Angelo Carnarius

Instationäre Optimierung der aktiven Beeinflussung abgelöster Strömungen mit Hilfe eines Adjungiertenverfahrens

Intitut für Strömungsmechanik und Technische Akustik
TU Berlin

Instationäre Optimierung der aktiven Beeinflussung abgelöster Strömungen mit Hilfe eines Adjungiertenverfahrens

vorgelegt von

Diplom-Ingenieur

Angelo Carnarius

von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Andrés Cura Hochbaum
Berichter:	Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele
	Prof. Dr. rer. nat. Nicolas R. Gauger

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 19. April 2013

Berlin 2013
D 83

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Numerische Methoden der Thermofluiddynamik am Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik der Technischen Universität Berlin. Den Rahmen bildeten der SFB 557 „Beeinflussung komplexer turbulenter Scherströmungen“sowie das DFG-Projekt „Instationäre Optimale Strömungskontrolle aerodynamischer Konfigurationen“.

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz besonders bei meinem Betreuer Prof. Frank Thiele dafür bedanken, dass er mir durch seine Unterstützung und Förderung überhaupt erst die Möglichkeit eröffnet hat, die vorliegende Arbeit fertig zu stellen. Hierbei möchte ich nicht nur das stets kollegiale und angenehme Arbeitsklima hervorheben, sondern auch die mir gebotenen, vielfältigen Entfaltungsmöglichkeiten. Auf diese Weise hat mir Prof. Frank Thiele einen Blick über den Tellerrand meines eigentlichen Arbeitsthemas hinaus ermöglicht. Des Weiteren möchte ich mich sehr herzlich bei Prof. Nicolas R. Gauger für die Begutachtung meiner Arbeit sowie für die hervorragende und für mich lehrreiche Kooperation unserer Arbeitsgruppen bedanken, die mich weiterhin daran glauben lässt, dass Mathematiker und Ingenieure tatsächlich sinnvoll miteinander kommunizieren können. Mein Dank gilt außerdem Prof. Andrés Cura Hochbaum für die Übernahme des Vorsitzes im Promotionsausschuss sowie Prof. Fredi Tröltzsch für die hervorragende Zusammenarbeit im Rahmen des SFB 557.

Ich möchte mich außerdem bei allen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen bedanken, die mich durch unzählige wissenschaftliche Diskussionen direkt oder indirekt bei der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit unterstützt haben. Mein Dank gilt hier besonders Dr. Charles Mockett für die lehrreichen Diskussionen zum Thema hybride RANS-LES-Verfahren, Dr. Bert Günther für seine Unterstützung im Bereich Aerodynamik und Strömungsbeeinflussung sowie Dr. Felix Kramer und Thilo Knacke für die intensiven Diskussionen rund um die Themen Optimierung, Numerik und Datenformate. Mein Dank gilt außerdem Dr. Charles Mockett, Dr. Felix Kramer, Thilo Knacke, Dr. Tobias Höll und Claudia Gebel für das Korrekturlesen meiner Arbeit sowie Dr. Anil Nemili und Emre Özkaya für den hochinteressanten Austausch über das Gebiet des Automatischen Differenzierens. Darüber hinaus möchte ich mich auch bei Lars Oergel, Martin Franke und Dr. Norbert Schönwald für ihren wertvollen und vor allem schnellen IT-Support bedanken.

Last but not least gilt mein besonderer Dank meiner Familie für ihr Verständnis. Trotz unzähliger Wochenenden, die ich zu Hause am Schreibtisch verbracht habe, und meiner Launen, wenn etwas nicht so lief wie geplant, hat sie mich immer bedingungslos unterstützt. Vielen Dank!

Berlin, im April 2013 Angelo Carnarius

Zusammenfassung

Bei vielen technischen Problemstellungen spielt die Strömungsablösung eine wichtige Rolle. Klassische Beispiele hierfür sind die Fahrzeug- und Flugzeugaerodynamik. Ein vielversprechendes Konzept zur Verbesserung des aerodynamischen Verhaltens umströmter Körper ist die aktive Beeinflussung der Ablösung durch periodisches Einblasen und/oder Absaugen von Fluid über Öffnungen an der Körperoberfläche. Diese Aktuation der Strömung lässt sich über eine Vielzahl von Parametern wie Frequenz, Amplitude, Ausblasrichtung oder Aktuatorposition charakterisieren. Das Auffinden effektiver Aktuationsparameter stellt hierbei die wesentliche Herausforderung dar, insbesondere da diese stark fallabhängig sind.

Eine Möglichkeit dieses Ziel zu erreichen sind gradientenbasierte Optimierungsverfahren. Der hierfür benötigte Gradient lässt sich besonders effizient mit Hilfe des Adjungiertenkalküls bestimmen, da hierbei der numerische Aufwand zur Gradientenberechnung im Gegensatz zu Finiten Differenzen nahezu unabhängig von der Anzahl der Aktuationsparameter ist.

In der vorliegenden Arbeit wird ein kontinuierliches Adjungiertenverfahren zur instationären Optimierung der aktiven Beeinflussung abgelöster Strömungen entwickelt und in einen Strömungslöser implementiert, wobei hierfür auf den *Frozen-Turbulence*-Ansatz zurückgegriffen wird. Im Rahmen der Verfahrensvalidierung erfolgt ein detaillierter Vergleich mit Finiten Differenzen sowie mit einem diskreten Adjungiertenverfahren auf Basis des Automatischen Differenzierens (AD), welches innerhalb des gemeinsamen DFG-Projekts „Instationäre Optimale Strömungskontrolle aerodynamischer Konfigurationen“ unter der Leitung von Prof. Gauger an der RWTH Aachen entstand. Dabei zeigt sich, dass der für das Optimierungsverfahren benötigte Gradient mit dem kontinuierlichen Verfahren nur für laminare Strömungsfälle genau bestimmt werden kann, wobei hierfür sehr kleine Zeit- und Gitterschrittweiten erforderlich sind. Bei turbulenter Strömung ergibt sich aufgrund des *Frozen-Turbulence*-Ansatzes eine Inkonsistenz, die zu großen Fehlern im berechneten Gradienten führen kann. Mit dem AD-basierten, diskreten Adjungiertenverfahren kann der Gradient dagegen mit beliebigen Zeit- und Gitterschrittweiten sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen exakt berechnet werden.

Die Auswirkung der Konsistenzeigenschaften auf die Optimierung wird im Rahmen der Anwendung des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens auf zwei Strömungsfälle untersucht. Für die laminare Zylinderumströmung kann hierbei nachgewiesen werden, dass eine effiziente und genaue Bestimmung der optimalen Aktuation möglich ist. Bei der turbulenten Umströmung eines NACA4412-Profils lässt sich zwar eine deutliche Verbesserung des aerodynamischen Verhaltens erzielen, die berechnete Aktuation stellt jedoch noch nicht das Optimum dar und zeigt damit letztlich die Grenzen des verwendeten Verfahrens auf. Die Arbeit endet mit einer Diskussion verschiedener Ansätze, die eine Anwendung des kontinuierlichen Adjungiertenansatzes auch auf turbulente Strömungsfälle ermöglichen.

Abstract

In many technical problems such as vehicle or aircraft aerodynamics, flow separation plays an important role. A promising concept for improving the aerodynamic behaviour of a body is using active flow control by periodic blowing and/or suction of fluid through slots in the body surface. This actuation of the flow can be characterised by a high number of parameters such as frequency, amplitude, blowing direction or actuator position. The main challenge is to find an effective set of parameters, particularly since these are very case-specific.

One possibility to reach this goal is using a gradient-based optimisation. The required gradient can be efficiently determined with adjoint calculus, the computation effort of which is, in contrast to Finite Differences, virtually independent of the number of actuation parameters.

In this study a continuous adjoint approach is developed and implemented in a flow solver using the frozen-turbulence assumption. In the scope of the validation the continuous method is compared in detail with Finite Differences as well as a discrete adjoint approach based on Automatic Differentiation (AD), which was developed in the joint DFG project „Instationäre Optimale Strömungskontrolle aerodynamischer Konfigurationen“ under the guidance of Prof. Gauger at the RWTH Aachen. It is shown that the gradient obtained with the continuous adjoint method is only exact for laminar flows and that a very small time step and grid spacing is required. For turbulent flows an inconsistency exists, which is induced by the frozen-turbulence assumption and causes a significant error in the calculated gradient. With the AD-based discrete adjoint approach the gradient can be accurately calculated for laminar as well as for turbulent flows using arbitrary time steps and grid spacing.

The impact of the consistency properties on the optimisation results is investigated in the scope of the application of the continuous adjoint approach on two flow configurations. For laminar cylinder flow it can be demonstrated that an accurate and efficient calculation of the optimum is feasible. For the turbulent flow around a NACA4412 airfoil a significant improvement of the aerodynamic behaviour can be achieved. However, the obtained actuation is not the optimal solution, which demonstrates the limits of the used method. This study concludes with a discussion of different approaches that may enable an application of the continuous adjoint method to turbulent flows.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation . . . 1
1.2 Passive und aktive Methoden zur Strömungsbeeinflussung . . . 2
1.3 Adjungiertenbasierte Optimierungsverfahren . . . 5
1.4 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit . . . 8

2 Strömungsmechanische Grundlagen **11**
2.1 Bilanzgleichungen . . . 11
2.2 Erfassung turbulenter Strömungen . . . 12
2.2.1 Direkte Numerische Simulation (DNS) . . . 13
2.2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) . . . 14
2.3 Anfangs- und Randbedingungen . . . 16
2.4 Aerodynamische Beiwerte . . . 18

3 Gradientenbasierte Optimierung **21**

4 Berechnung des Gradienten der Zielfunktion **27**
4.1 Finite Differenzen . . . 27
4.2 Adjungiertenverfahren . . . 28
4.2.1 Diskrete Adjungierte für ein lineares Gleichungssystem . . . 28
4.2.2 Notwendige Optimalitätsbedingung - KKT . . . 29
4.3 Kontinuierliches Adjungiertenverfahren für die aktive Strömungskontrolle . . . 33
4.3.1 Die Zielfunktion . . . 33
4.3.2 Die Lagrange-Funktion . . . 34
4.3.3 Die Optimalitätsbedingung für die Geschwindigkeit u_i . . . 38
4.3.4 Die Optimalitätsbedingung für den Druck p . . . 39
4.3.5 Die Optimalitätsbedingung für die Steuerung s_i . . . 40
4.3.6 Primales und adjungiertes System . . . 41
4.3.7 Diskretes Adjungiertenverfahren auf Basis des Automatischen Differenzierens . . . 45
4.4 Die Konsistenzeigenschaften der unterschiedlichen Adjungiertenverfahren . . . 46

5 Numerische Methoden **53**
5.1 Finite-Volumen-Diskretisierung der adjungierten Gleichungen . . . 54
5.2 Ausflussrandbedingung . . . 56
5.3 Adjungiertes Druckkorrekturverfahren . . . 58
5.3.1 Bestimmung der Geschwindigkeit auf der Kontrollvolumengrenzfläche . 59

5.3.2 Korrekturen im Zellzentrum . . . 63
5.3.3 Korrekturen auf der Kontrollvolumengrenzfläche . . . 64
5.3.4 Druckkorrekturgleichung und Randbedingungen . . . 65

6 Verifikation **67**
6.1 Setup . . . 68
6.2 Primale Lösung . . . 70
6.3 Adjungierte Lösung . . . 71
6.3.1 Lösung ohne adjungierte Druckkorrekturgleichung . . . 71
6.3.2 Lösung mit adjungierter Druckkorrekturgleichung . . . 75
6.4 Zusammenfassung . . . 78

7 Validierung **81**
7.1 Rotierender Zylinder . . . 81
7.1.1 Primale Lösung . . . 85
7.1.2 Adjungierte Lösung des kontinuierlichen Verfahrens . . . 90
7.1.3 Adjungierte Lösung des diskreten Verfahrens . . . 98
7.2 Kreiszylinder mit periodischer Absaugung . . . 102
7.3 Zusammenfassung . . . 104

8 Anwendung **109**
8.1 Widerstandsminimierung einer Zylinderumströmung . . . 109
8.1.1 Setup . . . 110
8.1.2 Ergebnisse . . . 111
8.2 Auftriebsmaximierung einer NACA4412-Profilumströmung . . . 119
8.2.1 Setup . . . 120
8.2.2 Ergebnisse . . . 121
8.3 Zusammenfassung . . . 133

9 Zusammenfassung und Ausblick **137**

Anhang **141**

A Statistische Turbulenzmodelle **143**
A.1 Wilcox-k-ω-Modell . . . 143
A.2 SST-k-ω-Modell . . . 143
A.3 Randbedingungen für die Turbulenzmodelle . . . 144

B Automatisches Differenzieren (AD) **147**
B.1 Grundlagen das Automatischen Differenzierens . . . 147
B.1.1 Vorwärtsmodus . . . 147
B.1.2 Rückwärtsmodus . . . 147

C Mathematische Herleitungen **151**
C.1 Herleitung des adjungierten Konvektions-Diffusions-Problems . . . 151
C.2 Kompassnotation . . . 153

C.3 Interpolation von Variablen auf kartesischen Gittern 153
C.4 Bestimmung von Gradienten auf kartesischen Gittern 154
C.5 Mittelpunktregel der Integration 154
C.6 Diskretisierungsfehler bei der Lösung der Kanalströmung 155
C.6.1 Primales System 155
C.6.2 Adjungiertes System 159

Literaturverzeichnis **163**

Nomenklatur

Dieses Verzeichnis erklärt die wichtigsten in der Arbeit verwendeten Symbole und Abkürzungen. Abweichende Definitionen und weitere Symbole sind an der entsprechenden Stelle im Text beschrieben.

Lateinische Bezeichnungen

a	Konstante, Transportkoeffizient, Koeffizient einer Differenzengleichung
A	Fläche, Koeffizientenmatrix
b	Konstante
B	Matrix
B_{ij}	Approximation der Hesse-Matrix
BI_{ij}	Inverse der approximierten Hesse-Matrix
c_a	Auftriebsbeiwert
c_p	Druckbeiwert
c_w	Widerstandsbeiwert
C	Skalierungsfaktor zum Anpassen der Einheiten in der Zielfunktion
C_1, C_2, C_3	Konstanten
$\underline{b}, b_i$	Vektor der Anregeparameter
c	Konstante, Sehnenlänge
d_i	Abstandsvektor zwischen zwei benachbarten KV-Zentren
D	Durchmesser
e_i	normierter Richtungsvektor
E	Fehler
E_{ij}	Einheitsmatrix
f	Frequenz
F	Kraft
g_i	Geschwindigkeitsvektor an Dirichlet- oder Einströmrändern
H	Summe über $a_{nb}u_{nb}$, Höhe
H_{ij}	Hesse-Matrix
J	Zielfunktion
k	turbulente kinetische Energie
L	Länge, Längenmaß, Lagrange-Funktion
$\dot{m}$	Massenstrom
n	Normalenrichtung, Drehzahl
n_i	Normalenvektor

n_x,n_y,n_z	Komponenten des Normalenvektors
p	Druck
p_i	Suchrichtung
p_{ref}	Druck am Druckreferenzpunkt
P	Leistung
R	Residuenverhältnis, Residualdarstellung einer Gleichung
S	Quellterm
S^I	Quelltermanteile, die zu Entkopplung und Oszillationen führen können
S^{II}	restliche Quelltermanteile
S^{III}	Quellterm ohne Druckanteil
$\underline{s}$, s_i	Geschwindigkeitsvektor am Kontrollrand, Kontrolle, Steuerung
t	Zeit
t^*	dimensionslose Zeit innerhalb einer Periode
t_o	Phasenverschiebung der Anregung
T	Zeitspanne
u	Zustand
u,v,w	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors
u_a	Anregeamplitude
u_i	Geschwindigkeitsvektor
V	Volumen
x,y,z	Komponenten des Ortsvektors
x_{abl}	Ablöseposition
x_i	Ortsvektor

Griechische Bezeichnungen

α	Anstellwinkel, Extrapolationsschrittweite
β	Wert für die Randsteuerung, Relaxationsfaktor, Ausblaswinkel
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
δA_i	Flächenvektor eines finiten Flächenelements
δt	finiter Zeitschritt
δV	finites Volumen
δ_ϕ	Variation bezüglich ϕ
Δ	Differenz
Δn	Ortsschrittweite in Normalenrichtung
Δt	Zeitschrittweite
Δx,Δy,Δz	Ortsschrittweite in x-, y- und z-Richtung
ϵ	infinitesimale Größe
γ	Skalierungsfaktor
γ_1, γ_2	Faktoren der Zeitdiskretisierung
Γ	Rand, Randfläche

μ	dynamische Viskosität
μ_g	dynamische Gesamtviskosität oder effektive Viskosität
μ_t	turbulente dynamische Viskosität oder Wirbelviskosität
ν	kinematische Viskosität
ν_t	turbulente kinematische Viskosität
ω	turbulente Frequenz
Ω	Ortsgebiet
ϕ	primale Transportgröße
ψ	adjungierte Transportgröße
ϱ	Dichte
π_{ij}	Spannungstensor
τ_{ij}^{RS}	Reynoldsspannungstensor
θ	Winkel zwischen Gradient und Suchrichtung, Winkel des Anregeschlitzes

Symbole und Operatoren

$D(\cdot)$	allgemeiner Ableitungsoperator
$d(\cdot)$	totales Differential
$\frac{d}{d\phi}(\cdot)$	gewöhnliche Ableitung nach einer allgemeinen Größe ϕ
$\frac{\partial}{\partial\phi}(\cdot)$	partielle Ableitung nach einer allgemeinen Größe ϕ
$\delta(\cdot)$	Gâteaux-Differential, Richtungsableitung, Gesamtvariation
$\exp(\cdot)$	Exponentialfunktion
$\mathcal{O}(\cdot)$	Ordnung, Fehlerordnung
$\lvert(\cdot)\rvert$	Betrag oder Euklidische Norm
$\langle(\cdot)\rangle$	lineare Interpolation

Indizes und Kennzeichen

$\bar{(\ )}$	Mittelwert einer fluktuierenden Größe
$\tilde{(\ )}$	transformierte Größe in den diskretisierten adjungierten Gleichungen
$\hat{(\ )}$	relaxierte Größe
$\underline{(\ )}$	vektorielle Größe
$(\ )'$	Schwankungsanteil einer fluktuierenden Größe
$(\ )^*$	adjungierte Größe
$(\ )^\bullet$	Größe aus der zurückliegenden Iteration
$(\ )^\diamond$	Schätzwert im Druckkorrekturverfahren
$(\ )^\nabla$	Korrektur im Druckkorrekturverfahren
$(\ )^0$	zum Zeitpunkt $t = 0$

$(\ )^{mod}$	modifiziert
$(\ )^{o}$	Größe der letzten Zeitstufe
$(\ )^{oo}$	Größe der vorletzten Zeitstufe
$(\ )^{T}$	transponiert, zum Zeitpunkt $t = T$
$(\ )^{k}$	k-te Iteration
$(\ )_0$	Referenz, initial
$(\ )_a$	Austritt
$(\ )_{adj}$	adjungiert
$(\ )_d$	diskret
$(\ )_e$	Eintritt, östliche KV-Fläche
$(\ )_E$	östliches KV-Zentrum
$(\ )_f$	KV-Fläche
$(\ )_k$	Kontrolle
$(\ )_L$	links, linker Rand, erstes inneres KV-Zentrum
$(\ )_m$	Mittelwert einer Größe
$(\ )_{max}$	Maximalwert
$(\ )_n$	Wert in Normalenrichtung, nördliche KV-Fläche
$(\ )_N$	nördliches KV-Zentrum
$(\ )_{nb}$	benachbartes KV-Zentrum
$(\ )_o$	Oberfläche
$(\ )_{opt}$	optimal
$(\ )_P$	zentrales KV-Zentrum
$(\ )_R$	rechts, rechter Rand, Zentrum des Null-KV auf dem Rand
$(\ )_s$	südliche KV-Fläche
$(\ )_S$	südliches KV-Zentrum
$(\ )_u$	Geschwindigkeit
$(\ )_w$	Wand, westliche KV-Fläche
$(\ )_W$	westliches KV-Zentrum
$(\ )_z$	Ziel
$(\ )_\infty$	Fernfeld

Dimensionslose Kennzahlen

$\mathrm{Pe} = \frac{uL}{a}$	Pécletzahl
$\mathrm{Re} = \frac{uL}{\nu}$	Reynoldszahl
$\mathrm{St} = \frac{fL}{u}$	Strouhalzahl

Abkürzungen

1D/2D/3D	eindimensional/zweidimensional/dreidimensional
AD	Automatisches Differenzieren
ADJ	Adjungierte
AGV	Abstiegsgradientenverfahren
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Verfahren
CDS	Central Difference Scheme
CPU	Central Processing Unit
DES	Detached Eddy Simulation
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft
DGL	Differentialgleichung
DNS	Direct Numerical Simulation
ELAN	Elliptic Analysis of the Navier-Stokes-Equations
FD	Finite Differenzen
KV	Kontrollvolumen
LES	Large Eddy Simulation
MES	Method of Exact Solution
MMS	Method of Manufactured Solution
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
PDGL	partielle Differentialgleichung
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes-Equations
RMS	root mean square
RWTH	Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule
SFB	Sonderforschungsbereich
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
SST	Shear Stress Transport
TVD	Total Variation Diminishing
UDS	Upwind Difference Scheme
URANS	Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes-Equations
ZNMF	zero net-massflux

1 Einleitung

1.1 Motivation

Bei einer Vielzahl technischer Problemstellungen aus dem Bereich der Strömungsmechanik spielt das Phänomen der Ablösung eine wichtige Rolle, denn es beeinflusst die Eigenschaften der Strömung grundlegend. Beispiele hierfür sind die Gebäude-, Fahrzeug- und Flugzeugaerodynamik, die Strömung in Rohrleitungen und Turbomaschinen, Windkraftanlagen usw. Um dies zu verstehen, soll zunächst kurz definiert werden, was man eigentlich unter Ablösung versteht und wie sie zustande kommt.

Etwas vereinfacht kann man immer dann von einer Strömungsablösung sprechen, wenn das Fluid nicht mehr der Kontur des umströmten bzw. durchströmten Körpers folgt, sondern sich in einem wandbenachbarten Teilbereich entgegen der Hauptströmungsrichtung bewegt[1]. In inkompressiblen Medien kann Strömungsablösung nur dann auftreten, wenn in Strömungsrichtung ein positiver Druckgradient vorhanden ist, denn nach der Grenzschichttheorie von Prandtl [90] herrscht in der Wandgrenzschicht der gleiche Druck wie in der Außenströmung. Wird nun die Strömung durch den positiven Druckgradienten so stark verzögert, dass die kinetische Energie des Fluids im wandnahen Bereich nicht ausreicht, um den Druckanstieg zu überwinden, kommt die Strömung in diesem Bereich zum Stillstand oder bewegt sich entgegen der Hauptströmungsrichtung. In der Literatur wird dieser Fall häufig als druckinduzierte Ablösung bezeichnet und von der geometrieinduzierten Ablösung unterschieden, die an sehr stark gekrümmten Oberflächen wie z.B. scharfen Kanten oder Ecken auftritt. Die Ablöseposition ist daher bei der geometrieinduzierten Ablösung durch die Körperkontur fixiert, während sie bei der druckinduzierten Ablösung sensibel auf Druckveränderungen reagiert und z.B. aufgrund instationärer Strömungsphänomene zeitlich variieren kann. Streng genommen ist die geometrieinduzierte Ablösung jedoch nur ein Sonderfall der druckinduzierten Ablösung.

Zu den wichtigsten Eigenschaften der Strömungsablösung zählen im Hinblick auf die Aerodynamik der damit verbundene Druckverlust sowie die Existenz eines Totwassergebiets, in dem Fluid niedriger Geschwindigkeit zirkuliert. Beide Phänomene haben häufig negative Auswirkungen, wie sich anschaulich an zwei Beispielen erläutern lässt.

Ein klassisches Problem in der Flugzeugaerodynamik ist die Ablösung auf der Saugseite eines Tragflügels bei hoher Anstellung. Das Totwassergebiet kann dann der Flügelgeometrie zugeordnet werden und führt damit praktisch zu einer Entwölbung des Profils, so dass es zu einem massiven Auftriebsverlust kommt. Flugzeugflügel sind daher im Allgemeinen so geformt, dass im normalen Betriebsbereich keine Strömungsablösung auftritt.

[1] Genau genommen trifft diese Definition nur bei stationärer zweidimensionaler Betrachtung zu. Im 3D sowie bei instationären Problemen ist der Ablösungsbegriff deutlich schwieriger zu definieren (siehe z.B. [32] und [105]).

Bei der Umströmung eines Fahrzeugs, das aus geometrischer Sicht in aller Regel einen stumpfen Körper darstellt, kommt es an den Fahrzeughinterkanten unvermeidlich zu einer geometrieinduzierten Ablösung. Der Nachlauf hat aufgrund des im Ablösegebiet erzeugten Druckverlustes einen erheblichen Anteil am Gesamtwiderstand des Fahrzeugs. So macht z.B. der auf diese Weise generierte Druckwiderstand beim Ahmed body, der eine vereinfachte Fahrzeuggeometrie darstellt, je nach Heckrampenwinkel bis zu ca. 85% des Gesamtwiderstandes aus [1].

Aus den genannten Beispielen folgt unmittelbar die Fragestellung: Welche Möglichkeiten stehen im aerodynamischen Entwurf zur Verfügung, um die negativen Auswirkungen der Strömungsablösung zu minimieren?

1.2 Passive und aktive Methoden zur Strömungsbeeinflussung

Eine umfassende Übersicht zu den wichtigsten Methoden der Strömungsbeeinflussung findet man u.a. in den Büchern von Gad-el-Hak [32] sowie Joslin und Miller [63]. Danach kann man die verschiedenen Lösungsansätze ganz allgemein in passive und aktive Maßnahmen unterteilen.

Passive Methoden zur Strömungsbeeinflussung sind dadurch gekennzeichnet, dass sie nicht auf externe Energiezufuhr angewiesen sind. Sie haben sich bereits im vergangenen Jahrhundert im aerodynamischen Entwurf etabliert und sind meist mechanischer Natur. Als einfachste und zugleich intuitivste Form der Strömungsbeeinflussung kann eine Anpassung der Körperkontur angesehen werden. Durch eine optimierte Formgebung lässt sich z.B. starker Einfluss auf die Druckverteilung an einem Flügelprofil nehmen [119, 118] oder die Ablösung an scharfen Kanten manipulieren.

Viele passive Methoden haben zum Ziel, der wandnahen Strömung Impuls zuzuführen, so dass das Geschwindigkeitsprofil fülliger und damit weniger anfällig gegenüber Ablösung wird [63]. Zu diesen Maßnahmen zählen z.B. Wirbelgeneratoren, die durch Erzeugung von Längswirbeln energiereiches Fluid aus der Hauptströmung zur Wand transportieren, oder Turbulatoren, welche eine frühzeitige Transition der Strömung erzwingen und damit die höhere Widerstandsfähigkeit turbulenter Grenzschichten gegenüber Ablösung ausnutzen. Auch die z.B. in [88] übersichtlich zusammengestellten Hochauftriebshilfen in Form von Vorflügeln und Hinterkanten-Spaltklappen fügen der Grenzschicht Energie zu. Darüber hinaus nehmen sie durch ihre Formgebung auch Einfluss auf die Druckverteilung.

Der größte Vorteil passiver Systeme besteht in ihrer hohen Verfügbarkeit und Zuverlässigkeit, die sie insbesondere für die Luftfahrtindustrie interessant machen. Nachteilig ist, dass sich passive Maßnahmen häufig nicht abschalten lassen. Dies kann z.B. zu einer Widerstandserhöhung und damit zu einem gesteigerten Kraftstoffverbrauch führen. Darüber hinaus sind mechanische Systeme meist nicht oder nur begrenzt an den Betriebszustand anpassbar und in diesem Fall teuer, komplex und wartungsintensiv [103].

Vor diesem Hintergrund haben sich in den letzten Jahrzehnten die aktiven Methoden der Strömungsbeeinflussung als vielversprechende Alternative herauskristallisiert. Sie erreichen eine Anregung der Strömung, im Folgenden auch Aktuation genannt, unter Zufuhr externer Energie [32]. Dieses Konzept wurde in ersten Ansätzen bereits 1904 von Prandtl vorgestellt [90]. Prandtl konnte nachweisen, dass sich die Ablösung einer stationären zweidimensionalen

Grenzschicht durch Absaugen des energiearmen wandnahen Fluids verhindern lässt. Dieses Grundkonzept, den Impuls des wandnahen Fluids zu erhöhen, verfolgen nahezu alle gängigen Konzepte, die die Verzögerung oder Verhinderung der Ablösung als Ziel haben.

Aktive Methoden zeichnen sich im Allgemeinen dadurch aus, dass sie variabel an den Strömungs- bzw. Betriebszustand anpassbar sind und bei Bedarf abgeschaltet werden können. Sie sind in eine Regelung integrierbar (siehe z.B. [6, 52]) und im Vergleich zu passiven Maßnahmen häufig deutlich effektiver, weil sie durch den zusätzlichen Energieeintrag Strömungszustände realisierbar machen, die mit passiven Vorrichtungen nicht erreichbar sind [128]. Darüber hinaus sind die Aktuatoren häufig sehr klein und leicht. Die externe Energiezufuhr ist zugleich der größte Nachteil der aktiven Methoden, denn sie reduziert den Nettogewinn durch die Aktuation [32]. Außerdem ist das Ausfallrisiko aktiver Beeinflussungskonzepte noch verbesserungswürdig, was insbesondere in der Luftfahrtindustrie von Nachteil ist.

Es gibt eine Vielzahl unterschiedlicher Konzepte zur aktiven Strömungsbeeinflussung, darunter mechanische Aktuatoren in Form von beweglichen Wänden oder Rollen [74], oszillierende Klappen [63] oder Plasma-Aktuatoren, die durch Ionisierung des wandnahen Fluids eine Volumenkraft erzeugen [27, 26, 11]. Eine weitere Methode, die sich durch große Variabilität und Anpassbarkeit auszeichnet und den Schwerpunkt dieser Arbeit bildet, ist das Absaugen und Einblasen von Fluid über kleine Öffnungen in der Profilkontur. Dieses lässt sich prinzipiell sowohl stationär als auch instationär betreiben.

Bei der stationären oder kontinuierlichen Aktuation wird der Impuls des wandnahen Fluids in der Regel direkt erhöht. Beim Absaugen geschieht dies durch Entfernen des energiearmen Fluids aus der Grenzschicht, während das Fluid beim Ausblasen, das meist tangential in Strömungsrichtung erfolgt, in Wandnähe beschleunigt wird. In beiden Fällen führt dies zu einem fülligeren Geschwindigkeitsprofil und damit zu einer Ablöseverzögerung bzw. -vermeidung. Dass Ablösekontrolle nicht unbedingt die Beseitigung des Ablösegebietes bedeuten muss, zeigt das Beispiel des stationären Ausblasens an einem Ahmed body mit einem Heckrampenwinkel von 25^o [122]. Hierbei konnte eine Reduzierung des Widerstandes um 6.4% erreicht werden, ohne dass die Größe des Nachlaufgebietes nennenswert verändert wurde. Der größte Nachteil des stationären Betriebsmodus ist der hohe Energiebedarf der Aktuation, so dass diese Art der aktiven Strömungsbeeinflussung bisher hauptsächlich im militärischen Bereich zum Einsatz kam [32].

Das instationäre Einblasen und Absaugen basiert auf einem gänzlich anderen Funktionsprinzip. Hier soll eine gezielte Beeinflussung strömungsinhärenter Instabilitäten erreicht werden [19], wobei das Ziel durchaus unterschiedlich sein kann. Meist will man durch Anfachung der Instabilitäten einen Zerfall kohärenter Strukturen erreichen, was schließlich zu einer erhöhten Durchmischung führt und so energiereiches Fluid aus der Außenströmung zur Wand transportiert [63]. Der für diese Art der Aktuation benötigte Energiebedarf ist im Vergleich zum stationären Einblasen oder Absaugen deutlich geringer (siehe z.B. [107]).

Die am häufigsten verwendeten Aktuationsvarianten sind das gepulste Einblasen oder Absaugen sowie das zeitlich sinusförmige Einblasen und Absaugen mit einem Nettomassenstrom von null, das auch unter der Bezeichnung *Synthetic Jet* oder ZNMF-Aktuation bekannt ist. Diese Anregeformen sind durch eine Vielzahl von Parametern wie Amplitude, Frequenz, Ausblasrichtung, Pulsbreite, Position usw. gekennzeichnet, deren Einfluss auf die Strömung nur teilweise

verstanden ist [32]. Die Bestimmung der optimalen Parameter ist dabei sehr fallabhängig und nicht trivial (siehe z.B. [128]).

Einigkeit herrscht im Wesentlichen darüber, dass für einen bestmöglichen Effekt im Bereich der Ablösung aktuiert werden muss [32, 63], wobei es Hinweise darauf gibt, dass die genaue Position u.a. von der Form der Anregung abhängig ist [47]. Als Anregefrequenz wird meist eine Frequenz in der Größenordnung der dominanten Instabilität der Ablösung verwendet, wobei diese Wahl nicht als allgemeingültig angesehen werden kann. So wurde etwa von Henning [53] bei der Aktuation eines stumpfen Körpers mit der Frequenz des Wirbelabwurfs sogar ein negativer Effekt erzielt. Darüber hinaus gibt es zahlreiche Hinweise darauf, dass der Frequenzeinfluss stark vom Strömungszustand abhängig ist [81, 128] und dass auch deutlich höhere Frequenzen eine effektive Beeinflussung ermöglichen, wobei sich der strömungsphysikalische Mechanismus grundlegend ändert [2]. Von Günther et al. [44] durchgeführte Untersuchungen zur Ablösekontrolle an einer Hochauftriebskonfiguration haben eine starke Abhängigkeit des Auftriebsgewinns von der Pulsbreite der gepulsten Aktuation sowie vom Ausblaswinkel nachgewiesen.

Die bisher genannten Untersuchungen basierten fast ausschließlich auf der Aktuation an einer Position im Bereich der Ablösung. Aufgrund großer technologischer Fortschritte insbesondere auf dem Gebiet der numerischen Simulation verschiebt sich der Fokus der Untersuchungen in den letzten Jahren immer mehr in Richtung verteilter Aktuation. Eine komplexere Anregung in Form einer Kaskade von elektromagnetischen Aktuatoren haben z.B. Mutschke et al. [76] am PTL-4-Profil[2] verwendet. Damit konnte ein vollständiges Wiederanlegen einer zuvor nahezu komplett abgelösten Strömung erreicht werden. Höll et al. [57] konnten im Rahmen von URANS- und DES-Simulationen einer 3D-Hochauftriebskonfiguration zeigen, dass sowohl eine Variation der spannweitig segmentierten Beschlitzung als auch der Phasenversatz der Aktuation an den einzelnen Schlitzen einen signifikanten Einfluss auf den erzielten Auftriebsgewinn sowie den RMS-Wert des zeitlichen Auftriebsverlaufs haben. Weitere Arbeiten zur Anwendung verteilter Aktuation an Hochauftriebskonfigurationen findet man z.B. in [65, 71, 108]. Ein Beispiel für eine komplexe Aktuatorenanordnung an stumpfen Körpern sind die Untersuchungen von Wassen zum stationären Ausblasen am Ahmed body [121] oder die Übersicht von Choi et al. [15] zur verteilten Anregung an verschiedenen Geometrien.

Allen genannten Anwendungen gemein ist, dass aufgrund der Komplexität der verwendeten verteilten Aktuation nur einige wenige Varianten untersucht werden konnten. Besonders vor dem Hintergrund des externen Energiebedarfs spielt jedoch die effiziente bzw. möglichst optimale Auslegung der aktiven Strömungsbeeinflussung eine zentrale Rolle. Das Problem hierbei ist, dass bei komplexer Anordnung der Aktuation über eine Vielzahl von Positionen, wie sie z.B. bei der kaskadierten Anregung auftritt, die Anzahl der Kontrollparameter schnell ansteigt. Nimmt man beispielsweise an, dass sich die Anregung an einem Schlitz über fünf Parameter beschreiben lässt und die gesamte Aktuation über 20 Schlitze verteilt werden soll, erhält man bereits 100 variable Anregeparameter. Würde man alle Parameter unabhängig voneinander jeweils in fünf Schritten variieren, müsste man insgesamt 5^{100} Experimente oder Simulationen durchführen. Selbst wenn man diese Anzahl mit physikalischem Sachverstand etwas reduzieren kann, demonstriert das Beispiel doch anschaulich, dass man mit der klassischen Vorgehens-

[2] Dieses Flügelprofil ist praktisch identisch mit einem NACA0017-Profil.

weise, die Anregung anhand von Erfahrungswerten und unterstützt von Experimenten und numerischen Simulationen richtig einzustellen, schnell an seine Grenzen stößt. Erschwerend kommt hinzu, dass viele Parameter wie die Anregeposition oder der Ausblaswinkel im Experiment kaum variierbar sind, umfangreiche instationäre numerische Simulationen trotz großer technologischer Fortschritte noch immer sehr aufwändig sind und die Parameter häufig stark nichtlinear voneinander abhängen.

Dies motiviert den Einsatz adjungiertenbasierter Optimierungsverfahren, die in Kombination mit instationären numerischen Simulationen eine hocheffiziente Auslegung komplexer Aktuationskonzepte mit einer großen Anzahl von Parametern ermöglicht.

1.3 Adjungiertenbasierte Optimierungsverfahren

Ziel der Optimierung ist die Minimierung einer Ziel- oder Kostenfunktion, die neben der zu minimierenden Größe wie z.B. dem Widerstand eines Körpers auch noch zu erfüllende Nebenbedingungen und Strafterme enthalten kann. Dies lässt sich sehr effizient mit Optimierungsstrategien realisieren, die den Gradienten der Kostenfunktion bezüglich der Kontrollparameter verwenden, um sich dem Minimum iterativ zu nähern [82].

Eine sehr einfache Variante zur Bestimmung des Gradienten sind Finite Differenzen (FD), da hierfür keine Modifikationen am zugrunde liegenden Strömungslöser vorgenommen werden müssen. Sie weisen jedoch insbesondere den Nachteil auf, dass der Rechenaufwand proportional zur Anzahl der Anregeparameter ansteigt, so dass dieser Ansatz für komplexe Aktuationskonzepte zu aufwändig ist. Deutlich effizienter lässt sich der Gradient mit Hilfe des Adjungiertenkalküls bestimmen (siehe z.B. [38, 59, 75, 120]). Hierbei löst man zunächst das Ausgangsproblem, im Folgenden auch primales System genannt, und anschließend das dazu gehörige adjungierte oder duale Problem. Aus dem adjungierten Strömungsfeld lässt sich dann der Gradient der Zielfunktion bezüglich der Kontrollparameter mit Hilfe einfacher Matrix-Vektor-Multiplikationen und Skalarprodukte bestimmen, d.h. der numerische Aufwand beschränkt sich im Wesentlichen auf das Lösen zweier PDGLn und ist damit nahezu unabhängig von der Anzahl der Parameter.

Es existieren zwei grundsätzlich unterschiedliche Vorgehensweisen für die Entwicklung eines Adjungiertenverfahrens. Beim kontinuierlichen Ansatz, der auch den Schwerpunkt dieser Arbeit bildet, wird zunächst das Optimalitätssystem auf Basis der PDGLn hergeleitet und anschließend diskretisiert [39, 59]. In der Literatur wird dies häufig als *First-optimise-then-discretise*-Methode bezeichnet. Im Gegensatz dazu wird das Optimalitätssystem beim diskreten Adjungiertenverfahren auf Basis der diskretisierten primalen PDGLn hergeleitet. Man spricht in diesem Fall auch von *First-discretise-then-optimise*-Prinzip. Das diskrete Verfahren lässt sich wiederum auf unterschiedliche Weise gewinnen. Beim „handdiskreten" Vorgehen konstruiert man sich das adjungierte System zu einem gegebenen Problem „manuell"(siehe z.B. [3, 25, 49]). Für komplexe Probleme kann die Programmierung eines handdiskreten Lösers sehr aufwändig und daher fehleranfällig werden [4, 39]. Dies trifft insbesondere auf die Verwendung von Turbulenzmodellen im primalen Strömungslöser zu [67]. Unter Einsatz des Algorithmischen oder Automatischen Differenzierens (AD) kann die Erzeugung eines diskreten Adjungiertenverfahrens heutzutage auch weitgehend automatisiert erfolgen [33, 37, 41], wobei jedoch in der

Regel eine Nachbearbeitung des so generierten Lösers erforderlich ist.

Die Eigenschaften des kontinuierlichen und diskreten Adjungiertenkalküls wurden in der Literatur vielfach diskutiert (siehe z.B. [7, 46, 78]). Sie unterscheiden sich insbesondere hinsichtlich ihrer Konsistenzeigenschaften und führen nur im Grenzfall verschwindender Schrittweiten auf den gleichen Gradienten der Zielfunktion [39]. Auf diese Problematik wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit noch detailliert eingegangen.

Eine allgmeingültige Aussage darüber, welcher der beiden Ansätze effizienter ist, ist kaum möglich. Zwar lässt sich feststellen, dass der numerische Aufwand für das Lösen der adjungierten Gleichungen beim kontinuierlichen Ansatz in etwa dem des primalen Systems entspricht [8] und damit deutlich niedriger ist als beim diskreten Adjungiertenverfahren [39, 49]. Dies trifft vor allem im Vergleich zu dem AD-erzeugten Löser zu, der nach [41] mindestens um den Faktor 3 bis 4 langsamer ist als der primale Löser. Auf der anderen Seite lässt sich mit dem AD-basierten diskreten Verfahren bereits auf einem groben Rechengitter eine konsistente Lösung erzeugen. Dies führt besonders bei der Simulation komplexer, instationärer Strömungen zu einer signifikanten Rechenzeitersparnis. Letztlich ist es sowohl vom konkreten Anwendungsfall als auch von den Anforderungen an die Lösung abhängig, mit welchem Adjungiertenverfahren man schneller zum Ziel kommt.

In der Aerodynamik hat das Adjungiertenkalkül bisher vor allem auf dem Gebiet der Formoptimierung von Flügelprofilen weite Verbreitung gefunden. Die erste Veröffentlichung aus diesem Bereich stammt von Jameson [59] und behandelt die Formoptimierung auf Basis der Potential- und Euler-Gleichungen. Beispiele für die Anwendung in der Formoptimierung auf Grundlage der stationären Euler-Gleichungen sind z.B. in [4, 33, 60] zu finden.

Die im Rahmen dieser Arbeit im Mittelpunkt stehende Anwendung des Adjungiertenverfahrens auf die Optimierung der aktiven Beeinflussung abgelöster Strömungen beinhaltet im Vergleich zu den bisher dargestellten Beispielen einige zusätzliche Schwierigkeiten. Zum einen sind sowohl die Ablösung an sich als auch die Aktuationskonzepte in der Regel instationär und können nur von den vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen hinreichend genau beschrieben werden. Das bedeutet für das Adjungiertenverfahren, dass die gesamte Zeithistorie der primalen Lösung verfügbar sein muss, da die adjungierte Lösung rückwärts in der Zeit integriert wird. Die einfachste Möglichkeit ist der *Store-all-Approach*, also die Speicherung der vollständigen primalen Lösung, wie er zum Beispiel in [70, 77] Verwendung fand. Bei komplexen Konfigurationen mit einer großen Anzahl von Gitterpunkten können mit diesem Ansatz leicht sehr große Datenmengen im mehrstelligen Giga- oder sogar Terabyte-Bereich anfallen [80]. Einige Autoren speichern daher die primale Lösung in größeren Zeitabständen und rekonstruieren die Zwischenschritte durch Interpolation (siehe z.B. [8, 96]). Einen anderen Ausweg bietet das *Binomial Checkpointing* [40], bei dem die primale Lösung nur zu ausgewählten Zeitpunkten, den sogenannten *Checkpoints* gespeichert wird. Diese werden genutzt, um die primale Lösung auf dem dazwischenliegenden Zeitintervall im Bedarfsfall neu zu berechnen. Die *Checkpoints* werden dabei so verteilt, dass die Anzahl der zusätzlichen primalen Strömungslösungen minimal ist [40].

Eine weitere große Schwierigkeit bei der Optimierung der aktiven Beeinflussung abgelöster Scherschichten besteht darin, dass die Strömung im anvisierten Reynoldszahl-Bereich hochturbulent ist. Trotz enormer Fortschritte hinsichtlich der zur Verfügung stehenden Compu-

terressourcen ist man bei komplexen Fällen auch heute noch auf die (zumindest teilweise) Modellierung der Turbulenz angewiesen [112, 114]. Während sowohl beim handdiskreten als auch beim AD-basierten Adjungiertenansatz die konsistente Berücksichtigung statistischer Turbulenzmodelle grundsätzlich möglich ist, ist dies für das kontinuierliche Adjungiertenverfahren bisher nur in Ausnahmefällen gelungen [130], da nicht jedes beliebige Turbulenzmodell ohne Modifikation differenzierbar im kontinuierlichen Sinne ist. Meist wird der sogenannte *Frozen-Turbulence-* oder *Constant-Eddy-Viscosity-*Ansatz verwendet, d.h., die turbulente Viskosität wird als unabhängig von den Kontrollparametern angenommen [130] und die Ableitungen der turbulenten Viskosität nach den Kontrollparametern sind automatisch null. Man benötigt in diesem Fall also kein adjungiertes Turbulenzmodell, sondern kann die turbulente Viskosität aus der primalen Lösung verwenden. Eine Reihe von Untersuchungen verschiedener Autoren haben nachgewiesen, dass diese Annahme zu Fehlern im Betrag und Vorzeichen der berechneten Gradienten führen kann (siehe z.B. in [3, 23, 49, 67]). Der Einfluss auf das gefundene Optimum ist dabei stark fallabhängig, so dass sich keine allgemeingültige Aussage treffen lässt.

Anwendungen im Bereich der aktiven Strömungsbeeinflussung sind in der Literatur relativ selten zu finden und beschränken sich meist auf einfache akademische Geometrien ohne Turbulenzmodellierung. Joslin et al. [62] haben mit Hilfe eines kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens auf Basis der instationären, inkompressiblen 2D-Navier-Stokes-Gleichungen die Dämpfung von Tollmien-Schlichting-Wellen an einer Plattengrenzschicht durch Einblasen und Absaugen untersucht. Bewley et al. [8] konnten mit einem ähnlichen Ansatz eine teilweise Relaminarisierung einer turbulenten Kanalströmung erreichen, wobei die Anzahl der Kontrollparameter mit $\mathcal{O}(10^7)$ sehr groß war. Die Minimierung der kinetischen Energie, der Wandschubspannung und des Wärmeübergangs durch Einblasen und Absaugen an der Wand haben Collis et al. [18] für ein Wirbelpaar in Wandnähe untersucht, wobei hier die kompressible Form der instationären Navier-Stokes-Gleichungen verwendet wurden.

Eine Reihe von Untersuchungen beschäftigt sich mit der aktiven Beeinflussung der Umströmung stumpfer Körper. Mehrere Arbeitsgruppen untersuchten die Widerstandsreduktion einer laminaren Zylinderströmung durch Rotation oder Oszillation mit diskreten Adjungiertenverfahren [58, 55, 96]. Dabei kamen unterschiedliche numerische Verfahren wie die Finite-Elemente- [58], Finite-Volumen- [55] und Finite-Differenzen-Methode [96] zum Einsatz. Li et al. [69] verwendeten einen handdiskreten Ansatz auf Basis der inkompressiblen 2D-Navier-Stokes-Gleichungen, um den Widerstand einer laminaren Zylinderumströmung durch periodisches Einblasen und Absaugen zu minimieren. Ein ähnliches Konzept verfolgten auch Kim et al. [48] mit einem diskreten Ansatz auf Basis der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen für die Widerstandsminimierung einer laminaren Zylinderumströmung und die Unterdrückung der Auftriebsschwankungen an einem SC(2)-0714-Profil, die durch die Wechselwirkung eines Verdichtungsstoßes mit der Grenzschicht hervorgerufen werden.

Die Übertragung des Adjungiertenkalküls auf komplexe instationäre aerodynamische Konfigurationen bei hohen Reynoldszahlen mit verteilter Aktuation verlangt nach flexibel einsetzbaren Strömungslösern. Darüber hinaus ist man für diese Fälle aufgrund beschränkter Computerressourcen auch heute noch auf die zumindest teilweise Modellierung turbulenter Effekte angewiesen. Es lässt sich feststellen, dass Anwendungen aus diesem Bereich auf Basis des kontinuierlichen Adjungiertenansatzes bisher sehr selten zu finden sind, so dass an dieser

Stelle noch erheblicher Forschungsbedarf besteht.

1.4 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung, Validierung und Anwendung eines kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens zur instationären Optimierung der aktiven Beeinflussung abgelöster Strömungen. Das Simulationsverfahren soll dabei so konzipiert sein, dass eine Anwendung auch auf komplexe aerodynamische Konfigurationen bei hohen Reynoldszahlen möglich ist. Dies erfordert die Verwendung eines primalen Strömungslösers, der die instationären turbulenten Strömungsphänomene für komplexe Geometrien hinreichend genau erfassen kann, sowie die Entwicklung eines effizienten Optimierungsverfahrens, um den numerischen Aufwand so gering wie möglich zu halten.

Nach einer kurzen Darstellung der für die Arbeit relevanten strömungsmechanischen Grundlagen in Kap. 2 werden in Kap. 3 die Grundlagen der gradientenbasierten Optimierungsverfahren erläutert.

In Kap. 4 werden verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung des Gradienten der Zielfunktion bezüglich der Kontrollparameter dargestellt. Zunächst wird der Lagrangesche Formalismus eingeführt und das grundlegende Vorgehen im diskreten und kontinuierlichen Fall erläutert. Anschließend erfolgt die Spezialisierung auf die instationäre Optimale Kontrolle auf Basis der instationären inkompressiblen 3D-Navier-Stokes-Gleichungen[3], sowie eine kurze Analyse der Eigenschaften der unterschiedlichen Ansätze.

In Kap. 5 wird die numerische Umsetzung des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens detailliert beschrieben. Die Grundlage für diese Arbeiten ist der von L. Xue [129] entwickelte, druckbasierte *General-Purpose*-Strömungslöser ELAN, der auf einer block-strukturierten Finite-Volumen-Diskretisierung basiert und bereits erfolgreich in vielen Projekten zur passiven und aktiven Strömungsbeeinflussung eingesetzt wurde (siehe z.B. [43, 44, 45, 57, 102, 103, 104, 121, 122, 123]). Die in dem Löser verwendete Rhie & Chow-Interpolation [94] stellt bei der numerischen Umsetzung des Adjungiertenansatzes eine wesentliche Herausforderung dar, da sich die dabei verwendete Druckkorrekturgleichung nicht als partielle Differentialgleichung formulieren lässt. Veröffentlichungen zur Anwendung des kontinuierlichen Adjungiertenansatzes in Kombination mit druckbasierten Lösern unter Verwendung der Rhie & Chow-Interpolation sind dem Autor nicht bekannt.

Ein wichtiger Aspekt, der insbesondere bei der Entwicklung von Simulationsverfahren häufig vernachlässigt wird, ist die Verifikation des resultierenden Computerprogramms, also die Überprüfung der korrekten Implementierung. Diese bildet den Schwerpunkt des Kap. 6. Dazu wird zunächst ein einfacher Testfall entwickelt, dessen analytische Lösung bekannt ist und der eine möglichst isolierte Verifikation der wesentlichen Elemente des adjungierten Lösers ermöglicht. Der Vergleich der numerischen mit der analytischen Lösung erlaubt dann Aussagen über die korrekte Implementierung und die Fehlerordnung des Verfahrens.

[3] Dieser Arbeitsschritt erfolgte im Rahmen des SFB 557 „Beeinflussung komplexer turbulenter Scherströmungen“in enger Zusammenarbeit mit den FG „Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen“an der TU Berlin unter der Leitung von Prof. F. Tröltzsch.

Anhand der Verfahrensvalidierung in Kap. 7 sollen die Eigenschaften des Optimierungsverfahrens detailliert analysiert werden. Im Vordergrund stehen dabei Untersuchungen zur Konsistenz des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens. Hier soll insbesondere der Einfluss der Gitter- und Zeitschrittweite sowie der Turbulenzbehandlung betrachtet werden. Zu diesem Zweck werden Testfälle entworfen, die sich durch eine einfache Geometrie und eine geringe Parameterzahl auszeichnen, so dass der numerische Aufwand vergleichsweise gering gehalten werden kann. Die Testfälle sollen eine möglichst isolierte Validierung aller wesentlichen Aspekte wie Instationarität, Turbulenz und Aktuationskonzepte ermöglichen. Die Beurteilung erfolgt anhand des mit dem Adjungiertenverfahren berechneten Gradienten. Für den Vergleich sollen zum einen Finite Differenzen herangezogen werden, die ohne Modifikation mit dem primalen Löser bestimmt werden können. Darüber hinaus steht mit einem AD-basierten diskreten Adjungiertenverfahren, das im Rahmen einer Kooperation innerhalb des DFG-Projekts „Instationäre Optimale Strömungskontrolle aerodynamischer Konfigurationen“ unter der Leitung von Prof. Gauger[4] an der RWTH Aachen entstand, eine weitere Vergleichsmöglichkeit zu Verfügung. Da beide Adjungierten-Löser auf dem gleichen primalen Strömungslöser ELAN basieren, ergibt sich hiermit die seltene Möglichkeit eines direkten Verfahrensvergleichs unter Ausschluss verfälschender Aspekte, die sich bei der Verwendung unterschiedlicher primaler Löser ergeben würden.

In Kap. 8 steht die Anwendung des entwickelten kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens für die instationäre Optimierung der aktiven Beeinflussung im Mittelpunkt. Dazu muss das Adjungiertenverfahren in einen Optimierungsalgorithmus integriert werden. Die Anwendung des kontinuierlichen Ansatzes verfolgt mehrere Ziele. Erstens soll gezeigt werden, dass eine Optimierung der verteilten Aktuation mit dem entwickelten Verfahren prinzipiell möglich ist. Zweitens sollen Konsistenzeigenschaften des verwendeten Ansatzes sowie dessen Auswirkung auf den Optimierungsverlauf genauer untersucht werden. Letztlich sollen auf diese Weise auch die Grenzen der hier umgesetzten Adjungiertenmethode aufgezeigt werden, die sich insbesondere bei der instationären aktiven Kontrolle turbulenter Strömungen bei hohen Reynoldszahlen auftun. Drittens sollen die optimal aktuierten Konfigurationen unter strömungsphysikalischen Gesichtspunkten analysiert werden. Dabei stehen unter anderem ein Vergleich mit der unbeeinflussten Strömung sowie verschiedene Aktuationskonzepte im Fokus der Untersuchungen.

Der Abschluss der Arbeit enthält in Kap. 9 eine Zusammenfassung der relevanten Erkenntnisse, eine Diskussion von Lösungsansätzen für die wichtigsten identifizierten Probleme sowie einen Ausblick auf Möglichkeiten für weiterführende Arbeiten.

[4] Prof. N. R. Gauger, Department of Mathematics and Center for Computational Engineering Science (CCES), RWTH Aachen

2 Strömungsmechanische Grundlagen

2.1 Bilanzgleichungen

Die Strömung eines Fluids lässt sich mit Hilfe von Bilanzgleichungen mathematisch beschreiben, welche sich aus der Bilanzierung von Masse, Impuls und Energie über ein infinitesimales Fluidvolumen sowie über die Ausnutzung von Materialgesetzen bestimmen lassen. An dieser Stelle sollen nur die für die vorliegende Arbeit relevanten partiellen Differentialgleichungen (PDGLn) für die Beschreibung inkompressibler Strömungen zusammengefasst werden. Für eine detaillierte Darstellung des Themas Bilanzgleichungen sei auf die bekannte Fachliteratur verwiesen (siehe z.B. [89, 100, 115]).

Unter der Annahme eines ortsfesten Volumens erhält man bei Verwendung kartesischer Koordinaten für die Massenbilanz eines inkompressiblen Fluids in differentieller Form[1]

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\,. \tag{2.1}$$

Demnach ist das Geschwindigkeitsfeld u_i in diesem Fall divergenzfrei.

Für den Impuls lautet die Bilanzgleichung

$$\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}\,, \tag{2.2}$$

wobei der Spannungstensor π_{ij} den Einfluss der Normal- und Reibungskräfte auf das Fluid erfasst. Für ein inkompressibles Newtonsches Fluid lässt sich der Spannungstensor über den Ansatz

$$\pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.3}$$

beschreiben. Gl. 2.3 ist eine Verallgemeinerung der Beobachtung, dass die Schubspannung proportional zur Scherung des Fluids ist. Der Proportionalitätsfaktor μ ist die dynamische Viskosität des Fluids. Im ruhenden Medium verschwinden die Scherspannungen und es verbleibt die aus dem Druck p resultierende isotrope Normalkraft. Setzt man den Ansatz 2.3 in die Impulsbilanz 2.2 ein, erhält man die sogenannte Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\,. \tag{2.4}$$

Auch wenn streng genommen nur die Impulsbilanz Gl. 2.4 als Navier-Stokes-Gleichung be-

[1] Im Weiteren wird für die Darstellung mathematischer Ausdrücke die Tensornotation verwendet (siehe z.B. [101]).

zeichnet wird, soll dieser Ausdruck im Folgenden für das Gesamtsystem aus Massen- und Impulsbilanz verwendet werden, da sich diese Begriffsdefinition in der Literatur im Bereich der numerischen Strömungsmechanik etabliert hat.

2.2 Erfassung turbulenter Strömungen

In einem von Osborne Reynolds im Jahr 1883 durchgeführten Experiment wurden erstmals die unterschiedlichen Strömungszustände eines Fluids sichtbar gemacht [92]. Reynolds ließ Wasser aus einem Vorratsbehälter durch ein Glasrohr fließen und fügte dem Hauptstrom über eine dünne Kapillare gefärbtes Wasser hinzu. Bei kleinem Volumenstrom, also kleiner Strömungsgeschwindigkeit, stellte er fest, dass der aus der Kapillare austretende Farbfaden fast unverändert von dem Wasser mit transportiert wurde. Bei hoher Strömungsgeschwindigkeit wurde der Farbfaden schon nach kurzer Weglänge aufgelöst und die Farbe verteilte sich über den gesamten Rohrquerschnitt.

Der erste Strömungszustand heißt laminar und besitzt eine geschichtete, deterministische Struktur. Laminare Strömungen können zwei- oder dreidimensional und sowohl stationär als auch instationär sein [89]. Eine wichtige Eigenschaft laminarer Strömungen ist ihre Un/-empfind/-lich/-keit gegenüber kleinen Störungen, d.h., winzige Unregelmäßigkeiten, die bei einem Experiment z.B. durch Vibrationen des Antriebs oder minimale Temperaturschwankungen des untersuchten Fluids ausgelöst werden, werden gedämpft.

Der zweite Strömungszustand nennt sich turbulent und weist eine dreidimensionale, rotationsbehaftete Struktur auf, die durch stochastische Fluktuationsbewegungen gekennzeichnet ist. Außerdem sind turbulente Strömungen grundsätzlich instationär [89]. Da Strömungen hoher Reynoldszahl gegenüber kleinen Störungen sehr empfindlich sind, werden schon kleinste Unregelmäßigkeiten, die sowohl im experimentellen Aufbau als auch in der Simulation (z.B. aufgrund von Rundungsfehlern) unvermeidbar sind, angefacht und führen schließlich zu den charakteristischen, stochastischen Schwankungsbewegungen. Aus den turbulenten Fluktuationen resultiert eine starke Vermischung des Fluids, die in ihrer Wirkung um mehrere Größenordnungen größer sein kann als der durch die Diffusion verursachte molekulare Transport.

Die Änderung des Strömungszustandes hängt nicht nur von der Strömungsgeschwindigkeit u, sondern auch von einem Längenmaß L und der kinematischen Viskosität ν ab. Diese Größen bilden zusammen die dimensionslose Reynoldszahl $\mathrm{Re} = uL/\nu$, welche als Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskraft interpretiert werden kann. Bei kleiner Reynoldszahl liegt demnach eine laminare und bei großer Reynoldszahl eine turbulente Strömung vor. Der laminar-turbulente Übergang wird Transition genannt. Er ist von einem unregelmäßigen Wechsel zwischen beiden Zuständen gekennzeichnet und war in den letzten Jahren aufgrund der komplexen physikalischen Zusammenhänge Gegenstand zahlreicher Forschungsprojekte.

In einer Vielzahl technischer Anwendungen spielt die turbulente Strömung von Flüssigkeiten und Gasen eine wichtige Rolle. Beispiele hierfür sind die Umströmung von Fahrzeugen, Zügen oder Flugzeugen, die Mischungsprozesse in der chemischen Industrie oder die Transportvorgänge in Wärmetauschern. Dabei ist es sehr anwendungsspezifisch, ob sich die durch die

turbulenten Schwankungsbewegungen verursachte, stark intensivierte Durchmischung positiv oder negativ bemerkbar macht. In der Aerodynamik erhöht sich durch die Turbulenz insbesondere der Reibungswiderstand und ist daher kontraproduktiv. Bei Mischungsprozessen oder dem Energietransport in Wärmetauschern hat die starke turbulente Durchmischung dagegen einen positiven Effekt.

Für die mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen existieren ausgehend von den in Kap. 2.1 gezeigten Bilanzgleichungen verschiedenste Ansätze, von denen im Folgenden die wichtigsten kurz dargestellt werden sollen. Für detaillierte Ausführungen zu diesem Thema sei z.B. auf [31, 89, 99, 125] verwiesen.

