Technische Universität Berlin
Fachbereich Verkehrswesen und Angewandte Mechanik
Hermann–Föttinger–Institut für Strömungsmechanik

Thomas Rung
geboren am 8. Juni 1966 in Bonn

ENTWICKLUNG ANISOTROPER WIRBELZÄHIGKEITSBEZIEHUNGEN MIT HILFE VON PROJEKTIONSTECHNIKEN

Vom Fachbereich
Verkehrswesen und Angewandte Mechanik
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.)

genehmigte Dissertation

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 24.08.2000
Vorsitzender: Prof. Dr.rer.nat Dr.-Ing. habil. A. Dillmann
Berichter: Prof. Dr.-Ing. F. Thiele
Dr.-Ing. W. Haase

Berlin 2000
(D 83)

Kurzfassung

Mit Hilfe von darstellungstheoretischen Überlegungen werden Prinzipien zur Konstruktion anisotroper Wirbelzähigkeits–Turbulenzmodelle erörtert. Ziel der Dissertation ist die Entwicklung und Analyse expliziter algebraischer Spannungsmodelle auf der Basis von Projektionstechniken.
Ausgangspunkt der Arbeit ist eine kritische Bewertung des linearen Wirbelzähigkeitskonzepts aus dem Blickwinkel der Darstellungstheorie. Aufbauend auf den impliziten algebraischen Reynolds–Spannungsmodellen wird ein Projektionsverfahren zur Formulierung beliebig aufwendiger nichtlinearer Wirbelzähigkeitsmodelle skizziert. Ein wichtiges Merkmal dieser Technik ist ihre hohe Flexibilität in Hinblick auf die gezielte Modellierung einzelner physikalischer Mechanismen, bzw. die Erweiterung klassischer algebraischer Spannungsmodelle. Ein umfangreicher Analyseabschnitt befaßt sich systematisch mit der Vorhersage fundamentaler Strömungszustände durch explizite algebraische Spannungsmodelle. Dabei wird der strenge, mathematische Formalismus zur Analyse und Modifikation der Modellbildung in vielerlei Hinsicht intensiv benutzt. Im Vordergrund stehen die Darstellbarkeit verschiedenartiger homogener Turbulenzfelder, die physikalische Realisierbarkeit der modellierten Reynolds–Spannungen sowie die Konsistenz zur Rapid–Distortion–Theorie. Ferner findet die Vorhersage sekundärer und tertiärer Effekte besondere Beachtung. Die Betrachtungen ermöglichen eine Validierung des linearen Druck–Scher–Korrelationsmodells und eignen sich zur Formulierung von Restriktionen für die dazugehörigen Koeffizienten. Der Modellierungsteil erörtert Optimierungsstrategien und befaßt sich mit der Erweiterung expliziter algebraischer Spannungsmodelle für Wandturbulenz, kompressible Medien, Mehrskalentheorien und einfache zweiachsige Scherströmungen. Daneben werden die traditionellen Schwierigkeiten von Wirbelzähigkeitsmodellen in Bezug auf die Vorhersage krümmungsbehafteter Strömungen analysiert. Die Güte der vorgeschlagenen Modellbildung wird anhand mehrerer praxisrelevanter Anwendungen validiert.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit legt Zeugnis über einen Teil meiner fünfjährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet numerische Thermo- Fluiddynamik am Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik der Technischen Universität Berlin ab.
Mein besonderer Dank gilt dem Leiter des Fachgebiets, meinem Doktorvater Herrn Professor Dr.-Ing. Frank Thiele, der diese Arbeit ermöglichte und mit großem Interesse über das übliche Maß hinaus gefördert hat. Herrn Dr.-Ing. W. Haase (DaimlerChrysler Aerospace) danke ich für die bereitwillige Übernahme des Koreferats und die gute Zusammenarbeit in diversen kooperativen Forschungsvorhaben. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.rer.nat. Dr.-Ing. A. Dillmann für die freundliche Übernahme des Vorsitzes im Promotionsausschuß.
Neben meinem Doktorvater bin ich vor allem Herrn Dr.-Ing. Leiping Xue für die offene und intensive Zusammenarbeit zu großem Dank verpflichtet. In zahllosen Diskussionen hat er durch seine kritischen und präzise vorgetragenen Anregungen diese Arbeit wesentlich geprägt. Darüber hinaus hat er bei der Erstellung der integrierten Simulationsumgebung unverzichtbare Dienste geleistet. Sein freundschaftliches Engagement und die ihm eigene große Zuversicht machten ihn zu einem ausgesprochen angenehmen Partner.
Strategien zur Lösung komplexer Problemstellungen entwirft man tunlichst nicht alleine. Herr Prof. Thiele bot mir die Gelegenheit, mich an Aufbau und Führung einer rasch wachsenden Arbeitsgruppe zu beteiligen. Sein uneingeschränktes Vertrauen und seine vorbildliche Einstellung zur Nachwuchsförderung weit über die wissenschaftlichen Inhalte hinaus waren für mich ein Glücksfall. In vielen Gesprächen hat er mir neben wissenschaftlichen Inhalten auch zahlreiche Aspekte der Organisation und Führung eines Kollektivs näher gebracht. Bei meinen Kollegen bedanke ich mich für die freundschaftliche Unterstützung. Für ihren Enthusiasmus bei der Übernahme, Validierung und Weiterentwicklung von Software schulde ich ihnen Anerkennung.
Bei der Realisierung individueller stilistischer Modifikationen des Manuskripts hat mich Frau S. Nordt mit vielen sachkundigen Hinweisen unterstützt. Für die kritische Durchsicht der Reinschrift bin ich Frau S. Marks zu großem Dank verpflichtet.
Abschließend möchte ich diejenigen erwähnen, die mich in größerem Maße wissenschaftlich unterstützt haben. Herrn Prof. Dr. M.A. Leschziner (Queen Mary & Westfield College, University of London) danke ich für die Gelegenheit zur Mitarbeit in seiner Arbeitsgruppe am Manchester Institute of Science and Technology. Für wertvolle Hinweise zur Numerik komplexer Modellierungstechniken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. F–S. Lien (University of Waterloo) bedanken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Song Fu (Tsinghua University Beijing) für die kompetente Zusammenarbeit bei der Analyse und Weiterentwicklung mathematischer Modelle. Darüber hinaus bedanke ich mich für sein persönliches Engagement beim Aufbau einer engen wissenschaftlichen Kooperation.

Thomas Rung, im Mai 2000.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Kurzfassung i
Vorwort ii
Symbolverzeichnis v

Überblick **1**

1 Mathematische Grundlagen **7**
1.1 Transportgleichungen 7
1.2 Materialgleichungen 11
1.3 Statistische Beschreibung turbulenter Strömungen 14
1.4 Semi–empirische Wirbelzähigkeits–Turbulenzmodelle 25

2 Motivation **36**
2.1 Isotrope und anisotrope Wirbelzähigkeit 38
2.2 Primäre, sekundäre und tertiäre Stress–Strain Interaktion 41
2.3 Ziele der Arbeit 44

3 Darstellungstheorie **46**
3.1 Funktions– und Integritätsbasen 46
3.2 Anisotrope Wirbelzähigkeitsmodelle 47

4 Reynolds–Spannungsmodelle **54**
4.1 Lineare Transportgleichungsmodelle 54
4.2 Algebraische Spannungsmodelle 57

5 Projektionstechniken **59**
5.1 Illustratives Beispiel 59
5.2 Gatski & Speziale Modell 62
5.3 Erweiterungen klassischer EASM 63

6 Schließung der Produktionsrate **65**
6.1 Iterative Technik 65
6.2 Regularisierte Technik 68
6.3 Selbstkonsistente Technik 70
6.4 Quasi–Selbstkonsistente Technik 73

7 Analyse **79**
7.1 Homogene Scherturbulenz 79
7.2 Homogene Turbulenz in rotationsfreier Distorsion 88

7.3 Realisierbarkeit 96
7.4 Rotierende homogene Scherströmung 106
7.5 Turbulente Sekundärströmung 112

8 Erweiterung **117**
8.1 Invariantenbasierte Optimierung der Konstanten 117
8.2 Wandturbulenz 128
8.3 Kompressible (all–speed) Formulierung 133
8.4 Zwei–Skalen–Modell 137
8.5 Kubische Erweiterung 141
8.6 Stromlinienkrümmung 145

9 Examplarische Anwendungen **158**

Ausblick und Zusammenfassung **197**

Literaturverzeichnis **213**

A Invarianten des Anisotropietensors **214**

B Koordinatentransformation **217**

C Caley–Hamilton Theorem **220**

D Wandturbulenz **225**

E Hintergrundmodelle **229**

Symbolverzeichnis

Das Symbolverzeichnis erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es soll vielmehr nur die wichtigsten Symbole erklären, die über größere Textpassagen hinweg Verwendung finden. Ansonsten sei auf die Definition der Symbole im laufenden Text verwiesen. Über doppelt auftretende lateinische Indizes wird nach der Einsteinschen Summenkonvention summiert. Die Summenkonvention gilt jedoch ausdrücklich nicht in Verbindung mit griechischen Indizes. Zur Vereinfachung der Darstellung werden Mittelwerte und Schwankungsgrößen im Bedarfsfalle nicht weiter gekennzeichnet, sondern durch Groß- bzw. Kleinbuchstaben unterschieden. Die Koordinaten von Vektoren und Tensoren beziehen sich in der Regel auf ein kartesisches Basissystem.

Lateinische Kleinbuchstaben

Skalare

$a = \sqrt{\gamma RT}$	Schallgeschwindigkeit
c_a, c_w	Auftriebs– und Widerstandsbeiwert
c_p	Druckbeiwert
	spezifische isobare Wärmekapazität
c_v	spezifische isochore Wärmekapazität
$c_\mu, \overline{c}_\mu$	Anisotropiekoeffizient des Wirbelzähigkeitsmodells, bzw. des konventionellen isotropen Wirbelzähigkeitsmodells ($\overline{c}_\mu = 0.09$)
e	innere Energie
	kleinskaliger Anteile der Turbulenzenergie (Zwei-Skalen-Modell)
$g, \tilde{g}, \overline{g}$	selbstkonsistenter (g), quasi–selbstkonsistenter ($\tilde{g}$) bzw. regularisierter ($\overline{g}$) Gleichgewichtsparameter, gravitative Erdfeldstärke (g)
h	Enthalpie
k	Turbulenzenergie
$\hat{k}$	Betrag des Wellenzahlvektors
k_p	großskaliger Anteil der Turbulenzenergie (Zwei-Skalen-Modell)
m	Masse
n	Wandnormalenabstand
p	Druckfluktuation
r	lokaler Radius, radiale Zylinderkoordinate
s_ϕ	volumenspezifischer Quellterm der Transportgleichung von ϕ
t	Zeitkoordinate
$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit
x, y, z	kartesische Raumkoordinaten

Vektoren

f_i	Volumenkraftdichte
k_i	Wellenzahl

q_i		Wärmestromdichte
u_i		Schwankungsgeschwindigkeit
x_i		kartesische Raumkoordinaten

Tensoren

b_{ij}	$= \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}$	Anisotropietensor der Reynolds-Spannungen
e_{ijk}		Permutationstensor
s_{ij}	$= T_t \tilde{S}_{ij}$	dimensionloser, spurfreier Scherraten–Tensor
$\overline{u_i u_j}$		Reynolds–Spannungstensor
w_{ij}	$= T_t(W_{ij} - e_{ijk}\Omega_k)$	dimensionloser, objektiver Wirbeltensor
w^*_{ij}	$= T_t W^*_{ij}$	dimensionsloser, effektiver Wirbeltensor

Lateinische Großbuchstaben

Skalare

A, B, C		Koeff. des expliziten algebraischen Spannungsmodells
$A_0 \ldots A_4$		Koeff. der quasi–selbstkonsist. Formulierung von $(P/\varepsilon)_g$
C_1^*		Koeff. des Druck–Scher–Korrelationsmodells
$C_1 \ldots C_4$		Koeff. des Druck–Scher–Korrelationsmodells
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_5$		Koeff. der Dissipationsratengleichung
D		diffusiver Fluß der Turbulenzenergie
$II_b,\ III_b$		Hauptinvarianten des Anisotropietensors b_{ij}
K	$= \frac{\nu}{U_\delta^2}\frac{\partial U_\delta}{\partial x}$	Beschleunigungsparameter
L_t		integrales turbulentes Längenmaß
$Ma,$	$= \frac{\lvert U\rvert}{a}$	Machzahl
Ma_t	$= \frac{\sqrt{2k}}{a}$	Turbulenzmachzahl
P		Produktion von Turbulenzenergie
		statischer Druck
Pr	$= \frac{\mu\, c_p}{\lambda}$	Prandtlzahl
R		spezifische Gaskonstante
		Außenradius einer achsensymmetrischen Konfiguration
Re	$= \frac{UL}{\nu}$	Reynoldszahl
Re_t	$= \frac{k^2}{\varepsilon\,\nu}$	lokale Turbulenz–Reynoldszahl
Re_k	$= \frac{\sqrt{k}\,n}{\nu}$	nicht–lokale Turbulenz–Reynoldszahl
Ri	$= \frac{2\Omega_3}{S^*}\left[1 - \frac{2\Omega_3}{S^*}\right]$	Richardsonzahl
S	$= \sqrt{2 s_{kk}^2}$	skalierte Invariante des Tensors s_{ij}
S^*	$= \sqrt{2 \tilde{S}_{kk}^2}$	skalierte Invariante des Tensors $\tilde{S}_{ij}$
St	$= \frac{fL}{U} = \frac{L}{UT_m}$	Strouhalzahl (dimensionslose Frequenz)
T		Temperatur
T_t	$= k/\varepsilon$	integrales turbulentes Zeitmaß (eddy–turn–over–time)

T_m		Zeitmaß der transienten mittleren Geschwindigkeit
U, V, W		kartesische Geschwindigkeitskomponenten
U^+	$= \frac{\lvert\underline{U}\rvert}{u_\tau}$	Tangentialgeschwindigkeit im Wandkoordinatensystem
$V, \mathsf{V}, \mathcal{V}$		bewegtes, raumfestes und materielles Volumen
V_t		charakteristisches integrales Geschwindigkeitsmaß
Y^+	$= \frac{n u_\tau}{\nu}$	dimensionslose Wandkoordinate

Vektoren

U_i		Reynolds–gemittelter Geschwindigkeitsvektor

Tensoren

D_{ij}		diffusiver Fluß der Reynolds-Spannungen
P_{ij}		Produktionstensor der Reynolds–Spannungen
$R_{\underline{ij}}$		allgemeiner Korrelationstensor
S_{ij}	$= 0.5 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$	Scherraten–Tensor
$\tilde{S}_{ij}$	$= S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk}$	spurfreier Scherraten–Tensor
W_{ij}	$= 0.5 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$	Wirbeltensor
W^*_{ij}	$= W_{ij} - \frac{4 - C_4}{2 - C_4} e_{ijk} \Omega_k$	effektiver Wirbeltensor
$\tilde{W}_{ij}$	$= W_{ij} - e_{ijk} \Omega_k$	objektiver Wirbeltensor

Griechische Buchstaben

Skalare

α		Koeffizient
$\beta_{1,2,3}$		Koeffizienten des algebraischen Spannungsmodells
γ		allg. Koeffizient
		Isentropenexponent
$\delta, \delta_1, \delta_2$		Grenzschicht–, Verdrängungs–, Impulsverlustdicke
ε		isotrope Dissipationsrate
η_k	$= \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$	Kolmogorovsches Längemaß dissipativer Skalen
$\eta_0 \ldots \eta_6$		Invarianten der Integritätsbasis $b_{ij}(s_{ij}, w_{ij})$
θ		Drall- bzw. Azimutalkoordinate
κ		von–Kármán Konstante
λ		Eigenwert und isotrope Wärmeleitfähigkeit
μ		dynamische Zähigkeit
μ_t		dynamische turbulente Wirbelzähigkeit
ν		kinematische Zähigkeit
ν_t		kinematische turbulente Wirbelzähigkeit
ρ		Dichte
τ_k	$= \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}$	Kolmogorovsches Zeitmaß dissipativer Skalen
τ_w		Betrag der Wandschubspannung

$\tilde{\phi}, \phi = \overline{\phi}$		Momentan–, Mittelwert einer generischen Variablen
$\varphi = \phi'$		Schwankungswert einer generischen Variablen
ϕ_d		Druckdilatationsterm
φ		Koeffizient
ψ		Parameter der quasi–selbstkonsist. Darstellung von $(P/\varepsilon)_g$
ω	$= \frac{\varepsilon}{\overline{c}_\mu k}$	spezifische isotrope Dissipationsrate
Γ_ϕ		Diffusionskoeffizient der Transportglg. von ϕ
Ψ	$= \frac{\sqrt{6}\eta_3}{{\eta_1}^{1.5}}$	Schiefenparameter
Ω	$= \sqrt{2w_{kk}^{*2}}$	skalierte Invariante von w_{ij}^*

Vektoren

Ω_i	Rotation des Basissystems

Tensoren

δ_{ij}	Einheitstensor
ν_{ijkl}, ν_{ij}	anisotrope kinematische Wirbelzähigkeit
ϕ_{ij}	Tensor der Druck-Scher-Korrelationen
τ_{ij}	Tensor der molekularen Reibungsspannungen
ε_{ij}	Tensor der Dissipationsraten

Symbolische Vektoren, Matrizen und Operatoren

$\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{C}}$	Matrix, Tensor zweiter Stufe
$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$	Vektor
$\underline{U}$	Geschwindigkeitsvektor
$\underline{\nabla}$	Gradientenoperator
$\underline{e}_i$	Basisvektor des kartesischen Koordiantensystems
$\tilde{\underline{e}}_i$	Basisvektor eines beliebigen Koordiantensystems
$\hat{\underline{e}}_i$	Basisvektor eines Hauptachsensystems
$\tilde{\underline{e}}_r, \tilde{\underline{e}}_\theta, \tilde{\underline{e}}_x$	physikalische Zylinderkoordinatenbasis
$\underline{\underline{T}}^{(1)} \ldots \underline{\underline{T}}^{(10)}$	Generatoren der Funktionsbasis
$\underline{\underline{\mathcal{M}}}$	Systemmatrix des Projektionsverfahrens
$\underline{\underline{\mathcal{G}}}$	Gram–Matrix der Funktionsbasis

untere Indizes

$(\cdot)_0$	Zeiger zur Kennzeichnung von Ruhegrößen
$(\cdot)_i$	Vektorkoordinate
$(\cdot)_{ij\ldots}$	Tensorkoordinate
$(\cdot)_{\mathrm{reg}}$	Zeiger der regularisierten Modellbildung
$(\cdot)_{\mathrm{ref}}$	Referenzwert
$(\cdot)_t$	Zeiger zur Kennzeichnung turbulenter Größen
$(\cdot)_{,xyz}$	partielle Ableitung nach kartesischen Koordinaten

$(\cdot)_{(\mathrm{NW})}$	Zeiger zur Kennzeichung wandnaher Größen
$(\cdot)_R$	Zeiger zur Kennzeichung äusserer radialer Werte
$(\cdot)_\infty$	Zeiger zur Kennzeichung von Anströmgrößen

obere Indizes

$(\cdot)^{(\mathrm{2D/3D})}$	Zeiger für zwei– bzw. dreidimensionale Größen
$(\cdot)'$	Zeiger zur Kennzeichnung von Fluktuationswerten
(i)	Zeiger zur Kennzeichnung von Koordinaten eines bestimmten, durch i gekennzeichneten Bezugssytems

Sonstige Symbole

$\mathcal{O}(\cdot)$	von der Ordnung
$(\cdot)^T$	transponierte Matrix
$\|(\cdot)\|$	Betrag eines Skalars, Determinante einer Matrix
$tr\{\cdot\}$	Spur eines Tensors
$\overline{(\cdot)}$	Wert zur rückwertigen Iteration, konstanter Wert
$[\cdot]$	von der Dimension
$O(V)$	geschlossene Oberfläche des betrachteten Volumens
$\hat{\phi}$	Koordinaten des Hauptachsenssystems
$\overline{\phi}$	Mittelwert bei konventioneller Mittelung
$\overline{\phi\psi\ldots}$	höheres statistisches Moment
$\widehat{\phi}$	Mittelwert bei dichtegewichteter Mittelung
$\widetilde{\phi}$	Momentanwert
$\dot{\phi}, \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \underline{U}\cdot(\underline{\nabla}\phi)$	substantielle Ableitung
$\tilde{\Gamma}^j_{im}$	physikalische Christoffel-Symbole zweiter Art
$\mathcal{F}$	Funktionsbasis
$\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$	Drei–Generator–Basis nach Gatski und Speziale
$\mathcal{E}$	Energie–Spektralfunktion
$\mathcal{N}$	Integritätsbasis
$A \to B$	Übergang von A nach B

Abkürzungen

1D,2D,3D	ein-, zwei- dreidimensional
ASM	algebraisches Spannungsmodell
EVM	Wirbelzähigkeitsmodell (engl.: eddy–viscosity model)
EASM	explizites algebraisches Spannungsmodell
HOT	Terme höherer Ordnung
IP	Druck-Scher–Korrelationsmodell nach dem *Isotropization–of–Production* Konzept
LL	Lien–Leschziner (1993) low-Re $k-\varepsilon$ Modell
QI	Druck-Scher–Korrelationsmodell nach dem *Quasi–Isotropization–of–Production* Konzept

QS	quasi-selbstkonsist. Darstellung des Parameters $\tilde{g}$
REG	regularisierte Darstellung des Parameters $\tilde{g}$
RHS	rechte Seite einer Gleichung
RSTM	Reynolds–Spannungs Transportgleichungsmodell
SA	Spalart–Allmaras Eingleichungsmodell
SK	selbstkonsist. Darstellung des Gleichgewichtsparameters g
SST	Shear–Stress Transport Modell (Menter, 1994)
WC	Wilcox (1988,1993) $k-\omega$ Modell

Druck–Scher–Korrelationsmodelle

FRLT	Fu, Rung, Lübcke und Thiele (1999)
GL	Gibson und Launder (1978)
GY	Gibson und Younis (1986)
GS	linearisiertes SSG Modell nach Gatski und Speziale (1993)
LRR	Launder, Rodi, und Reece (1975)
RO	Rotta (1951)
SSG	Speziale, Sarkar und Gatski (1991)
TB	Druck–Scher–Korrelation nach Taulbee (1992)

Überblick

Die Simulation komplexer Problemstellungen aus dem Entwurfsprozeß strömungstechnisch hochbelasteter Bauteile stellt hohe Anforderungen an die Genauigkeit der strömungsphysikalischen Modellbildung. Hierbei hängt die Güte der Simulation wesentlich von der Behandlung des Turbulenzproblems ab. Turbulente Austauschmechanismen basieren auf Schwankungen von Druck, Dichte und Geschwindigkeit. Aufgrund der Nichtlinearität der (Eulerschen) Transportgleichungen treten die Schwankungen miteinander in Wechselwirkung, weswegen selbst für geringe Schwankungsaktivitäten stark veränderte Transportvorgänge auftreten. Eine detaillierte Beschreibung der räumlichen und zeitlichen Fluktuationen ist sehr aufwendig, da sie sich über ein breites Wellenzahl– und Frequenzspektrum erstrecken. Eine vollständige Auflösung des Schwankungsspektrums durch die numerische Diskretisierung ist in industriellen Strömungen auch langfristig nicht realisierbar. Die Berechnung technischer Strömungen ist daher auf eine effizientere Berücksichtigung von Strömungsturbulenz durch mathematische Modelle angewiesen.

Stand der technischen Turbulenz–Simulations–Forschung

In technischen Anwendungen sind zumeist nur die statistischen Eigenschaften einer turbulenten Strömung von Bedeutung. Numerische Verfahren zur Berechnung praxisrelevanter turbulenter Strömungen basieren daher fast ausnahmslos auf einer statistischen Betrachtung der Strömung. Hierzu werden die Transportgleichungen nach einem Vorschlag von Reynolds (1895) punktweise statistisch gemittelt. Die Reynolds–gemittelten Impulsgleichungen (*Reynolds–Averaged Navier–Stokes Gleichungen*; RANS) enthalten aufgrund der Nichtlinearität des Konvektionsterms zusätzliche Unbekannte in Gestalt zweiter statistischer Momente von lokalen Geschwindigkeitsfluktuationen. Diese sogenannten *Reynolds–Spannungen* werden durch eigene Transportgleichungen beschrieben, in denen wiederum neue Unbekannte in Form höherer bzw. zusätzlicher statistischer Momente auftreten. Die Verkettung der Transportgleichungen, von niedrigeren zu höheren Momenten, ist kennzeichnend für die statistische Betrachtung, weswegen die Herleitung weiterer Transportgleichungen prinzipiell zu keiner Schließung des Gleichungssystems führt. Ausgangspunkt der *statistischen Turbulenzmodellierung* ist der zunächst willkürlich gewählte Abbruch der Schließungskette.
Die Empfehlung eines optimalen Abbruchstadiums ist schwierig, da sich der Einfluß höherer Momentengrade pauschal nicht abschätzen läßt. Die Modellierung höherer Momente ist oftmals ungleich schwieriger, zudem stellen sie aufgrund ihrer komplexeren mathematischen Gestalt höhere Anforderungen an das Modell. Aus Effizienzgründen sind anwendungsorientierte Disziplinen auf einen Abbruch der Schließungskette im Bereich zweiter statistischer Momente angewiesen. In diesem Falle müssen entweder die Reynolds–Spannungen (Wirbelzähigkeitsmodelle), oder aber die in ihren Transportgleichungen auftretenden höheren statistischen Momente (Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodelle) durch ein Turbulenzmodell geschlossen werden.

Isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle

Lineare niederparametrige Wirbelzähigkeits–Turbulenzmodelle (Baldwin und Lomax 1978; Jones und Launder 1972; Wilcox 1993; Spalart und Allmaras 1992) bilden bis heute die Basis für die Mehrzahl industrieller Berechnungen turbulenter Strömungen. Ihre Popularität beruht vor allem auf programmtechnischen Aspekten. Die hohe numerische Stabilität des resultierenden Gesamtsystems und die algorithmisch einfache, effiziente Umsetzung des Ansatzes machen lineare isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle (*Eddy–Viscosity Modelle*; EVM) äußerst attraktiv. Dies gilt insbesondere für industrielle Anwendungen, in denen keine wesentlichen Prioritätsunterschiede zwischen numerischer Effizienz und Genauigkeit existieren. Lineare Wirbelzähigkeitsmodelle stützen sich auf einen nach Boussinesq benannten isotropen Zusammenhang zwischen den Reynolds–Spannungen und den Scherraten. Der isotrope Wirbelzähigkeitsansatz besitzt erhebliche konzeptionelle Defizite in Bezug auf die Darstellung komplexer turbulenter Austauschmechanismen. Aussagen über strömungsmechanische Belastungen sind, vor allem im Hinblick auf deren kritische Grenzen, mit herkömmlichen Wirbelzähigkeitsmodellen nur unter starken Einschränkungen machbar (Leschziner 1995). Das diesbezüglich am häufigsten zitierte Beispiel für Modelldefizite von erheblicher industrieller Relevanz ist der klassische druckinduzierte turbulente Nichtgleichgewichtszustand mit stark variierendem Clauserparameter. Die erzielbare Vorhersagegenauigkeit im Bereich abgelöster oder ablösenaher Strömungssituationen unter Einfluß eines positiven Druckgradienten ist bei konventioneller Modellierung nahezu ausnahmslos unbefriedigend. Weitere (un)populäre Beispiele sind die unzulängliche Modellierung von anisotropiegetriebenen Sekundärströmungen und starke 3D Effekte, wie sie bei der Strömungssimulation in rotierenden Bauteilen oder als Folge von krümmungsinduzierten Variationen turbulenter Schubspannungen auftreten.

Grobstruktursimulation

Im Unterschied zur statistischen Modellierung ermöglicht die Grobstruktursimulation (*Large–Eddy Simulation;* LES) detaillierte Einsichten in die strömungsphysikalischen Prozesse. Während statistische Ansätze auch bei instationären Strömungen einen im Prinzip zeitlich gemittelten Prozess betrachten, versucht die LES die dreidimensionale instationäre Entwicklung aller makroskopisch relevanten (Wirbel–)Strukturen durch das numerische Verfahren aufzulösen. Hierzu werden entsprechend feine räumliche und zeitliche Maschenweiten benötigt. Die energetisch untergeordneten Beiträge von geringer zeitlicher und räumlicher Ausdehnung werden analog zur RANS–Technik über ein Turbulenzmodell (Subgrid–Scale–Modell; SGS) geschlossen. Die industrielle Anwendung von LES in wandgebundenen Strömungen ist gegenwärtig jedoch begrenzt auf geometrisch einfache Konfigurationen bei niedrigen Reynoldszahlen ($Re \leq 10^4$). Die Gründe hierfür liegen im prohibitiven Aufwand zur Auflösung der extrem dünnen ($\delta \sim Re^{-0.5}$), in ihren Details jedoch hoffnungslos komplizierten Wandgrenzschichten durch die LES. Chapman (1979) schätzt, daß der Aufwand zur Auflösung des Außenbereichs einer turbulenten Grenzschicht proportional zu $Re^{0.4}$ anwächst. Mit Annäherung an die viskose Unterschicht steigt diese Proportionalität auf $Re^{1.8}$. Ein besonderes

Problem ist die nahezu isotrope Struktur des benötigten wandnahen Rechengitters, weswegen vor allem die spannweitige (laterale) Auflösung aufwendiger als bei einer RANS Simulation ist. Für eine einfache Flügelumströmung bei einer Reynoldszahl von $Re = 10^6$ wird die Anzahl der benötigten Gitterpunkte in Spalart (1999) mit $10^{11.5}$ und die Anzahl der benötigten Zeitschritte mit $10^{6.7}$ angegeben. Geht man von einer Verfünffachung der verfügbaren Rechenleistung in fünf Jahren aus, was eine realistische Abschätzung derzeitiger Zuwachsraten darstellt, so ist mit der Durchführbarkeit einer LES–Flügelsimulation nicht vor dem Jahr 2045 zu rechnen. Zudem ist die Qualität der LES mit steigender Reynoldszahl zunehmend von der Güte des Subgrid–Scale–Modells im Wandbereich abhängig. Um den qualitätsmindernden Einfluß des SGS zu reduzieren, entspricht das wandnahe Auflösungsvermögen aktueller LES Simulation häufig dem der direkten numerischen Simulation (DNS).
Hochauflösende Turbulenz–Simulations–Verfahren werden üblicherweise auf massiv parallelen Systemen eingesetzt, welche heutzutage durch den Einsatz von Standardkomponenten aus dem PC–Bereich zu günstigen Preis–Leistungs–Verhältnissen installiert werden können. Aufgrund der konzeptionellen Unterschiede zwischen der vielfach nichtparallelen *pre–* und *postprocessing* Software und dem massiv parallelen Strömungslöser stellt die schlechte Skalierbarkeit der Gittergeneratoren und Visualisierungswerkzeuge ein weiteres, wesentliches Hindernis für den industriellen Einsatz hochauflösender Verfahren dar.
In Hinblick auf eine physikalisch fundierte und zugleich praxisnahe Strategie galt die Grobstruktursimulation lange Zeit als Hoffnungsträger der ingenieurwissenschaftlich orientierten Turbulenzforschung. Aus den oben genannten Gründen zeichnet sich mittlerweile ein Paradigmenwechsel ab, durch den eine modellierungsbehaftete Vorgehensweise wieder stärker in den Blickpunkt des Interesses gerückt ist.

Der Großteil industrieller Simulationen wird auch in Zukunft auf eine partiell statistische Betrachtung der Turbulenz angewiesen sein. Dies gilt insbesondere für die Berechnung wandnaher inhomogener Scherschichten, welche auch in instationären Strömungen häufig durch die spektrale Trennung von turbulenten und transienten mittleren Anteilen gekennzeichnet sind. Bei der industriellen Berechnung instationärer Probleme mit gebietsweise nichtlinearen Impuls– und Energieflüssen über das gesamte Spektrum zeichnet sich gegenwärtig die Verwendung hybrider RANS/LES Ansätze ab. Hierbei werden die wandfernen Wirbelstrukturen einer instationären Strömung im Grobstruktur–Modus simuliert, die wandnahen Grenzschichten jedoch im wesentlich effizienteren RANS–Modus berechnet. Nichtzonale hybride Techniken sind unter dem Namen *Very Large–Eddy Simulation* (VLES; Speziale 1997b) bzw. *Detached–Eddy Simulation* (DES; Spalart 1999, Shur et al. 1999) bekannt.

Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodelle

Der Einsatz von Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodellen (RSTM) anstelle defizitärer EVM fand im industriellen Kontext trotz ihrer Prädestinierung für komplexe Strömungssituationen und der jahrzehntelangen Verfügbarkeit solcher Ansätze (Launder et al. 1975; Gibson und Launder 1978; Fu et al. 1987; Speziale et al. 1991)

kaum Verbreitung. Die primäre Ursache hierfür ist der hohe Kernspeicher– und Rechenbedarf, der mit den üblicherweise sieben zu lösenden Transportgleichungen des RSTM verbunden ist. Die quelltermdominierten, eng gekoppelten Transportgleichungen der RSTM sind stark nichtlinear und numerisch steif. Ihre formal konvektive Bindung an die gemittelten Impulsgleichung schwächt die numerische Stabilität und verursacht einen erheblichen Implementierungsaufwand (Obi, Perić und Scheuerer 1991; Lien und Leschziner 1994a; Rung 2000). Einfache (lineare) RSTM vermögen erfahrungsgemäß nicht alle Defizite isotroper EVM zu vermeiden. Diesbezüglich existieren leider nur wenige systematische Untersuchungen, da die Modellbildung aufgrund ihrer wesentlich komplexeren Struktur schwieriger zu analysieren und modifizieren sind. Neuere Ad–hoc–Ansätze zur Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der RSTM auf der Grundlage hochgradig nichtlinearer Umverteilungsterme werden vielfach mit Skepsis betrachtet (Speziale 1995). Ungeachtet ihrer theoretischen Vorteile steht die erfolgreiche Validierung fortschrittlicher Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodelle in Bezug auf die genauere Darstellung von komplexen, praxisrelevanten Strömungen noch aus (Bradshaw et al. 1996). Erste vielversprechende Arbeiten hierzu findet man z.B. bei Batten et al. (1999) oder Hanjalić et al. (1999).

Anisotrope Wirbelzähigkeitsmodelle

Zur Verbesserung der strömungsphysikalischen Modellbildung werden derzeit vielerorts nichtlineare Erweiterungen der Zwei–Parameter–Wirbelzähigkeitsmodelle untersucht. Diese gleichen in Bezug auf den Rechenaufwand und ihre numerischen Eigenschaften den isotropen Wirbelzähigkeitsmodellen. Sie sind daher besonders für den Einsatz in industriellen Simulationsverfahren geeignet. Gemeinsames Merkmal dieser Ansätze ist der im Unterschied zu isotropen EVM nichtlineare Zusammenhang zwischen den Reynolds–Spannungen und den Geschwindigkeitsgradienten (*nichtlineare Stress–Strain Beziehung*). Neben mehreren heuristisch motivierten Vorschlägen, z.B. von Speziale (1987) oder Craft et al. (1996), sind aus der Literatur eine Vielzahl unterschiedlicher Vorgehensweisen bekannt, welche sich bei der Konstruktion der nichtlinearen Wirbelzähigkeitsbeziehungen an einem übergeordneten mathematisch/physikalischen Prinzip orientieren. Nichtlineare Stress–Strain Beziehungen wurden beispielsweise auf der Grundlage von *Renormalisierungsgruppen–Theorien* (Rubinstein und Barton 1990; Yakhot et al. 1992), der *Direct–Interaction–Approximation* (Yoshizawa 1984), dem *Realizability–Prinzip* (Shih et al. 1993) oder der *Rationalen Mechanik* (Pope 1975; Taulbee 1992; Gatski und Speziale 1993; Wallin und Johansson 2000) formuliert.

Im Vergleich zu anderen Vorschlägen erscheinen die *Expliziten Algebraischen Spannungsmodelle* (EASM) überlegen. Die ursprünglich auf Pope (1975), Gatski und Speziale (1993) zurückgehende Entwicklung expliziter algebraischer Spannungsmodelle basiert auf der Vereinfachung linearer RSTM für strukturell stationäre Turbulenz. Durch diese Vereinfachung lassen sich die Transportgleichungen der Reynolds–Spannungen als System gekoppelter algebraischer Bilanzgleichungen darstellen (Rodi 1976), welche ergänzend zu den Transportgleichungen des Zwei–Parameter–Modells gelöst werden müssen. Die *Algebraischen Spannungsmodelle* (ASM) können mit Hilfe der *Darstellungs–*

bzw. Invariantentheorie (Spencer 1971; Zheng 1994) in explizite nichtlineare Wirbelzähigkeitsmodelle überführt werden. Der entscheidende Vorteil der EASM ist ihr strenger mathematischer Zusammenhang zu impliziten linearen RSTM, wodurch die exakte Darstellung der dominanten Produktionsterme und eine Berücksichtigung von Umverteilungsmechanismen gewährleistet ist. Die enge Beziehung zum impliziten Reynolds–Spannungsmodell ermöglicht eine verbesserte Vorhersage von Effekten, welche aus Spannungsanisotropie, Systemrotation oder extremer Stromlinienkrümmung gespeist werden, und erleichtert die Analyse der Modellbildung. Die EASM verfügen prinzipiell über ähnliche physikalische Gültigkeitsbereiche wie RSTM und besitzen im Vergleich zu Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodellen Vorteile in Bezug auf die Integration des wandnahen low–Re Bereichs. In Anbetracht des engen Zusammenhangs zwischen RSTM und nichtlinearen EVM erscheint die klassische Gliederung statistischer Turbulenzmodelle nach Wirbelzähigkeits– und Reynolds–Spannungsmodellen unangemessen. Ein alternatives Kriterium wäre die Differenzierung nach expliziten und impliziten Reynolds–Spannungsmodellen.

Gliederung und Zusammenfassung der Arbeit

Der vorliegende Beitrag widmet sich der Entwicklung und Analyse anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen auf der Basis expliziter algebraischer Spannungsmodelle. Dabei wird der strenge mathematische Formalismus zur Analyse und Modifikation der Modellbildung in vielerlei Hinsicht intensiv benutzt. Um die Inhalte der Arbeit möglichst geschlossen darzustellen, ist teilweise eine Rekapitulation von Vorarbeiten anderer Autoren notwendig. Trotz der gebotenen Kürze wird auf eine möglichst vollständige Einordnung des vorliegenden Beitrags im Umfeld der statistischen Modellierung mittels nichtlinearer Wirbelzähigkeitsmodelle Wert gelegt.
Der natürlichen Gliederung folgend, ist das erste Kapitel den mathematischen Grundlagen gewidmet. Neben den strömungsmechanischen Grundgleichungen werden hier insbesondere die Grundzüge der statistischen Turbulenzmodellierung dargelegt.
Der eigentliche Ausgangspunkt der Arbeit ist eine kritische Bewertung des linearen Wirbelzähigkeitskonzepts aus dem Blickwinkel der Darstellungstheorie. Kapitel zwei strebt eine formale Erörterung von Defiziten konventioneller isotroper Wirbelzähigkeitsmodelle an, und versucht so die Motivation zur Verwendung einer im darstellungstheoretischen Sinne höherwertigen Modellbildung zu entwickeln. Daran anschließend werden im dritten Kapitel die für die Entwicklung nichtlinearer Wirbelzähigkeitsmodelle relevanten Grundlagen der Darstellungstheorie erörtert. Die hierbei verwendeten vektoralgebraischen Hilfsmittel können Anhang C entnommen werden.
In den Kapiteln vier und fünf wird, ausgehend von den impliziten algebraischen Reynolds–Spannungsmodellen, eine *Projektionstechnik* zur Formulierung beliebig aufwendiger expliziter algebraischer Spannungsmodelle skizziert. Die Projektionstechnik ist wesentlich kompakter als das von Gatski und Speziale (1993) vorgestellte konventionelle Verfahren. Ein wichtiges Merkmal dieser Vorgehensweise ist ihre hohe Flexibilität in Hinblick auf die gezielte Modellierung einzelner physikalischer Mechanismen. Fer-

ner eignet sich die Prozedur zur Erweiterung klassischer expliziter algebraischer Spannungsmodelle. Die explizite Darstellung der Reynolds–Spannungen verlangt zusätzliche Annahmen zur Schließung der spezifischen Produktionsrate P/ε innerhalb der Koeffizienten des expliziten algebraischen Spannungsmodells. Kapitel sechs diskutiert die in dieser Arbeit vorgestellte *quasi–selbstkonsistente* Schließungstechnik im Zusammenhang mit alternativen Vorgehensweisen.
Ein Analysekapitel befaßt sich systematisch mit der Vorhersage fundamentaler Strömungszustände durch unterschiedliche explizite algebraische Spannungsmodelle. Im Vordergrund des Kapitels stehen die Darstellbarkeit homogener Turbulenzfelder, die physikalische Realisierbarkeit der modellierten Reynolds–Spannungen sowie die Konsistenz zur Rapid–Distortion–Theorie. Daneben findet die Darstellung normalspannungsgetriebener Sekundärströmungen und krümmungsinduzierter Variationen von Schubspannungen besondere Beachtung. Die Betrachtungen ermöglichen eine Validierung des linearen Druck–Scher–Korrelationsmodells und eignen sich zur Formulierung von Restriktionen für die dazugehörigen Koeffizienten. Das achte Kapitel dieser Arbeit erörtert Optimierungsstrategien und befaßt sich mit der Erweiterung expliziter algebraischer Spannungsmodelle für Wandturbulenz, kompressible Medien, Mehrskalentheorien und dreidimensionale Strömungszustände. Daneben werden die traditionellen Schwierigkeiten von Wirbelzähigkeitsmodellen in Bezug auf die Vorhersage krümmungsbehafteter Strömungen analysiert.
Die Validierung bezieht sich vorwiegend auf akademische Beispiele, welche einen vertieften Einblick in isolierte physikalische Mechanismen erlauben. Die diesbezüglichen Anwendungen sind begleitend in den laufenden Text der Kapitel sieben und acht integriert. Hierzu zählen unter anderem die Berechnung von scherfreier und schergetriebener Turbulenz (7.1-3, 8.1), die Simulation von Sekundärströmungsphänomenen (7.4) und Wandturbulenz (8.2), sowie die Untersuchung von Strömungsdrall (8.6) bzw. die Vorhersage von Strömungen in rotierenden Systemen (7.4, 8.5). Weite Teile der Darstellung und Berurteilung von Ergebnissen erfolgen unter Verwendung der Invariantenkarte nach Lumley (1978) und der damit verbundenen skalaren Deskriptoren, deren Herleitung man Anhang A entnehmen kann.
Kapitel neun beinhaltet die abschließende Verifizierung der Leistungsfähigkeit an ausgewählten, praxisbezogenen generischen Konfigurationen. Im Mittelpunkt der ausnahmslos zweidimensionalen Anwendungen stehen die Themenkreise Stoß/Grenzschicht–Interaktion, turbulentes Nichtgleichgewicht, druckinduzierte Strömungsablösung, Maximalauftriebsvorhersage, Relaminarisierung und instationäre (periodische) Körperumströmung.
Im Rahmen der abschliessenden Bemerkungen werden die Schwerpunkte der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen geboten.

Kapitel 1 Mathematische Grundlagen

Für die Berechnung von Strömungsproblemen bieten die in einer Vielzahl bewährter Literaturstellen (z.B. Bird et al. 1962, Spurk 1989) angebotenen Ausgangsgleichungen einen attraktiven Einstieg in die Problematik. Der Vollständigkeit halber erfolgt zu Beginn dieser Arbeit eine knappe Zusammenfassung der mathematischen Grundlagen. Der erste Abschnitt befaßt sich mit den fundamentalen Bilanzgleichungen. Die Schließung der Bilanzgleichungen stützt sich auf die Materialgesetze einfacher Navier–Stokes/Fourier Fluide und perfekter Gase, welche im zweiten Abschnitt wiedergegeben sind. Der dritte Abschnitt stellt die Grundzüge der statistischen Modellierung turbulenter Strömungen dar, zu dessen Ergänzung bereits hier auf die Bücher von Hinze (1959), Tennekes und Lumley (1972), Launder und Spalding (1972), Rotta (1972), Wilcox (1993) und Hallbäck et al. (1996) hingewiesen sei.

1.1 Transportgleichungen

Im Rahmen der Strömungsmechanik werden die Bilanzgleichungen in der Regel nicht auf der Basis körperfester materieller oder Lagrange–Koordinaten, sondern auf der Basis raumfester Euler–Koordianten betrachtet. Die zeitliche Ableitung eines Integrals, dessen Grenzen und Integrand von der Zeit t abhängen, erfolgt unter Verwendung der Leibnitzschen Integrationsregel:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{V}} \phi dV \rightarrow \int\limits_{\mathsf{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint\limits_{O(\mathsf{V})} d\underline{A} \cdot (\underline{U}\phi) = S_\phi \,. \tag{1.1}$$

Hierin repräsentiert V den räumlichen Bereich, der momentan mit dem materiellem Volumen $\mathcal{V}$ zusammfällt, und S_ϕ eine spezifische rechte Seite, die aus sogenannten Quelltermen zur Erzeugung, Vernichtung oder Umverteilung von ϕ beiträgt. Die Leibnitzsche Integrationsregel für Volumina (1.1) ist auch als *Reynoldssches Transporttheorem* bekannt. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhält man anstelle von (1.1) die alternative Darstellung:

$$\int\limits_{\mathsf{V}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{U}\phi) \right] dV = S_\phi \,. \tag{1.2}$$

Im Rahmen der Kontinuumshypothese gilt (1.2) für beliebige Kontrollräume V, weswegen die differentielle Form der Bilanzgleichungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{U}\phi) = s_\phi \,, \qquad \text{mit} \quad S_\phi = s_\phi dV \tag{1.3}$$

lautet. Die Gültigkeit der differentiellen Form beschränkt sich genaugenommen auf Punkte, in denen die Feldgrößen stetig sind, insbesondere also keine Diskontinuitätsflächen auftreten. Für die numerische Simulation von Strömungsproblemen wird die

konservative Integralform (1.1) zumeist bevorzugt. Die Herleitung der Transportgleichungen für die zweiten statistischen Momente stützt sich vorwiegend auf die differentielle Form, deren Notation im weiteren Verlauf des Kapitels auf kartesischen Tensorkoordinaten basiert und die übliche Definition der substantiellen Ableitung verwendet

$$\dot{\phi} = \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \, .$$

Kontinuitätsgleichung

Der Satz von der zeitlichen Erhaltung der Masse in quellfreien Strömungsgebieten (S_ρ=0) wird durch den Transport der Dichte ($\phi := \rho$) in (1.3) beschrieben

$$\int_{\mathsf{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{O(\mathsf{V})} d\underline{A} \cdot (\underline{U}\rho) = 0 \, . \tag{1.4}$$

Auf der Basis kartesischer Tensorkoordinaten lautet die entsprechende differentielle Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \, . \tag{1.5}$$

Impulsgleichung

Die Impulsgleichung ergibt sich aus dem 1. Newtonschen Grundgesetz, nach dem die Änderung des Impulses ($\phi := \rho \underline{U}$) der Summe aller äußeren Kräfte auf das Fluid entspricht. Auf der rechten Seite der Eulerschen Beziehung (1.2) sind daher sämtliche, auf den flüssigen Körper wirkenden mechanischen Lasten zu bilanzieren:

$$\int_{\mathsf{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{U}) \right] dV + \oint_{O(\mathsf{V})} \left[\rho \underline{U} \; \underline{U} \right] \cdot d\underline{A} = - \oint_{O(\mathsf{V})} P \; d\underline{A} + \oint_{O(\mathsf{V})} \underline{\underline{\tau}} \cdot d\underline{A} + \int_{\mathsf{V}} \underline{f} dV \, . \tag{1.6}$$

Hierin ist P der statische Druck, $\underline{\underline{\tau}}$ der noch zu definierende (symmetrische) Tensor der Reibungsspannungen und $\underline{f}$ eine beliebige Volumenkraftdichte – z.B.$(0, \, 0, \, -\rho g)$ –. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes lassen sich die Integrale über die Oberflächenkraftdichten in Volumenintegrale wandeln, und man erhält für beliebige Teilbereiche lokal stetiger Feldvariablen die folgende differentielle (kartesische) Koordinatenbeziehung

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \, . \tag{1.7}$$

Im Falle eines mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\Omega}$ stationär um den Koordinatenursprung rotierenden Bezugsssystems ist die rechte Seite um Coriolis– $(-2\rho \, \underline{\Omega} \times \underline{U})$ und Zentrifugalbeschleunigungen $(-\rho \, \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{x})$ zu ergänzen, woraus sich

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = - \frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i^* \tag{1.8}$$

ergibt. Hierin sind der um die Zentrifugalbeschleunigungen erweiterte Druck durch

$$P^* = P - 0.5\rho\,(x_i x_i)(\Omega_k\Omega_k) + 0.5\rho\,(\Omega_i x_i)(\Omega_k x_k)\;, \tag{1.9}$$

und die um die Coriolisbeschleunigung ergänzte Volumenkraftdichte durch

$$f_i^* = f_i - 2\rho\, e_{ijk}\,\Omega_j U_k \tag{1.10}$$

erklärt. Der in (1.10) auftretende Permutationstensor e_{ijk} folgt der Definition

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = 123, 231, 312\;, \\ -1 & \text{für } ijk = 213, 132, 321\;, \\ 0 & \text{sonst}\;. \end{cases} \tag{1.11}$$

Für die statistische Turbulenzmodellierung spielt die Poissongleichung des Drucks in inkompressiblen Medien eine zentrale Rolle. Diese gewinnt man mit Hilfe der Kontinuitätsaussage $\underline{\nabla}\cdot\underline{U} = 0$ aus der Divergenz von Gleichung (1.8)

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_i} = -\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + 2e_{ijk}\Omega_j\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\;, \tag{1.12}$$

wobei der Reibungsspannungstensor dem in Abschnitt 1.2 notierten Materialgesetz (1.29) folgt.

Energiegleichung

Der energetische Transport durch einen Kontrollraum V wird durch den 1. Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben. Hiernach ist die Änderung von kinetischer Energie K und innerer Energie E in V gleichgewichtig zur Summe aus Spannungsleistungen P_s, Wärmeflüssen über die Oberfläche $\dot{Q}$ sowie dem pro Zeiteinheit produzierten Anteil an eingeprägter Wärme $\dot{Q}_e$ (beispielsweise aus Strahlung resultierend):

$$\dot{E} + \dot{K} = P_s + \dot{Q} + \dot{Q}_e\;. \tag{1.13}$$

Eingeprägte Wärmeanteile bleiben fortan unberücksichtigt. Da diese zumeist Quelltermgestalt besitzen, sind sie im Bedarfsfall leicht zu ergänzen. Mit Hilfe der Leistungsdichten

$$\dot{Q} = -\oint \underline{q}\cdot d\underline{A} \qquad \text{bzw.} \quad P_s = \oint \underline{U}\cdot\underline{\tau}\cdot d\underline{A} - \oint d\underline{A}\cdot(\underline{U}\;P) + \int \underline{U}\cdot\underline{f}dV \tag{1.14}$$

erhält man unter Verwendung intensiver Feldgrößen

$$dE := \rho e\; dV \qquad \text{und} \qquad dK := \frac{\rho}{2}\underline{U}\cdot\underline{U}\; dV = \frac{\rho U_g^2}{2}\; dV \tag{1.15}$$

die Integralgleichung

$$\int_{\mathsf{V}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{U_g^2}{2} \right) \right] \right\} dV + \oint_{O(\mathsf{V})} d\underline{A} \cdot \left[\rho \underline{U} \left(e + \frac{U_g^2}{2} \right) \right] =$$

$$- \oint_{O(\mathsf{V})} d\underline{A} \cdot \left(\underline{q} + \underline{U}\ P - \underline{\underline{\tau}}^T \cdot \underline{U} \right) + \int_{\mathsf{V}} \underline{U} \cdot \underline{f} dV \,. \tag{1.16}$$

Die Beziehung (1.16) geht nach Wandlung der Oberflächenintegrale unter der Voraussetzung stetiger Feldgrößen in eine differentielle Formulierung über. Subtrahiert man hiervon die durch skalare Multiplikation mit der Geschwindigkeit erweiterte Impulsbilanz (1.7), so ergibt sich eine weitere differentielle Bilanzgleichung

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} - P \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \underbrace{\tau_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{:=\phi_D} \,. \tag{1.17}$$

Die hierin auftretende doppelte Überschiebung zwischen den Verzerrungsgeschwindigkeiten und den daran wirkenden Reibungsspannungen wird zumeist als *Dissipationsfunktion* ϕ_D bezeichnet und symbolisiert die volumenbezogene Spannungsleistung infolge von Kontrollraumverzerrung.

Enthalpiegleichung

Neben (1.17) finden eine Reihe weiterer Formulierungen der Energiegleichung Verwendung. Hierzu zählt beispielsweise die in Termen der Enthalpie h formulierte Variante, zu der man vermöge $\rho h := \rho e + P$ gelangt

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \phi_d + \frac{DP}{Dt} \,. \tag{1.18}$$

Diese Beziehung geht für kalorisch ideale Medien (vgl. Abschnitt 1.3) in

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \phi_d + \frac{DP}{Dt} \tag{1.19}$$

über. Die Beziehung (1.19), bzw. deren konservative Integralform dienen im Folgenden als Ausgangsgleichung zur Berechnung kompressibler Probleme.

Generische Transportgleichung

Der Transport einer generischen Strömungsvariablen folgt der Beziehung

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + s_\phi \,. \tag{1.20}$$

1.2 Materialgleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich Strömungen einfacher Navier–Stokes–Fourier Fluide behandelt. Die mechanischen und thermodynamischen Konsequenzen aus dieser Vereinfachung sind allgemein bekannt und sollen daher im folgendem Abschnitt nur kurz skizziert werden. Das im vorangehenden Abschnitt notierte System von Bilanzgleichungen ist für alle Materialien und Strömungszustände gültig. Dennoch bildet es kein geschlossenes Gleichungssystem, sondern benötigt hierzu folgende Konstitutivbeziehungen

- eine thermische Zustandsgleichung,
- ein Stoffgesetz zur Verknüpfung von Zustandsgrößen,
- Ansätze für die Transportkoeffizienten.

Thermische Zustandsgleichung

Vernachlässigt man die intermolekularen Phänomene, wir z.B. Binnendruck und Kovolumen, so spricht man von *idealem* oder auch perfektem Gas. Für dieses Fluid sind die Zustandsgrößen Druck p, Dichte ρ und Temperatur T durch die Zustandsgleichung

$$P = \rho R T \tag{1.21}$$

beschrieben. Die medienspezifische Gaskonstante R bestimmt sich darin über

$$\begin{aligned} R = &\quad \tilde{R}/M \\ \tilde{R} = &\quad \text{universelle Gaskonstante } = 8.3143 \tfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}} \\ M = &\quad \text{Molmasse des Strömungsmediums } \left(\text{z.B. Luft } = \tfrac{29\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}\right) . \end{aligned} \tag{1.22}$$

Aus der Voraussetzung eines thermisch idealen Stoffverhaltens ergibt sich für die differentiellen Zustandsgrößen der inneren Energie de und der Enthalpie dh

$$de = c_v dT \qquad \text{bzw.} \qquad dh = c_p dT = d(e + p/\rho) \tag{1.23}$$

mit (nicht notwendigerweise konstanten) isobaren bzw. isochoren Wärmekapazitäten c_p und c_v. Das Stoffgesetz (1.21) des Idealgases ergibt die Restriktion

$$dh = de + d(P/\rho) \quad \rightarrow \quad c_p dT = c_v dT + R dT \quad \rightarrow \quad c_p - c_v = R\,, \tag{1.24}$$

welche sich bei Verwendung des Quotienten $\frac{c_p}{c_v}$ (:= Isentropenexponent γ) zu

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \qquad \rightarrow \qquad c_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}\, c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \tag{1.25}$$

notiert. Die in dieser Arbeit berechneten kompressiblen Strömungen setzen zudem *kalorisch ideales* Verhalten voraus (c_p und c_v =konst.), weswegen sich die differentiellen Stoffgesetze (1.23) der inneren Energie und Enthalpie zu

$$h - h_{ref} = c_p(T - T_{ref}) \qquad \text{und} \qquad e - e_{ref} = c_v(T - T_{ref}) \tag{1.26}$$

integrieren lassen. Eine Modifikation für kalorisch reale Stoffe sollte mit Hilfe von Stoffgesetztabellen, z.B. Blanke (1989), leichterdings möglich sein. Für die Berechnungen benötigt man somit die Vorgabe einer spezifischen Gaskonstante R sowie eines Isentropenexponenten γ. Das verwendete numerische Verfahren ist vornehmlich zur Berechnung von Luftströmungen entwickelt worden. Für dieses, in der Hauptsache aus zweiatomigen Stickstoffmolekülen bestehende Medium, ist die Gültigkeit der thermischen Zustandsgleichung bei nicht zu hohen Drücken im wesentlichen vom lokalen Temperaturzustand abhängig. Bei Temperaturen oberhalb von 500 K wird vom Medium zusehends mehr Energie in die Nutzung des Vibrationsfreiheitsgrades des Hantelmodells umgesetzt. In diesem Fall kann nicht mehr mit konstanten spezifischen Wärmen gerechnet werden (kalorisch reales Verhalten). Oberhalb von ca. 2000 K ist die verstärkt einsetzende Dissoziation der Sauerstoffanteile zu berücksichtigen, von 5000 K an findet zudem Stickstoffdissoziation statt. Berechnungen für $T > 2000$ K erscheinen auch bei Berücksichtigung von Realgasfaktoren fragwürdig. Eine Abschätzung der maximal berechenbaren Temperaturen in Abhängigkeit der Anströmzahl kann mit Hilfe der Staupunkttemperatur erfolgen. Mit $\gamma = 1.4$ sowie $T_\infty \approx 300$ K ermittelt man (für in erster Näherung zu 1 gesetzte Recoveryfaktoren) aus:

$$\frac{T_o}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_\infty^2 \,, \tag{1.27}$$

die T_0 $\approx$500 K Grenze bei $Ma_\infty \approx 2$ sowie den Realgasbereich bei $Ma_\infty \approx 5$. Die in (1.27) verwendete dimensionslose Kennzahl Ma_∞ (Anströmmachzahl) ist durch das Verhältnis von Anströmgeschwindigkeitsbetrag $U_{g\infty}$ zu Schallgeschwindigkeit der Anströmung a_∞ definiert

$$Ma := \frac{U_g}{a} \qquad \text{mit} \qquad a^2 := \gamma RT \,. \tag{1.28}$$

Stoffgesetz

Der molekulare Reibungsspannungstensor $\underline{\underline{\tau}}$ wird im Rahmen einfacher Medien üblicherweise durch den Deformationsgeschwindigkeitsansatz nach *Navier–Stokes* beschrieben

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu(\underline{U}\,\underline{\nabla} + \underline{\nabla}\,\underline{U}) + \left(\mu_d - \frac{2}{3}\mu\right)(\underline{\nabla} \cdot \underline{U})\;\underline{\underline{\delta}} \,. \tag{1.29}$$

Hierin sind μ die molekulare Scherzähigkeit und μ_d die Druckzähigkeit. Die Symmetrie des Spannungstensors ist zwingend notwendig, wie die Analyse des Drehimpulserhaltungssatzes ergibt (Spurk 1989). Diese erlaubt die Redefinition der oben genannten

Dissipationsfunktion (1.17)

$$\phi_D = \underline{\underline{S}} \cdot \cdot \underline{\underline{\tau}} \qquad \text{mit} \quad \underline{\underline{S}} = 0.5 \left(\underline{\nabla}\, \underline{U} + \underline{U}\, \underline{\nabla} \right) . \tag{1.30}$$

Die mittlere Gesamtnormalspannung entspricht für inkompressible Strömungen gerade dem negativen Druck. Damit dies für kompressible Strömungen auch gilt, muß die Druckzähigkeit μ_d gemäß der *Stokesschen Hypothese* verschwinden, wovon im Folgenden ausgegangen werden soll:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{S}} - \frac{2}{3} \mu \left(\underline{\nabla} \cdot \underline{U} \right) \underline{\underline{\delta}} , \qquad \text{mit} \quad \mu = \rho\, \nu . \tag{1.31}$$

Die Druckzähigkeit dient üblicherweise zur Beschreibung der Anregung innerer Molekülfreiheitsgrade durch den Übergang von kinetischer Energie. Für einatomige Gase ohne innere Freiheitsgrade ist die Druckzähigkeit folglich null. Für die hier vorwiegend betrachteten Luftströmungen im Idealgasbereich ist der aus der Stokesschen Hypothese resultierende Fehler von untergeordneter Bedeutung.
Die über die Oberfläche in den Kontrollraum einfließende Wärmemenge sei positiv für nach innen gerichtete Wärmeflüsse. Die Komponenten des Vektors der Wärmestromdichten $\underline{q}$ bestimmen sich dann aus dem nach Fourier benannten isotropen *Gradienten-Diffusionsansatz:*

$$\underline{q} = -\lambda\, \underline{\nabla} T . \tag{1.32}$$

Transportkoeffizienten

Die (Scher-)Zähigkeit μ und die Wärmeleitfähigkeit λ von Fluiden sind im allgemeinen eine Funktion von Druck und Temperatur. Die Druckabhängigkeit spielt bei verdünnten Gasen (z.B. Luft bei mäßig hohen Drücken) nur eine untergeordnete Rolle. Die exakten Abhängigkeiten werden durch die kinetische Gastheorie beschrieben (Sommerfeld 1988). Für die Viskosität wird zumeist eine von Sutherland (1893) angegebene Näherungsformel verwendet

$$\mu(T) = \mu_{ref}(T_{ref}) \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + \vartheta}{T + \vartheta} . \tag{1.33}$$

Darin ist μ_{ref} die Viskosität für die Referenztemperatur T_{ref} und ϑ eine stoffabhängige Konstante. Für Luft findet man (Jischa 1982)

$$\vartheta = 110K \quad T_{ref} = 280K, \quad \mu_{ref} = 1.75 \cdot 10^5 \frac{kg}{ms} . \tag{1.34}$$

Eine analoge Formel läßt sich zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit finden. Da die dynamische Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit für verdünnte Gase in sehr ähnlicher Weise mit der Temperatur variieren, kann λ im interessierenden Temperaturbereich einfacher über die Definition der konstant gesetzten Prandtlzahl Pr bestimmt werden:

$$\lambda = \frac{\mu c_p}{Pr} , \qquad \text{mit} \quad Pr \approx 0.7 . \tag{1.35}$$

Abschließend sei bemerkt, daß sämtliche Stoffwerte als *schwankungsfrei* betrachtet werden.

1.3 Statistische Beschreibung turbulenter Strömungen

Die mathematische Beschreibung von Strömungsturbulenz ist die Grundlage für das Verständnis und die Optimierung technischer Strömungen. Dabei ist die Effizienz des verwendeten Ansatzes ebenso wichtig wie dessen Genauigkeit. Turbulente Austauschmechanismen basieren auf Wechselwirkungen der zeitlichen und räumlichen Schwankungen von Druck, Dichte und Geschwindigkeit, welche sich über ein großes Spektrum unterschiedlicher Skalen erstrecken. Eine präzise Simulation der Vorgänge verlangt die Auflösung sämtlicher Skalen durch die Diskretisierung. Dies ist aus Effizienzgründen für praxisnahe Anwendungen in absehbarer Zeit nicht möglich, darüber hinaus sind in technischen Anwendungen nur die statistischen Eigenschaften der Strömung von Interesse. Numerische Verfahren zur Berechnung praxisrelevanter Problemstellungen basieren daher fast ausnahmslos auf einer statistischen Betrachtung der Strömung unter Verwendung semi–empirischer Turbulenzmodelle zur Schließung der statistisch gemittelten Bilanzgleichungen. Der letzte Abschnitt des ersten Kapitels diskutiert die mathematischen Grundlagen statistischer Turbulenzmodelle.

1.3.1 Statistische Mittelung

Bei den im Folgenden definierten Mittelungsoperatoren handelt es sich um die klassische Reynolds– oder Ensemblemittelung (Reynolds 1895) und die zur Behandlung kompressibler Strömungen vorteilhafte dichtegewichtete Favré–Mittelung (Favré 1965). Daneben werden die unter dem Oberbegriff *Reynoldssche Mittelung* firmierenden Derivativa der Ensemblemittelung für statistisch stationäre und homogene Strömungen skizziert. Die Definition der Mittelungsoperatoren macht von Hilfsgrößen $\mathcal{Z}_{(i)}$ Gebrauch, die eine beliebige statistische Variable ($\underline{U}$, P, T oder ρ) repräsentieren.

Die Reynoldssche Mittelung ist die am häufigsten gebrauchte Mittelungstechnik. Ihre allgemeingültigste Definition gründet auf der klassischen Ensemblemittelung

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} + z \qquad \text{mit} \quad \overline{\tilde{\mathcal{Z}}} = \mathcal{Z} \qquad \text{bzw.} \quad \overline{z} = 0\,. \tag{1.36}$$

Hierin kennzeichnen $\tilde{\mathcal{Z}}$ den Momentanwert, $\mathcal{Z}$ den Mittelwert und z den Schwankungswert von $\tilde{\mathcal{Z}}$. Die Definition des *Ensemblemittelwerts* $\overline{(\cdot)}$ lautet

$$\mathcal{Z}(\underline{x},t) = \mathcal{A}^E[\tilde{\mathcal{Z}}] = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\tilde{\mathcal{Z}}_n(\underline{x},t)\right)\,. \tag{1.37}$$

Für einen im Mittel stationären Prozess geht der Ensemblemittelwert nach dem Ergoden–Theorem in den *zeitlichen Mittelwert* über

$$\mathcal{Z}(\underline{x}) = \mathcal{A}^T[\tilde{\mathcal{Z}}] = \lim_{\delta t\to\infty}\frac{1}{\delta t}\int_{t-\delta t/2}^{t+\delta t/2}\tilde{\mathcal{Z}}_n(\underline{x},t')\,dt'\,. \tag{1.38}$$

Im Falle einer homogenen (translationsinvarianten) Strömung ist das Ensemblemittel äquivalent zu einem *räumlichen Mittelwert,* welcher durch

$$\mathcal{Z}(t) = \mathcal{A}^S[\tilde{\mathcal{Z}}] = \lim_{\mathsf{V}\to\infty} \frac{1}{\mathsf{V}} \int_{\mathsf{V}} \tilde{\mathcal{Z}}_n(\underline{x}, t)\, dV' \,, \tag{1.39}$$

erklärt ist. Die Mittelwerte werden auch als erste statistische Momente bezeichnet. Aus der Definition der oben angeführten Mittelwerte lassen sich eine Reihe von Rechenregeln ableiten, die bei der Herleitung der statistisch gemittelten Transportgleichungen Verwendung finden

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{\tilde{\mathcal{Z}}}} = \overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \,, \qquad \overline{\tilde{\mathcal{Z}}_{(1)} + \tilde{\mathcal{Z}}_{(2)}} = \mathcal{Z}_{(1)} + \mathcal{Z}_{(2)} \,, \qquad \overline{\tilde{\mathcal{Z}}_{,x}} = \mathcal{Z}_{,x} \,, \\ &\overline{\int \tilde{\mathcal{Z}} dx} = \int \mathcal{Z}\, dx \,, \qquad \overline{\mathcal{Z}_{(1)} \ldots \mathcal{Z}_{(i)}\; z_{(k)}} = 0 \,, \qquad \overline{\mathcal{Z}_{(1)} \ldots \mathcal{Z}_{(i)}\; z_{(k)} \ldots z_{(l)}} \neq 0 \,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Die Zerlegungen der wichtigsten im Verlauf dieser Arbeit verwendeten Variablen lauten

$$\boxed{\tilde{\underline{U}} = \underline{U} + \underline{u} \,, \quad \tilde{P} = P + p \,, \quad \tilde{T} = T + T' \,, \quad \tilde{\rho} = \rho + \rho' \,, \quad \tilde{\underline{f}} = \underline{f} + \underline{f}' \,, \quad \tilde{\phi} = \phi + \varphi \,.}$$

Die homogene Turbulenz spielt bei der Entwicklung und Analyse von Turbulenzmodellen eine zentrale Rolle. Man beachte, daß die hiermit vebundene Translationsinvarianz statistisch gemittelter Größen auch für höhere statistische Momente $\overline{z_{(i)} \ldots z_{(k)}}$ gilt. Neben der strengen Form der Homogenität existiert noch eine weniger restriktive Form, die homogene Gradienten von Mittelwerten zuläßt (vgl. Abschnitt 1.3.4). Der Begriff der Homogenität wird im Verlauf dieser Arbeit für beide Situationen verwendet.

Die Favrésche Mittelung erleichtert die Formulierung der gemittelten Transportgleichungen für kompressible Medien. Anstelle der konventionellen Mittelungsoperationen (1.37–1.39) werden hierbei die entsprechenden dichtegewichteten Mittelwerte benutzt, deren Zusammenhang zur Reynoldsschen Mittelung durch

$$\rho\, \widehat{\mathcal{Z}} = \overline{\tilde{\rho} \tilde{\mathcal{Z}}} \,, \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\rho} = \rho + \rho' \tag{1.41}$$

erklärt ist. Unter Verwendung eines dichtegewichteten Mittelwertes $\widehat{\mathcal{Z}}$ lautet die Zerlegung des Momentanwertes

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \widehat{\mathcal{Z}} + z'' \qquad \text{mit} \quad \widehat{\tilde{\mathcal{Z}}} = \widehat{\mathcal{Z}} \qquad \text{bzw.} \quad \widehat{z''} = 0 \quad \text{und} \quad \overline{z''} = \mathcal{Z} - \widehat{\mathcal{Z}} \,. \tag{1.42}$$

Die Favrésche Mittelung ist eine rein mathematische Vereinfachung. Sie degeneriert unter Beschränkung auf schwach kompressible Medien zur Reynoldsschen Mittelung, wie die im Folgenden skizzierte Morkovin–Hypothese zeigt.

Die Morkovin–Hypothese (1964) dient der Abschätzung der Dichtefluktuationen in schwach kompressiblen Medien. Die statistische Betrachtung der thermischen Zustandsgleichung (1.21) liefert nach Bildung der logarithmischen Ableitung

$$\frac{d\tilde{P}}{P} = \frac{d\tilde{\rho}}{\rho} + \frac{d\tilde{T}}{T} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{p}{P} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{T'}{T} \ . \tag{1.43}$$

Die erste Aussage der Hypothese basiert auf der Analyse empirischer Daten und besagt, daß der Druckfluktuationsterm p/P vernachlässigbar ist. Im Weiteren ordnet die Hypothese den Schwankungen der Gesamtenthalpie

$$\tilde{h}_0 = c_p \tilde{T}_0 = c_p \tilde{T} + 0.5 \tilde{U}_g^2 \ , \qquad \text{mit} \quad \tilde{h}_0 = h_0 + h_0' \ ,$$

eine nachrangige Bedeutung zu. Die Reynoldssche Zerlegung der Gesamtenthalpie liefert damit

$$\tilde{h}_0 \approx h_0 \quad \rightsquigarrow \quad T + \frac{U_g^2}{2c_p} = T + T' + \frac{1}{2c_p}\left(U_g^2 + 2U_g\sqrt{2k} + 2k\right) \ .$$

In Gleichung (1.3) bezeichnet $k = 0.5\,\overline{u_i u_i}$ die kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung. Unterdrückt man hierin den von höherer Ordnung kleinen Term k/c_p, dann lassen sich die Temperatur– und Dichtefluktuationen als Funktion der Machzahl darstellen

$$\begin{aligned} \frac{\rho'}{\rho} = -\frac{T'}{T} &= (\gamma - 1)\,\frac{\sqrt{2k}}{U_g}\,Ma^2 \\ &= (\gamma - 1)\,Ma\,Ma_t \ , \qquad \text{mit} \quad Ma_t^2 := \frac{2k}{a^2} \ . \end{aligned} \tag{1.44}$$

Hierin kennzeichnen Ma_t die *Turbulenzmachzahl, Ma* die klassische Machzahl und a die Schallgeschwindigkeit, deren Definition bereits in Kapitel 1.2 erfolgte.
Für die in dieser Arbeit betrachteten geringen Machzahlen ($Ma \leq 2$, $Ma_t \leq 0.2$) können die Dichtefluktuationen vernachlässigt werden. Die Kompressibilitätseffekte beschränken sich dann auf Veränderungen der mittleren Dichte

$$\rho'/\rho << 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\tilde{\rho} = \rho} \qquad \text{und} \qquad z'' = z \ \text{ bzw. } \ \overline{z''} = 0 \ . \tag{1.45}$$

Eine wichtige Konsequenz aus der Vernachlässigung der Dichtefluktuationen ist die Identität der Favré–Mittelung und der klassischen Reynoldsschen (Ensemble–) Mittelung.

1.3.2 Reynolds–gemittelte Transportgleichungen

Ersetzt man in sämtlichen, unter 1.1 skizzierten Transportgleichungen die Variablen $\underline{U}$, P, T und ϕ durch die entsprechenden statistischen Variablen $\tilde{\underline{U}}$, $\tilde{P}$, $\tilde{T}$ bzw. $\tilde{\phi}$, und mittelt die Bilanzgleichungen, dann ergeben sich unter Beschränkung auf fluktuationsfreie Dichten die Reynolds–gemittelten Transportgleichungen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv 0 \tag{1.46}$$

$$\rho\frac{D\,U_i}{Dt} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} - \rho\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \overline{f}_i^* \tag{1.47}$$

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial \overline{q}_i}{\partial x_i} - \rho c_p\,\frac{\partial(\overline{u_i T'})}{\partial x_i} + \overline{\phi_d} + \frac{DP^*}{Dt} + \rho\,\tilde{\varepsilon} + \overline{u_k\frac{\partial p}{\partial x_k}}\,, \tag{1.48}$$

$$\rho\frac{D\,\phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) - \rho\,\frac{\partial(\overline{u_i\varphi})}{\partial x_i} + \overline{s}_\phi\,. \tag{1.49}$$

Die zuletzt notierten Bilanzen basieren wiederum auf kartesischen Tensorkoordinaten und unterscheiden sich von den Transportgleichungen der Momentanwerte durch das Auftreten der zweiten statistischen Momente $\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_i T'}$ und $\overline{u_i\varphi}$. Die Reynolds–gemittelten Quellterme ergeben sich aus den in Kapitel 1.2 beschriebenen Materialgleichungen

$$\overline{\tau_{ij}} = \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = 2\mu\,S_{ij}\,, \qquad \overline{q_i} = -\left(\frac{\mu c_p}{Pr}\right)\frac{\partial T}{\partial x_i}\,, \tag{1.50}$$

$$\overline{\phi_d} = \overline{\tau_{ij}}S_{ij} = 2\mu S_{ii}^2\,, \qquad \overline{f}_i^* = \overline{f}_i - 2\rho e_{ijk}\,\Omega_j U_k\,. \tag{1.51}$$

Die *turbulente Dissipationsrate* $\tilde{\varepsilon}$ ist das turbulente Analogon der molekularen Dissipationsfunktion $\overline{\phi_d}$

$$\tilde{\varepsilon} := 2\nu\,\overline{S_{ii}'^{\,2}}\,, \qquad \text{mit} \quad S_{ik}' = 0.5\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \quad \text{und} \quad \boxed{\varepsilon := \nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\right)}$$

$$= \nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}}\right) \overset{(1.46)}{=} \varepsilon + \nu\left(\frac{\partial^2\overline{u_i u_k}}{\partial x_i\partial x_k}\right) = \varepsilon\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Re}\right)\right] \tag{1.52}$$

Der zweite Summand von $\tilde{\varepsilon}$ wird üblicherweise vernachlässigt. Die Vereinfachung $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ ist sowohl für Wandturbulenz (Anhang D) als auch homogene Turbulenz exakt, weswegen ε vielfach auch *homogenene Dissipationsrate* genannt wird.

Die zweiten statistischen Momente können entweder durch ein Wirbelzähigkeits– bzw. Wirbeldiffusivitäts–Turbulenzmodell oder eine höherwertige Modellierungstechnik geschlossen werden. Die höherwertige Modellbildung stützt sich auf die exakten Transportgleichungen der zweiten statistischen Momente, welche sich unmittelbar aus den Transportgleichungen der beiden an der Korrelation beteiligten Fluktuationen entwickeln lassen.

1.3.3 Fluktuations–Transportgleichungen

Die Differenz von Reynolds–gemittelten und Momentangleichungen führt zu Transportgleichungen für die Fluktuationen, von denen vor allem die Kontinuitätsbeziehung und die Transportgleichung einer Geschwindigkeitsfluktuation von Interesse sind

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv 0\,, \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\,u_i}{Dt} &= -u_j\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu S'_{ij}+\overline{u_iu_j}\right)-2e_{ijk}\Omega_j u_k+\frac{f'_i}{\rho}\,,\\ &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_iu_j}-u_iu_j\right)-\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}-2e_{ijk}\Omega_j u_k+\frac{f'_i}{\rho}\,.\end{aligned} \tag{1.54}$$

Die Nichtlinearität des ersten Terms der rechten Seite von Gleichung (1.54) verursacht das Schließungsproblem der statistischen Modellierung. Dieses ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Nichtlinearität des Transporttheorems und kann nur durch einen Wechsel in die Lagrangsche Betrachtung vermieden werden.

Die Transportgleichung des Fluktuationswertes einer beliebigen skalaren statistischen Variablen lautet

$$\frac{D\,\varphi}{Dt} = -\left[u_j\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial(\overline{u_j\varphi})}{\partial x_j}+\frac{s'_\phi}{\rho}\,. \tag{1.55}$$

Die zu (1.12) analoge Poissongleichung des fluktuierenden Drucks ergibt sich aus

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_i}=-2\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+e_{ijk}\Omega_j\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial^2(u_iu_k)}{\partial x_k\partial x_i}+\frac{\partial^2(\overline{u_iu_k})}{\partial x_k\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f'_i}{\partial x_i}\,. \tag{1.56}$$

1.3.4 Transportgleichungen zweiter statistischer Momente

Die Fluktuations–Transportgleichungen (1.53)–(1.55) lassen sich in systematischer Weise zur Herleitung von Transportgleichungen für höhere statistische Momente verwenden.

Die Transportgleichung der kinematischen Reynolds–Spannungen $\overline{u_iu_j}$ erhält man mit Hilfe der Transportgleichung der Geschwindigkeitsfluktuation (1.54) und der Abkürzung

$$\mathcal{N}_{(u_i)} = \frac{D\,u_i}{Dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+u_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu S'_{ij}+\overline{u_iu_j}\right)-2e_{ijk}\Omega_j u_k+\frac{f'_i}{\rho}=0$$

aus der Identität

$$\overline{\mathcal{N}_{(u_i)}u_j+u_i\mathcal{N}_{(u_j)}}=0$$

$$\rightsquigarrow \qquad \frac{D(\overline{u_i u_j})}{Dt} + G_{ij} = \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + P_{ij} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D^t_{ijk} - \nu\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}\right)}_{-D_{ij}} \; . \tag{1.57}$$

In Gleichung (1.57) symbolisieren ϕ_{ij}, ε_{ij} und P_{ij} die Tensoren der *Druck–Scher–Korrelation, viskosen Disspation* und *Produktion* von Reynolds–Spannungen. Die Terme G_{ij} und $(D^t_{ijk})_{,k}$ benennen die Volumenkraftdichte–Geschwindigkeitskorrelationen und die turbulente Diffusion, deren Druckanteil von einigen Autoren auch als Druckdiffusion bezeichnet wird. Die Definition der einzelnen Beiträge lautet:

$$\begin{aligned}
\phi_{ij} &= \frac{2}{\rho}\overline{pS'_{ij}} \; , & D^t_{ijk} &= \overline{u_i u_j u_k} + \frac{1}{\rho}\overline{p\,(u_i\delta_{jk} + u_j\delta_{ik})} \; , \\
\varepsilon_{ij} &= 2\nu\,\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \; , & P_{ij} &= -\left(\overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right) \; , \\
G_{ij} &= 2\Omega_m(e_{mkj}\overline{u_i u_k} + e_{mki}\overline{u_j u_k}) - \frac{(\overline{u_i f'_j})}{\rho} - \frac{(\overline{u_j f'_i})}{\rho} \; .
\end{aligned} \tag{1.58}$$

In Gleichung (1.57) spielen die Transportterme $D(\overline{u_i u_j})/Dt$ und D_{ij} häufig eine untergeordnete Rolle. Die Transportgleichung wird zumeist von den Anteilen der Produktion, Dissipation und Druck–Scher–Korrelation dominiert. Die Dominanz von P_{ij} und ε_{ij} ist aufgrund ihrer energetischen Bedeutung für die Bilanzgleichung unmittelbar einsichtig; die Reynolds–Spannungen werden durch den Produktionsterm von der Grundströmung energetisch gespeist, der Dissipationsratentensor repräsentiert den Übergang von Schwankungsenergie in Wärme infolge viskoser Reibungskräfte.
Im Gegensatz zu P_{ij} und ε_{ij} ist der Druck–Scher–Korrelationstensor ϕ_{ij} in inkompressiblen Strömungsmedien von deviatorischem Charakter und tritt weder mit der Viskosität noch mit der Grundströmung in Wechselwirkung. Die Druck–Scher–Korrelationen sind primär für die Spannungsumverteilung, insbesondere den Abbau von anisotropen Normalspannungszuständen, verantwortlich. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem *return–to–isotropy* Operator oder *redistribution* Term. Man beachte, daß die mathematisch–physikalischen Eigenschaften des Coriolisterms denen der Druck–Scher–Korrelation gleichen.

Die Transportgleichung der massespezifischen Tubulenzenergie gewinnt man durch die Kontraktion der freien Indizes in Gleichung (1.57)

$$\boxed{k := 0.5\,\overline{u_i u_i}} \; , \qquad \text{mit} \tag{1.59}$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{-(\overline{u_i u_k})\,S_{ik}}_{\text{Produktion:=P}} - \varepsilon - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(0.5\,\overline{u_i u_i u_k} + \frac{1}{\rho}\overline{u_k p} - \nu\frac{\partial k}{\partial x_k}\right)}_{\text{Diffusion:=D}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\overline{pS'_{ii}}}_{\text{Druckdilatation:=}\phi_{\text{d}}} + \frac{(\overline{u_i f'_i})}{\rho} \; . \tag{1.60}$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die *Produktion, Diffusion* und *Druckdilatation* von Turbulenzenergie durch P, D und ϕ_d gekennzeichnet. Die Diffusionsterme sind für die Entwicklung der Turbulenzenergie vielfach von untergeordneter Bedeutung. Die Druck–Scher–Korrelationen ϕ_{ij} und die Coriolisterme haben aufgrund ihres deviatorischen Charakters keinen Einfluß auf die Transportgleichung der Turbulenzenergie, worin ein wichtiger Unterschied zur Transportgleichung der Reynolds–Spannungen besteht. Der Druckdilatationsbeitrag ist gemäß (1.53) zumeist vernachlässigbar klein.

Die Transportgleichung einer beliebigen Doppelkorrelation $(\overline{u_i\varphi})$ findet man unter Verwendung des Operators

$$\mathcal{N}_{(\varphi)} = \frac{D\,\varphi}{Dt} + \left[u_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma_\phi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial(\overline{u_i\varphi})}{\partial x_i} - \frac{s'_\phi}{\rho} = 0$$

aus der Identität

$$\overline{\mathcal{N}_{(\varphi)}u_i + \varphi\mathcal{N}_{(u_i)}} = 0 \quad ,$$

$$\frac{D(\overline{u_i\varphi})}{Dt} = -\left[\overline{u_iu_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} + \overline{u_k\varphi}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right] + \frac{(\overline{u_i s_\varphi})}{\rho} - 2e_{ijk}\Omega_j(\overline{u_k\varphi}) + \frac{1}{\rho}\,\overline{p\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} + \frac{(\overline{\varphi f'_i})}{\rho} \quad (1.61)$$

$$-(\Gamma_\phi+\nu)\,\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[(\overline{u_ku_i\varphi}) + \frac{1}{\rho}\,(\overline{p\varphi})\,\delta_{ik} - \Gamma_\phi\,\overline{u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}} - \nu\,\overline{\varphi\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\right] .$$

Mit Ausnahme des Konvektionsterms der substantiellen Ableitung beeinflussen die Mittelwerte der ursprünglichen Variablen die Entwicklung der zweiten statistischen Momente nur durch ihren räumlichen Gradienten. Für konstante Gradienten der Mittelwerte lassen sich daher homogene höhere statistische Momente verwirklichen (*homogene Turbulenz*). In diesem Falle entkoppeln die Tranportgleichungen der Mittelwerte (1.46)–(1.49) von den zweiten statistischen Momenten. Für die Entwicklung von Turbulenzmodellen ist dieser Zustand besonders attraktiv, weil er zu geschlossenen Lösungen führt.

1.3.5 Schließungsproblem

Aus den Transportgleichungen der zweiten statistischen Momente (1.57), (1.60) und (1.61) ergibt sich der Bedarf zur Schließung bzw. Modellierung weiterer statistischer Momente, deren Transportgleichungen sich analog zu den oben entwickelten Doppelkorrelations–Bilanzen herleiten lassen. Transportgleichungen für die in den Diffusionstermen auftretenden Trippelkorrelationen $\overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}$ erhält man z.B. von

$$\overline{\varphi_1\varphi_2\mathcal{N}_{\phi_3} + \varphi_2\varphi_3\mathcal{N}_{\phi_1} + \varphi_3\varphi_1\mathcal{N}_{\phi_2}} = 0 \; .$$

Der Transport der isotropen Dissipationsrate ε ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung von $\overline{(\mathcal{N}_{u_i})_{,m}\,(\mathcal{N}_{u_i})_{,m}} = 0$ zu

$$\begin{aligned}\frac{D\varepsilon}{Dt} &= -2\nu\left[S_{ij}\,(\overline{u_{i,k}u_{j,k}} + \overline{u_{k,i}u_{k,j}}) + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}(\overline{u_j u_{i,k}}) + (\overline{u_{i,j}u_{i,k}u_{j,k}})\right] \qquad (1.62)\\ &\quad -2\nu^2(\overline{u_{i,jk}u_{i,jk}}) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left[\nu\left((\overline{u_{i,j}u_{i,j}u_m}) + \frac{2}{\rho}(\overline{p_{,i}u_{m,i}})\right) - \nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_m}\right]\\ &\quad +2\nu\left[\frac{1}{\rho}(\overline{u_{i,m}f'_{i,m}}) - 2e_{ijk}\Omega_j(\overline{u_{i,m}u_{k,m}})\right]\ .\end{aligned}$$

Die Herleitung zusätzlicher Transportgleichungen führt zu keiner endgültigen Schließung des Gleichungssystems, weswegen die Schließungskette an geeigneter Stelle abgebrochen werden muß. Die Transportgleichungen höherer statistischer Momente sind den ursprünglichen Gleichungen zahlenmässig überlegen. In den drei Reynolds–gemittelten Impulsgleichungen treten 6 Reynolds–Spannungen auf, durch deren Bilanzgleichungen (1.57) weitere 22 Unbekannte in das Gleichungssystem eingeführt werden. Aufgrund ihres Konstruktionsprinzips sind die Gleichungen der höheren Momente hochgradig nichtlinear, eng gekoppelt und numerisch äußerst steif. Aus Effizienzgründen sind anwendungsorientierte Ingenieurwissenschaften auf einen Abbruch der Schließungskette im Bereich zweiter statistischer Momente angewiesen. In diesem Falle werden entweder die Reynolds–Spannungen *(Wirbelzähigkeitsmodelle)* oder die in ihren Transportgleichungen auftretenden höheren statistischen Momente *(Transportgleichungs-Reynolds-Spannungsmodelle)* durch ein mathematisches Modell geschlossen.

1.3.6 Energiespektrum homogener Turbulenz

Eine grundlegende Eigenschaft der turbulenten Strömung ist der Energieaustausch zwischen unterschiedlichen Skalen. Eine qualitativ korrekte Beschreibung des Austauschmechanismus stützt sich auf die Veranschaulichung von Turbulenz als Überlagerung von Wirbelfäden (*turbulent eddies*) unterschiedlicher Größe in einem hierarchisch strukturierten Prozeß. Hiernach wird die Schwankungsbewegung durch großskalige Wirbelfäden niedriger Frequenz (Wellenzahl) eingeleitet. Diese beziehen ihre kinetische Energie von der Hauptströmung und reichen sie an immer kleinskaligere, zunehmend höherfrequente eddies weiter, bis hin zur Wandlung von mechanischer Energie in Wärme. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer *Energiekaskade infolge Wirbelfadenstreckung*. Wirbelfäden großen Durchmessers werden durch die Geschwindigkeitsgradienten der Hauptströmung gestreckt. Ihre Querschnitte verringern sich bei gleichzeitiger Erhaltung des Drehimpulses, weshalb sich die Wirbelstärke in Richtung der gestreckten Achse vergrößern muß. Alle anders gerichteten Wirbelfäden werden über die vergrößerte Wirbelstärke ihrerseits gestreckt, so daß es zu einem Kaskadenprozess kommt, an dessen Ende die Viskosität aufgrund des stark angewachsenen Geschwindigkeitgradienten wirksam wird.

Eine allgemeingültigere statistische Beschreibung der Turbulenz basiert auf der Formulierung von Korrelationen zwischen den Fluktuationen zweier Geschwindigkeitskomponenten an zwei Punkten zu zwei verschiedenen Zeiten (Rotta 1972)

$$R_{i\underline{j}} = \overline{u_i(\underline{x},t)u_j(\underline{x}+\underline{r},t+\tau)} = \overline{u_i u_{\underline{j}}}\,, \qquad \text{analog} \quad R_{ij\underline{k}} = \overline{u_i u_j u_{\underline{k}}} \quad \text{etc.}\ .$$

Der Vorteil von Zwei–Punkt–Korrelationen ist die Erfassung von Transfermechnismen, die eine Einsicht in die physikalische Bedeutung der modellierten Disspationsratengleichung ermöglichen. Der Einfacheit halber beruft man sich dabei auf homogene Zustände, für die man (vgl. Rotta, 1972) in Analogie zu Gleichung (1.57)

$$\frac{\partial R_{i\underline{j}}}{\partial t} = \frac{\partial(R_{ik\underline{j}} - R_{ij\underline{k}})}{\partial r_k} - 2\nu\frac{\partial^2 R_{i\underline{j}}}{\partial r_k \partial r_k} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\overline{pu_j}}{\partial r_i} - \frac{\partial\overline{pu_i}}{\partial r_j}\right) \tag{1.63}$$

$$\text{bzw.} \qquad \frac{\partial R_{i\underline{i}}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial(R_{ik\underline{i}} - R_{ii\underline{k}})}{\partial r_k}}_{\text{Transferterm}} - \underbrace{2\nu\frac{\partial^2 R_{i\underline{i}}}{\partial r_k \partial r_k}}_{\text{Dissipation}} \tag{1.64}$$

findet. Im Grenzübergang zur punktweisen Betrachtung ($\lim r_k, \tau \to 0$) genügen die Trippelkorrelationen dem Kommutativitätsgesetz $R_{iki} = R_{iik}$, und die Gleichung (1.64) geht in $\dot{k} = \varepsilon$ über. Für das tiefere Verständnis der energetischen Prozesse empfiehlt sich die harmonische Analyse der Beziehung (1.64) auf der Grundlage einer Fouriertransformation der Doppelkorrelation $R_{i\underline{j}}$

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V(\underline{r})} R_{i\underline{j}} e^{-i\,(\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r})}\, d\underline{r}\,, \qquad R_{i\underline{j}} = \int_{V(\underline{r})} \Phi_{ij} e^{i\,(\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r})}\, d\hat{\underline{k}}\,,$$

in der $\hat{\underline{k}}\,[m^{-1}]$ den Wellenzahlvektor kennzeichnet. Die Fouriertransformation ermöglicht die frequenz– bzw. wellenzahlspezifische Zuordnung von Energieanteilen. Unter Verwendung einer sogenannten Energie–Spektralfunktion (Rotta 1972)

$$\mathcal{E}(\hat{k},t) := 0.5\,\hat{k}^2 \oint \Phi_{ii}\, d\Omega\,, \qquad \text{mit} \quad \mathcal{E}[m^3\,s^{-2}]$$

findet man ein Fourier–transformiertes Pendant zur Beziehung (1.64), dessen Gestalt in homogenen oder isotropen Strömungen besonders einfach ist:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \underbrace{\mathcal{T}(\hat{k})}_{\text{Transfer}} - \underbrace{2\nu\hat{k}^2\mathcal{E}}_{\text{Dissipation}}\,, \tag{1.65}$$

$$\text{mit} \quad k = \int_0^\infty \mathcal{E}\, d\hat{k}\,, \qquad \text{und } \varepsilon = 2\nu\int_0^\infty \hat{k}^2\mathcal{E}\, d\hat{k}\ .$$

In Gleichung (1.65) bezeichnen $d\Omega$ den Raumwinkel und $\hat{k} = \sqrt{\hat{k}_i\,\hat{k}_i}$ den Betrag des Wellenzahlvektors. Trägt man eine Komponente der Schwankungsenergie in einem Amplitudenspektrum der am Kaskadenprozess beteiligten Einzelharmonischen doppelt

logarithmisch über der Wellenzahl auf, so findet man typischerweise den in Abbildung 1.1 skizzierten Verlauf. Das in der Abbildung auftretende makroskopische Turbulenzlängenmaß entspricht der Abmessung energietragender Wirbel. Das ergänzend angeführte transiente Längenmaß L_m kennzeichnet die charakteristische Länge der Strukturen einer möglicherweise transienten Grundströmung (z.B. $L_\mathrm{m} = U_\mathrm{ref} T_\mathrm{m}$). Das dissipative Längenmaß η_k entspricht dem unten definierten Grenzwert für die Ausdehnung der kleinsten turbulenten Strukturen nach Kolmogorov.

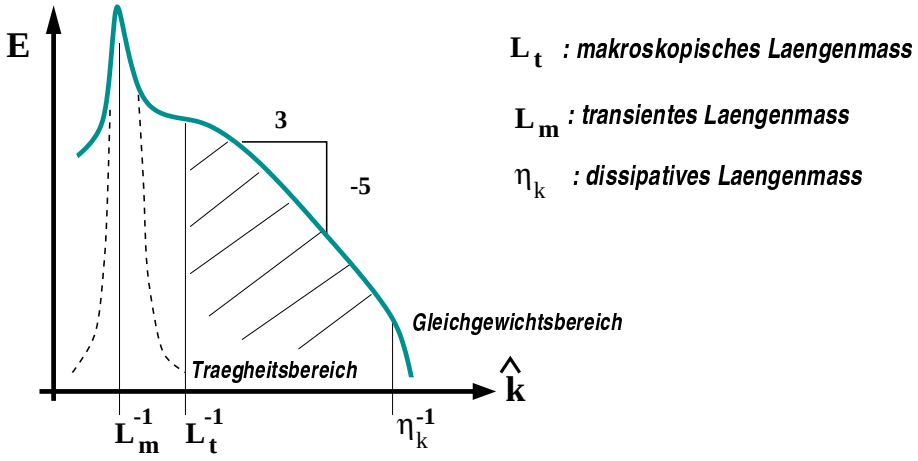


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Energiespektrums im Wellenzahlbereich bei doppelt logarithmischer Auftragung.

Im Gleichgewichtsbereich hoher Wellenzahlen spielen die Details des Energietransfers zwischen Grundströmung und Turbulenzfeld keine Rolle. Das Energiespektrum wird durch dissipative Mechanismen bestimmt. Sämtliche transferierte Energie dissipiert unter dem Einfluß der Viskosität. Die Energie–Spektralfunktion wird im Endstadium durch

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -2\nu \hat{k}^2 \, \mathcal{E} \; , \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \; e^{-2\nu \hat{k}^2 (t - t_0)}$$

beschrieben und klingt somit, wie in Abbildung 1.1 skizziert, mit größer werdender Wellenzahl zusehends stärker ab. Eine Dimensionsbetrachtung der Energie–Spektralfunktion liefert

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\varepsilon, \nu) \; , \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathcal{E} = \varepsilon^{1/4} \; \nu^{5/4} \; f(\eta_k \, \hat{k}) = v_k^2 \eta_k \; f(L_t \, \hat{k}) \quad .$$

Hierin symbolisieren $\eta_k = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ und $v_k = (\nu\varepsilon)^{1/4}$ die nach Kolmogorov (1942) benannten charakteristischen Längen– und Geschwindigkeitsmaße des Gleichgewichtsbereichs, mit denen die kleinsten Schwankungsprozesse einer turbulenten Strömung skalieren.

Im Bereich der großen, energietragenden Wirbel ($0 < \hat{k} << 1/\eta_k$) wird das Spektrum durch Produktionsmechanismen diktiert. Die dabei produzierte Energie wird

über Wirbelstreckungsmechanismen zu kleineren Skalen transferiert. Die Dimensionsanalyse der Energie–Spektralfunktion ergibt

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(S^* \sim ||\underline{\nabla}\underline{U}||, \nu) \; , \qquad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E} = \varepsilon^{3/2} \; S^{*\,-5/2} \; g(L_t\,\hat{k}) = V_t^2 L_t \; g(L_t\,\hat{k}) \; .$$

Hierin kennzeichnen L_t die größte zu beobachtende Skalenlänge der Turbulenz und V_t das dazu korrespondierende Geschwindigkeitsmaß.

Der Trägheitsbereich (Kolmogorov 1942) füllt die Lücke zwischen Produktions– und Gleichgewichtsbereich aus. Die Ausmaße des Trägheitsbereichs werden durch die Reynoldszahl bzw. deren Reziprozität zur Kolmogorovlänge η_k bestimmt. Eine Abschätzung der Größenordnungsunterschiede ergibt sich aus der Analyse typischer Wandgrenzschichten

$$\frac{L_t}{\eta_k} \sim \frac{L_{\rm ref}}{(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}} \sim Re^{3/4} \qquad \text{und} \qquad \frac{T_t}{T_k} = \frac{L_t/V_t}{\eta_k/v_k} \sim Re^{1/2} \; , \tag{1.66}$$

$$\text{wegen} \quad \varepsilon \approx 2u_\tau^2 \, \frac{U_{\rm ref}}{L_{\rm ref}} \approx \frac{1}{200} \, \frac{U_{\rm ref}^3}{L_{\rm ref}} \approx \frac{1}{10} \, \frac{U_{\rm ref}^3}{n} \quad .$$

Der Trägheitsbereich ist der klassische Arbeitsbereich der Grobstruktursimulation. Mit Hilfe der oben durchgeführten Größenordnungsabschätzung (1.66) läßt sich der Rechenaufwand einer LES beziffern

$$\textbf{LES}: \qquad \text{Knotenpunkte} \sim Re^{9/4} \; , \qquad \text{Zeitschritte} \sim Re^{1/2} \quad .$$

Im Trägheitsbereich spielen weder viskose, noch Produktionsmechanismen eine Rolle, dennoch nimmt dieser Bereich für hinreichend große Reynoldszahlen den größten Teil des Spektrums ein. Der Verlauf des Energiespektrums kann durch Anpassung der Funktionen $g(L_t\,\hat{k})$ und $f(\eta_k\,\hat{k})$ aus den beiden benachbarten Bereichen gewonnen werden

$$f(\eta_k\,\hat{k}) = \gamma\,[\eta_k \hat{k}]^{-5/3} \; , \qquad \text{und} \qquad g(L_t\,\hat{k}) = \gamma\,[L_t \hat{k}]^{-5/3} \; , \tag{1.67}$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = \gamma\,\varepsilon^{2/3}\,\hat{k}^{-5/3}} \qquad \gamma \approx 1.5 \; . \tag{1.68}$$

Die Transportgleichung der Energie–Spektralfunktion erfüllt im Trägheitsbereich die Gleichgewichtsbeziehung $\dot{\mathcal{E}} = 0$. Aus der Integrration der Gleichgewichtsbeziehung über hinreichend große Wellenzahlen ($T(\hat{k}^{(1)}) << 1$) kann man einen Zusammenhang zwischen der Dissipationsrate statistischer Turbulenzmodelle und dem Energietransfermechanismus im Bereich großer Skalen ableiten, der für die gebräuchlichen Modellierungspraktiken wegweisend ist

$$\varepsilon^* = -\int_0^{\hat{k}^{(1)}} \mathcal{T} \; d\hat{k} \sim \frac{k^{3/2}}{L_t} \quad . \tag{1.69}$$

Das Auflösungsvermögen von praxisnahen Strömungssimulationen auf der Basis semi–empirischer Turbulenzmodelle beschränkt sich auf sehr kleine Wellenzahlen mit Maschenweiten von der Größe der energietragenden Wirbel. Die in den modellierten Transportgleichungen auftretende Dissipationsrate ist sowohl für den Transfer von Energie als auch deren Dissipation verantwortlich. Sie sollte daher in der unter (1.69) angezeigten weise mit makroskopischen Turbulenzgrößen skalieren.

