

# **Elastomerringe zur Schwingungsberuhigung in der Rotordynamik Theorie, Messungen und optimierte Auslegung**

vorgelegt von  
Diplom-Ingenieur  
Alexander Bormann

Von der Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften  
-Dr.-Ing.-

genehmigte Dissertation.

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. J. Thorbeck

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. R. Gasch

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Mertens

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 30. September 2004

Berlin 2005  
D 83



## Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde an der Technischen Universität Berlin zwischen 1997 und 2004 zu großen Teilen während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rahmen des DFG-Forschungsvorhabens mit dem Titel: „Dämpfungs- und Steifigkeitsverhalten von Elastomerringen zur Schwingungsberuhigung wälzgelagerter Rotoren“ angefertigt. Der DFG sei hiermit vielmals für die finanzielle Unterstützung gedankt.

Die „hyperelastische“ Ausdehnung des Bearbeitungszeitraumes ergab sich aus der Weitläufigkeit und Dehnbarkeit, die der Elastomerproblematik naturgemäß anhaftet und aus der diskontinuierlichen Bearbeitung bzw. Förderung des Vorhabens. Dass die Arbeit trotz mancher Zweifel dennoch in dieser Form fertig gestellt wurde, verdanke ich den bemerkenswerten Menschen, die mir hilfsbereit, beratend, Mut machend und antreibend zur Seite standen.

An erster Stelle danke ich Prof. Dr.-Ing. Robert Gasch. Er hat das Thema angestoßen und lotste, mit weitem Überblick und viel Geduld, das thematisch schwer beladene Schiff in den Hafen greifbarer Erkenntnis. Ich danke Prof. Dr.-Ing. Heinz Mertens für sein ausdauerndes Interesse an der Arbeit und den kritischen Sachverstand ihrer Begutachtung. Für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsverfahrens danke ich Prof. Dr.-Ing. Jürgen Thorbeck recht herzlich.

Von den technischen Mitarbeitern des Instituts für Luft- und Raumfahrt sei besonders Nikolaus Hilt gedankt. Unermüdlich setzte er neue Ideen in pfiffige Versuchsaufbauten um. Oft waren die Apparaturen schneller erstellt als eine Fertigungszeichnung. Nicht unerwähnt bleiben die studentischen Hilfskräfte Stefan Skutnik und Guido Weber welche unzählige Stunden damit verbrachten, die Messdaten einzufahren.

Besonderer Dank gilt Dr. Manfred Achenbach von der Firma Parker-Hannifin, der die Arbeit bis zum Schluss sehr engagiert begleitet und unterstützt hat. Durch die Bereitstellung umfangreicher Informationen und selbst verfasster Schriften zur technischen Berechnung der Elastomere lieferte er wertvolle Beiträge zur Beschreibung des Materialverhaltens mittels Masterkurven und zum anschaulichen Verständnis der Gummielastizität.

Mein herzlichster Dank gebührt meiner Frau Sonia nebst Kindern Nadia und Damian, die mich unzählige Wochenenden und Abende entbehren mussten. Und schließlich danke ich meiner lieben Familie und Freunden für den starken Rückhalt, meinem Vater Peter für die kritische Nachtlektüre und Martin Wähler für das akribische Herausfischen unzähliger Fehlerleutchen.

Berlin, September 2005

Wer für Erwachsene schreibt, schreibt für die Zeit,  
wer für die Kinder schreibt, für die Ewigkeit...

Hans Christian Andersen  
dän. Dichter  
1805 – 1875

Für Nadia und Damian.

# Inhaltsverzeichnis

<b>SYMBOLVERZEICHNIS .....</b>	<b>VIII</b>
Formelzeichen.....	VIII
Häufige Abkürzungen.....	XI
Indizes.....	XI
<b>1 EINLEITUNG.....</b>	<b>1</b>
1.1 Zur Gliederung der Arbeit.....	2
1.2 Materialauswahl.....	3
<b>2 STOFFGESETZE .....</b>	<b>5</b>
2.1 Hyperelastizität.....	6
2.1.1 Neo-Hookesches Stoffgesetz.....	7
2.1.2 Mooney-Rivlin-Gesetz.....	8
2.1.3 Modul-Härte-Relation.....	9
2.1.4 Experimentelle Bestimmung der elastischen Konstanten.....	10
2.2 Lineare Viskoelastizität.....	13
2.2.1 Phänomenologische Betrachtung.....	13
2.2.2 Rheologische Modelle.....	13
2.2.3 Stoffgesetz mit Gedächtnisintegralen.....	16
2.2.4 Komplexer Modul.....	16
2.2.5 Stoffgesetz mit inneren Variablen.....	18
2.2.6 Sonderfälle des linear-viskoelastischen Stoffgesetzes.....	19
2.2.7 Zu InkompRESSibilität und Querkontraktionszahl.....	21
2.3 Masterkurven.....	23
2.4 Temperatur-Zeit-Korrespondenz.....	24
2.4.1 WLF-Gleichung.....	25
2.4.2 Arrhenius-Gleichungen.....	24
2.5 Berücksichtigung großer Vordeformation.....	27
2.5.1 Beschreibung bei Neo-Hookeschem Material.....	27
2.5.2 Beschreibung bei Mooney-Rivlin-Material.....	28
2.5.3 Vergleich der Modellierungen der Vordehnungsabhängigkeit.....	31
2.6 Amplitudenabhängigkeit.....	32
2.6.1 Molekulare Interpretation des Payne-Effekts.....	32
2.6.2 Amplitudensweeps.....	33

<b>3</b>	<b>ERMITTLUNG VON MASTERKURVEN .....</b>	<b>35</b>
3.1	Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analyse .....	36
3.1.1	Modul-Ortskurven.....	36
3.1.2	Isothermen.....	37
3.1.3	Isofrequenten.....	37
3.2	Shiftprozess und Bestimmung der Temperatur-Frequenz-Funktion .....	39
3.3	Parameteridentifikation des generalisierten Maxwell-Modells.....	41
3.4	Darstellungsweisen.....	43
3.5	Fehlerbetrachtung .....	46
3.5.1	Fehler der Modul-Ortskurve .....	47
3.5.2	Fehler der Anpassung der Materialfunktion .....	48
3.6	Optimierung der Anpassung.....	50
3.7	Masterkurven des Referenzmaterials.....	51
<b>4</b>	<b>STATIK DES ELASTOMERLAGERS.....</b>	<b>53</b>
4.1	Geometrie und Einbausituation .....	53
4.2	Differentielle und integrale Ringsteifigkeiten .....	54
4.3	Rechteckringe .....	56
4.3.1	Differentielle Steifigkeiten des Ringelements mit Rechteckquerschnitt .....	56
4.3.2	Integrale Steifigkeit des Rings mit Rechteckquerschnitt .....	58
4.3.3	Experimentelle Verifikation.....	60
4.4	O-Ringe .....	60
4.4.1	Analytische Gleichungen der O-Ring-Steifigkeiten .....	61
4.4.2	Experimentelle Verifikation der differentiellen O-Ring-Steifigkeiten .....	63
4.4.3	Experimentelle Verifikation der integralen O-Ring-Steifigkeiten.....	66
4.4.4	Anmerkungen zur Ringstatik .....	69
4.5	Lager aus Zug-Druck-Elastomerelementen.....	70
4.6	Zusammenfassung der Gleichungen zur Lagerauslegung.....	71
<b>5</b>	<b>DYNAMIK DES ELASTOMERLAGERS.....</b>	<b>74</b>
5.1	Modelle und Bewegungsgleichungen.....	74
5.2	Hysterese-Messungen im niederfrequenten Bereich .....	76
5.2.1	Messungen bei Raumtemperatur.....	76
5.2.2	Messungen bei verschiedenen Temperaturen .....	77
5.3	Resonanzmessungen im höherfrequenten Bereich.....	79
5.3.1	Dynamik der Rechteckringe.....	81
5.3.2	Dynamik der O-Ringe.....	82
5.4	Elastomerlager aus Materialpaarungen .....	83

<b>6</b>	<b>AUSLEGUNG UND OPTIMIERUNG IDEAL-TYPISCHER ROTORSYSTEME.....</b>	<b>86</b>
6.1	Starrer Rotor .....	86
6.1.1	Modellierung mit komplexer Lagersteifigkeit .....	87
6.1.2	Elastomerlager mit einem inneren Freiheitsgrad .....	88
6.2	Lavalrotor .....	91
6.2.1	Homogene Lösung der Bewegungsgleichungen mit inneren Freiheitsgraden.....	91
6.2.2	Unwuchtantwort der Formulierung mit komplexer Steifigkeit .....	93
6.2.3	Verhalten in der Resonanz .....	95
6.3	Optimierte Auslegung des Lavalrotors.....	96
6.3.1	Einfluss der Rotor-Lagerabstimmung.....	96
6.3.2	Einfluss des Lagermaterials .....	98
6.3.3	Auslegungsdiagramm des Lavalrotors.....	99
6.3.4	Handhabung und Auswertung des Auslegungsdiagramms - Beispielauslegung ....	99
6.3.5	Optimierte Werkstoffausnutzung.....	102
6.3.6	Optimierte Werkstoffauswahl.....	103
6.4	Rotoren mit mehreren Freiheitsgraden – der Mehrscheibenrotor .....	105
6.4.1	Referenzrotor in starren Lagern .....	106
6.4.2	Referenzrotor in dämpfungsfreien, elastischen Lagern .....	107
6.4.3	Der 3-Scheiben-Rotor in Elastomeren – Einfluss der Lagerdämpfung .....	109
6.5	Experimentelle Verifikation am Versuchsrotor.....	112
6.5.1	Modellierung und Anpassung der Bewegungsgleichungen.....	112
6.5.2	Messergebnisse .....	114
6.5.3	Verifikation der Dämpfungsaussage des Auslegungsdiagramms.....	115
6.5.4	Verifikation des Gesamtmodells.....	116
6.5.5	Rotorbetrieb mit Unwuchterregung .....	119
<b>7</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK.....</b>	<b>121</b>
<b>8</b>	<b>ANHANG.....</b>	<b>124</b>
<b>9</b>	<b>QUELLENVERZEICHNIS .....</b>	<b>134</b>
9.1	Unveröffentlichte Aufsätze und Daten .....	134
9.2	Normenverzeichnis.....	134
9.3	Literaturverzeichnis .....	135

# Symbolverzeichnis

## Formelzeichen

### Lateinische Symbole

Formelzeichen	Einheit	Benennung
<b>A, B</b>		Werkstoffmatrizen
$A_0$	$m^2$	Ausgangsquerschnitt einer Zugprobe
$A_D$	$m^2$	gebundene Fläche eines Gummi-Metall-Elements
$A_e^o, A_e^u$	$kJ/mol$	obere und untere Aktivierungsenergie
$a_T$	-	Temperatur-Shift-Faktor
$b$	$m$	Breite des Rechteckringes, Kontaktbreite des O-Rings
$b^*$	$m$	Breite des vorgepressten Rechteckringes bei freiem Gleiten
$c$		Adsorptionsparameter der instabilen Füllerbindung
$C_0$	$N/m^2$	Neo-Hookesche Konstante
$C_{01}, C_{10}$	$N/m^2$	Mooney-Rivlin-Konstanten
$c_1, c_2$	-, K	universelle Konstanten der WLF-Gleichung
$D$	-	Lehrsches Dämpfungsmaß
$d_a, d_i, d_m$	$m$	äußerer, innerer und mittlerer Durchmesser des freien Ringes
$D_a, D_i, D_m$	$m$	äußerer, innerer und mittlerer Durchmesser des montierten Ringes
$d_L$	$Ns/m$	Dämpfungskoeffizient des Lagers
$dp$	$N/m$	differentielle Linienlast
$D_{ref}$	$m$	Referenzdurchmesser des Elastomerlagers
<b>D</b>	$Ns/m$	Dämpfungsmatrix
$E$	$N/m^2$	E-Modul (Zug) bzw. Elastische Konstante
$E(t)$	$N/m^2$	Matrix der Relaxationsfunktionen
$E_0$	$N/m^2$	Relaxationsmodul (Gleichgewichtsmodul)
$E_T$	$N/m^2$	Tangentialmodul
$E_D$	$N/m^2$	Druckmodul
$E_g, E_{00}$	$N/m^2$	Spontanmodul (Glasmodul)
$f$	$1/s$	Frequenz
$F$	-	Fehlerfunktional
$ \bar{F} $	-	mittlerer Fehlerbetrag
$F(j\Omega)$	$m/N$	Frequenzgang
$F(\lambda)$	-	Dehnungsfunktion
$f_R$	$1/s$	Resonanzfrequenz
$F_{E'}$	-	Fehler der Speichermodulanpassung
$f_L$	$1/s$	Lavalfrequenz
$f_T$	$1/s$	reduzierte Frequenz $f_T = f a_T$
$F_\eta$	-	Fehler der Verlustfaktoranpassung
$g$	$m/s^2$	Gravitationskonstante
$G$	$N/m^2$	Schubmodul
$G 1, G 2,5$	-	Wuchtgüteklasse
$h$	$m$	Querschnittshöhe des Rechteckringes
$h^*$	$m$	Einbauhöhe des Elastomerelements
$h'$	$m$	Einbauhöhe des O-Rings
$H$	-	Härte nach Shore A

<b>Formelzeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Benennung</b>
$H_0$	-	Referenzwert der Härte Shore A ( $H_0 = 53$ )
$I$	$1/m^4$	Flächenträgheitsmoment
$I_1, I_2, I_3$	-	Verzerrungsinvarianten
$j$		komplexe Einheit $\sqrt{-1}$
$J, J(t)$	m/N	Schubnachgiebigkeit, Kriech- Schubnachgiebigkeit
$k_b$	J/K	Boltzmann-Konstante
$k_E, k_\eta$	-	Korrekturfunktion der Vordehnungsabhängigkeit
$k_f$	-	Steifigkeitsfaktor
$k_L$	-	Gestaltfunktionen des Lagers
$L$	m	Länge einer Zugprobe
$m$	kg	Masse
<b>M</b>	kg	Massenmatrix
$m_{gen0,i}$	kg	i-te generalisierte Masse eines konservativen Referenzsystems
$N$	-	Anzahl z.B. der Messwerte, der Moleküle
$N_0$	$1/m^3$	Vernetzungsdichte des ungefüllten Elastomers
$N_C$	$1/m^3$	Vernetzungsdichte der chemischen Molekül-Bindung
$N_S$	$1/m^3$	Vernetzungsdichte der stabilen Füllstoffbindung
$N_I$	$1/m^3$	Vernetzungsdichte der instabilen Füllstoffbindung
$n_{r,t}$	N/m	Radiale, tangentielle Linienlast an der Kontaktfläche
$p$	$N/m^2$	Druck
$P$	N	Kraft
<b>q</b>	-	Vektor der generalisierten Variablen
<b>Q</b>	$N/m^2$	Vektor der generalisierten Kräfte
$R$	J/mol K	universelle Gaskonstante $R = 8.314472$ J/mol K
<b>r</b>	m	Vektor der Rotorverschiebungen in komplexer Zusammenfassung
$r, \varphi, z$		Zylinderkoordinaten
$r_a, r_b, r_m$	M	äußerer, innerer und mittlerer Radius des freien Ringes
$R_a, R_b, R_m$	M	äußerer, innerer und mittlerer Radius des montierten Ringes
$r_i$	m	innerer Lagerfreiheitsgrad in der komplexen Zusammenfassung
$r_L$	m	Lageramplitude in der komplexen Zusammenfassung
$r_W$	m	Wellenamplitude in der komplexen Zusammenfassung
$s$	N/m	Steifigkeit
$\bar{s}$	-	dimensionslose Steifigkeit
<b>S</b>	N/m	Steifigkeitsmatrix
$s'$	N/m	Speichersteifigkeit
$s''$	N/m	Verluststeifigkeit
$S(j\Omega)$	N/m	dynamische Steifigkeit
$\mathbf{s}^*$	N/m	komplexe Steifigkeitsmatrix
$s_L^*$	N/m	komplexe Lagersteifigkeit
$s_{gen0,i}$	N/m	i-te generalisierte Steifigkeit eines konservativen Referenzsystems
$s_a$	N/m	Axialsteifigkeit eines Gummi-Metall-Elements
$s_L$	N/m	Lagersteifigkeit
$s_O$	N/m	Steifigkeit eines O-Rings
$s_q$	N/m	Quersteifigkeit eines Gummi-Metall-Elements
$s_r$	$N/m^2$	differentielle Radialsteifigkeit
$s_R$	N/m	Steifigkeit eines Rechteckringes
$s_t$	$N/m^2$	differentielle Tangentialsteifigkeit
$s_W$	N/m	Wellensteifigkeit
$t$	s	Zeit

Formelzeichen	Einheit	Benennung
$T$	K	Temperatur, wenn angegeben auch in °C.
$T_c^o T_c^u$	K	Grenztemperatur der oberen bzw. unteren Aktivierungsenergie
$T_g$	K	Glastemperatur
$U$	Nm	elastischer Energieanteil
$U_0$	J	Potentialschwelle
$u$	m	Verschiebung
$\hat{u}$	m	Verschiebungsamplitude
$ V $	-	Betrag der Vergrößerungsfunktion der erzwungenen Schwingung
$W$	Nm	Formänderungsenergie
$W_D$	Nm	Verlustarbeit
$x, y, z$		kartesische Koordinaten
$\mathbf{y}$	m	Vektor der inneren Variablen
$y_n$	m	Innere Variablen
$z$	-	Anzahl der Elastomerelemente