2.2.1 Direkte Numerische Simulation (DNS)

Da bei der Herleitung der in Kap. 2.1 präsentierten Gleichungen keine Einschränkungen bezüglich des Strömungszustandes gemacht wurden, lassen sich damit prinzipiell laminare, transitionelle und turbulente Strömungen beschreiben. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass bei der numerischen Simulation alle relevanten Strömungsphänomene sowohl räumlich als auch zeitlich erfasst werden müssen. Man nennt diese Vorgehensweise, bei der keinerlei Modell oder empirische Information zur Darstellung der strömungsphysikalischen Zusammenhänge benötigt wird, eine Direkte Numerische Simulation (DNS). Die Erfassung turbulenter Strömungen mit Hilfe einer DNS erfordert jedoch erhebliche Computerressourcen. Um dies zu verdeutlichen, kann man sich eine turbulente Strömung modellhaft als Überlagerung verschieden großer und unterschiedlich stark fluktuierender Wirbelstrukturen, auch Skalen genannt, vorstellen. Die Tatsache, dass deren Unterschied in Größe und Frequenz mehrere Größenordnungen beträgt, hat erhebliche Konsequenzen für die Wahl der Gitter- und Zeitschrittweite der numerischen Simulation, da auch die kleinsten Skalen noch hinreichend genau wiedergegeben werden müssen.

Während die großen Wirbel mit der geometrischen Abmessung des umströmten/durchströmten Körpers skalieren und damit näherungsweise unabhängig von der Reynoldszahl sind, weisen das Längen- und Zeitmaß der kleinsten Wirbel η und τ in Relation zu den größten Wirbeln nach Kolmogorov die folgenden Proportionalitäten auf [89]:

$$\frac{\eta}{l_0} \propto \mathrm{Re}^{-\frac{3}{4}} \tag{2.5}$$

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_0} \propto \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}} \,. \tag{2.6}$$

Daraus lässt sich abschätzen, dass der Rechenaufwand für eine DNS proportional zu $\mathrm{Re}^{11/4}$ ist. Diese Zahlen erklären, warum die DNS trotz der stark steigenden Computerressourcen auch heutzutage fast ausschließlich im akademischen Umfeld verwendet wird. Meist handelt es sich bei den untersuchten Fällen um vergleichsweise einfache Konfigurationen bei kleinen Reynoldszahlen [19, 89, 112]. Zwar sind inzwischen auch komplexere Problemstellungen realisierbar, diese nehmen aber aufgrund der extrem langen Rechenzeiten von mehreren Monaten eine Ausnahemestellung ein.

2.2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen (RANS)

Im Gegensatz zur DNS basiert der RANS-Ansatz auf der Idee, den gesamten Einfluss der Turbulenz auf die Hauptströmung zu modellieren. Ausgangspunkt ist dabei die Aufteilung einer Momentangröße in ein Ensemble-Mittel und einen Schwankungsanteil, die in der Literatur auch unter der Bezeichnung Reynolds-Aufteilung bekannt ist [93]:

$$\phi(x_i,t) = \overline{\phi}(x_i,t) + \phi'(x_i,t) \qquad \text{mit} \qquad \overline{\phi}(x_i,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i,t)\,. \tag{2.7}$$

Gemäß des Ergoden-Theorems [125] geht das Ensemble-Mittel für statistisch stationäre Strömungen in ein zeitliches Mittel über:

$$\overline{\phi}(x_i) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x_i,t)\,dt\,. \tag{2.8}$$

Wendet man unter Berücksichtigung der Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\text{Konstanten bleiben erhalten :} \quad & \overline{a} = a \\
\text{Linearität :} \quad & \overline{\phi+\psi} = \overline{\phi} + \overline{\psi} \\
\text{Kommutativität :} \quad & \overline{\frac{\partial\phi}{\partial s}} = \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial s} \\
\text{Sonstiges :} \quad & \overline{\overline{\phi}} = \overline{\phi} \qquad\qquad \overline{\phi'} = 0
\end{aligned}$$

die Ensemble-Mittelung auf die Navier-Stokes-Gleichungen an, erhält man nach kurzer Rechnung

$$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\varrho\overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial\varrho\overline{u}_i\overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{\partial\tau_{ij}^{RS}}{\partial x_j} \tag{2.10}$$

mit

$$\tau_{ij}^{RS} = -\varrho\overline{u_i'u_j'}\,. \tag{2.11}$$

Die aus der Nichtlinearität des Konvektionsterms resultierenden Reynoldsspannungen τ_{ij}^{RS} stellen aufgrund der Symmetrie sechs neue Unbekannte dar, für deren Bestimmung weitere Gleichungen benötigt werden. Man nennt dies das Schließungsproblem turbulenter Strömungen, da die zusätzlichen Gleichungen immer auf Modellannahmen angewiesen sind und damit ein gewisses Maß an Empirie besitzen [89, 125].

Es ist eine übliche Vorgehensweise, mit Hilfe des Boussinesq-Ansatzes [9] eine Beziehung zwischen dem Reynoldsspannungstensor τ_{ij}^{RS} und dem gemittelten Geschwindigkeitsgradienten

herzustellen:

$$\tau_{ij}^{RS} = -\varrho\overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\varrho k \,. \tag{2.12}$$

Darin ist k die turbulente kinetische Energie, welche definiert ist als

$$k = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'} \,. \tag{2.13}$$

Die Reynoldsspannungen wirken demnach wie ein erhöhter diffusiver Transport auf die Hauptströmung. Setzt man den Ansatz 2.12 in die Ensemble-gemittelte Impulsbilanz ein, folgt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\underbrace{\overline{p} + \frac{2}{3}\varrho k}_{\tilde{\overline{p}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\underbrace{(\mu + \mu_t)}_{\mu_g} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ \frac{\partial \varrho \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \tilde{\overline{p}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] , \end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei die turbulente kinetische Energie mit dem statischen Druck $\overline{p}$ zum modifizierten Druck $\tilde{\overline{p}}$ zusammengefasst wurde. Die dynamische und die turbulente Viskosität bilden zusammen die Gesamtviskosität μ_g. Die Bestimmung der Reynoldsspannungen reduziert sich somit auf die Berechnung der turbulenten Viskosität μ_t sowie der turbulenten kinetischen Energie. Zu diesem Zweck existiert eine Vielzahl verschiedener Turbulenzmodelle unterschiedlicher Komplexität. Für eine gute Übersicht zum Thema statistische Turbulenzmodellierung seien z.B. die Arbeit von Rung [98] oder die Standardwerke von Wilcox [125] und Durbin [21] empfohlen. In der vorliegenden Arbeit kommen das Wilcox-k-ω-Modell [124] sowie das SST-k-ω-Modell von Menter [72] zum Einsatz, deren Transportgleichungen dem Anhang A entnommen werden können. Für alle weiteren Betrachtungen sollen die Überstreichungen der gemittelten Größen aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen werden:

$$\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] . \tag{2.15}$$

Auch wenn die RANS-Methode aufgrund des statistischen Ansatzes keinen detaillierten Einblick in die Wirkungsweise der Turbulenz gewährt, ist sie insbesondere im industriellen Umfeld noch weit verbreitet. Die Ursache hierfür ist zum einen, dass RANS-Simulationen mit verhältnismäßig geringem Rechenaufwand durchgeführt werden können und so in kurzer Zeit eine Vielzahl von Berechnungen möglich ist. Außerdem ist man bei ingenieurstechnischen Problemstellungen häufig nur an globalen Effekten und Trendaussagen interessiert und für diese Zielsetzung hat sich der RANS-Ansatz in der Praxis bewährt [30].

Ein in der Literatur etwas umstrittenes Thema ist die Anwendung der RANS-Gleichungen auf instationäre Strömungen, im Folgenden unsteady RANS (URANS) genannt [19, 111]. Hin-

tergrund hierfür ist die Feststellung, dass die gängigen statistischen Turbulenzmodelle auf der Betrachtung statistisch stationärer Strömungsfälle beruhen. Viele Autoren, u.a. Spalart [111] und Wilcox [125], sind der Ansicht, dass dies zu Problemen bei der Anwendung des RANS-Ansatzes auf instationäre Strömungen führen kann. Nach [98] sind statistische Turbulenzmodelle auch für instationäre Probleme anwendbar, wenn das Ensemble-Mittel in guter Näherung dem zeitlichen Mittel entspricht. Häufig wird in diesem Zusammenhang als Kriterium für die Anwendbarkeit der RANS auf statistisch instationäre Strömungen gefordert, dass das turbulente Zeitmaß mindestens ein bis zwei Größenordnungen kleiner sein muss als das transiente Zeitmaß der Grundströmung [98, 125]. Diese Differenz wird als spektrale Lücke bezeichnet und soll verhindern, dass die turbulenten Schwankungsbewegungen sowohl vom Turbulenzmodell als auch vom instationären Term der gemittelten Impulsbilanz erfasst werden. In der Praxis lässt sich diese Trennung jedoch meist nicht im gesamten Rechengebiet realisieren. Insbesondere bei Strömungen mit dominanten kohärenten Strukturen, die z.B. hinter stumpfen Körpern oder in massiven Ablösegebieten auftreten, ist ein spektrale Überlappung von transientem und turbulentem Zeitmaß häufig unvermeidbar [102].

Andere Autoren vertreten dagegen wie Durbin [22] die Meinung, dass die zeitliche und die Ensemble-Mittelung voneinander unabhängig sind und somit keine spektrale Überlappung auftreten kann. Nach dieser Argumentation ist die Anwendung des RANS-Ansatzes auf instationäre Strömungen ein reines Turbulenzmodellierungsproblem.

Grundsätzlich lässt sich sicherlich festhalten, dass turbulenzauflösende numerische Ansätze wie die Large Eddy Simulation (LES) [31, 99] oder die Detached Eddy Simulation (DES) [114] für die Wiedergabe instationärer turbulenter Strömungsphänomene deutlich besser geeignet sind. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass bei periodischen und/oder stark abgelösten Strömungen trotz spektraler Überlappung teilweise recht gute Ergebnisse mit dem URANS-Ansatz erzielt werden konnten (siehe z.B. [19, 42, 50, 57, 104]). Dabei wurde jedoch vielfach beobachtet, dass sich der Einfluss des Turbulenzmodells stärker bemerkbar macht als bei statistisch stationären Strömungen (siehe auch [50]). Darüber hinaus weisen einige Autoren darauf hin, dass die spannweitige Ausdehnung des Rechengebietes bei der 3D-Simulation einer 2D-Körperumströmung von großer Bedeutung ist [109, 114].

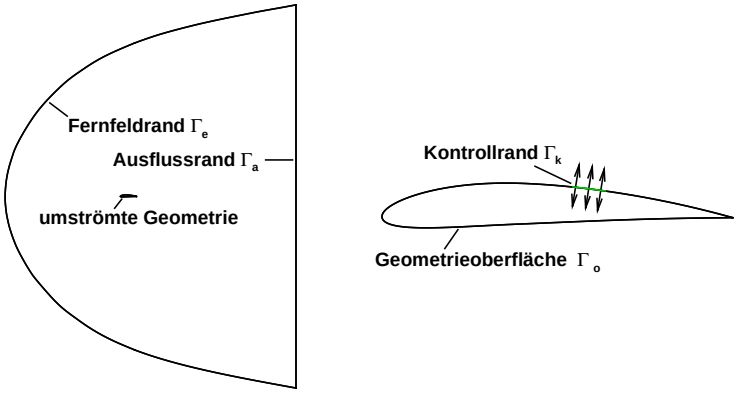
Trotz der bekannten Defizite bei der Wiedergabe instationärer turbulenter Strömungsphänomene erfolgt die Entwicklung des Optimierungsverfahrens in der vorliegenden Arbeit auf Basis der URANS-Gleichungen. Dies bietet aufgrund der vergleichsweise moderaten Rechenzeiten den Vorteil, dass eine gründliche Verifikation und Validierung des Verfahrens möglich ist. Darüber hinaus ist ein URANS-basiertes Adjungiertenverfahren auch für praxisrelevante Konfigurationen bei hohen Reynoldszahlen interessant, für die eine Optimierung auf Basis von turbulenzauflösenden Simulationen wie der LES oder der DES zu aufwändig wäre. Das Adjungiertenverfahren lässt sich jedoch für weiterführende Arbeiten leicht auf die LES und DES übertragen, denn deren beschreibende PDGLn sind formal identisch mit denen der URANS.

2.3 Anfangs- und Randbedingungen

Für alle im Rahmen dieser Arbeit untersuchten instationären Strömungen wurde zunächst ausgehend von einem konstanten Geschwindigkeits- und Druckfeld eine Simulation der unan-

geregten Strömung durchgeführt. Nach Erreichen eines eingeschwungenen Zustandes, bei dem sich das Strömungsfeld im zeitlichen Mittel nicht mehr ändert, wurde die Simulation beendet und als Startlösung für weiterführende Berechnungen zur aktiven Strömungsbeeinflussung gespeichert.

Abb. 2.1 zeigt ein typisches Anwendungsbeispiel für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Strömungskontrolle mit den verschiedenen Randbedingungstypen. Die Außenberandung wird



(a) Gesamtes Rechengebiet (b) Umströmte Geometrie

Abbildung 2.1: Verwendete Randbedingungstypen

als Fernfeldrand oder auch Einströmrand Γ_e bezeichnet und befindet sich typischerweise in relativ großem Abstand zum umströmten Körper. Der Strömungszustand ist an diesen Rändern bekannt und kann daher in Form einer Dirichlet-Randbedingung direkt vorgeschrieben werden:

$$u_i = g_i \qquad \text{auf} \quad \Gamma_e \,. \tag{2.16}$$

Der Randbereich, über den das Fluid das betrachtete Gebiet verlässt, wird als Ausströmrand Γ_a bezeichnet. Für instationäre Probleme kommt beim hier verwendeten Strömungslöser an diesen Rändern in der Regel eine konvektive Ausflussrandbedingung der Form

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_c \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \qquad \text{auf} \quad \Gamma_a \tag{2.17}$$

zum Einsatz, welche sich im stationären Fall auf eine Neumann-Randbedingung reduziert. Darin wird die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit U_c so gewählt, dass die globale Massenerhaltung gewährleistet ist. Für die Herleitung der adjungierten Gleichungen ist es jedoch zweckmäßig, stattdessen Kraftfreiheit auf dem Ausströmrand zu fordern:

$$-pn_i + \mu_g \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j = 0 \qquad \text{auf} \quad \Gamma_a \,. \tag{2.18}$$

Diese Randbedingung wird in der Literatur auch natürliche Randbedingung genannt [110] und führt bei den hier gezeigten Anwendungen zu sehr ähnlichen Ergebnissen wie die konvektive Ausflussrandbedingung.

An festen Oberflächen Γ_{fO} wird Wandhaftung des Fluids angenommen. Um die Geometrie des umströmten Körpers von den restlichen Wänden zu unterscheiden, wird die Gesamtfläche Γ_{fO} außerdem in die Oberfläche des umströmten Körpers Γ_o und die restlichen Wände Γ_w unterteilt, so dass folgt:

$$u_i = 0 \qquad \text{auf} \quad \Gamma_{o,w} \,. \tag{2.19}$$

Am Kontrollrand Γ_k wird Fluid über die Berandung eingeblasen bzw. abgesaugt. Dies lässt sich analog zum Fernfeldrand als Dirichlet-Randbedingung realisieren:

$$u_i = s_i \qquad \text{auf} \quad \Gamma_k \,. \tag{2.20}$$

Die exakte Form der Steuerung $\underline{s}$, die ihrerseits wieder von den Anregeparametern $\underline{b}$ abhängt, ist fallspezifisch und wird bei der Beschreibung der jeweiligen Anwendung definiert.

Die Randbedingungen für die hier verwendeten statistischen Turbulenzmodelle sind dem Anhang A zu entnehmen.

2.4 Aerodynamische Beiwerte

In der Aerodynamik ist es üblich, zur Charakterisierung der Strömung dimensionslose Beiwerte zu verwenden.

Auftriebsbeiwert

Der Auftriebsbeiwert ist die mit dem dynamischen Druck $\frac{\varrho}{2} u_\infty$ der Anströmung normierte Auftriebskraft:

$$c_a = \frac{F_a}{\frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty A_{ref}} \,. \tag{2.21}$$

Darin sind F_a die Auftriebskraft, u_∞ und ϱ_∞ die Geschwindigkeit und Dichte der Anströmung, sowie A_{ref} eine je nach Anwendungsfall zu definierende Referenzfläche. Bei der in Kap. 8.2 untersuchten 2D-Profilumströmung ist dies die mit der spannweitigen Pseudolänge $\Delta_z = 1\text{m}$ multiplizierte Sehnenlänge c des Profils, während für die Zylinderumströmung in Kap. 7 und 8.1 das Produkt aus dem Durchmesser D und Δ_z verwendet wurde.

Widerstandsbeiwert

Die mit dem dynamischen Druck der Anströmung normierte Widerstandskraft wird als Widerstandsbeiwert bezeichnet:

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty A_{ref}} \,. \tag{2.22}$$

Die Referenzfläche ist hierbei in der Regel mit der für den Auftriebsbeiwert verwendeten identisch.

Druckbeiwert

Der Druckbeiwert ist die mit dem dynamischen Druck normierte statische Druckdifferenz zur Anströmung:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty} \,. \tag{2.23}$$

Zu beachten ist hierbei, dass es sich bei c_p um eine lokale Größe handelt, während der Auftriebs- und Widerstandsbeiwert integrale Größen sind.

3 Gradientenbasierte Optimierung

Jedes im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Strömungsproblem stellt ein System dar, dass sich mit Hilfe der in Kap. 2 dargestellten partiellen Differentialgleichungen, im Folgenden auch Zustandsgleichungen genannt, sowie den Anfangs- und Randbedingungen beschreiben lässt. Für die Optimierung muss nun zunächst eine Ziel- oder Kostenfunktion J definiert werden, die den Nutzen des Systems als skalare Größe erfasst. Im Fall der aktiven Strömungskontrolle ist dies, wie in Kap. 4.3 noch ausführlich erläutert wird, der Auftrieb oder der Widerstand. Diese Zielfunktion ist von einer Reihe von Variablen abhängig, die im Weiteren als Steuerung s_i bezeichnet werden. Bei vielen Anwendungen ist es sinnvoll oder notwendig, Beschränkungen, sogenannte Restriktionen, an die Steuerung zu formulieren, um z.B. den zulässigen Wertebereich der Steuerung einzuschränken. Da in der vorliegenden Arbeit auf die Beschränkung der Steuerung verzichtet wurde, sei für eine Übersicht zu restringierten Optimierungsstrategien auf die Literatur verwiesen, z.B. [16, 82].

Das Ziel der Optimierung ist es, Werte für die Steuerung zu finden, die die Zielfunktion minimieren bzw. maximieren. Da sich jedes Minimierungsproblem auch als Maximierungsproblem darstellen lässt und umgekehrt, soll im Weiteren ausschließlich die Minimierung der Zielfunktion betrachtet werden. Eine Möglichkeit dieses Ziel zu erreichen sind Optimierungsverfahren, die den Gradienten und (sofern verfügbar) die Hesse-Matrix der Zielfunktion verwenden, um das Optimum ausgehend von einer Initiallösung iterativ zu ermitteln. Nach Nocedal und Wright [82] gibt es hierfür zwei grundsätzlich unterschiedliche Ansätze. Bei der *Trust-Region*-Methode wird die Zielfunktion durch ein Modell ersetzt, das es zu minimieren gilt. Man beschränkt sich jedoch bei der Minimumsuche auf die Umgebung von s_i, die sogenannte *Trust-Region*, da man nicht davon ausgehen kann, dass das Modell die Zielfunktion im gesamten Gebiet genau approximiert. Eine anschauliche Darstellung der *Trust-Region*-Methode findet sich z.B. in [82].

In der vorliegenden Arbeit wurde das weit verbreitete *Line-Search*-Verfahren (dt. Liniensuchverfahren) verwendet[1]. Bei dieser Methode wird ausgehend von der Steuerung zur k-ten Iteration s_i^k mit der optimalen Schrittweite α_{opt} in die Richtung p_i^k extrapoliert, um die neue Steuerung s_i^{k+1} zu berechnen, d.h.

$$s_i^{k+1} = s_i^k + \alpha_{opt} p_i^k \,, \tag{3.1}$$

wobei der hochgestellte Index k im Folgenden die k-te Iteration darstellt, während die tiefgestellten Indizes gemäß der Tensornotation interpretiert werden sollen (siehe z.B. [101]). Die

[1] An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass das dargestellte Verfahren zunächst nur für die *Optimierung ohne Nebenbedingungen* anwendbar ist. Ziel dieser Arbeit ist jedoch die Minimierung des Widerstands bzw. des Abtriebs aerodynamischer Konfigurationen unter Einhaltung der strömungsmechanischen Bilanzgleichungen. Im Kap. 4.2.2 wird daher die Lagrange-Technik eingeführt, die eine *Optimierung mit Nebenbedingungen in Gleichungsform* ermöglicht. Es lässt sich leicht zeigen, dass sich das hier vorgestellte Optimierungsverfahren in diesem Fall völlig analog anwenden lässt, in dem man die Zielfunktion J durch die Lagrange-Funktion L ersetzt.

optimale Schrittweite lässt sich formal aus der Minimierungsaufgabe

$$\min J(s_i^k + \alpha p_i^k) \qquad \text{mit} \qquad \alpha > 0 \tag{3.2}$$

bestimmen, d.h., man sucht entlang der Richtung p_i^k das Minimum der skalaren Zielfunktion J. Aus dieser Liniensuche leitet sich der Name des Optimierungsverfahrens ab. Das exakte Lösen der Minimierungsaufgabe 3.2 ist in der Regel sehr aufwändig, so dass man sich meist auf eine Näherungslösung (engl. inexact line search) beschränkt. Im Rahmen dieser Arbeit wird dabei zweistufig vorgegangen. In der Eingrenzungsphase, im engl. *Bracketing* genannt, wird zunächst der Bereich des Minimums entlang der aktuellen Richtung p_i^k eingegrenzt.

Für diese Aufgabe existieren ausgefeilte iterative Algorithmen, die die Anzahl der Zustandsauswertungen und damit die insgesamt benötigte CPU-Zeit auf ein Minimum reduzieren [82]. Allerdings basieren diese Algorithmen in der Regel auf einer sequentiellen Anpassung des Intervalls, in dem das Minimum vermutet wird, und lassen sich daher schlecht parallelisieren. Dies führt zu langen realen Rechenzeiten. Aus diesem Grund wurde für diese Arbeit der folgende pragmatische Ansatz gewählt. In jeder Iteration der Liniensuche werden n Simulationen mit unterschiedlicher Schrittweite $\alpha_n = \alpha_0 + \Delta\alpha_n$ parallel durchgeführt. Liegt das Minimum in diesem Intervall, d.h., existieren drei aufeinander folgende Schrittweiten α^a, α^b und α^c, für die

$$J(s_i^k + \alpha^a p_i^k) > J(s_i^k + \alpha^b p_i^k) < J(s_i^k + \alpha^c p_i^k) \tag{3.3}$$

gilt, ist die Eingrenzungsphase beendet. Andernfalls wird die Suche mit n neuen Schrittweiten fortgesetzt. Dieses „*Brute-Force*"-Vorgehen verlangt zwar eine größere Anzahl an Zustandsauswertungen, hat sich aber im Rahmen dieser Arbeit aufgrund der Parallelisierbarkeit als relativ schnell im Sinne von benötigter realer Rechenzeit erwiesen.

Nachdem das Intervall, in dem sich das Minimum befindet, eingegrenzt ist, wird in der zweiten Phase eine quadratische Interpolation mit den drei Schrittweiten α^a, α^b und α^c durchgeführt. Der Ort des Minimums dieser quadratischen Funktion ist dann eine Approximation für die optimale Schrittweite α_{opt}.

Als initiale Schrittweite wurde in der Regel $\alpha_0 = 1$ gewählt. Da die gefundene optimale Schrittweite α_{opt} das Ergebnis einer inexakten Liniensuche ist, wurde im Anschluss geprüft, ob diese den Wolfe-Bedingungen genügt [82, 126, 127]:

$$J(s_i^k + \alpha^k p_i^k) \leq f(s_i^k) + c_1 \alpha^k \frac{\partial J(s_i^k)}{\partial s_i^k} p_i^k \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial J(s_i^k + \alpha^k p_i^k)}{\partial s_i^k} p_i^k \geq c_2 \frac{\partial J(s_i^k)}{\partial s_i^k} p_i^k \,. \tag{3.5}$$

Nach Ungleichung 3.4 muss die Zielfunktion an der Stelle $s_i^k + \alpha^k p_i^k$ den mit c_1 skalierten, extrapolierten Gradienten unterschreiten, so dass von einer hinreichenden Abnahme der Funktion J ausgegangen werden kann. Da Gleichung 3.4 für alle genügend kleinen Schrittweiten α^k erfüllt ist, wird zusätzlich die Einhaltung der Krümmungsbedingung 3.5 gefordert. Sie stellt sicher, dass die Steigung an der neuen Stelle $s_i^k + \alpha^k p_i^k$ größer ist als die mit c_2 skalierte Steigung an der Ausgangsposition s_i^k. Da die Steigung bei s_i^k negativ ist, kann durch Einhaltung der

Krümmungsbedingung davon ausgegangen werden, dass man sich dem Minimum hinreichend genähert hat.

Es verbleibt nun die Frage, wie die Richtung p_i^k zu bestimmen ist. Wie eingangs erwähnt, basieren die hier dargestellten Liniensuchverfahren in der Regel auf Informationen über den Gradienten und die Hesse-Matrix der Zielfunktion. Mit Hilfe des Taylor-Theorems

$$J(s_i^k + \alpha_{opt} p_i^k) = J(s_i^k) + \alpha_{opt} p_i^k \frac{\partial J(s_i^k)}{\partial s_i^k} + \frac{1}{2}\alpha_{opt}^2 p_i^k p_j^k \frac{\partial^2 J(s_i^k + t p_i^k)}{\partial s_i^k \partial s_j^k} \qquad \text{mit} \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.6)$$

lässt sich nach Nocedal und Wright [82] zunächst anschaulich der Begriff der Abstiegsrichtung erläutern, wobei im Folgenden aus Gründen der Einfachheit $J(s_i^k + \alpha_{opt} p_i^k)$ und $J(s_i^k)$ mit J^{k+1} bzw. J^k abgekürzt werden. Der Term $\frac{\partial J^k}{\partial s_i^k} p_i^k$ bestimmt die Änderungsrate von J^{k+1} und für die Optimierung sollte er negativ und möglichst klein sein. Aus der geometrischen Interpretation des Skalarprodukts erhält man

$$\frac{\partial J^k}{\partial s_i^k} p_i^k = \sqrt{\left(\frac{\partial J^k}{\partial s_j^k}\right)^2} \cos\theta \,, \tag{3.7}$$

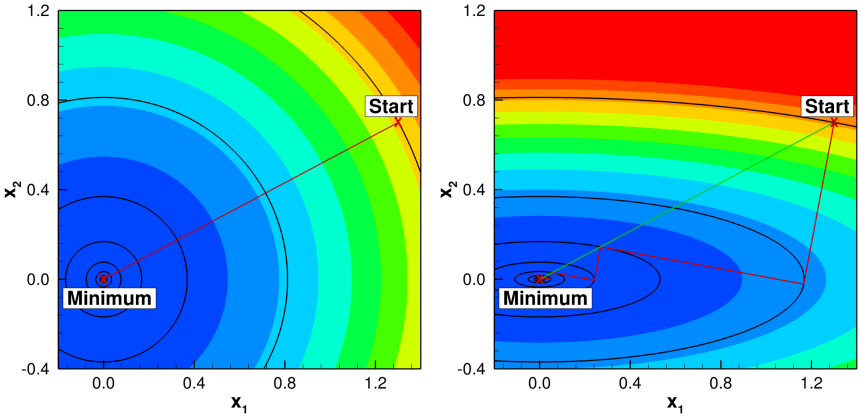
wobei θ der eingeschlossene Winkel zwischen dem Gradienten und der Richtung p_i^k ist und $||p_i^k|| = \sqrt{(p_i^k)^2} = 1$ gilt. Man kann nun folgern, dass alle Richtungen p_i^k, die in einem Winkel zwischen $+90^o$ und -90^o zum *negativen* Gradienten orientiert sind, Abstiegsrichtungen sind. Das Skalarprodukt 3.7 wird für einen Winkel von $\theta = 180^o$ minimal, d.h., p_i^k zeigt in diesem Fall in Richtung des negativen Gradienten, und es folgt für die Richtung:

$$p_i^k = \frac{-\frac{\partial J^k}{\partial s_i^k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial J^k}{\partial s_j^k}\right)^2}} \,. \tag{3.8}$$

Das in Gl. 3.8 definierte p_i^k ist die Richtung des steilsten Abstiegs (engl. steepest descent) und Grundlage für das Abstiegsgradientenverfahren, das nach [82] eine lineare Konvergenzrate aufweist. Bei ungünstiger Skalierung des Optimierungsproblems, d.h., wenn die einzelnen partiellen Ableitungen des Gradienten von stark unterschiedlicher Größenordnung sind, kann das Abstiegsgradientenverfahren sehr ungünstige Konvergenzeigenschaften aufweisen. Dies lässt sich anschaulich für die quadratische Zielfunktion

$$J(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_2^2 \tag{3.9}$$

demonstrieren, deren Minimum am Punkt $(x_1 = 0; x_2 = 0)$ liegt. Für den Fall $a = b = 1$ sind die Konturlinien der Funktion J kreisförmig um das Minimum bei $x_1 = x_2 = 0$ angeordnet (siehe Abb. 3.1a). Der Gradient, welcher immer senkrecht zu den Konturlinien orientiert ist, zeigt an jeder Stelle des betrachteten Gebiets exakt zum Minimum, so dass man mit der optimalen Schrittweite nur eine einzige Iteration zum Erreichen des Minimums benötigt.



(a) $J = x_1^2 + x_2^2$ (b) $J = 0.1x_1^2 + x_2^2$

Abbildung 3.1: Optimierungsverlauf des Abstiegsgradienten- (rot) und Newton-Verfahrens (grün) für eine quadratische Funktion

Wählt man $a = 0.1$, $b = 1.0$ als Konstanten der Funktion J, weisen die Konturlinien den in Abb. 3.1b dargestellten ovalen Verlauf auf. In diesem Fall benötigt das Abstiegsgradientenverfahren deutlich mehr Schritte zum Erreichen des Optimums und zeigt darüber hinaus ein für schlecht skalierte Probleme typisches, zickzackartiges Konvergenzverhalten. Zum Vergleich ist in Abb. 3.1b das Newton-Verfahren eingezeichnet, das sich leicht aus einer nach dem zweiten Glied abgebrochenen Taylor-Reihe herleiten lässt:

$$J^{k+1} = J^k + p_i^k \frac{\partial J^k}{\partial s_i^k} + \frac{1}{2} p_i^k p_j^k \frac{\partial^2 J^k}{\partial s_i^k \partial s_j^k} \,. \tag{3.10}$$

Dabei wurden die Abkürzungen $J(s_i^k + p_i^k) = J^{k+1}$ und $J(s_i^k) = J^k$ verwendet. Die quadratische Approximation wird minimal für $dJ^{k+1}/dp_i^k = 0$, d.h.

$$0 = \frac{\partial J^k}{\partial s_i^k} + p_j^k \frac{\partial^2 J^k}{\partial s_i^k \partial s_j^k} \,, \tag{3.11}$$

und man erhält als Suchrichtung

$$p_i^k = - \left(\frac{\partial^2 J^k}{\partial s_i^k \partial s_j^k} \right)^{-1} \frac{\partial J^k}{\partial s_j^k} \,. \tag{3.12}$$

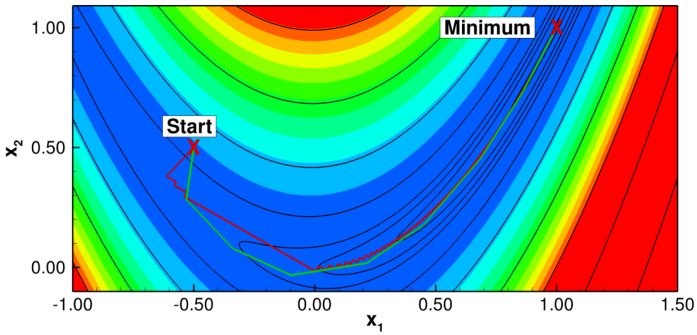
Das Newton-Verfahren berücksichtigt also neben dem Gradienten noch Informationen über die Krümmung in Form der Hesse-Matrix $H_{ij} = \partial^2 J/(\partial s_i \partial s_j)$. Es konvergiert quadratisch und

erreicht daher für das zuvor gewählte Beispiel das Minimum nach nur einer Iteration.

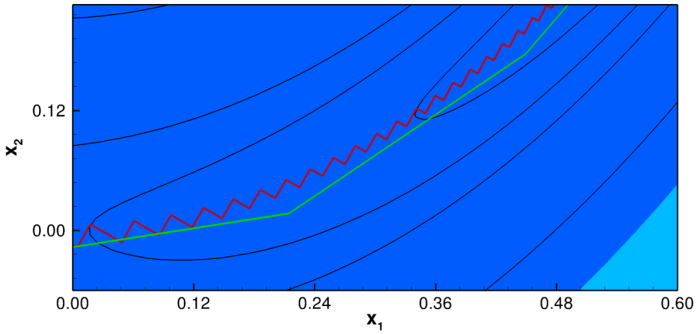
Das Newton-Verfahren besitzt eine natürliche Schrittweite von $\alpha = 1$ und ist unempfindlich gegenüber schlecht skalierten Problemen. Um dies zu verdeutlichen, ist in Abb. 3.2 der Optimierungsverlauf des Abstiegsgradienten- und des Newton-Verfahrens für die Rosenbrock-Funktion

$$J(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2 \tag{3.13}$$

gezeigt [95]. Während das Abstiegsgradientenverfahren einen sehr deutlichen Zickzackverlauf



(a) Kompletter Verlauf



(b) Ausschnitt

Abbildung 3.2: Optimierungsverlauf des Abstiegsgradienten- (rot) und Newton-Verfahrens (grün) für die Rosenbrock-Funktion

aufweist und gut 9000 Iteration zur Konvergenz[2] benötigt, zeigt das Newton-Verfahren einen glatten Konvergenzverlauf und erreicht das Minimum bei $(x_1 = 1; x_2 = 1)$ bereits nach acht Schritten.

[2]Das Konvergenzkriterium beträgt in beiden Fällen $|J - J_{min}| \leq 1 \times 10^{-8}$.

Bei der Anwendung des Newton-Verfahrens ist zu beachten, dass die Richtung p_i^k nur eine Abstiegsrichtung ist, wenn die Hesse-Matrix H_{ij} positiv definit ist. Ein weiteres Problem ist, dass die Berechnung der Hesse-Matrix oft numerisch sehr aufwändig ist. Aus diesem Grund erfreuen sich Quasi-Newton-Verfahren großer Beliebtheit, die statt der vollständigen Information über die zweiten Ableitungen nur eine Approximation der Hesse-Matrix verwenden. Formal lässt sich damit die Richtung p_i^k ausdrücken als

$$p_i^k = -(A_{ij}^k)^{-1}\frac{\partial J^k}{\partial s_j^k} \qquad \text{mit} \qquad A_{ij}^k = \begin{cases} E_{ij} & \text{Abstiegsgradientenverfahren,} \\ H_{ij}^k & \text{Newton-Verfahren,} \\ B_{ij}^k & \text{Approx. für } H_{ij}^k \rightarrow \text{Quasi-Newton-Verfahren,} \end{cases} \tag{3.14}$$

wobei E_{ij} die Einheitsmatrix ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde neben dem Abstiegsgradientenverfahren das nach Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno benannte BFGS-Verfahren verwendet, welches superlinear konvergiert und damit zwischen dem Abstiegsgradienten- und dem Newton-Verfahren liegt [82]. Mit letzterem hat es außerdem den Vorteil gemein, dass es unempfindlich gegenüber schlecht skalierten Problemen ist. Eine ausführliche Darstellung von Quasi-Newton-Verfahren ist z.B. in [16, 82] zu finden. An dieser Stelle sei nur die Berechnungsvorschrift des BFGS-Verfahrens sowie der daraus resultierende iterative Ablauf des Optimierungsverfahrens zusammengefasst, wobei die Inverse der Matrix B_{ij} als BI_{ij} bezeichnet werden soll:

$k = 0$:

- Schätze s_i^0
- Setze $B_{ij}^0 = E_{ij}, \quad BI_{ij}^0 = E_{ij}$

do while (Konvergenzkriterium nicht erfüllt)

- $p_i^k = -BI_{ij}^k \dfrac{\partial J^k}{\partial s_j^k}$
- Suche optimale Schrittweite α_{opt}
- $s_i^{k+1} = s_i^k + \alpha_{opt} p_i^k$
- $s_i^k = s_i^{k+1} - s_i^k$
- $y_i^k = \dfrac{\partial J^{k+1}}{\partial s_i^k} - \dfrac{\partial J^k}{\partial s_i^k}$
- $B_{ij}^{k+1} = B_{ij}^k - \dfrac{B_{il}^k s_l^k s_m^k B_{mj}^k}{s_n^k B_{np}^k s_p^k} + \dfrac{y_i^k y_j^k}{y_l^k s_l^k}$
- $BI_{ij}^{k+1} = BI_{ij}^k + \dfrac{(s_l^k y_l^k + y_l^k BI_{lm}^k y_m^k)(s_i^k s_j^k)}{(s_n^k y_n^k)^2} - \dfrac{BI_{il}^k y_l^k s_j^k + s_i^k y_l^k BI_{lj}^k}{s_m^k y_m^k}$

enddo

4 Berechnung des Gradienten der Zielfunktion

Bevor im Folgenden die verschiedenen Möglichkeiten zur Berechnung des Gradienten der Zielfunktion bezüglich der Steuerung dargestellt werden, wollen wir zunächst genau den Anspruch an das Optimierungsverfahren aus Sicht des Ingenieurs definieren. Die Ausgangssituation ist, dass mit Hilfe der aktiven Strömungsbeeinflussung die Umströmung einer Geometrie, z.B. eines Fahrzeugs oder eines Flugzeugflügels verbessert werden soll. Zu diesem Zweck wird mit Hilfe numerischer Simulationen für die jeweilige Konfiguration in der Regel eine aussagekräftige Größe wie der Auftriebs- oder Widerstandsbeiwert berechnet, d.h., die Basis für die Beurteilung des aerodynamischen Verhaltens ist die *diskrete* Formulierung einer Zielfunktion. Wir erwarten daher von dem Adjungiertenverfahren, dass es uns den möglichst exakten Gradienten der diskreten Zielfunktion liefert, so dass sich mit Hife der gradientenbasierten Optimierung ein lokales Minimum der diskreten Zielfunktion auffinden lässt.

4.1 Finite Differenzen

Die einfachste Möglichkeit zur Bestimmung des Gradienten sind Finite Differenzen. Ausgehend von der Definition der ersten Ableitung einer Funktion lässt sich der Gradient der Zielfunktion z.B. über den vorwärtigen Differenzenquotienten bestimmen:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}s_i} := \lim_{\Delta s_i \to 0} \frac{J[s_i + \Delta s_i, u(s_i + \Delta s_i)] - J[s_i, u(s_i)]}{\Delta s_i} \,. \tag{4.1}$$

Ein Vorteil der Finiten Differenzen ist, dass sie auf der diskreten Formulierung der Zielfunktion basieren und damit unserer zu Beginn des Kapitels formulierten Forderung nach dem exakten Gradienten der diskreten Zielfunktion nahe kommen. Außerdem sind Finite Differenzen einfach anwendbar, da sie keine Veränderungen am Strömungslöser erfordern.

Allerdings ist die Auswertung der Finiten Differenzen numerisch ineffizient. Nach Gl. 4.1 sind bei n Anregeparametern $n + 1$ Strömungssimulationen zur Berechnung des Gradienten notwendig. Für komplexe Optimierungsaufgaben mit einer hohen Anzahl von Anregeparametern ist die Auswertung auf Basis Finiter Differenzen daher zu aufwändig. Außerdem muss bei der numerischen Berechnung des Differenzenquotienten das Zusammenspiel von Entwicklungs- und Auslöschungsfehlern beachtet werden (siehe hierzu auch Kapitel 7). Sie sollen jedoch im Rahmen dieser Arbeit als Vergleichsbasis für eine Bewertung der Adjungiertenverfahren zum Einsatz kommen.

4.2 Adjungiertenverfahren

Eine Alternative zur Berechnung des Gradienten mit Finiten Differenzen ist der Adjungiertenansatz. Im Folgenden soll dieser zunächst anhand eines einfachen diskreten Minimierungsproblems motiviert werden. Anschließend wird erläutert, wie sich das adjungierte System mit Hilfe der Lagrange-Technik und des nach den Mathematikern Karush, Kuhn und Tucker benannten KKT-Systems im diskreten und kontinuierlichen Fall bestimmen lässt. Danach erfolgt eine kurze Darstellung des diskreten Adjungiertenverfahrens auf Basis des Automatischen Differenzierens, bevor zum Abschluss des Kapitels die Eigenschaften der verschiedenen Adjungiertenansätze diskutiert werden.

4.2.1 Diskrete Adjungierte für ein lineares Gleichungssystem

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen sei das diskrete Minimierungsproblem

$$\min_{(s,u)} J_d(s,u)\,, \quad \text{so dass} \quad R_d(s,u) = A\,u - B\,s = 0\,. \tag{4.2}$$

Darin seien $u \in \mathcal{U}$ und $s \in \mathcal{S}$ der diskrete Zustands- und Steuerungsvektor, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ der Zustands- und Steuerungsraum, $J_d = J_d(s,u)$ die zu minimierende diskrete Zielfunktion mit $J_d : \mathcal{S} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, sowie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ zwei gegebene Matrizen, wobei A invertierbar sei. Die diskrete Zustandsgleichung R_d heiße das diskrete primale System.

Der zur Lösung dieses Minimierungsproblems benötigte diskrete Gradientenvektor lässt sich aus dem totalen Differential berechnen:

$$dJ_d = \frac{\partial J_d}{\partial s} ds + \frac{\partial J_d}{\partial u} du \tag{4.3}$$

$$\frac{dJ_d}{ds} = \frac{\partial J_d}{\partial s} + \frac{\partial J_d}{\partial u}\frac{du}{ds}\,. \tag{4.4}$$

Während die partiellen Ableitungen auf der rechten Seite von Gl. 4.4 leicht zu berechnen sind, ist die Bestimmung der Ableitung des Zustands u nach der Steuerung s nur mit hohem numerischen Aufwand möglich. Sie lässt sich z.B. mit Hilfe Finiter Differenzen bestimmen, wobei der Rechenaufwand proportional zur Anzahl der Anregeparameter steigt. Man kann jedoch das zugrundeliegende lineare Gleichungssystem dazu verwenden, eine Berechnungsvorschrift für die gesuchte Ableitung zu erhalten:

$$A\,u = B\,s \tag{4.5}$$

$$u = A^{-1}B\,s \tag{4.6}$$

$$\frac{du}{ds} = A^{-1}B\,. \tag{4.7}$$

Daraus folgt für den Gradienten der Zielfunktion

$$\frac{dJ_d}{ds} = \frac{\partial J_d}{\partial s} + \frac{\partial J_d}{\partial u}A^{-1}B\,. \tag{4.8}$$

Um die numerisch aufwändige Berechnung der Inversen A^{-1} zu vermeiden, führt man nun den sogenannten adjungierten Zustand u^* ein:

$$u^* := \left(A^{-1}\right)^T \left(\frac{\partial J_d}{\partial u}\right)^T . \tag{4.9}$$

Nach kurzer Umformung erhält man die adjungierte Gleichung bzw. das adjungierte System:

$$u^* = \left(A^T\right)^{-1} \left(\frac{\partial J_d}{\partial u}\right)^T \tag{4.10}$$

$$A^T u^* = \left(\frac{\partial J_d}{\partial u}\right)^T . \tag{4.11}$$

Mit Hilfe des adjungierten Zustandes lässt sich nun eine Berechnungsvorschrift für den Gradienten herleiten:

$$\begin{aligned} \text{Berechne} \quad & \frac{dJ_d}{ds} = \frac{\partial J_d}{\partial s} + u^{*T} B \\ \text{mit} \quad & R_d^*(u, u^*) = A^T u^* - \left(\frac{\partial J_d}{\partial u}\right)^T = 0 . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Um den Gradienten zu bestimmen, genügt nun also das einmalige Lösen des primalen und adjungierten Systems, d.h., diese Form der Gradientenberechnung ist unabhängig von der Anzahl der Anregeparameter.

4.2.2 Notwendige Optimalitätsbedingung - KKT

Gegeben sei ein Ortsgebiet Ω mit Rand Γ, in dem wir die Strömung eines inkompressiblen Fluids beschreiben wollen. Seien $u \in \mathcal{U}$ und $s \in \mathcal{S}$ der Zustands- und Steuerungsvektor, wobei der Zustandsraum $\mathcal{U}$ und der Steuerungsraum $\mathcal{S}$ geeignete Hilberträume seien. Weiterhin seien die Zielfunktion $J : \mathcal{S} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und das primale System $R : \mathcal{S} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ zweimal Fréchet-differenzierbar, wobei $\mathcal{Y}$ ein geeigneter Banachraum sei. Im diskreten Fall ist $R = R_d(u, s) = 0$ gerade die diskrete primale Zustandsgleichung, im kontinuierlichen Fall die kontinuierliche primale Zustandsgleichung $R = R(u, s) = 0$ mit den zugehörigen geeigneten Randbedingungen auf Γ.

Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\min_{(s,u)} J(s, u) , \quad \text{so dass} \quad R(s, u) = 0 , \tag{4.13}$$

d.h., es gilt die Zielfunktion J über die Steuerung s unter der Nebenbedingung zu minimieren, dass die Zustandsgleichung R erfüllt ist. Zur Herleitung des Optimalitätssystems für Minimierungsprobleme unter Einhaltung von Nebenbedingungen in Gleichungsform kann der aus der Analysis bekannte Lagrangesche Formalismus verwendet werden [120]. Die Lagrange-Funktion ist die Summe aus der zu minimierenden Zielfunktion und den mit den Lagrangeschen Multiplikatoren skalar multiplizierten Nebenbedingungen. Für die vorliegende Optimierungsaufgabe

lautet sie[1]

$$L(s,u,u^*) := J(s,u) - \langle u^*, R(s,u)\rangle\,. \tag{4.14}$$

Die Definition des Skalarprodukts in 4.14 ist davon abhängig, ob Gl. 4.13 ein diskretes oder kontinuierliches Problem darstellt, und wird später noch genauer spezifiziert. Die Lagrangeschen Multiplikatoren u^* in Gl. 4.14 seien die adjungierten Variablen.

Gemäß der Lagrangeschen Multiplikatorregel ist die notwendige Optimalitätsbedingung, dass der Gradient der Lagrange-Funktion null wird, d.h.

$$DL(s,u,u^*) = \begin{pmatrix} D_s L(s,u,u^*) \\ D_u L(s,u,u^*) \\ D_{u^*} L(s,u,u^*) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{4.15}$$

Darin ist D ein allgemeiner Ableitungsoperator, dessen genaue Definition in Abhängigkeit des Optimierungsproblems erfolgt. Aus Gl. 4.15 folgen die sogenannten Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen, im Folgenden mit KKT abgekürzt:

$$D_s L(s,u,u^*) = D_s J(s,u) + \langle u^*, D_s R(s,u)\rangle \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.16}$$

$$D_u L(s,u,u^*) = D_u J(s,u) + \langle u^*, D_u R(s,u)\rangle \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.17}$$

$$D_{u^*} L(s,u,u^*) = R(s,u) \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{4.18}$$

Während sich der für das Optimierungsverfahren benötigte Gradient aus Gl. 4.16 bestimmen lässt, kann die Berechnungsvorschrift für die Lagrange-Multiplikatoren, also den adjungierten Zustand, mit Hilfe von Gl. 4.17 gewonnen werden. Die Bedingung 4.18 ist automatisch erfüllt, sofern die Nebenbedingung des Ausgangssystems, also die primale Zustandsgleichung, erfüllt ist.

KKT im Diskreten

Die KKT-Bedingungen 4.16 bis 4.18 sollen nun auf die diskrete Optimierungsaufgabe

$$\min_{(s,u)} J_d(s,u)\,, \quad \text{so dass} \quad R_d(s,u) = A\,u - B\,s = 0 \tag{4.19}$$

angewendet werden. In diesem Fall sei das verwendete Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle u^*, R(s,u)\rangle &= (u^*, R_d(s,u))_{\mathbb{R}^n} \\ &:= u^{*T} R_d(s,u)\,, \end{aligned} \tag{4.20}$$

[1] An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass es unerheblich ist, ob die Nebenbedingungen addiert oder subtrahiert werden. Dies ändert nur das Vorzeichen der Lagrangeschen Multiplikatoren.

d.h., es entspricht dem bekannten euklidischen Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Für die Auswertung der KKT-Bedingungen werden partielle Ableitungen verwendet:

$$D_s := \frac{\partial}{\partial s}\,, \quad D_u := \frac{\partial}{\partial u}\,, \quad D_{u^*} := \frac{\partial}{\partial u^*}\,. \tag{4.21}$$

Mit der diskreten Lagrange-Funktion

$$L_d(s,u,u^*) = J_d(s,u) - u^{*T} R_d(s,u) \tag{4.22}$$

folgt

$$\frac{\partial L_d}{\partial s} = \frac{\partial J_d}{\partial s} - u^{*T}\frac{\partial R_d}{\partial s} \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial L_d}{\partial u} = \frac{\partial J_d}{\partial u} - u^{*T}\frac{\partial R_d}{\partial u} \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial L_d}{\partial u^*} = R_d \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{4.25}$$

Gl. 4.25 ist die primale Zustandsgleichung und Gl. 4.24 das adjungierte Gleichungssystem. Aus Gl. 4.23 folgt der gesuchte Gradient $\frac{dJ_d}{ds}$, denn wegen

$$\frac{dL_d}{ds} = \frac{dJ_d}{ds} - u^{*T}\underbrace{\frac{dR_d}{ds}}_{=0} \tag{4.26}$$

und

$$\frac{dL_d}{ds} = \frac{\partial L_d}{\partial s} + \underbrace{\frac{\partial L_d}{\partial u}}_{=0, Gl.\ 4.24}\frac{du}{ds} + \underbrace{\frac{\partial L_d}{\partial u^*}}_{=0, Gl.\ 4.25}\frac{du^*}{ds} \tag{4.27}$$

gilt

$$\frac{\partial L_d}{\partial s} = \frac{dJ_d}{ds}\,. \tag{4.28}$$

Zusammengefasst erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_d}{\partial u} \stackrel{!}{=} 0: \quad & \frac{\partial J_d}{\partial u} - u^{*T}\frac{\partial R_d}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \text{ adjungiertes Gleichungssystem} \\ \frac{\partial L_d}{\partial s} \stackrel{!}{=} 0: \quad & \frac{dJ_d}{ds} = \frac{\partial J_d}{\partial s} - u^{*T}\frac{\partial R_d}{\partial s} \quad \Rightarrow \text{ Gradient}\,. \end{aligned} \tag{4.29}$$

KKT im Kontinuierlichen

Wir betrachten nun die kontinuierliche Optimierungsaufgabe

$$\min_{(s,u)} J(s,u)\,, \quad \text{so dass} \quad R(s,u) = 0\,. \tag{4.30}$$

In diesem Fall verwenden wir das L^2-Skalarprodukt:

$$\langle u^*, R(s,u)\rangle = (u^*, R(s,u))_{L^2(\Omega)} \tag{4.31}$$

$$:= \int_\Omega u^* R(s,u)\, dV\,. \tag{4.32}$$

Für die Ableitung in 4.15 verwenden wir nun die sogenannte Richtungsableitung [120]. Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ reelle Banachräume und $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ eine Abbildung von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$. Existiert zu $u \in \mathcal{U}$ und $\delta u \in \mathcal{U}$ der Grenzwert

$$\delta F(u;\delta u) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(u+\epsilon\delta u) - F(u)}{\epsilon} = \left.\frac{dF(u+\epsilon\delta u)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \tag{4.33}$$

heißt δF Richtungsableitung von F an der Stelle u in Richtung δu [120]. Existiert der Grenzwert für alle Richtungen δu, nennt man δF auch die erste Variation von F an der Stelle u. Sie lässt sich in unserem Fall leicht berechnen als

$$\delta F(u;\delta u) = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u\,. \tag{4.34}$$

Ist F von mehreren Größen abhängig, gilt analog zum totalen Differential

$$\delta F(u,s;\delta u,\delta s) = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial s}\delta s \tag{4.35}$$

oder abgekürzt

$$\delta F(u,s;\delta u,\delta s) = \delta_u F + \delta_s F\,. \tag{4.36}$$

Wir verwenden also in 4.15 gerade

$$D_s := \delta_s\,,\quad D_u := \delta_u\,,\quad D_{u^*} := \delta_{u^*}\,. \tag{4.37}$$

Mit der Definition des Skalarprodukts gemäß Gl. 4.32 lautet die Lagrange-Funktion im kontinuierlichen Fall

$$L(s,u,u^*) = J(s,u) - \int_\Omega u^* R(s,u)\, dV \tag{4.38}$$

und man erhält als KKT-Bedingungen

$$\delta_s L = \delta_s J - \int_\Omega u^* \delta_s R\, dV \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.39}$$

$$\delta_u L = \delta_u J - \int_\Omega u^* \delta_u R\, dV \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.40}$$

$$\delta_{u^*} L = \int_\Omega \delta u^* R\, dV \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{4.41}$$

Gl. 4.41 ist nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung immer erfüllt, sofern die primale Erhaltungsgleichung erfüllt ist, aus Gl. 4.40 lässt sich die adjungierte Transportgleichung gewinnen und Gl. 4.39 kann zur Herleitung einer Bestimmungsgleichung für den gesuchten Gradienten verwendet werden. Im folgenden Kapitel soll dieses Vorgehen nun anhand der instationären aktiven Strömungskontrolle im Detail erläutert werden.

4.3 Kontinuierliches Adjungiertenverfahren für die aktive Strömungskontrolle

4.3.1 Die Zielfunktion

Die zu minimierende Größe ist in der vorliegenden Arbeit die zeitgemittelte Abtriebs- bzw. Widerstandskraft

$$\begin{aligned}\overline{F}_{a,w} = &-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_o}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - pn_i\right]e_i\,dA\,dt \\ &-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - pn_i - \varrho u_i u_j n_j\right]e_i\,dA\,dt\,.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Das negative Vorzeichen resultiert dabei aus der Konvention, dass der Normalenvektor für die Finite-Volumen-Diskretisierung aus dem Kontrollvolumen hinaus zeigen soll. Das Oberflächenintegral über das Kontrollsegment Γ_k enthält hier auch einen konvektiven Anteil, der durch das Ein- und Ausblasen verursacht wird. Im zweidimensionalen Fall stellt Gl. 4.42 die Widerstandskraft dar, wenn der normierte Richtungsvektor e_i parallel zur Anströmung orientiert ist. Bei einer Ausrichtung normal zur Anströmung handelt es sich bei Gl. 4.42 um die Abtriebskraft.

Für einige Anwendungen ist es bei der Formulierung der Zielfunktion sinnvoll, einen Strafterm hinzuzufügen, um den Energieaufwand der Anregung zu berücksichtigen. Unter Vernachlässigung der zum Erzeugen der Anregung benötigten Energie ist der Aufwand proportional zur Leistung des über den Kontrollrand bewegten Fluids:

$$\overline{P}_k = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\varrho u^2|u_i n_i|\,dA\,dt > 0\,. \tag{4.43}$$

Um die stetige Differenzierbarkeit des Betrags im Strafterm zu erreichen, kann der Ansatz

$$|u_i n_i| = \sqrt{(u_i n_i)^2+\epsilon} \qquad \text{mit} \qquad 0<\epsilon\ll 1 \tag{4.44}$$

verwendet werden. Skaliert man die Abtriebs- bzw. Widerstandskraft mit der Fernfeldgeschwindigkeit und den Strafterm mit einem Faktor γ, erhält man als Zielfunktion

$$\hat{J} = u_\infty \overline{F}_{a,w} + \gamma \overline{P}_k \tag{4.45}$$

oder alternativ die im Weiteren verwendete Form

$$J = \overline{F}_{a,w} + \frac{\gamma}{u_\infty}\overline{P}_k \,. \tag{4.46}$$

Daraus ergibt sich für die Zielfunktion

$$\begin{aligned} J = &-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_o}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - pn_i\right]e_i\,dA\,dt \\ &-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - pn_i - \varrho u_i u_j n_j\right]e_i\,dA\,dt \\ &+\frac{\gamma}{u_\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\varrho u^2\sqrt{(u_i n_i)^2+\epsilon}\,dA\,dt\,. \end{aligned} \tag{4.47}$$

4.3.2 Die Lagrange-Funktion

Bei Verwendung der RANS-Gleichungen kann nun mit Hilfe der Zielfunktion (4.47), der Navier-Stokes-Gleichungen (2.15) sowie der Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen die Lagrange-Funktion aufgestellt werden. Dabei ergibt sich jedoch das Problem, dass die meisten Turbulenzmodelle, darunter auch die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten k-ω-Modelle, nicht ohne Modifikationen analytisch differenzierbar sind. Bisher sind nur von der auf diesem Gebiet führenden Arbeitsgruppe von Prof. Giannakoglou einige wenige Turbulenzmodelle im Rahmen der Formoptimierung adjungiert worden [130, 131]. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle die häufig verwendete Annahme getroffen, dass die turbulente Viskosität bzw. die Turbulenzgrößen nicht von den Steuerungsparametern abhängig sind. In diesem Fall entfällt der Einfluss des Turbulenzmodells auf das adjungierte System und den daraus berechneten Gradienten und man kann die Gesamtviskosität aus der primalen Lösung unverändert für das adjungierte System übernehmen. Dieser Ansatz ist in der Literatur als *Frozen-Turbulence-Assumption* bekannt [130]. Die Folgen dieser Annahme für die Genauigkeit des Gradienten wird in den Kapiteln 7 und 8 genauer untersucht.

Unter Verwendung des *Frozen-Turbulence*-Ansatzes erhält man für die Lagrange-Funktion

$$
\begin{aligned}
L(u_i, p, s_i, u_i^*, p^*) &= CJ - \int_0^T \int_\Omega p^* R_\varrho \, dV \, dt + \int_0^T \int_\Omega u_i^* R_{u,i} \, dV \, dt \\
&= -\frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_o} \left[\mu_g \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - p n_i \right] e_i \, dA \, dt \\
&- \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[\mu_g \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - p n_i - \varrho u_i u_j n_j \right] e_i \, dA \, dt \\
&+ \frac{\gamma}{u_\infty} \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \varrho u^2 \sqrt{(u_i n_i)^2 + \epsilon} \, dA \, dt - \int_0^T \int_\Omega \underbrace{p^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{I} \, dV \, dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \left\{ \underbrace{u_i^* \frac{\partial \varrho u_i}{\partial t}}_{II} + \underbrace{u_i^* \frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j}}_{III} + \underbrace{u_i^* \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{IV} - \underbrace{u_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_g \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]}_{V} \right\} dV \, dt \, .
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Die Konstante C vor der Zielfunktion dient dabei zur Anpassung der Einheiten. Die unterklammerten Terme werden nun partiell integriert, wobei für die räumlichen Integrale die Greensche Formel verwendet werden kann.

