qquad \dot{\underline{\tilde{v}}} = \underline{\underline{T}}\,\dot{\underline{\tilde{q}}} \qquad \ddot{\underline{\tilde{v}}} = \underline{\underline{T}}\,\ddot{\underline{\tilde{q}}} \tag{3.33}$$

Setzt man Gl. (3.33) in Gl. (3.32) und multipliziert noch von links mit $\underline{\underline{T}}^T$, erhält man das reduzierte Gleichungssystem

[7] Eine genauere Beschreibung wird in [Schröder/Böger 1997] gegeben.

$$\underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{M}}_{diag} \underline{\underline{T}} \ddot{\tilde{\underline{q}}} + \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{D}}_{diag} \underline{\underline{T}} \dot{\tilde{\underline{q}}} + \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{S}}_{diag} \underline{\underline{T}} \tilde{\underline{q}} = \underline{\underline{T}}^T \tilde{\underline{r}} \tag{3.34}$$

bzw.

$$\underline{\underline{M}}_{red} \ddot{\tilde{\underline{v}}} + \underline{\underline{D}}_{red} \dot{\tilde{\underline{v}}} + \underline{\underline{S}}_{red} \tilde{\underline{v}} = \tilde{\underline{p}}_{red} = \underline{\underline{T}}^T \tilde{\underline{r}} \tag{3.35}$$

Durch eine geeignete Transformationsmatrix $\underline{\underline{T}}$ kann die Ordnung des Gleichungssystems drastisch reduziert werden, ohne die interessierenden ersten Eigenformen des Systems zu verfälschen [Gasch/Knothe 1989]. Hierzu müssen in die Transformationen allerdings Ergebnisse aus dem vollständigen Gleichungssystem (3.32) einfließen. Die Bestimmung der Transformationsmatrix kann durch verschiedene Methoden erfolgen, die z.B. in [Gasch/Knothe 1989] beschrieben werden. Ein besonders hoher Reduktionsgrad von über 90% kann mit der modalen Kondensation erreicht werden, die in diesem Fall angewendet wurde. Hierbei wird die Transformationsmatrix aus den langwelligen, niedrigen Eigenformen des korrespondierenden konservativen Systems gewonnen:

$$\underline{\underline{M}}_{diag} \ddot{\tilde{\underline{q}}} + \underline{\underline{S}}_{diag} \tilde{\underline{q}} = \underline{0} \tag{3.36}$$

Die hieraus bestimmten N Eigenvektoren $\underline{\varphi}_i$ werden zur Modalmatrix $\underline{\underline{\Phi}}$ zusammengefasst:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left[\underline{\varphi}_1 \quad \underline{\varphi}_2 \quad \cdots \quad \underline{\varphi}_N \right] \tag{3.37}$$

Da jede Komponente eines Eigenvektors beschreibt, wie die dazugehörige Eigenform sich auf die jeweilige Koordinate (Verschiebung bzw. Drehung) auswirkt, kann die Transformationsmatrix direkt aus der Modalmatrix gewonnen werden, indem aus dieser die L ersten Spalten verwendet werden:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Phi}}_{red} = \left[\underline{\varphi}_1 \quad \underline{\varphi}_2 \quad \cdots \quad \underline{\varphi}_L \right] \tag{3.38}$$

Da bei dieser Reduktion die Eigenformen (Modes) die Grundlage bilden wird sie auch als modale Kondensation bezeichnet. Sie wird in der Aeroelastik standardmäßig angewendet. Im Rahmen des beschriebenen Verbundvorhabens wurden in einem ersten Schritt zwei vom Flugzeughersteller zur Verfügung gestellte FE-Halbmodelle (für symmetrische bzw. antimetrische Eigenformen) eines großen Verkehrsflugzeuges vom Institut für Aeroelastik des DLR Göttingen auf je 92 Freiheitsgrade kondensiert. In einem zweiten Schritt erfolgte am Institut für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin eine weitere Reduktion auf 74 Eigenformen (38 symmetrische + 36 antimetrische).

Das maßgebende Kriterium für diese zweite Reduktionsstufe war die vorgegebene Simulationstaktrate von $f_{Sim} = 120$ Hz[8], so dass die Strukturfrequenzen auf $f_{Struktur\ max} = 1/3\ f_{Sim} = 40$ Hz begrenzt wurden. In einem dritten Reduktionsschritt wurde durch balancierte Reduktion [Schröder/Böger 1997] schließlich ein Strukturmodell mit nunmehr 6 + 6 Freiheitsgraden erzeugt. Hierbei wird der Frequenzgang der Steuer- und der Störübertragungsfunktion verwendet, um die weniger wichtigen Eigenformen zu eliminieren. Aus den beiden reduzierten Halbmodellen wird schließlich durch Spiegelung der Punkte an der Flugzeugsymmetrieebene ein Vollmodell mit 12 Struktur-Freiheitsgraden erzeugt.

Dieses mehrstufige Verfahren zur Erzeugung eines echtzeitfähigen, dynamischen Strukturmodells eines flexiblen Flugzeuges ist sehr aufwendig und nicht Gegenstand dieser Arbeit. Nähere Erläuterungen können [Schröder/Böger 1997] und [Gasch/Knothe 1989] entnommen werden. Durch Normierung auf

$$\underline{\underline{M}}^*_{red} = \underline{\underline{I}} \tag{3.39}$$

kann das Gleichungssystem (3.35) so umgeformt werden, dass gilt:

$$\ddot{\tilde{\underline{v}}} + \underline{\underline{D}}^*_{red} \dot{\tilde{\underline{v}}} + \underline{\underline{S}}^*_{red} \tilde{\underline{v}} = \underline{\underline{\Phi}}^{T*}_{red} \tilde{\underline{r}} \tag{3.40}$$

bzw. umgeformt als System 1. Ordnung:

[8] Die Basis-Taktrate des Simulators beträgt 60 Hz, wobei hiermit der Datenaustausch zwischen Simulationsprogramm und den externen Systemen (Cockpit etc.) gemeint ist. Intern können einzelne Module oder auch das gesamte flugmechanische Modell mit höheren Taktraten ablaufen.

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{v}}_1 \\ \dot{\underline{v}}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{S}}^*_{red} & -\underline{\underline{D}}^*_{red} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\Phi}}^{T*}_{red} \end{bmatrix} \underline{\tilde{r}} \tag{3.41}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= \underline{\tilde{v}} & \dot{\underline{v}}_1 &= \underline{v}_2 \\ \underline{v}_2 &= \dot{\underline{v}}_1 & \dot{\underline{v}}_2 &= \ddot{\underline{\tilde{v}}} \end{aligned} \tag{3.42}$$

oder in abgekürzter Form:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\, \underline{\tilde{r}}(t) \tag{3.43}$$

Der Vektor $\underline{x}(t)$ enthält die modalen Zustandsgrößen, die entsprechend Gl. (3.35) wieder in die physikalischen Verformungen transformiert werden können. Der Vektor $\underline{\tilde{r}}$ mit den generalisierten Anregungen enthält sämtliche äußeren Kräfte, die im Wesentlichen aus den aerodynamischen Kräften und den Gewichtskräften bestehen.

Das durch Gl. (3.43) beschriebene Strukturmodell ist wie Gl. (3.29) ebenfalls ein lineares Modell. Allerdings beschränkt sich hier die lineare Beschreibung einzig und allein auf die Freiheitsgrade der Struktur – die flugmechanischen Freiheitsgrade gehen über die Anregungen im Vektor $\underline{\tilde{r}}$ nichtlinear ein. Dieses gilt insbesondere für die aerodynamischen Kräfte und Momente, die erhebliche Nichtlinearitäten aufweisen. Die bei der Verknüpfung von Struktur- und Aerodynamikmodell zu beachtenden Problemstellungen werden in Kapitel 7.1 behandelt.

4 3D-Aerodynamikmodell für Echtzeitanwendungen

4.1 Einführung

Zur Beschreibung der Auswirkungen räumlicher Anströmungsverteilungen eines Flugzeuges in der Echtzeit-Flugsimulation stehen bislang lediglich das in Kapitel 3.2 beschriebene Vier-Punkt-Modell, das kleinräumige Einflüsse nicht erfassen kann, sowie die Streifenmethode, die die realen physikalischen Verhältnisse nur unzureichend wiedergeben kann, zur Verfügung. Im Folgenden wird eine neue Methode beschrieben, die die Auswirkungen kleinräumiger Änderungen der Anströmung auf die aerodynamische Lastverteilung physikalisch sinnvoll beschreibt und unter Echtzeitbedingungen lösbar ist.

Die Berechnung der aerodynamischen Lastverteilungen bei beliebiger Anströmung ist äußerst komplex und stellt selbst für hochwertige CFD-Verfahren eine große Herausforderung dar, da diese Verfahren üblicherweise mit festen Gitterpunkten operieren und eine homogene Anströmung voraussetzen. Es ist daher unumgänglich, dass unter den Randbedingungen der Lösbarkeit des Gleichungssystems unter Echtzeitbedingungen Einschränkungen in Kauf genommen werden müssen. Bei der Entwicklung des neuen, hier vorgestellten Verfahrens standen folgende Ziele im Vordergrund:

- Berücksichtigung kleinräumiger, zeitvariabler Windfelder (Wirbelschleppen hinter Flugzeugen, Aufwindgebiete über Kühltürmen, Thermikgebiete),
- Berücksichtigung von Änderungen der lokalen Anströmverhältnisse bei dynamischen Verformungen eines elastischen Flugzeuges,
- Berücksichtigung von Ruderausschlägen,
- Berücksichtigung instationärer aerodynamischer Effekte,
- Implementationsmöglichkeit auf vorhandenen Flugsimulatoren sowie
- Berücksichtigung höherwertiger Ergebnisse für Korrekturmaßnahmen.

Bei der Implementation auf einem bestehenden Flugsimulator kann auf ein vorhandenes Aerodynamikmodell des simulierten Flugzeugtyps zurückgegriffen werden, so dass in solchen Fällen lediglich die Zusatzkräfte und –momente infolge einer räumlichen Anströmung zu bestimmen sind. Daher ist häufig eine Reduzierung der 3D-Aerodynamik auf eine Flügel-Höhenleitwerkskombination vollkommen ausreichend. Hiervon soll bei den nachfolgenden Betrachtungen ausgegangen werden.

Das vorgestellte Verfahren basiert auf der Tragflächentheorie nach TRUCKENBRODT[9]. Die Herleitungen der mathematischen Zusammenhänge erfolgen für einen Tragflügel, gelten aber in gleicher Weise auch für das Höhenleitwerk. Bei Drachenkonfigurationen, bei denen das Höhenleitwerk im Abwindfeld des Tragflügels liegt, muss dieser Einfluss berücksichtigt werden. In dieser Arbeit wird hierauf nicht eingegangen, eine ausführliche Beschreibung kann [Kulwatz 1997] entnommen werden. Das Verfahren ist gleichermaßen auch für Entenkonfigurationen oder Drei-Flächenflugzeuge geeignet, wobei der Einfluss des vorne liegenden Höhenleitwerks auf den nachfolgenden Flügel ebenfalls nach [Kulwatz 1997] zu berücksichtigen ist.

Das hier beschriebene neue Verfahren ist damit vielseitig in der Echtzeit-Flugsimulation einsetzbar. Darüber hinaus kann es auch im Vorentwurf verwendet werden, da Änderungen der geometrischen Parameter einfach vorzunehmen sind. Unterschiedliche geometrische Varianten können somit schnell und kostengünstig miteinander verglichen werden.

Vereinbarung In diesem Kapitel werden zusätzlich zu den in der Flugmechanik gebräuchlichen Koordinatensystemen nach DIN 9300 als weitere Koordinatensysteme das flügelfeste Koordinatensystem Index „fl“ und das profilfeste Koordinatensystem Index „p“ definiert, die beide an die in der Aerodynamik üblichen Koordinatensysteme angelehnt sind. Hierbei weist jeweils die positive x-Achse nach hinten und die positive z-Achse nach oben. Der Ursprung des flügelfesten Koordinatensystems liegt in der Flügelnase des Flügelmittelschnitts. Der Ursprung des profilfesten Koordinatensystems liegt in der Profilnase des jeweiligen Flügelschnittes, die x_p-Achse fällt mit der örtlichen Profilsehne zusammen. Die x_p-z_p-Ebene liegt unter dem V-Winkel ν zur x_f-z_f-Ebene.

[9] An dieser Stelle wird nur kurz auf die Tragflächentheorie nach TRUCKENBRODT eingegangen – eine ausführliche Darstellung wird in Anhang O gegeben.

4.2 Tragflächentheorie nach TRUCKENBRODT

Zur Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln für flugmechanische Untersuchungen wird häufig das MULTHOPP–Verfahren eingesetzt [Multhopp 1938]. Es basiert auf der Traglinientheorie von PRANDTL und liefert für ungepfeilte Tragflügel hoher Streckung gute Ergebnisse [Truckenbrodt 1953a]. Für Transportflugzeuge mit Pfeilflügeln ist es jedoch wenig geeignet. Für das zu entwickelnde aerodynamische Echtzeit-Modell wird daher auf die Tragflächentheorie von TRUCKENBRODT zurückgegriffen [Truckenbrodt 1953a, Schlichting/Truckenbrodt 1969], die auch für gepfeilte Flügelkonfigurationen kleinerer Streckung mit Schiebewinkel gute Ergebnisse liefert.

Die Grundgleichungen der Tragflächentheorie werden durch die hier beschriebene Methodik erstmals auch unter Echtzeitbedingungen auf einem Flugsimulator lösbar. Damit wird dieses ursprünglich für den aerodynamischen Entwurf verwendete Verfahren nunmehr für die Echtzeit-Flugsimulation verwendbar und so für Flugeigenschaftsuntersuchungen nutzbar. Die dem Tragflächenverfahren im Vergleich zu modernen CFD-Verfahren anhaftenden Nachteile in der Genauigkeit der Rechenergebnisse bei komplexen Konfigurationen (Triebwerkseinflüsse, Flügel-Rumpfinterferenz etc.) wird bei dem hier beschriebenen Verfahren weitgehend kompensiert, indem die Ergebnisse genauerer Methoden zur Korrektur des Tragflächenverfahrens herangezogen werden, wobei auch Windkanal- bzw. Flugversuchsergebnisse eingearbeitet werden können. Hierauf wird in Kapitel 5 ausführlich eingegangen.

Die Tragflächentheorie zählt zur Potentialtheorie (reibungsfreie Strömung) und basiert auf der Voraussetzung, dass ein Tragflügel durch eine flächenhafte Wirbeldichteverteilung k(x,y,z) ersetzt werden kann, deren Parameter durch die Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung bestimmt werden. Hierbei sind verschiedene Vorgehensweisen denkbar. Bei dem von TRUCKENBRODT beschriebenen Ansatz ist die Art der Verteilung in Spannweitenrichtung beliebig, in Profiltiefenrichtung jedoch aus vorgegebenen Funktionen zusammengesetzt, die aus der ersten und zweiten BIRNBAUMverteilung abgeleitet sind. Das Verfahren kann damit nahezu beliebige Verteilungen für den Auftriebs- und den Nickmomentenbeiwert in Spannweitenrichtung wiedergeben.

Die Wirbelverteilung k(x,y,z) ist so zu bestimmen, dass auf der Flügelkontur die senkrechten Geschwindigkeitskomponenten gleich Null sind[10]. Hierzu müssen sich die von der Wirbelverteilung am Ort des Flügels induzierten Normalgeschwindigkeiten w(x,y,z) mit den Normalkomponenten der ungestörten Strömung zu Null aufheben. Als weitere Bedingung muss an der Flügelhinterkante die KUTTA'sche Abflussbedingung erfüllt werden. Um das entstehende Gleichungssystem analytisch lösen zu können, werden nach [Truckenbrodt 1953a] folgende Vereinfachungen getroffen:

- die Flügelprofile müssen dünn sein und dürfen nur schwach gewölbt sein (Skelett-Profile),
- die Flügeldurchbiegung und die V-Form müssen klein sein und
- die Anstellwinkel müssen klein bleiben.

Unter diesen Bedingungen kann das Wirbelsystem in die Ebene z = 0 gelegt werden und die auf der Skelettkontur induzierten Geschwindigkeiten w(x,y,z) können durch die an der Stelle w(x,y,z=0) ersetzt werden[11, 12]. Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten wird dadurch wesentlich erleichtert. Die kinematische Strömungsbedingung für die Skelettlinie lautet damit, siehe Bild 4.1:

$$\alpha_{\text{Skelett}}(x,y) - \alpha_i(x,y) = 0 \tag{4.01}$$

α_i induzierter Abwindwinkel; positiv bei einem Abwind $w_i < 0$[13]

mit dem Anstellwinkel der Skelettlinie[14]:

[10] Bei der Traglinientheorie wird diese Bedingung nur an einem Punkt in Profiltiefenrichtung erfüllt; MULTHOPP wählte den ¾-Punkt.

[11] Ein grobe Fehlerbetrachtung kann Anhang A entnommen werden.

[12] Da die z-Koordinate in den folgenden Herleitungen keine Rolle mehr spielt, kann sie weggelassen werden.

[13] Diese Definition ist in Übereinstimmung mit [MULTHOPP 1938]; in [Schlichting/Truckenbrodt 1969] und [Truckenbrodt 1953a] wird der induzierte Abwindwinkel bei einem Abwind negativ gezählt.

[14] Die Neigung der Skelettlinie wird im profilfesten Koordinatensystem bestimmt, so dass eine negative Steigung den Anstellwinkel der Skelettlinie erhöht. Da nur schwache Wölbungen auftreten, kann die Arcustangensfunktion durch ihr Argument ersetzt werden.

$$\alpha_{\text{Skelett}}(x,y) = \alpha_P(x,y) - \frac{\partial z_{\text{Skelett P}}}{\partial x_p}(x,y) \tag{4.02}$$

Um die KUTTA'sche Abflussbedingung an der Hinterkante und den beiden Seitenkanten des Flügels zu erfüllen, muss dort die Wirbeldichte zu Null werden. Die Art, wie die Wirbeldichte über die tragende Fläche verteilt wird, kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Beim Verfahren nach TRUCKENBRODT wird entsprechend einem Ansatz von GLAUERT [Glauert 1929] der Tragflügel aus so genannten Elementarflügeln mit der Breite dy´ zusammengesetzt[15] [Truckenbrodt 1953a], siehe Bild 4.2. Jeder Elementarflügel wird wiederum durch eine Schar von Hufeisenwirbeln ersetzt, die sämtlich die Breite des Elementarflügels dy´ besitzen und in Tiefenrichtung um dx´ gegeneinander verschoben sind. Die Grundrissform unterliegt bei dieser Betrachtung keinen Beschränkungen[16].

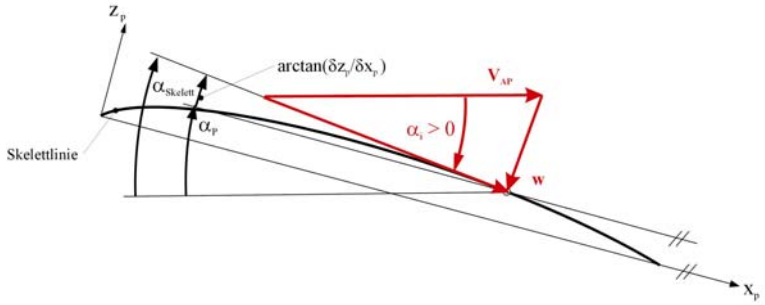

Bild 4.1 Anstellwinkelverhältnisse am Profilskelett[17]

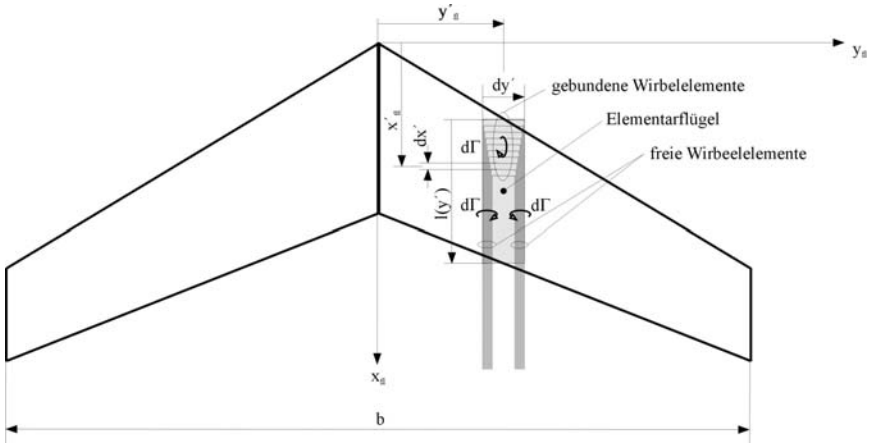

Bild 4.2 Elementarflügel und dessen Wirbelsystem

Da durch die getroffenen Vereinfachungen keine induzierten Geschwindigkeiten in x-Richtung zu berücksichtigen sind, gilt für den induzierten Anstellwinkel (kleine Winkel):

$$\alpha_i(x,y) = -\frac{w(x,y)}{V_{AP}(y)} \tag{4.03}$$

w vom Flügel induzierte Abwindgeschwindigkeit
V_{AP} Anströmgeschwindigkeit am Profil

Hat die Anströmung in jedem Punkt den gleichen Betrag[18], folgt mit Gl. (4.01) und Gl. (4.02):

[15] Die induzierende Stelle wird durch einen hochgestellten Strich gekennzeichnet. Die Unterscheidung zwischen induzierender Stelle P' und betrachtetem Aufpunkt P ist nur in den Gleichungen erforderlich, wo beide Punkte gleichzeitig vorkommen.

[16] Schiebewinkel können durch eine entsprechend veränderte Grundrissgeometrie berücksichtigt werden.

[17] Im Gegensatz zu Kapitel 3 wird hier die Bewegung der Luft gegenüber dem Flügel betrachtet (und nicht die Bewegung des Flugzeuges gegenüber der Luft), so dass in Bild 4.1 die Anströmung zum Profil gerichtet ist („aerodynamischer Wind" im Unterschied zum „flugmechanischen Wind"). Hierdurch ist eine bessere Vergleichbarkeit mit den (aerodynamisch geprägten) Literaturquellen gewährleistet.

[18] Die Berücksichtigung von Änderungen des Geschwindigkeitsbetrages wird in Kapitel 6.1 beschrieben.

$$\alpha_{\text{Skelett}}(x,y) = \alpha_p(x,y) - \frac{\partial z_{\text{Skelett p}}}{\partial x_p}(x,y) = -\frac{w(x,y)}{V_\infty} \tag{4.04}$$

$\mathbf{V_\infty}$ Betrag der ungestörten Anströmung im Flugzeugreferenzpunkt

Für die hier betrachteten Problemstellungen kann in Gl. (4.04) der örtliche Profilanstellwinkel α_P und die Neigung der Skelettlinie $\partial z_p/\partial x_p$ als bekannt angesehen werden, so dass der induzierte Abwind w die Unbekannte darstellt. Für das gesamte Wirbelsystem eines Tragflügels bestehend aus unendlich vielen Hufeisenwirbeln kann unter Anwendung des BIOT-SAVART'schen Gesetzes die an jedem Punkt P des Tragflügels induzierte Normalgeschwindigkeit berechnet werden, wobei die Wirbelfäden vereinfachend als gerade angenommen werden. Als Ergebnis erhält man für die kinematische Strömungsbedingung:

$$\alpha_{\text{Skelett}}(\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial g(\xi,\eta;\eta')}{\partial \eta'}\frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \tag{4.05}$$

mit den dimensionslosen Größen

$$\xi = \frac{x}{s} \qquad \eta = \frac{y}{s} \tag{4.06}$$

$$g = \frac{G}{b\,V_\infty} \tag{4.07}$$

Die Verteilungsfunktion G(x,y;y´) beschreibt, wie der Einfluss eines Flügelschnittes an der Stelle y´ auf die gesamte Fläche (x,y,z=0) verteilt wird:

$$G(x,y;y') = \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx' \tag{4.08}$$

Gleichung (4.05) stellt die allgemeine Integralgleichung der Tragflächentheorie dar. Bei vorgegebener Anstellwinkelverteilung und Geometrie des Tragflügels ist hieraus die in der Verteilungsfunktion g(x,y;y´) enthaltene Wirbeldichteverteilung k(x´,y´) zu bestimmen. Eine analytische Lösung ist nur durch Näherungsverfahren möglich, indem für die grundsätzlich beliebige Wirbeldichteverteilung k bestimmte Vorgaben getroffen werden. Diese Vorgaben können durch Ansatzfunktionen sowohl in Spannweitenrichtung als auch in Profiltiefenrichtung erfolgen. Dies ist gleichbedeutend mit einer Reduzierung der Freiheitsgrade in der mathematischen Modellierung. Kriterien dafür, in welcher Koordinatenrichtung die größeren Einschränkungen in Kauf genommen werden können, sind beispielsweise:

- die Streckung des Flügels und
- die auftretenden Änderungen des lokalen Anstellwinkels.

Das hier entwickelte Verfahren soll ausschließlich für Flugzeugkonfigurationen eingesetzt werden, bei denen die Abmessungen der tragenden Flächen in Spannweitenrichtung deutlich größer sind als die in Profiltiefenrichtung[19]. Außerdem sind für die hier besonders interessierenden Anwendungen (z.B. Berechnung der Auftriebsverteilung an einem verformten Flügel oder Berechnung des Rollmomentes beim Einflug in eine Wirbelschleppe) die Änderungen in der Anstellwinkelverteilung in Spannweitenrichtung dominierend, während die Anstellwinkelverteilung in Profiltiefenrichtung weniger stark variiert. Unter diesen Voraussetzungen ist es daher sinnvoll, der Wirbeldichteverteilung in Spannweitenrichtung mehr Freiheitsgrade zuzugestehen und in Profiltiefenrichtung Einschränkungen in Kauf zu nehmen. Beim hier weiter verfolgten Tragflächenverfahren nach TRUCKENBRODT wird daher ein Ansatz für die Wirbeldichte in Richtung der Flügeltiefe x vorgegeben. Zunächst werden jedoch einige

[19] Dies ist nicht gleichbedeutend mit einer Beschränkung auf Flügel großer Streckung, es sollen vielmehr nur Flügel sehr kleiner Streckung ausgeschlossen werden.

Die Wirbeldichteverteilung in Spannweitenrichtung wird mit Hilfe des Quadraturverfahrens von MULTHOPP bestimmt. Hierbei wird die Integralgleichung numerisch gelöst, indem die Verteilungsfunktion g durch einen Reihenansatz ersetzt und das Integral durch eine Summe approximiert wird (Quadratur). Dieses Verfahren wurde von MULTHOPP erstmals zur Berechnung des induzierten Abwindwinkels für den ungepfeilten Flügel großer Streckung angewendet. Die Theorie zur Behandlung eines solchen Tragflügels wird als klassische Tragflügeltheorie bezeichnet und geht auf PRANDTL zurück. Hierbei wird davon ausgegangen, dass sich die Gesamtheit aller gebundenen Wirbel durch eine einzige Wirbellinie der Stärke Γ(y) in der $\ell/4$-Linie des Flügels repräsentieren lässt. Als Ergebnis erhält man nach [Multhopp 1938], [Thomas 1972] für den vom Tragflügel induzierten Abwindwinkel:

$$\alpha_i(\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial\gamma(\eta')}{\partial\eta'}\frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \tag{4.09}$$

Gl. (4.09) stimmt formal mit Gl. (4.05) überein, wobei lediglich an die Stelle der dimensionslosen Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta')$ die Verteilungsfunktion $g(\eta')$ tritt. Die Lösung der kinematischen Strömungsbedingung Gl. (4.05) kann daher ebenfalls mit Hilfe des Quadraturverfahrens[20] von MULTHOPP erfolgen [Truckenbrodt 1953a]. Das Verfahren beruht auf der Voraussetzung, dass sich die Verteilungsfunktion $g(\xi,\eta;\eta')$ in Spannweitenrichtung η' durch eine Fourierreihe darstellen lässt, die analog zum Ansatz für die Zirkulationsverteilung $\gamma(\vartheta')$ nach MULTHOPP [Multhopp 1938] gewählt wird:

$$g(\xi,\vartheta;\vartheta') = 2\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu(\xi,\vartheta)\sin\mu\vartheta' \tag{4.10}$$

mit den Polarkoordinaten:

$$\eta' = \cos\vartheta' \tag{4.11}$$

Bei hinreichender Anzahl von Reihengliedern können beliebige Verteilungsfunktionen $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ dargestellt werden. Im Unterschied zum MULTHOPP-Verfahren sind hier die Koeffizienten a_μ nicht konstant sondern von den Koordinaten des betrachteten Aufpunktes $P(\xi,\vartheta)$ abhängig. Die partielle Ableitung der Verteilungsfunktion g in Gl. (4.05) wird damit durch eine Summenbildung ersetzt. Die Vertauschung von Integral und Summenbildung führt auf ein so genanntes GLAUERT–Integral, das allgemein gelöst werden kann [Glauert 1929][21]. Die Koeffizienten $a_\mu(\xi,\vartheta)$ können dann nach MULTHOPP als Funktion der Verteilungsfunktion $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ bestimmt werden, indem an Stelle der kontinuierlichen Verteilungsfunktion $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ nur mit den Werten an M diskreten Stützstellen gerechnet wird[22]. Die Polarkoordinaten der Stützstellen sind hierbei äquidistant über die Spannweite verteilt, siehe Bild 4.3:

$$\vartheta_n = \frac{n\,\pi}{M+1} \tag{4.12}$$

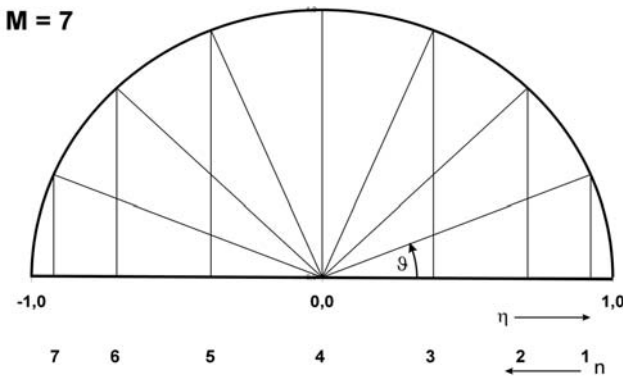

Bild 4.3 Verteilung der Aufpunkte längs der Spannweite

[20] Eine ausführliche Beschreibung des Quadraturverfahrens zur Bestimmung des induzierten Abwindwinkels ist in Anhang C gegeben.

[21] Zur Lösung des GLAUERT-Integrales siehe Anhang N.

[22] Eine Herleitung zur Bestimmung der Koeffizienten a_μ ist in Anhang C gegeben; hierbei ist $\gamma(\vartheta')$ durch $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ zu ersetzen.

Für die kinematische Strömungsbedingung erhält man schließlich[23]:

$$\alpha_{\text{Skelett},\nu}(\xi) = b_{\nu\nu} g_{\nu\nu}(\xi) - \sum_{n=1}^{M}{}' \, b_{\nu n} g_{\nu n}(\xi) \tag{4.13}$$

mit den so genannten MULTHOPP-Koeffizienten [Multhopp 1938][24]:

$$\begin{aligned} b_{\nu\nu} &= \frac{M+1}{4}\frac{1}{\sin\vartheta_\nu} && \text{für } n = \nu \\ b_{\nu n} &= \frac{1}{M+1}\frac{\sin\vartheta_n}{(\cos\vartheta_n - \cos\vartheta_\nu)^2} && \text{für } |n-\nu| = 1,3,5\ldots \\ b_{\nu n} &= 0 && \text{für } |n-\nu| = 2,4,6\ldots \end{aligned} \tag{4.14}$$

Der hochgestellte Strich am Summenzeichen bedeutet, dass der Term für n = υ auszulassen ist. Anstelle der Integralgleichung Gl. (4.05) ist nunmehr eine Summengleichung zu lösen, wobei die Koeffizienten lediglich von der Anzahl der Stützstellen M abhängig sind und allgemein bestimmt werden können. Die kinematische Strömungsbedingung nach Gl. (4.13) ist für alle M Profilschnitte zu erfüllen, wobei sie ebenfalls an jedem Punkt in Profiltiefenrichtung anzuwenden ist.

Bis hier wurden für die Wirbeldichteverteilung k(x´,y´) in Profiltiefenrichtung noch keine Einschränkungen vorgenommen. Zur analytischen Lösung der kinematischen Strömungsbedingung müssen jedoch zusätzliche Annahmen für k(x´,y´) in Profiltiefenrichtung getroffen werden[25]. Beim Verfahren von TRUCKENBRODT wird in Analogie zum aus der ebenen Skelett-Theorie bekannten Ansatz nach GLAUERT [Truckenbrodt 1953a] der Reihenansatz gewählt[26]:

$$k(x', y') = \frac{V_\infty}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y')\, h_n(x') \tag{4.15}$$

Hierbei wird die Verteilung in Profiltiefenrichtung durch die so genannten Einheitsfunktionen $h_n(x')$ beschrieben, während die Koeffizienten $a_n(y')$ die Abhängigkeit der Wirbeldichteverteilung k(x´,y´) in Spannweitenrichtung enthalten. N ist damit die bestimmende Größe für die Freiheitsgrade der Wirbeldichteverteilung in Profiltiefenrichtung und legt fest, an wie viel Punkten in einem Flügelschnitt die kinematische Strömungsbedingung erfüllt werden muss. Für viele Anwendungsfälle ist die Kenntnis der Druckverteilung in einem Profilschnitt nicht erforderlich sondern es interessiert lediglich die Berechnung der lokalen Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte. Hierzu genügt bereits ein zweiparametriger Ansatz. Damit werden in Gl. (4.15) nur die Terme für n = 0 und n = 1 berücksichtigt. Die kinematische Strömungsbedingung ist dann lediglich in jedem Profilschnitt an zwei Punkten zu erfüllen. Die Einheitsfunktion h_0 stellt die erste BIRNBAUM´sche Normalverteilung dar (angestellte ebene Platte) und die Einheitsfunktion h_1 eine Kombination aus der ersten und der zweiten BIRNBAUM´schen Normalverteilung derart, dass das Integral über die Profiltiefe gerade verschwindet (sie erzeugt damit keinen Auftrieb) und lediglich ein Nickmoment liefert (unter $\alpha = \alpha_0$ angestelltes Parabelskelett). Die beiden Verteilungen zeigt Bild 4.4. Für die beiden Einheitsfunktionen gilt in dimensionslosen Koordinaten:

[23] Der Index ν kennzeichnet den betrachteten Flügelschnitt, der Index n kennzeichnet den induzierenden Schnitt. Der hochgestellte Strich am Summenzeichen bedeutet, dass der Term für n =υ auszulassen ist.

[24] Siehe hierzu Anhang C.

[25] Eine ausführliche Beschreibung zur Wirbeldichteverteilung in Profiltiefenrichtung wird in Anhang D gegeben.

[26] Der Reihenansatz nach TRUCKENBRODT für die Wirbeldichteverteilung nach Gl. (4.15) ist formal von dem Ansatz nach GLAUERT verschieden, kann aber in diesen überführt werden, siehe [Truckenbrodt 1953a]. Sein Vorteil im Vergleich zum Ansatz von GLAUERT besteht im Wesentlichen darin, dass die Koeffizienten a_n unmittelbar mit den lokalen aerodynamischen Beiwerten zusammenhängen.

$$h_0(X') = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}$$
$$h_1(X') = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')}\right) \tag{4.16}$$

mit den Definitionen:

$$X = \frac{x - x_{VK}(y')}{\ell(y')} \qquad X' = \frac{x' - x_{VK}(y')}{\ell(y')} \tag{4.17}$$

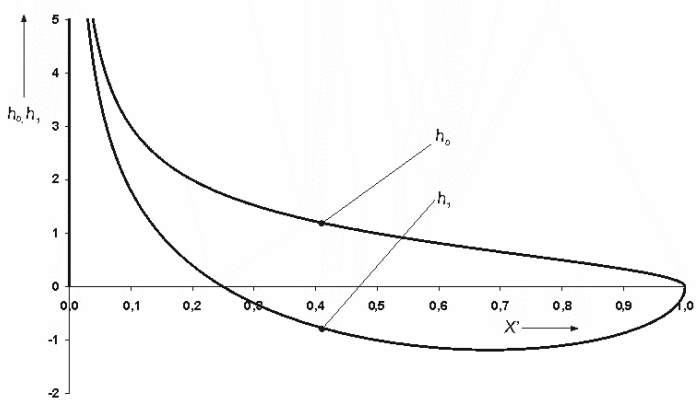

Bild 4.4 Zweiparametriger Ansatz für die Zirkulationsverteilung in Tiefenrichtung

Die Verteilung h_0 wird auch als Grundverteilung und die Verteilung h_1 als Nullverteilung bezeichnet. Mit dem Ansatz für die Wirbeldichteverteilung und mit den beiden Einheitsfunktionen erhält man für die beiden Koeffizienten die elementaren Zusammenhänge[27]:

$$c_a(y) = a_0(y) \tag{4.18}$$

$$c_{m25}(y) = \frac{a_1(y)}{4} \tag{4.19}$$

Der Bezugspunkt liegt hierbei im örtlichen ℓ/4-Punkt (schwanzlastig positiv). Setzt man die Einheitsfunktionen h_n sowie die Koeffizienten a_n in den Ansatz für die Wirbeldichte k nach Gl. (4.15) ein, erhält man schließlich für die Verteilungsfunktion nach Gl. (4.07) mit Gl. (4.08)[28]:

$$g(X,Y) = \frac{\ell}{2\,b}\left[c_a\; i(X,Y) + c_{m25}\; i(X,Y)\right] \tag{4.20}$$

Hierbei wurden zur Abkürzung die MULTHOPP eingeführten Einflussfunktionen i und j eingesetzt[29]:

$$i(X,Y) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y^2}}\right)dX'$$
$$j(X,Y) = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')}\right)\left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y^2}}\right)dX' \tag{4.21}$$

[27] Eine ausführliche Herleitung ist in Anhang E gegeben.

[28] An der Stelle des induzierenden Profilschnittes y' ist nach Gl. (4.22) Y = 0, so dass die Verteilungsfunktion G(x,y;y´) nur noch von X und Y abhängig ist, so dass G = G(X,Y) geschrieben werden kann. Für die Beiwerte und die Profiltiefe an den induzierenden Stellen $c_a(y')$, $c_{m25}(y')$ und $\ell(y')$ kann damit auch $c_a(Y=0)$, $c_{m25}(Y=0)$ und $\ell(Y=0)$ geschrieben werden – auf die Angabe des Variablenwertes kann daher auch verzichtet werden.

[29] Bei TRUCKENBRODT [Truckenbrodt 1953a] werden die Einflussfunktionen H_0 und H_1 eingeführt, die allerdings unmittelbar in die von MULTHOPP eingeführten Einflussfunktionen i und j umgerechnet werden können, wie in [Truckenbrodt 1953a] gezeigt wird.

und der neu eingeführten dimensionslosen Spannweitenkoordinate Y

$$Y = \frac{y - y'}{\ell(y')} \tag{4.22}$$

Die Einflussfunktionen sind lediglich von der Geometrie des Tragflügels abhängig und können vorab bestimmt werden. Die Verteilungsfunktion g(X,Y) wird damit durch die allgemeinen Einflussfunktionen i(X,Y) und j(X,Y) und die noch unbekannten örtlichen Beiwerte c_a und c_{m25} beschrieben. Für die Verteilungsfunktion in den dimensionslosen Koordinaten ξ,η und η´ gilt:

$$g(\xi,\eta;\eta') = \frac{\ell(\eta')}{2b}\left[c_a(\eta')\, i(\xi,\eta;\eta') + c_{m25}(\eta')\, j(\xi,\eta;\eta')\right] \tag{4.23}$$

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass in Gleichungen, in denen sowohl die induzierende Stelle als auch betrachtete Aufpunkte enthalten sind, der hochgestellte Strich die Lage des induzierenden Schnittes kennzeichnet. Dementsprechend bedeutet in Gl. (4.23), dass die an der Stelle η´ vorhandene Auftrieb $c_a(\eta')$ (bzw. das Nickmoment $c_{m25}(\eta')$) über die Einflussfunktionen i(ξ,η;η´) und j(ξ,η;η´) in die Verteilungsfunktion g(ξ,η;η') eingeht, die wiederum über Gl. (4.05) die kinematische Strömungsbedingung $\alpha_{Skelett}(\xi,\eta)$ bestimmt. Hierbei sind die Einflussfunktionen i(ξ,η;η´) und j(ξ,η;η´) durch die Flügelgeometrie sowie der Anstellwinkel der Skelettlinie $\alpha_{Skelett}$ durch die Profilgeometrie $\partial z_{Skelett} / \partial x\,(\xi,\eta)$ und den Profilanstellwinkel α_P bestimmt und können daher als gegeben angesehen werden, so dass die örtlichen Beiwerte $c_a(\eta')$ und $c_{m25}(\eta')$ die Unbekannten des Problems darstellen.

Die Wahl der Aufpunkte zur Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung und damit die Bestimmung der noch unbekannten örtlichen Beiwerte $c_a(\eta')$ und $c_{m25}(\eta')$ kann grundsätzlich beliebig erfolgen. TRUCKENBRODT wählte den ℓ/4-Punkt (in Anlehnung an die Traglinientheorie) und die Hinterkante (Erfüllung der KUTTA'schen Abflussbedingung). Die Wahl des ℓ/4-Punktes ist insofern physikalisch sinnvoll, als in diesem Bereich der Angriffspunkt des anstellwinkelabhängigen Auftriebes liegt. Da die für diese beiden Punkte abgeleiteten Gleichungen prinzipiell identisch sind, werden zur Vereinfachung der Schreibweise für die Hinterkante geltende Größen mit dem tiefgestellten Index „HK" und für den Einviertelpunkt geltende Größen mit dem tiefgestellten Index „25" gekennzeichnet[30]. Gelten Beziehungen für beide Punkte, kann eine besondere Kennzeichnung entfallen. Setzt man die Ergebnisse der Verteilungsfunktion g für die M diskreten Stellen in die kinematische Strömungsbedingung nach Gl. (4.13) ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha_{Skelett\,25\nu} &= b_{\nu\nu} i_{25\nu\nu} \frac{\ell_\upsilon}{2b} c_{a\upsilon} - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} i_{25\nu n} \frac{\ell_n}{2b} c_{an} + b_{\nu\nu} j_{25\nu\nu} \frac{\ell_\upsilon}{2b} c_{m25\nu} - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} j_{25\nu n} \frac{\ell_n}{2b} c_{m25n} \\
\alpha_{Skelett\,HK\nu} &= b_{\nu\nu} i_{HK\nu\nu} \frac{\ell_\upsilon}{2b} c_{a\upsilon} - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} i_{HK\nu n} \frac{\ell_n}{2b} c_{an} + b_{\nu\nu} j_{HK\nu\nu} \frac{\ell_\upsilon}{2b} c_{m25\nu} - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} j_{HK\nu n} \frac{\ell_n}{2b} c_{m25n}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Gl. (4.24) stellt ein Gleichungssystem von 2M Gleichungen dar für die jeweils M unbekannten Werte für die örtlichen Auftriebs- bzw. Nickmomentenbeiwerte dar. Der Index „υ" kennzeichnet wiederum den betrachteten Flügelschnitt und der Index „n" die induzierende Stelle. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass der hochgestellte Strich am Summenzeichen bedeutet, dass jeweils der Term für n =υ auszulassen ist.

[30] Hierdurch entfällt in den folgenden Gleichungen formal die Abhängigkeit in Profitiefenrichtung, da die Gleichungen nun sowohl für die Hinterkante als auch die ℓ/4-Linie hingeschrieben werden. In [Truckenbrodt 1953a] und [Schlichting/Truckenbrodt 1969] wird für die Hinterkante der hochgestellte Index „*" und für die ℓ/4-Linie der hochgestellte Index „**" verwendet.

4.3 Echtzeit Modellierung

In Kapitel 4.2 wurden die theoretischen Grundlagen der Tragflächentheorie nach TRUCKENBRODT dargestellt, um für einen Tragflügel gegebener Geometrie die Zusammenhänge zwischen der Auftriebs- und Nickmomentenverteilung einerseits und der Anstellwinkelverteilung andererseits zu beschreiben. Die entwickelten Gleichungen werden im Folgenden so aufbereitet, dass sie für Echtzeitanwendungen geeignet sind. Für diese echtzeitfähige Aufbereitung des Tragflächenverfahrens wird hier der Begriff „Lifting Surface Method“ eingeführt mit der Kurzbezeichnung LSM.

Das Gleichungssystem beschreibt den Zusammenhang zwischen der Flügelgeometrie (Skelettlinie und Grundriss), der Anstellwinkelverteilung (an M Profilschnitten und an 2 Stellen pro Profilschnitt) sowie der Auftriebs- und der Nickmomentenverteilung (ebenfalls an M Profilschnitten und an 2 Stellen pro Profilschnitt). Die unbekannten Beiwerte c_a und c_{m25} stehen auf der rechten Seite, die übrigen Größen auf der rechten Seite sind (bei gegebener Geometrie und festgelegter Anzahl von Profilschnitten) konstante Faktoren. Die linke Seite enthält die Skelettlinie, die als bekannt vorausgesetzt werden kann, und die Anstellwinkelverteilung, die als Eingangsgröße anzusehen ist.

Die MULTHOPP-Koeffizienten b_{0n} sind lediglich von der Anzahl der Profilschnitte abhängig und die Einflussfunktionen i(X,Y) und j(X,Y) sind durch den Flügelgrundriss festgelegt. Die analytische Berechnung der Einflussfunktionen i(X,Y) und j(X,Y) nach Gl. (4.21) ist sehr aufwendig, kann aber z.B. auch durch numerische Integration erfolgen. Für einige Sonderfälle sind Lösungen z.B. in [Truckenbrodt 1953a, Schlichting/Truckenbrodt 1969, Thomas 1972, Hummel 1979] angegeben.

Gl. (4.24) stellt insgesamt ein Gleichungssystem von 2M Gleichungen für die unbekannten lokalen M Auftriebs- und M Nickmomentenbeiwerte dar. Da die unbekannten Beiwerte in Form von Produkten mit konstanten Koeffizienten auf der rechten Seite stehen, kann es in dieser Form nur iterativ gelöst werden und ist damit bereits bei einer kleineren Anzahl von Flügelschnitten M für Echtzeitanwendungen ungeeignet. HEINTSCH [Heintsch 1994] hat daher als Lösung eine Approximation auf Basis einer Linearisierung vorgeschlagen und damit die Berechnung des Einflusses von räumlichen Windfeldern (hier Wirbelschleppen) auf die Auftriebsverteilung eines Tragflügels für Echtzeitanwendungen auf einem Flugsimulator ermöglicht.

Das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren umgeht die mit der Approximation verbundenen Genauigkeitsverluste und löst Gl. (4.24) exakt. Der Kern zur Lösung des Gleichungssystems liegt in der Erkenntnis, dass das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise dargestellt werden kann, wobei sämtliche konstanten Faktoren zu einer einzigen Matrix und die unbekannten Beiwerte und die bekannten Anstellwinkel jeweils zu einem Vektor zusammengefasst werden können. In einem ersten Schritt werden zunächst die jeweils M lokalen Anstellwinkel am $\ell/4$-Punkt und an der Hinterkante zu Vektoren gruppiert, ebenso die lokalen M Auftriebs- und M Nickmomentenbeiwerte:

$$\underline{\alpha}_{\text{Skelet},25} = \begin{bmatrix} \alpha_{\text{Skelet},25,1} \\ \vdots \\ \alpha_{\text{Skelett},25,M} \end{bmatrix} \qquad \underline{\alpha}_{\text{HK}} = \begin{bmatrix} \alpha_{\text{Skelett,HK},1} \\ \vdots \\ \alpha_{\text{Skelett,HK},M} \end{bmatrix}$$
$$\underline{c}_{a} = \begin{bmatrix} c_{a1} \\ \vdots \\ c_{aM} \end{bmatrix} \qquad \underline{c}_{m25} = \begin{bmatrix} c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Damit kann das Gleichungssystem (4.24) auch in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_{\text{Skelett},25} &= \underline{\underline{M}}_{11}\underline{c}_{a} + \underline{\underline{M}}_{12}\underline{c}_{m25} \\ \underline{\alpha}_{\text{Skelett,HK}} &= \underline{\underline{M}}_{21}\underline{c}_{a} + \underline{\underline{M}}_{22}\underline{c}_{m25} \end{aligned} \tag{4.26}$$

bzw.:

$$\boxed{\underline{\alpha}_{\text{Skelett}} = \underline{\underline{M}}^{*}\,\underline{c}} \tag{4.27}$$

wobei $\underline{\alpha}$ einen 2M**µ**1-Vektor mit den Anstellwinkeln an den M Profilschnitten jeweils an der Hinterkante und am ℓ/4-Punkt darstellt und $\underline{c}$ einen 2M**µ**1-Vektor mit den lokalen Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerten, ebenfalls an den M Profilschnitten:

$$\underline{\alpha}_{\text{Skelett}} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{\text{Skelett 25}} \\ \underline{\alpha}_{\text{Skelett HK}} \end{bmatrix}$$
$$\underline{\underline{M}}^{*} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{11} & \underline{\underline{M}}_{12} \\ \underline{\underline{M}}_{21} & \underline{\underline{M}}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$
$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{c}_{a} \\ \underline{c}_{m25} \end{bmatrix}$$

Ausführlicher hingeschrieben stellt sich Gl. (4.27) wie folgt dar:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\text{Skelett},25,1} \\ \vdots \\ \alpha_{\text{Skelett},25,M} \\ \alpha_{\text{Skelett},HK,1} \\ \vdots \\ \alpha_{\text{Skelett},HK,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,M} & M_{1,M+1} & \cdots & M_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{M,1} & \cdots & M_{M,M} & M_{M,M+1} & \cdots & M_{M,2M} \\ M_{M+1,1} & \cdots & M_{M+1,M} & M_{M+1,M+1} & \cdots & M_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2M,1} & \cdots & M_{2M,M} & M_{2M,M+1} & \cdots & M_{2M,2M} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_{a\,1} \\ \vdots \\ c_{a\,M} \\ c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Für die konstanten Koeffizienten $M_{i,j}$ in Gl. (4.29) gilt auf der Hauptdiagonalen der Matrix $\underline{\underline{M}}$

$$M_{\nu,\nu} = b_{\nu\nu} i_{25\nu\nu} \frac{\ell_{\upsilon}}{2b} \qquad M_{M+\nu,\nu} = b_{\nu\nu} i_{HK\nu\nu} \frac{\ell_{\upsilon}}{2b}$$
$$M_{\nu,M+\nu} = b_{\nu\nu} j_{25\nu\nu} \frac{\ell_{\upsilon}}{2b} \qquad M_{M+\nu,M+\nu} = b_{\nu\nu} j_{HK\nu\nu} \frac{\ell_{\upsilon}}{2b} \qquad \nu = 1 \div M \tag{4.30}$$

und für die Nebenelemente:

$$M_{\nu,n} = -b_{\nu n} i_{25\nu n} \frac{\ell_{n}}{2b} \qquad M_{M+\nu,n} = -b_{\nu n} i_{HK\nu n} \frac{\ell_{n}}{2b}$$
$$M_{\nu,M+n} = -b_{\nu n} j_{25\nu n} \frac{\ell_{n}}{2b} \qquad M_{M+\nu,M+n} = -b_{\nu n} j_{HK\nu n} \frac{\ell_{n}}{2b} \qquad n \neq \nu;\ n = 1 \div M;\ \nu = 1 \div M \tag{4.31}$$

Bei den hier betrachteten Fällen ist der Vektor $\underline{\alpha}$ mit den lokalen Anstellwinkeln gegeben und die aerodynamischen Beiwerte sind unbekannt. Da die Matrix $\underline{\underline{M}}^{*}$ ausschließlich konstante Koeffizienten enthält, die lediglich von der Flügelgeometrie und der Anzahl an betrachteten Profilschnitten abhängig ist, kann sie vorab berechnet und invertiert werden. Das Gleichungssystem kann damit nach dem Vektor $\underline{c}$ aufgelöst werden:

$$\underline{c} = \underline{\underline{M}}^{*-1}\ \underline{\alpha}_{\text{Skelett}} \tag{4.32}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird an Stelle der inversen Matrix $\underline{\underline{M}}^{*-1}$ die Matrix $\underline{\underline{L}}$ eingeführt:

$$\begin{bmatrix} c_{a\,1} \\ \vdots \\ c_{a\,M} \\ c_{m25\,1} \\ \vdots \\ c_{m25\,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{\text{Skelett 25 1}} \\ \vdots \\ \alpha_{\text{Skelett 25 M}} \\ \alpha_{\text{Skelett HK 1}} \\ \vdots \\ \alpha_{\text{Skelett HK M}} \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

mit

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{M}}^{*-1} \tag{4.34}$$

bzw. in Kurzform

$$\underline{c} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\alpha}_{\text{Skelett}} \tag{4.35}$$

Die Lösung des Gleichungssystems nach Gl. (4.24) ist damit auf eine einfache Matrizenoperation zurückgeführt, wobei die Matrix $\underline{\underline{L}}$ vorab bestimmbar ist. Es sei darauf hingewiesen, dass Gl. (4.35) immer noch die kinematische Strömungsbedingung exakt darstellt, die nunmehr aber nach den örtlichen Beiwerten aufgelöst ist. Diese Aufbereitung und Lösung durch Matrizeninvertierung ermöglicht erstmalig eine exakte Lösung für die Tragflächentheorie unter den Echtzeitbedingungen eines Flugsimulators, wobei auch eine größere Anzahl von Profilschnitten M (z.B. M = 31) realisierbar ist.

4.4 Gesamtbeiwerte

In den flugmechanischen Bewegungsgleichungen werden die aerodynamischen Gesamtbeiwerte benötigt, die durch Aufsummation der lokalen Beiwerte bestimmt werden können. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass sich die örtlichen Beiwerte infolge unterschiedlicher Anströmrichtung der einzelnen Flügelschnitte in ihrer Wirkungsrichtung unterscheiden[31]. Die nach Gl. (4.35) ermittelte Verteilung der örtlichen Auftriebsbeiwerte enthält lediglich die Information über die Beträge – die Richtungsinformation ist über die Geschwindigkeitskinematik an jedem Flügelschnitt zu bestimmen. Zusätzlich ist zu beachten, dass auch die Geschwindigkeitsbeträge unterschiedlich sein können, so dass die örtlichen Beiwerte nicht ohne weiteres zu addieren sind. Für die Gesamtbeiwerte können daher nicht die aus der Literatur bekannten Beziehungen verwendet werden [Truckenbrodt 1953a, Thomas 1972], da dort stets ein homogenes Geschwindigkeitsfeld ohne Starrkörperdrehung vorausgesetzt wird. Die Berücksichtigung von Geschwindigkeitsänderungen bei der Bildung der Gesamtbeiwerte ist in den folgenden Gleichungen bereits berücksichtigt, nicht jedoch deren Einfluss auf die Zirkulationsverteilung selbst – dies erfolgt in Kapitel 6.1.

Eine ausführliche Herleitung der Bestimmung der Gesamtbeiwerte ist im Anhang F gegeben, so dass hier lediglich die Ergebnisse angegeben werden[32]. Um die Zusammenhänge überschaubar zu halten, wurde dabei von der Voraussetzung kleiner Winkel ausgegangen. Dieses stellt keine entscheidende Einschränkung dar, da einerseits die Tragflächentheorie bereits auf der Annahme kleiner Anstellwinkel und schwach gewölbter Profile aufbaut und andererseits die bei der Summation auftretenden Winkel stets als Winkeldifferenzen zwischen örtlichem Anstellwinkel und Referenz-Anstellwinkel in Erscheinung treten, die in den meisten Fällen ebenfalls als klein angesehen werden können.

Auftriebsbeiwert

$$C_A = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{an}\,\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin\vartheta_n \tag{4.36}$$

V_{25n} ungestörte lokale Anströmgeschwindigkeit am ℓ/4-Punkt
V_∞ ungestörte Referenz-Anströmgeschwindigkeit
S Flügelfläche

[31] Der örtliche Auftrieb wirkt definitionsgemäß stets senkrecht zur örtlichen Anströmrichtung.

[32] Als Bezugspunkt für die Bestimmung der Gesamt-Beiwerte wurde der Ursprung des flugzeugfesten Koordinatensystems gewählt. Aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit mit Werten aus der Tabellenaerodynamik oder den Données Aérodynamiques kann dieser beispielsweise auch in die Flügelnase gelegt werden.

Widerstandsbeiwert

$$C_W = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{wp,n} - c_{an}\left(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in}\right)\right]\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin\vartheta_n \tag{4.37}$$

$c_{wp,n}$ lokaler Profilwiderstandsbeiwert

Rollmomentenbeiwert

$$C_L = -\frac{\Lambda}{8\,s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{an} + c_{wpn}\left(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in}\right)\right]\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{4.38}$$

s Halbspannweite

Nickmomentenbeiwert

$$\begin{aligned} C_M = \frac{\Lambda}{4s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\Bigg\{ &\left[\frac{z_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu}\left(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}\right) + \frac{x_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu}\right] c_{an} + \frac{\ell_n}{\ell_\mu}\,c_{m25\,n} \\ &+ \left[-\frac{z_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu} + \frac{x_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu}\left(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}\right) - \frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}\left(\alpha_{Fn} + i_F + \varepsilon_{Fn} - \alpha_{in}\right)\right] c_{wp\,n} \Bigg\} \frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin\vartheta_n \end{aligned} \tag{4.39}$$

$x_{Nase\,f}$ Koordinate der Flügelnase im flugzeugfesten Koordinatensystem
$z_{Nase\,f}$ Koordinate der Flügelnase im flugzeugfesten Koordinatensystem

Giermomentenbeiwert

$$C_N = \frac{\Lambda}{8\,s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{wp\,n} - \left(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in}\right)c_{an}\right]\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{4.40}$$

5 Erhöhung der Genauigkeit

5.1 Allgemeines

Das beschriebene Tragflächenverfahren hat drei prinzipielle Nachteile:

1. es beruht auf der Potentialtheorie, d.h. es berücksichtigt keine Reibung und somit keine Grenzschichteffekte,
2. es berücksichtigt keine nichtlinearen Effekte (z.B. Strömungsablösungen bei größeren Anstellwinkeln, den Umschlag von laminarer in turbulente Strömung, den komplexen Einfluss von Ruderausschlägen, Kompressibilitätseffekte, transsonische Effekte etc.) und
3. es erfasst nur die tragenden Flächen, d.h. Tragflügel und Höhenleitwerk – der Rumpf selbst als auch Interferenzen (z.B. durch Rumpf- und Triebwerkseinfluss) werden nicht berücksichtigt und auch der Einfluss des Seitenleitwerkes ist nicht enthalten.

Das Tragflächenverfahren ist daher lediglich als Approximation des aerodynamischen Verhaltens eines realen Flugzeugs anzusehen. Es ist somit sinnvoll (und je nach der geforderten Genauigkeit auch notwendig), das Tragflächenverfahren mit genaueren aerodynamischen Daten des betreffenden Flugzeugs zu kombinieren. Der erste Schritt hierzu ist, Profilkennwerte aus Windkanalmessungen bzw. hochwertigen aerodynamischen Rechenprogrammen zu berücksichtigen – hierbei werden also lediglich zweidimensionale Ergebnisse verwendet. In weiteren Schritten können dreidimensionale Effekte berücksichtigt werden. Da die vorliegende Arbeit dazu dienen soll, die aerodynamische Modellierung räumlicher Einflüsse einer Anstellwinkelverteilung in der Echtzeit-Flugsimulation für Pilotenversuche zu verbessern, kann vorausgesetzt werden, dass das Tragflächenverfahren stets auf einem bereits vorhandenen Flugsimulator eines spezifischen Flugzeugmusters implementiert wird, so dass für dieses Flugzeugmuster bereits ein qualitativ hochwertiges aerodynamisches Modell vorhanden ist, das grundsätzlich die drei oben genannten Punkte berücksichtigt.

Dieses vorhandene aerodynamische Modell kann z.B. ein Ein-Punkt oder ein Zwei-Punkt Modell sein, wie sie in Kapitel 3.2 beschrieben wurden. Um die bestmögliche Qualität (d.h. Genauigkeit) zu bekommen, ist man auf Daten des Flugzeugherstellers angewiesen. Die Art des aerodynamischen Modells ist damit Hersteller bzw. Flugzeug spezifisch. Bei AIRBUS werden die aerodynamischen Daten in den so genannten Données Aérodynamiques dokumentiert, die auf einem Zwei-Punkt Modell beruhen, d.h. letztendlich die aerodynamischen Beiwerte der Flügel-Rumpf-Kombination und des Höhenleitwerks getrennt angeben. Die einzelnen Beiträge zu den verschiedenen Beiwerten sind hierbei in Tabellenform abgelegt, aus denen die aktuellen Werte durch Interpolation ermittelt werden.

Eine Modellierung als Zwei-Punkt-Modell ist für die hier betrachteten Fälle geradezu ideal, da die Kombination des Tragflächenverfahrens mit Realdaten bereits auf einem höheren Niveau (in Bezug auf die Zerlegung des Flugzeugs in seine aerodynamisch relevanten Baugruppen) erfolgen kann. Da das Vorgehen für die Flügel-Rumpf-Kombination und für das Höhenleitwerk sich prinzipiell nicht unterscheiden, wird in dieser Arbeit nur die Flügel-Rumpf-Kombination betrachtet. Die Maßnahmen zur Verbesserung der Genauigkeit des Tragflächenverfahrens lassen sich in fünf Stufen einteilen:

1. Berücksichtigung von Druckverteilungen
2. Berücksichtigung von Profilkennwerten
3. Korrektur der Verteilungen
4. Kalibration der Gesamtbeiwerte
5. Delta-Aerodynamik

Die einzelnen Maßnahmen werden im Folgenden näher erläutert. Die dabei entwickelten Verfahren sind so beschaffen, dass das Tragflächenverfahren auch ohne diese Korrekturen funktionsfähig bleibt. Dieses ist besonders dann von Vorteil, wenn keine geeigneten Referenzwerte vorliegen, wie dies zum Beispiel im Entwurfsprozess der Fall sein kann. Außerdem sind die einzelnen Maßnahmen auch unabhängig voneinander anwendbar – werden sie aber kombiniert angewendet, ist die oben beschriebene Reihenfolge einzuhalten.

5.2 Druckverteilungen

In Kapitel 4.3.2 wurde gezeigt, dass die Wirbeldichteverteilung k(x,y) unmittelbar mit den Druckdifferenzen zwischen Ober- und Unterseite und damit der Druckverteilung c_p zusammenhängt:

$$\Delta c_p(x,y) = \frac{2}{V_\infty} k(x,y) \tag{5.01}$$

Für gegebene Profile kann davon ausgegangen werden, dass Druckverteilungen für unterschiedliche Anstellwinkel bekannt sind. Damit kann der Reihenansatz für die Wirbeldichteverteilung k(x,y) nach Gl. (4.15) mit den Einheitsfunktionen h_n an diese Druckverteilungen angepasst werden. Dabei muss allerdings davon ausgegangen werden, dass ein zweiparametriger Ansatz nicht mehr ausreichend ist, so dass die Ordnung und damit die Anzahl der betrachteten Aufpunkte zur Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung in Profiltiefenrichtung erhöht werden muss. Der numerische Aufwand zur Lösung des Gleichungssystems nach Gl. (4.35) steigt dadurch beträchtlich, da bei einer typischen Anzahl von Elementarflügeln von M = 31 statt bisher $(2M)^2 = 3844$ Operationen bereits bei 3 Aufpunkten schon $(3M)^2 = 8649$ Operationen auszuführen sind. Damit ist ein Einsatz des Verfahrens auf heute üblichen Simulationsrechnern kaum möglich, so dass hier diese Methode der Anpassung an höherwertige Ergebnisse nicht weiter verfolgt wird.

5.3 Profilkennwerte

Bei den Profilkennwerten ist zu unterscheiden zwischen[33]

1. Punktgrößen ($\alpha_{0,P}$ bzw. $c_{a0,P}$ und $c_{m0,P}$) und
2. Derivativa ($c_{a\alpha,P}$ und $c_{m\alpha,P}$)

Hierbei bedeuten

$\alpha_{0,P}$	Nullanstellwinkel des örtlichen Profils
$c_{a0,P}$	Nullauftriebsbeiwert des örtlichen Profils
$c_{m0,P}$	Nullmomentenbeiwert des örtlichen Profils ($c_{a,P} = 0$) [34]
$c_{a\alpha,P}$	Auftriebsanstieg des örtlichen Profils
$c_{m\alpha,P}$	Nickmomentenanstieg des örtlichen Profils

Die Berücksichtigung von Profilkennwerten erfolgt in zwei Schritten.

5.3.1 Berücksichtigung von Nullanstellwinkel und Nullmoment

Die grundlegende Gleichung des Tragflächenverfahrens ist Gl. (4.35):

$$\underline{c} = \underline{\underline{L}}\, \underline{\alpha}_{Skelett} \tag{5.02}$$

mit dem Anstellwinkel der Skelettlinie an einem betrachteten Aufpunkt P_j nach Gl. (4.03):

$$\alpha_{Skelett,j} = \alpha_{P,j} - \left(\partial z_{Skelett} / \partial x\right)_j \tag{5.03}$$

Dieser Anstellwinkel der Skelettlinie ist für jeden Profilschnitt υ am $\ell/4$-Punkt und an der Hinterkante zu bestimmen. Die Formulierung des Tragflächenverfahrens nach Gl. (5.02) hat folgende Nachteile:

1. Die Kontur der Skelettlinie ist nicht immer gegeben.
2. In der Wölbung der Skelettlinie kommen in Gl. (5.02) auch die aerodynamischen Charakteristiken des Profils (α_{0P} und c_{m0P}) zum Ausdruck – diese werden aber durch die Skeletttheorie nur näherungsweise beschrieben.

[33] Profilkennwerte werden durch den zusätzlichen, tiefgestellten Index P gekennzeichnet. Die Kennzeichnung örtlicher Beiwerte durch die Schreibweise in kleinen Buchstaben allein reicht nicht aus, da eine Unterscheidung zu den Verteilungen der örtlichen Beiwerte notwendig ist, die aber bereits 3d-Einflüsse enthalten.

[34] Beim Profil-Nullmoment kann die Angabe eines Bezugspunktes entfallen, da das Nullmoment hiervon unabhängig ist.

Da andererseits aber davon ausgegangen werden kann, dass bei einem gegebenen Profil die erwähnten Kennwerte bekannt sind, ist es sinnvoll, an Stelle der Skelettlinie diese Kennwerte zu verwenden. Dieses ist dadurch möglich, dass beim Tragflächenverfahren die kinematische Strömungsbedingung lediglich an zwei Punkten des Profils erfüllt werden muss, so dass die Skelettlinie nur an zwei Punkten eingeht und damit auch durch nur zwei Parameter ersetzt werden kann – dies ist aber gerade durch die Profilkennwerte $\alpha_{0,P}$ und $c_{m0,P}$ gegeben. Durch Verwendung der Kennwerte ist bei dem hier verwendeten zweiparametrigen Ansatz für die Wirbeldichte in Profiltiefenrichtung kein Informationsverlust verbunden – im Gegenteil, die Eigenschaften des realen Profils können hiermit wesentlich genauer als durch die Skelettlinie abgebildet werden. Die Herleitung des Zusammenhangs zwischen der Neigung $\partial z_{\text{Skelett p}}/\partial x_p$ und den Kennwerten $\alpha_{0,P}$ und $c_{m0,P}$ ist in Anhang G ausführlich beschrieben, so dass hier lediglich die Ergebnisse angegeben werden. Für die Neigung der Skelettlinie im $\ell/4$-Punkt und an der Hinterkante eines Flügelschnittes υ erhält man:

$$\begin{aligned} \partial z_{\text{Skelett},25,\nu,p} / \partial x_p &= \alpha_{0,P,\nu} - \frac{4}{\pi} c_{m0,P,\nu} \\ \partial z_{\text{Skelett},HK,\nu,p} / \partial x_p &= \alpha_{0,P,\nu} + \frac{2}{\pi} c_{m0,P,\nu} \end{aligned} \tag{5.04}$$

Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die örtlichen Profilkennwerte (Index P) ausschließlich als zweidimensionale Größen zu betrachten sind (Profiltheorie), die unabhängig vom Tragflächenverfahren gelten und nicht mit den örtlichen Beiwerten zu verwechseln sind. Für den Anstellwinkel der Skelettlinie nach Gl. (5.03) kann daher geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Skelett},25,\nu} &= \alpha_{P,25,\nu} - \alpha_{0,P,\nu} + \frac{4}{\pi} c_{m0,P,\nu} \\ \alpha_{\text{Skelett},HK,\nu} &= \alpha_{P,HK,\nu} - \alpha_{0,P,\nu} - \frac{2}{\pi} c_{m0,P,\nu} \end{aligned} \tag{5.05}$$

Damit kann in Gl. (5.02) die Neigung der Skelettlinie durch die Profilkennwerte ersetzt werden:

$$\begin{bmatrix} c_{a,1} \\ \vdots \\ c_{a,M} \\ c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{P,25,1} - \alpha_{0,P,1} + \frac{4}{\pi} c_{m0,P,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,25,M} - \alpha_{0,P,M} + \frac{4}{\pi} c_{m0,P,M} \\ \alpha_{P,HK,1} - \alpha_{0,P,1} - \frac{2}{\pi} c_{m0,P,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,HK,M} - \alpha_{0,P,M} - \frac{2}{\pi} c_{m0,P,M} \end{bmatrix} \tag{5.06}$$

Da die Profilkennwerte konstant sind, kann Gl. (5.06) in zwei Anteile aufgespalten werden:

$$\begin{bmatrix} c_{a,1} \\ \vdots \\ c_{a,M} \\ c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c^*_{m025,1} \\ \vdots \\ c^*_{m025,M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{P,25,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,25,M} \\ \alpha_{P,HK,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,HK,M} \end{bmatrix} \tag{5.07}$$

mit der Nullverteilung[35]:

$$\underline{c}_0 = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c^*_{m025,1} \\ \vdots \\ c^*_{m025,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_{0,P,1} + \frac{4}{\pi} c_{m0,P,1} \\ \vdots \\ -\alpha_{0,P,M} + \frac{4}{\pi} c_{m0,P,M} \\ -\alpha_{0,P,1} - \frac{2}{\pi} c_{m0,P,1} \\ \vdots \\ -\alpha_{0,P,M} - \frac{2}{\pi} c_{m0,P,M} \end{bmatrix} \tag{5.08}$$

$c_{a0,\upsilon}$ örtlicher Nullauftriebsbeiwert für alle $\alpha_{P,\upsilon} = 0$
$c^*_{m025,\nu}$ örtliches Null-Nullmoment[36] für alle $\alpha_{P,\upsilon} = 0$

Die Nullverteilung ist unabhängig vom aktuellen Flugzustand und kann daher außerhalb des Echtzeitprozesses bestimmt werden. In Kurzform kann geschrieben werden:

$$\underline{c} = \underline{c}_0 + \underline{\underline{L}}\,\underline{\alpha}_P \tag{5.09}$$

5.3.2 Berücksichtigung des Auftriebsanstieges

Für den Auftrieb eines Elementarflügels gilt nach KUTTA-JOUKOWSKY:

$$dA(y) = \rho V \Gamma(y) dy \tag{5.10}$$

Andererseits gilt auch mit der Definition des örtlichen Auftriebsbeiwertes:

$$dA(y) = \frac{\rho}{2} V^2 \, \ell(y) dy \, c_a(y) \tag{5.11}$$

Daraus folgt für die Zirkulation:

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} V \, \ell(y) \, c_a(y) \tag{5.12}$$

Für den örtlichen Auftriebsbeiwert gilt wiederum allgemein:

$$c_a(y) = c_{a\alpha,P}(y) \left[\alpha_P(y) - \alpha_{0,P}(y) - \alpha_i(y) \right] \tag{5.13}$$

wobei jeder örtliche induzierte Anstellwinkel α_i von der gesamten Auftriebsverteilung abhängig ist. Damit gilt für die Zirkulation eines Elementarflügels:

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} V \, \ell(y) \, c_{a\alpha,P}(y) \left[\alpha_P(y) - \alpha_{0,P}(y) - \alpha_i(y) \right] \tag{5.14}$$

bzw.

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} V \, \ell(y) \, c_{a\alpha,P}(y) \, \alpha_{P,eff}(y) \tag{5.15}$$

[35] Die Nullverteilung ist diejenige Verteilung, bei der alle örtlichen Profilanstellwinkel identisch Null sind, so dass nur die Wölbung (ausgedrückt durch die örtlichen Profilkennwerte) eingeht. Die in der Nullverteilung enthaltenen örtlichen Beiwerte c_{a0} und $c_{m0}{}^*$ sind keineswegs mit dem Nullauftriebsbeiwert $c_{a0,P}$ bzw. mit dem Nullmoment $c_{m0,P}$ zu verwechseln. Da c^*_{m0} für $\alpha_P = 0$ bestimmt wird, wird zur Unterscheidung vom Nullmoment $c_{m0} = c_m(c_a = 0)$ hierfür der Begriff Null-Nullmoment eingeführt.

[36] Dieser Begriff ist nicht normiert, siehe auch vorherige Fußnote.

mit dem effektiven Anstellwinkel des Profils

$$\alpha_{P,eff}(y) = \alpha_P(y) - \alpha_{0,P}(y) - \alpha_i(y) \tag{5.16}$$

Gl. (5.15) stellt die grundlegende Voraussetzung der PRANDTL'schen Integralgleichung der Tragflächentheorie dar, da sie von einem linearen Zusammenhang zwischen Zirkulation und wirksamen Anstellwinkel ausgeht.

In den verwendeten Einheitsfunktionen h_0 und h_1 für die Wirbeldichteverteilung in Profiltiefenrichtung ist implizit der Auftriebsanstieg und der Profilneutralpunkt der ebenen Platte unendlicher Spannweite enthalten [Schlichting/Truckenbrodt 1967]:

$$c_{a\alpha\infty,Platte} = 2\pi \tag{5.17}$$

$$\left(x_N / \ell\right)_{Platte} = 0{,}25 \tag{5.18}$$

Weicht der Auftriebsanstieg des verwendeten Profils von dem Wert 2π ab, müsste dies in einer Modifikation der Einheitsfunktion h_0 berücksichtigt werden, was umfangreiche Änderungen des gesamten Gleichungssystems zur Folge hätte. Wie Gl. (5.15) zeigt, geht der Auftriebsanstieg des Profils in gleicher Weise ein wie die örtliche Profiltiefe. Da hier davon ausgegangen wird (lineare Theorie), dass sich der Auftriebsanstieg nicht mit dem Anstellwinkel ändert, kann der tatsächliche Auftriebsanstieg des verwendeten Profils in eine Ersatzprofiltiefe ℓ^* umgerechnet werden:

$$\ell(y)\, c_{a\alpha,P}(y) = \ell^*(y)\, c_{a\alpha\infty,Platte} = 2\pi\, \ell^*(y) \tag{5.19}$$

$$\ell^*(y) = \ell(y)\, \frac{c_{a\alpha,P}(y)}{2\pi} \tag{5.20}$$

Dies führt auf eine Modifizierung der Matrix $\underline{\underline{L}}$, die außerhalb des Echtzeitprozesses durchgeführt werden kann. Man erhält damit für die Verteilungen der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte:

$$\underline{c} = \underline{c}_0 + \underline{\underline{L}}_{kor}\, \underline{\alpha}_P \tag{5.21}$$

5.3.3 Berücksichtigung des Profilneutralpunktes

Die Berücksichtigung des Profilneutralpunktes aus Windkanalmessungen oder Profilrechnungen soll ebenfalls auf rein zweidimensionaler Basis erfolgen. Wie oben bereits erwähnt sind durch die verwendeten Einheitsfunktionen h_0 und h_1 die örtlichen Neutralpunkte bereits festgelegt:

$$\frac{x_{N,p}(y)}{\ell(y)} = \xi_N(y) = 0{,}25 \tag{5.22}$$

$x_{N,p}(y)$ örtlicher Neutralpunkt im profilfesten Koordinatensystem

Die Berücksichtigung des tatsächlichen Profilneutralpunktes erfolgt in einfacher Weise dadurch, dass in allen Gleichungen, die den örtlichen Neutralpunkt nach Gl. (5.22) enthalten, dieser durch den tatsächlichen Neutralpunkt ersetzt wird:

$$x_{N,p}(y) = \frac{\ell(y)}{4} \rightarrow x_{N,P,p}(y) \tag{5.23}$$

$x_{N,P,p}(y)$ örtl. Neutralpunkt aus Profilkennwerten im profilfesten Koordinatensystem

Dies ist insbesondere bei der Berechnung des Gesamtnickmomentes nach Gl. (4.39) zu berücksichtigen, bei der der örtliche Neutralpunkt durch den Term $\ell/4$ ausgedrückt wird.

Damit ist die Korrekturmaßnahme „Berücksichtigung der Profilkennwerte" abgeschlossen.

5.4 Korrektur der Verteilungen

5.4.1 Grundlagen

Die mit dem Tragflächenverfahren berechneten Verteilungen von Auftrieb und Nickmoment weichen vom realen Verlauf ab. Die Ursachen liegen in den bereits oben genannten Gründen, insbesondere in der fehlenden Berücksichtigung des Flugzeugrumpfes und der Triebwerke sowie in den vereinfacht modellierten Einflüssen von Steuerflächen. Diese Nachteile können erheblich gemildert werden, wenn für bestimmte Flugzustände Referenzverteilungen vorliegen und im Tragflächenverfahren berücksichtigt werden. Solche Referenzverteilungen können aus Windkanalversuchen oder aus Berechnungen mit höherwertigen Verfahren stammen. Im hier behandelten Fall liegen einige Verteilungen in den Données Aérodynamiques von AIRBUS vor; zusätzlich wurden mit Hilfe eines Panelverfahrens weitere Referenzverteilungen erzeugt. Solche Referenzverteilungen sind jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit, sondern werden hier als gegeben vorausgesetzt[37].

Vereinbarung: Der Referenzzustand für die Korrektur enthält keine Drehbewegungen des Flugzeuges und berücksichtigt keinen Wind[38]. Er wird durch den Index „R0“ gekennzeichnet. Zur Unterscheidung erhalten Größen aus dem Panel-Verfahren den Index „PM“.

Unter der Annahme, dass die Ergebnisse aus dem Panelverfahren die korrekte Verteilung beschreiben, wird für jede Stützstelle der c_a- bzw. der c_m-Verteilung des Tragflächenverfahrens ein Korrekturterm ermittelt. Die Korrekturterme aller Stützstellen können wiederum vektoriell zusammengefasst werden. Solche Korrekturvektoren sind für mehrere Referenzzustände zu ermitteln, wobei die erforderliche Stützstellenweite nicht allgemein festgeschrieben werden kann. Generell kann festgestellt werden, dass die Stützstellenweite für die Korrektur dort feiner gewählt werden muss, wo im Strömungsverhalten signifikante Änderungen zu erwarten sind, wie z.B. Kompressibilitätseffekte[39] (Ma > 0,3), Verdichtungsstöße[40] (Ma > 0,7) oder Strömungsablösungen.

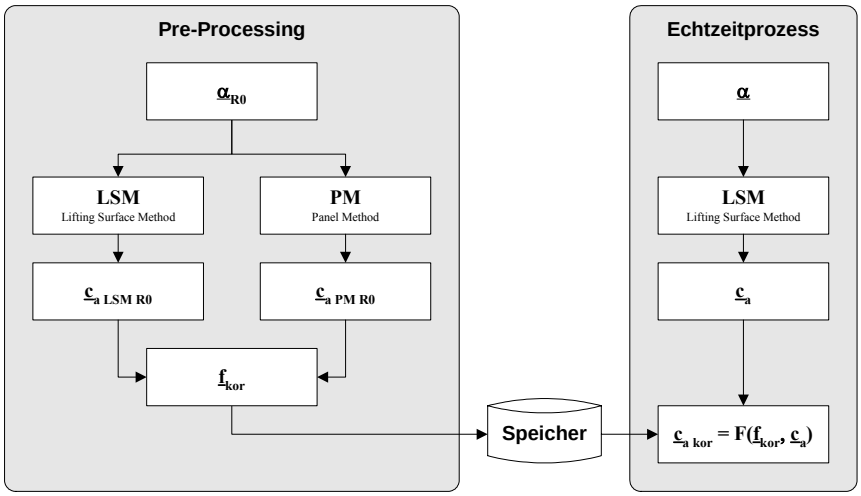

Bild 5.1 Prinzip der Korrektur der c_a-Verteilung

Die Bestimmung der Korrekturterme erfolgt vorab, also losgelöst vom eigentlichen Echtzeitprozess und ist damit Rechenzeit unkritisch. Im Echtzeitprozess sind lediglich die vorab tabellierten Korreturterme anzuwenden. Unter der Voraussetzung kleiner Abweichungen der lokalen Anströmung vom jeweiligen Referenzzustand kann davon ausgegangen werden, dass die Korrektur auch hierfür gültig ist[41]. Das Prinzip der Korrektur zeigt Bild 5.1 am Beispiel der Verteilung der Auftriebsbeiwerte[42].

[37] Hierbei ist streng darauf zu achten, dass die Bezugsrichtung des Anstellwinkels für beide Verfahren einheitlich definiert wird.

[38] Grundsätzlich kann die Korrektur für beliebige Referenzzustände erfolgen. Um die Anzahl der Referenzverteilungen und damit den Aufwand für die Korrektur in vertretbaren Grenzen zu halten, sind die getroffenen Vereinfachungen sinnvoll.

[39] Kompressibilitätseffekte können auch direkt im Tragflächenverfahren durch Einführen des PRANDTL-GLAUERT-Faktors berücksichtigt werden – dies bleibt jedoch einer zukünftigen Erweiterung vorbehalten.

[40] Hier muss angemerkt werden, dass eine korrekte Berücksichtigung lokaler transsonischer Effekte in der Echtzeit-Flugsimulation mit den zurzeit verfügbaren Simulationsrechnern nicht möglich erscheint.

[41] Es sei daran erinnert, dass für jeden Simulations-Zeitschritt ein neuer Vergleichszustand R0 mit den Verteilungen der aerodynamischen Beiwerte liefert, wobei die Effekte der Starrkörperdrehung, der Elastizität und des räumlichen Windfeldes nicht enthalten sind.

5.4.2 Korrektur der Auftriebsverteilung

Um eine gute Korrektur zu erhalten, muss für die Korrekturfunktion f_{korr} ein Ansatz gewählt werden, der den physikalischen Zusammenhängen Rechnung trägt. Da sowohl das Panel- als auch das Tragflächenverfahren einen linearen Zusammenhang zwischen Gesamtanstellwinkel[43] und örtlichem Auftriebsbeiwert liefern, wird für beide Verfahren jeweils ein Geradenansatz gewählt, siehe Bild 5.2.

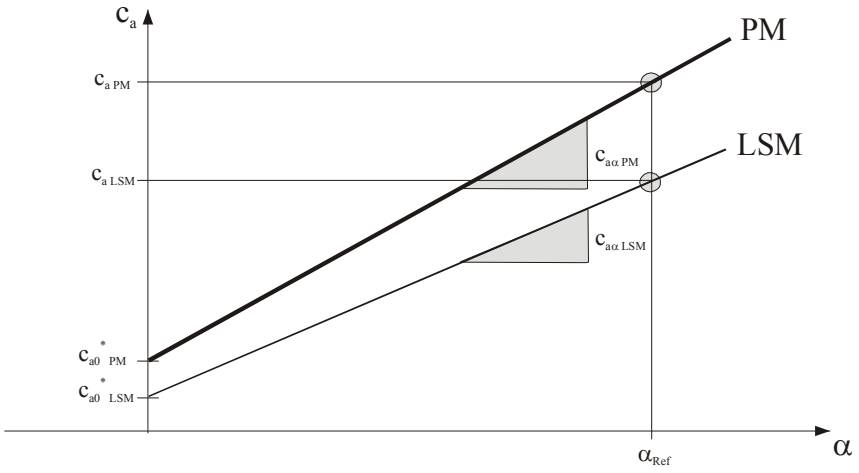

Bild 5.2 örtlicher Auftriebsbeiwert nach Panel- und nach Tragflächenverfahren

Die Korrektur wird als Differenz zwischen beiden Geradengleichungen formuliert. Für den örtlichen Auftriebsbeiwert eines Elementarflügels υ gelten damit jeweils die Ansätze[44]:

$$c_{a,\nu} = c^*_{a0,\nu} + c_{a\alpha,\nu}\ \alpha_{R0}$$
$$c_{a,PM,\nu} = c^*_{a0,PM,\nu} + c_{a\alpha,PM,\nu}\ \alpha_{R0} \qquad (5.24)$$

α_{R0} Referenz-Anstellwinkel des Flugzeuges
c_{a0}^* örtlicher Auftriebsbeiwert bei $\alpha_{R0} = 0$[45]
$c_{a\alpha}$ örtlicher Auftriebsanstieg

An dieser Stelle sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass hier der örtliche Nullauftriebsbeiwert sowie der örtliche Auftriebsanstieg nicht mit den Werten des Profils (siehe Kapitel 5.3 Profilkorrektur) identisch sind, da diese lediglich für zweidimensionale Strömung ermittelt wurden, die örtlichen Beiwerte in Gl. (5.24) aber dreidimensionale Effekte beinhalten. Des Weiteren stellt der Anstellwinkel in Gl. (5.24) den Referenz-Anstellwinkel des Flugzeugs dar, während die Profilkenngrößen auf den lokalen Anstellwinkel des Profils bezogen sind. Der Beiwert c_{a0}^* ist daher kein Nullauftriebsbeiwert im allgemeinen Verständnis der aerodynamischen Kenngrößen. Der hochgestellte Index „*“ kennzeichnet daher lokale „Null-Beiwerte“, die auf den Gesamtanstellwinkel bezogen sind.

Da vereinbarungsgemäß die Werte aus dem Panelverfahren als korrekte Referenzwerte angesehen werden, gilt für den korrigierten Wert des Tragflächenverfahrens die Forderung:

---

[42] Die Korrektur der Nickmomentenverteilung erfolgt nach demselben Prinzip.

[43] Hier ist kein örtlicher Anstellwinkel sondern der Anstellwinkel des Flugzeugs gemeint. Wird dieser erhöht nimmt der Gesamt-Auftriebsbeiwert linear zu und entsprechend nehmen auch die örtlichen Beiwerte linear zu.

[44] Diese Beziehungen gelten ausschließlich für den Sonderfall, dass die örtliche Anströmung in jedem Flügelschnitt den identischen Anstellwinkel $\alpha_\upsilon = \alpha$ aufweist. Hierbei ist zu beachten, dass der Anstellwinkel zwischen der örtlichen Anströmrichtung und der x_f-y_f-Ebene des Flugzeugs gemessen wird. Der Anstellwinkel α stellt also nicht den Anstellwinkel des Profils oder der Skelettlinie dar – beim Anstellwinkel der örtlichen Skelettlinie zur x_f-y_f-Ebene müssen zusätzlich noch der Flügeleinstellwinkel, die geometrische Verwindung, der elastische Torsionswinkel und die Neigung der Skelettlinie berücksichtigt werden.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die hier ermittelten Beiwerte örtliche Größen darstellen, die in jedem Flügelschnitt verschieden sind, obwohl der Anstellwinkel im Referenzzustand in jedem Schnitt gleich ist.

[45] Der Beiwert c^*_{a0} ist nicht zu verwechseln mit c_{a0}, der zur Nullverteilung nach Gl. (5.08) gehört und für $\alpha_P = 0$ gilt.

$$c_{a,kor,\nu} \overset{!}{=} c_{a,PM,\nu} \tag{5.25}$$

Für den korrigierten Auftriebsbeiwert muss ebenfalls ein linearer Zusammenhang gelten:

$$c_{a,kor,\nu} = c^{*}_{a0,kor,\nu} + c_{a\alpha,kor,\nu}\ \alpha_{R0} \tag{5.26}$$

Die Korrektur des örtlichen Beiwertes kann damit in eine Korrektur des Nullauftriebsbeiwertes und in einer Korrektur des Auftriebsanstiegs aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} c^{*}_{a0,kor,\nu} &= c^{*}_{a0,\nu} + k_{0a,\nu} \\ c_{a\alpha,kor,\nu} &= k_{1a,\nu}\ c_{a\alpha,\nu} \end{aligned} \tag{5.27}$$

mit den beiden Korrekturfaktoren

$$\begin{aligned} k_{0a,\nu} &= c^{*}_{a0,PM,\nu} - c^{*}_{a0,\nu} \\ k_{1a,\nu} &= \frac{c_{a\alpha,PM,\nu}}{c_{a\alpha,\nu}} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Auftriebsanstieg und Nullauftriebsbeiwert des Tragflächenverfahrens sind mit der Profil-Anstellwinkelverteilung des Referenzzustandes zu bestimmen (keine Rotation des Flugzeuges, keine Flexibilität und ohne Wind), siehe Bild 5.3:

$$\alpha_{P,R0,\nu} = \alpha_{R0} + i_F + \varepsilon_{VF,\upsilon} \tag{5.29}$$

$\alpha_{P,R0,\upsilon}$ örtlicher Anstellwinkel des Profils im Referenzzustand
α_{R0} Anstellwinkel des Flugzeuges im Referenzzustand
i_F Einstellwinkel des Flügels
$\varepsilon_{VF,\upsilon}$ örtliche Verwindung des Flügels (im Referenzzustand, Flight-Shape)

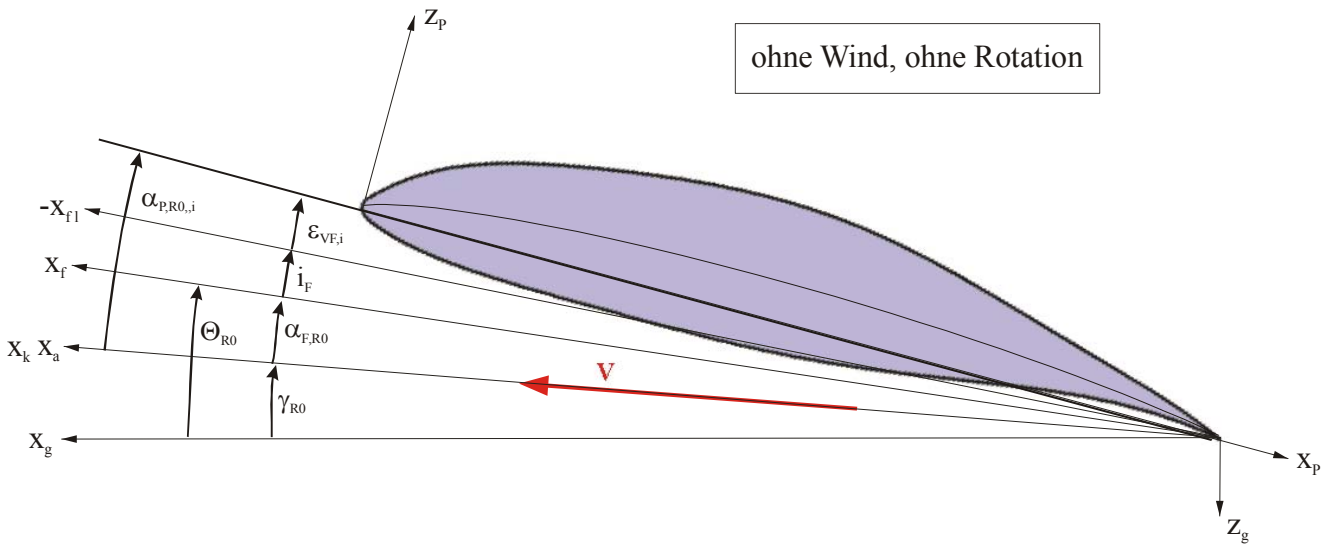

Bild 5.3 Anstellwinkel am Profil für den Referenzzustand R0

Für die dazugehörige Verteilung der Beiwerte gilt entsprechend Gl. (5.21):

$$\underline{c}_{R0} = \underline{c}_0 + \underline{\underline{L}}_{kor}\ \underline{\alpha}_{P,R0} \tag{5.30}$$

Aus Gl. (5.30) erhält man damit für den Referenzzustand die örtlichen Auftriebsbeiwerte:

$$c_{a,R0,\nu} = c_{a0,\nu} + \sum_{i=1}^{2M} \left(\alpha_{R0} + i_F + \varepsilon_{VF,i}\right) L_{\nu i,kor} \qquad \upsilon = 1, M \tag{5.31}$$

Hierbei wurde bereits berücksichtigt, dass am betrachteten Elementarflügel der örtliche Anstellwinkel des Referenzzustandes nach Gl. (5.29) in Profiltiefenrichtung konstant ist[46]. Gl. (5.31) kann in einen vom Anstellwinkel abhängigen und einen vom Anstellwinkel unabhängigen Anteil zerlegt werden:

$$c_{a,R0,\nu} = c_{a0,\nu} + \sum_{i=1}^{2M} \left(i_F + \varepsilon_{VF,i}\right) L_{\nu i,kor} + \alpha_{R0} \sum_{i=1}^{2M} L_{\nu i,kor} \qquad \upsilon = 1, M \tag{5.32}$$

Der für alle Aufpunkte identische Referenz-Anstellwinkel α_{R0} wurde dabei vor die Summe gezogen. Durch Vergleich mit Gl. (5.24) folgt:

$$\begin{aligned} c^*_{a0,\nu} &= c_{a0,\nu} + \Delta c_{a0,\nu} \\ \Delta c_{a0,\nu} &= \sum_{i=1}^{2M} \left(i_F + \varepsilon_{VF,i}\right) L_{\nu i,kor} \qquad \upsilon = 1, M \\ c_{a\alpha,\nu} &= \sum_{i=1}^{2M} L_{\nu i,kor} \end{aligned} \tag{5.33}$$

Zu beachten ist, dass in c_{a0}^* die Nullverteilung c_{a0}[47] enthalten ist und dass der Einfluss des Flügeleinstellwinkels sowie der Verwindung durch Δc_{a0} berücksichtigt wird. Damit sind die beiden Koeffizienten für den Geradenansatz für das Tragflächenverfahren einfach aus den bereits bekannten Koeffizienten der Matrix $\underline{\underline{L}}_{kor}$ und ebenfalls bekannten geometrischen Größen bestimmbar.

Für das Panelverfahren können die benötigten Werte für den Nullauftriebsbeiwert und den Auftriebsanstieg aus der Verteilung des Referenzzustandes bei $\alpha_{R0\text{-}I}$ und einer zweiten Verteilung bei einer kleinen Änderung des Referenzanstellwinkels in $\alpha_{R0\text{-}II}$ und den hierfür gelieferten lokalen Beiwerten bestimmt werden:

$$\begin{aligned} c_{a\alpha,PM,\upsilon} &= \frac{c_{a,PM,R0-II,\nu} - c_{a,PM,R0-I,\nu}}{\alpha_{R0-II} - \alpha_{R0-I}} \\ c^*_{a0\,PM,\nu} &= c_{a,PM,R0-I,\nu} - c_{a\alpha,PM,\nu}\ \alpha_{R0-I} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Die Koeffizienten für den Ansatz für das Tragflächenverfahren können auch analog zu Gl. (5.34) bestimmt werden, allerdings stellt Gl. (5.32) die direkte analytische Lösung dar und zeigt, dass der lineare Ansatz nach Gl. (5.24) exakt gilt. Die Korrekturfaktoren nach Gl. (5.28) sind vorab bestimmbar und sind damit nicht zeitkritisch.

Bild 5.4 zeigt exemplarisch im Vergleich die Verteilungen des Auftriebsbeiwertes beider Verfahren für zwei verschiedene Anstellwinkel noch ohne Korrektur des Tragflächenverfahrens. Man erkennt, dass die mit dem Tragflächenverfahren ermittelten Verteilungen den physikalischen Sachverhalt gut wiedergeben und eine Korrektur nach dem beschriebenen Verfahren sinnvolle Ergebnisse liefert.

[46] Zu beachten ist, dass für einen Elementarflügel die Verwindung ε_{VF} in Profiltiefenrichtung konstant ist (starres Profil), so dass jeweils an den Aufpunkten i und M+1 für ε_{VF} identische Werte einzusetzen sind.

[47] Es sei daran erinnert, dass die Nullverteilung nicht mit der Verteilung der Profilbeiwerte identisch ist, da die Nullverteilung dreidimensionale Effekte berücksichtigt, siehe auch Gl. (5.08).

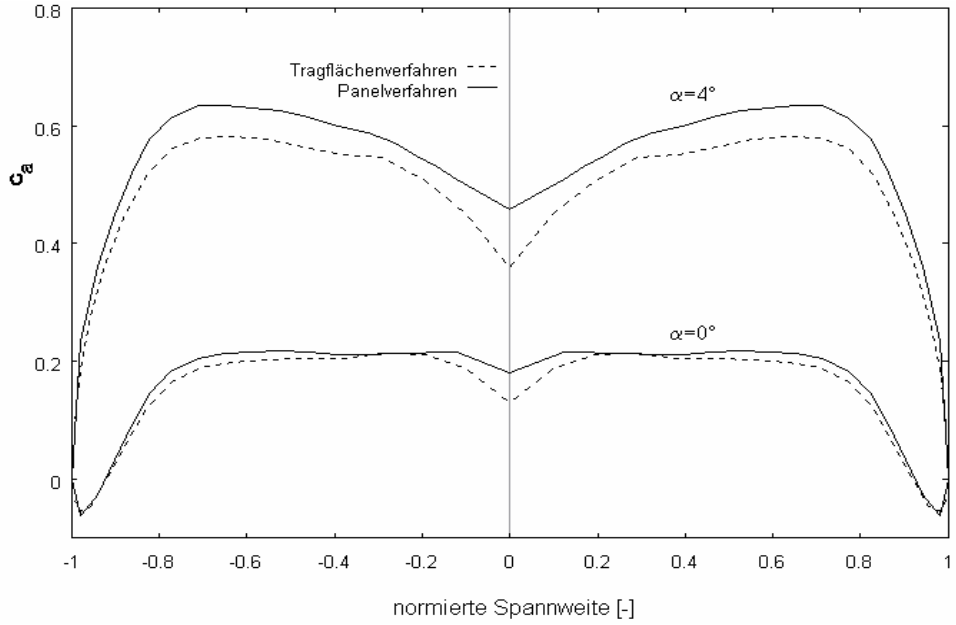

Bild 5.4 Vergleich Panel- und Tragflächenverfahren
Verteilungen des Auftriebsbeiwertes ohne Querruderausschlag

In Bild 5.5 sind Ergebnisse des Tragflächenverfahrens mit Korrektur im Vergleich zum Panelverfahren dargestellt. Da für den Refernzzustand beide Verfahren gleiche Verteilungen liefern müssen, wurden die Verteilungen hier für einen Querruderausschlag ermittelt. Die Korrektur wird damit auf die Zusatzverteilung infolge des Ruderausschlages angewendet, wobei diese Erweiterung des Tragflächenverfahrens in Kapitel 5.2 beschrieben wird. Das Ergebnis zeigt nur noch geringfügige Unterschiede und bestätigt damit die gute Wirksamkeit der Korrektur.

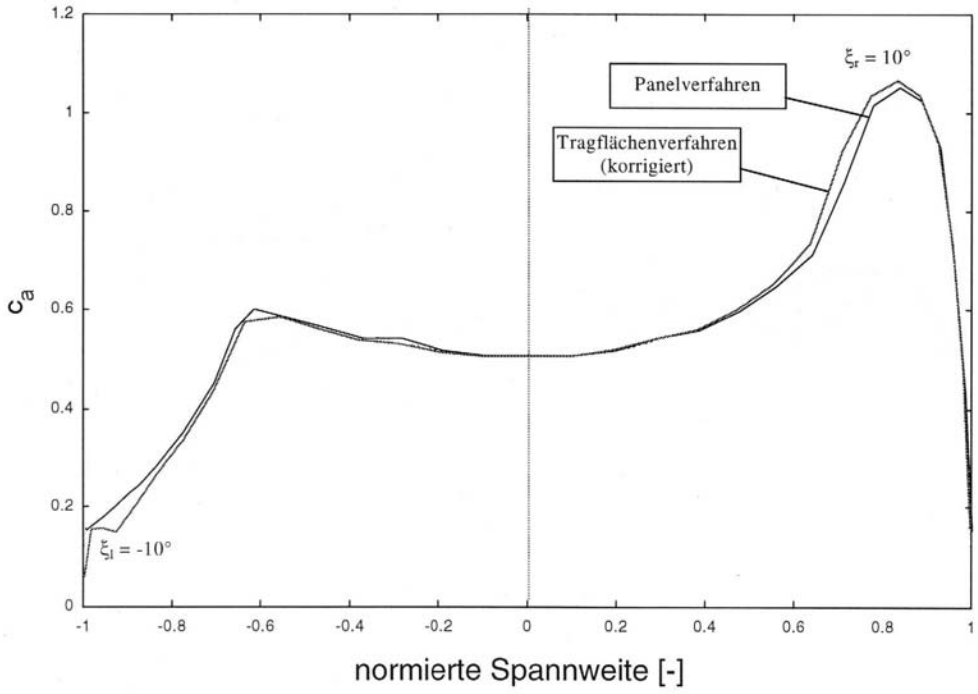

Bild 5.5 Vergleich Panel- und korrigiertes Tragflächenverfahren
Verteilungen des Auftriebsbeiwertes mit Querruderausschlag

5.4.3 Korrektur der Nickmomentenverteilung

Das örtliche Nickmoment ist ebenfalls eine lineare Funktion des Anstellwinkels[48]:

$$\begin{aligned} c_{m25,\nu} &= c^{*}_{m025,\nu} + c_{m\alpha,\nu}\ \alpha_{R0} \\ c_{m25,PM,\nu} &= c^{*}_{m025,PM,\nu} + c_{m\alpha,PM,\nu}\ \alpha_{R0} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Die Korrektur der Nickmomentenverteilung kann daher analog zur Korrektur der Auftriebsverteilung. Es wird daher hier lediglich das Ergebnis angegeben – eine ausführliche Herleitung wird in Anhang H gegeben. Da die Korrektur als Modifikation der Matrizenschreibweise nach Gl. (5.21) formuliert werden soll, wird das Ergebnis hier gleich in dieser Form angegeben, so dass die oben beschriebene Korrektur der Auftriebsverteilung mit enthalten ist. Man erhält als Ergebnis für die korrigierte Verteilung der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte bei beliebiger Anstellwinkelverteilung:

$$\underline{c}_{kor} = \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{\underline{k}}_1\ \underline{\underline{L}}_{kor}\left(\underline{\alpha}_F + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF}\right) \tag{5.36}$$

mit der Nullverteilung und dem Einfluss des Einstellwinkels und der Verwindung

$$\underline{c}_0 = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c_{m025,1} \\ \vdots \\ c_{m025,M} \end{bmatrix} \qquad \Delta\underline{c}_0 = \begin{bmatrix} \Delta c_{a0,1} \\ \vdots \\ \Delta c_{a0,M} \\ \Delta c_{m0,1} \\ \vdots \\ \Delta c_{m0,M} \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_{kor}\left(\underline{i}_F + \underline{\varepsilon}_{VF}\right) \tag{5.37}$$

sowie dem Korrekturvektor $\underline{k}_0$ und der der Korrekturmatrix $\underline{\underline{k}}_1$

$$\underline{k}_0 = \begin{bmatrix} k_{0a,1} \\ \vdots \\ k_{0a,M} \\ k_{0m,1} \\ \vdots \\ k_{0m,M} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{k}}_1 = \begin{bmatrix} k_{1a,1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_{1a,M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{1m,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & k_{1m,M} \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Für die Anstellwinkelverteilung gilt allgemein:

$$\underline{\alpha}_F = \underline{\alpha} + \Delta\underline{\alpha}_{KF} + \Delta\underline{\alpha}_{FlexF} + \Delta\underline{\alpha}_{WF} \tag{5.39}$$

mit den Anstellwinkelvektoren und dem in Gl. (5.36) benötigten elastischen Torsionswinkelvektor

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \Delta\underline{\alpha}_{KF} = \begin{bmatrix} \alpha_{KF,1} \\ \vdots \\ \alpha_{KF,M} \\ \alpha_{KF,M+1} \\ \vdots \\ \alpha_{KF,2M} \end{bmatrix} \quad \Delta\underline{\alpha}_{FlexF} = \begin{bmatrix} \alpha_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \alpha_{FlexF,M} \\ \alpha_{FlexF,M+1} \\ \vdots \\ \alpha_{FlexF,2M} \end{bmatrix} \quad \Delta\underline{\alpha}_{WF} = \begin{bmatrix} \alpha_{WF,1} \\ \vdots \\ \alpha_{WF,M} \\ \alpha_{WF,M+1} \\ \vdots \\ \alpha_{WF,2M} \end{bmatrix} \quad \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{FlexF,M} \\ \varepsilon_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{FlexF,M} \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

[48] Es sei ausdrücklich noch einmal darauf hingewiesen, das entgegen der sonst in der Flugmechanik üblichen Darstellung hier das Nickmoment als Funktion des Anstellwinkels formuliert wird und nicht als Funktion des Auftriebsbeiwertes.

