Entwicklung eines elektrodynamischen, linearen Schwingaktors und das Verfahren zu dessen Steuerung und Regelung

von Diplom-Ingenieur Dmitrij Demjanenko

aus Saratow

von der Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme -

der Technischen Universität Berlin

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

-Dr.-Ing.-

genehmigte Dissertation

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 10.08.2012

Berlin 2012

D 83

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Henning Meyer	(TU Berlin)
1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Heinz Lehr	(TU Berlin)
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Jörg Krüger	(TU Berlin)
3. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Kai Schauer	(HTW Berlin)

Tag der Eröffnung des Promotionsverfahrens:	25.06.2012
Tag der wissenschaftlichen Aussprache:	10.08.2012

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als Entwicklungsingenieur bei der Firma MT.DERM GmbH in Berlin. Im Rahmen dieser Arbeit wurden ein elektrodynamischer, linearer Schwingaktor entwickelt sowie verschiedene Prototypen sowohl des Pigmentier- als auch Tätowiersystems aufgebaut und zusammen mit Pigmentiererinnen und Tätowierern auf Eignung für den intradermalen Farbeintrag getestet. Des Weiteren wurden Algorithmen zur Steuerung sowie Regelung des schwingenden Antriebs ausgearbeitet und experimentell untersucht.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. Heinz Lehr gilt mein besonderer Dank für die wissenschaftliche Betreuung sowie die gründliche Durchsicht des Manuskripts, was zum guten Gelingen dieser Arbeit beitrug. Frau Dr. med. Helena Lehr möchte ich nicht nur für ihre Unterstützung in organisatorischen Fragen danken, sondern auch für die sorgfältige Korrekturen und ihre Hilfsbereitschaft.

Der Tätowiergemeinschaft, insbesondere den Tätowierern Markus Lenhard, Volko & Simone, Robby Welke, Don Carlos, Jens, Mike von Panke-Ink, die mit ihrem praxisnahen Wissen sowie mit ihren ehrlichen und kritischen Meinungen und konstruktiven Vorschlägen bei dieser Arbeit mitwirkten, gebührt ein großer Dank.

Meiner lieben Frau Daria danke ich für ihre unendliche Geduld, Freundlichkeit und fortwährende Unterstützung während ich mit der Anfertigung meiner Dissertation beschäftigt war.

Zusammenfassung

Eine lineare, repetierende Bewegung kann auf unterschiedliche Weise erzeugt werden, beispielsweise mit Hilfe eines Kurbeltriebs, so dass sich ein aufgrund der kinematischen Kopplung vordefinierter Bewegungsablauf einstellt. Um die Bewegungsprofile im laufenden Betrieb verändern zu können, bedarf es einer aufwendigen mechanischen Konstruktion. Andere Funktionsprinzipien, wie das Tauch- oder Zugankerprinzip, ermöglichen hingegen eine einstellbare Schwingungsamplitude, gestatten jedoch wegen einer sehr hohen Induktivität der Erregerspule keine schnelle Regelung der Bewegungsbahn. Solche linearen Schwingaktoren werden in verschieden Bereichen eingesetzt und sind meistens für einen bestimmten Anwendungsfall ausgelegt.

Demgegenüber unterscheidet sich der in dieser Arbeit entwickelte elektrodynamische, lineare Schwingaktor von dem Stand der Technik insofern, dass dank einer kontaktlosen Erregung eines mechanischen, schwingenden Systems sowie einer geringen Spuleninduktivität nicht nur nahezu beliebige Bewegungsprofile der Schwingmasse generiert, sondern auch diese regelungstechnisch kontrolliert werden können.

Hierfür wurden zwei Regelungsalgorithmen ausgearbeitet, von denen einer experimentell untersucht wurde. Es konnte gezeigt werden, dass sich die Schwingungsamplitude bei äußeren Einflüssen, wie z. B. einer Dämpfung der Bewegung durch Einstechen in die Haut, in drei bis fünf Schwingungsperioden ausregeln lässt. Um die gewünschten Geschwindigkeitsprofile ebenfalls aufrecht zu erhalten, ist eine permanente Überwachung der Position der Schwingmasse erforderlich. Dabei wird eine schnelle und punktgenaue Ausregelung der Bewegungsbahn realisiert.

Dem Anwender steht eine bequeme, vollelektronische Einstellung der einzelnen Arbeitsparameter, beispielsweise Schwingungsamplitude, Schwingungsfrequenz sowie Regelgüte zur Verfügung. Dies kann sowohl konventionell mittels eines Stand-alone-Steuergeräts, als auch zeitgemäß via Smartphone oder Laptop, kabelgebunden oder wireless erfolgen.

Der entwickelte Schwingaktor ist für das Ausführen einer Stechbewegung prädestiniert, beispielsweise das Tätowieren, bzw. das Pigmentieren. So wurde der Schwingaktor mit professionellen Tätowierern auf Eignung für den intradermalen Farbeintrag getestet. Das Besondere an diesem Schwingaktor ist die Möglichkeit, mittels einer Vorgabe bezüglich der Regelgüte, die eine „weiche“ oder „harte“ Regelung bedeutet, die Eindringtiefe einer Nadel oder eines Nadelpakets in die menschliche Haut (die „Weichheit“ beim Tätowieren) einstellen zu können, so dass sich dies auf den resultierenden Farbeintrag auswirkt und fotorealistische Farbübergänge erlaubt.

Die Erzeugung eines Einzelstichs, der im Medizinbereich Anwendung findet, beispielsweise bei der Injizierung unterschiedlicher Wirkstoffe, ist mit dem entwickelten linearen Schwingaktor ebenfalls realisierbar.

Abstract

Repetitive linear motion can be generated in various ways, for instance, by means of a crank mechanism, with the kinematic coupling pre-defining a motion sequence. In order to be able to alter motion profiles while such a system is running, costly mechanical design is required. Other types of mechanisms, using push- or pull-type solenoid-plungers, make it possible to regulate the oscillation amplitude, yet do not allow for high-speed control of the mechanical trajectory due to the very high inductance of the field coil. Such linear oscillatory drives are used in various areas and are mostly designed for a specific application.

The use of contactless excitation of the mechanical oscillating system, in combination with low coil inductivity, gives the electrodynamic linear oscillating drive presented in this paper the following advantage over the current state of technology: not only can it generate nearly all possible motion profiles of the oscillating weight, but these profiles can be systematically controlled.

For this purpose, two control algorithms are mapped out, of which one is experimentally investigated. It can be shown that the oscillation amplitude under external influence (such as the damping of motion caused by the piercing of human skin) settles itself in three to five oscillatory periods. In order to sustain the desired velocity profile, permanent monitoring of the position of the oscillatory weight is required. In doing so, swift and precise control of the motion trajectory is achieved.

The device has a convenient, fully electronic operator interface for adjusting individual work parameters, such as oscillatory amplitude, frequency, and control quality. Settings can be adjusted conventionally with the help of a stand-alone control unit, or by using a smartphone or a laptop computer with a cable or wireless connection.

The oscillatory drive described in this paper is designated for the execution of skin-piercing movements, such as tattooing or pigmentation. The oscillatory drive has been tested by professional tattoo artists for its suitability for intradermal pigmentation. A special feature of the device is the possibility of adjusting the control quality and depth of penetration of the needle or a grouping of needles into human skin (i.e. the “softness” of tattooing) by changing the setting for “soft” or ”hard” operation, affecting the resulting pigmentation and allowing for photo-realistic color gradations.

The linear oscillating drive is also suitable for generating motion resulting in a single skin-piercing prick, such as required in the medical field for various types of injections.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 3

1.1 Aufbau der Arbeit 5

1.2 Problemstellung 6

1.3 Stand der Technik 7

2 Linearer Schwingaktor - Linear oscillating drive (LOD) 14

2.1 Mechanisches Modell 14

2.1.1 Lineares System 15

2.1.2 Nichtlineares System 27

2.1.3 Zusammenfassung 36

2.2 Elektromagnetisches Modell 38

2.2.1 Grundlagen des Elektromagnetismus 38

2.2.2 Maxwell-Gleichungen in integraler Form 47

2.2.3 Ferromagnetische Werkstoffe 51

2.2.4 Modellrechnungen mit MAXWELL 53

2.2.5 Zusammenfassung 60

2.3 Spule 61

2.3.1 Induktivität 61

2.3.2 Induzierte Spannung durch die Magnetbewegung 65

2.3.3 Wicklung und Bestromung 68

2.3.4 Zusammenfassung 72

2.4 Sprungantwort des Systems 73

2.5 Steuerung 79

2.5.1 Frequenz-Amplituden-Steuerung 79

2.5.2 Kontrolle der Stechgeschwindigkeit 80

2.5.3 Erzeugung unterschiedlicher Geschwindigkeitsprofile 84

2.5.4 Benutzeroberfläche 88

2.6 Elektronik 89

2.6.1 Schaltungskonzepte 89

2.6.2 Sensorauswahl 93

2.7 Programmierung …. 95
2.7.1 Abschätzung der Laufzeiten bei Programmabläufen …. 95
2.7.2 Ermittlung der Übertragungsfunktion bei wechselnden Systemeigenschaften ….. 97
2.8 Regelung …. 99
2.8.1 Regelung der maximalen Schwingungsamplitude …. 100
2.8.2 Positionsregelung der Schwingmasse …. 109
2.8.3 Stabilitätsanalyse des geschlossenen Regelkreises …. 127
2.8.4 Kombination der Regelungsalgorithmen …. 131
2.8.5 Experimentelle Untersuchung der Regelung der max. Schwingungsamplitude 132
2.8.6 Zusammenfassung …. 138
3 Applikationen …. 142
3.1 Einstechen in die Haut …. 147
3.1.1 Funktionsmuster …. 148
3.1.2 Stechaktor für Anwendungen im Tattoobereich …. 150
3.1.3 Stechaktor für Anwendungen im Bereich des Permanent-Make-Ups …. 156
3.1.4 Stechaktor für Anwendungen im Bereich der Injektion …. 157
3.2 Zusammenfassung …. 158
4 Optimierungsansätze …. 159
4.1 Mechanisches Modell …. 159
4.2 Elektromagnetisches Modell …. 160
5 Minderung der Vibration …. 161
6 Zusammenfassung …. 163
7 Ausblick …. 167
8 Detaillierte Rechnungswege …. 168
8.1 Lineares System …. 168
8.2 Bandbreite …. 178
8.3 Nichtlineares System …. 181
8.4 Sprungantwort eines mechanischen, schwingenden Systems …. 183
9 Symbole und Abkürzungen …. 185
10 Literaturverzeichnis …. 188
10.1 Erweiterte Literaturhinweise …. 193

Ein fachkundiger Problemlöser muss zwei unvereinbare Qualitäten besitzen:
rastlose Phantasie und geduldige Beharrlichkeit.

Howard W. Eves

1 Einleitung

Bei der vorliegenden Dissertation geht es einerseits um die Konstruktion eines linearen Schwingaktors, andererseits auch um die Erkundung der Anwendungsmöglichkeiten, welche diese Art von Aktoren bietet. Wegen der Einfachheit des Aktoraufbaus verlagert sich die Komplexität der Arbeit in das Feld der Steuerungs- und Regelungstechnik.

Bei den Überlegungen zu den Aktorkonzepten wurden einige Ansätze aufgrund der offensichtlichen Einschränkungen bezüglich der Ausführung einer Stechbewegung nicht ausgiebig untersucht. Der Vollständigkeit halber werden diese Schwingaktoren mit ihren Vor- und Nachteilen im Kapitel 1.3 vorgestellt.

Die Zweckmäßigkeit eines linearen Schwingaktors wurde während der Entwicklung eines Hautdickenmessgeräts (siehe Abbildung 1-1) erkannt. Dabei ging es um den Transfer der Forschungsergebnisse des Culex-Projekts [Lot11], das von der Investitionsbank Berlin gefördert wurde und in der Zusammenarbeit des Fachgebiets Mikrotechnik der Technischen Universität Berlin mit der Firma MT.DERM GmbH entstand. Ein Merkmal des Forschungsprojekts bestand darin, die Dicke der obersten Hautschicht, der Epidermis mittels eines Messverfahrens zu bestimmen. Bekanntlich unterscheidet sich die Epidermisdicke und ihre Hautbeschaffenheit bei verschiedenen Menschen.

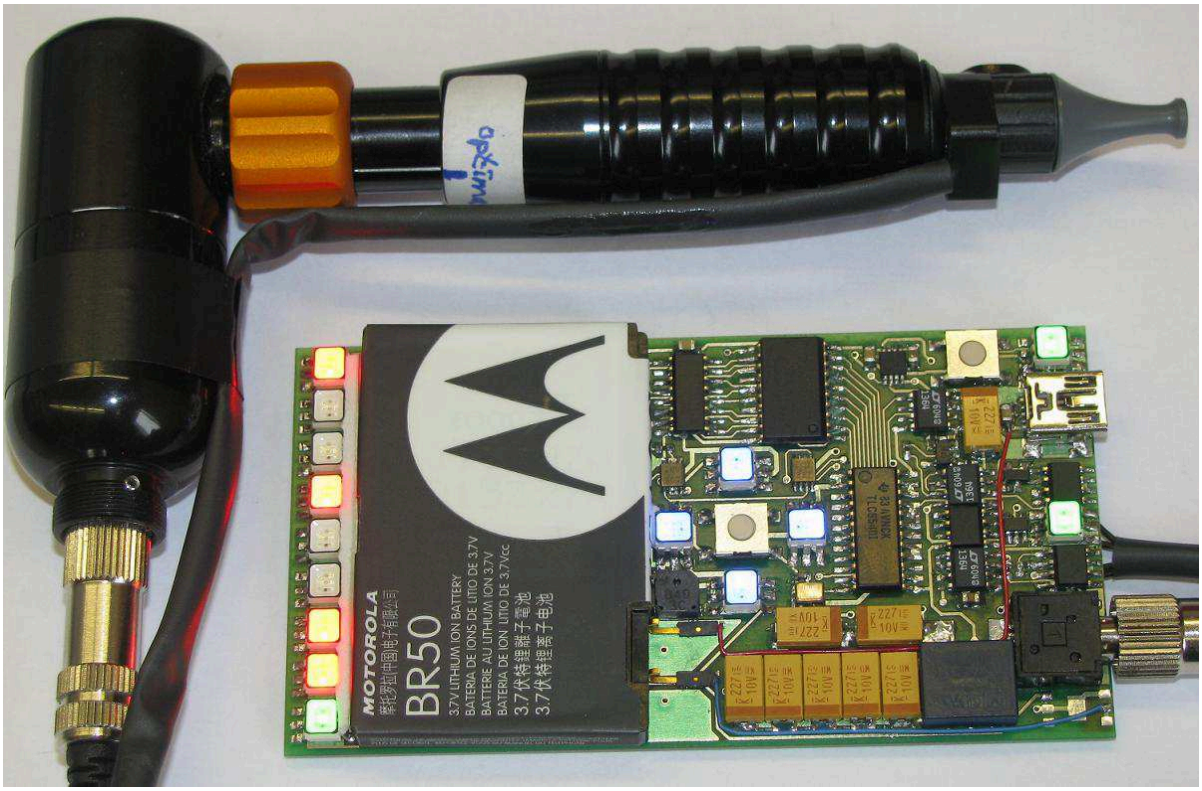

Abbildung 1-1 Hautdickenmessgerät [Dem10]

Das Messverfahren basiert auf der Messung der Hautimpedanz, bzw. der Phasenverschiebung zwischen dem gemessenen und einem Referenzsignal [Dem08], [Dem10]. Aufgrund der zellulären Unterschiede der einzelnen Hautschichten, insbesondere der blutführenden Hautschicht, der Dermis zum Stratum corneum, ergibt sich ein spezifischer Verlauf des gemessenen Signals. Während des Stechvorgangs wird eine charakteristische Kurve des Messsignals aufgenommen, siehe Abbildung 1-2.

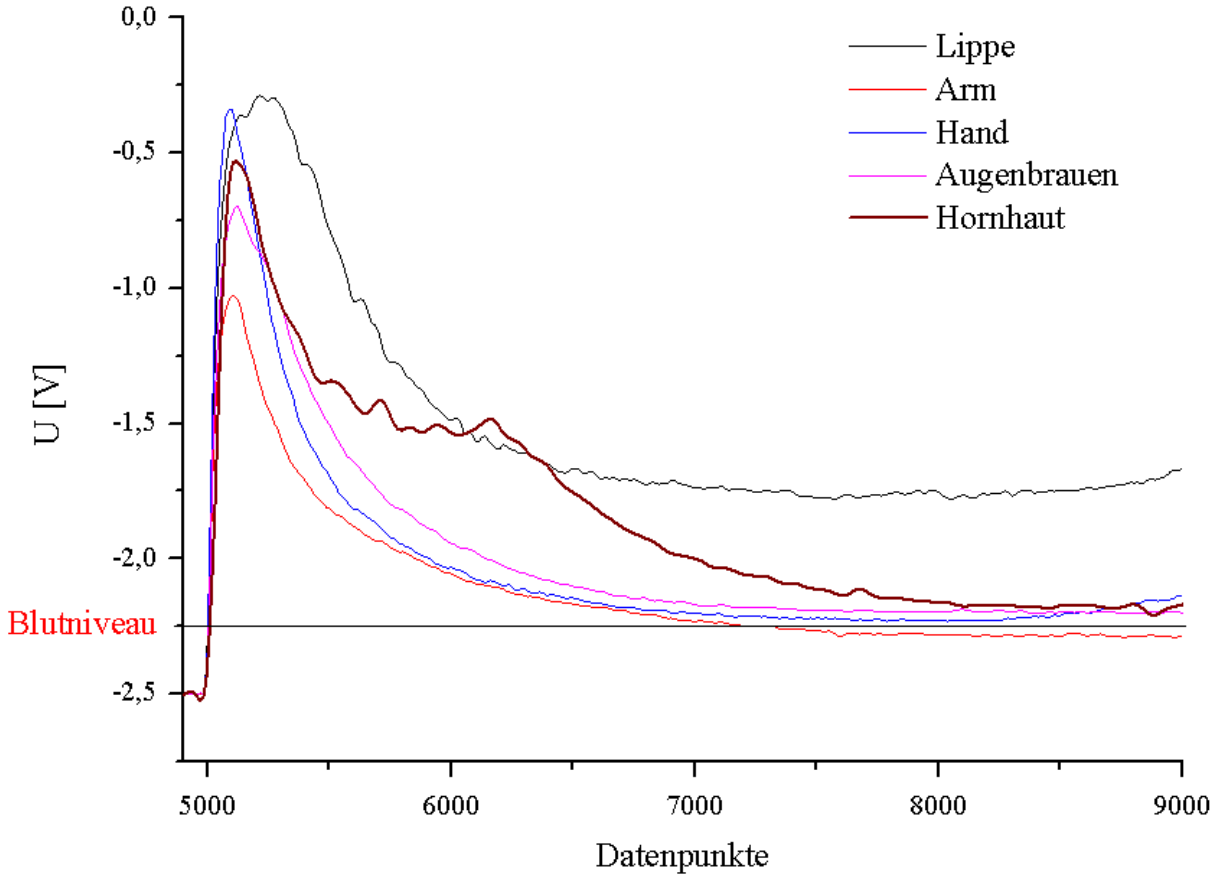

Abbildung 1-2 Charakteristische Kurven des gemessenen Signals [Dem10]

Durch die Analyse dieser Kurve soll nicht nur die Hautdicke (gemessen bis zu den Blutkapillaren), sondern auch die Lage der Langerhans'schen Zellen, welche sich in der unmittelbaren Nähe der Grenzschicht Epidermis-Dermis befinden, bestimmt werden. Wurde die Epidermisdicke messtechnisch ermittelt, kann auch eine Aussage über die Lage der Langerhans'schen Zellen getroffen werden. Diese Zellen lassen sich mit verschiedenen Wirkstoffen benetzen, um eine aktive Impfung, beispielsweise gegen AIDS oder einige Krebserkrankungen, hervorzurufen.

Zugeschnitten für MT.DERM-Bedürfnisse ergab sich aus diesen Erkenntnissen das Hautdickenmessgerät, mit dessen Hilfe die Epidermisdicke in drei Stufen unterteilt werden kann (dünn, normal und dick). Dem Messergebnis entsprechend, kann die Kosmetikerin die Einstellungen am Pigmentier-Handstück vornehmen, um beim Auftragen eines Permanent-Make-Ups ein optimales Behandlungsresultat zu erzielen: nicht zu tief, gleichzeitig nicht zu flach einstechen, um die Blutkapillaren nicht zu verletzen, bzw. die Farbe nicht im Bereich des Stratum corneums zu platzieren, damit die Farbpigmente mit dem Blut nicht weggespült, bzw.

wegen des biologischen Nachwachsens der Hornhaut, zusammen mit abgestorbenen Hautzellen nicht abgesondert werden.

Trotz der Möglichkeit, die Lage der Langerhans'schen Zellen, bzw. die Epidermisdicke messtechnisch zu ermitteln, bleibt immer noch die Frage, sowohl bei der Impfung als auch bei der Pigmentierung, wie die Beibehaltung der notwendigen Stechtiefe gewährleistet werden soll. Bis jetzt sind Ärzte sowie Kosmetikerinnen auf ihre Erfahrung angewiesen. Mit den am Markt vorhandenen Stechaktoren ist kein präzises und gleichzeitig hochdynamisches Einstechen realisierbar. Die mit Hilfe von Gleichstrommotoren betriebenen Stechaktoren ermöglichen es aufgrund der starren Kinematik nicht, den Hub elektronisch zu steuern, bzw. zu regeln. Die linearen Schrittmotoren weisen schlechte dynamische Eigenschaften auf, um die repetierende Stechbewegung oder den Einzelstich mit der vordefinierten und regelungstechnisch kontrollierten Stechtiefe ausführen zu können.

Der Lösung dieses Problems ist die vorliegende Arbeit gewidmet.

1.1 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Dissertation ist im Wesentlichen in drei Teile gegliedert: ein einführender, ein analytischer und ein konstruktiver Abschnitt. Das große analytische Schriftstück unterteilt sich ebenfalls in drei Abschnitte, die unter anderem das mechanische und das elektromagnetische Modell des linearen Schwingaktors sowie dessen Steuerung und Regelung behandeln.

Nach der im einführenden Kapitel 1.2 definierten Aufgabe wird im Kapitel 1.3 der Stand der Technik einschließlich der Patentrecherche diskutiert.

Das zweite Kapitel beinhaltet analytische Abhandlungen bezüglich der schwingenden sowohl linearen als auch nichtlinearen Systeme. Des Weiteren sind in diesem Kapitel Grundlagen des Elektromagnetismus und Untersuchungen des elektromagnetischen Modells ausführlich aufgeführt. Dazu zählt die Erregerspule, deren Wicklung und Bestromung sowie der Einfluss der Induktivität auf die Stromdynamik. Weiterhin findet man Steuerungsmöglichkeiten, welche diese Art von Aktoren bietet. Ein Teil der theoretischen Überlegungen gilt der Elektronik und der Programmierung. Verschiedene Ansätze zur Regelung des Schwingaktors sowie die experimentelle Untersuchung einiger Regelungsalgorithmen schließen das Kapitel ab.

Das dritte Kapitel stellt anhand konkreter Beispiele diverse konstruktive und an Testpersonen erprobte Stechaktorvariationen, welche auf der Basis des entwickelten linearen Schwingaktors aufgebaut sind, vor. Abschließend werden im 4. Kapitel die Optimierungsansätze diskutiert und im 5. Kapitel Aufgabenbereiche behandelt, welche am Rand dieser Arbeit entstanden sind: Reduzierung der Vibration und Wärmeentwicklung bei oszillierenden Linearantrieben.

Nach der im 6. Kapitel dargelegten Zusammenfassung der Arbeitsergebnisse und der im siebten Kapitel fortgeführten Diskussion über die Weiterführung der in der vorliegenden Arbeit behandelten Themen findet man im 8. Kapitel die vollständigen Rechnungswege der mathematischen Abhandlungen. Die Rechnungen sind neben den rein analytischen auch

numerischer Natur. Einerseits liegt dies an den Nichtlinearitäten der behandelten Differentialgleichungen, anderseits an den auf die Digitalisierung und Programmierung ausgerichteten Regelungsalgorithmen.

Das 9. Kapitel fasst die wichtigsten Symbole und Abkürzungen zusammen. Im 10. Kapitel sind die zitierten Quellen und die verwendete Literatur, die in sprachlicher sowie fachlicher Hinsicht behilflich waren oder als Inspiration dienten, aufgeführt. Außerdem sind im Kapitel 10.1 die benutzten Patentschriften als erweiterte Literaturhinweise aufgelistet.

1.2 Problemstellung

Lineare, zyklische Bewegungen werden am Einfachsten mittels Umformung der rotatorischen Bewegung erzeugt. Ein Beispiel dafür ist in der Abbildung 1-3 dargestellt. Die schematische Darstellung des Kurbeltriebprinzips veranschaulicht den Zusammenhang zwischen der Dreh- und Linearbewegung. Die Gleichungen (1-1) und (1-2) zeigen näherungsweise Ort und Geschwindigkeit der Bewegung.

Auffallend ist die starre Kinematik, die, einmal festgelegt, keine frei konfigurierbaren linearen Bewegungen ermöglicht. Um beispielweise den Hub ($s = 2 \cdot r$) oder das Bewegungsprofil bei laufendem Betrieb verändern zu können, bedarf es einer aufwendigen mechanischen Konstruktion. Dies ist, wie oben dargelegt, für eine definierte Stechbewegung erforderlich.

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich daher mit der Frage, ob die lineare, repetierende Bewegung weniger umständlich, ohne starre kinematische Bindungen realisiert werden kann, d. h. mit der Möglichkeit, beliebige Bewegungsprofile zu erzeugen und diese Profile regelungstechnisch bei wechselnden Systemeigenschaften sowie äußeren Einflüssen, wie beispielsweise der Elastizität der Haut, zu kontrollieren.

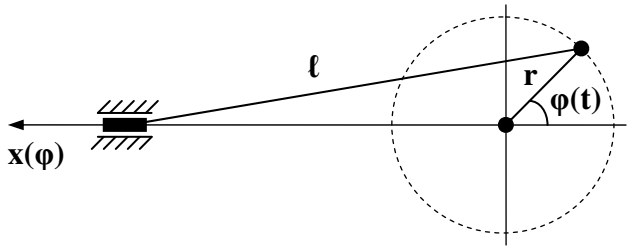

Abbildung 1-3 Schematische Darstellung des Kurbeltriebprinzips

$$x(\varphi) = \sqrt{\ell^2 - r^2 \cdot \sin^2(\varphi)} - r \cdot \cos(\varphi) \approx \ell - r \cdot \cos(\varphi) \quad \text{wenn } r << \ell \qquad \textbf{(1-1)}$$

$$\dot{x}(\varphi) \approx \dot{\varphi} \cdot r \cdot \sin(\varphi) \qquad \textbf{(1-2)}$$

1.3 Stand der Technik

Es sind mehrere Schwingaktoren bekannt, welche entsprechend dem Zug-, bzw. Tauchanker- sowie Tauchspulenprinzip arbeiten. Das Tauchspulenprinzip wird beispielsweise beim Lautsprecherbau verwendet und nutzt die Lorentzkraft. Basierend auf dem Reluktanzprinzip funktionieren die Zug- sowie Tauchankeraktoren. Das Prinzip kommt auch bei linearen Schrittmotoren zum Einsatz. Sowohl die Lautsprecher als auch die linearen Schrittmotoren wurden für spezielle Anwendungen ausgelegt und sind somit für die Realisierung einer linearen, repetierenden Stechbewegung ungeeignet. Bei den Lautsprechern strebt man eine große Bandbreite und einen linearen Frequenzgang an, was eine möglichst leichte, bewegliche Spule erfordert. Dabei sind nur geringe Kräfte erzielbar, geht man von einem begrenzten Bauraum aus. Die linearen Schrittmotoren wurden für die Positionierung entwickelt und eignen sich wegen ihrer schlechten dynamischen Eigenschaften nicht für schnelle repetierende Bewegungen.

Schwingaktoren werden vorwiegend bei Sieb- oder Rütteltischen sowie bei Schwingmühlen in Fabrikanlagen oder als Antriebe für Werkzeuge wie Sägen oder Feilen eingesetzt [Fec51], [Gre44], [Soh53], [Wey54]. Es handelt sich meist um nach dem Zug-, bzw. Tauchankerprinzip arbeitende lineare Schwingaktoren, siehe Abbildung 1-4 sowie 1-5. Bekannt sind auch Anwendungen solcher Aktoren in Rasierapparaten [Bra11], siehe Abbildung 1-6.

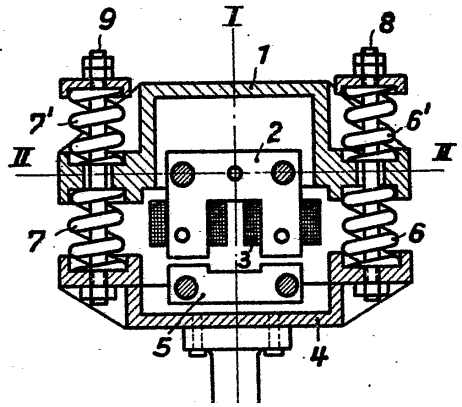

Abbildung 1-4 Elektromagnetischer Schwingaktor entsprechend dem Zugankerprinzip [Gre44]

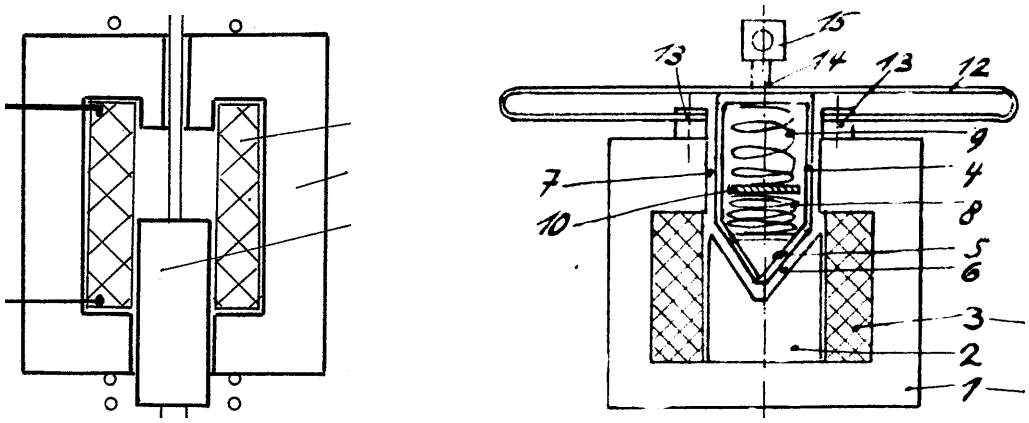

Abbildung 1-5 Elektromagnetische Schwingaktoren, Tauchankerprinzip [Soh53] (links), [Fec51] (rechts)

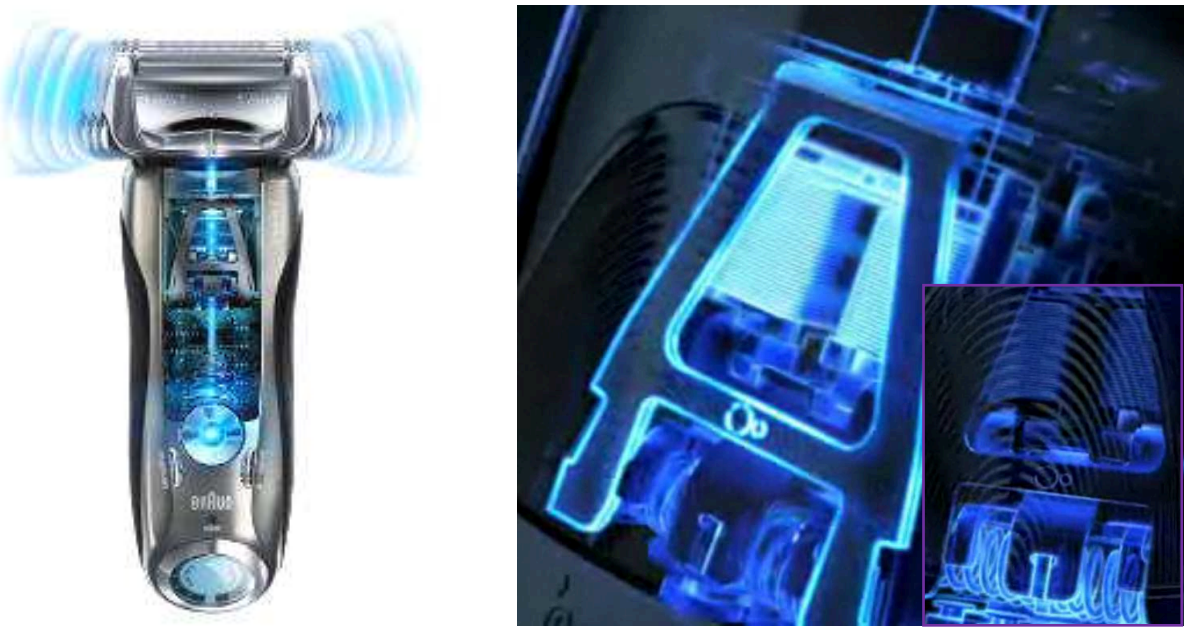

Abbildung 1-6 Anwendung eines Schwingaktors in einem Rasierapparat [Bra11]

Analysiert man die Bewegungsgleichung (1-1) sowie (1-2) eines Kurbeltriebs, siehe Abbildungen 1-7, sind vier Positionen des Läufers in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ(t) festzustellen, an denen der Läufer eine maximale, bzw. minimale Geschwindigkeit in x-Richtung aufweist. Wird der Kurbeltrieb von einem Gleichstrommotor angetrieben, wirken aufgrund der Hebelwirkung unterschiedliche Kräfte auf den Läufer. Wie man der Abbildung 1-7 entnehmen kann, wirkt zum Zeitpunkt der größten Geschwindigkeit eine minimale Kraft auf den Läufer. An den Wendepunkten dagegen, wo die Läufergeschwindigkeit in x-Richtung Null ist, wirkt eine maximale beschleunigende Kraft auf ihn.

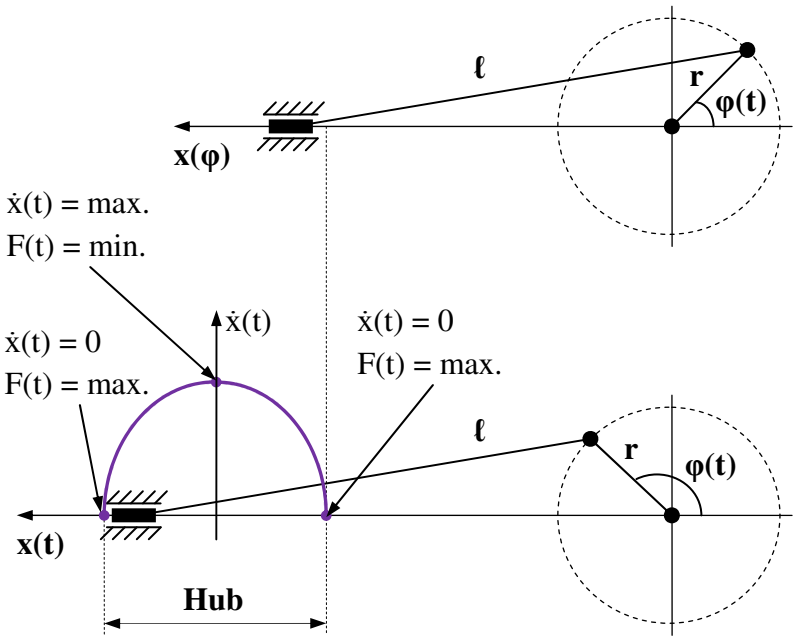

Abbildung 1-7 Analyse eines Stechaktors, basierend auf dem Kurbeltriebprinzip

Die Abbildung 1-8 zeigt den Stechaktor entsprechend dem Kurbeltriebprinzip. Diese Stechaktoren finden üblicherweise Anwendung in den Pigmentier-, bzw. Tätowier-Systemen. Erwähnt sei noch das Taumelscheibenprinzip, was in [Lüc05] neben anderen Ansätzen zur repetierenden Stechbewegung ausführlich beschrieben wurde. Das Taumelscheibenprinzip wird bei den gleichstrommotorbetriebenen Stechaktoren verwendet. Jedoch wird es aufgrund der starren Kinematik nicht mehr bei weiteren Betrachtungen berücksichtigt.

Ein Beispiel für eine auf dem Markt erhältliche pneumatische Tattoo-Maschine ist in der Abbildung 1-8 dargestellt, linkes Bild. Durch den mittels eines Kompressors erzeugten Luftdruck wird ein Kreisel in Rotation versetzt, welcher die Kurbel antreibt und dadurch eine repetierende Stechbewegung erzeugt. Das rechte Bild zeigt eine gleichstrommotorbetriebene Tätowiermaschine, welche nach dem Kurbeltriebprinzip arbeitet. Bei diesen Stechaktoren besteht aufgrund einer starren Kinematik kein Abschwächen der Schwingungsamplitude, wie es bei anderen Antriebsprinzipien, z. B. Piezo-, Zuganker- und Tauchanker- oder Tauchspule-Antrieben, der Fall ist.

Abbildung 1-8 Eine pneumatische Tattoo-Maschine von Neuma Tattoo Machines [Neu11] (links) und gleichstrommotorbetriebene Maschine von Cheyenne [Che12] (rechts)

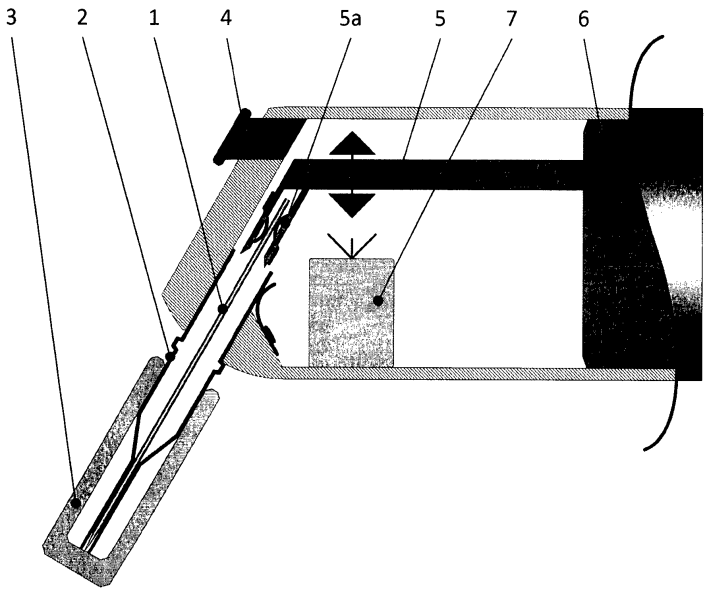

Abbildung 1-9 Pigmentierhandstück von Shadin Cosmetic Technology [Bla10], Piezo-Antrieb

Ein piezoangetriebener Stechaktor wurde von [Bla10] angegeben. Die Abbildung 1-9 zeigt den Piezo-Antrieb (6), den Sensor (7) für die Positionsmessung des Antriebsarms (5) und eine Nadel (1). Dieser Stechaktor ermöglicht jedoch nur eine sehr geringe Schwingungsamplitude von ca. 0,3 mm und Schwingungsfrequenzen im Bereich von wenigen Hertz bis zu einigen Kilohertz, je nach Resonanzfrequenz des Piezoelements. Neben den großen Stellkräften ermöglicht ein piezoangetriebener Schwingaktor dank seinen dynamischen Eigenschaften auch eine schnelle und präzise Regelung der Schwingungsamplitude (µm- bis nm-Bereich), was allerdings mit einer hoher Energieaufnahme verbunden ist. Je nach Elastizität des Antriebsarms und aufgrund der kinematischen Kopplung des Stechmittels (Nadel) mit dem Piezo-Erreger ist bei diesem Stechaktor keine, bzw. nur eine begrenzte Abschwächung der Schwingungsamplitude in Abhängigkeit vom Hautwiderstand möglich.

Piezo- und andere Antriebsprinzipien sowie Aktoren, wie z. B. elektrostatische, pneumatische und Ultraschall-Aktoren und deren Funktionsweise sind in [Hin07] aufgeführt. Sie können möglicherweise als Schwingaktoren aufgebaut werden, sind jedoch für eine schnelle Stechbewegung ungeeignet, bzw. benötigen externe Hilfsvorrichtungen (Kompressoren bei Pneumatik-Aktoren).

Bei einem Stechaktor entsprechend dem Zugankerprinzip (siehe Abbildung 1-10) sind ähnliche Geschwindigkeitsverläufe wie beim Kurbeltrieb zu beobachten. Jedoch sind die wirkenden Kräfte an den Wendepunkten und zum Zeitpunkt der größten Geschwindigkeit im Vergleich zum Kurbeltrieb anders. Ein solcher Aufbau ist bei konventionellen Tattoo-Spulenmaschinen üblich, siehe Abbildung 1-11.

Die Bewegung des Zugankers wird auf die Tattoo-Nadeln übertragen. Mittels einer mit der Bewegung des Zugankers synchronisierten Kontaktierung, die einstellbar ist, wird der Stromfluss in der Spule unterbrochen, wenn sich der Zuganker etwa in der mittleren Lage befindet. Genau zu diesem Zeitpunkt wirkt die größte magnetische Kraft, dabei weist der Zuganker, bzw. die Nadel eine maximale Geschwindigkeit auf.

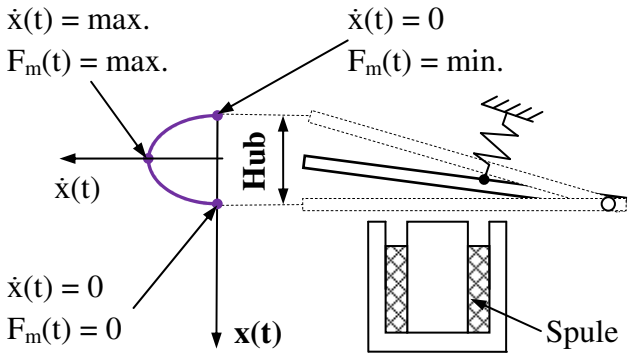

Abbildung 1-10 Analyse eines Stechaktors, welcher dem Zugankerprinzip entspricht

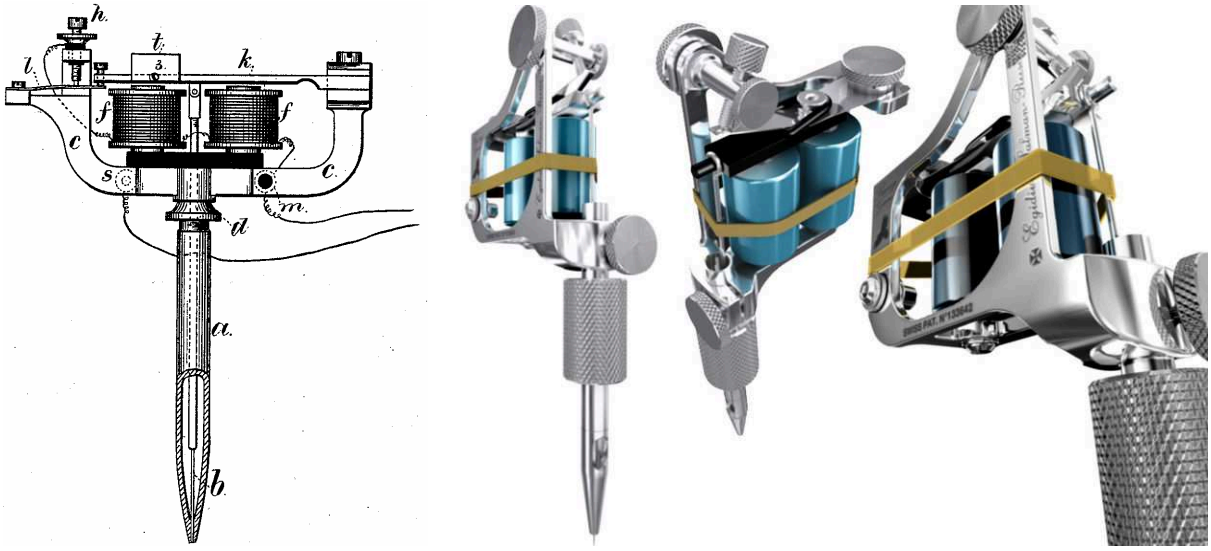

Abbildung 1-11 Edisons elektrischer Stift oder Gravierfräsmaschine (links) [Edi77] und eine moderne Tattoo-Spulenmaschine (rechts) [Pel08]

Infolge der justierbaren Abkopplung des Zugankers von der beschleunigenden magnetischen Kraft steht für die Stechbewegung nur die Trägheit der Zugankermasse zur Verfügung. Jede Art von Störung, z. B. durch die Einstechbewegung (wegen der Hautelastizität), führt zu einer nicht von vornherein bestimmbaren Reaktion der Schwingungsamplitude, die in der Regel geschwächt wird.

Die kinematische Abkopplung des Zugankers, bzw. der Nadel vom Erregungserzeuger (Spule) ermöglicht eine Abschwächung der Schwingungsamplitude in Abhängigkeit von der Belastung, was bei den Schattierungen (eine spezielle Tattoo-Technik, welche die Auffüllung der Hautfläche in unterschiedlichen Graustufen oder Farbintensitäten mit Farbpigmenten bedeutet, siehe Abbildung 2-59) einen entscheidenden Vorteil gegenüber den gleichstrommotorbetriebenen Tattoo-Maschinen darstellt.

Wegen dieser Besonderheit werden Spulenmaschinen seit mehr als 120 Jahren, ausgehend von Edison's Erfindung des elektrischen Stifts - einer Gravierfräsmaschine, welche als Grundmodell für Samuel O'Reilly's erste elektrische Tattoo-Maschine diente [O'Re91], heute immer noch beim Tätowieren eingesetzt und gelten als Standardwerkzeug mit traditionsreicher Geschichte.

Der Nachteil der auf dem Zugankerprinzip basierenden Schwingaktoren liegt in der Nichtlinearität des Kraft-Weg-Gesetzes: $F_m(x) \sim 1 / x^2$. Dementsprechend ist ein solcher Schwingaktor ein nichtlineares, schwingendes System, welches analytisch schwer zu untersuchen ist. Die Lösung hierfür besteht in der Anwendung einer nichtlinearen Feder, was der Gegenstand von einigen Patentschriften ist, z. B. [Göt52]. Außerdem verringert sich die magnetische Kraft mit der Vergrößerung des Luftspalts, dies führt dazu, dass die Schwingungsamplitude begrenzt ist.

Bei den Schwingaktoren, die entsprechend dem Tauchankerprinzip (siehe Abbildung 1-5) aufgebaut sind, besteht ebenfalls ein nichtlineares Kraft-Weg-Gesetz. Des Weiteren wirkt die magnetische Kraft sowohl bei den Zug- als auch den Tauchankerprinzip entsprechenden Schwingaktoren nur in eine Richtung, unabhängig von der Bestromung der Magnetspule. Dies wird ausgenutzt, um solche Schwingaktoren direkt von der 50-Hz-Netzspannung mit doppelter resultierender Schwingungsfrequenz (100 Hz) des Zug-, bzw. Tauchankers zu betreiben. Ab sehr viel größeren Erregerfrequenzen sind jedoch keine, bzw. nur geringe Schwingungen des Zug-, bzw. Tauchankers aufgrund der im Weicheisen stattfindenden Ummagnetisierungsvorgänge und Wirbelstromverluste möglich. Ferner wirkt sich die wegen des Eisenkerns große Spuleninduktivität negativ auf eine eventuelle Regelung der Schwingungsamplitude aus. Je größer die Induktivität, desto schlechter wird die Stromdynamik. Eine schnelle Regelung setzt jedoch eine schnelle Stromänderung voraus.

Ein Stechaktor entsprechend dem Tauchankerprinzip ist beispielsweise im Bereich des Permanent-Make-Ups (PMU) bekannt, siehe Abbildung 1-12.

Abbildung 1-12 Pigmentierhandstück, Long-Time-Liner® [Lon11], Tauchankerprinzip

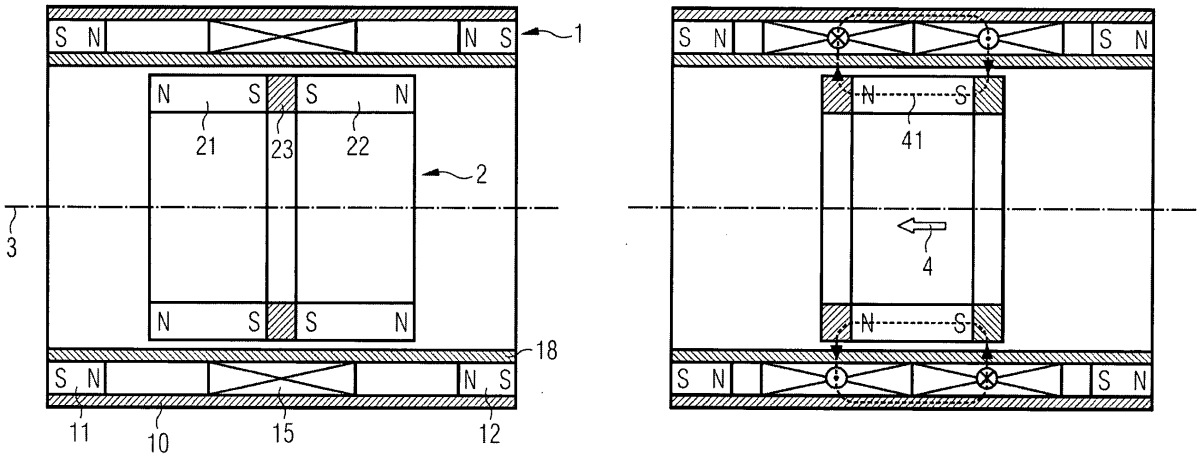

Abbildung 1-13 Linearaktor mit einer Spule und zwei Permanentmagneten (links), bzw. mit zwei Spulen und einem Permanentmagneten (rechts) [Vog11b]

Die Abbildung 1-13 zeigt die Ausführung eines elektrodynamischen, linearen Aktors, welcher bei weiteren Betrachtungen als Grundmodell dient, siehe Kapitel 2.2.2, 2.2.4 sowie Kapitel 3. Ein solcher linearer Aktor kann für die Positionierung von Linsengruppen in einem Endoskop oder in einer Fotokamera eingesetzt werden [Vog11b]. Ein als Läufer ausgebildeter Permanentmagnet (21) wird axial in einem Käfig (10) aus einem weichmagnetischen Werkstoff gelagert. Der Magnet weist Polschuhe (23) zum Bündeln des Magnetfelds auf. Mittels einer im Käfig positionierten Spule (15) wird der Permanentmagnet nach links, bzw. nach rechts ausgelenkt, wenn der elektrische Strom durch die Spule fließt. Die Auslenkrichtung ist von der Stromrichtung abhängig.

Die auf den Magneten wirkende Kraft ist dabei die Lorentzkraft:

$$F_L = I \cdot B \cdot \ell \qquad \textbf{(1-3)}$$

Hier ist I der elektrische Strom, B die resultierende magnetische Induktion im Luftspalt und ℓ die wirksame, sich im Magnetfeld befindende Drahtlänge. Das Magnetfeld kann verstärkt werden, indem man zwei Permanentmagnete in Reihe zusammenfügt, siehe Abbildung 1-13 links. Bei dem Aufbau sowohl mit einem als auch mit zwei Permanentmagneten ist der Verfahrweg des Läufers durch die Breite der Spule begrenzt. Um die Positionierung zu ermöglichen, ist eine Kraft erforderlich, die der Lorentzkraft entgegen wirkt. Diese Gegenkraft kann entweder mittels einer Druckfeder oder einer Magnetfeder realisiert werden. Wie die Abbildung 1-13 zeigt, dienen zwei Permanentmagnete (11) und (12) als Magnetfeder. Somit lässt sich ein solcher linearer Aktor ebenfalls als Schwingaktor einsetzen.

Grundsätzlich kann jedes Masse-Feder-System als ein Schwingaktor betrachten werden, welcher sich zu einem Stechaktor ausbilden lässt. Aus diesem Grund bleibt die Auflistung der Aktorprinzipien und kommerziell erhältlichen Schwing-, bzw. Stechaktoren unvollständig. Der Unterschied bei einzelnen Schwingaktoren besteht in der Art der Erregerkraft, sei es eine elektromagnetische, elektrostatische, pneumatische oder eine auf dem Piezo-Effekt basierende Kraft sowie in der Komplexität des Aktoraufbaus und in der Möglichkeit, die erzeugte oszillierende Bewegung gezielt zu steuern und zu regeln.

Neben den linearen Schwingantrieben existiert noch eine ganze Reihe von Torsionsschwingaktoren, z. B. [Mon76], die zum Antreiben eines optischen Abtasters oder in einem Pigmentier-, bzw. Tätowier-System mit Hilfe einer kinematischen Umsetzung, beispielsweise mittels einer Taumelscheibe wiederum als linearer Schwingaktor verwendet werden können.

Theorien haben vier Akzeptanzstufen:

I. Das ist bedeutungsloser Unsinn;
II. das ist interessant, aber verschroben;
III. das stimmt, ist aber unwichtig;
VI. hab ich doch immer gesagt!

J.B.S. Haldane

2 Linearer Schwingaktor - Linear oscillating drive (LOD)

Der Ansatz bei den Überlegungen zur Nutzung eines Schwingaktors bestand darin, die Trägheit der schwingenden Masse zur Überwindung des Hautwiderstands beim Stechen zu nutzen. Dabei wird die Kraft, die zur Erregung der Schwingungen erforderlich ist, geringer als die Kraft, welche zur Überwindung der Hautelastizität nötig ist. Natürlich kann auch ein anderes Medium durchstochen werden.

Um eine repetierende Bewegung am effizientesten zu erzeugen, wird eine Eigenschaft des schwingenden Systems zu Nutze gemacht: die Resonanz.

Die Schwingungen eines mechanischen Systems entstehen durch Energieumwandlung. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich mechanische, oszillierende Systeme behandelt, bei denen die Schwingungen aufgrund der Umwandlung potenzieller Energie in kinetische Energie zu Stande kommen. Ein Repräsentant dafür ist ein Masse-Feder-System.

2.1 Mechanisches Modell

Ein linearer Schwingaktor lässt sich als Ein-Massen-Schwinger ausführen. Er wird durch ein mechanisches Modell entsprechend der Abbildung 2-1 schematisch dargestellt. Die Masse m wird mittels äußerer Kraft F(t) zum Schwingen angeregt. Neben der Masse bestimmen auch die Eigenschaften der Feder sowie des Dämpfers die Eigenfrequenz des Systems. Es wird angenommen, dass die Bewegung der schwingenden Masse durch die Luft gedämpft ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die dämpfende Kraft der Geschwindigkeit der Schwingmasse direkt proportional ist. Bei analytischen Untersuchungen werden die Reibung sowie die Federverluste vernachlässigt, außerdem wird die Feder als masselos angenommen.

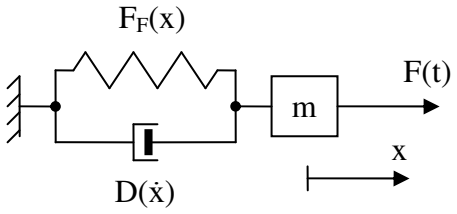

Abbildung 2-1 Schematische Darstellung des mechanischen Modells

In Wirklichkeit haben die Reibung und die Federverluste Einfluss auf die Übertragungsfunktion des mechanischen Systems. Zudem ist die Feder nicht masselos, was neben der Dämpfung eine Auswirkung auf die Resonanzfrequenz hat. Die Dämpfung, z. B. Luftdämpfung, kann nur ansatzweise analytisch bestimmt werden. Das erschwert die Ermittlung der Übertragungsfunktion, welche die Systemeigenschaften beschreibt. Die einzige Möglichkeit, die Übertragungsfunktion des realen mechanischen Systems zu ermitteln, ist die experimentelle Untersuchung des Systemverhaltens anhand dem Bodediagramm, mittels Aufstellung und Analyse des Frequenzgangs. Darüber mehr im Kapitel 2.7.2.

2.1.1 Lineares System

Zunächst wird ein lineares mechanisches System untersucht. Dabei weisen die Feder sowie der Dämpfer entsprechend der Abbildung 2-1 lineare Kennlinien auf. Eine lineare Feder ist durch ein Kraft-Weg-Gesetz

$$F_F(x) = c \cdot x \qquad c = \text{konstant} \tag{2-1}$$

definiert. Die harmonische Natur der Erregerkraft, $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$, ist eine weitere Voraussetzung für ein lineares Verhalten des Systems.

Um die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems zu erstellen, bedient man sich des Lagrange-Formalismus der analytischen Mechanik. Bei einem mechanischen System entsprechend der Abbildung 2-1, welches wegen der starren Bindungen nur einen Freiheitsgrad x und eine lineare Federkennlinie hat, gilt die Langrage-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx} = -\frac{dP}{dx} - \frac{dD}{d\dot{x}} + F(t) \tag{2-2}$$

Hier sind

$T = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2}$ kinetische Energie der Masse

$P = \frac{c \cdot x^2}{2}$ potentielle Energie der Feder

$D = \frac{d \cdot \dot{x}^2}{2}$ Dissipativfunktion der Luftdämpfung

$F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$ äußere Erregerkraft

Setzt man die kinetische und potentielle Energie sowie die Dissipativfunktion und Erregerkraft in (2-2) ein, erhält man die klassische Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems:

$$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = F_0 \cdot \cos(\Omega t) \tag{2-3}$$

Den vollständigen Lösungsweg findet man im Kapitel 8.1.

Mit dem Lösungsansatz

$$x(t) = x_h + x_p \tag{2-4}$$

wobei

$$x_h = C \cdot e^{\lambda t} \tag{2-5}$$

die Lösung der homogenen Gleichung (2-4) und

$$x_p = \tilde{A} \cdot e^{j\Omega t} \tag{2-6}$$

eine partikuläre Lösung darstellt, erhält man die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung (2-3)

$$x(t) = \underbrace{e^{-kt} \cdot \left[A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)\right]}_{\text{Einschwingverhalten}} + \frac{F_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}} \tag{2-7}$$

Hier bedeuten

$$k = \frac{d}{2 \cdot m} \tag{2-8}$$

die Abklingkonstante und

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2} \tag{2-9}$$

die Eigenkreisfrequenz des gedämpften sowie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{2-10}$$

die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems.

Mit den Konstanten A und B lässt sich die allgemeine Lösung (2-7) der Bewegungsgleichung (2-3) an beliebige Anfangsbedingungen anpassen. Für ein zum Zeitpunkt t = 0 ruhendes System gelten die Anfangszustände $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$. Somit lautet die vollständige Lösung:

$$x(t) = F_0 \cdot \frac{\cos(\Omega t - \varphi) - \chi(k, t)}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}} \tag{2-11}$$

wobei der Ausdruck

$$\chi(k, t) = e^{-kt} \cdot \left[\left(\cos(\omega t) + \frac{k}{\omega} \cdot \sin(\omega t)\right) \cdot \cos(\varphi) + \frac{\Omega}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi)\right]$$

das Einschwingverhalten gekennzeichnet. Nach einiger Zeit klingt die Einschwingkomponente in (2-11) aufgrund der Dämpfung ab, das System ist im eingeschwungenen Zustand. Für diesen Fall gilt:

$$x(t) = \frac{F_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}} \qquad \textbf{(2-12)}$$

Die Größe

$$\varphi = \arctan\left(\frac{d\Omega}{c - m\Omega^2}\right) \qquad \textbf{(2-13)}$$

stellt die Phasenverschiebung zwischen der harmonischen Erregerkraft und den erzwungenen Schwingungen des mechanischen Systems entsprechend der Abbildung 2-1 dar. Die Gleichung (2-12) zeigt, dass ein Ein-Massen-Schwinger auf eine harmonische Erregung mit der Frequenz des Erregers antwortet.

Die Abbildung 2-2 demonstriert die Erregerkraft sowie die erzwungene Schwingung. Aufgrund einer großen Dämpfungskonstante dauert hier der Einschwingvorgang nur eine kurze Zeit. Die Phasenverschiebung von etwa $\pi / 2$ zeigt, dass das System in Resonanz betrieben wird.

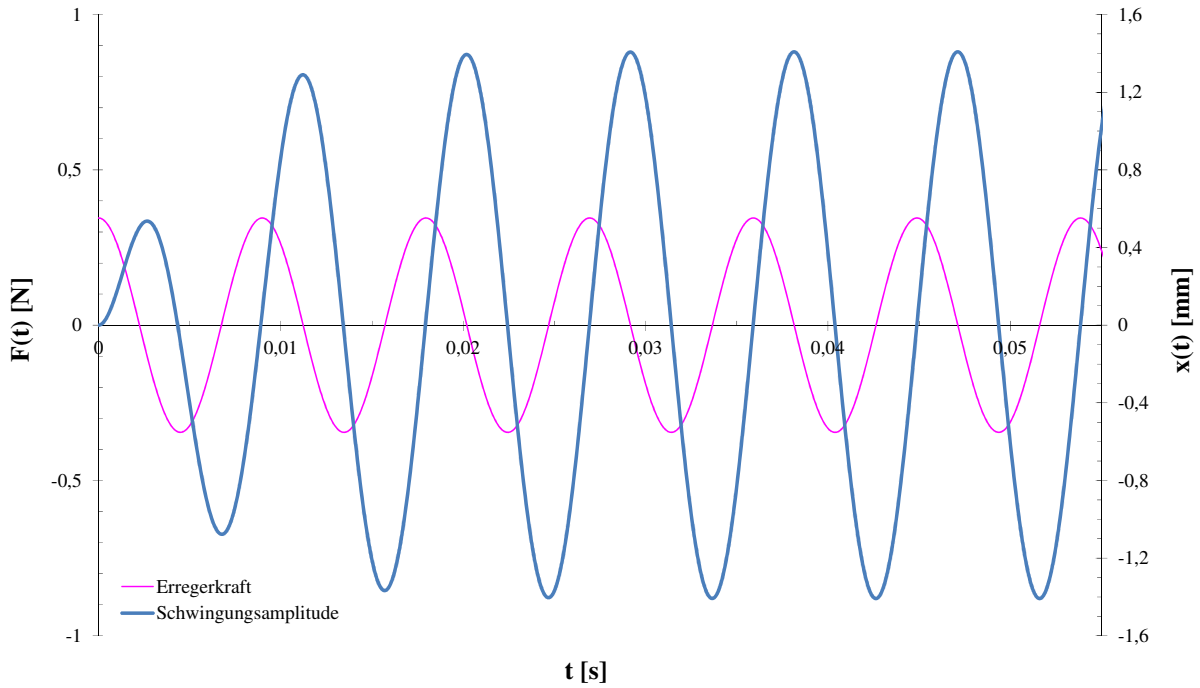

Abbildung 2-2 Verlauf der Erregerkraft sowie der Amplitude der erzwungenen Schwingungen

Die Gleichung (2-12) weist bei der Resonanzfrequenz Ω_{res}

$$\Omega_{res} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{d^2}{2 \cdot m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2} \qquad \textbf{(2-14)}$$

welche sich in der Nähe der Eigenfrequenz ω des gedämpften Systems befindet, ein Maximum auf. Subtrahiert man die quadrierte Gleichung (2-14) von der quadrierten Gleichung (2-9), so zeigt sich der Unterschied der Resonanzfrequenz Ω_{res} der erzwungenen Schwingungen von der Eigenfrequenz ω des gedämpften Systems:

$$\omega^2 - \Omega_{res}^2 = k^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Omega_{res} = \sqrt{\omega^2 - k^2} \qquad \textbf{(2-15)}$$

Ist das System ungedämpft (d = 0), so schwingt es bei einer Resonanzfrequenz, die exakt der Eigenfrequenz ω_0 entspricht, mit einer bis ins Unendliche wachsenden Amplitude. Ist aber das mechanische System gedämpft und die Schwingmasse sehr groß:

$$m > (5 \text{ bis } 50) \cdot \frac{d}{\omega_0}$$

so schwingt das System bei $\Omega_{res} \approx \omega_0$ mit einer endlichen Amplitude, und die Schwingungen sind um $\varphi \approx \pi / 2$ zur Erregerkraft zeitlich verschoben. Dies folgt unmittelbar aus (2-13) und (2-15), wenn man in diese Gleichungen für die Masse das obige Verhältnis einsetzt.

In der Abbildung 2-3 ist der zeitliche Einschwingverlauf für den Resonanzfall im Phasenraum $(x, \dot{x})$ dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich das System nach weniger als drei Schwingungen im eingeschwungenen Zustand befindet.

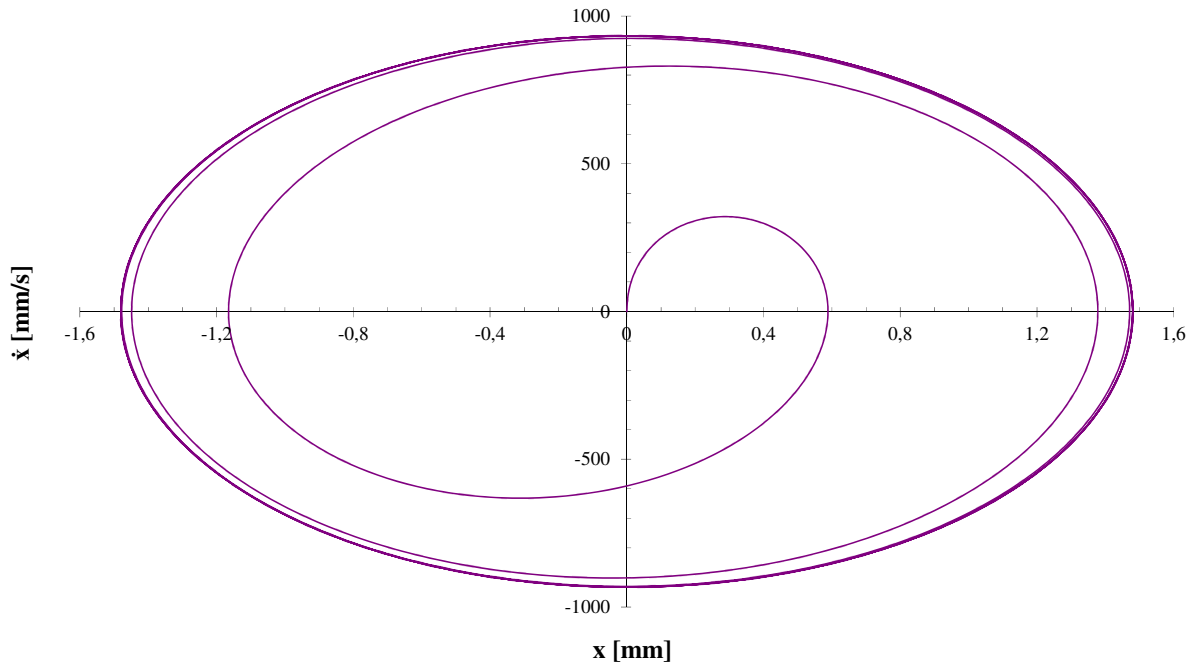

Abbildung 2-3 Phasenraumdarstellung, Einschwingverhalten im Resonanzfall

Die Abbildung 2-4 zeigt den zeitlichen Verlauf der Erregerkraft sowie der erzwungenen Schwingungen für den Resonanzfall sowie für niederfrequente Anregungen. Es sind die unterschiedlichen Phasenverschiebungen zu erkennen: ein mit einer tiefen Frequenz erregtes System schwingt in Phase mit der Erregung (dunkelrote Linien), im Resonanzfall beträgt die Phasenverschiebung ca. 90 Grad.

Wird das System mit einer Frequenz, die unterhalb der Resonanzfrequenz liegt, zu Schwingungen erregt, so benötigt der Einschwingvorgang bei kleiner Erregerfrequenz sogar weniger Schwingungen als bei der Resonanz, siehe Abbildung 2-5.

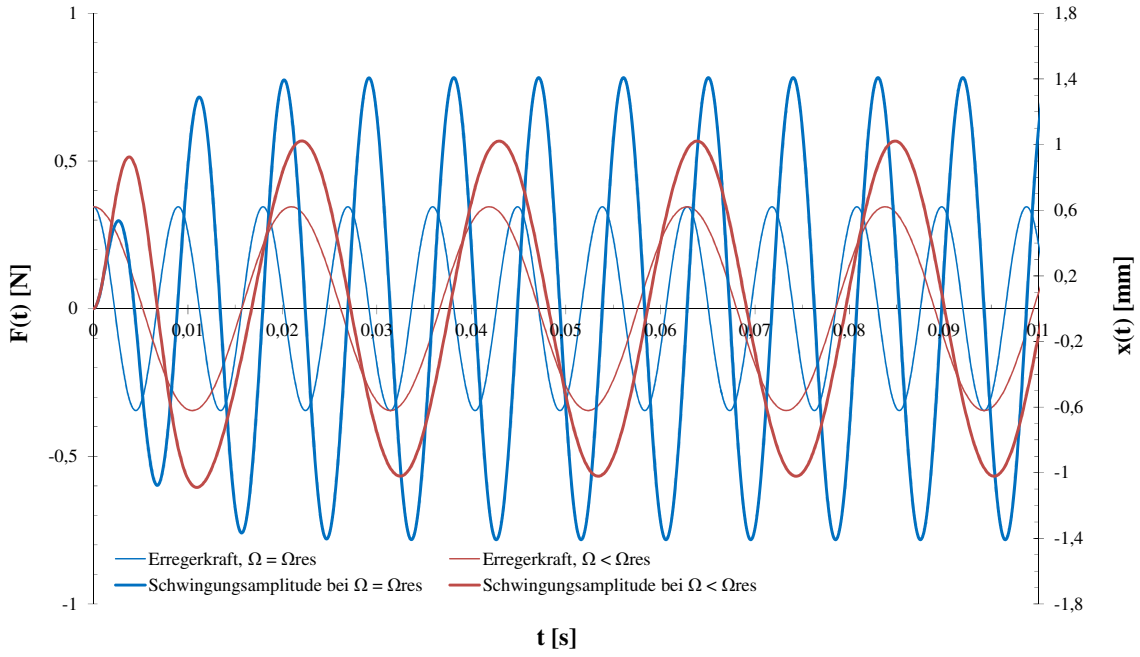

Abbildung 2-4 Phasenverschiebung zwischen F(t) und Schwingungsamplitude bei $\Omega = \Omega_{res}$, $\Omega < \Omega_{res}$

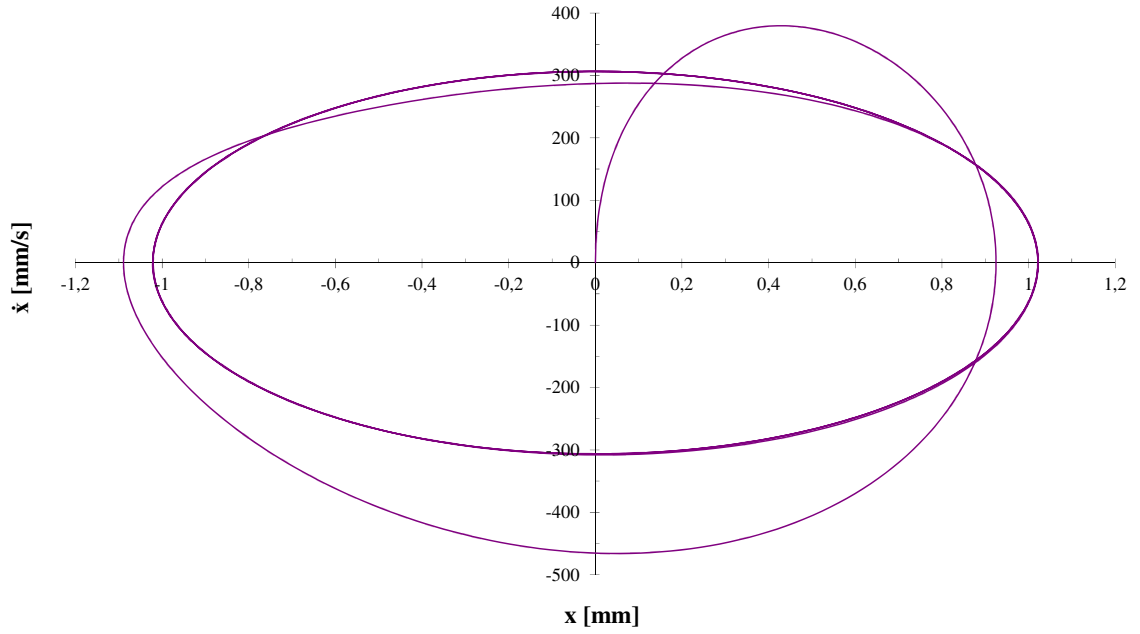

Abbildung 2-5 Phasenraumdarstellung für den Fall $\Omega < \Omega_{res}$

Da die Einschwingzeit eines Systems konstant ist, siehe Gleichung (2-7), benötigt es im Fall einer hochfrequenter Erregung ($\Omega > \Omega_{res}$) deutlich mehr Schwingungen, um den eingeschwungenen Zustand zu erreichen. Die Abbildung 2-6 zeigt, dass sich das System erst nach fünf bis sieben Schwingungen im eingeschwungenen Zustand befindet.

Betrachtet man den Ausdruck für die Abklingkonstante (2-8) sowie die Gleichung (2-7), wird deutlich, dass bei kleiner Dämpfungskonstante d und großer schwingender Masse die Einschwinglösung in (2-11) langsam abklingt und das System mehr Zeit braucht, um einzuschwingen.

Die Abbildungen 2-5 und 2-6 zeigen auch, dass ein mechanisches, schwingendes System auf unterschiedliche Frequenzen mit verschiedenen Amplituden antwortet. Diese Reaktion des Systems auf äußere Einflüsse wird durch die Übertragungsfunktion dargestellt.

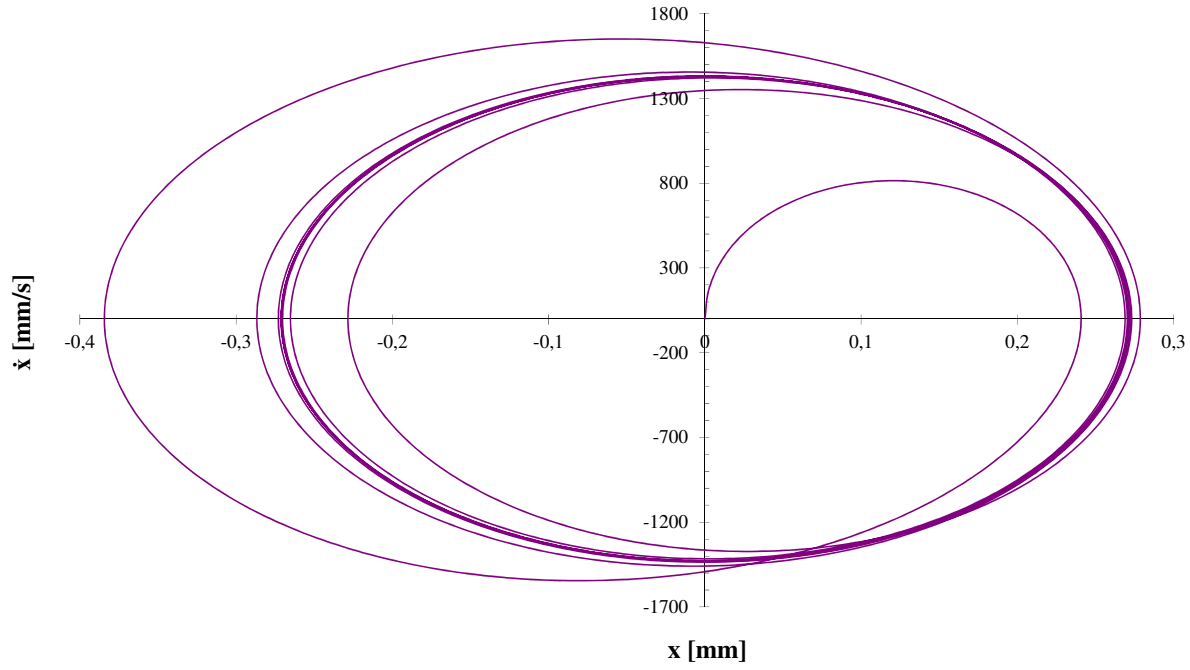

Abbildung 2-6 Geschwindigkeitsprofil für den Fall $\Omega > \Omega_{res}$

Die Gleichung (2-11) kann in eine einheitliche Form gebracht werden:

$$x(t) = \underbrace{H(\Omega)\cdot F_0}_{=x_0}\cdot\cos(\Omega t - \varphi) \qquad \textbf{(2-16)}$$

Der Ausdruck

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}} \qquad \textbf{(2-17)}$$

wird als Übertragungsfunktion eines mechanischen, schwingenden Systems bezeichnet.

Die Übertragungsfunktion charakterisiert die Systemeigenschaften. Kennt man die Übertragungsfunktion, so lässt sich das Verhalten eines Systems beschreiben. Die Verfahren zur experimentellen Ermittlung der Übertragungsfunktion werden im Kapitel 2.7.2 beschrieben.

In der Abbildung 2-7 ist die Übertragungsfunktion oder der Frequenzgang eines mechanischen Systems entsprechend der Abbildung 2-1 dargestellt. Die Dämpfung schwächt nicht nur die Schwingungsamplitude und vergrößert die Bandbreite $\Delta\Omega$, sondern verschiebt auch die Resonanzfrequenz um

$$2k^2 = \omega_0^2 - \Omega_{res}^2, \quad k = \frac{d}{2 \cdot m}$$

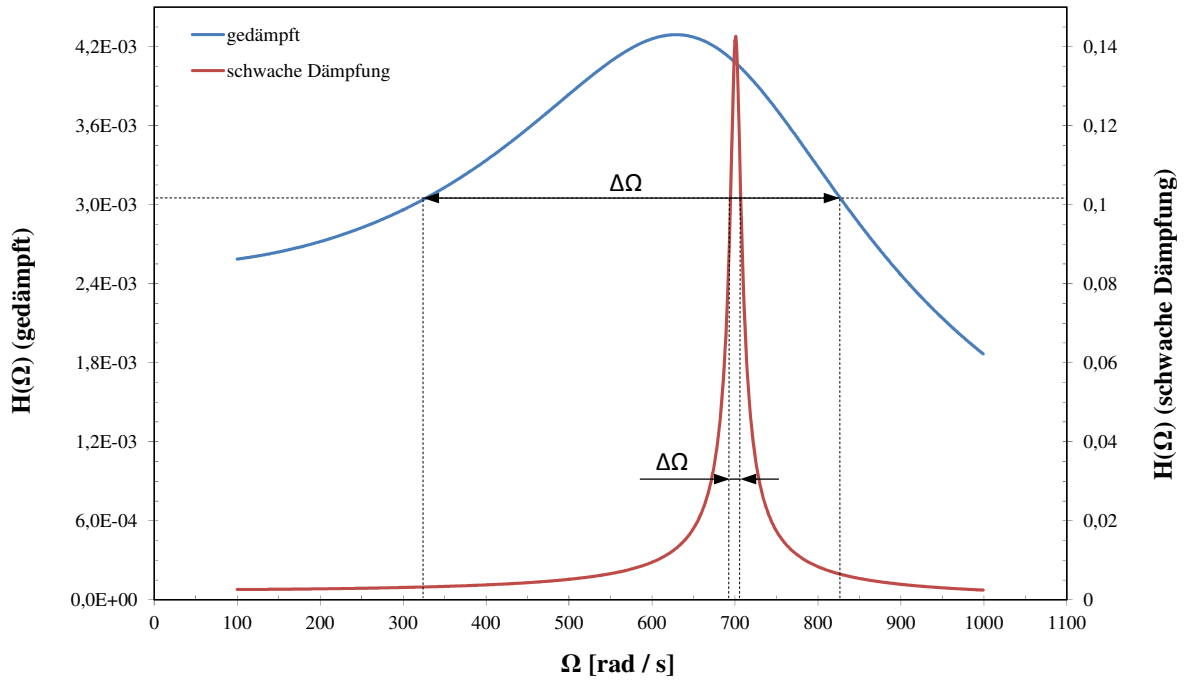

Abbildung 2-7 Frequenzgang und die Bandbreite eines stark und schwach gedämpften Systems

Definiert man zwei Kreisfrequenzen, bei denen die Übertragungsfunktion

$$H_{hw} = \frac{H_{res}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{d\omega\sqrt{2}}$$

wird (Halbwertsbreite genannt), als untere

$$\Omega_{g,u} = \sqrt{\Omega_{res}^2 - 2k\omega} \approx (\omega - k) \qquad \textbf{(2-18)}$$

und obere

$$\Omega_{g,o} = \sqrt{\Omega_{res}^2 + 2k\omega} \approx (\omega + k) \qquad \textbf{(2-19)}$$

Grenzfrequenzen, so bezeichnet man die Differenz aus oberer und unterer Grenzfrequenz als Bandbreite des betrachteten Systems:

$$\Delta\Omega \;=\; \Omega_{g,o} - \Omega_{g,u} \;\approx\; 2 \cdot k \;=\; \frac{d}{m} \qquad \textbf{(2-20)}$$

Des Weiteren gilt

$$\Omega_{g,o} \cdot \Omega_{g,u} \approx\; \Omega_{res}^2 \qquad \textbf{(2-21)}$$

Detaillierte Rechnungsschritte finden sich im 8. Kapitel, Abschnitt 8.2.

Die Bandbreite ist definiert als der Frequenzbereich, an dessen Grenzen sich die Größe der zu analysierenden Funktion um den Faktor $1/\sqrt{2}$ im Vergleich zu ihrem maximalen Wert geändert hat. In der Elektrotechnik entspricht diese Änderung in logarithmischer Darstellung 3 dB, was aus dem Verhältnis der Quadrate zweier Effektivwerte hervorgeht:

$$10 \cdot \log \frac{\tilde{x}_2^2}{\tilde{x}_1^2} \;=\; 20 \cdot \log \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} \;=\; 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{2}} \;\approx\; 3\,\text{dB}$$

Im vorliegenden Fall ergibt ein Direktvergleich der Übertragungsfunktion eines Systems im Resonanzfall mit der Halbwertsbreite:

$$10 \cdot \log \frac{H_{hw}}{H_{res}} \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \log \frac{H_{res}}{H_{res} \cdot \sqrt{2}}$$

was etwa 1,5 dB entspricht.

In Analogie zur Elektrotechnik [Cla07] kann der Formalismus der Schwingkreisanalyse auch auf ein schwingendes, mechanisches System angewandt und die Güte sowie die Bandbreite eines Masse-Feder-Systems definiert werden. Als Güte bezeichnet man den reziproken Wert des Verlustfaktors:

$$Q = \frac{1}{d} \qquad \textbf{(2-22)}$$

Je kleiner die Dämpfung, desto größer ist die Güte, die Resonanzkurve wird schmaler und die Frequenzselektivität eines schwingenden Systems nimmt zu. Ein solches System kann als mechanischer Filter betrachtet werden: auf äußere Einflüsse, die unterhalb oder oberhalb seiner Resonanzfrequenz liegen, reagiert das System umso schwächer, je stärker seine Selektivität ausgeprägt ist.

Die Güte eines Systems lässt sich auch als Verhältnis der Resonanzfrequenz Ω_{res} zu der Bandbreite $\Delta\Omega$ charakterisieren:

$$Q = \frac{\Omega_{res}}{\Delta\Omega} \qquad \textbf{(2-23)}$$

Die Bandbreite ist demnach der Dämpfung direkt proportional, was aus der Definition (2-22) und dem Verhältnis (2-23) unmittelbar folgt:

$$\frac{1}{\Delta\Omega} \propto \frac{1}{d}$$

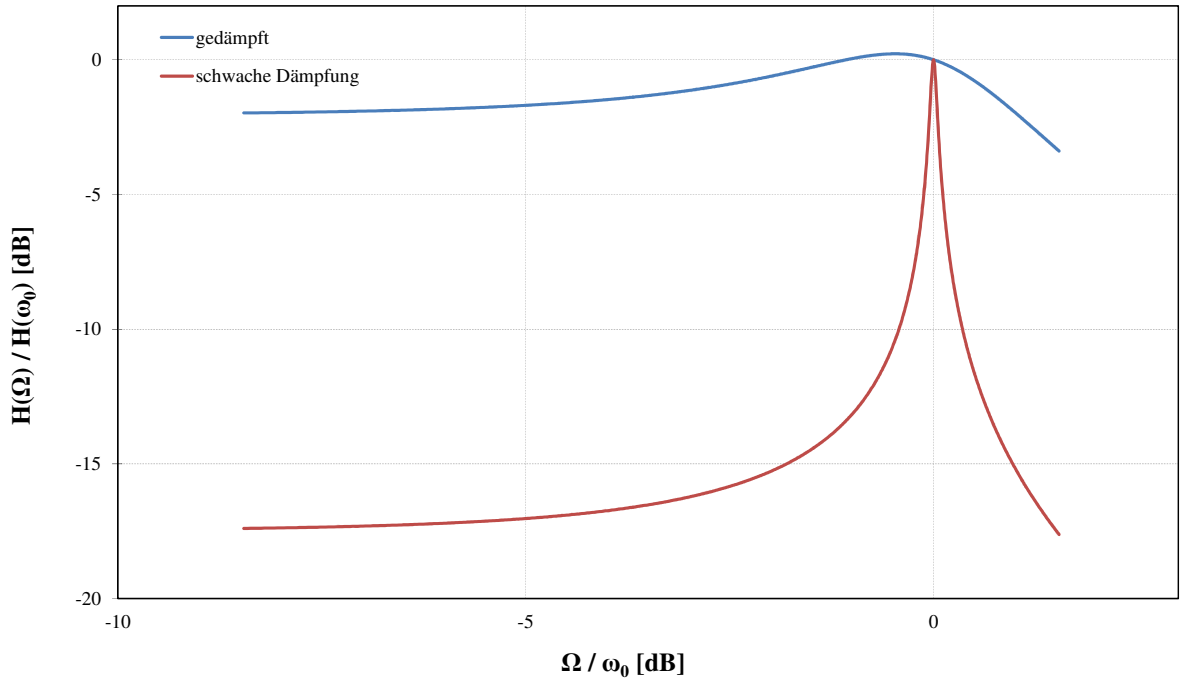

Abbildung 2-8 Frequenzgang logarithmisch (Bodediagramm)

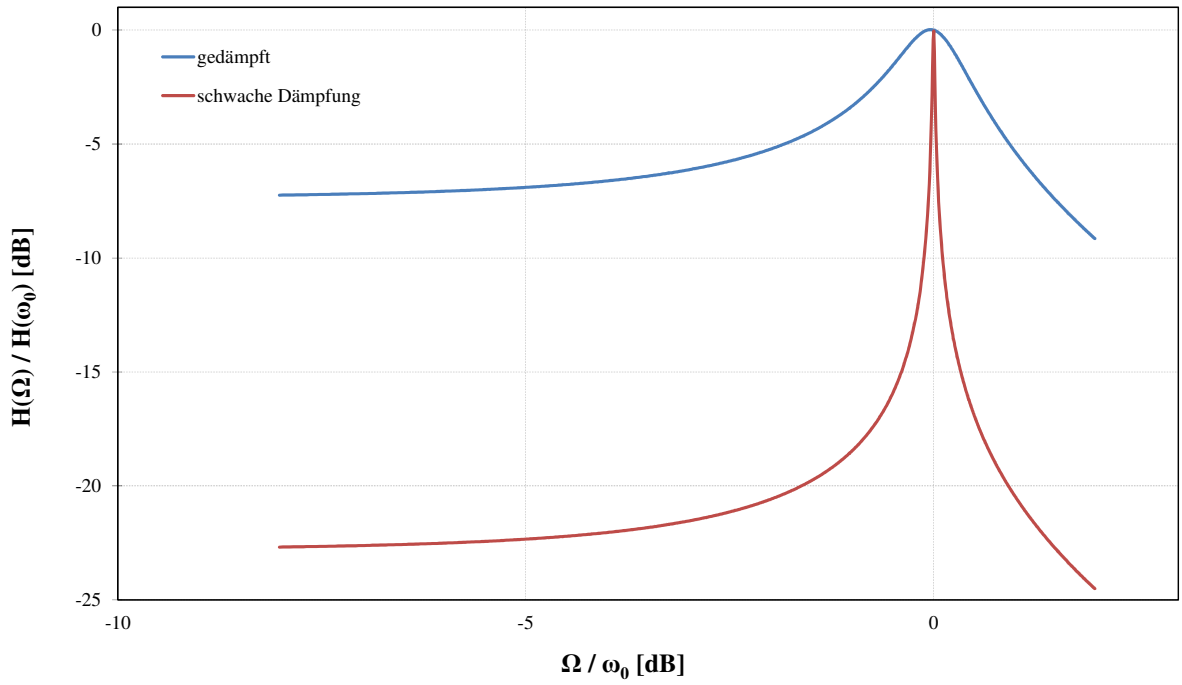

Abbildung 2-9 Frequenzgang eines mechanischen Systems mit großer Schwingmasse

Die Übertragungsfunktion wird auch in dem Bodediagramm mit logarithmischer Skalierung dargestellt, siehe Abbildung 2-8. Hier wird deutlich, welchen Einfluss die Dämpfung auf die Übertragungsfunktion hat: jede Dekade im Bodediagramm entspricht einer zehnfachen Änderung der Übertragungsfunktion.