### Griechische Symbole

Formelzeichen	Einheit	Benennung
$\Delta$		Differenz von
$\phi(t)$	N/m <sup>2</sup>	1. Lamésche Konstante
$\Phi$		Transformationsmatrix der gemischten Kondensation
$\Phi_a$		Adsorbtionsrate
$\Phi$		Modalmatrix eines konservativen Referenzsystems
$\Gamma_0$	1/s	Sprungrate ohne äußeres Feld
$\Omega$	1/s	Erreger-Kreisfrequenz
$\Omega_R$	1/s	Resonanz-Kreisfrequenz
$\Omega_T$	1/s	reduzierte Erreger-Kreisfrequenz $\Omega_T = \Omega a_T$
$\bar{\Omega}_R$	-	normierte Resonanz-Kreisfrequenz $\Omega_R/\omega_0$
$\alpha$	-	relative Rotorposition $\alpha=x/l$
$\beta$	-	Querschnittsverhältnis $b/h$
$\delta$	rad	Verlustwinkel
$\varepsilon_{1,2,3}$	m	Exzentrizitäten der Rotormasse 1, 2, 3
$\varepsilon_r$	-	radiale Vorpressung des Elastomerrings
$\varepsilon$	-	Dehnung
$\varepsilon_0$	-	Dehnungsamplitude
$\gamma$	rad	Schubwinkel
$\eta_{vis}$	Pa s	Viskosität
$\eta$	-	Verlustfaktor
$\chi$	1/s	Eigenwert
$\lambda$	-	Längung
$\lambda_r$	-	radiale Längung des Einbaus
$\lambda_\omega$	-	dimensionsloser Eigenwert
$\mu(t)$	N/m <sup>2</sup>	2. Lamésche Konstante
$\nu$	-	Querkontraktionszahl
$\nu_0$	1/s	Frequenz der Molekülschwingungen innerhalb eines Potentialtrogs
$\sigma$	N/m <sup>2</sup>	Spannung, Steifigkeitsverhältnis
$\sigma_L$	-	Lagersteifigkeitsverhältnis $s_L/s_W$

<b>Formelzeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Benennung</b>
$\sigma_W$	-	Wellensteifigkeitsverhältnis
$\sigma_0$	N/m <sup>2</sup>	Spannungsamplitude
$\sigma_M$	-	Materialsteifigkeitsverhältnis
$\tau$	s	Zeitkonstante
$\tau_\omega$	-	dimensionslose Relaxationszeit $\tau_\omega = \tau \omega_0$
$\overline{\omega}$	-	relative Häufigkeit
$\omega$	1/s	Kreisfrequenz
$\omega_L$	1/s	Lavalfrequenz
$\omega_0$	1/s	Eigenkreisfrequenz des benachbarten konservativen Systems
$\omega_T$	1/s	reduzierte Kreisfrequenz $\omega_T = \omega a_T$

## Häufige Abkürzungen

WLF	William-Lendel-Ferry
DMTA	Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analyse
Im	Imaginärteil von
Re	Realteil von

## Indizes

### Obere Indizes

*	komplexe Größe, z. B. E* komplexer Modul
'	Realteil einer komplexen Größe, z. B. E' Speicher-Schubmodul
''	Imaginärteil einer komplexen Größe, z. B. E'' Verlust-Modul
^	Amplitude

### Untere Indizes

0	Gleichgewichtslage
x, y, z	Bezug auf kartesisches Koordinatensystem
approx	aus der Approximation
dev	deviatorisch
nh	Neo-Hooke
mr	Mooney-Rivlin
mess	gemessen
ShA	Härte nach Shore A
MC	Bezug auf Masterkurve
L	Lagergröße
W	Wellengröße
O	O-Ring
R	Rechteckring
S	Stator des Versuchsrotors
0	reduziert (normiert)
limo, limu	oberer, unterer Grenzwert (bei Temperaturbereichen)

<b>fette Kleinbuchstaben</b>	Vektor
<b>Fette Großbuchstaben</b>	Matrix



# 1 Einleitung

Elastomerbauteile dienen in verschiedenen Anwendungen als Dämpferelemente, insbesondere dann, wenn im System selbst kaum eigene Dämpfung vorherrscht. In diesem Sinne eignen sich einfache und preiswerte O-Ringe ausgezeichnet zur *Schwingungsberuhigung wälzgelagerter Rotoren* wie z. B. der Turbomolekularpumpe in Abbildung 1-1.

Wie viel Dämpfung bringen jedoch handelsübliche Dichtungsringe in ein Rotorsystem ein? Wie verändert sich die Steifigkeit und Dämpfung mit der Temperatur und der Frequenz? Welches Material und welche Lagergeometrie sind für den zu erwartenden Einsatzbereich optimal?

Diese Fragen konnte man bis heute nicht auf Anhieb beantworten, da die Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften von Elastomerringen von der *Temperatur und der Frequenz* sowie von der *Vorspannung, der Amplitude, der Geometrie* des Einbaus und den *Kontaktrandbedingungen* abhängen.

Zum Verhalten von Gleit- und Magnetlagern existiert eine Vielzahl von Büchern und Publikationen, z.B. GASCH [1], SCHWEITZER [2]. Umso mehr verwundert die Tatsache, dass für die Beschreibung der dynamischen Eigenschaften der Elastomerring-Lager, abgesehen von einigen Aufsätzen, z.B. [3, 4], und einer Reihe von Berichten der NASA [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], die zwischen 1972 und 1980 entstanden, so gut wie keine Literatur vorliegt. Schon vor gut 20 Jahren kamen die Untersuchungen zu dem Schluss, dass die *Temperatur einen großen Einfluss* hat und die Dämpfungsvorteile einiger Elastomere zunichte machen kann. Eine vollständige Beschreibung der Eigenschaften von O-Ringwerkstoffen im relevanten Temperatur-Frequenz-Bereich und ein geeignetes Materialmodell, auf dessen Grundlage die Bewegungsgleichungen des Rotors mit seinen frequenzabhängigen Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen effektiv zu berechnen sind, ließen auf sich warten.

Die *Lagerauswahl* erfolgt bis heute *meist empirisch*, denn die Berechnung der Dämpfungs- und Steifigkeitswerte setzt aufwendige Messungen voraus, wenn man die temperatur- und frequenzabhängigen Eigenschaften der Werkstoffe oder des Bauteils, z.B. in Form von Masterkurven, nicht kennt. Erst mit der Kenntnis der thermo-viskoelastischen Materialfunktionen und der Parameter des nichtlinearen Stoffgesetzes lassen sich die Eigenschaften von Elastomerlagern rechnerisch bestimmen. Diese *aufwendigen Messungen* bilden einen grundlegenden *Bestandteil der vorliegenden Arbeit*.

Diese Arbeit beschreibt die Dämpfung und Steifigkeit von Elastomerlagern, wenn die Geometrie des Ringes, die Abplattung des Einbaus und die Werkstoffbeschreibung des Elastomers als Master-

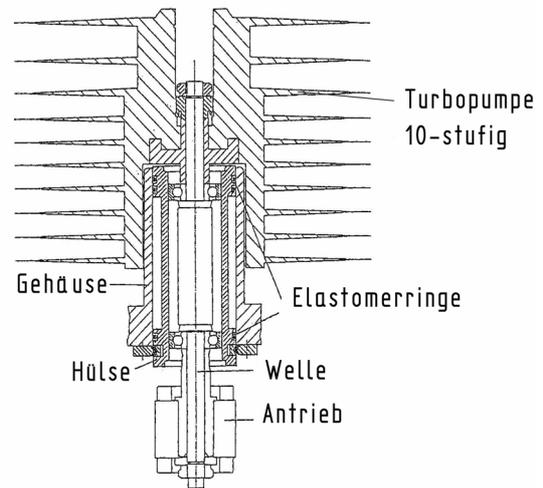


Abbildung 1-1: Turbomolekularpumpe in Elastomerlagern.

kurve in Abhängigkeit von Frequenz bzw. Temperatur vorliegen. Es werden elastizitätstheoretische Modelle für das Verhalten eines infinitesimalen Ringelementes und des gesamten Elastomerrings entwickelt, die sowohl das nicht-lineare Spannungs-Dehnungsgesetz der Elastomere berücksichtigen als auch die nicht-lineare Kontaktmechanik des Elastomerrings. Die nicht-linearen Zusammenhänge vereinfachen sich für einen *definierten Einbauzustand*. Die Berechnung der *Dynamik* fußt dann auf *linearen, thermo-viskoelastischen* Modellen. Wie bei Metallfedern, wo sich die Steifigkeit den Handbüchern des Maschinenbaus als Nomogramm oder Formel entnehmen lässt, wenn die Federgeometrie und der Werkstoff bekannt sind, gelingt hier die Beschreibung der Elastomerring-Steifigkeiten und –Dämpfungen, bei gegebener Ringgeometrie, Abplattung des Einbaus und Materialbeschreibung für den gesuchten Frequenz- und Temperaturbereich, z.B. in Form von Masterkurven.

Darauf aufbauend wird am Beispiel ideal-typischer Rotorsysteme ein *graphisches Entwurfsverfahren* entwickelt. Dieses ermöglicht dem Konstrukteur die schnelle Ermittlung der gesuchten Systemparameter sowie eine *einfache Optimierung*.

### 1.1 Zur Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit behandelt auf theoretischer und versuchstechnischer Ebene die Materialeigenschaften, die statischen und dynamischen Eigenschaften von Elastomerring-Lagern und die Modellierung und die optimierte Auslegung von Rotorsystemen in solchen Lagern.

Kapitel 2 dieser Arbeit widmet sich den statischen und dynamischen Stoffgesetzen der Hyperelastizität und der linearen Thermo-Viskoelastizität. Die Hyperelastizität erfasst die großen nichtlinearen Verformungen, welche beim Einbau der Elastomerringe aufgeprägt werden und die Steifigkeit um die Gleichgewichtslage bestimmen. Anhand von theoretischen und experimentellen Untersuchungen wird gezeigt, inwiefern sich die Elastomerstatik mittels eines einparametrischen Materialgesetzes beschreiben lässt. Diese Beschreibung bringt für die spätere Verknüpfung der nichtlinearen Vorgeschichte mit dem linear-viskoelastischen Verhalten enorme Vorteile. Auf die nichtlineare Dynamik, d.h. auf den Amplitudeneinfluss, wird in dieser Arbeit anhand gemessener Kurven eingegangen, welche die Gültigkeitsgrenzen der linearen Betrachtung aufzeigen.

Eine zentrale Rolle in dieser Arbeit spielen die Masterkurven des Werkstoffs. Der experimentellen Bestimmung dieser vollständigen thermo-viskoelastischen Beschreibung für eine Auswahl handelsüblicher O-Ring-Werkstoffe ist Kapitel 3 gewidmet. Darin wird die Durchführung, Auswertung und Darstellung der Masterkurvenmessungen geschildert und die Zuverlässigkeit der Daten anhand einer Fehlerbetrachtung dargestellt und kritisch diskutiert.

Kapitel 4 behandelt die Einbaustatik des Lagers. Ausgehend von den radialen und tangentialen Steifigkeiten eines differentiellen Ringelementes wird die Gesamtsteifigkeit des Ringes aufsummiert. Für die jeweiligen Ringformen werden Gestaltfunktionen gefunden, die den Einfluss der Abplattung des Einbaus, der Querschnittsform und der Kontaktfläche erfassen.

Im darauf folgenden Kapitel 5 werden die dynamischen Lagereigenschaften abgeleitet. Es wird gezeigt, wie sich das Dämpfungs- und Steifigkeitsverhalten der Masterkurve des Materials in den dynamischen Eigenschaften des Elastomerlagers widerspiegelt. Durch die Wahl eines ein-

parametrischen Stoffgesetzes für die Statik kann der Verlustfaktor des Materials mit dem Verlustfaktor des Elastomerlagers gleichgesetzt werden. Anhand von Messungen an Materialproben und Elastomerlagern wird dieser Ansatz überprüft.

Zur effektiven rechnerischen Behandlung in der Rotordynamik, z.B. von Stabilitätsproblemen, dient die Modellierung des Systems mit inneren Freiheitsgraden. Mit Hilfe dieser Modellierung wird das Differentialgleichungssystem mit zeitabhängigen Koeffizienten in ein vergrößertes System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten überführt, welches mit Standardverfahren gelöst werden kann. In Abschnitt 5.1 wird gezeigt, wie die entsprechenden Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Lagerstatik und der linearen Thermo-Viskoelastizität aufgebaut sind.

Kapitel 6 zeigt die Modellierung von ideal-typischen Rotorsystemen. Zusätzlich zu den Material- und den Bauteileigenschaften wird hier die Abstimmung der Lagereigenschaften auf die Massen und die Wellenelastizitäten betrachtet. Für Lavalläufer in Elastomerlagern werden Auslegungsdiagramme entwickelt. Trotz der hohen Anzahl von Parametern ermöglichen diese Auslegungsdiagramme eine optimierte Lagerauslegung und zeigen auf sehr anschauliche Weise, inwiefern sich hohe Lagerdämpfungen auch in einer hohen Systemdämpfung niederschlagen. Die am 1-Freiheitsgrad-System getroffenen Aussagen werden ferner auf Mehr-Freiheitsgrad-Rotoren übertragen. Am 3-Scheiben-Rotor offenbaren sich die Gemeinsamkeiten und die Besonderheiten im Vergleich zum Lavalrotor.

Den Abschluss bilden die Versuche anhand eines realen Rotors. Dieser wird in starren Lagern und mit verschiedenen Elastomerlagern vermessen und die Ergebnisse werden mit den vorab getroffenen theoretischen Aussagen verglichen.

## 1.2 Materialauswahl

Grundlage der Dämpfungsaussage bilden die Masterkurven des Elastomers. Für O-Ringe lag zum Beginn der Arbeiten eine Masterkurve nur für den Nitrilgummi N674 vor. Bei N674 handelt es sich um ein so genanntes Global Compound, ein Elastomer, welches mit annähernd gleicher Zusammensetzung und gleichen Eigenschaften weltweit gefertigt und eingesetzt wird. Dieser Werkstoff dient hier als Referenzelastomer.

Einen besonderen Stellenwert nimmt die Gewinnung weiterer thermo-viskoelastischer Materialbeschreibungen für eine repräsentative Auswahl handelsüblicher O-Ring-Werkstoffe ein. Um ein breites Spektrum viskoelastischer Dämpfungswerte abzudecken, werden Elastomere mit sehr unterschiedlichen Glasübergangstemperaturen untersucht. Material- und Ringproben aus verschiedenen Elastomeren der Fa. Parker werden statisch und dynamisch untersucht und die zugehörigen Masterkurven ermittelt.

Tabelle 1-1 listet hier untersuchte Elastomere, deren Bezeichnung und die zugehörigen Handelsnamen, auf. In der letzten Spalte wird ein nicht unwesentlicher Aspekt beleuchtet – die Materialkosten. Die Zahlen geben den relativen Preis für Plattenmaterial des jeweiligen Elastomers, bezogen auf den Referenzwerkstoff N674, wieder. Der Preis bezieht sich auf Listenpreise von O-Ringen. Der Perfluorpreis beruht auf Herstellerangaben. Perfluor-Elastomere sind fast hundertmal

## 1. Einleitung

---

so teuer wie der gebräuchliche Nitrilwerkstoff. Die vorliegende Arbeit zeigt, ob und wann sich der Einsatz teurer Elastomere als Dämpfungswerkstoff überhaupt lohnt. Überlegungen zur chemischen Beständigkeit, zur Festigkeit, Ermüdung oder anderen mechanisch-physikalischen Eigenschaften wurden dabei nicht berücksichtigt.

*Tabelle 1-1: Auswahl von Elastomeren der Fa. Parker. Abkürzungen und Bezeichnungen nach DIN ISO 1629, Handelsnamen sowie der auf das Referenzelastomer NBR bezogene relative Preis.*

Bezeichnung Fa. Parker	Kurzname	Materialbezeichnung nach DIN	Handelsnamen	Relativer Preis
N674-70	NBR	Acrylnitril-Butadien-Copolymer / Nitril-Kautschuk (Nitril)	Perbunan <sup>®</sup> , Chemigum <sup>®</sup> , Buna-N	1.0
C557-70	CR	Chloropren (Polychlorbutadien)- Kautschuk	Neoprene <sup>®</sup> , Baypren <sup>®</sup> , Butachlor <sup>®</sup> , u.a.	1.1
E540-80	EPDM	Ethylen-Propylen-Dien-Terpolymer	Buna AP <sup>®</sup> , Vistalon <sup>®</sup> , Dutral <sup>®</sup> , u.a.	1.2
S604-70	MVQ	Silikonkautschuk	Silopren <sup>®</sup> , Silastic <sup>®</sup> , Elastosil <sup>®</sup> , u.a.	3.1
V747-75	FKM	Fluor-Kautschuk	Viton <sup>®</sup> , Tecnoflon <sup>®</sup> , Fluorel <sup>®</sup> ,	7.8
P94	FFKM	Perfluor-Kautschuk	Kalrez <sup>®</sup> , Tecnoflon <sup>®</sup>	50..80

## 2 Stoffgesetze

Mit den Eigenschaften und dem Verhalten von Metallen sind Maschinenbau-Ingenieure seit langem vertraut. Die synthetischen Kautschuke gehören jedoch, wie Polymere im Allgemeinen, zu den jüngeren Werkstoffen, und ständig wird die Materialpalette erweitert. Für die Berechnung der Elastomereigenschaften sind vielfältige und meist viel komplexere Rechenmodelle erforderlich. Die Entwicklung adäquater Berechnungsmethoden ist längst noch nicht abgeschlossen. In dieser Arbeit werden jedoch keine neuartigen Materialbeschreibungen entwickelt, sondern nur bereits bekannte Modelle herangezogen. Diese werden für die Beschreibung der Elastomerlager im Hinblick auf die für die Rotordynamik relevanten Aspekte weitestgehend vereinfacht.