Für die in Gl. (5.38) enthaltenen Korrekturfaktoren für das Nickmoment gilt:

$$k_{0m,\nu} = c^{*}_{m025,PM,\nu} - c^{*}_{m025,\nu}$$
$$k_{1m,\nu} = \frac{c_{m\alpha,PM,\nu}}{c_{m\alpha,\nu}} \tag{5.41}$$

wobei die Koeffizienten für das Panelverfahren analog zu Gl. (5.34) bestimmt werden:

$$c_{m\alpha,PM,\upsilon} = \frac{c_{m25,PM,R0-II,\nu} - c_{m25,PM,R0-I,\nu}}{\alpha_{R0-II} - \alpha_{R0-I}}$$
$$c^{*}_{m025,\,PM,\nu} = c_{m25,PM,R0-I,\nu} - c_{m\alpha,PM,\nu}\ \alpha_{R0-I} \tag{5.42}$$

c^{*}_{m025} Null-Nullmoment

$c_{m\alpha}$ Nickmomentenanstieg

Für die in Gl. (5.41) noch benötigten Kenngrößen aus dem Tragflächen gilt:

$$c^{*}_{m025,\nu} = c_{m025,\nu} + \Delta c_{m025,\nu}$$
$$\Delta c_{m0,\nu} = \sum_{i=1}^{2M} \left(i_F + \varepsilon_{VF,i}\right) L_{M+\nu,i,kor} \tag{5.43}$$
$$c_{m\alpha,\nu} = \sum_{i=1}^{2M} L_{M+\nu,i,kor}$$

5.5 Kalibration der Gesamtbeiwerte

5.5.1 Grundlagen

Durch die oben beschriebenen Methoden der Berücksichtigung von Profilkennwerten (Stufe 2) und der Korrektur der Verteilungen (Stufe 3) kann die Genauigkeit des Tragflächenverfahrens bereits erheblich gesteigert werden. Eine weitere Verbesserung (Stufe 4) kann dadurch erreicht werden, dass Ergebnisse aus einer hochgenauen nichtlinearen Tabellenaerodynamik zur Kalibration der Gesamtbeiwerte herangezogen werden. Da das hier beschriebene aerodynamische Modell als Erweiterung auf vorhandenen Trainingssimulatoren eingesetzt werden soll, kann davon ausgegangen werden, dass ein solches hochpräzises aerodynamisches Modell stets vorhanden ist, was in der Regel als Zwei-Punkt-Modell formuliert sein wird. Da dieses vorhandene Modell üblicherweise den gesamten Flugbereich abdeckt, unterliegt es keinen besonderen Beschränkungen, so dass beliebige Referenzzustände nutzbar sind.

Die Grundidee der Kalibration beruht darauf, aus den Verteilungen des Tragflächenverfahrens in einem Referenzzustand die Gesamtwerte zu bestimmen und mit denen aus der Tabellenaerodynamik zu vergleichen. Hieraus werden Kalibrationsfaktoren ermittelt, die dann auf die bereits korrigierten Verteilungen angewendet werden. Da bei dieser Art der Korrektur das Tragflächenverfahren für den Referenzzustand zwangsweise den richtigen Gesamtbeiwert liefert, wird es auch Kalibration genannt[49].

Vereinbarung: Für die Kalibration der Gesamtbeiwerte wird als Referenzzustand der aktuelle Flugzustand des Flugzeuges herangezogen, wobei allerdings keine Rotation berücksichtigt wird[50]. Der Referenzzustand der Tabellenaerodynamik enthält damit alle Effekte des realen Flugzeuges bis auf die Einflüsse der Rotationsbewegungen, der dynamischen Verformungen der Struktur sowie eines räumlichen Windfeldes[51].

Der für die Kalibration verwendete Referenzzustand wird durch den Index „Ref0“ gekennzeichnet[52]. Die aus der Tabellenaerodynamik verwendeten Größen erhalten den Index „Tab“; auf eine gesonderte Kennzeichnung der Werte aus dem Tragflächenverfahren kann wiederum verzichtet werden.

Da die verbleibenden lokalen Abweichungen vom Referenzzustand lediglich die Einflüsse aus Rotationsbewegungen, dynamischen Verformungen und einem räumlichen Windfeldes enthalten, können sie als klein angenommen werden. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass die Kalibrationsfaktoren auch für diese Abweichungen gültig sind. Da die Kalibrationsfaktoren für jeden Flugzustand neu

[49] Zur Unterscheidung der beiden Stufen 2 und Stufe 3 wird im Folgenden der Begriff Korrektur für die Verteilungen und der Begriff Kalibration für die Gesamtbeiwerte verwendet.

[50] Für die Kalibration bietet sich grundsätzlich an, alle Informationen aus der Tabellenaerodynamik zu berücksichtigen, also auch den Einfluss der Rotationsbewegungen. Diese müssen dann allerdings ebenfalls im Tragflächenverfahren berücksichtigt werden, was kein grundsätzliches Problem darstellt. Hierbei entstehen allerdings Koppelterme, die z.B. Produkte der Form (α ä q) und α^2 enthalten, so dass ein einfacher linearer Geradenansatz zur Bestimmung der Kalibrationsfaktoren analog zur Korrektur der Verteilungen nicht mehr möglich ist. Das Verfahren wird hierdurch erheblich komplexer und ist kaum noch nachvollziehbar. Da der Einfluss dieser Koppelterme auf die Qualität der Kalibration bei der Anwendung auf Verkehrsflugzeuge mit relativ geringen Drehgeschwindigkeiten unerheblich sein dürfte, wird hier auf die Berücksichtigung der Starrkörperdrehungen im Referenzzustand verzichtet.

Wird das Kalibrationsverfahren für kleinere Flugzeuge angewendet, bei denen hohe Drehgeschwindigkeiten auftreten, kann es sinnvoll oder sogar notwendig sein, den Kalibrationsansatz um weitere Abhängigkeiten zu erweitern. Es sei ausdrücklich betont, dass der Einfluss von Drehbewegungen im Tragflächenverfahren enthalten ist, lediglich die in der Kalibration verwendeten Referenzzustände enthalten diesen Einfluss nicht.

[51] Da die Tabellenaerodynamik auch die quasi-stationären Anteile elastischer Verformungen enthält, sind bei der Kalibration die so genannten „Flex-Faktoren“ auszuschalten. Hierbei ist zu untersuchen, für welchen geometrischen Zustand die Tabellenaerodynamik unter diesen Bedingungen gültig ist. Üblicherweise wird dies der so genannte „Flight-Shape“ sein (Lastvielfaches n = 1). Hiervon zu unterscheiden ist der so genannten „Jig-Shape“ (Lastvielfaches n = 0), der den geometrischen Zustand in den Bauvorrichtungen beschreibt. In jedem Fall ist darauf zu achten, dass bei der Korrektur der Verteilungen im geometrischen Modell für das Panel-Verfahren der geometrische Zustand zu Grunde gelegt wird, auf denen die Tabellenaerodynamik bei abgeschalteten Flex-Faktoren beruht. Wird dies nicht beachtet, sind bereits die Verteilungen falsch korrigiert und die daraus resultierenden Differenzen der Gesamtwerte resultieren in fehlerbehafteten Kalibrationsfaktoren. Die Gesamtwerte des Referenzzustandes sind zwar zwangsweise ebenfalls wieder korrekt, aber die Verteilungen sind fehlerbehaftet. Die Fehler in den Verteilungen können dabei unter Umständen größer sein als wenn gar keine Korrektur vorgenommen würde.

[52] Formal gelten für den Referenzzustand „Ref0“ die selben Beschränkungen wie für den für die Korrektur definierten Zustand „R0“, allerdings wird dort ein Offline-Vergleich mit einer Panelmethode durchgeführt, während die Kalibration innerhalb des Echtzeitprozesses erfolgt, so dass die beiden Vergleichszustände nicht identisch sind.

bestimmt werden, werden hierdurch auch nichtlineare Effekte berücksichtigt. Dies stellt eine wesentliche Erweiterung des Tragflächenverfahrens dar, da dieses an sich ein rein lineares Verfahren darstellt. Die Kalibration wird sowohl für den Auftriebs- als auch den Nickmomentenbeiwert durchgeführt.

Die Kalibration wird für jeden Zeitschritt durchgeführt. Hierzu werden das Tragflächenverfahren und die Tabellenaerodynamik im Echtzeitzyklus zusätzlich für den Referenzzustand bei blockierten Drehgeschwindigkeiten $\underline{\Omega}_K = (p,q,r)^T = \underline{0}$ aufgerufen. Im Gegensatz zur Korrektur wird die Kalibration somit „online“ als Teil des Echtzeit-Prozesses durchgeführt[53], siehe Bild 5.6. Zu beachten ist, dass die Kalibration auf der bereits zuvor erfolgten Korrektur der Verteilung aufsetzt. Dies bedeutet vor allem, dass auch die Verteilungen für Auftrieb- und Nickmoment des Referenzzustandes „Ref0“ zuvor korrigiert werden müssen. Dies heißt jedoch nicht, dass das hier beschriebene Verfahren der mehrstufigen Korrektur eine Verteilungskorrektur unabdingbar voraussetzt – wird sie aber angewendet, muss sie auch bei der nachfolgenden Kalibration enthalten sein. Die Reihenfolge der beiden Stufen 3 und 4 ist daher unbedingt einzuhalten[54].

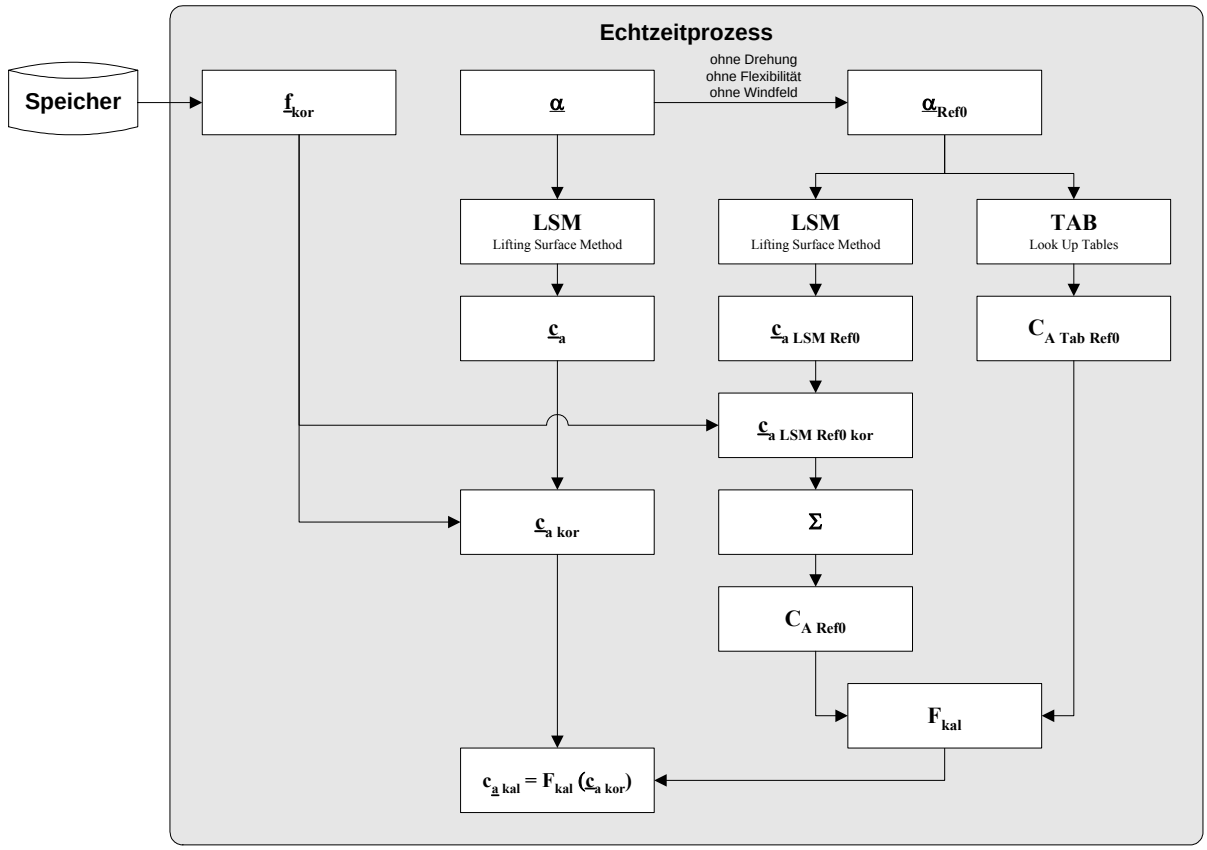

Bild 5.6 Prinzip der Kalibration mit vorheriger Korrektur

Die Kalibration ist nicht auf Auftrieb und Nickmoment beschränkt sondern kann auch auf Widerstand, Roll- und Giermoment angewendet werden. Hierbei ist jedoch darauf zu achten, dass eine Vermischung zwischen den verschiedenen Kalibrationen untereinander sowie mit den vorangegangenen Korrekturen der Verteilungen vermieden wird[55].

[53] Bei Rechenzeit kritischen Anwendung kann hiervon abgewichen werden, indem die Kalibration nur alle n Zeitschritte durchgeführt wird. Hierbei ist nur mit geringen Qualitätseinbußen zu rechnen. Ist auch dies aus Rechenzeitgründen nicht möglich, kann alternativ für die in der Tabellenaerodynamik enthaltenen Flugzustände eine weitere Tabelle mit vorab berechneten Kalibrationsfaktoren abgelegt werden. Dieses erfordert allerdings einen erheblichen Aufwand im Pre-Processing.

[54] An dieser Stelle sei auf eine grundlegende Problematik der hier beschriebenen Korrektur und Kalibrationsverfahren hingewiesen. Um eine physikalisch sinnvolle Korrektur/Kalibration zu gewährleisten, sollten die „Freiheitsgrade“ mit gröber werdenden Ansätzen abnehmen. Dies bedeutet z.B., dass es nicht sinnvoll ist, bei der Kalibration des Nickmomentes die Verteilung zu verändern oder sogar die örtliche Druckverteilung in Profiltiefenrichtung zu korrigieren – dies sollte nur im Rahmen einer Korrektur bzw. auf Basis von Profilkennwerten durchgeführt werden. Die durch die Korrektur modifizierte Verteilung sollte damit durch die Kalibration in ihrer Art nicht mehr verändert werden.

[55] Hiermit ist gemeint, dass z.B. die kalibrierte Auftriebsverteilung (Widerstandsverteilung) anschließend nicht mehr durch eine nachfolgende Kalibration des Rollmomentes (des Giermomentes) verändert wird. Bei der Kalibration des Roll- und des Giermomentes wäre dies jedoch unvermeidlich, so dass auf diese Kalibrationen verzichtet wird. Sollten jedoch signifikante Unterschiede beim Roll-

5.5.2 Kalibration des Auftriebes und des Nickmomentes

Um eine gute Kalibration zu erhalten, muss, wie bei der Korrektur, für die Kalibrationsfunktion F_{kal} ein physikalisch sinnvoller Ansatz gewählt werden. Im Folgenden wird die Kalibration des Auftriebes ausführlich beschrieben, während für die Kalibration des Nickmomentes lediglich die Ergebnisse angegeben werden und die Herleitung Anhang I entnommen werden kann. Auch für die Gesamtbeiwerte liefert das Tragflächenverfahrens einen exakten linearen Zusammenhang zwischen Gesamt-Anstellwinkel[56] und Auftrieb beziehungsweise Nickmoment – für die realen Verläufe gilt dieses zumindest in großen Bereichen, so dass auch für die Gesamtbeiwerte ein Geradenansatz gewählt wird:

$$\begin{aligned} C_A &= C_{A0} + C_{A\alpha}\ \alpha \\ C_{A,Tab} &= C_{A0,Tab} + C_{A\alpha,Tab}\ \alpha \end{aligned} \tag{5.44}$$

C_{A0} Nullauftriebsbeiwert (des Flügels)
$C_{A\alpha}$ Auftriebsanstieg (des Flügels)

Koeffizienten aus dem Tragflächenverfahren

Die für die Kalibrierung benötigte Referenzverteilung erhält man durch Anwendung von Gl. (5.36) für den Referenzzustand „Ref0“[57]:

$$\underline{c}_{Ref0,kor} = \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{\underline{k}}_1\ \underline{\underline{L}}_{kor}\ \underline{\alpha}_{Ref0} \tag{5.45}$$

Aus den Verteilungen der örtlichen Beiwerte können durch Summation die Gesamt-Beiwerte des Referenzzustandes ermittelt werden. Für den Gesamt-Auftriebsbeiwert des Referenzzustandes gilt entsprechend Gl. (5.24):

$$C_{A,Ref0,kor} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{a,Ref0,kor,n}\ \ell_n \sin\vartheta_n \tag{5.46}$$

wobei für den Referenzzustand gilt:

$$V_{25,Ref0,n} = V_\infty \tag{5.47}$$

Für die örtlichen Beiwerte des Referenzzustandes gilt gemäß Gl. (5.26):

$$c_{a,Ref0,kor,\nu} = c^*_{a0,kor,\nu} + c_{a\alpha,kor,\nu}\ \alpha_{Ref0} \tag{5.48}$$

Für den Gesamt-Auftriebsbeiwert der korrigierten Verteilung gilt damit

$$C_{A,Ref0,kor} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c^*_{a0,kor,n} + c_{a\alpha,kor,n}\ \alpha_{Ref0}\ \right]\ell_n \sin\vartheta_n \tag{5.49}$$

Dieser Ausdruck kann in einen α-abhängigen und in einen α-unabhängigen Anteil zerlegt werden[58]:

$$C_{A,Ref0,kor} = C_{A0,kor} + C_{A\alpha,kor}\ \alpha_{Ref0} \tag{5.50}$$

---

und/oder beim Giermoment zwischen den Ergebnissen der Tabellenaerodynamik und des korrigierten Tragflächenverfahrens auftreten, ist dies ein Indiz für eine zu ungenaue Modellierung des Panelverfahrens. Ein Restmaß an Inkonsistenz der Gesamtbeiwerte im Roll- und im Giermoment muss in Kauf genommen werden, da eine absolute Übereinstimmung aller Beiwerte nur erreicht werden kann, wenn Panelverfahren und Tabellenaerodynamik identische Werte liefern – der hierzu notwendige hohe Modellierungsaufwand beim Panelverfahren ist jedoch nicht gerechtfertigt.

[56] Hier ist kein örtlicher Anstellwinkel sondern der Anstellwinkel des Flugzeugs gemeint. Wird dieser erhöht, nimmt der Gesamt-Auftriebsbeiwert linear zu und entsprechend nehmen auch die örtlichen Beiwerte linear zu.

[57] Der örtliche Anstellwinkel α_{Ref0} ist im Referenzzustand in jedem Punkt identisch, da die Bezugsrichtung nicht die örtliche Profilsehne ist sondern die x_f-y_f-Ebene des Flugzeuges – die Spannweiten abhängige Verwindung ist in der Verteilung $\Delta\underline{c}_0$ enthalten.

[58] Dies gilt unter der Voraussetzung, dass für die Kalibration eine konstante α-Verteilung vorliegt – dies ist bei der hier zu Grunde liegenden Definition des Referenzzustandes „Ref0“ der Fall (keine Rotationsbewegungen). Wird die Kalibration auf eine beliebige α-Verteilung angewendet, kann der örtliche Anstellwinkel nicht mehr als Konstante aus der Summenbildung in Gl. (5.49) herausgezogen werden. Eine solche α-Verteilung liegt z.B. vor, wenn eine Rotation um die y-Achse im Referenzzustand enthalten ist.

mit

$$C_{A0,kor} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c^{*}_{a0,kor,n}\ \ell_n \sin\vartheta_n$$
$$C_{A\alpha,kor} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{a\alpha,kor,n}\ \ell_n \sin\vartheta_n \qquad (5.51)$$

Mit den Kenngrößen nach Gl. (5.27) und Gl. (5.33) erhält man:

$$C_{A0,kor} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{a0,n} + \Delta c_{a0,n} + k_{0a,n}\right]\ell_n \sin\vartheta_n$$
$$C_{A\alpha,kor} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} k_{1a,n}\ c_{a\alpha,n}\ \ell_n \sin\vartheta_n \qquad (5.52)$$

Damit sind der korrigierte Gesamt-Nullauftriebsbeiwert und der Gesamt-Auftriebsanstieg unmittelbar aus den Koeffizienten des Tragflächenverfahrens, der Nullverteilung sowie dem an dieser Stelle bereits bekannten Korrekturtermen $k_{0a,\upsilon}$ und $k_{1a,\upsilon}$ vorab bestimmbar.

Koeffizienten aus der nichtlinearen Tabellenaerodynamik

Für die Tabellenaerodynamik können die Koeffizienten durch Vorgabe des Referenzzustandes „Ref0“ (mit $\alpha = \alpha_{Ref0}$, p=q=r=0, …) und eines zweiten Zustandes „Ref0,II“ (mit geringfügiger Änderung des Anstellwinkels $\alpha = \alpha_{Ref0}+\Delta\alpha$, …) aus den hierfür gelieferten Gesamt-Beiwerten bestimmt werden:

$$C_{A\alpha,Tab} = \frac{C_{A,Ref0,II,Tab} - C_{A,Ref0,Tab}}{\alpha_{Ref0,II} - \alpha_{Ref0}}$$
$$C_{A0,Tab} = C_{A,Ref0,Tab} - C_{A\alpha,Tab}\ \alpha_{Ref0} \qquad (5.53)$$

$C_{A\alpha,Tab}$ Auftriebsanstieg aus der Tabellenaerodynamik
$C_{A0,Tab}$ Nullauftriebsbeiwert aus der Tabellenaerodynamik

Bestimmung der Kalibrationsfaktoren

Für den kalibrierten Wert des Tragflächenverfahrens gilt die Bedingung:

$$C_{A,Ref0,kal} \overset{!}{=} C_{A,Tab,Ref0} \qquad (5.54)$$

Auch für den kalibrierten Auftriebsbeiwert muss ein linearer Zusammenhang gelten:

$$C_{A,Ref0,kal} = C_{A0,kal} + C_{A\alpha,kal}\ \alpha_{Ref0} \qquad (5.55)$$

mit den Kennwerten

$$C_{A0,kal} = K_{0A} + C_{A0,kor}$$
$$C_{A\alpha,kal} = K_{1A}\ C_{A\alpha,kor} \qquad (5.56)$$

und den beiden Kalibrationsfaktoren für den Auftrieb:

$$K_{0A} = C_{A0,Tab} - C_{A0,kor}$$
$$K_{1A} = \frac{C_{A\alpha,Tab}}{C_{A\alpha,kor}} \qquad (5.57)$$

Kalibration der Auftriebsverteilung

Da zur Berechnung der elastischen Verformungen die örtlichen aerodynamischen Lasten benötigt werden, muss die Kalibration des Gesamt-Auftriebsbeiwertes noch auf die örtlichen Beiwerte umgerechnet werden. Dies geschieht auf der Basis von Gl. (5.56) durch Einsetzen von Gl. (5.51). Für den kalibrierten Nullauftriebsbeiwert erhält man:

$$C_{A0,kal} = K_{0A} + \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c^{*}_{a0,kor,n}\ \ell_n \sin\vartheta_n \tag{5.58}$$

Für den kalibrierten Auftriebsanstieg erhält man entsprechend:

$$C_{A\alpha,kal} = K_{1A}\frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{a\alpha,kor,n}\ \ell_n \sin\vartheta_n \tag{5.59}$$

Der additive Kalibrationsfaktor K_{0A} in Gl. (5.58) kann auf die Spannweite verteilt werden:

$$C_{A0,kal} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} (c^{*}_{a0,kor,n} + K^{*}_{0A,n})\ \ell_n \sin\vartheta_n \tag{5.60}$$

$$K^{*}_{0A,n} = K_{0A}\frac{S}{b/2}\frac{M+1}{\pi}\frac{1}{\ell_n \sin\vartheta_n} \tag{5.61}$$

Dem kalibrierten Gesamt-Auftriebsbeiwert kann in Analogie zu Gl. (5.46) eine Verteilung örtlicher Beiwerte zugeordnet werden:

$$C_{A,Ref0,kal} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{a\ Ref0,kal,n}\ \ell_n \sin\vartheta_n \tag{5.62}$$

Andererseits folgt aus Gl. (5.55) mit Gl. (5.59) und Gl. (5.60):

$$C_{A,Ref0,kal} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c^{*}_{a0,kor,n} + K^{*}_{0A,n} + K_{1A}\ c_{a\alpha,kor,n}\alpha_{Ref0}\right]\ell_n \sin\vartheta_n \tag{5.63}$$

Damit erhält man für die kalibrierten örtlichen Auftriebsbeiwerte des Referenzzustandes:

$$c_{a,Ref0,kal,\nu} = c^{*}_{a0,kor,\nu} + K^{*}_{0A,\nu} + K_{1A}\ c_{a\alpha,kor,\nu}\ \alpha_{Ref0} \tag{5.64}$$

Da wiederum ein linearer Zusammenhang gilt, kann auch geschrieben werden:

$$c_{a,Ref0,kal,\nu} = c^{*}_{a0,kal,\nu} + c_{a\alpha,kal,\nu}\ \alpha_{Ref0} \tag{5.65}$$

mit

$$\begin{aligned} c^{*}_{a0,kal,\nu} &= c^{*}_{a0,kor,\nu} + K^{*}_{0A,\nu} \\ c_{a\alpha,kal,\nu} &= K_{1A}\ c_{a\alpha,kor,\nu} \end{aligned} \tag{5.66}$$

Ersetzt man die korrigierten örtlichen Beiwerte noch durch Gl. (5.27) und Gl. (5.33) erhält man:

$$\begin{aligned} c_{a0,kal,\nu} &= c_{a0,\nu} + \Delta c_{a0,\nu} + k_{0,\nu} + K^{*}_{0A,\nu} \\ c_{a\alpha,kal,\nu} &= k_{1,\nu}\ K_{1A}\ c_{a\alpha,\nu} \end{aligned} \tag{5.67}$$

Gl. (5.65) kann auch allgemein für jeden anderen Zustand angewendet werden. Hierbei ist allerdings in Gl. (5.67) der lokale Auftriebsanstieg durch Gl. (5.33) zu ersetzten, da nunmehr die gesamte Anstellwinkelverteilung zu berücksichtigen ist. Damit gilt schließlich für die korrigierten örtlichen Auftriebsbeiwerte bei beliebigen Anstellwinkeln:

$$c_{a,kal,\nu} = c_{a0,\nu} + \Delta c_{a0,\nu} + k_{0a,\nu} + K^{*}_{0A,\nu} + k_{1a,\nu}\, K_{1A} \sum_{j=l}^{2M} L_{\nu j} \left(\alpha_{F,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,j}\right) \tag{5.68}$$

wobei für die örtlichen Änderungen des Anstellwinkels entsprechend Gl. (5.39) einzusetzen ist:

$$\alpha_{F,j} = \alpha + \Delta\alpha_{KF,j} + \Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\alpha_{WF,j} \tag{5.69}$$

Kalibration des Nickmomentes

Die Kalibration des Nickmomentes erfolgt analog zu der des Auftriebes. Die Zusammenhänge sind hierbei allerdings etwas komplexer, da in die Berechnung des Gesamt-Nickmomentes[59] auch die lokalen Auftriebsbeiwerte eingehen. Da jedoch die Kalibration des Nickmomentes keine Wirkungen auf die Auftriebsverteilung haben soll, ist hierfür die bereits korrigierte und kalibrierte Verteilung einzusetzen. Dieses gilt in gleicher Weise für den ebenfalls enthaltenen induzierten Abwindwinkel, der direkt von der Auftriebsverteilung abhängig ist. Damit sind in der Kalibration des Nickmomentes bereits andere kalibrierte Größen enthalten, was insgesamt zu aufwändigeren Gleichungen führt. Da das Vorgehen aber ansonsten dem zur Kalibration der Auftriebsverteilung gleicht, werden hier nur die Ergebnisse angegeben, wobei gleichzeitig eine Zusammenfassung mit der Kalibrierung der Auftriebsverteilung zu einer übersichtlicheren Matrizenschreibweise erfolgt – eine ausführliche Herleitung der Kalibration der Nickmomentenverteilung ist in Anhang I gegeben. Ausgehend von Gl. (5.45) erhält man:

$$\underline{c}_{kal} = \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{K}_0 + \left(\underline{\underline{K}}_1\, \underline{\underline{L}}_{kor} + \underline{\underline{K}}_2\right)\left(\underline{\alpha}_F + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF}\right) \tag{5.70}$$

Fasst man noch die einzelnen Vektoren bzw. Matrizen aus Korrektur und Kalibration zusammen, erhält man schließlich:

$$\underline{c}_{kal} = \underline{c}_{0,kal} + \underline{\underline{L}}_{kal} \left(\underline{\alpha}_F + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF}\right) \tag{5.71}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \underline{c}_{0,kal} &= \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{K}_0 \\ \underline{\underline{L}}_{kal} &= \underline{\underline{K}}_1\, \underline{\underline{L}}_{kor} + \underline{\underline{K}}_2 \end{aligned} \tag{5.72}$$

Hierbei sind die Nullverteilungen nach Gl. (5.37), der Korrekturvektor nach Gl. (5.38), der Vektor der elastischen Torsionswinkel nach Gl. (5.40) und der Anstellwinkelvektor nach Gl. (5.39) einzusetzen. Für den Kalibrationsvektor gilt[60]:

$$\underline{K}_0 = \begin{bmatrix} K^{*}_{0A,1} \\ \vdots \\ K^{*}_{0A,M} \\ K^{*}_{0M,1} \\ \vdots \\ K^{*}_{0M,M} \end{bmatrix} \tag{5.73}$$

sowie für die Kalibrationsmatrizen[61, 62]:

[59] Nach der DIN 9300 wird das Gesamtmoment um den Bezugspunkt formuliert ist, der durch den Ursprung des flugzeugfesten Koordinatensystems definiert ist – dieses ist üblicherweise der Schwerpunkt des Flugzeuges. Bei der Kalibration ist darauf zu achten, dass der Bezugspunkt für das Tragflächenverfahren in Übereinstimmung mit dem Bezugspunkt der Tabellenaerodynamik festgelegt wird!

[60] Die hierin enthaltenen Kalibrationsfaktoren für das Nickmoment sind Anhang I zu entnehmen.

[61] Im Unterschied zur Korrekturmatrix $\underline{k}_1$ nach Gl. (5.38) sind in $\underline{\underline{K}}_1$ noch die Kalibrationsfaktoren K_{1A} und K_{1M} enthalten.

[62] Der Faktor 0,5 in der Gleichung für $\underline{\underline{K}}_2$ berücksichtigt eine Aufteilung der Kalibrationsfaktoren K_{2M} auf den ℓ/4-Punkt und die Hinterkante, siehe Anhang I.

$$\underline{\underline{K}}_1 = \begin{bmatrix} K_{1A}k_{1a,1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{1A}k_{1a,M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{1M}k_{1m,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & K_{1M}k_{1m,M} \end{bmatrix} \tag{5.74}$$

$$\underline{\underline{K}}_2 = 0{,}5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{2M,1} & \cdots & 0 & K_{2M,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{2M,M} & 0 & \cdots & K_{2M,M} \end{bmatrix} \tag{5.75}$$

5.5.3 Kalibration des Widerstandes, des Rollmomentes und des Nickmomentes

Den kalibrierten Gesamt-Widerstandsbeiwert erhält man aus Gl. (4.37), indem der lokale Auftriebsbeiwert und der lokale induzierte Abwindwinkel durch ihre kalibrierten Größen ersetzt werden[63]:

$$C_{W,kal} = \frac{b/2}{S} \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \left[c_{wp,n} - c_{a,kal,n} \left(\alpha_{F,n} - \alpha - \alpha_{i,kal,n} \right) \right] \frac{V_{25,n}^2}{V_\infty^2} \ell_n \sin \vartheta_n \tag{5.76}$$

Für den kalibrierten induzierten Abwindwinkel gilt entsprechend Anhang F, Gl. (F.55)[64]:

$$\underline{\alpha}_{i,kal} = \underline{\underline{B}}\ \underline{c}_{a,kal} \tag{5.77}$$

mit der kalibrierten Verteilung der Auftriebsbeiwerte entsprechend Gl. (5.70)[65]:

$$\underline{c}_{a,kal} = \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{K}_0 + \underline{\underline{K}}_1\ \underline{\underline{L}}_{kor} \left(\underline{\alpha}_F + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF} \right) \tag{5.78}$$

Für den kalibrierten Gesamt-Rollmomentenbeiwert erhält man aus Gl. (4.38) durch Einsetzen der kalibrierten örtlichen Beiwerte:

$$C_{L,kal} = -\frac{\Lambda}{8\,s} \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \left[c_{a,kal,n} + c_{wp,n} (\alpha_{F,n} - \alpha - \alpha_{i,kal,n}) \right] \frac{V_{25,n}^2}{V_\infty^2} \ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{5.79}$$

Für den kalibrierten Gesamt-Giermomentenbeiwert folgt entsprechend aus Gl. (4.40):

$$C_{N,kal} = \frac{\Lambda}{8\,s} \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \left[c_{wp,n} - (\alpha_{F,n} - \alpha - \alpha_{i,kal,n})\, c_{a,kal,n} \right] \frac{V_{25,n}^2}{V_\infty^2} \ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{5.80}$$

---

63 Es sei daran erinnert, dass der lokale Profilwiderstandsbeiwert $c_{wp,n}$ als gemessene Größe vorausgesetzt wird und damit als kalibriert angesehen werden kann.

64 In Anhang F wird der induzierte Abwindwinkel als Funktion der unkorrigierten Auftriebsverteilung hergeleitet. Diese Beziehungen gelten in entsprechender Weise auch für die korrigierte und kalibrierte Auftriebsverteilung.

65 Hierbei wurde berücksichtigt, dass entsprechend Gl. (5.75) die Kalibrationsmatrix $\underline{K}_2$ zum Auftrieb keinen Beitrag liefert.

5.6 Delta-Aerodynamik

5.6.1 Grundlagen

Da hier davon ausgegangen wird, dass ein (qualitativ höherwertiges) aerodynamisches Modell vorhanden ist, das jedoch nicht den Einfluss einer räumlichen Anströmung (bestehend aus V, α und β) erfassen kann, muss das Tragflächenverfahren in erster Linie lediglich die Änderungen der aerodynamischen Beiwerte infolge der Einflüsse ermitteln, die in der nichtlinearen Tabellenaerodynamik nicht enthalten sind. Die Ergebnisse der Tabellenaerodynamik können daher als Referenzzustand angesehen werden, während das Tragflächenverfahren lediglich die Abweichungen hiervon beschreibt[66] – diese Art der Modellierung wird als Delta-Aerodynamik bezeichnet.

Im Grundsatz entspricht dies dem Prinzip der Linearisierung. Der Arbeitspunkt wird hierbei durch die Tabellenaerodynamik beschrieben und die Abweichungen durch die Delta-Aerodynamik. Der wesentliche Unterschied zu sonst üblichen linearen Modellen besteht darin, dass der Referenzzustand für jeden Zeitpunkt neu bestimmt wird. Er beschreibt den Flugzustand des starren Flugzeugs in einem konstanten Windfeld und kann sich beliebig ändern[67]. Da die Tabellenaerodynamik den Einfluss der Starrkörperdrehung enthält, ist dieser Referenzzustand nicht identisch mit dem bei der Kalibration verwendeten. Weil die Tabellenaerodynamik hierbei vollständig eingeht und somit sämtliche nichtlinearen Effekte berücksichtigt werden, kann die Qualität des gesamten aerodynamischen Modells nochmals verbessert werden. Diese Verbesserung der Genauigkeit (Stufe 5) ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn das hier beschriebene Tragflächenverfahren auf einem Flugsimulator angewendet werden soll, bei dem für das simulierte Flugzeug nicht genügend Informationen für die Korrekturmaßnahmen nach Stufe 2 bis Stufe 4 vorliegen.

Vereinbarung: Der Referenzzustand für die Tabellenaerodynamik wird durch den Index „Ref“ gekennzeichnet. Er enthält die Effekte aus der Starrkörperdrehung, die so genannten „Flex-Faktoren“ sind jedoch ausgeschaltet[68].

Für die Verteilung der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte gilt damit allgemein:

$$\underline{c} = \underline{c}_{Ref} + \Delta\underline{c} \tag{5.81}$$

Da eine kalibrierte Verteilung vorausgesetzt wird, gilt nach Gl. (5.71) mit dem Anstellwinkelvektor nach Gl. (5.39):

$$\underline{c}_{kal} = \underline{c}_{0,kal} + \underline{\underline{L}}_{kal}\left(\underline{\alpha} + \Delta\underline{\alpha}_{KF} + \Delta\underline{\alpha}_{FlexF} + \Delta\underline{\alpha}_{WF} + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF}\right) \tag{5.82}$$

Für den Anstellwinkel an einem Aufpunkt P_j des Profils[69] gilt allgemein, siehe Bild 5.7[70]:

[66] Es sei darauf hingewiesen, dass zur Berechnung elastischer Verformungen die lokalen Änderungen der Kräfte nicht ausreichen sondern die lokalen Gesamtkräfte (und Momente) benötigt werden. Gleichwohl ist auch hierfür die Idee der Delta-Aerodynamik die Basis zur Verbesserung der Genauigkeit der absoluten Werte.

[67] Dieser Referenzzustand beinhaltet ausdrücklich die Drehbewegungen des Starrkörpers. Dies ist deshalb von Bedeutung, da die induzierten Zusatzanstellwinkel relativ große Werte annehmen können und die alleinige Berücksichtigung im linearen Tragflächenverfahren zu unnötigen Genauigkeitsverlusten führen würde. Es ist daher sinnvoller, das Tragflächenverfahren nur für die Behandlung der Effekte einzusetzen, die von der nichtlinearen Tabellenaerodynamik nicht erfasst werden.

[68] Es ist grundsätzlich möglich, auch die Effekte aus quasi-stationären Verformungen (also mit eingeschalteten Flex-Faktoren) für Korrekturmaßnahmen zu verwenden. Es ist jedoch vollkommen unsicher, ob hierdurch eine wirkliche Verbesserung erreicht werden kann, da bei dem hier beschriebenen Vorgehen die elastischen Verformungen auf der Grundlage eines hochwertigen Finite-Elemente-Modells bestimmt werden. Diese Datenbasis steht jedoch nicht in jedem Fall einem Simulatorhersteller zur Verfügung. Die Flex-Faktoren werden damit unter Umständen eher durch einfachere Abschätzungen ermittelt und durch Fine-Tuning von Hand in Verbindung mit einer subjektiven Pilotenbewertung eingestellt.

[69] Der Index „j“ kennzeichnet, dass es sich um örtliche Größen handelt. Hierbei ist sowohl die Abhängigkeit in Spannweitenrichtung (Flügelschnitt) als auch in Profiltiefenrichtung (ℓ/4-Punkt und Hinterkante) enthalten. Im Gegensatz zum vorher eingeführten Index „υ“ läuft „j“ damit von 1 bis 2M. Die explizite Kennzeichnung der x- und y-Abhängigkeit kann entfallen, da der Index „j“ dies bereits beschreibt. In den Fällen, wo eine Größe lediglich vom Flügelschnitt abhängig ist, also keine x-Abhängigkeit besteht, wird der Index „υ“ verwendet.

[70] In Bild 5.7 wird vereinfachend davon ausgegangen, dass alle Winkel in einer Ebene liegen (Längsbewegung). Diese Vereinfachung dient lediglich der vereinfachten bildlichen Darstellung, die Gleichungen gelten für den allgemeinen Fall.

$$\alpha_{P,j} = \underbrace{\alpha}_{\text{Flugzeug}} + \underbrace{i_F + \varepsilon_{VF,\nu}}_{\text{Einstellwinkel + Verwindungt}} + \underbrace{\Delta\alpha_{KF,j}}_{\text{Starrkörperdrehung}} + \underbrace{\Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,\nu}}_{\text{Elastizität}} + \underbrace{\Delta\alpha_{WF,j}}_{\text{Windfeld}} \qquad (5.83)$$

$\alpha_{P,j}$ örtlicher Anstellwinkel am Profil, ändert sich mit der Spannweite und in Profiltiefenrichtung

α Anstellwinkel des Flugzeuges

i_F Einstellwinkel des Flügels

$\varepsilon_{VF,\upsilon}$ Verwindungswinkel des Flügels im Referenzzustand („Flight-Shape“), ändert sich mit der Spannweite

$\Delta\alpha_{KF,j}$ Zusatzanstellwinkel infolge Rotation des Flugzeuges als Starrkörper, ändert sich mit der Spannweite und in Profiltiefenrichtung

$\Delta\alpha_{FlexF,j}$ Zusatzanstellwinkel infolge dynamischer Verformungsbewegungen des Flugzeuges abweichend vom statisch verformten Zustand (Flight-Shape), ändert sich mit der Spannweite und in Profiltiefenrichtung, enthält nicht die elastische Torsion

$\Delta\varepsilon_{Flex\ F,\upsilon}$ Torsionswinkel des Flügels infolge Elastizität als Abweichung vom statisch verformten Zustand (Flight-Shape), ändert sich mit der Spannweite, nicht jedoch in Profiltiefenrichtung (starres Profil)

$\Delta\alpha_{WF,j}$ Zusatzanstellwinkel infolge eines räumlichen Windfeldes, ändert sich mit der Spannweite und in Profiltiefenrichtung

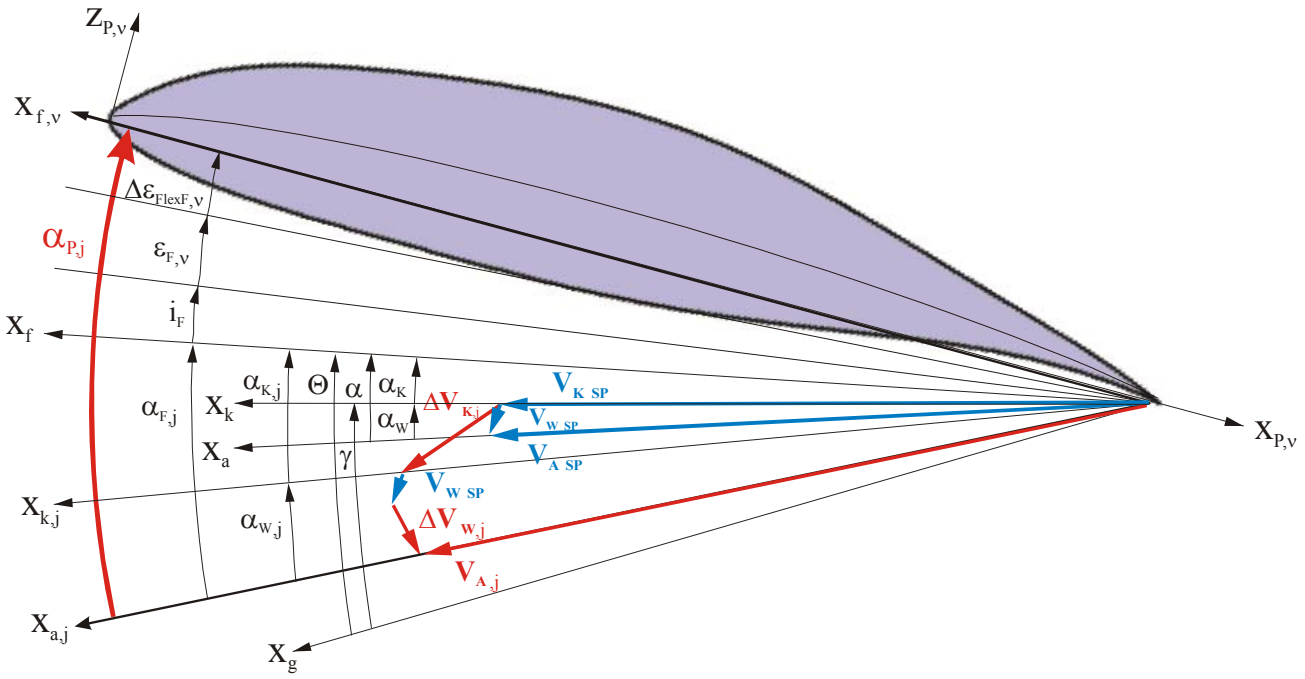

Bild 5.7 Anstellwinkel am Profil im Flügelschnitt υ

Der örtlichen Anstellwinkel am Profil setzt sich zusammen aus einem Anteil infolge des Referenzzustandes und einem Anteil infolge elastischer Verformungen und eines räumlichen Windfeldes:

$$\alpha_{P,j} = \alpha_{P,Ref,j} + \Delta\alpha_{P,j} \qquad (5.84)$$

mit dem Zusatzanstellwinkel am Profil[71]

$$\Delta\alpha_{P,j} = \Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\alpha_{WF,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,j} \qquad (5.85)$$

[71] Es ist darauf zu achten, dass der elastische Torsionswinkel eines Flügelschnitt im ℓ/4-Punkt und an der Hinterkante identisch sind.

Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite resultieren aus örtlichen Zusatzgeschwindigkeiten und werden daher sinnvollerweise zusammengefasst:

$$\Delta\alpha_{VF,j} = \Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\alpha_{WF,j} \tag{5.86}$$

Für den Referenzzustand sowie für den örtlichen Delta-Anstellwinkel gilt damit:

$$\begin{aligned} \alpha_{P,Ref,j} &= \alpha + i_F + \varepsilon_{VF,j} + \Delta\alpha_{KF,j} \\ \Delta\alpha_{P,j} &= \Delta\alpha_{VF,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,j} \end{aligned} \tag{5.87}$$

Da der Einstellwinkel des Flügels und die Verwindung in der Nullverteilung berücksichtigt sind gilt:

$$\begin{aligned} \underline{c}_{Ref,kal} &= \underline{c}_{0,kal} + \underline{\underline{L}}_{kal}\left(\underline{\alpha} + \Delta\underline{\alpha}_{KF}\right) \\ \Delta\underline{c}_{kal} &= \underline{\underline{L}}_{kal}\left(\Delta\underline{\alpha}_{VF} + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF}\right) \end{aligned} \tag{5.88}$$

Die Delta-Aerodynamik berücksichtigt im Term $\Delta\underline{\alpha}_{VF}$ die örtlichen Änderungen des Anstellwinkels infolge dynamischer Verformungsbwegungen (z.B. Schlagbewegung) und eines räumlichen Windfeldes und im Term $\Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF}$ die elastische Torsion des Flügels. Letzterer ist eine direkte Ausgangsgröße des Strukturmodells und damit für die Aerodynamik als bekannt anzusehen. Die Anstellwinkeländerungen aus dynamischen Verformungen werden nicht direkt vom Strukturmodell geliefert, dieses ermittelt vielmehr die Bewegungen der einzelnen Referenzpunkte der Struktur. Die Bestimmung von $\Delta\underline{\alpha}_{VF}$ erfolgt mit Hilfe der so genannten Geschwindigkeitskinematik an jedem betrachteten Aufpunkt, wobei der lokale Anströmvektor in die Komponenten des flugzeugfesten Koordinatensystem zerlegt werden muß. Dieses Vorgehen ist grundsätzlich z.B. in [Wilhelm 2000, Schänzer 1981] beschrieben, wird hier jedoch für die erforderliche räumliche Betrachtungsweise in einer verallgemeinerten Form benötigt. An dieser Stelle wird lediglich das Ergebnis angegeben, eine ausführliche Herleitung wir in Anhang J gegeben. In der Geschwindigkeitskinematik werden die Zusatz-Geschwindigkeiten infolge dynamischer Verformungen sowie eines räumlichen Windfeldes berücksichtigt, die Ausgangsgrößen des Struktur- bzw. des Windmodells darstellen und hier bekannte Eingangsgrößen darstellen.

5.6.2 Anstellwinkelverteilung

Die örtlichen Zusatz-Anstellwinkel in Gl. (5.86) sind auf die x_f-y_f-Ebene bezogen[72] und lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$\Delta\alpha_{VF,j} = \alpha_{F,j,\text{ mit Flexibilität/Windfeld}} - \alpha_{F,j,\text{ ohne Flexibilität/Winfeld}} \tag{5.89}$$

wobei für den lokalen Anstellwinkel bezogen auf die x_f-y_f-Ebene allgemein gilt:

$$\alpha_{F,j} = \alpha + \Delta\alpha_{KF,j} + \Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\alpha_{WF,j} \tag{5.69}$$

Der lokale Anstellwinkel bezogen auf die x_f-y_f-Ebene wiederum kann aus den Komponenten des Anströmvektors im flugzeugfesten Koordinatensystem bestimmt werden. Für den Fluggeschwindigkeitsvektor des Gesamtflugzeuges gilt allgemein nach [Wilhelm 2000][73]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\frac{w_{A,f}}{u_{A,f}} \qquad \beta = \arcsin\frac{v_{A,f}}{V_{A,j}} \\ V_A &= \sqrt{u_{A,f}^2 + v_{A,f}^2 + w_{A,f}^2} \end{aligned} \tag{5.90}$$

Liegt der Anströmvektor in jedem Aufpunkt P_j vor, kann hieraus der lokale Anstellwinkel durch entsprechende Anwendung von Gl. (5.90) am Aufpunkt P_j bestimmt werden. Die Anströmgeschwindigkeit kann aus der Differenz der Bahngeschwindigkeit und der Windgeschwindigkeit bestimmt werden:

$$\underline{V}_{Af} = \underline{V}_{Kf} - \underline{V}_{Wf} \tag{5.91}$$

[72] Der Einstellwinkel des Flügels, die Verwindung und die elastische Torsion werden gesondert berücksichtigt.

[73] Der Schiebewinkel β wird hier nicht berücksichtigt.

Diese Beziehung ist für jeden der betrachteten 2M Aufpunkte P_j hinzuschreiben.

$$\underline{V}_{A,j,f} = \underline{V}_{K,j,f} - \underline{V}_{W,j,f} \tag{5.92}$$

Die Bahngeschwindigkeit eines Aufpunktes kann als Überlagerung der Bewegung des Bezugspunktes (z.B. des Schwerpunktes), der Starrkörperdrehung und Zusatzgeschwindigkeiten aus elastischen Verformungen formuliert werden, so dass für jeden Aufpunkt geschrieben werden kann:

$$\underline{V}_{K,j} = \underline{V}_{K,SP} + \Delta\underline{V}_{K,Rot,j} + \Delta\underline{V}_{K,Flex,j} \tag{5.93}$$

Die Bahngeschwindigkeit des Bezugspunktes ist eine bekannte Ausgangsgröße aus der Starrkörperbewegung, während die Zusatzgeschwindigkeiten infolge dynamischer elastischer Verformungen als ebenfalls bekannte Ausgangsgrößen des Strukturmodells anzusehen sind. Für die Zusatzgeschwindigkeit infolge Starrkörperdrehung gilt allgemein:

$$\Delta\underline{V}_{K,Rot,j} = \underline{\Omega}_K \times \underline{r}_j(x_j, y_j, z_j) \tag{5.94}$$

Die Windgeschwindigkeit an einem Aufpunkt kann als mittlere Bewegung des gesamten Windfeldes sowie örtlichen Schwankungsbewegungen formuliert werden:

$$\underline{V}_{W,j} = \underline{V}_{W,SP} + \Delta\underline{V}_{W,j} \tag{5.95}$$

Beide Anteile sind als Ausgangsgrößen des Windmodells als bekannt anzusehen. Die an einem Aufpunkt wirkende Anströmgeschwindigkeit kann ebenfalls als Überlagerung eines Mittelwertes mit einer lokalen Abweichung beschrieben werden:

$$\underline{V}_{A,j} = \underline{V}_{A,SP} + \Delta\underline{V}_{A,j} \tag{5.96}$$

Setzt man diese Beziehungen in Gl. (5.92) ein, erhält man:

$$\underline{V}_{A} = \underline{V}_{K,SP} + \Delta\underline{V}_{K,Rot} + \Delta\underline{V}_{K,Flex} - \underline{V}_{W,SP} - \Delta\underline{V}_{W} \tag{5.97}$$

und somit für die örtliche Anströmgeschwindigkeit im Referenzzustand

$$\underline{V}_{A,Ref} = \underline{V}_{K,SP} + \Delta\underline{V}_{K,Flex} - \underline{V}_{W,SP} \tag{5.98}$$

Für die örtliche Anströmgeschwindigkeit im Gesamtzustand kann damit auch geschrieben werden:

$$\underline{V}_{A} = \underline{V}_{A,Ref} + \Delta\underline{V}_{K,Flex} - \Delta\underline{V}_{W} \tag{5.99}$$

Diese Beziehungen gelten unabhängig vom jeweiligen Koordinatensystem. Verwendet man zur Beschreibung das flugzeugfeste Koordinatensystem, können aus den Geschwindigkeitskomponenten der Gl. (5.98) bzw. Gl. (5.99) analog zu Gl (5.90) unmittelbar die lokalen Anstellwinkel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \alpha_{F,Ref,j} &= \arctan\frac{w_{A,Ref,j,f}}{u_{A,Ref,j,f}} \\ V_{A,Ref,j} &= \sqrt{u^2_{A,Ref,j,f} + v^2_{A,Ref,j,f} + w^2_{A,Ref,j,f}} \end{aligned} \tag{5.100}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{F,j} &= \arctan\frac{w_{A,j,f}}{u_{A,j,f}} \\ V_{A\,j} &= \sqrt{u^2_{A,j,f} + v^2_{A,j,f} + w^2_{A,j,f}} \end{aligned} \tag{5.101}$$

Für die benötigte Anstellwinkeldifferenz gilt damit

$$\Delta\alpha_{VF,j} = \alpha_{F,j} - \alpha_{F,Ref,j} = \arctan\frac{w_{A,j,f}}{u_{A,j,f}} - \arctan\frac{w_{A,Ref,j,f}}{u_{A,Ref,j,f}} \tag{5.102}$$

5.6.3 Beiwerte

Mit den Änderungen der lokalen Anstellwinkel nach Gl. (5.102) und den aus dem Strukturmodell bekannten Torsionswinkeln infolge elastischer Einflüsse kann die Verteilung der örtlichen Beiwerte der Delta-Aerodynamik nach Gl. (5.88) bestimmt werden. Die Berechnung der Gesamtbeiwerte der Delta-Aerodynamik erfolgt prinzipiell wiederum durch Aufsummation der Verteilungen der lokalen Beiwerte. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass sich die örtlichen Beiwerte des Gesamtzustandes der Referenzverteilung in ihrer Wirkungsrichtung unterscheiden[74]. Die Bestimmung der Delta-Verteilung allein ist deshalb nicht ausreichend, sondern die Referenz-Verteilung mit den dazugehörigen Wirkungsrichtungen ist zu berücksichtigen. Die Bestimmung der Gesamtbeiwerte unter Berücksichtigung beliebiger lokaler Anströmrichtungen ist ausführlich in Anhang F beschrieben.

[74] Der Auftrieb wirkt senkrecht zur Anströmung und der Widerstand in Anströmungsrichtung. Da die örtlichen Anströmrichtungen des Referenzzustandes und des Gesamtzustandes verschieden sind, ist dies in der Delta-Aerodynamik zu berücksichtigen.

6 Erweiterungen des Tragflächenverfahrens

6.1 Berücksichtigung von Geschwindigkeitsänderungen

Das in Kapitel 4 beschriebene Tragflächenverfahren stellt einen Zusammenhang zwischen einer Anstellwinkelverteilung und den dazugehörigen Verteilungen der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte her. Lokale Änderungen des Betrages der Anströmgeschwindigkeit werden hierdurch nicht berücksichtigt, sondern es wird vielmehr von einem gleichförmig verteilten Betrag der Anströmgeschwindigkeitsvektoren ausgegangen. Im allgemeinen Fall ist jedoch in einem räumlichen Windfeld sowie bei dynamischen Strukturverformungen nicht nur die Richtung sondern auch der Betrag der Anströmung vom Ort abhängig. Eine solche Berücksichtigung einer Geschwindigkeitsverteilung im Tragflächenverfahren wurde bislang in der Literatur nicht behandelt und stellt eine erhebliche Erweiterung dar.

Ein einfacher Ansatz besteht darin, den durch eine Zusatzgeschwindigkeit erzeugten Zusatzauftrieb durch einen äquivalenten Ersatz-Anstellwinkel auszudrücken [Dahms/Schröder 1998]. Hierbei bleibt die Wirbeldichteverteilung grundsätzlich unverändert. Bei genauerer Betrachtung stellt man jedoch fest, dass hiermit nur ein Teil des Geschwindigkeitseinflusses erfasst wird, da auch die Wirbeldichteverteilung einen Geschwindigkeitseinfluss enthält. Eine ausführliche Herleitung, wie eine Geschwindigkeitsverteilung im Tragflächenverfahren berücksichtigt werden kann, wird in Anhang K gegeben, so dass hier lediglich die Grundzüge und das Ergebnis angegeben werden.

6.1.1 Zirkulation, Wirbeldichte und Beiwerte

Wie bereits in Kapitel 4 erläutert, wird nach GLAUERT [Glauert 1929] der Tragflügel durch so genannte Elementarflügel der infinitesimalen Spannweite dy und der Flügeltiefe $\ell(y)$ ersetzt. Zwischen dem Auftrieb dA eines Elementarflügels und dessen Zirkulation besteht nach KUTTA-JOUKOWSKY der bereits dargelegte Zusammenhang nach Gl. (5.10):

$$dA(y) = \rho\, V(y)\, \Gamma(y)\, dy \tag{6.01}$$

wobei jedoch bislang davon ausgegangen wurde, dass hierbei die Geschwindigkeit V sich nicht mit der Spannweitenkoordinate y ändert[75]. Gl. (6.01) zeigt, dass eine Geschwindigkeitsverteilung V(y) auch bei unveränderter Zirkulation dΓ(y) den lokalen Auftrieb dA(y) linear beeinflusst. Ist die Zirkulationsverteilung bekannt, kann hieraus die aerodynamische Lastverteilung unter Berücksichtigung der Spannweiten abhängigen Geschwindigkeitsverteilung ermittelt werden. Es bleibt allerdings noch die Frage zu beantworten, wie die Zirkulationsverteilung Γ(y) durch eine Geschwindigkeitsverteilung V(y) beeinflusst wird. Die Zirkulation eines Elementarflügels der Spannweite dy ergibt sich durch Integration in Profiltiefenrichtung:

$$\Gamma(y) = \int_{\Gamma_{VK}}^{\Gamma_{HK}} d\Gamma(x,y) \tag{6.02}$$

mit der Zirkulation (siehe Gl. (O.04)):

$$d\Gamma(x,y) = k(x,y)\, dx \tag{6.03}$$

Für den örtlichen Auftrieb folgt aus der allgemeinen Definition des örtlichen Auftriebsbeiwertes:

$$dA(y) = \frac{\rho}{2} V^2(y)\, \ell(y)\, c_a(y)\, dy \tag{6.04}$$

[75] Änderungen der Luftdichte als Funktion des Ortes entlang der Flugzeugabmessungen sind grundsätzlich auch zu berücksichtigen, können aber für die hier betrachteten Fälle in der Praxis vernachlässigt werden. Weiterhin soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass die Geschwindigkeit V hier stets als die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung zu betrachten ist. Auf die sonst übliche Kennzeichnung mit dem tiefgestellten Index „∞“ kann hier verzichtet werden, da die tatsächlichen örtlichen Geschwindigkeiten, d.h. unter Berücksichtigung der Einflüsse aus der Umströmung des Flügels, hier nicht betrachtet werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Bezeichnung „ungestörte Strömung“ gleichwohl Einflüsse aus externen Störungen wie z.B. Böen beinhaltet, d.h. die Geschwindigkeit ist eine Funktion aller drei Raumkoordinaten: V = V(x,y,z). Für die hier betrachteten Fälle (ebenes Problem) entfällt aber stets die Abhängigkeit von der z-Koordinate: V = V(x,y,z=0) = V(x,y).

Durch Vergleich von Gl. (6.04) mit Gl. (6.01) folgt unmittelbar für die Zirkulation:

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} V(y)\, \ell(y)\, c_a(y) \tag{6.05}$$

Die örtliche Zirkulation $\Gamma(y)$ ist damit direkt linear von der örtlichen Geschwindigkeit abhängig. Aus Gl. (6.02) und Gl. (6.03) folgt, dass auch die Wirbeldichteverteilung k(x,y) direkt von V(y) abhängig sein muss. Des Weiteren ist der in Gl. (6.05) enthaltene örtliche Auftriebsbeiwert vom effektiven Profilanstellwinkel abhängig

$$c_a(y) = c_{a0}(y) + c_{a\alpha}(y)\, \alpha_{P,\mathrm{eff}}(y) \tag{6.06}$$

der wiederum vom induzierten Anstellwinkel abhängig ist[76]:

$$\alpha_{P,\mathrm{eff}}(y) = \alpha_P(y) - \alpha_i(y) \tag{6.07}$$

Für den induzierten Anstellwinkel gilt wiederum entsprechend Gl. (4.03)[77]:

$$\alpha_i(x,y) = -\frac{w(x,y)}{V(y)} \tag{6.08}$$

wobei für den induzierten Abwind nach Gl. (O.06) gilt[78]:

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y') \frac{1 + \dfrac{x - x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{(y-y')^2}\, dx'\, dy' \tag{6.09}$$

Da die Wirbeldichteverteilung k(x,y) von V(y) abhängig ist, wird hierdurch auch der induzierte Abwind w(x,y) und damit der induzierte Anstellwinkel $\alpha_i(y)$ verändert. Neben der direkten, quadratischen Abhängigkeit des lokalen Auftriebes von der Geschwindigkeit nach Gl. (6.04) besteht daher zusätzlich noch eine indirekte Abhängigkeit im Auftriebsbeiwert $c_a(y)$ über den induzierten Anstellwinkel $\alpha_i(y)$. Diese indirekte Abhängigkeit wird durch die induzierte Abwindgeschwindigkeit w(x,y) nach Gl. (6.09) berücksichtigt sowie durch den direkten Einfluss der örtlichen Geschwindigkeit in Gl. (6.08). Eine einfache Umrechnung einer Geschwindigkeitsverteilung in eine Ersatz-Anstellwinkelverteilung berücksichtigt diese komplexen Wechselwirkungen nicht.

Für die Wirbeldichteverteilung bei konstanter Geschwindigkeit V_{SP} gilt bisher nach Gl. (4.15) der Ansatz nach GLAUERT:

$$k(x,y) = \frac{V_{SP}}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\, h_n(x) \qquad \text{für } V \neq f(y) \tag{6.10}$$

V_{SP} Fluggeschwindigkeit des Bezugspunktes (Schwerpunkt)

Da für den allgemeinen Fall die Wirbeldichte linear abhängig von der örtlichen Geschwindigkeit V(y) sein muss, kann dies durch eine einfache Modifikation des GLAUERT'schen Ansatzes für die Wirbeldichte berücksichtigt werden:

$$k(x,y) = \frac{V(y)}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\, h_n(x) \tag{6.11}$$

[76] Der induzierte Anstellwinkel wird aus der Induktion des Wirbelsystems am Ort des Profils selbst bestimmt und ist als Mittelwert für das gesamte Profil zu deuten.

[77] Bislang wurde der induzierte Anstellwinkel nach Gl. (4.04) ermittelt mit der ungestörten Anströmgeschwindigkeit V_∞.

[78] Es sei daran erinnert, dass der hochgestellte Strich ´ die induzierende Stelle kennzeichnet. Eine Unterscheidung zwischen induzierender Stelle und betrachtetem Aufpunkt ist jedoch nur in Gleichungen zwingend erforderlich, in denen beide Stellen gemeinsam vorkommen. In Gleichungen, in denen dies nicht der Fall ist, wird daher auf die Unterscheidung verzichtet und der hochgestellte Strich weggelassen.

Hierdurch wird weiterhin die x-Abhängigkeit der Wirbeldichte in den Einheitsfunktionen h_n berücksichtigt, während die Geschwindigkeit V und Koeffizienten a_n in Spannweitenrichtung variabel sind. Für den allgemeinen Fall, dass sich die Anströmgeschwindigkeit auch in Profilrichtung ändern kann, ist dieses im GLAUERT'schen Ansatz nur schwer zu berücksichtigen, da die Abhängigkeit in Flügeltiefenrichtung sich in den Einheitsfunktionen h_n niederschlägt, die hier aber möglichst nicht modifiziert werden sollen, um den bisherigen Lösungsweg beibehalten zu können. Außerdem ist zu beachten, dass signifikante Geschwindigkeitsänderungen in Profilrichtung zu instationären Effekten führen, die in dem bisher behandelten Verfahren nicht berücksichtigt sind – diese Effekte werden in Kapitel 6.3 behandelt. Im Folgenden wird daher davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeitsverteilung in Profilrichtung durch ihren Mittelwert ausreichend wiedergegeben werden kann[79, 80]:

$$V(y)=\frac{1}{\ell(y)}\int_{x_{VK}}^{x_{HK}} V(x,x)dx \tag{6.12}$$

Da in Gl. (6.09) lediglich der Ansatz für die Wirbeldichte k(x,y) erweitert wurde, bleibt die Verteilungsfunktion G nach Gl. (4.08) unverändert

$$G(x,y;y')=\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx' \tag{6.13}$$

Für die dimensionslose Verteilungsfunktion g gilt entsprechend Gl. (4.07) nunmehr jedoch die verallgemeinerte Definition[81]:

$$g=\frac{G}{b\,V_{SP}} \tag{6.14}$$

Damit erhält man die verallgemeinerte Integralgleichung der Tragflächentheorie:

$$\alpha_{Skelett}(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\frac{V_{SP}}{V(\eta)}\int_{-1}^{+1}\frac{\partial g(\xi,\eta;\eta')}{\partial\eta'}\frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \tag{6.15}$$

Der Unterschied zum bisher behandelten Spezialfall einer konstanten Geschwindigkeit besteht damit lediglich in dem Vorfaktor vor dem Integral $V_{SP}/V(\eta)$ und in einem modifizierten Ansatz für die Wirbeldichte, der implizit in der Verteilungsfunktion g enthalten ist. Das in Kapitel 4.2 beschriebene Lösungsverfahren kann dadurch unverändert beibehalten werden. so dass für die kinematische Strömungsbedingung entsprechend Gl. (4.13) folgt:

$$\alpha_{Skelett,\nu}(\xi)=\frac{V_{SP}}{V_\nu}\left[b_{\nu\nu}g_{\nu\nu}(\xi)-\sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n}g_{\nu n}(\xi)\right] \tag{6.16}$$

Für die örtlichen Beiwerte folgt auch im verallgemeinerten Fall:

$$c_a(y)=a_0(y) \tag{6.17}$$

$$c_{m25}(y)=\frac{a_1(y)}{4} \tag{6.18}$$

[79] Diese Vereinfachung gilt nur für den einzelnen Flügel, bei dem sich üblicherweise der Betrag der Anströmung lediglich signifikant mit der Spannweite ändert: V = V(y). Die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen Flügel und Höhenleitwerk sind erheblich und müssen berücksichtigt werden.

[80] Der übliche Querstrich zur Kennzeichnung von Mittelwerten wird hier weggelassen.

[81] Die Verteilungsfunktion G wird mit einer Bezugsgeschwindigkeit dimensionslos gemacht – Im Unterschied zu Gl. (4.07) kann hier nicht die Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen verwendet werden, da das ungestörte Geschwindigkeitsfeld an jedem Punkt eine andere Geschwindigkeit hat, sondern es wird die ungestörte Geschwindigkeit am Schwerpunkt V_{SP} als Bezugsgeschwindigkeit gewählt.

Dieses Ergebnis ist nicht ganz unerwartet, da sich bei dem erweiterten GLAUERT'schen Ansatz die Zusammenhänge in Profiltiefenrichtung nicht ändern. Für die verallgemeinerte, dimensionslose Verteilungsfunktion g erhält man schließlich entsprechend Gl. (4.23) in dimensionslosen Koordinaten:

$$g(\xi,\eta;\eta') = \frac{\ell(\eta')}{2b}\frac{V(\eta')}{V_{SP}}\left[c_a(\eta')\, i(\xi,\eta) + c_{m25}(\eta')\, j(\xi,\eta)\right] \tag{6.19}$$

mit den unveränderten Einflussfunktionen i(X,Y) und j(X,Y) nach Gl. (4.21).

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem Ergebnis für die Verteilungsfunktion bei konstanter Geschwindigkeit g(ξ,η;η') Gl. (4.23), ist in Gl. (6.19) der zusätzliche örtliche Vorfaktor $V(\eta')/V_{SP}$ enthalten, der an jedem betrachteten Flügelschnitt unterschiedlich ist und damit die gesamte Verteilungsfunktion verändert. Für die M diskreten Flügelschnitte erhält man damit entsprechend Gl. (4.24) das folgende Gleichungssystem[82]:

$$\begin{aligned}
\alpha_{Skelett25,\nu} &= b_{\nu\nu} i_{25\nu\nu} \gamma_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_\nu} b_{\nu n} i_{25\nu n} \gamma_n + b_{\nu\nu} j_{25\nu\nu} \mu_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_\nu} b_{\nu n} j_{25\nu n} \mu_n \\
\alpha_{SkelettHK,\nu} &= b_{\nu\nu} i_{HK\nu\nu} \gamma_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_\nu} b_{\nu n} i_{HK\nu n} \gamma_n + b_{\nu\nu} j_{HK\nu\nu} \mu_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_\nu} b_{\nu n} j_{HK\nu n} \mu_n
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Wie das Gleichungssystem Gl. (6.20) zeigt, besteht der Einfluss einer Geschwindigkeitsverteilung in den Faktoren V_n/V_ν innerhalb der Summanden. Die Geschwindigkeitsfaktoren V_n/V_ν sind aber nicht mehr nur vom induzierenden Flügelschnitt n abhängig, sondern auch vom betrachteten Aufpunkt ν. Die Geschwindigkeitsfaktoren V_n/V_ν können daher als Modifikation der Matrix $\underline{\underline{M}}^*$ des Gleichungssystems Gl. (4.27) aufgefasst werden. Damit wäre die neue Matrix aber nicht mehr nur von der Flügelgeometrie abhängig sondern auch vom aktuellen Flugzustand, so dass eine Invertierung vorab nicht mehr möglich wäre. Um den bisherigen Lösungsweg durch Invertierung der Matrix $\underline{\underline{M}}^*$ beibehalten zu können, wird das Gleichungssystem umgeformt. Hierzu wird mit der lokalen Geschwindigkeit V_ν des betrachteten Aufpunktes ν erweitert:

$$\begin{aligned}
\alpha_{Skelett25,\nu} V_\nu &= b_{\nu\nu} i_{25\nu\nu} \gamma_\nu V_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} i_{25\nu n} \gamma_n V_n + b_{\nu\nu} j_{25\nu\nu} \mu_\nu V_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} j_{25\nu n} \mu_n V_n \\
\alpha_{SkelettHK,\nu} V_\nu &= b_{\nu\nu} i_{HK\nu\nu} \gamma_\nu V_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} i_{HK\nu n} \gamma_n V_n + b_{\nu\nu} j_{HK\nu\nu} \mu_\nu V_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} j_{HK\nu n} \mu_n V_n
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Ersetzt man wiederum die Zirkulation γ durch den örtlichen Auftriebsbeiwert c_a und das Nickmoment μ durch den Nickmomentenbeiwert c_{m25} und bringt das Gleichungssystem in Matrizenform, erhält man analog zu Gl. (4.29):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{Skelett,25,1} V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett,25,M} V_M \\ \alpha_{Skelett,HK,1} V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett,HK,M} V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,M} & M_{1,M+1} & \cdots & M_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{M,1} & \cdots & M_{M,M} & M_{M,M+1} & \cdots & M_{M,2M} \\ M_{M+1,1} & \cdots & M_{M+1,M} & M_{M+1,M+1} & \cdots & M_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2M,1} & \cdots & M_{2M,M} & M_{2M,M+1} & \cdots & M_{2M,2M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{a,1} V_1 \\ \vdots \\ c_{a,M} V_M \\ c_{m25,1} V_1 \\ \vdots \\ c_{m25,M} V_M \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

Hierbei sind die Koeffizienten $M_{\nu n}$ identisch mit denen für eine konstante Geschwindigkeitsverteilung. Durch Invertierung erhält man entsprechend Gl. (4.33):

[82] Der 1. Index kennzeichnet wiederum den betrachteten Aufpunkt, der 2. Index bezeichnet den induzierenden Schnitt.

$$\begin{bmatrix} c_{a,1}V_1 \\ \vdots \\ c_{a,M}V_M \\ c_{m25,1}V_1 \\ \vdots \\ c_{m25,M}V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{Skelett,25,1}V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett,25,M}V_M \\ \alpha_{Skelett,HK,1}V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett,HK,M}V_M \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Für den lokalen Auftriebsbeiwert c_{av} eines Flügelschnittes ν gilt damit

$$c_{a,\nu} = \frac{1}{V_\nu} \sum_{n=1}^{M} \left(L_{\nu n} \alpha_{Skelett,25,n} + L_{\nu,M+n} \alpha_{Skelett,HK,n} \right) V_n \tag{6.24}$$

sowie für den Nickmomentenbeiwert:

$$c_{m25,\nu} = \frac{1}{V_\nu} \sum_{n=1}^{M} \left(L_{M+\nu,n} \alpha_{Skelett,25,n} + L_{M+\nu,M+n} \alpha_{Skelett,HK,n} \right) V_n \tag{6.25}$$

Damit sind die örtlichen Beiwerte auch bei beliebiger Geschwindigkeitsverteilung V(y) und beliebiger Anstellwinkelverteilung $\alpha_{Skelett}$ direkt mit Hilfe der konstanten, vorab bestimmbaren Koeffizienten $L_{\nu n}$ bestimmbar. Die Gleichungen zeigen, dass die Berücksichtigung einer Geschwindigkeitsverteilung V(y) wie eine modifizierte Anstellwinkelverteilung $\alpha^*(y)$ wirkt, wobei allerdings für jeden betrachteten Flügelschnitt ν entsprechend dem Quotienten V_ν die dazugehörige Verteilung neu zu bestimmen ist:

$$\alpha^*_{Skelett,\nu,n} = \frac{V_n}{V_\nu} \alpha_{Skelett,\,n} \tag{6.26}$$

Eine Geschwindigkeitsverteilung V(y) kann damit nicht in eine einzige neue Ersatz-Anstellwinkelverteilung umgerechnet werden, wie zunächst vermutet werden kann und z.B. in [Dahms/Schröder 1998] beschrieben wird. Eine Geschwindigkeitsverteilung V(y) kann nach Gl. (6.24) und Gl. (6.25) als Modifikation der $\underline{\underline{L}}$-Matrix in Kombination mit einer Ersatz-Anstellwinkelverteilung aufgefasst werden:

$$\begin{bmatrix} c_{a,1} \\ \vdots \\ c_{a,M} \\ c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_{1,1}}{V_1} & \cdots & \frac{L_{1,M}}{V_1} & \frac{L_{1,M+1}}{V_1} & \cdots & \frac{L_{1,2M}}{V_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{L_{M,1}}{V_M} & \cdots & \frac{L_{M,M}}{V_M} & \frac{L_{M,M+1}}{V_M} & \cdots & \frac{L_{M,2M}}{V_M} \\ \frac{L_{M+1,1}}{V_1} & \cdots & \frac{L_{M+1,M}}{V_1} & \frac{L_{M+1,M+1}}{V_1} & \cdots & \frac{L_{M+1,2M}}{V_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{L_{2M,1}}{V_M} & \cdots & \frac{L_{2M,M}}{V_M} & \frac{L_{2M,M+1}}{V_M} & \cdots & \frac{L_{2M,2M}}{V_M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{Skelett,25,1}V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett,25,M}V_M \\ \alpha_{Skelett,HK,1}V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett,HK,M}V_M \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

Die hieraus ermittelten Beiwerte gelten entsprechend der Definition nach Gl. (6.04), so dass die tatsächlich wirkenden örtlichen Kräfte und Momente mit den lokalen Geschwindigkeiten bestimmt werden müssen. Da die örtlichen Geschwindigkeiten in den Summenformeln für die Gesamtbeiwerte nach Kapitel 4.4 bereits berücksichtigt sind, gelten Gl. (4.36) bis Gl. (4.40) unverändert.

6.2 Berücksichtigung von Steuerflächen

6.2.1 Auswirkungen von Steuerflächen

Bei einem Tragflügel werden verschiedene Steuerflächen zur Beeinflussung der aerodynamischen Kräfte und Momente (Querruder, Landeklappen etc.) eingesetzt, die hier allgemein als Klappen bezeichnet werden. Durch den Ausschlag einer solchen Klappe können zwei Effekte bewirkt werden:

- Wölbungsänderung
- Flächenänderung

In den meisten Fällen genügt die Berücksichtigung des Wölbungseinflusses, allerdings sind je nach Art der Klappen bei größeren Ausschlägen die Auswirkungen auf die Änderung der Profiltiefe nicht mehr zu vernachlässigen, wie z.B. bei der in Bild 6.1 [Radespiel 1999] dargestellten Fowler-Klappe.

Durch beide genannten Effekte wird eine Änderung der lokalen Kräfte an einem Flügelschnitt (Auftrieb, Widerstand und Nickmoment) bewirkt. Diese Auswirkungen werden hier zunächst in zweidimensionaler Strömung (Profilaerodynamik) betrachtet und der dreidimensionale Fall mit Hilfe des Tragflächenverfahrens gelöst. Durch die Delta-Aerodynamik kann die Auswirkung von Steuerflächen grundsätzlich in der nichtlinearen Aerodynamik berücksichtigt werden. Da aber zur Berechnung der elastischen Verformungen des Tragflügels alle wesentlichen Einflüsse zu berücksichtigen sind, müssen auch die Einflüsse von Steuerflächen auf die vollständige aerodynamische Lastverteilung bestimmt werden. Die Modellierung soll auf Basis des Tragflächenverfahrens als Modifikation von Gl. (4.35)

$$\underline{c} = \underline{\underline{L}}\, \underline{\alpha}_{\text{Skelett}} \tag{6.28}$$

erfolgen bzw. unter Berücksichtigung der Profilkennwerte und der Korrektur der örtlichen Werte für den Auftriebsanstieg nach Gl. (5.21)

$$\underline{c} = \underline{c}_0 + \underline{\underline{L}}_{\text{kor}}\, \underline{\alpha}_{\text{P}} \tag{6.29}$$

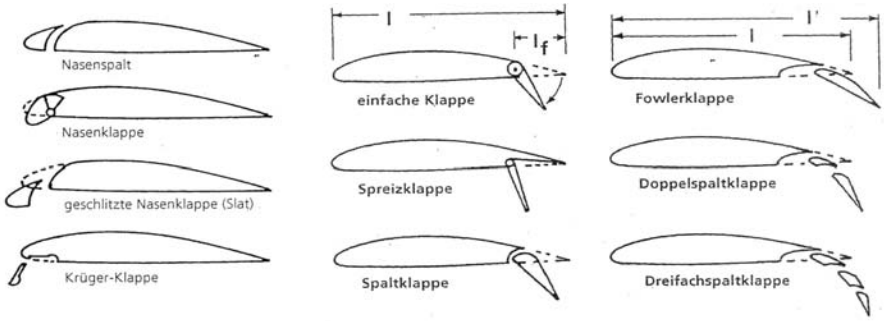

Bild 6.1 Wölbungs- und Flächenänderung bei der Fowler-Klappe [Radespiel 1999]

In der Matrix $\underline{\underline{L}}$ sind die Einflüsse aus der Grundrissgeometrie und der Anzahl der Flügelschnitte enthalten, so dass sie modifiziert werden müsste, wenn durch Klappenausschläge die Grundrissgeometrie signifikant verändert würde. Dieses würde den Rechengang aber erheblich beeinträchtigen, da dann während der Simulation ein Austausch der Matrizen erforderlich wäre, wobei ein kontinuierlicher Übergang von einem Rechenschritt zum nächsten sichergestellt werden müsste – dies ist aber gerade bei Mehrschrittverfahren zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen nur mit einigem numerischen Aufwand zu realisieren. Es ist daher anzustreben, die Matrix beizubehalten und Klappenausschläge ausschließlich im Anstellwinkelvektor bzw. durch Zusatzterme zu berücksichtigen.

6.2.2 Änderung der Profilwölbung bei kleinen Klappenausschlägen

Die Auswirkungen von Klappenausschlägen η_K[83], die nur eine Wölbungsänderung bewirken, können direkt als Änderung der Profilkennwerte formuliert werden[84]:

$$\begin{aligned} \alpha_{0,P,K} &= \alpha_{0,P} + \Delta\alpha_{0,P,K} \\ c_{m0,P,K} &= c_{m0,P} + \Delta c_{m0,P,K} \end{aligned} \tag{6.30}$$

$\Delta\alpha_{0,P,K}$ Änderung des Nullanstellwinkels des Profils infolge Klappenausschlag
$\Delta c_{m0,P,K}$ Änderung des Nullmomentenbeiwertes des Profils infolge Klappenausschlag

Diese Änderungen der Profilkennwerte können in der Nullverteilung nach Gl. (6.29) erfasst werden. Bei kleinen Ausschlägen gelten die linearen Ansätze:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{0,P,K} &= \frac{\partial\alpha_{0,P}}{\partial\eta_K}\,\eta_K \\ \Delta c_{m0,P,K} &= \frac{\partial c_{m0,P}}{\partial\eta_K}\,\eta_K \end{aligned} \tag{6.31}$$

Zusätzlich ist noch der Anteil der ausgeschlagenen Klappe innerhalb des jeweiligen Elementarflügels zu berücksichtigen. Die Derivativa sind abhängig von der relativen Klappentiefe λ_K. Liegen Profilpolaren für Klappenausschläge vor, können die Derivativa hieraus bestimmt werden. Ist dies nicht der Fall, kann eine Abschätzung nach GLAUERT erfolgen [Schlichting/Truckenbrodt 1967]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\alpha_{0,P}}{\partial\eta_K}\right)_{th} &= -\frac{2}{\pi}\left[\sqrt{\lambda_K(1-\lambda_K)} + \arcsin\sqrt{\lambda_K}\right] \\ \left(\frac{\partial c_{m0,P}}{\partial\eta_K}\right)_{th} &= -2\sqrt{\lambda_K(1-\lambda_K)^3} \end{aligned} \tag{6.32}$$

Hierbei bezeichnet λ_K die relative Klappentiefe:

$$\lambda_K = \frac{\ell_K}{\ell} \tag{6.33}$$

ℓ_K Klappentiefe
ℓ Profiltiefe

Von TRUCKENBRODT und GRONAU [Truckenbrodt/Gronau 1956][85] wurden diese Beziehungen unter Einführung eines Korrekturfaktors κ an Messergebnisse angepasst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha_{0,P}}{\partial\eta_K} &= \kappa\left[\left(\frac{\partial\alpha_{0,P}}{\partial\eta_K}\right)_{th} + \lambda_K\right] - \lambda_K \\ \frac{\partial c_{m0,P}}{\partial\eta_K} &= \kappa\left(\frac{\partial c_{m0,P}}{\partial\eta_K}\right)_{th} \end{aligned} \tag{6.34}$$

Aus den Messungen wurde für den Korrekturfaktor ermittelt:

$$\kappa = 0{,}75 \tag{6.35}$$

[83] Die Bezeichnung η_K wird üblicherweise für Landeklappenausschläge verwendet, steht hier aber stellvertretend für verschiedene Klappenausschläge, also z.B. auch für Querruderausschläge.

[84] Auf die Kennzeichnung des Elementarflügels durch den Index „υ“ wird hier verzichtet, da hier alle Gleichungen lokale Größen enthalten.

[85] Die Messungen wurden an Deltaflügeln durchgeführt. Trotzdem wird der Korrekturfaktor übernommen, da die Korrektur sich auf die Profilbeiwerte bezieht, die Tragflügelgeometrie hier also eine untergeordnete Rolle spielt – diese wird in der $\underline{L}$-Matrix berücksichtigt.

6.2.3 Änderung der Profiltiefe

Eine Änderung der Profiltiefe mit dem Klappenausschlag η_K wird unabhängig vom Wölbungseinfluss gesondert berücksichtigt. Hierbei soll eine Lösung gewählt werden, bei der die Matrix $\underline{\underline{L}}$ beibehalten werden kann. Für den Auftrieb eines Elementarflügels der Spannweite dy gilt definitionsgemäß:

$$dA(y) = \frac{\rho}{2} V^2(y)\, \ell(y)\, c_a(y)\, dy \tag{6.04}$$

Andererseits gilt ebenfalls

$$dA(y) = \rho\, V(y)\, \Gamma(y)\, dy \tag{6.01}$$

Der Vergleich zeigt, dass bei gleicher Geschwindigkeit und gleichem Auftriebsbeiwert durch eine Vergrößerung der Profiltiefe ℓ die Zirkulation Γ zunehmen muss, wie dies auch bereits aus Gl. (6.05) entnommen werden kann:

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} V(y)\, \ell(y)\, c_a(y) \tag{6.05}$$

Gl. (6.05) zeigt, dass eine Änderung der örtlichen Profiltiefe die Zirkulation in gleicher Weise beeinflusst wie eine Änderung des örtlichen Auftriebsbeiwertes. Es wird daher davon ausgegangen, dass eine Änderung der lokalen Profiltiefe in einen gleichwertigen Zusatzanstellwinkel umgerechnet werden kann. Vereinfachend wird hierzu der Flügelschnitt als zweidimensionales Problem betrachtet. Für den Auftriebsbeiwert eines Elementarflügels der Spannweite dy gilt damit:

$$dA(y) = \frac{\rho}{2} V^2(y)\, \ell(y)\; c_a(y)\, dy \tag{6.36}$$

wobei für den lokalen Auftriebsbeiwert in zweidimensionaler Strömung gilt:

$$c_a = c_{a\alpha,P}\left(\alpha_P - \alpha_{0,P}\right) \tag{6.37}$$

$c_{a\alpha,P}$ Auftriebsanstieg des Profils
$\alpha_{0,P}$ Nullanstellwinkel des Profils
α_P Anstellwinkel des Profils

Wird nur die Profiltiefe vergrößert gilt entsprechend bei unveränderter Anströmung:

$$dA + \Delta dA = \frac{\rho}{2} V^2 \left(\ell + \Delta\ell\right)\, c_a\, dy \tag{6.38}$$

Dieser Auftriebszuwachs kann auch durch einen äquivalenten Zuwachs des Auftriebsbeiwertes ersetzt werden:

$$dA + \Delta dA = \frac{\rho}{2} V^2\, \ell\, \left(c_a + \Delta c_a^*\right) dy \tag{6.39}$$

Daraus folgt für den äquivalenten Zuwachs des Auftriebsbeiwertes:

$$\Delta c_a^* = \frac{\Delta\ell}{\ell} c_a \tag{6.40}$$

Unter Anwendung von Gl. (6.37) können beide Seiten umgeformt werden:

$$c_{a\alpha,P}\, \Delta\alpha_P^* = \frac{\Delta\ell}{\ell} c_{a\alpha,P}\left(\alpha_P - \alpha_{0,P}\right) \tag{6.41}$$

$\Delta\alpha_P^*$ äquivalenter Zusatzanstellwinkel des Profils

Damit kann eine örtliche Vergrößerung der Profiltiefe durch einen äquivalenten Zusatzanstellwinkel ersetzt werden:

$$\Delta\alpha_P^* = \frac{\Delta\ell}{\ell}\left(\alpha_P - \alpha_{0,P}\right) \tag{6.42}$$

Dieser Zusatzanstellwinkel ist vom aktuellen Anstellwinkel des Profils abhängig und kann daher nicht in den Profilkennwerten bzw. in der Nullverteilung in Gl. (6.29) berücksichtigt werden. Zusätzlich ist noch wie beim Wölbungseinfluss der Anteil der jeweiligen Klappe an den einzelnen Elementarflügeln zu berücksichtigen – dies wird im Folgenden behandelt.

6.2.4 Zuordnung zu den Multhopp-Stützstellen

Da sich die Klappen im allgemeinen Fall nicht über die gesamte Spannweite erstrecken, muss eine Zuordnung der Klappengrenzen zu den jeweiligen Multhopp-Schnitten erfolgen. Für die weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass eine einzelne Klappe zumindest von einem MULTHOPP-Schnitt erfasst wird – die Spannweite der Elementarflügel muss also stets kleiner sein als die jeweils in diesem Bereich liegende Klappenbreite. Trifft dies nicht zu, kann diese Bedingung durch Erhöhung der Schnittzahl M erfüllt werden. Bei der Bestimmung der Grenzen der Elementarflügel ist zu beachten, dass diese nicht mit den MULTHOPP-Schnitten identisch sind, vielmehr liegt ein MULTHOPP-Schnitt gerade in der Mitte des jeweiligen Elementarflügels, siehe Bild 6.2 und siehe Anhang F.

Fällt eine Klappengrenze gerade mit einem MULTHOPP-Schnitt zusammen, kann der Klappenausschlag direkt (d.h. ohne weitere Umrechnung) an der betreffenden Stützstelle in den örtlichen Profilkennwerten gemäß Gl. (6.30) berücksichtigt werden. Diese Bedingung ist im Allgemeinen jedoch nicht erfüllt, so dass die auf einen Elementarflügel entfallende Klappenbreite entsprechend ihrem Anteil an der Breite des Elementarflügels berücksichtigt werden muss, siehe Bild 6.2.

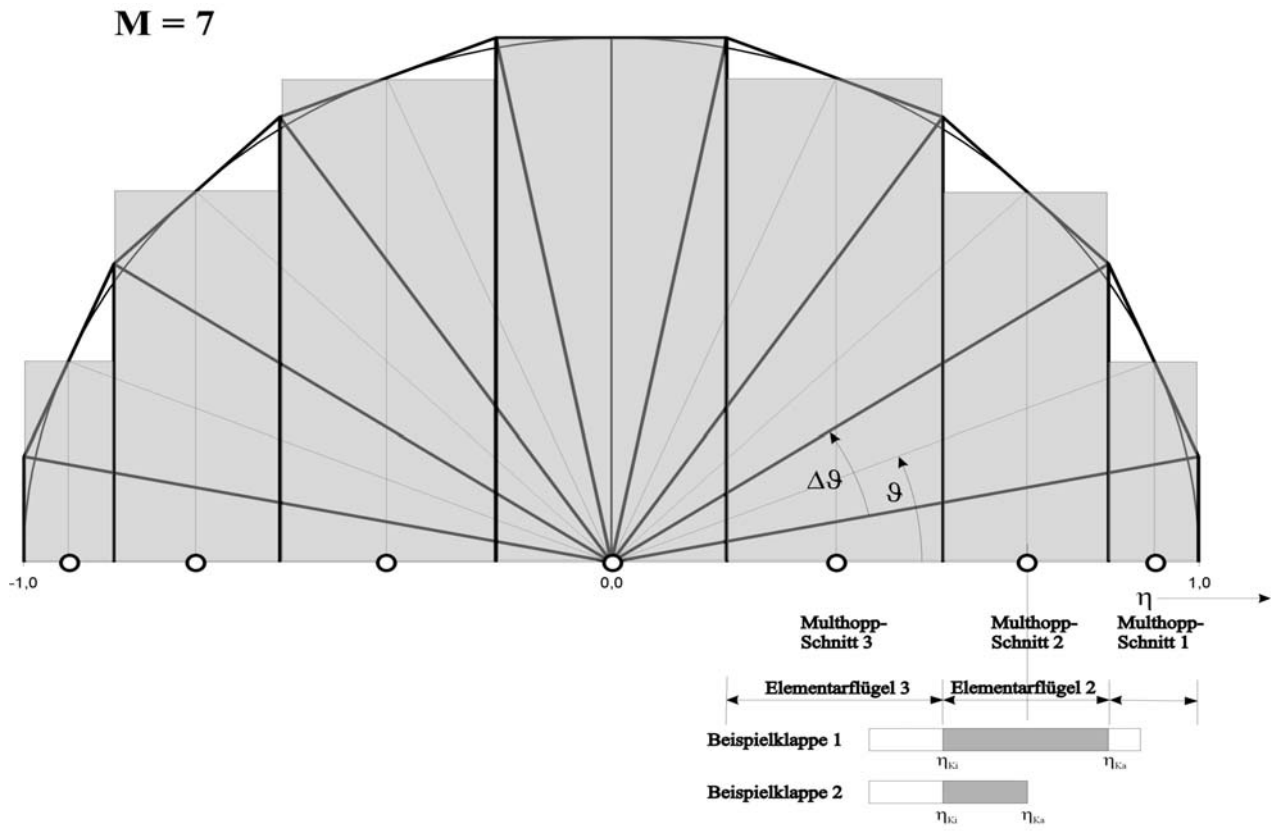

Bild 6.2 Klappengrenzen, MULTHOPP-Schnitte und Grenzen der Elementarflügel

Für die anteilige Klappenbreite gilt:

$$\frac{b_{K,\nu}}{b_\nu} = \frac{1}{2} + \frac{M+1}{\pi}\frac{|\cos\vartheta_{Ka}| - |\cos\vartheta_\nu|}{\sin\vartheta_\nu} \qquad \eta_{Ki} = \eta_{vi} \wedge |\eta_{Ka}| \le |\eta_{va}|$$
$$\frac{b_{K,\nu}}{b_\nu} = \frac{1}{2} + \frac{M+1}{\pi}\frac{|\cos\vartheta_\nu| - |\cos\vartheta_{Ki}|}{\sin\vartheta_\nu} \qquad \eta_{Ka} = \eta_{va} \wedge |\eta_{Ki}| > |\eta_{vi}| \tag{6.43}$$

$b_{K,\upsilon}$ Breite der Klappe innerhalb des Elementarflügels ν
b_υ Breite des Elementarflügels ν
ϑ_ν Polarkoordinate des MULTHOPP-Schnittes ν
ϑ_{Ki}, η_{Ki} innere Klappengrenze
ϑ_{Ka}, η_{Ka} äußere Klappengrenze
η_{vi} innere Grenze des Elementarflügels
η_{va} äußere Grenze des Elementarflügels

Das Gleichheitszeichen bei der äußeren Klappengrenze im oberen Teil von Gl. (6.43) berücksichtigt den Fall, dass die Klappe den gesamten Elementarflügel überdeckt. Die Polarwinkel der Klappengrenzen bzw. der MULTHOPP-Schnitte erhält man aus der allgemeinen Beziehung:

$$\cos\vartheta = \eta \tag{6.44}$$

Für die Grenzen der Elementarflügel gilt:

$$\left.\begin{aligned} \eta_{vi} &= \eta_\nu + \frac{1}{2}\Delta\eta_\nu = \cos\vartheta_\nu - \frac{1}{2}\frac{\pi}{M+1}\sin\vartheta_\nu \\ \eta_{va} &= \eta_\nu - \frac{1}{2}\Delta\eta_\nu = \cos\vartheta_\nu + \frac{1}{2}\frac{\pi}{M+1}\sin\vartheta_\nu \end{aligned}\right\} \eta_\nu > 0, \text{ rechte Flügelhälfte}$$
$$\left.\begin{aligned} \eta_{vi} &= \eta_\nu - \frac{1}{2}\Delta\eta_\nu = \cos\vartheta_\nu + \frac{1}{2}\frac{\pi}{M+1}\sin\vartheta_\nu \\ \eta_{va} &= \eta_\nu + \frac{1}{2}\Delta\eta_\nu = \cos\vartheta_\nu - \frac{1}{2}\frac{\pi}{M+1}\sin\vartheta_\nu \end{aligned}\right\} \eta_\nu < 0, \text{ linke Flügelhälfte} \tag{6.45}$$

Die Berücksichtigung der anteiligen Klappenbreite erfolgt durch Erweiterung von Gl. (6.34):

$$\Delta\alpha_{0,P,K,\nu} = \frac{b_{K,\nu}}{b_\nu}\left(\frac{\partial\alpha_{0,P}}{\partial\eta_K}\right)_\nu \eta_{K,\nu}$$
$$\Delta c_{m0,P,K,\nu} = \frac{b_{K,\nu}}{b_\nu}\left(\frac{\partial c_{m0,P}}{\partial\eta_K}\right)_\nu \eta_{K,\nu} \tag{6.46}$$

Bild 6.3 zeigt beispielhaft die Ergebnisse für den Flügelgrundriss eines modernen Verkehrsflugzeuges mit und ohne Querruderausschlag im Vergleich. Die Änderung der Verteilungen ist physikalisch korrekt und man erkennt deutlich, dass der Klappenausschlag insbesondere auf die angrenzenden Flügelbereiche noch einen erheblichen Einfluss hat – dieser Effekt würde insbesondere bei der Streifenmethode nicht berücksichtigt.

Da die Profilkennwerte in der Nullverteilung berücksichtigt werden, kann der Wölbungseinfluss von Klappenausschlägen als Modifikation dieser Nullverteilung formuliert werden:

$$\underline{c}_0 = \underline{c}_{0,\eta_K=0} + \Delta\underline{c}_{0,K}(\eta_K) \tag{6.47}$$

wobei der erste Term die Nullverteilung nach Gl. (5.08) ohne Klappenausschlag darstellt und der zweite Term durch entsprechende Einsetzung der Änderungen der Profilkennwerte nach Gl. (6.46) in Gl. (5.08) zu bilden ist:

$$\Delta\underline{c}_{0,K} = \begin{bmatrix} \Delta c_{a\,0,K,1} \\ \vdots \\ \Delta c_{a\,0,K,M} \\ \Delta c^{*}_{m025,K,1} \\ \vdots \\ \Delta c^{*}_{m025,K,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta\alpha_{0,P,K,1} + \frac{4}{\pi}\Delta c_{m0,P,K,1} \\ \vdots \\ -\Delta\alpha_{0,P,K,M} + \frac{4}{\pi}\Delta c_{m0,P,K,M} \\ -\Delta\alpha_{0,P,K,1} - \frac{2}{\pi}\Delta c_{m0,P,K,1} \\ \vdots \\ -\Delta\alpha_{0,P,K,M} - \frac{2}{\pi}\Delta c_{m0,P,K,M} \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

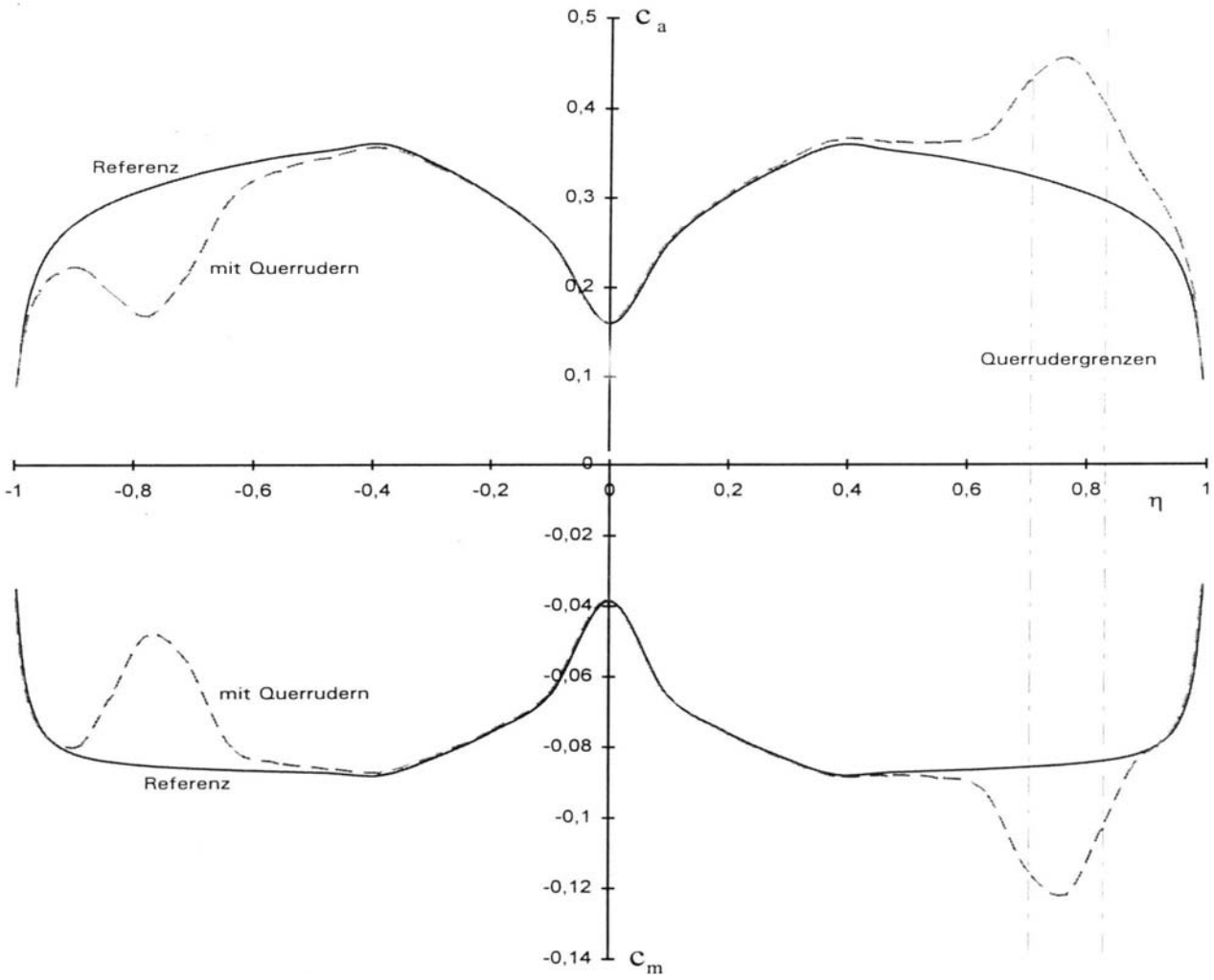

Bild 6.3 Auftriebs- und Nickmomentenverteilung bei Querruderausschlag

Bei besonders zeitkritischen Anwendungen kann Gl. (6.48) vorab für verschiedene Klappenausschläge gelöst werden, so dass im Echtzeitprozess zwischen den Stützstellen interpoliert werden kann.