1.4 Semi–empirische Wirbelzähigkeits–Turbulenzmodelle

Ausgangspunkt dieser Arbeit sind klassische Wirbelzähigkeitsmodelle zur Berechnung der Reynolds–Spannungen. Hierbei wird der Tensor der kinematischen Reynolds–Spannungen in Anlehnung an das Materialgesetz (1.29) durch den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten–Tensors und eine isotrope turbulente *Wirbelzähigkeit* ν_t modelliert (vgl. Kapitel 2)

$$\boxed{\overline{u_i u_j} \sim \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)} \ . \tag{1.70}$$

Die Wirbelzähigkeit (*eddy–viscosity*) wird aus Dimensionsgründen zumeist in ein *turbulentes Längemaß* V_t und ein *turbulentes Geschwindigkeitsmaß* L_t zerlegt

$$\nu_t \sim L_t \cdot V_t \ . \tag{1.71}$$

Durch den Ansatz (1.70) verlagert sich das Problem der unbekannten Reynolds–Spannungen $\overline{u_i u_j}$ in ein Schließungsproblem zur Bestimmung der Wirbelzähigkeit ν_t bzw. der damit assoziierten turbulenten Längen– und Geschwindigkeitsmaße. Wirbelzähigkeitsmodelle unterscheidet man üblicherweise nach der Anzahl der abhängigen Turbulenzvariablen zur Bestimmung von L_t und V_t. Verwendet man hierzu einen Ansatz, der mit Hilfe rein algebraischer Beziehungen das System aus Impuls– und Kontinuitätsgleichung schließt, so spricht man von einem *algebraischen oder Nullgleichungs–*Turbulenzmodell (Baldwin und Lomax 1978; Cebeci und Smith 1974). Analog nennt man Modelle auf der Basis einer oder zweier zusätzlicher Transportgleichungen zur Berechnung von ν_t *Eingleichungs–* (Wolfshtein 1969; Baldwin und Barth 1991; Spalart und Allmaras 1992) bzw. *Zweigleichungsmodelle.*
Algebraische Modelle und Eingleichungsmodelle lassen sich mit Hilfe der Hypothese vom *lokalen Gleichgewicht* ($P \equiv \varepsilon$) aus Zweigleichungsmodellen rekonstruieren (Rung 1998a). Dabei werden die Turbulenzvariablen durch Fixierung der Invarianten des Wirbelzähigkeitsansatzes (1.70) sukzessive reduziert. Wirbelzähigkeitsmodelle mit weniger als zwei Freiheitsgraden zur Bestimmung von L_t und V_t verschliessen sich einer darstellungstheoretischen Betrachtung und finden daher in dieser Arbeit keine Verwendung.

1.4.1 Zwei–Parameter–Wirbelzähigkeitsmodelle

Den aus der Lösung zweier gekoppelter partieller Differentialgleichungen bestehenden Schließungsansatz nennt man *Zwei–Parameter–* oder *Zweigleichungs–*Modell. Zweigleichungsmodelle basieren ursprünglich auf dem isotropen Wirbelzähigkeitsprinzip. Sie lassen sich jedoch, wie in dieser Arbeit gezeigt, in höherwertige anisotrope Wirbelzähigkeitsmodelle auf der Grundlage nichtlinearer Stress–Strain Kopplungen (1.70) überführen. Zweigleichungsmodelle unterscheidet man nach dem Typ der gewählten abhängigen Turbulenzvariabeln. Die am weitesten verbreitete Formulierung basiert auf modellierten Transportgleichungen für die Turbulenzenergie k und die Dissipations– bzw. Transferrate ε ($k-\varepsilon$ Modell). Alle weiteren in der Literatur verfügbaren Formulierungen sind weitestgehend äquivalent und lassen sich prinzipiel ineinander überführen.

Ein natürliches turbulentes Geschwindigkeitsmaß ist die Wurzel der turbulenten kinetischen Energie $\sqrt{k}$. Zur Schließung der Turbulenzenergiegleichung (1.60) werden die diffusiven Beiträge nach dem *Gradienten–Diffusionsmodell* modelliert

$$-\overline{u_k u_i \varphi} - \frac{1}{\rho}\overline{p\varphi} \overset{1)}{=} C_\phi \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\left(\frac{\partial\,\overline{u_i\varphi}}{\partial x_l}\right) \overset{2)}{=} C_\phi^* \frac{k^2}{\varepsilon}\delta_{kl}\left(\frac{\partial\,\overline{u_i\varphi}}{\partial x_l}\right) = \frac{\nu_t}{Pr_\phi}\left(\frac{\partial\,\overline{u_i\varphi}}{\partial x_k}\right). \quad (1.72)$$

Der Druckdiffusionsbeitrag ist in der Regel von untergeordneter Bedeutung. Die Symmetrieeigenschaften der verbleibenden Trippelkorrelation werden vom Gradienten–Diffusionsmodell gebrochen, was jedoch aufgrund der untergeordneten Bedeutung der Diffusionsterme in der Regel akzeptiert wird. Die algorithmische Struktur der meisten numerischen Verfahren basiert auf isotropen Diffusionsprozessen, weswegen sich die Anwendung des zweiten, isotropisierenden Modellierungschrittes empfiehlt. Unter Vernachlässigung von Volumenkraftdichten ergibt sich für inkompressible Medien die modellierte Turbulenzenergiegleichung

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k}\left(\frac{\partial k}{\partial x_k}\right)\right] \quad , \quad \text{mit} \quad Pr_k = \mathcal{O}(1)\,. \quad (1.73)$$

1.4.1.1 $k-\varepsilon$ Modell

Die Schließung der modellierten Turbulenzenergiegleichung (1.73) bedarf einer Vorschrift zur Berechnung der isotropen Dissipationsrate ε. Die in Gleichung (1.62) notierte exakte Transportgleichung der Dissipationsrate enthält eine Vielzahl ungeschlossener Beiträge und ist in ihren Details inakzeptabel komplex. Daneben kommt der modellierten Dissipationsrate nach Gleichung (1.69) eine andere physikalische Bedeutung als der ursprünglichen Dissipationsrate zu. Die Modellierung der Energietransferbilanz geht auf Jones und Launder (1972) zurück und lehnt sich eng an die Modellgleichung der Turbulenzenergie (1.73) an

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\varepsilon}{k}\left(C_{\varepsilon 1}P - C_{\varepsilon 2}\,\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right)\right] \quad . \quad (1.74)$$

Die Basisgleichung (1.74) gilt ausdrücklich nur für voll–turbulente (sog. high–Reynolds number) Bereiche in hinreichender Entfernung fester Berandungen. Im Wandbereich sollte die Transferrate mit der isotropen Dissipationsrate übereinstimmen, wozu –wie in Anhang D skizziert– eine Manipulation ihrer Transportgleichung notwendig ist. Die Kalibrierung der Koeffizienten Pr_ε, $C_{\varepsilon 1}$ und $C_{\varepsilon 2}$ basiert auf Erfahrungswerten. Hierzu werden üblicherweise die im folgenden skizzierten drei aussagekräftigen Referenzströmungen betrachtet.

Der Wert des Parameters $\mathbf{C_{\varepsilon 2}}$ bestimmt sich aus dem experimentell untersuchten Abklingverhalten der homogenen Turbulenz in einer scherfreien Grundströmung. Die modellierten Differentialgleichungen von k und ε degenerieren in diesem Fall zu einer Balance zwischen instationären und dissipativen Termen

$$\frac{Dk}{Dt} = -\varepsilon \ , \quad \text{und} \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} = -C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \qquad \rightsquigarrow \quad \frac{D^2k}{Dt^2} = \frac{C_{\varepsilon 2}}{k}\left(\frac{Dk}{Dt}\right)^2 \ , \tag{1.75}$$

die sich analytisch lösen läßt

$$\boxed{k = k_0\, t^{-n} \qquad \text{mit} \qquad n = \frac{1}{C_{\varepsilon 2} - 1}} \ . \tag{1.76}$$

Experimentelle Untersuchungen von Comte-Bellot und Corrsin (1966) weisen dem Exponenten einen Wert von $n = 1.1$–1.3 zu, woraus man $C_{\varepsilon 2} = 1.8$–2.0 erhält.

Die Kalibirierung des Koeffizienten $\mathbf{C_{\varepsilon 1}}$ folgt aus der Betrachtung einer homogenen Scherung im Gleichgewichtszustand. Die Herleitung dieser Zwangsbeziehung ist in Kapitel 8.1 erläutert, weswegen an dieser Stelle nur das Ergebnis notiert wird

$$\boxed{C_5 := \frac{C_{\varepsilon 2} - 1}{C_{\varepsilon 1} - 1} = \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_\infty} \ . \tag{1.77}$$

Experimentelle Untersuchungen von Tavoularis und Corrsin (1981) spezifizieren den Gleichgewichtswert zu $(P/\varepsilon)_\infty = 1.9$, woraus man $C_{\varepsilon 1} = 1.45$ schließt.

Die Bestimmung der turbulenten Prandtl–Zahl $\mathbf{Pr_\varepsilon}$ stützt sich auf die Analyse der ingenieurwissenschaftlich wichtigsten Referenzströmung, dem logarithmischen Bereich einer ebenen, druckgradientenfreien Wandgrenzschicht. In diesem Falle lassen sich die substantiellen Änderungen in guter Näherung vernachlässigen und das gesamte Strömungs– und Turbulenzfeld kann mit der Wandschubspannung u_τ parametrisiert werden (Rung 1999b). Wertet man die Modellgleichungen für k und ε unter Verwendung der experimentell belegten lokalen Gleichgewichtsbeziehungen ($P = \varepsilon$)

$$|\overline{uv}| = 0.3\, k = u_\tau^2 \ , \qquad \nu_t = L_t\, V_t = \kappa n\, u_\tau \ ,$$

$$\rightsquigarrow \ P = \ -\overline{u_i u_j}\, S_{ij} = -\overline{uv}\,\frac{\partial U}{\partial y} = u_\tau^2\,\frac{u_\tau}{\kappa y} \ = \varepsilon \tag{1.78}$$

und den üblichen Grenzschichtabschätzungen ($V << U$, $\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$) aus, dann ergibt sich unter Vernachlässigung der in vollturbulenten Bereichen irrelevanten viskosen Beiträge

$$(1.73): \quad 0 = 0\,, \qquad \text{bzw.} \qquad (1.74): \quad \boxed{Pr_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{0.3\,(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})}}\,. \tag{1.79}$$

Mit Hilfe der oben gefundenen Werte für $C_{\varepsilon 1}$ und $C_{\varepsilon 2}$ und dem üblichen Wert der von–Kármán Konstanten $\kappa = 0.4$–0.41 ergibt sich aus der *Verträglichkeitsbeziehung* (1.79) ein Wert für die Prandtlzahl der ε–Gleichung ($Pr_\varepsilon = 1.1$–1.4) .

Eine Variation des Koeffizienten $\mathbf{C_{\varepsilon 1}}$ ist für die erfolgreiche Berechnung von Nichtgleichgewichts–Zuständen oftmals notwendig. Der Parameter $C_{\varepsilon 1}$ wird von vielen Autoren in ähnlicher Weise an den Wert des dimensionslosen Scherratenparameters $S = (k/\varepsilon)\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ gekoppelt. Abbildung 1.2 veranschaulicht die Verläufe dreier populärer Ansätze zur Formulierung eines scherparameterabhängigen Koeffizienten $C_{\varepsilon 1}$

$$\begin{aligned}
\text{Shih et al.(1995a)}: \qquad C_{\varepsilon 1} &= \max\left(0.43, \frac{S}{5+S}\right)\,\frac{1}{0.3}\,, \\
\text{Menter (SST } k-\omega, 1994): \qquad C_{\varepsilon 1} &= 1 + 0.44\,\max(1, 0.3\,S)\,, \\
\text{Yakhot et al. (RNG, 1992)}: \qquad C_{\varepsilon 1} &= 1.42 - \frac{S\,(1 - 0.2283\,S)}{1 + 0.015\,S^3}\,.
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Die Anwendung der $C_{\varepsilon 1}$–Modifikationen ist mit erheblichen Konsequenzen für die Entwicklung der Wirbelzähigkeit verbunden. Rung (1998a) weist darauf hin, daß die aus dem Zweigleichungsmodell entwickelte Formulierung einer Transportgleichung für ν_t im Falle von $C_{\varepsilon 1} > 2$ mit einem negativen Produktionsterm behaftet ist

$$P_{\nu_t} \sim \nu_t \left(\frac{k}{\varepsilon}\right) S_{ii}^2 \left[\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)(C_{\varepsilon 2} - 2) + (2 - C_{\varepsilon 1})\right]\,,$$

was rasch zum vollständigen Zusammenbruch des vorhergesagten Turbulenzfeldes führen kann.

Die Realisierbarkeit des turbulenten Zeitmaßes ist eine weitere, vielfach berücksichtigte Zwangsbedingung. Der Quotient (k/ε) läßt sich als Zeitmaß T_t der energietragenden Wirbel (*eddy–turn–over time)* interpretieren. Das turbulente Zeitmaß T_t ist, in Anlehnung an die oben dargestellte Skalenanalyse, einer Realisierbarkeitsbeziehung unterworfen. Diese besagt, daß das turbulente Zeitmaß nie unterhalb des Kolmogorov–Zeitmaßes der viskosen Dissipation liegen darf. Da die höchste Frequenz im Energiespektrum durch die viskose Dissipation begrenzt ist, leuchtet die Restriktion physikalisch unmittelbar ein

$$\frac{\varepsilon}{k} \to T_t^{-1}\,, \qquad \text{mit} \quad T_t := \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, \alpha\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right) \qquad \text{Durbin (1991)}: \;\; \alpha \approx 6\,. \tag{1.81}$$

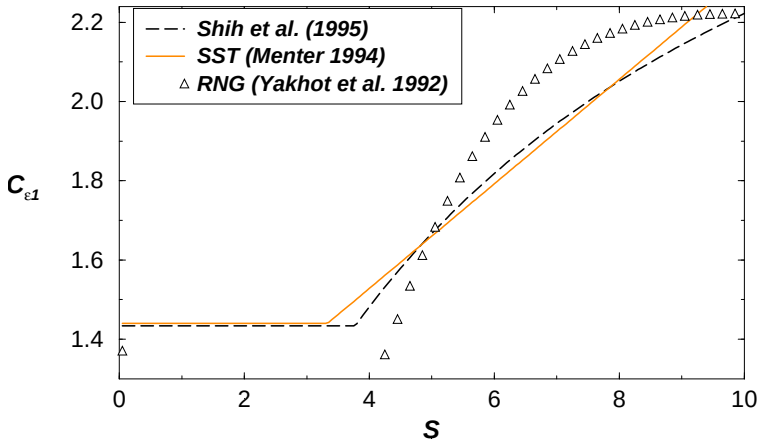


Abbildung 1.2: Populäre Ansätze für die Entwicklung des Koeffizienten $C_{\varepsilon 1}$ als Funktion des dimensionslosen Scherparameters $S = (k/\varepsilon)\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$.

Eine einfache Dimensionanalyse der Wirbelzähigkeit ergibt für das $k-\varepsilon$ Modell die Proportionalität

$$\nu_t \sim k \cdot \left(\frac{k}{\varepsilon}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\nu_t = \overline{c}_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}} \, .$$

Den dazugehörigen Proportionalitätsfaktor bestimmt man üblicherweise aus den bereits unter (1.78) angegebenen Zusammenhängen für den Gleichgewichtsbereich einer Wandgrenzschicht

$$\nu_t = |\overline{uv}| \left| \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^{-1} \right| = \kappa n \, u_\tau \quad = \quad \overline{c}_\mu \, \frac{k^2}{\varepsilon} \, , \tag{1.82}$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{c}_\mu = \frac{u_\tau^4}{k^2} = \left(\frac{|\overline{uv}|}{k}\right)^2 = 0.09} \, . \tag{1.83}$$

Der Faktor $\overline{c}_\mu$ wird aufgrund seiner Definition üblicherweise *Anisotropieparameter* genannt. Der am häufigsten verwendete Koeffizientensatz einfacher $k-\varepsilon$ Modelle lautet damit

$$\boxed{k-\varepsilon \text{ Modell}: \quad \overline{c}_\mu = 0.09 \, , \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \, , \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \, , \quad Pr_\varepsilon = 1.3 \, , \quad Pr_k = 1} \, .$$

1.4.1.2 Alternative Zwei–Parameter–Formulierungen ($\mathbf{k^n - \zeta}$ Modelle)

Prinzipiell sind sämtliche Variablenkombinationen k^n und ζ, deren Darstellung der Wirbelzähigkeit

$$\nu_t = \overline{c}_\mu^{\,a} \, k^b \, \zeta^c \tag{1.84}$$

die Restriktion

$$\zeta = \left(c_\mu^{1-a}\, k^{2-b}\, \varepsilon^{-1}\right)^{1/c} = \left(c_\mu^{1-a}\, T_t^{2b-1}\, L_t^{2b-2}\right)^{1/c} = \left(c_\mu^{1-a}\, V_t^{1-2b}\, L_t\right)^{1/c} \tag{1.85}$$

erfüllt, zur Modellierung geeignet. Die Transportgleichungen der Variablen k^n und ζ gewinnt man durch Anwendung der Kettenregel auf die oben angeführten Gleichungen (1.73) und (1.74) für k bzw. ε

$$\frac{Dk^n}{Dt} = \left[nk^{n-1}\right] \frac{Dk}{Dt}\,, \tag{1.86}$$

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \left[\left(\frac{2-b}{c}\right)\left(c_\mu^{1-a}\, \frac{k^{2-b-c}}{\varepsilon}\right)^{1/c}\right] \frac{Dk}{Dt} - \frac{1}{c}\left[c_\mu^{1-a}\, \frac{k^{2-b}}{\varepsilon^{1+c}}\right]^{1/c} \frac{D\varepsilon}{Dt}\,. \tag{1.87}$$

Die Transformationsbeziehungen zur Formulierung der ζ–Gleichung erleichtern sich erheblich durch die Annahme von $Pr_k = Pr_\varepsilon$ in (1.87). Die tatsächlich verwendete Prandtl–Zahl wird im Anschluß an die Herleitung der Transportgleichung durch die Formulierung einer zu (1.79) analogen Verträglichkeitsbeziehung fixiert.

Neben dem $k-\varepsilon$ Modell ist vor allem das von Wilcox (1988) entwickelte $k-\omega$ Modell

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \qquad \rightsquigarrow \quad n = b = -c = 1 \;\text{ und }\; a = 0$$

weit verbreitet. Die aus der Transformationsbeziehung (1.87) abgeleitete Transportgleichung der spezifischen Dissipationsrate $\omega = \varepsilon/(\overline{c}_\mu k)$ lautet

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\omega}{k}\left[(C_{\varepsilon 1}-1)\, P - \overline{c}_\mu (C_{\varepsilon 2}-1)\, \omega\, k\right] + \frac{1}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right] + \left(\frac{2}{\omega\, Pr_\omega}\right)\frac{\partial k}{\partial x_k}\,\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\,. \tag{1.88}$$

In der von Wilcox (1988) angegebenen Form wird der letzte Summand der Gleichung (1.88) unterdrückt. Wilcox (WC) bevorzugt die Koeffizientenkombination

Wilcox $k-\omega$ Modell : $\quad \overline{c}_\mu = 0.09 \quad , \quad C_{\varepsilon 2} = 1.83\,, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.55\,, \quad Pr_k = Pr_\omega = 2\,.$

Der Vorteil des $k-\omega$ Modells ist dessen inhärente Konsistenz zu den Gesetzmäßigkeiten des semi–viskosen und voll–turbulenten logarithmischen Bereichs (vgl. Anhang D oder Wilcox 1993). Daneben zeichnet sich das Modell durch die geringe Variation der o.a. Verträglichkeitsbeziehung in kompressiblen und inkompressiblen Wandgrenzschichten aus (Huang et al. 1994). Hieraus resultiert die Möglichkeit zur Handhabung beider Strömungszustände mit einem einheitlichen Koeffizientensatz.
Die Vernachlässigung des letzten Summanden aus (1.88) steht in ursächlichem Zusammenhang zu den Vorteilen der $k-\omega$ Formulierung. Die Unterdrückung des Kreuzdiffusionsterms erhöht jedoch gleichzeitig die Sensitivität des Modells für die Fernfeld–

und Zuströmrandbedingungen der Längenmaßvariablen, da sich der Kreuzdiffusionsterm als negativer Entrainmentbeitrag interpretieren läßt (Menter 1992; Wilcox 1993; Rung 1998b). Die Vorgabe der Fernfeldwerte von L_t ist keineswegs trivial. Eine geringe Fernfeldsensitivität ist daher erstrebenswert. In letzter Zeit sind zonal–hybride Kombinationen von $k-\varepsilon$ und $k-\omega$ Modellen (Menter 1994) oder zonale Berücksichtigungen des Kreuzdiffusionsterms, welche die spezifischen Formulierungsvorteile kombinieren, in den Blickpunkt des Interesses geraten.

Weitere Zweigleichungsmodelle sind z.B. von Rotta (1968), Speziale, Abid und Anderson (1992) oder Gibson, Harper und Dafa'Alla (1994) entwickelt worden.

1.4.2 Druck–Scher–Korrelationen

Die Druck–Scher–Korrelationen bilden seit langem den Kernpunkt der Forschungsaktivitäten zur Modellierung der Transportgleichungen von Reynolds–Spannungen. Sie sind daher auch ein wesentlicher Bestandteil anisotoper Wirbelzähigkeitsmodelle. Die grundsätzliche Strategie zur Modellierung der Druck–Scher–Korrelationen geht auf Chou (1945) zurück, der eine Technik zur Eliminierung des fluktuierenden Druckes in inkompressiblen Strömungsfeldern erarbeitete. Die Vorgehehensweise fußt auf der Greenschen Integration der Druckpoissongleichung (1.56)

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\delta V}\left[2\left(\frac{\partial\hat{U}_l}{\partial\hat{x}_k}+e_{lmk}\Omega_m\right)\frac{\partial\hat{u}_k}{\partial\hat{x}_l}+\frac{\partial^2(\hat{u}_k\hat{u}_l)}{\partial\hat{x}_k\partial\hat{x}_l}-\frac{\partial^2(\overline{\hat{u}_k\hat{u}_l})}{\partial\hat{x}_k\partial\hat{x}_l}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{f}'_m}{\partial\hat{x}_m}\right]\frac{d\hat{V}}{r}\\ &+ \frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_{O(\delta V)}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{n}}+\hat{p}\frac{\partial}{\partial\hat{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right]d\hat{O}\ ,\end{aligned}$$

in der $\underline{\hat{x}}$ die Integrationsvariable und $r=|\underline{r}|=|\underline{x}-\underline{\hat{x}}|$ der Abstand vom Festpunkt $\underline{x}$ der Integration ist. Hiermit gelingt die Gliederung der Druck–Scher–Korrelation in einen *langsamen* rein turbulenten Anteil und einen *schnellen* Anteil zur Beschreibung der Interaktion zwischen den Gradienten der fluktuierenden und der mittleren Geschwindigkeit. Der fluktuierende Druck tritt in dieser Darstellung nur noch im Wandterm auf. Unter Beschränkung auf homogene höhere statistische Momente und $f'=0$ notiert man

$$\begin{aligned}\phi_{ij}=\frac{1}{\rho}\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} &= \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\delta V}\left[\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\hat{u}_k\hat{u}_l}{\partial^2\hat{x}_k\hat{x}_l}}\right]\frac{d\hat{V}}{r}}_{\text{langsamer Anteil }\phi_{ij1}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\delta V}2\left[\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{u}_k}{\partial\hat{x}_l}\left(\frac{\partial\hat{U}_l}{\partial\hat{x}_k}+e_{lmk}\Omega_m\right)}\right]\frac{d\hat{V}}{r}}_{\text{schneller Anteil }\phi_{ij2}}\end{aligned} \tag{1.89}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi\rho} \int\limits_{O(\delta V)} \left[\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{n}} + \hat{p} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right)} \right] d\hat{O}}_{\text{inhomogener Wandterm } \phi_{ijw}} .$$

Die Modellbildung des langsamen Anteils ϕ_{ij1} basiert auf Rotta (1951a) (1951b) und bezieht sich explizit auf das return–to–isotropy Konzept, das durch die Relaxation anisotroper Turbulenz getragen wird

$$\phi_{ij1} = -C_1 \, T_t^{-1} (\overline{u_i u_j} - 2k/3 \, \delta_{ij}) \quad . \tag{1.90}$$

Mit Hilfe der Realisierbarkeitsbedingungen ist die Herleitung einer – in den Reynolds–Spannungen – nichtlinearen Erweiterung des Rotta–Ansatzes möglich (Sarkar und Speziale 1990).
Die Modellierung des schnellen Terms ϕ_{ij2} verfolgt eine prinzipiell ähnliche Vorgehensweise. Der Gedanke der Isotropisierung liegt faktisch allen gängigen Ansätzen für ϕ_{ij2} zugrunde. Hierzu zählen sowohl die linearen Modelle von Gibson und Launder (1978), Launder et al. (1975) und Speziale et al. (1991), als auch die nichtlinearen Vorschläge von Shih und Lumley (1985), Fu et al. (1987), Johansson und Hallbäck (1994), Pfuderer et al. (1997) und Batten et al. (1999). Die nichtlineare Modellierung von ϕ_{ij2} ist in Hinblick auf die Darstellung bestimmter Extremsituationen, z.B. die in Anhang A erläuterte Zwei–Komponenten–Turbulenz, von Vorteil. Nichtlineare Ansätze sind oftmals instabil, numerisch aufwendig und versagen bei der Berechnung einfacherer Strömungstypen. Ein allgemeiner Schwachpunkt der nichtlinearen Φ_{ij2} Modellierung ist die von Speziale (1995) bemängelte Inkonsistenz zwischen nichtlinearem strömungsphysikalischen Modell und linearem Ausgangsterm (zweite Zeile der Gleichung 1.89). Alternativ hierzu sind invariantenbasierte, nichtkonstante Koeffizienten denkbar (Jakirlić 1997, vgl. Kapitel 8.1).

In dieser Arbeit werden nur die in Kapitel 4 dargestellten linearen Druck–Scher–Korrelationsmodelle berücksichtigt, eine Erweiterung auf nichtlineare Ansätze wird in Kapitel 5.3 erläutert.

1.4.3 Turbulenter Wärmestrom

Zur Berechnung des turbulenten Wärmestroms werden in dieser Arbeit isotrope Wirbeldiffusivitätsmodelle verwendet. Diese lassen sich unmittelbar aus dem Gradienten–Diffusions–Ansatz (1.72) entwickeln

$$\boxed{-\overline{u_k T'} \overset{1)}{=} C_T \left(\frac{k}{\varepsilon} \right) \overline{u_k u_l} \left(\frac{\partial T}{\partial x_l} \right) \overset{2)}{=} \frac{\nu_t}{Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)} . \tag{1.91}$$

Der turbulenten Prandtlzahl wird zumeist der Wert $Pr = 0.9$ zugewiesen. Die hiermit verbundenen Annahmen offenbaren sich durch die Rekonstruktion der Gleichung (1.91)

aus der exakten Skalartransportgleichung (1.61). Für den Zustand des lokalen Gleichgewichts lassen sich sämtliche Transportterme in (1.61) vernachlässigen. Unterdrückt man ferner sämtliche Quellterme und Volumenkraftdichtebeiträge, dann ergibt sich

$$\overline{u_i u_k}\,\frac{\partial T}{\partial x_k} = -\overline{u_k T'}\,\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho}\,\overline{p\frac{\partial T'}{\partial x_i}} \;-\nu\,\left(\frac{c_p}{Pr}+1\right)\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k}}\,.$$

Im Falle einer nahezu isotropen Feinstruktur müssen die (viskosen) Dissipationsterme der zuletzt notierten Gleichung ebenfalls nicht berücksichtigt werden. Die Druck–Skalargradienten–Korrelation wird üblicherweise analog zur Druck–Scher–Korrelation modelliert (Craft und Launder 1996). Der einfachste Ansatz ist der lineare Relaxationsansatz, bei dem nur der langsame Anteil berücksichtigt wird

$$\frac{1}{\rho}\,\overline{p\frac{\partial T'}{\partial x_i}} = \;-\gamma^* T_t^{-1}\,\overline{u_i T'} \quad\rightsquigarrow\quad \overline{u_i u_k}\,\frac{\partial T}{\partial x_k} = -\overline{u_k T'}\,\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \gamma^*\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)\overline{u_i T'}\,.$$

Das Gradienten–Diffusions–Gesetz (1.91) ergibt sich schließlich unter der Voraussetzung

$$\frac{\overline{u_i u_k}}{\overline{T' u_k}} = \gamma\,\frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_k}}{\frac{\partial T}{\partial x_k}}\;, \qquad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\gamma^* C_T - 1}\,.$$

Die Erweiterung der Technik auf anisotrope Wirbeldiffusivitäts– oder explizite algebraische Modelle zur Berechnung turbulenter Wärmeströme ist möglich. Näheres hierzu findet man z.B. bei Shabany und Durbin (1997), Adumitroaie, Ristorcelli und Taulbee (1998) oder Wikström, Wallin und Johansson (2000).

1.4.4 Instationäre Strömungen

Die Entwicklung statistischer Turbulenzmodelle zur Schließung der Reynolds–gemittelten Bilanzgleichungen basiert nahezu ausschließlich auf statistisch stationären Strömungen, weshalb bei deren Anwendung auf instationäre Probleme Vorsicht geboten ist. Grundsätzlich sind die Ergebnisse der statistischen Modellierung solange vertrauenswürdig, wie der zeitliche Mittelwert (1.38) verwendet werden kann. Dieser kann zur Beschreibung von statistisch instationären Strömungen herangezogen werden, sofern die Existenz einer *spektralen Lücke* gewährleistet ist. In solchen Fällen liegt das Frequenz– und Wellenzahlband der numerisch aufgelösten transienten Grundströmung, klar getrennt von den turbulenten Fluktuationen, um ein bis zwei zeitliche Größenordnungen unterhalb des modellierten Turbulenzspektrums

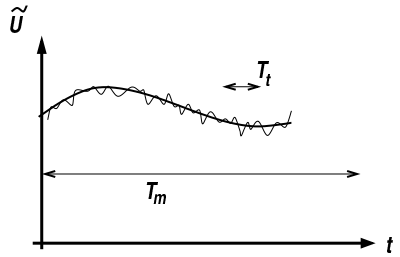


Abbildung 1.3: Zeitschrieb einer instationären, turbulenten Strömung.

$$\boxed{\frac{T_m}{T_t} = \mathcal{O}(10^1) - \mathcal{O}(10^2)}\,.$$

Eine Veranschaulichung dieses Sachverhalts im Zeit– bzw. Wellenzahlbereich kann man den Abbildungen 1.3 und 1.1 entnehmen. Die spektrale Trennung von transienten und turbulenten Mechanismen berechtigt zur Vernachlässigung nichtlinearer Impuls– und Energieflüsse über das gesamte Spektrum. Das Turbulenzfeld anliegender Wandgrenzschichten operiert typischerweise unter diesen *quasi–stationären* Bedingungen.

Die Existenz der spektralen Lücke ist in vielen technischen Anwendungen zumindest gebietsweise nicht mehr zu gewährleisten. Das bekannteste Beispiel hierfür sind instationäre turbulente Nachlaufströmungen hinter stumpfen Körpern. Mit Verringerung des Quotienten aus dem (kleinsten) Zeitmaß der transienten Grundströmung T_m und größtem turbulenten Zeitmaß (eddy–turn–over time) T_t kommt es zu nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen Turbulenz und transienter Grundströmung. Der Arbeitsbereich des statistischen Turbulenzmodells deckt in diesem Falle auch einen Teil des transienten Spektrums ab. Die vielzitierten Schwierigkeiten statistischer Turbulenzmodelle bei der Behandlung von Strömungen, in denen es zu einer Überlagerung von transienten und turbulenten Phänomenen im Wellenzahlbereich kommt, resultieren aus dem dissipativen Charakter des Modells. Der Ursprung der dissipativen Modelleigenschaften ist die Vorstellung von einem einseitig gerichteten Energietransfer. Das statistische Turbulenzmodell entzieht der transienten Grundströmung Energie und transferiert diese in Anlehnung an das Kaskadenmodell von kleineren zu größeren Wellenzahlen. Sämtliche in das Modell eingespeiste Energie dissipiert folglich unwiderruflich in Wärme. Ein Rücktransfer (engl. *back–scatter*) zur Grundströmung ist nicht möglich.
Die Analyse der Energie–Spektralfunktion offenbarte den Transfercharakter der modellierten Dissipationsrate. Analoge Überlegungen führen zu einer ähnlichen Interpretation des effektiven Produktionsterms in transienten Strömungen. Die Existenz solcher Rücktransferterme wird durch das Auftreten transienter Produktions– und Konvektionsterme

$$\frac{DR_{\underline{ij}}}{Dt} = -R_{k\underline{j}}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - R_{i\underline{k}}\frac{\partial U_{\underline{j}}}{\partial x_{\underline{k}}} - (U_{\underline{k}} - U_k)\frac{\partial R_{i\underline{j}}}{\partial r_k} + \ldots$$

in den Rottaschen (1972) Korrelations–Transportgleichungen bestätigt, deren Übersetzung

$$\frac{D\,\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} - \frac{\partial U_m}{\partial t}\left[\gamma_1 U_k\left(\overline{u_i u_k}\,\delta_{mj} + \overline{u_j u_k}\,\delta_{mi}\right) + \gamma_2 T_t \frac{\partial\,\overline{u_i u_j}}{\partial x_k}\,\delta_{km}\right] + \ldots$$

lauten könnte.

Einen Sonderfall instationärer Strömungen stellen die periodischen Strömungen dar. Das Energiespektrum einer quasi–harmonischen Grundströmung beschränkt sich im Unterschied zum turbulenten Spektrum auf einen engen Wellenzahlbereich (Abbildung 1.1). Im Falle einer spektralen Lücke ist daher die Superposition beider Anteile möglich. Hierzu erweitert man die Zerlegung (1.36) um einen nichtturbulenten zeitabhängigen Term $\tilde{z}(\underline{x}, t)$

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(\underline{x}) + \tilde{z}(\underline{x}, t) + z(\underline{x}, t) \qquad \text{mit} \quad \overline{\tilde{\mathcal{Z}}} = \mathcal{Z} \qquad \text{bzw.} \quad \overline{z} = \overline{\tilde{z}} = 0\,. \tag{1.92}$$

Neben dem zeitlichen Mittelwert $\mathcal{Z}(\underline{x})$ wird in diesem Falle oftmals ein Phasenmittel $\mathcal{Z}^*(\underline{x},t)$, dessen Definiton auf der Periodenlänge T_m der Grundströmung basiert, verwendet

$$\mathcal{Z}^*(\underline{x},t) =< \tilde{\mathcal{Z}} >= \mathcal{A}^P[\tilde{\mathcal{Z}}] = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{\mathcal{Z}}_n(\underline{x},t+nT_m)\right) . \tag{1.93}$$

Die Anwendung der Operation (1.93) auf verschiedene Variablenkombinationen ergibt

$$< \tilde{\mathcal{Z}} >= \mathcal{Z} + \tilde{z}(\underline{x},t) , \quad < \mathcal{Z} >= \mathcal{Z} , \quad < z >= 0 , \quad < \tilde{z}_{(i)}\ z_{(k)} >= 0 \tag{1.94}$$

$$\overline{\tilde{z}_{(i)}\ z_{(k)}} = 0 , \quad < \tilde{z}_{(i)}\ \tilde{Z}_{(k)} >= \tilde{z}_{(i)} < \tilde{Z}_{(k)} > \quad < Z_{(i)}\ \tilde{Z}_{(k)} >= Z_{(i)} < \tilde{Z}_{(k)} > \ .$$

Zur Abschätzung der Güte einer Simulation periodischer Strömungen mit Hilfe statistischer Turbulenzmodelle mag die folgende Näherung dienen

$$\boxed{\frac{T_m}{T_t} \approx \gamma\,\frac{Re^{1/5}}{St}}, \qquad \text{mit} \quad St = \frac{fL}{U} = \frac{L}{UT_m} \tag{1.95}$$

Wandgrenzschicht : $\gamma \in [1,10]$ freie Scherschicht : $\gamma \in [0.1,1]$.

Kapitel 2 Motivation

Numerische Methoden zur Simulation turbulenter aerodynamischer Problemstellungen werden gegenwärtig sowohl zur Leistungssteigerung bestehender Konfigurationen, als auch zur Entwicklung und Optimierung neuer Flugzeuge in zunehmendem Umfang genutzt. Die numerische Simulation turbulenter Strömungen ist im Wesentlichen durch drei Primärthemenkreise gekennzeichnet (Spalart 1999). Hierzu zählen neben der Vorhersage von Strömungstransition (I) die Berechnung anliegender und quasi–stationär abgelöster Grenzschichten im Einflußbereich von Körperberandungen (II), sowie die Simulation stark instationärer (periodischer) Strömungszustände, in denen keine ausgeprägte Zeitskalentrennung zur Unterscheidung von Hintergrundturbulenz und transienten Strukturen eines gemittelten Feldes auftritt (III).

Die Vorhersage von Strömungstransition auf der Basis statistischer Turbulenzmodelle ist, mit Ausnahme der By–Pass Transition, gegenwärtig nur eingeschränkt möglich. Die Simulation instationärer Prozesse mit kontinuierlichen Energiespektren stößt ebenfalls auf die konzeptionellen Grenzen statistischer Ansätze. Der überwiegende Teil industrieller Anwendungen ist jedoch einer stationären Simulation bzw. einer instationären Simulation, in denen das Turbulenzmodell aufgrund der vorhandenen spektralen Lücke im quasi-stationären Modus operiert, formal zugänglich.

Die Qualität der Simulation komplexer dreidimensionaler, quasi-stationärer Strömungen hängt entscheidend von der Darstellbarkeit fundamentaler Strömungsphänomene durch das zu Grunde liegende Turbulenzmodell ab. Isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle bilden bis heute die Basis für die industrielle Berechnung komplexer turbulenter Strömungen. Obwohl sich diese Modelle durch eine einfache, robuste und vor allem numerisch effiziente Formulierung auszeichnen, sind sie oft nicht in der Lage, komplexe turbulente Austauschmechanismen korrekt vorherzusagen. Der folgende Abschnitt befaßt sich mit strukturellen Defiziten isotroper Wirbelzähigkeitsmodelle und versucht, die Motivation für eine im darstellungstheoretischen Sinne höherwertige Modellbildung zu entwickeln.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das illustrative Beispiel einer einfachen, zweidimensionalen Scherschicht auf der Basis raumfester, kartesischer Koordinaten. Die additive Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten–Tensors

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = S_{ij} + W_{ij} \tag{2.1}$$

nach symmetrischem (S_{ij}) und antimetrischem (W_{ij}) Anteil lautet in diesem Fall:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & 0 \\ -W_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \qquad W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \ .$$

Der symmetrische Anteil wird im Folgenden als *Deformationgeschwindigkeiten-* oder *Scherraten– (Strain–Rate) Tensor,* der antimetrische Anteil als *Drehgeschwindigkeiten-* oder *Wirbeltensor* bezeichnet. Im Falle kompressibler Strömungen läßt sich der Deformationsgeschwindigkeitentensor in einen kugelsymmetrischen Dilatationsbeitrag und einen Deviator zur Beschreibung der Distorsionsanteile zerlegen

$$S_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}\delta_{ij}S_{kk}}_{\text{Dilatationsbeitrag}} + \underbrace{\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right)}_{\text{Distorsionsbeitrag}} = \frac{1}{3}\delta_{ij}S_{kk} + \tilde{S}_{ij}\,. \tag{2.3}$$

Der einfachheithalber stelle man sich beispielsweise eine ungekrümmte, zweidimensionale Grenzschicht– oder Kanalströmung mit $S_{12} = W_{12} = 0.5\ U_{,y}$ vor. Wertet man das nach Boussinesq (1877) benannte klassische isotrope Wirbelzähigkeitsprinzip

$$\overline{u_i u_j} \ = \ \frac{2}{3}\delta_{ij}k - 2\nu_t\left(S_{ij} - \frac{1}{3}\,S_{kk}\,\delta_{ij}\right)\,, \tag{2.4}$$

für den Strömungstyp (2.2) aus, so erkennt man unmittelbar die in extremem Widerspruch zur Realität stehende Vorhersage isotroper kinematischer Normalspannungen

$$\boxed{\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = \frac{2}{3}k\ .} \tag{2.5}$$

Hierin repräsentieren $\overline{u_i u_j}$ die kartesischen Komponenten des kinematischen Reynolds–Spanungstensors und k die massespezifische Turbulenzenergie, deren Definition in (1.57) und (1.59) erfolgte. Tatsächlich liegt das Verhältnis zwischen kleinster und größter Normalspannung bei diesem Strömungstyp in vollturbulenten Zonen erfahrungsgemäß im Bereich von 3–10 (Abbildung 2.1). Bei genauerer Betrachtung der *Normalspannungsanomalie* (2.5) linearer Wirbelzähigkeitsmodelle tritt ein weiteres eigenartiges Phänomen zu Tage:

- Der strukturell einfachste Zustand mit dem höchstmöglichen Symmetriegrad ist die isotrope Turbulenz, deren Korrelationstensor invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems ist. Isotrope Turbulenz wird daher mit kugelsymmetrischen Korrelationstensoren verbunden (Rotta 1972). Im Grenzfall isotroper Normalspannungszustände sollten folglich sämtliche Schubspannungskomponenten aus Konsistenzgründen verschwinden, was bei einem expliziten linearen Wirbelzähigkeitsansatz (2.4) augenscheinlich nur im trivialen Grenzfall S_{12}=0 gelingt.

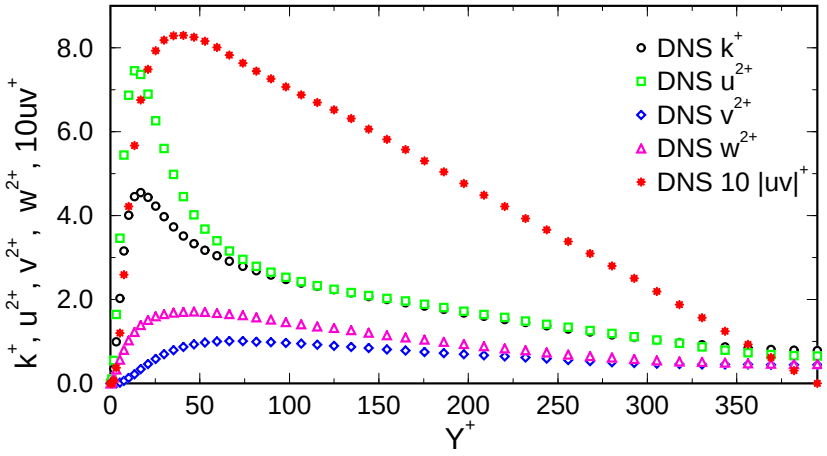


Abbildung 2.1: Turbulente Kanalströmung (Re_τ=395); Reynolds-Spannungen aus direkter numerischer Simulation (Kim et al. 1987).

Kennzeichnend für die in dieser Arbeit diskutierten anisotropen, nichtlinearen Wirbelzähigkeitsmodelle ist das Bemühen, die strukturellen Eigenschaften der Turbulenz besser zu erfassen. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei der Turbulenz in Scherströmungen gewidmet, deren Struktur im wesentlichen durch den Grad der (An)Isotropie der Reynolds–Spannungen gekennzeichnet ist. Dieser wird geeigneterweise mit Hilfe des spurfreien, dimensionslosen *Anisotropietensors* der Reynolds–Spannungen

$$b_{ij} := \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij} \right) \;, \tag{2.6}$$

und dessen Invarianten beschrieben (vgl. Anhang A).

Der nächste Abschnitt erörtert die beiden theoretisch möglichen Wirbelzähigkeitskonzepte auf der Basis einer isotropen bzw. anisotropen Wirbelzähigkeit. Daran anschließend werden klassische Mängel der herkömmlichen isotropen Modellbildung in praxisrelevanten Scherströmungen zusammengetragen.

2.1 Isotrope und anisotrope Wirbelzähigkeit

Das Wirbelzähigkeitskonzept verknüpft definitionsgemäß den Geschwindigkeitsgradienten–Tensor mit dem Tensor der Reynolds–Spannungen

$$\underline{\overline{u\,u}} \;\sim\; \underline{U}\,\underline{\nabla} \;.$$

Isotrope und anisotrope Techniken unterscheiden sich dabei durch die tensorielle Stufe der Verknüpfung. Prinzipiell kommen Wirbelzähigkeitsansätze auf der Basis ungerader Tensorenstufen zur Verknüpfung zweier Tensoren zweiter Stufe nicht in Frage, weswegen letztlich die unten angeführten drei Möglichkeiten verbleiben

$$\overline{u_i u_j} \;\sim\; \begin{cases} \nu_t \quad (S_{ij} + W_{ij}) & \text{isotrope Wirbelzähigkeit,} \\ \nu_{ik} \;\; (S_{kj} + W_{kj}) & \text{schwach anisotrope Wirbelzähigkeit,} \\ \nu_{ijkl}\,(S_{kl} + W_{kl}) & \text{anisotrope Wirbelzähigkeit.} \end{cases}$$

In der Regel wird nur der Beitrag des Scherraten–Tensors zur Verknüpfung berücksichtigt, da man zur Abbildung der maximal sechs verschiedenen Reynolds–Spannungen höchstens sechs Geschwindigkeitsgradientenbeiträge benötigt.

Der wesentliche Vorteil anisotroper Wirbelzähigkeitsmodelle ist die linear unabhängige Modellierung individueller Reynolds–Spannungen. Erste Hinweise zur Formulierung einer anisotropen Wirbelzähigkeit durch nichtlineare Geschwindigkeitsgradiententerme gehen auf Neuzgliadov (1960) zurück. Ziel dieser Arbeit ist die Formulierung anisotroper Wirbelzähigkeitstensoren ν_{ijkl} in Gestalt von nichtlinearen Stress–Strain Beziehungen, deren Herleitung auf algebraischen Spannungsmodellen basiert.

Für eine erste Beurteilung der oben genannten Wirbelzähigkeitsalternativen ist deren Konsistenz zu den untenstehenden simplen Symmetrie– und Kontraktionseigenschaften des Reynolds–Spannungstensors von zentraler Bedeutung

$$\boxed{\overline{u_i u_j} = \overline{u_j u_i} \qquad \text{und} \qquad \overline{u_i u_i} = 2k \; .}$$

Anisotrope Modellierung

Der allgemeinste Ansatz zur Formulierung einer Wirbelzähigkeit wird, analog zu anisotropen linear-elastischen Materialgesetzen, durch einen Tensor vierter Stufe (Hinze 1959; Gatski und Speziale 1993) beschrieben

$$\overline{u_i u_j} \;=\; \frac{2}{3}\delta_{ij}k - \nu_{ijkl}\,(S_{kl} + W_{kl}) \; . \tag{2.7}$$

Der kugelsymmetrische erste Summand erleichtert die Formulierung einer homogenen Kontraktionsrestriktion ($b_{kk} = 0$), das Vorzeichen des zweiten Summanden fußt auf Kontinuitätsüberlegungen von Prandtl (1925) für das oben angesprochene Beispiel einer ebenen Scherströmung ($\overline{uv} \sim -U_{,y}$). Die vorstehend zitierten Kontraktions– und Symmetriebedingungen ergeben

$$\nu_{ijkl} = \nu_{jikl} \qquad \text{und} \qquad \nu_{iikl} = 0 \; .$$

Aus dem Blickwinkel des Scherraten–Tensors ist eine zusätzliche Symmetrie des Wirbelzähigkeitstensors ν_{ijkl} in Bezug auf die hinteren beiden Indizes einleuchtend, da S_{kl} und S_{lk} letztlich denselben Beitrag zu $\overline{u_i u_j}$ leisten sollten

$$\overline{u_i u_j} \;=\; \frac{2}{3}\delta_{ij}\,k \;-\; \nu_{ijkl}\,S_{kl} \; , \tag{2.8}$$

$$\nu_{ijkl} = \nu_{jikl} \; , \qquad \nu_{iikl} \;=\; 0 \; , \qquad \nu_{ijkl} = \nu_{ijlk} \; .$$

Die doppelte Überschiebung von symmetrischen und antimetrischen Indizes bleibt wirkungslos. Der antimetrische Wirbeltensor muß daher in Gleichung (2.8) nicht mehr mitgeführt werden, was die o.g. Aussagen zur Vernachlässigbarkeit eines expliziten W_{ij}–Beitrags bestätigt. Nichtsdestoweniger können die Koordinaten des Wirbeltensors zur Definition der Koordinaten des Wirbelzähigkeitstensors beitragen.

Schwach anisotrope Modellierung

Im Rahmen der zweiten Möglichkeit wird die Wirbelzähigkeit durch einen Tensor zweiter Stufe beschrieben

$$\overline{u_i u_j} \;=\; \frac{2}{3}\delta_{ij}k - \nu_{ik}\left(S_{kj}+W_{kj}\right) \;. \tag{2.9}$$

Anhand der Kontraktionsbedingung erkennt man unmittelbar die Defizite des Ansatzes

$$0 = \nu_{ik}\left(S_{ki}+W_{ki}\right) \;.$$

Da die Geschwindigkeitsgradienten i. Allg. linear unabhängig sind, degeneriert der Wirbelzähigkeitstensor zweiter Stufe bei Beachtung der Kontraktionsbedingung zu einem Nulltensor.

Isotrope Modellierung

Die anisotrope Wirbelzähigkeit ν_{ijkl} wird im Rahmen linearer Wirbelzähigkeitsmodelle (EVM) einer Isotropiehypothese unterworfen. Mit Hilfe der allgemeinen Darstellung eines isotropen Tensors vierter Stufe findet man anstelle von (2.7)

$$\begin{aligned} \nu_{ijkl}^{\mathrm{EVM}} \;&:=\; A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \;, \\ \rightsquigarrow \quad \overline{u_i u_j} \;&=\; \frac{2}{3}\delta_{ij}\,k - \left[\,A\delta_{ij}S_{kk} + (B+C)S_{ij} + (B-C)W_{ij}\,\right] \;. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Hieraus ergibt sich vermöge der Symmetrierestriktion $B = C$, bzw. des Kontraktionszwangs $A = -2B/3$ das lineare Boussinesqgesetz ($\nu_t := B$)

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij}k - 2\nu_t\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) \;, \tag{2.11}$$

$$\text{mit} \quad \boxed{\nu_t := \text{isotrope Wirbelzähigkeit} = c_\mu k T_t} \quad .$$

Modelle von Typ (2.11) werden aufgrund der skalaren Wirbelzähigkeit auch *isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle* genannt. Die in Gleichung (2.11) gewählte Zerlegung der isotropen kinematischen Wirbelzähigkeit ist willkürlich und erleichtert die im Folgenden bevorzugte dimensionslose Darstellung. Hierin repräsentiert T_t ein geeignet gewähltes *turbulentes Zeitmaß* und c_μ den bereits in Kapitel 1 erwähnten – i. Allg. jedoch nicht notwendigerweise konstanten – dimensionslosen Anisotropieparameter, auf dessen Bedeutung später näher eingegangen wird. Typische turbulente (high–Re) Zeitmaße einer Zwei–Parameter–Modellierung sind

$$T_t \;=\; \begin{cases} \frac{k}{\varepsilon} & k-\varepsilon \text{ Modell} \quad \text{(Jones und Launder 1972)} \;, \\ \frac{1}{\overline{c}_\mu\,\omega} & k-\omega \text{ Modell} \quad \text{(Wilcox 1993)} \;, \\ \tau & k-\tau \text{ Modell} \quad \text{(Speziale, Abid und Anderson 1992)} \;, \\ \frac{\overline{c}_\mu\sqrt{k}}{l} & k-l \text{ Modell} \quad \text{(Rotta 1968)} \;. \end{cases}$$

Der strukturelle Nachteil (expliziter) isotroper EVM läßt sich aus der Definition der isotropen Wirbelzähigkeit ergründen

$$\nu_t(k, T_t, \underline{b}, \underline{\nabla} U) \;=\; -k\,\frac{b_{\alpha\beta}}{\tilde{S}_{\alpha\beta}}\;. \tag{2.12}$$

Hiernach ist die Wirbelzähigkeit eine Funktion des mittleren Geschwindigkeitsfeldes und des Turbulenzfeldes, letzteres in Form von sowohl isotropen (k) als auch anisotropen (b_{ij}) Beiträgen. Eine allgemeingültige Modellierung der Wirbelzähigkeit verlangt folglich neben der Berücksichtigung geeignet gewählter Normen des Distorsionsfeldes und isotropen Turbulenzgrößen auch die Einarbeitung des Anisotropiezustands der Reynolds–Spannungen, was zu einer impliziten Wirbelzähigkeitsformulierung führen würde.

2.2 Primäre, sekundäre und tertiäre Stress–Strain Interaktion

Die Wechselwirkungen zwischen Turbulenz und Geschwindigkeitsgradienten sind eng mit bekannten physikalischen Mechanismen einer turbulenten Scherströmung verknüpft. Diese lassen sich ihrer Bedeutung nach in primäre, sekundäre und tertiäre Erscheinungen gliedern und können von den verschiedenartigen Wirbelzähigkeitskonzepten unterschiedlich gut wiedergegeben werden.

Primäre Strömungsmerkmale sind durch die Wechselwirkung einander zugeordneter Reynoldsscher Schubspannungen und Scherraten bestimmt. Sie lassen sich in lokal zweidimensionalen Scherströmungen durch isotrope Wirbelzähigkeitsansätze hinreichend genau beschreiben. Die zweidimensionale Scherströmung ist keinesfalls nur akademischer Natur. Vielmehr läßt sich die Mehrheit der in der Praxis auftretenden Strömungen näherungsweise dadurch beschreiben. Hierzu gehört die in Abbildung 8.21 durch schwarze Farbwerte gekennzeichnete druckinduzierte Hinterkantenablösung über der Saugseite eines Tragflügelprofils. Eine adäquate Modellierung primärer Phänomene im Rahmen isotroper Ansätze geschieht beispielsweise durch die besondere Berücksichtigung der Realisierbarkeit der modellierten Reynolds–Spannungen (Schumann 1977). Ein Bestandteil der Realisierbarkeitsbedingungen ist die Gewährleistung positiver Normalspannungen, eine Anforderung, die von dem isotropen Wirbelzähigkeitsansatz nur durch die umgekehrte Proportionalität des Anisotropieparameters zum Scherratenparameter $S = T_t \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$ befriedigt werden kann (Shih, Zhu und Lumley 1993; Rung 1998b).

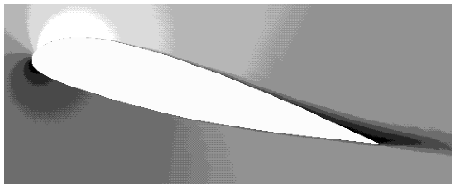


Abbildung 2.2: Hauptströmungskomponente einer abgelösten Profilumströmung

$$\overline{u_\alpha^2} = \frac{2}{3}\,k - 2\,c_\mu\,kT_t\,\tilde{S}_{\alpha\alpha}\;, \qquad \rightsquigarrow \qquad \lim_{S\to\infty} c_\mu \le \frac{1}{1.5\,S}\;.$$

Die so formulierte Wirbelzähigkeit erfüllt den in Gleichung (2.12) geforderten umgekehrt–proportionalen Zusammenhang von ν_t und S_{ij} zumindest im integralen Mittel. Analoge Überlegungen, in denen der Anisotropieparameter umgekehrt proportional zur zweiten Invariante des Wirbeltensors ist, führen zu den sogenannten *Shear–Stress–Transport* Modellen von Menter (1993). Die Darstellbarkeit von ebenen Krümmungseffekten gelingt ebenfalls bereits mit linearen Stress-Strain Beziehungen (vgl. Kapitel 7.4).

Ein illustratives Beispiel für die Schwächen einer isotropen Modellierung bei der Darstellung primärer Strömungsmerkmale ist die zweiachsige Scherung, die in dreidimensionalen Grenzschichtströmungen relevant ist. Die komplementäre Schubspannungkomponente $\overline{vw}$ einer 3D Grenzschicht ist in isotropen Wirbelzähigkeitsmodellen in gleicher Weise an die Entwicklung der Querströmungskomponente W gekoppelt wie die Primärschubspannung $\overline{uv}$ an die Hauptströmungsgeschwindigkeit U. Experimentelle Untersuchungen, z.B. Schwartz und Bradshaw (1994), zeigen dagegen oftmals eine Abweichung zwischen dem Schubspannungswinkel und dem Strömungsgradientenwinkel

$$\text{Exp.}: \quad \gamma_\tau \neq \gamma_g \,, \qquad \text{mit} \qquad \gamma_\tau = \tan^{-1}\left(\frac{\overline{vw}}{\overline{uv}}\right) \qquad \text{und} \qquad \gamma_g = \tan^{-1}\left(\frac{\partial W/\partial y}{\partial U/\partial y}\right) \,.$$

Offenkundig versagt die starre isotrope Kopplung ganz allgemein bei der Vorhersage von mehreren, linear unabhängigen Komponenten des Reynolds–Spannungstensors.

Sekundäre Strömungsformen bilden sich durch Normalspannungsdifferenzen in einer turbulenten Scherströmung aus. Die eingangs angesprochene Normalspannungsanomalie wird durch die unzulängliche Modellierung der Diagonalbeiträge der Scherturbulenz durch isotrope Ansätze verursacht. Im Sinne einer Polynomdarstellung

$$\overline{u_i u_j} = P\left(\delta_{ij}, \quad S_{ij}, \quad S_{ij}^2, S_{ik}W_{kj} + S_{jk}W_{ki}, W_{ij}^2, \quad S_{ij}^3, \ ...\right) \tag{2.13}$$

werden die Normalspannungen für das betrachtete Scherströmungsbeispiel nur von nullter Ordnung in den Geschwindigkeitsgradienten genau approximiert, wohingegen die Schubspannungen von erster Ordnung genau approximiert werden. Allgemein findet man:

> *Die Normalspannungen werden in schwach–gekrümmten Scherströmungen von den geraden Potenzen einer Polynomdarstellung beschrieben, die Schubspannungen hingegen von den ungeraden Potenzen.*

Eine präzisere Modellierung der Normalspannungsanisotropie verlangt folglich mindestens einen quadratischen Wirbelzähigkeitsansatz. Ein eindrucksvolleres Beispiel für

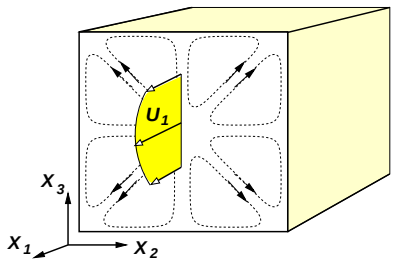


Abbildung 2.3: Turb. Sekundärströmung

die Unterschlagung signifikanter sekundärer Strömungsmerkmale durch isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle ist die in Abbildung 2.3 skizzierte Sekundärströmung in Gestalt von vier longitudinalen Eckenwirbelpaaren bei der Durchströmung rechteckiger Rohre (Bradshaw 1987; vgl. Kapitel 7.5). Derartige Sekundärströmungen werden durch die Normalspannungsdifferenzen einer ansonsten scherdominierten Strömung gespeist. Sie sind daher nur bei Berücksichtigung der quadratischen Glieder des Wirbelzähigkeitsansatzes darstellbar.

Tertiäre Effekte entstehen in zweiachsigen Scherströmungen durch die Interaktion einander nicht zugeordneter Komponenten der Reynoldschen Schubspannungen und des Scherraten–Tensors. Ein Beispiel hierfür ist die krümmungsinduzierte Variation turbulenter Schubspannungen in Strömungen durch axial rotierende Rohre. Die in Abbildung 2.4 skizzierte vollentwickelte Strömung ($\partial/\partial z{=}\partial/\partial\theta\ {=}0$, $V{=}0$) wurde von einer Vielzahl von Autoren theoretisch, numerisch und experimentell untersucht (Kikuyama et al. 1983; Reich und Beer 1989; Imao et al. 1996; Orlandi und Fatica 1997; Oberlack 1999). Sie zeichnet sich durch die folgenden beiden Strömungsmerkmale aus, welche von linearen oder quadratischen Wirbelzähigkeitsmodellen nicht wiedergegeben werden können:

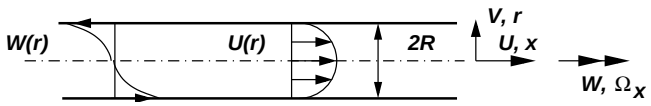


Abbildung 2.4: Vollentwickelte rot. Rohrströmung

- Mit steigender Drallzahl $W_{\mathrm{R}}/U_{\mathrm{B}}$ sinkt der Betrag der Primärschubspannung $\overline{uv}$ und das Axialgeschwindigkeitsprofil relaminarisiert.

- Der radiale Verlauf der Azimutalgeschwindigkeit $W(r)$ erfährt in Folge der von Null verschiedenen Drall–Schubspannung $\overline{vw}$ eine parabolische Überhöhung

$$W(r)/W_{\mathrm{R}} \approx (r/R)^2 \ .$$

Zur Illustration der Defizite linearer Wirbelzähigkeitsansätze in krümmungsbehafteten Strömungen wird das Beispiel eines Starrkörperwirbels diskutiert, das durch den

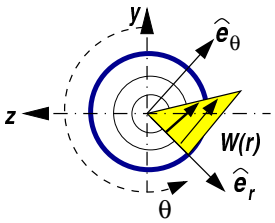


Abbildung 2.5: Starrkörperwirbel

isotropen Wirbelzähigkeitsansatz identisch erfüllt wird. Die Betrachtungen basieren auf der in Abbildung (2.5) skizzierten Konfiguration in rotierenden zylindrischen Koordinaten $\underline{U} = W(r)\,\underline{e_\theta} = (\alpha r)\,\underline{e_\theta}$. Anhang B enthält eine Zusammenstellung der transformierten Bilanzgleichungen verdrallter Strömungen in zylindrischen Koordinaten. Die Kontinuitätsgleichung ist in diesem besonders einfachen Beispiel identisch erfüllt. Die einzig verbleibende Impulsgleichung ist die Transportgleichung der Azimutalgeschwindigkeit

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r\frac{\partial W}{\partial r} - \overline{vw}\,r\right) - \overline{vw} - \nu\frac{W}{r} \;=\; \frac{\partial}{r\,\partial r}\left(r^2\left[\nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right) - \overline{vw}\right]\right) \;=\; 0\,. \tag{2.14}$$

Nach einmaliger partieller Integration von (2.14) mit $W(0) = 0$ findet man für den Starrkörperwirbel wegen $S_{r\theta} = 0$ verschwindende Drall–Schubspannungskomponenten

$$\overline{vw} = \nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right) = \nu S_{r\theta} = 0\,. \tag{2.15}$$

In Bezug auf die Vorhersage von krümmungsinduzierten Variationen der turbulenten Schubspannungen entnimmt man Gleichung (2.14), daß der isotrope Boussineq–Ansatz (2.11) immer mit einem Starrkörperprofil für die Umfangsgeschwindigkeit verbunden ist

$$\overline{vw}_{\mathrm{EVM}} = -\nu_t S_{r\theta} \quad \rightsquigarrow^{(2.14)} \quad (\nu_t + \nu)\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{S_{r\theta} = 0} \tag{2.16}$$

und folglich auch stets verschwindende Drall–Schubspannungen vorhersagt. Der tertiäre Effekt eines parabolisch überhöhten Azimutalgeschwindigkeitsprofils ist daher unvereinbar mit dem isotropen Wirbelzähigkeitskonzept. Ein in der Praxis auftretendes nichtlineares Azimutalgeschwindigkeitsprofil ist nur durch kubische Wirbelzähigkeitsansätze simulierbar.

2.3 Ziele der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung von höherwertigen, anisotropen Wirbelzähigkeits–Turbulenzmodellen mit Hilfe von rationalen Methoden. Der Beitrag trägt somit den gesteigerten industriellen Anforderungen an die Güte der physikalischen Modellbildung in aufwandsneutraler Weise Rechnung. Die dabei bearbeiteten Fragestellungen ergeben sich aus den Schwachstellen konventioneller isotroper Wirbelzähigkeitsmodelle. Im Anschluß an die oben skizzierten Beispiele lassen sich die Ziele wie folgt zusammenfassen:

- Die Entwicklung einer flexiblen, anisotropen Stress–Strain Kopplung. Hierdurch sollten vor allem mehrere, linear unabhängige Komponenten des Reynolds– Spannungstensors darstellbar sein.

- Die korrekte Berechnung von Geschwindigkeitskomponenten unter dem exklusiven Einfluss von Normalspannungsanisotropie, beispielsweise die Simulation der Sekundärströmung in der Rohrebene nichtkreisförmiger Rohre.

- Eine verbesserte Vorhersage von Strömungen unter dem Einfluss starker Stromlinienkrümmung und der damit verbundenen Auslöschung oder Anfachung der Produktion turbulenter Schubspannungen. Diesbezüglich sollen sowohl einachsige als auch zweiachsige Scherzustände – deren Stromlinien die Hauptströmungsebene infolge der Krümmung verlassen – betrachtet werden. Technisch wichtige Anwendungsbeispiele dieser Strömungskategorie sind Brennkammerströmungen, in denen Strömungsdrall zur Stabilisierung der Flamme gezielt eingesetzt wird.

  Krümmungsmechanismen werden durch die Abweichung der Hauptachsen des spurfreien Strain–Rate Tensors von den Hauptachsen des Anisotropietensors der Reynolds–Spannungen angezeigt (Spalart und Shur 1997). Da sich die Eigenrichtungen von $\underline{\underline{b}}$ und $\underline{\underline{\tilde{S}}}$ für das isotrope Modell nicht unterscheiden, vermag der isotrope Ansatz ohne Erweiterungen auch keine Krümmungsmechanismen darzustellen.

- Eine adäquate Darstellung der Wechselwirkung zwischen Turbulenz und Systemrotation, welche bislang in heuristischer Weise nachträglich in die lineare Modellbildung eingebracht wird.

- Untersuchungen zum quantitativen Einfluss der Coriolisbeschleunigung von Reynolds–Spannungen in krümmungsbehafteten Strömungsfeldern. Diese können beispielsweise von erheblicher Bedeutung für Entwicklung der Azimutalgeschwindigkeit einer verdrallten Strömung sein.

- Die präzisere Wiedergabe von Strömungsmechanismen im Bereich von Stoß/ Grenzschicht–Interaktion, insbesondere eine von der Interaktionsstärke unabhängige Vorhersagequalität.

- Eine angemessene Darstellung von druckinduzierter Ablösung. Das Problem läßt sich oftmals auf eine unzureichende Darstellung turbulenter Schubspannungen in primär zweidimensionalen Strömungen reduzieren, und steht somit in engem Zusammenhang mit der Modellierung des linearen Terms (Menter 1993; Rung 1998b).

- Die Evaluierung der Modellbildung in Hinblick auf Strömungsbeschleunigung.

Kapitel 3 Darstellungstheorie

Die Koeffizienten eines Turbulenzmodells sind dimensionslose Skalare und somit unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Diese Anforderung wird nicht nur von Konstanten, sondern auch von allen aus den Tensorkoordinaten abgeleiteten Skalaren erfüllt. Die *Darstellungs- oder Invariantentheorie* versucht, die an der Parametrisierung der Koeffizienten beteiligten Skalare systematisch einzugrenzen.

Einen ersten Eindruck von der Vielzahl möglicher Einflussparameter vermittelt der Versuch zur Bestimmung des Anisotropiekoeffizienten c_μ. Hierzu betrachtet man die dimensionslose Darstellung der isotropen Wirbelzähigkeitsbeziehung (2.12)

$$-c_\mu s_{ij} = b_{ij} \qquad \text{mit} \qquad s_{ij} = T_t \tilde{S}_{ij}\,, \quad \text{bzw.} \quad w_{ij} = T_t \tilde{W}_{ij} = T_t(W_{ij} - e_{ijk}\Omega_k)\,, \tag{3.1}$$

in der e_{ijk} den Permutationstensor und Ω_k eine evtl. Rotation des Bezugssystems gegen ein Inertialsystem kennzeichnet. Eine unmittelbare Bestimmung des Koeffizienten c_μ aus der tensorwertigen Gleichung (3.1) gelingt nicht. Es lassen sich jedoch durch entsprechende Überschiebungen, z.B. $-c_\mu s_{ii}^2 = b_{ij}s_{ji}$ (mit $s_{ij}^2 = s_{ik}s_{kj}$), mögliche Abhängigkeiten erkennen. Da die Beziehung der isotropen Wirbelzähigkeit aus dem allgemeingültigeren anisotropen Wirbelzähigkeitsansatz (2.7) folgt, hängt c_μ von allen Skalaren ab, welche sich aus den Tensoren s_{ij}, w_{ij} und b_{ij} bilden lassen. Hierzu zählen unter anderen

$$c_\mu(s_{ii}^2, b_{ii}^2, w_{ii}^2, s_{ij}b_{ij}, s_{ik}^2 b_{ki}, b_{ik}^2 s_{ki}, b_{ij}w_{ji}^2, s_{ij}w_{ji}^2, s_{ii}^3, b_{ii}^3, s_{ik}^2 b_{ki}^2, s_{ik}^2 w_{ki}^2, \dots)\,. \tag{3.2}$$

Als weitere Einflussparameter kommen in voll–turbulenten Bereichen vor allem der Anisotropietensor der Dissipationsrate $\varepsilon_{ij}/\varepsilon - 2/3\,\delta_{ij}$ oder ein zweites Zeitmaß in Betracht. Daneben treten in wandnahen low–Re Bereichen weitere skalare Parameter (z.B. $Re_t = k\,T_t/\nu$) in Erscheinung. Das Beispiel belegt die Komplexität einer allgemeingültigen Bestimmung von Koeffizienten als Funktion der linear unabhängigen Skalare.

3.1 Funktions– und Integritätsbasen

Grundsätzlich besteht anfangs das Problem der Formulierung einer *Relevanzliste,* in der man sich auf die zulässigen Einflussgrößen des physikalischen Modells verständigt, z.B.

$$b_{ij} = b_{ij}\underbrace{(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, a_i, b_i, \dots)}_{\text{Relevanzliste}}\,. \tag{3.3}$$

Die Zusammensetzung der Relevanzliste basiert auf physikalischen Überlegungen. Mit Hilfe der Darstellungstheorie gelingt die Formulierung von sog. *Generatoren,* die den konkreten Aufbau der Polynomglieder einer *Funktionsbasis* zu (3.3) beschreiben, z.B.

$$
\begin{aligned}
b_{ij} &= b_{ij}(s_{ij}, w_{ij}) = \sum_n a_n T_{ij}^{(n)} \\
&= a_1 s_{ij} + a_2 \underbrace{(s_{ik}w_{kj} - w_{ik}s_{kj})}_{\text{2. Generator}} + a_3 \underbrace{(s_{ij}^2 - \delta_{ij}(s_{kk}^2)/3)}_{\text{3. Generator}} \\
&\quad + a_4 \underbrace{(w_{ij}^2 - \delta_{ij}(w_{kk}^2)/3)}_{\text{4. Generator}} + a_5 \underbrace{(s_{ik}^2 w_{kj} - w_{ik}s_{kj}^2)}_{\text{5. Generator}} \quad + \ldots
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Im Zentrum der Formulierung von Funktionsbasen steht der *Satz von Spencer* (1959). Dieser beschreibt die Funktionsbasis $\mathcal{F} = T_{ij}^{(1)}, T_{ij}^{(2)}, \ldots T_{ij}^{(n)}$ nach *Grad* und *Extension.* Hierbei bezeichnet der Grad eines Matrixpolynoms die maximal mögliche Anzahl von Skalarmultiplikationen zur Bildung eines Generators, und die Extension (Vielfachheit) die höchste Anzahl der Beteiligungen eines Elements aus der Relevanzliste an einem Generator:

> *Jedes Matrixprodukt aus R 3×3 Matrizen (Elementen der Relevanzliste) kann als Matrixpolynom mit der Extension $\leq R+1$ und dem Grad $\leq G$ ausgedrückt werden. Der Grad des Polynoms wird durch den Umfang der Relevanzliste bestimmt. Für $R = 1$ gilt $G = 2$ und für alle $R \geq 2$ findet man* $G = \max(5, R+2)$.

Ein Beweis gelingt mit Hilfe des verallgemeinerten Caley–Hamilton Theorems (Anhang C). Für $R = 1$ folgt der Satz von Spencer unmittelbar aus der ursprünglichen Form des Caley–Hamilton Theorems

$$
A_{ij}^3 = A_{kk}\, A_{ij}^2 - 0.5(A_{kk}A_{ll} - A_{kk}^2)A_{ij} + (\det[A_{ij}])\,\delta_{ij} \; . \tag{3.5}
$$

Neben der Bestimmung der Generatoren stellt sich die Frage nach der Spezifikation der Koeffizienten $a_1 \ldots a_n$. Leider vermag die Darstellungstheorie ohne zusätzliche Zwangsbedingungen keine präzisen Angaben über die Gestalt der Koeffizienten zu machen. Die Koeffizienten können Funktionen aller möglichen linear unabhängigen *(irreduziblen)* skalaren Kombinationen η_i von Tensorkoordinaten der Generatoren sein. Die Menge der Kombinationen $\mathcal{N} = \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ nennt man *Integritätsbasis,* die einzelnen Elemente *Invarianten.*

3.2 Anisotrope Wirbelzähigkeitsmodelle

Die im Rahmen der Ingenieurwissenschaften allgemeinste statistische Modellbildung basiert auf Transportgleichungen für Reynolds–Spannungen. Diese verknüpfen in ihrer einfachsten Form die Tensoren b_{ij}, s_{ij}, und w_{ij} (vgl. Kapitel 4). Für die Entwicklung verallgemeinerter Wirbelzähigkeitsmodelle ist $b_{ij} = b_{ij}(s_{ij}, w_{ij})$ folglich ein sehr wichtiges Beispiel. Hierfür findet man nach Spencer eine Funktionsbasis vom Grade fünf und

der Vielfachheit drei, welche zunächst auf 62 zu berücksichtigende spurfreie Generatoren führt. Zu einer kompakteren Darstellung auf der Basis von 16 Generatoren gelangt man durch Reduktion der linearen Abhängigkeiten mit Hilfe des Caley–Hamilton Theorems. Abschließende Symmetriebedingungen schränken die Funktionsbasis formal auf 10 Generatoren ein (Spencer 1971; Gatski und Speziale 1993; Lübcke und Rung 1999):

$$\begin{aligned}
T^{(1)}_{ij} &= s_{ij} & T^{(2)}_{ij} &= s_{ik}w_{kj} - w_{ik}s_{kj} \\
T^{(3)}_{ij} &= s^2_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\delta_{ij}\,s^2_{kk} & T^{(4)}_{ij} &= w^2_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\delta_{ij}\,w^2_{kk} \\
T^{(5)}_{ij} &= s^2_{ik}w_{kj} - w_{ik}s^2_{kj} & T^{(6)}_{ij} &= w^2_{ik}s_{kj} + s_{ik}w^2_{kj} - \tfrac{2}{3}\,\delta_{ij}\,s_{kl}w^2_{lk} \\
T^{(7)}_{ij} &= w^2_{ik}s_{kl}w_{lj} - w_{ik}s_{kl}w^2_{lj} & T^{(8)}_{ij} &= s^2_{ik}w_{kl}s_{lj} - s_{ik}w_{kl}s^2_{lj} \\
T^{(9)}_{ij} &= w^2_{ik}s^2_{kj} + s^2_{ik}w^2_{kj} - \tfrac{2}{3}\,\delta_{ij}\,s^2_{kl}w^2_{lk} & T^{(10)}_{ij} &= w^2_{ik}s^2_{kl}w_{lj} - w_{ik}s^2_{kl}w^2_{lj}\ .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Die Integritätsbasis setzt sich in diesem Falle aus fünf irreduziblen Invarianten zusammen

$$\eta_1 = s^2_{ii}\ , \qquad \eta_2 = w^2_{ii}\ , \qquad \eta_3 = s^3_{ii}\ , \qquad \eta_4 = s_{ik}w^2_{ki}\ , \qquad \eta_5 = s^2_{ik}w^2_{ki}\ . \tag{3.7}$$

Aufgrund der Tatsache, daß b_{ij} als spurfreier symmetrischer Tensor nur fünf linear unabhängige Elemente (zwei Normalspannungs– und drei Schubspannungskomponenten) besitzt, gelingt eine weitere Reduktion der Funktionsbasis auf fünf Generatoren, z.B. die in Glg. (3.4) angegebene Form (Rivlin und Ericksen 1955; Zheng 1994; Lübcke und Rung 1999). Dabei ist zu beachten, daß die Zusammensetzung der minimalen Funktionsbasis nicht eindeutig ist und die jeweils gewählte Basis in bestimmten pathologischen Strömungssituationen linear abhängige Generatoren aufweisen kann (Jongen und Gatski 1998). Ein weiterer Nachteil der minimalen Basis ist, daß im Zuge der Reduktion überzähliger Generatoren eine aufwendig zu berechnende höhere irreduzible Invariante

$$\eta_6 \;=\; s_{ij}w_{jk}s^2_{kl}w^2_{li}\ , \qquad \text{mit} \quad \tilde{\eta}_1 = 0.5\eta_1\ ,\ \tilde{\eta}_2 = 0.5\eta_2\ ,\ \tilde{\eta}_3 = \eta_3/3 \qquad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
(\eta_6)^2 \;=\;& (\tilde{\eta}_2)^3[4(\tilde{\eta}_1)^3 + (\tilde{\eta}_3)^2] + 4\tilde{\eta}_1(\tilde{\eta}_2)^2[\tilde{\eta}_3\eta_4 - 2\tilde{\eta}_1\eta_5] + \tilde{\eta}_1(\eta_4)^2[\eta_5 - \tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2] \\
& +5(\eta_5)^2\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 - 3\eta_4\eta_5\tilde{\eta}_2\tilde{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3(\eta_4)^3 - (\eta_5)^3
\end{aligned} \tag{3.8}$$

auftritt, die lediglich betragsmäßig durch die fünf in Gleichung (3.7) angeführten Invarianten substituiert werden kann (Lund und Novikov 1992). Dessen ungeachtet ist eine reduzierte Basis mit weniger als fünf Generatoren das adäquate Mittel ingenieurtechnischer Berechnungen.

Daß es sich bei Ansätzen der Form (3.4) um anisotrope Wirbelzähigkeitsansätze handelt, erkennt man beispielsweise an der Identität

$$\begin{aligned}
b_{ij} \;=\;& \underbrace{a_1 s_{ij}}_{\text{isotroper Anteil}} + a_2(s_{ik}w_{kj} - w_{ik}s_{kj}) + a_3(s^2_{ij} - \delta_{ij}(s^2_{kk})/3) \\
=\;& \underbrace{\left[a_1\delta_{ik}\delta_{jl} + a_2\left(\delta_{il}w_{kj} - w_{ik}\delta_{jl}\right) + a_3\left(s_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}s_{kl}\right)\right]}_{\text{anisotrope Wirbelzähigkeit} \qquad 2\,\nu_{ijkl}\,(kT_t)^{-1}} s_{kl} \qquad .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Anwendungbereich und Gültigkeitsrestriktionen

Bei der Anwendung und Beurteilung von Stress–Strain Beziehungen muß zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Approximationstechniken und den damit verbundenen Einschränkungen differenziert werden:

- Durch die Festlegung der Relevanzliste trifft man eine einschränkende Auswahl der berücksichtigten physikalischen Effekte. Dies betrifft gleichermaßen die Integritäts– und die Funktionsbasis und daher sämtliche Koordinaten von b_{ij}.
- Die Vernachlässigung hochgradig nichtlinearer Glieder einer Funktionsbasis beinhaltet zweifellos auch die Vernachlässigung physikalischer Phänomene, ist jedoch nicht unbedingt in der gleichen Weise restriktiv wie die Vernachlässigung bestimmter Einflussgrößen in der Relevanzliste. Da die Generatoren oftmals mit der Modellierung spezifischer Koordinaten von b_{ij} assoziiert werden können, betrifft die Änderung der Funktionsbasis nicht alle Koordinaten gleichermaßen.

Der entscheidende Unterschied liegt im Umfang der berücksichtigten Integritätsbasis $\mathcal{N}$. Häufig können einzelne physikalische Mechanismen an bestimmte Invarianten gekoppelt werden und erhalten damit Einzug in den Modellierungsprozess. Die wichtigsten Kopplungsaussagen lauten:

- Nichtgleichgewichts–Effekte lassen sich durch das Deformationsmaß $\eta_1 = s_{ii}^2$ quantifizieren.
- Abweichungen vom zweidimensionalen Deformationszustand werden durch die Invariante $\eta_3 = s_{ii}^3$ beschrieben.
- Krümmungseffekte sind mit der zweiten Invarianten des Wirbeltensors $\eta_2 = w_{ii}^2$ verknüpft.
- Eine zweiachsige Scherung läßt sich durch die Abweichung der Invarianten η_5 vom zweidimensionalen Zustand $\eta_5 = 0.5\eta_1\eta_2$ charakterisieren.
- Zweiachsige Krümmung ist mit von Null verschiedenen Invarianten η_4 verbunden.

Die nichtlineare Stress–Strain Beziehung (3.4) läßt sich als Reihenentwicklung, deren Glieder mit steigender Nichtlinearität an Bedeutung verlieren, auffassen. Die Koeffizienten der dominanten Terme hängen jedoch in der Regel nicht ausschließlich von den Invariaten der schwach nichtlinearen Generatoren ab. Zur Verdeutlichung dienen die folgenden vier Beispiele.

A) Zweidimensionale Betrachtung

Beschränkt man seine Betrachtungen auf zweidimensionale Reynolds–gemittelte Geschwindigkeitsfelder, dann verschwinden zwei der drei Schubspannungskomponenten von b_{ij}, und es verbleiben lediglich drei linear unabhängige Elemente (vgl. Anhang C).

Analog reduziert sich die Funktionsbasis (3.4) auf drei linear unabhängige Generatoren und die Integritätsbasis auf zwei irreduzible Invarianten (Gatski und Speziale 1993)

$$\eta_3 = 0\,, \qquad \eta_4 = 0\,, \qquad \eta_6 = 0\,, \qquad \eta_5 = 0.5\eta_1\eta_2\,, \tag{3.10}$$

$$b_{ij} = -c_\mu \left[s_{ij} + \beta_2(s_{ik}w_{kj} - w_{ik}s_{kj}) - \beta_3(s_{ik}^2 - 1/3\,\delta_{ij}s_{kk}^2) \right] \quad , \tag{3.11}$$

$$c_\mu, \beta_2, \beta_3 = f(\eta_1, \eta_2)\,.$$

Eine Unterscheidung zwischen zwei– und dreidimensionalen Deformationszuständen ist durch die Vernachlässigung von η_3 kaum mehr möglich. Die Invariante η_3 kann aber z.B. zur Vermeidung der bekannten *'round–to–plane jet anomaly'* von Bedeutung sein. Eine bessere Vorhersagefähigkeit unterbestimmter Funktionsbasen ist bei formal nicht reduzierten Integritätsbasen zu erwarten. Dies gilt insbesondere für dreidimensionale Zustände (Jongen und Gatski 1998).

B) Ein– und zweiachsige Scherung

Für das wichtige Beispiel einer einachsigen ebenen Scherung (*Couette Strömung*) mit $S_{12} = W_{12} = 0.5\,S^*$ verdeutlicht die quadratische Stress–Strain Beziehung (3.12) unmittelbar die oben erwähnte Entkopplung von Generatoren und b_{ij}–Koordinaten

$$b_{12} = -0.5\,c_\mu S\,, \quad b_{11} = 0.5\,c_\mu S^2\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{6}\right)\,, \quad b_{22} = -0.5\,c_\mu S^2\left(\beta_2 - \frac{\beta_3}{6}\right)\,. \tag{3.12}$$

Die Verwendung quadratischer Wirbelzähigkeitsmodelle vermag offenkundig die Anomalie scherverträglicher Normalspannungsisotropie zu vermeiden. Gleichzeitig wird deutlich, daß eine quadratische Modellierung gegenüber dem linearen Ansatz keine Vorteile in Bezug auf die Darstellung turbulenter Schubspannungen besitzt. Druckinduzierte Strömungsablösung wird daher vom linearen und quadratischen Ansatz gleichermaßen gut oder schlecht vorhergesagt. Die Berücksichtigung kubischer Terme wäre mit einer Korrektur der Schubspannungsverteilung im Falle gekrümmter zweiachsiger Scherströmungen verbunden, ohne nennenswerten Einfluss auf die Vorhersage der Normalspannungen zu nehmen (vgl. Kapitel 8.5). Die Stress–Strain Beziehung gliedert sich somit für Scherströmungen in einen normalspannungsbezogenen Anteil (gerade Potenzen) und einen schubspannungsbezogenen Anteil (ungerade Potenzen).

C) Zweiachsige Scherung

Zweiachsige Scherströmungen treten beispielweise in dreidimensionalen Grenzschichtströmungen auf. Die für diese Strömungen charakteristische Belegung der Scherraten– und Wirbeltensoren auf vier Nebendiagonalenelementen (mit $\alpha \neq \beta \neq \gamma$)

$$\begin{aligned} s_{ij} =& s_{\alpha\beta}(\delta_{i\alpha}\,\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\,\delta_{j\alpha}) + s_{\alpha\gamma}(\delta_{i\alpha}\,\delta_{j\gamma} + \delta_{i\gamma}\,\delta_{j\alpha})\,, \\ w_{ij} =& w_{\alpha\beta}(\delta_{i\alpha}\,\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\,\delta_{j\alpha}) + w_{\alpha\gamma}(\delta_{i\alpha}\,\delta_{j\gamma} - \delta_{i\gamma}\,\delta_{j\alpha})\,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

führt unmittelbar auf

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 2\,(s_{\alpha\beta}^2 + s_{\alpha\gamma}^2)\,, \qquad \eta_2 = 2\,(\omega_{\alpha\beta}^2 + \omega_{\alpha\gamma}^2) \qquad \eta_3 = \eta_4 = 0\,, \\ \eta_5 &= 0.5\,\eta_1\eta_2 - \left(s_{\alpha\gamma}^2 w_{\alpha\beta}^2 + w_{\alpha\gamma}^2 s_{\alpha\beta}^2 - 2 s_{\alpha\gamma} s_{\alpha\beta} w_{\alpha\gamma} w_{\alpha\beta}\right) \geq 0.25\,\eta_1\eta_2\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Abweichung der Invarianten η_5 vom 2D Zustand (3.10) ist ein Maß für die lokale Krümmung. Für krümmungsarme Zustände gilt $w_{\alpha\gamma} \approx s_{\alpha\gamma}$ bzw. $w_{\alpha\beta} \approx s_{\alpha\beta}$, und man erhält *lokal zweidimensionale* Strömungen mit $\eta_5 = 0.5\,\eta_1\eta_2$. Der zweiachsige Zustand liesse sich in diesem Falle durch Drehung des Koordinatensystems in einen einachsigen Zustand überführen.

Ein weiteres, für die Modellierung wichtiges Beispiel bezieht sich auf die eingangs erwähnte Durchströmung eines um die Symmetrieachse rotierenden Rohres (vergleiche Abbildung 2.4). Der vollentwickelte Strömungszustand ist in Bezug auf die Umfangs– und Axialkoordinate (θ bzw. x) symmetrisch. Die in Anhang B notierte Darstellung der Geschwindigkeitsgradienten–Tensoren in physikalischen $< dr, r\,d\theta, dx >$ Zylinderkoordinaten reduzieren sich in diesem Falle auf

$$s_{ij} = \frac{T_t}{2}\begin{pmatrix} 0 & r\frac{\partial(W/r)}{\partial r} & \frac{\partial U}{\partial r} \\ r\frac{\partial(W/r)}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_{ij} = \frac{T_t}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r}\frac{\partial(rW)}{\partial r} & -\frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rW)}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Experimentelle Untersuchungen und direkte numerische Simulationen (Kikuyama et al. 1983; Reich und Beer 1989; Imao et al. 1996; Orlandi und Fatica 1997) belegen einen quadratischen Verlauf der Umfangsgeschwindigkeit $W = W_{\mathrm{R}}(r/R)^2$, die nach Gleichung (2.14) durch

$$\nu r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right) = 2\,k\,b_{r\theta} = 2\,k\left(\sum_{\gamma} a_\gamma\, T_{r\theta}^{(\gamma)}\right) \tag{3.16}$$

bestimmt ist. Keiner der in Gleichung (3.6) angeführten quadratischen Generatoren $T_{ij}^{(2,3,4)}$ leistet einen Beitrag zu $b_{r\theta}$. Der lineare Generator kann durch die linke Seite absorbiert werden und vermag daher keine Starrkörperlösung zu unterdrücken

$$(\nu - 2a_1\,kT_t)\,r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right) = 2\,k\left(\sum_{\gamma=5}^{10} a_\gamma\, T_{r\theta}^{(\gamma)}\right)\,.$$

Der erste weitere Generator mit von Null verschiedener $r\theta$–Komponente ist $T_{ij}^{(5)}$. Daraus ergibt sich z.B. eine Beziehung zur Evaluierung der gewählten Koeffizienten a_1 und a_5

$$(\nu - 2a_1\,kT_t)\,r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right) = a_5\,k\,s_{rx}^2(s_{r\theta} - w_{r\theta}) = 0.25\,a_5\,kT_t^3\left(\frac{W}{r} + \frac{\partial W}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2\,.$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{a_1}{a_5} \approx -\frac{3}{4}\,\eta_1\,.$$

Eine etwas elaboriertere Strategie zur Formulierung eines kubischen Modells wird in Kapitel 8.5 dargestellt.

D) Linearisierter Ansatz

Für den Ansatz $b_{ij} = b_{ij}(s_{ij})$ liefert die Darstellungstheorie unter Verwendung der Kontraktionsbedingung $b_{ii} = 0$ unmittelbar

$$b_{ij} \;=\; -c_\mu \left[s_{ij} + \beta(s_{ij}^2 - 1/3\,\delta_{ij} s_{kk}^2) \right] \qquad \text{mit} \qquad c_\mu, \beta = f(\eta_1, \eta_3)\;. \tag{3.17}$$

Aufgrund der mangelhaften Relevanzliste bleiben Krümmungsmechanismen, die formal von den Invarianten des Wirbeltensors getragen werden, hierin unberücksichtigt.

Linearisierung

Aus dem Blickwinkel der Darstellungstheorie sind die linearen Wirbelzähigkeitsansätze vierfach unterbestimmt. Sie können prinzipiell nur eine der im allgemeinen fünf Komponenten des Anisotropietensors zufriedenstellend modellieren. Im Zusammenhang mit ingenieurtechnischen Anwendungen ist die Modellierung der dominanten Reynoldsschen Schubspannung das primäre Ziel. Das lineare Wirbelzähigkeitsprinzip sollte hierzu nicht aus der Form $b_{ij}(s_{ij})$ entwickelt, sondern durch den führenden Term einer weitergehenden Modellbildung $b_{ij}(s_{ij}, w_{ij}, \varepsilon_{ij}, \dots)$ approximiert werden. Die Qualität der Modellbildung läßt sich im Rahmen der o.g. Einschränkungen durch die möglichst umfangreiche Berücksichtigung aller Invarianten des linearen Koeffizienten gezielt verbessern.

Ein populärer Sonderfall, welcher durch den linearen Ansatz exakt beschrieben wird, ist die *achsensymmetrische Turbulenz.* Diese ist nach dem isotropen Zustand der zweite strukturell einfache Grenzfall von Interesse. Die Voraussetzungen für achsensymmetrische Turbulenz sind weniger restriktiv als für isotrope Turbulenz. Aufgrund der strukturellen Übereinstimmung zwischen b_{ij} und s_{ij} wird der achsensymmetrische Turbulenzzustand durch das lineare Wirbelzähigkeitsgesetz exakt beschrieben. Sowohl der Anisotropietensor der Reynolds-Spannungen b_{ij} als auch der Scherraten–Tensor s_{ij} lassen sich durch denselben achsensymmetrischen Tensor zweiter Stufe beschreiben, welcher im Hauptachsensystem die folgende Darstellung besitzt (Rotta 1972)

$$\begin{aligned} \hat{s}_{ij} \;&=\; -\left(3\delta_{i1}\delta_{1j} - \delta_{ij}\right)\, \frac{1}{2}\, \hat{s}_{11}\;, \\ \hat{b}_{ij} \;&=\; \left(3\delta_{i1}\delta_{1j} - \delta_{ij}\right)\, A\;. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Hierin kennzeichnet $\hat{s}_{11}$ die dimensionslose Primärdistorsionsgeschwindigkeit in Richtung der Symmetrieachse. Aus Gleichung (3.18) läßt sich auch ohne explizite Kenntnis des Hauptachsensystems eine zunächst implizite Wirbelzähigkeitsbeziehung formulieren

$$\eta_1 = s_{ij}s_{jk}\,\delta_{ik} \;=\; \frac{3}{2}\hat{s}_{11}^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \left(\delta_{i1}\delta_{1j} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\right) = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{\eta_1}}\;\hat{s}_{ij}\;,$$

$$II_b^* = b_{ij}b_{jk}\,\delta_{ik} = -2II_b \;=\; 6\,A^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\hat{b}_{ij} = -\sqrt{(II_b^*/\eta_1)}\;\;\hat{s}_{ij}}\;. \tag{3.19}$$

Tabelle 3.1: Evaluierung der achsensymmetrischen Modellbildung (3.20) in relevanten Scherströmungen: Vergleich berechneter spezifischer Produktionsraten und Schubspannungen mit direkten numerischen Simulationen von Kim et al. (1987) bzw. Rogers et al. (1986).

	DNS			Glg. (3.20)		
	$\sqrt{II_b^*}$	P/ε	$-b_{12}$	c_μ	$P/\varepsilon = c_\mu S^2$	$-b_{12}$
DNS (S=3.3)	0.303	1.00	0.143	0.130	1.41	0.215
DNS (S=5.7)	0.351	1.85	0.158	0.087	2.83	0.248

Der Vergleich mit herkömmlichen Wirbelzähigkeitsmodellen ergibt die u.a. Definiton des Anisotropieparameters

$$c_\mu = \sqrt{\frac{II_b^*}{\eta_1}} \,. \tag{3.20}$$

Die Besonderheiten achsensymmetrischer Turbulenz werden von der Darstellungstheorie korrekt wiedergegeben. Wegen $w_{ij} = 0$ verbleiben von den in Gleichung (3.6) angegebenen T_{ij} wahlweise $T_{ij}^{(1)}$ oder $T_{ij}^{(3)}$ als einziger linear unabhängiger Generator in achsensymmetrischen Distorsionsfeldern. Die Beziehung (3.20) degeneriert in Kenntnis der darstellungstheoretischen Vollständigkeit eines linearen Ansatzes $b_{ij} = -c_\mu s_{ij}$, zu einem trivialen Äquivalent der Kontraktionsbedingung $b_{kk}^2 = II_b^*$.

Im Unterschied zu herkömmlichen Vorschlägen weist die Beziehung (3.20) sowohl die geforderte Abhängigkeit der Wirbelzähigkeit vom Anisotropiezustand der Reynolds–Spannungen, als auch eine umgekehrte Proportionalität der Wirbelzähigkeit zum Distorsionsmaß auf (vgl. Glg. 2.12). Die Wirbelzähigkeit verschwindet im Falle isotroper Spannungszustände und die Normalspannungsanomalie tritt formal nicht in Erscheinung. Für die praktische Anwendung ist die Formulierung (3.20) aus mehreren Gründen unzweckmäßig:

- Gleichung (3.20) ist implizit und daher nur wenig hilfreich.
- Die Gültigkeit von (3.20) beschränkt sich auf achsensymmetrische Zustände.
- Im wichtigen Fall der ebenen Scherströmungen findet man wegen $c_\mu S \approx 0.3$ eine etwa um den Faktor $\sqrt{2}$ zu hohe Wirbelzähigkeit (Tabelle 3.1). Abhilfe könnte eine semi-empirische Beziehung für den Transport des Anisotropieparameters II_b^* schaffen, welche jedoch die Komplexität des Modells steigert.

Kapitel 7.2 und 8.1 befassen sich eingehend mit der Vorhersage achsensymmetrischer Turbulenz durch explizite algebraische Spannungsmodelle.

Kapitel 4 Reynolds–Spannungsmodelle

Die vorangehenden Ausführungen belegen, daß die Darstellungtheorie ohne zusätzliche Informationen zu keiner expliziten Stress–Strain Beziehung führt. Die zur Schließung der unbekannten Koeffizienten von Gleichung (3.4) notwendigen Informationen können auf unterschiedlichen Wegen gewonnen werden, von denen einer die explizite algebraische Spannungsmodellierung nach Pope (1975) ist.

Die Transportgleichungsmodelle der Reynolds–Spannungen, bzw. ihre algebraischen Derivativa (Rodi 1976) besitzen bekanntermaßen vielfältige Vorteile gegenüber herkömmlichen Wirbelzähigkeitsmodellen. Hierzu zählen insbesondere die exakte Darstellung der oftmals dominanten Produktionsterme von b_{ij} und die Fähigkeit zur Erfassung von Umverteilungsmechanismen. Der Nachteil der Reynolds–Spannungs–Transportgleichungsmodelle ist der damit verbundene hohe Rechen– und Kernspeicheraufwand und die notwendige umfangreiche Anpassung des Lösungsverfahrens (Obi, Perić und Scheuerer 1991). Eine numerisch effizientere Modellierung auf der Basis nichtlinearer Erweiterungen des Wirbelzähigkeitsprinzips ist folglich erstrebenswert.

4.1 Lineare Transportgleichungsmodelle

Die Transportgleichung der Reynolds–Spannungen $\overline{u_i u_j}$ läßt sich unmittelbar aus den Navier–Stokes Gleichungen herleiten (vgl. Kapitel 1.3). Für ein inkompressibles Medium notiert man unter Vernachlässigung von Volumenkraftdichte–Fluktuationen gemäß (1.57)

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + C_{ij} + 2\Omega_m(e_{mkj}\overline{u_i u_k} + e_{mki}\overline{u_j u_k}) - D_{ij} \;=\; P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \; . \qquad (4.1)$$

In Gleichung (4.1) kennzeichnen $C_{ij} = U_k \; \partial(\overline{u_i u_j})/\partial x_k$ die Konvektion und P_{ij} die Produktion der kinematischen Reynolds–Spannungen, deren halbe Spur der Produktion von Turbulenzenergie entspricht (vgl. Gleichung 1.58)

$$\begin{aligned} P_{ij} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} &= -\left[\overline{u_i u_k}\,(S_{jk}+W_{jk}) + \overline{u_j u_k}\,(S_{ik}+W_{ik})\right] \; . \\ &= -2k\left[(b_{ik}S_{kj} + S_{ik}b_{kj}) - (b_{ik}W_{kj} - W_{ik}b_{kj}) + (\tfrac{2}{3}S_{ij})\right] \\ P &= 0.5\,P_{kk} = -2k\,(b_{kl}S_{kl} + \tfrac{1}{3}S_{kk}) \; . \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Der Beitrag des Permutationstensors e_{mjk} berücksichtigt die Corioliskräfte des mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_m stationär um das Inertialsystem rotierenden Bezugssystems. Diese Terme liegen, anders als die restlichen Terme, in geschlossener Form vor. Die zu modellierenden Terme umfassen neben dem Diffusionstensor D_{ij} die Tensoren der Druck–Scher–Korrelation ϕ_{ij} und der viskosen Dissipation ϵ_{ij}, welche die Umverteilungs– und Vernichtungsmechanismen des Turbulenzfeldes beschreiben.

Tabelle 4.1: Koeffizienten exemplarisch gewählter linearer Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodelle

	Kurzform	Typ	C_1	C_1^*	C_2	C_3	C_4
Launder, Reece und Rodi (1975)	LR	QI	1.5	—	0.80	1.75	1.31
Taulbee (1992)	TB	QI	1.8	—	0.80	2.00	1.11
Speziale, Sarkar und Gatski (1991)	SSG	QI	1.7	0.9	0.36	1.25	0.40
lin. Gatski und Speziale (1993)	GS	QI	3.4	—	0.36	1.25	0.40
Fu, Rung, Lübcke und Thiele (1999)	FRLT	QI	2.5	—	0.39	1.25	0.45
Gibson und Launder (1978)	GL	IP	1.8	—	0.80	1.20	1.20
Gibson und Younis (1986)	GY	IP	3.0	—	0.40	0.60	0.60
Rotta (1951)	RO	IP	5.0	—	0.00	0.00	0.00

Diffusion D_{ij}

Der quantitative Beitrag der Diffusion zur Transportgleichung (4.1) ist in der Regel von untergeordneter Bedeutung. Der Diffusionstensor D_{ij} spielt darüber hinaus für die Inhalte dieser Arbeit keine Rolle. Für seine Modellierung wird von den meisten Autoren die einfachste Form nach Daly und Harlow (1970) favorisiert.

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu\delta_{kl} + C_s\frac{k\,\overline{u_k u_l}}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l}\right] , \qquad \text{mit} \quad C_s = 0.22 . \tag{4.3}$$

Dissipation ε_{ij} und Druck–Scher–Korrelation ϕ_{ij}

In dieser Arbeit werden zunächst nur *einfache lineare* Umverteilungs– oder Druck–Scher– (engl. *pressure–strain*) Korrelationsmodelle (PS Modelle) berücksichtigt, welche in inkompressiblen Medien alle der unten stehenden Beziehung (4.4) genügen (Reynolds 1987)

$$\left.\begin{aligned} \phi_{ij} - \varepsilon_{ij_D} &= \phi_{ijw} - 2(C_1 + C_1^* P/\varepsilon)\,\varepsilon\, b_{ij} + C_2 k S_{ij} \\ &\quad + C_3 k(b_{ik}S_{kj} + b_{jk}S_{ki} - \tfrac{2}{3}\delta_{ij}b_{lk}S_{kl}) \\ &\quad + C_4 k(b_{ik}\tilde{W}_{jk} + b_{jk}\tilde{W}_{ik}), \\ \varepsilon_{ij} &= \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon + \varepsilon_{ij_D} . \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Der Dissipationsratentensor wird üblicherweise in einen isotropen 2/3 $\delta_{ij}\,\varepsilon$ und einen deviatorischen Beitrag ε_{ij_D} zerlegt. Letzterer wird im Rahmen linearer PS Modelle in der Regel dem Druck–Scher–Korrelationsmodell zugeordnet.

Die populärsten Varianten linearer PS Modelle gehen auf Gibson und Launder (1978) und Launder, Reece und Rodi (1975), bzw. die linearisierte Form des Vorschlags von Speziale, Sarkar und Gatski (1991) zurück. Die dazugehörigen Koeffizienten sind, ergänzt durch weitere im EASM Kontext gebräuchliche lineare Vorschläge, in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Man beachte, daß sich der Koeffizient C_1 auf den nach Rotta benannten langsamen Beitrag, alle übrigen Koeffizienten aber auf den schnellen Beitrag zum Druck–Scher–Korrelationtionsmodell beziehen. Bei der Formulierung des schnellen Druck–Scher–Korrelationtionsbeitrags wird im Verlauf dieser Arbeit zwischen zwei verschiedenen Ansätzen unterschieden. Die Koeffizienten des *Isotropization–of–Production* (IP) Ansatzes genügen der Restriktion $C_3 = C_4 = 1.5\,C_2$, weswegen sich die Formulierung des PS Modells im Unterschied zu den *Quasi–Isotropization* (QI) Ansätzen vereinfacht

$$(\phi_{ij} - \varepsilon_{ij_D})^{(IP)} = \phi_{ijw} - 2(C_1 + C_1^* P/\varepsilon)\,\epsilon b_{ij} + \left(\frac{C_3 + C_4}{4}\right)\left[P_{ij} - \frac{2}{3}P\,\delta_{ij}\right] .$$

Der Term ϕ_{ijw} repräsentiert den sogenannten Wandreflektionsterm. Dieser korrigiert die Druck–Scher getriebene Umverteilung von Normalspannungen zu Ungunsten der wandnormalen Komponente. Der Wandreflektionsterm wird im Rahmen der expliziten algebraischen Spannungsmodelle in der Regel vernachlässigt!