Term I

$$
\int_0^T \int_\Omega p^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, dV \, dt = \int_0^T \int_\Gamma p^* u_i n_i \, dA \, dt - \int_0^T \int_\Omega u_i \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \, dV \, dt \tag{4.49}
$$

Term II

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega u_i^* \frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} \, dV \, dt &= \int_\Omega \int_0^T \varrho u_i^* \frac{\partial u_i}{\partial t} \, dt \, dV \\
&= \int_\Omega \varrho u_i^{*T} u_i^T \, dV - \int_\Omega \varrho u_i^{*0} u_i^0 \, dV - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \varrho u_i^*}{\partial t} u_i \, dV \, dt
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Term III

$$
\int_0^T \int_\Omega u_i^* \frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j} \, dV \, dt = \int_0^T \int_\Gamma \varrho u_i^* u_i u_j n_j \, dA \, dt - \int_0^T \int_\Omega \varrho u_i u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \, dV \, dt \tag{4.51}
$$

Term IV

$$
\int_0^T \int_\Omega u_i^* \frac{\partial p}{\partial x_i} \, dV \, dt = \int_0^T \int_\Gamma p u_i^* n_i \, dA \, dt - \int_0^T \int_\Omega p \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \, dV \, dt \tag{4.52}
$$

Term V

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] u_i^*\, dV\, dt = \int_0^T \int_\Gamma \mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) u_i^* n_j\, dA\, dt \\ - \int_0^T \int_\Omega \mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}\, dV\, dt\end{aligned} \tag{4.53}$$

und weiter

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega \mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}\, dV\, dt = \\ &\quad \int_0^T \int_\Gamma \mu_g u_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} n_j\, dA\, dt - \int_0^T \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_g \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}\right) dV\, dt \\ &+ \int_0^T \int_\Gamma \mu_g u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} n_i\, dA\, dt - \int_0^T \int_\Omega u_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_g \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}\right) dV\, dt \\ &= \int_0^T \int_\Gamma \mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) u_i n_j\, dA\, dt - \int_0^T \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right] dV\, dt\,.\end{aligned} \tag{4.54}$$

Eingesetzt in Gl. 4.48 erhält man

$$\begin{aligned}L = &-\frac{C}{T}\int_0^T \int_{\Gamma_o}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) n_j - p n_i\right] e_i\, dA\, dt \\ &- \frac{C}{T}\int_0^T \int_{\Gamma_k}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) n_j - p n_i - \varrho u_i u_j n_j\right] e_i\, dA\, dt + \frac{\gamma}{u_\infty}\frac{C}{T}\int_0^T \int_{\Gamma_k} \varrho u^2 \sqrt{(u_i n_i)^2+\epsilon}\, dA\, dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \left\{-u_i \frac{\partial \varrho u_i^*}{\partial t} - \varrho u_i u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - p\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right]\right\} dV\, dt \\ &+ \int_0^T \int_\Gamma \left\{\varrho u_i^* u_i u_j + p u_j^* - p^* u_j - \mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) u_i^* + \mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) u_i\right\} n_j\, dA\, dt \\ &+ \int_\Omega \varrho u_i^{*T} u_i^T\, dV - \int_\Omega \varrho u_i^{*0} u_i^0\, dV\,.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Unter Verwendung der in Kap. 2.3 definierten Randbedingungen folgt schließlich

$$
\begin{aligned}
L = &-\frac{C}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_o}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - pn_i\right]e_i\,dA\,dt \\
&-\frac{C}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - pn_i - \varrho s_i s_j n_j\right]e_i\,dA\,dt + \frac{\gamma}{u_\infty}\frac{C}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\varrho s^2\sqrt{(s_i n_i)^2+\epsilon}\,dA\,dt \\
&+\int_0^T\int_\Omega\left\{-u_i\frac{\partial \varrho u_i^*}{\partial t} - \varrho u_i u_j\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - p\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial p^*}{\partial x_i} - u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right]\right\}dV\,dt \\
&+\int_0^T\int_{\Gamma_e}\left\{\varrho u_i^* g_i g_j + p u_j^* - p^* g_j - \mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)u_i^* + \mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)g_i\right\}n_j\,dA\,dt \\
&+\int_0^T\int_{\Gamma_a}\left\{\varrho u_i^* u_i u_j - p^* u_j + \mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)u_i\right\}n_j\,dA\,dt \\
&+\int_0^T\int_{\Gamma_k}\left\{\varrho u_i^* s_i s_j + p u_j^* - p^* s_j - \mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)u_i^* + \mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)s_i\right\}n_j\,dA\,dt \\
&+\int_0^T\int_{\Gamma_{o,w}}\left\{p u_j^* - \mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)u_i^*\right\}n_j\,dA\,dt + \int_\Omega \varrho u_i^{*T} u_i^T\,dV - \int_\Omega \varrho u_i^{*0} u_i^0\,dV\,.
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

4.3.3 Die Optimalitätsbedingung für die Geschwindigkeit u_i

Nach den in Kap. 4.2.2 dargestellten Zusammenhängen fordern wir nun, dass die Variation der Lagrange-Funktion bezüglich der Geschwindigkeit null wird:

$$\begin{aligned}
\delta_u L = &-\frac{C}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_{o,k}} \mu_g \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right) n_j e_i \, dA\, dt - \int_0^T\int_{\Gamma_{o,k}} \mu_g \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right) u_i^* n_j \, dA\, dt \\
&+\int_0^T\int_{\Gamma_a} \left\{ \varrho u_i^* u_i \delta u_j + \varrho u_i^* \delta u_i u_j - p^* \delta u_j + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\delta u_i \right\} n_j \, dA\, dt \\
&-\int_0^T\int_{\Gamma_{e,w}} \mu_g \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right) u_i^* n_j \, dA\, dt + \int_\Omega \varrho u_i^{*T} \delta u_i^T \, dV - \int_\Omega \varrho u_i^{*0} \delta u_i^0 \, dV \\
&+\int_0^T\int_\Omega \left\{ -\delta u_i \frac{\partial \varrho u_i^*}{\partial t} - \varrho u_i \delta u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \varrho \delta u_i u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \delta u_i \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \right. \\
&\qquad \left. -\delta u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right] \right\} dV\, dt \stackrel{!}{=} 0 \,.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Damit die Forderung für alle δu_i erfüllt ist, müssen die einzelnen Integrale jeweils null sein. Daraus ergibt sich für das Volumenintegral

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \left\{ -\frac{\partial \varrho u_i^*}{\partial t} - \varrho u_j \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} - \varrho u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right] \right\} \delta u_i \, dV\, dt = 0 \\
-\frac{\partial \varrho u_i^*}{\partial t} - \varrho u_j \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} - \varrho u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right] = 0 \,.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Gl. 4.58 ist die adjungierte Impulsbilanz zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes u_i^*. Das Nullsetzen der Randintegrale führt auf die Randbedingungen für die adjungierte Impulsbilanz.

Einströmrand Γ_e und feste Wände Γ_w

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T\int_{\Gamma_{e,w}} \mu_g \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right) u_i^* n_j \, dA\, dt \\
0 &= u_i^*
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Ausströmrand Γ_a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Gamma_a} \left\{ \varrho u_i^* u_i \delta u_j + \varrho u_i^* \delta u_i u_j - p^* \delta u_j + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \delta u_i \right\} n_j \, dA \, dt \\ 0 &= \varrho u_j^* u_j n_i + \varrho u_i^* u_j n_j - p^* n_i + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) n_j \end{aligned} \tag{4.60}$$

Geometrieoberfläche Γ_o **und Kontrollrand** Γ_k

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^T \int_{\Gamma_{o,k}} \mu_g \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{C}{T} e_i + u_i^* \right) n_j \, dA \, dt \\ u_i^* &= -\frac{C}{T} e_i \end{aligned} \tag{4.61}$$

Zur Zeit $t = 0$

$$0 = \int_\Omega \varrho u_i^{*0} \delta u_i^0 \, dV \tag{4.62}$$

Diese Forderung ist wegen $\delta u_i^0 = 0$ immer erfüllt.

Zur Zeit $t = T$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \varrho u_i^{*T} \delta u_i^T \, dV \\ 0 &= u_i^{*T} \end{aligned} \tag{4.63}$$

Dies ist die „Endbedingung“ für die adjungierte Impulsbilanz.

4.3.4 Die Optimalitätsbedingung für den Druck p

Die Forderung, dass die Variation der Lagrange-Funktion 4.56 bezüglich des Drucks null sein soll, führt auf

$$\begin{aligned} \delta_p L = \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_{o,k}} \delta p n_i e_i \, dA \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{o,k}} \delta p u_i^* n_i \, dA \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{e,w}} \delta p u_i^* n_i \, dA \, dt \\ - \int_0^T \int_\Omega \delta p \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \, dV \, dt \stackrel{!}{=} 0 \,. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Daraus folgt die adjungierte Massenbilanz

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega \delta p \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \, dV \, dt \\ 0 &= \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \, . \end{aligned} \tag{4.65}$$

Die Randintegrale sind aufgrund der Randbedingungen, die sich für die adjungierte Impulsbilanz ergeben haben, ebenfalls null.

4.3.5 Die Optimalitätsbedingung für die Steuerung s_i

Nach Kap. 4.2.2 wird zur Bestimmung des Gradienten die Variation der Lagrange-Funktion bezüglich der Steuerung s_i benötigt, die mit Hilfe der Anregegrößen b_i parametrisiert werden kann. Um direkt den Gradienten bezüglich der Anregeparameter b_i zu erhalten, verwenden wir hier die Variation bezüglich b_i, welche sich mit Hilfe der Kettenregel berechnen lässt:

$$\delta_b L = \frac{\partial L}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial b_j} \delta b_j \, . \tag{4.66}$$

Angewendet auf die Lagrange-Funktion 4.56 folgt

$$\begin{aligned} \delta_b L = \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left(\varrho s_i \frac{\partial s_j}{\partial b_k} \delta b_k + \varrho \frac{\partial s_i}{\partial b_k} \delta b_k s_j \right) n_j e_i \, dA \, dt + \frac{\gamma}{u_\infty} \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \varrho \delta_b \left(s^2 \sqrt{(s_i n_i)^2 + \epsilon} \right) dA \, dt \\ + \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left\{ \varrho u_i^* s_i \frac{\partial s_j}{\partial b_k} \delta b_k + \varrho u_i^* \frac{\partial s_i}{\partial b_k} \delta b_k s_j - p^* \frac{\partial s_j}{\partial b_k} \delta b_k + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \frac{\partial s_i}{\partial b_k} \delta b_k \right\} n_j \, dA \, dt \stackrel{!}{=} 0 \, . \end{aligned} \tag{4.67}$$

Für den Strafterm gilt weiter

$$\begin{aligned} \delta_b \left(s^2 \sqrt{(s_i n_i)^2 + \epsilon} \right) &= \delta_b \left(s_k s_k \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \right) \\ &= s_k s_k \delta_b \left(\sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \right) + \delta_b (s_k s_k) \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \\ &= \frac{s_k s_k}{2\sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon}} \left(s_l n_l \frac{\partial s_m}{\partial b_n} \delta b_n n_m + \frac{\partial s_l}{\partial b_n} \delta b_n n_l s_m n_m \right) \\ &+ 2 \frac{\partial s_k}{\partial b_l} \delta b_l s_k \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \\ &= \frac{s_k s_k}{\sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon}} \left(s_l n_l \frac{\partial s_m}{\partial b_n} \delta b_n n_m \right) + 2 \frac{\partial s_k}{\partial b_l} \delta b_l s_k \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \, , \end{aligned} \tag{4.68}$$

sowie nach Einsetzen in Gl. 4.67 und Umsortieren

$$
\begin{aligned}
\delta_b L = &\int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[\varrho \frac{C}{T} s_i \frac{\partial s_j}{\partial b_k} \delta b_k e_i + \varrho u_i^* s_i \frac{\partial s_j}{\partial b_k} \delta b_k + \varrho \frac{C}{T} \frac{\partial s_i}{\partial b_k} \delta b_k s_j e_i + \varrho u_i^* \frac{\partial s_i}{\partial b_k} \delta b_k s_j \right] n_j \, dA \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left\{ -p^* \frac{\partial s_j}{\partial b_k} \delta b_k + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \frac{\partial s_i}{\partial b_k} \delta b_k \right\} n_j \, dA \, dt \\
&+ \frac{\gamma}{u_\infty} \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\varrho s_k s_k}{\sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon}} \left(s_l n_l \frac{\partial s_m}{\partial b_n} \delta b_n n_m \right) + 2\varrho \frac{\partial s_k}{\partial b_l} \delta b_l s_k \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \right] dA \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[\underbrace{\left(\frac{C}{T} e_i + u_i^* \right)}_{=0} \varrho s_i \frac{\partial s_j}{\partial b_k} \delta b_k + \underbrace{\left(\frac{C}{T} e_i + u_i^* \right)}_{=0} \varrho \frac{\partial s_i}{\partial b_k} \delta b_k s_j \right] n_j \, dA \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left\{ -p^* n_i + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) n_j \right\} \frac{\partial s_i}{\partial b_k} \delta b_k \, dA \, dt \\
&+ \frac{\gamma}{u_\infty} \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\varrho s_k s_k}{\sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon}} s_l n_l n_m + 2\varrho s_m \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \right] \frac{\partial s_m}{\partial b_n} \delta b_n \, dA \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[-p^* n_m + \mu_g \left(\frac{\partial u_m^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_m} \right) n_j \right] \frac{\partial s_m}{\partial b_n} \delta b_n \, dA \, dt \\
&+ \frac{\gamma}{u_\infty} \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\varrho s_k s_k}{\sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon}} s_l n_l n_m + 2\varrho s_m \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \right] \frac{\partial s_m}{\partial b_n} \delta b_n \, dA \, dt \, .
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

Nach Gl. 4.39 und 4.66 erhält man daraus den Gradienten der Zielfunktion bezüglich der Anregeparameter:

$$
\begin{aligned}
\frac{dJ}{db_n} = &\int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[-p^* n_m + \mu_g \left(\frac{\partial u_m^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_m} \right) n_j \right] \frac{\partial s_m}{\partial b_n} \, dA \, dt \\
&+ \frac{\gamma}{u_\infty} \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\varrho s_k s_k}{\sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon}} s_l n_l n_m + 2\varrho s_m \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon} \right] \frac{\partial s_m}{\partial b_n} \, dA \, dt \, .
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

4.3.6 Primales und adjungiertes System

Zusammengefasst ergibt sich damit folgendes Problem:

Minimiere die Zielfunktion

$$
\begin{aligned}
J = &-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_o}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - pn_i\right]e_i\,dA\,dt \\
&-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - pn_i - \varrho u_i u_j n_j\right]e_i\,dA\,dt \\
&+\frac{\gamma}{u_\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\varrho u_k u_k\sqrt{u_i n_i u_j n_j+\epsilon}\,dA\,dt
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

unter Einhaltung der primalen PDGLn, Rand- und Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 && \text{für } \Omega; t>0 \\
\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t}+\frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] &= 0 && \text{für } \Omega; t>0 \\
u_i &= g_i && \text{für } \Gamma_e; t\geq 0 \\
-pn_i+\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j &= 0 && \text{für } \Gamma_a; t\geq 0 \\
u_i &= 0 && \text{für } \Gamma_{o,w}; t\geq 0 \\
u_i &= s_i && \text{für } \Gamma_k; t\geq 0 \\
u_i &= u_i^0 && \text{für } \Omega; t=0\,.
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

Der Gradient der Zielfunktion bezüglich der Anregeparameter b_i lässt sich mit der Beziehung 4.70 bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\frac{dJ}{db_n} = &\int_0^T\int_{\Gamma_k}\left[-p^* n_m+\mu_g\left(\frac{\partial u_m^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_m}\right)n_j\right]\frac{\partial s_m}{\partial b_n}\,dA\,dt \\
&+\frac{\gamma}{u_\infty}\frac{C}{T}\int_0^T\int_{\Gamma_k}\left[\frac{\varrho s_k s_k}{\sqrt{s_i n_i s_j n_j+\epsilon}}s_l n_l n_m+2\varrho s_m\sqrt{s_i n_i s_j n_j+\epsilon}\right]\frac{\partial s_m}{\partial b_n}\,dA\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Die adjungierten Größen u_i^* und p^* werden mit Hilfe des adjungierten Systems berechnet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} &= 0 && \text{für } \Omega; t < T \\
-\frac{\partial \varrho u_i^*}{\partial t} - \varrho u_j \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} - \frac{\partial \varrho u_j u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right] &= 0 && \text{für } \Omega; t < T \\
u_i^* &= 0 && \text{für } \Gamma_{e,w}; t \leq T \\
\varrho u_j^* u_j n_i + \varrho u_i^* u_j n_j - p^* n_i + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) n_j &= 0 && \text{für } \Gamma_a; t \leq T \\
u_i^* &= -\frac{C}{T} e_i && \text{für } \Gamma_{o,k}; t \leq T \\
u_i^* &= 0 && \text{für } \Omega; t = T\,.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Dabei wurde für die Umformung des konvektiven Terms die Massenbilanz ausgenutzt (vgl. Gl. 4.58), denn es gilt

$$\frac{\partial \varrho u_j u_i^*}{\partial x_j} = \varrho u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \varrho u_i^* \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{=0}\,. \tag{4.74}$$

Alternativ lässt sich das adjungierte Problem auch mit folgender Überlegung umformulieren. Der zusätzliche Quellterm in der adjungierten PDGL kann mit Hilfe der Kettenregel umgeschrieben werden zu

$$\varrho u_j \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} = \frac{\partial \varrho u_j u_j^*}{\partial x_i} - \varrho u_j^* \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,. \tag{4.75}$$

Zusammen mit dem Druckterm folgt

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \varrho u_j \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\underbrace{p^* - \varrho u_j u_j^*}_{\tilde{p}^*}) + \varrho u_j^* \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,, \tag{4.76}$$

d.h., man erhält einen modifizierten Druck $\tilde{p}^*$. Dieses Vorgehen weist eine gewisse Analogie zur Behandlung der Turbulenzenergie in der Impulsbilanz auf (siehe Kap. 2.2.2). Wegen

$$p^* = \tilde{p}^* + \varrho u_j u_j^* \tag{4.77}$$

folgt für die Ausströmrandbedingung

$$\varrho u_i^* u_j n_j - \tilde{p}^* n_i + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) n_j = 0 \quad \text{für } \Gamma_a; t \leq T \tag{4.78}$$

und man erhält als adjungiertes System

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} &= 0 && \text{für } \Omega; t < T \\
-\frac{\partial \varrho u_i^*}{\partial t} + \varrho u_j^* \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \varrho u_j u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right] &= 0 && \text{für } \Omega; t < T \\
u_i^* &= 0 && \text{für } \Gamma_{e,w}; t \leq T \\
\varrho u_i^* u_j n_j - \tilde{p}^* n_i + \mu_g \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) n_j &= 0 && \text{für } \Gamma_a; t \leq T \\
u_i^* &= -\frac{C}{T} e_i && \text{für } \Gamma_{o,k}; t \leq T \\
u_i^* &= 0 && \text{für } \Omega; t = T\,.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Für den Gradienten der Zielfunktion folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{db_n} = &\int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[-\varrho u_j u_j^* n_m - \tilde{p}^* n_m + \mu_g \left(\frac{\partial u_m^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_m}\right) n_j\right] \frac{\partial s_m}{\partial b_n}\, dA\, dt \\
&+ \frac{\gamma}{u_\infty} \frac{C}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\varrho s_k s_k}{\sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon}} s_l n_l n_m + 2\varrho s_m \sqrt{s_i n_i s_j n_j + \epsilon}\right] \frac{\partial s_m}{\partial b_n}\, dA\, dt\,.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Diese alternative Formulierung hat sich in Voruntersuchungen als stabiler erwiesen und wird daher im Weiteren verwendet[2].

Im Vergleich zur primalen Impulsbilanz ist der Konvektionsterm in der adjungierten Impulsbilanz linear und hat ein negatives Vorzeichen, d.h., der konvektive Transport ist entgegen der Strömungsrichtung des primalen Systems orientiert. Die Zeitintegration der adjungierten Lösung erfolgt ebenfalls in umgekehrter Richtung und erfordert somit die Speicherung der primalen Lösung auf allen Zeitschritten. Für einen Vergleich des gemäß Gl. 4.80 berechneten Gradienten mit Finiten Differenzen wird zunächst das primale System über den Zeithorizont $t = 0 \ldots T$ gelöst. Die Finiten Differenzen werden über den gleichen Zeitraum bestimmt, während die adjungierte Lösung von $t = T \ldots 0$ rückwärts integriert wird (Abb. 4.1).

Häufig vernachlässigt man bei der Beurteilung der Abtriebs- oder Widerstandskraft den transienten Anfahrvorgang, der sich beim Einschalten der aktiven Strömungsbeeinflussung einstellt. In diesem Fall wird die primale Lösung wieder über den Zeitraum $t = 0 \ldots T$ bestimmt. Für die Berechnung der Finiten Differenzen wird der transiente Anfahrvorgang $t = 0 \ldots T_{tr}$ dagegen weggelassen, d.h., es wird nur über die Zeitspanne $t = T_{tr} \ldots T$ integriert. Das adjungierte System wird entsprechend von $t = T \ldots T_{tr}$ rückwärts integriert.

[2] Analog zur primalen Impulsbilanz soll auch für die adjungierte Impulsbilanz für die folgenden Kapitel die Tilde über dem modifizierten Druck aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen werden.

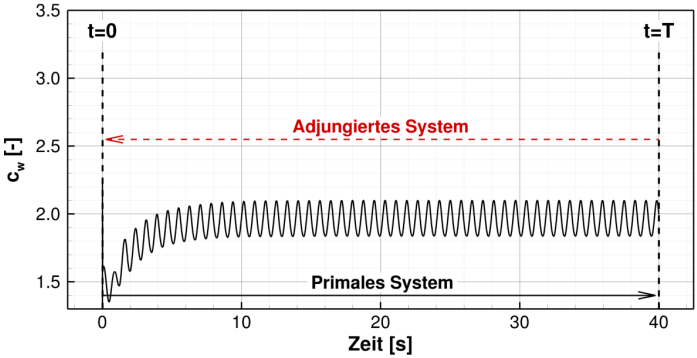


Abbildung 4.1: Behandlung des transienten Anfahrvorgangs bei der Zeitintegration des primalen und adjungierten Systems am Beispiel des Widerstandsbeiwerts

4.3.7 Diskretes Adjungiertenverfahren auf Basis des Automatischen Differenzierens

Die in Kap. 4.2.2 beschriebene Methode zur Ermittlung des diskreten adjungierten Systems wird auch als Handimplementierung oder handdiskrete Adjungierte bezeichnet [25, 33]. Insbesondere für komplexe Strömungslöser kann die Erzeugung eines handdiskreten adjungierten Lösers aufwändig und auch fehleranfällig sein [80]. Es besteht jedoch die alternative Möglichkeit, auf Basis des primalen Strömungslösers mit Hilfe des Algorithmischen oder Automatischen Differenzierens (AD) einen diskreten adjungierten Löser zu erzeugen. Zu diesem Zweck existieren bereits verschiedene, z.T. auch frei verfügbare Softwarepakete, die den differenzierten Code weitgehend automatisiert erstellen können. Eine gute Übersicht zum Thema des Automatischen Differenzierens findet man z.B. in dem Buch von Griewank und Walther [41].

Auch wenn der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit der kontinuierliche Adjungiertenansatz ist, soll hier kurz das Grundprinzip des AD erläutert werden. Hintergrund hierfür ist das DFG-Projekt „Instationäre Optimale Strömungskontrolle aerodynamischer Konfigurationen“, welches gemeinsam mit der RWTH Aachen unter der Leitung von Prof. Gauger[3] bearbeitet wird. Im Rahmen dieses Projekts soll mit Hilfe des Automatischen Differenzierens ein diskretes Adjungiertenverfahren für die instationäre aktive Strömungskontrolle auf Basis des Strömungslösers ELAN [129] erzeugt und im Detail mit dem kontinuierlichen Adjungiertenansatz verglichen werden. Erste Ergebnisse dieses Vergleichs, die im Rahmen der Verfahrensvalidierung durchgeführt wurden, sind bereits in Kap. 7 zu finden.

Die Berechnung der Zielfunktion in einem Computerprogramm (im vorliegenden Fall also in dem Strömungslöser) erfolgt in der Regel durch die Aneinanderreihung arithmetischer Grundoperationen wie Additionen oder Multiplikationen. Das Automatische Differenzieren basiert auf der Idee, diese Grundoperationen unter Verwendung der Kettenregel mit Hilfe der

[3] Prof. N. R. Gauger, Department of Mathematics and Center for Computational Engineering Science (CCES), RWTH Aachen

bekannten Ableitungsvorschriften zu differenzieren, so dass man die diskrete Formulierung des Gradienten der Zielfunktion erhält.

Es existieren zwei grundsätzlich unterschiedliche Modi des Automatischen Differenzierens. Der erste ist der Vorwärtsmodus, bei dem das Differenzieren des Codes durch Anwendung der Kettenregel in der gleichen Richtung bzw. Reihenfolge erfolgt wie die Auswertung der primalen Operationen (siehe Beispiel in Anh. B.1.1). Die Anzahl der Rechenoperationen und damit die für die Ausführung benötigte Zeit erhöht sich in diesem Modus etwa um den Faktor 2 für jede Variable, nach der die Zielfunktion abgeleitet wird, und ist damit wie die Finiten Differenzen proportional zur Anzahl der Steuerungsparameter [41]. Der wesentliche Vorteil des im Vorwärtsmodus differenzierten Codes im Vergleich zu Finiten Differenzen besteht darin, dass die Ableitungen mit maximal möglicher Genauigkeit berechnet werden. Sie entsprechen also im Prinzip Finiten Differenzen mit der optimalen Schrittweite (siehe hierzu auch Kap. 7.1.2).

Im Rückwärtsmodus werden die Rechenoperationen unter Anwendung der Kettenregel in umgekehrter Reihenfolge differenziert, d.h., es werden zunächst alle primalen Operationen in der ursprünglichen Reihenfolge ausgeführt und anschließend folgen die adjungierten Operationen in umgekehrter Reihenfolge (siehe Beispiel in Anh. B.1.2). In Analogie zum kontinuierlichen Adjungiertenansatz erhält man mit Hilfe des im Rückwärtsmodus differenzierten Lösers aus einer einzigen Rechnung den gesamten Gradienten der Zielfunktion. Programmiert man einen Treiber, in dem die Lagrange-Funktion auf Basis des Strömungslösers zusammengesetzt wird, kann man den im Rückwärtsmodus differenzierten Treiber als diskretes Adjungiertenverfahren interpretieren. Die Auswertung der adjungierten Variablen basiert auf den Ergebnissen der primalen Lösung, die daher wie im kontinuierlichen Fall gespeichert werden muss. Insbesondere bei instationären Problemen steigt daher der Speicherbedarf in der Regel stark an. Darüber hinaus führt die erhöhte Anzahl an Rechenoperationen zu einem signifikanten Anstieg der benötigten Rechenzeit, der schon unter Vernachlässigung der Speicherzugriffszeit mindestens einen Faktor von 3 bis 4 beträgt [41].

Es existiert jedoch eine Reihe von Techniken zur signifikanten Reduzierung des Speicherplatz- und Rechenzeitbedarfs. So konnte im Rahmen des o.g. DFG-Projektes bereits erfolgreich gezeigt werden, dass durch den Einsatz des *Reverse-Accumulation*-Ansatzes [17, 35] und des *Binomial Checkpointings* [40] auch komplexere instationäre Problemstellungen mit vertretbarem Speicher- und Rechenzeitaufwand berechnet werden können [80, 79]. Weiterführende Informationen zum Automatischen Differenzieren findet man z.B. in [41].

4.4 Die Konsistenzeigenschaften der unterschiedlichen Adjungiertenverfahren

Eine wichtige Eigenschaft zur Charakterisierung der unterschiedlichen Adjungiertenverfahren ist die Konsistenz. In der numerischen Mathematik versteht man darunter im Allgemeinen, dass der lokale Fehler der numerischen Lösung für verschwindende Schrittweiten gegen null geht [91]. Der diskrete Ansatz folgt dem *First-discretise-then-optimise*-Prinzip, d.h., das primale System wird erst diskretisiert, bevor das Optimalitätssystem aufgestellt wird. Beim kontinuierlichen Verfahren wird das Optimalitätssystem dagegen auf Basis des kontinuierlich formulierten

primalen Systems hergeleitet und anschließend diskretisiert. In der Literatur wird dies als *First-optimise-then-discretise*-Methode bezeichnet. In der Regel sind die beiden Vorgehensweisen nicht kommutativ, d.h., die berechneten Gradienten der Zielfunktion sind nicht identisch. Nur wenn beim kontinuierlichen Adjungiertenansatz eine konsistente Diskretisierung gemäß obiger Definition verwendet wird, fallen die Methoden für verschwindende Schrittweiten zusammen [39].

Bezogen auf das diskrete Adjungiertenverfahren, insbesondere basierend auf dem Automatischen Differenzieren, verstehen wir allerdings unter einer konsistenten Formulierung gerade die exakte algorithmische Ableitung der Zielfunktion, welche per AD im Rückwärtsmodus erhalten wird. Dies entspricht automatisch der zu Beginn des Kapitels aufgestellten Forderung an das Adjungiertenverfahren. Nur wenn die *First-discretise-then-optimise*- und die *First-optimise-then-discretise*-Methode kommutieren, fallen beide Konsistenzbegriffe zusammen. Wenn im Folgenden von Konsistenz zwischen primalem und adjungiertem System gesprochen wird, sei damit ausschließlich diese Begriffsdefinition gemeint.

Ob das kontinuierliche Verfahren gemäß dieser Definition konsistent ist, hängt von den verwendeten Differenzenschemata ab. Das eine konsistente Approximation aller Terme im klassischen Sinne hierfür nicht ausreichend ist, soll das folgende einfache Beispiel demonstrieren. Ausgangspunkt ist die Konvektions-Diffusions-Gleichung für eine skalare Größe ϕ. Ziel ist es, mit Hilfe einer Randsteuerung β eine beliebige Zielverteilung ϕ_z zu erreichen. Das Optimierungsproblem lässt sich wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \qquad & J = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} (\phi - \phi_z)^2 \, dx \,, \\ \text{so dass} \qquad & u \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} - a \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = 0 \\ & \phi(x=0) = 0 \\ & \phi(x=1) = \beta \,. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Die Geschwindigkeit u und der Transportkoeffizient a seien konstant und größer null. Mit Hilfe der in Kap. 4.2.2 betrachteten Methoden lässt sich das dazugehörige adjungierte System und die Formel zur Gradientenberechnung herleiten (siehe Anh. C.1):

$$u \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + a \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \phi - \phi_z \tag{4.82}$$

$$\psi(x=0) = 0 \tag{4.83}$$

$$\psi(x=1) = 0 \tag{4.84}$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\beta} = a \left. \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \right|_{x=1} . \tag{4.85}$$

Die analytische Lösung des primalen Systems lautet

$$\phi = \beta \frac{\exp(\frac{u}{a}x) - 1}{\exp(\frac{u}{a}) - 1} \tag{4.86}$$

und mit dem konstant gewählten Zielverlauf $\phi_z = 1$ folgt für die Zielfunktion und den Gradienten

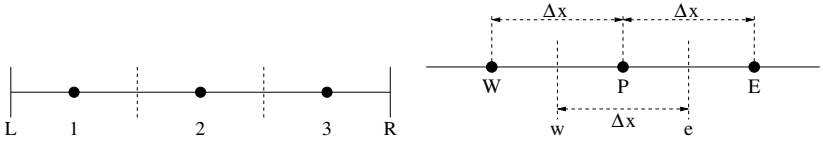
$$J = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} \left(\beta \frac{\exp(\frac{u}{a}x) - 1}{\exp(\frac{u}{a}) - 1} - 1 \right)^2 dx \tag{4.87}$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\beta} = \beta \frac{\frac{1}{2}\frac{a}{u}\exp(2\frac{u}{a}) - 2\frac{a}{u}\exp(\frac{u}{a}) + \frac{3}{2}\frac{a}{u} + 1}{\left(\exp(\frac{u}{a}) - 1\right)^2} - \frac{\frac{a}{u}\exp(\frac{u}{a}) + \frac{a}{u} - 1}{\exp(\frac{u}{a}) - 1}\,. \tag{4.88}$$

Daraus erhält man für $dJ/d\beta = 0$ die optimale Randsteuerung:

$$\beta_{opt} = \frac{\left(\exp(\frac{u}{a}) - 1\right)\left(\frac{a}{u}\exp(\frac{u}{a}) + \frac{a}{u} - 1\right)}{\frac{1}{2}\frac{a}{u}\exp(2\frac{u}{a}) - 2\frac{a}{u}\exp(\frac{u}{a}) + \frac{3}{2}\frac{a}{u} + 1}\,. \tag{4.89}$$

Wir wollen nun zwei unterschiedliche Diskretisierungen auf einem äquidistanten 3-KV-Gitter (siehe Abb. 4.2) miteinander vergleichen. Einzige Bedingung sei, dass jede Diskretisierung für



(a) 3-KV-Gitter (b) Kompassnotation an einem Kontrollvolumen

Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des verwendeten äquidistanten 1D-Rechengitters

sich konsistent sei. Die Finite-Volumen-Diskretisierung von Gl. 4.81 liefert

$$u(\phi_e - \phi_w) - a\left(\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_e - \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_w \right) = 0\,. \tag{4.90}$$

Wir beginnen mit einer *Upwind*-basierten Approximation der konvektiven Terme, während der Diffusionsterm zentral diskretisiert wird. Dann folgt im Inneren des Rechengebietes

$$\phi_e = \phi_P \tag{4.91}$$

$$\phi_w = \phi_W \tag{4.92}$$

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \tag{4.93}$$

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \tag{4.94}$$

und an den Rändern

$$\phi_L = 0: \qquad \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_L = \frac{\phi_P}{\Delta x/2} \tag{4.95}$$

$$\phi_R = \phi_P: \qquad \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_R = \frac{\beta - \phi_P}{\Delta x/2}\,. \tag{4.96}$$

Analog verfährt man für die adjungierte DGL und erhält letztendlich die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} (-3-\mathrm{Pe})\phi_1 + \phi_2 &= 0 & (-3-\mathrm{Pe})\psi_1 + (1+\mathrm{Pe})\psi_2 &= \Delta\phi_1 \\ (1+\mathrm{Pe})\phi_1 - (2+\mathrm{Pe})\phi_2 + \phi_3 &= 0 & \psi_1 - (2+\mathrm{Pe})\psi_2 + (1+\mathrm{Pe})\psi_3 &= \Delta\phi_2 \\ (1+\mathrm{Pe})\phi_2 - (3+\mathrm{Pe})\phi_3 &= -2\beta & \psi_2 - (3+\mathrm{Pe})\psi_3 &= \Delta\phi_3 \end{aligned} \tag{4.97}$$

mit $\Delta\phi_i = \frac{\Delta x^2}{a}(\phi_i - \phi_{z,i})$ und der Péclетzahl $\mathrm{Pe} = \frac{u\Delta x}{a}$. Die exakte Lösung lautet für das primale System

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{2}{(3+\mathrm{Pe})(4+\mathrm{Pe}(3+\mathrm{Pe}))}\beta \\ \phi_2 &= \frac{2(3+\mathrm{Pe})}{(3+\mathrm{Pe})(4+\mathrm{Pe}(3+\mathrm{Pe}))}\beta \\ \phi_3 &= \frac{2(5+\mathrm{Pe}(4+\mathrm{Pe}))}{(3+\mathrm{Pe})(4+\mathrm{Pe}(3+\mathrm{Pe}))}\beta \end{aligned} \tag{4.98}$$

und für das adjungierte System

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{(5+\mathrm{Pe}(4+\mathrm{Pe}))\Delta\phi_1 + (1+\mathrm{Pe})((3+\mathrm{Pe})\Delta\phi_2 + (1+\mathrm{Pe})\Delta\phi_3)}{(3+\mathrm{Pe})(4+\mathrm{Pe}(3+\mathrm{Pe}))} \\ \psi_2 &= -\frac{(3+\mathrm{Pe})(\Delta\phi_1 + (3+\mathrm{Pe})\Delta\phi_2 + (1+\mathrm{Pe})\Delta\phi_3)}{(3+\mathrm{Pe})(4+\mathrm{Pe}(3+\mathrm{Pe}))} \\ \psi_3 &= -\frac{\Delta\phi_1 + (3+\mathrm{Pe})\Delta\phi_2 + (5+\mathrm{Pe}(4+\mathrm{Pe}))\Delta\phi_3}{(3+\mathrm{Pe})(4+\mathrm{Pe}(3+\mathrm{Pe}))}\,. \end{aligned} \tag{4.99}$$

Die Zielfunktion wollen wir zweiter Ordnung approximieren:

$$J = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}(\phi - \phi_z)^2\,dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\phi_i - \phi_{z,i})^2\Delta x_i\,. \tag{4.100}$$

Damit folgt für den Gradienten der Zielfunktion aus der primalen Lösung

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\beta}\right|_p &= \sum_{i=1}^{3}(\phi_i - \phi_{z,i})\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}\beta}\Delta x_i \\ &= \frac{a}{\Delta x}\,\frac{2\Delta\phi_1 + 2(3+\mathrm{Pe})\Delta\phi_2 + 2(5+\mathrm{Pe}(4+\mathrm{Pe}))\Delta\phi_3}{(3+\mathrm{Pe})(4+\mathrm{Pe}(3+\mathrm{Pe}))}\,. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Der Gradient aus dem adjungierten Feld lässt sich bestimmen als

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\beta}\right|_a &= a\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} \approx -a\frac{\psi_3}{\Delta x/2}\\ &= \frac{a}{\Delta x}\frac{2\Delta\phi_1 + 2(3+\mathrm{Pe})\Delta\phi_2 + 2(5+\mathrm{Pe}(4+\mathrm{Pe}))\Delta\phi_3}{(3+\mathrm{Pe})(4+\mathrm{Pe}(3+\mathrm{Pe}))}\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\beta}\right|_p . \end{aligned} \tag{4.102}$$

Man stellt fest, dass die beiden Gradienten übereinstimmen, d.h., die primale und adjungierte Lösung sind konsistent.

Eine naheliegende Möglichkeit zur Verbesserung der Fehlerordnung ist die zentrale Diskretisierung des konvektiven Terms. Dann folgt für das primale System:

$$\text{Inneres des Rechengebiets} : \phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P), \qquad \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \tag{4.103}$$

$$\text{Ränder} : \phi_R = \beta, \qquad \phi_L = 0\,. \tag{4.104}$$

Geht man für die adjungierte DGL analog vor, folgen die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}(-3-\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\phi_1 + (1-\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\phi_2 &= 0 & (-3+\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\psi_1 + (1+\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\psi_2 &= \Delta\phi_1\\ (1+\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\phi_1 - 2\phi_2 + (1-\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\phi_3 &= 0 & (1-\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\psi_1 - 2\psi_2 + (1+\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\psi_3 &= \Delta\phi_2\\ (1+\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\phi_2 - (3-\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\phi_3 &= (\mathrm{Pe}-2)\beta & (1-\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\psi_2 - (3+\tfrac{1}{2}\mathrm{Pe})\psi_3 &= \Delta\phi_3\end{aligned} \tag{4.105}$$

mit der exakten Lösung

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{(2-\mathrm{Pe})^3}{4(12+\mathrm{Pe}^2)}\beta\\ \phi_2 &= \frac{(\mathrm{Pe}-2)^2(6+\mathrm{Pe})}{4(12+\mathrm{Pe}^2)}\beta\\ \phi_3 &= \frac{(2-\mathrm{Pe})(20+\mathrm{Pe}(4+\mathrm{Pe}))}{4(12+\mathrm{Pe}^2)}\beta\end{aligned} \tag{4.106}$$

und

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{(20+\mathrm{Pe}(4+\mathrm{Pe}))\Delta\phi_1 + (2+\mathrm{Pe})((6+\mathrm{Pe})\Delta\phi_2 + (2+\mathrm{Pe})\Delta\phi_3)}{4(12+\mathrm{Pe}^2)}\\ \psi_2 &= -\frac{(2-\mathrm{Pe})(6+\mathrm{Pe})\Delta\phi_1 + (6-\mathrm{Pe})((6+\mathrm{Pe})\Delta\phi_2 + (2+\mathrm{Pe})\Delta\phi_3)}{4(12+\mathrm{Pe}^2)}\\ \psi_3 &= -\frac{(\mathrm{Pe}-2)^2\Delta\phi_1 + (\mathrm{Pe}-6)(\mathrm{Pe}-2)\Delta\phi_2 + (20+\mathrm{Pe}(\mathrm{Pe}-4))\Delta\phi_3}{4(12+\mathrm{Pe}^2)}\,.\end{aligned} \tag{4.107}$$

Die Auswertung der Gradienten ergibt nun

$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\beta}\right|_p = \frac{a}{\Delta x}\frac{(2-\mathrm{Pe})^3\Delta\phi_1 + (\mathrm{Pe}-2)^2(6+\mathrm{Pe})\Delta\phi_2 + (2-\mathrm{Pe})(20+\mathrm{Pe}(4+\mathrm{Pe}))\Delta\phi_3}{4(12+\mathrm{Pe}^2)} \tag{4.108}$$

bzw.

$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\beta}\right|_a = \frac{a}{\Delta x}\frac{2(\mathrm{Pe}-2)^2\Delta\phi_1 + 2(\mathrm{Pe}-6)(\mathrm{Pe}-2)\Delta\phi_2 + 2(20+\mathrm{Pe}(\mathrm{Pe}-4))\Delta\phi_3}{4(12+\mathrm{Pe}^2)} \tag{4.109}$$

$$\neq \left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\beta}\right|_p . \tag{4.110}$$

Die primale und adjungierte Lösung sind damit nicht mehr für beliebige Pécletzahlen konsistent, denn die Gradienten stimmen nicht mehr überein. Für $Pe = 1$ und $\phi_z = 1$ erhält man für die CDS-basierte Diskretisierung

$$\beta_{opt,exakt} \approx 2.08 \qquad \beta_{opt,primal} \approx 2.54 \qquad \beta_{opt,adj} \approx 2.59\,. \tag{4.111}$$

Die große Differenz zwischen numerischer und exakter Lösung des primalen Systems lässt sich auf das grobe Gitter zurückführen. Die Abweichung zwischen primaler und adjungierter Lösung ist dagegen im gezeigten Fall klein und nimmt mit sinkender Schrittweite Δx weiter ab, da alle Approximationen konsistent im klassischen Sinne sind. Das Beispiel verdeutlicht jedoch bereits, dass allein aufgrund der Diskretisierung eine Inkonsistenz zwischen primalem und adjungiertem System auftreten kann. In Kap. 7 wird später noch gezeigt, dass dies insbesondere bei instationären Simulationen zu signifikanten Fehlern in den berechneten Gradienten führen kann.

Ein weiterer Aspekt, der die Konsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung beeinflussen kann, ist die Kondition des Systems. Diese ist ein Maß für die Abhängigkeit der Gleichungen von Störungen der Eingangsgrößen und lässt sich über die Konditionszahl der Koeffizientenmatrix quantifizieren. Zusammen mit der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ist eine kleine Konditionszahl Voraussetzung für die Wohlgestelltheit des Problems im Hadamardschen Sinne [28, 73].

Für das Adjungiertenverfahren hat dies weitreichende Konsequenzen, denn bei der Herleitung der adjungierten PDGLn wird vorausgesetzt, dass die primale Lösung exakt ist. Selbst bei konsistenter Diskretisierung der Differentialgleichungen ist die numerische Lösung immer fehlerbehaftet. Dies trifft insbesondere für die hier verwendete, zeitimplizite Diskretisierung zu, die auf jedem Zeitschritt eine iterative Lösung eines gekoppelten Gleichungssystems erfordert. Dabei zeigt sich, dass das adjungierte System in der Regel deutlich schlechter konditioniert ist als das primale System und damit sehr empfindlich auf Fehler in der primalen Lösung reagiert. Für die genaue Gradienteninformation muss daher das primale System sehr gut auskonvergiert sein, was zulasten der numerischen Effizienz des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens geht.

Müssen bei der Herleitung des kontinuierlichen Optimalitätssystems Modellannahmen getroffen werden, wie dies zum Beispiel bei Verwendung statistischer Turbulenzmodelle in Verbin-

dung mit den RANS-Gleichungen der Fall ist (siehe Kap. 4.3), wird die Konsistenz zwischen primalem und adjungiertem System bereits auf kontinuierlicher Ebene unmöglich gemacht. Einen Ausweg bietet das diskrete Adjungiertenverfahren, bei dem das *First-discretise-then-optimise*-Prinzip gilt. Verwendet man dazu das Automatische Differenzieren, ist automatisch Konsistenz zwischen dem primalen und adjungierten System gewährleistet. Darüber hinaus konvergieren dann das diskrete primale und adjungierte System mit der gleichen Konditionszahl [39, 36].

Die genannten Eigenschaften führen zu der Schlussfolgerung, dass offensichtlich nur das AD-basierte diskrete Adjungiertenverfahren grundsätzlich der zu Beginn des Kapitels formulierten Anforderung genügt, während beim kontinuierlichen Verfahren zusätzliche Voraussetzungen erfüllt sein müssen. Man erkauft sich diesen Vorteil jedoch durch eine deutlich schlechtere numerische Effizienz. So lässt sich zeigen, dass die Anzahl der arithmetischen Operationen beim AD-basierten Adjungiertenverfahren mindestens um den Faktor 3 bis 4 ansteigt. Durch die Zeit, die im Rückwärtsmodus für den Datenzugriff auf die Festplatte benötigt wird, kann dieser Faktor nochmals deutlich steigen [41]. Für die Anwendung im industriellen Umfeld ist jedoch die *Turnaround Time*, also die insgesamt für die Bearbeitung einer Problemstellung benötigte Zeit, von fundamentaler Bedeutung und in vielen Fällen wichtiger als eine sehr hohe Genauigkeit der Ergebnisse. Letztendlich müssen daher die Vor- und Nachteile der Verfahren sorgfältig gegeneinander abgewogen werden. Die vorliegende Arbeit kann dazu einen wichtigen Beitrag liefern, da die hier untersuchten Adjungiertenverfahren auf dem gleichen primalen Strömungslöser basieren und so die Grundlage für einen detaillierten Vergleich der unterschiedlichen Ansätze bilden können.

5 Numerische Methoden

Sowohl das kontinuierliche Adjungiertenverfahren, das den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit bildet, als auch das diskrete Adjungiertenverfahren, das im Rahmen des gemeinsamen DFG-Projekts „Instationäre Optimale Strömungskontrolle aerodynamischer Konfigurationen“ von der Arbeitsgruppe von Prof. Gauger an der RWTH Aachen umgesetzt wurde, basieren auf dem gleichen Strömungslöser ELAN. Dabei handelt es sich um einen Finite-Volumen-Strömungslöser, der im Rahmen der Dissertation von L. Xue entstanden ist [129] und ursprünglich für die Lösung aerodynamischer Problemstellungen auf Basis der RANS-Gleichungen entwickelt wurde. Er verfügt über eine große Anzahl von Ein- und Zweigleichungs-Turbulenzmodellen sowie über mehrere Algebraische Reynoldsspannungsmodelle und wurde darüber hinaus in den letzten 13 Jahren sukzessive um weitere numerische Ansätze wie LES und DES erweitert.

ELAN ist ein druckbasierter Finite-Volumen-Strömungslöser, der ein generalisiertes SIMPLE-Druckkorrekturverfahren verwendet und sowohl für kompressible als auch für inkompressible Strömungen eingesetzt werden kann. Er benötigt körperangepasste, block-strukturierte Rechennetze und ist parallelisiert, wobei für die Kommunikation zwischen den Rechenkernen das Message Passing Interface (MPI) zum Einsatz kommt. Die räumliche Diskretisierung des Diffusions- und Druckterms sowie aller Quellterme ist von zweiter Ordnung, während für den konvektiven Term auf verschiedene Konvektionsschemata zurückgegriffen werden kann, die maximal von dritter Ordnung genau sind und auch limitierte Differenzenschemata (sogenannte TVD-Verfahren) beinhalten. Für die zeitliche Diskretisierung können voll implizite Schemata erster oder zweiter Ordnung verwendet werden.

Der Lösungsablauf der Gleichungen erfolgt sequentiell, wobei der konvektive Term der Impulsbilanz nach dem Picard-Ansatz linearisiert wird [29]. Zunächst werden die drei Komponenten der Impulsbilanz gelöst, gefolgt von der Druckkorrekturgleichung und den Transportgleichungen für das statistische Turbulenzmodell. Zur Lösung der linearen Gleichungssysteme, die aufgrund der impliziten Zeitdiskretisierung auf jedem Zeitschritt für jede Gleichung gelöst werden müssen, kommt der SIP-Solver von Stone zum Einsatz [29, 117, 129].

Die in Kap. 4.3 dargestellten adjungierten Gleichungen für die instationäre Strömungskontrolle (4.79) gleichen in weiten Teilen dem primalen System (4.72), so dass die wesentlichen Prinzipien der Diskretisierung vom primalen Löser übernommen werden konnten. Die folgenden Ausführungen zur Implementierung des Adjungiertenverfahrens beschränken sich daher auf die wichtigsten Unterschiede zwischen primalem und adjungiertem Löser.

5.1 Finite-Volumen-Diskretisierung der adjungierten Gleichungen

Für die Darstellung der Finite-Volumen-Approximation ist es zunächst zweckmäßig, die primale Impulsbilanz 2.15 zu betrachten:

$$\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right].$$

Die Integration über ein Kontrollvolumen δV führt unter Verwendung des Satzes von Gauß auf

$$\int_{\delta V} \frac{\partial \varrho u_i}{\partial t}\, dV + \oint_{\delta A} \varrho u_i u_j n_j\, dA = -\oint_{\delta A} p n_i\, dA + \oint_{\delta A} \mu_g \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j\, dA + \int_{\delta V} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_g \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dV. \quad (5.1)$$

Die Oberflächenintegrale lassen sich als Summe der Integrale über alle Teilflächen f darstellen und werden mit Hilfe der Mittelpunktregel integriert, während die Volumenintegrale als Produkt aus Wert im Mittelpunkt und Kontrollvolumen approximiert werden:

$$\left(\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t}\delta V\right)_P + \sum_f (\varrho u_i u_j n_j \delta A)_f = -\sum_f (p n_i \delta A)_f + \sum_f \left(\mu_g \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \delta A\right)_f + \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_g \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\delta V\right]_P. \quad (5.2)$$

Zu beachten ist, dass der zweite Anteil des Diffusionsterms in Gl. 5.2 als Volumenintegral approximiert und später explizit im Quellterm mitgeführt wird, da er sich für den sequentiellen Lösungsablauf nicht vollständig implizit diskretisieren lässt[1].

Für die Massenbilanz im allgemeinen kompressiblen Fall folgt

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\delta V\right)_P + \sum_f (\varrho u_j n_j \delta A)_f = 0 \quad (5.3)$$

und man erhält nach Einsetzen in die Impulsbilanz die in ELAN implementierte Formulierung

$$\left(\varrho \frac{\partial u_i}{\partial t}\delta V\right)_P - \sum_f \dot{m}_f (u_i)_P + \sum_f (\dot{m} u_i)_f = -\sum_f (p n_i \delta A)_f + \sum_f \left(\mu_g \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \delta A\right)_f + \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_g \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]_P \delta V, \quad (5.4)$$

wobei der Massenfluss $\dot{m}_f = (\varrho u_j n_j \delta A)_f$ gemäß des Picard-Ansatzes mit der Geschwindigkeit aus der letzten Iteration berechnet wird [29]. Für inkompressible Strömungen ist die erste

[1] Man kann sich dies verdeutlichen, wenn man den Term für ein kartesisches Gitter und konstantes μ_g aufschreibt. Für die x-Komponente der Impulsbilanz lautet der Term dann ausgeschrieben $\mu_g \partial^2 u/\partial x^2 \delta V + \mu_g \partial^2 v/\partial x^2 \delta V$, d.h., der Term hängt nicht ausschließlich von u ab und wird daher explizit im Quellterm mitgeführt.

Summe auf der linken Seite von Gl. 5.4 null und man erhält schließlich

$$\left(\varrho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta V\right)_P + \sum_f (\dot{m}u_i)_f = -\sum_f (pn_i\delta A)_f + \sum_f \left(\mu_g \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \delta A\right)_f + \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_g\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]_P \delta V\,. \tag{5.5}$$

Eine analoge Vorgehensweise führt bei der adjungierten Impulsbilanz Gl. 4.79 auf

$$-\left(\varrho\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\delta V\right)_P - \sum_f (\dot{m}u_i^*)_f = -\sum_f (p^* n_i\delta A)_f + \sum_f \left(\mu_g \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} n_j \delta A\right)_f + \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_g\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right]_P \delta V - \left(\varrho u_j^*\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_P \delta V\,, \tag{5.6}$$

wobei der zusätzliche Quellterm als Volumenintegral approximiert wird. Die Nichtlinearität des konvektiven Terms entfällt bei der adjungierten Impulsbilanz, da der Massenfluss $\dot{m}_f$ aus der primalen Lösung stammt.

Der instationäre Term lässt sich mit Hilfe eines einfachen Tricks umformulieren. Geht man davon aus, dass die primale Lösung beginnend von der Startzeit $t = 0$ über eine endliche Zeitspanne bis $t = T$ aufintegriert wird, folgt aus dem negativen Vorzeichen vor dem instationären Term der adjungierten Impulsbilanz, dass die adjungierte Lösung in umgekehrter Richtung, also von $t = T$ bis $t = 0$ integriert werden muss. Um Änderungen am zeitlichen Diskretisierungsschema zu vermeiden, kann man die einfache Variablentransformation

$$\tilde{t} = T - t \tag{5.7}$$

einführen. Daraus folgt für die zeitliche Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tag{5.8}$$

und damit für den instationären Term

$$-\left(\varrho\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\delta V\right)_P = \left(\varrho\frac{\partial u_i^*}{\partial \tilde{t}}\delta V\right)_P\,. \tag{5.9}$$

Man integriert nun die adjungierte Impulsbilanz von $t^* = 0$ bis $t^* = T$ und kann aufgrund des nun positiven Vorzeichens die gleiche implizite Zeitdiskretisierung verwenden wie für den primalen Löser.

Auf ähnliche Weise lässt sich auch der konvektive Term umformulieren, denn durch die Änderung des Vorzeichens müssten bei der Approximation der Geschwindigkeit auf den Kontrollvolumenflächen $(u_i)_f$ umfangreiche Änderungen in den Konvektionsschemata vorgenommen werden. Um dies zu vermeiden, wird der *negative* Fluss der primalen Lösung $\tilde{\dot{m}}$ auf jedem Zeitschritt gespeichert. Es folgt für den konvektiven Term der adjungierten Impulsbilanz

$$-\sum_f (\dot{m}u_i^*)_f = \sum_f (\tilde{\dot{m}}u_i^*)_f \tag{5.10}$$

und die Konvektionsschemata können ohne Modifikation aus dem primalen Löser übernommen werden.

5.2 Ausflussrandbedingung

Die Ausflussrandbedingung kann als Berechnungsvorschrift für die Geschwindigkeitskomponenten aufgefasst werden. Für die Implementierung hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die folgende, explizite Formulierung zu wählen. Ausgehend von Gl. 2.18 gilt für das primale System

$$
\begin{aligned}
0 &= \mu_g \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - p n_i \\
\frac{\partial u_i}{\partial n} &= \frac{p n_i}{\mu_g} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} n_j
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

und man erhält die folgenden Gleichungen für die Bestimmung der Randgeschwindigkeit:

x-Richtung

$$
\begin{aligned}
\frac{u_R - u_L}{\Delta n} &= \frac{p n_x}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial x} n_x - \frac{\partial v}{\partial x} n_y - \frac{\partial w}{\partial x} n_z \\
u_R^{k+1} &= \Delta n \left(\frac{p n_x}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial x} n_x - \frac{\partial v}{\partial x} n_y - \frac{\partial w}{\partial x} n_z \right)_R^k + u_L^k
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

y-Richtung

$$
\begin{aligned}
\frac{v_R - v_L}{\Delta n} &= \frac{p n_y}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial y} n_x - \frac{\partial v}{\partial y} n_y - \frac{\partial w}{\partial y} n_z \\
v_R^{k+1} &= \Delta n \left(\frac{p n_y}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial y} n_x - \frac{\partial v}{\partial y} n_y - \frac{\partial w}{\partial y} n_z \right)_R^k + v_L^k
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

z-Richtung

$$
\begin{aligned}
\frac{w_R - w_L}{\Delta n} &= \frac{p n_z}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial z} n_x - \frac{\partial v}{\partial z} n_y - \frac{\partial w}{\partial z} n_z \\
w_R^{k+1} &= \Delta n \left(\frac{p n_z}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial z} n_x - \frac{\partial v}{\partial z} n_y - \frac{\partial w}{\partial z} n_z \right)_R^k + w_L^k \,.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Der tiefgestellte Index R kennzeichnet darin den Wert auf dem Rand und der Index L den Wert im ersten Kontrollvolumenzentrum. Der hochgestellte Index gibt die Iterationsstufe innerhalb eines Zeitschritts an, d.h., die Größen auf der rechten Seite der Gleichungen 5.12 - 5.14 werden aus der jeweils zurückliegenden Iteration ermittelt.

Aus der Kopplung von Druck und Geschwindigkeit am Ausflussrand ergeben sich erhebliche

numerische Stabilitätsprobleme. Aufgrund der sequentiellen iterativen Lösung der PDGLn kommt es im Iterationsverlauf zu Schwankungen des Drucks, die aufgrund der stark unterschiedlichen Skalierung der Terme[2] sehr große Geschwindigkeitsänderungen auf dem Rand verursachen und daher in der Regel zu einer Divergenz der Simulation führen.

Um die numerische Robustheit zu verbessern, wurde bei der Implementierung der Ausflussrandbedingung zum einen auf das Hilfsmittel der Unterrelaxation zurückgegriffen. Mit dem allgemeinen Ansatz für eine relaxierte Größe $\hat{\phi}^{k+1} = \beta\phi^{k+1} + (1-\beta)\phi^k$ folgt für die Berechnungsvorschrift für die Randgeschwindigkeit

$$\hat{u}_R^{k+1} = \beta\left[\Delta n\left(\frac{pn_x}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial x}n_x - \frac{\partial v}{\partial x}n_y - \frac{\partial w}{\partial x}n_z\right)_R^k + u_L^k\right] + (1-\beta)u_R^k \tag{5.15}$$

$$\hat{v}_R^{k+1} = \beta\left[\Delta n\left(\frac{pn_y}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial y}n_x - \frac{\partial v}{\partial y}n_y - \frac{\partial w}{\partial y}n_z\right)_R^k + v_L^k\right] + (1-\beta)v_R^k \tag{5.16}$$

$$\hat{w}_R^{k+1} = \beta\left[\Delta n\left(\frac{pn_z}{\mu_g} - \frac{\partial u}{\partial z}n_x - \frac{\partial v}{\partial z}n_y - \frac{\partial w}{\partial z}n_z\right)_R^k + w_L^k\right] + (1-\beta)w_R^k\,. \tag{5.17}$$

Darin ist β der Relaxationsfaktor, welcher bei den meisten im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen in der Größenordnung von $\beta = 1\times10^{-3}\ldots1\times10^{-4}$ gewählt werden musste, um einen stabilen Lösungsverlauf zu erhalten.

Darüber hinaus wurde ein Mechanismus zur Anpassung des Druckniveaus implementiert, um die Höhe der Druckschwankungen im Iterationsverlauf zu reduzieren. Hintergrund hierfür ist, dass mit der Erfüllung der globalen Massenbilanz eine weitere Bedingung für die Geschwindigkeiten existiert, während für den Druck keine explizite Randbedingung vorhanden ist. Er ist lediglich über die Ausflussrandbedingung mit den Geschwindigkeitskomponenten verknüpft, welche über diese Kopplung letztlich das Druckniveau bestimmen[3]. Um den Druck enger mit der Massenerhaltung zu verknüpfen, wird das Druckniveau im gesamten Rechengebiet daher in jeder Iteration über die Beziehung

$$p^{mod} = p + \gamma\left(\frac{\dot{m}_{ein}}{\dot{m}_{aus}} - 1\right) \tag{5.18}$$

an den globalen Massendefekt $\dot{m}_{ein}/\dot{m}_{aus}$ gekoppelt und mit dem frei wählbaren Faktor γ skaliert[4]. Wenn mehr Fluid über den Rand des Rechengebiets hinein als hinaus strömt, wird somit das Druckniveau durch den Ansatz 5.18 angehoben, um den hinausgehenden Massenstrom zu erhöhen und umgekehrt.

Mit Hilfe der Unterrelaxation und der automatischen Anpassung des Druckniveaus konnte bei allen primalen Simulationen innerhalb weniger Iterationen die Erfüllung der globalen Massenbilanz sowie ein stabiler Konvergenzverlauf gewährleistet werden.

Die Implementierung der Ausflussrandbedingung für die adjungierte Impulsbilanz erfolgt

[2] Eine Druckschwankung von 1 Pascal würde auf einem kartesischen Gitter mit typischer Gitteraufweitung im Fernfeld und einer Viskosität von $\mu = 1\times10^{-6}$ Pa s zu einer Geschwindigkeitsänderung $O(10^6)$ führen.

[3] In den Navier-Stokes-Gleichungen selbst ist das Druckniveau dagegen unbestimmt, da der Druck dort nur in Form des Gradienten eingeht.

[4] Bei den meisten in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen konnte ein Skalierungsfaktor von $\gamma = 1$ verwendet werden.

völlig analog und sei hier aus Gründen der Vollständigkeit kurz zusammengefasst:

$$\hat{u}_R^{*,k+1} = \beta \left[\Delta n \left(\frac{p^* n_x}{\mu_g} - \frac{\partial u^*}{\partial x} n_x - \frac{\partial v^*}{\partial x} n_y - \frac{\partial w^*}{\partial x} n_z - \frac{u^* \dot{m}}{\mu \delta A} \right)_R^k + u_L^{*k} \right] + (1-\beta) u_R^{*,k} \quad (5.19)$$

$$\hat{v}_R^{*,k+1} = \beta \left[\Delta n \left(\frac{p^* n_y}{\mu_g} - \frac{\partial u^*}{\partial y} n_x - \frac{\partial v^*}{\partial y} n_y - \frac{\partial w^*}{\partial y} n_z - \frac{v^* \dot{m}}{\mu \delta A} \right)_R^k + v_L^{*k} \right] + (1-\beta) v_R^{*,k} \quad (5.20)$$

$$\hat{w}_R^{*,k+1} = \beta \left[\Delta n \left(\frac{p^* n_z}{\mu_g} - \frac{\partial u^*}{\partial z} n_x - \frac{\partial v^*}{\partial z} n_y - \frac{\partial w^*}{\partial z} n_z - \frac{w^* \dot{m}}{\mu \delta A} \right)_R^k + w_L^{*k} \right] + (1-\beta) w_R^{*,k} . \quad (5.21)$$

5.3 Adjungiertes Druckkorrekturverfahren

Die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen beinhalten keine explizite Gleichung zur Bestimmung des Drucks. Um dieses Problem zu umgehen, existieren unterschiedliche Ansätze, die meist auf der Herleitung zusätzlicher PDGLn beruhen. Als Beispiel seien hier die Druck-Poisson-Gleichung oder die Wirbelstärke-Stromfunktion-Formulierung genannt [100].

Im Strömungslöser ELAN wird der Druck mit Hilfe eines Druckkorrekturverfahrens bestimmt, das auf dem SIMPLE-Algorithmus von Patankar und Spalding [87, 129] basiert. Diesem Verfahren liegt die Idee zugrunde, dass das aus der Impulsbilanz ermittelte Geschwindigkeitsfeld nur dann die Massenbilanz erfüllt, wenn das korrekte Druckfeld als treibende Kraft verwendet wird. Das SIMPLE-Verfahren ist ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren, bei dem in einem Prädiktor-Schritt die Impulsbilanz mit einem geschätzten Druckfeld berechnet wird. Im Korrektor-Schritt wird eine Druckkorrekturgleichung gelöst und das Geschwindigkeits- und Druckfeld korrigiert. Die Geschwindigkeiten erfüllen dann nach jeder Iteration die Massenbilanz.