Die Berücksichtigung von Flächenänderungen kann nicht in der Nullverteilung erfolgen sondern muss entsprechend Gl. (6.42) in die Anstellwinkelverteilung einbezogen werden. Wird analog zu Gl. (6.46) die Klappenbreite berücksichtigt, erhält man für den Zusatz-Anstellwinkel des Elementarflügels υ:

$$\Delta\alpha^{*}_{P,\nu} = \frac{b_{K,\nu}}{b_{\nu}} \frac{\Delta\ell_{\nu}}{\ell_{\nu}} \left(\alpha_{P,\nu} - \alpha_{0,P,\nu}\right) \tag{6.49}$$

Damit erhält man schließlich für die Verteilung der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte:

$$\underline{c} = \underline{c}_{0,\eta_K=0} + \Delta\underline{c}_{0,K}(\eta_K) + \underline{\underline{L}}_{kor} \left(\underline{\alpha}_P + \Delta\underline{\alpha}^{*}_P\right) \tag{6.50}$$

6.2.5 Erweiterung auf große Klappenausschläge

Die in Kapitel 6.2.2 angegebenen Beziehungen gelten nur für kleine Klappenausschläge in einem Ausschlagsbereich von

$$-5° \le \eta_K \le +10° \tag{6.51}$$

Bei größeren Klappenausschlägen sind die in der Praxis erreichten Werte für die Änderung des Nullanstellwinkels bzw. die Änderung des Nullmomentes nach [Schlichting/Truckenbrodt 1969] geringer als die nach Gl. (6.32) bzw. Gl. (6.34) ermittelten Werte. Dies kann in einfacher Weise berücksichtigt werden, indem in Gl. (6.31) an Stelle des geometrischen Klappenausschlags η_K mit einem effektiven Klappenausschlag $\eta_{K,eff}$ gerechnet wird:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{0,P} &= \frac{\partial\alpha_{0P}}{\partial\eta_K}\,\eta_{K,eff} \\ \Delta c_{m0,P} &= \frac{\partial c_{m0P}}{\partial\eta_K}\,\eta_{K,eff} \end{aligned} \tag{6.52}$$

Der Zusammenhang zwischen geometrischen und effektiven Klappenausschlag für unterschiedliche Klappenarten kann Bild 6.4 [Schlichting/Truckenbrodt 1969] entnommen werden:

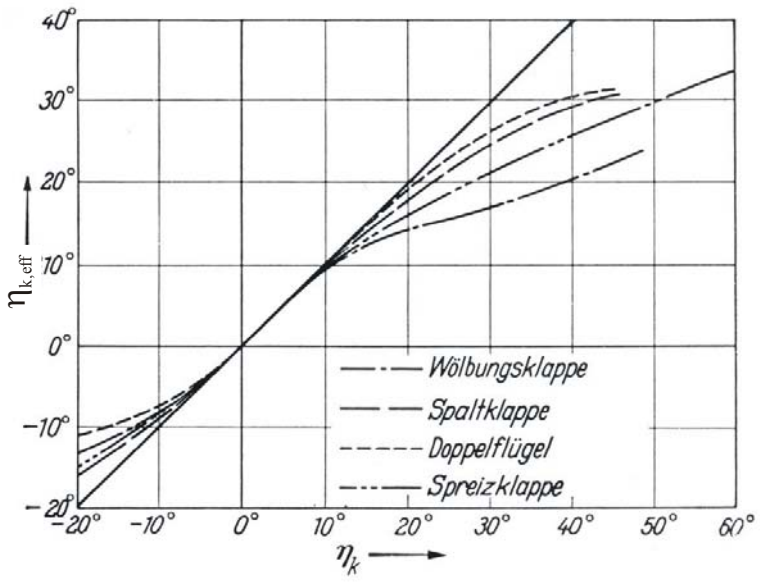

Bild 6.4 effektiver Klappenausschlag für verschiedene Klappenarten
[Schlichting/Truckenbrodt 1969]

6.3 Instationäre Aerodynamik

6.3.1 Grundlagen

Üblicherweise erfolgen in den in der Flugsimulation untersuchten Szenarien die zeitlichen Änderungen des Anstellwinkels so langsam, dass eine quasistationäre Betrachtungsweise ausreichend ist. Da die hier beschriebene Modellierung auch höherfrequente Vorgänge (wie sie z.B. bei einem schwingenden Tragflügel oder bei einem Einflug in eine Wirbelschleppe auftreten können) physikalisch richtig wiedergeben soll, ist eine solche quasistationäre Betrachtungsweise nicht immer ausreichend. Die Berücksichtigung und Modellierung instationärer aerodynamischer Effekte in der Echtzeit-Flugsimulation soll dabei als Erweiterung des vorgestellten Tragflächenverfahrens erfolgen, so dass gegebenenfalls in Abhängigkeit von der Simulationsaufgabe und der verfügbaren Rechenleistung ein einfaches „Abschalten“ möglich ist.

Die ersten bekannten Ansätze zur mathematischen Beschreibung instationärer aerodynamischer Effekte wurden bereits in den 20’er und 30’er Jahren entwickelt [Wagner 1924, Küssner 1935]. Hierbei wird die instationäre Aerodynamik durch eine Übergangsfunktion aus der stationären Aerodynamik abgeleitet. Die hierfür entwickelten mathematischen Beziehungen werden als Wagner- bzw. als Küssner-Funktion bezeichnet, siehe Bild 6.5.

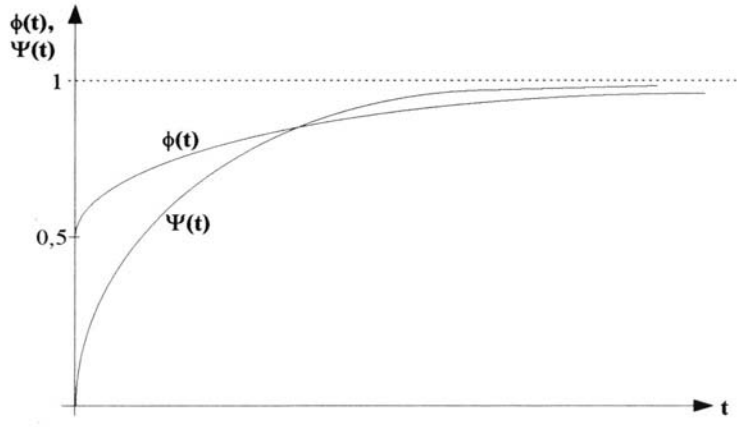

Bild 6.5 WAGNER-Funktion Φ(t) und KÜSSNER-Funktion Ψ(t)

WAGNER- und KÜSSNER-Funktion gelten für spezielle Bewegungs- bzw. Anströmungsänderungen. So beschreibt die WAGNER-Funktion den Auftrieb nach einer sprungförmigen Anstellwinkeländerung und die KÜSSNER-Funktion den Auftrieb beim Eintritt eines Flügels in eine stufenförmige Vertikalböe. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Funktionen liegt darin, dass im ersten Fall der gesamte Flügel gleichzeitig eine Anstellwinkeländerung erfährt während im zweiten Fall die Böenstörung zeitlich über den Flügel wandert. Die Einschränkung auf spezielle Eingangsfunktionen kann aufgehoben werden, wenn die Zeitfunktion in den Bildbereich transformiert wird, wie z.B. in [Schänzer 1995] für die KÜSSNER-Funktion gezeigt wird. Die so erhaltene Übertragungsfunktion stellt ein einfaches PT_1-Element dar und kann in der Flugsimulation als digitales Filter realisiert werden [Quellmann 1984].

Eine solche Filterfunktion kann prinzipiell für beliebige Anregungsfunktionen angewendet werden. Allerdings ist nicht nachgewiesen, für welche Anregungen die Filterfunktion gültig bleibt. Eine wesentliche Eigenart einfacher Übertragungsfunktionen ist, dass der instationäre Auftrieb stets kleiner bleibt als der stationäre Endwert. Aus [Laschka 1963] und [Dubs 1990] ist allerdings bekannt, dass dies nicht immer gültig ist und bei entsprechender Anregung mit höheren Frequenzen der stationäre Auftrieb sogar um 30% bis 60% überschritten werden kann.

Derartige Effekte können mit einem einfachen PT_1-Element nicht wiedergegeben werden. Durch Funktionen höherer Ordnung ist jedoch eine Approximation nahezu beliebiger Zeitverläufe möglich. Hierbei wird die Idee der Realisierung als Filterfunktion beibehalten, da hierdurch eine von der Anregung unabhängige Modellierung erreicht werden kann. Da beim Tragflächenverfahren über die Matrix L jeder örtliche Anstellwinkel auf die gesamte Auftriebs- und Nickmomentenverteilung wirkt, wird

jedes Matrizenelement als ein solches Filter aufgefasst und zunächst als Übertragungsfunktion im Bildbereich formuliert[86]:

$$\hat{G}_{i,j}(s) = \hat{F}_{i,j}(s)\, L_{i,j} \tag{6.53}$$

$L_{i,j}$ Matrizenelement der Matrix $\underline{\underline{L}}$

$\hat{F}_{i,j}(s)$ Filterfunktion zur Erweiterung des Matrizenelementes $L_{i,j}$ um instationäre Effekte

$\hat{G}_{i,j}(s)$ Übertragungsfunktion für die Wirkung des Anstellwinkels $\hat{\alpha}_j(s)$ [87] auf den Beiwert im Bildbereich $\hat{c}_i(s)$.

Die Koeffizienten $L_{i,j}$ sind die (konstanten) Elemente der Matrix $\underline{\underline{L}}$ des Tragflächenverfahrens und damit bekannt. Eine allgemeingültige Berechnungsmethode zur Bestimmung der Übertragungsfunktionen $F_{i,j}(s)$ kann jedoch nicht angegeben werden, vielmehr sind sie durch Auswertungen von Rechenergebnissen höherwertiger, instationärer Rechenverfahren und Vergleich mit Ergebnissen des stationären Tragflächenverfahrens zu bestimmen – es wird also ein Referenzverfahren benötigt. Hierzu wurde vom Institut für Aeroelastik des DLR Göttingen ein Doublet-Lattice-Verfahren (Doublet-Lattice-Method DLM) zur Verfügung gestellt und zusätzlich für einige Referenzfälle Vergleichsrechnungen mit einem Full-Potential-Grenzschicht-Verfahren (Full Potential Boundary Layer Method FBM) durchgeführt [Zrenner 1996]. Die Bestimmung der Übertragungsfunktionen ist damit mit erheblichem Aufwand verbunden. Eine ausführliche Darstellung insbesondere der Ergebnisse des Doublet-Lattice-Verfahrens wird in Anhang L gegeben, so dass hier lediglich die wesentlichen Schritte wiedergegeben werden.

6.3.2 Aufbereitung des Gleichungssystems

Das Referenzverfahren zur Bestimmung der Übertragungsfunktionen basiert auf der Doublet-Lattice-Methode (DLM), die sich als Standardmethode für Flatterrechnungen etabliert hat. Hierbei wird der Flügel wie beim Tragflächenverfahren als tragende Fläche idealisiert und in einzelne Panels zerlegt, wobei die Paneltiefe relativ klein gewählt werden muss. Die erzielbare Rechengenauigkeit ist relativ hoch, wobei der Rechenaufwand als mäßig bezeichnet werden kann. Allerdings liefert dieses Verfahren keine brauchbaren Ergebnisse für stationäre Zustände – dies ist in diesem Fall aber ohne Belang, da die Doublet-Lattice-Methode lediglich zur Beschreibung der instationären Effekte herangezogen wird und die Einflüsse einer stationären Anstellwinkelverteilung durch das Tragflächenverfahren bereits gut beschrieben werden.

Da die gesuchten Übertragungsfunktionen durch Vergleich von Rechenergebnissen aus dem Doublet-Lattice-Verfahren mit dem Tragflächenverfahren gewonnen werden, müssen die Ein- und Ausgabedaten beider Verfahren genau aufeinander abgestimmt werden. Für das Doublet-Lattice-Verfahren ist daher dieselbe Aufteilung in M Elementarflügel zu wählen wie für das Tragflächenverfahren. Für beide Verfahren wird jeweils ein einzelner Elementarflügel mit einer harmonischen Anstellwinkeländerung konstanter Frequenz beaufschlagt und die Zeitverläufe bestimmt. Die Anstellwinkeländerungen müssen Mittelwert frei sein, da beim Doublet-Lattice-Verfahren stationäre Anteile vermieden werden müssen. Durch Vergleich der Ergebnisse von Tragflächen- und Doublet-Lattice-Verfahren erhält man für jede gewählte Frequenz einen Punkt des Frequenzganges $F_{i,j}(j\omega)$ bzw. der gesuchten Übertragungsfunktion $F_{i,j}(s)$.

Die Ausgangsbasis zur Bestimmung der Filterfunktionen nach Gl. (6.53) ist das Gleichungssystem des Tragflächenverfahrens Gl. (5.09):

$$\underline{c} = \underline{c}_0 + \underline{\underline{L}}\, \underline{\alpha}_P \tag{6.54}$$

bzw. ausformuliert nach Gl. (5.07):

[86] Das Zeichen „^“ kennzeichnet Funktionen im Bildbereich.

[87] Im Bildbereich wird der zeitabhängige lokale Anstellwinkel $\alpha_j(t)$ in $\hat{\alpha}_j(s)$ transformiert

$$\begin{bmatrix} c_{a,1} \\ \vdots \\ c_{a,M} \\ c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c^*_{m025,1} \\ \vdots \\ c^*_{m025,M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{P,25,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,25,M} \\ \alpha_{P,HK,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,HK,M} \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

Da für jedes Matrizenelement $L_{i,j}$ eine Übertragungsfunktion entsprechend Gl. (6.52) zu bestimmen ist, müssen auch beim Doublet-Lattice-Verfahren die Anstellwinkel jedes Flügelsegmentes einzeln angesprochen werden können, wobei die Anstellwinkel am ℓ/4-Punkt und an der Hinterkante unabhängig voneinander wählbar sein müssen. Dieses Vorgehen erfordert einige Modifikationen am zur Verfügung stehenden Doublet-Lattice-Verfahren, denn für die sonst üblichen Anwendungen (Flatterrechnung) wird der Flügel als Ganzes mit einer Anregung beaufschlagt und nicht ein einzelnes Segment. Außerdem muss dafür gesorgt werden, dass die Anstellwinkelverteilung in Profiltiefenrichtung derjenigen des Tragflächenverfahrens entspricht. Beim Doublet-Lattice-Verfahren können jedoch keine völlig freien Anstellwinkelverteilungen in Profiltiefenrichtung vorgegeben werden, sondern nur solche, die den physikalischen Bewegungsformen des Flügels

- Schlagbewegung und
- Nickbewegung

entsprechen. Eine beim Tragflächenverfahren beliebige Anstellwinkelverteilung in Profiltiefenrichtung ist daher für das Doublet-Lattice-Verfahren in zwei getrennte Verteilungen für Schlag- und Nickbewegung zu überführen und die Ergebnisse anschließend zu superponieren. Hierzu wird der Anstellwinkel an der Hinterkante als Anstellwinkel der Schlagbewegung gedeutet und die Differenz der Anstellwinkel am ℓ/4-Punkt und der Hinterkante als Nickbewegung um die Hinterkante, siehe Bild 6.6:

$$\begin{aligned} \alpha_{P,Schlag,\nu} &= \alpha_{P,HK,\nu} \\ \alpha_{P,Nick,\nu} &= \alpha_{P,25,\nu} - \alpha_{P,HK,\nu} \end{aligned} \tag{6.56}$$

bzw. daraus abgeleitet

$$\alpha_{P,25,\nu} = \alpha_{P,Nick,\nu} + \alpha_{P,HK,\nu} = \alpha_{P,Schlag,\nu} + \alpha_{P,Nick,\nu} \tag{6.57}$$

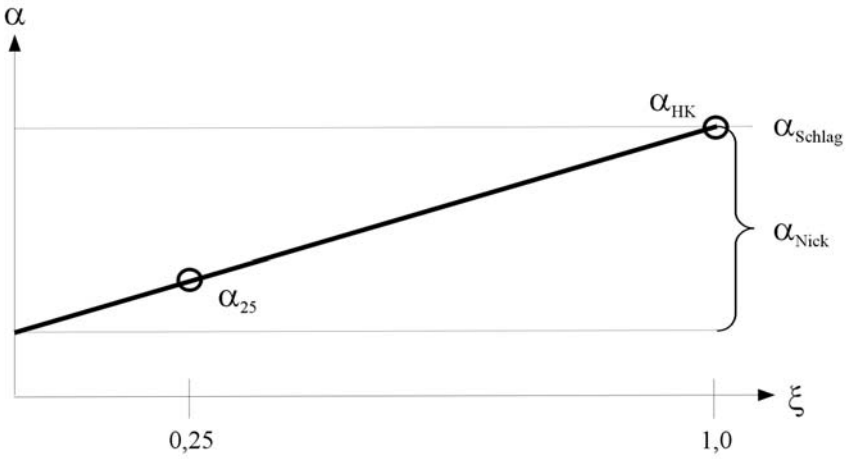

Bild 6.6 Zerlegung der Anstellwinkelverteilung in Profiltiefenrichtung

Ersetzt man in Gl. (6.55) die Anstellwinkel am ℓ/4-Punkt und an der Hinterkante, erhält man:

$$\begin{bmatrix} c_{a,1} \\ \vdots \\ c_{a,M} \\ c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c^*_{m025,1} \\ \vdots \\ c^*_{m025,M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{P,Schlag1} + \alpha_{P,Nick1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,SchlagM} + \alpha_{P,NickM} \\ \alpha_{P,Schlag1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,SchlagM} \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

bzw. durch Zusammenfassung der Terme aus der Schlagbewegung:

$$\begin{bmatrix} c_{a,1} \\ \vdots \\ c_{a,M} \\ c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c^*_{m025,1} \\ \vdots \\ c^*_{m025,M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L^*_{1,1} & \cdots & L^*_{1,M} & L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^*_{M,1} & \cdots & L^*_{M,M} & L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} \\ L^*_{M+1,1} & \cdots & L^*_{M+1,M} & L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^*_{2M,1} & \cdots & L^*_{2M,M} & L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{P,Schlag,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,Schlag,M} \\ \alpha_{P,Nick,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,Nick,M} \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

mit den neuen Koeffizienten

$$L^*_{i,j} = L_{i,j} + L_{i,M+j} \tag{6.60}$$

oder in Kurzform:

$$\underline{c} = \underline{c}_0 + \underline{\underline{L}}^* \underline{\alpha}_{P\,Schlag/Nick} \tag{6.61}$$

Das Gleichungssystem (6.59) ist Gl. (6.55) völlig gleichwertig. Die Matrix $\underline{\underline{L}}^*$ kann in vier Bereiche unterteilt werden:

$$\underline{\underline{L}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\underline{L}}^*_{a1} & | & \underline{\underline{L}}^*_{a2} \\ -- & | & -- \\ \underline{\underline{L}}^*_{m1} & | & \underline{\underline{L}}^*_{m2} \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

$\underline{\underline{L}}^*_{a1}$	beschreibt den Einfluss der Schlagbewegung auf den Auftrieb
$\underline{\underline{L}}^*_{a2}$	beschreibt den Einfluss der Nickbewegung auf den Auftrieb
$\underline{\underline{L}}^*_{m1}$	beschreibt den Einfluss der Schlagbewegung auf das Nickmoment
$\underline{\underline{L}}^*_{m2}$	beschreibt den Einfluss der Nickbewegung auf das Nickmoment

Da die Nullverteilung $\underline{c}_0$ nur in den stationären Anteil eingeht, werden im Folgenden nur die Abweichungen hiervon betrachtet (Delta-Aerodynamik):

$$\Delta\underline{c} = \underline{\underline{L}}^* \underline{\alpha}_{P\,Schlag/Nick} \tag{6.63}$$

Gl. (6.61) bzw. Gl. (6.63) gelten für den quasistationären Fall. Im instationären Fall gilt analog:

$$\Delta\underline{c}(t) = \underline{\underline{G}}^*(t)\, \underline{\alpha}_{P\,Schlag/Nick}(t) \tag{6.64}$$

Hierbei enthalten die einzelnen Elemente der Matrix $\underline{\underline{G}}^*$ entsprechend Gl. (6.53) die noch unbekannten Filterfunktionen im Zeitbereich[88]. Betrachtet man nur den Beitrag $y_{i,j}$ zum lokalen Beiwert c_i infolge des angeregten Elementarflügels j gilt:

$$y_{i,j}(t) = G_{i,j}(t)\, \alpha_{P,Schlag/Nick,j}(t) \tag{6.65}$$

[88] Hierbei ist zu beachten, dass nunmehr in Gl. (6.53) statt der Matrizenelemente $L_{i,j}$ die neuen Elemente $L^*_{i,j}$ einzusetzen sind.

Transformiert man Gl. (6.64) in den Bildbereich gilt:

$$\Delta \underline{c}(s) = \hat{\underline{\underline{G}}}(s)\, \underline{\alpha}_{\text{Schlag / Nick}}(s) \tag{6.66}$$

Für die gefilterten Koeffizienten gilt entsprechend Gl. (6.53) im Bildbereich:

$$\hat{G}_{i,j}(s) = L^{*}_{i,j}\, F_{i,j}(s) \tag{6.67}$$

Diese gefilterten Koeffizienten sind nunmehr nicht mehr konstant sondern Funktionen des Laplaceoperators s bzw. im Zeitbereich Funktionen der Zeit t.

6.3.3 Übertragungsfunktionen

Bei einer typischen Anzahl von M = 31 Elementarflügeln enthält die Übertragungsmatrix in Gl. (6.66) insgesamt $(2 \cdot 31)^2 = 3844$ Übertragungsfunktionen. Um den numerischen Rechenaufwand zu begrenzen, sollte die Ordnung der einzelnen Übertragungsfunktionen möglichst niedrig gehalten werden. Da jede Übertragungsfunktion ausschließlich das Verhältnis zwischen stationärer und instationärer Rechnung (bei dynamischer Anstellwinkeländerung) modelliert[89], kann davon ausgegangen werden, dass gewisse Ähnlichkeiten zwischen den Übertragungsfunktionen bestehen und durch einen gemeinsamen Funktionsansatz beschrieben werden können. Da ein PD_2T_2-Element verschiedenste Systeme physikalisch vernünftig approximieren kann, wird vorausgesetzt, dass für praktische Anwendungen im Regelfall ein Ansatz zweiter Ordnung genügt. Für die einzelnen Übertragungsfunktionen nach Gl. (6.53) gilt daher der Ansatz[90]:

$$F(s) = K\, \frac{b_0 + b_1 s + s^2}{a_0 + a_1 s + s^2} \tag{6.68}$$

Hierin sind die Koeffizienten a_0, a_1, b_0 und b_1 noch unbekannt. Die Approximation durch einen einzigen Funktionstyp hat den erheblichen Vorteil, dass für die einzelnen Matrizenelemente der Matrix $\underline{\underline{L}}^{*}$ keine Fallunterscheidungen für unterschiedliche Filterfunktionen erforderlich sind – lediglich die Filterkoeffizienten sind abhängig vom Matrizenelement, was programmtechnisch ohne großen Rechenzeitaufwand einfach zu realisieren ist.

Die Bestimmung der Übertragungsfunktionen kann auf einen bestimmten Frequenzbereich begrenzt werden. Dies verbessert bei der begrenzten Ordnung des Funktionsansatzes die erreichbare Approximationsgüte. Der zu berücksichtigende Frequenzbereich ergibt sich einerseits aus dem Frequenzspektrum der relevanten Eigenformen der Flugzeugstruktur und der räumlichen Windfelder sowie andererseits aus der Rechenkapazität des zur Verfügung stehenden Simulationsrechners.

Da bei dem modellierten Verkehrsflugzeug die niedrigsten Struktur-Eigenformen im niedrigen Herz-Bereich liegen, wird eine maximale Frequenz von 6 Hz als sinnvoll erachtet. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass in der Echtzeit-Flugsimulation lediglich Eigenformen wiedergegeben werden müssen, die flugmechanisch relevant sind, so dass eine Begrenzung auf relativ niedrige Frequenzen statthaft ist. Bei einer realisierten Simulationstaktrate von 60 Hz werden damit die höchsten Strukturschwingungen noch mit 10 Stützstellen abgetastet, so dass eine gute Wiedergabequalität erreicht werden kann [Brockhaus 2001]. Als neue Bezugsgröße wird die reduzierte Frequenz ω^{*} eingeführt, die eine dimensionslose Kenngröße der instationären Aerodynamik darstellt:

$$\omega^{*} = \omega\, \frac{\ell_\mu}{V} \tag{6.69}$$

Der Quotient ℓ_μ / V stellt die Zeitspanne dar, die zum Durchmessen der Bezugsflügeltiefe ℓ_μ benötigt wird. Die reduzierte Frequenz ω^{*} gibt damit an, wie viel Schwingungen (ausgedrückt in Bogenmaß)

[89] Alle anderen Einflussgrößen wie Streckung, Pfeilung, Verwindung, Wölbung etc. sind in den Koeffizienten $L^{*}_{i,j}$ bzw. in der Nullverteilung $\underline{c}_0$ bereits berücksichtigt.

[90] Zur besseren Übersicht wird hier auf eine vollständige Indizierung verzichtet – sowohl die Übertragungsfunktion F(s) als auch alle Konstanten L, a_0, a_1, b_0 und b_1 sind vom betrachteten Flügelschnitt i und der induzierenden Stelle j abhängig.

für die Bezugsflügeltiefe ℓ_μ benötigt werden – je größer ω^*, desto stärker der instationäre Effekt. Da die reduzierte Frequenz ω^* damit das Maß für die Instationärität der Strömung darstellt und nicht die Frequenz ω, wird das Übertragungsverhalten als $f(\omega^*)$ formuliert. Für den Frequenzgang gilt daher entsprechend Gl. (6.68) der Ansatz:

$$F(j\omega^*) = K\,\frac{b_0^* + b_1^* j\omega^* + (j\omega^*)^2}{a_0^* + a_1^* j\omega^* + (j\omega^*)^2} \tag{6.70}$$

Zu den Koeffizienten in Gl. (6.68) besteht dabei der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^*\left(\frac{V}{\ell_\mu}\right)^2 \qquad & a_1 &= b_1^*\frac{V}{\ell_\mu} \\ b_0 &= b_0^*\left(\frac{V}{\ell_\mu}\right)^2 \qquad & b_1 &= b_1^*\frac{V}{\ell_\mu} \end{aligned} \tag{6.71}$$

Bei üblichen aeroelastischen Problemstellungen werden Werte von ω^* bis etwa 1 erreicht – in diesem Fall wurde der Frequenzbereich von $0{,}1 < \omega^* < 1{,}7$ betrachtet (siehe Anhang L), so dass auch der hoch instationäre Bereich enthalten ist. Die gesuchten Übertragungsfunktionen nach Gl. (6.68) werden in einem mehrstufigen Verfahren bestimmt:

1. Beaufschlagung eines einzelnen Elementarflügels m des Tragflächenverfahrens mit einer harmonischen Anstellwinkeländerung α_{Schlag} der Frequenz ω^*_1 – für die übrigen Elementarflügel ist $\alpha_{Schlag} = 0$. Hierbei gilt stets für alle Elementarflügel $\alpha_{Nick} = 0$[91]:

$$\underline{\Delta c}_{Schlag,LSM,m} = \underline{\underline{L}}^* \underline{\alpha}_{P,Schlag,m} \tag{6.72}$$

2. Beaufschlagung desselben Elementarflügels m beim Doublet-Lattice-Verfahren mit derselben harmonischen Anstellwinkeländerung α_{Schlag} der Frequenz ω^*_1.
3. Wiederholung der Berechnungen nach 1. und 2. mit weiteren verschiedenen reduzierten Frequenzen im interessierenden Frequenzbereich (f = 0,05 bis 6 Hz entspricht $\omega^* = 0{,}01$ bis $1{,}6$[92]). Man erhält für jede Frequenz i eine Lösung der Form:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta c}_{Schlag,LSM,m}(\omega_i^*, t) &= f_{LSM}(\underline{\alpha}_{P,Schlag,m}, \omega_i^*) \\ \underline{\Delta c}_{Schlag,DLM,m}(\omega_i^*, t) &= f_{DLM}(\underline{\alpha}_{P,Schlag,m}, \omega_i^*) \end{aligned} \tag{6.73}$$

4. Die einzelnen Elemente der beiden Lösungsvektoren stellen Sinusschwingungen dar und können daher auch als Realteile rotierender komplexer Zeiger[93] angesehen werden:

$$\begin{aligned} \Delta c_{Schlag,LSM,n,m}(j\omega_i^*) &= \mathrm{Re}\left(\Delta\vec{c}_{Schlag,LSM,n,m}(j\omega_i^*)\right) \\ \Delta c_{Schlag,DLM,n,m}(j\omega_i^*, \varphi_{n,m}) &= \mathrm{Re}\left(\Delta\vec{c}_{Schlag,DLM,n,m}(j\omega_i^*, \varphi_{n,m})\right) \end{aligned} \tag{6.74}$$

   φ Phasenwinkel der instationären Lösung in Bezug zur quasistationären Lösung

   Bildet man aus den jeweils korrespondieren Elementen einer Zeile n der beiden Lösungsvektoren aus Tragflächen- und Doublet-Lattice-Verfahren den Quotienten, erhält man einen diskreten Wert eines einzelnen Frequenzganges der zu bestimmenden Filter[94]:

$$F_{n,m}(j\omega_i^*) = \frac{\Delta\vec{c}_{Schlag,DLM,n,m}(j\omega_i^*, \varphi_{n,m})}{\Delta\vec{c}_{Schlag,LSM,n,m}(j\omega_i^*)} \tag{6.75}$$

[91] Zur eindeutigen Unterscheidung werden Größen des Tragflächenverfahrens durch den Index „LSM“ und Größen der Doublet-Lattice-Methode mit dem Index „DLM“ gekennzeichnet.

[92] Hierbei wurde eine Referenzgeschwindigkeit von $V_r = 250$ m/s und eine Bezugsflügeltiefe von $\ell_\mu = 11$ m zu Grunde gelegt.

[93] Dies wird durch Überschreibung der entsprechenden Größe mit einem Pfeil gekennzeichnet.

[94] Hierbei stellt das Ergebnis der quasistationären Rechnung des Tragflächenverfahrens das Eingangssignal dar und das Ergebnis der Doublet-Lattice-Methode das Ausgangssignal.

5. Aus mehreren diskreten Werten des Frequenzganges $F_{n,m}(j\omega_i^*)$ kann durch einen Optimierungsalgorithmus innerhalb eines begrenzten Frequenzbereiches ein kontinuierlicher Frequenzgang $F_{n,m}(j\omega^*)$ nach Gl. (6.69) ermittelt werden. Ersetzt man hierin zunächst (ω^*) nach Gl. (6.69) und anschließend $(j\omega)$ durch den Laplaceoperator s erhält man eine einzelne der gesuchten Übertragungsfunktionen $F_{n,m}(s)$ nach Gl. (6.68) mit den Koeffizienten nach Gl. (6.71).
6. Wiederholt man die Schritte 3 bis 5 für alle 2M Elemente des Vektors $\Delta\underline{c}_{Schlag}$, erhält man die 2M Übertragungsfunktionen $F_{n,m}(s)$ der Spalte m der Matrix $\hat{\underline{\underline{L}}}(s)$.
7. Wiederholt man Schritte 1 bis 6 für alle M Elementarflügel, erhält man für die ersten M Spalten der Matrix $F_{n,m}(s)$ die gesuchten Übertragungsfunktionen.
8. Wiederholt man die Schritte 1 bis 7 in entsprechender Weise für $\alpha_{Nick} \neq 0$ und $\alpha_{Schlag} = 0$, erhält man die Übertragungsfunktionen für die Spalten M+1 bis 2M der Matrix $\hat{\underline{\underline{L}}}(s)$.

Auf diese Art und Weise werden alle Übertragungsfunktionen entsprechend Gl. (6.66) bestimmt.

6.3.4 Filterung im Zeitbereich

Die Übertragungsfunktionen $F_{n,m}(s)$ können im Zeitbereich durch Filter dargestellt werden, die das zeitabhängige Eingangssignal in Betrag und Phase verändern, siehe z.B. [Schänzer 1977]. Jedes dieser Filter wird als Differentialgleichung in Zustandsform formuliert. Das zeitabhängige Eingangssignal eines einzelnen Filters ist der jeweilige örtliche Anstellwinkel $\alpha_{Schlag,n}$ bzw. $\alpha_{Nick,n}$. Zur Vermeidung der hierbei auftretenden ersten und zweiten Ableitung des Filtereinganges wird das Gleichungssystem durch Einführung der Zwischengröße x in die Regelungs-Normalform gebracht [Brockhaus 2001][95]:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(s) &= \frac{1}{a_0 + a_1 s + s^2} L^*_{i,j}\ \hat{\alpha}_{P,Schlag/Nick,j}(s) \\ \Delta\hat{c}_{i,j}(s) &= K\left[b_0 + b_1 s + s^2\right]\hat{x}_j(s) \end{aligned} \tag{6.76}$$

Hierbei stellt $\hat{c}_{i,j}(s)$ das Ausgangssignal eines Filters dar mit dem Eingangssignal $L^*_{i,j}\ \hat{\alpha}_{P,Schlag/Nick,j}(s)$. Nach Rücktransformation in den Zeitbereich erhält man mit den Zustandsgrößen:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x \\ x_2(t) &= \dot{x} \end{aligned} \tag{6.77}$$

die Darstellung in Zustandsform:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L^*_{i,j} \end{bmatrix}\alpha_{P,Schlag/Nick,j}(t) \\ \Delta c_{i,j}(t) &= K\left[\begin{bmatrix}(b_0 - a_0) & (b_1 - a_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + L^*_{i,j}\ \alpha_{P,Schlag/Nick,j}(t)\right] \end{aligned} \tag{6.78}$$

Hierbei sind die Zustandsgrößen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ durch numerische Integration zu bestimmen. Damit wurde die Ableitung der Eingangsgröße durch Integration der Zwischengröße x ersetzt, was numerisch wesentlich vorteilhafter ist. Für ein Element c_i (Auftriebs- bzw. Nickmomentenbeiwert infolge α_P-Verteilung) des Vektors $\underline{c}$ nach Gl. (6.61) gilt schließlich:

$$c_i(t) = c_{0,i} + \sum_{j=1}^{2M} \Delta c_{i,j}(t) \tag{6.79}$$

[95] Hierbei ist zu beachten, dass die Koeffizienten der Filter-Übertragungsfunktion für jedes Matrizenelement verschieden sind – auf die Indizierung wurde jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

6.3.5 Rechenergebnisse und Rechenzeitbedarf

Eine ausführliche Darstellung der Rechenergebnisse ist in Anhang L gegeben. Die Ergebnisse für die diskreten Stützstellen der verschiedenen Frequenzgänge zeigen zwar deutlich unterschiedliche Verläufe, lassen jedoch in allen Fällen jeweils auf einen stetigen funktionalen Zusammenhang schließen. Es zeigt sich erwartungsgemäß, dass am bewegten Elementarflügel die größten Kräfte bzw. Momente induziert werden und der Einfluss auf die übrigen Elementarflügel mit zunehmendem Abstand rasch abnimmt. Dieser abnehmende Einfluss ist zur Mitte hin ausgeprägter als nach außen – die Ursache hierfür ist in der positiven Flügelpfeilung zu suchen, da die Elementarflügel nach außen hin auch gleichzeitig weiter stromab liegen und damit einem stärkeren Einfluss unterliegen als stromaufwärts. Das Verhalten bei der Schlagbewegung ist ähnlich.

Die instationären Effekte wirken sich damit nur in einem relativ engen Bereich um den angeregten Elementarflügel signifikant aus. Die deutlichsten Unterschiede zwischen instationärer und stationärer Rechnung treten in der unmittelbaren Umgebung des angeregten Elementarflügels auf, wobei am Ort der Anregung selbst sogar eine Betragsverstärkung zu beobachten ist – die instationären Effekte sind hier damit besonders ausgeprägt, was aber grundsätzlich ebenfalls zu erwarten ist.

Da an den weiter entfernt liegenden Elementarflügeln auch bei quasistationärer Rechnung nur noch relativ geringe Auswirkungen festzustellen sind und hier gleichzeitig der Einfluss instationärer Effekte ebenfalls abnimmt, werden daher zur Reduzierung des numerischen Aufwandes im Echtzeitprozess der Flugsimulation alle Filterfunktionen vernachlässigt, bei denen der quasistationäre Anteil des betrachteten Elementarflügels weniger als 5% des Maximalwertes[96] beträgt. In diesem Fall konnten von den ursprünglich 3844 Filtern (bei M = 31) auf insgesamt 2598 Filter verzichtet werden, was einer Reduktion auf ca. 1/3 entspricht. Hierdurch wird auch der Aufwand zur Bestimmung der Filterfunktionen erheblich reduziert. Bild 6.07 zeigt die Elemente der Matrix $\underline{\underline{L}}^*$, die einer Filterung zu unterziehen sind.

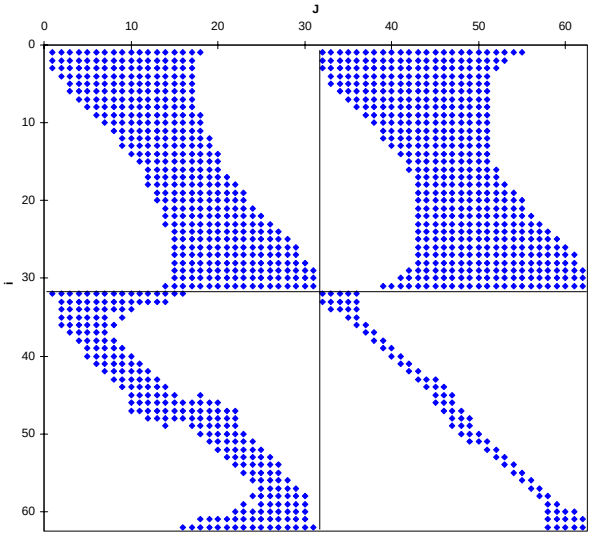

Bild 6.07 Verteilung der Filter in der Matrix $\underline{\underline{L}}^*$

Die noch unbekannten Koeffizienten K, a_0, a_1, b_0 und b_1 wurden für jede der verbliebenen 1246 Übertragungsfunktionen durch einen Optimieralgorithmus bestimmt. Als Gütekriterium wurde hierbei die Fehlerquadratsumme aus den Abweichungen zwischen Ansatzfunktion und DLM-Ergebnis jeweils für das Amplitudenverhältnis und die Phasenlage an den i Stützstellen verwendet. Bei der Bestimmung der Koeffizienten der Übertragungsfunktionen F(s) ist zu beachten, dass die Filter schwingungsfähig sind. Die Nennerkoeffizienten müssen daher so bestimmt werden, dass die Filter stabil sind – dies ist der Fall, wenn a_0 und a_1 positiv sind (Hurwitz-Kriterium). Neben analytischen Instabilitäten durch ungüns-

[96] Der Maximalwert wird erreicht für die Wirkung des angeregten Elementarflügels auf sich selbst.

tige Filterkoeffizienten können in der Simulation auch numerische Instabilitäten auftreten[97], denen durch verschiedene Maßnahmen begegnet werden kann:

- Erhöhung der Simulationstaktrate,
- Verwendung numerischer Integrationsverfahren höherer Ordnung (z.B. Runge-Kutta-4) und
- Veränderung des Eigenverhaltens des simulierten Systems.

Die Simulationstaktrate des Simulationsrechners des A340-FFS beträgt 60 Hz und kann durch die vorhandene und damit begrenzte Rechenkapazität kaum erhöht werden. Die Verwendung höherwertiger numerischer Integrationsverfahren ist sehr wirkungsvoll, aber aufgrund der damit einher gehenden zunehmenden erforderlichen Rechenleistung begrenzt. Es wurden verschiedene Integrationsverfahren (Euler, Addams-Bashforth, Runge-Kutta-2, Runge-Kutta-3, Runge-Kutta-4) untersucht und das Runge-Kutta-3-Verfahren als das am Besten geeignete ausgewählt. Hierbei werden zeitlich zurückliegende Zeitwerte verwendet, so dass eine Information über den Krümmungsverlauf berücksichtigt wird. Auf eine korrekte Speicherung der vergangenen Zeitwerte ist zu achten sowie darauf, dass diese auch bei der Initialisierung des Filters zu berücksichtigen sind.

Da die hier verwendeten Filterfunktionen kein real existierendes technisches System beschreiben und damit von vorneherein festgelegt sind sondern vielmehr in Grenzen wählbar sind, können für den Optimierungsprozess günstige Randbedingungen zur Gewährleistung numerischer Stabilität vorgegeben werden, wobei eine geringfügige Verschlechterung der Approximationsqualität in Kauf genommen werden muss[98]. Mit den solchermaßen ermittelten Koeffizienten für die Filterfunktionen wird bis zu einer reduzierten Frequenz von $\omega^* \approx 0{,}8$ (dies entspricht hier einer Frequenz von $f \approx 3$ Hz) eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Doublet-Lattice-Verfahren und gefiltertem Tragflächenverfahren erreicht[99]. Der Vergleich zur stationären Rechnung zeigt, dass durch instationäre Effekte im unteren Frequenzbereich eine deutliche Reduzierung der Kräfte und Momente bewirkt wird, die bei $\omega^* \approx 0{,}8$ ca. 20% beträgt (bezogen auf die stationären Werte).

Im Frequenzbereich $\omega^* > 0{,}8$ treten mit wachsender reduzierter Frequenz zunehmende Abweichungen zwischen beiden instationären Verfahren auf, wobei das gefilterte Tragflächenverfahrens stets zu kleine Werte liefert. Im Frequenzbereich $0{,}8 < \omega^* \approx 1{,}1$ (d.h. ca. im Bereich 3 Hz < f < 4 Hz) bleiben die Unterschiede jedoch unterhalb von 10%. Für größere reduzierte Frequenzen $\omega^* > 1{,}5$ ($f \approx 5{,}4$ Hz) werden die Abweichungen im Amplitudengang zwischen den beiden instationären Rechenverfahren wieder geringer. Trotzdem wird dieser Frequenzbereich insgesamt schlechter wiedergegeben, da beim gefilterten Tragflächenverfahren die Phasennacheilung stärker abweicht.

Für das Nickmoment sowie auch für die Nickbewegung können die gleichen Schlussfolgerungen wie für die Schlagbewegung gezogen werden. Insgesamt kann festgestellt werden, dass mit dem gefilterten Tragflächenverfahren der für flugmechanische Untersuchungen mit Piloten wichtige Frequenzbereich bis $f \approx 4$ Hz gut wiedergegeben wird, wobei bis zu einer Frequenz $f \approx 3$ Hz sogar eine sehr gute Simulationsqualität erreicht wird[100].

Da die Echtzeitfähigkeit des Verfahrens ein besonderer Aspekt der hier vorgestellten Modellierungen darstellt und das instationäre Tragflächenverfahren durch die hohe Zahl der relativ aufwendigen Filterfunktionen einen deutlich höheren Rechenzeitbedarf als das stationäre Tragflächenverfahren erwarten lässt, wurde der Rechenzeitbedarf beider Verfahren miteinander verglichen. Auf einer Workstation vom Typ IBM RS6000/390 beträgt der Rechenzeitbedarf für das Tragflächenverfahren bei M = 31 Elementarflügeln ca. 0,63 ms für die stationäre Rechnung und ca. 6,03 ms im instationären Fall. Durch die zusätzlichen Filterfunktionen wird der Rechenzeitbedarf damit um den Faktor 10 erhöht. Bei einer

[97] Diese haben ihre Ursache in einer zu geringen Abtastrate im Verhältnis zur Eigenfrequenz des simulierten Systems.

[98] Eine ausführliche Beschreibung der gewählten Randbedingungen wird in Anhang L gegeben. Die Verschlechterung der Approximationsqualität wird in Kauf genommen, da durch die Vielzahl der möglichen Parameterkombinationen bei der automatisierten Bestimmung der Filterkoeffizienten numerische Instabilitäten anders kaum ausgeschlossen werden können.

[99] Die Ergebnisse der Rechnungen nach dem Tragflächen- und nach der Doublet-Lattice-Methode sind im Anhang L dargestellt.

[100] Hier sei noch einmal darauf hingewiesen, dass in der Echtzeit-Flugsimulation die zu berücksichtigen Frequenzen des Strukturmodells nach oben begrenzt sein müssen. In der hier vorgestellten Modellierung sollen lediglich die Frequenzen berücksichtigt werden, die einen signifikanten Einfluss auf die flugmechanischen Freiheitsgrade erwarten lassen.

Simulationsfrequenz von 60 Hz stehen für einen Zeitschritt insgesamt 16,67 ms zur Verfügung, so dass die Echtzeitfähigkeit auf dem genannten Rechnertyp trotzdem problemlos gegeben ist[101].

[101] Der numerische Aufwand für die übrigen erforderlichen Berechnungen liegt nur bei ca. 1 bis 2 ms.

7 Anwendungen auf dem A330/A340-Flugsimulator

7.1 Implementation

7.1.1 Modifikationen und Erweiterungen

Der A330/A340-Simulator des ZFB bildet auf Grund seiner bereits in Kapitel 2 beschriebenen Flexibilität und Erweiterungsmöglichkeiten eine ideale Grundlage für die Durchführung von Simulatorversuchen mit Piloten im Rahmen verschiedener flugmechanischer Forschungsprojekte. Gleichzeitig sind hierdurch aber auch bereits einige Randbedingungen in Bezug auf Hard- und Software festgelegt. Um die in dieser Arbeit beschriebenen Erweiterungen der aerodynamischen Modellierung auf diesem Simulator nutzen zu können, mussten zusätzliche Modifikationen bzw. Erweiterungen sowohl an der Hardware als auch an der Software vorgenommen werden.

Hardware
Um den erhöhten Anforderungen an die Rechenleistung zu genügen, wurde ein Hochleistungsrechner installiert, der in seiner Grundkonfiguration die vierfache Rechenleistung im Vergleich zum vorhandenen System zur Verfügung stellt[102]. Die ohnehin bereits vorhandene Umschaltmöglichkeit zwischen Trainings- und Forschungsbetrieb wurde hierzu ergänzt, siehe Bild 7.1.

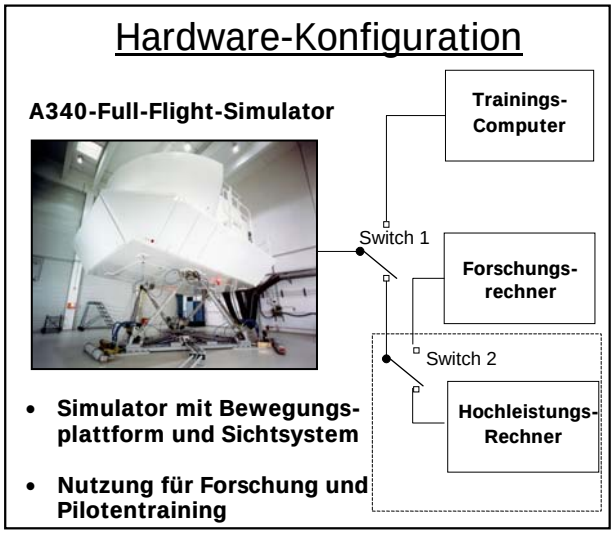

Bild 7.1 A330/A340-Flugsimulator mit Forschungssystem und Erweiterung

Software
Auf dem A330/A340-FFS stehen die flugmechanischen Modelle des Airbus A330 sowie des A340 zur Verfügung. Diese müssen zur Durchführung von Flugeigenschaftsuntersuchungen flexibler Flugzeuge bzw. von Wirbelschleppenuntersuchungen ersetzt oder zumindest in wesentlichen Punkten erweitert werden. Für Untersuchungen, die als Flugzeugmuster den A330 bzw. den A340 verwenden, kann die auf dem Forschungsrechner vorhandene Kopie der Trainingssoftware als Ausgangsbasis verwendet werden, die aber zur Berücksichtigung der entsprechenden Einflüsse erweitert werden muss. Für die Durchführung von Wirbelschleppenuntersuchungen ist dies ein praktikables Vorgehen, da hierbei lediglich eine „Delta-Aerodynamik“ berücksichtigt werden muss.

Für Flugeigenschaftsuntersuchungen zukünftiger Großraumflugzeuge kann jedoch nicht auf die vorhandenen Modelle zurückgegriffen werden, da hierzu tief greifende Veränderungen in der flugmechanischen Modellierung erforderlich sind. Da die vorhandene Software für das Pilotentraining alle denkbaren Fehlerfälle reproduzieren können muss, ist sie extrem komplex, so dass die notwendigen Eingriffe nur mit Hilfe des Simulatorherstellers und nur mit hohem personellem Aufwand zu bewältigen

[102] Ein weiterer Ausbau dieses Systems ist bei Bedarf möglich.

sind. Daher wurde das flugmechanische Modell des A330/A340 vollständig entfernt und durch eine neue Grundstruktur ersetzt (Modular Simulation Software MOSIS). Diese stellt die Schnittstellen für beliebige flugmechanische Modelle zur Verfügung und bildet damit das Grundgerüst für die Modellentwicklung, wie Bild 7.2 schematisch zeigt; Bild 7.3 zeigt das Flussdiagramm mit den wichtigsten Modulen, wobei die Erweiterungen des Tragflächenverfahrens bereits einbezogen sind.

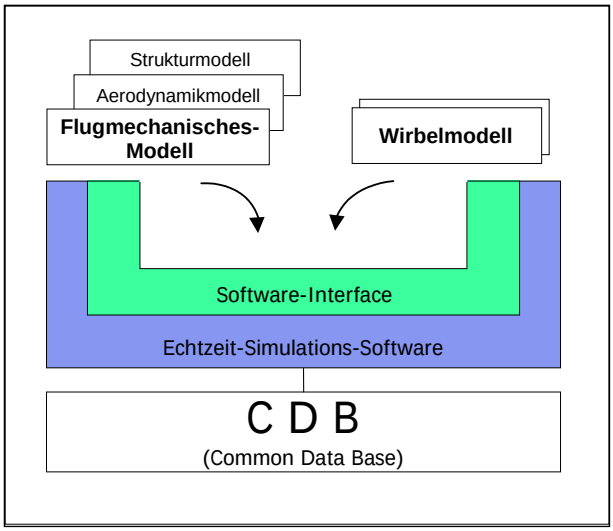

Bild 7.2 Schema zur Einbindung eigener Modelle in die Simulationsumgebung

7.1.2 Einbindung des Tragflächenverfahrens

Bei der Entwicklung des Tragflächenverfahrens wurde von vorneherein auf eine eindeutige Formulierung zur Berücksichtigung der verschiedenen Einflüsse infolge elastischer Verformungen sowie räumlicher Windfelder großer Wert gelegt. So gilt für den lokalen Anstellwinkel an einem Aufpunkt P_j des Profils[103] nach Gl. (5.83):

$$\alpha_{P,j} = \underbrace{\alpha}_{\text{Flugzeug}} + \underbrace{i_F + \varepsilon_{VF,v}}_{\text{Einstellwinkel und Verwindung}} + \underbrace{\Delta\alpha_{KF,j}}_{\text{Starrkörperdrehung}} + \underbrace{\Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,v}}_{\text{Elastizität}} + \underbrace{\Delta\alpha_{WF,j}}_{\text{Windfeld}} \qquad (7.01)$$

Diese getrennte Berücksichtigung erleichtert die Einbindung in verschiedene Simulationsanwendungen erheblich und erlaubt auch auf einfache Weise die gleichzeitige Kombination der verschiedenen Einflüsse. Den Datenfluss für das Wind-, Struktur- und Aerodynamikmodell sowie für das Tragflächenverfahren zeigt Bild 7.4[104]. Gl. (7.01) zeigt, dass der Einfluss der Elastizität in zwei Effekten besteht: der Flügel wird tordiert und durch dynamische Verformungen entsteht ein Zusatzanstellwinkel. Der Einfluss der dynamischen Verformungen wird sinnvollerweise mit dem Einfluss des Windes sowie der Starrkörperdrehung zusammengefasst, da diese Effekte durch die Geschwindigkeitskinematik beschrieben werden können. Für die auf die x_f-y_f-Ebene bezogene Anstellwinkelverteilung des Flügels[105] gilt daher (siehe auch Gl. (5.69)):

$$\alpha_{F,j} = \alpha + \Delta\alpha_{KF,j} + \Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\alpha_{WF,j} \qquad (7.02)$$

[103] Der Index „j“ kennzeichnet, dass es sich um örtliche Größen handelt. Hierbei ist sowohl die Abhängigkeit in Spannweitenrichtung (Flügelschnitt) als auch in Profiltiefenrichtung (ℓ/4-Punkt und Hinterkante) enthalten. Im Gegensatz zum vorher eingeführten Index „υ“ läuft „j“ damit von 1 bis 2M. Die explizite Kennzeichnung der x- und y-Abhängigkeit kann entfallen, da der Index „j“ dies bereits beschreibt. In den Fällen, wo eine Größe lediglich vom Flügelschnitt abhängig ist, also keine x-Abhängigkeit besteht, wird der Index „υ“ verwendet.

[104] Zur besseren Übersicht sind lediglich die wichtigsten Größen dargestellt.

[105] Dies ist der Winkel zwischen der örtlichen Anströmung und der x_f-y_f-Ebene.

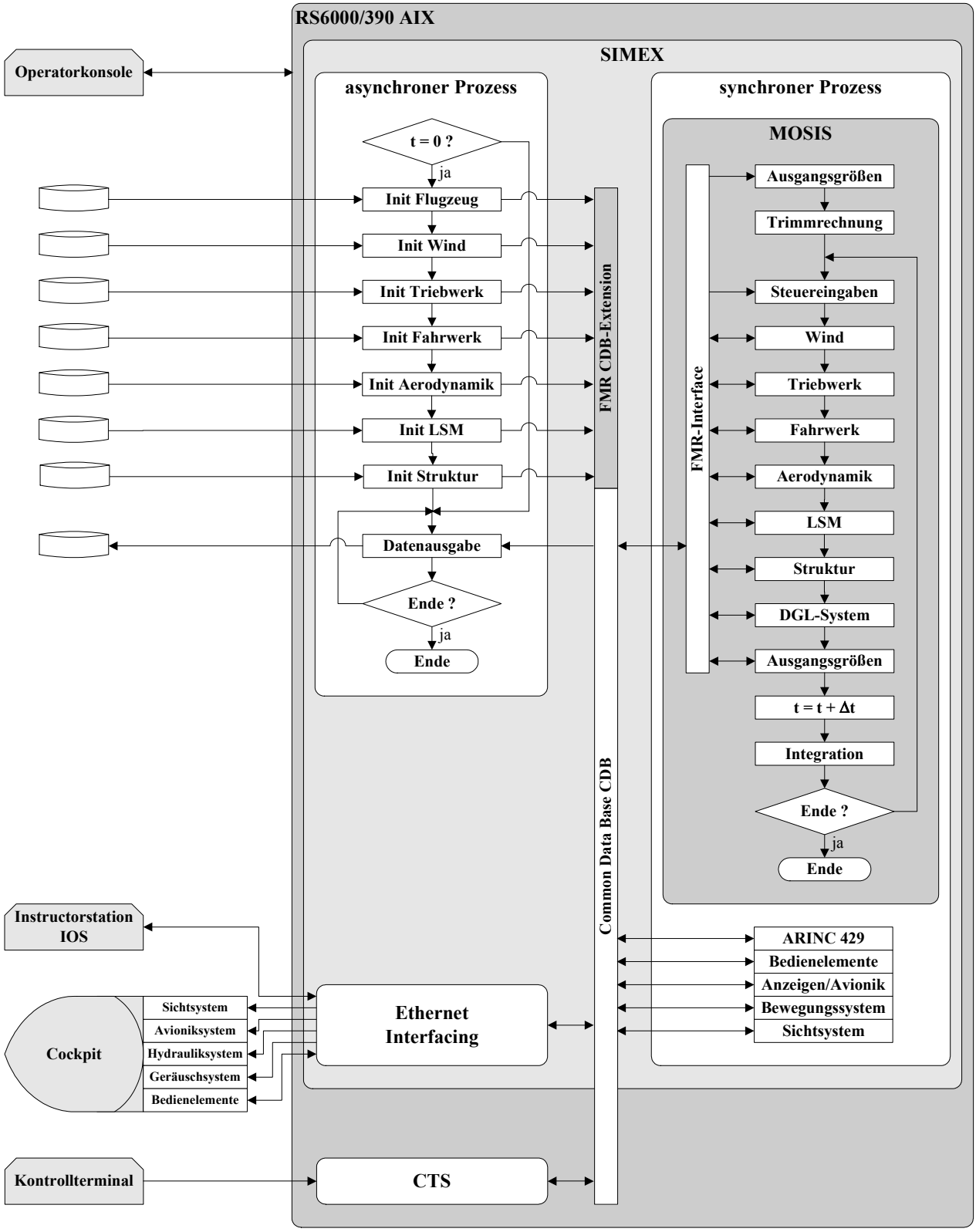

Bild 7.3 Flussdiagramm der Flugsimulationssoftware SIMEX und MOSIS

Für den örtlichen Anstellwinkel am Profil erhält man damit:

$$\alpha_{P,j} = \alpha_{F,j} + i_F + \varepsilon_{VF,v} + \Delta\varepsilon_{FlexF,v} \tag{7.03}$$

Die für die aerodynamischen Kräfte maßgebliche Anströmgeschwindigkeit $\underline{V}_A$ an einem Aufpunkt P_j wird aus der Geschwindigkeitskinematik bestimmt:

$$\underline{V}_{A,j,g} = \underline{V}_{K,j,g} - \underline{V}_{W,j,g} \tag{7.04}$$

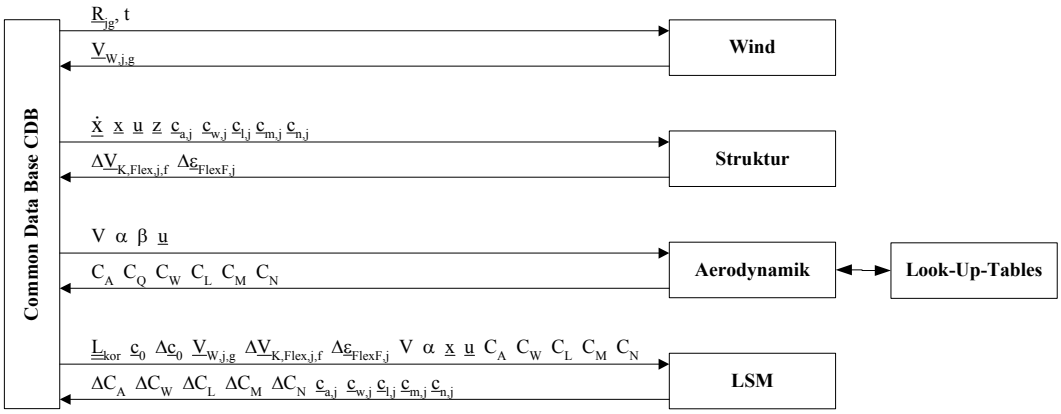

Bild 7.4 Einbindung des aerodynamischen Modells LSM

Hierbei sind in der Bahngeschwindigkeit die Einflüsse aus Starrkörperdrehung und dynamischen Verformungen enthalten (vgl. Gl. (5.93)):

$$\underline{V}_{K,j} = \underline{V}_{K,SP} + \Delta\underline{V}_{K,Rot,j} + \Delta\underline{V}_{K,Flex,j} \tag{7.05}$$

Durch Transformation der Anströmgeschwindigkeit in das flugzeugfeste Koordinatensystem

$$\underline{V}_{A,j,f} = \underline{\underline{T}}_{fg}\,\underline{V}_{A,j,g} \tag{7.06}$$

können hieraus der Anstellwinkel und die Anströmgeschwindigkeit ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \arctan\frac{w_{A,j,f}}{u_{A,j,f}} \\ V_{A,j} &= \sqrt{u^2_{A,j,f} + v^2_{A,j,f} + w^2_{A,j,f}} \end{aligned} \tag{7.07}$$

Da die Anstellwinkelverteilung nur für das Tragflächenverfahren benötigt wird, kann die Lösung der Gleichungen (7.04) bis (7.07) als Teil des Tragflächenverfahrens behandelt werden.

Koppelung Tragflächenverfahren – Windmodell

Für das Tragflächenverfahren stellt der Wind eine Eingangsgröße dar. Der Wind wiederum ist eine gerichtete Größe, die sich mit dem Ort und der Zeit ändern kann, aber von der Aerodynamik unabhängig ist – die Verkoppelung ist damit lediglich einseitig, siehe Bild 7.4. Für das hier vorgestellte Tragflächenverfahren werden für jeden Zeitpunkt der Simulation die Windvektoren an allen 2M Aufpunkten benötigt, wobei üblicherweise der Wind im geodätischen Koordinatensystem beschrieben wird[106]:

$$\underline{V}_{Wg} = \underline{V}_{Wg}(\underline{R}_g, t) \tag{7.08}$$

Die Modellierung des Windes ist nicht Gegenstand dieser Arbeit, vielmehr wird vorausgesetzt, dass ein Windmodell zur Verfügung steht, dass für die Eingangsgrößen entsprechend Gl. (7.08) den dazugehörigen Windvektor im geodätischen Koordinatensystem liefert. Da die betrachteten Aufpunkte des Flügels P_j durch auf das Flugzeug bezogene Ortsvektoren r_j beschrieben werden, müssen sie noch im erdfesten, geodätischen Koordinatensystem beschrieben werden[107]:

$$\underline{R}_{j,g0} = \underline{R}_{SPg0} + \underline{\underline{T}}_{gf}\,\underline{r}_{j,f} \tag{7.09}$$

$\underline{r}_{j,f}$ Ortsvektor des Aufpunktes P_j bezogen auf das flugzeugfeste Koordinatensystem

$\underline{R}_{SPg0}$ Ortsvektor vom erdfesten Referenzpunkt zum Referenzpunkt des Flugzeuges SP

$\underline{\underline{T}}_{fg}$ Transformationsmatrix flugzeugfest → geodätisch

[106] Das in der DIN 9300 definierte geodätische Koordinatensystem (Index „g“) hat seinen Ursprung im Referenzpunkt des Flugzeuges, wird also mitbewegt. Hier wird jedoch ein erdfestes Koordinatensystem benötigt, das durch den Index „g0“ gekennzeichnet wird. Seine Achsen liegen parallel zum g-System, der Ursprung liegt jedoch in einem wählbaren, erdfesten Referenzpunkt.

[107] Die Transformationsmatrizen können z.B. [Wilhelm 2000] und [LN 9300] entnommen werden.

$\underline{R}_{j,g0}$ Ortsvektor vom erdfesten Referenzpunkt zum Aufpunkt P_j

Gl. (7.09) ist für jeden Aufpunkt zu lösen. Mit diesen Eingangsgrößen kann das Windmodell für den jeweiligen Zeitpunkt den zu jedem Ortsvektor gehörenden Windvektor ermitteln.

Koppelung Tragflächenverfahren – Strukturmodell

Die Koppelung zwischen Tragflächenverfahren und Strukturmodell ist erheblich komplexer als die zwischen Tragflächenverfahren und Windmodell, da die vom Strukturmodell ermittelten Verformungen und Verformungsgeschwindigkeiten wesentlich von der aerodynamischen Lastverteilung bestimmt wird – die aerodynamische Lastverteilung aber wiederum von den Verformungen beeinflusst wird. Die Koppelung ist damit beidseitig, siehe Bild 7.4. Vom Tragflächenverfahren müssen die aerodynamischen Lasten des Gesamtzustandes zur Verfügung gestellt werden und vom Strukturmodell der Verformungszustand sowie die Zusatzgeschwindigkeiten infolge dynamischer Verformungen. Dabei ist zu beachten, dass der vom Tragflächenverfahren ermittelte Lösungsvektor $\underline{c}_{kal}$ nach Gl. (5.71) lediglich die Verteilung der Beiwerte (für Auftrieb und Nickmoment) enthält – sie sind jedoch nicht auf ein einheitliches Koordinatensystem sondern auf die örtliche Anströmrichtung bezogen. Außerdem gelten die Beiwerte an den Multhopp-Schnitten. Beim Strukturmodell werden jedoch die Kräfte an den jeweiligen Knotenpunkten benötigt, die im allgemeinen Fall nicht mit den Multhopp-Schnitten übereinstimmen, siehe Bild 7.5. Die örtlichen Beiwerte der aerodynamischen Kräfte aus dem Tragflächenverfahren müssen daher in ein einheitliches Koordinatensystem transformiert und in die FE-Knoten umgerechnet werden.

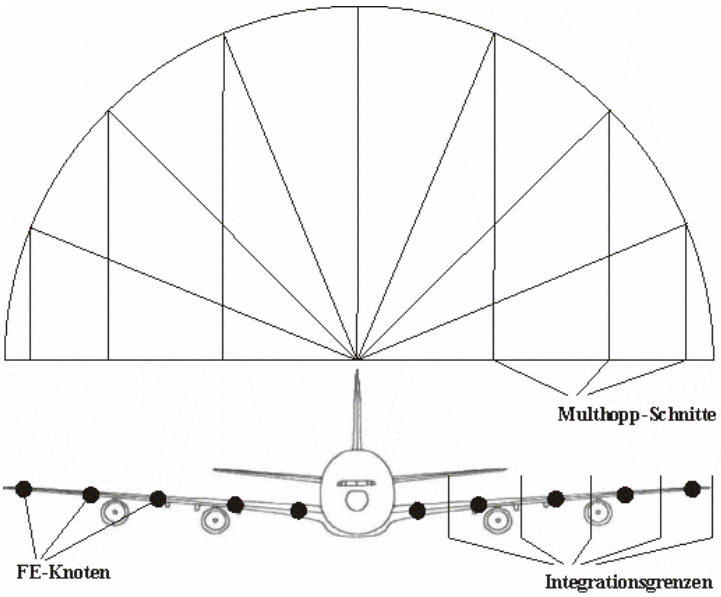

Bild 7.5 FE-Knoten und Multhopp-Schnitte

Als Ziel-Koordinatensystem wird das flugzeugfeste Koordinatensystem (Index „f“) verwendet, da dieses für das Strukturmodell besonders gut geeignet ist. Für die Beiwerte der aerodynamischen Kräfte an den M Multhopp-Schnitten im f-Koordinatensystem gilt damit, siehe Bild 7.6:

$$\begin{aligned} c^{A}_{x,\nu,f} &= c_{a,\nu}\sin\left(\alpha_{F25,\nu}-\alpha_{i,\nu}\right)-c_{wP,\nu}\cos\left(\alpha_{F25,\nu}-\alpha_{i,\nu}\right) \\ c^{A}_{z,\nu,f} &= -c_{a,\nu}\cos\left(\alpha_{F25,\nu}-\alpha_{i,\nu}\right)-c_{wP,\nu}\sin\left(\alpha_{F25,\nu}-\alpha_{i,\nu}\right) \end{aligned} \qquad (7.10)$$

$\alpha_{F25,\nu}$ örtlicher Anstellwinkel am ℓ/4-Punkt[108], gemessen von der örtlichen Anströmrichtung zur x_f-y_f-Ebene

[108] Der Anstellwinkel ändert sich auch in Profiltiefenrichtung, so dass hieraus ein mittlerer, wirksamer Anstellwinkel ermittelt werden müsste. Vereinfachend wird mit dem Wert am ℓ/4-Punkt gerechnet, da bei einem angestellten Profil der größte Anteil des Auftriebes im vorderen Profilbereich erzeugt wird und somit der Anstellwinkel am ℓ/4-Punkt als repräsentativ angesehen werden kann.

Für den Nickmomentenbeiwert um die elastische Achse EA gilt[109], siehe Bild 7.6:

$$c^{A}_{mEA,\nu} = c_{m25,\nu} + c_{a,\nu}\cos\left(\alpha_{P25,\nu} - \alpha_{i,\nu}\right)\left(\frac{x_{EA,\nu,p}}{\ell_\nu} - 0{,}25\right) + c_{wP,\nu}\sin\left(\alpha_{P25,\nu} - \alpha_{i,\nu}\right)\left(\frac{x_{EA,\nu,p}}{\ell_\nu} - 0{,}50\right) \qquad (7.11)$$

$x_{EA,\nu,p}$ Lage der örtlichen elastischen Achse im profilfesten Koordinatensystem

$\alpha_{P25,\nu}$ örtlicher Anstellwinkel am $\ell/4$-Punkt, gemessen von der örtlichen Anströmrichtung zur Profilsehne

Diese Beiwerte können als Stützstellen einer kontinuierlichen Verteilung von Beiwerten angesehen werden, so dass die Werte zwischen den Stützstellen durch lineare Interpolation bestimmt werden können. Für die Beiwerte der Kräfte innerhalb eines Intervalls ($y_\nu \le y \le y_{\nu+1}$) gilt damit:

$$c^{A}_{x,f}(y) = c^{A}_{x,\nu,a} + \frac{c^{A}_{x,\nu+1,f} - c^{A}_{x,\nu,f}}{y_{\nu+1} - y_\nu}\left(y - y_\nu\right)$$
$$c^{A}_{z,f}(y) = c^{A}_{z,\nu,a} + \frac{c^{A}_{z,\nu+1,f} - c^{A}_{z,\nu,f}}{y_{\nu+1} - y_\nu}\left(y - y_\nu\right) \qquad (7.12)$$

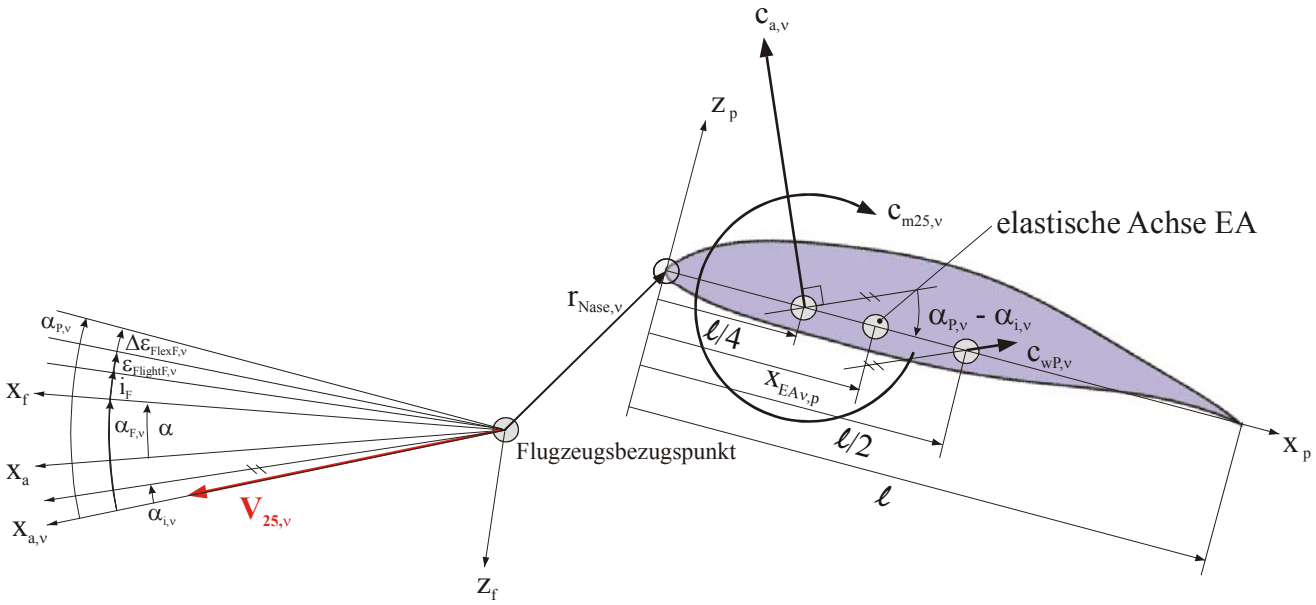

Bild 7.6 Kräfte und Momente an einem Multhopp-Schnitt

Für den Nickmomentenbeiwert um die elastische Achse gilt entsprechend:

$$c_{mEA}(y) = c_{mEA,\nu,} + \frac{c_{mEA,\nu+1} - c_{mEA,\nu}}{y_{\nu+1} - y_\nu}\left(y - y_\nu\right) \qquad (7.13)$$

Die kontinuierlich verteilten Streckenlasten erhält man durch Multiplikation mit dem Staudruck und der Profiltiefe, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, dass der Betrag der Anströmgeschwindigkeit sich ebenfalls in Spannweitenrichtung ändert:

$$V_{25}(y) = V_{25,\nu} + \frac{V_{25,\nu+1} - V_{25,\nu}}{y_{\nu+1} - y_\nu}\left(y - y_\nu\right) \qquad (7.14)$$

$V_{25,\nu}$ örtliche Anströmgeschwindigkeit am $\ell/4$-Punkt

[109] Auf eine Transformation des örtlichen Momentes kann verzichtet werden, da das im Lösungsvektor nach Gl. (5.71) enthaltene, auf den $\ell/4$-Punkt bezogene Nickmoment bereits um eine Achse parallel zur y_f-Achse wirkt.

Für die Streckenlasten gilt damit:

$$p^A_{x,f}(y) = \frac{\rho}{2} V^2_{25}(y)\, \ell(y)\, c^A_{x,f}(y)$$

$$p^A_{z,f}(y) = \frac{\rho}{2} V^2_{25}(y)\, \ell(y)\, c^A_{z,f}(y) \qquad (7.15)$$

$$m^A_{y,EA}(y) = \frac{\rho}{2} V^2_{25}(y)\, \ell(y)\, c_{mEA}(y)$$

$p^A_{x,f}(y)$ aerodynamische Streckenlast (Kraft) in x_f-Richtung

$p^A_{z,f}(y)$ aerodynamische Streckenlast (Kraft) in z_f-Richtung

$m^A_{y,EA}(y)$ aerodynamische Streckenlast (Moment) um die elastische Achse

Die an den diskreten FE-Knoten wirkenden Kräfte sowie das Torsionsmoment erhält man durch Integration der kontinuierlichen Streckenlasten, so dass am FE-Knoten n gilt:

$$F^A_{x,n,f} = \int_{y_A}^{y_E} p^A_{x,f}(y)\, dy = \frac{\rho}{2} \int_{y_A}^{y_E} V^2_{25}(y)\, \ell(y)\, c^A_{x,f}(y)\, dy$$

$$F^A_{z,n,f} = \int_{y_A}^{y_E} p^A_{z,f}(y)\, dy = \frac{\rho}{2} \int_{y_A}^{y_E} V^2_{25}(y)\, \ell(y)\, c^A_{z,f}(y)\, dy \qquad (7.16)$$

$$M^A_{y,EA,n,f} = \int_{y_A}^{y_E} m^A_{y,EA}(y)\, dy = \frac{\rho}{2} \int_{y_A}^{y_E} V^2_{25}(y)\, \ell(y)\, c_{mEA}(y)\, dy$$

Hierbei liegen die Integrationsgrenzen y_A und y_E genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten. Vereinfachend kann die Integration durch eine Summenbildung ersetzt werden, wobei die benötigten Größen zuvor an q Stützstellen[110] zwischen den Intervallgrenzen zu bestimmen sind:

$$F^A_{x,n,f} = \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{q_n} V^2_{25,j}\, \ell_j\, c^A_{x,j,f}\, \Delta y_n$$

$$F^A_{z,n,f} = \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{q_n} V^2_{25,j}\, \ell_j\, c^A_{z,j,f}\, \Delta y_n \qquad (7.17)$$

$$M^A_{y,EA,n,f} = \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{q_n} V^2_{25,j}\, \ell_j\, c_{mEA,j}\, \Delta y_n$$

mit der Streifenbreite:

$$\Delta y_n = \frac{y_{E,n} - y_{A,n}}{q_n} \qquad (7.18)$$

q_n Anzahl der Stützstellen (Streifen) des Intervalls n

$y_{A,n}$ Anfang des Intervalls n

$y_{E,n}$ Ende des Intervalls n

Damit sind die aerodynamischen Eingangsgrößen für das Strukturmodell bestimmt. In umgekehrter Richtung sind die Verformungen und Verformungsgeschwindigkeiten als Ausgangsgrößen des Strukturmodells auf die Werte an den Multhopp-Schnitten sowie auf den ℓ/4-Punkt und die Hinterkante umzurechnen. Hierbei wird ebenfalls linear zwischen den Werten benachbarter FE-Knoten interpoliert.

[110] Die Anzahl der Stützstellen (Streifen) kann für jeden Knoten unterschiedlich sein.

Für den elastischen Torsionswinkel des Flügels am Multhopp-Schnitt ν innerhalb eines Intervalls ($y_n \le y_\nu \le y_{n+1}$) zwischen zwei FE-Knoten gilt:

$$\Delta\varepsilon_{FlexF,\nu} = \Delta\varepsilon_{FlexF,n} + \frac{\Delta\varepsilon_{FlexF,n+1} - \Delta\varepsilon_{FlexF,n}}{y_{n+1} - y_n}\left(y_\nu - y_n\right) \tag{7.19}$$

Für die Zusatzgeschwindigkeiten in x_f- und z_f-Richtung am ℓ/4-Punkt und an der Hinterkante am FE-Knoten n gilt, siehe Bild 7.6:

$$\begin{aligned}
\Delta u_{K,Flex,25,n,f} &= \Delta u_{K,Flex,EA,n,f} - \Delta q_{Flex,f}\left(\frac{x_{EA,n,p}}{\ell_n} - 0{,}25\right)\sin\left(i_F + \varepsilon_{FlightF,n} + \Delta\varepsilon_{FlexF,n}\right) \\
\Delta w_{K,Flex,25,n,f} &= \Delta w_{K,Flex,EA,n,f} - \Delta q_{Flex,f}\left(\frac{x_{EA,n,p}}{\ell_n} - 0{,}25\right)\cos\left(i_F + \varepsilon_{FlightF,n} + \Delta\varepsilon_{FlexF,n}\right)
\end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}
\Delta u_{K,Flex,HK,n,f} &= \Delta u_{K,Flex,EA,n,f} + \Delta q_{Flex,f}\left(1 - \frac{x_{EA,n,p}}{\ell_n}\right)\sin\left(i_F + \varepsilon_{FlightF,n} + \Delta\varepsilon_{FlexF,n}\right) \\
\Delta w_{K,Flex,HK,n,f} &= \Delta w_{K,Flex,EA,n,f} + \Delta q_{Flex,f}\left(1 - \frac{x_{EA,n,p}}{\ell_n}\right)\cos\left(i_F + \varepsilon_{FlightF,n} + \Delta\varepsilon_{FlexF,n}\right)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Die Zusatzgeschwindigkeiten am ℓ/4-Punkt im Multhopp-Schnitt ν innerhalb eines Intervalls ($y_n \le y_\nu \le y_{n+1}$) zwischen zwei FE-Knoten erhält man aus:

$$\begin{aligned}
\Delta u_{K,FlexF,25,\nu} &= \Delta u_{K,FlexF,n} + \frac{\Delta u_{K,FlexF,25,n+1} - \Delta u_{K,FlexF,25,n}}{y_{n+1} - y_n}\left(y_\nu - y_n\right) \\
\Delta w_{K,FlexF,25,\nu} &= \Delta w_{K,FlexF,n} + \frac{\Delta w_{K,FlexF,25,n+1} - \Delta w_{K,FlexF,25,n}}{y_{n+1} - y_n}\left(y_\nu - y_n\right)
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Für die Hinterkante ist Gl. (7.22) entsprechend anzuwenden. Damit sind die Eingangsgrößen für das Tragflächenverfahren zur Beschreibung elastischer Einflüsse bestimmt.

7.2 Simulationsergebnisse

Das auf dem A330/A340-Flugsimulator implementierte Tragflächenverfahren wurde und wird für verschiedene Simulationsuntersuchungen eingesetzt. Hier werden beispielhafte Ergebnisse dieser Anwendungen dargestellt, die den durch das Tragflächenverfahren ermöglichten Zusatznutzen und die Eignung des Verfahrens insbesondere für Echtzeitanwendungen demonstrieren sollen.

7.2.1 Elastisches Flugzeug

Die erste Anwendung des Tragflächenverfahrens auf dem A330/A340-Flugsimulator erfolgte im Rahmen des BMBF-Verbundvorhabens „Dynamik des flexiblen Flugzeuges“. Hierzu wurde der aerodynamische Datensatz eines modernen, großen Verkehrsflugzeuges in die Simulationssoftware MOSIS einschließlich eines Strukturmodells sowie des Tragflächenverfahrens eingebunden[111]. Das Strukturmodell basiert auf den Daten des Flugzeugherstellers für ein hochwertiges FE-Modell des realen Flugzeuges. Hieraus wurde entsprechend dem in Kapitel 3.4 beschriebenen Verfahren ein reduziertes echtzeitfähiges Elastikmodell generiert.

Der aerodynamische Datensatz wurde ebenfalls vom Flugzeughersteller zur Verfügung gestellt und enthält die bestmöglichen, verfügbaren Daten dieses Flugzeugmusters. Dieser Datensatz wird als Ausgangsbasis für die Korrektur und Kalibrierung verwendet, wobei zusätzliche Verteilungen mit Hilfe eines Panelverfahrens berechnet wurden. Die Simulationsrechnungen berücksichtigen nicht die in Kapitel 6 beschriebene instationäre Aerodynamik.

Für den simulierten Flugzeugtyp liegen einige Flugversuchsergebnisse vor, so dass zusätzlich die erreichte Simulationsqualität mit Realdaten verglichen werden konnte. Der Umfang der zugänglichen Flugversuchsdaten ist allerdings begrenzt. Bild 7.7 zeigt beispielhafte Ergebnisse eines solchen Vergleiches für die Längsbewegung bei einer Höhenruderanregung. Die blauen Kurven zeigen die Flugversuchsdaten, die grünen Kurven zeigen die Simulationsergebnisse des starren Flugzeuges und die roten Kurven des elastischen Flugzeuges.

Das erste Diagramm stellt die Anregung durch das Höhenruder dar, die in den ersten 40 Sekunden kontinuierliche Ausschlagsänderungen aufweist und danach nahezu konstant bleibt. Mit diesem Zeitverlauf wurden auch die beiden Simulationsmodelle beaufschlagt. Das zweite Diagramm zeigt die Fluggeschwindigkeit, bei der im Langzeitverhalten deutlich die langsame Bahnschwingung (Phygoide) erkennbar ist. Das Diagramm zeigt insgesamt, dass beim elastischen Flugzeug die Abweichungen von den Flugversuchsergebnissen deutlich geringer sind als beim starren Flugzeug. Beim starren Flugzeug ist im Vergleich zu den Flugversuchsdaten die Amplitude ca. 20% zu groß und die Periodendauer ca. 7% zu lang. Beim flexiblen Flugzeug ist die Amplitude nur ca. 6% zu groß und die Periodendauer ca. 2% zu kurz. Die zu großen Amplituden bei der Fluggeschwindigkeit und beim Längslagewinkel resultieren daher aus der zu langen Amplitudendauer, da sich hierdurch längere Integrationszeiten zum Aufbau der Maximalwerte ergeben. Durch die Berücksichtigung der Flexibilität konnten die Geschwindigkeitsfehler um ca. 70% reduziert werden.

Das dritte Diagramm zeigt den Längslagewinkel. Der Offset zwischen der Kurve mit den Flugversuchsergebnissen und den Simulationsergebnissen resultiert aus unterschiedlichen Anfangswerten, da in der Simulation infolge unvermeidbarer Restabweichungen des Simulationsmodells zum realen Verhalten nicht alle Zustandsgrößen völlig identisch mit den Flugversuchswerten sein können. Das vierte Diagramm zeigt den Zeitverlauf des Anstellwinkels. Hier wird der unterschiedliche Ausgangszustand besonders deutlich erkennbar.

Bild 7.8 zeigt die Änderungen des Anstellwinkels gegenüber dem Referenzzustand. Als Referenzzustand wurde hierbei der Zeitpunkt gewählt, bei dem die Höhenruderaktivität einsetzt – hier bei ca. t = 2,5 s. Das Ergebnis zeigt, dass mit zunehmender Zeitdauer der Höhenruderaktivität die Abweichungen zwischen den Flugversuchsergebnissen und dem starren Simulationsmodell zunehmen, während die Zeitverläufe des simulierten flexiblen Flugzeugs auch am Ende der Höhenruderaktivität bei ca. t = 44 s noch gut mit den Flugversuchsdaten übereinstimmen und stets kleiner als 0,1° bleiben,

[111] Daten des simulierten Flugzeugmusters können Anhang P entnommen werden.

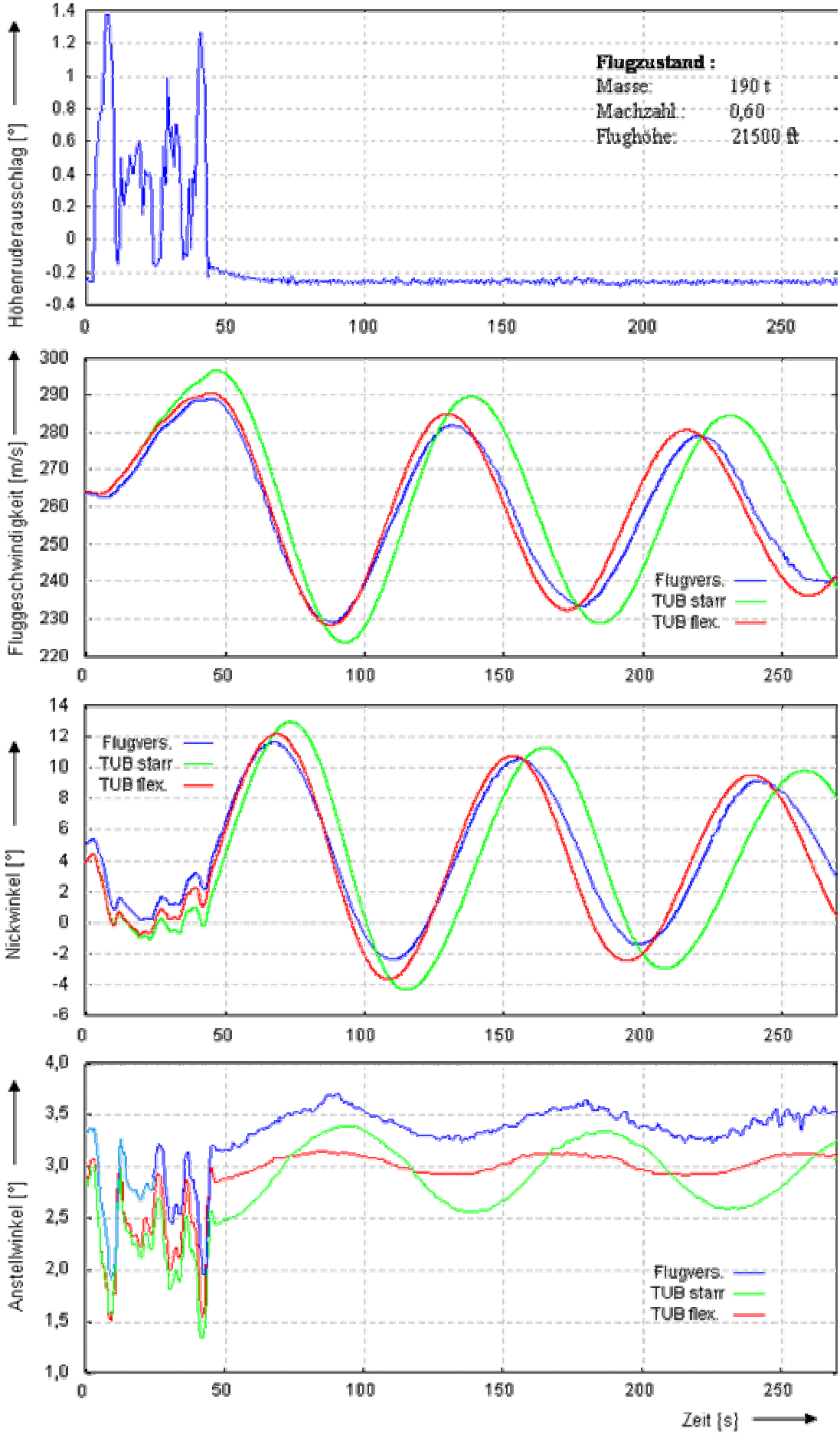

Bild 7.7 Vergleich von Flugversuchsdaten mit Simulationsergebnissen eines elastischen bzw. eines starren Flugzeuges
Reaktion auf Höhenrudereingang

während sie beim starren Simulationsmodell auf ca. 0,3° anwachsen. Hierbei ist anzumerken, dass die Flugversuchsergebnisse sämtliche Sensor- und Übertragungsfehler beinhalten, die bei der Simulation nicht berücksichtigt sind. Die tatsächlichen Abweichungen zwischen flexiblem Simulationsmodell und Flugversuchsergebnissen werden daher eher noch geringer ausfallen. Im Langzeitverhalten (Bereich ohne Höhenruderaktivität) zeigt sich ebenfalls eine deutliche Verbesserung der Simulationsqualität durch Berücksichtigung elastischer Freiheitsgrade. Die Amplitude beim simulierten starren Flugzeug ist im Vergleich zum Flugversuch um ca. den Faktor drei zu groß, während sie beim flexibilisierten Simulationsmodell mit $\Delta\alpha$ = - 0,06° nur geringfügig zu klein ist.

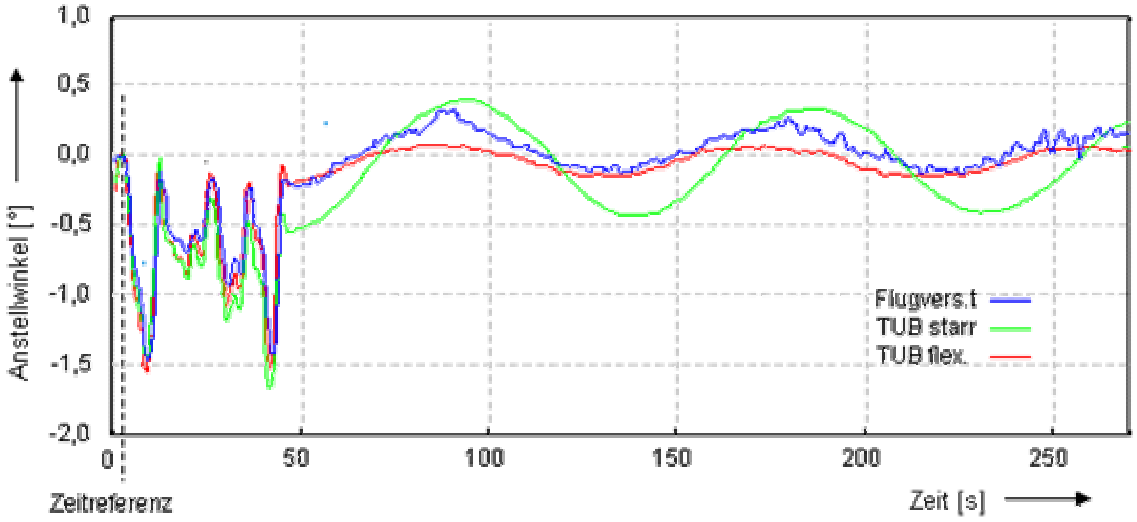

Bild 7.8 Vergleich von Flugversuchsdaten mit Simulationsergebnissen
Reaktion auf Höhenrudereingang, Änderungen des Anstellwinkels

Bild 7.9 zeigt das Kurzzeitverhalten bei derselben Höhenruderanregung. Dargestellt sind die Höhenruderanregung, die Nickgeschwindigkeit und der Längslagewinkel der Flugversuchsdaten und des simulierten flexiblen Flugzeugs. Das Diagramm der Nickgeschwindigkeit zeigt, dass der Zeitverlauf insgesamt sehr gut wiedergegeben wird. In der Phasenlage sind keine Abweichungen erkennbar, während für die Amplitude in der Simulation leichte Überreaktionen erkennbar sind. Die Ursachen könnten in einer geringfügig zu geringen Nickdämpfung oder in einer etwas zu großen Höhenruderwirksamkeit liegen. Die Kurven des Nickwinkels zeigen wiederum einen deutlichen Offset von $\Delta\Theta_{Offset}$ = - 1,1°.

Bild 7.10 zeigt die Änderungen des Längslagewinkels unter Berücksichtigung des Offset (Zeitreferenz bei t = 2,5 s). Die Unterschiede in den Änderungen des Längslagewinkels sind äußerst gering. Die Überschwinger in der Nickgeschwindigkeit beim Simulationsmodell haben offenbar kaum Auswirkungen in der Längslage, da sie sich bei der Integration im Mittel nahezu aufheben.

Der Vergleich zeigt, dass durch die Berücksichtigung dynamischer Verformungen in der Simulation die Reaktion auf dynamische Höhenruderanregungen sowohl im Kurzeit- als auch im Langzeitverhalten erheblich besser wiedergegeben wird. Die Verbesserung zeigt sich deutlich sowohl in der Fluggeschwindigkeit als auch im Längslage- und im Anstellwinkel.

Bild 7.11 zeigt die Reaktion auf eine sprungförmige Querruderanregung. Für diesen Testfall lagen leider keine Flugversuchsergebnisse vor so dass hier lediglich ein Vergleich der beiden Simulationsmodelle (starres Flugzeug/elastisches Flugzeug) erfolgt. Dargestellt sind die Zeitverläufe der Rollbeschleunigung, der Rollgeschwindigkeit und des Hängewinkels. Der Sprung im Querruderausschlag erfolgt bei ca. 3,5 s. Die Anregung wurde relativ gering gewählt, wie im resultierenden Rollwinkel von max. Φ = 2,5° erkennbar ist.

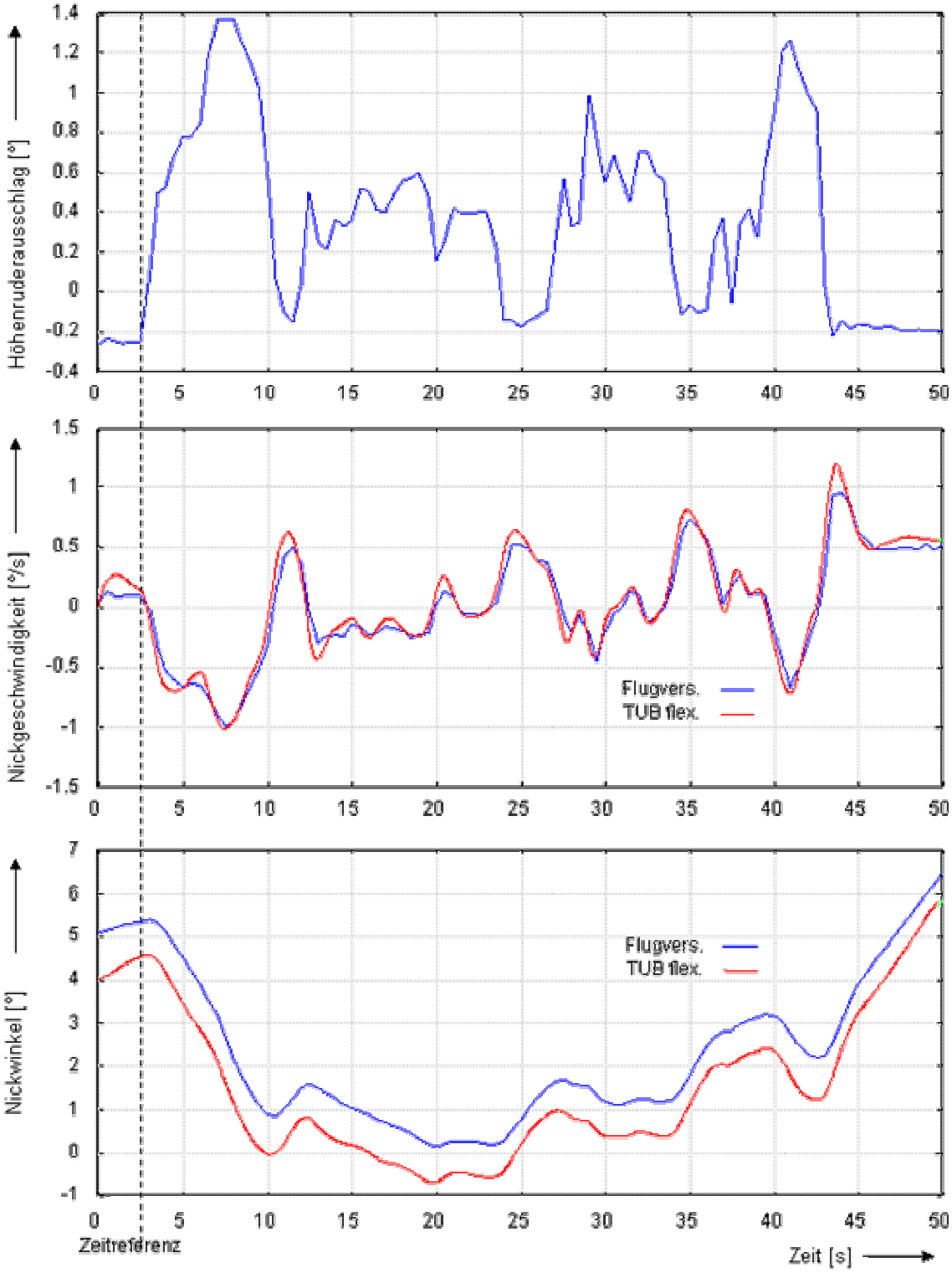

Bild 7.9 Vergleich von Flugversuchsdaten mit Simulationsergebnissen
Reaktion auf dynamischen Höhenrudereingang, Kurzzeitverhalten

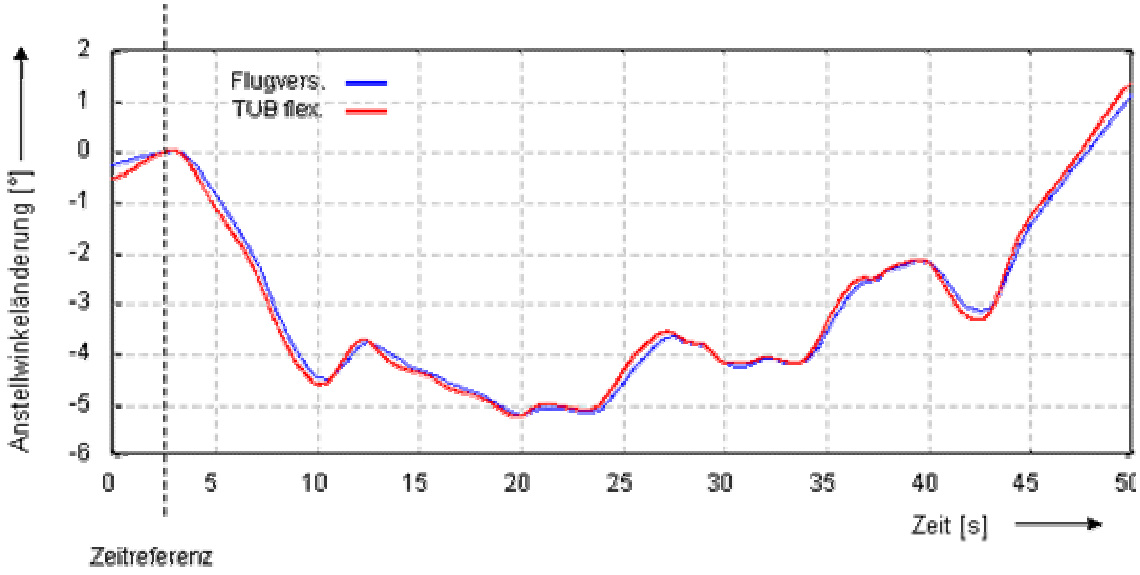

Bild 7.10 Vergleich von Flugversuchsdaten mit Simulationsergebnissen
Reaktion auf dynamischen Höhenrudereingang, Kurzzeitverhalten
Abweichungen des Längslagewinkels vom Referenzzustand

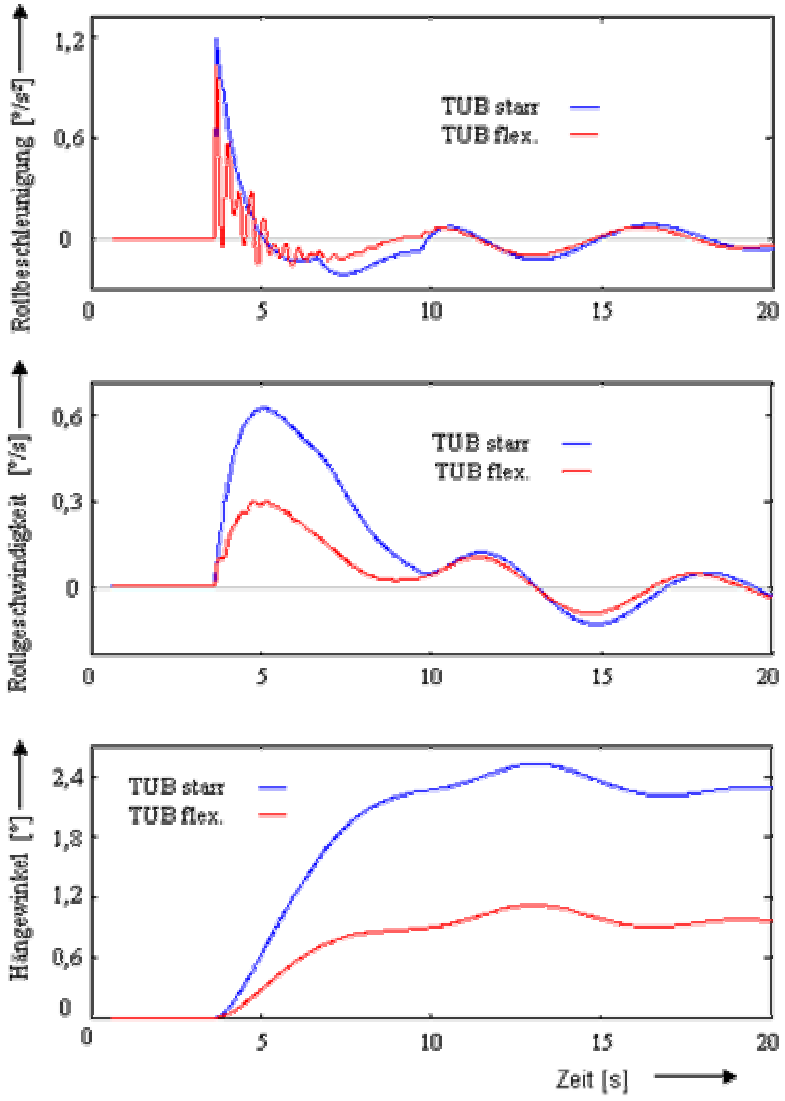

Bild 7.11 Vergleich von Simulationsergebnissen
eines elastischen und eines starren Flugzeuges
Reaktion auf Querrudersprung

Der Zeitverlauf der Rollbeschleunigung zeigt für die ersten 5 Sekunden nach der Anregung höherfrequente Schwingungsanteile mit einer Frequenz von ca. 0,6 Hz, die beim starren Flugzeug nicht auftreten und Folge von Strukturschwingungen sind. Ab t = 10 s ist eine gute Übereinstimmung beider Modelle festzustellen. Bild 7.12 zeigt das Anfangsverhalten in der Rollbeschleunigung vergrößert dargestellt[112], wobei der Anfangszeitpunkt t = 0 hier in den Beginn des sprungförmigen Querruderausschlags gelegt wurde. Die deutliche sichtbare Schwingung mit einer Frequenz von ca. 0,15 Hz (Schwingungsdauer T = 6,7 s) resultiert aus der Taumelschwingung. Beim elastischen Flugzeug ist im Vergleich zum starren Flugzeug die Frequenz geringfügig höher (d.h. kürzere Schwingungsdauer) und die Amplitude um 20% deutlich reduziert.