Die Transportgleichung der isotropen Dissipationsrate ε kann weitestgehend vom Zwei—Parameter–Wirbelzähigkeitsmodell (1.74) übernommen werden, z.B. im high–Re Fall

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu\delta_{kl} + C_e \frac{k\,\overline{u_k u_l}}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}\right] = \frac{\varepsilon}{k}\left(C_{\varepsilon 1} P + C_{\varepsilon 2}\varepsilon\right) ,$$

$$\text{mit z.B.} \qquad C_e = 0.18 , \qquad C_{\varepsilon 1} = 1.45 , \qquad \text{und} \qquad C_{\varepsilon 2} = 1.90 . \tag{4.5}$$

Tabelle 4.2: ASM Koeffizienten der in Tabelle 4.1 exemplarisch aufgelisteten linearen Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodelle.

	Kurzform	β_1	β_2	β_3	$(C_1 - 1)$	C_1^*
Launder, Reece und Rodi	LRR	-0.267	-0.345	-0.125	0.5	—
Taulbee (Wallin et al., 2000)	TB	-0.267	-0.444	0.00	0.8	—
Speziale, Sarkar und Gatski	SSG	-0.487	-0.80	-0.375	0.7	0.9
lin. Gatski und Speziale	GS	-0.487	-0.80	-0.375	3.4	—
Fu, Rung, Lübcke und Thiele	FRLT	-0.472	-0.775	-0.375	1.5	—
Gibson und Launder	GL	-0.267	-0.40	-0.40	0.8	—
Gibson und Younis	GY	-0.467	-0.70	-0.70	2.	—
Rotta	RO	-0.667	-1.00	-1.00	4.	—

4.2 Algebraische Spannungsmodelle

Die algebraischen Spannungsmodelle basieren auf linearen Transportgleichungsmodellen (4.1), deren Differentialoperationen unter Annahme des strukturellen Gleichgewichts auf die entsprechenden Terme der isotropen Turbulenzenergie k reduziert worden sind (Rodi 1976). Ausgehend von den impliziten Reynolds–Spannungs–Transportgleichungsmodellen in einem zunächst beliebigen orthonormalen Koordinatensystem $\underline{\tilde{e}}_i$

$$\frac{D\,\overline{\tilde{\underline{u}}\tilde{\underline{u}}}}{Dt} = \left[2k\,\frac{D\,\tilde{b}_{ij}}{Dt} + 2\left(\tilde{b}_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\frac{Dk}{Dt}\right]\underline{\tilde{e}}_i\underline{\tilde{e}}_j + \overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}\,\frac{D\,(\underline{\tilde{e}}_i\underline{\tilde{e}}_j)}{Dt}\quad , \tag{4.6}$$

findet man in Bezug auf eine kartesische Basis $\underline{e}_i$ die Koordinatenbeziehung

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial t}+C_{ij} &= 2k\,\frac{D\,b_{ij}}{Dt}+2\left(b_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\,(P-\varepsilon+D)\ ,\\ &= 2k\,\frac{D\,b_{ij}}{Dt}+2\left(b_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)(P-\varepsilon)+\underbrace{2D\left(b_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)}_{\approx D_{ij}}\ ,\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial t}+C_{ij}-D_{ij} \approx \underbrace{2k\left(\frac{D\,b_{ij}}{Dt}\right)}_{\text{Term 1}}+\underbrace{\left(b_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\,2\,(P-\varepsilon)}_{\text{Term 2}}\ . \tag{4.7}$$

Zu den algebraischen Spannungsmodellen gelangt man über eine algebraische Abschätzung der Differentialoperatoren (Term 1). Algebraische Spannungsmodelle, und damit prinzipiell auch alle (nicht)linearen Wirbelzähigkeitsmodelle, basieren fast ausnahmslos auf der hypothetischen Annahme des *strukturellen Turbulenzgleichgewichts* für die kartesischen Koordinaten des Anisotropietensors

$$\frac{D\,b_{ij}}{Dt}=\frac{\partial b_{ij}}{\partial t}+U_k\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}\approx 0\,. \tag{4.8}$$

Wie sich in einem späteren Kapitel zeigen wird, ist die Formulierung der Aussage (4.8) auf der Basis des Stromlinienkoordinatensystems $\underline{e}_i^{(s)}$ wesentlich realistischer. Die durch Einsetzen von (4.7) und (4.8) in die Transportgleichung der Reynolds–Spannungen (4.1) gewonnenen *impliziten algebraischen Spannungsmodelle* (ASM) lassen sich für inkompressible Medien alle in der unten angeführten Form darstellen

$$\left.\begin{aligned} gb_{ij} &= \beta_1 s_{ij}-\beta_2\left[b_{ik}w^*_{kj}-w^*_{ik}b_{kj}\right]+\beta_3\left[b_{ik}s_{kj}+s_{ik}b_{kj}-\tfrac{2}{3}\delta_{ij}b_{lk}s_{kl}\right]\ ,\\ &\beta_1=0.5\,(C_2-4/3)\ ,\quad \beta_2=0.5\,(C_4-2)\ ,\quad \beta_3=0.5\,(C_3-2)\,,\\ &w^*_{ij}=T_t\left(W_{ij}-\tfrac{4-C_4}{2-C_4}e_{ijm}\Omega_m\right)\ ,\quad g=\left[P/\varepsilon\,(1+C_1^*)+C_1-1\right]\ .\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Die hierin verwendeten Koeffizienten folgen den in Tabelle 4.2 angegebenen Werten. Ziel der expliziten algebraischen Spannungsmodelle ist die explizite Darstellung der Gleichung (4.9) mit Hilfe von *Projektionstechniken.* Für die Entwicklung der EASM ist ein besonderes Merkmal der Gleichung (4.9) von Bedeutung, welches sich aus dem Zusammenhang zwischen der Definition des Koeffizienten g und der Beziehung (4.2) ergibt:

Das algebraische Spannungsmodell ist in der Notation (4.9) schwach nichtlinear.

Die im folgenden Abschnitt geschilderte Projektion des ASM (4.9) in eine Funktionsbasis $\mathcal{F}$ verlangt konsequenterweise eine analoge Projektion der spezifischen Produktionsrate P/ε in diese Basis.

Kapitel 5 Projektionstechniken

Die minimale Funktionsbasis des Ansatzes $b_{ij} = b_{ij}(s_{ij}, w^*_{ij})$ basiert, wie bereits erwähnt, in dreidimensionalen Strömungen auf mindestens fünf linear unabhängigen Generatoren, im Falle zweidimensionaler Reynolds–gemittelter Strömungszustände genügen drei Generatoren. Der folgende Abschnitt befaßt sich in Anlehnung an Jongen und Gatski (1998) mit der Projektion des algebraischen Spannungsmodells (4.9) in eine beliebig gewählte Funktionsbasis.

5.1 Illustratives Beispiel

Ausgangspunkt für die Darstellung des Prinzips von Projektionstechniken sei die zunächst nicht näher spezifizierte unterbestimmte Zwei–Generator–Funktionsbasis

$$b_{ij} = A\,T^{(1)}_{ij} + B\,T^{(2)}_{ij}\ . \tag{5.1}$$

Das gewählte Beispiel soll belegen, daß bei der Projektion des ASM (4.9) in einfache, unterbestimmte Basen $\mathcal{F}$ die dazugehörige Integritätsbasis $\mathcal{N}$ nicht in gleicher Weise reduziert wird. Häufig treten darin sogar fast alle irreduziblen Invarianten einer vollständigen Funktionsbasis auf, was die oben gemachten Aussagen zum Qualitätsverlust im Zusammenhang mit stark vereinfachten Integritätsbasen unterstreicht.
Da A und B Skalare sind, müssen die Generatoren sämtliche strukturellen Eigenschaften des Anisotropietensors der Reynolds–Spannungen wiedergeben:

Alle Generatoren $T^{(n)}_{ij}$ müssen spurfrei und symmetrisch sein.

Man überzeugt sich leicht, daß die in (3.6) notierten Generatoren diese Restriktion befriedigen. Setzt man den Zwei–Generator–Ansatz (5.1) in die ASM–Beziehung (4.9) ein, dann ergibt sich die sogenannte *Projektionsgleichung*

$$\begin{aligned} g\left(A\,T^{(1)}_{ij} + B\,T^{(2)}_{ij}\right) = \beta_1 s_{ij} \;&-\; \beta_2\left[A\left(T^{(1)}_{ik}w^*_{kj} - w^*_{ik}T^{(1)}_{kj}\right) + B\left(T^{(2)}_{ik}w^*_{kj} - w^*_{ik}T^{(2)}_{kj}\right)\right] \\ &+\; \beta_3\left[A\left(T^{(1)}_{ik}s_{kj} + s_{ik}T^{(1)}_{kj}\right) + B\left(T^{(2)}_{ik}s_{kj} + s_{ik}T^{(2)}_{kj}\right)\right] \\ &-\; \frac{2}{3}\,\beta_3\left[\delta_{ij}\left(A\,T^{(1)}_{mk}s_{km} + B\,T^{(2)}_{mk}s_{km}\right)\right]\ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Die Schließungsbeziehungen für die unbekannten Koeffizienten A und B gewinnt man durch Skalarmultiplikation der Projektionsgleichung (5.2) mit den verwendeten Generatoren

$$\begin{aligned} \mathbf{I}: &\quad g\left(A\,T^{(1)}_{ij} + B\,T^{(2)}_{ij}\right)T^{(1)}_{jp} = \beta_1 s_{ij}T^{(1)}_{jp} - \beta_2\,[\ldots]\,T^{(1)}_{jp} + \beta_3\,[\ldots]\,T^{(1)}_{jp} - \ldots\,, \\ \mathbf{II}: &\quad g\left(A\,T^{(1)}_{ij} + B\,T^{(2)}_{ij}\right)T^{(2)}_{jp} = \beta_1 s_{ij}T^{(2)}_{jp} - \beta_2\,[\ldots]\,T^{(2)}_{jp} + \beta_3\,[\ldots]\,T^{(2)}_{jp} - \ldots\,, \end{aligned} \tag{5.3}$$

und anschliessender Kontraktion der freien Indizes ($i = p$). Beachtet man weiterhin, daß die Spur zyklisch vertauschbar ist ($A_{ij}B_{jk}C_{ki} = B_{ij}C_{jk}A_{ki} = C_{ij}A_{jk}B_{ki}$) und darüber hinaus die Symmetrie– bzw. Antimetriezusammenhänge

$$s_{ij}T^{(1)}_{jk}T^{(2)}_{ki} = s_{ij}T^{(2)}_{jk}T^{(1)}_{ki} \;, \qquad w^*_{ij}T^{(1)}_{jk}T^{(2)}_{ki} = -w^*_{ij}T^{(2)}_{jk}T^{(1)}_{ki} \;, \tag{5.4}$$

dann ergeben sich im gewählten Beispiel die folgenden Schließungsbeziehungen zur Bestimmung der skalaren Unbekannten A und B

$$\beta_1 \begin{pmatrix} s_{ij}T^{(1)}_{ji} \\ \\ s_{ij}T^{(2)}_{ji} \end{pmatrix} = \tag{5.5}$$

$$\begin{pmatrix} \left[gT^{(1)}_{ij}T^{(1)}_{ji} - 2\beta_3 s_{ij}T^{(1)}_{jk}T^{(1)}_{ki}\right] & \left[gT^{(1)}_{ij}T^{(2)}_{ji} + 2\beta_2 w^*_{ij}T^{(1)}_{jk}T^{(2)}_{ki} - 2\beta_3 s_{ij}T^{(1)}_{jk}T^{(2)}_{ki}\right] \\ \\ \left[gT^{(2)}_{ij}T^{(1)}_{ji} + 2\beta_2 w^*_{ij}T^{(2)}_{jk}T^{(1)}_{ki} - 2\beta_3 s_{ij}T^{(2)}_{jk}T^{(1)}_{ki}\right] & \left[gT^{(2)}_{ij}T^{(2)}_{ji} - 2\beta_3 s_{ij}T^{(2)}_{jk}T^{(2)}_{ki}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \\ B \end{pmatrix} .$$

Die oben skizzierte Vorgehensweise läßt sich für Funktionsbasen mit beliebig vielen zusätzlichen Generatoren in derselben Weise durchführen. Die in (5.5) auftretenden Spuren von Skalarprodukten lassen sich für auf $\underline{\underline{s}}$ und $\underline{\underline{w}}^*$ basierende Relevanzlisten mit Hilfe des im Anhang C notierten generalisierten Caley–Hamilton Theorems auf die in (3.7) notierten irreduziblen Invarianten zurückführen.

Projektion in die lineare Basis

Für das einfachste Beispiel eines linearen Wirbelzähigkeitsmodells mit $T^{(1)}_{ij} = s_{ij}$ und $T^{(2)}_{ij} = 0$ wird das Gleichungssystem (5.5) singulär. Betrachtet man jedoch nur die erste Zeile, dann ergibt sich unmittelbar

$$A = -c_\mu = \frac{\beta_1}{g - 2\beta_3\left(\eta_3/\eta_1\right)} \;, \tag{5.6}$$

Die explizite Abhängigkeit vom Deformationsmaß (η_1) verbirgt sich im Koeffizienten g. Dieser ist nach (4.2) und (4.9) seinerseits eine Funktion der spezifischen Produktion

$$P/\varepsilon = -2\left(b_{ij}s_{ij} + \frac{1}{3}s_{kk}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad g = C_1 - 1 - 2\left(b_{ij}s_{ij} + \frac{1}{3}s_{kk}\right) \;. \tag{5.7}$$

Die Lösung der Projektionsgleichung ist aufgrund der schwachen Nichtlinearität des ASM nicht implizit, bzw. im Falle einer vorab getroffenen Approximation von g nicht selbstkonsistent.

Eine grobe Verletzung der Selbstkonsistenz ist entgegen vieler anders argumentierender Veröffentlichungen, z.B. Speziale (1997a), mit fundamentalen Defiziten für die Güte eines EASM verbunden. Die Thematik wird im anschließenden Kapitel sechs genauer erörtert.

Projektion in eine quadratische Zwei–Generator–Basis

Für das Beispiel der exemplarisch gewählten quadratischen Funktionsbasis

$$\mathcal{F} = \left[T_{ij}^{(1)}, T_{ij}^{(2)}\right] = \left[s_{ij},\ (s_{ik}w_{kj}^{*} - w_{ik}^{*}s_{kj})\right] \tag{5.8}$$

vereinfachen sich die in Gleichung (5.5) auftretenden Spuren für inkompressible Strömungen durch Anwendung des in Anhang C skizzierten Caley–Hamilton Theorems. Hiermit erhält man schließlich anstelle von (5.5)

$$\beta_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [g\eta_1 - 2\beta_3\eta_3] & [2\beta_2\,(3\eta_5 - 0.5\eta_1\eta_2)] \\ [2\beta_2\,(0.5\eta_1\eta_2 - 3\eta_5)] & [g\,(\eta_1\eta_2 - 6\eta_5) + \beta_3\,(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} . \tag{5.9}$$

Gleichung (5.9) läßt sich mit Hilfe der Cramerschen Regel direkt auflösen

$$\begin{aligned} A &= \frac{\eta_1\beta_1[g(\eta_1\eta_2 - 6\eta_5) + \beta_3(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4)]}{[\beta_3(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4) + g(\eta_1\eta_2 - 6\eta_5)][g\eta_1 - 2\beta_3\eta_3] + 4\beta_2^2[3\eta_5 - 0.5\eta_1\eta_2]^2} , \\ B &= \frac{\eta_1\beta_1\beta_2(6\eta_5 - \eta_1\eta_2)}{[\beta_3(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4) + g(\eta_1\eta_2 - 6\eta_5)][g\eta_1 - 2\beta_3\eta_3] + 4\beta_2^2[3\eta_5 - 0.5\eta_1\eta_2]^2} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Man erkennt deutlich, daß im Zusammenhang mit der Projektion des ASM in eine einfache quadratische Basis mit Ausnahme von η_6 bereits alle irreduziblen Invarianten auftreten.

Vereinfacht man die Beziehung (5.10) für zweidimensionale und achsensymmetrische Scherströmungen, dann ergibt sich mit Hilfe der näherungsweise gültigen Beziehungen

$$-\eta_1 = \eta_2 , \qquad \eta_5 = 0.5\,\eta_1\eta_2 , \qquad \eta_3 = -1.5\,S_{33}\,\eta_1 , \qquad \eta_4 = -0.5\,S_{33}\,\eta_2 ,$$

die Lösung

$$A_{\text{achs}} = -c_\mu = \frac{\beta_1}{\left[g - 2\,\beta_3\,\left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)\right] - \frac{2\,\beta_2^2\,\eta_2}{g - \beta_3\frac{2\,\eta_3}{3\,\eta_1}}} , \qquad B_{\text{achs}} = A_{\text{achs}}\left[\frac{-\beta_2}{g - \beta_3\,\left(\frac{2\,\eta_3}{3\,\eta_1}\right)}\right] \tag{5.11}$$

Im Falle zweidimensionaler mittlerer Strömungszustände folgt aus (3.10)

$$A_{2D} = \frac{\beta_1}{g - 2\beta_2^2\,\eta_2/g} , \qquad B_{2D} = \frac{\beta_1\beta_2}{-2g^2 + 4\beta_2^2\eta_2} = A_{2D}\left[\frac{-\beta_2}{g}\right] . \tag{5.12}$$

5.2 Gatski & Speziale Modell

Das von Gatski und Speziale (1993) vorgestellte Modell basiert auf der dreidimensionalen Generalisierung eines in zweidimensionalen, inkompressiblen Strömungszuständen exakten quadratischen Ansatzes

$$b_{ij} = A\,T_{ij}^{(1)} + B\,T_{ij}^{(2)} + C\,T_{ij}^{(3)}\ , \qquad \text{mit}$$

$$T_{ij}^{(1)} = s_{ij}\ , \qquad T_{ij}^{(2)} = s_{ik}w_{kj}^{*} - w_{ik}^{*}s_{kj}\ , \qquad T_{ij}^{(3)} = s_{ij}^{2} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,s_{kk}^{2}\ . \tag{5.13}$$

Die zusätzlichen Spuren der um die entsprechenden $T_{ij}^{(3)}$–Anteile erweiterten Gleichung (5.5) lassen sich wiederum mit Hilfe des Caley–Hamilton Theorems vereinfachen. Unter Verwendung der in Anhang C notierten algebraischen Umformungen ergibt sich die zu (5.5) analoge symbolische Beziehung

$$\beta_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathcal{M}}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\ , \tag{5.14}$$

in der die Systemmatrix $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ durch

$$\begin{pmatrix} [g\eta_1 - 2\beta_3\eta_3] & [2\beta_2\,(3\eta_5 - 0.5\eta_1\eta_2)] & \left[g\eta_3 - \frac{1}{3}\beta_3\eta_1^2\right] \\ [-2\beta_2\,(3\eta_5 - 0.5\eta_1\eta_2)] & [g\,(\eta_1\eta_2 - 6\eta_5) + \beta_3\,(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4)] & [-\beta_2\,(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3)] \\ \left[g\eta_3 - \frac{1}{3}\beta_3\eta_1^2\right] & [\beta_2\,(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3)] & \left[\frac{g}{6}\eta_1^2 - \frac{1}{3}\beta_3\eta_1\eta_3\right] \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

definiert ist. Gleichung (5.14) läßt sich wieder mit Hilfe der Cramerschen Regel auflösen

$$\begin{aligned} A &= \left[\,(\beta_1\eta_1)\,\left(\mathcal{M}_{22}\mathcal{M}_{33} + \mathcal{M}_{32}^2\right) - (\beta_1\eta_3)\,\left(\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{32} - \mathcal{M}_{13}\mathcal{M}_{22}\right)\right]\left(\det\underline{\underline{\mathcal{M}}}\right)^{-1} \\ B &= \left[\,(\beta_1\eta_1)\,\left(\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{33} - \mathcal{M}_{32}\mathcal{M}_{13}\right) + (\beta_1\eta_3)\,\left(\mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{32} - \mathcal{M}_{13}\mathcal{M}_{12}\right)\right]\left(\det\underline{\underline{\mathcal{M}}}\right)^{-1}\ , \\ C &= \left[-(\beta_1\eta_1)\,\left(\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{32} + \mathcal{M}_{22}\mathcal{M}_{13}\right) + (\beta_1\eta_3)\,\left(\mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{22} + \mathcal{M}_{12}^2\right)\right]\left(\det\underline{\underline{\mathcal{M}}}\right)^{-1}\ . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Im Falle einer lokal zweidimensionalen Reynolds–gemittelten Strömung findet man die entsprechend vereinfachte Beziehung (5.14)

$$\beta_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\eta_1 & 2\beta_2\eta_1\eta_2 & -\frac{1}{3}\beta_3\eta_1^2 \\ -2\beta_2\eta_1\eta_2 & -2g\eta_1\eta_2 & 0 \\ -\frac{1}{3}\beta_3\eta_1^2 & 0 & \frac{g}{6}\eta_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\ , \tag{5.17}$$

deren Lösung die bereits von Gatski und Speziale (1993) angegebenen Koeffizienten des Drei–Generator–Ansatzes $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ liefert

$$A = -c_\mu = \frac{\beta_1}{g - \frac{2\beta_2^2}{g}\eta_2 - \frac{2\beta_3^2}{3g}\eta_1} , \qquad B = A\left[\frac{-\beta_2}{g}\right] , \qquad C = A\left[\frac{2\beta_3}{g}\right] . \tag{5.18}$$

$$\boxed{b_{ij} = \frac{\beta_1}{g - \frac{2\beta_2^2}{g}\eta_2 - \frac{2\beta_3^2}{3g}\eta_1}\left[s_{ij} - \frac{\beta_2}{g}\left(s_{ik}w_{kj}^* - w_{ik}^* s_{kj}\right) + \frac{2\beta_3}{g}\left(s_{ij}^2 - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\; s_{kk}^2\right)\right]} \tag{5.19}$$

Ein wichtiger Unterschied zwischen dem oben skizzierten Lösungsweg auf der Basis von Projektionstechniken und der von Gatski und Speziale (GS) praktizierten Vorgehensweise ist der Lösungsaufwand. Die GS–Strategie basiert auf der zweidimensionalen Vereinfachung der exakten Lösung für einen Ansatz auf der Basis von zehn Generatoren. Die Herleitung der 10×10 Systemmatrix für diesen Ansatz ist äußerst aufwendig und verlangt profunde Kenntnisse in Tensoralgebra (Details findet man z.B. bei Lübcke und Rung 1999). Die Invertierung des algebraischen 10×10 Gleichungssystems ist ohne die Verwendung entsprechender Hilfsmittel, wie z.B. *Mathematica* (Wolfram 1992) nicht mehr zu bewältigen. Demgegenüber ist der oben skizzierte Lösungsweg vergleichsweise einfach, da er das ASM direkt in die gewählte Basis projeziert. Es sei jedoch bemerkt, daß die Auswahl der Generatoren von $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ auf dem Resultat algebraischer Manipulationen einer vollständigen Basis mit Hilfe des 2D Caley–Hamilton Theorems basiert (vgl. Anhang C).
Ein weiterer Unterschied ist die Tatsache, daß die Lösung (5.16) auf der Basis der vollständigen Integritätsbasis $\mathcal{N}$ eine bessere Näherung für dreidimensionale Zustände ist, als die ursprüngliche GS–Formulierung (5.18), bzw. eine gute Ausgangsbasis zur kompakten Erweiterung in Hinblick auf 3D Strömungszustände repräsentiert.

5.3 Erweiterungen klassischer EASM

Bei Betrachtung der ASM–Beziehung (4.9) erkennt man unmittelbar eine Möglichkeit zur Erweiterung klassischer, expliziter algebraischer Spannungsmodelle durch die Projektionstechnik. Diese läßt sich in analoger Weise auf die um einen beliebigen Tensor $\mathcal{T}_{ij}$ erweiterte ASM–Beziehung anwenden

$$g b_{ij} \;=\; \mathcal{T}_{ij} + \beta_1 s_{ij} - \beta_2\left[b_{ik}w_{kj}^* - w_{ik}^* b_{kj}\right] + \beta_3\left[b_{ik}s_{kj} + s_{ik}b_{kj} - \frac{2}{3}\delta_{ij}b_{lk}s_{kl}\right] . \tag{5.20}$$

Der zusätliche Term $\mathcal{T}_{ij}$ muß, wie alle anderen Tensoren der Beziehung (5.20), spurfrei und symmetrisch sein. Zur Gewährleistung eines linearen Gleichungssystems sollte $\mathcal{T}_{ij}$ ferner unabhängig von b_{ij} sein.

Im Rahmen der klassischen Darstellungstheorie müssten sämtliche $\mathcal{T}_{ij}^{(1)} \ldots \mathcal{T}_{ij}^{(n)}$ in die Relevanzliste aufgenommen werden. Nach dem Satz von Spencer (vgl. Kapitel 3.1) wäre dies mit zusätzlichen Generatoren in der Funktionsbasis verbunden, was den Rechenaufwand stark vergrößern würde. Im Sinne einer effizienten Näherung sind auch unveränderte Funktionsbasen denkbar, wodurch sich lediglich der Lösungsvektor des Gleichungssystems zur Bestimmung der EASM–Koeffizienten ändern würde, z.B. anstelle von (5.14)

$$\beta_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{ij}^{(1)} T_{ji}^{(1)} \\ \mathcal{T}_{ij}^{(1)} T_{ji}^{(2)} \\ \mathcal{T}_{ij}^{(1)} T_{ji}^{(3)} \end{pmatrix} + \ \ldots \ + \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{ij}^{(n)} T_{ji}^{(1)} \\ \mathcal{T}_{ij}^{(n)} T_{ji}^{(2)} \\ \mathcal{T}_{ij}^{(n)} T_{ji}^{(3)} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathcal{M}}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} . \qquad (5.21)$$

Denkbare Anknüpfungspunkte einer Erweiterung klassischer EASM wären

- Die Einarbeitung von Wandreflektionstermen

$$\mathcal{T}_{ij} = \frac{\phi_{ijw}}{2\,\varepsilon} .$$

- Die Berücksichtigung anisotroper Dissipationsratentensoren, wie z.B. von Jakirlić (1997), Hallbäck et al. (1990), Oberlack (1995) oder Gatski und Speziale (1997) vorgeschlagen

$$\mathcal{T}_{ij} = \frac{2}{3}\,\delta_{ij} - \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon} .$$

  Die Mehrzahl statistischer Turbulenzmodelle geht von der Gültigkeit der Kolmogorov–Hypothese (Rotta 1972) aus, welche die lokale Isotropie kleinskaliger Bewegungen bei hinreichend großen Reynoldszahlen annimmt. Durbin und Speziale (1991) konnten anhand der exakten Transportgleichung für ε_{ij} in homogener, inkompressibler Turbulenz nachweisen, daß die isotrope Darstellung des Dissipationsratentensors nur im trivialen Fall verschwindender Deformationsgeschwindigkeiten korrekt ist.

- Daneben ist auch die Einarbeitung von Transporttermen oder nichtlinearen Druck–Scher–Korrelationsmodellen denkbar, sofern man diese im iterativen Sinne von den aktuellen b_{ij} Werten entkoppelt. Im Falle expliziter numerischer Verfahren ist dies möglicherweise mit Zeitschrittrestriktionen verbunden.

$$\mathcal{T}_{ij} = \gamma_1\,\overline{b_{ij}^2} + \gamma_2\,\overline{b_{ij}^3} + \ldots \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{T}_{ij} = -T_t\,\frac{D\overline{b_{ij}}}{Dt} .$$

Kapitel 6 Schließung der Produktionsrate

Die im vorangehenden Abschnitt skizzierten Projektionen des ASM in eine quadratische Funktionsbasis $\mathcal{F}$ sind aufgrund der Abhängigkeit der EASM–Koeffizienten (A, B, C) von P/ε zunächst implizit. Ein explizites algebraisches Spannungsmodell ergibt sich nach Schließung der spezifischen Produktionsrate in g, die im Folgenden als $(P/\varepsilon)_g$ bezeichnet wird. Hierzu sind in der Literatur verschiedene Techniken unterschiedlichen Ursprungs bekannt.
Die *selbstkonsistente Formulierung* basiert auf der Projektion der spezifischen Produktionsrate $P/\varepsilon = -2(b_{kl}s_{kl} + s_{mm}/3)$ in die gewählte Funktionsbasis. Diese Technik führt auf hochgradig nichtlineare Bestimmungsgleichungen für $(P/\varepsilon)_g$ und verlangt eine physikalisch sinnvolle Selektion der mathematisch mehrdeutigen Lösung. Daneben ist die *quasi–selbstkonsistente* Projektion in eine niederwertigere Funktionsbasis, die gleichgewichtsorientierte Fixierung von $(P/\varepsilon)_g$, oder auch eine *iterative* Vorgehensweise denkbar. Ausschlaggebend für die Bewertung der verschiedenen Vorschläge ist das asymptotisch korrekte Verhalten des Modells für große Deformationsgeschwindigkeiten, bzw. eventuelle Singularitäten des Anisotropiekoeffizienten.
Die unten skizzierten Überlegungen beziehen sich auf die von Gatski und Speziale (1993) vorgeschlagene inkompressible, zweidimensionale Repräsentation (5.19) der Drei–Generator–Basis (5.13). Es sei darauf hingewiesen, daß eine Singularität des Anisotropiekoeffizienten c_μ mit dem Verschwinden der Koeffizientendeterminante von $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ verbunden ist.

6.1 Iterative Technik

Taulbee (1992) schlug vor, die in (4.9) auftretende Abhängigkeit des Koeffizienten g von der spezifischen Produktionsrate nicht aufzulösen, sondern das ASM im Rahmen eines iterativen Ansatzes durch das Ergebnis der letzten Iteration, bzw. des zurückliegenden Zeitschritts zu linearisieren

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g = -2\,\overline{b_{ij}s_{ij}} \qquad \rightsquigarrow \qquad g = C_1 - 1 - 2(C_1^* + 1)\,\overline{b_{ij}s_{ij}}\ .$$

Diese Vorgehensweise wird, neben einer Reihe anderer Autoren, vor allem von Speziale (1997a) aufgrund der unten beschriebenen Mehrdeutigkeit der selbstkonsistenten Lösung kritisiert. Im Zentrum der Diskussion steht die Frage, ob die physikalisch unsinnigen Lösungsanteile der (kubischen) Bestimmungsgleichung für P/ε im Rahmen der iterativen Technik ausgeschlossen werden können, oder ob singuläre Anisotropiekoeffizienten auftreten können

$$c_\mu = \frac{-\beta_1/g}{1 - \frac{2}{3}\eta_1\left(\frac{\beta_3}{g}\right)^2 - 2\eta_2\left(\frac{\beta_2}{g}\right)^2} \;>\; 0\ . \tag{6.1}$$

Im Folgenden wird versucht, die Wahrscheinlichkeit eventueller Singularitäten eines iterativen Ansatzes zu evaluieren. Die Analyse bezieht sich auf die Vorhersage von

high–Re Bereichen mit vernachlässigbaren Diffusionsprozessen auf der Grundlage einer $k-\varepsilon$ Formulierung (1.73) bzw. (1.74)

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon \ , \qquad \text{und} \qquad \frac{D\varepsilon}{Dt} = (PC_{\varepsilon 1} - \varepsilon C_{\varepsilon 2})\,\frac{\varepsilon}{k} \ .$$

Die Transportgleichung des turbulenten Zeitmaßes T_t lautet damit

$$\frac{D(k/\varepsilon)}{Dt} = \frac{DT_t}{Dt} = \frac{P}{\varepsilon}(1 - C_{\varepsilon 1}) - (1 - C_{\varepsilon\varepsilon 2}) \ .$$

Beschränkt man die Betrachtungen auf lokal zweidimensionale, inkompressible Strömungen mit $P/\varepsilon = 2c_\mu\eta_1$, dann ergibt sich mit $\tilde{C}_1 = (C_{\varepsilon 1} - 1)$ und $\tilde{C}_2 = (C_{\varepsilon 2} - 1)$

$$\begin{aligned}
\frac{DT_t}{Dt} &= -2c_\mu\eta_1\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \\
&= \frac{2\,(\beta_1/g)\tilde{S}_{kk}^2 T_t^2\,\tilde{C}_1}{1 - \frac{2}{3}\tilde{S}_{kk}^2 T_t^2 \left(\frac{\beta_3}{g}\right)^2 - 2\tilde{W}_{kk}^2 T_t^2 \left(\frac{\beta_2}{g}\right)^2} + \tilde{C}_2 \\
&= \frac{\tilde{C}_2 - T_t^2\left[\tilde{S}_{kk}^2\left(2\tilde{C}_1\left(\frac{-\beta_1}{g}\right) + \tilde{C}_2\frac{2}{3}\left(\frac{\beta_3}{g}\right)^2\right) + 2\,\tilde{W}_{kk}^2\,\left(\frac{\beta_2}{g}\right)^2\tilde{C}_2\right]}{1 - \left[\tilde{S}_{kk}^2\frac{2}{3}\left(\frac{\beta_3}{g}\right)^2 + 2\,\tilde{W}_{kk}^2\,\left(\frac{\beta_2}{g}\right)^2\right]T_t^2}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

In Lagrangescher Betrachtungsweise besitzt die Gleichung (6.3) die Struktur

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = \frac{\tilde{C}_2 - B^*\,T_t^2}{1 - A^*\,T_t^2} \qquad \text{mit} \qquad B^* = \tilde{C}_2 A^* - 2\tilde{C}_1\frac{\beta_1}{g}\tilde{S}_{kk}^2 \ . \tag{6.3}$$

Von besonderem Interesse ist der Nenner $(1 - A^*\,T_t^2)$, der dem Nenner des Anisotropieparameters c_μ entspricht. Im Weiteren wird versucht, einen Nachweis dafür zu erbringen, daß eine Nullstelle des Nenners sehr unwahrscheinlich ist. Hierzu werden, für anfänglich vorausgesetzte $g > 0$, mehrere Fallunterscheidungen von B^* durchgeführt.

A) negative Parameterwerte B^*

Im Falle $B^* \le 0$ folgt, für von Null verschiedene Initiallösungen von g, wegen $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$ und $\beta_1 < 0$ (vgl. Tabelle 4.2)

$$\tilde{C}_2 A^* \le 2\tilde{C}_1\frac{\beta_1}{g}\tilde{S}_{kk}^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad A^* \le 0 \qquad \text{und} \qquad \boxed{1 - A^* T_t^2 > 0} \ . \tag{6.4}$$

B) positive Parameterwerte B^*

Setzt man voraus, daß das turbulente Zeitmaß T_t eine kontinuierliche Funktion ist, dann läßt sich (6.3) wie folgt integrieren

$$\left|\frac{\sqrt{\tilde{C}_2} + \sqrt{B^*}T_t}{\tilde{C}_2 - \sqrt{B^*}T_t}\right| = e^\gamma \ , \quad \text{mit} \quad \gamma = \left(t - \frac{A^*}{B^*}T_t + Const.\right)\frac{2\sqrt{\tilde{C}_2 B^*}}{1 - \frac{A^*}{B^*}\tilde{C}_2} \ . \tag{6.5}$$

Der Exponent γ ist wegen $A^*/B^* - 1 = 2\tilde{C}_1\beta_1 S_{kk}^2/(\tilde{C}_2 B^* g) < 0$ zumindest für hinreichend große Zeiten t positiv. Zur Auflösung der Beträge unterscheidet man zwei Fälle

B1) $\sqrt{\tilde{C}_2} - T_t\sqrt{B^*} > 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{C}_2} + T_t\sqrt{B^*} &= e^{\gamma}(\sqrt{\tilde{C}_2} - T_t\sqrt{B^*}) \\ \rightsquigarrow \quad T_t &= \sqrt{\frac{\tilde{C}_2}{B^*}}\ \frac{e^{\gamma}-1}{e^{\gamma}+1}\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Im Fall B1) beobachtet man somit stetig steigende Werte des turbulenten Zeitmaßes T_t, welche im Grenzübergang gegen folgendes Maximum streben

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} > 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to\infty} T_t = \sqrt{\frac{\tilde{C}_2}{B^*}}\,. \tag{6.7}$$

Mit Hilfe von (6.3) folgt schließlich

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = \frac{\tilde{C}_2 - B^* T_t^2}{1 - A^* T_t^2} = \frac{\text{positive Größe}}{1 - A^* T_t^2} > 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{1 - A^* T_t^2 > 0}\,. \tag{6.8}$$

B2) $\sqrt{\tilde{C}_2} - T_t\sqrt{B^*} < 0$

Analog erhält man für $\sqrt{\tilde{C}_2} - T_t\sqrt{B^*} < 0$ die Lösung

$$T_t = \sqrt{\frac{\tilde{C}_2}{B^*}}\ \frac{e^{\gamma}+1}{e^{\gamma}-1}\,, \tag{6.9}$$

und beobachtet stetig fallende Werte des turbulenten Zeitmaßes T_t. Diese streben im Grenzübergang gegen das unten angeführte Minimum

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} < 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to\infty} T_t = \sqrt{\frac{\tilde{C}_2}{B^*}}\,. \tag{6.10}$$

Mit Hilfe von (6.3) folgt wiederum

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = \frac{\tilde{C}_2 - B^* T_t^2}{1 - A^* T_t^2} = \frac{\text{negative Größe}}{1 - A^* T_t^2} < 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{1 - A^* T_t^2 > 0}\,. \tag{6.11}$$

Die Möglichkeit, negative Werte des Anisotropiekoeffizenten zu erhalten, wird daher vom Autor der vorliegenden Arbeit als äußerst gering angesehen. Es sei daran erinnert, daß die oben gemachten Aussagen aus den Annahmen einer lokal zweidimensionalen Reynolds–gemittelten Strömung mit vernachlässigbarer Diffusion und korrekter Initialösung für hinreichend große Beobachtungszeiten abgeleitet wurden, und ein allgemeingültigerer Beweis leider nicht gelingt.

6.2 Regularisierte Technik

Gatski und Speziale (1993) schlagen in der ursprünglichen Variante ihres EASM eine Fixierung des Wertes der spezifischen Produktionsrate $(P/\varepsilon)_g$ vor. Der dabei festgelegte Wert lehnt sich an das strukturelle Gleichgewicht an (vgl. Kapitel 7.1)

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g = \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_{\text{equil.}} = \text{const} = \left(\frac{1-C_{\varepsilon 2}}{1-C_{\varepsilon 1}}\right) \approx 2 \quad , \tag{6.12}$$

welches der Herleitung des ASM zu Grunde liegt. Diese Vorgehensweise ist mit erheblichen Nachteilen verbunden und wurde von den Autoren in späteren Arbeiten mehrfach korrigiert (Rumsey et al. 1998; Speziale und Xu 1996). Tabelle 6.1 vergleicht die daraus resultierenden Werte des Gleichgewichtsparameters $\overline{g}$ für unterschiedliche RSTM.

Die Problematik konstanter $(P/\varepsilon)_g$ Werte läßt sich unmittelbar aus der Betrachtung des Anisotropiekoeffizienten für $(P/\varepsilon)_g \approx 2$ erkennen

$$\overline{g} = \left(\frac{1-C_{\varepsilon 2}}{1-C_{\varepsilon 1}}\right)(C_1^* + 1) + (C_1 - 1) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{c}_\mu = \frac{-\beta_1/\overline{g}}{1 - \frac{2}{3}\eta_1 \left(\frac{\beta_3}{\overline{g}}\right)^2 - 2\eta_2 \left(\frac{\beta_2}{\overline{g}}\right)^2} \quad . \tag{6.13}$$

Deutlich erkennt man, daß im Falle einer rotationsfreien Distorsion ($\eta_2 = 0$) mit steigendem η_1 eine Singularität von c_μ droht. Hiervon ausgenommen ist das von Taulbee vorgeschlagene modifizerte LRR–Modell – welches auch von Wallin und Johansson (2000) propagiert wird –, für das wegen $\beta_3 \equiv 0$ keine Singularität auftreten kann. Mit dem Nulldurchgang des Nenners von (6.13) ist ein im RANS–Kontext physikalisch unsinniger Wert des isotropen Wirbelzähigkeitsanteils verbunden. Offenkundig strebt das EASM in diesem Falle rasch gegen asymptotisch falsche Werte. Gatski und Speziale (1993) schlugen daher eine *Regularisierung* des Anisotropieparameters (bzw. des Koeffizienten A) auf der Grundlage einer Padé–Approximation erster Ordnung vor

$$\left(\frac{\beta_3}{\overline{g}}\right)^2 \eta_1 \approx \frac{\left(\frac{\beta_3}{\overline{g}}\right)^2 \eta_1}{\left(\frac{\beta_3}{\overline{g}}\right)^2 \eta_1 + 1} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{c_\mu} = \frac{\left[\left(\frac{\beta_3}{\overline{g}}\right)^2 \eta_1 + 1\right]^{\frac{-\beta_1}{\overline{g}}}}{1 + \frac{1}{3}\eta_1 \left(\frac{\beta_3}{\overline{g}}\right)^2 - 2\left[\left(\frac{\beta_3}{\overline{g}}\right)^2 \eta_1 + 1\right] \eta_2 \left(\frac{\beta_2}{\overline{g}}\right)^2} \quad . \tag{6.14}$$

Tabelle 6.1: Werte des fixierten Gleichgewichtsparameters $\overline{g}$ für verschiedene lineare Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodelle.

	LLR	TB	SSG/GS	FRLT	GL	GY	RO
$\overline{g}$	2.5	2.8	4.3	3.5	2.8	3.9	6.0
$(\beta_3/\overline{g})^2$	$2.5\ 10^{-3}$	0.0	$7.6\ 10^{-3}$	$11.4\ 10^{-3}$	$20.4\ 10^{-3}$	$32.2\ 10^{-3}$	$27.8\ 10^{-3}$

Die Güte der Padé–Aproximation ist an die Gültigkeit von

$$\left(\frac{\beta_3}{\overline{g}}\right)^2 \eta_1 \leq 10^{-1} \qquad \rightsquigarrow \qquad 2\eta_1 = S^2 \leq 2 \cdot 10^{-1} \left(\frac{\overline{g}}{\beta_3}\right)^2 \approx 10^1 \tag{6.15}$$

gebunden. Das GS–EASM entspricht somit für nichtgleichgewichtige Zustände nicht mehr der ursprünglichen Formulierung. Angesichts der Tatsache, daß eine Singularität der Ausgangsgleichung (6.13) erst bei $\eta_1 = 1.5\,(\beta_3/\overline{g})^2$ auftritt, weicht die Padé–Aproximation unnötigerweise bereits für völlig unkritische Distorsionzustände von der Ausgangsformulierung ab. Unglücklicherweise hängt die Güte der Padé–Approximation von der Wahl der Koeffizienten C_1, C_1^* und C_3 ab. Die Werte des hierfür relevanten Parameters $(\beta_3/\overline{g})^2$ sind in der zweiten Zeile von Tabelle 6.1 angeführt. Mit steigendem $(\beta_3/\overline{g})^2$ sinkt die Güte der Approximation. Die Auswirkungen der Padé–Approximation hängen, wie im Kapitel 7.1 demonstriert, zudem stark vom gewählten Rotta–Koeffizienten ab.

Einfache, gleichgewichtsnahe Zustände können bereits mit herkömmlichen Zwei–Parameter–Modellen recht gut vorhergesagt werden. Die Motivation zur Entwicklung einer höherwertigen Modellierung ist eng mit dem Bestreben verbunden, Nichtgleichgewichtssituationen besser darstellen zu können. Die aus der Regularisierung resultierenden erheblichen Genauigkeitsverluste bei der Vorhersage von Nichtgleichgewichtszuständen sind von einer Reihe von Autoren (z.B. Rumsey et al. 1999) festgestellt worden. Vor diesem Hintergrund sollte die vorgeschlagene Regularisierung mit großer Skepsis betrachtet werden. Ferner drohen bei der Behandlung stark nichtgleichgewichtiger Strömungen negative Normalspannungskomponenten, welche in Einzelfällen (Lakehal et al. 1998) zu einer Verfahrensdivergenz führen können.

Der Anisotropieparameter sollte mit steigenden η_1 sinken. Ein kontrollierter Abfall von c_μ zu endlich kleinen positiven Grenzwerten kann nach Gleichung (6.1) jedoch nur für

$$c_\mu \sim \eta_1^{-1/2} \qquad \rightsquigarrow \qquad g \sim \sqrt{\eta_1} \tag{6.16}$$

realisiert werden. Die Beziehung (6.16) gewährleistet zudem die Konsistenz zur RDT und zum Realizability–Prinzip (siehe Kapitel 7). Demgegenüber besitzen sowohl die auf der Basis einer einfachen Padé–Approximation (6.14) regularisierte Variante, als auch die nicht regularisierte Variante des Anisotropieparameters ein falsches, teilweise sogar uneinheitliches, asymptotisches Verhalten

$$\hat{c_\mu}(\eta_1 = 0) \sim \eta_2^{-1}\,, \qquad \tilde{c_\mu}(\eta_2 = 0) \sim \eta_1^0 \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{c_\mu}(\eta_1 \approx -\eta_2) \sim \eta_1^{-1}\,. \tag{6.17}$$

Verbesserte, asymptotisch korrekte Regularisierungsvorschläge, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, findet man beispielsweise bei Speziale und Xu (1996) oder Rumsey et al. (1998). Eine Regularisierung erscheint im Vergleich zu den unten skizzierten selbstkonsistenten bzw. quasi–selbstkonsistenten Techniken nicht ratsam.

6.3 Selbstkonsistente Technik

Die selbstkonsistente Formulierung erhält man durch die Projektion der exakten Produktionsbeziehung (4.2) in die gewählte Funktionsbasis. Beschränkt man sich dabei der Einfachheit halber erneut auf inkompressible Strömungen, dann ergibt sich

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g = \left(\frac{P}{\varepsilon}\right) = -2b_{ij}s_{ij} = -2A\,T_{ij}^{(1)}s_{ij} - 2B\,T_{ij}^{(2)}s_{ij} - 2C\,T_{ij}^{(3)}s_{ij} \quad \ldots \quad , \tag{6.18}$$

ohne daß Ad–hoc–Annahmen für die spezifische Produktionsrate gemacht werden müssen.

Projektion in die lineare Basis

Im Falle eines linearen Ansatzes (5.6) enthält die selbstkonsistente Bestimmungsgleichung der spezifischen Produktionsrate

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g = \frac{-2\beta_1\eta_1}{C_1 - 1 + P/\varepsilon - 2\beta_3\,(\eta_3/\eta_1)}$$

formal zwei Lösungen, von denen hier nur die positive Wurzel sinnvoll ist

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g = -\frac{1}{2}\left(C_1 - 1 - \beta_3\frac{\eta_3}{\eta_1}\right) + \left[\frac{1}{4}\left(C_1 - 1 - \beta_3\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)^2 - 2\beta_1\eta_1\right]^{0.5} . \tag{6.19}$$

Der Ansatz (6.19) ist wegen $g \sim \sqrt{\eta_1}$ mit einem asymptotisch korrekten Verhalten des Anisotropieparameters verbunden. Die Güte des o.a. Lösung prüft man geeigneterweise am Beispiel konventioneller, zweidimensionaler, homogener Scherströmungen, deren Richtwerte in Tabelle 6.2 zusammengefasst sind. Ein Vergleich mit Tabelle 4.2 ergibt, daß keines der aufgelisteten RSTM im Zusammenhang mit (6.19) befriedigende Lösungen erzielt. Die Gründe hierfür liegen in der unterbestimmten Funktionsbasis, weswegen eine Manipulation der Koeffizienten (z.B. C_1=3.0 und C_2=0.8) angebracht ist. Darüber hinaus fehlt der linearen Projektion die Sensitivität für Krümmungsmechanismen, da die Invarianten des Wirbeltensors nicht in Erscheinung treten.

Tabelle 6.2: Richtwerte der spezifischen Produktionsrate in einer ebenen (homogenen) Scherung.

S	η_1	η_2	η_3	P/ε
6.0	18	-18	0	≈ 2
3.3	5.445	-5.445	0	≈ 1

Projektion in die zweidimensionale Basis

Aus dem Aufbau der Systemmatrixen (5.15) und (5.17) bzw. ihrer Determinanten erkennt man, daß höherwertige nichtlineare Funktionsbasen auch mit komplexeren, hochgradig nichtlinearen Polynomen zur Bestimmung selbstkonsistenter g–Werte verbunden sind. Für eine Funktionsbasis N–ten Grades ergibt sich ein Polynom $(N+1)$–ten Grades zur Bestimmung von g. Die Selektionsproblematik der zumeist mehrdeutigen Lösung motiviert eine Beschränkung der Betrachtungen auf zweidimensionale Reynolds–gemittelte Strömungszustände, bei denen zur Bestimmung von (P/ε) ein kubisches Polynom gelöst wird. Die unten skizzierte Vorgehensweise wurde zuerst von Girimaji (1995) bzw. Wallin und Johansson (2000) vorgeschlagen.

Für die quadratische Drei–Generator–Funktionsbasis (5.13) ergibt sich in lokal zweidimensionalen Zuständen die unten stehende kubische Gleichung

$$\begin{aligned} (C_1^*+1)\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g &= (C_1^*+1)\frac{P}{\varepsilon} = -2(C_1^*+1)A\,\eta_1 = g-(C_1-1)\,, \qquad (6.20)\\ \rightsquigarrow \qquad \underbrace{g-(C_1-1)}_{K_1} &= \frac{-2\,\eta_1\,\beta_1^* g}{g^2-\frac{2}{3}\eta_1{\beta_3}^2-2\eta_2{\beta_2}^2} \qquad \text{mit}\;\; \beta_1^*=\beta_1(C_1^*+1)\,, \end{aligned}$$

$$g^3-K_1g^2-\left[\eta_1\left(\frac{2}{3}{\beta_3}^2-2\beta_1^*\right)+2\eta_2{\beta_2}^2\right]g+K_1\left[\frac{2}{3}\eta_1{\beta_3}^2+2\eta_2{\beta_2}^2\right]=0\,.$$

Mit Hilfe der Substitution $\mathcal{G}=g-K_1/3$ ergibt sich eine einfachere Beziehung, in der der quadratische Term nicht mehr auftritt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^3+p\,\mathcal{G}+q &= 0\,,\\ \text{mit}\quad p &= -\frac{1}{3}\left[K_1^2+\left(2{\beta_3}^2-6\beta_1^*\right)\eta_1+6\beta_2^2\eta_2\right]\,,\\ q &= \left(\frac{K_1}{3}\right)\left[4\beta_2^2\eta_2-2\left(\frac{K_1}{3}\right)^2+\left(2\beta_1^*+\frac{4}{3}{\beta_3}^2\right)\eta_1\right]\,. \qquad (6.21) \end{aligned}$$

Die Wurzeln der Beziehung (6.21) werden durch die *Cardanische Lösungsformel* (Bronstein und Semendjajew 1956) beschrieben.

$$\text{Mit}\qquad P_1 = -\frac{q}{2} \qquad \text{und} \qquad P_2=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad \text{folgt} \qquad (6.22)$$

$$g = \begin{cases} \frac{1}{3}K_1+\sqrt[3]{P_1+\sqrt{P_2}}+\text{sign}(P_1-\sqrt{P_2})\;\sqrt[3]{|\,P_1-\sqrt{P_2}\,|} & \text{wenn } P_2>0\\ \frac{1}{3}K_1+2\,\sqrt[6]{P_1^2-P_2}\,\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2-P_2}}\right)\right) & \text{wenn } P_2<0 \end{cases}$$

Die Lösung für $P_2<0$ setzt sich eigentlich aus drei reellen Wurzeln zusammen, von denen eine keine stetige Fortsetzung für $P_2>0$ besitzt und eine weitere durch die Koeffizienten des Druck–Scher–Korrelationsmodells entfällt. Im Falle einer Modifikation

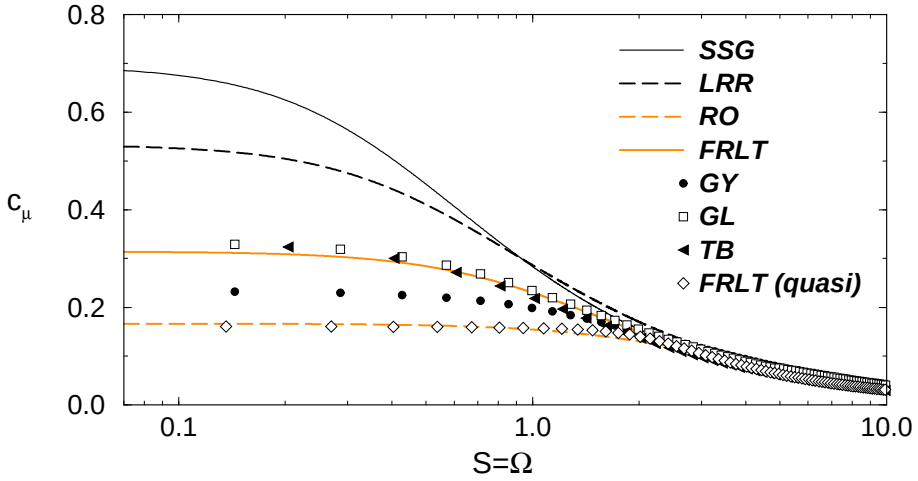


Abbildung 6.1: Verhalten des Anisotropieparameters für geringe Deformationsgeschwindigkeiten bei selbstkonsistenter Technik (`FRLT(quasi)` quasi-selbstkonsistente Lösung nach (6.24)).

der Funktions– bzw. Integritätsbasis in (6.20) sollte die vollständige Lösung (Girimaji 1995; Lübcke und Rung 1999) konsultiert werden. Man erkennt leicht, daß mit $g \sim \sqrt[6]{P_2}$ asymptotisch korrekte Eigenschaften verbunden sind. Lübcke und Rung (1999) zeigen, daß im Rahmen der selbstkonsistenten Technik keine negativen Anisotropiewerte auftreten können. Der Nachteil der so ermittelten Beziehung für $(P/\varepsilon)_g$ ist ihre Komplexität und die mangelnde Sensitivität gegenüber 3D Strömungszuständen durch die Reduktion von $\mathcal{N}$, hier insbesondere das Fehlen von η_3. Ein weiteres Problem der selbstkonsistenten Technik ist der Wert des Anisotropiekoeffizienten c_μ im Grenzübergang $P/\varepsilon \to 0$ (vgl. Abbildung 6.1 und Tabelle 6.3). Das selbstkonsistente EASM neigt in deformationsfreien Zonen teilweise zu sehr hohen Werten des Anisotropieparameters, was zu Problemen bei der Darstellung der Grenzbereiche zwischen turbulentem und nichtturbulentem Fluid führt. Leider sind keine strengen mathematisch/physikalischen Zwangsbedingungen zur Formulierung dieses Grenzwertes bekannt. Die empfohlenen Erfahrungswerte liegen im Bereich von 0.1–0.2, wobei der Grenzwert des Rotta–Modells (RO) aufgrund des exklusiven Bezugs der Modellbildung auf langsame Umverteilungsprozesse am plausibelsten erscheint.

Tabelle 6.3: Grenzwerte des Anisotropieparameters c_μ für $P/\varepsilon \to 0$ im Rahmen der selbstkonsistenten Technik.

	LRR	TB	SSG	GS	FRLT	GL	GY	RO
$\lim_{P/\varepsilon\to 0} c_\mu = -\beta_1/(C_1-1)$	0.53	0.33	0.70	0.143	0.31	0.33	0.23	0.167

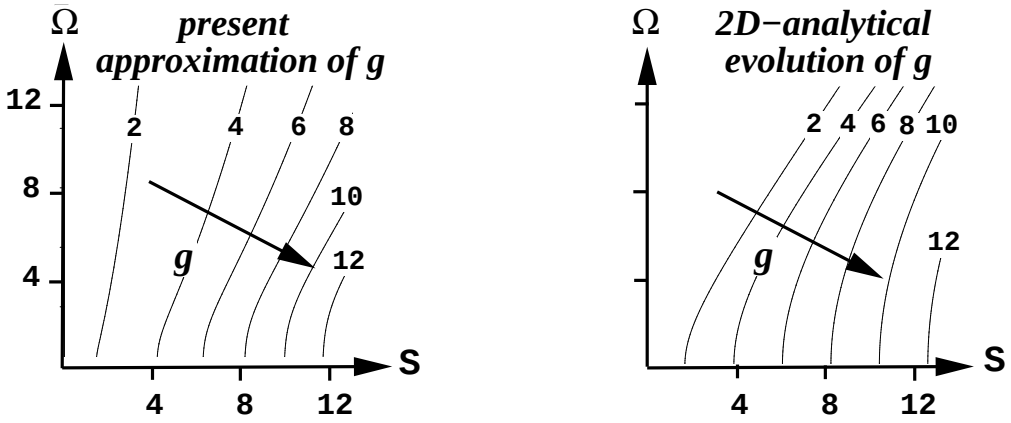


Abbildung 6.2: Verlauf des Gleichgewichtsparameters g; links: Approximation mit Hilfe der quasi–selbstkonsistenten 2D Formulierung (6.24); rechts: Verlauf der selbstkonsistenten 2D Lösung nach (6.22).

6.4 Quasi–Selbstkonsistente Technik

Die oben skizzierte selbstkonsistente Technik ist trotz ihrer Beschränkung auf einfache, zweidimensionale Strömungszustände mit relativ komplexen Lösungen verbunden. Dies motiviert die Bestimmung der spezifischen Produktionsrate $(P/\varepsilon)_g$ durch einen weniger aufwendigen linearen Ansatz. Ein solches Vorgehen entspricht im Grunde der Projektion der spezifischen Produktionsrate in eine reduzierte, niederwertigere Funktionsbasis. Neben der oben skizzierten Lösung (6.19) ist die Berechnung von $(P/\varepsilon)_g$ durch folgenden etablierten Alternativansatz (Shih et al. 1995; Rung 1998b) denkbar

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g = 2\, c_\mu^* \eta_1 \;, \tag{6.23}$$

$$\text{mit} \qquad c_\mu^* = \frac{1}{A_0 + A_1\sqrt{A_2\eta_1 - A_3\eta_2}} \qquad \text{und} \qquad A_1 = A_1\left(\frac{\eta_3}{(\eta_1)^{1.5}}\right) \;.$$

Man beachte, daß die Formulierung (6.23) über den Schiefen–Parameter A_1 dreidimensionale Einflüsse zu berücksichtigen vermag, worauf in Kapitel 8.1 näher eingegangen wird. Die Approximation der spezifischen Produktionsrate führt zu asymptotisch korrekten Eigenschaften gemäß (6.16) und berücksichtigt darüber hinaus Krümmungseffekte.

Quasi–selbstkonsistente 2D Formulierung

Der Ansatz (6.23) eignet sich in vielerlei Hinsicht zur Vereinfachung der selbstkonsistenten Technik. Neben der partiellen Linearisierung einer hochgradig nichtlinearen,

3D Formulierung läßt er sich zur Entwicklung einer simplen quasi–selbstkonsistenten Formulierung nutzen, deren Entwicklung im Weiteren erläutert werden soll.

$$\tilde{g} \;=\; f_{C1}\Big[C_1 - 1\Big]_{\mathrm{FRLT}} + \frac{2\eta_1}{4. + A_1\sqrt{0.4\eta_1 - 1.6\eta_2}}\,, \quad \text{mit} \quad A_{1(2D)} = 1.83\,. \tag{6.24}$$

Die hier vorgeschlagene Formulierung (6.24) ist auf die Koeffizienten des FRLT–Modells (vgl. Tabelle 4.2) abgestimmt. Abbildung 6.2 veranschaulicht den Verlauf des quasi–selbstkonsistenten Gleichgewichtsparameters in der $S - \Omega$ Ebene (mit $S = \sqrt{2\eta_1}$ und $\Omega = \sqrt{-2\eta_2}$) für zweidimensionale Strömungszustände. Bei der Wahl der freien Parameter von (6.23) wurden die unten angeführten Restriktionen beachtet.

I Beschränkung von c_μ im Grenzübergang $\eta_1 = \eta_2 \to 0$

Wallin und Johansson (2000) bzw. Taulbee (1992) berichten über Probleme der selbstkonsistenten Formulierung in deformationsfreien Strömungsgebieten. Das selbstkonsistente EASM neigt in deformationsfreien Zonen zu sehr hohen Werten des Anisotropieparameters (vgl. Tabelle 6.3), was Schwierigkeiten bei der Modellierung des Übergangs zwischen turbulenter Grenzschicht und schwach turbulenter Kernströmung bereitet. Viele Autoren modifizierten daher die Prandtlzahlen des Zwei–Parameter–Hintergrundmodells. Um eine Trennung zwischen Hintergrundmodell und Stress–Strain Beziehung zu erhalten, wird in dieser Arbeit eine empirische Funktion f_{C1} eingeführt, die den Wert des Parameters g in deformationsfreien Bereichen stützt

$$f_{C1} = 1 + 0.95\left[1 - \tanh\left(\frac{\mathrm{S}}{2.15}\right)^2\right] \qquad \rightsquigarrow \qquad \lim_{\eta_1=\eta_2\to 0} c_\mu = 0.161\,. \tag{6.25}$$

Die Wirkungsweise der Funktion f_{C1} geht deutlich aus Abbildung 6.2 hervor. Mit abnehmenden Scherraten S tritt eine verstärkte Abweichung der quasi–selbskonsistenten Formulierung von der selbstkonsistenten Lösung auf. Für das Beispiel einer ebenen Scherströmung schmiegt sich die hier vorgeschlagene Lösung im Grenzübergang zu kleinen Deformationsgeschwindigkeiten an die Lösung des Rotta–Modells an, welches allein die langsamen Umverteilungsbeiträge berücksichtigt (Abbildung 6.1).

II Konsistenz zum SSG Druck–Scher–Korrelationsmodell

Das SSG Druck–Scher–Korrelationsmodell von Speziale et al. (1991) besitzt in vollturbulenten Bereichen ($f_{C1} = 1$) neben dem klassischen linearen Rotta–Beitrag zum Gleichgewichtsparameter g einen weiteren Anteil, der von P/ε abhängt

$$g_{\mathrm{SSG}} := 0.7 + 1.9\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g \;=\; \tilde{g}\,, \tag{6.26}$$

$$\rightsquigarrow \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g \;=\; 0.421 + \frac{1.05\,\eta_1}{4. + 1.83\sqrt{0.4\eta_1 - 1.6\eta_2}}\,. \tag{6.27}$$

Von der Güte der Approximation (6.24) überzeugt man sich beispielsweise anhand der in Tabelle 7.2 wiedergegebenen Ergebnisse für homogene Scherturbulenz.

III Konsistenz zur Schwartzschen Ungleichung

Die Schwartzsche Ungleichung für zwei verschiedene Geschwindigkeitsfluktuationen

$$(\overline{u_\alpha u_\beta})^2 \;\; \leq \overline{u_\alpha^2} \;\; \overline{u_\beta^2} \,, \tag{6.28}$$

ist ein Bestandteil des in Kapitel 7.3 ausführlicher behandelten Realizability–Prinzips. Die Herleitung einer integralen Form der Schwartzschen Ungleichung basiert auf der doppelten Überschiebung des Reynolds–Spannungstensors mit sich selbst

$$\overline{u_i u_j} \;\; \overline{u_i u_j} \leq \overline{u_i^2} \;\; \overline{u_j^2} = (2k)^2 \,. \tag{6.29}$$

Gleichung (6.29) dient im Rahmen dieser Arbeit zur Bestimmung der Kombination $A_1\sqrt{A_2}$ in (6.23).

Mit Hilfe des quadratischen Drei–Generator–Ansatzes $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ und der zweidimensionalen Koeffizienten (5.18) ergibt sich von (6.29)

$$\begin{aligned} c_\mu^2 \Bigg[& T_{ij}^{(1)} T_{ji}^{(1)} + \left(\frac{\beta_2}{\tilde{g}}\right)^2 T_{ij}^{(2)} T_{ji}^{(2)} + 4 \left(\frac{\beta_3}{\tilde{g}}\right)^2 T_{ij}^{(3)} T_{ji}^{(3)} \\ & -2\frac{\beta_2}{\tilde{g}} T_{ij}^{(1)} T_{ji}^{(2)} + 4\frac{\beta_3}{\tilde{g}} T_{ij}^{(1)} T_{ji}^{(3)} - 4\frac{\beta_2\beta_3}{\tilde{g}^2} T_{ij}^{(2)} T_{ji}^{(3)} \Bigg] \leq \frac{2}{3} \,, \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \qquad c_\mu^2 \left[\eta_1 + \left(\frac{\beta_2}{\tilde{g}}\right)^2 (\eta_1\eta_2 - 6\eta_5) + 4 \left(\frac{\beta_3}{\tilde{g}}\right)^2 \frac{1}{6}\eta_1^2 + 4\frac{\beta_3}{\tilde{g}}\eta_3 \right] \leq \frac{2}{3} \,. \tag{6.30}$$

Unterwirft man die hierin auftretenden Invarianten den bereits mehrfach zitierten 2D Restriktionen (3.10), dann ergibt sich

$$\left[\frac{\beta_1/\tilde{g}}{1 - 2\frac{\beta_2^2}{\tilde{g}^2}\eta_2 - \frac{2}{3}\frac{\beta_3^2}{\tilde{g}^2}\eta_1} \right]^2 \left[\eta_1 \left(1 - 2\frac{\beta_2^2}{\tilde{g}^2}\eta_2 + \frac{2}{3}\frac{\beta_3^2}{\tilde{g}^2}\eta_1 \right) \right] \leq \frac{2}{3} \,. \tag{6.31}$$

Von besonderem Interesse ist das Verhalten des Parameters $\tilde{g}$ für große Werte der Wirbel– und Scherraten–Invarianten η_1 bzw. η_2, bei denen eine Verletzung der Ungleichung (6.31) zu befürchten ist. Eine Beschränkung der linken Seite kann in diesem Falle nur für

$$\boxed{\tilde{g}^2 \sim \alpha_1\,\eta_1 - \alpha_2\eta_2} \tag{6.32}$$

gewährleistet werden, was vom gewählten Ansatz (6.23) befriedigt wird. Die restriktivste Situation tritt in Verbindung mit lim $\eta_1 \to \infty$ und $\eta_2 \to 0$ auf

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\left[\frac{\beta_1}{1-\frac{2}{3}\frac{\beta_3^2}{\alpha_1}}\right]^2\left[\left(1+\frac{2}{3}\frac{\beta_3^2}{\alpha_1}\right)\right] = \frac{\beta_1^2\left[\alpha_1+\frac{2}{3}\beta_3^2\right]}{\left[\alpha_1-\frac{2}{3}\beta_3^2\right]^2} \leq \frac{2}{3}\,,$$

$$\alpha_1^2+\frac{3}{2}\beta_1^2\alpha_1+\frac{2}{3}\beta_3^2\left(\frac{2}{3}\beta_3^2-\frac{3}{2}\beta_1^2-2\right)\geq 0\,, \tag{6.33}$$

für die man folgende Einschränkung der Parameterwerte α_1 findet

$$\frac{2}{3}\beta_3^2+\frac{3}{4}\beta_1^2-\gamma>\alpha_1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{2}{3}\beta_3^2+\frac{3}{4}\beta_1^2+\gamma<\alpha_1 \tag{6.34}$$

$$\text{mit} \qquad \gamma=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\beta_3^2+\frac{3}{4}\beta_1^2\right)^2+\frac{2}{3}\beta_3^2\left(\frac{3}{2}\beta_1^2-\frac{2}{3}\beta_3^2\right)}\,.$$

Im Falle des hier propagierten FRLT–Modells ergibt sich

$$\alpha_1>0.5613 \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha_1<-0.0401\,, \tag{6.35}$$

wobei generell nur positive Werte sinnvoll sind. Der Vergleich mit (6.24) zeigt, daß der implementierte Wert für α_1 ungefähr dem Grenzwert der Schwartzschen Ungleichung entspricht

$$\alpha_1=\frac{A_{1(2D)}\sqrt{A_2}}{2}=0.5787>0.5613\,.$$

Für die ebene Scherturbulenz mit $\eta_1=-\eta_2$ erkennt man sofort, daß die Schwartzsche Ungleichung immer erfüllt ist, weswegen diesbezüglich für c_μ die Konsistenz zur Bradshaw–Hypothese im Grenzübergang $\lim \eta_1 \to \infty$ verlangt wird.

Die Gewährleistung positiver Anisotropieparameter ist mit der Forderung nach einem positiven Nenner verbunden

$$\frac{-\beta_1/\tilde{g}}{1-2\frac{\beta_2^2}{\tilde{g}^2}\eta_2-\frac{2}{3}\frac{\beta_3^2}{\tilde{g}^2}\eta_1}>0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \beta_3^2<1.5\,\alpha_1\,. \tag{6.36}$$

Man erkennt deutlich, daß die Konsistenz zur Schwartzschen Ungleichung für das FRLT Modell auch positive Anisotropieparameter gewährleistet.

IV Asymptotische Konsistenz zur Bradshaw–Hypothese in ebenen Scherströmungen

Betrachtet man im Weiteren den wichtigen Fall einer ebenen Scherung, dann ergibt der Ansatz (6.23) für große Werte des Scherparameters S

$$\eta_1=-\eta_2=0.5S^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \lim_{S\to\infty}\tilde{g}^2=\left(\frac{2}{A_1\sqrt{A_2+A_3}}\right)^2\frac{S^2}{2}\,. \tag{6.37}$$

Setzt man hier die plausible Nebenbedingung

$$A_2 + A_3 = 2 \tag{6.38}$$

ein, dann ergibt sich für den Anisotropiekoeffizienten

$$c_\mu = \frac{-\beta_1/\tilde{g}}{1 + 0.5\,\left(2\beta_2^2 - \frac{2}{3}\beta_3^2\right) A_1^2} = \frac{-\beta_1 A_1}{S\left[1 + 0.5\,\left(2\beta_2^2 - \frac{2}{3}\beta_3^2\right) A_1^2\right]}\,. \tag{6.39}$$

Fordert man weiterhin für große Scherparameterwerte die Konsistenz zur sogenannten *Bradshaw-Hypothese* (Bradshaw und Ferris 1972), bzw. der daraus folgenden Linearisierung der Produktion P von Turbulenzenergie (Rung 1998a)

$$\frac{P}{\varepsilon} = c_\mu S^2 = 0.3\,S \qquad \rightsquigarrow \qquad c_\mu = 0.3/S\,, \tag{6.40}$$

dann ergibt sich aus den Gleichungen (6.39) und (6.40) eine quadratische Beziehung zur Bestimmung von A_1

$$0.5\,\left(2\beta_2^2 - \frac{2}{3}\right) A_1^2 + 3.3\beta_1 A_1 + 1 = 0\,. \tag{6.41}$$

Für das FRLT–Modell gewinnt man aus einer der beiden Wurzeln von (6.41) unmittelbar den Wert des Koeffizienten $A_{1(2D)}$

$$A_{1(2D)} = 1.82\,.$$

Nachdem man zunächst den Koeffizienten $A_{1(2D)}$ mit Hilfe von (6.41) bestimmt, erfolgt die Berechnung von A_2 und A_3 durch (6.34) bzw. (6.38). Die Verträglichkeit zum SSG–Modell bzw. zu den in Tabelle 6.2 notierten Richtwerten bestimmt die abschließende Wahl von A_0. Zur Überprüfung der Koeffizienten wird das EASM im nächsten Kapitel neben der eingehenden Analyse fundamentaler Strömungszustände auch einer Realisierbarkeits–Untersuchung unterzogen.

Quasi–selbstkonsistente 3D Formulierung

Eine weitere Möglichkeit zum Einsatz einer Näherung $\tilde{g}$ findet sich bei der 3D Erweiterung der selbstkonsistenten Formulierung von $(P/\varepsilon)_g$. Durch den partiellen Einsatz von $\tilde{g}$ läßt sich der kubische Grad der Bestimmungsgleichung für g auch bei hochgradig nichtlinearen Modellen erhalten.

Erweitert man z.B. den quadratischen GS–Ansatz durch eine ergänzende Gruppe T_{ij}^{λ} (vgl. Kapitel 8.5)

$$b_{ij} = \left(\frac{\beta_1}{g - \frac{2\beta_2^2}{g}\eta_2 - \frac{2\beta_3^2}{3g}\eta_1}\right) \left[s_{ij} - \frac{\beta_2}{g}\left(s_{ik}w_{kj}^* - w_{ik}^* s_{kj}\right) + \frac{2\beta_3}{g}\left(s_{ij}^2 - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\; s_{kk}^2\right) + \frac{b_\lambda(\eta_i,\beta_i)}{g^2} T_{ij}^{(\lambda)}\right]\,,$$

dann läßt sich der kubische Grad des Polynoms durch die Linearisierung

$$\frac{b_\lambda(\eta_i,\beta_i)}{g^2} \;\rightarrow\; \frac{b_\lambda(\eta_i,\beta_i)}{g\tilde{g}}$$

erhalten:

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_g = \frac{P}{\varepsilon} = \tilde{g}_{3D} - \underbrace{(C_1-1)}_{K_1} = -2A\,(C_1^*+1)\left[\eta_1 + 2\beta_3\frac{\eta_3}{g} + \frac{b_\lambda/\tilde{g}}{g}\left(T_{ij}^{(\lambda)}s_{ij}\right)\right]\,,$$

und damit

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{3D}^3 - K_1\tilde{g}_{3D}^2 \;&-\; \left[\eta_1\left(\frac{2}{3}{\beta_3}^2 - 2\beta_1^*\right) + 2\eta_2{\beta_2}^2\right]\tilde{g}_{3D} \\ &+\; K_1\left[\frac{2}{3}\eta_1{\beta_3}^2 + 2\eta_2{\beta_2}^2 + 4\frac{\beta_1^*\beta_3}{K_1}\eta_3 + 2\frac{\beta_1^* b_\lambda/\tilde{g}}{K_1}\left(T_{ij}^{(\lambda)}s_{ij}\right)\right] = 0\,. \quad (6.42)\end{aligned}$$

Die Lösung von (6.42) gelingt wiederum mit Hilfe der Cardanischen Lösungsformel. Im Unterschied zu (6.22) kann P_1 prinzipiell auch negative Werte annehmen, weswegen man eine dritte reelle Wurzel findet

$$\tilde{g}_{3D} = \begin{cases} \frac{1}{3}K_1 + \sqrt[3]{P_1+\sqrt{P_2}} + \mathrm{sign}(P_1-\sqrt{P_2})\,\sqrt[3]{|\,P_1-\sqrt{P_2}\,|} & \text{wenn } P_2 > 0 \\ \frac{1}{3}K_1 + 2\,\sqrt[6]{P_1^2-P_2}\,\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2-P_2}}\right)\right) & \text{wenn } P_2 < 0 \text{ und } P_1 > 0 \\ \frac{1}{3}K_1 + 2\,\sqrt[6]{P_1^2-P_2}\,\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2-P_2}}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) & \text{wenn } P_2 < 0 \text{ und } P_1 < 0 \end{cases} \quad (6.43)$$

Kapitel 7 Analyse

Dieses Kapitel befaßt sich mit der formalen Untersuchung des quadratischen Drei–Generator–Ansatzes (5.13) von Gatski und Speziale. Das Hauptaugenmerk der Untersuchungen gilt der Leistungsfähigkeit unterschiedlicher Techniken zur Darstellung von $(P/\varepsilon)_g$, insbesondere der hier entwickelten quasi–selbstkonsistenten (QS) Approximation, in fundamentalen inkompressiblen Strömungszuständen. Einen weiteren Schwerpunkt des Kapitels bildet die Validierung der Koeffizienten des vorgeschlagenen FRLT–EASM in Konkurrenz zu herkömmlichen (linearen) Druck–Scher–Korrelationsmodellen. Die Untersuchungen widmen sich zunächst der Vorhersage von elementaren homogenen Turbulenzfeldern bei moderater und starker Distorsion. Anhand des illustrativen Beispiels der achsensymmetrischen Distorsion wird die dem EASM zugrunde liegende Funktionsbasis kritisch beleuchtet. Daran anschliessend wird die Realisierbarkeit der Modellbildung für fundamentale Strömungszustände demonstriert. Abschließend werden die Koeffizienten des Druck–Scher–Korrelationsmodells in Hinblick auf die Darstellbarkeit von Stromlinienkrümmung und sekundären Strömungsmerkmalen analysiert.

7.1 Homogene Scherturbulenz

Die Analyse der berechneten Gleichgewichtswerte des Reynolds–Spannungstensors für homogene Scherturbulenz zählt zu den wichtigsten Eckpfeilern einer Beurteilung von Turbulenzmodellen. Die einzige von Null verschiedene Komponente des Geschwindigkeitsgradienten–Tensors $\partial U/\partial y = S^*$ sei hierbei positiv, und ebenso wie alle statistischen Turbulenzgrößen räumlich konstant.

Gleichgewichtszustand

Für homogene Scherturbulenz lauten die modellierten Transportgleichungen der Turbulenzenergie (1.73) und Disspationsrate (1.74)

$$\frac{\partial k}{\partial t} = P - \varepsilon \;, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{k}\left(C_{\varepsilon 1}\, P - C_{\varepsilon 2}\, \varepsilon\right) \qquad \text{mit} \quad P = c_\mu\, S^2\, \varepsilon \;, \tag{7.1}$$

deren Langzeitverhalten (Index ∞) durch folgende Gleichgewichtsbeziehung charakterisiert ist

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_\infty = \frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_\infty \;. \tag{7.2}$$

Aus Gleichung (7.2) ergibt sich unmittelbar der bereits in Kapitel 6.2 verwendete Gleichgewichtswert für die spezifische Produktionsrate

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_\infty = \frac{C_{\varepsilon 2} - 1}{C_{\varepsilon 1} - 1} := C_5 \;, \tag{7.3}$$

Tabelle 7.1: Berechnete Gleichgewichtswerte des Scherparameters für die ebene homogene Scherung ($k-\varepsilon$ Modell). Vergleich der Ergebnisse mit quasi-selbstkonsistenter Approximation von $\tilde{g}$ nach (6.24) mit der regularisierten Technik $\overline{c}_\mu(\overline{g})$ nach (6.13) bzw. (6.14) und der selbstkonsistenten Technik (SK) nach Gleichung (6.22). Die Ergebnisse des linearen Standardmodells nach Jones et al. (1972) sind durch den Terminus **lin.** gekennzeichnet.

$k-\varepsilon$	LRR	TB	GS	FRLT	GL	GY	RO	lin.	Exp.
$c_{\varepsilon 1}$	1.44	1.44	1.44	1.44	1.44	1.40	1.44	1.44	
$c_{\varepsilon 2}$	1.90	1.90	1.83	1.83	1.92	1.80	1.92	1.92	
C_5	2.05	2.05	1.89	1.89	2.09	2.00	2.09	2.09	
$S_\infty(\tilde{g})$	5.51	6.93	5.98	6.01	5.75	5.12	5.39	4.82	6.08
$S_\infty(\overline{g})$ (Reg. nach (6.14))	5.45	6.84	6.02	6.36	5.79	5.36	5.62	—	—
$S_\infty(g)$ (SK nach (6.22))	5.45	6.84	5.99	6.25	5.65	5.13	5.39	—	—

und damit von (7.1) ein exponentielles Wachstum für die Turbulenzenergie

$$k_\infty(\tau) = k_0 \, \exp\left(\frac{\tau}{S}\,\frac{C_{\varepsilon 2}-C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 1}-1}\right) \,, \qquad \text{mit} \qquad \tau = t\,S^* = \frac{t}{T_t}\,\sqrt{2\,\eta_1}\,. \tag{7.4}$$

Experimentelle Untersuchungen von Tavoularis und Corrsin (1981) ordnen dem Gleichgewichtszustand einen Scheratenparameterwert $S_\infty = \sqrt{2\eta_1}_\infty = 6.08$ zu, direkte numerische Simulationen von Rogers et al. (1986) ermitteln demgegenüber leicht geringere Werte ($S_\infty = 5.7$). Die von den unterschiedlichen EASM berechneten Gleichgewichtswerte S_∞ sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Da sich alle Techniken zur Darstellung von $(P/\varepsilon)_g$ auf den Gleichgewichtszustand beziehen, variieren die Ergebnisse einzelner Druck–Scher–Korrelationsmodelle diesbezüglich nur geringfügig. Die größten Abweichungen treten im Zusammenhang mit den GY–, RO– und FRLT–EASM auf. Dabei ist zu berücksichtigen, daß sich die Wahl des Rotta–Koeffizienten des FRLT–Modells nach Geichung (6.27) eng an die Darstellung von $(P/\varepsilon)_g$ anlehnt. Auffällig ist die mit fallendem β_3 einsetzende Abweichung zwischen selbstkonsistentem und regularisiertem Ergebnis, welche durch den bereits in Gleichung (6.14) erörterten Einfluß des Koeffizienten β_3 auf die Güte der Padé–Approximation erklärt werden kann.

Anisotropietensor der Reynolds–Spannungen im Gleichgewichtszustand

Tabelle 7.2 vergleicht die von verschiedenen EASM berechneten Reynolds–Spannungen mit Experimenten und direkten numerischen Simulationen für drei verschiedene Scherraten. Die beiden höheren Scherraten beziehen sich auf die ebene homogene Scherung, der niedrigere Wert $S = 3.3$ entspricht dem logarithmischen Bereich einer Kanalströmung. Hierbei ist zu beachten, daß bei einer Kanalströmung genau genommen natürlich keine homogene Scherung vorliegt, ein Vergleich aber durchaus zweckmäßig ist. Da es sich bei den betrachteten Beispielen um Gleichgewichtszustände handelt, in denen Transportterme von untergeordnetem Einfluß sind, dürften sich die Ergebnisse

der Transportgleichungsmodelle kaum von den hier gezeigten EASM–Ergebnissen unterscheiden. Die berechneten Werte basieren auf der quasi–selbstkonsistenten Bestimmung des Gleichgewichtsparameters $\tilde{g}$ nach Gleichung (6.24). Zur Verdeutlichung der Bedeutung einer selbstkonsistenten bzw. quasi–selbstkonsistenten Vorgehensweise sind die Ergebnisse des regularisierten GS–Modells im Zusammenhang mit dem konstanten Gleichgewichtswert $\overline{g}$ nach Gleichung (6.13) unter der Kurzform $\mathbf{GS}_{\mathrm{reg}}$ ergänzend aufgeführt.

Abid und Speziale (1993) weisen darauf hin, daß sowohl für die Kanalströmung als auch für die homogene Scherströmung ähnliche Anisotropiewerte berechnet werden sollten. Diese Aussage läßt sich durch den Vergleich der DNS einer Kanalströmung (Kim et al., 1987) mit den Messungen von Laufer (1951) nicht bestätigt. Trotzdem ist ein solches Vorhersageverhalten positiv zu bewerten. Dies gilt insbesondere für die elementar wichtige Schubspannungskomponente b_{12}.
Der Vergleich der $\mathrm{GS}_{\mathrm{reg}}$– und SSG–Variante in Tabelle 7.2 deutet an, daß nahezu konstante Schubspannungskomponenten mit einem regularisierten EASM nicht zu verwirklichen sind. Eine Erklärung hierzu ergibt sich aus der Analyse des Rotta–Koeffizienten C_1. Die Unabhängigkeit der Schubspannungskomponente von der Scherrate ist nur bei hinreichend kleinen Rotta–Koeffizienten zu gewährleisten, was z.B. deutlich aus der vergleichenden Betrachtung der GL– und GY–Ergebnisse hervorgeht. Je geringer der im Modell verankerte Rotta–Koeffizient ist, desto einflußreicher ist der Unterschied zwischen variablem oder konstantem $(P/\varepsilon)_g$ auf den Gleichgewichtskoeffizienten g. Eine gleichmäßig gute Vorhersage der homogenen Scherturbulenz und der Kanalturbulenz ist daher mit regularisierten Modellen nicht möglich.

Der Einfluß des Rotta–Koeffizienten C_1 auf den Grad der Anisotropie einer homogenen Scherströmung ist verblüffend. Mit Hilfe des EASM läßt leicht sich leicht zeigen, daß die Koordinaten des Anisotropietensors für eine Scherströmung ($\eta_1 = 2(s_{12})^2$) im Falle von $C_1 = 1$ zu Konstanten degenerieren

$$b_{11} = -c_\mu \frac{\eta_1}{g}\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{3}\right) , \qquad b_{22} = c_\mu \frac{\eta_1}{g}\left(\beta_2 - \frac{\beta_3}{3}\right) , \qquad |b_{12}| = c_\mu \sqrt{\frac{\eta_1}{2}} \quad . \tag{7.5}$$

Die exakte Gleichung (6.20) zur Bestimmung des Gleichgewichtsparameters g lautet in Scherströmungen

$$g = (C_1^* + 1)\,\frac{P}{\varepsilon} = 2\,(C_1^* + 1)\,c_\mu \eta_1 = \frac{-2\beta_1^* \eta_1}{g + \frac{2\eta_1}{g}\left(\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{3}\right)} ,$$

$$\rightsquigarrow \quad g = \sqrt{\eta_1}\,\underbrace{\sqrt{2\left(\frac{\beta_3^2}{3} - \beta_2^2 - \beta_1^*\right)}}_{:=\gamma} \quad .$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Definition des Anisotropieparameters c_μ ein

$$c_\mu = \frac{-\beta_1}{\sqrt{\eta_1}\left[\gamma + \frac{2}{\gamma}\left(\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{3}\right)\right]} \quad ,$$

dann ergeben sich gemäß (7.5) unmittelbar von der Scherrate unabhängige b_{ij}-Werte.

Aus der nachfolgenden kurzen Beurteilung unterschiedlicher Vorgehensweisen zur Modellierung der Druck–Scher–Korrelationen ergeben sich weitere konzeptionelle Defizite.

IP–Modelle

Sämtliche IP–Modelle offenbaren Schwierigkeiten bei der Berechnung der scheinbar einfachen homogenen Scherturbulenz. Die Schubspannungskomponente wird von allen Formulierungen deutlich überschätzt, die Spannungsanisotropie jedoch unterschätzt, woraus sich ein struktureller Widerspruch ableiten läßt. Insbesondere die fehlerhafte Berechnung von b_{12} ist zu bemängeln. Wegen $C_3 = C_4 = 1.5\,C_2$ sind IP–Modelle in ebenen Scherströmungen unweigerlich mit der Anomalie $b_{22} = b_{33}$ verbunden. Daraus resultieren signifikante Defizite bei der Vorhersage von Wandturbulenz oder turbulenten Sekundärströmungen in scherdominierten Strömungszuständen (vgl. Kapitel 7.5). Die im IP–Modell verankerte Kopplung zwischen den Koeffizienten des schnellen Druck–Scher–Korrelationsmodells erscheint daher fragwürdig. Das GL–Modell ist den GY– und RO–Vorschlägen in ebenen Scherströmungen tendenziell überlegen.

QI–Modelle

Das LRR–Modell führt aufgrund der mangelhaften Abstimmung der Koeffizienten zu ähnlich unbefriedigenden Ergebnissen wie die IP–Modelle. Die Schubspannungskomponente wird deutlich überschätzt, was für die Berechnung von Scherströmungen fatale Auswirkungen haben kann. Die Normalspannungsanisotropie wird weit unterschätzt.
Die von Taulbee vorgeschlagene Modifikation des LRR–Modells, die auch von Wallin und Johansson (2000) zur Formulierung eines EASM benutzt wird, erweist sich der ursprünglichen LRR–Formulierung in Bezug auf die Schubspannung überlegen. Die Normalspannungen werden demgegenüber noch schlechter als vom LRR–Modell vorhergesagt. Das TB–Modell unterscheidet sich für ebene Scherströmungen daher faktisch nicht von guten linearen Wirbelzähigkeitsmodellen. Die Wahl von $C_3 = 2$ führt darüber hinaus in diesen Strömungen unsinnigerweise immmer auf $b_{33} = 0$, weswegen sich der physikalisch wichtige Umverteilungsmechanismus auf zwei Komponenten beschränkt. Die Vernachlässigung der dritten Komponente ist von Nachteil für die Darstellung von Anisotropiezuständen, beispielsweise in Zusammenhang mit der Integration des wandnahen low–Re Bereichs.

Die FRLT– und SSG–Varianten sind für alle drei Scherraten mit bemerkenwert guten Resultaten verbunden. Die gute Übereinstimmung der Vorhersagen dieser beiden Modelle belegt die Qualität der quasi–selbstkonsistenten FRLT–Modellbildung.

Tabelle 7.2: Berechnete Werte des Anisotropietensors für die ebene homogene Scherung. Aufgelistete $P/\varepsilon = -2b_{12}S$. Mit Ausnahme von $\mathtt{GS}_{\mathrm{reg}}$ wurden alle Ergebnisse mit der quasi-selbstkonsistenten Approximation des Gleichgewichtsparameters g nach (6.24) berechnet.

$k-\varepsilon$	S	b_{11}	b_{22}	b_{12}	P/ε	c_μ
Launder, Reece und Rodi (LRR)	6.08	0.148	-0.116	-0.185	2.001	0.061
	5.7	0.149	-0.117	-0.186	1.886	0.065
	3.3	0.149	-0.117	-0.186	1.227	0.112
Taulbee (TB)	6.08	0.123	-0.123	-0.147	1.788	0.049
	5.7	0.122	-0.122	-0.147	1.676	0.052
	3.3	0.112	-0.112	-0.145	0.957	0.088
Speziale, Sarkar und Gatski (SSG)	6.08	0.217	-0.159	-0.156	1.897	0.052
	5.7	0.214	-0.155	-0.157	1.790	0.055
	3.3	0.179	-0.131	-0.158	1.043	0.096
lin. reg. Gatski und Speziale ($\mathrm{GS}_{\mathrm{reg}}$)	6.08	0.205	-0.149	-0.157	1.909	0.052
	5.7	0.193	-0.141	-0.157	1.790	0.055
	3.3	0.099	-0.072	-0.138	0.911	0.084
Fu, Rung, Lübcke und Thiele (FRLT)	6.08	0.218	-0.157	-0.157	1.909	0.052
	5.7	0.215	-0.155	-0.157	1.790	0.055
	3.3	0.180	-0.130	-0.158	1.043	0.096
Gibson und Launder (GL)	6.08	0.182	-0.091	-0.182	2.213	0.060
	5.7	0.181	-0.090	-0.182	2.075	0.064
	3.3	0.163	-0.081	-0.175	1.155	0.106
Gibson und Younis (GY)	6.08	0.253	-0.126	-0.198	2.408	0.065
	5.7	0.247	-0.123	-0.197	2.246	0.069
	3.3	0.179	-0.089	-0.181	1.195	0.110
Rotta (RO)	6.08	0.248	-0.124	-0.197	2.396	0.065
	5.7	0.238	-0.119	-0.196	2.234	0.069
	3.3	0.143	-0.072	-0.168	1.109	0.102
lineares Standardmodell	6.08	0.0	0.0	-0.273	3.320	0.09
(c_μ =const)	5.7	0.0	0.0	-0.257	2.930	0.09
	3.3	0.0	0.0	-0.149	0.983	0.09
Exp. Tavoularis und Corrsin (1981)	6.08	0.210	-0.151	-0.155	1.88	0.051
DNS Rogers et al.(1986)	5.7	0.215	-0.153	-0.158	1.85	0.055
Kanal **DNS** Kim et al. (1987)	3.3	0.179	-0.127	-0.143	0.996	0.087
Kanal **Exp.** Laufer (1951)	3.1	0.220	-0.150	-0.160	0.992	0.103

Instationäres Verhalten bei langsamer und schneller Variation der Scherrate

Im Folgenden werden eine gleichgewichtsnahe und eine stark nichtgleichgewichtige homogene Scherung verglichen, welche sich durch die zeitliche Änderung der dimensionslosen Scherrate $S = S^* k/\varepsilon$ unterscheiden (Abbildung 7.1). Aufgrund der geringfügigen Abweichung der Anfangsbedingung S_0 vom Gleichgewichtszustand S_∞ ist die gleichgewichtsnahe Scherung mit einer langsamen Änderung der Scherrate verbunden. Die Realisierung der nichtgleichgewichtigen Strömung geschieht durch entsprechend große Abweichungen der Anfangsbedingung vom Gleichgewichtszustand.

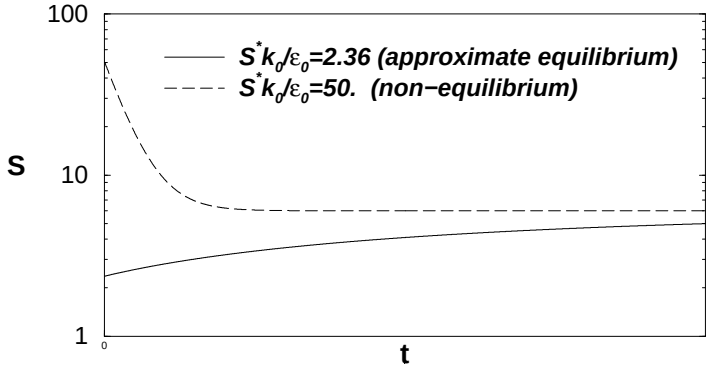


Abbildung 7.1: Zeitliche Entwicklung des Scherratenparameters S in einer homogenen Scherung bei zwei verschiedenen Anfangsbedingungen ($S^* k_0/\varepsilon_0 = 2.36$ bzw. $S^* k_0/\varepsilon_0 = 50$).

Gleichgewichtsnaher Fall (schwache Distorsion)

Abbildung 7.2 zeigt die zeitliche Entwicklung der Reynolds–Spannungen in einer homogenen Scherung zur Anfangsbedingung $S_0 = 2.36$. Der Vergleich der Resultate unterschiedlicher EASM–Varianten mit der von Rogers, Moin und Reynolds (1986) publizierten direkten numerischen Simulation untermauert die oben gezogenen Schlußfolgerungen. Keines der in Abbildung 7.2 (unten) zusammengefassten IP–Modelle vermag zwischen den beiden sekundären Normalspannungskomponenten zu differenzieren. Das FRLT–Modell (Abbildung 7.2 oben) besitzt trotz der eher moderaten Scherung deutliche Vorteile gegenüber den anderen Varianten bei der Vorhersage dieser Strömung.
Auffällig sind die signifikanten Abweichungen aller EASM–Ergebnisse im frühen transienten Bereich ($St \leq 5$). Diese resultieren aus der Vernachlässigung der substantiellen Änderung des Anisotropietensors im Rahmen des hypothetisch angenommenen strukturellen Gleichgewichts (Gleichung 4.8). Aufgrund der nicht verschwindenden Anfangsscherrate startet die RANS im Unterschied zur DNS aus anisotropen Zuständen. Sie durchläuft nur eine kurze transiente Phase, in der sich der Scherratenparameter S dem Gleichgewichtswert S_∞ nähert, der Grad der Spannungsanisotropie folgt unmittelbar aus den aktuellen Parameterwerten von S. Untersuchungen zum transienten Verhalten sind demnach allenfalls für isotrope Turbulenzgrößen sinnvoll. Mit zunehmender Be-

deutung der substantiellen Änderung des Anisotropietensors kommt es darüber hinaus zu Fehlern bei der Berechnung der Produktionsterme, worunter auch die Vorhersage isotroper Größen leidet. Dies betrifft weniger die Simulation von Scherturbulenz als die weiter unten diskutierte Vorhersage der rotationsfreien Distorsion, da die Normalspannungsanisotropie dort über entsprechende Gradienten die Entwicklung der spezifischen Produktionsrate ($P/\varepsilon \sim b_{ij} s_{ij}$) nachhaltig beeinflußt.

Ein praxisbezogenes Beispiel für die Bedeutung der Transportterme ist die Berechnung konfluenter Scherschichten, die beispielsweise im Zusammenhang mit der Simulation aerodynamischer Hochauftriebskonfigurationen (Ying et al. 1999) relevant sind. Hierbei kommt es in Ermangelung von Transporttermen zu deutlichen Qualitätseinbußen. Speziale und Xu (1996) schlagen zur Berücksichtigung der lokalen Änderung das in Kapitel 8.1 skizzierte Relaxationsmodel vor, dessen Gültigkeitsbereich auf krümmungsarme, quasi–isotrope Zustände bechränkt ist. Alternativ hierzu können die vollständigen Transportterme (vgl. Kapitel 5.3) berücksichtigt werden, wovon in dieser Arbeit jedoch kein Gebrauch gemacht wird.

Nichtgleichgewichtsfall (starke Distorsion)

Die Simulation einer stark nichtgleichgewichtigen homogenen Scherung ist aufgrund der hohen Anfangsscherrate $S_0 = 50$ von Interesse. Das Beispiel eignet sich primär zur Evaluierung der im Rahmen von Kapitel 6 angestellten Überlegungen zum sog. *Rapid–Distortion–Limit* ($\lim \eta_1 \to \infty$) des Anisotropieparameters c_μ und ermöglicht eine Überprüfung der quasi–selbstkonsistenten Approximation von $(P/\varepsilon)_g$. Inkonsistenzen eines Turbulenzmodells im Rapid–Distortion–Limit sind häufig mit fehlerhaften Simulationsergebnissen in Nichtgleichgewichtsströmungen verknüpft und sollten daher vermieden werden. Da eine transiente Analyse allenfalls für die isotropen Turbulenzgrößen sinnvoll ist, beschränken sich die gezeigten Resultate an dieser Stelle auf die zeitliche Entwicklung der Turbulenzenergie.

Abbildung 7.3 vergleicht die diesbezüglich vorhergesagten Werte mit den Ergebnissen der Rapid–Distortion–Theorie (RDT), welche der Arbeit von Rogers (1991) entnommen wurden. Verglichen mit der zuvor untersuchten gleichgewichtsnahen Anwendung verschlechtert sich die Qualität der Ergebnisse deutlich unter dem Einfluß der phasenweise extrem hohen Scherrate. Das regularisierte Modell unterschätzt das Wachstum der Turbulenzenergie aufgrund des bereits in Gleichung (6.17) konstatierten niedrigen asymptotischen Grenzwertes des Anisotropieparameters. Das herkömmliche $k-\varepsilon$ Modell überschätzt demgegenüber das Wachstum der Turbulenzenergie entsprechend der Überproportionalität des asymptotischen Grenzwertes. Im Gegensatz zur regularisierten Formulierung, bzw. dem linearen $k-\varepsilon$ Modell, sind mit den asymptotisch korrekten (quasi–) selbstkonsistenten Modellen deutliche Verbesserungen zu erzielen.

Die Ursache für die verminderte Simulationsgüte bei hohen Scherraten liegt partiell in der isotropen, gleichgewichtsorientierten Modellbildung des Dissipationsraten–Tensors. Für den isotropen Anteil des Spannungstensors k/k_0 verbessern sich die Ergebnisse

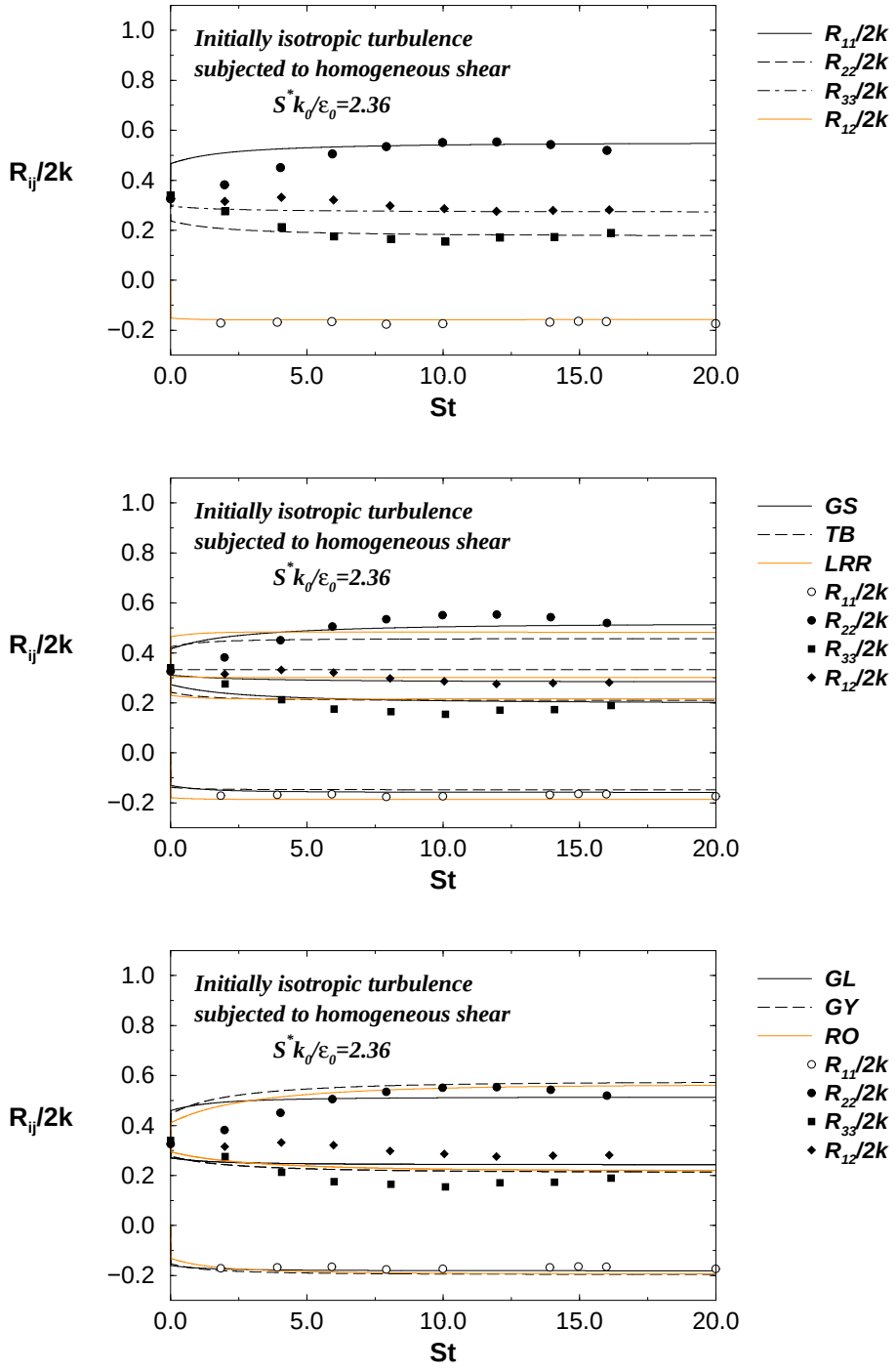


Abbildung 7.2: Zeitliche Entwicklung der Reynolds–Spannungen in einer ebenen, homogenen Scherung (Anfangsbedingung $S^*k_0/\varepsilon_0 = 2.36$); Vergleich der quasi–selbstkonsistenten EASM–Ergebnisse mit der direkten numerischen Simulation von Rogers et al. (1986).