Auch eine große Masse engt die Bandbreite des schwingenden Systems ein (zu sehen in der Abbildung 2-9) und verschiebt die Resonanzfrequenz in die Nähe der Eigenfrequenz ω_0. Vergleicht man zwei mechanische Systeme, das eine mit kleiner (siehe Abbildung 2-8) und das andere mit großer Masse (siehe Abbildung 2-9), wird beim zweiten Modell die Dämpfung, die gleich der des ersten Modells ist, unerheblich für seine Resonanzfrequenz, das System verhält sich im Resonanzfall so, als ob es ungedämpft wäre: $\Omega_{res} \approx \omega_0$, vorausgesetzt, die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ bleibt für beide Systeme gleich.

Betrachtet man den in der Abbildung 2-10 dargestellten Phasengang eines Masse-Feder-Systems, erkennt man, dass die Phasenverschiebung bei der Erregerfrequenz, die mit der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems übereinstimmt, sowohl bei den stark als auch schwach gedämpften Schwingungen genau 90° beträgt.

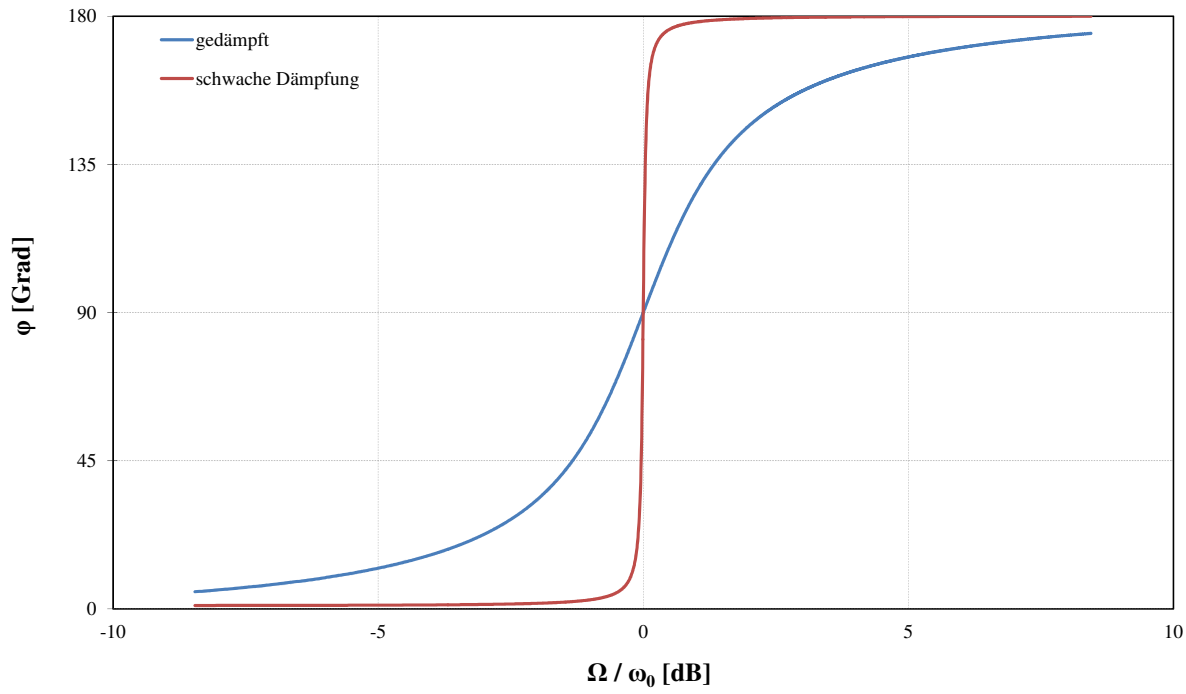

Abbildung 2-10 Phasengang eines mechanischen, schwingenden Systems

Als Nächstes wird das Kräfteverhältnis untersucht, welches sich bei gleichbleibenden Systemparametern, wie etwa Masse und Dämpfung in Abhängigkeit von der gewünschten Resonanzfrequenz einstellt.

Für eine Referenzkraft F_{ref} und eine Referenzkreisfrequenz Ω_{ref} bei einem mechanischen System mit konstant bleibenden Systemparametern (m, d, x_0 = konstant) und mit einer Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0, die als Funktion der gewünschten Resonanzfrequenz, ausgehend von (2-14), umgeschrieben werden kann

$$\omega_0 = f(\Omega_{res}) = \sqrt{\Omega_{res}^2 + 2k^2}$$

gilt:

$$H(\Omega_{res}) = \frac{1}{d \cdot \sqrt{k^2 + \Omega_{res}^2}}$$

Aus (2-16) folgt

$$F_0 = \frac{x_0}{H(\Omega_{res})} \Rightarrow F_0 = x_0 \cdot d \cdot \sqrt{k^2 + \Omega_{res}^2}$$

Definiert man gemäß (2-16) und (2-17) eine Referenz-Erregerkraft

$$F_{ref} = \frac{x_0}{H(\Omega_{ref})} = x_0 \cdot \sqrt{(c - m\Omega_{ref}^2)^2 + (d\Omega_{ref})^2}$$

ergibt sich der Zusammenhang:

$$\frac{F_0}{F_{ref}} = \frac{d \cdot \sqrt{k^2 + \Omega_{res}^2}}{\sqrt{(c - m\Omega_{ref}^2)^2 + (d\Omega_{ref})^2}} \quad \textbf{(2-24)}$$

Die Abbildung 2-11 stellt diesen Zusammenhang graphisch dar. Legt man ein schwingendes, mechanisches System für eine Resonanzfrequenz Ω_{res} aus, welche kleiner, bzw. höher als die Referenzfrequenz Ω_{ref} ist, so ist eine geringere, bzw. größere Erregerkraft erforderlich als bei dem Referenzmodell, um die gleiche Schwingungsamplitude x_0 zu erreichen.

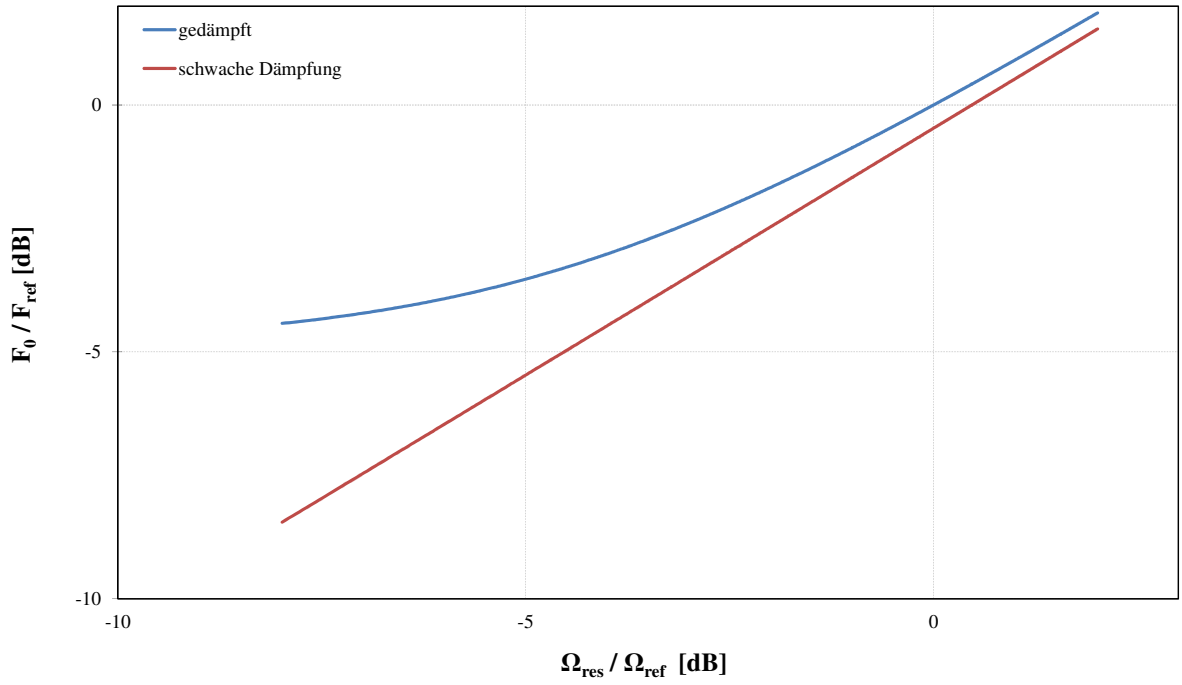

Abbildung 2-11 Erforderliche Kraft in Abhängigkeit von Ω_{res} bei m, d, x_0 = konstant

Betrachtet man die Abbildung 2-3 und analysiert die Bewegungsgleichung (2-12), stellt man fest, dass die schwingende Masse die maximale Geschwindigkeit bei

$$\Omega t = \varphi + (2n-1)\cdot\frac{\pi}{2} \qquad n \in \{N\} \tag{2-25}$$

annimmt. Setzt man (2-25) in die Gleichung der harmonischen Erregerkraft (siehe Annahmen zu Anfang dieses Kapitels), folgt daraus, dass hierbei die Kraft

$$F(t) = F_0 \cdot \cos\left(\varphi + (2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{2-26}$$

herrscht. Da der Phasenwinkel φ eine Funktion von Ω ist, ergeben sich je nach Erregerfrequenz unterschiedliche Kräfte, welche zum Zeitpunkt der größten Geschwindigkeit auf die schwingende Masse wirken. Der Zusammenhang ist in der Abbildung 2-12 dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass nur bei der Erregerfrequenz, welche der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems entspricht, zum Zeitpunkt der höchsten Geschwindigkeit der Schwingmasse auch die größte Kraft auf sie wirkt. Für bestimmte Fälle, z. B. für ein System mit schwacher Dämpfung oder mit großer Schwingmasse, kann angenommen werden, dass $\Omega_{res} = \omega_0$.

Anders als bei Hochhäusern oder Brücken oder anderen mechanischen Anlagen, wo man bestrebt ist, zu vermeiden, dass sie durch äußere Einwirkung von Wind oder Erdbeben in den Bereich der Resonanzen geraten, was die Beschädigung und sogar die Zerstörung zur Folge haben könnte, ist es bei dieser Art des Antriebs wünschenswert, den Schwingaktor in der Nähe seiner Resonanzfrequenz zu betreiben, um eine möglichst hohe Wirkung zu erzielen und gleichzeitig die zugeführte Energie zu minimieren.

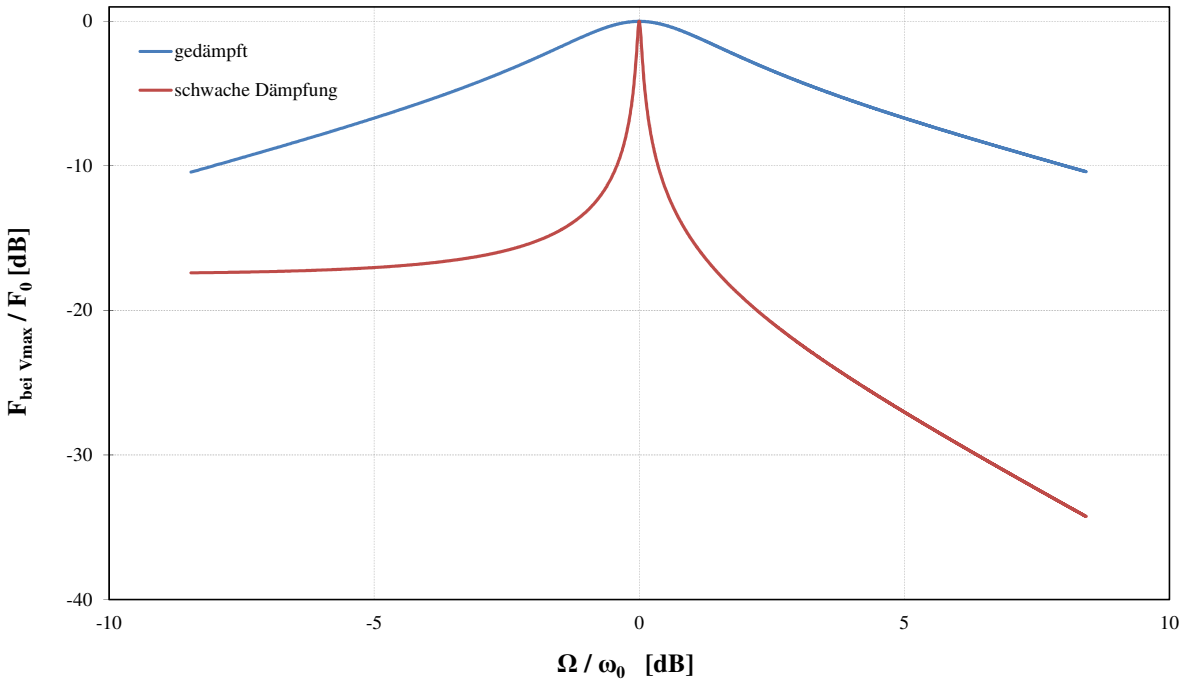

Abbildung 2-12 Wirkende Kraft zum Zeitpunkt der größten Geschwindigkeit

2.1.2 Nichtlineares System

Ist die Federkennlinie nicht linear oder die Dämpfung nicht viskos und nichtlinearer Natur oder die äußere Erregerkraft nicht harmonisch und weist eine nichtlineare Verknüpfung mit der Bewegung auf, spricht man von nichtlinearen Systemen, bzw. von nichtlinearen Schwingungen. Neben den bereits erwähnten Ursachen der Nichtlinearität, können auch andere Faktoren nichtlineare Schwingungen hervorrufen.

Am Anfang des zweiten Kapitels wurde die Annahme getroffen, dass die Reibung und die Federverluste vernachlässigbar klein sind und die Feder als masselos betrachtet werden kann. Tatsächlich ist die Feder weit davon entfernt, masselos zu sein, so dass die Federwindungen während der Bewegung der Schwingmasse mitgenommen werden. Somit ist die schwingende Masse nicht konstant, sondern eine Funktion des Wegs m = f(x). Weiterhin verursachen die Federverluste, die aufgrund von innerer Reibung und Werkstofferwärmung zustande kommen, Nichtlinearitäten der Federkennlinie. Die Federsteifigkeit kann demnach als eine Funktion der Zeit c = f(t) aufgefasst werden. Die Dämpfung zeigt ebenso nichtlineares Verhalten. Man spricht daher von zeitvarianten Parametern. Ist die Dämpfung nichtlinear (z. B. Coulomb'sche Dämpfung), so beobachtet man ein nichtexponentielles Abklingen der freien Schwingung. Wegen der nichtlinearen Federkennlinie hängt die Eigenfrequenz außerdem von der Schwingungsamplitude ab.

Bei weiteren Untersuchungen werden die zuvor gemachten Voraussetzungen als erfüllt angenommen, außer der Linearität der Federkennlinie, welche weiterhin als zeitkonstant betrachtet wird. Die Federsteifigkeit wird jedoch als Funktion des Wegs definiert: c = c(x). Somit ergibt sich ein nichtlinearer Zusammenhang:

$$F_F(x) = c(x) \cdot x \tag{2-27}$$

wobei

$$c(x) = c \cdot x^n \qquad n \in \{R \geq 1\} \tag{2-28}$$

bzw.

$$c(x) = c \cdot e^x \tag{2-29}$$

ist. Das heißt, dass die Federkraft beispielsweise quadratisch, bzw. kubisch oder exponentiell mit dem Weg zunimmt, siehe Abbildung 2-13.

Betrachtet wird zunächst ein Masse-Feder-System mit nichtlinearer Federkraft entsprechend (2-27) mit der Federsteifigkeit gemäß (2-28) unter der Berücksichtigung des Richtungswechsels, d. h. dass das Wegvorzeichen behalten wird:

$$F_F(x) = \text{sign}(x) \cdot c \cdot \left| x^n \right| \tag{2-30}$$

mit c = konstant und $n \geq 2$.

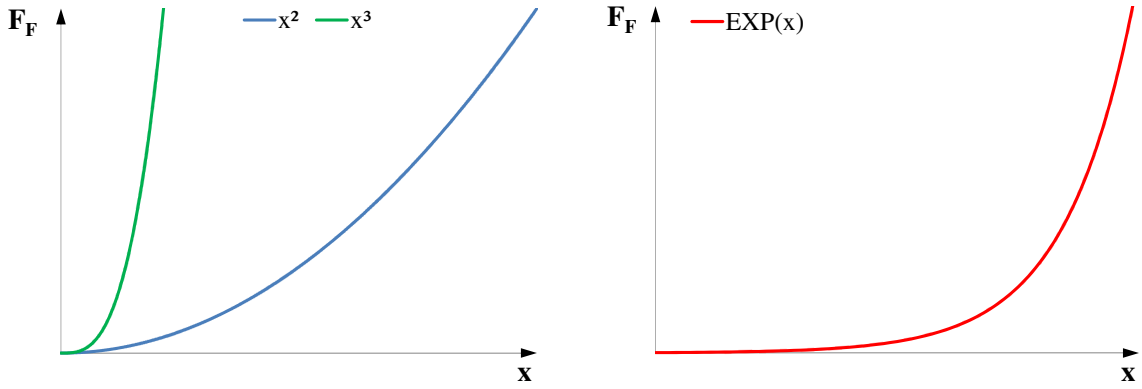

Abbildung 2-13 Nichtlineare Federkraft

Wendet man auf das System nach der Abbildung 2-1 die Lagrange-Gleichung (2-2) an

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx} = -\frac{dP}{dx} - \frac{dD}{d\dot{x}} + F(t)$$

wobei

$$T = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} \qquad P = \text{sign}(x) \cdot \frac{c \cdot |x^{n+1}|}{n+1} \qquad D = \frac{d \cdot \dot{x}^2}{2} \qquad F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$$

sind, erhält man eine nichtlineare Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 = -\text{sign}(x) \cdot c \cdot |x^n| - d\dot{x} + F_0 \cdot \cos(\Omega t) \quad \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + \text{sign}(x) \cdot c \cdot |x^n| + d\dot{x} = F_0 \cdot \cos(\Omega t) \qquad \textbf{(2-31)}$$

Für $n \geq 2$ (eigentlich bereits für $n > 1$) stellt die obige Gleichung (2-31) ein mathematisches Problem dar, das analytisch nicht lösbar ist. Nur in einigen seltenen Fällen findet man Ansätze zur analytischen Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen.

In diesem Fall wendet man ein numerisches Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen an. Bei diesem Verfahren werden die Differentiale als infinitesimal kleine Differenzen zweier benachbarter Funktionswerte betrachtet. Die Ableitung nach der Zeit bedeutet die Division dieser Differenz durch eine feste Schrittweite. Je kleiner der Schritt, desto genauer ist die daraus resultierende diskrete Lösung. Ist der Diskretisierungsschritt ausreichend klein, gelangt man schließlich zu den analytischen Differentialen.

Die numerische Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (2-31) ergibt sich zu (vgl. Kapitel 8.3):

$$x_{i+1} = \frac{F_0 \cdot h^2}{m} \cdot \cos(\Omega t_{i-1}) + \left(\frac{d \cdot h}{m} - \frac{c \cdot h^2}{m} \cdot |x_{i-1}^{n-1}| - 1\right) \cdot x_{i-1} + \left(2 - \frac{d \cdot h}{m}\right) \cdot x_i \qquad \textbf{(2-32)}$$

Der Ausdruck

$$h = t_i - t_{i-1} \qquad i \in \{0; N\}$$

wird als Diskretisierungsschritt oder Schrittweite bezeichnet. Die Werte x_{i-1}, x_i und x_{i+1} sind die jeweiligen diskreten Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung (2-31). Man setzt die bereits errechneten diskreten Lösungen immer wieder in (2-32) ein und erhält somit schrittweise eine zeitabhängige Funktion, welche sich aus der Datenmenge approximieren lässt. Im Kapitel 8.3 findet man die detaillierte Beschreibung dieses Verfahrens.

Die Abbildung 2-14 stellt graphisch die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (2-31) dar. Bei der Erstellung von Diagrammen für das nichtlineare System wurden die gleichen Parameter eingesetzt (Frequenz, Dämpfung, Masse) wie bei dem linearen System. In der Abbildung 2-14 sind die Verläufe der Erregerkraft, der erzwungenen Schwingungen und der Geschwindigkeit der schwingenden Masse dargestellt. Die Abbildungen 2-14 und 2-15 zeigen das Verhalten eines Masse-Feder-Systems für den Fall, dass die Federkonstante c in (2-28) klein und $\Omega > \Omega_{res}$ ist. Das Geschwindigkeitsprofil eines nichtlinearen Systems ist in diesem Fall dem des linearen Ein-Massen-Schwingers ähnlich, siehe Abbildung 2-15. Die Schwingmasse fährt die elliptischen Geschwindigkeitsprofile ab.

Mit der Lösung (2-32) der nichtlinearen differentiellen Bewegungsgleichung (2-31) können die gleichen Untersuchungen durchgeführt werden, welche bereits im Kapitel 2.1.1 für das lineare mechanische System gemacht wurden: beispielsweise den Zusammenhang zwischen Erregerfrequenz und der Schwingungsamplitude in Abhängigkeit von der Stärke der Dämpfung darzustellen oder den Phasengang zu analysieren.

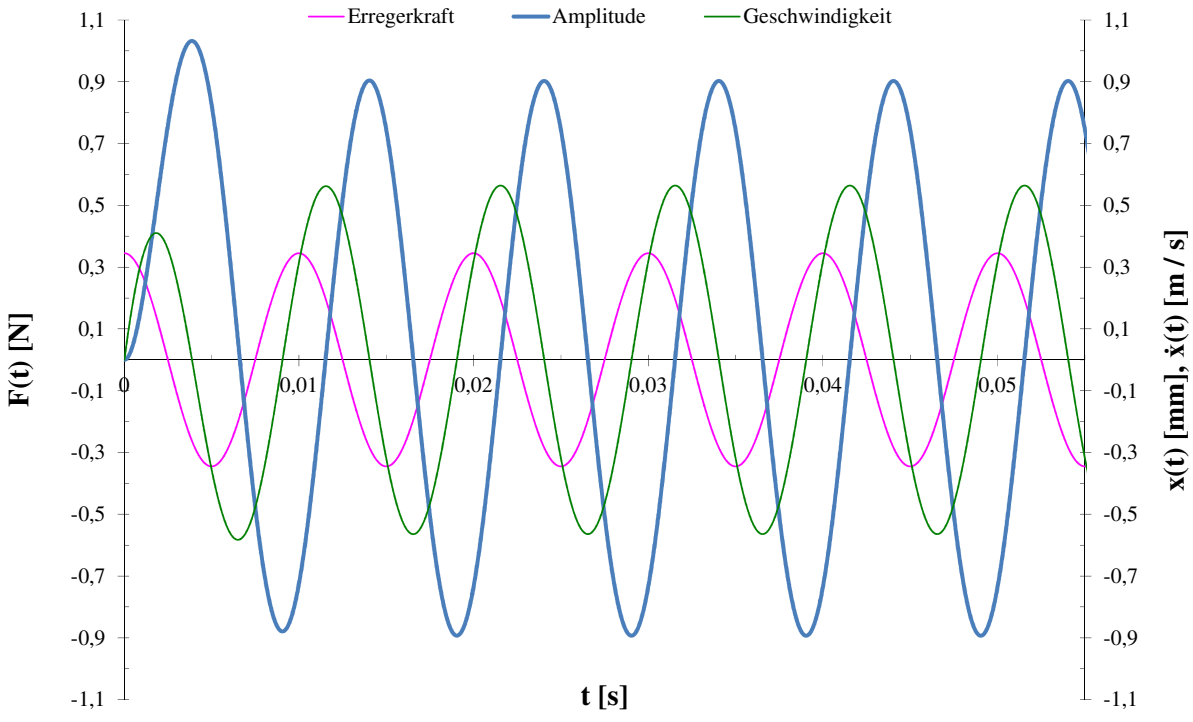

Abbildung 2-14 Kraft- und Amplitudenverlauf eines Systems mit nichtlinearer Feder, c klein

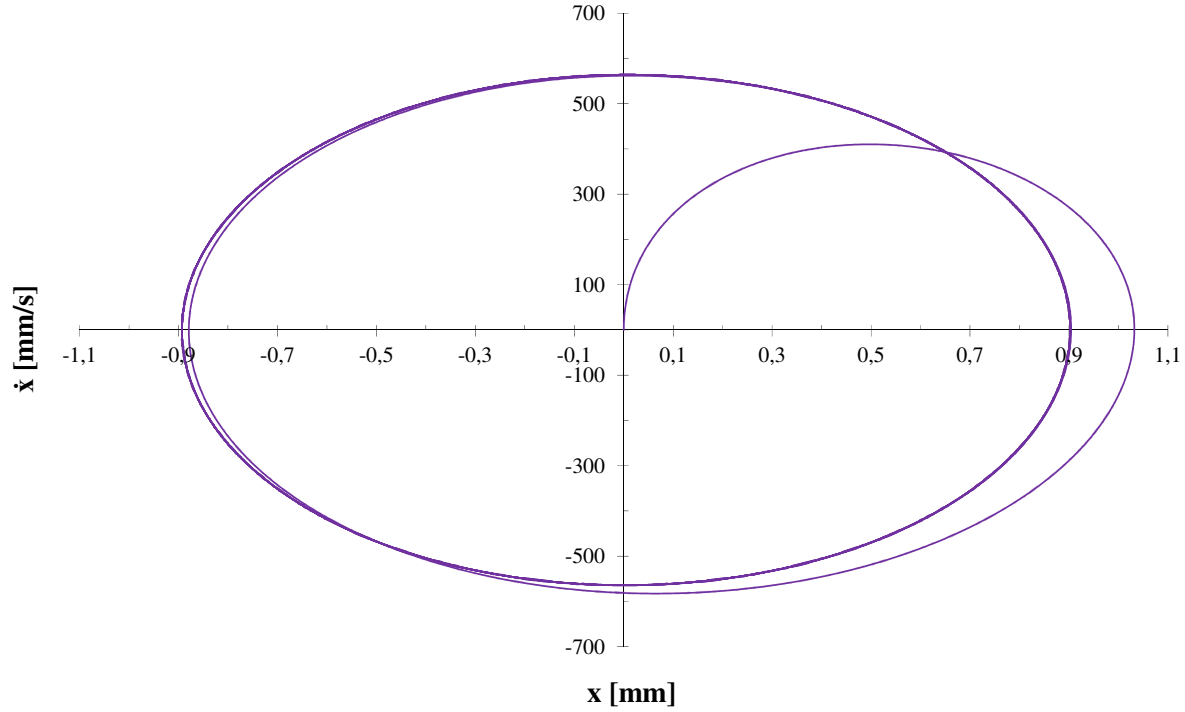

Abbildung 2-15 Phasenraumdarstellung eines Systems mit nichtlinearer Feder, $\Omega > \Omega_{res}$, c klein

Ein ganz anderes Verhalten eines Systems mit nichtlinearer Federkennlinie beobachtet man im Resonanzfall, siehe Abbildungen 2-17 und 2-18. Wie bereits im ersten Teil dieses Kapitels festgestellt, wirkt im Resonanzfall zum Zeitpunkt der höchsten Geschwindigkeit auch die größte Kraft auf die Schwingmasse, deutlich zu sehen in der Abbildung 2-16: grüne (Geschwindigkeit) und lila (Kraft) Linien. Die Geschwindigkeitskurve ist dabei an den Sinusspitzen ein wenig verzerrt.

Die Auswirkung einer nichtlinearen Federkennlinie auf die Bewegung der schwingenden Masse zeigt die Abbildung 2-17. Die höhere Potenz in (2-30) drückt das Geschwindigkeitsprofil wie einen Quetschring leicht zusammen, so dass sich auf gewissen Wegabschnitten eine fast konstante Geschwindigkeit beobachten lässt. In einem linearen System wird die schwingende Masse kontinuierlich beschleunigt oder abgebremst, so dass keine konstante Geschwindigkeit im Amplitudenbereich möglich ist, siehe Abbildung 2-3. Die Abbildung 2-17 zeigt dagegen, dass die Geschwindigkeit der Schwingmasse in einem nichtlinearen System für kurze Wegabschnitte näherungsweise als konstant angenommen werden kann.

Je höher die Potenz der Federkennlinie in (2-30) ausfällt, umso größer wird die Verzerrung des Geschwindigkeitsprofils. Die Geschwindigkeitsänderung wird dabei etwas schwächer in der Mitte und stärker in den Wendebereichen ausgeprägt, die Schwingmasse wird schneller abgebremst, bzw. beschleunigt. Die Abbildung 2-18 zeigt ein Geschwindigkeitsprofil für den eingeschwungenen Zustand im Resonanzfall und für n = 5. Der Einschwingvorgang dauert hier mehrere, bis zu neun Schwingungen. Wegen der nichtlinearen Federkennlinie wird die Masse beim Übergang der Weg-Nulllinie weiter beschleunigt anstatt abgebremst, wie es beim linearen System der Fall ist. Je weiter sich die Erregerfrequenz von der Resonanzfrequenz des mechanischen Systems entfernt, desto elliptischer wird das Geschwindigkeitsprofil.

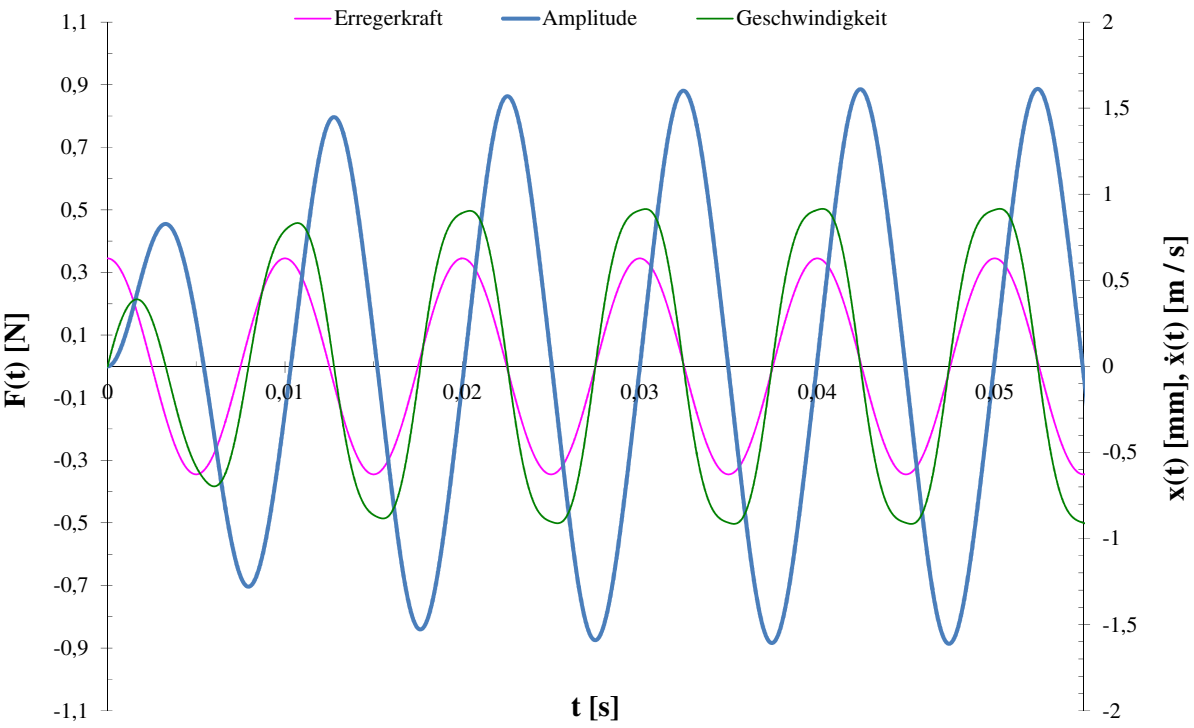

Abbildung 2-16 Kraft- und Amplitudenverlauf eines Systems mit nichtlinearer Feder, Resonanzfall

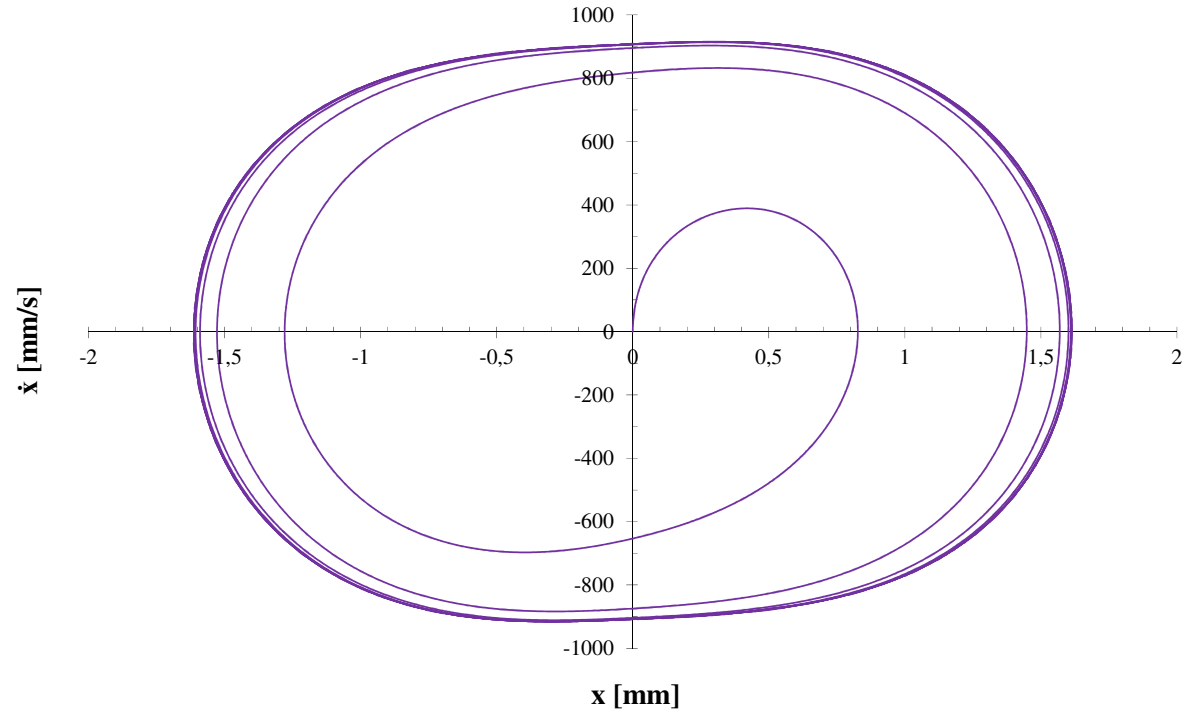

Abbildung 2-17 Phasenraumdarstellung eines Systems mit nichtlinearer Feder, Resonanzfall

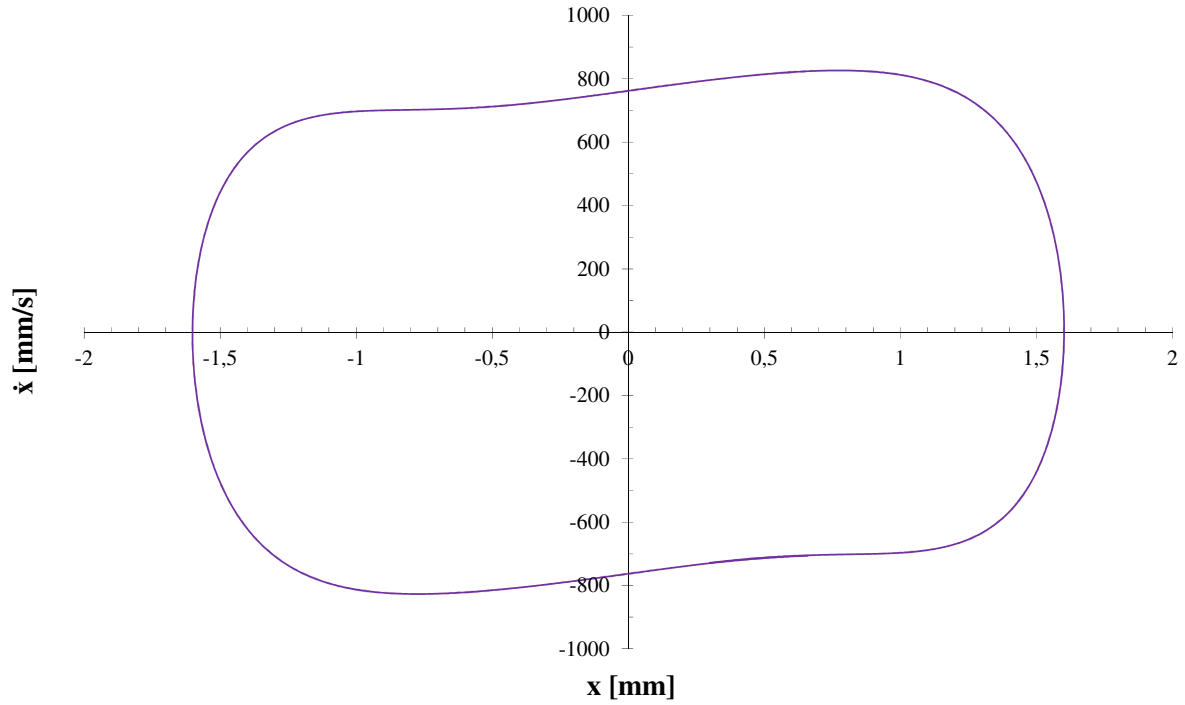

Abbildung 2-18 Phasenraumdarstellung eines nichtlinearen Systems für n = 5, Resonanzfall

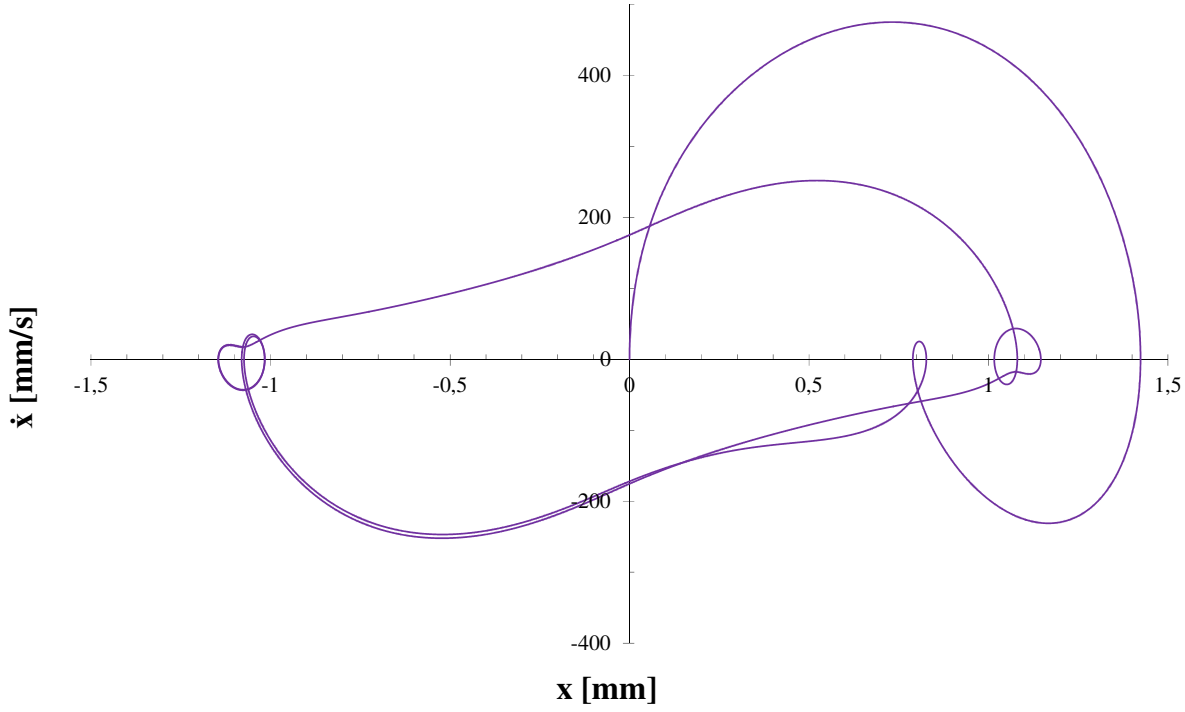

Abbildung 2-19 Phasenraumdarstellung eines nichtlinearen Systems, n = 2, $\Omega < \Omega_{res}$

Wegen der Diskretisierung gibt es keine Übertragungsfunktion in analytischer Form. Statt dessen hat man ein dreidimensionales Gebilde an Daten, das sich graphisch darstellen lässt. Ist die Erregerfrequenz zu niedrig, so überlagern sich bei einem nichtlinearen System die freien Schwingungen mit der erregten Bewegung, und es lässt sich ein bizarres Bewegungsprofil mit doppelten Schleifen beobachten, siehe Abbildung 2-19 sowie 2-21.

Die Abbildung 2-20 zeigt den Amplituden- sowie Geschwindigkeitsverlauf der Schwingmasse bei einem nichtlinearen System mit n = 5. Wie zu erkennen ist, antwortet das System auf eine niederfrequente Erregerkraft (15 Hz), deren Anregungsfrequenz weit unterhalb der Resonanzfrequenz (100 Hz) angesiedelt ist, mit einer Überlagerung der abklingenden eigenfrequenten Schwingungen. Die Schwingmasse führt an den Wendepunkten in der Phasenraumdarstellung eine Kreisbewegung durch. Dieses Verhalten ist mit einer Sprungantwort vergleichbar, wo die Masse in dem ausgelenkten Zustand noch nachschwingt. Die Sprungantwort eines schwingenden Systems wird ausgiebig im Kapitel 2.4 untersucht.

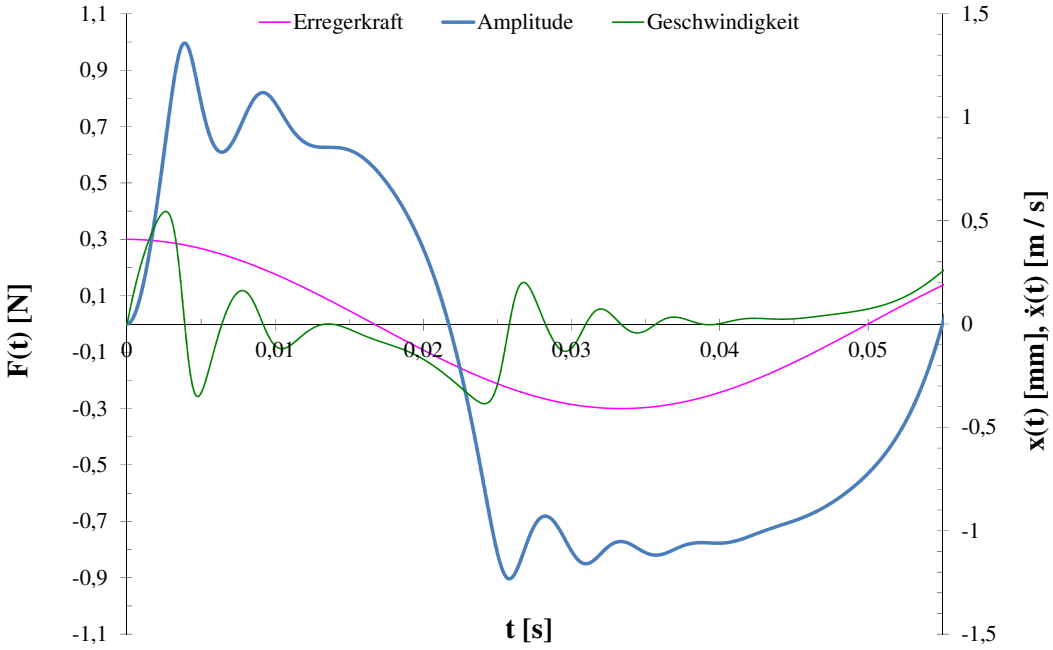

Abbildung 2-20 Amplituden- und Geschwindigkeitsverlauf eines nichtlinearen Systems, n = 5, $\Omega < \Omega_{res}$

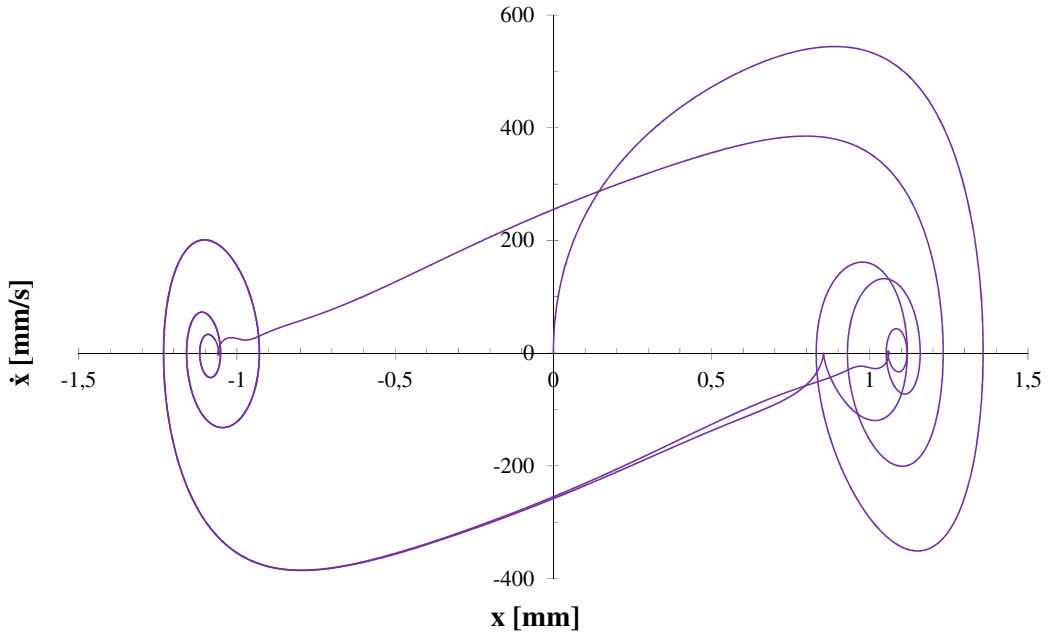

Abbildung 2-21 Phasenraumdarstellung eines nichtlinearen Systems, n = 5, $\Omega < \Omega_{res}$

Definiert man eine magnetische, bzw. elektromagnetische Feder, wobei ein Kraft-Weg-Gesetz mit der Funktion

$$F_F(x) = c \cdot F_{mag}(x) \qquad c = \text{konstant} \tag{2-33}$$

vorliegt, so lässt sich eine auf die Schwingmasse wirkende variable Federkraft $F_F(x)$ erzeugen. Somit wird das Bewegungsprofil gezielt beeinflusst. Ist $F_{mag}(x)$ in (2-33) eine magnetische Kraft, welche mittels Permanentmagneten erzeugt wird (siehe z. B. Abbildung 1-13), wirkt in (2-33) das Kraft-Weg-Gesetz (2-30):

$$F_F(x) = \text{sign}(x) \cdot c \cdot |x^2| \tag{2-34}$$

Ist $F_{mag}(x)$ in (2-33) eine elektromagnetische Kraft, so behält die Gleichung (2-34) ihre Gültigkeit, da die Magnetkraft proportional zum Quadrat des Wegs ist, jedoch besteht die Möglichkeit, die resultierende Federkraft mittels Änderung der Stromstärke zu beeinflussen, so dass sich ein fast beliebiges, unter anderen auch lineares Verhalten der Federkennlinie einstellt.

Wie bereits gezeigt wurde, weist das lineare Masse-Feder-System im Phasenraum ein elliptisches Bewegungsprofil auf. Das nichtlineare System dagegen, abhängig von der Nichtlinearität der Federkennlinie, weist ein „Quetschring"-artiges Profil mit kurzen Abschnitten konstanter Geschwindigkeit und mit schnellem Abbremsen, bzw. Beschleunigen der Schwingmasse auf. Diese beiden Möglichkeiten werden nun dank der elektromagnetischen Feder vereint.

Die Abbildungen 2-22 bis 2-24 zeigen einige Beispiele der Bewegungsprofile, welche für ein Masse-Feder-System mit einer elektromagnetischen Feder realisierbar sind.

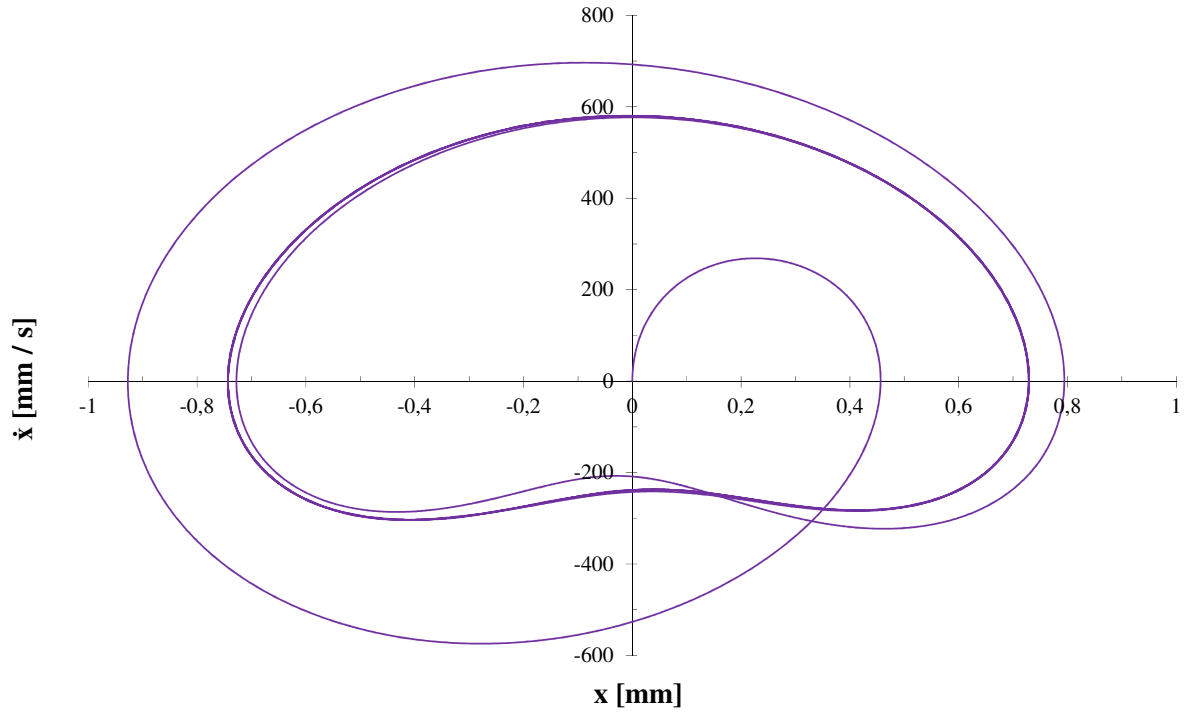

Abbildung 2-22 Phasenraumdarstellung „Nierenprofil"

Neben dem „Nierenprofil“ (siehe Abbildung 2-22) und dem Profil mit einer Schleife (siehe Abbildung 2-23) kann auch ein Geschwindigkeitsprofil mit einer Art „Ameisenkopf“ (siehe Abbildung 2-24) erzeugt werden. Diese Profile wurden bewusst so generiert, um unterschiedliche Bewegungsabläufe (Geschwindigkeiten) der Schwingmasse bei der Hin- und Rückfahrt zu erzielen. Genaueres über die Generierung dieser und anderer Profile wird im Kapitel 2.5.3 erläutert.

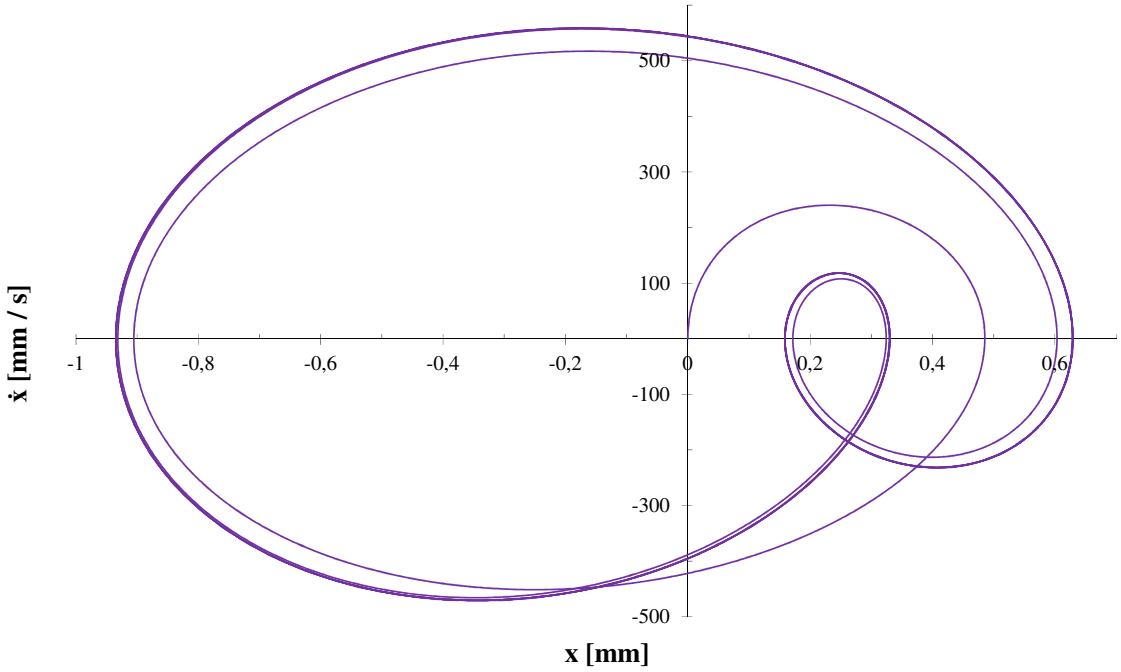

Abbildung 2-23 Phasenraumdarstellung „Nierenprofil mit Schleife“

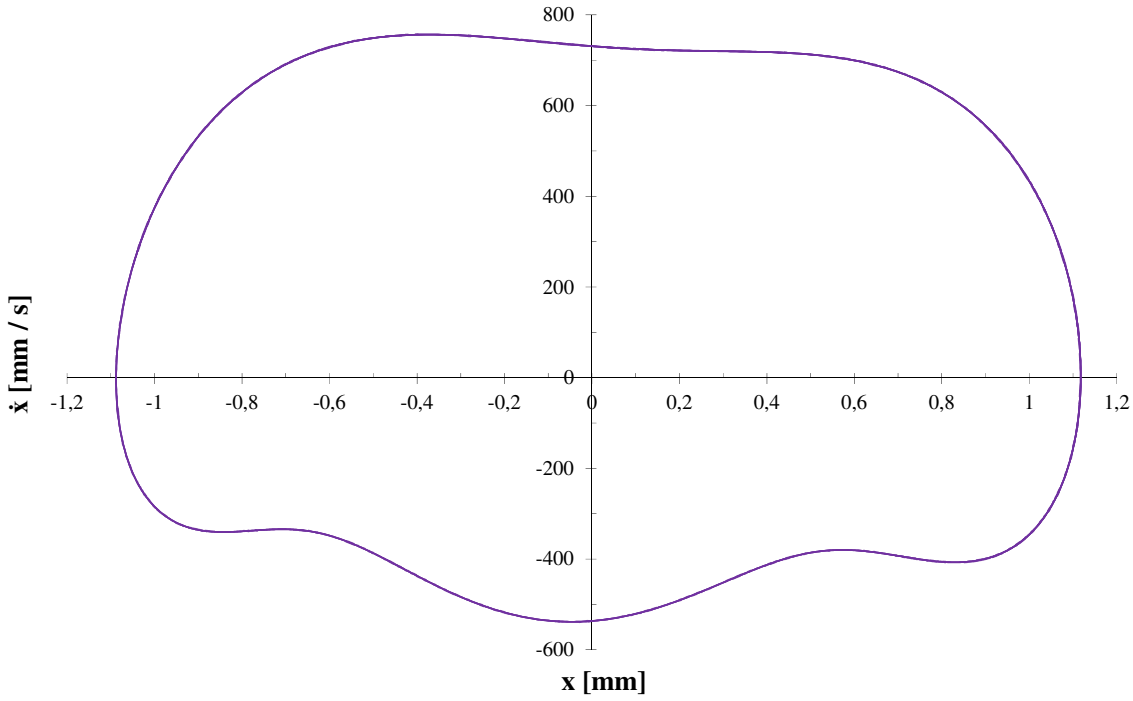

Abbildung 2-24 Phasenraumdarstellung „Ameisenkopf“

2.1.3 Zusammenfassung

Lineares System

Ein lineares Masse-Feder-System lässt sich mit wenigen Gleichungen beschreiben, vorausgesetzt, das mechanische Modell, welches das reale Konstrukt darstellt, lässt sich ausreichend vereinfachen, um Analyse mit mathematischen Mitteln zu ermöglichen. Die wichtigsten Eigenschaften eines schwingfähigen mechanischen Systems sind:

- differentielle Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$
- Bewegungsgleichung: $x(t) = H(\Omega) \cdot F_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$
- Übertragungsfunktion: $H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(c - m\Omega^2)^2 + (d\Omega)^2}}$
- Resonanzfrequenz: $\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}$
- Eigenfrequenz des ungedämpften Systems: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$
- Eigenfrequenz des gedämpften Systems: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$
- Bandbreite des schwach gedämpften Systems: $\Delta\Omega \approx 2 \cdot k = \frac{d}{m}$

Hier sind:

- c – Federsteifigkeit oder Federkonstante, [N/m]
- m – Schwingmasse, [kg]
- k – Abklingkonstante, $k = \frac{d}{2 \cdot m}$
- d – Dämpfungskonstante
- φ – Phasenverschiebung, [rad], $\varphi = \arctan\left(\frac{d\Omega}{c - m\Omega^2}\right)$
- F(t) – Erregerkraft, [N], $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$

Die Übertragungsfunktion H(Ω) fasst alle Systemeigenschaften zusammen und kann als Frequenzgang dargestellt werden. Aus dem Bodediagramm lassen sich die Resonanzfrequenz und die Bandbreite ablesen. Kennt man die Übertragungsfunktion, bzw. den Frequenzgang des betrachteten Systems, so sind die Schwingungen, bzw. die elliptischen Geschwindigkeits-

profile mit gewünschten Frequenzen und Amplituden in Abhängigkeit von der Erregerkraft erzeugbar. Weiterhin wurde während der Untersuchung des linearen Masse-Feder-Systems gezeigt, dass sich die Bandbreite durch die Variation der Dämpfung, bzw. durch die Änderung der schwingenden Masse beeinflussen lässt.

Eine schwache Dämpfung engt ebenso wie eine große Schwingmasse die Bandbreite ein. Dabei reagiert das System auf eine Erregerkraft umso stärker, je näher die Erregerfrequenz der Resonanzfrequenz kommt. In einem schwach gedämpften System entspricht die Resonanzfrequenz näherungsweise der ungedämpften Eigenfrequenz. Es wurde festgestellt, dass zum Zeitpunkt der größten Geschwindigkeit auch die größte Kraft auf die schwingende Masse wirkt, jedoch nur bei der der Eigenfrequenz ω_0 entsprechenden Erregerfrequenz. Im Fall der schwachen Dämpfung oder einer großen Schwingmasse ist im Resonanzfall nicht nur die größte Schwingungsamplitude erreichbar, sondern es wirkt auch die größte Kraft auf die Schwingmasse zum Zeitpunkt ihrer höchsten Geschwindigkeit. Im Vergleich zum Kurbeltrieb-, bzw. Tauchankerprinzip (siehe Kapitel 1.3) ist dieses Verhalten des Systems vorteilhaft für das Ausführen einer Stechbewegung, weil dadurch die Stechkraft positiv beeinflusst wird.

Eine kleinere Masse, genauso wie eine stärkere Dämpfung macht das System breitbandiger. Jedoch benötigt man bei starker Dämpfung mehr Kraft, um die gleiche Schwingungsamplitude wie bei einem schwach gedämpften System zu erreichen, und die Resonanzfrequenz wird zu niedrigeren Frequenzen, weit von der Eigenfrequenz ω_0 verschoben. Das bedeutet aber, dass auch die höchste Geschwindigkeit und die größte auf die Schwingmasse wirkende Kraft zueinander phasenverschoben werden. Will man ein mechanisches, schwingendes System für niedrigere, bzw. höhere Resonanzfrequenzen im Vergleich zu einem Referenzmodell auslegen, so sind bei gleichen Parametern wie die Masse, Dämpfung und die Schwingungsamplitude kleinere, bzw. größere Erregerkräfte erforderlich.

Nichtlineares System

Für ein nichtlineares System lässt sich keine Bewegungsgleichung in analytischer Form aufstellen, wie es beim linearen Modell der Fall war. Beschränkte man sich nur auf die Nichtlinearitäten der Federkennlinie, so kann gezeigt werden, dass wegen der Nichtlinearität der Federkenlinie auch Bewegungsprofile erzeugbar sind, die keine elliptische Form aufweisen. Dabei ist bemerkenswert, dass sich im Resonanzfall kurze Wegabschnitte mit nahezu konstanter Geschwindigkeit beobachten lassen. Auch in einem nichtlinearen System mit nichtlinearer Federkennlinie wirkt die größte Kraft auf die schwingende Masse zum Zeitpunkt ihrer größten Geschwindigkeit.

Eine Erweiterung der nichtlinearen Feder stellt die elektromagnetische Feder dar, die es ermöglicht, die Federkennlinie frei zu konfigurieren. Bei diesem Verfahren sind neben einer linearen Kennlinie auch exponentielle und fast beliebige Kraft-Weg-Zusammenhänge realisierbar. So sind z. B. die Geschwindigkeitsprofile mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Bewegungen der Schwingmasse bei der Hin- und Rückfahrt möglich. Generell lassen sich mit einer elektromagnetischen Feder nahezu alle beliebigen Bewegungsprofile erzeugen.

Faraday sah im Geiste die den ganzen Raum durchdringenden Kraftlinien,
wo die Mathematiker fernwirkende Kraftzentren sahen;
Faraday sah ein Medium, wo sie nichts als Abstände sahen;
Faraday suchte das Wesen der Vorgänge in den reellen Wirkungen…

James Clerk Maxwell

2.2 Elektromagnetisches Modell

Eine Erregerkraft sollte berührungslos auf die zu schwingende Masse wirken, ohne kinematische Verbindungen zwischen dem Krafterzeuger und dem Masse-Feder-System. Dies ist besonders vorteilhaft bei den zum Pigmentieren, bzw. Tätowieren prädestinierten Stechaktoren, siehe Kapitel 1.3.

In Frage kommen pneumatische, bzw. hydraulische oder elektromagnetische, bzw. elektrostatische Erregerkräfte. Wegen der konstruktiven Komplexität der pneumatischen, bzw. hydraulischen Anordnungen und wegen der zu hohen Spannungen bei der Variante mit elektrostatischen Kräften schieden diese Konzepte aus weiteren Betrachtungen aus, und es blieb nur die elektromagnetisch erzeugbare Erregerkraft als Lösungsansatz zur kontaktlosen Schwingungserzeugung.

2.2.1 Grundlagen des Elektromagnetismus

Der Elektromagnetismus in der Form, wie er heute bekannt ist, hat eine lange Entstehungsgeschichte hinter sich. Lange bevor die Bewegung der Elektronen für die Menschen nutzbar gemacht wurde, kannte man bereits das Phänomen „líthos mágnēs“ (altgriechisch Stein aus Magnesia, Stadt in Lydien, in Kleinasien, heute Türkei, wo solche Magnetsteine gefunden wurden). Die erste schriftliche Erwähnung der Magnetsteine, später als Peregrinus-Steine bekannt, soll durch Thales von Milet (624-546 vor unserer Zeitrechnung), ein griechischer Philosoph und Mathematiker, erfolgt sein [O'Gr02]. Jedoch sind die Thales-Schriftstücke nicht auffindbar. Die meisten Textfragmente über ihn stammen aus den Überlieferungen von Platon, Aristoteles oder Herodot. Daher ist diese Erstaufzeichnung über Magnete umstritten. Allerdings kannte Thales mit Sicherheit solche Steine, da sich seine Heimatstadt Milet in unmittelbarer Nähe vom Fundort Magnesia befand.

Fast 1900 Jahre später experimentierte der französische Gelehrte Petrus Peregrinus mit Magnetsteinen und entdeckte deren Dipoleigenschaften. Wie oft er auch die Steine geteilt hatte, blieben die Bruchstücke als eigenständige Magnete mit ihren Dipolen weiterhin erhalten. In seiner Abhandlung „Epistola de Magnete“ beschrieb er neben den von ihm beobachteten magnetischen Phänomenen auch detailliert seine Untersuchungen mit einer Kompassnadel [Gra75].

Zum Ende der Renaissancezeit im Jahr 1600 entdeckte der Hofarzt von Königin Elisabeth I., William Gilbert, die Analogie des Erdmagnetfelds zu den Steinen des Peregrinus. Er versuchte die Funktionsweise des Kompasses durch die Beschreibung der Erde als einen großen

Magneten zu erklären [Rol59]. Obwohl die Chinesen nach wie vor als Erfinder des Kompasses gelten, nahm der Kompass an Bedeutung zur Kursbestimmung erst im mittelalterlichen Europa mit dem Ausbau der Seeschifffahrt und mit der Häufung der Entdeckungsreisen zu. In seinem Werk „De naturis rerum“ beschrieb der englische Mönch Alexander Neckam im Jahr 1200 zum ersten Mal die Nutzung des Kompasses [Nec63].

Mitte des 18. Jahrhunderts, im Jahr 1750, veröffentlichte John Michell eine Arbeit mit dem Titel „A Treatise of Artificial Magnets“ [Mic51], [Sch02], in der er ein einfaches und schnelles Verfahren zur Herstellung künstlicher Magnete ohne Verwendung von Magnetsteinen beschrieb. Im selben Jahr wurde jedoch von John Canton vor der Royal Society ein Schriftwerk ebenfalls mit der Beschreibung der Methoden zur Herstellung künstlicher Magnete vorgetragen. Dieser Vorfall gilt als umstritten. In der wissenschaftlichen Literatur wird daher John Michell als Urheber des Herstellungsverfahrens genannt. Heutzutage werden die Permanentmagnete in einem Sinterverfahren aus Seltenerdmetallen, wie Samarium (Sm) oder Neodym (Nd) durch Einwirken eines starken Magnetfelds (mittels Induktionsspulen) industriell künstlich hergestellt. In seiner Publikation formulierte Michell außerdem, dass die Anziehungskraft zwischen zwei Magneten reziprok zum Quadrat des Abstands ist [Mic51].

Faraday

Nachdem Oersted, Ampère, Biot und Savart die Interaktion eines mit Strom durchflossenen Leiters mit den Magneten untersuchten [Dar00], baute Faraday 1821, ohne es zu wissen, den ersten Elektromotor, indem er einen stromdurchflossenen Draht um einen Stabmagneten, der sich in Quecksilber befand, rotieren ließ, siehe Abbildung 2-25. Wenige Tage nach seiner Entdeckung veröffentlichte er sie im Quarterly Journal of Science [Far22].

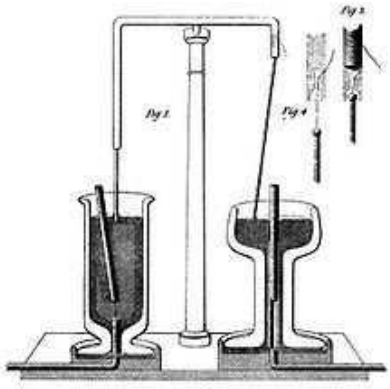

Abbildung 2-25 Versuchsanordnung von Michael Faraday zum Nachweis der elektromagnetischer Rotation, ca. 1821, [Far44]

Viele Entdeckungen von Faraday auf dem Gebiet der Elektrotechnik und des Magnetismus sind seiner Wissensbegierde und Experimentierfreude zu verdanken. Michael Faraday wurde als Sohn eines Schmieds geboren und erlernte das Beruf des Buchbinders. Während seiner Ausbildung las er viele der zum Binden gebrachten Bücher, unter anderen auch die über Chemie und Elektrizität. Sein Lehrmeister gestattete ihm die Durchführung kleiner chemischer und elektrischer Experimente.

Während seiner Tätigkeit als chemischer Analytiker an der Royal Institution führte Faraday neben chemischen Versuchen auch zahlreiche elektrische Experimente durch. Die Wechselwirkung zwischen den stromdurchflossenen Leitern und Magneten wurde bereits Anfang der zwanziger Jahre des 19. Jahrhunderts bekannt, der Begriff Elektromagnetismus jedoch noch nicht geprägt. In einem seiner Notizbücher notierte Faraday 1822: „Magnetismus in Elektrizität umwandeln“ [Tho91]. Nach einigen gescheiterten Versuchen gelang es ihm schließlich 1831, den elektrischen Strom in magnetische Energie umzuwandeln, mit anschließender Rücktransformation in elektrische Spannung. Faradays Versuchsanordnung ähnelte dem Ringtransformator. Somit entdeckte Faraday die elektromagnetische Induktion und legte den Grundstein für die später entwickelten Transformatoren und Generatoren. Im selben Jahr berichtete er über seine Entdeckung vor der Royal Society.

Nach seinen Experimenten zur „Magnetisierung des Lichts“, bei denen durch die Einwirkung des Magnetfelds die Drehung der Polarisationsebene des polarisierten Lichts erfolgt, was heute als magnetooptischer oder Faraday-Effekt bekannt ist, wandte sich Faraday der Untersuchung der magnetischen Eigenschaften verschiedener Materialien zu. Schnell fand er heraus, dass einige nichtmagnetische Materialien wie Glas, Holz, Olivenöl oder Wismut sich anders verhielten als magnetische Werkstoffe. Im Gegensatz zu magnetischen Materialien, die sich im Magnetfeld entlang der gedachten Verbindungslinien ausrichten, wandern diese „diamagnetischen“ Substanzen, wie Faraday sie in Analogie zu dielektrischen Stoffen nannte [Mar33], aus dem Magnetfeld heraus.

Faraday’s langjähriger Freund und Briefpartner William Whewell, der bereits bei der Begriffsfindung zur Elektrolyse Faraday half und die Begriffe wie Anode und Kathode oder Anion, Kation und Ion prägte [Ros61], wurde ihm erneut behilflich und schlug vor, die benutzte Vorsilbe in dia für „durch“ zu korrigieren, weil er vermutete, dass die Wirkung des Magnetfelds durch den Körper stattfand. Die Materialien, die erst durch das äußere Magnetfeld und nur so lange, wie das Feld existiert, magnetisch und in das Magnetfeld hineingezogen werden, sind als paramagnetisch zu bezeichnen, so Whewell [Whe45]. Erst später konnten diese Effekte quantenmechanisch erklärt werden. Die Quantenmechanik postuliert, dass jedes Material diamagnetisch ist. Die diamagnetischen Effekte sind jedoch sehr schwach und überlagern sich mit den para- oder ferromagnetischen Eigenschaften des Stoffs.

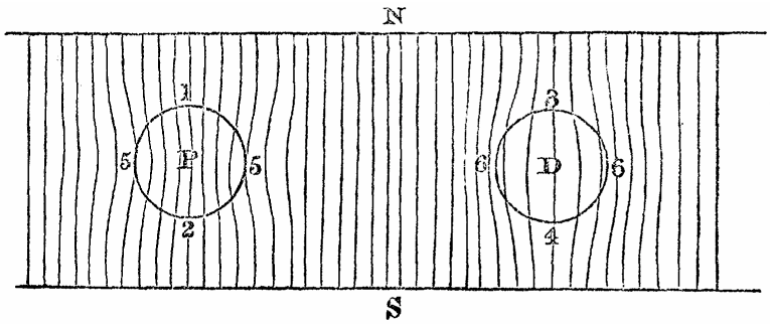

Abbildung 2-26 Feldlinienverlauf in einem paramagnetischen (P) und diamagnetischen (D) Körper, Faradays anschauliche Darstellung [Phi50]

Im Zusammenhang mit magnetischen Stoffeigenschaften prägte Faraday erstmals den Begriff „Magnetfeld“ [Mar33]. Nach seinen Experimenten mit polarisiertem Licht und mit den diamagnetischen Materialien kam Faraday immer mehr zum Entschluss, dass die abstrakten Kraftlinien eine reale physikalische Bedeutung haben. Nur so lassen sich die diamagnetischen Effekte erklären, was sich mit den bis dahin genutzten Begriffen wie Anziehung und Abstoßung nur schwer deuten ließ. Im Gegensatz zu Weber, der überzeugt war, dass der Magnetismus wie die Elektrizität polarer Natur sei, nutzte Faraday die Begriffe „Kraftfeld“ und „Kraftlinien“, deren Wirkung ortsabhängig ist, um die magnetischen Phänomene zu beschreiben.

Maxwell

Faraday’s Konzepte über die das Medium durchdringenden magnetischen Linien und Felder, diese intuitiven tiefgründigen Vorstellungen, die ohne eine einzige mathematische Formel auskamen, beeindruckten den jungen Maxwell so sehr, dass er es zu seiner Aufgabe machte, Faraday’s experimentelle Belege und theoretische Auffassungen über Magnetismus und Elektrizität mathematisch zusammen zu fassen. Während seiner Collegezeit begann Maxwell mit den Ausarbeitungen seiner Gleichungen, den Großteil davon vollendete er noch als Student in Cambridge. Seine wissenschaftliche Abhandlung über Faraday’s Kraftlinien [Sim97] veröffentlichte Maxwell direkt nach seinem Studienabschluss im Alter von 24 Jahren (1856). Zu Beginn seiner Ausarbeitungen waren es 20 Gleichungen, die er dann dank der übersichtlichen Vektorschreibweise auf wenige grundlegende mathematische Verknüpfungen reduzierte.

In einem dreidimensionalen Raum stellt das Vektorpotential $\vec{A}(r)$ ein Vektorfeld dar, dessen Rotation ein neues Vektorfeld v(r) liefert:

$$\text{rot}\,\vec{A}(r) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(r) = \vec{v}(r) \qquad \textbf{(2-35)}$$

Dabei gilt, dass die Divergenz, d. h. die Quellergiebigkeit des neuen Vektorfelds $\vec{v}(r)$ Null ist:

$$\text{div}\,\vec{v}(r) = \text{div rot}\,\vec{A}(r) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}(r)\right) = 0 \qquad \textbf{(2-36)}$$

In der Analogie zur Hydrodynamik, wo das Vektorpotenzial eine zentrale Stelle annimmt, formulierte Maxwell in seiner Arbeit die erste Theorie des Elektromagnetismus, indem er die Stromdichte j (Strom pro Fläche), die elektrische Feldstärke E, die Ladungsdichte ρ (elektrische Ladung pro Volumen) und die magnetische Flussdichte B einführte und miteinander verknüpfte. Die vier bedeutendsten Gleichungen resultieren aus den Beobachtungen Ampère’s, bzw. Faraday’s.

Faraday zufolge weist die magnetische Flussdichte geschlossene Feldlinien auf, und die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses führt in einem elektrischen Leiter zu einem elektrischen Wirbelfeld (Induktionsgesetz). Sowohl Ampère als auch Faraday haben festgestellt, dass die zeitliche Änderung der elektrischen Ströme ein magnetisches Wirbelfeld zur Folge hat.

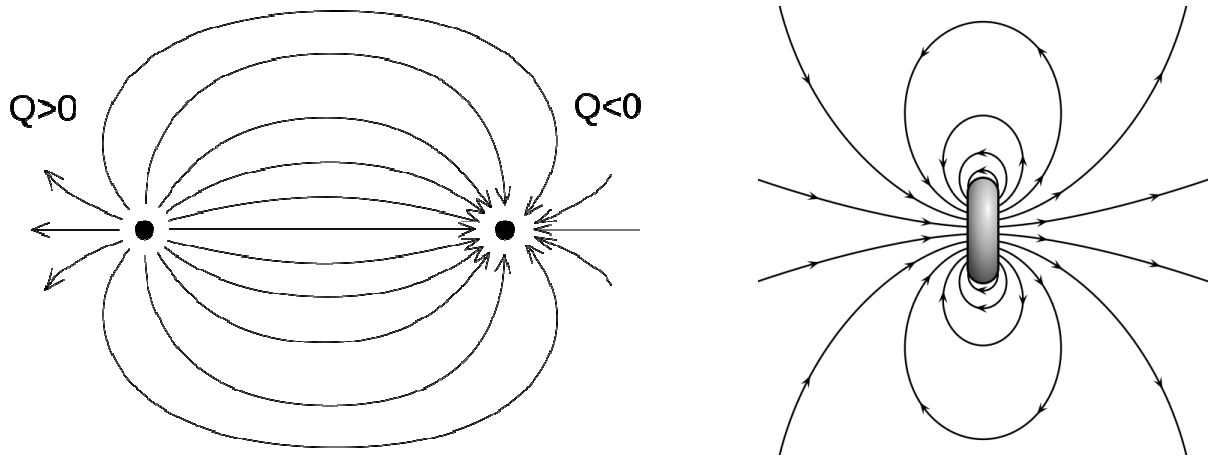

Abbildung 2-27 Verlauf der elektrischen (links) [Paj07] und magnetischen (rechts) [Gee10] Feldlinien

Aus der polaren Natur der Elektrizität folgt, dass die elektrischen Ladungen als Quellen und Senken der elektrischen Feldlinien wirken, siehe Abbildung 2-27. Diese experimentellen Beobachtungen fasste Maxwell unter Anwendung der Definition des Vektorpotentials (2-35) und (2-36) mathematisch zusammen:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad \textbf{(2-37)}$$

Die Konstanten ε_0 und μ_0 sind die jeweiligen Permeabilitäten des Vakuums für elektrische, bzw. für magnetische Felder. Die Gleichungen (2-37) stimmen mit den experimentellen Beobachtungen überein. So gibt beispielweise die Divergenz der magnetischen Flussdichte B für jeden Punkt des mit den magnetischen Feldlinien erfüllten Raums die aus der Umgebung dieses Punkts hinaus fließende Menge im Vergleich zu der hineinfließenden Menge an und ist für das B-Feld gleich Null (erste Gleichung), das B-Feld ist quellenfrei, siehe Abbildung 2-27 rechtes Bild. Das E-Feld dagegen hat Quellen und Senken. Sowohl E- als auch B-Feld sind beide nicht wirbelfrei (rot $B \neq 0$, rot $E \neq 0$). Aus der zeitlichen Änderung des B-Felds folgt ein elektrisches Wirbelfeld, und das sich zeitlich ändernde E-Feld hat das magnetische Wirbelfeld zur Folge.

Das Gleichungssystem (2-37) berücksichtigt die Stoffeigenschaften nicht. In seiner Abhandlung „Über physikalische Kraftlinien“ berücksichtigte Maxwell auch das Medium, in dem die elektromagnetischen Kräfte wirken. Er arbeitete seine Theorie weiter aus und veröffentlichte sie im Jahr 1865 [Max65]. Sein Ansatz war, das Medium durch elastische Eigenschaften zu modellieren. Heute wird dank den Erkenntnissen der Quantenmechanik der Einfluss der Materie auf elektrische und magnetische Felder besser verstanden.

Die quantenmechanischen Vorgänge in der Materie können zusammenfassend für die elektrische Feldstärke E, bzw. für die magnetische Flussdichte B makroskopisch um die dielektrische Polarisation P (elektrisches Dipolmoment pro Volumen), bzw. um die Magnetisierung M (magnetisches Dipolmoment pro Volumen) oder die magnetische Polarisation J ($J = \mu_0 \cdot M$) ergänzt werden. Um die Materie zu berücksichtigen, ist die Einführung von zwei neuen Vektorgrößen erforderlich: die elektrische Flussdichte oder die dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \tag{2-38}$$

und die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} - \vec{M} \tag{2-39}$$

Somit müssen auch die entsprechenden Terme in (2-37) um diese zusätzlichen Vektorgrößen ergänzt werden:

$$\underbrace{\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \cdot \vec{E}\right) = \rho}_{\text{im Vakuum}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho}_{\text{in der Materie}}$$

$$\underbrace{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j} + \frac{\partial\left(\varepsilon_0 \cdot \vec{E}\right)}{\partial t}}_{\text{im Vakuum}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{j} + \frac{\partial\left(\varepsilon_0 \cdot \vec{E} + P\right)}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\text{in der Materie}}$$

Aufgelöst nach E ergibt sich (2-38) zu

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \left(\vec{D} - \vec{P}\right) \tag{2-40}$$

und (2-39), aufgelöst nach B, kann umgeschrieben werden:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{J} \tag{2-41}$$

Die Gleichungen (2-41) und (2-40) zeigen, dass das B-Feld durch die Materie (meist) verstärkt und das E-Feld immer geschwächt wird.

Die Abbildung 2-28 linkes Bild zeigt den Einfluss der Permeabilitäten verschiedener Materialien im Vergleich zu Vakuum.

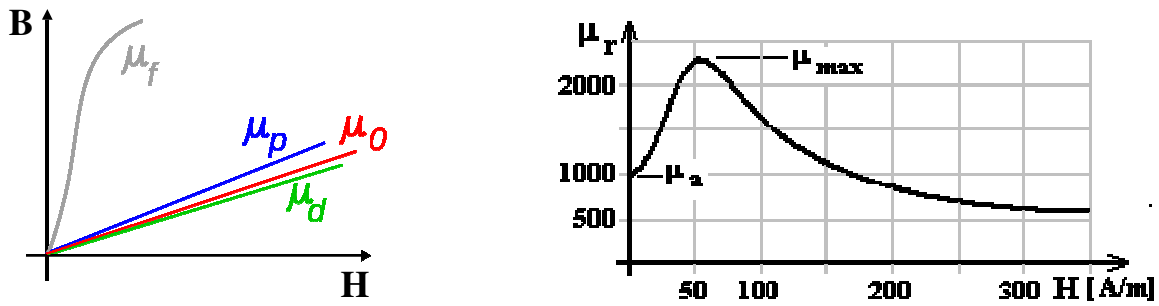

Abbildung 2-28 Vergleich der Permeabilitäten von ferromagnetischen (μ_f), paramagnetischen (μ_p) und diamagnetischen Materialien (μ_d) zu Vakuum (μ_0) [Zur09] (links) und Verlauf der Permeabilität eines weichmagnetischen Werkstoffs in Abhängigkeit von H (rechts)

Berücksichtigt man die Materie und ergänzt (2-37) um die dielektrische (2-38) und magnetische (2-39) Polarisation, so gelangt man zu den Maxwell-Gleichungen in der quaternionischen Form [Max73], auf deren Grundlage später die Darstellung der Maxwell-Gleichungen durch Heaviside [Hea92] und Gibbs [Wil01] beruhte und welche heute noch Anwendung findet:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad \textbf{(2-42)}$$

Dabei behalten die Materiegleichungen (2-38) und (2-39) in allgemeiner Form ihre Gültigkeit und sind in (2-42) nicht explizit aufgeführt. In einem Permanentmagneten ist die Divergenz von B und die Rotation des H-Felds gleich Null: div B = 0, es gibt keine Magnetmonopole, rot H = 0 bedeutet die Wirbelfreiheit des H-Felds. Die Divergenz dagegen, also die Quelle der magnetischen Feldstärke H ist der Divergenz der Magnetisierung gleich, lediglich mit negativem Vorzeichen, div H = - div M, was unmittelbar aus (2-41) folgt. Die Abbildung 2-29 verdeutlicht dies.