Elastomere bestehen aus langen, weitmaschig vernetzten Kettenmolekülen. Diese können neben den vorherrschenden Kohlenstoff- und Wasserstoffatomen auch Sauerstoff-, Stickstoff-, Fluor-, Schwefelatome oder ringförmige Verbindungen enthalten. Die Anzahl der Schwefelbrücken bzw. der Grad der Vernetzung bestimmt die Elastizität. Je nach Zusammensetzung des Elastomers ergibt sich eine große Vielfalt weiterer physikalischer und chemischer Eigenschaften.

Zu den universellen Eigenschaften der Elastomere zählt die Hyperelastizität. Sie bezeichnet die elastische Verformbarkeit einer Gummiprobe, welche ein Mehrfaches ihrer Ausgangslänge beträgt. Der zugehörige Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang ist nicht-linear, die Spannungen bleiben trotz hoher Verformungen vergleichsweise klein, denn der quasi-statische E-Modul von Elastomeren beträgt bei Raumtemperatur ca. 3...20 N/mm<sup>2</sup>. In diesem Bereich sind die Elastomere nahezu inkompressibel.

Des Weiteren verhalten sich Elastomere viskoelastisch. Das heißt, nach einem Verformungsvorgang klingen die Rückstellkräfte mit der Zeit ab – der Werkstoff relaxiert. Wird eine harmonische Beanspruchung mit kleinen Amplituden vorgegeben, so antwortet das System auch harmonisch, aber phasenverschoben. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve beschreibt dann eine elliptische Hysterese, deren Fläche ein Maß für die Materialdämpfung darstellt.

Bei wachsenden Belastungsfrequenzen oder bei sinkenden Temperaturen versteift sich das Material. Diese Abhängigkeit von der Belastungsfrequenz und der Temperatur wird mit der Thermo-Viskoelastizität beschrieben. Universelles Merkmal sind dabei der Glasübergang - d.h. der Wechsel vom gummiartigen zum glasartigen Werkstoffverhalten – und die Temperatur-Zeit-Äquivalenz. Die Materialdämpfung nimmt mit wachsender Frequenz oberhalb der Glasübergangstemperatur zu und unterhalb davon wieder ab.

Auf die Gleichungen der Hyperelastizität und der Thermo-Viskoelastizität sowie auf die Bestimmung der relevanten Parameter der Stoffgesetze wird in den folgenden Abschnitten detaillierter eingegangen.

## 2.1 Hyperelastizität

Eine einfache und zugleich anschauliche Beschreibung der Hyperelastizität liefert das entropie-elastische Materialgesetz. Dieses fußt auf der statistischen Thermodynamik und der kinetischen Theorie der Moleküle. Im unbelasteten Zustand sind die Makromoleküle verknäuel und so ungeordnet wie möglich (Abbildung 2-1).

Die „größtmögliche Unordnung (Entropie) ist das, was nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik alle Stoffe anstreben. Mit der Unordnung kann es der Gummi weiter treiben als alle anderen Stoffe, denn es muss im Gegensatz zu diesen seine innere Unordnung nicht durch eine zusätzliche Energie erkaufen“ [ACHENBACH (1991)].

Wird dem Elastomer eine äußere Verformung aufgegeben, so bewirkt die Streckung eine „Entknäuelung“ der Moleküle. Den vorher statistisch verteilt ausgerichteten Molekülsegmenten wird somit eine Vorzugsrichtung aufgeprägt, das Kettensegment richtet seine Glieder längs zur Belastungsrichtung aus. Die Glieder eines gestauchten Segments richten sich hingegen stärker quer zur Belastungsrichtung aus (Abbildung 2-1). Die nicht-linearen Rückstellkräfte entspringen dem Widerstreben der Moleküle eines Elastomerkörpers gegen diesen „geordneten“ Zustand geringerer Entropie. Der Werkstoff verhält sich entropie-elastisch.

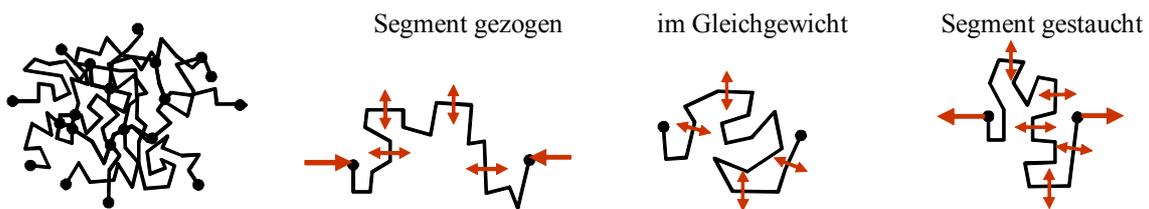


Abbildung 2-1: Aufbau von Elastomeren aus vernetzten, verknäuelten Makromolekülen (links). Veranschaulichung der reversiblen entropieelastischen Kräfte am Beispiel eines freien Kettensegmentes [Achenbach 2002].

Mit wachsender Temperatur im Gummi steigt zudem die Beweglichkeit der Glieder einer Molekülkette und somit das Bestreben zu größerer Unordnung, d.h. im Elastomer nimmt mit steigender Temperatur der E-Modul zu.

Da sich ein Gleichgewichtszustand je nach Werkstoff erst bei mehr oder weniger hohen Temperaturen und/oder ausreichend langer Belastungsdauer einstellt, sind statische Untersuchungen sehr zeitaufwendig und deshalb für systematische Untersuchungen nicht praktikabel. Die Hyperelastizität wird als quasi-statische Eigenschaft aufgefasst. Dabei wird angenommen, dass die beschreibenden Gleichungen auch für Zustände außerhalb des Gleichgewichts gültig sind, solange jeweils die gleiche Bezugszeit gewählt wird. In Anlehnung an die DIN 53505 und die dortige Definition der Härte nach Shore A beträgt die Bezugszeit in den quasi-statischen Versuchen drei Sekunden. Später wird sich zeigen, dass diese Vereinfachung in der Regel nicht zutrifft.

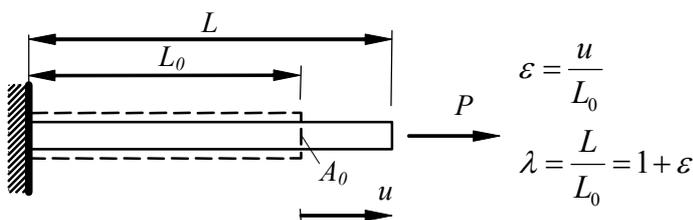


Abbildung 2-2: Einachsiger Belastungszustand.

Betrachtet wird zunächst der einachsige Spannungszustand einer prismatischen Elastomerprobe wie in Abbildung 2-2.

Wirkt eine Kraft  $P$  in Längsrichtung einer stabförmigen Probe mit dem Querschnitt  $A_0$ , so kommt es zu einer Auslenkung  $u$ . Die auftretende Spannung wird im Sinne einer so genannten Ingenieursspannung anhand des Ausgangsquerschnitts  $A_0$  gebildet:

$$\sigma = \sigma_1 = P / A_0. \quad (2-1)$$

Der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang bei Elastomeren ist gewöhnlich nichtlinear. Eine Möglichkeit diesen Zusammenhang zu formulieren, bietet das Neo-Hookesche Stoffgesetz.

### 2.1.1 Neo-Hookesches Stoffgesetz

Das Neo-Hookesche Stoffgesetz verfügt über nur eine elastische Konstante. Es gilt bei kleinen und mittleren Deformationen und lässt sich mit Hilfe der statistischen Thermodynamik herleiten [12].

$$\sigma(\varepsilon, T) = N_0 k_b T \left[ (1 + \varepsilon) - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right]. \quad (2-2)$$

Hier ist:

$N_0$	spezifische Vernetzungsdichte in $\text{m}^{-3}$ ,
$k_b$	Boltzmann-Konstante: $k_b = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ,
$T$	absolute Temperatur in K.

Der Ausdruck  $3 N_0 k_b T$  wird zur elastischen Konstante  $E_{nh}$  zusammengefasst, welche proportional zur absoluten Temperatur  $T$  ist. So wird aus (2-2) unter Einführung der Längung  $\lambda$  mit:

$$\lambda = \frac{L}{L_0} = 1 + \varepsilon \quad (2-3)$$

die kompakte Schreibung des Neo-Hookeschen Gesetzes mit einer elastischen Konstante  $E_{nh}$ :

$$\sigma_{nh} = \frac{E_{nh}}{3} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (2-4)$$

Bleibt die Dehnung im Bereich  $\varepsilon = -0.3 \dots +0.3$ , dann vereinfacht sich der nichtlineare Zusammenhang von (2-4):

$$\sigma = \frac{E_{nh}}{1 + \varepsilon} \varepsilon. \quad (2-5)$$

Abbildung 2-3 zeigt den nichtlinearen Spannungsverlauf nach (2-4) und (2-5) sowie den Verlauf der Tangente im Koordinatenursprung, welche ein lineares Stoffgesetz repräsentiert. Im relevanten Bereich der Dehnung verlaufen die nichtlinearen Kurven nahezu deckungsgleich. Erst oberhalb einer Dehnung von 20% weisen die Spannungswerte erkennbare Unterschiede auf. Der momentane Tangenten-Modul bezüglich einer Ausgangslängung  $\lambda_0$  folgt aus der Ableitung der Neo-Hookeschen Spannung (2-4) nach der Dehnung:

$$E_T(\lambda_0) = \frac{d}{d\varepsilon} \sigma \Big|_{\lambda_0} = \frac{E_{nh}}{3} \left( 1 + \frac{2}{\lambda_0^3} \right). \quad (2-6)$$

Wird der momentane Elastizitätsmodul  $E(\lambda_0)$  aus der Ableitung von (2-5) bestimmt, so gilt:

$$E_T(\lambda_0) \approx \frac{E^{nh}}{\lambda_0^2}. \quad (2-7)$$

Erfolgen um diese Ausgangslage  $\lambda_0$  herum nur kleine Deformationen, so kann das Stoffgesetz linearisiert werden. Dabei enthält z.B. das viskoelastische Materialgesetz dann die Moduln nach (2-6) und (2-7) bzw. diesbezüglich korrigierte Materialfunktionen.

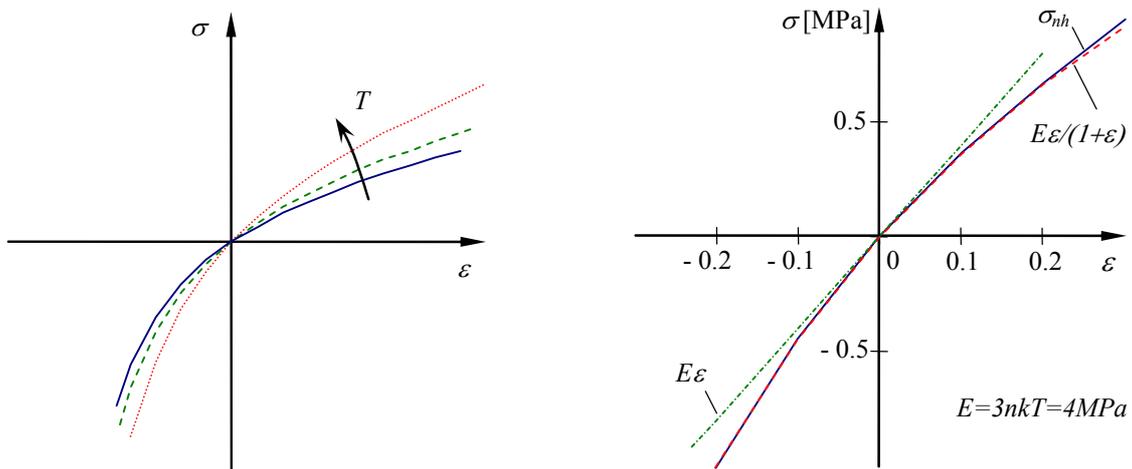


Abbildung 2-3: Entropieelastisches nicht-lineares Materialgesetz. Spannungs-Dehnungsverlauf in Abhängigkeit von der Temperatur (links) und Vergleich verschiedener Approximationen des nichtlinearen Moduls (rechts).

### 2.1.2 Mooney-Rivlin-Gesetz

Im Allgemeinen basieren die Stoffgesetze der Hyperelastizität auf höherwertigen Ableitungen der Formänderungsenergie. Im Falle des Neo-Hookeschen Gesetzes wurde nur die erste Verzerrungsinvariante  $I_1$  berücksichtigt:

$$W_{dev}^{nh} = C_0 (I_1 - 3) \text{ mit } I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \quad (2-8)$$

Dem häufig verwendeten Mooney-Rivlin-Gesetz liegt auch die zweite Invariante  $I_2$  zur Beschreibung des deviatorischen Anteils der Formänderungsenergie zugrunde:

$$W_{dev}^{mr} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \text{ mit } I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2. \quad (2-9)$$

Für den einachsigen Spannungszustand gilt jetzt:

$$\lambda_1 = \lambda \text{ und } \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2-10)$$

Somit folgt analog zum Neo-Hookeschen Gesetz die Mooney-Rivlin-Spannung:

$$\sigma_{mr}(\lambda) = 2 \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (2-11)$$

Liegen die Mooney-Rivlin-Parameter vor, man möchte aber mit dem einparametrischen Neo-Hookeschen Gesetz rechnen, so lassen sich aus der Grenzwertbetrachtung für verschwindend kleine Dehnungen die Mooney-Rivlin-Parameter in eine äquivalente Neo-Hookesche Konstante  $E_{mr}$  überführen:

$$E_{mr} = 6(C_{01} + C_{10}). \quad (2-12)$$

Für den umgekehrten Weg gibt [13] eine Abschätzung für die Konstanten eines synthetischen Mooney-Rivlin-Materials an:

$$C_{01} \cong 0.25C_{10}. \quad (2-13)$$

Mit der elastischen Konstante des Neo-Hookeschen Materials und der Äquivalenz (2-12) folgt hierfür:

$$C_{01} \cong \frac{E_{nh}}{30}; \quad C_{10} \cong \frac{2E_{nh}}{15}. \quad (2-14)$$

Die elastischen Konstanten der oben genannten Stoffgesetze sind in der Regel experimentell zu bestimmen. Insbesondere die Dichtungshersteller sind meist nicht in der Lage, Auskunft über die elastizitäts-theoretischen Parameter der O-Ring Werkstoffe zu geben. Oft ist nur der Wert der Shore A Härte  $H$  bekannt.

### 2.1.3 Modul-Härte-Relation

Die Härte  $H$  des Gummis nach Shore A wird mit einem Durometer an Gummiprüfproben bestimmt. *Oft ist die Härte der einzige relevante Stoffwert, der für einen handelsüblichen Gummiring vorliegt.*

Nach DIN 53 505 bestimmt sich die Härte aus der Eindringtiefe des spezifischen Probenkörpers bei konstanter Druckkraft und definierter Andruckfläche. Der entsprechende Wert ist 3 Sekunden nach Aufbringen des Probekörpers abzulesen. Zu diesem Zeitpunkt sind die meisten Elastomere nicht vollständig relaxiert. Somit wird hier, bei Bezug auf die 3 s-Werte, lediglich von einem *quasistatischen Wert* gesprochen.

Über die Umrechnung der Härte des Elastomers in Werte des E-Moduls bzw. des Schubmoduls  $G$  existieren eine Vielzahl von Aufsätzen [14, 15, 16]. In dieser Arbeit wird eine empirische Formel von Achenbach verwendet [17]:

$$G_{ShA}(H) = e^{\alpha(H-H_0)} \text{MPa} \quad \text{mit } \alpha = 0.05; \quad H_0 = 53. \quad (2-15)$$

Diese Gleichung liefert aus der Härte einen groben Anhaltswert für die Größe des *G-Moduls* bei kleinen Dehnungen. Der E-Modul wird aus dem Schubmodul (2-15) mit

$$E = 2(1 + \nu)G \quad (2-16)$$

berechnet. Dabei ist  $\nu$  die Querkontraktionszahl, die das Verhältnis der Querdehnung  $\varepsilon_Q$  zur Längsdehnung  $\varepsilon_L$  einer Probe, z.B. nach Abbildung 2-2, beschreibt:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_Q}{\varepsilon_L}. \quad (2-17)$$

Auf die Querkontraktion wird im Abschnitt 2.2.7 genauer eingegangen.