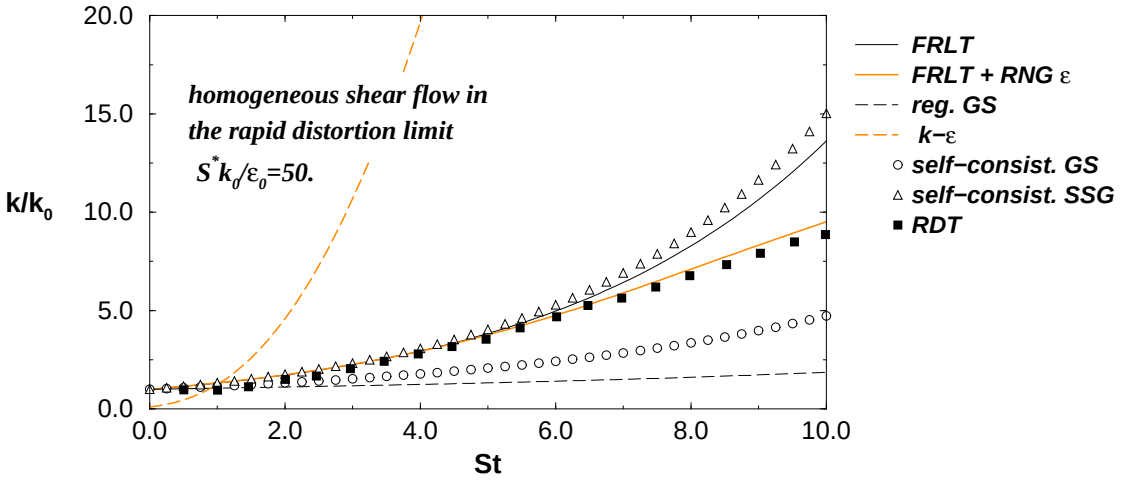


Abbildung 7.3: Zeitliche Entwicklung der Turbulenzenergie bei einer ebenen homogenen Scherung im Rapid–Distortion–Limit (Anfangsbedingung $S^*k_0/\varepsilon_0 = 50$); Vergleich unterschiedlicher EASM–Ergebnisse mit der Rapid–Distortion–Theorie (Rogers et al. 1991).

trotz isotroper Modellbildung bereits deutlich bei der Verwendung einer nichtgleichgewichtsbasierten Formulierung der Dissipationsratengleichung. Abbildung 7.3 belegt dies anhand des Resultats einer modifizierten Dissipationsratengleichung (**FRLT + RNG** ε)

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44 - \frac{S(1 - S/S_\infty)}{1 + 0.015 \cdot S^3}\,, \qquad \text{mit} \quad S_\infty \ \text{nach Tabelle 7.1}\,,$$

welche von Yakhot et al. (1992) entwickelt wurde und auf die Renormalisierungsgruppen–(RNG) Theorie zurück geht (Yakhot und Orzag 1988). Analoge Verbesserungen können von ähnlich konstruierten $C_{\varepsilon 1}$ erwartet werden.
Die hiermit erzielbaren quantitativen Verbesserungen für die Turbulenzenergieentwicklung in einer homogenen, stark gescherten Turbulenz mögen derartige Ansätze legitimieren. Eine detaillierten Betrachtung der Resultate offenbart jedoch, daß Modifikationen aus dem Bereich isotroper Wirbelzähigkeitsmodelle das eigentliche Defizit teilweise maskieren, und der anisotropen Modellbildung nur in Strömungen, die von primären Strömungsmerkmalen dominiert werden, dienlich sind. Im Zuge stark erhöhter Scherraten kommt es zu einer deutlichen Umorientierung der Turbulenzstruktur zur Einkomponenten–Turbulenz, welche vom vorliegenden EASM ungeachtet der spezifischen $C_{\varepsilon 1}$–Formulierung nicht nachvollzogen werden kann. Die fehlerhafte Vorhersage der Turbulenzstruktur spielt mangels entsprechender Geschwindigkeitsgradienten für die Entwicklung der Turbulenzenergie in diesem Beispiel jedoch keine Rolle. Allgemeingültigere Verbesserungen sind nur von anisotropen Dissipationsraten (Xu und Speziale 1996; Gatski et al. 1998) oder aber direkten Korrekturen der Koeffizienten (vgl. Kapitel 8.1) zu erwarten.

7.2 Homogene Turbulenz in rotationsfreier Distorsion

Der folgende Abschnitt analysiert die Vorhersagekraft unterschiedlicher EASM–Varianten für verschiedene homogene rotationsfreie ($w_{ij} \equiv 0$) Scherratenfelder. Hierbei wird wiederum von räumlich konstanten Geschwindigkeitsgradienten und homogenen Turbulenzfeldern ausgegangen. Für die Analyse ist eine Betrachtung auf der Basis der Hauptachsen von s_{ij} hilfreich. Bekanntermaßen besitzt die Säkulargleichung eines positiv semi-definiten Tensors

$$\det\left(s_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}\right) = 0 \tag{7.6}$$

drei reelle Lösungen λ_k (k=1,2,3). Den drei Eigenwerten λ_k sind drei paarweise orthogonale Eigenvektoren zugeordnet. Wählt man die Eigenvektoren als Basisvektoren, so kann s_{ij} durch eine Hauptachsentransformation auf Diagonalgestalt gebracht werden

$$\hat{s}_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{7.7}$$

wobei wegen der Spurfreiheit des Deviators $\underline{\underline{s}}$ zusätzlich $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ gilt. Sortiert man die Eigenwerte nach der Größe ihres Betrags, z.B. $|\lambda_1| > |\lambda_2|; |\lambda_3|$, so ergibt sich unter der Voraussetzung nicht–trivialer Situationen $\lambda_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 = -\lambda_1 \qquad \rightarrow \lambda_2 &= -0.5(\hat{a}+1)\lambda_1 \qquad \text{und} \\ \lambda_3 &= -0.5(\hat{a}-1)\lambda_1\,, \quad -1 \leq \hat{a} \leq 1\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Damit läßt sich (7.7) wie folgt notieren ($\hat{s}_{11} = \lambda_1$)

$$\hat{s}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+\hat{a}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\hat{a}}{2} \end{pmatrix} \hat{s}_{11}\,. \tag{7.9}$$

Hierin kennzeichnet $\hat{s}_{11}$ die dimensionslose Primärdistorsionsgeschwindigkeit im Hauptachsensystem und $\hat{a}$ einen Parameter zur Beschreibung der Abweichung vom zweidimensionalen Distorsionszustand. Die folgenden Untersuchungen konzentrieren sich auf die drei relevanten Grenzfälle des transformierten Scherratentensors (7.9) (vgl. Abbildung 7.4):

- zweidimensionale Distorsion: $\hat{a}^2 = 1$ und $\hat{s}_{11} > 0$,
- achsensymmetrische Kontraktion: $\hat{a} = 0$ und $\hat{s}_{11} > 0$,
- achsensymmetrische Expansion: $\hat{a} = 0$ und $\hat{s}_{11} < 0$.

Die achsensymmetrische Distorsion ist, wie bereits in Kapitel 3.2 diskutiert, mit achsensymmetrischer Turbulenz verbunden. Durch den exakten linearen Stress–Strain–Zusammenhang (3.19) ist die Evaluierung der hier untersuchten, formal aufwendigeren nichtlinearen expliziten Modellbildung von Interesse. Man beachte, daß die über den quadratischen Ansatz $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ hinausgehenden Generatoren $T_{ij}^{(4-10)}$ wegen $w_{ij} \equiv 0$ verschwinden, und die Analyse sich somit ohne Einschränkung auf Allgemeingültigkeit auf $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ beschränkt.

Abbildung 7.4: Veranschaulichung der zweidimensionalen Distorsion (links) und achsensymmetrischen Kontraktion (rechts).

Formale Betrachtung der achsensymmetrische Distorsion

Die Betrachtung der rotationsfreien, achsensymmetrischen Distorsion liefert Einblicke in eventuell vorhandene konzeptionelle Defizite der Funktionsbasis (3.4) eines expliziten algebraischen Spannungsmodells

$$b_{ij} \;=\; \sum_k a_k T_{ij}^{(k)} \;, \tag{7.10}$$

ohne die Projektion in ein ASM durchführen zu müssen. Die darstellungstheoretische Tauglichkeit der gewählten Funktionsbasis ist an die lineare Unabhängigkeit ihrer Generatoren $T_{ij}^{(k)}$ gebunden. Diese läßt sich, unabhängig von der ins Auge gefaßten Projektion, mit Hilfe einer doppelten Überschiebung verifizieren

$$\left[b_{ij} T_{ji}^{(p)}\right] = a_k \underbrace{\left[T_{ij}^{(k)} T_{ji}^{(p)}\right]}_{\text{Gram–Matrix } \mathcal{G}_{kp}} \;. \tag{7.11}$$

Eine Invertierung des Gleichungssystems (7.11) gelingt nur für reguläre Gram–Matrizen. Linear abhängige Generatoren erzwingen demgegenüber einen Rangabfall der Gram–Matrix, der mit entsprechend vielen Nullstellen der Gram–Determinate einhergeht.

Dreidimensionale Integritätsbasis

Für das Beispiel des quadratischen Drei–Generator–Ansatzes $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ (5.13) lautet die

Gram–Matrix und deren Determinante

$$\mathcal{G}_{kp} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \eta_3 \\ 0 & (\eta_1\eta_2 - 6\eta_5) & 0 \\ \eta_3 & 0 & \eta_1^2/6 \end{pmatrix} , \qquad \det[\mathcal{G}_{kp}] = \frac{1}{(\eta_1\eta_2 - 6\eta_5)(\frac{\eta_1^3}{6} - \eta_3^2)} . \quad (7.12)$$

Im Falle der achsensymmetrischen Kontraktion findet man

$$T_{ij}^{(1)} = s_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \hat{s}_{11} , \qquad T_{ij}^{(2)} \equiv 0 , \qquad T_{ij}^{(3)} = \left(\frac{1}{2}\hat{s}_{11}\right) s_{ij} ,$$

und für die Invarianten $\eta_2 = \eta_4 = \eta_5 = 0$, $\eta_1 = 1.5\,\hat{s}_{11}^2$, $\eta_3 = 0.75\,\hat{s}_{11}^3$. Hieraus ergibt sich eine doppelte Nullstelle der Gram–Determinate, weswegen das Gleichungssystem auch in der unten dargestellten vereinfachten Form stets singulär wird

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\eta_1^2}{\eta_1^3 - 6\eta_3^2} & 0 & \frac{6\,\eta_3}{6\eta_3^2 - \eta_1^3} \\ 0 & \frac{1}{\eta_1\eta_2 - 6\eta_5} & 0 \\ \frac{6\,\eta_3}{6\eta_3^2 - \eta_1^3} & 0 & \frac{6\eta_1}{\eta_1^3 - 6\eta_3^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{ij}s_{ij} \\ 0 \\ (0.5\hat{s}_{11})\; b_{ij}s_{ij} \end{pmatrix} . \quad (7.13)$$

Die Übertragung dieser Aussage auf die EASM überprüft man wegen $T_{ij}^{(2)} \equiv 0$ geeigneterweise anhand der Beziehung (5.5). Dabei begünstigt die spezielle Struktur der rechten Seite ($b_{ij}T_{ij}^{(1)}$, $b_{ij}T_{ij}^{(3)}$) die Berechnung der EASM Koeffizienten, weil sich in diesem Falle auch die zweite Nullstelle der Determinante von $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ im Zuge der Invertierung kürzen läßt. Hiervon kann i.Allg. ($\mathcal{T}_{ij} \neq 0$) jedoch nicht ausgegangen werden.

Zweidimensionale Integritätsbasis

Die Problematik der Funktionsbasis $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ erkennt man deutlich aus der Untersuchung der zunächst regulären Gestalt von (7.13), welche man nach Vereinfachung der Integritätsbasis für zweidimensionale Zustände gemäß (3.10) erhält

$$a_1 = \frac{b_{ij}s_{ij}}{\eta_1} \qquad a_2 = 0 , \qquad a_3 = \frac{6}{\eta_1^2}\, b_{ij}T_{ij}^{(3)} = \frac{3\,\hat{s}_{11}}{\eta_1}\; a_1 , \quad (7.14)$$

$$\text{und damit von (7.10)} : \qquad b_{ij} = \left[\left(\frac{2}{\eta_1}\right)\; b_{km}s_{km}\right] s_{ij} . \quad (7.15)$$

Die implizite Beziehung (7.15) birgt einen deutlichen Widerspruch ($P/\varepsilon = 2P/\varepsilon$) in sich, deren Ursachen in der Verwendung linear abhängiger Generatoren liegt. Das Gleichungssystem (7.13) entkoppelt in diesem Falle zu zwei Gleichungen $b_{ij} = a_1 s_{ij}$ und

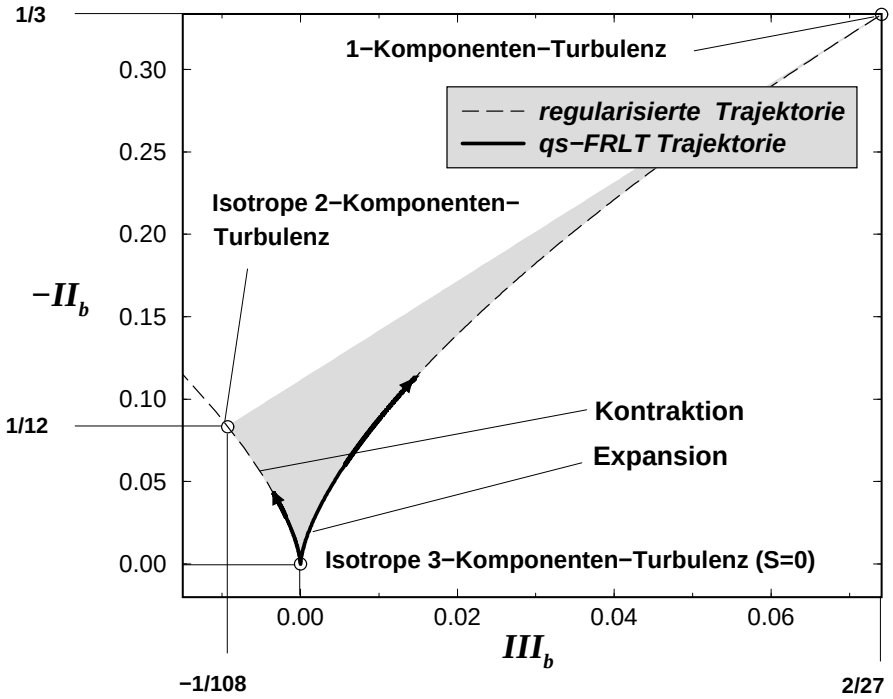


Abbildung 7.5: Achsensymmetrische Turbulenz ($S = 0$ bis 100); Vergleich der Invariantenpfade für die quasi–selbstkonsistente und die regularisierte EASM–Technik (FRLT–Modell).

$b_{ij} = a_3 T_{ij}^{(3)}$. Jede dieser Gleichungen erfüllt die Fundamentalgleichung achsensymmetrischer Turbulenz (3.19), eine Überlagerung beider Anteile ist nicht zulässig und führt zum Widerspruch.

Explizites algebraisches Spannungsmodell

Die im EASM verankerten Koeffizienten (A, B, C) sind, im Gegensatz zu den Koeffizienten (a_1, a_2, a_3), keine Funktion des Spannungsanisotropietensors. Die oben angestellten Überlegungen lassen sich folglich nur bedingt auf die EASM übertragen. Gegenüber einer mehrgliedrigen impliziten Formulierung besitzt die explizite Formulierung des EASM den entscheidenden Vorteil der Konsistenz zur Fundamentalbeziehung (3.19) achsensymmetrischer Turbulenz

$$b_{ij} = \underbrace{\left(A + C\frac{\hat{s}_{11}}{2}\right)}_{-c_{\mu(\mathrm{eff})}} s_{ij} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{II_b^*}{\eta_1} = \left(A + C\frac{\hat{s}_{11}}{2}\right)^2 = c_{\mu(\mathrm{eff})}^2 \ , \tag{7.16}$$

weswegen die achsensymmetrische Turbulenz prinzipiell durch ein EASM darstellbar ist. Im Zusammenhang mit einer selbstkonsistenten (3D) Darstellung von P/ε für diese Funktionsbasis sind jedoch Zweifel angebracht. Einschränkend muß bemerkt werden,

daß sich bei steigender Distorsion in Zusammenhang mit der quasi–selbstkonsistenten Technik eine frühzeitige Stagnation der Invarianten einstellt.
Abbildung 7.5 verdeutlicht, daß das QS–FRLT–Modell in der vorliegenden Form zwar die korrekten Lösungspfade

$$II_b = -0.75\,\tilde{s}_{11}^2\,c_{\mu(\mathrm{eff})}^2\;, \qquad III_b = 0.25\,\tilde{s}_{11}^3\,c_{\mu(\mathrm{eff})}^3$$

$$\rightsquigarrow \qquad \boxed{\left(\frac{III_b}{2}\right)^2 + \left(\frac{II_b}{3}\right)^3 \equiv 0}\,. \tag{7.17}$$

beschreibt (vgl. Anhang A), ein großer Teil der physikalisch möglichen Zustände aber außerhalb des Arbeitsbereichs liegt. Kapitel 8.1 befaßt sich im Rahmen einer Koeffizientenoptimierung mit der Eliminierung dieses Defizites. Ferner entnimmt man der Grafik, daß die regularisierte Technik für große η_1 zu nicht realisierbaren Lösungen führt, deren Trajektorien über die Eckpunkte des grauunterlegten Dreiecks hinauslaufen.

Simulation schwacher rotationsfreier Distorsionen

Der in den Abbildungen 7.6–7.8 illustrierte quantitative Vergleich stellt den Ergebnissen unterschiedlicher EASM die von Lee und Reynolds (1985) durchgeführten direkten numerischen Simulationen der oben diskutierten drei charakteristischen rotationsfreien Distorsionen gegenüber. Die direkten numerischen Simulationen wurden dabei erneut aus dem isotropen Turbulenzzustand gestartet.

Abbildungen 7.6 und 7.7 geben Aufschluß über die Simulationgüte verschiedener selbstkonsistenter EASM bei schwacher achsensymmetrischer Kontraktion ($S_0 = 0.56$) bzw. Expansion ($S_0 = 0.41$). Durch die schwache Ausgangsbelastung weicht die anfängliche Turbulenzstruktur der RANS nur geringfügig vom isotropen Zustand ab. Obwohl sich die Ausgangsbelastungen der untersuchten Fälle nur wenig unterscheiden, erkennt man bereits eine Verschlechterung der vorhergesagten Turbulenzenergie für die höhere Belastung (achsensymmetrische Expansion). Insgesamt sind die Ergebnisse auf der Basis der FRLT und GS Koeffizienten den anderen Alternativen leicht überlegen. Die überraschend gute Vorhersage des RO–Modells ist auf die geringe Intensität der Distorsion zurückzuführen. Analoge Aussagen ergeben sich aus der Betrachtung der in Abbildung 7.8 gezeigten Ergebnisse für die ebene Streckung ($S_0 = 0.50$). Man beachte, daß die Wahl von $C_3 = 2$ (TB–Modell) a priori mit der Neutralisierung des Generators $T_{ij}^{(3)}$ verbunden ist, welcher im Falle der ebenen Streckung einen von zwei linear unabhängigen Generatoren des Problems repräsentiert.

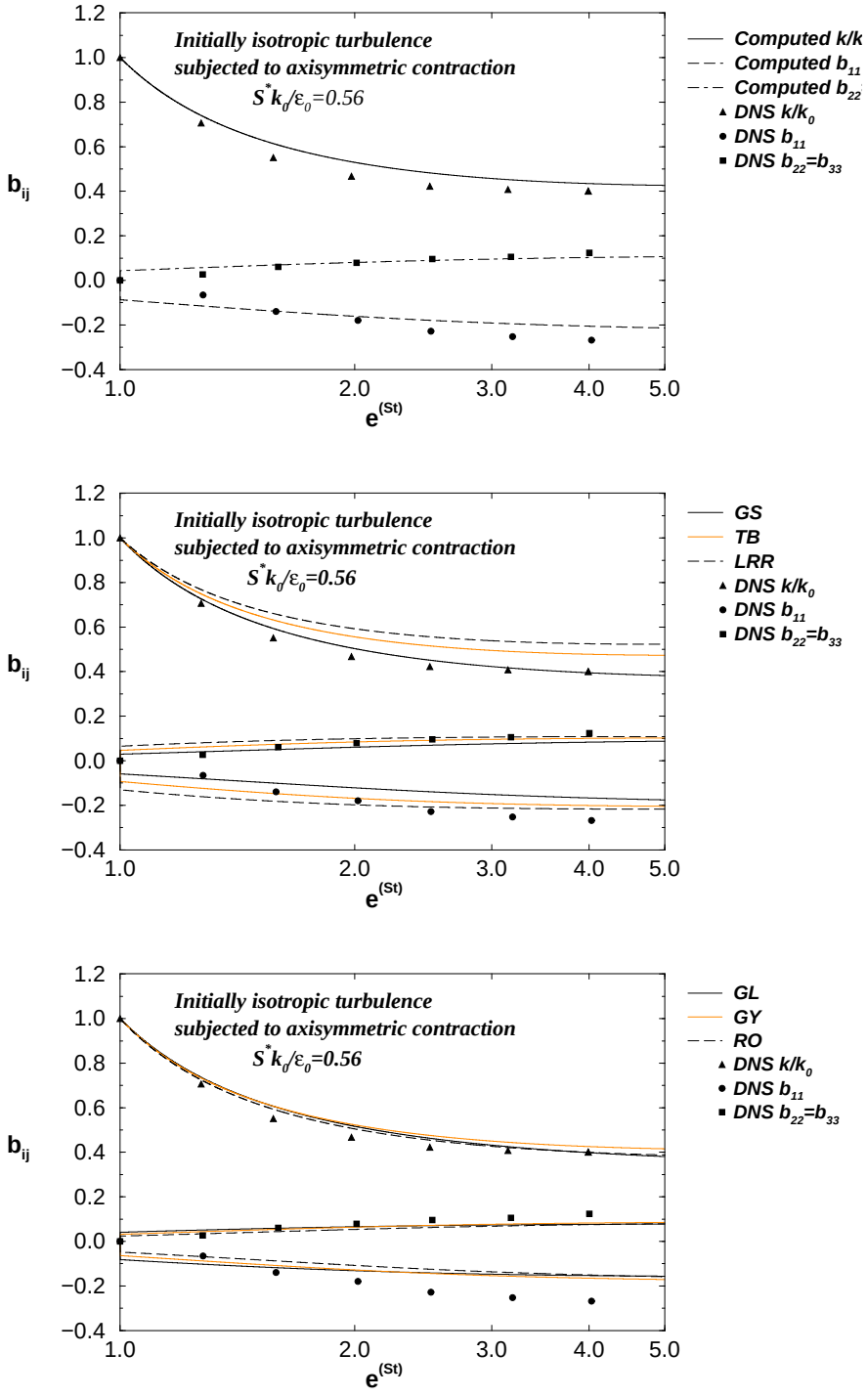


Abbildung 7.6: Achsensymmetrische Kontraktion (Anfangsbedingung $S^*k_0/\varepsilon_0 = 0.56$); Vergleich der vom quasi–selbstkonsistenten FRLT–EASM (oben) und den QI–EASM (mitte) bzw. IP–EASM (unten) vorhergesagten Ergbnisse mit der direkten numerischen Simulation von Lee et al. (1985).

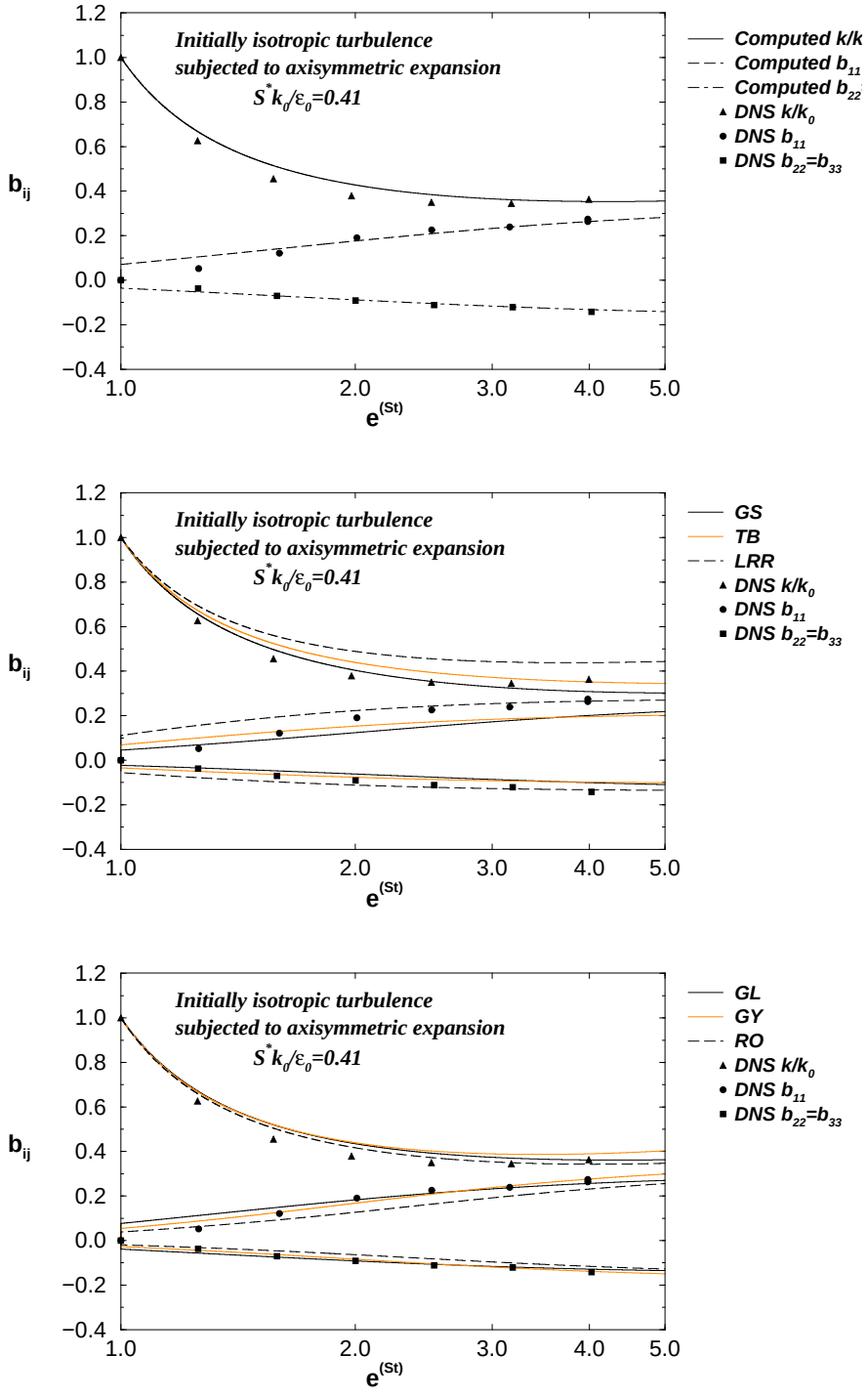


Abbildung 7.7: Achsensymmetrische Expansion (Anfangsbedingung $S^*k_0/\varepsilon_0 = 0.41$); Vergleich der vom quasi–selbstkonsistenten FRLT–EASM (oben) und den QI–EASM (mitte) bzw. IP–EASM (unten) vorhergesagten Ergbnisse mit der direkten numerischen Simulation von Lee et al. (1985).

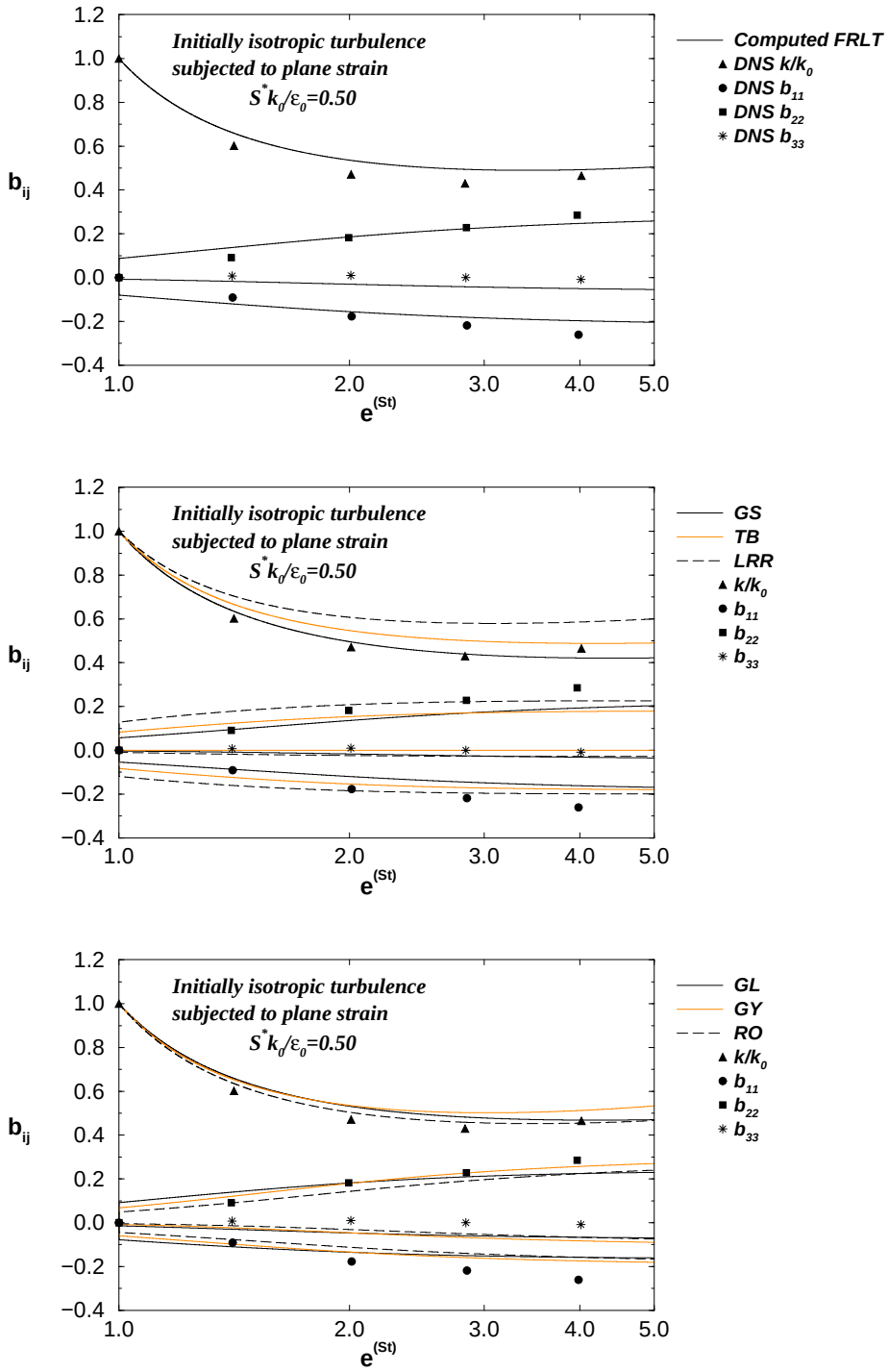


Abbildung 7.8: Ebene Streckung (Anfangsbedingung $S^*k_0/\varepsilon_0 = 0.50$); Vergleich der vom quasi–selbstkonsistenten FRLT–EASM (oben) und den QI–EASM (mitte) bzw. IP–EASM (unten) vorhergesagten Ergbnisse mit der direkten numerischen Simulation von Lee et al. (1985).

7.3 Realisierbarkeit

Die Reynolds–Spannungen entsprechen den zweiten statistischen Momenten von Geschwindigkeitsfluktuationen und genügen daher fundamentalen statistischen Zusammenhängen. Diese werden im Rahmen der numerischen Strömungsmechanik häufig unter dem Begriff *Realisierbarkeit* oder dem englischen Terminus *Realizability–Prinzip* zusammengefaßt (Schumann 1977; Lumley 1978). Neben der bereits in Kapitel 6.4 skizzierten Schwartzschen Ungleichung zählt insbesondere die Gewährleistung positiver Varianzen zu den Inhalten des Realizability–Prinzips

$$\overline{u_\alpha^2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \text{keine negative Varianz,} \tag{7.18}$$

$$\overline{u_\alpha^2}\ \overline{u_\beta^2} - (\overline{u_\alpha u_\beta})^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ungleichung nach Schwartz.} \tag{7.19}$$

Da es sich bei den Varianzen um Anteile kinetischer Turbulenzenergie handelt, ist die Realizability-Restriktion (7.18) auch physikalisch einsichtig: Energie ist nie negativ. Die Schwartzsche Ungleichung ergibt sich aus der Tatsache, daß die Reynolds-Spannungen durch einen symmetrischen, positiv semi-definiten Tensor repräsentiert werden bzw. Korrelationskoeffizienten größer Eins unzulässig sind. Eine strengere Form der Realisierbarkeit befaßt sich mit dem Verhalten der Reynolds–Spannungen bei Erreichen der Minima von (7.18) und (7.19). Das absolute Minimum ist in diesem Falle das einzige physikalisch realisierbare Szenario, weswegen die erste zeitliche Ableitung der beiden linken Seiten verschwinden, und die erste von Null verschiedene Zeitableitung positiv sein muß.

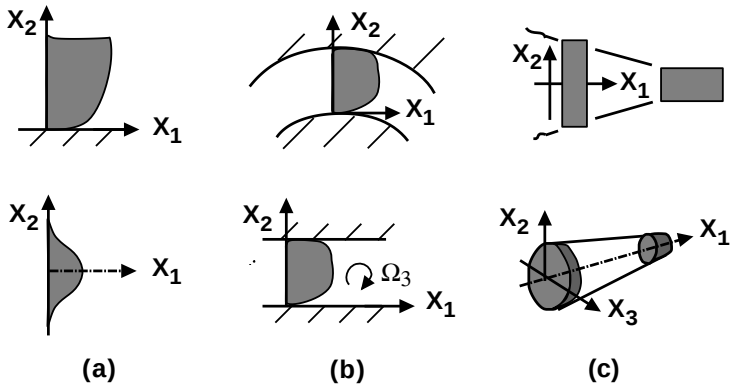


Abbildung 7.9: Illustration der Anwendungsbeispiele der Realisierbarkeitsuntersuchung; (a) ebene Scherströmung, (b) rotierende bzw. gekrümmte Scherströmung, (c) rotationsfreie Distorsion (Beschleunigung).

Für die im Folgenden durchgeführte Realizability–Untersuchung spielt die strenge Form der Realisierbarkeit keine Rolle. Da die Gewährleistung der Schwartzschen Ungleichung bereits in Kapitel 6.4 ausführlich erörtert wurde, beschränken sich die anschließenden Untersuchungen auf die *Normalspannungs–Realizability* $\overline{u_\alpha^2} \geq 0$.

Häufig bezieht man sich bei der Realizability–Untersuchung auf ein ausgezeichnetes Koordinatensystem, um darin eine allgemeingültige Aussage zu entwickeln. Ein Beispiel hierfür ist die von Rung (1998a) durchgeführte Untersuchung linearer Wirbelzähigkeitsbeziehungen auf der Basis der Hauptachsen des Scherraten–Tensors, die auch in zahlreichen Arbeiten von Shih verwendet wurden (Shih et al. 1993; Shih et al. 1995; Shih et al. 1995). Vor dem Hintergrund einer beliebig komplexen Funktionsbasis wird die Definition eines ausgezeichneten Koordinatensystems zusehends schwieriger. Deswegen soll hier, in Anlehnung an die von Rung, Thiele und Fu (1999) skizzierte Vorgehensweise, nur die Realisierbarkeit der in Abbildung 7.9 skizzierten Strömungszustände exemplarisch behandelt werden. Bei den betrachteten Strömungen handelt es sich um Grundbausteine der klassischen Modellbildung, deren Realisierbarkeit zu den Mindestanforderung an die Turbulenzmodellierung gehören sollte. Die untersuchten Strömungen behandeln zweidimensionale und achsensymmetrische Probleme, weshalb sich die Analyse auf den quadratischen Drei–Generator–Ansatz (5.13) mit den in (5.18) notierten Koeffizienten stützt. Rung et al. (1999) zeigten, daß die regularisierte Technik unweigerlich mit einer Verletzung des Realizability–Prinzips einhergeht, weshalb hier vorwiegend die quasi–selbstkonsistente Technik untersucht wird. Um den Einfluß einer höherwertigen $(P/\varepsilon)_g$ Approximation zu unterstreichen, werden die Ergebnisse der regularisierten und selbstkonsistenten Technik der Vollständigkeit halber hinzugefügt.

Realisierbarkeit ebener Scherströmungen

Die ebene, wandgebundene oder freie Scherschicht nach Abbildung 7.9(a) gehört sicherlich zu den wichtigsten Strömungsbeispielen. Anhand von Abbildung 2.1 erkennt man, daß der überwiegende Teil der Turbulenzenergie einer Grenzschicht $U_1(x_2)$ in der Hauptströmungskomponente $\overline{u_1^2}$ zu finden ist, wohingegen der am meisten gedämpfte Energieanteil aus kinematischen Gründen die wandnormale Komponente $\overline{u_2^2}$ ist. Das Realizability–Prinzip verlangt, daß keine Komponente der Normalspannungen negativ werden darf. Mit Hilfe von (2.2), (5.13) und (5.18) findet man für die kritische Normalspannung $\overline{u_2^2}$ und die Querströmungskomponente $\overline{u_3^2}$ in dieser Strömung

$$\overline{u_2^2} = \frac{2}{3}k - 2\,c_\mu\,k\left[-\frac{\beta_2}{\tilde{g}}\eta_1 + \frac{\beta_3}{3\tilde{g}}\eta_1\right], \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{u_3^2} = \frac{2}{3}k - 2\,c_\mu\,k\left[-\frac{\beta_3}{3\tilde{g}}\eta_1\right] \tag{7.20}$$

und damit

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad \lim_{\eta_1\to\infty}\left(\frac{\overline{u_2^2}}{2k}\right) &= \frac{1}{3} + \left(\frac{c_\mu\,\eta_1}{\tilde{g}}\right)\left[\beta_2 - \frac{\beta_3}{3}\right] \geq 0\,, \qquad (7.21)\\ \lim_{\eta_1\to\infty}\left(\frac{\overline{u_3^2}}{2k}\right) &= \frac{1}{3} + \left(\frac{c_\mu\,\eta_1}{\tilde{g}}\right)\frac{2\beta_3}{3} \qquad \geq 0\,. \end{aligned}$$

Tabelle 7.3: Grenzwerte der Normalspannungskomponenten in ebenen Scherströmungen bei hohen Scherraten; alle Ergebnisse basieren, mit Ausnahme von $\mathtt{LRR_{reg}}$, auf der Basis der quasi–selbstkonsistenten Technik (6.24).

$\lim_{\eta_1 \to \infty}$	LLR	TB	GS	FRLT	GL	GY	RO	$\mathrm{LRR_{reg.}}$
$\left(\frac{\overline{u_1^2}}{2k}\right)_{\mathrm{shear}}$	0.459	0.453	0.585	0.583	0.510	0.682	0.794	0.766
$\left(\frac{\overline{u_2^2}}{2k}\right)_{\mathrm{shear}}$	0.235	0.214	0.150	0.153	0.245	0.159	0.103	-0.006
$\left(\frac{\overline{u_3^2}}{2k}\right)_{\mathrm{shear}}$	0.306	0.333	0.265	0.264	0.245	0.159	0.103	0.240

Durch die Abschätzung

$$\lim_{\eta_1 \to \infty} \left(\frac{c_\mu \, \eta_1}{\tilde{g}} \right) = \frac{-\beta_1}{\frac{2}{(1.83)^2} + 2\left(\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{3}\right)}$$

ergeben sich die in Tabelle 7.3 notierten Grenzwerte der Normalspannungs–Komponenten in Abhängigkeit vom zugrunde liegenden Druck–Scher–Korrelationsmodell. Abbildung 7.10 veranschaulicht den monotonen Abfall der kritischen Normalspannungskomponente $\overline{u_2^2}/(2k)$ mit η_1 für die Mehrzahl der quasi–selbstkonsistenten EASM Varianten. Der in Abbildung 7.11 unten deutlich sichtbare Nulldurchgang der kritischen Normalspannung des regularisierten LRR–EASM verdeutlicht die Problematik einer niederwertigen Approximation von $(P/\varepsilon)_g$. Eine Verletzung des Realizability–Prinzips tritt jedoch nur in Zusammenhang mit dem regularisierten LRR–Modell auf. Auffällig ist

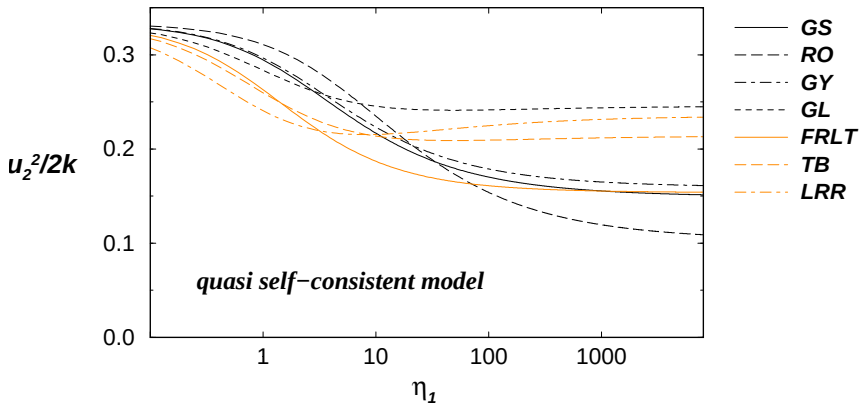


Abbildung 7.10: Entwicklung der dimensionslosen Normalspannung $\overline{u_2^2}/(2k)$ bei ebener Scherung und quasi–selbstkonsistenter Technik.

ferner die bereits in Kapitel 7.1 angesprochene schwache Normalspannungsanisotropie der TB und LRR Varianten, sowie die mangelhafte Unterscheidung von Quer– und

Normalkomponenten durch IP–Modellen. Daneben stellt man fest, daß die Normalspannung bei quasi–selbstkonsistenter Modellbildung vorzeitig stagniert, wohingegen die Resultate der selbstkonsistenten Modellierung über einen weiteren Invariantenbereich variieren.

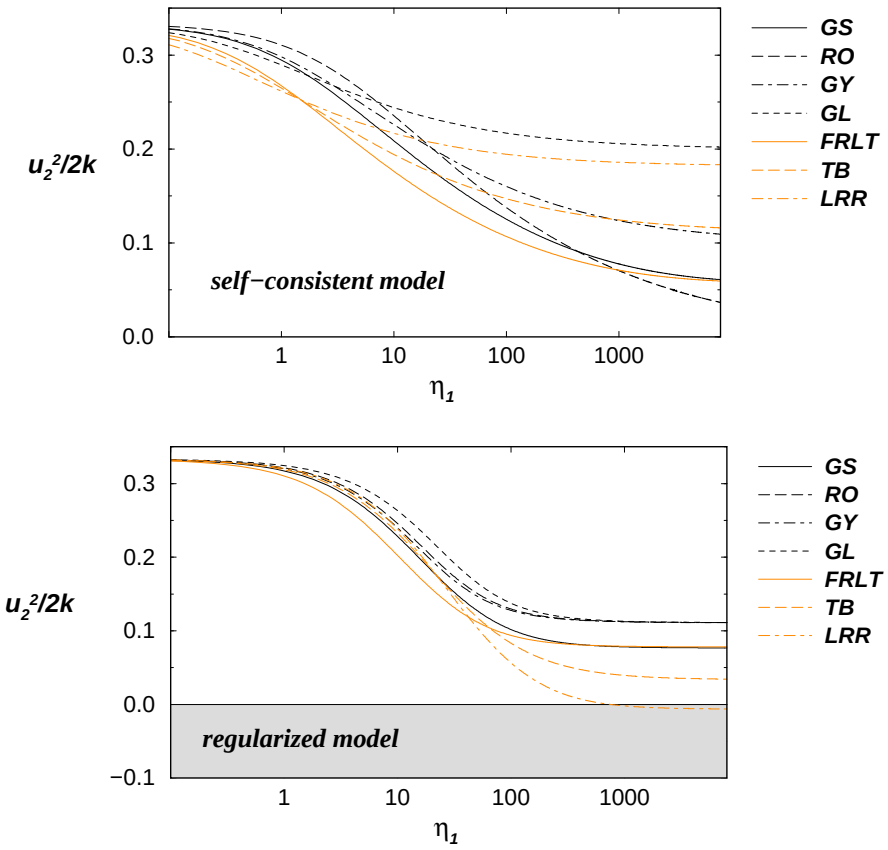


Abbildung 7.11: Entwicklung der dimensionslosen Normalspannung $\overline{u_2^2}/(2k)$ bei ebener Scherung; Resultate der selbstkonsistenten Technik (oben) bzw. regularisierten Technik (unten).

Realisierbarkeit gekrümmter und rotierender Scherströmungen

Die zweidimensional gekrümmte oder rotierende Scherströmung nach Abbildung 7.9(b) ist das nächste Anwendungsbeispiel der Realisierbarkeitsuntersuchung. Da es sich hierbei um Krümmungseffekte innerhalb der Hauptströmungsebene handelt, folgt die Belegung der Scherraten– und Wirbeltensoren dem in (2.2) notierten Beispiel der ebenen Scherströmung. Im Unterschied zur krümmungsfreien Situation lautet die Definition der von Null verschiedenen Komponenten einer gekrümmten Scherströmung

$$S_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{U_1}{x_2}\right) \qquad \text{und} \qquad \tilde{W}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{U_1}{x_2}\right) \quad , \tag{7.22}$$

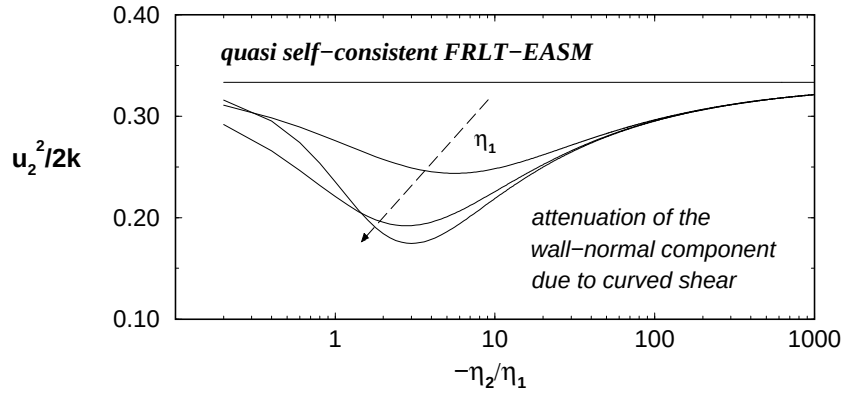


Abbildung 7.12: Abhängigkeit der kritischen Normalspannungsverläufe $\overline{u_2^2}/(2k)$ von der Scherrate in gekrümmten Scherströmungen (quasi–selbstkonsistentes FRLT–EASM).

bzw. im Falle der rotierenden Scherströmung (vgl. Kapitel 7.4)

$$S_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \qquad \text{und} \qquad \tilde{W}_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{4 - C_4}{2 - C_4}\,\Omega_3 \;\; . \tag{7.23}$$

Im Rahmen der Realizability–Untersuchung ist die Stabilisierung der Strömung von besonderem Interesse. Aus diesem Grunde konzentrieren sich die Ausführungen auf die am stärksten gedämpfte Normalspannungskomponente $\overline{u_2^2}$ entlang der konvexen Berandung einer gekrümmten Scherschicht, bzw. der Saugseite einer rotierenden Kanalströmung

$$\overline{u_2^2} \;\; = \;\; \frac{2}{3}\,k + 2\,k\,c_\mu \frac{\eta_1}{\tilde{g}} \left[\beta_2 \gamma - \frac{\beta_3}{3}\right] \;\; , \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{w_{12}^*}{s_{12}} \;\; . \tag{7.24}$$

Da alle Koeffizienten β_i negativ sind, und der Term $(c_\mu \eta_1/\tilde{g})$ den oben angestellten Überlegungen folgend stets positiv ist, sind negative Werte der kritischen Normalspannung nur für positive γ zu erwarten. Abbildung 7.12 skizziert die Kurvenschar der kritischen Normalspannung (7.24) am Beispiel des quasi–selbstkonsistenten FRLT–Modells, analoge Verläufe erhält man für die anderen quasi–selbstkonsistenten EASM–Varianten. Die Grafik belegt, daß die niedrigsten Werte von $\overline{u_2^2}/(2k)$ für hohe Invariantenwerte η_1 zu erwarten sind. Untersucht man die Beziehung (7.24) für den Grenzwert $\lim \eta_1 \to \infty$, dann ergibt sich aus

$$\lim_{\eta_1 \to \infty} \tilde{g} = \frac{\sqrt{\eta_1}}{1.83\sqrt{0.1 + 0.4\gamma^2}} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\eta_1 \to \infty} \left(\frac{\eta_1}{\tilde{g}^2}\right) = (1.83)^2 \left(0.1 + 0.4\gamma^2\right)$$

die Zwangsbedingung

$$\gamma^2 - \left(1.5\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\gamma + \left[\frac{\beta_1 \beta_3}{2\,\beta_2^2} - \frac{\beta_3^2}{3\,\beta_2^2} + \frac{1}{2\,\beta_2^2}\left(\frac{\tilde{g}^2}{\eta_1}\right)\right] \geq 0 \;\; . \tag{7.25}$$

Schätzt man hierin den Term $(\tilde{g}^2/\eta_1)$ im Sinne der Ungleichung durch den kleinsten

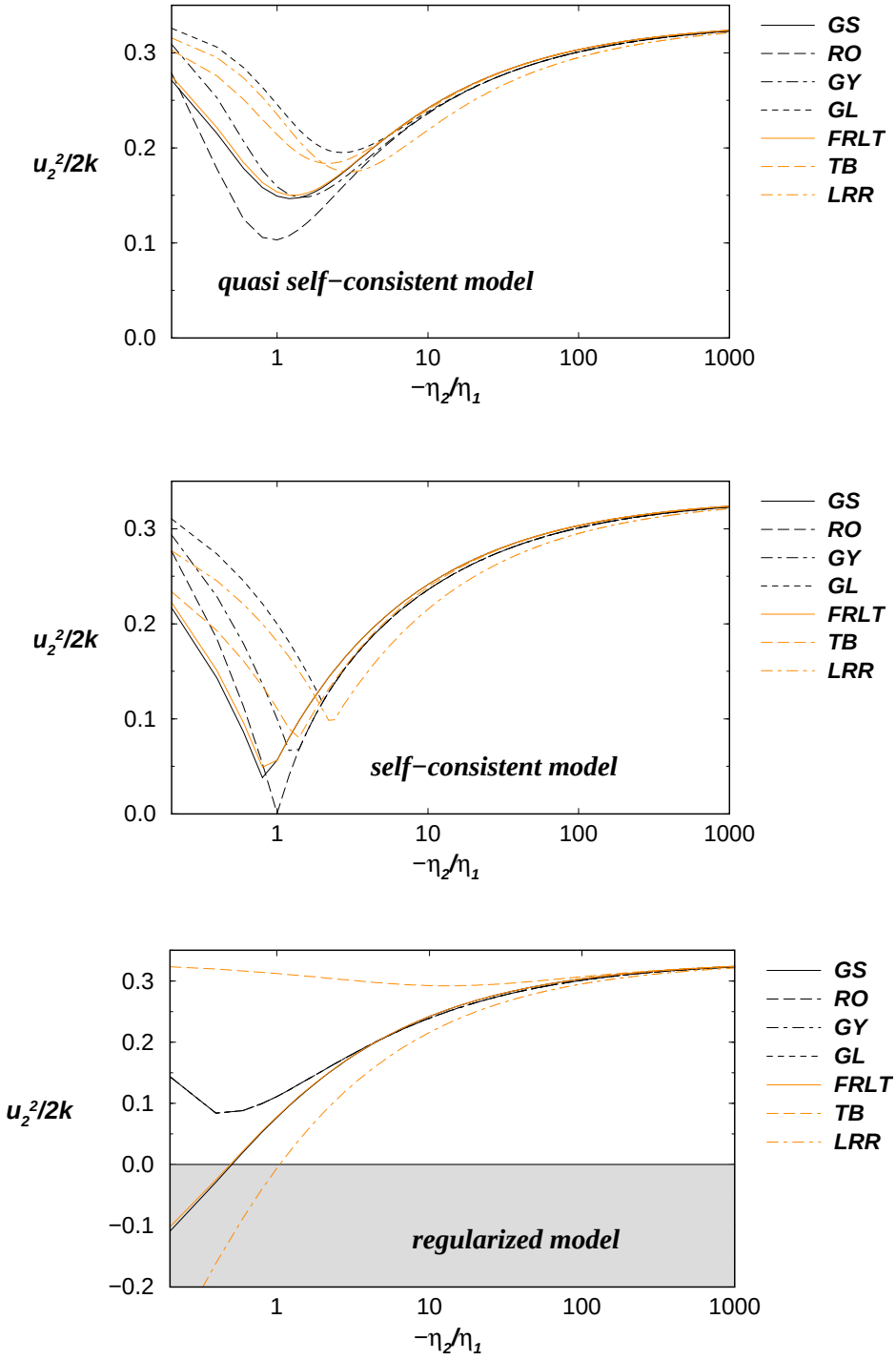


Abbildung 7.13: Verhalten der kritischen Normalspannung $\overline{u_2^2}/(2k)$ in gekrümmten Scherströmungen im Grenzübergang $\lim \eta_1 \to \infty$; oben: quasi-selbstkonsistente Technik, mitte: selbstkonsistente Technik, unten: regularisierte Technik.

möglichen Wert ($0.1 \cdot 1.83^2$) ab, so finden sich mit Ausnahme des RO–Variante keine reellen Nullstellen zur Beziehung (7.25), weswegen auch keine negativen Normalspannungen auftreten können. Abbildung 7.13 (oben) bestätigt dies anhand der grafischen Verläufe der kritischen Normalspannung als Funktion von $-\eta_2/\eta_1$. Die selbstkonsistente Technik besitzt für das RO–EASM ein Minimum im Bereich verschwindender $\overline{u_2^2}$, die regularisierte Technik verletzt das Realizability–Prinzip für die GS–, FRLT– und LRR– Varianten (Abbildung 7.13 unten).

Tabelle 7.4: Grenzwerte der Normalspannungskomponenten in 2D und achsensymmetrischen (AK) rotationsfreien Beschleunigungen bei hoher Primärdistorsion; alle Ergebnisse basieren, mit Ausnahme von $\texttt{LRR}_{\texttt{reg}}$, auf der quasi–selbstkonsistenten Technik (6.24).

$\lim_{\eta_1 \to \infty}$	LLR	TB	GS	FRLT	GL	GY	RO	$\text{LRR}_{\text{reg.}}$
$\left(\frac{\overline{u_1^2}}{2k}\right)_{\text{2D}}$	0.228	0.224	0.149	0.154	0.233	0.160	0.078	$\infty/2$
$\left(\frac{\overline{u_2^2}}{2k}\right)_{\text{2D}}$	0.447	0.443	0.560	0.553	0.459	0.589	0.780	$\infty/2$
$\left(\frac{\overline{u_3^2}}{2k}\right)_{\text{2D}}$	0.325	0.333	0.291	0.293	0.308	0.251	0.142	$-\infty$
$\left(\frac{\overline{u_1^2}}{2k}\right)_{\text{AK}}$	0.214	0.208	0.138	0.144	0.228	0.168	0.120	∞
$\left(\frac{\overline{u_2^2}}{2k}\right)_{\text{AK}}$	0.393	0.396	0.431	0.429	0.386	0.416	0.440	$-\infty/2$

Realisierbarkeit rotationsfreier Beschleunigungen

Starke Strömungsbeschleunigung stabilisiert die Strömung und schwächt das Turbulenzfeld. Betrachtet man das durch (7.9) definierte rotationsfreie Distorsionsfeld, dann ergeben sich für positiv angenommene Primärdistorsionen unmittelbar die beiden in Abbildung 7.9(c) skizzierten Beschleunigungsgrenzfälle

$$\begin{aligned} &\text{ebene (2D) Streckung} &&: \quad s_{22} = -s_{11} \,, \\ &\text{achsensymmetrische Kontraktion} &&: \quad s_{22} = s_{33} = -0.5 s_{11} \,. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Die durch die Beschleunigung der Strömung am stärksten gedämpfte Normalspannungskomponente $\overline{u_1^2}$ weist in Richtung der Primärdistorsion, die am stärksten angefachte Komponente in x_2–Richtung. Mit Hilfe von $\eta_1 = 2\, s_{11}^2$ und $\eta_2 = 0$ gelangt man für den Fall der ebenen Streckung

$$\frac{\overline{u_1^2}}{2k} = \frac{1}{3} - c_\mu \sqrt{\eta_1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\eta_1}\beta_3}{3\tilde{g}}\right], \tag{7.27}$$

$$\frac{\overline{u_2^2}}{2k} = \frac{1}{3} - c_\mu \sqrt{\eta_1}\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\eta_1}\beta_3}{3\tilde{g}}\right],$$

bzw. mit $\eta_1 = 1.5\, s_{11}^2$ für den Fall der achsensymmetrischen Kontraktion

$$\frac{\overline{u_1^2}}{2k} = \frac{1}{3} - c_\mu \sqrt{\eta_1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{\eta_1}\beta_3}{3\tilde{g}}\right], \tag{7.28}$$

$$\frac{\overline{u_2^2}}{2k} = \frac{1}{3} - c_\mu \sqrt{\eta_1}\left[\frac{-1}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{\eta_1}\beta_3}{3\tilde{g}}\right].$$

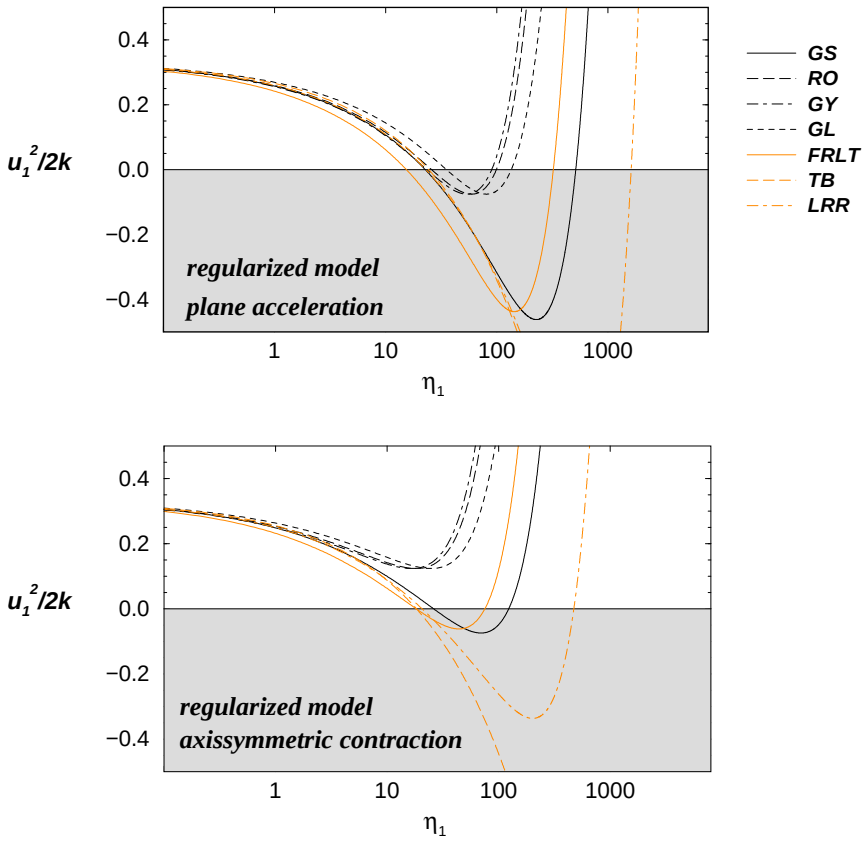


Abbildung 7.14: Verlauf der dimensionslosen Normalspannung $\overline{u_1^2}/(2k)$ bei rotationsfreier Distorsion; oben: ebene Streckung, unten: achsensymmetrische Kontraktion (regularisierte Technik).

Hieraus ergeben sich vermöge

$$\lim_{\eta_1 \to \infty} (c_\mu \sqrt{\eta_1}) = \frac{-\beta_1}{\frac{2}{1.83\sqrt{0.4}} - \frac{1.83\sqrt{0.4}}{3}\beta_3^2}, \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\eta_1 \to \infty} \left(\frac{\sqrt{\eta_1}}{\tilde{g}} \right) = \frac{1.83\sqrt{0.4}}{2}$$

die in Tabelle 7.4 notierten Grenzwerte für starke Strömungsbeschleunigung. Abbildung 7.14 belegt, daß die regularisierte Technik die Realisierbarkeitsbedingung im Zusammenhang mit allen EASM–Varianten verletzt. Anhand von Abbildung 7.14 und der in

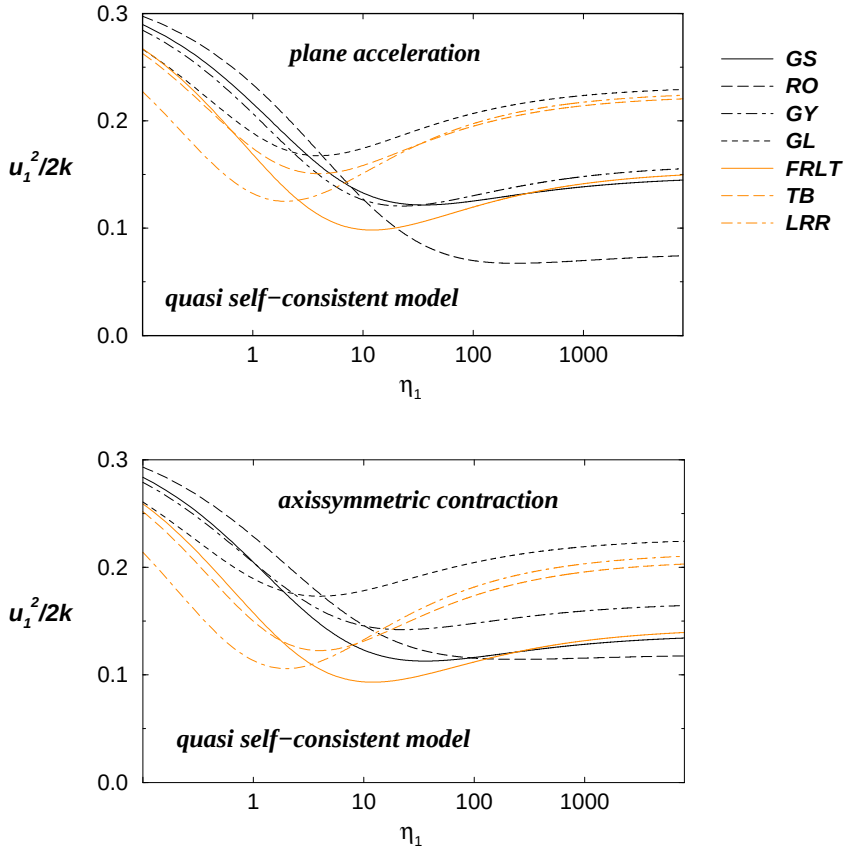


Abbildung 7.15: Verlauf der dimensionslosen Normalspannung $\overline{u_1^2}/(2k)$ bei rotationsfreier Distorsion; oben: ebene Streckung, unten: achsensymmetrische Kontraktion (quasi–selbstkonsistente Technik).

Tabelle 7.4 exemplarisch angeführten Werte des regularisierten LRR–EASM erkennt man ferner, daß die Regularisierung für das ebene Problem irrtümlicherweise einer nicht vorhandenen Symmetrie zustrebt, und die $\overline{u_1^2}/(2k)$ Komponente für hohe Scherraten nicht die kleinste Normalspannung ist. Die Grenzwerte $\lim \eta_1 \to \infty$ kennzeichnen nicht immer das absolute Minimum von $\overline{u_1^2}/(2k)$. Im Zusammanhang mit der quasi–selbstkonsistenten Technik ergibt sich das absolute Minimum für die ebene Streckung aus

den Nullstellen des unten notierten nichtlinearen Polynoms (mit $\gamma = 0.25 \cdot 1.83 \cdot \sqrt{0.4}$)

$$0 = \left(1 + \gamma \frac{2\beta_3}{3}\right) \left[\frac{\eta_1}{8 + \sqrt{2}\gamma\sqrt{\eta_1}} - \frac{4\beta_3^2}{3}\left(4 + \gamma\frac{\sqrt{\eta_1}}{\sqrt{2}}\right)\right] + \left[\frac{\sqrt{\eta_1}}{\sqrt{2}} + \frac{2\beta_3}{3}\left(4 + \gamma\frac{\sqrt{\eta_1}}{\sqrt{2}}\right)\right] \left[\frac{4\beta_3^2}{3}\gamma + \frac{\sqrt{\eta_1}}{4\sqrt{2} + \gamma\sqrt{\eta_1}}\left(\frac{\gamma\sqrt{\eta_1}}{4\sqrt{2} + \gamma\sqrt{\eta_1}} - 2\right)\right] .$$

Anstelle einer analytischen Lösung werden hier nur die grafischen Ergebnisse in den Abbildungen 7.14–7.16 aufgetragen. In Übereinstimmung mit Rung et al. (1999) verdeutlichen die Darstellungen, daß die rotationsfreie Beschleunigung die restriktivste der hier untersuchten Anwendungen kennzeichnet. Sowohl die regularisierte als auch die selbst-

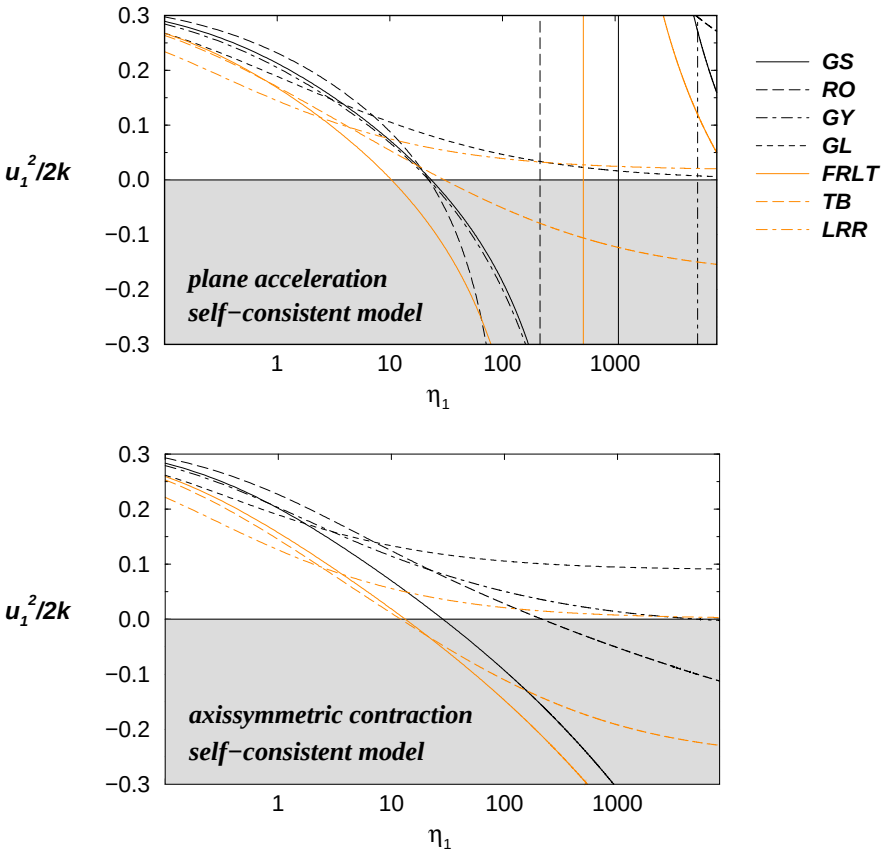


Abbildung 7.16: Verlauf der dimensionslosen Normalspannung $\overline{u_1^2}/(2k)$ bei rotationsfreier Distorsion; oben: ebene Streckung, unten: achsensymmetrische Kontraktion (selbstkonsistente Technik).

konsistente Technik (Abbildung 7.16) sind über weite Bereiche mit physikalisch nicht realisierbaren Lösungen verbunden. Die Verletzung des Realizability-Prinzips kann – in Abhängigkeit von der gewählten EASM–Variante – bereits bei moderaten Distorsionszuständen ($\eta_1 \approx 12$) auftreten. Man beachte, daß lineare RSTM die Realisierbarkeitsbedingungen ebenfalls verletzen.

7.4 Rotierende homogene Scherströmung

Die Schwächen einfacherer Turbulenzmodelle offenbaren sich bereits bei kleineren Abweichungen vom ebenen Strömungszustand. Der Einfluß von Krümmungsmechanismen auf das Turbulenzfeld geht am deutlichsten aus der Analyse der Produktions– und Konvektionsterme der Reynolds–Spannungen im Stromlinienkoordinatensystem hervor. Anhang A gibt einen Überblick über die krümmungsinduzierten Veränderungen einzelner Beiträge der Transportgleichungen am Beispiel des in Abbildung 7.17 illustrierten Starrkörperwirbels. Hierzu zählen, neben der Manipulation der Produktionsterme, die mit zunehmender Krümmung verstärkt auftretenden Coriolisbeschleunigungen aus der Rotation der Basisvektoren des Stromlinienkoordinatensystems (vgl. Kapitel 8.6). Diese sind ihrem Charakter nach deviatorisch und dienen ausschließlich der Spannungsumverteilung. Da sie keinen Beitrag zum Transport isotroper Größen leisten, ist ihre Behandlung im Rahmen expliziter algebraischer Spannungsmodelle auf der Basis von (4.8) schwierig.

Zur Validierung des Turbulenzmodells in Bezug auf die Vorhersage von Krümmungseffekten bedient man sich deswegen der in Abbildung 7.17 dargestellten Analogie zwischen Starrkörperwirbeln und rotierenden homogenen Scherströmungen. Die Transformation des Starrkörperwirbels in ein rotierendes Koordinatensystem ermöglicht die gezielte Analyse des Druck–Scher–Korrelationsmodells in krümmungsbehafteten Strömungen. Die Coriolisterme werden durch die mathematisch exakten Transformationsbeziehungen zwischen dem konventionellen und dem *effektiven Wirbel–Tensor* in (4.9) wiedergegeben. Man beachte, daß der effektive Wirbeltensor

$$W_{ij}^{*} = W_{ij} - \frac{4 - C_4}{2 - C_4}\, e_{ijk}\, \Omega_k \qquad \rightsquigarrow \qquad w_{ij} \rightarrow w_{ij}^{*} = T_t\, W_{ij}^{*}\,. \tag{7.29}$$

nicht mehr objektiv ist (vgl. Kapitel 8.6). Der folgende Abschnitt befaßt sich mit dem Verhalten der EASM bei der Simulation einer stationär rotierenden homogenen Scherströmung. Die Untersuchungen konzentrieren sich auf die Verträglichkeit der unterschiedlichen Druck–Scher–Korrelationsmodelle zu den Ergebnissen der Stabilitätanalyse dieser Strömung.

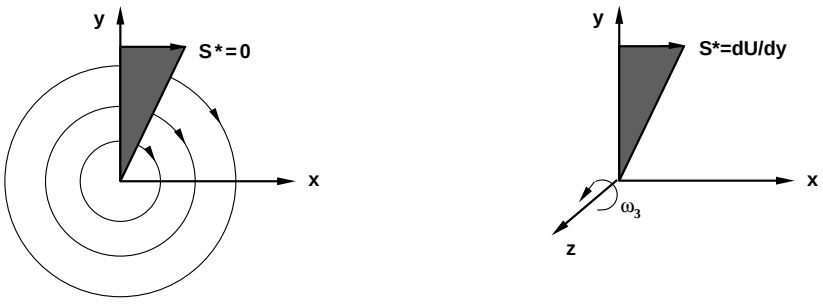


Abbildung 7.17: Starrkörperwirbel (links) und rotierende homogene Scherströmung (rechts).

Stabilitätsuntersuchung

Der Gleichgewichtszustand einer homogenen Scherströmung ist nach Gleichung (7.4) durch das exponentielle Anwachsen der Turbulenzenergie k_∞ gekennzeichnet

$$\frac{\partial k_\infty}{\partial \tau} = \left[\left(\frac{C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 1} - 1} \right) \, S_\infty^{-1} \right] \, k \, , \qquad \text{mit} \qquad \tau = t \, S^* = \frac{t}{T_t} \sqrt{2 \, \eta_1} \, .$$

Die einzige Möglichkeit, die Strömungssituation zu stabilisieren, ist mit den Nullstellen des inversen Scherratenparameters $S_\infty^{-1} = (S^* k/\varepsilon)_\infty^{-1}$ verbunden. Eine Stabilisierung gelingt offenkundig nur im trivialen Fall der verschwindenden Scherrate bzw. Turbulenzenergie. Betrachtet man die Strömung nicht im Inertialsystem, sondern in einem mit Ω_3 stationär rotierenden Bezugssystem, dann läßt sich aus der Untersuchung der Nullstellen von S_∞^{-1} ein Verzweigungsproblem ableiten. Ausgangspunkt der Analyse ist die Definition der spezifischen Produktionsrate nach Gleichung (7.3)

$$\lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{P}{\varepsilon} \right)_\infty = \frac{C_{\varepsilon 2} - 1}{C_{\varepsilon 1} - 1} := C_5 \, , \qquad \text{mit} \qquad \frac{P}{\varepsilon} = -\overline{uv} \, \frac{S^*}{\varepsilon} = c_\mu \, S^2 \, . \tag{7.30}$$

Mit Hilfe der in Gleichung (7.23) notierten Belegung der Wirbel– und Scherratentensoren ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta_1 = 0.5 S^2 \, , \qquad & \eta_2 = -\eta_1 \Bigg[1 - \underbrace{\frac{4 - C_4}{2 - C_4} \left(\frac{2\Omega_3}{S^*} \right)}_{:=\gamma} \Bigg]^2 \, , \\ c_\mu \;\; = \;\; & \frac{-\beta_1/g}{1 + S^2 \, \left[(\beta_2/g)^2 \, (1 - \gamma) - 1/3 \, (\beta_3/g)^2 \right]} \, , \end{aligned} \tag{7.31}$$

und damit von (7.30) für den reziproken Gleichgewichtswert des Scherratenparameters

$$S_\infty^{-1} \;\; = \;\; \left(\frac{-C_5 \, \beta_1}{\overline{g}} \right)^{-0.5} \left[1 - C_5 \left(\frac{\beta_2^2}{-\overline{g} \, \beta_1} \right) \left(\{1 - \gamma\}^2 - \frac{1}{3} \, \frac{\beta_3^2}{\beta_2^2} \right) \right]^{0.5} \, . \tag{7.32}$$

Der erste Faktor von (7.32) ist stets positiv und kommt für eine Stabilisierung nicht in Frage. Der zweite Faktor besitzt jedoch zwei reelle Nullstellen, die bei Durchlaufen der in Tabelle 7.5 angegebenen charakteristischen Rotationsraten $(\Omega_3/S^*)_{1,2}$ auftreten. Zwischen diesen beiden Rotationsraten ist $S_\infty^{-1} > 0$, und die Turbulenz wird angefacht. Außerhalb des durch die Nullstellen festgelegten Intervalls

$$\left(\frac{\Omega_3}{S^*} \right)_1 < \left(\frac{\Omega_3}{S^*} \right) < \left(\frac{\Omega_3}{S^*} \right)_2 \, , \qquad \text{mit}$$

$$\boxed{(\Omega_3/S^*)_{1,2} = 0.5 \left(\frac{C_4 - 2}{C_4 - 4} \right) \left[1 \stackrel{+}{-} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\beta_3}{\beta_2} \right)^2 - \frac{\overline{g} \, \beta_1}{\beta_2^2 \, C_5} \right)^{0.5} \right]} \tag{7.33}$$

Tabelle 7.5: Charakteristische Rotationsraten der Stabilitätsanalyse rotierender homogener Scherschichten aus Gleichung (7.33) bzw. (7.34).

charakteristische Rotationsraten	LRR	TB	GS	FRLT	GL	GY	RO	lineare Theorie
$(\Omega_3/S^*)_1$	-0.09	-0.06	-0.08	-0.05	-0.09	-0.10	-0.13	≈ 0.00
$(\Omega_3/S^*)_2$	0.34	0.36	0.52	0.49	0.37	0.51	0.63	≈ 0.50
$(\Omega_3/S^*)_{\max}$	0.13	0.15	0.22	0.22	0.14	0.21	0.25	≈ 0.25

stabilisiert der Einfluß der Systemrotation die Strömung. Die charakteristischen Rotationsraten sind die Verzweigungspunkte des in Abbildung 7.18 dargestellten Bifurkationsdiagramms. Die stärkste Anfachungsrate innerhalb der Ellipse ist an die dritte charakteristische Rotationsrate $(\Omega_3/S^*)_{\max}$ der Tabelle 7.5 geknüpft. Diese bestimmt sich aus

$$\frac{\partial(S_\infty^{-1})}{\partial(\Omega_3/S^*)} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{(\Omega_3/S^*)_{\max} = 0.5\,\frac{C_4 - 2}{C_4 - 4}}\,. \tag{7.34}$$

Die Ergebnisse der linearen Stabilitätstheorie und der Rapid–Distortion–Theorie (Bertoglio 1982; Reynolds 1987) sagen eine maximale Anfachungsrate für die charakteristische Rotationsrate $(\Omega_3/S^*)_{\max} = 0.25$ voraus, was nach Gleichung (7.34) mit $C_4 = 0$ verknüpft ist. Das Modell wäre in diesem Falle mit einer Richardsonzahlähnlichkeit verbunden. Die *Richardsonzahl* ist durch

$$Ri = \frac{2\Omega_3}{S^*}\left[1 - \frac{2\Omega_3}{S^*}\right] \tag{7.35}$$

definiert und dient zur Beschreibung von Rotationseinflüssen. Bei einer Richardsonzahlähnlichkeit vermag das Modell gemäß (7.35) nicht mehr zwischen den beiden Zuständen $(\Omega_3/S^*) = 0$ und $(\Omega_3/S^*) = 0.5$ zu unterscheiden. Dies steht im Widerspruch zu den Ergebnissen der Grobstruktursimulationen von Bardina, Ferziger und Reynolds (1983), und theoretischen Untersuchungen von Speziale und Mac Giolla Mhuiris (1989a,b), welche für $(\Omega_3/S^*) = 0.5$ deutlich stabilere Strömungsverhältnisse als für $(\Omega_3/S^*) = 0$ prognostizieren. Im Allgemeinen wird der Koeffizient C_4 daher so gewählt, daß sich eine leichte Verlagerung der maximalen Anfachung zu kleineren Werten ergibt

$$\boxed{(\Omega_3/S^*)_{\max} \approx 0.21 \qquad \rightsquigarrow C_4 \approx 0.5}\,. \tag{7.36}$$

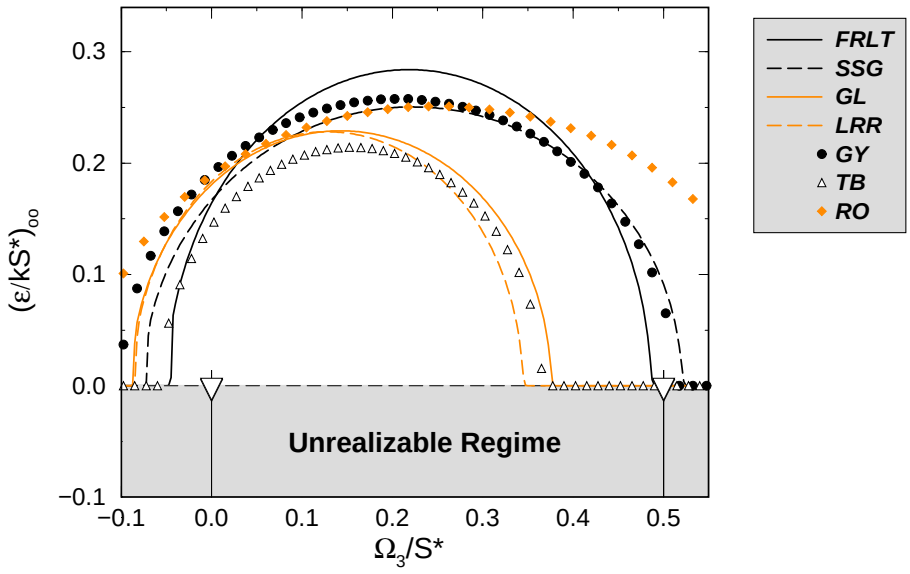


Abbildung 7.18: Bifurkationsdiagramm der rotierenden homogenen Scherströmung nach Gleichung (7.32).

Die lineare Stabilitätsanalyse (Lezius und Johnston 1976; Speziale 1995) bestätigt instabile Strömungsverhältnisse im Bereich positiver Richardsonzahlen. Erfahrungsgemäß erweitert sich der instabile Bereich im Rahmen einer nichtlinearen Betrachtung.

Anhand der in Tabelle 7.5 verzeichneten Ergebnisse der GL, TB und LRR Druck–Scher–Korrelationsmodelle erkennt man deutlich die Nachteile einer exzessiven Abweichung von der Richardsonzahlähnlichkeit. Infolge zu großer Koeffizientenwerte C_4 sagen diese drei Modelle eine verfrüht einsetzende Restabilisierung der Strömung voraus. Daraus resultieren unbefriedigende Simulationsergebnisse bei der Berechnung von drallbehafteten Strömungen, die unter dem exklusiven Einfluß der Wirbelstärke stehen (*weak swirl*). Das Rotta–Modell überschätzt demgegenüber den instabilen Bereich, die GY–, FRLT– und GS–Modelle stimmen wiederum gut mit den Ergebnissen der linearen Stabilitätstheorie überein.

Simulationsergebnisse

Die Resultate der Stabilitätsuntersuchung erlauben die Interpretation der Simulationsergebnisse für eine rotierende homogene Scherströmung. Abbildung 7.19 zeigt die Entwicklung der Turbulenzenergie im Vergleich zu der von Bardina, Ferziger und Reynolds (1983) durchgeführten Grobstruktursimulation für vier verschiedene Rotationsraten $\Omega_3/S^* = -0.5,\ 0.,\ 0.25,\ 0.5$. Die zeitliche Integration der Transportgleichungen (7.1) wurde ausgehend von der Anfangsbedingung $\varepsilon_0/(S^* k_0) = 0.296$ mit Hilfe eines Runge–Kutta Verfahrens durchgeführt.
Die FRLT–, GS– und GY–Modelle sind den anderen EASM Varianten deutlich überlegen. Mit Ausnahme des Anfangsstadiums führen diese drei Formulierungen zu befriedigenden Simulationsergebnissen. Die defizitäre Wiedergabe der frühen transienten Phase

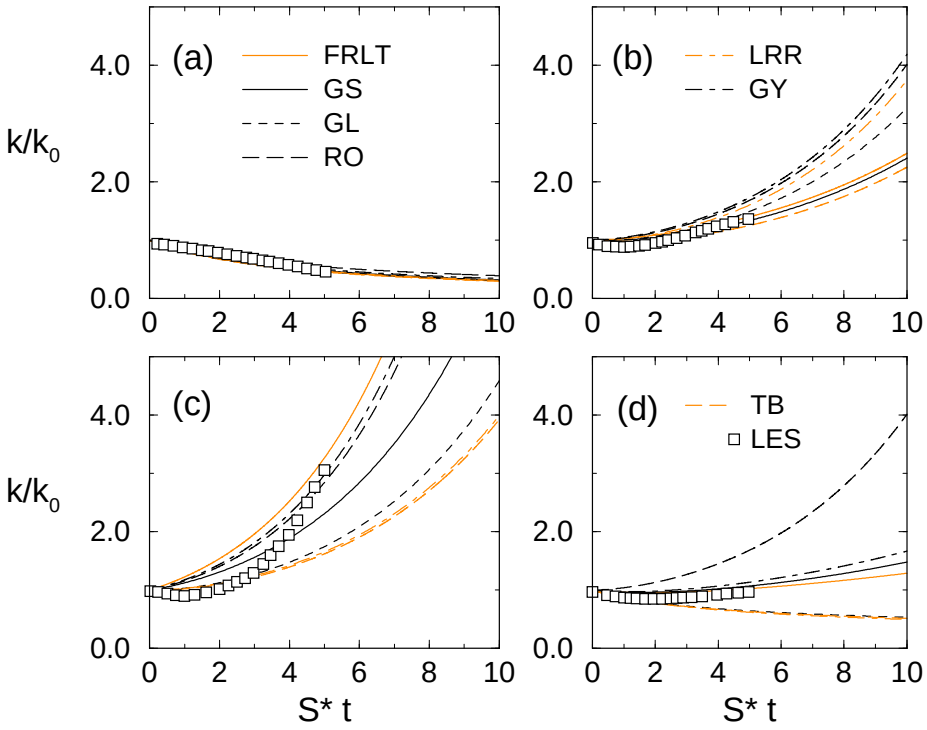


Abbildung 7.19: Berechnete zeitliche Entwicklung der normierten Turbulenzenergie in einer rotierenden homogenen Scherung; Vergleich der EASM–Resultate mit Ergebnissen der Grobstruktursimulation (LES) von Bardina et al. (1983) zur Anfangsbedingung $\varepsilon_0/(S^* k_0) = 0.296$ für vier verschiedene Rotationsraten: (a) $\Omega_3/S^* = -0.5$; (b) $\Omega_3/S^* = 0.$; (c) $\Omega_3/S^* = 0.25$; (d) $\Omega_3/S^* = 0.5$.

lässt sich auf die fehlerhafte Annahme des strukturellen Gleichgewichts in instationären Strömungen zurückführen (vgl. Kapitel 7.1 und 8.1). In Anlehnung an die Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung zeigen die GL–, TB– und LRR– Varianten bereits bei $\Omega_3/S^* = 0.25$ (Abbildung 7.19c) Restabilisierungstendenzen. Für die im Rahmen der Grobstruktursimulation und der linearen Stabilitätstheorie schwach instabilen Rotationsrate $\Omega_3/S^* = 0.5$ hat sich die Strömung im Zusammenhang mit den GL–, TB– und LRR–EASM bereits erkennbar stabilisiert (Abbildung 7.19d). Das Rotta–Modell (RO) sagt demgegenüber ein deutlich verzögertes Einsetzen der Strömungsstabilisierung voraus.

Ein weiteres populäres Validierungsbeispiel für die Vorhersage der krümmungsinduzierten Variation von Schubspannungen ist die von Johnston, Halleen und Lezius (1972) vermessene Durchströmung eines in der Haupströmungsebene rotierenden Kanals. Abbildung 7.20 zeigt die berechneten Geschwindigkeitsprofile der zweidimensionalen, vollentwickelten Strömung für eine Reynoldzahl von $Re = U_B H/\nu = 11500$ und eine Rosbyzahl von $Ro = \Omega_3 H/U_B = 0.21$. Die in der Abbildung gezeigten Ergebnisse bestätigen erneut die Resultate der Stabilitätsuntersuchung. Auffällig sind die verbleibenden Diskrepanzen zwischen den Messwerten und den Simulationen auf der Druck-

seite ($Y/H < 0.3$), welche nur durch wesentlich geringere C_4 korrigiert werden können (ohne Abbildung).

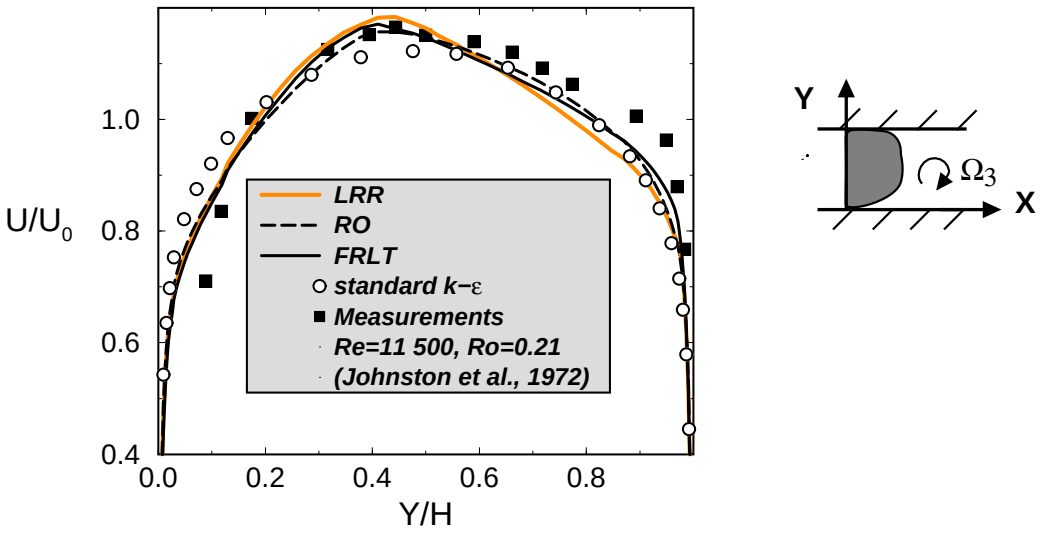


Abbildung 7.20: Voll–entwickelte rotierende Kanalströmung (Re=11 500, Ro=0.21, Johnston et al. 1972); Vergleich der berechneten Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung für unterschiedliche quasi–selbstkonsistente EASM.

Anmerkungen zum IP–Modell

Die Untersuchungen rechtfertigen die von Gibson und Younis (1986) heuristisch entwickelte Modifikation des klassischen IP–Models (GL) für schwach verdrallte Strömungen. Jüngere Arbeiten, z.B. Fu, Launder und Leschziner (1987), favorisieren die sog. *Isotropization–of–Production–and–Convection (IPC)* Variante des GL–Modells. Hierin werden die konvektiven Terme in das schnelle Druck–Scher–Korrelationsmodell integriert. Die Motivation der IPC Formulierung ist die Verschmelzung der Konvektions– und Produktionsterme in stark gekrümmten Strömungen (vgl. Anhang B). Rung (1999a) zeigt den engen mathematischen Zusammenhang zwischen den IPC–, RO– und GY–Modellen.

In Bezug auf die korrekte Darstellung verdrallter Strömungen sei hier erwähnt, daß die klassische Unterscheidung zwischen starkem und schwachem Drall der Beurteilung von IP–Modellen nicht förderlich ist. Schwacher Drall ist, im Unterschied zu starkem Drall, üblicherweise nicht mit Rezirkulation aufgrund von vortex–breakdown verbunden. Typische, schwach verdrallte Strömungen stehen daher unter dem exklusiven Einfluß von Wirbelstärke, welche in erster Linie mit dem Koeffizienten C_4 zusammenwirkt. Mit dem Auftreten von Strömungsrezirkulation treten signifikante Scherraten auf, die modellseitig mit den Koeffizienten C_2 und C_3 interagieren. Im Zusammenhang mit der IP–Modellierung ist eine unabhängige Wahl beider Koeffizienten nicht möglich. Kalibriert man das schnelle Druck–Scher–Korrelationsmodell – wie beim GY–Modell geschehen

– für den Einfluß der Rotation, dann treten Defizite bei der Wiedergabe komplexer scherdominierter Phänomene auf. Umgekehrt verhält es sich bei dem klassischen IP Model von Gibson und Launder (1978).

7.5 Turbulente Sekundärströmung

Die Simulation turbulenter Strömungen unter dem Einfluß von sekundären Strömungsmerkmalen ist, wie bereits in Kapitel 2.2 erläutert, mit linearen Wirbelzähigkeitsmodellen nicht realisierbar. Der folgende Abschnitt befaßt sich mit dem Einfluß der Koeffizienten des Reynolds–Spannungsmodells bei der Berechnung einer vollentwickelten turbulenten Strömung durch ein gerades Rohr mit rechteckigem Querschnitt. Hierbei bildet sich die in Abbildung 7.21 skizzierte Sekundärströmung in Gestalt von vier Paaren longitudinaler Eckenwirbel aus. Diese werden primär durch die Normalspannungsdifferenzen $(\overline{u_2^2} - \overline{u_3^2})$ in der Querschnittsebene gespeist. Die in der Abbildung veranschaulichte *turbulente Sekundärströmung* oder *Prandtlsche Sekundärströmung zweiter Art* (Bradshaw 1987; Demuren und Rodi 1984) wird durch die Transportgleichung der Wirbelstärkekomponente Ω_1 beschrieben

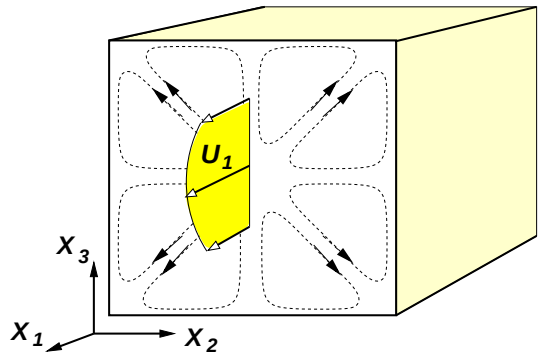


Abbildung 7.21: Turbulente Sekundärströmung.

$$\frac{D\Omega_1}{Dt} = \Omega_j \frac{\partial U_1}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \overline{u_2 u_3} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\overline{u_2^2} - \overline{u_3^2} \right) + \nu \Delta^2 \Omega_1 \,. \tag{7.37}$$

Der erste Term der rechten Seite von Gleichung (7.37) beschreibt den reibungsfreien Wirbelstreckungsmechanismus, der zweite und dritte Term kennzeichnen die turbulente Erzeugung mittlerer Longitudinalwirbelstärke, und der letzte Term repräsentiert deren viskose Vernichtung. Mit Ausnahme des zweiten und dritten Terms können alle Summanden der rechten Seite im betrachteten Beispiel näherungsweise vernachlässigt werden. Die durch die Anisotropie der Normalspannungen getriebene Wirbelstärke kann von linearen Wirbelzähigkeitsmodellen nicht erfaßt werden, da diese der Scherturbulenz a priori isotrope Normalspannungen zuordnen (vgl. Kapitel 2).

Die präzise Vorhersage des mit dem dritten Term verbundenen physikalischen Mechanismus ist nicht nur von akademischer Bedeutung. Die laterale Ausbreitungsrate eines dreidimensionalen Wandstrahls wird beispielsweise wesentlich von diesem Term kontrolliert (Launder und Rodi 1983). Die Untersuchung ist damit beispielsweise von erheblicher technischer Bedeutung für die Auslegung der Belüftungsaggregate von Kraftfahrzeugscheiben mit numerischen Verfahren.

Analyse der vollentwickelten Rohrströmung

Die turbulente Sekundärströmung krümmungsarmer, rechteckiger Rohre besitzt ihren Ursprung im Bereich der Ecken. Der Geschwindigkeitsgradienten–Tensor wird in diesem Falle von zwei Komponenten dominiert

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} = A \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = B \;, \qquad \text{mit} \qquad S^* = \sqrt{A^2 + B^2} \;.$$

Die darauf aufbauende Vereinfachung beider Gradiententensoren ist besonders nützlich für die Untersuchung der primären Mechanismen dieser Strömung

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & A & B \\ A & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad W_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 \end{pmatrix} \;. \tag{7.38}$$

Aus dem Aufbau der Wirbel– und Scherraten–Tensoren nach Gleichung (7.38) erkennt man, daß die Strömung nur moderate dreidimensionale Effekte besitzt; beide Tensoren sind im betrachteten Beispiel nur vom Rang zwei. Eine zweidimensionale Darstellung beider Gradiententensoren erhält man beispielsweise nach Transformation in ein Hauptachsensystem der Scherraten, z.B.

$$\hat{S}_{kl} = S_{ij}\,(\underline{e}_i \cdot \underline{q}_k)\,(\underline{e}_j \cdot \underline{q}_l) \;, \qquad \hat{W}_{kl} = W_{ij}\,(\underline{e}_i \cdot \underline{q}_k)\,(\underline{e}_j \cdot \underline{q}_l) \;, \qquad \text{mit} \tag{7.39}$$

$$\underline{q}_1 = (0, 1, -A/B) \;, \qquad \underline{q}_2 = (S^*/A, 1, B/A) \;, \qquad \underline{q}_3 = (S^*/A, -1, -B/A) \;.$$

Die Untersuchung kann sich, in Anlehnung an die in Anhang C gemachten Bemerkungen, daher auf die im R^2 verbleibende quadratische Drei–Generator–Basis (5.13) stützen. Alle nichtlinearen Generatoren und Invarianten höheren Grades lassen sich im R^2 durch Kombinationen linearer und quadratischer Terme abbilden, weswegen die unten angegebenen Schlußfolgerungen auf beliebige NLEVM übertragbar sind. Da die Transportterme in einer vollentwickelten Strömung nur eine untergeordnete Rolle spielen, sollten die Resultate dieser Untersuchung auch für RSTM gelten.

Die turbulente Sekundärströmung ist im Zusammenhang mit expliziten algebraischen Spannungsmodellen mit der Interaktion zwischen Sekundärgeschwindigkeiten und Primärgeschwindigkeitsgradienten verknüpft. Dies erkennt man unmittelbar anhand der Impulsgleichung der sekundären Geschwindigkeitskomponente U_2

$$\begin{aligned} U_2\frac{\partial U_2}{\partial x_2} + U_3\frac{\partial U_2}{\partial x_3} = &- \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{P}{\rho} + \frac{2}{3}\left(k + 2\nu_t\beta_3\frac{T_t}{g}S_{kk}^2\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu_t S_{22}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu_t S_{23}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left[4\nu_t\frac{T_t}{g}(\beta_3 S_{2k}S_{2k} - \beta_2 S_{2k}W_{k2})\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left[2\nu_t\frac{T_t}{g}\{2\beta_3 S_{2k}S_{3k} - \beta_2(S_{2k}W_{k3} + S_{3k}W_{k2})\}\right] \;. \end{aligned} \tag{7.40}$$

Die erste Zeile der Gleichung (7.40) enthält im Unterschied zu den beiden folgenden Zeilen keine der beiden primären Geschwindigkeitsgradienten. Für die korrekte Darstellung von Sekundärströmungen mit statistischen Turbulenzmodellen sind die letzten beiden Zeilen der Gleichung (7.40) von besonderer Bedeutung. Vernachlässigt man hierin die von höherer Ordnung kleinen Terme, dann ergibt sich

$$\ldots \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\nu_t T_t}{g}(\beta_3-\beta_2)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{\nu_t T_t}{g}(\beta_3-\beta_2)\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right] \quad . \tag{7.41}$$

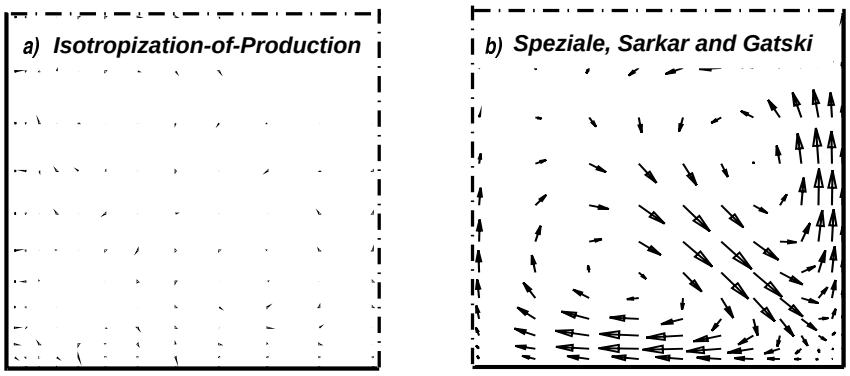


Abbildung 7.22: Vergleich der turbulenten Sekundärströmung im Querschnitt eines rechteckigen Rohres ($Re = 4200$); links: IP–EASM von Gibson und Launder (1978); rechts: SSG–EASM von Speziale et al. (1991) (die Darstellung des IP–Modells basiert auf zehnfach vergrößerten Vektoren).

Der Vergleich von Gleichung (7.41) und Abbildung 7.22 offenbart die Relevanz der in Tabelle 7.6 angegebenen Koeffizientendifferenz $(\beta_3 - \beta_2)$ für die Intensität und Orientierung (Drehsinn) der Sekundärströmung. Die Koeffizientendifferenz veschwindet bei allen IP–Modellen aufgrund der gleichgewichtigen Berücksichtigung von Scherraten– und Wirbelbeiträgen im Druck–Scher–Korrelationsmodell (4.4). IP–Modelle sind daher ohne zusätzliche (nicht–lokale) Wandreflektionsterme nicht in der Lage, die turbulente Sekundärströmung zu erfassen. Die in Abbildung (7.22) gezeigten SSG–Resultate belegen, daß eine positive Koeffizientendifferenz ein korrektes Vorzeichen der Longitudinalwirbelstärke gewährleistet, so daß den Ecken Fluid über die Diagonale zugeführt wird. Hieraus schließt man für Scherströmungen

$$\boxed{\beta_3 < \beta_2} \qquad \text{oder} \qquad \boxed{C_3 > C_4} \quad . \tag{7.42}$$

Abbildung (7.23) gibt einen Überblick über die mit FRLT–Modellen unterschiedlichen Grades erzielbare Vorhersagequalität im Vergleich zu den von Cheesewright und Petty (1990) durchgeführten experimentellen Untersuchungen bei $Re = 4200$. Die in

Tabelle 7.6: Wert der zur Vorhersage turbulenter Sekundärströmungen relevanten Koeffizientendifferenz für verschiedene (lineare) Druck–Scher–Korrelationsmodelle.