Der SIMPLE-Algorithmus wurde ursprünglich für stationäre inkompressible Strömungen entwickelt und in Verbindung mit versetzten Rechengittern eingesetzt, um eine Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit zu verhindern [87]. Die 1983 von Rhie & Chow vorgeschlagene Interpolation der Flüsse auf den Kontrollvolumenflächen [94] ermöglicht das Lösen von Massen- und Impulsbilanz auch auf nichtversetzten Gittern und wird in nahezu allen modernen, druckbasierten Finite-Volumen-Strömungslösern verwendet.

Der in ELAN verwendete SIMPLE-Algorithmus basiert auf einer Erweiterung nach Demirdžić [20] und kann daher auch für kompressible Strömungen mit moderaten Machzahlen verwendet werden. In den letzten Jahren wurde das ursprünglich implementierte Verfahren außerdem um wichtige Modifikationen ergänzt, die eine Unabhängigkeit des Druckkorrekturverfahrens vom Zeitschritt und den Relaxationsfaktoren gewährleisten [68].

Für das kontinuierliche Adjungiertenverfahren stellt das Druckkorrekturverfahren insofern ein Problem dar, als dass es diskrete Informationen aus der Approximation der Impulsgleichungen enthält und sich daher nicht kontinuierlich, also als algebraische Gleichung oder als PDGL formulieren lässt. Man kann jedoch, wie im Folgenden gezeigt werden soll, auf Basis der adjungierten Massen- und Impulsbilanz ein adjungiertes Druckkorrekturverfahren herleiten, welches auf der gleichen Philosophie beruht wie der primale SIMPLE-Algorithmus. Die Darstellung

des primalen Druckkorrekturverfahrens und der Rhie & Chow-Interpolation stützt sich dabei in großen Teilen auf den Bericht von T. Knacke [68].

Ausgangspunkt für die weiteren Herleitungen ist die allgemeine Form der Differenzengleichung, welche in ELAN zum Einsatz kommt. Auf einem strukturierten Gitter erhält man für die Geschwindigkeit im Kontrollvolumenzentrum unter Einsatz der Kompassnotation

$$(a_P)_P u_P = \left(\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + S \right)_P . \tag{5.22}$$

Darin bezeichnet P das zentrale Kontrollvolumen und nb die benachbarten Volumina N, S, E, W, T, B. Der Quellterm S beinhaltet Terme, die nicht direkt von der Geschwindigkeit der aktuellen Zeitstufe abhängen, sowie Anteile, die explizit approximiert werden, also aus der letzten Iteration stammen.

5.3.1 Bestimmung der Geschwindigkeit auf der Kontrollvolumengrenzfläche

Zur Berechnung der Massenflüsse auf den Flächen eines Kontrollvolumens, die für den konvektiven Term in Gl. 5.5 benötigt werden, müssen die Geschwindigkeitskomponenten von den benachbarten Zentren auf die Flächen des Kontrollvolumens interpoliert werden. Wir wollen diese Berechnungsvorschrift nun unter Verwendung der Rhie & Chow-Interpolation herleiten. Mit der Abkürzung $H = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}$ und der Einführung eines Relaxationsfaktors β folgt für die Kontrollvolumina P und E

$$(a_P)_P u_P = \beta_u (H_P + S_P) + (1 - \beta_u)(a_P)_P u_P^\bullet \tag{5.23}$$

$$(a_P)_E u_E = \beta_u (H_E + S_E) + (1 - \beta_u)(a_P)_E u_E^\bullet . \tag{5.24}$$

Darin ist $u^\bullet$ die Geschwindigkeit aus der zurückliegenden Iteration. Die zunächst intuitive Approximation für die Geschwindigkeit auf der Fläche e ist eine lineare Interpolation, die mit einer eckigen Klammer gekennzeichnet werden soll:

$$\langle a_P u \rangle_e = \beta_u \left(\langle H \rangle_e + \langle S \rangle_e \right) + (1 - \beta_u) \langle a_P u^\bullet \rangle_e . \tag{5.25}$$

Am Beispiel des im Quellterm S enthaltenen Druckanteils lässt sich nun anschaulich die Entstehung von Oszillationen demonstrieren. Die lineare Interpolation dieses Terms und die anschließende zentrale Approximation des Druckgradienten ergibt auf einem äquidistanten kartesischen Gitter

$$\left\langle \delta V \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_e = \frac{1}{2} \delta V \left(\frac{p_E - p_W}{2\Delta x} + \frac{p_{EE} - p_P}{2\Delta x} \right) . \tag{5.26}$$

Dies hat zur Folge, dass ein unphysikalisches, punktweise alternierendes Druckfeld keinen Einfluss auf die Geschwindigkeit auf der Fläche hat. Man spricht bei diesem Phänomen von der Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit. Es lässt sich zeigen, dass neben dem Druckgradienten auch der instationäre Term, der aus der Relaxation stammende Anteil sowie

dominante Volumenkräfte zu Oszillationen und unphysikalischen Lösungen führen können [86]. Um dem entgegenzuwirken, kann man den Quellterm S in zwei Anteile aufspalten:

$$S = S^I + S^{II} . \tag{5.27}$$

Der Term S^{II} beinhaltet Terme, die potentiell Oszillationen in der Lösung verursachen können, während die restlichen Anteile in S^I zusammengefasst sind. Für das primale System ergibt sich die Aufteilung

$$S^I = \delta V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_g \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{5.28}$$

$$S^{II} = \varrho \frac{\delta V}{\delta t} (\gamma_1 u_i^o + \gamma_2 u_i^{oo}) - \delta V \frac{\partial p}{\partial x_i} . \tag{5.29}$$

Über die Faktoren γ_1 und γ_2 lässt sich die zeitliche Diskretisierung einstellen. Für $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 0$ erhält man eine Approximation erster und für $\gamma_1 = 2$ und $\gamma_2 = -0.5$ eine Approximation zweiter Ordnung. Die Größen u^o und u^{oo} stehen für die Geschwindigkeit der letzten bzw. vorletzten Zeitstufe. Setzt man diese Aufteilung in die Gl. 5.23 bis 5.25 ein, folgt

$$(a_P)_P u_P = \beta_u (H_P + S_P^I + S_P^{II}) + (1 - \beta_u)(a_P)_P u_P^\bullet \tag{5.30}$$

$$(a_P)_E u_E = \beta_u (H_E + S_E^I + S_E^{II}) + (1 - \beta_u)(a_P)_E u_E^\bullet \tag{5.31}$$

$$\langle a_P u \rangle_e = \beta_u \left(\langle H \rangle_e + \left\langle S^I \right\rangle_e + \left\langle S^{II} \right\rangle_e \right) + (1 - \beta_u) \langle a_P u^\bullet \rangle_e . \tag{5.32}$$

Andererseits lässt sich die Geschwindigkeit auf der Fläche auch bestimmen, indem man die Bilanz für ein versetztes Kontrollvolumen aufstellt:

$$(a_P u)_e = \beta_u \left(H_e + S_e^I + S_e^{II} \right) + (1 - \beta_u) (a_P u^\bullet)_e . \tag{5.33}$$

Mit den Näherungen

$$(a_P)_e \approx \langle a_P \rangle_e \tag{5.34}$$

$$\langle a_P u \rangle_e \approx \langle a_P \rangle_e \langle u \rangle_e \tag{5.35}$$

$$\langle a_P u^\bullet \rangle_e \approx \langle a_P \rangle_e \langle u^\bullet \rangle_e \tag{5.36}$$

$$H_e \approx \langle H \rangle_e \tag{5.37}$$

$$S_e^I \approx \left\langle S^I \right\rangle_e \tag{5.38}$$

folgt für die Differenz aus Gl. 5.33 und Gl. 5.32

$$u_e = \langle u \rangle_e + \frac{\beta_u}{\langle a_P \rangle_e} \left[S_e^{II} - \left\langle S^{II} \right\rangle_e \right] + (1 - \beta_u) \left[u_e^\bullet - \langle u^\bullet \rangle_e \right] . \tag{5.39}$$

Unter Verwendung der Approximationen

$$\left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} u^o \right\rangle_e \approx \left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right\rangle_e \langle u^o \rangle_e \tag{5.40}$$

$$\left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} u^{oo} \right\rangle_e \approx \left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right\rangle_e \langle u^{oo} \rangle_e \tag{5.41}$$

$$\left(\varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right)_e \approx \left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right\rangle_e \tag{5.42}$$

$$(\delta V)_e \approx \langle \delta V \rangle_e \tag{5.43}$$

$$\left\langle \delta V \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_e \approx \langle \delta V \rangle_e \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_e \tag{5.44}$$

und der Aufteilung des Quellterms gemäß Gl. 5.29 vereinfacht sich die Interpolationsvorschrift Gl. 5.39 für das primale System zu

$$\begin{aligned} u_e = \langle u \rangle_e + \beta_u \frac{\left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right\rangle_e}{\langle a_P \rangle_e} \left[\gamma_1 (u_e^o - \langle u^o \rangle_e) + \gamma_2 (u_e^{oo} - \langle u^{oo} \rangle_e) \right] \\ - \beta_u \frac{\langle \delta V \rangle_e}{\langle a_P \rangle_e} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_e \right] + (1 - \beta_u) \left[u_e^\bullet - \langle u^\bullet \rangle_e \right] . \end{aligned} \tag{5.45}$$

Die Verallgemeinerung für die Interpolation der Geschwindigkeit u_i auf die Fläche f lautet

$$\begin{aligned} u_{i,f} = \langle u_i \rangle_f + \beta_u \frac{\left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right\rangle_f}{\left\langle a_{\underline{i},P} \right\rangle_f} \left[\gamma_1 (u_{i,f}^o - \langle u_i^o \rangle_f) + \gamma_2 (u_{i,f}^{oo} - \langle u_i^{oo} \rangle_f) \right] \\ - \beta_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\left\langle a_{\underline{i},P} \right\rangle_f} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_f - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle_f \right] + (1 - \beta_u) \left[u_{i,f}^\bullet - \langle u_i^\bullet \rangle_f \right] . \end{aligned} \tag{5.46}$$

Die direkte Auswertung des Druckgradienten auf der Fläche f erfolgt mit Hilfe der Beziehung

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_f = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle_f + \left(\phi_R - \phi_L - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_f d_j \right) \frac{\delta A_i}{d_k \delta A_k} , \tag{5.47}$$

wobei d_i der Abstandsvektor zwischen den der Fläche f benachbarten Kontrollvolumenzentren L und R ist. Die Gradientenkorrekturformel Gl. 5.47 basiert auf einer Idee von Demirdžić und Muzaferija [20] und wurde von L. Xue im Rahmen der Entwicklung des ELAN-Strömungslösers

modifiziert [129]. Man erhält schließlich für das primale System

$$u_{i,f} = \langle u_i \rangle_f + \beta_u \frac{\left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right\rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \left[\gamma_1 (u^o_{i,f} - \langle u^o_i \rangle_f) + \gamma_2 (u^{oo}_{i,f} - \langle u^{oo}_i \rangle_f) \right] - \beta_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \left[\left(p_R - p_L - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle_f d_j \right) \frac{\delta A_i}{d_k \delta A_k} \right] + (1 - \beta_u) \left[u^{\bullet}_{i,f} - \langle u^{\bullet}_i \rangle_f \right] . \tag{5.48}$$

Für das adjungierte System kann prinzipiell analog vorgegangen werden, wobei hier noch der zusätzliche, aus dem konvektiven Term resultierende Quelltermanteil berücksichtigt werden muss. Es folgt für die adjungierte Geschwindigkeit auf der KV-Fläche

$$u^*_e = \langle u^* \rangle_e + \frac{\beta_u}{\langle a_P \rangle_e} \left[S^{*,II}_e - \left\langle S^{*,II} \right\rangle_e \right] + (1 - \beta_u) \left[u^{*,\bullet}_e - \langle u^{*,\bullet} \rangle_e \right] \tag{5.49}$$

mit

$$S^{*,I} = \delta V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_g \frac{\partial u^*_j}{\partial x_i} \right) \tag{5.50}$$

$$S^{*,II} = \varrho \frac{\delta V}{\delta t} (\gamma_1 u^{*,o}_i + \gamma_2 u^{*,oo}_i) - \delta V \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \delta V \left(\varrho u^*_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) . \tag{5.51}$$

Die Verallgemeinerung für die Interpolation der Geschwindigkeit u^*_i auf die Fläche f lautet

$$u^*_{i,f} = \langle u^*_i \rangle_f + \beta^*_u \frac{\left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right\rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \left[\gamma_1 (u^{*,o}_{i,f} - \langle u^{*,o}_i \rangle_f) + \gamma_2 (u^{*,oo}_{i,f} - \langle u^{*,oo}_i \rangle_f) \right] - \beta^*_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \left[\left(\frac{\partial p^*}{\partial x_i} \right)_f - \left\langle \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \right\rangle_f \right] + (1 - \beta^*_u) \left[u^{*,\bullet}_{i,f} - \langle u^{*,\bullet}_i \rangle_f \right] - \beta^*_u \frac{1}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \left[\left(\varrho u^*_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta V \right)_f - \left\langle \varrho u^*_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta V \right\rangle_f \right] . \tag{5.52}$$

Unter Verwendung der Approximation

$$\left\langle \varrho u^*_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta V \right\rangle_f \approx \left\langle \varrho u^*_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle_f \langle \delta V \rangle_f \tag{5.53}$$

und der Gradientenkorrekturformel Gl. 5.47 folgt die Bestimmungsgleichung für die adjungierte Geschwindigkeit auf der Kontrollvolumenfläche

$$
\begin{aligned}
u^*_{i,f} = \langle u^*_i \rangle_f + \beta^*_u \frac{\left\langle \varrho \frac{\delta V}{\delta t} \right\rangle_f}{\left\langle a_{\hat{L},P} \right\rangle_f} \left[\gamma_1 (u^{*,o}_{i,f} - \langle u^{*,o}_i \rangle_f) + \gamma_2 (u^{*,oo}_{i,f} - \langle u^{*,oo}_i \rangle_f) \right] \\
- \beta^*_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\left\langle a_{\hat{L},P} \right\rangle_f} \left[\left(p^*_R - p^*_L - \left\langle \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \right\rangle_f d_j \right) \frac{\delta A_i}{d_k \delta A_k} \right] + (1 - \beta^*_u) \left[u^{*,\bullet}_{i,f} - \langle u^{*,\bullet}_i \rangle_f \right] \\
- \beta^*_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\left\langle a_{\hat{L},P} \right\rangle_f} \left\{ \left(\varrho u^*_j \right)_f \left[\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle_f + \left(u_{j,R} - u_{j,L} - \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle_f d_k \right) \frac{\delta A_i}{d_l \delta A_l} \right] - \left\langle \varrho u^*_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle_f \right\} .
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

5.3.2 Korrekturen im Zellzentrum

Gemäß der Idee des Prädiktor-Korrektor-Ansatzes werden das Geschwindigkeits- und Druckfeld in die Summe aus Schätzwert und Korrektur aufgeteilt:

$$u_i = u^\diamond_i + u^\triangledown_i \tag{5.55}$$

$$p = p^\diamond + p^\triangledown . \tag{5.56}$$

Ziel ist es nun, die Geschwindigkeits- auf Druckkorrekturen zurückzuführen. Dazu ist es zweckmäßig, den Quellterm neu aufzuspalten in

$$S_i = S^{III}_i - \delta V \frac{\partial p}{\partial x_i} . \tag{5.57}$$

Sowohl die geschätzte als auch die korrigierte Geschwindigkeit soll die Impulsbilanz erfüllen, d.h., es gilt

$$(a_{\hat{L},P})_P u_{i,P} = \beta_u \left(H_i + S^{III}_i - \delta V \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P + (1 - \beta_u)(a_{\hat{L},P})_P u^\bullet_{i,P} \tag{5.58}$$

$$(a_{\hat{L},P})_P u^\diamond_{i,P} = \beta_u \left(H^\diamond_i + S^{III,\diamond}_i - \delta V \frac{\partial p^\diamond}{\partial x_i} \right)_P + (1 - \beta_u)(a_{\hat{L},P})_P u^{\diamond,\bullet}_{i,P} . \tag{5.59}$$

Für die Differenz der beiden Impulsbilanzen folgt wegen $S^{III,\diamond}_i = S^{III}_i$ und $u^{\diamond,\bullet}_{i,P} = u^\bullet_{i,P}$

$$(a_{\hat{L},P})_P u^\triangledown_{i,P} = \beta_u \left(H^\triangledown_i - \delta V \frac{\partial p^\triangledown}{\partial x_i} \right)_P . \tag{5.60}$$

Man erhält somit ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Geschwindigkeitskorrekturen. Die Idee des SIMPLE-Algorithmus ist nun, den Term $H^\triangledown_i$ und damit den Einfluss der Nachbarpunkte zu vernachlässigen. Dies führt zu einem direkten Zusammenhang zwischen Druck-

und Geschwindigkeitskorrektur im Zellzentrum:

$$u_{i,P}^{\triangledown} = -\beta_u \left(\frac{\delta V}{a_{i,P}} \frac{\partial p^{\triangledown}}{\partial x_i} \right)_P . \tag{5.61}$$

Die Auswirkungen dieser Vereinfachung werden später im Zusammenhang mit der Druckkorrekturgleichung diskutiert. Für das adjungierte System folgt analog

$$u_{i,P}^{*,\triangledown} = -\beta_u^* \left(\frac{\delta V}{a_{i,P}} \frac{\partial p^{*,\triangledown}}{\partial x_i} \right)_P . \tag{5.62}$$

5.3.3 Korrekturen auf der Kontrollvolumengrenzfläche

Ausgangspunkt für die Geschwindigkeitskorrektur auf den Kontrollvolumengrenzflächen ist Gl. 5.46, die für die geschätzte und die korrigierte Geschwindigkeit aufgestellt wird. Subtrahiert man die beiden Gleichungen, folgt wegen $u_i^o = u_i^{o,\diamond}$, $u_i^{oo} = u_i^{oo,\diamond}$ und $u_i^{\bullet} = u_i^{\bullet,\diamond}$ für die Geschwindigkeitskorrektur

$$u_{i,f}^{\triangledown} = \left\langle u_i^{\triangledown} \right\rangle_f - \beta_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \left[\left(\frac{\partial p^{\triangledown}}{\partial x_i} \right)_f - \left\langle \frac{\partial p \triangledown}{\partial x_i} \right\rangle_f \right] . \tag{5.63}$$

Die linear auf die Fläche interpolierte Geschwindigkeit lässt sich mit Hilfe von Gl. 5.61 bestimmen:

$$\left\langle u_i^{\triangledown} \right\rangle_f = -\beta_u \left\langle \frac{\delta V}{a_{i,P}} \frac{\partial p^{\triangledown}}{\partial x_i} \right\rangle_f \approx -\beta_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \left\langle \frac{\partial p^{\triangledown}}{\partial x_i} \right\rangle_f . \tag{5.64}$$

Setzt man dies in die Ausgangsgleichung 5.63, erhält man

$$u_{i,f}^{\triangledown} = -\beta_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \left(\frac{\partial p^{\triangledown}}{\partial x_i} \right)_f . \tag{5.65}$$

Unter Vernachlässigung der Nichtorthogonalität des Gitters lässt sich der Druckgradient auf der Fläche über die Beziehung

$$\left(\frac{\partial p^{\triangledown}}{\partial x_i} \right)_f = (p_R^{\triangledown} - p_L^{\triangledown}) \frac{\delta A_i}{d_k \delta A_k} \tag{5.66}$$

annähern und es folgt schließlich für die Geschwindigkeitskorrektur

$$u_{i,f}^{\triangledown} = -\beta_u \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \frac{\delta A_i}{d_k \delta A_k} (p_R^{\triangledown} - p_L^{\triangledown}) . \tag{5.67}$$

Die Korrektur der adjungierten Geschwindigkeit auf der Kontrollvolumengrenzfläche lässt sich wieder völlig analog formulieren, da sich die Ausgangsgleichung 5.46 in gleicher Weise auch

für die adjungierte Geschwindigkeit aufstellen lässt:

$$u_{i,f}^{*,\triangledown} = -\beta_u^* \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \frac{\delta A_i}{d_k \delta A_k} (p_R^{*,\triangledown} - p_L^{*,\triangledown}) \,. \tag{5.68}$$

5.3.4 Druckkorrekturgleichung und Randbedingungen

Die Korrektur der Geschwindigkeit auf der Kontrollvolumenfläche kann für die Herleitung der Druckkorrekturgleichung verwendet werden. Dazu setzt man zunächst den Korrekturansatz 5.55 in die diskretisierte Massenbilanz ein:

$$\sum_f \left[\varrho (u_i^{\diamond} + u_i^{\triangledown}) \delta A_i \right]_f = 0 \,. \tag{5.69}$$

Ersetzt man nun $u_{i,f}^{\triangledown}$ durch die Korrekturformel 5.67, erhält man nach kurzer Umformung die Druckkorrekturgleichung

$$\beta_u \sum_f \varrho \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \frac{\delta A_i \delta A_i}{d_k \delta A_k} (p_R^{\triangledown} - p_L^{\triangledown})_f = \sum_f \varrho (u_i^{\diamond} \delta A_i)_f \,. \tag{5.70}$$

Für das adjungierte System lässt sich analog eine adjungierte Druckkorrekturgleichung herleiten:

$$\beta_u^* \sum_f \varrho \frac{\langle \delta V \rangle_f}{\langle a_{i,P} \rangle_f} \frac{\delta A_i \delta A_i}{d_k \delta A_k} (p_R^{*,\triangledown} - p_L^{*,\triangledown})_f = \sum_f \varrho (u_i^{*,\diamond} \delta A_i)_f \,. \tag{5.71}$$

Die Philosophie des dargestellten Druckkorrekturverfahrens ist, dass die Korrekturen am Ende des iterativen Ablaufs klein werden und die geschätzten Größen gegen die korrekten Werte konvergieren. Die Vernachlässigung der Nachbarterme H_i bzw. H_i^* in Gl. 5.61 bzw. 5.62, welche aus dem vollimpliziten ein semiimplizites Verfahren macht, sollte daher nur den Konvergenzverlauf, nicht aber die auskonvergierte Lösung beeinflussen. Die Tatsache, dass die Korrekturformel 5.67 in die diskretisierte Massenbilanz eingesetzt wurde, sorgt im Umkehrschluss dafür, dass die korrigierten Geschwindigkeiten bzw. Massenflüsse *nach jeder Iteration* die Massenbilanz erfüllen und dass damit eine wichtige Eigenschaft der Strömung erhalten bleibt. Die Summe der aus den geschätzten Geschwindigkeiten berechneten Massenflüsse auf der rechten Seite von Gl. 5.70 stellt einen Massendefekt dar und bildet die treibende Kraft für die Erzeugung der Druckkorrektur $p^{\triangledown}$. Die gleichen Aussagen treffen auch auf das adjungierte System zu.

Neben dem zusätzlich zu interpolierenden Quellterm bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten auf der KV-Grenzfläche unterscheiden sich der primale und der adjungierte SIMPLE-Algorithmus im Wesentlichen in der Kopplung der Gleichungen. Das primale System aus Navier-Stokes-Gleichungen und Druckkorrekturgleichung ist aufgrund der Nichtlinearität des konvektiven Terms deutlich stärker gekoppelt, denn die Impulsbilanz erhält sowohl über den korrigierten Massenfluss als auch über den korrigierten Druck Informationen aus dem iterativen Druckkorrektur-Ansatz. Im adjungierten Fall erfolgt der Informationsaustausch hauptsächlich über den Druckterm. In der Praxis, d.h., bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Si-

mulationen, konnte trotz der schwächeren Kopplung der Gleichungen im adjungierten System keine nennenswert schlechtere Gesamtkonvergenz der Lösung beobachtet werden.

An Einström- und Kontrollrändern sowie an festen Wänden ergibt sich für die Druckkorrekturgleichung eine Nullgradientenrandbedingung. Auf diese Ränder wird der Druck nach jeder inneren Iteration aus dem ersten inneren Feldpunkt linear extrapoliert ([29, 129]). Das Druckniveau wird über die Kopplung von Druck und Geschwindigkeit in der natürlichen Ausflussrandbedingung fixiert. Wird das Druckniveau nicht über die Randbedingung festgelegt, wählt man in der Regel einen beliebigen Feldpunkt als sogenannten Druckreferenzpunkt. Der Druck wird an dieser Stelle konstant gehalten, indem das Druckkorrekturfeld relativ zum Wert am Druckreferenzpunkt bestimmt wird [29].

6 Verifikation

Jede Änderung an einer bestehenden Software sollte hinreichend überprüft werden, um sicherzustellen, dass die neuen Codeteile fehlerfrei implementiert wurden und die Änderungen erwartungsgemäß funktionieren. Im Allgemeinen wird dabei zwischen der Verifikation (auch Verifizierung) und der Validierung unterschieden [106]. Während bei der Verifikation die Fragestellung im Vordergrund steht, ob die Implementierung logisch und syntaktisch korrekt ist, wird mit der Validierung überprüft, ob die Änderungen die ihnen zugeschriebenen Eigenschaften aufweisen. Auf die Erweiterung eines Strömungslösers übertragen lässt sich etwas vereinfacht sagen, dass mit der Verifikation geklärt wird, ob die Gleichungen richtig gelöst werden, während die Validierung die Frage beantwortet, ob die richtigen Gleichungen gelöst werden [24].

In der Praxis wird die Code-Verifikation häufig zugunsten der Validierung vernachlässigt. Dies ist unter anderem nachteilig, weil Implementierungsfehler irrtümlicherweise als Modellfehler interpretiert werden könnten. Darüber hinaus lässt sich die numerische Lösung der adjungierten Differentialgleichungen im Gegensatz zu einem Strömungsfeld nur schwer mit physikalischem Sachverstand analysieren, so dass Implementierungsfehler möglicherweise kaum auffallen würden.

Aus diesem Grund teilt sich die im Folgenden dargestellte Überprüfung des Verfahrens in zwei Abschnitte auf. Im Kap. 6 wird mit Hilfe der *Method of Exact Solution* (MES) anhand eines einfachen Testfalls die korrekte Implementierung im Sinne der Code-Verifikation überprüft. Bei diesem Verfahren konstruiert man sich zunächst ein System, das sich analytisch lösen lässt. Gemäß des Lax-Äquivalenz-Theorems [54] konvergiert dann die numerische Lösung mit abnehmender Zeit- und Ortsschrittweite gegen die exakte Lösung, sofern die numerische Approximation der Differentialgleichungen konsistent und stabil ist. Aus der Differenz zwischen analytischer und numerischer Lösung, die im Weiteren als Gesamtfehler $E = \phi - \phi_{exakt}$ bezeichnet wird, lassen sich darüber hinaus wichtige Rückschlüsse auf das numerische Verhalten des Verfahrens wie zum Beispiel die Fehlerordnung ziehen. Die Methode bietet den Vorteil, dass sie im Gegensatz zur *Method of Manufactured Solution* (MMS) ohne weiteren Programmieraufwand durchführbar ist, andererseits aber im Gegensatz zu einfacheren Verfahren wie Trend- oder Symmetrietests sehr detaillierte Aussagen über möglicherweise vorhandene Implementierungsfehler erlaubt [106].

Für die MES muss zunächst ein Testfall konstruiert werden, der sich analytisch lösen lässt. Dies ist schon für das primale System allein, also für eine reine Strömungslösung, nur für sehr einfache Konfigurationen möglich und wird unter Berücksichtigung des dazugehörigen adjungierten Systems inklusive aller Randbedingungen ungleich schwerer. Um die Konstruktion des Testfalls zu vereinfachen, wurden daher für die Verifikation die Randbedingungen von primalem und adjungiertem System unabhängig voneinander gewählt. Dies kann zu einer

Verletzung der Konsistenz zwischen primalem und adjungiertem System auf kontinuierlicher Ebene führen, d.h., die Randbedingungen des Optimalitätssystems passen unter Umständen nicht mehr zueinander. Für die Verifikation der Implementierung ist dies jedoch bedeutungslos, da hier nur der Nachweis der korrekten Funktionsweise einzelner Programmteile im Vordergrund steht. Da der primale Löser als hinreichend verifiziert angesehen werden kann, bedeutet dies letztlich, dass der adjungierte Teil des Lösers für die Verifikation unabhängig vom primalen Teil betrachtet werden kann. Der primale Löser liefert lediglich den Quelltermanteil und die Flüsse, die für den adjungierten Teil des Programms benötigt werden.

6.1 Setup

Der Testfall ist stationär und wurde auf Basis einer Idee von Daniel Wachsmuth[1] im Rahmen des SFB557 konzipiert. Ausgangspunkt ist die sogenannte ebene Hagen-Poiseuille-Strömung, also die hydrodynamisch ausgebildete Strömung in einem ebenen Kanal mit ruhenden Wänden, welche in Abb. 6.1 schematisch dargestellt ist. Für kleine Reynoldszahlen ($\mathrm{Re} = \frac{H u_m}{2\nu} < 2300$)

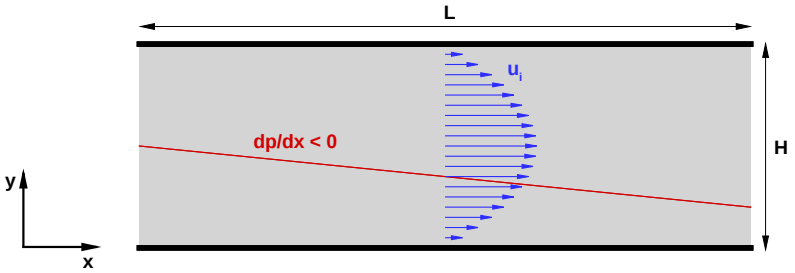


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der Kanalströmung

ist die Strömung laminar und läßt sich analytisch lösen. Das Geschwindigkeitsprofil weist in wandnormaler Richtung ein Parabelprofil auf und verändert sich in Hauptströmungsrichtung nicht (Gl. 6.1). Der Druck stellt die treibende Kraft für die Fluidbewegung dar. Er fällt über die Lauflänge linear ab und ist quer zur Hauptströmung konstant:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} y(y - H)\,. \tag{6.1}$$

[1] Mitarbeiter des von Prof. F. Tröltzsch geleiteten FG „Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen“an der TU Berlin, der das mathematische Partnerprojekt C7 im SFB557 bearbeitet hat.

Die mittlere Geschwindigkeit erhält man durch Integration in y-Richtung:

$$u_m = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} y(y-H)\, dy \tag{6.2}$$

$$u_m = -\frac{1}{12\mu} \frac{\Delta p}{L} H^2 . \tag{6.3}$$

Daraus ergibt sich der Druckgradient und das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit der Reynoldszahl zu

$$\frac{\Delta p}{L} = -24 \frac{\mu^2 \mathrm{Re}}{\varrho H^3} \tag{6.4}$$

$$u(y) = 12 \frac{\mu \mathrm{Re}}{\varrho H^3} y(H-y) . \tag{6.5}$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass das folgende Geschwindigkeits- und Druckfeld die partiellen Differentialgleichungen des dazugehörigen adjungierten Systems (Gl. 4.79) erfüllt:

$$u^*(x) = C_1 y \tag{6.6}$$

$$v^*(y) = C_1 x + C_2 \tag{6.7}$$

$$p^*(y) = \frac{4 C_1 \mu \mathrm{Re}}{H^3} y^3 + C_3 \tag{6.8}$$

mit den Integrationskonstanten C_1, C_2 und C_3. Bei der Verwendung der Randbedingungen

$$u^*|_\Gamma = y \tag{6.9}$$

$$v^*|_\Gamma = x \tag{6.10}$$

folgt für die Integrationskonstanten C_1 und C_2

$$C_1 = 1 \tag{6.11}$$

$$C_2 = 0 . \tag{6.12}$$

Die Konstante C_3 ergibt sich aus der Wahl des Druckreferenzpunktes (siehe hierzu auch Kap. 5.3.4). Legt man diesen in die Kanalmitte, erhält man

$$C_3 = p^*(y = H/2) - \frac{\mu \mathrm{Re}}{2} = p_{ref} - \frac{\mu \mathrm{Re}}{2} . \tag{6.13}$$

Da die Wahl des Referenzdrucks beliebig ist, kann er auch zu null gesetzt werden, woraus sich für die Integrationskonstante

$$C_3 = -\frac{\mu \mathrm{Re}}{2} \tag{6.14}$$

ergibt. Die Lösung des adjungierten Systems beinhaltet somit im Gegensatz zur primalen Lösung beide Geschwindigkeitskomponenten sowie den Druck, so dass mit Hilfe dieses relativ

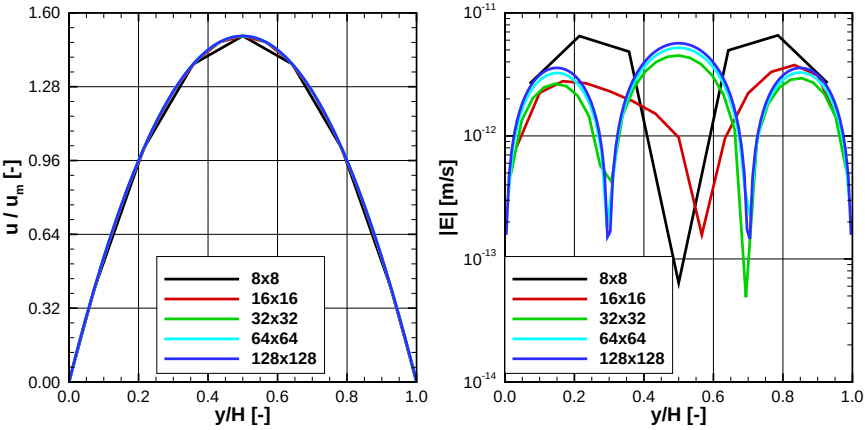
simplen Testfalls sowohl eine Verifikation der implementierten adjungierten Impulsbilanz als auch eine Überprüfung des adjungierten Druckkorrekturverfahrens möglich ist.

Die numerischen Simulationen dieses Testfalls wurden in einem Gebiet mit den Abmessungen $L/H = 1$ durchgeführt. Als Randbedingung für das primale System wurden die Wandgeschwindigkeiten zu null gesetzt und die Ränder in Strömungsrichtung als periodisch angenommen. Für das adjungierte System wurden an der gesamten Berandung Dirichlet-Randbedingungen verwendet und die Werte für u^* und v^* gemäß Gl. 6.9 und 6.10 gesetzt. Aufgrund der geringen Pécletzahl konnte für alle im Folgenden dargestellten Simulationen das Zentraldifferenzenschema (CDS) verwendet werden und bei allen Rechnungen wurde eine Abnahme des Residuums um zehn Größenordnungen als Konvergenzkriterium festgelegt.

Entsprechend der der MES zugrunde liegenden Idee wurden die numerischen Simulationen auf fünf verschiedenen Rechennetzen durchgeführt, wobei ausgehend vom gröbsten Gitter mit $8x8$ Kontrollvolumina (KV) die Anzahl der KV sukzessive in beide Raumrichtungen verdoppelt wurde, so dass das feinste Rechennetz aus $128x128$ Kontrollvolumina bestand. Die Punkteverteilung ist äquidistant und damit in erster Linie an den quadratischen bzw. linearen Verlauf der primalen bzw. adjungierten Geschwindigkeiten angepasst.

6.2 Primale Lösung

Neben der Verifikation des numerischen Algorithmus können mit Hilfe der MES auch Aussagen über die numerischen Eigenschaften wie beispielsweise die Fehlerordnung des Strömungslösers getroffen werden. In Abb. 6.2a ist zu diesem Zweck der Verlauf der primalen Geschwindigkeit u normal zur Wand aufgetragen. Da die analytische Lösung des Problems bekannt ist, lässt sich außerdem der Fehler $E = \phi - \phi_{exakt}$ an jedem Punkt bestimmen (siehe hierzu Abb. 6.2b). Man erkennt deutlich, dass die Geschwindigkeitsverteilung auf allen Gittern praktisch identisch ist und der Fehler sich unabhängig von der räumlichen Auflösung im Bereich von $|E| = 1 \times 10^{-11} \ldots 1 \times 10^{-12}$ bewegt. Dieses Verhalten lässt sich damit begründen, dass die linearen Anteile der Impulsbilanz nur Ableitungen von linearen oder quadratischen Funktionen enthalten, die von einem Verfahren 2. Ordnung exakt wiedergegeben werden. Der nichtlineare Konvektionsterm enthält zwar z.T. Ableitungen von Funktionen höherer Ordnung, spielt aber für den vorliegenden Fall keine Rolle, da $v = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ gilt. Für eine genauere Analyse, bei der die Diskretisierung der einzelnen Terme inklusive der führenden Fehlerterme betrachtet wird, sei aus Gründen der Übersichtlichkeit auf Anh. C.6.1 verwiesen. Der in Abb. 6.2b dargestellte Fehlerverlauf entspricht somit dem erwarteten Verhalten des primalen Strömungslösers und kann als Nachweis dafür gewertet werden, dass die verwendeten Schemata fehlerfrei implementiert sind.



(a) Wandnormales Geschwindigkeitsprofil

(b) Wandnormaler Verlauf des Fehlerbetrags

Abbildung 6.2: Einfluss der Gitterauflösung auf die primale Lösung

6.3 Adjungierte Lösung

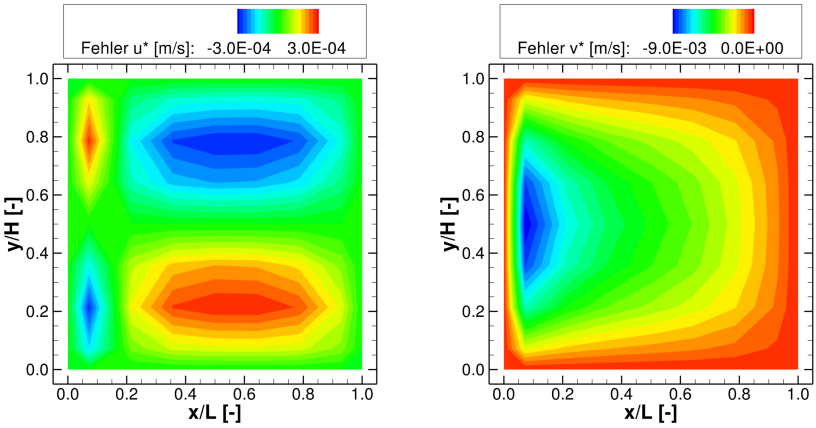
6.3.1 Lösung ohne adjungierte Druckkorrekturgleichung

Um die Implementierung der adjungierten Impulsbilanz ohne den Einfluss des Druckkorrekturverfahrens testen zu können, wurden zunächst Simulationen mit vorgegebenem adjungiertem Druck durchgeführt, d.h., es wurde nur die adjungierte Impulsbilanz in beide Raumrichtungen gelöst. Bei der Analyse der Fehlerverteilung im Rechengebiet, die in Abb. 6.3 exemplarisch für das gröbste Rechengitter dargestellt ist, fällt auf, dass der Fehler asymmetrisch verteilt ist und die größte Abweichung zur analytischen Lösung am linken Rand auftritt. Dieses Verhalten wird durch die Randbehandlung des konvektiven Terms verursacht, welche zunächst ohne Änderung aus dem primalen Löser übernommen wurde. Die Problematik lässt sich anschaulich anhand einer einfachen 1D-Konvektions-Diffusions-Gleichung demonstrieren, wobei die in Anh. C.2 eingeführte Notation verwendet wird:

$$\frac{d\varrho u\phi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a\frac{d\phi}{dx}\right). \tag{6.15}$$

Integriert man in x-Richtung, folgt

$$(\varrho u\phi)_e - (\varrho u\phi)_w = \left(a\frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(a\frac{d\phi}{dx}\right)_w \tag{6.16}$$



(a) Fehler in u^* (b) Fehler in v^*

Abbildung 6.3: Konturplots der Fehlerverteilung in der adjungierten Lösung auf dem 8x8-KV-Gitter mit vorgegebenem Druck

und mit $\varrho u = \text{konst}$ und $a = \text{konst}$ sowie der zentralen Approximation des Diffusionsterms[2]

$$\varrho u(\phi_e - \phi_w) = a\left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\phi_P - \phi_R}{0.5\Delta x}\right). \tag{6.17}$$

Nach kurzer Umformung erhält man

$$\mathrm{Pe}(\phi_e - \phi_w) = \phi_E - 3\phi_P + 2\phi_R \tag{6.18}$$

mit der Pécletzahl

$$\mathrm{Pe} = \frac{\varrho u \Delta x}{a}. \tag{6.19}$$

Im hier verwendeten Strömungslöser ELAN wird der Fluss am Rand standardmäßig nach dem *Upwind*-Schema (UDS) approximiert. Daraus folgt für den Fall $u > 0$

$$\mathrm{Pe}(\phi_P - \phi_R) = \phi_E - 3\phi_P + 2\phi_R \tag{6.20}$$

und weiter

$$(\mathrm{Pe} + 3)\phi_P = \phi_E + (2 + \mathrm{Pe})\phi_R. \tag{6.21}$$

Da die Pécletzahl in diesem Fall größer null ist, bleiben alle Koeffizienten positiv und das Verfahren ist *bounded*, d.h., es treten keine Gitteroszillationen auf [29].

Auch für den Fall, dass Fluid aus dem Gebiet hinausströmt, also $u < 0$ ist, wird in ELAN die

[2] Am Rand wird hier aus Übersichtsgründen auf eine rückwärtige Approximation erster Ordnung zurückgegriffen. Im tatsächlichen Strömungslöser wird an dieser Stelle dagegen eine nichtäquidistante Approximation zweiter Ordnung verwendet.

Standard-*Upwind*-Approximation verwendet:

$$\mathrm{Pe}(\phi_E - \phi_P) = \phi_E - 3\phi_P + 2\phi_R \,. \tag{6.22}$$

Nach Umsortieren folgt

$$(3 - \mathrm{Pe})\phi_P = (1 - \mathrm{Pe})\phi_E + 2\phi_R \,. \tag{6.23}$$

Der Vorteil dieser Implementierung ist, dass das Verfahren wieder *bounded* ist. Der direkte Einfluss des Randwertes auf den konvektiven Anteil im ersten Kontrollvolumen geht mit dieser Approximation jedoch verloren. Genau dieser Fall tritt bei der Lösung des adjungierten Problems am linken Rand des Rechengebietes auf und ist somit die Ursache für die in Abb. 6.3 dargestellte Fehlerverteilung im Rechengebiet.

Alternativ lässt sich der Randwert in Gl. 6.18 auch für $u < 0$ direkt berücksichtigen:

$$\mathrm{Pe}(\phi_E - \phi_R) = \phi_E - 3\phi_P + 2\phi_R \,. \tag{6.24}$$

Dies wirkt sich wiederum negativ auf die Stabilität aus, denn nach Umsortieren erhält man

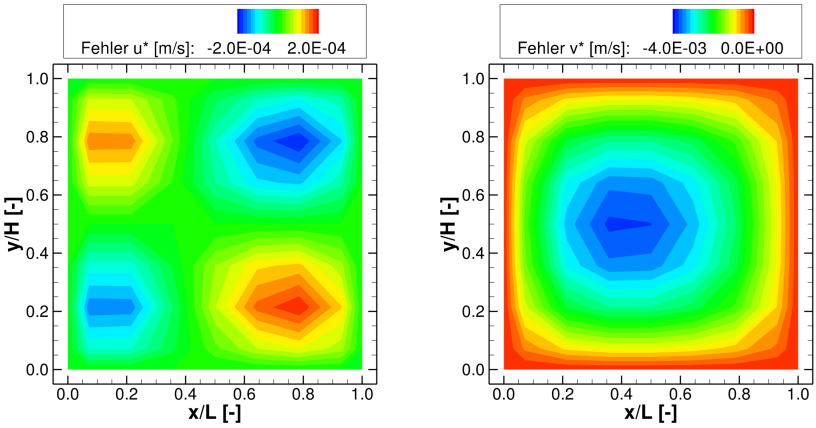
$$3\phi_P = (1 - \mathrm{Pe})\phi_E + (2 + \mathrm{Pe})\phi_R \,. \tag{6.25}$$

Daraus folgt, dass der Koeffizient vor dem Randwert ϕ_R für $\mathrm{Pe} < -2$ negativ wird und damit Oszillationen in der Lösung verursacht. In diesem Fall ist die einzige Möglichkeit dem entgegenzuwirken eine Verfeinerung des Rechengitters im Randbereich, was bei praxisrelevanten Konfigurationen zu einem starken Anstieg der KV-Anzahl und zu einem ungünstigen Aufweitungsverhältnis der Zellen führen kann.

Bei der hier durchgeführten Verfahrensverifikation ist die Verwendung eines zu Gl. 6.25 analogen Ansatzes im adjungierten Löser aufgrund der kleinen Reynoldszahl jedoch unproblematisch. Die daraus resultierende Fehlerverteilung im Rechengebiet (siehe Abb. 6.4) ist nun weitgehend symmetrisch und weist keine Störung mehr am linken Rand auf. Das Problem der Randbehandlung besteht prinzipiell sowohl im primalen als auch im adjungierten Löser. Für die primale Lösung kann in der Regel die *Upwind*-Approximation nach Gl. 6.23 verwendet werden, da meist nur Einströmränder ($u_i > 0$) im Fernfeld als Dirichletränder definiert werden. Eine Ausnahme bilden z.B. Simulationen zur aktiven Strömungsbeeinflussung, bei denen zumindest zeitweise auch Fluid über den Kontrollrand abgesaugt wird. So kann z.B. bei der Verfahrensvalidierung in Kap. 7.2, bei der eine Zylinderumströmung mit gepulster Absaugung betrachtet wird, ein erkennbarer Einfluss der Randbehandlung auf die Lösung nachgewiesen werden.

Bei der Lösung des adjungierten Problems ist eine korrekte Berücksichtigung der Randwerte im Fernfeld deutlich komplizierter. Da sich hier die Konvektionsrichtung umkehrt, müsste die Approximation 6.25 verwendet werden, was in der Regel bei praxisrelevanten Konfigurationen mit einer signifikanten Gitterverfeinerung einherginge (s.o.).

Für alle weiteren im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen wurde daher ein Kompromiss aus Genauigkeit und Stabilität gewählt. Da das Fluid im Fernfeld beim primalen System in der Regel in das Rechengebiet hineinströmt, kann eine stabile Approximation gemäß Gl. 6.23 verwendet werden. Im Bereich der Strömungsbeeinflussung ist die direkte Berücksich-



(a) Fehler in u^* (b) Fehler in v^*

Abbildung 6.4: Konturplots der Fehlerverteilung in der adjungierten Lösung auf dem 8x8-KV-Gitter mit vorgegebenem Druck und modifizierter Randbehandlung

tigung der Randgeschwindigkeit nach Gl. 6.25 erforderlich, damit auch eine Absaugung von Fluid korrekt vom Verfahren erfasst wird. Da die Rechengitter in diesem Bereich in der Regel sehr fein sind, ist das Auftreten von Gitteroszillationen relativ unwahrscheinlich und muss gegebenenfalls durch eine Gitterverfeinerung eliminiert werden. Für das adjungierte System wird im Fernfeld die stabile Approximation 6.23 verwendet, um eine extreme Gitterverfeinerung am Fernfeldrand zu vermeiden.

Der in Abb. 6.4 noch verbleibende Fehler resultiert, wie im Folgenden gezeigt werden soll, nur noch aus der numerischen Approximation der zugrunde liegenden DGLn. Bei der Analyse des Diskretisierungsfehlers für die einzelnen Terme der adjungierten Impulsbilanz

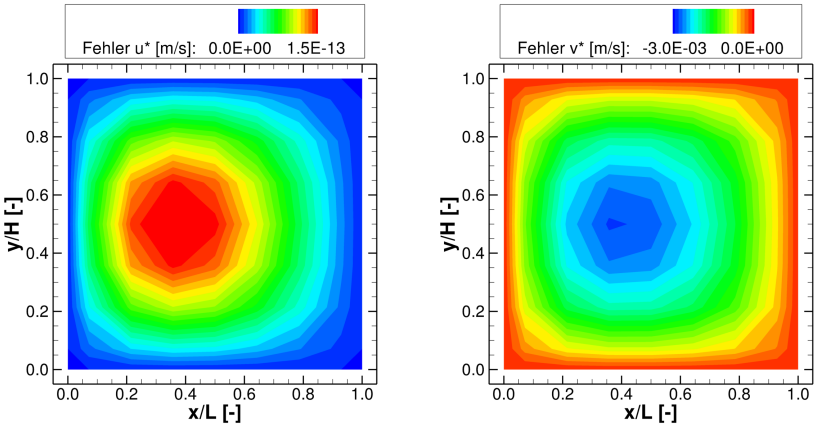
$$\mathrm{x}: \; -\frac{\partial \varrho u^* u}{\partial x} - \frac{\partial \varrho u^* v}{\partial y} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \overbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y}}_{*}}^{\text{expliziterAnteil}}\right) - \overbrace{\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial x} - \varrho v^* \frac{\partial v}{\partial x}}^{\text{expliziterAnteil}} \tag{6.26}$$

$$\mathrm{y}: \; -\frac{\partial \varrho v^* u}{\partial x} - \frac{\partial \varrho v^* v}{\partial y} = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + \overbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2}}^{\text{expliziterAnteil}}\right) - \overbrace{\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y} - \varrho v^* \frac{\partial v}{\partial y}}^{\text{expliziterAnteil}} \tag{6.27}$$

stellt man fest, dass die Approximation der Bilanz in x-Richtung exakt ist, während der Abbruchfehler bei der Bilanz in y-Richtung von null verschieden ist (siehe Anh. C.6.2). Dieser Fehler in der v^*-Komponente induziert über die gemischte Ableitung $(*)$ im expliziten Anteil in

Gl. 6.26 einen Fehler in der u^*-Komponente[3]. Daraus folgt, dass auch die u^*-Komponente fehlerbehaftet ist (Abb. 6.4), obwohl die Diskretisierung der adjungierten Impulsbilanz in x-Richtung eigentlich exakt ist.

Für den hier betrachteten Fall einer inkompressiblen Strömung mit konstanten Stoffwerten ist der explizite Diffusionsanteil ohne Bedeutung. Deaktiviert man diese Terme im Quellcode des Strömungslösers, wird die Bilanz in x-Richtung wie erwartet exakt gelöst, während der Fehler in der v^*-Komponente nahezu unverändert bleibt (siehe Abb. 6.5). Der verbleibende



(a) Fehler in u^* (b) Fehler in v^*

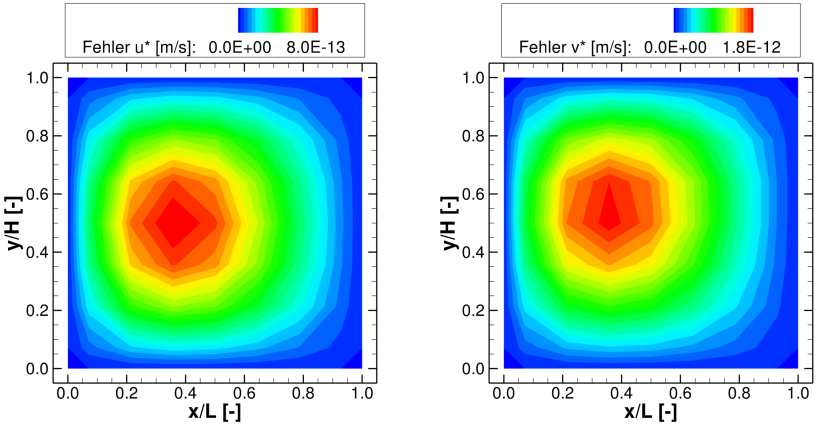
Abbildung 6.5: Konturplots der Fehlerverteilung in der adjungierten Lösung auf dem 8x8-KV-Gitter mit vorgegebenem Druck, modifizierter Randbehandlung und ohne expliziten Diffusionsanteil

Diskretisierungsfehler in der adjungierten Impulsbilanz in y-Richtung kann über den Quellterm wieder abgezogen werden, so dass schließlich bei korrekter Implementierung die numerische Lösung bis auf Maschinengenauigkeit mit der exakten Lösung übereinstimmen muss. Wie Abb. 6.6 zeigt, ist dies bei dem hier verwendeten Strömungslöser der Fall, so dass man von einer fehlerfreien Implementierung der adjungierten Impulsbilanz ausgehen kann.

6.3.2 Lösung mit adjungierter Druckkorrekturgleichung

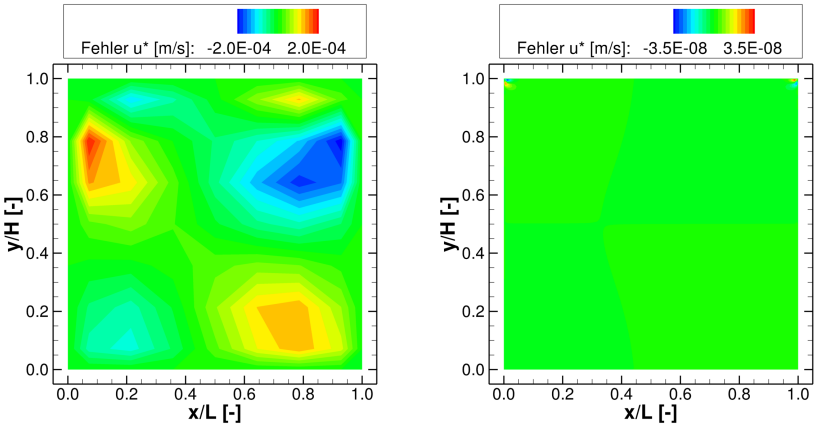
Lässt man die Beschränkung des vorgegebenen Drucks fallen und löst das DGL-System unter Verwendung der adjungierten Druckkorrekturgleichung, erhält man die in den Abbildungen 6.7 bis 6.9 gezeigte Fehlerverteilung im Rechengebiet, wobei jeweils die Ergebnisse auf dem gröbsten und feinsten Rechengitter gegenübergestellt sind. Hierbei wird deutlich, dass der betragsmäßig größte Fehler bei allen adjungierten Strömungsvariablen jeweils im Bereich der oberen Begrenzung des Rechengebiets zu finden ist. Die Ursache hierfür ist die Randbehandlung

[3]Im zweiten Summanden des adjungierten Quellterms in Gl. 6.26 wird kein Fehler induziert, da $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ist.



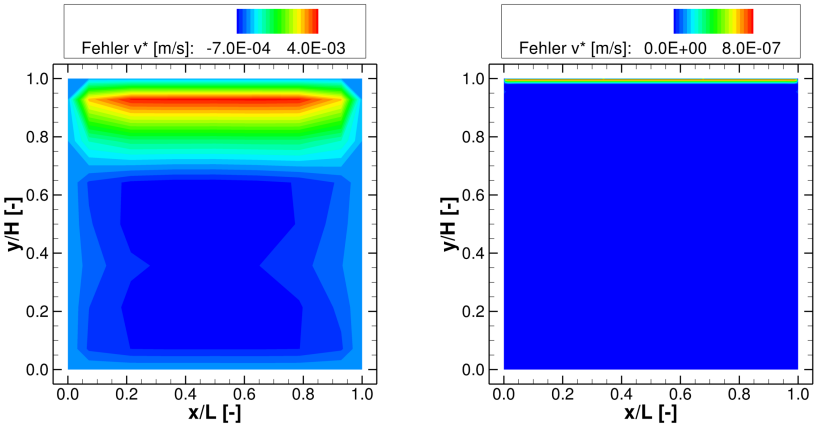
(a) Fehler in u^* (b) Fehler in v^*

Abbildung 6.6: Konturplots der Fehlerverteilung in der adjungierten Lösung auf dem 8x8-KV-Gitter mit vorgegebenem Druck, modifizierter Randbehandlung und modifiziertem Quellterm



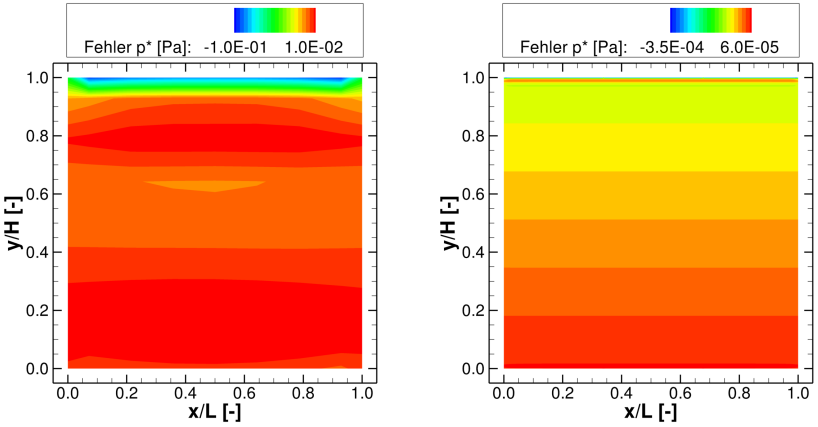
(a) Gitter 8x8 (b) Gitter 128x128

Abbildung 6.7: Gittereinfluss auf die Fehlerverteilung in der adjungierten Geschwindigkeitskomponente u^*



(a) Gitter 8x8 (b) Gitter 128x128

Abbildung 6.8: Gittereinfluss auf die Fehlerverteilung in der adjungierten Geschwindigkeitskomponente v^*



(a) Gitter 8x8 (b) Gitter 128x128

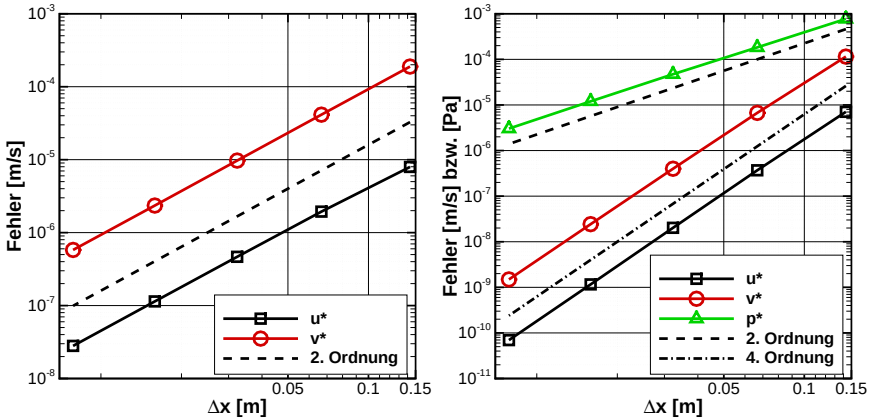
Abbildung 6.9: Gittereinfluss auf die Fehlerverteilung im adjungierten Druck p^*

des Drucks. Wie in Kap. 5.3.4 erläutert, wird dieser in der Regel linear auf den Rand extrapoliert. Im vorliegenden Fall ist der exakte Druckverlauf durch die kubische Funktion

$$p^*(y) = \frac{4\mu\mathrm{Re}}{H^3}y^3 - \frac{\mu\mathrm{Re}}{2} \tag{6.28}$$

gegeben, d.h., der Fehler steigt bei linearer Extrapolation stetig mit y und wird damit an der oberen Gebietsgrenze am größten. Der Fehler skaliert jedoch erwartungsgemäß mit der Gitterschrittweite und reduziert sich auf den beiden hier gezeigten Rechengittern um mehrere Größenordnungen.

Trägt man den mittleren Fehler doppelt logarithmisch über der Gitterschrittweite auf, entspricht die Fehlerordnung des numerischen Verfahrens der Steigung der resultierenden Geraden. Abb. 6.10 zeigt diese Darstellung für den Fall mit und ohne Verwendung der Druckkorrekturgleichung und enthält außerdem Vergleichsgeraden für die Fehlerordnung zwei und vier. Hierbei ist erwähnenswert, dass man bei Verwendung der Druckkorrekturgleichung die Impuls-



(a) Druck vorgegeben

(b) Alle Größen berechnet

Abbildung 6.10: Fehlerordnung des adjungierten Lösers

bilanz von 4. Ordnung genau löst, während der Fehler im Druck mit der Ordnung 2 sinkt. Eine Ursache für dieses unerwartete Verhalten konnte bisher nicht gefunden werden und sollte in weiterführenden Untersuchungen genauer analysiert werden. Bei Vorgabe des exakten Drucks reduziert sich die Fehlerordnung des Verfahrens auf 2 und entspricht dem erwarteten Verlauf.

6.4 Zusammenfassung

Motivation für die im Rahmen dieses Kapitels durchgeführte Verfahrensverifikation waren die umfangreichen Änderungen am primalen Strömungslöser, die für die Implementierung des

kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens notwendig waren.

Als Methode zur Verifikation wurde die *Method of Exact Solution* (MES) ausgewählt, bei der zunächst ein Testfall konstruiert wird, der sich analytisch lösen lässt. Die numerische Lösung muss dann mit abnehmender Orts- und Zeitschrittweite gegen die exakte Lösung konvergieren, sofern die numerische Approximation konsistent und stabil ist und die Implementierung des Verfahrens fehlerfrei durchgeführt wurde.

Die Verifikation wurde in mehreren Stufen mit steigender Komplexität durchgeführt. Zunächst wurde der analytische Druck vorgegeben, um den Einfluss des Druckkorrekturverfahrens auszuschalten. Auf Basis dieser Untersuchungen wurde eine alternative Formulierung für Dirichlet-Ränder implementiert, die eine bessere Erfassung des konvektiven Terms gewährleistet, wenn Fluid über das Randsegment aus dem Rechengebiet hinausströmt. Darüber hinaus konnte mit Hilfe einer detaillierten Analyse der Fehlerterme gezeigt werden, dass Abweichungen zwischen der numerischen und analytischen Lösung nur auf den Approximationsfehler zurückzuführen sind.

Lässt man die Beschränkung des vorgegebenen Druckes fallen und verwendet stattdessen das Druckkorrekturverfahren, lässt sich weiterhin eine sehr gute Übereinstimmung zwischen numerischer und exakter Lösung beobachten. Die größte Abweichung tritt im Randbereich des Rechengebietes auf. Dabei handelt es sich jedoch nicht um einen Implementierungsfehler, sondern um die Auswirkung der Druckextrapolation, die üblicherweise an der Gebietsgrenze verwendet werden muss (siehe hierzu auch Kap. 5.3.4).