Abbildung 2-4 stellt die empirische Abschätzung nach (2-15) im Vergleich zu den analytischen Beschreibungen nach [14, 15, 16] dar. Im relevanten Härte-Bereich von  $H = 50 \dots 85$  decken sich die verschiedenen Kurven recht gut. Für größere Härtewerte führen die analytischen Beschreibungen jedoch auf erheblich größere E-Moduln. Am Referenzwert der Härte  $H_0 = 53$  ergibt sich nach (2-15) der Schubmodul  $G = 1 \text{ MPa}$  bzw. der daraus nach (2-16) bestimmte Wert des E-Moduls.

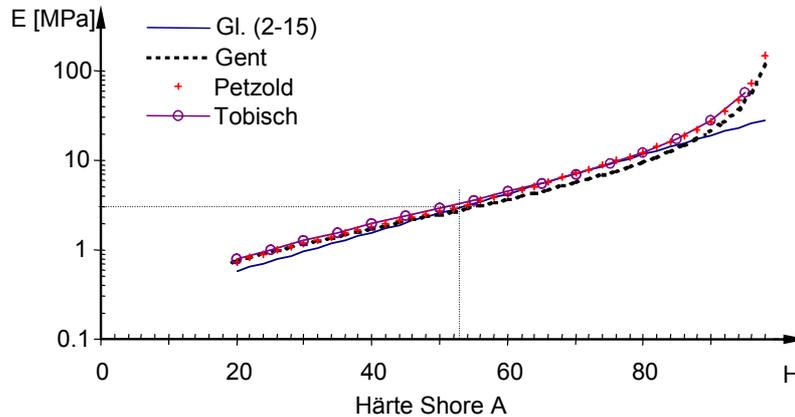


Abbildung 2-4: Vergleich von analytischen Relationen des E-Moduls versus Härte nach Shore A mit der empirischen Formel (2-15).

### 2.1.4 Experimentelle Bestimmung der elastischen Konstanten

In dieser Arbeit werden die elastischen Konstanten zur Beschreibung der Hyperelastizität anhand von Versuchen bei Raumtemperatur ermittelt. Als Zugproben dienen aufgeschnittene Elastomerringe. Für diese werden eine Dehnung mit stufenweise wachsenden Amplituden bis zu 30% aufgeprägt und die 3-Sekunden-Werte der Spannungsrelaxation als quasi-statische Referenzwerte bestimmt. Nach jeder Laststufe geht die Probe innerhalb von 60 Sekunden in die Ursprungslage zurück und es erfolgt die Messung mit einem weiteren Amplitudenniveau. Abbildung 2-5 links zeigt die so ermittelten Spannungs-Dehnungs-Verläufe einiger Elastomerproben. Die durchgezogenen Linien kennzeichnen den Verlauf der zugehörigen Anpassung mittels des Neo-Hookeschen Materialgesetzes (2-4).

Wie Abbildung 2-5 rechts zeigt, gelingt die Anpassung im Bereich  $\varepsilon = 3\% \dots 20\%$  auch mit der vereinfachten Beschreibung nach (2-5) sehr gut. Die Anpassung der elastischen Konstanten erfolgt mittels so genannter reduzierter Spannungen:

$$\sigma_{red} = \frac{\sigma}{\lambda - \lambda^{-2}}. \quad (2-18)$$

Diese spezielle Normierung und Auftragung der Ergebnisse hat den Vorteil, dass die gesuchten Materialparameter gleich als Parameter der Geradengleichung bzw. als Konstanten abgelesen werden können. In der Abbildung 2-6 (links) erfolgt so die Anpassung an das Neo-Hookesche Materialgesetz. Hier ist die reduzierte Spannung, multipliziert mit dem Faktor 3, über der Dehnung aufgetragen. Dabei sollte sich eine konstante, horizontale Verteilung der Messwerte ergeben. Abbildung 2-6 (rechts) zeigt einen so genannten Mooney-Plot. Dort sind die reduzierten Spannungen über der reziproken Längung  $\lambda^{-1}$  aufgetragen. Die Steigung der Geraden entspricht der

gesuchten elastischen Konstante  $C_{01}$ . Die Konstante  $C_{01}$  folgt aus dem Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinatenachse bei  $\lambda^{-1}=0$ .

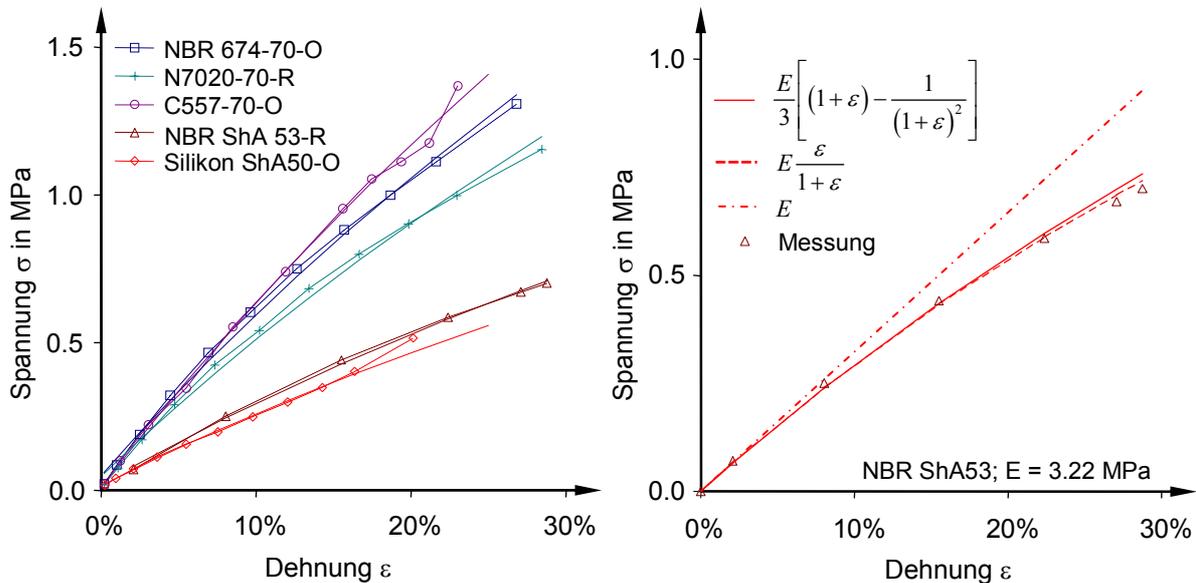


Abbildung 2-5: Einachsiger Zugversuch bei quadratischen und kreisförmigen Ringschnüren und ihre Approximation durch (2-4) (links). Vergleich der Anpassung nach (2-4) und (2-5) (rechts).

Unabhängig davon, welche Art der Anpassung gewählt wurde, treten im Bereich kleiner Dehnungen größere Abweichungen um den Faktor 1,6 bis 2,3 auf. Messfehler sind nicht auszuschließen. Höhe und Betrag der Abweichung deuten jedoch auf den *Payne-Effekt* (18, 19) hin, welcher dynamisch beanspruchten gefüllten Elastomeren zueigen ist (siehe Abschnitt 2.5).

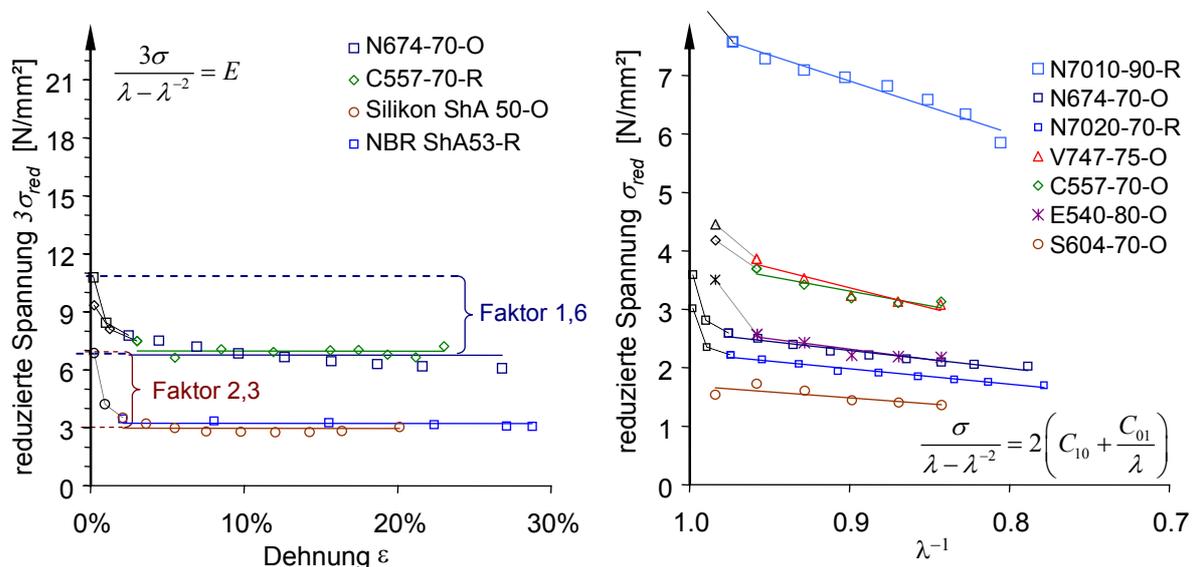


Abbildung 2-6: Anpassung der Ergebnisse der Zugversuche von Proben aus O-Ringen und Rechteckringen mittels Neo-Hooke-Plots (links) und Mooney-Rivlin-Plots (rechts).

Bei der Anpassung an die Materialgesetze (2-4) und (2-5) werden diese „Ausreißer“ ausgeklammert. Abbildung 2-6 zeigt die Geraden der linearen Interpolation und veranschaulicht, bis zu welchem Bereich die Messwerte bei der Anpassung berücksichtigt werden. Die Ergebnisse der Anpassung der Zugversuche sind in der Tabelle 2-1 zusammengefasst.

## 2. Stoffgesetze

Der mittlere relative Fehlerbetrag wird anhand der Messwerte  $X_i = \sigma_{mess,i}$  und der Funktionswerte der jeweiligen Approximation  $X = \sigma_{approx}(\lambda_i)$  wie folgt bestimmt:

$$|\bar{F}| = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{X_i - X}{X_i} \right|. \quad (2-19)$$

In Tabelle 2-1 werden die elastischen Konstanten sowie der entsprechende Fehler  $|\bar{F}|_{nh}$  und  $|\bar{F}|_{mr}$  bezüglich der fehlerminimalen Anpassung an das Neo-Hookesche bzw. das Mooney-Rivlin-Modell gegenübergestellt. Diese Fehlerbetrachtung verdeutlicht, dass das zweiparametrische Mooney-Rivlin-Modell mit einem relativen Fehlerbetrag von ca. 3 % im Mittel eine bessere Anpassung erlaubt. Auf der anderen Seite sind die sich ergebenden negativen elastische Konstanten  $C_{10}$  physikalisch nicht sinnvoll. Eine erforderliche Nebenbedingung bei der Anpassung reduziert diese in den meisten Fällen wieder auf eine einparametrische Beschreibung.

Des Weiteren zeigt der Umstand, dass die Anpassung der Neo-Hookeschen Konstante zweier Proben (Spalte 6 und 7 in Tabelle 2-1) ein und desselben Elastomers C557-70 um mehr als 40% voneinander abweichen, dass zu hohe Ansprüche an die Exaktheit nicht angebracht sind.

Folglich stellt das Neo-Hookesche Modell, welches die Messwerte mit einem nur etwas größeren Fehler approximiert, eine durchaus geeignete Beschreibung dar. Dieses Materialgesetz (2-4) wird in dieser Arbeit insbesondere deshalb verwendet, da es auf einfache Weise die multiplikative Verknüpfung von quasi-statischer Vorgeschichte mit der Zeit- bzw. Frequenzabhängigkeit der Materialeigenschaften erlaubt (2.5.1).

*Tabelle 2-1: Vergleich der Approximation von Zug-Dehnungs-Kurven. Elastische Konstanten und mittlerer Fehlerbetrag für die Anpassung nach Neo-Hooke, Mooney-Rivlin sowie der Modul  $E_{ShA}$  aus dem Härtewert.*

Probennr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Material- bezeichnung	N674-70-O	MVQ ShA50-O	NBR ShA53-R	N7020-70-R	N7010-90-R	C557-70-R	C557-70-O	S604-70-O	E540-80-O	V747-75-O	Mittelwert	Mittelwert 2,3,6
$E_{ShA}$ [MPa]	7.0	2.6	3.0	7.0	19.1	7.0	7.0	7.0	11.6	9.0		
$E_{nh}$ [MPa]	6.8	3.0	3.1	5.8	20.4	7.0	9.9	4.5	6.9	10.1		
$ \bar{F} _{nh}$ [%]	7.3	6.6	2.1	7.3	6.1	2.9	6.0	7.4	6.4	7.8	6.0	3.9
$C_{10}$ [MPa]	-0.24	0.02	0.23	-0.20	-0.57	0.97	-0.60	-0.18	-0.45	-1.39		
$C_{0l}$ [MPa]	1.55	0.52	0.36	1.32	4.47	0.22	2.51	1.02	1.79	3.42		
$E_{mr}$ [MPa]	7.8	3.2	3.5	6.7	23.4	7.1	11.4	5.1	8.0	12.2		
$ \bar{F} _{mr}$ [%]	1.6	5.5	0.1	1.2	1.4	2.8	2.5	3.8	2.2	2.4	3.1	2.8

## 2.2 Lineare Viskoelastizität

### 2.2.1 Phänomenologische Betrachtung

Viskoelastizität wird im Zeitbereich durch das Abklingverhalten der elastischen Rückstellkräfte veranschaulicht. Im Frequenzbereich beschreiben die linear-viskoelastischen Stoffgleichungen bei harmonischer Erregung elliptische Hysteresen und den darin enthaltenen Anteil der viskosen Dämpfung. Sowohl Dämpfung als auch Steifigkeit des Materials hängen von der Frequenz und der Temperatur ab.

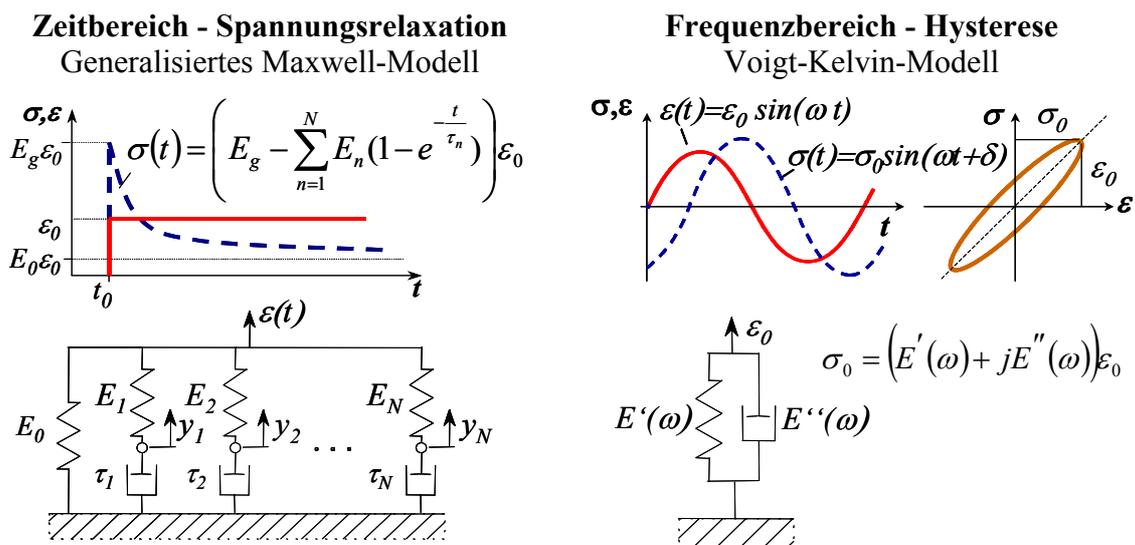


Abbildung 2-7: Viskoelastische Phänomene und ihre Modellierungen im Zeit- und Frequenzbereich.