	LLR	TB	GS/SSG	FRLT	GL	GY	RO
$\beta_3 - \beta_2$	0.22	0.444	0.425	0.4	0	0	0

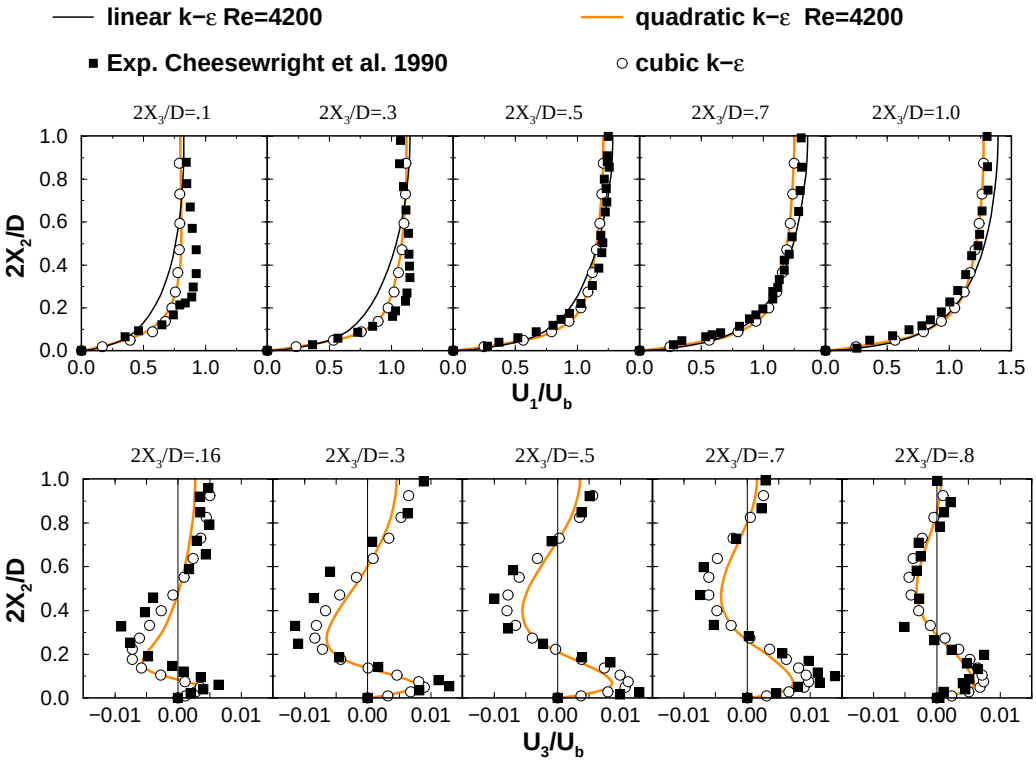


Abbildung 7.23: Vollentwickelte Durchströmung eines rechteckigen Rohres ($Re = 4200$) bei linearer quadratischer und kubischer Modellierung (FRLT–EASM); oben: Primärströmungsprofile; unten: Sekundärströmungsprofile.

Abbildung (7.23) aufgetragenen Sekundärströmungsprofile entlang mehrerer Schnitte $x_3 = const.$ empfehlen, die Koeffizientendifferenz im Bereich von

$$\boxed{\beta_3 - \beta_2 \approx 0.4}\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{C_3 - C_4 \approx 0.8}\,.$$

zu wählen. Die Ergebnisse des TB– und SSG–Modells unterscheiden sich wegen der prinzipiell ähnlichen Werte der Koeffizientendifferenz hiervon nur geringfügig. Deutlich erkennt man, daß sich im Zusammenhang mit einer linearen Modellierung keine Sekundärströmung ausbildet, für die Primärströmung aber zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden können. Die in der Abbildung ergänzend aufgetragenen Ergebnisse ei-

ner kubischen Modellbildung stimmen gut mit denen der quadratischen Modellierung überein, was den untergeordneten Einfluß dreidimensionaler Effekte und die Güte der oben durchgeführten Näherung belegt.

Abschließend sei bemerkt, daß die oben entwickelte Zwangsbedingung (7.42) zum Verständnis vieler in jüngster Zeit publizierter Studien zur Berechnung von Rohrströmungen veränderlichen Querschnitts mit Hilfe von RSTM beiträgt (*round–to–square* duct, Davis und Gessner 1992). Ein gemeinsames Merkmal dieser von Sotiropoulos und Patel (1994) (1995), Lien und Leschziner (1994b) sowie Demuren (1993) durchgeführten Arbeiten ist die Verwendung von IP–Modellen. Die oben angestellten Überlegungen mögen eine Erkärung für die von allen Autoren beobachtete drastische Unterschätzung der durch die Querschnittstransition induzierten Sekundärströmung geben.

Ein wichtiger Unterschied zwischen dem EASM und den in den zitierten Untersuchungen eingesetzten RSTM ist die Vernachlässigung von Wandreflektionstermen durch das EASM. Diese bewirken – per Definition – eine lokale Manipulation der Koeffizienten im Sinne der Zwangsbedingung (7.42). Das Wandreflektionsmodell wird aufgrund seiner geringen Universalität und der starken Abhängigkeit der Formulierung von nicht–lokalen, geometrischen Termen, wie z.B. Wandstellungsvektoren, aber oftmals als Schwachpunkt der Modellbildung angesehen. Eine weitreichende Unabhängigkeit der Modellbildung von spezifischen Details des Wandreflektionsmodell gilt i.Allg. als erstrebenswert. Den oben gemachten Ausführungen folgend, kann dieses Ziel mit IP–Modellen nicht realisiert werden.

Kapitel 8 Erweiterung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Verbesserung der bislang erarbeiteten Modellbildung. Schwerpunkte der Untersuchungen sind die Koeffizientenoptimierung des QS–FRLT–Modells unter Verwendung ausgezeichneter Invariantenzustände des Spannungsanisotropietensors, sowie die Erweiterung der Modellbildung auf Wandturbulenz, kompressible Medien und Mehrskalentheorien. Daneben wird ein erster Ausblick auf Erweiterungen der Technik in Hinblick auf kubische Basen und stark gekrümmte Strömungen gegeben.

8.1 Invariantenbasierte Optimierung der Konstanten

Im Zuge der Analyse des quasi–selbstkonsistenten FRLT–Modells traten trotz des allgemein befriedigenden Vorhersageverhaltens in fundamentalen Strömungssituationen einige Schwachstellen zu Tage:

- Die Untersuchung der achsensymmetrischen Turbulenz belegte zwar die Tauglichkeit des nichtlinearen Modells und die Realisierbarkeit der damit berechneten Lösungen, weite Bereiche physikalisch möglicher Invariantenzustände liegen aber ausserhalb des Arbeitsbereichs des Basismodells (vgl. Abbildung 7.5).

- Ein weiterer Malus des Basismodells ist das vorzeitige Erreichen der Grenzwerte von b_{ij}, bzw. die mangelhafte Synchronisation zwischen den Invarianten von b_{ij} und der Integritätsbasis (vgl. Kapitel 7.3).

Ziel der Optimierung ist die Gewährleistung konsistenter Invarianten II_b und III_b des Spannungsanisotropietensors für ausgezeichnete Strömungszustände im Rapid–Distortion–Limit. Die Herleitung der Invarianten von b_{ij}, deren Bedeutung für die Realisierbarkeitsbedingung und eine knappe Zusammenfassung markanter Zustände kann Anhang A entnommen werden.

Ausgangspunkt der Vorgehensweise ist die Tatsache, daß die berechneten Grenzwerte der Invarianten bei hoher Belastung (Rapid–Distortion–Limit) keine Funktion der Wirbel– und Scherraten–Tensoren mehr sind, sondern lediglich von den Koeffizienten des Modells abhängen. Vorgegebene Invariantenzustände können daher vom Modell durch gezielte Anpassung der Koeffizienten wiedergegeben werden. Man beachte, daß dies nur für asymptotisch korrekte Ansätze gilt, weswegen sich die regularisierte Variante einer solchen Optimierung verschließt.
In Bezug auf die Realisierbarkeit der Lösungen zeigt sich, daß die vorhergesagten Lösungen häufig einem bestimmten, prinzipiell korrekten Pfad in der Invariantenkarte folgen. Die Befriedigung des Realizability–Prinzips gelingt dann automatisch, wenn die beiden Endpunkte des Pfades realisierbar sind. Im Weiteren wird die Darstellung der prognostizierten Invarianten auf der Basis des Drei–Generator–Ansatzes $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ benötigt, welche

in 3D Situationen

$$
\begin{aligned}
II_b = -0.5\, b_{kk}^2 &= -\frac{A^2}{2}\,\eta_1 - \frac{B^2}{2}\,(\eta_1\eta_2 - 6\eta_5) - C^2\frac{\eta_1^2}{12} - AC\,\eta_3\ , \\
III_b = 1/3\, b_{kk}^3 &= \frac{A^3}{3}\,\eta_3 + \frac{C^3}{9}\left(\eta_3^2 - \frac{\eta_1^3}{12}\right) + \frac{A^2C}{6}\,\eta_1^2 - \frac{AB^2}{2}\,(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3) \\
&\quad + CB^2\left(\frac{\eta_1\eta_5}{2} + \frac{2\,\eta_3\eta_4}{3} - \frac{7\,\eta_1^2\eta_2}{12}\right) + \frac{AC^2}{6}\,\eta_1\eta_3\ ,
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

bzw. in zweidimensionalen Strömungen

$$
\begin{aligned}
II_b^{(2D)} &= -\frac{A^2}{2}\,\eta_1 + B^2\,\eta_1\eta_2 - \frac{C^2}{12}\eta_1^2\ , \\
III_b^{(2D)} &= -\frac{C}{6}\,\eta_1\left[\frac{C^2}{18}\,\eta_1^2 - A^2\eta_1 + 2B^2\,\eta_1\eta_2\right] = -\frac{C\,\eta_1}{3}\left[II_b^{(2D)} + \left(\frac{C\eta_1}{3}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

lautet. Die Optimierung beruft sich auf die bereits im vorangehenden Kapitel erläuterten fundamentalen Strömungszustände der ebenen bzw. achsensymmetrischen rotationsfreien Distorsion und der homogenen Scherturbulenz.

Rotationsfreie achsensymmetrische Distorsion

Im Falle achsensymmetrischer Probleme lautet die Darstellung des Anisotropietensors

$$
b_{ij} = \left[\frac{\beta_1}{\tilde{g} - \frac{2\beta_3^2}{3}\left(\frac{\eta_1}{g}\right)}\left(1 \pm \frac{\beta_3\sqrt{\eta_1}}{\tilde{g}\sqrt{1.5}}\right)\right] s_{ij}\ ,
\tag{8.3}
$$

wobei das positive Vorzeichen die achsensymmetrische Kontraktion und das negative Vorzeichen die achsensymmetrische Expansion kennzeichnet. Der Grenzwert des Gleichgewichtsparameters notiert sich aufgrund der Rotationsfreiheit ($\eta_2 = 0$) zu

$$
\tilde{g} = \frac{2\eta_1}{4 + A_1\sqrt{0.4\eta_1 - 1.6\eta_2}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \lim_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1\to\infty}} \tilde{g} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{\eta_1}}{A_1}\ .
\tag{8.4}
$$

Hiermit findet man für den Grenzwert des Anisotropietensors

$$
\lim_{\eta_1\to\infty} b_{ij} = \underbrace{\left[\frac{\beta_1}{\frac{\sqrt{15}}{A_1} - \frac{A_1\,\beta_3^2}{\sqrt{15}}}\right]\left(1 \pm \frac{\beta_3\,A_1}{\sqrt{15}}\right)}_{:=\gamma}\sqrt{\frac{1.5}{\eta_1}}\,s_{ij} = \gamma\sqrt{\frac{1.5}{\eta_1}}\,s_{ij}\ .
\tag{8.5}
$$

Die entsprechenden Schranken der Invarianten lauten

$$
\lim_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1\to\infty}} II_b = \frac{-3}{4}\,\gamma^2\ , \qquad III_b = \frac{1}{2}\,\gamma^3 \quad \rightsquigarrow \left(\frac{II_b}{3}\right)^3 + \left(\frac{III_b}{2}\right)^2 \equiv 0
\tag{8.6}
$$

Gleichung (8.6) bestätigt die bereits oben gemachte Aussage, daß die vorhergesagten Invarianten einer quasi–selbstkonsistenten Modellbildung der Zwangsbedingung (A.14) achsensymmetrischer Turbulenz automatisch genügen. Die anschließenden Überlegungen konzentrieren sich daher auf die Gewährleistung konsistenter Werte für die zweite Invariante II_b und den daraus abzuleitentenden Koeffizienten.

Achsensymmetrische Kontraktion (AK)

Im Grenzfall unendlich starker Streckung sollte die Turbulenzstruktur der isotropen Zwei–Komponenten–Turbulenz zustreben:

$$\lim_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1\to\infty}} \qquad II_{b(\mathrm{AK})} = -1/12\,, \qquad III_{b(\mathrm{AK})} = -1/108\,.$$

Der Parameter γ berechnet sich dann gemäß (8.6) zu $|\gamma| = 1/3$, woraus man schließlich eine Bestimmungsgleichung für den Koeffizienten A_1 gewinnt

$$A_1^2\left[\frac{3|\beta_1|\beta_3}{\sqrt{15}} + \frac{\beta_3^2}{\sqrt{15}}\right] + 3|\beta_1|A_1 - \sqrt{15} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{A_{1(\mathrm{AK})} = 3.71}\,. \tag{8.7}$$

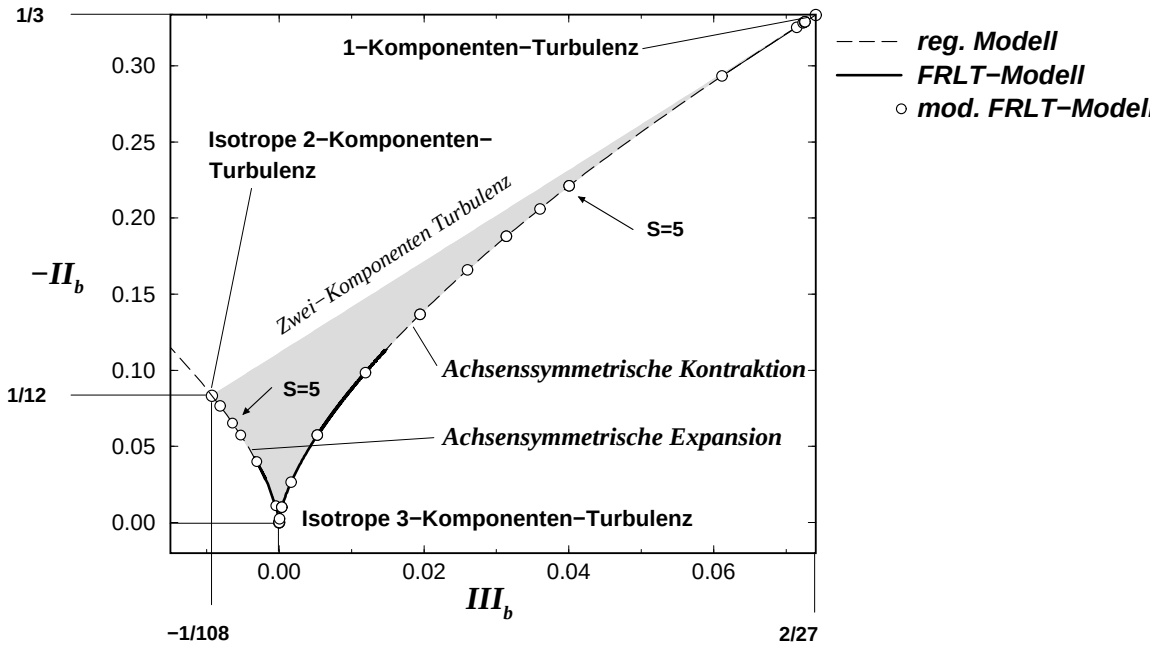


Abbildung 8.1: Achsensymmetrische Turbulenz ($S = 0$ bis 1000); Vergleich der Trajektorien für unterschiedliche quasi–selbstkonsistente FRLT–EASM.

Achsensymmetrische Expansion (AE)

Im Grenzfall unendlich starker Expansion sollte sich der Zustand der Ein–Komponenten–Turbulenz einstellen:

$$\lim_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1\to\infty}} \qquad II_{b(\mathrm{AE})} = -1/3\,, \qquad III_{b(\mathrm{AE})} = 2/27\,.$$

Der Parameter γ bestimmt sich dann zu $|\gamma| = 2/3$ und damit

$$A_1^2\left[-\frac{3|\beta_1|\beta_3}{2\sqrt{15}} + \frac{\beta_3^2}{\sqrt{15}}\right] + \frac{3}{2}|\beta_1|A_1 - \sqrt{15} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{A_{1(\mathrm{AE})} = 3.56}\,. \tag{8.8}$$

Abbildung 8.1 gibt einen Überblick über die mit den veränderten A_1 Koeffizienten erzielbaren Verbesserungen (**mod. FRLT Modell**). Ein besonderer Vorteil der invariantenbasierten Modellierung ist die Verknüpfung von Realisierbarkeitsbedingung und asymptotischer Konsistenz. Da der Lösungspfad in der Invariantenkarte, wie bereits in (7.17) gezeigt, stets korrekt ist, hängt die Realisierbarkeit der Lösung nur noch von der Realisierbarkeit der asymptotischen Endzustände ($\lim\eta_1 \to 0$ und $\lim\eta_1 \to \infty$) ab. Für gültige Endzustände ist die Formulierung daher inhärent realisierbar. Im Gegensatz zum Basismodell stagnieren die Resultate nicht mehr frühzeitig sondern bewegen sich monoton auf die Eckpunkte in der Invariantenkarte zu.

Ebene Streckung (ES)

Mit Hilfe der Beziehungen (8.2) und (5.18) ergibt sich für die zweite Invariante einer rotationsfreien 2D Strömung

$$II_b = -0.5\,\eta_1\left[\frac{-\beta_1}{\tilde{g} - \frac{2}{3}\beta_3^2\left(\frac{\eta_1}{\tilde{g}}\right)}\right]^2\left[1 + \frac{\eta_1}{6}\left(\frac{2\beta_3^2}{\tilde{g}}\right)\right]\,.$$

Der Gleichgewichtsparameter $\tilde{g}$ kann im Grenzübergang wieder durch die Beziehung (8.4) ersetzt werden, weswegen man

$$\lim_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1\to\infty}} II_{b(\mathrm{ES})} = -0.5\left[\frac{-\beta_1}{\frac{\sqrt{10}}{A_1} - \frac{2}{3}\beta_3^2\left(\frac{A_1}{\sqrt{10}}\right)}\right]^2\left[1 + \frac{10}{A_1^2}\left(\frac{2\beta_3^2}{3}\right)\right] \tag{8.9}$$

findet. Für die dritte Invariante notiert man

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1\to\infty}} III_{b(\mathrm{ES})} &= \lim_{\eta_1\to\infty}\left\{\left(\frac{-C\,\eta_1}{3}\right)\left[II_b + \left(\frac{C\eta_1}{3}\right)^2\right]\right\} \\ \text{mit} \quad \lim_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1\to\infty}}\left(\frac{C\,\eta_1}{3}\right) &= \left[\frac{-\beta_1}{\frac{\sqrt{10}}{A_1} - \frac{2}{3}\beta_3^2\left(\frac{A_1}{\sqrt{10}}\right)}\right]\left[\frac{2\,\beta_3\sqrt{10}}{3\,A_1}\right]\,.\end{aligned} \tag{8.10}$$

Letzteres belegt, daß mit allen üblichen Koeffizientensätzen wegen $\beta_1 \cdot \beta_3 > 0$ eine positive Invariante III_b vebunden ist. Die von Lee und Reynolds (1985) veröffentlichte direkte numerische Simulation legt demgegenüber kleine, negative Werte der Invarianten III_b nahe, zu deren Realisierung jedoch ein positiver Koeffizient β_3, bzw. $C_3 > 2$ benötigt wird. Die vorgeschlagene Modellbildung basiert auf

$$\boxed{C_{3(\mathrm{ES})} = 2.3} \qquad \text{und} \qquad \boxed{A_{1(\mathrm{ES})} = 2.74}\,, \tag{8.11}$$

woraus sich der in Abbildung 8.2 skizzierte Verlauf in der Invariantenkarte ergibt (**mod.**[1] **FRLT–Modell**). Die Wahl von $C_{3(\mathrm{ES})} > 2$ ist sicherlich kritisch. Alternativ hierzu wäre $C_{3(\mathrm{ES})} = 2$ und ein durch Zwei–Komponenten–Turbulenz charakterisierter Endzustand ein guter Kompromiss, dessen Resultat ebenfalls in der Abbildung 8.2 dargestellt ist (**mod.**[2] **FRLT–Modell**).

$$\lim_{\eta_1 \to \infty} (II_b, III_b) = (-1/9, 0) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C_{3(\mathrm{ES})} = 2.0} \qquad \text{und} \qquad \boxed{A_{1(\mathrm{ES})} = 3.13}\,. \tag{8.12}$$

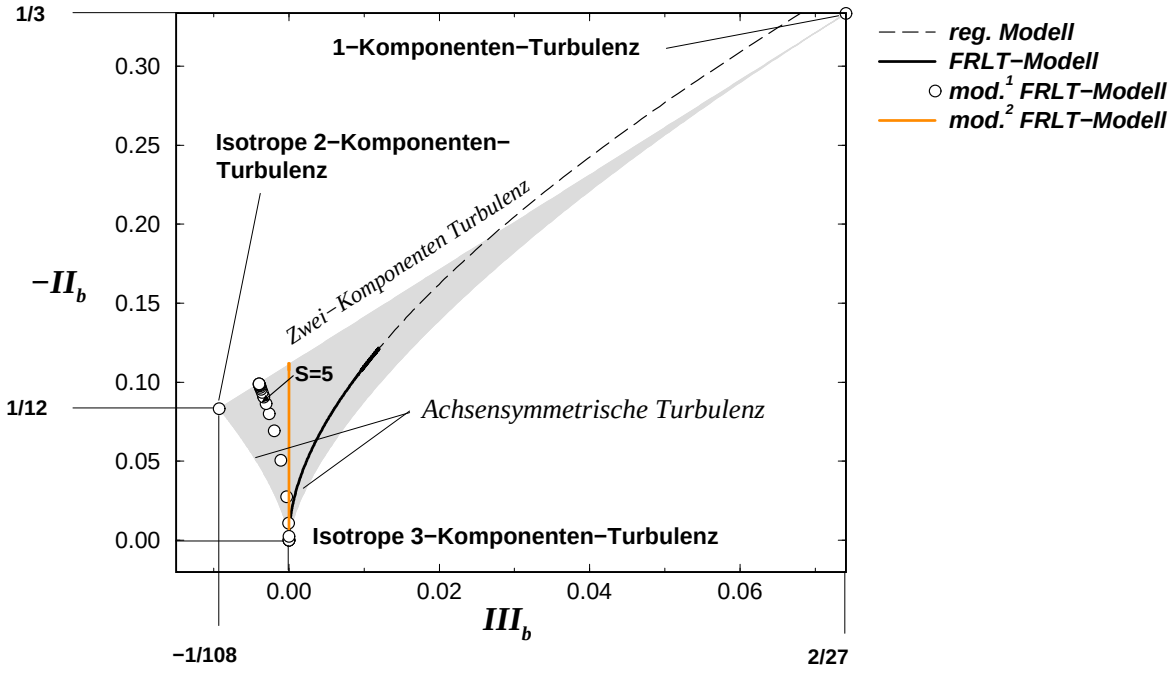


Abbildung 8.2: Ebene Streckung ($S = 0$ bis 1000); Vergleich der Trajektorien für unterschiedliche quasi–selbstkonsistente FRLT–EASM (`mod`^{1}`FRLT` nach Glg. (8.11), `mod`^{2}`FRLT` nach Glg. (8.12)).

Fixierung von A_1

Ein Großteil der in Kapitel 6.4 entwickelten quasi–selbstkonsistenten Technik fusst auf der Annahme, daß der Koeffizient A_1 in zweidimensionalen Scherströmungen ($\eta_1 = -\eta_2$) den Wert $A_1 = 1.83$ besitzt, wovon auch weiterhin noch ausgegangen werden soll. Um die oben gewonnenen Restriktionen für die drei rotationsfreien Strömungen zu verwirklichen, wird von folgender Formulierung für A_1 Gebrauch gemacht

$$\boxed{C_{3(\mathrm{ES})} = 2.3} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_1 = \tilde{A}_1 \sqrt{0.9\eta_1 - 1.1\eta_2}} \tag{8.13}$$

$$\text{mit} \quad \tilde{A}_1 = 1.83 + 0.05\,\Psi^3 + 0.593\,\Psi^2 \qquad \text{und} \qquad \Psi = \left(\frac{\sqrt{6}\,\eta_3}{\eta_1^{1.5}} \right) \in [-1, 1]\,,$$

in der die Anpassung an dreidimensionale Zustände über den Schiefenparameter Ψ geschieht. Die zweite Alternative (8.12) kann z.B. durch

$$\boxed{C_{3(\mathrm{ES})} = 2.0} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_1 = \tilde{A}_1 \sqrt{0.4\eta_1 - 1.6\eta_2}} \tag{8.14}$$

$$\text{mit} \quad \tilde{A}_1 = 1.83 \left[1 + 0.71 \left(1 - \tanh\left(\frac{-4\eta_2}{\eta_1} \right) \right) \right] \qquad +0.075\,\Psi^3 + 0.505\,\Psi^2$$

realisiert werden.

Ebene homogene Scherung

Die Daten der direkten numerischen Simulation von Lee und Reynolds (1985) weisen darauf hin, daß sich die Turbulenzstruktur in einer homogenen, einachsigen Scherung mit zunehmender Scherrate dem Zustand der Ein–Komponenten–Turbulenz nähert. Mit Hilfe von (8.2) gewinnt man daraus die Forderung

$$\rightsquigarrow \lim_{\eta_1 = \eta_2 \rightarrow \infty} II_b = -\left[\frac{-\beta_1}{\frac{2}{1.83} + 3.66\,(\beta_2^2 - \beta_3^2/3)} \right]^2 \left(1 + (1.83\beta_2)^2 + \frac{(1.83\beta_3)^2}{3} \right) \approx \frac{-1}{3}. \tag{8.15}$$

Die Strategie für die unten angegebenen Koeffizientenmanipulation kann unmittelbar aus Gleichung (8.15) abgelesen werden:

1) Der aus dem Basismodell resultierende Grenzwert der Invarianten $\lim II_b = -0.0724$ ist zu hoch. Niedrigere Werte ergeben sich vor allem durch größere $|\beta_1|$ bzw. kleinere C_2

$$C_{2\,\mathrm{HS}} \rightarrow 0.39 - 0.29\,f_{\mathrm{HS}}\,.$$

2) Der in Kapitel 6.4 festgelegte Grenzwert der Schubspannung lim $b_{12} = -0.15$ sollte weiterhin erhalten bleiben. Zur Kompensation des mit geringeren C_2 verbundenen Anstiegs der Schubspannungsbeträge muß der lineare Koeffizient A aus (5.18) verringert werden

$$A \to (1 - 0.4\, f_{\rm HS}) A \; .$$

3) Mit abnehmenden II_b sind realisierbare Lösungen nur noch in der Nähe der achsensymmetrischen Kontraktion zu finden. In homogener, zweidimensionaler Scherturbulenz ergeben sich achsensymmetrische Normalspannungszustände nur für Druck–Scher–Korrelationsmodelle vom IP Typ ($C_3 \to C_4$)

$$C_{3\,\rm HS} = 1.25 - 0.80\, f_{\rm HS} \; .$$

Hierin kennzeichnet $f_{\rm HS}$ eine Übergangsfunktion, welche die entsprechenden Koeffizientenmodifikationen ansteuert

$$f_{\rm HS} = \frac{(\eta_2/8)^4}{20 + (\eta_2/8)^4} \; .$$

In der hier vorgeschlagenen Formulierung wird noch eine leichte Korrektur des Koeffizienten B aus Glg. (5.18) berücksichtigt, deren Ziel die Vermeidung tatsächlich achsensymmetrischer Zustände ist

$$b_{ij\,\rm HS} = (1 - 0.4\, f_{\rm HS})\, A\, T^{(1)}_{ij} + (1 + 0.2\, f_{\rm HS})\, B\, T^{(2)}_{ij} + C\, T^{(3)}_{ij} \; .$$

Abbildung 8.3 stellt den Lösungspfad des modifizierten Modells in der Invariantenkarte dar.

Zusammenfassung des modifizierten Modells

Die Stress–Strain Beziehung des modifizierten Modells lautet

$$b_{ij} = (1 - 0.4\, f_{\rm HS})\, A\, T^{(1)}_{ij} + (1 + 0.2\, f_{\rm HS})\, B\, T^{(2)}_{ij} + C\, T^{(3)}_{ij} \; , \qquad \text{mit} \tag{8.16}$$

$$A = -c_\mu = \frac{\beta_1}{\tilde{g} - \frac{2\beta_2^2}{\tilde{g}}\eta_2 - \frac{2\beta_3^2}{3\tilde{g}}\eta_1} \; , \qquad B = A\left[\frac{-\beta_2}{\tilde{g}}\right] \; , \qquad C = A\left[\frac{2\beta_3}{\tilde{g}}\right] \; .$$

Die zugrunde liegenden Koeffizienten folgen im Ursprung dem FRLT–Modell

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 0.5\,(C_2 - 4/3) \; , \quad \text{mit} \quad C_2 = 0.39 - 0.29\, f_{\rm HS} \; , \\
\beta_2 &= 0.5\,(C_4 - 2) \; , \quad \text{mit} \quad C_4 = 0.45 \; , \\
\beta_3 &= 0.5\,(C_3 - 2) \; , \quad \text{mit} \quad C_{3(a)} = 1.25 + 1.05 f_{\rm ES} - 0.8\, f_{\rm HS} \; , \\
&\qquad\qquad\qquad\quad\;\; C_{3(b)} = 1.25 + 0.75 f_{\rm ES} - 0.8\, f_{\rm HS} \; .
\end{aligned} \tag{8.17}$$

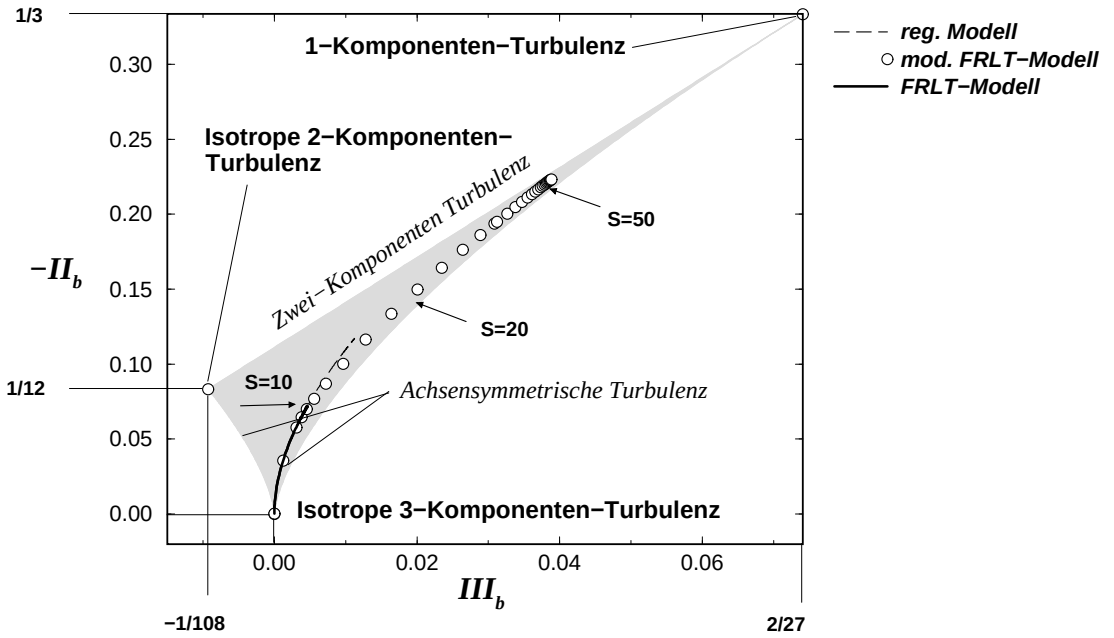


Abbildung 8.3: Homogene zweidimensionale Scherung ($S = 0$ bis 1000); Vergleich der Trajektorien für unterschiedliche quasi–selbstkonsistente FRLT–EASM.

Die beiden oben entwickelten Alternativen (8.14) und (8.15) des modifizierten Gleichgewichtsparameters und die verwendeten Übergangsfunktionen lauten

$$\tilde{g}_{(a)} = C_1 - 1 + \frac{2\eta_1}{4 + (1.83 + 0.05\,\Psi^3 + 0.593\,\Psi^2)\sqrt{0.9\eta_1 - 1.1\eta_2}}\,, \tag{8.18}$$

$$\tilde{g}_{(b)} = C_1 - 1 + \frac{2\eta_1}{4 + \left\{1.83\left[1 + 0.71\left(1 - \tanh\left(\frac{-4\eta_2}{\eta_1}\right)\right)\right] + 0.075\,\Psi^3 + 0.505\,\Psi^2\right\}\sqrt{0.4\eta_1 - 1.6\eta_2}}\,,$$

$$f_{\mathrm{HS}} = \frac{(\sqrt{-2\eta_2}/8)^4}{20 + (\sqrt{-2\eta_2}/8)^4}\,, \quad f_{\mathrm{ES}} = \left[1 - \tanh\left(\frac{-4\eta_2}{\eta_1}\right)\right]\,, \quad \Psi = \left(\frac{\sqrt{6}\,\eta_3}{\eta_1^{1.5}}\right) \in [-1, 1]\,.$$

Man beachte, daß das modifizierte Modell keine Korrektur der Dissipationsratengleichung mehr benötigt (vgl. auch Anmerkungen in Kapitel 7.1).

Relaxationsmodell

Eine einfache, in ihren Möglichkeiten jedoch begrenzte Technik zur Erfassung lokal instationärer Anisotropieeffekte ist die Implementierung eines *Relaxationsmodells*. Die

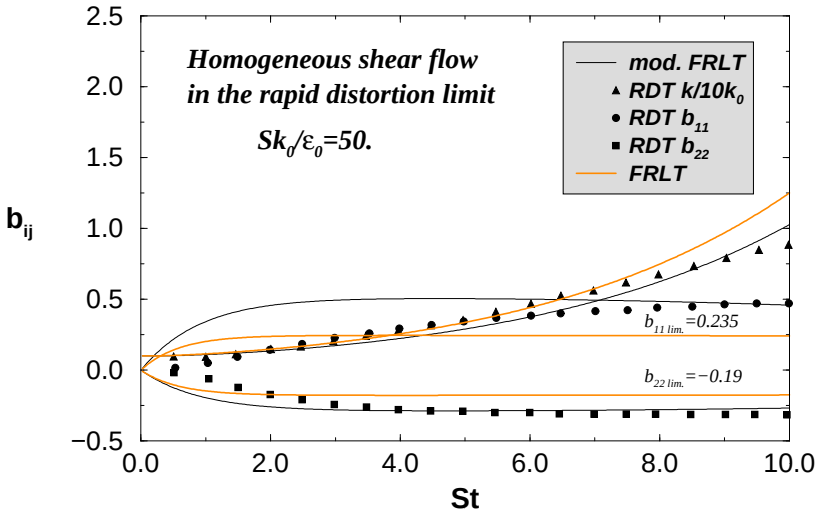


Abbildung 8.4: Zeitliche Entwicklung der Turbulenzstruktur bei einer ebenen homogenen Scherung im Rapid–Distortion–Limit (Anfangsbedingung $S^* k_0/\varepsilon_0 = 50$); Vergleich der quasi–selbstkonsistenten FRTL–EASM–Ergebnisse (Basismodell und modifiziertes Modell) mit der Rapid–Distortion–Theorie (Rogers et al. 1991).

Herleitung des Relaxationsmodells basiert auf der Vereinfachung des instationär erweiterten ASM (5.20) für isotrope Turbulenz ($b_{\alpha\beta} \equiv 0$)

$$\text{isotrope Turbulenz}: \qquad T_t \frac{Db_{ij}}{Dt} = \beta_1 s_{ij} \ . \tag{8.19}$$

Approximiert man den normierten Scherraten–Tensor durch einen linearen Boussinesq–Ansatz, dann ergibt sich eine erste Näherung für den instationären Term

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} \approx \frac{-\beta_1}{T_t\, c_\mu}\, b_{ij} \ . \tag{8.20}$$

Die Gültigkeit dieser Formulierung ist auf isotrope Bereiche beschränkt. Eine sinnvolle Erweiterung setzt die Anisotropieänderung ins Verhältnis zur Abweichung vom Gleichgewichtswert

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = \frac{-\beta_1}{T_t\, c_\mu} \left(b_{ij}^{\mathrm{EASM}} - b_{ij} \right) \ , \tag{8.21}$$

$$\text{z.B.} \qquad b_{ij} = \frac{b_{ij}^o - \gamma_t\, b_{ij}^{\mathrm{EASM}}}{1 - \gamma_t} \ , \quad \text{mit} \quad \gamma_t = \frac{-\beta_1\, \Delta t}{T_t\, c_\mu} \ .$$

Das Relaxationsmodell wurde in ähnlicher Form zuerst von Speziale und Xu (1996) vorgeschlagen und dient im Folgenden zur Berechnung der bereits in Kapitel 7 diskutierten instationären Strömungen aus isotropen Anfangszuständen mit den modifizierten Konstanten.

Ergebnisse des modifizierten Modells bei transienter Belastung

Die Abbildungen 8.4 bis 8.7 geben Aufschluß über die mit den optimierten Koeffizienten erzielbaren Verbesserungen. Die dargestellten Ergebnisse vergleichen das Basismodell und das modifizierte FRLT–Modell. Dabei werden beide Varianten mit der oben dargestellten Relaxationstechnik kombiniert.

Abbildung 8.4 illustriert die verbesserten Eigenschaften des optimierten Modells für die homogene Scherung einer anfänglich isotropen Turbulenz unter Rapid–Distortion–Bedingungen ($S_0 = 50$). Im Vergleich zur RDT erreichen die simulierten Spannungsanisotropien ihren Maximalwert wesentlich früher und nähern sich gegen Ende der dargestellten Simulationszeit folglich bereits wieder dem Gleichgewichtszustand. Die Tauglichkeit des Relaxationsmodells für derartig starkes anfängliches Nichtgleichgewicht ist daher nur bedingt gegeben. Abbildung 8.5 faßt die Ergebnisse für die ebene

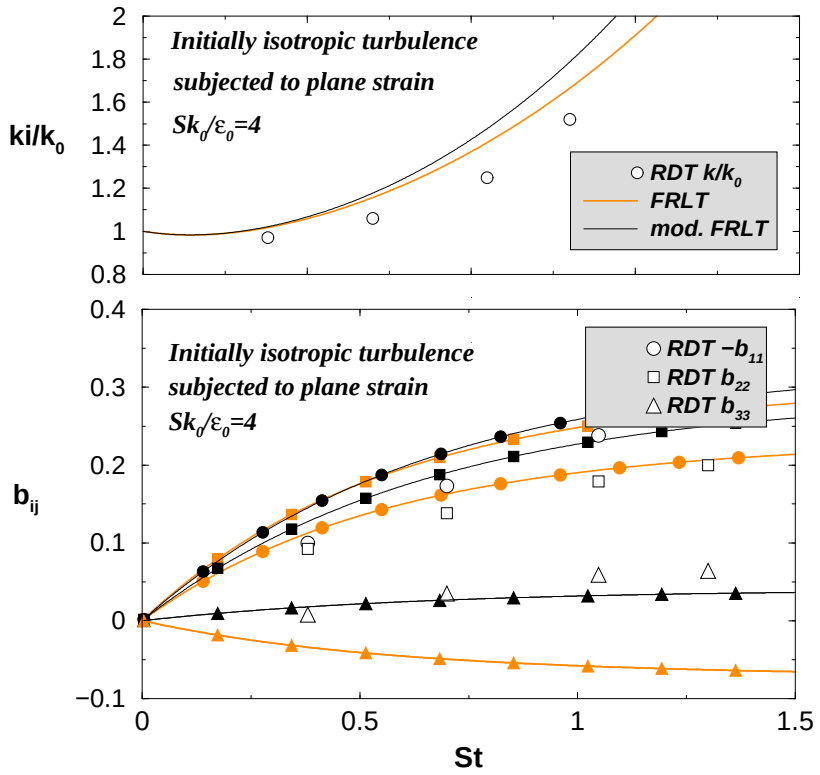


Abbildung 8.5: Zeitliche Entwicklung der Turbulenzstruktur bei einer ebenen Streckung (Anfangsbedingung $S^* k_0/\varepsilon_0 = 4$); Vergleich der quasi–selbstkonsistenten FRLT–EASM–Ergebnisse (Basismodell und modifiziertes Modell) mit der Rapid–Distortion–Theorie (Rogers et al. 1991).

rotationsfreie Streckung ($s_{11} > 0$) zur Anfangsbedingung $S_0 = 4$ zusammen. Die zeitliche Entwicklung der Turbulenzenergie verschlechtert sich mit dem modifizierten Modell aufgrund der größer vorhergesagten Normalspannungsdifferenz $\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2}$. Die Turbulenzstruktur wird demgegenüber vom modifizierten Modell deutlich präziser simuliert.

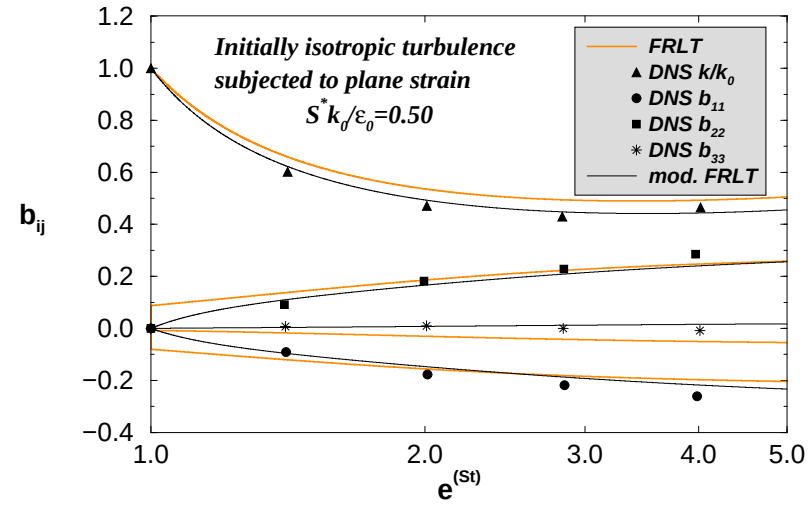


Abbildung 8.6: Ebene Streckung (Anfangsbedingung $S^*k_0/\varepsilon_0 = 0.50$); Vergleich der vom modifizierten und vom Basismodell (ohne Relaxationsmodell) prognostizierten Ergbnisse mit den Daten der direkten numerischen Simulation von Lee et al. (1985).

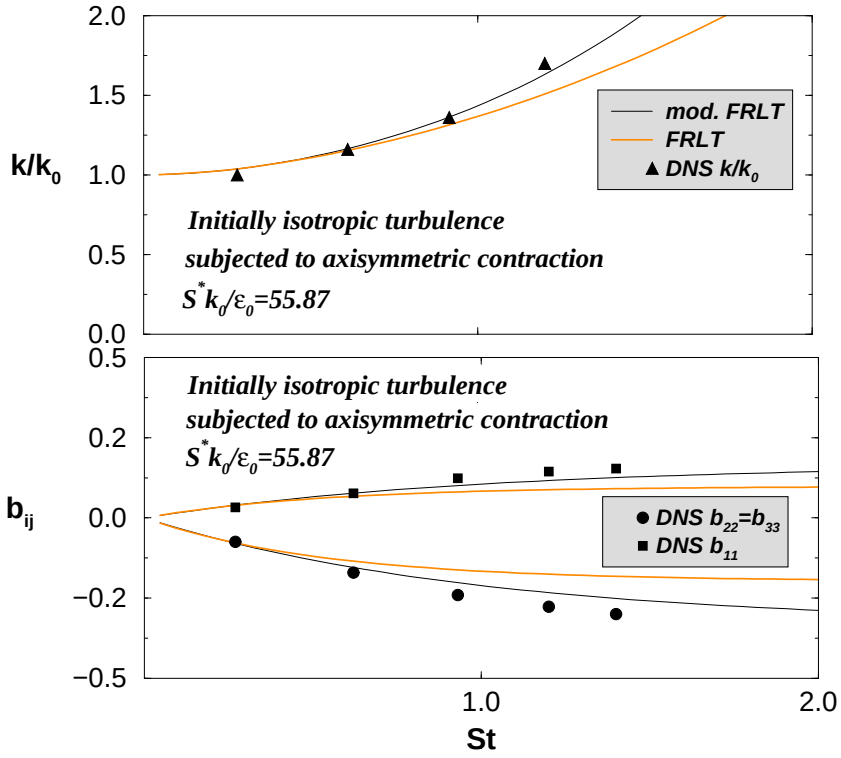


Abbildung 8.7: Zeitliche Entwicklung der Turbulenzstruktur bei einer achsensymmetrischen Kontraktion im Rapid–Distortion–Limit (Anfangsbedingung $S^*k_0/\varepsilon_0 = 55.87$); Vergleich der quasi–selbstkonsistenten FRLT–EASM–Ergebnisse (Basismodell und modifiziertes Modell) mit der direkten numerischen Simulation von Lee et al. (1985).

Im Zusammenhang mit dem modifizierten Modell ermöglicht die Fixierung eines negativen asymptotischen Grenzwertes von III_b die Berechnung einer positiven Normalspannungskomponente $b_{33} > 0$ und daraus resultierend $|b_{11}| > b_{22}$. Abbildung 8.6 vergleicht nochmals die Ergebnisse für den analogen gleichgewichtsnahen Fall ($S_0 = 0.5$) aus denen die Vorzüge des Relaxationsmodells bei moderater Distorsion hervorgehen. Abbildung 8.7 belegt die Güte des modifizierten FRLT–Modells in stark nichtgleichgewichtigen achsensymmetrischen Strömungssituationen ($S_0 = 55.87$). Das modifizierte Modell vermag in dieser Strömung sowohl den Anstieg der Turbulenzenergie, als auch den Grad der Spannungsanisotropie korrekt wiederzugeben.

8.2 Wandturbulenz

Die spezifischen Merkmale von Wandturbulenz sind für die Berechnung kritischer Strömungszustände häufig von zentraler Bedeutung. Im industriellen Kontext ist die Überbrückung der wandnahen Strömungsbereiche durch Wandfunktionen üblich. Dabei wird das gesamte wandnahe Strömungs– und Turbulenzfeld auf der Basis von Gleichgewichtshypothesen mit der Wandschubspannung parametrisiert. Wandfunktionen sind zwar effizient, ihre extrem hypothetischen Grundlagen verlieren jedoch mit zunehmender strömungsmechanischer Belastung an Gültigkeit. Aussagen über kritische Lastgrenzen sind nur mit Hilfe von wandauflösenden numerischen Verfahren möglich. Ein Beispiel hierfür ist die Vorhersage von druckinduzierter Strömungsablösung an Tragflügeln, ohne die eine zuverlässige Berechnung des Maximalauftriebs nicht möglich ist. Ein weiteres aerodynamisches Beispiel ist die Berechnung des Reibungswiderstands von Transportflugzeugen im Reiseflug, welcher die Betriebskosten in hohem Maße beeinflußt. Daneben ist die Qualität von Wärmeübergangsprognosen vielfach von der genauen Simulation von Wandturbulenz abhängig.

Turbulenzfelder erfahren im wandnahen Bereich starke, dämpfende Einflüsse von anisotropem Charakter (vgl. Abbildung 2.1). Diese können von Wirbelzähigkeitsmodellen ohne Korrekturen nicht nachvollzogen werden. Die Korrekturen unterscheidet man in Bezug auf ihre Wirkungsweise nach *low–Reynolds number* (low–Re) und *near–wall* Modifikationen. Low–Re Modifikationen sind prinzipiell von isotropem Charakter. Sie beziehen sich primär auf Bereiche niedriger Turbulenzintensität, welche sich durch geringe Werte der Turbulenz–Reynoldszahl $Re_t = kT_t/\nu < 100$ auszeichnen. Aufgrund des isotropen Charakters können die low–Re Modifikationen unmittelbar vom Zwei–Parameter–Hintergrundmodell übernommen werden. Near–wall Korrekturen widmen sich dagegen gezielt der Umsetzung wandinduzierter Anisotropieeffekte. Die wandnormale Fluktuationskomponente und alle daran gekoppelten Reynolds–Spannungen werden im Bereich der Wand aus kinematischen Gründen unterdrückt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Zwei–Komponenten–Turbulenz, welche in der Invariantenkarte durch eine eigene Dreieckskante $27\,III_b + 9\,II_b + 1 = 0$ repräsentiert wird. Das anisotrope Wirbelzähigkeitsgesetz ist inhärent mit den near–wall Korrekturen verknüpft.

Für die Formulierung der Korrekturterme spielt das in Anhang D skizzierte asymptotische Verhalten der Turbulenzvariablen für verschwindende Wandabstände $n \to 0$, deren Ergebnis unten notiert ist, eine große Rolle

$$\lim_{n\to 0} \qquad b_{11} = 0.41\,, \quad b_{22} = -0.33\,, \quad b_{33} = -0.08\,, \quad b_{12} = 0\,. \tag{8.22}$$

Hintergrundmodell

Die meisten low–Re Formulierungen von Zwei–Parameter–Modellen vermögen die wandnahen Verläufe der isotropen Variablen und der Schubspannung hinreichend genau zu simulieren. Im Zentrum der low–Re Modifikationen stehen zum einen die Adaption der dissipativen Terme an das Reynoldszahl–abhängige Abklingverhalten isotroper Turbulenz (z.B. nach Hanjalić und Launder, 1976), sowie zum anderen Konsistenzrestriktionen. Dabei wird das Resultat der auf die führenden Terme reduzierten Transportgleichungen auf seine Konsistenz zu bekannten asymptotischen Grenzwerten überprüft und gegebenenfalls korrigiert. Die Grundzüge dieser Vorgehensweise sind in Anhang D exemplarisch für das $k-\varepsilon$ Modell und das $k-\omega$ Modell skizziert. Ausführlichere Darstellungen der Thematik findet man z.B. bei So et al. (1997), Peng et al. (1997), Durbin (1995), Wilcox (1994), Abe et al. (1994), Yang und Shih (1993), Lien und Leschziner (1993), Rodi und Mansour (1993), Chien (1982), Patel et al. (1985), Launder und Sharma (1974) oder Jones und Launder (1972).
Eine eingehende Diskussion und Bewertung von low–Re Zwei–Parameter–Modellen zählt nicht zu den Zielen dieser Arbeit. Die in diesem Abschnitt entwickelte near–wall Modifikation der Stress–Strain Beziehung bezieht sich daher nicht auf ein spezifisches Hintergrundmodell, sondern kann mit beliebigen low–Re Zwei–Parameter–Modellen kombiniert werden. Die Ergebnisse stüzen sich auf zwei exemplarisch gewählte low–Re Hintergrundmodelle. Hierbei handelt es sich um das von Lien und Leschziner (1993) vorgeschlagene low–Re $k-\varepsilon$ Modell und das von Wilcox (1994) entwickelte low–Re $k-\omega$ Modell, deren Transportgleichungen in Anhang E zusammengefasst sind.

Near–Wall Modifikation des anisotropen Wirbelzähigkeitsgesetz

Das modifizierte EASM setzt sich aus einem low–Re Zwei–Parameter–Modell und einer überarbeiteten Formulierung der Stress–Strain Beziehung zusammen. Um den Umfang der Modifikationen zu beschränken, greift die hier vorgeschlagene Strategie verstärkt auf die low–Re Formulierung des Hintergrundmodells zurück. Idealisiert man die wandnahe Strömung – in Übereinstimmung mit der üblichen Vorgehensweise – als einachsige, ebene Scherung in einem lokal–orthogonalen Koordinatensystem $\underline{\tilde{e}}_i$,

$$\underline{U} = \tilde{U}_1(\tilde{x}_2)\,\underline{\tilde{e}}_1$$

dann können die Komponenten des Anisotropietensors darstellungstheoretisch durch den quadratischen Drei–Generator–Ansatz $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$ vollständig wiedergegeben werden. Nach

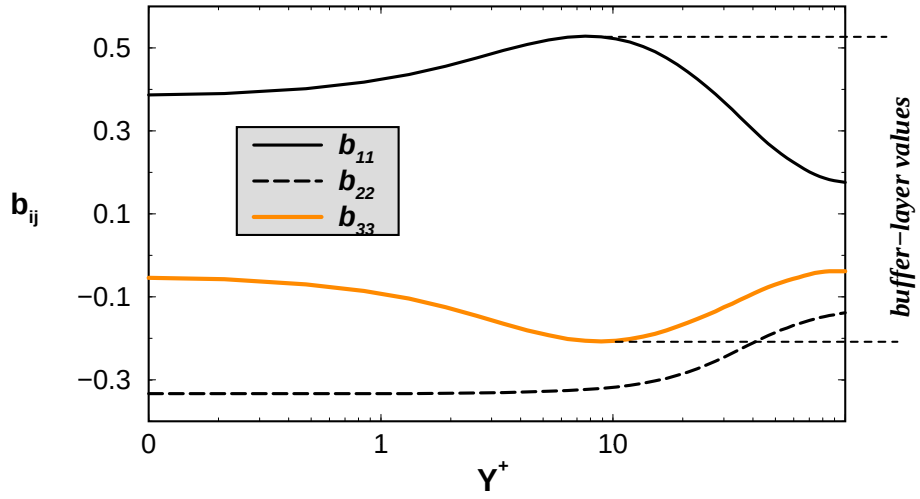


Abbildung 8.8: Turbulente Kanalströmung (Re_τ=395): wandnaher Verlauf des Anisotropietensors der Reynolds-Spannungen aus direkter numerischer Simulation (Kim et al. 1987).

Projektion in das ASM erhält man von (5.18) mit $\eta_1 = 2\,(\tilde{s}_{12})^2$

$$\tilde{b}_{11} = -c_\mu \frac{\eta_1}{g}\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{3}\right) , \qquad \tilde{b}_{22} = c_\mu \frac{\eta_1}{g}\left(\beta_2 - \frac{\beta_3}{3}\right) , \qquad |\tilde{b}_{12}| = c_\mu \sqrt{\frac{\eta_1}{2}} . \quad (8.23)$$

Schubspannung

Die Scherströmung wird von der Interaktion zwischen der Reynoldsschen Schubspannung und dem Reynolds–gemittelten Geschwindigkeitsfeld dominiert. Aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen $\tilde{b}_{12}$ und $\tilde{s}_{12}$ existiert diesbezüglich kein Unterschied zwischen isotropen und anisotropen Formulierungen. Im Wandbereich wird die Reynoldssche Schubspannung bekanntermaßen stark gedämpft. In Analogie zur Wandmodifikation linearer EVM wird der Anisotropieparameter c_μ des EASM daher um die Dämpfungsfunktion f_μ des Hintergrundmodells erweitert

$$\boxed{c_\mu \;\rightarrow\; f_\mu\, c_\mu} \quad , \qquad (8.24)$$

wodurch korrekte Verläufe der Schubspannung und der mittleren Geschwindigkeit gewährleistet sind.

Normalspannungen

In Zusammenhang mit der Erfassung von Zwei–Komponenten–Wandturbulenz bzw. der stark anisotropen wandnahen Normalspannungen empfiehlt sich die Erweiterung der isotropen Beziehung (8.24). Anhand von Abbildung 8.8 erkennt man die geringe Variation der Komponenten des Anisotropietensors im Wand– und Übergangsbereich einer turbulenten Kanalströmung. Die Konstanz der Werte kommt einer simplen Modellbildung zugute, bei der die Koeffizienten der quadratischen Glieder im Wandbereich

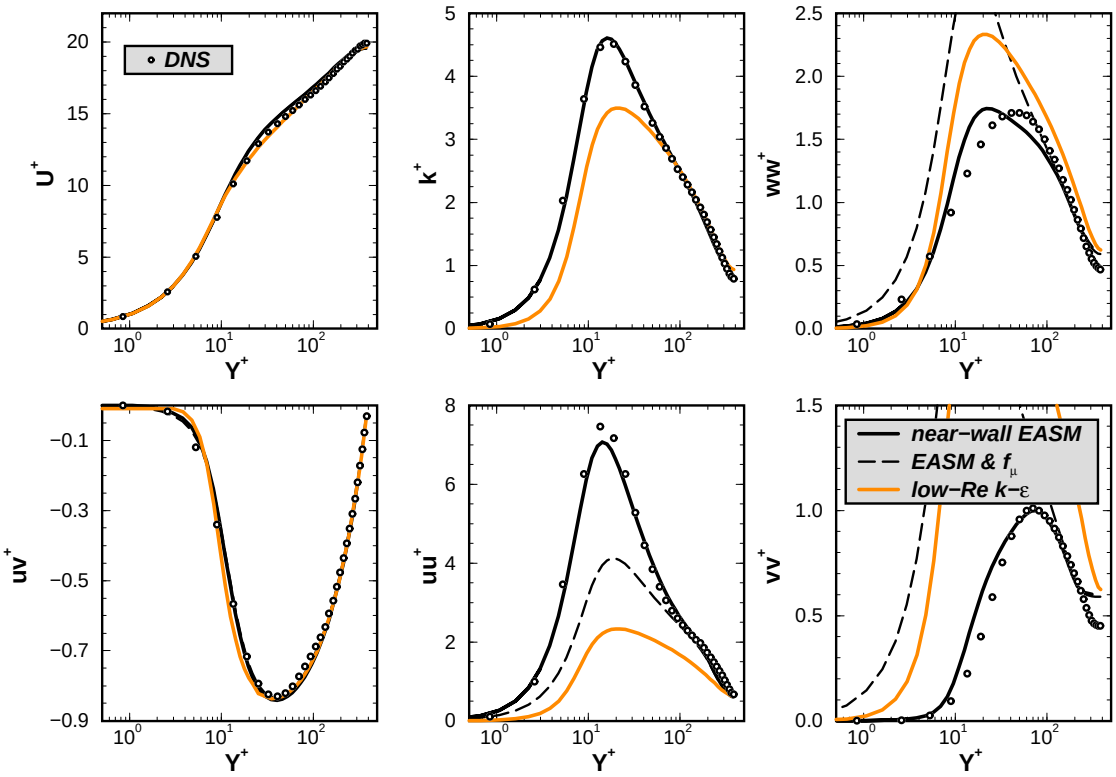


Abbildung 8.9: Turbulente Kanalströmung ($Re_\tau = 395$); Vergleich verschiedener EASM–Ergebnisse mit Daten der direkten numerischen Simulation von Kim et al. (1987). Alle EASM auf der Basis des im Anhang E skizzierten LL $k-\varepsilon$ Hintergrundmodells von Lien et al. (1993).

so modifiziert werden, daß sich die gewünschten Anisotropiewerte einstellen. Um die Darstellbarkeit der Anisotropiespitzen im Übergangsbereich zu gewährleisten, werden die buffer–layer Werte den Wandwerten (8.22) vorgezogen. Mit Hilfe von $\tilde{b}_{11(\mathrm{NW})} = 0.53$ und $\tilde{b}_{22(\mathrm{NW})} = -1/3$ erhält man

$$\boxed{\beta_{2(\mathrm{NW})} := -\frac{0.431}{f_\mu c_\mu \frac{\eta_1}{\tilde{g}}}} \quad , \qquad \boxed{\beta_{3(\mathrm{NW})} := -\frac{0.295}{f_\mu c_\mu \frac{\eta_1}{\tilde{g}}}} \; . \tag{8.25}$$

Die implementierte Modifikation stützt sich auf zwei Dämpfungsfunktionen f_{β_2} und f_{β_3}, die im selben Bereich wie die klassische Dämpfungsfunktion f_μ arbeiten

$$\begin{aligned} \beta_2 \quad &\rightarrow \quad \beta_2 \left[f_{\beta_2} + (1 - f_{\beta_2}) \frac{\beta_{2(\mathrm{NW})}}{\beta_2} \right] \; , \\ \beta_3 \quad &\rightarrow \quad \beta_3 \left[f_{\beta_3} + (1 - f_{\beta_3}) \frac{\beta_{3(\mathrm{NW})}}{\beta_3} \right] \; . \end{aligned} \tag{8.26}$$

Der wandnahe Gradient der Spurkomponenten des Anisotropietensors sollte vernachlässigbar klein sein, was durch die Nichtlinearität der Dämpfungsfunktionen

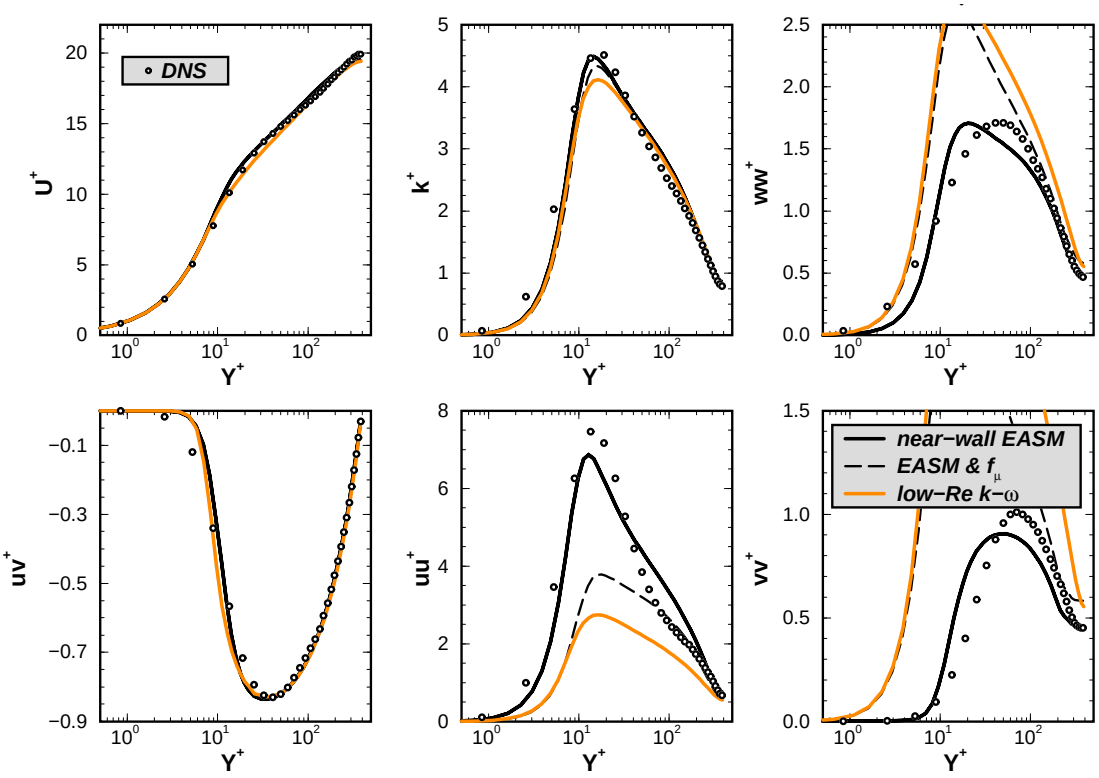


Abbildung 8.10: Turbulente Kanalströmung ($Re_\tau = 395$); Vergleich verschiedener EASM–Ergebnisse mit Daten der direkten numerischen Simulation von Kim et al. (1987). Alle EASM auf der Basis des im Anhang E skizzierten low–Re $k-\omega$ Hintergrundmodells von Wilcox (1994).

$f_{\beta_i} \sim (f_\mu)^\alpha$ mit $\alpha > 1$ sichergestellt werden kann. Eine numerische Optimierung liefert schließlich

$$\boxed{f_{\beta_2} = f_\mu^{1.7}} \qquad \text{und} \qquad \boxed{f_{\beta_3} = f_\mu^2}\,. \tag{8.27}$$

Durch die Abhängigkeit $f_{\beta_i} = f_{\beta_i}(f_\mu)$ bleibt eine eventuell vorhandene Lokalität der low–Re Formulierung erhalten, was für die industrielle Anwendung wichtig ist. Man beachte, daß die Modifikation der Koeffizienten β_2, β_3 nicht zur Berechnung des Anisotropieparameters c_μ verwendet wird.

Die Validierung der oben entwickelten Wandmodifikationen erfolgt anhand der Berechnung einer turbulenten Kanalströmung (Kim, Moin und Moser 1987) bei $Re_\tau = 395$ und $Re_\delta = 7890$, deren Resultate in den Abbildungen 8.9 und 8.10 dargestellt sind. Abbildung 8.9 zeigt die Ergebnisse auf der Grundlage des low–Re $k-\varepsilon$ Hintergrundmodells (Lien und Leschziner 1993). In Bezug auf die berechneten Schubspannungen und mittleren Geschwindigkeitsprofile ist die Qualität der Ergebnisse für alle Varianten erwartungsgemäß gleichermaßen befriedigend. Die beiden EASM–Ergebnisse unterscheiden sich durch die Anwendung der near–wall Modifikation (8.26) der Koeffizienten β_2

und β_3, deren Bedeutung eindrucksvoll aus den stark verbesserten Normalspannungsverläufen für die durch den Terminus **near-wall EASM** gekennzeichneten Kurven hervorgeht.

Abbildung 8.10 gibt einen Überblick über die Kanalströmungsergebnisse auf der Basis einer $k-\omega$ Formulierung (Wilcox 1994). Die Ergebnisse bestätigen, trotz der im Vergleich zum $k-\varepsilon$ Modell insgesamt etwas schlechteren Qualität, die oben gemachten Aussagen.

Es liegt nahe, die Qualitätseinbußen der $k-\omega$ Formulierung auf die, im Gegensatz zum $k-\varepsilon$ Modell, lokale Formulierung der near–wall Modifikationen zurückzuführen. Eine physikalisch einsichtigere explizite Formulierung von near–wall Korrekturen basiert auf geeignet normierten (an)isotropen Wandabständen (z.B. $Re_k = \sqrt{k}n/\nu$), womit jedoch nicht–lokale, topographische Größen Einzug in das Modell erhalten. Die in industriellen Berechnungsverfahren bevorzugte lokale Darstellung von near–wall Korrekturen ist im Rahmen von Wirbelzähigkeitsmodellen vielfach mit der Vermischung von low–Re und near–wall Effekten verbunden. Einzige Ausnahme ist das von Durbin (1991,1993,1995) entwickelte elliptische Relaxationsverfahren bei dem jedoch zwei zusätzliche Transportgleichungen gelöst werden müssen (k-ε-v^2-f Modell).

8.3 Kompressible (all–speed) Formulierung

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit der Erweiterung der Modellbildung auf kompressible Medien. Dabei sollen nur transsonische Strömungen mit geringen Turbulenzmachzahlen berücksichtigt werden. Das in dieser Arbeit betrachtete Machzahlspektrum beschränkt sich deswegen auf

$$Ma_t := \sqrt{\frac{2k}{a^2}} \leq 0.2 \qquad \text{und} \qquad Ma := \frac{U_g}{a} \leq 2 \; . \tag{8.28}$$

Hierin kennzeichen Ma_t die Turbulenzmachzahl, Ma die klassische Machzahl und a die Schallgeschwindigkeit, deren Definition bereits in Kapitel 1 erfolgte. Üblicherweise findet man für $Ma < 3$ Turbulenzmachzahlen im Bereich von 0.1 (Fernando und Smits 1990). Unter den Voraussetzungen (8.28) können die Dichtefluktuationen gemäß der in Kapitel 1.3 dargestellten Morkovin–Hypothese vernachlässigt werden, und die Kompressibilitätseffekte bleiben nach Glg. (1.45) auf Veränderungen der mittleren Dichte beschränkt. Die in dieser Arbeit verwendeten darstellungstheoretischen Methoden eignen sich grundsätzlich auch zur Modellierung aerothermodynamischer Strömungen. Eine vorzügliche Darstellung zur systematischen Erweiterung der Modellbildung auf hochkompressible Strömungen findet man bei Adumitroaie, Ristorcelli und Taulbee (1998). Für die Allgemeingültigkeit der Modellbildung ist deren Erweiterung auf schwach–kompressible Medien dennoch ein wichtiger Aspekt. Im Unterschied zu inkompressiblen Medien tritt bei der Untersuchung kompressibler Medien eine weitere Invariante in Gestalt der Divergenz des Geschwindigkeitsfelds hinzu

$$\eta_0 := T_t S_{kk} = T_t \left(\underline{\nabla} \cdot \underline{U} \right) \quad ,$$

welche von Bedeutung für die Entwicklung der Reynolds–Spannungen sein mag. Daneben verändert sich der mathematische Charakter einzelner Terme des Reynolds–Spannungsmodells, weswegen eine Überarbeitung des ASM (4.9) für kompressible Medien notwendig erscheint.
Eine ausführliche Analyse zu den Mängeln der Zwei–Parameter–Hintergrundmodelle bei der Vorhersage kompressibler Wandgrenzschichten ist von Huang, Bradshaw und Coakley (1994) veröffentlicht worden. Die Autoren weisen nach, daß die Hauptursache für die mangelhafte Darstellung einfacher kompressibler Wandgrenzschichten die Verletzung der kompressiblen Form der Verträglichkeitsbeziehung (1.79) ist. Mit zunehmender Dichtevariation weicht die Steigung der vorhergesagten Geschwindigkeitsprofile bei logarithmischer Auftragung teilweise vom Kehrwert der von-Kármán-Konstanten κ ab,

$$\frac{U_c}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln(EY^+) \,, \quad \text{mit} \quad U_c = \int_0^U U\sqrt{\rho/\rho_w} \quad \text{und} \quad Y^+ = \frac{nu_\tau}{\nu_w} \,, \quad \kappa \approx 0.4 \,,$$

was experimentellen Befunden (Fernholz und Finley 1980) widerspricht. Dieser Defekt ist für verschiedene Hintergrundmodelle unterschiedlich stark ausgeprägt. Die Analyse herkömmlicher Zweigleichungsmodelle empfiehlt die Wahl einer $k-\omega$ Formulierung (Huang et al. 1994).

Schwach kompressibles Druck–Scher–Korrelationsmodell

Das in Gleichung (4.9) angegebene algebraische Spannungsmodell ist eine Verknüpfung spurfreier Tensoren. Diese zentrale Eigenschaft überträgt sich beim Übergang zu kompressiblen Medien trotz der Verwendung spurfreier Basistensoren s_{ij} und w^*_{ij} in der bislang erarbeiteten Form nicht. Die Definition des exakten Druck–Scher–Korrelationsterms lautet nach Gleichung (1.58)

$$\rho\,\phi_{ij} = \overline{p\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \,. \tag{8.29}$$

Der Druck–Scher–Korrelationsterm ist in kompressiblen Strömungen wegen $\underline{\nabla}\cdot\underline{u} \neq 0$ spurbehaftet und läßt sich in einen spurfreien Deviator ϕ_{ijD} und einen isotropen Anteil ϕ_d zerlegen

$$\rho\,\phi_{ij} = \rho\left(\phi_{ijD} + \frac{2}{3}\,\phi_d\,\delta_{ij}\right) \quad \text{mit} \quad \phi_d = \frac{\phi_{kk}}{2} = \overline{p\,\frac{\partial\, u_m}{\partial\, x_m}}\,\frac{1}{\rho} \,. \tag{8.30}$$

Der im Vergleich zur inkompressiblen Formulierung hinzutretende *Druckdilatationsterm* ϕ_d leistet einen Beitrag zum Turbulenzenergietransport (1.60). Die modellierte Turbulenzenergiegleichung lautet in schwach kompressiblen Medien folglich

$$\frac{D(\rho k)}{Dt} = \rho\varepsilon\left(\frac{P}{\varepsilon} - \frac{\phi_d}{\varepsilon}\right) + \rho D \quad . \tag{8.31}$$

Die Modellierung der Druck–Scher–Korrelationen erfolgt getrennt nach deviatorischen und kugelsymmetrischen Anteilen. Ein analoger Dilatationsbeitrag exisitiert für den isotropen Anteil des Dissipationstensors (vgl. Gleichung 1.52). Die Analyse von DNS Daten offenbart, daß letzterer mit M_t^4 skaliert (Ristorcelli 1998) und somit in transsonischen Strömungen in guter Näherung vernachlässigt werden kann.

Der Einfluß der Dilatationsterme in wandgebundenen transsonischen Strömungen ist umstritten. Generell sind Fehlerbeiträge aus der unzureichenden Darstellung kompressibler zweiter statistischer Momente im Vergleich zu Defiziten aus der Erfassung von Phänomenen variabler mittlerer Dichte von höherer Ordnung klein.
Die Ansätze zur Modellierung der Dilatationsbeiträge stützen sich traditionell auf homogene Scherströmungen bzw. freie Scherschichten (Wilcox 1993; Sarkar et al. 1991; Sarkar 1992; Zeman 1990). Eine Vielzahl von Studien, z.B. Coakley et al. (1994) und Wilcox (1993), bestätigen den positiven Einfluß der modellierten Dilatationsbeiträge in diesen Strömungen. In wandgebundenen Strömungen verschlechtern sich die Ergebnisse demgegenüber bei Berücksichtigung der modellierten Dilatationsbeiträge (Huang et al. 1994). Direkte numerische Simulationen (Huang et al. 1995; Friedrich und Bertolotti 1997) bestätigen dies indirekt durch den darin erwiesenen geringen Einfluß von Kompressibilitätseffekten auf Wandturbulenz in gleichgewichtsnahen Strömungen. Die Druckdilatationsmodelle sollten sich daher in Gleichgewichtsströmungen neutral verhalten.

Für den deviatorischen Beitrag verwendet man üblicherweise eine leicht modifizierte Variante des inkompressiblen Druck–Scher–Korrelationsmodells (4.4), bei dem der sog. *Crow–Term* $C_2 k\, S_{ij}$ spurfrei modelliert wird

$$\left.\begin{aligned} \phi_{ij} - \varepsilon_{ij_D} &= \phi_{ijw} - 2(C_1 + C_1^* P/\varepsilon)\,\varepsilon\, b_{ij} + C_2 k \left(S_{ij} - \tfrac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}\right) \\ &\quad + C_3 k (b_{ik}S_{kj} + b_{jk}S_{ki} - \tfrac{2}{3}\delta_{ij} b_{lk} S_{kl}) \\ &\quad + C_4 k (b_{ik}\tilde{W}_{jk} + b_{jk}\tilde{W}_{ik}), \\ \varepsilon_{ij} &= \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon + \varepsilon_{ij_D}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (8.32)$$

Der kugelsymmetrische Beitrag ist generell von untergeordneter Bedeutung und skaliert typischerweise mit M_t^2. Neuere Arbeiten legen jedoch die Proportionalität des Druckdilatationsterms zum turbulenten Nichtgleichgewicht $P/\varepsilon - 1$ bzw. der *Gradientenmachzahl* $Ma_s = Ma_t\, S$ nahe (Sarkar 1995; Ristorcelli 1998). Die in dieser Arbeit untersuchten Varianten gehen auf Vorschläge von Sarkar (1992) (ϕ_d^S) und Ristorcelli (1998) (ϕ_d^R) zurück

$$\phi_d^S = -0.15\,\varepsilon\, Ma_t \left[\frac{P}{\varepsilon} - \frac{4Ma_t}{3}\right]\ , \qquad \phi_d^R = 0.5\,\varepsilon\,(Ma_t S)^2 \left[\frac{P}{\varepsilon} - 1\right]\ . \qquad (8.33)$$

Der Vorschlag von Ristorcelli stützt sich im Gegensatz zu Sarkars Ansatz auf die Gradientenmachzahl und beinhaltet die oben angesprochene Proportionalität zu $P/\varepsilon - 1$. Der Druckdilatationsterm ϕ_d^R kann die Turbulenz sowohl dämpfen als auch anfachen.

Kompressibles ASM

Setzt man das in den Gleichungen (8.30)–(8.33) notierte Druck–Scher–Korrelationsmodell in die Beziehung (4.6) ein

$$\left(b_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\frac{D(\rho k)}{Dt}-\rho D\left(b_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)=0.5\,\rho\left(P_{ij}+\phi_{ij}-\rho\varepsilon_{ij}\right)\quad,$$

dann ergibt sich mit Hilfe der modifizierten Turbulenzenergiegleichung (8.31) wieder die bereits in (4.9) notierte inkompressible Beziehung

$$gb_{ij} = \beta_1 s_{ij}-\beta_2\left[b_{ik}w^*_{kj}-w^*_{ik}b_{kj}\right]+\beta_3\left[b_{ik}s_{kj}+s_{ik}b_{kj}-\frac{2}{3}\delta_{ij}b_{lk}s_{kl}\right]\quad, \tag{8.34}$$

$$g = \underbrace{\left(C_1-1+\frac{P}{\varepsilon}\right)}_{\text{inkompressibler Teil: } g_{ic}}+\underbrace{\left[\frac{\phi_d}{\varepsilon}-\left(\frac{C_3-2}{3}\right)T_t S_{kk}\right]}_{\text{kompressibler Teil: } g_c}\quad.$$

Der Unterschied zwischen kompressibler und inkompressibler Formulierung beschränkt sich somit auf eine veränderte Definition des Gleichgewichtsparameters g. Zur Vermeidung von Singularitäten müssen positive Werte des Gleichgewichtsparameters gewährleistet werden. Der kompressible Teil g_c vermag den Gleichgewichtsparameter im Bereich starker Stöße negativen Werten zuzuführen, weswegen sämtliche Kompressibilitätseffekte in dieser Arbeit in das Druckdilatationsmodell absorbiert werden

$$\boxed{g=C_1-1+\frac{P}{\varepsilon}+\frac{\phi_d}{\varepsilon}}\quad. \tag{8.35}$$

Kompressibles EASM

Bei der hier verfolgten Strategie tritt die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes η_0 aufgrund der Beschränkung auf spurfreie Generatoren formal nicht in Erscheinung. Die Invariante wird in die Definition des spurfreien Scherraten–Tensors absorbiert und tritt, mit Ausnahme von η_2, implizit in allen Invarianten η_i auf. Der Kompressibilitätseinfluß macht sich jedoch auch in der a priori spurfreien Basis bemerkbar, da der Scherraten–Tensor für kompressible Medien durch das Auftreten von $(\underline{\nabla}\cdot\underline{U})\,\delta_{i3}$ auch in zweidimensionalen Reynolds–gemittelten Strömungen ein Tensor des R^3 ist. Die einfachere zweidimensionale Form des Caley–Hamilton Theorems ist somit in kompressiblen Strömungen streng genommen nicht anwendbar, weswegen Funktions– und Integritätsbasis inhärent dreidimensional sind.
Eine simple Abschätzung zum Unterschied zwei– und dreidimensionaler EASM in kompressiblen, zweidimensionalen Strömungen wurde von Wallin und Johansson (2000) angegeben und basiert auf der Definition eines zweidimensionalen, spurfreien Scherraten–Tensors

$$s^{(2D)}_{ij}=T_t\left(S^{(2D)}_{ij}-\frac{\eta_0}{2}\,\delta^{(2)}_{ij}\right)=s_{ij}-\frac{\eta_0}{2}\left(\delta^{(2)}_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\right)\quad, \tag{8.36}$$

$$\rightsquigarrow\quad \Delta s_{ij}=s_{ij}-s^{(2D)}_{ij}=\mathcal{O}(\eta_0)\quad.$$

Mit Hilfe des Wirbelzähigkeitsprinzips gelingt eine Abschätzung der führenden Terme

$$\Delta b_{ij} \sim \Delta s_{ij} = \mathcal{O}(\eta_0) \; , \qquad \Delta w^*_{ij} \sim \Delta b_{ij} = \mathcal{O}(\eta_0) \; , \qquad \Delta(P/\varepsilon) \sim (\Delta s_{ij})^2 = \mathcal{O}(\eta_0^2) \; .$$

Ausgehend von der zweidimensionalen Lösung $b_{ij}^{(2D)}$ gewinnt man hierdurch unter Vernachlässigung der von höherer Ordnung kleinen Beiträge für $\Delta b_{ij} = b_{ij} - b_{ij}^{(2D)}$

$$\Delta(g b_{ij}) = \Delta(\beta_1 s_{ij}) + \text{HOT} \; , \qquad \rightsquigarrow \quad g^{(2D)}(b_{ij} - b_{ij}^{(2D)}) = \beta_1 \frac{\eta_0}{2} \left(\delta_{ij}^{(2)} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \right)$$

$$\boxed{b_{ij} = b_{ij}^{(2D)} + \beta_1 \frac{\eta_0}{2g^{(2)}} \left(\delta_{ij}^{(2)} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \right) + \mathcal{O}(\eta_0^2)} \; . \tag{8.37}$$

8.4 Zwei–Skalen–Modell

Eine grundlegende Eigenschaft der turbulenten Strömung ist der Energieaustausch zwischen unterschiedlichen Skalen. Im Rahmen herkömmlicher RANS–Turbulenzmodelle unterscheidet man einmal in das Modell eingespeiste Energiebeiträge nicht mehr hinsichtlich ihrer Skalen. Das von Wilcox (1988) vorgeschlagene Zwei–Skalen–Modell versucht, die Wandlung von Energie innerhalb der Kaskade ein wenig genauer zu modellieren. Dazu wird das Energiespektrum in zwei verschiedene Anteile zerlegt (vgl. Kapitel 1.3.6 bzw. Abbildung 8.11)

$$k = k_p + e \; . \tag{8.38}$$

Die Transportgleichung der Turbulenzenergie $k = 0.5\,\overline{u_i u_i}$ folgt von (1.73). Der großskalige Anteil k_p bezieht seine Energie aus der Grundströmung und transferiert Energie zu kleineren Skalen. Folglich ist seiner Transportgleichung der Produktionsterm der Turbulenzenergiegleichung zuzuordnen

$$\frac{Dk_p}{Dt} = P - E \; . \tag{8.39}$$

Der durch den Energietransfer E gespeiste kleinskalige Anteil e beherbergt die Diffusions– und Dissipationsmechanismen der Beziehung (1.73) und wird durch

$$\frac{De}{Dt} = E + D - \varepsilon \tag{8.40}$$

beschrieben. Für die Entwicklung eines Zwei–Skalen–EASM ist die Gliederung der Reynoldspannungen in einer Zwei–Skalen Theorie von Interesse.

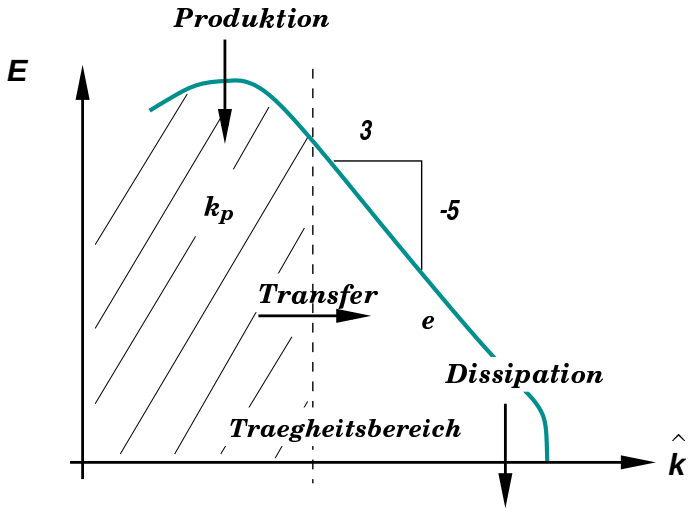


Abbildung 8.11: Schematisch gegliedertes Energiespektrum einer turbulenten Strömung.

Skalenzerlegung der Reynolds–Spannungen

Setzt man die Isotropie der kleinskaligen Beiträge voraus, dann lassen sich die Reynolds–Spannungen analog zur Turbulenzenergie zerlegen

$$\overline{u_i u_j} = \underbrace{T_{ij}}_{\text{großskalig}} + \underbrace{t_{ij}}_{\text{kleinskalig}} = T_{ij} + \frac{2}{3}\, e\, \delta_{ij} \; . \tag{8.41}$$

Anstelle der Transportgleichung (4.1) der Reynolds–Spannungen ergeben sich die beiden Transportgleichungen

$$\frac{D\, T_{ij}}{Dt} - 2D\, b_{ij} = P_{ij} - E_{ij} \; , \tag{8.42}$$

$$\frac{D\, t_{ij}}{Dt} - \frac{2}{3}\, D\, \delta_{ij} = \frac{2}{3}\, E\, \delta_{ij} - \frac{2}{3}\, \varepsilon\, \delta_{ij} \; , \tag{8.43}$$

in denen E_{ij} und $E = \frac{1}{2} E_{ii}$ den Energietransfer zwischen den Skalen beschreiben. Vergleicht man die zuletzt notierten Beziehungen mit den ursprünglichen Transportgleichungen der Reynoldspannungen (4.1), dann erkennt man, daß der deviatorische Teil des Energietransfertensors E_{ij} dem klassischen Druck–Scher–Korrelationstensor entspricht

$$E_{ij} - \frac{2}{3} E\, \delta_{ij} = -\Phi_{ij} \; . \tag{8.44}$$

Zur Bestimmung des kugelsymmetrischen Beitrags E wird dieser in einen dissipativen Anteil und einen Druck–Scher–Korrelationsanteil zerlegt

$$E = E_{\text{Diss}} + E_{\phi_{ij}} \; ,$$

und die Transportgleichungen der turbulenten kinetischen Energie (1.73) und des großskaligen Anteils (8.39) zunächst für das einfache Beispiel des Zerfalls von homogener Turbulenz in einem homogenen Geschwindigkeitsfeld betrachtet

$$\frac{Dk}{Dt} = -\varepsilon \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{Dk_p}{Dt} = -E_{\text{Diss}} \ . \tag{8.45}$$

Führt man anstelle der Dissipationsrate das entsprechende charakteristische Längenmaß $L_\varepsilon = k^{\frac{3}{2}}/\varepsilon$ ein, und unterstellt, daß der Zerfall der großen Strukturen von demselben Längemaß diktiert wird, dann folgt für den großskaligen Anteil

$$\frac{Dk_p}{Dt} = -\frac{k_p^{\frac{3}{2}}}{L_\varepsilon} = -\left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon \qquad \rightsquigarrow \qquad E_{\text{Diss}} = \left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon \ . \tag{8.46}$$

Die Komponenten des Energietransfer–Tensors ergeben sich nach (8.44) aus dem spurbehafteten Modell des Umverteilungstensors (8.32)

$$\begin{aligned} E_{ij} = \quad & 2\,C_1\,\varepsilon\,b_{ij} \ - C_2\,k\,S_{ij} \ - C_4 k(b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}) \\ & -C_3\,k\ (b_{ik}S_{kj} + b_{jk}S_{ki}) \ + \frac{2}{3}\left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon\,\delta_{ij} \ . \end{aligned} \tag{8.47}$$

Analog notiert man für den kugelsymmetrischen Beitrag

$$\begin{aligned} E = E_{\text{Diss}} + E_{\phi_{kk}} \ &= \ -C_2\,k\,S_{kk} - C_3\,k(b_{kl}S_{kl}) + \left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon \\ &= \ \frac{C_3}{2}\,P \ + \left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \ \varepsilon \ + k\,S_{kk}\left(\frac{C_3}{3} - C_2\right) \ . \end{aligned} \tag{8.48}$$

Adaption des langsamen Druck–Scher–Korrelationsmodells

Experimentelle Untersuchungen bestätigen, daß großskalige Strukturen isotropen Zuständen stärker zustreben als kleinskaligen Strukturen. Deshalb wird der mit dem Koeffizienten C_1 assoziierte langsame *return–to–isotropy* Beitrag zum Druck–Scher–Korrelationsmodell nach großen und kleinen Skalen unterschieden

$$C_1 \to \tilde{C}_1 \qquad \text{mit} \qquad \tilde{C}_1\,\varepsilon = C_{1p}\,\varepsilon_p + C_{1e}\,\varepsilon_e \ . \tag{8.49}$$

Substituiert man die Dissipationsraten unter der Annahme eines gemeinsamen Längenmasses, dann folgt

$$\tilde{C}_1\,\frac{k^{\frac{3}{2}}}{L_\varepsilon} = C_{1p}\,\frac{k_p^{\frac{3}{2}}}{L_\varepsilon} + C_{1e}\,\frac{e^{\frac{3}{2}}}{L_\varepsilon} \ , \qquad \rightsquigarrow \quad \tilde{C}_1 = C_{1p}\,\left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}} + C_{1e}\,\left[1 - \left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \ . \tag{8.50}$$

Mit Hilfe des Realizability–Prinzips bestimmten Sarkar und Speziale (1990) den kleinsten physikalisch sinnvollen Wert des Rotta–Koeffizienten zu

$$C_{1\,\text{min}} = 1$$

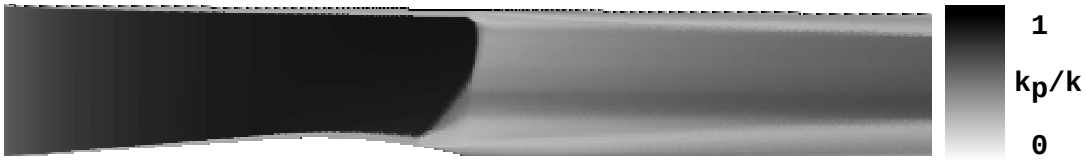


Abbildung 8.12: Turbulente transsonische Kanalströmung (Delery 1981, $Re/L = 1.1 \cdot 10^6, T_0 = 300K$); Verteilung der berechneten großskaligen Energieanteile (LRR–EASM, Gleichgewichtswert $k_p/k = 0.354$).

Dieser Grenzwert kennzeichnet im hier diskutierten Zusammenhang den Fall, daß nur kleine Skalen im Feld präsent sind

$$\tilde{C}_1(k_p/k = 0) = 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{C_{1e} = 1}\,. \tag{8.51}$$

C_{1p} folgt aus der Forderung, daß C_1 für den logarithmischen Bereich einer turbulenten Grenzschicht, in dem alle Transportterme vernachlässigbar sind, seinen ursprünglichen Wert nach Tabelle 4.1 annehmen soll. Wegen des üblicherweise unterstellten lokalen Gleichgewichts von Produktion P und Dissipation ε verbleibt im logarithmischen Bereich einer inkompressiblen Grenzschicht lediglich die Transportgleichung der großskaligen Energiebeiträge (8.39) in Gestalt von

$$0 = P - \frac{C_3}{2}\,P - \left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon \qquad \rightsquigarrow^{P=\varepsilon} \qquad \left(\frac{k_p}{k}\right)_{\text{equil.}} = (1 - 0.5\,C_3)^{\frac{2}{3}}\,, \tag{8.52}$$

$$C_1 = C_{1p}\,(1 - 0.5\,C_3) + (1 - (1 - 0.5\,C_3)) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{C_{1p} = \frac{C_1 - 0.5\,C_3}{1 - 0.5\,C_3}}\,. \tag{8.53}$$

Die Formulierung des Rotta–Koeffizienten $\tilde{C}_1$ der Druck–Scher–Korrelation für einen Zwei–Skalen–Ansatz lautet somit

$$\tilde{C}_1 = 1 + \frac{C_1 - 1}{1 - \frac{1}{2}C_3}\,\left(\frac{k_p}{k}\right)^{\frac{3}{2}}\,. \tag{8.54}$$

Aufbauend auf dem Ergebnis der Transportgleichung für k und e ergibt sich mit Hilfe von (8.38) und (8.54) für jeden Feldpunkt ein modifizierter Rotta–Koeffizient, welcher über den Gleichgewichtsparameter g nach Gleichung (4.9) Einzug in das EASM hält. Abbildung (8.12) vermittelt einen Eindruck von der Verteilung der großskaligen Energieanteile in einer von Delery (1981) experimentell untersuchten transsonischen Kanalströmung mit starker Stoß/Grenzschicht–Wechselwirkung.

Restriktionen aus der Zwei–Skalen–Technik

Der Grenzwert zwischen kleinen und großen Skalen hängt wesentlich vom Wert des Koeffizienten C_3 ab. Mit Hilfe der Zwei–Skalen–Technik läßt sich dieser sinnvoll beschränken. Da beide Energieanteile stets – also auch im Gleichgewichtsfall – positiv sein müssen, ergibt sich aus (8.52)

$$\boxed{C_3 \leq 2}\,. \tag{8.55}$$

Betrachtet man die Transportgleichung der großskaligen Energiebeiträge für ein inkompressibles Fluid

$$\frac{Dk_p}{Dt} = P\left(1 - \frac{C_3}{2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{k_P}{k}\right)^{3/2}\varepsilon\,,$$

dann erkennt man, daß $C_3 \leq 2$ der Forderung, nicht zwei Senken in dieser Transportgleichung zu erhalten, entspricht. Der Grenzwert $C_3 = 2$ ist mit $e \equiv k$ bzw. $k_p \equiv 0$ verbunden. Man beachte, daß der Rotta–Koeffizient $\tilde{C}_1$ in diesem Fall den Wert Eins besitzt. Leider verschließt sich der von Taulbee vorgeschlagene Koeffizientensatz aufgrund von $C_3 = 2$ einer expliziten Berücksichtigung der Zwei–Skalen–Modellierung durch die Stress–Strain Beziehung. Im Zusammenhang mit einer Transitionsmodellierung innerhalb von RANS wären noch zu erarbeitende Ansätze der Form $C_i = C_i(k_p/e)$ ein denkbarer Weg.

8.5 Kubische Erweiterung

Viele ingenieurwissenschaftlich relevante Scherströmungen sind aufgrund ihres dreidimensionalen Charakters mit lokalen Abweichungen vom einachsigen Scherzustand verbunden. Dabei treten z.T. markante tertiäre Effekte in Erscheinung, welche von linearen und quadratischen Stress–Strain Kopplungen nicht dargestellt werden können.

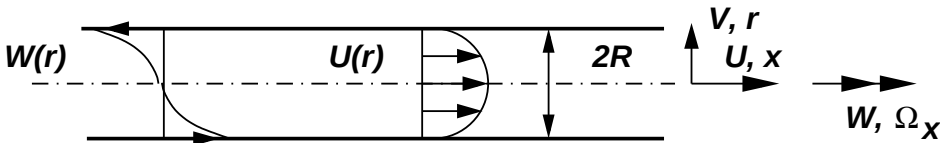


Abbildung 8.13: Veranschaulichung der vollentwickelten turbulenten Strömung durch ein axial rotierendes Rohr.

Die Problematik krümmungsinduzierter Schubspannungsvariationen wurde bereits in den Kapiteln 2.2 und 3.2 am Beispiel der axial rotierenden Rohrströmung genauer analysiert. Das Strömungsbeispiel verdankt seine besondere Beachtung einer geringfügigen Abweichung der Integritätsbasis vom zweidimensionalen Zustand

$$\eta_3 = \eta_4 = 0\,, \qquad \varphi = \eta_5 - 0.5\,\eta_1\eta_2 \neq 0\,, \qquad \eta_6 \neq 0\,. \tag{8.56}$$

Die axial rotierende Rohrströmung dient im Folgenden als Referenzströmung für eine simple kubische Erweiterung des Modells. Der in Abbildung 8.13 nochmals illustrierte Testfall ist, wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, von mehreren Autoren, z.B. Kikuyama et al. (1983) Reich und Beer (1989), Imao et al. (1996), Orlandi und Fatica (1997) oder Oberlack (1999) theoretisch, numerisch und experimentell untersucht worden.
Die angestrebte Erweiterung versucht, die oben entwickelte Formulierung des quadratischen Rumpfes $b_{ij}^{(2D)}$ nach Gleichung (5.19) zu erhalten

$$\boxed{b_{ij} = b_{ij}^{(2D)} + b_{ij}^{(3D)}} \,. \tag{8.57}$$

Zur Bestimmung eines komplementären R^3–Anteils wird die Funktionsbasis um zwei Generatoren erweitert

$$b_{ij}^{(3D)} = D^* \left(T_{ij}^{(4)} - \frac{\eta_2}{\eta_1} T_{ij}^{(3)} \right) + E^* T_{ij}^{(5)} \,, \tag{8.58}$$

die beide durch Anwendung der in Anhang B angegebenen algebraischen Vereinfachungen im R^2 verschwinden. Die Systemmatrix des Projektionsverfahren lautet

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \begin{pmatrix} g\eta_1 & 2\beta_2(2\eta_5+\varphi) & -\frac{1}{3}\beta_3\eta_1^2 & -2\beta_3\varphi & 0 \\ -2\beta_2(2\eta_5+\varphi) & -2g(2\eta_5+\varphi) & 0 & 0 & 6\beta_2\eta_6 - \beta_3\eta_1\varphi \\ -\frac{1}{3}\beta_3\eta_1^2 & 0 & \frac{g}{6}\eta_1^2 & \eta_1 g\varphi & -\beta_2\eta_1\varphi \\ -\beta_3\varphi & 0 & g\varphi & -2\frac{\eta_2}{\eta_1}\varphi g & 2\beta_3\eta_6 - \beta_2\eta_2\varphi \\ 0 & -6\beta_2\eta_6 - \beta_3\eta_1\varphi & \beta_2\eta_1\varphi & 2\beta_3\eta_6 + \beta_2\eta_2\varphi & \eta_1 g\varphi \end{pmatrix} \,.$$

Das zu lösende Gleichungssystem wird, in Anlehnung an die oben erläuterte Strategie, in zwei Anteile gegliedert

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1\eta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathcal{Y}}} = \underbrace{\left[\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{(2D)} + \underline{\underline{\mathcal{M}}}^{(3D)}(\varphi, \eta_6) \right]}_{\underline{\underline{\mathcal{M}}}} \cdot \underbrace{\left[A \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta_2/g \\ 2\beta_3/g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D^* \\ E^* \end{pmatrix} \right]}_{\underline{\mathcal{X}}^{(2D)} + \underline{\mathcal{X}}^{(3D)}} \,. \tag{8.59}$$

Aufgrund von $\underline{\mathcal{Y}} = \underline{\underline{\mathcal{M}}}^{(2D)} \cdot \underline{\mathcal{X}}^{(2D)}$ folgt für die Bestimmungsgleichung von $\underline{\mathcal{X}}^{(3D)}$ die vereinfachte Beziehung

$$-\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{(3D)} \cdot \underline{\mathcal{X}}^{(2D)} = \underline{\underline{\mathcal{M}}} \cdot \underline{\mathcal{X}}^{(3D)} \,. \tag{8.60}$$

Im Sinne einer Näherung werden die ersten drei Gleichungen des Gleichungssystems (8.60) zur Bestimmung der beiden Unbekannten D^* und E^* fortan ignoriert. Die relevanten unteren Gleichungen besitzen die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3\frac{A}{g}\beta_3\beta_2\,(\varphi\eta_1) \left[1 + 2\frac{\beta_2}{\beta_3}\frac{\eta_6}{\eta_1\varphi}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{\eta_2}{\eta_1} g\varphi & 2\beta_3\eta_6 - \beta_2\eta_2\varphi \\ 2\beta_3\eta_6 + \beta_2\eta_2\varphi & \eta_1 g\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^* \\ E^* \end{pmatrix} \,. \tag{8.61}$$

Für eine kompakte Darstellung ist die Reduktion der aufwendig zu berechnenden Invarianten η_6 und η_5 hilfreich. Hierzu benötigt man einen nichttrivialen Zusammenhang zwischen den Invarianten η_6, φ, η_1, und η_2. Diesen gewinnt man aus der Vereinfachung der Definitionsgleichung von η_6 (3.8) für das axial rotierende Rohr

$$4\eta_6 = \sqrt{\eta_1\eta_2 - 4\eta_5}\ (\eta_1\eta_2 - 2\eta_5) = -2\varphi\ \sqrt{\eta_1\eta_2 - 4\eta_5}\ . \tag{8.62}$$

Approximiert man das Argument der Wurzel mit Hilfe der 2D Restriktion $\eta_5 = 0.5\eta_1\eta_2$, dann ergibt sich die Abschätzung

$$\boxed{\frac{\eta_6}{\eta_1\varphi} \approx -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\eta_2}{\eta_1}}}\ . \tag{8.63}$$

Die Invertierung des Gleichungssystems (8.61) mit Hilfe von (8.63) ist trivial. Für den Koeffizienten des kubischen Terms findet sich

$$\boxed{E^* = \frac{-6A\beta_3}{2g^2 - \beta_3^2\eta_1 - \beta_2^2\eta_2}\quad \beta_2\left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_3}\sqrt{-\frac{\eta_2}{\eta_1}}\right)}\ . \tag{8.64}$$

Die Berechnung des Koeffizienten D^* vereinfacht sich erheblich, wenn die aus der Kombination der vernachlässigten zweiten Zeile von (8.59) und Glg. (8.63) resultierende Gleichgewichtsaussage

$$-\frac{\beta_2}{\beta_3}\sqrt{-\frac{\eta_2}{\eta_1}} = \frac{1}{3}$$

zur Bestimmung von D^* benutzt wird

$$\boxed{D^* = \frac{-6A\beta_3}{2g^2 - \beta_3^2\eta_1 - \beta_2^2\eta_2}\quad \beta_2^2\,\frac{4\,\eta_1}{3\,g}}\ . \tag{8.65}$$

Abbildung 8.14 veranschaulicht die Auswirkungen der kubischen Erweiterung bei der Berechnung einer axial rotierenden Rohrströmung. Die mit der Durchflußgeschwindigkeit U_{ref} und dem Rohrdurchmesser D gebildete Reynoldszahl beträgt $Re_D = 20\,000$. Die Simulationen beziehen sich auf die von Imao, Itoh und Harada (1996) veröffentlichten Messergebnisse für drei verschiedene Rotationsraten $W_R/U_{\text{ref}} = 0,\ 0.5,\ 1$. Den gezeigten Resultaten liegt die in Kapitel 6.1 beschriebene iterative Technik zur Darstellung des Gleichgewichtsparameters g zugrunde, wodurch sich Fehler der Modellierung von $b_{ij}^{(3D)}$ besser identifizieren lassen. Bei Anwendung der quasi–selbstkonsistenten Technik treten leichte Qualitiätseinbußen auf.