Die Differenz zwischen analytischer und numerischer Lösung war in allen Fällen so klein, dass sie in der Regel nur im Fehlerplot sichtbar war. Darüber hinaus skaliert der Fehler mit der Gitterschrittweite, so dass davon ausgegangen werden kann, dass die verwendeten numerischen Schemata für die Lösung der adjungierten Differentialgleichungen geeignet sind und fehlerfrei implementiert wurden.

7 Validierung

Nachdem im ersten Schritt mit Hilfe der Verifikation nachgewiesen wurde, dass das kontinuierliche Adjungiertenverfahren fehlerfrei implementiert wurde, sollen im nun folgenden Kapitel im Rahmen einer detaillierten Validierung die Eigenschaften der Methode analysiert werden. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Fragestellung gerichtet, unter welchen Voraussetzungen die primale und adjungierte Lösung konsistent sind (siehe hierzu auch Kap. 4.4). Um dies zu prüfen, wird üblicherweise der Gradient der Zielfunktion bezüglich der Steuerung mit Hilfe Finiter Differenzen bestimmt. Sofern Konsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung gegeben ist, sollten die Finiten Differenzen mit dem Gradienten übereinstimmen, der sich aus dem adjungierten Strömungsfeld berechnen lässt. Darüber hinaus wird anhand stationärer und instationärer Vergleichsrechnungen mit dem diskreten Adjungiertenverfahren demonstriert, dass der diskrete Ansatz dem kontinuierlichen hinsichtlich der Konsistenz überlegen ist.

Als Testfälle wurden die 2D-Zylinderumströmung mit Rotation des Körpers sowie mit periodischer Absaugung ausgewählt. Das Optimierungsziel ist jeweils die Minimierung des Widerstandes. Beide Fälle weisen einige für die Validierung vorteilhafte Eigenschaften auf. Sie besitzen trotz ihrer geringen geometrischen Komplexität anwendungstechnische Relevanz, da die Zylinderumströmung ein Prototyp für die Ablösung an einem stumpfen Körper ist. Die physikalisch relevanten Aspekte wie der Einfluss von Instationarität und Turbulenz oder die Art der Kontrolle lassen sich getrennt voneinander untersuchen. Trotz allem lässt sich die Strömung mit vergleichsweise geringem numerischen Aufwand berechnen und aufgrund der einfachen Geometrie lassen sich relativ schnell Rechennetze für eine Gitterstudie erzeugen. Dies ermöglicht die Durchführung einer großen Anzahl von Validierungsrechnungen und eine detaillierte Analyse der Eigenschaften des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens, die mit einer komplexeren 3D-Konfiguration mit den derzeitigen Rechenressourcen nicht möglich gewesen wären. Die gewonnenen Erkenntnisse lassen sich jedoch völlig analog auch auf komplexere instationäre turbulente Strömungen im 3D übertragen.

7.1 Rotierender Zylinder

Bei dem ersten Testfall handelt es sich um die zweidimensionale Umströmung eines rotierenden Zylinders. Ziel ist die Minimierung des Widerstandsbeiwerts c_w durch die Optimierung der Zylinderdrehzahl n. Auch wenn das Adjungiertenverfahren seine Vorteile gegenüber dem Finite-Differenzen-Ansatz bei nur einem Anregeparameter nicht ausspielen kann, ist der Testfall sehr gut für einen Vergleich der Verfahren geeignet. Er ist geometrisch einfach, in Abhängigkeit der Drehzahl stationär oder instationär und der Rechenaufwand zur numerischen Lösung der Differentialgleichungen ist vergleichsweise gering. Insbesondere letztere Eigenschaft ist für

die Validierung von essentieller Bedeutung, da nur so eine Gitterstudie in dem dargestellten Umfang möglich war.

Die Simulationen wurden auf einem quadratischen Rechengebiet mit einer Kantenlänge von $50D$ durchgeführt, wobei D der Durchmesser des Zylinders ist und im vorliegenden Fall zu eins gesetzt wurde. Das in Abb. 7.1 gezeigte Rechengitter ist blockstrukturiert und zur Wand hin verfeinert. Auf eine Glättung des Gitters im Bereich der diagonalen Blockgrenzen wurde

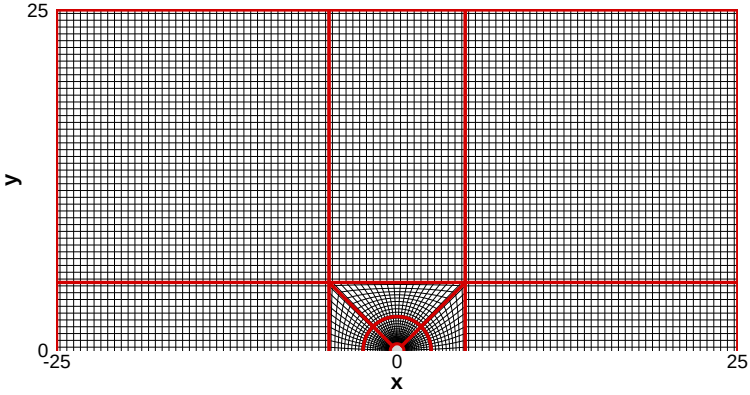


Abbildung 7.1: Obere Hälfte des Rechengitters für die Zylinderumströmung

verzichtet, um die Netzgenerierung im Rahmen der Gitterstudie zu vereinfachen. Insgesamt wurden vier Gitterstufen untersucht, wobei sich ausgehend von Gitterlevel G1 von einer Stufe zur nächsten die Anzahl der Kontrollvolumina in jede Raumrichtung um den Faktor $\sqrt{2}$ erhöht, d.h., die KV-Anzahl verdoppelt sich mit jeder Gitterstufe (siehe Tab. 7.1). Wie aus der Literatur

Gitterstufe	Anzahl der KV
G1	12640
G2	24864
G3	50880
G4	103952

Tabelle 7.1: KV-Anzahl der verwendeten Rechengitter

bekannt ist, bildet sich hinter dem nicht rotierenden Zylinder im Reynoldszahl-Bereich von $\mathrm{Re} = u_\infty D/\nu \approx 40 \ldots 160$ eine Kármánsche Wirbelstraße aus, wobei die Strömung noch laminar bleibt [100]. Daher wurde für die Untersuchungen zur laminaren Strömung eine Reynoldszahl von $\mathrm{Re} = 100$ gewählt. Die Simulationen der turbulenten Strömung wurden bei $\mathrm{Re} = 5000$ durchgeführt.

Am Einströmrand bei $x = -25D$ und im Fernfeld bei $y = \pm 25D$ wurde für das primale System gemäß Gl. 2.16 die Geschwindigkeit u_∞ vorgegeben, woraus nach Gl. 4.79 $u^* = 0\,\mathrm{m/s}$ für das adjungierte System folgt. Am Ausströmrand bei $x = 25D$ kam die natürliche Randbedingung (siehe Gl. 2.18 bzw. 4.79) zum Einsatz und als Konvektionsschema wurde das TVD-Verfahren ausgewählt. Die Starrkörperrotation des Zylinders wurde über die Vorgabe der Wandgeschwindigkeit realisiert:

$$u_i = (-2\pi n y, 2\pi n x)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \tag{7.1}$$

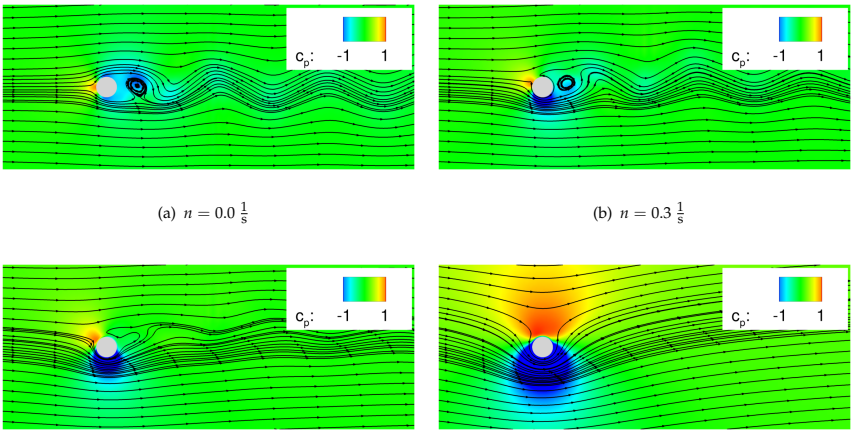
Darin ist n die Drehzahl, welche im Folgenden positiv sei, so dass sich eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn ergibt. Da die Minimierung des Widerstands im hier betrachteten Fall das Optimierungsziel darstellt und die Kontrolloberfläche mit der Zylinderwand übereinstimmt, folgt für die adjungierte Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche

$$u_i^* = (-1, 0)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \tag{7.2}$$

Als Turbulenzmodell wurde das SST-k-ω-Modell von Menter verwendet (Anh. A). Die Festlegung des Konvergenzkriteriums sowie die Wahl der Schrittweite für die Bestimmung der Finiten Differenzen ist fallabhängig und wird in den jeweiligen Kapiteln spezifiziert.

Vor der Analyse der Verfahren soll zunächst kurz auf die physikalischen Zusammenhänge der Umströmung des rotierenden Zylinders eingegangen werden. Wie aus der Literatur bekannt ist, wird der Strömung durch die Rotation des Zylinders eine Zirkulation aufgeprägt, die je nach Rotationsrichtung einen Auf- oder Abtrieb erzeugt. Dieses Phänomen wird als Magnus-Effekt bezeichnet. Im vorliegenden Fall erfolgt die Rotation gegen den Uhrzeigersinn, d.h., es wird ein Abtrieb generiert. Die Rotationsgeschwindigkeit bzw. Drehzahl des Zylinders hat, wie man anhand von Abb. 7.2 erkennt, einen signifikanten Einfluss auf die Formation der Kármánschen Wirbelstraße. Die Konturplots zeigen die c_p-Verteilung sowie Stromlinien bei unterschiedlichen Zylinder-Drehzahlen auf dem Gitter G3. Im Vergleich zur natürlichen Strömung ($n = 0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$) wird die Wirbelstraße mit Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit immer weiter gedämpft und aus der Symmetrieachse $y = 0\,\mathrm{m}$ verlagert. Ab einer Drehzahl von $n \approx 0.6\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ wird die Ausbildung der Wirbelstraße komplett unterdrückt und die Strömung wird stationär. Diese Beobachtungen decken sich mit aus der Literatur bekannten Ergebnissen (z.B. [55, 64]). Da die turbulente Strömung bei $\mathrm{Re} = 5000$ ein völlig analoges Verhalten aufweist, wurde an dieser Stelle auf eine Darstellung der Konturplots verzichtet.

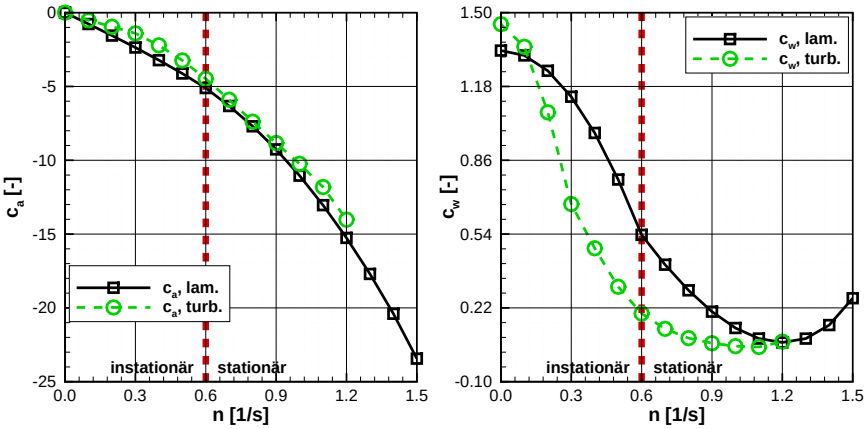
Abb. 7.3 zeigt den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit der Drehzahl auf dem Gitter G3. Der Auftriebsbeiwert ist aufgrund der Rotation gegen den Uhrzeigersinn negativ und fällt monoton mit wachsender Drehzahl. Der laminare und der turbulente Fall verhalten sich diesbezüglich sehr ähnlich, da der Auftrieb von der Zirkulation dominiert wird, die durch die Rotation des Zylinders erzeugt wird. Beim Widerstandsbeiwert gibt es nur eine qualitative Ähnlichkeit, da dieser vom strömungsphysikalischen Zustand des Nachlaufs und damit auch von der Turbulenz beeinflusst wird. Ausgehend von der natürlichen Strömung sinkt der Widerstand mit Einsetzen der Rotation des Zylinders. Bei einer Drehzahl von $n \approx 0.6\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ wird die Strömung sowohl im laminaren als auch im turbulenten Fall im statistischen Mittel stationär, wobei der Widerstand mit steigender Drehzahl zunächst weiter sinkt. Erhöht man die Rotationsgeschwindigkeit weiter, erreicht man schließlich ein Widerstandsminimum.



(a) $n = 0.0\ \frac{1}{s}$ (b) $n = 0.3\ \frac{1}{s}$

(c) $n = 0.55\ \frac{1}{s}$ (d) $n = 1.13\ \frac{1}{s}$

Abbildung 7.2: Momentanaufnahmen des Druckfelds sowie Stromlinien der primalen Lösung für verschiedene Drehzahlen auf Gitterlevel G3



(a) Auftriebsbeiwert (b) Widerstandsbeiwert

Abbildung 7.3: Integrale Beiwerte der primalen Lösung in Abhängigkeit der Drehzahl auf Gitterlevel G3

Anschließend steigt der c_w-Wert wieder.

Im Folgenden sollen nun die Konsistenzeigenschaften des kontinuierlichen Verfahrens de-

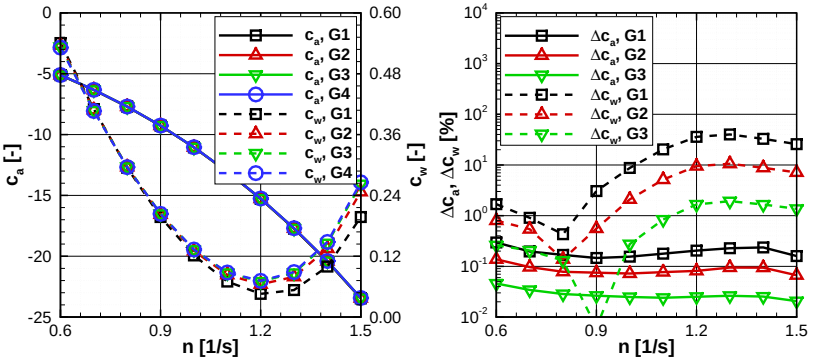
tailliert analysiert werden. Dazu wird der stationäre und der instationäre Teilbereich jeweils getrennt voneinander betrachtet.

7.1.1 Primale Lösung

Stationäre Umströmung

Da bei stationärer Strömung, also im Drehzahlbereich $n > 0.6\,\frac{1}{s}$, ein Auskonvergieren des Gleichungssystems bis auf Maschinengenauigkeit problemlos möglich ist, wird die Genauigkeit der numerischen Lösung im Wesentlichen von der räumlichen Auflösung des Rechengitters beeinflusst.

Abb. 7.4a zeigt die Ergebnisse einer Gitterstudie für die laminare Strömung in dem genannten Drehzahlbereich. Dabei wird deutlich, dass der Auftriebsbeiwert auf allen untersuchten Gittern



(a) Auftriebs- und Widerstandsbeiwert (b) Relativer Fehler

Abbildung 7.4: Gitterabhängigkeit der integralen Beiwerte der stationären primalen Lösung im laminaren Fall (Re = 100)

praktisch identisch ist. Offensichtlich reicht auch das grobe Gitter bereits aus, um den Effekt der erhöhten Zirkulation hinreichend genau zu erfassen. Der Widerstandsbeiwert weist dagegen eine recht deutliche Abhängigkeit von der Gitterauflösung auf, da sich die Wiedergabe des Nachlaufs auf feineren Gittern verbessert. Bei Drehzahlen $n > 0.9\,\frac{1}{s}$ führt eine Gitterverfeinerung zu einem sichtbaren Anstieg des Widerstandsbeiwerts. Der qualitative Verlauf und die Lage des Minimums bleiben jedoch nahezu unverändert.

Eine genauere Beurteilung des Gittereinflusses ist anhand von Abb. 7.4b möglich, in der die Änderung der Beiwerte in Relation zur Lösung auf Gitterlevel G4 in Form der normierten Differenz

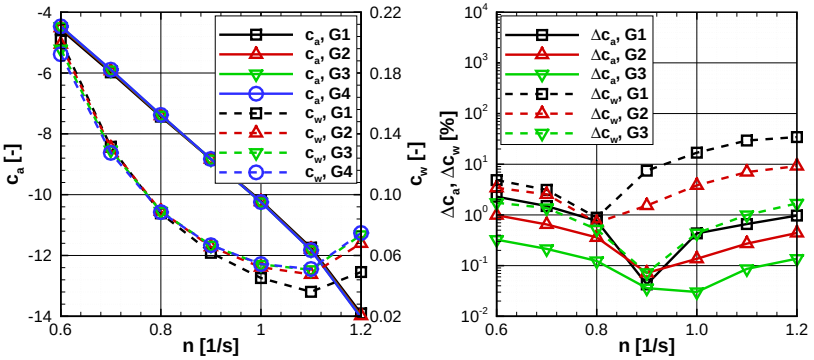
$$\Delta c_a = |(c_a - c_{a,G4})/c_{a,G4}| \tag{7.3}$$

bzw.

$$\Delta c_w = |(c_w - c_{w,G4})/c_{w,G4}| \tag{7.4}$$

über der Drehzahl n aufgetragen ist. Man erkennt, dass die relative Änderung des Auftriebsbeiwerts Δc_a schon auf dem gröbsten Gitter nicht größer als 0.3% wird und bei Gitterstufe G3 auf einen Maximalwert von 0.005% absinkt. Bei der relativen Änderung des Widerstandsbeiwerts ist zu beachten, dass sich das Vorzeichen der Differenz in Gl. 7.4 zwischen $n = 0.8\,\frac{1}{s}$ und $n = 0.9\,\frac{1}{s}$ umdreht. Da Δc_w in Gl. 7.4 jedoch mit dem Betrag der Differenz gebildet wird, entsteht in Abb. 7.4b im Bereich des Vorzeichenwechsels ein Minimum. Verglichen mit der relativen Änderung des Auftriebsbeiwerts ist Δc_w insgesamt deutlich größer. Auf Gitter G3 liegt die Widerstandsänderung mit maximal 2% jedoch auf einem so niedrigen Niveau, dass sie nur noch im Differenzplot zu sehen ist. In Abb. 7.4a sind die Widerstandsverläufe auf Gitter G3 und G4 praktisch deckungsgleich. Man kann daher resümieren, dass die primale Lösung für den stationären Teilbereich der laminaren Strömung auf Gitterlevel G3 eine hinreichend gute Gitterkonvergenz aufweist.

Ein sehr ähnliches Bild ergibt sich bei der Auswertung des turbulenten Falls (siehe Abb. 7.5). Auch hier zeigt der Auftriebsbeiwert nur eine geringere Gitterabhängigkeit. Die relative Ände-



(a) Auftriebs- und Widerstandsbeiwert (b) Relativer Fehler

Abbildung 7.5: Gitterabhängigkeit der integralen Beiwerte der stationären primalen Lösung im turbulenten Fall (Re = 5000)

rung zur Gitterstufe G4 Δc_a beträgt auf Gitter G1 2% und verringert sich auf Gitter G3 um etwa zwei Größenordnungen auf ca. 0.03%. Wie beim laminaren Fall ist der Widerstandsbeiwert deutlich stärker von der räumlichen Auflösung abhängig. Vergleicht man die relativen Änderungen Δc_a und Δc_w stellt man fest, dass diese im turbulenten Fall im Mittel etwa eine halbe Größenordnung höher sind als im laminaren Fall. Dieser Unterschied liegt im erwarteten Bereich, da die turbulente Simulation ein feineres Rechennetz erfordert und die Gitterkonvergenz daher erst bei feinerer räumlicher Auflösung eintritt. Insgesamt kann man jedoch auch hier von einer hinreichend guten Gitterkonvergenz für den stationären Teilbereich auf Gitterlevel G3

sprechen.

Instationäre Umströmung

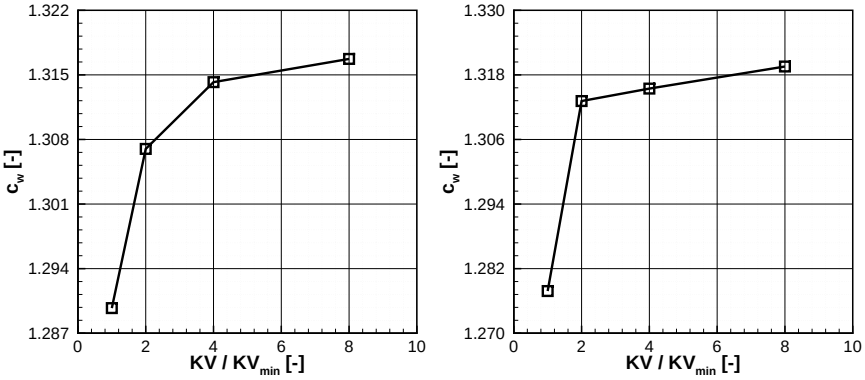
Bei den Untersuchungen zum instationären Bereich der Zylinderumströmung spielt neben der Gitterauflösung auch die Wahl der Zeitschrittweite eine Rolle für die Genauigkeit, mit der das primale System gelöst wird. Erschwerend kommt hinzu, dass aufgrund des vollimpliziten Zeitintegrationsverfahrens auf jedem Zeitschritt ein linearisiertes, gekoppeltes Gleichungssystem gelöst werden muss. Im Gegensatz zum stationären Strömungsfall, bei dem ein Auskonvergieren des Gleichungssystems bis auf Maschinengenauigkeit problemlos möglich ist, ist man bei instationären Simulationen aufgrund begrenzter Computerressourcen in der Regel dazu gezwungen, einen Kompromiss bezüglich der Genauigkeit der Lösung und des dafür benötigten Zeitaufwands einzugehen. Bei ingenieurstechnischen Anwendungen ist es gängige Praxis, das Residuum auf jedem Zeitschritt um ca. zwei bis drei Größenordnungen zu reduzieren (siehe z.B. [66]). Ferziger und Perić geben bei instationären Simulationen mit kleinem Zeitschritt sogar eine Residuenreduktion von einer Größenordnung als ausreichend an [29]. In der Regel reicht diese Genauigkeit für die meisten Anwendungen aus, da sich z.B. die aerodynamischen Beiwerte danach nur noch wenig ändern. Für den hier angestrebten Vergleich zwischen Finiten Differenzen und adjungiertenbasierten Gradienten ist jedoch eine höhere Genauigkeit notwendig. Darüber hinaus ist bei der Lösung des adjungierten Systems zu berücksichtigen, dass bei dessen Herleitung die exakte Erfüllung der primalen Erhaltungsgleichungen vorausgesetzt wird (siehe z.B. 4.2), so dass das primale System unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Ressourcen möglichst genau gelöst werden muss[1].

Da es aus Zeitgründen nicht möglich war, die drei Einflussfaktoren Gitterauflösung, Zeitschrittweite und Konvergenz des Gleichungssystems unabhängig voneinander über den gesamten Drehzahlbereich von $n = 0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ bis $n = 0.5\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ zu variieren, wurde ausgehend von einer Basiskonfiguration (Gitter G1, Zeitschritt $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$) für die Drehzahl $n = 0.1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ eine Zeitschrittstudie bei konstanter Gitterauflösung sowie eine Gitterstudie bei konstanter Zeitschrittweite durchgeführt. Außerdem wurde anhand der Basiskonfiguration untersucht, welchen Einfluss die Konvergenz auf die primale Lösung hat. Bei allen Untersuchungen wurde der transiente Anfahrvorgang vernachlässigt.

Abb. 7.6 zeigt die Abhängigkeit der primalen Lösung von der Gitterauflösung. Darin ist der Widerstandsbeiwert über der Anzahl der Kontrollvolumina aufgetragen, wobei diese mit der KV-Anzahl des gröbsten Gitters normiert ist. Die größte Änderung des Widerstandes tritt beim ersten Schritt der Gitterverfeinerung auf. Mit zunehmender räumlicher Auflösung nähert sich der Widerstand im laminaren Fall asymptotisch einem gitterunabhängigen Wert. Bei der turbulenten Strömung ist das asymptotische Verhalten geringer ausgeprägt, wobei die Änderung des Widerstandes ab der zweiten Gitterstufe jedoch sehr klein ist. Wie im stationären Fall kann man daher auch für die instationäre Strömung von hinreichend guter Gitterkonvergenz auf Gitterlevel G3 sprechen.

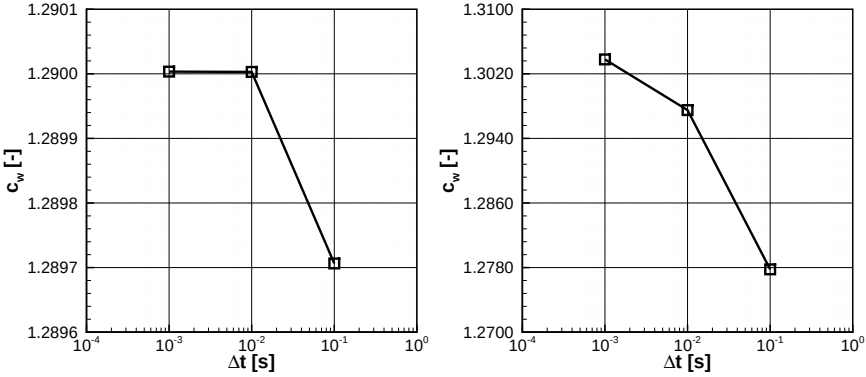
Der in Abb. 7.7 dargestellte Einfluss der Zeitschrittweite auf die primale Lösung ist im Vergleich zur räumlichen Auflösung deutlich weniger ausgeprägt. Dies trifft insbesondere auf die lami-

[1] Dies gilt natürlich in gleicher Weise auch für den stationären Fall.



(a) Laminare Strömung (Re = 100) (b) Turbulente Strömung (Re = 5000)

Abbildung 7.6: Gitterabhängigkeit der instationären primalen Lösung für $n = 0.1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$



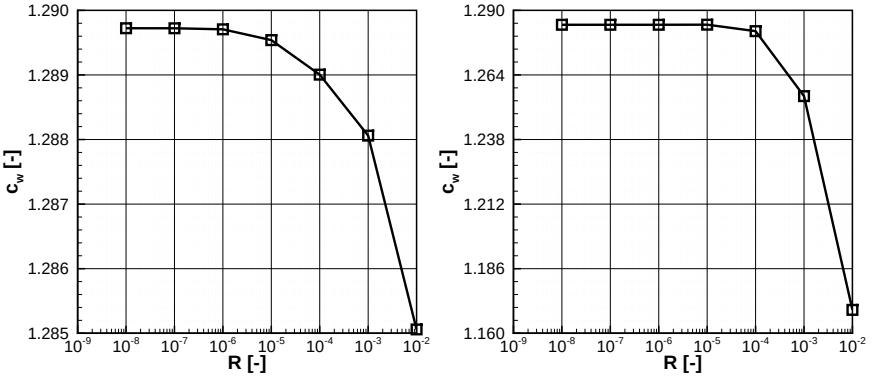
(a) Laminare Strömung (Re = 100) (b) Turbulente Strömung (Re = 5000)

Abbildung 7.7: Zeitschrittabhängigkeit der instationären primalen Lösung für $n = 0.1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ auf Gitter G1

nare Strömung zu, die im untersuchten Bereich praktisch unabhängig vom Zeitschritt ist. Die turbulente Strömung zeigt dagegen zumindest eine leichte Änderung des Widerstandsbeiwerts mit Verkleinerung der Zeitschrittweite. Dieser Unterschied lässt sich vermutlich damit erklären, dass die Strouhalzahl des Wirbelabwurfs von St ≈ 0.16 im laminaren Fall auf St ≈ 0.22 im turbulenten Fall steigt. Damit sinkt die zeitliche Auflösung des Wirbelabwurfs beim Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung von ca. 60 auf 45 Zeitschritte pro Periode. Mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ erreicht man sowohl für die laminare als auch für die turbulente Strömung eine nahezu zeitschrittunabhängige Lösung, so dass dieser Wert den besten Kompromiss

aus benötigter Rechenzeit und erreichbarer Genauigkeit darstellt.

Abb. 7.8 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwerts von der Konvergenz des Gleichungssystems. Darin ist R die Abnahme des Residuums am Ende des Zeitschritts in Relation zum



(a) Laminare Strömung (Re = 100)

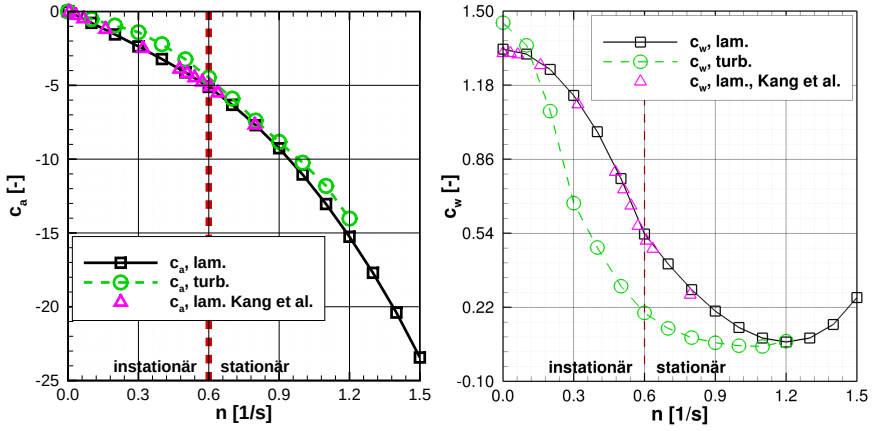
(b) Turbulente Strömung (Re = 5000)

Abbildung 7.8: Abhängigkeit der instationären primalen Lösung von der Konvergenz des Gleichungssystems

Initialresiduum aus der ersten Iteration des Zeitschritts, also $R = Residuum_{final} / Residuum_{initial}$. Man erkennt im laminaren Fall, dass der Widerstandsbeiwert der primalen Lösung im untersuchten Bereich praktisch unabhängig davon ist, wie gut das primale System auskonvergiert ist, d.h., eine Reduzierung des Residuums um mehr als zwei Größenordnungen verbessert die Genauigkeit des Widerstandes der primalen Lösung nicht mehr signifikant. Für die turbulente Strömung nähert sich der Widerstandsbeiwert hingegen erst bei einer Abnahme des Residuums um mindestens vier Größenordnungen einem konstanten Wert. Man liegt in diesem Fall also deutlich über dem in der Praxis gängigen Wert von $R = 2 - 3$. Für alle weiteren instationären Simulationen des primalen Systems wurde aus diesem Grund, sofern nicht anders erwähnt, eine Abnahme des Residuums um fünf Größenordnungen als Konvergenzkriterium festgelegt.

Gesamter Drehzahlbereich

Abb. 7.9 zeigt die Ergebnisse für den gesamten Drehzahlbereich, die auf Gitter G3 mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ erzielt wurden. Der Widerstandsbeiwert der natürlichen laminaren Strömung liegt mit $c_w = 1.34$ im aus der Literatur bekannten Wertebereich von $c_w = 1.32 \cdots 1.36$ [58, 64, 116]. Im turbulenten Fall beträgt der Widerstandsbeiwert der natürlichen Strömung $c_w = 1.45$ und ist damit deutlich höher als der im Experiment ermittelte Wert von $c_w = 1.24$ [12]. Diese Abweichung liegt im erwarteten Bereich, da die URANS-Lösung für stumpfe Körper in der Regel einen zu hohen Widerstand vorhersagt [114], wobei hier zusätzlich ein starker Einfluss des Turbulenzmodells und der spannweitigen Ausdehnung des Rechengebiets bei 3D-Simulationen beobachtet wurde [109].



(a) Auftriebsbeiwert

(b) Widerstandsbeiwert

Abbildung 7.9: Integrale Beiwerte der primalen Lösung für $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ auf Gitterlevel G3

Das Widerstandsminimum beträgt im laminaren Fall $c_w = 0.07$ und wird bei einer Drehzahl von $n = 1.2\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ erreicht. Sowohl der Widerstands- als auch der Auftriebsverlauf stimmen im Bereich kleiner Drehzahlen sehr gut mit Simulationsergebnissen von Kang et al. [64] überein. Für große Drehzahlen konnten keine belastbaren Ergebnisse in der Literatur gefunden werden. So gibt es zwar eine Veröffentlichung von Stojković et al. [116] zur laminaren Umströmung rotierender Zylinder bei hohen Drehzahlen, diese beschränkt sich jedoch für den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Drehzahlbereich hauptsächlich auf eine topologische Auswertung der Strömung. Die einzigen dem Autor bekannten Vergleichsdaten zum Widerstandsverlauf stammen von Rumpfkeil et al. [96]. Diese zeigen jedoch unphysikalische Oszillationen, die möglicherweise durch ein ungünstig definiertes Zeitfenster für die Auswertung der Daten sowie eine unzureichende Gitter- und Zeitschrittweite verursacht wurden. Der qualitative Verlauf ähnelt jedoch stark den hier gezeigten Simulationsergebnissen. Bei turbulenter Umströmung wird das Widerstandsminimum von $c_w = 0.05$ bei einer Drehzahl von $n = 1.1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ erreicht. Vergleichsdaten aus der Literatur sind dem Autor für diesen Fall nicht bekannt.

7.1.2 Adjungierte Lösung des kontinuierlichen Verfahrens

Stationäre Umströmung

Für den Vergleich des adjungiertenbasierten Gradienten mit Finiten Differenzen ist es von zentraler Bedeutung, letztere mit möglichst hoher Genauigkeit zu bestimmen. Aus der Literatur ist bekannt, dass sich der Gesamtfehler einer Differenzenapproximation aus dem Abbruch- und dem Rundungsfehler zusammensetzt [73]. Mit sinkender Schrittweite nimmt der Abbruchfehler immer weiter ab, bis schließlich der Rundungsfehler überwiegt und zu einem starken

Anstieg des Gesamtfehlers führt. Um eine möglichst genaue Approximation des Gradienten zu erhalten, müsste daher für jede Drehzahl n durch eine Vielzahl von Simulationen die optimale Schrittweite Δn für die Finite-Differenzen-Approximation gesucht werden. Es ist offensichtlich, dass dieses Vorgehen insbesondere für eine instationäre Strömung zu aufwändig ist. Darüber hinaus wird die Genauigkeit, mit der sich eine Finite Differenz bestimmen lässt, auch davon beeinflusst, wie gut die Strömungslösung auskonvergiert ist [56]. Auch dies ist insbesondere für eine instationäre Strömung problematisch, da hier aufgrund mangelnder Computerressourcen in der Regel keine Konvergenz bis Maschinengenauigkeit möglich ist.

Im stationären Fall wurde die optimale Schrittweite im Rahmen von Voruntersuchungen gesucht, die auf dem gröbsten Gitter mit einer Drehzahl von $n = 1.0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ durchgeführt wurden. Wie man anhand von Abb. 7.10 erkennt, ist die Finite Differenz näherungsweise konstant, wenn das Inkrement im Bereich $\Delta n = (1 \times 10^{-5} \cdots 1 \times 10^{-10})\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ liegt. Bei größeren Werten

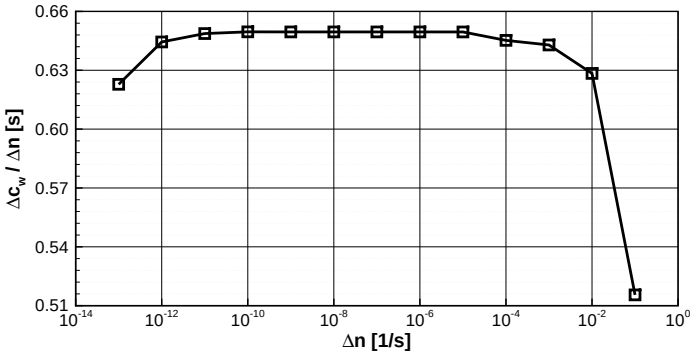
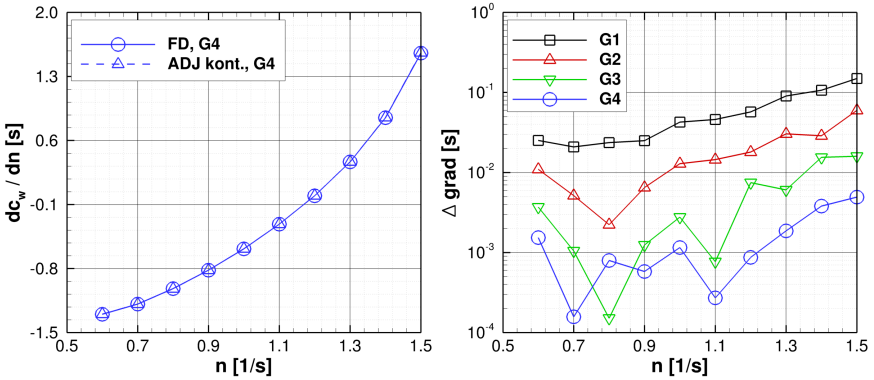


Abbildung 7.10: Abhängigkeit der Finite-Differenzen-Approximation vom Inkrement Δn an der Stelle $n = 1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ auf Gitter G1

wird die Approximation aufgrund des Diskretisierungsfehlers zunehmend ungenauer und bei kleineren Δn macht sich der Einfluss des Rundungsfehlers negativ bemerkbar. Für die Berechnung der Finiten Differenzen für die stationäre Strömung wurde daher eine Schrittweite von $\Delta n = 1 \times 10^{-8}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ gewählt.

Abb. 7.11 zeigt für den stationären Strömungsfall einen Vergleich der Gradienten, die mit Finiten Differenzen und dem Adjungiertenverfahren auf den unterschiedlichen Gittern berechnet wurden. Die adjungierte Lösung wurde dabei (wie auch in allen weiteren stationären Simulationen) bis auf Maschinengenauigkeit auskonvergiert. Sowohl die Finite-Differenzen-Approximation als auch die Ableitung aus dem Adjungiertenansatz zeigt eine Gitterabhängigkeit, die etwa in der gleichen Größenordnung liegt wie die der primalen Lösung. Die Unterschiede zwischen Gitterlevel G3 und G4 sind marginal, so dass auch hier von Gitterkonvergenz auf Gitter G3 gesprochen werden kann. Mit zunehmender Gitterkonvergenz sinkt auch die Abweichung zwischen den beiden Methoden zur Gradientenbestimmung, wie man anhand der Differenz $\Delta\, grad = \left| grad_{adj} - grad_{fd} \right|$ in Abb. 7.11 sieht. Diese verringert sich von maximal 10% auf dem



(a) Gradient auf Basis Finiter Differenzen und des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens

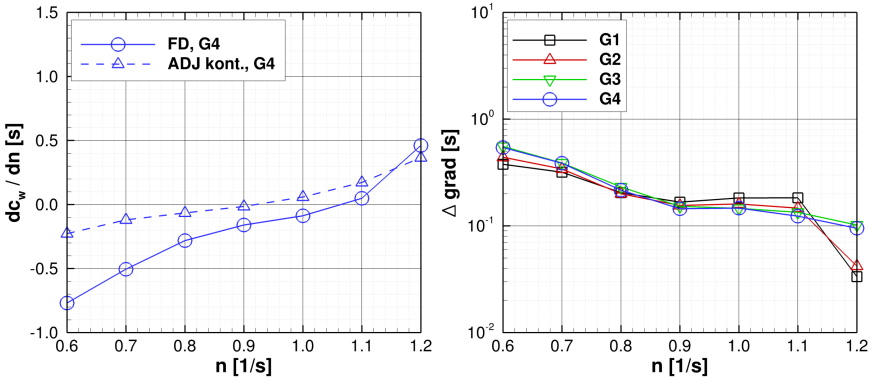
(b) Differenz der Gradienten

Abbildung 7.11: Gittereinfluss auf die Genauigkeit des mit dem kontinuierlichen Adjungiertenverfahren berechneten Gradienten für den laminaren stationären Fall (Re $= 100$, $n \geq 0.6\,\frac{1}{s}$)

gröbsten Gitter auf unter 1% auf Gitterlevel G3 und G4. Die Abweichungen werden also offensichtlich vom Approximationsfehler dominiert und sind Ausdruck einer Inkonsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung. Zwar sind das primale und das adjungierte System auf Ebene der PDGL für den laminaren Fall konsistent, da bei der Herleitung der Gleichungen keine Annahmen oder Vereinfachungen gemacht wurden. Durch die Diskretisierung wird jedoch in beiden Systemen ein Fehler induziert [39], so dass die numerische Lösung im Wesentlichen als Summe aus exakter Lösung und Diskretisierungsfehler interpretiert werden kann[2]. Da dieser Fehler in der primalen und adjungierten Lösung in der Regel nicht identisch ist, wird die Lösung wie im hier gezeigten Fall inkonsistent. Durch sukzessive Gitterverfeinerung reduziert sich der Abbruchfehler proportional zur Fehlerordnung des numerischen Verfahrens und es kommt zu einer schrittweisen Verbesserung der Konsistenz, so dass auf einem hinreichend feinen Gitter die Finiten Differenzen gut mit dem Gradienten aus dem Adjungiertenverfahren übereinstimmen.

In Abb. 7.12 ist der Vergleich der Gradienten für den stationären turbulenten Strömungsfall bei einer Reynoldszahl von Re $= 5000$ dargestellt. Die Gitterabhängigkeit der berechneten Gradienten ist im Vergleich zum laminaren Fall etwas stärker ausgeprägt, so dass erst eine Gitterstufe später eine vergleichbare Gitterkonvergenz erreicht werden kann. Auffällig ist jedoch, dass die Abweichung zwischen den Finiten Differenzen und dem Gradienten aus dem Adjungiertenansatz auf allen Gittern bis zu 80% beträgt. Diese Diskrepanz ist bei kleinen n am größten und reduziert sich mit steigender Drehzahl, konvergiert jedoch mit zunehmender Gitterverfeinerung auf einen von null verschiedenen Wert. Im turbulenten Fall lässt sich also im Gegensatz zur laminaren Strömung auch auf einem beliebig feinen Gitter keine Konsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung herbeiführen.

[2] Der Rundungsfehler sei an dieser Stelle zu vernachlässigen.



(a) Gradient auf Basis Finiter Differenzen und des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens

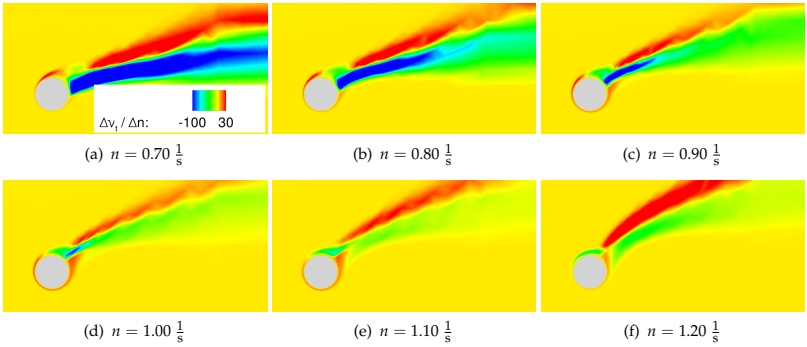
(b) Differenz der Gradienten

Abbildung 7.12: Gittereinfluss auf die Genauigkeit des mit dem kontinuierlichen Adjungiertenverfahren berechneten Gradienten für den turbulenten stationären Fall (Re $= 5000$, $n \geq 0.6\,\frac{1}{s}$)

Die Ursache für dieses Verhalten ist der *Frozen-Turbulence*-Ansatz, welcher die Abhängigkeit der Wirbelviskosität von den Anregeparametern, in diesem Fall also von der Drehzahl des Zylinders, im adjungierten System vernachlässigt. Der Konsistenzfehler wird demnach für den turbulenten Strömungsfall aufgrund einer falschen Modellannahme bereits auf der Ebene der PDGLn eingeführt und kann dementsprechend nicht durch eine Gitterverfeinerung reduziert werden.

In welchem Umfang sich dieser turbulenzmodellinduzierte Konsistenzfehler auf die Qualität der Lösung auswirkt, ist stark fallabhängig [23, 67]. Eine Ursache hierfür ist vermutlich, dass das Turbulenzfeld bei einigen Anwendungen nur geringfügig von der Variation der Kontrollparameter abhängig ist. So geht es beispielsweise bei der Formoptimierung häufig um vergleichsweise kleine Geometrieänderungen, die die Strömungstopologie nicht grundlegend ändern. Im Gegensatz dazu geht die in dieser Arbeit angewendete aktive Strömungsbeeinflussung sehr häufig mit einer starken Änderung des Strömungszustandes einher, die auch einen signifikanten Einfluss auf das Turbulenzfeld hat. Als Beispiel sei hier die Verhinderung der Strömungsablösung auf der Saugseite eines Flügelprofils in Kap. 8.2 genannt.

Auch im hier betrachteten Fall der turbulenten Umströmung eines rotierenden Zylinders hat die Variation des Anregeparameters einen starken Einfluss auf die Turbulenz. Man erkennt dies deutlich anhand der in Abb. 7.13 gezeigten Momentanaufnahmen des Gradienten der Wirbelviskosität $\Delta\nu_t/\Delta n$ der insbesondere im Bereich kleiner Drehzahlen sehr groß ist und mit steigendem n abnimmt. Bezogen auf den *Frozen-Turbulence*-Ansatz bedeutet dies, dass die Modellannahme vor allem bei kleinen Drehzahlen ungünstig ist und einen signifikanten Konsistenzfehler nach sich ziehen sollte, was sich letztlich beim Vergleich der Gradienten in Abb. 7.12 bestätigt.



(a) $n = 0.70\ \frac{1}{s}$ (b) $n = 0.80\ \frac{1}{s}$ (c) $n = 0.90\ \frac{1}{s}$

(d) $n = 1.00\ \frac{1}{s}$ (e) $n = 1.10\ \frac{1}{s}$ (f) $n = 1.20\ \frac{1}{s}$

Abbildung 7.13: Konturplots der Sensitivität der Wirbelviskosität $\Delta\nu_t / \Delta n$ für verschiedene Drehzahlen auf Gitterlevel G1

Instationäre Umströmung

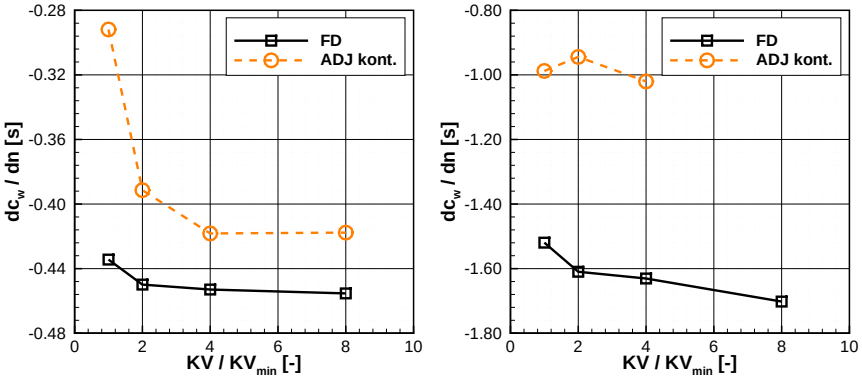
Die Wahl eines geeigneten Inkrements für die Finite-Differenzen-Berechnung im instationären Strömungsfall gestaltete sich deutlich schwieriger, da hier auch berücksichtigt werden muss, wie weit die Strömungslösung auskonvergiert ist [56].

Um eine genaue Approximation des FD-Gradienten zu erhalten, müsste man das Gleichungssystem auf jedem Zeitschritt möglichst bis auf Maschinengenauigkeit auskonvergieren lassen. Da dies aus Zeitgründen nicht möglich war, musste die Genauigkeit der FD-Approximation für die instationären Simulationen reduziert werden, indem die Schrittweite auf $\Delta n \approx 1 \times 10^{-3}\ \frac{1}{s}$ erhöht wurde. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass der FD-basierte Gradient auch mit Hilfe des im Vorwärtsmodus automatisch differenzierten Strömungslösers berechnet werden könnte. Dieser stand jedoch zum Zeitpunkt der Untersuchungen nicht zur Verfügung, so dass die Finiten Differenzen auf Basis des primalen Strömungslösers erzeugt werden mussten.

Bei der Untersuchung zum Gitter- und Zeitschritteinfluss auf die instationäre Lösung des kontinuierlichen Adjungiertensystems wurde analog zum primalen System verfahren, d.h., es wurde ausgehend von einer Basiskonfiguration (Gitter G1, Zeitschritt $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$, Drehzahl $n = 0.1\ \frac{1}{s}$) jeweils nur der Zeitschritt oder die Gitterauflösung variiert. Als Konvergenzkriterium für die adjungierte Lösung wurde auf jedem Zeitschritt eine Abnahme des Residuums um fünf Größenordnungen festgelegt.

Bezüglich des Gittereinflusses weisen die Finiten Differenzen im laminaren Fall ein ähnliches Verhalten auf wie der Widerstandsbeiwert des primalen Systems (siehe Abb. 7.14a). Bereits im zweiten Schritt der Gitterverfeinerung liegt die Änderung der Finiten Differenz unter 1% und ist damit vernachlässigbar klein. Der aus dem adjungierten Strömungsfeld berechnete Gradient ist zwar stärker von der Gitterauflösung abhängig, zeigt aber ein ähnliches Konvergenzverhalten wie die Finite Differenz und ändert sich auf Gitter G4 praktisch nicht mehr.

Für den in Abb. 7.14b dargestellten turbulenten Strömungsfall ist keine eindeutige Gitterkonvergenz der Finiten Differenz zu erkennen, wobei der Gittereinfluss insgesamt relativ gering



(a) Laminare Strömung (Re = 100)

(b) Turbulente Strömung (Re = 5000)

Abbildung 7.14: Gitterabhängigkeit des aus der instationären adjungierten Lösung berechneten Gradienten für $n = 0.1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$

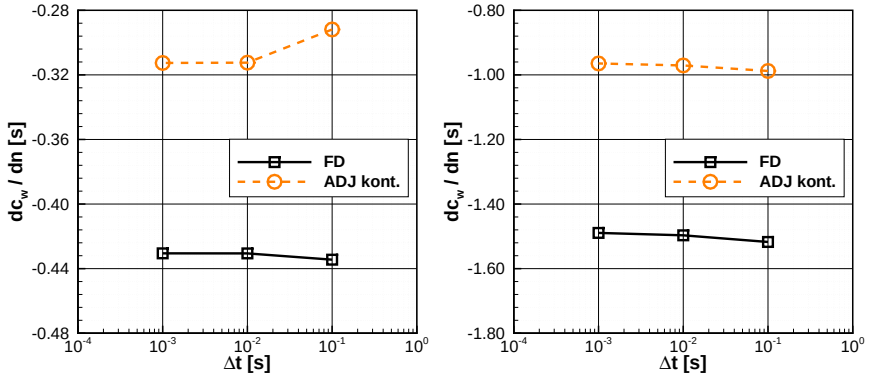
ist. Im Rahmen der Arbeit konnte nicht abschließend geklärt werden, ob dieses Verhalten zum Teil auf die mangelnde Genauigkeit der FD-Approximation zurückzuführen ist. Es wäre auch denkbar, dass die Wandbehandlung der turbulenten Frequenz nach Gl. A.21 oder die Limitierung durch die Schwarzsche Ungleichung [102] hierbei eine Rolle spielen. Da für Gitter G4 im turbulenten Fall keine stabile Lösung der Adjungierten möglich war und für die laminare Strömung auf Gitter G3 eine hinreichend gute Gitterkonvergenz erzielt werden konnte, wurden die instationären Simulationen für alle weiteren Drehzahlen auf Gitter G3 durchgeführt.

Die Abhängigkeit der Gradientenberechnung vom Zeitschritt ist relativ gering (siehe Abb. 7.15). Dies trifft sowohl auf die Finiten Differenzen als auch auf die adjungiertenbasierte Berechnung des Gradienten zu. Wie bei der primalen Lösung stellt sich bereits bei einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ sowohl im laminaren als auch im turbulenten Fall eine zeitschrittunabhängige Lösung ein.

Gesamter Drehzahlbereich

Erwartungsgemäß konnte bei den bisher gezeigten Untersuchungen zur Zeitschritt- und Gitterabhängigkeit der instationären Strömung keine Übereinstimmung der Gradienten beobachtet werden, da ausgehend von der Basiskonfiguration nur jeweils eine der beiden Einflussgrößen variiert wurde. Aus den bisher vorgestellten Simulationsergebnissen lässt sich jedoch schlussfolgern, dass Gitterstufe G3 und ein Zeitschritt von $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ für eine hinreichend genaue Wiedergabe des primalen und adjungierten Systems ausreichend sein sollte.

Führt man instationäre Simulationen auf Gitterstufe G3 mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ für die verbleibenden Drehzahlen durch und berechnet die Gradienten aus dem adjungierten Strömungsfeld sowie mit Hilfe Finiter Differenzen, ergibt sich der in Abb. 7.16 gezeigte Zusam-

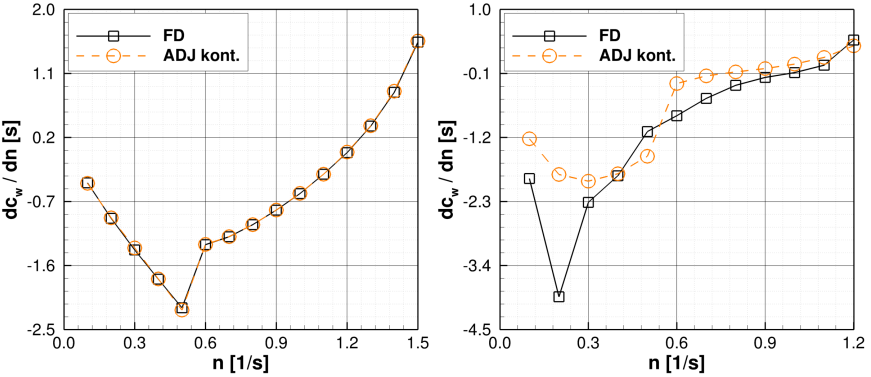


(a) Laminare Strömung (Re = 100)

(b) Turbulente Strömung (Re = 5000)

Abbildung 7.15: Zeitschrittabhängigkeit des aus der instationären adjungierten Lösung berechneten Gradienten für $n = 0.1\,\frac{1}{s}$ auf Gitter G1

menhang. Aufgrund der Gitter- und Zeitschrittkonvergenz sind die primale und adjungierte



(a) Laminare Strömung (Re = 100)

(b) Turbulente Strömung (Re = 5000)

Abbildung 7.16: Vergleich des mit dem kontinuierlichen Adjungiertenverfahren berechneten Gradienten mit Finiten Differenzen für den gesamten Drehzahlbereich auf Gitter G3

Lösung im laminaren Fall konsistent und man erhält für alle Drehzahlen eine hervorragende Übereinstimmung der Gradienten. Auch der Übergang von instationärer zu stationärer Strömung im Bereich um $n \approx 0.6\,\frac{1}{s}$, bei dem sich der Gradient stark ändert, wird vom Adjungiertenverfahren hervorragend abgebildet.

Für die turbulente Strömung weichen die Gradienten insbesondere im instationären Bereich ($n < 0.6\,\frac{1}{s}$) z.T. stark voneinander ab. Die Ursache hierfür ist in erster Linie die durch den *Frozen-Turbulence*-Ansatz hervorgerufene Inkonsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung. Erwähnenswert ist, dass der adjungiertenbasierte Gradient trotz der Abweichungen eine deutliche qualitative Übereinstimmung mit dem Verlauf der Finiten Differenzen aufweist.

Die bisher identifizierten Quellen für die Inkonsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung können von großer Bedeutung für ingenieurstechnische Anwendungen sein. Der durch den Diskretisierungsfehler verursachte Konsistenzfehler ist zwar im hier gezeigten Fall wenig ausgeprägt, da die Anforderungen an die Gitterauflösung aufgrund der kleinen Reynoldszahl sehr gering sind. Es ist jedoch seit langem bekannt, dass die Gitterabhängigkeit der primalen Lösung bei komplexen, turbulenten Strömungen, insbesondere bei Verwendung turbulenzauflösender Verfahren wie LES oder DES, sehr stark ist [50, 51, 106, 113]. Daher ist davon auszugehen, dass der gitterinduzierte Konsistenzfehler in diesen Fällen deutlich an Relevanz gewinnt.

Zwar lässt sich der durch die FV-Approximation verursachte Konsistenzfehler durch eine Gitterverfeinerung reduzieren, bei praxisrelevanten Konfigurationen ist dies jedoch oft sehr aufwändig. Insbesondere im industriellen Umfeld müssen Simulationen in sehr kurzer Zeit durchgeführt werden [50], so dass aufgrund der beschränkten Computerressourcen in der Regel auf Gitterkonvergenzstudien verzichtet wird. Somit ist die Konsistenz durch Verwendung hinreichend feiner Rechennetze in der Praxis meist nicht zweifelsfrei zu gewährleisten.

Schwerwiegender ist jedoch die turbulenzmodellinduzierte Inkonsistenz, die durch die Verwendung des *Frozen-Turbulence*-Ansatzes entsteht. Dabei ist die Auswirkung dieses Fehlers sehr davon abhängig, wie stark die Wirbelviskosität von den Kontrollparametern abhängig ist. Bei der in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehenden aktiven Strömungsbeeinflussung ist davon auszugehen, dass das Turbulenzfeld in der Regel sehr stark durch die Aktuation auf dem Kontrollsegment beeinflusst wird. Dementsprechend konnte schon bei der schwach turbulenten Zylinderumströmung bei einer Reynoldszahl von $\mathrm{Re} = 5000$ eine deutliche Inkonsistenz durch die Verwendung des *Frozen-Turbulence*-Ansatzes festgestellt werden. Es ist zu erwarten, dass dieser Fehler bei praxisrelevanten Konfigurationen noch deutlich stärker zum Tragen kommt.

Die Umgehung des turbulenzmodellinduzierten Konsistenzfehlers im kontinuierlichen Adjungiertenverfahren ist außerordentlich schwierig. Eine nahe liegende Möglichkeit ist die Entwicklung adjungierter Turbulenzmodelle, die jedoch im Allgemeinen daran scheitert, dass die meisten Modelle nicht ohne Modifikation analytisch differenzierbar sind. Nach aktuellem Kenntnisstand des Autors ist es bisher nur der Arbeitsgruppe von Prof. Giannakoglou gelungen, mit dem Spalart-Allmaras- und dem Launder-Sharma-k-ϵ-Turbulenzmodell zwei kontinuierlich differenzierte statistische Turbulenzmodelle erfolgreich zu implementieren und anzuwenden [130, 131]. Das resultierende Modell ist jedoch sehr komplex und entsprechend schwierig numerisch umzusetzen. Dies zeigt sich z.B. in den Arbeiten von Bueno-Orovio et al. [10], die zwar eine erste Implementierung des adjungierten Spalart-Allmaras-Modells in ihren Strömungslöser aufweisen können, die jedoch noch einige Unstimmigkeiten hinsichtlich der Konsistenz zwischen primalem und adjungiertem System aufweist.

Darüber hinaus ist zu bedenken, dass das Turbulenzmodell in der Regel anhand der strömungsphysikalischen Eigenschaften der zu berechnenden Konfiguration ausgewählt wird, da

nicht jedes Modell für jede Art von Strömung geeignet ist. So können z.B. wandgebundene Strömungen mit anliegender Grenzschicht sehr gut vom Spalart-Allmaras-Modell abgebildet werden, während für abgelöste Strömungen häufig das SST-k-ω-Modell von Menter verwendet wird [72]. Bei Verwendung eines adjungierten Turbulenzmodells wäre man nach bisherigem Stand der Forschung jedoch gezwungen, zugunsten der Konsistenz auf eine möglichst genaue Abbildung der Turbulenz zu verzichten, da man nur eine sehr eingeschränkte Auswahl an Modellen zur Verfügung hat.

Will man auf die Adjungierung des Turbulenzmodells aus den genannten Gründen verzichten, kann man z.B. auf höherwertige numerische Ansätze wie die Direkte Numerische Simulation (DNS) zurückgreifen. Die DNS ist jedoch numerisch so aufwändig, dass sie aufgrund mangelnder Computerressourcen zur Zeit nur auf einfache akademische Konfigurationen angewendet werden kann [112].

Alle weiteren höherwertigen numerischen Verfahren, die nur einen Teil der Turbulenz direkt erfassen, sind auf mehr oder weniger komplexe Turbulenzmodellierungsansätze angewiesen. Bei der Large Eddy Simulation (LES) werden im Idealfall mindestens 80% der turbulenten kinetischen Energie vom Verfahren direkt erfasst [89]. Aus diesem Grund werden bei dieser Methode häufig einfache algebraische Feinstrukturmodelle zur Modellierung der Turbulenz verwendet, die analytisch differenzierbar sind. Für die LES gelten bezüglich des numerischen Aufwandes jedoch ähnliche Überlegungen wie für die DNS [112], so dass auch dieses Verfahren mittelfristig nicht für komplexe Konfigurationen bei hohen Reynoldszahlen einsetzbar ist.