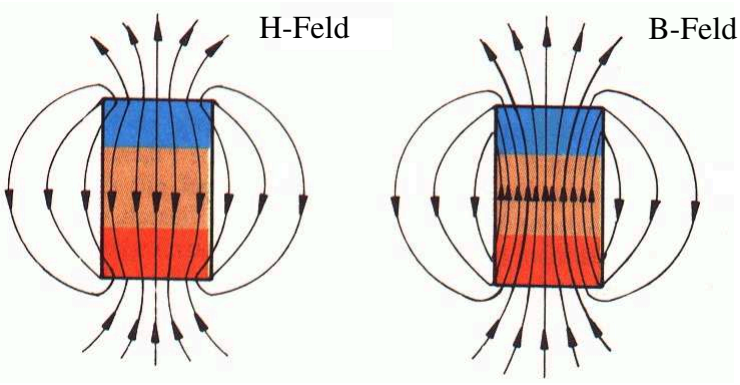

Abbildung 2-29 Verlauf des B- und H-Felds eines Permanentmagnets: div B = 0, es gibt keine magnetische Monopole, das H-Feld dagegen hat Quellen und Senken: $\mu_0 \cdot$div H = - div J [Heb00]

Die Maxwell-Gleichungen zeigen deutlich, dass es keine magnetischen Monopole (magnetische Ladungen) gibt. Da jedoch in letzter Zeit im Zusammenhang mit der „Globalen Universum-Theorie“ das Vorhandensein von Magnetmonopolen diskutiert, bzw. als notwendig angenommen wird [Kak10], Seite 198 und 318, was bereits 1931 der Nobelpreisträger Paul Dirac erkannte [Dir31], lassen sich diese womöglich existierenden Monopolladungen in den Maxwell-Gleichungen unproblematisch berücksichtigen:

$$\text{div}\,\vec{B} = \rho_m$$

mit ρ_m als magnetische Monopolladungsdichte, die mit der magnetischen Stromdichte j_m im Zusammenhang durch die Geschwindigkeit der sich bewegenden magnetischen Monopolladungen ν_m steht:

$$\vec{j}_m = \rho_m \cdot \vec{\nu}_m$$

Aus $\text{div}\,\vec{B} = \rho_m$ folgt, dass die Feldlinien der magnetischen Flussdichte in einem magnetischen Monopol (vergleichbar mit dem Verlauf der E-Feldlinien, siehe Abbildung 2-27) beginnen und enden. Für die Rotation des E-Felds gilt dabei (j_m ist die Stromdichte der magnetischen Monopolladungen):

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_m\right)$$

Diese Aussage kann folgendermaßen interpretiert werden: das Vorhandensein von magnetischer Stromdichte, bzw. die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte führt zu einem elektrischen Wirbelfeld. Da jedoch die magnetischen Ladungen als reale Teilchen bisweilen nicht gefunden, sondern lediglich als Quasiteilchen beobachtet wurden [Kak10] Seite 198, wird in der heute gängigen Notation der Maxwell-Gleichungen weiterhin die Existenz von magnetischen Monopolen verneint.

Die eigentlichen Faraday-Kraftfelder sind das E- und das B-Feld. Nur diese Felder sind direkt über die auf geladene Teilchen wirkende Kraft (Lorentzkraft)

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{E} + \vec{\nu} \times \vec{B}) \qquad \textbf{(2-43)}$$

oder indirekt via Induktionsgesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

messbar. Die Lorentzkraft, benannt nach dem niederländischen Mathematiker und Physiker Hendrik Antoon Lorentz, ist die Kraft, die ein elektrisches, bzw. magnetisches Feld auf eine elektrische Ladung ausübt, wenn sich eine elektrische Ladung q mit der Geschwindigkeit ν durch ein E- bzw. B-Feld bewegt, siehe Abbildung 2-30.

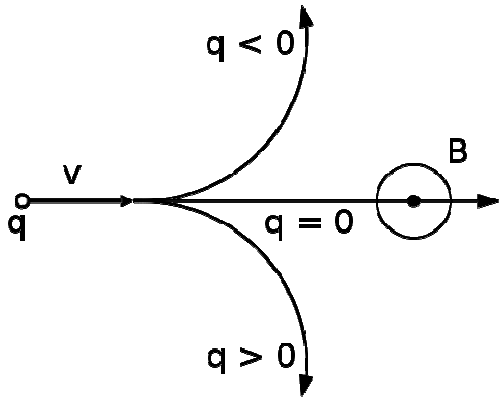

Abbildung 2-30 Ablenkung eines sich bewegenden geladenen Teilchen durch das Magnetfeld [Wei99]

Alle von Faraday gemachten elektromagnetischen Entdeckungen lassen sich durch die Maxwell-Gleichungen beschreiben. Diese Gleichungen zeigen, dass die Elektrizität und der Magnetismus zwei sich ergänzende und gegenseitig beeinflussende Phänomene sind. Die Maxwell-Gleichungen geben Auskunft darüber, wie sich die elektrischen sowie magnetischen Felder verhalten und mit der Materie interagieren und sind im Gegensatz zur Newton'schen Mechanik kompatibel mit Einstein's spezieller Relativitätstheorie, sie sind relativistisch kovariant. Sie gelten für jedes Inertialsystem und behalten ihre Form beim Wechsel des Bezugsystems, was für die Entwicklung der Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielte.

Außerdem bestätigen die Maxwell-Gleichungen, was bereits Faraday 1846 vermutete, dass das Licht durch die transversalen Schwingungen der Kraftlinien entstehen kann [Far46]. Diese Spekulation regte Maxwell zur Ausarbeitung seiner elektromagnetischen Theorie des Lichts an, die er 1864 formulierte [Max65], [Ber74]. Maxwell's Theorie nach, sagen seine Gleichungen die schwingenden elektrischen und magnetischen Felder voraus, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit durch das Vakuum gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, er schrieb:

„Diese Geschwindigkeit ist so nahe an der Lichtgeschwindigkeit, dass wir einen starken Grund zu der Annahme haben, dass das Licht selbst (einschließlich Wärmestrahlung und anderer Strahlung, falls es sie gibt), eine elektromagnetische Welle ist.“ [Max65] Seite 466

Zusammen mit der Lorentzkraft bilden die Maxwell-Gleichungen die theoretische Grundlage der klassischen Elektrodynamik und der Optik (Brechungsindex ~ Lichtgeschwindigkeit in der Materie im Vergleich zum Vakuum).

Die Maxwell-Gleichungen können neben der Form als Differentialgleichungen auch in differentialgeometrischer sowie als Integralgleichungen dargestellt werden.

2.2.2 Maxwell-Gleichungen in integraler Form

Unter Anwendung des Integralsatzes von Gauß, bzw. Stokes ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{B} &= 0 && \overset{\text{Gauß}}{\Rightarrow} && \oiint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0\\
\nabla\cdot\vec{D} &= \rho && \overset{\text{Gauß}}{\Rightarrow} && \oiint_{\partial V}\vec{D}\cdot d\vec{A} = \iiint_{V}\rho\cdot dV = Q(V)\\
\nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} && \overset{\text{Stokes}}{\Rightarrow} && \oint\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\iint_{A}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot dA\\
\nabla\times\vec{H} &= \vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} && \overset{\text{Stokes}}{\Rightarrow} && \oint\vec{H}\cdot d\vec{s} = \iint_{A}\left(\vec{j}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot dA
\end{aligned} \qquad \textbf{(2-44)}$$

Betrachtet man einen E-Feld-freien Raum, bzw. einen magnetischen Kreis entsprechend der Abbildung 1-13, reduziert sich (2-44) zu

$$\begin{cases}
\oiint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0\\
\oint\vec{H}\cdot d\vec{s} = 0
\end{cases} \qquad \textbf{(2-45)}$$

Dem Volumenintegral

$$\oiint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

zufolge gilt

$$B_i\cdot A_i = \cdots = B_n\cdot A_n = \Phi \qquad i\in\{N\} \qquad \textbf{(2-46)}$$

wobei der Ausdruck Φ der magnetische Fluss bedeutet und im gesamten Kreis konstant ist. A_i steht für den vom magnetischen Fluss durchsetzten Querschnitt des jeweiligen Abschnitts. Die Abbildung 2-31 zeigt den Verlauf der Feldlinien der magnetischen Flussdichte B sowie des magnetischen Flusses Φ in einem magnetischen Kreis, entsprechend der Abbildung 1-13.

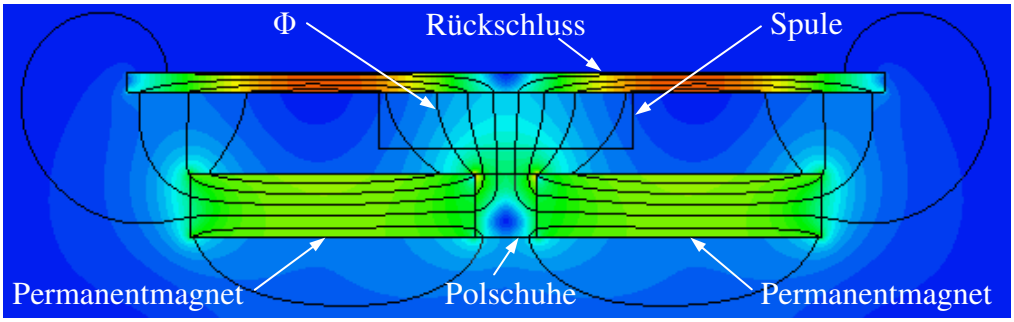

Abbildung 2-31 Verlauf der magnetischen Flussdichte B sowie des magnetischen Flusses Φ in einem magnetischen Kreis mit Luftspalten [Vog11a]

Um die analytische Untersuchung zu erleichtern, wird der magnetische Kreis gemäß der Abbildung 2-31 in bestimmte Strecken aufgeteilt: δ für den Luftspalt, l_{Fe} für alle weichmagnetischen Werkstoffe und l_M für die Länge des Permanentmagneten.

Analog zum Ohm'schen Gesetz entspricht der magnetische Fluss Φ in einem magnetischen Kreis dem elektrischen Strom in einem elektrischen Kreis. Eine weitere Äquivalenz gilt für den magnetischen Widerstand R_m sowie für die magnetische Feldstärke H, die als elektrische Spannung in einem elektrischen Kreis betrachtet werden kann. Entsprechend dieser Analogie kann auf einen magnetischen Kreis beliebiger Komplexität das Ohm'sche Gesetz angewendet und schematisch dargestellt werden, siehe Abbildung 2-32. Dies erleichtert die analytischen Betrachtungen eines magnetischen Kreises. Hier bedeuten R_{mL} der magnetische Widerstand der Luft und R_{mFe} der magnetische Widerstand der magnetfeldführenden Teile. Die Feldstärke ist dem Produkt des magnetischen Flusses und der Summe aller magnetischen Widerstände gleich.

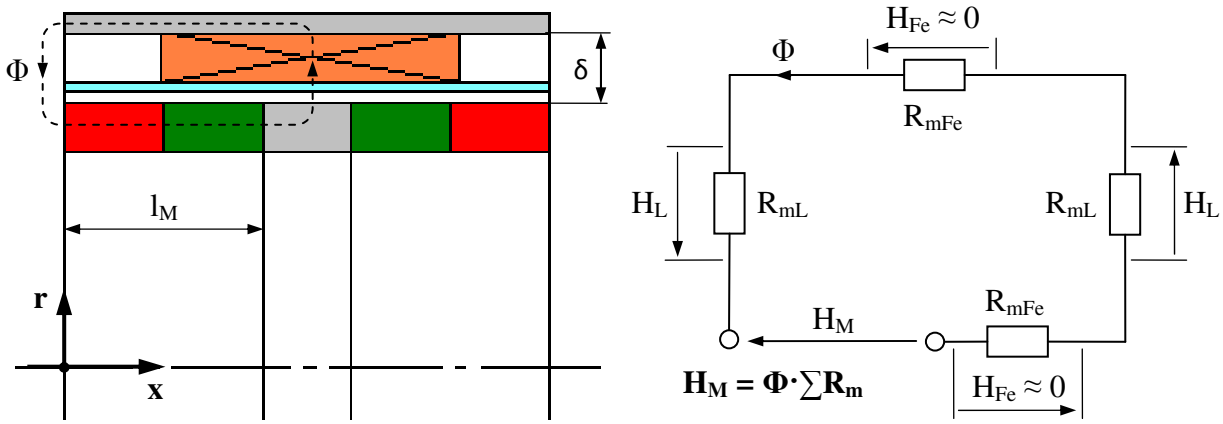

Abbildung 2-32 Äquivalenzrelation zwischen dem magnetischen und elektrischen Kreis. [Vog11a] links

Wie bereits erläutert und graphisch dargestellt (siehe Abbildung 2-29, links), weist das H-Feld eines Permanentmagneten Quellen und Senken auf. Dem Durchflutungssatz zufolge und weil die magnetische Feldstärke H in einem weichmagnetischen Werkstoff, z. B. Eisen, aufgrund seiner guten Leitfähigkeit für den magnetischen Fluss ($\mu_{Fe} > 10^3$) nahezu Null ist, gilt:

$$\oint H \cdot ds = 2 \cdot \int_0^{\delta} H_L(r) \cdot dr + \int_0^{l_M} H_M \cdot dx = 0 \qquad \textbf{(2-47)}$$

Unter Berücksichtigung der Materialgleichung (2-41)

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{J} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}$$

wird die magnetische Flussdichte für verschiedene Strecken definiert:

$$B_L = \mu_0 \cdot H_L \qquad \textbf{(2-48)}$$

$$B_{Fe} = \mu_0 \cdot \mu_{Fe} \cdot H_{Fe} \qquad \textbf{(2-49)}$$

Weiterhin gilt gemäß der Gleichung (2-46):

$$B_L \cdot A_L = B_M \cdot A_M = B_{Fe} \cdot A_{Fe} = \Phi \quad \textbf{(2-50)}$$

wobei die vom magnetischen Fluss durchsetzte Fläche im Luftspalt nicht konstant ist, sondern aufgrund des rotationssymmetrischen Aufbaus des Aktors (siehe Abbildung 2-32) eine Funktion des Radius darstellt:

$$A_L = A(r)$$

Somit ist sowohl die magnetische Flussdichte B_L als auch die magnetische Feldstärke H_L im Luftspalt nicht konstant. Außerdem treten auch Streufelder auf. Bei weiteren Betrachtungen wird der Luftspalt jedoch als klein vorausgesetzt, so dass die Änderungen von B_L, bzw. H_L vernachlässigbar sind, $H_L(r)$ = konstant. Eine weitere Vereinfachung ist, dass keine Streufelder vorhanden sind. Durch diese Annahmen vereinfacht sich die Gleichung (2-47) zu

$$2 \cdot H_L \cdot \delta + H_M \cdot l_M = 0 \quad \textbf{(2-51)}$$

Aufgelöst nach H_L, bzw. H_M folgt aus (2-51):

$$H_L = -H_M \cdot \frac{l_M}{2 \cdot \delta} \quad \textbf{(2-52)}$$

bzw.

$$H_M = -H_L \cdot \frac{2 \cdot \delta}{l_M} \quad \textbf{(2-53)}$$

Setzt man (2-52) in (2-48) ein, erhält man die magnetische Flussdichte im Luftspalt:

$$B_L = -\mu_0 \cdot H_M \cdot \frac{l_M}{2 \cdot \delta} \quad \textbf{(2-54)}$$

Die magnetische Flussdichte B_L im Luftspalt ist der magnetischen Feldstärke H_M sowie der Länge l_M eines Permanentmagneten direkt proportional und wird größer, je kleiner der Luftspalt wird. B_L ist signifikant für die Lorentzkraft, siehe Gleichung (1-3), bzw. (2-43). Um die auf den Permanentmagneten (hier: Läufer, siehe auch Abbildung 2-32) wirkende Lorentzkraft zu vergrößern, bedarf es eines Aktoraufbaus mit einem kleinen Luftspalt sowie mit einem langen und starken Permanentmagneten.

Die Kennlinie eines Permanentmagneten ist durch die Gleichung

$$B_M = B_r + \mu_0 \cdot \mu_M \cdot H_M \quad \textbf{(2-55)}$$

charakterisiert, wobei B_r die Remanenz und μ_M die Permeabilität eines Permanentmagneten für das magnetische Feld bedeuten. Eine typische Kennlinie, die so genannte Entmagnetisierungskurve eines Permanentmagneten ist in der Abbildung 2-33 dargestellt.

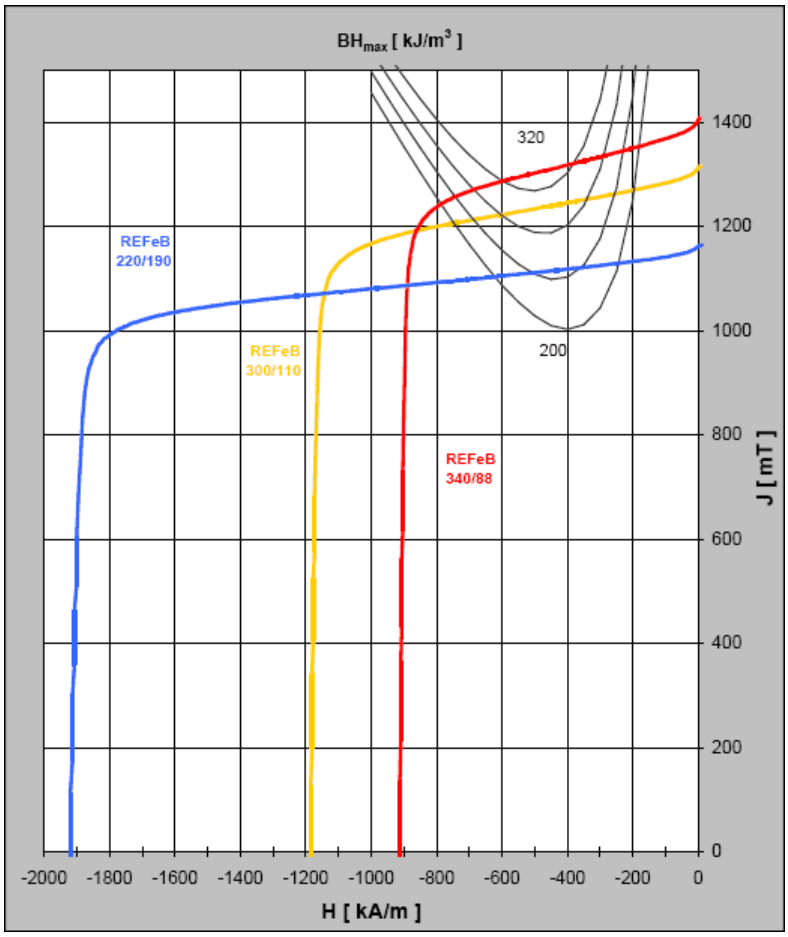

Abbildung 2-33 Entmagnetisierungskurven von NdFeB-Permanentmagneten [Thy12]

Für die weitere Betrachtung ist nur die magnetische Flussdichte im Luftspalt von Bedeutung. Aus der Gleichung (2-50) folgt demnach:

$$B_M = B_L \cdot \frac{A_L}{A_M} \tag{2-56}$$

Setzt man die Gleichungen (2-53) und (2-56) in die Gleichung (2-55) ein, so ergibt sich

$$B_L \cdot \frac{A_L}{A_M} = B_r - \mu_M \cdot \underbrace{\mu_0 \cdot H_L}_{=B_L} \cdot \frac{2 \cdot \delta}{l_M} \quad \Rightarrow$$

$$B_L \cdot \frac{A_L}{A_M} = B_r - \mu_M \cdot B_L \cdot \frac{2 \cdot \delta}{l_M} \tag{2-57}$$

Aufgelöst nach B_L, erhält man die magnetische Flussdichte im Luftspalt:

$$B_L = \frac{B_r}{\frac{A_L}{A_M} + \mu_M \cdot \frac{2 \cdot \delta}{l_M}} \tag{2-58}$$

Wie bereits in der Gleichung (2-54) dargestellt, ist die magnetische Flussdichte B_L entsprechend der Gleichung (2-58) der Remanenz B_r des Permanentmagneten proportional. Abhängig von der Länge l_M und dem Querschnitt A_M eines Permanentmagneten wird B_L größer, je kleiner der Luftspalt δ und sein Querschnitt A_L wird.

Bei der Auslegung eines elektrodynamischen, linearen Schwingaktors sind konstruktive Einschränkungen zu beachten: die Abmessungen eines Permanentmagneten (Läufer) sowie des Luftspalts sind durch den zur Verfügung stehenden Bauraum determiniert. Somit sind auch der maximalen magnetischen Flussdichte B_L, welche neben dem elektrischen Strom für die resultierende Lorentzkraft maßgebend ist, Grenzen gesetzt. Die Lorentzkraft fungiert als Erregerkraft F(t), welche in einem oszillierenden, mechanischen System (siehe z. B. Abbildung 1-13) auf eine Schwingmasse wirkt und die Schwingungsamplitude x(t) bestimmt, siehe Abbildung 2-1 sowie Gleichung (2-3), bzw. (2-12).

Die magnetische Flussdichte im Luftspalt B_L lässt sich unter anderem durch die Auswahl der magnetfeldleitenden, weichmagnetischen sowie hartmagnetischen Materialien beeinflussen.

2.2.3 Ferromagnetische Werkstoffe

Bei den weichmagnetischen Werkstoffen, welche in Transformatoren eingesetzt werden und in den elektrodynamischen Aktoren als Magnetpolschuhe sowie als magnetfeldführende äußere Teile (Rückschluss) Verwendung finden, strebt man eine möglichst schmale Hysteresekurve (siehe Abbildung 2-34) mit hoher Remanenz B_r und kleiner Koerzitivfeldstärke H_C an, um die Ummagnetisierungsverluste, welche frequenzabhängig sind und zur Erwärmung des Eisenkerns führen, zu mindern. Bei der Ummagnetisierung muss Energie für die Ausrichtungsänderung der Weiss'schen Bezirke aufgewendet werden. Dieses Umkippen verursacht Wärme. Die Energie, welche bei der vollständigen Ummagnetisierung in Wärme umgewandelt wird, entspricht der von der Hysteresekurve eingeschlossenen Fläche. Daher ist es wichtig, dass diese Fläche klein und die Hysteresekurve schmal ist. Die Form einer Hysteresekurve ist nicht nur von Stoffeigenschaften, sondern auch von der Bauform des Rückschlusses abhängig: der Luftspalt in einem Magnetkreis verursacht eine Scherung der Hysteresekurve, B_r wird kleiner, obwohl das Material selbst eine hohe Remanenz aufweist.

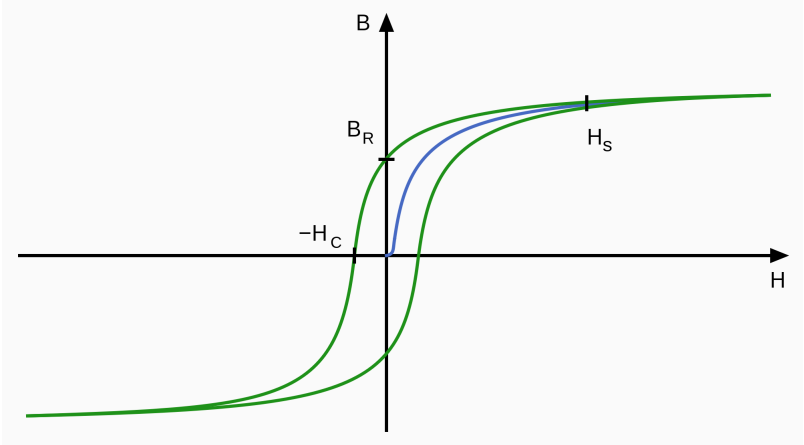

Abbildung 2-34 Hysteresekurve eines ferromagnetischen Werkstoffs [Wdw10]

Ab einem bestimmten Wert der magnetischen Feldstärke (H_S) wird in einem ferromagnetischen Werkstoff nur eine geringe bis keine Änderung der magnetischen Flussdichte erreicht. Als Folge dessen treten die so genannte Sättigung und die Streufelder der magnetischen Flussdichte in magnetfeldführenden Werkstoffen auf.

Eine Übersicht ausgewählter, weichmagnetischer Werkstoffe ist in der Tabelle 2-1 angegeben. Zur Reduzierung der in den magnetfeldführenden Teilen des Schwingaktors aufgrund der oszillierenden Bewegung des Läufermagneten auftretenden Wirbelströme können die so genannten Transformatoren- oder Elektrobleche (silizirtes Eisen) als magnetischer Rückschluss eingesetzt werden. Sie weisen neben der guten magnetischen Permeabilität einen hohen spezifischen elektrischen Widerstand auf.

	B_S [T]	**H_C [A / cm]**	**$\mu_{r,\,max}$**	**ρ [$\Omega \cdot mm^2 / m$]**
Ferrite	0,32 - 0,53	-	1.000 - 6.500	10^6 - 10^7
Nickeleisen (NiFe)	0,7 - 1,6	0,003 - 0,1	50.000 - 400.000	0,35 - 0,9
Siliziumeisen ($FeSi_3$)	≈ 2	0,2	30.000	0,4
Reineisen (Fe 99,9 %)	2,15	0,06	40.000	0,1
Kobalteisen (FeCo)	2,35	0,8	15.000	0,35

Tabelle 2-1 Wichtige Kennwerte ausgewählter, weichmagnetischer Werkstoffe [Bol90]

Bei den hartmagnetischen Werkstoffen, wie beispielweise NdFeB, ist im Gegensatz zu weichmagnetischen Materialien eine breite Hysteresekurve mit hoher Remanenz und hoher Koerzitivfeldstärke erwünscht, siehe Abbildung 2-33. Dies ergibt sich aus der Anforderung der hohen magnetischen Stabilität des Magnetwerkstoffs gegen äußere Felder. Wird ein Permanentmagnet aus der Magnetisiervorrichtung entnommen, so baut sich ein neues Magnetfeld zwischen den Polflächen des Magneten in dem umgebenden Luftraum auf.

Dieser Vorgang wird magnetische Scherung oder Entmagnetisierung genannt und ist vom Magnetmaterial sowie von seiner Form abhängig. Die magnetische Scherung führt dazu, dass ein nach der Magnetisierung zum Verkauf angebotener Permanentmagnet eine geringere als die angegebene Remanenz besitzt.

Die Temperaturabhängigkeit einer Entmagnetisierungskurve ist näherungsweise linear und wird in der Praxis durch Temperaturbeiwerte beschrieben. Nach der Temperaturkorrektur und Berücksichtigung der magnetischen Scherung ergibt sich ein praxisrelevanter Wert der Magnetisierung, welchen man als magnetischen Arbeitspunkt bezeichnet, siehe Abbildung 2-35.

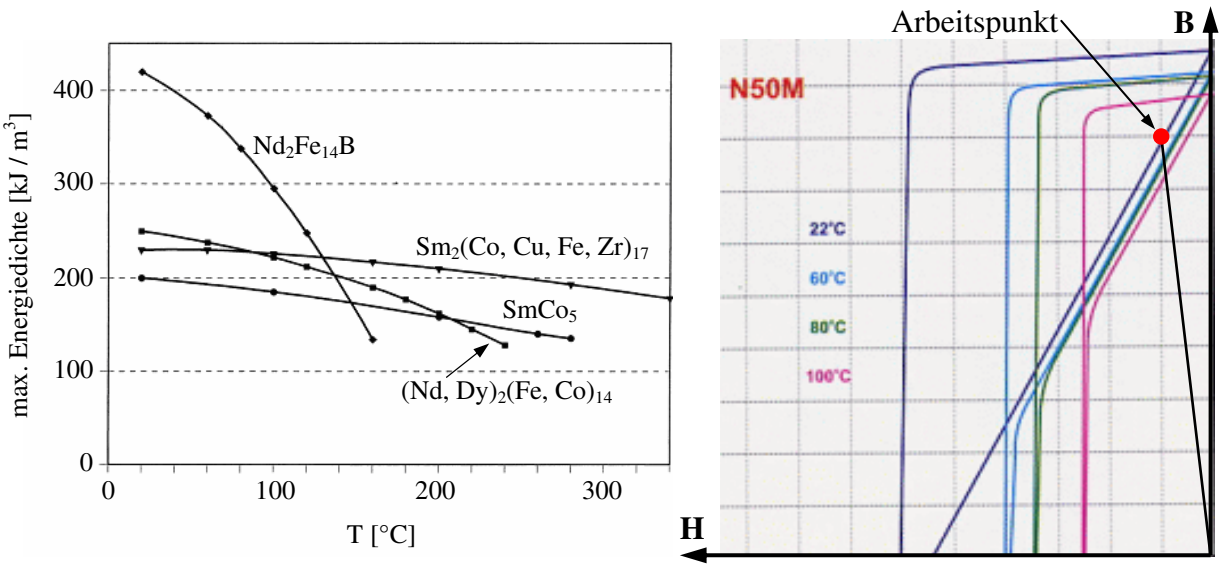

Abbildung 2-35 Temperaturabhängigkeit, Werte von NdFeB- und SmCo-Magneten [Sch07] (links) sowie Arbeitsgeraden eines gesinterten NdFeB-Permanentmagneten [Ndf12] (rechts)

Die modernen Permanentmagnete aus Seltenerdmetallen wie Neodym-Eisen-Bor (NdFeB) sowie Samarium-Kobalt (SmCo) werden meist entsprechend dem Pulver-, bzw. Sinterverfahren hergestellt und zeichnen sich durch ihre hohe Remanenz sowie Koerzitivfeldstärke aus. Die Entmagnetisierungskurve ist linear, so dass eine gute Stabilität der magnetischen Eigenschaften vorliegt. Zudem besitzen die SmCo-Magnete eine sehr hohe thermische sowie chemische Stabilität, so dass hier keine Beschichtungen gegen Korrosion notwendig sind. SmCo-Magnete werden daher sowohl in Aktoren als auch in Sensoren eingesetzt. NdFeB-Magnete reagieren dagegen mit einem starken Verlust der magnetischen Energiedichte auf Temperaturerhöhung (siehe Abbildung 2-35) sowie Oxidation. Dies erfordert eine korrosionsbeständige Beschichtung des Magnetwerkstoffs, beispielweise aus Nickellegierungen oder Kunststoffen. Wegen ihrer hohen Remanenz werden NdFeB-Magnete gegenüber denen aus SmCo bevorzugt.

Da der Schwerpunkt der vorliegenden Dissertation auf der Analyse und Regelung eines mechanischen, schwingenden Systems liegt, werden ferromagnetische Werkstoffe nicht eingehender beschrieben. Es wird dazu auf die Standardliteratur verwiesen, z.B. [Bol90], [Hat03], [Hor06], [Hor12], [Sch07].

2.2.4 Modellrechnungen mit MAXWELL

Bei der Auslegung eines elektrodynamischen linearen Schwingaktors wurde bewusst auf eine analytische Lösung der Maxwell-Gleichungen verzichtet, da die Analytik hierzu zwangsläufig eine Vereinfachung zugunsten der Übersichtlichkeit fordert. Des Weiteren existieren zahlreiche FEM-Programme, z. B. MAXWELL, mit dessen Hilfe realitätsnahe, elektrostatische sowie elektromagnetische Modellrechnungen durchgeführt werden können.

Folgend werden einige Modellrechnungen des linearen Schwingantriebs vorgestellt, welcher in einem Funktionsmuster sowie in weiteren Prototypen des Stechaktors verwendet wurde.

Ein elektrodynamischer Linearaktor dient zur Erzeugung einer oszillierenden Bewegung, welche von der Erregerkraft F(t) (Lorentzkraft) bestimmt wird. Demnach ist es wichtig zu untersuchen, welche Kräfte sich bei der Dimensionierung des Schwingaktors ergeben und ob diese Kräfte konstant sind, bzw. ein lineares Verhalten im Arbeitsbereich aufweisen. Der Arbeitsbereich wird durch die maximale gewünschte Schwingungsamplitude x_0 definiert. Im dritten Kapitel findet man die Beschreibung der aufgebauten Prototypen sowie die Testergebnisse.

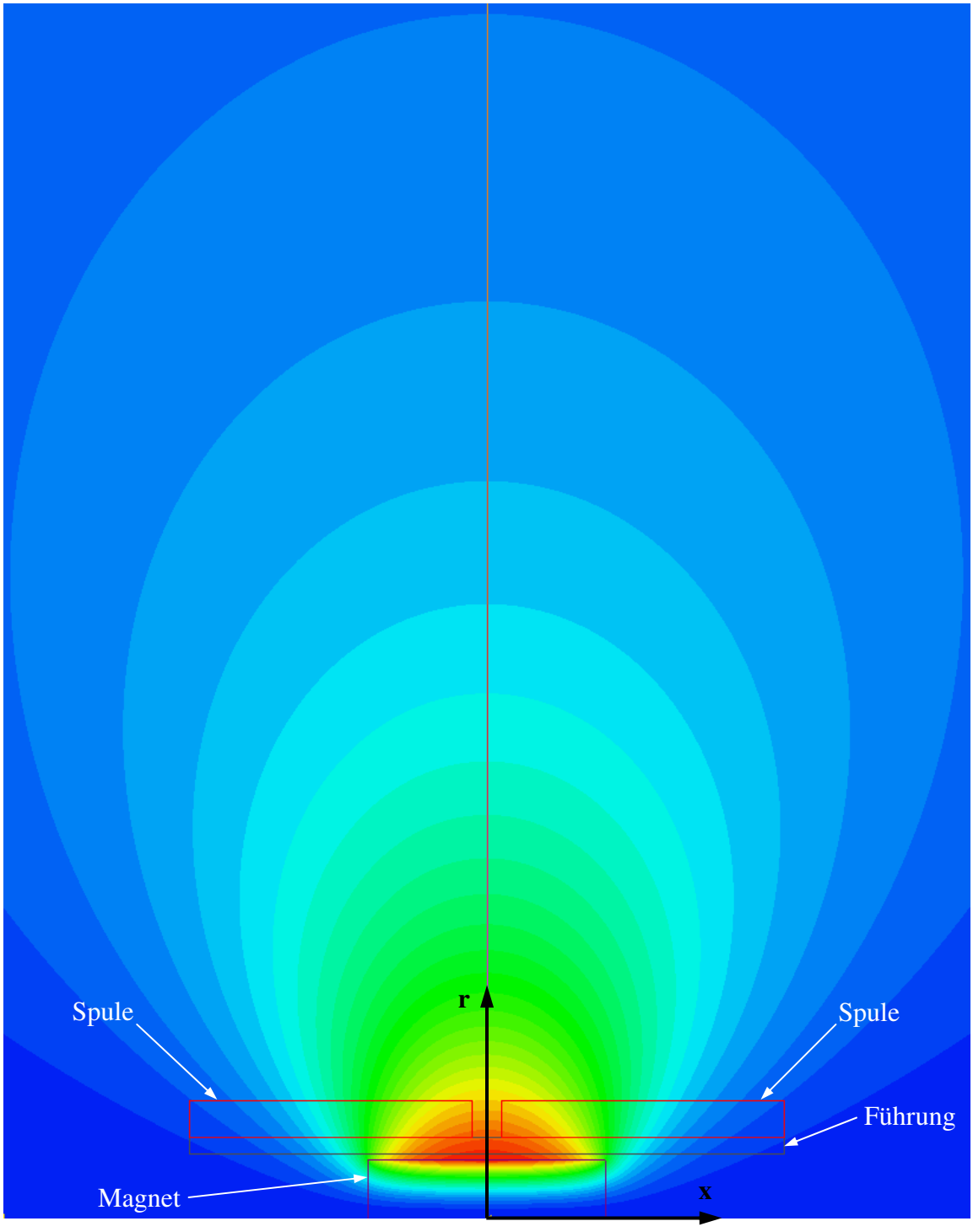

Abbildung 2-36 Verlauf des magnetischen Flusses, Modell ohne Rückschluss, Spulen unbestromt

In der Abbildung 2-36 ist der Verlauf des magnetischen Flusses in einem rotationssymmetrisch aufgebauten Linearantrieb ohne Rückschluss dargestellt. Die Spulen sind unbestromt. Wie man dem Bild entnehmen kann, dringt der magnetische Fluss durch den umgebenden Luftraum und wird mit steigender Entfernung von der Symmetrieachse schwächer.

Bei einem Modell mit einem weichmagnetischen Rückschluss und Polschuhen wird der magnetische Fluss Φ gebündelt und verstärkt, da der magnetische Widerstand R_m des Weicheisens geringer ist als der der Luft, siehe Abbildung 2-37. Dementsprechend wird auch die magnetische Flussdichte oder Induktion im Luftspalt B_L größer, siehe Gleichung (2-50). Bei der analytischen Betrachtung eines magnetischen Kreises (vgl. Kapitel 2.2.2) wurde vorausgesetzt, dass die magnetische Flussdichte im Luftspalt im Bereich des Polschuhs konstant ist sowie keine Streufelder vorhanden sind. Die Abbildung 2-37 zeigt jedoch, dass der magnetische Fluss Φ in Wirklichkeit entlang der rotationssymmetrischen Achse variiert.

Die Abbildung 2-38 zeigt den Verlauf der magnetischen Flussdichte für den Fall, dass der Magnet mittig angeordnet ist. Wird der Magnet aus seiner Mittellage um 4 mm nach rechts ausgelenkt, so ist der Verlauf des B-Felds in der Abbildung 2-39 zu sehen. Die Spulen sind jeweils mit 200 Ampèrewindungen (AW = N·I) bestromt. Dies ergibt sich aus dem Spulenquerschnitt von 11,875 mm^2 sowie dem Ansatz einer maximalen Stromdichte von $J_{max} \approx 16{,}8$ A / mm^2. Die Bestromung der Spule sowie der Einfluss der Spuleninduktivität auf die Stromdynamik wird im Kapitel 2.3 näher erläutert.

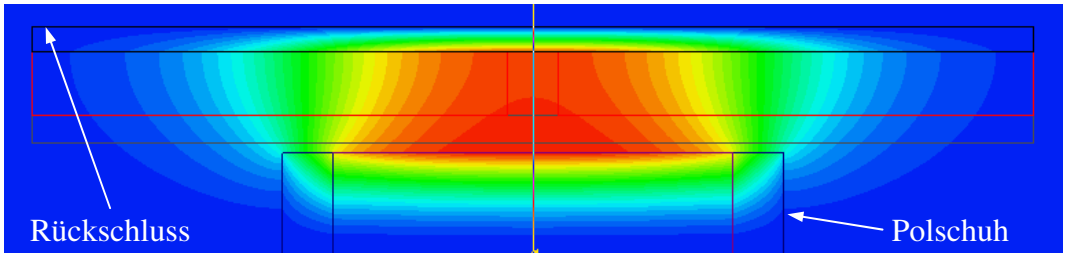

Abbildung 2-37 Verlauf des magnetischen Flusses, Modell mit Rückschluss, Spulen unbestromt

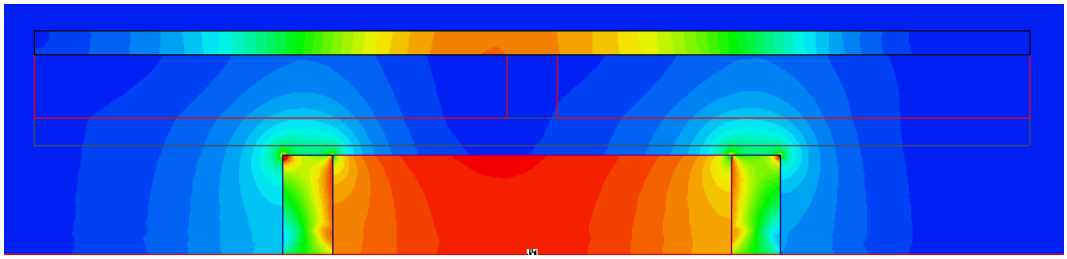

Abbildung 2-38 Verlauf der magnetischen Flussdichte, mittlere Position des Magneten

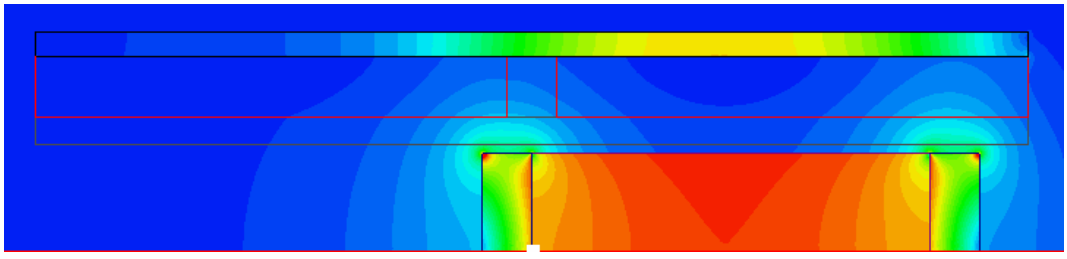

Abbildung 2-39 Verlauf der magnetischen Flussdichte, Magnet nach rechts ausgelenkt

In der Abbildung 2-40 ist der Verlauf der Lorentzkraft in Abhängigkeit von der axialen Position des Magneten dargestellt. Man sieht, dass die Lorentzkraft und somit auch die Erregerkraft von der Position abhängen, $F_L = f(x)$. Ein Blick auf die Abbildung 2-40 zeigt, dass in den Abschnitten von - 1 bis 0 und von 0 bis 1 Millimeter die Lorentzkraft jeweils annähernd linear ansteigt, bzw. abfällt, so dass für die Schwingungsamplituden $x_0 \leq 1$ mm ein lineares Verhalten des Systems zu erwarten ist. Für größere Schwingungsamplituden, bezogen auf das Modell entsprechend der Abbildung 2-37, ist das Systemverhalten nicht linear. Durch Vergrößerung der axialen Länge der Spulen sowie des Magneten kann auch der lineare Arbeitsbereich vergrößert werden. Welchen Einfluss die Nichtlinearität eines mechanischen, schwingenden Systems auf sein Verhalten hat, wurde im Kapitel 2.1.2 untersucht. Will man die Nichtlinearität bewusst in das System einbauen, so kann dies mittels entsprechender konstruktiver Gestaltung, bzw. der Bestromung der Spulen (siehe Kapitel 2.5.3) erreicht werden.

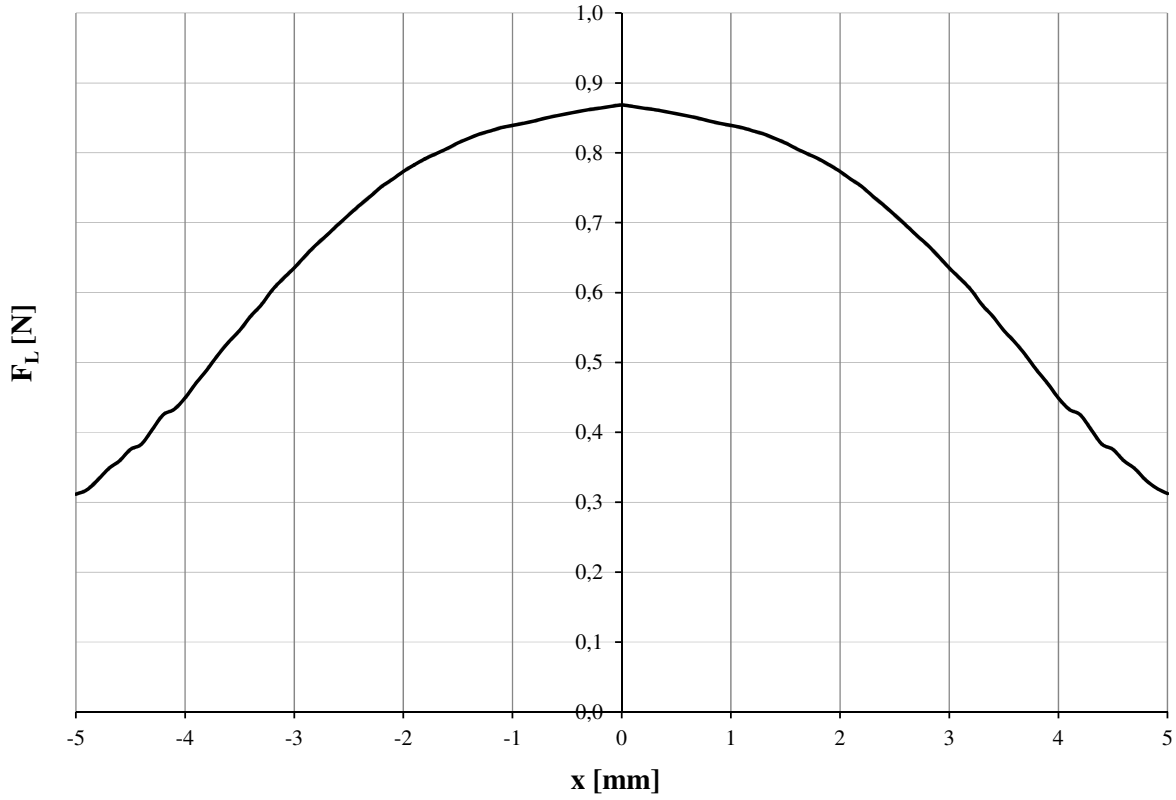

Abbildung 2-40 Verlauf der Lorentzkraft, abhängig von der Position des Magneten, mit Rückschluss

In der Abbildung 2-37 sind die Streufelder, welche die Spulenwindungen durchsetzen und zum Aufbau der Lorentzkraft beitragen, gut erkennbar. Demnach sind die radiale Dicke sowie die axiale Länge der Spule für die Optimierung der Lorentzkraft von Bedeutung. Die Abbildung 2-43 verdeutlicht den Einfluss der radialen Dicke der Spule auf die Stärke der Lorentzkraft bei einem Modell ohne weichmagnetischen Rückschluss. Mit steigender radialer Dicke der Spule können mehr Windungen in einem Spulenquerschnitt untergebracht werden. Dies bedeutet, dass eine dickere Spule mit mehr Ampèrewindungen bestromt werden kann, was jedoch aufgrund des gestiegenen elektrischen Widerstands sowie der erhöhten Induktivität der Spule mit einer Erhöhung der elektrischen Spannung und der Gesamtleistung verbunden ist, wenn der elektrische Strom gleich bleiben sollte, bzw. eine negative Auswirkung auf die

Stromdynamik und somit auf das Regelungsverhalten des Antriebs bewirkt. Mittels Variation des Drahtsquerschnitts sowie der Anzahl der Spulenwindungen kann dies optimiert, bzw. für den gewünschten Einsatzbereich angepasst werden. Näheres dazu im Kapitel 2.3.

Mit einer Vergrößerung des Spulenquerschnitts sind auch höhere Lorentzkräfte erzielbar, jedoch sinkt die Kraftwirkung um so schneller, je größer der Spulenquerschnitt ist (siehe Abbildung 2-43 rote Linie), wenn der Magnet aus seiner Mittelstellung ausgelenkt und somit weniger Spulenwindungen mit dem Magnetfeld durchsetzt werden.

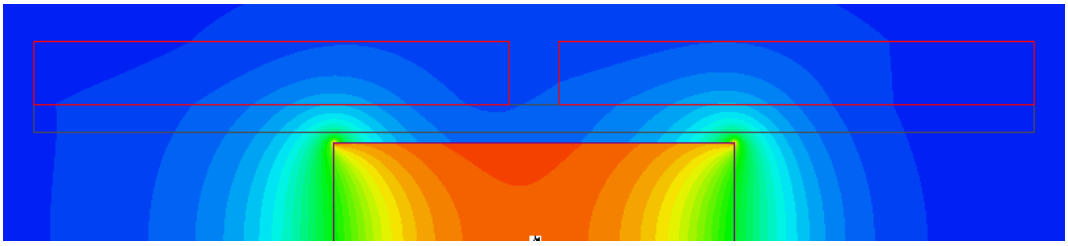

Abbildung 2-41 Verlauf der magnetischen Flussdichte ohne Rückschluss, mittlere Position des Magneten

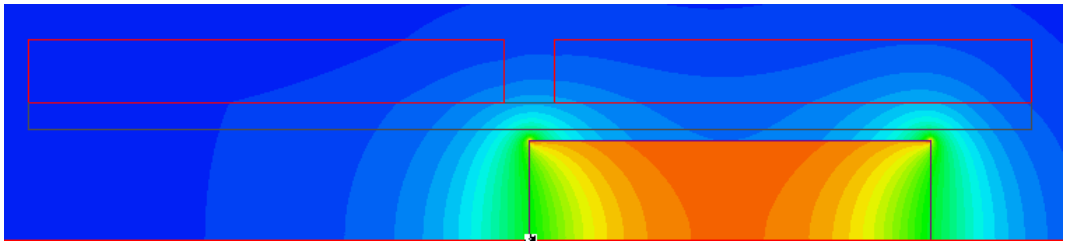

Abbildung 2-42 Verlauf der magnetischen Flussdichte ohne Rückschluss, Magnet nach rechts ausgelenkt

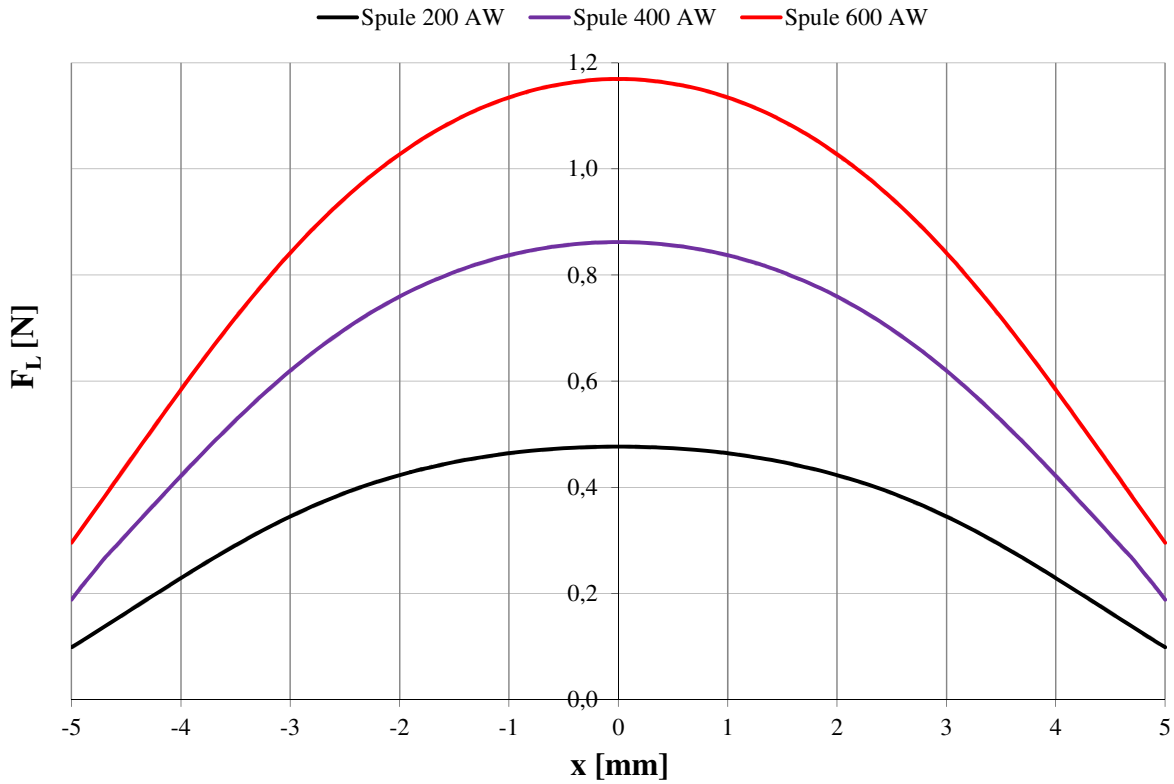

Abbildung 2-43 Verlauf der Lorentzkraft, abhängig von der Position des Magneten, ohne Rückschluss

Vergleicht man zwei Modelle, mit und ohne weichmagnetischen Rückschluss, siehe Abbildung 2-44, so ist eine tendenzielle Steigerung der Lorentzkraft mit Erhöhung der radialen Dicke der Spule zu beobachten, jedoch wird der Unterschied zwischen den beiden Modellen immer geringer, je dicker die Spule wird. Dies ist durch den immer größer werdenden Luftspalt zwischen dem Magnetpolschuh und dem Rückschluss zu begründen, was die magnetische Flussdichte im Spalt reduziert, siehe Gleichung (2-54), bzw. (2-58).

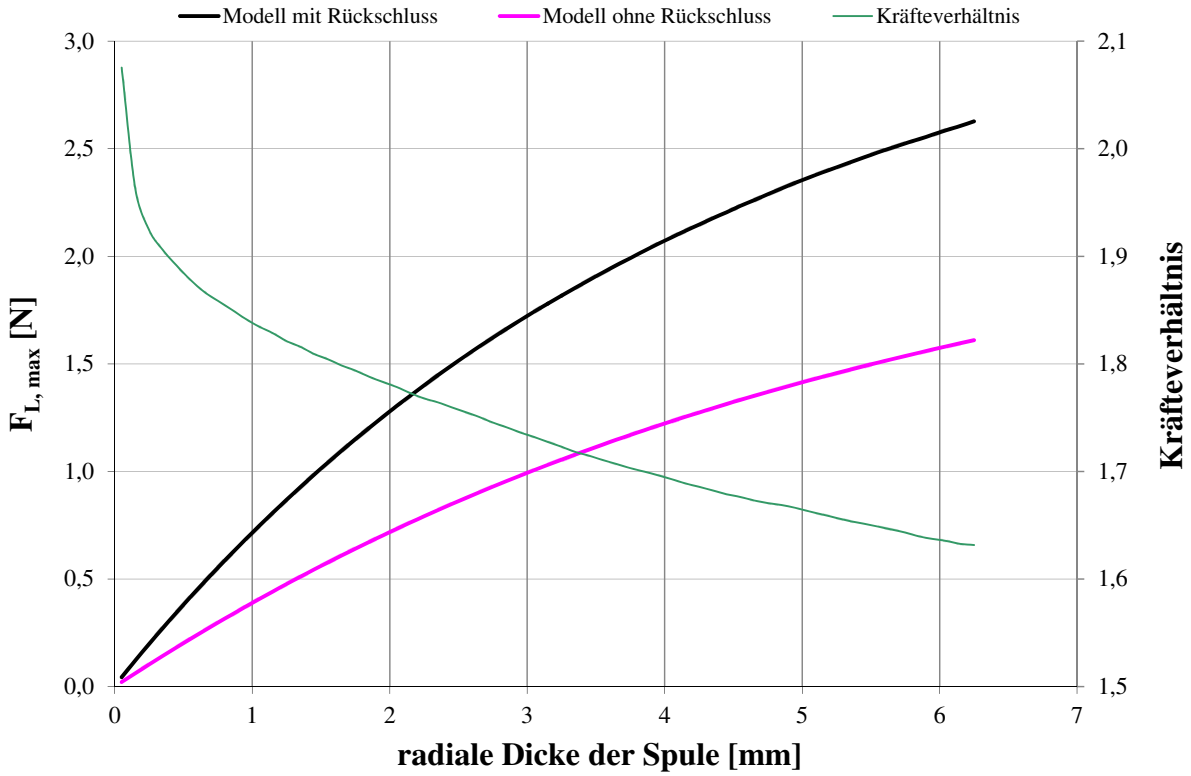

Abbildung 2-44 Verlauf der maximalen Lorentzkraft in Abhängigkeit von der radialen Dicke der Spule

Analysiert man den Verlauf des magnetischen Flusses bei Modellen mit und ohne Rückschluss in den Abbildungen 2-36 sowie 2-37, stellt man fest, dass der magnetische Fluss im Inneren des Magneten in der Nähe seiner rotationssymmetrischen Achse sehr schwach ausgeprägt ist und somit nur wenig zum Aufbau der Lorentzkraft beiträgt. Durch Verwendung von gesinterten Permanentmagneten mit einer Innenbohrung kann einerseits der Werkstoff eingespart und somit das Gewicht des Läufers reduziert werden, andererseits lässt sich eine solche Bohrung für konstruktive Zwecke nutzen, z. B. um den Polschuh, bzw. die Druckfeder zu zentrieren, für die Befestigung der die Bewegung des Läufers übertragenden Teilen, zur Führung des Magneten oder für die Minderung der Luftdämpfung. Weiterhin lässt sich durch die Form des Polschuhs der Verlauf des magnetischen Flusses optimieren sowie das Gewicht des Läufers mindern, beispielsweise mittels Einbringen einer Kegelbohrung. Die Abbildung 2-45 zeigt den Verlauf des magnetischen Flusses bei einem Modell mit einem Permanentmagneten mit Innenbohrung.

Die Abbildung 2-46 zeigt die Abhängigkeit der Lorentzkraft vom Durchmesser der Innenbohrung eines Magneten. Je größer der Bohrungsdurchmesser, desto schwächer wird die auf den Magneten wirkende Lorentzkraft. Für bestimmte Durchmesser fällt jedoch die Kraftänderung gering aus, so dass man sowohl beim Modell mit Rückschluss als auch beim Modell ohne Rückschluss mit kleinen Verlusten der Lorentzkraft rechnen kann. Bei einem Magneten mit größerem Außendurchmesser kann auch der Durchmesser der Innenbohrung größer sein, ohne nennenswerter Minderung der Lorentzkraft, welche durch die größere Magnetfläche positiv beeinflusst wird.

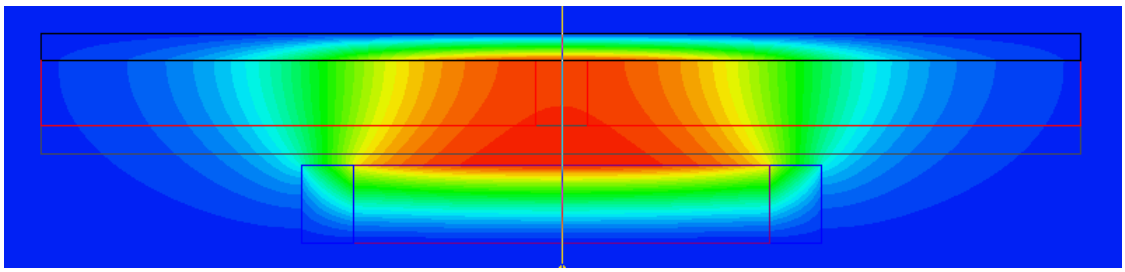

Abbildung 2-45 Verlauf des magnetischen Flusses, Magnet mit Innenbohrung, Spulen unbestromt

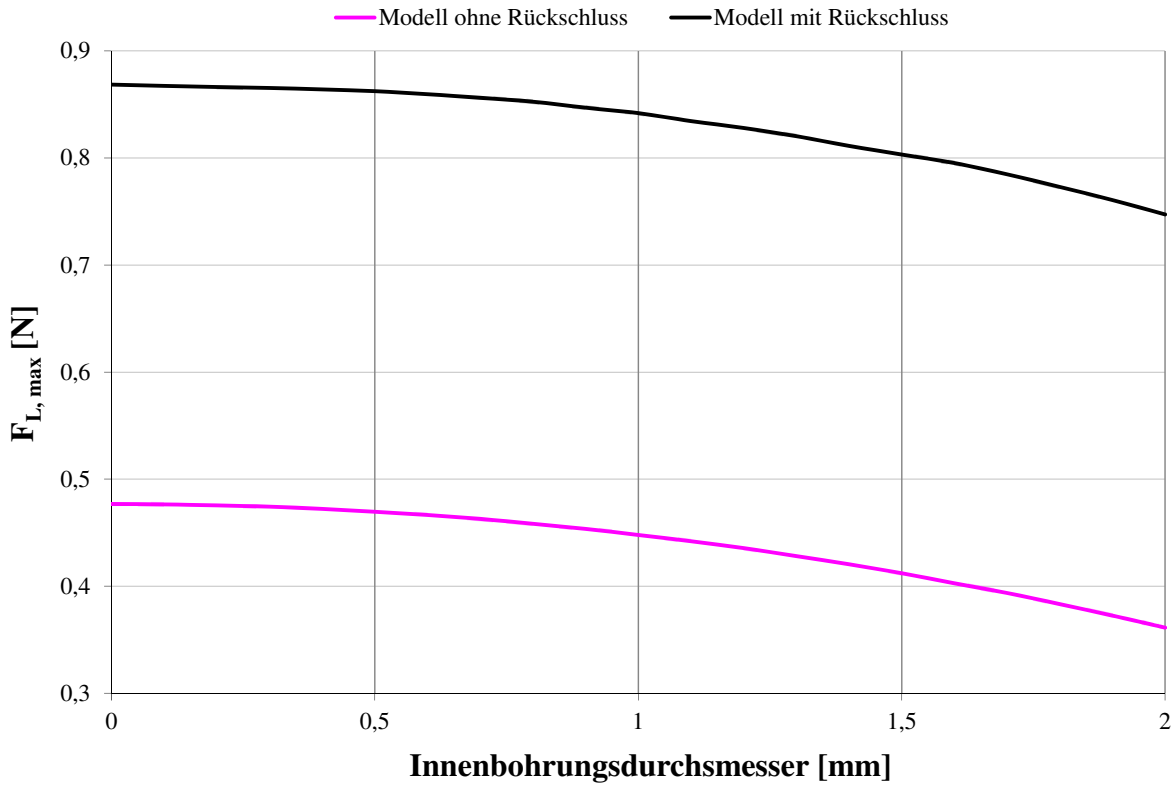

Abbildung 2-46 Verlauf der maximalen Lorentzkraft in Abhängigkeit vom Durchmesser der Innenbohrung des Magneten

Abschließend wird der Zusammenhang zwischen der Lorentzkraft und der radialen Dicke der Spule bei gleich bleibender Leistung (z. B. 1 Watt) und bei verschiedenen Magnetlängen in der Abbildung 2-47 vorgestellt [Vog11a]. Für jedes Modell lässt sich also ein Maximum der Lorentzkraft bei optimalen radialen Spulendicke fest stellen. Gleiche Überlegungen gelten ebenfalls für die axiale Länge der Spule [Vog11a].

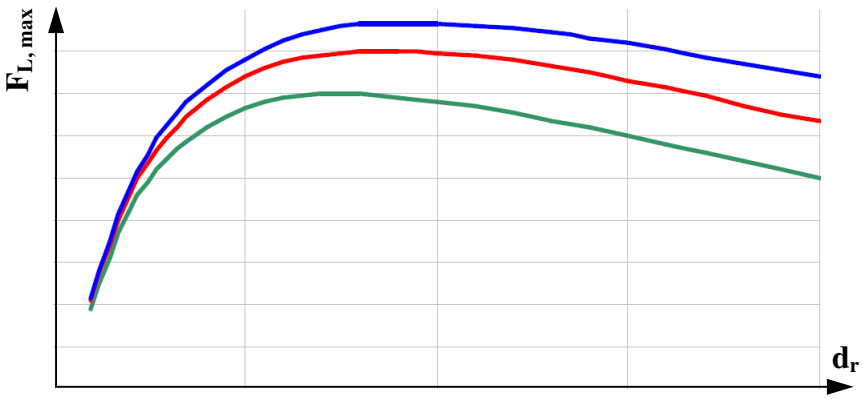

Abbildung 2-47 Verlauf der Lorentzkraft in Abhängigkeit von der radialen Dicke der Spule bei gleich bleibender Leistung und bei verschiedenen Magnetlängen [Vog11a]

2.2.5 Zusammenfassung

Die vorgestellten Modellrechnungen mit dem FEM-Programm MAXWELL verdeutlichen die Zusammenhänge, welche bereits bei den analytischen Betrachtungen eines magnetischen Kreises dargelegt wurden und ergänzen das vereinfachte theoretische Modell mit realitätsnahen Darstellungen der Verläufe des magnetischen Flusses sowie der magnetischen Flussdichte, welche direkt durch die Lorentzkraft messbar ist.

Die für die Erregerkraft F(t) und somit für die Schwingungsamplitude x(t) eines mechanischen, schwingenden Systems interessierende Lorentzkraft wird von verschiedenen Faktoren beeinflusst: im Wesentlichen ist es die Form sowie der Magnetisierungsgrad eines Permanentmagneten, welcher in einem offenen oder geschlossenen magnetischen Kreis die magnetische Flussdichte bestimmt. Außerdem ist es die Spule, die vom magnetischen Fluss durchsetzt wird. Ausgehend von einem begrenzten zur Verfügung stehenden Bauraum sowie vom gewünschten Arbeitsbereich des Linearantriebs lässt sich die Lorentzkraft und ihr Verlauf in Abhängigkeit von der Position des Läufermagneten mittels Variation der axialen Magnet- und Spulenlänge sowie der radialen Dicke der Spule und des Magneten optimieren. Dank des weichmagnetischen Rückschlusses kann die Lorentzkraft doppelt so groß wie bei einem Modell ohne Rückschluss sein. Mit steigender Luftspaltlänge werden jedoch die Kraftunterschiede zwischen den beiden Modellen geringer.

Die größere Länge des Luftspalts ermöglicht die Verwendung einer dickeren Spule, die mit mehr Ampèrewindungen (N·I) bestromt werden kann und somit die Lorentzkraft verstärkt, was wiederum mehr elektrische Leistung erfordert. Die Gestaltung der Spule beeinflusst nicht nur die Stärke, sondern auch die Linearität der Lorentzkraft.

2.3 Spule

2.3.1 Induktivität

Das Biot-Savart-Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke H und der elektrischen Stromdichte J, bzw. dem elektrischen Strom I her und erlaubt die Berechnung beliebiger Feldstärkeverteilungen. Für vereinfachte Fälle, etwa entlang einer kreisförmigen Feldlinie im Abstand r zu einem geraden Leiter, wendet man den Durchflutungssatz an:

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot r} \tag{2-59}$$

Für die magnetische Feldstärke im Inneren einer Spule, derer Länge ℓ viel größer ist als der Durchmesser, gilt annähernd:

$$H_S \approx \frac{N \cdot I}{\ell} \tag{2-60}$$

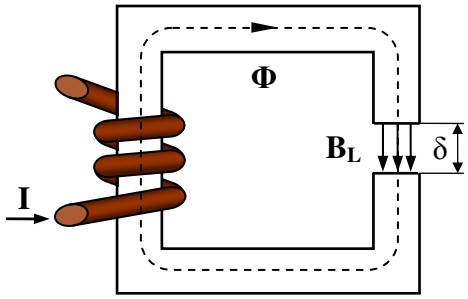

Abbildung 2-48 Magnetischer Kreis mit Spule

Betrachtet man einen magnetischen Kreis (jedoch ohne einen Permanentmagneten) mit dem Luftspalt δ und mit einer Spule, welche N Windungen aufweist, siehe Abbildung 2-48, und wendet den Durchflutungssatz und die Materialgleichung an (siehe Kapitel 2.2.2) sowie berücksichtigt man die Gleichung (2-60), gilt:

$$H_L \cdot \delta + \underbrace{H_{Fe}}_{\approx 0} \cdot l_{Fe} = H_S \cdot \ell \quad \Rightarrow$$

$$\frac{B_L \cdot \delta}{\mu_0} = H_S \cdot \ell = N \cdot I \quad \Rightarrow$$

$$B_L = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\delta} \tag{2-61}$$

Hier ist B_L die magnetische Flussdichte im Luftspalt, welche aufgrund des in der Spule fließenden Stroms verursacht wird. In einer Spule werden mehrere Windungen vom magnetischen Fluss durchsetzt.

Es entsteht ein verketteter Fluss, welcher den Zusammenhang zwischen der Induktivität einer Spule und dem elektrischen Strom darstellt:

$$\Psi = N \cdot \Phi = L \cdot i(t) \tag{2-62}$$

Setzt man für den magnetischen Fluss Φ die Gleichung (2-46) ein und beachtet die Gleichung (2-61), so ergibt sich die Induktivität einer Spule:

$$L = \frac{N \cdot B_L \cdot A_L}{i(t)} = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot A_L}{\delta} \tag{2-63}$$

Der Ausdruck

$$R_m = \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A_L} \tag{2-64}$$

wird als der magnetische Widerstand der Luft bezeichnet. Der resultierende magnetische Widerstand, wie bereits im Kapitel 2.2.2 dargelegt (siehe auch Abbildung 2-32), ist eine Summe der einzelnen magnetischen Widerständen des Eisens sowie der Luft in einem magnetischen Kreis:

$$R_m = \sum_{i=1}^{n} R_{m,i} \quad \Rightarrow \quad R_m \approx \underbrace{R_{mFe}}_{\approx 0} + R_{mL} \tag{2-65}$$

Setzt man (2-64) in (2-63) ein, erhält man die Spuleninduktivität:

$$L = \frac{N^2}{R_m} \tag{2-66}$$

Ist der gesamte magnetische Widerstand hoch, wie beispielsweise bei einem Modell ohne die magnetfeldführenden Teile (siehe Abbildung 2-36), so ist die Spuleninduktivität geringer als die, welche sich bei einem Modell mit Rückschluss ergibt. Der weichmagnetische Rückschluss führt somit zu einer größeren Spuleninduktivität, die sich negativ auf die Stromdynamik auswirkt.

Entsprechend dem von Faraday formulierten Induktionsgesetz induziert ein sich zeitlich änderndes B-Feld in einem Leiter den elektrischen Strom i(t), der wiederum zum Entstehen eines B-Felds führt. Eine zeitliche Änderung des B-Felds bedeutet ebenfalls eine zeitliche Änderung des verketteten Flusses und führt zu einer Induktionsspannung an der Spule:

$$u_L = \dot{\Psi} = \frac{d}{dt}(L \cdot i) = i \cdot \frac{dL}{dt} + L \cdot \frac{di}{dt} \tag{2-67}$$

Diese Spannung ist der vom Netzgerät aufzubringenden Spannung entgegengesetzt gerichtet. Das Netzgerät muss also eine um u_L höhere Spannung aufbringen (L ist konstant):

$$U(t) = u_L + u_R = L \cdot \frac{di}{dt} + u_R \qquad \textbf{(2-68)}$$

$$U(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) \qquad \textbf{(2-69)}$$

wobei R den elektrischen Widerstand der Spule darstellt. Mit dem Lösungsansatz $i_h = A \cdot e^{\alpha t}$ sowie der partikulären Lösung $i_p = U_0 / R$ (da wegen des elektrischen Widerstands die Gesamtlösung auf einen konstanten Wert zustrebt) und der Anfangsbedingung i(0) = 0 ergibt sich die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2-69):

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) \qquad \textbf{(2-70)}$$

In der Abbildung 2-49 ist der Stromverlauf in einer Spule beim Einschalten dargestellt.

Bei der analytischen Betrachtung des Stromverlaufs in einer Spule ist es manchmal hilfreich, nicht den gesamten Einschaltvorgang zu kennen, sondern nur den Zeitpunkt zu ermitteln, bei dem der Strom ca. 63 Prozent seines maximalen Werts erreicht hat. Diese Zeit wird Verzögerungszeit oder propagation delay time t_{pd} genannt und ist in der Elektrotechnik bei der Beschreibung von Signalverläufen üblich (z. B. bei Operationsverstärkern, Verzögerungszeit der Logik-Gatter).

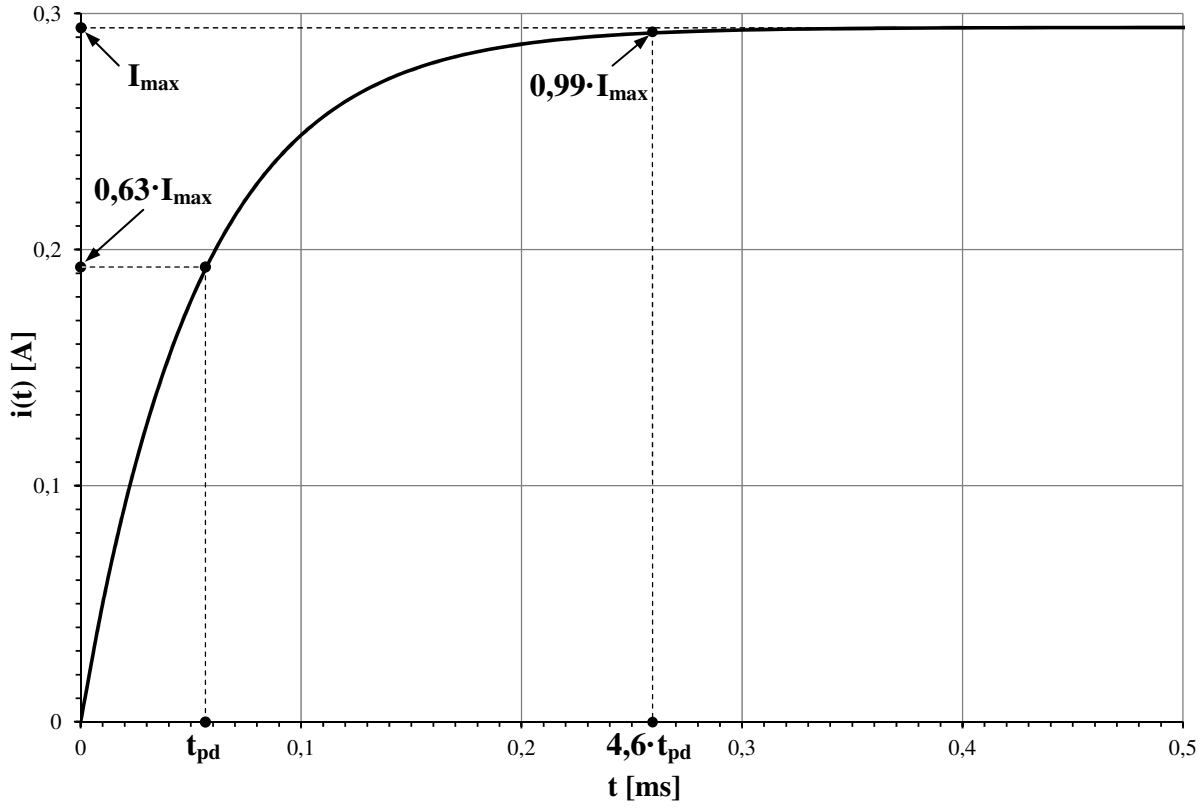

Abbildung 2-49 Einschaltvorgang (Sprungantwort) für L = 1 mH und R = 17 Ω

Entsprechend der eingeführten Definition der Verzögerungszeit wird die Gleichung (2-70) umgeschrieben:

$$0{,}63 \cdot I_{max} = I_{max} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{pd}}\right) \qquad \textbf{(2-71)}$$

Nach Kürzen und Umformen ergibt sich:

$$e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{pd}} = 1 - 0{,}63 \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left(e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{pd}}\right) = \ln(0{,}37) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R}{L} \cdot t_{pd} \approx 1$$

Demnach lässt sich die Verzögerungszeit als Verhältnis der Spuleninduktivität zum Spulenwiderstand definieren:

$$t_{pd} = \frac{L}{R} \qquad \textbf{(2-72)}$$

Mit steigender Induktivität vergrößert sich die Anstiegszeit (englisch rise time) des elektrischen Stroms. Bei einem Prototyp des linearen Schwingaktors, welcher im Rahmen dieser Arbeit aufgebaut und getestet wurde, betrug die Spuleninduktivität ca. 1 mH und der elektrische Widerstand 17 Ω. Bei der Gestaltung der Spule ist darauf zu achten, dass die Verzögerungszeit des Stromanstiegs beim Einschaltvorgang aufgrund der Induktivität viel kleiner ist als die Zeitkonstante t_{mech} des mechanischen Systems, verursacht durch die Trägheit des Läufers (siehe dazu Kapitel 2.4).

Wie man der Abbildung 2-49 entnehmen kann, ist die Zeit, bis der maximale Strom I_{max} durch die Spule fließt, fünf Mal länger als die oben berechnete Verzögerungszeit. Definiert man die Verzögerungszeit, so dass $I(t) = 0{,}99 \cdot I_{max}$ gilt, ergibt sich eine zeitliche Verzögerung:

$$t_{0,99} = 4{,}6 \cdot t_{pd} \qquad \textbf{(2-73)}$$

Diese Verzögerungszeit, bzw. die Bedingungen aus (2-69) müssen bei den analytischen Abhandlungen zur Regelung des linearen Schwingaktors berücksichtig werden.

Numerische Lösung

Für die auf den Mikrocontrollern programmierten Regelungsalgorithmen ist es unverzichtbar, die Lösung der Differentialgleichung (2-69) entsprechend anzupassen. Bei der Realisierung eines Reglers mit analoger Schaltungstechnik, z. B. mit Hilfe von Operationsverstärkern und anderen integrierten analogen Schaltungen, kann die analytische Lösung verwendet werden.

Wie bereits im Kapitel 2.1.2, bei der Lösung der nichtlinearen differentiellen Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems, wird für die Lösung der Differentialgleichung (2-69) ebenfalls der numerische Ansatz angewendet:

$$\frac{U(t)}{R} = \frac{L}{R}\cdot\frac{di}{dt} + i(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{U(t)}{R} = \frac{L}{R}\cdot\frac{i_i - i_{i-1}}{h} + i_{i-1} \quad \Rightarrow$$

$$i_i = \frac{U(t)\cdot h + i_{i-1}\cdot(L - R\cdot h)}{L} \qquad \textbf{(2-74)}$$

Mit der Anfangsbedingung i(0) = 0 erhält man schrittweise eine zeitabhängige Funktion für den Einschalt-, bzw. Ausschaltvorgang, welche sich aus der Datenmenge approximieren lässt.

Für die Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} U(t) = 0, & t = 0 \\ U(t) = U_0 & t > 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2-75)}$$

sowie unter Anwendung der iterativen Gleichung (2-74) mit der Schrittweite h = 10^{-5} ergibt sich der Einschaltvorgang mit einer sehr guten Näherung an die analytische Lösung.

2.3.2 Induzierte Spannung durch die Magnetbewegung

Neben der Induktionsspannung der Spule u_L, welche aufgrund des sich zeitlich ändernden Stroms beim Einschalt-, bzw. Ausschaltvorgang zustande kommt, wird auch eine Gegenspannung u_{ind} an den Spulenwindungen durch die Bewegung des Läufermagneten induziert:

$$u_{ind} = -v\cdot\ell\cdot B_L \qquad \textbf{(2-76)}$$

Hier bedeuten ℓ die von der magnetischen Flussdichte im Luftspalt B_L durchsetzte Länge des elektrischen Leiters und v die relative Geschwindigkeit dieses Leiters zum Magneten.

Die Herleitung der Gleichung (2-76) ist von der Wahl des Bezugssystems abhängig. Befindet sich ein Beobachter gemeinsam mit dem Magneten in einem ruhenden Bezugssystem und betrachtet dieser einen sich relativ zu diesem Bezugssystem bewegenden elektrischen Leiter, so geht die Herleitung der induzierten Spannung aus der Definition der Lorentzkraft, siehe Gleichung (2-43), hervor:

$$\vec{F}_L = q\cdot(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \quad \Rightarrow \quad -\vec{E} = \vec{v}\times\vec{B}$$

Die induzierte Spannung ist in diesem Fall ein Ergebnis der Wirkung der Lorentzkraft auf die im elektrischen Leiter vorhandenen Ladungen (B = konstant). Folglich ist

$$u_{ind} = \oint\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\oint\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{s} \qquad \textbf{(2-77)}$$

Berechnet man das Linienintegral entlang einer Leiterschleife der Länge ℓ um die von dieser Schleife eingeschlossenen Fläche dA, wobei die Bewegung des Leiters im rechten Winkel zur magnetischen Flussdichte erfolgt, erhält man die Gleichung (2-76):

$$u_{ind} = -v \cdot \ell \cdot B_L$$

Betrachtet man einen ruhenden elektrischen Leiter sowie einen sich relativ zu diesem Leiter bewegenden Läufermagnet, ergibt sich die induzierte Spannung aufgrund der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses:

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \textbf{(2-78)}$$

Im Zeitintervall dt bewegt sich der Magnet um das Wegstück dx = v·dt. Somit ergibt sich eine Änderung des magnetischen Flusses (B_L wird als konstant vorausgesetzt, die Bewegung erfolgt im rechten Winkel zum Fluss):

$$d\Phi = B_L \cdot dA = dx \cdot \ell \cdot B_L = v \cdot dt \cdot \ell \cdot B_L$$

so dass gilt:

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -v \cdot \ell \cdot B_L$$

Sowohl der erste als auch der zweite Ansatz sind auf spezielle Anwendungsfälle bezogen.

Im Allgemeinen gelten jedoch die im Kapitel 2.2.1, bzw. 2.2.2 aufgeführten Maxwell-Gleichungen, siehe Gleichung (2-42) sowie (2-44), wobei die induzierte Spannung das Ringintegral über die elektrische Feldstärke bedeutet:

$$u_{ind} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \qquad \textbf{(2-79)}$$

Ohne Herleitung sei angemerkt, dass gilt:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} - \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s} \qquad \textbf{(2-80)}$$

Somit ist die induzierte Spannung

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} - \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s} \qquad \textbf{(2-81)}$$

Entsprechend der Gleichung (2-81) kann die induzierte Spannung zum Teil auf die Bewegung des elektrischen Leiters und zum Teil auf die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses zurückgeführt werden. Die Maxwell-Gleichungen unterscheiden zwischen der Induktion (u_{ind}) und der Selbstinduktion (u_L) nicht.

Die Gleichung (2-81) schließt demnach die bereits im Kapitel 2.3.1 definierte Induktionsspannung der Spule u_L in sich ein. Um die beiden Spannungen u_L und u_{ind} voneinander zu unterscheiden, wird in der vorliegenden Arbeit die Definition der induzierten Spannung u_{ind} gemäß der Gleichung (2-76) verwendet.

Die Geschwindigkeit eines Läufermagneten in einem linear oszillierenden, mechanischen System entsprechend der Gleichung (2-16) ist

$$v = \dot{x} = -x_0 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t - \varphi) \tag{2-82}$$

Setzt man die Gleichung (2-82) in (2-76) ein, erhält man die aufgrund der oszillierenden Bewegung des Läufermagneten induzierte Spannung:

$$u_{ind} = \ell \cdot B_L \cdot x_0 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t - \varphi) \tag{2-83}$$

Die Gleichung (2-83) zeigt, dass die induzierte Gegenspannung $u_{ind} = f(x_0, \Omega)$ der Schwingungsamplitude x_0 sowie der Oszillationsfrequenz Ω des Läufermagneten direkt proportional ist. Zusammengefasst, ergibt sich:

$$U(t) = \underbrace{\ell \cdot B_L \cdot x_0 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t - \varphi)}_{u_{ind}} + \underbrace{L \cdot \frac{di}{dt}}_{u_L} + \underbrace{R \cdot i(t)}_{u_R} \tag{2-84}$$

Im Kapitel 2.2.4 wurde gezeigt, dass die reale Verteilung des magnetischen Flusses (siehe Abbildungen 2-36 sowie 2-37) nicht den getroffenen Annahmen entspricht. Es sind Streufelder sowohl beim Modell ohne Rückschluss als auch beim Modell mit einem weichmagnetischen Rückschluss und Polschuhe quer im Luftspalt vorhanden. Somit führt dies zur Induktion in weiteren Spulenwindungen. Um die analytische Betrachtung zu erleichtern, kann mit dem Mittelwert der magnetischen Flussdichte im Luftspalt gerechnet werden:

$$\overline{B}_{L,\,arithm} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} B_{L,\,i}(x) \qquad i \in \{N\} \tag{2-85}$$

Die Spannung, welche an den Spulenenden vorliegt, ist aufgrund des sich in einem linearen Schwingaktor bewegenden Läufermagneten um u_{ind} geringer:

$$U(t) = \ell \cdot \overline{B}_{L,\,arithm} \cdot x_0 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t - \varphi) + L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) \tag{2-86}$$

In der Abbildung 2-50 sind die Zusammenhänge zwischen der Schwingungsamplitude x_0 sowie der Oszillationsfrequenz des Läufermagneten und der erforderlichen Versorgungsspannung, welche notwendig ist, um die entsprechende Schwingungsamplitude bei bestimmter Erregerfrequenz zu erreichen, dargestellt. Die Messungen wurden an einem Funktionsmuster durchgeführt, dessen Aufbau in der Abbildung 3-5 gezeigt ist.

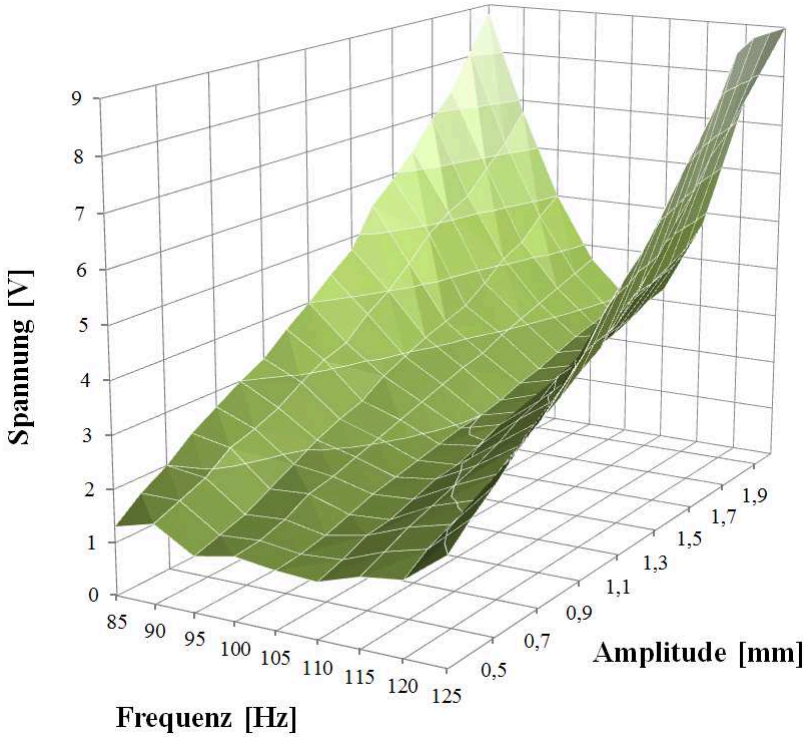

Abbildung 2-50 Verlauf der angelegten Spannung U_0 in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude x_0 sowie der Oszillationsfrequenz Ω

2.3.3 Wicklung und Bestromung

Es gibt verschiedene Wickeltechniken. Bei orthozyklischer Wicklung ist man bestrebt, eine möglichst hohe Packungsdichte, bzw. einen optimalen Füllfaktor zu erreichen, siehe Abbildung 2-51. Das Verhältnis der Summe der Leiterquerschnitte, einschließlich ihrer Isolationsschicht, zu dem zur Verfügung stehenden Wickelquerschnitt einer Spule wird als Füllfaktor bezeichnet. Wurde eine Spule mit einem runden Draht gewickelt, so bleiben immer Lufträume zwischen den Wicklungslagen, daher ist der Füllfaktor bei runden Leitungen immer kleiner eins. Durch Verwenden von Rechteck- und Flachdrähten ist eine höhere Packungsdichte erreichbar.

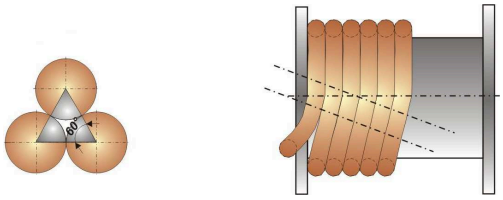

Abbildung 2-51 Orthozyklische Wicklung [Aum12]

Bei „wilder“ Wicklung werden die Drahtleitungen während des Wickelns mit der 1,5- bis dreifachen Steigung relativ zum Drahtdurchmesser verlegt. Die Drähte der Wicklungslagen kreuzen sich und erzeugen damit keinen optimalen Füllfaktor. Außerdem streut die resultierende Drahtlänge und mit ihr der Spulenwiderstand sowie die Induktivität. Dieses Verfahren kommt bei der Massenproduktion zum Einsatz und stellt keine hohe Anforderungen an die Maschinen, die Wicklungen können mit hoher Geschwindigkeit aufgebracht werden.