Im Gegensatz zum quadratischen Basismodell vermag das kubische Modell den relaminarisierenden Einfluß der Rotation auf das axiale Geschwindigkeitsprofil U/U_{ref}

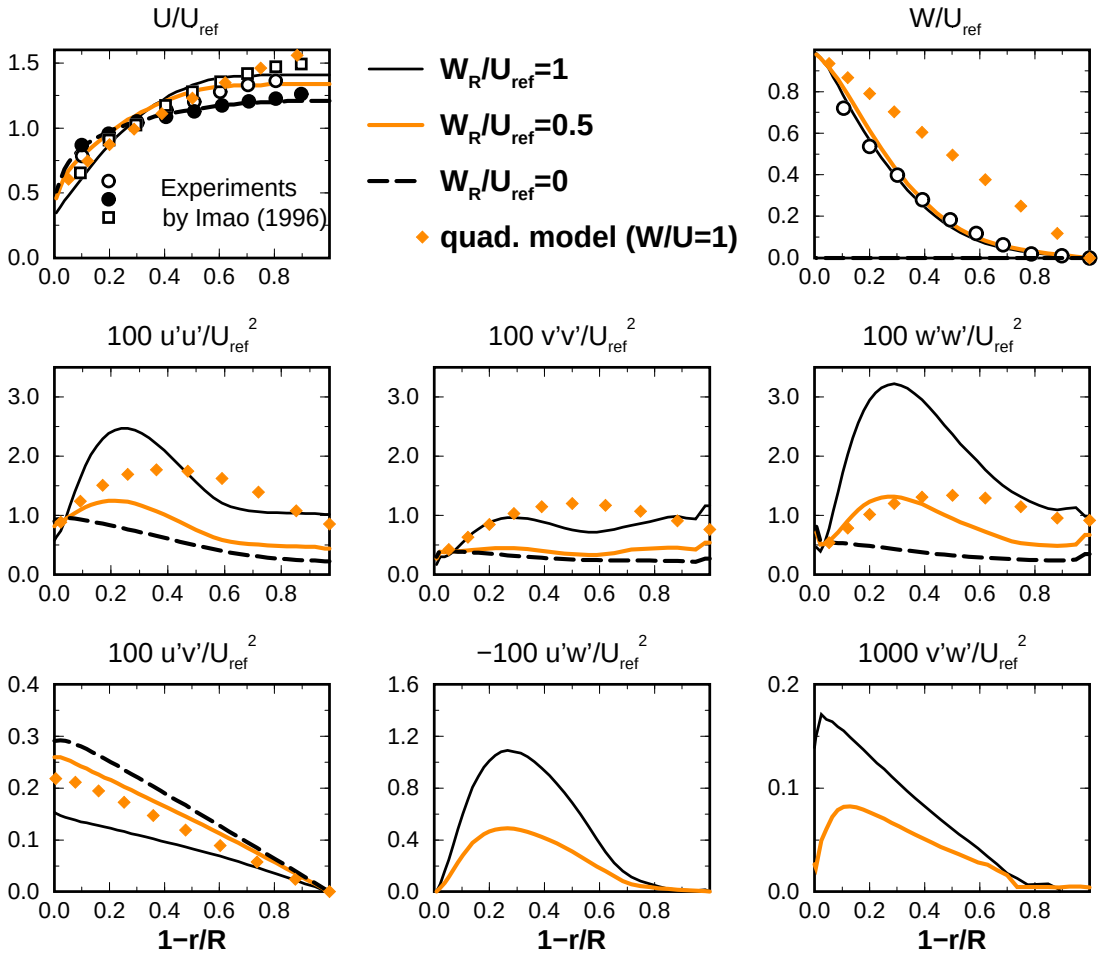


Abbildung 8.14: Vollentwickelte turbulente Strömung durch ein axial rotierendes Rohr ($Re_D = 20\,000$): Vergleich der Simulationsergebnisse des kubischen und des quadratischen EASM mit den Experimenten von Imao, Itoh und Harada (1996).

vorherzusagen. Der Abbildung 8.14 entnimmt man, daß die Beträge der Primärschubspannungen $\overline{uv}$ mit steigender Rotationsrate W_R/U_{ref} deutlich sinken. Eine Relaminarisierung der Strömung tritt im Zusammenhang mit der SK–Technik etwa bei $W_R/U_{\text{ref}} = 2.5$ auf.

Die von dem kubischen Modell prognostizierten Azimutalgeschwindigkeitsprofile erfüllen die experimentell belegte parabolische Beziehung $W/W_R = (Y/R)^2$. Das quadratische Basismodell liefert demgegenüber ein lineares Azimutalgeschwindigkeitsprofil. Dieses bereits eingangs der Arbeit kritisierte Phänomen wird durch das Verschwinden der Azimutalschubspannung $\overline{vw}$ hervorgerufen. Die Simulationsergebnisse bestätigen somit die in Kapitel 3.2 angestellten Überlegungen.

Der Nachteil der oben entwickelten kubischen Modifikation ist der extrem heuristische Hintergrund der Vereinfachungen, welche durch die Zielsetzung eines unveränderten quadratischen Rumpfes erzwungen werden.

8.6 Stromlinienkrümmung

Die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Turbulenz und Stromlinienkrümmung zählt zu den anspruchsvollsten Aufgaben der statistischen Turbulenzmodellierung. Experimentelle Untersuchungen (Bradshaw 1973; Muck et al. 1985a; Muck et al. 1985b) zeigen, daß die Entwicklung der Reynolds–Spannungen deutlich von der Stromlinienkrümmung abhängt. Der folgende Abschnitt erörtert die grundlegenden Merkmale von Turbulenz unter dem Einfluß von Krümmungseffekten und befaßt sich mit Möglichkeiten zu deren Berücksichtigung in expliziten algebraischen Spannungsmodellen.

Phänomenologie

Eines der wesentlichen Merkmale von Krümmungseffekten ist die Veränderung der Produktionsmechanismen. Notiert man die Produktionsterme einzelner Reynoldspannungen für eine inkompressible, zweidimensionale Scherströmung (2.2) auf der Basis kartesischer Koordinaten

$$P_{\overline{u^2}} = -2\overline{uv}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) , \qquad P_{\overline{v^2}} = -2\overline{uv}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) , \tag{8.66}$$
$$P_{\overline{uv}} = -\left(\overline{u^2}\frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v^2}\frac{\partial U}{\partial y}\right) , \qquad P = -\overline{uv}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) ,$$

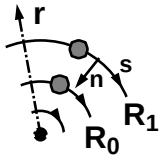
und betrachtet exemplarisch das Geschwindigkeitsfeld des in Abbildung 7.17 illustrierten Starrkörperwirbels

$$\underline{U} = \alpha\left(y\underline{e}_x - x\underline{e}_y\right) , \tag{8.67}$$

so erkennt man, daß die Produktion der Turbulenzenergie verschwindet. Gleichzeitig verringert sich die Produktion der turbulenten Schubspannung und – in Folge sinkender Schubspannungsbeträge – auch die beiden Produktionsterme für die Normalspannungen. Die Überlagerung von Systemrotation kann analog zur Stromlinienkrümmung Turbulenz anfachen oder dämpfen. In Bezug auf das oben angeführte Gedankenexperiment (8.67) denke man beispielsweise an die, in Abbildung 7.17 dargestellte rotierende homogene Scherströmung. In beiden Strömungen verschwindet die Scherrate S_{12} und der Scherparameter S wird stark geschwächt. Gleichzeitig steigen die Komponenten des Wirbeltensors mit zunehmender Krümmung. Das Verhältnis von $\Omega/S = \sqrt{-2\eta_2}/\sqrt{2\eta_1}$ ist somit ein geeigneter Indikator für die Intensität und den Charakter der Stromlinienkrümmung:

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega}{S} &= 1 && \rightarrow \text{ keine Stromlinienkrümmung,}\\
\frac{\Omega}{S} &< 1 && \rightarrow \text{ positive, destabilisierende Stromlinienkrümmung,}\\
\frac{\Omega}{S} &> 1 && \rightarrow \text{ negative, stabilisierende Stromlinienkrümmung.}
\end{aligned}$$

Allgemein läßt sich sagen, daß positive Krümmung Turbulenz anfacht, wohingegen negative Krümmung Turbulenz schwächt. Hierbei sei die Krümmung negativ, wenn die Geschwindigkeit mit dem Radius zunimmt. Ein besseres Verständnis von der Wechselwirkung zwischen Turbulenz und Krümmung vermittelt die Gegenüberstellung von Starrkörper– und Potentialwirbel. Beide in Abbildung 8.15 skizzierten Wirbeltypen werden vom Gleichgewicht zwischen Druck– und Trägheitskräften beherrscht:



$$\rho \frac{U_s^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \qquad \text{(radiale Druckgleichung)}\,. \tag{8.68}$$

Die Strömung ist stabil, wenn ein Fluidelement nach seiner Versetzung (z.B. durch eine turbulente Fluktuation) vom Ausgangsradius $r = R_0$ auf einen Radius $r = R_1$ durch den in R_1 wirkenden Druckgradienten wieder auf seinen Ausgangsradius zurückgedrängt wird. Der in R_1 wirkende Druckgradient $\partial p/\partial r$ muß in einer stabilen Konfiguration somit bei einer Versetzung nach außen ($R_1 > R_0$) zunehmen ($\rightarrow$ Starrkörperwirbel) und bei einer Versetzung nach innen abnehmen. Analog verhält es sich bei einer radiusfesten Störung der Umfangsgeschwindigkeit U_s. Eine lokale Übergeschwindigkeit verursacht eine Verdrängung des Fluids nach außen, eine lokale Untergeschwindigkeit initiiert eine entgegengesetzte Bewegung.

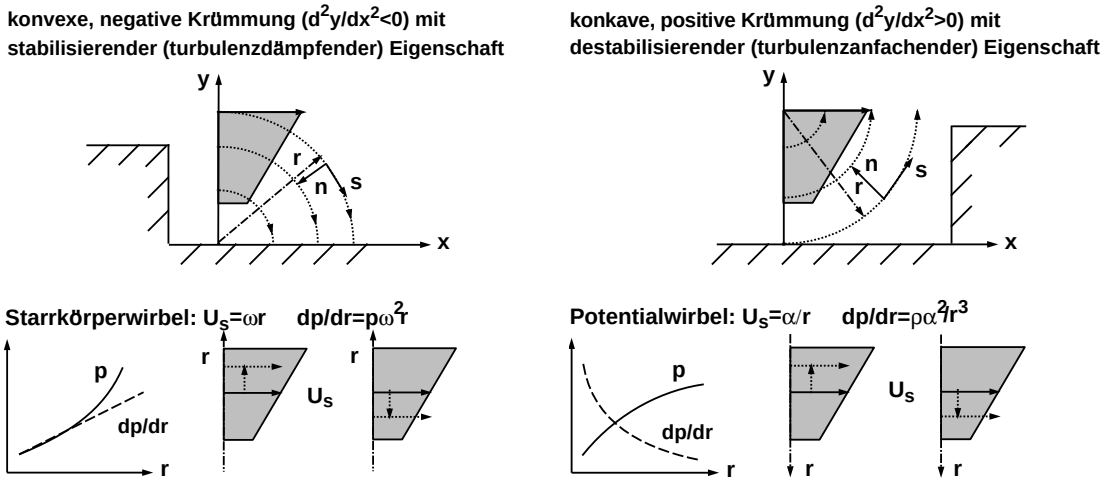


Abbildung 8.15: Erläuterung von Krümmungsmechanismen durch Starrkörper– bzw. Potentialwirbelmodelle.

Trägt man die Geschwindigkeitsstörungen für beide Wirbeltypen anhand von Abbildung 8.15 auf, so wird deutlich, daß sich diese im Falle des Starrkörperwirbels in die homogene Schichtung integrieren lassen. Demgegenüber wird der Aufbau des freien Wirbels durch eine Geschwindigkeitsfluktuation gestört, weswegen Gebiete positiver Strom-

linienkrümmung prinzipiel instabil bzw. turbulenzanfachend sind. Die exakte Darstellung von Produktionsmechanismen gelingt sowohl mit Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodellen als auch mit (expliziten) algebraischen Spannungsmodellen, worin der wesentliche Vorteil beider Techniken gegenüber Wirbelzähigkeitsmodellen liegt.

Der zweite wichtige Aspekt der Stromlinienkrümmung betrifft vorwiegend explizite Reynolds–Spannungsmodelle (EASM bzw. Wirbelzähigkeitsmodelle). Formuliert man die Transportgleichungen der Reynolds– Spannungen in einem Stromlinienkoordinatensystem, dann treten im Unterschied zur kartesischen Formulierung ergänzende Konvektionsterme aus der Rotation der Basisvektoren auf. Letztere repräsentieren die krümmungsmotivierten Coriolisbeschleunigungen, welche ihrem Charakter nach deviatorisch sind und ausschließlich der Spannungsumverteilung dienen. Konvektive Terme werden im Rahmen der Simulation üblicherweise durch das numerische Approximationsverfahren berücksichtigt. Problematisch werden diese Terme jedoch für die Formulierung algebraischer Modelle, da zur Reduktion der Transportterme des Anisotropietensors b_{ij} vereinfachende Annahmen gemäß Gleichung (4.8) getroffen werden müssen. Der folgende Abschnitt versucht den Einfluß der Coriolisterme anhand eines aussagekräftigen, anschaulichen Beispiels zu quantifizieren.

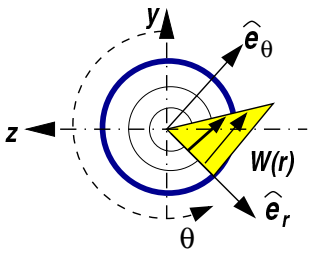


Abbildung 8.16: Starrkörperwirbel

Illustratives Beispiel: Starrkörperwirbel

Notiert man die Konvektionsterme der Reynolds–Spannungen für das in Abbildung (8.16) skizzierte Beispiel der Starrkörperrotation auf der Basis von zylindrischen Stromlinienkoordinaten $< \underline{\tilde{e}}_r, \underline{\tilde{e}}_\theta, \underline{\tilde{e}}_x >$

$$\underline{\tilde{U}} = W(r)\,\underline{\tilde{e}}_\theta\,, \qquad \text{mit} \qquad W(r) = \Omega\, r\,,$$

dann verbleiben aufgrund der Umfangssymmetrie ($\partial/\partial\theta = 0$) lediglich die basisrotationsbezogenen Summanden der in Anhang B vollständig angegebenen Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{rr} &= -2\overline{vw}\frac{W}{r}\,, \qquad \tilde{C}_{\theta\theta} = 2\overline{vw}\frac{W}{r}\,, \qquad \tilde{C}_{ii} = 0\,,\\
\tilde{C}_{r\theta} &= (\overline{v^2} - \overline{w^2})\frac{W}{r}\,, \qquad \tilde{C}_{xr} = -\overline{uw}\frac{W}{r}\,, \qquad \tilde{C}_{x\theta} = \overline{uv}\frac{W}{r}\,.
\end{aligned} \tag{8.69}$$

Aufgrund ihrer prinzipiell ähnlichen Gestalt koppelt man die Coriolisbeiträge (8.69) geeigneterweise an die entsprechenden Produktionsterme (vgl. Anhang B)

$$\begin{aligned}
(\tilde{P}_{rr} - \tilde{C}_{rr}) &= 4\overline{vw}\frac{W}{r}\,, \quad (\tilde{P}_{\theta\theta} - \tilde{C}_{\theta\theta}) = -4\overline{vw}\frac{W}{r}\,, \quad (\tilde{P}_{x\theta} - \tilde{C}_{x\theta}) = -2\,\overline{uv}\frac{W}{r}\\
(\tilde{P}_{xr} - \tilde{C}_{xr}) &= 2\overline{uw}\frac{W}{r}\,, \quad (\tilde{P}_{r\theta} - \tilde{C}_{r\theta}) = 2\,(\overline{w^2} - \overline{v^2})\frac{W}{r}\,, \quad (P - C) = 0\,.
\end{aligned} \tag{8.70}$$

Anhand der paarweise verschiedenen ($\overline{u_r u_r}$)– und ($\overline{u_\theta u_\theta}$)–Beiträge in Gleichung (8.70) erkennt man den Umverteilungscharakter der Krümmungsmechanismen, die daher mit dem gewählten Druck–Scher–Korrelationsmodell in Wechselwirkung treten. Die Beziehung (8.70) verdeutlicht ferner:

> *Der Einfluß der Krümmungsmechanismen geht in stark gekrümmten Strömungen zu gleichen Teilen über die Konvektions– und die Produktionsterme in die Bilanzgleichungen der Reynolds–Spannungen ein.*

Die vollständige Modellierung stark gekrümmter Strömungen verlangt folglich neben der exakten Darstellung der Produktion eine angemessene Berücksichtigung der Coriolisterme (Fu, Huang, Launder und Leschziner 1988).

Das klassische ASM beruht auf der hypothetischen Annahme des *strukturellen Turbulenzgleichgewichts* (4.8), nach der die substantielle Ableitung des Anisotropietensors vernachlässigbar ist

$$\frac{D\,\underline{\underline{\tilde{u}}}\,\underline{\underline{\tilde{u}}}}{Dt} \;=\; 2\,\frac{D}{Dt}\left[k\left(\underline{\underline{\tilde{b}}}+\frac{1}{3}\,\underline{\underline{\delta}}\right)\right]\;, \qquad \text{mit} \quad \boxed{\frac{D\,\underline{\underline{\tilde{b}}}}{Dt}\approx 0}\;. \tag{8.71}$$

Der überwiegende Teil der Simulationsverfahren basiert auf der Finite–Volumen Methode, und macht von der Erhaltungsform der Bilanzgleichungen in raumfesten Koordinaten Gebrauch. Dabei werden bevorzugt Transportgleichungen für die kartesischen Koordinaten der abhängigen Veränderlichen in krummlinigen Rechengittern gelöst. Die Gleichgewichtshypothese (8.71) vereinfacht sich in diesem Falle zu einer simplen Aussage für die kartesischen Koordinaten des Anisotropietensors

$$\frac{D(\tilde{b}_{ij}\;\underline{\tilde{e}}_i\underline{\tilde{e}}_j)}{Dt} \;=\; \frac{D(b_{ij}\;\underline{e}_i\underline{e}_j)}{Dt} \;=\; \boxed{\frac{\partial b_{ij}}{\partial t}+U_k\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}\approx 0}\;, \tag{8.72}$$

was der numerischen Umsetzung zu Gute kommt. Vergleicht man für das hier diskutierte Beispiel des Starrkörperwirbels die damit verbundene Approximation der konvektiven Terme

$$\tilde{C}_{ij}^{\mathrm{ASM}} \approx 2\left(\tilde{b}_{ij}+\frac{1}{3}\,\delta_{ij}\right)\frac{Dk}{Dt}\;,$$

mit den exakten Beziehungen (8.69)

$$\tilde{C}_{ij} = 2\,k\,\tilde{U}_m\left(\tilde{b}_{jr}\tilde{\Gamma}^i_{rm}+\tilde{b}_{ir}\tilde{\Gamma}^j_{rm}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{Dk}{Dt}=0\;,$$

dann erkennt man, daß die Gleichgewichtshypothese (8.71) bei starker Krümmung eine extrem schlechte Näherung repräsentiert. Im Gegensatz zu der kartesischen Restriktion

(8.72) ist eine Vernachlässigung der substantiellen Ableitung von $b_{ij}^{(s)}$ in Bezug auf das Stromlinienkoordinatensystems $\underline{e}_i^{(s)}$ zutreffend

$$\boxed{\frac{\partial b_{ij}^{(s)}}{\partial t} + U_k^{(s)} \frac{\partial b_{ij}^{(s)}}{\partial x_k^{(s)}} \approx 0} \,. \tag{8.73}$$

Untersuchungen von Moser und Moin (1987) bestätigen, daß sich die Gleichung (8.73) in guter Näherung verallgemeinern läßt. Der zu substituierende Transportterm aus Gleichung (4.6) reduziert sich damit auf

$$\begin{aligned} \frac{D\,\underline{\underline{b}}}{Dt} &= \underbrace{\left[\frac{\partial b_{ij}^{(s)}}{\partial t} + U_k^{(s)} \frac{\partial b_{ij}^{(s)}}{\partial x_k^{(s)}}\right]}_{\approx 0} \underline{e}_i^{(s)} \underline{e}_j^{(s)} + b_{ij}^{(s)} \left[\frac{\partial (\underline{e}_i^{(s)} \underline{e}_j^{(s)})}{\partial t} + U_k^{(s)} \frac{\partial (\underline{e}_i^{(s)} \underline{e}_j^{(s)})}{\partial x_k^{(s)}}\right] , \\ &\approx \left\{ b_{ik}^{(s)} \left[\left(\frac{\partial \underline{e}_k^{(s)}}{\partial t} \cdot e_j^{(s)}\right) + U_m^{(s)} \Gamma_{km}^{(s)j}\right] + b_{jk}^{(s)} \left[\left(\frac{\partial \underline{e}_k^{(s)}}{\partial t} \cdot e_i^{(s)}\right) + U_m^{(s)} \Gamma_{km}^{(s)i}\right] \right\} \underline{e}_i^{(s)} \, \underline{e}_j^{(s)} \,. \end{aligned} \tag{8.74}$$

Die stromlinienbezogene Reduktion des Transportterms (8.74) besitzt folgende, schwerwiegende Nachteile

- Die Stromlinienkoordinaten basieren auf den lokalen Geschwindigkeiten und erfüllen daher nicht die erforderliche Invarianz gegenüber einem translatorisch oder rotatorisch gleichförmig bewegten Beobachtersystem (*Galileiinvarianz*).

- Das instationäre Glied der Gleichung (8.74) verlangt die zusätzliche Speicherung des Koordinatentensors ($\underline{e}_i^{(s)} \underline{e}_j^{(s)}$), wodurch sich der Modellierungsaufwand erheblich steigert. Zur Berechnung stark gekrümmter, transienter Strömungen sollte unmittelbar auf die in Kapitel 5.3 skizzierte instationäre Erweiterung zurückgegriffen werden.

- Die meisten Rechenverfahren basieren, wie bereits erwähnt, auf einer streng konservativen Formulierung der Bilanzgleichungen. Hierbei stehen nur die kartesischen Koordinaten von Tensoren und Vektoren zur Verfügung. Die Auswertung der Beziehung (8.74) bedarf daher noch mehrerer, teilweise nichttrivialer Transformationen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Güte herkömmlicher (E)ASM in stark gekrümmten Strömungen entscheidend von der Wahl des Koordinatensystems bzw. dessen Übereinstimmung mit den Stromlinienkoordinaten abhängt. Diese Schlußfolgerung läßt sich aufgrund der engen Verwandtschaft zwischen expliziten algebraischen Spannungsmodellen und Wirbelzähigkeitsmodellen für explizite Modelle verallgemeinern.

Krümmungssensitive Gleichgewichtshypothese (Girimaji 1997)

Girimaji (1997) weist darauf hin, daß sich die Beschleunigungskoordinaten $\underline{e}_i^{(b)}$ gegenüber einer unbeschleunigten Bewegung des Beobachtersystems neutral verhalten, und sich folglich prinzipiell zur Formulierung einer krümmungssensitiven Gleichgewichtsaussage eignen sollten. Die Tauglichkeit des Beschleunigungskoordinatensystems zur Formulierung einer strukturellen Gleichgewichtsaussage erkennt man deutlich anhand der Identität von Beschleunigungs– und Stromlinienkoordinaten für das oben erörterte Beispiel des Starrkörperwirbels

$$\underline{e}_1^{(b)} = \tilde{\underline{e}}_z \ , \qquad \underline{e}_2^{(b)} = -\tilde{\underline{e}}_r \ , \qquad \underline{e}_3^{(b)} = -\tilde{\underline{e}}_\theta \ . \tag{8.75}$$

Vernachlässigt man die instationären Anteile der Gleichung (8.74), dann ergeben sich mit Hilfe der Transformationsbeziehungen

$$\underline{e}_i^{(b)} \underline{e}_j^{(b)} = T_{ip} T_{jq} \, \underline{e}_p^{(r)} \, \underline{e}_q^{(r)}$$

nach Girimaji (1997) folgende Zusammenhänge zur Formulierung einer krümmungssensitiven Gleichgewichtshypothese im Rechenkoordinatensystem $\underline{e}_i^{(r)}$

$$\begin{aligned}
\frac{D\,\underline{\underline{b}}}{Dt} &\approx b_{ij}^{(b)} \left[U_k^{(b)} \, \frac{\partial (\underline{e}_i^{(b)} \underline{e}_j^{(b)})}{\partial x_k^{(b)}} \right] = b_{ij}^{(b)} \left[U_k^{(r)} \, \frac{\partial (\underline{e}_i^{(b)} \underline{e}_j^{(b)})}{\partial x_k^{(r)}} \right] \\
&= \left\{ b_{ik}^{(r)} \underbrace{\left[U_m^{(r)} \Gamma_{km}^{(r)j} + T_{rk} U_s^{(r)} \frac{\partial T_{rj}}{\partial x_s^{(r)}} \right]}_{\text{Wirbelkorrekturterm } \mathcal{W}_{kj}} + b_{jk}^{(r)} \underbrace{\left[U_m^{(r)} \Gamma_{km}^{(r)i} + T_{rk} U_s^{(r)} \frac{\partial T_{ri}}{\partial x_s^{(r)}} \right]}_{\text{Wirbelkorrekturterm } \mathcal{W}_{ki}} \right\} \underline{e}_i^{(r)} \, \underline{e}_j^{(r)} \\
&= \left\{ b_{ik}^{(r)} \mathcal{W}_{kj} + b_{jk}^{(r)} \mathcal{W}_{ki} \right\} \underline{e}_i^{(r)} \, \underline{e}_j^{(r)} \ .
\end{aligned} \tag{8.76}$$

Eine mögliche Definition der Basisvektoren des Beschleunigungskoordinatensystems lautet

$$\underline{e}_1^{(b)} = \frac{\underline{\nabla} \times \underline{U}}{|\underline{\nabla} \times \underline{U}|} \ , \qquad \underline{e}_2^{(b)} = \frac{(\underline{\nabla} \times \underline{U}) \times \underline{U}}{|\,(\underline{\nabla} \times \underline{U}) \times \underline{U}|} \ , \qquad \underline{e}_3^{(b)} = \underline{e}_1^{(b)} \times \underline{e}_2^{(b)} \ . \tag{8.77}$$

In zweidimensionalen Problemstellungen vereinfacht sich die Darstellung für kartesische Rechenkoordinaten nochmals $\underline{e}_i^{(r)} = \underline{e}_i$ ($\rightsquigarrow \ \Gamma_{km}^{(r)j} \equiv 0$)

$$\underline{e}_1^{(b)} = \underline{e}_z \ , \qquad \underline{e}_2^{(b)} = (-V, U, 0) \, \frac{1}{U_g} \ , \qquad \underline{e}_3^{(b)} = (-U, -V, 0) \, \frac{1}{U_g} \ .$$

Die Umsetzung der krümmungssensitiven Gleichgewichtshypothese innerhalb des expliziten algebraischen Spannungsmodells ist vergleichweise einfach, und läßt sich als Korrektur des *effektiven Wirbeltensors* interpretieren. Ergänzt man die rechte Seite

der ASM–Beziehung (4.7) um die Wirbelkorrekturanteile $\mathcal{W}_{pq}$ aus (8.76), so ergibt sich aus

$$2b_{ij}\,(P-\varepsilon)+\frac{2}{3}\delta_{ij}\,(P-\varepsilon)+2k\underbrace{(b_{ik}\,\mathcal{W}_{kj}+b_{jk}\,\mathcal{W}_{ki})}_{\text{Wirbelkorrekturterm}}=P_{ij}+\phi_{ij}-\frac{2}{3}\varepsilon\,\delta_{ij}\ ,$$

mit Hilfe der Abkürzung

$$\boxed{w^*_{ij}=T_t\left(W_{ij}-\frac{2}{2-C_4}\mathcal{W}_{ij}\right)}\ , \tag{8.78}$$

unmittelbar eine krümmungssensitive Formulierung des EASM

$$g\,b_{ij}\ \ =\ \ \beta_1 s_{ij}-\beta_2\left[b_{ik}w^*_{kj}-w^*_{ik}b_{kj}\right]+\beta_3\left[b_{ik}s_{kj}+b_{jk}s_{ki}-\frac{2}{3}\delta_{ij}b_{lk}s_{kl}\right]\ . \tag{8.79}$$

Die Beziehung (8.78) besitzt einen weiteren, formalen Vorteil gegenüber dem herkömmlichen EASM, welcher unmittelbar aus dem Vergleich von (8.78) und der effektiven Wirbelstärke (7.29) einer rotierenden homogenen Scherströmung hervorgeht. Die Stress–Strain Beziehung sollte *objektiv*, d.h. unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sein, in dem das Problem betrachtet wird. Das EASM sollte daher gegenüber einem orthogonalen Tensor $\underline{\underline{Q}}$ ($\underline{\underline{Q}}^{-1}=\underline{\underline{Q}}^T$), der entweder eine Drehung ($|\underline{\underline{Q}}|=1$) oder eine Spiegelung ($|\underline{\underline{Q}}|=-1$) darstellt, die Eigenschaft

$$\underline{\underline{b}}(\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{s}}\cdot\underline{\underline{Q}}^T,\ \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{w^*}}\cdot\underline{\underline{Q}}^T)=\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{b}}\cdot\underline{\underline{Q}}^T\ , \tag{8.80}$$

$$\text{mit}\quad \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{Q}}^T=\underline{\underline{Q}}^T\cdot\underline{\underline{Q}}=\underline{\underline{\delta}}\quad\text{und}\quad|\underline{\underline{Q}}|=\pm 1$$

besitzen (Altenbach und Altenbach 1994). Weder der Tensor w_{ij}, noch der in Gleichung (7.29) notierte effektive Wirbeltensor einer rotierenden homogenen Scherströmung erfüllen die oben genannte Zwangsbedingung (8.80). Eine objektive Darstellung des Anisotropietensors $\underline{\underline{b}}$ gelingt mit Hilfe der Definition (3.1)

$$\tilde{W}_{ij}=W_{ij}-e_{ijk}\Omega_k\ . \tag{8.81}$$

Die Gleichung (8.81) liefert in Kombination mit der Modifikation (8.78) im Falle der rotierenden homogenen Scherströmung – wegen $\mathcal{W}_{ij}=e_{ij3}\Omega_3$ – wieder das gewünschte Ergebnis

$$w^*_{ij}=T_t\left(\tilde{W}_{ij}-\frac{2}{2-C_4}\mathcal{W}_{ij}\right)\to T_t\left(W_{ij}-\frac{4-C_4}{2-C_4}\,e_{ij3}\,\Omega_3\right)=T_t\,W^*_{ij}\ .$$

Girimajis Vorschlag besitzt, wenngleich weniger ausgeprägt, prinzipiell die selben Defizite wie eine Formulierung auf der Basis von Stromlinienkoordinaten:

- In inkompressiblen Medien verhalten sich die Impulsgleichungen neutral gegenüber einer translatorischen Beschleunigung des Beobachtersystems (Spalart und Speziale 1999). Diese Restriktion wird durch eine Modellierung auf der Grundlage von Beschleunigungskoordinaten verletzt.

- Die in der Beziehung (8.76) auftretenden Christoffel–Symbole und Transformationskoeffizienten müssen i. Allg. numerisch ausgewertet werden. Die Berechnung der Ableitungen von Transformationskoeffizienten ist mit der Bestimmung von Ableitungen der Geschwindigkeitsgradienten verbunden, deren Stetigkeit vielfach nicht gegeben ist.

Die Bedeutung der Modifikation (8.78) wurde von Wallin und Girimaji (1999) anhand der Untersuchung eines generischen Flügelspitzenwirbels hinter einer Tragfläche – für den keines der o.g. Defizite zutrifft – demonstriert. Abbildung 8.17 veranschaulicht den Einfluß der Korrektur am Beispiel einer Kreiszylinderumströmung.

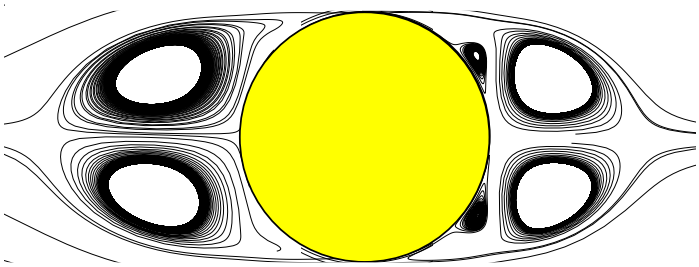


Abbildung 8.17: Simulation einer instationären Kreiszylinderumströmung ($Re = 12\,000$); Illustration des Einflusses der Krümmungskorrektur auf das zeitlich gemittelte Strömungsfeld; links: Stromlinien ohne Korrektur; rechts: Stromlinien mit Korrektur.

Simulation von Strömungsdrall

Das Kapitel endet mit der Simulation von krümmungsdominierten Strömungen durch ein, gemäß (8.78) modifiziertes, explizites algebraisches Spannungsmodell. Die hier gezeigten Anwendungen widmen sich der Berechnung von Strömungsdrall, an dem sich die Krümmungseffekte besonders eindrucksvoll darstellen lassen. Strömungsdrall ist für die Auslegung von Brennkammern, in denen Drallerzeuger zur Stabilisierung der Flamme gezielt eingesetzt werden, von erheblicher technischer Relevanz. Die unten gezeigten Beispiele belegen, daß die Vernachlässigung der Coriolisbeschleunigungen von Reynolds–Spannungen die Ursache für die oftmals unbefriedigende Qualität von Simulationen verdrallter Strömungen auf der Basis algebraischer Spannungsmodelle ist.

Im Falle stark verdrallter, stationärer Strömungen durch zylindrische Geometrien findet man näherungsweise konzentrische Stromlinien und Beschleunigungspfade, und damit

einen einfachen algebraischen Zusammenhang zur Bestimmung der Wirbelkorrekturterme in Gleichung (8.76). Für zylindrische Rechen– und Beschleunigungskoordinaten ergibt sich (vgl. Anhang B)

$$T_{ij} \equiv \delta_{ij} \ , \qquad \text{und} \qquad \Gamma_{12}^{(r)2} = -\Gamma_{22}^{(r)1} = \frac{1}{r} \ .$$

Die Krümmungskorrektur (8.78) liefert damit die effektive Wirbelstärke

$$w_{ij}^{*} = T_t \left[W_{ij} - \frac{2}{2 - C_4} \, e_{ij3} \, \left(\frac{W}{r} \right) \right] \quad . \tag{8.82}$$

Generische Brennkammerströmung

Das erste Beispiel behandelt das Strömungsfeld einer von Roback und Johnson (1983) vermessenen Modellbrennkammer. Tabelle 8.1 und Abbildung 8.18 geben Auskunft über die Simulationsparameter und das Strömungsfeld der achsensymmetrischen Konfiguration. Das 120 x 80 Zellen umfassende high–Re Rechengitter deckt lediglich den erweiterten Querschnitt ab und erstreckt sich stromab über ca. einhundert Rohrdurchmesser. Als Abströmbedingung werden Nullgradienten verwendet, als Zuströmbedingung dient ein stromauf liegendes experimentelles Strömungsprofil in $X/D = 0.205$. Der Fußpunkt der Rohrerweiterung markiert den Ursprung des Koordinatensystems.

Tabelle 8.1: Charakteristische Zuströmungsgrößen der verdrallten Modellbrennkammer von Johnson und Roback (1983).

	$Re_{U_B,R}$	Radius[mm]	$S = \frac{\left(\int \rho W U r \, dr\right)}{\left(\int \rho U^2 r \, dr\right)}$
Primäreinlaß	15 900	14.5	0
Sekundäreinlaß	47 500	19.5	0.45

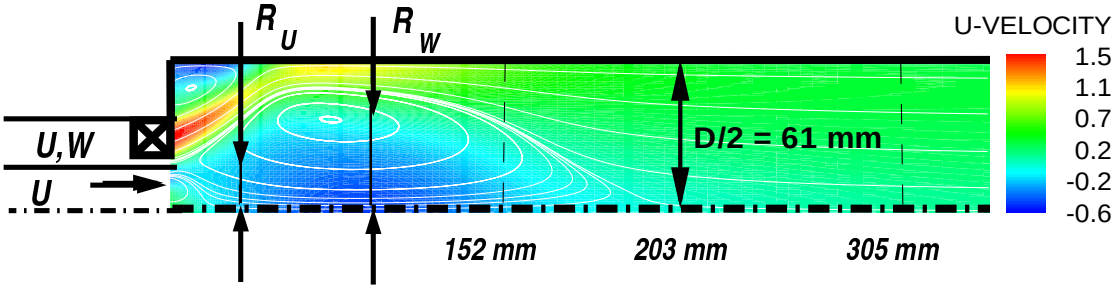


Abbildung 8.18: Illustration einer drallbehafteten generischen Brennkammerströmung von Johnson und Roback (1983, $Re = 47\,500$, $S = 0.45$).

Obwohl das simulierte Strömungsfeld in Umfangsrichtung homogen ist, treten starke Krümmungseffekte auf. Im Unterschied zu zweidimensionalen Anwendungen sind alle Scherkomponenten des Reynolds–Spannungstensors aktiv.

Die Vernachlässigung der oben diskutierten Krümmungseinflüsse auf die Transportgleichung der Reynolds–Spannungen verhindert eine adäquate Modellierung des Wirbelaufplatzens durch herkömmliche EVM. Üblicherweise findet man im Zusammenhang mit krümmungsinsensitiven, isotropen Wirbelzähigkeitsmodellen eine rasche Relaxation des stark gestörten Axialgeschwindigkeitsprofils. Das signifikanteste Merkmal isotroper Wirbelzähigkeitsmodelle ist der hiermit verbundenene lineare Anstieg der Umfangsgeschwindigkeit in Gestalt einer Starrkörperrotation. Die in Abbildung 8.19 dargestellten Ergebnisse des konventionellen $k-\varepsilon$ Modells weisen diese typischen Merkmale einer unzureichenden Modellbildung auf. Im Vergleich hierzu zeigen die Resultate des FRLT–**EASM** zwar deutliche Verbesserungen, die Übereinstimmung mit den Messwerten ist jedoch unbefriedigend. Die explizite algebraische Modellbildung vermag lediglich die krümmungsinduzierte Variation der Produktionsterme darzustellen, die nach Gleichung (8.70) ungefähr nur den halben Teil der in den Bilanzgleichungen auftretenden Modifikationen repräsentiert. Erwartungsgemäß werden die besten Er-

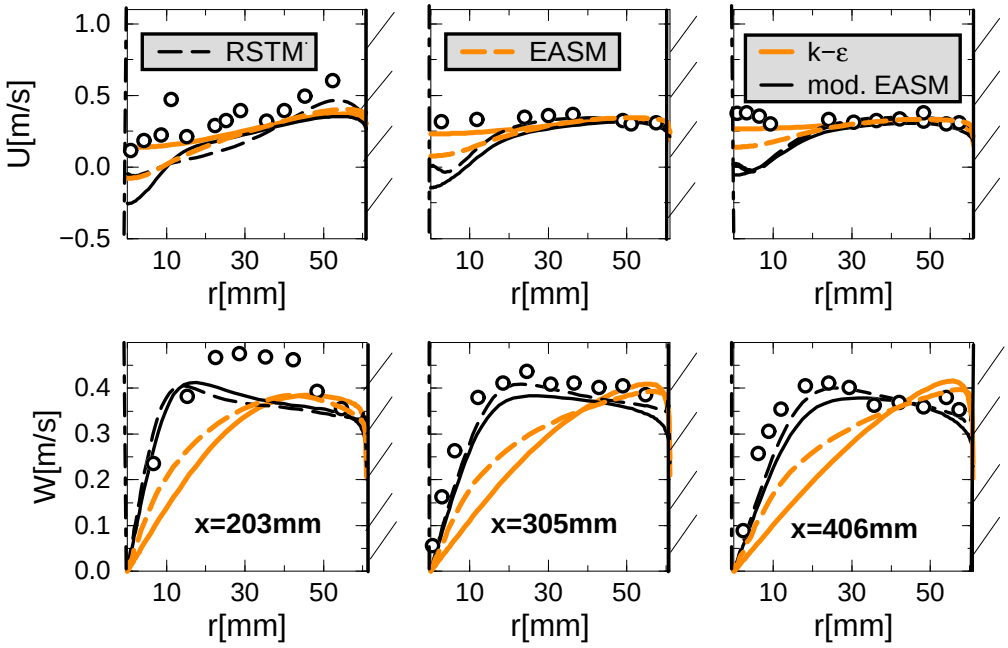


Abbildung 8.19: Simulation einer drallbehafteten Brennkammerströmung (Johnson und Roback 1983, $Re = 47\,500$, $S = 0.45$); Vergleich der berechneten Axial- und Azimutalgeschwindigkeitsprofile (U,W) in verschiedenen Schnitten.

gebnisse im Zusammenhang mit dem Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodell (**RSTM**) erzielt (FRLT–Koeffizienten). Daneben belegt die Abbildung 8.19, daß die Approximation der Coriolisbeiträge durch (8.82), den expliziten algebraischen Span-

nungsmodellen zu Ergebnissen von der Qualität der Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodelle verhilft (**mod. EASM**). Die Gründe hierfür liegen in der deutlich realistischeren Darstellung der turbulenten Schubspannungen im scherarmen Bereich stromab der Rezirkulation. ($x = 305$ mm, $x = 406$ mm). Abbildung 8.20 vergleicht die aus den unterschiedlichen Turbulenzmodellen gewonnenen axialen und azimutalen Schubspannungen ($\overline{uv}$, $\overline{vw}$), für die leider keine ($\overline{vw}$) oder nur sehr stark streuende ($\overline{uv}$) Messwerte vorliegen. Man erkennt deutlich, daß die Resultate des EASM nach Anwendung der Modifikation (8.82) wesentlich besser mit denen des RSTM übereinstimmen.

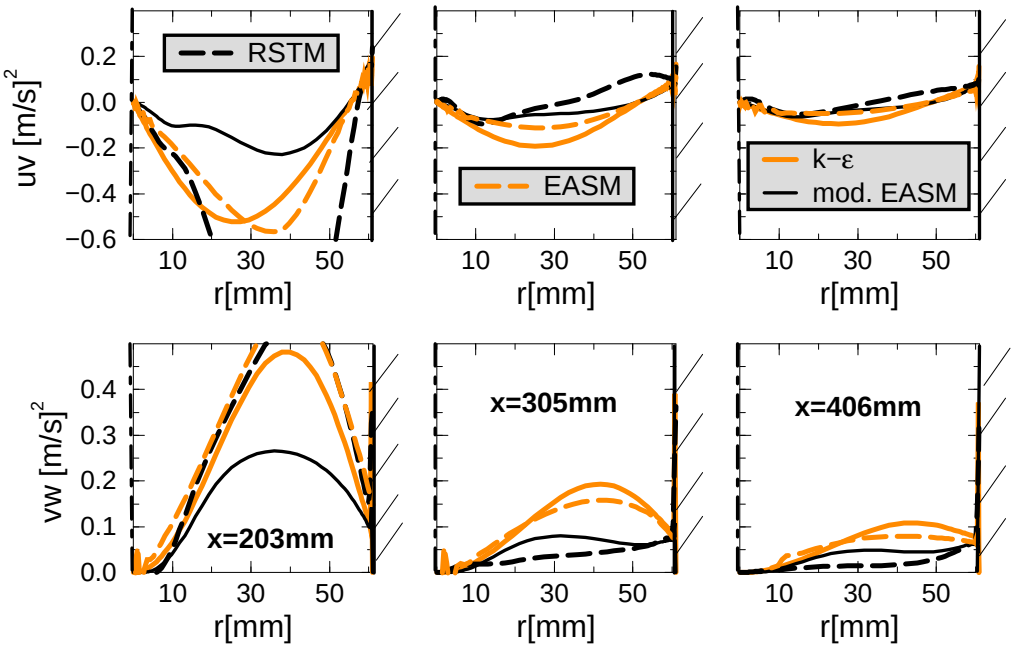


Abbildung 8.20: Simulation einer drallbehafteten Brennkammerströmung (Johnson und Roback 1983, $Re = 47\,500$, $S = 0.45$); Vergleich der berechneten Axial- und Azimutalschubspannungsprofile ($\overline{uv}$, $\overline{vw}$) in verschiedenen Schnitten.

Auffällig ist ferner die schlechtere Vorhersage der Axialgeschwindigkeit durch das modifizierte EASM und das RSTM (vgl. Abbildung 8.19 oben). Man beachte, daß die vermessene Konfiguration stromab in einen rechteckigen Querschnitt übergeht, und der Strömungsaustritt – im Unterschied zur hier simulierten Rohrerweiterung – nach entsprechender Umlenkung radial erfolgt. Eine Übereinstimmung der primär druckgradientengesteuerten Entwicklung der berechneten Axialgeschwindigkeitsprofile mit den experimentellen Ergebnissen ist daher stromab nicht mehr zu erwarten. Experimentelle Untersuchungen schwach verdrallter Rohrerweiterungsströmungen von Dellenback, Metzger und Neitzel (1988) bestätigen ein deutlich langsameres Recoveryverhalten der Strömung mit wesentlich längeren Rezirkulationszonen.

Der Krümmungseffekt kann, in Anschluß an die in Kapitel 7.4 gemachten Ausführun-

gen, bereits durch den linearen Term des expliziten algebraischen Spannungsmodells dargestellt werden. Der wesentliche Beitrag der Wirbeltensor–Korrektur ist daher die damit verbundene Modifikation der Invarianten η_2, welche von erheblichem Einfluß für den berechneten Wert des Anisotropieparameters c_μ ist.

Drallbehaftete Rohrströmung

Ein weiterer, geometrisch einfacher Testfall zur Evaluierung der Coriolisbeiträge ist die von Steenbergen und Parchen (1998) vermessene drallbehaftete Rohrströmung bei $Re_D = 300\,000$ und $S = 0.1$. Das in Abbildung (8.21) veranschaulichte Startprofil zeichnet sich durch eine dem Starrkörperprofil entgegengesetzte Verteilung der Drallkomponente (*concentrated vortex)* aus, weshalb der Testfall die Modellierungsunterschiede besonders eindrucksvoll illustriert. Das verwendete Rechengitter basiert auf 120 x 75 Rechenknoten und erstreckt sich stromab über einhundert Rohrdurchmesser. Als Zuströmbedingung dienen die Profile der ersten Messposition in $X/D = 4.3$, als Abströmbedingung Nullgradientenbedingungen.

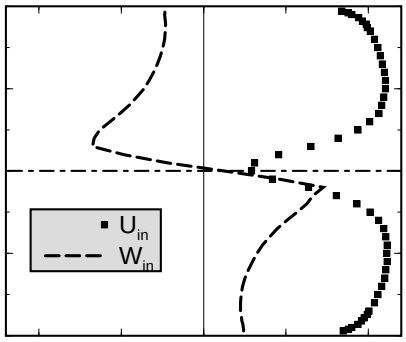


Abbildung 8.21: Einströmprofile der verdrallten Rohrströmung ($X/D = 4.3$).

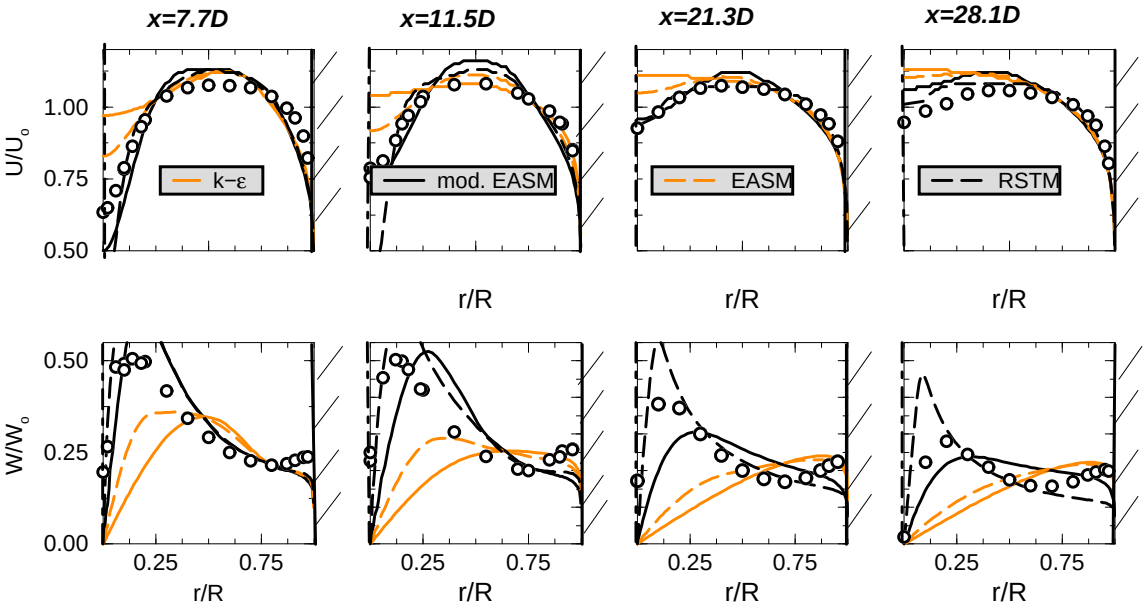


Abbildung 8.22: Simulation einer drallbehafteten Rohrströmung (Steenbergen und Parchen 1998, $Re_D = 300\,000$, $S = 0.1$); Vergleich der berechneten Axial- und Azimutalgeschwindigkeitsprofile (U,W) in verschiedenen Schnitten.

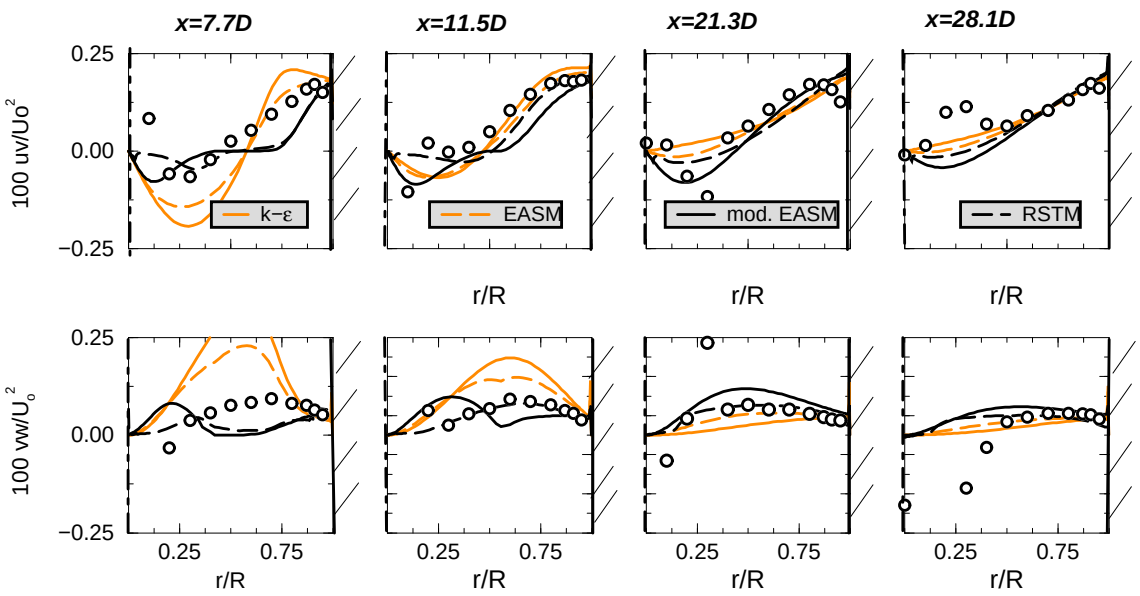


Abbildung 8.23: Simulation einer drallbehafteten Rohrströmung (Steenbergen und Parchen 1998, $Re = 300\,000$, $S = 0.1$); Vergleich der berechneten Axial- und Azimutalschubspannungsprofile ($\overline{uv}$, $\overline{vw}$) in verschiedenen Schnitten.

Die in den Abbildungen 8.22 und 8.23 dargestellten Simulationsergebnisse bestätigen die große Bedeutung der Coriolisterme in krümmungsbehafteten Strömungen. Das herkömmliche $k-\varepsilon$ Modell und das explizite algebraische Spannungsmodell (**EASM**) prognostizieren stromab von $X/D \approx 20$ Starrkörperprofile für die Azimutalgeschwindigleit. Demgegenüber führt die Modifikation des Wirbelbeitrags gemäß (8.82) zu einer Erhöhung des Betrags der Invarianten η_2. Die hiermit verknüpfte Verringerung des Anisotropieparameters c_μ erzwingt die in Abbildung (8.23) dargestellte Schwächung der Azimutalschubspannung (**mod. EASM**) in den stromaufliegenden Stationen, welche der Ausbildung von Starrkörperprofilen entgegentritt.

Kapitel 9 Examplarische Anwendungen

Das letzte Kapitel befaßt sich mit der Evaluierung der zu erwartenden Vorteile einer anisotropen Stress–Strain Beziehung in praxisnahen Simulationen. Sämtliche Anwendungen sind von stark vereinfachtem generischen Charakter. Die Validierung bezieht sich, sofern nicht anders angegeben, auf die im siebten Kapitel analysierte Basisformulierung des FRLT–EASM unter Verwendung der in Kapitel (8.2) dargestellten low–Re Modifikationen. Als Hintergrundmodelle dienen die in Anhang E skizzierten $k-\varepsilon$ und $k-\omega$ Modelle.

Numerisches Verfahren

Bei dem zur Validierung benutzten numerischen Verfahren handelt es sich um ein von Rung (2000) entwickeltes zweidimensionales Finite–Volumen Navier–Stokes–Verfahren. Der Algorithmus basiert auf der streng konservativen Formulierung der Grundgleichungen für primitive Variablen in Bezug auf allgemein–krummlinige Koordinaten. Zur effizienten Erfassung komplexer Geometrien wird das Integrationsgebiet durch ein blockstrukturiertes Rechengitter diskretisiert, dessen Verbindungsflächen unstrukturiert sein können. Der Algorithmus verwendet die *Arbitrary–Langrangian–Eulerian* (ALE) Formulierung des Transporttheorems, unter Berücksichtigung des Raumerhaltungsgesetzes (Demirdzić und Peric 1988). Das Programm eignet sich daher zur Erfassung bewegter, deformierbarer Rechengitter und freier Oberflächen.

Die in den Integro–Differentialgleichungen auftretenden Integrale werden durch die von zweiter Ordnung genaue Mittelpunktsregel angenähert. Die finite Approximation der verbleibenden diffusiven Flüsse geschieht durch von zweiter Ordnung genaue zentrale Differenzenformeln. Zur Approximation konvektiver Terme werden die Variablenwerte in den Flächenschwerpunkten durch stromaufgerichtete, monotone TVD–Ansätze (Harten 1983) interpoliert. Diese sind von maximal dritter Genauigkeitsordnung und ermöglichen eine oszillationsfreie Darstellung der für hohe Reynoldszahlen dominanten konvektiven Prozesse, bei gleichzeitiger Beachtung ihrer physikalischen Orientierung. Aus Stabilitätsgründen stützt sich die Implemetierung der TVD–Approximation auf die deferred–correction Technik (Lien und Leschziner 1994a). Die Untersuchungen von Lilek und Perić (1995) belegen, daß die hybride Approximationstechnik einen optimalen Kompromiss zwischen Effizienz und Genauigkeit darstellt.

Das Verfahren ist voll implizit, die zeitliche Integration ist von zweiter Ordnung genau. Die Bestimmung des kontinuitätsverträglichen Druckfeldes basiert auf einem kompressiblen (all–speed) Druckkorrekturalgorithmus (Demirdzić, Lilek und Peric 1993). Alle Strömungsgrößen sind in den Zellzentren gespeichert. Die enge Kopplung von Druck, Geschwindigkeit und Reynolds–Spannungen wird durch eine verallgemeinerte Rhie & Chow Interpolation (Rhie und Chow 1983) auf Grundlage des *apparent–pressure/ apparent–viscosity* Prinzips (Obi, Perić und Scheuerer 1991) sichergestellt. Die Formulierung der Anfangs–, Rand– und Übergangsbedingungen kann Perić und Ferzinger (1996) bzw. Rung (1999b) entnommen werden.

Zur Schließung der Reynolds–gemittelten Transportgleichungen stehen unterschiedliche Turbulenz– und Skalartransportmodelle zur Verfügung. Diese stützen sich sowohl auf allgemeine Wirbelzähigkeitsansätze als auch auf (nichtlineare) Transportgleichungen zweiter statistischer Momente. Das Verfahren bietet die Möglichkeit zum zonal–hybriden Einsatz der unterschiedlichen Turbulenzmodelle. Das Programmsystem beinhaltet neben dem Simulationverfahren einen semi–interaktiven Gittergenerator.

Ebener Freistrahl

Das erste Beispiel behandelt die Navier–Stokes Simulation des von Gutmark und Wygnanski (1976) vermessenen ebenen Freistrahls auf der Basis des $k-\varepsilon$ Modells. Die mit der Eintrittsgeschwindigkeit U_0 und dem Eintrittsquerschnitt D gebildete Reynoldszahl beträgt Re=30 000. Abbildung 9.1 veranschaulicht die untersuchte Konfiguration und zeigt einen Ausschnitt des verwendeten 110 x 80 Rechengitters. Das Rechengebiet erstreckte sich über einen Bereich von $0 < X < 200\ D$ bzw. $0 < Y < 50\ D$, wobei die halbe Strahlbreite mit ca. 35 Knoten aufgelöst wird. Neben den in der Abbildung skizzierten Einström–, Symmetrie– und Wandrandbedingungen wurden an allen übrigen Rändern Druckrandbedingungen (mit $\partial k/\partial n = \partial\varepsilon/\partial n = 0$) verwendet. Die Einströmwerte der Turbulenzvariablen lauten $Tu = 2\%$ und $\nu_t = 0.175\nu$.

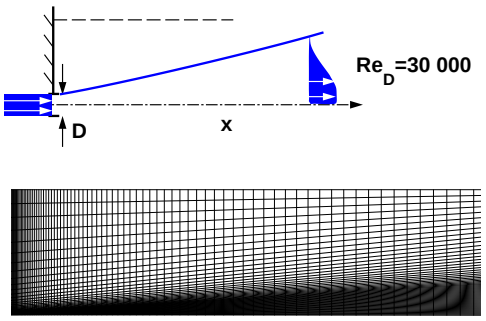


Abbildung 9.1: Ebener, turbulenter Freistrahl (Re_D=30 000, Gutmark et al. 1976).

Das Beispiel dient der Validierung des Koeffizienten $C_{\varepsilon 2}$, welcher in Abstimmung mit der homogenen Scherturbulenz kalibriert wurde, sowie der Überprüfung des in Gleichung (6.25) fixierten Schwellenwertes des Anisotropieparameters c_μ. Die Validierung orientiert sich in erster Linie an der prognostizierten Ausbreitungsrate des Freistrahls. Abbildung 9.2 gibt Aufschluß über den Einfluß des Koeffizienten $C_{\varepsilon 2}$ auf die Verläufe der normierten Halbwertsbreiten– und Mittengeschwindigkeiten. Die Ausbreitungsrate des Freistrahls wird im Zusammenhang mit $C_{\varepsilon 2} = 1.83$ durch die EASM–Simulation unterschätzt ($Y_{0.5}^{\mathrm{SIM}} \sim 0.085\,X$, $Y_{0.5}^{\mathrm{EXP}} \sim 0.1\,X$). Eine befriedigende Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit der experimentell ermittelten Entwicklung des Freistrahls ergibt sich durch leicht höhere Werte des Koeffizienten $C_{\varepsilon 2} = 1.9$.
Abbildung 9.3 illustriert die berechneten Strömungsprofile im selbstähnlichen Bereich. Die Ergebnisse des FRLT–EASM befinden sich für $C_{\varepsilon 2} = 1.9$ in guter Übereinstimmung mit den Messungen. Die Vorteile einer expliziten algebraischen Spannungsmodellierung treten insbesondere in Gestalt einer genaueren Vorhersage der Normalspannungen zutage. Daneben sind leichte Verbesserungen bei der Wiedergabe der primären Strömungsmerkmale (Geschwindigkeit und Schubspannung) erkennbar.

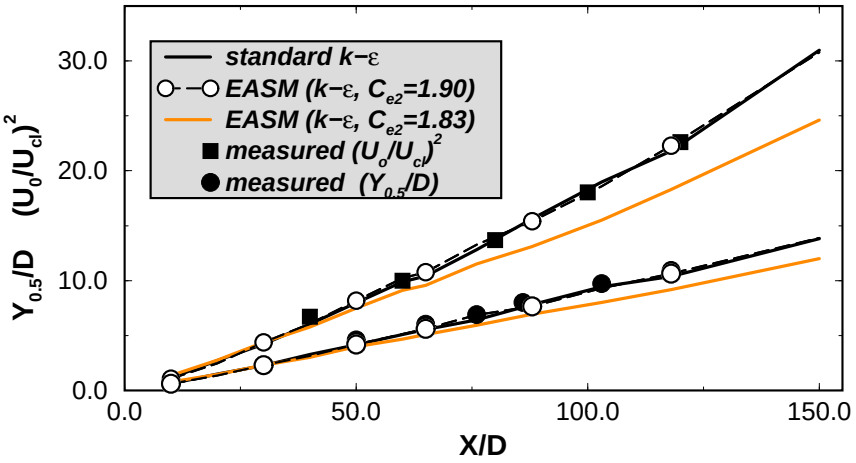


Abbildung 9.2: Turbulenter Freistrahl (Re=30 000, Gutmark et al. 1976); Abhängigkeit der normierten Halbwertsbreiten– $(Y_{0.5}/D)$ und Mittengeschwindigkeits– (U_0/U_{cl}) Entwicklungen vom Koeffizienten $C_{\varepsilon 2}$.

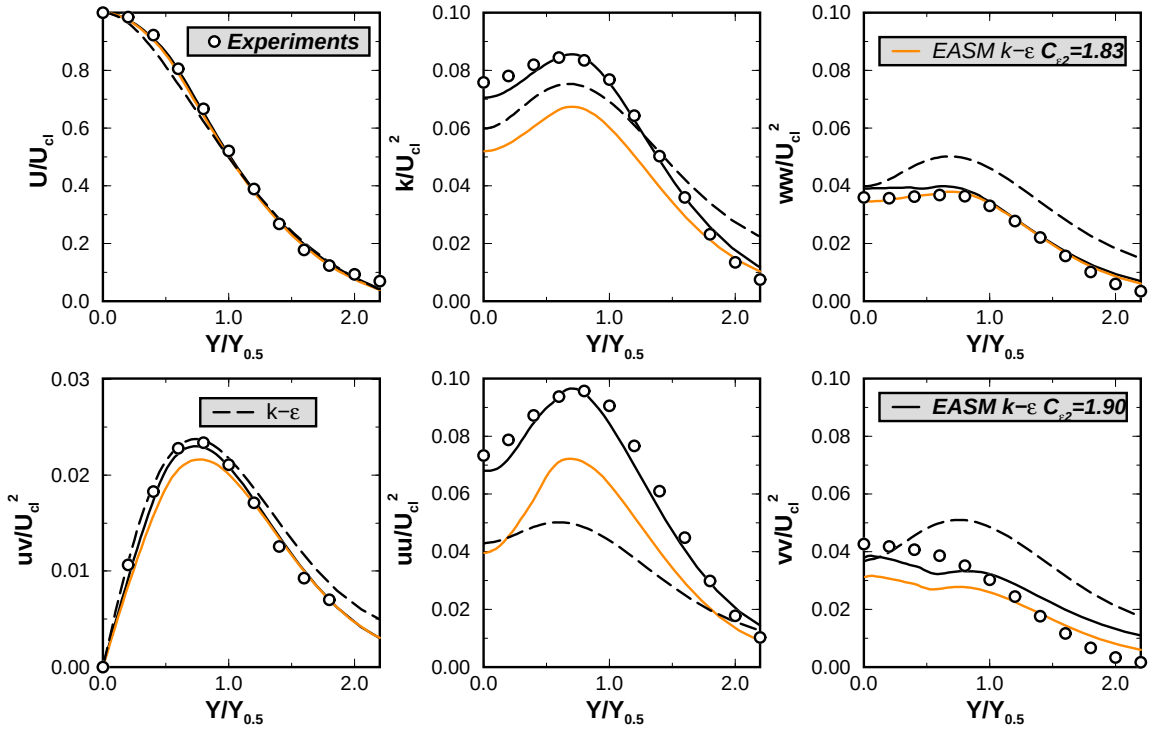


Abbildung 9.3: Turbulenter Freistrahl (Re=30 000, Gutmark et al. 1976); Geschwindigkeitsprofil und Profile der Reynolds–Spannungen im selbstähnlichen Bereich.

Senkenströmung

Für die Beurteilung von Turbulenzmodellen ist deren Anwendbarkeit auf beschleunigte Wandgrenzschichten von Bedeutung. In technischen Strömungen treten vergleichbare Zustände insbesondere an Turbinenschaufeln, Tragflügeln, Düsen und Einlaufsystemen auf. Die Beschleunigung wird zumeist durch einen dimensionslosen *Beschleunigungsparameter* charakteri–

$$K := \frac{\nu}{U_\delta^2}\frac{dU_\delta}{dx}$$

siert. Bei starker Beschleunigung verändert sich das Strömungsverhalten gegenüber der unbeschleunigten Strömung durch die fortschreitende Bedeutung von Anisotropieeffekten.

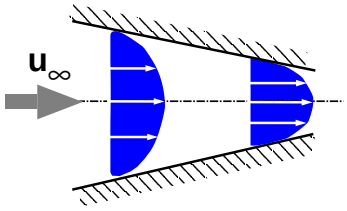


Abbildung 9.4: Selbstähnliche Senkenströmung (Spalart, 1986).

Ein Testfall, der die in einer beschleunigten Scherströmung wirkenden Mechanismen isoliert darzustellen vermag, ist die von Spalart (1986) in Form einer Direkten Numerischen Simulation untersuchte vollentwickelte Senkenströmung. Den prinzipiellen Aufbau der unter Verwendung periodischer Randbedingungen simulierten Konfiguration

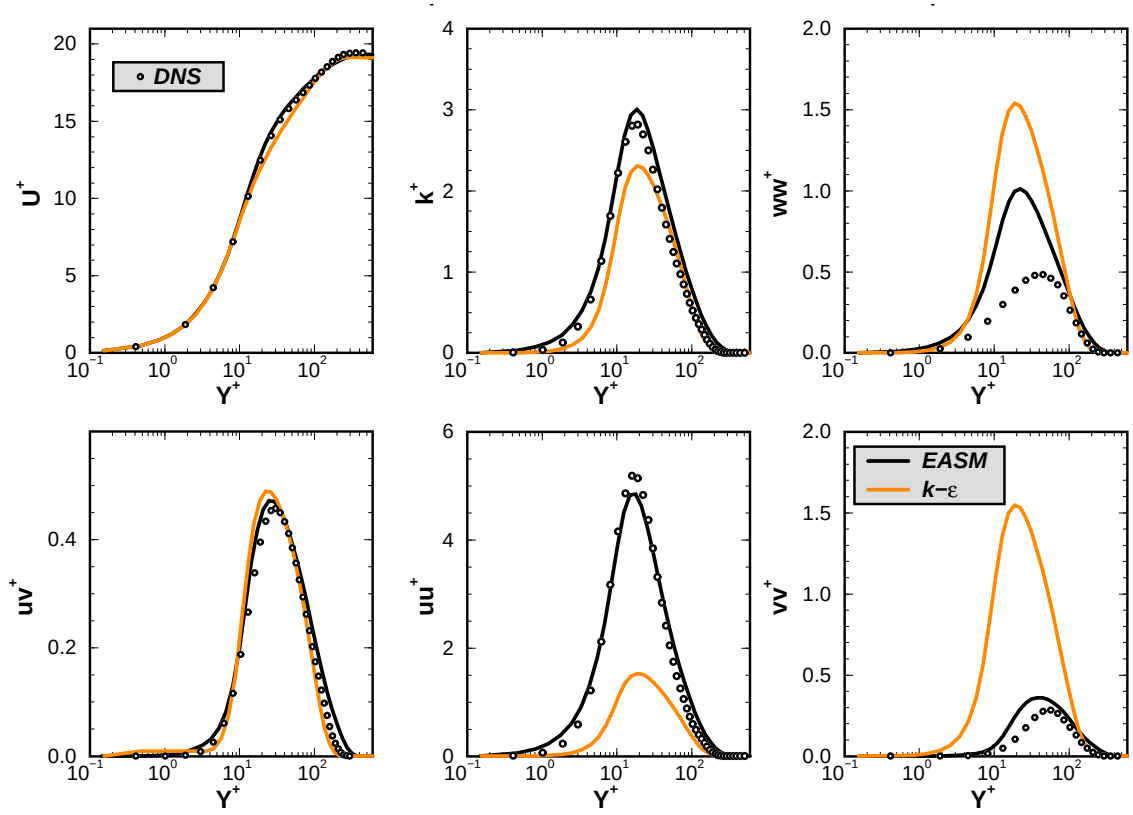


Abbildung 9.5: Turbulente Senkenströmung ($Re_{\delta_2} = 380$, $c_f = 5.3 \cdot 10^{-3}$, $K = 2.75 \cdot 10^{-6}$, Spalart 1986); Selbstähnliche Profile der Geschwindigkeit und Reynolds–Spannungen.

kann man Abbildung 9.4 entnehmen. Die erfolgreiche Vorhersage dieser Strömung bedarf einer Modifikation der Längenmaßbeziehung des Hintergrundmodells. Im Rahmen der Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodellierung wird dem Anstieg rotationsfreier Produktionsterme in Form eines zusätzlichen, impliziten Quellterms $\overline{u_\alpha^2}\, S_{\beta\beta}\, \delta_{\alpha\beta}$ Rechnung getragen, welcher inhärent anisotrop ist (Jakirlić 1997). Um den expliziten Charakter der Formulierung zu gewährleisten, greift die vorliegende Arbeit auf einen Vorschlag von Jones und Launder (1972) zurück, dessen Verallgemeinerung für das $k-\varepsilon$ Modell

$$\frac{\partial\,\rho\varepsilon}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\,\underline{U}\,\varepsilon) - \underline{\nabla}\cdot\left[(\mu+\frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon})\,\underline{\nabla}\varepsilon\right] \;=\; \rho\frac{\varepsilon}{k}\,(f_1 C_{e1} P - f_2 C_{e2}\varepsilon) + \underbrace{\mathcal{K}\,\nu\mu_t\Delta U_g}_{\text{Korrekturterm}}\;.$$

lautet. Ein analoger Korrekturterm läßt sich mit Hilfe der Transformationsbeziehung (1.87) in die $k-\omega$ Formulierung einarbeiten. Im Unterschied zu Jones und Launder ist der Koeffizient $\mathcal{K}$ in dieser Arbeit keine Konstante. Vielmehr orientiert sich die Bestimmung von $\mathcal{K}$ an der Näherung des Beschleunigungsparameters durch

$$\mathcal{K} = \left(\frac{\max(0,\Gamma)}{\gamma}\right)^4 \gamma\,, \qquad \Gamma = \min\left[\gamma, \left(\frac{10^6\nu}{U_g^3}\right)\underline{U}\cdot\underline{\nabla}U_g\right]\,, \qquad \gamma = 3.2\,. \tag{9.1}$$

Durch die Berücksichtigung von Umverteilungsprozessen ist die explizite algebraische

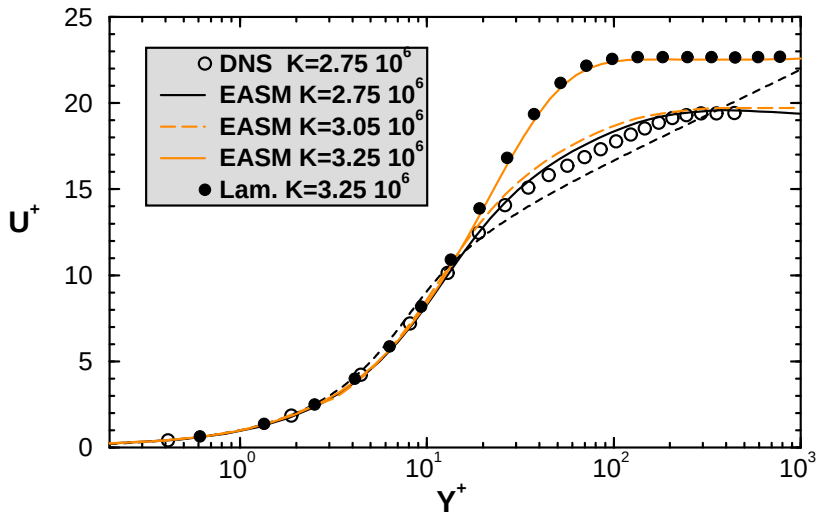


Abbildung 9.6: Turbulente Senkenströmung (Spalart 1986); Geschwindigkeitsprofile bei variierendem Beschleunigungsparameter ($K = 2.75 - 3.25 \cdot 10^{-6}$).

Modellbildung den linearen Ansätzen überlegen. Wie in Abbildung 9.5 zu erkennen ist, ermöglicht das $(k-\varepsilon)$ FRLT–EASM eine wesentlich realistischere Vorhersage der Turbulenzstruktur als das konventionelle $k-\varepsilon$ Modell. Die berechneten Reibungsbeiwerte weichen in beiden Fällen geringfügig von den Resultaten der DNS ab (EASM: $c_f = 5.2\cdot 10^{-3}$; $k-\varepsilon$: $c_f = 5.5\cdot 10^{-3}$; DNS: $c_f = 5.3\cdot 10^{-3}$).

Von besonderem Interesse ist die Fähigkeit des Turbulenzmodells eine Relaminarisierung der Strömung infolge starker Beschleunigung vorherzusagen. Die im nächsten Abschnitt diskutierten experimentellen Untersuchungen von Warnack und Fernholz (1998) bestätigen die Relaminarisierung oberhalb eines kritischen Beschleunigungsparameters $K_{\text{krit}} \approx 3.0 - 3.2 \cdot 10^{-6}$. Abbildung 9.6 vergleicht die berechneten Geschwindigkeitsprofile für drei verschiedene Beschleunigungsparameter im kritischen Bereich. Die Grafik belegt den relativ spontanen Einbruch des vorhergesagten Turbulenzfeldes bei Überschreiten eines Schwellenwerts ($K \geq 3.2 \cdot 10^{-6}$), was zumindest qualitativ mit den Erfahrungswerten übereinstimmt. Man beachte, daß der in Gleichung (9.1) eingeführte Quellterm für die Vorhersage der Relaminarisierung von zentraler Bedeutung ist.

Achsensymmetrische Passagenströmung

Im Unterschied zum oben diskutierten parabolischen Strömungsbeispiel ist die Beschleunigung in den meisten technischen Anwendungen nicht konstant. Zur Validierung von Wandgrenzschichten unter dem Einfluß starker, variierender Beschleunigungsparameter dient eine von Warnack und Fernholz (1998) untersuchte Passagenströmung (Case 2). Das in Abbildung 9.7 dargestellte rotationssymmetrische Beispiel behandelt einen rohrförmig ummantelten, axial angeströmten Verdrängungskörper. Die mit der Durchflußgeschwindigkeit und dem Manteldurchmesser D gebildete Reynoldszahl lautet $Re_D = 2.07 \cdot 10^5$. Die Länge des Verdrängungskörpers beträgt ca. 5.1 Rohrdurchmesser, sein maximaler Durchmesser ist $d = 0.805\, D$.

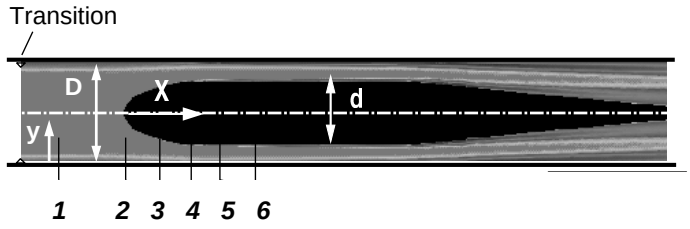


Abbildung 9.7: Illustration der achsensymmetrischen Passagenströmung (Warnack und Fernholz Case 2, 1998).

Das verwendete low–Re Rechengitter vernetzt den oberen Teil der symmetrischen Konfiguration auf der Basis von 190 x 65 Knoten ($0.2 < Y^+ < 1.8$). Das simulierte Strömungsgebiet erstreckt sich in axialer Richtung über 19 Rohrdurchmesser, wobei der Ursprung des Koordinatensystems im Staupunkt des Verdrängungskörpers liegt. Der Strömungseintritt erfolgt, den experimentellen Angaben folgend, durch ein Blockprofil im Transitionsquerschnitt ($X/D = -2.76$: $Tu = 0.25\%$, $\nu_t = 10^{-4}\nu$). Als Abströmbedingung dienen Nullgradientenbedingungen.

Im Zentrum der Untersuchungen steht der beschleunigte Teil der ungekrümmten Grenzschicht, welche sich entlang der Mantelkontur ausbildet. Der Zustand der vermessenen Grenzschicht eingangs der Beschleunigung ist durch $Re_{\delta_2} = 862$ gekennzeichnet. Der maximal auftretende Beschleunigungsparameter beträgt $K \approx 4.0 \cdot 10^{-6}$. Infolge der starken Beschleunigung wird die experimentell untersuchte Strömung in einem kurzen Bereich zwischen $0.65 < X/D < 1.1$ vollständig von den Druckkräften dominiert. Das Turbulenzfeld ändert sich hier vergleichsweise langsam, so daß die mittleren und inte-

gralen Eigenschaften der Mantelgrenzschicht zonal von laminarem Charakter sind.

Die gezeigten Simulationsergebnisse beschränken sich auf den Vergleich zwischen dem $k-\varepsilon$ basierten FRLT–EASM und dem in Anhang E skizzierten konventionellen low–Re $k-\varepsilon$ Modell. Das EASM stützt sich im Unterschied zum isotropen $k-\varepsilon$ Modell auf die in Gleichung (9.1) angegebene Modifikation der Dissipationsratengleichung. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Modifikation des Hintergrundmodells entscheidend für die erfolgreiche Berechnung stark beschleunigter Grenzschichten ist. Die im Folgenden herausgearbeiteten qualitativen Ergebnisunterschiede sind – mit Ausnahme der Spannungsanisotropie – in erster Linie auf die Quelltermmodifikation (9.1) zurückzuführen. Abbildung 9.8 gibt Aufschluß über die Darstellbarkeit der Relaminarisierung

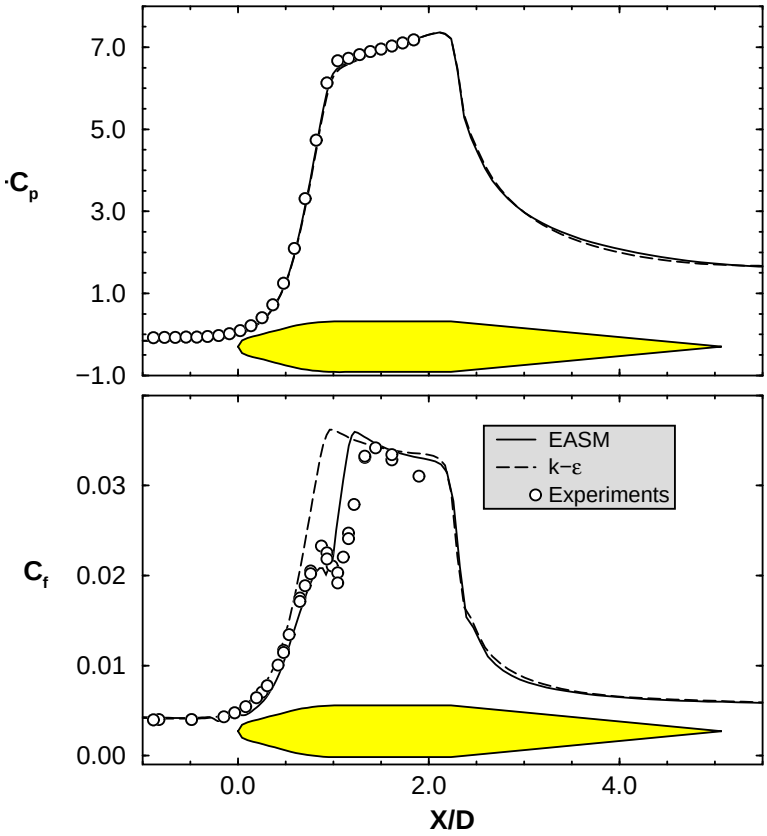


Abbildung 9.8: Relaminarisierende Passagenströmung (Warnack und Fernholz 1998 (C2), $Re_D = 2.07 \cdot 10^5, K \leq 4 \cdot 10^6$); Verlauf des Druck– (oben) und Reibungsbeiwerts (unten) entlang der Mantelfläche.

durch das Turbulenzmodell. Im Unterschied zum konventionellen $k-\varepsilon$ Modell vermag das modifizierte EASM den die Relaminarisierung kennzeichnenden signifikanten Einbruch des Reibungsbeiwerts vorherzusagen. Stromab der Relaminarisierung verringert sich die Beschleunigung (Abbildung 9.8 oben), so daß sich die in Abbildung 9.10 dargestellten Geschwindigkeitsprofile rasch erholen, und man bereits in $X/D = 1.32$ keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Lösungen mehr erkennt.

Die erste Station der Abbildung 9.10 befindet sich im Bereich der beschleunigungsfreien Zuströmung. Die Grenzschicht beschleunigt zwischen der zweiten und vierten Station und relaxiert im Bereich der stromab gelegenen, beschleunigungsarmen hinteren beiden Positionen. Der Verlauf des Beschleunigungsparameters ist ausschnittsweise im oberen Teil der Abbildung 9.9 skizziert. Ort und Betrag des maximalen Beschleunigungsparameters werden von der Simulation korrekt wiedergegeben, die Strömung relaxiert jedoch im Rahmen der Simulation stärker. Die vom EASM vorhergesagten Profile der fünften Station sind deshalb in ihrer Entwicklung weiter fortgeschritten als die experimentellen Ergebnisse. Die nahezu ungestörten Axialgeschwindigkeitsprofile der $k-\varepsilon$ Simulation belegen, daß die konventionelle Modellbildung den Relaminarisierungsprozess in keiner Weise erfaßt.

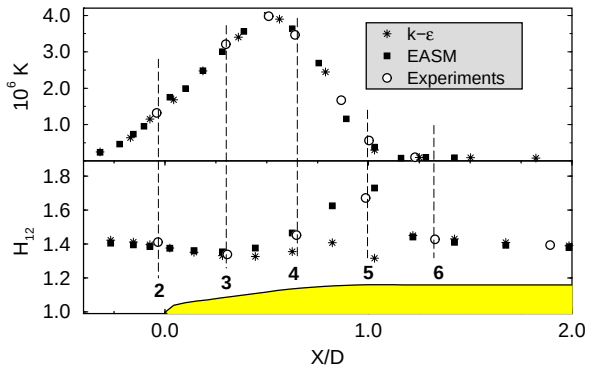


Abbildung 9.9: Passagenströmung (Warnack et al. (C2) 1998); Verlauf des Beschleunigungs– (K) und des Formparameters ($H_{12} := \delta_1/\delta_2$).

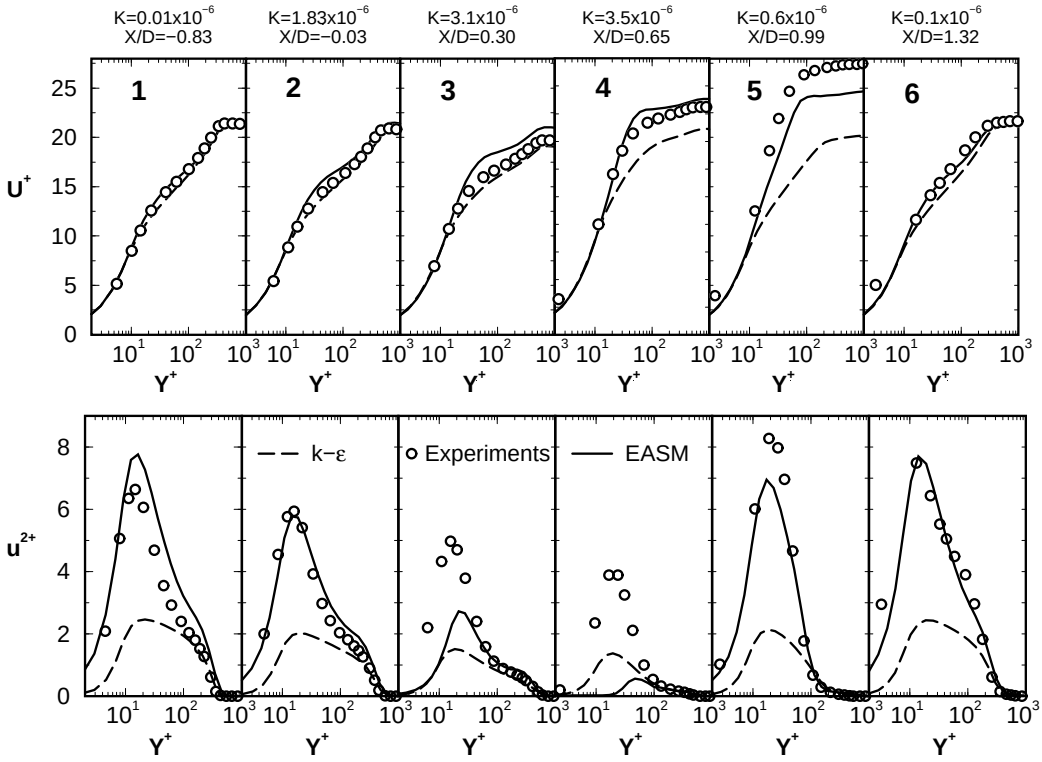


Abbildung 9.10: Relaminarisierende Passagenströmung (Warnack und Fernholz 1998 (C2), $Re_D = 2.07 \cdot 10^5, K \leq 4 \cdot 10^6$); Profile der Axialgeschwindigkeit und der axialen Normalspannung $\overline{u^2}$ an verschiedenen Stationen der Mantelgrenzschicht.

Stromab des Beschleunigungsmaximums erreicht der Formparameter H_{12} ein Maximum und der Reibungsbeiwert ein (lokales) Minimum. Im Zusammenhang mit dem expliziten algebraischen Spannungsmodell ist die Übereinstimmung zwischen der vorhergesagten und der vermessenen Grenzschichtentwicklung zufriedenstellend (Abbildungen 9.9 und 9.11).

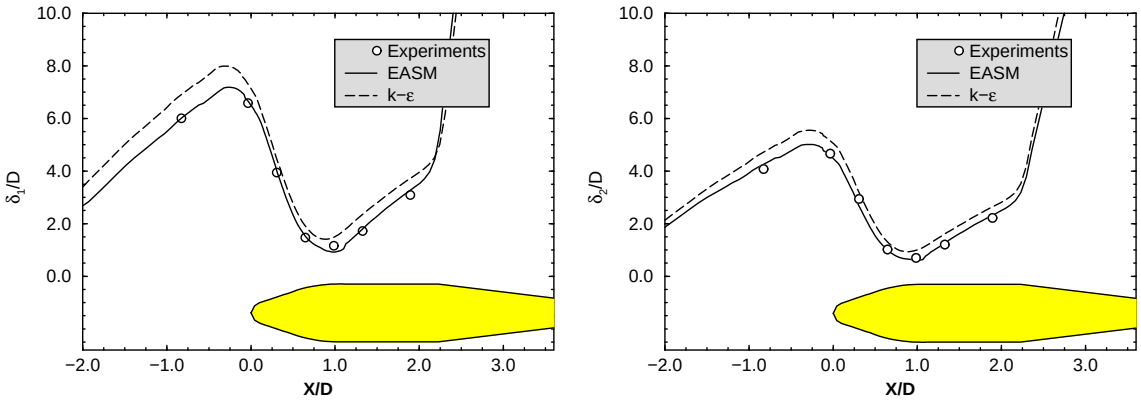


Abbildung 9.11: Relaminarisierende Passagenströmung (Warnack und Fernholz 1998 (C2), $Re_D = 2.07 \cdot 10^5, K \leq 4 \cdot 10^6$); Verlauf der Verdrängungs– (links) und Impulsverlustdicken (rechts) der Mantelgrenzschicht.

Die im unteren Teil der Abbildung 9.10 dargestellte Entwicklung der axialen Normalspannungen wird vom EASM mit hoher Genauigkeit vorhergesagt. Der prognostizierte Rückgang der axialen Normalspannung im Innenbereich einer stark beschleunigten Grenzschicht (Stationen 3 und 4) wird durch die Messungen in dieser Intensität nicht bestätigt. Den Ausführungen von Warnack und Fernholz folgend zeichnet sich die Turbulenzstruktur stark beschleunigter Grenzschichten, deren mittlere und integrale Eigenschaften laminaren Grenzschichten gleichen, durch zwei Merkmale aus, welche durch das EASM beachtlich gut wiedergegeben werden: Der in Abbildung 9.12 gezeigte Vergleich zwischen einem gleichgewichtsnahen ($X/D = -0.83$) und einem stark beschleunigten Strömungsprofil ($X/D = 0.99$) illustriert zum einen den drastischen Anstieg der absoluten (primären) Normalspannung um eine Größenordnung im Grenzschichtinnenbereich ($Y^+ < 70$), sowie zum anderen die stark herabgesetzten Werte von $\overline{u^2}$ im Außenbereich ($70 < Y^+ < 500$) der Grenzschicht.

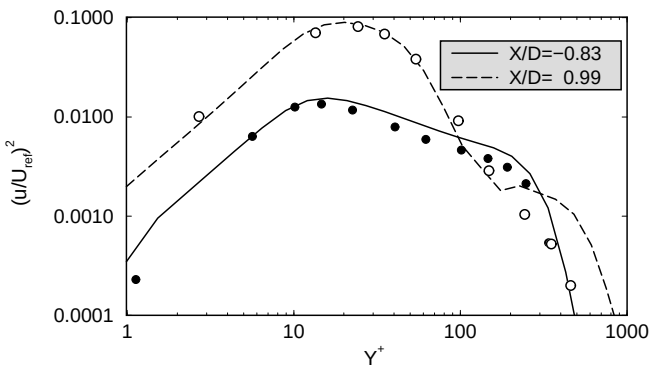


Abbildung 9.12: Vergleich der absoluten Normalspannungsprofile einer der Passagenströmung (Warnack und Fernholz C2, 1998).

Stufenströmung

Ein weiteres, populäres Validierungsbeispiel ist die in Abbildung 9.13 illustrierte Strömung über eine rückwärtsgerichtete Stufe. Der folgende Abschnitt diskutiert die Simulationen zweier verschiedener, inkompressibler Stufenströmungen, welche von Driver und Seegmiller (1985) bzw. Makiola (1992) experimentell untersucht wurden. Für den zunächst diskutierten Testfall von Driver und Seegmiller beträgt die mit der Durchflußgeschwindigkeit und der Stufenhöhe H gebildete Reynoldszahl $Re_H = 37\,500$. Das durch den Quotient der Kanalhöhen definierte *Erweiterungsverhältnis* der Stufe lautet $ER = 1.125$. Im Anschluß daran werden ausgewählte Ergebnisse für die von Makiola ($Re_H = 41\,000$, $ER = 2.0$) vermessene Strömung gezeigt, welche sich von dem zuerst betrachteten Beispiel primär durch das wesentlich größere Erweiterungsverhältnis unterscheidet.

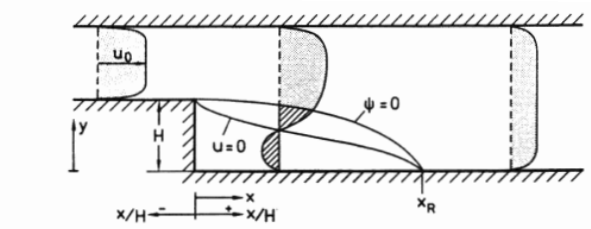


Abbildung 9.13: Veranschaulichung der Strömung über eine rückwärtsspringende Stufe (nach Makiola, 1992).

Für $Re > 10^4$ und $ER \leq 2$ wird die Strömungscharakteristik einer Stufenströmung vorwiegend vom Erweiterungsverhältnis diktiert. Aufgrund des moderaten Erweiterungsverhältnisses treten im ersten Beispiel nur geringfügige Krümmungseffekte im Bereich der abgelösten Scherschicht auf, weshalb eine ergänzende Validierung für eine stärker gekrümmte Scherschicht anhand der von Makiola vermessenen Stufe ratsam ist. Die Berechnungen basieren jeweils auf einem Zwei–Block–Gitter der Dimension 20 x 91 und 175 x 141. Das Rechengebiet erstreckt sich in Hauptströmungsrichtung von $X/H = -4$ bis $X/H = 40$, wobei der Stufensprung durch $X/H = 0$ gekennzeichnet ist. Der maximale dimensionslose Wandabstand des verwendeten Rechengitters beträgt $Y^+ = 2.0$. Die Zuströmbedingungen für die Geschwindigkeiten und die Turbulenzenergie entsprechen den üblicherweise verwendeten experimentellen Daten stromauf des Stufensprungs. Diese können beispielsweise der ERCOFTAC (1993) Datenbank entnommen werden. Die Zuströmbedingung für die Dissipationsrate wird mit Hilfe der Mischungsweghypothese gewonnen

$$\varepsilon = \frac{k^{1.5}}{L_\varepsilon}\,, \qquad \text{mit} \quad L_\varepsilon = \kappa\, c_\mu^{-0.75}\, \min(n, 0.207\,\delta) \qquad \text{und} \quad \delta = 1.5\,H\,,$$

in der n den Wandnormalenabstand kennzeichnet. Als Abströmbedingung dienen wiederum Nullgradientenbedingungen. Ziel der Untersuchungen ist die Beurteilung des Einflußes der expliziten algebraischen Spannungsmodellierung im Zusammenhang mit $k-\varepsilon$ und $k-\omega$ Hintergrundmodellen. Daneben wird die Auswirkung eines gegenüber dem Standardmodell veränderten Dissipationsratenkoeffizienten $C_{\varepsilon 2}$ analysiert.

Testfall Driver und Seegmiller (1985)

Tabelle 9.1 und Abbildung 9.14 verdeutlichen, daß sich die Ergebnisse in Bezug auf die Vorhersage der Wiederanlegelänge – für beide Hintergrundmodelle – im EASM–Kontext verbessern. Die mit expliziten algebraischen Spannungsmodellen berechneten Werte stimmen besser mit dem experimentellen Wert überein als die Resultate einer isotropen Modellierung. Neben der genaueren Vorhersage der Wiederanlegelänge

Tabelle 9.1: Turbulente Stufenströmung (Driver et al. 1985, $Re_H = 37\,500$, $ER = 1.125$); Vergleich der berechneten Wiederanlegelängen (X_r/H) und der sekundären (X_2/H) bzw. tertiären (X_3/H) Nullstellen des Reibungsbeiwerts.

	$k-\omega$	$k-\varepsilon$	EASM $k-\omega$	EASM $k-\varepsilon$	EASM $k-\varepsilon$	Exp.
X_r/H	6.20	5.65	6.28	6.30 ($C_{\varepsilon 2} = 1.83$)	5.95 ($C_{\varepsilon 2} = 1.92$)	6.26
X_2/H	1.2	0.58	1.45	0.95 ($C_{\varepsilon 2} = 1.83$)	0.75 ($C_{\varepsilon 2} = 1.92$)	–
X_3/H	0.1	0.02	0.07	0.04 ($C_{\varepsilon 2} = 1.83$)	0.04 ($C_{\varepsilon 2} = 1.92$)	–

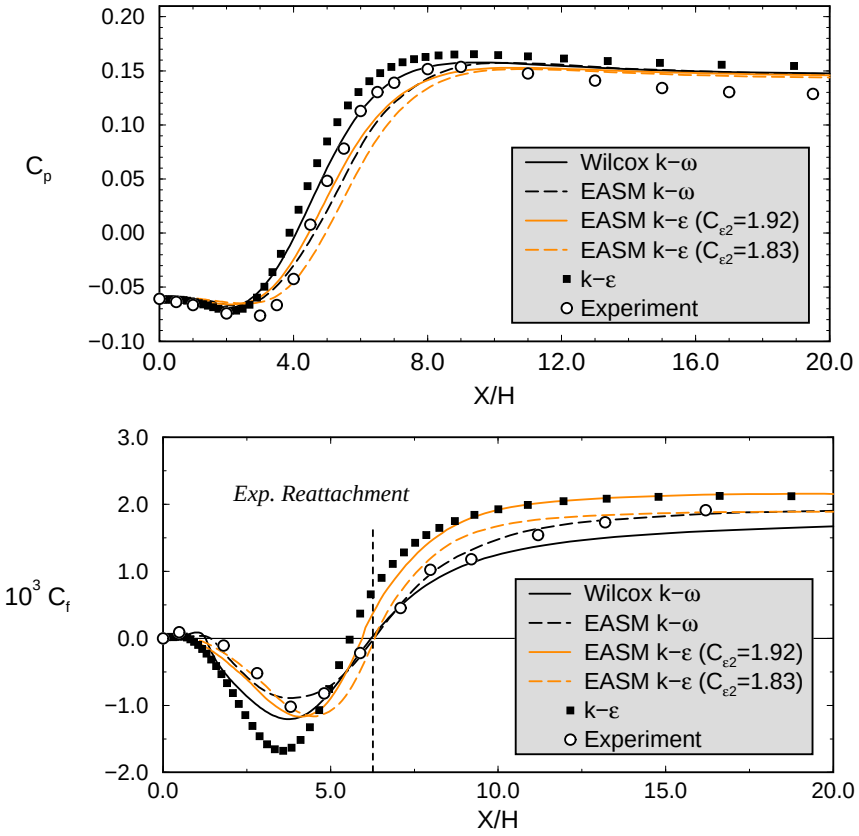


Abbildung 9.14: Turbulente Stufenströmung (Driver et al. 1985, $Re_H = 37\,500$, $ER = 1.125$); Verlauf des stufenseitigen Reibungs– und Druckbeiwerts.

vermögen die EASM auch eine realistischere Vorhersage der wandnahen Rezirkulationsintensität zu erzielen, was sich in Form stark verbesserter Verläufe der Reibungsbeiwerte äussert (Abbildung 9.14 unten). Die für isotrope Wirbelzähigkeitsmodelle typische Unterschätzung der sekundären und tertiären (Ecken–)Wirbel macht sich, inbesondere im Zusammenhang mit dem $k-\varepsilon$ Modell, durch das frühzeitige Absinken des Reibungsbeiwertes hinter dem Stufensprung bemerkbar. Man beachte, daß sich die Ergebnisse

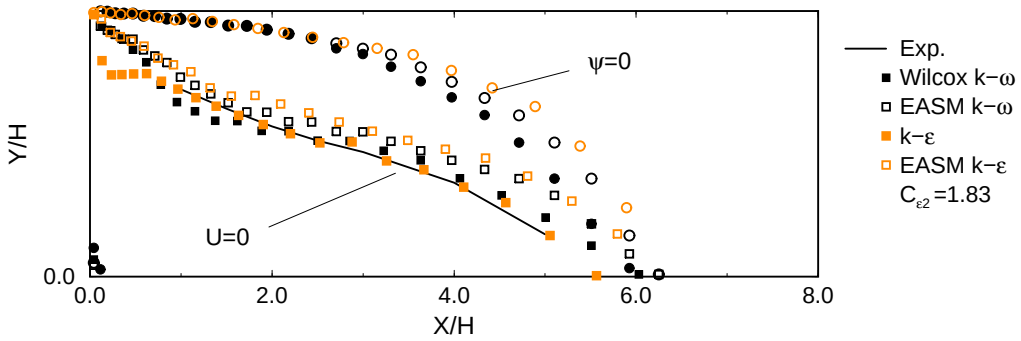


Abbildung 9.15: Turbulente Stufenströmung (Driver et al. 1985, $Re_H = 37\,500$, $ER = 1.125$); Nullstromlinie und Nulldurchgang der Reynolds–gemittelten Primärgeschwindigkeit.

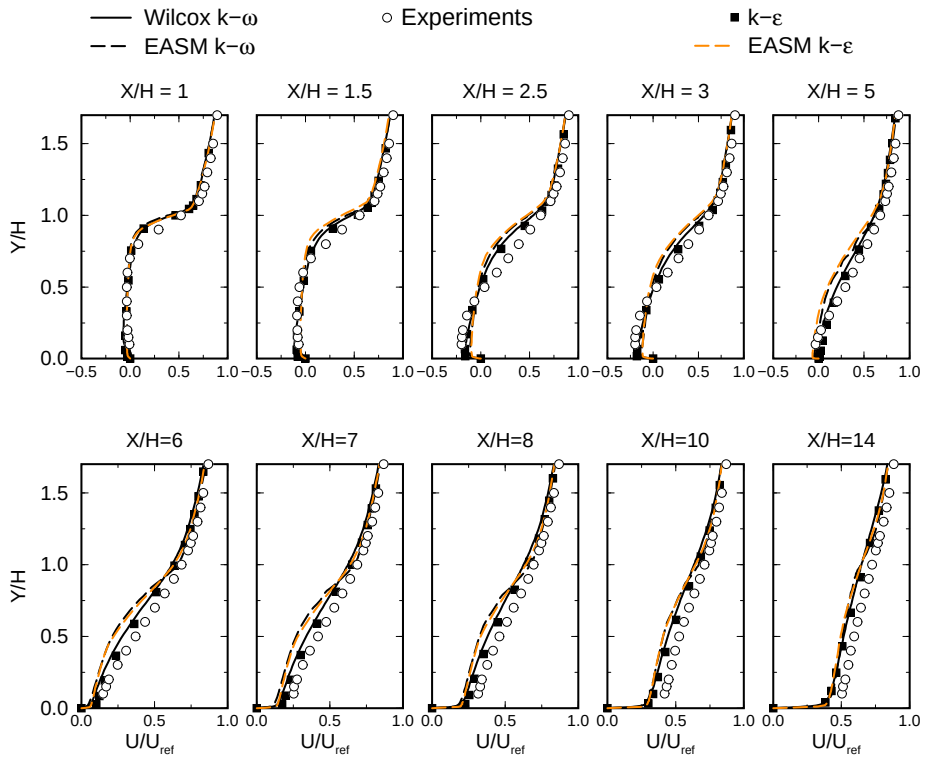


Abbildung 9.16: Turbulente Stufenströmung (Driver et al. 1985, $Re_H = 37\,500$, $ER = 1.125$); Stufenseitige Profile der Reynolds–gemittelten Primärgeschwindigkeit.

des EASM $k-\varepsilon$ Modells bei Verwendung des gleichen $C_{\varepsilon 2}$ Koeffizienten nur noch geringfügung von den $k-\omega$ Ergebnissen unterscheiden (vgl. Abschnitt 1.4.1.2).
Einen zusätzlichen Einblick in den Einfluß der Modellbildung gewinnt man aus der Betrachtung der Nullstromlinien bzw. des Nulldurchgangs der Hauptströmungsgeschwindigkeit (Abbildung 9.15). Der Nulldurchgang der vorhergesagten Primärgeschwindigkeitskomponente stimmt, mit Ausnahme der Ergebnisse des isotropen $k-\varepsilon$ Modells, stromab nicht mit den Messungen überein. Diese Diskrepanz weist auf eine Überschätzung der Verdrängungsdicke, bzw. der Blasenhöhe, im stromab liegenden Rezirkulationsbereich hin, was durch den verzögert auftretenden Druckanstieg in Abbildung (9.14) untermauert wird.