Bei der Rollgeschwindigkeit sowie beim Rollwinkel wird besonders deutlich, in welchem Maße das Steuerverhalten der Rollbewegung durch die elastischen Freiheitsgrade beeinflusst wird. Beim elastischen Flugzeug ist die Querruderwirksamkeit im Vergleich zum starren Flugzeug hier um ca. 50% reduziert und liegt damit in einer Größenordnung, die in jedem Fall im Simulationsmodell berücksichtigt werden muss.

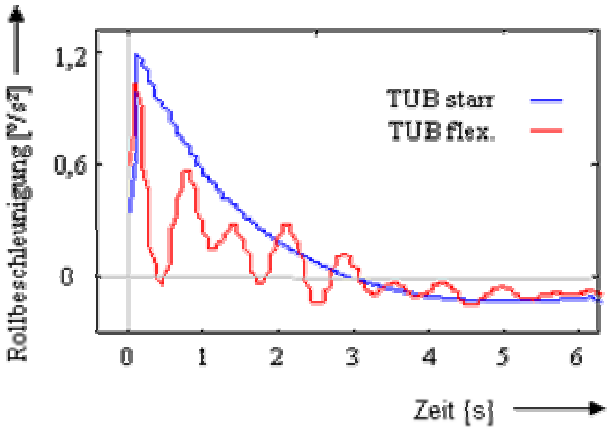

Bild 7.12 Vergleich von Simulationsergebnissen
Reaktion auf Querrudersprung
Anfangsverhalten

Beim starren Flugzeug wird das Anfangsverhalten der Rollgeschwindigkeit und des Rollwinkels durch die aperiodische Rollbewegung gekennzeichnet. Die Rollzeitkonstante T_R als Maß für die Reaktionsschnelligkeit des Flugzeuges um die Querachse ist als Zeit bis zum Erreichen von 67% der maximalen Rollgeschwindigkeit definiert, siehe Bild 7.13. Sie beträgt beim starren Flugzeug ca. $T_R = 0{,}5$ s.

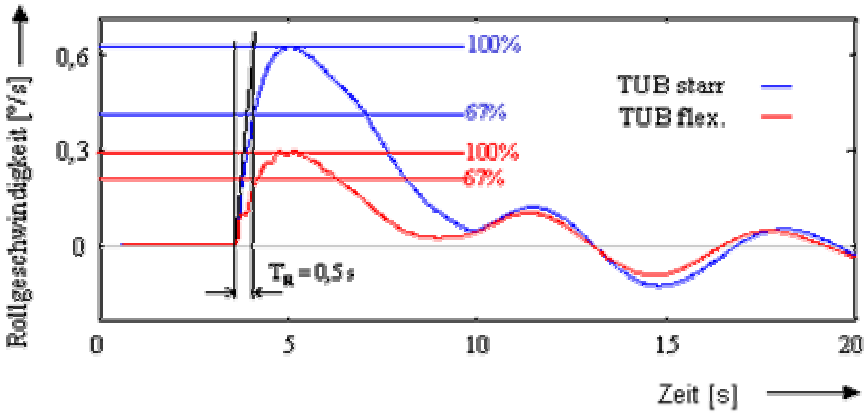

Bild 7.13 Vergleich von Simulationsergebnissen
Reaktion auf Querrudersprung
Bestimmung der Rollzeitkonstanten

[112] Die treppenförmigen Änderungen der dargestellten Kurven resultieren aus der in dieser Vergrößerung bereits sichtbaren Diskretisierung der Simulationsdaten, da im Echtzeitprozess nicht jeder Zeitschritt abgespeichert wurde.

Erfolgt die Berücksichtigung der Flexibilität lediglich quasistationär in den Flex-Faktoren, kann die reduzierte Querruderwirksamkeit zwar korrekt wiedergegeben werden, die höherfrequenten Anteile aus den dynamischen Strukturverformungen fehlen dabei jedoch. Gerade für Simulatorversuche mit Piloten können diese jedoch von entscheidender Bedeutung sein, da der Beschleunigungseindruck im Cockpit für den Piloten eine wichtige Beurteilungsgröße zur Einschätzung der Flugzeugreaktion auf Steuerkommandos darstellt.

Bild 7.14 zeigt für dasselbe Querrudersprungsignal die Querbeschleunigung im Cockpit. Beim starren Flugzeug tritt keine Querbeschleunigung auf, während beim elastischen Flugzeug die durch den sprungförmigen Querruderausschlag angeregten Strukturschwingungen deutlich sichtbar sind und selbst bei dem hier relativ geringen Steuerausschlag bereits vom Piloten wahrgenommen werden. Da die Frequenz der hier angeregten Strukturschwingung mit f = 0,6 Hz in einem Frequenzbereich liegt, in dem auch die Steueraktivitäten des Piloten erfolgen, ist eine Rückkoppelung zwischen Pilot und Flugzeugeigenformen nicht ausgeschlossen, so dass die Gefahr von so genanntem Aircraft Pilot Coupling APC besteht, auch als Pilot Induced Oscillations PIO bezeichnet. Flugeigenschaftsuntersuchungen von großen Transportflugzeugen, bei denen solche niedrigen Eigenfrequenzen der Struktur auftreten, sind daher ohne die Berücksichtigung dieser dynamischen Effekte nicht sinnvoll.

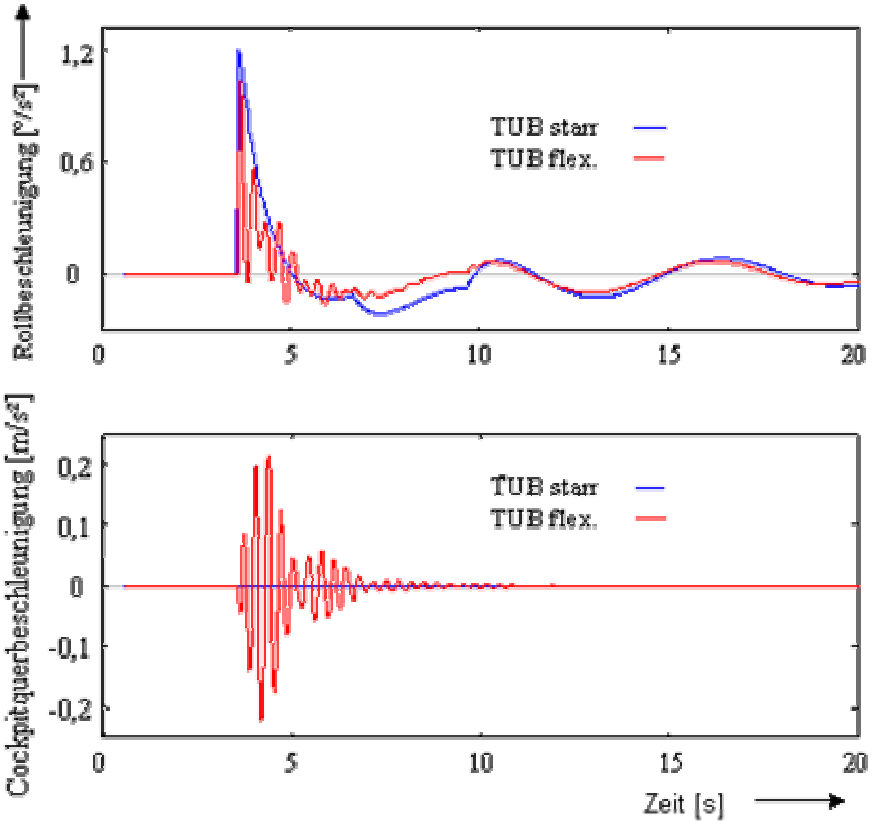

Bild 7.14 Vergleich von Simulationsergebnissen
Reaktion auf Querrudersprung
Querbeschleunigung im Cockpit

7.2.2 Einflug in Wirbelschleppen

Im Rahmen des EU-Vorhabens S-WAKE wurden auf dem A330/A340-Flugsimulator Pilotenversuche zum Einflug von Verkehrsflugzeugen in Wirbelschleppen sehr großer Transportflugzeuge durchgeführt. Die von einem vorausfliegenden Flugzeug erzeugte Wirbelschleppe wurde durch analytische Approximationsfunktionen ähnlich des in Kapitel 3.3.4 beschriebenen Wirbelschleppenmodells erzeugt. Die von der Wirbelschleppe induzierte Auftriebsverteilung hängt unmittelbar von der Position des einfliegenden Flugzeuges und vom Hängewinkel Φ sowie vom Einflugwinkel ΔΨ ab. Bild 7.15 zeigt beispielhaft die Ergebnisse einer Offline-Simulation aus einer Voruntersuchung für drei verschiedene Einflugpositionen mit jeweils unterschiedlichem Hängewinkel.

Das obere Diagramm zeigt die von der Wirbelschleppe in einer bestimmten Schnittebene induzierten Verteilungen der Tangentialgeschwindigkeiten sowie die gewählten Positionierungen und Hängewinkel des einfliegenden Flugzeuges und das untere Diagramm zeigt die dazugehörigen Änderungen der Auftriebsverteilungen. Man erkennt deutliche Unterschiede in den Auftriebsverteilungen, d.h. das Tragflächenverfahren vermag die räumliche Windverteilung aufzulösen.

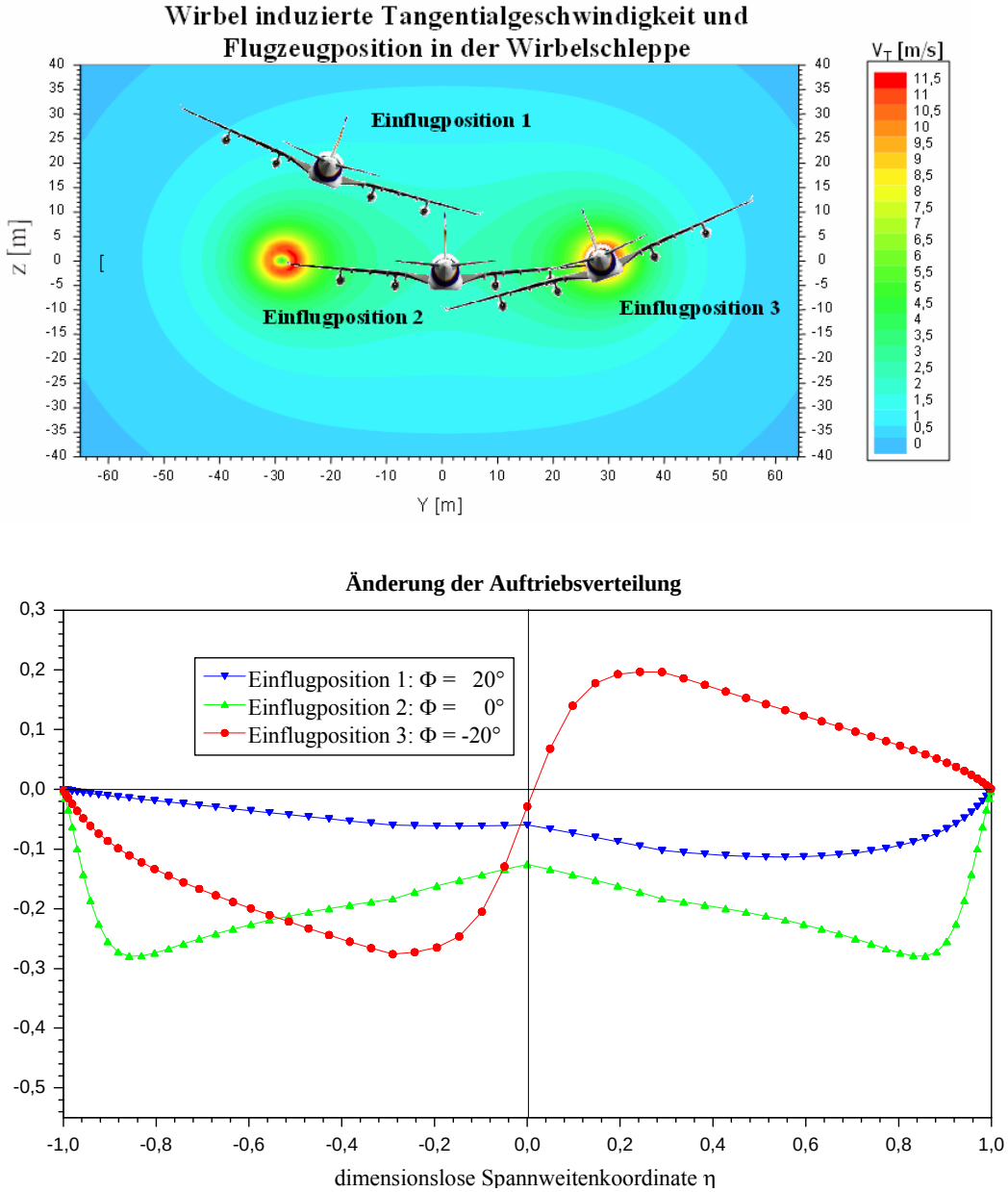

Bild 7.15 Änderung der Verteilung des Auftriebsbeiwertes in einer Wirbelschleppe Einfluss der Flugzeugposition und des Hängewinkels

In Position 1 oberhalb des linken Wirbels mit einem Hängewinkel von Φ = 20° wird der Flügel von einer nahezu linear von links nach rechts zunehmenden induzierten Tangentialgeschwindigkeit erfasst – die Auftriebsverteilung zeigt daher von links nach rechts abnehmende Werte. In Position 2 befindet sich das einfliegende Flugzeug symmetrisch in der Mitte der Wirbelschleppe – die Auftriebsverteilung gibt dies korrekt wieder. In Flügelmitte werden die kleinsten Auftriebsbeiwerte erreicht, da hier die von der Wirbelschleppe induzierten Tangentialgeschwindigkeiten am kleinsten sind. An den Flügelenden nimmt der Auftriebsbeiwert durch den Druckausgleich zwischen Ober- und Unterseite wieder ab. In Position 3 mit einem Hängewinkel von Φ = -20° wird der Flügel vom rechten Wirbel voll erfasst. Da dieser links herum dreht wird an der rechten Flügelhälfte ein Zusatzauftrieb und an der linken Flügelhälfte ein Zusatzabtrieb induziert.

Bild 7.16 wird das einfliegende Flugzeug an Position 3 bei drei unterschiedlichen Einflugwinkeln ΔΨ = 0° → 25° → 45° bei unverändertem Hängewinkel von Φ = 0 von der Wirbelschleppe erfasst. Hierbei wird mit zunehmendem Einflugwinkel am linken Flügel der Zusatzabtrieb immer stärker, während am rechten Flügel die Änderungen vergleichsweise gering sind. Die Ursache hierfür liegt in der positiven Flügelpfeilung, die den linken Außenflügel immer näher an den Wirbelkern bringt.

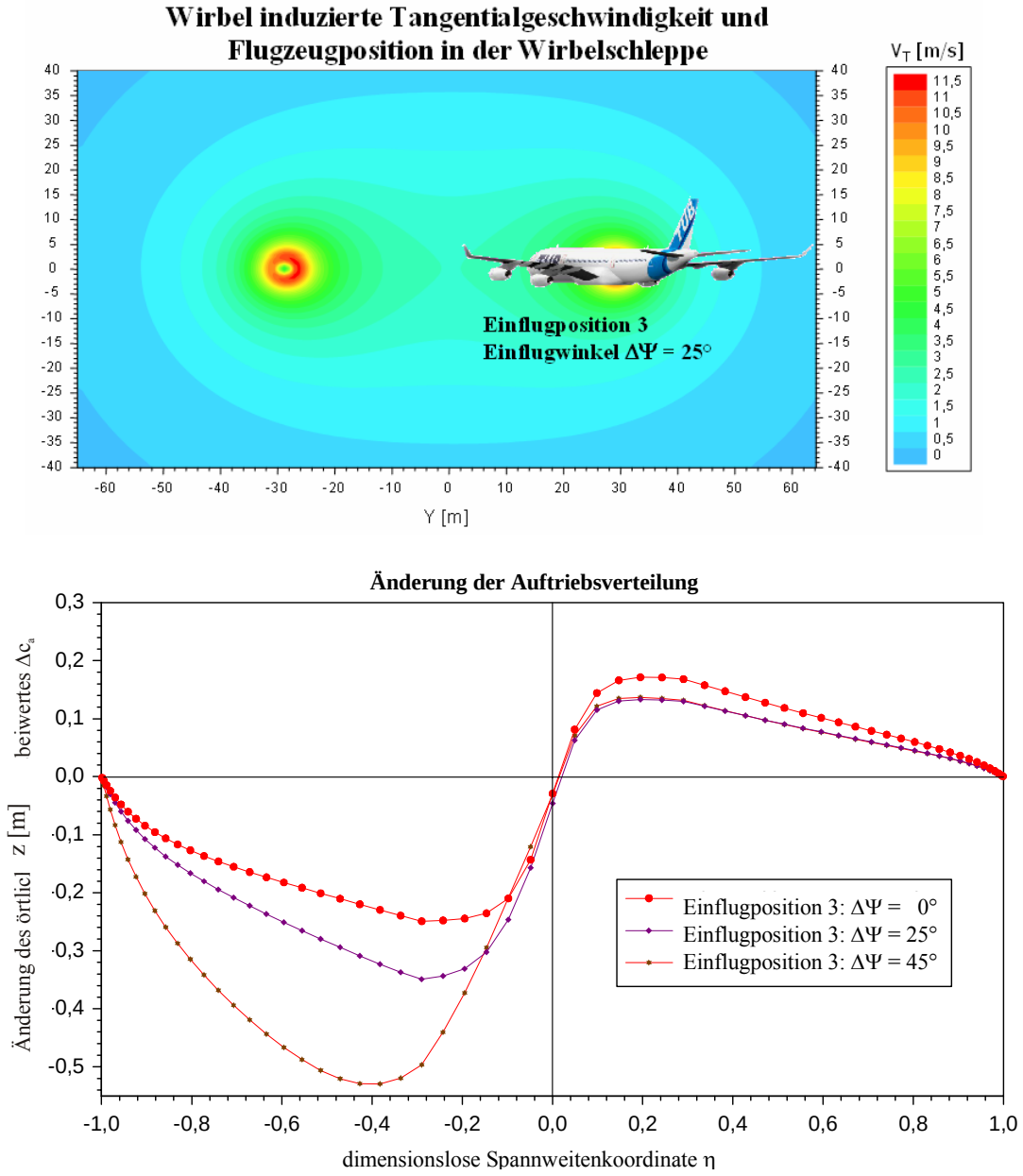

Bild 7.16 Änderung der Verteilung des Auftriebsbeiwertes in einer Wirbelschleppe Einfluss des Einflugwinkels

Bild 7.17 zeigt exemplarisch den von einer Wirbelschleppe induzierten Zusatzauftrieb bzw. das induzierte Zusatzrollmoment in Abhängigkeit von der Position zur Wirbelschleppe, wobei $\Phi = 0°$ und $\Delta\Psi = 0°$ gesetzt wurden. Der stärkste Abtrieb wird in der Mitte zwischen den Wirbeln erzeugt, wobei das Rollmoment gleich Null ist. Mit Annäherung an den rechten Wirbel wird ein links drehendes Rollmoment erzeugt, entsprechend umgekehrt mit Annäherung an den linken Wirbel ein rechts drehendes Rollmoment. Liegt die Soll-Flugbahn mittig zwischen den Wirbeln, entsteht die Tendenz zu einer Taumelbewegung zwischen beiden Wirbeln.

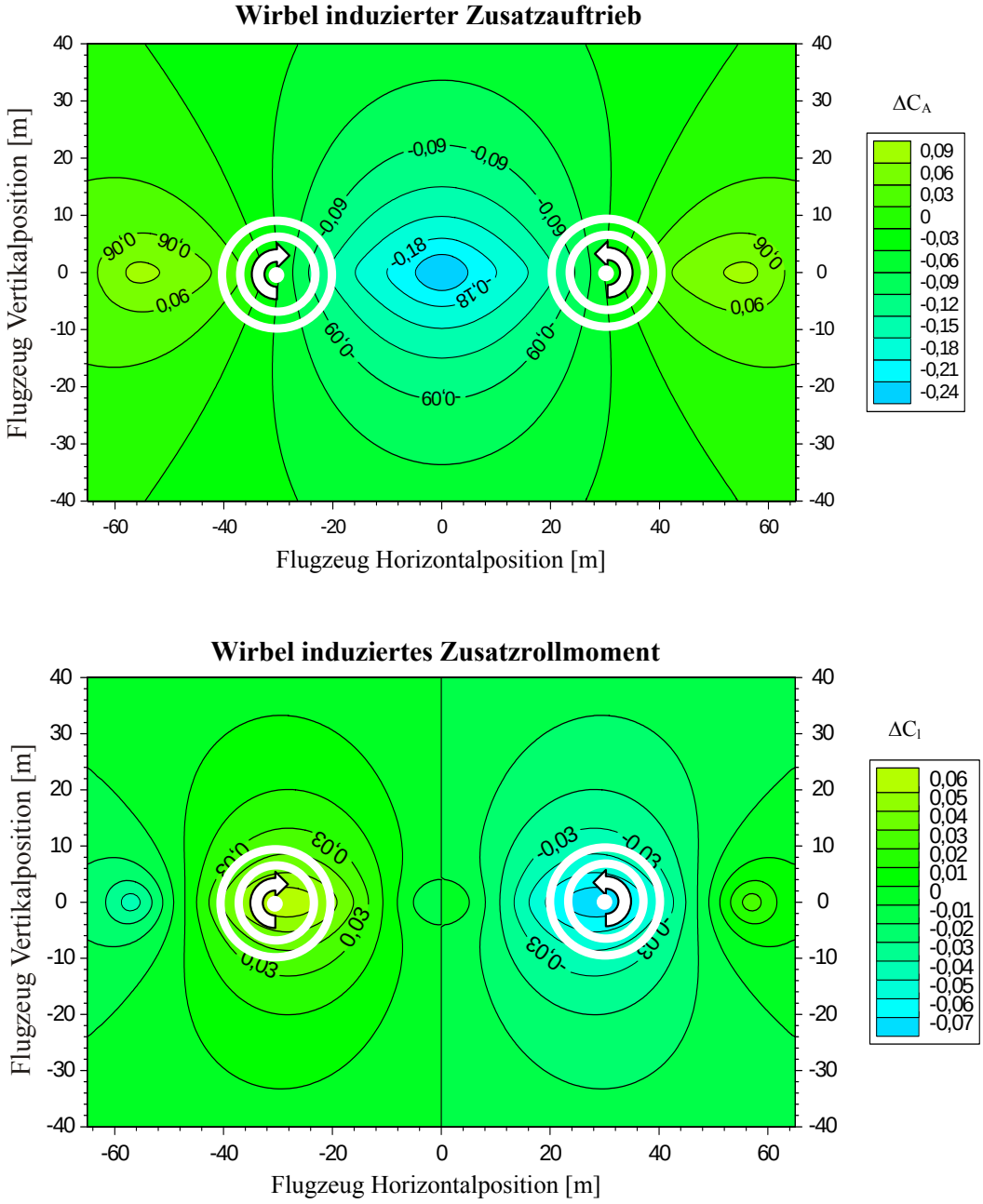

Bild 7.17 Zusatzauftrieb und Zusatzrollmoment ($\Phi = 0°$, $\Delta\Psi = 0°$)

Die Ergebnisse zeigen, dass das Tragflächenverfahren den Einfluss einer Wirbelschleppe auf die Auftriebsverteilung eines einfliegenden Flugzeuges physikalisch korrekt wiedergibt. Insbesondere der Einfluss der Einflugbedingungen wird richtig erfasst, was für die Durchführung von Simulatoruntersuchungen mit Piloten unabdingbar ist, da sich durch die relativ kleinen Durchmesser von Wirbelschleppen hochdynamische Vorgänge mit stark wechselnden Einflugbedingungen ergeben, wie Bild 7.18 dies exemplarisch durch einen Simulatorversuch mit einem Verkehrspiloten demonstriert. Dargestellt ist die resultierende Bewegung für einen Sollflugpfad im Zentrum der Wirbelschleppe für eine Versuchsdauer von 120 Sekunden.

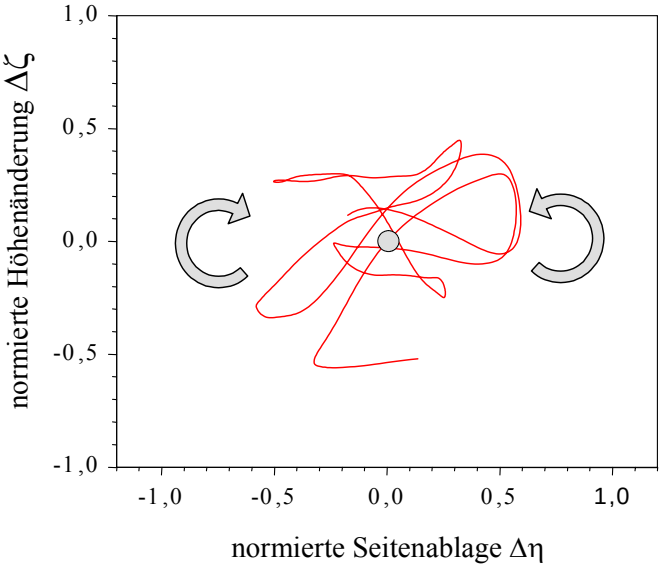

Bild 7.18 Flugweg innerhalb einer Wirbelschleppe

Bild 7.19 zeigt, dass eine erhebliche Steueraktivität des Piloten zur Kontrolle der Roll- und Nickbewegung erforderlich war. Trotz der im Versuch aufgetretenen maximalen Hängewinkel von bis zu 12° wurde der untersuchte Flugfall durch den Piloten als unkritisch beurteilt.

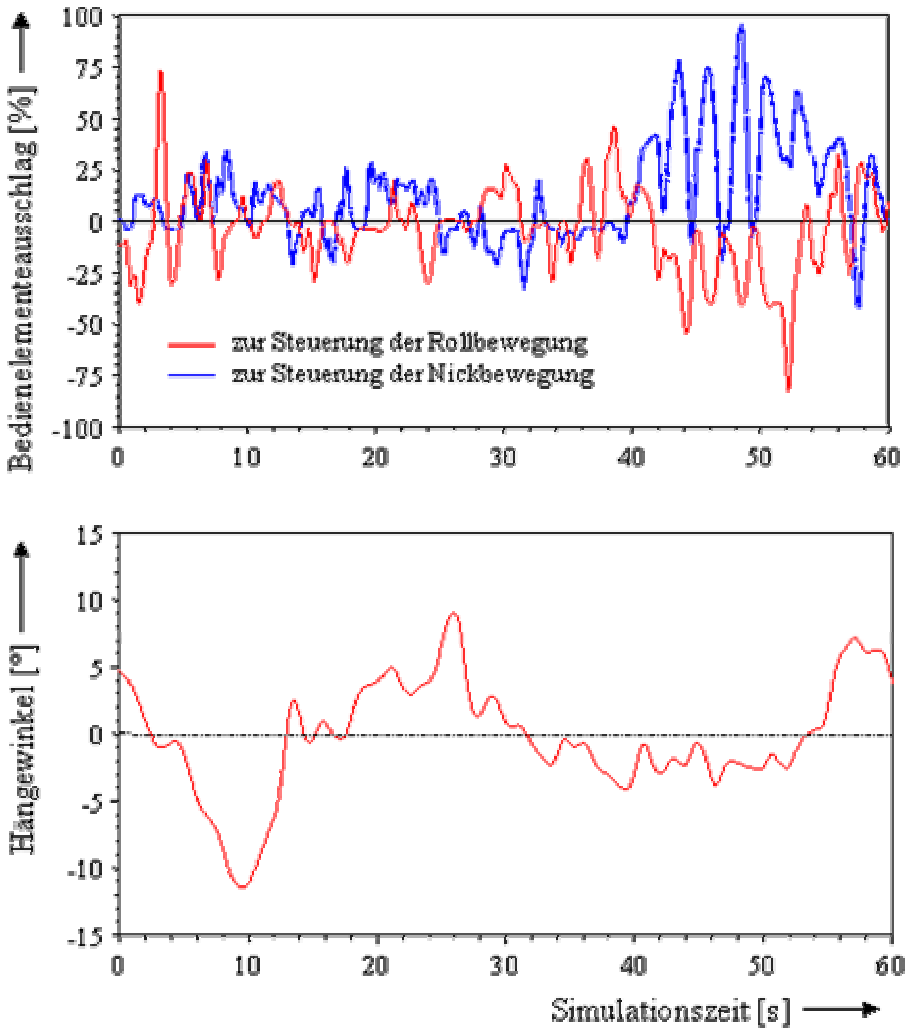

Bild 7.19 Steueraktivität und Hängewinkel innerhalb der Wirbelschleppe

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

In der Echtzeit-Flugsimulation besteht ein wesentlicher Anteil der mathematischen Modellierung in der Bestimmung der aerodynamischen Kräfte und Momente. Obwohl die Berücksichtigung des Windeinflusses in den letzten Jahrzehnten sowohl in der Forschung als auch in der Trainingssimulation an Bedeutung gewonnen hat, wird dieser insbesondere in der Trainingssimulation teilweise nicht in den flugmechanischen Bewegungsgleichungen richtig erfasst sondern durch Zusatzterme berücksichtigt, beispielsweise durch Zusatzbeschleunigungen in der Bewegungssimulation zur Darstellung von Luftturbulenzen (sogenannte „special effects“).

Mit herkömmlichen aerodynamischen Modellen für die Echtzeit-Flugsimulation können nur großräumige, langwellige Windphänomene richtig erfasst werden. Kleinräumige Änderungen der Anströmverhältnisse, wie sie z.B. beim Einflug in Wirbelschleppen oder bei einem sich dynamisch verformenden Flugzeug auftreten, können hierdurch nicht berücksichtigt werden. Die letztgenannten Anwendungen waren in den letzten Jahren Gegenstand umfangreicher Grundlagenuntersuchungen in Flugsimulatoren, so dass Bedarf an besseren aerodynamischen Modellierungsmethoden für die Echtzeit-Flugsimulation besteht.

Das hier vorstellte Verfahren ist ein neuer Lösungsansatz, mit dem erstmalig die aerodynamischen Lastverteilungen an einem Flugzeug bei dreidimensionalen, kleinräumigen Verteilungen der Anströmung physikalisch korrekt in der Echtzeitsimulation berechnet werden können. Hiermit können an einem sich dynamisch verformenden Flügel bzw. Höhenleitwerk in Echtzeit die dazugehörigen aerodynamischen Lastverteilungen in hoher räumlicher Auflösung berechnet werden, wobei sogar instationäre Effekte flächenhaft einbezogen werden können. Auch kleinräumige, hochdynamische Änderungen der Anströmverhältnisse, die z.B. bei Wirbelschleppen im Meterbereich liegen, werden richtig erfasst.

Ein wesentlicher Unterschied zur konkurierenden Streifenmethode besteht darin, dass die gegenseitige Induktion aller Flügelschnitte korrekt berücksichtigt wird. Damit werden auch für kleinräumige Änderungen der Anströmverhältnisse realitätsnahe Ergebnisse erzielt. Die Echtzeitfähigkeit des entwickelten Rechenmodells stellt eine entscheidende Randbedingung dar, da der numerische Aufwand begrenzt bleiben muss.

Bei der Anwendung auf einem Trainingssimulator wird das 3D-Aerodynamikmodell zweckmäßigerweise als Erweiterung des bereits vorhandenen Aerodynamikmodells eingesetzt, so dass auch nichtlineare Zusammenhänge korrekt berücksichtigt werden können. Damit sind gesamte Flugabläufe zu simulieren, die den gesamten Flugbereich vom Start bis zur Landung umfassen. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied zu anderen Ansätzen zur Modellierung flexibler Flugzeuge, die eine Linearisierung um einen vorgewählten Referenzpunkt voraussetzen.

Das vorgestellte Verfahren basiert auf der Tragflächentheorie von TRUCKENBRODT. Diese wird so aufbereitet, dass ein möglichst großer Anteil der Berechnungen losgelöst vom eigentlichen Echtzeitprozess in einer Initialisierungsphase vorab bestimmt werden kann. Das zu lösende Gleichungssystem liefert für eine als bekannt vorausgesetzte Anstellwinkelverteilung die Verteilung der aerodynamischen Beiwerte für Auftrieb und Nickmoment eines Flügels bzw. des Höhenleitwerks. Die Bestimmung der Anstellwinkelverteilung wird flugmechanisch so aufbereitet, dass sowohl elastische Verformungen als auch räumliche Windfelder berücksichtigt werden. Durch eine geeignete Erweiterung können auch beliebige Änderungen des Betrages der Anströmgeschwindigkeit in Spannweitenrichtung erfasst werden. Dieses stellt eine Erweiterung der Tragflächentheorie dar, da die bisherigen Formulierungen stets von einem homogenen Geschwindigkeitsfeld ausgehen.

Zur Anwendung des Tragflächenverfahrens müssen vom zu simulierenden Flugzeug lediglich der Grundriss des Tragflügels sowie seine Verwindung und der Verlauf der Profilskelettlinie bekannt sein. Die Genauigkeit des Tragflächenverfahrens kann in mehreren Stufen verbessert werden, wenn weitere aerodynamische Daten zur Verfügung stehen (Profilkenngrößen, Auftriebsverteilungen und Gesamtbeiwerte). Im vorliegenden Fall wurde das Tragflächenverfahren auf dem Airbus A330/A340 Trai-

ningssimulator des Zentrums für Flugsimulation Berlin ZFB implementiert, so dass ein vollständiges hochwertiges Aerodynamikmodell in zertifizierter Qualität zur Verfügung steht und das Tragflächenverfahren prinzipiell auf die Berechnung einer Delta-Aerodynamik begrenzt werden kann.

Damit sind erstmals in der Echtzeit-Flugsimulation Pilotenversuche zur Untersuchung des Einflusses von Wirbelschleppen auf nachfolgende Flugzeuge sowie zur Untersuchung der Flugeigenschaften großer Transportflugzeuge mit dynamischen Strukturverformungen über einen weiten Flugbereich möglich.

Das 3D-Aerodynamikmodell wurde bereits erfolgreich im Rahmen verschiedener Forschungsprojekte für Simulatorversuche mit Piloten eingesetzt (EU-Vorhaben Assessment of Wake Vortex Safety S-Wake, BMBF-Vorhaben Flugeigenschaften sehr großer elastischer Flugzeuge FEGEF, DFG-Vorhaben Wake Vortex Encounter WVE, Wake Encounter Hazard Assessment WEHA , Wake Vortex Encounter in Cruise CRUISENC, DFG-Vorhaben Flugeigenschaften von Drei-Flächen-Flugzeugen. Es wurde hierbei auf unterschiedlichen Flugsimulatoren implementiert (Trainingssimulator am Zentrum für Flugsimulation Berlin, Airbus Entwicklungssimulator, NLR Forschungssimulator, Simtec Trainingssimulator). Die Nutzbarkeit und Variabilität des Modells konnte hierdurch eindrucksvoll belegt werden.

Die beispielhaften Ergebnisse zeigen, dass das entwickelte Verfahren einerseits die Echtzeitforderung erfüllt und andererseits die physikalischen Phänomene gut wiedergegeben werden. Durch das Tragflächenverfahren wird das Einsatzspektrum von Flugsimulatoren sowohl für Forschungs- als auch für Trainingsanwendungen entscheidend erweitert, da insbesondere das Flugzeugverhalten in komplexen, dynamischen Windszenarien (Wirbelschleppen, Gewitter, Scherwinde) mit hoher Güte simuliert werden kann. Da beim Tragflächenverfahren der numerische Aufwand durch die Anzahl der berücksichtigten Stützstellen und durch die unterschiedlichen, wählbaren Stufen zur Genauigkeitssteigerung bestimmt wird, ist eine Anpassung an unterschiedliche Aufgabenstellungen möglich.

Da auch die Ausschläge von Steuerflächen in die Modellierung einbezogen sind, kann das entwickelte Aerodynamikmodell auch für Auslegungs- und Entwurfszwecke sinnvoll eingesetzt werden. Da Modifikationen in der Geometrie oder der verwendeten Profile mit geringem Aufwand umgesetzt werden können und der numerische Rechenbedarf gering ist, können in kurzer Zeit unterschiedliche Entwurfsvarianten verglichen werden.

8.2 Erweiterungen und Ausblick

Trotz der bereits erreichten hohen Simulationsqualität sind je nach Aufgabenstellung weitere Verbesserungen und Erweiterungen sinnvoll bzw. erforderlich. Diese Erweiterungen sind in der Simulationssoftware des A330/A340-Flugsimulators bereits teilweise umgesetzt, sind aber nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Flügel-Leitwerkskombination
Das vorgestellte Tragflächenverfahren wird hier lediglich für den Flügel beschrieben, wurde am A330/A340 Flugsimulator jedoch in gleicher Weise auch auf das Höhenleitwerk angewendet. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass bei konventionellen Konfigurationen das Höhenleitwerk im Abwindfeld des Tragflügels liegt. Zusätzlich zur Lösung der Gleichungssystems des Tragflächenverfahrens ist daher auch der an den Aufpunkten des Höhenleitwerks vom Flügel induzierte Abwind zu bestimmen. Die Berechnung dieses Abwindfeldes wird in [Gersten 1957] beschrieben und wurde als echtzeitfähige Erweiterung des hier beschriebenen Tragflächenverfahrens von [Kulwatz 1997] umgesetzt.

Wie bereits in Kapitel 3.2.3 dargelegt, liegen bei modernen Flugsimulatoren die aerodynamischen Modelle häufig für die Flügel-Rumpf-Kombination und das Höhenleitwerk getrennt vor. Die in Kapitel 6 beschriebenen Erweiterungen und Korrekturmaßnahmen können damit auch in gleicher Weise auf das Höhenleitwerk angewandt werden.

Schiebewinkel
Die Tragflächentheorie von TRUCKENBRODT ist nicht auf bestimmte Flügelgeometrien beschränkt und gilt auch für unsymmetrische Flügelgrundrisse. Da ein schiebender Flügel auch als eine unsymmetrische Konfiguration angesehen werden kann, geht der Schiebewinkel lediglich in die $\underline{\underline{L}}$-Matrix ein. Im Pre-Processing kann somit für verschiedene gewählte Schiebewinkel die dazugehörige $\underline{\underline{L}}$-Matrix ermittelt werden, so dass im Echtzeitprozess für den aktuellen Schiebewinkel zwischen den Ergebnissen beider Matrizen interpoliert werden kann. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass sich die Profilform entsprechend dem Schiebewinkel verändert. Es ist daher eine neue Skelettlinie zu ermitteln. Wird die Skelettlinie durch die Profilkennwerte ersetzt, müssen auch diese Kennwerte angepasst werden. Da für ein solchermaßen modifiziertes Profil in der Regel keine Kennwerte vorliegen, müssen diese mit einem entsprechenden Berechnungsprogramm ermittelt werden (z.B. XFOIL von M. Drela). Bei diesem Vorgehen ist unbedingt darauf zu achten, dass alle verwendeten Kennwerte auf die gleiche Art und Weise ermittelt werden.

Durch diese Methode sind allerdings nur gleichförmig verteilte Schiebewinkel zu berücksichtigen, lokale Variationen des Schiebewinkels können dadurch nicht erfasst werden. Eine Erweiterung des Tragflächenverfahrens um die direkte Berücksichtigung einer räumlichen Schiebwinkelverteilung ist nicht möglich. Die Auswirkungen eines örtlichen Schiebewinkels können jedoch zumindest teilweise erfasst werden. Da die Querkomponente der Anströmung keinen Beitrag zur Druckverteilung liefert (Pfeilflügeleffekt), kann ein Schiebewinkel in der örtlich wirksamen Anströmgeschwindigkeit berücksichtigt werden. Eine räumliche Schiebewinkelverteilung kann daher in der Geschwindigkeitsverteilung erfassst werden, deren Auswirkungen in Kapitel 6.1 beschrieben wurde. Die Einflüsse der Querströmung (z.B. Aufdicken der Grenzschicht) bleiben hierbei unberücksichtigt.

Kompressibilität
Bei höheren Geschwindigkeiten mit Machzahlen Ma > 0,3 haben Kompressibilitätseinflüsse auf die aerodynamischen Kräfte deutliche Auswirkungen. Bei dem hier beschriebenen Vorgehen (Korrekturen, Delta-Aerodynamik) kann davon ausgegangen werden, dass diese Auswirkungen auf die Zusatz-Beiwerte vernachlässigbar sind. Wenn das Tragflächenverfahren zur Berechnung des Gesamtzustandes ohne Korrekturmaßnahmen und bei höheren Geschwindigkeiten eingesetzt werden soll, müssen Kompressibilitätseffekte berücksichtigt werden. Für Unterschallgeschwindigkeiten kann die PRANDTL-GLAUERT Regel [Schlichting/Truckenbrodt 1997] angewendet werden, bei der eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt wird. In Bezug auf das Tragflächenverfahren führt dies auf eine neue $\underline{\underline{L}}$-Matrix, so dass vorab für verschiedene Flugmachzahlen ein Satz von Matrizen berechnet werden kann, zwischen denen im Echtzeitprozess zu interpolieren ist.

Druckverteilungen
Liegen für die verwendeten Profile gemessene oder berechnete Druckverteilungen vor, können diese zur Verbesserung der zweiparametrigen Wirbeldichteverteilung k(x,y) in Profiltiefenrichtung herangezogen werden. Hierzu ist der GLAUERT'sche Reihenansatz um weitere Glieder zu erweitern. Dementsprechend muss die kinematische Strömungsbedingung an weiteren Punkten erfüllt werden. Dies erhöht den numerischen Aufwand jedoch beträchtlich und setzt daher entsprechende Rechnerkapazitäten voraus. Bei einer typischen Anzahl von Elementarflügeln M = 31 erhöht sich bereits bei einem dreiparametrigen Ansatz die Anzahl der Rechenoperationen von 2M **ä** 2M = 3844 auf 8649 und damit um + 125%, bei einem vierparametrigen Ansatz auf 15376 (+ 300%). Bei einer Implementierung des Verfahrens auf einem vorhandenen Flugsimulator kann jedoch nicht immer davon ausgegangen werden, dass der Simulationsrechner hierfür genügend Rechenkapazität in Reserve hat. Da die Rechenleistung neuer Rechnergenerationen jedoch nach wie vor stetig zunimmt, kann für zukünftige Anwendungen davon ausgegangen werden, dass genügend Rechenkapazität verfügbar sein wird.

Transsonische Effekte
Bei sehr hohen Unterschallgeschwindigkeiten (Ma > 0,7) kann durch die Geschwindigkeitserhöhung auf der Profiloberseite örtlich bereits Überschall erreicht werden. Diese transsonischen Effekte sind nur schwer zu berücksichtigen, da sich hierbei lediglich örtlich der Charakter der Strömung und damit die Druckverteilung $\Delta c_p(x,y)$ erheblich ändert. Beim Tragflächenverfahren ist die Druckverteilung im Ansatz der Wirbeldichte k(x,y) enthalten. Zur Berücksichtigung transsonischer Effekte müsste daher der GLAUERT'sche Reihenansatz modifiziert werden. Es ist davon auszugehen, dass hierbei die Anzahl der Parameter erhöht werden muss. Bei einem dreiparametrigen Ansatz steigt die Ordnung der zu lösenden Matrixoperationen auf (3M **ä** 3M), eventuell müssen aber Ansätze noch höherer Ordnung gewählt werden. Die besondere Problematik liegt aber nicht nur in der resultierenden Zunahme des numerischen Aufwandes sondern vielmehr auch in der Tatsache, dass bei den hier beschriebenen Anwendungen die Anstellwinkelverteilung beliebig sein kann und daher die Lage und das Auftreten von Überschallgebieten vom jeweiligen Flugzustand abhängig ist. Die Erweiterung der Ansatzfunktion muss daher so gewählt werden, dass weiterhin eine Invertierung der $\underline{\underline{K}}$-Matrix möglich ist.

Rumpfeinfluss, verbesserte Referenzverteilungen
Bei dem in Kapitel 5.4 beschriebenen Korrekturverfahren werden die Referenzverteilungen mit einem Panelverfahren ermittelt. Hierbei wurde der Rumpf mit modelliert. Die Anzahl der Panels ist bei dem zur Verfügung stehenden Verfahren stark begrenzt, so dass eine vollständige Konfiguration eines modernen Verkehrsflugzeuges (Triebwerke, Winglets) nicht detailliert modelliert werden kann. Die Qualität der Verteilungskorrektur kann daher verbessert werden, wenn höherwertige Referenzverteilungen vorliegen. Bei dem untersuchten Flugzeug ist dies für einige wenige Flugzustände der Fall, da hier in den Données Aérodynamiques[113] auch Verteilungen des Auftriebsbeiwertes enthalten sind. In Bild 8.1 sind exemplarisch für vier verschiedene Anstellwinkel die Verteilungen des Auftriebsbeiwertes aus den Données Aérodynamiques im Vergleich zu den Ergebnissen des Panelverfahrens dargestellt. Man erkennt, dass die Grundtendenz vom Panelverfahren gut wiedergeben wird, wobei lokal jedoch deutlich sichtbare Unterschiede zu den Données Aérodynamiques auftreten. Die Ursachen hierfür sind in erster Linie die Einflüsse der Triebwerke und der Winglets. Da beide im Oberflächennetz des Panelverfahrens nicht modelliert sind, sind die gezeigten Abweichungen im Rahmen des zu erwartenden. Eine weitere Ursache liegt in den Profilen, deren exakte Daten nicht zur Verfügung standen. Auch der Rumpfeinfluss kann mit dem verwendeten Verfahren nur relativ grob berücksichtigt werden.

Die in den Données Aérodynamiques gegebenen Verteilungen liegen jedoch nur für eine sehr begrenzte Anzahl von Flugzuständen vor, so dass sie als Referenz insgesamt nicht ausreichend sind. Eine Verbesserung der Korrekturterme des Tragflächenverfahrens kann prinzipiell auf zwei Wegen erfolgen:

1. Verfeinerung des Oberflächennetzes des Panelverfahrens
   Die Verfeinerung müsste insbesondere die beiden oben genannten Hauptursachen für die Unterschiede der Ergebnisse von Données Aérodynamiques und Panelverfahren beheben, d.h. die Modellierung der Triebwerke und der Winglets einbeziehen. Die Modellierung der Winglets erfordert eine präzise Beschreibung der tatsächlichen Geometrie, die nicht zur Verfügung stand. Die Modellierung der Triebwerksgondeln würde die Anzahl der Panelelemente erheblich erhöhen und ist mit dem derzeitig vorhandenen Panelverfahren nicht möglich. Beide Einschränkungen sind aber nicht grundsätzlicher Natur sondern für zukünftige Anwendungen durchaus umsetzbar.
2. Direkte Nutzung der Données Aérodynamiques Daten
   Ein anderer Lösungsweg zur Verbesserung der Ergebnisse des Panelverfahrens besteht in der Nutzung der Données Aérodynamiques Daten als Referenz für das Panelverfahren. Die Grundidee ist dabei dieselbe wie bei der Korrektur der Verteilungen des Tragflächenverfahrens.

Beide Möglichkeiten lassen sich auch kombiniert anwenden. Da sie nur das Pre-Processing betreffen, haben sie keinen Einfluss auf die Echtzeitfähigkeit des beschriebenen Tragflächenverfahrens.

[113] Données Aérodynamiques ist die Airbus-Bezeichnung für den aerodynamischen Datensatz eines Flugzeugmusters. Ein solcher Datensatz wurde von Airbus im Rahmen des BMBF-Verbundvorhabens „Dynamik des flexiblen Flugzeugs" zur Verfügung gestellt.

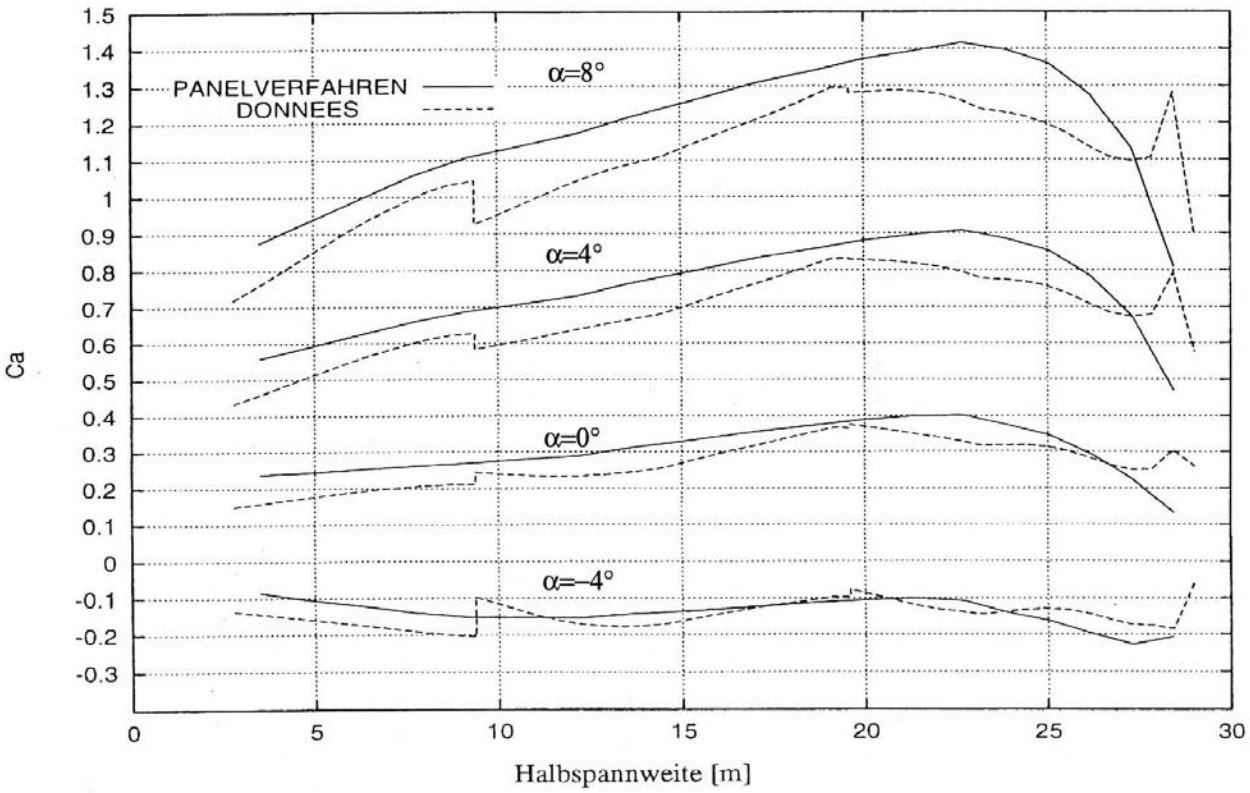

Bild 8.1 Verteilungen des Auftriebsbeiwertes
Vergleich Panel- und Tragflächenverfahren

Widerstand

Das Tragflächenverfahren basiert auf der Potentialtheorie und enthält somit keine Reibungseffekte. Der Druckwiderstand wird ebenfalls nicht berücksichtigt. Bei der Berechnung der Gesamtbeiwerte für den Widerstand sowie des Roll- und des Nickmomentes (siehe Kapitel 4.4 sowie Anhang F.1) ist jedoch der Profilwiderstand enthalten, der beispielsweise aus der Profilpolare entnommen werden kann. In der Profilpolaren wird der Widerstandsbeiwert als Funktion des Auftriebsbeiwertes dargestellt, so dass die Abhängigkeit des Profilwiderstandes vom Strömungszustand berücksichtigt wird. Da Profilpolaren üblicherweise für verschiedene Reynoldszahlen angegeben werden, kann auch dieser Einfluss erfasst werden. Damit sind für reine Unterschallströmung alle wesentlichen Widerstandseinflüsse enthalten. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass hierdurch an einem betrachteten Flügelschnitt lediglich zweidimensionale Effekte einbezogen werden.

Schubeinfluss

Je nach Anordnung der Triebwerke kann ein Teil des Flügels bzw. des Höhenleitwerks vom Triebwerksstrahl beeinflusst werden. Hierbei wird lokal sowohl die Anströmgeschwindigkeit als auch die Anströmrichtung verändert. Der Schubeinfluss kann daher durch ein zusätzliches räumliches Windfeld dargestellt werden, das dem atmosphärischen Windfeld überlagert werden kann. Das hier vorgestellte Tragflächenverfahren ist daher prinzipiell geeignet, auch den Schubeinfluss zu berücksichtigen. Das vom Triebwerk induzierte Windfeld muss dazu bekannt sein und die Anzahl der Profilschnitte muss ausreichend hoch gewählt werden, den Triebwerksstrahl räumlich auflösen zu können. Da das Tragflächenverfahren keine Schiebewinkelverteilung berücksichtigen kann, wird der Drall des Triebwerksstrahles nicht enbezogen.

Strömungsablösungen
Das Tragflächenverfahren nach TRUCKENBRODT basiert auf der Potentialtheorie und ist daher ein lineares Verfahren. Durch die in Kapitel 6 beschriebenen Erweiterungen können jedoch auch lineare Effekte berücksichtigt werden. Insbesondere durch die Berücksichtigung von Profilpolaren können auch Ablöseeffekte teilweise berücksichtigt werden. Dies ist jedoch mit großer Vorsicht zu bewerten, da die räumlichen Wechselwirkungen sehr komplex sind und durch das hier beschriebene Verfahren nicht physikalisch korrekt wiedergegeben werden können. Das Verfahren kann jedoch einen Hinweis darauf geben, wenn ein erhöhtes Risiko für örtliche Ablösungen besteht.

Implementation als Erweiterung bestehender Anwendungen
Im einfachsten Fall, d.h. ohne Erweiterungen und Korrekturmaßnahmen, besteht das Tragflächenverfahrens in der Lösung einer einzigen Matrizenoperation. Da diese auch lediglich auf eine Delta-Anstellwinkelverteilung angewendet werden kann, ist eine einfache Möglichkeit in nahezu beliebige existierende Simulationsanwendungen gegeben. Die Berechnung der $\underline{\underline{L}}$-Matrix kann dabei unabhängig von der eigentlichen Anwendung erfolgen. Insbesondere bei Aufgabenstellungen, bei denen sich der Betrag der Anströmgeschwindigkeit nur geringfügig ändert sind bereits mit dieser „Einfachversion“ gute Ergebnisse zu erwarten, so dass dieses Verfahren bereits erfolgreich für Wirbelschleppenuntersuchungen auf anderen Flugsimulatoren eingesetzt wird (Delta-Aerodynamik).

Literatur

Baarspul, M. Lecture Notes on Flight Simulation Techniques
Report LR-596, Faculty of Aerospace Engineering
Delft University of Technology, Netherlands, 1989

Bauschat, J.M. Entwicklung eines dreidimensionalen mathematischen Gewittermodells zur Untersuchung des Flugverhaltens in Gewitterstürmen
Diplomarbeit am Institut für Flugführung der TU Braunschweig, 1988

Brockhaus, R. A Global Model of the coupled Process of Aircraft Motion and Windfield
Aviation Safety, 2nd International Symposium
Toulouse, France, November 1986

Brockhaus, R. A mathematical multi-point model for aircraft in moving air
Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung, Heft 3, 1987

Brockhaus, R. Regelungstechnik
Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 2001

Buxbaum, J. Modellierung von Querrudereinflüssen für die Echtzeit-Flugsimulation eines elastischen Flugzeugs
Diplomarbeit am Institut für Luft- und Raumfahrt, TU Berlin, 1997

Dahms, M.
Schröder, M. Modellierung der Aerodynamik für die Echtzeitsimulation eines großen elastischen Flugzeuges
DGLR Aeroelastiktagung, Göttingen, 1998

de Bruin, A.C. et al. S-WAKE Summary Report
National Aerospace Laboratory
NLR-TP-2003-243
Amsterdam, The Netherlands, 2003

Donaldson, C. du P. Construction of a Dynamic Model of the Production of Atmospheric Turbulence and the Dispersal of Atmospheric Pollutant
Workshop on Micrometeorology, Ephrata, Pa. Science Press, 1973

Dubs, F. Aerodynamik der reinen Unterschallströmung
Birkhäuser Verlag, Basel, 1990

Escande, B.
Aurenche, Y. Trailing Vortices and Safety
CEAS/AAAF Forum "Research for Safety in Civil Aviation"
Paris, 21-22 October, 1999

England, J.
Ulbricht, H. Flugmeteorologie
Transpress, Berlin, 1990

Etkin, B.
Reid, L.D. Dynamics of Flight: Stability and Control
John Wiley & Sons, New York – London – Sydney – Toronto, 1996

Etling, D. Theoretische Meteorologie II
Dynamik mit Reibung, atmosphärische Turbulenz und Diffusion
Vorlesungsmanuskript, Institut für Meteorologie und Klimatologie
Universität Hannover, 1993

Försching, H. New Ultra High Capacity Aircraft (UHCA) – Challenges and problems from an aeroelastic point of view
Zeitschrift für Weltraumforschung 18
Springer Verlag, Berlin, 1994

Gasch, R.
Knothe, K. Strukturdynamik, Band 1
Diskrete Systeme
Springer Verlag, Berlin, 1987

Gasch, R.
Knothe, K.
Strukturdynamik, Band 2
Kontinua und ihre Diskretisierung
Springer Verlag, Berlin, 1989

Glauert, H.
Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie
Springer Verlag, Berlin, 1929

Gersten, K.
Über die Berechnung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes von Tragflügeln,
Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, TH Braunschweig, 1957

Heintsch, T.
Beiträge zur Modellierung von Wirbelschleppen zur Untersuchung des Flugzeugverhaltens beim Landeanflug
Dissertation, Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik
TU Braunschweig, 1994

Heintsch, T.
Kindel, W.
Realtime-Simulation of Aircraft Behaviour in Wake Vortices
with Respect to Flight Safety
19th ICAS Congress/AIAA Aircraft Systems Conference
Anaheim (CA), USA, September 18-23, 1994

Hummel, D.
Aerodynamik II
Umdrucke zur Vorlesung
TU Braunschweig, 1979

Jacob, H.G.
Rechnergestützte Optimierung statischer und dynamischer Systeme
Fachberichte Messen – Steuern – Regeln, Band 6
Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1982

Kaufmann, B.
Atmospheric Turbulence and Unsteady Aerodynamics in Aircraft Simulation
Aviation Safety, 2nd International Symposium
Toulouse, France, November 1986

Kaufmann, B.
Kindel, W.
Modelling of Interaction between Wind and Aircraft on the Research
Flight Simulator of the Institute of Flight Guidance and Control
Real-Time Models for Control, Measurement and Estimation Systems
Second Braunschweig Aerospace Symposium
Braunschweig, 1-2 March 1990

Krag, B.
Die linearisierten Bewegungsgleichungen des elastischen Flugzeugs
Arbeitsnotiz ARNO 111-751-2
DFVLR, Institut für Flugmechanik, Braunschweig 1984

Krauspe, P.
Beiträge zur Längsbewegung von Flugzeugen in Windscherungen
Dissertation, Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik
TU Braunschweig, 1983

Krauspe, P.
Swolinsky, M.
Vörsmann, P.
Wind Determination and Wind Shear Detection from Flight Test and
Airline Flight Data
TU Braunschweig, 1981

Küssner
Augenblicklicher Entwicklungsstand der Frage des Flügelflattern
Luftfahrtforschung, Band 12, 1935

Kulwatz, N.
Erstellung eines Programms für die echtzeitfähige Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten im Umfeld einer auftriebserzeugenden Fläche
Studienarbeit am Institut für Luft- und Raumfahrt, Fachgebiet Flugmechanik und Flugregelung, TU Berlin, Oktober 1997

Laschka, B.
Zur Theorie der harmonisch schwingenden tragenden Fläche bei Unterschallanströmung
ZfW, Band 11, 1963

Lindemann, S. — Vergleichende Untersuchungen zur Flugzeugbewegung in einem Turbulenzfeld
Studienarbeit am Institut für Flugführung,
TU Braunschweig, September 1993

Luckner, R.
Fuhrmann, M. — Echtzeit-Simulation von aeroelastischen Schwingungen
Technical Note TN-TE 231-26/88
Daimler-Benz Aerospace Airbus, Hamburg, 1988

Luckner, R.
Dehmel, W. — Real-Time Simulation of Aeroelastic Airplane Vibrations
Second Braunschweig Aerospace Symposium
Braunschweig, 1990

Multhopp, H. — Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln
Luftfahrtforschung 15, 1938

Oseen, C.W. — Über die Ausbreitung kreiszylindrischer Wirbel in zähen Flüssigkeiten
Arkiv för Mat.
Astron., oeh. Fysik 7 Nr. 14, 1911
wiederveröffentlicht in
Archive of Applied Mechanics, Volume 31, Number 1, Seite 1-9
Springer Verlag Berlin/Heidelberg, 1962

Potthoff, U. — Ein mathematisches Modell des elastischen Flugzeugs mit instationärer Aerodynamik für flugmechanische Anwendungen
Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt
Institut für Flugmechanik, IB 111-87/14
Braunschweig, 1987

Prandtl, L. — Strömungslehre
Vieweg Verlag, Braunschweig, 1965

Quellmann, W. — Erweiterung eines Simulationsmodells um instationäre aerodynamische Einflüsse
Diplomarbeit am Institut für Flugführung,
TU Braunschweig, 1984

Radespiel — Aerodynamik
Vorlesungsskript zur Lehrveranstaltung Aerodynamik und Flugmechanik an der TU Hamburg-Harburg,
DLR, Institut für Entwurfsaerodynamik, Braunschweig 1999

Schänzer, G. — Böenmodelle für Anwendungen in der Flugdynamik
Zeitschrift für Flugwissenschaften, Heft 3, 1977

Schänzer, G. — Flugmechanik III – Seitenbewegung
Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl für Flugmechanik, TU Braunschweig, 1979

Schänzer, G. — Einführung in die Flugphysik
Vorlesungsmanuskript, Institut für Flugführung, TU Braunschweig, 1981

Schänzer, G. — Influence of Wind Shear, Downdraft and Turbulence on Flight Safety
Aviation Safety, 2nd International Symposium
Toulouse, France, November 1986

Schänzer, G. — Flugführung III: Flug in gestörter Atmosphäre
Vorlesungsmitschrift, Institut für Flugführung, TU Braunschweig, 1995

Schlichting, H.
Truckenbrodt, E. — Aerodynamik des Flugzeuges, Band I, Zweite Auflage
Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967

Schlichting, H.
Truckenbrodt, E. — Aerodynamik des Flugzeuges, Band II, Zweite Auflage
Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1969

Schmidt, G. Simulationstechnik
R. Oldenbourg Verlag, München – Wien, 1980

Schöne, A. Simulation technischer Systeme, Band I + II
Carl Hanser Verlag, München – Wien, 1974/1976

Schröder, M.
Böger, L. Modellreduktion für die Echtzeit-Flugsimulation eines großen, elastischen Transportflugzeugs
DGLR-Jahrestagung 1997
München, 14. – 17. Oktober 1997

Swolinsky, M. Beiträge zur Modellierung von Scherwind für Gefährdungsuntersuchungen
Dissertation, Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik
TU Braunschweig, 1986

Swolinsky, M.
Krauspe, P. Windbestimmung aus Flugmessdaten eines Linienflugzeugs
Meteorologische Rundschau 37, Juni 1984

Thomas, F. Aerodynamik II
Vorlesungsumdruck, Institut für Strömungsmechanik
TU Braunschweig, 1972

Truckenbrodt, E. Tragflächentheorie bei inkompressibler Strömung
Jahrbuch 1953 der WGL

Truckenbrodt, E. Das Geschwindigkeitspotential der tragenden Fläche bei inkompressibler Strömung
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 33, 1953

Truckenbrodt, E.
Gronau, K.-H. Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Deltaflügeln mit Klappen in inkompressibler Strömung
Zeitschrift für Flugwissenschaften, Band 4, 1956, 236 – 246

Vörsmann, P. International Conference on Aviation Weather System
American Meteorological Society, Montréal, Canada, May 1981

Wagner, H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln
Dissertation, Berlin-Charlottenburg, 1925

Wiedemann, M. Macrobody Aircraft – Structural Aspects
Vortrag an der TU Berlin, Juni 1995

Wilhelm, K. Flugmechanik I
Vorlesungsmanuskript, Institut für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin, Berlin, 2000

Wilhelm, K. Flugmechanik II
Vorlesungsmanuskript, Institut für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin, Berlin, 2002a

Wilhelm, K. Methoden der Regelung in der Luft- und Raumfahrt
Vorlesungsmanuskript, Institut für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin, Berlin, 2002b

Wolf, P. Einführung zum 3. Seminar über die Zukunft der Flughäfen
Schriftenreihe der Deutschen Verkehrswissenschaftlichen Gesellschaft
Bergisch Gladbach, 1998

Zimmermann, S. Wohin geht der LuR-Markt?
Vortrag Berlin Brandenburg Aerospace Alliance
Wildau, 14.09.2005

Zrenner, G. Approximation instationärer Luftkräfte eines Tragflügels für die Echtzeit-Flugsimulation
Diplomarbeit am Institut für Luft- und Raumfahrt, Fachgebiet Flugmechanik und Flugregelung, TU Berlin, 1996

[NN] LN 9300: Flugmechanik Begriffe, Benennungen, Zeichen, Grundlagen
Beuth-Vertrieb GmbH, Köln, 1970

[NN] DIN 9300: Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik
Beuth Verlag GmbH, Berlin, 1990

[NN] General User Manual
CAE Dokumentation zum A330/A340 Full-Flight-Simulator
Montréal, Canada

[NN] Données Aérodynamiques A340-300
Aérospatiale, 1990
(nicht zur Veröffentlichung freigegeben)

[NN] Firmenbroschüre
Zentrum für Flugsimulation Berlin GmbH
Berlin

[NN] IATA International Air Transport Association
Air Transport Action Group
European Air Traffic Forecasts 1985 – 2015
Genf, 2000

[NN] ICAO Air Traffic Services Planning Manual, Part II, Methods of Application Employed by Air Traffic Services, Section 5, Chapter 3 – Wake Turbulence

[NN] IATA International Air Transport Association
Annual Report 2005

Anhang A Induzierter Abwind eines Flügels

Die Zirkulation eines einzelnen Hufeisenwirbels an der Stelle $P'(x',y')$ des Elementarflügels im Flügelabschnitt y´ erhält man aus der Wirbeldichte $k(x',y')$ und der Tiefe dx´ des Flächenelementes[114]:

$$d\Gamma(x',y') = k(x',y')\,dx' \tag{A.01}$$

wobei aufgrund der KUTTA'schen Abflussbedingung gilt:

$$\begin{aligned} k(x' = x_{HK}, y') &= 0 \qquad \text{Hinterkante} \\ k(x', y' = \pm s) \quad &= 0 \qquad \text{Flügelenden} \end{aligned} \tag{A.02}$$

Für das gesamte Wirbelsystem eines Tragflügels bestehend aus unendlich vielen Hufeisenwirbeln mit einer Zirkulation nach Gl. (A.01) kann unter Anwendung des BIOT-SAVART'schen Gesetzes die an jedem Punkt des Tragflügels induzierte Normalgeschwindigkeit berechnet werden, wobei die Wirbelfäden vereinfachend als gerade angenommen werden. Ein Element ds eines Wirbelfadens der Stärke dΓ (siehe Bild A.1) induziert in einem Punkt P die Geschwindigkeit [Schlichting/Truckenbrodt Band I, S. 97, Thomas 1972 S. 21] [115]:

$$d^2w = \frac{d\Gamma}{4\pi}\frac{\sin\varphi}{r^2}ds \tag{A.03}$$

bzw. mit

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{r\,d\varphi}{ds} \\ ds &= \frac{r^2}{a}d\varphi \end{aligned} \tag{A.04}$$

erhält man

$$d^2w = \frac{d\Gamma}{4\pi a}\sin\varphi\;d\varphi = \frac{d\Gamma}{4\pi}\frac{a}{r^3}ds \tag{A.05}$$

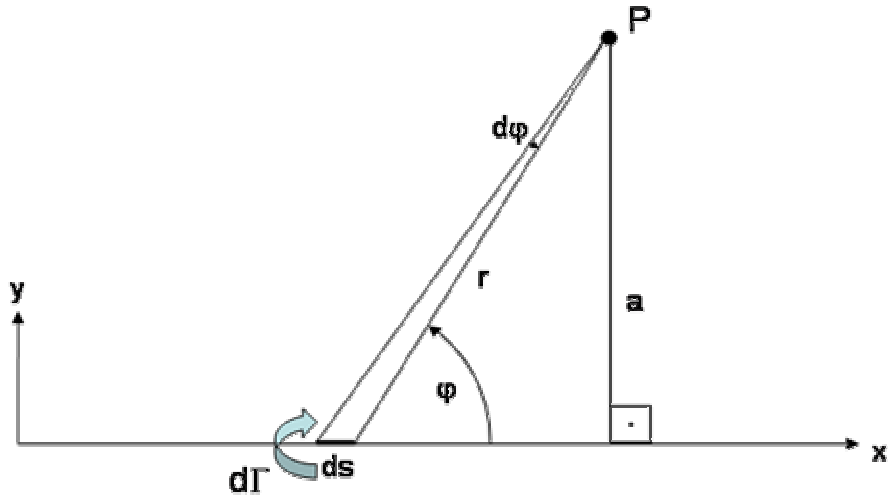

Bild A.1 Induktion eines Wirbelelementes

Für die von einem endlichen, geraden Wirbelfaden am Punkt P(x,y) induzierte Geschwindigkeit erhält man durch Integration von Gl. (A.05):

[114] Nur induzierende Punkte P', die sich auf der Flügelfläche befinden, liefern einen Beitrag zur Zirkulation.

[115] Der Drehsinn des Wirbels wird so als positiv definiert, dass er als positiver Wirbel im KUTTA-JOUKOWSKY'schen Satz einen positiven Auftrieb erzeugt – dies ist bei einer positiven Drehung um die positive y-Richtung der Fall. Ein solcher Wirbel $d\Gamma > 0$ erzeugt bei positivem Abstand $(x-x') > 0$ eine Abwindgeschwindigkeit $w < 0$ (die positive z-Achse weist nach oben).

$$dw = \frac{d\Gamma}{4\pi a}\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right) \tag{A.06}$$

wobei die Winkel entsprechend Bild A.2 zu bilden sind.

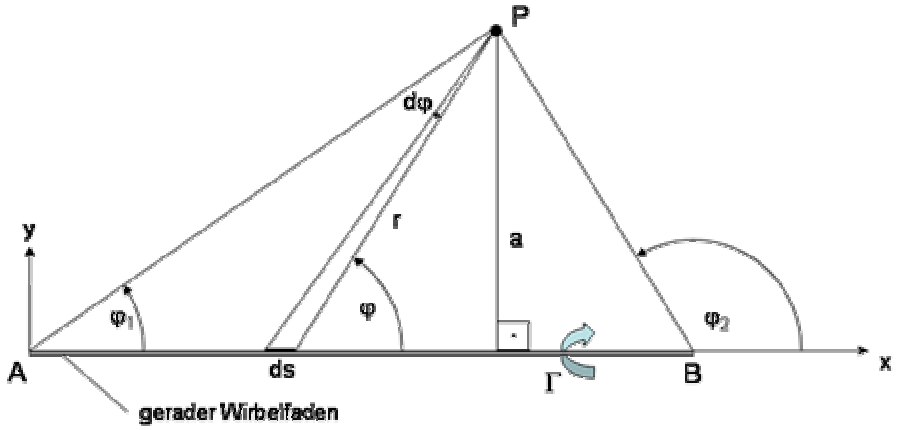

Bild A.2 Induktion eines endlichen Wirbelfadens

Damit kann die Induktion eines elementaren Hufeisenwirbels am Punkt P(x,y) bestimmt werden, siehe Bild A.3).

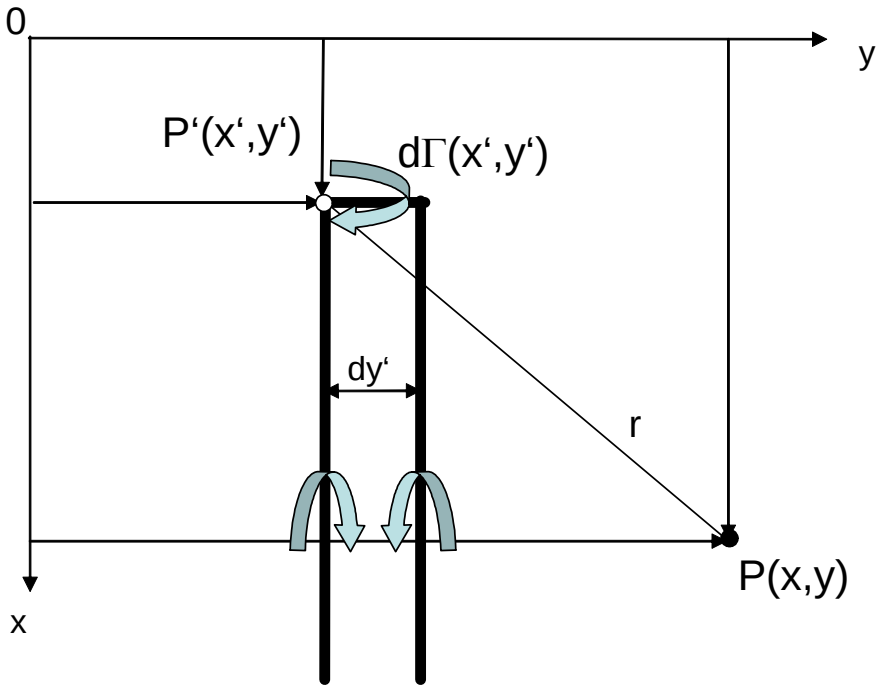

Bild A.3 Zur Induktion eines elementaren Hufeisenwirbels

Für den gebundenen Wirbel der Breite dy´ mit der Zirkulation dΓ nach Gl. (A.01) und dem Abstand des Aufpunktes P(x,y) von der Wirbelachse

$$a = x' - x \tag{A.07}$$

erhält man aus Gl. (A.05) für die am Aufpunkt P(x,y) induzierte Geschwindigkeit

$$d^2 w_g(x,y) = -\frac{k(x',y')}{4\pi}\frac{x - x'}{r^3}dx'dy' \tag{A.08}$$

Für den Radius r gilt

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \tag{A.09}$$

Den Beitrag des linken freien Wirbels erhält man aus Gl. (A.06)[116]

$$\cos\varphi_1 = \frac{x - x'}{r}$$

$$\cos\varphi_2 = -1$$

$$dw_{f\,links}(x,y) = -\frac{k(x',y')}{4\pi}\frac{1}{y - y'}\left(1 + \frac{x - x'}{r}\right)dx' \tag{A.10}$$

Der rechte freie Wirbel im Abstand dy´ dreht entgegengesetzt. Sein Beitrag am betrachteten Aufpunkt P(x,y) kann für kleine Abstände dy´ der beiden freien Wirbel aus dem Anteil des linken freien Wirbels abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} dw_{f\,rechts}(x,y) &= -\lim_{\Delta y' \to 0} dw_{f\,links}(x, y + \Delta y') \\ &= -dw_{f\,links}(x,y) - \lim_{\Delta y' \to 0} \frac{dw_{f\,links}(x, y + \Delta y') - dw_{f\,links}(x,y)}{\Delta y'}\, dy' \\ &= -dw_{f\,links}(x,y) - \frac{d^2 w_{f\,links}(x,y)}{dy'} dy' \end{aligned} \tag{A.11}$$

Für das freie Wirbelpaar erhält man damit:

$$dw_f(x,y) = dw_{f\,links}(x,y) + dw_{f\,rechts}(x,y) = -\frac{d^2 w_{f\,links}(x,y)}{dy'} dy' \tag{A.12}$$

Die benötigte zweite Ableitung d^2w/dy' erhält man durch Differentiation von Gl. (A.10)[117]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{f\,links}(x,y)}{dy'} &= \frac{d}{dy'}\left[-\frac{k(x',y')}{4\pi}\left\{\frac{1}{y - y'}\left(1 + \frac{x - x'}{r}\right)dx'\right\}\right] \\ &= -\frac{k(x',y')}{4\pi}\left\{\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{y - y'}\right)\left(1 + \frac{x - x'}{r}\right)dx' + \frac{1}{y - y'}\frac{d}{dy'}\left(1 + \frac{x - x'}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right]^{1/2}}\right)dx'\right\} \\ &= -\frac{k(x',y')}{4\pi}\left\{\frac{-1}{(y - y')^2}(-1)\left(1 + \frac{x - x'}{r}\right)dx' + \frac{1}{y - y'}\left(-\frac{1}{2}\frac{x - x'}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right]^{3/2}} 2(y - y')(-1)\right)dx'\right\} \\ &= -\frac{k(x',y')}{4\pi}\left\{\frac{1}{(y - y')^2}\left(1 + \frac{x - x'}{r}\right) + \frac{x - x'}{r^3}\right\}dx' \end{aligned}$$

und damit schließlich für die Induktion der beiden freien Wirbelfäden eines elementaren Hufeisenwirbels

$$d^2 w_f(x,y) = \frac{k(x',y')}{4\pi}\left\{\frac{1}{(y - y')^2}\left(1 + \frac{x - x'}{r}\right) + \frac{x - x'}{r^3}\right\}dx'\,dy' \tag{A.13}$$

Die Induktion des gesamten elementaren Hufeisenwirbels ergibt sich durch Addition von Gl. (A.08) und Gl. (A.13):

[116] Die Unendlichkeit des freien Wirbelfadens nach hinten ist hierbei bereits berücksichtigt, da für $x \to \infty$ $\varphi_2 = 180°$ wird und damit $-\cos\varphi_2 = -1$ wird. Ferner ist zu beachten, dass der linke freie Wirbel eine negative Drehrichtung hat und damit bei einem positivem Abstand (y-y') einen Aufwind $w > 0$ liefert.

[117] Hierbei ist zu beachten, dass r ebenfalls von y´ abhängig ist, siehe Gl. (A.09), so dass sowohl die Ketten- als auch die Produktregel anzuwenden sind. Außerdem ist zu berücksichtigen, dass die Zirkulation des rechten freien Wirbels identisch mit der des linken ist, so dass die Wirbeldichte k(x´,y´) sich nicht mit dy´ ändert und daher bei der Differentiation als Konstante zu behandeln ist.

$$d^2w(x,y) = \frac{k(x',y')}{4\pi} \quad \frac{1+\dfrac{x-x'}{r}}{(y-y')^2} \quad dx'\,dy' \tag{A.14}$$

Die von der Gesamtheit aller Elementarwirbel an einem Punkt P(x,y) induzierte Geschwindigkeit w(x,y) erhält man schließlich durch Integration über alle Wirbelelemente der Flügelfläche[118, 119]

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y') \, \frac{1+\dfrac{x-x'}{r}}{(y-y')^2} \, dx'\,dy' \tag{A.15}$$

Fehlerbetrachtung

Den Berechnungen liegt die Vereinfachung zugrunde, dass die induzierte Geschwindigkeit ersatzweise in der Ebene z ≠ 0 bestimmt werden kann. Der hierdurch verursachte Fehler resultiert im Wesentlichen aus der Bestimmung des Radius r. Um einen Eindruck von der Größenordnung des Fehlers zu bekommen, hier ein einfaches Zahlenbeispiel. Es sei

$P'(x',y',z') = (0,0,0)$ induzierende Stelle

$P(x,y,z) = (1,1,z)$ betrachteter Aufpunkt

Bei einer angenommenen Steigung von

$$\partial z / \partial x = 0{,}0175 \quad (\hat{=} 1°)$$

ergibt sich für den betrachteten Aufpunkt P eine z-Koordinate von

$$z = 0{,}0175$$

und die Abstände

$$x - x' = 1$$
$$y - y' = 1$$

Damit erhält man für den Radius ohne Berücksichtigung der z-Koordinate:

$$\tilde{r} = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1{,}414214$$

Unter Berücksichtigung der z-Koordinate ergibt sich:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0{,}0175^2} = 1{,}414322$$

Für den relativen Fehler des Radius folgt:

$$f = \frac{\tilde{r} - r}{r} = \frac{1{,}414214 - 1{,}414322}{1{,}414322} 100\% = -0{,}0076\%$$

Bei einer Steigung von 5° ergibt sich ein Fehler von -0,2%. Die Vernachlässigung der z-Koordinate bei der Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten kann daher als zulässig angenommen werden.

[118] Die Integration kann sowohl in x- als auch in y-Richtung in den Grenzen von -∞ bis +∞ erfolgen, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, dass außerhalb der Flügelfläche die Wirbeldichte k(x',y') ≡ 0 ist. Hierbei ist zu beachten, dass der betrachtete Aufpunkt P(x,y) nicht notwendigerweise ebenfalls auf der Flügelfläche liegen muss – die Beziehung gilt an jeder Stelle des Strömungsfeldes, allerdings immer mit der Einschränkung z ≡ 0.

[119] Zur Lösung des Integrals siehe Anhang B.

Anhang B Integration der Verteilungsfunktion G(x,y;y´)

Für den induzierten Abwind eines Tragflügels gilt nach Gl. (O.08):

$$w(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s}\frac{G(x,y;y')}{(y-y')^2}\,dy' \tag{B.01}$$

mit der Verteilungsfunktion nach Gl. (O.07):

$$G(x,y;y')=\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')}k(x',y')\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx' \tag{B.02}$$

Die Unstetigkeit an der Stelle y = y´ (d.h. der Aufpunkt P(x,y) befindet sich auf dem induzierenden Flügelschnitt y´) kann durch eine Grenzwertbetrachtung behandelt werden. Hierzu wird bei der Durchführung der Integration der Bereich (y – e) < y´ < (y + e) abgespalten:

$$w(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s}\frac{G(x,y,y')}{(y-y')^2}\,dy'=\lim_{e\to 0}\left[\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s\ (C)}\frac{G(x,y,y')}{(y-y')^2}dy'+\frac{1}{4\pi}\int_{y-e}^{y+e}\frac{G(x,y,y')}{(y-y')^2}\,dy'\right] \tag{B.03}$$

Der hochgestellte Zusatz (C) beim ersten Integral kennzeichnet, dass der Bereich (y –e) < y´ < (y + e) auszunehmen ist, somit das Integral im Sinne des CAUCHY'schen Hauptwertes zu bilden ist[120]. Das zweite Integral von Gl. (B.03) kann allgemein bestimmt werden. Hierzu wird Gl. (B.03) aufgespalten:

$$\begin{aligned}
w(x,y)&=w_I(x,y)+w_{II}(x,y)\\
w_I(x,y)&=\lim_{e\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s\ (C)}\frac{G(x,y,y')}{(y-y')^2}dy'\\
w_{II}(x,y)&=\lim_{e\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{y-e}^{y+e}\frac{G(x,y,y')}{(y-y')^2}\,dy'
\end{aligned} \tag{B.04}$$

Zur Lösung des zweiten Integrals wird G(x,y;y´) an der Stelle (y´ = y) in eine Taylorreihe nach y´ entwickelt, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird. Für kleine Abweichungen e = y´ – y gilt dann:

$$\begin{aligned}
G(x,y;y'\to y)&=G(x,y;y)+\frac{\partial G(x,y;y')}{\partial y'}e\\
&=2\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')}k(x',y')\,dx'+\frac{\partial}{\partial y'}\left[\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')}k(x',y')\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx'\right]e
\end{aligned} \tag{B.05}$$

[120] In der Literatur [Schlichting/Truckenbrodt 1969], [Truckenbrodt 1953] wird bei der Grenzwertbildung $\varepsilon \to 0$ nicht zwischen dimensionsbehaftetem und dimensionslosem Abstand unterschieden. Hier bedeutet e den dimensionsbehafteten Abstand und ε seine dimensionslose Entsprechung.

Vertauscht man im zweiten Term die Integration und die Ableitung erhält man unter Anwendung der Produktregel:

$$G(x,y;y' \to y) = 2\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\,dx + e\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} \frac{\partial k(x',y')}{\partial y'}\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx' + e\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\frac{\partial}{\partial y'}\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx' \tag{B.06}$$

Für das zweite Integral gilt für y → y´:

$$\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} \frac{\partial k(x',y')}{\partial y'}\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx' = \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} \frac{\partial k(x',y')}{\partial y'}\left(1+\frac{x-x'}{|x-x'|}\right)dx' \tag{B.07}$$

Für das dritte Integral gilt für y → y´:

$$\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\frac{\partial}{\partial y'}\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx' = \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\frac{(x-x')(y-y')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]^{3/2}}\,dx' = 0 \tag{B.08}$$

Damit gilt für die Verteilungsfunktion G(x,y;y´) für kleine Abweichungen e:

$$G(x,y;y' \to y) = 2\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\,dx' + e\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} \frac{\partial k(x',y')}{\partial y'}\left(1+\frac{x-x'}{|x-x'|}\right)dx' \tag{B.09}$$

Für den Sonderfall y´ = y gilt:

$$G(x,y;y) = 2\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\,dx' \tag{B.10}$$

Damit gilt für die Verteilungsfunktion in der Nähe des Induktionspunktes (y → y´):

$$G(x,y;y' \to y) = G(x,y;y) + e \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} \frac{\partial k(x',y')}{\partial y'} \left(1 + \frac{x-x'}{|x-x'|}\right) dx' \tag{B.11}$$

Für den Beitrag zum induzierten Abwind in der unmittelbaren Nähe des induzierenden Schnittes aus Gl. (B.04) gilt damit:

$$\begin{aligned} w_{II}(x,y) &= \lim_{e\to 0} \frac{1}{4\pi} \int_{y-e}^{y+e} \frac{G(x,y;y \to y')}{(y-y')^2}\, dy' \\ &= \lim_{e\to 0} \frac{1}{4\pi} \int_{y-e}^{y+e} \frac{1}{(y-y')^2} \left[G(x,y;y) + e \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} \frac{\partial k(x',y')}{\partial y'} \left(1 + \frac{x-x'}{|x-x'|}\right) dx' \right] dy' \end{aligned} \tag{B.12}$$

Hierin verschwindet wegen e → 0 der zweite Term, so dass bleibt:

$$\begin{aligned} w_{II}(x,y) &= \lim_{e\to 0} \frac{1}{4\pi} \int_{y-e}^{y+e} \frac{G(x,y;y)}{(y-y')^2}\, dy' \\ &= \lim_{e\to 0} \frac{G(x,y;y)}{4\pi} \int_{y-e}^{y+e} \frac{1}{(y-y')^2}\, dy' \\ &= \lim_{e\to 0} \frac{G(x,y;y)}{4\pi} \left[\frac{-1}{(y-y')} \right]_{y-e}^{y+e} \\ &= -\lim_{e\to 0} \frac{G(x,y;y)}{4\pi} \left[\frac{1}{y-y-e} - \frac{1}{y-y+e} \right] \end{aligned} \tag{B.13}$$

Damit erhält man für den Beitrag des zweiten Integrales zum induzierten Abwind:

$$w_{II}(x,y) = -\lim_{e\to 0} \frac{2G(x,y;y)}{4\pi e} \tag{B.14}$$

Mit dem unverändert übernommenen ersten Anteil aus Gl. (B.04) folgt schließlich für den induzierten Abwind:

$$w(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{e\to 0} \left[\frac{2G(x,y;y)}{e} - \int_{-s}^{+s\,(C)} \frac{G(x,y,y')}{(y-y')^2}\, dy' \right] \tag{B.15}$$

Eine andere Formulierung der induzierten Abwindgeschwindigkeit erhält man durch partielle Integration von Gl. (B.01) mit

$$\begin{aligned} u &= G(x,y,y') & u' &= \frac{\partial G(x,y,y')}{\partial y'} \\ v' &= (y-y')^{-2} & v &= (y-y')^{-1} \end{aligned} \tag{B.16}$$

Man erhält unmittelbar

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left[\left[\frac{G(x,y;y')}{y-y'}\right]_{-s}^{-s} - \int_{-s}^{+s} \frac{\frac{\partial G(x,y;y')}{\partial y'}}{y-y'}\,dy'\right] \tag{B.17}$$

Da an den Flügelspitzen für die Wirbeldichte gilt k(x', y' = ± s) = 0 erhält man für die Verteilungsfunktion nach Gl. (B.02):

$$G(x,y;y' = \pm s) = 0 \tag{B.18}$$

Damit verschwindet der erste Term in Gl. (B.17) und es bleibt

$$w(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s} \frac{\frac{\partial G(x,y,y')}{\partial y'}}{y-y'}\,dy' \tag{B.19}$$

Die beiden Formulierungen für den induzierten Abwind nach Gl. (B.15) und Gl. (B.19) sind vollkommen gleichwertig und werden beide für die weiteren Rechnungen verwendet.

Anhang C Quadraturverfahren nach MULTHOPP

Induzierter Abwindwinkel

Von Quadraturverfahren spricht man im Allgemeinen, wenn bei einer Integrationsaufgabe der Integrand durch eine einfacher zu integrierende Funktion ersetzt wird. Dieses wird auch beim Quadraturverfahren nach MULTHOPP durchgeführt. Die Besonderheit dieses Verfahrens liegt darin, dass die Lösung der Integration nicht allgemein bestimmt wird, sondern lediglich an diskreten Stellen. Die von MULTHOPP eingeführte Ersatzfunktion für den Integranden stellt damit eine Interpolationsformel für die tatsächliche Funktion dar.

Das Quadraturverfahren wurde von MULTHOPP erstmals zur Berechnung des induzierten Abwindwinkels für den ungepfeilten Flügel großer Streckung angewendet. Die Theorie zur Behandlung eines solchen Tragflügels wird als klassische Tragflügeltheorie bezeichnet und geht auf PRANDTL zurück. Hierbei wird davon ausgegangen, dass sich die Gesamtheit aller gebundenen Wirbel durch eine einzige Wirbellinie der Stärke $\Gamma(y)$ in der l/4-Linie des Flügels repräsentieren lässt. Als Ergebnis erhält man nach [Multhopp 1938, S. 153, Gl. (1)] für den vom Tragflügel induzierten Abwindwinkel[121]

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-s}^{+s} \frac{\partial \Gamma(y')}{\partial y'} \frac{dy'}{y - y'} \tag{C.01}$$

Mit der dimensionslosen Zirkulationsverteilung

$$\gamma(y) = \frac{\Gamma(y)}{b V_\infty} \tag{C.02}$$

und der dimensionslosen Koordinate

$$\eta = \frac{y}{s} \tag{C.03}$$

erhält man für den induzierten Abwindwinkel

$$\alpha_i(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \gamma(\eta')}{\partial \eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \tag{C.04}$$

Mit der Transformation auf Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \eta &= \cos\vartheta \qquad \eta = -1 \rightarrow \vartheta = \pi \qquad \eta = +1 \rightarrow \vartheta = 0 \\ \eta' &= \cos\vartheta' \\ d\eta' &= -\sin\vartheta'\, d\vartheta' \end{aligned} \tag{C.05}$$

erhält man für den induzierten Abwindwinkel[122]

$$\alpha_i(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial \gamma(\vartheta')}{\partial \vartheta'} \frac{d\vartheta'}{\cos\vartheta - \cos\vartheta'} \tag{C.06}$$

Zur Lösung dieser Integralgleichung (C.06) wird nach MULTHOPP für die Zirkulationsverteilung $\gamma(\vartheta')$ ein Fourierreihenansatz gemacht:

[121] Der hiernach ermittelte induzierte Abwindwinkel ist hinter dem gebundenen Wirbel positiv, d.h. bei einem induzierten Abwind nach unten ist $\alpha_i > 0$. Diese Definition ist in Übereinstimmung mit [Multhopp 1938], ist in anderen Literaturstellen wie [Truckenbrodt WGL 1953] und [Schlichting/Truckenbrodt Band II 1969] hiervon abweichend.

[122] Zu beachten ist, dass sich das negative Vorzeichen durch die Substitution der Integrationsvariablen sich durch Vertauschen der unteren und oberen Integrationsgrenzen wegkürzt.

$$\gamma(\vartheta') = 2\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu \sin\mu\vartheta' \tag{C.07}$$

Bei hinreichender Anzahl von Reihengliedern können hierdurch beliebige Zirkulationsverteilungen dargestellt werden, siehe Bild C.1.

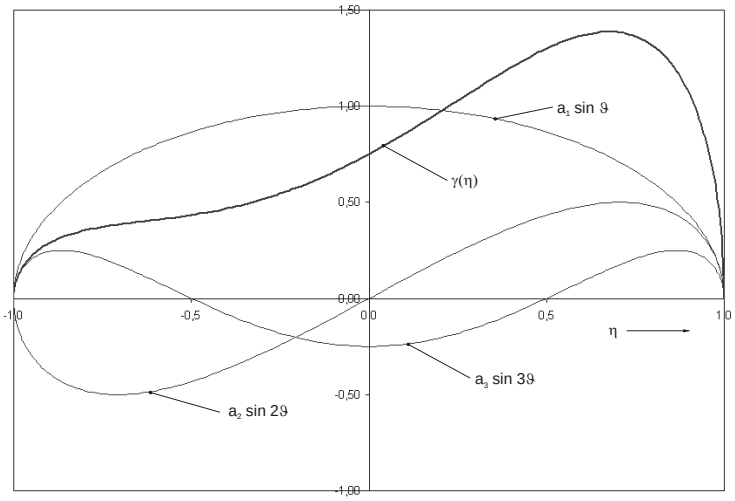

Bild C.1 Darstellung der Zirkulationsverteilung durch eine Fourierreihe

Für die Ableitung in Spannweitenrichtung folgt daraus

$$\frac{\partial\gamma(\vartheta')}{\partial\vartheta'} = 2\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu\,\mu\cos\mu\vartheta' \tag{C.08}$$

Eingesetzt in Gl. (C.06) erhält man

$$\alpha_i(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu\,\mu\cos\mu\vartheta'\,\frac{d\vartheta'}{\cos\vartheta-\cos\vartheta'} \tag{C.09}$$

Durch Vertauschen der Integration mit der Summation folgt

$$\alpha_i(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu\mu\int_0^{\pi}\frac{\cos\mu\vartheta'}{\cos\vartheta-\cos\vartheta'}d\vartheta' \tag{C.10}$$

Das Integral ist ein GLAUERT-Integral, das allgemein gelöst werden kann[123]:

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\nu\vartheta'}{\cos\vartheta-\cos\vartheta'}d\vartheta' = -\pi\frac{\sin\nu\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{C.11}$$

Damit folgt schließlich für den induzierten Abwindwinkel

$$\alpha_i(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^{M} a_\mu\;\mu\;\frac{\sin\mu\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{C.12}$$

Diese Beziehung ist im Rahmen der Genauigkeit der Approximation der Zirkulationsverteilung durch eine Fourierreihe exakt und gilt für jeden beliebigen Punkt in Spannweitenrichtung.

[123] Eine ausführliche Herleitung ist in Anhang N gegeben.

Beim MULTHOPP-Verfahren wird statt mit der kontinuierlichen Zirkulationsverteilung nur mit den Zahlenwerten der Zirkulationsverteilung an M diskreten Stützstellen gerechnet. Die Polarkoordinaten der Stützstellen sind wie folgt äquidistant über die Spannweite verteilt, siehe auch Bild C.2

$$\vartheta_n = \frac{n\pi}{M+1} \tag{C.13}$$

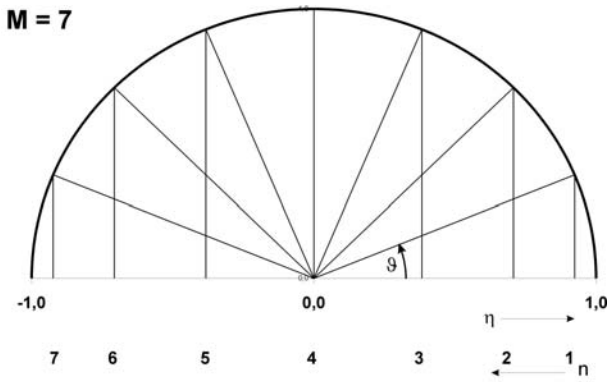

Bild C.2 Verteilung der Aufpunkte längs der Spannweite

Mit dem Fourierreihenansatz für die Zirkulationsverteilung gilt dann für die M diskreten Werte für die Zirkulation

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 2\left[a_1 \sin\vartheta_1 + a_2 \sin 2\vartheta_1 + a_3 \sin 3\vartheta_1 + \ldots + a_M \sin M\vartheta_1\right] \\
&\vdots \\
\gamma_n &= 2\left[a_1 \sin\vartheta_n + a_2 \sin 2\vartheta_n + a_3 \sin 3\vartheta_n + \ldots + a_M \sin M\vartheta_n\right] \\
&\vdots \\
\gamma_M &= 2\left[a_1 \sin\vartheta_M + a_2 \sin 2\vartheta_M + a_3 \sin 3\vartheta_M + \ldots + a_M \sin M\vartheta_M\right]
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Multipliziert man alle M Gleichungen der Reihe nach jeweils mit $\sin\vartheta_1 \cdots \sin\vartheta_n \ldots \sin\vartheta_M$ und bildet die Summe, erhält man

$$\sum_{n=1}^{M} \gamma_n \sin\vartheta_n = \frac{M+1}{2} 2a_1 \tag{C.15}$$

da in der Summe der rechten Seite die Terme weitgehend verschwinden:

$$\sum_{n=1}^{M} \sin\mu\vartheta_n \sin\nu\vartheta_n = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ \dfrac{M+1}{2} & \text{für } \mu = \nu \end{cases} \tag{C.16}$$

Damit kann die Konstante a_1 bestimmt werden

$$a_1 = \frac{1}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \gamma_n \sin\vartheta_n \tag{C.17}$$

Dieses Vorgehen kann für die übrigen Konstanten a_μ wiederholt werden. Damit erhält man allgemein

$$a_\mu = \frac{1}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \gamma_n \sin\mu\vartheta_n \tag{C.18}$$

Setzt man diese Beziehung in die Gleichung für den induzierten Abwindwinkel ein, erhält man

$$\alpha_i(\vartheta) = \frac{1}{M+1} \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{n=1}^{M} \gamma_n \sin\mu\vartheta_n \; \mu \; \frac{\sin\mu\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{C.19}$$

Durch Vertauschen der Summationen folgt daraus

$$\alpha_i(\vartheta) = \sum_{n=1}^{M} \gamma_n \sum_{\mu=1}^{M} \frac{\mu}{M+1} \frac{\sin \mu\vartheta \sin \mu\vartheta_n}{\sin \vartheta} \tag{C.20}$$

Im Folgenden beschränkt man sich in der Berechnung des induzierten Abwindwinkels α_i gerade auf dieselben diskreten Stellen, an denen die Stützstellen der Zirkulationsverteilung γ_n vorliegen:

$$\eta_\nu = \cos \vartheta_\nu \tag{C.21}$$

bzw. in Polarkoordinaten.

$$\vartheta_\nu = \frac{\nu \pi}{M+1} \tag{C.22}$$

Für den induzierten Anstellwinkel an diesen diskreten Stellen gilt damit:

$$\alpha_{i\nu} = \sum_{n=1}^{M} \gamma_n \sum_{\mu=1}^{M} \frac{\mu}{M+1} \frac{\sin \mu\vartheta_\nu \sin \mu\vartheta_n}{\sin \vartheta_\nu} \tag{C.23}$$

Die zweite Summe besteht ausschließlich aus trigonometrischen Funktionswerten, die lediglich von der Anzahl der Stützstellen in Spannweitenrichtung M abhängig sind. Für eine vorgewählte Anzahl M können sie daher allgemein bestimmt werden. Hierfür werden daher von MULTHOPP folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} b_{\nu\nu} &= \frac{1}{M+1} \frac{1}{\sin \vartheta_\nu} \sum_{\mu=1}^{M} \mu \sin^2 \mu\vartheta_\nu && \text{für } n = \nu \\ b_{\nu n} &= \frac{-1}{M+1} \frac{1}{\sin \vartheta_\nu} \sum_{\mu=1}^{M} \mu \sin \mu\vartheta_\nu \sin \mu\vartheta_n && \text{für } n \neq \nu \end{aligned} \tag{C.24}$$

Durch Umformung erhält man nach [Multhopp 1938]:

$$\begin{aligned} b_{\nu\nu} &= \frac{M+1}{4} \frac{1}{\sin \vartheta_\nu} && \text{für } n = \nu \\ b_{\nu n} &= \frac{1-(-1)^{\nu-n}}{2(M+1)} \frac{\sin \vartheta_n}{(\cos \vartheta_n - \cos \vartheta_\nu)^2} && \text{für } n \neq \nu \end{aligned} \tag{C.25}$$

Damit erhält man für den induzierten Anstellwinkel nach Gl. (C.23):

$$\alpha_{i\nu} = b_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n}\gamma_n \tag{C.26}$$

Der hochgestellte Strich am Summenzeichen bedeutet, dass der Term für n = υ auszulassen ist. Bei der Bestimmung der MULTHOPP-Koeffizienten nach Gl. (C.25) erkennt man, dass einige zu Null werden. Man erhält schließlich die MULTHOPP-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} b_{\nu\nu} &= \frac{M+1}{4} \frac{1}{\sin \vartheta_\nu} && \text{für } n = \nu \\ b_{\nu n} &= \frac{1}{M+1} \frac{\sin \vartheta_n}{(\cos \vartheta_n - \cos \vartheta_\nu)^2} && \text{für } |n-\nu| = 1,3,5\ldots \\ b_{\nu n} &= 0 && \text{für } |n-\nu| = 2,4,6\ldots \end{aligned} \tag{C.27}$$

Anhang D Wirbeldichte in Profiltiefenrichtung

Ansatz von GLAUERT und TRUCKENBRODT

D.1 Grundlagen

Wie bereits in Kapitel 4 erläutert, wird für die Wirbeldichteverteilung k(x,y) ein Reihenansatz zu Grunde gelegt, der üblicherweise auf zwei Parameter in Profiltiefenrichtung beschränkt wird. Von dieser Einschränkung wird auch bei dem in dieser Arbeit beschriebenen Tragflächenverfahren Gebrauch gemacht. Hier sollen zusätzlich die Beziehungen angegeben werden, die sich aus dem allgemeinen Ansatz ohne diese Einschränkung ergeben. Diese Beziehungen werden benötigt, wenn der zweiparametrige Ansatz um weitere Glieder erweitert werden soll, um z.B. gemessene oder berechnete Druckverteilungen nachbilden zu können. Der allgemeine Reihenansatz nach Gl. (4.15) lautet:

$$k(x',y') = \frac{V}{2}\sum_{n=0}^{N} a_n(y')\, h_n(x') \tag{D.01}$$

Hierbei wird die Verteilung in Profiltiefenrichtung durch die so genannten Einheitsfunktionen h_n beschrieben, während die Koeffizienten a_n die Abhängigkeit der Wirbeldichte k in Spannweitenrichtung enthalten. Für die weiteren Betrachtungen wird zunächst eine Transformation der Koordinate in Profiltiefenrichtung x´ auf dimensionslose Einheitskoordinaten X´ durchgeführt und diese anschließend durch den Polarwinkel φ´ ersetzt, der von der Profilmitte aus gemessen wird, siehe Bild D.1. Für die dimensionslosen Einheitskoordinaten gelten die Definitionen nach Gl. (4.17):

$$X = \frac{x - x_{VK}(y')}{\ell(y')}$$
$$X' = \frac{x' - x_{VK}(y')}{\ell(y')} \tag{D.02}$$

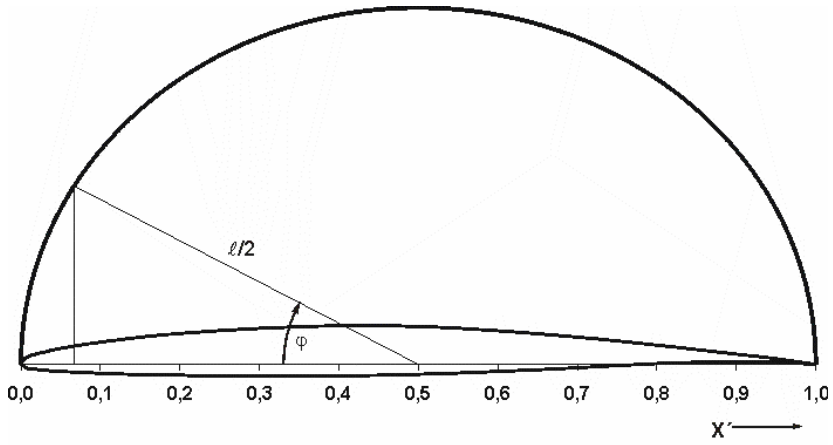

Bild D.1 Polar- und kartesische Koordinaten am Profil

Für die Polarwinkel φ und φ´ gilt die Definitionen[124]:

$$X = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi) \qquad \text{bzw.} \quad \cos\varphi = 1-2X$$
$$X' = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi') \qquad \text{bzw.} \quad \cos\varphi' = 1-2X' \tag{D.03}$$

Die Anzahl der im Ansatz enthaltenen Einheitsfunktionen ist prinzipiell beliebig. Für die Einheitsfunktionen wird nach TRUCKENBRODT [Truckenbrodt WGL 1953 S. 42] der Ansatz gewählt:

[124] Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur unterschiedliche Definitionen des Polarwinkels verwendet werden. Die hier eingeführte Definition ist in Übereinstimmung mit [Truckenbrodt WGL 1953 S. 42], weicht jedoch von der Definition in [Schlichting/Truckenbrodt 1969 S. 59] ab, bei der φ positiv von der Hinterkante zur Vorderkante gezählt wird.

$$h_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad \text{(D.04)}$$

An der Hinterkante ist X' = 1 bzw. $\varphi = \pi$ und damit k = 0, so dass die KUTTA'sche Abflussbedingung erfüllt wird; an der Vorderkante ist X' = 0 bzw. $\varphi = 0$. Den Verlauf der Einheitsfunktionen für n = 0 bis n = 5 zeigt Bild D.2.