Wie bereits in den vorherigen Kapiteln gezeigt, hängt die für die Erregung der Schwingungen erforderliche Lorentzkraft von der Bestromung des Spulenquerschnitts ab. Man bekommt die gewünschten Ampèrewindungen entweder durch Stromerhöhung oder durch die Vergrößerung der Windungszahl (AW = N·I). Die Windungszahl N ergibt sich aus dem Spulenquerschnitt und dem Drahtdurchmesser. Mittels Variation des Drahtdurchmessers bekommt man die gewünschte Windungszahl, um die angestrebten Ampèrewindungen zu erreichen. Je nach Drahtquerschnitt lässt ein Draht eine bestimmte Stromdichte zu.

In der Tabelle 2-2 sind zulässige Stromstärken für unterschiedliche Drahtquerschnitte nach DIN 57100 Teil 523 / VDE 0100 Teil 523.6-81 aufgelistet. Wie man der Tabelle entnehmen kann, steigt die zulässige Stromdichte mit dem kleiner werdenden Drahtquerschnitt, wobei für einadrige, frei in Luft verlegte Leitungen (Gruppe 3) fast doppelt so hohe Ströme erlaubt sind wie für mehradrige Leitungen (Gruppe 1). In einem Drahtbündel ist die Wärmeverteilung anders als bei einem Einzeldraht.

	Gruppe 1 Eine oder mehrere in Rohr verlegte einadrige Leitungen				Gruppe 2 Mehraderleitungen, z. B. Mantelleitungen, Rohrdrähte, Bleimantelleitungen, Stegleitungen, bewegliche Leitungen				Gruppe 3 Einadrige, frei in Luft verlegte Leitungen, wobei der Zwischenraum mindestens ihrem Durchmesser entspricht			
Nennquer-	Leitung		Schutzorgan		Leitung		Schutzorgan		Leitung		Schutzorgan	
schnitt	Cu	Al	Cu	Al	Cu	Al	Cu	Al	Cu	Al	Cu	Al
mm²	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
0,75	-----	-----	-----	-----	12	-----	6	-----	15	-----	10	-----
1,0	11	-----	6	-----	15	-----	10	-----	19	-----	10	-----
1,5	15	-----	10	-----	18	-----	10**	-----	24	-----	20	-----
2,5	20	15	16	10	26	20	20	16	32	26	25	20
4	25	20	20	16	34	27	25	20	42	33	35	25
6	33	26	25	20	44	35	35	25	54	42	50	35
10	45	36	35	25	61	48	50	35	73	57	63	50
16	61	48	50	35	82	64	63	50	98	77	80	63
25	83	65	63	50	108	85	80	63	129	103	100	80
35	103	81	80	63	135	105	100	80	158	124	125	100
50	132	103	100	80	168	132	125	100	198	155	160	125
70	165	-----	125	-----	207	163	160	125	245	193	200	160
95	197	-----	160	-----	250	197	200	160	292	230	250	200
120	235	-----	200	-----	292	230	250	200	344	268	315	200

Tabelle 2-2 Zulässige Stromstärken bei isolierten Leitungen mit verschiedenen Drahtquerschnitten nach DIN 57100 Teil 523 / VDE 0100 Teil 523.6-81

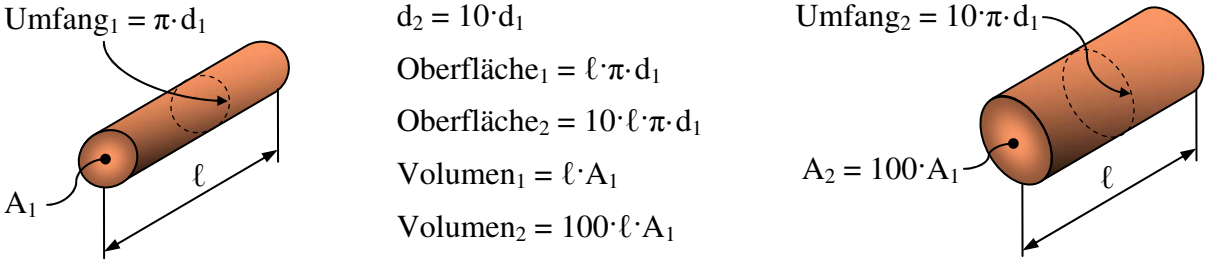

Abbildung 2-52 Vergleich von zwei Drahtleitungen

In der Abbildung 2-52 ist der Vergleich von zwei runden Drahtleitungen dargestellt. Bei gleicher Stromdichte j weist ein dünner Draht in Relation zum Volumen eine größere Oberfläche auf und kann daher mehr Wärme abführen. Demnach kann ein dünner Draht mit einer größeren Stromdichte belastet werden als ein dicker.

Die Abbildung 2-53 zeigt zwei Wicklungsvarianten einer Spule. Die maximal erreichbare Packungsdichte bei runden Drahtleitungen beträgt ca. 84,2 Prozent, siehe Abbildung 2-53, Bild rechts. Das bedeutet, dass für Zwischenräume, also für kühlende Luft, etwa 16 Prozent vom gesamten Spulenquerschnitt verbleibt. Die in den Drahtleitungen entwickelte Wärmemenge muss durch die von den Spulenwindungen eingeschlossenen Zwischenräume aufgenommen und auf geeignete Weise abtransportiert werden.

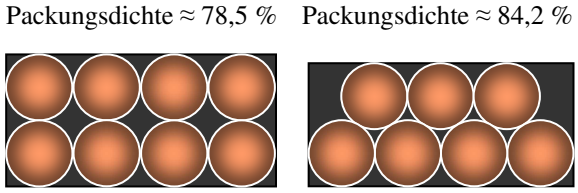

Abbildung 2-53 Spulenquerschnitt von Wicklungsvarianten

Bei der Wicklungsvariante entsprechend der Abbildung 2-53 linkes Bild wird der Wärmeaustausch mit der die Spule umgebenden Luft erleichtert. Außerdem bietet diese Wicklungsvariante mehr Volumen für Zwischenräume, in diesem Fall etwa 21,5 Prozent vom gesamten Spulenquerschnitt. Da die Luft eine 2,6fach höhere spezifische Wärmekapazität als Kupfer aufweist ($c_{Luft} \approx 1$, $c_{Cu} = 0{,}382$), kann sie auch mehr Wärme aufnehmen, leitet jedoch die Wärme schlechter als Metalle. Daher ist der Kontakt der Spule mit den wärmeleitenden Materialien sehr wichtig für die Kühlung der Spule.

Um den Wärmeaustausch zu verbessern, können zwischen den einzelnen Wicklungslagen Kühlringe oder Kühlrippen untergebracht werden, welche eine größere Kontaktfläche mit der Luft herstellen, siehe Abbildung 2-54. Das Verhältnis der radialen Dicke der Spule zu ihrer axialen Länge beeinflusst den Wärmeabtransport von Drahtleitungen. Je kleiner die Dicke und je größer die Länge der Spule, desto besser ist der Wärmeaustausch mit der Umgebungsluft, da die Spule somit mehr Fläche zur Kühlung bietet.

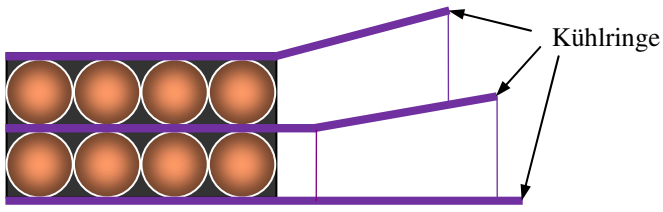

Abbildung 2-54 Kühlringe zwischen den Wicklungslagen einer Spule zum Wärmeabtransport

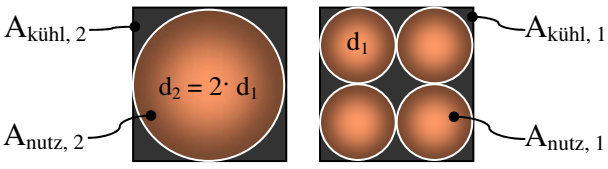

Abbildung 2-55 Vergleich von zwei Spulen mit unterschiedlichem Drahtdurchmesser

Vergleicht man zwei Spulen des gleichen Querschnitts A_{Spule} (siehe Abbildung 2-55), eine wurde mit einem dünnen Draht d_1 und die andere mit einem Draht doppelter Dicke $d_2 = 2 \cdot d_1$ gewickelt, stellt man folgende Zusammenhänge fest:

$$A_{nutz,1} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \pi \cdot d_1^2$$

$$A_{nutz,2} = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = \pi \cdot d_1^2$$

$$\Rightarrow \qquad A_{nutz,1} = A_{nutz,2} \tag{2-86}$$

$$A_{kühl,1} = 4 \cdot \left(A_{Spule} - A_{nutz,1}\right) = 4 \cdot d_1^2 - \pi \cdot d_1^2 = d_1^2 \cdot (4 - \pi) \approx 0{,}858 \cdot d_1^2$$

$$A_{kühl,2} = A_{Spule} - A_{nutz,2} = d_2^2 - \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = d_2^2 \cdot \frac{4 - \pi}{4} \approx 0{,}215 \cdot d_2^2 \approx 0{,}858 \cdot d_1^2$$

$$\Downarrow$$

$$A_{kühl,2} = A_{kühl,1} \tag{2-87}$$

Sowohl der gesamte Drahtquerschnitt A_{nutz} als auch die gesamte Fläche der Zwischenräume $A_{kühl}$ bleibt im Spulenquerschnitt A_{Spule} also unabhängig vom ausgewählten Drahtdurchmesser. Der gesamte Drahtumfang und somit auch die gesamte Drahtoberfläche ist jedoch bei einem dünnen Draht zweimal größer als bei einer Drahtleitung doppelter Dicke und wächst proportional zum Drahtdurchmesser. Das bedeutet, dass bei einer Spule, die mit einem dünnen Draht gewickelt wurde, mehr Fläche zum Abkühlen zur Verfügung steht. Der Verkleinerung des Drahtdurchmessers sind jedoch Grenzen gesetzt. Aufgrund der Verminderung der Zugfestigkeit mit kleiner werdendem Durchmesser sind nur Drähte mit einem Durchmesser größer als 0,05 mm für die maschinelle Wicklung geeignet. Außerdem kann die Dicke der Isolationsschicht nicht beliebig reduziert werden, sie muss sowohl die mechanische als auch die elektrische Festigkeit gewährleisten.

Wickelt man eine Spule mit einem dünnen Draht, damit er eine vergleichbare höhere Stromdichte zulässt, bekommt man zudem auch mehr Windungen, was die Lorentzkraft erhöht. Mehr Windungen und einen kleineren Querschnitt bedeuten jedoch einen größeren elektrischen Widerstand und eine größere Induktivität der Spule, aufgrund dessen ist auch eine höhere Spannung erforderlich. Wählt man einen dicken Draht für die Wicklung der Spule, vermindern sich der elektrische Widerstand und die Spuleninduktivität. Doch die so gewickelte Spule zeigt ein schlechtes Leistung-Wärme-Verhältnis.

Je kleiner der elektrische Widerstand, bzw. der Strom ist, desto kleiner ist auch die Verlustleistung, die in Wärme umgewandelt wird, wobei der Strom quadratisch in die Formel (2-88) für die Berechnung der Verlustleistung eingeht. Daher entwickelt ein dicker Draht mehr Wärme, weil er einen geringeren elektrischen Widerstand aufweist, was einen höheren Strom zur Folge hat.

$$P = R \cdot I^2 \tag{2-88}$$

2.3.4 Zusammenfassung

Die Spule ist ein wichtiger Bestandteil eines elektrodynamischen Aktors. Insbesondere bei einem oszillierenden Antrieb haben die elektrischen Eigenschaften der Spule, wie der Widerstand und die Induktivität, einschließlich die Windungszahl einen großen Einfluss auf die Kraftentwicklung sowie auf die daraus resultierende Schwingungsamplitude und auf das Regelungsverhalten eines Schwingaktors.

Die Spuleninduktivität beeinflusst insofern die Stromdynamik, dass beim Einschalten der durch die Spule fließende Strom erst nach einer Zeit

$$t_{pd} = \frac{L}{R}$$

63 Prozent seines maximalen Werts erreicht hat. Für das Erreichen des maximalen Stromwerts ist jedoch eine Zeit $t_{0,99} \geq 4{,}6 \cdot t_{pd}$ erforderlich. Die Induktivität der Spule wird durch die Anzahl der Windungen und den magnetischen Widerstand definiert:

$$L = \frac{N^2}{R_m}$$

Dabei vergrößert sich die Spuleninduktivität, wenn im magnetischen Kreis magnetfeldführende Teile vorhanden sind, wie beispielweise die Polschuhe sowie der Rückschluss, weil sich dadurch der magnetische Widerstand im gesamten magnetischen Kreis vermindert. Wickelt man eine Spule mit einem dicken Draht, so verringern sich die Windungszahl sowie der elektrische Widerstand, wobei die Windungszahl quadratisch in die Formel für die Berechnung der Spuleninduktivität eingeht. Somit lässt sich auch die Verzögerungszeit t_{pd} reduzieren.

In einem elektrodynamischen Schwingaktor führt die oszillierende Bewegung des Läufermagneten zu einer an den Spulenenden induzierten Spannung:

$$u_{ind} = -v \cdot \ell \cdot B_L$$

welche der Geschwindigkeit des Läufermagneten sowie der mit der magnetischen Flussdichte durchsetzten Drahtlänge direkt proportional ist. Weniger Windungen bedeuten demnach auch eine kleinere Drahtlänge und somit eine geringere Gegenspannung u_{ind}.

Für eine dünne Drahtleitung ist eine höhere Stromdichte zulässig als für eine dickere, da ein dünner Draht mehr Oberfläche im Vergleich zu einem dicken Draht aufweist und sich deshalb besser abkühlt. Für eine Spule, gewickelt mit einem dünnen Draht, eignet sich die so genannte „wilde“ Wicklung. Spulen mit dickeren Drahtleitungen werden orthozyklisch gewickelt, dabei ist eine maximale Packungsdichte von 84 Prozent erreichbar. Eine Spule, derer axiale Länge viel größer ist als ihre radiale Dicke, wird besser gekühlt, da eine solche Spule mehr Oberfläche für den Wärmeaustausch mit der sie umgebenden Luft bietet.

2.4 Sprungantwort des Systems

Für die Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} F(t) = 0, & t = 0 \\ F(t) = F_0, & t > 0 \end{cases} \tag{2-89}$$

eingesetzt in die Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems:

$$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = \sigma(t)$$

ergibt sich die Sprungantwort

$$x(t) = \frac{\sigma(t)}{c} \cdot \left[1 - e^{-kt} \cdot \left(\cos(\omega t) + \frac{k}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right) \right] \tag{2-90}$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Systemkomponenten lineare Kennlinien aufweisen. Der detaillierte Rechnungsweg ist im Kapitel 8.4 nachzulesen.

Die Abbildung 2-56 zeigt die Sprungantwort eines mechanischen, schwingenden, sowohl gedämpften als auch schwach gedämpften Systems, jedoch ohne die Berücksichtigung der Induktivität der Erregerspule. Die Reibung wird als vernachlässigbar gering angenommen und bei weiteren Betrachtungen der Sprungantwort nicht beachtet.

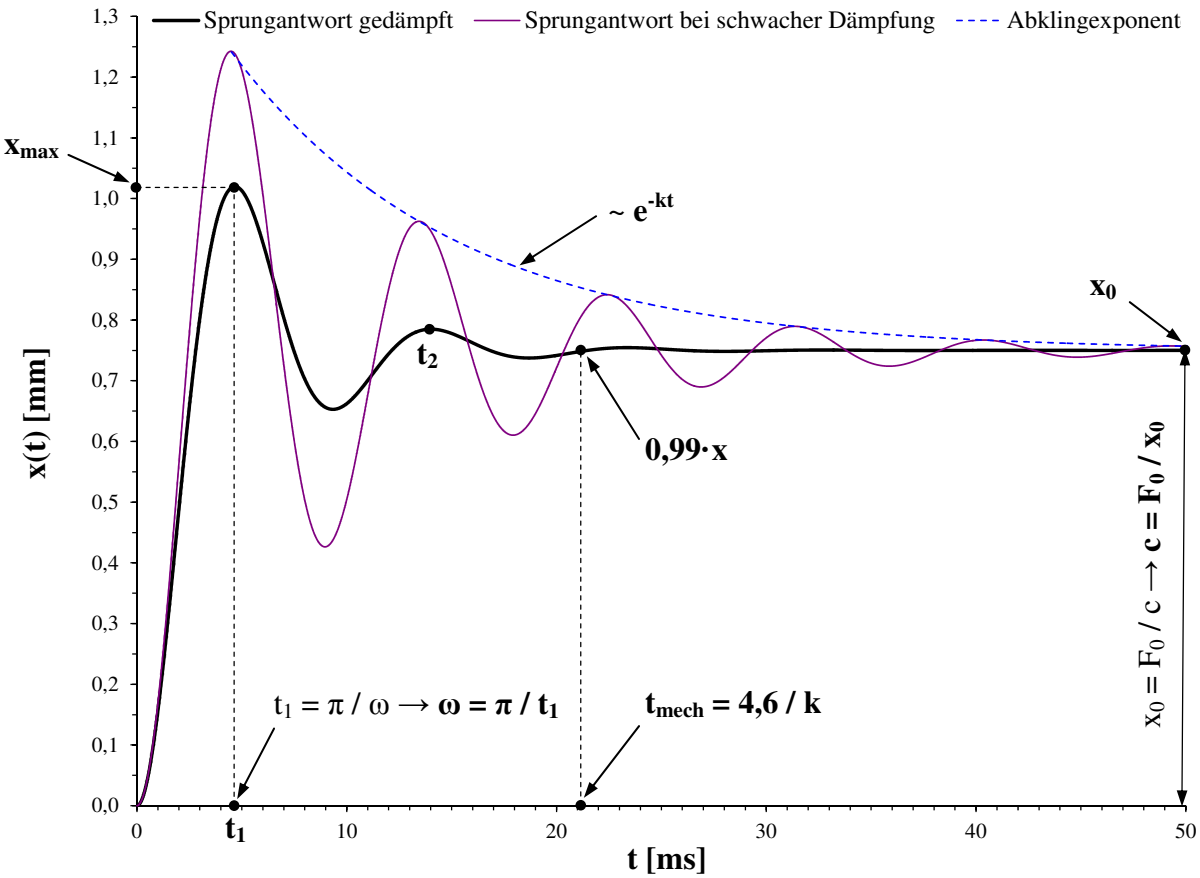

Abbildung 2-56 Sprungantwort eines mechanischen, schwingenden Systems, F_0 = 0,3 N, m = 0,8 g

Aus der Sprungantwort lassen sich die Systemparameter wie die Federsteifigkeit, die Abklingkonstante, die Eigenfrequenz des gedämpften Systems sowie die Masse der beweglichen Teile und die Dämpfungskonstante ablesen. Wie in der Abbildung 2-56 angedeutet, wird die maximale Auslenkung x_{max} der Schwingmasse nach einer Zeit

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} \tag{2-91}$$

erreicht. Dies ergibt sich aus der Bedingung für Extremwerte x_{max} bei $\dot{x}(t) = 0$:

$$\dot{x}(t) \;=\; 0 \;=\; \frac{d}{dt}\left\{\frac{\sigma(t)}{c}\cdot\left[1-e^{-kt}\cdot\left(\cos(\omega t)+\frac{k}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right)\right]\right\} \;\Rightarrow$$

$$-k\cdot e^{-kt}\cdot\left(\cos(\omega t)+\frac{k}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right)+\omega\cdot e^{-kt}\cdot\left(-\sin(\omega t)+\frac{k}{\omega}\cdot\cos(\omega t)\right) \;=\; 0 \;\Rightarrow$$

$$-k\cdot\cos(\omega t)-\frac{k^2}{\omega}\cdot\sin(\omega t)-\omega\cdot\sin(\omega t)+k\cdot\cos(\omega t) \;=\; 0 \;\Rightarrow$$

$$\left(k^2+\omega^2\right)\cdot\sin(\omega t) \;=\; 0 \tag{2-92}$$

Wegen $k^2 + \omega^2 > 0$ ist die Bedingung (2-92) nur dann erfüllt, wenn die Kreisfunktion

$$\sin(\omega t) = 0$$

Dies ist bei $t = 0$ oder $\omega t = \pi$, bzw. $\omega t = \pi \cdot n$, $n \in \{N\}$, der Fall. Es folgt die Gleichung (2-91) für das erste Maximum. Ebenso erhält man die Eigenfrequenz des gedämpften Systems:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{t_n} \tag{2-93}$$

Der Verlauf der Abklingfunktion e^{-kt}, siehe Abbildung 2-56, gibt Auskunft über die Abklingkonstante

$$k = -\frac{\ln\left(e^{-kt_n}\right)}{t_n} \tag{2-94}$$

Die während der Sprungantwort aufgenommenen Messwerte werden analysiert, miteinander verglichen, bzw. es wird die numerische Ableitung nach der Zeit durchgeführt. Nach einer gewissen Zeit klingen die Eigenschwingungen ab, und das System befindet sich in der Ruhelage. Die Auslenkung beträgt dabei

$$x\left(t_{mech} \geq \frac{4{,}6}{k}\right) \;\approx\; x_0 \;=\; \frac{F_0}{c} \tag{2-95}$$

Die Auslenkungskraft F_0 ist dem durch die Spule fließenden elektrischen Strom direkt proportional, siehe Gleichung (1-3). Ist die wirkende Kraft F_0, bzw. der Strom bekannt, erhält man die Federsteifigkeit:

$$c = \frac{F_0}{x_0} \tag{2-96}$$

Zum Zeitpunkt t_1, siehe Gleichung (2-90), entspricht die Auslenkung x_{max} dem Wert

$$x_{max} = \frac{F_0}{c} \cdot \left(1 + e^{-kt_1}\right) = x_0 \cdot \left(1 + e^{-kt_1}\right)$$

Daraus folgt, dass

$$e^{-kt_1} = \frac{x_{max}}{x_0} - 1 \tag{2-97}$$

Der bis jetzt unbekannte Wert der Exponentenfunktion in der Gleichung (2-94) zum Zeitpunkt t_1 kann nun für die Berechnung der Abklingkonstante k genutzt werden. Setzt man (2-97) in (2-94) ein, erhält man:

$$k = -\frac{1}{t_1} \cdot \ln\left(\frac{x_{max}}{x_0} - 1\right) \tag{2-98}$$

Die Werte x_{max} und x_0 sowie t_1 lassen sich messtechnisch während der Sprungantwort ermitteln. Es sind somit die Parameter eines mechanischen, schwingenden Systems entsprechend den Gleichungen (2-93), (2-96) sowie (2-98) ermittelbar. Setzt man diese Komponenten in die Gleichung (2-9) für die Berechnung der Eigenfrequenz des gedämpften Systems ein, bekommt man unter Berücksichtigung der Gleichung (2-10) den Wert für die Masse der beweglichen Teile, falls diese nicht bekannt ist, bzw. sich je nach Anwendungsfall ändert:

$$m = \frac{c}{k^2 + \omega^2} \tag{2-99}$$

Schließlich lässt sich die Dämpfungskonstante, siehe Gleichung (2-8), ausrechnen:

$$d = 2 \cdot m \cdot k \tag{2-100}$$

Bei einem elektrodynamischen Aktor gilt es, die Anstiegszeit des elektrischen Stroms in der Erregerspule, bzw. die Gleichungen (2-70), (2-72) sowie (2-73) zu beachten, siehe Kapitel 2.3.1 Die wirkende Lorentzkraft ist dabei

$$F(t) = \ell \cdot B \cdot i(t) \quad \Rightarrow \quad F(t) = \lambda \cdot i(t) \tag{2-101}$$

Der Ausdruck $\lambda = \ell \cdot B$ ist die Proportionalitätskonstante zwischen dem elektrischen Strom und der auf den Läufermagneten wirkenden Lorentzkraft.

Da beim Anschalten der Spannung der Strom nicht sofort seinen Endwert erreicht, siehe Gleichung (2-70), wird die resultierende Kraftfunktion als Sprungfunktion definiert:

$$\sigma_L(t) = \begin{cases} F(t) = 0, & t = 0 \\ F(t) = \lambda \cdot \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right), & t > 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2-102)}$$

Für diese Sprungfunktion gilt die numerische Lösung der Sprungantwort, siehe Kapitel 8.4:

$$x_{i+1} = \lambda \cdot \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{i-1}}\right) \cdot \frac{h^2}{m} + \left(\frac{d \cdot h}{m} - \frac{c \cdot h^2}{m} - 1\right) \cdot x_{i-1} + \left(2 - \frac{d \cdot h}{m}\right) \cdot x_i \qquad \textbf{(2-103)}$$

In der Abbildung 2-57 ist die Sprungantwort eines Schwingaktors mit einer Erregerspule, welche eine Induktivität von 1 mH, bzw. von 30 mH sowie 60 mH aufweist, im Vergleich zu einem System, bei dem die Spuleninduktivität außer Acht gelassen wurde, dargestellt. Eine große Induktivität dämpft den Stromanstieg in der Spule und somit auch die gesamte Sprungantwort des mechanischen Systems. Eine kleinere Spuleninduktivität hat keinen Einfluss auf den Verlauf der Sprungantwort, weil die Verzögerungszeit t_{mech} eines mechanischen Systems aufgrund der Massenträgheit der beweglichen Teile viel größer ist als die Verzögerungszeit $t_{0,99}$ des Stromanstiegs in der Spule.

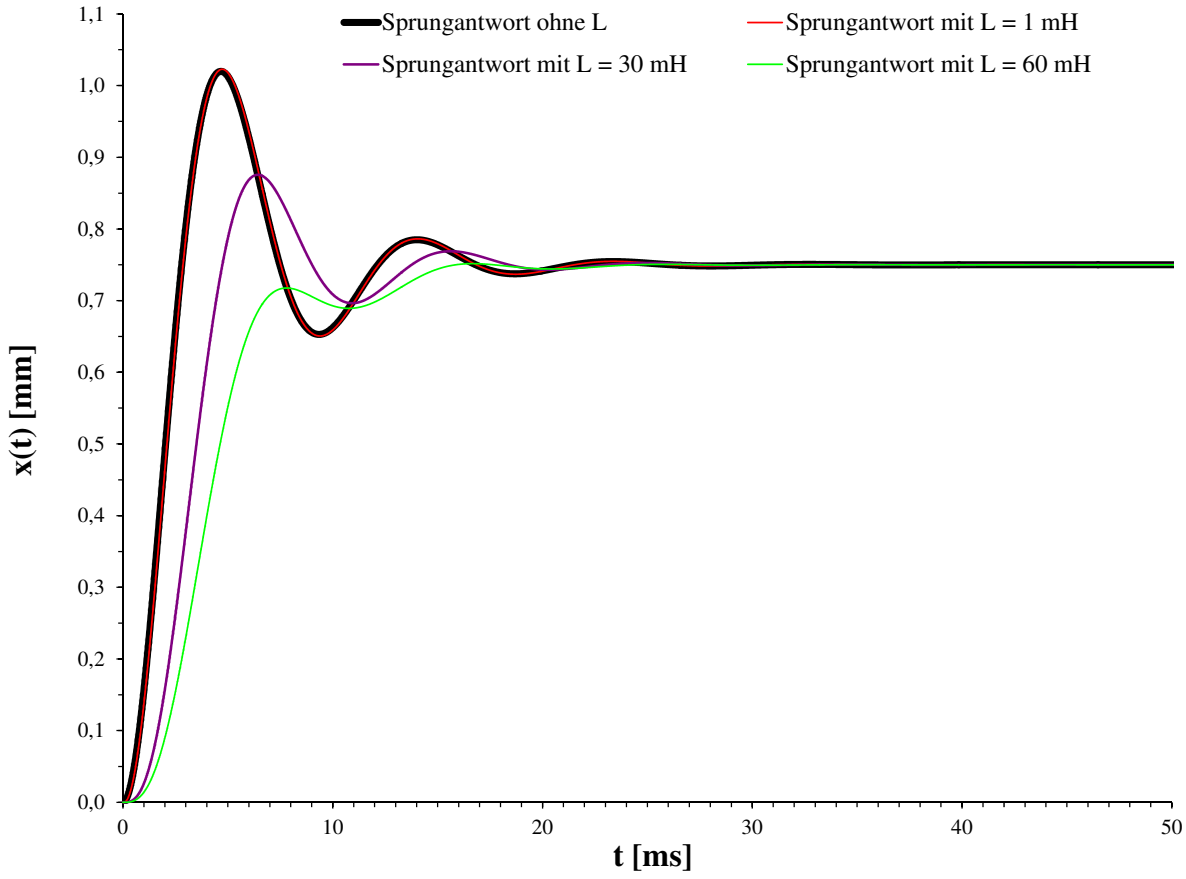

Abbildung 2-57 Sprungantwort eines Schwingaktors, gedämpft, R = 17 Ω, U_0 = 5,1 V

$$t_{mech} = \frac{4{,}6}{k} \approx 21{,}1\ \text{ms}$$

$$t_{0,99}(L = 1\ \text{mH}) = 4{,}6 \cdot \frac{L}{R} \approx 0{,}27\ \text{ms}$$

$$t_{0,99}(L = 30\ \text{mH}) = 4{,}6 \cdot \frac{L}{R} \approx 8{,}11\ \text{ms}$$

Ist $t_{0,99}$ gleich t_{mech} oder größer, wird die Antwort des gesamten Systems stark eingedämpft, so dass die Ruhelage x_0 viel später erreicht wird. Ist die Verzögerungszeit $t_{0,99}$ des Stromanstiegs in der Spule 10fach bis 100fach geringer als t_{mech}, wird der Verlauf der Sprungantwort eines Schwingaktors nicht durch die Spuleninduktivität beeinflusst, und es lassen sich die Systemeigenschaften aus der Sprungantwort ablesen, ohne dass die Induktivität der Spule in Betracht gezogen werden muss.

Es bleibt jedoch die durch die Bewegung des Läufermagneten induzierte Spannung, die beim Verlauf der Sprungantwort noch nicht berücksichtigt wurde:

$$u_{ind}(\dot{x}) = -\ell \cdot B \cdot v(t) \quad \Rightarrow$$

$$u_{ind}(\dot{x}) = -\lambda \cdot v(t) \tag{2-104}$$

Die zeitliche Ableitung der Sprungantwort ergibt die Geschwindigkeit des Läufermagneten, wobei die Sprungfunktion der Gleichung (2-102) entspricht. Die zeitliche Ableitung der Gleichung (2-103) wird entsprechend dem numerischen Verfahren gebildet, so dass für die induzierte Spannung gilt:

$$u_{ind,\,i+1} = -\lambda \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \quad \Rightarrow$$

$$u_{ind,\,i+1} = -\lambda^2 \cdot \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{i-1}}\right) \cdot \frac{h}{m} - \lambda \cdot \left(\frac{d}{m} - \frac{c \cdot h}{m} - \frac{1}{h}\right) \cdot x_{i-1} - \lambda \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{d}{m}\right) \cdot x_i \tag{2-105}$$

wobei die Sprungfunktion die induzierte Spannung u_{ind} in sich einschließt:

$$\sigma_L(t) = \begin{cases} F(t) = 0, & t = 0 \\ F(t) = \lambda \cdot \dfrac{U_0 + u_{ind}(\dot{x})}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right), & t > 0 \end{cases} \tag{2-106}$$

Es entsteht eine Rekursion. Setzt man (2-105) in (2-106) ein, erhält man die Sprungantwort eines Schwingaktors mit Berücksichtigung des Stromanstiegs in der Erregerspule sowie der induzierten Spannung u_{ind}:

$$x_{i+1} = \lambda \cdot \frac{U_0 + u_{ind,\,i-1}}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{i-1}}\right) \cdot \frac{h^2}{m} + \left(\frac{d \cdot h}{m} - \frac{c \cdot h^2}{m} - 1\right) \cdot x_{i-1} + \left(2 - \frac{d \cdot h}{m}\right) \cdot x_i \tag{2-107}$$

In der Abbildung 2-58 sind die Verläufe der Sprungantwort sowie die induzierte Gegenspannung dargestellt. Die aufgrund der Bewegung des Läufermagneten induzierte Spannung beeinflusst nur gering den Verlauf der Sprungantwort, vgl. die magenta und grünen Linien. Daher wird u_{ind} bei den weiteren analytischen Betrachtungen außer Acht gelassen.

Die Höhe der induzierten Spannung hängt jedoch von der Stärke des Permanentmagneten ab. Es wird angenommen, dass die magnetische Flussdichte im Luftspalt konstant ist. Zusätzlich müssen auch die Übertragungseigenschaften der Elektronikkomponenten (Frequenzgang und t_{pd} des Verstärkers, Laufzeiten der Logik-Gatter) sowie zeitliche Verzögerungen beim Programmablauf (falls eine mikrocontrollerbasierte Steuerung, bzw. Regelung zum Einsatz kommt) berücksichtigt werden.

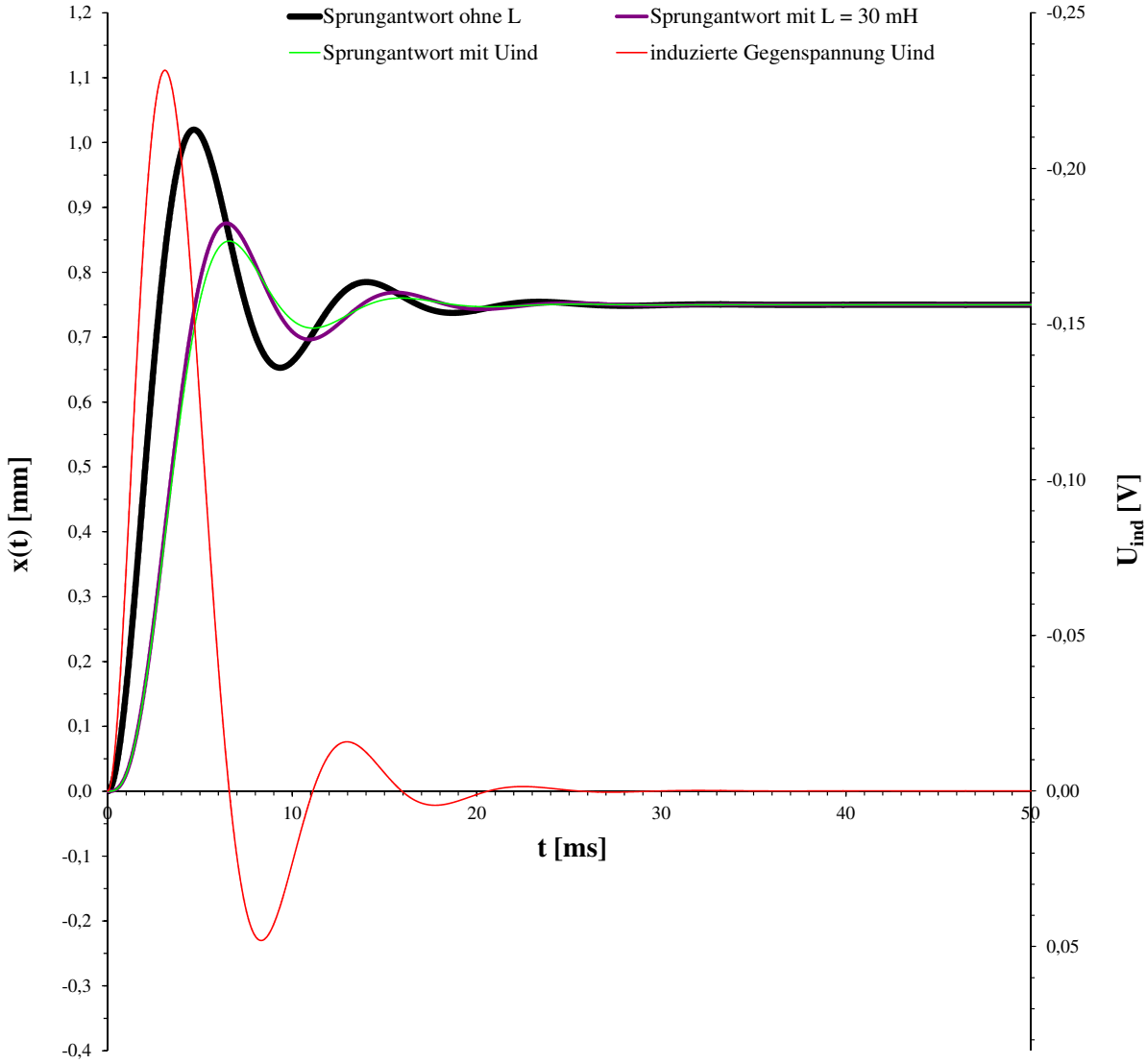

Abbildung 2-58 Sprungantwort des gesamten Systems, i_L- sowie u_{ind}-Beachtung

2.5 Steuerung

Liegt die Übertragungsfunktion eines elektrodynamischen, linearen Schwingaktors in analytischer Form vor oder wurde aus den aufgenommenen Messdaten approximiert (siehe z. B. Abbildung 2-50), so kann dieser Schwingaktor auf verschiedene Weise gesteuert werden. Die Übertragungsfunktion stellt den Zusammenhang zwischen der Schwingungsamplitude und der Erregerkraft her, siehe Kapitel 2.1.1, Gleichung (2-16):

$$x_0 = H(\Omega) \cdot F_0$$

H(Ω) ist bei konstant bleibenden Systemparametern wie Masse, Dämpfung sowie Federsteifigkeit nur von der Erregerfrequenz abhängig

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2}}$$

Die Abbildung 2-50 verdeutlicht diesen Zusammenhang: je nach Erregerfrequenz Ω ist eine größere oder geringere Kraft, bzw. Versorgungsspannung erforderlich, um eine bestimmte Schwingungsamplitude x_0 zu erreichen.

2.5.1 Frequenz-Amplituden-Steuerung

Der Vorteil des in dieser Arbeit vorgestellten Schwingaktors gegenüber den im Kapitel 1.3 diskutierten Varianten besteht in der Möglichkeit, sowohl die Schwingungsamplitude als auch die Schwingfrequenz unabhängig voneinander elektronisch einzustellen. Die meisten elektrodynamischen Schwingantriebe sind für eine bestimmte Arbeitsfrequenz ausgelegt. Gemäß den Gleichungen (2-16) und (2-17) beeinflusst die Erregerfrequenz die resultierende Schwingungsamplitude. Um einer Änderung der Schwingungsamplitude aufgrund des Frequenzgangs des mechanischen Systems (vgl. Abbildung 2-7) entgegen zu wirken, ist eine entsprechende Anpassung der Erregerkraft erforderlich. Die Gleichung (2-108) stellt die Zusammenhänge her:

$$F_0(x_0, \Omega) = \frac{x_0}{H(\Omega)} = x_0 \cdot \sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} \qquad \textbf{(2-108)}$$

Dabei ist die Erregerkraft dem elektrischen Strom proportional, siehe Gleichung (2-101):

$$F(t) = \lambda \cdot i(t) = \lambda \cdot \frac{U(t)}{R}$$

Ist die Verzögerungszeit des Stromanstiegs in der Erregerspule aufgrund der Induktivität viel kleiner als die des mechanischen Systems, können die Einflüsse der Spuleninduktivität auf die Stromdynamik unberücksichtigt bleiben. Auch die induzierte Gegenspannung kann bei der entsprechenden Dimensionierung des Schwingaktors (z. B. weniger Spulenwindungen) außer Acht gelassen werden.

In diesem Fall resultiert aus der Gleichung (2-108) die erforderliche Erregerspannung

$$U_0(x_0, \Omega) = \frac{R}{\lambda} \cdot x_0 \cdot \sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} \qquad \textbf{(2-109)}$$

Hier bedeuten R der elektrische Widerstand der Erregerspule und λ die Proportionalitätskonstante zwischen dem elektrischen Strom und der resultierenden Erregerkraft. Für jeden Einstellungswert der gewünschten Schwingungsamplitude x_0 und Erregerfrequenz Ω ergibt sich ein Wert für die Versorgungsspannung, und es lässt sich ein 3D-Plot erstellen, wie es beispielsweise die Abbildung 2-50 zeigt.

2.5.2 Kontrolle der Stechgeschwindigkeit

Der im Rahmen der vorliegenden Dissertation entwickelte Schwingaktor wurde unter anderem für die Durchführung von Stechbewegungen konzipiert. Wie bereits im einführenden ersten Kapitel dargelegt, hat die Geschwindigkeit einer Nadel, bzw. eines Nadelpakets besonderen Einfluss auf die Ergebnisse beim Tätowieren, bzw. beim Pigmentieren. Je nach Stechgeschwindigkeit weicht die Haut weniger oder mehr zurück, die Farbe wird dementsprechend tiefer unter der Haut oder nur oberflächlich platziert. Mit dieser Arbeitsweise und mit der Verdünnung der Farbe erreicht man beim Tätowieren, bzw. beim Pigmentieren, dass die Konturlinien deutlicher sichtbar sind und die Farbübergänge (Schattierungen) weicher und realistischer dargestellt werden können, siehe Abbildung 2-59.

Abbildung 2-59 Tattoomotive von Moni Marino [Mon12] (links), Dmitriy Samohin [Dmi12] (Mitte) und Boris [Bor12] (rechts)

Normalerweise justiert der Anwender die Arbeitsfrequenz seines Tätowier-, bzw. Pigmentiergeräts, womit auch die Stechgeschwindigkeit der Nadeln beeinflusst wird, siehe Gleichung (1-2). Bei den gleichstrommotorbetriebenen Tätowier- sowie Pigmentiermaschinen ändert sich jedoch die Arbeitsfrequenz beim Stechen, sobald der Motor durch äußere Einflusse (wegen der Hautelastizität) belastet wird. Außerdem kann die Geschwindigkeit der Nadel beim Einstechen gezielt gesteuert werden, indem der Nadelherausstand (hier s) vergrößert oder verkleinert wird, siehe Abbildung 2-60.

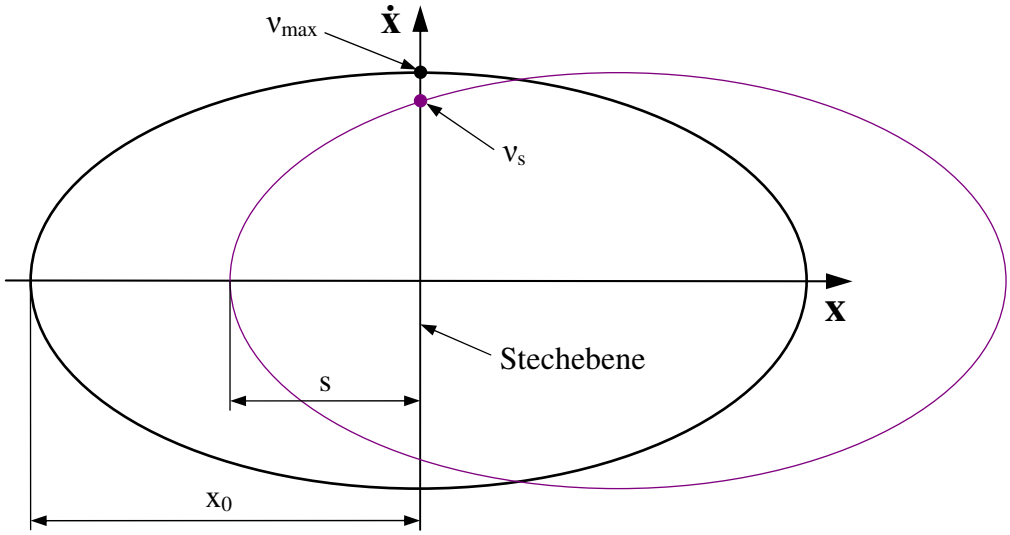

Abbildung 2-60 Unterschiedliche Stechgeschwindigkeiten je nach Nadelherausstand s

Der Nadelherausstand wird sowohl bei den gleichstrommotorbetriebenen Tattoo- sowie Pigmentier-Maschinen als auch bei den Spulenmaschinen mechanisch eingestellt, indem man eine Nadel oder ein Nadelpaket relativ zu einer physischen (beispielsweise definiert durch eine Modulspitze), bzw. imaginären Stechebene verschiebt.

Bei dem hier vorgestellten Schwingaktor kann dies sowohl mechanisch als auch elektronisch geschehen. Mittels eines konstanten Stroms in der Erregerspule lässt sich der Läufermagnet aus seiner Mittellage nach links, bzw. nach rechts verschieben, vgl. Abbildung 2-39. Dieser Gleichstrom-, bzw. Gleichspannungsanteil kann einer harmonischen Erregerspannung zugefügt werden, um die mittlere Schwingungsposition eines Läufermagneten zu ändern:

$$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = F_s + F_0 \cdot \cos(\Omega t) \qquad \textbf{(2-110)}$$

Für die Suche nach der vollständigen Lösung der Differentialgleichung (2-110) im eingedämpften Zustand werden die gleichen Schritte wie im Kapitel 8.1 durchgeführt, wobei der Ansatz für die partikuläre Lösung x_p um eine Konstante F_s / c ergänzt wird. Somit verschwindet diese Konstante beim Einsetzen der partikulären Lösung x_p in (2-110), weitere Rechnungsschritte bei der Lösungssuche bleiben unverändert. Reduziert auf den eingeschwungenen Zustand, gilt die Lösung der Differentialgleichung (2-110):

$$x(t) = \underbrace{\frac{F_s}{c}}_{=x_s} + x_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_s + x_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi) \qquad \textbf{(2-111)}$$

Um den Wert des Gleichstromanteils (bzw. F_s) zu ermitteln, muss zuerst die entsprechende Position x_s errechnet werden, um welche der Läufermagnet verschoben werden soll, damit die gewünschte Stechgeschwindigkeit v_s beim gewünschten Nadelherausstand s erreicht wird, siehe Abbildung 2-61 sowie 2-62.

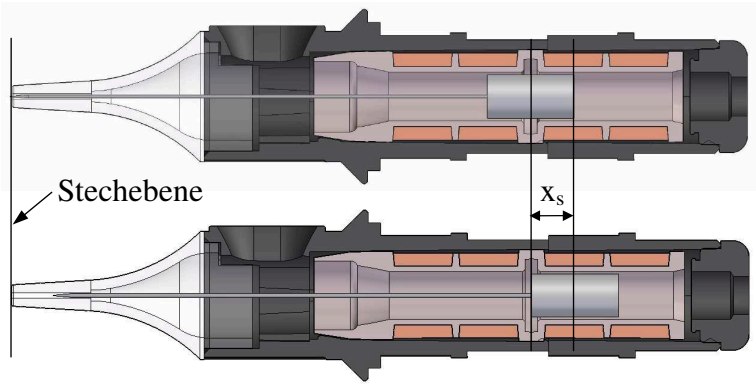

Abbildung 2-61 Verschiebung des Läufermagneten um x_s

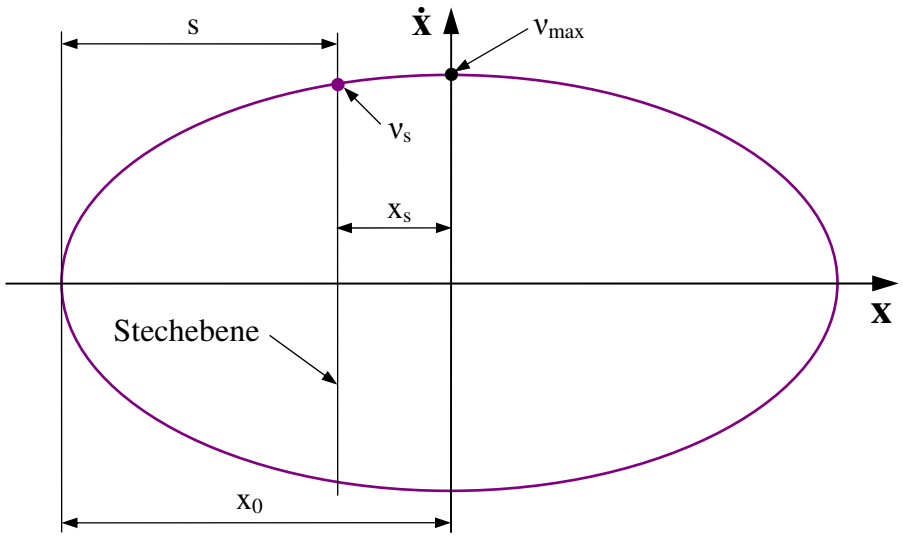

Abbildung 2-62 Unterschiedliche Stechgeschwindigkeiten je nach Position der Stechebene

Zudem ist die maximale Stechgeschwindigkeit von der Schwingungsamplitude abhängig, vgl. Gleichung (2-82). Für den eingeschwungenen Zustand und für x(t) = 0 gilt:

$$x_s = -x_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

Zu diesem Zeitpunkt hat die Schwingmasse die Geschwindigkeit:

$$v_s = -x_0 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t - \varphi)$$

Aufgelöst nach den Kreisfunktionen ergibt sich:

$$\sin(\Omega t - \varphi) = -\frac{v_s}{x_0 \cdot \Omega} \qquad \textbf{(2-112)}$$

$$\cos(\Omega t - \varphi) = -\frac{x_s}{x_0} \tag{2-113}$$

Aufgrund der trigonometrischen Beziehung $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ werden die Gleichungen (2-112) und (2-113) zusammen gefasst:

$$\frac{\nu_s^2}{x_0^2 \cdot \Omega^2} + \frac{x_s^2}{x_0^2} = 1 \tag{2-114}$$

wobei x_s, wie die Abbildung 2-62 zeigt, die Differenz zwischen der Schwingungsamplitude x_0 und dem Nadelherausstand s bedeutet:

$$x_s = x_0 - s \tag{2-115}$$

Die Gleichungen (2-114) und (2-115), aufgelöst nach x_0, werden in einem Gleichungssystem gekoppelt:

$$\begin{cases} \dfrac{\nu_s^2}{\Omega^2} + x_s^2 = x_0^2 \\ x_0 = x_s + s \end{cases} \tag{2-116}$$

Letzten Endes erhält man die gesuchte Verschiebung des Läufermagneten x_s:

$$\frac{\nu_s^2}{\Omega^2} + x_s^2 = (x_s + s)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\nu_s^2}{\Omega^2} = s^2 + 2 \cdot s \cdot x_s \quad \Rightarrow$$

$$x_s = \frac{\nu_s^2}{2 \cdot s \cdot \Omega^2} - \frac{s}{2} \tag{2-117}$$

Die Gleichung (2-117) gibt den Wert der erforderlichen Verschiebung x_s des Läufermagneten in Abhängigkeit von der eingestellten Erregerfrequenz Ω und vom Nadelherausstand s an. Bei dieser Verschiebung wird die gewünschte Stechgeschwindigkeit ν_s (bezogen auf die Stechebene) erreicht. Falls keine Verschiebung des Nullpunkts vorliegt ($x_s = 0$), lässt sich die Geschwindigkeit beim Nulldurchgang zu

$$\frac{s}{2} = \frac{\nu^2}{2 \cdot s \cdot \Omega^2} \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \pm s \cdot \Omega \tag{2-118}$$

angeben, wobei in diesem Fall $s = x_0$. Die Gleichung (2-118) gilt, falls die Einstellung der gewünschten Stechgeschwindigkeit nicht durch die Verschiebung der Mittellage des Läufermagneten, sondern allein mittels Variation der Erregerfrequenz Ω sowie der Schwingungsamplitude x_0 erfolgen soll. Die durchgeführten Überlegungen lassen sich unter folgenden Bedingungen zusammen fassen:

$$\begin{cases} x_s = 0, & \nu = x_0 \cdot \Omega \\ x_s = \dfrac{\nu_s^2}{2 \cdot s \cdot \Omega^2} - \dfrac{s}{2} > 0 \end{cases} \tag{2-119}$$

Die erforderliche Verschiebungskraft F_s ist daher

$$F_s = c \cdot x_s = c \cdot \left(\frac{\nu_s^2}{2 \cdot s \cdot \Omega^2} - \frac{s}{2} \right) \tag{2-120}$$

Die Gleichung (2-119) zeigt, dass einzelne Parameter wie Erregerfrequenz oder Nadelherausstand sowie Stechgeschwindigkeit und Verschiebung x_s sowohl als Konstante wie auch als Variable aufgefasst werden können und sich gegenseitig beeinflussen. Dies wurde bei der Implementierung der Steuerungsalgorithmen im Steuerungsprogramm (siehe Abbildung 2-69) berücksichtigt.

2.5.3 Erzeugung unterschiedlicher Geschwindigkeitsprofile

Setzt man in die Gleichung (2-110) anstelle des konstanten Kraftanteils F_s eine zeit-, bzw. wegabhängige Kraft ein, so lassen sich unterschiedliche Bewegungsprofile erzeugen. Dieser Kraftanteil kann in der Erregerkraft F(t) eingeschlossen werden, und es ergibt sich eine lineare, bzw. nichtlineare Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems, vgl. Kapitel 2.1.2.

$$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = F_M(t) \tag{2-121}$$

$F_M(t)$ wird als Modulationskraft bezeichnet, welche sowohl harmonisch als auch nichtlinear sein kann. Sie ermöglicht es, fast beliebige Bewegungsprofile zu modulieren, beispielsweise wie es die Abbildungen 2-22 bis 2-24, bzw. 2-63 bis 2-68 zeigen. Mit Hilfe der Modulationskraft kann auch die Nichtlinearität der Feder simuliert werden. Da diese unbekannte Modulationskraft gegebenenfalls einen nichtlinearen Charakter aufweisen kann, wurde auf eine analytische Lösung der Differentialgleichung (2-121) verzichtet. Stattdessen kam die numerische Lösung zum Einsatz (vgl. Kapitel 8.3).

Es wurden verschiedene Funktionsgleichungen der Modulationskraft in die Differentialgleichung (2-121) eingesetzt und die Reaktionen des mechanischen Systems analysiert. Bei

$$F_M(t) = F_0 \cdot \left[\underbrace{\cos(\Omega t)}_{\text{Grundschwingung}} - \underbrace{\alpha \cdot \cos(n \cdot \Omega t)}_{\text{Oberschwingung}} \right] \tag{2-122}$$

mit n = 2, α = 0,2 und mit einer Erregerfrequenz Ω, die 1,5fach geringer war als die Resonanzfrequenz des mechanischen Systems, ergab sich ein Bewegungsprofil, bei welchem die Geschwindigkeit der Schwingmasse in eine Richtung zweifach höher ist als in die andere, siehe Abbildung 2-63.

Hier bedeutet α einen Einstellungsparameter, welcher die Stärke der Oberschwingung angibt und somit beispielsweise die Ausprägung der Schleife, zu sehen in der Abbildung 2-64, beeinflusst. Mit dem Multiplikationsfaktor n kann das Profil der Bewegung modelliert werden, indem die Grundschwingung mit einer Oberschwingung überlagert wird. Da für die Bewegungsgleichung (2-121) keine analytische Lösung gesucht, sondern ein numerisches Verfahren angewendet wurde, mussten die Einstellungsparameter α und n durch Ausprobieren ermittelt werden, um brauchbare Bewegungsprofile zu finden.

Der Algorithmus zur Gewinnung der numerischen Lösung lautet:

$$x_{i+1} = \frac{F_M(t_{i-1}) \cdot h^2}{m} + \left(\frac{d \cdot h}{m} - \frac{c \cdot h^2}{m} - 1 \right) \cdot x_{i-1} + \left(2 - \frac{d \cdot h}{m} \right) \cdot x_i \qquad \textbf{(2-123)}$$

Dabei hat die Erregerfrequenz (neben der Dämpfungskonstante und der Masse des mechanischen Systems) einen großen Einfluss auf die Form des Geschwindigkeitsprofils. Eine sehr schwache Dämpfung gibt dem Bewegungsprofil eine unregelmäßige Gestalt, eine niedrigere Erregerfrequenz verschiebt die Schleife, siehe Abbildung 2-64. Die Systemparameter wie Masse, Federsteifigkeit und Dämpfungskonstante waren: m = 0,8 g, c = 800 N / m, d = 0,35.

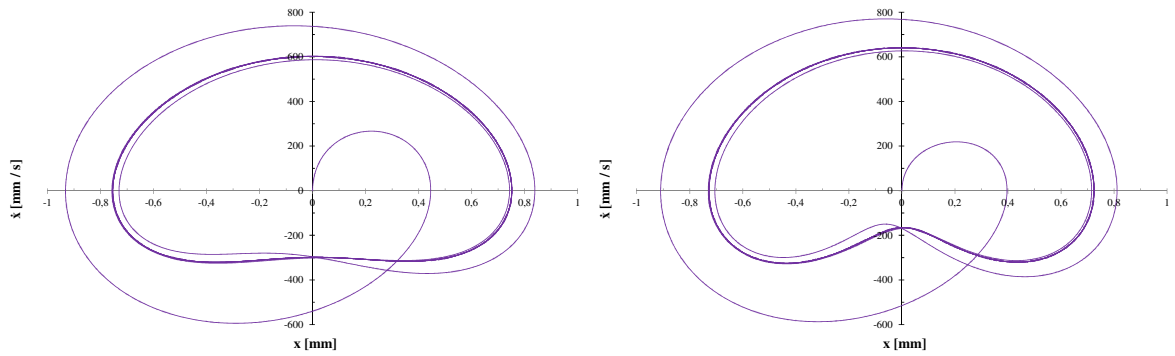

Abbildung 2-63 Phasenraumdarstellung „Nierenprofil“, n = 2, $\Omega_r = 1{,}5 \cdot \Omega$, α = 0,2 (links), α = 0,35 (rechts)

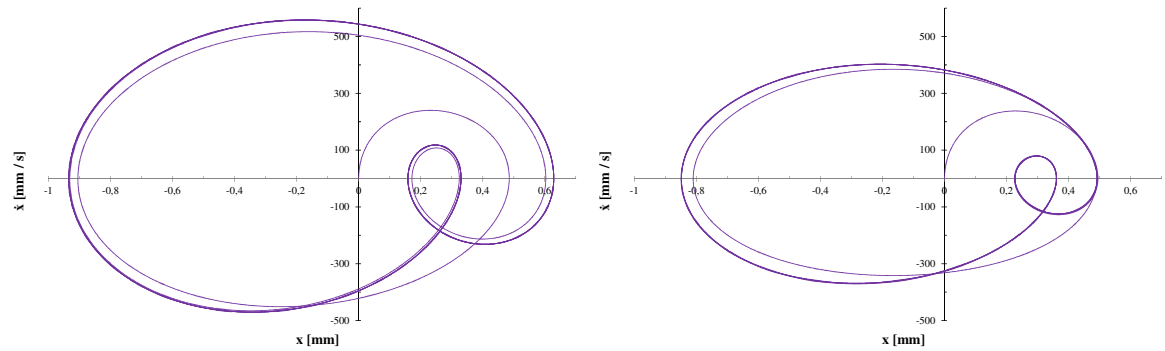

Abbildung 2-64 Phasenraumdarstellung „Nierenprofil mit Schleife“, n = 2, α = 0,35, $\Omega_r = 2 \cdot \Omega$ (links), $\Omega_r = 2{,}5 \cdot \Omega$ (rechts)

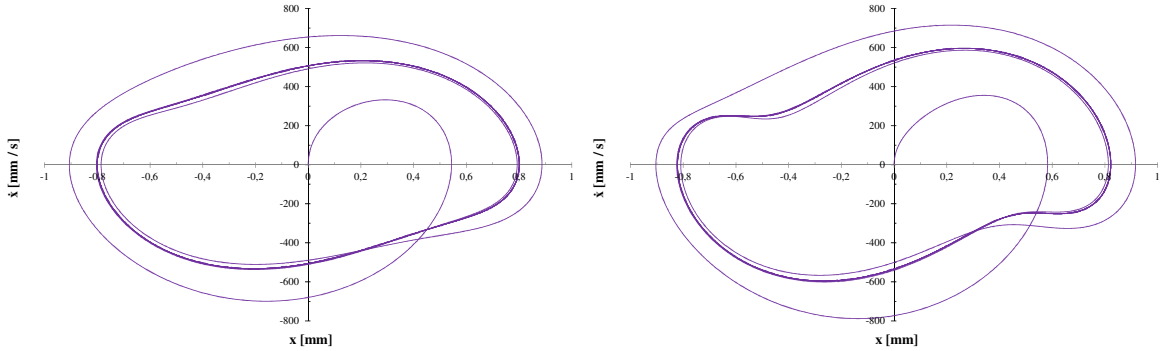

Abbildung 2-65 Phasenraumdarstellung „Rhombus“, $\Omega_r = 1{,}5 \cdot \Omega$, n = 3, $\alpha = 0{,}2$ (links), $\alpha = 0{,}4$ (rechts)

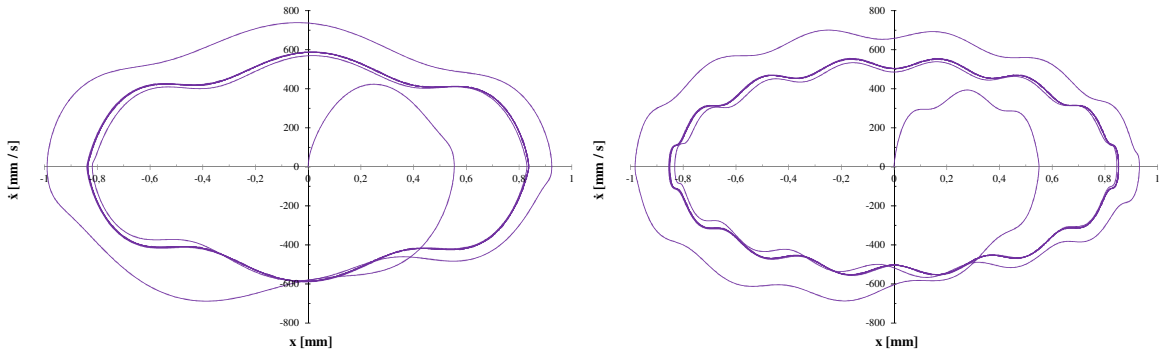

Abbildung 2-66 Phasenraumdarstellung „Schlüsselloch“, $\Omega_r = 1{,}5 \cdot \Omega$, n = 7, $\alpha = 0{,}4$ (links), n = 15, $\alpha = 0{,}5$ (rechts)

In den Abbildungen 2-63 bis 2-65 sind einige Beispiele der Bewegungsabläufe eines mechanischen, schwingenden Systems dargestellt, welches mit einer Modulationskraft entsprechend der Gleichung (2-122) angeregt wurde. Diese Profile wurden bewusst so generiert, um unterschiedliche Bewegungsabläufe (Geschwindigkeiten) der Schwingmasse bei der Hin- und Rückfahrt zu erzielen.

Eine wegabhängige Modulationskraft wie

$$F_M(x,t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t) - \beta \cdot x \cdot \cos(n \cdot \Omega t) \qquad \textbf{(2-124)}$$

ermöglicht das Erzeugen von anderen nichtelliptischen Bewegungsprofilen wie beispielsweise „Ameisenkopf“, siehe Abbildung 2-67. Die Federsteifigkeit ist dabei sehr gering, ca 10 N / m.

Der Ansatz für die Lösung der Bewegungsgleichung (2-121) eines mechanischen, schwingenden Systems, das mit einer Modulationskraft gemäß der Gleichung (2-124) angeregt wurde, ist dem im Kapitel 8.3 beschriebenen numerischen Verfahren gleich.

Der Algorithmus zur Gewinnung der numerischen Lösung lautet:

$$x_{i+1} = \frac{F_0 \cdot \cos(\Omega t_{i-1}) \cdot h^2}{m} + \left(\frac{d \cdot h}{m} - \frac{c + \beta \cdot \cos(n \cdot \Omega t_{i-1})}{m} \cdot h^2 - 1 \right) \cdot x_{i-1} + \left(2 - \frac{d \cdot h}{m} \right) \cdot x_i \qquad \textbf{(2-125)}$$

Entspricht die Federsteifigkeit einem üblichen Wert, wie es bei den obigen Beispielen der Fall ist (c = 800 N / m), so wird eine nichtsymmetrische Bewegung der Schwingmasse erzeugt, siehe Abbildung 2-68. Dieses Bewegungsprofil ist ebenso wie die anderen Bewegungsabläufe der Schwingmasse stark von der Erregerfrequenz abhängig.

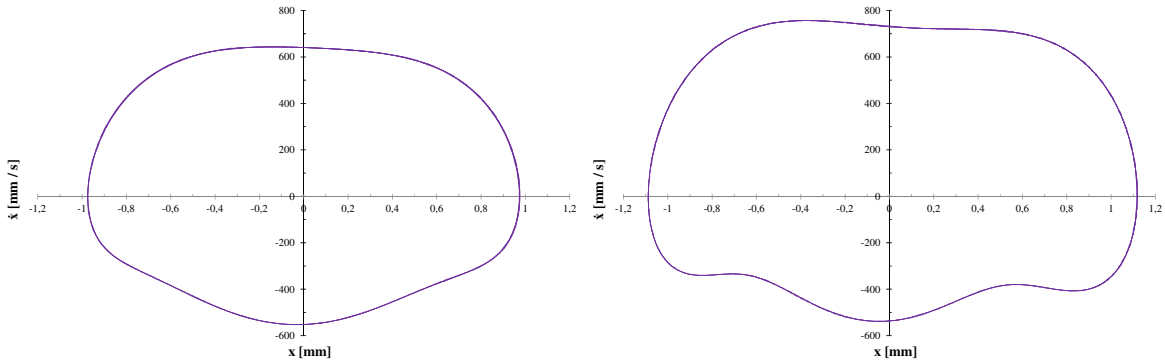

Abbildung 2-67 Phasenraumdarstellung „Ameisenkopf“, f = 100 Hz, n = 3, c = 10 N / m, β = 200 (links), β = 400 (rechts)

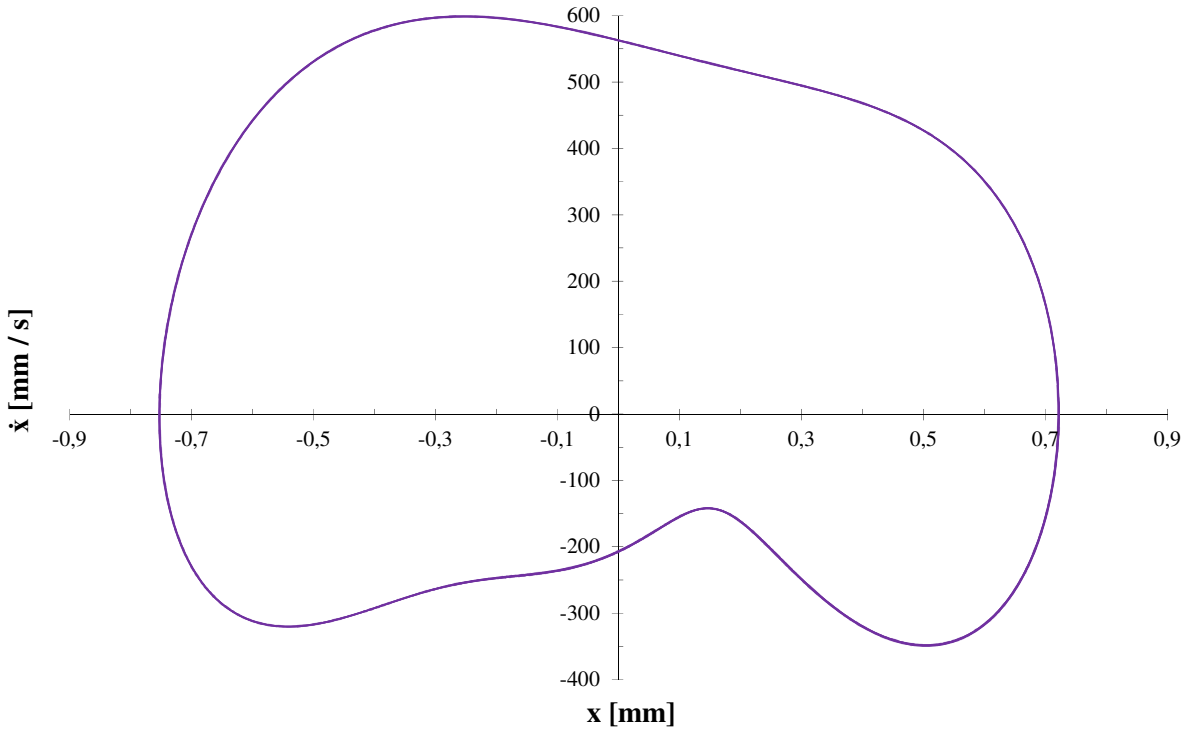

Abbildung 2-68 Phasenraumdarstellung „Dali“, f = 100 Hz, n = 3, β = 400, c = 800 N / m

2.5.4 Benutzeroberfläche

Mit einem LabVIEW-Programm wurde eine interaktive Benutzeroberfläche konzipiert, welche es ermöglicht, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Prototypen des elektrodynamischen Schwingaktors zu steuern, siehe Abbildung 2-69. Das LabVIEW-Programm ist bewusst ausgewählt worden, um bei der Programm- und Bedienoberflächegestaltung flexibel zu bleiben. Es wurden der Audioausgang des Rechners und eine Audio-Leistungsverstärkerelektronik zur Verstärkung der Niedervoltspannung und zur Bereitstellung des Spulenstroms benutzt, da die Steuerungssignale als Wechselspannung mit variabler Frequenz sowie Amplitude vorliegen. Die Erregerfrequenz entspricht dabei dem Spektrum eines Audiosignals (20 Hz bis 20 kHz).

Es sind sowohl die Frequenz-Amplituden-Steuerung entsprechend der Gleichung (2-109) als auch der Modus der Stechgeschwindigkeitskontrolle gemäß den Gleichungen (2-111) sowie (2-119) und (2-120) realisiert worden. Außerdem wurden verschiedene Modi (Force control, Einzelstich und Einzelstichabfolge, PMU sowie Tattoo Automatic und die Generierung der verschiedenen Geschwindigkeitsprofile) in das Programm integriert. Diese Modi dienten lediglich zur MT.DERM firmeninternen Demonstration der Steuerungsmöglichkeiten, welche diese Art von Schwingantrieben bietet. Daher wird hier auf das Programm nicht näher eingegangen.

Abbildung 2-69 Benutzeroberfläche des LabWIEV-Programms zur Steuerung eines Schwingaktors

2.6 Elektronik

Die in Rahmen der vorliegenden Dissertation entwickelten elektrodynamischen Schwingaktoren werden mit einer Wechselspannung mit unterschiedlichen Amplituden sowie Frequenzen, welche einem Audiosignal (20 Hz bis 20 kHz) entsprechen, gespeist. Je nach Bandbreite des Schwingaktors kann die Erregerfrequenz von 50 Hz bis 150 Hz variieren. Die gewünschte Erregerfrequenz wird mittels des für die Testzwecke entwickelten LabVIEW-Programms generiert, die Wechselspannung wird von der Audiokarte eines Rechners, bzw. Laptops bereit gestellt und muss nur entsprechend verstärkt werden, damit der erforderliche Strom durch die Erregerspule des Schwingantriebs fließt.

2.6.1 Schaltungskonzepte

Leistungsendstufe

Um den Testaufbau universell zu gestalten und für mobile Einsätze zu nutzen, wurde eine Verstärkerschaltung konzipiert, die es ermöglicht, die Schwingaktoren von einem Rechner aus anzusteuern. Die Vorgaben hierfür waren: Ausgangswechselspannung mit einer maximalen Amplitude von 10 V bis 12 V und mit einem maximalen Strom von ca. 0,7 A, um kompakte Netzteile zu verwenden. Weiterhin soll die Steuerungselektronik die Überlagerung der Schwingung mit einer Gleichspannung gestatten.

In der Abbildung 2-70 ist das Blockschaltbild der Leistungselektronik dargestellt. Um eine symmetrische Versorgungsspannung für die Operationsverstärker zur Verfügung zu stellen, wurde ein kompakter, hocheffizienter AC / DC Konverter (Schaltregler) mit einem breiten Eingangswechselspannungsbereich von 100 V bis 240 V und mit einer stabilisierten Ausgangsspannung von ± 12 V eingesetzt.

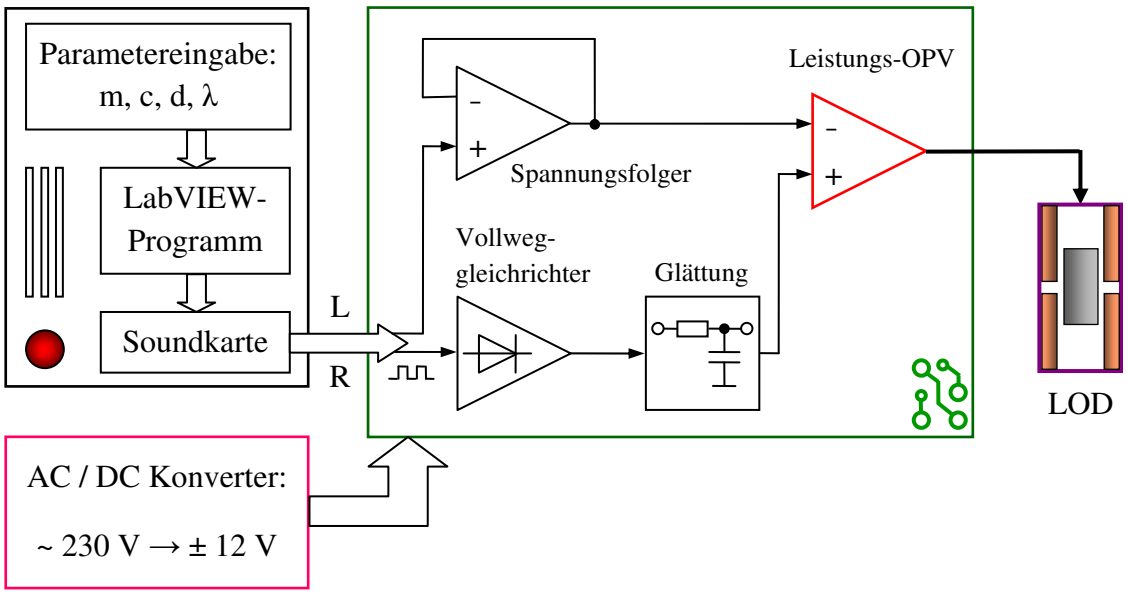

Abbildung 2-70 Blockschaltbild einer Leistungsverstärkerelektronik

Außerdem ist bei diesem Schaltregler der Überlastungs- und Kurzschlussschutz integriert. Somit sind keine zusätzlichen Schutzmaßnahmen erforderlich. Der Schaltregler stellt einen maximalen Strom von 650 mA zur Verfügung.

Es wurde ein 20 Watt Audio-Leistungsoperationsverstärker LM 1875 verwendet. Der invertierende Eingang des Verstärkers ist für die Verstärkung der Erregerfrequenz bestimmt, der nichtinvertierende für die Erzeugung des Gleichstromanteils in einem Lastwiderstand, also in der Erregerspule. Wie bereits im Kapitel 2.5.2 erläutert, ist dadurch eine Verschiebung der Schwingungsposition des Läufermagneten erreichbar und dementsprechend die Ansteuerung des Schwingaktors im Geschwindigkeitskontroll-Modus realisierbar. Da die Soundkarte eines Rechners, bzw. eines Laptops eine Ausgangsspannung von maximal 2 V aufweist, wurde ein Verstärkungsfaktor der Leistungselektronik von $k_V = 20$ gewählt. Wegen des Spannungsabfalls an den Leistungstransistoren der Gegentaktstufe (englisch push-pull) im Sättigungszustand von jeweils 1 V ergab sich eine maximale nutzbare Ausgangsspannung des Verstärkers von 11 V.

Die Audiokarte erlaubt keine Gleichspannungsanteile an ihren Ausgängen. Deswegen wurde für die Verschiebung der Schwingungsposition eine rechteckförmige Wechselspannung im LabVIEW-Programm generiert, schaltungstechnisch gleichgerichtet und geglättet, siehe Abbildung 2-70. Mit dieser Spannung wird der nichtinvertierende Eingang des Operationsverstärkers angesteuert. Somit wird eine Verschiebung des Spannungs-Null-Punkts (Offset) am Ausgang erreicht.

Die fertige Leiterplatte mit der Verstärkerelektronik samt Schaltregler wurde in einem Kunststoffgehäuse untergebracht, siehe Abbildung 2-71. Mit dieser Leistungsendstufe und mit dem LabVIEW-Programm auf einem Laptop ist man für diverse Tests auch für einen Außeneinsatz, beispielsweise in einem Tattoo-Studio, ausgerüstet und bleibt flexibel.

Abbildung 2-71 Innenleben und das Gehäuse der Steuerungselektronik

Motion-Controller: in einem Schwingaktor integrierte Elektronik

Wie bereits in den vorherigen Kapiteln erläutert, ist es für die Steuerung des Schwingaktors unentbehrlich, die Übertragungsfunktion des mechanischen, bzw. des gesamten Systems (ggf. mit der Berücksichtigung des Frequenzgangs der Steuerungselektronik) zu kennen.

Die Übertragungsfunktion kann auch aus der Sprungantwort des Systems abgeleitet werden. Ebenfalls ist die Kenntnis der Übertragungsfunktion für die Regelung der Schwingungsamplitude von großer Bedeutung.

Der Ansatz war, die entsprechende Elektronik direkt in den Schwingaktor einzubauen. Einerseits, damit kurze Wege zwischen dem Wegsensor und der Auswertungselektronik entstehen, was äußere Störeinflusse vermindert oder komplett ausschließt, anderseits um die Ermittlung der Übertragungsfunktion, wenn sich Systemparameter wie beispielsweise die Schwingmasse ändern, unabhängig vom verwendeten Steuergerät durchführen zu können, bzw. um die für den Schwingaktor spezifische Kennlinie (wegen der Fertigungstoleranzen und Streuung der verbauten Komponenten) aufzunehmen und abzuspeichern. Der so aufgebaute Schwingaktor stellt eine in sich geschlossene Einheit dar und kann von einem Steuergerät, gegebenenfalls von einem Rechner oder Smartphone mittels Datentransfer (Senden und Empfangen von Arbeitsparametern wie z. B. die Erregerfrequenz und die Schwingungsamplitude, Kontrolle der Stechgeschwindigkeit) über eine serielle Schnittstelle gesteuert werden.

Die Abbildung 2-72 zeigt das Blockschaltbild der gesamten Elektronik des Motion-Controllers. In den Abbildungen 2-73 sowie 2-75 sind die fertig gelöteten Platinen des Signal-Controllers und Verstärkers sowie der µTouch-Kontrollplatine dargestellt.

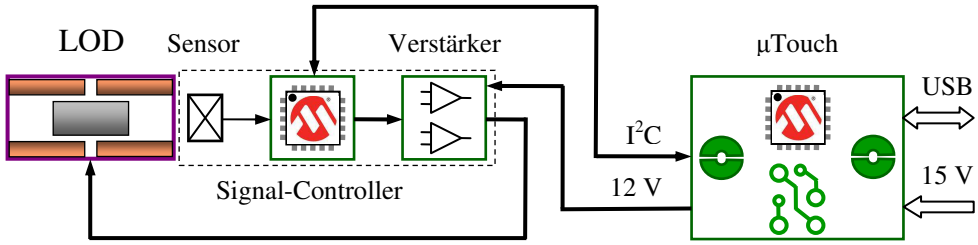

Abbildung 2-72 Blockschaltbild des Motion-Controllers sowie einer µTouch-Kontrollplatine

Wie man der Abbildung 2-72 entnehmen kann, wurde eine modulare Schaltung konzipiert, welche aus drei Blöcken besteht:

- Signal-Controller, der die Stereo-Audiosignale generiert sowie die Position des Läufermagneten ermittelt und entsprechend dem abgespeicherten Programm, bzw. gemäß den von der µTouch-Kontrollplatine vorgegebenen und via der I^2C-Schnittstelle übermittelten Einstellungen (Erregerfrequenz, Schwingungsamplitude, Regelungsparameter) den Aktor steuert, bzw. die Schwingungsamplitude regelt

- Audio-Leistungsverstärker, der die vom Signal-Controller generierten Signale verstärkt und die Erregerspule des Schwingantriebs mit elektrischem Strom versorgt

- µTouch-Kontrollplatine, die als eine mit taktilen (kapazitiven) Tasten ausgestattete Benutzeroberfläche zur Parametereingabe und Kommunikation mit dem Motion-Controller sowie mit anderen externen Geräten, z. B. Laptop, Tablet-PC oder Smartphone, via USB-Schnittstelle, ferner wireless gestaltet ist.

Der Motion-Controller umfasst einen Wegsensor, einen Signal-Controller sowie einen Verstärker, wobei der Sensor auf der Platine des Signal-Controllers platziert ist. Die Signal-Controller- sowie Verstärker-Platine werden nebeneinander positioniert und zusammengeschaltet, siehe Abbildung 2-74. Der so aufgebaute Motion-Controller wird in einem Schwingaktor untergebracht und bildet mit ihm eine geschlossene Einheit. Als Verstärker wurde ein 7,5 Watt Stereo-Audio-Leistungsoperationsverstärker LM 4950 in einer BTL-Verschaltung verwendet (englisch: Bridge-Tied-Load, H-Brücke). Somit kann die Verstärkerschaltung von einer einpoligen Versorgungsspannung beispielsweise von 12 Volt betrieben werden. Die Mikrocontroller stammen vom Hersteller Microchip. Als Signal-Controller wurde der PIC 33FJ64GP802 und für die µTouch-Kontrollplatine der PIC 18F14K50, welcher speziell für Anwendungen mit kapazitiven Tasten entwickelt wurde, ausgewählt. Die Spezifikationen kann man den Datenblättern der jeweiligen Mikrocontroller sowie Leistungsoperationsverstärker entnehmen.

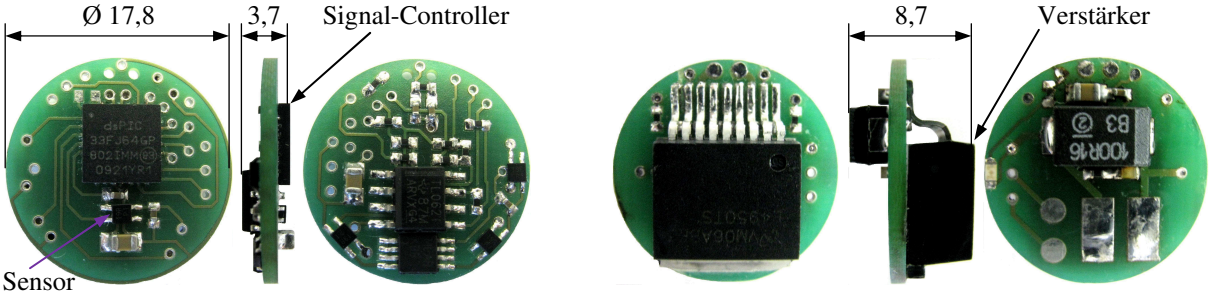

Abbildung 2-73 Signal-Controller- (links) und Verstärker-Platine (rechts)

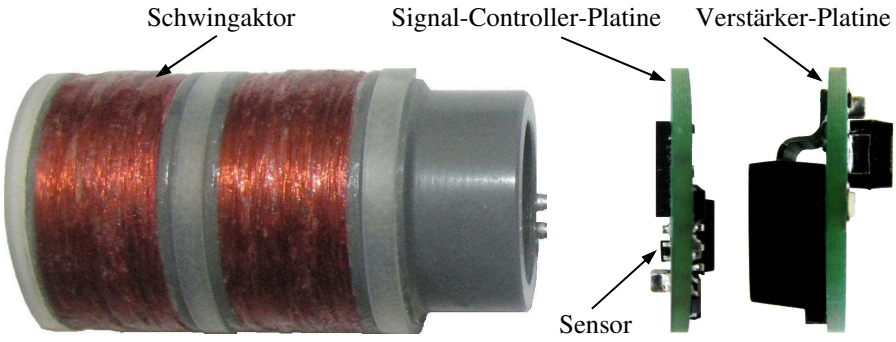

Abbildung 2-74 Schwingaktor (links) und Motion-Controller (rechts)

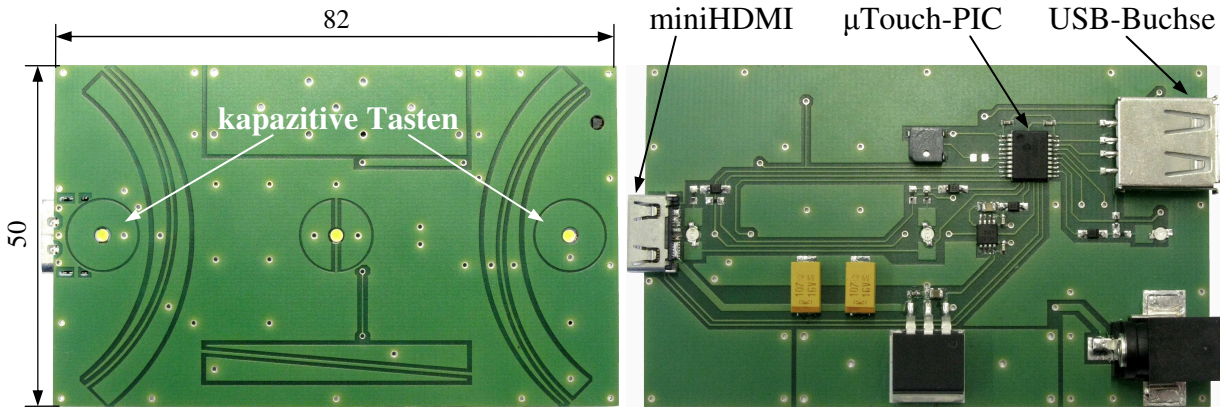

Abbildung 2-75 µTouch-Kontrollplatine

2.6.2 Sensorauswahl

Um einige der konzipierten Regelungsalgorithmen (siehe Kapitel 2.8.1 sowie 2.8.5) experimentell untersuchen zu können, wurde der im vorherigen Kapitel beschriebene Testaufbau „Leistungsendstufe“ (siehe Abbildung 2-70) um einen für die Messung der Ist-Größe der Schwingungsamplitude erforderlichen Wegsensor ergänzt. Der Sensor gibt eine Spannung entsprechend der Position des Läufermagneten aus, der Messwert wird an eine Auswertungselektronik weiter geleitet. Im Fall des Aufbaus mit der Leistungsendstufe werden die Messdaten von einem LabVIEW-Programm mittels der Soundkarte des Rechners aufgenommen. Die Ist-Größe der Schwingungsamplitude wird mit einem vorgegebenen Soll-Wert verglichen. Je nach Regelabweichung und Reglertyp folgt eine Erhöhung, bzw. Absenkung der Erregerspannung.