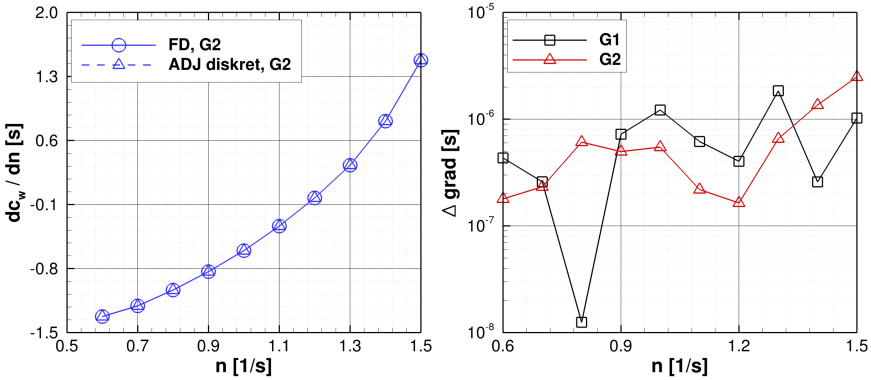
Im den letzten Jahren erfreuen sich darüber hinaus hybride Ansätze wie die Detached Eddy Simulation (DES) [114] großer Beliebtheit. Die DES beruht auf der Idee, anliegende Grenzschichten im RANS-Modus zu simulieren und für Gebiete mit massiver Ablösung den LES-Modus zu verwenden. Das Umschalten zwischen den Modi geschieht über ein modifiziertes Längenmaß im statistischen Turbulenzmodell. Damit ergibt sich für die DES hinsichtlich der Differenzierbarkeit des Turbulenzmodells die gleiche Problematik wie für den URANS-Ansatz. Es lässt sich jedoch spekulieren, dass die turbulenzmodellinduzierte Inkonsistenz bei der DES weniger folgenschwer ist, da in strömungsphysikalisch relevanten Gebieten der LES-Modus verwendet wird und daher ein großer Teil der Turbulenz direkt erfasst wird. Dies wäre ein Ansatzpunkt für weitergehende Untersuchungen.

Die bisher gezeigten Ursachen für die Inkonsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung lassen sich jedoch auf elegante Weise durch die Verwendung des in Kap. 4.3.7 vorgestellten, AD-basierten diskreten Adjungiertenansatzes beseitigen. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt werden soll, erzeugt dieser auf *beliebigen* Gittern sowohl für *laminare* als auch für *turbulente* Strömungen stets eine konsistente Lösung.

7.1.3 Adjungierte Lösung des diskreten Verfahrens

Stationäre Umströmung

Abb. 7.17 zeigt einen Vergleich der Gradienten, die mit dem diskreten Ansatz und Finiten Differenzen auf den Gitterstufen G1 und G2 berechnet wurden. Wie aus Abb. 7.17a ersichtlich ist, stimmen die Gradienten auf beiden Gittern so gut überein, dass praktisch kein Unterschied



(a) Gradient auf Basis Finiter Differenzen und des diskreten Adjungiertenverfahrens

(b) Differenz der Gradienten

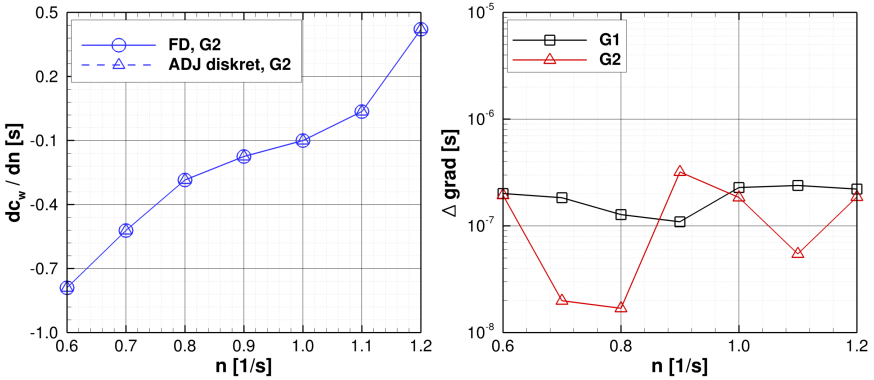
Abbildung 7.17: Gittereinfluss auf die Genauigkeit des mit dem diskreten Adjungiertenverfahren berechneten Gradienten für den laminaren stationären Fall (Re $= 100$, $n \geq 0.6\ \frac{1}{s}$)

zu erkennen ist. Nur im Fehlerplot in Abb. 7.17b wird der Unterschied von ca. 1×10^{-6} s sichtbar. Die Differenz ist damit etwa drei bis vier Größenordnungen kleiner als beim kontinuierlichen Adjungiertenverfahren. Es ist somit offensichtlich, dass die primale und adjungierte Lösung durch die Verwendung des diskreten Ansatzes unabhängig vom Gitter konsistent sind.

Abb. 7.18 zeigt die gleiche Darstellung für die turbulente Strömung auf den Gitterstufen G1 und G2. Während das kontinuierliche Adjungiertenverfahren unter Verwendung des *Frozen-Turbulence*-Ansatzes für diesen Fall auf allen Gittern einen systematischen Fehler von bis zu 80% aufwies, stimmen die mit dem diskreten Verfahren ermittelten Gradienten (wie schon im laminaren Fall) hervorragend mit den Finiten Differenzen überein. Der Fehlerplot in Abb. 7.18b zeigt dabei eine Abweichung in der gleichen Größenordnung wie bei der laminaren Strömung (Abb. 7.17b).

Der wesentliche Nachteil des diskreten Adjungiertenverfahrens wird deutlich, wenn man einen Blick auf die in Tab. 7.2 zusammengefassten Ergebnisse von Benchmark-Rechnungen wirft, die für die stationäre Strömung mit den unterschiedlichen Ansätzen durchgeführt wurden. Alle Berechnungen wurden mit identischen numerischen Einstellungen durchgeführt und die Anzahl der Iterationen wurde mit 4000 so gewählt, dass in allen Fällen ein auskonvergierter Zustand erreicht wurde. Das diskrete Verfahren war zu dem Zeitpunkt, an dem die stationären Simulationen zur Validierung durchgeführt wurden, unabhängig vom Strömungsfall ca. neunmal langsamer als der primale Löser. Beim kontinuierlichen Ansatz ergibt sich ein etwas differenzierteres Bild. Dieser war sowohl im laminaren (Faktor 1.6) als auch im turbulenten Fall (Faktor 2.9) deutlich schneller als der primale Löser.

Der Effizienzunterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung lässt sich mit dem *Frozen-Turbulence*-Ansatz erklären. Während im turbulenten Fall die Anzahl der Gleichungen für das primale System von 3 auf 5 steigt, bleibt sie für das adjungierte System konstant.



(a) Gradient auf Basis Finiter Differenzen und des diskreten Adjungiertenverfahrens

(b) Differenz der Gradienten

Abbildung 7.18: Gittereinfluss auf die Genauigkeit des mit dem diskreten Adjungiertenverfahren berechneten Gradienten für den turbulenten stationären Fall (Re $= 5000$, $n \geq 0.6\,\frac{1}{s}$)

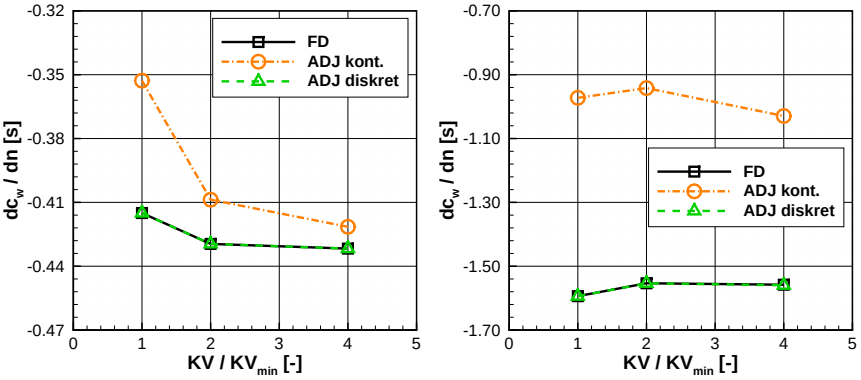
	CPU-Zeit adjungiert / CPU-Zeit primal
diskret, laminar	9.00
kontinuierlich, laminar	0.63
diskret, turbulent	8.71
kontinuierlich, turbulent	0.35

Tabelle 7.2: Ergebnisse der mit den beiden Adjungiertenverfahren durchgeführten stationären Benchmark-Simulationen

Dies spiegelt sich im Verhältnis der Rechenzeiten wider, das $0.35/0.63 \approx 3/5$ beträgt. Verglichen mit dem diskreten Ansatz ist das kontinuierliche Verfahren je nach Fall um den Faktor $14 - 25$ schneller. Man erkauft sich somit die Konsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung durch deutlich höhere Rechenzeiten. Hierbei sollte man jedoch berücksichtigen, dass die Benchmark-Ergebnisse noch zu einem frühen Entwicklungsstadium des diskreten Lösers entstanden sind. Durch Ausnutzen der Codestruktur und Handoptimierung des Lösers ist im Rahmen zukünftiger Arbeiten eine deutliche Verbesserung der Rechengeschwindigkeit zu erwarten [14]. Die Effizienz des kontinuierlichen Ansatzes lässt sich mit dem diskreten Verfahren jedoch nicht erreichen, so dass man letztlich je nach Anwendungsfall und Rahmenbedingungen abschätzen muss, welcher Adjungiertenansatz als geeigneter angesehen wird.

Instationäre Umströmung

Zur Validierung des instationären AD-basierten Adjungiertenverfahrens wurden von Anil et al. Simulationen auf unterschiedlichen Rechengittern mit einer Drehzahl von $n = 0.1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ durchgeführt [80, 79]. Die Ergebnisse demonstrieren, dass die Konsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung auch bei zeitabhängigen Problemen erhalten bleibt (siehe Abb. 7.19). Die



(a) Laminare Strömung (Re = 100)

(b) Turbulente Strömung (Re = 5000)

Abbildung 7.19: Vergleich der mit den beiden Adjungiertenverfahren berechneten Gradienten für den instationären Fall mit $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ und $n = 0.1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

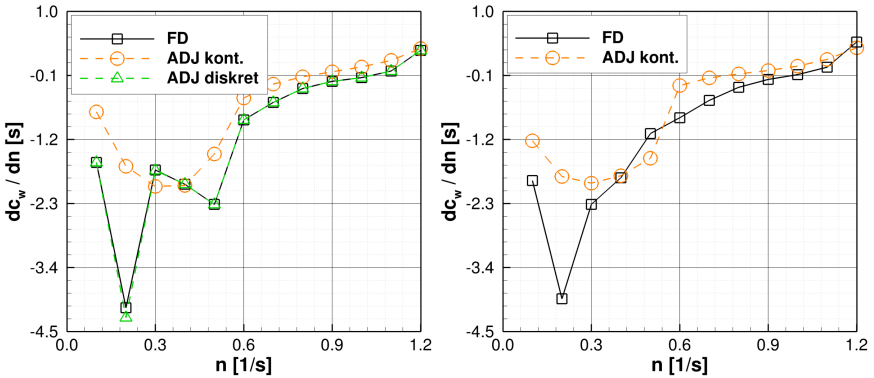
zum Vergleich aufgetragenen Finiten Differenzen wurden dabei mit dem im Vorwärtsmodus differenzierten Löser validiert. Trotz des großen Zeitschritts von $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ sind die Finiten Differenzen (schwarz) mit den aus dem diskreten Adjungiertenansatz berechneten Ableitungen (grün) auf jedem Gitter sowohl für die laminare als auch für die turbulente Strömung deckungsgleich. Die zum Vergleich dargestellten Gradienten aus dem kontinuierlichen Ansatz weisen dagegen für diese Zeitschrittweite auf allen Gittern deutliche Abweichungen zu den Finiten Differenzen auf.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sich die hier gezeigten Gradienten leicht von den bisher dargestellten Ergebnissen unterscheiden. Ursache hierfür ist, dass eine Modifikation der Rhie & Chow-Interpolation vorgenommen werden musste, um die für die Konsistenz des kontinuierlichen Verfahrens essentielle Zeitschrittunabhängigkeit zu erreichen. Das diskrete Adjungiertenverfahren basierte zum Entstehungszeitpunkt der hier beschriebenen Simulationsergebnisse jedoch noch auf der ursprünglichen Version der Rhie & Chow-Interpolation. Um eine bessere Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wurden die in Abb. 7.19 dargestellten Ergebnisse des kontinuierlichen Verfahrens unter Verwendung der ursprünglichen Rhie & Chow-Interpolation erzeugt. Die genannten Veränderungen am numerischen Verfahren ändern jedoch nichts an der Grundaussage hinsichtlich der Konsistenzeigenschaften der unterschiedlichen Adjungiertenansätze. Sie demonstrieren vielmehr, dass der AD-basierte diskrete Ansatz im Gegensatz zum kontinuierlichen Verfahren bei korrekter Implementierung unabhängig von den verwendeten

numerischen Schemata konsistent zum primalen Strömungslöser ist.

Gesamter Drehzahlbereich

Abb. 7.20a zeigt abschließend Simulationsergebnisse der turbulenten Strömung für den gesamten Drehzahlbereich, die mit dem diskreten und kontinuierlichen Adjungiertenansatz unter Verwendung der Basiskonfiguration (Gitter G1, $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$) erzeugt wurden. Man erkennt für al-



(a) Gitter G1, $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ (b) Gitter G3, $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$

Abbildung 7.20: Vergleich der mit beiden Adjungiertenverfahren berechneten Gradienten für den gesamten Drehzahlbereich im turbulenten Strömungsfall

le Drehzahlen eine nahezu perfekte Übereinstimmung des diskreten Verfahrens (grün) mit den Finiten Differenzen (schwarz), während der kontinuierliche Ansatz insbesondere bei kleinen Drehzahlen eine deutliche Abweichung aufweist. In Abb. 7.20b sind zum Vergleich nochmals die Ergebnisse des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens für Gitter G3 und $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ dargestellt, um zu verdeutlichen, dass die turbulenzmodellinduzierte Inkonsistenz ein systematischer Fehler ist, der sich nicht durch Gitterverfeinerung oder die Wahl eines kleineren Zeitschritts eliminieren lässt.

7.2 Kreiszylinder mit periodischer Absaugung

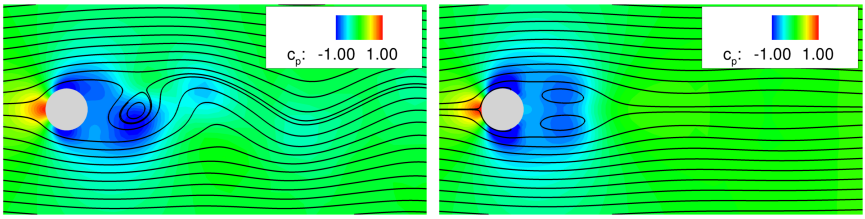
Bei den bisher vorgestellten Simulationen zur Validierung des Adjungiertenverfahrens wurde ausschließlich die Umströmung eines rotierenden Zylinders betrachtet. Diese Konfiguration stellt einen Spezialfall dar, da die Rotation der Geometrie durch die Vorgabe einer tangentialen Randgeschwindigkeit realisiert wurde. In der Regel wird bei der aktiven Strömungskontrolle jedoch Fluid über den Kontrollrand eingeblasen bzw. abgesaugt, so dass die Randbehandlung in diesem Bereich von besonderer Bedeutung ist. Im Folgenden soll daher anhand der laminaren Umströmung eines Kreiszylinders mit periodischer Absaugung näher untersucht

werden, welchen Einfluss die in Kap. 6.1 vorgestellten Herangehensweisen zur Behandlung von Dirichlet-Rändern auf die Vorhersagequalität der numerischen Simulation haben.

Die Basiskonfiguration entspricht im Wesentlichen der des rotierenden Zylinders, die Größe des Rechengebietes wurde jedoch in der Größe reduziert, um Rechenzeit einzusparen. Es erstreckt sich nun von $x = -5D$ bis $x = 25D$ in Strömungsrichtung und von $y = -5D$ bis $y = 5D$ normal zur Anströmung. Die Randbedingungen unterscheiden sich lediglich an der Zylinderoberfläche, wo die Geschwindigkeit mit Ausnahme des Kontrollrands zu null gesetzt wurde. An den beiden Anregepositionen, die auf dem Zylinder bei $x = 0.2D$ lokalisiert sind, wurde eine symmetrische, periodische Absaugung gemäß

$$u_n = u_a \cos(2\pi f t) - u_a \tag{7.5}$$

vorgeschrieben. Darin sind u_a und f die Amplitude und Frequenz, mit der periodisch abgesaugt wird. In den hier gezeigten Simulationen wurde mit einer konstanten Frequenz von $f = 1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ angeregt. Im Gegensatz zur klassischen Definition einer gepulsten Aktuation (siehe z.B. [47]) ist die in (7.5) gewählte einfache Näherung stetig differenzierbar, so dass die für die Gradientenberechnung benötigten Ableitungen der Kontrolle in (4.80) problemlos ermittelt werden können. Die in Abb. 7.21 gezeigten Schnappschüsse der natürlichen und der optimal angeregten Strömung sollen einen groben Eindruck der Strömungsverhältnisse vermitteln. Man

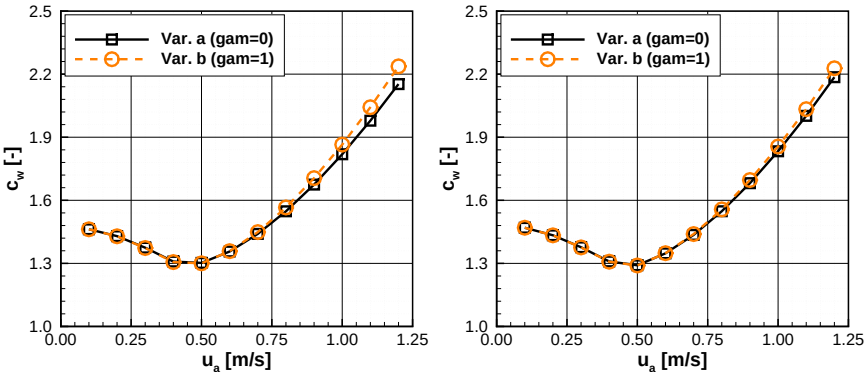


(a) Natürliche Strömung (b) Optimal angeregte Strömung

Abbildung 7.21: Momentanaufnahmen des Druckfelds sowie Stromlinien der natürlichen und der optimal aktuierten Strömung

erkennt im Vergleich zur natürlichen Strömung deutlich, dass sich der Wirbelabwurf durch die Aktuation synchronisiert und die Strömung ihren asymmetrischen Charakter verliert. Durch den stromab verlagerten Wirbelabwurf bei periodischer Absaugung kann der Druck auf der Rückseite erhöht werden und der Widerstand des Körpers verringert sich. Da eine ähnliche Konfiguration nochmals im Rahmen der Anwendung des Optimierungsverfahrens zum Einsatz kommt, sei an dieser Stelle für eine detaillierte Analyse der strömungsphysikalischen Zusammenhänge auf Kap. 8.1 verwiesen.

In Abb. 7.22 ist zunächst der Einfluss der Randbehandlung auf den Widerstandsbeiwert für zwei verschiedene Rechengitter dargestellt. Man erkennt auf dem groben Gitter, dessen Auflösung äquivalent zu Gitter G1 aus Kap. 7.1 ist, bei $n > 0.6\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ eine moderate Abweichung zwischen der *Upwind*-basierten Randbehandlung ($GAM = 0$, im Weiteren Variante a) und der direkten



(a) Grobes Gitter (b) Feines Gitter

Abbildung 7.22: Einfluss der Randbehandlung am Aktuator auf den Widerstandsbeiwert der primalen Lösung für verschiedene Rechengitter

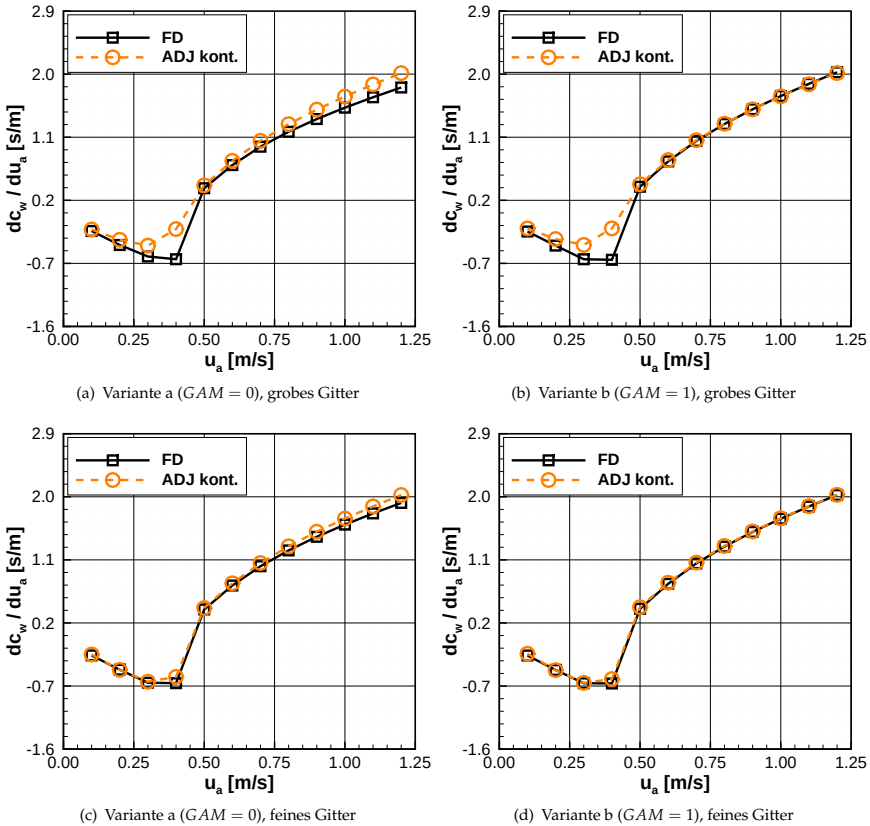
Berücksichtigung des Randwertes ($GAM = 1$, im Weiteren Variante b), die mit steigender Drehzahl anwächst. Auf dem feinen Gitter, dessen Auflösung dem Gitter G3 aus Kap. 7.1 entspricht, ist diese Differenz deutlich kleiner, aber bei großen Drehzahlen noch sichtbar.

Ein ähnlicher Zusammenhang ergibt sich für die Lösung des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens (siehe Abb. 7.23). Für Variante a der Randbehandlung ist auf dem groben Gitter bei allen Drehzahlen eine deutliche Abweichung des adjungiertenbasierten Gradienten von den Finiten Differenzen zu erkennen (Abb. 7.23a), während mit der Variante b für große Drehzahlen bereits eine sehr gute Übereinstimmung erzielt werden kann (Abb. 7.23b). Wie Abb. 7.23c zeigt, ist auch eine Vervierfachung der Gitterpunktanzahl bei der *Upwind*-basierten Randbehandlung nicht ausreichend, um für alle Drehzahlen eine hervorragende Übereinstimmung der Finiten Differenzen mit dem Gradienten aus dem Adjungiertenverfahren zu erreichen. Diese lässt sich nur bei direkter Berücksichtung des Randwertes gemäß Variante b erreichen (siehe Abb. 7.23d).

Die im Rahmen der Verifikation vorgeschlagene Modifizierung der Behandlung von Dirichlet-Rändern führt somit nicht nur zu einer glatten Lösung im Randbereich, sondern reduziert auch die Gitterabhängigkeit der Lösung, wenn Fluid über den Kontrollrand abgesaugt wird. Aus diesem Grund lässt sich bei direkter Berücksichtigung der Randwerte gemäß Variante b schon auf deutlich gröberen Gittern eine gute Konsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung erreichen.

7.3 Zusammenfassung

Im Rahmen der hier präsentierten Verfahrensvalidierung wurden detaillierte Untersuchungen zu den Konsistenzeigenschaften des kontinuierlichen Adjungiertenansatzes durchgeführt. Wesentliches Ziel war dabei das Auffinden von Quellen, die eine Inkonsistenz zwischen primaler



(a) Variante a ($GAM = 0$), grobes Gitter

(b) Variante b ($GAM = 1$), grobes Gitter

(c) Variante a ($GAM = 0$), feines Gitter

(d) Variante b ($GAM = 1$), feines Gitter

Abbildung 7.23: Einfluss der Randbehandlung am Aktuator auf die Genauigkeit des mit dem Adjungiertenverfahren bestimmten Gradienten für verschiedene Rechengitter

und adjungierter Lösung verursachen können. Diese sind vor dem Hintergrund von Bedeutung, dass das Optimierungsverfahren aus Sicht des Ingenieurs das Minimum der diskreten Zielfunktion auffinden sollte (siehe Kap. 4). Dies kann nur bei perfekter Konsistenz zwischen primalem und adjungiertem System gewährleistet werden.

Als Testfälle für die Validierung wurden die 2D-Zylinderumströmung mit Rotation des Körpers sowie mit periodischer Absaugung ausgewählt. Die Beschränkung auf eine einfache 2D-Konfiguration sowie nur einen Anregeparameter ermöglichte dabei erst eine detaillierte Analyse der Konsistenzeigenschaften, die hunderte stationäre und instationäre Simulationen erforderte.

Im Rahmen der Untersuchungen wurden mehrere Quellen für die Inkonsistenz des kontinuierli-

chen Adjungiertenansatzes identifiziert, die sich grob in zwei Kategorien unterteilen lassen. Die erste Kategorie beinhaltet Quellen, die eine zu ungenaue Lösung der diskretisierten DGLn zur Folge haben. Dazu zählen ein zu grobes Rechengitter, ein zu großer Zeitschritt bei instationären Simulationen oder die ursprünglich verwendete Behandlung von Dirichlet-Rändern. Auch die Standard-Formulierung der Rhie & Chow-Interpolation, welche keine Zeitschrittkonvergenz aufweist, kann dieser Kategorie zugeordnet werden. Der Konsistenzfehler aller bisher genannten Quellen ließ sich jedoch beseitigen bzw. beliebig reduzieren, d.h., auf einem hinreichend feinen Gitter und mit einem kleinen Zeitschritt kann unter Verwendung der modifizierten Rhie & Chow-Interpolation eine sehr gute Konsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung erreicht werden.

Unter die zweite Kategorie fällt der durch den *Frozen-Turbulence*-Ansatz verursachte Fehler, welcher bei den hier untersuchten Fällen zu z.T. sehr großen Konsistenzfehlern geführt hat. Es wurden einige Möglichkeiten diskutiert, diesen turbulenzmodellinduzierten Fehler zu umgehen:

- Entwicklung adjungierter Turbulenzmodelle

  Nicht jedes beliebige Turbulenzmodell ist ohne Modifikation analytisch differenzierbar. Darüber hinaus erweist sich die numerische Umsetzung der resultierenden, sehr komplexen adjungierten Turbulenzmodelle in der Praxis als sehr schwierig, so dass bisher weltweit nur eine Arbeitsgruppe eine funktionierende Implementierung weniger Modelle vorweisen kann [130, 131]. Außerdem ist zu berücksichtigen, dass man in der Regel die Auswahl des Turbulenzmodells anhand der darzustellenden strömungsphysikalischen Zusammenhänge trifft. Aufgrund der Notwendigkeit der analytischen Differenzierbarkeit ist man jedoch in der Modellauswahl stark eingeschränkt.

- Direkte Numerische Simulation und Large Eddy Simulation

  Bei beiden Verfahren ist mit hinreichender Gitter- und Zeitschrittweite eine sehr gute Konsistenz zwischen primalem und adjungiertem System erreichbar. Sie sind jedoch numerisch so aufwändig, dass mittelfristig eine Anwendung auf komplexe Konfigurationen bei hohen Reynoldszahlen nicht möglich ist [112, 114].

- Hybride Verfahren

  Bei hybriden Verfahren ergibt sich hinsichtlich der Differenzierbarkeit des Turbulenzmodells die gleiche Problematik wie beim URANS-Ansatz. Es ist jedoch zu vermuten, dass die Auswirkung der turbulenzmodellinduzierten Inkonsistenz bei diesem Ansatz weniger folgenschwer ist, da in physikalisch relevanten Bereichen ein Großteil der Turbulenz vom Verfahren direkt erfasst wird.

- Diskretes Adjungiertenverfahren auf Basis des Automatischen Differenzierens

  Es konnte nachgewiesen werden, dass ein diskreter Adjungiertenansatz auf Basis des Automatischen Differenzierens in der Lage ist, unabhängig von der Gitter- und Zeitschrittweite sowohl im laminaren als auch im turbulenten Strömungsfall eine perfekt konsistente Lösung zu erzeugen. Man erkauft sich diesen Vorteil jedoch durch eine schlechtere numerische Effizienz.

Es lässt sich resümieren, dass es das „perfekte“Adjungiertenverfahren nicht gibt. Jeder Ansatz hat seine individuellen Stärken und Schwächen, so dass man letztendlich für jeden Anwendungsfall die Vor- und Nachteile gegeneinander abwägen muss, um das geeignete Verfahren auszuwählen.

8 Anwendung

Nachdem in Kap. 6 die korrekte Implementierung des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens nachgewiesen wurde und in Kap. 7 die Eigenschaften des Verfahrens analysiert wurden, steht nun die Anwendung auf verschiedene Testfälle im Mittelpunkt. Dabei sollen zwei unterschiedliche Einsatzgebiete der aktiven Strömungskontrolle näher untersucht werden, die im Zusammenhang mit aerodynamischen Problemstellungen von Bedeutung sind. Zum einen ist dies die Kontrolle des Nachlaufs hinter einem stumpfen Körper und zum anderen die Verzögerung oder Vermeidung der Strömungsablösung an einem Flügelprofil.

Bei der strömungsphysikalischen Bewertung der Ergebnisse muss berücksichtigt werden, dass das verwendete kontinuierliche Adjungiertenverfahren auf dem URANS-Ansatz basiert. In Kap. 2 wurde bereits ausführlich diskutiert, dass dieser bei der Anwendung auf instationäre Strömungen mit dominanten kohärenten Strukturen, wie sie auch bei der aktiven Strömungsbeeinflussung auftreten, gewissen Einschränkungen unterworfen ist. Im Folgenden werden daher ausschließlich Aussagen auf Basis vergleichender Simulationen getroffen. Im Hintergrund steht die Annahme, dass auch mit einer URANS Trendaussagen getroffen werden können, da die wesentlichen instationären Strömungsphänomene zumindest qualitativ richtig wiedergegeben werden [19, 42, 50, 57, 104].

8.1 Widerstandsminimierung einer Zylinderumströmung

Bei vielen aerodynamischen Problemstellungen spielt die Umströmung stumpfer Körper eine wichtige Rolle. Beispiele hiefür sind z.B. Fahrzeuge, Schiffe oder auch Gebäude. In der Regel lässt sich die Ablösung der Strömung hinter einem stumpfen Körper nicht verhindern. Durch den Einsatz der aktiven Strömungsbeeinflussung kann jedoch der Nachlauf des Körpers so manipuliert werden, dass sich die aerodynamischen Eigenschaften in gewünschter Weise ändern (siehe z.B. [5, 13, 15, 53, 122]).

Vor diesem Hintergrund wurden Untersuchungen zur periodischen Aktuation der laminaren Zylinderumströmung bei einer Reynoldszahl von $\mathrm{Re} = 100$ durchgeführt. Die Verwendung dieses Testfalls als ersten Anwendungsfall bietet sich an dieser Stelle an, da er im Rahmen der Verfahrensvalidierung ausführlich untersucht wurde und daher die Einflüsse des Zeitschritts und des Rechengitters auf die Lösung bestens bekannt sind. Darüber hinaus ist der Kreiszylinder ein Prototyp eines stumpfen Körpers, so dass sich die gewonnenen Erkenntnisse gut auf ähnliche Geometrien übertragen lassen sollten.

8.1.1 Setup

Das Setup ist bezüglich der Abmessungen des Rechengebietes und des Gitteraufbaus identisch mit der in Kap. 7.1 beschriebenen Konfiguration, wobei nur der laminare Fall mit einer Reynoldszahl von $\mathrm{Re} = 100$ betrachtet werden soll. Alle Simulationen wurden auf Gitter G2 mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.04\,\mathrm{s}$ durchgeführt [1] . Dabei kam das TVD-basierte Konvektionsschema zum Einsatz und auf jedem Zeitschritt wurde eine Abnahme der Residuen um 4.5 Größenordnungen als Abbruchkriterium festgelegt.

Um den Widerstand des Zylinders zu minimieren, sind über 75% des Umfangs in gleichmäßigen Abständen insgesamt 15 Schlitze verteilt, an denen periodisch aktuiert werden kann. Dabei ist der achte Schlitz genau auf der horizontalen Symmetrieachse positioniert. In Abb. 8.1 ist dies beispielhaft für die gepulste Aktuation dargestellt. Jeder Schlitz hat eine Breite von $1/40$

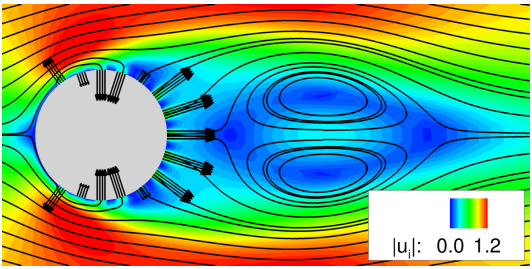


Abbildung 8.1: Schematische Darstellung der Aktuatoranordnung am Beispiel der gepulsten Anregung

des Zylinderumfangs und ist mit drei Kontrollvolumina aufgelöst. Der Abstand zwischen den Schlitzen beträgt ebenfalls $1/40$ des Zylinderumfangs.

Es wurden zwei unterschiedliche Aktuationsformen untersucht, die in der Praxis sehr weit verbreitet sind. Zum einen ist dies das periodische Einblasen und Absaugen, wobei der über eine Periode integrierte Massenstrom null ist. Diese Form der Anregung wird in der Literatur häufig als *Synthetic Jet*, ZNMF-Aktuation oder harmonische Anregung bezeichnet [47]. Sie lässt sich im 2D wie folgt modellieren:

$$u_i = u_a r_i \sin\left[2\pi f\,(t - t_0)\right] \quad \text{mit} \quad r_i = \begin{pmatrix} \cos\left(\beta - \theta\right) \\ \sin\left(\beta - \theta\right) \end{pmatrix} . \tag{8.1}$$

Darin ist u_a die Amplitude, β der Ausblaswinkel relativ zum Schlitz, θ der Winkel des Schlitzes, f die Frequenz und t_0 die Phasenverschiebung der Aktuation. Da der Schlitzwinkel über die Oberflächengeometrie festgelegt ist, ergeben sich somit pro Schlitz theoretisch vier unbekannte Anregeparameter. Für die hier präsentierte Anwendung wurde jedoch nur eine Variation der Amplitude zugelassen, um einen Vergleich des adjungiertenbasierten Gradienten mit Finiten

[1] Die zeitliche und räumliche Auflösung ist damit etwas zu grob für die optimale Wiedergabe der Gradienten (siehe hierzu Kap. 7). Auf diese Problematik wird im Verlauf des Abschnitts 8.1.2 noch detaillierter eingegangen.

Differenzen mit vertretbarem Zeitaufwand durchführen zu können. Die restlichen Parameter wurden wie folgt festgelegt:

$$f = 0.1\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,, \qquad t_0 = 0\,\mathrm{s}\,, \qquad \beta = 90^o\,. \tag{8.2}$$

Als zweite Variante wurde die gepulste Aktuation ausgewählt, die im Idealfall einem Rechtecksignal entspricht. Um die stetige Differenzierbarkeit der Steuerung zu gewährleisten, wurde das Anregesignal durch eine Sinusfunktion gemäß

$$u_i = u_a r_i \sin\left[2\pi f\,(t - t_0)\right] - u_a \quad \text{mit} \quad r_i = \begin{pmatrix} \cos\left(\beta - \theta\right) \\ \sin\left(\beta - \theta\right) \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

approximiert. Durch das Vorzeichen der Amplitude kann somit sowohl ein gepulstes Einblasen als auch ein Absaugen realisiert werden. Wie beim *Synthetic Jet* sollte nur die Anregeamplitude an den einzelnen Schlitzen optimiert werden, während für die restlichen Parameter wieder die Werte nach Gl. 8.2 verwendet wurden.

8.1.2 Ergebnisse

Auf die natürliche Strömung soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, da sie bereits im Rahmen der Validierung in Kap. 7.1 dargestellt wurde. Es sei hier nur noch einmal zusammengefasst, dass sich die Strömung durch einen stark instationären, asymmetrischen, periodischen Wirbelabwurf auszeichnet, der in der Literatur als Kármánsche Wirbelstraße bekannt ist. Der berechnete zeitgemittelte Widerstandsbeiwert beträgt in diesem Fall $c_w = 1.34$, während der Auftriebsbeiwert im zeitlichen Mittel null ist.

Harmonische Aktuation

Der Startpunkt für die Optimierung der harmonischen Aktuation war die eingeschwungene natürliche Strömung. Dabei hat sich herausgestellt, dass der Betrag der Sensitivitäten an allen Anregeschlitzen bereits im ersten Schritt kleiner als $2 \times 10^{-3}\,\mathrm{s/m}$ war. Daraus lässt sich schließen, dass sich der Widerstand des Zylinders bei natürlicher Umströmung bereits in der Nähe eines (zumindest lokalen) Minimums befindet und das periodische Einblasen und Absaugen für diese Konfiguration keine nennenswerte Widerstandsreduktion erbringen kann. Dies deckt sich mit Erfahrungen aus früheren Untersuchungen am 2D-Ahmed-Body [5].

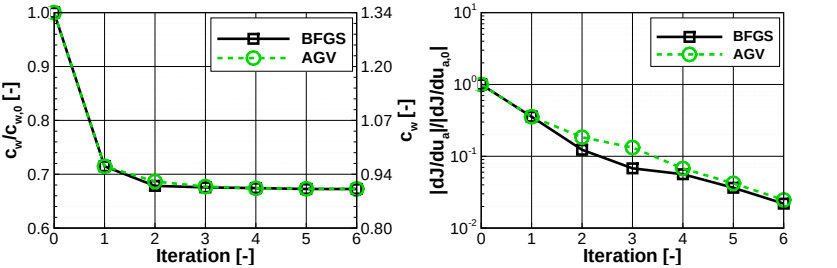
Der Versuch, die harmonische Anregung mit Hilfe eines Adjungiertenverfahrens zu optimieren, ist ein sehr instruktives Beispiel dafür, wie sich mit geringem Aufwand eine wichtige Aussage zur Auslegung der Aktuation treffen lässt. Man kann bereits durch zwei Simulationen, nämlich der Lösung des primalen und des adjungierten Systems, bestimmte Anregeformen als ineffektiv identifizieren und aus den weiteren Untersuchungen ausschließen. Eine ähnliche Idee verfolgt die Sensitivitätsanalyse, bei der eine Verbesserung der Ausgangskonfiguration ausschließlich auf Basis einer einzigen adjungierten Lösung erzielt werden soll (siehe z.B. [83, 84]). Sie stellt

damit keine Optimierung im eigentlichen Sinne dar, kann aber zumindest in der Praxis für eine Vorauswahl bestimmter Entwürfe einen wichtigen Beitrag liefern.

Gepulste Aktuation

Für die gepulste Anregung wurden Optimierungsrechnungen mit dem Abstiegsgradienten- (AGV) und dem BFGS-Verfahren (BFGS) durchgeführt. Der Startpunkt war wie bei der harmonischen Aktuation die eingeschwungene natürliche Strömung. Von diesem Zustand ausgehend wurde das primale System jeweils über 15000 Zeitschritte integriert, wobei der transiente Anfahrvorgang nach Einschalten der Aktuation durch Abschneiden der ersten 5000 Iterationen vernachlässigt wurde (siehe hierzu Kap. 4.3.6). Als Abbruchkriterium für die Optimierung wurde eine Abnahme der euklidischen Gradientennorm um ca. zwei Größenordnungen definiert.

Abb. 8.2a zeigt den Optimierungsverlauf des Widerstandsbeiwerts für die beiden Verfahren. Darin stellt die Iteration 0 die unangeregte Strömung dar. Der erste Schritt ist für beide Op-



(a) Widerstandsbeiwert im Optimierungsverlauf

(b) Normierte Gradientennorm im Optimierungsverlauf

Abbildung 8.2: Vergleich der mit dem BFGS- und dem Abstiegsgradientenverfahren erzielten Widerstandsminimierung und Entwicklung der Gradientennorm

timierungsmethoden identisch, da die approximierte Hesse-Matrix B_{ij} im ersten Schritt mit der Einheitsmatrix initialisiert wurde, d.h., das erste BFGS-update entspricht einem Schritt des Abstiegsgradientenverfahrens. Insgesamt erkennt man einen sehr ähnlichen Verlauf des Widerstandes, der in einen nahezu identischen, optimalen Widerstandsbeiwert von $c_w = 0.8987$ (BFGS) bzw. $c_w = 0.8989$ (AGV) mündet. Dies entspricht einer Reduzierung des Widerstands um etwa 33% gegenüber der natürlichen Strömung. Die auf die natürliche Strömung normierte Gradientennorm in Abb. 8.2b fällt während des Optimierungsverlaufs stetig um nahezu zwei Größenordnungen.

Die Ähnlichkeit der Widerstandsentwicklung spiegelt sich auch in den Sensitivitäten an den einzelnen Anregeschlitzen wider, die in Abb. 8.3 für die Positionen 1 bis 8 dargestellt sind. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Optimierung eine symmetrische Aktuation erzeugt hat, so dass auf die Darstellung der verbleibenden Schlitze 9 bis 15 in Abb. 8.3 verzichtet werden kann. Während des Optimierungsverlaufs lassen sich zwar leichte Unterschiede der Sensitivitäten an den einzelnen Positionen erkennen, die an den Schlitzen 6 bis 8 am größten

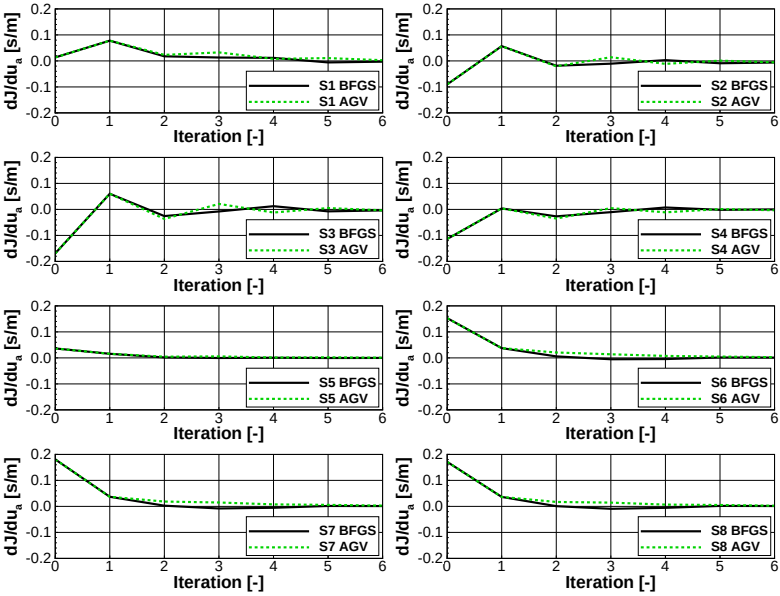


Abbildung 8.3: Vergleich der Sensitivitäten, die mit dem BFGS- und dem Abstiegsgradientenverfahren an den Positionen 1 bis 8 berechnet wurden

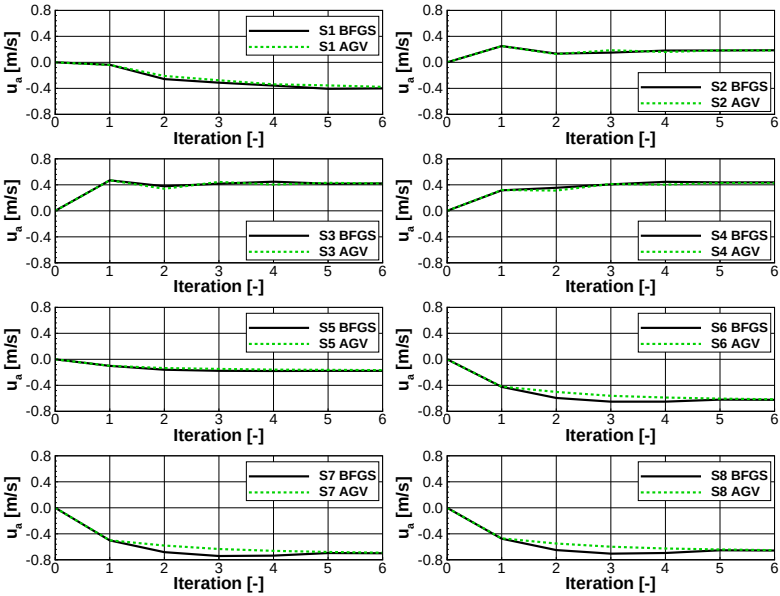


Abbildung 8.4: Vergleich der Anregeamplituden, die mit dem BFGS- und dem Abstiegsgradientenverfahren an den Positionen 1 bis 8 berechnet wurden

sind und z.T. auch zu unterschiedlichen Vorzeichen führen. Insgesamt weist der Verlauf für die beiden Verfahren jedoch große Übereinstimmungen auf. Wie aus Abb. 8.4 hervorgeht, ist diese Ähnlichkeit auch in der Entwicklung der Anregeamplituden wiederzufinden, wobei die Unterschiede auch hier an den Positionen 6 bis 8 am größten sind. Mit zunehmender Iterationszahl konvergieren die Anregeamplituden jedoch auf nahezu identische Werte, so dass man von einer fehlerfreien Implementierung des BFGS-Verfahrens ausgehen kann.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass das BFGS- gegenüber dem Abstiegsgradientenverfahren im gezeigten Fall keinen nennenswerten Vorteil bietet. Dies lässt sich vermutlich darauf zurückführen, dass das Problem gut skaliert ist, denn nach Abb. 8.3 weisen alle Sensitivitäten etwa die gleiche Größenordnung auf (siehe hierzu auch Kap. 3). In diesem Fall sind zumindest die ersten Optimierungsschritte der beiden Verfahren sehr ähnlich, so dass sich der Vorteil der BFGS-Methode erst bei einem strengeren Abbruchkriterium zeigen würde. Dafür ist jedoch die Gradientenwiedergabe des Adjungiertenverfahrens aufgrund der zu groben Zeit- und Gitterschrittweite zu ungenau.

Dieser Umstand lässt sich anhand des in Abb. 8.5 dargestellten Vergleichs der adjungiertenbasierten Sensitivitäten mit Finiten Differenzen erkennen. Wieder ist der qualitative Verlauf sehr

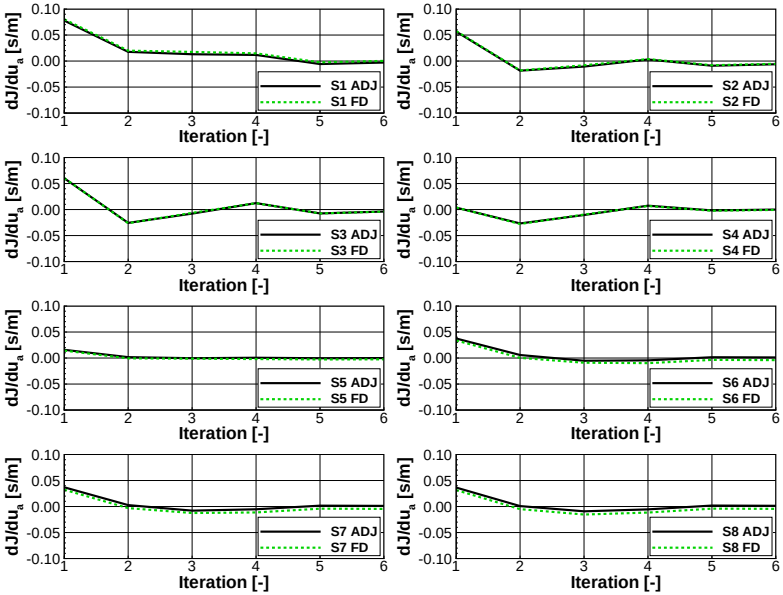


Abbildung 8.5: Vergleich der Sensitivitäten aus dem Adjungiertenverfahren mit Finiten Differenzen an den Positionen 1 bis 8

ähnlich, es zeigt sich jedoch besonders bei den Schlitzen 6 bis 8 ein kleiner, aber nahezu konstanter Versatz. Bei den ersten Optimierungsschritten sind die Sensitivitäten verhältnismäßig

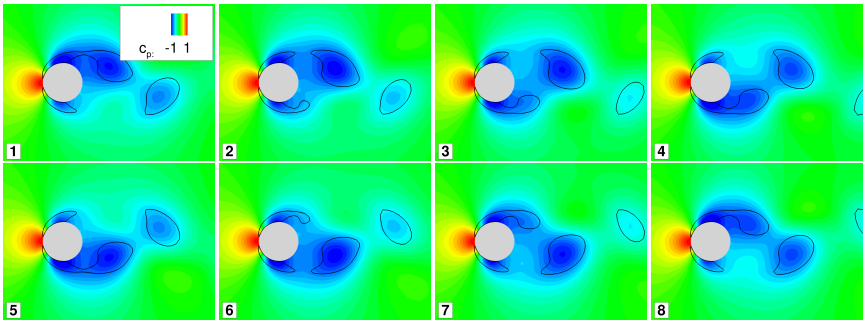


Abbildung 8.6: Zeitliche Entwicklung der natürlichen Strömung innerhalb einer Periode des Wirbelabwurfs. Gezeigt sind Konturplots des Druckfelds und Wirbelstrukturen gemäß des λ_2-Kriteriums.

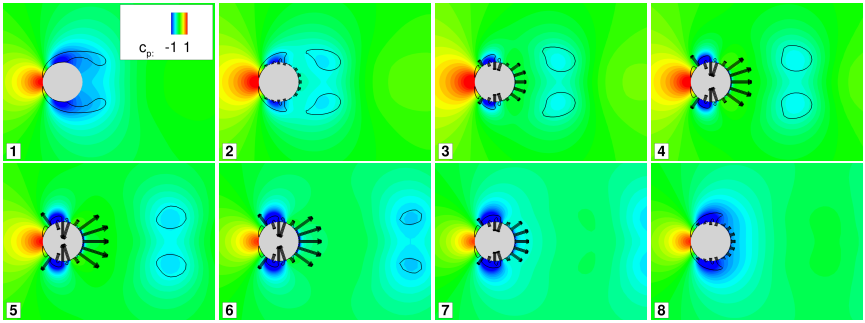


Abbildung 8.7: Zeitliche Entwicklung der optimal aktuierten Strömung innerhalb einer Periode des Wirbelabwurfs. Gezeigt sind Konturplots des Druckfelds und Wirbelstrukturen gemäß des λ_2-Kriteriums.

hoch, so dass diese Differenz keine große Rolle spielt. Mit fortschreitender Iterationszahl wird die Abweichung jedoch relativ zum Betrag der Sensitivitäten immer größer und der Fehler gewinnt an Bedeutung. Mit dem kontinuierlichen Adjungiertenverfahren kann folglich nicht beliebig genau optimiert werden, da die Genauigkeit der Gradientenwiedergabe selbst bei laminarer Strömung durch die Gitter- und Zeitschrittweite beschränkt wird. Im gezeigten Fall führt dies vermutlich dazu, dass das BFGS-Verfahren seine höhere Effizienz gegenüber dem Abstiegsgradientenverfahren nicht ausspielen kann.

Um die strömungsphysikalische Wirkung der Aktuation zu verdeutlichen, ist in den Abb. 8.6 und 8.7 das instantane Druckfeld der natürlichen und der optimal aktuierten Strömung während einer Periode des Wirbelabwurfs dargestellt. Die Wirbelstrukturen, erkennbar an den schwarzen Isolinien, wurden dabei mit Hilfe des λ_2-Kriteriums sichtbar gemacht [61], das sich

im 2D auf die Gleichung

$$\lambda_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.4}$$

reduziert.

Im Fall der natürlichen Strömung erkennt man deutlich, wie sich die abgelöste Scherschicht abwechselnd auf der Ober- und Unterseite des Zylinders aufrollt und so den asymmetrischen Wirbelabwurf erzeugt. In den Wirbelkernen existiert ein ausgeprägtes Druckminimum, das auf die Rückseite des Zylinders in Richtung seiner horizontalen Symmetrieachse transportiert wird und so die Druckdifferenz zwischen der Vorder- und Rückseite maßgeblich beeinflusst.

Der auffälligste Effekt der gepulsten Aktuation ist die Synchronisierung des Wirbelabwurfs, die auch bei der Beeinflussung der Strömung um einen D-förmigen Körper beobachtet wurde [53, 85]. Die Aktuation erzeugt mit der Anregefrequenz $f = 1\,\frac{1}{s}$ ein gegenläufig rotierendes Wirbelpaar, das erst weit außerhalb des hier gezeigten Ausschnitts instabil wird und allmählich in den asymmetrischen Zustand der unangeregten Strömung übergeht. Das Druckniveau auf der Rückseite des Zylinders ist im Vergleich zur natürlichen Strömung deutlich höher, da das Druckminimum in den Wirbelkernen durch die Aktuation geschwächt und der Abstand der Wirbel zur horizontalen Symmetrieachse vergrößert wird. Dies lässt sich besonders deutlich anhand von Abb. 8.8 erkennen, in der die zeitgemittelten Druckfelder der natürlichen und der optimal aktuierten Strömung gegenübergestellt sind. Die Druckdifferenz zwischen Vorder-

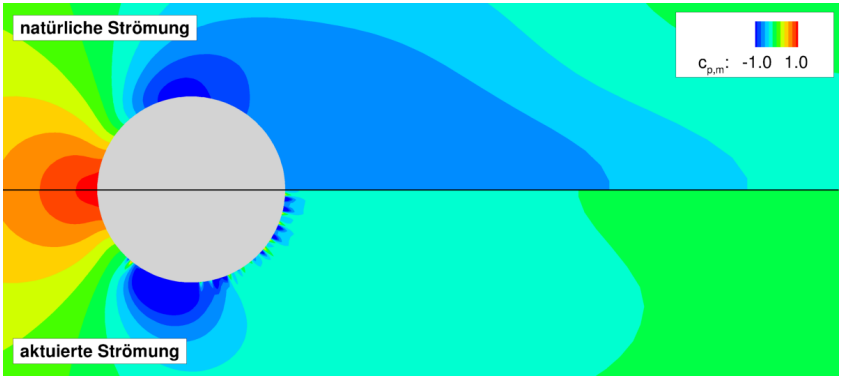


Abbildung 8.8: Zeitgemitteltes Druckfeld der natürlichen und der optimal aktuierten Strömung

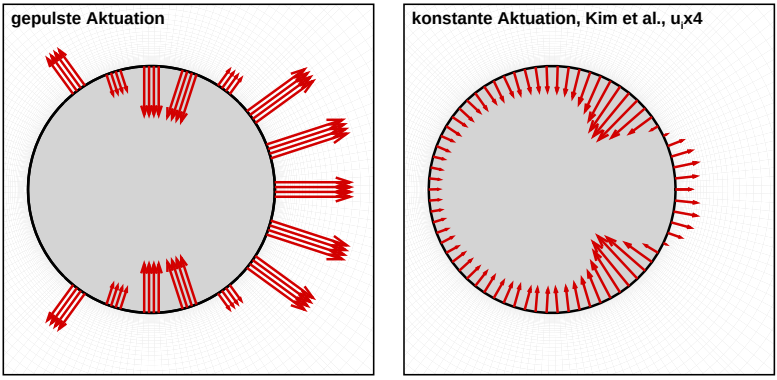
und Rückseite ist ein Maß für den Druckwiderstand des Körpers, der in der natürlichen Strömung mit ca. 75% den größten Anteil des Gesamtwiderstandes ausmacht. Durch die gepulste Aktuation wird somit im Wesentlichen der Druckwiderstand reduziert.

In Tab. 8.1 sind die optimalen Amplituden an den Schlitzen 1 bis 8, also auf der Oberseite des Zylinders, zusammengefasst. Dabei ist zu beachten, dass ein negatives Vorzeichen der Amplitude ein gepulstes Ausblasen erzeugt, während das gepulste Absaugen durch ein positives Vorzeichen realisiert wird. Abb. 8.9a veranschaulicht die daraus resultierende Amplitudenver-

Schlitz	BFGS	AGV	Modus
1	−0.40074	−0.37704	Ausblasen
2	0.18566	0.18222	Absaugen
3	0.42181	0.42014	Absaugen
4	0.43777	0.42557	Absaugen
5	−0.17751	−0.16633	Ausblasen
6	−0.62287	−0.61475	Ausblasen
7	−0.69915	−0.69061	Ausblasen
8	−0.65703	−0.65170	Ausblasen

Tabelle 8.1: Optimale Verteilung der mit dem BFGS- und dem Abstiegsgradientenverfahren berechneten Amplituden an den Schlitzen 1 bis 8

teilung auf der Oberfläche des Zylinders. Zum Vergleich ist in Abb. 8.9b die optimale Aktuation



(a) Gepulste Aktuation (Re = 100) (b) Konstante Aktuation (Re = 200, Kim et al. [48])

Abbildung 8.9: Vergleich der optimalen Amplitudenverteilung für gepulste Aktuation mit konstantem Einblasen und Absaugen (Kim et al. [48]). Man beachte die unterschiedliche Skalierung der Geschwindigkeitsvektoren.

durch zeitlich konstantes Einblasen und Absaugen bei Re = 200 gezeigt, die von Kim et al. [48] mit einem adjungiertenbasierten Optimierungsverfahren berechnet wurde. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass Kim et al. die Oberflächendruckverteilung der Potentialströmung erreichen wollten, um so den reinen Druckwiderstand zu minimieren, während bei der gepulsten Aktuation im Rahmen dieser Arbeit der Gesamtwiderstand minimiert werden sollte. In erster Näherung sind diese beiden Optimierungsziele jedoch miteinander vergleichbar.

Die beiden Aktuationsansätze haben jedoch eine sehr unterschiedliche strömungsmechanische Wirkung. Während mit der zeitlich konstanten Anregung eine vollständig anliegende Strömung erreicht werden kann [48], ist dies mit der gepulsten Aktuation nicht möglich. Daraus ergeben

sich die in Abb. 8.9 erkennbaren, großen Unterschiede in der optimalen Amplitudenverteilung. Für die gepulste Aktuation werden etwa um den Faktor 4 größere Amplituden benötigt [2]. Darüber hinaus stimmen die Bereiche, in denen ausgeblasen bzw. abgesaugt wird, nicht überein. Besonders auffällig ist, dass bei der gepulsten Aktuation am ersten und letzten Schlitz diagonal in Strömungsrichtung ausgeblasen wird, während bei der zeitlich konstanten Anregung in diesem Gebiet Fluid abgesaugt wird. Dies verdeutlicht die sehr fallspezifische optimale Auslegung des aktiven Aktuationsmechanismus und unterstreicht damit den hohen Nutzen adjungiertenbasierter Optimierungsverfahren für die praktische Anwendung der Ablösekontrolle an aerodynamischen Konfigurationen.

Zum Abschluss der Untersuchungen zur Zylinderumströmung soll anhand von Abb. 8.10 die Entwicklung der einzelnen Anteile der Zielfunktion während des Optimierungsverlaufs näher beleuchtet werden. Auffällig ist, dass die Summe aus Druck- und Reibungswiderstand,

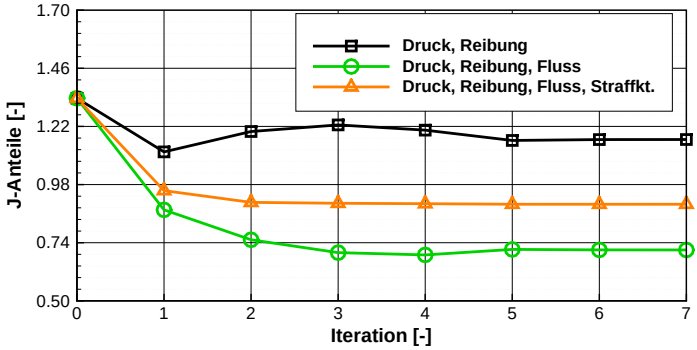


Abbildung 8.10: Entwicklung der Anteile der Zielfunktion im Verlauf der Optimierung

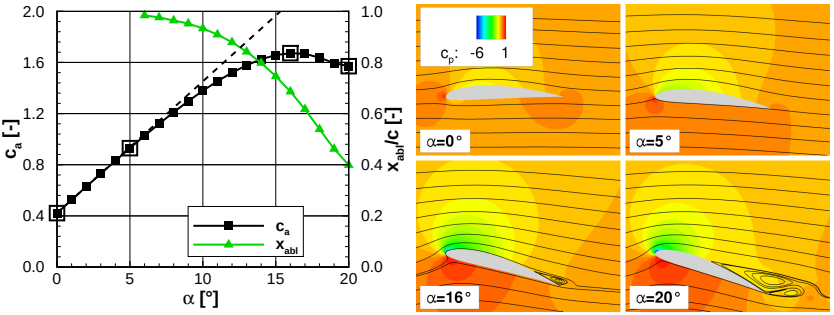
repräsentiert durch die schwarze Kurve, ihr Minimum nach der ersten Iteration annimmt und dann zwischenzeitlich wieder ansteigt, während der in grün dargestellte Gesamtwiderstand weiter abfällt. Die Ursache für dieses Verhalten ist der durch die Aktuation auf der Zylinderrückseite erzeugte Vortrieb. Dieser wird durch den Strafterm teilweise kompensiert, so dass die als orange Kurve dargestellte Zielfunktion oberhalb des Gesamtwiderstandes liegt.

Die in Abb. 8.10 gezeigten Zusammenhänge verdeutlichen, dass im hier untersuchten Fall der Vortrieb der Aktuation einen erheblichen Anteil an der Widerstandsreduktion und damit an der Minimierung der Zielfunktion hat. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Definition der Straffunktion lediglich auf der eingetragenen Energie der gepulsten Anregung basiert. Ein Ansatzpunkt für weiterführende Arbeiten wäre die zusätzliche Modellierung des Aufwands zur Erzeugung der Aktuation im Strafterm. Es ist anzunehmen, dass dies die Verhältnisse in Abb. 8.10 verschieben und damit die Minimierung des Druckwiderstands an Bedeutung gewinnen würde.