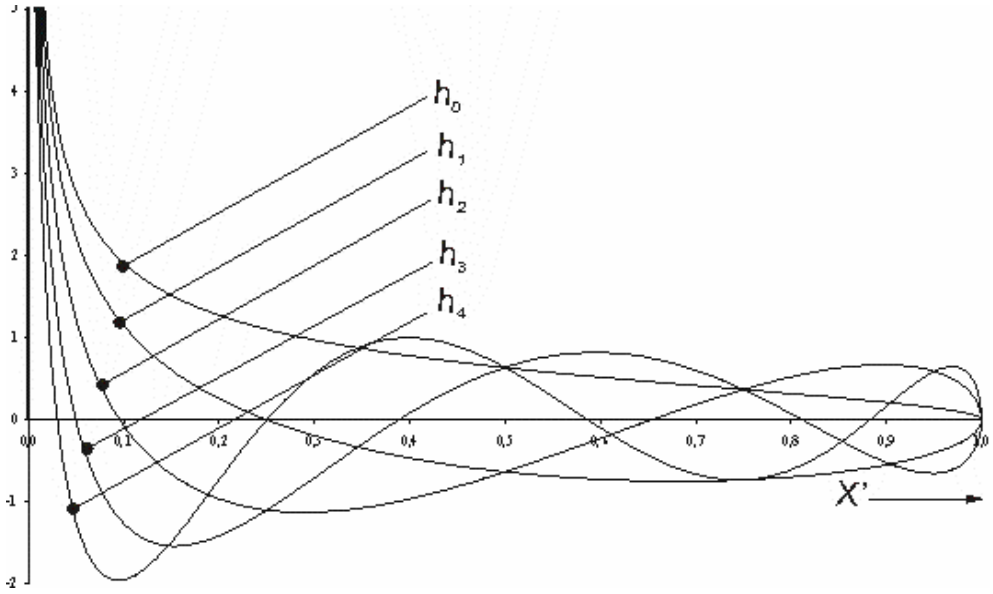

Bild D.2 Ansatz für die Zirkulationsverteilung in Tiefenrichtung

D.2 Einflussfunktionen

Für die Verteilungsfunktion gilt die Definition nach Gl. (4.08):

$$G(x,y;y') = \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y') \left(1 + \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right) dx' \tag{D.05}$$

Mit dem Ansatz für die Wirbeldichteverteilung nach Gl. (D.01) erhält man:

$$G(x,y;y') = \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} \frac{V}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y')\, \ell(y')\, h_n(x) \left(1 + \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right) dx' \tag{D.06}$$

Da die Koeffizienten a_n nur von der Spannweitenkoordinate abhängig sind, können Summenbildung und Integration vertauscht werden:

$$G(x,y;y') = \frac{V_\infty}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y')\, \ell(y') \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} h_n(x') \left(1 + \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right) dx' \tag{D.07}$$

Als weitere Abkürzung wird die Einflussfunktionen H_n eingeführt:

$$H_n(x,y) = \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} h_n(x') \left(1 + \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right) dx' \tag{D.08}$$

Für die Verteilungsfunktion G(x,y;y´) gilt damit:

$$G(x,y;y') = \frac{V_\infty}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y')\, \ell(y')\, H_n(x,y) \tag{D.09}$$

Mit den dimensionslosen Koordinaten nach Gl. (D.02) gilt für die Einflussfunktionen H_n

$$H_n(X,Y) = \int_0^1 h_n(X') \left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y^2}} \right) dX' \tag{D.10}$$

Mit der dimensionslosen Spannweitenkoordinate Y

$$Y = \frac{y-y'}{\ell(y')} \tag{D.11}$$

erhält man für die Verteilungsfunktion G(X,Y)[125]:

$$G(X,Y) = \frac{\ell\, V_\infty}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(Y=0)\, H_n(X,Y) \tag{D.12}$$

Da durch den Ansatz von TRUCKENBRODT nach Gl. (D.04) die Einheitsfunktionen h_n festgelegt sind, können somit auch die Einflussfunktionen H_n als Funktionen dimensionsloser Koordinaten (X,Y) ein für allemal berechnet werden. Die Verteilungsfunktion G(X,Y) nach Gl. (D.12) wird damit durch die allgemeinen Einflussfunktionen $H_n(X,Y)$ und die noch unbekannten Koeffizienten a_n beschrieben.

[125] An der Stelle des induzierenden Profilschnittes y' ist nach Gl. (D.11) Y = 0, so dass die Verteilungsfunktion G nur noch von X und Y abhängig ist, so dass G = G(X,Y) geschrieben werden kann.

D.3 Grund- und Nullverteilung

Die bisherigen Herleitungen gelten für beliebige Verteilungen der Wirbeldichte k in Profiltiefenrichtung, wobei diese durch eine Reihe nach Gl. (D.01) dargestellt wird. Hierbei sind in jedem Profilschnitt y´ die Koeffizienten a_n zu bestimmen. Der Lösungsaufwand hängt damit entscheidend von der Ordnung des Reihenansatzes ab. Für viele Anwendungsfälle ist die Bestimmung der Druckverteilung in einem Profilschnitt nicht erforderlich sondern es interessiert lediglich die Berechnung der lokalen Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte. Hierzu genügt ein zweiparametriger Ansatz. Damit werden in Gl. (D.01) nur die Terme für n=0 und n=1 berücksichtigt. Die kinematische Strömungsbedingung ist dann lediglich in jedem Profilschnitt an zwei Punkten zu erfüllen.

$$h_0(\varphi) = \frac{2}{\pi}\cot\frac{\varphi}{2}$$
$$h_1(\varphi) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad \text{(D.13)}$$

Die Einheitsfunktion h_0 stellt die erste BIRNBAUM´sche Normalverteilung dar (angestellte ebene Platte) und die Einheitsfunktion h_1 eine Kombination aus der ersten und der zweiten BIRNBAUM´schen Normalverteilung (Parabelskelett) derart, dass das Integral über die Profiltiefe X´ gerade verschwindet (sie erzeugt damit keinen Auftrieb) und lediglich ein Nickmoment liefert (h_1 stellt damit ein unter $\alpha = \alpha_0$ angestelltes Parabelskelett dar). Die beiden Verteilungen zeigt Bild D.3.

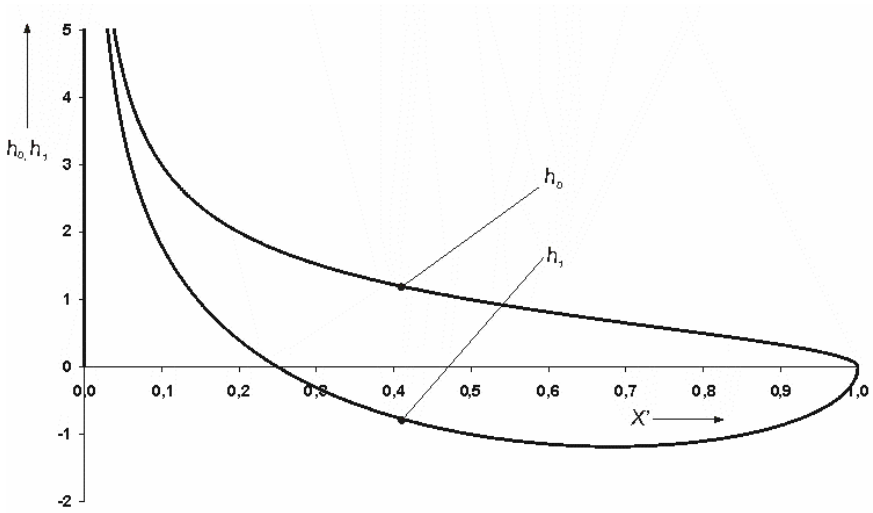

Bild D.3 zweiparametriger Ansatz für die Zirkulationsverteilung in Tiefenrichtung

Für die beiden Einheitsfunktionen nach Gl. (D.13) erhält man in dimensionslosen Koordinaten nach Gl. (D.03) unter Berücksichtigung der Additionstheoreme

$$h_0(X') = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}$$
$$h_1(X') = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')}\right) \qquad \text{(D.14)}$$

Setzt man Gl. (D.14) in die Einflussfunktion nach Gl. (D.10) ein, erhält man

$$H_0(X,Y) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\left(1+\frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2+Y^2}}\right)dX'$$
$$H_1(X,Y) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}-4\sqrt{X'(1-X')}\right)\left(1+\frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2+Y^2}}\right)dX' \qquad (D.15)$$

Da zeitgleich und unabhängig von TRUCKENBRODT ein analoges Verfahren auch von MULTHOPP entwickelt und veröffentlicht wurde, werden in Anlehnung an [Multhopp 1953] die Einflussfunktionen auch mit i(X,Y) und j(X,Y) bezeichnet, wobei jedoch gilt:

$$i(X,Y) = H_0(X,Y) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\left(1+\frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2+Y^2}}\right)dX'$$
$$j(X,Y) = 4H_1(X,Y) = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}-4\sqrt{X'(1-X')}\right)\left(1+\frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2+Y^2}}\right)dX' \qquad (D.16)$$

Die Einflussfunktionen i und j (bzw. H_0 und H_1) hängen lediglich von der Flügelform und der Lage der Profilschnitte ab, so dass sie für einen gegebenen Flügel vorab bestimmt werden können.

D.4 Einsetzen in die Integralgleichung

Die gefundenen Ergebnisse sollen nun in die Integralgleichung für die kinematische Strömungsbedingung Gl. (O.16) eingesetzt werden:

$$\alpha_{\text{Skelett}}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial g(\xi,\eta;\eta')}{\partial \eta'}\frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \tag{D.17}$$

Für die dimensionslosen Verteilungsfunktion g gilt die Definition nach Gl. (4.07)

$$g = \frac{G}{b\, V_\infty} \tag{D.18}$$

gilt mit Verteilungsfunktion G nach Gl. (D.12)

$$G(x,y;y') = \frac{V_\infty}{2}\sum_{n=0}^{N} a_n(y')\, H_n(x,y) \tag{D.19}$$

sowie mit den Einflussfunktionen nach Gl. (D.16) erhält man schließlich in dimensionslosen Koordinaten

$$g(\xi,\eta,\eta') = \frac{\ell(\eta')}{2b}\left[a_0(\eta')\, i(\xi,\eta) + \frac{a_1}{4}(\eta')\, j(\xi,\eta)\right] \tag{D.20}$$

Mit dem Anstellwinkel der Skelettlinie nach Gl. (4.02)

$$\alpha_{\text{Skelett}}(\xi,\eta) = \alpha_P(\xi,\eta) - \frac{\partial z_{\text{Skelett}}}{\partial x}(\xi,\eta) \tag{D.21}$$

erhält man schließlich für die kinematische Strömungsbedingung aus Gl. (D.17)

$$\alpha_P(\xi,\eta) - \frac{\partial z_{\text{Skelettp}}}{\partial x_p}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\frac{\partial g}{\partial \eta'}\left[a_0\frac{\ell(\eta')}{2b}(\eta')\, i(\xi,\eta) + \frac{a_1}{4}\frac{\ell(\eta')}{2b}(\eta')\, j(\xi,\eta)\right]}{\eta-\eta'} d\eta' \tag{D.22}$$

Hierin sind die Einflussfunktionen i(ξ,η) und j(ξ,η) sowie $\partial z_{\text{Skelett p}} / \partial x_p(\xi,\eta)$ durch die Flügelgeometrie bestimmt und der Flügelanstellwinkel α_F kann als gegeben angesehen werden, so dass die Koeffizienten a_0 und a_1 die Unbekannten des Problems darstellen. Ihre physikalische Bedeutung soll im Folgenden näher bestimmt werden.

Anhang E Bestimmung der örtlichen Beiwerte

Für den örtlichen Auftriebsbeiwert gilt entsprechend Gl. (O.43):

$$c_a(y) = \frac{2}{V_\infty \, \ell(y)} \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} k(x,y)\,dx \tag{E.01}$$

Aus Gl. (E.01) und dem Ansatz für die Wirbeldichteverteilung nach Gl. (4.15)

$$k(\varphi, y) = \frac{V_\infty}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\, h_n(\varphi) \tag{E.02}$$

wobei die Koordinate x nach Gl. (D.02) und Gl. (D.03) durch den Polarwinkel φ zu ersetzen ist. Damit gilt für den lokalen Auftriebsbeiwert

$$c_a(y) = \frac{1}{\ell(y)} \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\, h_n(\varphi)\, dx \tag{E.03}$$

Für den hier betrachteten Fall des zweiparametrigen Ansatzes für die Wirbeldichteverteilung in Profiltiefenrichtung mit den beiden Einheitsfunktionen nach Gl. (D.13) (siehe auch Gl. (4.16))

$$\begin{aligned} h_0(\varphi) &= \frac{2}{\pi} \cot\frac{\varphi}{2} \\ h_1(\varphi) &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \end{aligned} \tag{E.04}$$

erhält man die Wirbeldichteverteilung

$$k(\varphi, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \left[a_0(y) \cot\frac{\varphi}{2} + a_1(y) \frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \right] \tag{E.05}$$

Setzt man Gl. (E.05) in Gl. (E.03) ein und substituiert die Integrationsvariable dx unter Verwendung von Gl. (4.17) und Gl. (O.35)

$$\begin{aligned} X &= \frac{x - x_{VK}(y')}{\ell(y')} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi\right) \\ X' &= \frac{x' - x_{VK}(y')}{\ell(y')} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi'\right) \end{aligned} \tag{E.06}$$

durch

$$\begin{aligned} dx &= \ell(y)\,dX \\ dX &= \frac{1}{2} \sin\varphi \, d\varphi \\ dx &= \frac{\ell(y)}{2} \sin\varphi \, d\varphi \end{aligned} \tag{E.07}$$

erhält man für den örtlichen Auftriebsbeiwert

$$c_a(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[a_0(y)\cot\frac{\varphi}{2} + a_1(y)\frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right]\sin\varphi\, d\varphi \tag{E.08}$$

wobei für die Integrationsgrenzen ausgedrückt durch den Polarwinkel φ eingesetzt wurde:

$$\begin{aligned} x = x_{VK} &\rightarrow X = 0 \rightarrow \varphi = 0 \\ x = x_{HK} &\rightarrow X = 1 \rightarrow \varphi = \pi \end{aligned} \tag{E.09}$$

Zur Lösung von Gl. (E.08) werden die beiden Terme des Integranden getrennt betrachtet, wobei die beiden Koeffizienten bezüglich der Integration in Profiltiefenrichtung als konstant anzusehen sind:

$$c_a(y) = I_1 + I_2 \tag{E.10}$$

mit

$$I_1 = \frac{a_0(y)}{\pi}\int_0^{\pi}\cot\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\, d\varphi \tag{E.11}$$

$$I_2 = \frac{a_1(y)}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi \tag{E.12}$$

Lösung von I_1:

Mit der Beziehung

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} \tag{E.13}$$

erhält man

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{a_0(y)}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi\ )d\varphi \\ &= \frac{a_0(y)}{\pi}\left[\varphi + \sin\varphi\right]_0^{\pi} \\ &= a_0(y) \end{aligned} \tag{E.14}$$

Lösung von I_2:

Mit

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1+\cos\varphi}\,\sqrt{1-\cos\varphi} \tag{E.15}$$

und

$$\cos 3\frac{\varphi}{2} = 4\cos^3\frac{\varphi}{2} - 3\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 3\right) \tag{E.16}$$

sowie den Funktionen für halbe Winkel

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$$
$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} \tag{E.17}$$

erhält man

$$I_2 = \frac{a_1(y)}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{2}-3\right)}{\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}}\sqrt{1+\cos\varphi}\ \sqrt{1-\cos\varphi}\,d\varphi$$
$$= \frac{a_1(y)}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\left(4\cos^2\frac{\varphi}{2}-3\right)d\varphi = \frac{a_1(y)}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\left(4\frac{1+\cos\varphi}{2}-3\right)d\varphi \tag{E.18}$$

$$I_2 = \frac{a_1(y)}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)(2\cos\varphi-1)\,d\varphi$$
$$= \frac{a_1(y)}{\pi}\int_0^{\pi}(2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1)\,d\varphi \tag{E.19}$$

Hierfür kann die allgemeine Lösung z.B. BRONSTEIN [Bronstein 1987, Integral Nr. 314] entnommen werden:

$$I_2 = \frac{a_1(y)}{\pi}\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\sin\varphi-\varphi\right]_0^{\pi}$$
$$I_2 = 0 \tag{E.20}$$

Damit folgt schließlich für den Auftriebsbeiwert aus Gl. (E.10):

$$c_a(y) = a_0(y) \tag{E.21}$$

Nickmomentenbeiwert

Das örtliche Nickmoment kann ebenfalls direkt aus der Druckverteilung ermittelt werden. Als Bezugspunkt wird hier der örtliche ℓ/4-Punkt gewählt (schwanzlastig positiv), so dass gilt [Thomas 1972, S. 57]:

$$c_{m25}(y) = -\frac{1}{\ell^2(y)}\int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} \Delta c_p(x,y)\,(x-x_{25})\,dx \tag{E.22}$$

Aus Gl. (E.06) folgt für den lokalen Hebelarm

$$(x-x_{25}) = \ell(X-0{,}25) = \frac{\ell}{4}(1-2\cos\varphi) \tag{E.23}$$

Setzt man entsprechend dem Vorgehen beim Auftriebsbeiwert ein, erhält man

$$c_{m25}(y) = -\frac{1}{4\ell(y)\,\pi}\int_0^{\pi}\left[a_0(y)\cot\frac{\varphi}{2} + a_1(y)\,\frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right]\sin\varphi\,(1-2\cos\varphi)\,d\varphi \tag{E.24}$$

Auch hier werden die beiden Terme des Integranden getrennt betrachtet

$$c_{m25}(y) = I_3 + I_4 \tag{E.25}$$

$$I_3 = -\frac{a_0(y)}{4\ell(y)\,\pi}\int_0^{\pi}\cot\frac{\varphi}{2}\,\sin\varphi\,(1-2\cos\varphi)\,d\varphi \tag{E.26}$$

$$I_4 = -\frac{a_1(y)}{4\ell(y)\,\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,\sin\varphi\,(1-2\cos\varphi)\,d\varphi \tag{E.27}$$

Lösung von I_3:

Unter Verwendung von Gl. (E.08) erhält man

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{a_0(y)}{4\ell(y)\,\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\,(1-2\cos\varphi)\,d\varphi \\ &= \frac{a_0(y)}{4\ell(y)\,\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\,(2\cos\varphi-1)\,d\varphi \end{aligned} \tag{E.28}$$

Bis auf den Vorfaktor ist dieses Integral identisch mit dem Integral I_2 nach Gl. (E.19), so dass mit Gl. (E.20) gilt:

$$I_3 = 0 \tag{E.29}$$

Da a_0 identisch mit dem örtlichen Auftriebsbeiwert ist und dieser Anteil keinen Beitrag zum Nickmoment um den ℓ/4-Punkt liefert, ist der ℓ/4-Punkt identisch mit dem Neutralpunkt des Elementarflügels:

$$\frac{x_{Nv}}{\ell_v} = 0{,}25 \tag{E.30}$$

Lösung von I_4:

Unter Verwendung von Gl. (E.19) erhält man

$$I_4 = -\frac{a_1(y)}{4\pi}\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1\right)\left(1-2\cos\varphi\right)d\varphi$$

$$= -\frac{a_1(y)}{4\pi}\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1-4\cos^3\varphi-2\cos^2\varphi+2\cos\varphi\right)d\varphi \qquad \text{(E.31)}$$

$$= \frac{a_1(y)}{4\pi}\int_0^{\pi}\left(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi+1\right)d\varphi$$

$$I_4 = \frac{a_1(y)}{4\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos 3\varphi+1\right)d\varphi \qquad \text{(E.32)}$$

Hierfür kann die allgemeine Lösung z.B. BRONSTEIN [Bronstein 1987, Integral Nr. 313] entnommen werden:

$$I_4 = \frac{a_1(y)}{4\pi}\left[\frac{1}{3}\sin 3\varphi+\varphi\right]_0^{\pi} \qquad \text{(E.33)}$$

$$I_4 = \frac{a_1(y)}{4}$$

Damit folgt schließlich für den Nickmomentenbeiwert aus Gl. (E.25)

$$c_{m25}(y) = \frac{a_1(y)}{4} \qquad \text{(E.34)}$$

Anhang F Bestimmung der Gesamtbeiwerte

Die folgenden Herleitungen berücksichtigen, dass die örtliche Anströmung in jedem Flügelschnitt unterschiedlich sein kann, d.h. die Betrachtungen erfolgen unter Berücksichtigung der Einflüsse von

- Starrkörperdrehung,
- Elastizität und
- räumlicher Windfelder.

Hierbei wird zunächst angenommen, dass sich lediglich die Anströmrichtung ändert. Der allgemeine Fall, dass sich auch der Betrag der Geschwindigkeit ändern kann, wird anschließend betrachtet.

Die angegebenen Gleichungen für Gesamtbeiwerte sind nicht als die Gesamtbeiwerte des Flugzeugs zu verstehen sondern als Gesamtbeiwerte des Flügels. Für das Höhenleitwerk gelten entsprechende Beziehungen. Die Gesamtbeiwerte des Flugzeugs können daraus mit den in der Flugmechanik üblichen Beziehungen bestimmt werden, siehe z.B. [Wilhelm], [Schänzer 1981].

Die im Folgenden angegebenen Beziehungen liefern die Gesamtbeiwerte im aerodynamischen Koordinatensystem des (des Gesamtflugzeugs), Index „a“. Alternativ könnte auch das flugzeugfeste Koordinatensystem Index „f“ gewählt werden. Dies hätte jedoch den Nachteil, das erstens die Begriffe Auftrieb und Widerstand im allgemeinen Verständnis auf die Achsen des aerodynamischen Koordinatensystems bezogen sind und zweitens ein besserer Vergleich mit gegebenen Werten z.B. aus der Tabellenaerodynamik gegeben ist, die üblicherweise ebenfalls im aerodynamischen Koordinatensystem vorliegen. Ein weiterer Grund gegen die Formulierung im flugzeugfesten Koordinatensystem ist dadurch gegeben, dass hierbei eine Transformation mit dem Anstellwinkel α als Drehwinkel auftritt, die zusammen mit Anstellwinkeländerungen $\Delta\alpha$ zu Termen mit α^2 führen würde, so dass scheinbar quadratische Abhängigkeiten entstehen würden, die im Widerspruch zu den einfachen Geradenansätzen bei den Korrektur- und Kalibrationsmaßnahmen stehen, siehe Kapitel 6.

F.1 Kräfte

F.1.1 Auftrieb

F.1.1.1 homogene Anströmung

Zunächst wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die ungestörte Anströmung an jedem Punkt identisch ist, d.h. das Flugzeug ist starr, das Windfeld ist gleichförmig und das Flugzeug rotiert nicht – die (ungestörte) Anströmung ist homogen.

Den Auftrieb des Flügels erhält man durch Integration der Kräfte an einem Flügelelement der Spannweite dy über die Flügelspannweite. Für den Gesamtauftrieb eines Flügels in einer homogenen Strömung gilt allgemein:

$$A = \int_{-s}^{s} dA(y) = \frac{\rho}{2} V^2 \int_{-s}^{s} c_a(y)\, \ell(y)\, dy = \frac{\rho}{2} V^2 S\, C_A \tag{F.01}$$

Für den Gesamt-Auftriebsbeiwert gilt damit allgemein

$$C_A = \frac{1}{S} \int_{-s}^{s} c_a(y)\, \ell(y)\, dy \tag{F.02}$$

Mit der dimensionslosen Spannweitenkoordinate

$$\eta = \frac{y}{b/2} = \frac{y}{s} \tag{F.03}$$

und der dimensionslosen Zirkulation

$$\gamma = \frac{c_a \, \ell}{2b} \tag{F.04}$$

erhält man

$$C_A = \Lambda \int_{-1}^{1} \gamma(\eta) \, d\eta \tag{F.05}$$

mit der Streckung

$$\Lambda = \frac{b^2}{S} \tag{F.06}$$

Mit Übergang auf Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \eta &= \cos \vartheta \\ d\eta &= -\sin \vartheta \, d\vartheta \end{aligned} \tag{F.07}$$

erhält man

$$C_A = \Lambda \int_{0}^{\pi} \gamma(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \tag{F.08}$$

Beschränkt man sich in der Berechnung auf die diskreten Stützstellen entsprechend dem MULTHOPP-Verfahren, siehe Bild F.1, gilt

$$C_A = \Lambda \sum_{n=1}^{M} \gamma_n \sin \vartheta_n \, \Delta\vartheta \tag{F.09}$$

$$\vartheta_n = \frac{\pi \, n}{M+1} \tag{F.10}$$

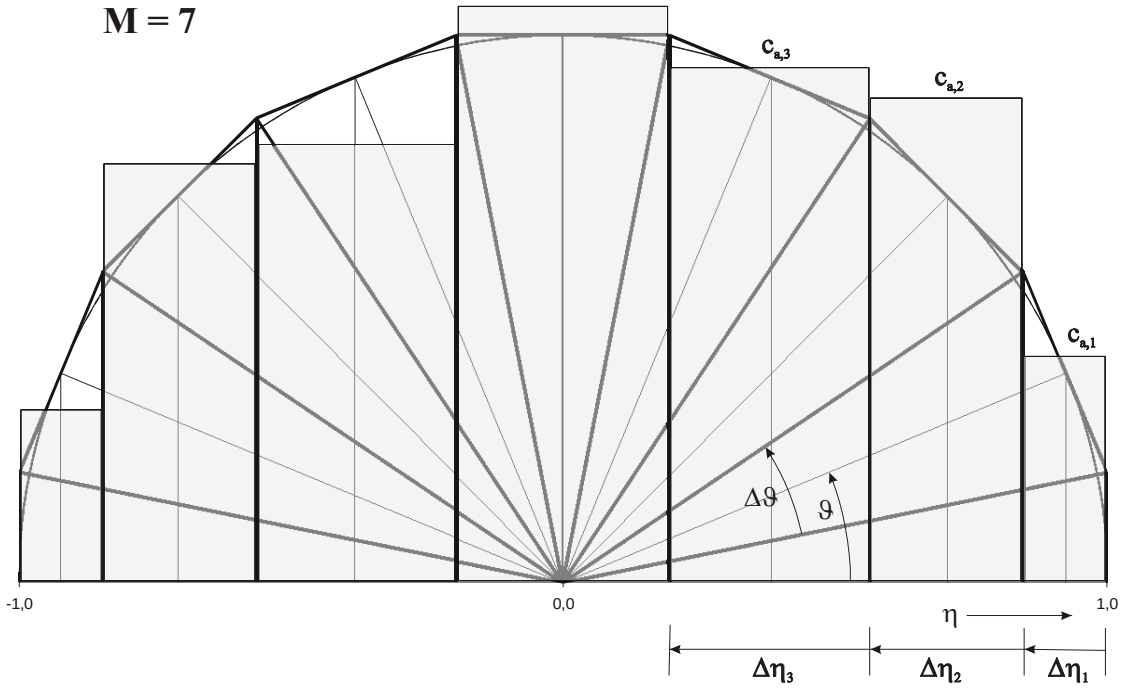

Bild F.1 Gesamt-Auftriebsbeiwert durch Summation über die Multhopp-Schnitte

Da $\Delta\vartheta$ konstant ist

$$\Delta\vartheta = \frac{\pi}{M+1} \tag{F.11}$$

erhält man schließlich

$$C_A = \Lambda \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \gamma_n \sin\vartheta_n \tag{F.12}$$

Da das Tragflächenverfahren direkt die Verteilung der örtlichen Beiwerte als Ergebnis liefert, siehe z.B. Gl. (5.24), ist es sinnvoll, in Gl. (F.12) die dimensionslose Zirkulation wieder durch Gl. (F.04) zu ersetzen:

$$C_A = \frac{b/2}{S} \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} c_{an}\, \ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.13}$$

F.1.1.2 Berücksichtigung von lokalen Änderungen der Anströmrichtung

Die hergeleiteten Beziehungen gelten unter der Voraussetzung, dass die Vektoren der örtlichen Auftriebskräfte in dieselbe Richtung zeigen. Da der örtliche Auftrieb senkrecht auf der örtlichen Anströmung steht, ist dies gleichbedeutend mit der Bedingung, dass die wirksamen örtlichen Anströmrichtungen überall identisch sind. Dieses ist jedoch nicht der Fall (siehe Bild F.2):

a) Infolge der endlichen Flügelspannweite wird am Flügel selbst ein Abwind induziert, der einerseits den örtlichen Anstellwinkel vermindert und andererseits den Auftriebsvektor nach hinten kippen lässt. Dies führt zur Entstehung des induzierten Widerstands, siehe nachfolgendes Kapitel F.2. Der induzierte Anstellwinkel ändert sich mit der Spannweite.

b) Durch Drehbewegungen des Starrkörpers, durch elastische Verformungen und durch räumliche Windfelder kann der örtliche Anströmvektor in jedem betrachteten Aufpunkt unterschiedlich sein. Die Anströmrichtung (der ungestörten Strömung, d.h. ohne induzierten Abwind) ändert sich damit in Spannweitenrichtung.

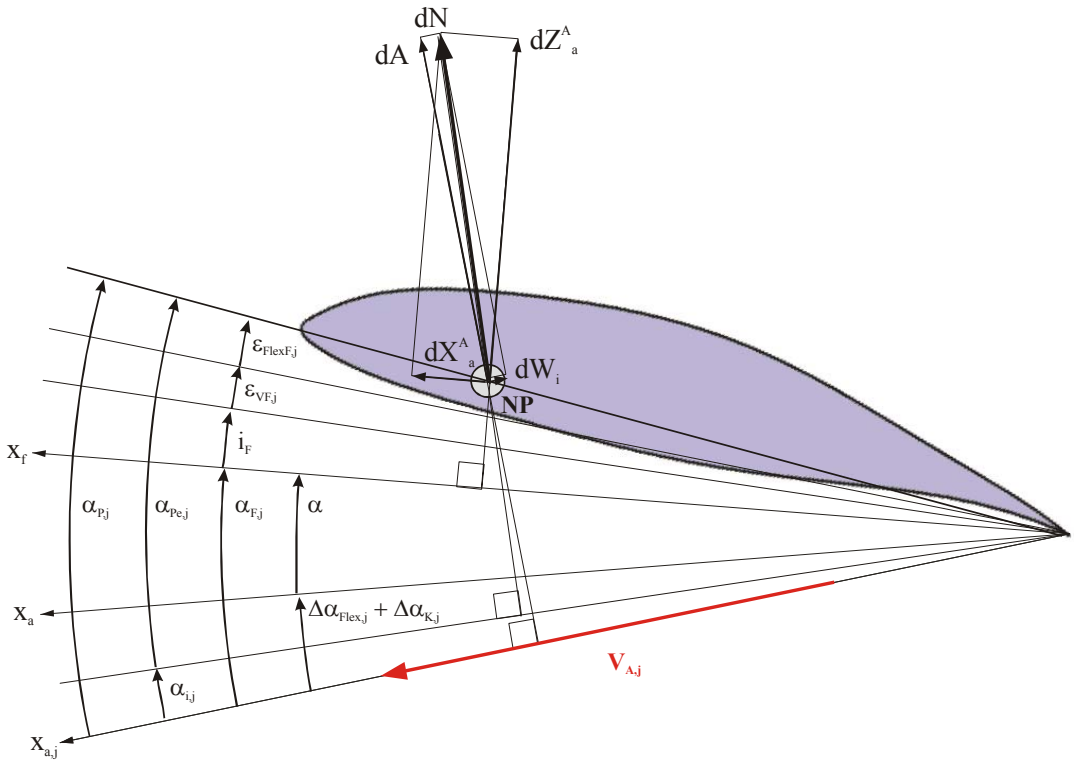

Bild F.2 Anströmung und Kräfte an einem Profilschnitt

Üblicherweise wird als Auftrieb die Komponente der Luftkraft bezeichnet, die senkrecht zur Anströmrichtung wirkt. Diese Definition soll auch für den hier betrachteten Fall weiterhin Gültigkeit haben, wobei lediglich die Anströmrichtung örtlich unterschiedlich sein kann. Der örtliche Auftrieb ist also die Komponente der örtlichen Luftkraft, die senkrecht zur der örtlichen Anströmrichtung wirkt. Die von einem Flügelelement erzeugte Normalkraft dN (Potentialtheorie, d.h. ohne Profilwiderstand) kann damit wie folgt in Auftrieb und induzierten Widerstand zerlegt werden[126]:

$$\begin{aligned} dA(y) &= dN(y)\cos\alpha_i(y) \\ dW_i(y) &= dN(y)\sin\alpha_i(y) \end{aligned} \tag{F.14}$$

Der induzierte Widerstand wird in Kapitel F.2 betrachtet. Für den örtlichen Auftriebsbeiwert gilt damit:

$$c_a(y) = \frac{dA(y)}{\frac{\rho}{2}V^2\ \ell(y)\,dy} = \frac{dN(y)}{\frac{\rho}{2}V^2\ \ell(y)\,dy}\cos\alpha_i(y) \tag{F.15}$$

Da der induzierte Anstellwinkel α_i als klein voraussetzt werden kann, gilt vereinfachend:

$$dA(y) = dN(y) \tag{F.16}$$

sowie

$$c_a(y) = \frac{dN(y)}{\frac{\rho}{2}V^2\ \ell(y)\,dy} \tag{F.17}$$

Bei der Bestimmung der Gesamtbeiwerte (des Flügels) müssen die lokalen Anteile in ein gemeinsames Koordinatensystem transformiert werden. Sinnvollerweise wird hierfür das experimentelle Koordinatensystem des Gesamtflugzeugs (Index „e“) ausgewählt[127], so dass für die jeweiligen Komponenten der örtlichen Luftkraft in z_a-Richtung gilt:

$$dZ_a^A(y) = -dN(y)\cos\left(\alpha_F(y) - \alpha - \alpha_i(y)\right) \tag{F.18}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wiederum dimensionslose Beiwerte eingeführt[128]:

$$\Delta C_A(y) = -\frac{dZ_a^A(y)}{\frac{\rho}{2}V^2\ \ell(y)\,dy} = \frac{dN(y)}{\frac{\rho}{2}V^2\ \ell(y)\,dy}\cos\left(\alpha_F(y) - \alpha - \alpha_i(y)\right) \tag{F.19}$$

Da die lokalen Winkeldifferenzen $(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)$ als klein vorausgesetzt werden sollen, folgt:

[126] Die örtlichen Beiwerte werden nicht auf das experimentelle (bzw. aerodynamische) Koordinatensystem des Gesamtflugzeugs (Index „e“ bzw. Index „a“) bezogen, obwohl dies zu einer einfacheren Schreibweise führen würde. Die Gründe hierfür sind einerseits das oben erwähnte allgemeine Verständnis der Bezeichnung „Auftrieb“, die auch für örtliche Größen gelten sollte, sowie die Tatsache, dass beim Bezug auf das Gesamt-Koordinatensystem die örtlichen Beiwerte kein Gefühl mehr für die physikalische Sinnfälligkeit mehr enthalten. Hiermit ist gemeint, dass bei einem gegebenen Profil mit bekannter Auftriebskurve $c_a(\alpha)$ bei der hier verwendeten Definition des örtlichen Auftriebsbeiwertes stets eine Überprüfung möglich ist, ob der lineare Anstellwinkelbereich noch als gültig angesehen werden kann und ob nicht sogar bereits der Maximalauftrieb überschritten wird. Eine solche Überprüfung ist aber gerade bei einem linearen Verfahren wie es hier Verwendung findet von besonderer Bedeutung.

Die folgende Betrachtung beschränkt sich allerdings auf kleine Anstellwinkel, so dass beim örtlichen Auftriebsbeiwert kein Unterschied zwischen den auf die örtliche Anströmrichtung und den auf die Gesamt-Anströmrichtung bezogenen Zahlenwerten besteht ($\cos\alpha \approx \cos\alpha_F \approx 1$). Die getroffene Unterscheidung erscheint daher beim Auftrieb zunächst rein akademischer Natur, allerdings trifft dies für den Widerstand nicht mehr zu.

[127] Das aerodynamische Koordinatensystem (Index „a“) ist grundsätzlich ebenfalls geeignet, allerdings liegt hierbei die x_a-Achse im allgemeinen Fall nicht in der Flugzeugsymmetrieebene sondern ist um den Schiebewinkel β aus dieser herausgedreht. Damit müsste der Schiebewinkel in den folgenden Herleitung jeweils berücksichtigt werden. Die Verwendung des experimentellen Koordinatensystems erleichtert insofern die Betrachtungsweise erheblich. Die so ermittelten Gesamtwerte können zum Schluss auf einfache Weise durch eine einfache Transformation in das aerodynamische Koordinatensystem überführt werden.

[128] Der Zusatz Δ kennzeichnet, dass es sich um einen Anteil zum Gesamtbeiwert C_A handelt.

$$\Delta C_A(y) = \frac{dN(y)}{\frac{\rho}{2} V^2 \, \ell(y) \, dy} \tag{F.20}$$

so dass gilt:

$$\Delta C_a(y) = c_a(y) \tag{F.21}$$

Gl. (F.21) zeigt, dass für kleine Winkel Gl. (F.13) auch für den verallgemeinerten Fall gültig ist.

F.1.1.3 Berücksichtigung von Änderungen des Betrages der Anströmung

Ändert sich der Betrag der Anströmung in jedem betrachteten Flügelabschnitt, sind die örtlichen Beiwerte auf die örtliche Geschwindigkeit zu beziehen[129]:

$$c_a(y) = \frac{dA(y)}{\frac{\rho}{2} V^2(y) \, \ell(y) \, dy} \tag{F.22}$$

Für den Auftrieb des Flügels gilt damit

$$A = \int_{-s}^{s} dA(y) = \frac{\rho}{2} \int_{-s}^{s} c_a(y) \, V^2(y) \, \ell(y) \, dy = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \, S \, C_A \tag{F.23}$$

V_∞ Anströmgeschwindigkeit des Flugzeug-Bezugspunktes

so dass für den Auftriebsbeiwert des Flügels folgt:

$$C_A = \frac{1}{V_\infty^2 \, S} \int_{-s}^{s} c_a(y) \, V^2(y) \, \ell(y) \, dy \tag{F.24}$$

Damit können Geschwindigkeitsänderungen in der Summation in einfacher Weise berücksichtigt werden:

$$C_A = \frac{b/2}{S} \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} c_{an} \frac{\overline{V}_n^2}{V_\infty^2} \ell_n \sin \vartheta_n \tag{F.25}$$

Hierbei ist $\overline{V}_n$ die wirksame mittlere Anströmgeschwindigkeit des betrachteten Elementarflügels. Hier wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeitsänderungen in Profiltiefenrichtung moderat sind und der vom Anstellwinkel abhängige Auftrieb im Wesentlichen von den Anströmverhältnissen im Bereich des ℓ/4-Punktes bestimmt wird, so dass vereinfachend die Anströmgeschwindigkeit im ℓ/4-Punkt des Flügelschnittes n eingesetzt werden kann:

$$\overline{V}_n \approx V_n\big|_{x=x_{25\%}} = V_{25n} \tag{F.26}$$

$$C_A = \frac{b/2}{S} \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} c_{an} \frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2} \ell_n \sin \vartheta_n \tag{F.27}$$

[129] Diese Definition des örtlichen Beiwertes soll als die allgemeingültige Definition betrachtet werden. Die vorher angeführten Beziehungen sind als Sonderfall der hier angeführten Beziehung anzusehen.

F.1.2 Widerstand

Der Widerstand (des Flügels) setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen[130]:

$$W = W_P + W_i + W_W \tag{F.28}$$

W_P Profilwiderstand (Druck- und Reibungseinfluss)
W_i induzierter Widerstand
W_W Wellenwiderstand

Hier sollen nur Unterschall-Flugzustände ohne transsonische Effekte betrachtet werden, so dass kein Wellenwiderstand auftritt.

F.1.2.1 induzierter Widerstand in homogener Anströmung

Zunächst wird hier der induzierte Widerstand betrachtet, der (wie bereits dargelegt) durch den vom endlichen Flügel induzierten Abwindwinkel α_i entsteht. Hierdurch wird der lokale Anstellwinkel auf den effektiven Anstellwinkel α_e reduziert (siehe Bild F.2):

$$\alpha_e(y) = \alpha_P(y) - \alpha_i(y) \tag{F.29}$$

α_P Anstellwinkel des Profils (zur ungestörten örtlichen Anströmung)
α_e effektiver Anstellwinkel
α_i induzierter Anstellwinkel

Der lokale Auftriebsvektor wird dadurch beim endlichen Flügel im Vergleich zum unendlichen Flügel nach hinten gekippt. Die Projektion des lokalen Auftriebsvektors auf die ungestörte Anströmrichtung ergibt den örtlichen induzierten Widerstand:

$$dW_i(y) = dN(y) \sin\alpha_i(y) \tag{F.30}$$

bzw. den örtlichen induzierten Widerstandsbeiwert:

$$c_{wi}(y) = \frac{dW_i(y)}{\frac{\rho}{2}V^2\ \ell(y)\,dy} = \frac{dN(y)}{\frac{\rho}{2}V^2\ \ell(y)\,dy}\sin\alpha_i(y) \tag{F.31}$$

und mit Gl. (F.20) und Gl. (F.21):

$$c_{wi}(y) = c_a(y) \sin\alpha_i(y) \tag{F.32}$$

Unter der Voraussetzung kleiner Anstellwinkel gilt vereinfachend:

$$c_{wi}(y) = c_a(y)\,\alpha_i(y) \tag{F.33}$$

Die Berechnung des induzierten Abwindwinkels α_i. erfolgt über die induzierte Abwindgeschwindigkeit w, siehe auch Kapitel 5[131]:

$$\alpha_i(y) = -\frac{w_i(y)}{V_\infty} \tag{F.34}$$

Für die an einem beliebigen Punkt P(x,y) vom Flügel induzierte Abwindgeschwindigkeit gilt:

[130] Widerstandsanteile infolge Interferenzeffekten und Steuerausschlägen werden im Widerstand des Gesamtflugzeugs berücksichtigt und werden daher beim Flügel allein nicht berücksichtigt.

[131] Hierbei ist zu beachten, dass ein Abwind ($w < 0$, positive z_p weist nach oben) einen positiven Abwindwinkel α_i zur Folge hat, denn nach Gl. (F.29) wird durch einen positiven Abwindwinkel $\alpha_i > 0$ der effektive Anstellwinkel reduziert. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass der Abwindwinkel in einem Profilschnitt konstant sei, da er den wirksamen Anstellwinkel des betreffenden Flügelschnittes insgesamt reduziert.

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \int_{x_{VK(y')}}^{x_{HK(y')}} k(x',y') \frac{1 + \dfrac{x - x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{(y-y')^2} \, dx' \, dy' \tag{F.35}$$

Der induzierte Abwindwinkel stellt die Änderung der gesamten Anströmung in einem Flügelschnitt dar. Zur Bestimmung des noch unbekannten induzierten Abwindwinkels α_i ist daher nicht die Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung heranzuziehen, sondern die Selbstinduktion zu bestimmen, d.h. die Wirkung der elementaren Hufeisenwirbel auf sich selbst. Es ist daher die Abwindgeschwindigkeit für jeden Ort x = x' zu bestimmen. Hierfür folgt aus Gl. (F.31):

$$w_i(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \int_{x_{VK(y')}}^{x_{HK(y')}} \frac{k(x',y')}{(y-y')^2} \, dx' \, dy' \tag{F.36}$$

Die neu eingeführte Bezeichnung w_i kennzeichnet, dass es sich um den Sonderfall x = x' handelt. Da (y-y') für die Integration über dx' als konstant betrachtet wird, erhält man:

$$w_i(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{1}{(y-y')^2} \int_{x_{VK(y')}}^{x_{HK(y')}} k(x',y') \, dx' \, dy' \tag{F.37}$$

Für den inneren Integranden gilt:

$$d\Gamma(x',y') = k(x',y') \, dx' \tag{F.38}$$

Das innere Integral stellt damit die gesamte Zirkulation aller elementaren Hufeisenwirbel eines Elementarflügels der Spannweite dy' dar:

$$\Gamma(y') = \int_{x_{VK}}^{x_{HK}} d\Gamma(x',y') = \int_{x_{VK}}^{x_{HK}} k(x',y') \, dx' \tag{F.39}$$

Damit erhält man für die selbst induzierte Abwindgeschwindigkeit

$$w_i(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{\Gamma(y')}{(y-y')^2} \, dy' \tag{F.40}$$

Diese ist nicht mehr von der Profiltiefenrichtung abhängig, d.h. an jedem Ort in x-Richtung konstant. Hierbei ist zu beachten, dass Gl. (F.40) nur im Bereich des Flügels gilt. Gl. (F.40) kann durch partielle Integration umgeformt werden:

$$w_i(y) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\Gamma(y')}{y-y'} \right]_{-s}^{+s} - \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma(y')/dy'}{y-y'} \, dy' \tag{F.41}$$

Da an den Flügelenden die Zirkulation verschwindet

$$\Gamma(y' = \pm s) \equiv 0 \tag{F.42}$$

entfällt der erste Term in Gl. (F.37) und es bleibt:

$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s}\frac{d\Gamma(y')/dy'}{y-y'}dy' \tag{F.43}$$

Damit erhält man mit Gl. (F.30) für den gesuchten Abwindwinkel:

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-s}^{+s}\frac{d\Gamma(y')}{dy'}\frac{dy'}{y-y'} \tag{F.44}$$

Dieses Ergebnis stimmt exakt mit dem Ergebnis der PRANDTL'schen Traglinientheorie für den unverwundenen Flügel überein [Multhopp 1938 S. 153]. Eine andere Schreibweise folgt unmittelbar aus Gl. (F.40):

$$\alpha_i(y) = -\frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-s}^{+s}\frac{\Gamma(y')}{(y-y')^2}dy' \tag{F.45}$$

Durch Einführung der dimensionslosen Größen

$$\eta = \frac{y}{s}$$
$$\gamma = \frac{\Gamma}{bV_\infty} \tag{F.46}$$

erhält man schließlich

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{d\gamma(\eta')}{d\eta'}\frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \tag{F.47}$$

Interessiert man sich lediglich für die Bestimmung des induzierten Anstellwinkels an den diskreten MULTHOPP-Schnitten, kann die Lösung direkt z.B. aus [Multhopp 1938 S. 153] übernommen werden, siehe Anhang B. Damit erhält man für den induzierten Anstellwinkel:

$$\alpha_{i\nu} = b_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n}\gamma_n \tag{F.48}$$

Der hochgestellte Strich am Summenzeichen bedeutet, dass der Term für $n = \upsilon$ auszulassen ist.

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass dies trotz der formalen Ähnlichkeit nicht identisch mit der kinematischen Strömungsbedingung ist:

$$\alpha_{\text{Skelett}\,\nu} = b_{\nu\nu}g_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n}g_n \tag{4.13}$$

Hier enthält die Verteilungsfunktion g sowohl Einflüsse aus der Zirkulations- als auch aus der dimensionslosen Nickmomentenverteilung:

$$g(\xi,\eta;\eta') = \gamma(\eta')\,i(\xi,\eta;\eta') + \mu(\eta')\,j(\xi,\eta;\eta') \tag{O.61}$$

Der Abwindwinkel ist daher nicht mit der kinematischen Strömungsbedingung zu verwechseln, obwohl ein enger Zusammenhang in der Herleitung besteht. Der Abwindwinkel beschreibt vielmehr den Einfluss des Flügels auf das Strömungsfeld selbst am Ort des Flügels.

Für die MULTHOPP-Koeffizienten $b_{\upsilon n}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
b_{\nu\nu} &= \frac{M+1}{4}\frac{1}{\sin\vartheta_\nu} && \text{für } n=\nu \\
b_{\nu n} &= \frac{1-(-1)^{\nu-n}}{2(M+1)}\frac{\sin\vartheta_n}{(\cos\vartheta_n-\cos\vartheta_\nu)^2} && \text{für } n\neq\nu
\end{aligned}
\tag{F.49}
$$

Die MULTHOPP-Koeffizienten sind lediglich von der Anzahl der Flügelschnitte M abhängig und werden bereits zur Bestimmung der Matrix $\underline{\underline{K}}$ benötigt. Sie können daher hier als bereits bekannt angesehen werden. Die in Gl. (F.48) enthaltene lokale Zirkulation γ kann durch die bereits bekannten dazugehörigen örtlichen Auftriebsbeiwerte ersetzt werden:

$$
\gamma_n = \frac{c_{an}\ell_n}{2b} \tag{F.50}
$$

$$
\alpha_{i\nu} = b_{\nu\nu}\frac{c_{a\nu}\ell_\nu}{2b} - {\sum_{n=1}^{M}}' b_{\nu n}\frac{c_{an}\ell_n}{2b} \tag{F.51}
$$

Mit den neu eingeführten Koeffizienten B[132]:

$$
\begin{aligned}
B_{\nu\nu} &= +\frac{\ell_\nu}{2b}b_{\nu\nu} = +\frac{\ell_\nu}{2b}\frac{M+1}{4}\frac{1}{\sin\vartheta_\nu} && \text{für } n=\nu \\
B_{\nu n} &= -\frac{\ell_n}{2b}b_{\nu n} = -\frac{\ell_n}{2b}\frac{1-(-1)^{\nu-n}}{2(M+1)}\frac{\sin\vartheta_n}{(\cos\vartheta_n-\cos\vartheta_\nu)^2} && \text{für } n\neq\nu
\end{aligned}
\tag{F.52}
$$

erhält man schließlich für den örtlichen induzierten Anstellwinkel:

$$
\alpha_{i\nu} = B_{\nu\nu}c_{a\nu} + {\sum_{n=1}^{M}}' B_{\nu n}c_{an} \tag{F.53}
$$

Die Berechnung aller induzierten Anstellwinkel der M Flügelschnitte kann wiederum durch eine Matrizenoperation ausgedrückt werden:

$$
\begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{iM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{M1} & \cdots & B_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{a1} \\ \vdots \\ c_{aM} \end{bmatrix} \tag{F.54}
$$

bzw. in Kurzschreibweise

$$
\underline{\alpha}_i = \underline{\underline{B}}\,\underline{c}_a \tag{F.55}
$$

mit den Vektoren bzw. der Matrix

$$
\begin{aligned}
\underline{\alpha}_i &= \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{iM} \end{bmatrix} \qquad \underline{c}_a = \begin{bmatrix} c_{a1} \\ \vdots \\ c_{aM} \end{bmatrix} \\
\underline{\underline{B}} &= \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{M1} & \cdots & B_{MM} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{F.56}
$$

Mit der Definition der Matrix

[132] Man beachte die Vorzeichenumkehr der Koeffizienten $B_{\nu n}$!

$$\underline{\underline{c}}_a = \begin{bmatrix} c_{a1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{a2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{aM} \end{bmatrix} \tag{F.57}$$

erhält man aus Gl. (F.33) mit Gl. (F.55) für den zu einem Vektor zusammengefassten induzierten Widerstand:

$$\underline{c}_{wi} = \underline{c}_a \, \underline{\underline{B}} \, \underline{c}_a \tag{F.58}$$

F.1.2.2 Widerstand mit Berücksichtigung von Änderungen der Anströmrichtung

Der Widerstand des gesamten Flügels ergibt sich durch Integration der örtlichen Widerstandsanteile über die Spannweite, so dass gilt:

$$W = \int_{-s}^{s} dW(y) = \frac{\rho}{2} V^2 S \, C_W \tag{F.59}$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Wirkungsrichtungen in jedem Flügelschnitt unterschiedlich sind. Zunächst wird der Widerstand eines Elementarflügels der Breite dy betrachtet, für den im örtlichen aerodynamischen Koordinatensystem mit den einzelnen Widerstandsanteilen gemäß Gl. (F.28), jedoch ohne Wellenwiderstand, gilt:

$$dW = dW_P + dW_i \tag{F.60}$$

Da der Gesamtwiderstand des Flügels als Kraftkomponente in negative x_a –Richtung (bzw. negative x_e–Richtung) definiert ist, werden der örtliche Widerstand und der örtliche Auftrieb (Normalkraft) in das aerodynamische Koordinatensystem des Gesamtflugzeugs transformiert, siehe Bild F.2 und vergleiche Gl. (F.18):

$$dX_a^A(y) = \; dN(y)\sin\left(\alpha_F(y) - \alpha - \alpha_i(y)\right) - dW_P \tag{F.61}$$

Für kleine Anstellwinkel folgt daraus mit Gl. (F.16):

$$dX_a^A(y) = \; dA(y)\left(\alpha_F(y) - \alpha - \alpha_i(y)\right) - dW_P \tag{F.62}$$

Für den Gesamtwiderstand des Flügels gilt damit:

$$W = -\int_{-s}^{s} dX_a^A(y) = \int_{-s}^{s} \left[dW_P - dA(y)\left(\alpha_F(y) - \alpha - \alpha_i(y)\right)\right] \tag{F.63}$$

Der Integrand kann in drei Anteile aufgespalten werden:

$$W = \int_{-s}^{s} dW_P + \int_{-s}^{s} dA(y)\,\alpha_i(y) - \int_{-s}^{s} dA(y)\left(\alpha_F(y) - \alpha\right) \tag{F.64}$$

Der erste Term resultiert aus Druck- und Reibungskräften (Profilwiderstand), der zweite Term resultiert aus dem Einfluss der endlichen Flügelspannweite (induzierter Widerstand), während der dritte Term aus den Abweichungen der lokalen (ungestörten) Anströmung von der (ungestörten) Anströmrichtung des Gesamtflugzeugs resultiert. Der dritte Term entsteht ebenfalls wie der zweite in reibungsloser Strömung. Da die Unterschiede in der Anströmung aus Drehbewegungen des Flugzeuges, elastischer Verformung und einem räumlichen Windfeld resultieren, also letztendlich kinematischen Ursprungs sind, wird hierfür hier der Begriff „kinematischer Widerstand W_K“ eingeführt:

$$W_K = -\int_{-s}^{s} dA(y)\left(\alpha_F(y) - \alpha\right) \tag{F.65}$$

Da sowohl die Auftriebsverteilung dA(y) als auch die Anstellwinkelverteilung $\alpha_F(y)$ unsymmetrisch sein können, kann das Integral über die Flügelspannweite ungleich Null sein. Für die beiden ersten Terme in Gl. (F.64) gilt:

$$W_P = \int_{-s}^{s} dW_P \tag{F.66}$$

$$W_i = \int_{-s}^{s} dA(y)\,\alpha_i(y) \tag{F.67}$$

Mit dem Profilwiderstandsbeiwert

$$c_{wp} = \frac{dW_P}{\frac{\rho}{2}V^2\,\ell(y)\,dy} \tag{F.68}$$

sowie den bereits eingeführten örtlichen Beiwerten nach Gl. (F.15) und Gl. (F.33) gilt

$$W = \frac{\rho}{2}V^2 \int_{-s}^{s}\left[c_{wp}(y) + c_{wi}(y) - c_a(y)\left(\alpha_F(y) - \alpha\right)\right]\ell(y)\,dy \tag{F.69}$$

Definiert man den örtlichen Widerstandsbeiwert im experimentellen (bzw. im aerodynamischen) Koordinatensystem des Gesamtflugzeugs

$$c_{we} = \frac{dW_a}{\frac{\rho}{2}V^2\,\ell(y)\,dy} \tag{F.70}$$

folgt unmittelbar aus Gl. (F.64):

$$c_{we}(y) = c_{wp}(y) + c_{wi}(y) - c_a(y)\left(\alpha_F(y) - \alpha\right) \tag{F.71}$$

bzw. mit Gl. (F.32)

$$c_{we}(y) = c_{wp}(y) - c_a(y)\left(\alpha_F(y) - \alpha - \alpha_i(y)\right) \tag{F.72}$$

Gl. (F.71) zeigt, dass eine positive Differenz ($\alpha_F - \alpha > 0$) eine Widerstandsverminderung (Kraftkomponente nach vorne) hervorruft. Für den Sonderfall, dass die ungestörte Anströmung in jedem Punkt identisch ist ($\alpha_F(y) = \alpha = \text{const.}$) geht Gl. (F.71) über in

$$c_{we,\alpha_F(y)=\text{const.}}(y) = c_{wi}(y) \tag{F.73}$$

Für den Widerstandsbeiwert des Flügels folgt aus Gl. (F.71) mit Gl. (F.33):

$$C_W = \frac{1}{S}\int_{-s}^{s}\left[c_{wp}(y) - c_a(y)\left(\alpha_F(y) - \alpha - \alpha_i(y)\right)\right]\ell(y)\,dy \tag{F.74}$$

Für die einzelnen Anteile kann geschrieben werden:

$$C_{WP} = \frac{1}{S}\int_{-s}^{s} c_{wp}(y)\,\ell(y)\,dy \tag{F.75}$$

$$C_{Wi} = \frac{1}{S}\int_{-s}^{s} c_a(y)\,\alpha_i(y)\,\ell(y)\,dy \tag{F.76}$$

$$C_{WK} = -\frac{1}{S}\int_{-s}^{s} c_a(y)\left(\alpha_F(y)-\alpha\right)\ell(y)\,dy \tag{F.77}$$

Gesamtwiderstand durch Summenbildung

Zerlegt man den Flügel wiederum in M Teilabschnitte entsprechend den MULTHOPP-Schnitten erhält man in Analogie zum Auftriebsbeiwert Gl. (F.13) die folgenden Summenformeln.

Profilwiderstand

$$C_{WP} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{wp}\;\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.78}$$

Wie bereits Gl. (F.75) zeigt, enthält die Gleichung für den Profilwiderstand des Flügels keine Anteile, die von einer Änderung der Anströmrichtung beeinflusst werden. Der Profilwiderstand wirkt sich damit in der Delta-Aerodynamik nicht aus. Dies gilt allerdings nur dann, wenn sich lediglich die Anströmrichtung entlang der Spannweite ändert.

induzierter Widerstand

$$C_{Wi} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{an}\;\alpha_{in}\;\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.79}$$

bzw. mit dem induzierten Anstellwinkel nach Gl. (F.52)

$$C_{Wi} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{an}\left[B_{nn}c_{an} + \sum_{\nu=1}^{M}{}' B_{n\nu}c_{a\nu}\right]\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.80}$$

kinematischer Widerstand

Analog zu Gl. (F.79) gilt für den kinematischen Widerstand

$$C_{WK} = -\frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{an}\left(\alpha_{Fn}-\alpha\right)\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.81}$$

Hierbei stellt α_{Fn} den mittleren lokalen Anstellwinkel zwischen der örtlichen Anströmung und der Flugzeug-Bezugsebene (x_f-y_f-Ebene) dar. Sind die Änderungen der Anströmung in Profiltiefenrichtung klein, kann vereinfachend der Anstellwinkel am ℓ/4-Punkt eingesetzt werden. Die Bestimmung des lokalen Anstellwinkels ist in Kapitel 6.3.2 in der Geschwindigkeitskinematik beschrieben.

Gesamtwiderstand

Der Gesamt-Widerstandsbeiwert (des Flügels) beinhaltet die drei oben formulierten Anteile, so dass gilt:

$$C_W = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{wp} - c_{an}\left(\alpha_{Fn}-\alpha-\alpha_{in}\right)\right]\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.82}$$

F.1.2.3 Widerstand mit Berücksichtigung von Änderungen des Betrages der Anströmung

Die Berücksichtigung von Änderungen des Betrages der Anströmung erfolgt in gleicher Weise wie bereits beim Auftrieb dargelegt.

Profilwiderstand

$$C_{WP} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{wp}\,\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.83}$$

induzierter Widerstand

$$C_{Wi} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{an}\,\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\alpha_{in}\,\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.84}$$

bzw. mit dem induzierten Anstellwinkel nach Gl. (F.52)

$$C_{Wi} = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{an}\,\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\left[B_{nn}c_{an} + \sum_{\nu=1}^{M}{}' B_{n\nu}c_{a\nu}\right]\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.85}$$

kinematischer Widerstand

$$C_{WK} = -\frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} c_{an}\,\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\left(\alpha_{Fn}-\alpha\right)\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.86}$$

Gesamtwiderstand

$$C_W = \frac{b/2}{S}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{wp} - c_{an}\left(\alpha_{Fn}-\alpha-\alpha_{in}\right)\right]\frac{V_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin\vartheta_n \tag{F.87}$$

F.2 Momente

F.2.1 Allgemeine Betrachtungen

Die vom Flügel erzeugten aerodynamischen Momente ergeben sich unmittelbar aus den bereits oben beschriebenen Kräften, wobei wiederum Querkräfte vernachlässigt werden. Bei den Momenten sind alle drei Achsen zu berücksichtigen, da die örtlich unterschiedlich wirkenden Auftriebs- und Widerstandskomponenten Auswirkungen im Roll-, Nick- und Giermoment zur Folge haben. Da die Wirkungsweise damit erheblich komplexer ist, wird zur Bestimmung der Momente eine mehr formalisierte Formulierung bevorzugt. Die Bestimmung erfolgt daher durch eine vektorielle Betrachtungsweise. Die Einfluss der lokalen Anströmrichtungen wird hierbei von vorneherein berücksichtigt, wohingegen der Einfluss von lokalen Geschwindigkeitsunterschieden in einem zweiten Schritt berücksichtigt wird.

Um die Ergebnisse des Tragflächenverfahrens mit denen aus dem Panelverfahren bzw. den Données Aérodynamiques besser vergleichen zu können, ist es sinnvoll, das Gesamt-Nickmoment (des Flügels) auf die Flügelspitze zu beziehen, siehe Bild F.4.

Wirkt eine Kraft $\underline{F}$ auf einen Hebelarm $\underline{r}$, so erzeugt sie das Moment M um die Drehachse senkrecht zur $\underline{r}$-$\underline{F}$-Ebene (siehe Bild F.3):

$$M = r\, F \sin\varphi \tag{F.88}$$

Die vektorielle Bestimmung von $\underline{M}$ erfolgt durch das Vektorprodukt:

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} \tag{F.89}$$

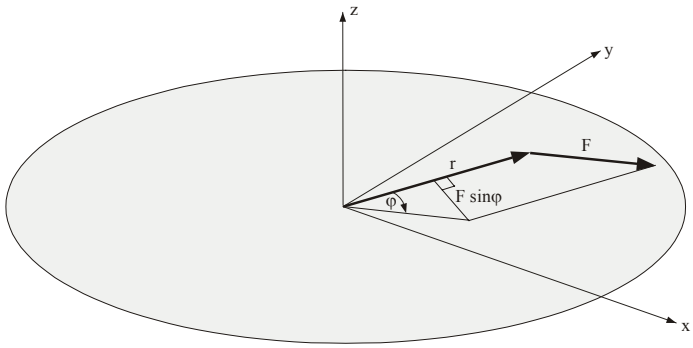

Bild F.3 Darstellung eines Momentes als Vektorprodukt

An einem Flügelelement der Spannweite dy greifen die Normalkraft dN[133] und die Tangentialkraft dT[134] an (bezogen auf die effektive örtliche Anströmrichtung). Der Angriffspunkt der Normalkraft dN ist der Druckpunkt DP*[135], die Tangentialkraft dT greift in halber Profiltiefe $\ell/2$ an.

Um die Ergebnisse des Tragflächenverfahrens mit denen aus dem Panelverfahren bzw. den Données Aérodynamiques besser vergleichen zu können, ist es sinnvoll, die Flügelspitze als Momentenbezugspunkt zu wählen. Für das Moment dm[136] eines Elementarflügels der Spannweite dy kann damit allgemein geschrieben werden (siehe auch Bild F.4):

$$d\underline{m}_F = \underline{r}^*_{DP} \times d\underline{N} + \underline{r}_{50} \times d\underline{T} \tag{F.90}$$

$d\underline{m}_F$ Momentenvektor bezüglich der Flügelnase

$\underline{r}^*_{DP}$ Ortsvektor von der Flügelnase zum Angriffspunkt von $d\underline{N}$ (DP^*)

$\underline{r}_{50}$ Ortsvektor von der Flügelnase zum Angriffspunkt von $d\underline{T}$ (Profilmitte)

[133] Die Normalkraft ist die senkrecht zur effektiven Anströmrichtung wirkende Kraft – sie kann durch das Tragflächenverfahren bestimmt werden.

[134] Die Tangentialkraft wirkt entgegen der effektiven Anströmrichtung – sie entspricht dem Profilwiderstand und kann aus Profilpolaren ermittelt werden.

[135] Der hochgestellte * kennzeichnet, dass hier der Profilwiderstand nicht berücksichtigt ist – DP^* ist damit der Druckpunkt bei reibungsloser Strömung (Potentialtheorie). Er kann über das oben beschriebene Tragflächenverfahren bestimmt werden, wie weiter unten ausgeführt wird.

[136] Zur besseren Unterscheidung der örtlichen Momente von den Gesamtgrößen werden hier die lokalen Momente mit kleinen Buchstaben gekennzeichnet – dies erfolgt damit in Analogie zur Schreibweise der Kräfte.

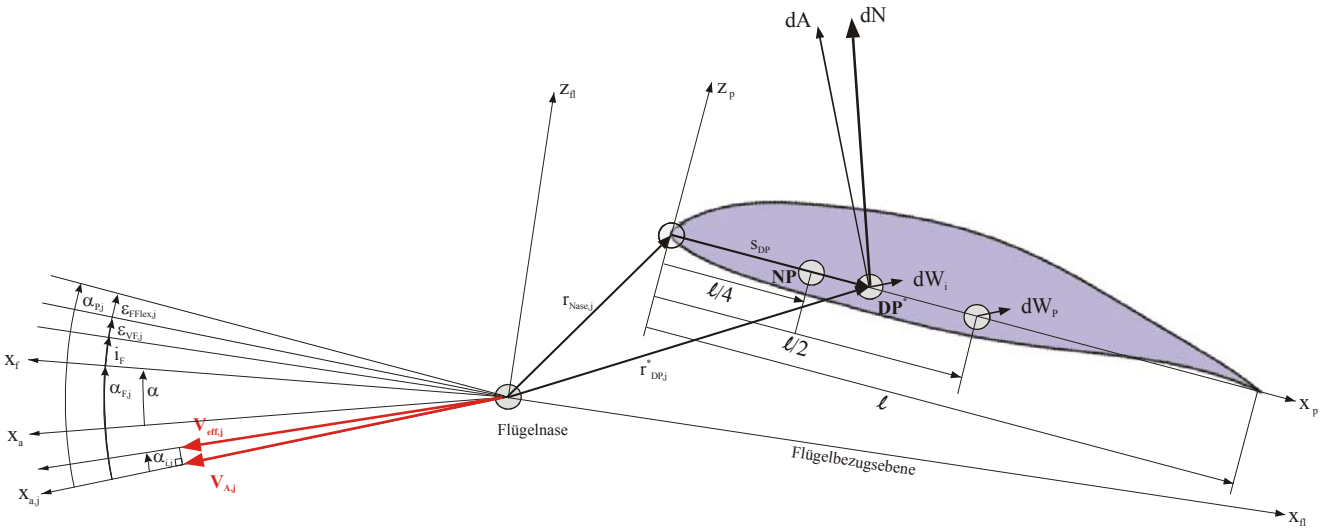

Bild F.4 Entstehung des örtlichen Momentes

Die Formulierung des Gesamtmomentes erfolgt zweckmäßigerweise im experimentellen (bzw. im aerodynamischen) Koordinatensystem, so dass ein einfacher Vergleich zu den gegebenen aerodynamischen Größen möglich ist und von der Linearisierung für kleine Winkel Gebrauch gemacht werden kann:

$$\underline{dm}_{Fe} = \underline{r}^{*}_{DPe} \times \underline{dN}_{e} + \underline{r}_{50e} \times \underline{dT}_{e} \tag{F.91}$$

Mit den Definitionen für die einzelnen Vektoren in Komponentenschreibweise

$$\underline{r}^{*}_{DPe} = \begin{bmatrix} x^{*}_{DP} \\ y^{*}_{DP} \\ z^{*}_{DP} \end{bmatrix}_{e} \qquad \underline{r}_{50e} = \begin{bmatrix} x_{50} \\ y_{50} \\ z_{50} \end{bmatrix}_{e}$$

$$\underline{dN}_{e} = \begin{bmatrix} dN_{x} \\ dN_{y} \\ dN_{z} \end{bmatrix}_{e} \qquad \underline{dT}_{e} = \begin{bmatrix} dT_{x} \\ dT_{y} \\ dT_{z} \end{bmatrix}_{e} \tag{F.92}$$

erhält man für den Momentenvektor allgemein

$$\underline{dm}_{Fe} = \begin{bmatrix} dl \\ dm \\ dn \end{bmatrix}_{e} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x^{*}_{DPe} & y^{*}_{DPe} & z^{*}_{DPe} \\ dN_{xe} & dN_{ye} & dN_{ze} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{50e} & y_{50e} & z_{50e} \\ dT_{xe} & dT_{ye} & dT_{ze} \end{vmatrix} \tag{F.93}$$

$$\underline{dm}_{Fe} = \begin{bmatrix} dl \\ dm \\ dn \end{bmatrix}_{e} = \begin{bmatrix} y^{*}_{DPe} dN_{ze} - z^{*}_{DPe} dN_{ye} \\ z^{*}_{DPe} dN_{xe} - x^{*}_{DPe} dN_{ze} \\ x^{*}_{DPe} dN_{ye} - y^{*}_{DPe} dN_{xe} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{50e} dT_{ze} - z_{50e} dT_{ye} \\ z_{50e} dT_{xe} - x_{50e} dT_{ze} \\ x_{50e} dT_{ye} - y_{50e} dT_{xe} \end{bmatrix} \tag{F.94}$$

Ortsvektoren

Für die Ortsvektoren kann wiederum geschrieben werden:

$$\underline{r}^{*}_{DP} = \underline{r}_{Nase} + \underline{s}^{*}_{DP} \tag{F.95}$$

$$\underline{r}_{50} = \underline{r}_{Nase} + \underline{s}_{50} \tag{F.96}$$

$\underline{r}_{Nase}$ Ortsvektor von der Flügelnase zur Profilnase

$\underline{s}^{*}_{DP}$ Ortsvektor von der Profilnase zum Angriffspunkt von $\underline{dN}$ (DP^{*})

$\underline{s}_{50}$ Ortsvektor von der Profilnase zum Angriffspunkt von $\underline{dT}$ (Profilmitte)

Die Beschreibung der Ortsvektoren erfolgt zweckmäßigerweise in einem profilfesten (Index „p“) bzw. in einem flügelfesten Koordinatensystem (Index „fl“), siehe Bild F.4. Die Definition der positiven Achsrichtungen erfolgt hierbei in Anlehnung an die in der Aerodynamik bzw. im Flugzeugbau bevorzugten Definitionen. Bild F.4 zeigt ebenfalls das in der Flugmechanik verwendeten flugzeugfeste (Index „f“) und das aerodynamische Koordinatensystem (Index „a“), die hier jedoch abweichend von den Festlegungen der DIN 9300 hier ihren Ursprung in der Flügelnase haben. Die zusätzlich eingeführten lokalen Koordinatensysteme (Index „aj“ und „ij“) werden zur Beschreibung der örtlichen Anströmverhältnisse benötigt.

Die Angriffspunkte am Profil lassen sich am einfachsten im profilfesten Koordinatensystem darstellen:

$$\underline{s}^{*}_{DP\,p} = \begin{bmatrix} s^{*}_{DP} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_p \tag{F.97}$$

$$\underline{s}_{50\,p} = \begin{bmatrix} \ell/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_p \tag{F.98}$$

Die Ortsvektoren von der Flügelnase zur Profilnase können mit Hilfe der Bauunterlagen ermittelt werden lassen sich einfach im flugzeugfesten Koordinatensystem formulieren:

$$\underline{r}_{Nase\,f} = \begin{bmatrix} x_{Nase} \\ y_{Nase} \\ z_{Nase} \end{bmatrix}_f \tag{F.99}$$

Die Transformation vom profilfesten in das experimentelle Koordinatensystem erfolgt durch eine Drehung um die y_f-Achse mit dem Drehwinkel $-(\alpha + i_F + \varepsilon_F + 180°)$. Die Transformationsmatrix kann damit nach [Wilhelm] formuliert werden:

$$\underline{\underline{T}}_{ep} = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F) & 0 & -\sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F) & 0 & -\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \end{bmatrix} \tag{F.100}$$

Für die Transformation vom flugzeugfesten in das experimentelle Koordinatensystem gilt nach [Wilhelm]:

$$\underline{\underline{T}}_{ef} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{F.101}$$

Die Transformation vom örtlichen „induzierten“ Koordinatensystem (Index „ij“) in das experimentelle Koordinatensystem erhält man durch eine Drehung um die y_f-Achse mit dem Drehwinkel $(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)$

$$\underline{\underline{T}}_{e\,ij} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) & 0 & -\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) & 0 & \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \end{bmatrix} \tag{F.102}$$

Für die benötigten Ortsvektoren gilt damit:

$$\underline{r}^{*}_{DP\,e} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{Nase} \\ y_{Nase} \\ z_{Nase} \end{bmatrix}_f + \begin{bmatrix} -\cos(\alpha+i_F+\varepsilon_F) & 0 & -\sin(\alpha+i_F+\varepsilon_F) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha+i_F+\varepsilon_F) & 0 & -\cos(\alpha+i_F+\varepsilon_F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{*}_{DP} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_p \tag{F.103}$$

$$\underline{r}_{50\,e} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{Nase} \\ y_{Nase} \\ z_{Nase} \end{bmatrix}_f + \begin{bmatrix} -\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F) & 0 & -\sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F) & 0 & -\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_p \tag{F.104}$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$\underline{r}^*_{DP\,e} = \begin{bmatrix} x_{Nase\,f}\cos\alpha + z_{Nase\,f}\sin\alpha - s^*_{DP}\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \\ y_{Nase\,e} \\ -x_{Nase\,f}\sin\alpha + z_{Nase\,f}\cos\alpha + s^*_{DP}\sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \end{bmatrix} \tag{F.105}$$

$$\underline{r}_{50\,e} = \begin{bmatrix} x_{Nase\,f}\cos\alpha + z_{Nase\,f}\sin\alpha - \ell/2\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \\ y_{Nase\,e} \\ -x_{Nase\,f}\sin\alpha + z_{Nase\,f}\cos\alpha + \ell/2\sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \end{bmatrix} \tag{F.106}$$

Kräfte

Die Normalkraft muss vom örtlichen „induzierten“ Koordinatensystem (Index „ij“) in das experimentelle Koordinatensystem transformiert werden:

$$d\underline{N}_e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) & 0 & -\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) & 0 & \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -dN \end{bmatrix} \tag{F.107}$$

$$d\underline{N}_e = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \\ 0 \\ -\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \end{bmatrix} dN \tag{F.108}$$

Für die Tangentialkraft gilt entsprechend:

$$d\underline{T}_e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) & 0 & -\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) & 0 & \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -dT \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{F.109}$$

$$d\underline{T}_e = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \\ 0 \\ -\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \end{bmatrix} dT \tag{F.110}$$

Setzt man Gl. (F.105), Gl. (F.106), Gl. (F.108) und Gl. (F.110) in GL. (F.94) ein, erhält man:

$$\begin{bmatrix} dl \\ dm \\ dn \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} -y\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dN - y\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dT \\ \left[-x_{Nase\,f}\sin\alpha + z_{Nase\,f}\cos\alpha + s^*_{DP}\sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F)\right]\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dN + \left[x_{Nase\,f}\cos\alpha + z_{Nase\,f}\sin\alpha - s^*_{DP}\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F)\right]\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dN \\ -\left[-x_{Nase\,f}\sin\alpha + z_{Nase\,f}\cos\alpha + \ell/2\sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F)\right]\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dT + \left[x_{Nase\,f}\cos\alpha + z_{Nase\,f}\sin\alpha - \ell/2\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F)\right]\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dT \\ -y\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dN + y\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dT \end{bmatrix} \tag{F.111}$$

wobei davon Gebrauch gemacht wurde, dass gilt

$$y_{Nase} = y \tag{F.112}$$

örtlicher Druckpunkt

In Gl. (F.105) ist der örtliche Druckpunkt (ohne Reibungseinfluss) enthalten, der noch unbekannt ist und hier angegeben werden soll. Er kann durch eine Momentenbetrachtung am Profil bestimmt werden. Für das örtliche Nickmoment um den ℓ/4-Punkt gilt nach Bild F.4:

$$dM^*_{25} = -\Delta s^*_{DP}\ dN \cos(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i) \tag{F.113}$$

Mit den dimensionslosen örtlichen Beiwerten

$$c_a = \frac{dN}{\frac{\rho}{2} V^2\ \ell\ dy} \tag{F.114}$$

$$c_{m25} = \frac{dM_{25}}{\frac{\rho}{2} V^2\ \ell^2\ dy} \tag{F.115}$$

folgt aus Gl. (F.113) für den Abstand des Druckpunktes vom ℓ/4-Punkt gilt damit

$$\frac{\Delta s^*_{DP}}{\ell} = -\frac{c_{m25}}{c_a \cos(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i)} \tag{F.116}$$

Für kleine Winkel gilt vereinfachend:

$$\frac{\Delta s^*_{DP}}{\ell} = -\frac{c_{m25}}{c_a} \tag{F.117}$$

Dies stimmt mit der Literatur überein, siehe z.B. [Schlichting/Truckenbrodt 1969 Band II S. 63]. Die benötigten Beiwerte sind mit dem oben beschriebenen Tragflächenverfahren bestimmbar und können hier als bereits bekannt vorausgesetzt werden.

Für den Druckpunkt im profilfesten Koordinatensystem, wie er in Gl. (F.111) enthalten ist, gilt allgemein:

$$s^*_{DP} = \ell/4 + \Delta s^*_{DP} \tag{F.118}$$

bzw. mit Gl. (F.119)

$$s^*_{DP} = \left[1/4 - \frac{c_{m25}}{c_a}\right] \ell \tag{F.119}$$

Damit stehen alle erforderlichen Gleichungen zur Bestimmung des Momentenvektors dm zur Verfügung. Bei der weiteren Betrachtung werden die Komponenten des Momentenvektors einzeln behandelt.

F.2.2 Momente bei identischem Geschwindigkeitsbetrag

Rollmoment

Für das örtliche Rollmoment[137] folgt unmittelbar aus Gl. (F.111):

$$dl_e = -y \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) dN - y \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) dT \tag{F.120}$$

Für das Gesamt-Rollmoment (des Flügels) gilt allgemein[138]:

[137] Unter dem Begriff soll stets das Moment eines Elementarflügels der Spannweite dy um den betrachteten Bezugspunkt verstanden werden, wobei als Bezugspunkt hier die Flügelnase gewählt wurde.

[138] Bei der weiteren Betrachtung wird stets davon ausgegangen, dass die Momente bzw. ihre Beiwerte auf das experimentelle Koordinatensystem bezogen sind – der Index „e“ wird daher zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.

$$L = \int_{-s}^{+s} dl \tag{F.121}$$

Für den Beiwert des Gesamt-Rollmomentes gilt die Definition[139]:

$$C_L = \frac{L}{\frac{\rho}{2} V^2 \, S \, s} \tag{F.122}$$

Ferner können für die Normal- und Tangentialkraft geschrieben werden:

$$dN = \frac{\rho}{2} V^2 \, c_a \, \ell \, dy \tag{F.123}$$

$$dT = \frac{\rho}{2} V^2 \, c_{wp} \, \ell \, dy \tag{F.124}$$

Damit folgt für den Gesamt-Rollmomentenbeiwert aus Gl. (F.120)

$$C_L = -\frac{1}{S \, s} \int_{-s}^{+s} \left[c_a \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) + c_{wp} \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \right] \ell \, y \, dy \tag{F.125}$$

Mit der dimensionslosen Spannweitenkoordinate

$$\eta = \frac{y}{b/2} = \frac{y}{s} \tag{F.03}$$

der Zirkulation

$$\gamma = \frac{c_a \, \ell}{2b} \tag{F.04}$$

und der neu definierten Größe

$$\omega = \frac{c_{wp} \, \ell}{2b} \tag{F.126}$$

sowie der Streckung

$$\Lambda = \frac{b^2}{S} \tag{F.06}$$

erhält man

$$C_L = -\Lambda \int_{-s}^{+s} \left[\gamma \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) + \omega \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \right] \eta \, d\eta \tag{F.127}$$

Für reibungslose Strömung und für kleine Winkel folgt

$$C_L = -\Lambda \int_{-s}^{+s} \gamma \, \eta \, d\eta \tag{F.127b}$$

Dies stimmt mit der Literatur überein, siehe z.B. [Schlichting/Truckenbrodt 1969 Band II S. 35]. Mit Übergang auf Polarkoordinaten

[139] Zur besseren Unterscheidung der örtlichen Momentenbeiwerte von den Gesamtgrößen werden im Unterschied zur DIN 9300 die Gesamtmomentenbeiwerte mit groß geschriebenen Indizes gekennzeichnet – dies erfolgt damit in Analogie zur Schreibweise der Kraft-Beiwerte.

$$\eta = \cos\vartheta$$
$$d\eta = -\sin\vartheta\, d\vartheta \tag{F.07}$$

erhält man

$$C_L = -\frac{\Lambda}{2}\int_0^{\pi}\left[\gamma\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) + \omega\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)\right]\sin 2\vartheta\, d\vartheta \tag{F.128}$$

wobei hier bereits ersetzt wurde:

$$\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{1}{2}\sin 2\vartheta \tag{F.129}$$

Betrachtet man den Flügel an den M diskreten Stellen, folgt:

$$C_L = -\frac{\Lambda}{2}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[\gamma_n\cos(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in}) + \omega_n\sin(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in})\right]\sin 2\vartheta_n \tag{F.130}$$

mit

$$\vartheta_n = \frac{\pi\, n}{M+1} \tag{F.10}$$

$$\Delta\vartheta = \frac{\pi}{M+1} \tag{F.11}$$

Für kleine Winkel $(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)$ folgt:

$$C_L = -\frac{\Lambda}{2}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[\gamma_n + \omega_n(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in})\right]\sin 2\vartheta_n \tag{F.131}$$

Ohne Reibungswiderstand gilt:

$$C_L = -\frac{\Lambda}{2}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\gamma_n\sin 2\vartheta_n \tag{F.131b}$$

Dies stimmt mit der Literatur überein, siehe z.B. [Schlichting/Truckenbrodt 1969 Band II S. 44]. Führt man wiederum die (bereits berechneten) örtlichen Beiwerte ein, so gilt schließlich:

$$C_L = -\frac{\Lambda}{8\,s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{an} + c_{wpn}(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in})\right]\ell_n\sin 2\vartheta_n \tag{F.132}$$

Nickmoment

Für das örtliche Nickmoment folgt unmittelbar aus Gl. (F.111):

$$\begin{aligned} dm = &\left[-x_{Nase\,f}\sin\alpha + z_{Nase\,f}\cos\alpha + s^*_{DP}\sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F)\right]\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dN \\ &+ \left[x_{Nase\,f}\cos\alpha + z_{Nase\,f}\sin\alpha - s^*_{DP}\cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F)\right]\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dN \\ &- \left[-x_{Nase\,f}\sin\alpha + z_{Nase\,f}\cos\alpha + \ell/2\ \sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F)\right]\cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)dT \\ &+ \left[x_{Nase\,f}\cos\alpha + z_{Nase\,f}\sin\alpha - \ell/2\ \cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F)\right]\sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i)\,dT \end{aligned} \tag{F.133}$$

Für das Gesamt-Nickmoment gilt allgemein:

$$M = \int_{-s}^{+s} dm \tag{F.134}$$

Für den Beiwert des Gesamt-Nickmomentes gilt die Definition:

$$C_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} V^2 \, S \, \ell_\mu} \tag{F.135}$$

Mit der Normal- und Tangentialkraft nach Gl. (F.123) und Gl. (F.124) folgt für den Gesamt-Rollmomentenbeiwert aus Gl. (F.133)

$$\begin{aligned} C_M = \frac{1}{S \, \ell_\mu} \int_{-s}^{+s} \Big\{ & \Big[-x_{\text{Nase f}} \sin\alpha + z_{\text{Nase f}} \cos\alpha + s^*_{DP} \sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \Big] \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \, c_a \\ & + \Big[x_{\text{Nase f}} \cos\alpha + z_{\text{Nase f}} \sin\alpha - s^*_{DP} \cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \Big] \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \, c_a \\ & - \Big[-x_{\text{Nase f}} \sin\alpha + z_{\text{Nase f}} \cos\alpha + \ell/2 \sin(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \Big] \cos(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \, c_{wp} \\ & + \Big[x_{\text{Nase f}} \cos\alpha + z_{\text{Nase f}} \sin\alpha - \ell/2 \cos(\alpha + i_F + \varepsilon_F) \Big] \sin(\alpha_F - \alpha - \alpha_i) \, c_{wp} \Big\} \ell \, y \, dy \end{aligned} \tag{F.136}$$

Mit den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \end{aligned} \tag{F.137}$$

erhält man

$$\begin{aligned} C_M = \frac{1}{S \, \ell_\mu} \int_{-s}^{+s} \Big\{ & \Big[z_{\text{Nase}} \sin(\alpha_F - \alpha_i) + x_{\text{Nase}} \cos(\alpha_F - \alpha_i) - s^*_{DP} \cos(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i) \Big] c_a \\ & + \Big[x_{\text{Nase}} \sin(\alpha_F - \alpha_i) - z_{\text{Nase}} \cos(\alpha_F - \alpha_i) - \ell/2 \sin(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i) \Big] c_{wp} \Big\} \ell \, y \, dy \end{aligned} \tag{F.138}$$

Mit Einführung der dimensionslosen Spannweitenkoordinate η sowie der Zirkulation γ und der Funktion ω folgt:

$$\begin{aligned} C_M = \Lambda \int_{-1}^{+1} \Big\{ & \left[\frac{z_{\text{Nase f}}}{\ell_\mu} \sin(\alpha_F - \alpha_i) + \frac{x_{\text{Nase f}}}{\ell_\mu} \cos(\alpha_F - \alpha_i) - \frac{s^*_{DP}}{\ell_\mu} \cos(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i) \right] \gamma \\ & + \left[\frac{x_{\text{Nase f}}}{\ell_\mu} \sin(\alpha_F - \alpha_i) - \frac{z_{\text{Nase f}}}{\ell_\mu} \cos(\alpha_F - \alpha_i) - \frac{\ell/2}{\ell_\mu} \sin(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i) \right] \omega \Big\} \, d\eta \end{aligned} \tag{F.139}$$

Für reibungslose Strömung, einen ebenen Flügel sowie für kleine Winkel folgt unter Ersetzung des örtlichen Druckpunktes nach Gl. (F.119) für das Nickmoment:

$$C_M = \Lambda \int_{-1}^{+1} \left[\frac{x_{\text{Nase f}} - \ell/4}{\ell_\mu} \gamma + \frac{\ell}{\ell_\mu} \mu \right] d\eta \tag{F.139b}$$

Mit dem Abstand des örtlichen $\ell/4$-Punktes von der Flügelnase im flügelfesten Koordinatensystem:

$$x_{25\,fl} = -x_{Nase\,f} + \ell/4 \tag{F.140}$$

erhält man das aus der Literatur [Schlichting/Truckenbrodt 1969 Band II S. 64] bekannte Ergebnis:

$$C_M = -\Lambda \int_{-1}^{+1} \left[\frac{x_{25\,fl}}{\ell_\mu}\gamma - \frac{\ell}{\ell_\mu}\mu \right] d\eta \tag{F.139c}$$

Mit Übergang auf Polarkoordinaten und durch Ersetzen des Druckpunktes durch Gl. (F.119) erhält man aus Gl. (F.139):

$$\begin{aligned} C_M = \Lambda \int_0^{\pi} \Bigg\{ & \left[\frac{z_{Nase\,f}}{\ell_\mu}\sin(\alpha_F - \alpha_i) + \frac{x_{Nase\,f}}{\ell_\mu}\cos(\alpha_F - \alpha_i) - \frac{\ell/4}{\ell_\mu} \right]\gamma \\ & + \left[\frac{\ell}{\ell_\mu}\cos(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i) \right]\mu \\ & + \left[\frac{x_{Nase\,f}}{\ell_\mu}\sin(\alpha_F - \alpha_i) - \frac{z_{Nase\,f}}{\ell_\mu}\cos(\alpha_F - \alpha_i) - \frac{\ell/2}{\ell_\mu}\sin(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i) \right]\omega \Bigg\} \sin\vartheta\, d\vartheta \end{aligned} \tag{F.141}$$

Betrachtet man den Flügel an den M diskreten Stellen, folgt:

$$\begin{aligned} C_M = \Lambda \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \Bigg\{ & \left[\frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}\sin(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) + \frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}\cos(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu} \right]\gamma_n \\ & + \left[\frac{\ell_n}{\ell_\mu}\cos(\alpha_{Fn} + i_F + \varepsilon_{Fn} - \alpha_{in}) \right]\mu_n \\ & + \left[\frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}\sin(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) - \frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}\cos(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) - \frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}\sin(\alpha_{Fn} + i_F + \varepsilon_{Fn} - \alpha_{in}) \right]\omega_n \Bigg\} \sin\vartheta_n \end{aligned} \tag{F.142}$$

Für kleine Winkel $(\alpha_F + i_F + \varepsilon_F - \alpha_i)$ und $(\alpha_F - \alpha_i)$ folgt:

$$\begin{aligned} C_M = \Lambda \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \Bigg\{ & \left[\frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) + \frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu} \right]\gamma_n + \left[\frac{\ell_n}{\ell_\mu} \right]\mu_n \\ & + \left[\frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) - \frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn} + i_F + \varepsilon_{Fn} - \alpha_{in}) \right]\omega_n \Bigg\} \sin\vartheta_n \end{aligned} \tag{F.143}$$

Ohne Reibungswiderstand gilt:

$$C_M = \Lambda \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \left\{ \left[\frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) + \frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu} \right]\gamma_n + \left[\frac{\ell_n}{\ell_\mu} \right]\mu_n \right\} \sin\vartheta_n \tag{F.143b}$$

Für einen ebenen Flügel und unter Verwendung von Gl. (F.140) gilt:

$$C_M = -\Lambda \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \left[\frac{x_{25\,n\,fl}}{\ell_\mu}\gamma_n - \frac{\ell_n}{\ell_\mu}\mu_n \right] \sin\vartheta_n \tag{F.143c}$$

Dies stimmt mit der Literatur überein, siehe z.B. [Thomas 1972 S. 62].

Führt man wiederum die (bereits berechneten) örtlichen Beiwerte ein, so erhält man schließlich die für die weiteren Betrachtungen verwendete Beziehung:

$$C_M = \frac{\Lambda}{4s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left\{\left[\frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn}-\alpha_{in})+\frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}-\frac{\ell_n/4}{\ell_\mu}\right]c_{an}+\frac{\ell_n}{\ell_\mu}c_{m25n}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn}-\alpha_{in})-\frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}-\frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn}+i_F+\varepsilon_{Fn}-\alpha_{in})\right]c_{wpn}\right\}\ell_n\sin\vartheta_n \qquad \text{(F.144)}$$

Giermoment

Für das örtliche Rollmoment folgt unmittelbar aus Gl. (F.111):

$$dn = -y\sin(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)dN + y\cos(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)dT \qquad \text{(F.145)}$$

Für das Gesamt-Rollmoment (des Flügels) gilt allgemein:

$$N = \int_{-s}^{+s} dn \qquad \text{(F.146)}$$

Für den Beiwert des Gesamt-Rollmomentes gilt die Definition:

$$C_N = \frac{N}{\frac{\rho}{2}V^2 S s} \qquad \text{(F.147)}$$

Mit der Normalkraft nach Gl. (F.123) und der Tangentialkraft nach Gl. (F.124) folgt aus Gl. (F.146) für den Gesamt-Rollmomentenbeiwert

$$C_N = -\frac{1}{S s}\int_{-s}^{+s}\left[c_a\sin(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)-c_{wp}\cos(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)\right]\ell\, y\, dy \qquad \text{(F.148)}$$

Mit der dimensionslosen Spannweitenkoordinate sowie der Zirkulation γ und der Funktion ω erhält man:

$$C_N = -\Lambda\int_{-s}^{+s}\left[\gamma\sin(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)-\omega\cos(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)\right]\eta\, d\eta \qquad \text{(F.149)}$$

Für reibungslose Strömung und für kleine Winkel folgt

$$C_N = -\Lambda\int_{-s}^{+s}\gamma\,(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)\,\eta\, d\eta \qquad \text{(F.149b)}$$

Hierfür ist in der Literatur kein direkt vergleichbares Ergebnis angegeben, da bei der üblicherweise angenommenen symmetrischen Anstellwinkelverteilung das Integral verschwindet. Allerdings wird in [Schlichting/Truckenbrodt 1969] eine Berechnung des Rollgiermomentes angegeben:

$$C_N = -\Lambda\int_{-s}^{+s}\gamma\,(\Delta\alpha-\alpha_i)\,\eta\, d\eta \qquad \text{(F.149c)}$$

Da hierbei die örtliche Anstellwinkeldifferenz $\Delta\alpha$ die Abweichung der örtlichen Anströmung von der mittleren Anströmung darstellt, stimmt Gl. (F.149c) mit Gl. (F.149b) überein. Mit Übergang auf Polarkoordinaten erhält man

$$C_N = -\frac{\Lambda}{2}\int_0^{\pi}\left[\gamma\sin(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)-\omega\cos(\alpha_F-\alpha-\alpha_i)\right]\sin 2\vartheta\, d\vartheta \qquad \text{(F.150)}$$

wobei hier von Gl. (F.129) Gebrauch gemacht wurde. Betrachtet man den Flügel an den M diskreten Stellen, folgt:

$$C_N = -\frac{\Lambda}{2}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[\gamma_n \sin(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in}) - \omega_n \cos(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in})\right]\sin 2\vartheta_n \tag{F.151}$$

Für kleine Winkel ($\alpha_F - \alpha - \alpha_i$) folgt:

$$C_N = -\frac{\Lambda}{2}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[\gamma_n (\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in}) - \omega_n\right]\sin 2\vartheta_n \tag{F.152}$$

Führt man wiederum die (bereits berechneten) örtlichen Beiwerte ein, so gilt schließlich:

$$C_N = \frac{\Lambda}{8\,s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{wpn} - (\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in})\, c_{an}\right]\ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{F.153}$$

Setzt man einen symmetrischen Flügel voraus, heben sich die Anteile aus dem Profilwiderstand des linken und rechten Halbflügels gegenseitig auf und es verbleibt:

$$C_N = -\frac{\Lambda}{8\,s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in})\, c_{an}\, \ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{F.154}$$

Hier soll aber der allgemeine Fall nach Gl. (F.153) weiter betrachtet werden, da hiermit auch Querruderausschläge behandelt werden können, die zu einer unsymmetrischen Verteilung des Profilwiderstandes führen. Geht man davon aus, dass der lokale induzierte Widerstand nach Gl. (F.33) bereits berechnet ist, kann Gl. (F.153) auch geschrieben werden:

$$C_N = \frac{\Lambda}{8\,s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{wp\,n} + c_{wi\,n} - (\alpha_{Fn} - \alpha)\, c_{an}\right]\ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{F.155}$$

F.2.3 Berücksichtigung von Änderungen des Betrages der Anströmung

Die Berücksichtigung von Änderungen des Betrages der Anströmung erfolgt analog zum Vorgehen bei der Bestimmung des Auftriebsbeiwertes, so dass lediglich die Ergebnisse angegeben werden.

Rollmoment

$$C_L = -\frac{\Lambda}{8\,s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{an} + c_{wpn}(\alpha_{Fn} - \alpha - \alpha_{in})\right]\frac{\overline{V}_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{F.156}$$

Nickmoment

$$\begin{aligned} C_M = \frac{\Lambda}{4s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\Bigg\{ &\left[\frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) + \frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu}\right] c_{an} + \frac{\ell_n}{\ell_\mu} c_{m25\,n} \\ &+ \left[\frac{x_{Nasen\,f}}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn} - \alpha_{in}) - \frac{z_{Nasen\,f}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}(\alpha_{Fn} + i_F + \varepsilon_{Fn} - \alpha_{in})\right] c_{wpn} \Bigg\} \frac{\overline{V}_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin\vartheta_n \end{aligned} \tag{F.157}$$

Giermoment

$$C_N = \frac{\Lambda}{8\,s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left[c_{wp\,n} + c_{wi\,n} - (\alpha_{Fn} - \alpha)\, c_{an}\right]\frac{\overline{V}_{25n}^2}{V_\infty^2}\,\ell_n \sin 2\vartheta_n \tag{F.158}$$

Anhang G Zusammenhang $\partial z_{Skelett}/\partial x \rightarrow \alpha_{0P}$, c_{m025}

Die grundlegende Gleichung des Tragflächenverfahrens ist in Gl. (5.24) gegeben:

$$\underline{c} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\alpha}_{Skelett} \tag{G.01}$$

mit dem Anstellwinkel der Skelettlinie nach Gl. (5.30):

$$\alpha_{Skelet} = \alpha_P - \partial z_{Skelettp}/\partial x_p \tag{G.02}$$

In der Praxis sind jedoch für Profile nicht immer die Profilkoordinaten gegeben, um hieraus die Skelettlinie zu bestimmen, sondern es liegen Profilkennwerte vor. Dies sind üblicherweise:

- α_{0P} Nullanstellwinkel des Profils
- c_{a0} Nullauftriebsbeiwert
- c_{m025} Nullmomentenbeiwert (um den ℓ/4-Punkt)

Da diese Werte entweder aus Windkanalmessungen stammen oder mit speziellen, hochwertigen aerodynamischen Berechnungsmethoden ermittelt wurden (z.B. XFOIL), beschreiben sie den Einfluss der Wölbung auf Auftrieb und Nickmoment wesentlich genauer, als dies in der Tragflächentheorie über die Neigung der Skelettlinie möglich ist – hierin ist letztendlich die kinematische Strömungsbedingung enthalten, die einen Ausgleich zwischen örtlicher Vertikalgeschwindigkeit und Profilkontur durch den induzierten Abwind fordert und somit einen Zusammenhang zwischen effektivem örtlichen Anstellwinkel und örtlicher Zirkulation bzw. örtlichem Auftrieb liefert.

Die Genauigkeit des Tragflächenverfahrens kann daher verbessert werden, wenn die Neigung der Skelettlinie durch die Profilkennwerte ersetzt wird. Hierbei ist zu beachten, dass es sich hierbei lediglich um ein zweidimensionales Problem handelt, da sowohl die Neigung der Skelettlinie $\partial z_{Skelett}/\partial x$ als auch die Kennwerte α_0, c_{m025} Profilkenngrößen darstellen, die in zweidimensionaler Strömung gelten. Der Zusammenhang zwischen $\partial z_{Skelett}/\partial x$ und α_0 sowie c_{m025} kann daher durch die Profiltheorie hergestellt werden, wobei wiederum die Skeletttheorie angewendet wird (dünne, schwach gewölbte Profile). Nach [Schlichting/Truckenbrodt Band 1, S. 417] gilt:

$$w(X) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 k(X')\frac{dX'}{X - X'} \tag{G.03}$$

mit den dimensionslosen Koordinaten

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{\ell} = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) \\ X' &= \frac{x'}{\ell} = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi') \end{aligned} \tag{G.04}$$

Der hochgestellte Strich kennzeichnet die induzierende stelle. Diese Definitionen entsprechen den in Kapitel 5 eingeführten Definitionen in dreidimensionaler Strömung überein, so dass hier lediglich die y-Abhängigkeit entfällt.