Für die Wegmessung schieden optische Sensoren wie beispielsweise Triangulations- oder konfokal-chromatische Abstandssensoren, bzw. PSD-Sensoren aufgrund des anspruchsvollen und raumfordernden Aufbaus sowie wegen der komplizierten Auswertungselektronik aus. Induktive Sensoren schieden ebenfalls aus, da die Erregerspule als Störquelle fungiert. Außerdem beansprucht der Aufbau dieser Sensoren zusätzlichen Platz. Als kompakte Wegsensoren können kapazitive sowie magnetische Sensoren verwendet werden. Kapazitive Sensoren benötigen jedoch entweder eine Wechselspannung oder eine spezielle Ansteuerung. Magnetische Sensoren wie Hall- sowie MR-Sensoren werden von einer Gleichspannung gespeist. Je nach innerem Aufbau des Sensors liefern sie ein verstärktes Ausgangssignal. Zudem sind sie sehr klein und lassen sich in eine Schaltung leicht integrieren, siehe z. B. Abbildung 2-74.

Es wurde der Hallsensor CYSJ106C [Che10] ausgewählt. Dieser Sensor weist eine lineare Kennlinie auf und bietet eine ausreichende Ausgangsspannung, um die Signalverläufe mit einem LabVIEW-Programm und der Soundkarte aufnehmen zu können, bei geringen Abmessungen von 2,5 mm x 1,5 mm x 0,6 mm. Die Abbildung 2-76 zeigt einen Schwingaktor mit einem in der Kappe verbauten Hallsensor. Der Schwingaktor wurde zusammen mit der Leistungsendstufe bei den experimentellen Untersuchungen der Regelung der maximalen Schwingungsamplitude eingesetzt, siehe Kapitel 2.8.5.

Abbildung 2-76 Schwingaktor mit einem Hallsensor

In der Abbildung 2-77 sind Varianten der möglichen Positionierung des Hallsensors dargestellt. Die bestromte Erregerspule erzeugt eine magnetische Induktion, welche sich neben dem Magnetfeld des Läufermagneten in der Ausgangsspannung des Hallsensors bemerkbar macht. Wird der Sensor zwischen den Spulen positioniert, so hebt sich die Auswirkung der Spulen in dieser Sensorlage auf, bzw. der Sensor weist nur eine geringe Offset-Ausgangsspannung auf, da die Spulen gegensinnig bestromt sind.

Der Hallsensor kann auch seitlich axial im Schwingaktor untergebracht werden. Bei dieser Position des Sensors ist die Auswirkung der Erregerspule am stärksten detektierbar, wobei die Spannungs-Weg-Kennlinie nichtlinearen Charakter aufweist. Die aufgrund der Spulenwirkung detektierte Spannung kann von der Ausgangsspannung des Sensors subtrahiert werden, wenn man bei der Skalierung des Sensors sowie des Schwingaktors diese Offset-Spannung aufnimmt und später bei der Regelung der Schwingungsamplitude berücksichtigt.

Die Weg-Sensoren können seitlich, links und rechts in einem Schwingaktor angeordnet und im Fall der MR-Sensoren in einer Messbrücke (beispielsweise Wheatstone-Brücke) verschalten werden. Dadurch wird bei einer linearen Kennlinie die Empfindlichkeit der Messeinrichtung verdoppelt, bzw. eine nichtlineare Spannung-Weg-Kennlinie linearisiert. Da die Hall-Sensoren aktive Ausgänge aufweisen, müssen sie hingegen in einer Messelektronik differentiell verschaltet werden (realisierbar mit Operationsverstärkern).

Aus konstruktiven Gründen wurde beim Testaufbau, welcher für die experimentelle Untersuchung des Regelungsalgorithmus bestimmt war, eine seitliche, axiale Platzierung des Sensors gewählt. Die axiale Positionierung ist für eine Integrierung des Sensors auf einer Leiterplatte günstig, da keine elektrischen Leitungen vom Sensor zur Auswertungselektronik quer durch den Schwingaktor verlegt werden müssen. Die Positionierung des Hallsensors zwischen den Spulen kann als eine alternative Lösung mit einem minimalen Störeinfluss gewertet werden.

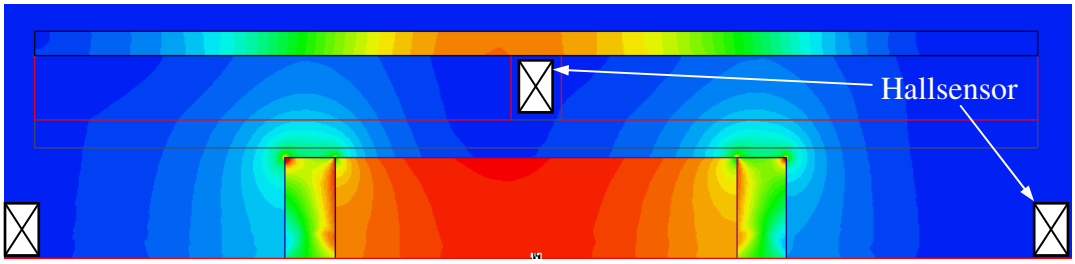

Abbildung 2-77 Zur Positionierung des Wegsensors

2.7 Programmierung

Die einfachsten Regler wie P- oder PI-Regler können schaltungstechnisch mit Operationsverstärkern realisiert werden. Dagegen sind aufwendige Regelungsalgorithmen mit variablen P-, I- oder D-Faktoren (die so genannten Regler mit Tuning) sowie iterative Regelungsverfahren, bei denen sowohl die Regelgröße (Ist-Wert) als auch Störfaktoren sowie eventuelle Messfehler gespeichert, analysiert und die Stellgröße (im Fall des elektrodynamischen Schwingaktors entspricht die Stellgröße der erforderlichen Erregerkraft, welche die Schwingungsamplitude entsprechend der Regelabweichung erhöht oder senkt) als analoges Signal ausgegeben werden müssen, nur mit digitalen Mitteln - mit programmierbaren Mikrocontrollern oder mit rechnerunterstützenden Regelungsprogrammen realisierbar.

Außerdem können die Nichtlinearitäten der Spannungs-Weg-Kennlinie in bestimmten Fällen nur programmtechnisch kompensiert werden. Die für jeden Schwingaktor spezifische Übertragungsfunktion lässt sich ebenfalls im Speicher eines Mikrocontrollers hinterlegen und kann jede Zeit abgerufen, bzw. nach Bedarf modifiziert werden.

Dazu ist wichtig, die Verzögerungszeiten des jeweiligen Mikrocontrollers beim Ablesen der analogen Eingänge sowie beim Programmablauf zu kennen, bzw. abzuschätzen.

2.7.1 Abschätzung der Laufzeiten bei Programmabläufen

Wegen Verzögerungen aufgrund des Programmablaufs und der Erfassung des Messsignals entsteht eine so genannte Totzeit, während derer keine Reaktion des Systems auf eine Änderung der Regelgröße erfolgt.

Bei der Messung des Ist-Werts liegt meistens ein analoges Messsignal vor, das für die weitere Verarbeitung verstärkt und mit Hilfe eines Analog-Digital-Converters (ADC oder AD-Wandler) digitalisiert wird. Sowohl der Verstärker als auch der AD-Wandler benötigen eine gewisse Zeit, um das Signal weiter zu leiten, bzw. in digitale Daten umzusetzen. Bei einem Verstärker ist es die Propagation-Delay-Time (t_{pd}), bei einem AD-Wandler die Umsetzungsdauer, welche in erster Näherung durch die Abtastfrequenz, bzw. Abtastrate (Samples pro Sekunde) des jeweiligen Wandlers definiert werden kann.

Bei der Auswahl eines Mikrocontrollers ist auf den in diesem Mikrocontroller integrierten ADC zu achten. Bei der Verwendung eines externen Analog-Digital-Converters müssen die Latenzen sowohl bei der Konvertierung als auch beim Datentransfer berücksichtigt werden. Je nach Aufbau des AD-Wandlers (Umsetzungsverfahren) benötigt dieser für die Konvertierung eines analogen Signals in eine digitale Datenmenge unterschiedliche Zeiten.

Der schnellste Wandler ist der so genannte Flash-ADC, welcher aufgrund seiner hohen Abtastrate bis zu mehreren GSa / s, was eine hohe Eingangsfrequenz im GHz-Bereich erlaubt, in digitalen Speicheroszilloskopen Anwendung findet. Flash-AD-Wandler sind aus mehreren tausend Komparatoren zusammen gesetzt und dementsprechend sehr teuer. Weniger kompliziert aufgebaut sind die Sigma-Delta- sowie Pipeline-Analog-Digital-Converter.

Im Vergleich zu Flash-ADCs ermöglichen diese jedoch viel geringere Abtastfrequenzen von 16 kHz bis 196 kHz (Sigma-Delta), bzw. Abtastraten bis zu 250 MSa / s (Pipeline) und sind meistens in einem Mikrocontroller integriert. Es gibt auch Hybrid-Wandler. Der Aufbau und die Arbeitsweise eines AD-Wandlers lässt sich in der Fachliteratur nachlesen, z. B. [Woi12].

Wichtig für die Erfassung einer Regelgröße sind die binäre Genauigkeit sowie die Auflösung eines AD-Wandlers. Meistens muss man einen Kompromiss zwischen ausreichender Genauigkeit und der niedrigeren Latenzzeit bei der Signalumsetzung eingehen.

Motion-Controller

Beim verwendeten Signal-Controller (siehe Kapitel 2.6.1) beträgt die minimale Umsetzungsdauer des integrierten AD-Wandlers ca. 900 ns bei maximaler Abtastrate von 1,1 MSa / s und einer Genauigkeit von 10 bit. Bei einem Messsignal mit einer Ausgangsspannung von 0 V bis 2 V, was z. B. einem Messweg von 6 mm (x_0 = 3 mm) entsprechen kann, liegt somit eine Messgenauigkeit bei ca. 2 mV oder 5,9 µm vor. Dies entspricht einer maximalen erfassbaren Bewegungsgeschwindigkeit von ca. 6,5 m / s, was eine maximale Schwingungsfrequenz von 350 Hz bei einer Schwingungsamplitude von 3 mm bedeutet. Wurde eine andere Skalierung des Wegsensors vorgenommen, so ist eine höhere, bzw. geringere Messgenauigkeit erreichbar, die maximale Schwingungsfrequenz fällt demnach niedriger, bzw. höher aus.

Die Umsetzungsdauer des Digital-Analog-Converters des verwendeten Signal-Controllers beträgt ca. 10 µs.

Je nach den an den Mikrocontroller gestellten Aufgaben benötigt dieser mehr oder weniger Zeit für einen Programmzyklus. Diese Verzögerung kann unter Umständen gering sein. Bei einem anspruchsvollen und langen Programmcode bestimmt sie jedoch maßgeblich die gesamte Latenz eines Regelkreises. Ziel war es, einen Regler zu entwerfen, welcher mit wenigen Programmzeilen realisierbar ist, um eine schnelle Regelung der Schwingungsamplitude zu ermöglichen. Eine schnelle Regelung, bezogen auf einen elektrodynamischen Schwingaktor, bedeutet einen Regelungsalgorithmus, bei welchem die fast momentane Ausregelung des Bewegungsprofils erfolgt, siehe Kapitel 2.8.2.

Setzt man für einen im Schwingaktor integrierten Motion-Controller eine Messgenauigkeit von ca. 150 µm sowie eine Umsetzungsdauer der AD- sowie DA-Konvertierung von insgesamt 12 µs und eine Programmlaufzeit von 38 µs voraus, ergibt sich für den gesamten Regelungszyklus (Messsignal einlesen, mit dem Soll-Wert vergleichen, Stellgröße ausrechnen und ausgeben) eine Verzögerungszeit von 50 µs, bis eine Reaktion des System auf eine Änderung der Regelgröße erfolgt. Bei dieser Verzögerungszeit und der ausgewählten Messgenauigkeit ist eine maximale Schwingungsfrequenz von 160 Hz erlaubt (x_0 = 3 mm), was für die meisten Anwendungsfälle (Pigmentieren, Tätowieren) genügt.

LabVIEW

Bei den rechnerunterstützten Regelungsalgorithmen, welche mit dem LabVIEW-Programm realisiert werden können, ist auf die Verarbeitungsgeschwindigkeit des Rechners zu achten. Das LabVIEW-Programm erlaubt keine schnelle Verarbeitung, wie es beispielsweise der Maschinencode Assembler zulässt. Es benötigt eine gewisse Zeit, um die graphische Bedienoberfläche aufzubauen und die Zustandsänderungen der Bedienelemente (Druck- und Drehknöpfe u. ä.) abzulesen. Außerdem erfordert das Ausgeben eines oder mehrerer Plots eine zusätzliche Rechenzeit. All das hängt auch mit der Systemgeschwindigkeit eines Rechners zusammen.

Wird für das Einlesen des Messsignals sowie für das Ausgeben der Stellgröße eine Soundkarte verwendet (siehe Kapitel 2.8.5), müssen die Latenzen der Audiokarte berücksichtigt werden. Des Weiteren nimmt das LabVIEW-Programm eine gewisse Anzahl von Samples auf, um diese abgespeicherten Daten bearbeiten zu können. Auch bei der Signalausgabe werden zuerst die Daten akkumuliert und dann an die Soundkarte weitergegeben. Dadurch entsteht eine Totzeit: es gibt keine Reaktion des Systems auf eine Änderung der Regelgröße, obwohl der Regler während dieser Zeit die Stellgröße entsprechend der Regelabweichung weiter anpasst, es kann zur Übersteuerung kommen. Deswegen beinhaltet ein so aufgebauter Regelungskreis einen integralen Anteil, was den Regler zum Schwingen anregt.

Werden z. B. 300 Samples bei einer Samplerate von 8000 Sa / s mit einer Auflösung von 8 bit pro Sample aufgenommen, benötigt das LabVIEW-Programm ca. 38 ms dafür. Eine höhere Samplerate vermindert die Verzögerungszeit, erfordert jedoch mehr Rechenleistung, was sich in einem ungünstigen Fall negativ auf die gesamte Verarbeitungsgeschwindigkeit auswirkt. Das LabVIEW-Programm ist daher für eine schnelle Regelung ungeeignet. Dennoch kann es helfen, einige Regelungsalgorithmen und das Verhalten eines Schwingaktors experimentell zu untersuchen, um erste Anhaltspunkte für die spätere Optimierung des Reglers zu erhalten.

2.7.2 Ermittlung der Übertragungsfunktion bei wechselnden Systemeigenschaften

Die Übertragungsfunktion charakterisiert das Systemverhalten. Weil sich die Systemeigenschaften wie beispielsweise Masse, Dämpfung und Reibung nicht immer vorab ermitteln, bzw. abschätzen lassen und sich gegebenenfalls im Laufe des Betriebs ändern können, z. B. durch Alterungsvorgänge oder durch wechselnde Belastung, ist die Systemidentifikation, d. h. die Ermittlung der Übertragungsfunktion von großer Bedeutung.

Jeder Schwingaktor weist einen eigenen Frequenzgang auf. Kommt es im Laufe des Betriebs zu einer Änderung des Frequenzgangs aufgrund einer Erhöhung oder Reduzierung der Schwingmasse (es wurde beispielsweise ein Nadelpaket gewechselt), so ergibt sich eine andere Schwingungsamplitude als erwartet. Dieser Unannehmlichkeit kann man entgegen wirken, indem die Stärke der Erregerkraft manuell angepasst wird. Für eine automatische Steuerung, welche im Kapitel 2.5.1 beschrieben wurde, ist jedoch die Kenntnis aller Systemparameter erforderlich.

Sweep and Read

Ein Schwingaktor wird im unbelasteten Zustand mit einer Erregerkraft mit unterschiedlichen Amplituden (wegen eventueller Nichtlinearität) sowie Frequenzen nacheinander angeregt. Gleichzeitig wird die resultierende maximale Schwingungsamplitude aufgenommen und gespeichert. Es ergibt sich ein im Arbeitsspeicher eines Mikrocontrollers hinterlegter Frequenzgang, welcher nur für einen bestimmten Anwendungsfall gilt. Die gespeicherten Daten können nun für eine automatische Steuerung des Schwingaktors genutzt werden.

Da der Mikrocontroller nicht weiß, ob die Änderung des Frequenzgangs wegen einer äußeren Belastung oder z. B. aufgrund des Wechsels des Nadelpakets zu Stande kommt, muss daher der beschriebene Algorithmus der Frequenzgangsermittlung vor jeder Anwendung vom Benutzer gestartet werden. Diese Vorgehensweise erfordert eine gewisse Zeit, bis alle Frequenzen und Amplituden durchgelaufen sind und der Frequenzgang aufgenommen wurde. Außerdem muss sich der Schwingaktor zum Zeitpunkt der Datenaufnahme im eingeschwungenen Zustand befinden.

Weißes Rauschen

In der Audiotechnik ist ein Verfahren zur Ermittlung der akustischen Eigenschaften eines Mediums, bzw. Raumes, z. B. eines Hörsaals oder einer Konzerthalle sehr verbreitet. Bei diesem Verfahren wird ein Raum mit weißem Rauschen (Frequenzen von 20 Hz bis 20 kHz mit konstanter Amplitude) erfüllt und das Spektrum der reflektierten Signale analysiert. Es lässt sich dadurch die Stärke der Abschwächung eines akustischen Signals, bzw. das Resonanzverhalten des Raumes, also der Frequenzgang bestimmen.

Übertragen auf einen Schwingaktor kann mit diesem Verfahren der Frequenzgang eines Schwingantriebs viel schneller ermittelt werden. Die Analyse des aufgenommenen Spektrums erfordert jedoch mehr Rechenkapazität eines Mikrocontrollers, bzw. einer externen Steuerungselektronik. Dabei muss der Schwingaktor nur eine kurze Zeit mit weißem Rauschen angeregt werden, die restliche Analyse erfolgt im Hintergrund, unbemerkt für den Anwender.

Sprungantwort

Im Kapitel 2.4 wurde die Sprungantwort eines mechanischen, schwingenden Systems untersucht. Aus der Sprungantwort lassen sich die Systemparameter ablesen. Werden beispielsweise mit einer universellen Steuerungselektronik unterschiedliche Schwingaktoren, derer Übertragungsfunktion nicht bekannt ist, angesteuert, so kann die Systemidentifikation mittels Analyse der Sprungantwort des jeweiligen Schwingaktors erfolgen. Ändert sich die Schwingmasse, so genügt es, aus der Sprungantwort nur die entsprechende Größe zu errechnen, für Details siehe Kapitel 2.4 sowie Gleichung (2-99).

Dieses Verfahren ist die schnellste Methode (es muss nur der Verlauf einer Sprungantwort aufgenommen und die Systemparameter errechnet werden), die es ermöglicht, die Übertragungsfunktion eines Schwingaktors auch bei wechselnden Systemeigenschaften zu bestimmen. Zudem wird hierfür nur wenig Speicherplatz benötigt.

Wenn Wissenschaftler ihre größte Begeisterung über eine neue Entdeckung ausdrücken wollen, rufen sie nicht mehr „Eureka!“, sondern „Das ist aber wirklich komisch...“

Isaak Asimov

2.8 Regelung

Aufgrund der auftretenden äußeren Einflüsse sowie inneren Gegebenheiten soll bei einem Schwingaktor nicht nur die Schwingungsamplitude entsprechend einem vordefinierten Wert konstant gehalten, sondern es müssen auch die speziell modulierten Bewegungsprofile aufrecht erhalten werden. Dies kann mittels geeigneter Regelungsalgorithmen erfolgen.

Es wurden zwei Regelungsansätze untersucht.

Der eine stellt eine Regelung der Schwingungsamplitude in Abhängigkeit von der Abweichung von einem vorgegebenen maximalen Wert dar. Dabei wird die maximale Auslenkung der Schwingmasse bei jeder Schwingungsperiode messtechnisch erfasst und mit dem Soll-Wert verglichen. In Abhängigkeit von der Differenz wird eine neue maximale Erregerkraft errechnet, welche während der nächsten Schwingungsperiode auf die Schwingmasse wirken soll.

Der andere Regelungsalgorithmus sieht eine permanente Überwachung der Positionsabweichung der Schwingmasse von ihrer festgelegten theoretischen Bahn vor. Somit werden die analytisch skizzierten Bewegungsabläufe (vgl. Kapitel 2.5.3) kontrolliert und geregelt. Denkbar ist auch eine Kombination aus beiden Ansätzen.

Es wurden experimentelle Untersuchungen der Amplitudenregelung durchgeführt, die Ergebnisse findet man im Kapitel 2.8.5. Der Regelungsalgorithmus stellt keine hohen Anforderungen an einen Regelkreis und kann schaltungstechnisch mit einem geringeren Aufwand realisiert werden. Die permanente Regelung erfordert hingegen eine entsprechende Genauigkeit bei der Positionsmessung sowie eine höhere Rechenleistung eines Mikrocontrollers.

In der Abbildung 2-78 ist ein Regelungskreis dargestellt. Im Allgemeinen wird vorausgesetzt, dass ein Regelkreis eine Vorsteuerung $u_s(t)$ umfasst. Im Fall eines Schwingaktors entspricht die Vorsteuerung einer Erregerkraft F_0, welche die Schwingungsamplitude x_0 bestimmt, siehe Gleichung (2-16). Der Regelkreis wird so lange offen gehalten, bis sich ein stationärer Arbeitspunkt x_0 eingestellt hat (Einschwingen), erst dann erfolgt der eigentliche Regelungsvorgang.

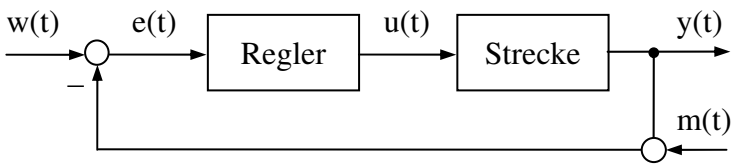

Abbildung 2-78 Blockschaltbild eines Regelkreises

Die Regelgröße y(t) wird mit einem vorgegebenen Wert, der Führungsgröße w(t) verglichen. Aus der Differenz ergibt sich eine Regelabweichung e(t), welche ihrerseits die Stellgröße u(t) bestimmt. Das zeitliche Verhalten der Stellgröße wird durch den Regler definiert. Mittels geeigneter Auswahl sowie Parametrierung des Reglers erreicht man, dass die Regelstrecke ausgeregelt wird, d. h. die Regelabweichung gegen Null konvergiert, bzw. sich die Regelgröße der Führungsgröße bis auf einen bestimmten Wert genähert hat.

Sowohl die äußeren Störfaktoren als auch die Messstörungen m(t) können in einem Regelkreis berücksichtigt werden. Ist bekannt, dass Störfaktoren auftreten können, so untersucht man die Einflüsse dieser Störung sowie des Messfehlers auf das Regelverhalten des Systems.

2.8.1 Regelung der maximalen Schwingungsamplitude

Bei der Entwicklung der Regelungsalgorithmen wurde die Belastung beim Stechen aufgrund der elastischen und zugleich dämpfenden Eigenschaften der Haut überwiegend als Dämpfung der Amplitude betrachtet, welche die Abweichung der Schwingungsamplitude von einem stationären Arbeitspunkt x_0 bewirkt. Die tatsächlich erreichte maximale Schwingungsamplitude $x_{0,\ ist}$ in Stechrichtung wird messtechnisch erfasst und die auf die Schwingmasse wirkende Dämpfung geschätzt, da diese nicht während des vollen Schwingungszyklus wirkt, sondern abhängig vom Zeitpunkt des Einsetzens der Hautbelastung ist. Zudem hängt die Belastung von der Stechtiefe sowie der Stechgeschwindigkeit ab.

Entsprechend diesem Ansatz heißt der erste Regelungsalgorithmus „Dämpfungsschätzung“. Mathematisch ausgedrückt, ausgehend von der Bewegungsgleichung (2-12), bedeutet das:

$$x_{0,\ ist} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d_H\Omega\right)^2}} \qquad \textbf{(2-126)}$$

Hier sind d_H eine geschätzte Dämpfungskonstante der Hautdämpfung und $x_{0,\ ist}$ die gemessene Schwingungsamplitude in Stechrichtung.

Die Abbildungen 2-79 sowie 2-80 zeigen ein simuliertes Schwingverhalten beim Einstechen in die Haut unter Berücksichtigung der dämpfenden Eigenschaften der Haut. Die Abbildung 2-79 veranschaulicht die Minderung der Schwingungsamplitude bei einer plötzlichen Änderung der Dämpfungskonstante. In der Abbildung 2-80 ist das Systemverhalten bei einer kontinuierlich steigenden, stechtiefenabhängigen Hautdämpfung dargestellt. Das Einsetzen der Hautbelastung beginnt ab einer Position der Schwingmasse von 0,5 mm. Die maximale Schwingungsamplitude im unbelasteten Zustand beträgt ca. 1,25 mm. Das System wurde mit einer harmonischen Kraft F_0 = 0,3 N und einer Frequenz von 100 Hz angeregt.

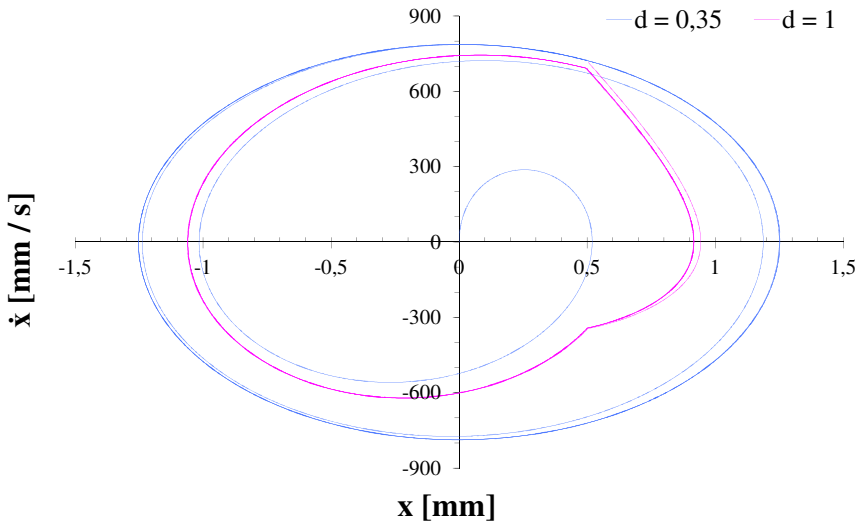

Abbildung 2-79 Schwingverhalten beim Einstechen in die Haut, Modellrechnungen

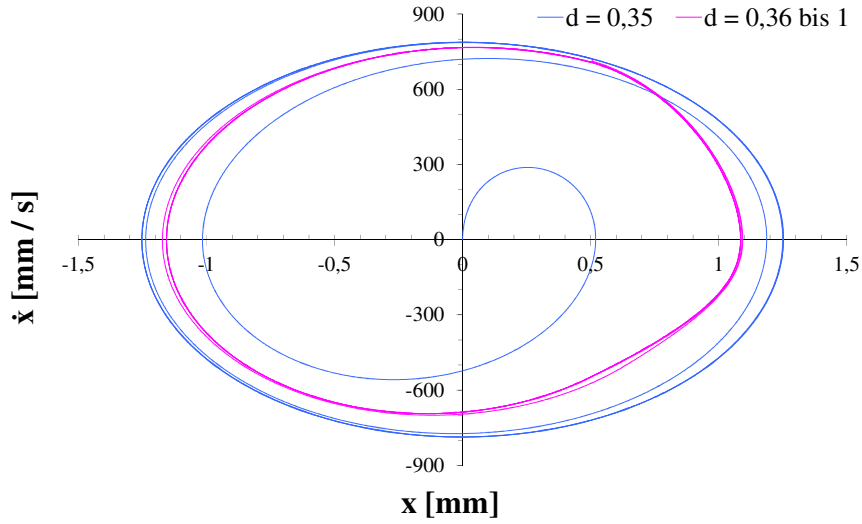

Abbildung 2-80 Schwingverhalten beim Einstechen in die Haut, Modellrechnungen

Analog zu (2-126) wird die erforderliche Erregerkraft definiert:

$$F_{0,\,soll} \;=\; x_{0,\,soll} \cdot \sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d_H\Omega\right)^2} \qquad \textbf{(2-127)}$$

Löst man (2-126) nach d_H auf

$$\left(d_H\Omega\right)^2 \;=\; \frac{F_0^2}{x_{0,\,ist}^2} - \left(c - m\Omega^2\right)^2 \qquad \textbf{(2-128)}$$

und setzt (2-128) in (2-127) ein, erhält man das Regelungsgesetz:

$$F_{0,\,soll} \;=\; x_{0,\,soll} \cdot \sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \frac{F_0^2}{x_{0,\,ist}^2} - \left(c - m\Omega^2\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$F_{0,\,soll} = \frac{x_{0,\,soll}}{x_{0,\,ist}} \cdot F_0 \qquad \textbf{(2-129)}$$

Dieselben Überlegungen können auch zur veränderbaren Schwingmasse durchgeführt werden: „Schätzung der Schwingmasse“. Es ergibt sich ebenfalls die Gleichung (2-129). Die Erregerkraft F_0 in (2-129) ist die maximale Kraft, welche bei der Ermittlung der tatsächlichen Schwingungsamplitude $x_{0,\,ist}$ während einer Schwingungsperiode auf die Schwingmasse wirkt. Die neue, entsprechend der Gleichung (2-129) ermittelte Stellkraft $F_{0,\,soll}$ ist die maximale Kraft, die während der nächsten Schwingungsperiode auf die Schwingmasse wirken soll. Aufgrund der Massenträgheiten und weil sich die erforderliche Erregerkraft $F_{0,\,soll}$ aus der Dämpfungsschätzung ergibt, wird die Schwingungsamplitude nicht nach einer Schwingungsperiode ausgeregelt, sondern es bedarf mehrerer Schwingungen, bis der vorgegebene Wert x_{soll} erreicht wird. Somit stellt der periodische Regelungsalgorithmus gemäß der Gleichung (2-129) ein iteratives Regelungsverfahren dar:

$$F_{soll,\,i+1} = \frac{x_{soll}}{x_{ist,\,i}} \cdot F_{soll,\,i} \qquad \textbf{(2-130)}$$

Die rekursive Gleichung (2-130) zeigt, dass die erforderliche Erregerkraft F_{soll} mit jeder neuen Schwingung entsprechend dem Verhältnis der Vorgabe x_{soll} zu der Regelgröße x_{ist} in Abhängigkeit von der während der vorigen Schwingungsperiode wirkenden maximalen Erregerkraft korrigiert wird. Für den Anfangszustand i = 0, also für den eingeschwungenen Zustand, in dem sich ein stationärer Arbeitspunkt x_0 eingestellt hat, gilt die Vorsteuerung $F_{soll,\,0} = F_0$.

Eine schematische Darstellung des Regelkreises gemäß der Gleichung (2-130) ist in der Abbildung 2-81 dargestellt. Die Abbildung 2-82 zeigt das simulierte Verhalten eines mechanischen, schwingenden Systems unter Anwendung des periodischen Regelungsverfahrens gemäß der Gleichung (2-130), bzw. entsprechend dem Regelkreis (2-81). Die Änderung der Dämpfungskonstante ist als sprunghafte Änderung von d = 0,35 zu d = 1,5 ab einer Position der Schwingmasse von 0,5 mm angenommen. Im ungeregelten Zustand weist das System eine 1,5fach geringere Schwingungsamplitude auf. Es ist eine fast doppelte Erhöhung der Erregerkraft F_{soll} im Vergleich zu F_0 notwendig, um die angestrebte Schwingungsamplitude x_{soll} zu erreichen. Bei der Rückfahrt der Schwingmasse wird das System ab dem Nulldurchgang eine volle Schwingungsperiode mit einer neuen, entsprechend der Gleichung (2-130) ermittelten Stellkraft angeregt. Es sind wenige Schwingungen erforderlich, bis die vorgegebene Schwingungsamplitude x_{soll} erreicht wird.

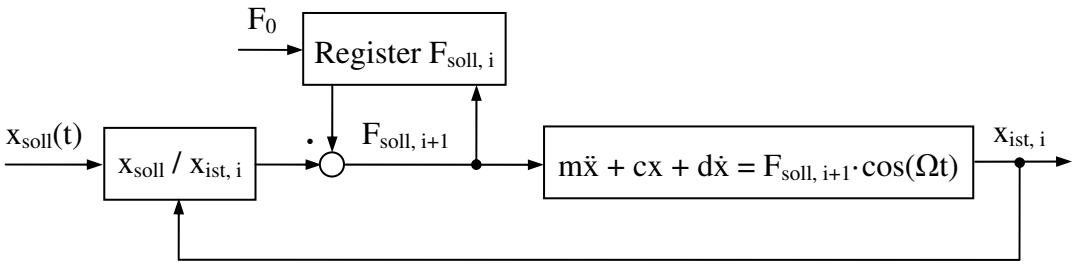

Abbildung 2-81 Schematische Darstellung der Regelung der maximalen Schwingungsamplitude

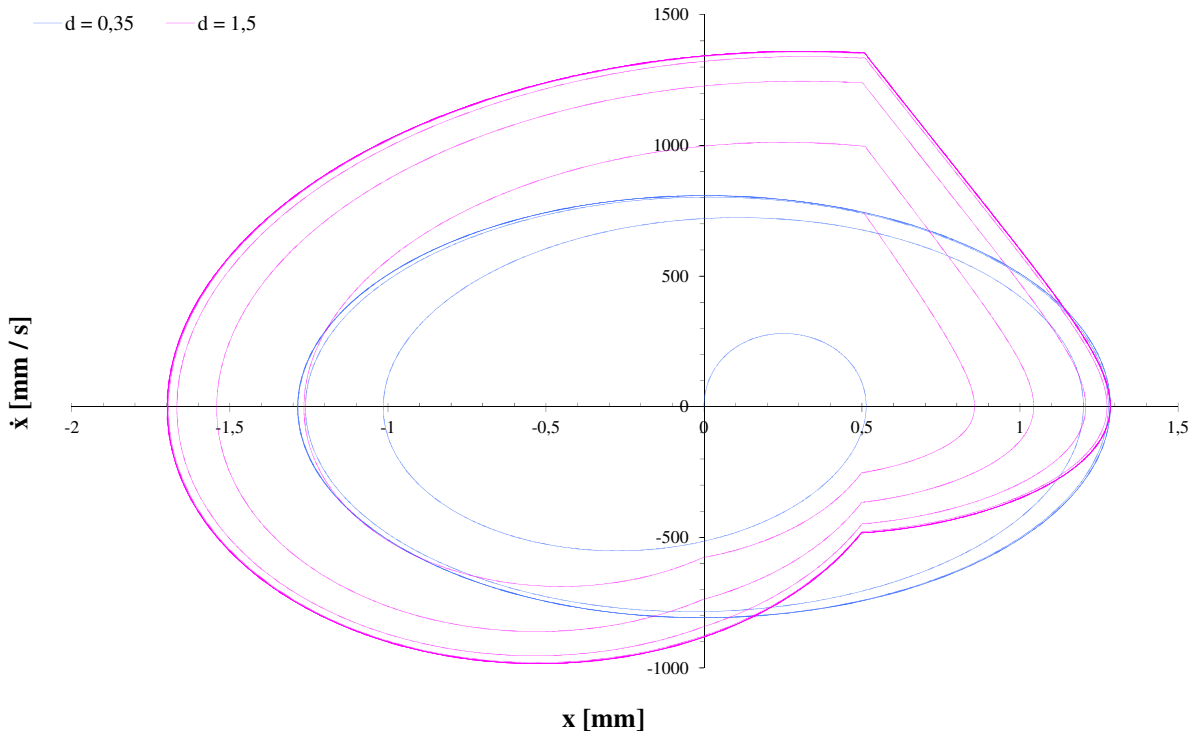

Abbildung 2-82 Regelung der Schwingungsamplitude, deren Dämpfung sprungartig zunimmt, P_i-Regler

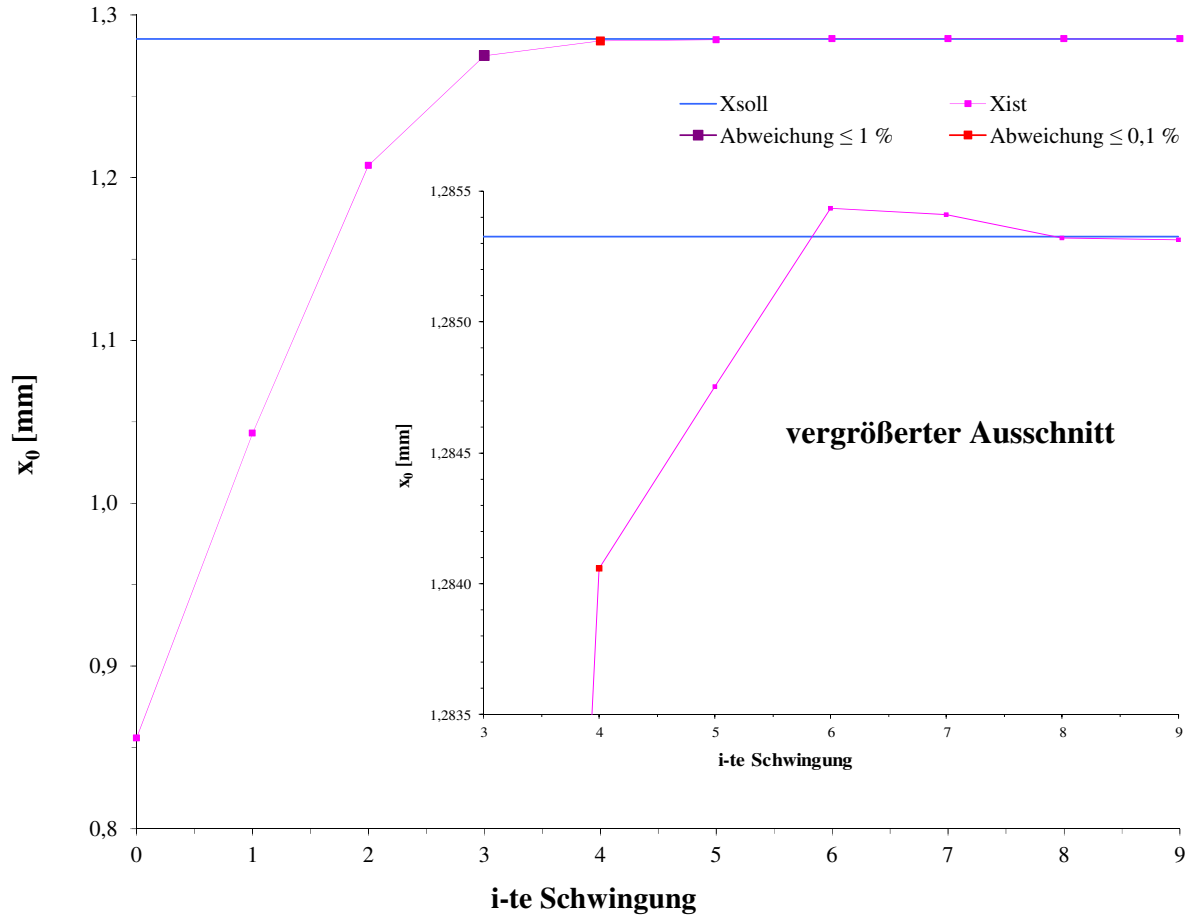

Abbildung 2-83 Regelungsverhalten, mit detailliertem Ausschnitt, P_i-Regler

Das Regelungsverhalten ist in der Abbildung 2-83 dargestellt. Wie man der Grafik entnehmen kann, wächst die Schwingungsamplitude stetig mit jeder Schwingung, bereits nach der dritten Schwingungsperiode ist eine Amplitude mit einer Abweichung weniger als ein Prozent erreicht. In der nächsten Schwingungsperiode beträgt die Regelabweichung weniger als 0,1 Prozent. Mit jeder weiteren Schwingung reduziert sich die Abweichung, wobei die Regelgröße ein kaum erkennbares Überschwingen aufweist, siehe die vergrößerte Darstellung.

Das vorgestellte Regelungsverfahren repräsentiert eine schrittweise Näherung, d. h. eine sukzessive Approximation der Regelgröße an einen Soll-Wert. Diese iterative Annäherung der Schwingungsamplitude der gewünschten Größe ist in der Abbildung 2-83 deutlich zu erkennen. Bei einer sprunghaften Änderung der Regelabweichung ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil. Dabei schwingt die Ist-Größe geringfügig um den Soll-Wert.

Die Abbildung 2-84 demonstriert das Bewegungsprofil der Schwingmasse für verschiedene Belastungssituationen. Zum einen sieht man eine elliptische Bahn (blau), die den stationären Arbeitspunkt darstellt. Zum anderen zeigt das Bild das bereits bekannte Regelungsverhalten des Systems unter Belastung (magenta). Nachdem die maximale Schwingungsamplitude ausgeregelt wurde, nehmen äußere Einflusse ab, und das System kehrt nach einem kurzen Überschwingen in seinen ursprünglichen Zustand zurück (grün), siehe auch Abbildung 2-85.

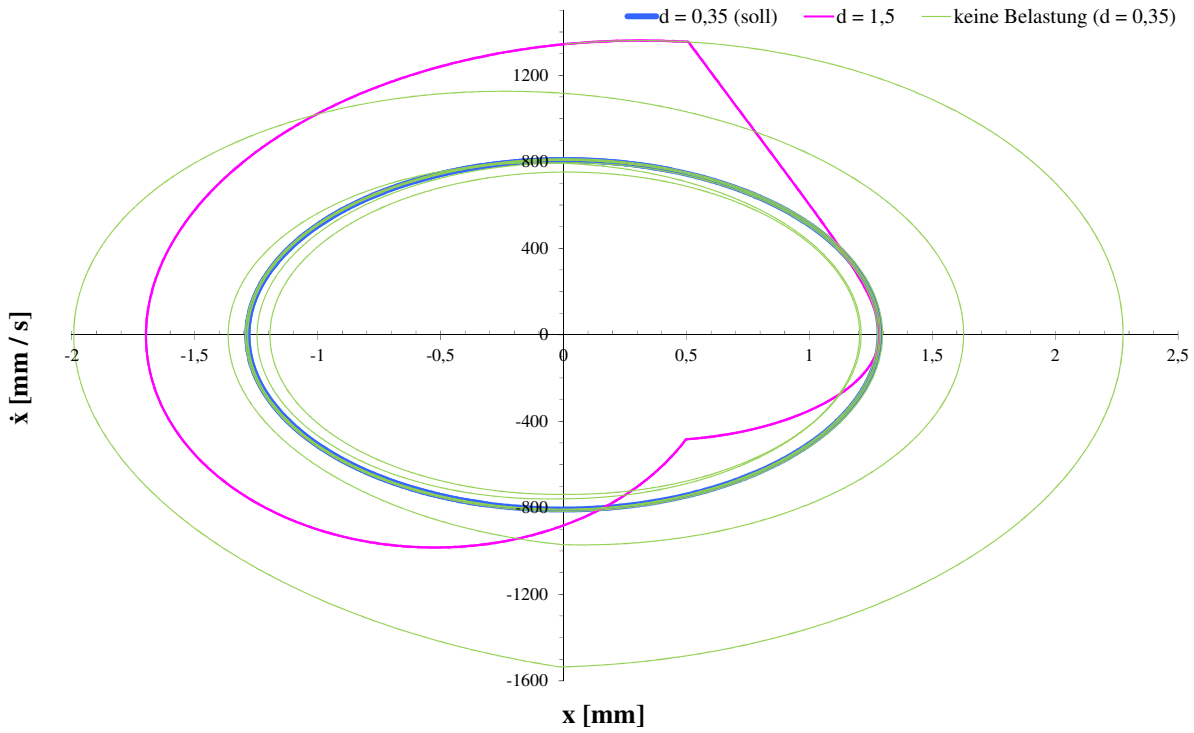

Abbildung 2-84 Regelung der Schwingungsamplitude, deren Dämpfung sprungartig abnimmt, P_i-Regler

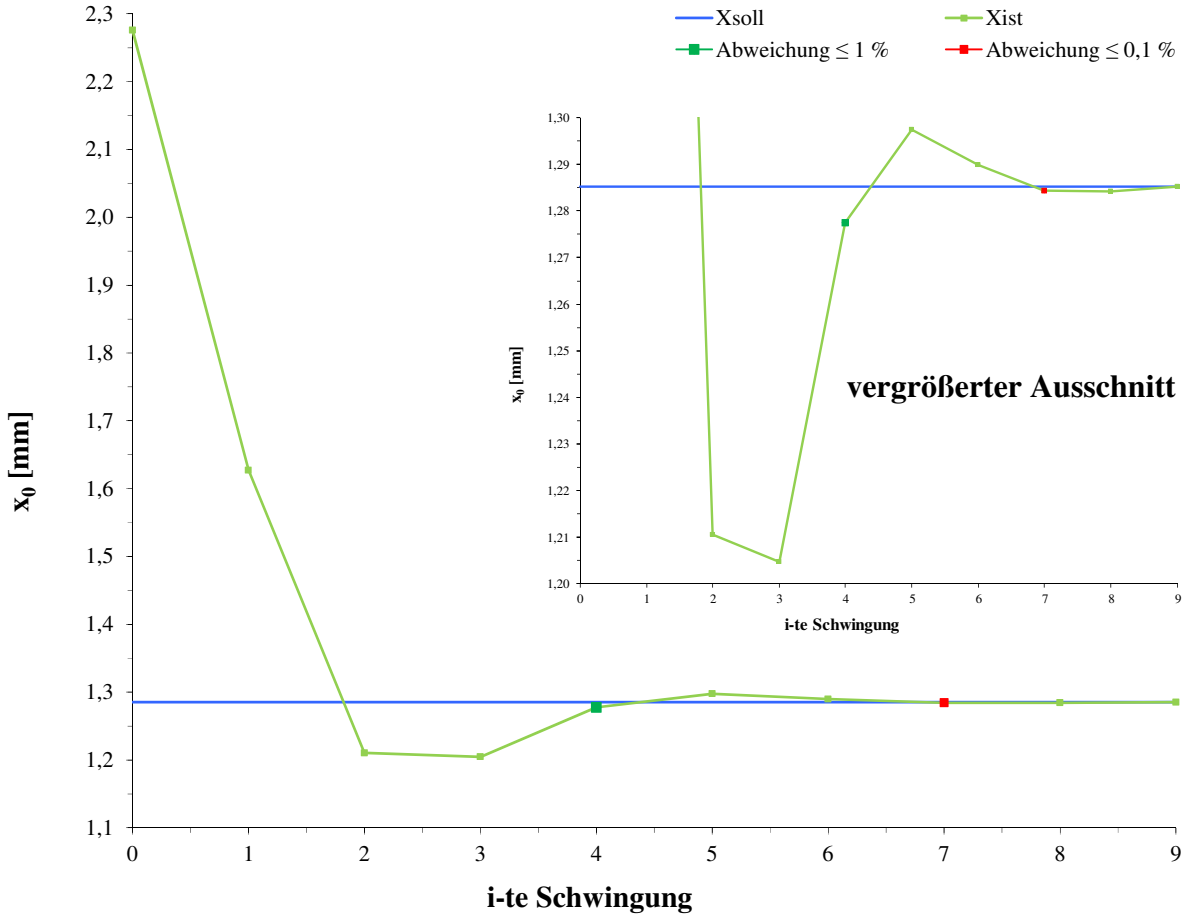

Abbildung 2-85 Regelungsverhalten bei abnehmender Belastung, mit detailliertem Ausschnitt, P_i-Regler

Die Erregerfrequenz beträgt 100 Hz bei einer Schwingungsperiode von 10 ms. Eine einprozentige Regelabweichung ist nach 30 ms (drei Schwingungen) erreicht. Nach 40 ms stellt sich eine Schwingungsamplitude ein, die von der Regelgröße um 0,1 Prozent abweicht. Dies entspricht einer Regelabweichung von ca. 1,29 µm bei $x_0 \approx 1{,}28$ mm.

Im Kapitel 2.7.1 wurde die Messgenauigkeit eines Mikrocontrollers ermittelt. Die Auflösung seines AD-Wandlers betrug 5,9 µm bei einem Messbereich von 6 mm. Mit dieser Auflösung ist ein Mikrocontroller nicht in der Lage, eine Regelabweichung von 0,1 Prozent zu erfassen. Daher genügt eine Regelgüte von 99 Prozent (eine einprozentige Abweichung), sie wird bereits nach drei bis vier Schwingungsperioden erreicht (je nach Stärke der Dämpfung), und der Regelvorgang kann unterbrochen werden. Das System wird weiter mit der bei der letzten Schwingungsperiode wirkenden Stellkraft angeregt. Sobald die Regelabweichung einen bestimmten Wert, z. B. die drei- oder fünfprozentige Grenze überschritten hat, erfolgt die Ausregelung der Schwingungsamplitude. Dies kann Rechenressourcen bei der Implementierung des Regelungsalgorithmus einsparen.

Der vorgestellte Regelungsalgorithmus ermöglicht eine schnelle Ausregelung der maximalen Schwingungsamplitude sowohl bei zunehmender als auch bei abnehmender Belastung, ebenso bei verschiedenen Erregerfrequenzen.

Die Regelabweichung ist als Differenz zwischen dem Soll- und dem Ist-Wert definiert:

$$e_i = x_{soll} - x_{ist,\,i} \tag{2-131}$$

Gemäß dieser Definition wird die Gleichung (2-130) umgeformt:

$$F_{soll,\,i+1} = \frac{x_{soll}}{x_{soll} - e_i} \cdot F_{soll,\,i} \tag{2-132}$$

Die Gleichung (2-132) kann auch als der reziproke Ausdruck dargestellt werden:

$$\frac{1}{F_{soll,\,i+1}} = \frac{1}{F_{soll,\,i}} \cdot \frac{x_{soll} - e_i}{x_{soll}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{F_{soll,\,i+1}} = \frac{1}{F_{soll,\,i}} \cdot \left(1 - \frac{e_i}{x_{soll}}\right) \tag{2-133}$$

Bringt man (2-133) in eine einheitliche Form entsprechend der Ausdrucksweise der Regelungstechnik, so gilt

$$u_{i+1} = u_{V,\,i} + K_{P,\,i} \cdot e_i \tag{2-134}$$

Hier bedeutet u_{i+1} eine Stellgröße

$$u_{i+1} = \frac{1}{F_{soll,\,i+1}} \tag{2-135}$$

mit der die Regelstrecke, also der lineare Schwingaktor, schrittweise ausgeregelt wird. Dabei wirkt diese Stellgröße unmittelbar auf die differenzielle Bewegungsgleichung (2-3) eines mechanischen, schwingenden Systems. Die Größe $u_{V,\,i}$ wird als dynamische Vorsteuerung bezeichnet

$$u_{V,\,i} = \frac{1}{F_{soll,\,i}} = u_i \tag{2-136}$$

wobei für i = 0 die Kraft $F_{soll,\,0} = F_0$ gilt, welche für das Erreichen eines stationären Arbeitspunkts x_0 erforderlich ist. Der Koeffizient

$$K_{P,\,i} = -\frac{u_{V,\,i}}{x_{soll}} \tag{2-137}$$

ist die dynamische Verstärkung des proportionalen Reglers, also des P-Reglers. Weil sich der iterative Koeffizient $K_{P,\,i}$ je nach Regelabweichung mit jedem Regelungsschritt ändert, wird der proportionale Regler als P_i-Regler oder P-Regler mit Tuning bezeichnet.

Das Blockschaltbild des Regelkreises mit einer dynamischen Vorsteuerung sowie Verstärkung entsprechend der Gleichung (2-133), bzw. (2-134) ist in der Abbildung 2-86 dargestellt. Bei diesem Regelkreis erfolgt die Parametrierung des P-Reglers automatisch, in Abhängigkeit von der Höhe der Regelabweichung.

Da die Gleichung (2-133), bzw. (2-134) mehr Rechenschritte erfordert und weil numerische Fehler beim Subtrahieren zweier Zahlen, die dicht beieinander liegen, entstehen (wenn $e \approx 0$), ist es sinnvoll, einen Regelungsalgorithmus entsprechend der Gleichung (2-130) zu implementieren.

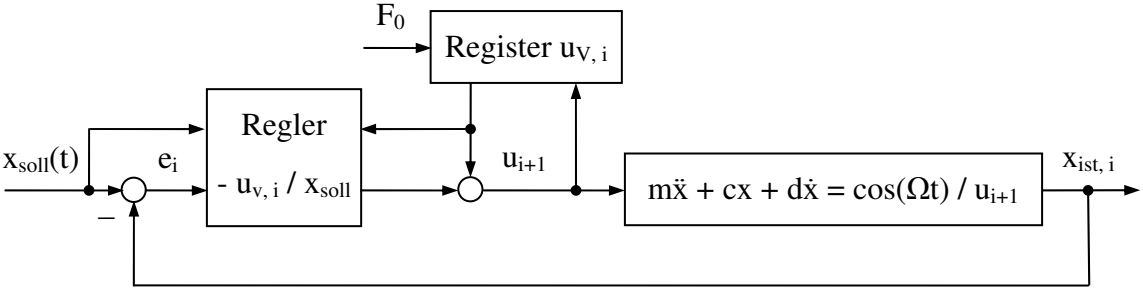

Abbildung 2-86 Blockschaltbild der periodischen Regelung der Schwingungsamplitude, P_i-Regler

Abschließend wird ein Vergleich des periodischen Regelungsverfahrens gemäß der Gleichung (2-133), bzw. (2-134) mit dem konventionellen P-Regler durchgeführt. Bei einem klassischen P-Regler bleibt dessen Verstärkung unverändert. Im Gegensatz zu dem vorgestellten P_i-Regler, dessen Verstärkung sowie Vorsteuerung in Abhängigkeit von der Regelabweichung automatisch angepasst werden, bedarf es bei einem gewöhnlichen P-Regler einer geschickten Parametrierung. Bei der Parametrierung des Reglers ist man bestrebt, eine möglichst schnelle Ausregelung der Regelgröße zu erreichen, ohne dass der Regler (bzw. Regel- oder Stellgröße) zu stark schwingt. In einem ungünstigen Fall, meist wenn der P-Faktor zu groß gewählt wurde, tritt das Überschwingen ein.

Der Regelungsalgorithmus hierfür lautet (F_0 bedeutet eine konstante Vorsteuerung):

$$F_{soll,\,i+1} = F_0 + e_i \cdot K_P \qquad \textbf{(2-138)}$$

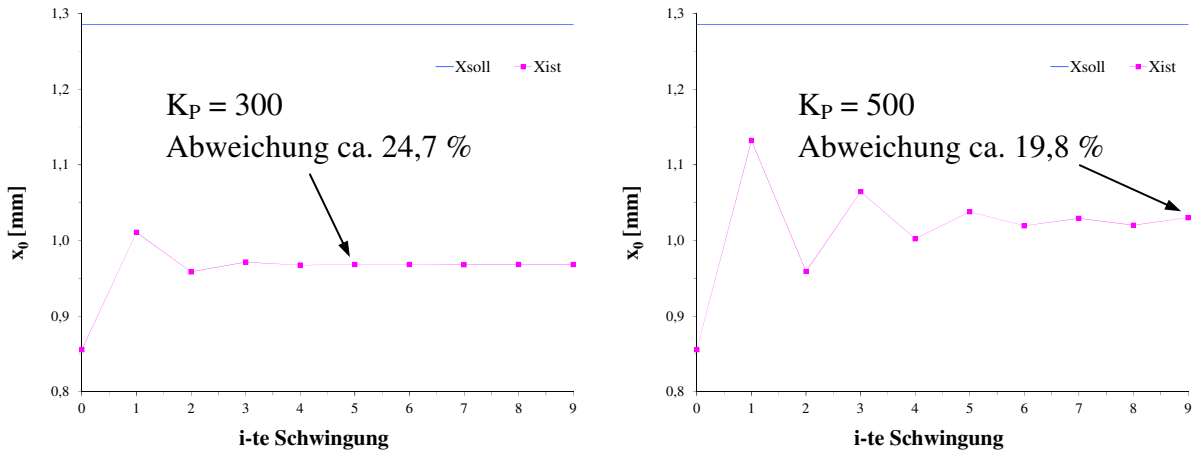

Abbildung 2-87 Regelungsverhalten, konventioneller P-Regler

Die Abbildung 2-87 zeigt deutlich, dass der klassische P-Regler die Regelgröße, also die Schwingungsamplitude nicht ausregelt, der Regler weist eine bleibende Regelabweichung auf. Mit Erhöhung der Verstärkung kann die Abweichung vermindert werden, jedoch neigt der Regler zum Schwingen, und mit einem großen K_P kommt es zu einer starken Überschwingung, siehe Abbildung 2-88. Dabei erreicht die Schwingungsamplitude bereits nach dem ersten Regelungsschritt fast den Soll-Wert (Abweichung sehr gering), wird jedoch aufgrund der Reglerstruktur, siehe Gleichung (2-138), mit der nächsten Schwingungsperiode stark vermindert, so dass sich das System in seinen ursprünglichen ungeregelten Zustand begibt und der Regelungsvorgang von vorn beginnt. Dies geschieht immer wieder abwechselnd. Die Regelgröße divergiert.

Im Allgemeinen ist ein P-Regler sehr schnell, jedoch bleibt bei einem solchen Regelungsverfahren eine gewisse Regelabweichung. Ändert sich eine der Systemkomponenten, sei es die Schwingmasse, die Dämpfung oder die Federsteifigkeit, was entweder wegen der äußeren Einflüsse zustande kommt oder aufgrund der Verwendung unterschiedlicher Schwingaktoren der Fall ist, so muss der klassische P-Regler neu parametriert werden.

Sowohl beim konventionellen P-Regler als auch beim vorgestellten P_i-Regler, dessen Parametrierung unmittelbar aus der Dämpfungsschätzung, bzw. aus der Schätzung der Schwingmasse hergeht, konvergiert die Schwingungsamplitude gegen einen endlichen Wert, die Regelstrecke ist daher asymptotisch stabil. Algorithmusbedingt weist der P-Regler eine Regelabweichung auf. Dagegen konvergiert die Regelabweichung beim P_i-Regler gegen Null, die Schwingungsamplitude erreicht den vorgegebenen Soll-Wert.

Der I- sowie D-Regler und deren Kombination mit dem P-Regler werden in diesem Kapitel nicht aufgeführt, da der I-Regler bekanntlich langsam ist und zum Schwingen neigt. Der PD-Regler ist bei schwingenden Systemen für eine periodische Regelung nicht von Bedeutung, weil die Differenzierung der Regelabweichung das Schwingverhalten des Reglers nur verstärkt. Zudem besteht bei diesen Reglern ebenfalls eine bleibende Regelabweichung.

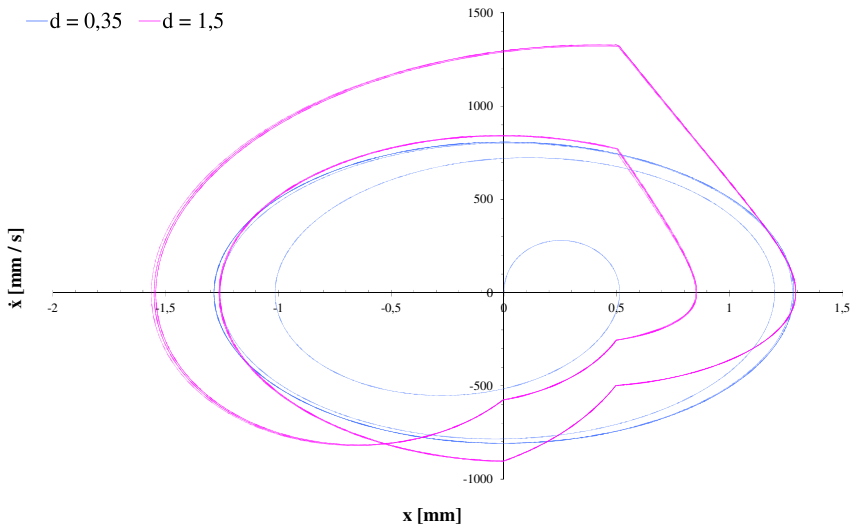

Abbildung 2-88 Regelungsverhalten, konventioneller P-Regler, $K_P = 750$

2.8.2 Positionsregelung der Schwingmasse

Sobald die Schwingmasse den äußeren Einflüssen ausgesetzt wird, gerät sie aus ihrer vordefinierten Bahn. Die klassische elliptische Bahn des Läufermagneten sowie die modulierten Bewegungsprofile, siehe Abbildungen 2-63 bis 2-68, müssen daher ebenfalls regelungstechnisch kontrolliert werden. Es wurden P- und im Gegensatz zu vorigem Kapitel auch D-Regler sowie Reglerkombinationen untersucht.

P-Regler

Als erstes wird gezeigt, inwieweit sich der gewöhnliche P-Regler für das Aufrechterhalten eines Bewegungsprofils eignet. Die Regelung eines Bewegungsprofils mit einem P-Regler kann entsprechend der Gleichung (2-138) durchgeführt werden, wobei die Vorsteuerung sowie die Stellgröße, also die auf die Schwingmasse wirkende Kraft F_{wirk} für jeden Zeitschritt t_i neue berechnet wird:

$$F_{wirk,\,i+1} = \underbrace{F_0 \cdot \cos(\Omega t_i)}_{\text{Vorsteuerung}} + e_i \cdot K_P \qquad \textbf{(2-139)}$$

Die Regelabweichung e_i ergibt sich aus dem Unterschied zwischen der gemessenen Ist- und der analytisch ermittelten Soll-Position des Läufermagneten zum Zeitpunkt t_i. Um Rechenschritte zu sparen, kann die Vorsteuerung mit einer konstanten Kraftamplitude F_0 erfolgen:

$$F_{wirk,\,i+1} = F_0 + e_i \cdot K_P \qquad \textbf{(2-140)}$$

Die Abbildungen 2-89 bis 2-92 verdeutlichen, dass sich der proportionale Regler für das Aufrecherhalten des Bewegungsprofils nur bedingt eignet. Es sind hohe dynamische Stellkräfte erforderlich, damit die Schwingmasse der vordefinierten Bahn folgen kann. Den Bildern ist das deutliche Schwingverhalten des P-Reglers abzulesen.

Die Abbildung 2-92 zeigt das geregelte Bewegungsprofil mit einer guten Annäherung des tatsächlichen Bewegungsablaufs an den gewünschten. Die maximale Stellkraft F_{wirk} beträgt bei einer Reglerverstärkung $K_P = 10^7$ fast das Siebenfache der maximalen Erregerkraft im unbelasteten Zustand (F_0 = 0,3 N). Eine weitere Erhöhung von K_P zieht noch höhere Stellkräfte nach sich, welche aufgrund der vordimensionierten Erregerspule und wegen Leistungseinschränkungen sowohl der Steuerungselektronik als auch der Stromquelle nicht realisierbar sind.

Sollte nur die maximale Schwingungsamplitude x_0 innerhalb einer Schwingungsperiode ausgeregelt werden, so kann dies mit einer Regelabweichung von ca. einem Prozent bei einer maximalen Stellkraft von 1,34 N erreicht werden, siehe Abbildung 2-89 linkes Bild, wobei die Schwingmasse aufgrund des Regelungsvorgangs abwechselnd beschleunigt und abgebremst wird. Im Vergleich zur Regelung der maximalen Schwingungsamplitude ist bei der permanenten Positionsregelung der Schwingmasse eine doppelt so hohe Stellkraft für die Ausregelung der Schwingungsamplitude innerhalb einer Schwingungsperiode nötig.

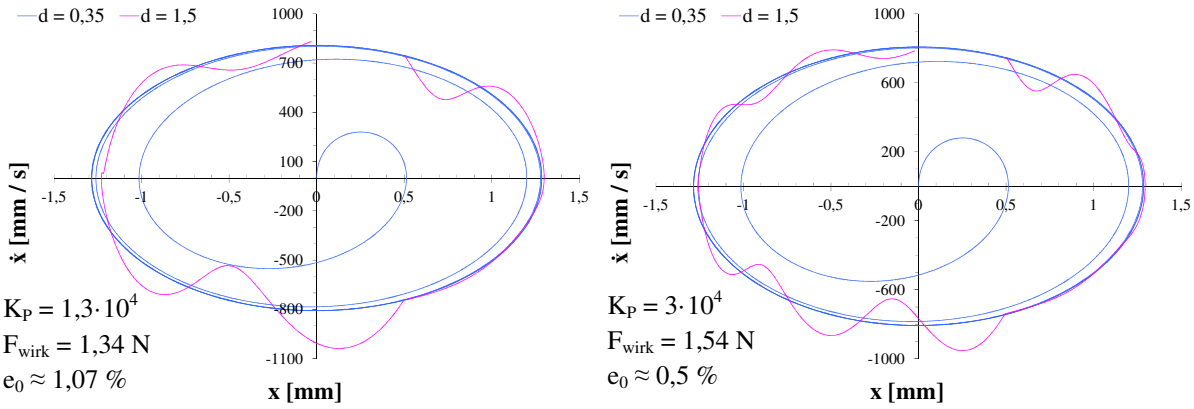

Abbildung 2-89 Regelungsverhalten bei der Positionsregelung der Schwingmasse, konventioneller P-Regler, $K_P = 1{,}3 \cdot 10^4$ (links) und $K_P = 3 \cdot 10^4$ (rechts)

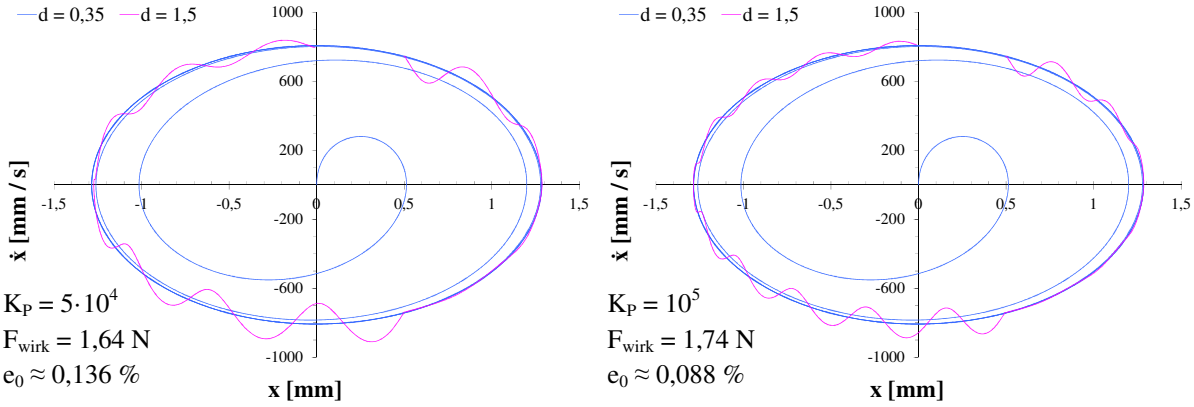

Abbildung 2-90 Regelungsverhalten bei der Positionsregelung der Schwingmasse, konventioneller P-Regler, $K_P = 5 \cdot 10^4$ (links) und $K_P = 10^5$ (rechts)

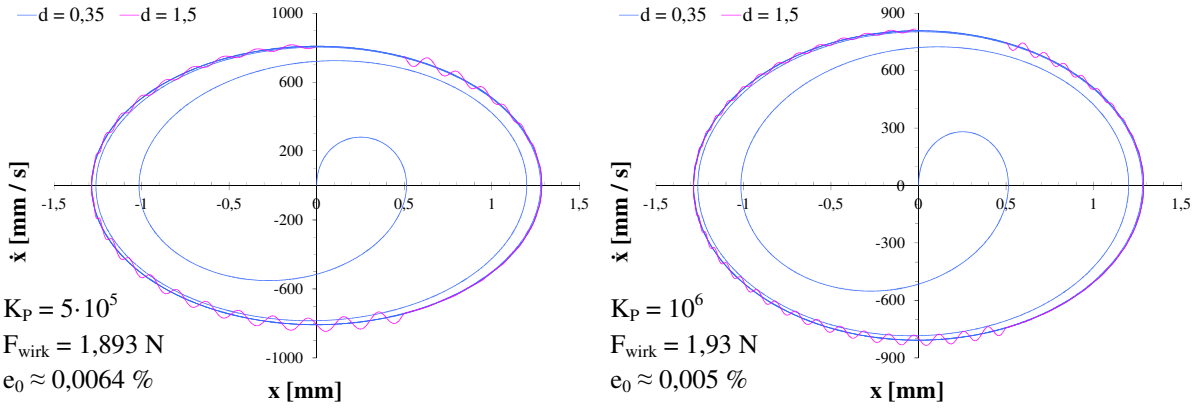

Abbildung 2-91 Regelungsverhalten bei der Positionsregelung der Schwingmasse, konventioneller P-Regler, $K_P = 5 \cdot 10^5$ (links) und $K_P = 10^6$ (rechts)

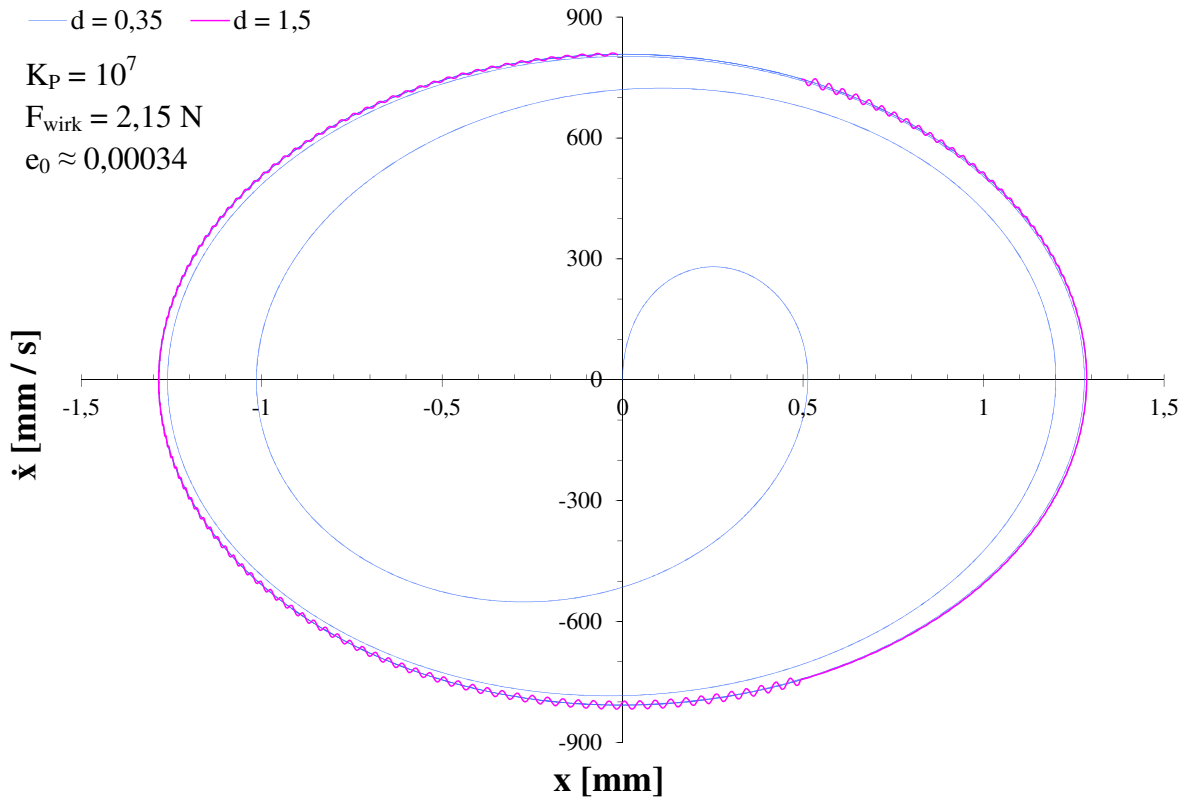

Abbildung 2-92 Regelungsverhalten bei permanenter Regelung, konventioneller P-Regler, $K_P = 10^7$

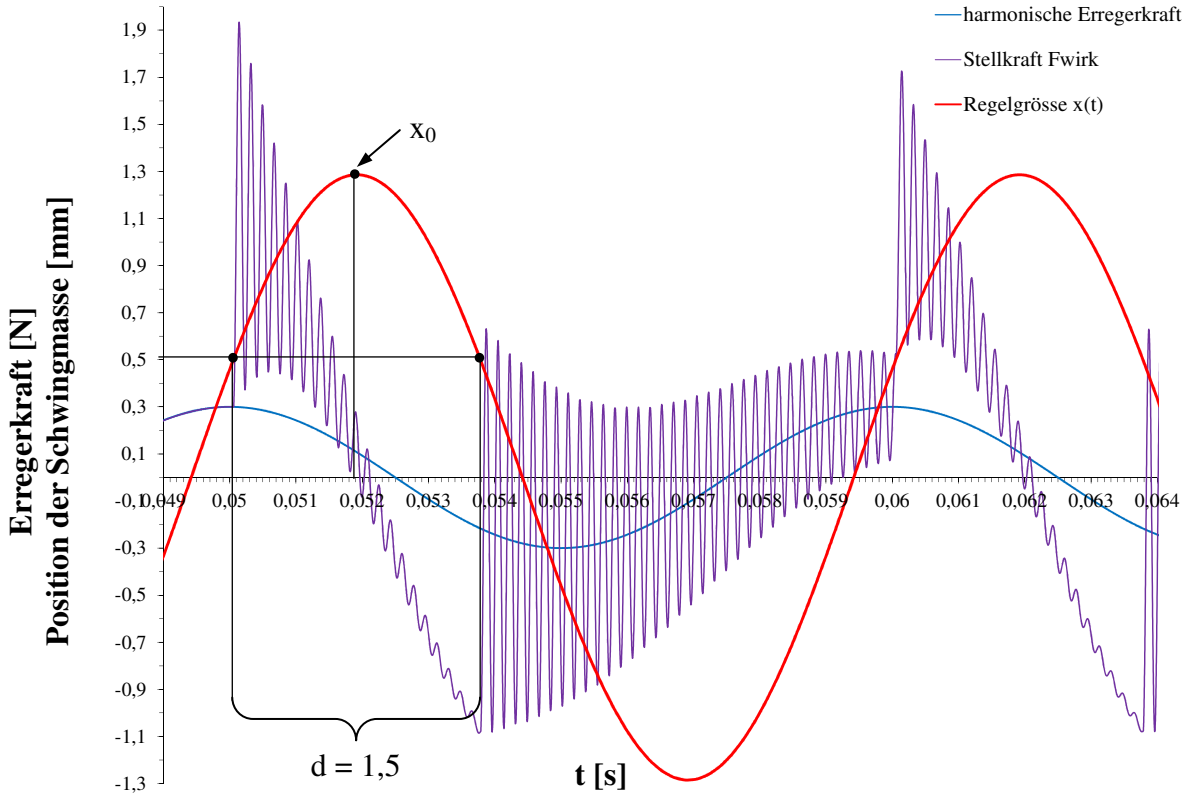

Abbildung 2-93 Verlauf der Stellkraft F_{wirk}, konventioneller P-Regler, $K_P = 10^6$, m = 0,8 g

Der Verlauf der Regelgröße sowie der erforderlichen Stellkraft ist in der Abbildung 2-93 dargestellt. Ab einer Position der Schwingmasse von 0,5 mm wird eine Regelabweichung detektiert. Gemäß der Regelgleichung (2-140) erhöht der P-Regler die auf den Läufermagneten wirkende Kraft. Aufgrund der Massenträgheit reagiert das System mit Verzögerung auf die Änderung der Stellgröße. Die in der Abbildung 2-93 nicht erkennbaren geringeren Positionsabweichungen der Schwingmasse sind in der dazugehörigen Phasenraumdarstellung als Geschwindigkeitsschwankungen sichtbar, siehe Abbildung 2-91 rechtes Bild.

Die aus dem Kapitel 2.8.1 bekannten zickzackartigen Verläufe der Regelgröße (siehe Abbildung 2-87) spiegeln sich bei der Regelung der Position der Schwingmasse in einer raschen Änderung der Stellgröße wieder. Die Stellkraft und somit auch der Läufermagnet schwingen mit einer Frequenz von 5 kHz, siehe Abbildung 2-93. Diese hochfrequente Schwingung ist jedoch aufgrund der Massenträgheit optisch kaum bemerkbar, nur hörbar, was vom Anwender als unangenehmes Summen empfunden werden kann. Mit Erhöhung des K_P-Koeffizients wird die Frequenz größer: eine zehnfache Änderung der Reglerverstärkung zieht eine zweifache Vergrößerung, bzw. Absenkung der Schwingungsfrequenz der Stellgröße nach sich.

Dieser Zusammenhang ist von den Systemparametern des Schwingaktors abhängig. Eine schwere Schwingmasse reduziert die Schwingungsfrequenz der Stellgröße, siehe Abbildung 2-94. Jede Änderung der Systemkomponenten, sei es die Schwingmasse oder die Federsteifigkeit, erfordert eine neue Parametrierung des P-Reglers.

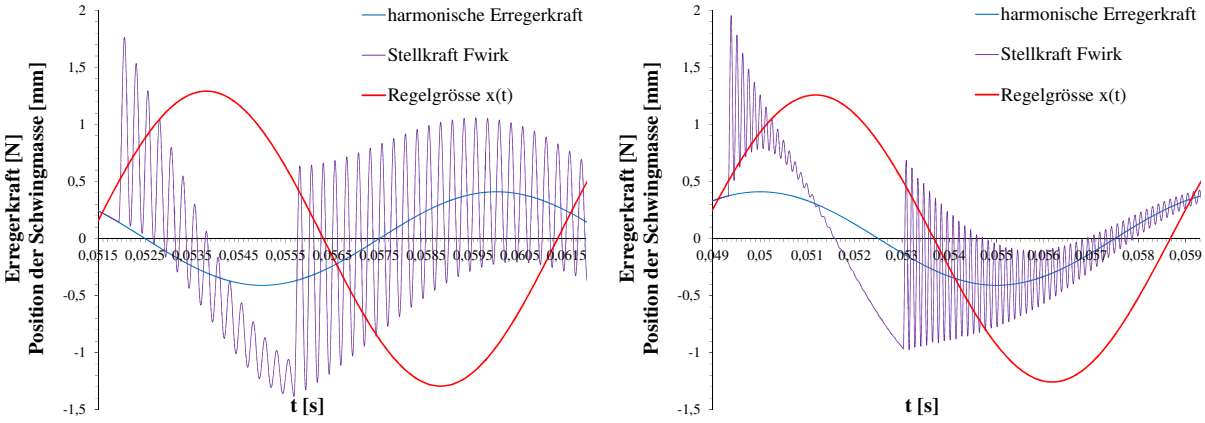

Abbildung 2-94 Verlauf der Stellkraft F_{wirk}, konventioneller P-Regler, $K_P = 10^6$, m = 1,6 g (links) und m = 0,4 g (rechts)

Im Kapitel 2.4 wurde der Einfluss der Induktivität der Erregerspule auf die Sprungantwort des mechanischen, schwingenden Systems untersucht: eine hohe Induktivität hat eine zeitliche Verzögerung des elektrischen Stroms zur Folge. Ist die Spuleninduktivität gering, beispielsweise 1 mH, so kann sie in bestimmten Fällen vernachlässigt werden. Für eine schnelle Regelung ist jedoch ein schneller Stromanstieg in der Erregerspule notwendig, so dass die Spuleninduktivität bei der Regelung der Position der Schwingmasse berücksichtigt werden muss.

Jede sprungartige Änderung der Stellkraft während des Regelvorgangs erfordert eine schnelle Änderung des Erregerstroms, was wegen der Induktivität mit einer unter Umständen erheblichen Erhöhung der elektrischen Spannung an den Enden der Erregerspule verbunden ist, um die Steilheit des Stromanstiegs zu gewährleisten.

PD^2D^1-Regler

Aufgrund des Schwingverhaltens des P-Reglers sowie der hohen, steilen Stellkräfte, die wegen der für den elektrischen Strom dämpfenden Eigenschaften der Erregerspule unter Umständen nicht realisierbar sein können, wurde ein anderer Ansatz für die Regelung des Bewegungsprofils gesucht, bei welchem einerseits niedrigere Stellkräfte erforderlich sind, andererseits die Stellgröße nicht schwingt.

Die durchgeführten Untersuchungen (wie bereits im Kapitel 2.8.1 dargelegt) zeigen, dass sich der klassische P-Regler nur bedingt für die Regelung eines mechanischen, schwingenden Systems eignet. Es wurden daher D-Regler sowie Reglerkombinationen betrachtet und analysiert.

Bei der Reglerauswahl orientiert man sich an dem Verhalten der Regelstrecke. Ein optimaler Regler für die Position der Schwingmasse geht unmittelbar aus der Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems (2-3) hervor, so, wie ein dynamischer P_i-Regler ausgehend von der Bewegungsgleichung (2-12) für die Regelung der maximalen Schwingungsamplitude aufgestellt wurde.

Für die Führungsgröße, also für den angestrebten Soll-Wert gilt:

$$m\ddot{x}_{soll} + cx_{soll} + d\dot{x}_{soll} = F_{soll}(t) \qquad \textbf{(2-141)}$$

Die zum Zeitpunkt t gemessene tatsächliche Position der Schwingmasse, der Ist-Wert, findet sich in der differentiellen Bewegungsgleichung (2-3) wieder:

$$m\ddot{x}_{ist} + cx_{ist} + d\dot{x}_{ist} = F(t) \qquad \textbf{(2-142)}$$

Subtrahiert man (2-142) von (2-141)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{soll} + cx_{soll} + d\dot{x}_{soll} &= F_{soll}(t) \\ - \\ m\ddot{x}_{ist} + cx_{ist} + d\dot{x}_{ist} &= F(t) \end{aligned}$$

erhält man

$$m \cdot \underbrace{\left(\ddot{x}_{soll} - \ddot{x}_{ist}\right)}_{=\ddot{e}(t)} + c \cdot \underbrace{\left(x_{soll} - x_{ist}\right)}_{=e(t)} + d \cdot \underbrace{\left(\dot{x}_{soll} - \dot{x}_{ist}\right)}_{=\dot{e}(t)} = F_{soll}(t) - F(t) \qquad \textbf{(2-143)}$$

Die in Klammen stehenden Ausdrucke lassen sich sinngemäß zusammenfassen:

$$F_{soll}(t) = F(t) + \underbrace{m \cdot \ddot{e}(t) + c \cdot e(t) + d \cdot \dot{e}(t)}_{Regler} \qquad \textbf{(2-144)}$$

Die Gleichung (2-144) stellt eine Stellgröße u(t) im geschlossenen Regelkreis gemäß der Abbildung 2-78 dar, wobei der Regelkreis einen PD^2D^1-Regler und Vorsteuerung F(t) umfasst.

Bei der Parametrierung des Reglers kann man sich an den Systemkomponenten orientieren. Vor allem die Schwingmasse charakterisiert bereits das Regelverhalten, d. h. dass der zugehörige Koeffizient des Differentialreglers nicht größer als die schwingende Masse sein darf. Die restlichen Koeffizienten sind durch das Stabilitätskriterium des geschlossenen Regelkreises (siehe Kapitel 2.8.3) sowie durch die Begrenzung der Stellkräfte und des Schwingverhaltens des Reglers ebenfalls determiniert. Zusammen ermöglichen sie das Feintuning des Reglers.

Tauscht man die Systemkomponenten gegen zugehörige Reglerkoeffizienten aus, so gilt:

$$F_{soll}(t) = F(t) + T_2 \cdot \ddot{e}(t) + T_1 \cdot \dot{e}(t) + K_P \cdot e(t) \qquad \textbf{(2-145)}$$

T_2, T_1 und K_P sind die entsprechenden Koeffizienten des jeweiligen Reglers. Zwecks der Implementierung des Regelkreises wird die Gleichung (2-145) in numerische Form umgeschrieben. Es ergibt sich ein iteratives Regelungsverfahren:

$$F_{soll,\,i+1} = F_0 \cdot \cos(\Omega t_i) + T_2 \cdot \ddot{e}_i + T_1 \cdot \dot{e}_i + K_P \cdot e_i \qquad \textbf{(2-146)}$$

wobei sich die entsprechenden Ableitungen der Regelabweichung wie folgt berechnen:

$$\dot{e}_i = \frac{e_i - e_{i-1}}{h} \qquad \ddot{e}_i = \frac{\dot{e}_i - \dot{e}_{i-1}}{h} = \frac{e_i - 2 \cdot e_{i-1} + e_{i-2}}{h^2}$$

Das bedeutet, dass die für die vorhergehenden Regelungsschritte berechneten Regelabweichungen, bzw. deren zeitliche Ableitungen für die nächsten Rechenschritte gespeichert werden müssen. Dies wird im Blockschaltbild des Regelkreises nicht explizit angegeben. h steht für den Diskretisierungsschritt und muss klein genug gewählt werden, z. B. $h = 10^{-5}$, um ein analytisches Modell durch ein numerisches mit einer guten Näherung abbilden zu können.

Die Abbildung 2-95 rechtes Bild zeigt das Regelverhalten des Systems, welches mit einem PD^2D^1-Regler gemäß dem Regelungsgesetz (2-146) geregelt wird. Die Reglerkoeffizienten entsprechen den Systemkomponenten.

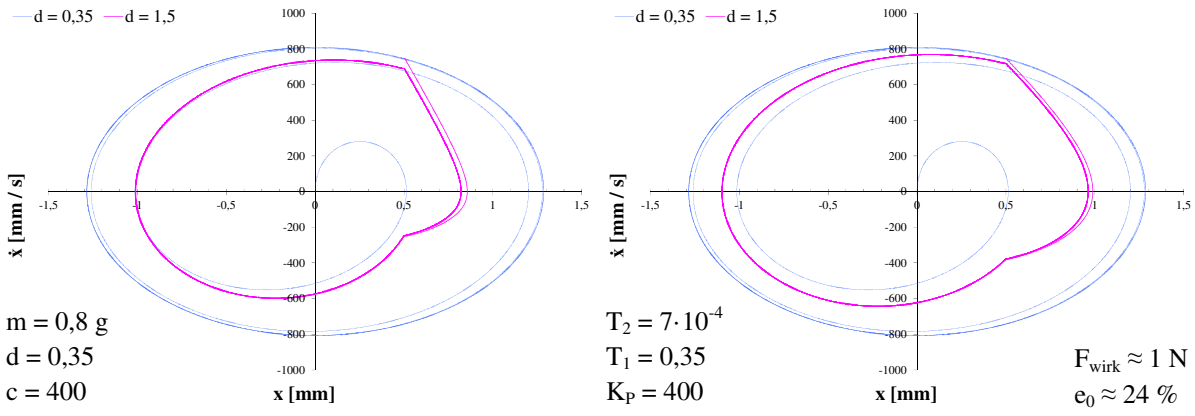

Abbildung 2-95 Bewegungsprofil der Schwingmasse ohne Regelung (links) und geregelt mit einem entsprechend den Systemkomponenten parametrierten PD^2D^1-Regler (rechts)

Die Systemkomponenten liefern bereits erste Anhaltspunkte für die Reglerauslegung. Da die amplitudenmindernde Dämpfung nicht vorab bekannt ist, kann der T_1-Koeffizient des entsprechenden D^1-Reglers größer gewählt werden, als die beim Schwingaktor konstruktivbedingt gegebene Dämpfungskonstante, um die Regelung der Schwingungsamplitude zu verbessern. Das Regelverhalten des Schwingaktors sowie der Verlauf der Stellkraft ist in der Abbildung 2-96 dargestellt.