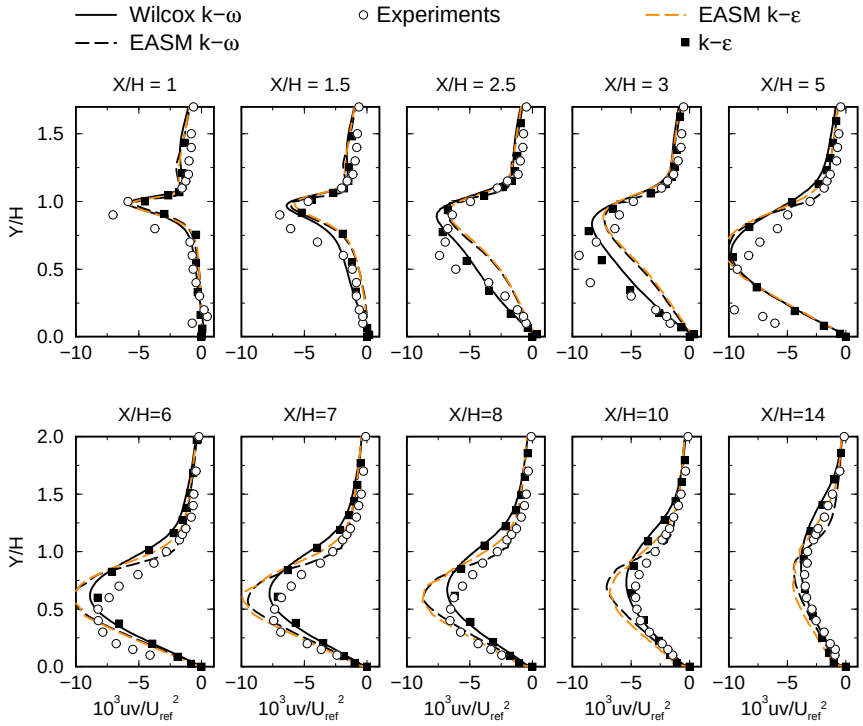


Abbildung 9.17: Turbulente Stufenströmung (Driver et al. 1985, $Re_H = 37\,500$, $ER = 1.125$); Stufenseitige Profile der turbulenten Schubspannung.

Die in Abbildung 9.16 dargestellten Geschwindigkeitsprofile belegen die Überschätzung der Rezirkulationsintensität im Außenbereich durch die EASM. Die Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment verschlechtert sich im stromab des Wiederanlegepunktes liegenden Recoverybereich ($X/H > 7$), in dem die stark gestörte Grenzschicht wieder dem Gleichgewichtszustand entgegenstrebt.
Ausgangs des Recoverybereichs stimmen die Profile der EASM mit denen der konventionellen Modellierung überein. In Anbetracht der stärker gestörten Grenzschicht bei Eintritt in den Recoverybereich, sind die vorhergesagten Recoveryraten des EASM höher. Ursache hierfür ist ein Anstieg der Werte des Anisotropieparameters $c_\mu > \overline{c}_\mu$ in

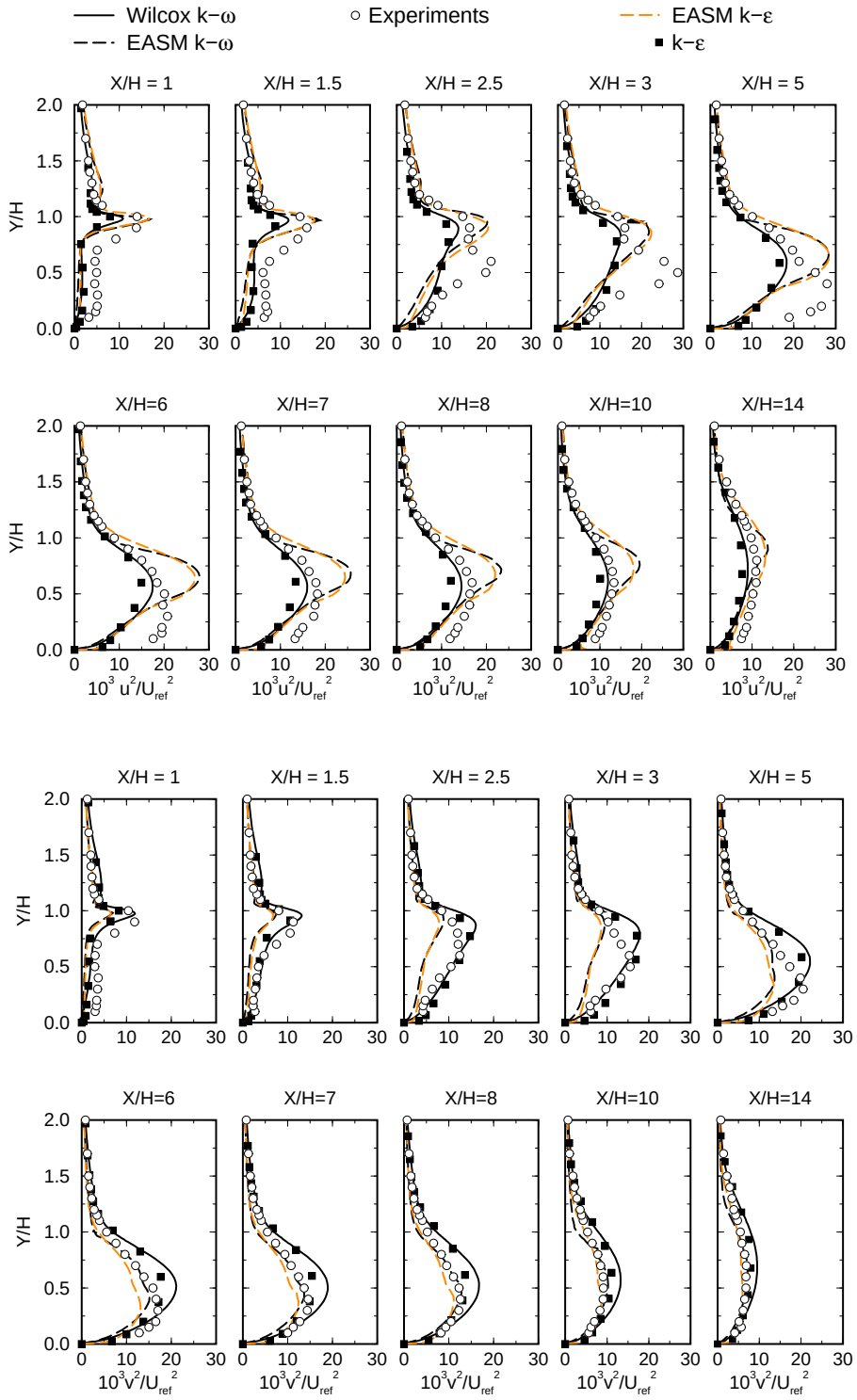


Abbildung 9.18: Turbulente Stufenströmung (Driver et al. 1985, $Re_H = 37\,500$, $ER = 1.125$); Stufenseitige Profile der Reynoldsschen Normalspannungen $\overline{u^2}$ (oben) und $\overline{v^2}$ (unten).

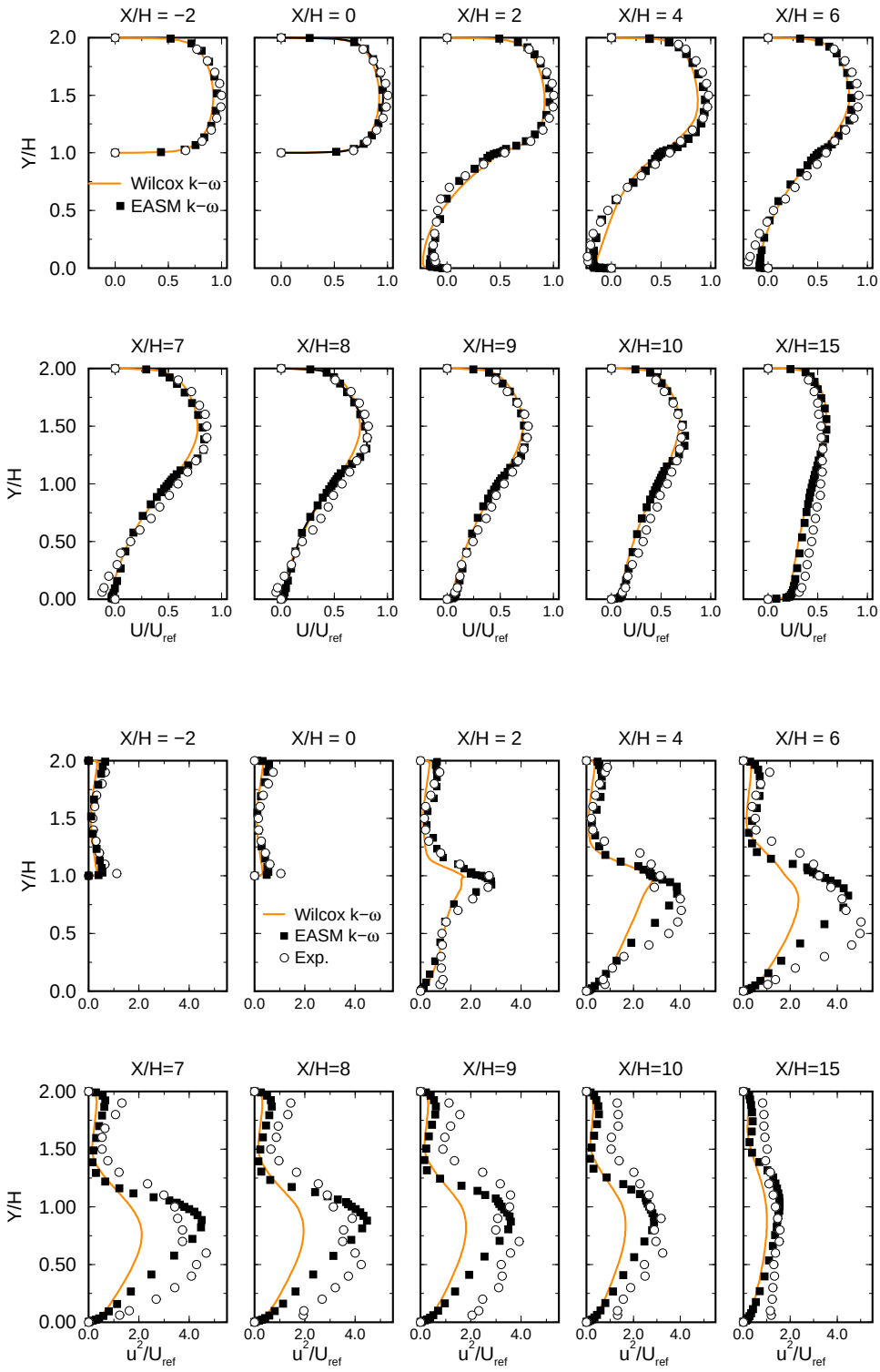


Abbildung 9.19: Turbulente Stufenströmung (Makiola 1992, $Re_H = 41\,000$, $ER = 2.0$); Stufenseitige Profile der Reynolds–gemittelten Primärgeschwindigkeit (oben) und der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{u^2}$ (unten).

den scherarmen wandnahen Zonen der wiederanlegenden Scherschicht, der ein höheres Entrainment ermöglicht. Die in Abbildung 9.17 abgebildeten Profile der turbulenten Schubspannung bestätigen die oben gemachten Aussagen. Die EASM unterschätzen die Schubspannungen im Rückströmbereich z.T. deutlicher als die konventionellen isotropen Modelle. Sie vermögen daher die zur Wand drängende Nullstromlinie sowie das gradientenabhängige Schubspannungsmaximum stromab nicht korrekt zu lokalisieren. Analoge Schlußfolgerungen ergeben sich aus der Betrachtung der in Abbildung 9.18 dargestellten Normalspannungsprofile.

Testfall Makiola (1992)

Zur Verifikation der teilweise unbefriedigenden Simulationsergebnisse für die Geschwindigkeiten und Reynolds–Spannungen in einer rückwärtsgerichteten Stufenströmung mit moderatem Erweiterungsverhältnis dient die Berechnung der von Makiola vermessenen Stufenströmung mit größerem Erweiterungsverhältnis. Die gezeigten Simulationsergebnisse beschränken sich auf das $k-\omega$ Hintergrundmodell (Wilcox, FRLT–EASM).

Tabelle 9.2: Turbulente Stufenströmung (Makiola 1992, $Re_H = 41\,000$, $ER = 2.0$); Vergleich der berechneten und gemessenen Wiederanlegelängen (X_r/H).

$k-\omega$	Wilcox $k-\omega$	FRLT–EASM $k-\omega$	Experiment
X_r/H	8.12	8.50	8.55

Tabelle 9.2 ermöglicht einen Vergleich der berechneten Wiederanlegelängen, und bestätigt die bereits in Tabelle 9.1 dargestellte Verbesserung der Ergebnisqualität durch EASM. Die in der Abbildung 9.19 dargestellten Geschwindigkeits– und Normalspannungsprofile stimmen insgesamt deutlich besser mit den Messwerten überein als im oben diskutierten Fall mit kleinerem Erweiterungsverhältnis. Leider existieren keine Messungen für die restlichen Komponenten des Reynolds–Spannungstensors.
Im Unterschied zum moderaten Erweiterungsverhältnis wird die prognostizierte Rezirkulationsstärke im Bereich des Wiederanlegepunktes ($X/H = 7,8$) leicht unterschätzt. Die Geschwindigkeitsprofile der letzten Station ($X/H = 15$) offenbaren erneut die Schwierigkeiten beider Modellierungspraktiken in Bezug auf die Vorhersage korrekter Recoveryraten. Das Niveau der durch das EASM vorhergesagten primären Normalspannung $\overline{u^2}$ wird in diesem Testfall von den Experimenten bestätigt (Abbildung 9.19 unten).

Umströmung eines Hochauftriebsprofils

Das vorangehende Beispiel befaßte sich mit der Validierung der Modellbildung bei geometrieinduzierter Strömungsablösung. Im Unterschied dazu widmet sich der folgende Abschnitt der Berechnung von druckinduzierter Strömungsablösung. Ein hierfür häufig benutztes Validierungsbeispiel ist die Umströmung des Onera A–Profils bei

$Re = 2 \cdot 10^6, M = 0.15, \alpha = 13.3^o$ (Gendre 1990). Der Testfall zeichnet sich durch das gekoppelte Auftreten einer laminaren (prätransitionalen) Ablöseblase und einer druckinduzierten Hinterkantenablösung aus. Die Transitionslagen an Ober– und Unterseite

Tabelle 9.3: Umströmung des Onera A–Profils ($Re = 2 \cdot 10^6, M = 0.15, \alpha = 13.3^o$); Berechnete aerodynamische Beiwerte für verschiedene Turbulenzmodelle.

					$k-\omega$	Modelle	
	Exp.	LL $k-\varepsilon$	SA	Wilcox	SST	EASM	EASM+C_1
C_a	1.520	1.640	1.605	1.631	1.505	1.575	1.515
C_w	0.024	0.018	0.018	0.018	0.019	0.020	0.020

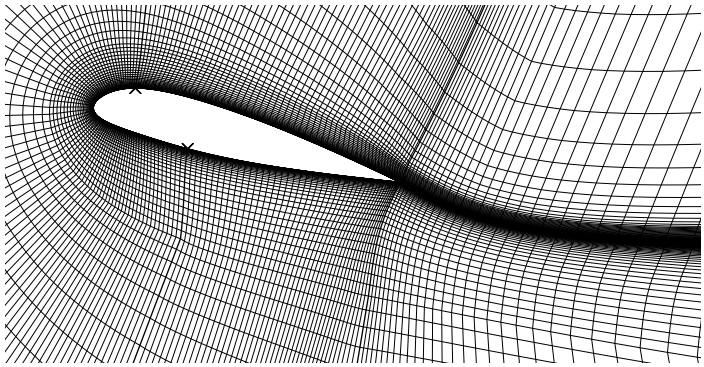


Abbildung 9.20: Ausschnitt des verwendeten Rechengitters um das Onera A–Profil ($\alpha = 13.3^o$, $Re = 2 \cdot 10^6$, $Ma = 0.15$).

wurden, in Anlehnung an den Meßbericht, bei 12 % bzw. 30 % Profiltiefe fixiert. Das verwendete block–strukturierte Rechengitter besitzt ca. 22 000 Knotenpunkte (281 x 78 in C–Topologie) und wurde der Lösung in einer vorangehenden Simulation angepasst. Abbildung 9.20 zeigt einen Ausschnitt des körpernahen Bereichs des Rechengitters, in dem die Transitionslagen symbolisch ($\times$) markiert sind. Das Gitter erstreckt sich etwa zwölf Profiltiefen in das Fernfeld, der maximale dimensionslose Wandabstand beträgt $Y^+ = 1.5$.

Die Simulation von druckinduzierter Strömungsablösung ist entscheidend mit der Qualität des strömungsphysikalischen Modells in Nichtgleichgewichts–Zuständen verbunden. Die $k-\omega$ Formulierung ist aufgrund der inhärenten Konsistenz zu den Gesetzmäßigkeiten der viskosen Unterschicht und des logarithmischen Bereichs für die Berechnung ablösenaher und ablösender Grenzschichten von Vorteil, weswegen sich die Mehrzahl der im Folgenden untersuchten Varianten auf diese Formulierung stützen. Ergänzend zu den vier (**Wilcox, SST, EASM, EASM+C_1**) untersuchten $k-\omega$ Varianten werden die Ergebnisse des Eingleichungsmodells von Spalart und Allmaras (1992) (**SA**) und des in Anhang E notierten low–Re **LL** $k-\varepsilon$ Modells diskutiert.

Untersuchungen von Haase et al. (1997) und Dervieux et al. (1998) belegen die Güte der

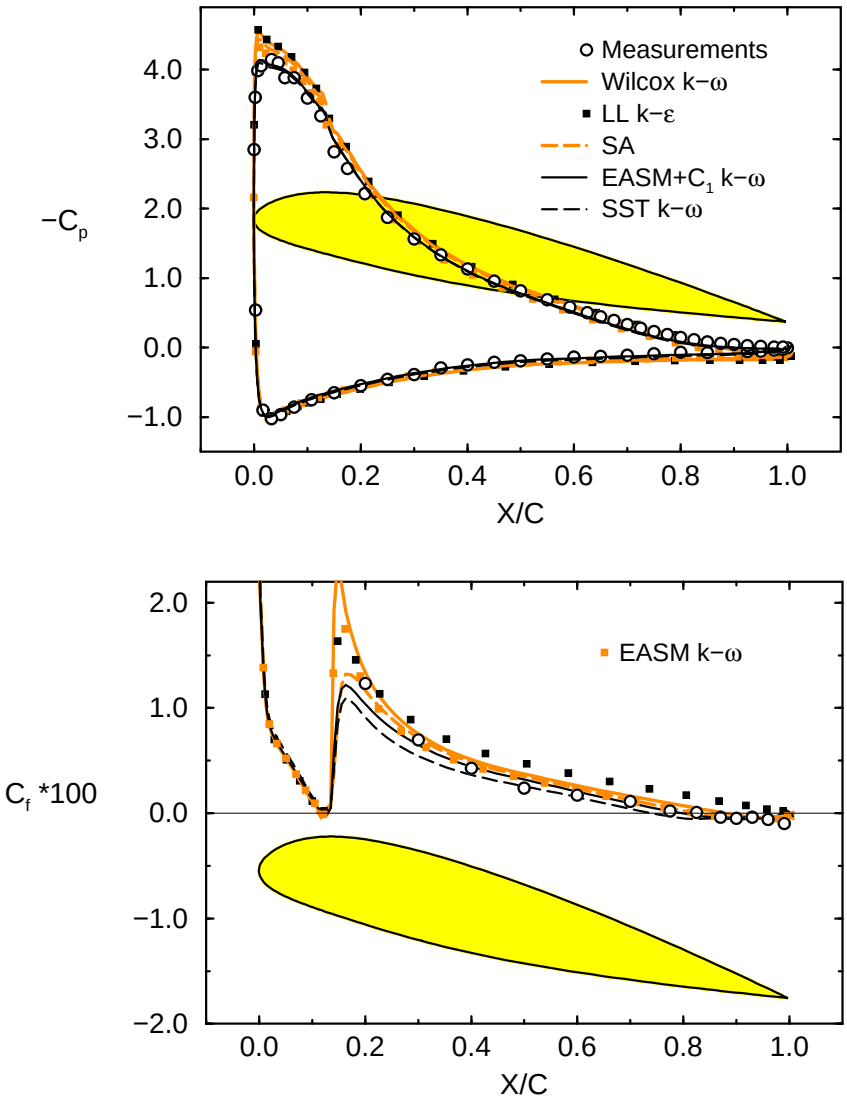


Abbildung 9.21: Umströmung des Onera A–Profils ($Re = 2 \cdot 10^6, M = 0.15, \alpha = 13.3^o$); Verlauf des Druck– und Reibungsbeiwerts für verschiedene Turbulenzmodelle.

sogenannten Shear–Stress–Transport– (SST) Modifikation des Anisotropieparameters von Menter (1994) bei der Berechnung von Strömungen unter dem Einfluß positiver Druckgradienten

$$\boxed{\nu_t = \frac{c_{\mu(sst)}}{\overline{c}_\mu} \left(\frac{k}{\omega}\right)}, \tag{9.2}$$

$$c_{\mu(sst)} = \min\left(\overline{c}_\mu, \frac{1}{3.22 f_{sst}\,\Omega}\right) \quad \text{mit} \quad f_{sst} = \tanh\left[\gamma^2\right]\ ,\ \gamma = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\overline{c}_\mu\,\omega\,n}\,,\ \frac{500\,\nu}{n^2\,\omega}\right)\ .$$

Das SST $k-\omega$ Modell entspricht formal dem linearen Rumpf eines EASM $k-\omega$ Modells. Da der lineare Term für scherdominierte, zweidimensionale Probleme ausschlaggebend ist, empfiehlt sich ein Vergleich der beiden Modelle im Rahmen der abgelösten Profilumströmung. Die SST–Modifikation strebt die Gewährleistung der Bradshaw–Hypothese (6.40) durch das Turbulenzmodell an. Die Hypothese (6.40) impliziert eine Limitierung der resultierenden Schubspannung. Für eine einfache ebene Scherströmung lautet diese Limitierung

$$\frac{|\overline{uv}|}{k} \leq 0.31 \approx \sqrt{c_\mu} \; .$$

Ergänzend zur Adaption des Anisotropieparameters c_μ beinhaltet die SST–Modellierung auch eine Modifikation des Produktionsterms der Längenmaßbeziehung (vgl. Glg. 1.80). Wie bereits im ersten Kapitel erwähnt, hängt die Güte der Simulationsergebnisse unter anderem von der Formulierung des Produktionsterms der Längenmaßbeziehung ab. In Anlehnung an die SST–Technik wird das FRLT–EASM daher optional mit einer analogen Korrektur der ω–Gleichung (9.3) kombiniert

$$\frac{\partial\,\rho\omega}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\,\underline{U}\,\omega) - \underline{\nabla}\cdot\left[(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega})\,\underline{\nabla}\omega\right] \;=\; \rho\frac{\omega}{k}\Big[\underbrace{\left(\frac{k}{\omega\,\nu_t}\right)}_{P_\omega-\text{Korrektur}}\alpha P_k - \beta\omega k\Big] \;, \quad (9.3)$$

zu deren Kennzeichnung der Terminus $\mathbf{EASM{+}C_1}$ dient.

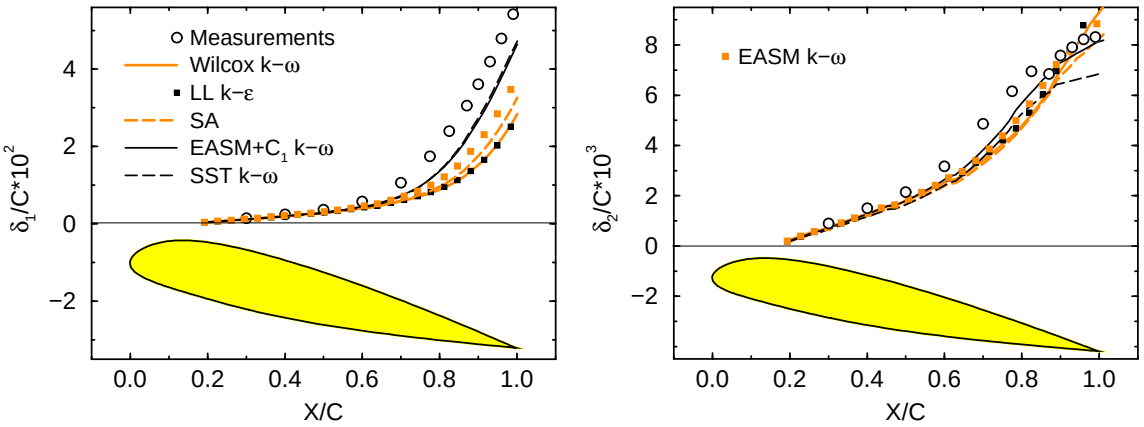


Abbildung 9.22: Umströmung des Onera A–Profils ($Re = 2 \cdot 10^6, M = 0.15, \alpha = 13.3^o$); Verlauf der Verdrängungs– (links) und Impulsverlustdicke (rechts) für verschiedene Turbulenzmodelle.

Die in Tabelle 9.3 angegebenen Kraftbeiwerte vermitteln einen Eindruck von der zu erwartenden Simulationsqualität unterschiedlicher Turbulenzmodelle in Bezug auf die Vorhersage von druckinduzierter Strömungsablösung.

Vergleicht man die Ergebnisse des Spalart–Allmaras Eingleichungsmodells mit denjenigen des $k-\varepsilon$ Modells, so erweist sich das Eingleichungsmodell als überlegen. Das

SA–Modell läßt sich mit Hilfe der Bradshaw–Hypothese (6.40) unmittelbar aus dem $k-\varepsilon$ Modell herleiten (Rung 1998a). Die Vorteile einer zur Bradshaw–Hypothese konsistenten Modellbildung werden durch die guten Resultate des SST–Modells und die deutlichen Unterschiede zwischen dem EASM und dem EASM+C_1 Modell bestätigt.

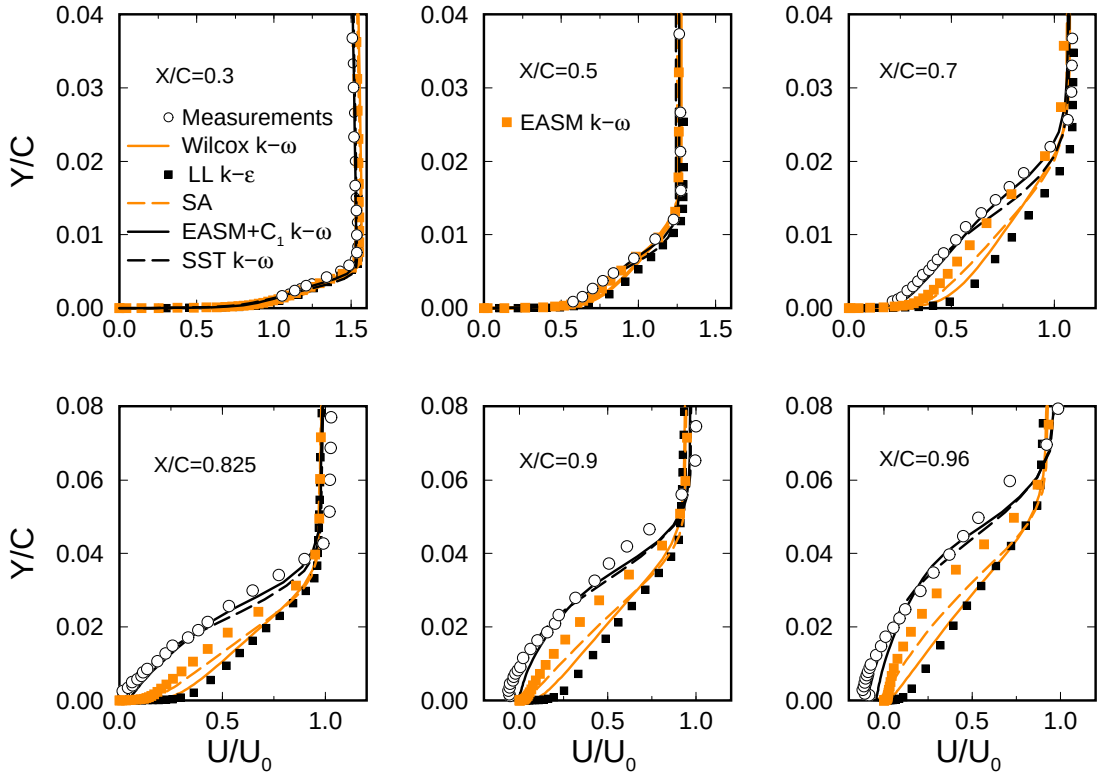


Abbildung 9.23: Hochauftriebsumströmung eines Onera–A Profils (M=0.15, Re=$2{\cdot}10^6$, α=13.3^o); Reynolds–gemittelte Geschwindigkeitsprofile an verschiedenen Stationen der Saugseite.

Die Betrachtung der in Abbildung 9.21 dargestellten Druck– und Reibungsbeiwerte belegt, daß die beiden Ablösegebiete von den Turbulenzmodellen unterschiedlich gut erfaßt werden. Vor allem im Zusammenhang mit den konventionellen Zweiparametermodellen (LL $k-\varepsilon$, Wilcox $k-\omega$) findet man eine deutliche Überschätzung der Saugspitze in Kombination mit einer schwächeren Hinterkantenablösung. Diese macht sich in einem erkennbaren verbleibenden Druckgradienten im hinteren Bereich der Saugseite bemerkbar.
Sowohl die in Abbildung 9.22 aufgetragenen Grenzschichtdicken, als auch die in Abbildung 9.23 dargestellten Geschwindigkeitsprofile belegen, daß die Stärke der Hinterkantenablösung von allen Modellen zu gering vorhergesagt wird. Die hierdurch unterschätzte viskose Entwölbung des Profils bewirkt gleichzeitig eine leichte Anhebung

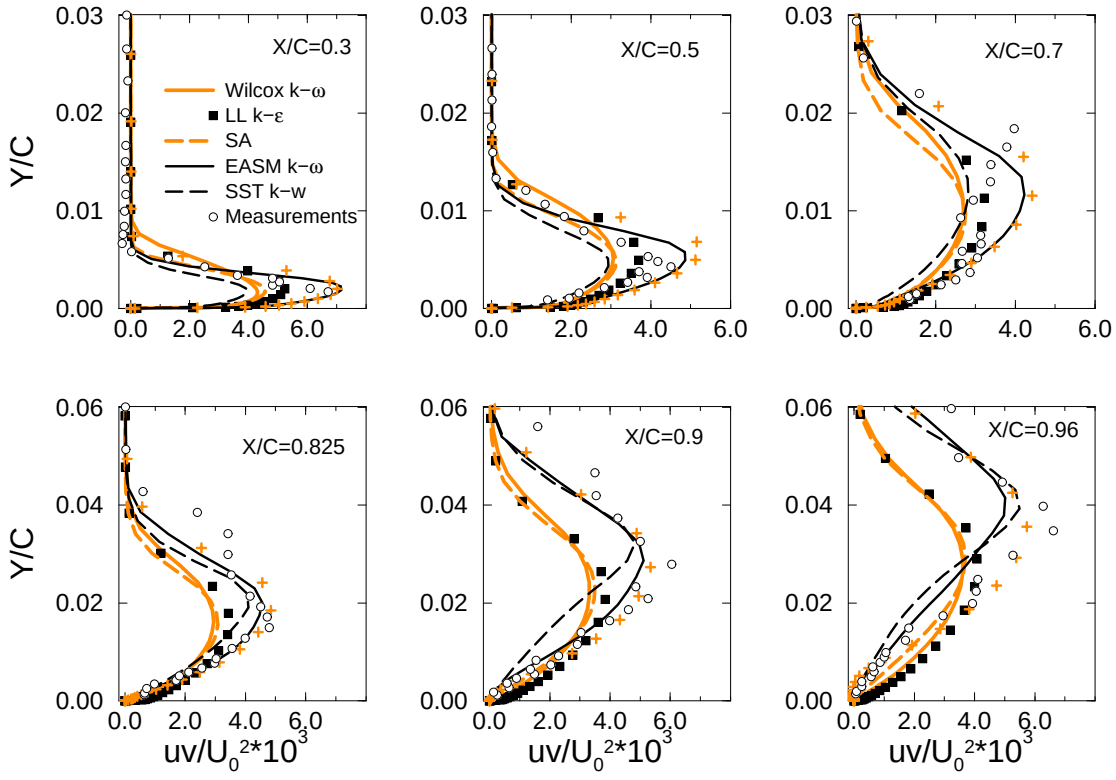


Abbildung 9.24: Hochauftriebsumströmung eines Onera-A Profils (M=0.15, Re=$2{\cdot}10^6$, α=13.3°); Profile der Reynoldschen Schubspannung an verschiedenen Stationen der Saugseite.

der gesamten Druckverteilung im Nasenbereich der Saugseite (Abbildung 9.21). Hiermit sind letztlich sowohl höhere Auftriebsbeiwerte, als auch Tendenzen zur Unterdrückung der vorderen, laminaren Ablöseblase verbunden. Man beachte, daß die beiden EASM–Ergebnisse im Gegensatz zu den übrigen Ansätzen die Stagnation des Impulsverlustdickenwachstums über der Hinterkante qualitativ wiedergeben, was auf ein verbessertes Vorhersageverhalten im Bereich des turbulenten Nachlaufs schliessen läßt.

Für abgelöste Profilumströmungen wird der Gesamtwiderstand vom Formwiderstandsbeitrag dominiert. Im gewählten Validierungsbeispiel trägt der Formwiderstand zu ca. 70 % des Gesamtwiderstands bei, weswegen die verbesserte Darstellung der Rezirkulationsstärke durch das EASM+C_1 und das SST–Modell eine genauere Widerstandsvorhersage ermöglicht. Die strömungsmechanische Ursache für die stark schwankende Vorhersagequalität ist wiederum in der Güte der berechneten wandnahen Schubspannungen zu suchen, deren Profile in Abbildung 9.24 für unterschiedliche Saugseitenpositionen aufgetragen sind. Die im Vergleich zum EASM+C_1 Modell insgesamt etwas schlechtere Vorhersage des SST–Modells erklärt sich aus der Unterschätzung der Schubspannungen hinter der Transition (vgl. auch Abbildung 9.21 unten). Durch den parabolischen Charakter der Grenzschicht wird dieses Defizit stromab getragen.

Asymmetrische Diffusorströmung

Ein weiteres illustratives Beispiel ist die Simulation der von Bruice und Eaton (1993) vermessenen ebenen, asymmetrischen Diffusorströmung. Die mit der Mittengeschwindigkeit des vorgelagerten Kanals und dem Diffusoreintrittsquerschnitt H gebildete Reynoldszahl beträgt Re=20 000, das Fluid wird als inkompressibel angesehen.

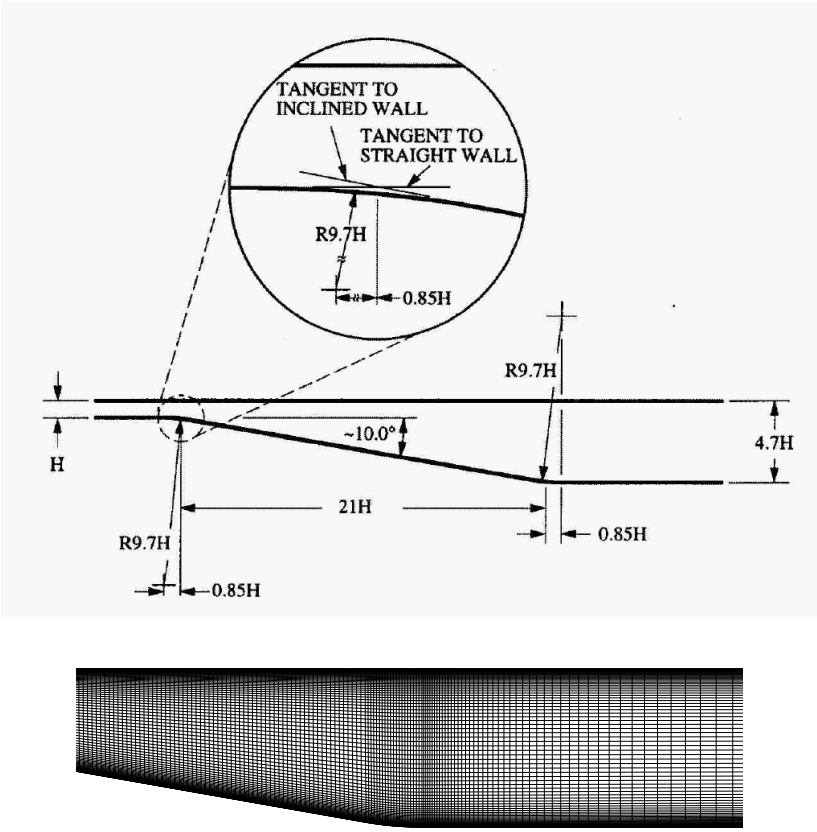


Abbildung 9.25: Asymmetrischer Diffusor (Re_H=20 000, Bruice et al. 1993); Problemskizze und Ausschnitt des Rechengitters (301 x 101).

Abbildung 9.25 veranschaulicht die untersuchte Konfiguration und zeigt einen Ausschnitt des verwendeten 301 x 101 Rechengitters. Das Rechengebiet erstreckt sich, entsprechend der in einem ERCOFTAC/IAHR Workshop (1999) getroffenen Vereinbarungen, über einen Bereich von -6 < X/H <75, wobei X/H=0 den Beginn der Querschnittserweiterung kennzeichnet. Im Austrittsquerschnitt wurden Nullgradienten–Randbedingungen vorgegeben. Die Zuströmbedingungen wurden in einer vorangehenden Kanalsimulation berechnet. Neben den ausführlich dokumentierten experimentellen Daten eignet sich der Testfall vor allem aufgrund seiner eindeutig definierten Randbedingungen zur Validierung von Turbulenzmodellen in Hinblick auf druckinduzierten Strömungsabriß.

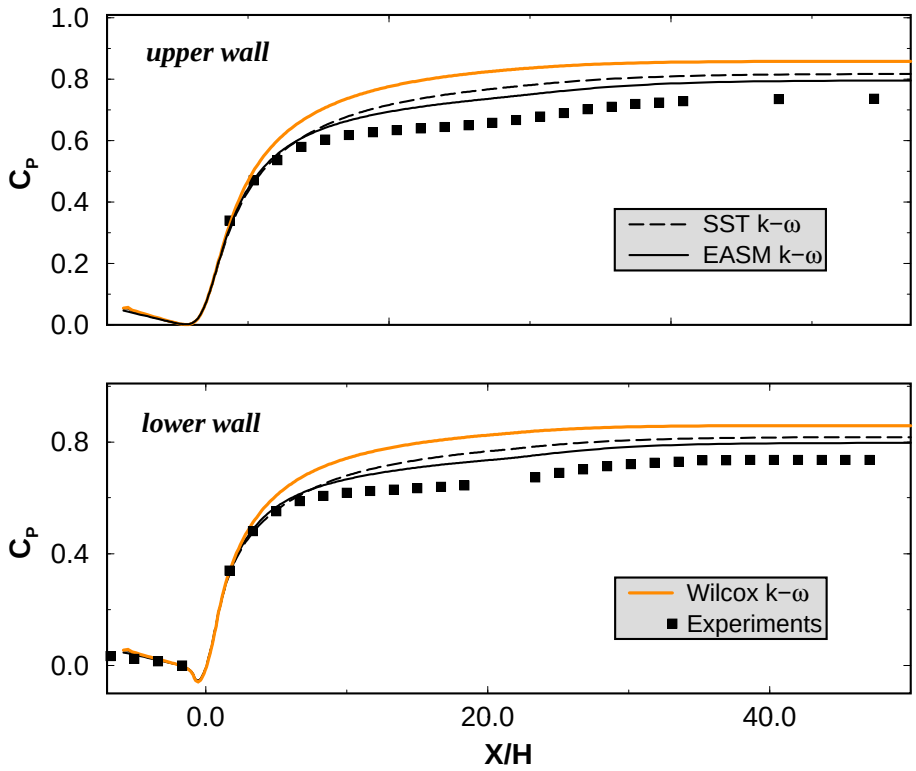


Abbildung 9.26: Asymmetrischer Diffusor (Re_H=20 000, Bruice et al. 1993); Vergleich der Druckbeiwerte entlang der oberen und unteren Wand.

Im Unterschied zur oben diskutierten Profilumströmung bietet der Testfall die Möglichkeit zum quantitativen Vergleich der ausführlich gemessenen Reynoldschen Normalspannung $\overline{u^2}$, und erlaubt somit eine Validierung der quadratischen Terme des expliziten algebraischen Spannungsmodells in Strömungen unter dem Einfluß positiver Druckgradienten. Im Anschluß an die Ergebnisse der Hochauftriebs–Profilumströmung beschränken sich die Untersuchungen auf den Vergleich dreier, qualitativ unterschiedlicher $k-\omega$ Turbulenzmodelle mit den experimentellen Daten. Die Abbildungen 9.26–9.28 veranschaulichen die Simulationsergebnisse des herkömmlichen **Wilcox** (1988) Modells, des **SST**–Modells von Menter (1994) und des hier entwickelten quasi–selbstkonsistenten FRLT–**EASM** $k-\omega$ Modells. Das explizite algebraische Spannungsmodell macht dabei wiederum von der in Gleichung (9.3) angegebenen SST–Modifikation des Produktionsterms Gebrauch.
Abbildungen 9.26 und 9.27 vergleichen die berechneten Druck– und Reibungsbeiwerte. Das hier vorgeschlagene FRLT–EASM führt, im Vergleich zu den anderen Modellen, zu einer realistischeren Vorhersage von Ausmaß und Intensität der Rezirkulation. Diese ergibt sich unter anderem aus der verbesserten Wiedergabe des Druckbeiwertes in Abbildung 9.26. Die Reibungsbeiwerte entlang der unteren Wand werden im Rezirkulationsbereich zwar dem Betrag nach überschätzt, das explizite algebraische Spannungsmodell vermag aber als einziges den aus der Verdrängungswirkung der Blase re-

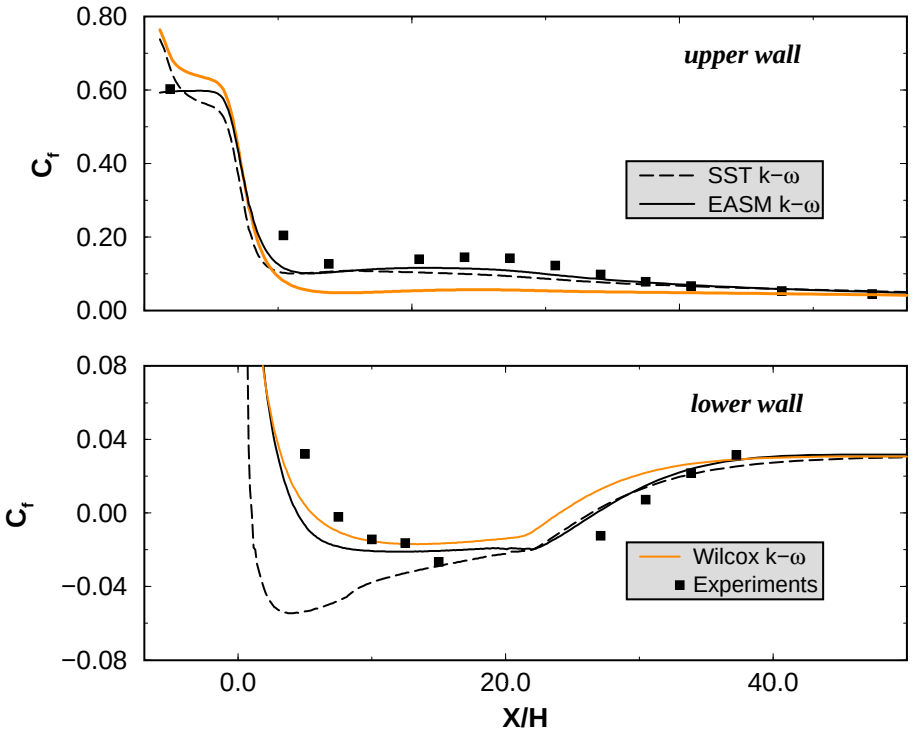


Abbildung 9.27: Asymmetrischer Diffusor (Re_H=20 000, Bruice et al. 1993); Vergleich der Reibungsbeiwerte entlang der oberen und unteren Wand.

sultierenden kurzen c_f Anstieg entlang der oberen Wand zu erfassen. Die nachstehende Abbildung 9.28 gibt Aufschluß über die Güte der vorhergesagten Primärgeschwindigkeitsprofile. Die Rezirkulationszone wird sowohl durch das EASM, als auch durch das SST–Modell hinreichend genau vorhergesagt. Die stromab liegenden Profile werden demgegenüber durch das EASM etwas besser prognostiziert. Insgesamt ist das Recoveryverhalten des EASM aufgrund der stärker vorhergesagten Rezirkulation und des steileren Anstiegs des Reibungsbeiwerts entlang der unteren Wand im Vergleich zu den beiden hier gezeigten Alternativen als verbessert zu bewerten. Die (in allen Abbildungen) stromab festzustellenden Diskrepanzen zwischen den gemessenen und den berechneten Geschwindigkeitsprofilen im Bereich der oberen Kanalwand sind z.T. auf Kontinuitätsdefekte in den Messwerten zurückzuführen.
Die in der Abbildung 9.29 dargestellten Profile der primären Reynoldschen Normalspannung $\overline{u^2}$ verdeutlichen eindrucksvoll die Vorteile der höherwertigen quadratischen Modellierung. Die stromab rasch sinkenden $\overline{u^2}$–Werte repräsentieren eine positive Quelle der (U–)Impulsgleichung. Das oben erwähnte vorteilhafte Recoveryverhalten kann daher teilweise durch die präzisere Darstellung der Normalspannungsentwicklung erklärt werden. Die in Abbildung 9.30 gezeigten Schubspannungsprofile bestätigen die oben gemachten Aussagen.

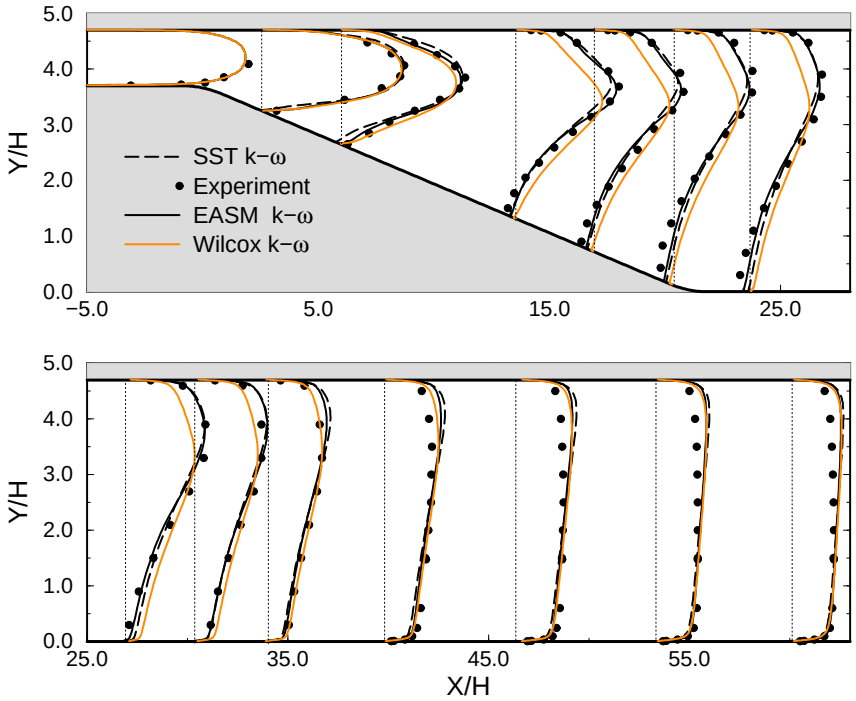


Abbildung 9.28: Asymmetrischer Diffusor (Re_H=20 000, Bruice et al. 1993); Vergleich der Profile der Hauptströmungsgeschwindigkeit.

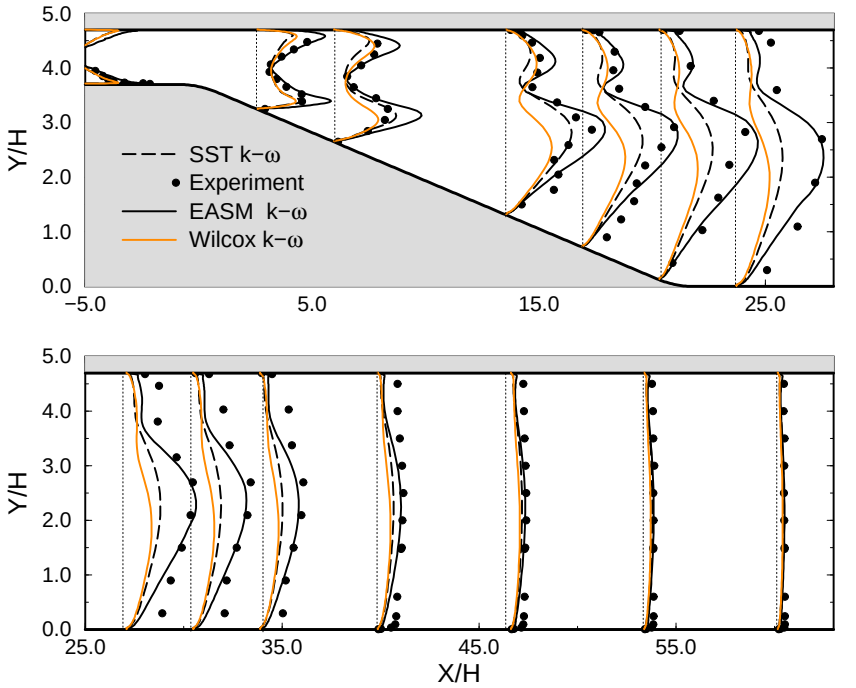


Abbildung 9.29: Asymmetrischer Diffusor (Re_H=20 000, Bruice et al. 1993); Vergleich der Profile der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{u^2}$.

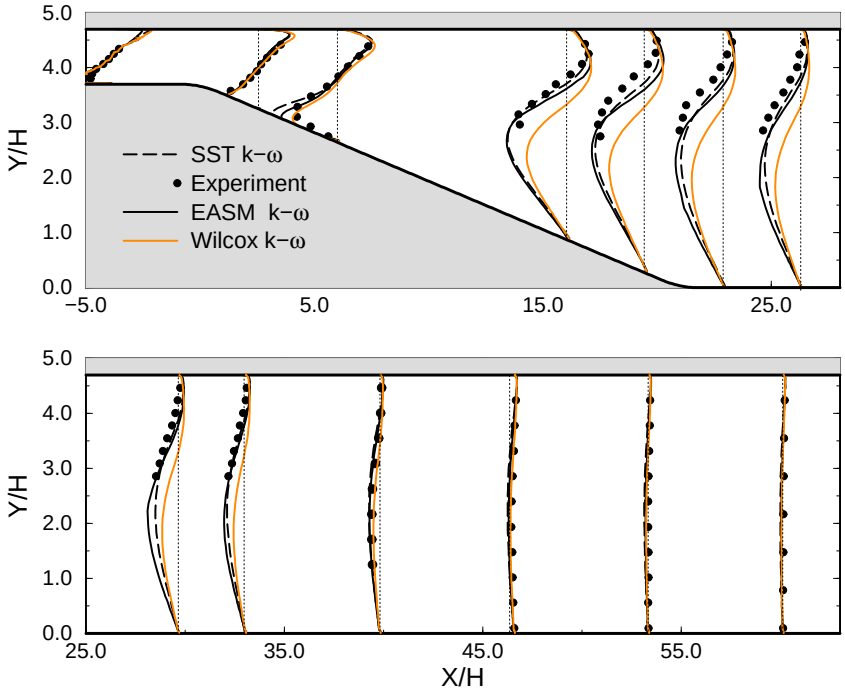


Abbildung 9.30: Asymmetrischer Diffusor (Re_H=20 000, Bruice et al. 1993); Vergleich der Profile der Reynoldsschen Schubspannung $\overline{uv}$.

Instationäre Zylinderumströmung

Die Validierung fährt mit der Berechnung der Wirbelstraße hinter einem stationär angeströmten Kreiszylinder bei $Re_D = 3\,900$ fort. Der Testfall war Gegenstand zahlreicher experimenteller Untersuchungen (Ong und Wallace 1996; Cardell 1993; Lourenco und Shih 1993; Norberg 1987; Son und Hanratty 1969) und wurde von mehreren Autoren (Beaudan und Moin 1994; Mittal 1996; Breuer 1997; Kravchenko und Moin 1998; Fröhlich et al. 1998) im Rahmen einer Grobstruktursimulation analysiert. Die technische Relevanz des Strömungsbeispiels resultiert aus den unerwünschten Nebenwirkungen (natürlich–) instationärer Strömungsvorgänge. Hierbei werden trotz der stationären Anströmung dynamische Belastungen an umströmten Bauteilen hervorgerufen, die in vielen Fällen zu Schallemissionen oder Schwingungen führen.

Für die untersuchte Konfiguration liegen sub–kritische Strömungsbedingungen vor, die man für den Kreiszylinder im Bereich von $350 < Re_D < 200\,000$ findet. Im sub–kritischen Bereich entwickelt sich stromab des Staupunktes eine laminare Grenzschicht. Die Strömungstransition findet erst hinter dem Zylinder, im Breich der freien Scherschicht, statt. Die Transitionslänge variiert erfahrungsgemäß zwischen $0.2 < L_{tr}/D < 1.5$ und verkürzt sich mit steigender Reynoldszahl. Die turbulenten Längenmaße im Nachlauf des Zylinders sind von der Größenordnung $L_t \sim \mathcal{O}(10^{-1}\,D)$. Die abgelösten Scherschichten rollen sich stromab der Transition zu einer Sequenz alternierender Wir-

Tabelle 9.4: Periodische Umströmung eines quadratischen Zylinders bei $Re = 22\,000$. Vergleich der integralen Strömungsgrößen (vgl. Schmidt et al. 1999).

	c_w	$c_{w,rms}$	$c_{a,rms}$	St
Experiment (Lyn et al. 1995)	2.10	—	—	0.132
LES (Schmidt et al. 1999)	2.18	0.192	1.474	0.130
EASM mit $\mathcal{W}_{ij}$	2.45	0.105	1.605	0.142
EASM ohne $\mathcal{W}_{ij}$	2.21	0.075	0.949	0.152
Wilcox $k-\omega$	1.68	0.002	0.027	0.125

bel (*Kármánsche Wirbelstraße*) auf und verursachen eine oszillierende Belastung des Zylinders.

Im Unterschied zur Umströmung stumpfer, z.B. quadratischer Körper (Lyn et al. 1995), ist der Ablösepunkt einer Kreiszylinderumströmung nicht geometrisch vorgegeben. Daneben treten im Vergleich zur Umströmung stumpfer Körper geringere Tendenzen zur vorzeitigen Strömungstransition im Prallstrahlbereich auf. Die Überschätzung der Produktion von Turbulenzenergie infolge starker, rotationsfreier Distorsion ($|\eta_1/\eta_2| >> 1$), die ein charakteristisches Merkmal von Prallstrahlbereichen ist, führt häufig zu einer unrealistischen Vorhersage der Nachlaufströmung. Die in der Umgebung des Staupunktes generierten lokalen Turbulenzspitzen werden dabei durch Konvektion den stromabliegenden Scherschichten zugeführt und in die Wirbelstraße eingespeist. Diesbezüglich sind eine Reihe populärer Gegenmaßnahmen veröffentlicht worden (Kato und Launder 1993; Jin und Braza 1994), welche eine Manipulation der Produktion von Turbulenzenergie im Rahmen linearer Wirbelzähigkeitsmodelle vorschlagen

$$P = 2\,c_\mu \eta_1\,\varepsilon \quad \rightarrow \quad P = 2\,c_\mu \sqrt{-\eta_1 \eta_2}\,\varepsilon\,, \quad \text{bzw.} \quad P = -2\,c_\mu \eta_2\,\varepsilon\,.$$

Diese Manipulationen stehen jedoch im Widerspruch zum Boussinesq–Ansatz (2.11). Bei Verwendung einer asymptotisch korrekten Stress–Strain Beziehung tritt die Problematik aufgrund $c_\mu \sim \eta_1^{-1/2}$ nur noch in schwacher Form auf, wie die in Tabelle 9.4 angegebenen integralen Strömungsparameter für die Umströmung eines quadratischen Zylinders bei $Re = 22\,000$ belegen. Weitere Ergebnisse zu dieser Konfiguration findet man bei Schmidt, Lübcke und Thiele (1999).

Nach Gleichung (1.95) strebt das turbulente Zeitmaß für geringer werdende Reynoldszahlen dem Periodizitätszeitmaß der Grundströmung zu, und die spektrale Lücke kann nicht mehr gewährleistet werden. Aufgrund der geringen Reynoldszahl ist die Kreiszylinderumströmung bei $Re = 3\,900$ und $St \approx 0.2$ ein besonders kritischer Testfall für eine RANS Simulation.
Das in Abbildung 9.31 skizzierte Rechengitter besitzt ca. 14 000 Knoten auf der Basis einer O–H–Topologie Der Umfang des Kreiszylinders wird durch 108 Punk-

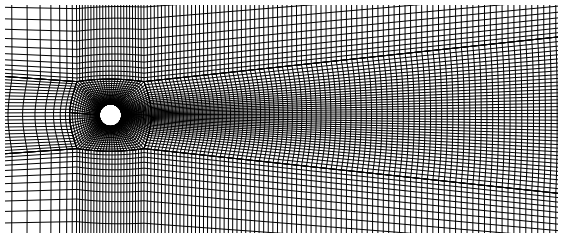


Abbildung 9.31: Instationäre Kreiszylinderumströmung ($Re = 3900$); Ausschnitt des verwendeten Rechengitters (14 000 Knoten).

te diskretisiert ($0.5 < Y^+$), von denen sich 46 im Nachlaufbereich befinden. Das berechnete Strömungsgebiet erstreckt sich über $-8 < X/D < 24$ und $-8 < Y/D < 8$. Die zeitliche Auflösung einer Periode mit dem impliziten, von zweiter Ordnung genauen Simulationsverfahren basiert auf ca. 26 Zeitschritten. Die Zuströmung entspricht einem Blockprofil mit geringer Turbulenzintensität ($Tu = 0.12\%$, $\nu_t = 0.02\,\nu$, $L_\varepsilon = 0.4D$). Der Strömungsaustritt wird durch konvektive Randbedingungen beschrieben (Rung 2000).

Tabelle 9.5 vergleicht die mit dem isotropen $k-\varepsilon$ Modell und dem $k-\varepsilon$ FRLT–EASM berechneten integralen Strömungsparameter mit Ergebnissen verschiedener Grobstruktursimulationen und experimenteller Untersuchungen. Die gezeigten EASM–Ergebnisse unterscheiden sich durch die Anwendung der in Kapitel 8.6 beschriebenen Krümmungskorrektur auf den Wirbeltensor (Gleichung 8.78), deren robuste Implementierung große Sorgfalt verlangt.

Die Untersuchung einer laminaren Zylinderumströmung von Nishioka (1974, 1978) belegt, daß sich die Rezirkulationslänge des zeitlich gemittelten Ablösegebiets reziprok zum Streckungsverhältnis (L/D) des Zylinders verhält. Die hier durchgeführte zweidimensionale Simulation ($L/D \to \infty$) sollte die Rezirkulationslänge daher nicht überschätzen. Tabelle 9.5 zeigt, daß dies nur durch die Verwendung einer krümmungssensitiven Gleichgewichtshypothese bei der Formulierung des EASM gelingt. Durch die geringere Intensität der Prallstrahleffekte sind die instationären Strömungsvorgänge im

Tabelle 9.5: Instationäre Umströmung eines Kreiszylinders ($Re_D = 3\,900$); Vergleich der integralen Strömungsparameter. Die experimentellen Daten wurden den folgenden Arbeiten entnommen: St von Ong und Wallace ($Re_D = 3\,900$, 1996), L_r/D von Cardell ($Re_D = 3\,900$, 1993) bzw. Lourenco und Shih ($Re_D = 3\,900$, 1993), Θ von Son und Hanratty ($Re_D = 5\,000$, 1969), $\overline{c_w}$ von Norberg ($Re_D = 4020$, 1987).

	St	$\overline{c_w}$	Θ	L_r/D
LES (LRUN3; Fröhlich et al., 1998)	0.216	1.08	88.1	1.09
LES (Case 2; Kravchenko et al., 1998)	0.210	1.04	88.0	1.35
EASM $k-\varepsilon$ mit $\mathcal{W}_{ij}$	0.203	0.98	87.2	1.20
EASM $k-\varepsilon$ ohne $\mathcal{W}_{ij}$	0.200	0.89	89.9	1.90
$k-\varepsilon$	0.198	0.88	90.4	2.10
Experimente	0.215 ± 0.005	0.98 ± 0.05	$86^o \pm 2$	1.33 ± 0.2 1.19

Unterschied zum quadratischen Zylinder (vgl. Tabelle 9.4) bereits mit dem Standard $k-\varepsilon$ Modell simulierbar. Die Strouhalzahl St der $k-\varepsilon$ Simulation ist nur unwesentlich schlechter als diejenige des Basis–FRLT–EASM. Sowohl das $k-\varepsilon$ Modell, als auch das Basis–FRLT–EASM überschätzen die normierte Rezirkulationslänge L_r/D deutlich,

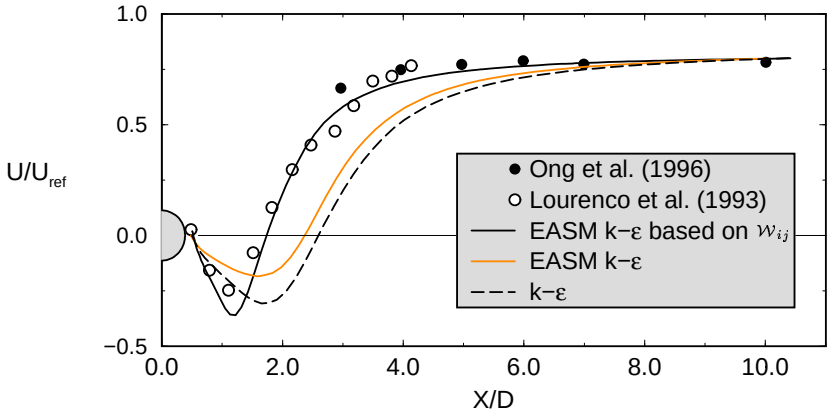


Abbildung 9.32: Instationäre Zylinderumströmung ($Re = 3\,900$); Vergleich der zeitlich gemittelten Hauptströmungsgeschwindigkeit entlang der Nachlaufmittellinie.

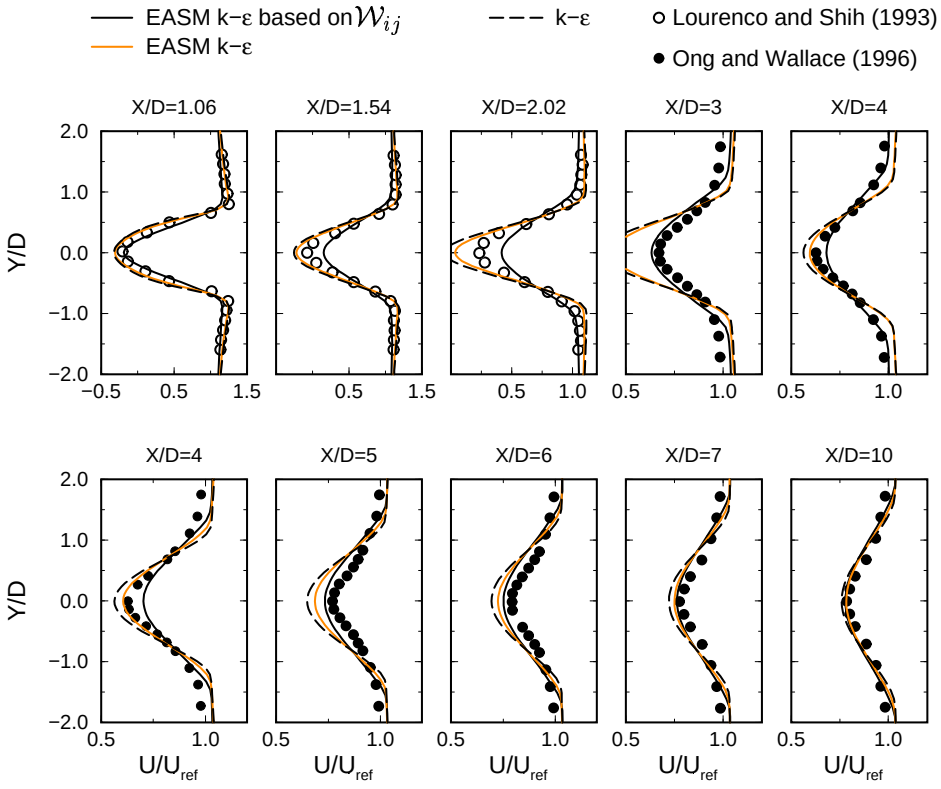


Abbildung 9.33: Instationäre Zylinderumströmung ($Re = 3\,900$); Vergleich der zeitlich gemittelten Profile der Hauptströmungsgeschwindigkeit im Nachlauf.

was auf eine vorzeitige Transition und eine stark erhöhte Turbulenzaktivität im Nachlauf hinweist. Hierdurch verschiebt sich der Ablösewinkel Θ stromauf. Die in Abbildung 9.32 gezeigten Verläufe der zeitlich gemittelten Hauptströmungsgeschwindigkeit entlang der Nachlaufmittellinie bestätigen die oben gemachten Aussagen und verdeutlichen nochmals die Notwendigkeit der Krümmungskorrektur (8.78). Die Hauptströmungsgeschwindigkeitsprofile der $k-\varepsilon$ Simulation weichen beim Übergang in den fernen Nachlauf ($2 < X/D < 4$) signifikant von den Messergebnissen ab. Abbildung 9.33 zeigt, daß das Basis–FRLT–EASM hier nur geringfügige Verbesserungen ermöglicht. Im Gegensatz dazu vermag das krümmungskorrigierte FRLT–EASM wesentlich genauere Resultate zu erzielen. Die in Abbildung 9.34 verglichenen Quergeschwindigkeitsprofile lassen keine weiteren Schlußfolgerungen zu.

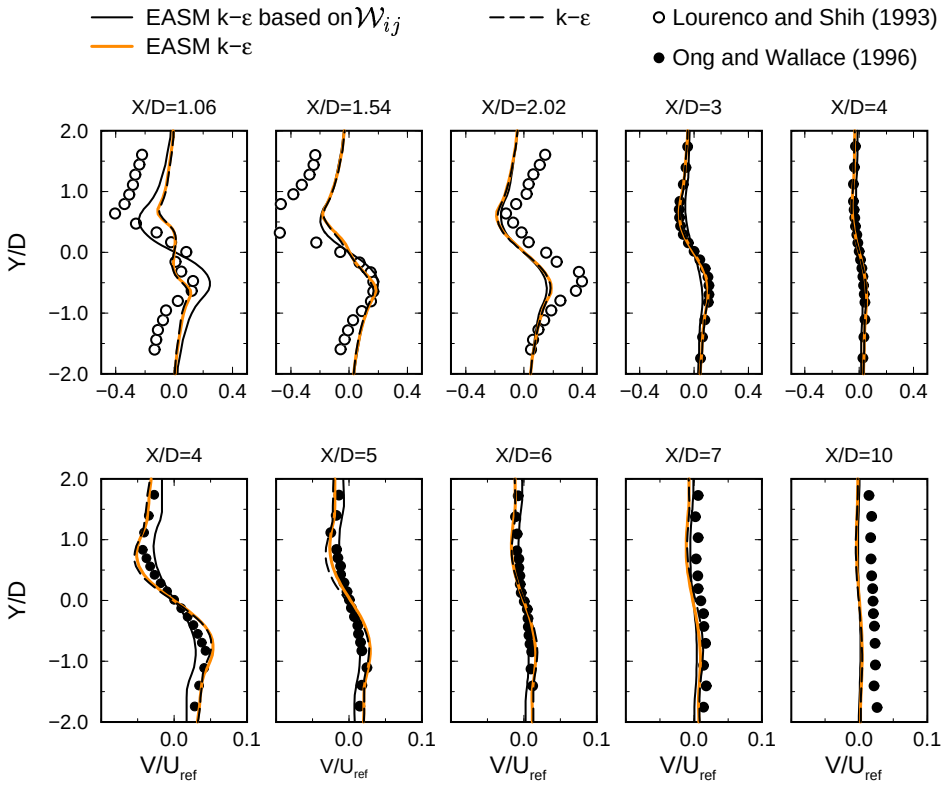


Abbildung 9.34: Instationäre Zylinderumströmung ($Re = 3\,900$); Vergleich der zeitlich gemittelten Profile der Quergeschwindigkeit im Nachlauf.

Abbildung 9.35 zeigt die zeitlich gemittelten Profile der Reynoldsschen Schubspannung $\overline{uv}$ an verschiedenen Stationen des Nachlaufs. Die Abbildung verdeutlicht, daß die mit dem krümmungskorrigierten FRLT–EASM berechneten Schubspannungsbeträge, trotz der korrekt prognostizierten Geschwindigkeiten und integralen Strömungsgrößen, viel zu gering sind. Analoge Aussagen ergeben sich aus dem Vergleich der Normalspannungen (Abbildung 9.35 unten).

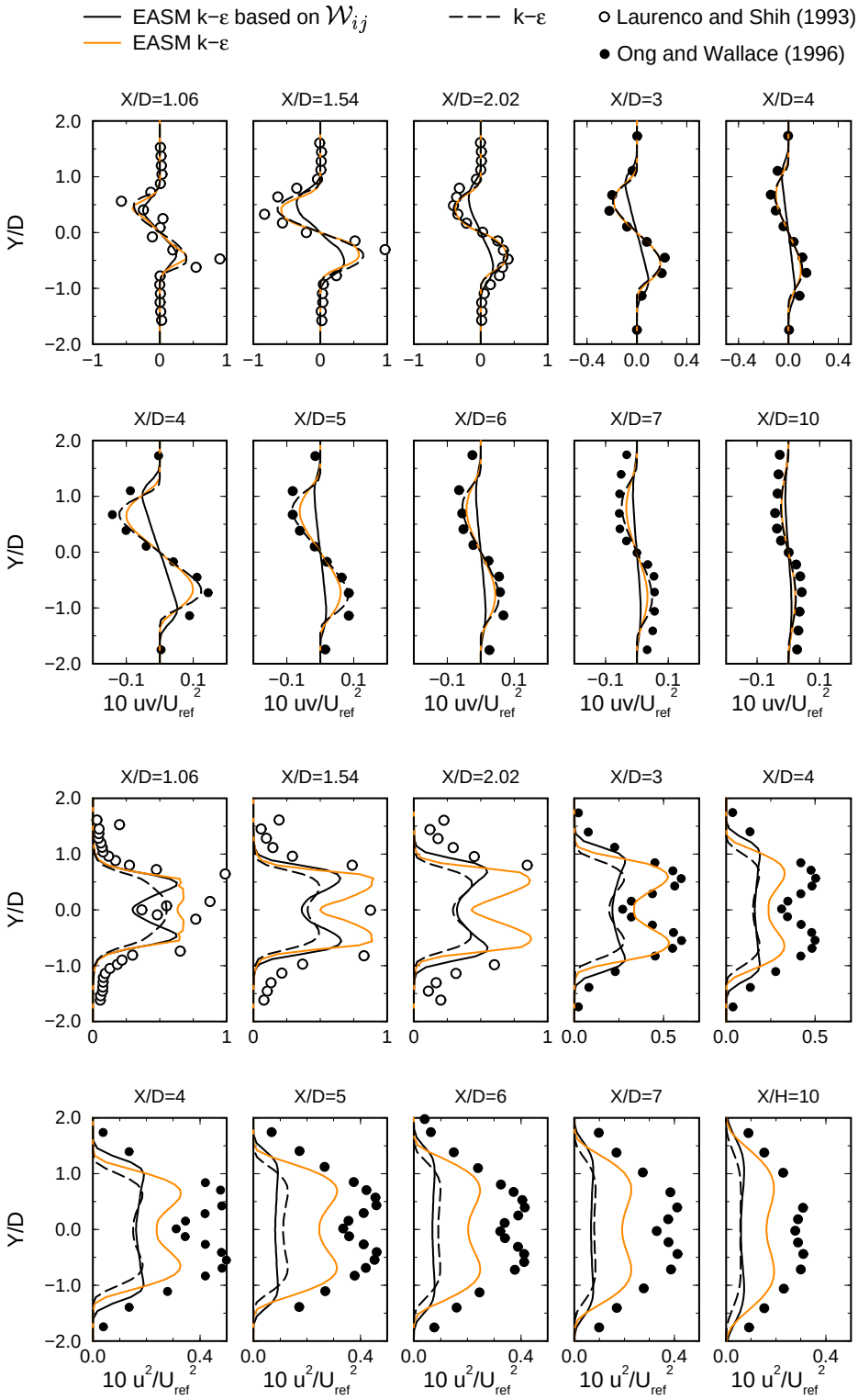


Abbildung 9.35: Instationäre Zylinderumströmung ($Re = 3\,900$); Vergleich der zeitlich gemittelten Profile der Reynoldsschen Schubspannung (oben) und Normalspannung (unten) im Nachlauf.

Die oben dargestellten Resultate zeigen, daß die Reynolds–gemittelte Simulation instationärer Strömungsphänomene auf der Basis höherwertiger statistischer Turbulenzmodelle die globalen, ingenieurwissenchaftlichen Aspekte dieser Strömungen erfassen kann. Gleichzeitig verdeutlichen die Ergebnisse jedoch auch die Einsatzgrenzen der Reynolds–gemittelten Simulation turbulenter instationärer Strömungen. Dies steht in Einklang mit den Erfahrungen von Lakehal et al. (1998) für die Umströmung eines quadratischen Zylinders.

Transsonische Kanalströmung

Die erste kompressible Anwendung beschäftigt sich mit der Vorhersage von stoßinduzierter Strömungsablösung aufgrund starker Stoß/Grenzschicht–Wechselwirkung. Das gewählte Beispiel geht auf eine von Delery (1981, 1983) vermessene transsonische Kanalströmung zurück, deren Geometrie in Abbildung 9.36 ausschnittsweise dargestellt ist. Der Testfall besitzt subsonische Zuström– ($T_0 = 300$) und Abströmbedingungen ($P_{exit} \approx 60kPa$), die mit der Kanallänge normierte Reynoldszahl beträgt $Re/L = 1.1 \cdot 10^6$.

Die Validierung des expliziten algebraischen Spannungsmodells beschränkt sich auf Wilcox $k-\omega$ Hintergrundmodelle. Die Wahl des $k-\omega$ Modells ist durch die bereits in Kapitel 8.3 erwähnten Vorteile der Formulierung bei der Berechnung kompressibler Wandgrenzschichten motiviert. Die verwendete Stress–Strain Kopplung basiert auf dem quadratischen (**NLEA**) Drei–Generator–Ansatz (5.19) in Kombination mit den Koeffizienten des FRLT–Basismodells. Zur Klärung des Einflußes der nichtlinearen Terme wird eine linearisierte Form des Modells (**LEA**), welche nur den ersten Term der Beziehung (5.19) berücksichtigt, gesondert untersucht. Daneben dient der Testfall zur Validierung der in Kapitel 8.4 beschriebenen Zwei–Skalen–Technik (**LEA+MS**) und der unter 8.3 angegebenen Druckdilatationsmodelle.

Zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird der untere Fußpunkt des Stoßes durch gezielte Variation des Austrittsdrucks in Einklang zum experimentellen Wert gebracht. Die Berechnungen wurden auf einem strukturierten 201 x 101 Rechengitter durchgeführt (vgl. Abbildung 9.36 oben), das denjenigen vergleichbarer Untersuchungen (Haase et al. 1993; Batten 1997) entspricht. Die Resultate wurden exemplarisch, mit Hilfe des ebenfalls in Abbildung 9.36 dargestellten semi–strukturierten 30 000 Knoten Gitters auf ihre Gitterunabhängigkeit überprüft. Nennenswerte Unterschiede zwischen den beiden Gittern ergeben sich lediglich bei der Auflösung der λ–förmigen Stoßstruktur im Bereich der Kernströmung.

Der im unteren Teil der Abbildung 9.36 dargestellte Vergleich zwischen der experimentell ermittelten und der berechneten Stoßstruktur vermittelt einen ersten Eindruck von der Qualtät der EASM–Ergebnisse in Bezug auf die Vorhersage starker Stoß/Grenzschicht–Wechselwirkungen.
Die in den Simulationsergebnissen erkennbaren Oszillationen der Machzahl–Isolinien sind nicht auf ein fehlerhaftes Modellverhalten zurückzuführen, sondern werden im

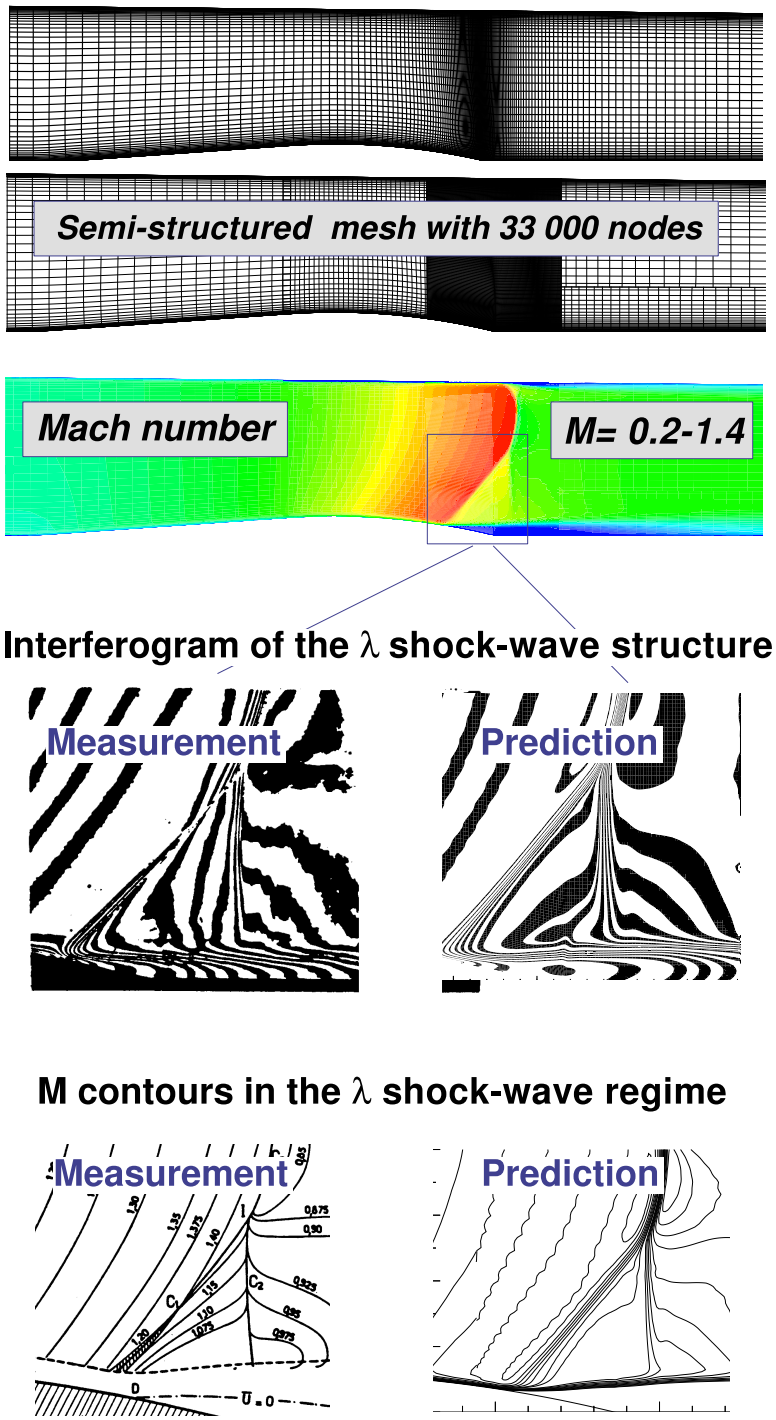


Abbildung 9.36: Transsonische Kanalströmung (Delery 1981, $Re/L = 1.1 \cdot 10^6, T_0 = 300K$); Strukturiertes und semi-strukturiertes Rechengitter zuzüglich der berechneten Machzahlkonturen auf dem semi-strukturierten Gitter (NLEA+ϕ_d^S).

Zusammenhang mit den stromauf gerichteten Konvektionsverfahren höherer Ordnung und der abrupten zonalen Verfeinerung (1:8) des semi–strukturierten Gitters kurz vor dem Stoß eingeleitet. Ungeachtet dessen ist die präzise Wiedergabe von Details der Stoß/Grenzschicht–Wechselwirkung durch das um den Sarkarschen Druckdilatationsterm ϕ_d^S (8.33) erweiterte quadratische Modell bemerkenswert.

Abbildung 9.37 vergleicht die Güte der berechneten Wanddrücke für das Wilcox $k-\omega$ Modell, eine linearisierte (LEA) und zwei nichtlineare Varianten (NLEA) des expliziten algebraischen Spannungsmodells.

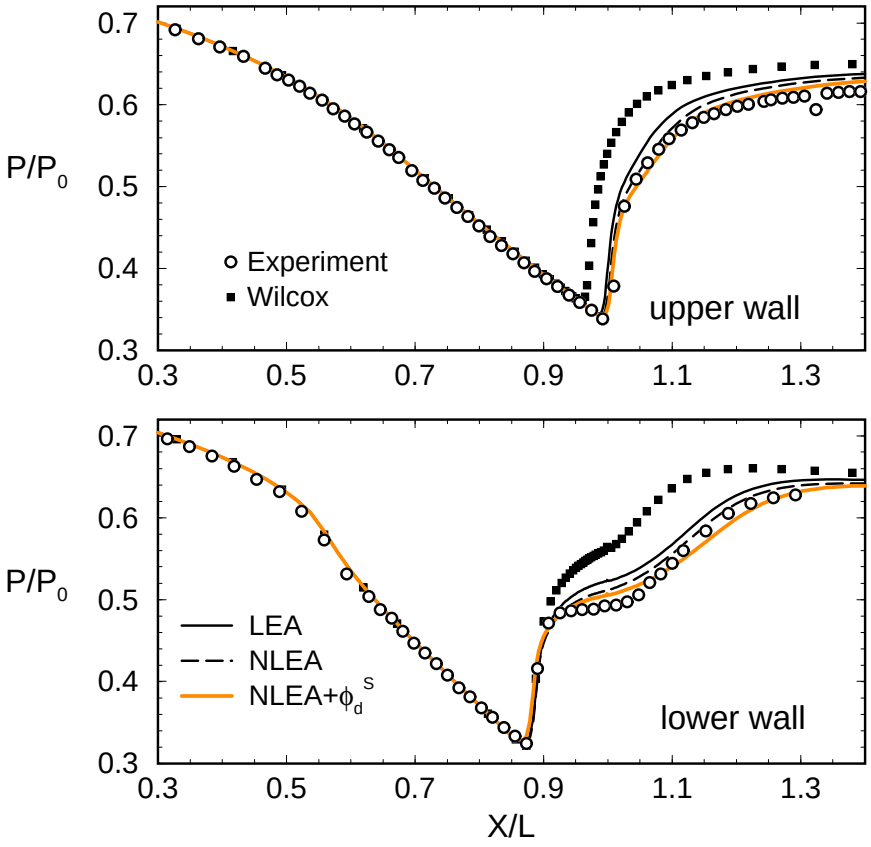


Abbildung 9.37: Transsonische Kanalströmung (Delery 1981, $Re/L = 1.1 \cdot 10^6, T_0 = 300K$); Vergleich der normierten Wanddrücke verschiedener Turbulenzmodelle.

Auffällig ist zunächst die große Diskrepanz der Simulationsergebnisse in Bezug auf die Position des oberen Stoßfußpunktes, dessen Vorhersage mit expliziten algebraischen Spannungsmodellen deutlich besser gelingt. Die präzise Vorhersage des oberen Stoßfußpunktes beweist die im Vergleich zum Wilcox $k-\omega$ Modell stark verbesserte Darstellung der Stoßstruktur. Gegenüber der Wilcox $k-\omega$ Simulation ist die Stoß/Grenzschicht–Wechselwirkung im Zusammenhang mit expliziten algebraischen Spannungsmodellen

wesentlich stärker ausgeprägt. Im Zuge der starken Interaktion stellt sich ein realistischeres Druckplateau im Bereich der stoßinduzierten Strömungsablösung stromab des unteren Stoßfußpunktes ein (Abbildung 9.37 unten), dessen Niveau und Ausdehnung von der Intensität der vorhergesagten Rückströmung abhängen. Die in Abbildung 9.38 dargestellten Geschwindigkeitsprofile bestätigen die höhere Rezirkulationsintensität im Zusammenhang mit der expliziten algebraischen Spannungsmodellierung. Der Betrag der maximalen Rückströmung wird dennoch von allen hier untersuchten Varianten unterschätzt. Die nichtlineare Modellierung besitzt gegenüber der linearisierten LEA Variante leichte Vorteile bei der Vorhersage der Ausdehnung des Rezirkulationsgebiets. Dies gilt insbesondere für die Höhe der Blase, weshalb sich aus Kontinuitätsgründen in Abbildung (9.37) ein etwas geringeres Druckniveau über der Blase einstellt.

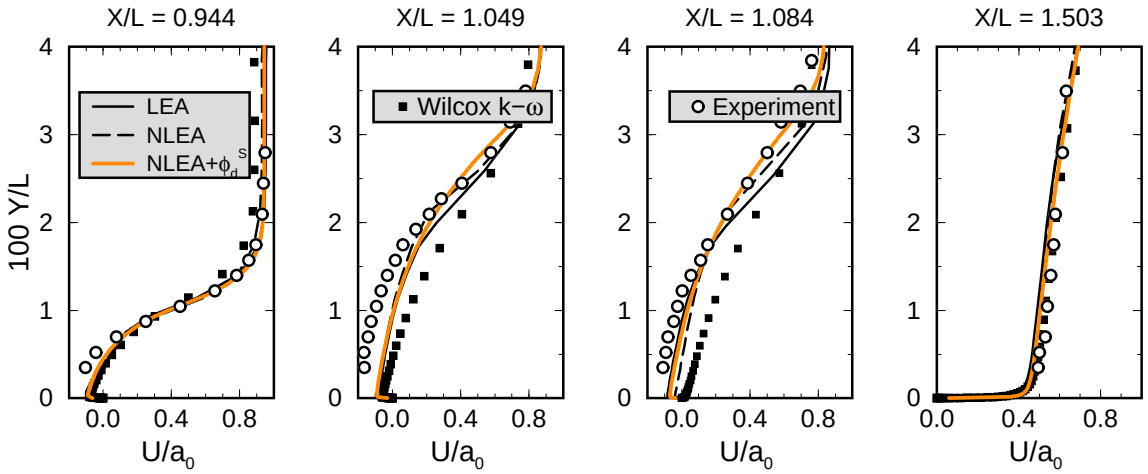


Abbildung 9.38: Transsonische Kanalströmung (Delery 1981, $Re/L = 1.1 \cdot 10^6, T_0 = 300K$); Vergleich der normierten Geschwindigkeitsprofile im Rezirkulations– bzw. Relaxationsgebiet.

Stromab der Ablösung tritt die wiederanlegende Scherschicht entlang der unteren Wand in den *Recovery*–Bereich ein, und die Turbulenz strebt allmählich wieder dem Gleichgewichtszustand entgegen. Anhand des in $X/L = 1.503$ liegenden Geschwindigkeitsprofils erkennt man, daß sich die stark gestörte Grenzschicht der LEA–Simulationen gleich schnell erholt wie die wesentlich weniger stark gestörte Grenzschicht der Wilcox $k-\omega$ Simulation. Selbiges gilt – wenngleich weniger stark ausgeprägt – für den Vergleich von linearer (LEA) und nichtlinearer (NLEA) Modellierung.

Das Recoveryverhalten hängt von der im Modell verankerten unteren Grenze des Anisotropieparameters ab. Je höher der Schwellenwert $\lim(S, \Omega \to 0)\, c_\mu$, desto stärker ist das turbulente Entrainment im gradientenarmen Bereich der wiederanlegenden Scherschicht. Die nichtlineare Modellierung besitzt zudem tendenzielle Vorzüge im Recoverybereich, welche aus der Fähigkeit zur Wiedergabe von Normalspannungsanisotropie resultieren. Der im Vergleich zur linearen Modellierung stärkere Anstieg der Normalspannung in Verdichtungsrichtung übt einen positiven Einfluß auf das Recoveryverhalten der Grenzschicht aus, da die rasche Relaxation der stoßinduzierten Anisotropie

stromab des Stoßes eine positive Quelle der U–Impulsgleichung repräsentiert. Eine genauere Betrachtung des Druckverlaufs im Bereich von $1.0 < X/L < 1.3$ offenbart jedoch verbleibende Mängel bei der Vorhersage des Recoverybereichs.

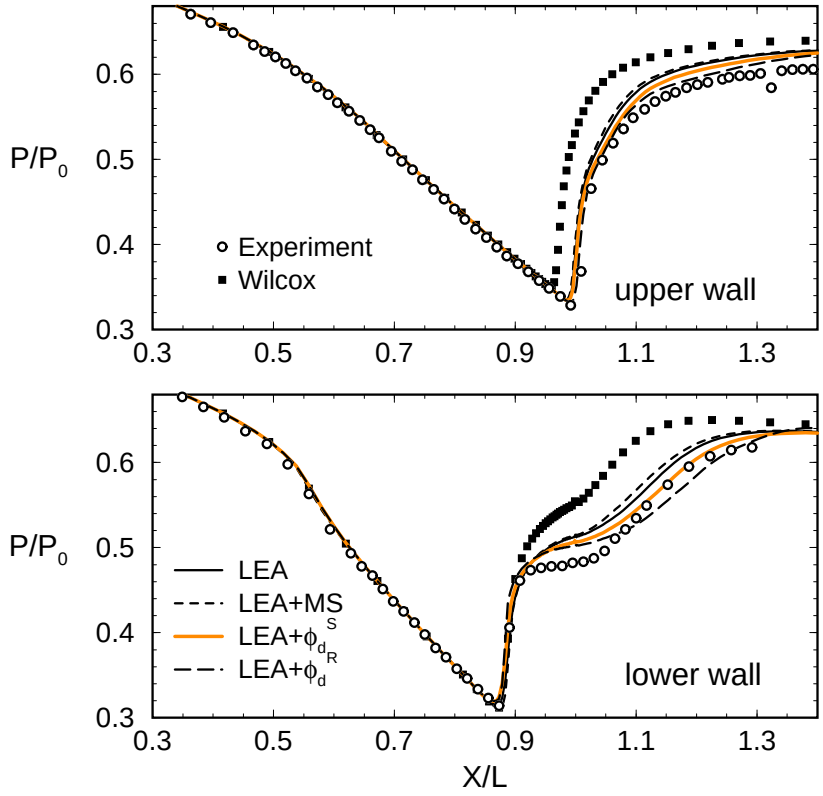


Abbildung 9.39: Transsonische Kanalströmung (Delery 1981, $Re/L = 1.1 \cdot 10^6, T_0 = 300K$); Vergleich der normierten Wanddrücke verschiedener Turbulenzmodelle.

Die Abbildungen (9.39) und (9.40) vergleichen die Ergebnisse verschiedener linearisierter EASM–Varianten. Die Resultate des Zwei–Skalen–Modells (LEA+MS) sind faktisch nicht von den LEA–Ergebnissen zu unterscheiden. In Anbetracht der in Abbildung (8.12) illustrierten Variation der Energieanteile ist dies zunächst erstaunlich. Bei genauerer Betrachtung von Abbildung (8.12) erkennt man, daß die Variation im Bereich der wichtigen Scherschichten nur gering ist. Ferner beschränkt sich der Einfluß der Zwei–Skalen–Technik auf den Rotta–Koeffizienten der Stress–Strain Kopplung, der prinzipiell nur eine skalierende Funktion besitzt. Die Druckdilatationsterme haben ebenfalls nur einen geringen Einfluß auf die Simulationsergebnisse. Dieser macht sich vor allem im Nichtgleichgewichts–Bereich bemerkbar, was indirekt mit den Aussagen direkter numerischer Simulationen übereinstimmt (vgl. Kapitel 8.3). Das Modell von Ristorcelli (ϕ_d^R) stabilisiert das Turbulenzfeld stärker als der Ansatz von Sarkar (ϕ_d^S).

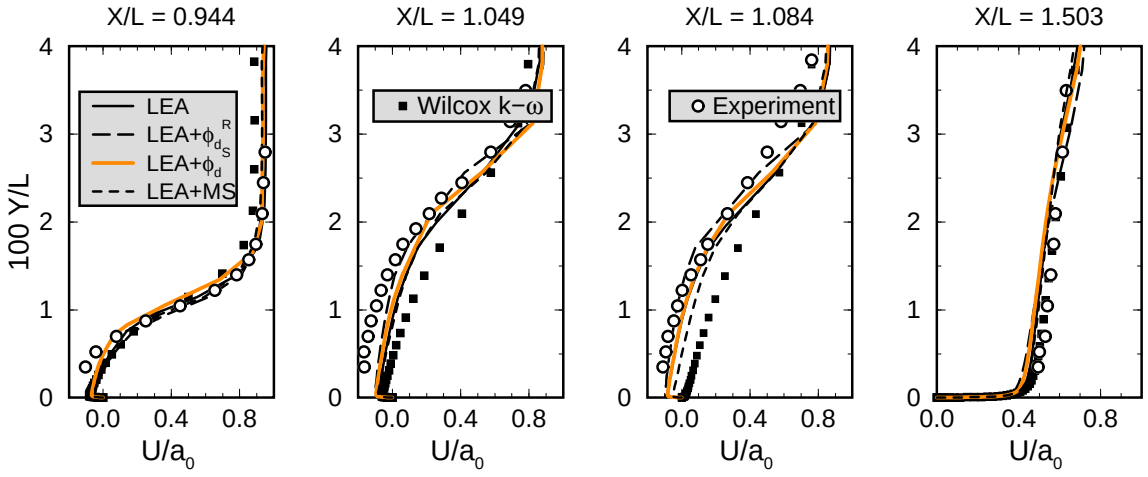


Abbildung 9.40: Transsonische Kanalströmung (Delery 1981, $Re/L = 1.1 \cdot 10^6, T_0 = 300K$); Vergleich der normierten Geschwindigkeitsprofile im Rezirkulations– bzw. Relaxationsgebiet.

Transsonische Profilumströmung

Eine aerodynamisch interessantere Anwendung zur Validierung der Qualitäten eines Turbulenzmodells in Bezug auf die Vorhersage von Stoß/Grenzschicht–Wechselwirkungen ist die Umströmung eines RAE–2822 Profils nach Cook, McDonald und Firmin (1979). Der Testfall verfügt über eine weniger umfangreiche experimentelle Datenbasis als die oben gezeigte transsonische Kanalströmung und leidet unter Windkanaleinflüssen, deren quantitative Korrektur nicht gesichert ist. Von besonderem Interesse ist die Konfiguration aufgrund der Dualität der Aufgabenstellung, weswegen er von einer Vielzahl von Autoren im Rahmen vergleichender Studien, z.B. Haase et al. (1993), untersucht worden ist. Den Berechnungen liegt das in Abbildung 9.41 skizzierte C–Gitter zugrunde, welches auf 320 x 81 Knoten basiert und sich nachlaufseitig über ca. 18 Profiltiefen in das Fernfeld erstreckt.

Eine vollständige Validierung von Turbulenzmodellen sollte neben der bereits oben untersuchten starken Interaktion auch die Modellierungsgüte bei schwacher Interaktion überprüfen. Hierzu stehen zwei, leicht unterschiedliche Anströmparameterkombinationen desselben Profils zur Verfügung, welche in Tabelle 9.6 zusammengefaßt sind. Im Weiteren kennzeichnet der Terminus *CASE9* den Fall der schwachen Interaktion, *CASE10* steht für den Fall der starken Interaktion. Die im Rahmen dieser Arbeit gezeigten Ergebnisse beschränken sich auf den in Abbildung 9.42 dargestellten Vergleich der Druckverteilungen, sowie die in der Tabelle 9.7 zusammengefaßten Kraftbeiwerte der schwierigeren Anströmsituation (CASE10). Die Validierung konzentriert sich auf den Vergleich des linearisierten (**LEA**) FRLT–EASM, des nichtlinearen (**NLEA**) FRLT–EASM und des Wilcox $k-\omega$ Modells.

Anhand des in Abbildung 9.42 links dargestellten Druckverlaufs erkennt man, daß sowohl die beiden expliziten algebraischen Spannungsmodelle, als auch das Wilcox

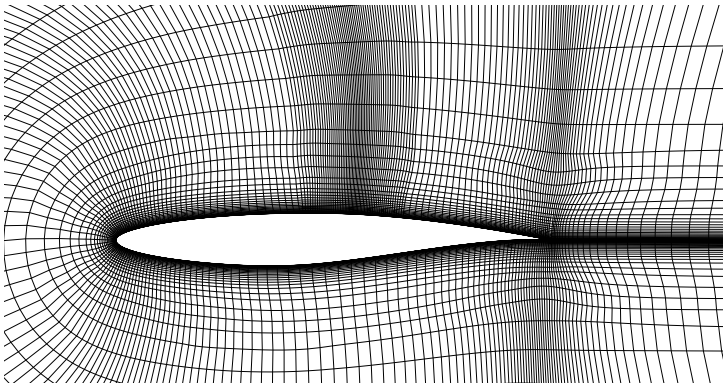


Abbildung 9.41: Transsonische RAE–2822 Profilumströmung (Cook et al. 1979); Ausschnitt des verwendeten 320 x 81 Rechengitters.

Tabelle 9.6: Turbulente transsonische Profilumströmung (Cook et al. 1979); Anströmparameter für starke und schwache Stoß/Grenzschicht–Interaktion.

Testfall	Ma_∞	Re_∞	α
CASE 9 (schwache Interaktion)	0.73	$6.5 \cdot 10^6$	2.79^o
CASE 10 (starke Interaktion)	0.75	$6.2 \cdot 10^6$	2.79^o

$k-\omega$ Modell zu befriedigenden Ergebnissen in Bezug auf die Darstellung der schwachen Stoß/Grenzschicht–Interaktion führen.

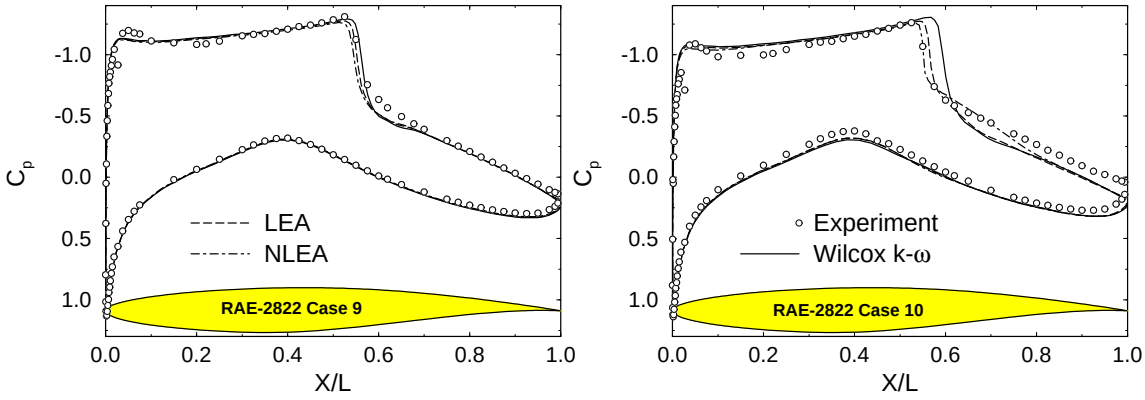


Abbildung 9.42: Transsonische RAE–2822 Profilumströmung; Vergleich der Druckbeiwerte.

Im Gegensatz hierzu treten bei der Berechnung der starken Interaktion im Zusammenhang mit CASE10 deutliche Unterschiede zwischen den Ergebnissen einzelner Turbulenzmodelle zu Tage. Beide EASM vermögen die Stoßlage und den Auftriebsbeiwert

Tabelle 9.7: Turbulente transsonische Profilumströmung (Cook et al. 1979); Vorhergesagte Kraftbeiwerte bei starker Stoß/Grenzschicht–Interaktion (CASE10).