Für die Wirbeldichte wird ebenfalls ein entsprechender Reihenansatz nach GLAUERT gewählt, wobei hier gleich eine Beschränkung auf zwei Glieder erfolgt:

$$k(\varphi') = \frac{V_\infty}{2}\left[a_0 h_0(\varphi') + a_1 h_1(\varphi')\right] \tag{G.05}$$

Für die Einheitsfunktionen gilt wiederum nach BIRNBAUM:

$$h_0(\varphi') = \frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

$$h_1(\varphi') = \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \tag{G.06}$$

bzw.

$$h_0(X') = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}$$

$$h_1(X') = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\left[1-4X'\right] \tag{G.07}$$

Für die Koeffizienten a_0 und a_1 erhält man:

$$a_0 = c_{a0}$$

$$a_1 = 4c_{m025} \tag{G.08}$$

Die kinematische Strömungsbedingung wurde hierbei ebenfalls am ℓ/4-Punkt und an der Hinterkante erfüllt. Da die Einheitsfunktionen h_0 und h_1 so gewählt sind, dass bezogen auf den ℓ/4-Punkt die erste nur den Auftrieb und die zweite nur das Moment liefert, so dass der Momentenbeiwert nach Gl. (G.08) identisch mit dem Nullmomentenbeiwert des Profils ist. Damit erhält man für die Wirbeldichte:

$$k(\varphi') = \frac{V_\infty}{\pi}\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\left[c_{a0} + 4\,c_{m025}\left(1-4X'\right)\right] \tag{G.09}$$

Eingesetzt in Gl. (G.01) erhält man für den Abwind:

$$w(X) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{V_\infty}{\pi}\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\left[c_{a0} + 4\,c_{m025}\left(1-4X'\right)\right]\frac{dX'}{X-X'} \tag{G.10}$$

bzw. durch Aufspaltung in zwei Anteile:

$$w(X) = -\frac{V_\infty}{2\pi^2}c_{a0}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\,\frac{dX'}{X-X'} - \frac{2V_\infty}{\pi^2}c_{m025}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\,\frac{1-4X'}{X-X'}\,dX' \tag{G.11}$$

Die beiden auftretenden Integrale sind lediglich Funktionen der induzierenden Stelle X' und können allgemein gelöst werden. Man erhält als Ergebnis nach [Truckenbrodt 1953a]:

$$w(X) = -\frac{V_\infty}{2\pi}\left[c_a + 4\,c_{m0}\left(3-4X\right)\right] \tag{G.12}$$

für den induzierten Abwindwinkel

$$\alpha_i(X) = -\frac{w(X)}{V_\infty} = \frac{1}{2\pi}\left[c_a + 4\,c_{m0}\left(3-4X\right)\right] \tag{G.13}$$

Die kinematische Strömungsbedingung lautet:

$$\alpha_{Skelett}(X) = \alpha_i(X) \tag{G.14}$$

wobei für den Anstellwinkel der Skelettlinie nach Gl. (G.02) gilt:

$$\alpha_{Skelett}(X) = \alpha_P - \partial z_{Skelett\,p}(X)/\partial x_p \tag{G.15}$$

so dass folgt:

$$\alpha_i(X) = \alpha_P - \partial z_{Skelett\,p}(X)/\partial x_p \tag{G.16}$$

bzw. mit Gl. (G.13)

$$\alpha_P - \partial z_{Skelett\,p}(X)/\partial x_p = \frac{1}{2\pi}\left[c_a + 4\,c_{m0}(3-4X)\right] \tag{G.17}$$

Für den Profilauftriebsbeiwert gilt allgemein:

$$c_a = c_{a\alpha}(\alpha_P - \alpha_{0P}) \tag{G.18}$$

wobei für den Auftriebsanstieg in der Skeletttheorie gilt:

$$c_{a\alpha} = 2\pi \tag{G.19}$$

Setzt man diese Zusammenhänge in Gl. (G.17) ein, folgt:

$$\alpha_P - \partial z_{Skelett\,p}(X)/\partial x_p = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi(\alpha_P - \alpha_{0P}) + 4\,c_{m0}(3-4X)\right] \tag{G.20}$$

Hierin hebt sich der Profilanstellwinkel auf beiden Seiten auf, so dass bleibt:

$$\partial z_{Skelett\,p}(X)/\partial x_p = \alpha_{0P} - \frac{2}{\pi}(3-4X)\,c_{m0} \tag{G.21}$$

Für die beiden interessierenden Stellen am ℓ/4-Punkt (X = 0,25) und an der Hinterkante (X = 1) gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \partial z_{Skelett\,25\,p}/\partial x_p &= \alpha_{0P} - \frac{4}{\pi}\,c_{m0} \\ \partial z_{SkelettHK\,p}/\partial x_p &= \alpha_{0P} + \frac{2}{\pi}\,c_{m0} \end{aligned} \tag{G.22}$$

Damit erhält man schließlich für den Anstellwinkel der Skelettlinie nach Gl. (G.15):

$$\begin{aligned} \alpha_{Skelett\,25} &= \alpha_P - \alpha_{0P} + \frac{4}{\pi}\,c_{m0} \\ \alpha_{Skelett\,HK} &= \alpha_P - \alpha_{0P} - \frac{2}{\pi}\,c_{m0} \end{aligned} \tag{G.23}$$

Damit kann im Tragflächenverfahren die Neigung der Skelettlinie durch die Profilkennwerte ersetzt werden.

Anhang H Korrektur der Verteilungen

H.1 Korrektur der Nickmomentenverteilung

Da das örtliche Nickmoment ebenfalls eine lineare Funktion des Anstellwinkels ist, kann die Nickmomentenverteilung analog zum Vorgehen beim Auftriebsbeiwert korrigiert werden:

$$\begin{aligned} c_{m25,LSM,\nu} &= c^{*}_{m025,LSM,\nu} + c_{m\alpha,LSM,\nu}\ \alpha_{R0} \\ c_{m25,PM,\nu} &= c^{*}_{m025,PM,\nu} + c_{m\alpha,PM,\nu}\ \alpha_{R0} \end{aligned} \qquad \text{(H.01)}$$

c^{*}_{m025} Null-Nullmoment[140]

$c_{m\alpha}$ Nickmomentenanstieg

Aus Gl. (5.21) erhält man analog zu Gl. (5.31) für das örtliche Nickmoment im Flügelschnitt υ:

$$c_{m25,R0,\nu} = c_{m025,\nu} + \sum_{i=1}^{2M} \left(\alpha_{R0} + i_F + \varepsilon_{VF,i}\right) L_{M+\nu,i,kor} \qquad \upsilon = 1,\ M \qquad \text{(H.02)}$$

Die Aufspaltung in einen Anstellwinkel abhängigen Anteil und einen konstanten Anteil liefert:

$$c_{m25,R0,\nu} = c_{m025,\nu} + \sum_{i=1}^{2M} \left(i_F + \varepsilon_{VF,i}\right) L_{M+\nu,i,kor} + \alpha_{R0} \sum_{i=1}^{2M} L_{M+\nu,i,kor} \qquad \upsilon = 1,\ M \qquad \text{(H.03)}$$

Durch Vergleich mit Gl. (H.01) erhält man:

$$\begin{aligned} c^{*}_{m025,\nu} &= c_{m025,\nu} + \Delta c_{m025,\nu} \\ \Delta c_{m0,\nu} &= \sum_{i=1}^{2M} \left(i_F + \varepsilon_{VF,i}\right) L_{M+\nu,i,kor} \qquad \upsilon = 1,\ M \\ c_{m\alpha,\nu} &= \sum_{i=1}^{2M} L_{M+\nu,i,kor} \end{aligned} \qquad \text{(H.04)}$$

Die Koeffizienten für das Tragflächenverfahren sind damit auch für die Nickmomentenverteilung aus bereits bekannten geometrischen Größen bestimmbar. Die Koeffizienten für das Panelverfahren werden analog zu Gl. (5.34) bestimmt:

$$\begin{aligned} c_{m\alpha,PM,\upsilon} &= \frac{c_{m25,PM,R0-II,\nu} - c_{m25,PM,R0-II,\nu}}{\alpha_{R0-II} - \alpha_{R0-I}} \\ c^{*}_{m025,\,PM,\nu} &= c_{m25,PM,R0-I,\nu} - c_{m\alpha,PM,\nu}\ \alpha_{R0-I} \end{aligned} \qquad \text{(H.05)}$$

Für den korrigierten Nickmomentenbeiwert gilt wiederum der lineare Ansatz:

$$c_{m25,R0,kor,\nu} = c^{*}_{m025,kor,\nu} + c_{m\alpha,kor,\nu}\ \alpha_{R0} \qquad \text{(H.06)}$$

und damit für die korrigierten Kenngrößen

$$\begin{aligned} c^{*}_{m0,kor,\nu} &= c_{m0,\nu} + \Delta c_{m0,\nu} + k_{0a,\nu} \\ c_{m\alpha,kor,\nu} &= k_{1a,\nu}\ c_{m\alpha,\nu} \end{aligned} \qquad \text{(H.07)}$$

mit den beiden Korrekturfaktoren

$$\begin{aligned} k_{0m,\nu} &= c^{*}_{m025,PM,\nu} - c^{*}_{m025,LSM,\nu} \\ k_{1m,\nu} &= \frac{c_{m\alpha,PM,\nu}}{c_{m\alpha,LSM,\nu}} \end{aligned} \qquad \text{(H.08)}$$

[140] Dieser Begriff ist nicht normiert und wird hier zur Unterscheidung vom Nullmomentenbeiwert $c_{m0} = c_m(c_a=0)$ eingeführt.

H.2 Zusammenfassung der Korrekturen für Auftrieb und Nickmoment

Für die korrigierten örtlichen Kennwerte gilt damit:

$$\begin{aligned} c^{*}_{a0,kor,\nu} &= c_{a0,\nu} + \Delta c_{a0,\nu} + k_{0a,\nu} \\ c_{a\alpha,kor,\nu} &= k_{1a,\nu}\; c_{a\alpha,\nu} \\ c^{*}_{m025,kor,\nu} &= c_{m025,\nu} + \Delta c_{m0,\nu} + k_{0m,\nu} \\ c_{m\alpha,kor,\nu} &= k_{1m,\nu}\; c_{m\alpha,\nu} \end{aligned} \tag{H.09}$$

Fasst man die korrigierten Beiwerte für Auftrieb und Nickmoment wieder vektoriell zusammen, kann entsprechend Gl. (5.21)[141] für die Referenzverteilung geschrieben werden:

$$\underline{c}_{R0,kor} = \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{\underline{k}}_1\; \underline{\underline{L}}_{kor}\; \underline{\alpha}_{R0} \tag{H.10}$$

mit der Nullverteilung nach Gl. (5.08)

$$\underline{c}_0 = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c_{m025,1} \\ \vdots \\ c_{m025,M} \end{bmatrix} \tag{H.11}$$

dem Einfluss der Einstellwinkels und der Verwindung

$$\Delta\underline{c}_0 = \begin{bmatrix} \Delta c^{*}_{a0,1} \\ \vdots \\ \Delta c^{*}_{a0,M} \\ \Delta c^{*}_{m0,1} \\ \vdots \\ \Delta c^{*}_{m0,M} \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_{kor}\left(\underline{i}_F + \underline{\varepsilon}_{VF}\right) \tag{H.12}$$

dem Korrekturvektor

$$\underline{k}_0 = \begin{bmatrix} k_{0a,1} \\ \vdots \\ k_{0a,M} \\ k_{0m,1} \\ \vdots \\ k_{0m,M} \end{bmatrix} \tag{H.13}$$

und der Korrekturmatrix

$$\underline{\underline{k}}_1 = \begin{bmatrix} k_{1a,1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_{1a,M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{1m,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & k_{1m,M} \end{bmatrix} \tag{H.14}$$

[141] Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Anstellwinkelvektor $\underline{\alpha}$ an jeder Stelle konstant ist, da α den Anstellwinkel des Flugzeugs darstellt.

Gl. (H.10) gilt zunächst nur für die Referenzverteilungen, d.h. ohne Starrkörperdrehung und ohne Windeinfluss (und damit ohne dynamische Elastizitätseinflüsse) – der Anstellwinkelvektor $\underline{\alpha}$ enthält daher an jeder Stelle den gleichen Wert. Geht man davon aus, dass die örtlichen Anstellwinkel nur geringfügig von der Referenzverteilung abweichen, kann die Korrektur der Verteilung auch hierfür angewendet werden (Prinzip der Linearisierung).

Für den Profilanstellwinkel gilt allgemein:

$$\alpha_{P,j} = \underbrace{\alpha}_{\text{Flugzeug}} + \underbrace{i_F + \varepsilon_{VF,v}}_{\text{Offset}} + \underbrace{\Delta\alpha_{KF,j}}_{\text{Starrkörperdrehung}} + \underbrace{\Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,v}}_{\text{Elastizität}} + \underbrace{\Delta\alpha_{WF,j}}_{\text{Windfeld}} \tag{H.15}$$

Hierbei wurde zwischen den Zuständen an den M Elementarflügeln (Index υ) und den 2M Aufpunkten (Index j) unterschieden. Es bedeuten:

- $\alpha_{P,j}$ örtlicher Anstellwinkel am Profil, ändert sich mit der Spannweite und in Profiltiefenrichtung
- α Anstellwinkel des Flugzeuges
- i_F Einstellwinkel des Flügels
- $\varepsilon_{VF,\upsilon}$ Verwindungswinkel des Flügels im Referenzzustand („Flight-Shape"), ändert sich mit der Spannweite
- $\Delta\alpha_{KF,j}$ Zusatzanstellwinkel infolge Rotation des Flugzeuges als Starrkörper, ändert sich mit der Spannweite und in Profiltiefenrichtung
- $\Delta\alpha_{FlexF,j}$ Zusatzanstellwinkel infolge dynamischer Verformungen des Flugzeuges abweichend vom statisch verformten Zustand (Flight-Shape), ändert sich mit der Spannweite und in Profiltiefenrichtung
- $\Delta\varepsilon_{Flex\,F,\upsilon}$ Torsionswinkel des Flügels infolge Elastizität als Abweichung vom statisch verformten Zustand (Flight-Shape), ändert sich mit der Spannweite, nicht jedoch in Tiefenrichtung (starres Profil)
- $\Delta\alpha_{WF,j}$ Zusatzanstellwinkel infolge eines räumlichen Windfeldes, ändert sich mit der Spannweite und auch in Profiltiefenrichtung

Da auf den Einfluss des Flügeleinstellwinkels und der Verwindung gemäß Gl. (H.10) nicht die Korrekturmatrix $\underline{\underline{k}}_l$ anzuwenden ist, sind lediglich der Anstellwinkel des Flugzeugs sowie die letzten 4 Terme von Gl. (H.15) zu berücksichtigen. Da die Terme $\Delta\alpha_x$ eine Änderung des Anstellwinkels durch lokal wirkende Zusatzgeschwindigkeiten bedeuten, werden sie mit dem Anstellwinkel des Flugzeugs zusammengefasst:

$$\alpha_{F,j} = \alpha + \Delta\alpha_{KF,j} + \Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\alpha_{WF,j} \tag{H.16}$$

Der Anstellwinkel nach Gl. (H.16) gibt den lokalen Anstellwinkel der ungestörten örtlichen Anströmung bezogen auf das flugzeugfeste Koordinatensystem an. Für die korrigierte Verteilung der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte bei beliebiger Anstellwinkelverteilung gilt damit entsprechend Gl. (H.10):

$$\underline{c}_{kor} = \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{\underline{k}}_1 \, \underline{L}_{kor} \left(\underline{\alpha}_F + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF}\right) \tag{H.17}$$

Für die Anstellwinkelverteilung gilt entsprechend Gl. (H.16):

$$\underline{\alpha}_F = \underline{\alpha} + \Delta\underline{\alpha}_{KF} + \Delta\underline{\alpha}_{FlexF} + \Delta\underline{\alpha}_{WF} \tag{H.18}$$

mit den Anstellwinkelvektoren

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \Delta\underline{\alpha}_{KF} = \begin{bmatrix} \alpha_{KF,1} \\ \vdots \\ \alpha_{KF,M} \\ \alpha_{KF,M+1} \\ \vdots \\ \alpha_{KF,2M} \end{bmatrix} \qquad \Delta\underline{\alpha}_{FlexF} = \begin{bmatrix} \alpha_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \alpha_{FlexF,M} \\ \alpha_{FlexF,M+1} \\ \vdots \\ \alpha_{FlexF,2M} \end{bmatrix} \qquad \Delta\underline{\alpha}_{WF} = \begin{bmatrix} \alpha_{WF,1} \\ \vdots \\ \alpha_{WF,M} \\ \alpha_{WF,M+1} \\ \vdots \\ \alpha_{WF,2M} \end{bmatrix} \tag{H.19}$$

Für den Vektor der elastischen Torsionswinkel gilt:

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{FlexF,M} \\ \varepsilon_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{FlexF,M} \end{bmatrix} \tag{H.20}$$

Anhang I Kalibration der Gesamtbeiwerte

I.1 Kalibration des Nickmomentes

Die Kalibration des Nickmomentes erfolgt analog zu der des Auftriebes. Auch hier wird wieder ein Geradenansatz analog zu Gl. (5.44) gewählt, diesmal allerdings für die Gesamtbeiwerte[142]:

$$\begin{aligned} C_{M,LSM} &= C^{*}_{M0,LSM} + C_{M\alpha,LSM}\ \alpha \\ C_{M,Tab} &= C^{*}_{M0,Tab} + C_{M\alpha,Tab}\ \alpha \end{aligned} \tag{I.01}$$

C^{*}_{M0} Null-Nullmoment[143] (des Flügels)

$C_{M\alpha}$ Nickmomentenanstieg (des Flügels)

Da die Kalibration des Nickmomentes keine Wirkungen auf die Auftriebsverteilung haben soll, ist hierfür die bereits korrigierte und kalibrierte Verteilung einzusetzen. Dieses gilt in gleicher Weise für den induzierten Abwindwinkel, der direkt von der Auftriebsverteilung abhängig ist[144].

Koeffizienten aus dem Tragflächenverfahren

Für die bereits korrigierte Nickmomentenverteilung des Referenzzustandes „Ref0“ gilt analog zu Gl. (5.48):

$$c_{m,Ref0,kor,\nu} = c^{*}_{m0,kor,\nu} + c_{m\alpha,kor,\nu}\ \alpha_{Ref0} \qquad \upsilon = 1, M \tag{I.02}$$

Der Beiwert des Gesamt-Nickmomentes (des Flügels) des Vergleichszustandes „Ref0“ kann durch entsprechende Anwendung von Gl. (4.39) bestimmt werden. Hierbei ist darauf zu achten, dass die bereits korrigierte Nickmomentenverteilung und die korrigierte und kalibrierte Auftriebsverteilung einzusetzen sind[145]:

$$\begin{aligned} C_{M\,LSM} = \frac{\Lambda}{4s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} \Bigg\{ & \left[\frac{z_{Nase\,nf}}{\ell_\mu}(\alpha-\alpha_{i,Ref0,kal,n}) + \frac{x_{Nase\,nf}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu}\right] c_{a,Ref0,kal,n} \\ & + \frac{\ell_n}{\ell_\mu}\, c_{m25,Ref0,kor,n} \\ & + \Bigg[\frac{x_{Nase\,nf}}{\ell_\mu}(\alpha-\alpha_{i,Ref0,kal,n}) - \frac{z_{Nase\,nf}}{\ell_\mu} \\ & \quad - \frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}(\alpha-\alpha_{i,Ref0,kal,n}+i_F+\varepsilon_{VF,Ref0,n})\Bigg] c_{wp,n} \Bigg\}\ \ell_n \sin\vartheta_n \end{aligned} \tag{I.03}$$

Dieser Ausdruck ist wiederum in einen α-abhängigen und in einen α-unabhängigen Anteil aufzuspalten. Hierzu müssen zunächst jedoch alle α-abhängigen Terme als Funktionen von α eingesetzt werden. Für die kalibrierten Auftriebsbeiwerte des Referenzzustandes gilt nach Gl. (5.65):

$$c_{a,Ref0,kal,\nu} = c^{*}_{a0,kal,\nu} + c_{a\alpha,kal,\nu}\ \alpha_{Ref0} \tag{I.04}$$

Für die örtlichen Beiwerte der korrigierten Nickmomentenverteilung des Referenzzustandes „Ref0“ gilt entsprechend Gl. (H.06):

[142] Nach der DIN 9300 wird das Gesamtmoment um den Bezugspunkt formuliert ist, der durch den Ursprung des flugzeugfesten Koordinatensystems definiert ist – dieses ist üblicherweise der Schwerpunkt des Flugzeuges. Bei der Kalibration ist darauf zu achten, dass der Bezugspunkt für das Tragflächenverfahren in Übereinstimmung mit dem Bezugspunkt der Tabellenaerodynamik festgelegt wird!

[143] Dieser Begriff wird analog zum örtlichen Nickmoment neu eingeführt und ist nicht zu verwechseln mit dem Nullmomentenbeiwert $C_{m0} = C_m(C_A=0)$. Außerdem sei daran erinnert, dass hier abweichend von der DIN 9300 ein groß geschriebener Index verwendet wird, um eine bessere Unterscheidung von den örtlichen Beiwerten zu gewährleisten.

[144] Es wird vorausgesetzt, dass der Profilwiderstand durch gemessene Profilpolaren bekannt ist und somit ebenfalls als kalibriert betrachtet werden kann.

[145] Es ist zu beachten, dass hier wiederum der Anstellwinkel und die örtliche Geschwindigkeit in jedem Flügelschnitt identisch sind.

$$c_{m25,Ref0,kor,\nu} = c^{*}_{m025,kor,\nu} + c_{m\alpha,kor,\nu}\ \alpha_{Ref0} \tag{I.05}$$

mit

$$\begin{aligned} c^{*}_{m025,kor,\nu} &= c_{m025,\nu} + \Delta c_{m0,\nu} + k_{0m,\nu} \\ c_{m\alpha,kor,\nu} &= k_{1m,\nu}\ c_{m\alpha,kor,\nu} \end{aligned} \tag{I.06}$$

Für die Verteilung des induzierten Abwindwinkels im kalibrierten Referenzzustand gilt entsprechend Anhang F, Gl. (F.58)[146]

$$\underline{\alpha}_{i,Ref0,kal} = \underline{\underline{B}}\ \underline{c}_{a,Ref0,kal} \tag{I.07}$$

Für den an einem Elementarflügel υ induzierten Abwindwinkel gilt mit Gl. (I.04)

$$\alpha_{i,Ref0,kal,\nu} = \sum_{j=1}^{M} B_{vj}\left(c^{*}_{a0,kal,i} + c_{a\alpha,kal,i}\ \alpha_{Ref0}\right) \tag{I.08}$$

Setzt man Gl. (I.04), Gl. (I.05) und Gl. (I.08) in Gl. (I.03) ein, folgt[147]:

$$\begin{aligned} C_{M,kor/kal} = \frac{\Lambda}{4s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} \Bigg\{ & \left[\frac{z_{Nase\,nf}}{\ell_\mu}\left[\alpha_{Ref0} - \left(\sum_{j=1}^{M} B_{nj}\left(c^{*}_{a0,kal,j} + c_{a\alpha,kal,j}\ \alpha_{Ref0}\right)\right)\right] + \frac{x_{Nase\,nf}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu}\right]\left(c^{*}_{a0,kal,n} + c_{a\alpha,kal,n}\ \alpha_{Ref0}\right) \\ & + \frac{\ell_n}{\ell_\mu}\left(c^{*}_{m025,kor,n} + c_{m\alpha,kor,n}\ \alpha_{Ref0}\right) \\ & + \left[\frac{x_{Nase\,nf}}{\ell_\mu}\left[\alpha_{Ref0} - \left(\sum_{j=1}^{M} B_{nj}\left(c^{*}_{a0,kal,j} + c_{a\alpha,kal,j}\ \alpha_{Ref0}\right)\right)\right] - \frac{z_{Nase\,nf}}{\ell_\mu}\right. \\ & \left. - \frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}\left[\alpha_{Ref0} - \left(\sum_{j=1}^{M} B_{nj}\left(c^{*}_{a0,kal,j} + c_{a\alpha,kal,j}\ \alpha_{Ref0}\right)\right) + i_F + \varepsilon_{VF,Ref0,n}\right]\right] c_{wp,n} \Bigg\}\ \ell_n \sin\vartheta_n \end{aligned} \tag{I.09}$$

Fasst man die einzelnen Anteile zusammen, erhält man:

[146] In Anhang F wird der induzierte Abwindwinkel als Funktion der Auftriebsverteilung hergeleitet. Diese Beziehungen gelten in entsprechender Weise auch für die korrigierte Auftriebsverteilung.

[147] Für den Gesamt-Nickmomentenbeiwert aus dem Tragflächenverfahren wird wiederum der Index „LSM“ weggelassen; der Index „kor/kal“ bedeutet, dass alle Werte bereits korrigiert sind, zusätzlich aber bereits für die Auftriebsverteilung die Kalibration durchgeführt wurde.

$$
\begin{aligned}
C_{M,kor/kal} = \frac{\Lambda}{4s}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} \Bigg\{ & \left[-\frac{z_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu}\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^{*}_{a0,kal,j} + \frac{x_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu} \right] c^{*}_{a0,kal,n} \\
& + \left[\frac{z_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu}\left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c_{a\alpha,kal,j} \right) \right] c^{*}_{a0,kal,n}\ \alpha_{Ref0} \\
& + \left[-\frac{z_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu}\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^{*}_{a0,kal,j} + \frac{x_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu} - \frac{\ell_n/4}{\ell_\mu} \right] c_{a\alpha,kal,n}\ \alpha_{Ref0} \\
& + \left[\frac{z_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu}\left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c_{a\alpha\ kal\ j} \right) \right] c_{a\alpha,kal,n}\ \alpha^{2}_{Ref0} \\
& + \frac{\ell_n}{\ell_\mu} c^{*}_{m025,kor,n} \\
& + \frac{\ell_n}{\ell_\mu} c_{m\alpha,kor,n}\ \alpha_{Ref0} \\
& + \Bigg[-\frac{x_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu}\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^{*}_{a0,kal,j} - \frac{z_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu} \\
& \quad + \frac{x_{Nase\,n\,f}}{\ell_\mu}\left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c_{a\alpha,kal,j} \right) \alpha_{Ref0} \\
& \quad - \frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}\left(-\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^{*}_{a0,kal,j} + i_F + \varepsilon_{VF,Ref0,n} \right) \\
& \quad - \frac{\ell_n/2}{\ell_\mu}\left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c_{a\alpha,kal,j} \right) \alpha_{Ref0} \Bigg] c_{wp,n} \Bigg\}\ \ell_n \sin\vartheta_n
\end{aligned}
\tag{I.10}
$$

Damit ist $C_{M,LSM}$ eine Funktion $f(\alpha,\alpha^2)$. Dies zeigt, dass der lineare Ansatz nach Gl. (I.01) die tatsächlichen Verhältnisse nicht vollständig wiedergibt, so dass der erweiterte Ansatz gilt:

$$
C_{M,kor/kal} = C^{*}_{M0,kor/kal} + C_{M\alpha,kor/kal}\ \alpha + C_{M\alpha^2,kor/kal}\ \alpha^2 \tag{I.11}
$$

mit den Ausdrücken

$$
\begin{aligned}
C^{*}_{M0,kor/kal} = \frac{\Lambda}{4s\,\ell_\mu}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} \Bigg\{ & \left[x_{Nase\,n\,f} - \frac{\ell_n}{4} - z_{Nase\,n\,f}\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c_{a0\ kal\ j} \right] c^{*}_{a0,kal,n} + \ell_n\ c^{*}_{m025,kor,n} \\
& - \left[\left(x_{Nase\,n\,f} - \frac{\ell_n}{2} \right)\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^{*}_{a0,kal,j} + z_{Nase\,n\,f} + \frac{\ell_n}{2}\left(i_F + \varepsilon_{VF,Ref0,n} \right) \right] c_{wp,n} \Bigg\}\ \ell_n \sin\vartheta_n
\end{aligned}
\tag{I.12}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{M\alpha,kor/kal} = \frac{\Lambda}{4s\,\ell_\mu}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} \Bigg\{ & \left[z_{Nase\,n\,f}\left(1-\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c_{a\alpha,kal,j}\right)\right] c^{*}_{a0,kal,n} \\
& + \left[- z_{Nase\,n\,f}\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^{*}_{a0,kal,j} + x_{Nase\,n\,f} - \frac{\ell_n}{4}\right] c_{a\alpha,kal,n} \\
& + \ell_n\, c_{m\alpha,kor,n} \\
& + \left[\left(x_{Nase\,n\,f} - \frac{\ell_n}{2}\right)\left(1-\sum_{j=1}^{M} B_{nj}\, c_{a\alpha,kal,j}\right)\right] c_{wp,n} \Bigg\}\ \ell_n \sin\vartheta_n
\end{aligned}
\tag{I.13}
$$

$$
C_{M\alpha^2,kor/kal} = \frac{\Lambda}{4s\,\ell_\mu}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M} z_{Nase\,n\,f}\left(1-\sum_{j=1}^{M} B_{nj} c_{a\alpha,kal,j}\right) c_{a\alpha,kal,n}\ \ell_n \sin\vartheta_n \tag{I.14}
$$

Die Ursache für den α^2-abhängigen Term liegt darin, dass einerseits der Auftrieb mit α anwächst, andererseits sich aber auch der wirksame Hebelarm der Hochlage z mit α vergrößert. Da kleine Anstellwinkel vorausgesetzt werden und die Hochlage bei den hier betrachteten Verkehrsflugzeugen relativ gering ist, kann der α^2-abhängige Term als vergleichsweise klein vernachlässigt werden[148], so dass hier weiterhin der Ansatz nach Gl. (I.01) verwendet wird.

Koeffizienten aus der nichtlinearen Tabellenaerodynamik

Die Koeffizienten für das Nickmoment aus der Tabellenaerodynamik werden analog zum Auftrieb bestimmt:

$$
\begin{aligned}
C_{M\alpha,Tab} &= \frac{C_{M,Tab,Ref0-II} - C_{M,Tab,Ref0-I}}{\alpha_{Ref0-II} - \alpha_{Ref0-I}} \\
C^{*}_{M0,Tab} &= C_{M,Tab,Ref0-I} - C_{M\alpha,Tab}\ \alpha_{Ref0-I}
\end{aligned}
\tag{I.15}
$$

$C_{M\alpha\,Tab}$ Nickmomentenanstieg aus der Tabellenaerodynamik

C^{*}_{M0} Null-Nullmoment aus der Tabellenaerodynamik

Bestimmung der Kalibrationsfaktoren

Für das kalibrierte Gesamt-Nickmoment des Flügels gilt die Forderung:

$$
C_{M,kal} \overset{!}{=} C_{M,Tab} \tag{I.16}
$$

Für das kalibrierte Gesamt-Nickmoment gilt ein linearer Ansatz entsprechend Gl. (I.01):

$$
C_{M,kal} = C^{*}_{M0,kal} + C_{M\alpha,kal}\ \alpha_{Ref0} \tag{I.17}
$$

mit den beiden Kenngrößen

$$
\begin{aligned}
C^{*}_{M0,kal} &= C^{*}_{M0,kor/kal} + K_{0M} \\
C_{M\alpha,kal} &= K_{1M}\ C_{M\alpha,kor/kal}
\end{aligned}
\tag{I.18}
$$

und den beiden Kalibrationsfaktoren:

[148] Bei einem Anstellwinkel von α = 10° ergibt sich in Bogenmaß α = 0,175 und α^2 = 0,030 bzw. im Vergleich ca, 18% von α. Bei Flugzeugen mit vergleichsweise großer Hoch-/Tieflage bzw. großen Anstellwinkeln ist der quadratische α-Anteil mit zu berücksichtigen. Das hier beschriebene Vorgehen ist dann entsprechend um diese Abhängigkeit zu erweitern.

$$K_{0M} = C^*_{M0,Tab} - C^*_{M0,kor/kal}$$
$$K_{1M} = \frac{C_{M\alpha,Tab}}{C_{M\alpha,kor/kal}} \tag{I.19}$$

Kalibration der Nickmomentenverteilung

Da zur Berechnung der elastischen Verformungen neben den örtlichen Gesamt-Auftriebsbeiwerten ebenfalls die örtlichen Gesamtmomente benötigt werden, muss die Kalibration des Gesamt-Nickmomentenbeiwertes noch auf die örtlichen Beiwerte angewendet werden. Dies geschieht auf Basis der Gl. (I.17) und Gl. (I.18). Ziel hierbei ist die Übertragung der Kalibrationsfaktoren K_{0M} und K_{1M} auf die örtlichen Beiwerte c_m bzw. c^*_{m0} und $c_{m\alpha}$. Hierzu wird angenommen, dass den kalibrierten Gesamtwerten $C^*_{M0,kal}$ und $C_{M\alpha,kal}$ entsprechende Verteilungen von örtlichen Null-Nullmomenten und Nickmomentenanstiegen zugeordnet werden können. Für die kalibrierten örtlichen Nickmomentenbeiwerte des Referenzzustandes gilt ebenfalls ein linearer Ansatz:

$$c_{m25,Ref0,kal,\nu} = c^*_{m025,kal,\nu} + c_{m\alpha,kal,\nu}\,\alpha_{Ref0} \tag{I.20}$$

Null-Nullmoment

Für das kalibrierte Gesamt-Null-Nullmoment kann damit Gl. (I.13) entsprechend für die kalibrierten Verteilungen hingeschrieben werden:

$$C^*_{M0,kal} = \frac{\Lambda}{4s\,\ell_\mu}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left\{\left[x_{Nase\,n\,f} - \frac{\ell_n}{4} - z_{Nase\,n\,f}\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^*_{a0,kal,j}\right]c^*_{a0,kal,n} + \ell_n\,c^*_{m025,kal,n}\right.$$
$$\left. - \left[\left(x_{Nase\,n\,f} - \frac{\ell_n}{2}\right)\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^*_{a0,kal,j} + z_{Nase\,n\,f} + \frac{\ell_n}{2}\left(i_F + \varepsilon_{VF,Ref0,n}\right)\right]c_{wp,n}\right\}\ell_n\sin\vartheta_n \tag{I.21}$$

Andererseits gilt für das kalibrierte Null-Nullmoment auch Gl. (I.17), wobei $C^*_{M0,kor/kal}$ durch Gl. (I.12) ausgedrückt werden kann. Der Kalibrationsfaktor K_{0M} aus Gl. (I.19) kann entsprechend der Summenbildung in Gl. (I.21) auf die einzelnen Elementarflügel durch Einführung des örtlichen Kalibrationsfaktors verteilt werden:

$$K^*_{0M,\nu} = K_{0M}\,\frac{4s}{\Lambda}\,\frac{M+1}{\pi}\,\frac{\ell_\mu}{\ell_\nu}\,\frac{1}{\ell_\nu\sin\vartheta_\nu} \tag{I.22}$$

Damit kann für das kalibrierte Null-Nullmoment auch geschrieben werden:

$$C^*_{M0,kal} = C^*_{M0\,LSM} + K_{0M}$$
$$= \frac{\Lambda}{4s\,\ell_\mu}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\left\{\left[x_{Nase\,n\,f} - \frac{\ell_n}{4} - z_{Nase\,n\,f}\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^*_{a0,kal,j}\right]c^*_{a0,kal,n} + \ell_n\,c^*_{m025,kor,n}\right. \tag{I.23}$$
$$\left. - \left[\left(x_{Nase\,n\,f} - \frac{\ell_n}{2}\right)\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^*_{a0,kal,j} + z_{Nase\,n\,f} + \frac{\ell_n}{2}\left(i_F + \varepsilon_{VF,Ref0,n}\right)\right]c_{wp,n} + K^*_{0M,n}\right\}\ell_n\sin\vartheta_n$$

Gl. (I.22) zeigt, dass der Kalibrationsfaktor für das Gesamt-Nickmoment K_{0M} trotz seiner Verteilung auf die Elementarflügel $K^*_{M0\,kal}$ nicht ohne weiteres auf die Verteilung der örtlichen Null-Nullmomentenbeiwerte abgebildet werden kann, da auch der örtliche Auftrieb und der örtliche Profil-

widerstand eingehen. Durch die Gleichheit der beiden Ausdrücke Gl. (I.21) und Gl. (I.23) folgt:

$$\begin{aligned}
&\left[x_{\text{Nase n f}} - \frac{\ell_n}{4} - z_{\text{Nase n f}} \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^*_{a0,kal,j} \right] c^*_{a0,kal,n} + \ell_n \, c^*_{m025,kal,n} \\
&- \left[\left(x_{\text{Nase n f}} - \frac{\ell_n}{2} \right) \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^*_{a0,kal,j} + z_{\text{Nase n f}} + \frac{\ell_n}{2} \left(i_F + \varepsilon_{VF,Ref0,n} \right) \right] c_{wp,n} \\
&= \left[x_{\text{Nase n f}} - \frac{\ell_n}{4} - z_{\text{Nase n f}} \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^*_{a0,kal,j} \right] c^*_{a0,kal,n} + \ell_n \, c^*_{m025,kor,n} \\
&\quad - \left[\left(x_{\text{Nase n f}} - \frac{\ell_n}{2} \right) \sum_{j=1}^{M} Bj_{nj} c^*_{a0,kal,j} + z_{\text{Nase n f}} + \frac{\ell_n}{2} \left(i_F + \varepsilon_{VF,Ref0,n} \right) \right] c_{wp,n} + \ell_n \, K^*_{0M,n}
\end{aligned} \tag{I.24}$$

Hieraus kann die kalibrierte Null-Nullmomentenverteilung bestimmt werden. Da die Auftriebsabhängigen Anteile sich jeweils gegenseitig aufheben, erhält man schließlich:

$$c^*_{m025,kal,\nu} = c^*_{m025,kor,\nu} + K^*_{0M,\nu} \tag{I.25}$$

Die kalibrierten örtlichen Null-Nullmomente können damit analog zum Korrekturverfahren durch eine einfache Addition eines örtlichen Kalibrationsfaktors bestimmt werden, wobei der Kalibrationsfaktor nach Gl. (I.22) mit dem Flügelschnitt variiert. Diese simple Kalibration setzt allerdings voraus, dass das Gesamt-Null-Nullmoment nach Gl. (I.12) mit den kalibrierten Auftriebsbeiwerten ermittelt wird – andernfalls heben sich die Auftriebsabhängigen Terme in Gl. (I.24) nicht auf! Ersetzt man in Gl. (I.25) das korrigierte Null-Nullmoment durch Gl. (I.06) erhält man schließlich:

$$c^*_{m025,kal,\nu} = c_{m025,\nu} + \Delta c_{m0,\nu} + k_{0M,\nu} + K^*_{0M,\nu} \tag{I.26}$$

Nickmomentenanstieg

Für den kalibrierten Nickmomentenanstieg gilt entsprechend Gl. (I.13):

$$\begin{aligned}
C_{M\alpha,kal} = \frac{\Lambda}{4s\,\ell_\mu} \frac{\pi}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \Bigg\{ & \left[z_{\text{Nase n f}} \left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c_{a\alpha,kal,j} \right) \right] c^*_{a0,kal,n} \\
& + \left[- z_{\text{Nase n f}} \sum_{j=1}^{M} B_{nj} c^*_{a0,kal,j} + x_{\text{Nase n f}} - \frac{\ell_n}{4} \right] c_{a\alpha,kal,n} \\
& + \ell_n \, c_{m\alpha,kal,n} \\
& + \left[\left(x_{\text{Nase n f}} - \frac{\ell_n}{2} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{nj} \, c_{a\alpha,kal,j} \right) \right] c_{wp,n} \Bigg\} \, \ell_n \sin \vartheta_n
\end{aligned} \tag{I.27}$$

Formuliert man den kalibrierten Nickmomentenanstieg auf der Basis von Gl. (I.18) und Gl. (I.19) unter Verwendung von Gl. (I.13) und berücksichtigt den Kalibrationsfaktor K_{1M} in der Summenbildung, erhält man:

$$
\begin{aligned}
C_{M\alpha,kal} &= K_{1M}\, C_{M\alpha,kor/kal} \\
&= \frac{\Lambda}{4s\,\ell_\mu}\frac{\pi}{M+1}\sum_{n=1}^{M}\Bigg\{\left[z_{Nase\,n\,f}\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c_{a\alpha,kal,j}\right)\right]c^{*}_{a0,kal,n} \\
&\qquad +\left[-z_{Nase\,n\,f}\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^{*}_{a0,kal,j}+x_{Nase\,n\,f}-\frac{\ell_n}{4}\right]c_{a\alpha,kal,n} \\
&\qquad +\ell_n\, c_{m\alpha,kor,n} \\
&\qquad +\left[\left(x_{Nase\,n\,f}-\frac{\ell_n}{2}\right)\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{nj}\,c_{a\alpha,kal,j}\right)\right]c_{wp,n}\Bigg\}K_{1M}\,\ell_n\sin\vartheta_n
\end{aligned}
\tag{I.28}
$$

Durch die Gleichheit der beiden Ausdrücke Gl. (I.27) und Gl. (I.28) folgt:

$$
\begin{aligned}
&\left[z_{Nase\,n\,f}\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^{*}_{a0,kal,j}\right)\right]c^{*}_{a0,kal,n}+\left[-z_{Nase\,n\,f}\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^{*}_{a0,kal,j}+x_{Nase\,n\,f}-\frac{\ell_n}{4}\right]c_{a\alpha,kal,n} \\
&+\ell_n\, c_{m\alpha,kal,n}+\left[\left(x_{Nase\,n\,f}-\frac{\ell_n}{2}\right)\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c_{a\alpha,kal,j}\right)\right]c_{wp,n} \\
&=\Bigg\{\left[z_{Nase\,n\,f}\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^{*}_{a0,kal,j}\right)\right]c^{*}_{a0,kal,n}+\left[-z_{Nase\,n\,f}\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c^{*}_{a0,kal,j}+x_{Nase\,n\,f}-\frac{\ell_n}{4}\right]c_{a\alpha,kal,n} \\
&\quad+\ell_n\, c_{m\alpha,kor,n}+\left[\left(x_{Nase\,n\,f}-\frac{\ell_n}{2}\right)\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{nj}c_{a\alpha,kal,j}\right)\right]c_{wp,n}\Bigg\}\;K_{1M}
\end{aligned}
\tag{I.29}
$$

Da der Kalibrationsfaktor K_{1M} auf der rechten Seite multiplikativ eingeht, heben sich die Auftriebsabhängigen Terme nicht gegenseitig auf. Für die kalibrierte Verteilung des Nickmomentenanstieges folgt zunächst:

$$
\begin{aligned}
c_{m\alpha,kal,\nu} &= c_{m\alpha,kor,\nu}\;K_{1M} \\
&\quad -\frac{z_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu}\left[\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{\nu j}c_{a\alpha,kal,j}\right)c^{*}_{a0,kal,\nu}-\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{\nu j}c_{a\alpha,kal,j}\right)c^{*}_{a0,kal,\nu}\;K_{1M}\right] \\
&\quad -\frac{z_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu}\left[-c_{a\alpha,kal,\nu}\sum_{j=1}^{M}B_{\nu j}c^{*}_{a0,kal,j}+c_{a\alpha,kal,\nu}\;K_{1M}\sum_{j=1}^{M}B_{\nu j}c^{*}_{a0,kal,j}\right] \\
&\quad -\left(\frac{x_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu}-\frac{1}{4}\right)\left(c_{a\alpha,kal,\nu}-c_{a\alpha,kal,\nu}\;K_{1M}\right) \\
&\quad -\left(\frac{x_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu}-\frac{1}{2}\right)\left[\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{\nu j}c_{a\alpha,kal,j}\right)-K_{1M}\left(1-\sum_{j=1}^{M}B_{\nu j}c_{a\alpha,kal,j}\right)\right]c_{wp,\nu}
\end{aligned}
\tag{I.30}
$$

bzw. durch weitere Umformung

$$
\begin{aligned}
c_{m\alpha,kal,\nu} = {} & c_{m\alpha,kor,\nu}\, K_{1M} \\
& + \left(K_{1M} - 1\right)\left\{ \frac{z_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu}\left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{\nu j} c_{a\alpha,kal,j}\right) c^{*}_{a0,kal,\nu} \right. \\
& \quad + \left[-\frac{z_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu} \sum_{j=1}^{M} B_{\nu j} c^{*}_{a0,kal,j} + \frac{x_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu} - \frac{1}{4} \right] c_{a\alpha,kal,\nu} \\
& \quad \left. + \left(\frac{x_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu} - \frac{1}{2} \right)\left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{\nu j} c_{a\alpha,kal,j}\right) c_{wp,\nu} \right\}
\end{aligned}
\tag{I.31}
$$

Die kalibrierten örtlichen Nickmomentenanstiegswerte können damit aus den bereits bekannten kalibrierten örtlichen Auftriebskennwerten und dem korrigierten Nickmomentenanstieg sowie dem Kalibrationsfaktor K_{1M} ermittelt werden. Gl. (I.31) kann auch abgekürzt hingeschrieben werden:

$$
c_{m\alpha,kal,\nu} = c_{m\alpha,kor,\nu}\, K_{1M} + \left(K_{1M} - 1\right)\left(m_{a0,\nu} c^{*}_{a0,kal,\nu} + m_{a1,\nu} c_{a\alpha,kal,\nu} + m_{w,\nu} c_{wp,\nu} \right) \tag{I.32}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{a0,\nu} &= \frac{z_{Nase,\nu,f}}{\ell_n}\left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{\nu j} c_{a\alpha,kal,j}\right) \\
m_{a1,\nu} &= \left(\frac{x_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu} - \frac{1}{4} - \frac{z_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu} \sum_{j=1}^{M} B_{\nu j} c^{*}_{a0,kal,j} \right) \\
m_{w,\nu} &= \left(\frac{x_{Nase,\nu,f}}{\ell_\nu} - \frac{1}{2} \right)\left(1 - \sum_{j=1}^{M} B_{\nu j} c_{a\alpha,kal,j}\right)
\end{aligned}
\tag{I.33}
$$

Die drei Koeffizienten m_{a0}, m_{a1} und m_w sind vom Referenzzustand abhängig und können daher nicht vorab bestimmt werden. Ersetzt man noch in Gl. (I.32) den korrigierten Nickmomentenanstieg durch Gl. (I.06) erhält man schließlich:

$$
\begin{aligned}
c_{m\alpha,kal,\nu} = {} & k_{1M,\nu}\, K_{1M}\, c_{m\alpha,\nu} \\
& + \left(K_{1M} - 1\right)\left(m_{a0,\nu} c_{a0,ka,\nu} + m_{a1,\nu} c_{a\alpha,kal,\nu} + m_{w,\nu} c_{wp,\nu} \right)
\end{aligned}
\tag{I.34}
$$

bzw. mit der weiteren Abkürzung

$$
K_{2M,\nu} = m_{a0,\nu} c_{a0,kal,\nu} + m_{a1,\nu} c_{a\alpha,kal,\nu} + m_{w,\nu} c_{wp,\nu} \tag{I.35}
$$

$$
c_{m\alpha,kal,\nu} = k_{1M,\nu}\, K_{1M}\, c_{m\alpha,\nu} + \left(K_{1M} - 1\right) K_{2M,\nu} \tag{I.36}
$$

Nickmomentenbeiwert

Für den kalibrierten örtlichen Nickmomentenbeiwert im Referenzzustand folgt damit aus Gl. (I.20) in Verbindung mit Gl. (I.26) sowie mit Gl. (I.36):

$$
\begin{aligned}
c_{m25,Ref0,kal,\nu} = {} & c_{m025,\nu} + \Delta c^{*}_{m0,\nu} + k_{0M,\nu} + K^{*}_{0M,\nu} \\
& + \left[k_{1M,\nu}\, K_{1M}\, c_{m\alpha,\nu} + \left(K_{1M} - 1\right) K_{2M,\nu} \right] \alpha_{Ref0}
\end{aligned}
\tag{I.37}
$$

Wendet man die Kalibration für beliebige Anstellwinkelverteilungen an, wobei der Nickmomentenanstieg durch Gl. (I.14) zu ersetzen ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
c_{m25,kal,\nu} &= c_{m025,\nu} + \Delta c^{*}_{m0,\nu} + k_{0M,\nu} + K^{*}_{0M,\nu} \\
&\quad + k_{1M,\nu}\, K_{1M} \sum_{j=1}^{2M} L_{M+\nu,j}\left(\alpha_{F,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,j}\right) \\
&\quad + \left(K_{1M} - 1\right) K_{2M,\nu}\left(\alpha_{F,\nu} + \Delta\varepsilon_{FlexF,\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{I.38}
$$

mit dem Anstellwinkel nach Gl. (I.25):

$$
\alpha_{F,j} = \alpha + \Delta\alpha_{KF,j} + \Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\alpha_{WF,j} \tag{I.39}
$$

Damit ist die Kalibration der Nickmomentenverteilung angeschlossen.

I.2 Zusammenfassung der Kalibration von Auftrieb und Nickmoment

Die zuvor ermittelten Ausdrücke zur Kalibration der örtlichen Beiwerte sollen so umgeformt werden, dass sie als Modifikation der Matrizenoperationen entsprechend Gl. (I.20) dargestellt werden können. Für den kalibrierten, örtlichen Auftriebsbeiwert gilt nach Gl. (5.26):

$$
c_{a,kal,\nu} = c_{a0,\nu} + \Delta c^{*}_{m0,\nu} + k_{0a,\nu} + K^{*}_{0A,\nu} + k_{1a,\nu}\, K_{1A} \sum_{j=1}^{2M} L_{\nu j}\left(\alpha_{F,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,j}\right) \tag{I.40}
$$

mit dem Anstellwinkel

$$
\alpha_{F,j} = \alpha + \Delta\alpha_{KF,j} + \Delta\alpha_{FlexF,j} + \Delta\alpha_{WF,j} \tag{I.39}
$$

Für den kalibrierten, örtlichen Nickmomentenbeiwert gilt:

$$
\begin{aligned}
c_{m25,kal,\nu} &= c_{m025,\nu} + \Delta c^{*}_{m0,\nu} + k_{0M,\nu} + K^{*}_{0M,\nu} \\
&\quad + k_{1M,\nu}\, K_{1M} \sum_{j=1}^{2M} L_{M+\nu,j}\left(\alpha_{F,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,j}\right) \\
&\quad + \left(K_{1M} - 1\right) K_{2M,\nu}\left(\alpha_{F,\nu} + \Delta\varepsilon_{FlexF,\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{I.38}
$$

Fasst man die kalibrierten Beiwerte für Auftrieb und Nickmoment zu einem gemeinsamen Vektor zusammen, kann entsprechend Gl. (5.20) geschrieben werden:

$$
\underline{c}_{kal} = \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{K}_0 + \left(\underline{\underline{K}}_1\, \underline{\underline{L}}_{kor} + \underline{\underline{K}}_2\right)\left(\underline{\alpha}_F + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF}\right) \tag{I.41}
$$

mit dem Anstellwinkelvektor

$$
\underline{\alpha}_F = \underline{\alpha} + \Delta\underline{\alpha}_{KF} + \Delta\underline{\alpha}_{FlexF} + \Delta\underline{\alpha}_{WF} \tag{I.42}
$$

dem Vektor der elastischen Torsionswinkel nach Gl. (5.40)

$$
\Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{FlexF,M} \\ \varepsilon_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{FlexF,M} \end{bmatrix} \tag{I.43}
$$

der Nullverteilung nach Gl. (5.08)

$$\underline{c}_0 = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c_{m025,1} \\ \vdots \\ c_{m025,M} \end{bmatrix} \tag{I.44}$$

dem Einfluss des Flügeleinstellwinkels und der Verwindung

$$\Delta\underline{c}_0 = \begin{bmatrix} \Delta c_{a0,1} \\ \vdots \\ \Delta c_{a0,M} \\ \Delta c_{m0,1} \\ \vdots \\ \Delta c_{m0,M} \end{bmatrix} \tag{I.45}$$

dem Korrekturvektor nach Gl. (5.38)

$$\underline{k}_0 = \begin{bmatrix} k_{0a,1} \\ \vdots \\ k_{0a,M} \\ k_{0m,1} \\ \vdots \\ k_{0m,M} \end{bmatrix} \tag{I.46}$$

dem Kalibrationsvektor

$$\underline{K}_0 = \begin{bmatrix} K^*_{0A,1} \\ \vdots \\ K^*_{0A,M} \\ K^*_{0M,1} \\ \vdots \\ K^*_{0M,M} \end{bmatrix} \tag{I.47}$$

und den Kalibrationsmatrizen[149]

$$\underline{\underline{K}}_1 = \begin{bmatrix} K_{1A}k_{1a,1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{1A}k_{1a,M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{1M}k_{1m,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & K_{1M}k_{1m,M} \end{bmatrix} \tag{I.48}$$

[149] Im Unterschied zur Korrekturmatrix $\underline{k}_1$ nach Gl. (5.38) sind in $\underline{K}_1$ noch die Kalibrationsfaktoren K_{1A} und K_{1M} enthalten.

$$\underline{\underline{K}}_2 = 0{,}5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{2M,1} & \cdots & 0 & K_{2M,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{2M,M} & 0 & \cdots & K_{2M,M} \end{bmatrix} \tag{I.49}$$

Hierbei berücksichtigt der Faktor 0,5, dass in Gl. (I.38) im letzten Term die Anstellwinkel eines Schnittes einzusetzen sind, die als Mittelwert aus den Werten am ℓ/4-Punkt und der Hinterkante gebildet werden können.

Fasst man in Gl. (I.41) noch die einzelnen Vektoren bzw. Matrizen aus Korrektur und Kalibration zusammen, erhält man schließlich:

$$\underline{c}_{kal} = \underline{K}_{kal} + \underline{\underline{L}}_{kal} \left(\underline{\alpha}_F + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF} \right) \tag{I.50}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{K}_{kal} &= \underline{c}_0 + \Delta\underline{c}_0 + \underline{k}_0 + \underline{K}_0 \\ \underline{\underline{L}}_{kal} &= \underline{\underline{K}}_1 \, \underline{\underline{L}}_{kor} + \underline{\underline{K}}_2 \end{aligned} \tag{I.51}$$

Anhang J Geschwindigkeitskinematik

J.1 Grundlagen

Aus der Flugmechanik ist zur Beschreibung der Bewegung des Flugzeugs als Starrkörper die einfache kinematische Beziehung bekannt [Wilhelm 2000, Schänzer 1981]:

$$\underline{V}_K = \underline{V}_A + \underline{V}_W \tag{J.01}$$

$\underline{V}_K$ Bahngeschwindigkeit (Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs gegenüber der Erde)
$\underline{V}_A$ Fluggeschwindigkeit (Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs gegenüber der Luft)
$\underline{V}_W$ Windgeschwindigkeit (Geschwindigkeitsvektor der Luft gegenüber der Erde)

Diese als Geschwindigkeitskinematik bezeichnete Beziehung gilt zu jedem Zeitpunkt einer (dynamischen) Bewegung. Die praktische Bedeutung von Gl. (J.01) liegt in der Bestimmung der Anströmgeschwindigkeit in Betrag und Richtung aus der Bahngeschwindigkeit $\underline{V}_K$, die man als Ergebnis der Lösung Bewegungsgleichungen z.B. durch numerische Integration erhält und des als bekannt vorausgesetzten Windes $\underline{V}_W$, um hieraus die aerodynamischen Kräfte und Momente zu ermitteln. Hierzu wird der Fluggeschwindigkeitsvektor in Komponenten des flugzeugfesten Koordinatensystems formuliert:

$$\underline{V}_{Af} = \underline{V}_{Kf} - \underline{V}_{Wf} \tag{J.02}$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\begin{bmatrix} u_{Af} \\ v_{Af} \\ w_{Af} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{Kf} \\ v_{Jf} \\ w_{Kf} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{Wf} \\ v_{Wf} \\ w_{Wf} \end{bmatrix} \tag{J.03}$$

Für den Anströmgeschwindigkeitsvektor im flugzeugfesten Koordinatensystem gilt andererseits:

$$\underline{V}_{Af} = \underline{\underline{T}}_{fa}\, \underline{V}_{Aa} \tag{J.04}$$

mit der Definition

$$\underline{V}_{Aa} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{J.05}$$

und der Transformationsmatrix [LN 9300]

$$\underline{\underline{T}}_{fa} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{J.06}$$

erhält man

$$\underline{V}_{Af} = V \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{Af} \\ v_{Af} \\ w_{Af} \end{bmatrix} \tag{J.07}$$

Daraus können die zur Berechnung der aerodynamischen Kräfte und Momente benötigten Größen direkt ermittelt werden:

$$\alpha = \arctan\frac{w_{Af}}{u_{Af}}$$

$$\beta = \arcsin\frac{v_{Af}}{V_A} \tag{J.08}$$

$$V_A = \sqrt{u_{Af}^2 + v_{Af}^2 + w_{Af}^2}$$

α Anstellwinkel des Flugzeugs
β Schiebewinkel
V_A Betrag der Fluggeschwindigkeit

Diese einfachen kinematischen Beziehungen gelten jedoch nicht nur für die Betrachtung eines Flugzeugs als starren Körper, der zudem noch auf einen Massenpunkt reduziert wird, sondern vielmehr ganz allgemein für jeden Punkt des Flugzeugs, ebenfalls zu jedem Zeitpunkt. Die oben hergeleiteten Beziehungen müssen dazu lediglich für jeden betrachteten Punkt aufgestellt werden. Zweckmäßigerweise fasst man hierzu die jeweils 2M Vektoren zu Matrizen zusammen:

$$\underline{\underline{V}}_K = \begin{bmatrix} u_{K,1} & u_{K,2} & \cdots & u_{K,2M} \\ v_{K,1} & v_{K,2} & \cdots & v_{K,2M} \\ w_{K,1} & w_{K,2} & \cdots & w_{K,2M} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{V}}_A = \begin{bmatrix} u_{A,1} & u_{A,2} & \cdots & u_{A,2M} \\ v_{A,1} & v_{A,2} & \cdots & v_{A,2M} \\ w_{A,1} & w_{A,2} & \cdots & w_{A,2M} \end{bmatrix} \tag{J.09}$$

$$\underline{\underline{V}}_W = \begin{bmatrix} u_{W,1} & u_{W,2} & \cdots & u_{W,2M} \\ v_{W,1} & v_{W,2} & \cdots & v_{W,2M} \\ w_{W,1} & w_{W,2} & \cdots & w_{W,2M} \end{bmatrix}$$

Mit diesen neu eingeführten Geschwindigkeitsmatrizen als Zusammenfassung der 2M Geschwindigkeitsvektoren kann die Geschwindigkeitskinematik verallgemeinert wie folgt formuliert werden:

$$\underline{\underline{V}}_K = \underline{\underline{V}}_A + \underline{\underline{V}}_W \tag{J.10}$$

Die Bestimmung der einzelnen Geschwindigkeitsvektoren bzw. Geschwindigkeitsmatrizen wird im Folgenden dargelegt.

J.2 Bahngeschwindigkeit

Für den Bahngeschwindigkeitsvektor $\underline{V}_K$ eines beliebigen körperfesten Punktes P(x,y,z) eines starren Körpers gilt allgemein:

$$\underline{V}_{K,Starr} = \underline{V}_{K,SP} + \Delta\underline{V}_{K,Rot} \tag{J.11}$$

mit

$$\Delta\underline{V}_{K,Rot,j} = \underline{\Omega}_K \times \underline{r}(x,y,z) \tag{J.12}$$

$\underline{V}_{K,SP}$ Bahngeschwindigkeit des Körperschwerpunkts
$\underline{\Omega}_K$ Drehgeschwindigkeitsvektor des (starren) Körpers gegenüber der Erde
$\underline{r}$ Ortsvektor vom Körperschwerpunkt SP zum Punkt P(x,y,z)

Mit den drei Vektoren im flugzeugfesten Koordinatensystem

$$\underline{V}_{K,SP,f} = \begin{bmatrix} u_{K,SP,f} \\ v_{K,SP,f} \\ w_{K,SP,f} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Omega}_{K,f} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \qquad \text{(J.13)}$$

$$\underline{r}_f = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

erhält man für die Bahngeschwindigkeit des Punktes P für die Starrkörperbewegung:

$$\underline{V}_{K\,Starr\,f} = \begin{bmatrix} u_{K,Starr,f} \\ v_{K,Starr,f} \\ w_{K,Starr,f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{K,SP,f} + qz - ry \\ v_{K,SP,f} + rx - pz \\ w_{K,SP,f} + py - qx \end{bmatrix} \qquad \text{(J.14)}$$

Treten zusätzlich zur Bahngeschwindigkeit des starren Körpers Verformungsgeschwindigkeiten infolge elastischer Verformungen auf, die in jedem Punkt P(x,y,z) verschieden sind, können diese als Überlagerung zur Starrkörpergeschwindigkeit jedes Punktes P entsprechend Gl. (J.09) aufgefasst werden[150]. Für den allgemeinen Fall eines elastischen Körpers gilt damit:

$$\underline{V}_K = \underline{V}_{K,SP} + \Delta\underline{V}_{K,Rot} + \Delta\underline{V}_{K,Flex} \qquad \text{(J.15)}$$

$\Delta\underline{V}_{K,Flex}$ Zusatz-Bahngeschwindigkeit infolge Elastizität

In Matrizenform gilt entsprechend

$$\underline{\underline{V}}_K = \underline{\underline{V}}_{K,SP} + \Delta\underline{\underline{V}}_{K,Rot} + \Delta\underline{\underline{V}}_{K,Flex} \qquad \text{(J.16)}$$

J.3 Windgeschwindigkeit

Die Windgeschwindigkeit in jedem Punkt P kann grundsätzlich beliebig sein und wird als bekannt vorausgesetzt. Sie kann z.B. als räumliche Verteilung abgespeichert sein (z.B. Matrix-Windmodell) oder durch ein separates Softwaremodul als Funktion des jeweiligen Ortes (und der Zeit) berechnet werden (z.B. Wirbelschleppenmodell).

Für die weiteren Betrachtungen ist es sinnvoll, das räumliche Windfeld zu zerlegen in einen gleichförmig verteilten Geschwindigkeitsanteil, der auf den Schwerpunkt reduziert werden kann (Schwerpunktwind) und der in das Ein-Punkt-Modell eingeht, sowie in eine räumliche Verteilung (Delta-Windfeld) als Abweichungen von diesem Schwerpunktwind:

$$\underline{V}_{W,P} = \underline{V}_{W,SP} + \Delta\underline{V}_{W,P} \qquad \text{(J.17)}$$

beziehungsweise in Matrizenform

$$\underline{\underline{V}}_W = \underline{\underline{V}}_{W,SP} + \Delta\underline{\underline{V}}_W \qquad \text{(J.18)}$$

[150] Die folgenden Beziehungen gelten allgemein und sind unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem. Dort, wo eine Festlegung auf ein Koordinatensystem nicht erforderlich ist, entfällt daher der Index für ein Koordinatensystem.

J.4 Anströmgeschwindigkeit[151]

Zur Berechnung der aerodynamischen Lastverteilungen wird die Anströmung in jedem Aufpunkt P in Betrag und Richtung benötigt, d.h. für jeden Aufpunkt P ist die Anströmgeschwindigkeit als Vektor entsprechend Gl. (5.69) zu ermitteln. Mit der eingeführten Matrizenschreibweise kann aus Gl. (5.73) die Anströmung in jedem Punkt als Matrizendifferenz formuliert werden:

$$\underline{\underline{V}}_A = \underline{\underline{V}}_K - \underline{\underline{V}}_W \tag{J.19}$$

bzw.

$$\underline{\underline{V}}_{Af} = \underline{\underline{V}}_{Kf} - \underline{\underline{V}}_{Wf} = \begin{bmatrix} u_{A,1,f} & u_{A,2,f} & \cdots & u_{A,2M,f} \\ v_{A,1,f} & v_{A,2,f} & \cdots & v_{A,2M,f} \\ w_{A,1,f} & w_{A,2,f} & \cdots & w_{A,2M,f} \end{bmatrix} \tag{J.20}$$

oder ausformuliert:

$$\begin{bmatrix} u_{A,1,f} & u_{A,2,f} & \cdots & u_{A,2M,f} \\ v_{A,1,f} & v_{A,2,f} & \cdots & v_{A,2M,f} \\ w_{A,1,f} & w_{A,2,f} & \cdots & w_{A,2M,f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{K,1,f} - u_{W,1,f} & u_{K,1,f} - u_{W,1,f} & \cdots & u_{K,2M,f} - u_{W,2M,f} \\ v_{K,1,f} - v_{W,1,f} & v_{K,2,f} - v_{W,2,f} & \cdots & v_{K,2M,f} - v_{W,2M,f} \\ w_{K,1,f} - w_{W,1,f} & w_{K,2,f} - w_{W,2,f} & \cdots & w_{K,2M,f} - w_{W,2M,f} \end{bmatrix} \tag{J.21}$$

Auch die örtliche Anströmgeschwindigkeit kann analog zur örtlichen Bahngeschwindigkeit bzw. Windgeschwindigkeit als Überlagerung einer Referenzanströmung und örtlichen Abweichungen hiervon aufgefasst werden:

$$\underline{\underline{V}}_A = \underline{\underline{V}}_{A,SP} + \Delta\underline{\underline{V}}_A \tag{J.22}$$

Hieraus folgt mit Gl. (J.10), (J.12) und (J.13)

$$\underline{\underline{V}}_A = \underline{\underline{V}}_{K,SP} + \Delta\underline{\underline{V}}_{K,Rot} + \Delta\underline{\underline{V}}_{K,Flex} - \underline{\underline{V}}_{W,SP} - \Delta\underline{\underline{V}}_W \tag{J.23}$$

Die Bestimmung der Anströmung in Betrag und Richtung erfolgt analog zu Gl. (J.05) für jeden einzelnen der 2M Aufpunkte des Flügels – der Index „j“ kennzeichnet, dass es sich hier jeweils um lokale Werte handelt:

$$\begin{aligned} \alpha_{F,j} &= \arctan\frac{w_{A,j,f}}{u_{A,j,f}} \\ \beta_j &= \arcsin\frac{v_{A,j,f}}{V_{A,j}} \\ V_{A,j} &= \sqrt{u_{A,j,f}^2 + v_{A,j,f}^2 + w_{A,j,f}^2} \end{aligned} \tag{J.24}$$

$\alpha_{F,j}$ örtlicher Anstellwinkel bezüglich der x_f-y_f-Ebene
β_j örtlicher Schiebewinkel
$V_{A,j}$ Betrag der örtlichen Anströmgeschwindigkeit

[151] Der Begriff „Fluggeschwindigkeit“ wird hier bewusst vermieden, da er die Bewegung des Gesamtflugzeugs gegenüber der umgebenden Luft bezeichnet – der Begriff „Anströmgeschwindigkeit“ ist daher hier treffender.

J.5 Berücksichtigung nichtlinearer Effekte

Wie bereits dargelegt, soll hier lediglich eine Delta-Aerodynamik beschrieben werden. Das bedeutet, dass sämtliche Einflüsse, die in der nichtlinearen Tabellenaerodynamik bereits enthalten sind, in der Delta-Aerodynamik nicht noch einmal berücksichtigt werden dürfen. Wie Gl. (J.24) zeigt, treten bei der Berechnung der lokalen Anströmgrößen nichtlineare Abhängigkeiten auf. Die Berechnung der lokalen „Delta-Größen" kann daher nicht einfach allein aus „Delta-Werten" der Geschwindigkeitskomponenten infolge Elastizität und eines räumlichen Windfeldes erfolgen. Hierzu wird im Folgenden ein mehrstufiges Verfahren erläutert. Zunächst ist jedoch zu klären, welche Einflüsse in der Delta-Aerodynamik nicht mehr zu berücksichtigen sind.

$\underline{V}_{A,SP}$ Bewegung des Flugzeugs gegenüber der Luft
Der Anströmvektor $\underline{V}_A$ wird üblicherweise durch seinen Betrag V und die Richtungsinformationen α und β relativ zum Flugzeug beschrieben. In der Tabellenaerodynamik wird üblicherweise $\underline{V}_A$ an einem einzigen Bezugspunkt ermittelt, wobei meist der Schwerpunkt als Bezugspunkt dient.

➔ $\underline{V}_{A,SP}$ ist bereits in der Tabellenaerodynamik berücksichtigt.

$\underline{V}_{W,SP}$ Bewegung der Luft (als konstantes Windfeld) gegenüber der Erde
Über die Geschwindigkeitskinematik $\underline{V}_K = \underline{V}_A + \underline{V}_W$ ($\underline{V}_K$: Geschwindigkeit des Flugzeugs gegenüber der Erde, $\underline{V}_W$: Geschwindigkeit der Luftmasse gegenüber der Erde) ist auch ein Einfluss des Windes enthalten, wobei hier $\underline{V}_W$ ebenfalls lediglich am Bezugspunkt (z.B. am Schwerpunkt) eingeht.

➔ $\underline{V}_{W,SP}$ ist bereits in der Tabellenaerodynamik berücksichtigt.

$\underline{\Omega}_K$ Drehung des Flugzeugs gegenüber der Erde
Hiermit ist stets die Drehung des Flugzeugs als Starrkörper gegenüber der Erde gemeint. Die flugzeugfesten Komponenten des Drehgeschwindigkeitsvektors werden ebenfalls in der Tabellenaerodynamik berücksichtigt, z.B. durch die Rolldämpfung C_{lp} und die Nickdämpfung C_{mq}.
➔ $\underline{V}_{K,Rot,j}$ ist bereits in der Tabellenaerodynamik berücksichtigt.
Zu beachten ist, dass üblicherweise $\underline{\Omega}_K$ in Form seiner Komponenten p,q und r in die Tabellenaerodynamik eingeht, obwohl dies nicht die Drehung des Flugzeugs gegenüber der Luft beschreibt, die aber für die aerodynamischen Kräfte und Momente ausschlaggebend ist. Ein Drehungsbehaftetes Windfeld wird hiermit nicht berücksichtigt, dies geschieht durch die räumlich verteilten Windvektoren.

i_F Einstellwinkel des Flügels
➔ Der Einfluss des Einstellwinkels ist der Tabellenaerodynamik berücksichtigt

$\varepsilon_{VF,\upsilon}$ Verwindungswinkel des Flügels
➔ Der Einfluss der Verwindung ist der Tabellenaerodynamik berücksichtigt

$\Delta\alpha_{FlexF,j}$ Zusatz-Anstellwinkel infolge elastischer Effekte
Durch elastische Verformungen, insbesondere infolge der Torsion und der Schlagbewegung des Flügels, werden lokale Anstellwinkeländerungen hervorgerufen.
In den Données Aérodynamiques von Airbus sind elastische Effekte durch so genannte „Flex-Faktoren" berücksichtigt. Diese berücksichtigen quasi stationäre elastische Verformungen, indem die aerodynamischen Beiwerte mit diesen Faktoren multipliziert werden. Im Allgemeinen wird hierbei eine Reduzierung der entsprechenden Beiwerte vorgenommen.
➔ Die Flex-Faktoren müssen in der Tabellenaerodynamik abgeschaltet werden!

Es muss festgestellt werden, dass in vorhandenen Flugsimulationsprogrammen die Berücksichtigung der Translation und der Rotation des Flugzeugs gegenüber der umgebenden Luftmasse nicht von vorneherein als insgesamt schlüssig formuliert vorausgesetzt werden kann. Es ist daher genau zu prüfen, ob ein Windeinfluss bereits in den flugmechanischen Bewegungsgleichungen enthalten ist und wenn dies der Fall ist, welche Auswirkungen im Einzelnen formuliert sind. Ebenso muss geprüft werden, ob bereits quasi stationäre elastische Einflüsse berücksichtigt werden. Hier wird davon ausgegangen, dass in der vorhandenen Flugsimulation

- ➔ über die Geschwindigkeitskinematik der Windeinfluss durch einen einzigen Vektor im Schwerpunkt des Flugzeugs erfasst wird,
- ➔ räumliche Änderungen des Windfeldes nicht berücksichtigt werden und
- ➔ dass quasi stationäre Einflüsse der Flügelelastizität abgeschaltet sind.

Die örtlichen Zusatz-Anstellwinkel bezogen auf die x_f-y_f-Ebene lassen sich damit wie folgt darstellen:

$$\Delta\alpha_{VF,j} = \alpha_{VF,j,\text{ mit Flexibilität/Windfeld}} - \alpha_{VF,j,\text{ ohne Flexibilität/Windld}} \tag{J.25}$$

Die benötigten Geschwindigkeitsvektoren werden im Folgenden zusammengestellt, siehe hierzu auch Bild J.1:

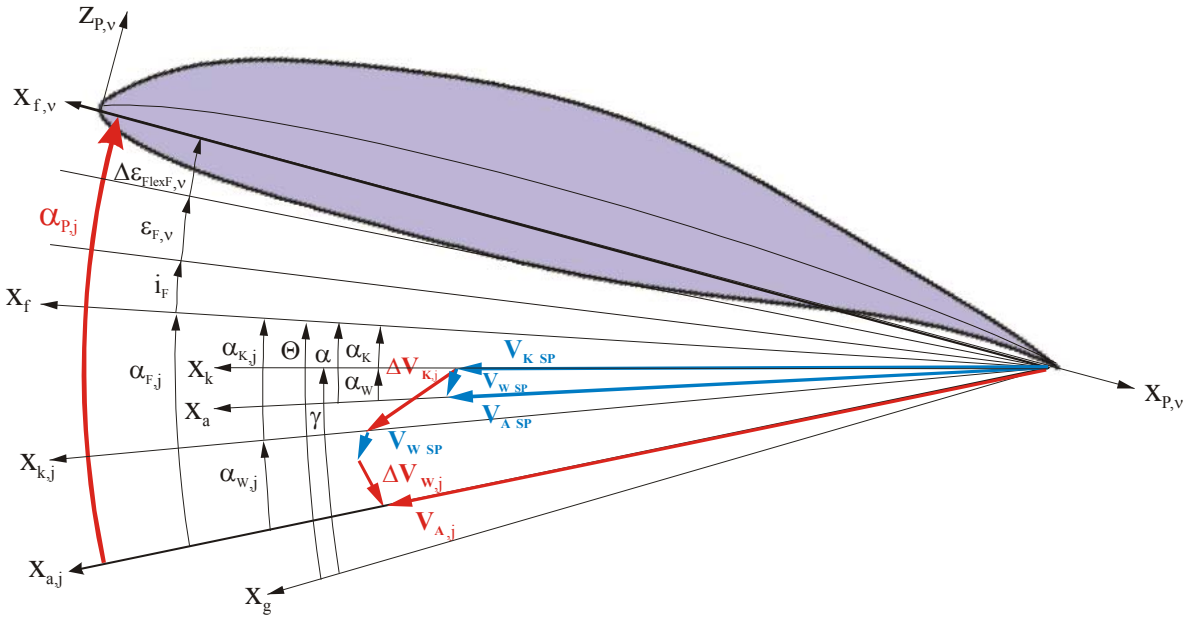

Bild J.1 Anstellwinkel am Profil im Flügelschnitt υ

Referenz-Bahngeschwindigkeit (des Starrkörpers):

$$\underline{V}_{K,SP,f} = \begin{bmatrix} u_{K,SP,f} \\ v_{K,SP,f} \\ w_{K,SP,f} \end{bmatrix} \tag{J.18}$$

Dieser Vektor wird durch die Starrkörpersimulation bereitgestellt und ist damit bekannt.

Zusatz-Bahngeschwindigkeit aus der Rotation des Starrkörpers:

$$\Delta\underline{V}_{K,Rot,j} = \underline{\Omega}_K \times \underline{r}(x,y,z) \tag{J.12}$$

Die Größen auf der rechten Seite werden durch die Starrkörpersimulation bereitgestellt, so dass dieser Geschwindigkeitsanteil bestimmt werden kann.

Zusatz-Bahngeschwindigkeit aus der Flexibilität:

$$\Delta\underline{V}_{K,Flex,j} = \begin{bmatrix} \Delta u_{K,Flex,j} \\ \Delta v_{K,Flex,j} \\ \Delta w_{KFlex,j} \end{bmatrix} \tag{J.26}$$

Dieser Geschwindigkeitsanteil wird im Strukturmodell bestimmt und stellt für die Aerodynamik damit eine als bekannt anzusehende Eingangsgröße dar.

Referenz-Windgeschwindigkeit (Schwerpunktwind):

$$\underline{V}_{W,SP} = \begin{bmatrix} u_{W,SP} \\ v_{W,SP} \\ w_{W,SP} \end{bmatrix} \tag{J.27}$$

Dieser Vektor wird durch die Starrkörpersimulation bereitgestellt und ist damit bekannt.

Zusatz-Windgeschwindigkeit bei einem räumlichen Windfeld:

$$\Delta\underline{V}_{W,j} = \underline{V}_{W,j} - \underline{V}_{W,SP} = \begin{bmatrix} \Delta u_{W,j} \\ \Delta v_{W,j} \\ \Delta w_{W,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{W,j} \\ v_{W,j} \\ w_{W,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{W,SP} \\ v_{W,SP} \\ w_{W,SP} \end{bmatrix} \tag{J.28}$$

Dieser Geschwindigkeitsanteil wird im Windmodell bestimmt und stellt für die Aerodynamik damit eine als bekannt anzusehende Eingangsgröße dar.

Anstellwinkelverteilung ohne Flexibilität und ohne räumliches Windfeld (Referenzzustand)

Diese (räumliche) Anstellwinkelverteilung wird auch bei einem Ein-Punkt-Modell berücksichtigt, da sie ihren Ausdruck z.B. in Derivativa wie C_{lp}, C_{lq}, C_{lr}, C_{mp}, C_{mq}, C_{mr}, C_{np}, C_{nq}, C_{nr} findet. Dieser stellt damit den Referenzzustand dar und wird durch den Index „Ref" gekennzeichnet. Hier wird diese Anstellwinkelverteilung benötigt, um diese Einflüsse aus dem Mehr-Punkt-Modell unter Berücksichtigung nichtlinearer Zusammenhänge herausrechnen zu können.

$$\underline{V}_{A,Ref,j,f} = \underline{V}_{K,SP,f} + \Delta\underline{V}_{K,Rot,j,f} - \underline{V}_{W,SP,f} \tag{J.29}$$

$$\begin{bmatrix} u_{A,Ref,P,j,f} \\ v_{A,Ref,P,j,f} \\ w_{A,Ref,P,j,f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{K,SP,f} \\ v_{K,SP,f} \\ w_{K,SP,f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_{K,Rot,j,f} \\ \Delta v_{K,Rot,j,f} \\ \Delta w_{K,Rot,j,f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{W,SP,f} \\ v_{W,SP,f} \\ w_{W,SP,f} \end{bmatrix} \tag{J.30}$$

beziehungsweise in Matrizenform[152]:

$$\underline{\underline{V}}_{A,Ref,f} = \underline{\underline{V}}_{K,SP,f} + \Delta\underline{\underline{V}}_{K,Flex,f} - \underline{\underline{V}}_{W,SP,f} \tag{J.31}$$

$$\begin{bmatrix} u_{A,Ref,1,f} & \cdots & u_{A,Ref,2M,f} \\ v_{A,Ref,1,f} & \cdots & v_{A,Ref,2M,f} \\ w_{A,Ref,1,f} & \cdots & w_{A,Ref,2M,f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{K,SP,f} & \cdots & u_{K,SP,f} \\ v_{K,SP,f} & \cdots & v_{K,SP,f} \\ w_{K,SP,f} & \cdots & w_{K,SP,f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_{K,Rot,1,f} & \cdots & \Delta u_{K,Rot,2M,f} \\ \Delta v_{K,Rot,1,f} & \cdots & \Delta v_{K,Rot,2M,f} \\ \Delta w_{K,Rot,1,f} & \cdots & \Delta w_{K,Rot,2M,f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{W,SP,f} & \cdots & u_{W,SP,f} \\ v_{W,SP,f} & \cdots & v_{W,SP,ff} \\ w_{W,SP,f} & \cdots & w_{W,SP,f} \end{bmatrix} \tag{J.32}$$

Damit erhält man entsprechend Gl. (J.24):

[152] Man beachte, dass der Schwerpunktwind in allen 2M Aufpunkten identisch ist!

$$\alpha_{F,Ref,j} = \arctan\frac{w_{A,Ref,j,f}}{u_{A,Ref,j,f}}$$

$$\beta_{Ref,j} = \arcsin\frac{v_{A,Ref,j,f}}{V_{A,Ref,j}} \tag{J.33}$$

$$V_{A,Ref,j} = \sqrt{u^2_{A,Ref,j,f} + v^2_{A,Ref,j,f} + w^2_{A,Ref,j,f}}$$

Anstellwinkelverteilung mit Flexibilität und mit räumlichem Windfeld

Diese Anstellwinkelverteilung wird benötigt, um in Verbindung mit der Referenz-Anstellwinkelverteilung die Änderungen in den aerodynamischen Lastverteilungen infolge der Elastizität zu bestimmen[153]:

$$\underline{V}_{A,j,f} = \underline{V}_{K,SP,f} + \Delta\underline{V}_{K,Rot,j,f} + \Delta\underline{V}_{K,Flex,j,f} - \underline{V}_{W,SP,f} - \Delta\underline{V}_{W,j,f} \tag{J.34}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (J.29) gilt:

$$\underline{V}_{A,j,f} = \underline{V}_{A,Ref,j,f} + \Delta\underline{V}_{K,Flex,j,f} - \Delta\underline{V}_{W,j,f} \tag{J.35}$$

In Komponentenschreibweise gilt:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} u_{A,j,f} \\ v_{A,j,f} \\ w_{A,j,f} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_{K,SP,f} \\ v_{K,SP,f} \\ w_{K,SP,f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_{K,Rot,j,f} \\ \Delta v_{K,Rot,j,f} \\ \Delta w_{K,Rot,j,f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_{K,Flex,j,f} \\ \Delta v_{K,Flex,j,f} \\ \Delta w_{KFlex,j,f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{W,SP,f} \\ v_{W,SP,f} \\ w_{W,SP,f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta u_{W,j,f} \\ \Delta v_{W,j,f} \\ \Delta w_{W,j,f} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{A,Ref,P,j,f} \\ v_{A,Ref,P,j,f} \\ w_{A,Ref,P,j,f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_{K,Flex,j,f} \\ \Delta v_{K,Flex,j,f} \\ \Delta w_{KFlex,j,f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta u_{W,j,f} \\ \Delta v_{W,j,f} \\ \Delta w_{W,j,f} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{J.36}$$

beziehungsweise in Matrizenform:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{V}}_{A,f} &= \underline{\underline{V}}_{K,SP,f} + \Delta\underline{\underline{V}}_{K,Rot,f} + \Delta\underline{\underline{V}}_{K,Flex,f} - \underline{\underline{V}}_{W,SP,f} - \Delta\underline{\underline{V}}_{W,f} \\ &= \underline{\underline{V}}_{A,Ref,f} + \Delta\underline{\underline{V}}_{K,Flex,f} - \Delta\underline{\underline{V}}_{W,f}\end{aligned} \tag{J.37}$$

$$\begin{bmatrix} u_{A,1,f} & \cdots & u_{A,2M,f} \\ v_{A,1,f} & \cdots & v_{A,2M,f} \\ w_{A,1,f} & \cdots & w_{A,2M,f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{A,Ref,1,f} & \cdots & u_{A,Ref,2M,f} \\ v_{A,Ref,1,f} & \cdots & v_{A,Ref,2M,f} \\ w_{A,Ref,1,f} & \cdots & w_{A,Ref,2M,f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_{K,Flex,1,f} & \cdots & \Delta u_{K,Flex,2M,f} \\ \Delta v_{K,Flex,1,f} & \cdots & \Delta v_{K,Flex,2M,f} \\ \Delta w_{K,Flex,1,f} & \cdots & \Delta w_{K,Flex,2M,f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta u_{W,1,f} & \cdots & \Delta u_{W,2M,f} \\ \Delta v_{W,1,f} & \cdots & \Delta v_{W,2M,f} \\ \Delta w_{W,1,f} & \cdots & \Delta w_{W,2M,f} \end{bmatrix} \tag{J.38}$$

Damit erhält man entsprechend Gl. (J.33):

$$\alpha_{F,j} = \arctan\frac{w_{A,j,f}}{u_{A,j,f}}$$

$$\beta_j = \arcsin\frac{v_{A,j,f}}{V_{A,j}} \tag{J.39}$$

$$V_{A\,j} = \sqrt{u^2_{A,j,f} + v^2_{A,j,f} + w^2_{A,j,f}}$$

Anstellwinkeländerungen

Damit können die örtlichen Zusatz-Anstellwinkel infolge der dynamischer elastischer Verformungen und eines räumlichen Windfeldes nach Gl. (J.25) durch Einsetzen von Gl. (J.33) und Gl. (J.39) bestimmt werden:

[153] Für diese Verteilung wird kein zusätzlicher Index benötigt, da sie den allgemeinen Fall darstellt.

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_{VF,j} &= \alpha_{F,j} - \alpha_{F,Ref,j} \\ &= \arctan\frac{w_{A,j,f}}{u_{A,j,f}} - \arctan\frac{w_{A,Ref,j,f}}{u_{A,Ref,j,f}}\end{aligned} \tag{J.40}$$

Für die benötigten Änderungen der örtlichen Profil-Anstellwinkel gilt nach Gl. (5.87):

$$\Delta\alpha_{P,j} = \Delta\alpha_{VF,j} + \Delta\varepsilon_{FlexF,j} \tag{J.41}$$

und damit

$$\Delta\alpha_{P,j} = \arctan\frac{w_{A,j,f}}{u_{A,j,f}} - \arctan\frac{w_{A,Ref,j,f}}{u_{A,Ref,j,f}} + \Delta\varepsilon_{FlexF,\nu} \tag{J.42}$$

Formuliert man Gl. (J.41) in Vektorform:

$$\Delta\underline{\alpha}_P = \Delta\underline{\alpha}_{VF} + \Delta\underline{\varepsilon}_{FlexF} \tag{J.43}$$

$$\Delta\underline{\alpha}_P = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_{P,1} \\ \vdots \\ \Delta\alpha_{P,M} \\ \Delta\alpha_{P,M+1} \\ \vdots \\ \Delta\alpha_{P,2M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_{VF,1} + \Delta\varepsilon_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \Delta\alpha_{VF,M} + \Delta\varepsilon_{FlexF,M} \\ \Delta\alpha_{VF,M+1} + \Delta\varepsilon_{FlexF,1} \\ \vdots \\ \Delta\alpha_{VF,2M} + \Delta\varepsilon_{FlexF,M} \end{bmatrix} \tag{J.44}$$

Hierbei ist zu beachten, dass sich der Torsionswinkel infolge Elastizität sich nicht in Profiltiefenrichtung ändert und somit am $\ell/4$-Punkt und an der Hinterkante eines Flügelschnittes jeweils identisch ist.

Für die Verteilung der örtlichen Zusatz-Auftriebs- bzw. Zusatz-Nickmomentenbeiwerte folgt damit aus (5.88):

$$\Delta\underline{c}_{kal} = \underline{\underline{L}}_{kal}\ \Delta\underline{\alpha}_P \tag{J.45}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta c_{a,kal,1} \\ \vdots \\ \Delta c_{a,kal,M} \\ \Delta c_{m,kal,1} \\ \vdots \\ \Delta c_{m,kal,M} \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_{kal} \begin{bmatrix} \Delta\alpha_{P,1} \\ \vdots \\ \Delta\alpha_{P,M} \\ \Delta\alpha_{P,M+1} \\ \vdots \\ \Delta\alpha_{P,2M} \end{bmatrix} \tag{J.46}$$

Damit sind die Zusatz-Beiwerte für Auftrieb und Nickmomente unmittelbar aus der Verteilung der Anstellwinkeländerungen bestimmbar.

Anhang K Berücksichtigung von Geschwindigkeitsverteilungen

K.1 Zirkulation, Wirbeldichte und Beiwerte

Das in Kapitel 4 bzw. ausführlicher in Anhang O beschriebene Tragflächenverfahren stellt einen Zusammenhang zwischen einer Anstellwinkelverteilung und den dazugehörigen Verteilungen der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte her. Lokale Änderungen des Betrages der Anströmgeschwindigkeit werden hierdurch nicht berücksichtigt – vielmehr wird von einem gleichförmig verteilten Betrag der Anströmgeschwindigkeit ausgegangen. Die folgenden Betrachtungen sollen klären, wie örtliche Änderungen des Betrages der Anströmung verursacht durch äußere Störungen (Wind und Turbulenz) in dem oben beschriebenem Rechenverfahren berücksichtigt werden können. Hierzu wird der in Anhang O beschriebene Rechengang in Bezug auf den Geschwindigkeitseinfluss genauer betrachtet und entsprechend erweitert.

Wie bereits oben erläutert, wird nach GLAUERT [Glauert 1929] der Tragflügel durch so genannte Elementarflügel der infinitesimalen Spannweite dy und der Flügeltiefe $\ell(y)$ ersetzt. Zwischen dem Auftrieb dA eines Elementarflügels und dessen Zirkulation besteht nach KUTTA-JOUKOWSKY der bereits dargelegte Zusammenhang [Schlichting/Truckenbrodt 1969], siehe Gl. (O.39):

$$dA(y) = \rho V \Gamma(y)\, dy \tag{K.01a}$$

Üblicherweise wird davon ausgegangen, dass hierbei die Geschwindigkeit V sich nicht mit der Spannweitenkoordinate y ändert. Gl. (K.01) bleibt jedoch auch für Fälle gültig, in denen sich V mit y ändert[154]:

$$dA(y) = \rho V(y) \Gamma(y)\, dy \tag{K.01b}$$

Gl. (K.01b) zeigt, dass selbstverständlich eine Geschwindigkeitsverteilung V(y) den lokalen Auftrieb dA(y) beeinflusst. Ist die Zirkulationsverteilung bekannt, kann hieraus die aerodynamische Lastverteilung unter Berücksichtigung der Spannweiten abhängigen Geschwindigkeitsverteilung ermittelt werden. Es ist daher zu untersuchen, wie eine Geschwindigkeitsverteilung V(y) die Zirkulationsverteilung dΓ(y) beeinflusst. Ein einfacher Ansatz wäre zunächst, die lokalen Änderungen des Geschwindigkeitsbetrages durch eine gleichwertige Änderung des Anstellwinkels auszudrücken. Dies unterstellt jedoch, dass der Zusammenhang zwischen Anstellwinkel- und Zirkulationsverteilung nach Gl. (O.63) auch für eine Geschwindigkeitsverteilung gültig ist. Dieses ist jedoch nicht der Fall, wie im Folgenden gezeigt wird.

Zunächst soll der induzierte Abwind betrachtet werden, für den nach Gl. (O.06) gilt[155]:

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y') \frac{1 + \dfrac{x - x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{(y-y')^2} \, dx'\, dy' \tag{K.02}$$

Gl. (K.02) zeigt, dass der lokale Abwind in einem Punkt P(x,y) von der gesamten Wirbeldichte des Flügels k(x,y) abhängig ist. Wenn nun k(x,y) abhängig von V(y) sein sollte, wäre w(x,y) von dieser gesamten Verteilung abhängig. Daher wird nunmehr die Frage untersucht, ob eine Verteilung V(y) einen Einfluss auf die Wirbeldichte k(x,y) hat. Für die Wirbeldichte k(x,y) gilt nach Gl. (O.03):

[154] Änderungen der Luftdichte als Funktion des Ortes entlang der Flugzeugabmessungen sind grundsätzlich auch zu berücksichtigen, können aber für die hier betrachteten Fälle in der Praxis vernachlässigt werden. Weiterhin soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass die Geschwindigkeit V hier stets als die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung zu betrachten ist. Auf die sonst übliche Kennzeichnung mit dem tiefgestellten Index „∞“ kann hier verzichtet werden, da die tatsächlichen örtlichen Geschwindigkeiten, d.h. unter Berücksichtigung der Einflüsse aus der Umströmung des Flügels, hier nicht berechnet werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Bezeichnung „ungestörte Strömung“ gleichwohl Einflüsse aus externen Störungen wie z.B. Böen beinhaltet, d.h. die Geschwindigkeit ist eine Funktion aller drei Raumkoordinaten: V = V(x,y,z). Für die hier betrachteten Fälle (ebenes Problem) entfällt aber stets die Abhängigkeit von der z-Koordinate: V = V(x,y,z=0).

[155] Es sei daran erinnert, dass der hochgestellte Strich ´ die induzierende Stelle kennzeichnet. Eine Unterscheidung zwischen induzierender Stelle und betrachtetem Aufpunkt ist jedoch nur in Gleichungen zwingend erforderlich, in denen beide Stellen gemeinsam vorkommen. In Gleichungen, in denen dies nicht der Fall ist, wird daher auf die Unterscheidung verzichtet und der hochgestellte Strich weggelassen.

$$d\Gamma(x,y) = k(x,y)\,dx \tag{K.03}$$

Die Zirkulation eines Elementarflügels der Spannweite dy ergibt sich durch Integration in Profiltiefenrichtung:

$$\Gamma(y) = \int_{\Gamma_{VK}}^{\Gamma_{HK}} d\Gamma(x,y) = \int_{x_{VK}}^{x_{HK}} k(x,y)\,dx \tag{K.04}$$

Für den örtlichen Auftrieb folgt aus der allgemeinen Definition des örtlichen Auftriebsbeiwertes:

$$dA(y) = \frac{\rho}{2} V^2(y)\,\ell(y)\,c_a(y)\,dy \tag{K.05}$$

Durch Vergleich von Gl. (K.05) mit Gl. (K.01b) folgt unmittelbar:

$$dA(y) = \rho\,V(y)\,\Gamma(y)\,dy = \frac{\rho}{2} V^2(y)\,\ell(y)\,c_a(y)\,dy \tag{K.06}$$

bzw. aufgelöst nach der Zirkulation:

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} V(y)\,\ell(y)\,c_a(y) \tag{K.07}$$

Die örtliche Zirkulation $d\Gamma(y)$ ist damit direkt von der örtlichen Geschwindigkeit abhängig. Damit muss nach Gl. (K.04) aber auch die Wirbeldichte k(x,y) von V(y) abhängig sein und nach Gl. (K.02) ebenfalls der induzierte Abwind w(x,y). Nach Gl. (O.03) wird hierdurch wiederum auch der induzierte Anstellwinkel $\alpha_i(y)$ verändert[156]:

$$\alpha_i(x,y) = -\frac{w(x,y)}{V(y)} \tag{K.08}$$

und damit wiederum auch der örtliche Auftriebsbeiwert $c_a(y)$ beeinflusst. Gl. (K.01b) und Gl. (K.07) zeigen, dass der örtliche Auftrieb dA(y) direkt linear von der örtlichen Geschwindigkeit V(y) abhängig ist, dass aber auch die Zirkulation $d\Gamma(y)$ selbst linear mit V(y) zunimmt und zusätzlich noch eine indirekte Abhängigkeit über $c_a(y) = f(V(y))$ besteht, die aus einer Änderung des induzierten Abwindwinkels $\alpha_i(y)$ resultiert. Diese indirekte Abhängigkeit wird durch die induzierte Abwindgeschwindigkeit nach Gl. (K.02) berücksichtigt, wenn die dort enthaltenen Wirbeldichte k(x,y) die direkte Abhängigkeit der Zirkulation $d\Gamma(y)$ von V(y) enthält.

Für die Wirbeldichteverteilung bei konstanter Geschwindigkeit V_{SP} gilt bisher der Ansatz nach GLAUERT entsprechend Gl. (O.33):

$$k(x,y) = \frac{V_{SP}}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\,h_n(x) \qquad \text{für } V \neq f(y) \tag{K.09}$$

V_{SP} Fluggeschwindigkeit des Bezugspunktes (Schwerpunkt)

Für diesen Sonderfall folgt aus den Gl. (K.03) und Gl. (K.04) für die lokale Zirkulation

$$\Gamma(y) = \int_{\Gamma_{VK}}^{\Gamma_{HK}} d\Gamma(x,y) = \frac{V_{SP}}{2} \int_{x_{VK}}^{x_{HK}} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\,h_n(x)\,dx \qquad \text{für } V \neq f(y) \tag{K.10}$$

Da andererseits für den allgemeinen Fall V = f(y) Gl. (K.07) gilt, kann die direkte (lineare) Abhängigkeit der Zirkulation von V(y) durch eine einfache Modifikation des GLAUERT'schen Ansatzes für die Wirbeldichte berücksichtigt werden:

[156] Im Unterschied zu Gl. (4.11) ist hier jedoch die ungestörte Anströmgeschwindigkeit nicht mehr V_∞ sonder die örtliche (ungestörte) Geschwindigkeit V(y).

$$k(x,y) = \frac{V(y)}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\, h_n(x) \tag{K.11}$$

Hierdurch wird weiterhin die x-Abhängigkeit der Wirbeldichte in den Einheitsfunktionen h_n berücksichtigt, während sich die Geschwindigkeit V und die Koeffizienten a_n in Spannweitenrichtung ändern.

Für den allgemeinen Fall, dass sich die Geschwindigkeit auch in Flügeltiefenrichtung ändern kann, ist dieses im GLAUERT'schen Ansatz nur schwer zu berücksichtigen, da die Abhängigkeit in Flügeltiefenrichtung sich in den Einheitsfunktionen h_n niederschlägt, die hier aber möglichst nicht modifiziert werden sollen, um den bisherigen Lösungsweg beibehalten zu können. Außerdem ist zu beachten, dass signifikante Geschwindigkeitsänderungen in Profiltiefenrichtung zu instationären Effekten führen, die in dem bisher behandelten Verfahren nicht berücksichtigt sind – diese Effekte werden in Kapitel 6.3 behandelt. Im Folgenden wird daher davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeitsverteilung in Profiltiefenrichtung durch ihren Mittelwert ausreichend wiedergegeben werden kann[157]:

$$V(y) = \frac{1}{\ell(y)} \int_{x_{VK}}^{x_{HK}} V(x,y)\,dx \tag{K.12}$$

In den folgenden Betrachtungen wird dargelegt, wie sich der modifizierte GLAUERT'schen Ansatz auf die Lösung des Gleichungssystems auswirkt.

K.2 Kinematische Strömungsbedingung

Die grundlegende Bestimmungsgleichung bei der Tragflächentheorie ist die kinematische Strömungsbedingung nach Gl. (O.01):

$$\alpha_{Skelett}(x,y) = \alpha_i(x,y) \tag{K.13}$$

mit dem Anstellwinkel der Skelettlinie (siehe Bild K.1):

$$\alpha_{Skelett}(x,y) = \alpha_P(x,y) - \frac{\partial z_{Skelett\,p}}{\partial x_p}(x,y) \tag{K.14}$$

$x_p(y)$ x-Achse des profilfesten Koordinatensystems
$\alpha_P(y)$ Anstellwinkel des Profils, gemessen von der Anströmung zur x_p-Achse

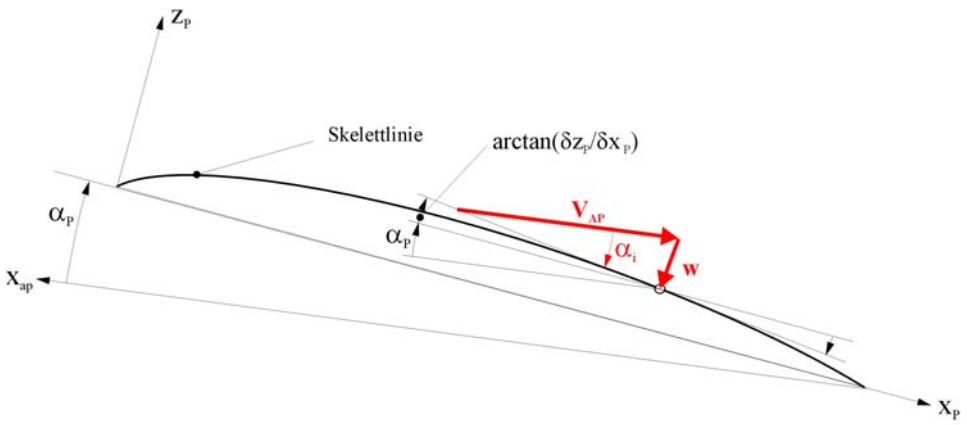

Bild K.1 Kinematische Strömungsbedingung

[157] Diese Vereinfachung gilt nur für den einzeln betrachteten Flügel, bei dem sich üblicherweise der Betrag der Anströmung lediglich signifikant mit der Spannweite ändert: V = V(y) - allerdings sind unterschiedliche Geschwindigkeiten am Flügel und am Höhenleitwerk zu berücksichtigen. Der übliche Querstrich zur Kennzeichnung von Mittelwerten wird hier weggelassen.

Für die induzierte Vertikalgeschwindigkeit gilt unverändert Gl. (K.02), wobei lediglich der erweiterte Ansatz für die Wirbeldichte einzusetzen ist:

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y') \, \frac{1 + \dfrac{x - x'}{r}}{(y - y')^2} \, dx' \, dy' \tag{K.02}$$

Mit der unveränderten Verteilungsfunktion G nach Gl. (O.07)

$$G(x,y;y') = \int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y') \left(1 + \frac{x - x'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \right) dx' \tag{K.15}$$

gilt ebenfalls unverändert nach Gl. (O.09)

$$w(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{e \to 0} \left[\frac{2G(x,y;y)}{e} - \int_{-s}^{+s\,(C)} \frac{G(x,y;y')}{(y - y')^2} \, dy' \right] \tag{K.16}$$

Für die dimensionslose Verteilungsfunktion g entsprechend Gl. (O.13) gilt nunmehr die verallgemeinerte Definition[158]

$$g = \frac{G}{b \, V_{SP}} \tag{K.17}$$

Damit erhält man aus Gl. (K.08) und Gl. (K.16) mit Gl. (K.17) nunmehr für den induzierten Abwindwinkel als Funktion der dimensionslosen Verteilungsfunktion g die verallgemeinerte Beziehung:

$$\alpha_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{V_{SP}}{V(\eta)} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2}{\varepsilon} g(\xi,\eta;\eta') - \int_{-1}^{+1} \frac{g(\xi,\eta;\eta')}{(\eta - \eta')^2} \, d\eta' \right] \tag{K.18}$$

Aus der Gleichheitsbedingung nach Gl. (K.13) folgt damit die verallgemeinerte kinematische Strömungsbedingung:

$$\alpha_{Skelett}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{V_{SP}}{V(\eta)} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2}{\varepsilon} g(\xi,\eta;\eta') - \int_{-1}^{+1} \frac{g(\xi,\eta;\eta')}{(\eta - \eta')^2} \, d\eta' \right] \tag{K.19}$$

bzw. die verallgemeinerte Integralgleichung der Tragflächentheorie:

$$\alpha_{Skelett}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{V_{SP}}{V(\eta)} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial g(\xi,\eta;\eta')}{\partial \eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \tag{K.20}$$

Der Unterschied zum bisher behandelten Spezialfall einer konstanten Geschwindigkeit besteht damit lediglich in dem Vorfaktor vor dem Integral $V_{SP}/V(\eta)$ und in einem modifizierten Ansatz für die Wirbeldichte, der implizit in der Verteilungsfunktion g enthalten ist. Das in Anhang O beschriebene Lösungsverfahren kann dadurch unverändert beibehalten werden. Insbesondere der Ansatz nach MULTHOPP für die Verteilungsfunktion g in Spannweitenrichtung nach Gl. (O.20)

[158] Die Verteilungsfunktion G wird mit einer Bezugsgeschwindigkeit dimensionslos gemacht – Im Unterschied zu Gl. (O.13) kann hier nicht die Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen verwendet werden, da das ungestörte Geschwindigkeitsfeld an jedem Punkt eine andere Geschwindigkeit hat, sondern es wird die ungestörte Geschwindigkeit am Schwerpunkt als Bezugsgeschwindigkeit gewählt. In den weiteren Gleichungen wird zur eindeutigen Kennzeichnung dieser Geschwindigkeit der Ausdruck V_{SP} verwendet.

$$g(\xi,\vartheta;\vartheta') = 2\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu(\xi,\vartheta)\sin\mu\vartheta' \tag{K.21}$$

kann unverändert übernommen werden, da auch ein Einfluss der Geschwindigkeitsänderungen in Spannweitenrichtung im Reihenansatz in den Koeffizienten a_μ berücksichtigt werden kann. Damit erhält man entsprechend Gl. (O.24) die verallgemeinerte kinematische Strömungsbedingung:

$$\alpha_{Skelett}(\xi,\vartheta) = \frac{V_{SP}}{V(\eta)}\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu\ \mu\ \frac{\sin\mu\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{K.22}$$

Die Berechnung wird wiederum auf die M diskreten Stützstellen beschränkt, so dass ebenfalls der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a_μ und der Verteilungsfunktion g nach Gl. (O.26) gilt[159]:

$$a_\mu(\xi,\vartheta) = \frac{1}{M+1}\sum_{n=1}^{M} g_n(\xi,\vartheta;\vartheta'=\vartheta'_n)\sin\mu\vartheta'_n \tag{K.23}$$

Damit erhält man entsprechend Gl. (O.27) die kinematische Strömungsbedingung als Funktion der M Stützstellen der Zirkulationsverteilung in verallgemeinerter Form:

$$\alpha_{Skelett}(\xi,\vartheta) = \frac{V_{SP}}{V(\eta)}\sum_{n=1}^{M} g_n(\xi,\vartheta;\vartheta'=\vartheta'_n)_n\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\mu}{M+1}\ \frac{\sin\mu\vartheta\,\sin\mu\vartheta'_n}{\sin\vartheta} \tag{K.24}$$

Die kinematische Strömungsbedingung muss zur Bestimmung der Koeffizienten entsprechend Gl. (O.30) wiederum nur an den diskreten M Profilschnitten erfüllt werden[160]:

$$\alpha_{Skelett,\nu}(\xi) = \frac{V_{SP}}{V_\nu}\sum_{n=1}^{M} g_{\nu n}(\xi,\vartheta=\vartheta_\nu;\vartheta'=\vartheta'_n)\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\mu}{M+1}\ \frac{\sin\mu\vartheta_\nu\,\sin\mu\vartheta'_n}{\sin\vartheta_\nu} \tag{K.25}$$

Die zweite Summe kann unverändert durch die MULTHOPP-Koeffizienten nach Gl. (O.31) ausgedrückt werden, so dass für die kinematische Strömungsbedingung entsprechend Gl. (O.32) folgt:

$$\alpha_{Skelett,\nu}(\xi) = b_{\nu\nu}g_{\nu\nu}(\xi) - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n}g_{\nu n}(\xi) \tag{K.26}$$

K.3 Bestimmung der Verteilungsfunktion

örtliche Beiwerte

Für die örtliche Zirkulation gilt nach wie vor der Zusammenhang nach Gl. (O.40)

$$\Gamma(y) = \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} k(x,y)dx \tag{K.27}$$

Aus der Beziehung für die Zirkulation nach Gl. (K.07):

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2}V(y)\,\ell(y)\,c_a(y) \tag{K.28}$$

erhält man durch Einsetzen von Gl. (K.27) für den örtlichen Auftriebsbeiwert:

[159] Die Verteilungsfunktion g enthält nunmehr allerdings die modifizierte Wirbeldichte k.