Die Abbildung 2-96 verdeutlicht, wie wichtig die Parametrierung des Reglers ist. Für jeden Schwingaktor muss eine eigene Parametrierung erfolgen. Bevor man mit der Auswahl der zugehörigen Reglerkoeffizienten anfangen kann, wird jeder Regler einzeln analysiert. Die Aussage über das Systemverhalten im Fall des P-Reglers liegt bereits vor, siehe oben.

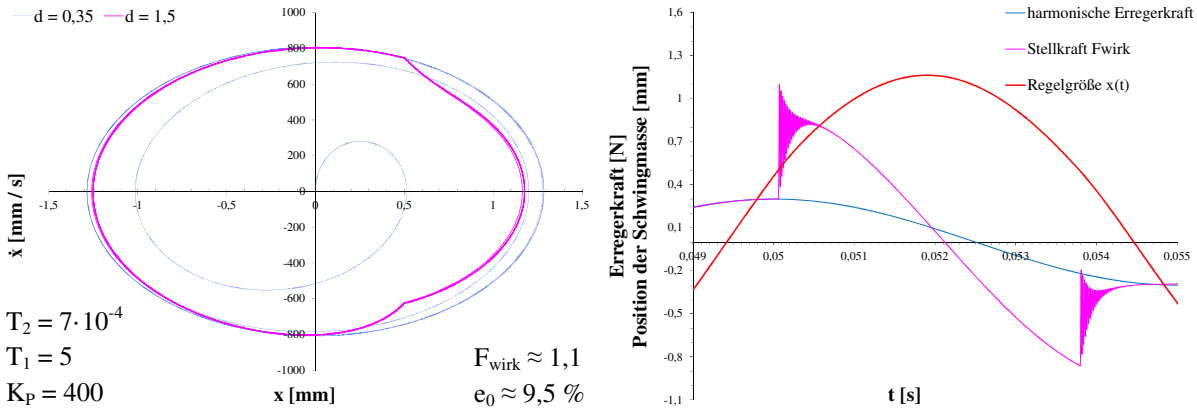

Abbildung 2-96 Regelverhalten des Systems (links) sowie Verlauf der Stellkraft (rechts), PD^2D^1-Regler

D^2-Regler

Zunächst wird der D^2-Regler untersucht, also $T_1 = 0$ und $K_P = 0$. Das Regelverhalten des Systems sowie der Verlauf der Stellkraft ist in der Abbildung 2-97 zu sehen. Bei diesem Regler wie bei einem P-Regler im Fall der Regelung der maximalen Schwingungsamplitude besteht ebenfalls eine bleibende Regelabweichung. Der Unterschied zur Abbildung 2-95 ist gering. Das bedeutet, dass die restlichen Koeffizienten des PD^2D^1-Reglers für die Ausregelung des Bewegungsprofils signifikant sind. Die Stellgröße weist zudem ein Schwingverhalten auf.

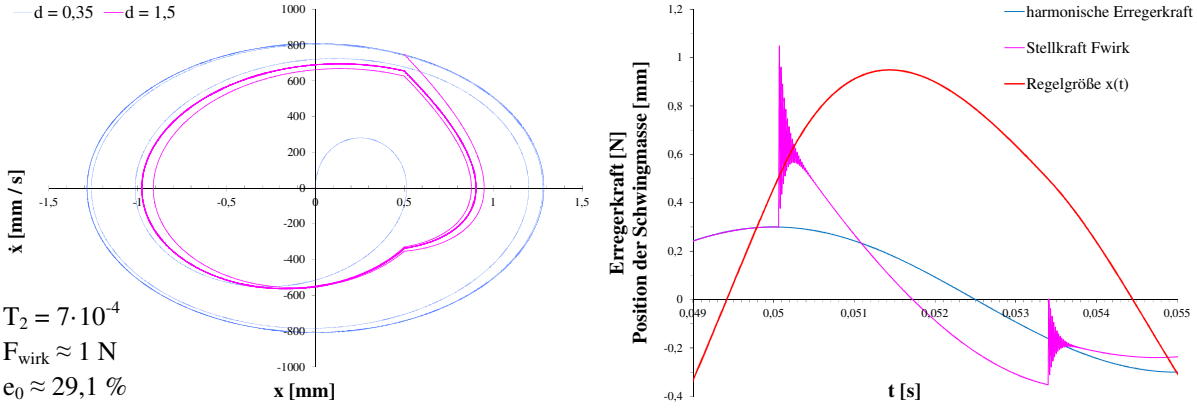

Abbildung 2-97 Regelverhalten des Systems (links) sowie Verlauf der Stellkraft (rechts), D^2-Regler

Eine sprungartige Änderung der Belastung (Dämpfungskonstante) regt den Regler zum hochfrequenten Schwingen an, jedoch nur für eine kurze Zeit. Die Stellgröße beim P-Regler schwingt dagegen viel länger (siehe Abbildung 2-93), was sich im Geschwindigkeitsprofil bemerkbar macht. Ein niedriger T_2-Faktor mindert das Schwingen der Stellkraft und vergrößert die Regelabweichung. Das Erhöhen des T_2-Koeffizients verstärkt das Schwingverhalten des differentiellen Reglers, die Regelabweichung wird dabei nur gering minimiert. Eine weitere Erhöhung von T_2 bis zu einem Wert, welcher der Schwingmasse näher kommt, hat höhere Stellkräfte zur Folge.

D^1-Regler

Als nächstes wird der D^1-Regler analysiert. Die restlichen Koeffizienten sind entsprechend Null. Mit $T_1 = 69$ und einer Stellkraft $F_{wirk} = 1{,}13$ N wird das angestrebte elliptische Bewegungsprofil angenähert, siehe Abbildung 2-98, dabei wird eine Schwingungsamplitude mit einer einprozentigen Abweichung von der maximalen Schwingungsamplitude x_0 erreicht. Diese Werte sind denen aus der Untersuchung des P-Reglers ähnlich (siehe Abbildung 2-89 linkes Bild), mit dem Unterschied, dass die Stellgröße ein wenig geringer ist und nun kein Schwingverhalten aufweist, siehe Abbildung 2-99.

Sowohl beim D^2- als auch beim D^1-Regler folgt die Stellkraft einer sprungartigen Änderung der Regelgröße ebenfalls sprungförmig. Das bedeutet, dass ein entsprechender Stromanstieg in der Erregerspule erfolgen muss, was aufgrund der Spuleninduktivität mit einer beträchtlichen Erhöhung der elektrischen Spannung verbunden ist.

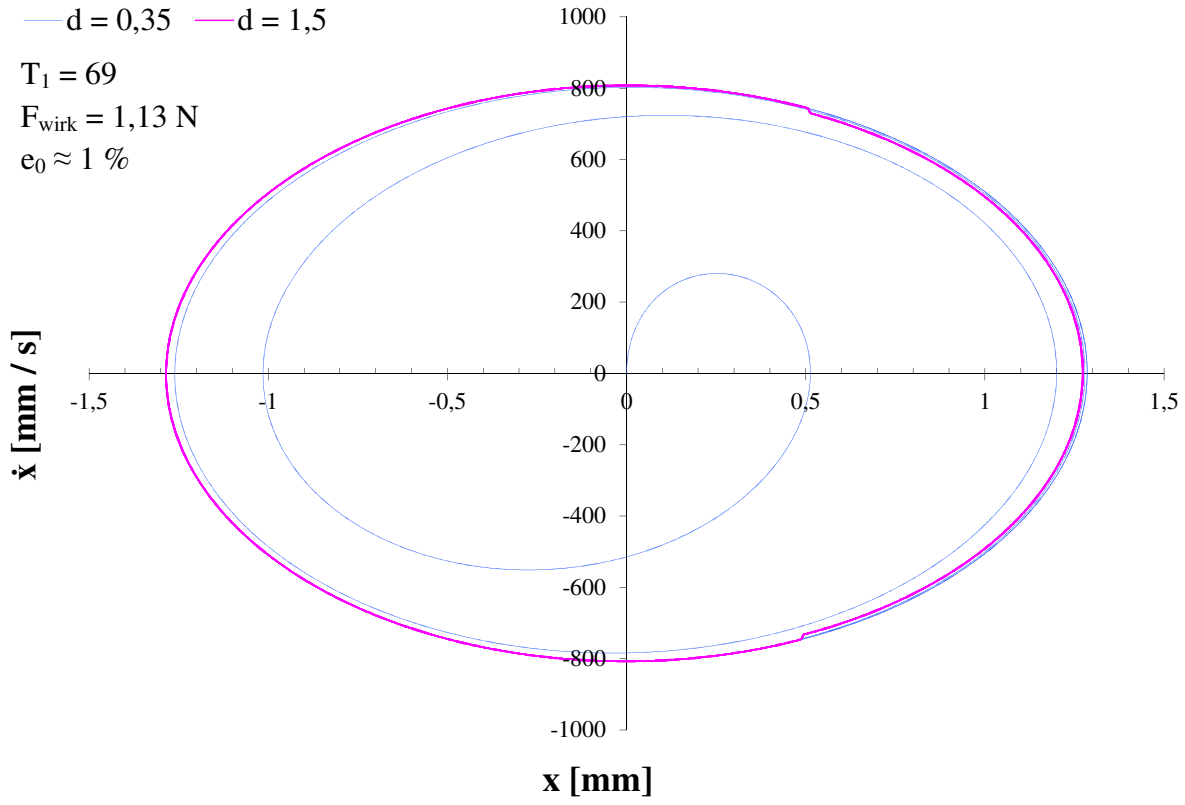

Abbildung 2-98 Bewegungsprofil der Schwingmasse, D^1-Regler, $T_1 = 69$

Der D^1-Regler bewirkt ein besseres Regelverhalten eines mechanischen, schwingenden Systems als der P- sowie D^2-Regler, jedoch besteht auch bei diesem Regler eine bleibende Regelabweichung. Durch Erhöhen des T_1-Faktors kann die Abweichung bis zu einem Wert von 0,45 Prozent reduziert werden, die Stellgröße fällt dabei höher aus, bis zu 1,9 N und beginnt stark zu schwingen, siehe Abbildung 2-100.

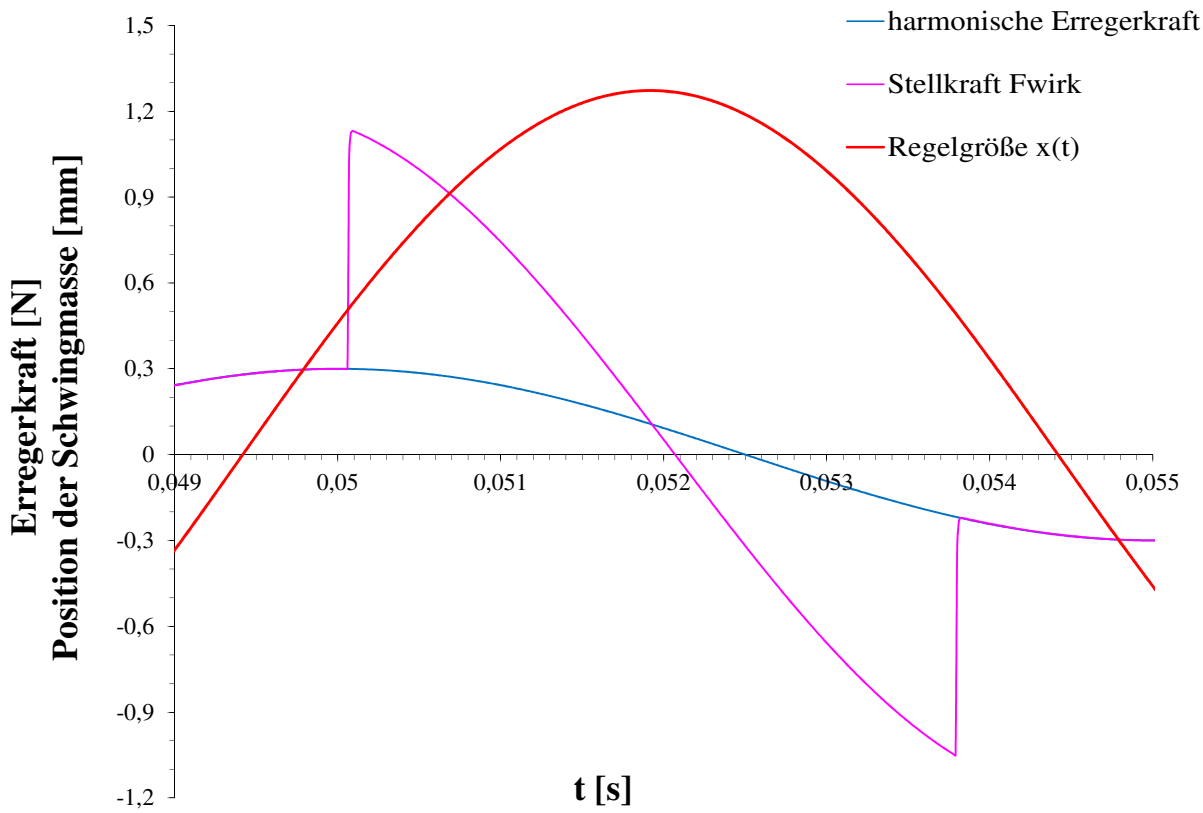

Abbildung 2-99 Verlauf der Stellkraft, D^1-Regler, $T_1 = 69$

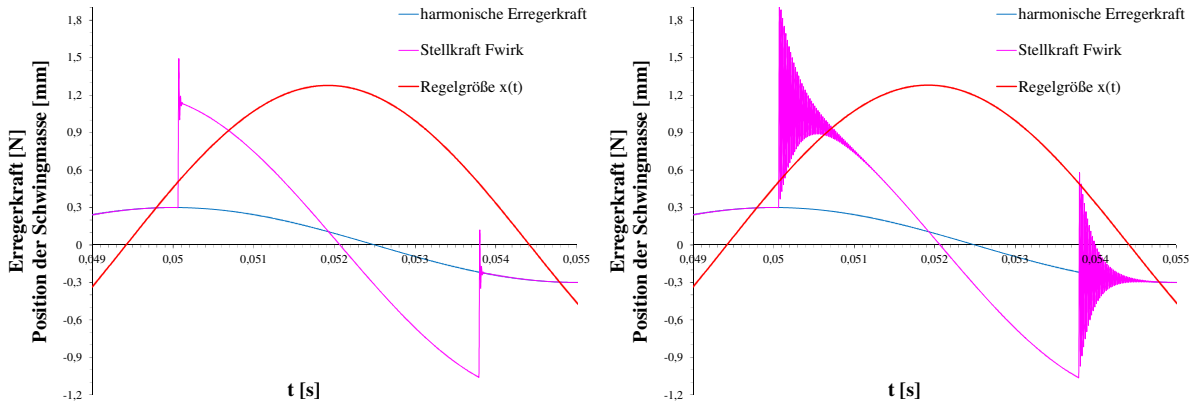

Abbildung 2-100 Verlauf der Stellkraft, D^1-Regler, $T_1 = 110$ (links) und $T_1 = 155$ (rechts)

Optimierter PD^2D^1-Regler

Man hat die optimalen Koeffizienten für jeden Regleranteil gefunden: $T_1 = 69$, $T_2 = 7 \cdot 10^{-4}$ und $K_P = 10^6$. Mittels Addition der drei Regler mit entsprechender Anpassung der Koeffizienten ergab sich ein sehr gutes Regelverhalten der Regelstrecke, siehe Abbildung 2-101.

Die Verstärkung des P-Reglers blieb unverändert, lediglich die Koeffizienten der differentiellen Regler mussten aufeinander abgestimmt werden. Da sowohl der D^2- als auch der D^1-Regler ein Schwingverhalten der Stellgröße aufweisen (vgl. Abbildungen 2-97 und 2-100) und der D^1-Regler ein gutes Regelverhalten des Systems bewirkt (siehe Abbildung 2-98), wurde der T_2-Koeffizient mit einem negativen Vorzeichen versehen und angepasst. Mit den neuen Koeffizienten liegt ein stabiles Regelverhalten des geschlossenen Regelkreises mit einer ausgezeichneten Regelgüte und sehr schnellen Ausregelung vor. Die Abbildung 2-101 zeigt, dass die Schwingmasse der vorgegebenen Bewegungsbahn folgt. Die Regelabweichung beträgt 0,005 Prozent bei einer maximalen Stellkraft von 1,42 N. Der Verlauf der Stellkraft ist in der Abbildung 2-102 dargestellt. Man sieht, dass die Stellgröße nur wenige Schwingungen mit exponentieller Abnahme der Schwingungsamplitude aufweist.

Wie bereits beim P-Regler erläutert (siehe Abbildung 2-94), beeinflusst die Schwingmasse das Schwingverhalten des Reglers. Beim PD^2D^1-Regler verstärkt eine geringere Schwingmasse das Schwingverhalten der Stellkraft. Dagegen dämpft eine schwere Schwingmasse das Schwingen der Stellgröße. In beiden Fällen sind auch unterschiedliche Stellkräfte erforderlich, siehe Abbildung 2-103, wobei das Bewegungsprofil ausgeregelt wird.

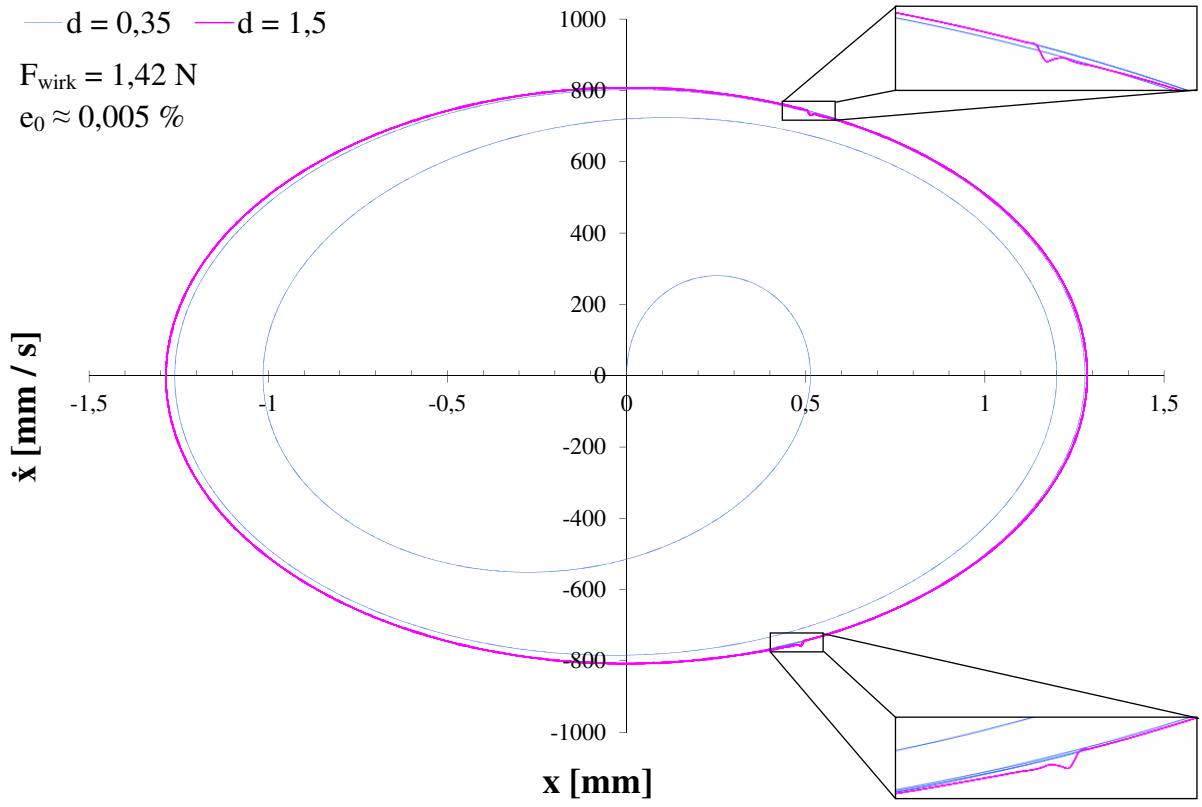

Abbildung 2-101 Geregeltes Bewegungsprofil der Schwingmasse, PD^2D^1-Regler, $K_P = 10^6$, $T_2 = -1{,}93 \cdot 10^{-4}$ und $T_1 = 114$, $m = 0{,}8$ g

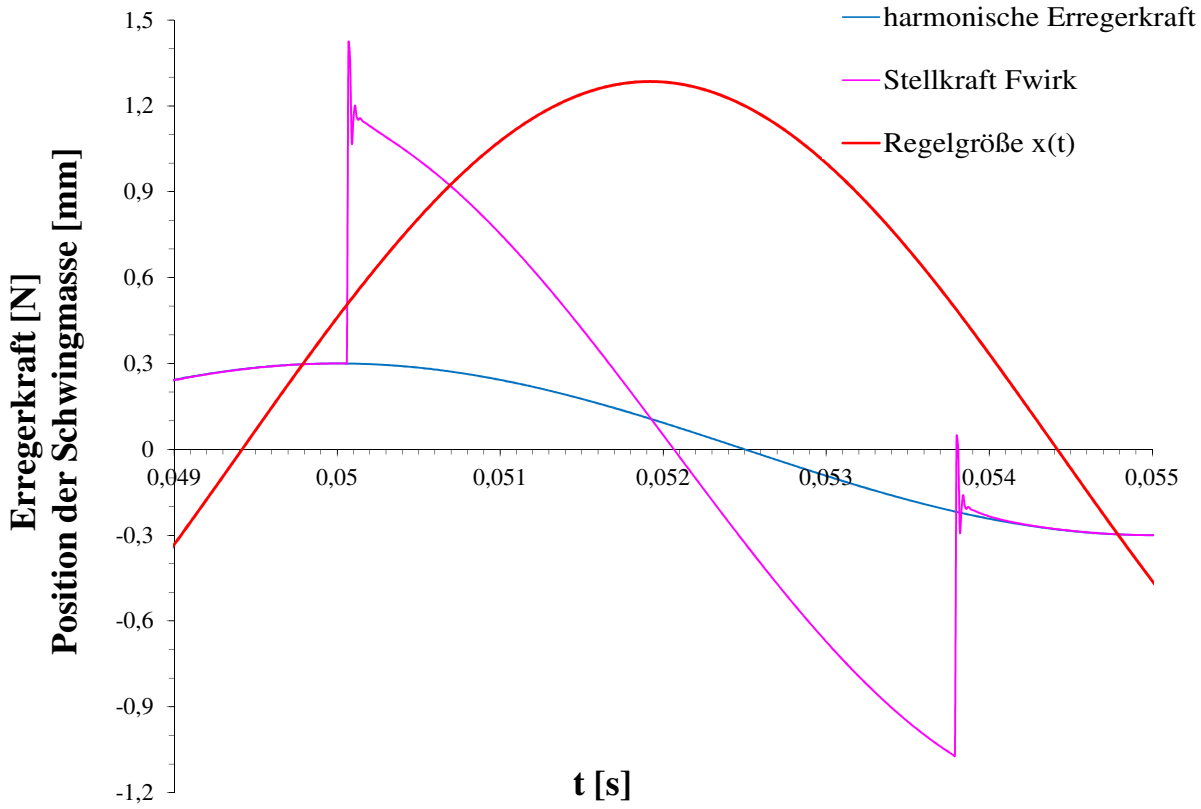

Abbildung 2-102 Verlauf der Stellkraft, PD^2D^1-Regler, $K_P = 10^6$, $T_2 = -1{,}93 \cdot 10^{-4}$ und $T_1 = 114$, m = 0,8 g

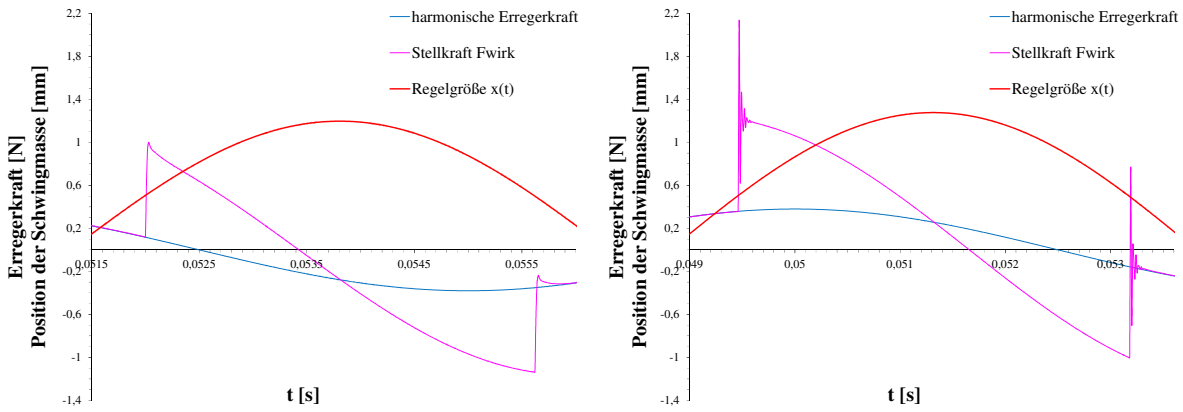

Abbildung 2-103 Schwingverhalten des PD^2D^1-Reglers, $K_P = 10^6$, $T_2 = -1{,}93 \cdot 10^{-4}$ und $T_1 = 114$, m = 1,6 g (links) und m = 0,5 g (rechts)

Stromregelung

Nachdem der optimale Regler für die Regelung der Position der Schwingmasse gefunden und parametriert wurde, erfolgt die Analyse der Dynamik des gesamten Systems.

Wie bereits erwähnt, beeinflusst die Induktivität der Erregerspule die Stromdynamik, d. h. mit größer werdender Induktivität wird die Anstiegszeit des elektrischen Stroms in der Erregerspule ebenfalls größer, siehe Kapitel 2.3.1. Dies hat negative Auswirkung auf den Regelungsvorgang, da, wie oben gezeigt, die Stellkraft einer sprungartigen Änderung der Regelabweichung genauso sprungartig folgen müsste.

Aufgrund dessen muss auch der elektrische Strom in der Spule steil ansteigen, weil die erforderliche Stellkraft dem elektrischen Strom durch den Skalierungsfaktor λ proportional ist, siehe dazu Kapitel 2.4 Gleichung (2-101):

$$F(t) = \lambda \cdot i(t) \qquad \lambda = \ell \cdot B$$

Bei einem linearen Zusammenhang ist λ = konstant, sonst ist die Proportionalitätskonstante Lambda eine Funktion des Wegs, bzw. der magnetischen Flussdichte: λ = f(x, B). Zum Verlauf der Lorentzkraft in Abhängigkeit von der Position des Läufermagneten siehe hierzu Kapitel 2.2.4 mit den Abbildungen 2-41 sowie 2-43.

An dieser Stelle wird die Differentialgleichung der Stromdynamik in der Erregerspule sowie die numerische Lösung noch mal aufgeführt, aus dem Kapitel 2.3.1, Gleichungen (2-69) und (2-74):

$$U(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) \qquad \textbf{(2-147)}$$

$$i_{i+1} = \frac{U(t) \cdot h + i_i \cdot (L - R \cdot h)}{L} \qquad \textbf{(2-148)}$$

Die Spule stellt also ein PT_1-Glied (Verzögerungsglied erster Ordnung) im Regelkreis dar. Die Erregerspule als das eigentliche Stellglied besitzt ihre eigene Dynamik, welche bei der Auslegung des Regelkreises berücksichtigt werden muss. Es ergibt sich innerhalb der Hauptregelung ein innerer Regelkreis zwecks Stromregelung. Das Regelungsgesetz hierfür wird von der entsprechenden Gleichung (2-147) abgeleitet. Während des Regelungsvorgangs soll der für die Auslenkung der Schwingmasse erforderliche Strom in den Spulenwindungen fließen:

$$U_{soll}(t) = L \cdot \frac{di_{soll}}{dt} + R \cdot i_{soll}(t) \qquad \textbf{(2-149)}$$

Der durch die Spule tatsächlich fließende Strom geht ebenfalls in die Gleichung (2-147) ein:

$$U(t) = L \cdot \frac{di_{ist}}{dt} + R \cdot i_{ist}(t) \qquad \textbf{(2-150)}$$

Die Differenz der beiden Gleichungen bildet die Stellgröße:

$$L \cdot \frac{di_{soll}}{dt} + R \cdot i_{soll}(t) = U_{soll}(t)$$

$$-$$

$$L \cdot \frac{di_{ist}}{dt} + R \cdot i_{ist}(t) = U(t) \quad \Rightarrow$$

$$L \cdot \frac{d(i_{soll} - i_{ist})}{dt} + R \cdot (i_{soll} - i_{ist}) = U_{soll}(t) - U(t) \qquad \textbf{(2-151)}$$

Schreibt man die Gleichung (2-151) um und ersetzt die Systemkomponenten wie die Induktivität und den elektrischen Widerstand der Spule durch entsprechende Reglerkoeffizienten, erhält man das Regelungsgesetz für die Stromregelung:

$$U_{soll}(t) = U(t) + T_{I,L} \cdot \dot{e}_{Strom} + K_{P,L} \cdot e_{Strom} \qquad \textbf{(2-152)}$$

Für die Implementierung dieses Regelungsgesetzes wird die Gleichung (2-152) in die numerische Form überführt:

$$U_{soll,i+1} = \underbrace{U_0 \cdot \cos(\Omega t_i)}_{\text{Vorsteuerung}} + \underbrace{T_{I,L} \cdot \dot{e}_{Strom,i} + K_{P,L} \cdot e_{Strom,i}}_{PD^1-\text{Regler}} \qquad \textbf{(2-153)}$$

Der Hauptregelkreis wird nun um den für die erforderliche Stromregelung aufgestellten Regelkreis gemäß (2-153) ergänzt, siehe Abbildung 2-104. Da die Vorsteuerung in der Gleichung (2-153) bereits harmonisch behaftet ist, ist auch der in der Spule fließende Strom harmonisch, falls die Regelabweichung $e_{strom} = 0$. Der Spulenstrom hat eine Lorentzkraft zur Folge, die als dynamische Vorsteuerung rekursiv in die Berechnung der Stellkraft eingeht:

$$\underbrace{F_{soll,i+1}}_{\text{Stellkraft}} = \underbrace{F_{soll,i}}_{u_V} + \underbrace{T_2 \cdot \ddot{e}_{x,i} + T_1 \cdot \dot{e}_{x,i} + K_P \cdot e_{x,i}}_{PD^2D^1-\text{Regler}} \qquad \textbf{(2-154)}$$

Für den Anfangsschritt i = 0 gilt die Vorsteuerung F_0.

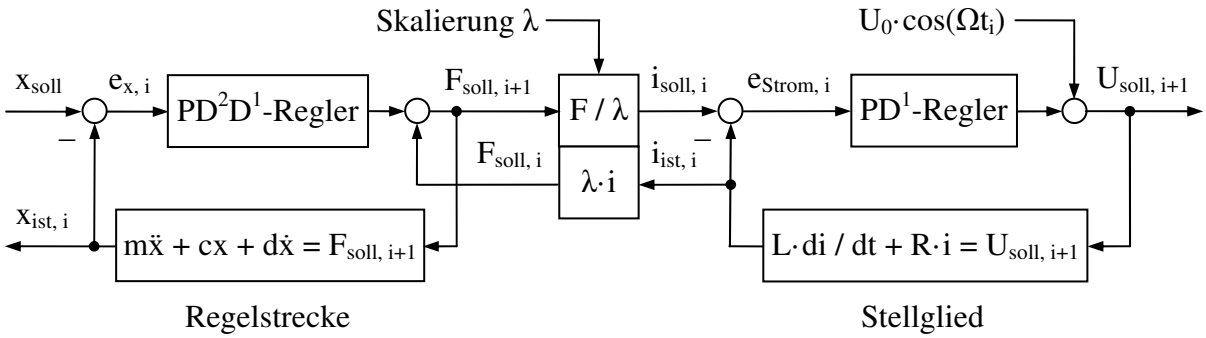

Abbildung 2-104 Blockschaltbild des Regelkreises mit der Erregerspule als Stellglied

Die Ist-Größe des Spulenstroms wird nicht gemessen, sondern innerhalb des Stromregelkreises gemäß dem Regelungsgesetz (2-153) entsprechend der numerischen Gleichung (2-148) berechnet. Dafür ist es wichtig, die Werte der Induktivität sowie des elektrischen Widerstands der Erregerspule zu kennen.

Die Abbildung 2-104 zeigt, dass die Stromregelung nicht direkt, d. h. durch die Messung des elektrischen Stroms, sondern indirekt mittels der Wegmessung erfolgt. Somit braucht man eine Messstelle weniger. Die Stromregelung wird also virtuell, rein rechnerisch, innerhalb des Hauptregelkreises durchgeführt.

Bei jedem Regelungsschritt der Positionsregelung der Schwingmasse wird die Ausregelung des elektrischen Stroms vorgenommen. Dabei wird die elektrische Spannung an den Enden der Erregerspule entsprechend dem Regelungsgesetz (2-153) erhöht oder reduziert, was mit erheblichen Spannungssprüngen verbunden sein kann. Das bedeutet, dass die Spannungsquelle (ggf. auch Regelungs- und Verstärkungselektronik) in der Lage sein muss, die erforderliche Spannung schnell genug zur Verfügung zu stellen. Andernfalls muss das Netzteil ebenfalls als ein Verzögerungsglied behandelt und im Regelkreis berücksichtigt werden. Die Latenzen im Programmablauf werden als gering angenommen, so dass die Verzögerungen in der Reaktion der Regelstrecke aufgrund des Programmzyklus des implementierten Regelkreises vernachlässigbar sind.

Die Abweichung des elektrischen Stroms und ihre zeitliche Ableitung in (2-153) kann als Abweichung der erforderlichen Stellkraft aufgefasst werden:

$$e_{Strom,\,i} \;=\; \frac{F_{soll,\,i} - F_{soll,\,i-1}}{\lambda} \;=\; \frac{1}{\lambda}\cdot \Delta F_{soll,\,i} \qquad \textbf{(2-155)}$$

$$\dot{e}_{Strom,\,i} \;=\; \frac{1}{\lambda}\cdot \frac{d\left(F_{soll,\,i} - F_{soll,\,i-1}\right)}{dt} \;=\; \frac{1}{\lambda}\cdot \dot{F}_{soll,\,i} \qquad \textbf{(2-156)}$$

Mit der Berücksichtigung der rekursiven Gleichung (2-154) für die Berechnung der Stellkraft löschen sich die Anteile $F_{soll,\,i-1}$ in den Gleichungen (2-155) und (2-156) aus, und es gilt:

$$e_{Strom,\,i} \;=\; \frac{1}{\lambda}\cdot\left(T_2\cdot \ddot{e}_{x,\,i} + T_1\cdot \dot{e}_{x,\,i} + K_P\cdot e_{x,\,i}\right) \qquad \textbf{(2-157)}$$

$$\dot{e}_{Strom,\,i} \;=\; \frac{1}{\lambda}\cdot \frac{d}{dt}\left(T_2\cdot \ddot{e}_{x,\,i} + T_1\cdot \dot{e}_{x,\,i} + K_P\cdot e_{x,\,i}\right) \;\Rightarrow$$

$$\dot{e}_{Strom,\,i} \;=\; \frac{1}{\lambda}\cdot\left(T_2\cdot \dddot{e}_{x,\,i} + T_1\cdot \ddot{e}_{x,\,i} + K_P\cdot \dot{e}_{x,\,i}\right) \qquad \textbf{(2-158)}$$

Die Gleichungen (2-157) und (2-158) werden in die Gleichung (2-153) des Regelgesetzes für die Stromregelung eingesetzt. Nach Umsortieren und Zusammenfassen der zugehörigen Konstanten ergibt sich für die Stellspannung ein Regelgesetz mit neuen Reglerkoeffizienten:

$$U_{soll,\,i+1} \;=\; U_0\cdot\cos\left(\Omega t_i\right) + \frac{1}{\lambda}\cdot \underbrace{\left(T_3^*\cdot \dddot{e}_{x,\,i} + T_2^*\cdot \ddot{e}_{x,\,i} + T_1^*\cdot \dot{e}_{x,\,i} + K_P^*\cdot e_{x,\,i}\right)}_{PD^3D^2D^1-Regler} \qquad \textbf{(2-159)}$$

Hier sind

$$\begin{aligned} T_3^* &= T_{1,L}\cdot T_2 \\ T_2^* &= T_{1,L}\cdot T_1 + K_{P,L}\cdot T_2 \\ T_1^* &= T_{1,L}\cdot K_P + K_{P,L}\cdot T_1 \\ K_P^* &= K_{P,L}\cdot K_P \end{aligned}$$

Es lässt sich also ein vereinfachter Regelkreis gemäß dem Regelgesetz (2-159) schematisch darstellen. Die Abbildung 2-105 veranschaulicht die Zusammenhänge.

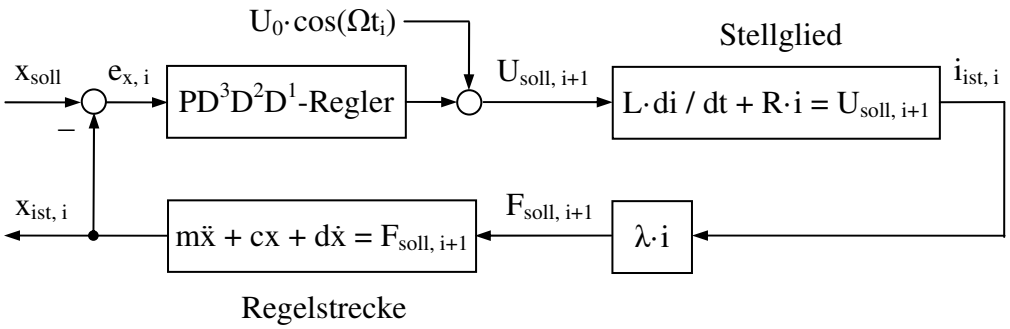

Abbildung 2-105 Blockschaltbild des vereinfachten Regelkreises mit der Erregerspule als Stellglied

Mit den bewährten Reglerkoeffizienten $T_2 = -1{,}93 \cdot 10^{-4}$, $T_1 = 114$ und $K_P = 10^6$ (siehe Abbildung 2-101) sowie mit den neuen Koeffizienten für die Stromregelung, bei deren Auswahl man sich an den elektrischen Eigenschaften der Erregerspule orientierte ($T_{1,L} = L = 1$ mH und $K_{P,L} = R = 17\ \Omega$), ergab sich ein gutes Regelverhalten des gesamten Systems, zu sehen in der Abbildung 2-106. In der Abbildung 2-107 ist der Verlauf der Stellspannung sowie des elektrischen Stroms, bzw. der dem Spulenstrom äquivalenten Stellspannung dargestellt. Die Modellrechnungen wurden mit der Vorsteuerungsspannung $U_0 = 5{,}1$ V sowie $\lambda = 1$ durchgeführt. Das heißt, dass ein durch die Erregerspule fließender elektrischer Strom der Stärke 1 A eine Lorentzkraft von 1 N hervorruft, die auf den Läufermagneten wirkt.

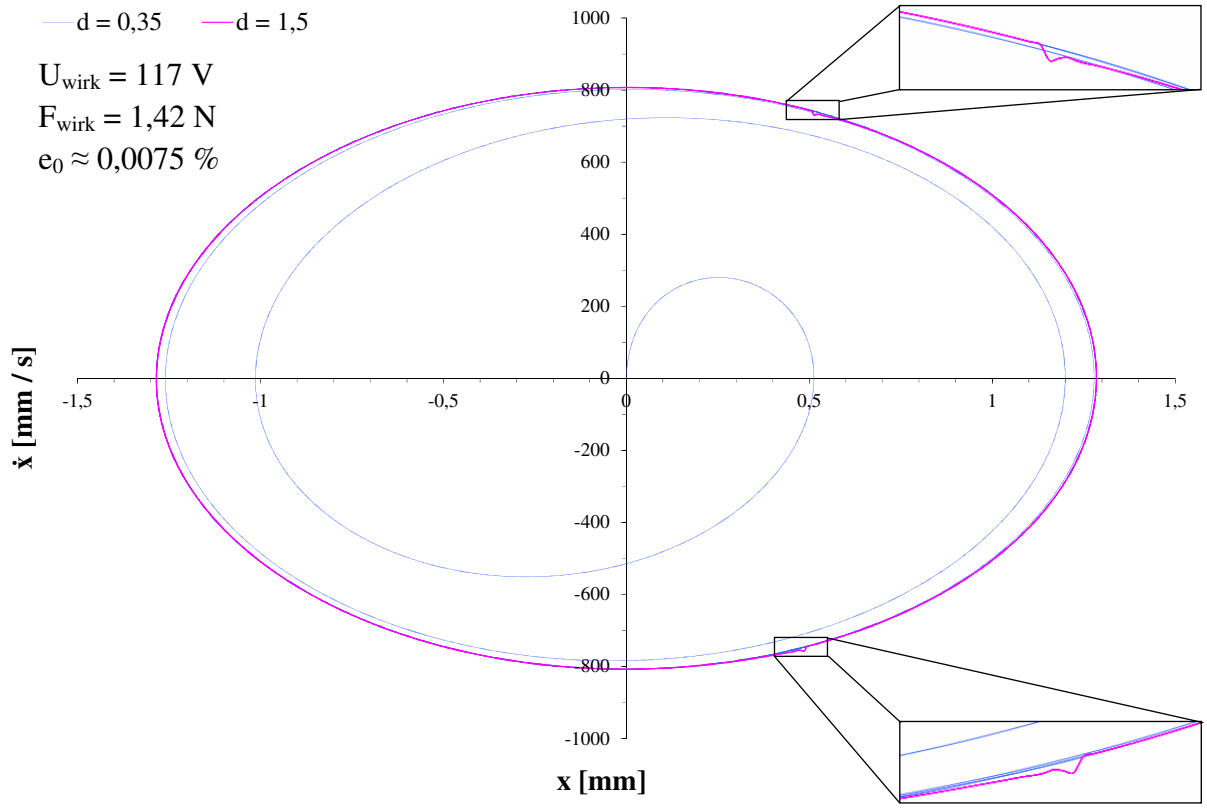

Abbildung 2-106 Ausgeregeltes Bewegungsprofil der Schwingmasse, $PD^3D^2D^1$-Regler, $K_P = 10^6$, $T_2 = -1{,}93 \cdot 10^{-4}$, $T_1 = 114$ und $T_{1,L} = 10^{-3}$, $K_{P,L} = 17$

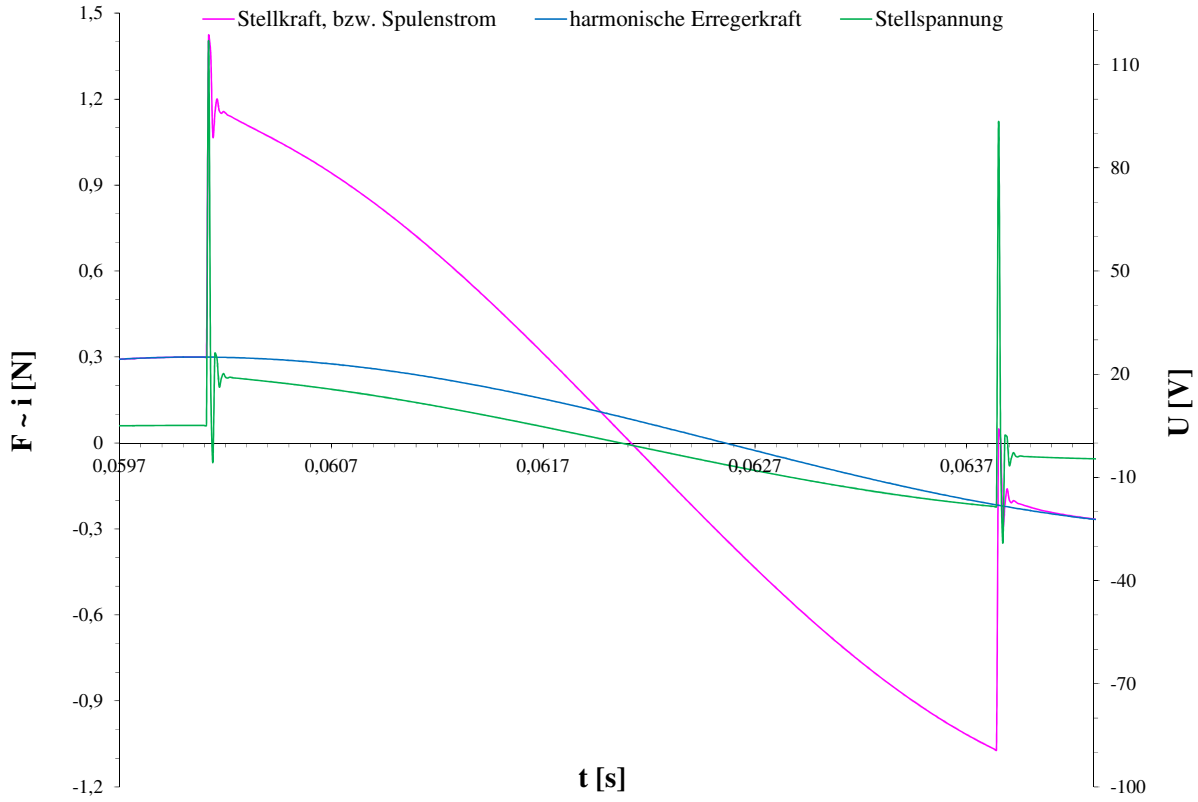

Abbildung 2-107 Verlauf der Stellspannung, $PD^3D^2D^1$-Regler, $K_P = 10^6$, $T_2 = -1{,}93 \cdot 10^{-4}$, $T_1 = 114$ und $T_{1,L} = 10^{-3}$, $K_{P,L} = 17$

Die Abbildung 2-107 zeigt, dass für eine schnelle Ausregelung der Position der Schwingmasse unter Berücksichtigung der Spuleninduktivität eine Stellspannung von 117 V erforderlich ist, damit der Spulenstrom während des Regelungsvorgangs die notwendige Steilheit besitzt.

Man kann jedoch die beiden Reglerkoeffizienten $T_{1,L}$ und $K_{P,L}$ etwas anpassen, damit einerseits geringere Stellkräfte und somit auch schwächere Spulenströme notwendig sind. Das erlaubt andererseits eine längere Anstiegszeit des elektrischen Stroms, was zum einen niedrigere Stellspannungen erfordert, zum anderen die Ausregelung ein wenig verzögert, gewährleistet jedoch eine ausreichende Regelgüte, siehe Abbildungen 2-108 bis 2-111.

Die Parametrierung des Stromreglers zeigte, dass bei verschiedenen Reglerkoeffizienten das Bewegungsprofil der Schwingmasse unterschiedlich schnell ausgeregelt wird. Trotz einer gewissen Verzögerung aufgrund der Induktivität der Erregerspule, die im Regelkreis als Stellglied zwischen dem Regler und der Regelstrecke geschaltet wird, ist eine ausreichende Regelgüte erreichbar. Die erforderliche Stellspannung lässt sich mit entsprechender Reduzierung der Koeffizienten des Stromreglers von ca. 120 V auf 20 V senken, siehe Abbildungen 2-110 und 2-111, was den Einsatz von Standard-Netzteilen mit einer maximalen Ausgangsspannung von 24 V ermöglicht.

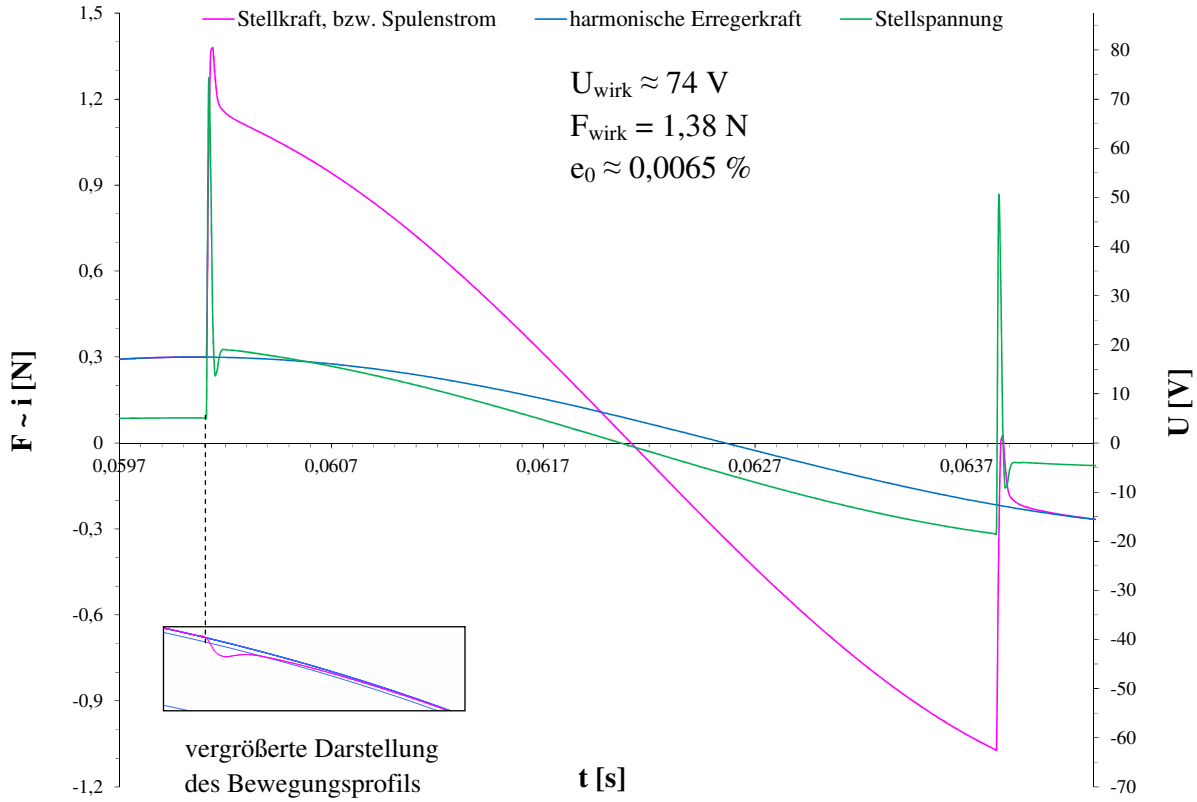

Abbildung 2-108 Verlauf der Stellspannung, $PD^3D^2D^1$-Regler, $T_{1,L} = 6 \cdot 10^{-4}$, $K_{P,L} = 17$, $U_{wirk} \approx 74$ V

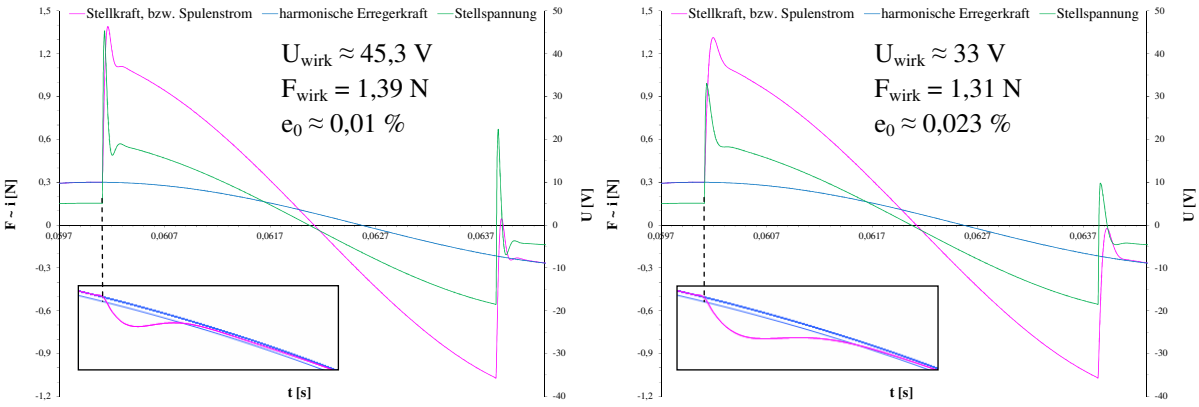

Abbildung 2-109 Verlauf der Stellspannung, $PD^3D^2D^1$-Regler, $T_{1,L} = 3 \cdot 10^{-4}$, $K_{P,L} = 10$, $U_{wirk} \approx 45{,}3$ V (links) und $T_{1,L} = 2 \cdot 10^{-4}$, $K_{P,L} = 5$, $U_{wirk} \approx 33$ V (rechts)

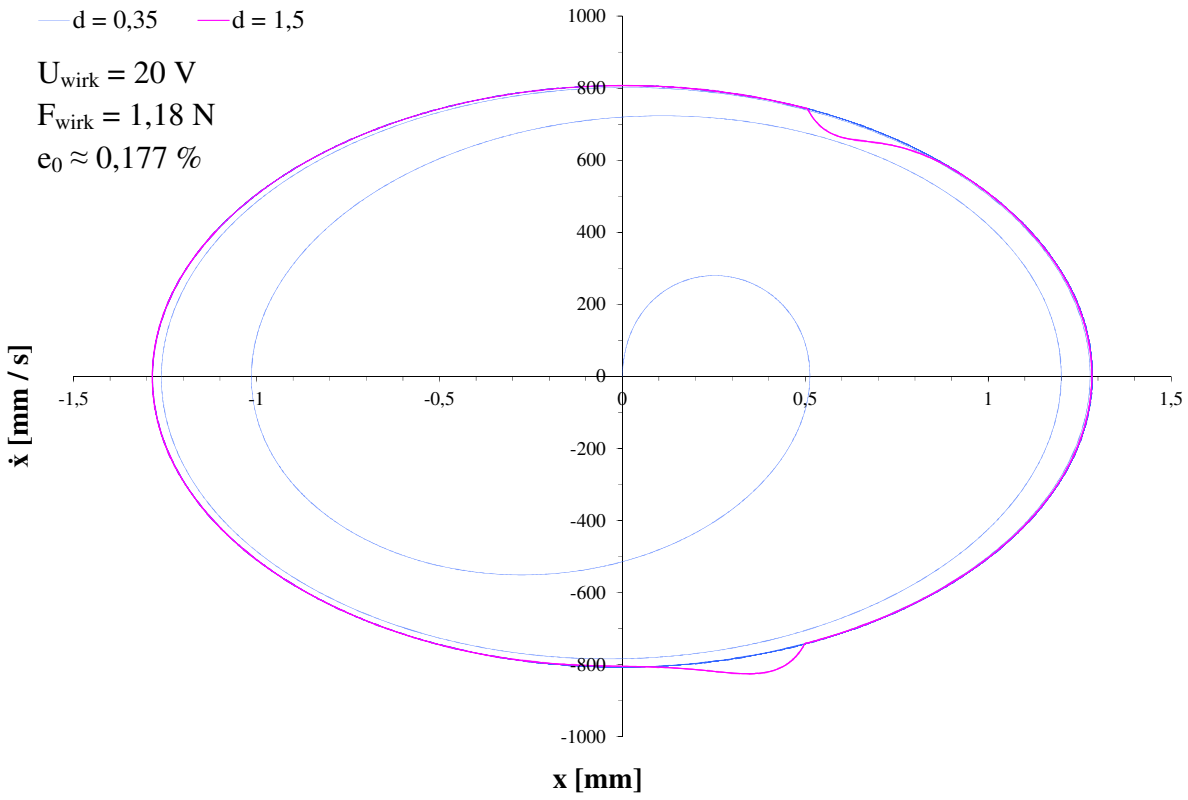

Abbildung 2-110 Bewegungsprofil der Schwingmasse bei $T_{1,L} = 10^{-4}$ und $K_{P,L} = 1$

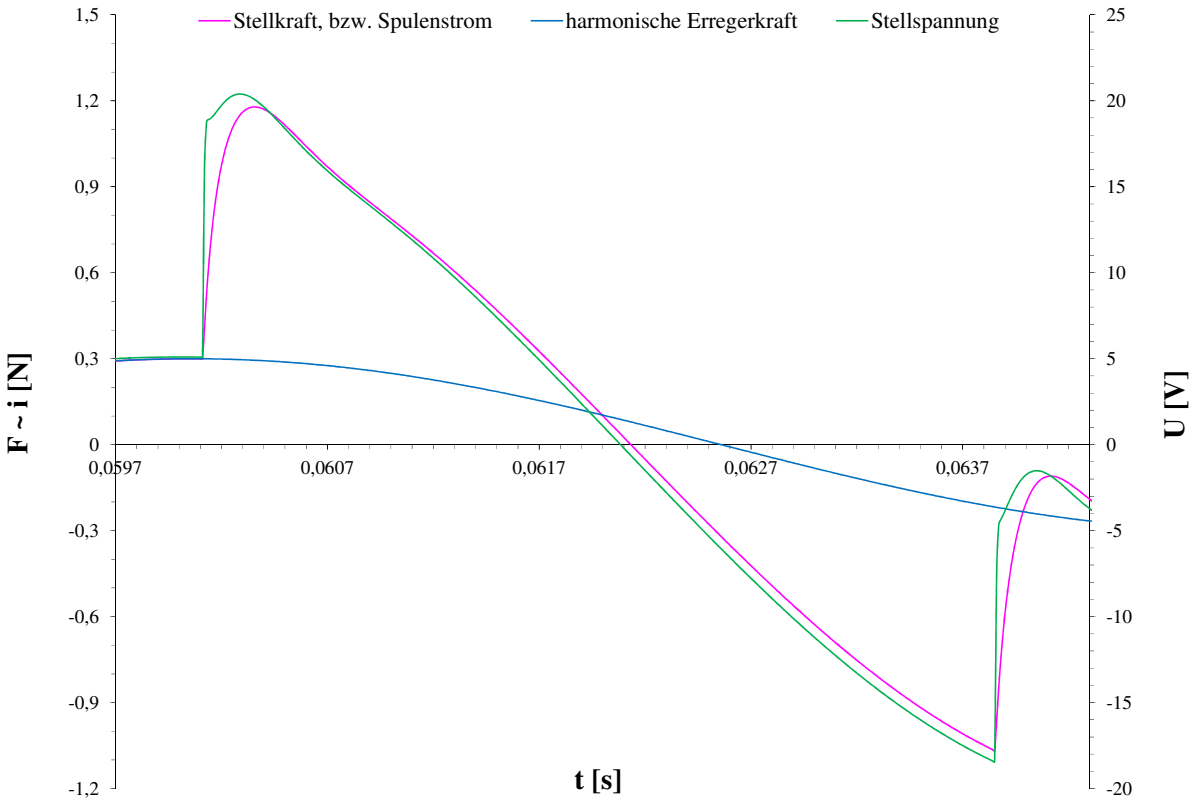

Abbildung 2-111 Verlauf der Stellspannung bei $T_{1,L} = 10^{-4}$ und $K_{P,L} = 1$, $U_{wirk} \approx 20$ V

2.8.3 Stabilitätsanalyse des geschlossenen Regelkreises

Für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten linearen und nichtlinearen mechanischen Systeme wird vorausgesetzt, dass sie nur eine Ruhelage besitzen. Demnach soll nur eine einzige Ruhelage auf Stabilität überprüft werden. Somit ist die Stabilität eine Eigenschaft des ganzen Systems. Es müssen daher die Übertragungsfunktionen sowohl des Reglers als auch des mechanischen Systems, also der Regelstrecke, gegebenenfalls auch der Verstärkungs- sowie Regelungselektronik als eine Einheit betrachtet und analysiert werden.

Ein System ist asymptotisch stabil, wenn es, einmal aus seiner Ruhelage ausgelenkt, mit der Zeit ($t = t_{end}$, bzw. $t \rightarrow \infty$) in seine Ausgangsposition zurück kehrt. Instabiles Verhalten liegt vor, wenn ein System bei einmaliger Auslenkung aus der Ruhelage nie zum ursprünglichen Punkt zurück kommt. Ein Beispiel eines asymptotisch stabilen Systems stellt das physikalische Pendel dar: aufgrund der Reibung und Dämpfung konvergiert seine Schwingungsamplitude gegen Null, das Pendel ist in seiner Ursprungsposition. Das kopfüber stehende (inverse) Pendel weist hingegen ein instabiles Verhalten auf: eine geringe Auslenkung bewirkt das Umkippen des Pendels. Ein von sich aus instabiles System kann jedoch mittels eines Reglers stabilisiert werden.

Daher ist es wichtig, einen parametrierten Regelkreis einerseits auf Stabilität zu untersuchen, andererseits die Höhe der Stellgröße im Fall einer sprungartigen und großen Änderung der Regelabweichung abzuschätzen. Im Kapitel 2.8.2 wurde gezeigt, dass für eine dynamische Ausregelung der Position der Schwingmasse unter Umständen zu hohe Stellkräfte erforderlich sind, welche vom Steuergerät möglicherweise nicht realisiert werden können. Die Stabilität wurde als eine Eigenschaft des gesamten Systems betrachtet und ist von den Eingangssignalen (d. h. von der Regelabweichung, bzw. Führungsgröße) unabhängig.

Für die Untersuchung des geschlossenen Regelkreises auf seine Stabilität wird eine Laplace-Transformation der Übertragungsfunktion des gesamten Systems, Regler $G_R(s)$ und Regelstrecke $G_S(s)$, durchgeführt, so, wie es beispielsweise bei der Suche der analytischen Lösung der differentiellen Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems erfolgt, siehe Kapitel 8.1 Gleichung (8-23). Es ergibt sich die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \qquad \text{wobei} \qquad G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

Die in den Bildbereich transformierte Funktion wird nach X(s) aufgelöst und die Nullstellen des resultierenden Nennerpolynoms gesucht. Die gefundenen Nullstellen sind Pole der einzelnen Lösungsanteile der Gesamtlösung. Die Pole können entweder reell oder komplex, bzw. konjugiert komplex sein. Es wird die Lage der Pole in der komplexen Zahlenebene analysiert.

Liegt mindestens ein Pol in der rechten komplexen Halbebene, so ist das gesamte System instabil, auch wenn andere Pole sich in der linken komplexen Halbebene befinden. Das Stabilitätskriterium, auch Nyquist-Kriterium genannt, ist also nur dann erfüllt, wenn alle Pole einen negativen Realteil besitzen. Im Fall des verschwindenden Pols (Re{p} = 0), spricht man von der Grenzstabilität, ein doppelter, bzw. allgemein mehrfacher Pol im Ursprung (d. h. dass sowohl der Real- als auch Imaginärteil gleich Null sind) weist jedoch auf ein instabiles Verhalten des Systems hin [Kin06], [Gee04].

Das zu untersuchende Regelungsgesetz lautet, vgl. Gleichung (2-144):

$$F_{soll}(t) = F(t) + T_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}(x_{soll} - x_{ist}) + T_1 \cdot \frac{d}{dt}(x_{soll} - x_{ist}) + K_P \cdot (x_{soll} - x_{ist})$$

Setzt man die Stellgröße $F_{soll}(t)$ in die differentielle Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems ein, erhält man die Gleichung des geschlossenen Regelkreises gemäß der Abbildung 2-79 mit dem PD^2D^1-Regler:

$$m\ddot{x}_{ist} + d\dot{x}_{ist} + cx_{ist} = F(t) + T_2 \cdot (\ddot{x}_{soll} - \ddot{x}_{ist}) + T_1 \cdot (\dot{x}_{soll} - \dot{x}_{ist}) + K_P \cdot (x_{soll} - x_{ist})$$

Nach Umsortieren ergibt sich die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems:

$$(m + T_2) \cdot \ddot{x}_{ist} + (d + T_1) \cdot \dot{x}_{ist} + (c + K_P) \cdot x_{ist} = F(t) + \underbrace{T_2 \cdot \ddot{x}_{soll} + T_1 \cdot \dot{x}_{soll} + K_P \cdot x_{soll}}_{w^*(t)}$$

Hieraus ergibt sich die Laplacetransformierte, aufgelöst nach X(s), ohne Aufschreibung von Zwischenschritten:

$$X(s) = \frac{F(s) + W^*(s)}{(m + T_2) \cdot s^2 + (d + T_1) \cdot s + (c + K_P)} \qquad \textbf{(2-160)}$$

$W^*(s)$ bedeutet die Vorgabe im Bildbereich.

Es wird vorausgesetzt, dass die Vorsteuerung im Bildbereich F(s) keine positiven Realteile von Nullstellen des Nennerpolynoms, bzw. kein doppeltes Polpaar oder allgemein keine mehrfache Pole im Ursprung aufweist, d. h. dass F(s) das Stabilitätskriterium erfüllt.

Die Pole, d. h. die Nullstellen des Nennerpolynoms von (2-160) sind:

$$p_{1,2} = \frac{-(d + T_1) \pm \sqrt{(d + T_1)^2 - 4 \cdot (m + T_2) \cdot (c + K_P)}}{2 \cdot (m + T_2)} \qquad \textbf{(2-161)}$$

Das Stabilitätskriterium lautet

$$Re\{ p_i \} < 0 \qquad \textbf{(2-162)}$$

Ist der rechte Term unter der Wurzel größer als der linke oder gleich:

$$4 \cdot (m + T_2) \cdot (c + K_P) \geq (d + T_1)^2 \qquad \textbf{(2-163)}$$

so stellt (2-161) ein konjugiert komplexes Polpaar dar, bzw. ist reell, und es muss nur der reelle Ausdruck

$$\mathrm{Re}\{ p \} = -\frac{d + T_1}{2 \cdot (m + T_2)} \qquad \textbf{(2-164)}$$

betrachtet werden. Ist entweder der Zähler oder der Nenner in (2-164) negativ, so ist der Realteil insgesamt positiv und weist auf eine Instabilität des Regelkreises hin. Bei der Parametrierung des Reglers müssen also die beiden Bedingungen (2-163) und $\mathrm{Re}\{p\} < 0$ in (2-164) erfüllt werden, damit das gesamte System ein asymptotisch stabiles Verhalten aufweist.

Trifft die Bedingung (2-163) nicht zu, und die Klammenausdrücke $(m+T_2)$ sowie $(c + K_P)$ sind größer Null, so ist die Wurzel in (2-161) immer kleiner als $(d+T_1)$, alle Pole sind demnach reell und negativ. Der Regelkreis ist stabil.

Für eine bessere Übersichtlichkeit wird die Stabilität des geschlossenen Regelkreises für jede einzelne Regel separat überprüft. Sind die Reglerkoeffizienten T_2 und T_1 gleich Null, so wird das Systemverhalten nur durch die Verstärkung K_P des Proportionalreglers charakterisiert:

$$p_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4 \cdot m \cdot (c + K_P)}}{2 \cdot m} = -\frac{d}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4 \cdot m^2} - \frac{c + K_P}{m}} \quad \Rightarrow$$

$$p_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2 - \frac{K_P}{m}} \qquad \textbf{(2-165)}$$

Ist $K_P < -c$, so ist die Wurzel größer als k, und ein reeller Pol ist positiv, das die Instabilität des geschlossenen Regelkreises anzeigt. Es muss also zumindest die Bedingung

$$K_P > -c \qquad \textbf{(2-166)}$$

erfüllt werden, damit das System ein stabiles Regelverhalten aufweist. Ist jedoch $K_P = -c$, so tritt die Grenzstabilität ein. Der Verstärkung K_P sind jedoch Grenzen gesetzt. Wird K_P zu groß gewählt, so wird der Imaginärteil der Pole in (2-165) ebenfalls groß, der Regler zeigt ein starkes Schwingverhalten mit sehr hohen Ausschlägen der Stellgröße, vgl. Abbildung 2-93. Ein kleiner Imaginärteil, d. h. K_P gering, bewirkt ein schlechtes Regelverhalten des Systems, siehe Abbildung 2-89.

Die Reglerverstärkung muss offensichtlich nicht nur der Bedingung (2-166) genügen, sondern auch durch einen Maximalwert begrenzt werden:

$$-c < K_P < K_{P,\max}$$

Für das im Kapitel 2.8.2 behandelte Modell ergibt sich eine noch sinnvolle maximale Verstärkung des Proportionalreglers $K_{P,\,max} = 10^7$. Man sollte jedoch den entsprechenden Reglerkoeffizient nicht in der Nähe der Stabilitätsgrenzen wählen, da sonst der Regelkreis aufgrund der Alterungsprozesse und eventueller Änderung der Systemparameter instabil werden kann. Der Regler muss also robust parametriert werden.

Die gleichen Überlegungen gelten ebenfalls für die restlichen Koeffizienten der differentiellen Regler. Zusammenfassend lässt sich die Parametrierung der einzelnen Regler durch eine untere (Stabilität) und eine obere (Schwingverhalten und Höhe der Stellgröße) Grenze determinieren:

$$-c < K_P < K_{P,\,max} = 10^7 \tag{2-167}$$

$$-d < T_1 < T_{1,\,max} = 155 \tag{2-168}$$

$$-m < T_2 < m \tag{2-169}$$

Bei zusammengeschalteten Reglern, also bei PD^2D^1-Regler, muss die Bedingung (2-162) für Nullstellen beachtet werden, da die Reglerkoeffizienten in (2-161) durch ihres Zusammenspiel den Realteil von Nullstellen beeinflussen.

An dieser Stelle wird die Analyse der Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht weiter vertieft. Es soll lediglich angemerkt werden, dass die Stabilitätsüberprüfung von Systemen höherer Ordnung, z. B. eines Regelkreises mit Berücksichtigung der Spule als Stellglied, was durch ein System dritter Ordnung beschrieben wird, mit dem so genannten Hurwitz-Kriterium durchgeführt werden kann.

Die Bedingung hierfür lautet: Ein System n-er Ordnung ist asymptotisch stabil, bzw. alle Nullstellen seines Nennerpolynoms liegen in der linken komplexen Halbebene, wenn alle Koeffizienten des Nennerpolynoms nicht gleich Null und positiv sind ($a_i > 0$), und für $n > 2$ die Hurwitz-Determinante Δ_n größer Null ist:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 \\ & \dots & & \end{vmatrix} > 0 \tag{2-170}$$

Die Bedingung (2-170) wird auch Beiwertebedingung genannt. Für $n = 3$ gilt also:

$$\begin{cases} a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3 > 0 \\ a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \end{cases} \tag{2-171}$$

2.8.4 Kombination der Regelungsalgorithmen

Die vorgestellten Regelungsalgorithmen können nicht nur einzeln angewendet werden, sondern es ist auch eine Kombination der beiden Ansätze denkbar.

Wenn die Regelabweichung während der permanenten Überwachung des Bewegungsprofils zu groß ausfällt, so dass eine zu große Stellkraft, bzw. hohe Stellspannung für die Ausregelung der Bewegungsbahn benötigt wird, als das Steuergerät zur Verfügung stellen kann, lässt sich der Regelungsansatz entsprechend der Gleichung (2-130) der Regelung der maximalen Schwingungsamplitude verwenden. Das Bewegungsprofil wird zwar nicht ausgeregelt, d. h. dass der Läufermagnet der vordefinierten Bahn nicht folgen kann, die Schwingungsamplitude erreicht jedoch den gewünschten Soll-Wert.

Im Fall einer geringen Abweichung der Regelgröße vom Soll-Wert kommt die schnelle Positionsregelung der Schwingmasse zum Einsatz. Die permanente Überwachung des Bewegungsprofils und ständige Ausregelung erfordern jedoch mehr Rechenleistung sowie elektrische Leistung.

Im Regelungsprogramm kann also eine Auswahlsequenz (Routine) integriert werden, wo je nach Anwendungsfall zuerst die Regelabweichung analysiert wird. Danach folgt die Auswahl des passenden Regelungsalgorithmus, was auch in Abhängigkeit von der gewünschten Regelgüte geschehen kann, siehe dazu die Untersuchung der verschiedenen Regler. Im Kapitel 2.8.2 wurde gezeigt, dass die bleibende Regelabweichung durch Parametrierung des Reglers beeinflusst werden kann, dies zieht zudem verschiedene Stellkräfte nach sich.

Sobald eine Regelabweichung detektiert wird, kann eine Modellrechnung während der ersten Schwingungsperiode oder mehreren Zyklen durchgeführt werden, die es ermöglicht, die Parametrierung des Reglers zu optimieren, z. B. die Verstärkung des proportionalen Reglers oder die Vorsteuerung in Abhängigkeit von der Regelabweichung zu wählen, was im Fall des P_i-Reglers automatisch erfolgt, siehe Kapitel 2.8.1.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass mittels Kombination der beiden vorgestellten Regelungsansätze und einer weiteren Automatisierung der Parameterauswahl der jeweiligen Regler ein intelligenter Regelungsalgorithmus gestaltet werden kann, wodurch der Regler entsprechend der aktuellen Situation sowie seitens des Anwenders definierten Vorgaben bezüglich der erreichbaren Regelgüte und der Ausregelungsschnelligkeit ausgewählt und parametriert wird, so, dass zum einen das Stabilitätskriterium des gesamten Systems erfüllt bleibt, zum anderen die Regelgröße, sei es die maximale Schwingungsamplitude oder die dynamische Position des Läufermagneten, ein gutes Regelverhalten aufweist und zugleich die erforderlichen Stellkräfte gering gehalten werden können, damit die Regelungselektronik sowie Spannungsquelle nicht zu stark beansprucht oder gar überlastet wird.

2.8.5 Experimentelle Untersuchung der Regelung der maximalen Schwingungsamplitude

Um den analytisch ausgearbeiteten Ansatz der Regelung der maximalen Schwingungsamplitude beurteilen zu können, wurde mittels eines LabVIEW-Programms der Regelungsalgorithmus implementiert und eine interaktive Benutzeroberfläche realisiert. Wie bereits im Kapitel 2.7.1 erwähnt, benötigt LabVIEW eine gewisse Anzahl von Samples. Somit ist keine schnelle Regelung realisierbar. Der P_i-Regler kann daher seine ausgezeichnete Regelgüte sowie -schnelligkeit nicht vollständig entfalten und wird nur ansatzweise experimentell untersucht. Aufgrund der Verzögerungen im Programmablauf wegen der Messdatenaufnahme bringt eine dynamische Reglerverstärkung keine Vorteile. Das Regelungsgesetz wurde entsprechend der erwähnten Einschränkungen modifiziert, es lautet:

$$F_{i+1} = F_i + K_P \cdot e_i \qquad \textbf{(2-172)}$$

Für i = 0 gilt die konstante Erregeramplitude F_0 ($x_0 \sim F_0$).

Da das LabVIEW-Programm während der Datenaufnahme die resultierenden Stellkräfte mit jedem Programmzyklus aufsummiert (integriert), wurde K_P sehr klein gewählt ($K_P = 10$). Eine größere Reglerverstärkung übersteuert die Regelstrecke, d. h. den Schwingaktor, und die Regelgröße zeigt ein starkes Schwingverhalten, vgl. Abbildung 2-88.

In der Abbildung 2-112 ist das graphisch aufgebaute Regelungsprogramm dargestellt. Es wird der Schwingaktor angesteuert und die tatsächliche Schwingungsamplitude x_{ist} gemessen. Für die experimentelle Untersuchung des Regelungsalgorithmus wurde der erste Prototyp des Stechaktors verwendet, siehe Abbildung 3-7, bzw. 2-76.

Bei der Ansteuerung des Schwingaktors wird die Erregerspule mit sinusförmiger Spannung gespeist. Die Vorgabe bezüglich der Frequenz und der maximalen Erregerkraft erfolgt mittels Drehknöpfen, siehe Abbildung 2-113. Durch das Umschalten in den Regelungsmodus (rote LED leuchtet) wird die gewünschte maximale Schwingungsamplitude als Soll-Wert mit dem gleichen Drehknopf, der im manuellen Modus für die Einstellung der Erregerkraft vorgesehen war, vorgegeben.

Das Regelungsprogramm sieht auch eine benutzerdefinierte Vorgabe bezüglich der Regelgüte vor. Die linke Position „soft“ des Schiebereglers bedeutet, dass die maximale Regelabweichung zulässig ist, die rechte Stellung „hard“ des Schiebereglers erlaubt keine Abweichung. Somit kann im Anwendungsfall, beispielsweise beim Tätowieren, eine weiche oder harte Einstellung der Regelung vorgenommen werden, wodurch die Schwingungsamplitude entsprechend der Regelgütevorgabe ausgeregelt oder in Abhängigkeit von der Belastung durch die Hautelastizität abgeschwächt wird, was bei den Schattierungen den nötigen Effekt erzielt, siehe Abbildung 2-59.

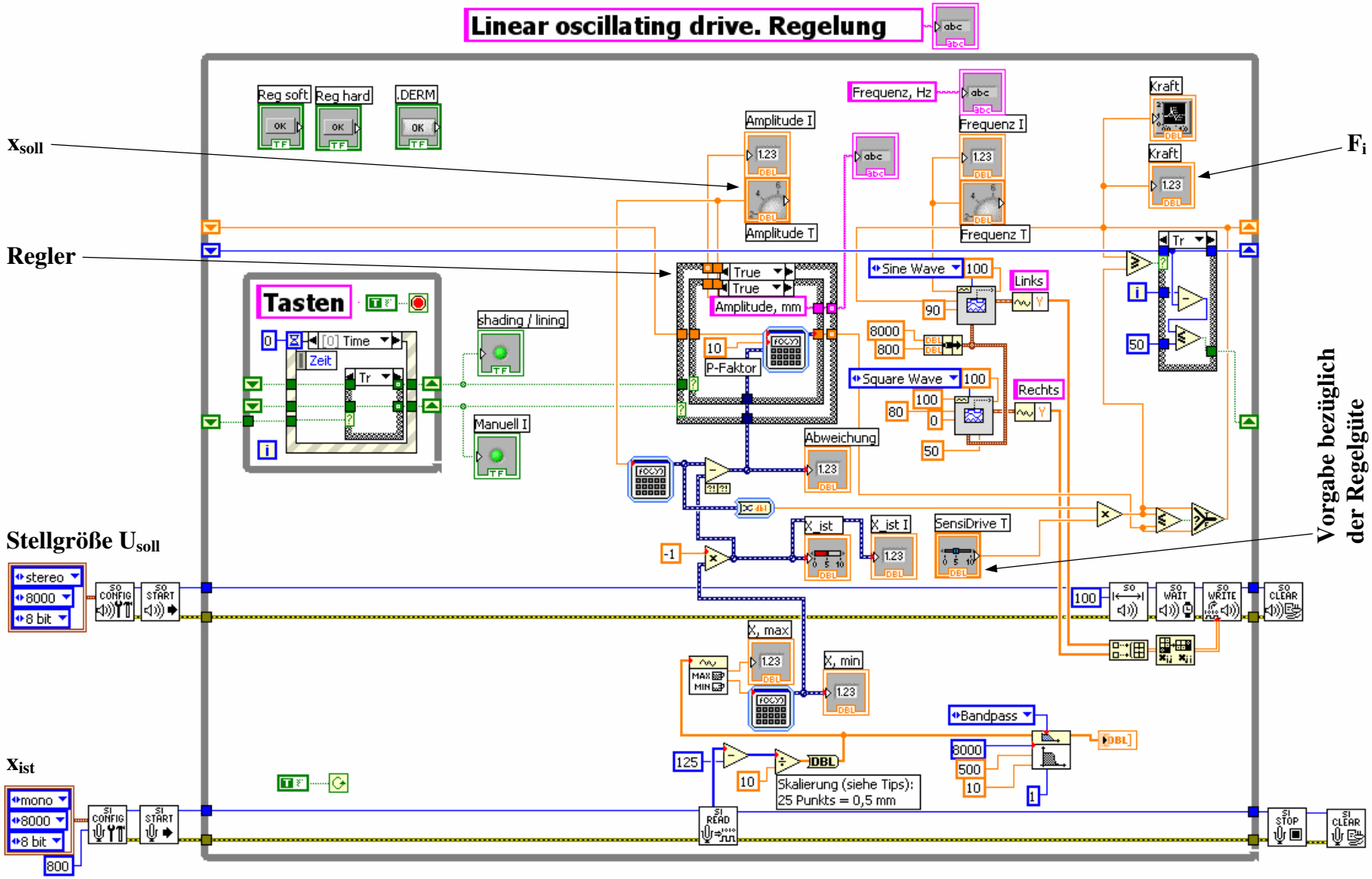

Abbildung 2-112 In LabVIEW implementiertes Regelungsprogramm, P-Regler mit dynamischer Vorsteuerung, K_p = konstant

133

Für die Wegmessung wurde der Hallsensor, siehe Abbildung 2-76, und für die Verstärkung von Steuerungssignalen die Leistungselektronik verwendet, siehe Kapitel 2.6.1. Die Spannungs-Weg-Kennlinie des Hallsensors ist zwar nicht linear, genügt jedoch, den Regelungsalgorithmus experimentell untersuchen zu können.

Die Abbildung 2-113 zeigt das Blockschaltbild des Messaufbaus sowie die interaktive Benutzeroberfläche des Regelungsprogramms. Sowohl das Einlesen von Messdaten als auch die Ausgabe von Steuerungssignalen erfolgt mittels Soundkarte.

Die Messdaten wurden mit einer Auflösung von 8 bit und Sample-Rate von 8.000 S / s aufgenommen, die Puffergröße, d. h. die Sample-Anzahl wurde für 800 Samples festgelegt. Die Puffergröße zusammen mit der Sample-Rate definiert den Regelungszyklus. Der Regelungsschritt oder die Verzögerungszeit betrug demnach

$$\Delta t = \frac{800\,[\mathrm{S}]}{8.000\,[\mathrm{S/s}]} = 0{,}1\,[\mathrm{s}]$$

Das bedeutet, dass die erforderliche Stellkraft in zeitlichen Abständen von 100 ms ausgegeben wird. Auf dem rechten Bild sieht man, dass das Zeitfenster der Kraftanzeige genau eine Sekunde beträgt. Somit ist die Regelungsdauer abschätzbar.

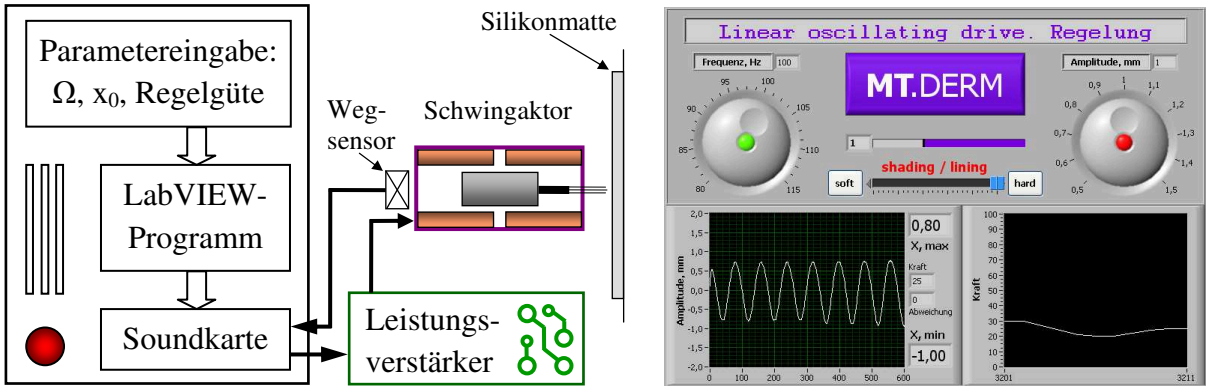

Abbildung 2-113 Blockschaltbild des Messaufbaus (links) und Benutzeroberfläche des implementierten Regelungsprogramms (rechts)

Die Benutzeroberfläche ermöglicht dem Anwender die Eingabe der Regelungsparameter wie Schwingungsfrequenz und -amplitude sowie zeigt den Verlauf der gemessenen Schwingungsamplitude und der erforderlichen Stellkraft. Mittels Schieberegler definiert man die Regelgüte. Im ungeregelten Zustand ohne Belastung und bei einer Schwingungsfrequenz von 100 Hz und dimensionslosen Kraft von 30 erreicht die Schwingungsamplitude den Wert 1,3 mm. Sobald der Regelungsmodus eingeschaltet wird (das rote Knopf leuchtet), erfolgt das Ausregeln der Schwingungsamplitude. Man kann auf dem Bild sehr gut den nichtlinearen Verlauf der Spannungs-Weg-Kennlinie erkennen: in Stechrichtung wird eine größere Schwingungsamplitude gemessen (-1 mm) als es bei der Rückkehr der Schwingmasse der Fall ist (0,8 mm). Die Messgenauigkeit beträgt ± 0,1 mm.

Die Abbildungen 2-114 bis 2-117 zeigen das Regelungsverhalten des Schwingaktors ohne Belastung in Abhängigkeit von der sprungartigen Änderung der benutzerdefinierten Vorgabe bezüglich der Schwingungsamplitude sowie der Schwingungsfrequenz. Das, was im Kapitel 2.5.1 unter Frequenz-Amplituden-Steuerung aufgefasst wurde, die Frequenzgangabhängigkeit der Schwingungsamplitude, kann nun regelungstechnisch entsprechend der Regelabweichung mittels Erhöhung, bzw. Senkung der Erregerkraft kompensiert werden. Dies ist besonders dann hilfreich, wenn die Übertragungsfunktion des verwendeten Schwing-aktors nicht vorab ermittelt wurde, bzw. es treten unbekannte äußere sowie innere Faktoren (z. B. eine zeitabhängige Dämpfung) auf, welche die Übertragungsfunktion beeinflussen.

Die Abbildung 2-114, linkes Bild, zeigt der Verlauf der Erregerkraft, wenn sich die Vorgabe x_{soll} sprunghaft von 1 mm auf 1,5 mm ändert. Die Ausregelungszeit beträgt dabei ca. 0,5 s. Ungefähr gleich lang dauert es auch in anderen Fällen, wo eine sprungartige Änderung der Vorgabe eine Erhöhung der Stellkraft erfordert, siehe Abbildung 2-115 rechtes Bild sowie Abbildungen 2-116 und 2-117 jeweils das linke Bild. Die Erregerkraft wird dabei nur unwesentlich erhöht. Beim Reduzieren der Führungsgröße im Fall der Schwingungsamplitude oder beim Wechsel zur Resonanzfrequenz wird die erforderliche Stellkraft gesenkt, was zum geringen Schwingen der Stellkraft führt. Hier dauerte das Ausregeln etwa 0,5 s bis 0,7 s.