	Wilcox $k-\omega$	LEA+ϕ_d^S	NLEA+ϕ_d^S	Exp.
c_a	0.811	0.787	0.767	0.743
c_w	0.024	0.023	0.022	0.024

besser darzustellen als das Wilcox $k-\omega$ Modell, wobei die nichtlineare Variante leichte Vorteile gegenüber dem LEA Modell besitzt. Signifikante Verbesserungen der nichtlinearen Modellierung treten bei der Vorhersage des Recoverybereichs auf der Oberseite von CASE10 in Erscheinung. Die Gründe hierfür liegen in der Darstellbarkeit starker Anisotropieeffekte durch die nichtlineare Modellierung.

Ausblick und Zusammenfassung

Die Arbeit befaßt sich mit der Entwicklung leistungsfähiger mathematischer Modelle zur statistischen Beschreibung von Strömungsturbulenz. Die hier gewählte Vorgehensweise basiert auf der expliziten Formulierung algebraischer Spannungsmodelle mit Hilfe von Invariantentechniken und kombiniert die numerische Effizienz herkömmlicher Wirbelzähigkeitsmodelle mit der Genauigkeit der Transportgleichungs–Reynolds–Spannungsmodellierung. Das wesentliche Merkmal der Technik ist ihr strenger mathematischer Aufbau. Die damit verbundene Systematik erhöht die Flexibilität der Modellbildung, was sich in einer Vielzahl von Erweiterungs– und Analysemöglichkeiten niederschlägt.

Motivation und Ausgangspunkt der Arbeit waren die eingangs ausführlich dargestellten Schwachstellen klassischer, linearer Wirbelzähigkeitsmodelle. Die inhaltlichen Schwerpunkte der Arbeit lagen auf der Herleitung des Projektionsverfahrens, und der Bewertung der mit den unterschiedlichen Verfahrensaspekten verbundenen Eigenschaften.

Die Betrachtungen konzentrierten sich auf die detaillierte Untersuchung fundamentaler Strömungen auf der Grundlage einer quadratischen Drei–Generator–Projektionsbasis. Darüber hinaus wurde eine Vielzahl von Strategien zur Weiterentwicklung der Modellierung skizziert. Die durchgeführten Erweiterungen der Modellbildung bezogen sich auf (schwach) kompressible Medien, Wandturbulenz, Zwei–Skalen–Techniken und eine einfache kubische Projektionsbasis.

Die Arbeit erläutert ferner Möglichkeiten zur Analyse und Optimierung der Modellkoeffizienten mit Hilfe des Projektionsverfahrens und der Invariantentechniken. Im Zentrum diesbezüglicher Überlegungen stand die Evaluierung des linearen Druck–Scher–Korrelationsmodells, für das ein Koeffizientensatz erarbeitet wurde. Daneben wurde die zentrale Bedeutung einer asymptotisch korrekten (quasi-/selbstkonsistenten) Modellierung erörtert, und die physikalische Realisierbarkeit der Simulationsergebnisse exemplarisch untersucht.

Der Modellbildung lagen vorwiegend akademische Beispiele zugrunde, welche einen tieferen Einblick in die Darstellbarkeit fundamentaler physikalischer Zusammenhänge erlauben. Besondere Aufmerksamkeit wurde der Vorhersage homogener Turbulenz, turbulenter Sekundärströmungen und krümmungsinduzierter Variationen der turbulenten Schubspannungen gewidmet. Das nichtlineare Basismodell wurde abschließend für eine Vielzahl zweidimensionaler Anwendungen, welche ein breites strömungsphysikalisches Spektrum abdecken, validiert. Zu den in dieser Arbeit untersuchten Strömungsmerkmalen zählen beispielsweise druckinduzierte Strömungsablßung, Relaminarisierung Stoß/Grenzschicht–Wechselwirkung sowie ausgewählte generische Strömungen unter dem dem Einfluß von Systemrotation. Durch begleitende Untersuchungen (Franke, Rung, Elsholz et al. 1999, Franke, Rung, Xue et al. 1999, Rung, Lübcke, Xue et al. 1999, Monsen, Franke, Rung et al. 1999, Xue 1998) konnte das Potential der Vorgehensweise

in ersten, praxisnahen dreidimensionalen Problemstellungen nachgewiesen werden.

Signifikante Defizite verbleiben in Bezug auf die Vorhersage von Strömungen unter dem Einfluß starker Stromlinienkrümmung. Durch eine Analyse auf der Basis ausgezeichneter Koordinatensysteme können diese Defizite auf das in allen expliziten Modellen vorausgesetzte strukturelle Gleichgewicht zurückgeführt werden. Eine allgemeingültige Modifikation der Gleichgewichtshypothese zur Berücksichtigung von Coriolisbeiträgen steht noch aus, die in dieser Arbeit exemplarisch untersuchten Korrekturen für Drallströmungen belegen jedoch die Richtigkeit der Schlußfolgerungen.

Die Berechnung gekrümmter Strömungen ist vor allem in Hinblick auf die Simulation praxisrelevanter, dreidimensionaler Probleme von Bedeutung. Die Entwicklung einer einfachen, numerisch robusten Krümmungskorrektur für beliebige Rechenkoordinaten, welche zudem die geforderten Invarianzeigenschaften besitzt, sollte nach Ansicht des Autors das primäre Ziel einer Weiterentwicklung sein.

Daneben sollte die Berechnung von lokal dreidimensionalen Strömungen auf eine erweiterte Integritätsbasis zurückgreifen. An erster Stelle stehen hier die in zweidimensionalen Strömungen nicht auftretenden Terme η_3 und $\eta_5 - 0.5\,\eta_1\eta_2$. Ferner besteht Bedarf zur Fortsetzung der Validierung einer erweiterten (kubischen) Projektionsbasis mit vier bzw. fünf Generatoren. Ziel dieser Untersuchungen sollte vor allem die verbesserte Darstellung primärer und tertiärer Effekte in dreidimensionalen Strömungen sein. Die Erweiterung der Drei–Generator–Basis verlangt, in Anlehnung an die in dieser Arbeit gemachten Erfahrungen, voraussichtlich eine Modifikation der hier erarbeiteten Koeffizienten des quadratischen Rumpfes. Anstelle einer streng mathematischen Herleitung ist daher die Entwicklung heuristischer Erweiterungen in Erwägung zu ziehen. Zusätzlich sollte der Einfluß der bislang zweidimensionalen Darstellung der spezifischen Produktionsrate $(P/\varepsilon)_g$ untersucht werden.

Die Validierung einer pseudo–impliziten Technik in Konkurrenz zu voll–impliziten Modellen, bzw. die Berücksichtigung zusätzlicher Tensoren innerhalb des ASM, ist ein weiterer, möglicher Anknüpfpunkt zur Fortsetzung dieser Arbeit. Diesbezüglich wäre, neben der automatischen Erfassung der Coriolisbeiträge, auch eine implizite Optimierung der Koeffizienten $C_i(II_b, III_b)$ des Druck–Scher–Korrelationsmodell von Interesse, welche unmittelbar auf die hier angestellten expliziten Überlegungen zurückgreifen könnte. Bei der Optimierung der Koeffizienten könnte die anisotrope Darstellung der Dissipationsraten eine mögliche Leitlinie sein.

Zur Validierung der dreidimensionalen Weiterentwicklung kommen neben Untersuchungen zur Round–to–plane–Jet Anomalie (Pope 1987) , die bereits in dieser Arbeit behandelte Durchströmung eines rotierenden Rohres (tertiäre Effekte), die Untersuchung dreidimensionaler Wandstrahlen (sekundäre Strömungsmerkmale; Abrahamsson 1997), 3D Grenzschichtströmungen (zweiachsige Scherung; Schwartz und Bradshaw 1994, Bruns et al. 1999) sowie die Simulation des Strömungsfelds eines Flügelspitzenwirbels (Krümmungskorrektur; Chow et al. 1997) in Betracht.

Literaturverzeichnis

[1] Abe, K., Kondoh, T. und Nagano, Y. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows–I: Flow field calculations. *J. Heat and Mass Transfer* **37** (1): 139–151. 1994.

[2] Abid, R. und Speziale, C. G. Predicting equilibrium states with Reynolds stress closures in a channel flow and homogeneous shear flow. *Physics of Fluids* A **5**: 1776–1782. 1993.

[3] Abrahamsson, H. *On Turbulent Wall Jets.* Dissertation, Dept. of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden. 1997.

[4] Adumitroaie, V., Ristorcelli, J. R. und Taulbee, D. B. Progress in Favré–Reynolds stress closures for compressible flows. ICASE Report 98–21, Institute for Computer Application in Science and Engineering, NASA Langley Research Center. 1998.

[5] Altenbach, J. und Altenbach, H. *Einführung in die Kontinuumsmechanik.* Teubner, Stuttgart. 1994.

[6] Baldwin, B. S. und Barth, T. J. A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall bounded flows. *AIAA Paper* 91–0610, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1991.

[7] Baldwin, B. S. und Lomax, H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper* 78–0257, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1978.

[8] Bardina, J., Ferziger, J. H. und Reynolds, W. C. Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. Tech. Rep. TF–19, Stanford University. 1983.

[9] Batten, P. ERCOFTAC Workshop on shock/boundary-layer interaction. http://sgp.me.umist.ac.uk/ercoftac97/, Dept. of Mech.-Eng., University of Manchester Institute of Science and Technology. 1997.

[10] Batten, P., Craft, T. J., Leschziner, M. A. und Loyau, H. Reynolds–stress transport modelling for compressible aerodynamics applications. *AIAA J.* **37** (7): 785–797. 1999.

[11] Beaudan, P. und Moin, P. Numerical experiments on the flow past a circular cylinder at sub–critical Reynolds number. *Technical Report TF 62*. 1994.

[12] Bertoglio, J. P. Homogeneous turbulent field within a rotating frame. *AIAA Journal* **20**: 1175–1181. 1982.

[13] Bird, R. B., Stewart, W. E. und Lightfoot, E. N. *Transport Phenomena.* John Wiley, New–York. 1962.

[14] Blanke, W. *Thermophysikalische Stoffgrößen.* Springer, Berlin. 1989.

[15] Boussinesq, J. Théorie de l'Écoulement tourbillant. *Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.* **23**: 46–50. 1877.

[16] Bradshaw, P. Effects of streamline curvature on turbulent flow. ARGARDograph, No. 169, NATO, New–York. 1973.

[17] Bradshaw, P. Turbulent secondary flow. *Annual Review Fluid Mech.* **19**: 53–74. 1987.

[18] Bradshaw, P. und Ferris, D. H. Application of a general method of calculating turbulent shear layers. *ASME J. Fluids Eng.* **94**: 345. 1972.

[19] Bradshaw, P., Launder, B. E. und Lumley, J. L. Collaborative Testing of Turbulence Models. *ASME J. Fluids Eng.* **118** (2): 243–247. 1996.

[20] Breuer, M. Numerical and modelling influences on large eddy–simulations for the flow past a circular cylinder. In *Proc. of the 11th Symp. on Turbulent Shear Flows*, Grenoble, France. Sept. 8–11, 1997.

[21] Bronstein, I. M. und Semendjajew, K. A. *Taschenbuch der Mathematik.* Teubner, Leipzig. 1956.

[22] Bruice, C. U. und Eaton, J. K. Experimental investigation of flow through an asymmetric plane diffuser. Thermosciences Division Report No. TSD–107, Departement of Mechanical Engineering, Stanford University. 1993.

[23] Bruns, J. M., Fernholz, H.-H. und Monkewitz, P. A. An experimental investigation into three–dimensional boundary layer in an S–shaped duct. *J. Fluid Mech.* **393**: 175–213. 1999.

[24] Cardell, G. S. *Flow past a cicular cylinder with a permeable splitter plate.* Dissertation, Grad. Aeronautical Lab., California Institute of Technology. 1993.

[25] Cebeci, T. und Smith, A. M. O. *Analysis of turbulent boundary layers.* Academic Press, New–York. 1974.

[26] Chapman, D. Computational aerodynamics development and outlook. *AIAA Journal* **17** (12): 1293–1313. 1979.

[27] Cheesewright, R. McGrath, G. und Petty, D. G. LDA measurements of turbulent flow in a duct of square cross section at low Reynolds number. Rep. ER 1011, Aeronautical Engineering Dept., Queen May Westfield College, Univ. London, UK. 1990.

[28] Chien, K.-Y. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low Reynolds number turbulence model. *AIAA Journal* **20** 1: 33–38. 1982.

[29] Chou, P. Y. On the velocity correlations and the solution of the equations of turbulence fluctuation. *Quart. Appl. Math.* **3**: 38. 1945.

[30] Chow, J. S., Zilliac, G. C. und Bradshaw, P. Mean and turbulence measurements in the near field of a wingtip vortex. *AIAA J.* **35**: 1561–1567. 1997.

[31] Coakley, T. J., Horstman, C. C., Marvin, J. G., Viegas, J. R., Bardina, J. E., Huang, P. G. und Kussoy, M. I. Turbulence compressibility corrections. NASA TM–108827. 1994.

[32] Comte-Bellot, G. und Corrsin, S. On the use of contraction to improve the isotropy of grid–generated turbulence. *J. Fluid Mech.* **25**: 657–682. 1966.

[33] Cook, P. H., McDonald, M. A. und Firmin, M. C. P. Aerofoil 2822 – pressure distribution boundary-layer and wake measurements. ARGARD Report AR–138, NATO. 1979.

[34] Craft, T. und Launder, B. E. Recent development in second–moment closures for buoyancy–affected flows. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **23**: 99–114. 1996.

[35] Craft, T., Launder, B. E. und Suga, K. Development and application of a cubic eddy–viscosity model of turbulence. *J. Heat and Fluid Flow* **17** (2): 108–115. 1996.

[36] Daly, B. J. und Harlow, F. H. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids* **13**: 2634–2649. 1970.

[37] Davis, D. O. . und Gessner, F. B. Experimental investigation of turbulent flow through a circular-to-rectangular transition duct. *AIAA J.* **30** (2): 367–375. 1992.

[38] Delery, J. Investigation of strong shock/turbulent boundary-layer interaction in 2D transonic flows with emphasis on turbulence phenomenon. *AIAA Paper* 81–1245, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1981.

[39] Delery, J. Experimental investigation of turbulence properties in transonic shock wave/boundary-layer interactions. *AIAA Journal* **21** (2): 180–185. 1983.

[40] Dellenback, P. A., Metzger, D. E. und Neitzel, G. P. Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt axissymetric expansion. *AIAA Journal* **26** (6): 669–681. 1988.

[41] Demirdzić, I., Lilek, Z. und Peric, M. A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds. *Int. Journal for Num. Methods in Fluids* **16**: 1029–1050. 1993.

[42] Demirdzić, I. und Peric, M. Space conservation law in finite–volume calculations of fluid flow. *Int. Journal for Num. Methods in Fluids* **8**: 1037–1050. 1988.

[43] Demuren, A. O. On the generation of secondary motion in circular-to-rectangular transition ducts. *AIAA Paper* 93–0681, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1993.

[44] Demuren, A. O. und Rodi, W. Calculations of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts. Technical report. 1984.

[45] Dervieux, A., Braza, M. und Dussauge, J.-P. (Hrsg.). *European Research Project ETMA:* Computation and Comparison of Efficient Turbulence Models for Aeronautics, Band 65 der Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden. 1998.

[46] Driver, D. M. und Seegmiller, H. J. Features of a reattaching turbulent shear layer in a divergent channel flow. *AIAA Journal* **23** (4): 163–171. 1985.

[47] Durbin, P. Near-wall turbulence closure modelling without damping functions. *Theoretical and Comp. Fluid Dynamics* **3** (1): 1–13. 1991.

[48] Durbin, P. A Reynolds-stress model for near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **249**: 465–498. 1993.

[49] Durbin, P. Separated flow computations with the $k-\varepsilon-v^2$ model. *AIAA Journal* **33** (4): 659–664. 1995.

[50] Durbin, P. und Speziale, C. G. Local anisotropy in strained turbulence at high Reynolds numbers. *ASME J. Fluids Eng.* **113**: 707–709. 1991.

[51] ERCOFTAC. NEXUS Portal to Fluid Dynamics Database Resources – The Classic Data Base. http://ercoftac.mech.surrey.ac.uk/, European Research Community on Flow Turbulence and Combustion. 1993.

[52] ERCOFTAC/IAHR/COSTWorkshop No. 8 on. Refined Turbulence Modelling. http://www.aero.hut.fi/ercoftac/ws8/, Helsinki University of Technology, Finnland. 1999.

[53] Favré, A. Equations des gaz turbulents compressibles. *Jounal de Méchanique* **4(3)**: 361–390. 1965.

[54] Fernando, A. und Smits, S. A supersonic turbulent boundary–layer in adverse pressure gradient. *J. Fluid Mech.* **211**: 285–307. 1990.

[55] Fernholz, H. H. und Finley, P. J. A critical commentary on mean flow data for two-dimensional compressible turbulent boundary layer. AG-253, NATO AR-GARD. 1980.

[56] Franke, M., Rung, T., , Elsholz, E., Aumann, P. und Thiele, F. (1999). Numerical Simulation of Three–Dimensional Transonic Flows Using Advanced Turbulence–Transport Models. In W. Nitsche, H. Heinemann und R. Hilbig (Hrsg.), *Notes on Numerical Fluid Mechanics, Numerical Flow Simulation I*, Band 72, 154–161. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

[57] Franke, M., Rung, T., Xue, L. und Thiele, F. *Application of Parallel Numerical Flow Solvers Invoking Advanced Turbulence–Transport Models to Aircraft Components*. Lecture Notes on Computional Science and Engineering. Springer, Berlin, 81–90. 1999.

[58] Friedrich, R. und Bertolotti, F. Compressibility effects due to turbulent fluctuations. *Appl. Sci. Research* **57**: 165–194. 1997.

[59] Fröhlich, J., Rodi, W., Kessler, P., Parpais, S., Bertoglio, J. und Laurence, D. (1998). Large Eddy Simulation of Flow around Circular Cylinders on Structured and Unstructured Grids. In E. H. Hirschel (Hrsg.), *Notes on Numerical Fluid Mechanics, Numerical Flow Simulation I*, Band 66, 319–338. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

[60] Fu, S., Huang, P., Launder, B. und Leschziner, M. A. A comparison of algebraic and differential second-moment closures for axisymmetric turbulent shear flows with and without swirl. *ASME J. Fluis Eng.* **110**: 216–221. 1988.

[61] Fu, S., Launder, B. E. und Leschziner, M. A. Modelling strongly swirling recirculating jet flows with Reynolds–stress transport closures. In *Proc. of the 6th Symp. on Turbulent Shear Flows*, Toulouse, France, 17–6–1. 1987.

[62] Fu, S., Launder, B. E. und Tselepidakis, D. Accomodating the effects of high strain rates in modelling the pressure-strain correlations. Rep. TFD/87/5, Dept. of Mech.-Eng., University of Manchester Inst. of Science and Tech. 1987.

[63] Gatski, T. B., Jongen, T. und Mompean, G. Predicting s-duct flow using a composite algebraic stress model. *AIAA Journal* **36** (3): 327–335. 1998.

[64] Gatski, T. B. und Speziale, C. G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **254**: 59–75. 1993.

[65] Gatski, T. B. und Speziale, C. G. Analysis and modelling of anisotropies in the dissipation of turbulence. *J. Fluid Mech.* **344**: 155–180. 1997.

[66] Gendre, P. Maximum lift for single-element airfoils. BRITE EURAM: EUROVAL Task2.1 Experimaental Results on A-Airfoil: CERFACS, France. 1990.

[67] Gibson, M. M., Harper, R. D. und Dafa'Alla, A. A. Progress in the development of the $q - \xi$ turbulence model. Report TF–94–33, Dept. of Mech. Engineering., Imperial College, London. 1994.

[68] Gibson, M. M. und Launder, B. E. Ground effects on the pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.* **86**: 491–511. 1978.

[69] Gibson, M. M. und Younis, B. Calculation of swirling jets with a Reynolds stress closure. *Phys. Fluids* **29** (1): 38–48. 1986.

[70] Girimaji, S. S. Fully-explicit and self-consistent Reynolds stress model. ICASE Report 95–82, Institute for Computer Application in Science and Engineering, NASA Langley Research Center. 1995.

[71] Girimaji, S. S. A Galilean invariant explicit algebraic Reynolds stress model for curved flows. *Phys. Fluids* **9**: 1067–1077. 1997.

[72] Gutmark, E. und Wygnanski, I. The planar turbulent jet. *J. Fluid Mech.* **73**: 465–495. 1976.

[73] Haase, W., Bradsma, F., Elsholz, E., Leschziner, M. A. und Schwamborn, D. (Hrsg.). *EUROVAL - European Initiative on Validation of CFD Codes*,

Band 42 der Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden. 1993.

[74] Haase, W., Chaput, E., Elsholz, E., Leschziner, M. A. und Müller, U. (Hrsg.). *ECARP - European Computational Aerodynamics Research Project:* Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models, Band 58 der Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden. 1997.

[75] Hallbäck, M., Groth, J. und Johansson, A. V. An algebraic model for nonisotropic turbulent dissipation rate in Reynolds stress closures. *Phys. Fluids* **A2 (10)**: 1859–1866. 1990.

[76] Hallbäck, M., Henningson, D. S., Johansson, A. V. und Alfredson, P. H. (Hrsg.). *Turbulence and transition modelling*, Band 2 der Reihe *Ercoftac Series*. Kluwer, Dordrecht. 1996.

[77] Hanjalić, K., Hadzić, I. und Jakirlić, S. Modelling turbulent wall flows subjected to strong pressure variations. *ASME Journal of Fluids Engineering* **121**: 57–64. 1999.

[78] Hanjalić, K. und Launder, B. E. Contribution towards a Reynolds–stress closure for low–Re turbulence. *J. Fluid. Mech.* **74**: 593–610. 1976.

[79] Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Physics* **49**: 357–393. 1983.

[80] Hinze, J. O. *Turbulence*. McGraw-Hill, New–York. 1959.

[81] Huang, P., Coleman, G. N. und Bradshaw, P. Compressible turbulent channel flows – DNS results and modelling. *J. Fluid Mech.* **305**: 185–218. 1995.

[82] Huang, P. G., Bradshaw, P. und Coakley, T. J. Turbulence models in compressible boundary layers. *AIAA Journal* **32** (4): 735–740. 1994.

[83] Imao, S., Itoh, M. und Harada, T. Turbulent characteristics of a flow in an axially rotating pipe. *J. Heat and Fluid Flow* **17**: 444–451. 1996.

[84] Jakirlić, S. *Reynolds–Spannungs–Modellierung komplexer turbulenter Strömungen*. Dissertation, Technische Fakultät der Universität Nürnberg-Erlangen. 1997.

[85] Jin, G. und Braza, M. Two-equation turbulence model for unsteady separated flows around airfoils. *AIAA Journal* **32** (11): 2316–2320. 1994.

[86] Jischa, M. *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden. 1982.

[87] Johansson, A. V. und Hallbäck, M. Modelling of rapid pressure-strain in Reynolds-stress closures. *J. Fluid Mech.* **269**: 143–168. 1994.

[88] Johnston, J. P., Halleen, R. M. und Lezius, D. K. Effects of a spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully-developed channel flow. *J. Fluid Mech.* **56**: 533–558. 1972.

[89] Jones, W. P. und Launder, B. E. Prediction of laminarization with a two-equation turbulence model. *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**: 301–314. 1972.

[90] Jongen, T. und Gatski, T. B. General explicit algebraic relations and best approximation for three-dimensional flows. *Int. J. Engineering Science* **36**: 739–763. 1998.

[91] Kato, M. und Launder, B. E. The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders. In *Proc. of 9th Symp. on Turb. Shear Flows*, Kyoto, Japan, 10.4.1–10.4.6. 1993.

[92] Kikuyama, K., Murakami, M., Nishibori, K. und Maeda, K. Flow in axially rotating pipe. *Bull. JSME* **26**: 506–513. 1983.

[93] Kim, J., Moin, P. und Moser, R. Turbulence statistics of a fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid. Mech.* **177**: 133–166. 1987.

[94] Kolmogorov, A. N. Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Izvestia Academy of Sciences, USSR, Phyics* **6** Nos. 1 and 2: 56–58. 1942.

[95] Kravchenko, A. G. und Moin, P. B–spline methods and zonal grids for numerical simulations of turbulent flows. Tech. Rep. TF–73, Flow Physics and Computation Division, Dept. Mech. Engineering, Stanford University. 1998.

[96] Lakehal, D., Thiele, F., de Legeneste, L. D. und Buffat, M. *Computation of Vortex shedding flows past a square cylinder employing LES and RANS. In: Numerical Flow Simulation I (Results of the CNRS–DFG Collaborative Research)*, Band 66 der Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden. 1998.

[97] Laufer, J. Investigation of turbulent flow in a two dimensional channel. Tech. Rep. 1053, NACA. 1951.

[98] Launder, B. E., Reece, G. und Rodi, W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.* **68**: 537–566. 1975.

[99] Launder, B. E. und Rodi, W. The turbulent wall jet. *Annual Review Fluid Mech.* **15**: 429–459. 1983.

[100] Launder, B. E. und Sharma, B. I. Application of the energy–destruction model of turbulence to the calculation of the flow near a spinning disc. *Letters of Heat and Mass Transfer* **1**: 131. 1974.

[101] Launder, B. E. und Spalding, D. B. *Lectures in mathematical models of turbulence*. Academic Press, London. 1972.

[102] Lee, M. J. und Reynolds, W. C. Numerical experiments on the structure of homogeneous turbulence. Tech. Rep. TR TF–24, Thermosciences Division, Dept. Mech. Engineering, Stanford University. 1985.

[103] Leschziner, M. A. Computation of aerodynamic flows with turbulence–transport models based on second–moment closures. *Computers & Fluids* **24** (4): 377–392. 1995.

[104] Lezius, D. K. und Johnston, J. P. Roll–cell instabilities in rotating laminar and turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **77**: 153–175. 1976.

[105] Lien, F. S. und Leschziner, M. A. *Computational modelling of 3D turbulent flow in S–diffusor and transition ducts*, Band 2 der Reihe *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*. Elsevier, Amsterdam, 217–228. 1993.

[106] Lien, F. S. und Leschziner, M. A. A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulent-transport closure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **114**: 123–167. 1994.

[107] Lien, F. S. und Leschziner, M. A. *Modelling the Flow in a Transition Duct with a Non-Orthogonal FV Procedure and Low-Re Turbulence-Transport Models*, Band ASME FED-Vol. 196 der Reihe *Advances in Computational Methods in Fluid Dynamics*. American Society of Mechanical Engineering, Lake Tahoe, NV., 93–106. 1994.

[108] Lilek, Z. und Perić, M. A fourth–order finite–volume method with collocated variable arrangement. *Computers & Fluids* **24** (3): 239–252. 1995.

[109] Lourenco, L. M. und Shih, C. Characteristics of the plane wake of a circular cylinder. A particle image velocimetry. *Data taken from Kravchenko 1998*. 1993.

[110] Lübcke, H. M. und Rung, T. Grundlagen der Expliziter Algebraischen Spannungsmodellierung. Institutsbericht ?–99 (in vorbereitung, Hermann–Föttinger–Institut, Technische Universität Berlin. 1999.

[111] Lumley, J. L. Computational modelling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.* **18**: 123–176. 1978.

[112] Lund, T. S. und Novikov, E. A. Parametrization of subgrid–scale stress by the velocity gradient tensor. *Annual Research Briefs of the Center for Turbulence Research*: 27–43. 1992.

[113] Lyn, D. A., Einav, S., Rodi, W. und Park, J. H. A laser-dopler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder. *J. Fluid. Mech.* **304**: 285–319. 1995.

[114] Makiola, B. *Experimentelle Untersuchung zur Strömung über die rückwärtsspringende Stufe*. Dissertation, Institut für Hydromechanik der Universität Karlsruhe. 1992.

[115] Menter, F. R. Influence of freestream values on $k-\omega$ turbulence model prediction. *AIAA Journal* **30** (6): 1657–1659. 1992.

[116] Menter, F. R. Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper* 93–2906, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1993.

[117] Menter, F. R. Two–equation eddy–viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal* **32** (8): 1598–1605. 1994.

[118] Mittal, R. Progress of LES of flow past circular cylinder. *Annual Research Briefs of the Center for Turbulence Research*: 233–241. 1996.

[119] Monsen, E., Franke, M., Rung, T., Aumann, P. und Ronzheimer, A. Assessment of advanced transport–equation turbulence models for aircraft aerodynamic performance prediction. *AIAA Paper* 99–3701, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1999.

[120] Morkovin, S. N. Effects of compressibility on turbulent flows. *Mechanique de la turbulence* CNRS (ed.: A. Favre), Gordon Breach: 367–380. 1964.

[121] Moser, R. D. und Moin, P. The effect of curvature on wall–bounded turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **175**: 479–510. 1987.

[122] Muck, K. C., Hoffmann, P. H. und Bradshaw, P. The effect of concave surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **161**: 371–403. 1985.

[123] Muck, K. C., Hoffmann, P. H. und Bradshaw, P. The effect of convex surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **161**: 347–369. 1985.

[124] Neuzgliadov, V. G. *Dokl. Akad. Nauk.* **26**: 238–386. 1960.

[125] Nishioka, M. und Sato, H. Mearsurement of velocity distributions in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **65**: 97–112. 1974.

[126] Nishioka, M. und Sato, H. Mechanism of determination of the shedding frequency of vortives behind a circular cylinder at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **89**: 49–60. 1978.

[127] Norberg, C. Effects of Reynolds–number and low–intensity free–stream turbulence on the flow around a circular cylinder. Rep. 87/02, Chalmer Univ. of Technology, Thermoscience and Fluid Mech. Dept. 1987.

[128] Oberlack, M. *Closure of the dissipation tensor and the presssure strain tensor based on the two-point correlation technique*, Band 10 der Reihe *Turbulent Shear Flows*. Springer, Berlin, 33–52. 1995.

[129] Oberlack, M. Similarity in non–rotating and rotating turbulent pipe flows. *J. Fluid Mech.* **379**: 1–22. 1999.

[130] Obi, S., Perić, M. und Scheuerer, G. Second moment calculation procedure for turbulent flows with colocated variable arrangement. *AIAA Journal* **29** (4): 585–590. 1991.

[131] Ong, L. und Wallace, J. The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder. *Exp. in Fluids* **20**: 441–453. 1996.

[132] Orlandi, P. und Fatica, M. Direct simulations of turbulent flow in a pipe rotating about its axis. *J. Fluid Mech.* **343**: 43–72. 1997.

[133] Patel, V. C., Rodi, W. und Scheuerer, G. Turbulence models for near–wall and low–Reynolds number flows. *AIAA J.* **23**: 1308–1319. 1985.

[134] Peng, S. H., Davidson, L. und Holmberg, S. A modified low-Reynolds number $k-\omega$ model for recirculating flows. *ASME Journal of Fluids Engineering* **119**: 867–875. 1997.

[135] Perić, M. und Ferzinger, J. H. *Computational Methods for Fluid Dynamics.* Springer, Berlin. 1996.

[136] Pfuderer, D. G., Eifert, C. und Janicka, J. Nonlinear second moment closure consistent with shear and strain flows. *AIAA J.* **35**: 825–831. 1997.

[137] Pope, S. B. A more general effective viscosity hypothesis. *J. Fluid Mech.* **72**: 331–340. 1975.

[138] Pope, S. B. An explanation of the round–jet/plane–jet anomaly. *AIAA J.* **16**: 279. 1978.

[139] Prandtl, L. Bericht über die Untersuchung zur ausgebildeten Turbulenz. *ZAMM* **5** (2): 136–139. 1925.

[140] Reich, G. und Beer, H. Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe–I. Effect of rotation on turbulent pipe flow. *J. Heat and Mass Transfer* **32** (3): 551–562. 1989.

[141] Reynolds, O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society* Ser. A **186-I**: 123–164. 1895, London.

[142] Reynolds, W. C. Fundamentals of turbulence for turbulence modeling and simulation. Lecture Notes for Von Karman Institute, NATO, New–York, ARGARD Lecture Series No. 86. 1987.

[143] Rhie, C. M. und Chow, W. L. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal* **21** (11): 1525–1532. 1983.

[144] Ristorcelli, J. R. Some results relevant to statistical closure for compressible turbulence. ICASE Report 98–1, Institute for Computer Application in Science and Engineering, NASA Langley Research Center. 1998.

[145] Rivlin, R. S. und Ericksen, J. L. Stress-deformation Relations for Isotropic Materials. *Arch. for Rational Mechanical Anal.* **4**: 323–425. 1955.

[146] Roback, R. und Johnson, B. V. Mass and momentum turbulent transport experiments with confined swirling coaxial jets. NASA Contractor Report 168252, NASA. 1983.

[147] Rodi, W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *ZAMM* **56**: T219–T221. 1976.

[148] Rodi, W. Two-layer models of turbulence. *AIAA Paper* 91–0216, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1991.

[149] Rodi, W. und Mansour, N. N. Low–Reynolds number $k-\varepsilon$ modelling with the aid of direct numerical simulation data. *J Fluid Mech.* **250**: 509–524. 1993.

[150] Rogers, M. M. The structure of a passive scalar field with a uniform mean gradient in rapidly sheared homogeneous turbulence. *Phys. Fluids* A **3**: 144–154. 1991.

[151] Rogers, M. M., Moin, P. und Reynolds, W. C. The structure and modelling of hydrodynamic and passive scalar field in homogeneous turbulent shear flow. Tech. Rep. TR TF–25, Thermosciences Division, Dept. Mech. Engineering, Stanford University. 1986.

[152] Rotta, J. C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz I. *Zeitschrift für Physik* **129**: 547–572. 1951.

[153] Rotta, J. C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz II. *Zeitschrift für Physik* **132**: 1–51. 1951.

[154] Rotta, J. C. Über eine Methode zur Berechnung turbulenter Strömungen. *Mitteilungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen,* Rep. 69 **A 14**. 1968.

[155] Rotta, J. C. *Turbulente Strömungen*, Band 15 der Reihe *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik*. Teubner, Stuttgart. 1972.

[156] Rubinstein, R. und Barton, J. M. Nonlinear Reynolds stress models and renormalization group. *Phys. Fluids* A **2**: 1472–1476. 1990.

[157] Rumsey, C. L., Gatski, T. B. und Morrison, J. H. Turbulence model predictions of extra–strain rate effects in strongly curved flows. *AIAA Paper* 99–0157, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1999.

[158] Rumsey, C. L., Gatski, T. B., Ying, S. X. und Bertelrud, A. Prediction of high-lift flows using turbulent closure models. *AIAA J.* **36**: 765–774. 1998.

[159] Rung, T. Erweiterung von Eingleichungs-Turbulenzmodellen für lokales Nichtgleichgewicht. Institutsbericht 3–98, Hermann–Föttinger–Institut, Technische Universität Berlin. 1998.

[160] Rung, T. Realizability linearer Stress–Strain Beziehungen. Institutsbericht 4–98, Hermann–Föttinger–Institut, Technische Universität Berlin. 1998.

[161] Rung, T. Anmerkungen zum IPC Druck–Scher–Korrelationsmodell. Institutsbericht ?–99 (in vorbereitung, Hermann–Föttinger–Institut, Technische Universität Berlin. 1999.

[162] Rung, T. Formulierung universeller Wandrandbedingungen für Transportgleichungsturbulenzmodelle. Institutsbericht 2–99, Hermann–Föttinger–Institut, Technische Universität Berlin. 1999.

[163] Rung, T. Numerische Modellierung komplexer turbulenter Scherströmungen. Institutsbericht ?–00 (in vorbereitung, Hermann–Föttinger–Institut, Technische Universität Berlin. 2000.

[164] Rung, T., Lübcke, H., Xue, L., Thiele, F. und Fu, S. *Assessment of explicit algebraic Reynolds-stress models in transonic flows*, Band 4 der Reihe *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*. Elsevier, Amsterdam, 659–668. 1999.

[165] Rung, T., Thiele, F. und Fu, S. On the realizability of non–linear stress–strain relationships for Reynolds–stress closures. *Flow, Turbulence and Combustion* **60** ((4)): 333–359. 1999.

[166] Sarkar, S. The pressure-dilatation correlation in compressible flows. *Phys. Fluids* A **4**: 2674–2682. 1992.

[167] Sarkar, S. The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* **282**: 163–186. 1995.

[168] Sarkar, S., Erlebacher, G., Hussaini, M. und Kreiss, H. The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *J. Fluid Mech.* **227**: 473–493. 1991.

[169] Sarkar, S. und Speziale, C. G. A simple nonlinear model for the return to isotropy in turbulence. *Phys. Fluids* A **2**: 84–93. 1990.

[170] Schade, H. *Tensoranalysis*. Walter de Gruyter, Berlin. 1996.

[171] Schmidt, S., Lübcke, H. und Thiele, F. Comparison of LES and RANS in bluff–body wake flows. *GAMM Workshop, on Numerical Methods in Fluid Mechanics*. Kirchzarten, Sept. 1999.

[172] Schumann, U. Realizability of Reynolds stress turbulence models. *Phys. Fluids* **20**: 721–725. 1977.

[173] Schwartz, W. und Bradshaw, P. Turbulence structure changes for a three–dimensional turbulent boundary–layer in a 30^o bend. *J. Fluid Mech.* **272**: 183–209. 1994.

[174] Shabany, Y. und Durbin, P. Explicit algebraic scalar flux approximation. *AIAA J.* **35**: 985–989. 1997.

[175] Shih, T. H., Liou, W. W., Shabbir, A. A., Yang, Z. und Zhu, J. A new k-ε eddy–viscosity model for high–Reynolds number turbulent flows. *Computers & Fluids* **24** (3): 227–239. 1995.

[176] Shih, T. H. und Lumley, J. L. Modeling the pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations. Rep. FDA–85–3, Silbey School of Mech. & Aerospace Engrg., Cornell University. 1985.

[177] Shih, T. H., Zhu, J. und Lumley, J. L. A realizable Reynolds stress algebraic equation model. NASA TM–105993 (ICOMP–92–27), Institut for Computational Mechanics in Propulsion, NASA Lewis Research Center. 1993.

[178] Shih, T. H., Zhu, J. und Lumley, J. L. A new Reynolds stress algebraic equation model. *Comp. Methods Appl. Engrg.* **125**: 287–302. 1995.

[179] Shur, M., Spalart, P. R., Strelets, M. und Travin, A. *Detached–eddy simulation of an airfoil at high angle of attack*, Band 4 der Reihe *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*. Elsevier, Amsterdam, 669–678. 1999.

[180] So, R. M. C., Gerodimos, G., Sarkar, A. und Zhang, J. A dissipation rate equation for low–Reynolds–number and near–wall turbulence. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **9**: 47–63. 1997.

[181] Sommerfeld, A. *Vorlesungen über theoretische Physik,* Band II und V. Harri Deutsch, Frankfurt a.M. 1988.

[182] Son, J. und Hanratty, T. J. Velocity gradients at the wall flow around a cylinder at Reynolds numbers from 5×10^3 to 10^5. *J. Fluid Mech.* **172**: 353–368. 1969.

[183] Sotiropoulos, F. und Patel, V. C. Prediction of turbulent flow through a transition duct using a second–moment closure. *AIAA J.* **27** (11): 2194–2204. 1994.

[184] Sotiropoulos, F. und Patel, V. C. Turbulence anisotropy and near–wall modelling in predicting three–dimensional shear–flows. *AIAA J.* **33** (3): 504–514. 1995.

[185] Spalart, P. R. Numerical study of sink flows. *J. Fluid Mech.* **172**: 307–328. 1986.

[186] Spalart, P. R. *Strategies for turbulence modelling and simulation*, Band 4 der Reihe *Engineering Turbulence Modelling and Experiments.* Elsevier, Amsterdam, 3–17. 1999.

[187] Spalart, P. R. und Allmaras, S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper* 92–0439, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1992.

[188] Spalart, P. R. und Shur, M. On the sensitization of turbulence to rotation and curvature. *Aerospace Science and Technology* **5**: 297–302. 1997.

[189] Spalart, P. R. und Speziale, C. G. A note on constraints in turbulence modelling. *J. Fluid Mech.* **391**: 373–376. 1999.

[190] Spencer, A. J. M. Theory of Invariants. *Continuum Physics* **1**: 239–352. 1971, Ed. A.C. Eringen, cademic Press, New–York.

[191] Spencer, A. J. M. und Rivlin, R. S. The Theory of Matrix Polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua. *Arch. for Rational Mechanical Anal.* **2**: 309–336. 1959.

[192] Speziale, C. G. On nonlinear $k - l$ and $k - \varepsilon$ models of turbulence. *J. Fluid Mech.* **178**: 459–475. 1987.

[193] Speziale, C. G. A review of Reynolds stress turbulence closures for turbulent shear flows. ICASE Report 95-15, Institute for Computer Application in Science and Engineering, NASA Langley Research Center. 1995.

[194] Speziale, C. G. Comparison of explicit and traditional algebraic stress models. *AIAA Journal* **35** (9): 1506–1509. 1997.

[195] Speziale, C. G. Turbulence modeling for time dependent RANS and VLES. *AIAA Journal* **36** (6): 173–184. 1997.

[196] Speziale, C. G., Abid, R. und Anderson, E. C. Critical evaluation of two–equation models for near–wall turbulence. *AIAA J.* **30** (2): 324–331. 1992.

[197] Speziale, C. G. und Mhuiris, N. M. G. On the prediction of homogeneous states in equilibrium turbulence. *J. Fluid Mech.* **209**: 591–615. 1989.

[198] Speziale, C. G. und Mhuiris, N. M. G. Scaling laws for homogeneous turbulent shear flows in a rotating frame. *Phys. Fluids* A **1**: 294–301. 1989.

[199] Speziale, C. G., Sarkar, S. und Gatski, T. B. Modelling the pressure–strain correlation of turbulence: An invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.* **227**: 245–272. 1991.

[200] Speziale, C. G. und Xu, X.-H. Towards the development of second-order closure models for non–equilibrium turbulent flows. *Int. J. Heat Fluid Flow* **17**: 238–244. 1996.

[201] Spurk, J. *Strömungslehre*. Springer, Berlin. 1989.

[202] Steenbergen, W. und Parchen, P. R. An experimental and numerical study of turbulent swirling pipe flows. *ASME J. Fluids Eng.* **120**: 54–61. 1998.

[203] Sutherland, D. M. The viscosity of gases and molecular forces. *Phil. Mag. Ser.* **36** (5): 507–530. 1893.

[204] Taulbee, D. B. An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model. *Phys. Fluids* A **4**: 2555–2561. 1992.

[205] Tavoularis, S. und Corrsin, S. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flows with a uniform mean temperature gradient. *J. Fluid Mech.* **227**: 245–272. 1981.

[206] Tennekes, H. und Lumley, J. L. *A first course in turbulence*. MIT Press, Massachussets and London. 1972.

[207] Wallin, S. und Girimaji, S. S. Study of trailing vortex decay. *AIAA Paper* 99–3767, American Inst. of Aeronautics and Astronautics. 1999.

[208] Wallin, S. und Johansson, A. V. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **403**: 89–132. 2000.

[209] Warnack, D. und Fernholz, H. H. The effect of a favourable pressure gradient and of the Reynolds number on an incompressible axisymmetric turbulent boundary layer (Part 1 & 2). *J. Fluid Mech.* **359**: 329–381. 1998.

[210] Wikström, P., Wallin, S. und Johansson, A. V. Derivation of a new explicit algebraic model for the passive scalar flux. Erscheint in *Phys. Fluids*. 2000.

[211] Wilcox, D. C. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal* **26** (11): 1299–1310. 1988.

[212] Wilcox, D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., La Cañada. 1993.

[213] Wilcox, D. C. Simulation of transition with a two-equation turbulence model. *AIAA Journal* **32**: 247–255. 1994.

[214] Wolfram, S. *Mathematica.* Addison–Wesley, New–York. 1992.

[215] Wolfshtein, M. W. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient. *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**: 301–318. 1969.

[216] Xu, X.-H. und Speziale, C. G. Explicit algebraic stress models of turbulence with anisotropic dissipation. *AIAA J.* **34**: 2186–2189. 1996.

[217] Xue, L. *Entwicklung eines effizienten paralellen Lösungsalgorithmus zur numerischen Simulation komplexer turbulenter Strömungen.* Dissertation, Fachbereich 10, Technische Universität Berlin. 1998.

[218] Yakhot, V. und Orzag, S. A. Renormalisation group analysis of turbulence: 1. Basic theory. *Journal Sci. Comput.* **1**: 3. 1988.

[219] Yakhot, V., Orzag, S. A., Thangham, S., Gatski, T. B. und Speziale, C. G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys. Fluids* A **4**: 1510–1520. 1992.

[220] Yang, Z. und Shih, T. H. New time scale based $k - \varepsilon$ model for near–wall turbulence. *AIAA J.* **31**: 1191–1198. 1993.

[221] Ying, S. X., Spaid, F. W., McGinley, C. B. und Rumsey, C. L. Investigation of confluent boundary layers in high–lift flows. *J. Aircraft* **36** (3): 550–562. 1999.

[222] Yoshizawa, A. Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation. *Phys. Fluids* **27**: 1377–1387. 1984.

[223] Zeman, O. Dilatation Dissipation: The concept and application in modelling compressible mixing layers. *Phys. Fluids* **A** (2): 178–188. 1990.

[224] Zheng, Q.-S. Theory of representations for tensor functions – A unified invariant approach to constitutive equation. in *Appl. Mech. Rev.* **47** (11): 545–587. 1994.

Anhang A Invarianten des Anisotropietensors

Der Anisotropietensor der Reynolds–Spannungen (2.6) besitzt als symmetrischer Tensor zweiter Stufe drei reelle Lösungen ξ_k (k=1,2,3) zur Säkulargleichung

$$\begin{aligned} \det\left(b_{ij} - \xi_k \delta_{ij}\right) &= 0 \\ &= \xi_k^3 - I_b \xi_k^2 + II_b \xi_k - III_b = 0\,. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Die in (A.1) verwendeten skalaren Ausdrücke I_b,II_b und III_b sind die Invarianten des Tensors b_{ij}, deren Definition unmittelbar aus der Säkulargleichung folgt:

$$\begin{aligned} I_b = \quad & b_{kk} && = tr\{\underline{\underline{b}}\}\,, \\ II_b = \quad & \tfrac{1}{2}\left(b_{kk}b_{mm} - b_{km}b_{mk}\right) && = \frac{1}{2}\left(tr^2\{\underline{\underline{b}}\} - tr\{\underline{\underline{b}}^2\}\right)\,, \\ III_b = \quad & \det\left(b_{ij}\right) && = \frac{1}{6}\left(b_{kk}b_{mm}b_{nn} - 3b_{kk}b_{mn}b_{nm} + 2b_{km}b_{mn}b_{nk}\right) \\ & && = \frac{1}{6}\left(tr^3\{\underline{\underline{b}}\} - 3tr\{\underline{\underline{b}}\}tr\{\underline{\underline{b}}^2\} + 2tr\{\underline{\underline{b}}^3\}\right)\,. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Die erste Invariante I_b verschwindet aufgrund der Spurfreiheit von b_{ij}. Den drei Eigenwerten ξ_k sind drei paarweise orthogonale Eigenvektoren zugeordnet. Wählt man die Eigenvektoren als Basisvektoren, dann kann b_{ij} durch eine Hauptachsentransformation auf Diagonalgestalt gebracht werden

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}\,. \tag{A.3}$$

Von Interesse ist die Darstellung der Invarianten im Hauptachsensystem von b_{ij}

$$I_b = \quad b_{kk} \quad = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\,, \tag{A.4}$$

$$II_b = \quad -\tfrac{1}{2}\left(b_{km}b_{mk}\right) \quad = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right)\,, \tag{A.5}$$

$$III_b = \quad \tfrac{1}{3}\left(b_{km}b_{mn}b_{nk}\right) \quad = \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3\,. \tag{A.6}$$

Wie man leicht überprüfen kann, gilt für die Diagonalelemente des Anisotropietensors:

$$\frac{2}{3} \geq b_{\alpha\alpha} \geq -\frac{1}{3} \qquad \rightarrow \quad \frac{2}{3} \geq \xi_k \geq -\frac{1}{3}\,. \tag{A.7}$$

Das Realizability-Prinzip legt die Grenzen möglicher Reynolds–Spannungszustände präzise fest. Diese Grenzen lassen sich auf der Basis signifikanter Extrema der beiden Hauptinvarianten II_b und III_b im Hauptachsensystem diskutieren

- Zwei—Komponenten–Turbulenz: $\xi_3 = -1/3\,,$
- achsensymmetrische Turbulenz: $1/6 \geq \xi_2 = \xi_3 \geq -1/3\,.$

Für achsensymmetrische Turbulenz empfiehlt sich die Unterscheidung nach $\xi_2, \xi_3 \geq 0$ und $\xi_2, \xi_3 \leq 0$. Die Bereichsgrenzen bilden in der Invariantenkarte (Abbildung A.1) die Kanten eines Dreiecks.

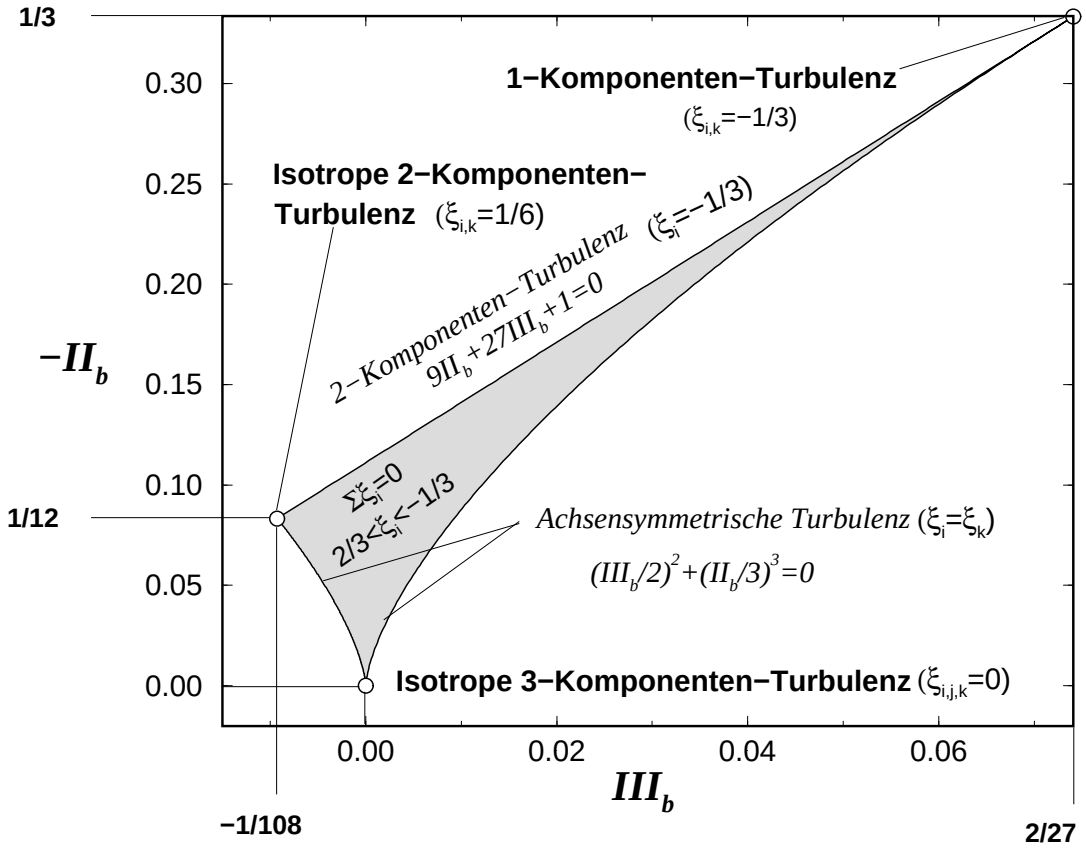


Abbildung A.1: Invariantenkarte des Anisotropietensors der Reynolds–Spannungen.

Die Eckpunkte des Dreiecks werden durch folgende ausgezeichnete Punkte markiert:

- Ein–Komponenten–Turbulenz: $\xi_2 = \xi_3 = -1/3\,, \quad \xi_1 = 2/3\,,$
- Zwei–Komponenten–Isotropie: $\xi_2 = \xi_3 = 1/6\,, \quad \xi_1 = -1/3\,,$
- Drei–Komponenten–Isotropie: $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0\,.$

Das Realizability-Prinzip erlaubt nur Zustände innerhalb des Dreiecks oder entlang seiner Kanten. Im Folgenden soll der Verlauf der Bereichgrenzen erläutert werden:

I: Im Falle der ebenen oder **Zwei–Komponenten–Turbulenz** $\overline{u_i u_3} = 0$ lautet die Säkulargleichung (A.1)

$$\left(-\frac{1}{3} - \xi_k\right)\left[(b_{11} - \xi_k)\,(b_{22} - \xi_k) - b_{12}\right] = 0\,,$$

$$\rightsquigarrow \text{ z.B. : } \xi_3 = -\frac{1}{3} \qquad {}^{(A.4)}\!\rightarrow \xi_1 = \frac{1}{3} - \xi_2\,. \tag{A.8}$$

Die Hauptinvarianten bestimmen sich in diesem Falle zu

$$II_b = -\left(\xi_2^2 + \frac{1}{9} - \frac{\xi_2}{3}\right)\,, \qquad III_b = \frac{\xi_2}{3}\left(\xi_2 - \frac{1}{3}\right)\,. \tag{A.9}$$

Die Linearkombination der Hauptinvarianten repräsentiert eine Geradengleichung

$$\boxed{II_b + 3III_b = -\frac{1}{9}} \tag{A.10}$$

in der $III_b/-II_b$ Ebene. Die Endpunkte dieser Geraden ergeben sich aus zwei spezifischen Zuständen zweifach entarteter Eigenwerte. Der erste Endpunkt repräsentiert den Zustand der Ein–Komponenten–Turbulenz

$$1-\text{C Turbulenz : } \quad \xi_2 = \xi_3 = -\frac{1}{3}\,, \qquad \rightsquigarrow\ III_b = \frac{2}{27}\,, \quad II_b = -\frac{1}{3}\,, \tag{A.11}$$

der zweite Eckpunkt den Zustand isotroper zweidimensionaler Turbulenz

$$2-\text{C Isotropie : } \quad \xi_2 = \xi_3 = \frac{1}{6}\,, \qquad \rightsquigarrow\ III_b = \frac{-1}{108}\,, \quad II_b = -\frac{1}{12}\,. \tag{A.12}$$

II: Achsensymmetrische Turbulenz ist durch den allgemeinen Zustand zweifach entarteter Eigenwerte gekennzeichnet

$$\text{achsensym. Turbulenz : } \quad \xi_2 = \xi_3 \qquad {}^{(A.4)}\!\rightarrow \quad \xi_1 = -2\xi_2\,. \tag{A.13}$$

Hieraus ergibt sich die Verknüpfung der beiden von Null verschiedenen Hauptinvarianten als kubische Beziehung

$$II_b = -3\xi_2^2\,, \qquad III_b = -2\xi_2^3 \qquad \rightarrow \boxed{\left(\frac{III_b}{2}\right)^2 + \left(\frac{II_b}{3}\right)^3 = 0}\,. \tag{A.14}$$

Isotrope dreidimensionale Turbulenz liegt im Falle dreifach entarteter Eigenwerte vor

$$3-\text{C Isotropie : } \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \qquad \rightsquigarrow\ III_b = 0\,, \quad II_b = 0\,. \tag{A.15}$$

Anhang B Koordinatentransformation

Das Strömungsfeld einer verdrallten Scherströmung wird, aufgrund der hypothetisch vorausgesetzten Achsensymmetrie, in geeigneter Weise durch physikalische Zylinderkoordinaten beschrieben

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{e}}_i &= [\underline{\tilde{e}}_r; \underline{\tilde{e}}_\theta; \underline{\tilde{e}}_x] \ , \\ \text{mit} \quad \underline{\tilde{e}}_x = \underline{e}_x \ , \qquad \underline{\tilde{e}}_r &= \cos\theta \underline{e}_y + \sin\theta \underline{e}_z \ , \qquad \underline{\tilde{e}}_\theta = -\sin\theta \underline{e}_y + \cos\theta \underline{e}_z \ . \end{aligned} \tag{B.1}$$

Die Problemstellung ist in Abbildung (B.1) skizziert. Die räumlichen Ableitungen er-

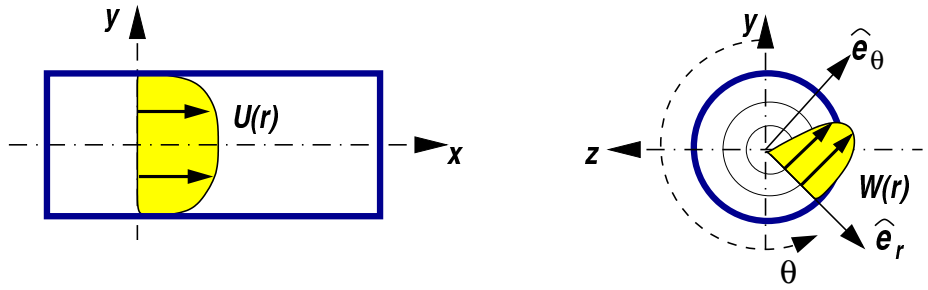


Abbildung B.1: Verdrallte Strömung auf der Basis von Zylinderkoordinaten $< r, \theta, x >$.

geben sich aus

$$\underline{\nabla} = \underline{\tilde{e}}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \qquad \text{mit} \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \left[\frac{\partial}{\partial r}; \frac{\partial}{r \partial \theta}; \frac{\partial}{\partial x} \right] \ . \tag{B.2}$$

Obwohl das Strömungsfeld in Umfangsrichtung homogen ist, kann die Ableitung nach θ wegen der Rotation der Basisvektoren $\underline{\tilde{e}}_i$ nicht vernachlässigt werden. Die Ableitungen der Basisvektoren notieren sich unter Verwendung physikalischer Christoffelsymbole $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ zu

$$\frac{\partial \underline{\tilde{e}}_i}{\partial \tilde{x}_j} = \tilde{\Gamma}^k_{ij} \underline{\tilde{e}}_k \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\Gamma}^2_{12} = -\tilde{\Gamma}^1_{22} = \frac{1}{r} \ . \tag{B.3}$$

Mit Hilfe der in (B.3) definierten Koordinatenableitung erhält man die unten notierte Darstellung häufig verwendeter Differentialoperationen

$$\underline{\nabla} \underline{\tilde{\phi}} = \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\phi}_k \tilde{\Gamma}^j_{ki} \right) \underline{\tilde{e}}_i \underline{\tilde{e}}_j \ , \qquad \underline{\underline{\nabla}} \underline{\tilde{\phi}} = \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_{jk}}{\partial \tilde{x}_i} + \tilde{\phi}_{mk} \tilde{\Gamma}^j_{mi} + \tilde{\phi}_{jm} \tilde{\Gamma}^k_{mi} \right) \underline{\tilde{e}}_i \underline{\tilde{e}}_j \underline{\tilde{e}}_k \ . \tag{B.4}$$

Vernachlässigt man im Weiteren die Ableitungen in Umfangsrichtung, dann ergeben sich die unten genannten transformierten Bilanzgleichungen.

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(U)}{\partial x} + \frac{\partial(rV)}{r\,\partial r} = 0\ . \tag{B.5}$$

Impulsgleichungen

$$\begin{aligned}
x: \quad \frac{\partial(rUU)}{\partial x} + \frac{\partial(rVU)}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(rP)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu r\frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u^2}\,r\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r\frac{\partial U}{\partial r} - \overline{uv}\,r\right)\ , \\
r: \quad \frac{\partial(rUV)}{\partial x} + \frac{\partial(rVV)}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(rP)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu r\frac{\partial V}{\partial x} - \overline{uv}\,r\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r\frac{\partial V}{\partial r} - \overline{v^2}\,r\right) \\
&\quad + \frac{P}{\rho} + W^2 - \nu\frac{V}{r} + \overline{w^2}\ , \\
\theta: \quad \frac{\partial(rUW)}{\partial x} + \frac{\partial(rVW)}{\partial r} &= +\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu r\frac{\partial W}{\partial x} - \overline{uw}\,r\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r\frac{\partial W}{\partial r} - \overline{vw}\,r\right) \\
&\quad - VW - \overline{vw} - \nu\frac{W}{r}\ .
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Geschwindigkeitsgradienten–Tensoren

Die additive Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten–Tensors nach symmetrischem und antimetrischem Anteil lautet

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_k\tilde{\Gamma}^i_{kj} = S_{ij} + W_{ij}\ ,$$

mit

$$\begin{aligned}
S_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + U_k\left(\tilde{\Gamma}^i_{kj} + \tilde{\Gamma}^j_{ki}\right)\right)\ , \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} & 0.5r\frac{\partial(W/r)}{\partial r} & 0.5\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \\ 0.5r\frac{\partial(W/r)}{\partial r} & \frac{V}{r} & 0.5\frac{\partial W}{\partial x} \\ 0.5\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) & 0.5\frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial x} \end{pmatrix}\ ,
\end{aligned} \tag{B.7}$$

und

$$\begin{aligned}
W_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + U_k\left(\tilde{\Gamma}^i_{kj} - \tilde{\Gamma}^j_{ki}\right)\right)\ , \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{0.5}{r}\frac{\partial(rW)}{\partial r} & 0.5\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial r}\right) \\ \frac{0.5}{r}\frac{\partial(rW)}{\partial r} & 0 & 0.5\frac{\partial W}{\partial x} \\ 0.5\left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) & -0.5\frac{\partial W}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}\ .
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Transportgleichungen des linearen Reynolds–Spannungsmodells

Mit Hilfe der Transformationsvorschriften (B.1–B.4) ergeben die einzelnen Terme des linearen Reynolds–Spannungsmodells in physikalischen Zylinderkkordinaten zu

$$
\begin{aligned}
\underline{\text{Konvektion :}} \qquad \tilde{C}_{xx} &= U\frac{\partial\overline{u}^2}{\partial x} + V\frac{\partial\overline{u}^2}{\partial r}\,, \\
\tilde{C}_{rr} &= U\frac{\partial\overline{v}^2}{\partial x} + V\frac{\partial\overline{v}^2}{\partial r} \qquad - 2\overline{vw}\frac{W}{r}\,, \\
\tilde{C}_{\theta\theta} &= U\frac{\partial\overline{w}^2}{\partial x} + V\frac{\partial\overline{w}^2}{\partial r} \qquad + 2\overline{vw}\frac{W}{r}\,, \\
\tilde{C}_{xr} &= U\frac{\partial\overline{uv}}{\partial x} + V\frac{\partial\overline{uv}}{\partial r} \qquad - \overline{uw}\frac{W}{r}\,, \\
\tilde{C}_{r\theta} &= U\frac{\partial\overline{vw}}{\partial x} + V\frac{\partial\overline{vw}}{\partial r} \qquad + \left(\overline{v^2} - \overline{w^2}\right)\frac{W}{r}\,, \\
\tilde{C}_{x\theta} &= U\frac{\partial\overline{uw}}{\partial x} + V\frac{\partial\overline{uw}}{\partial r} \qquad + \overline{uv}\frac{W}{r}\,,
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\text{Produktion :}} \qquad \tilde{P}_{xx} &= -2\left(\overline{u}^2\frac{\partial U}{\partial x} + \overline{uv}\frac{\partial U}{\partial r}\right)\,, \\
\tilde{P}_{rr} &= -2\left(\overline{uv}\frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v}^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \qquad + 2\overline{vw}\frac{W}{r}\,, \\
\tilde{P}_{\theta\theta} &= -2\left(\overline{uw}\frac{\partial W}{\partial x} + \overline{vw}\frac{\partial W}{\partial r} + \overline{w}^2\frac{V}{r}\right)\,, \\
\tilde{P}_{xr} &= -\left(\overline{u}^2\frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v^2}\frac{\partial U}{\partial r} - \overline{uv}\frac{V}{r}\right) \qquad + \overline{uw}\frac{W}{r}\,, \\
\tilde{P}_{r\theta} &= -\left(\overline{uw}\frac{\partial V}{\partial x} + \overline{uv}\frac{\partial W}{\partial x} + \overline{v^2}\frac{\partial W}{\partial r} - \overline{vw}\frac{\partial U}{\partial x}\right) \qquad + \overline{w^2}\frac{W}{r}\,, \\
\tilde{P}_{x\theta} &= -\left(\overline{vw}\frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uv}\frac{\partial W}{\partial r} + \overline{u^2}\frac{\partial W}{\partial x} - \overline{uw}\frac{\partial V}{\partial r}\right)\,.
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

Die Druck–Scher–Korrelationsterme und Dissipationsterme verändern sich im Rahmen der Transformation nicht unmittelbar weswegen sie hier nicht nochmals gesondert aufgeführt werden sollen. Die Diffusionsbeiträge spielen im Rahmen der (E)ASM eine untergeordnete Rolle (vgl. Kapitel 4).

Anhang C Caley–Hamilton Theorem

Die allgemein bekannte Form des Caley–Hamilton Theorems zur Reduktion höherer Vielfacher von Tensoren des R^3 lautet

$$A^3_{ij} = (A_{kk})\ A^2_{ij} - 0.5(A_{kk}A_{ll} - A^2_{kk})\ A_{ij} + (\det[A_{ij}])\ \delta_{ij}\ . \tag{C.1}$$

Diese charakteristische Gleichung für Tensoren läßt sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung des Kotensors ableiten (Schade 1996). Eine für drei unterschiedliche, nicht notwendigerweise reguläre Tensoren generalisierte Variante ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
&A_{il}B_{lk}C_{kj} + A_{il}C_{lk}B_{kj} + B_{il}C_{lk}A_{kj} + B_{il}A_{lk}C_{kj} + C_{il}B_{lk}A_{kj} + C_{il}A_{lk}B_{kj} = \\
&A_{ij}(B_{lk}C_{kl}) + B_{ij}(A_{lk}C_{kl}) + C_{ij}(A_{lk}B_{kl}) + \delta_{ij}(A_{lm}B_{mk}C_{kl} + C_{lm}B_{mk}A_{kl}) + \\
&(A_{ik}B_{kj} + B_{ik}A_{kj})C_{ll} + (A_{ik}C_{kj} + C_{ik}A_{kj})B_{ll} + (B_{ik}C_{kj} + C_{ik}B_{kj})A_{ll} - \\
&\qquad A_{ij}(B_{ll}C_{kk}) - B_{ij}(A_{ll}C_{kk}) - C_{ij}(A_{ll}B_{kk}) \quad ,
\end{aligned} \tag{C.2}$$

wobei die letzten beiden Zeilen für spurfreie Tensoren ($A_{ii} = B_{ii} = C_{ii} = 0$) verschwinden. Die Beziehungen (C.1–C.2) lassen sich unmittelbar aus den Rechenregeln für Determinanten ableiten (siehe unten). Für die in Kapitel 5 benutzten Umformungen sind vor allem folgende symbolische Zusammenhänge für zwei spurfreie Tensoren, von denen einer symmetrisch und einer antimetrisch sei, von Bedeutung

$$\underline{\underline{A}}^3 = 0.5\, tr\{\underline{\underline{A}}^2\}\ \underline{\underline{A}} + \frac{1}{3} tr\{\underline{\underline{A}}^3\}\ \underline{\underline{\delta}} \tag{C.3}$$

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}^2 = 0.5\, tr\{\underline{\underline{A}}^2\}\ \underline{\underline{B}} + tr\{\underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}\}\ \underline{\underline{\delta}}\ , \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}^2\cdot\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}^2 + \underline{\underline{B}}^2\cdot\underline{\underline{A}}^2 &= tr\{\underline{\underline{B}}^2\}\ \underline{\underline{A}}^2 + tr\{\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}^2\}\ \underline{\underline{A}} + 0.5\ tr\{\underline{\underline{A}}^2\}\ \underline{\underline{B}}^2 \\
&+ \left(tr\{\underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}^2\} - 0.5\, tr\{\underline{\underline{A}}^2\}\, tr\{\underline{\underline{B}}^2\}\right)\ \underline{\underline{\delta}}\ ,
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}^2 = -0.5\, tr\{\underline{\underline{A}}^2\}\ \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}} &- (\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}})\ \det(\underline{\underline{A}}) \\
&+ tr\{\underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{\underline{B}}\}\ \underline{\underline{A}}^2\ .
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Hierin ist die Spurbildung (Kontraktion der freien Indizes) durch geschweifte Klammern gekennzeichnet (z.B. $tr\{\underline{\underline{A}}^2\} = A^2_{ii} = A_{ik}A_{ki}$).

Caley–Hamilton Theorem im R^2

Viele Strömungssituationen sind zumindest näherungsweise durch den analogen (einfachen) Rangabfall des Scherraten– und Wirbeltensors gekennzeichnet. In diesem Fall genügen beide Tensoren einer zweidimensionalen Form

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{C.7}$$

welche teilweise einer vorhergehenden Hauptachsentransformation bedarf. Für 3×3 Matrizen vom Rang Zwei kann eine restriktivere Form des Caley–Hamilton Theorems formuliert werden, mit Hilfe dessen sich Tensoren zweiten Grades auf lineare Terme zurückführen lassen. Die mit einem Rangabfall verbundene Verringerung des Grades erkennt man deutlich anhand von Gleichung (C.1); für verschwindende Determinanten ($\det A_{ij}$) läßt sich die klassische Caley–Hamilton Beziehung zu einer quadratischen Gleichung kürzen.

Die allgemeine Herleitung der zweidimensionalen Caley–Hamilton Gleichung geschieht analog zur Entwicklung des oben skizzierten Theorems für quadratische Matrizen vom Rang Drei. Sie verknüpft aufgrund des geringeren Ranges jedoch nur noch zwei Matrizen A_{ij} und B_{ij}. Die Indizes der 2×2 Matrizen A_{ij} und B_{ij} können nur zwei veschiedene Werte $(1, 2)$ annehmen, dies gilt auch für eine entsprechend definierte Einheitsmatrix $\underline{\underline{\delta}}^{(2)}$ des R^2

$$\begin{bmatrix} \delta^{(2)}_{ip} & \delta^{(2)}_{iq} & \delta^{(2)}_{ir} \\ \delta^{(2)}_{jp} & \delta^{(2)}_{jq} & \delta^{(2)}_{jr} \\ \delta^{(2)}_{kp} & \delta^{(2)}_{kq} & \delta^{(2)}_{kr} \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \delta^{pqr\,(2)}_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta^{(2)}_{ip} & \delta^{(2)}_{iq} & \delta^{(2)}_{ir} \\ \delta^{(2)}_{jp} & \delta^{(2)}_{jq} & \delta^{(2)}_{jr} \\ \delta^{(2)}_{kp} & \delta^{(2)}_{kq} & \delta^{(2)}_{kr} \end{vmatrix} = 0 , \tag{C.8}$$

weswegen die Determinante $\delta^{pqr\,(2)}_{ijk}$ in (C.8) verschwindet. Multipliziert man hierin die erste Zeile mit A_{pi} und die zweite Zeile mit B_{qj}, dann ergibt sich

$$\begin{vmatrix} A_{pp} & A_{pq} & A_{pr} \\ B_{qp} & B_{qq} & B_{qr} \\ \delta^{(2)}_{kp} & \delta^{(2)}_{kq} & \delta^{(2)}_{kr} \end{vmatrix} = 0 . \tag{C.9}$$

Löst man die zuletzt notierte Determinante nach der dritten Zeile auf, dann ergibt sich die gesuchte Caley–Hamilton Beziehung des R^2

$$A_{ik}B_{kj} + B_{ik}A_{kj} = A_{ij}B_{kk} + B_{ij}A_{kk} - \delta^{(2)}_{ij}\left(A_{kk}B_{kk} - A_{ik}B_{ki}\right) . \tag{C.10}$$

Hieraus läßt sich mit Hilfe von $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$ das Pendant zur Gleichung (C.1) gewinnen

$$A^2_{ij} = A_{ij}\left(A_{kk}\right) - 0.5\,\delta^{(2)}_{ij}\left(A_{kk}A_{ll} - A^2_{kk}\right) . \tag{C.11}$$

Multipliziert man (C.10) mit $\underline{\underline{B}}$, dann ergibt sich mittels (C.11)

$$B_{ik}\,A_{kl}\,B_{lj} = 0.5\,\left[A_{ij} - \delta^{(2)}_{ij}\,A_{ll}\right]\left(B_{kk} - B^2_{kk}\right). \tag{C.12}$$

Für spurfreie Tensoren $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$, von denen einer symmetrisch und einer antimetrisch ist, findet man die besonders einfachen Zusammenhänge in symbolischer Schreibweise

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}\,, \tag{C.13}$$

$$\underline{\underline{A}}^2 = 0.5\;tr\{\underline{\underline{A}}^2\}\;\underline{\underline{\delta}}^{(2)}\,, \tag{C.14}$$

$$\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = -0.5\;tr\{\underline{\underline{B}}^2\}\;\underline{\underline{A}}\,. \tag{C.15}$$

Mit derselben Technik lassen sich analoge Beziehungen zur Reduktion der N–ten Potenzen von N Matrizen des R^N aus

$$\delta^{ijk\ldots N+1(N)}_{pqr\ldots N+1(N)} = 0$$

entwickeln.

Reduktion der dreidimensionalen Funktionsbasis im R^2

Mit Hilfe der oben zusammengetragenen zweidimensionalen Caley–Hamilton Formeln, hier insbesondere der Gleichung (C.14), lassen sich die zehn Generatoren der dreidimensionalen Funktionsbasis (3.6) auf die ersten drei Generatoren reduzieren

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \underline{\underline{s}}\,, \tag{C.16}$$

$$\underline{\underline{T}}^{(2)} = \underline{\underline{s}}\cdot\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{w}}\cdot\underline{\underline{s}}\,,$$

$$\underline{\underline{T}}^{(3)} = \underline{\underline{s}}^2 - \frac{1}{3}\,tr\{\underline{\underline{s}}^2\}\,\underline{\underline{\delta}} = 0.5\;tr\{\underline{\underline{s}}^2\}\;\underline{\underline{\delta}}^{(2)} - \frac{1}{3}\;tr\{\underline{\underline{s}}^2\}\,\underline{\underline{\delta}} = 0.5\,\eta_1\left(\underline{\underline{\delta}}^{(2)} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\delta}}\right)\,,$$

$$\underline{\underline{T}}^{(4)} = \underline{\underline{w}}^2 - \frac{1}{3}\;tr\{\underline{\underline{w}}^2\}\,\underline{\underline{\delta}} = 0.5\;tr\{\underline{\underline{w}}^2\}\;\underline{\underline{\delta}}^{(2)} - \frac{1}{3}\;tr\{\underline{\underline{w}}^2\}\,\underline{\underline{\delta}} = \frac{\eta_2}{\eta_1}\,\underline{\underline{T}}^{(3)}\,,$$

$$\underline{\underline{T}}^{(5)} = \underline{\underline{w}}\cdot\underline{\underline{s}}^2 - \underline{\underline{s}}^2\cdot\underline{\underline{w}} = 0.5\;tr\{\underline{\underline{s}}^2\}\;\left(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{w}}\right) = \underline{\underline{0}}\,,$$

$$\underline{\underline{T}}^{(6)} = \underline{\underline{w}}^2\cdot\underline{\underline{s}} + \underline{\underline{s}}\cdot\underline{\underline{\omega}}^2 - \frac{2}{3}\;tr\{\underline{\underline{s}}\cdot\underline{\underline{w}}^2\}\underline{\underline{\delta}} = \eta_2\,\underline{\underline{s}} = \eta_2\,\underline{\underline{T}}^{(1)}\,,$$

$$\underline{\underline{T}}^{(7)} = \underline{\underline{w}}^2\cdot\underline{\underline{s}}\cdot\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{w}}\cdot\underline{\underline{s}}\cdot\underline{\underline{w}}^2 = 0.5\,\eta_2\,\underline{\underline{T}}^{(2)}\,,$$

$$\underline{\underline{T}}^{(8)} = \underline{\underline{s}}^2\cdot\underline{\underline{w}}\cdot\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{s}}\cdot\underline{\underline{w}}\cdot\underline{\underline{s}}^2 = -0.5\,\eta_1\,\underline{\underline{T}}^{(2)}\,,$$

$$\underline{\underline{T}}^{(9)} = \underline{\underline{s}}^2\cdot\underline{\underline{w}}^2 + \underline{\underline{w}}^2\cdot\underline{\underline{s}}^2 - \frac{2}{3}\;tr\{\underline{\underline{s}}^2\cdot\underline{\underline{w}}^2\}\;\underline{\underline{\delta}} = 0.5\,\eta_1\eta_2\;\underline{\underline{\delta}}^{(2)} - \frac{1}{3}\eta_1\eta_2\;\underline{\underline{\delta}} = \eta_2\;\underline{\underline{T}}^{(3)}\,,$$

$$\underline{\underline{T}}^{(10)} = \underline{\underline{w}}\cdot\underline{\underline{s}}^2\cdot\underline{\underline{w}}^2 - \underline{\underline{w}}^2\cdot\underline{\underline{s}}^2\cdot\underline{\underline{w}} = 0.25\,\eta_1\eta_2\,\left(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{w}}\right) = \underline{\underline{0}}\,.$$

In derselben Weise vereinfachen sich die Invarianten (3.7) im R^2 zu

$$\begin{aligned} \eta_0 &= s_{kk} = 0 \,, \\ \eta_1 &= s_{kk}^2 \,, \\ \eta_2 &= w_{kk}^2 \,, \\ \eta_3 &= s_{kk}^3 = 0.5\,\eta_1\, s_{kk} = 0 \,, \\ \eta_4 &= s_{kl} w_{lk}^2 = 0.5\,\eta_2\, s_{kk} = 0 \,, \\ \eta_5 &= s_{kl}^2 w_{lk}^2 = 0.5\,\eta_1\,\eta_2 \,. \end{aligned} \tag{C.17}$$

In zweidimensionalen Reynolds–gemittelten Strömungsfeldern verbleiben daher nur zwei Invarianten (η_1, η_2) und drei Generatoren. Als dritter Generator kann wahlweise die zweidimensionale Einheitsmatrix $\underline{\underline{\delta}}^{(2)}$ oder $\underline{\underline{s}}^2$ verwendet werden, weswegen die Integritätsbasis ein Element weniger als die Funktionsbasis besitzt.

Häufig verwendete algebraische Umformungen

Beachtet man, daß die Spur einer Matrix zyklisch vertauschbar ist, d.h.

$$\{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}\} = \{\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}}\} = \{\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}\} \,,$$

dann finden sich für die quadratische Drei–Generator–Basis $\mathcal{F}_{\mathrm{GS}}$

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \underline{\underline{s}} \,, \qquad \underline{\underline{T}}^{(2)} = \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{w}}^* - \underline{\underline{w}}^* \cdot \underline{\underline{s}} \,, \qquad \underline{\underline{T}}^{(3)} = \underline{\underline{s}}^2 - \frac{\eta_1}{3}\underline{\underline{\delta}}$$

die folgenden häufig verwendeten algebraischen Umformungen

$$\begin{aligned} &\{\underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)}\} = \eta_1 \,, \\ &\{\underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = 0 \,, \\ &\{\underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = \eta_3 \,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\{\underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = \eta_1\eta_2 - 6\eta_5 \,, \\ &\{\underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = 0 \\ &\{\underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = \eta_1^2/6 \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)}\} = \eta_3 \,, \\ &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = 0 \,, \\ &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = \eta_1^2/6 \,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)}\} = 0 \,, \\ &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = 3\eta_5 - 0.5\eta_1\eta_2 \,, \\ &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = 0 \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)}\} = 0 \,, \\ &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = -0.5(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4) \,, \\ &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = 0 \,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)}\} = 0.5\eta_1\eta_2 - 3\eta_5 \,, \\ &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = 0 \,, \\ &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = -0.5(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4) \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)}\} = \eta_1^2/6 \,, \\ &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = 0 \,, \\ &\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = \eta_1\eta_3/6 \,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)}\} = 0 \,, \\ &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = 0.5(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4) \,, \\ &\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = 0 \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{\underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = 0 \,, \\ &\{\underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = 0 \,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\{\underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)}\} = -\eta_1/36 + \eta_3^2/3 \,, \\ &\{\underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}\} = -1.5\eta_1\eta_5 + \tfrac{5}{12}\eta_1\eta_2 - \tfrac{2}{3}\eta_3\eta_4 \,. \end{aligned}$$

Zur Herleitung der vereinfachten dreidimensionalen Formulierung aus Kapitel 8.5 wurden folgende algebraische Identitäten benutzt

$$\{\underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = \eta_4 \;, \qquad \{\underline{\underline{T}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = \eta_2^2/6 \;,$$
$$\{\underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = 0 \;, \qquad \{\underline{\underline{T}}^{(5)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = 0 \;,$$
$$\{\underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = \eta_5 - \eta_1\eta_2/3 \;,$$

$$\{\underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = 0 \;, \qquad \{\underline{\underline{T}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = 0 \;,$$
$$\{\underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = \eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3 \;, \qquad \{\underline{\underline{T}}^{(5)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = \eta_1(\eta_5 - 0.5\,\eta_1\eta_2) - 2\eta_3\eta_4 \;,$$
$$\{\underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = 0 \;,$$

$$\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = \eta_5 - \eta_1\eta_2/3 \;, \qquad \{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = -\eta_2\eta_4/6 \;,$$
$$\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = 0 \;, \qquad \{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = -\eta_6 \;,$$
$$\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = \eta_1\eta_4/6 \;,$$

$$\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = 0 \;, \qquad \{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = 0 \;,$$
$$\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = 0 \;, \qquad \{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = 0 \;,$$
$$\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)}\} = 0 \;,$$

$$\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = 0 \;, \qquad \{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = -\eta_6 \;,$$
$$\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = \tfrac{\eta_1}{2}(\eta_5 - 0.5\eta_1\eta_2) - \eta_3\eta_4 \;, \qquad \{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = \tfrac{5\eta_1\eta_2\eta_3}{12} - \tfrac{\eta_1^2\eta_4}{4} + \eta_3\eta_5 \;,$$
$$\{\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = 0 \;,$$

$$\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = \tfrac{1}{2}(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3) \;, \qquad \{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = 0 \;,$$
$$\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = 3\eta_6 \;, \qquad \{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = 0 \;,$$
$$\{\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(5)}\} = -\tfrac{\eta_1}{2}(\eta_5 - 0.5\eta_1\eta_2) + \eta_3\eta_4 \;.$$

Anhang D Wandturbulenz

Die wandnahe Strömung kann in erster Näherung als einachsige Scherung auf der Basis eines lokal–orthogonalen Wandkoordinatensystems angesehen werden

$$\underline{U} = \tilde{U}_1(\tilde{x}_2)\,\underline{\tilde{e}}_1 \qquad \text{mit} \quad \tilde{x}_2 \sim n\,,$$

in dem n bzw. $\tilde{x}_2$ den Wandnormalenabstand kennzeichnen. Der Übersichtlichkeit wegen wird die Kennzeichnung $(\tilde{\cdot})$ im Folgenden fallengelassen. Aus der Wandhaftbedingung schließt man für die Schwankungsgeschwindigkeiten einer im Mittel zweidimensionalen, krümmungsarmen ($\tilde{\Gamma}^k_{ij} = 0$) Grundströmung

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{n=0} = \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right|_{n=0} = 0\,, \tag{D.1}$$

und weiter aus der Kontinuitätsbeziehung für inkompressible Medien

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{n=0} = 0\,. \tag{D.2}$$

Die Entwicklung der wandnahen Fluktuationen in Potenzen des Wandabstands lautet somit

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + ... \\ u_2 &= \qquad b_2 n^2 + b_3 n^3 + ... \\ u_3 &= c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3 + ...\ , \end{aligned} \tag{D.3}$$

weswegen sich die Reynoldsspannungen wie folgt darstellen lassen

$$\begin{aligned} \overline{u_1^2} &= a_1^2 n^2 + 2a_1 a_2 n^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_2)\, n^4 + ... \\ \overline{u_2^2} &= \qquad\qquad\qquad\qquad b_2^2\, n^4 + ... \\ \overline{u_3^2} &= c_1^2 n^2 + \ 2c_1 c_2 n^3 + \ (c_2^2 + 2c_1\, c_2)\, n^4 + ... \\ -\overline{u_1 u_2} &= \qquad\qquad a_1 b_2 n^3 + (a_2 b_2 + a_1 b_3) n^4 + ...\ . \end{aligned} \tag{D.4}$$

Für die Turbulenzenergie egibt sich in Wandnähe ein quadratischer Anstieg

$$k = \frac{1}{2}(a_1^2 + c_1^2) n^2 + \frac{1}{2}(a_1 a_2 + c_1 c_2) n^3 + ...\ . \tag{D.5}$$

Die Koeffizienten der führenden Reihenglieder lassen sich z.B. durch Vergleich mit den Daten der direkten numerischen Simulation einer vollentwickelten Kanalströmung von Kim et al. (1987) ermitteln (Abbildung D.1). Die auf diesem Wege gewonnenen Koeffizienten sind in Tabelle D.1 zusammengefasst. Hieraus ergibt sich eine erste Näherung für die wandnahen Verläufe der Komponenten des Anisotropietensors

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{a_1^2}{a_1^2 + c_1^2} - \frac{1}{3} \approx 0.41\,, \qquad b_{22} = \frac{b_2^2}{a_1^2 + c_1^2}\, n^2 - \frac{1}{3} \approx -0.33\,, \\ b_{33} &= \frac{c_1^2}{a_1^2 + c_1^2} - \frac{1}{3} \approx -0.08\,, \qquad b_{12} = \frac{a_1 b_2}{a_1^2 + c_1^2}\, n \approx 0\,. \end{aligned} \tag{D.6}$$

Tabelle D.1: Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung (D.4) durch Auswertung der DNS Ergebnisse für die Kanalströmung nach Abbildung (D.1).

a_1^2	b_2^2	c_1^2	$a_1 b_2$	$0.5(a_1^2 + c_1^2)$
$1.5 \cdot 10^{-1}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$9.0 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$

Man beachte, daß sich die Summe der führenden Normalspannungskoeffizienten in sehr guter Übereinstimmung mit dem führenden Koeffizient der Turbulenzenergie befindet, der Vergleich zwischen $\sqrt{a_1^2\, b_2^2}$ und dem führenden Schubspannungskoeffizienten $a_1 b_2$ demgegenüber deutliche Inkonsistenzen aufweist. Zwei der drei Hauptdiagonalenele-

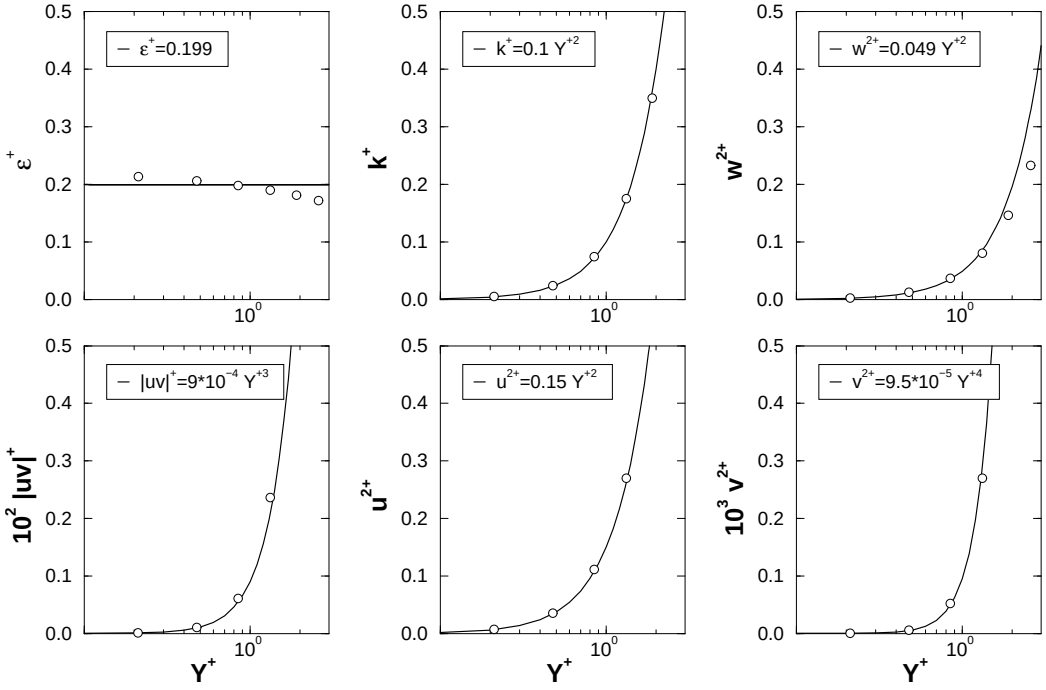


Abbildung D.1: Asymptotisches Verhalten normierter statistischer Turbulenzvariablen aus direkter numerischer Simulation (Kim et al. 1987) einer turbulenten Kanalströmung bei Re_τ=395 ($\overline{u_i u_j}^+ = \overline{u_i u_j}/u_\tau^2$, $\varepsilon^+ = \varepsilon\nu/u_\tau^4$, $Y^+ = n u_\tau/\nu$).

mente des Dissipationstensors ε_{ij} besitzen einen endlichen Wandwert, wohingegen die Nebendiagonalenelemente einen in n linearen Wert besitzen (vgl. Abbildung D.1)

$$\varepsilon_{ij} \; := \; 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)} \tag{D.7}$$

$$\rightsquigarrow \quad \varepsilon_{ss} = 2\nu\, a_1^2\,, \quad \varepsilon_{nn} = 0\,, \quad \varepsilon_{zz} \;=\; 2\nu\, c_1^2\,, \qquad \text{aber z.B.} \quad \varepsilon_{sn} = 4\nu\, a_1 b_2 n\,.$$

Asymptotisches Verhalten des $k-\varepsilon$ Modells

In Anlehnung an die in Kapitel 8.2 gemachten Bemerkungen soll für das $k-\varepsilon$ Modell die Konsistenz der high–Re Formulierung zum Ergebnis der oben durchgeführten asymptotischen Entwicklung überprüft werden. Mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung (D.4) sowie der in Wandnähe gültigen Geschwindigkeitsbeziehung der zähen Unterschicht

$$\underline{U} = U_1(n)\,\underline{\tilde{e}}_1 \qquad \text{mit} \quad U_1(n) = \frac{n\,U_\tau^2}{\nu}$$

lassen sich die einzelnen Terme nach ihrer Größenordnung in der viskosen Unterschicht abschätzen. Hierbei verschwinden obgrund der üblichen Grenzschichtabschätzungen zunächst die konvektiven Terme

$$0 = P - \varepsilon - \mathrm{Diff}_k \quad . \tag{D.8}$$

Die Beiträge der Turbulenzenergieproduktion $P = \overline{u_1 u_2}\;\partial U_1/\partial n$ sind nach (D.4) von dritter Ordnung, diejenigen aus turbulenter Diffusion $\mathrm{Diff}_k = (c_\mu\; k^2/\varepsilon\;\partial k/\partial n)_{,n}$ von vierter Ordnung klein. Im allgemeinen geht man daher vom Gleichgewicht zwischen molekular-diffusiven und dissipativen Termen der Turbulenzenenergiegleichung aus

$$0 = \nu\frac{\partial^2 k}{\partial n^2} - \varepsilon \; . \tag{D.9}$$

Gleichung (D.9) steht in Einklang mit den oben skizzierten Ergebnissen und liefert darüber hinaus mit Hilfe von (D.5) eine Dirichletbedingung für den ersten Feldwert nahe fester Berandungen

$$\varepsilon_{(\mathrm{NW})} = \nu\frac{\partial^2 k}{\partial n^2} = \left(2\nu\frac{k}{n^2}\right)_{(\mathrm{NW})} \quad .$$

Eine Abschätzung einzelner Terme der Basisgleichung der Dissipationsrate verdeutlicht die Problematik von $k-\varepsilon$ Formulierungen im low-Re Bereich

$$\frac{D\,\varepsilon}{Dt} = 0 = P_\varepsilon - \mathrm{Diss}_\varepsilon + \mathrm{Diff}_\varepsilon \; ,$$

$$P_\varepsilon \sim \frac{\varepsilon}{k}P \sim n \; , \qquad \mathrm{Diss}_\varepsilon \sim \frac{\varepsilon^2}{k} \sim n^{-2} \; , \qquad \mathrm{Diff}_\varepsilon \approx 0 \; . \tag{D.10}$$

Gleichung (D.10) läßt sich ohne low-Re Modifikation nicht lösen. Um das Gleichgewicht wieder herzustellen, wird im semi-viskosen Bereich entweder ein zusätzlicher Produktions- bzw. Quellterm (z.B. Lien und Leschziner (1993), So et al. (1997)), oder aber eine Reduktion des Vernichtungsterms ($\varepsilon \to \varepsilon - \varepsilon_w$) durch entsprechende low-Re Funktionen eingebracht (z.B. Jones und Launder (1972), Chien (1982), Jakirlić (1997)).

Asymptotisches Verhalten des $k-\omega$ Modells

Ausgangspunkt der Konsistenzprüfung ist wiederum das für kleine Turbulenz–Reynoldszahlen gültige Gleichgewicht zwischen molekularer Diffusion und Dissipation

$$0 = -\beta^*\omega k + \frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial n}\right) , \qquad \beta^* = 0.09 , \tag{D.11}$$

$$0 = -\beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\frac{\partial \omega}{\partial n}\right) , \qquad \beta = \frac{3}{40} . \tag{D.12}$$

Hierfür lassen sich mit Hilfe der Ansatzfunktionen

$$\omega = \zeta n^p , \qquad k = \zeta^* n^q , \tag{D.13}$$

geschlossene analytische Lösungen angeben

$$(D.11) \; : \qquad \zeta = \frac{6\nu}{\beta} \quad \text{und} \quad p = -2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \omega_{(P)} = \frac{6\nu_{(P)}}{\beta\,\Delta n^2} , \tag{D.14}$$

$$(D.12) \; : \qquad \frac{\beta}{\beta*}(q^2 - q) = 6 \qquad \rightsquigarrow \quad q = 0.5\left(1 + \sqrt{1 + 24\frac{\beta^*}{\beta}}\right) \approx 3.23 . \tag{D.15}$$

Die Beziehung (D.14) dient als Randbedingung für die spezifische Dissipationsrate im wandnächsten Feldpunkt P. Der Wandwert ist ohne Bedeutung und kann nach seiner Entkopplung vom Gleichungssystem dem benachbarten Feldwert gleichgesetzt werden. Gleichung (D.15) deutet auf ein asymptotisches Fehlverhalten der Turbulenzenergiegleichung mit abnehmendem Wandabstand hin ($q \neq 2$). Das Problem läßt sich durch eine low–Re Modifikation des Verhältnisses β^*/β bereinigen (z.B. Wilcox (1994) oder Peng, Davidson und Holmberg (1997))

$$\lim_{Re_t \to 0} \frac{\beta^*}{\beta} = \frac{1}{3} \qquad \rightsquigarrow \qquad \beta^*_{(NW)} \to \frac{1}{40} = \frac{5}{18}\,\beta \quad . \tag{D.16}$$

Anhang E Hintergrundmodelle

Der Anhang gibt einen Überblick über die in dieser Arbeit verwendeten Zwei–Parameter–Modelle. Die Auswahl der Modelle erfolgte exemplarisch unter Berücksichtigung der gegenwärtig gebräuchlichsten $k-\varepsilon$ bzw. $k-\omega$ Formulierungen.

Lien–Leschziner (LL) $k-\varepsilon$ Modell (1993)

Das von Lien und Leschziner (1993) entwickelte low-Re $k-\epsilon$ Modell empfiehlt sich aufgrund seiner hohen numerischen Stabilität und seiner günstigen wandnahen Längenmaßeigenschaften. Das Modell verfolgt eine ähnliche Philosophie wie die sogenannten Zweischichtenmodelle (Rodi 1991), ohne jedoch explizit zwischen zwei verschiedenen Bereichen mit unterschiedlichen Modellierungstechniken zu differenzieren. Die low–Re Funktionen sind so formuliert, daß beim Übergang in den wandnahen Bereich Konsistenz zu einem Eingleichungsmodell gewährleistet wird (hier z.B. nach Wolfshtein (1969)).

$$\begin{aligned} \frac{\partial\,\rho k}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\,\underline{U}\,k) - \underline{\nabla}\cdot\left[(\mu+\frac{\mu_t}{Pr_k})\,\underline{\nabla}k\right] &= \rho P - f_k\,\rho\varepsilon\ , \qquad \text{(E.1)}\\ \frac{\partial\,\rho\varepsilon}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\,\underline{U}\,\varepsilon) - \underline{\nabla}\cdot\left[(\mu+\frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon})\,\underline{\nabla}\varepsilon\right] &= \rho\frac{\varepsilon}{k}\,(f_1 C_{e1} P - f_2 C_{e2}\varepsilon)\ . \end{aligned}$$

Die hierin auftretenden Turbulenz–Reynoldszahlen und Dämpfungsfunktionen lauten

$$f_1 = 1+\frac{P}{P_k*}\ , \qquad f_2 = 1-0.3\,e^{-Re_t^2}\ , \qquad f_\mu = \frac{1-e^{-\alpha_\varepsilon Re_k}}{1-e^{-\alpha_\mu Re_k}}\ , \qquad f_k = \frac{\gamma+Re_t/91}{1+Re_t/91}\ .$$

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{f_2 C_{e2} k^{1.5}}{C_{e1} L_\varepsilon}\,e^{-\alpha_d Re_k^2} \qquad L_\varepsilon = \kappa\overline{c}_\mu^{-3/4} n\left(1-e^{-\alpha_\varepsilon Re_k}\right)\ ,\\ Re_t &= \frac{kT_t}{\nu}\ , \qquad Re_k = \frac{\sqrt{k}\,n}{\nu}\ , \qquad T_t = \frac{k}{\varepsilon}\ , \qquad \kappa = 0.41\ . \qquad \text{(E.2)} \end{aligned}$$

Die dazugehörigen Koeffizienten können Tabbelle E.1 entnommen werden. Aus Konsistenzgründen wurden in dieser Arbeit anstelle der Originalkoeffizienten teilweise leicht modifizierte Koeffizienten verwendetet.

Tabelle E.1: Koeffizienten des low–Re LL $k-\varepsilon$ Modells (Lien und Leschziner, 1993) .

Model	$\overline{c}_\mu$	C_{e1}	C_{e2}	γ	α_ε	α_μ	α_d	Pr_k	Pr_ε
EASM	0.09	1.44	1.83	0.45	0.2041	0.017	0.0025	1.0	1.3
Lien et al. (1993)	0.09	1.45	1.92	1.0	0.2630	0.016	0.0022	1.0	1.3

Wilcox $k-\omega$ Modell (1994)

Zur Verbesserung der Vorhersagefähigkeit im low-Re Bereich modifizierte Wilcox (1994) das $k-\omega$ Basismodell (Wilcox 1988) in Bezug auf das asymptotisch korrekte Wandverhalten (vgl. Anhang D)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\rho k}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\,\underline{U}\,k) - \underline{\nabla}\cdot\left[(\mu+\frac{\mu_t}{Pr_k})\,\underline{\nabla}k\right] &= \rho P_k - f_k\beta^*\rho\omega k\;, \\
\frac{\partial\,\rho\omega}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\,\underline{U}\,\omega) - \underline{\nabla}\cdot\left[(\mu+\frac{\mu_t}{Pr_\omega})\,\underline{\nabla}\omega\right] &= \rho\frac{\omega}{k}\left(f_\omega\alpha P_k - \beta\omega k\right)\;. \qquad \text{(E.3)}
\end{aligned}$$

Die hierin auftretenden Turbulenz–Reynoldszahlen und Dämpfungsfunktionen lauten

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{\beta/(3\beta^*)+(Re_\omega/R_k)^\gamma}{1+(Re_\omega/R_k)^\gamma}\;, \qquad f_\omega = \frac{\beta_{\omega 0}+Re_\omega/2.7}{f_\mu\,(1+Re_\omega/2.7)}\;, \qquad \text{(E.4)} \\
f_\mu &= \frac{\beta/3+Re_\omega/6}{1+Re_\omega/6}\;, \qquad Re_\omega = \frac{k}{\omega\,\nu}\;.
\end{aligned}$$

Die dazugehörigen Koeffizienten können Tabelle E.2 entnommen werden. Da der Anisotropieparameter $\overline{c}_\mu$ des isotropen Modell in die Definition der spezifischen Disspationsrate absorbiert wurde, ergibt sich für das turbulente Zeitmaß T_t die in (E.5) notierte Definition

$$\omega := \frac{\varepsilon}{\overline{c}_\mu k} \qquad \rightsquigarrow \qquad T_t = \frac{1}{\overline{c}_\mu\omega}\;. \qquad \text{(E.5)}$$

Man beachte, daß das anisotrope Stress–Strain Gesetz mit $\overline{c}_\mu$ normiert werden muß. Für die low–Re Variante des Basismodell ergibt sich z.B.

$$b_{ij} = -f_\mu\left(\frac{(\beta_1/\overline{c}_\mu)}{\tilde{g}-\frac{2\beta_2^2}{\tilde{g}}\eta_2-\frac{2\beta_3^2}{3\tilde{g}}\eta_1}\right)\left[s_{ij}-\frac{\beta_2}{\tilde{g}}\left(s_{ik}w^*_{kj}-w^*_{ik}s_{kj}\right)+\frac{2\beta_3}{\tilde{g}}\left(s^2_{ij}-\frac{\eta_1}{3}\delta_{ij}\right)\right]\;. \qquad \text{(E.6)}$$

Die Koeffizienten β_i folgen den in Tabelle 4.2 bzw. Gleichung (8.26) angegebenen Beziehungen.

Tabelle E.2: Koeffizienten des low-Re $k-\omega$ Modells (Wilcox, 1994).

Modell	$\beta^*=\overline{c}_\mu$	α	β	$\beta_{\omega 0}$	R_k	γ	Pr_k	Pr_ω
EASM	0.09	5/9	3/40	0.1	10	2	2.0	2.0
Wilcox (1994)	0.09	5/9	3/40	0.1	8	4	2.0	2.0