Eine Spannungsrelaxation  $\sigma(t)$  infolge des Sprungeingangs  $\varepsilon_0$  wird mit dem generalisierten Maxwell-Modell beschrieben (Abbildung 2-7, links). Der Spontanmodul  $E_g = \sum E_n + E_0$  summiert sich aus den Beiträgen der  $N+1$  Einzelfedern auf, und das vollständig relaxierte Material antwortet mit dem statischen Gleichgewichtsmodul  $E_0$ . Zwischen  $E_0$  und  $E_g$  liegen meist mehrere Größenordnungen und die Zeitdauer, bis sich der Gleichgewichtszustand einstellt, umfasst mehrere Dekaden auf einer üblicherweise logarithmischen Zeitskala. Dementsprechend sollte das Modell über mindestens so viele Maxwell-Stränge  $N$  verfügen, wie Dekaden auf der Zeit bzw. Frequenzachse erfasst werden sollen. Die Lösung der Differentialgleichung infolge eines Sprungeingangs (siehe 2.2.2) lautet:

$$\sigma(t) = \left( E_0 + \sum_{n=1}^N E_n e^{(-t/\tau_n)} \right) \varepsilon_0. \quad (2-20)$$

Im Frequenzbereich für Vorgänge mit harmonischer Erregung eignet sich die Feder-Dämpfer-Darstellung (Abbildung 2-7, rechts), die auf einen komplexen Modul

$$E(\omega) = E'(\omega) + jE''(\omega) \quad (2-21)$$

mit frequenzabhängigem Realteil  $E'(\omega)$  und Imaginärteil  $E''(\omega)$  führt. Der Quotient aus beiden ergibt den Verlustfaktor des Materials (siehe 2.2.4):

$$\eta = \tan \delta = E''/E'. \quad (2-22)$$

Beide Modellierungen sind ineinander überföhrbar. Mit den so genannten Prony-Parametern des generalisierten Maxwell-Modells  $E_n$  und  $\tau_n$  folgen die Anteile des komplexen Moduls:

$$E'(\omega) = E_0 + \sum_{n=1}^N E_n \frac{\omega^2 \tau_n^2}{1 + \omega^2 \tau_n^2}; \quad E''(\omega) = \sum_{n=1}^N E_n \frac{\omega \tau_n}{1 + \omega^2 \tau_n^2}. \quad (2-23)$$

Die Elemente des Maxwell-Modells bringen zusätzlich zum äuöeren Freiheitsgrad  $\varepsilon(t)$  noch  $N$  innere Freiheitsgrade  $y_{1..N}$  ein (siehe 2.2.5). Gegenüber der kompakten Feder-Dämpfer-Darstellung besitzt die Modellierung mit inneren Freiheitsgraden den Vorteil, dass sie nur konstante Koeffizienten für die Federn  $E_n$  und Dämpfer  $\tau_n = d_n/E_n$  besitzt. Bei der späteren Beschreibung der Gummilager reduziert sich so das Problem auf ein vergrößertes System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2ter Ordnung, welches sehr gut mit der Methode der FE kombiniert und mit Standardmethoden gelöst werden kann.

Die Parameter  $E_n$  und  $\tau_n$  gewinnt man aus der Anpassung der Masterkurve des Materials. Äquivalent zur Frequenz sind Materialsteifigkeit  $E'$  und Dämpfung  $E''$  auch von der Temperatur abhängig. Die Umrechnung auf andere Temperaturen resultiert aus einem Shiftprozess, bei dem die Masterkurve aus gemessenen Isothermen zusammengesetzt wird (s. Abschnitt 2.3 und 0).

Den Masterkurven und der darin enthaltenen Beschreibung der thermo-viskoelastischen Eigenschaften auf der Grundlage der inneren Freiheitsgrade kommt eine zentrale Bedeutung bei der optimierten Auslegung der Elastomerlager und der Berechnung der dynamischen Lagereigenschaften zu. Deshalb wird den Masterkurven ein eigenes Kapitel 3 gewidmet.

Die mathematischen Beschreibungen der linearen Viskoelastizität werden in stark gekürzter Form umrissen. Ein ausführlicher Gleichungssatz ist in den vielfältigen Quellen der Primärliteratur, z.B. FERRY [20] und HAUPT [21], zu finden.

### 2.2.2 Rheologische Modelle

Als rheologische Modelle bezeichnet man Zusammenschaltungen von Federn und Dämpfern, die als anschauliche mechanische Ersatzmodelle das Materialverhalten widerspiegeln (Abbildung 2-8). Die einfachsten Modelle, die auf diese Art zeit- bzw. frequenzabhängiges Elastomerverhalten beschreiben können, sind 3-Parameter-Modelle wie z.B. das Maxwell-Modell mit nur einem inneren Freiheitsgrad  $y_n$ .

Das Stoffgesetz eines verallgemeinerten linear-viskoelastischen Modells wird im Zeitbereich mit Hilfe von *Differentialoperatoren*  $\mathcal{D}$  geschrieben (BIOT [22], FINDLEY [23]):

$$\left( \sum_{m=0}^M \mathbf{A}_m \mathcal{D}^m \right) \boldsymbol{\sigma}(t) = \left( \sum_{n=0}^N \mathbf{B}_n \mathcal{D}^n \right) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \text{ mit } \mathcal{D} = \frac{d}{dt}. \quad (2-24)$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  beinhalten die Werkstoffparameter und die sechs unabhängigen Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors wurden zu Spaltenvektoren zusammengefasst:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t) = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T, \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})^T. \quad (2-25)$$

Um die resultierenden Bewegungsgleichungen mit ihren Zeitableitungen höherer Ordnung mit Standardmethoden im Zeitbereich zu lösen, sind geschickte Transformationen erforderlich [26].

Im Falle eines 3-Parameter Standardmodells lautet die Differentialgleichung für den einachsigen Spannungszustand:

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_1} \sigma = (E_0 + E_1) \dot{\varepsilon} + \frac{E_0}{\tau_1} \varepsilon. \quad (2-26)$$

Die Zeitkonstante des Dämpfers  $\tau$  ist die auf die Steifigkeit bezogene Viskosität und stellt ein Maß für den Wirkungsbereich eines Maxwellstrangs auf der Zeit- bzw. Frequenzachse dar. Bei Vorgabe einer Dehnungs-Sprungfunktion  $\varepsilon_0$  führt die Lösung von (2-26) auf den Relaxationsmodul  $E(t)$ :

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E_0 + E_1 e^{(-t/\tau_1)}. \quad (2-27)$$

3-Parameter Standardmodelle sind zur *qualitativen Beschreibung* des Dämpfungs- und Steifigkeitsverhaltens von Elastomeren geeignet. Sie sind in einem engen Zeit- bzw. Frequenzbereich gültig.

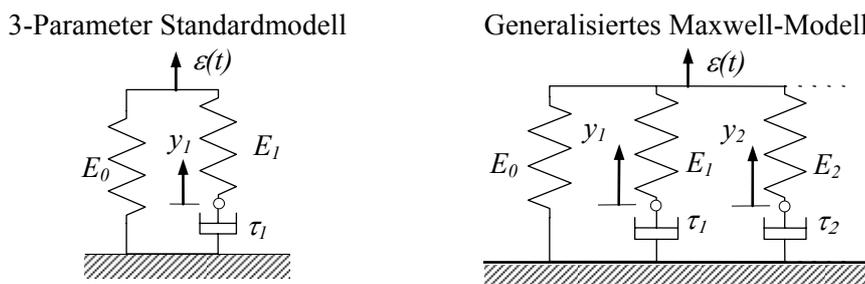


Abbildung 2-8: 3-Parameter Standardmodell mit einem inneren Freiheitsgrad (links) und verallgemeinertes Maxwell-Modell (rechts).

Durch das *generalisierte Maxwell-Modell* wird eine Approximation über einen größeren Zeit- bzw. Frequenzbereich hinweg erreicht. Dieses Modell besteht aus  $N+1$  Feder-Dämpfer-Einheiten, wobei  $N$  mindestens die Anzahl der zu erfassenden Dekaden ist (Abbildung 2-8, rechts). Die Zeitkonstante  $\tau_0$  des 0-ten Maxwell-Strangs wird hier einfach weggelassen. Sie ist so groß, dass die Dämpfungswirkung praktisch nicht relevant ist – die verbleibende Einzelfeder bezeichnet den statischen Gleichgewichtsmodul  $E_0$ .

Analog zu den 3-Parameter-Modellen wird der Relaxationsmodul des generalisierten Maxwell-Modells als Summe aus Exponentialfunktionen gebildet, deren Amplituden den Federsteifigkeiten der Maxwell-Elemente entsprechen. Bei Sprungeingang lautet die Spannungsantwort dann:

$$\sigma(t) = \left( E_0 + \sum_{n=1}^N E_n e^{(-t/\tau_n)} \right) \varepsilon_0. \quad (2-28)$$

Häufig findet man auch die äquivalente Beschreibung, in der der Spontanmodul bzw. Glasmodul  $E_g$  aus der Summenformulierung herausgezogen wird:

$$\sigma(t) = \left( E_g - \sum_{n=1}^N E_n [1 - e^{(-t/\tau_n)}] \right) \varepsilon_0 \quad \text{mit} \quad E_g = E_0 + \sum_{n=1}^N E_n. \quad (2-29)$$

Das Maxwell-Modell eignet sich gut zur Darstellung von Relaxationsvorgängen. Um Parameter aus Kriechversuchen zu gewinnen, wird gern das dazu konjugierte Voigt-Modell verwendet.

### 2.2.3 Stoffgesetz mit Gedächtnisintegralen

Analog zur Darstellung durch Differentialoperatoren (2-24) leitet AHRENS [26] auf der Basis von Gedächtnisintegralen die Formulierung des viskoelastischen Stoffgesetzes mit inneren Freiheitsgraden her. Nach dem Boltzmannschen Superpositionsprinzip kann die Antwort des Materials auf die kombinierte Belastung mehrerer Belastungsschritte zu einer Gesamtantwort überlagert werden. Für infinitesimale Lastsprünge wird die Summation der Lastschritte durch eine Integration ersetzt. Das Stoffgesetz lautet dann allgemein für den dreidimensionalen Spannungszustand und für homogenes und isotropes Material nach FUNG [24]:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(t-\tau) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2-30)$$

Die Matrix der Relaxationsfunktionen  $\mathbf{E}$  beinhaltet die Werkstoffparameter, welche experimentell bestimmt werden müssen. Dabei ist die Matrix  $\mathbf{E}$  symmetrisch und ihre Zeitableitung negativ semidefinit [25]. Letzteres besagt, dass das Gedächtnis des Materials nachlässt – zeitlich weiter zurückliegende Verzerrungen beeinflussen den momentanen Spannungszustand in immer schwächerem Maße.

Nach partieller Integration und unter der Voraussetzung, dass  $\boldsymbol{\varepsilon}(-\infty) = \mathbf{0}$  ist, folgt eine alternative Form der Integraldarstellung, bei der die Verformung zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  beginnt:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{E}(0) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \int_0^t \frac{\partial \mathbf{E}(t-\tau)}{\partial \tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2-31)$$

Die Elemente  $E_{pq}$  der symmetrischen Matrix  $\mathbf{E}$  vermitteln zwischen den Elementen  $\sigma_p$  des Spannungs- und  $\varepsilon_q$  des Verzerrungsvektors, wobei die Indizes  $p, q = 1, \dots, 6$  durchlaufen. Alle Elemente der Relaxationsmatrix  $\mathbf{E}$  können durch Reihen von Exponentialfunktionen approximiert werden, d.h. das Material wird durch mehrere Maxwellkörper beschrieben:

$$E_{pq}(t) = E_{pq}^{(0)} + \sum_{n=1}^{N_{pq}} E_{pq}^{(n)} e^{-t/\tau_{pq}^{(n)}}. \quad (2-32)$$

Sind die Parameter der Relaxationsfunktionen, z.B. aus Experimenten, bekannt, so kann das Integral (2-30) für vorgegebene Verformungsverläufe ausgewertet werden. Die Beschreibung von Rotoren in Elastomerlagern führt bei Verwendung der Gedächtnisintegral-Darstellung auf komplizierte Integro-Differentialgleichungen, das resultierende Eigenwertproblem ließe sich nicht mehr mit numerischen Standardverfahren lösen. Hier schafft das weiter hinten beschriebene Stoffgesetz mit inneren Variablen (2.2.5) Abhilfe.

### 2.2.4 Komplexer Modul

Bei Erregung mit harmonischen Verzerrungs- bzw. Spannungsverläufen erhält das Materialgesetz die Form:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{E}^*(\omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (2-33)$$

Darin ist  $\mathbf{E}^*(\omega)$  der komplexe Modul, der mittels der oben vorgestellten Integraldarstellung aus dem Relaxationsmodul abgeleitet werden kann. Für den einachsigen Spannungszustand gilt dann:

$$E^*(\omega) = E(0) + \int_0^{\infty} \frac{\partial E(t)}{\partial t} e^{-j\omega t} dt \quad (2-34)$$

Das obige Integral ist die einseitige Fourier-Transformierte der Relaxationsfunktion. Mit

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \quad (2-35)$$

kann der komplexe Modul  $E^*(\omega)$  in seinen Real- und Imaginärteil aufgespalten werden.

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= E(0) + \int_0^{\infty} \frac{\partial E(t)}{\partial t} \cos(\omega t) dt \\ E''(\omega) &= -\int_0^{\infty} \frac{\partial E(t)}{\partial t} \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (2-36)$$

Setzt man (2-36) in das aus (2-33) abgeleitete einachsige Stoffgesetz ein, so folgt:

$$\sigma_0 = (E'(\omega) + jE''(\omega)) \varepsilon_0. \quad (2-37)$$

Für ein generalisiertes Maxwell-Modell N-ter Ordnung folgen Speicher- und Verlustmodul nach [12] aus dem bereits in 2.2.1 vorgestellten Zusammenhang:

$$E'(\omega) = E_0 + \sum_{n=1}^N E_n \frac{\omega^2 \tau_n^2}{1 + \omega^2 \tau_n^2}; \quad E''(\omega) = \sum_{n=1}^N E_n \frac{\omega \tau_n}{1 + \omega^2 \tau_n^2}. \quad (2-23)$$

Der in Phase schwingende Realteil  $E'$  wird Speichermodul genannt. Er ist ein Maß für die bei Maximalamplitude gespeicherte und wieder gewonnene Energie:

$$U = \frac{1}{2} E' \varepsilon_0^2. \quad (2-38)$$

Der Verlustmodul  $E''$  ist der um  $90^\circ$  phasenverschobene Imaginärteil des komplexen Moduls. Er ist proportional zur Verlustarbeit  $W_D$  pro Schwingungsperiode und ergibt sich aus der von der Hysterese umschlossenen Fläche:

$$W_D = \oint \sigma d\varepsilon = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi/\omega} (E' \varepsilon_0 \sin \omega t + \eta E' \varepsilon_0 \cos \omega t) \omega \varepsilon_0 \cos \omega t dt. \quad (2-39)$$

Daraus wird nach Integration:

$$W_D = \pi E'' \varepsilon_0^2 = \pi \eta E' \varepsilon_0^2. \quad (2-40)$$

Weiterhin bezeichnet der Verlustfaktor  $\eta$  das Verhältnis von Verlustmodul zu Speichermodul:

$$\eta = \frac{E''}{E'} = \frac{W_D}{2\pi U} = \tan \delta. \quad (2-41)$$

Der Verlustfaktor charakterisiert hier die Dämpfungseigenschaften des Materials. Er ist einerseits ein Maß für das Verhältnis von dissipativer und gespeicherter Energie und folgt andererseits direkt aus der Phasenverschiebung  $\delta$  zwischen Ein- und Ausgangssignal.

Die Formulierung des Stoffgesetzes mit Hilfe des komplexen Moduls ist sehr kompakt und transparent. Zur Lösung der Bewegungsgleichungen eines Schwingungssystems eignet sich diese Darstellung jedoch nur bei bekannter Belastungsfrequenz.