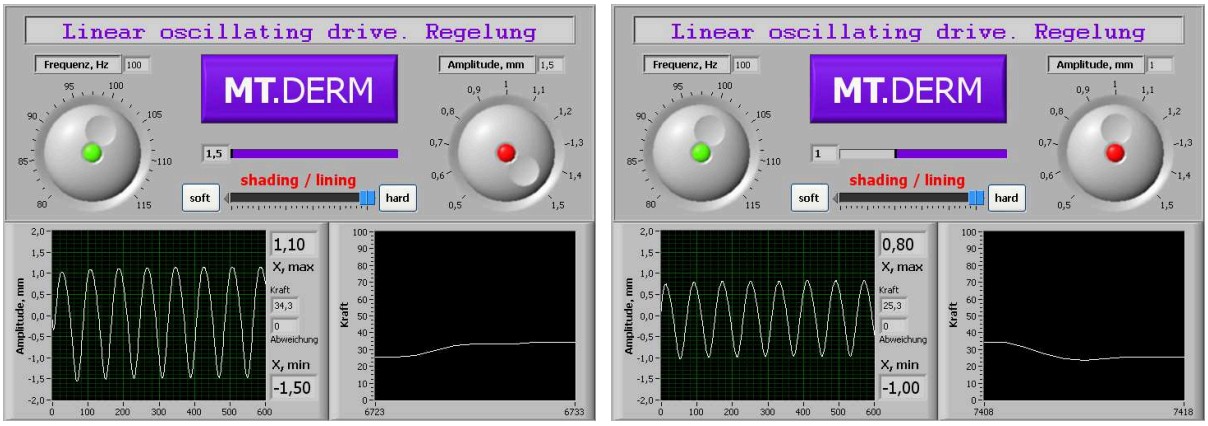

Abbildung 2-114 Regelungsverhalten, sprunghafte Änderung der Vorgabe x_{soll} von 1 mm auf 1,5 mm (links) und von 1,5 mm auf 1 mm (rechts)

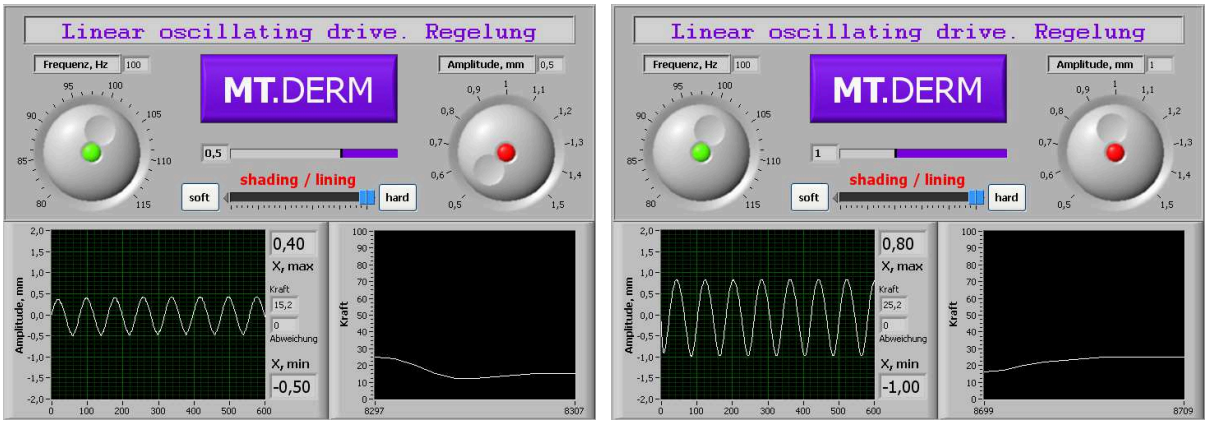

Abbildung 2-115 Regelungsverhalten, sprunghafte Änderung der Vorgabe x_{soll} von 1 mm auf 0,5 mm (links) und von 0,5 mm auf 1 mm (rechts)

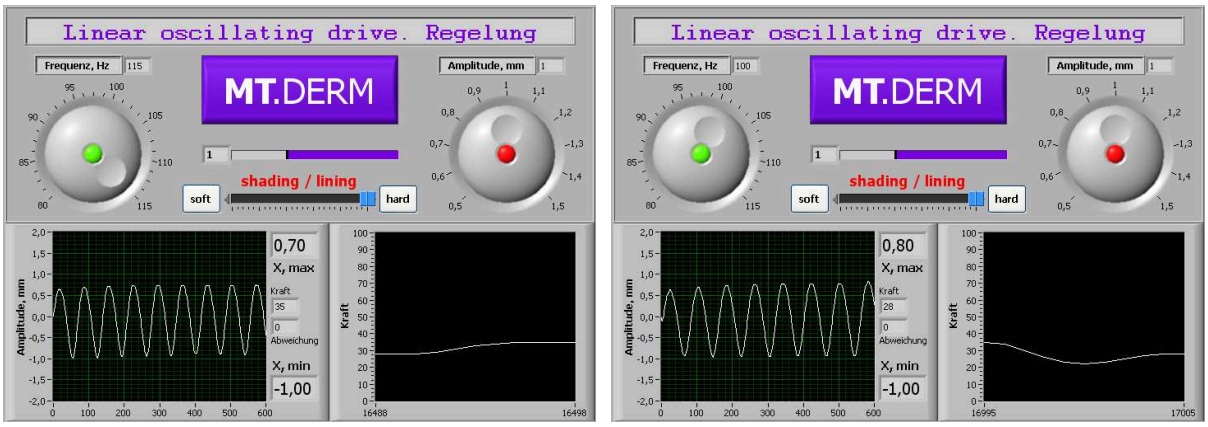

Abbildung 2-116 Regelungsverhalten, sprunghafte Änderung der Vorgabe f_{soll} von 100 Hz auf 115 Hz (links) und von 115 Hz auf 100 Hz (rechts)

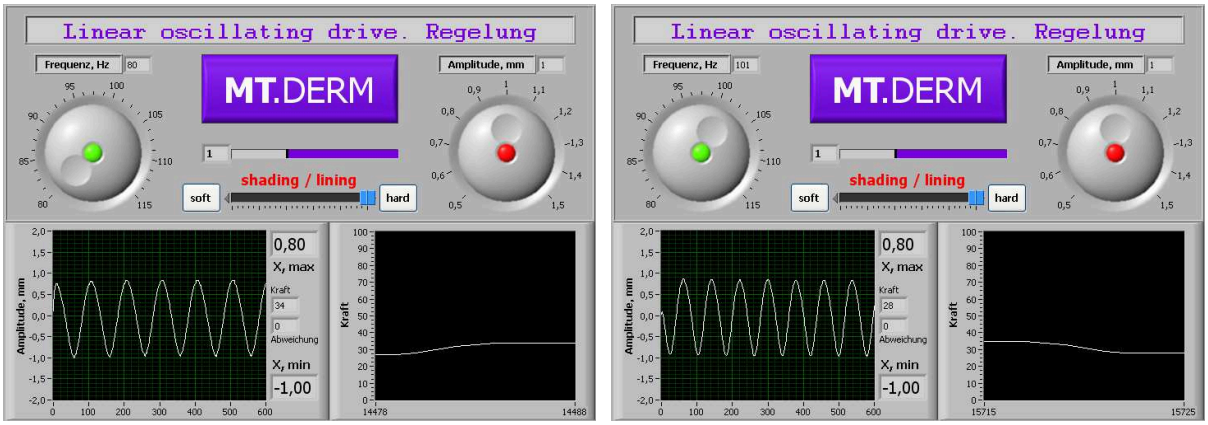

Abbildung 2-117 Regelungsverhalten, sprunghafte Änderung der Vorgabe f_{soll} von 100 Hz auf 80 Hz (links) und von 80 Hz auf 100 Hz (rechts)

Im ungeregelten Zustand reagiert der Schwingaktor mit einer Senkung der maximalen Schwingungsamplitude auf äußere Einflusse. Die Abbildung 2-118 verdeutlich dies: unter Belastung sinkt die Schwingungsamplitude dramatisch von 1,3 mm auf 0,3 mm.

Als Belastung fungierte eine 1 mm dünne Silikonmatte der Shore-Härte 65. Beim Aufsetzen des Nadelpakets (5er round - fünf Nadeln, die im Kreis angeordnet sind) dringen die Nadeln nur 0,3 mm tief in die Silikonmatte ein.

Sobald man den Regelungsmodus einschaltet und dann die Nadel auf die Silikonmatte ruckartig aufsetzt, regelt das Programm die Schwingungsamplitude aus, indem die Erregerkraft mit jedem Regelungsschritt sukzessiv erhöht wird, siehe Abbildung 2-119 linkes Bild. Die Silikonmatte wurde im Zuge der Regelung durchstochen. Der Regelungsvorgang dauerte ca. 1,75 Sekunden.

Das rechte Bild zeigt den Verlauf der Stellkraft für den Fall, wenn die Belastung sprungartig abnimmt. Die Regelungszeit beträgt dabei 1,5 s. Die Stellkraft zeigt einen dem aus Kapitel 2.8.1 ähnlichen Verlauf, vgl. Abbildung 2-83 sowie 2-85. Ähnliche Ergebnisse erhält man für andere Erregerfrequenzen und Vorgaben bezüglich der Schwingungsamplitude.

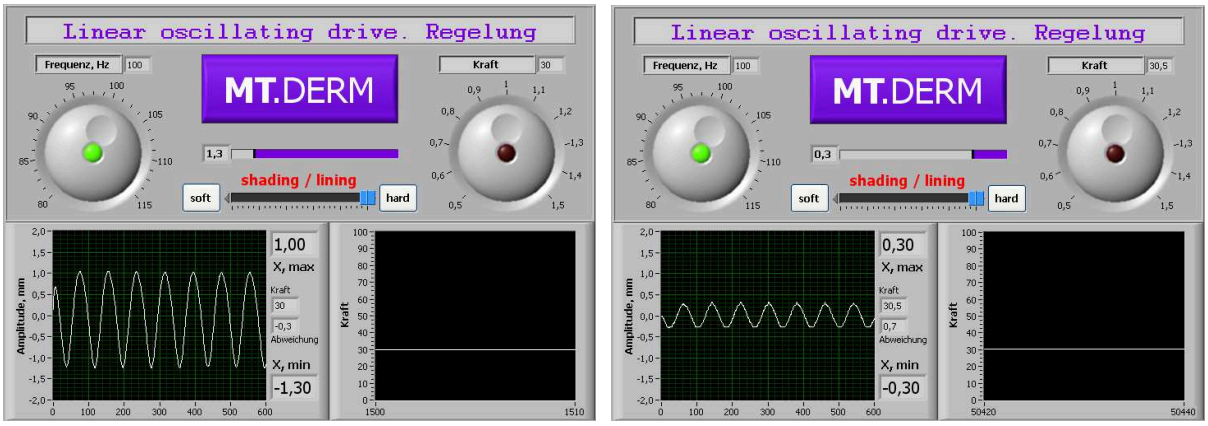

Abbildung 2-118 Verhalten des Systems im ungeregelten Zustand ohne Belastung (links) und unter Belastung (rechts)

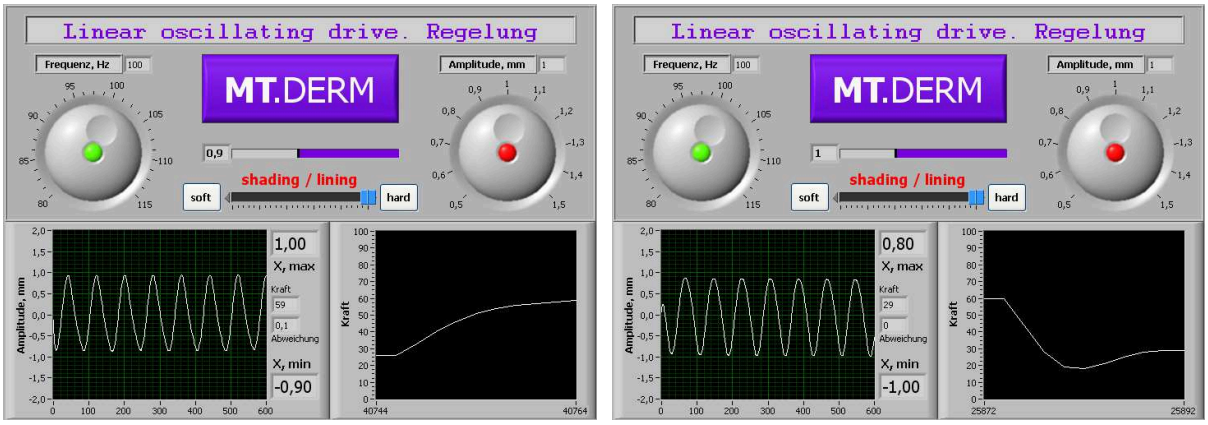

Abbildung 2-119 Regelungsverhalten, sprunghafte Änderung der Regelgröße x_{ist}, wenn die Belastung zunimmt (links) und die Belastung abnimmt (rechts)

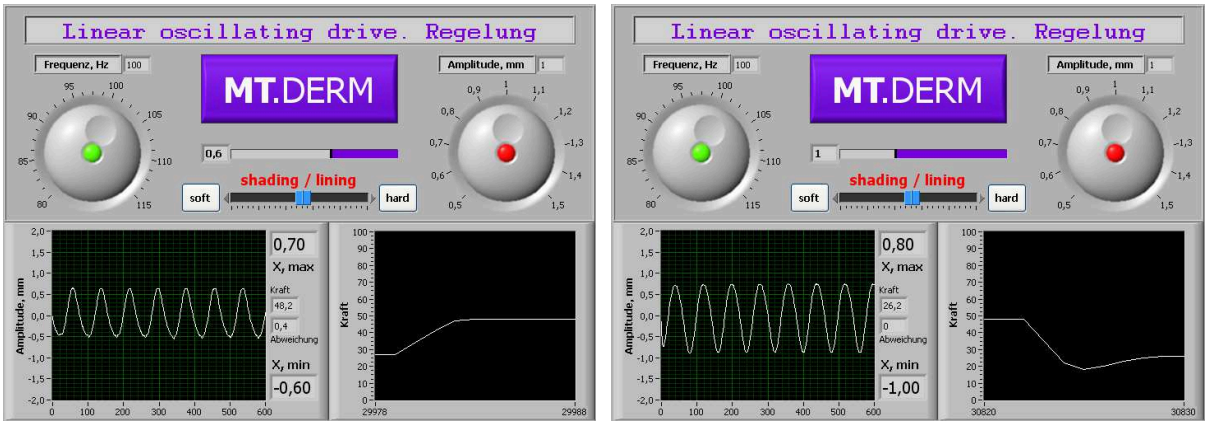

Abbildung 2-120 Regelungsverhalten, Vorgabe bezüglich der Regelgüte, sprunghafte Änderung der Regelgröße x_{ist}, wenn die Belastung zunimmt (links) und die Belastung abnimmt (rechts)

Mittels Variation der Vorgabe bezüglich der Regelgüte erreicht man, dass die Schwingungsamplitude bis zu einem bestimmten Wert, abhängig von der zulässigen Abweichung der Regelgröße, ansteigt. Demnach gestattet das Programm ein kontrolliertes Abschwächen der Schwingungsamplitude und somit auch ein begrenztes Eindringen der Nadel ins Stechmedium, z. B. in die menschliche Haut.

Wie auf der Benutzeroberfläche bereits angedeutet, siehe Abbildung 2-120, kann die Regelungsstärke „weich“ oder „hart“ eingestellt werden. Die „weiche“ Einstellung ist besser für Schattierungen (shading), die „harte“ für das Linienziehen (lining) geeignet, wenn das Tätowieren, bzw. das Pigmentieren der Anwendungsfall des vorgestellten linearen Schwingantriebs ist.

Die Abbildung 2-120 zeigt, wie sich die Schwingungsamplitude unter Belastung und bei mittlerer Einstellung der Regelgüte verhält: es stellt sich eine Regelabweichung ein. Zudem sieht man den typischen Verlauf der Stellkraft während des Regelungsvorgangs sowohl bei zunehmender als auch bei abnehmender Belastung.

Bei der experimentellen Untersuchung des Regelungsverfahrens bleibt die Induktivität der Erregerspule unberücksichtigt, da die Verzögerungen aufgrund des Programmablaufs viel größer sind als jene wegen der Spuleninduktivität.

Anhand der durchgeführten Experimente ist eine Beurteilung des Regelungsansatzes möglich. Der P-Regler mit dynamischer Vorsteuerung ist für die Regelung der maximalen Schwingungsamplitude geeignet, dabei konvergiert die Regelgröße gegen den Soll-Wert.

Aufgrund der Einschränkungen, welche wegen der Besonderheiten des LabVIEW-Programms gegeben sind, konnte jedoch der eigentliche Vorteil, nämlich die Schnelligkeit des iterativen Regelungsverfahrens gemäß (2-130) nicht zur Geltung kommen. Mit anderen Mitteln hätte man den Regler genauer untersuchen können. Das LabVIEW-Programm bietet jedoch mehr Gestaltungsmöglichkeiten bezüglich der Benutzeroberfläche und der Flexibilität bei der Einstellungen der einzelnen Parameter.

2.8.6 Zusammenfassung

Reglersynthese

Die Reglersynthese erfolgte endogen, aus dem System heraus. Es wurde gezeigt, dass mittels eines, ausgehend von der differentiellen Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems, aufgestellten PD^2D^1-Reglers die Schwingmasse der vordefinierten Bewegungsbahn sehr genau folgen kann. Es ist eine schnelle Ausregelung des Bewegungsprofils und eine ausgezeichnete Regelgüte bei relativ geringen Stellkräften von ca. 1,4 N möglich, das etwa das Fünffache der maximalen Erregerkraft F_0 im unbelasteten Zustand (stationärer Arbeitspunkt) beträgt. Weiterhin ist dies bei mäßigem Schwingverhalten der Stellgröße erreichbar.

Der steile Anstieg der Stellkraft und ihr Schwingen während des Regelungsvorgangs erfordern bei einem realen System die Berücksichtigung der Induktivität der Erregerspule, die im geschlossenen Regelkreis als Stellglied fungiert. Aufgrund der Spuleninduktivität ist eine hohe Spannung bis zu 50 V notwendig, damit die Verzögerungszeit des Stromanstiegs in der Spule gering bleibt. Die Modellrechnungen erfolgten mit einer Induktivität von 1 mH. Dabei wurde die Stromregelung virtuell innerhalb des Hauptregelkreises realisiert, was nur eine Messstelle, nämlich die Wegmessung erfordert. Der modifizierte Regelkreis umfasste demzufolge einen $PD^3D^2D^1$-Regler und die Erregerspule als Stellglied. Aufgrund der Stromregelung, die indirekt, d. h. durch die Positionsmessung erfolgte, fungierte die Spannung an den Spulenenden als Stellgröße. Es konnte gezeigt werden, dass sich die Stellspannung bei entsprechender Parametrierung des Reglers auf 20 V reduzieren lässt, wobei trotz dieser niedrigen Spannung die ausreichende Schnelligkeit der Ausregelung des Bewegungsprofils bei einer 99,8-prozentigen Regelgüte besteht.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde sowohl die Reglerauslegung als auch -analyse sowie die Stabilitätsuntersuchung des geschlossenen Regelkreises durchgeführt, jedoch nicht ausgiebig behandelt. Daher bleibt die aufgeführte Parametrierung und Analyse des Regelkreises nicht abgeschlossen. Angesichts der Komplexität der gestellten Aufgabe bezüglich der Regelung des entwickelten Schwingantriebs würde eine weitere Vertiefung dieser Thematik den Rahmen der vorliegenden Dissertation sprengen. Es existieren sowohl analytische als auch numerische Methoden, wodurch eine verbesserte Reglerauslegung möglich ist. Für die hier vorgesehene Anwendung ist dies jedoch nicht erforderlich. Die vorliegende Dissertation bietet daher allgemeine Einblicke in die Regelung von elektrodynamischen, linearen Schwingaktoren und präsentiert eine experimentelle Untersuchung eines der vorgestellten Regelungsverfahren.

Der rekursive Regelungsalgorithmus mit dynamischer Vorsteuerung sowie Reglerverstärkung, der P_i-Regler, stellt ein iteratives Regelungsverfahren dar, welches ein schnelles und genaueres Ausregeln der maximalen Schwingungsamplitude ermöglicht. Das vorgestellte Regelungsverfahren repräsentiert eine schrittweise Näherung der Regelgröße an einen Soll-Wert. Die Regelgröße konvergiert dabei gegen die Vorgabe. Innerhalb von drei bis vier Schwingungsperioden stellt sich eine 99-prozentige Regelgüte ein. Die Modellrechnungen zeigten, dass die erforderliche Stellkraft im Fall des P_i-Reglers mindestens zweifach geringer ist als bei der permanenten Positionsregelung der Schwingmasse. Zudem benötigt der implementierte P_i-Regler weniger Rechenleistung und kann mit einem geringen Schaltungsaufwand realisiert werden.

Experimentelle Untersuchung

Der Algorithmus zur Regelung der Schwingungsamplitude wurde in einem LabVIEW-Programm implementiert und experimentell untersucht. Dabei zeigte es sich, dass der reale Verlauf der erforderlichen Stellkraft während des Regelungsvorgangs dem analytisch analysierten Verhalten der Regelgröße ähnelt. Bei einer sprunghaften Änderung der Führungsgröße, bzw. der Regelabweichung wird die Schwingungsamplitude ausgeregelt, der Soll-Wert wird erreicht.

Aufgrund des Frequenzgangs (Bandbreite) des mechanischen Systems sinkt die Schwingungsamplitude im ungeregelten Zustand, wenn der Schwingaktor unterhalb oder oberhalb seiner Resonanzfrequenz betrieben wird. Regelungstechnisch kann dies mittels entsprechender Krafterhöhung kompensiert werden, was mit der Frequenz-Amplituden-Steuerung vergleichbar ist. Da es unter realen Bedingungen nie erforderlich ist, dass die Regelgröße den Änderungen der Führungsgröße schnell folgen soll, kann im Regelungskreis ein Verzögerungsglied eingebaut werden, welches bei einer sprungartigen Änderung der Führungsgröße das langsame Annähern der Regelgröße an den Soll-Wert ermöglicht.

Die experimentellen Untersuchungen bestätigten, dass der P-Regler mit dynamischer Vorsteuerung die maximale Schwingungsamplitude in Abhängigkeit von der benutzerdefinierten Vorgabe ausregelt. Der Regelung sind jedoch Grenzen gesetzt. Zum einen ist der Wegsensor den äußeren Störfaktoren, die von der Erregerspule verursacht werden (siehe Kapitel 2.6.2), umso stärker ausgesetzt, je mehr die Stellkraft erhöht wird. Dadurch treten Messfehler bei der Positionsmessung auf. Es kann daher in Wirklichkeit eine Regelabweichung bestehen, obwohl das Regelungsprogramm kein Abweichen der Regelgröße detektiert. Zum anderen zieht eine zu hohe Belastung (beispielsweise härtere Silikonmatte) höhere Stellkräfte nach sich, was die Steuerungselektronik überlasten kann.

Ungeachtet dessen ermöglicht der in LabVIEW implementierte Regelungsalgorithmus bei einer sprunghaften Änderung der Regelgröße ein zufrieden stellendes Ausregeln der maximalen Schwingungsamplitude. Der Regelungsvorgang dauerte eineinhalb Sekunde, was einerseits durch Verzögerungen aufgrund des Programmablaufs, andererseits durch eine kleine Reglerverstärkung zu begründen ist. Das Erhöhen des Reglerkoeffizienten (K_P) verkürzt die Regelungszeit, bewirkt jedoch das Überschwingen der Regelgröße, was in bestimmten Fällen nachteilig ist. Mittels der benutzerdefinierten Vorgabe bezüglich der Regelgüte ist ein kontrolliertes Abschwächen der Schwingungsamplitude möglich, was je nach Anwendungsfall von Nutzen sein kann, z. B. wenn das Eindringen der Nadel in die Haut beim Tätowieren, bzw. beim Pigmentieren begrenzt sein sollte.

Aufgrund der bereits geschilderten Nachteile des LabVIEW-Programms für die Implementierung des schnellen Regelungsalgorithmus konnte die Positionsregelung der Schwingmasse experimentell nicht untersucht werden. Dazu bedarf es einer mikrocontrollerbasierten Hardwarelösung mit schnellen Analog-Digital- sowie Digital-Analog-Konvertern und mit einem leistungsfähigen Prozessor, der das implementierte Regelungsverfahren sowie die Messdatenaufnahme und -auswertung in kurzen Programmzyklen abhandelt. Zudem ist eine hohe Auflösung der digitalen Konverter erforderlich, um die notwendige Regelgüte beim Einhalten der Bewegungsbahn zu gewährleisten. Daher ist diese anspruchsvolle Regelung in kurzer Zeit nicht realisierbar.

Die permanente Positionsregelung der Schwingmasse stellt eine Herausforderung bezüglich der Parametrierung des Reglers dar. Die Systemkomponenten liefern bereits erste Anhaltspunkte für die Auslegung des Reglers. Mit Hilfe geeigneter Parametrierung wird eine ausreichende Stabilität des geschlossenen Regelkreises und zugleich eine zufriedenstellende Genauigkeit (Regelgüte) bei einer schnellen Annäherung der Regelgröße an einen Soll-Wert erreicht. Dabei geht man einen Kompromiss zwischen den unterschiedlichen Anforderungen ein.

Für eine schnelle Regelung ist es unabdingbar, die Induktivität der Erregerspule bei der Dimensionierung des Schwingaktors möglichst klein zu halten. Im Kapitel 2.3 wurde die Erregerspule behandelt. Die Induktivität einer Spule ist quadratisch von der Anzahl der Windungen und vom magnetischen Widerstand der magnetführenden Teile reziprok abhängig, d. h. dass sowohl eine große Windungszahl als auch ein kleiner magnetischer Widerstand die Induktivität der Spule erhöhen, was sich auf die Stromdynamik und somit auf das Regelverhalten des Schwingaktors negativ auswirkt.

Ein magnetischer Rückschluss reduziert den magnetischen Widerstand, was der resultierenden Lorentzkraft zugute kommt, erhöht gleichzeitig, wie eben beschrieben, die Spuleninduktivität. Daher wurden fast alle im Rahmen dieser Arbeit angefertigten Prototypen ausschließlich ohne magnetischen Rückschluss sowie ohne Polschuhe konstruiert.

Sollte kein Bedarf an einer schnellen Regelung bestehen, so kann die Regelung der maximalen Schwingungsamplitude genutzt werden, wo die Spuleninduktivität außer Acht gelassen werden kann, weswegen der Einsatz von magnetfeldführenden Teilen erlaubt ist. Man muss jedoch in diesem Fall beachten, dass aufgrund des oszillierenden Läufermagneten die induzierte Gegenspannung größer wird sowie Wirbelströme im Rückschluss auftreten und zu dessen Erwärmung beitragen.

Bei der praktischen Anwendung des Schwingaktors, beispielsweise bei einer repetierenden Stechbewegung, wo kein sofortiges Ausregeln innerhalb einer Schwingungsperiode erforderlich ist, kann man sich auf die weniger anspruchsvolle Amplitudenregelung beschränken, was für das Tätowieren oder Pigmentieren genügt.

Will man die Einzelstiche erzeugen und dabei die gewünschte Stechtiefe, bzw. Amplitude des Einzelstichs einhalten, kommt die Positionsregelung der Schwingmasse zum Einsatz. Es zeigte sich, dass auch nicht elliptische Bewegungsprofile mit dem vorgestellten PD^2D^1-Regeler kontrolliert werden können. Dies wird hier jedoch nicht weiter ausgeführt.

3 Applikationen

Um den Zusammenbau des Aktors zu erleichtern und ihn montagefreundlicher zu gestalten, wird bewusst auf die Magnetpolschuhe sowie auf eine spezielle Gleitlagerung verzichtet. Die Korrosionsschutzbeschichtung, beispielsweise die äußere Nickelschicht des Magneten wird zusammen mit dem Werkstoff des Spulengehäuses, wo der Läufermagnet linear gelagert ist, als Gleitreibpaarung verwendet. Um die im Kapitel 2.1 geforderten starren Bindungen zu gewährleisten, bedarf es einer reib-, form- oder stoffschlüssigen Verbindung der Feder mit dem Magneten sowie mit dem Gehäuse des Schwingaktors. Das führt jedoch zu weiteren zusätzlichen konstruktiven Überlegungen, wie die Feder befestigt werden sollte, besonders am Magneten, damit dessen Korrosionsschutzbeschichtung nicht beschädigt wird und die Befestigung auch während der wechselnden Belastung stand hält, da der Magnet schwingt. Die Lösung dieses konstruktiven Problems ist bekannt: anstatt einer mit dem Magneten und mit dem Gehäuse verbundenen Feder setzt man zwei um einen gewissen Betrag Δx vorgespannte Druckfedern ein, siehe Abbildung 3-1.

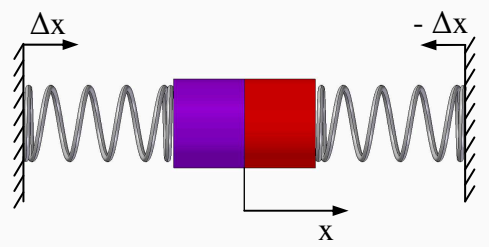

Abbildung 3-1 Magnet mit zwei um Δx vorgespannten Druckfedern

Die gesamte Vorspannung der Feder, also 2·Δx, sollte dem ausgelegten Arbeitsbereich des Schwingaktors entsprechen. Im vorgespannten Zustand hat eine lineare Feder die Kraft

$$F_{c_1} = c \cdot (\Delta x - x)$$

und die andere lineare Feder

$$F_{c_2} = -c \cdot (x + \Delta x)$$

Die Abbildung 3-2 zeigt drei resultierende Federkennlinien, die sich aufgrund der Federvorspannung bei verschiedenen Kennlinien der einzelnen Feder ergeben. Sind die vorgespannten Federn linear, so ist die resultierende Federkraft

$$F_c = F_{c_1} + F_{c_2} = c \cdot (\Delta x - x) - c \cdot (x + \Delta x) \Rightarrow$$

$$F_c = -2 \cdot c \cdot x \Rightarrow$$

$$F_c = -C \cdot x \qquad x \in [-\Delta x, \Delta x] \qquad \textbf{(3-1)}$$

mit einer neuen gesamten Federsteifigkeit

$$C = 2 \cdot c \tag{3-2}$$

welche von der Vorspannung der Feder unabhängig ist.

Der Verlauf der resultierenden Federkraft ist in der Abbildung 3-2 im linken Diagramm dargestellt. Die so zusammengesetzten vorgespannten linearen Federn können gemäß (3-1) als eine lineare Feder mit doppelter Steifigkeit betrachtet werden. Somit können alle analytischen Untersuchungen des Masse-Feder-Systems, welche im Kapitel 2.1.1 durchgeführt wurden, auch auf das System mit vorgespannten linearen Druckfedern angewendet werden.

Weist jede der vorgespannten Feder einen quadratischen Kennlinienverlauf auf, so ist die resultierende Federkraft

$$F_c = F_{c_1} + F_{c_2} = c \cdot (\Delta x - x)^2 - c \cdot (x + \Delta x)^2 \quad \Rightarrow$$

$$F_c = c \cdot \left((\Delta x)^2 - 2 \cdot \Delta x \cdot x + x^2 - x^2 - 2 \cdot \Delta x \cdot x - (\Delta x)^2 \right) \quad \Rightarrow$$

$$F_c = - C_q(\Delta x) \cdot x \tag{3-3}$$

wobei

$$C_q(\Delta x) = 4 \cdot c \cdot \Delta x \tag{3-4}$$

die resultierende, von der Vorspannung der Feder abhängige Federsteifigkeit der vorgespannten nichtlinearen Feder ist. Der Verlauf der resultierenden Federkraft ist in der Abbildung 3-2 (Diagramm in der Mitte) dargestellt. Die so vorgespannten Druckfedern mit quadratischen Kennlinien können ebenfalls als eine lineare Feder betrachtet werden, jedoch ist die resultierende Federsteifigkeit eine Funktion der Vorspannung.

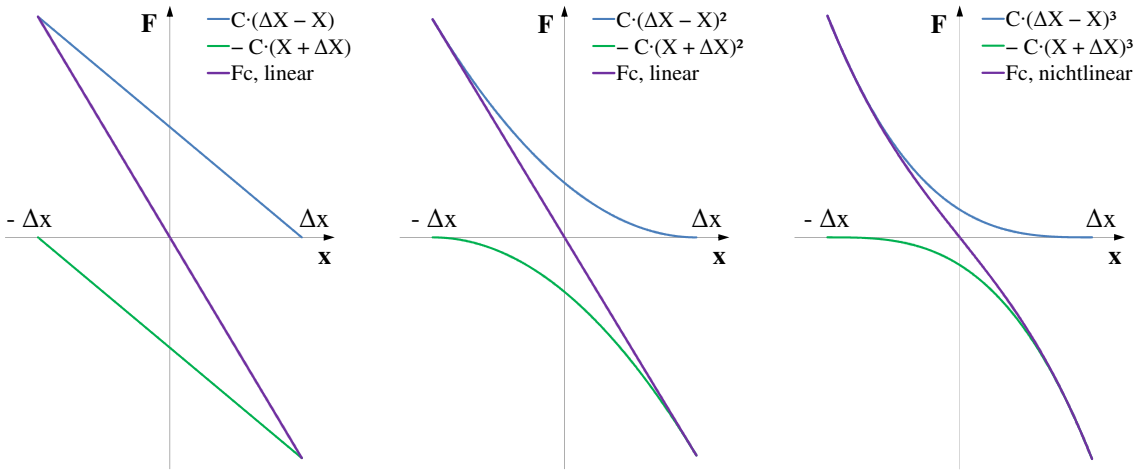

Abbildung 3-2 Federkennlinien: zwei vorgespannte Feder mit linearen (links), mit quadratischen (Mitte) und mit kubischen (rechts) Kennlinien

Haben die einzelnen Federn einen kubischen Kennlinienverlauf, so ist die resultierende Federkraft

$$F_c = F_{c_1} + F_{c_2} = c \cdot (\Delta x - x)^3 - c \cdot (x + \Delta x)^3 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F_c = {} & c \cdot \left((\Delta x)^3 + 3 \cdot \Delta x \cdot x^2 - 3 \cdot (\Delta x)^2 \cdot x - x^3 \right) \\ & - c \cdot \left((\Delta x)^3 + 3 \cdot \Delta x \cdot x^2 + 3 \cdot (\Delta x)^2 \cdot x + x^3 \right) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$F_c = -\left[2 \cdot c \cdot x^3 + C_k(\Delta x) \cdot x \right] \qquad \textbf{(3-5)}$$

Hier ist

$$C_k(\Delta x) = 6 \cdot c \cdot (\Delta x)^2 \qquad \textbf{(3-6)}$$

die resultierende, von der Vorspannung Δx abhängige Federsteifigkeit der vorgespannten Feder mit einer kubischen Kennlinie. In der Abbildung 3-2 im rechten Diagramm ist der Verlauf der resultierenden Federkraft, die für kleine Arbeitsbereiche als linear angenommen werden kann, dargestellt. Daher wird zu weiteren Betrachtungen nur die vorspannungsabhängige Federsteifigkeit (3-6) herangezogen.

Die Vorspannung Δx der linearen Feder ändert die resultierende lineare Federkennlinie nicht. Die Vorspannung der nichtlinearen Feder beeinflusst hingegen die resultierende Federsteifigkeit $C = f(\Delta x)$, welche ihrerseits die Resonanzfrequenz

$$\Omega_{res} = \sqrt{\frac{C(\Delta x)}{m} - 2k^2} \qquad \textbf{(3-7)}$$

bestimmt und somit auch auf die Übertragungsfunktion

$$H(\Omega, C) = \frac{1}{\sqrt{\left[C(\Delta x) - m\Omega^2 \right]^2 + (d\Omega)^2}} \qquad \textbf{(3-8)}$$

des Schwingaktors einwirkt. Aus der Gleichung für die Resonanzfrequenz (3-7) folgt:

$$C(\Delta x) = m \cdot \left(\Omega_{res}^2 + 2k^2 \right) \qquad \textbf{(3-9)}$$

wobei die Federsteifigkeit $C(\Delta x)$ in (3-9) im Fall der quadratischen Federkennlinien die resultierende Federsteifigkeit entsprechend (3-4) aufweist

$$C(\Delta x) = C_q(\Delta x) = 4 \cdot c \cdot \Delta x$$

Somit ergibt sich ein nichtlinearer Zusammenhang

$$\Delta x_q = \alpha_q \cdot \Omega_{res}^2 + \beta_q \qquad \textbf{(3-10)}$$

mit

$$\alpha_q = \frac{m}{4 \cdot c} \quad \text{und} \quad \beta_q = \frac{m}{2 \cdot c} \cdot k^2$$

Für den Fall der kubischen Federkennlinien und unter der Annahme, dass die resultierende nichtlineare Federkraft entsprechend (3-5) näherungsweise als linear betrachtet werden kann, besonders dann, wenn der Arbeitsbereich doppelt so klein ist als die Vorspannung Δx, stellt sich für (3-9) mit C(Δx) gemäß (3-6) ein nahezu linearer Zusammenhang ein

$$\Delta x_k = \sqrt{\alpha_k \cdot \Omega_{res}^2 + \beta_k} \qquad \textbf{(3-11)}$$

mit

$$\alpha_k = \frac{m}{6 \cdot c} \quad \text{und} \quad \beta_k = \frac{m}{3 \cdot c} \cdot k^2$$

Die Gleichungen (3-10), bzw. (3-11) zeigen, dass es bei den quadratischen Federkennlinien einer vierfachen Änderung der Federvorspannung Δx bedarf, um die doppelte Änderung der Resonanzfrequenz zu erreichen, bzw. die doppelte Änderung der Federvorspannung auch die doppelte Änderung der Resonanzfrequenz zur Folge hat, was einen annähernd linearen Zusammenhang bedeutet, wenn jede der vorgespannten Feder eine kubische Kennlinie aufweist. Die Abbildung 3-3 stellt diese Zusammenhänge graphisch dar.

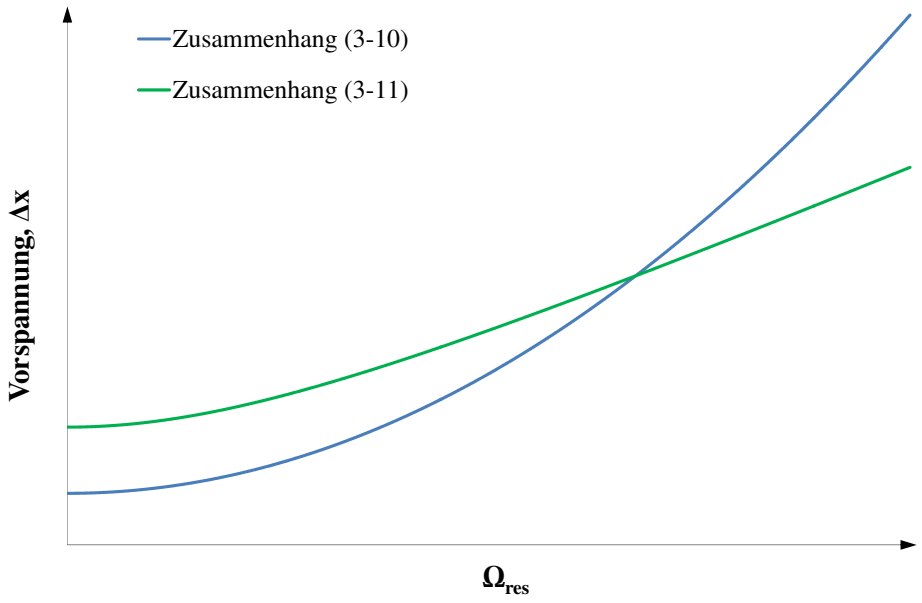

Abbildung 3-3 Graphische Darstellungen der Zusammenhänge (3-10) und (3-11)

Soll die Übertragungsfunktion H des Systems bei variierbarer Erregerfrequenz Ω konstant bleiben, um eine von der Erregerfrequenz unabhängige Schwingungsamplitude bei gleicher Erregerkraft F_0 zu erreichen, so ist dies mittels der Änderung der Federvorspannung Δx möglich. Aus der Gleichung für die Übertragungsfunktion (3-8) folgt:

$$C(\Delta x) = m\Omega^2 + \sqrt{H^{-2} - (d\Omega)^2} \tag{3-12}$$

Für den Fall der quadratischen Federkennlinien und der daraus resultierenden linearen Federkennlinie (3-3) ergibt sich (3-12) zu

$$C_q(\Delta x) = m\Omega^2 + \sqrt{H^{-2} - (d\Omega)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta x_q = \frac{1}{4 \cdot c} \cdot \left(m\Omega^2 + \sqrt{H^{-2} - (d\Omega)^2} \right) \tag{3-13}$$

Im Fall der kubischen Federkennlinien und des daraus resultierenden, nahezu linearen Zusammenhangs (3-5) lässt sich die Gleichung (3-12) umschreiben:

$$C_k(\Delta x) = m\Omega^2 + \sqrt{H^{-2} - (d\Omega)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta x_k = \sqrt{\frac{1}{6 \cdot c} \cdot \left(m\Omega^2 + \sqrt{H^{-2} - (d\Omega)^2} \right)} \tag{3-14}$$

Die Gleichungen (3-13), bzw. (3-14) zeigen, dass es einer zur Erregerfrequenz quadratischen, bzw. näherungsweise linearen Änderung der Federvorspannung Δx bedarf, um die Übertragungsfunktion und somit auch die Schwingungsamplitude unabhängig von der Erregerfrequenz konstant zu halten, siehe Abbildung 3-4. Der gewünschte, konstant zu haltende Wert von H muss die Bedingung $d \cdot \Omega \cdot H \leq 1$ erfüllen, damit der Ausdruck unter der Wurzel in der Gleichung (3-13) sowie (3-14) positiv bleibt.

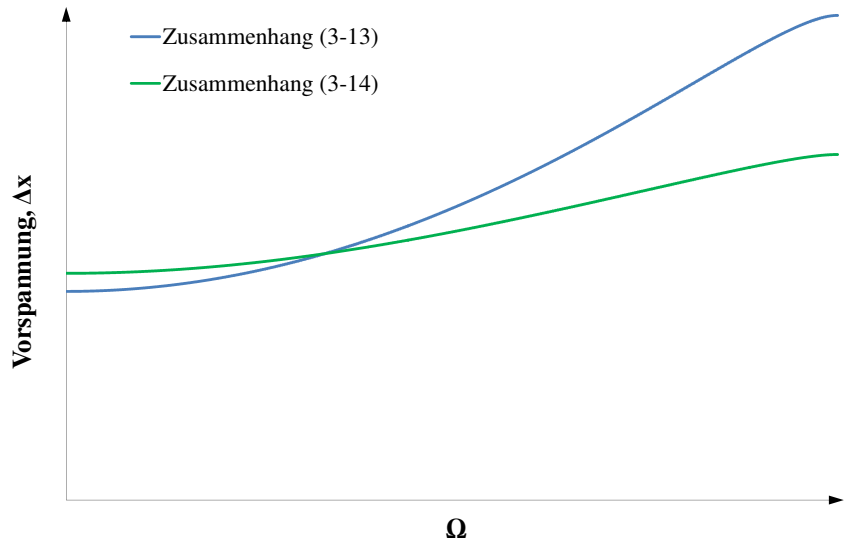

Abbildung 3-4 Graphische Darstellung des Zusammenhangs (3-13) sowie (3-14)

3.1 Einstechen in die Haut

Nach den zahlreichen theoretischen Abhandlungen zu der Bewegungsgleichung des mechanischen, schwingenden Systems und den daraus resultierenden Anwendungs- und Steuerungsmöglichkeiten sowie der Reglersynthese und den analytischen Betrachtungen des elektromagnetischen Modells, die für das Verständnis der Funktionsweise und für die Auslegung sowie die spätere Optimierung des linearen Schwingaktors notwendig sind, werden nun konstruktive Umsetzungen des beschriebenen Schwingantriebs vorgestellt und näher erläutert.

Am Anfang der Entwicklung des elektrodynamischen, linearen Schwingaktors stand die Überlegung, ob sich die Erregerspule (wie beim Tauchspulenprinzip, siehe Kapitel 1.3) oder der Magnet bewegen soll.

Die Windungen einer oszillierenden Erregerspule können von einer stärkeren magnetischen Flussdichte durchflossen werden, da in diesem Fall ein großer Magnet nutzbar ist, was der resultierenden Lorentzkraft zu Gute kommt. Dies erfordert allerdings die Verwendung eines großen Magneten, folglich wird mehr Bauraum beansprucht. Mechanische Schwingungen der Spule begünstigen den Wärmetransport durch die aufgewirbelte Umgebungsluft. Zudem entstehen geringere elektrische Wirbelströme in den magnetfeldführenden Teilen des Schwingaktors. Eine bewegliche Spule erfordert jedoch konstruktive Maßnahmen, um die elektrische Kontaktierung der Spule zu gewährleisten. Diesbezüglich kann man auf Erfahrungen des Lautsprecherbaus zurückgreifen und geflochtene Leitungen, bzw. flexible Leiterfolien zu verwenden. Weiterhin lässt sich die Druckfeder als elektrischer Kontakt nutzen.

Dagegen ist bei der Variante mit einer fest stehenden Statorspule und einem Läufermagneten keine flexible elektrische Kontaktierung notwendig. Dies vereinfacht den Aufbau des linearen Schwingaktors und ermöglicht eine bessere Wärmeableitung durch Kontakt der Erregerspule mit dem Gehäuse. Infolgedessen wurde der Ansatz mit beweglichen Magneten verfolgt.

Außerdem weist der NdFeB-Magnet eine geringere spezifische Massendichte (7,7 g / cm^3) auf als eine mit Kupferdraht (8,9 g / cm^3) gewickelte Spule. Das bedeutet, dass bei diesen zwei Varianten der Läufermagnet eine kleinere Schwingmasse im Vergleich zur beweglichen Spule bei gleich bleibendem Volumen besitzt. Sind die Massen gleich, so ist das Modell mit dem oszillierenden Magneten aufgrund der Einfachheit des Aufbaus zu bevorzugen.

Ein weiterer Vorteil bietet sich bei den schwingenden Magneten dadurch, dass die Trägheit des Läufermagneten das Aufstechen der Haut erleichtert. Das Abbremsen der schwingenden Masse aufgrund der Hautelastizität führt zu einer zusätzlichen Stechkraft, die umso stärker ist, je größer die Masse und die Geschwindigkeit des Läufermagneten sind.

Des Weiteren bewirkt eine große Schwingmasse die Verschiebung der Resonanzfrequenz eines mechanischen, schwingenden Systems zu seiner Eigenfrequenz, als wäre das System ungedämpft, mit den daraus folgenden Vorteilen bezüglich der auf den Läufermagneten wirkenden Erregerkraft und der Stechgeschwindigkeit, siehe Kapitel 2.1.1 Abbildung 2-9. Eine zu große Schwingmasse engt jedoch die Bandbreite des mechanischen Systems ein.

Hier muss man zwangsläufig einen Kompromiss zwischen der zum Aufstechen der Haut beitragenden Massenträgheit und der gewünschten Bandbreite eingehen. Bei den aufgebauten Prototypen wurde daher die Schwingmasse auf ca. 7 g beschränkt.

Wie bereits erwähnt, wurden die meisten Prototypen ohne magnetischen Rückschluss aufgebaut, um die zur Erwärmung und Dämpfung beitragenden Wirbelströme sowie die Spuleninduktivität zu verringern und folglich eine schnelle Regelung zu ermöglichen.

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Schwingaktoren wurden primär für Anwendungen konzipiert, wo eine repetierende Stechbewegung erforderlich ist, wie beispielsweise das Einstechen in die Haut für das Pigmentieren oder das Tätowieren.

3.1.1 Funktionsmuster

Der erste Prototyp, der als Funktionsmuster auf der Grundlage eines Einweg-Nadelmoduls der Firma MT.DERM aufgebaut wurde, ist in der Abbildung 3-5 dargestellt. Die im Kapitel 2.2.4 durchgeführten elektromagnetischen Modellrechnungen beziehen sich auf diesen ersten Schwingaktor. Darüber hinaus wurden die im Kapitel 2.5 beschriebenen Steuerungstechniken und Anwendungsmöglichkeiten des Schwingaktors der Firma MT.DERM als Ergebnisse einer Machbarkeitsstudie präsentiert.

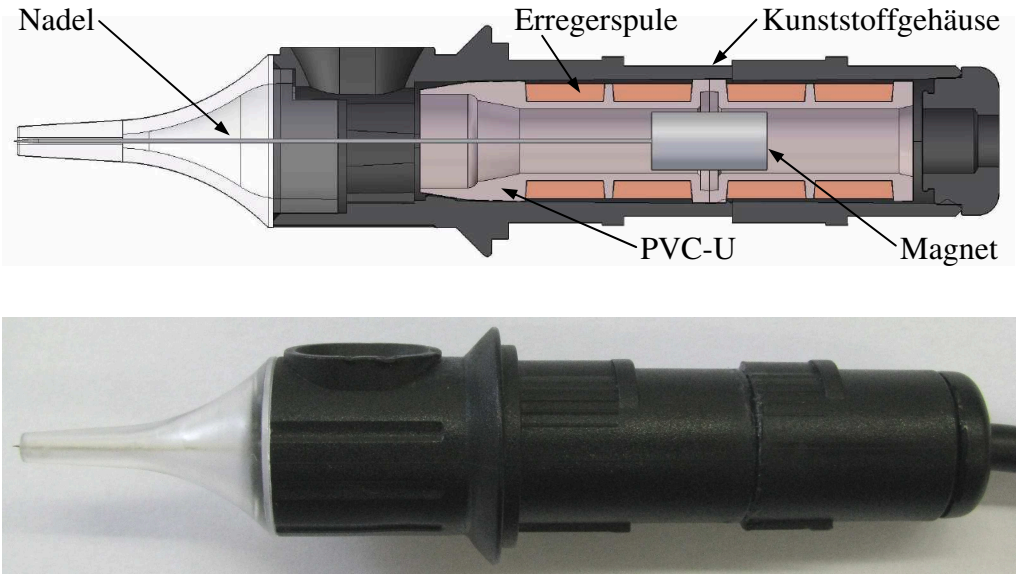

Abbildung 3-5 Erstes Funktionsmuster des elektrodynamischen, linearen Schwingaktors

Wie man der Abbildung 3-5 entnehmen kann, weist das erste Funktionsmuster des Stechaktors eine Erregerspule auf, die als Luftspule aufgebaut ist. Die Druckfedern sind im Bild nicht dargestellt.

Als Erregerspule dienen vier Spulen, die mit einem dünnen isolierten Kupferdraht (0,06 mm) gewickelt und parallel zusammen geschaltet wurden. Die so gebildete Erregerspule besitzt einen kleinen elektrischen Widerstand R = 17,7 Ω sowie infolge der Parallelschaltung eine geringere Induktivität von 0,9 mH.

Die Modellrechungen mit MAXWELL haben gezeigt, dass ein solcher Schwingaktor eine geringere Lorentzkraft im Vergleich zu einem Modell mit magnetfeldführendem Rückschluss aufweist. Ein weichmagnetischer Rückschluss bewirkt bei diesem Aktor eine 70- bis 80-prozentige Erhöhung der magnetischen Kraft, abhängig von der radialen Dicke der Erregerspule und dem Durchmesser des Läufermagneten. Es besteht also ein Optimierungspotenzial. Dazu mehr im Kapitel 4.

Die Abbildung 3-6 zeigt das Frequenzverhalten des ersten funktionsfähigen Schwingaktors. Die blaue Linie repräsentiert den reziproken theoretischen Frequenzgang. Dagegen verdeutlicht die rote Linie den realen Verlauf der erforderlichen maximalen Erregerkraft F_0 in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz, damit sich eine konstante maximale Schwingungsamplitude von einem Millimeter einstellt. Durch Anpassung der theoretischen Übertragungsfunktion wurden die Luftdämpfung und die tatsächliche Schwingmasse (die Nadel und die Windungen der Druckfeder inklusiv) bestimmt. Es ergaben sich folgende Werte:

Schwingmasse m = 0,8 g

Federsteifigkeit c = 400 N / m

Dämpfung d = 0,053

Resonanzfrequenz $\Omega_{res} \approx 105$ Hz

Bandbreite $\Delta\Omega \approx 70$ Hz

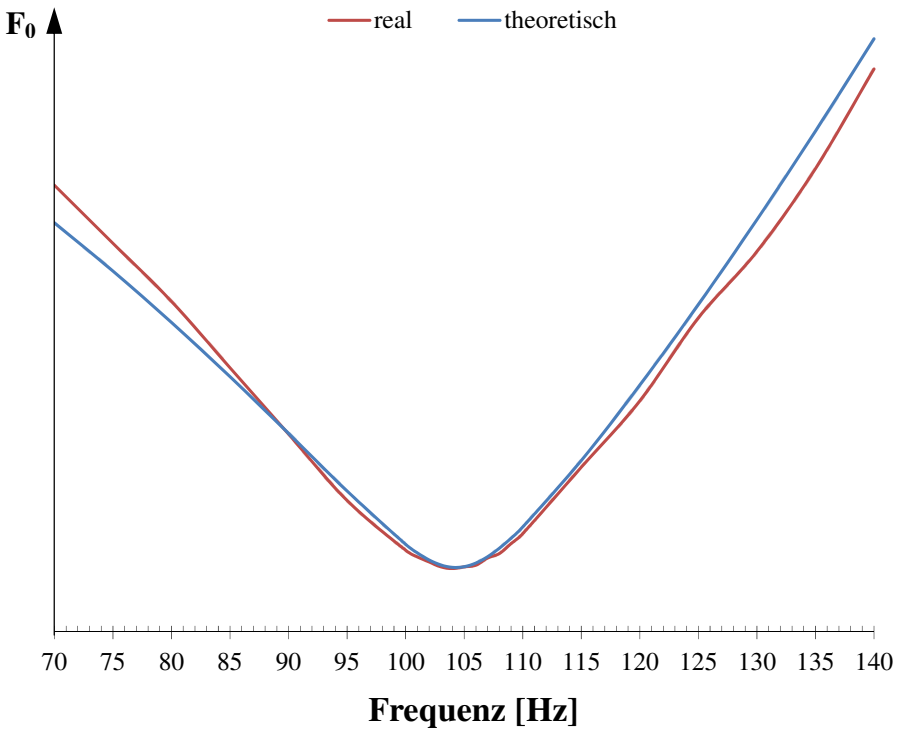

Abbildung 3-6 Inverse Übertragungsfunktion des ersten Schwingaktors für x_0 = 1 mm

Weil die Kraft-Weg-Kennlinie des Schwingantriebs aufgrund der Abhängigkeit der Lorentzkraft von der Position des Läufermagneten (siehe Kapitel 2.2.4 Abbildung 2-43) einen nichtlinearen Charakter aufweist, wurde die Skalierung des Funktionsmusters auf eine maximale Schwingungsamplitude von 1 mm bezogen. Tatsächlich beträgt die maximale Schwingungsamplitude des vorgestellten Funktionsmusters konstruktionsbedingt vier Millimeter (die Länge des Läufermagneten beträgt 8 mm).

Das Funktionsmuster wurde vom Rechner aus mit Hilfe der im LabVIEW-Programm realisierten interaktiven Bedienungsoberfläche gesteuert und mit der Leistungselektronik betrieben. Stechversuche am Menschen ließen sich mit diesem ersten Funktionsmuster nicht durchführen, da sowohl die auf den Läufermagneten wirkende magnetische Kraft als auch die Schwingmasse zu gering waren, was eine mäßige Stechkraft zur Folge hatte.

Nach der erfolgreichen Demonstration des linearen Schwingantriebs wurden weitere Prototypen des Stechaktors, welche die Verwendung von sterilen Einwegmodulen erlauben, aufgebaut und an den Testpersonen getestet.

3.1.2 Stechaktor für Anwendungen im Tattoobereich

Der erste Prototyp des Stechaktors im assemblierten Zustand und die dazugehörige Zusammenbauzeichnung sind in der Abbildung 3-7 zu sehen. Die Druckfeder und die Erregerspule sind in der Konstruktionszeichnung nicht dargestellt. Es wurde ein NdFeB-Magnet ø7 x 10 mm (B_r = 1,2 T, H_C = 955 kA / m) [Che10] verwendet. Das Gewicht des Magneten beträgt 2,7 g. Mit diesem Läufermagneten und mit zwei Erregerspulen der radialen Wandstärke von 2 mm und einer axialen Länge von 9,5 mm, die wie beim Funktionsmuster mit einem 0,06 mm dünnen Kupferdraht gewickelt und parallel geschaltet wurden, ist eine maximale Lorentzkraft von 1,1 N bei einer Bestromung der Spulen laut Modellrechnung von jeweils AW = 250 erreichbar.

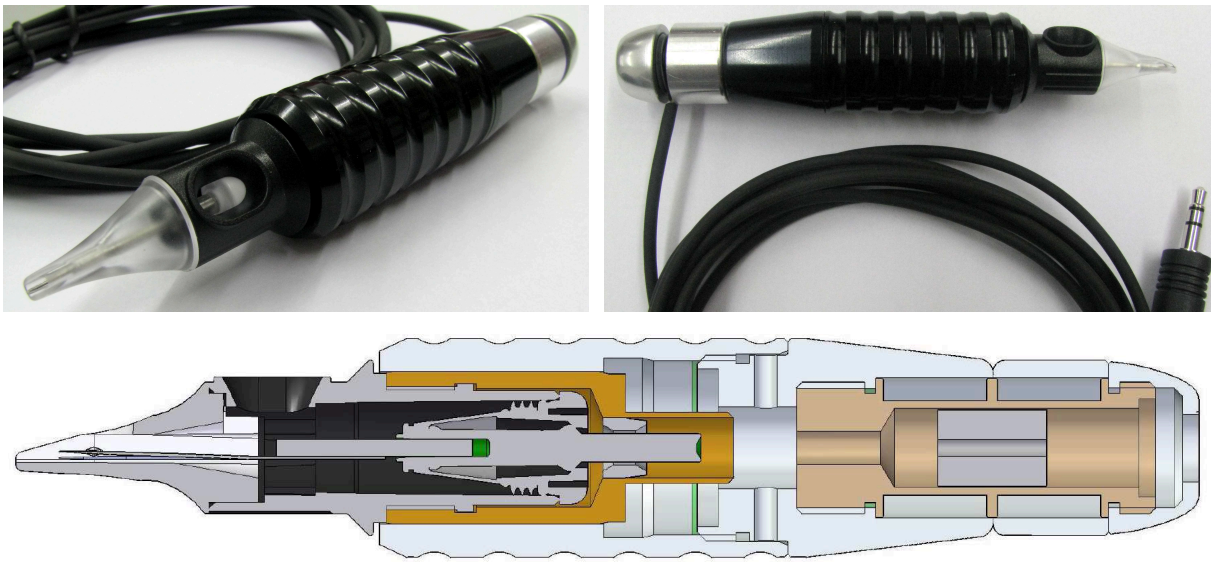

Abbildung 3-7 Stechaktor für Anwendungen im Tattoobereich und seine Konstruktionszeichnung

Die Kraftmessung zeigte jedoch einen geringeren Wert. Der Schwingaktor entwickelt eine maximale Stechkraft von ca. 0,8 N bei einer sinusförmigen Erregerspannung von acht Volt. Es wurden auch Vergleichmessungen der maximalen Stechkraft bei einer Spulen- sowie bei einer gleichstrommotorbetriebenen Tattoo-Maschine durchgeführt. Die Ergebnisse sind im Kapitel 3.2 zusammengefasst.

Wie man der Konstruktionszeichnung entnehmen kann, ist der Aktoraufbau recht einfach. Um die Montage zu erleichtern, wurde der Schwingaktor ohne magnetische Polschuhe konstruiert. Der Schwingantrieb ist von der Größe her vergleichbar mit dem zu betreibenden Einwegmodul und ist viel kleiner als die in den Tätowiergeräten üblicherweise verbauten Gleichstrommotoren, bzw. Zugankerspulen.

Die aus zwei Einzelspulen zusammengesetzte Erregerspule weist einen elektrischen Widerstand von 17,2 Ohm und eine Induktivität von 1,1 mH auf. Für das Spulengehäuse, das gleichzeitig als Gleitlagerung für den Läufermagneten fungierte, wurde der Kunststoff PVC-U verwendet. Die axiale Lagerung des Magneten wurde mit einer Spielpassung von ca. 0,2 mm ausgelegt. Die auf dem Markt erhältlichen Magnete, z. B. bei [Che10] oder [Sup11], weisen eine Toleranz der Nickelbeschichtung von ± 0,1 mm auf. Die teueren sowie kundenspezifischen Magnete sind mit einer Toleranz der äußeren Maße von ± 0,02 mm erhältlich.

Die Korrosionsbeschichtung des aus dem Seltenerdmetall Neodym im Sinterverfahren hergestellten Magneten stellt zusammen mit dem Kunststoff des Spulengehäuses eine Reibpaarung dar (Nickel / PVC-U). Um die Gleiteigenschaften zu verbessern, wurde auf den Läufermagneten sowie auf die Druckfeder zusätzlich ein dünner Film von Maschinenöl aufgetragen.

Die Abbildung 3-8 zeigt den fertig aufgebauten Schwingaktor sowie die elektromagnetische Modellrechnung mit MAXWELL. Die Resonanzfrequenz wurde durch Auswahl einer entsprechenden Druckfeder im Bereich von 100 Hz festgelegt. Die resultierende Bandbreite entsprach 50 Hz. Dieser Schwingaktor wurde später zwecks experimenteller Untersuchung des Regelungsalgorithmus (siehe Kapitel 2.8.5) mit einem Hallsensor ergänzt, um die Position des Läufermagneten erfassen zu können.

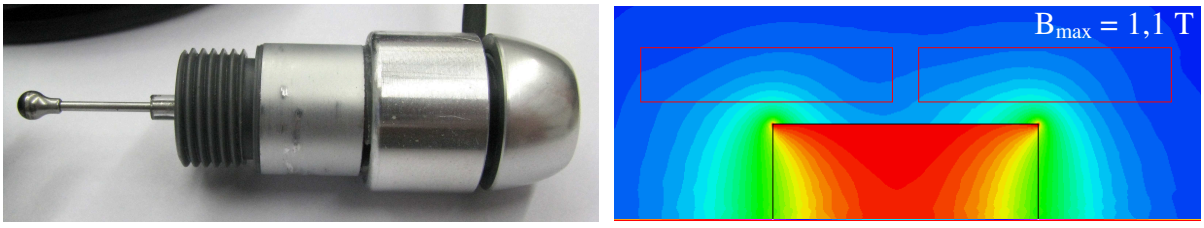

Abbildung 3-8 Fertig aufgebauter Schwingaktor (links) und die MAXWELL-Modellrechnung (rechts)

Da der entwickelte Schwingaktor sich gegenüber den herkömmlichen Stechaktoren, welche entweder von einem Gleichstrommotor, pneumatisch oder entsprechend dem Zugankerprinzip (Tattoo-Spulenmaschinen) betrieben werden, erheblich unterscheidet, war eine Erprobung des aufgebauten Stechaktors an Menschen auf seine Eignung für Tätowier- bzw. Pigmentierzwecke (Farbeintrag in die obere Hautschicht, Epidermis) unabdingbar.

Die Firma MT.DERM verfügt über einen hauseigenen Schulungsraum für Kosmetikerinnen. Die Abbildung 3-9 zeigt den Teststand mit dem Arbeitsplatz des Tätowierers und einer mit LabVIEW realisierten Benutzeroberfläche des Steuerungsprogramms, mit welchem die Einstellungen der Arbeitsparameter des Schwingaktors (Frequenz, Schwingungsamplitude) entsprechend der Arbeitsweise des Tätowierers vorgenommen wurden.

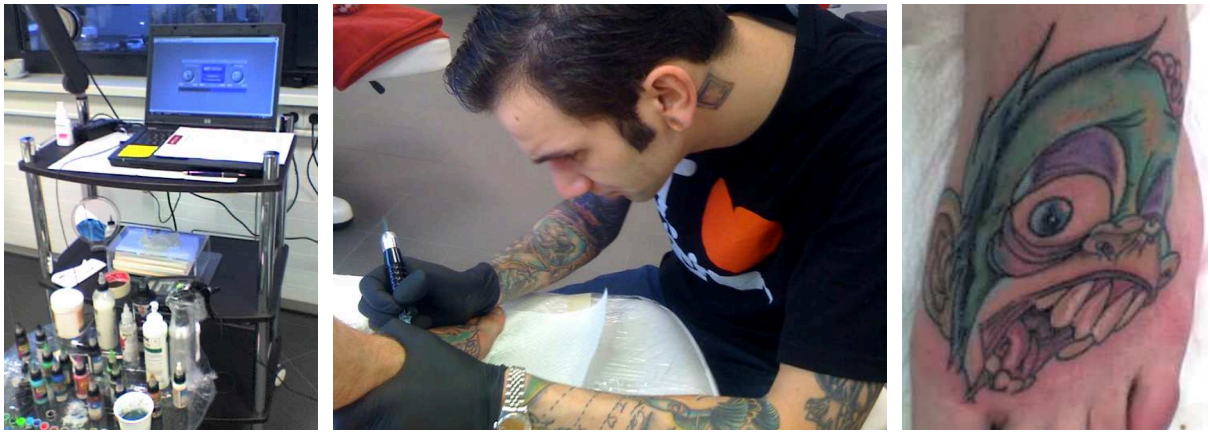

Abbildung 3-9 Teststand (links), Testversuch von Jens [Jen12] (Mitte) und das fertig gestochene Tattoomotiv (rechts) [Dem11a]

Zum Zeitpunkt der Tests war die Regelung der maximalen Schwingungsamplitude noch nicht entwickelt und implementiert. Daher reduzierte sich die Schwingungsamplitude während der Erprobung des Stechaktors, sobald man die Nadel auf die Haut aufsetzte. Die Verringerung der Schwingungsamplitude zieht die Reduzierung der Stechgeschwindigkeit nach sich, wodurch die Eindringtiefe der Nadel und somit auch der Farbeintrag gemindert wird.

Trotz der gewöhnungsbedürftigen Arbeitsweise mit dem auf der Basis der linearen Schwingantriebs aufgebauten Stechaktor konnte ein zufriedenstellendes Ergebnis erzielt werden, siehe Abbildung 3-9 rechtes Bild, was die Eignung des vorgestellten Schwingaktors für Tätowierzwecke demonstrierte. Das Tattoomotiv wurde abschließend mit einer gewöhnlichen gleichstrommotorbetriebenen Tätowiermaschine nachgebessert [Dem11a].

Der robuste Aufbau ohne Hebel und Umlenkmechanismen macht den Schwingantrieb unempfindlich gegen Stoße und verleiht ihm eine längere Lebensdauer. Zudem bewirkt ein Festhalten des Schwingers oder irgendeine Bewegungseinschränkung keine Erhöhung des elektrischen Stroms, wie es beispielsweise bei einem Gleichstrommotor der Fall ist. Hier ähnelt das Verhalten des Schwingantriebs dem einer Tätowierspulenmaschine unter Belastung. In einer weiteren Ausbaustufe ließe sich der Schwingaktor durch entsprechende Dichtungsmaßnahmen isolieren und daher autoklavierbar gestalten und medizinisch zugelassen werden.

Der Tätowierer bemängelte jedoch eine während der Arbeit mit dem Stechaktor unangenehme Vibration des Handstücks sowie die spürbar hohe Wärmeentwicklung im Bereich des Schwingantriebs, da der Schwingaktor voll ausgelastet war, um eine möglichst große Schwingungsamplitude zu erzielen [Dem11a].

Die Temperaturmessungen ergaben bei einer Vollauslastung des Schwingaktors (maximale Schwingungsamplitude 2 mm) eine starke Erwärmung des Handstücks bis zu 60 °C. Bei einer Schwingungsamplitude von einem Millimeter sind es 43 °C. Diese Temperatur ist vom subjektiven Empfinden her unangenehm. Das Tätowieren des von der Testperson ausgewählten Tattoomotivs dauerte ungefähr drei Stunden. Infolge solcher langen Sitzungen, die bis zu zehn Stunden andauern, erlangt die Reduzierung der Vibration neben der Minderung der Wärmeentwicklung eine große Bedeutung.

Wie vorn gezeigt, kann die Minderung der Schwingungsamplitude mittels Vorgabe bezüglich der Regelgüte festgelegt werden. Dies erlaubt eine anwenderdefinierte „Weichheit", das sensitive Abschwächen der Eindringtiefe der Nadel beim Tätowieren, bzw. beim Pigmentieren und bietet somit neben der Erzeugung verschiedener Geschwindigkeitsprofile sowie Bewegungsprofilmodulierung bis hin zu randomisierten Bewegungsabläufen des Stechmittels, wie z. B. Dot-Techniken (das punktweise Aufbringen der Farbe) oder das Erzielen des von vornherein nicht vorhersehbaren abstrakten Ergebnisses (Schattieren mit Musik oder das sprachmodulierte lining!) mehr künstlerische Freiheit.

Zweiter Prototyp

Nach dem erfolgreichen Test des ersten Prototypen wurde eine weitere Entwicklungsvariante des Stechaktors aufgebaut (siehe Abbildung 3-10) und ebenfalls am Menschen getestet. Der erste am Menschen erprobte Schwingantrieb besaß keine mechanische Verstellmöglichkeit des Nadelherausstands, und somit war der Ausgleich der fertigungsbedingten Streuung der Steifigkeit der Federdichtungsmembran des Einwegmoduls nicht möglich.

Vom Tätowierer waren mehr Kraftreserve sowie weniger Wärmeentwicklung gewünscht, so dass der Stechaktor leistungsfähiger und mit mechanischer Verstellung des Nadelherausstands aufgebaut wurde.

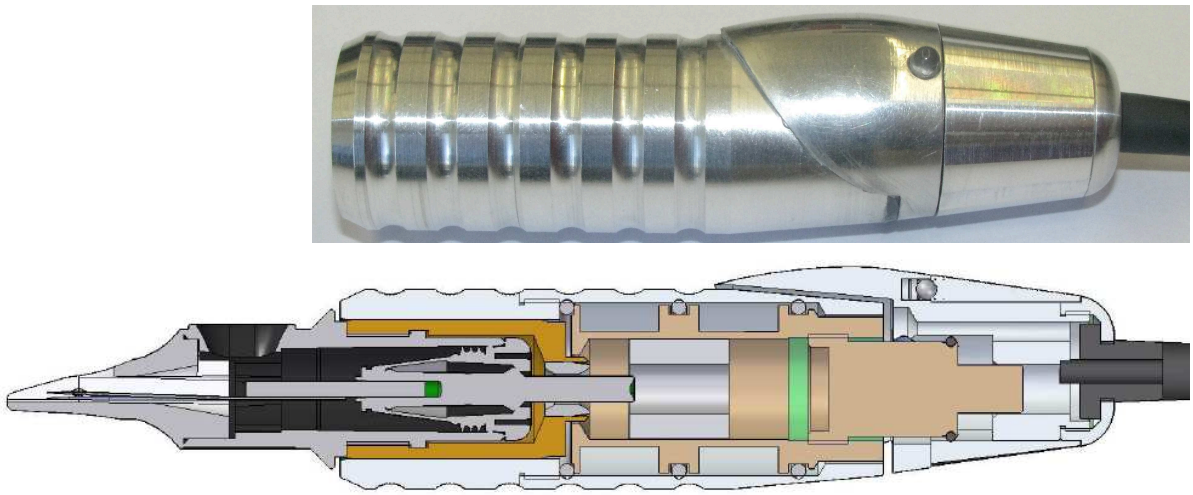

Abbildung 3-10 Weitere Variante des Stechaktors für Tätowierzwecke

Am hinteren Ende des Handstücks ist eine Drehhülse mit horizontalen Vertiefungen untergebracht. Mit Hilfe dieser Hülse wird der gewünschte Nadelherausstand eingestellt. Aufgrund der Achsenversetzung erfolgt die Übertragung der Drehbewegung der Hülse auf den Stellschaft, der die Druckfeder (im Bild nicht dargestellt) stärker oder schwächer vorspannt, mittels eines O-Rings, was die Verschiebung des Läufermagneten und somit auch des Nadelpakets im Einwegmodul zur Folge hat.

Man stellt es vorzugsweise so ein, dass die Nadelspitze im Stillstand genau an der Kante der Modulspitze anliegt. Diese Position der Nadel entspricht der Mittelstellung des Läufermagneten im Schwingaktor. Danach lässt sich der gewünschte Nadelherausstand mittels der Änderung der Schwingungsamplitude (Erhöhen oder Senken der Erregerspannung) einstellen. Auf diese Weise erreicht man, dass einerseits an der Spitze des Einwegmoduls die größte Stechgeschwindigkeit und somit auch die größte Stechkraft herrscht, andererseits die Nadel tief genug zurück ins Modul eintaucht, um von der Farbe benetzt zu werden.

Den zweiten Prototyp im assemblierten Zustand sowie in der Explosionsdarstellung zeigt die Abbildung 3-11. Auffallend ist der kompakte Aufbau des Stechaktors. Der Handstück misst wenige 77,7 mm in der Länge und wiegt nur 50 Gramm, wobei der Schwingantrieb (Erregerspule inklusive Kunststoffgehäuse) 12,5 g und der Läufermagnet zusammen mit dem Pleuel 5,8 g wiegen. Als Läufer wurde ein NdFeB-Magnet mit den Außenmaßen ø10 x 10 mm und mit einer Innenbohrung ø5 mm [Che10] eingesetzt. Es wurden für das Spulengehäuse sowie den Spulendraht die gleichen Materialien wie beim ersten Prototyp verwendet.

Aufgrund der schlechten Massenrelation (50 g zu 5,8 g) trat bei diesem Prototyp eine starke Vibration auf. Mit der Erhöhung des Gesamtgewichts mit Hilfe von Materialien wie Bronze lässt sich die Vibration ein wenig eindämmen, jedoch nicht vollständig eliminieren.

Abbildung 3-11 Stechaktor im zusammengebauten Zustand und in der Explosionsdarstellung

Die MAXWELL-Modellrechnung zeigte, dass mit einer Erregerspule mit einem Spulenquerschnitt von 2,9 mm x 8 mm (23,2 mm^2), welche mit 310 AW bestromt wird, eine maximale Lorentzkraft von ca. 1,8 N erreichbar ist.

Eine quasistatische Messung der tatsächlichen magnetischen Kraft ergab 1,2 N, was wie auch beim ersten Prototyp durch die wilde Wicklung der Erregerspule zu begründen ist, denn dadurch wird eine schlechtere Packungsdichte erzielt, siehe Kapitel 2.3.3. Aufgrund dessen wird der Spulenquerschnitt mit weniger Windungen gefüllt, was eine geringere wirksame Drahtlänge bedeutet, die in die Formel der Berechnung der Lorentzkraft (1-3) eingeht. Außerdem war die Erregerspule mit einem geringeren elektrischen Strom gespeist als es bei der Modellrechnung der Fall war.

Der Schwingaktor ist in der Abbildung 3-12 dargestellt. Seine Resonanzfrequenz ließ sich mit einer geeigneten Feder im Bereich von 100 Hz platzieren. Die Schwingmasse ist 5,8 g. Die Massenträgheit des Läufermagneten trägt zur magnetischen Kraft und somit zur gesamten Stechkraft bei. Die Erregerspule weist einen elektrischen Widerstand von 14 Ohm und eine Induktivität von 1,3 mH auf. Der Schwingaktor wurde mit dem im LabVIEW implementierten Steuerungsprogramm und mit Hilfe der Leistungselektronik betrieben. Bei einer maximalen Auslastung der Leistungselektronik ist eine maximale Schwingungsamplitude von ca. 2,5 mm im Resonanzfall erreichbar, was einen Hub von 5 mm bedeutet.

Die den Schwingaktor umhüllenden Aluminium-Teile begünstigen die elektrischen Wirbelströme, die zur Erwärmung des Stechaktors sowie zur Dämpfung des Läufers beitragen. Bei einer maximalen Auslastung des Schwingaktors wurde eine Temperatur von 53 ºC gemessen. Beim Berühren des Handstücks wird diese Temperatur vom Anwender als unangenehm bewertet. Bei einer 50-prozentigen Auslastung, was einer Schwingungsamplitude von ca. einem Millimeter entspricht, sind es nur 38 ºC.

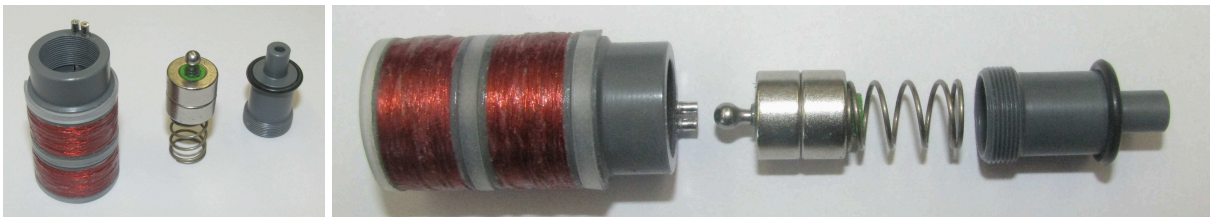

Abbildung 3-12 Einzelteile des Schwingaktors (links) und seine Explosionsdarstellung (rechts)

Abbildung 3-13 Mit dem zweiten Prototyp fertig tätowierte Motive [Rob12]

3.1.3 Stechaktor für Anwendungen im Bereich des Permanent-Make-Ups

Da für das Pigmentieren kleine Schwingungsamplituden ausreichend sind, genügt es, für diese Zwecke einen Schwingaktor zu verwenden, welcher kompakter und leistungsschwächer ist, als es beim Tätowieren der Fall war. Damit wurde ein Schwingaktor ausgelegt, der in einem kugelschreiberähnlichen Gehäuse untergebracht werden kann, vgl. Abbildung 3-14.

Die Erregerspule des Schwingantriebs weist einen elektrischen Widerstand von 16,3 Ohm und eine Induktivität von 0,6 mH auf. Der Schwingaktor misst nur 25 mm in der Länge und hat einen Durchmesser von 9 mm. Aufgrund der sehr geringen Masse des Stechaktors tritt eine sehr starke Vibration des Handstücks auf, die für den Benutzer unangenehm, sogar störend für die feine Arbeit der Pigmentiererin ist. Zudem erwärmt sich der Schwingaktor stark. Es wurden keine weitere Optimierungsmaßnahmen eingeleitet, da dieser Prototyp zur Demonstration aufgebaut wurde.

Um die Vibration im Betrieb zu reduzieren, wurde ein zweiter Läufermagnet mit dem ersten kinematisch gekoppelt, so dass eine gegenläufige lineare Bewegung der beiden Magnete entstand. Die Schwingungsamplituden der Läufermagnete sind gleich, jedoch um 180 Grad phasenverschoben. Aufgrund dessen hebt sich die Vibration auf.

Der Aufbau des Schwingantriebs mit gegenläufigen Magneten ist in der Abbildung 3-15 dargestellt. Die Versuche zeigten, dass in die axiale Richtung keine spürbare Vibration mehr vorhanden ist.

Abbildung 3-14 Stechaktor für Pigmentierzwecke

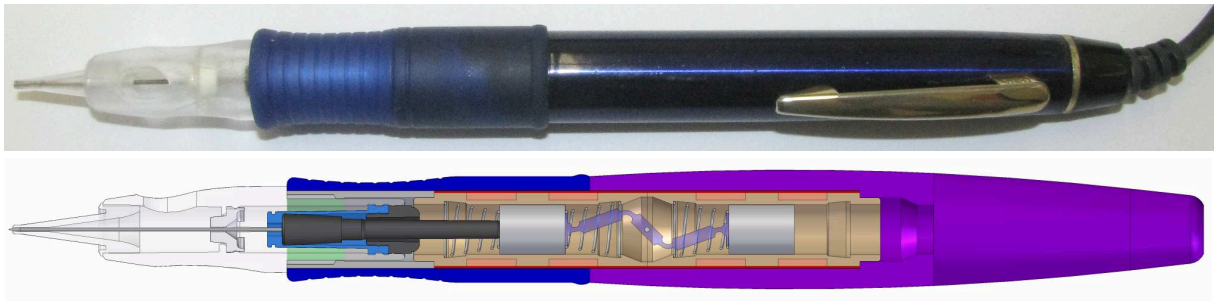

Abbildung 3-15 Stechaktor mit Gegenläufer

3.1.4 Stechaktor für Anwendungen im Bereich der Injektion

Um zu überprüfen, ob sich der lineare Schwingaktor auch zur Erzeugung von Einzelstichen eignet, das für das Injizieren verschiedener Wirkstoffe von Bedeutung sein kann, wurde ein Stechaktor konstruiert, der sowohl einen Einzelstich als auch eine repetierende Bewegung des Stechmittels, z. B. einer Kanüle ermöglicht. Der Schwingaktor wurde für einen Einzelstich mit einer Amplitude von ca. 15 mm ausgelegt. Die Oszillationsbewegung sollte im Resonanzfall (100 Hz) eine maximale Schwingungsamplitude von 2 mm erreichen.

Die Abbildung 3-16 zeigt die Baugruppen des Stechaktors. Die Erregerspule des Schwingantriebs weist einen elektrischen Widerstand von 4,8 Ohm und eine Induktivität von 0,5 mH auf. Der Läufermagnet ist zwischen zwei Druckfedern eingespannt. Die Steifigkeit der Druckfeder lässt sich in zwei Stufen einstellen. Dies wird mittels zwei in Reihe geschalteter Druckfedern, die verschiedene Steifigkeiten aufweisen, realisiert. Bei der Feder-Serienschaltung wird als erste die schwächere Druckfeder bis zum Anschlag gespannt. Die äußere, steifere Druckfeder gibt dann die resultierende Steifigkeit an. Der Stechaktor kann nun mit 100 Hz betrieben werden. Löst man die Vorspannung, so ergibt sich eine insgesamt schwächere Federsteifigkeit, der Stechaktor ist im Einzelstichmodus. Die Abbildung 3-17 zeigt den Stechaktor in diesen zwei Moduszuständen.

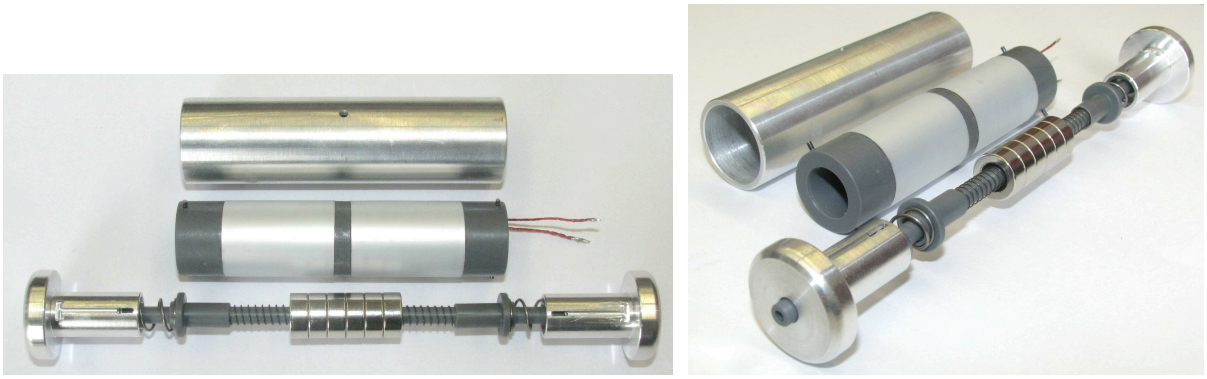

Abbildung 3-16 Stechaktor für Injektion

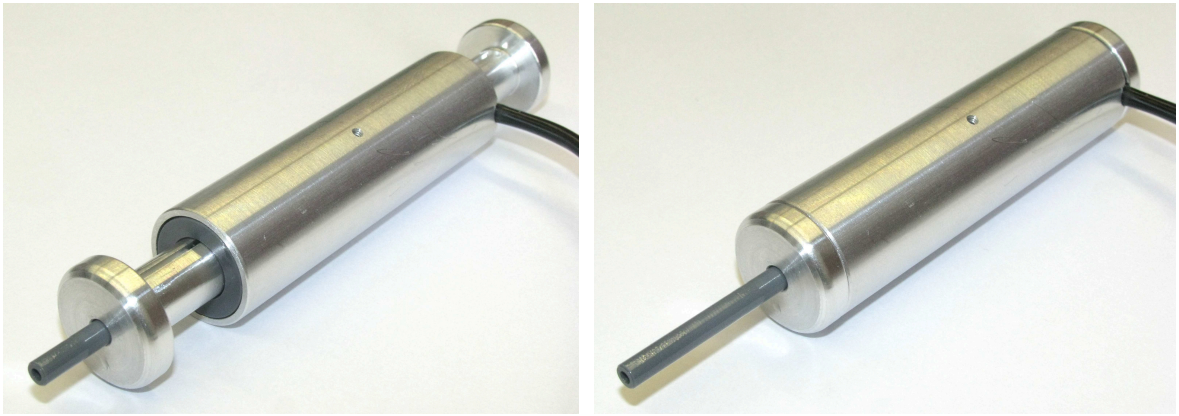

Abbildung 3-17 Stechaktor für Injektion, Einzelstich-Modus (links) und repetierend 100 Hz (rechts)

Um die Funktion des Stechaktors zu überprüfen, wurde ein Teststand aufgebaut, siehe Abbildung 3-18 linkes Bild. Das rechte Bild in der Abbildung 3-18 zeigt das Testergebnis bei einem Stechversuch an einer Schweinehaut. Dabei wurde eine Stechtiefe bis zu 10 mm erreicht. Gestochen wurde mit einer Kanüle im Einzelstichmodus. Weitere Stechversuche wurden aufgrund der fehlenden Fluidik- sowie Messvorrichtung nicht durchgeführt.

Abbildung 3-18 Der Teststand (links) und das Testergebnis an der Schweinehaut (rechts)

3.2 Zusammenfassung

Da es fast unmöglich ist, die für das Tätowieren erforderliche Stechkraft analytisch zu ermitteln, wurden Vergleichsmessungen durchgeführt, um Orientierungswerte zu erhalten. Als Referenz wurden eine gleichstrommotorbetriebene und eine Spulen-Maschine gewählt. Die Messungen ergaben bei der gleichstrommotorbetriebenen Tattoomaschine aufgrund der Hebelwirkung eine maximale statische Kraft von 3,5 N. Dagegen zeigte die Spulen-Maschine nur 1,2 N. Die Kraft ist von den Einstellungen des Zugankers zur Spule sowie im Fall der gleichstrommotorbetriebenen Tattoomaschine vom Nadelherausstand abhängig. Sobald die Maschinen eine repetierende Bewegung ausführten, wurde eine dynamische Kraft von 1 N bei beiden Referenzmaschinen gemessen.

Während der Entwicklung des elektrodynamischen, linearen Schwingaktors wurden zahlreiche Selbstversuche (Stechversuche) durchgeführt, um zu überprüfen, ob die in vorigen Kapiteln vorgestellten Stechaktoren eine ausreichende Stechkraft entwickeln. Abgesehen von den mit MAXWELL errechneten und nach dem Aufbau des Stechaktors gemessenen Kräften war es erforderlich, die Stechversuche an Menschen durchzuführen, um die Eignung des Schwingaktors für Tätowier-, bzw. Pigmentierzwecke zu bestätigen. Die Stechversuche haben gezeigt, dass der entwickelte Schwingaktor das Einstechen in die menschliche sowie tierische Haut ermöglicht.