[2] Man beachte die unterschiedliche Skalierung der Geschwindigkeitsvektoren in Abb. 8.9.

8.2 Auftriebsmaximierung einer NACA4412-Profilumströmung

Die Strömungsablösung an einem Flügel bzw. Flügelprofil stellt ein weiteres strömungsphysikalisches Phänomen dar, welches in der Aerodynamik von großer Bedeutung ist. Im Folgenden soll dieses Problem exemplarisch anhand der Umströmung eines NACA4412-Profils erläutert werden. Abb. 8.11a zeigt die aufgelöste Polare sowie die Ablöseposition für die Umströmung



(a) Aufgelöste Polare und Ablöseposition

(b) Druckfeld und Stromlinien für ausgewählte Anstellwinkel

Abbildung 8.11: Entwicklung von Auftriebsbeiwert und Ablösung mit Steigerung des Anstellwinkels

des Profils bei $\mathrm{Re} = 10^6$. Daneben sind Konturplots des Druckfelds für ausgewählte Anstellwinkel dargestellt. Bereits bei ebener Anströmung erfährt des Profil einen Auftrieb, da es asymmetrisch ist. Bis zu einem Anstellwinkel von $\alpha = 5^o$ bleibt die Strömung anliegend. Der Abströmwinkel an der Hinterkante steigt an, während der Staupunkt auf die Unterseite des Profils wandert. Dies erhöht die Gesamtumlenkung der Strömung und sorgt für einen linearen Anstieg des Auftriebsbeiwerts. Ab einem Anstellwinkel von $\alpha = 6^o$ kann die Strömung der Profilkontur auf der Saugseite aufgrund des positiven Druckgradienten nicht mehr folgen und löst nahe der Hinterkante ab. Das Rezirkulationsgebiet kann der Profilgeometrie angerechnet werden, so dass es praktisch zu einer Entwölbung des Profils kommt. Diese hat einen negativen Einfluss auf den Auftrieb und wirkt dem positiven Effekt der Anstellwinkelerhöhung entgegen, so dass der Auftriebsbeiwert ab $\alpha = 6^o$ einen nichtlinearen Verlauf mit abnehmender Steigung annimmt. Ab $\alpha = 13^o$ wird die Strömung in der Simulation durch Anfachung von Instabilitäten in der abgelösten Scherschicht instationär, wobei die Intensität der instationären Strukturen mit steigendem Anstellwinkel kontinuierlich zunimmt. Der maximale Auftriebsbeiwert des Profils wird schließlich bei $\alpha = 16^o$ erreicht, wobei die Ablösung bereits ca. 31% der Saugseite einnimmt. Mit einer weiteren Steigerung des Anstellwinkels wird die durch die Ablösung herbeigeführte Entwölbung des Profils schließlich so stark, dass der Auftriebsbeiwert wieder sinkt. Beim größten dargestellten Anstellwinkel von $\alpha = 20^o$ liegt die Ablöseposition bei $x/c \approx 0.40$ und nimmt damit etwa 60% der Saugseite ein. Ein analoges Verhalten der Strömung ergibt sich auch an der Hinterkantenklappe moderner Hochauftriebskonfigurationen in Abhängigkeit des Klappenwinkels.

In vielen Forschungsaktivitäten der vergangenen Jahre konnte nachgewiesen werden, dass sich diese Art der Strömungsablösung sehr wirkungsvoll durch zeitperiodisches Einblasen und Absaugen vermindern oder sogar unterdrücken lässt [32]. In vielen Fällen wird dazu im Bereich der Ablöseposition über einen Einzelschlitz aktuiert [32, 47, 63], obwohl einige Untersuchungen darauf hindeuten, dass die Wirksamkeit der Anregung durch eine komplexere Anordnung deutlich gesteigert werden kann [57, 65, 71, 76, 108].

Vor diesem Hintergrund wurden mit dem adjungiertenbasierten Optimierungsverfahren Untersuchungen zur Auftriebsmaximierung durch kaskadiertes Einblasen und Absaugen am NACA4412-Profil durchgeführt. Ein wesentliches Ziel dieser Simulationen ist die Quantifizierung der Auftriebssteigerung, die eine komplexe Aktuationsanordnung bei optimaler Auslegung im Vergleich zu einer Anregung über einen Einzelschlitz bei dieser Konfiguration generieren kann. Unter der Annahme, dass die strömungsphysikalischen Zusammenhänge an der Hinterkantenklappe einer Hochauftriebskonfiguration sehr ähnlich sind, lässt sich auf diese Weise auch das Potential einer verteilten Aktuationsanordnung für diesen Anwendungsfall abschätzen.

Darüber hinaus können die in Kap. 7 nachgewiesenen Konsistenzdefizite des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens genauer analysiert werden. Während im Rahmen der Validierung im Wesentlichen gezeigt wurde, welchen Einfluss die Inkonsistenz auf die Genauigkeit des berechneten Gradienten hat, soll nun die Auswirkung der fehlerbehafteten Gradienteninformation auf den Optimierungsverlauf der aktiven Beeinflussung einer instationären turbulenten Strömung im Mittelpunkt stehen.

8.2.1 Setup

Die numerischen Simulationen wurden am NACA4412-Profil bei einer Reynoldszahl von $\mathrm{Re} = 10^6$ und einem Anstellwinkel von $\alpha = 20^o$ durchgeführt. In der unbeeinflussten Strömung führt die hohe Anstellung zu einer massiven Ablösung auf der Saugseite des Profils (siehe Abb. 8.11b). Für die Aktuation wurden im Bereich des Ablösegebiets acht Schlitze vorgesehen (siehe Abb. 8.13), an denen wie bei der Zylinderumströmung (Kap. 8.1.2, Gl. 8.1) senkrecht zur Oberfläche zeitperiodisch eingeblasen und abgesaugt wurde:

$$u_i = u_a r_i \sin\left[2\pi f\left(t - t_0\right)\right] \quad \text{mit} \quad r_i = \begin{pmatrix} \cos\left(\beta - \theta\right) \\ \sin\left(\beta - \theta\right) \end{pmatrix}.$$

Die Anregefrequenz wurde mit $f = 1.28\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ so gewählt, dass sie im Bereich der dominanten Frequenz des instationären Nachlaufs der natürlichen Strömung liegt. Die genaue Position der Schlitze ist in Tab. 8.2 zusammengefasst. Das verwendete Rechengitter besitzt 41900 Kontrollvolumina und ist zur Wand hin verdichtet. Die Gittertopologie sowie die verwendeten Randbedingungen sind der Abb. 8.12 zu entnehmen. Alle Simulationen wurden mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.005\,\mathrm{s}$ durchgeführt, wobei auf jedem Zeitschritt eine Abnahme der Residuen um vier Größenordnungen als Abbruchkriterium festgelegt wurde. Als Konvektionsschema kam das TVD-Verfahren zum Einsatz. Die Turbulenz wurde mit Hilfe des Wilcox-k-ω-Modells (siehe Anh. A) erfasst. Das Optimierungsziel war in allen Fällen die Maximierung des Auf-

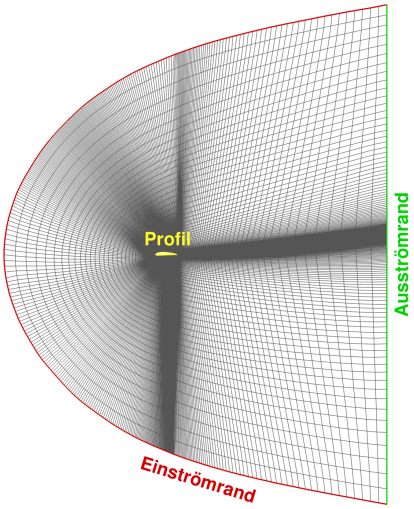


Abbildung 8.12: Gitter und Fernfeldrandbedingungen für das NACA4412-Profil

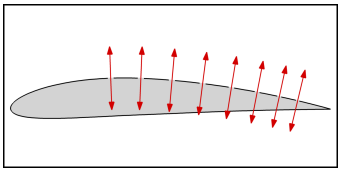


Abbildung 8.13: Anordnung der Anregeschlitze

Schlitz	Position
1	$x/c = 0.299 - 0.326$
2	$x/c = 0.392 - 0.421$
3	$x/c = 0.489 - 0.518$
4	$x/c = 0.585 - 0.613$
5	$x/c = 0.676 - 0.702$
6	$x/c = 0.758 - 0.780$
7	$x/c = 0.829 - 0.848$
8	$x/c = 0.888 - 0.903$

Tabelle 8.2: Position der Anregeschlitze auf der Saugseite

triebsbeiwerts. Die Optimierungsrechnungen wurden dabei jeweils so lange fortgeführt, bis die Suchrichtung p_k aufgrund der mangelnden Genauigkeit des berechneten Gradienten keine Abstiegsrichtung mehr darstellte.

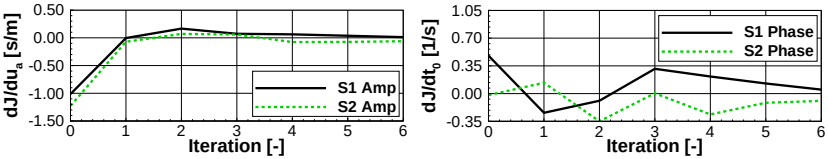
8.2.2 Ergebnisse

Zunächst sollte anhand von Optimierungsrechnungen auf Basis Finiter Differenzen und des Adjungiertenansatzes untersucht werden, welche Unterschiede sich im Optimierungsverlauf aufgrund des Konsistenzfehlers ergeben und ob beide Ansätze zumindest in einem ähnlichen Optimum münden. Zu optimieren waren bei diesem Vergleich mit der Anregeamplitude und -phase an allen Positionen insgesamt 16 Parameter. Als Anfangsverteilung wurde an allen Schlitzen mit $u_a = 0.02\,\mathrm{m/s}$ eine von null verschiedene Amplitude gewählt, um numerische Probleme aufgrund der Turbulenzgrößen an den Schlitzen zu vermeiden[3]. Ausgehend von der eingeschwungenen natürlichen Strömung wurde die primale Lösung in jedem Optimierungsschritt über 10000 Zeitschritte integriert. Für die Berechnung des Auftriebsbeiwerts sowie des Gradienten wurde der transiente Anfahrvorgang, der sich nach Einschalten der Aktuation einstellt, mit berücksichtigt (siehe auch Kap. 4.3.6).

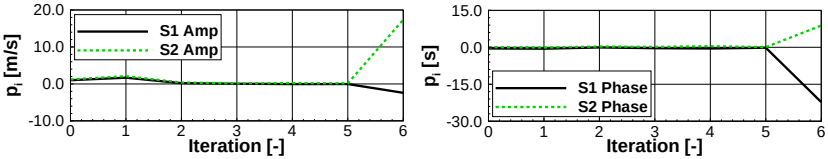
Bei Anwendung des BFGS-Verfahrens in Verbindung mit dem Adjungiertenansatz musste die Optimierung bereits nach der fünften Iteration abgebrochen werden, da sich die Suchrichtung

[3] Bei $u_a = 0\,\mathrm{m/s}$ müssten k und ω am Anregeschlitz ebenfalls null sein, während ω an den benachbarten Wandsegmenten sehr groß wird. Dies kann zu numerischen Stabilitätsproblemen führen.

p_k in dieser Iteration plötzlich unverhältnismäßig stark änderte, während die Sensitivitäten einen unauffälligen Verlauf aufwiesen. In Abb. 8.14 ist dieses Problem exemplarisch für die Anregepositionen 1 und 2 dargestellt. Die Ursache für dieses Verhalten ist eine Degenera-



(a) Sensitivitäten an Schlitz 1 und 2 im Verlauf der Optimierung



(b) Suchrichtung an Schlitz 1 und 2 im Verlauf der Optimierung

Abbildung 8.14: Entwicklung der Sensitivitäten und der Suchrichtung an den Schlitzen 1 und 2 bei Verwendung des BFGS-Verfahrens

tion der approximierten Hesse-Matrix B_{ij}, bei der einzelne Komponenten plötzlich starken Schwankungen unterworfen sind. Eine fehlerhafte Implementierung des BFGS- und des Liniensuchverfahrens kann aufgrund der bisherigen Ergebnisse jedoch nahezu ausgeschlossen werden. Es liegt vielmehr nahe, dass der Fehler in der Gradienteninformation, welcher durch die Inkonsistenz zwischen primalem und adjungiertem System hervorgerufen wird, zu einer Degeneration der Matrix B_{ij} führt. Insbesondere das teilweise falsche Vorzeichen der Sensitivitäten könnte hier eine entscheidende Rolle spielen. Aus diesem Grund wurde für alle weiteren Optimierungsrechnungen mit dem Adjungiertenansatz das Abstiegsgradientenverfahren verwendet. Die Optimierungsrechnungen auf Finite-Differenzen-Basis erfolgten dagegen mit dem BFGS-Verfahren.

Abb. 8.15 zeigt einen Vergleich der Optimierungsergebnisse, die mit dem Adjungiertenverfahren und Finiten Differenzen erzielt wurden. Dabei überrascht, dass der Optimierungsverlauf der beiden Ansätze trotz der Konsistenzprobleme des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens starke Ähnlichkeit aufweist. Vor allem ab Iteration 8 sind die Unterschiede sehr klein und der Auftriebsbeiwert konvergiert mit $c_{a,ADJ} = 2.066$ bzw. $c_{a,FD} = 2.061$ näherungsweise gegen den gleichen Wert. Dies entspricht einem Auftriebsgewinn gegenüber der unangeregten Strömung von ca. 31%. Der Maximalauftrieb, der bei der natürlichen Strömung bei $\alpha = 16^o$ erreicht wird und $c_{a,max} = 1.672$ beträgt, kann durch die optimale Aktuation um etwa 23% gesteigert werden.

Schaut man sich die optimale Verteilung der Anregeparameter für beide Verfahren in Abb. 8.16 an, sieht man auf den ersten Blick recht deutliche Unterschiede, wobei bei der Amplitudenverteilung zumindest eine grobe qualitative Ähnlichkeit zu sehen ist. Bei genauem Hinsehen fällt auf, dass die Kurven um einen Schlitz gegeneinander versetzt sind. Verschiebt man z.B. die

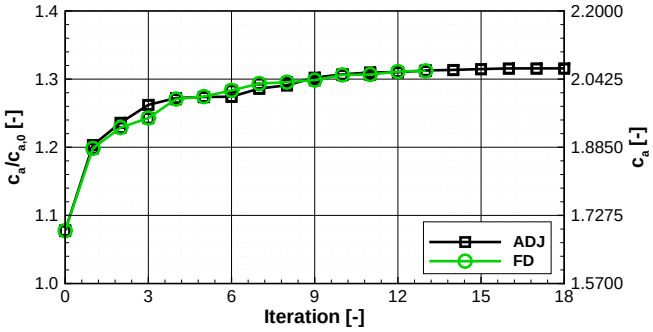
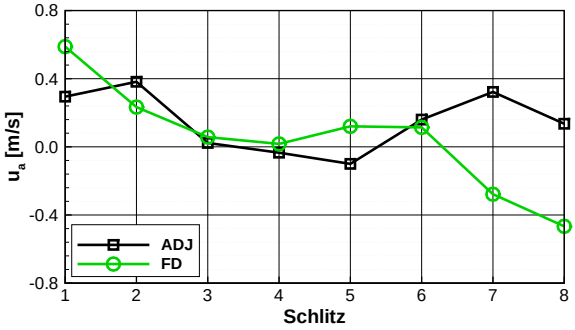
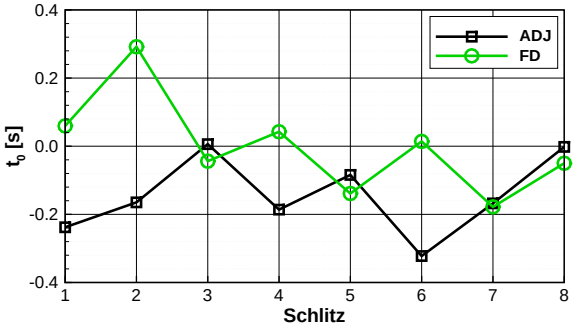


Abbildung 8.15: Einfluss der gewählten Methode zur Gradientenberechnung auf den Optimierungsverlauf des Auftriebsbeiwerts



(a) Amplitude



(b) Phasenverschiebung

Abbildung 8.16: Optimale Anregeparameter, die mit der Optimierung auf Basis des kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens und Finiter Differenzen berechnet wurden

FD-basierten Verläufe um einen Schlitz nach rechts, stimmt die Lage der Extrema relativ gut mit den adjungiertenbasierten Ergebnissen überein.

Anhand der in Abb. 8.17 gezeigten Momentanaufnahmen des Strömungsfeldes lässt sich genauer analysieren, wie die Aktuation innerhalb einer Anregeperiode aussieht und welchen Einfluss sie auf die Umströmung des Profils hat. Gezeigt ist eine Gegenüberstellung der jeweils optimalen Aktuation in Form von Konturplots des Geschwindigkeitsbetrags sowie einer Visualisierung der Wirbelstrukturen auf Basis des λ_2-Kriteriums (Gl. 8.4) für vier Zeitpunkte innerhalb einer Anregeperiode, die sich von $t^* = 0$ bis $t^* = 1$ erstreckt.

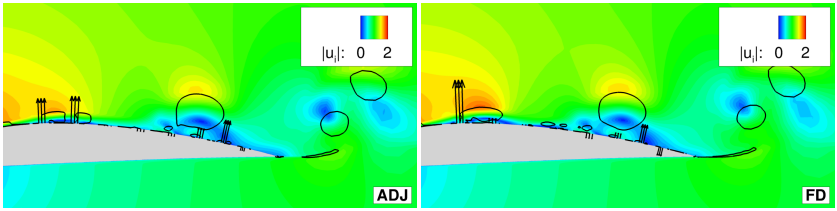
Es fällt auf, dass die sehr komplexe Strömungstopologie auf der Saugseite des Profils zu allen Zeitpunkten nahezu identisch ist, obwohl sich die in Abb. 8.16 gezeigten optimalen Parameter auf den ersten Blick recht deutlich unterscheiden. Die Aktuation erzeugt eine große, im Uhrzeigersinn rotierende Wirbelstruktur, die sich entlang der Saugseite stromab bewegt und energiereiches Fluid zur Oberfläche des Profils transportiert. Damit kommt es zu einem zeitweisen Wiederanlegen der Strömung, welches für einen großen Teil des Auftriebsgewinns verantwortlich ist.

Interessanterweise wird die Wirbelstruktur im hinteren Bereich des Profils von der Aktuation quasi von der Wand weggeblasen. Intuitiv würde man hier eher erwarten, dass die Wirbelstruktur so lange wie möglich am Profil gehalten wird, um erstens ein erneutes Ablösen der Strömung zu verhindern und zweitens das Druckminimum im Wirbelkern an der Oberfläche zu halten. Ob dieses Verhalten darauf zurückzuführen ist, dass die gezeigte Parameterverteilung nur ein lokales Optimum darstellt, oder ob das Wegblasen der Wirbelstruktur von der Oberfläche strömungsphysikalisch günstig ist, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht abschließend geklärt werden. Diese Fragestellung stellt jedoch einen interessanten Ansatzpunkt für weiterführende Untersuchungen dar.

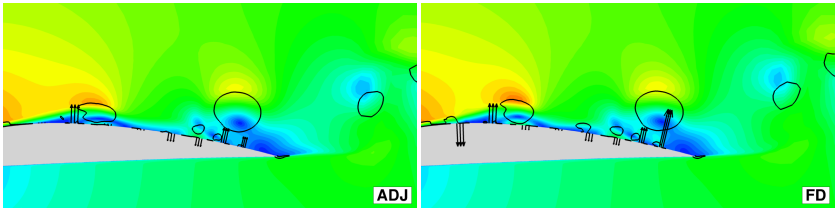
Bezüglich der Aktuation lässt sich feststellen, dass sich in beiden Fällen insbesondere im hinteren Bereich, also an den Schlitzen 5 bis 8, eine recht ähnliche Verteilung einstellt, die man auf den ersten Blick anhand von Abb. 8.16 nicht erwartet hätte. Besonders auffällig ist, dass die Verteilung der Aktuation eine wellenförmige Charakteristik aufweist. Offensichtlich ist diese Form von großer Wichtigkeit, während die Unterschiede in der Intensität der Aktuation zweitrangig sind. Dieses Verhalten weist eine gewisse Analogie zu der häufig gemachten Beobachtung auf, dass die Anregeintensität nach Überschreiten eines gewissen Niveaus nur noch geringen Einfluss auf die Effektivität der Aktuation hat [47].

Da das instantane, optimal aktuierte Strömungsfeld bei beiden Verfahren nahezu identisch ist, zeigt die mittlere c_p-Verteilung auf der Profiloberfläche in Abb. 8.18 erwartungsgemäß kaum Unterschiede. Gegenüber der natürlichen Strömung wird jedoch der starke Auftriebszuwachs anhand des vergrößerten Flächeninhaltes der c_p-Kurven für den aktuierten Fall sehr deutlich. Aufgrund der periodischen Anregung kommt es zu einer signifikanten Absenkung des Druckniveaus auf der Saugseite des Profils. Dieser Effekt bleibt nicht auf den Bereich der Anregeschlitze beschränkt, sondern erstreckt sich nahezu über die gesamten Saugseite, da mit der fast vollständigen Beseitigung des Ablösegebietes auch dessen entwölbende Wirkung verschwindet und so die Umströmung des Profils verbessert wird.

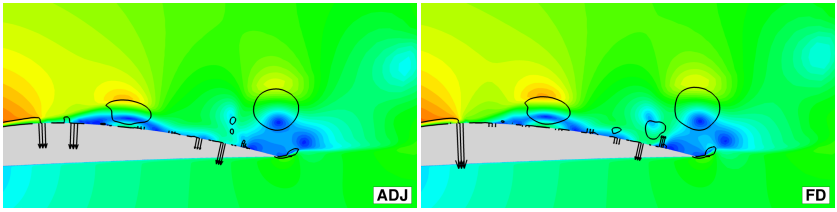
Im Folgenden soll nun näher beleuchtet werden, in welchem Maß sich die Effektivität der Strömungsbeeinflussung erhöhen lässt, wenn man die Anzahl der zu optimierenden Anre-



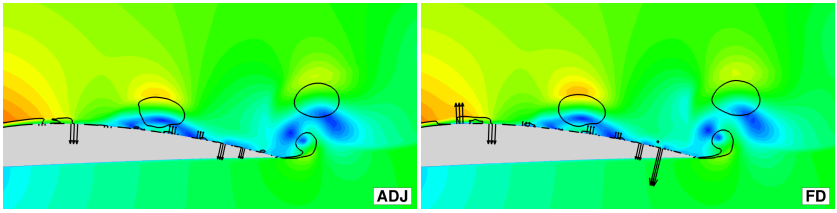
(a) $t^* = 0.00$



(b) $t^* = 0.25$



(c) $t^* = 0.50$



(d) $t^* = 0.75$

Abbildung 8.17: Zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes und Wirbelstrukturen innerhalb einer Periode der optimalen Aktuation, berechnet auf Basis des Adjungiertenverfahrens und Finiter Differenzen

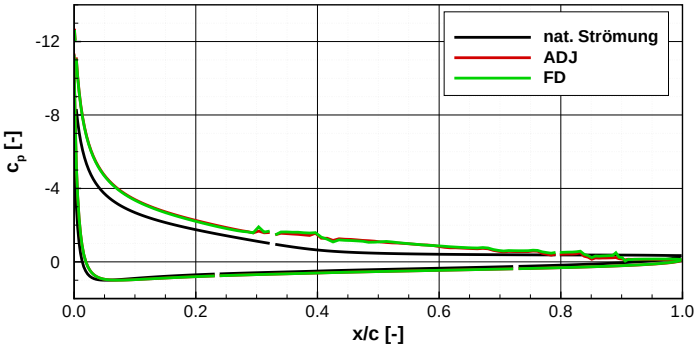


Abbildung 8.18: Zeitgemittelte c_p-Verteilung auf der Profiloberfläche bei optimaler Aktuation, berechnet auf Basis des Adjungiertenverfahrens und Finiter Differenzen

geparameter vergrößert. Ausgangspunkt dieser Betrachtung ist die Aktuation über einen Einzelschlitz, die im vorliegenden Fall an der Position 2 erfolgte, da sich diese am nächsten zur Ablöseposition befindet. Im Vergleich dazu wurden außerdem zwei Optimierungen mit acht Anregeschlitzen durchgeführt, bei denen einmal nur die Amplitude variabel war und einmal sowohl die Amplitude als auch die Phasenverschiebung freigegeben wurde. Dies entspricht Optimierungsrechnungen mit acht bzw. 16 Anregeparametern.

Für diesen Vergleich wurde die primale Lösung wie bisher über 10000 Zeitschritte vorwärts integriert, wobei jedoch die ersten 5000 Zeitschritte, die den transienten Anfahrvorgang nach dem Einschalten der Aktuation beinhalten, vernachlässigt wurden. Diese Entscheidung wurde vor dem Hintergrund getroffen, dass sich der Anfahrvorgang bei dieser Konfiguration im Vergleich zum eingeschwungenen Zustand oft atypisch verhält. In Abb. 8.19 ist dies beispielhaft anhand des zeitlichen Verlaufs des Auftriebsbeiwerts für verschiedene Extrapolationsschrittweiten α dargestellt. Dabei ist die Zeitachse aus Gründen der Übersichtlichkeit logarithmisch skaliert. Man erkennt deutlich, dass sich die optimale Extrapolationsschrittweite je nach Fortschritt der Zeitintegration ändert. Erst nach ca. 4 Sekunden bzw. 800 Zeitschritten ergibt sich ein eindeutiger Trend. Der zeitliche Mittelwert des Auftriebsbeiwerts, der in der Abbildung gestrichelt dargestellt ist, reagiert sogar noch langsamer auf diese Trendänderung. Da man in der Regel am eingeschwungenen Zustand interessiert ist und der Anfahrvorgang diesbezüglich die Ergebnisse verfälscht, wurde er für den nachfolgenden Vergleich vernachlässigt.

Anhand des Optimierungsverlaufs des Auftriebsbeiwerts in Abb. 8.20a lässt sich erkennen, dass mit zunehmender Anzahl der freien Parameter eine Verbesserung des Auftriebs einhergeht. Mit der Standardkonfiguration, also der Aktuation über einen Einzelschlitz, lässt sich eine Auftriebssteigerung um ca. 26% auf $c_a \approx 1.986$ erzielen. Mit einer Anregung über acht Schlitze, bei der nur die Amplituden optimiert werden, verbessert sich der Auftriebsgewinn gegenüber der natürlichen Strömung auf ca. 32%. Gibt man zusätzlich noch die Phasenverschiebung an den acht Anregepositionen frei, steigert sich der Auftriebszuwachs nochmals um etwa 2% auf insgesamt 34% und erreicht $c_a \approx 2.108$. Bezogen auf den Maximalauftrieb der natürlichen

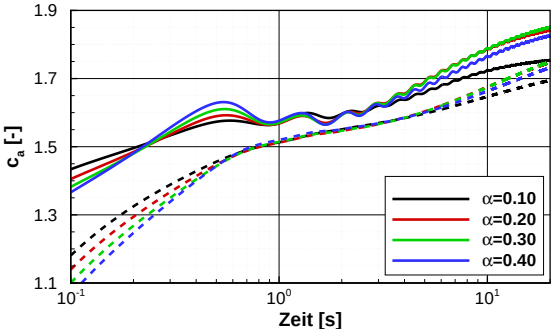
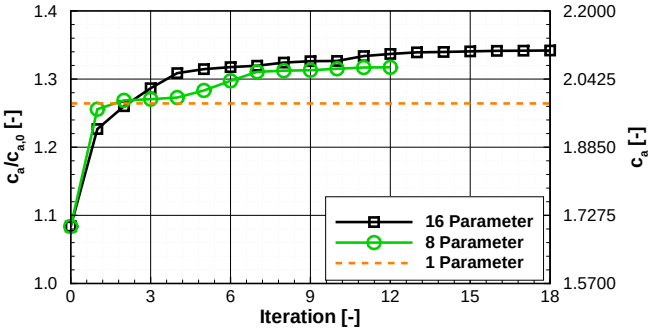
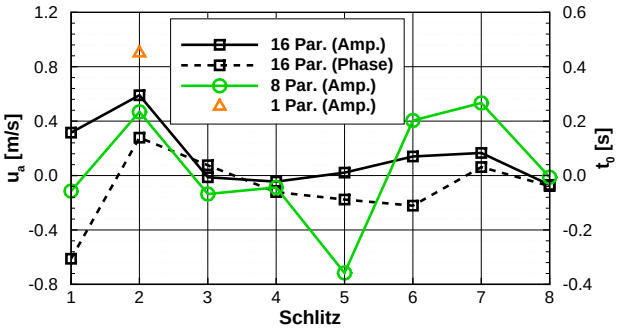


Abbildung 8.19: Zeitlicher Verlauf des instantanen (durchgezogene Linien) und gemittelten (gestrichelte Linien) Auftriebsbeiwerts für verschiedene Extrapolationsschrittweiten α



(a) Optimierungsverlauf des Auftriebsbeiwerts



(b) Optimale Verteilung der Anregeparameter

Abbildung 8.20: Ergebnisse der Optimierung, die mit einem, acht und 16 Anregeparametern erzielt wurden

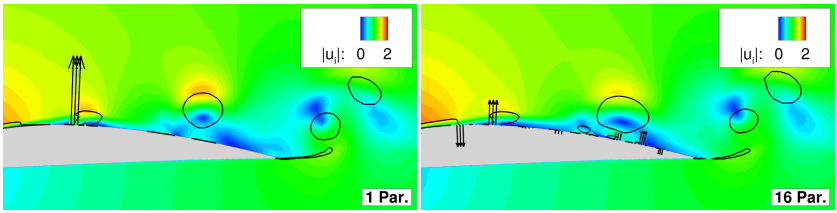
Strömung von $c_{a,max} = 1.672$ ergibt sich mit den drei Aktuationsvarianten eine Steigerung um 19%, 24% bzw. 26%. Schaut man sich die Verteilung der optimalen Anregeparameter in Abb. 8.20b an, fällt die relativ große qualitative Ähnlichkeit des Amplitudenverlaufs bei der Optimierung mit acht und 16 Parametern auf, wobei der größte Unterschied bei Schlitz 5 auftritt. Bei der Aktuation über acht Schlitze lässt sich wieder die charakteristische wellenförmige Verteilung der Amplitude beobachten.

Für eine genauere Analyse der strömungsphysikalischen Effekte sollen im Folgenden die Ergebnisse der optimalen Aktuation mit einem und 16 Anregeparametern gegenübergestellt werden. Zu diesem Zweck sind in Abb. 8.21 wieder Momentanaufnahmen des Strömungsfeldes sowie die auf dem λ_2-Kriterium basierenden Wirbelstrukturen zu verschiedenen Zeitpunkten innerhalb einer Anregeperiode dargestellt. Das instantane Strömungsfeld weist große topologische Ähnlichkeit auf, d.h., nahezu alle Strukturen sind mehr oder weniger ausgeprägt in beiden Simulationen vorhanden. Zunächst wird eine im Uhrzeigersinn rotierende Wirbelstruktur im Bereich der ursprünglichen Ablöseposition erzeugt, die energiereiches Fluid aus der Außenströmung zur Wand transportiert und die Strömung teilweise wieder zum Anliegen bringt. Im Vergleich zur Einzelschlitzanregung wird diese Wirbelstruktur bei kaskadierter Aktuation im Bereich der hinteren Schlitzpositionen etwas näher an der Profiloberfläche gehalten.

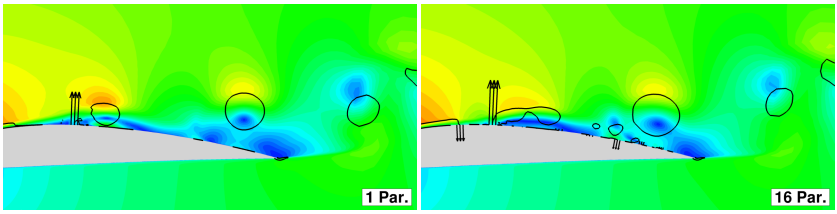
Die in Abb. 8.22a gezeigten Konturplots der Druckdifferenz zur natürlichen Strömung $\Delta c_p = c_{p,aktuiert} - c_{p,natürlich}$ verdeutlichen die Auswirkung der beschriebenen Vorgänge auf das zeitgemittelte Druckfeld. Interessant ist hierbei, dass die Ablösung im zeitlichen Mittel auch bei einer kaskadierten Anregung nicht vollständig unterdrückt wird, obwohl man dies intuitiv erwarten würde. Es ist vielmehr so, dass im Bereich um $x/c \approx 0.6$ eine Ablöseblase verbleibt, die bei kaskadierter Anregung eine größere Ausdehnung in wandnormaler Richtung aufweist. Darüber hinaus existiert im zeitlichen Mittel bei der verteilten Anregung ein weiteres, sehr kleines Rezirkulationsgebiet nahe des ersten Schlitzes. Der in der Region der Ablöseblasen erzeugte Druckabfall ist zwar etwas weniger ausgeprägt als bei der Einzelschlitzaktuation, erstreckt sich aber über einen weiteren Bereich und erzeugt so den zusätzlichen Auftriebsgewinn.

Man sieht dies auch sehr deutlich in der zeitgemittelten c_p-Verteilung auf der Profiloberfläche in Abb. 8.22b bzw. im vergrößerten Ausschnitt 8.22c. Durch die periodische Anregung wird das Ablösegebiet in beiden Fällen nahezu vollständig eliminiert. Dadurch wird die entwölbende Wirkung der Ablösung beseitigt und es kommt im Vergleich zur natürlichen Strömung zu einer Absenkung des statischen Drucks auf der gesamten Saugseite. Die Unterschiede zwischen den beiden gezeigten Aktuationsvarianten machen sich im Wesentlichen in der Umgebung der Anregeschlitze bemerkbar. Im Bereich des ersten Schlitzes und insbesondere an den Schlitzen 4 bis 6 wird mit einer kaskadierten Aktuation der zusätzliche Auftriebsgewinn erzeugt.

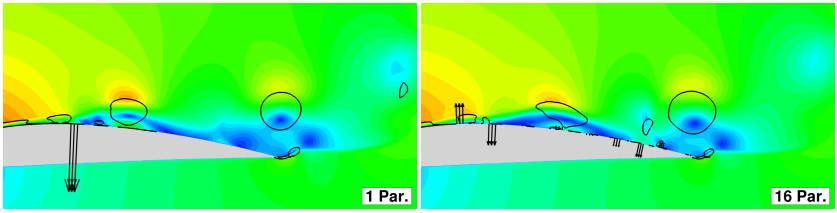
Die in Abb. 8.23 gezeigten Konturplots des zeitgemittelten Druckfelds geben einen Einblick in die Entwicklung des Strömungsfelds während des Optimierungsverlaufs. Schon in der zweiten Iteration ist die massive Ablösung fast vollständig verschwunden und es sind im zeitlichen Mittel nur noch zwei kleine, sehr flache Ablöseblasen vorhanden. Anhand des eingeblendeten c_a-Verlaufs erkennt man, dass zu diesem Zeitpunkt bereits ca. 78% der insgesamt mit dieser Aktuation realisierten Auftriebssteigerung erreicht sind. Das ist etwa das Niveau, das sich mit einer periodischen Anregung über einen Einzelschlitz erreichen lässt. Bei Iteration 5 sind die Ablöseblasen nochmals deutlich geschrumpft und der Auftriebsgewinn entspricht



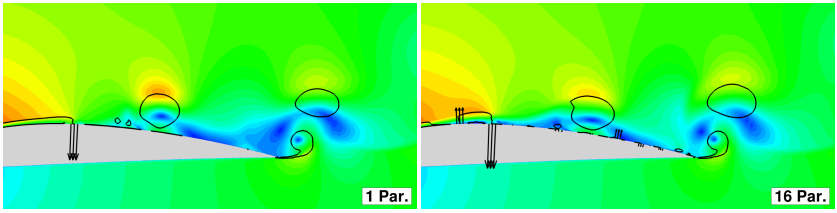
(a) $t^* = 0.00$



(b) $t^* = 0.25$

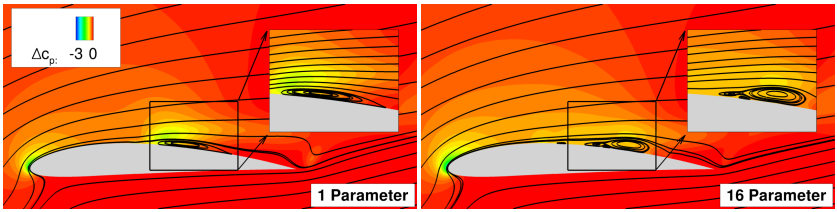


(c) $t^* = 0.50$

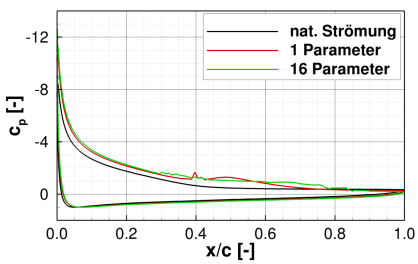


(d) $t^* = 0.75$

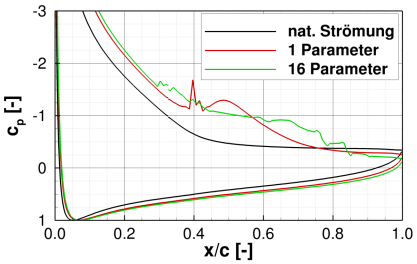
Abbildung 8.21: Zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes und Wirbelstrukturen innerhalb einer Periode der optimalen Aktuation mit einem und 16 Anregeparametern



(a) Normierte Druckdifferenz zur natürlichen Strömung Δc_p im gesamten Feld und Stromlinien



(b) c_p auf der Profiloberfläche



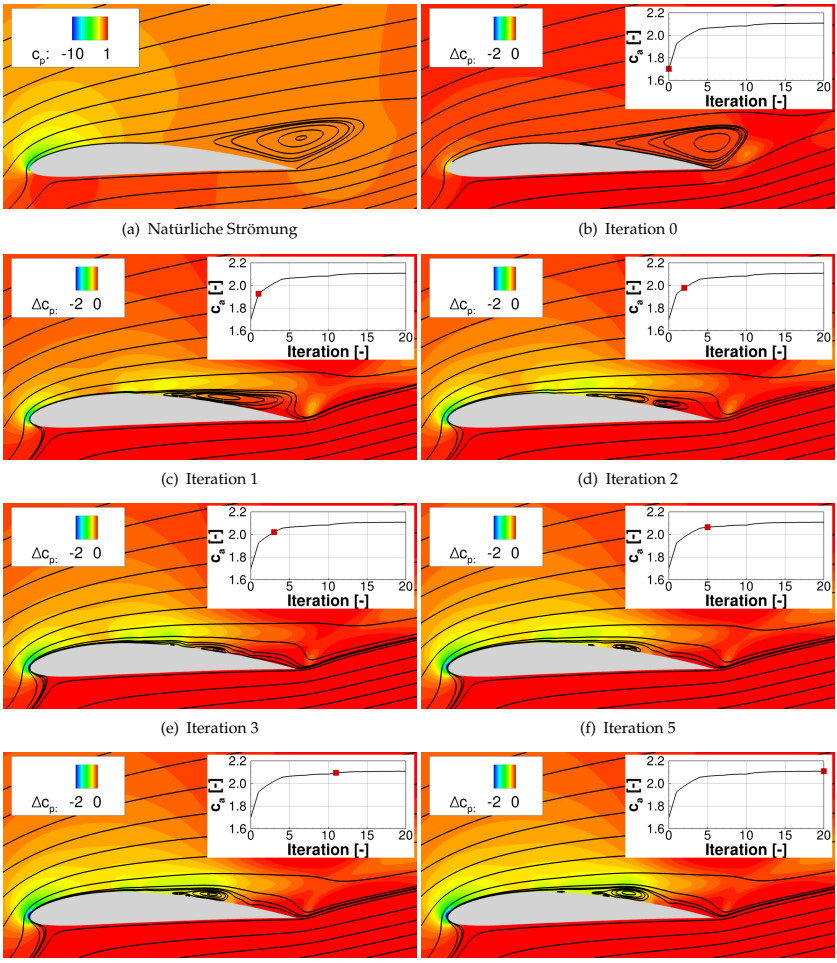
(c) c_p auf der Profiloberfläche, vergrößerter Ausschnitt

Abbildung 8.22: Zeitgemittelte Druckverteilung und Stromlinien bei optimaler Aktuation mit einem und 16 Anregeparametern

mit 32% dem der Optimierung mit acht Anregeparametern. In den folgenden Iterationen bleibt das Strömungsfeld anschließend fast identisch, bis sich ab Optimierungsschritt 11 die hintere Ablöseblase wieder vergrößert und bei Iteration 20 ihre finale Abmessung erreicht. Zwischen Iteration 11 und 20 wird durch die Vergrößerung der Ablöseblase der zusätzliche Auftriebsgewinn gegenüber der Optimierung mit acht Parametern generiert.

Die in Abb. 8.24 gezeigte c_p-Verteilung auf der Profiloberfläche in Abhängigkeit des Optimierungsverlaufs verdeutlicht diese Vorgänge nochmals sehr anschaulich. Zu Beginn gibt es durch die Verkleinerung des Ablösegebietes zunächst einen globalen Effekt auf die gesamte Profilumströmung, der sich in einer Absenkung des Druckniveaus auf der Saugseite niederschlägt. Nachdem die Ablösung fast eliminiert ist, spielt sich die gesamte Optimierung praktisch nur noch im Bereich zwischen $x/c = 0.3$ und $x/c = 0.8$ ab, also genau jenem Abschnitt, in dem sich die Anregeschlitze befinden und die Strömung im zeitlichen Mittel die in Abb. 8.23 sichtbaren Ablöseblasen aufweist. Durch die Absenkung des Druckniveaus in diesem Bereich wird der Auftriebsgewinn gegenüber der Optimierung mit einem Parameter generiert.

Abschließend soll der Fragestellung nachgegangen werden, ob die mit dem Adjungiertenansatz gefundene Parameterverteilung tatsächlich ein Optimum darstellt. Dies lässt sich relativ leicht anhand der in Abb. 8.25 gezeigten Sensitivitäten zur letzten Iteration prüfen. Daraus wird ersichtlich, dass die adjungiertenbasierten Sensitivitäten z.T. erheblich von null verschieden sind. Bei der Liniensuche für den nächsten Optimierungsschritt musste jedoch festgestellt werden, dass die aus dem Gradienten bestimmte Suchrichtung p_k keine Abstiegsrichtung mehr



(a) Natürliche Strömung

(b) Iteration 0

(c) Iteration 1

(d) Iteration 2

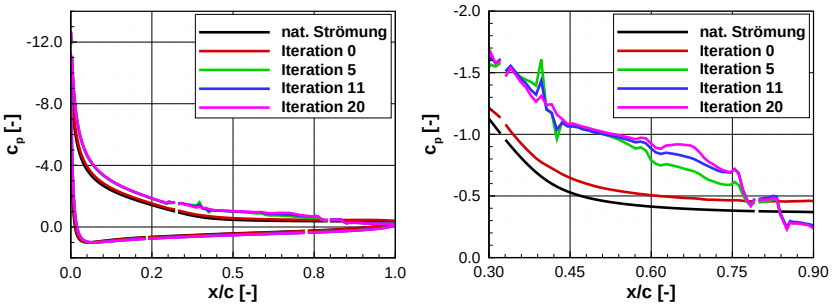
(e) Iteration 3

(f) Iteration 5

(g) Iteration 11

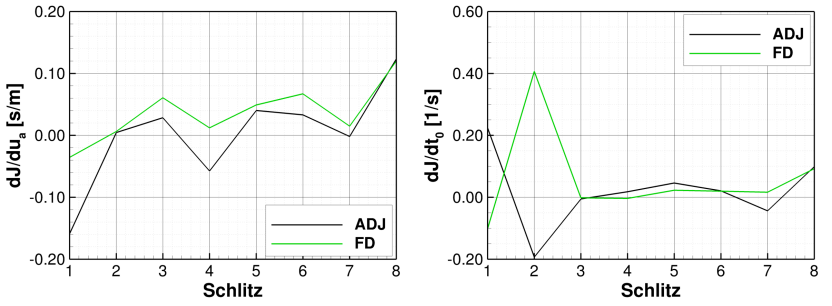
(h) Iteration 20

Abbildung 8.23: Entwicklung des zeitgemittelten Druckfelds und Stromlinien im Verlauf der Optimierung der Aktuation mit 16 Parametern. Gezeigt ist der Druckbeiwert c_p bzw. die normierte Druckdifferenz zur natürlichen Strömung Δc_p.



(a) Gesamtes Profil (b) Ausschnitt

Abbildung 8.24: Zeitgemittelte c_p-Verteilung auf der Profiloberfläche im Verlauf der Optimierung der Aktuation mit 16 Parametern



(a) Sensitivität bezüglich der Amplitude (b) Sensitivität bezüglich der Phasenverschiebung

Abbildung 8.25: Vergleich des adjungiertenbasierten Gradienten mit Finiten Differenzen für Iteration 20 der Optimierung

ist. Die Ursache hierfür lässt sich aus einem Vergleich mit den Finiten Differenzen ableiten. Diese stimmen zwar in großen Teilen qualitativ mit den adjungiertenbasierten Ableitungen überein, weisen aber vom Betrag teilweise große Unterschiede auf, die an einigen Stellen deutlich über 100% liegen. An mehreren Positionen unterscheidet sich darüber hinaus das Vorzeichen. Es lässt sich daher schlussfolgern, dass die finale Parameterverteilung noch nicht das gewünschte Optimum darstellt. Ein Möglichkeit wäre nun, von diesem Punkt aus die Optimierung auf Basis Finiter Differenzen weiterzuführen, um zu analysieren, welche Auftriebssteigerung noch möglich ist und welcher Strömungszustand sich letztendlich als optimal herausstellt. Diese Untersuchung stellt einen interessanten Ansatzpunkt für weiterführende Forschungsaktivitäten dar.

8.3 Zusammenfassung

Nachdem bei der Verifikation und Validierung des Verfahrens ausschließlich Sensitivitäten miteinander verglichen wurden, stand in diesem Kapitel die Anwendung des kontinuierlichen Adjungiertenansatzes in Verbindung mit einem Optimierungsverfahren im Vordergrund.

Die Motivation hierfür war zum einen, die bereits diskutierten Vorteile eines adjungiertenbasierten Optimierungsverfahrens für die Auslegung einer komplexen instationären Aktuation zu nutzen und die dadurch hervorgerufenen strömungsphysikalischen Effekte zu analysieren. Aufgrund der bekannten Einschränkungen des URANS-Ansatzes für dieses Einsatzgebiet wurde darauf geachtet, diese Analyse anhand vergleichender Simulationen durchzuführen, so dass Trendaussagen auf Basis relativer Änderungen möglich waren.

Darüber hinaus sollten die Anwendungsfälle dazu genutzt werden, die unterschiedlichen Ansätze zur Gradientenberechnung in Verbindung mit einem Optimierungsverfahren zu vergleichen. Letztendlich sollten so auch die Grenzen des verwendeten kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens bei der Anwendung auf komplexe Strömungsphänomene aufgezeigt werden.

Die Auswahl der Testfälle orientierte sich an zwei typischen aerodynamischen Problemen. Zum einen ist dies die Ablösung hinter einem stumpfen Körper, die anhand der laminaren Zylinderumströmung bei einer Reynoldszahl von $\mathrm{Re} = 100$ untersucht wurde. Ziel war die Widerstandsminimierung durch die Optimierung einer Aktuation, die über 15 in Umfangsrichtung verteilte Schlitze erfolgte. Dabei stellte sich heraus, dass eine harmonische Anregung für diesen Strömungsfall ohne nennenswerten Einfluss auf den Widerstandsbeiwert bleibt. Die Tatsache, dass diese Aussage auf Basis zweier Simulationen getroffen werden konnte, unterstreicht deutlich den hohen Nutzen eines adjungiertenbasierten Verfahrens.

Mit gepulstem Einblasen bzw. Absaugen konnte der Widerstandsbeiwert des Zylinders von $c_w = 1.34$ auf $c_w = 0.90$ gesenkt werden, was einer Reduzierung von etwa 33% gegenüber der natürlichen Strömung entspricht. Anhand von Momentanaufnahmen der natürlichen und der optimal aktuierten Strömung konnte nachgewiesen werden, dass durch geeignete gepulste Anregung eine Synchronisierung des zuvor wechselseitigen Wirbelabwurfs erreicht werden kann. Außerdem schwächt die Anregung das Druckminimum in dem Wirbelpaar und bewegt dieses von der horizontalen Symmetrieachse nach außen. Diese beiden Effekte sorgen dafür, dass der statische Druck hinter dem Zylinder im Vergleich zur natürlichen Strömung ansteigt

und damit der Druckwiderstand sinkt.

Ein Vergleich zwischen dem BFGS- und dem Abstiegsgradientenverfahren anhand dieses Testfalls zeigte sowohl bei der erreichten Widerstandsminimierung als auch bei den berechneten Gradienten vernachlässigbare Unterschiede während des Optimierungsverlaufs. Dies kann als erfolgreiche Validierung der BFGS-Implementierung angesehen werden. Weiterhin konnte durch den Vergleich der adjungiertenbasierten Gradienten mit Finiten Differenzen nachgewiesen werden, dass das Optimierungsverfahren auf Basis des Adjungiertenansatzes zu einem lokalen Optimum konvergiert. Es kann somit festgehalten werden, dass das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Adjungiertenverfahren für die Optimierung der aktiven Beeinflussung einer instationären Strömung geeignet ist, sofern kein Turbulenzmodell verwendet wird.

Beim zweiten Strömungsphänomen handelt es sich um die druckinduzierte Ablösung an einem Tragflügel, das hier anhand des NACA4412-Profils bei einer Reynoldszahl von $\mathrm{Re} = 10^6$ und einem Anstellwinkel von $\alpha = 20^o$ untersucht wurde. Ziel war die Auftriebsmaximierung durch periodisches Einblasen und Absaugen über acht Anregeschlitze auf der Saugseite des Profils, wobei die Amplitude und Phasenverschiebung der Aktuation optimiert wurden.

Grundsätzlich lässt sich festhalten, dass durch eine kaskadierte Aktuation eine sehr effektive Beeinflussung des Ablösegebietes möglich ist, die mit einem starken Auftriebsgewinn einhergeht. Besonders anschaulich konnte dies durch einen Vergleich mit der Anregung an einem Einzelschlitz demonstriert werden. Durch die Erhöhung der Schlitzanzahl kann beim NACA4412 der Auftriebsgewinn gegenüber der natürlichen Strömung von 26% auf 34% gesteigert werden. Bezogen auf den Maximalauftrieb der unangeregten Konfiguration entspricht dies einer Verbesserung um 19% bzw. 26%.

Anhand einer Analyse der Strömungsfelder beider Anregungsvarianten konnten die wichtigsten strömungsphysikalischen Effekte verdeutlicht werden. Dabei zeigte sich, dass durch das periodische Einblasen und Absaugen eine Wirbelstruktur erzeugt wird, die energiereiches Fluid aus der Hauptströmung zur Wand transportiert und damit die Ablösung wirkungsvoll reduziert. Bei kaskadierter Aktuation kann diese Wirbelstruktur länger an der Profiloberfläche gehalten werden. Im zeitlichen Mittel liegt die Strömung nicht komplett an, sondern weist im Bereich um $x/c = 0.6$ eine Ablöseblase auf, die bei kaskadierter Aktuation sogar größer ist als bei nur einem Anregeschlitz. Durch die in dieser Region auftretende Umlenkung der Strömung wird der statische Druck abgesenkt und führt zu einem zusätzlichen Auftriebsgewinn.

Optimierungsrechnungen mit dem Adjungiertenansatz und Finiten Differenzen haben einen fast identischen Auftriebsgewinn erzielt, obwohl die berechnete, optimale Aktuation recht deutliche Unterschiede aufweist. Sie stimmt jedoch in ihrer wellenförmigen Charakteristik gut überein, so dass daraus geschlossen werden kann, dass diese für den vorliegenden Anwendungsfall wesentlich wichtiger ist als die Intensität der Anregung. Dies deckt sich mit Erkenntnissen aus anderen Untersuchungen, wonach der Intensitätseinfluss nach Überschreiten eines gewissen Niveaus rasch in eine Sättigung übergeht. Darüber hinaus ist erwähnenswert, dass bei Verwendung des kontinuierlichen Adjungiertenansatzes in Verbindung mit dem BFGS-Verfahren die approximierte Hesse-Matrix B_{ij} vermutlich aufgrund der fehlerbehafteten Gradienteninformation degenerieren kann, so dass auf das Abstiegsgradientenverfahren ausgewichen werden musste.

Es lässt sich resümieren, dass das adjungiertenbasierte Optimierungsverfahren trotz der fehler-

behafteten Gradienten sehr erfolgreich auf den turbulenten Strömungsfall angewendet werden konnte. Dies ist jedoch mit großer Wahrscheinlichkeit fallabhängig und kann daher nicht verallgemeinert werden. Ohne einen Vergleich mit Finiten Differenzen oder Ergebnissen aus dem diskreten Adjungiertenansatz lässt sich die Differenz zum tatsächlichen lokalen Optimum kaum einschätzen. Aus Ingenieurssicht kann das Verfahren trotzdem ein wertvolles Werkzeug darstellen, da zumindest eine Verbesserung des Aktuationsmechanismus erzielt werden kann, auch wenn dieser vielleicht nicht optimal im mathematischen Sinne ist.

Ist man an einer höheren Genauigkeit interessiert, existieren die schon im Rahmen der Validierung dargestellten Auswege, wie z.B. die Verwendung eines adjungierten Turbulenzmodells, das diskrete Adjungiertenverfahren oder die Erfassung der Turbulenz durch höherwertige numerische Ansätze (DNS, LES, DES). Alle Alternativen haben ihre schon ausführlich diskutierten Stärken und Schwächen, so dass man letztlich die Vor- und Nachteile je nach Anwendungsfall gegeneinander abwägen muss.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In vielen technischen Problemstellungen spielt die Strömungsablösung eine zentrale Rolle, da sie das aerodynamische Verhalten eines Körpers massiv beeinflusst. Beispiele hierfür sind der durch die Ablösung erzeugte Druckwiderstand hinter Fahrzeugen oder der Auftriebsverlust von Tragflügeln bei einem Strömungsabriss aufgrund eines zu hohen Anstellwinkels.

Von den vielen unterschiedlichen Möglichkeiten zur Beeinflussung der Ablösung haben sich in den letzten Jahren die aktiven Methoden als äußerst attraktiv herausgestellt, da sie häufig effektiver als passive Maßnahmen sind und außerdem gut an den Betriebszustand angepasst werden können. Viele Untersuchungen zeigen, dass eine verteilte Anregung durch periodisches Einblasen und/oder Absaugen besonders wirkungsvoll ist. Das Problem hierbei ist jedoch die Vielzahl frei einstellbarer Anregeparameter wie Position, Amplitude, Frequenz oder Ausblaswinkel. Die zentrale Frage lautet nun: Wie kann man die Aktuation mit geringem Zeitaufwand möglichst optimal auslegen?

Da eine einfache Variation der Parameter „per Hand“ zu aufwändig ist, bietet sich hier der Einsatz der numerischen Simulation in Kombination mit gradientenbasierten Optimierungsverfahren an. In diesem Zusammenhang sind Adjungiertenverfahren attraktiv, da sie den benötigten Gradienten im Gegensatz zu Finiten Differenzen unabhängig von der Zahl der Kontrollparameter mit nur zwei Strömungslösungen bereitstellen können. Im aerodynamischen Bereich haben sich Adjungiertenverfahren in den vergangenen 15 Jahren vor allem auf dem Gebiet der Formoptimierung etabliert. Zwar gibt es auch Anwendungen aus dem Bereich der aktiven Strömungsbeeinflussung, diese beschränkten sich jedoch bisher meist auf einfache Konfigurationen bei kleinen Reynoldszahlen.

Ziel der vorliegenden Arbeit war daher die Entwicklung, Validierung und Anwendung eines kontinuierlichen Adjungiertenverfahrens für die instationäre Optimierung der aktiven Beeinflussung abgelöster Strömungen. Ein wesentlicher Schwerpunkt war dabei, dass das Verfahren auch für praxisrelevante komplexe Konfigurationen bei hohen Reynoldszahlen anwendbar ist.

Zunächst wurde im Rahmen des SFB557 in enger Kooperation mit dem Fachgebiet „Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen“ der TU Berlin unter der Leitung von Prof. Tröltzsch ein kontinuierliches Adjungiertenverfahren zur instationären Ablösekontrolle mittels Randsteuerung für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen entwickelt. Das Verfahren wurde anschließend in den Strömungslöser ELAN implementiert, der sich in vielen Projekten aus dem Bereich der aktiven Strömungsbeeinflussung komplexer Konfigurationen bewährt hat. Die besondere Herausforderung war hierbei die Randbehandlung sowie die Entwicklung eines adjungierten Druckkorrekturverfahrens, zu dem es bisher keine dem Autor bekannten Veröffentlichungen gab.

Zur Überprüfung der Implementierung wurde eine sorgfältige Verifikation durchgeführt. Dazu wurde ein einfacher, analytisch lösbarer 2D-Testfall konstruiert. Im Sinne der *Method of*

Exact Solution muss dann die numerische Lösung mit abnehmender Ortsschrittweite gegen die analytische Lösung konvergieren. Zuerst wurde nur die adjungierte Impulsbilanz getestet. Dabei wurde eine Modifizierung der Behandlung von Dirichlet-Rändern vorgeschlagen, die eine bessere Erfassung des konvektiven Terms ermöglicht, wenn Fluid über den Rand aus dem Rechengebiet hinausströmt. Dies ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn eine aktive Beeinflussung simuliert wird, bei der Fluid abgesaugt wird. Außerdem wurde demonstriert, dass die beobachteten Abweichungen zwischen numerischer und analytischer Lösung ausschließlich auf den Approximationsfehler zurückzuführen waren. Mit der Verifikation des Gesamtsystems aus Impulsbilanz und Druckkorrekturmechanismus wurde nachgewiesen, dass letzterer korrekt implementiert wurde und erwartungsgemäß funktioniert.

Ziel der Validierung war die Analyse der Konsistenzeigenschaften des Ansatzes durch einen Vergleich der Sensitivitäten mit Finiten Differenzen und einem AD-basierten Verfahren, das im Rahmen des DFG-Projekts „Instationäre Optimale Strömungskontrolle aerodynamischer Konfigurationen“ am „Department of Mathematics and Center for Computational Engineering Science (CCES)“ der RWTH Aachen unter der Leitung von Prof. Gauger entwickelt wurde und auf dem gleichen Strömungslöser beruht wie der kontinuierliche Ansatz. Dies ermöglichte eine detaillierte Analyse der Vor- und Nachteile der verschiedenen Methoden ohne verfälschende Einflüsse. Die zwei zu diesem Zweck verwendeten Testfälle waren die 2D-Zylinderumströmung mit Starrkörperrotation sowie mit gepulster Absaugung.

Im Verlauf der Untersuchungen konnten unterschiedliche Quellen für eine mögliche Inkonsistenz zwischen primaler und adjungierter Lösung identifiziert und quantifiziert werden. Quelle eins ist der Approximationsfehler, der jedoch durch Reduzierung der Schrittweiten beliebig verkleinert werden kann. Die im Rahmen der Verifikation vorgeschlagene Modifizierung der Randbehandlung wies in diesem Zusammenhang deutliche Vorteile gegenüber der ursprünglichen Implementierung auf. Quelle zwei ist die Zeitschrittabhängigkeit der Rhie & Chow-Interpolation, die durch eine von T. Knacke vorgeschlagene Modifikation beseitigt werden konnte. Quelle drei ist der Einfluss des *Frozen-Turbulence*-Ansatzes. Diese Inkonsistenz ist turbulenzmodellinduziert und lässt sich dementsprechend nicht durch Verkleinerung der Schrittweiten eliminieren. Sie hatte im Vergleich die deutlichste Auswirkung auf die Genauigkeit der Gradientenberechnung.

Das diskrete AD-basierte Verfahren zeigte sich gegenüber dem kontinuierlichen hinsichtlich der Konsistenzeigenschaften deutlich überlegen. Es konnte für beliebige Zeit- und Gitterschrittweiten sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen eine konsistente Lösung gewährleisten. Der diskrete Ansatz war jedoch je nach Anwendung um den Faktor $14 - 25$ langsamer als das kontinuierliche Verfahren. Auch wenn weitergehende Untersuchungen bereits darauf hindeuten, dass sich die Effizienz des AD-basierten Lösers deutlich steigern lässt, wird er nicht die numerische Effizienz des kontinuierlichen Ansatzes erreichen.

Im letzten Teil der Arbeit wurde das entwickelte Optimierungsverfahren zur Auslegung der verteilten instationären Aktuation an zwei Testkonfigurationen verwendet. Ziel war hierbei, die Anwendbarkeit des Verfahrens zu demonstrieren und den Einfluss der im Rahmen der Validierung identifizierten Konsistenzdefizite auf den Optimierungsverlauf zu analysieren. Letztlich sollten so auch die Grenzen des entwickelten Verfahrens aufgezeigt werden.