[160] Die ungestörte Anströmung muss daher ebenfalls nur an den υ Stützstellen bestimmt werden: $V(\eta) \rightarrow V_\upsilon$

$$c_a(y) = \frac{2}{V(y)\,\ell(y)} \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} k(x,y)\,dx \tag{K.29}$$

Mit dem erweiterten Ansatz

$$k(x,y) = \frac{V(y)}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\, h_n(x) \tag{K.11}$$

folgt damit

$$c_a(y) = \frac{1}{\ell(y)} \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\, h_n(x)\, dx \tag{K.30}$$

Dieses Ergebnis ist wiederum identisch mit Gl. (E.03) für den Fall der konstanten Geschwindigkeitsverteilung, so dass auch im verallgemeinerten Fall gilt:

$$c_a(y) = a_0(y) \tag{K.31}$$

Für den Nickmomentenbeiwert gilt entsprechend:

$$c_{m25}(y) = \frac{a_1(y)}{4} \tag{K.32}$$

Dieses Ergebnis ist nicht ganz unerwartet, da sich bei dem erweiterten GLAUERT'schen Ansatz die Zusammenhänge in Profiltiefenrichtung nicht ändern. Für die Einheitsfunktionen gilt bei einem zweiparametrigen Ansatz[161] unverändert nach Gl. (O.38)

$$\begin{aligned} h_0(X') &= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} \\ h_1(X') &= \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')}\right) \end{aligned} \tag{K.33}$$

mit den dimensionslosen Koordinaten nach Gl. (O.34) und Gl.(O.52)

$$\begin{aligned} X &= \frac{x - x_{VK}(y')}{\ell(y')} \\ X' &= \frac{x' - x_{VK}(y')}{\ell(y')} \\ Y &= \frac{y - y'}{\ell(y')} \end{aligned} \tag{K.34}$$

Für die Wirbeldichteverteilung folgt damit aus Gl. (K.11) mit den Gl. (K.30) und Gl. (K.31)

$$k(X',Y') = \frac{V(Y')}{\pi}\left[c_a(Y')\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} + 4\,c_{m25}(Y')\left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')}\right)\right] \tag{K.35}$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gl. (K.15) für die Verteilungsfunktion G ein, erhält man analog zu Gl. (O.56) für die Verteilungsfunktion G in verallgemeinerter Form:

$$G(X,Y) = \frac{\ell\, V(Y=0)}{2}\left[c_a(Y=0)\, i(X,Y) + c_{m25}(Y=0)\, i(X,Y)\right] \tag{K.36}$$

[161] Es sei daran erinnert, dass der GLAUERT'sche Ansatz auf zwei Parameter beschränkt wurde und die beiden Ansatzfunktion h_0 und h_1 nach BIRNBAUM so gewählt wurden, dass das Integral über die Flügeltiefe für h_0 den Auftrieb und für h_1 lediglich ein Moment (um den ℓ/4-Punkt) liefert.

Mit den unveränderten Einflussfunktionen i(X,Y) und j(X,Y) nach Gl. (O.55):

$$\begin{aligned} i(X,Y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\left(1+\frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2+Y^2}}\right)dX' \\ j(X,Y) &= \frac{8}{\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}-4\sqrt{X'(1-X')}\right)\left(1+\frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2+Y^2}}\right)dX' \end{aligned} \tag{K.37}$$

Für die verallgemeinerte, dimensionslose Verteilungsfunktion g nach Gl. (K.17) erhält man schließlich in dimensionslosen Koordinaten:

$$g(\xi,\eta;\eta') = \frac{\ell(\eta')}{2b}\frac{V(\eta')}{V_{SP}}\left[c_a(\eta')\, i(\xi,\eta) + c_{m25}(\eta')\, j(\xi,\eta)\right] \tag{K.38}$$

Mit der dimensionslosen Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta)$ nach Gl. (O.59) und der dimensionslosen Nickmomentenverteilung $\mu(\eta)$ nach Gl. (O.60)

$$\gamma(\eta) = \frac{c_a(\eta)\ell(\eta)}{2b} \tag{K.39}$$

$$\mu(\eta) = \frac{c_{m25}(\eta)\ell(\eta)}{2b} \tag{K.40}$$

erhält man schließlich:

$$g(\xi,\eta;\eta') = \frac{V(\eta')}{V_{SP}}\left[\gamma(\eta')\, i(\xi,\eta) + \mu(\eta')\, j(\xi,\eta)\right] \tag{K.41}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem Ergebnis für die Verteilungsfunktion bei konstanter Geschwindigkeit $g(\xi,\eta;\eta')$ Gl. (O.61) ist in Gl. (K.41) der zusätzliche örtliche Vorfaktor $V(\eta')/V_{SP}$ enthalten, der an jedem betrachteten Flügelschnitt unterschiedlich ist und damit die gesamte Verteilungsfunktion verändert.

K.4 Aufstellen des Gleichungssystems

Für die verallgemeinerte kinematische Strömungsbedingung des diskretisierten Systems wurde bereits ermittelt:

$$\alpha_{\text{Skelett},\nu}(\xi) = b_{\nu\nu} g_{\nu\nu}(\xi) - \sum_{n=1}^{M}{}' \, b_{\nu n} g_{\nu n}(\xi) \tag{K.26}$$

Die kinematische Strömungsbedingung wird wiederum lediglich an zwei Punkten eines Flügelschnittes erfüllt, so dass entsprechend Gl. (O.62) geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
\alpha(\xi_{HK},\eta) &= \alpha^{*}(\eta) \\
i(\xi_{HK},\eta,\eta') &= i^{*}(\eta,\eta') \\
j(\xi_{HK},\eta,\eta') &= j^{*}(\eta,\eta') \\
g(\xi_{HK},\eta,\eta') &= \frac{V(\eta')}{V_{SP}}\left[i^{*}(\eta,\eta')\,\gamma(\eta') + j^{*}(\eta,\eta')\,\mu(\eta')\right]
\end{aligned} \tag{K.42}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\xi_{25},\eta) &= \alpha^{**}(\eta) \\
i(\xi_{25},\eta,\eta') &= i^{**}(\eta,\eta') \\
j(\xi_{25},\eta,\eta') &= j^{**}(\eta,\eta') \\
g(\xi_{25},\eta,\eta') &= \frac{V(\eta')}{V_{SP}}\left[i^{**}(\eta,\eta')\,\gamma(\eta') + j^{**}(\eta,\eta')\,\mu(\eta')\right]
\end{aligned}$$

Für die M diskreten Flügelschnitte erhält man damit entsprechend Gl. (O.63) das folgende Gleichungssystem[162]:

$$\begin{aligned}
\alpha^{*}_{\text{Skelett},\nu} &= \frac{V_{SP}}{V_\nu}\left[\frac{V_\nu}{V_{SP}} b_{\nu\nu} i^{*}_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_{SP}} b_{\nu n} i_{\nu n}\gamma_n + \frac{V_\nu}{V_{SP}} b_{\nu\nu} j^{*}_{\nu\nu}\mu_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_{SP}} b_{\nu n} j^{*}_{\nu n}\mu_n\right] \\
\alpha^{**}_{\text{Skelett},\nu} &= \frac{V_{SP}}{V_\nu}\left[\frac{V_\nu}{V_{SP}} b_{\nu\nu} i^{**}_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_{SP}} b_{\nu n} i^{**}_{\nu n}\gamma_n + \frac{V_\nu}{V_{SP}} b_{\nu\nu} j^{**}_{\nu\nu}\mu_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_{SP}} b_{\nu n} j^{**}_{\nu n}\mu_n\right]
\end{aligned} \tag{K.43}$$

bzw. durch Ausmultiplizieren und Kürzen:

$$\begin{aligned}
\alpha^{*}_{\text{Skelet},\nu} &= b_{\nu\nu} i^{*}_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_\nu} b_{\nu n} i^{*}_{\nu n}\gamma_n + b_{\nu\nu} j^{*}_{\nu\nu}\mu_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_\nu} b_{\nu n} j^{*}_{\nu n}\mu_n \\
\alpha^{**}_{\text{Skelett},\nu} &= b_{\nu\nu} i^{**}_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_\nu} b_{\nu n} i^{**}_{\nu n}\gamma_n + b_{\nu\nu} j^{**}_{\nu\nu}\mu_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' \frac{V_n}{V_\nu} b_{\nu n} j^{**}_{\nu n}\mu_n
\end{aligned} \tag{K.44}$$

Wie das Ergebnis zeigt, kürzt sich der Einfluss der örtlichen Geschwindigkeit keineswegs heraus, so dass Gl. (K.44) nicht identisch mit dem Ergebnis bei konstanter Geschwindigkeit nach Gl. (O.63) ist. Gleichwohl ist Gl. (O.63) als Sonderfall bei einem gleichförmigen Geschwindigkeitsfeld in Gl. (K.44) enthalten, da hierfür $V_n = V_\upsilon$ gilt und somit die Geschwindigkeitsterme vollständig entfallen. Damit ändert eine Geschwindigkeitsverteilung V(y) den Zusammenhang zwischen der Anstellwinkel- und den Verteilungen $\gamma(\eta)$ und $\mu(\eta)$, so dass auch die Verteilungen der örtlichen Beiwerte $c_a(y)$ und $c_{m25}(y)$ von der Geschwindigkeitsverteilung V(y) abhängig sind.

[162] Der 1. Index kennzeichnet den betrachteten Aufpunkt, der 2. Index bezeichnet den induzierenden Schnitt.

Wie das Gleichungssystem Gl. (K.44) zeigt, besteht der Einfluss einer Geschwindigkeitsverteilung in den Faktoren V_n/V_ν innerhalb der Summanden. Die Geschwindigkeitsfaktoren V_n/V_ν sind aber nicht mehr nur vom induzierenden Flügelschnitt n abhängig, sondern auch vom betrachteten Aufpunkt ν. Die Geschwindigkeitsfaktoren V_n/V_ν können daher als Modifikation der Matrix $\underline{\underline{M}}^*$ des Gleichungssystems Gl. (4.24) aufgefasst werden. Damit wäre die neue Matrix aber nicht mehr nur von der Flügelgeometrie abhängig sondern auch vom aktuellen Flugzustand, so dass eine Invertierung vorab nicht mehr möglich ist. Um den bisherigen Lösungsweg durch Invertierung der Matrix $\underline{\underline{M}}^*$ beibehalten zu können, wird das Gleichungssystem umgeformt. Hierzu wird mit der lokalen Geschwindigkeit V_ν des betrachteten Aufpunktes ν erweitert:

$$\begin{aligned}
\alpha^{*}_{Skelett,\nu} V_\nu &= b_{\nu\nu} i^{*}_{\nu\nu} \gamma_\nu V_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} i^{*}_{\nu n} \gamma_n V_n + b_{\nu\nu} j^{*}_{\nu\nu} \mu_\nu V_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} j^{*}_{\nu n} \mu_n V_n \\
\alpha^{**}_{Skelett,\nu} V_\nu &= b_{\nu\nu} i^{**}_{\nu\nu} \gamma_\nu V_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} i^{**}_{\nu n} \gamma_n V_n + b_{\nu\nu} j^{**}_{\nu\nu} \mu_\nu V_\nu - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n} j^{**}_{\nu n} \mu_n V_n
\end{aligned} \tag{K.45}$$

Ersetzt man wiederum die Zirkulation γ durch den örtlichen Auftriebsbeiwert c_a und das Nickmoment μ durch den Nickmomentenbeiwert c_{m25} und bringt das Gleichungssystem in Matrizenform, erhält man analog zu Gl. (4.24):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{Skelett25,1} V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett25,M} V_M \\ \alpha_{SkelettHK,1} V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{SkelettHK,M} V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,M} & M_{1,M+1} & \cdots & M_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{M,1} & \cdots & M_{M,M} & M_{M,M+1} & \cdots & M_{M,2M} \\ M_{M+1,1} & \cdots & M_{M+1,M} & M_{M+1,M+1} & \cdots & M_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2M,1} & \cdots & M_{2M,M} & M_{2M,M+1} & \cdots & M_{2M,2M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{a,1} V_1 \\ \vdots \\ c_{a,M} V_M \\ c_{m25,1} V_1 \\ \vdots \\ c_{m25,M} V_M \end{bmatrix} \tag{K.46}$$

Hierbei sind die Koeffizienten $M_{\nu n}$ identisch mit denen der bisherigen Lösung für eine konstante Geschwindigkeitsverteilung. Aufgelöst nach den gesuchten Verteilungen der Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte erhält man entsprechend Gl. (4.29):

$$\begin{bmatrix} c_{a,1} V_1 \\ \vdots \\ c_{a,M} V_M \\ c_{m25,1} V_1 \\ \vdots \\ c_{m25,M} V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{Skelett,25,1} V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett,25,M} V_M \\ \alpha_{Skelett,HK,1} V_1 \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett,HK,M} V_M \end{bmatrix} \tag{K.47}$$

Für den lokalen Auftriebsbeiwert $c_{a\nu}$ eines Flügelschnittes ν gilt damit

$$c_{a,\nu} V_\nu = \sum_{n=1}^{M} \left(L_{\nu n} \alpha_{Skelet,2,n} + L_{\nu,M+n} \alpha_{Skelet,tH,Kn} \right) V_n \tag{K.48}$$

bzw.:

$$c_{a,\nu} = \frac{1}{V_\nu} \sum_{n=1}^{M} \left(L_{\nu n} \alpha_{Skelet,25,n} + L_{\nu,M+n} \alpha_{Skelett,HK,n} \right) V_n \tag{K.49}$$

sowie für den Nickmomentenbeiwert:

$$c_{m25,\nu} = \frac{1}{V_\nu} \sum_{n=1}^{M} \left(L_{M+\nu,n} \alpha_{Skelett,25,n} + L_{M+\nu,M+n} \alpha_{Skelett,HK,n} \right) V_n \tag{K.50}$$

Damit sind die örtlichen Beiwerte auch bei beliebiger Geschwindigkeitsverteilung V(y) und beliebiger Anstellwinkelverteilung $\alpha_{Skelett}$ direkt mit Hilfe der konstanten, vorab bestimmbaren Koeffizienten $L_{\nu n}$ bestimmbar. Die Gleichungen zeigen, dass die Berücksichtigung einer Geschwindigkeitsverteilung V(y) wie eine modifizierte Anstellwinkelverteilung $\alpha^*(y)$ wirkt, wobei diese Verteilung für jeden betrachteten Flügelschnitt ν entsprechend dem Quotienten V_ν neu zu bestimmen ist:

$$\alpha^*_{Skelett,\nu,n} = \frac{V_n}{V_\nu}\alpha_{Skelett,\,n} \tag{K.51}$$

Eine Geschwindigkeitsverteilung V(y) kann damit nicht in eine einzige neue Ersatz-Anstellwinkelverteilung umgerechnet werden.

Das Gleichungssystem Gl. (K.47) kann auch allgemein nach dem Vektor $\underline{c}$ (mit den Verteilungen von Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerten) entsprechend Gl. (4.29) aufgelöst hingeschrieben werden, indem die Gl. (K.49) und Gl. (K.50) für alle Aufpunkte formuliert und in Matrizenform gebracht werden:

$$\begin{bmatrix} c_{a\,1} \\ \vdots \\ c_{a\,M} \\ c_{m25\,1} \\ \vdots \\ c_{m25\,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & V_m^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & V_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & V_M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} & L_{1,M+1} & \cdots & L_{1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} & L_{M,M+1} & \cdots & L_{M,2M} \\ L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} & L_{M+1,M+1} & \cdots & L_{M+1,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} & L_{2M,M+1} & \cdots & L_{2M,2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & V_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & V_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & V_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{Skelett\ 25\ 1} \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett\ 25\ M} \\ \alpha_{Skelett\ HK\ 1} \\ \vdots \\ \alpha_{Skelett\ HK\ M} \end{bmatrix} \tag{K.52}$$

In der praktischen Anwendung ist diese Darstellung jedoch eher nachteilig, da bei einer typischen Ordnung der Matrizen von (2Mx2M) relativ aufwändige Matrizenoperationen erforderlich sind, und die Summenbildungen nach Gl. (K.49) und Gl. (K.50) programmtechnisch einfach zu realisieren sind und einen erheblich geringeren numerischen Aufwand erfordern.

Anhang L Instationäre Aerodynamik

L.1 Grundlagen

Die hier vorgestellten Ergebnisse basieren auf Rechnungen mit einem Flügelgrundriss eines UHCA-Entwurfes mit einer Spannweite von b = 77,10 m und einer Flügelfläche von S = 725,6 m^2. Die genauen geometrischen Daten können [Zrenner 1996] entnommen werden. Die Ergebnisse können jedoch auch auf geometrisch ähnliche Flügel übertragen werden.

Wie in Kapitel 6.3 erwähnt, basiert die Modellierung der instationären aerodynamischen Effekte auf den Ergebnissen höherwertiger Rechenverfahren. Hierzu sind grundsätzlich verschiedene Verfahren geeignet, die prinzipiell in drei Kategorien eingeteilt werden können:

- Kernfunktions-Verfahren
- Doublet-Lattice-Verfahren
- Euler-Verfahren

Die beiden erstgenannten Verfahren arbeiten grundsätzlich im Frequenzbereich. Euler-Verfahren sind auch als Zeitschrittverfahren verfügbar, erfordern allerdings den größten numerischen Aufwand und einen erheblichen Arbeitsaufwand bei der Erstellung des Rechennetzes, so dass sie in Bezug auf Änderungen der Geometrie unflexibel sind – sie scheiden hier daher als Referenzverfahren aus.

Die Doublet-Lattice-Methode (DLM) idealisiert den Flügel als tragende Fläche und ist für unterschiedliche geometrische Konfigurationen leicht anzupassen. Der Flügel wird hierbei in einzelne Panels zerlegt, wobei die Paneltiefe relativ klein gewählt werden muss. Die erzielbaren Rechengenauigkeiten sind relativ hoch, wobei der Rechenaufwand als mäßig bezeichnet werden kann. Die Doublet-Lattice-Methode hat sich als der Standard für Flatterrechnungen etabliert und wird hier als Referenzmethode verwendet. Allerdings liefert sie keine brauchbaren Ergebnisse für stationäre (Referenz-) Zustände – dies ist allerdings in diesem Fall ohne Belang, da hier die Doublet-Lattice-Methode lediglich zur Beschreibung der instationären Effekte herangezogen wird und die stationären Anteile der Anstellwinkelverteilung durch das (korrigierte und kalibrierte) Tragflächenverfahren bereits gut beschrieben werden.

Da die gesuchten Übertragungsfunktionen aus Ergebnissen der Doublet-Lattice-Methode durch Vergleich mit dem Tragflächenverfahren gewonnen werden, müssen die Ein- und Ausgabedaten beider Verfahren genau aufeinander abgestimmt werden. Hierzu wurden einige Modifikationen an der zur Verfügung stehenden Doublet-Lattice-Methode vorgenommen, denn für die sonst üblichen Anwendungen (Flatterrechnung) wird der Flügel als Ganzes mit einer Anregung beaufschlagt und nicht ein einzelnes Segment. Diese Modifikationen werden hier nicht weiter beschrieben.

Da bei der Doublet-Lattice-Methode keine völlig freien Anstellwinkelverteilungen in Profiltiefenrichtung vorgegeben werden können, sondern nur solche, die den physikalischen Bewegungsformen des Flügels

- Schlagbewegung und
- Nickbewegung.

entsprechen, muss dafür gesorgt werden, dass die Anstellwinkelverteilung in Profiltiefenrichtung derjenigen des Tragflächenverfahrens entspricht. In Kapitel 6.3 wurde gezeigt, wie hierzu die Anstellwinkelverteilung umgeformt werden muss. Als Ergebnis erhält man (siehe Gl. (6.58)):

$$\begin{bmatrix} c_{a,1} \\ \vdots \\ c_{a,M} \\ c_{m25,1} \\ \vdots \\ c_{m25,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{a0,1} \\ \vdots \\ c_{a0,M} \\ c^*_{m025,1} \\ \vdots \\ c^*_{m025,M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L^*_{1,1} & \cdots & L^*_{1,M} & L_{1,1} & \cdots & L_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^*_{M,1} & \cdots & L^*_{M,M} & L_{M,1} & \cdots & L_{M,M} \\ L^*_{M+1,1} & \cdots & L^*_{M+1,M} & L_{M+1,1} & \cdots & L_{M+1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^*_{2M,1} & \cdots & L^*_{2M,M} & L_{2M,1} & \cdots & L_{2M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{P,Schlag,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,Schlag,M} \\ \alpha_{P,Nick,1} \\ \vdots \\ \alpha_{P,Nick,M} \end{bmatrix} \tag{L.01}$$

mit den neuen Koeffizienten

$$L^*_{i,j} = L_{i,j} + L_{i,M+j} \tag{L.02}$$

Die Doublet-Lattice-Methode wird mit denselben harmonischen Anstellwinkelverteilungen beaufschlagt wie das Tragflächenverfahren. Für den Auftriebs- und Nickmomentenbeiwert des Elementarflügels n infolge des mit der Frequenz ω_i harmonisch angeregten Elementarflügels m kann allgemein geschrieben werden:

$$\begin{aligned} c_{a,Schlag/Nick,DLM,n,m}(\omega_i) &= f_{a,Schlag/Nick,n,m}\left(\alpha_{P,Schlag/Nick,m}(\omega_i)\right) \\ c_{m25,Schlag/Nick,DLM,n,m}(\omega_i) &= f_{m,Schlag/Nick,n,m}\left(\alpha_{P,Schlag/Nick,m}(\omega_i)\right) \end{aligned} \tag{L.03}$$

Hierbei stellen f_a und f_m allgemeine Funktionen dar. Jeder Elementarflügel m wird nacheinander mit verschiedenen Frequenzen ω_i angeregt und die dazugehörigen Auftriebs- und Nickmomentenverteilungen abgespeichert. Da bei dem modellierten Verkehrsflugzeug die niedrigsten Struktur-Eigenformen im niedrigen Herz-Bereich liegen, kann eine maximale Frequenz von 6 Hz als sinnvoller Kompromiss erachtet werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass in der Echtzeit-Flugsimulation lediglich Eigenformen wiedergegeben werden müssen, die flugmechanisch relevant sind, so dass eine Begrenzung auf relativ niedrige Frequenzen statthaft ist. Die folgende Tabelle L.1 zeigt die gewählten Frequenz-Stützstellen, mit denen die Rechnungen mit der Doublet-Lattice-Methode durchgeführt wurden.

Tabelle L.1 untersuchte Frequenz-Stützstellen

f [Hz]	ω [1/s]	ω* [1]
0,05	0,3142	0,0139
0,1	0,6283	0,0279
0,2	1,2566	0,0557
0,3	1,8850	0,0836
0,5	3,1416	0,1393
1,0	6,2832	0,2786
1,5	9,4248	0,4179
2,0	12,5664	0,5572
2,5	15,7080	0,6966
3,0	18,8496	0,8359
3,5	21,9911	0,9752
4,0	25,1327	1,1145
4,5	28,2743	1,2538
5,0	31,4159	1,3931
5,5	34,5575	1,5324
6,0	37,6991	1,6717

Tabelle L.1 enthält neben der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω noch die reduzierte Frequenz ω^*, die eine dimensionslose Kenngröße der instationären Aerodynamik darstellt und die wie folgt definiert ist:

$$\omega^* = \omega \frac{\ell_\mu}{V} \tag{L.04}$$

Als unabhängige Variable ist daher nicht die Kreisfrequenz ω sondern die reduzierte Frequenz ω^* anzusehen, so dass die Beschreibung der Ergebnisse und die Formulierung des Übertragungsverhaltens als $f(\omega^*)$ erfolgt.

L.2 Ergebnisse der Doublet-Lattice-Methode

Bevor auf die einzelnen Übertragungsfunktionen eingegangen wird, werden einige Ergebnisse der Doublet-Lattice-Methode vorgestellt, die zum besseren Verständnis der nachfolgenden Ergebnisse dienen sollen. Bild L.1 zeigt Ergebnisse, bei denen der gesamte Flügel mit einer reinen Schlagbewegung konstanter Amplitude angeregt wurde. Dargestellt sind Betrag und Phase des Gesamt-Auftriebs- und des Gesamt-Nickmomentenbeiwertes für verschiedene (reduzierte) Frequenzen, jeweils aus stationärer Rechnung mit dem Tragflächenverfahren und aus instationärer Rechnung mit der Doublet-Lattice-Methode. Zu beachten ist, dass hierbei

- die Phasenlage auf die Auslenkung in z-Richtung bezogen ist (und nicht auf den Zusatzanstellwinkel),
- das Nickmoment auf die Flügelspitze bezogen ist und
- die Phasenlage des Nickmomentes aus Darstellungsgründen um 180° verschoben wurde.

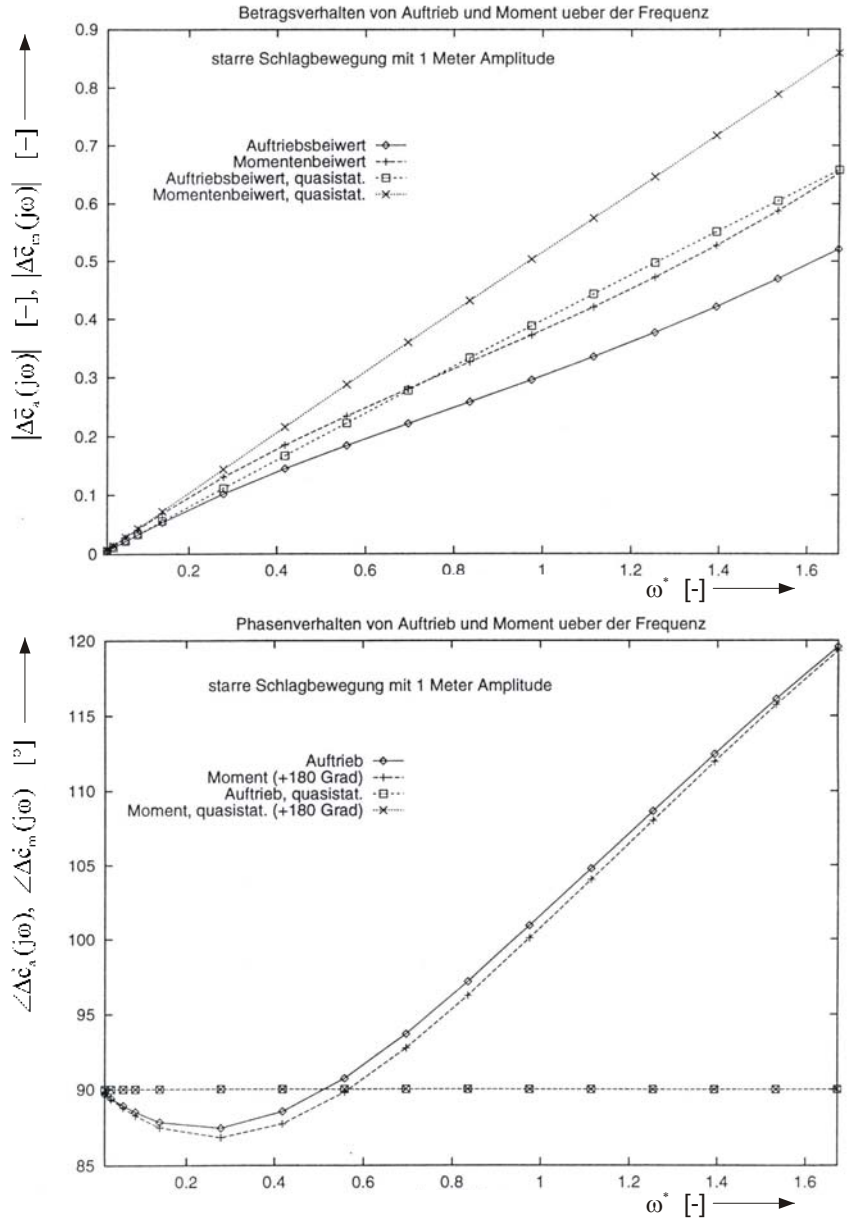

Bild L.1 Gesamt-Auftriebs und –Nickmomentenbeiwert bei der Schlagbewegung [Zrenner 1996]

Aus Bild L.1 können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

- Bei mäßig instationären Vorgängen (bis $\omega^* \approx 0{,}5$) liefert die instationäre Rechnung geringere Beträge und eine Phasennacheilung im Vergleich zur stationären Rechnung.

- Bei stärker instationären Vorgängen (bis $\omega^* \approx 1{,}0$) liefert die instationäre Rechnung eine Phasenvoreilung bei prozentual etwa gleich bleibender Betragsreduzierung.
- Bei sehr stark instationären Vorgängen (ab $\omega^* \approx 1{,}0$) nimmt die Phasenvoreilung linear mit der Frequenz zu und die Betragsreduzierung nimmt wieder ab. Bei extrem hohen Frequenzen kann es sogar zu einer Betragsverstärkung kommen, wie auch in [Laschka 1963] gezeigt wird – dieses starke instationäre Verhalten wird hier allerdings für den gesamten Flügel nicht erreicht, sondern kann allenfalls lokal beobachtet werden, wie sich beispielsweise in Bild L6 für den Auftrieb bei $\omega^* \approx 2{,}0$ andeutet. Die auftretenden Amplituden höherfrequenter Strukturschwingungen sind allerdings relativ klein, so dass nennenswerte Auswirkungen auf die flugmechanischen Freiheitsgrade nicht zu erwarten sind.

Für die weiteren Betrachtungen ist von Bedeutung, wie der Einfluss eines einzelnen, schwingenden Elementarflügels auf alle Elementarflügel verteilt ist. Bild L.2 zeigt hierzu beispielhaft Ergebnisse mit der Doublet-Lattice-Methode für eine Nickbewegung des 8. Elementarflügels mit 1 Hz (bei einer Schnittanzahl M = 31) und einer Amplitude von $\alpha_{P,\,Nick,\,8} = 10°$.

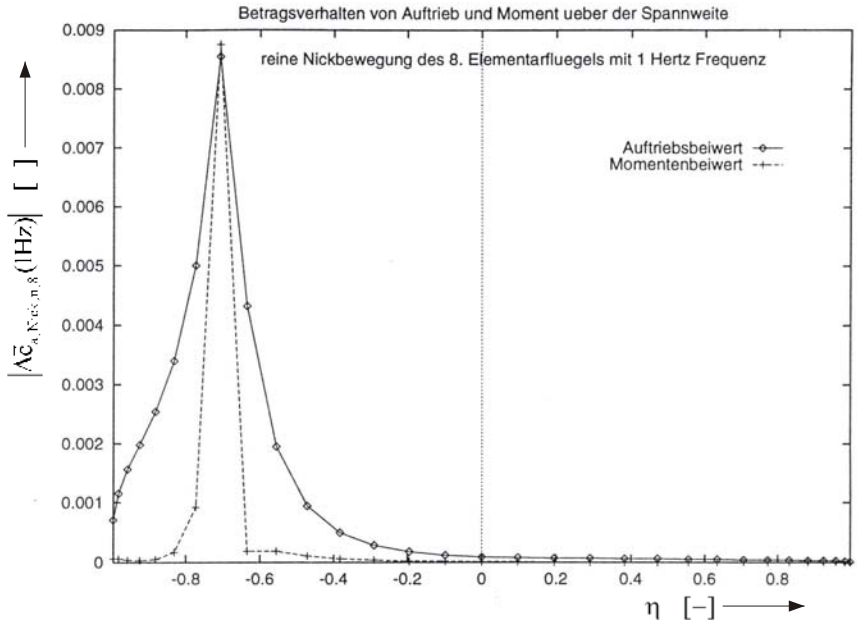

Bild L.2 Verhalten der örtlichen Beiwerte bei einer Nickbewegung des 8. Elementarflügels [Zrenner 1996]

Es zeigt sich deutlich, dass erwartungsgemäß der Einfluss des bewegten Elementarflügels auf sich selbst den größten Anteil liefert und der Einfluss auf die übrigen Elementarflügel mit zunehmendem Abstand rasch abnimmt. Dieser abnehmende Einfluss ist zur Mitte hin ausgeprägter als nach außen – die Ursache hierfür ist in der Flügelpfeilung zu suchen, da die Elementarflügel nach außen hin auch gleichzeitig weiter stromab liegen und damit einem stärkeren Einfluss unterliegen als stromaufwärts. Das Verhalten bei der Schlagbewegung ist ähnlich. Die instationären Effekte wirken sich damit nur in einem relativ engen Bereich um den angeregten Elementarflügel signifikant aus. Dieses Ergebnis ist von großer Bedeutung für weitere Vereinfachungen zur Reduzierung des numerischen Aufwandes im Echtzeitprozess der Flugsimulation.

Bild L.3 zeigt Ergebnisse aus der Doublet-Lattice-Methode und dem (quasistationären) Tragflächenverfahren im Vergleich, wiederum für die Nickbewegung des 8. Elementarflügels mit 1 Hz. Auch die quasistationären Ergebnisse zeigen qualitativ dasselbe Verhalten, also eine relativ begrenzte Wirkung eines einzelnen Elementarflügels. Die deutlichsten Unterschiede zwischen instationärer und stationärer Rechnung treten in der unmittelbaren Umgebung des angeregten Elementarflügels auf, wobei am Ort der Anregung selbst sogar eine Betragsverstärkung zu beobachten ist – die instationären Effekte sind hier damit besonders ausgeprägt, was aber grundsätzlich auch zu erwarten ist.

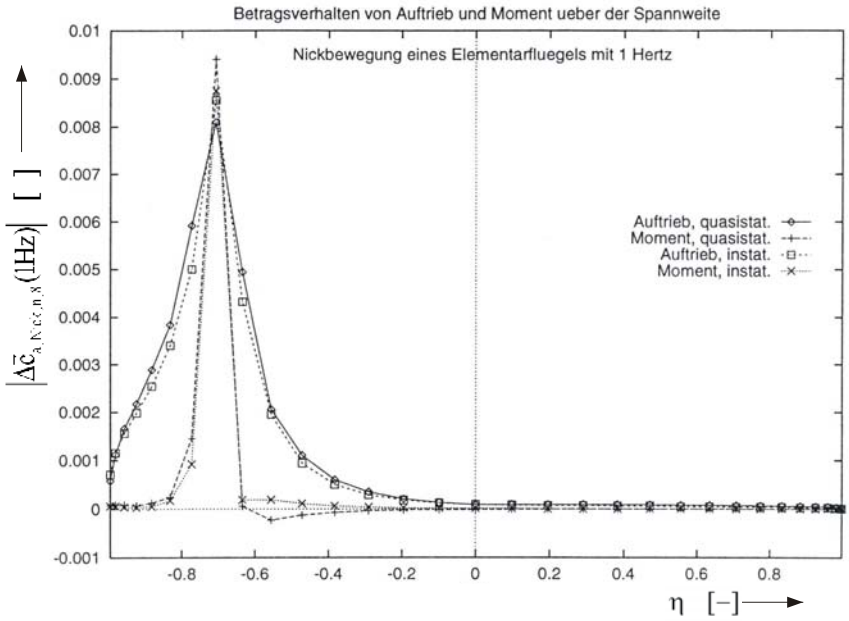

Bild L.3 Vergleich zwischen stationärer und instationärer Rechnung (Nickbewegung des 8. Elementarflügels mit 1 Hz) [Zrenner 1996]

L.3 Bode-Diagramm – Amplituden- und Phasengang

Wie bereits in Kapitel 6.3.3 erläutert, kann aus den instationären Ergebnissen der Doublet-Lattice-Methode und den quasistationären Ergebnissen des Tragflächenverfahrens jeweils für eine diskrete Frequenz ein diskreter Wert des dazugehörigen Frequenzganges $F_{n,m}(j\omega)$ bestimmt werden. Der Frequenzgang beschreibt die Veränderung des Ausgangssignals in Relation zum (harmonischen) Eingangssignal als Amplitudenverhältnis (Amplitudengang) und als Änderung der Phasenlage (Phasengang).

Da die instationären Effekte hier durch Filterung eines stationären Signals realisiert werden sollen, ist als Eingangssignal das Ergebnis des stationären Tragflächenverfahrens zu betrachten. Damit erhält man das Amplitudenverhältnis A (in dB) aus:

$$A_{dB} = 20\log_{10}\left|F_{n,m\,dB}(j\omega_i)\right| = 20\log_{10}\frac{\left|\Delta\vec{c}_{DLM,n,m}(j\omega_i)\right|}{\left|\Delta\vec{c}_{LSM,n,m}(j\omega_i)\right|} \tag{L.05}$$

und die Phasenverschiebung φ aus:

$$\varphi = \angle F_{n,m\,dB}(j\omega_i) = \angle\Delta\vec{c}_{DLM,n,m}(j\omega_i) - \angle\Delta\vec{c}_{LSM,n,m}(j\omega_i) \tag{L.06}$$

Hierbei bezeichnet m den angeregten Elementarflügel und n den betrachteten Elementarflügel.

Stellt man die Ergebnisse über der Frequenz dar, erhält man das so genannte Bode-Diagramm. Die Bild L.4 bis Bild L.6 zeigen einige exemplarische Ergebnisse. Zu beachten ist, dass jeweils diskrete Punkte der Übertragungsfunktionen ermittelt wurden, die entsprechend gekennzeichnet sind, und die Verbindungskurven dieser Punkte noch nicht die approximierten Übertragungsfunktionen sind – diese werden erst weiter unten dargestellt. Bild L.4 zeigt beispielhaft den Einfluss einer Schlagbewegung des 16. Elementarflügels auf den 10. Elementarflügel (Wirkung stromabwärts), Bild L.5 zeigt den Einfluss einer Schlagbewegung des 8. Elementarflügels auf den 15. Elementarflügel (Wirkung stromaufwärts) und Bild L.6 zeigt den Einfluss einer Schlagbewegung des 8. Elementarflügels auf sich selbst.

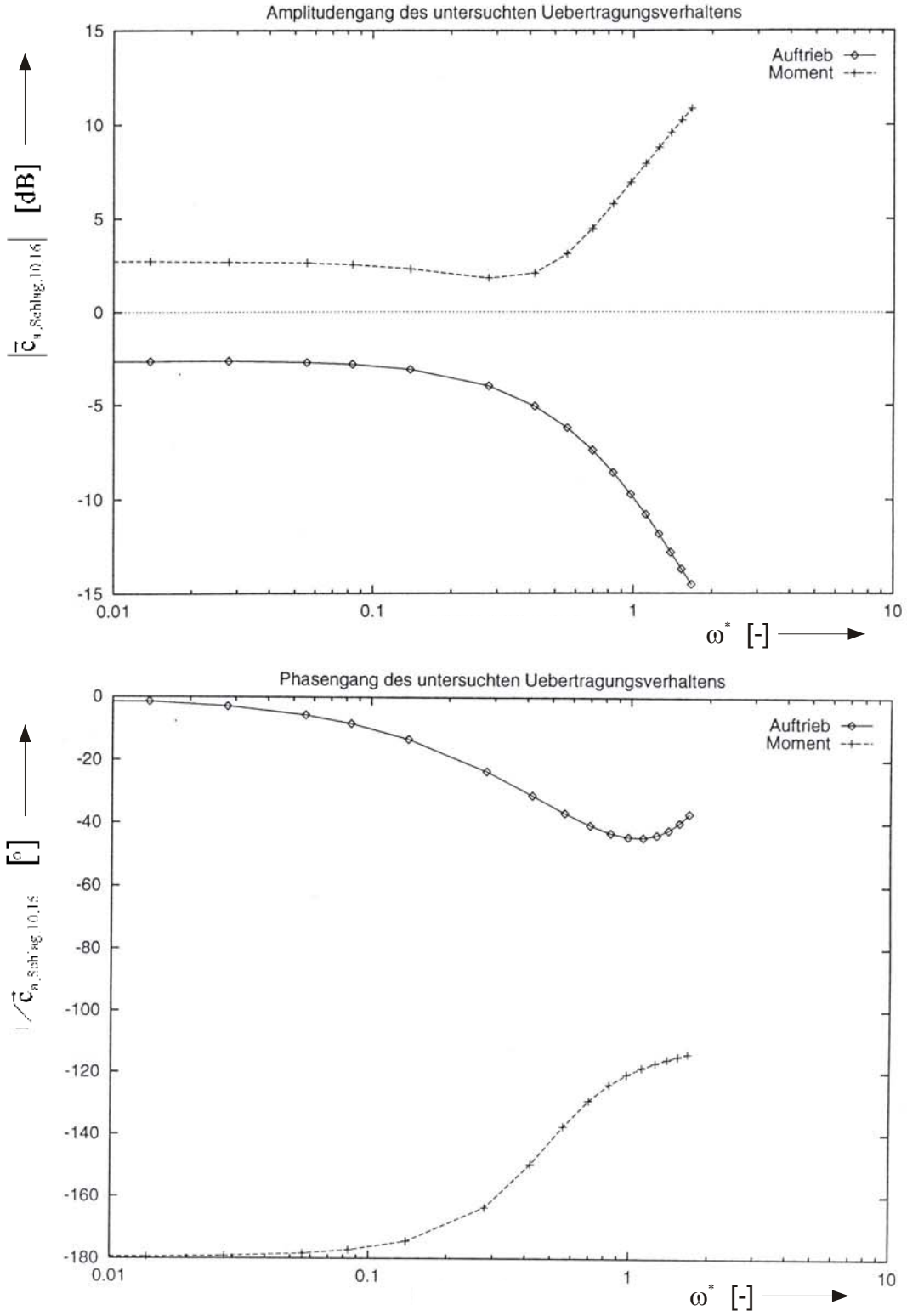

Bild L.4 Bode-Diagramm zum Einfluss des 16. Elementarflügels auf den 10. Elementarflügel (Schlagbewegung, Wirkung stromabwärts) [Zrenner 1996]

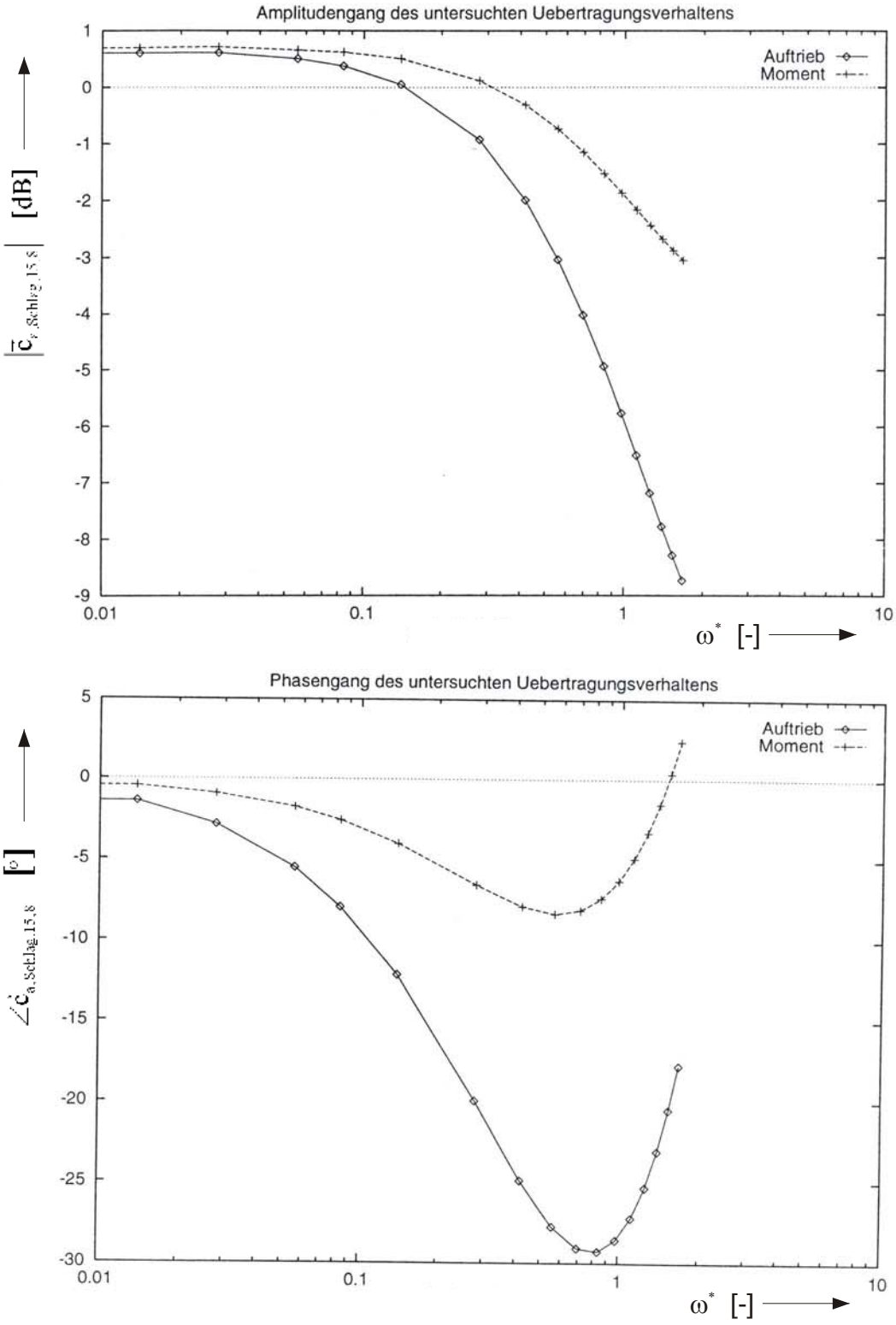

Bild L.5 Bode-Diagramm zum Einfluss des 8. Elementarflügels auf den 15. Elementarflügel (Schlagbewegung, Wirkung stromaufwärts) [Zrenner 1996]

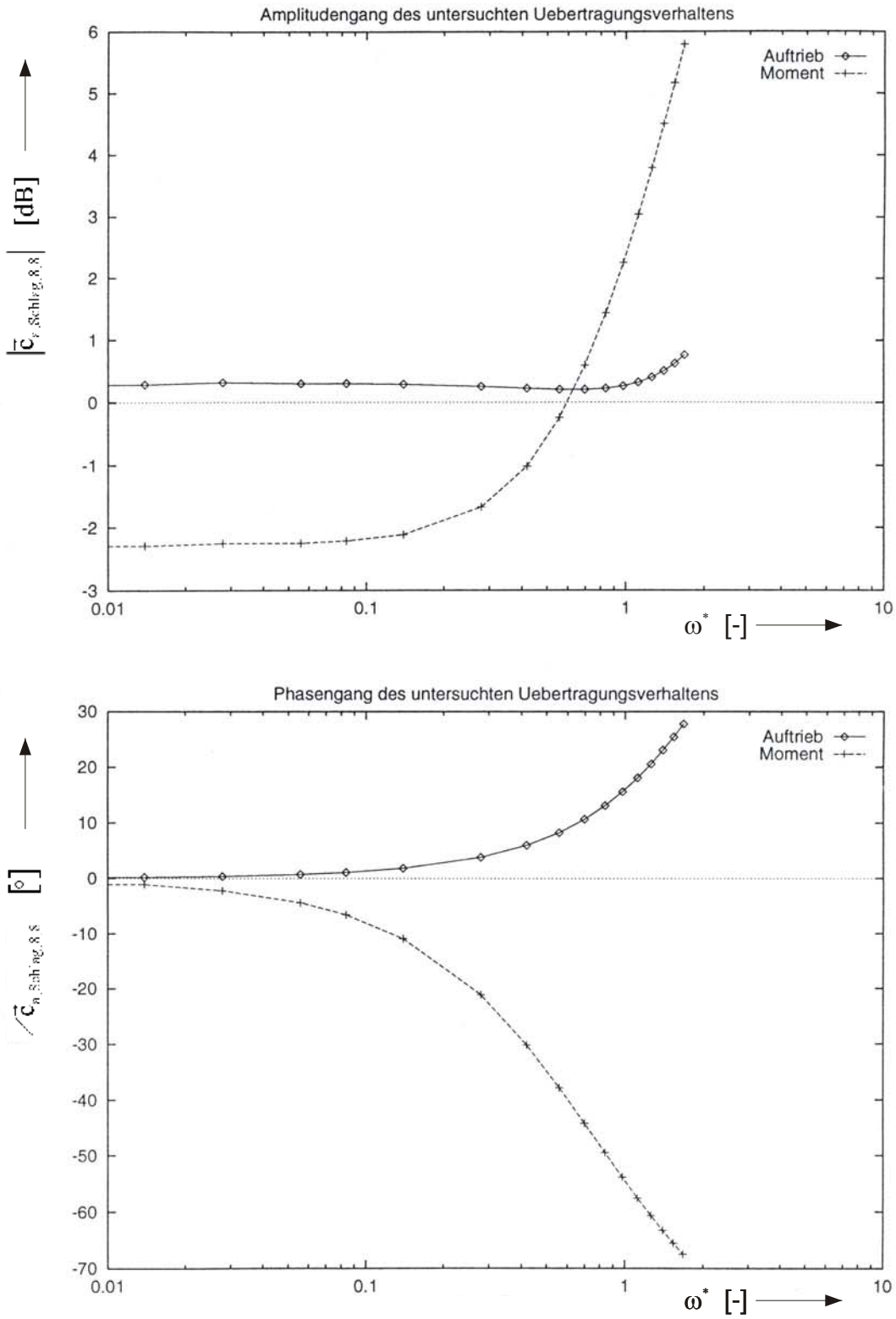

Bild L.6 Bode-Diagramm zum Einfluss des 8. Elementarflügels auf sich selbst (Schlagbewegung) [Zrenner 1996]

Die Ergebnisse zeigen, dass sehr verschiedene Übertragungsverhaltensweisen auftreten, dass die Verteilung der einzelnen Punkte jedoch in allen Fällen jeweils auf einen stetigen funktionalen Zusammenhang schließen lässt.

L.4 Bestimmung der Filterfunktionen

Die Ergebnisse von Kapitel L.3 zeigen, dass die instationären Effekte nur in der näheren Umgebung des angeregten Elementarflügels einen signifikanten Effekt haben, zumal an den weiter entfernt liegenden Elementarflügeln auch bei quasistationärer Rechnung nur noch relativ geringe Auswirkungen festzustellen sind. Zur Reduzierung des numerischen Aufwandes im Echtzeitprozess der Flugsimulation werden daher alle Filterfunktionen vernachlässigt, bei denen der quasistationäre Anteil des betrachteten Elementarflügels weniger als 5% des Maximalwertes[163] beträgt. In diesem Fall konnten von den ursprünglich 3844 Filtern (bei M = 31) auf insgesamt 2598 Filter verzichtet werden, was einer Reduktion auf ca. 1/3 entspricht. Hierdurch wird auch der Aufwand zur Bestimmung der Filterfunktionen erheblich reduziert. Bild L.7 zeigt die Elemente der Matrix $\underline{\underline{L}}^*$, die einer Filterung zu unterziehen sind

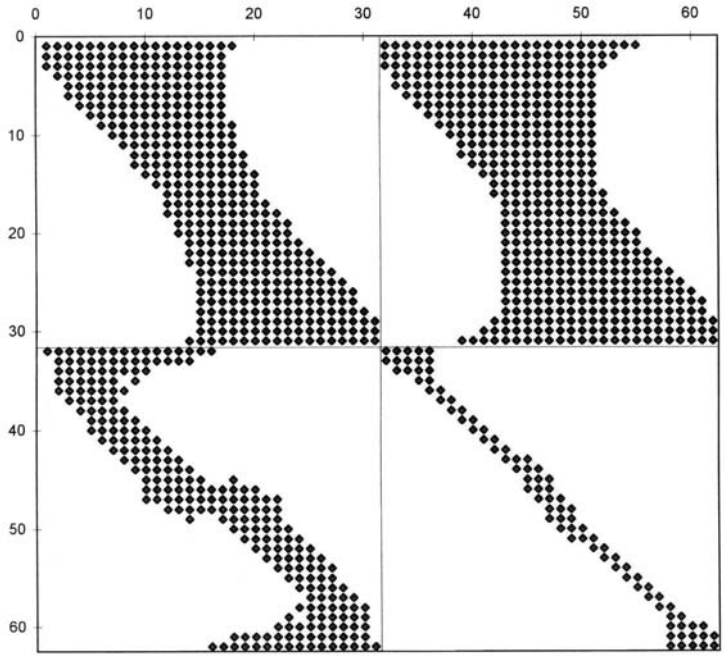

Bild L.7 Verteilung der Filter in der Matrix $\underline{\underline{L}}^*$ [Zrenner 1996]

Die Annäherung der ermittelten diskreten Stützstellen von Frequenzgängen durch analytische Funktionen erfolgt durch einen einzigen Funktionstyp. Dies hat den erheblichen Vorteil, dass für die einzelnen Matrizenelemente der Matrix $\underline{\underline{L}}^*$ keine Fallunterscheidungen für unterschiedliche Filterfunktionen erforderlich sind – lediglich die Filterkoeffizienten sind abhängig vom Matrizenelement, was programmtechnisch ohne großen Rechenzeitaufwand einfach zu realisieren ist.

Die in Bild L.4 bis Bild L.6 dargestellten Bode-Diagramme lassen sich durch PD_2T_2-Filter approximieren. Als allgemeiner Ansatz der Übertragungsfunktionen im Bildbereich wurde daher gewählt:

$$F(s) = K \frac{b_0 + b_1 s + s^2}{a_0 + a_1 s + s^2} \tag{L.07}$$

Dieser Ansatz ist umfassender als die in Kaptel 6.3 beschriebene WAGNER- bzw. KÜSSNER-Funktion, die jedoch als Sonderfälle von Gl. (L.07) angesehen werden können. Die noch unbekannten Koeffizienten K, a_0, a_1, b_0 und b_1 wurden für jede der verbliebenen 1246 Übertragungsfunktionen durch einen Optimieralgorithmus bestimmt, siehe [Zrenner 1996]. Als Gütekriterium wurde hierbei die Fehlerquadratsumme aus den Abweichungen von Amplitudenverhältnis und Phasenlage an den i Stützstellen verwendet. Für die analytischen Funktionen können diese ermittelt werden, indem der Laplaceoperator s durch $j\omega^*$[164] ersetzt wird. Das Amplitudenverhältnis A und die Phasenlage φ erhält man dann aus:

[163] Der Maximalwert wird erreicht für die Wirkung des angeregten Elementarflügels auf sich selbst.

[164] Hier ist s durch $j\omega^*$ zu ersetzen, da ω^* die unabhängige Variable bei der Doublet-Lattice-Methode ist.

$$A_{dB}(j\omega_i) = 20\log_{10}\left|F(j\omega_i)\right| \tag{L.08}$$

$$\varphi(j\omega_i) = \angle F(j\omega_i) \tag{L.09}$$

Bild L.8 zeigt das Ergebnis einer solchen Optimierung für den Einfluss des 8. Elementarflügels auf sich selbst. Die Abweichungen der diskreten Stützstellen von der analytischen Näherungsfunktion sind sehr gering. Diese sehr gute Übereinstimmung kann nicht in allen Fällen erreicht werden. Bild L.9 zeigt beispielhaft ein mäßiges Optimierungsergebnis für den Einfluss des 15. Elementarflügels auf den 2. Elementarflügel, wobei aber auch in solchen Fällen die wesentlichen Merkmale des Übertragungsverhaltens noch korrekt wiedergegeben werden. Bei der Bestimmung der Filterfunktionen ist darauf zu achten, dass bei einem symmetrischen Flugzeug auch die Matrix $\underline{\underline{L}}$ bzw. $\underline{\underline{L}}^*$ bestimmten Symmetrieeigenschaften genügt und dieses Verhalten auch bei den Filterfunktionen auszunutzen ist. Wird dies nicht beachtet, können durch numerische Ungenauigkeiten bei der Filteroptimierung Unsymmetrien entstehen, die in der Simulation auch bei vollkommen symmetrischer Anströmung zu geringen seitlichen Abweichungen führen können.

Bei der Bestimmung der Koeffizienten der Übertragungsfunktionen F(s) ist zu beachten, dass die Filter schwingungsfähig sind. Die Nennerkoeffizienten müssen daher so bestimmt werden, dass die Filter stabil sind – dies ist der Fall, wenn a_0 und a_1 positiv sind (Hurwitzkriterium).

Neben analytischen Instabilitäten durch ungünstige Werte der Koeffizienten der Filterfunktionen können in der Simulation auch numerische Instabilitäten auftreten. Diese haben ihre Ursache in einer zu geringen Abtastrate im Verhältnis zur Eigenfrequenz des simulierten Systems. Durch die Vielzahl der möglichen Parameterkombinationen ist bei der automatisierten Bestimmung der Filterkoeffizienten fast zwangsläufig damit zu rechnen, dass solche numerischen Instabilitäten auftreten. Sie können durch verschiedene Maßnahmen vermieden werden:

- Erhöhung der Simulationstaktrate,
- Verwendung numerischer Integrationsverfahren höherer Ordnung (z.B. Runge-Kutta-4, Addams-Bashforth) und
- Veränderung des Eigenverhaltens des simulierten Systems.

Die Simulationstaktrate des Simulationsrechners des A340-FFS beträgt 60 Hz und kann durch die begrenzte Rechenkapazität kaum erhöht werden. Die Verwendung höherwertiger numerischer Integrationsverfahren ist sehr wirkungsvoll, aber aufgrund der zunehmenden erforderlichen Rechenleistung begrenzt. Es wurden verschiedene Integrationsverfahren (Euler, Addams-Bashforth, Runge-Kutta-2, Runge-Kutta-3, Runge-Kutta-4) untersucht und das Runge-Kutta-3-Verfahren als das am Besten geeignete ausgewählt. Hierbei ist darauf zu achten, dass zurückliegende Zeitwerte verwendet werden und somit eine Information über den Krümmungsverlauf berücksichtigt wird. Auf eine korrekte Speicherung der vergangenen Zeitwerte ist zu achten sowie darauf, dass diese auch bei der Initialisierung des Filters zu berücksichtigen sind.

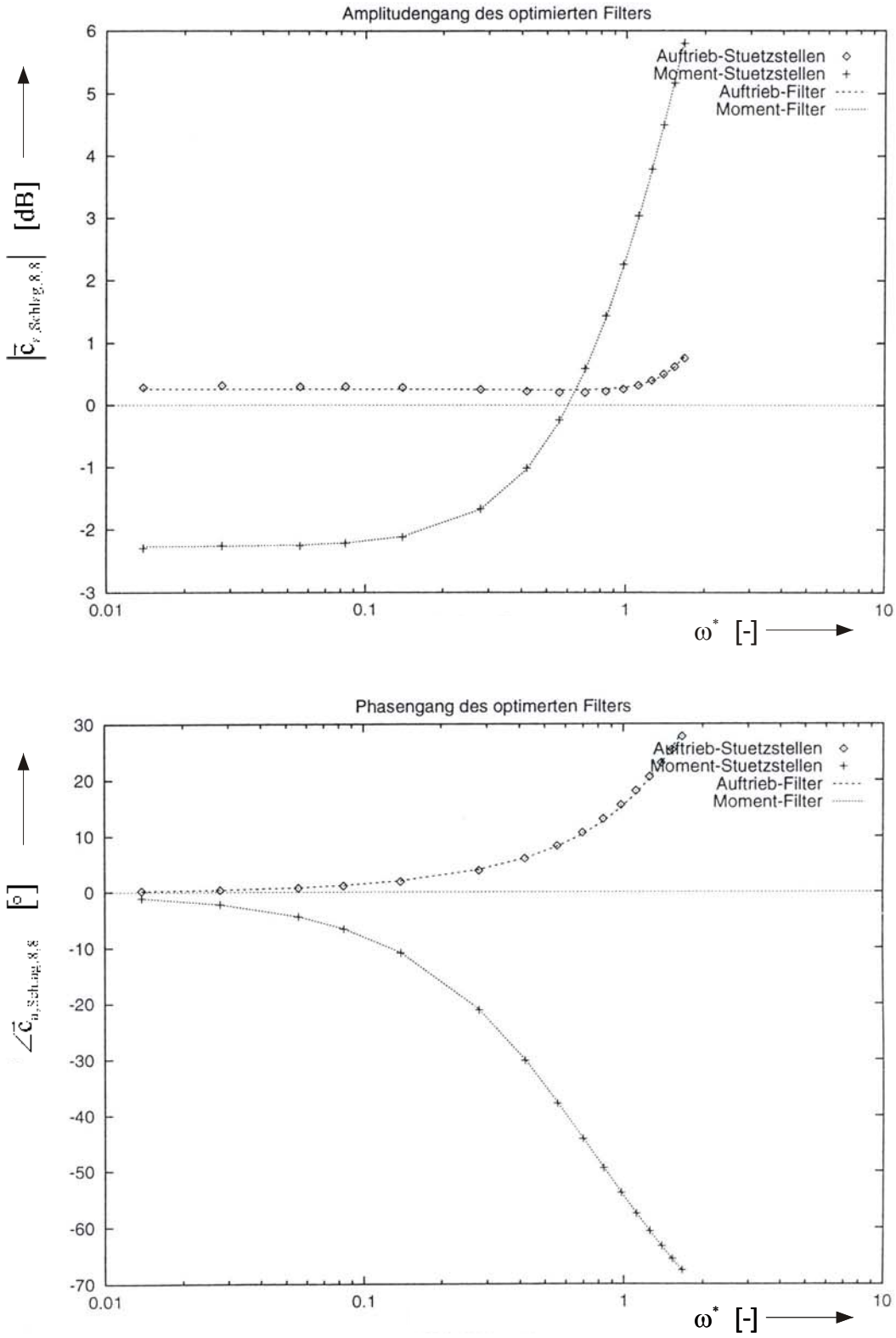

Bild L.8 Beispiel einer guten Filteroptimierung
(Schlagbewegung, Wirkung des 8. Elementarflügels auf sich selbst) [Zrenner 1996]

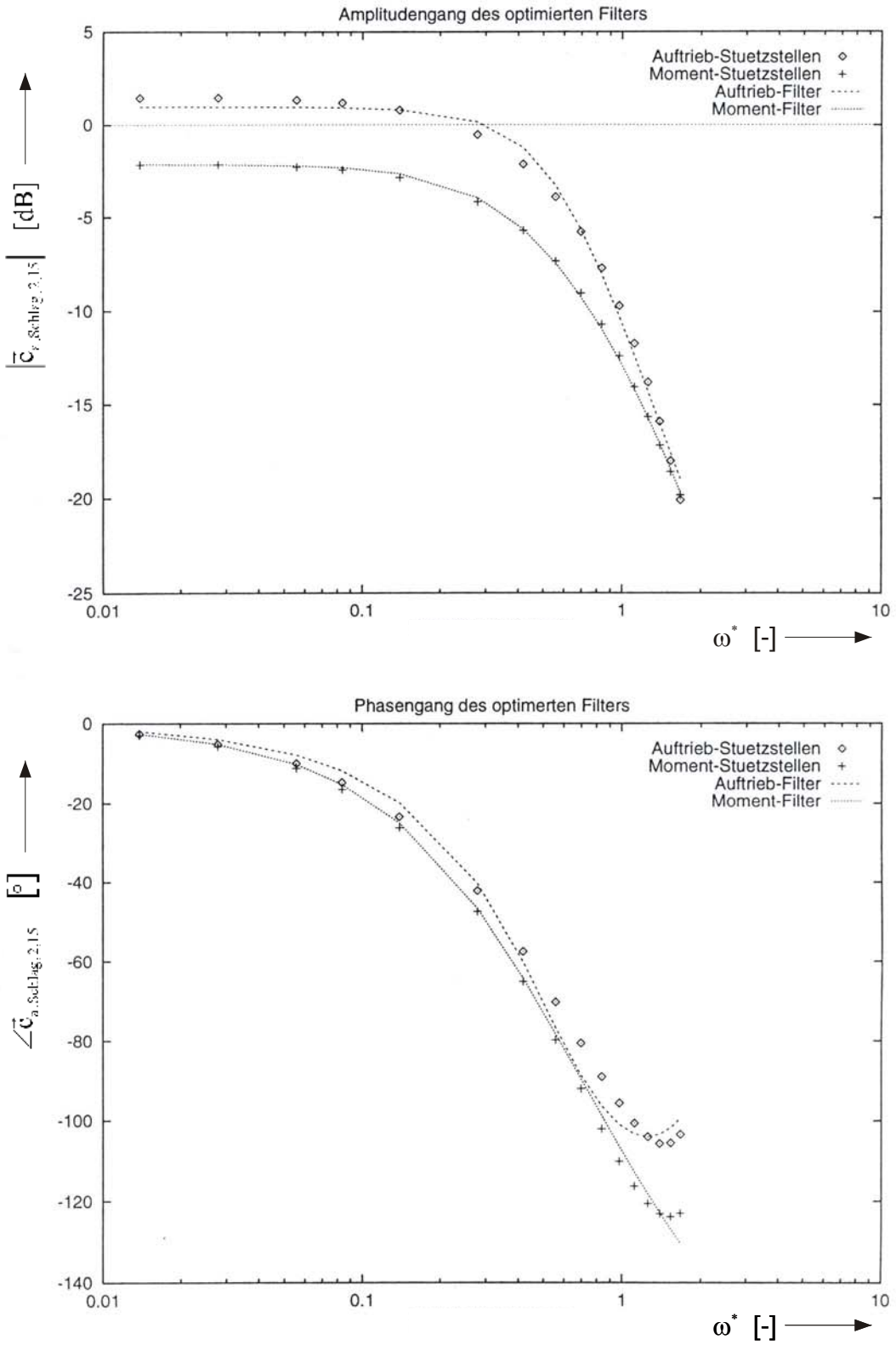

Bild L.9 Beispiel einer mäßigen Filteroptimierung
(Schlagbewegung, Wirkung des 15. Elementarflügels auf den 2. Elementarflügel) [Zrenner 1996]

Da die hier verwendeten Filterfunktionen kein gegebenes technisches System beschreiben und damit vorgeben sondern vielmehr in Grenzen wählbar sind, können für die Optimierung bestimmte Randbedingungen zur Gewährleistung numerischer Stabilität vorgegeben werden, wobei eine geringfügige Verschlechterung der Approximationsqualität in Kauf genommen werden muss. Da das Eigenverhalten durch die Eigenwerte bzw. durch Frequenz und Dämpfung beschrieben werden kann, wurden für diese Kennwerte Grenzwerte ermittelt, die in Verbindung mit dem gewählten Integrationsverfahren die numerische Stabilität des jeweiligen Filters sicherstellen. Hierzu wurde die numerische Stabilität durch

Sprungeingaben auf den Filtereingang getestet. Folgende Grenzen für Frequenz und Dämpfung wurden ermittelt:

schwingungsfähige Filter:

$$0{,}3 < D^* = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} < 0{,}965$$
$$f^* = \frac{\omega^*}{2\pi} = \frac{\sqrt{a_0}}{2\pi}\sqrt{1-D^2} < 0{,}27 \qquad \text{(L.10)}$$

nicht schwingungsfähige Filter:

$$D^* = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} < 1{,}2$$
$$f^* = \frac{\omega^*}{2\pi} = \frac{\sqrt{a_0}}{2\pi} < 0{,}406 \qquad \text{(L.11)}$$

Mit diesen Randbedingungen für Frequenz und Dämpfung der einzelnen Filterfunktionen und unter Verwendung des Runge-Kutta-3-Verfahrens sowie bei einer Simulationsfrequenz von 60 Hz konnten alle Filterfunktionen analytisch und numerisch stabil ausgelegt werden.

L.5 Genauigkeit und Rechenzeitbedarf

Zur Überprüfung der Genauigkeit des gefilterten Tragflächenverfahrens wurden Vergleichsrechnungen mit der Doublet-Lattice-Methode durchgeführt. Hierbei wurde der gesamte Flügel mit einer starren Schlagbewegung bzw. mit einer starren Nickbewegung angeregt. Bild L.10 und Bild L.11 zeigen die Ergebnisse für den Auftriebs- bzw. den Nickmomentenbeiwert über der reduzierten Frequenz bei der Schlagbewegung sowie Bild L.12 und Bild L.13 für die Nickbewegung. Zusätzlich zu den Ergebnissen der beiden instationären Rechenverfahren sind die Ergebnisse der stationären Rechnung mit dem ungefilterten Tragflächenverfahren dargestellt.

Der Vergleich des Amplitudenganges der instationären Rechenergebnisse zeigt bis zu einer reduzierten Frequenz $\omega^* \approx 0{,}8$ (dies entspricht hier einer Frequenz von $f \approx 3$ Hz) eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Doublet-Lattice-Methode und gefiltertem Tragflächenverfahren. Der Vergleich zur stationären Rechnung zeigt, dass durch instationäre Effekte im unteren Frequenzbereich eine deutliche Reduzierung der Kräfte und Momente bewirkt wird, die bei $\omega^* \approx 0{,}8$ ca. 20% beträgt (bezogen auf die stationären Werte).

Im Frequenzbereich $\omega^* > 0{,}8$ treten mit wachsender reduzierter Frequenz zunehmende Abweichungen zwischen beiden instationären Verfahren auf, wobei das gefilterte Tragflächenverfahrens stets zu kleine Werte liefert. Im Frequenzbereich $0{,}8 < \omega^* \approx 1{,}1$ (d.h. ca. im Bereich 3 Hz < f < 4 Hz) bleiben die Unterschiede jedoch unterhalb von 10%.

Für größere reduzierte Frequenzen $\omega^* > 1{,}5$ ($f \approx 5{,}4$ Hz) werden die Abweichungen im Amplitudengang zwischen den beiden instationären Rechenverfahren wieder geringer. Trotzdem wird dieser Frequenzbereich insgesamt zu schlecht wiedergegeben, wie der Phasengang zeigt. Die Aussagen für niedrige bzw. mittlere Frequenzen bis $\omega^* \approx 1{,}1$ gelten auch für den Phasengang, allerdings nehmen die Unterschiede zwischen den beiden instationären Rechenverfahren mit wachsender reduzierter Frequenz immer mehr zu, wobei in diesem Frequenzbereich beim gefilterten Tragflächenverfahren stets eine zu große Phasennacheilung ermittelt wird.

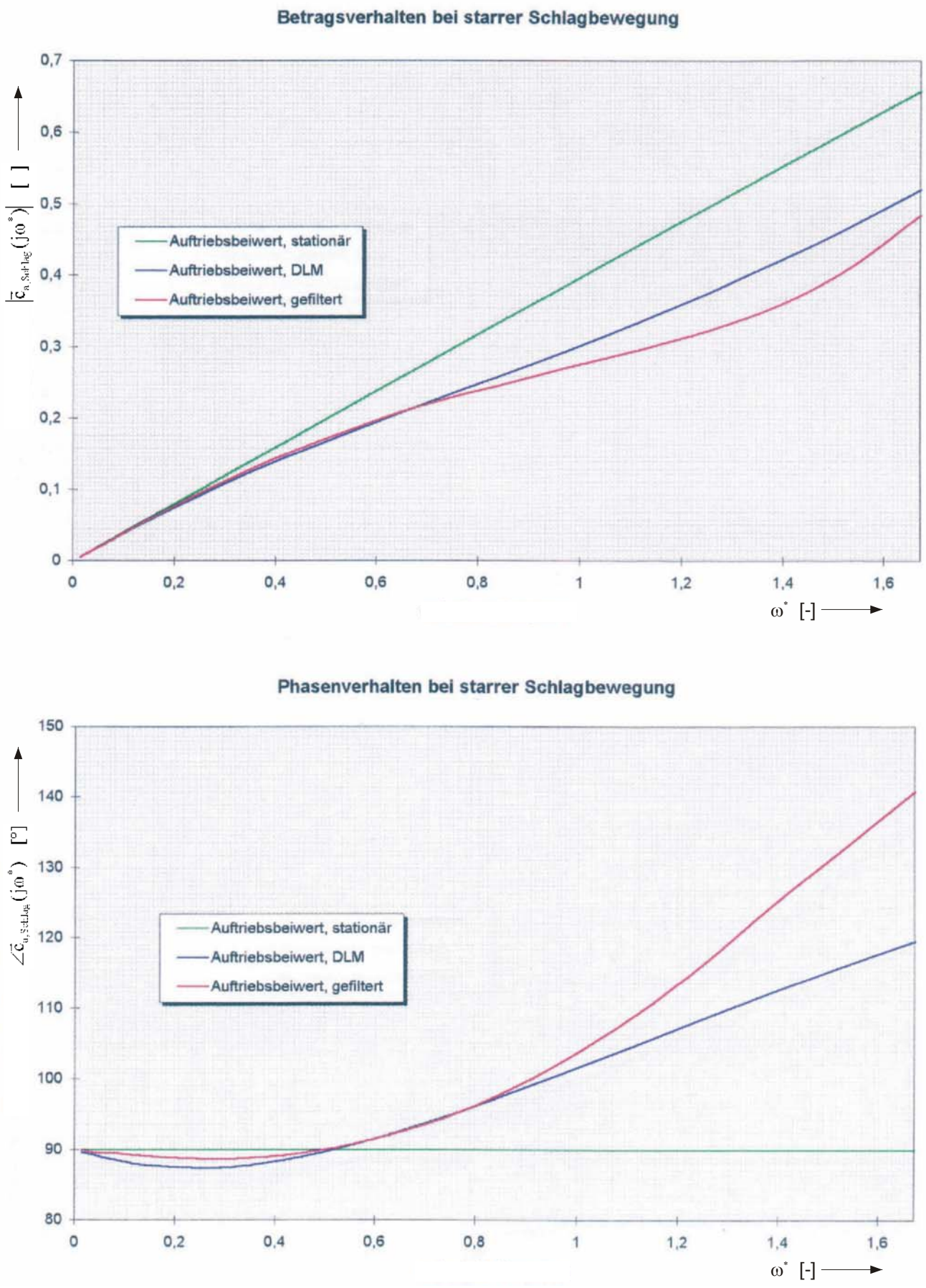

Bild L.10 Auftriebsbeiwert des Flügels bei starrer Schlagbewegung [Zrenner 1996]

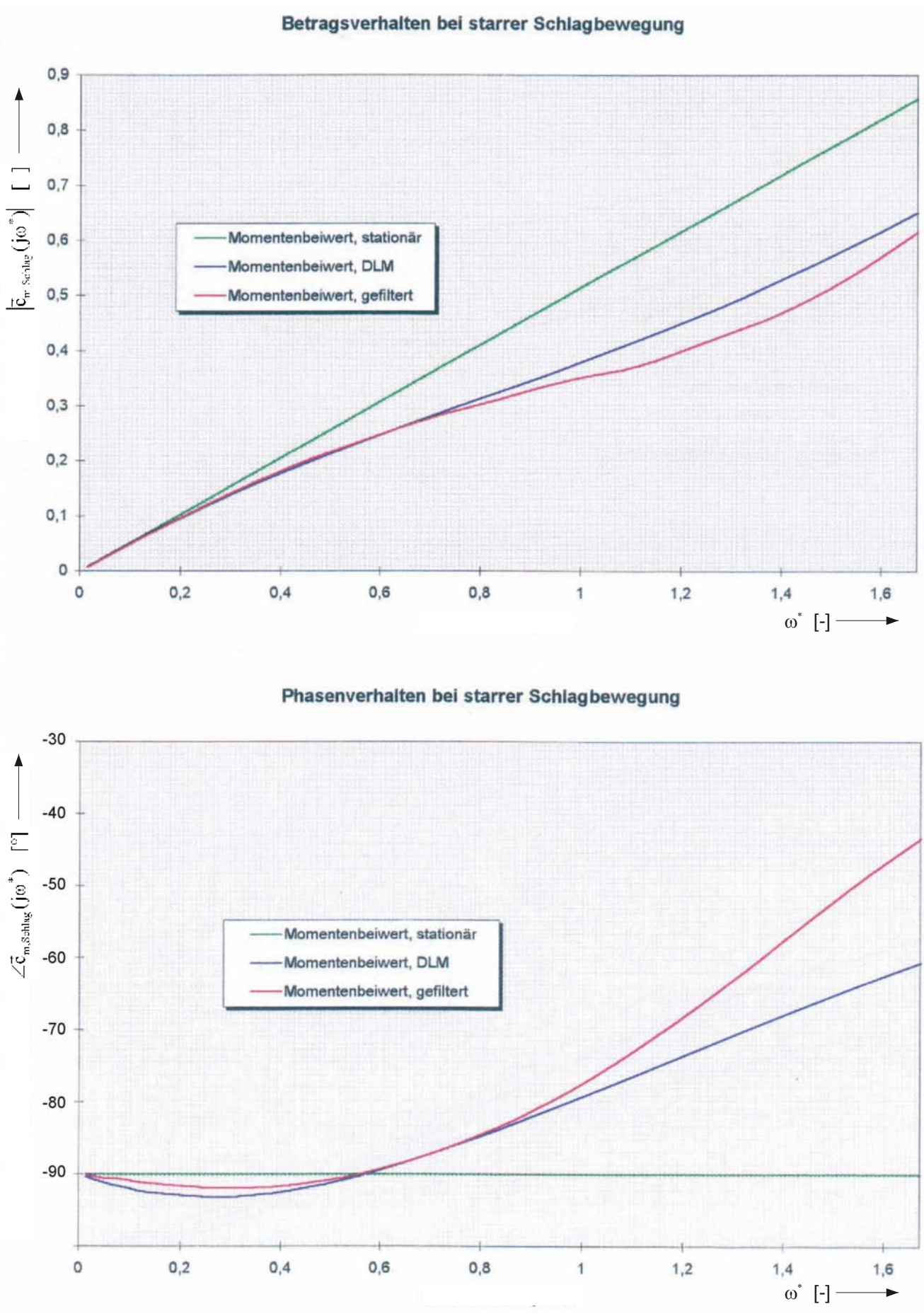

Bild L.11 Nickmomentenbeiwert des Flügels bei starrer Schlagbewegung [Zrenner 1996]

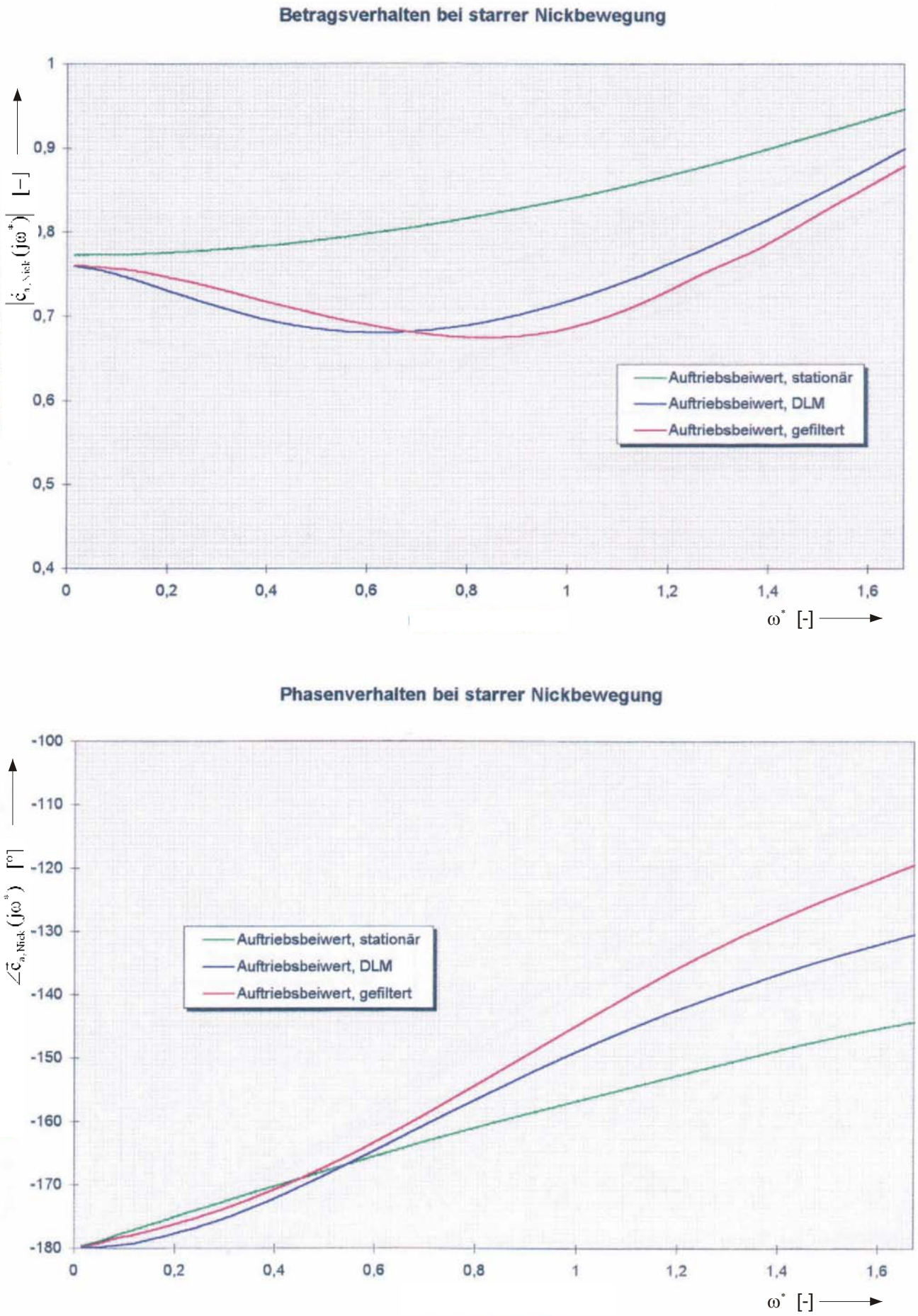

Bild L.12 Auftriebsbeiwert des Flügels bei starrer Nickbewegung [Zrenner 1996]

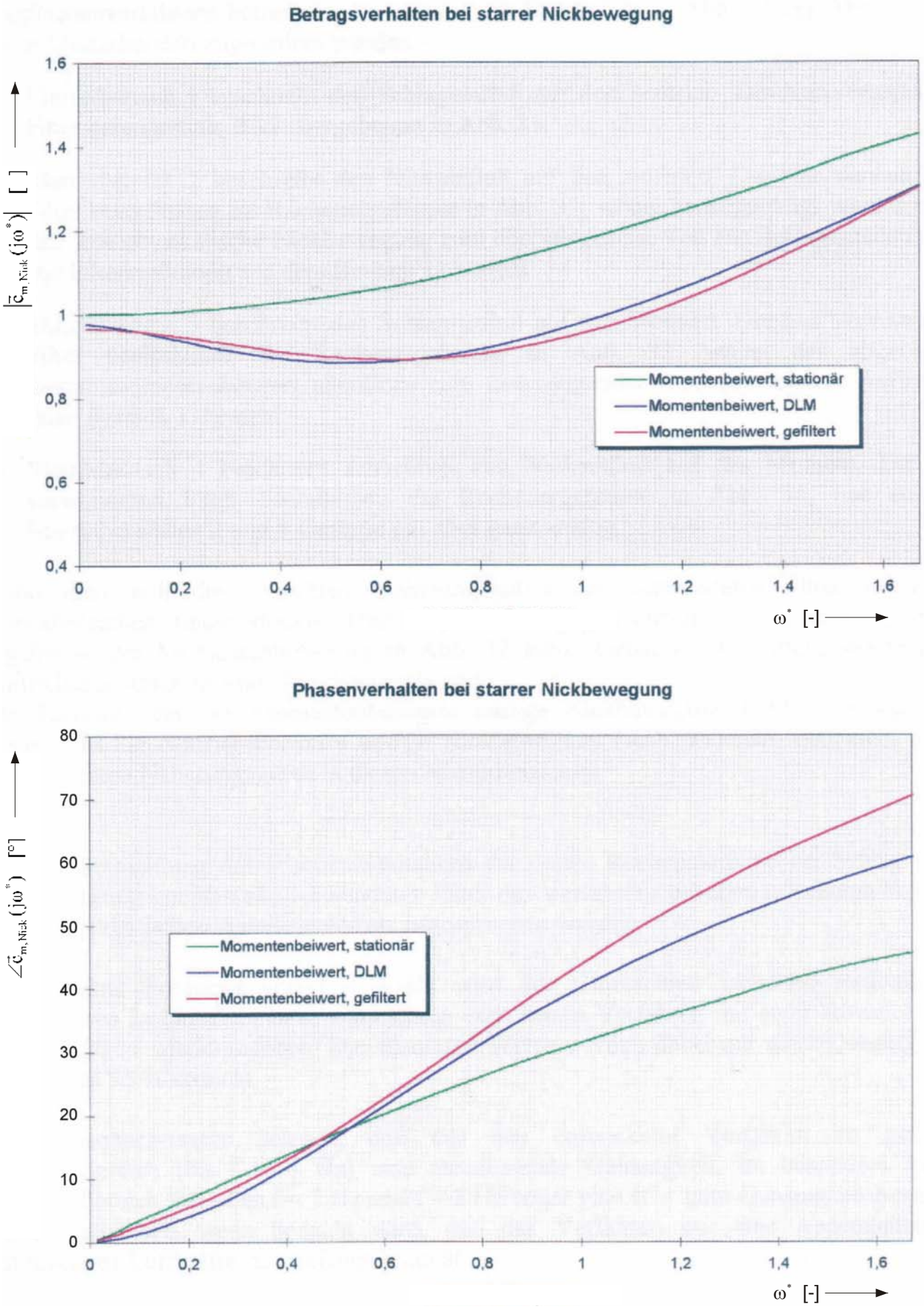

Bild L.13 Nickmomentenbeiwert des Flügels bei starrer Nickbewegung [Zrenner 1996]

Aus den in Bild L.12 und Bild L.13 dargestellten Ergebnissen der Nickbewegung können die gleichen Schlussfolgerungen wie für die Schlagbewegung gezogen werden. Insgesamt kann festgestellt werden, dass mit dem gefilterten Tragflächenverfahren der für flugmechanische Untersuchungen mit Piloten wichtige Frequenzbereich bis f ≈ 4 Hz gut wiedergegeben wird, wobei bis zu einer Frequenz f ≈ 3 Hz sogar eine sehr gute Simulationsqualität erreicht wird.

Da ein besonderer Unterschied des gefilterten Tragflächenverfahrens im Vergleich zu herkömmlichen Rechenverfahren zur instationären Aerodynamik darin besteht, dass es Ergebnisse im Zeitbereich liefert, sollen hier beispielhaft die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren für eine starre Schlagbewegung mit einer typischen Frequenz von f = 2 Hz dargestellt werden, siehe Bild L.14. Dargestellt sind Auftriebs- und Nickmomentenbeiwert des Flügels über der Zeit jeweils für die beiden instationären Verfahren und für das stationäre Tragflächenverfahren.

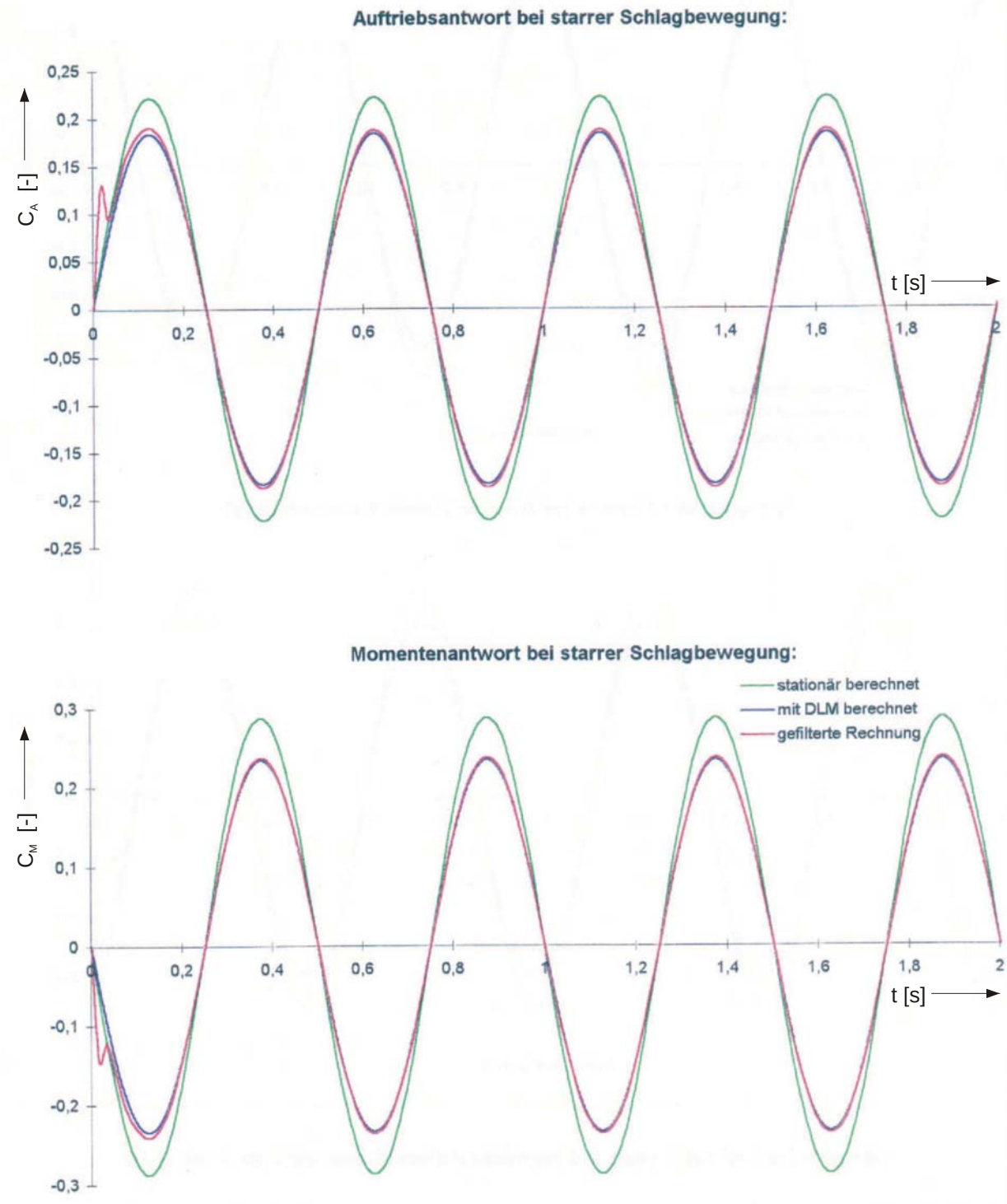

Bild L.14 Auftrieb und Nickmoment des Flügels bei starrer Schlagbewegung mit f = 2 Hz [Zrenner 1996]

Wie zu erwarten, sind die Unterschiede zwischen beiden instationären Verfahren bei dieser Frequenz sehr gering. Lediglich im Anfangsverhalten treten deutliche Abweichungen auf, die das Einschwingverhalten des Filters auf die schlagartig einsetzende Schlagbewegung zeigt. Im praktischen Einsatz tritt dieser Effekt nicht auf, da hier die Simulation mit einem stationären Referenzzustand beginnt und das Filter sauber initialisiert werden kann. Wird der Flügel anschließend durch Störungen zu Schwingungen angeregt, erfolgt dies schon auf Grund der Massenkräfte immer kontinuierlich, so dass die Filterfunktionen diesen Änderungen folgen können.[165]

L.6 Vergleichsrechnungen mit höherwertigem Verfahren

Zur zusätzlichen Absicherung der Ergebnisse wurden für einige wenige Beispiele Vergleichsrechnungen mit einem Full-Potential-Grenzschicht-Verfahren (full potential boundary layer method FBM) beim Institut für Aeroelastik des DLR Göttingen durchgeführt [Zrenner 1996]. Ziel dieser Vergleichsrechnungen war die Überprüfung von Ergebnissen der Doublet-Lattice-Methode. Dieses Rechenverfahren kombiniert ein nichtlineares, dreidimensionales potentialtheoretisches Verfahren mit einer Grenzschichtrechnung und kann damit (bei einer dreidimensionalen Flügelform) neben instationären Effekten auch transsonische Effekte sowie Reibung berücksichtigen. Es handelt sich um ein Zeitschrittverfahren, das bedingt durch die Komplexität ist das Verfahren allerdings sehr sensibel auf die Anfangsbedingungen und die gewählte Schrittweite reagiert. Bild L.15 zeigt die Ergebnisse der nunmehr vier verschiedenen Rechenverfahren für eine starre Schlagbewegung im Vergleich. Dargestellt ist der Auftriebsbeiwert des Flügels in Betrag und Phase über der reduzierten Frequenz.

Der Vergleich der Beträge zwischen Doublet-Lattice-Methode und Full-Potential-Verfahren zeigt in beiden Fällen ein ähnliches Verhalten, wobei das Full-Potential-Verfahren stets geringere Werte liefert. Im Vergleich zum instationären Tragflächenverfahren werden bei einer reduzierten Frequenz von $\omega^* \approx 0{,}8$ ($f \approx 4$ Hz) annähernd gleiche Werte erreicht. Für das Nickmoment ergeben sich ähnliche Verhältnisse. Insgesamt kann damit festgestellt werden, dass das gefilterte Tragflächenverfahren in dem interessierenden Frequenzbereich die instationären Effekte gut wiedergibt.

[165] Hier sei noch einmal darauf hingewiesen, dass in der Echtzeit-Flugsimulation die zu berücksichtigen Frequenzen des Strukturmodells nach oben begrenzt sein müssen. In der hier vorgestellten Modellierung sollen lediglich die Frequenzen berücksichtigt werden, die einen signifikanten Einfluss auf die flugmechanischen Freiheitsgrade erwarten lassen.

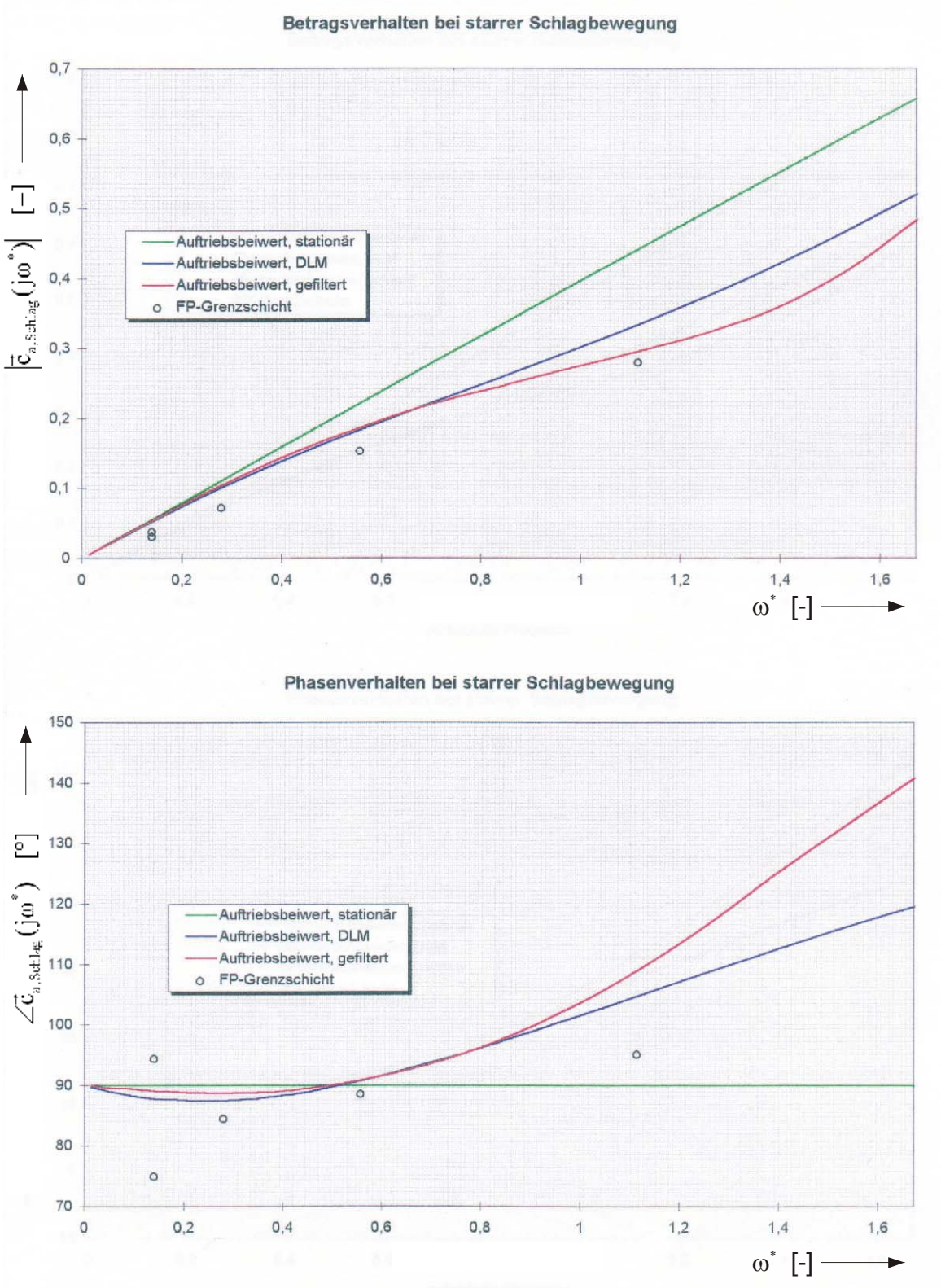

Bild L.15 Auftrieb und Nickmoment des Flügels bei starrer Schlagbewegung mit f = 2 Hz
Vergleich verschiedener Rechenverfahren [Zrenner 1996]

Anhang M Modellierung von Wirbelschleppen

Zur Berechnung des Strömungsfeldes von Wirbelschleppen werden zunächst die Bewegungsgleichungen der Einzelwirbel benötigt. Durch numerische Integration der Bewegungsgleichungen jedes einzelnen Wirbels erhält man für jeden Zeitpunkt t die Position aller Einzelwirbel. Das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld wiederum ergibt sich durch die Berechnung der von allen Einzelwirbeln induzierten Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene senkrecht zur Wirbelachse [Heintsch 1994].

Vernachlässigt man die Trägheitskräfte der Strömungsteilchen, die allenfalls direkt am Ort der Entstehung der Wirbelschicht eine Rolle spielen, können aus dem Gesetz nach BIOT-SAVART die von den Einzelwirbeln induzierten Geschwindigkeiten berechnet werden. Nach [Schlichting/Truckenbrodt 1967] gilt für die von einem geraden Wirbelfaden endlicher Länge mit der Zirkulation Γ induzierte Geschwindigkeit w_φ in Umfangsrichtung eines Kreises mit dem Radius a, siehe Bild M.1[166]:

$$w_\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi a}\left[\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right] \tag{M.01}$$

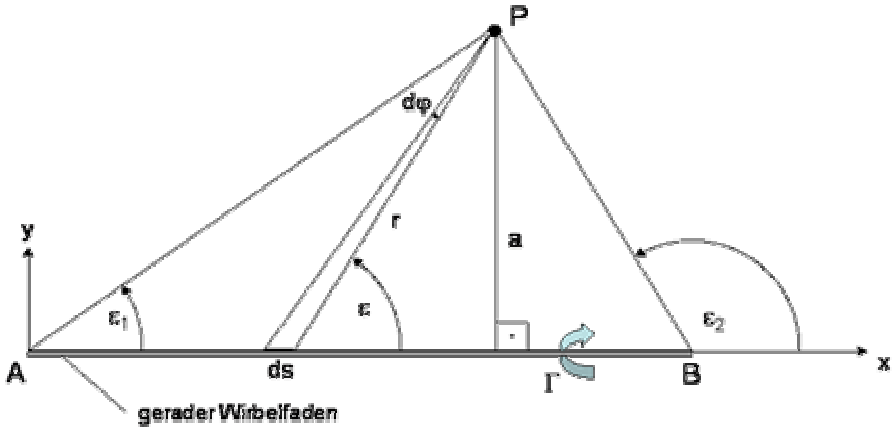

Bild M.1 Geschwindigkeitsinduktion nach BIO-SAVART

Zur Formulierung der Bewegungsgleichungen der Einzelwirbel muss zunächst die Verteilung der diskreten Einzelwirbel bestimmt werden. Hierzu wird die Zirkulationsverteilung der gebundenen Wirbel benötigt, die freien Wirbel ergeben sich dann nach den HELMHOLTZ'schen Wirbelsätzen aus den Änderungen in der Zirkulation der gebundenen Wirbel. Sind keine näheren Angaben bekannt, kann näherungsweise bei schlanken Flügeln ohne ausgeschlagene Klappen von einer elliptischen Zirkulationsverteilung der gebundenen Wirbel ausgegangen werden. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_b(\eta) &= \Gamma_0\sqrt{(1-\eta^2)} \\ \gamma_f(\eta) &= \frac{\delta\gamma_b}{\delta\eta}\Delta\eta \end{aligned} \tag{M.02}$$

mit

$$\Gamma_0 = \frac{A}{\rho b V\frac{\pi}{4}} \tag{M.03}$$

Ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Zirkulationsverteilung für beliebige Flügelgrundrisse einschließlich der Berücksichtigung ausgeschlagener Klappen wird in Kapitel 6.2 angegeben.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die freien Wirbel des Wirbelsystems hinter einer auftriebserzeugenden Fläche ebenfalls gerade sind. Ferner wird davon ausgegangen, dass die gebundenen Wirbel einer Flügelhälfte auf einer Linie mit dem Pfeilwinkel φ zur y-Achse liegen. Die Anzahl der

[166] Im Unterschied zu Bild A.2 wird hier die Winkelablage mit ε anstelle von φ bezeichnet, um eine Verwechselung mit dem Pfeilwinkel φ zu vermeiden.

freien Wirbel n wird ungerade gewählt, so dass die Anzahl der gebundenen Wirbel mit (n-1) gerade ist. Bild M.2 zeigt ein vereinfachtes Wirbelsystem aus 7 freien und 6 gebundenen Wirbeln. Am betrachteten Aufpunkt P_i, der auf einem freien Wirbel liegt, werden von allen Wirbeln Zusatz-Geschwindigkeiten induziert. Für den freien Wirbel γ_{f5} und den gebundenen Wirbel γ_{b4} sind die entsprechenden Winkel ε eingetragen.