### 2.2.5 Stoffgesetz mit inneren Variablen

Besonders vorteilhaft ist die Formulierung des Stoffgesetzes mit inneren Variablen [24, 26, 27 und 28]. Blicken wir zurück auf die in Abbildung 2-8 gezeigten rheologischen Modelle. Diese implizieren bereits zu den beobachtbaren Zustandsgrößen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  zusätzliche, nicht beobachtbare innere Freiheitsgrade des Materials [28]. Diese inneren Variablen beschreiben das Gedächtnis des Materials und werden zu den beobachtbaren äußeren Größen - den Verzerrungen und Spannungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  - als weitere Zustandsgrößen eingeführt. Die inneren Variablen werden in dem Zustandsvektor  $\mathbf{y}$  zusammengefasst:

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))^T. \quad (2-42)$$

Der Vektor der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  setzt sich aus dem Verzerrungsvektor und dem Vektor der inneren, zur Entropieproduktion beitragenden, Variablen zusammen:

$$\mathbf{q}(t) = (\boldsymbol{\varepsilon}^T(t), \mathbf{y}^T(t))^T. \quad (2-43)$$

Diesem Vektor wird der Vektor der generalisierten Kräfte  $\mathbf{p}_{gen}$  zugeordnet:

$$\mathbf{p}_{gen}(t) = (\boldsymbol{\sigma}^T(t), \mathbf{0}^T)^T. \quad (2-44)$$

In [24] wird, ausgehend vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik, das viskoelastische Stoffgesetz als System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung hergeleitet:

$$\mathbf{p}_{gen}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t). \quad (2-45)$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  enthalten Werkstoffparameter und sind symmetrisch. Bis auf diese Struktur ist die Besetzung der Matrizen noch beliebig. Deshalb definiert AHRENS [26] spezielle innere Variablen, die sich mit der Gedächtnisintegral-Darstellung von (2-30) in Einklang bringen lassen. Nach partieller Integration von (2-30) lautet das Stoffgesetz für jede Spannungskomponente:

$$\sigma_p(t) = \sum_{q=1}^6 \left( E_{pq}(0) \varepsilon_q(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial E_{pq}(t-\tau)}{\partial \tau} \varepsilon_q(\tau) d\tau \right), \quad p = 1 \dots 6. \quad (2-46)$$

Jedes Element der Matrix  $\mathbf{E}$  wird nunmehr durch Exponentialfunktionen approximiert, wie sie dem generalisierten Maxwell-Modell zugrunde liegen:

$$E_{pq}(t) = a_{pq}^{(0)} + \sum_{n=1}^{N_{pq}} a_{pq}^{(n)} e^{-t \cdot b_{pq}^{(n)}} \quad p, q = 1, \dots, 6. \quad (2-47)$$

Zwischen den Parametern der Materialfunktionen und den Prony-Parametern des verallgemeinerten Maxwell-Modells besteht der Zusammenhang:

$$a_{pq}^{(n)} = E_{pq}^{(n)} \quad \text{und} \quad b_{pq}^{(n)} = \frac{1}{\tau_{pq}^{(n)}}. \quad (2-48)$$

Wegen der Symmetrie der Matrix  $\mathbf{E}$  gilt für die Parameter  $a_{pq} = a_{qp}$  und  $b_{pq} = b_{qp}$ . Dies impliziert  $N_{pq} = N_{qp}$ . Im allgemeinen dreidimensionalen Fall und für einen anisotropen Werkstoff wären somit 21 Materialfunktionen  $E_{pq}$  zu bestimmen, d.h., dass insgesamt  $2I (2N_{pq} + I)$  Materialparameter identifiziert werden müssen. Nun werden folgende innere Variablen definiert:

$$y_{pq}^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^t b_{pq}^{(n)} e^{-b_{pq}^{(n)}(t-\tau)} \varepsilon_q(\tau) d\tau. \quad (2-49)$$

Aus der Ableitung der inneren Variablen in den Definitionsgleichungen nach der Zeit folgen zusätzliche Bestimmungsgleichungen für die inneren Variablen:

$$\frac{a_{pq}^{(n)}}{b_{pq}^{(n)}} \dot{y}_{pq}^{(n)}(t) + a_{pq}^{(n)} y_{pq}^{(n)}(t) - a_{pq}^{(n)} \varepsilon_q = 0. \quad (2-50)$$

Durch Einsetzen des Maxwell-Ansatzes und der Definitionsgleichung der inneren Variablen in die Integraldarstellung folgen die neuen Bestimmungsgleichungen für die Spannungen:

$$\sigma_p(t) = \sum_{q=1}^6 \left( a_{pq}^{(0)} + \sum_{n=1}^{N_{pq}} a_{pq}^{(n)} \right) \varepsilon_q(t) - \sum_{n=1}^{N_{pq}} a_{pq}^{(n)} y_{pq}^{(n)}(t). \quad (2-51)$$

Fasst man die inneren Variablen zu einem Vektor  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_{11}^T, \dots, \mathbf{y}_{16}^T, \mathbf{y}_{21}^T, \dots, \mathbf{y}_{66}^T)^T$  zusammen, so kann das Stoffgesetz kompakt in der zu (2-45) äquivalenten Matrizenform geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{pmatrix}. \quad (2-52)$$

Die Besetzung der Submatrizen  $\mathbf{A}_{11}$  und  $\mathbf{A}_{12}$  folgt direkt aus Gleichung (2-51), die Gleichungen (2-50) können nun so geordnet werden, dass  $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{12}^T$  und damit  $\mathbf{A}$  symmetrisch ist. Daraus folgt gleichzeitig die Besetzung der Matrizen  $\mathbf{A}_{22}$  und  $\mathbf{B}_{22}$ .

Zu den 6 Spannungsgleichungen in (2-52) kommen, da im Allgemeinen  $y_{pq}$  ungleich  $y_{qp}$  ist,  $n = 36 N_{pq}$  Gleichungen für die inneren Variablen hinzu. Das Gleichungssystem wird also mit steigender Anzahl der Parameter sehr groß. Dennoch können die Bewegungsgleichungen für einen beliebigen Zeitverlauf wieder mit numerischen Standardverfahren gelöst werden. Statt der Kenntnis der gesamten Verformungsgeschichte müssen lediglich die Anfangsbedingungen der inneren Variablen bekannt sein. Das Stoffgesetz kann in dieser Form leicht mit der Methode der finiten Elemente kombiniert werden.

### 2.2.6 Sonderfälle des linear-viskoelastischen Stoffgesetzes

**Isotropie:** Eine für Elastomerringe gemeinhin gültige Voraussetzung ist die Annahme von Werkstoffisotropie. Der allgemeine Spannungszustand eines isotropen, ideal-elastischen Materials lautet in tensorieller Darstellung:

$$\sigma_{pq} = \phi e \delta_{pq} + 2\mu \varepsilon_{pq} \quad p, q = 1, \dots, 3. \quad (2-53)$$

Hier sind  $\sigma_{pq}$  und  $\varepsilon_{pq}$  der Spannungs- und Verzerrungstensor,  $e$  ist die Verzerrungsinvariante mit  $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ , die die Volumendilatation beschreibt und  $\delta_{pq}$  ist das Kroneckersymbol mit:

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{für } p = q \\ 0 & \text{für } p \neq q \end{cases}.$$

Der erste Term im obigen dreidimensionalen Elastizitätsgesetz beschreibt den volumetrischen Verformungsanteil und der zweite Term repräsentiert den Gestaltänderungsanteil an der Deformation. Die beiden Laméschen Konstanten  $\phi$  und  $\mu$  sind im viskoelastischen Materialgesetz durch zwei zeit- bzw. frequenzabhängige Materialfunktionen  $\phi(t)$  und  $\mu(t)$  zu ersetzen, die wie folgt in Relation zum Zugmodul  $E(t)$  sowie Schubmodul  $G(t)$  stehen:

$$\phi(t) = \frac{E(t)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (2-54)$$

$$\mu(t) = G(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)}. \quad (2-55)$$

Anstelle 21 Materialfunktionen verbleiben bei Isotropie also nur die zwei Materialfunktionen  $\lambda(t)$  und  $\mu(t)$  bzw.  $E(t)$  und  $G(t)$ , deren Parameter experimentell aus Zug- bzw. Schubversuchen zu ermitteln sind. Die Matrix der Relaxationsfunktionen  $\mathbf{E}$  gemäß (2-47) besteht nun aus Linearkombinationen zweier skalarer Ansatzfunktionen:

$$E_i(t) = a_i^{(0)} + \sum_{n=1}^{N_{pq}} a_i^{(n)} e^{-t \cdot b_i^{(n)}} \quad i = 1, 2. \quad (2-56)$$

Das Stoffgesetz kann wieder mit Hilfe von inneren Variablen gemäß (2-52) geschrieben werden, jedoch sind der Vektor der inneren Variablen  $\mathbf{y}$  und die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  nun anders besetzt [26].

Für allmähliche und kleine Verformungen von Elastomeren wird in der Regel Inkompressibilität vorausgesetzt. Aus der Annahme konstanten Volumens folgt eine Querkontraktionszahl  $\nu = 0.5$ . Da in diesem Fall die Lamésche Materialfunktion  $\lambda(t)$  nach Gleichung (2-54) nicht definiert ist, wird der volumetrische Anteil des Spannungstensors singulär. Deshalb rechnet man in der Praxis z.B. mit  $\nu = 0.499$ . Soll die innere Zwangsbedingung der Volumenkonstanz jedoch exakt erfüllt sein, so muss zu dem Spannungstensor ein unbestimmter hydrostatischer Druck  $\bar{p}$  addiert werden. Daraus folgt das Hookesche Materialgesetz für inkompressible Stoffe. (HAUPT [21] und SCHMIERS [16]):

$$\sigma_{pq} = -\bar{p} \delta_{pq} + 2\mu \varepsilon_{pq} \quad p, q = 1, \dots, 3. \quad (2-57)$$

**Ebener Spannungszustand:** Bei der Bestimmung der differentiellen Ring-Steifigkeiten wird im Querschnitt eines Elastomerrings ein ebener Spannungszustand angenommen. In diesem Fall kann der Druckanteil durch die hinzukommenden Spannungsrandbedingungen wieder eliminiert werden und das elastische Stoffgesetz des ebenen Spannungszustands dient als Ausgangspunkt des viskoelastischen Materialgesetzes:

$$\sigma_p = E_{pq} \varepsilon_q \quad p, q = 1, 2, 4. \quad (2-58)$$

Die Steifigkeitsmatrix hat nunmehr das Format 3x3 und ist mit folgenden Elementen besetzt:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{4\mu(\mu + \phi)}{2\mu + \phi}; \quad E_{12} = E_{21} = \frac{2\mu\phi}{2\mu + \phi}; \quad E_{44} = \mu, \quad (2-59)$$

Im viskoelastischen Fall kommt mit den Materialfunktionen im Sinne der Laméschen Konstanten (2-54) und (2-55) die Zeitabhängigkeit wieder ins Spiel. Für den Fall, dass die Querkontraktionszahl konstant ist, verbleibt sogar nur eine Materialfunktion

$$E(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N_{\max}} a_n \exp(-b_n t) \quad (2-60)$$

und die Elemente der Matrix der Relaxationsfunktion  $\mathbf{E}$  lauten mit (2-59)

$$E_{11}(t) = E_{22}(t) = \frac{E(t)}{1-\nu^2}; \quad E_{12}(t) = E_{21}(t) = \frac{\nu E(t)}{1-\nu^2}; \quad E_{44}(t) = \mu(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)}. \quad (2-61)$$

Damit folgt für den ebenen Spannungszustand die Besetzung der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  entsprechend dem Materialgesetz nach (2-52).

**Einachsiger Spannungszustand:** Beim einachsigen Spannungszustand liegt nur eine Spannung  $\sigma_I$  bzw.  $\tau$  und eine unabhängige Verzerrungskomponente  $\varepsilon_I$  bzw.  $\gamma$  vor. Für den Fall der Zugspannung  $\sigma_I$  schreiben wir die Materialfunktion im Sinne des  $(N+1)$ -gliedrigen generalisierten Maxwell-Modells von Abbildung 2-7:

$$E(t) = E_0 + \sum_{n=1}^N E_n e^{-t/\tau_n}. \quad (2-62)$$

Die inneren Freiheitsgrade folgen dem Verlauf:

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\tau_n} e^{-(t-\tau)/\tau_n} \varepsilon_1(\theta) d\theta, \quad (2-63)$$

und das entsprechende Stoffgesetz lautet analog zu (2-52):

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_{21}^T \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \quad (2-64)$$

mit

$$\mathbf{y} = (y_1 \dots y_N)^T, \quad a_{11} = E_0 + \sum_{n=1}^N E_n, \quad \mathbf{a}_{21} = (-E_1 \dots -E_N)^T, \quad \mathbf{A}_{22} = \text{diag}(E_n), \quad \mathbf{B}_{22} = \text{diag}(E_n \tau_n). \quad (2-65)$$

Da wir die Beschreibung der Lagersteifigkeiten in Kapitel 4 auf einem einparametrischen hyperelastischen Stoffgesetz aufbauen, wird die oben gezeigte Form des einachsigen Stoffgesetzes mit inneren Variablen in die Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Elastomerlager einfließen (siehe Kapitel 5).

### 2.2.7 Zu InkompRESSIBILITÄT und Querkontraktionszahl

Inkompressibel verhalten sich Elastomere nur im entropieelastischen Bereich bei sehr geringen Deformationsgeschwindigkeiten. Zudem ist die Annahme eine Querkontraktionszahl von  $\nu=0.5$ ,

mit der die Umrechnung der Laméschen Konstanten in eine skalare Relaxationsfunktion erfolgt, nur für kleine Deformationen gültig.

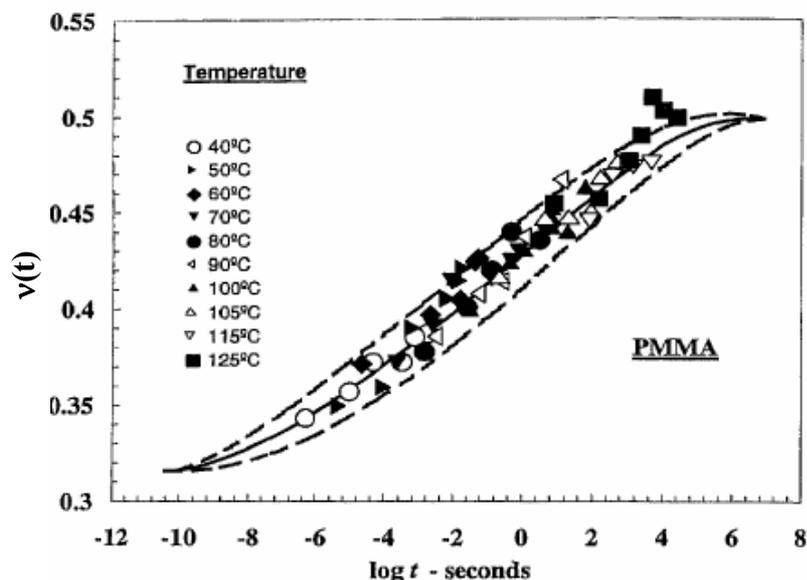


Abbildung 2-9: Zeitabhängige Querkontraktionszahl des PMMA Acryl-Glas Polymers nach [29].

**Zeitabhängigkeit:** Erfolgt die Deformation mit hohen Belastungsgeschwindigkeiten oder bei niedrigen Temperaturen, d.h. im Glasbereich, so ist die Annahme der Volumenkonstanz nicht mehr erfüllt. Das Elastomer verhält sich zunehmend energieelastisch und die Querkontraktionszahl sinkt, z.B. auf den Wert  $\nu \approx 0.33$ .

Die Bestimmung der Zeit- bzw. Frequenzabhängigkeit der Querkontraktionszahl erfordert es von ein und dem selben Material, sowohl den Zug- als auch den Schubmodul für verschiedene Relaxationszeiten bzw. Frequenzen zu bestimmen. Abbildung 2-9 wurde einem Aufsatz von TSCHOEGL et. al. [30] entnommen, welcher sich mit der Beschreibung der Querkontraktion in der linearen Viskoelastizitätstheorie auseinandersetzt. Demnach verläuft die Funktion der Querkontraktionszahl im Glasübergangsbereich, so wie wir es im folgenden Abschnitt von den Materialfunktionen des Schub- und des Zugmoduls her kennen. Eine Beschreibung der Mehrachsigkeit über die Phasengrenzen hinweg erfordert also, dass zwei unabhängige Materialfunktionen für das isotrope Material gemessen werden. In dieser Arbeit liegen die Masterkurven jedoch nur für jeweils eine Materialfunktion vor.

**Amplitudenabhängigkeit:** Die Querkontraktionszahl ist als Verhältnis der Querdehnung zur Längsdehnung einer Probe definiert. Für eine uniaxial belastete Probe nach Abbildung 2-10 mit der Ausgangslänge  $L$  und dem quadratischen Querschnitt mit der Kantenlänge  $a$  gilt:

$$\nu = -\frac{\Delta a}{a} \frac{L}{\Delta L} = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \quad (2-66)$$

Nimmt man Inkompressibilität an, dann hängt die Querkontraktion bei größeren Deformationen von der Verformung ab. Für die Probe nach Abbildung 2-10 gilt bei Volumenkonstanz:

$$\Delta V = (a + \Delta a)^2 (L + \Delta L) - a^2 L = 0 \quad (2-67)$$

Substituiert man

$$\frac{\Delta a}{a} = -\nu \frac{\Delta L}{L} = -\nu \varepsilon, \quad (2-68)$$

dann ergibt sich, wenn man alle Glieder höherer Ordnung mitnimmt, der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} \nu(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right) && \text{für } \varepsilon \neq 0, \\ \nu &= 0.5 && \text{für } \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (2-69)$$

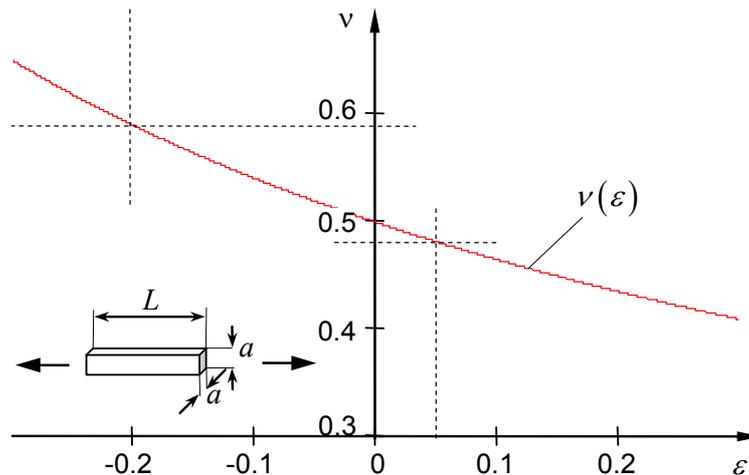


Abbildung 2-10: Amplitudenabhängigkeit einer verallgemeinerten Querkontraktionszahl nach Gl.(2-69).