Die zuerst untersuchte harmonische Aktuation einer laminaren 2D-Zylinderumströmung bei

$Re = 100$ über 15 Schlitze blieb ohne nennenswerten Einfluss auf den Widerstandsbeiwert. Die Tatsache, dass diese Aussage bereits mit einer einzigen primalen und adjungierten Strömungslösung getroffen werden konnte, unterstreicht dabei den hohen Nutzwert des Adjungiertenverfahrens. Durch die Optimierung der gepulsten Anregung an 15 Positionen konnte der Widerstand der Zylinderumströmung von $c_w = 1.34$ auf $c_w = 0.90$ gesenkt werden. Dabei wurde eine Synchronisierung des Wirbelabwurfs bei optimaler Aktuation beobachtet. Das Druckminimum des Wirbelpaars wurde durch die Anregung geschwächt und von der horizontalen Symmetrieachse wegbewegt, so dass der Druckwiderstand des Zylinders sank.

Ein Vergleich der adjungiertenbasierten Sensitivitäten mit Finiten Differenzen zeigte eine sehr gute Übereinstimmung an allen Anregepositionen. So konnte nachgewiesen werden, dass das Adjungiertenverfahren in diesem Fall tatsächlich zu einem lokalen Optimum konvergiert. Daraus lässt sich schließen, dass das entwickelte Optimierungsverfahren hervorragend zur Auslegung komplexer Aktuationsanordnungen geeignet ist, sofern kein Turbulenzmodell für die Strömungssimulation verwendet wird.

Als Beispiel für praxisnähere Konfigurationen wurde die Ablösekontrolle an einem NACA4412-Profil bei $Re = 10^6$ und $\alpha = 20^o$ untersucht. Ziel war die Auftriebsmaximierung durch periodisches Einblasen und Absaugen über acht Schlitze auf der Saugseite, wobei die Amplitude und Phasenverschiebung der Anregung optimiert wurde. Im Vergleich zur Anregung an einem Einzelschlitz konnte der Auftriebsgewinn gegenüber der natürlichen Strömung von 26% auf 34% gesteigert werden. Bezogen auf den Maximalauftrieb entspricht das einer Verbesserung von 19% auf 26%.

Anhand von Strömungsvisualisierungen wurde verdeutlicht, dass durch die Aktuation eine Wirbelstruktur erzeugt wird, die energiereiches Fluid zur Profiloberfläche transportiert und damit die Ablösung wirkungsvoll reduziert. Dabei wies die optimale Anregung entlang der Oberfläche eine wellenförmige Charakteristik auf. Auffälligster Unterschied zwischen den Aktuationsvarianten war, dass der Wirbel bei kaskadierter Anregung näher an der Oberfläche gehalten wurde. Im zeitlichen Mittel lag die Strömung nicht komplett an, sondern wies im Bereich um $x/c = 0.6$ eine Ablöseblase auf. Diese war bei kaskadierter Anregung etwas größer als bei einer Einzelschlitzaktuation. Durch die größere Umlenkung der Strömung in diesem Bereich wurde der statische Druck stärker gesenkt und erzeugte einen zusätzlichen Auftriebsgewinn.

Um den Einfluss der turbulenzmodellinduzierten Inkonsistenz noch einmal genauer zu untersuchen, wurden Optimierungsrechnungen auf Basis des Adjungiertenansatzes und Finiter Differenzen durchgeführt. Diese führten zu relativ unterschiedlichen optimalen Anregeparametern, die jedoch die gleiche wellenförmige Charakteristik aufwiesen und eine fast identische Auftriebsverbesserung erzeugten. In der Strömungstopologie waren kaum nennenswerte Unterschiede zwischen den Optimierungsrechnungen zu erkennen und auch die zeitgemittelte c_p-Verteilung war nahezu identisch. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass für diesen Anwendungsfall die wellenförmige Verteilung wesentlich wichtiger ist als die Intensität der Anregung. Darüber hinaus ist erwähnenswert, dass es mit dem Adjungiertenansatz in Verbindung mit dem BFGS-Verfahren zu Stabilitätsproblemen kam, da die approximierte Hesse-Matrix B_{ij} degenerierte. Dies wurde auf die fehlerbehaftete Gradienteninformation zurückgeführt. Aus diesem Grund musste bei fast allen Optimierungsrechnungen auf das Abstiegsgradientenverfahren

zurückgegriffen werden.

Ausgehend von den bisher durchgeführten Untersuchungen stellt die Beseitigung der durch den *Frozen-Turbulence*-Ansatz induzierten Inkonsistenz mit Sicherheit den wichtigsten Aspekt für weiterführende Arbeiten dar. Zwar konnte das entwickelte Verfahren trotz dieses Defizits sehr erfolgreich auf die turbulente Profilumströmung angewendet werden. Dies ist jedoch sehr wahrscheinlich fallabhängig und daher keinesfalls zu verallgemeinern. Zur Umgehung des turbulenzmodellinduzierten Konsistenzproblems existieren verschiedene Ansätze:

- Entwicklung adjungierter Turbulenzmodelle

  Dieser Lösungsansatz birgt das Problem, dass nicht jedes beliebige Turbulenzmodell ohne Modifikation analytisch differenzierbar ist. Dadurch ist man in der Auswahl des Modells für den jeweiligen Strömungsfall stark eingeschränkt und kann unter Umständen nicht das am besten geeignete Turbulenzmodell wählen. Darüber hinaus erweist sich die numerische Umsetzung in der Praxis als schwierig, so dass es bis zum jetzigen Zeitpunkt nach Kenntnis des Autors nur einer einzigen Arbeitsgruppe weltweit gelungen ist, ein adjungiertes Turbulenzmodell erfolgreich zu implementieren und anzuwenden.

- Hybride Verfahren

  Im Gegensatz zur DNS und LES sind hybride RANS-LES-Verfahren wie die DES heutzutage bereits auf sehr komplexe Konfigurationen anwendbar. Grundsätzlich besteht bei diesen Ansätzen hinsichtlich der Differenzierbarkeit des Turbulenzmodells die gleiche Problematik wie bei der URANS. Da jedoch in physikalisch relevanten Bereichen der Strömung ein Großteil der Turbulenz direkt vom Verfahren erfasst wird, wäre zu untersuchen, ob die Auswirkungen der turbulenzmodellinduzierten Inkonsistenz bei hybriden Ansätzen weniger folgenschwer sind.

- Diskretes Adjungiertenverfahren auf Basis des Automatischen Differenzierens

  Mit dem AD-basierten diskreten Adjungiertenverfahren kann unabhängig von der Gitter- und Zeitschrittweite sowohl im laminaren als auch im turbulenten Strömungsfall Konsistenz zwischen der primalen und adjungierten Lösung erreicht werden. Wenn es in weiterführenden Arbeiten gelingt, die numerische Effizienz dieses Ansatzes signifikant zu verbessern, stellt dieser auch für sehr komplexe Konfigurationen bei hohen Reynoldszahlen eine vielversprechende Alternative dar.

Die dargestellten Möglichkeiten machen deutlich, dass das „perfekte“ Verfahren nicht existiert. Jeder Ansatz hat seine individuellen Stärken und Schwächen. Ist man nur an groben Aussagen bzw. einer Verbesserung bei geringem Zeitaufwand interessiert, kann das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren verwendet werden. Stellt man dagegen hohe Anforderungen an die Genauigkeit, sollte eine der genannten Alternativen verfolgt werden. Aus Sicht des Autors ist hier besonders der diskrete Ansatz auf Basis des Automatischen Differenzierens aufgrund seiner überlegenen Konsistenzeigenschaften vielversprechend. Er kann außerdem vergleichsweise leicht auf komplexe Randbedingungen und kompressible Strömungen erweitert werden. Ferner sollte auch die Implementierung analytisch differenzierbarer Turbulenzmodelle in Betracht gezogen werden.

Anhang

A Statistische Turbulenzmodelle

A.1 Wilcox-k-ω-Modell

Die Transportgleichungen für das Wilcox-k-ω-Modell lauten im inkompressiblen Fall

$$\frac{\partial \varrho k}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_j k}{\partial x_j} = P_k - c_\mu \varrho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial \varrho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_j \omega}{\partial x_j} = \alpha_\omega \frac{\omega}{k} P_k - \beta_\omega \varrho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] \tag{A.2}$$

mit

$$\mu_t = \varrho \frac{k}{\omega} \qquad \alpha_\omega = \frac{5}{9} \qquad P_k = 2\mu_t S_{ij} S_{ij} \tag{A.3}$$

$$c_\mu = 0.09 \qquad \beta_\omega = \frac{3}{40} \qquad Pr_k = Pr_\omega = 2\,. \tag{A.4}$$

Es handelt sich dabei um die Originalformulierung des Modells aus dem Jahr 1988 [124].

A.2 SST-k-ω-Modell

Die Transportgleichungen für das SST-k-ω-Modell [72] lauten im inkompressiblen Fall

$$\frac{\partial \varrho k}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_j k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* \varrho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_k \mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial \varrho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \varrho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + 2(1 - F_1)\frac{\varrho \sigma_{\omega 2}}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \tag{A.6}$$

mit

$$\mu_t = \frac{\varrho a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)} \qquad P = 2\mu_t S_{ij} S_{ij} \tag{A.7}$$

und den Dämpfungsfunktionen

$$F_2 = \tanh(arg_2^2) \tag{A.8}$$

$$arg_2 = \max\left(2\frac{\sqrt{k}}{\beta^*\omega\Delta n}, \frac{500\nu}{\Delta n^2\omega}\right) \tag{A.9}$$

$$F_1 = \tanh(arg_1^4) \tag{A.10}$$

$$arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^*\omega\Delta n}, \frac{500\nu}{\Delta n^2\omega}\right), \frac{4\varrho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}\Delta n^2}\right] \tag{A.11}$$

$$CD_{k\omega} = \max\left(2\varrho\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20}\right). \tag{A.12}$$

Die Konstanten des Baseline-Modells sind

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1}\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \qquad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2}\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \tag{A.13}$$

$$\sigma_{k1} = 0.85 \qquad \sigma_{k2} = 1 \tag{A.14}$$

$$\sigma_{\omega 1} = 0.5 \qquad \sigma_{\omega 2} = 0.856 \tag{A.15}$$

$$\beta_1 = 0.075 \qquad \beta_2 = 0.0828 \tag{A.16}$$

$$a_1 = 0.31 \qquad \beta^* = 0.09 \tag{A.17}$$

$$\kappa = 0.41\,. \tag{A.18}$$

A.3 Randbedingungen für die Turbulenzmodelle

Die Randbedingungen für die hier verwendeten k-ω-Turbulenzmodelle lauten

$$\begin{aligned} k = k_g \quad &, \quad \omega = \omega_g \quad \text{auf} \quad \Gamma_{e,k} \\ \frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad &, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_a \\ \frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad &\qquad\qquad \text{auf} \quad \Gamma_{o,w}\,. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Die Randbedingung für die turbulente Frequenz an festen Wänden ist nicht trivial, da ω dort gegen unendlich strebt. Häufig kommen abhängig vom dimensionslosen Wandabstand

$$y^+ = \frac{u_\tau \Delta n}{\nu} \qquad \text{mit} \qquad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}} \tag{A.20}$$

unterschiedliche Ansätze zur Bestimmung von ω am Rand zum Einsatz. Ist y^+ sehr klein, kann ein Gleichgewicht zwischen Diffusion und Dissipation der Turbulenzgrößen angenommen werden. Dies führt auf gewöhnliche Differentialgleichungen für die Turbulenzenergie k und

die turbulente Frequenz ω. Die Lösung der DGL für ω lautet

$$\omega = \frac{6\nu}{\beta \Delta n^2} \qquad \text{mit} \qquad \beta = \frac{3}{40} \tag{A.21}$$

und kann verwendet werden, um die turbulente Frequenz im wandnächsten Kontrollvolumen zu fixieren [97]. Diese Vorgehensweise wird *Low-Re*-Randbedingung genannt und wird üblicherweise verwendet, wenn der Wandabstand des ersten KV-Zentrums $y^+ \leq 1$ ist. Alle im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Rechengitter genügen diesem Kriterium.

B Automatisches Differenzieren (AD)

B.1 Grundlagen das Automatischen Differenzierens

Das Vorgehen beim Automatischen Differenzieren soll an dieser Stelle kurz anhand eines einfachen Beispiels demonstriert werden, wobei sich die Darstellung stark an [34] orientiert. Gegeben sei ein Computerprogramm B.1 zur Berechnung der Funktion $y = \sin(x_1 \cdot x_2) + x_1$, das im Folgenden auf zwei unterschiedliche Arten differenziert werden soll.

$$
\begin{aligned}
v_0 &= x_1 \\
v_1 &= x_2 \\
v_2 &= v_0 \cdot v_1 \\
v_3 &= \sin(v_2) \\
v_4 &= v_3 + v_0 \\
y &= v_4
\end{aligned}
$$

Tabelle B.1: Primaler Code

B.1.1 Vorwärtsmodus

Im Vorwärtsmodus erfolgt das Differenzieren des Computercodes durch Anwendung der Kettenregel in der gleichen Richtung bzw. Reihenfolge wie die Auswertung der primalen Operationen. Um ausgehend vom primalen Löser mittels AD nun die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ zu bestimmen, muss beginnend mit der ersten Zeile jede Anweisung nach x_1 abgeleitet werden, d.h., zu jeder Variablen v_i gehört eine Variable $\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$. Angewendet auf den primalen Code B.1 führt dies zum im Vorwärtsmodus differenzierten Programm B.2. Dabei sind die zusätzlichen Programmzeilen dunkelgrau hinterlegt. Die Anzahl der Rechenoperationen und damit die für die Ausführung benötigte Zeit erhöht sich in diesem Modus etwa um den Faktor 2 für jede Variable, nach der die Zielfunktion abgeleitet wird, und ist damit wie die Finiten Differenzen proportional zur Anzahl der Steuerungsparameter.

B.1.2 Rückwärtsmodus

Im Rückwärtsmodus werden die Rechenoperationen unter Anwendung der Kettenregel in umgekehrter Reihenfolge differenziert, d.h., es werden zunächst alle primalen Operationen in

$v_0 = x_1$		
$\dot{v}_0 = 1$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial v_0}{\partial x_1} = 1$
$v_1 = x_2$		
$\dot{v}_1 = 0$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$
$v_2 = v_0 \cdot v_1$		
$\dot{v}_2 = v_0 \cdot \dot{v}_1 + \dot{v}_0 \cdot v_1$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial x_1}$
$v_3 = \sin(v_2)$		
$\dot{v}_3 = \dot{v}_2 \cdot \cos(v_2)$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}$
$v_4 = v_3 + v_0$		
$\dot{v}_4 = \dot{v}_3 + \dot{v}_0$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial v_4}{\partial x_1} = \frac{\partial v_4}{\partial v_3}\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_4}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial x_1}$
$y = v_4$		
$\dot{y} = \dot{v}_4$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial v_4}{\partial x_1}$

Tabelle B.2: Im Vorwärtsmodus differenzierter Code

der ursprünglichen Reihenfolge ausgeführt und anschließend folgen die adjungierten Operationen. Zu jeder Variablen v_i wird jetzt eine sogenannte adjungierte Variable $\overline{v}_i = \frac{\partial y}{\partial v_i}$ definiert. Angewendet auf den primalen Code B.1 erhält man so das im Rückwärtsmodus differenzierte Programm B.3. Die zusätzlichen Programmzeilen sind wieder dunkelgrau hinterlegt. Außer-

$v_0 = x_1$		
$v_1 = x_2$		
$v_2 = v_0 \cdot v_1$		
$v_3 = \sin(v_2)$		
$v_4 = v_3 + v_0$		
$y = v_4$		
$\overline{y} = \overline{v}_4 = 1$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial v_4} = 1$
$\overline{v}_3 = \overline{v}_4$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial v_3} = \frac{\partial y}{\partial v_4}\frac{\partial v_4}{\partial v_3} = \overline{v}_4$
$\overline{v}_0^a = \overline{v}_4$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial v_4}\frac{\partial v_4}{\partial v_0} = \overline{v}_4$
$\overline{v}_2 = \overline{v}_3 \cdot \cos(v_2)$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial v_2} = \frac{\partial y}{\partial v_3}\frac{\partial v_3}{\partial v_2} = \overline{v}_3\cos(v_2)$
$\overline{v}_1 = \overline{v}_2 \cdot v_0$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial v_1} = \frac{\partial y}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \overline{v}_2 v_0$
$\overline{v}_0^b = \overline{v}_2 \cdot v_1$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial v_0} = \overline{v}_2 v_1$
$\overline{v}_0 = \overline{v}_0^a + \overline{v}_0^b$		
$\overline{x}_2 = \overline{v}_1$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial v_1}$
$\overline{x}_1 = \overline{v}_0$	$\rightsquigarrow$	$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial v_0}$

Tabelle B.3: Im Rückwärtsmodus differenzierter Code

dem sind die jeweils zusammengehörenden primalen und adjungierten Operationen vertikal untereinander angeordnet. In Analogie zum kontinuierlichen Adjungiertenansatz erhält man

auf diese Weise aus einer einzigen Rechnung den gesamten Gradienten der Zielfunktion.

C Mathematische Herleitungen

C.1 Herleitung des adjungierten Konvektions-Diffusions-Problems

Das Optimierungsproblem für die Konvektions-Diffusions-Gleichung mit Randsteuerung lässt sich wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & J = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} (\phi - \phi_z)^2 \, dx \,, \\ \text{so dass} \quad & u \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} - a \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = 0 \\ & \phi(x=0) = 0 \\ & \phi(x=1) = \beta \,. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Darin ist u die konstante Geschwindigkeit in x-Richtung, a ein konstanter molekularer Transportkoeffizient und β die Randsteuerung. Ziel der Optimierung ist die Minimierung der Abweichung zu einer gegebenen Verteilung ϕ_z. Das Lagrange-Funktional ist die Summe aus der Zielfunktion und der mit der adjungierten Variable ψ multiplizierten Transportgleichung:

$$L = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} (\phi - \phi_z)^2 \, dx + \int_{x=0}^{x=1} \psi \left(u \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} - a \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} \right) dx \,. \tag{C.2}$$

Mit Hilfe der Produktregel erhält man

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} (\phi - \phi_z)^2 \, dx + \int_{x=0}^{x=1} \frac{d\psi u \phi}{dx} \, dx - \int_{x=0}^{x=1} \phi \frac{du\psi}{dx} \, dx \\ & - \int_{x=0}^{x=1} \frac{d}{dx} \left(a\psi \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_{x=0}^{x=1} \frac{d\phi}{dx} \frac{da\psi}{dx} \, dx \end{aligned} \tag{C.3}$$

und weiter[1]

$$L = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}(\phi-\phi_z)^2\,dx + \int_{x=0}^{x=1}\frac{d\psi u\phi}{dx}\,dx - \int_{x=0}^{x=1}\phi u\frac{d\psi}{dx}\,dx$$
$$- \int_{x=0}^{x=1}\frac{d}{dx}\left(a\psi\frac{d\phi}{dx}\right)dx + \int_{x=0}^{x=1}\frac{d}{dx}\left(\phi a\frac{d\psi}{dx}\right)dx - \int_{x=0}^{x=1}\phi a\frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx \tag{C.4}$$

$$L = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}(\phi-\phi_z)^2\,dx - \int_{x=0}^{x=1}\phi\left(u\frac{d\psi}{dx} + a\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)dx + [\psi u\phi - a\psi\frac{d\phi}{dx} + a\phi\frac{d\psi}{dx}]_{x=0}^{x=1}. \tag{C.5}$$

Unter Verwendung der Randbedingungen verbleibt

$$L = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}(\phi-\phi_z)^2\,dx - \int_{x=0}^{x=1}\phi\left(u\frac{d\psi}{dx} + a\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)dx$$
$$+ \psi_R u\beta + a\beta\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_R - a\psi_R\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_R + a\psi_L\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_L, \tag{C.6}$$

wobei der Rand bei $x = 0$ und $x = 1$ mit L bzw. R gekennzeichnet ist. Die Optimalitätsbedingung an den Zustand lautet

$$\delta_\phi L = \int_{x=0}^{x=1}(\phi-\phi_z)\delta\phi\,dx - \int_{x=0}^{x=1}\delta\phi\left(u\frac{d\psi}{dx} + a\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)dx - a\psi_R\left.\frac{d\delta\phi}{dx}\right|_R + a\psi_L\left.\frac{d\delta\phi}{dx}\right|_L \stackrel{!}{=} 0. \tag{C.7}$$

Daraus resultiert die adjungierte Konvektions-Diffusions-Gleichung inklusive Randbedingungen:

$$u\frac{d\psi}{dx} + a\frac{d^2\psi}{dx^2} = \phi - \phi_z \tag{C.8}$$
$$\psi_L = 0 \tag{C.9}$$
$$\psi_R = 0. \tag{C.10}$$

Aus der Optimalitätsbedingung an die Steuerung

$$\delta_\beta L = \underbrace{\psi_R}_{=0} u\delta\beta + a\delta\beta\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_R \stackrel{!}{=} 0 \tag{C.11}$$

folgt die Formel zur Gradientenberechnung:

$$\frac{dJ}{d\beta} = a\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_R. \tag{C.12}$$

[1] Man beachte hierbei, dass u und a konstant sind.

C.2 Kompassnotation

Für die folgenden Betrachtungen wird, sofern nicht anders vereinbart, bei der Diskretisierung nach der Finite-Volumen-Methode ein kartesisches, äquidistantes Gitter gemäß Abb. C.1 verwendet. Da hier ausschließlich 2D-Probleme behandelt werden, wird in z-Richtung eine

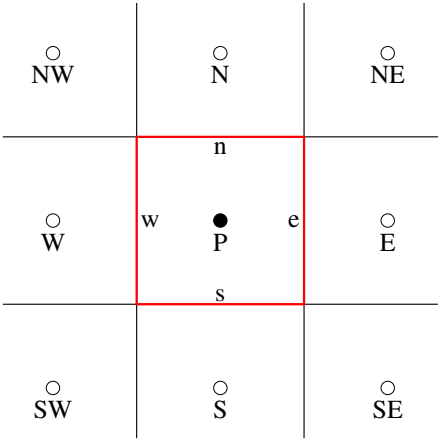


Abbildung C.1: Kompassnotation für die Diskretisierung

konstante Ausdehnung des Rechengebietes von $\Delta z = 1$ angenommen und die Integration in spannweitiger Richtung wird nicht explizit berücksichtigt. Die Ausdehnung eines Kontrollvolumens in x- und y-Richtung wird mit Δx bzw. Δy bezeichnet. Für den Abstand zwischen dem Mittelpunkt einer Kontrollvolumenfläche und dem benachbarten Kontrollvolumenzentrum wird das Symbol δ verwendet. Auf einem äquidistanten Gitter gilt dann

$$2\delta x = \Delta x = 2\delta y = \Delta y\,. \tag{C.13}$$

C.3 Interpolation von Variablen auf kartesischen Gittern

Die lineare Interpolation einer Variablen ϕ auf die KV-Fläche eines äquidistanten Gitters lässt sich mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung ableiten. Betrachtet man die Fläche e ergibt die Entwicklung mit den Schrittweiten $\pm\delta x$:

$$\phi(x_e + \delta x) = \phi(x_e) + \frac{\delta x}{1!}\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x_e} + \frac{\delta x^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x_e} + \frac{\delta x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right|_{x_e} + \ldots \tag{C.14}$$

$$\phi(x_e - \delta x) = \phi(x_e) - \frac{\delta x}{1!}\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x_e} + \frac{\delta x^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x_e} - \frac{\delta x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right|_{x_e} + \ldots\,. \tag{C.15}$$

Aus Addition und Umformung erhält man für die Interpolation der Größe ϕ an der Stelle e

$$\phi(x_e) = \frac{\phi(x_e + \delta x) + \phi(x_e - \delta x)}{2} - \frac{\delta x^2}{2} \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x_e} + \mathcal{O}(\delta x^4)\,. \tag{C.16}$$

Unter Verwendung der Kompass-Notation und wegen $\Delta x = 2\delta x$ erhält man schließlich

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - \frac{\Delta x^2}{8} \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{e} + \mathcal{O}(\Delta x^4)\,. \tag{C.17}$$

Für die anderen Flächen verfährt man analog.

C.4 Bestimmung von Gradienten auf kartesischen Gittern

Ähnlich der Interpolation einer Variablen kann auch der Gradient an der KV-Fläche durch eine Taylorreihenentwicklung bestimmt werden, indem man Gl. C.14 und C.15 subtrahiert. Angewendet auf die Fläche e erhält man

$$\phi(x_e + \delta x) - \phi(x_e - \delta x) = 2\delta x \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x_e} + \frac{\delta x^3}{3} \left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right|_{x_e} + \mathcal{O}(\delta x^5) \tag{C.18}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x_e} = \frac{\phi(x_e + \delta x) - \phi(x_e - \delta x)}{2\delta x} - \frac{\delta x^2}{6} \left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right|_{x_e} + \mathcal{O}(\delta x^4) \tag{C.19}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{e} = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{24} \left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right|_{e} + \mathcal{O}(\Delta x^4)\,. \tag{C.20}$$

C.5 Mittelpunktregel der Integration

Für die Integration einer Variablen ϕ über die KV-Fläche wird in der vorliegenden Arbeit die Mittelpunktregel verwendet. Für die Anwendung auf Fläche e folgt

$$\int_s^n \phi_e \, dy = \phi_{ec} \Delta y + \frac{\Delta y^3}{24} \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right|_{ec} + \mathcal{O}(\Delta y^5)\,, \tag{C.21}$$

wobei ec der Mittelpunkt auf dem Intervall $[s, n]$ ist, d.h. $y_{ec} = 0.5(y_s + y_n)$.

C.6 Diskretisierungsfehler bei der Lösung der Kanalströmung

Für die Analyse des Diskretisierungsfehlers werden zunächst alle Terme der primalen und adjungierten DGLn

$$\frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{C.22}$$

$$-\frac{\partial \varrho u_i^* u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right)\right] - \varrho u_j^* \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{C.23}$$

unter Berücksichtigung der führenden Fehlerterme auf einem äquidistanten, kartesischen Gitter diskretisiert. Setzt man in die Fehlerterme die bekannte analytische Lösung

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{L}\, y(y-H) \tag{C.24}$$

$$v = 0 \tag{C.25}$$

$$p = -24\frac{\mu^2 \mathrm{Re}}{\varrho H^3} x + C \tag{C.26}$$

ein, lässt sich die genaue Form des Approximationsfehlers bestimmen.

C.6.1 Primales System

Unter der Annahme konstanter Viskosität erhält man für die Impulsbilanz in x-Richtung

$$\underbrace{\frac{\partial \varrho u u}{\partial x}}_{I} + \underbrace{\frac{\partial \varrho u v}{\partial y}}_{II} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{III} + \mu\Bigg(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{IV} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{V} + \overbrace{\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{VI} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}}_{VII}}^{\text{expliziterAnteil}}\Bigg). \tag{C.27}$$

Die Terme VI und VII resultieren aus dem zweiten Summanden des Diffusionsterms in Gl. C.22 und werden im Strömungslöser explizit über den Quellterm berücksichtigt. Obwohl dieser Anteil für eine inkompressible Strömung mit konstanter Viskosität verschwindet, wird er im Folgenden mit betrachtet, da er im Strömungslöser ELAN nicht explizit zu null gesetzt wird.

Term I

Integration in x-Richtung und Anwendung der Mittelpunktregel liefert

$$\begin{aligned}\int_s^n \int_w^e \frac{\partial \varrho u u}{\partial x}\, dx\, dy &= \int_s^n \left[(\varrho u u)_e - (\varrho u u)_w\right] dy \\ &= \left[(\varrho u u)_{ec} - (\varrho u u)_{wc}\right]\Delta y + \varrho \frac{\Delta y^3}{24}\underbrace{\left(\left.\frac{\partial^2 u u}{\partial y^2}\right|_{ec} - \left.\frac{\partial^2 u u}{\partial y^2}\right|_{wc}\right)}_{=0}.\end{aligned} \tag{C.28}$$

Die lineare Interpolation auf die KV-Fläche ergibt

$$[(\varrho uu)_{ec} - (\varrho uu)_{wc}]\Delta y = \varrho\Delta y\left\{\left[\frac{1}{2}(u_E + u_P) - \underbrace{\frac{\Delta x^2}{8}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{ec}}_{=0}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(u_P + u_W) - \underbrace{\frac{\Delta x^2}{8}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{wc}}_{=0}\right]^2\right\}. \tag{C.29}$$

Daraus folgt, dass die Approximation des Terms I exakt ist:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial \varrho uu}{\partial x}\, dx\, dy = \frac{\varrho\Delta y}{4}\left[(u_E + u_P)^2 - (u_P + u_W)^2\right]. \tag{C.30}$$

Term II

Integration in y-Richtung und Anwendung der Mittelpunktregel liefert

$$\begin{aligned}\int_w^e \int_s^n \frac{\partial \varrho uv}{\partial x}\, dy\, dx &= \int_w^e \left[(\varrho uv)_n - (\varrho uv)_s\right] dx \\ &= \left[(\varrho uv)_{nc} - (\varrho uv)_{sc}\right]\Delta x + \varrho\frac{\Delta x^3}{24}\underbrace{\left(\left.\frac{\partial^2 uv}{\partial x^2}\right|_{nc} - \left.\frac{\partial^2 uv}{\partial x^2}\right|_{sc}\right)}_{=0}.\end{aligned} \tag{C.31}$$

Die lineare Interpolation auf die KV-Fläche ergibt

$$\begin{aligned}[(\varrho uv)_{nc} - (\varrho uv)_{sc}]\Delta x = \varrho\Delta x &\left\{\left[\frac{1}{2}(u_N + u_P) - \frac{\Delta y^2}{8}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{nc}\right]\left\{\left[\frac{1}{2}(v_N + v_P) - \underbrace{\frac{\Delta y^2}{8}\left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{nc}}_{=0}\right]\right.\right. \\ &\left.\left. - \left\{\left[\frac{1}{2}(u_P + u_S) - \frac{\Delta y^2}{8}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{sc}\right]\right\}\left[\frac{1}{2}(v_P + v_S) - \underbrace{\frac{\Delta y^2}{8}\left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{sc}}_{=0}\right]\right.\end{aligned}. \tag{C.32}$$

Aus der analytischen Lösung folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{L} \tag{C.33}$$

und weiter

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial \varrho uv}{\partial x}\, dy\, dx = \frac{\varrho\Delta x}{4}\left[(u_N + u_P)(v_N + v_P) - (u_P + u_S)(v_P + v_S)\right] + \frac{\varrho\Delta x\Delta y^2}{16\mu}\frac{\Delta p}{L}(v_S - v_N) \tag{C.34}$$

mit dem Fehlerterm

$$F_{II} = \frac{\varrho\Delta x\Delta y^2}{16\mu}\frac{\Delta p}{L}(v_S - v_N). \tag{C.35}$$

Term III

Integration in x-Richtung und Anwendung der Mittelpunktregel liefert

$$\int_s^n \int_w^e -\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy = \int_s^n (p_w - p_e)\, dy$$
$$= (p_{wc} - p_{ec})\Delta y + \frac{\Delta y^3}{24}\left(\underbrace{\left.\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right|_{wc}}_{=0} - \underbrace{\left.\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right|_{ec}}_{=0} \right). \tag{C.36}$$

Lineare Interpolation ergibt

$$(p_{wc} - p_{ec})\Delta y = \Delta y \left[\frac{1}{2}(p_P + p_W) - \frac{1}{2}(p_E + p_P) + \frac{\Delta x^2}{8}\left(\underbrace{\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{ec}}_{=0} - \underbrace{\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{wc}}_{=0} \right) \right], \tag{C.37}$$

so dass die Approximation

$$\int_s^n \int_w^e -\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy = \Delta y \left[\frac{1}{2}(p_P + p_W) - \frac{1}{2}(p_E + p_P) \right] \tag{C.38}$$

exakt ist.

Term IV und VI

Integration in x-Richtung und Anwendung der Mittelpunktregel ergibt für den diffusiven Term

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx\, dy = \int_s^n \left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_e - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_w \right] dy$$
$$= \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{ec} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{wc} \right) \Delta y + \frac{\Delta y^3}{24}\left(\underbrace{\left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}\right|_{ec}}_{=0} - \underbrace{\left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}\right|_{wc}}_{=0} \right). \tag{C.39}$$

Bei zentraler Approximation der Gradienten erhält man

$$\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{ec} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{wc} \right) \Delta y = \Delta y \left[\frac{u_E - u_P}{\Delta x} - \frac{u_P - u_W}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{24}\left(\underbrace{\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{wc}}_{=0} - \underbrace{\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{ec}}_{=0} \right) \right], \tag{C.40}$$

d.h., die Approximation

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx\, dy = \frac{\Delta y}{\Delta x}(u_E - 2u_P + u_W) \tag{C.41}$$

ist exakt.

Term V

Analog zu Term IV erhält man den exakten Ausdruck

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dx\, dy = \frac{\Delta x}{\Delta y}(u_N - 2u_P + u_S)\,. \tag{C.42}$$

Term VII

Die gemischte Ableitung wird zunächst ebenfalls integriert:

$$\begin{aligned}\int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\, dx\, dy &= \int_s^n \left[\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_e - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_w \right] dy \\ &= \left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{ec} - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{wc} \right) \Delta y + \frac{\Delta y^3}{24} \Bigg(\underbrace{\left.\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right|_{ec}}_{=0} - \underbrace{\left.\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right|_{wc}}_{=0} \Bigg)\,.\end{aligned} \tag{C.43}$$

Nun muss erst linear interpoliert werden, da eine Auswertung der Gradienten in Gl. C.43 auf die unbekannten Größen an den Eckpunkten *ne*, *nw*, *se* und *sw* zurückgreifen würde. Es folgt:

$$\begin{aligned}\left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{ec} - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{wc} \right) \Delta y &= \frac{\Delta y}{2} \left[\left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_E + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_P \right) - \left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_P + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_W \right) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{8} \Bigg(\underbrace{\left.\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right|_{wc}}_{=0} - \underbrace{\left.\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right|_{ec}}_{=0} \Bigg)\,.\end{aligned} \tag{C.44}$$

Nun können die Gradienten zentral ausgewertet werden

$$\frac{\Delta y}{2} \left[\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_E - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_W \right] = \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{v_{NE} - v_{SE}}{2\Delta y} - \frac{v_{NW} - v_{SW}}{2\Delta y} + \frac{\Delta y^2}{6} \Bigg(\underbrace{\left.\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right|_W}_{=0} - \underbrace{\left.\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right|_E}_{=0} \Bigg) \right] \tag{C.45}$$

und es verbleibt die exakte Beziehung

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\, dx\, dy = \frac{v_{NE} - v_{SE} - v_{NW} + v_{SW}}{4}\,. \tag{C.46}$$

Für die Impulsbilanz in y-Richtung

$$\frac{\partial \varrho v u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Bigg(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}^{\text{expliziterAnteil}} \Bigg) \tag{C.47}$$

stellt man bei analoger Vorgehensweise fest, dass hier alle Fehlerterme verschwinden, d.h., die y-Komponente des Geschwindigkeitsvektors wird exakt berechnet. Daraus folgt, dass der Fehlerterm aus Gl. C.35 null wird und auch die Impulsbilanz in x-Richtung exakt gelöst wird.

C.6.2 Adjungiertes System

Für ein 2D-Problem mit konstanter Viskosität nimmt die adjungierte Impulsbilanz die folgende Form an:

$$-\frac{\partial \varrho u^* u}{\partial x} - \frac{\partial \varrho u^* v}{\partial y} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \overbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y}}^{\text{expliziterAnteil}}\right) - \overbrace{\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial x} - \varrho v^* \frac{\partial v}{\partial x}}^{\text{expliziterAnteil}} \quad \text{(C.48)}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial \varrho v^* u}{\partial x}}_{I} - \frac{\partial \varrho v^* v}{\partial y} = \underbrace{-\frac{\partial p^*}{\partial y}}_{II} + \mu\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + \overbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2}}^{\text{expliziterAnteil}}\right) - \underbrace{\overbrace{\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}}^{\text{expliziterAnteil}}}_{III} - \varrho v^* \frac{\partial v}{\partial y} . \quad \text{(C.49)}$$

Die analytische Lösung lautet

$$u^* = y \quad \text{(C.50)}$$

$$v^* = x \quad \text{(C.51)}$$

$$p^* = \frac{4\mu \mathrm{Re}}{H^3} y^3 - \frac{\mu \mathrm{Re}}{2} . \quad \text{(C.52)}$$

Beim adjungierten System werden also neben einigen diffusiven Termen auch die zusätzlichen Quellterme explizit im Gleichungssystem berücksichtigt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden im Folgenden nur die Terme näher betrachtet, bei deren Diskretisierung der Approximationsfehler nicht verschwindet.

Term I

Integration in x-Richtung und Anwendung der Mittelpunktregel führt auf

$$\int_s^n \int_w^e -\frac{\partial \varrho v^* u}{\partial x} \, dx \, dy = \int_s^n \left[(\varrho v^* u)_w - (\varrho v^* u)_e\right] dy$$

$$= \left[(\varrho v^* u)_{wc} - (\varrho v^* u)_{ec}\right] \Delta y + \varrho \frac{\Delta y^3}{24} \left(\left.\frac{\partial^2 v^* u}{\partial y^2}\right|_{wc} - \left.\frac{\partial^2 v^* u}{\partial y^2}\right|_{ec} \right) . \quad \text{(C.53)}$$

Mit

$$\frac{\partial^2 v^* u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[x \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} y(y - H)\right] = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} x \quad \text{(C.54)}$$

folgt für den Fehlerterm

$$\varrho \frac{\Delta y^3}{24} \left(\left.\frac{\partial^2 v^* u}{\partial y^2}\right|_{wc} - \left.\frac{\partial^2 v^* u}{\partial y^2}\right|_{ec} \right) = -\varrho \frac{\Delta y^3}{24} \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \Delta x . \quad \text{(C.55)}$$

Lineare Interpolation ergibt

$$[(\varrho v^* u)_{wc} - (\varrho v^* u)_{ec}]\,\Delta y = \varrho \Delta y \Bigg\{ \Bigg[\frac{1}{2}(v_P^* + v_W^*) - \underbrace{\frac{\Delta x^2}{8}\left.\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2}\right|_{wc}}_{=0}\Bigg]\Bigg[\frac{1}{2}(u_P + u_W) - \underbrace{\frac{\Delta x^2}{8}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{wc}}_{=0}\Bigg] - \Bigg[\frac{1}{2}(v_E^* + v_P^*) - \underbrace{\frac{\Delta x^2}{8}\left.\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2}\right|_{ec}}_{=0}\Bigg]\Bigg[\frac{1}{2}(u_E + u_P) - \underbrace{\frac{\Delta x^2}{8}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{ec}}_{=0}\Bigg]\Bigg\} - \varrho \frac{\Delta y^3}{24}\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{L}\Delta x\,. \tag{C.56}$$

Damit erhält man als Approximation für Term I

$$\int_s^n \int_w^e -\frac{\partial \varrho v^* u}{\partial x}\,dx\,dy = \frac{\varrho \Delta y}{4}\left[(v_P^* + v_W^*)(u_P + u_W) - (v_E^* + v_P^*)(u_E + u_P)\right] - \varrho \frac{\Delta y^3}{24}\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{L}\Delta x \tag{C.57}$$

mit dem Diskretisierungsfehler

$$F_I = -\varrho \frac{\Delta y^3}{24}\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{L}\Delta x\,. \tag{C.58}$$

Term II

Integration in x-Richtung und Anwendung der Mittelpunktregel ergibt

$$\begin{aligned}\int_s^n \int_w^e -\frac{\partial p^*}{\partial y}\,dx\,dy &= \int_w^e (p_s^* - p_n^*)\,dx \\ &= (p_{sc}^* - p_{nc}^*)\Delta x + \frac{\Delta x^3}{24}\Bigg(\underbrace{\left.\frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2}\right|_{sc}}_{=0} - \underbrace{\left.\frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2}\right|_{nc}}_{=0}\Bigg)\end{aligned} \tag{C.59}$$

und nach linearer Interpolation folgt

$$(p_{sc}^* - p_{nc}^*)\Delta x = \Delta x\left[\frac{1}{2}(p_P^* + p_S^*) - \frac{1}{2}(p_N^* + p_P^*) + \frac{\Delta y^2}{8}\left(\left.\frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2}\right|_{nc} - \left.\frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2}\right|_{sc}\right)\right]. \tag{C.60}$$

Mit der Ableitung

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} = \frac{24\mu \mathrm{Re}}{H^3} y \tag{C.61}$$

folgt für den Fehlerterm

$$\frac{\Delta y^2}{8}\left(\left.\frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2}\right|_{nc} - \left.\frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2}\right|_{sc}\right) = \frac{3\Delta y^2 \mu \mathrm{Re}}{H^3}\Delta y \tag{C.62}$$

und man erhält

$$\int_s^n \int_w^e -\frac{\partial p^*}{\partial y}\,dx\,dy = \frac{\Delta x}{2}\left(p_S^* - p_N^*\right) + \frac{3\Delta x \Delta y^3 \mu \mathrm{Re}}{H^3} \tag{C.63}$$

mit dem Fehler

$$F_{II} = \frac{3\Delta x \Delta y^3 \mu \mathrm{Re}}{H^3}\,. \tag{C.64}$$

Term III

Der adjungierte Quellterm wird zweimal mit Hilfe der Mittelpunktregel integriert:

$$\begin{aligned}\int_s^n \int_w^e -\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy &= \int_s^n \left[\left(-\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P'} \Delta x - \underbrace{\frac{\Delta x^3}{24}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P'}}_{=0}\right] dy \\ &= \left(-\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}\right)_P \Delta x \Delta y - \frac{\Delta y^3}{24}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}\right)_P \Delta x\,. \end{aligned} \tag{C.65}$$

Aus der analytischen Lösung erhält man

$$\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\varrho}{\mu}\frac{\Delta p}{L} y^2 - \frac{\varrho}{2\mu}\frac{\Delta p}{L} H y \tag{C.66}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = 2\frac{\varrho}{\mu}\frac{\Delta p}{L} \tag{C.67}$$

und damit die Approximation

$$\int_s^n \int_w^e -\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy = \left(-\varrho u^* \frac{\partial u}{\partial y}\right)_P \Delta x \Delta y - \frac{\Delta x \Delta y^3}{12}\frac{\varrho}{\mu}\frac{\Delta p}{L} \tag{C.68}$$

mit dem Fehler

$$F_{III} = -\frac{\Delta y^3}{12}\frac{\varrho}{\mu}\frac{\Delta x \Delta p}{L}\,. \tag{C.69}$$

Literaturverzeichnis

[1] S.R. Ahmed, G. Ramm, and G. Faltin. Some salient features of the time-averaged ground vehicle wake. Technical Report 840300, SAE Technical Paper Series, 1984.

[2] M. Amitay and A. Glezer. Role of Actuation Frequency in Controlled Flow Reattachment over a Stalled Airfoil. *AIAA Journal*, 40(2), 2002.

[3] W.K. Anderson and D.L. Bonhaus. Aerodynamic Design on Unstructured Grids for Turbulent Flows. NASA Technical Memorandum 112867, NASA Langley Research Centre, Hampton, Virginia, 1997.

[4] W.K. Anderson and V. Venkatakrishnan. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. *Computers & Fluids*, 28(4–5), 1999.

[5] U. Barkmann. *Numerische Untersuchungen zur aktiven Beeinflussung der Umströmung zweier stumpfer Körper*. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2009.

[6] R. Becker, R. King, R. Petz, and W. Nitsche. Adaptive Closed-Loop Separation Control on a High-Lift Configuration using Extremum Seeking. *AIAA-Paper 2006-3493*, 2006.

[7] T.R. Bewley. Flow control: new challenges for a new Renaissance. *Progress in Aerospace Sciences*, 37, 2001.

[8] T.R. Bewley, P. Moin, and R. Temam. DNS-based predictive control of turbulence: an optimal benchmark for feedback algorithms. *Journal of Fluid Mechanics*, 447, 2001.

[9] J.M. Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur*. Gathier-Villars, Paris, 1903.

[10] A. Bueno-Orovio, C. Castro, F. Palacios, and E. Zuazua. Continuous adjoint approach for the Spalart–Allmaras model in aerodynamic optimization. *AIAA-Paper 2011-1299*, 2011.

[11] C. He and T. Corke and M. Patel. Numerical and Experimental Analysis of Plasma Flow Control Over a Hump Model. *AIAA-Paper 2007-935*, 2007.

[12] D. Cantwell and D. Coles. An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 136, 1983.

[13] A. Carnarius, T. Knacke, U. Barkmann, and F. Thiele. Numerical Study of the Controlled Flow Around an Ahmed Body Tandem Configuration. *AIAA-Paper 2009-1079*, 2009.

[14] A. Carnarius, F. Thiele, E. Özkaya, and N.R. Gauger. Adjoint Approaches For Optimal Flow Control. *AIAA-Paper 2010-5088*, 2010.

[15] H. Choi, W.-P. Jeon, and J. Kim. Control of Flow Over a Bluff Body. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 40, 2008.

[16] E.K.P. Chong and S.H. Zak. *An Introduction to Optimization*. John Wiley & Sons, 3. edition, 2008.

[17] B. Christianson. Reverse Accumulation and Attractive Fixed Points. *Optimization Methods and Software*, 1994.

[18] S. Collis, K. Ghayour, M. Heinkenschloss, M. Ulbrich, and S. Ulbrich. Optimal control of unsteady compressible viscous flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40, 2002.

[19] S. Collis, R.D. Joslin, A. Seifert, and V. Theofilis. Issues in active flow control: Theory, control, simulation, and experiment. *Progress in Aerospace Sciences*, 40, 2004.

[20] I. Demirdžić and S. Muzaferija. Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 125(1–4), 1995.

[21] P. Durbin and B.A.B. Perttersson Reif. *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows*. John Wiley & Sons, 2. edition, 2010.

[22] P.A. Durbin. A perspective on recent developments in RANS modeling. In W. Rodi and N. Fueyo, editors, *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, volume 5. Elsevier, 2002.

[23] R.P. Dwight and J. Brezillon. Effect of Various Approximations of the Discrete Adjoint on Gradient-Based Optimization. *AIAA-paper 2006-690*, 2006.

[24] L. Eca, G. Vaz, and M. Hoekstra. Code Verification, Solution Verification and Validation in RANS Solvers. In *29th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, volume 6, 2010. OMAE2010-20338.

[25] J. Elliott and J. Peraire. Practical three-dimensional aerodynamic design and optimization using unstructured meshes. *AIAA Journal*, 35(9), 1997.

[26] L. Enloe, T. McLaughlin, R. VanDyken, K. Kachner, E. Jumper, and T. Corke. Mechanisisms and Response of a Single Dielectric Barrier Plasma Actuator: Plasma Morphology. *AIAA Journal*, 42(3), 2004.

[27] L. Enloe, T. McLaughlin, R. VanDyken, K. Kachner, E. Jumper, T. Corke, M. Post, and O. Haddad. Mechanisisms and Response of a Single Dielectric Barrier Plasma Actuator: Geometric Effects. *AIAA Journal*, 42(3), 2004.

[28] R. Farwig. Elementare partielle Differentialgleichungen. Vorlesungsskript ss 2008, Technische Universität Darmstadt, 2008.

[29] J.H. Ferziger and M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2. edition, 1999.

[30] M. Franke. *Untersuchung zum Potential höherwertiger Turbulenzmodelle für den aerodynamischen Entwurf*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2003.

[31] J. Fröhlich. *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. Teubner, 1. edition, 2006.

[32] M. Gad-el-Hak. *Flow Control: Passive, Active, and Reactive Flow Management*. Cambridge University Press, 2000.

[33] N.R. Gauger. *Das Adjungiertenverfahren in der aerodynamischen Formoptimierung*. PhD thesis, Technische Universität Braunschweig, 2003.

[34] N.R. Gauger. Adjoint Approaches in Aerodynamic Shape Optimization and MDO Context. In P. Wesseling, E. Oñate, and J. Périaux, editors, *Proceedings ECCOMAS CFD 2006*, 2006.

[35] N.R. Gauger, A. Walther, C. Moldenhauer, and M. Widhalm. Automatic Differentiation of an Entire Design Chain with Applications. In C. Tropea, S. Jakirlic, H.-J. Heinemann, R. Henke, and H. Hönlinger, editors, *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics VI*, volume 96 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer, 2008.

[36] M.B. Giles, D. Ghate, and M.C. Duta. Using automatic differentiation for adjoint CFD code development. In B. Uthup, S. Koruthu, R.K. Sharma, and P. Priyadarshi, editors, *Recent Trends in Aerospace Design and Optimization*. Tata McGraw-Hill, New Delhi, 2006.

[37] M.B. Giles, D. Ghate, and M.C. Duta. Using automatic differentiation for adjoint CFD code development. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 16(4), 2008.

[38] M.B. Giles and N.A. Pierce. Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour. *AIAA-paper 1997-1850*, 1997.

[39] M.B. Giles and N.A. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65, 2000.

[40] A. Griewank and A. Walther. Revolve: An implementation of checkpointing for the reverse or adjoint mode of computational differentiation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 26, 2000.

[41] A. Griewank and A. Walther. *Evaluating Derivatives: Principles and techniques of Algorithmic Differentiation*. Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, 2. edition, 2008.

[42] A. Gross and H.F. Fasel. CFD for Investigating Active Flow Control. *AIAA-paper 2008-4310*, 2008.

[43] B. Günther, R. Becker, A. Carnarius, F. Thiele, and R. King. Simulation Study of the Robust Closed-Loop Control of a 2D High-Lift Configuration. In *IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flows and their Control*, Corfu, Greece, 2007.

[44] B. Günther, A. Carnarius, and F. Thiele. Numerical Investigation of Active Flow Control Applied to an Airfoil with a Camber Flap. In R. King, editor, *Active Flow Control II*, volume 108 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer, 2010.

[45] B. Günther, F. Thiele, R. Petz, W. Nitsche, J. Sahner, T. Weinkauf, and H.-C. Hege. Control of Separation on the Flap of a Three-Element High-Lift Configuration. *AIAA-Paper 2007-265*, 2007.

[46] M. Gunzburger. Adjoint Equation-Based Methods for Control Problems in Incompressible, Viscous Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65, 2000.

[47] B. Günther. *Numerische Simulation der aktiven Strömungsbeeinflussung an praxisrelevanten Hochauftriebskonfigurationen*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2011.

[48] C. Kim H.-J. Kim and O.-H. Rho. Flow Control Using Unsteady Aerodynamic Sensitivity Analysis. *AIAA-paper 2000-515*, 2000.

[49] C. Kim H.-J. Kim, O.-H. Rho, and K.D. Lee. Aerodynamic Sensitivity Analysis for Navier-Stokes Equations. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics (KSIAM)*, 3(2), 1999.

[50] W. Haase, B. Aupoix, U. Bunge, and D. Schwamborn, editors. *FLOMANIA - A European Initiative on Flow Physics Modelling*, volume 94 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer, 2006.

[51] W. Haase, M. Braza, and A. Revell, editors. *DESider – A European Effort on Hybrid RANS-LES Modelling*, volume 103 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer, 2009.

[52] N. Heinz, R. King, and B. Gölling. Robus Closed-Loop Lift Control on an Industrial-Relevant Civil Aircraft Half Model. In R. King, editor, *Active Flow Control II*, volume 108 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer, 2010.

[53] L. Henning. *Regelung abgelöster Scherschichten durch aktive Beeinflussung*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2008.

[54] K.A. Hoffmann and S.T. Chiang. *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, volume 1. Engineering Education System, 3. edition, 1995.

[55] C. Homescu, I.M. Navon, and Z. Li. Suppression of vortex shedding for ow around a circular cylinder using optimal control. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 38, 2002.

[56] G. J.-W. Hou, V. Maroju, A.C. Taylor, V.M. Korivi, and P.A. Newman. Transonic Turbulent Airfoil Design Optimization with Automatic Differentiation in Incremental Iterative Forms. *AIAA-paper 1995-1692*, 1995.

[57] T. Höll, A. Kabat vel Job, P. Giacopinelli, and F. Thiele. A Numerical Study of Active Flow Control on the Flap of a High-Lift Configuration. *Journal of Aircraft*, 2012. Zur Veröffentlichung akzeptiert.

[58] J.-W. He and R. Glowinski and R. Metcalfe and A. Nordlander and J. Periaux. Active Control and Drag Optimization for Flow Past a Circular Cylinder. *Journal of Computational Physics*, 163, 2000.

[59] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 3, 1988.

[60] A. Jameson. Optimum Aerodynamic Design Using Control Theory. *Computational Fluid Dynamics Review*, 1995.

[61] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 285, 1995.

[62] R.D. Joslin, M.D. Gunzburger, R.A. Nicolaides, G. Erlebacher, and M.Y. Hussaini. Self-Contained Automated Methodology for Optimal Flow Control. *AIAA Journal*, 35(5), 1997.

[63] R.D. Joslin and D. Miller. *Fundamentals and Applications of Modern Flow Control*. AIAA, 2009.

[64] S. Kang, H. Choi, and S. Lee. iLaminar flow past a rotating circular cylinder. *Physics of Fluids*, 11(11), 1999.

[65] A. Khodadoust and A. Shmilovich. High reynolds number simulations of distributed active flow control for a high-lift system. *AIAA-Paper 2007-4423*, 2007.

[66] M.R. Khorrami, M.E. Berkman, and M. Choudhari. Unsteady Flow Computations of a Slat with a Blunt Trailing Edge. *AIAA Journal*, 38(11), 2000.

[67] C.S. Kim, C. Kim, and O.-H. Rho. Feasibility Study of Constant Eddy-Viscosity Assumption in Gradient-Based Design Optimization. *Journal of Aircraft*, 40(6), 2003.

[68] T. Knacke. SIMPLE-Algorithmus für nicht-versetzte Gitter. Institutsbericht, Technische Universität Berlin, 2012.

[69] Z. Li, I.M. Navon, M.Y. Hussaini, and F.-X. Le Dimet. Optimal control of cylinder wakes via suction and blowing. *Computers & Fluids*, 32, 2003.

[70] K. Mani and D.J. Mavriplis. An unsteady discrete adjoint formulation for two-dimensional flow problems with deforming meshes. *AIAA-Paper 2007-0060*, 2007.

[71] L. Pack Melton, C.-S. Yao, and A. Seifert. Application of excitation from multiple locations on a simplified high-lift system. *AIAA-paper 2004-2324*, 2004.

[72] F.R. Menter. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. *AIAA Journal*, 32(8), 1994.

[73] K. Meyberg and P. Vachenauer. *Höhere Mathematik 2*. Springer, 3. edition, 1999.

[74] V.J. Modi, M. Fernando, and T. Yokomizo. Drag Reduction of Bluff Bodies Through Moving Surface Boundary Layer Control. *AIAA-Paper 90-0298*, 1990.

[75] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied Shape Optimization for Fluids*. Oxford University Press, 2. edition, 2009.

[76] G. Mutschke, T. Weier, T. Albrecht, G. Gerbeth, and R. Grundmann. Electromagnetic Control of Separation at Hydrofoils. In Marianna Braza and K. Hourigan, editors, *Proceedings of the IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flows and their Control)*, 2009.

[77] S. Nadarajah and A. Jameson. Optimal control of unsteady flows using a time accurate method. *AIAA-Paper 2002-5436*, 2002.

[78] S. Nadarajah and A. Jameson. Optimum Shape Design for Unsteady Flows with Time-Accurate Continuous and Discrete Adjoint Methods. *AIAA Journal*, 45(7), 2007.

[79] A. Nemili, E. Özkaya, N. R. Gauger, A. Carnarius, and F. Thiele. Automatic Generation of Discrete Adjoints For Unsteady Optimal Flow Control. In I.H. Tuncer, editor, *ECCOMAS CFD & Optimization*, 2011.

[80] A. Nemili, E. Özkaya, N. R. Gauger, A. Carnarius, and F. Thiele. Optimal Control of Unsteady Flows Using Discrete Adjoints. *AIAA-Paper 2011-3720*, 2011.

[81] B. Nishri and I. Wygnanski. Effects of periodic excitation on turbulent flow separation from a flap. *AIAA Journal*, 36(4), 1998.

[82] J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 1. edition, 1999.

[83] C. Othmer. CFD Topology and Shape Optimization with Adjoint Methods. *VDI Fahrzeug- und Verkehrstechnik - 13. Internationaler Kongress Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau Würzburg*, 2006.

[84] C. Othmer. A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58, 2008.

[85] M. Pastoor, L. Henning, B.R. Noack, R. King, and G. Tadmor. Feedback shear layer control for bluff body drag reduction. *Journal of Fluid Mechanics*, 608, 2008.

[86] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor & Francis Inc., 1980.

[87] S.V. Patankar and D. Spaldung. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flow. *International Journal for Heat and Mass Transfer*, 15, 1972.

[88] R. Petz. *Experimentelle Untersuchungen zur Effizienz der aktiven Strömungskontrolle an einer Hochauftriebskonfiguration*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 2007.

[89] S.B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Pree, 1. edition, 2000.

[90] L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Heidelberg, 1904.

[91] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerische Mathematik 1*. Springer, 1. edition, 2002.

[92] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 174, 1883.

[93] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 186, 1894.

[94] C.M. Rhie and W.L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21(11), 1983.

[95] H.H. Rosenbrock. An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function. *The Computer Journal*, 6, 1960.

[96] M.P. Rumpfkeil and D.W. Zingg. A general framework for the optimal control of unsteady flows with applications. *AIAA-Paper 2007-1128*, 2007.

[97] T. Rung. Formulierung einfacher Wandrandbedingungen für Transportgleichungsturbulenzmodelle. Institutsbericht, Nr. 02/99, Hermann-Föttinger-Institut, 1999.

[98] T. Rung. *Entwicklung anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen mit Hilfe von Projektionstechniken*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2000.

[99] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction*. Springer, 3. edition, 2005.

[100] H. Schade, E. Kunz, O. Paschereit, and F. Kameier. *Strömungslehre*. de Gruyter, 3. edition, 2007.

[101] H. Schade and K. Neemann. *Tensoranalysis*. de Gruyter, 3. edition, 2009.

[102] M. Schatz. *Numerische Simulation der Beeinflussung instationärer Strömungsablösung durch frei bewegliche Rückstromklappen auf Tragflügeln*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2003.

[103] M. Schatz, B. Günther, and F. Thiele. Computational Investigation of Separation Control for High-lift Airfoil Flows. In R. King, editor, *Active Flow Control*, volume 95 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer, 2007.

[104] M. Schatz and F. Thiele. Numerical Study of High-Lift Flow with Separation Control by Periodic Excitation. *AIAA-Paper 2001-0296*, 2001.

[105] H. Schlichting and K. Gersten. *Grenzschichttheorie*. Springer, 10. edition, 2006.

[106] T. Schmidt. *Quantitizierbarkeit von Unsicherheiten bei der Grenzschichtwiedergabe mit RANS-Verfahren*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2011.

[107] A. Seifert, A. Darabi, and I. Wygnanski. Delay of Airfoil Stall by Periodic Excitation. *Journal of Aircraft*, 33(4), July-August 1996.

[108] A. Shmilovich and Y. Yadlin. Active Flow Control for Practical High-Lift Systems. *Journal of Aircraft*, 46(4), 2009.

[109] M. Shur, P.R. Spalart, K. Squires, M. Strelets, and A. Travin. Three-Dimensionality Reynolds-averaged Navier-Stokes Solutions Around Two-Dimensional Geometries. *AIAA Journal*, 43(6), 2005.

[110] T. Slawig. Algorithmisches Differenzieren in Simulation und Optimalsteuerung von Differentialgleichungen. Technical report 2005/14, Technische Universität Berlin, 2005.

[111] P.R. Spalart. Strategies for turbulence modelling and simulation. In W. Rodi and D. Laurence, editors, *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, volume 4. Elsevier, 1999.

[112] P.R. Spalart. Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21(3), 2000.

[113] P.R. Spalart. Young person's guide to detached-eddy simulation grids. Nasa contractor report nasa/cr-2001-211032, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 2001.

[114] P.R. Spalart. Detached Eddy Simulation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41, 2009.

[115] J. Spurk and N. Aksel. *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer, 8. edition, 2010.

[116] D. Stojković, M. Breuer, and F. Durst. Effect of high rotation rates on the laminar flow around a circular cylinder. *Physics of Fluids*, 14(9), 2002.

[117] H.L. Stone. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 5, 1968.

[118] B.S. Stratford. An Experimental Flow with Zero Skin Friction Throughout Its Region of Pressure Rise. *Journal of Fluid Mechanics*, 5, 1959.

[119] B.S. Stratford. The Prediction of Separation of the Turbulent Boundary Layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 5, 1959.

[120] F. Tröltzsch. *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen*. Vieweg, 1. edition, 2005.

[121] E. Wassen, S. Eichinger, and F. Thiele. Simulation of Active Drag Reduction for a Square-back Vehicle. In R. King, editor, *Active Flow Control II*, volume 108 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer, 2010.

[122] E. Wassen and F. Thiele. Drag Reduction for a Generic Car Model Using Steady Blowing. *AIAA-Paper 2008-3771*, 2008.

[123] E. Wassen and F. Thiele. Road Vehicle Drag Reduction by Combined Steady Blowing and Suction. *AIAA-Paper 2009-4174*, 2009.

[124] D.C. Wilcox. Reassesment of the scale determing equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11), 1988.

[125] D.C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. D C W Industries, 3. edition, 2006.

[126] P. Wolfe. Convergence Conditions for Ascent Methods. *SIAM review*, 11, 1969.

[127] P. Wolfe. Convergence Conditions for Ascent Methods. *SIAM review*, 13, 1971.

[128] I. Wygnanski. The Variables Affecting the Control of Separation by Periodic Excitation. *AIAA-Paper 2004-2505*, 2004.

[129] L. Xue. *Entwicklung eines effizienten parallelen Lösungsalgorithmus zur dreidimensionalen Simulation komplexer turbulenter Strömungen*. PhD thesis, Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik, Technische Universität Berlin, 1998.

[130] A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, and C. Othmer. Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. *Computers & Fluids*, 38, 2009.

[131] A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, and C. Othmer. Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization. *Journal of Computational Physics*, 229(13), 2010.