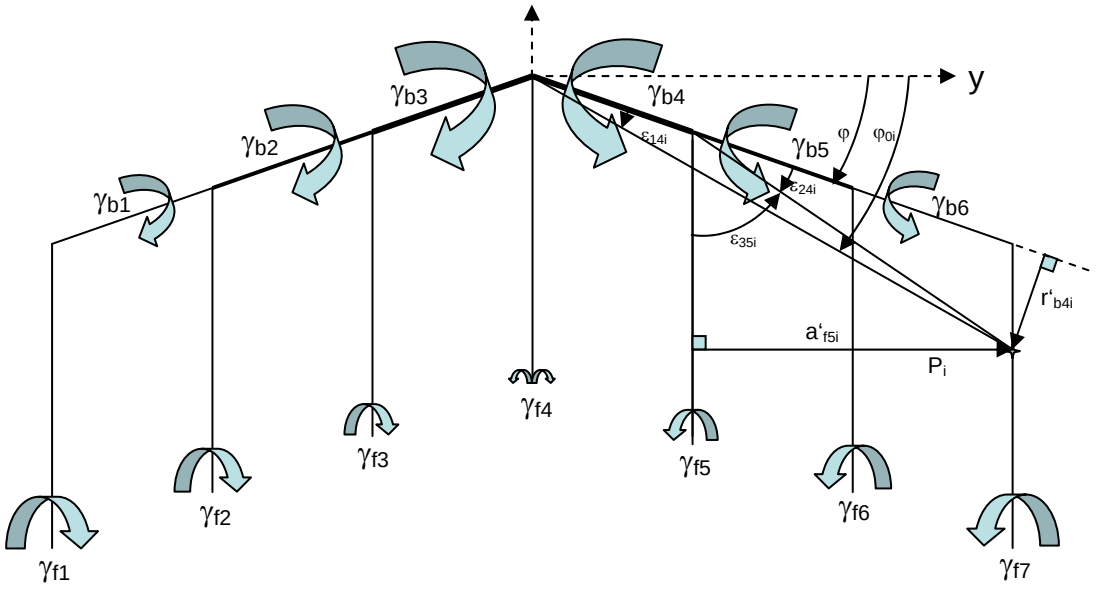

Bild M.2 Geschwindigkeitsinduktion der freien und der gebundenen Wirbel[167]

Damit erhält man für die aus den freien und den gebundenen Wirbeln induzierten Geschwindigkeitskomponenten:

$$
\begin{aligned}
u_i &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_{bj}\frac{z_i - z_j}{a_{bij}^2}\left(\cos\varepsilon_{1ij} - \cos\varepsilon_{2ij}\right)\\
v_i &= -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{fj}\frac{z_i - z_j}{a_{fij}^2}\left(\cos\varepsilon_{3ij} - \cos\varepsilon_{4ij}\right)\\
w_i &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{fj}\frac{y_i - y_j}{a_{fij}^2}\left(\cos\varepsilon_{3ij} - \cos\varepsilon_{4ij}\right)\\
&\quad -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_{bj}\frac{x_i - x_j}{a_{bij}^2}\left(\cos\varepsilon_{1ij} - \cos\varepsilon_{2ij}\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(M.04)}
$$

Bei den in Bild M.2 eingezeichneten Abständen a'_{ij} handelt es sich um die in die x-y-Ebene projizierten Abstände a_{ij}. Für die Abstände des betrachteten Aufpunktes (Index „i“) von der Achse des freien bzw. gebundenen Einzelwirbels (Index „j“) gilt:

$$
\begin{aligned}
a_{fij} &= \sqrt{(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}\\
a_{bij} &= \sqrt{\left[(x_i - x_{j=m})^2 + y_i^2\right]\sin^2\Delta\varphi_i + (z_i - z_j)^2}
\end{aligned}
\qquad \text{(M.05)}
$$

Die Flügelpfeilung ist im Winkel Δφ berücksichtigt:

[167] Im Unterschied zu Bild A.3 liegt hier der gebundene Wirbel auf der gepfeilten ℓ/4-Linie, was auch physikalisch sinnvoll ist. In Anhang A wird jedochGrenzwertbetrachtung für dy' → 0 durchgeführt, so dass der Pfeilwinkel keine Rolle spielt.

$$\Delta\varphi_i = \varphi_{0i} - \varphi$$

$$\sin\varphi_{0i} = \frac{x_i - x_{j=m}}{\sqrt{\left(x_i - x_{j=m}\right)^2 + y_i^2}} \tag{M.06}$$

Der Index j = m kennzeichnet bei den gebundenen Wirbeln den Mittelschnitt:

$$m = \frac{n+1}{2} \tag{M.07}$$

Die Länge der einzelnen Wirbelfäden wird bestimmt durch die Winkel ε_{xij}, wobei Indizes x = 1 bzw. 2 für gebundene Wirbel stehen und x = 3 bzw. 4 für freie Wirbel:

$$\sin\varepsilon_{1ij} = \frac{a_{bij}}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}$$

$$\sin\varepsilon_{2ij} = \frac{a_{bij}}{\sqrt{(x_i - x_{j+1})^2 + (y_i - y_{j+1})^2 + (z_i - z_{j+1})^2}} \tag{M.08}$$

$$\sin\varepsilon_{3ij} = \frac{a_{fij}}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}$$

$$\sin\varepsilon_{4ij} = \pi$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen der Wirbelschicht formuliert. Die numerische Integration liefert die Bewegung der Einzelwirbel im Strömungsfeld, d.h. die Positionen aller Einzelwirbel als Funktionen der Zeit. Als Anfangszustand wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die freien Wirbel zunächst in einer Ebene durch die Flügelhinterkante liegen. Hierbei wird die V-Form des Flügels ebenfalls vernachlässigt. Die Aufpunkte P_i liegen damit für t = 0 in der Achse des jeweiligen Einzelwirbels auf der Hinterkante. Mit Start der numerischen Simulation wird der Flügel mit der Geschwindigkeit V schrittweise nach vorne bewegt. Für jeden Zeitpunkt wird nun in der Ebene, die zum Zeitpunkt t = 0 senkrecht durch die Wirbelfäden geht, die neue Position der Wirbelfäden durch Integration der an den freien Wirbelfäden induzierten Geschwindigkeiten berechnet.

Das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld kann anschließend durch die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten an beliebigen Aufpunkten unter Anwendung derselben Gleichungen wie oben ermittelt werden. Zweckmäßigerweise platziert man die Aufpunkte in einem Schnitt senkrecht zur Wirbelachse. Für die Berechnung wird vereinfachend angenommen, dass die freien Wirbel gerade sind. Ihre Position wird dann durch ihren Durchstoßungspunkt der betrachteten Schnittebene gekennzeichnet. Die Durchstoßungspunkte ändern sich von Schnittebene zu Schnittebene, lediglich der Einfluss der Krümmung der Wirbelfäden wird auf diese Weise vernachlässigt. Der hierdurch hervorgerufene Fehler in der berechneten induzierten Geschwindigkeit liegt in der Größenordnung von ca. 1,5% [Heintsch 1994].

Führt man diese Berechnungen in verschiedenen Abständen hinter dem Flugzeug durch, beschreiben die Geschwindigkeitsverteilungen der aufeinander folgenden Schnittebenen die zeitliche Entwicklung der Wirbelschleppenströmung. Typischerweise werden für eine wirklichkeitsgetreue Beschreibung des Aufrollprozesses ca. 700 bis 1200 Einzelwirbel benötigt, abhängig von der Form und Stärke der Zirkulationsverteilung der wirbelerzeugenden Flächen [Heintsch 1994]. Die dazu korrespondierende Integrationsschrittweite beträgt 0,001 bis 0,0001 s. Im Vergleich hierzu ist die typische Integrationsschrittweite in der Flugsimulation von 0,017 bis 0,034 s erheblich größer.

Auf die Berechnung der Horizontalkomponente u_i kann verzichtet werden, da erstens in ihre Berechnung nur die gebundenen Wirbel eingehen und der Abstand eines nachfolgenden Flugzeuges zu diesen relativ groß ist und zweitens die Horizontalkomponente im Vergleich zur Fluggeschwindigkeit des nachfolgenden Flugzeugs relativ klein ist. Zur Berechnung der Einzelwirbelbewegung muss in einem Zeitschritt für jeden freien Wirbel das BIOT-SAVART'sche Gesetz 3n-mal berechnet werden, also

insgesamt $3n^2$. Der Rechenaufwand wächst damit quadratisch mit der Anzahl der Einzelwirbel. Für jeden Aufpunkt sind pro induzierendem Wirbelpaar (freier + gebundener Wirbel) 68 Floating Point Operationen zu lösen. Bei n = 1200 Einzelwirbeln und einer Schrittweite von $\Delta t = 10^{-4}$ s sowie vernachlässigter Horizontalkomponente u_i beträgt damit die erforderliche Rechenleistung zur Berechnung der Einzelwirbel $1200^2 \times 10^4 \times 68 = 9{,}8 \times 10^{10}$, d.h. ca. 100 GFlops. Hinzu kommt noch die Berechnung der Wirbelströmung in den Schnittebenen.

Die Kapazität des am A330/A340-Simulators vorhandenen Simulationsrechners beträgt ca. 100 MFlops, die allerdings bereits zum größten Teil durch die „normale“ Simulation ausgelastet sind. Eine Anwendung des beschriebenen Verfahrens in der Echtzeit-Flugsimulation kommt bei den momentan verfügbaren Rechnerleistungen bis auf weiteres nicht in Betracht. Sollte die Entwicklung weiter so voranschreiten wie in den letzten Jahren, die ca. alle zwei Jahre eine neue Rechnergeneration mit verdoppelter Rechenleistung gegenüber der vorherigen mit sich gebracht hat, würde die erforderliche Rechenleistung nach 9 Rechnergenerationen erreicht. Eine Anwendung unter Echtzeitbedingungen ist daher für die Zukunft nicht ausgeschlossen.

Die beschriebene Methode der Einzelwirbelsimulation ist zwar numerisch relativ aufwendig, beschreibt die charakteristischen Eigenschaften der Wirbelschleppenentwicklung aber sehr gut, insbesondere den Aufrollprozess von einer Wirbelschicht zu (zwei) Randwirbeln, die Bewegung der aufgerollten Randwirbel in der Atmosphäre sowie den Alterungseffekt [Heintsch 1994]. Der Einfluss von Klappen wird durch die Möglichkeit beliebiger Zirkulationsverteilungen der gebundenen Wirbel ebenfalls erfasst. Die Ermittlung dieser Zirkulationsverteilung wird in Kapitel 6.2 beschrieben. Der Einfluss von Luftturbulenz auf den Alterungsprozess der Randwirbel wird in der Einzelwirbelsimulation nicht berücksichtigt. Eine einfache Methode zur Modellierung dieser Einflüsse wird jedoch im Kapitel 3.3 beschrieben. Als Ergebnis der Einzelwirbelsimulation liegen die Positionen aller Einzelwirbel und die von ihnen induzierten Geschwindigkeitsverteilungen in Schnittebenen senkrecht durch die Wirbelachsen vor. Eine Bewertung der Methode durch Vergleich mit vermessenen Wirbelschleppenströmungen wird von [Heintsch 1994] angegeben. Als charakteristische Parameter wurden hierbei für verschiedene Wirbelalter die Kernradien und die maximalen Tangentialgeschwindigkeiten verglichen. Tabelle M.1 zeigt die Ergebnisse für ein Beispielflugzeug [Heintsch 1994]. Es kann eine gute Übereinstimmung festgestellt werden, wobei noch zu berücksichtigen ist, dass der Abstand der Sensoren bei der Messung in der Größenordnung der angegebenen Kernradien liegt und die damit verbundenen Messungenauigkeiten in der Größenordnung der Differenzen zur Einzelwirbelsimulation liegen.

Tabelle M.1 Einzelwirbelsimulation im Vergleich zu Messungen [Heintsch 1994]

	Messung		Einzelwirbelsimulation	
Wirbelalter [s]	V_{tmax} [m/s]	Kernradius [m]	V_{tmax} [m/s]	Kernradius [m]
5	45	0,35	45	0,5
17	34	0,5	32	0,7
26	30	0,7	28	0,9

Anhang N Lösung der Glauert-Integrale

In der Tragflächentheorie werden häufig so genannte GLAUERT-Integral verwendet:

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta \tag{N.01}$$

Diese wurden erstmals von GLAUERT gelöst. In der Literatur wird für das Lösungsergebnis stets auf [Glauert 1929] verwiesen. Hier ist zwar die allgemeine Lösung angegeben, allerdings nicht der vollständige Lösungsweg. Da keine entsprechende Literaturstelle gefunden werden konnte, soll dieser daher an dieser Stelle beschrieben werden.

Die Unstetigkeitsstelle im Nenner bei ($\vartheta = \theta$) kann durch die Aufteilung der Integrationsgrenzen in die zwei Bereiche von 0 bis $\theta - \varepsilon$ und von $\theta + \varepsilon$ bis π und hierbei ε gegen Null gehen zu lassen:

$$I_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int_0^{\theta-\varepsilon} \frac{\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta + \int_{\theta-\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta \right\} \tag{N.02}$$

Die Lösung erfolgt durch Rekursion. Zunächst wird der Fall n = 0 betrachtet

Lösung für n = 0

$$I_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int_0^{\theta-\varepsilon} \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta + \int_{\theta-\varepsilon}^{\pi} \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta \right\} \tag{N.03}$$

Da $\cos\theta$ eine Konstante darstellt, kann das Integral nach [Bronstein 1987, S. 55, Integral Nr. 347] wie folgt allgemein gelöst werden[168]:

$$\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left| \frac{(c-b)\tan ax/2 + \sqrt{c^2 - b^2}}{(c-b)\tan ax/2 - \sqrt{c^2 - b^2}} \right| \qquad \text{für } b^2 < c^2 \tag{N.04}$$

Durch Vergleich mit Gl. (N.03) ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -\cos\theta \\ c &= 1 \end{aligned} \tag{N.05}$$

Damit ist

$$b^2 < c^2 \tag{N.06}$$

ist erfüllt, solange $\theta \neq 0$ bzw. $\theta \neq \pi$ [169]. Damit erhält man

$$\int \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}} \ln \frac{(1+\cos\theta)\tan\vartheta/2 + \sqrt{1 - \cos^2\theta}}{(1+\cos\theta)\tan\vartheta/2 - \sqrt{1 - \cos^2\theta}} \tag{N.07}$$

bzw.

$$\int \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta = \frac{1}{\sin\theta} \ln \left| \frac{(1+\cos\theta)\tan\vartheta/2 + \sin\theta}{(1+\cos\theta)\tan\vartheta/2 - \sin\theta} \right| \tag{N.08}$$

[168] Die allgemeinen Hinweise im Bronstein zu diesem Abschnitt auf Seite 35 sind unbedingt zu beachten!

[169] Die Bedingung ist stets erfüllt, da keine Aufpunkte an den Flügelspitzen mit $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ liegen können, siehe .z.B. Bild 4.3.

Mit der Beziehung [Bronstein 1987, Seite 181]

$$\tan\theta/2 = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \tag{N.09}$$

bzw.

$$\sin\theta = (1+\cos\theta)\,\tan\theta/2 \tag{N.10}$$

erhält man

$$\int \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\,d\vartheta = \frac{1}{\sin\theta}\ln\left|\frac{(1+\cos\theta)\tan\vartheta/2 + (1+\cos\theta)\,\tan\theta/2}{(1+\cos\theta)\tan\vartheta/2 - (1+\cos\theta)\,\tan\theta/2}\right| \tag{N.11}$$

Nach Ausklammern und Kürzen bleibt

$$\int \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\,d\vartheta = \frac{1}{\sin\theta}\ln\left|\frac{\tan\vartheta/2 + \tan\theta/2}{\tan\vartheta/2 - \tan\theta/2}\right| \tag{N.12}$$

Mit den Additionstheoremen [Bronstein 1987, Seite 182]

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x\,\cos y} \tag{N.13}$$

erhält man schließlich als Lösung

$$\int \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\,d\vartheta = \frac{1}{\sin\theta}\ln\left|\frac{\sin 1/2(\vartheta+\theta)}{\sin 1/2(\vartheta-\theta)}\right| \tag{N.14}$$

Damit kann die Integration entsprechend den Bereichsgrenzen nach Gl. (N.03) durchgeführt werden. Für den ersten Integrationsabschnitt gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta-\varepsilon} \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\,d\vartheta &= \left[\frac{1}{\sin\theta}\ln\left|\frac{\sin 1/2(\vartheta+\theta)}{\sin 1/2(\vartheta-\theta)}\right|\right]_0^{\theta-\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\left[\ln\left|\frac{\sin 1/2(\theta-\varepsilon+\theta)}{\sin 1/2(\theta-\varepsilon-\theta)}\right| - \ln\left|\frac{\sin 1/2(\theta)}{\sin 1/2(-\theta)}\right|\right]\end{aligned} \tag{N.15}$$

sowie den Symmetrieeigenschaften

$$\sin(-x) = -\sin x \tag{N.16}$$

folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta-\varepsilon} \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\,d\vartheta &= \frac{1}{\sin\theta}\left[\ln\left|\frac{\sin 1/2(\theta-\varepsilon+\theta)}{\sin 1/2(\theta-\varepsilon-\theta)}\right| - \ln\left|\frac{\sin 1/2(\theta)}{-\sin 1/2(\theta)}\right|\right] \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\left[\ln\sin(\theta-\varepsilon/2) - \ln\sin\varepsilon/2\right]\end{aligned} \tag{N.17}$$

Für den zweiten Integrationsabschnitt gilt:

$$\int_{\theta+\varepsilon}^{\pi} \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\,d\vartheta = \left[\frac{1}{\sin\theta}\ln\left|\frac{\sin 1/2(\vartheta+\theta)}{\sin 1/2(\vartheta-\theta)}\right|\right]_{\theta+\varepsilon}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\ln\left|\frac{\sin 1/2(\pi+\theta)}{\sin 1/2(\pi-\theta)}\right| - \ln\left|\frac{\sin 1/2(\theta+\varepsilon+\theta)}{\sin 1/2(\theta+\varepsilon-\theta)}\right|\right] \tag{N.18}$$

Mit den Reduktionsformeln [Bronstein 1987, Seite 179]

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \tag{N.19}$$

folgt

$$\int_{\theta+\varepsilon}^{\pi} \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\,d\vartheta = \frac{1}{\sin\theta}\left[\ln\left|\frac{\cos\theta/2}{\cos(-\theta/2)}\right| - \ln\left|\frac{\sin(\theta+\varepsilon/2)}{\sin(\varepsilon/2)}\right|\right]$$
$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[-\ln\sin(\theta+\varepsilon/2) + \ln\sin(\varepsilon/2)\right] \tag{N.20}$$

Für den Gesamtbereich gilt damit:

$$I_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{\theta-\varepsilon}\frac{1}{\cos\vartheta-\cos\theta}d\vartheta + \int_{\theta+\varepsilon}^{\pi}\frac{1}{\cos\vartheta-\cos\theta}d\vartheta\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\left[\ln\sin(\theta-\varepsilon/2) - \ln\sin\varepsilon/2\right] + \frac{1}{\sin\theta}\left[-\ln\sin(\theta+\varepsilon/2) + \ln\sin(\varepsilon/2)\right]\right\} \tag{N.21}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\left[\ln\sin(\theta-\varepsilon/2) - \ln\sin(\theta+\varepsilon/2)\right]\right\}$$

und damit schließlich

$$I_0 = 0 \tag{N.22}$$

Lösung für n = 1

Die Lösung kann auf die Lösung für n = 0 zurückgeführt werden, denn es gilt:

$$I_1 = \int_0^{\pi}\frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta-\cos\theta}d\vartheta = \int_0^{\pi}\frac{\cos\vartheta-\cos\theta+\cos\theta}{\cos\vartheta-\cos\theta}d\vartheta$$
$$= \int_0^{\pi}\left(1+\frac{\cos\theta}{\cos\vartheta-\cos\theta}\right)d\vartheta \tag{N.23}$$

und damit

$$I_1 = \pi + I_0\cos\theta \tag{N.24}$$

bzw.

$$I_1 = \pi \tag{N.25}$$

Lösung für n = 2

Für Werte n > 1 kann die Lösung durch Rekursion gewonnen werden, denn es gilt:

$$I_2 + I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\vartheta + 1}{\cos\vartheta - \cos\theta} d\vartheta \tag{N.26}$$

mit

$$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \tag{N.27}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\vartheta + 1 &= \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta + 1 \\ &= 2\cos^2\vartheta \\ &= 2\cos\vartheta(\cos\vartheta - \cos\theta) + 2\cos\vartheta\cos\theta \end{aligned} \tag{N.28}$$

erhält man

$$\begin{aligned} I_2 + I_0 &= \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\vartheta + 1}{\cos\vartheta - \cos\theta} d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{2\cos\vartheta(\cos\vartheta - \cos\theta) + 2\cos\vartheta\cos\theta}{\cos\vartheta - \cos\theta} d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi} \left[2\cos\vartheta + \frac{2\cos\vartheta\cos\theta}{\cos\vartheta - \cos\theta} \right] d\vartheta \\ &= 2\int_0^{\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta + 2\cos\theta \int_0^{\pi} \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta} d\vartheta \\ &= 2[\sin\vartheta]_0^{\pi} + 2\cos\theta\, I_1 \end{aligned} \tag{N.29}$$

Damit folgt schließlich

$$I_2 = 2\cos\theta\, I_1 - I_0 \tag{N.30}$$

bzw.

$$I_2 = 2\pi\cos\theta \tag{N.31}$$

allgemeine Lösung für n ≥ 1:

Für den allgemeinen Fall gilt nach GLAUERT [Glauert 1929, S. 82] die Umformung

$$\cos(n+1)\vartheta \;\; \cos(n-1)\vartheta = 2\cos\vartheta\cos n\vartheta \tag{N.32}$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)\vartheta \;\; \cos(n-1)\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{2\cos\vartheta\,\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{2\cos\vartheta\,\cos n\vartheta - 2\cos\theta\,\cos n\vartheta + 2\cos\theta\,\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi} \left(\cos n\vartheta + \frac{2\cos\theta\,\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta} \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi} \cos n\vartheta\, d\vartheta + 2\cos\theta \int_0^{\pi} \frac{\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta
\end{aligned}
\tag{N.33}
$$

Für den ersten Term gilt allgemein nach BRONSTEIN [Bronstein 1987, S. 54]

$$
\int \cos n\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{n} \sin n\vartheta \tag{N.34}
$$

und damit in diesem Fall

$$
\int_0^{\pi} \cos n\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{n} \left[\sin n\vartheta \right]_0^{\pi} = 0 \tag{N.35}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)\vartheta \;\; \cos(n-1)\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta \\
&= 2\cos\theta \int_0^{\pi} \frac{\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta \\
&= 2\cos\theta\, I_n
\end{aligned}
\tag{N.36}
$$

und somit

$$
I_{n+1} = 2\cos\theta\, I_n - I_{n-1} \tag{N.37}
$$

Mit den bereits gefundenen Anfangsbedingungen erhält man

$$
\begin{aligned}
I_0 &= 0 \\
I_1 &= \pi \\
I_2 &= 2\cos\theta\, I_1 - I_0 = 2\pi\cos\theta \\
I_3 &= 2\cos\theta\, I_2 - I_1 = 4\pi\cos^2\theta - \pi \\
I_4 &= 2\cos\theta\, I_3 - I_2 = 8\pi\cos^3\theta - 2\pi\cos\theta - 2\pi\cos\theta \\
&= 8\pi\cos^3\theta - 4\pi\cos\theta \\
I_5 &= 2\cos\theta\, I_4 - I_3 = 16\pi\cos^4\theta - 8\pi\cos^2\theta - 4\pi\cos^2\theta + \pi \\
&= 16\pi\cos^4\theta - 12\pi\cos^2\theta + \pi \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{N.38}
$$

Nach GLAUERT [Glauert 1929, S. 82] kann hierfür auch geschrieben werden:

$$
I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\theta}\, d\vartheta = \pi\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \tag{N.39}
$$

Anhang O Grundlagen der aerodynamischen Modellierung

O.1 Tragflächentheorie

O.1.1 Einführung

Zur Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln für flugmechanische Untersuchungen wird häufig das MULTHOPP–Verfahren eingesetzt [Multhopp 1938]. Dieses Verfahren basiert auf der Traglinientheorie von PRANDTL, bei der die den Auftrieb erzeugende Zirkulationsverteilung lediglich entlang einer einzigen Linie angenommen wird. Dieses Verfahren liefert nur für ungepfeilte Tragflügel hoher Streckung ausreichend gute Ergebnisse [Truckenbrodt 1953a] und ist daher für die vorgesehene Anwendung für Transportflugzeuge mit Pfeilflügeln wie z.B. den Airbus A340 wenig geeignet. Für das zu entwickelnde aerodynamische Echtzeit-Modell wird auf die Tragflächentheorie von TRUCKENBRODT zurückgegriffen, die z.B. in [Truckenbrodt 1953a, Schlichting/Truckenbrodt 1969] ausführlich beschrieben wird.

Beim Tragflächenverfahren wird ein flächenhafter Ansatz für die Wirbeldichteverteilung eines Tragflügels gewählt, deren Parameter durch die Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung bestimmt werden. Hierbei sind verschiedene Vorgehensweisen denkbar. Bei dem von TRUCKENBRODT beschriebenen Vorgehen ist die Art der Verteilung in Spannweitenrichtung beliebig, in Profiltiefenrichtung jedoch aus vorgegebenen Funktionen zusammengesetzt, die aus der ersten und zweiten BIRNBAUMverteilung abgeleitet sind. Zur Bestimmung der spannweitenabhängigen Verteilungen wird der Flügel in eine endliche Anzahl von Elementarfügeln aufgeteilt, siehe Bild O.1. Das Verfahren liefert beliebige Verteilungen für den Auftriebs- und den Nickmomentenbeiwert, hat jedoch zu wenig Freiheitsgrade zur genauer Bestimmung der Druckverteilung in Profiltiefenrichtung. Außerdem werden lediglich reine Tragflügelumströmungen berücksichtigt, also keine vollständigen Flugzeugkonfigurationen modelliert.

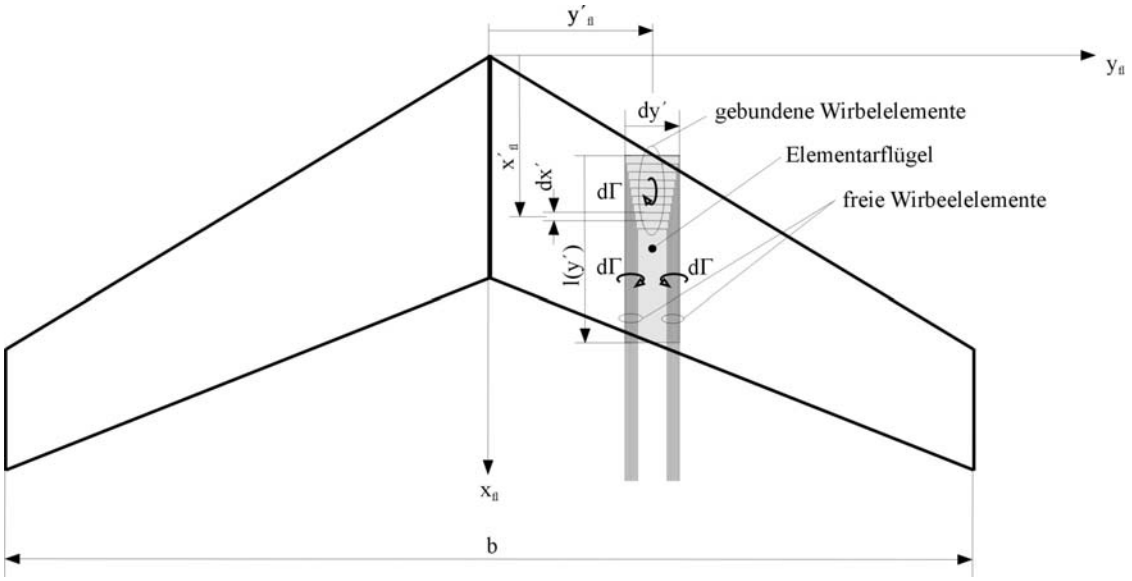

Bild O.1 Koordinatensystem des Tragflügels mit einem Elementarflügel und dessen Wirbelsystem

Vereinbarung In diesem Kapitel werden zusätzlich zu den in der Flugmechanik gebräuchlichen Koordinatensystemen, die in der DIN 9300 definiert sind, als weitere Koordinatensysteme das flügelfeste Koordinatensystem Index „fl“ und das profilfeste Koordinatensystem Index „p“ definiert, die beide an die in der Aerodynamik üblichen Koordinatensysteme angelehnt sind. Hierbei weist jeweils die positive x-Achse nach hinten und die positive z-Achse nach oben, siehe auch Bild O.1 und Bild O.2. Der Ursprung des flügelfesten Koordinatensystems liegt in der Flügelnase, die x_{fl}-Achse liegt in der Bezugsebene des Flügels – dies kann z.B. die Profilsehne des Flügelmittelschnitts sein. Die x_{fl}-z_{fl}-Ebene liegt parallel zur x_f-z_f-Ebene. Der Ursprung des profilfesten

Koordinatensystems liegt in der Profilnase, die x_p-Achse fällt mit der Profilsehne zusammen. Die x_p-z_p-Ebene liegt parallel zur x_f-z_f-Ebene.

Da räumliche Windfelder berücksichtigt werden sollen wird ferner statt des Begriffes „Fluggeschwindigkeit“ die Bezeichnung „Anströmgeschwindigkeit“ verwendet. Die Anströmgeschwindigkeit ist somit als lokale Größe zu verstehen, während die Fluggeschwindigkeit die Geschwindigkeit des Flugzeuges gegenüber dem mittleren Wind bezeichnet.

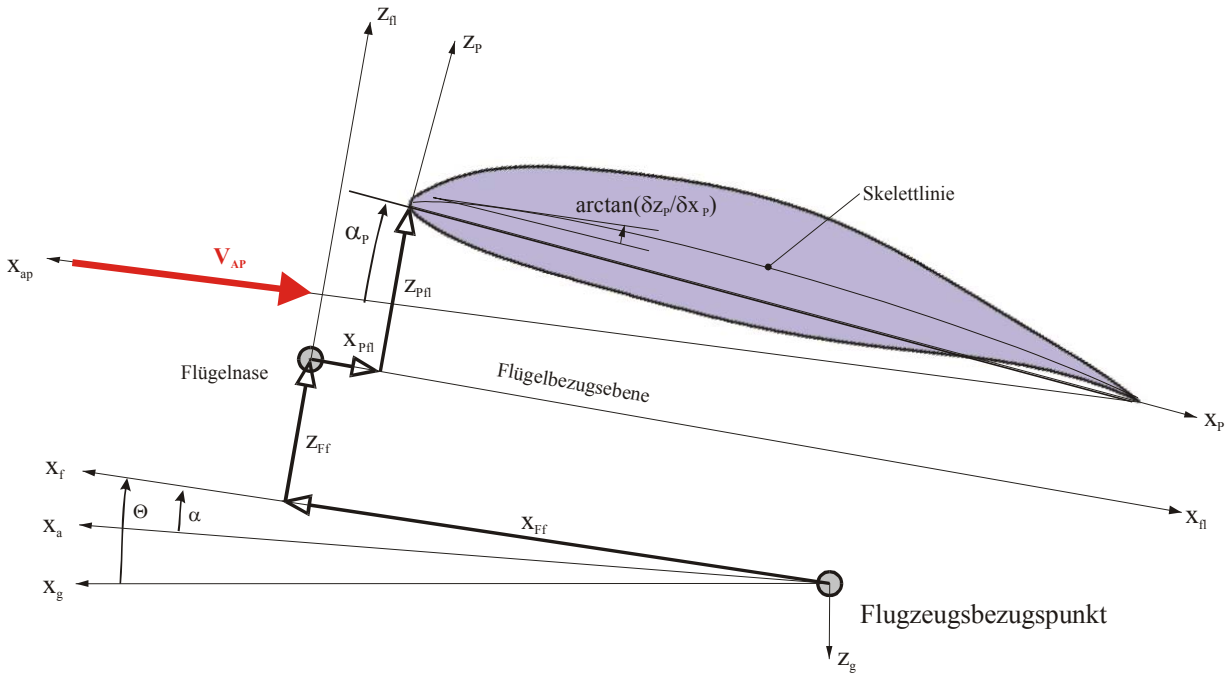

Bild O.2 Koordinatensysteme

Bild O.1 und Bild O.2 zeigen die neu eingeführten Koordinatensysteme und ihren Bezug zu den flugmechanischen Koordinatensystemen. Hierbei bedeuten:

x_p	x-Achse des profilfesten Koordinatensystems, positiv nach hinten
z_p	z-Achse des profilfesten Koordinatensystems, positiv nach oben
x_{fl}	x-Achse des flügelfesten Koordinatensystems, positiv nach hinten
y_{fl}	y-Achse des flügelfesten Koordinatensystems, positiv nach rechts
z_{fl}	z-Achse des flügelfesten Koordinatensystems, positiv nach oben
x_{Ff}	x-Koordinate der Flügelnase im flugzeugfesten Koordinatensystem
z_{Ff}	z-Koordinate der Flügelnase im flugzeugfesten Koordinatensystem
x_{Pfl}	x-Koordinate der Profilnase im flügelfesten Koordinatensystem
z_{Pfl}	z- Koordinate der Profilnase im flügelfesten Koordinatensystem
x'_{fl}	x-Koordinate der induzierenden Stelle
y'_{fl}	x-Koordinate der induzierenden Stelle
$\underline{V}_\infty$	Vektor der ungestörten Anströmung am Ort des Profils
α	Anstellwinkel des Flugzeugs
α_P	Anstellwinkel des Profils, gemessen in der x_p-z_p-Ebene von der Projizierten des lokalen Anströmvektors zur Profilsehne
Θ	Längslagewinkel des Flugzeugs

Die in den folgenden Herleitungen berechneten Abwindgeschwindigkeiten beziehen sich auf die Vorzeichenvereinbarung dieser Koordinatensysteme. Hierdurch ist eine bessere Vergleichbarkeit mit den zitierten Quellen gewährleistet.

O.1.2 Grundlagen der Tragflächentheorie

Die Tragflächentheorie zählt zur Potentialtheorie (reibungsfreie Strömung) und basiert auf der Voraussetzung, dass ein Tragflügel durch eine flächenhafte Wirbeldichteverteilung k(x,y,z) ersetzt werden kann. Die Wirbelverteilung ist hierbei so zu bestimmen, dass die kinematische Strömungsbedingung des Tragflügels in allen Punkten erfüllt wird, d.h. auf dieser Strömungsfläche sind die senkrechten Geschwindigkeitskomponenten gleich null[170]. Hierzu müssen sich die von der Wirbelverteilung am Ort des Flügels induzierten Normalgeschwindigkeiten w(x,y,z) mit den Normalkomponenten der ungestörten Strömung zu null aufheben. Als weitere Bedingung muss an der Flügelhinterkante die KUTTA'sche Abflussbedingung erfüllt werden. Um das entstehende Gleichungssystem analytisch lösen zu können, werden einige Vereinfachungen getroffen:

- ➔ die Flügelprofile müssen dünn sein und dürfen nur schwach gewölbt sein (Skelett-Profile) und
- ➔ die Anstellwinkel müssen klein bleiben.

Unter diesen Bedingungen kann das Wirbelsystem in die Ebene z = 0 gelegt werden und die auf der Skelettkontur induzierten Geschwindigkeiten w(x,y,z) können durch die an der Stelle w(x,y,z=0) ersetzt werden[171]. Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten wird dadurch wesentlich erleichtert.

Die Wirbeldichte muss bestimmten Randbedingungen genügen. Um die KUTTA'sche Abflussbedingung an der Hinterkante und den beiden Seitenkanten des Flügels zu erfüllen, muss dort die Wirbeldichte zu Null werden. Die Art, wie die Wirbeldichte über die tragende Fläche verteilt wird, kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Beim Verfahren nach TRUCKENBRODT wird entsprechend einem Ansatz von GLAUERT [Glauert 1929] der Tragflügel aus so genannten Elementarflügeln mit der Breite dy´ zusammengesetzt[172] [Truckenbrodt 1953a], siehe Bild O.1. Jeder Elementarflügel wird wiederum durch eine Schar von Hufeisenwirbeln ersetzt, die sämtlich die Breite des Elementarflügels dy´ besitzen und in Tiefenrichtung um dx´ gegeneinander verschoben sind. Die Grundrissform unterliegt bei dieser Betrachtung keinen Beschränkungen und auch Schiebewinkel können berücksichtigt werden. Wird ein (dünnes) Profil durch seine Skelettlinie ersetzt, lautet die kinematische Strömungsbedingung, siehe Bild O.3:

$$\alpha_{\text{Skelett}}(x,y) = \alpha_i(x,y) \tag{O.01}$$

α_i induzierter Abwindwinkel; positiv bei einem Abwind $w_i < 0$

mit dem Anstellwinkel der Skelettlinie[173]:

$$\alpha_{\text{Skelett}}(x,y) = \alpha_P(x,y) - \frac{\partial z_{\text{Skelett P}}}{\partial x_p}(x,y) \tag{O.02}$$

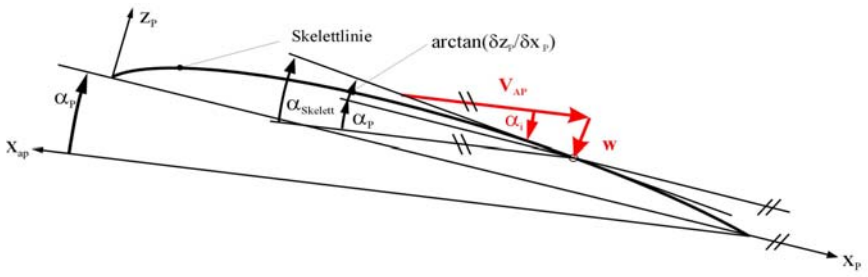

Bild O.3 Anstellwinkelverhältnisse am Profilskelett

[170] Bei der Traglinientheorie wird diese Bedingung nur an einem Punkt in Profiltiefenrichtung erfüllt; MULTHOPP wählt z.B. den ¾-Punkt.

[171] Da die z-Koordinate in den folgenden Herleitungen keine Rolle mehr spielt, wird sie weggelassen.

[172] Um eine Verwechselung zwischen induzierender Stelle P' und betrachtetem Aufpunkt P zu vermeiden, wird die induzierende Stelle durch einen Strich gekennzeichnet. Die Unterscheidung zwischen induzierender Stelle und betrachtetem Aufpunkt ist nur in den Gleichungen erforderlich, wo beide Punkte gleichzeitig vorkommen. Der hochgestellte Strich kann daher entfallen, wenn lediglich die induzierenden Stellen vorkommen.

[173] Die Neigung der Skelettlinie wird im profilfesten Koordinatensystem bestimmt, so dass eine negative Steigung den Anstellwinkel der Skelettlinie erhöht. Da nur schwache Wölbungen auftreten, kann die Arcustangensfunktion durch ihr Argument ersetzt werden.

Da durch die getroffenen Vereinfachungen keine induzierten Geschwindigkeiten in x-Richtung zu berücksichtigen sind, gilt für den induzierten Anstellwinkel[174]:

$$\alpha_i(x,y) = -\frac{w(x,y)}{V_\infty} \tag{O.03}$$

w vom Flügel induzierte Abwindgeschwindigkeit

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der PRANDTL'schen Tragflächentheorie und die daraus resultierenden Vereinfachungen seien noch einmal zusammengefasst:

- Die Profile sind dünn und
- nur schwach gewölbt und
- die Anstellwinkel müssen klein sein.

➔ Die Wirbeldichte kann in der Ebene z = 0 angenommen werden.

➔ Die kinematische Strömungsbedingung wird in der Ebene z = 0 erfüllt.

➔ Es werden keine Geschwindigkeiten in x-Richtung induziert.

O.1.3 Induzierter Abwind am Flügel

Für die hier betrachteten Problemstellungen kann in Gl. (O.02) der Anstellwinkel (des Profils) α_P und die Neigung der Skelettlinie $\partial z_p/\partial x_p$ als bekannt angesehen werden, so dass der induzierte Abwindwinkel α_i die Unbekannte darstellt. Wie Bild O.3 zeigt, muss zu seiner Bestimmung der induzierte Abwind w bestimmt werden.

Vereinbarung Bei den folgenden Herleitungen wird der induzierte Abwind im flügelfesten Koordinatensystem Index „fl" bestimmt. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im Folgenden in diesem Kapitel auf den Index „fl" verzichtet. Da hier die Grundlagen des Tragflächenverfahrens behandelt werden und kein Bezug zum Gesamtflugzeug hergestellt werden muss, besteht keine Verwechselungsgefahr mit den flugmechanischen Koordinatensystemen, insbesondere mit dem flugzeugfesten Koordinatensystem Index „f".

Die Zirkulation eines einzelnen Hufeisenwirbels an der Stelle $P'(x',y')$ des Elementarflügels im Flügelabschnitt y´ erhält man aus der Wirbeldichte $k(x',y')$ und der Tiefe dx´ des Flächenelementes[175]:

$$d\Gamma(x',y') = k(x',y')\,dx' \tag{O.04}$$

wobei aufgrund der KUTTA'schen Abflussbedingung gilt:

$$\begin{aligned} k(x' = x_{HK}, y') &= 0 \quad && \text{Hinterkante} \\ k(x', y' = \pm s) &= 0 && \text{Flügelenden} \end{aligned} \tag{O.05}$$

Für das gesamte Wirbelsystem eines Tragflügels bestehend aus unendlich vielen Hufeisenwirbeln mit einer Zirkulation nach Gl. (O.04) kann unter Anwendung des BIOT-SAVART'schen Gesetzes die an jedem Punkt P des Tragflügels induzierte Normalgeschwindigkeit berechnet werden, wobei die Wirbelfäden vereinfachend als gerade angenommen werden. Die von der Gesamtheit aller Elementarwirbel an einem Punkt P induzierte Geschwindigkeit w erhält man durch Integration über die Flügelfläche[176]:

[174] Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur teilweise abweichende Vorzeichendefinitionen für den induzierten Abwindwinkel verwendet werden. So wird sowohl in [Schlichting/Truckenbrodt 1969] als auch in [Truckenbrodt 1953a] der induzierte Abwindwinkel bei einem Abwind (nach unten) negativ gezählt; in [Multhopp 1938] wiederum wird bei einem Abwind der Abwindwinkel positiv gezählt.

[175] Nur Punkte P´, die sich auf der Flügelfläche befinden, liefern einen Beitrag zur Zirkulation – d.h. außerhalb des Flügels ist die Wirbeldichte $k(x',y') \equiv 0$.

[176] Eine ausführliche Herleitung ist in Anhang A gegeben.

$$w(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s}\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\,\frac{1+\dfrac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{(y-y')^2}\,dx'\,dy' \tag{O.06}$$

Für die Ausführung der inneren Integration in Tiefenrichtung kann der Ausdruck $1/(y\text{-}y')^2$ als konstant angesehen werden. Für das innere Integral wird daher als Abkürzung die Verteilungsfunktion G(x,y;y´) eingeführt:

$$G(x,y;y')=\int_{x_{VK}(y')}^{x_{HK}(y')} k(x',y')\left(1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right)dx' \tag{O.07}$$

Die Verteilungsfunktion G(x,y;y´) beschreibt, wie der Einfluss eines Flügelschnittes an der Stelle y´ auf die gesamte Fläche (x,y,z=0) verteilt wird. Für die induzierte Vertikalgeschwindigkeit erhält man somit:

$$w(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s}\frac{G(x,y;y')}{(y-y')^2}\,dy' \tag{O.08}$$

Die Unstetigkeit an der Stelle y = y´ (d.h. der Aufpunkt P befindet sich auf dem induzierenden Flügelschnitt y´) kann durch eine Grenzwertbetrachtung behandelt werden. Hierzu wird bei der Durchführung der Integration der Bereich (y – e) < y´ < (y + e) abgespalten, wobei der Grenzwert e → 0 gebildet wird:

$$w(x,y)=\lim_{e\to 0}\left[\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s\,(C)}\frac{G(x,y;y')}{(y-y')^2}+\frac{1}{4\pi}\int_{y-e}^{y+e}\frac{G(x,y;y')}{(y-y')^2}\,dy'\right] \tag{O.09}$$

Der hochgestellte Zusatz (C) beim ersten Integral kennzeichnet, dass der Bereich (y –e) < y´ < (y + e) auszunehmen ist, somit das Integral im Sinne des CAUCHY'schen Hauptwertes zu bilden ist[177]. Zur Lösung des zweiten Integrals wird G(x,y;y´) an der Stelle (y´ = y) in eine Taylorreihe nach y´ entwickelt, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird. Als Ergebnis erhält man für den induzierten Abwind[178]:

$$w(x,y)=-\frac{1}{4\pi}\lim_{e\to 0}\left[\frac{2G(x,y;y)}{e}-\int_{-s}^{+s\,(C)}\frac{G(x,y;y')}{(y-y')^2}\,dy'\right] \tag{O.10}$$

Eine andere Formulierung des Abwindes erhält man aus Gl. (O.07) durch partielle Integration[179]:

$$w(x,y)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s}\frac{\dfrac{\partial G(x,y;y')}{\partial y'}}{y-y'}\,dy' \tag{O.11}$$

[177] In der Literatur [Schlichting/Truckenbrodt 1969], [Truckenbrodt 1953a], [Truckenbrodt 1953b] wird bei der Grenzwertbildung $\varepsilon \to 0$ nicht zwischen dimensionsbehaftetem und dimensionslosem Abstand unterschieden. Hier ist e als dimensionsbehafteter Abstand anzusehen und ε seine dimensionslose Entsprechung.

[178] Eine ausführliche Herleitung ist in Anhang B gegeben.

[179] Siehe Anhang B.

Beide Formulierungen des induzierten Abwindes sind völlig gleichwertig und finden im folgenden Verwendung. Für die weiteren Betrachtungen ist es sinnvoll, dimensionslose Koordinaten einzuführen:

$$\xi = \frac{x}{s}$$
$$\eta = \frac{y}{s} \qquad \text{(O.12)}$$
$$\varepsilon = \frac{e}{s}$$

Mit der dimensionslosen Verteilungsfunktion g

$$g = \frac{G}{b\, V_\infty} \qquad \text{(O.13)}$$

erhält man aus Gl. (O.03) mit Gl. (O.10) für den induzierten Abwindwinkel

$$\alpha_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2}{\varepsilon} g(\xi,\eta;\eta) - \int_{-1}^{+1\,(C)} \frac{g(\xi,\eta;\eta')}{(\eta-\eta')^2} d\eta' \right] \qquad \text{(O.14)}$$

Damit der Flügel (bzw. seine Skelettfläche) zur Stromfläche wird, muss, wie bereits erwähnt, an allen Aufpunkten am Flügel die kinematische Strömungsbedingung erfüllt sein. Das bedeutet, dass der örtliche Anstellwinkel der Skelettlinie $\alpha_{Skelett}$ und der an dieser Stelle induzierte Abwindwinkel α_i gleich groß sein müssen, siehe Gl. (O.01) und Bild O.3. Die kinematische Strömungsbedingung für beliebige Punkte P(ξ,η) des Flügels (bzw. seiner Skelettfläche) lautet damit:

$$\alpha_{Skelett}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2}{\varepsilon} g(\xi,\eta;\eta) - \int_{-1}^{+1\,(C)} \frac{g(\xi,\eta;\eta')}{(\eta-\eta')^2} d\eta' \right] \qquad \text{(O.15)}$$

Diese Gleichung stellt die allgemeine Integralgleichung der Tragflächentheorie dar. Eine andere Formulierung erhält man wiederum aus Gl. (O.03) mit Gl. (O.11) unter Verwendung der eingeführten dimensionslosen Größen nach Gl. (O.12) und Gl. (O.13) sowie von Gl. (O.01):

$$\alpha_{Skelett}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial g(\xi,\eta;\eta')}{\partial \eta'} \frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \qquad \text{(O.16)}$$

Bei vorgegebener Anstellwinkelverteilung der Sehne und der Geometrie des Tragflügels ist hieraus die Wirbeldichte k(x´,y´) zu bestimmen. Eine analytische Lösung ist nur durch Näherungsverfahren möglich, indem für die Wirbeldichte bestimmte Vorgaben getroffen werden. Diese Vorgaben können durch Ansatzfunktionen sowohl in Spannweitenrichtung als auch in Profiltiefenrichtung erfolgen. Beim Tragflächenverfahren nach TRUCKENBRODT wird ein Ansatz für die Wirbeldichte in Richtung der Flügeltiefe x vorgegeben – hierauf wird in Kapitel O.3 eingegangen. Zunächst werden jedoch einige Beziehungen für die Verteilung der Wirbeldichte in Spannweitenrichtung entwickelt, die von der Art der Wirbeldichte in Profiltiefenrichtung unabhängig sind.

Die zusätzlichen Vereinfachungen für die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten seien noch einmal zusammengefasst:

- Die Wirbelfäden sind gerade.
- Die gesamte Berechnung kann auf die Ebene z = 0 reduziert werden.

O.2 Wirbeldichteverteilung in Spannweitenrichtung

Die Wirbeldichteverteilung wird mit Hilfe des Quadraturverfahrens von MULTHOPP bestimmt. Hierbei wird die Integralgleichung numerisch gelöst, indem die Verteilungsfunktion g durch einen Reihenansatz ersetzt und das Integral durch eine Summe approximiert wird (Quadratur). Dieses Verfahren wurde von MULTHOPP erstmals zur Berechnung des induzierten Abwindwinkels für den ungepfeilten Flügel großer Streckung angewendet. Die Theorie zur Behandlung eines solchen Tragflügels wird als klassische Tragflügeltheorie bezeichnet und geht auf PRANDTL zurück. Hierbei wird davon ausgegangen, dass sich die Gesamtheit aller gebundenen Wirbel durch eine einzige Wirbellinie der Stärke $\Gamma(y)$ in der $\ell/4$-Linie des Flügels repräsentieren lässt. Als Ergebnis erhält man nach [Multhopp 1938], [Thomas 1972] für den vom Tragflügel induzierten Abwindwinkel in dimensionsloser Darstellung:

$$\alpha_i(\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial\gamma(\eta')}{\partial\eta'}\frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \tag{O.17}$$

Gl. (O.17) stimmt formal mit der oben hergeleiteten kinematischen Strömungsbedingung Gl. (O.16) überein, wobei lediglich an die Stelle der dimensionslosen Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta')$ die Verteilungsfunktion $g(\eta')$ tritt[180]. Hierbei ist zu beachten, dass in Gl. (O.16) die Integration über die Spannweitenkoordinate der induzierenden Flügelschnitte η' erfolgt, so dass in Bezug auf die Integration die Abhängigkeiten der Verteilungsfunktion g von den Aufpunktkoordinaten ξ und η als konstant anzusehen ist. Die Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung kann daher mit denselben Methoden wie die Berechnung des induzierten Abwindwinkels nach Gl. (O.17) gelöst werden, so dass hier ebenfalls das erwähnte Quadraturverfahren[181] von MULTHOPP [Multhopp 1938] angewendet werden kann [Truckenbrodt 1953a]. Das Verfahren beruht auf der Voraussetzung, dass sich die Verteilungsfunktion $g(\xi,\eta;\eta')$ in Spannweitenrichtung η' durch eine Fourierreihe darstellen lässt. Hierzu wird für die dimensionslose Spannweitenkoordinate η' eine Transformation auf Polarkoordinaten eingeführt:

$$\begin{aligned} \eta' &= \cos\vartheta' \\ d\eta' &= -\sin\vartheta'\, d\vartheta' \end{aligned} \tag{O.18}$$

Damit erhält man aus Gl. (O.16) für die kinematische Strömungsbedingung

$$\alpha_{\text{Skelett}}(\xi,\vartheta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial g(\xi,\vartheta;\vartheta')}{\partial\vartheta'}\frac{d\vartheta'}{\cos\vartheta-\cos\vartheta'} \tag{O.19}$$

Für die Verteilungsfunktion $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ wird in Spannweitenrichtung analog zum Ansatz für die Zirkulationsverteilung $\gamma(\vartheta')$ nach MULTHOPP [Multhopp 1938] ein Ansatz für eine Fourierreihe gemacht, wobei hier als unabhängige Variable die Koordinate der induzierenden Stelle ϑ' zu sehen ist:

$$g(\xi,\vartheta;\vartheta') = 2\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu(\xi,\vartheta)\sin\mu\vartheta' \tag{O.20}$$

Bei hinreichender Anzahl von Reihengliedern können hierdurch beliebige Verteilungsfunktionen $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ dargestellt werden. Im Unterschied zum MULTHOPP-Verfahren sind hier die Koeffizienten a_μ nicht konstant sondern von den Koordinaten des betrachteten Aufpunktes $P(\xi,\vartheta)$ abhängig. Für die Ableitung in Spannweitenrichtung folgt daraus:

[180] Gl. (O.17) wird hier nicht weiter betrachtet sondern soll lediglich die formale Ähnlichkeit zu Gl. (O.16) aufzeigen.

[181] Eine ausführliche Beschreibung des Quadraturverfahrens zur Bestimmung des induzierten Abwindwinkels ist in Anhang C gegeben.

$$\frac{\partial g(\xi,\vartheta;\vartheta')}{\partial\vartheta'} = 2\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu(\xi,\vartheta)\,\mu\cos\mu\,\vartheta' \tag{O.21}$$

Setzt man diesen Ansatz in Gl. (O.19) ein, erhält man:

$$\alpha_{\text{Skelett}}(\xi,\vartheta) = -\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{M} a_\mu(\xi,\vartheta)\,\mu\int_0^\pi \frac{\cos\mu\,\vartheta'}{\cos\vartheta-\cos\vartheta'}\,d\vartheta' \tag{O.22}$$

Hierbei wurden die Summenbildung und die Integration vertauscht und die von der Integrationsvariablen unabhängigen Faktoren a_μ vor das Integral gezogen. Die Integration über die induzierenden Flügelschnitte ϑ' ist damit von der Summenbildung abgespalten. Das Integral ist ein so genanntes GLAUERT-Integral, das allgemein gelöst werden kann [Glauert 1929][182]:

$$\int_0^\pi \frac{\cos\mu\vartheta'}{\cos\vartheta-\cos\vartheta'}\,d\vartheta' = -\pi\frac{\sin\mu\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{O.23}$$

Die Integration über die induzierenden Flügelschnitte ist damit unabhängig vom betrachteten Aufpunkt gelöst. Damit folgt schließlich für die kinematische Strömungsbedingung:

$$\alpha_{\text{Skelett}}(\xi,\vartheta) = \sum_{\mu=1}^{M} a_\mu(\xi,\vartheta)\,\mu\,\frac{\sin\mu\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{O.24}$$

Diese Beziehung ist im Rahmen der Genauigkeit der Approximation der Verteilungsfunktion $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ durch eine Fourierreihe exakt und gilt für jeden beliebigen Punkt des Flügels. Die Koeffizienten $a_\mu(\xi,\vartheta)$ sind noch unbekannt. Im Folgenden sollen sie als Funktion der Verteilungsfunktion $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ bestimmt werden.

Beim MULTHOPP-Verfahren wird an Stelle der kontinuierlichen Verteilungsfunktion $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ nur mit den Werten an M diskreten Stützstellen gerechnet – die Zwischenwerte werden nicht betrachtet. Die Polarkoordinaten der Stützstellen sind hierbei wie folgt äquidistant über die Spannweite verteilt, siehe Bild O.4:

$$\vartheta_n = \frac{n\,\pi}{M+1} \tag{O.25}$$

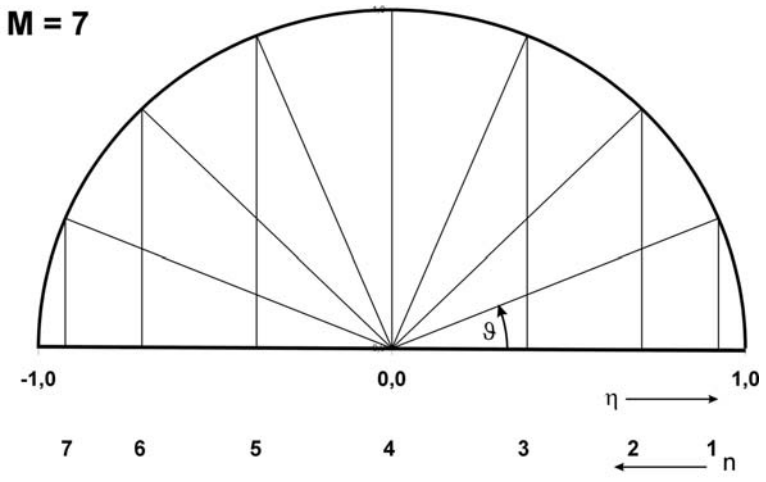

Bild O.4 Verteilung der Aufpunkte längs der Spannweite

[182] Zur Lösung des GLAUERT-Integrales siehe Anhang N.

Zwischen den unbekannten Koeffizienten $a_\mu(\xi,\vartheta)$ und der Verteilungsfunktion $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ ergibt sich der Zusammenhang[183, 184]:

$$a_\mu(\xi,\vartheta) = \frac{1}{M+1}\sum_{n=1}^{M} g_n(\xi,\vartheta)\sin\mu\vartheta_n' \tag{O.26}$$

Setzt man diese Beziehung in die kinematische Strömungsbedingung Gl. (O.24) ein, erhält man

$$\alpha_{\text{Skelett}}(\xi,\vartheta) = \sum_{n=1}^{M} g_n(\xi,\vartheta)\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\mu}{M+1}\,\frac{\sin\mu\vartheta\,\sin\mu\vartheta_n'}{\sin\vartheta} \tag{O.27}$$

Beschränkt man sich in der Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung auf die diskreten M Profilschnitte[185] mit den Koordinaten:

$$\eta_\nu = \cos\vartheta_\nu \tag{O.28}$$

$$\vartheta_\nu = \frac{\nu\,\pi}{M+1} \tag{O.29}$$

erhält man schließlich[186]

$$\alpha_{\text{Skelett}\,\nu}(\xi) = \sum_{n=1}^{M} g_{\nu n}(\xi)\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\mu}{M+1}\,\frac{\sin\mu\vartheta_\nu\,\sin\mu\vartheta_n'}{\sin\vartheta_\nu} \tag{O.30}$$

Die zweite Summe besteht ausschließlich aus trigonometrischen Funktionen, die lediglich von der Anzahl der Stützstellen in Spannweitenrichtung M abhängig sind. Für eine vorgewählte Anzahl M können sie daher allgemein bestimmt werden. Sie sind identisch mit den so genannten MULTHOPP-Koeffizienten zur Bestimmung des induzierten Abwindwinkels [Multhopp 1938][187]:

$$\begin{aligned}
b_{\nu\nu} &= \frac{M+1}{4}\frac{1}{\sin\vartheta_\nu} && \text{für } n=\nu \\
b_{\nu n} &= \frac{1}{M+1}\frac{\sin\vartheta_n}{(\cos\vartheta_n-\cos\vartheta_\nu)^2} && \text{für } |n-\nu| = 1,3,5\ldots \\
b_{\nu n} &= 0 && \text{für } |n-\nu| = 2,4,6\ldots
\end{aligned} \tag{O.31}$$

Damit erhält man für die kinematische Strömungsbedingung schließlich

$$\alpha_{\text{Skelett}\,\nu}(\xi) = b_{\nu\nu}g_{\nu\nu}(\xi) - \sum_{n=1}^{M}{}' b_{\nu n}g_{\nu n}(\xi) \tag{O.32}$$

Der hochgestellte Strich am Summenzeichen bedeutet, dass der Term für $n = \upsilon$ auszulassen ist. Anstelle der Integralgleichung Gl. (O.16) ist nunmehr eine Summengleichung zu lösen, wobei die Koeffizienten lediglich von der Anzahl der Stützstellen M abhängig sind und allgemein bestimmt werden können.

Die kinematische Strömungsbedingung nach Gl. (O.32) ist für alle M Profilschnitte zu erfüllen, wobei sie ebenfalls an jedem Punkt in Profiltiefenrichtung anzuwenden ist. Es sei darauf hingewiesen, dass bis hier für die Verteilung der Wirbeldichte k in Profiltiefenrichtung noch keine Einschränkungen getroffen wurden – dies wird erst im folgenden Kapitel O.3 vorgenommen.

[183] Eine ausführliche Herleitung zur Bestimmung der Koeffizienten a_μ ist in Anhang C gegeben; hierbei ist lediglich die Zirkulationsverteilung $\gamma(\vartheta')$ durch die Verteilungsfunktion $g(\xi,\vartheta;\vartheta')$ zu ersetzen.

[184] Die Abhängigkeit von der kontinuierlichen Variablen ϑ' wird nunmehr an den diskreten Stellen durch den Index n ausgedrückt und kennzeichnet den induzierenden Flügelschnitt.

[185] Dies ist gleichbedeutend damit, dass die induzierenden Punkte P' und die betrachteten Aufpunkte P identisch verteilt sind.

[186] Der Index ν kennzeichnet den betrachteten Flügelschnitt.

[187] Siehe hierzu Anhang C.

Die zusätzlichen Vereinfachungen durch das MULTHOPP-Verfahren sind:

- Die kontinuierliche Zirkulationsverteilung wird auf M diskrete Stellen in Spannweitenrichtung (Profilschnitte) reduziert.
- Die kinematische Strömungsbedingung wird lediglich an denselben M Profilschnitten erfüllt.
- Die Integralgleichung für die kinematische Strömungsbedingung kann auf eine Summengleichung aus Produkten von konstanten Koeffizienten und diskreten Werten der Verteilungsfunktion (bzw. der Wirbeldichteverteilung) reduziert.

O.3 Wirbeldichteverteilung in Profiltiefenrichtung (Einheitsfunktionen)

O.3.1 Ansatz von GLAUERT und TRUCKENBRODT

Wie am Ende von Kapitel O.1 bereits erwähnt, müssen für eine analytische Lösung der Integralgleichung für die kinematische Strömungsbedingung Gl. (O.16) Vereinfachungen für die Wirbeldichteverteilung k(x,y) eingeführt werden. Dies geschieht dadurch, dass für die grundsätzlich beliebige Verteilung der Wirbeldichte k(x,y) bestimmte Annahmen getroffen werden, indem bestimmte Ansätze in Profiltiefenrichtung (oder auch in Spannweitenrichtung) angenommen werden. Dies ist gleichbedeutend mit einer Reduzierung der möglichen Freiheitsgrade in der mathematischen Modellierung, entweder in Profiltiefen- oder in Spannweitenrichtung. Kriterien dafür, in welcher Koordinatenrichtung die größeren Einschränkungen in Kauf genommen werden können, sind zum Beispiel:

- die Streckung des Flügels und
- die auftretenden Änderungen des lokalen Anstellwinkels.

Das hier entwickelte Verfahren soll ausschließlich für Flugzeugkonfigurationen eingesetzt werden, bei denen die Abmessungen der tragenden Flächen in Spannweitenrichtung größer sind als die in Profiltiefenrichtung[188]. Außerdem sind für die hier besonders interessierenden Anwendungen (z.B. Berechnung der Auftriebsverteilung an einem verformten Flügel oder Berechnung des Rollmomentes beim Einflug in eine Wirbelschleppe) die Änderungen in der Anstellwinkelverteilung in Spannweitenrichtung dominierend, während die Anstellwinkelverteilung in Profiltiefenrichtung weniger stark variiert.

Unter diesen Voraussetzungen ist es daher sinnvoll, der Wirbeldichteverteilung in Spannweitenrichtung mehr Freiheitsgrade zuzugestehen und in Profiltiefenrichtung Einschränkungen in Kauf zu nehmen. Es wird daher das Verfahren von TRUCKENBRODT weiter verfolgt, bei dem für die Wirbeldichteverteilung ein Ansatz in Analogie zum aus der ebenen Skelett-Theorie bekannten Ansatz nach GLAUERT [Truckenbrodt 1953a] gewählt wird[189]:

$$k(x',y') = \frac{V_\infty}{2} \sum_{n=0}^{N} a_n(y')\, h_n(x') \tag{O.33}$$

Hierbei wird die Verteilung in Profiltiefenrichtung durch die so genannten Einheitsfunktionen $h_n(x')$ beschrieben, während die Koeffizienten $a_n(y')$ die Abhängigkeit der Wirbeldichte $k(x',y')$ in Spannweitenrichtung enthalten. Die Anzahl N ist damit die bestimmende Größe für die Freiheitsgrade der Wirbeldichteverteilung in Profiltiefenrichtung und legt fest, an wie viel Punkten in einem Flügelschnitt die kinematische Strömungsbedingung erfüllt werden muss.

Für die weiteren Betrachtungen wird zunächst eine Transformation der Koordinate in Profiltiefenrichtung x′ auf dimensionslose Einheitskoordinaten X′ durchgeführt und diese anschließend durch den Polarwinkel φ′ ersetzt, der von der Profilmitte aus gemessen wird, siehe Bild O.5. Für die dimensionslosen Einheitskoordinaten gelten die Definitionen:

[188] Dies ist nicht gleichbedeutend mit einer Beschränkung auf Flügel großer Streckung, es sollen vielmehr nur Flügel sehr kleiner Streckung ausgeschlossen werden.

[189] Siehe auch Anhang D. Der Reihenansatz nach TRUCKENBRODT für die Wirbeldichteverteilung nach Gl. (O.33) ist formal von dem Ansatz nach GLAUERT verschieden, kann aber in diesen überführt werden, siehe [Truckenbrodt 1953a]. Sein Vorteil im Vergleich zum Ansatz von GLAUERT besteht im Wesentlichen darin, dass die Koeffizienten a_n unmittelbar mit den lokalen aerodynamischen Beiwerten zusammenhängen.

$$X = \frac{x - x_{VK}(y')}{\ell(y')}$$
$$X' = \frac{x' - x_{VK}(y')}{\ell(y')} \qquad (O.34)$$

Für die Polarwinkel φ und φ´ gilt die Definition[190]:

$$X = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) \qquad \text{bzw.} \quad \cos\varphi = 1 - 2X$$
$$X' = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi') \qquad \text{bzw.} \quad \cos\varphi' = 1 - 2X' \qquad (O.35)$$

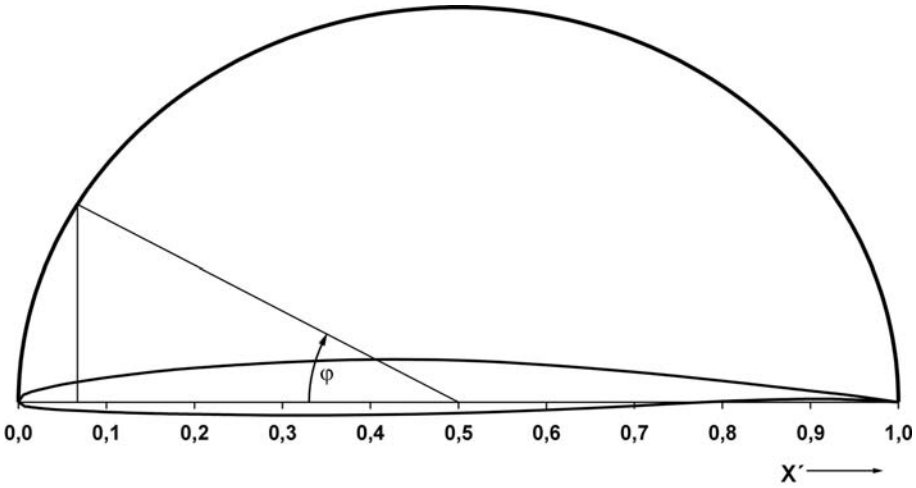

Bild O.5 Polar- und kartesische Koordinaten am Profil

Die Anzahl der im Ansatz enthaltenen Einheitsfunktionen ist prinzipiell beliebig. Für die Einheitsfunktionen wird nach TRUCKENBRODT [Truckenbrodt 1953a] der Ansatz gewählt:

$$h_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos\left(2n+1\right)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad (O.36)$$

An der Hinterkante ist X' = 1 bzw. φ = π und damit k = 0, so dass die KUTTA'sche Abflussbedingung erfüllt wird; an der Vorderkante ist X' = 0 bzw. φ = 0.

Die bisherigen Herleitungen gelten für beliebige Verteilungen der Wirbeldichte k in Profiltiefenrichtung, wobei diese durch eine Reihe nach Gl. (O.33) dargestellt wird. Hierbei sind in jedem Profilschnitt y´ die Koeffizienten a_n zu bestimmen. Der Lösungsaufwand hängt damit entscheidend von der Ordnung des Reihenansatzes nach Gl. (O.33) ab. Für viele Anwendungsfälle ist die genaue Bestimmung der Druckverteilung in einem Profilschnitt nicht erforderlich sondern es interessiert lediglich die Berechnung der lokalen Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte. Hierzu genügt ein zweiparametriger Ansatz für die Wirbeldichteverteilung in Profiltiefenrichtung. Damit werden in Gl. (O.33) nur die Terme für n = 0 und n = 1 berücksichtigt. Die kinematische Strömungsbedingung ist dann lediglich in jedem Profilschnitt an zwei Punkten zu erfüllen.

[190] Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur unterschiedliche Definitionen des Polarwinkels verwendet werden. Die hier eingeführte Definition ist in Übereinstimmung mit [Truckenbrodt 1953a]; in [Schlichting/Truckenbrodt 1969] wird φ jedoch positiv von der Hinterkante zur Vorderkante gezählt.

$$h_0(\varphi) = \frac{2}{\pi}\cot\frac{\varphi}{2}$$

$$h_1(\varphi) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad \text{(O.37)}$$

Die Einheitsfunktion h_0 stellt die erste BIRNBAUM´sche Normalverteilung dar (angestellte ebene Platte) und die Einheitsfunktion h_1 eine Kombination aus der ersten und der zweiten BIRNBAUM´schen Normalverteilung (Parabelskelett) derart, dass das Integral über die Profiltiefe X´ gerade verschwindet (sie erzeugt damit keinen Auftrieb) und lediglich ein Nickmoment liefert (h_1 stellt damit ein unter $\alpha = \alpha_0$ angestelltes Parabelskelett dar). Die beiden Verteilungen zeigt Bild O.6. Für die beiden Einheitsfunktionen nach Gl. (O.37) erhält man in dimensionslosen Koordinaten nach Gl. (O.35) unter Berücksichtigung der Additionstheoreme

$$h_0(X') = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}$$

$$h_1(X') = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')}\right) \qquad \text{(O.38)}$$

Die Verteilung h_0 wird auch als Grundverteilung und die Verteilung h_1 als Nullverteilung bezeichnet.

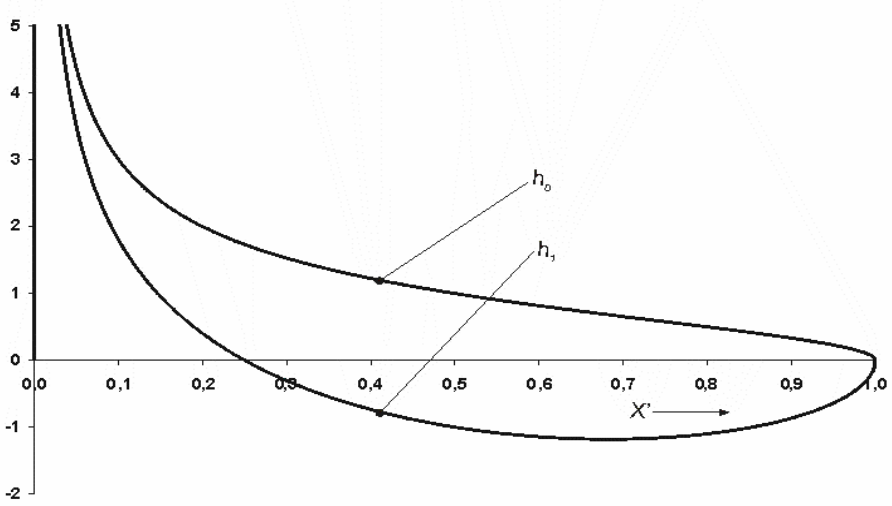

Bild O.6 Zweiparametriger Ansatz für die Zirkulationsverteilung in Tiefenrichtung

O.3.2 Örtliche Beiwerte, Bedeutung der Koeffizienten a_n

Im Folgenden soll die physikalische Bedeutung der Koeffizienten a_n im Reihenansatz nach Gl. (O.33) dargelegt werden.

Druckverteilung

Zwischen dem Auftrieb dA eines Elementarflügels und dessen Zirkulation besteht nach KUTTA-JOUKOWSKY der Zusammenhang [Schlichting/Truckenbrodt 1969]

$$dA(y) = \rho V_\infty \Gamma(y)\,dy \qquad \text{(O.39)}$$

Für ein Flächenelement eines Elementarflügels mit der Spannweite dy und der Tiefe dx ist die Zirkulation nach Gl. (O.03)[191]

[191] Der hochgestellte Strich zu Kennzeichnung der induzierenden Stellen wurde hier und in den folgenden Gleichungen weggelassen, da keine Verwechselungsgefahr mit den betrachteten Aufpunkten besteht.

$$d\Gamma(x,y) = k(x,y)\,dx \tag{O.03}$$

Die Zirkulation eines Elementarflügels erhält man damit durch Integration in Flügeltiefenrichtung:

$$\Gamma(y) = \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} k(x,y)dx \tag{O.40}$$

Für den Auftriebsbeiwert eines Elementarflügels gilt die Definition

$$c_a(y) = \frac{dA(y)}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2\, \ell(y)\, dy} \tag{O.41}$$

Damit gilt für den Auftrieb des Elementarflügels der Zusammenhang

$$dA(y) = \frac{\rho}{2} V_\infty^2\, c_a(y)\, \ell(y)\, dy = \rho\, V_\infty \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} k(x,y)dx\, dy \tag{O.42}$$

bzw. aufgelöst nach dem örtlichen Auftriebsbeiwert

$$c_a(y) = \frac{2}{V_\infty\, \ell(y)} \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} k(x,y)dx \tag{O.43}$$

Der örtliche Auftriebsbeiwert $c_a(y)$ eines Flügelschnittes an der Stelle y kann auch durch Integration der Differenzen des Druckbeiwertes über die lokale Flügeltiefe $\ell(y)$ formuliert werden [Schlichting/Truckenbrodt 1969], [Thomas 1972]:

$$c_a(y) = \frac{1}{\ell(y)} \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} \Delta c_p(x,y)\, dx \tag{O.44}$$

mit der Definition des dimensionslosen Druckbeiwertes [Schlichting/Truckenbrodt 1969]

$$c_p(x,y) = \frac{p(x,y) - p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} V_\infty^2} \tag{O.45}$$

und der Differenz der Druckbeiwerte zwischen Unter- und Oberseite [Schlichting/Truckenbrodt 1969]:

$$\Delta c_p(x,y) = c_{pu}(x,y) - c_{po}(x,y) = \frac{p_u(x,y) - p_o(x,y)}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2} \tag{O.46}$$

Damit erhält man aus Gl. (O.43) und Gl. (O.44) den einfachen Zusammenhang zwischen Druckverteilung und Wirbeldichte

$$\Delta c_p(x,y) = \frac{2}{V_\infty} k(x,y) \tag{O.47}$$

Auftriebsbeiwert
Mit dem Ansatz für die Wirbeldichteverteilung nach Gl. (O.33), wobei hier nur die ersten beiden Glieder berücksichtigt werden, mit den beiden Einheitsfunktionen nach Gl. (O.38) sowie mit den Beziehungen für die dimensionslosen Koordinaten nach Gl. (O.34) und Gl. (O.35) erhält man nach einigen Umformungen[192] für den Auftriebsbeiwert:

$$c_a(y) = a_0(y) \tag{O.48}$$

Nickmomentenbeiwert
Das örtliche Nickmoment kann ebenfalls direkt aus der Druckverteilung ermittelt werden. Als Bezugspunkt wird hier der örtliche $\ell/4$-Punkt gewählt (schwanzlastig positiv), so dass gilt [Thomas 1972]:

$$c_{m25}(y) = -\frac{1}{\ell^2(y)} \int_{x_{VK}(y)}^{x_{HK}(y)} \Delta c_p(x,y)\,(x - x_{25})\,dx \tag{O.49}$$

Nach einigen Umformungen[26] erhält man für den Nickmomentenbeiwert:

$$c_{m25}(y) = \frac{a_1(y)}{4} \tag{O.50}$$

Damit gelten zwischen den Koeffizienten $a_n(y)$ und den örtlichen Beiwerten elementare Zusammenhänge – jedoch nur bei Verwendung der Einheitsfunktionen nach Gl. (O.38).

O.3.3 Einflussfunktionen

Mit den Einheitsfunktionen nach Gl. (O.38) sowie den Koeffizienten nach Gl. (O.48) und Gl. (O.50) erhält man für die Wirbeldichte k(x´,y´) aus Gl. (O.33):

$$k(X',y') = \frac{V_\infty}{\pi}\left[c_a(y')\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} + 4\,c_{m25}(y')\left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')}\right)\right] \tag{O.51}$$

Dieses Ergebnis wird in die Verteilungsfunktion nach Gl. (O.07) eingesetzt, wobei das Integral in zwei Anteile aufgespalten wird. Mit den dimensionslosen Koordinaten nach Gl. (O.34) sowie mit **Definition** der neu eingeführten dimensionslosen Spannweitenkoordinate Y

$$Y = \frac{y - y'}{\ell(y')} \tag{O.52}$$

folgt schließlich für die Verteilungsfunktion G(X,Y)[193]:

$$\begin{aligned} G(X,Y) = &\int_1^1 \frac{\ell\,V_\infty}{\pi}\left[c_a\sqrt{\frac{1-X'}{X'}}\right]\left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y'^2}}\right)dX' \\ &+ \int_0^1 \frac{\ell\,V_\infty}{\pi}\left[4\,c_{m25}\left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')}\right)\right]\left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y'^2}}\right)dX' \end{aligned} \tag{O.53}$$

[192] Eine ausführliche Herleitung ist in Anhang E gegeben.

[193] An der Stelle des induzierenden Profilschnittes y' ist nach Gl. (O.52) Y = 0, so dass die Verteilungsfunktion G(x,y;y´) nur noch von X und Y abhängig ist, so dass G = G(X,Y) geschrieben werden kann. Für die Beiwerte und die Profiltiefe an den induzierenden Stellen $c_a(y')$, $c_{m25}(y')$ und $\ell(y')$ kann damit auch $c_a(Y=0)$, $c_{m25}(Y=0)$ und $\ell(Y=0)$ geschrieben werden – auf die Angabe des Variablenwertes kann daher auch verzichtet werden.

Da die Beiwerte c_a und c_{m25} nur von der Spannweitenkoordinate abhängig sind, können sie vor das Integral gezogen werden:

$$\begin{aligned} G(X,Y) = \; & \frac{\ell\, V_\infty}{\pi} \quad c_a \int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}} \left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y'^2}} \right) dX' \\ & + \frac{\ell\, V_\infty}{\pi}\, 4\, c_{m25} \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')} \right) \left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y'^2}} \right) dX' \end{aligned} \tag{O.54}$$

Die Integrale sind lediglich von der Geometrie des Tragflügels abhängig und können vorab gelöst werden. Sie werden durch die von MULTHOPP[194] eingeführten Einflussfunktionen abgekürzt:

$$\begin{aligned} i(X,Y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}} \left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y^2}} \right) dX' \\ j(X,Y) &= \frac{8}{\pi} \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-X'}{X'}} - 4\sqrt{X'(1-X')} \right) \left(1 + \frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2 + Y^2}} \right) dX' \end{aligned} \tag{O.55}$$

O.3.4 Verteilungsfunktion

Mit den Definitionen der Einflussfunktionen nach Gl. (O.55) kann für die die Verteilungsfunktion G(X,Y) nach Gl. (O.54) geschrieben werden:

$$G(X,Y) = \frac{\ell\, V_\infty}{2} \left[c_a\; i(X,Y) + c_{m25}\; i(X,Y) \right] \tag{O.56}$$

Die Verteilungsfunktion G(X,Y) wird damit durch die allgemeinen Einflussfunktionen i(X,Y) und j(X,Y) und die noch unbekannten örtlichen Beiwerte c_a und c_{m25} beschrieben. Für die dimensionslose Verteilungsfunktion g nach Gl. (O.13) erhält man

$$g(X,Y) = \frac{\ell}{2\,b} \left[c_a\; i(X,Y) + c_{m25}\; i(X,Y) \right] \tag{O.57}$$

bzw. in den dimensionslosen Koordinaten ξ,η und η':

$$g(\xi,\eta;\eta') = \frac{\ell(\eta')}{2b} \left[c_a(\eta')\, i(\xi,\eta;\eta') + c_{m25}(\eta')\; j(\xi,\eta;\eta') \right] \tag{O.58}$$

Mit den Definitionen für die dimensionslose Zirkulationsverteilung

$$\gamma(\eta) = \frac{c_a(\eta)\ell(\eta)}{2b} = \frac{\Gamma(\eta)}{b\, V_\infty} \tag{O.59}$$

und die dimensionslose Nickmomentenverteilung

$$\mu(\eta) = \frac{c_{m25}(\eta)\ell(\eta)}{2b} \tag{O.60}$$

erhält man schließlich für die Verteilungsfunktion als Ergebnis

$$g(\xi,\eta;\eta') = \gamma(\eta')\, i(\xi,\eta;\eta') + \mu(\eta')\; j(\xi,\eta;\eta') \tag{O.61}$$

[194] Bei TRUCKENBRODT [Truckenbrodt 1953a] werden die Einflussfunktionen H_0 und H_1 eingeführt, die allerdings unmittelbar in die von MULTHOPP eingeführten Einflussfunktionen i und j umgerechnet werden können, wie in [Truckenbrodt 1953a] gezeigt wird.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass in Gleichungen, in denen sowohl die induzierende Stelle als auch betrachtete Aufpunkte enthalten sind, der hochgestellte Strich die Lage des induzierenden Schnittes kennzeichnet. Dementsprechend bedeutet in Gl. (O.61), dass die an der Stelle η' vorhandene Zirkulation $\gamma(\eta')$ (bzw. das Nickmoment $\mu(\eta')$) über die Einflussfunktionen $i(\xi,\eta;\eta')$ und $j(\xi,\eta;\eta')$ in die Verteilungsfunktion $g(\xi,\eta;\eta')$ eingeht, die wiederum über Gl. (O.16) die kinematische Strömungsbedingung $\alpha_{Skelett}(\xi,\eta)$ bestimmt. Hierbei sind die Einflussfunktionen $i(\xi,\eta;\eta')$ und $j(\xi,\eta;\eta')$ sowie $\partial z_{Skelett\,p} / \partial x_p(\xi,\eta)$ durch die Flügelgeometrie bestimmt und der Profilanstellwinkel α_P kann als gegeben angesehen werden, so dass die örtlichen Beiwerte $c_a(\eta')$ und $c_{m25}(\eta')$ bzw. $\gamma(\eta')$ und $\mu(\eta')$die Unbekannten des Problems darstellen.

Die Festlegung der noch unbekannten örtlichen Beiwerte $c_a(\eta')$ und $c_{m25}(\eta')$ erfolgt über die Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung in jedem Flügelschnitt an zwei Punkten in Profiltiefenrichtung.

O.3.5 Aufpunkte zur Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung

Die Wahl der Aufpunkte zur Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung kann grundsätzlich beliebig erfolgen. TRUCKENBRODT wählte den $\ell/4$-Punkt (in Anlehnung an die Traglinientheorie) und die Hinterkante (Erfüllung der KUTTA'schen Abflussbedingung). Da die für diese beiden Punkte abgeleiteten Gleichungen prinzipiell identisch sind, werden zur Vereinfachung der Schreibweise die für die Hinterkante geltende Größen mit einem Stern (*) und für die für den Einviertelpunkt geltende Größen mit zwei Sternen (**) gekennzeichnet[195]. Gelten Beziehungen für beide Punkte, kann eine besondere Kennzeichnung entfallen.

$$
\begin{aligned}
\alpha(\xi_{HK},\eta) &= \alpha^{*}(\eta)\\
i(\xi_{HK},\eta;\eta') &= i^{*}(\eta;\eta')\\
j(\xi_{HK},\eta;\eta') &= j^{*}(\eta;\eta')\\
g(\xi_{HK},\eta;\eta') &= i^{*}(\eta;\eta')\,\gamma(\eta') + j^{*}(\eta;\eta')\,\mu(\eta')\\
\alpha(\xi_{25},\eta) &= \alpha^{**}(\eta)\\
i(\xi_{25},\eta;\eta') &= i^{**}(\eta;\eta')\\
j(\xi_{25},\eta;\eta') &= j^{**}(\eta;\eta')\\
g(\xi_{25},\eta;\eta') &= i^{**}(\eta;\eta')\,\gamma(\eta') + j^{**}(\eta;\eta')\,\mu(\eta')
\end{aligned}
\qquad \text{(O.62)}
$$

Für die kinematische Strömungsbedingung nach Gl. (O.32)

$$
\alpha_{Skelett\,\nu}(\xi) = b_{\nu\nu}\,g_{\nu\nu}(\xi) - {\sum_{n=1}^{M}}' b_{\nu n}\,g_{\nu n}(\xi) \qquad \text{(O.32)}
$$

erhält man damit

$$
\begin{aligned}
\alpha^{*}_{Skelett,\nu} &= b_{\nu\nu}\,i^{*}_{\nu\nu}\,\gamma_\nu - {\sum_{n=1}^{M}}' b_{\nu n}\,i^{*}_{\nu n}\,\gamma_n + b_{\nu\nu}\,j^{*}_{\nu\nu}\,\mu_\nu - {\sum_{n=1}^{M}}' b_{\nu n}\,j^{*}_{\nu n}\,\mu_n\\
\alpha^{**}_{Skelett,\nu} &= b_{\nu\nu}\,i^{**}_{\nu\nu}\,\gamma_\nu - {\sum_{n=1}^{M}}' b_{\nu n}\,i^{**}_{\nu n}\,\gamma_n + b_{\nu\nu}\,j^{**}_{\nu\nu}\,\mu_\nu - {\sum_{n=1}^{M}}' b_{\nu n}\,j^{**}_{\nu n}\,\mu_n
\end{aligned}
\qquad \text{(O.63)}
$$

[195] Hierdurch entfällt in den folgenden Gleichungen formal die Abhängigkeit in Profitiefenrichtung, da die Gleichungen nun sowohl für die Hinterkante als auch die $\ell/4$-Linie hingeschrieben werden. Diese Kennzeichnung ist in Übereinstimmung mit der Literatur [Truckenbrodt 1953a], [Schlichting/Truckenbrodt 1969].

Gl. (O.63) stellt ein Gleichungssystem von 2M Gleichungen dar für die jeweils M unbekannten Werte für die dimensionslose Auftriebsverteilung γ bzw. für die dimensionslose Nickmomentenverteilungμ. Der Index „υ“ kennzeichnet wiederum den betrachteten Flügelschnitt und der Index „n“ die induzierende Stelle.

Die zusätzlichen Vereinfachungen durch das Tragflächenverfahren von TRUCKENBRODT sind:

- Die Freiheitsgrade der Wirbeldichteverteilung k(x´,y´) werden durch Einführung von Ansätzen für die Verteilung in Profiltiefenrichtung beschränkt.
- Die Anzahl der Verteilungsfunktionen in Profiltiefenrichtung wird auf zwei reduziert, die auf der ersten und zweiten BIRNBAUMverteilung basieren – damit können keine beliebigen Druckverteilungen in Profiltiefenrichtung ermittelt werden sondern lediglich die lokalen Auftriebs- und Nickmomentenbeiwerte eines Elementarflügels.
- Flügel sehr kleiner Streckung können hierdurch nicht modelliert werden.
- Die kinematische Strömungsbedingung wird in Profiltiefenrichtung an lediglich zwei Punkten (am ℓ/4-Punkt und an der Hinterkante) erfüllt.

Anhang P Flugzeugdaten

P.1 Flügelgeometrie eines UHCA-Entwurfes

Den Berechnungen für die instationäre Aerodynamik in Kapitel 6.3 liegen die Projektdaten eines UHCA-Entwurfes zugrunde. Die geometrischen Abmessungen des Flügels zeigt Bild P.1. Die in Kapitel 6.3 sowie in Anhang L gezeigten Ergebnisse gelten für diese Geometrie. Da in die Berechnungen der Doublet-Lattice-Methode lediglich die geometrischen Daten des Flügels eingehen, können die Ergebnisse auf ähnliche Geometrieen bei gleicher Verteilung von Profilschnitten übertragen werden. Weitere Angaben können Tabelle P.1 entnommen werden.

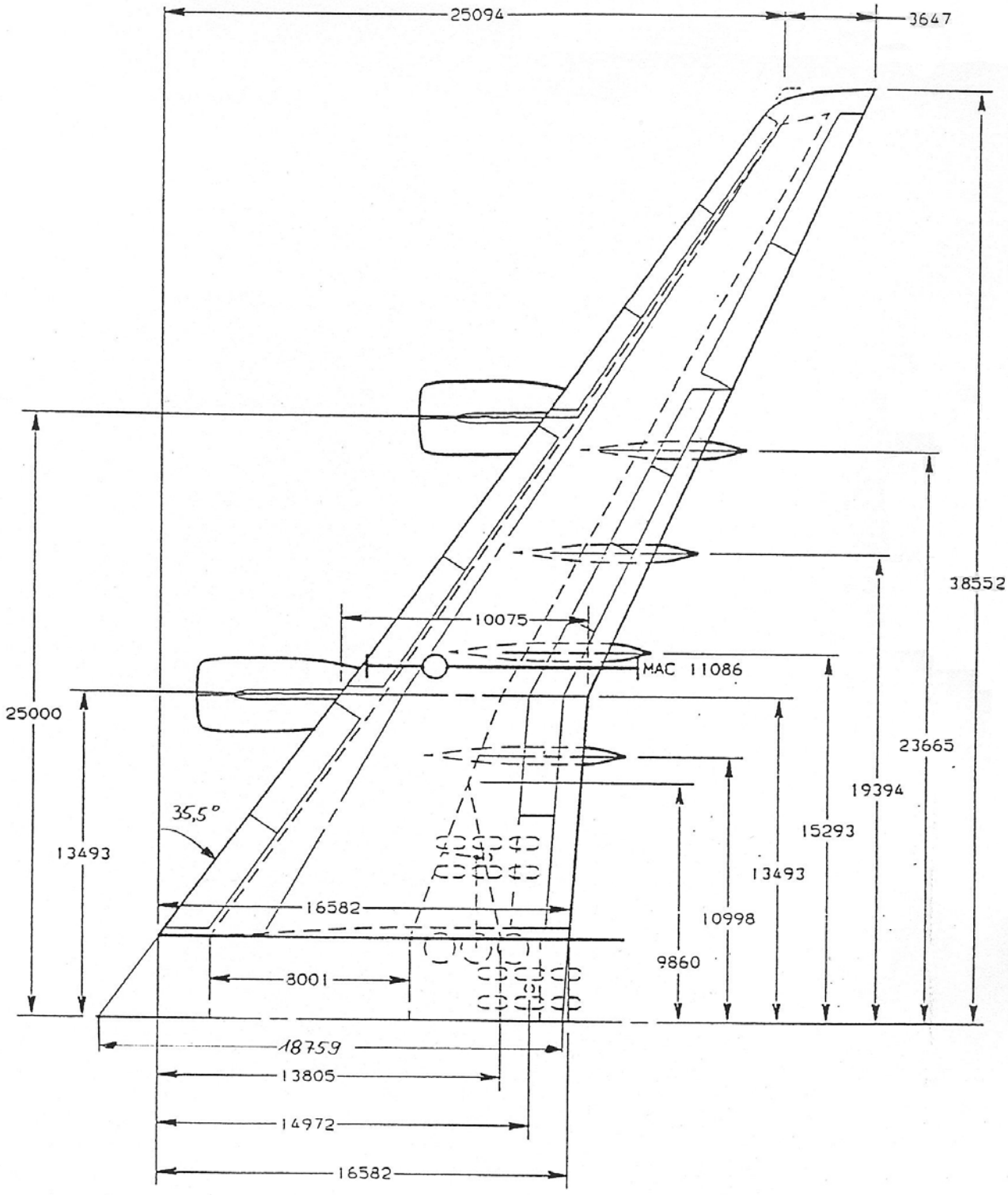

Bild P.1 Abmessungen des UHCA-Flügels [Airbus 1995]

Tabelle P.1 Daten des UHCA-Flügels

Flügelfläche		S	=	725,6 m^2
Bezuglflügeltiefe (MAC)		ℓ_μ	=	11,086 m
Flügelstreckung		Λ	=	8,20
Zuspitzung		λ	=	0,221
25%-Pfeilung innen		φ_{25}	=	28,9°
	außen			33,0°
Verwindug	Flügelwurzel	ε_V	=	4°
	Kink			2°
	Flügelspitze			0°
V-Stellung		ν	=	5°

P.2 Abmessungen des simulierten Flugzeuges

Den Simulationsrechnungen in Kapitel 7 liegen die Daten eines modernen, vierstrahligen Verkehrsflugzeuges zugrunde, das in Bild P.2 dargestellt ist. Die Koeffizientenmatrix für das Tragflächenverfahren basiert auf den geometrischen Abmessungen dieses Flügels, siehe Bild 9.3.

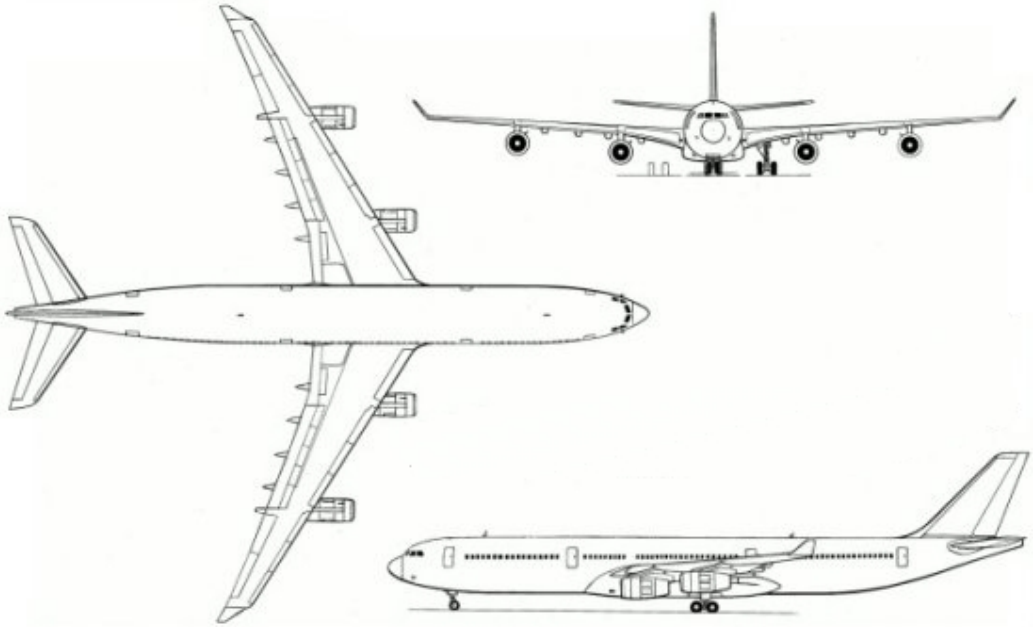

Bild P.2 3-Seiten-Ansicht des simulierten Flugzeuges [aerospaceweb.org]

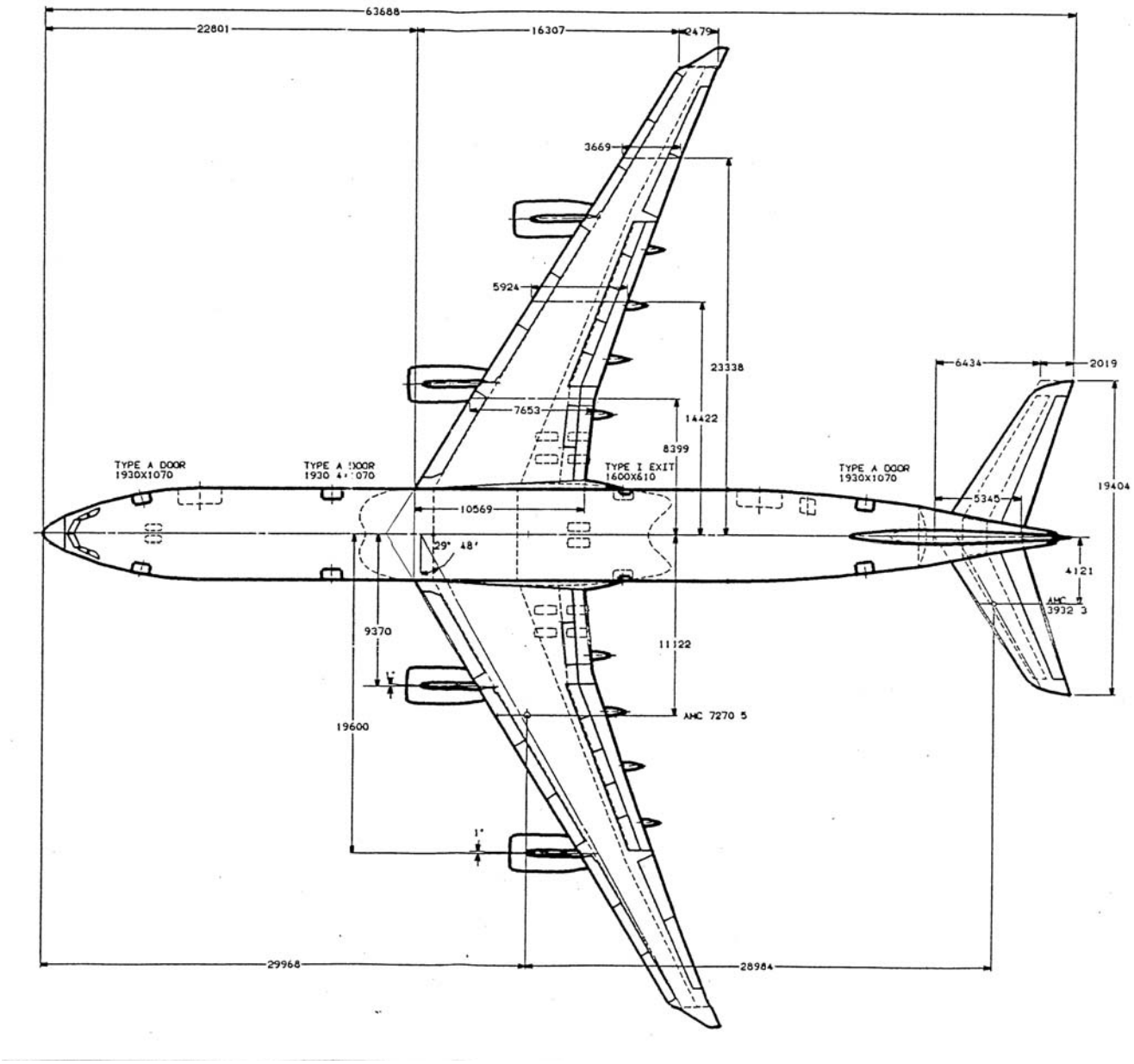

Bild P.3 Draufsicht des simulierten Flugzeuges [Airbus]

P.3 Flugzustand

Den Vergleichsrechnungen (Flugversuch – Simulation) in Kapitel 7.2 liegt der im Folgenden beschriebene Flugzustand zugrunde. Die Daten für Flugversuch und Simulatorversuch weichen teilweise geringfügig voneinander ab, da erstens der vollständige Datensatz der Simulation trotz aller Bemühungen um möglichst große Realitätstreue immer Restungenauigkeiten aufweist, zweitens im Flugversuch der Ausgangszustand nicht absolut genau vom Piloten eingestellt werden kann und drittens die Flugversuchsdaten mit Messfehlern behaftet sind. Für die Simulation sind daher die abweichenden Daten zusätzlich mit angegeben.

Tabelle P.2 Flugzustand des Flugversuchs

Masse	m	=	190538	kg	
Schwerpunktlage zum geom. BP			29,60	%MAC	
Trägheitsmoment um x-Achse	I_x	=	15647000	kg m^2	
Trägheitsmoment um y-Achse	I_x	=	20665000	kg m^2	
Trägheitsmoment um z-Achse	I_x	=	35745000	kg m^2	
Deviationsmoment	I_{xz}	=	947000	kg m^2	
Vorflügel	eingefahren				(no slats)
Landeklappen	eingefahren				(no flaps)
Fahrwerk	eingefahren				
Höhenruderstellung innen	η_i	=	-0,26	°	
Höhenrudertrimmung	η_{trim}	=	-2,54°		
Querruder links, innen	$\xi_{\ell, i}$	=	0,0	°	
Querruder rechts, innen	$\xi_{r, a}$	=	0,0	°	
Seitenruder	ζ	=	0,0	°	
kommandierter Schub	N1	=	82,50	%	
Calibrated Airspeed	V_{CAS}	=	264,10	kts	(135,86 m/s)
Höhe über MSL	H	=	21446,92	ft	(6537,02 m)
Steigrate	$\dot{H}$	=	738,39	fpm	
Hängewinkel	Φ	=	0,0	°	
Längslagewinkel	Θ	=	4,67	°	
Azimut	Ψ	=	250,54	°	
Anstellwinkel	α	=	3,52	°	
Flugmachzahl	Ma	=	0,60756		

Tabelle P.3 abweichende Flugzustandsgrößen des Simulatorversuchs

Höhenruderstellung innen	η_i	=	0,0	°
Höhenrudertrimmung	η_{trim}	=	-1,899°	
kommandierter Schub	N1	=	79,24	%
Flugbahnwinkel	γ	=	0,0	°
Längslagewinkel	Θ	=	2,825°	
Hängewinkel	Φ	=	0,0	°
Anstellwinkel	α	=	2,825°	

P.4 Wirbelschleppenparameter

Den in Kapitel 3.3 dargestellten Ergebnissen für das Wirbelschleppenmodell nach HEINTSCH liegen folgenden Daten zugrunde:

Tabelle P.4 allgemeine Parameter

ρ	1,225	[kg/m^3]
g	9,80665	[m/s^2]
σ_W	0,6	[m/s]
ν	0,000015	[m^2/s]

Tabelle P.5 Flugzustände

	m [kg]	b [m]	V [m/s]	Γ_0 [m^2/s]
Flugzeug A	5500	15,5	76,63	47,2
Flugzeug B	60000	33,91	69,98	257,7
Flugzeug C	265000	59,64	70,59	641,6

Tabelle P.6 Koeffizienten des Wirbelmodells

Flugzeug A	1	2	3	4
a_{1n}	-59,16732	42,53728	0,00550	1,56993
a_{2n}	-1,92199	6,64042	5,19000	2,03464
a_{3n}	-96,73215	68,11962	0,02166	1,61481
a_{4n}	-0,56374	23,70482	12,48458	0,61328
Flugzeug B				
a_{1n}	-73,84458	54,09269	0,00533	1,56861
a_{2n}	-1,21396	12,14006	10,36894	1,36065
a_{3n}	-207,95950	286,85750	0,00572	1,01372
a_{4n}	-0,51881	89,63035	36,88498	0,56034
Flugzeug C				
a_{1n}	-37,06566	39,18455	0,00632	1,16586
a_{2n}	-0,52719	15,13617	13,04630	0,68389
a_{3n}	-265,65260	2822,22600	0,02166	0,32770
a_{4n}	-0,34132	111,45854	49,32283	0,58944