Der Wert  $\nu = 0.5$  resultiert als beidseitiger Grenzwert für  $\varepsilon = 0$ . Man erhält den gleichen Wert, wenn man bereits vorab die höheren Glieder bei der Entwicklung von (2-69) vernachlässigt. Bei den für den Einbauzustand charakteristischen Vordehnungen von  $\varepsilon = -20\% \dots +5\%$  nimmt die Querkontraktionszahl Werte von  $\nu = 0.59$  bis  $0.48$  an. Dementsprechend sind auch die Materialfunktionen (2-54) und (2-55) im Sinne der Laméschen Konstanten anzupassen.

## 2.3 Masterkurven

Masterkurven beschreiben die Steifigkeit und Dämpfung des Elastomermaterials über den gesamten relevanten Zeit- bzw. Frequenzbereich hinweg. Sie können, z.B. als Graphen des Relaxationsmoduls über der Zeit oder als Kurven der Komponenten eines komplexen Moduls über der Frequenz, experimentell bestimmt und dargestellt werden. Abbildung 2-11 zeigt die Masterkurve des Referenzelastomers Parker N674-70 und die für das stark unterschiedliche Elastomerverhalten typischen Bereiche.

**Gummibereich:** Im Gummibereich - auch entropieelastischer Zustandsbereich des Elastomers genannt - ist das Material inkompressibel und hyperelastisch. Bei sehr niedrigen Frequenzen oder hohen Temperaturen kann der Gummi innerhalb einer Belastungsperiode vollständig relaxieren, verschwindet die viskose Dämpfung  $\eta$  und das Elastomer antwortet mit dem Gleichgewichtsmodul

$E_0$ . Nimmt dann die Frequenz zu, dann steigen sowohl die Steifigkeit, als auch die Materialdämpfung allmählich an.

Der folgende **Transitionsbereich** charakterisiert den Übergang vom gummiartigen zum glasartigen Werkstoffverhalten. Steifigkeit und Dämpfung steigen hier fast sprunghaft an. Der Verlustfaktor verfügt über ein ausgeprägtes Maximum und fällt noch innerhalb des Übergangsbereiches wieder ab. In diesem Bereich verfügt der Werkstoff über außergewöhnlich hohe Werte einer rein viskosen Dämpfung. Sowohl Dämpfung als auch Steifigkeit sind hier jedoch sehr anfällig gegenüber Änderungen der Frequenz und der Temperatur.

Im **Glasbereich** verhält sich das Elastomer energieelastisch. Seine Steifigkeit ist nun um einige Größenordnungen angewachsen und die möglichen Dehnungsamplituden bleiben klein. Im gleichen Zug gehen die Werte der viskosen Dämpfung auf ein sehr geringes Niveau zurück. Im energieelastischen Bereich ist das Material kompressibel.

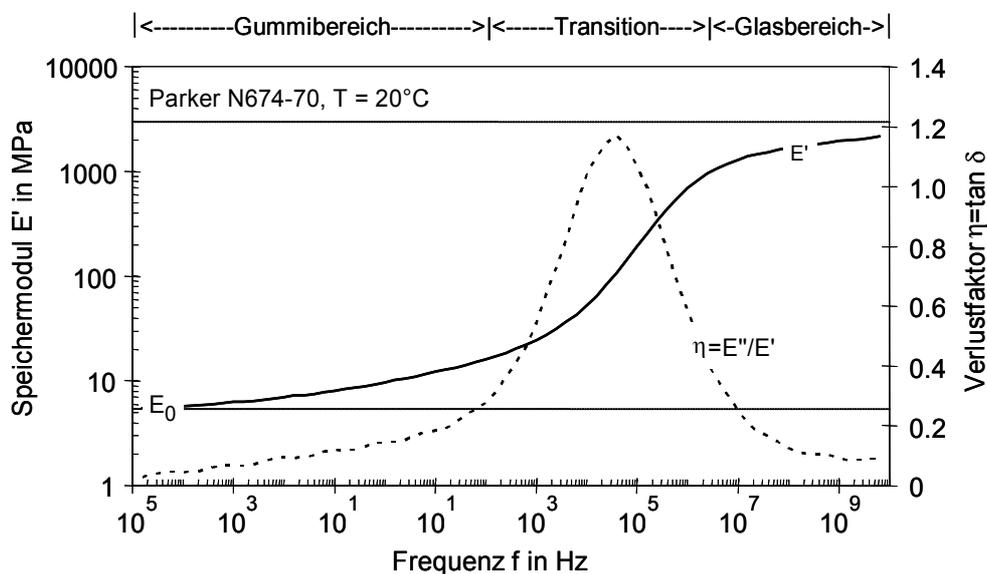


Abbildung 2-11: Masterkurve des NBR Referenzelastomers Parker N674-70 bei 20°C und charakteristische Bereiche des viskoelastischen Materialverhaltens.

## 2.4 Temperatur-Zeit-Korrespondenz

Bis hierher wurde nur die Zeitabhängigkeit der Materialfunktionen betrachtet. Die Beobachtung zeigt jedoch, dass die Temperatur auf die Elastomereigenschaften einen äquivalenten und zudem sehr beträchtlichen Einfluss ausübt. Diese Temperatur-Zeit-Korrespondenz wird bei Versuchen zur Ermittlung der Materialparameter bewusst ausgenutzt, da z.B. eine Verringerung der Versuchstemperatur einer Verlängerung der Versuchsdauer bzw. einer Erhöhung der Belastungsfrequenz bei dynamischen Versuchen gleichkommt. Das Korrespondenzprinzip gilt sowohl für zeitbezogene Aussagen als auch für die Frequenzabhängigkeit. So hat die Veränderung der Temperatur eine affine Verschiebung der Steifigkeits- bzw. Dämpfungskurven um den so genannten Shift-Faktor  $a_T(\Delta T)$  entlang der Frequenzachse zur Folge, die Masterkurve wird parallel verschoben und ihre Form bleibt unverändert (Abbildung 2-12).

Die allgemeine Form des Korrespondenzprinzips folgt der Gleichung:

$$E(T_1, f_1) = E(T_2, f_1 a_{T_2-1}). \quad (2-70)$$

Das heißt, das Elastomer mit der Materialsteifigkeit  $E_{ref}$  bei einer Frequenz  $f_1$  und Temperatur  $T_1$  besitzt denselben Steifigkeitswert bei einer Temperatur  $T_2$  und der Frequenz  $f_2(E_{ref}, T_2) = f_1(E_{ref}, T_1) a_T(\Delta T)$ . Der Wert des Materialmoduls wird um den Faktor  $a_{T_2-1}$  entsprechend der Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_2 - T_1$  auf der Frequenzachse verschoben (Abbildung 2-12).

Kann dieses Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip angewendet werden, so spricht man von thermo-rheologisch einfachen Stoffen. Dabei existieren für verschiedene Dispersionsprozesse, d.h. in unterschiedlichen Temperaturbereichen bzw. Aggregatzuständen, unterschiedliche Verschiebungsgesetze.

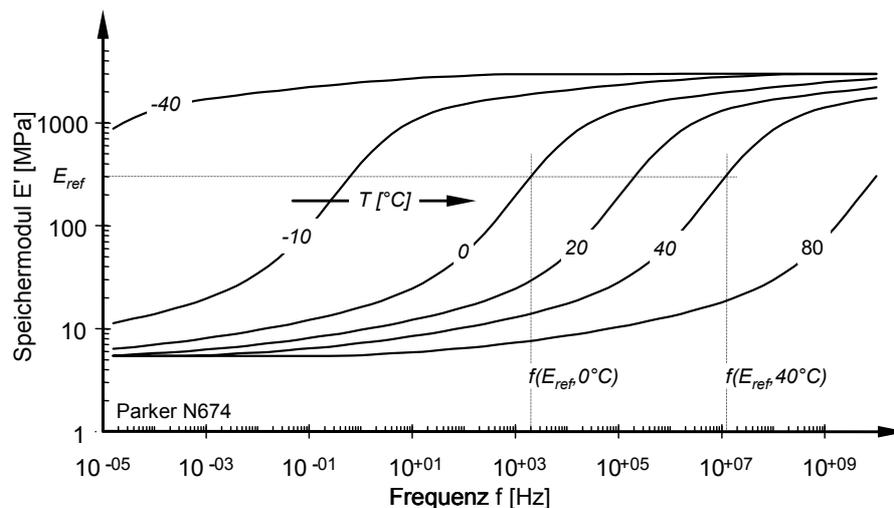


Abbildung 2-12: Temperatur-Frequenz-Korrespondenz der Masterkurve von Parker N674-70.

### 2.4.1 WLF-Gleichung

Für den Bereich des Glas-Gummi-Übergangs gilt die nach Williams, Landel und Ferry benannte WLF-Gleichung, die aus thermodynamischen Überlegungen mit der Theorie des freien Volumens abgeleitet wurde [31, 32, 33 und 34]. Die WLF-Gleichung gibt eine quantitative Beziehung für den Shift-Faktor  $a_T$  des Korrespondenzprinzips an:

$$\lg a_T(T) = y_{WLF}(T) = \frac{c_1(T - T_g)}{c_2 + T - T_g} \quad \text{mit } c_1 = -17.44 \text{ und } c_2 = 51.60K. \quad (2-71)$$

Die Referenztemperatur ist hier die Glastemperatur  $T_g$  des Elastomers, welche als einzige Unbekannte experimentell bestimmt wird. Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  besitzen innerhalb eines primären Relaxationsprozesses universellen Charakter. Sie können anschaulich als horizontale und vertikale Grenzwerte gedeutet werden, gegen die die beiden Äste der WLF-Hyperbel asymptotisch laufen.

### 2.4.2 Arrhenius-Gleichungen

Außerhalb des Glas-Gummi-Transitionsbereichs treten so genannte sekundäre Relaxationsprozesse auf, welche sich nicht mehr mittels der WLF-Gleichung und deren universellen Konstanten beschreiben lassen. Zwar findet man in der Literatur Beschreibungen mit speziellen WLF

Konstanten, welche material- und temperaturabhängig sind und den gesamten Temperaturbereich abdecken sollen [35, S. 364-440ff.], diese Beschreibungen sind jedoch mit Vorsicht zu genießen. In dieser Arbeit wird die Zeit-Temperatur-Korrespondenz mit Gleichungen vom Arrhenius-Typ beschrieben, welche sich aus einer molekularen Modellierung der Relaxationsprozesse ableiten. Diese sekundären Relaxationsprozesse, d.h. Relaxationsprozesse außerhalb des Glas-Gummi-Transitionsbereichs, werden auf thermisch aktivierte Konfigurationsänderungen der Elastormoleküle zurückgeführt. Diese finden zwischen energetischen Gleichgewichtszuständen - so genannten Potentialsenken - statt, welche durch eine Potentialschwelle  $U_0$  voneinander getrennt sind. Mit der Annahme eines äußeren Kraftfeldes tritt im Material eine Potentialdifferenz  $\Delta U$  zwischen den sonst auf gleichem energetischen Niveau befindlichen Potentialsenken auf. Aus statistischen Überlegungen über die Wechselrate  $\Gamma_0$  zwischen diesen Potentialsenken folgt eine die molekulare Konfiguration beschreibende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2\Gamma_0} \frac{d}{dt} (N_2 - N_1) = -(N_2 - N_1) + \frac{\Delta U}{k_b T} (N_1 + N_2). \quad (2-72)$$

Hierbei sind:

- $N_{1/2}$  Anzahl der Moleküle in Potentialsenke 1/2 ;
- $T$  abs. Temperatur;
- $k_b$  Boltzmann-Konstante;
- $\Gamma_0$  Sprungrate ohne äußeres Feld  $\Gamma_0 = \nu_0 \exp(-U_0/k_b T)$  (aus statistischen Überlegungen);
- $\nu_0$  Frequenz der Molekülschwingungen innerhalb des Potentialtrogs.

Die Lösung der obigen Differentialgleichung (2-72) führt bei Vorgabe eines harmonisch schwankenden äußeren Kraftfeldes  $\Delta U(t) = \Delta U e^{j\omega t}$  auf:

$$(N_2 - N_1) = N \frac{\Delta U}{k_b T} \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad (2-73)$$

$$\text{mit } \tau = \frac{1}{2\Gamma_0} = \frac{1}{2\nu_0} e^{U_0/k_b T}.$$

Diese so genannte Arrhenius-Gleichung (2-73) gibt einen Zusammenhang zwischen der Relaxationszeit  $\tau$ , der Temperatur  $T$  und der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  an. Hieraus leitet sich die Arrhenius-Shift-Funktion für die Relaxationsprozesse oberhalb und unterhalb bestimmter Grenztemperaturen  $T_c^o$  und  $T_c^u$  ab:

$$\lg a_T(T) = y_{WLF}(T_c^{o/u}) + M \frac{A_E^{o/u}}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_c^{o/u}} \right), \quad (2-74)$$

mit  $R = 8.314 \text{ J/molK}$ ;  $M = \log(e) = 0.43429$ .

Die obere bzw. untere Aktivierungsenergie  $A_E^{o/u}$  und die Grenztemperaturen  $T_c^{u/o}$  gewinnt man ebenso wie die Glastemperatur  $T_g$  experimentell im Zuge des Shift-Prozesses der Masterkurve aus den gemessenen Isothermen (Kap. 3). Abbildung 2-13 zeigt den Verlauf des Temperatur-Zeit-Shift-Faktors  $\lg a_T$  für den Parker Werkstoff N674-70. Der Abschnitt zwischen den vertikalen Hilfslinien

kennzeichnet den Gültigkeitsbereich der WLF-Gleichung. Hier, genauer gesagt im Ursprung des Diagramms, liegt die Glastemperatur  $T_g$ .

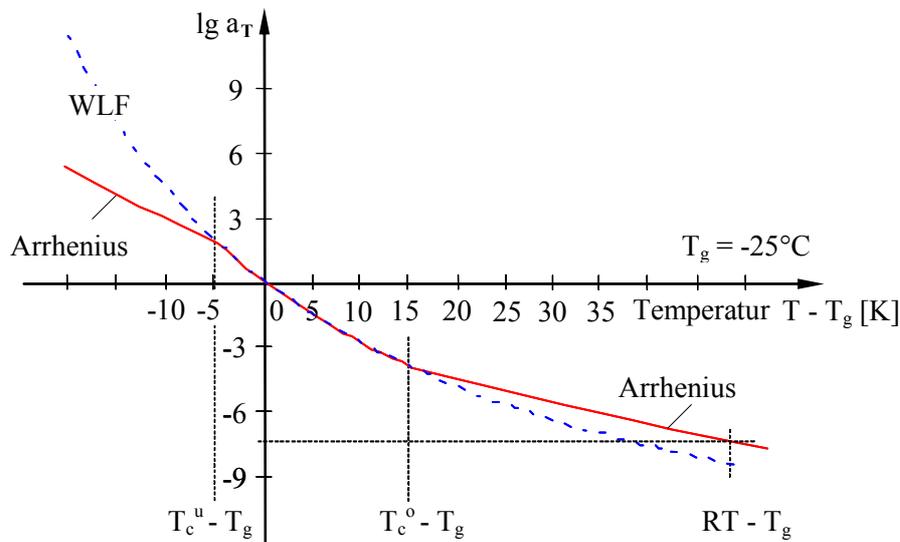


Abbildung 2-13: Verlauf des Temperatur-Frequenz-Shift-Faktors  $\lg a_T$  für den Parker-Werkstoff N674-70 mit  $T_g = -25^\circ\text{C}$ ,  $A_E^o = 154.5 \text{ kJ/mol}$ ,  $A_E^u = 231.1 \text{ kJ/mol}$ ,  $T_c^o = -10^\circ\text{C}$  und  $T_c^u = -30^\circ\text{C}$  [Parker 1994].