4 Optimierungsansätze

Die in diesem Kapitel vorgestellten Optimierungsansätze betreffen die erreichbare Stechkraft, die Lebensdauer des Schwingaktors sowie dessen Anwendungsfreundlichkeit (geringere Wärmeentwicklung und Vibration).

4.1 Mechanisches Modell

Betrieb im Resonanzfall

Im zweiten Kapitel wurde gezeigt, dass bei der Erregerfrequenz, die der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften, mechanischen Systems entspricht, zum Zeitpunkt der höchsten Geschwindigkeit der Schwingmasse die größte Lorentzkraft auf den Läufermagneten wirkt. Bei schwacher Dämpfung oder großer Schwingmasse kann die Resonanzfrequenz mit geringer Abweichung gleich der Eigenfrequenz ω_0 angenommen werden. Resonanz bedeutet, dass bei einer bestimmten Erregerfrequenz weniger Kraft für das Erreichen der gewünschten Schwingungsamplitude erforderlich ist. Daher sollte der Schwingaktor vorzugsweise in Resonanz betrieben werden.

Dies schränkt jedoch die Einstellungsmöglichkeiten ein, da der Anwender (Tätowierer oder Pigmentiererin) auch mit anderen Frequenzen pigmentieren oder tätowieren will, als nur mit der durch den Resonanzbetrieb vorgegebenen Einstellung. Der Betrieb des Schwingaktors außerhalb seiner Resonanzfrequenz zieht eine Reduzierung der Schwingungsamplitude nach sich. Hierfür wurde am Anfang des dritten Kapitels dargelegt, dass sich mittels einer gezielten Vorspannung der Druckfedern, welche eine quadratische oder kubische Kennlinie aufweisen, die resultierende Steifigkeit ändern lässt und somit die Übertragungsfunktion des Schwingaktors gleich bleibt, was eine frequenzunabhängige Schwingungsamplitude zur Folge hat. Aufgrund dessen stellt sich für die ausgewählte Arbeitsfrequenz immer der Resonanzfall ein, wodurch die auf den Läufermagneten wirkende Kraft sowie die Stechgeschwindigkeit gleichzeitig ihre Höchstwerte erreichen.

Ausnutzung der Massenträgheit

Um die Stechkraft zu erhöhen, lässt sich die Massenträgheit des Läufermagneten nutzen. Eine zu große Schwingmasse engt jedoch die Bandbreite des mechanischen Systems ein. Zudem ist eine große Schwingmasse für eine schnelle Regelung von Nachteil. Stellt man keine hohe Anforderungen an die Regelungsgeschwindigkeit, z. B. wenn es ausreicht, die maximale Schwingungsamplitude zu regeln, so ist ein voluminöser Läufermagnet für die resultierende Stechkraft vorteilhaft, nicht zuletzt wegen der aufgrund seines Volumens steigenden magnetischen Flussdichte im Luftspalt.

Die Auswahl geeigneter Materialien (z. B. selbstschmierende Kunststoffe), ermöglicht die Reduzierung der Gleitreibung. Ein Läufermagnet mit einer Innenbohrung mindert die Luftdämpfung. Dies erhöht den Wirkungsgrad des Schwingaktors.

4.2 Elektromagnetisches Modell

Starker NdFeB-Magnet

Wie bereits angedeutet, ist ein Permanentmagnet mit großem Energieprodukt von Vorteil. Es sind mittlerweile sehr gute Seltenerdpermanentmagnete erhältlich, mit einer hohen Remanenz und Koerzitivfeldstärke sowie guter Korrosions- und Temperaturbeständigkeit [Sup11].

Rückschluss

Ein weichmagnetischer Rückschluss steigert die Lorentzkraft um ca. 25 Prozent, begünstigt jedoch die Wirbelströme, die zur Erwärmung beitragen. Mit dem Einsatz eines hochsilizierten Eisens, beispielsweise des Elektroblechs TRAFOPERM der Firma Vacuumschmelze GmbH & Co. KG [Vac12] als Rückschluss, können die Wirbelströme erheblich reduziert werden.

Spule

Eine geeignete (orthozyklische) Wickeltechnik ermöglicht eine hohe Packungsdichte. Dadurch lassen sich mehr Windungen in einem Spulenquerschnitt unterbringen, was die Lorentzkraft positiv beeinflusst. Es wurde gezeigt, dass ein dünner Spulendraht eine höhere Stromdichte verträgt als ein dicker. Zusammen mit der Windungszahl ergibt sich ein für die Lorentzkraft signifikantes Produkt $AW = N \cdot I$ (Ampèrewindungen). Der Ohm'sche Widerstand der Erregerspule verursacht eine Verlustleistung $P = R \cdot I^2$, die in Wärme umgewandelt wird. Eine lange Spule mit einer kleinen radialen Dicke bietet mehr Kontaktfläche für den Wärmetransport.

Die Spuleninduktivität hat Einfluss auf die Stromdynamik. Das muss man bei der Auswahl des Regelungsalgorithmus berücksichtigen. Es gilt, die Induktivität möglichst gering zu halten, was einerseits mittels Reduzierung der Windungszahl, andererseits durch Verzicht auf den weichmagnetischen Rückschluss, das den magnetischen Widerstand erhöht, erfolgen kann.

5 Minderung der Vibration

Im Betrieb ist nicht die objektive, mit Sensoren vermessene Vibration maßgebend, vielmehr ist es die subjektive Wahrnehmung des Menschen, welche ein angenehmes Arbeiten bestimmt. Die Anwendungstests bei den Tätowierern haben gezeigt, dass die Reduzierung der Vibration des Stechaktors von großer Bedeutung ist, denn aufgrund der oszillierenden Bewegung des Läufermagneten entsteht eine Vibration, die auf Dauer (wegen des vielstündigen Tätowierens) ein unangenehmes Gefühl in den Fingern des Benutzers hervorruft. Bereits ab 80 Hz wird die Vibration des Stechaktors lästig und störend für das präzise Arbeiten des Tätowierers, bzw. der Pigmentiererin.

Es wurden zwei Ansätze zur Vibrationsreduzierung untersucht.

Entkopplung

Zunächst wurde untersucht, ob die Entkopplung des Schwingaktors vom Gehäuse des Stechaktors zu einer Reduktion der Vibration führt. Die Abkopplung des Schwingantriebs kann auf verschiedene Weise realisiert werden. Es wurde eine elastische (mit Hilfe von Silikon- oder Gummiringen) Verbindung zwischen dem Schwingaktor und der äußeren Hülle des Stiftes nachmodelliert. Man betrachtet daher das gesamte mechanische System als einen Drei-Massen-Schwinger: Läufermagnet m_1, Spulengehäuse m_2 und die Außenteile (Gehäuse) des Stechaktors m_3, wobei noch eine weitere, vierte Masse, die Masse der den Stechaktor haltenden Hand des Benutzers zum System addiert werden muss. Diese lässt sich aber als unendlich groß ansetzen und wird daher vernachlässigt.

Ein mögliches Vorgehen ist, die Massen so zu wählen, dass bei der Anregung des Läufermagneten (m_1) die Masse m_3 keine, bzw. sehr geringe Schwingungen aufweist. Das bedeutet, dass m_2 (Spulengehäuse) eine oszillierende, lineare Bewegung durchführen muss. Die analytischen Betrachtungen des Drei-Massen-Schwingers zeigten eine Minderung der Vibration, jedoch bei einer großen Masse m_3. Aufgrund einer elastischen Verbindung zwischen m_3 und m_2 oszilliert die letztere, was die Schwingungsamplitude des Läufermagneten (m_1) mindert, da sich m_1 im Koordinatensystem von m_2 befindet.

Weil das Gehäuse des Stechaktors (m_3) schwer sein muss, kann somit die gesamte Masse des Stechaktors groß gewählt werden, ohne jegliche Abkopplungsmaßnahmen. Hierfür wurde bei den einigen, bereits aufgebauten Prototypen das Aluminium-Gehäuse durch Messing-Teile ersetzt. So wurde z. B. der zweite Prototyp aus dem Kapitel 3.1.2 nachgerüstet. Bei der doppelten Gesamtmasse des Stechaktors (100 g) im Vergleich zur vorigen Variante (50 g) trat eine geringere Vibration auf. Die vollständige Eliminierung der Vibration ist jedoch bei dieser Maßnahme, wenn man die Gesamtmasse des Stechaktors auf 200 g begrenzt, nicht möglich.

Gegenläufer

Eine andere, in der Technik sehr verbreitete Lösung, sieht die Einführung eines zusätzlichen Glieds mit gleicher Oszillationsamplitude wie die Nutzschwingung, aber um 180° phasenverschoben vor. In der Elektrotechnik ist es die symmetrische Signalübertragung zur Rausch- und Störunterdrückung oder Feedback destroying (Rückkopplungsunterdrückung) bei der Beschallung von Konzerthallen [Gör08]. In der Mechanik sind es die Ausgleichsgewichte bei den rotierenden, oder die Gegenläufer bei linear oszillierenden Teilen.

Im Fall des linearen Schwingaktors genügt es, einen weiteren gleich aufgebauten Schwingantrieb in Reihe mit dem ersten zu schalten. Dabei ist zu beachten, dass die Schwingungen der beiden Läufermagneten eine gleiche und in der Phase um 180° verschobene Amplitude aufweisen. Bei der Anregung der Läufermagneten egalisieren sich die auf das Gehäuse des Schwing-, bzw. Stechaktors wirkenden Kräfte. Die Vibration wird eliminiert.

Die Einhaltung dieser Bedingung kann nur dann gewährleistet werden, wenn die beiden Schwingaktoren einen vollständig identischen Aufbau mit gleichen Teilen aufweisen. Unterscheidet sich beispielsweise eine der Erregerspulen in der Anzahl der Windungen, so wirken auf den Läufermagneten verschiedene Erregerkräfte, und es kommt trotz einer gegenläufigen Bewegung zur Vibration. Sind die Reibkräfte unterschiedlich stark ausgeprägt oder die Federsteifigkeiten und die Dämpfungskonstanten nicht identisch, so treten neben den Amplitudendifferenzen noch Phasenverschiebungen in der Bewegung der Schwingmassen auf. Aufgrund dessen bedarf es einer kinematischen Kopplung der beiden Läufermagnete.

Die kinematische Gegenkopplung lässt sich vielfältig realisieren. Zum einen kann sie mittels einer doppelten Umsetzung der Bewegung (lineare - rotatorische - lineare) erfolgen, beispielsweise mit Hilfe von Zahnstangen und Zahnrad, bzw. Zahnrädern. Zum anderen ermöglichen bewegliche Glieder mit Dreh- oder elastischen Gelenken eine solche kinematische Gegenkopplung der beiden Schwingmassen, siehe Abbildung 3-14, [Dem11b].

Da die Reduzierung der Vibration nicht den Schwerpunkt der vorliegenden Dissertation darstellt, wird in diesem Kapitel nicht näher auf die Umsetzung der beschriebenen Ansätze eingegangen.

Wir können nichts sehen, solange wir nicht von der Idee besessen sind, sie in unseren Kopf aufnehmen - und dann können wir kaum etwas anderes sehen.

Henry David Thoreau

6 Zusammenfassung

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass eine oszillierende, frei konfigurierbare lineare Bewegung mit herkömmlichen Antrieben nicht möglich, zumindest sehr umständlich zu realisieren ist. Zum einen sind es die starren kinematischen Bindungen, die es verhindern, Bewegungsprofile beliebig zu modulieren, zum anderen sind es die Antriebsprinzipien, die es nicht erlauben, die Bewegungsabläufe regelungstechnisch zu kontrollieren.

Ausgehend von dem mechanischen Modell eines Ein-Massen-Schwingers wurden im zweiten Kapitel verschiedene Untersuchungen des mechanischen Systems durchgeführt. Es wurde sowohl ein lineares, als auch ein nichtlineares mechanisches System betrachtet. Die Nichtlinearitäten schrieb man in erster Linie der Kraft-Weg-Kennlinie der Feder zu.

Da es lediglich in seltenen Spezialfällen eine analytische Lösung der Bewegungsgleichung des nichtlinearen Systems gibt, setzte man bei der Untersuchung der Bewegungsgleichung die Linearität der Komponenten sowie eine harmonische Natur der Erregerkraft voraus und beschränkte sich bei der Lösungssuche auf klassische Lösungsansätze.

Die Lösung der Differentialgleichung und die daraus resultierende Übertragungsfunktion charakterisiert das mechanische, schwingende System. Es lassen sich die Resonanzfrequenz und die Bandbreite bestimmen. Je nachdem, wie stark die Dämpfung ausgeprägt ist, wird die Bandbreite größer oder enger - die Selektivität des Systems steigt. Ein Ein-Massen-Schwinger ist ein mechanischer Filter. Eine starke Dämpfung vergrößert die Bandbreite, mindert jedoch die Schwingungsamplitude. Es sind viel größere Erregerkräfte erforderlich, um der Dämpfung entgegen zu wirken. Eine schwache Dämpfung engt die Bandbreite ein, erhöht aber die maximale Schwingungsamplitude im Resonanzfall.

Die Verläufe der Erregerkraft und der Schwingungsamplitude, bzw. der Geschwindigkeit der Schwingmasse haben gezeigt, dass bei einer Erregerfrequenz, die der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems entspricht oder nahe liegt, zum Zeitpunkt der größten Geschwindigkeit der Schwingmasse auf sie auch die größte Kraft wirkt. Eine schwere Schwingmasse engt die Bandbreite ein, genauso wie eine schwache Dämpfung und verschiebt die Resonanzfrequenz des Systems zu seiner ungedämpften Eigenfrequenz. Daraus lässt sich folgen, dass im Resonanzfall und bei einer schweren Schwingmasse, die fünf bis fünfzig Mal größer ist als das Verhältnis der Dämpfungskonstante zur ungedämpften Eigenfrequenz, die Schwingmasse zum Zeitpunkt der größten auf sie wirkenden Kraft die höchste Geschwindigkeit aufweist.

Während der Untersuchung des nichtlinearen mechanischen, schwingenden Systems konnte gezeigt werden, dass neben den elliptischen Bewegungs- oder Geschwindigkeitsprofilen auch andere Bewegungsabläufe der Schwingmasse möglich sind.

Wenn beispielsweise die Feder eine quadratische oder kubische Kraft-Weg-Kennlinie aufweist, fährt die Schwingmasse ein quetschringartiges Geschwindigkeitsprofil ab, wobei auf kurzen Wegabschnitten die Geschwindigkeit nahezu konstant ist und die Schwingmasse an den Wendepunkten stärker abgebremst, bzw. beschleunigt wird. Wird das mechanische System mit einer nichtharmonischen Kraft angeregt, so sind weitere Bewegungsprofile erzeugbar. Zum Beispiel das „Nieren-Profil“ oder das „Nieren-Profil mit Schleife“ sowie bizarre Geschwindigkeitsprofile wie „Ameisenkopf“ oder „Dali“ und viele andere, siehe Kapitel 2.1.2 sowie 2.5.3.

Als Erregerkraft wird die elektromagnetische Kraft genutzt. Es wurden analytische Untersuchungen des elektromagnetischen Modells durchgeführt, welches aus einem Magnetkreis, einer Erregerspule und einem Permanentmagneten besteht. Die auf den Läufermagneten wirkende Lorentzkraft ist von der Stärke des Magneten sowie von der Anzahl der Spulenwindungen und von dem in den Windungen der Spule fließenden elektrischen Strom abhängig. Die Untersuchungen zeigten, dass es für jedes elektromagnetische Modell ein Optimum der resultierenden Lorentzkraft gibt, wobei sich jede Komponente des Magnetkreises, ausgehend von dem zur Verfügung stehenden Bauraum, optimieren lässt. So werden beispielsweise die radiale Dicke und die axiale Länge der Erregerspule so lange variiert, bis sich ein optimales Resultat ergibt. Weiterhin haben die äußeren Maße des Permanentmagneten neben seinem Magnetisierungsgrad Einfluss auf die Lorentzkraft. Zudem ist eine 25-prozentige Erhöhung der magnetischen Kraft unter dem Einsatz eines magnetischen Rückschlusses erzielbar.

Dies erhöht jedoch die Spuleninduktivität und wirkt sich somit negativ auf die Stromdynamik aus und kann die elektrischen Wirbelströme begünstigen. Als Rückschluss ist daher ein hochsiliziertes Eisen, bekannt als Elektro- oder Transformatorenblech, mit einem hohen relativen spezifischen elektrischen Widerstand zu verwenden. Die Induktivität der Erregerspule fungiert als Verzögerungsglied erster Ordnung und weist somit eine Verzögerungszeit des Stromanstiegs in den Spulenwindungen auf. Für die schnelle Regelung der Schwingungsamplitude sowie der Bewegungsprofile ist jedoch ein kurzer Stromanstieg erforderlich.

Für die optimale Parametrierung des Reglers ist die Übertragungsfunktion von großer Bedeutung. In bestimmten Fällen lässt sich jedoch die Übertragungsfunktion nicht vorab ermitteln. Besonders, wenn die Systemeigenschaften, wie z. B. die Dämpfung oder die Masse des Läufermagneten sich ändern, bzw. nicht bekannt sind. Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion wurden einige Konzepte ausgearbeitet, die es ermöglichen sollen, die Systemkomponenten zu bestimmen. Zum einen ist es aus der Analyse der Sprungantwort des mechanischen (bzw. des gesamten) Systems möglich. Zum anderen lässt sich die Übertragungsfunktion aus den Daten approximieren, die beim Anregen des Schwingaktors mit verschiedenen Frequenzen aufgenommen wurden. Die Ermittlung der Übertragungsfunktion aus der Sprungantwort des Systems ist der schnellste und von dem Standpunkt der Einsparung der Rechenleistung sowie Speicherkapazitäten gesehen der günstigste Ansatz.

Der Schwerpunkt der vorliegenden Dissertation war neben der Entwicklung des elektrodynamischen, linearen Schwingaktors auch die Ausarbeitung eines Konzepts zu dessen Steuerung und Regelung. Bei der Untersuchung der verschiedenen Regelungsansätze ergaben sich zwei Regelungsalgorithmen: der eine stellt eine in Perioden erfolgende Regelung der maximalen Schwingungsamplitude dar, der andere repräsentiert eine schnelle Positionsregelung der Schwingmasse, bzw. die Regelung des Bewegungsprofils. Da bei dem vorgestellten Schwingaktor vom Funktionsprinzip her eine Abschwächung der Schwingungsamplitude auftritt, sobald der Schwingaktor durch äußere Einflusse belastet wird (beim Stechen ist es z. B. die Hautelastizität), ist es notwendig, die Schwingungsamplitude, bzw. die Bewegungsprofile regelungstechnisch zu kontrollieren.

Der erste Regelungsalgorithmus ermöglicht eine Regelung der maximalen Schwingungsamplitude mit einer relativ geringen Erhöhung der Erregerkraft, welche Periode für Periode so lange angepasst wird, bis sich sehr kleine, abhängig von der Auflösung des AD-Wandlers des Mikrocontrollers, noch erfassbare Regelabweichung einstellt. Für das Erreichen einer einprozentigen Abweichung der Regelgröße vom Sollwert genügen drei bis fünf Schwingungen.

Der anspruchsvolle Algorithmus zur Positionsregelung der Schwingmasse bewirkt ein schnelles Ausregeln des Bewegungsprofils innerhalb einer Schwingungsperiode. Bei den beiden Ansätzen erfolgte die Reglersynthese endogen, aus dem System heraus. Mit Berücksichtigung der Spuleninduktivität stellte sich die Notwendigkeit der Stromregelung heraus. Dabei sind höhere, bis zu 50 V-Stellspannungen erforderlich, um das sehr schnelle Ausregeln des Bewegungsprofils zu gewährleisten. Lässt man eine Anfangsabweichung zu, so folgt die Schwingmasse dem vordefinierten Profil auch bei niedrigeren Stellspannungen (24 V).

Experimentelle Untersuchungen mit einem der vorgestellten Regelungsalgorithmen, nämlich der Regelung der maximalen Schwingungsamplitude, zeigten, dass die tatsächlichen Verläufe der Regelgröße, bzw. der Stellkraft mit den theoretisch aufgestellten übereinstimmen. Aufgrund der programmspezifischen Gegebenheiten ermöglichte der in LabVIEW implementierte Regelungsalgorithmus kein schnelles Ausregeln der Schwingungsamplitude. Das LabVIEW-Programm benötigt eine gewisse Anzahl von Samples, was die Regelungsgeschwindigkeit mindert. Trotz dieser Einschränkung konnten zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. Der Regelungsalgorithmus gestattet zudem eine benutzerdefinierte Vorgabe bezüglich der Regelgüte, was eine kontrollierbare Abschwächung der Schwingungsamplitude ermöglicht. Dies ist besonders für das Schattieren interessant, eine Tätowiertechnik, bei der weiche Farb- sowie Tonübergänge erzielt werden, was fotorealistische Abbildungen auf der Haut entstehen lässt.

Während der Anfertigung dieser Arbeit wurden verschiedene Prototypen des Schwingaktors aufgebaut. Das erste Funktionsmuster diente zur Demonstration der Möglichkeiten, welche diese Art von Antrieben bietet. Es sind die Arbeitsfrequenz und die Amplitude der Schwingungen sowie die Verschiebung der Schwingungsposition elektronisch einstellbar. Des Weiteren ist es möglich, die Stechgeschwindigkeit elektronisch zu kontrollieren.

Die Tests der aufgebauten Stechaktoren an Menschen haben gezeigt, dass sich der Schwingaktor für das Einstechen in die menschliche, bzw. tierische Haut eignet. Dies kann im Bereich des Tätowierens, bzw. Pigmentierens verwendet werden. Jedoch sind noch zu bewerkstelligende Herausforderungen zu meistern. Zum einen ist es die zu hohe Wärmeentwicklung und die starke Vibration während der Arbeit mit dem Stechaktor. Zum anderen ist es wünschenswert, die Kraftreserve des Schwingantriebs zu erhöhen, um höhere Kraftkapazitäten des Motors für die Regelung zu erhalten.

Die Stechkraft resultiert aus der auf den Läufermagneten wirkenden Lorentzkraft sowie der Ausnutzung der Massenträgheit beim Abbremsen der Schwingmasse während des Eindringens der Nadel in die menschliche Haut. Der Ansatz war, einen großen Läufermagneten für diesen Zweck zu verwenden. Ein voluminöser Permanentmagnet hat zudem im magnetischen Kreis eine höhere magnetische Flussdichte im Luftspalt zur Folge, was sich auf die Lorentzkraft positiv auswirkt.

Abschließend gilt es festzuhalten, dass die vorliegende Dissertation eine Pionierarbeit auf dem Gebiet der Stechaktoren darstellt. Sie umfasst verschiedene Gebiete von der Analyse des mechanischen Systems über den Elektromagnetismus bis hin zur Elektronik und Programmierung sowie der Regelung. Aufgrund des fachübergreifenden Konzepts war es möglich, nicht nur einen Schwingaktor oder die Steuerung und die Algorithmen der Regelung dafür zu entwickeln, sondern ein in sich geschlossenes mechatronisches System auszuarbeiten und aufzubauen. Interdisziplinäres Fachwissen, uneingeschränkte Neugierde und visionäres Denken sowie strenge innere Disziplin trugen dazu bei.

7 Ausblick

Im vorigen Kapitel wurden die Ergebnisse der vorliegenden Dissertation rekapituliert. Neben dem Optimierungspotenzial des linearen Schwingaktors muss in diesem Kapitel die Einfachheit des Aktoraufbaus und zugleich die recht anspruchsvollen Algorithmen zur Regelung der schwingenden Systeme betont werden. Das Besondere an diesem Schwingaktor sind seine vielfältige Steuerungs- sowie Regelungsmöglichkeiten, die es erlauben, fast beliebige Bewegungsprofile zu erzeugen und diese regelungstechnisch zu kontrollieren. Dabei ist der Anwender flexibel bei der Einstellung der einzelnen Arbeitsparameter, wie die Schwingungsfrequenz und die Schwingungsamplitude sowie die Regelgüte, was den Schwingaktor zu einem universellen Werkzeug eines Tätowierers oder einer Pigmentiererin macht.

Dass sich der entwickelte Schwingaktor auch für andere Anwendungsgebiete eignet, ist ohne Zweifel. So wurde beispielsweise die Erzeugung des Einzelstichs untersucht. Der Einzelstich ist deshalb so interessant, weil damit unterschiedliche Wirkstoffe gezielt unter die Haut (eines Menschen oder Tieres) injiziert werden können und zwar in eine definierte Stechtiefe, sofern das Zurückweichen der Haut bekannt ist. Tendenziell wird das Zurückweichen der Haut beim Einstechen ab einer bestimmten Stechgeschwindigkeit gering und somit vernachlässigbar, so dass ab dem Zeitpunkt des Hautkontakts der zurückgelegte Weg der Nadel oder Kanüle ermittelt und demnach auch die erforderliche Stechtiefe eingehalten werden kann.

Prinzipiell kann ein solcher Schwingaktor bei allen Anwendungen, wo eine repetierende Bewegung gewünscht ist, eingesetzt werden, sei es im Bereich des Tätowierens oder in der Medizin. Der Aktoraufbau gestattet die Realisierung einer von der Außenwelt abgekoppelten Einheit, welche sich sterilisierbar, autoklavierbar oder beständig gegen eine aggressive Umgebung sowie biokompatibel ausbilden lässt.

8 Detaillierte Rechnungswege

8.1 Lineares System

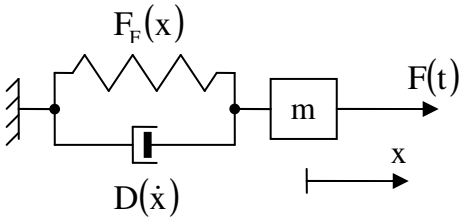

Abbildung 8-1 Schematische Darstellung des mechanischen Modells

Als Erstes sind einige Annahmen zu treffen, um das theoretische Modell nach der Abbildung 8-1 möglichst nah an die Realität zu bringen, gleichzeitig aber die analytische Untersuchung nicht unnötig zu verkomplizieren:

- es gelten Newton's Gesetze für Raum und Zeit
- Reibung und Federverluste sind vernachlässigbar klein
- die Feder ist masselos
- starre Bindungen
- harmonische Erregungskraft: $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$, F_0 = konstant
- Dissipativfunktion (Luftdämpfung): $D(x) = d \cdot \frac{\dot{x}^2}{2}$, d = konstant

Um die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems zu erstellen, bedient man sich des Lagrange-Formalismus der analytischen Mechanik. Ein mechanisches System mit n-Freiheitsgraden kann mittels der allgemeinen Lagrange-Gleichung beschrieben werden. Bei einem mechanischen System gemäß der Abbildung 8-1, welches nur einen Freiheitsgrad x und eine lineare Federkennlinie hat, gilt die Lagrangegleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx} = -\frac{dP}{dx} - \frac{dD}{d\dot{x}} + F(t) \qquad \textbf{(8-1)}$$

mit

$T = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2}$ kinetische Energie der Masse

$P = \frac{c \cdot x^2}{2}$ potentielle Energie der Feder

$D = \frac{d \cdot \dot{x}^2}{2}$ Dissipativfunktion der Luftdämpfung

$F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$ äußere Erregerkraft

Ein lineares System entsprechend der Abbildung (8-1) ist durch seine lineare Kennlinie gekennzeichnet. Dies ist nur dann zutreffend, wenn die Feder sowie der Dämpfer jeweils eine lineare Kennlinie aufweisen. Die bereits am Anfang dieses Kapitels getroffene Annahme zur Dämpfung setzt ein lineares Verhalten des Dämpfers voraus, was bei der Luftdämpfung der Fall ist. Eine lineare Feder ist durch ein Kraft-Weg-Gesetz

$$F_F(x) = c \cdot x \qquad c = \text{konstant}$$

definiert.

Setzt man sowohl die kinetische und potentielle Energie als auch die Dissipativfunktion und die Erregungskraft in (8-1) ein, erhält man nach einigen Rechnungsschritten

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 = -cx - d\dot{x} + F(t)$$

die differentielle Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems:

$$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = F(t) \qquad \textbf{(8-2)}$$

Klassische Lösungsansätze

Bei der Lösungssuche für eine lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Grades (8-2) geht man folgendermaßen vor:

Als erstes sucht man eine Lösung der homogenen DGL

$$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = 0 \qquad \textbf{(8-3)}$$

mit dem Ansatz

$$x_h = Ce^{\lambda t} \qquad \textbf{(8-4)}$$

Danach wird die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL in Form der Inhomogenität gesucht. Ist die rechte Seite ein Polynom, so sollte der Ansatz auch ein Polynom sein. Ist die rechte Seite eine harmonische Funktion, z. B. $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$, dann ist der Ansatz:

$$x_p = p \cdot \cos(\Omega t) + g \cdot \sin(\Omega t) \qquad \textbf{(8-5)}$$

oder in komplexer Form

$$x_p = \tilde{A}e^{j\Omega t} \qquad \textbf{(8-6)}$$

Die eigentliche Lösung der Differentialgleichung (8-2) setzt sich aus der homogenen und der partikulären Lösungen zusammen:

$$x(t) = x_h + x_p \qquad \textbf{(8-7)}$$

Als letztes passt man die gefundene allgemeine Lösung an vorgegebene Anfangsbedingungen an. Es ergibt sich damit die homogene Lösung:

$$x_h = Ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_h = C\lambda e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_h = C\lambda^2 e^{\lambda t} \tag{8-8}$$

Nun werden x_h, $\dot{x}_h$ und $\ddot{x}_h$ in die homogene Differentialgleichung (8-3) eingesetzt und die Eigenwerte λ gesucht:

$$m \cdot \lambda^2 \cdot Ce^{\lambda t} + c \cdot Ce^{\lambda t} + d \cdot \lambda \cdot Ce^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(m\lambda^2 + c + d\lambda\right) \cdot \underbrace{Ce^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + k_1 \cdot \lambda + k_0 = 0 \tag{8-9}$$

Die Gleichung (8-9) wird die charakteristische Gleichung genannt, weil ihre Koeffizienten k_0 und k_1 über den Charakter der Lösung der Differentialgleichung entscheiden. Aus

$$k_0 = \frac{c}{m} \quad \text{und} \quad k_1 = \frac{d}{m}$$

folgt

$$\lambda_{1/2} = -\frac{d}{2m} \pm j\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} \tag{8-10}$$

Die Nullstellen (8-10) der charakteristischen Gleichung (8-9) können umgeschrieben werden:

$$\lambda_{1/2} = -k \pm j\omega \tag{8-11}$$

wobei

$$k = \frac{d}{2m} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2} \qquad \text{und} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Die Größe ω_0 wird als Eigenfrequenz des ungedämpften und ω als Eigenfrequenz des gedämpften Systems bezeichnet.

Die gefundenen Nullstellen λ_1 und λ_2 werden in (8-4) eingesetzt, und man erhält die zugehörige Lösung der homogenen Differentialgleichung (8-3):

$$x_h = C_1 \cdot e^{(-k+j\omega)t} + C_2 \cdot e^{(-k-j\omega)t}$$

Die abklingende e-Funktion e^{-kt} kann ausgeklammert werden.

Nach der Anwendung der Euler-Relation ergibt sich die homogene Lösung zu:

$$x_h = e^{-kt} \cdot \left(C_1 \cdot e^{j\omega t} + C_2 \cdot e^{-j\omega t}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x_h = e^{-kt} \cdot \left[C_1 \cdot \left(\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)\right) + C_2 \cdot \left(\cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t)\right)\right]$$

Sortiert nach den beteiligten Funktionen, erhält man

$$x_h = e^{-kt} \cdot \left[\left(C_1 + C_2\right) \cdot \cos(\omega t) + j\left(C_1 - C_2\right) \cdot \sin(\omega t)\right]$$

was nur dann zu brauchbaren Ergebnissen führt, wenn die noch unbekannten Zahlen C_1 und C_2 komplexe Zahlen sind. Die Zahlen C_1 und C_2 müssen zu einander konjugiert komplex sein, d. h. dass ihre Realteile gleich sind und ihre Imaginärteile unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Nur so erreicht man, dass der Imaginärteil der rechten Seite verschwindet und nur der Realteil der gesuchten homogenen Lösung bleibt.

Die Ausdrücke vor der Sinus- bzw. Kosinus-Funktion kann man zusammen fassen. Es folgt, dass

$$x_h = e^{-kt} \cdot \left[A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)\right] \qquad \textbf{(8-12)}$$

die Lösung der homogenen Differentialgleichung (8-3) darstellt, wobei A und B die reellen Konstanten sind, in denen die Imaginär- und Realteile der ursprünglichen Konstanten C_1 und C_2 einbezogen sind.

Nun folgt die Suche der partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (8-2) mit dem Ansatz (8-5), bzw. (8-6):

$$\begin{aligned} x_p &= p \cdot \cos(\Omega t) + g \cdot \sin(\Omega t) \qquad \Rightarrow \\ \dot{x}_p &= -p \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t) + g \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t) \\ \ddot{x}_p &= -p \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t) - g \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

Eingesetzt in (8-2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} -m \cdot \Omega^2 \cdot &\left[p \cdot \cos(\Omega t) + g \cdot \sin(\Omega t)\right] \\ &+ c \cdot \left[p \cdot \cos(\Omega t) + g \cdot \sin(\Omega t)\right] \\ &+ d \cdot \Omega \cdot \left[g \cdot \cos(\Omega t) - p \cdot \sin(\Omega t)\right] = F_0 \cdot \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Sortiert man diesen Ausdruck nach der beteiligten Winkelfunktionen, erhält man

$$\left(-m \cdot \Omega^2 \cdot p + c \cdot p + d \cdot \Omega \cdot g - F_0\right) \cdot \cos(\Omega t) + \left(-m \cdot \Omega^2 \cdot g + c \cdot g - d \cdot \Omega \cdot p\right) \cdot \sin(\Omega t) = 0$$

Damit diese Bedingung erfüllt wird, muss jede Klammer verschwinden. Dass bedeutet:

$$\begin{cases} \left(c - m \cdot \Omega^2\right) \cdot p + d \cdot \Omega \cdot g = F_0 \\ \left(c - m \cdot \Omega^2\right) \cdot g - d \cdot \Omega \cdot p = 0 \end{cases}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet:

$$p = \frac{F_0 \cdot \left(c - m \cdot \Omega^2\right)}{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} \tag{8-13}$$

$$g = \frac{F_0 \cdot d\Omega}{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} \tag{8-14}$$

Setzt man (8-13) und (8-14) in (8-5) ein, erhält man die gesuchte partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$x_p = \frac{F_0}{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} \cdot \left(\underbrace{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)}_{K_C} \cdot \cos(\Omega t) + \underbrace{d\Omega}_{K_S} \cdot \sin(\Omega t) \right) \tag{8-15}$$

In der komplexen Zahlenebene sind die Koeffizienten K_C und K_S als Projektionen eines Vektors K deutbar, siehe Abbildung 8-2.

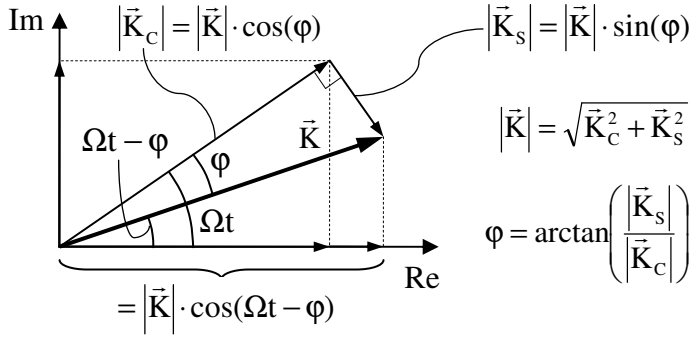

Abbildung 8-2 Zeigerdarstellung

Hier interessiert nur die reale Komponente des K-Vektors, also die Projektion auf die reale Achse. Somit lässt sich (8-15) zu

$$x_p = \frac{F_0}{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} \cdot \left(\underbrace{K \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\Omega t) + K \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\Omega t)}_{= K \cdot \cos(\Omega t - \varphi)} \right)$$

umschreiben. Nach der Anwendung der Additionstheoreme für Kreisfunktionen und Einsetzung des Betrags von K ergibt sich der obige Ausdruck zu:

$$x_p = \frac{F_0 \cdot K \cdot \cos(\Omega t - \varphi)}{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} = \frac{F_0 \cdot \sqrt{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2}}{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

Folglich ist die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (8-2):

$$x_p = \frac{F_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}} \tag{8-16}$$

wobei

$$\varphi = \arctan\left(\frac{d\Omega}{c - m\Omega^2}\right) \tag{8-17}$$

die Phasenverschiebung zwischen der Erregerkraft und den erzwungenen Schwingungen des mechanischen Systems gemäß der Abbildung 8-1 ist.

Setzt man die homogene (8-12) und die partikuläre (8-16) Lösungen in (8-7) ein, erhält man die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung (8-2):

$$x(t) = \underbrace{e^{-kt} \cdot \left[A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)\right]}_{\text{Einschwingkomponente}} + \frac{F_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}} \tag{8-18}$$

Die Konstanten A und B lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Für ein zum Zeitpunkt t = 0 ruhendes System gelten die Anfangszustände x(0) = 0 und $\dot{x}(0) = 0$. Somit folgt

$$x(0) = 0 = A + \frac{F_0 \cdot \cos(-\varphi)}{\sqrt{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$A = -\frac{F_0 \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}} \tag{8-19}$$

$$\dot{x}(0) = 0 = \underbrace{e^{-kt}}_{=1} \cdot \left(-\omega A \cdot \underbrace{\sin(\omega t)}_{=0} + \omega B \cdot \underbrace{\cos(\omega t)}_{=1} \right) - k\underbrace{e^{-kt}}_{=1} \cdot \left(A \cdot \underbrace{\cos(\omega t)}_{=1} + B \cdot \underbrace{\sin(\omega t)}_{=0} \right) -$$
$$- \Omega \cdot \frac{F_0 \cdot \sin(-\varphi)}{\sqrt{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \omega B - kA + \Omega \cdot \frac{F_0 \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{\left(c - m \cdot \Omega^2\right)^2 + (d\Omega)^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$B = -\frac{F_0}{\sqrt{\left(c - m\cdot\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2}} \cdot \left(\frac{\Omega}{\omega}\cdot\sin(\varphi) + \frac{k}{\omega}\cdot\cos(\varphi)\right) \qquad \textbf{(8-20)}$$

Setzt man (8-19) und (8-20) in (8-18) ein und sortiert die Kreisfunktionen um, erhält man letzten Endes die vollständige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (8-2):

$$x(t) = F_0 \cdot \frac{\cos(\Omega t - \varphi) - \chi(k, t)}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2}} \qquad \textbf{(8-21)}$$

Hier ist

$$\chi(k, t) = e^{-kt} \cdot \left[\left(\cos(\omega t) + \frac{k}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right)\cdot\cos(\varphi) + \frac{\Omega}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\cdot\sin(\varphi)\right]$$

die Einschwingkomponente, welche wegen der Dämpfung nach einer gewissen Zeit gegen Null konvergiert. Das System ist im eingeschwungenen Zustand, und es gilt:

$$x(t) = \frac{F_0\cdot\cos(\Omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2}} \qquad \textbf{(8-22)}$$

Laplace-Transformation

Mit der Laplace-Transformation gelangt man zu den gleichen Ergebnissen, vorausgesetzt die zu transformierende Funktion ist stückweise stetig oder zumindest von geringerer als exponentieller Ordnung. Nach der Anwendung des Laplace-Operators auf die Bewegungsgleichung (8-2) - Transformation ins Bildbereich

$$L\{\, m\ddot{x} + cx + d\dot{x} \,\} = L\{\, F(t) \,\} \quad \Rightarrow$$

$$m\cdot\left(s^2\cdot X(s) - \underbrace{s\cdot x_0}_{=0} - \underbrace{\dot{x}_0}_{=0}\right) + c\cdot X(s) + d\cdot\left(s\cdot X(s) - \underbrace{x_0}_{=0}\right) = F_o\cdot\frac{s}{s^2+\Omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$ms^2\cdot X(s) + c\cdot X(s) + ds\cdot X(s) = F_o\cdot\frac{s}{s^2+\Omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$X(s) = F_o\cdot\frac{s}{s^2+\Omega^2}\cdot\frac{1}{ms^2+c+ds} \qquad \textbf{(8-23)}$$

und anschließenden Rücktransformation

$$L^{-1}\{\, X(s) \,\} = F_o\cdot L^{-1}\left\{\, \frac{s}{s^2+\Omega^2}\cdot\frac{1}{ms^2+c+ds} \,\right\}$$

erhält man die Lösung der Differentialgleichung (8-2).

Die Zwischenschritte sind:

- Partialbruchzerlegung:

$$\left\{ \frac{s}{s^2+\Omega^2} \cdot \frac{1}{ms^2+c+ds} \right\}$$

- Suchen der Nullstellen:

$$\left\{ s^2+\Omega^2=0 \quad \Rightarrow \quad s_0=\pm j\Omega \quad \middle\| \quad \begin{array}{c} ms^2+c+ds=0 \quad \Rightarrow \\ s_0=-\underbrace{\frac{d}{2m}}_{k} \pm j\underbrace{\sqrt{\frac{c}{m}-\frac{d^2}{4m^2}}}_{\omega}=-k\pm j\omega \end{array} \right\}$$

- Einsetzen und Vergleichen der Koeffizienten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{s^2+\Omega^2}=\frac{a}{s-j\Omega}+\frac{b}{s+j\Omega} \quad \Rightarrow \\ \\ a\cdot(s+j\Omega)+b\cdot(s-j\Omega)=s \quad \Rightarrow \\ \begin{cases} (a+b)\cdot s=s \quad \Rightarrow \quad b=1-a \\ j\Omega\cdot(a-b)=0 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2};\ b=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \\ \frac{s}{s^2+\Omega^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\Omega}+\frac{1}{s+j\Omega}\right) \end{array} \middle\| \begin{array}{l} \frac{1}{ms^2+c+ds}=\frac{\alpha}{s+(k+j\omega)}+\frac{\beta}{s+(k-j\omega)} \quad \Rightarrow \\ \\ \alpha\cdot[s+(k-j\omega)]+\beta\cdot[s+(k+j\omega)]=1/m \quad \Rightarrow \\ \begin{cases} (\alpha+\beta)\cdot s=0 \quad \Rightarrow \quad \beta=-\alpha \\ (\alpha+\beta)\cdot k-(\alpha-\beta)\cdot j\omega=1/m \end{cases} \\ \Rightarrow \quad \alpha=j\cdot\frac{1}{2m\omega};\ \beta=-j\cdot\frac{1}{2m\omega} \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{ms^2+c+ds}=j\cdot\frac{1}{2m\omega}\cdot\left(\frac{1}{s+(k+j\omega)}-\frac{1}{s+(k-j\omega)}\right) \end{array} \right\}$$

Zusammengefasst, ergibt sich:

$$\left\{ \frac{s}{s^2+\Omega^2}\cdot\frac{1}{ms^2+c+ds}=j\cdot\frac{1}{4m\omega}\cdot\left(\frac{1}{s-j\Omega}+\frac{1}{s+j\Omega}\right)\cdot\left(\frac{1}{s+(k+j\omega)}-\frac{1}{s+(k-j\omega)}\right) \right\}$$

Weiterhin kann gezeigt werden, dass

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{s-j\Omega}\cdot\frac{1}{s+(k+j\omega)} = \frac{1}{k+j(\omega+\Omega)}\cdot\left(\frac{1}{s-j\Omega}-\frac{1}{s+(k+j\omega)}\right); \\ \frac{-1}{s-j\Omega}\cdot\frac{1}{s+(k-j\omega)} = \frac{-1}{k-j(\omega-\Omega)}\cdot\left(\frac{1}{s-j\Omega}-\frac{1}{s+(k-j\omega)}\right); \\ \frac{1}{s+j\Omega}\cdot\frac{1}{s+(k+j\omega)} = \frac{1}{k+j(\omega-\Omega)}\cdot\left(\frac{1}{s+j\Omega}-\frac{1}{s+(k+j\omega)}\right); \\ \frac{-1}{s+j\Omega}\cdot\frac{1}{s+(k-j\omega)} = \frac{-1}{k-j(\omega+\Omega)}\cdot\left(\frac{1}{s+j\Omega}-\frac{1}{s+(k-j\omega)}\right) \end{array} \right\}$$

Aufgelöst nach den zugehörigen Funktionen und wegen $k = \frac{d}{2m}$, $\omega^2 = \frac{c}{m} - k^2$ erhält man

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{s - j\Omega} \cdot \left(\frac{1}{k + j(\omega + \Omega)} - \frac{1}{k - j(\omega - \Omega)} \right) = \frac{-2jm\omega}{c - m\Omega^2 + jd\Omega} \cdot \frac{1}{s - j\Omega}; \\ \frac{1}{s + j\Omega} \cdot \left(\frac{1}{k + j(\omega - \Omega)} - \frac{1}{k - j(\omega + \Omega)} \right) = \frac{-2jm\omega}{c - m\Omega^2 - jd\Omega} \cdot \frac{1}{s + j\Omega}; \\ \frac{-1}{s + (k + j\omega)} \cdot \left(\frac{1}{k + j(\omega + \Omega)} + \frac{1}{k + j(\omega - \Omega)} \right) = \frac{d + 2jm\omega}{c - m\Omega^2 - jd\omega - 2m\omega^2} \cdot \frac{-1}{s + (k + j\omega)}; \\ \frac{1}{s + (k - j\omega)} \cdot \left(\frac{1}{k - j(\omega - \Omega)} + \frac{1}{k - j(\omega + \Omega)} \right) = \frac{d - 2jm\omega}{c + m\Omega^2 - jd\omega - 2m\omega^2} \cdot \frac{1}{s + (k - j\omega)} \end{array} \right\}$$

Schließlich kommt man zu dem Ergebnis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \cdot \frac{1}{ms^2 + c + ds} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{c - m\Omega^2 + jd\Omega} \cdot \frac{1}{s - j\Omega} + \frac{1}{c - m\Omega^2 - jd\Omega} \cdot \frac{1}{s + j\Omega} \right) + \\ + j \cdot \frac{1}{4m\omega} \cdot \left(\frac{d - 2jm\omega}{c + m\Omega^2 - jd\omega - 2m\omega^2} \cdot \frac{1}{s + (k - j\omega)} - \frac{d + 2jm\omega}{c - m\Omega^2 - jd\omega - 2m\omega^2} \cdot \frac{1}{s + (k + j\omega)} \right) \end{array} \right\}$$

Im Originalbereich sieht dann die Lösung der Differentialgleichung (8-2) so aus:

$$x(t) = F_0 \cdot L^{-1}\{ X(s) \} = F_0 \cdot L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \cdot \frac{1}{ms^2 + c + ds} \right\} \Rightarrow$$

$$x(t) = F_0 \cdot L^{-1}\left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{c - m\Omega^2 + jd\Omega} \cdot \underbrace{\frac{1}{s - j\Omega}}_{e^{j\Omega t}} + \frac{1}{c - m\Omega^2 - jd\Omega} \cdot \underbrace{\frac{1}{s + j\Omega}}_{e^{-j\Omega t}} \right) + \right.$$

$$\left. + j \cdot \frac{1}{4m\omega} \cdot \left(\frac{d - 2jm\omega}{c + m\Omega^2 - jd\omega - 2m\omega^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s + (k - j\omega)}}_{e^{-(k - j\omega)t}} - \frac{d + 2jm\omega}{c - m\Omega^2 - jd\omega - 2m\omega^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s + (k + j\omega)}}_{e^{-(k + j\omega)t}} \right) \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{F_0}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{c - m\Omega^2 + jd\Omega} \right) \cdot e^{j\Omega t} + \left(\frac{1}{c - m\Omega^2 - jd\Omega} \right) \cdot e^{-j\Omega t} \right] +$$

$$+ j \cdot \frac{F_0}{4m\omega} \cdot \left(\frac{d - 2jm\omega}{c + m\Omega^2 - jd\omega - 2m\omega^2} \cdot e^{-(k - j\omega)t} - \frac{d + 2jm\omega}{c - m\Omega^2 - jd\omega - 2m\omega^2} \cdot e^{-(k + j\omega)t} \right)$$

Nach der Anwendung der Euler-Relation und Sortierung nach zugehörigen Funktionen, erhält man:

$$
\begin{aligned}
x(t) = \frac{F_0}{2}\cdot\Bigg[&\left(\frac{1}{c-m\Omega^2+jd\Omega}+\frac{1}{c-m\Omega^2-jd\Omega}\right)\cdot\cos(\Omega t)+\\
&+j\cdot\left(\frac{1}{c-m\Omega^2+jd\Omega}-\frac{1}{c-m\Omega^2-jd\Omega}\right)\cdot\sin(\Omega t)\Bigg]+\\
&+j\cdot\frac{F_0\cdot e^{-kt}}{4m\omega}\cdot\Bigg[\left(\frac{d-2jm\omega}{c+m\Omega^2-jd\omega-2m\omega^2}-\frac{d+2jm\omega}{c-m\Omega^2-jd\omega-2m\omega^2}\right)\cdot\cos(\omega t)+\\
&+j\cdot\left(\frac{d-2jm\omega}{c+m\Omega^2-jd\omega-2m\omega^2}+\frac{d+2jm\omega}{c-m\Omega^2-jd\omega-2m\omega^2}\right)\cdot\sin(\omega t)\Bigg]
\end{aligned}
$$

Nach einigen Umformungen und Kürzungen bekommt man letzten Endes die aus den vorherigen Abschnitten bereits bekannte Lösung:

$$
\begin{aligned}
x(t) = &\underbrace{\frac{F_0}{\left(c-m\Omega^2\right)^2+\left(d\Omega\right)^2}\cdot\left(\underbrace{\left(c-m\Omega^2\right)}_{K\cdot\cos(\varphi)}\cdot\cos(\Omega t)+\underbrace{\left(d\Omega\right)}_{K\cdot\sin(\varphi)}\cdot\sin(\Omega t)\right)}_{\text{identisch mit (8–15)}}-\\
&\underbrace{\frac{F_0\cdot e^{-kt}}{\left(c-m\Omega^2\right)^2+\left(d\Omega\right)^2}\cdot\left[\underbrace{\left(c-m\Omega^2\right)}_{K\cdot\cos(\varphi)}\cdot\cos(\omega t)+\left(\frac{\Omega}{\omega}\cdot\underbrace{\left(d\Omega\right)}_{K\cdot\sin(\varphi)}-\frac{k}{\omega}\cdot\underbrace{\left(c-m\Omega^2\right)}_{K\cdot\cos(\varphi)}\right)\cdot\sin(\omega t)\right]}_{\text{Einschwingkomponente}}
\end{aligned}
$$

Nun kann man die gleichen Überlegungen durchführen, welche bereits zur Abbildung 8-2 erläutert wurden. Nach der Umschreibung mit der Phasenverschiebung nimmt die obige Aussage folgende Form an:

$$
x(t) = F_0\cdot\frac{\cos(\Omega t-\varphi)-\chi(k,t)}{\sqrt{\left(c-m\Omega^2\right)^2+\left(d\Omega\right)^2}} \qquad \textbf{(8-24)}
$$

mit

$$
\chi(k,t) = e^{-kt}\cdot\left[\left(\cos(\omega t)+\frac{k}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right)\cdot\cos(\varphi)+\frac{\Omega}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\cdot\sin(\varphi)\right]
$$

Wie man sieht, liefern die Nullstellen im Bildbereich sofort die wichtigsten Informationen über die Systemeigenschaften, nämlich: die Eigenfrequenz des ungedämpften und gedämpften Systems und die Abklingkonstante. Um allerdings zu einer Lösung im Originalbereich zu gelangen, bedarf es zeitberaubender mathematischer Operationen, so dass es sich nicht lohnt, die Bildfunktion X(s) in den Originalbereich zurück zu transformieren.

Stattdessen bewegt man sich im Bildbereich der Laplacetransformierten und stellt alle möglichen Untersuchungen der Bildfunktion an, zum Beispiel die Stabilitätsanalyse der Regelstrecke, siehe Kapitel 2.8.3.

8.2 Bandbreite

Bestimmen der Halbwertsbreite von H(Ω):

$$H_{hw} = \frac{H_{res}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(c - m\Omega_{res}^2\right)^2 + \left(d\Omega_{res}\right)^2}} \tag{8-25}$$

wobei

$$\Omega_{res}^2 = \frac{c}{m} - \frac{d^2}{2m^2}$$

Demnach ist

$$H_{hw} = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(c - m\left(\frac{c}{m} - \frac{d^2}{2m^2}\right)\right)^2 + d^2\cdot\left(\frac{c}{m} - \frac{d^2}{2m^2}\right)}} \Rightarrow$$

$$H_{hw} = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(c - c + \frac{d^2}{2m}\right)^2 + \frac{c}{m}\cdot d^2 - \frac{d^4}{2m^2}}} = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{d^4}{4m^2} - \frac{d^4}{2m^2} + \frac{c}{m}\cdot d^2}} \Rightarrow$$

$$H_{hw} = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{d^2\cdot\left(\frac{c}{m} - \frac{d^2}{4m^2}\right)}} \Rightarrow$$

$$H_{hw} = \frac{1}{d\omega\cdot\sqrt{2}} \tag{8-26}$$

Nun werden zwei Kreisfrequenzen gesucht, bei denen die obige Aussage (8-26) gilt:

$$\frac{1}{d\omega\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2}} \Rightarrow$$

$$d\omega\cdot\sqrt{2} = \sqrt{\left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2} \Rightarrow$$
$$2d^2\omega^2 = \left(c - m\Omega^2\right)^2 + \left(d\Omega\right)^2 \Rightarrow$$
$$2d^2\omega^2 = c^2 - 2cm\Omega^2 + m^2\Omega^4 + d^2\Omega^2 \Rightarrow$$

$$m^2\Omega^4 + \Omega^2\left(d^2 - 2cm\right) + \left(c^2 - 2d^2\omega^2\right) = 0$$

Die Nullstellen der obigen quadratischen Gleichung sind:

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{-d^2 + 2cm \pm \sqrt{\left(d^2 - 2cm\right)^2 - 4m^2 \cdot \left(c^2 - 2d^2\omega^2\right)}}{2m^2} \Rightarrow$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \underbrace{\frac{c}{m} - \frac{d^2}{2m^2}}_{\Omega_{res}^2} \pm \sqrt{\frac{d^4}{4m^4} - \frac{c}{m}\cdot\frac{d^2}{m^2} + \underbrace{\frac{c^2}{m^2} - \frac{c^2}{m^2}}_{=0} + \frac{d^2}{m^2}\cdot 2\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \Omega_{res}^2 \pm \sqrt{\frac{d^2}{m^2}\cdot\left(2\omega^2 - \left(\underbrace{\frac{c}{m} - \frac{d^2}{4m^2}}_{\omega^2}\right)\right)} \Rightarrow$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \Omega_{res}^2 \pm \underbrace{\frac{d}{m}}_{2k}\cdot\omega \Rightarrow$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \Omega_{res}^2 \pm 2k\omega \Rightarrow$$

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\Omega_{res}^2 \pm 2k\omega} \qquad \textbf{(8-27)}$$

Letzten Endes erhält man die untere

$$\Omega_{g,u} = \sqrt{\Omega_{res}^2 + 2k\omega} = \sqrt{\omega^2 - k^2 + 2k\omega} = \sqrt{\omega^2 + 2k\omega + k^2 - 2k^2} \Rightarrow$$

$$\Omega_{g,u} = \sqrt{(\omega + k)^2 - 2k^2} \qquad \textbf{(8-28)}$$

und in Analogie dazu die obere

$$\Omega_{g,o} = \sqrt{(\omega - k)^2 - 2k^2} \qquad \textbf{(8-29)}$$

Grenzfrequenz, die näherungsweise folgendermaßen dargestellt werden können:

$$\Omega_{g,u} \approx \omega + k \qquad \textbf{(8-30)}$$

$$\Omega_{g,o} \approx \omega - k \qquad \textbf{(8-31)}$$

Die Differenz aus beiden Grenzfrequenzen

$$\Delta\Omega = \Omega_{g,o} - \Omega_{g,u} \approx -2k = \frac{d}{m} \qquad \textbf{(8-32)}$$

wird als Bandbreite bezeichnet.

Weiterhin kann gezeigt werden, dass das Produkt aus beiden Grenzfrequenzen annähernd

$$\Omega_{g,o} \cdot \Omega_{g,u} \approx \Omega_{res}^2 \tag{8-33}$$

ist. Je kleiner die Abklingkonstante k wird, desto genauer wird die Näherung. Versucht man (8-32) genauer zu definieren, gelangt man zur folgenden Aussage:

$$\Delta\Omega = \sqrt{\Omega_{res}^2 - 2k\omega} - \sqrt{\Omega_{res}^2 + 2k\omega} \tag{8-34}$$

Nun wird Ω_{res} aus der Wurzel herausgezogen, und die beiden Hälften der Gleichung (8-34) werden quadriert:

$$(\Delta\Omega)^2 = \Omega_{res}^2 \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{2k\omega}{\Omega_{res}^2}} - \sqrt{1 + \frac{2k\omega}{\Omega_{res}^2}} \right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$(\Delta\Omega)^2 = \Omega_{res}^2 \cdot \left(1 - \frac{2k\omega}{\Omega_{res}^2} + 1 + \frac{2k\omega}{\Omega_{res}^2} - 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{4k^2\omega^2}{\Omega_{res}^4}} \right)$$

Die Zahl 2 kann ausgeklammert und ω^2 entsprechend der Definition nach (2-9) dargestellt werden. Es folgt:

$$(\Delta\Omega)^2 = 2 \cdot \Omega_{res}^2 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2 \cdot (\omega_0^2 - k^2)}{\Omega_{res}^4}} \right) \quad \Rightarrow$$

$$(\Delta\Omega)^2 = 2 \cdot \Omega_{res}^2 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2}{\Omega_{res}^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\Omega_{res}^2} + \frac{4k^4}{\Omega_{res}^4}} \right) \tag{8-35}$$

Das Verhältnis ω_0 / Ω_{res} kann mit guter Näherung, wenn die Dämpfung schwach ausgeprägt ist, als Eins angenommen werden. Die Gleichung (8-35) nimmt darauf mit kleiner Korrektur folgende Form an:

$$(\Delta\Omega)^2 = 2 \cdot \Omega_{res}^2 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2}{\Omega_{res}^2} + \frac{4k^4}{\Omega_{res}^4}} \right) \cdot \delta^2 \tag{8-36}$$

wobei δ eine Korrekturgröße ist. Die unter der Wurzel stehende Aussage ist nichts anderes als eine quadratische Gleichung. Dementsprechend kann (8-36) umgeschrieben werden:

$$(\Delta\Omega)^2 = 2 \cdot \Omega_{res}^2 \cdot \left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{2k^2}{\Omega_{res}^2} \right)^2} \right) \cdot \delta^2 \quad \Rightarrow$$

$$(\Delta\Omega)^2 = 2 \cdot \Omega_{res}^2 \cdot \left(\underbrace{1 - 1}_{=0} + \frac{2k^2}{\Omega_{res}^2} \right) \cdot \delta^2 \quad \Rightarrow$$

$$(\Delta\Omega)^2 = 4k^2 \cdot \delta^2 \tag{8-37}$$

Letzten Endes erhält man die Bandbreite

$$\Delta\Omega = -2k \cdot \delta \tag{8-38}$$

Die Korrekturgröße δ geht aus dem Verhältnis ω_0 / Ω_{res} hervor, somit gilt

$$\Delta\Omega \approx -2k \cdot \frac{\omega_0}{\Omega_{res}} = \frac{d}{m} \cdot \frac{\omega_0}{\Omega_{res}} \tag{8-39}$$

8.3 Nichtlineares System

Die Bewegungsgleichung eines nichtlinearen Masse-Feder-Systems gemäß der Abbildung 8-1 mit der nichtlinearen Federkennlinie (2-28) sieht in differentieller Form folgendermaßen aus:

$$m\ddot{x} + \text{sign}(x) \cdot c \cdot \left|x^n\right| + d\dot{x} = F_0 \cdot \cos(\Omega t) \tag{8-40}$$

Um das Problem der Nichtlinearität der Differentialgleichung (8-40) zu lösen, nutzt man das numerische Verfahren.

Die analytischen Differentiale entsprechen der Differenz zweier benachbarter Werte, genauso wie das Integral die algebraische Summe der infinitesimal kleinen Flächen ist. Grundlage der Integral- sowie Differentialrechnung ist die Infinitesimalrechnung. Mathematisch ausgedrückt, bedeutet das:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \lim_{h \to 0} \frac{x_i - x_{i-1}}{h} \tag{8-41}$$

wobei

$$h = t_i - t_{i-1} \qquad i \in \{0; N\} \tag{8-42}$$

die Schrittweite der Diskretisierung ist. In Analogie zu (8-41) lässt sich das zweite, dritte usw. Differential bilden:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = \frac{\Delta\dot{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta t \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = \frac{(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})}{(t_{i+1} - t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})} = \frac{x_{i+1} - 2 \cdot x_i + x_{i-1}}{h^2} \tag{8-43}$$

Eingesetzt in (8-40) und nach der Auflösung nach x_{i+1} ergibt sich eine numerische Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung:

$$m \cdot \frac{x_{i+1} - 2 \cdot x_i + x_{i-1}}{h^2} + \text{sign}(x) \cdot c \cdot \left|x_{i-1}^n\right| + d \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{h} = F_0 \cdot \cos(\Omega t_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\left(x_{i+1} - 2\cdot x_i + x_{i-1}\right) + \frac{\operatorname{sign}(x)\cdot c\cdot\left|x_{i-1}^{n}\right|}{m}\cdot h^2 + \frac{d\cdot\left(x_i - x_{i-1}\right)}{m}\cdot h \;=\; \frac{F_0\cdot\cos\left(\Omega t_{i-1}\right)}{m}\cdot h^2 \quad \Rightarrow$$

$$x_{i+1} \;=\; \frac{F_0\cdot h^2}{m}\cdot\cos\left(\Omega t_{i-1}\right) + \left(\frac{d\cdot h}{m} - \frac{c\cdot h^2}{m}\cdot\left|x_{i-1}^{n-1}\right| - 1\right)\cdot x_{i-1} + \left(2 - \frac{d\cdot h}{m}\right)\cdot x_i \qquad \textbf{(8-44)}$$

Die Anfangsbedingungen bestimmen die Anfangswerte x_{i-1} und x_i bei i = 0 und helfen dabei den ersten Wert von x zu finden. Fortan lassen sich implizit alle x-Werte ermitteln, und die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (8-40) kann graphisch dargestellt werden.

Mit den Bedingungen für die Anfangszustände

$$\begin{aligned} x(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_{-1} = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_0 = 0 \\ i = 0 \quad & t_{-1} = 0 \end{aligned}$$

erhält man den ersten Wert

$$x_1 = \frac{F_0\cdot h^2}{m} \qquad \textbf{(8-45)}$$

Für die nächsten Schritte, also für i = 1, i = 2 usw., verfährt man folgendermaßen: Man setzt die bereits errechneten diskreten Lösungen immer wieder in (8-44) ein:

$$x_2 \;=\; \frac{F_0\cdot h^2}{m}\cdot\cos\left(\Omega t_0\right) + \left(2 - \frac{d\cdot h}{m}\right)\cdot x_1$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 \;=\; \frac{F_0\cdot h^2}{m}\cdot\left[\cos\left(\Omega\cdot h\right) + \left(2 - \frac{d\cdot h}{m}\right)\right] \qquad \textbf{(8-46)}$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 \;=\; \frac{F_0\cdot h^2}{m}\cdot\cos\left(\Omega\cdot 2h\right) + \left(\frac{d\cdot h}{m} - \frac{c\cdot h^2}{m}\cdot\left|x_1^{n-1}\right| - 1\right)\cdot x_1 + \left(2 - \frac{d\cdot h}{m}\right)\cdot x_2 \qquad \textbf{(8-47)}$$

und erhält somit schrittweise eine zeitabhängige Funktion, welche sich aus der Datenmenge approximieren lässt.

8.4 Sprungantwort eines mechanischen, schwingenden Systems

Für die Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} F(t) = 0, & t = 0 \\ F(t) = F_0, & t > 0 \end{cases} \tag{8-48}$$

eingesetzt in die Bewegungsgleichung eines mechanischen, schwingenden Systems:

$$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = \sigma(t) \tag{8-49}$$

gilt die Lösung der homogenen DGL, vgl. Gleichung (8-12):

$$x_h = e^{-kt} \cdot [A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)] \tag{8-50}$$

Wegen der Dämpfung wird die Lösung $x_h + x_p$ für $t \to \infty$ auf einen konstanten Wert zustreben. Dementsprechend erhält man die partikuläre Lösung der Differentialgleichung (8-49) mit dem Ansatz:

$$x_p = p \tag{8-51}$$

Setzt man (8-51) in (8-49) ein, ergibt sich eine partikuläre Lösung der differentiellen Gleichung:

$$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = \sigma(t) \quad \Rightarrow \quad 0 + c \cdot p + 0 = \sigma(t) \quad \Rightarrow$$

$$p = \frac{\sigma(t)}{c} \quad \Rightarrow$$

$$x_p = \frac{\sigma(t)}{c} \tag{8-52}$$

Die allgemeine Lösung der Sprungantwort lautet:

$$x = x_h + x_p \tag{8-53}$$

Setzt man die Gleichungen (8-50) und (8-52) in (8-53) ein, erhält man als allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-kt} \cdot [A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)] + \frac{\sigma(t)}{c} \tag{8-54}$$

Mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

findet man die unbekannten Konstanten A und B:

$$0 = A + 0 + \frac{\sigma(t)}{c} \quad \Rightarrow$$

$$A = -\frac{\sigma(t)}{c} \tag{8-55}$$

Eingesetzt in (8-54) ergibt sich

$$0 \;=\; -k \cdot e^{-kt} \cdot \left[A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)\right] + \omega \cdot e^{-kt} \cdot \left[-A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)\right] \quad \Rightarrow$$

$$0 = -k \cdot A + \omega \cdot B \quad \Rightarrow \quad B = A \cdot \frac{k}{\omega} \quad \Rightarrow$$

$$B = -\frac{\sigma(t)}{c} \cdot \frac{k}{\omega} \tag{8-56}$$

Mit den Konstanten (8-55) sowie (8-56) vervollständigt sich die Gleichung (8-54), und man erhält die Sprungantwort eines mechanischen, schwingenden Systems:

$$x(t) \;=\; \frac{\sigma(t)}{c} \cdot \left[1 - e^{-kt} \cdot \left(\cos(\omega t) + \frac{k}{\omega} \cdot \sin(\omega t)\right)\right] \tag{8-57}$$

Berücksichtigt man die Kraftwirkung des Stroms infolge der Spule, so wird die Sprungfunktion um die Lorentzkraft ergänzt:

$$\sigma_L(t) \;=\; \begin{cases} F(t) = 0, & t = 0 \\ F(t) = \lambda \cdot \dfrac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right), & t > 0 \end{cases} \tag{8-58}$$

In diesem Fall wird die Suche der analytischen Lösung zu anspruchsvoll und unübersichtlich, so dass man ein numerisches Verfahren anwendet:

$$x_{i+1} \;=\; \lambda \cdot \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t_{i-1}}\right) \cdot \frac{h^2}{m} + \left(\frac{d \cdot h}{m} - \frac{c \cdot h^2}{m} - 1\right) \cdot x_{i-1} + \left(2 - \frac{d \cdot h}{m}\right) \cdot x_i \tag{8-59}$$

mit den Anfangswerten $x_{-1} = 0$ und $x_0 = 0$ ergibt sich schrittweise die Sprungantwort eines mechanischen, schwingenden Systems mit der Berücksichtigung des Spulenstroms.

9 Symbole und Abkürzungen

Symbol	Bedeutung	Einheit
B_L	magnetische Flussdichte oder Induktion im Luftspalt	[T]
B_r	Remanenz eines Permanentmagneten	[T]
B_S	Sättigungsflussdichte	[T]
c	Federsteifigkeit, Federkonstante	[N / m]
d	Dämpfungskonstante	
$D(\dot{x})$	Dissipativfunktion der Luftdämpfung	
$\Delta\Omega$	Bandbreite	[rad]
Δx	Federvorspannung	[m]
δ	Luftspalt	[m]
e(t)	Regelabweichung	
F(t)	Erregerkraft	[N]
F_0	maximale Erregerkraft	[N]
$F_F(x)$	Federkraft in Abhängigkeit von x	[N]
F_L	Lorentzkraft	[N]
$F_M(t)$	Modulationskraft	[N]
F_s	Verschiebungskraft	[N]
Φ	magnetischer Fluss	[Web]
φ	Phasenverschiebung zwischen F(t) und x(t)	[°]
$H(\Omega)$	Übertragungsfunktion des Systems	
H_C	Koerzitivfeldstärke	[A / m]
h	Diskretisierungsschritt oder Schrittweite	
I	elektrischer Strom	[A]
J	Stromdichte	[A / mm^2]
K_P	Verstärkung des P-Reglers	

k	Abklingkonstante	
L	Induktivität einer Spule	[H]
ℓ	wirksame Drahtlänge	[m]
λ	Proportionalitätskonstante	
m	Schwingmasse	[kg]
μ_0	Permeabilität des Vakuums	[H / m]
μ_r	relative Permeabilität	
N	Windungszahl einer Spule	
Ω	Erregerkreisfrequenz	[rad]
$\Omega_{g,\,u}$	untere Grenzfrequenz	[rad]
$\Omega_{g,\,o}$	obere Grenzfrequenz	[rad]
Ω_{res}	Resonanzfrequenz	[rad]
ω	Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems	[rad]
ω_0	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems	[rad]
P	Verlustleistung	[W]
Q	Güte eines Systems	
R	elektrischer Widerstand	[Ω]
R_m	magnetischer Widerstand	
s	Nadelherausstand	[m]
$\sigma(t)$	Sprungfunktion	
t_{pd}	Verzögerungszeit (propagation delay)	[s]
U_0	maximale elektrische Spannung an den Spulenenden	[V]
U_{soll}	Stellspannung	[V]
$u(t)$	Stellgröße	
u_{ind}	induzierte Gegenspannung	[V]
u_L	Induktionsspannung	[V]
$u_s(t)$	Vorsteuerung	

u_V	dynamische Vorsteuerung	
v	relative Geschwindigkeit	[m / s]
v_s	Stechgeschwindigkeit	[m / s]
w(t)	Führungsgröße oder Soll-Wert	
x(t)	Schwingungsamplitude	[m]
x_0	maximale Schwingungsamplitude	[m]
x_s	Verschiebung des Läufermagneten	[m]
y(t)	Regelgröße oder Ist-Wert	

Abkürzung	**Bedeutung**
ADC	Analog-Digital-Converter
AW	Ampèrewindungen (AW = N·I)
BTL	Bridge-Tied-Load (Voll- oder H-Brücke)
DAC	Digital-Analog-Converter
FEM	Finite-Elemente-Methode (numerisches Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen)
I^2C	Inter-Integrated-Circuit (ein von NXP Semiconductors entwickelter serieller Datenbus)
LOD	linear oscillating drive - linearer Schwingantrieb
MR	Magneto-Resistive (Sensor)
NdFeB	Neodym-Eisen-Bor (Werkstoff eines Permanentmagneten)
OPV	Operationsverstärker
P_i-Regler	P-Regler mit dynamischer Vorsteuerung sowie Verstärkung
PMU	Permanent-Make-Up
PSD	Position-Sensitive-Detector
SmCo	Samarium-Kobalt (Werkstoff eines Permanentmagneten)
USB	Universal-Serial-Bus

10 Literaturverzeichnis

[Aum12] http://aumann.com, vom Januar 2012

[Ber74] Berkson, W., Fields of Force, The Development of a World View from Faraday to Einstein, Routledge & Kegan Paul Ltd, London, 1974

[Bol90] Boll, R., Weichmagnetische Werkstoffe, Einführung in den Magnetismus, VAC-Werkstoffe und ihre Anwendungen, 4. Auflage, Hrsg. Vacuumschmelze, Hanau, 1990

[Bor12] http://www.facebook.com/pages/Boristattoo/128166017291371, vom Januar 2012

[Bra11] Braun Series 7 Rasier, http://www.braun.com/de/male-grooming/series-shavers/series-7.html, vom Juni 2011

[Che10] ChenYang Technologies GmbH & Co. KG, Finsing, http://www.chenyang.de, vom Juli 2010

[Che12] Tätowier-Handstück HAWK thunder, Mitentwickelt von Dmitrij Demjanenko, http://www.cheyenne-tattoo.com/geraete-module/hawk-thunder, vom Januar 2012

[Cla07] Clausert, H., Grundgebiete der Elektrotechnik 2, Wechselströme, Drehstrom, Leitungen, Anwendungen der Fourier-, der Laplace- und der Z-Transformation, 10. überarbeitete Auflage, Wissenschaftsverlag Oldenbourg, 2007

[Dar00] Darrigol, O., Electrodynamics from Ampère to Einstein, Oxford University Press., Oxford, 2000

[Dem08] Demjanenko, D., Entwicklung eines Schaltungskonzepts für die Bestimmung der Stechtiefe in menschlicher Haut, Diplomarbeit am Fachgebiet Mikrotechnik der Technischen Universität Berlin, 2008

[Dem10] Demjanenko, D., Hautdickenmessgerät, Firma MT.DERM, interner Zwischenbericht, Berlin, 2010

[Dem11a] Demjanenko, D., Linear oscillating drive, Tattoo-Teststift, Firma MT.DERM, interner Abschlussbericht zur Maßnahme 517, Berlin, 2011

[DIN57] Strombelastbarkeit isolierter Leitungen, DIN 57100 Teil 523 / VDE 0100 Teil 523.6-81

[Dir31] Dirac, P. A. M., Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A133, p. 60, 1931, This is the first paper on the magnetic monopole, It is followed by a second paper in Physical Review, Vol. 74, p. 817, London, 1948

[Dmi12] http://www.facebook.com/DmitriySamohin, vom Februar 2012

[Dob11] Dobelli, R., Die Kunst des klaren Denkens, 52 Denkfehler, die Sie besser anderen überlassen, Hanser Verlag, München, 2011

[Dub10] Dubben, H.-H., Beck-Bornholdt, H.-P., Der Hund, der Eier legt, Erkennen von Fehlinformationen durch Querdenken, 5. Auflage, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2010

[End07] Endter, T., Simulation mechanischer Systeme mit konzentrierten Parametern mit PSpice, http://www.fh-jena.de/~endter/Schaltungssimulation/Projekt 7 Mechanische Analogien mit PSpice.pdf, vom Juni 2011

[Erb08] Erber, J., Einführung in die Neurobiologie für Informatiker, Vorlesungsskript, Technische Universität Berlin, Institut für Ökologie, Sommersemester 2008

[Far22] Faraday, M., On some new Electro-Magnetical Motions, and on the Theory of Magnetism, Quarterly Journal of Science, Vol. 12, p. 74-96, London, 1822

[Far44] Faraday, M., Experimental Researches in Electricity, Vol. 2, Plate 4, London, 1844

[Far46] Faraday, M., Thoughts on Ray-Vibrations, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Taylor & Francis, London, 1846

[Far52] Faraday, M., On the physical character of the lines of magnetic force, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 4. Serie, Vol. 3, Taylor & Francis, London, 1852

[Gee04] Geering, H. P., Regelungstechnik, Mathematische Grundlagen, Entwurfsmodelle, Beispiele, 6. neue bearbeitete und ergänzte Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2004

[Gee10] http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:VFPt_dipole_magnetic2.svg&filetimestamp=20100928142726, vom Juli 2011

[Gör08] Görne, T., Tontechnik, 2. Auflage, Hanser Verlag, München, 2008

[Goe02] Goethe, J. W., Die Leiden des jungen Werther, mit Anmerkungen von Kurt Rothmann und Nachwort von Ernst Beutler, Philipp Reclam jun. GmbH & Co., Stuttgart, 2002

[Gra75] Grant, E., Peter Peregrinus, Dictionary of Scientific Biography, Scribners, New York, 1975

[Hat03] Hattendorf, H., VDM Report Nr. 27, Weichmagnetische Werkstoffe auf NiFe-Basis, eine Darstellung der physikalischen Grundlagen, der Werkstoffe und ausgewählter Anwendungen, Hrsg. TyssenKrupp VDM, Werdohl, 2003

[Hea92] Heaviside, O., On the Forces, Stresses and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 183 A, London, 1892

[Heb00] Hebbeker, T., Physik II, RWTH, Aachen, 2000, http://web.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/web-hu-lectures/hu-lectures/www-eep.physik.hu-berlin.de/_hebbeker/lectures/hbperman.gif, vom Juli 2011

[Hin07] Hinrichs, M., Elektromagnetische Wandler für miniaturisierte Systeme, Dissertation, Fachgebiet Mikrotechnik der Technischen Universität Berlin, 2007

[Hor06] Hornbogen, E., Warlimont, H., Metalle, Struktur und Eigenschaften der Metalle und Legierungen, *5.* Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006

[Hor12] Hornbogen, E., Eggeler, G., Werner, E., Werkstoffe, Aufbau und Eigenschaften, 10. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012

[Jau04] Jaumann, H., Handbuch Gelehrtenkultur der Frühen Neuzeit, Band 1, Bio-bibliographisches Repertorium, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 2004

[Jen12] http://www.facebook.com/Cheyennsen, vom März 2012

[Kak10] Kaku, M., Die Physik des Unmöglichen: Beamer, Phaser, Zeitmaschinen, 2. Auflage, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2010

[Kin06] King, R., Regelungstechnik I, Vorlesungsskript, Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik der Technischen Universität Berlin, 2006

[Küp08] Küpfmüller, K., Mathis, W., Reibiger, A., Theoretische Elektrotechnik, eine Einführung, 18. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008

[Lan09] Landau, L., Lifschitz, E., Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 2, Klassische Feldtheorie, 12. Auflage, Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 2009

[Lon11] Long-Time-Liner, Pigmentierhandstück, http://www.long-time-liner.com/micropigmentiergeraet-e.html, vom Juli 2011

[Lot11] Loth, A., Entwicklung von Verfahren und Applikatoren für den intradermalen Wirkstoffeintrag, Dissertation, Fachgebiet Mikrotechnik der Technischen Universität Berlin, 2011

[Lüc05] Lück, M., Miniaturisierung und Optimierung eines Pigmentiersystems, Studienarbeit am Fachgebiet Mikrotechnik der Technischen Universität Berlin, 2005

[Mar33] Martin, T., Faraday's diary, Vol. 4, G. Bell and Sons, London, 1933

[Max65] Maxwell, J. C., A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, 1864 eingereicht und dann veröffentlicht in Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 155, London, 1865

[Max73] Maxwell, J. C., A Treatise on Electricity & Magnetism, Dover Publications, New York, 1873

[Mic51] Michell, J., A Treatise of Artificial Magnets, in Which is Shewn an Easy and Expeditious Method of Making Them, Superior to The Best Natural Ones, and also, A Way of Improving The Natural Ones, and of Changing or Converting their Poles, Directions are likewise given For making the Mariner's Needles in the best Form, and for touching them most advantageously, The Second Edition, corrected and emproved, Cambridge, 1751

[Mon12] http://www.facebook.com/monimarinotattooartist, vom Februar 2012

[Ndf12] http://www.ndfebmagnets.de/Figures/Mag_NdFeB_grap.gif, vom Januar 2012

[Nec63] Neckam, A., De naturis rerum et De laudibus divinae sapientae, edited by Thomas Wright, London, 1863

[Net08] Netz, R., Noel, W., Der Kodex des Archimedes, Das berühmteste Palimpsest der Welt wird entschlüsselt, Verlag C. H. Beck oHG, München, 2008

[Neu11] Neuma Hybrid Tattoo Machine, http://www.dexigner.com/news/17519, vom Juli 2011

[O'Gr02] O'Grady, P. F., Thales of Miletus, the Beginnings of Western Science and Philosophy, Ashgate Publishing Limited, Aldershot, 2002

[Paj07] http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Silocary_2naboje_ruzne.svg&filetimestamp=20070610163008, vom Juli 2011

[Pel08] Pellaud, R., Two-Coil Tattoo Machine, 3D-modeling, http://www.dragonguys.ch/ portfolio, vom Juli 2008

[Phi50] Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 141, Fig. 3, Page 35, London, 1850

[Pop09] Popov, V., Kinematik und Dynamik, Vorlesungsskript zur Mechanik II, Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik, Sommersemester 2009

[Pöp11] Pöppel, E., Wagner, B., Je älter desto besser, Überraschende Erkenntnisse aus der Hirnforschung, 3. Auflage, Gräfe und Unzer Verlag, München, 2011

[Rob12] http://www.facebook.com/robby.welke, vom Mai 2012

[Rol59] Roller, D. H. D., The Magnete of William Gilbert, Menno Hertzberger, Amsterdam, 1959

[Rö ß11] Rößler, W., Eine kleine Nachtphysik, Große Ideen und ihre Entdecker, 5. Auflage, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2011

[Ros61] Ross, S., Faraday Consults the Scholars, The Origins of the Terms of Electrochemistry, Notes and Records of the Royal Society of London, Vol. 16, Number 2, London, 1961

[Sch02] Schlote, K.-H., Chronologie der Naturwissenschaften, Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 2002

[Sch07] Schatt, W., Wieters, K.-P., Kieback, B., Pulvermetallurgie, Technologie und Werkstoffe, 2. bearb. und erw. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 2007

[Sed12] Sedláček, T., Die Ökonomie von Gut und Böse, Carl Hanser Verlag, München, 2012

[Seg12] http://www.segway.com, Segway Inc., Manufacturer of a self-balancing electric vehicle, vom März 2012

[Sic11] Sick, B., Der Dativ ist dem Genetiv sein Tod, Ein Wegweiser durch den Irrgarten der deutschen Sprache, 40. Auflage, Verlag Kiepenheuer & Witsch, Köln, 2011

[Sim97] Simpson, T. K., Maxwell on the Electromagnetic Field, A Guided Study, Rutgers University Press, New Brunswick, 1997

[Sin10] Singh, S., Fermats letzter Satz, Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels, 14. Auflage, Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 2010

[Ste04] Steinle, F., Experimental Untersuchungen über Elektricität, von Michael Faraday, erster bis dritter Band, 1. Auflage, Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 2004

[Stö05] Stöhr, M., Dichgans, J., Buettner, U. W., Hess, C. W., Evozierte Potenziale, 4. Auflage, Springer Medizin Verlag, Heidelberg, 2005

[Sup11] http://www.supermagnete.de, vom März 2011

[Tho91] Thomas, J. M., Michael Faraday and the Royal Institution, The Genius of Man and Place, Adam Hilger, Bristol, 1991

[Tho98] Thompson, I. P., Michael Faraday, His Life and Work, Cassell & Co., London, 1898

[Thy12] http://www.thyssenkrupp-magnettechnik.com/de/neodym-eisen-bor-magnete.php, vom Januar 2012

[Tyn70] Tyndall, J., Faraday und seine Entdeckungen, eine Gedenkschrift, Hrsg. H. Helmholtz, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1870

[Vac12] http://www.vacuumschmelze.de, Weichmagnetische Werkstoffe und Halbzeuge, Produktkatalog, vom April 2012

[Vog11a] Vogel, W., Elektromechanische und optische Systeme für die Endoskopie, Dissertation, Fachgebiet Mikrotechnik der Technischen Universität Berlin, 2011

[Wdw10] http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Hysteresiskurve.svg&filetimestamp=20100719113416, vom November 2011

[Whe45] Whewell, W., Brief an Michael Faraday, 10. Dezember 1845, Brief 1798, In The Correspondence of Michael Faraday, Vol. 3, 1841-1848, Edited by Frank A. J. L. James, Published by the Institution of Engineering and Technology, London, 1996

[Wie99] Wiedemann, H., Particle Accelerator Physics, Basic Principles and Linear Beam Dynamics, 2. Edition, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999

[Wil01] Wilson, E. B., Vector Analysis of Josiah Willard Gibbs, The History of a Great Mind, Charles Scribner's Sons, New York, 1901

[Woi12] Woitowitz, R., Urbanski, K., Gehrke, W., Digitaltechnik, Ein Lehr- und Übungsbuch, 6. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012

[Zur09] http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Permeability_by_Zureks.svg&filetimestamp=20090419113525, vom Juli 2011

[Мер03] Меркин, Д., Введение в теорию устойчивости движения, 4-е изд., стер., издательство Лань, СПб, 2003

[Ник03] Никитин, Н., Курс теоретической механики: Учебник для машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов, 6-е изд., перераб. и доп., издательство Высш. шк., Москва, 2003

10.1 Erweiterte Literaturhinweise

[Bla10] Blank, A., Vorrichtung für repetierendes sowie punktgenaues Einstechen flüssiger Stoffe in die Haut und Verfahren zum Einbringen der Stoffe, insbesondere in definierte Tiefen, deutsche Patentschrift DE 10 2008 031 907 A1, vom Juli 2011

[Dem11b] Demjanenko, D., Vorrichtung zum Aufstechen eines organischen Gewebes und Antriebsmodul, europäische Patentanmeldung 11189360.8 - 1526, Anmeldetag 16.11.2011

[Edi76] Edison, T., A., Autographic Printing, United States Patent US 180 857 A, vom Juli 2011

[Edi77] Edison, T., A., Improvement in Stencil-Pen, United States Patent US 196 747 A, vom Juli 2011

[Fec51] Fecker, T., Elektromagnetischer Schwingantrieb, deutsche Patentschrift DE 837 727 B, vom Juli 2011

[Göt52] Götze, H., Abgestimmter elektromagnetischer Schwingmotor mit progressiver Federung, deutsche Patentschrift DE 884 120 B, vom Juli 2011

[Gre44] Greiner, M., Elektromagnetischer Schwingmotor, deutsche Patentschrift DE 749 483 A, vom Juli 2011

[Lis69] List, H., Elektromagnetischer Schwingantrieb mit permanentmagnetischer Vormagnetisierung, deutsche Offenlegungsschrift DE 1 488 564 A, vom Juli 2011

[Mon76] Montagu, J. I., Lagerloser Schwingmotor, deutsche Patentschrift DE 255 6924 C2, vom Juli 2011

[O'Re91] O'Reilly, S., Tattooing Machine, United States Patent US 464 801 A, vom Juli 2011

[Soh53] Sohr, A., Elektromagnetischer Schwingantrieb, deutsche Patentschrift DE 902 641 B, vom Juli 2011

[Vog11b] Vogel, W., Linearmotor mit permanentmagnetischer Selbsthaltung, deutsche Offenlegungsschrift DE 10 2010 000 582 A1, vom Oktober 2011

[Vog11c] Vogel, W., Reluktanz- und Lorentzkraftbetriebener Linearantrieb, deutsche Offenlegungsschrift DE 10 2010 000 583 A1, vom Oktober 2011

[Wey54] Weyandt, C. S., Elektromagnetischer Schwingmotor, deutsche Patentschrift DE 974 963 B, vom Juli 2011