Die resultierenden Shift-Faktoren nehmen sehr große Werte an. So liegen die, im Vergleich zur Glastemperatur äquivalenten, Vorgänge bei Raumtemperatur um mehr als sieben Dekaden auseinander, d.h., Relaxationsprozesse, die bei Glastemperatur etwa 3 Sekunden dauern, wären bei Raumtemperatur nur noch 0.3 Mikrosekunden. In den Formulierungen des thermo-viskoelastischen Stoffgesetzes wird die Kreisfrequenz  $\omega$  bei einer bestimmten Temperatur  $T$  mit Hilfe der Shift-Faktoren  $a_T$  nach (2-71) bzw. (2-75) durch eine reduzierte Kreisfrequenz  $\omega_T(T)$  ersetzt.

$$\omega_T(T) = \omega a_T(T). \quad (2-75)$$

## 2.5 Berücksichtigung großer Vordeformation

Nichtlineare Effekte treten einerseits beim Einbau der Ringe und andererseits bei hohen dynamischen Amplituden auf. Unter der Voraussetzung kleiner dynamischer Amplituden kann die Spannung in einen frequenzabhängigen Faktor  $G(\omega)$  und in einen Faktor  $F(\lambda_0)$ , welcher von der Vordehnung abhängt, zerlegt werden (NASHIF [35], pp.106; FERRY [20]):

$$\sigma(\lambda_0, \omega) = F(\lambda_0)G(\omega). \quad (2-76)$$

### 2.5.1 Beschreibung bei Neo-Hookeschem Material

Mit dem nichtlinearen Neo-Hookeschen Materialgesetz (2-4) führt dieser Ansatz auf den frequenzabhängigen, komplexen Modul  $E^*(\lambda_0, \omega)$  um eine quasistatische Vordehnung  $\lambda_0$  herum:

$$E^*(\lambda_0, \omega) = \frac{E_T(\lambda_0)}{E_{nh}} (E'(\omega) + jE''(\omega)). \quad (2-77)$$

Der komplexe Modul wird also mit dem Verhältnis des Tangentenmoduls  $E_T$  nach (2-6) und der elastischen Konstante  $E_{nh} = N_0 k_b T$  multipliziert. Die Materialdämpfung bleibt dabei unabhängig von der Vordehnung des Werkstoffs und es gilt:

$$E'(\lambda_0, \omega) = \frac{E_T(\lambda_0)}{E_{nh}} E'(\omega) \approx \frac{1}{\lambda_0^2} E'(\omega); \quad \eta(\lambda_0, \omega) \stackrel{\forall \lambda_0}{=} \eta(\omega). \quad (2-78)$$

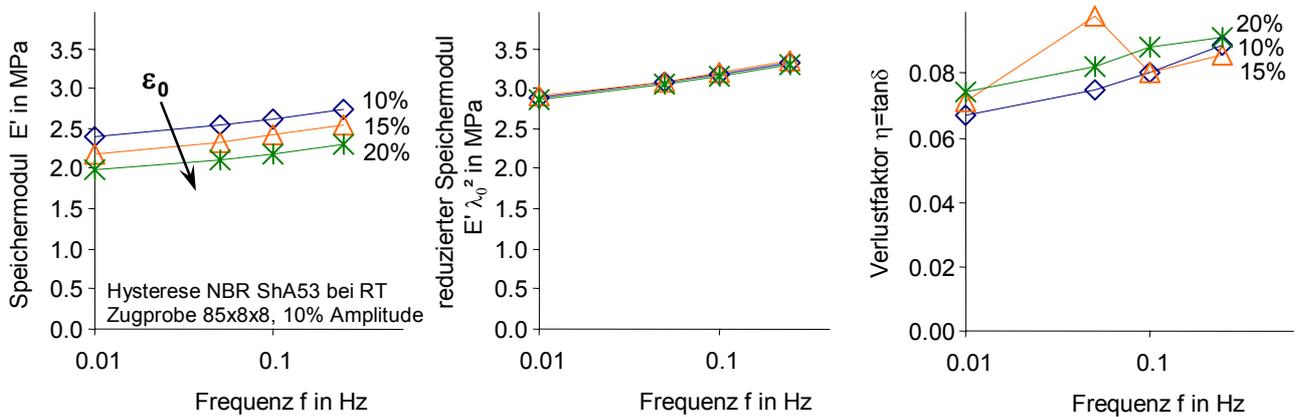


Abbildung 2-14: Gemessene sowie reduzierte Speichermoduln und Verlustfaktoren aus Hystereseversuchen bei verschiedenen Vordehnungen  $\epsilon_0$  und Frequenzen für NBR ShA53 bei Raumtemperatur und 10% Amplitude.

Eine Herleitung von (2-78) wird bis zum folgenden Abschnitt zurückgestellt. Betrachten wir zunächst mal die Ergebnisse der Messungen von Hysteresen an Zugproben mit quadratischem Querschnitt bei verschiedenen Vordehnungen und Frequenzen (Abbildung 2-14).

Aus den in Abbildung 2-14 gezeigten Messungen geht hervor, dass Speichermodul und Verlustfaktor mit steigenden Frequenzen anwachsen. Zudem nimmt die Steifigkeit des Elastomers mit zunehmender Vordehnung ab (Abbildung 2-14, links). Aus dem in Abbildung 2-14, mittig dargestellten reduzierten Speichermoduln wurde jedoch der Vordehnungseinfluss bereits durch einen Korrekturterm entsprechend (2-7) herausgerechnet. Die jeweiligen Kurven liegen nun fast deckungsgleich übereinander. Nach (2-76) sollten auch die Kurven des Verlustfaktors deckungsgleich verlaufen. Im Versuch werden hier aber Streuungen sichtbar. Dennoch hängt der Verlustfaktor nicht signifikant von der Vordehnung ab, sondern es dominiert der viskoelastische Einfluss der Frequenz. Somit wurde (2-76) bzw. (2-78) experimentell bestätigt.

### 2.5.2 Beschreibung bei Mooney-Rivlin-Material

Wird anstelle des einparametrischen Neo-Hookeschen Modells ein Mooney-Rivlin-Material angenommen, so kann auch die Vordehnungsabhängigkeit der Materialdämpfung modelliert werden. Abweichend von NASHIF [35] wird hier das Mooney-Rivlin-Gesetz für die Ingenieursspannung (2-11) im Ansatz (2-76) eingeführt.

$$\sigma_{mr}(\omega, \lambda) = 2 \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) G(\omega) \quad (2-79)$$

Der Momentanmodul folgt nun aus der Ableitung der Spannung nach der Deformation:

$$E_0(\omega, \lambda) = \frac{d\sigma}{d\lambda} G(\omega) = [C_{10}F_{10}(\lambda) + C_{01}F_{01}(\lambda)]G(\omega), \quad (2-80)$$

mit den Faktoren

$$F_{10}(\lambda) = 2 \left( 1 + \frac{2}{\lambda^3} \right) \quad (2-81)$$

und

$$F_{01}(\lambda) = \frac{6}{\lambda^4}. \quad (2-82)$$

Nach der Aufspaltung von (2-80) in Real- und Imaginärteil verbleiben zwei Gleichungen:

$$E(\omega, \lambda) = [C_{10}F_{10}(\lambda) + C_{01}F_{01}(\lambda)]G(\omega) \quad (2-83)$$

$$\eta(\omega, \lambda) = [C_{10}F_{10}(\lambda)\eta_{10} + C_{01}F_{01}(\lambda)\eta_{01}]G(\omega)/E(\omega, \lambda). \quad (2-84)$$

Nach [32] verschwindet der Koeffizient  $\eta_{01}$  und die verbleibenden Unbekannten  $C_{01}$ ,  $\eta_{01}$  sowie  $G$  resultieren aus der Grenzwertbetrachtung für  $\lambda \rightarrow 1$  [35]:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} E(\omega, \lambda) &= E(\omega), \\ \lim_{\lambda \rightarrow 1} \eta(\omega, \lambda) &= \eta(\omega), \\ \lim_{\lambda \rightarrow 1} F_{10}(\omega, \lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} F_{01}(\omega, \lambda) = 6. \end{aligned}$$

Für den Grenzfall  $\lambda = 1$  gilt

$$E(\omega) = 6(C_{10} + C_{01})G(\omega) \quad (2-85)$$

und

$$\eta(\omega) = 6C_{10}\eta_{10} \frac{G(\omega)}{E(\omega)} = \frac{C_{10}\eta_{10}}{C_{10} + C_{01}}. \quad (2-86)$$

Schließlich erhält man aus (2-83) und (2-85) für den E-Modul bei einer bestimmten Vordehnung  $\lambda_0$ :

$$E(\omega, \lambda_0) = \frac{C_{10}F_{10}(\lambda_0) + C_{01}F_{01}(\lambda_0)}{6(C_{10} + C_{01})} E(\omega) \equiv k_E(\lambda_0)E(\omega) \quad (2-87)$$

und aus (2-84) mit (2-83) und (2-86) für den Verlustfaktor:

$$\eta(\omega, \lambda_0) = \frac{(C_{10} + C_{01})F_{10}(\lambda_0)}{C_{10}F_{10}(\lambda_0) + C_{01}F_{01}(\lambda_0)} \eta(\omega) \equiv k_\eta(\lambda_0)\eta(\omega). \quad (2-88)$$

Im Falle des Neo-Hookeschen Materials verschwindet der zweite Mooney-Rivlin-Parameter  $C_{01}$ . Nach einigen Umformungen vereinfacht sich (2-87) zu:

$$\begin{aligned}
 E(\omega, \lambda_0) &= \frac{F_{10}(\lambda_0)}{6} E(\omega) \\
 &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{\lambda_0^3} \right) E(\omega) \\
 &= \frac{E_T(\lambda_0)}{E_{nh}} E(\omega)
 \end{aligned}
 \tag{2-89}$$

und aus (2-88) wird tatsächlich:

$$\eta(\omega, \lambda_0) = \eta(\omega).
 \tag{2-90}$$

Hiermit sind die Gleichungen (2-78) nachträglich hergeleitet worden. Abbildung 2-15 stellt nun den Verlauf der Korrekturfunktionen der Vordehnungsabhängigkeit des Speichermoduls  $k_E(\lambda_0)$  (links) und des Verlustfaktors  $k_\eta(\lambda_0)$  (rechts) gemäß Gleichung (2-87) und (2-88) für ein synthetisches Mooney-Rivlin-Material mit  $C_{10} = 2/15$ ,  $C_{01} = 1/30$  gemäß (2-13) und (2-14) dar. Im Vergleich dazu ist die Korrekturfunktion des Speichermoduls für ein Neo-Hookesches Material zu sehen.

Beide Korrekturfunktionen in Abbildung 2-15 sind stetig und streng monoton. Der Verlauf zeigt, wie mit wachsender Vordehnung  $\lambda_0$  der Verlustfaktor größer wird und der Speichermodul abnimmt. Wird das Material gestaucht, so ist eine Abnahme des Verlustfaktors zu erwarten. Die Korrekturfunktion des Verlustfaktors für das synthetische Mooney-Rivlin-Material kann dabei für kleine Vordehnungen  $\lambda_0 = 0.8 \dots 1.2$  linear approximiert werden. Bei 10% Stauchung oder Streckung reduziert bzw. vergrößert sich der Verlustfaktor um ca. 4%. Die Korrekturfunktion des Speichermoduls verläuft für das synthetische Mooney-Rivlin-Material nicht ganz so steil wie für das Neo-Hookesche Material. Im Folgenden vergleichen wir diese Resultate mit den Zusammenhängen, die sich auf der Grundlage jener Mooney-Rivlin-Parameter ergeben, die experimentell für verschiedene Elastomere bestimmt wurden.

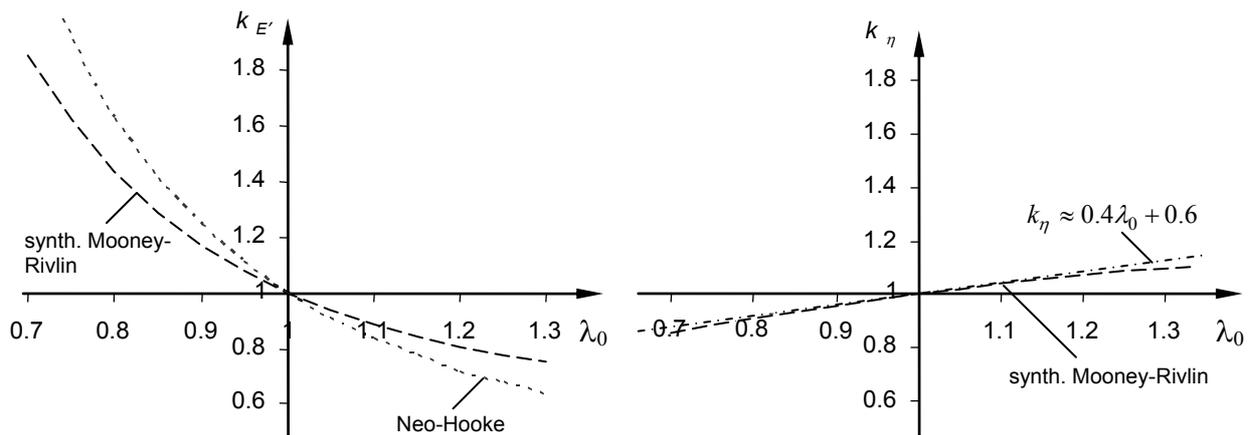


Abbildung 2-15: Korrekturfunktionen der Vordehnungsabhängigkeit des Speichermoduls  $k_E(\lambda_0)$  (links) und des Verlustfaktors  $k_\eta(\lambda_0)$  (rechts) gemäß Gleichung (2-87) und (2-88) für ein Neo-Hookesches und ein synthetisches Mooney-Rivlin-Material ( $C_{10} = 1$ ,  $C_{01} = 0.25$ ) sowie lineare Approximation der Korrekturfunktion des Verlustfaktors.

### 2.5.3 Vergleich der Modellierungen der Vordehnungsabhängigkeit

Die Mooney-Rivlin-Parameter  $C_{10}$  und  $C_{01}$  wurden aus Zugversuchen bestimmt (Tabelle 2-1). Damit kann man die Korrekturfunktionen der Vordehnungsabhängigkeit  $k_E(\lambda)$  und  $k_\eta(\lambda)$  für gängige O-Ring- und R-Ring-Werkstoffe sofort angeben (Abbildung 2-16). Diesen Korrekturfunktionen werden die bereits bekannte Funktion eines synthetischen Mooney-Rivlin-Materials und die Modulkorrektur für ein Neo-Hookesches Material gegenübergestellt.

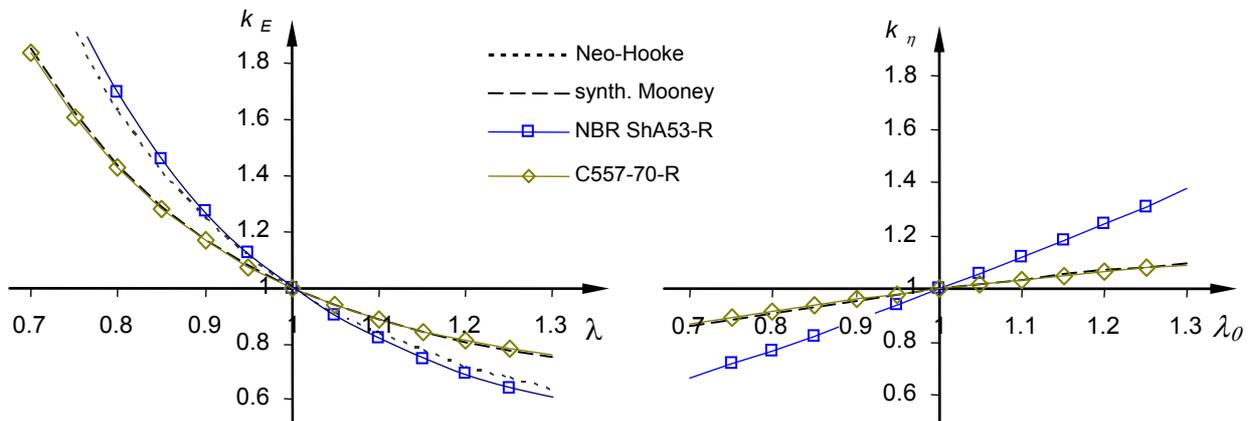


Abbildung 2-16: Vordehnungsabhängigkeit des Speichermoduls  $k_E(\lambda)$  (links) und des Verlustfaktors  $k_\eta(\lambda)$  (rechts) gemäß Gleichung (2-87) und (2-88) für verschiedene Elastomere im Vergleich zur Korrekturfunktion eines Neo-Hookeschen und eines synthetischen Mooney-Rivlin-Materials ( $C_{10} = 1$ ,  $C_{01} = 0.25$ ).

Abbildung 2-16 zeigt die aus den experimentellen Daten bestimmten Korrekturfunktionen im Vergleich zu den Korrekturfunktionen für ein synthetisches Mooney-Rivlin-Material und für ein Neo-Hookesches Material. Hierbei ist zu beachten, dass die gemessenen Materialparameter aus Zugversuchen stammen. Die Extrapolationen in den Druckbereich sind somit unter Vorbehalt zu betrachten.

Grundsätzlich gilt, dass mit wachsender Längung  $\lambda_0$  der Verlustfaktor größer wird und der Speichermodul abnimmt. Durch das Mooney-Rivlin-Modell kann, im Gegensatz zum Neo-Hookeschen Gesetz, der Einfluss der Vordehnung auf den Verlustfaktor modelliert werden. Offensichtlich hängt dieser Einfluss auch relativ stark vom Material ab. Will man die Korrekturfunktionen bei der Beschreibung des Einbauzustandes berücksichtigen, so sind diese von den viskoelastischen Eigenschaften des Werkstoffs entkoppelbar. Dies wurde bereits eingangs experimentell bestätigt. Die Versuchsergebnisse anhand von Zugproben (Abbildung 2-14) zeigten letztlich, dass der Verlustfaktor infolge einer Vordehnung im Bereich von  $\lambda_0 = 1.1 \dots 1.2$  nur wenig variiert. Die bei der Zugrundelegung des Mooney-Rivlin-Modells auf Basis der gemessenen Materialparameter resultierende Absenkung der Dämpfung infolge der Verpressung des Einbaus spiegelt sich in den Messergebnissen nicht eindeutig wider. Somit erscheint die vereinfachte Materialbeschreibung auf Basis des Neo-Hookesche Modells als zweckmäßig und ausreichend genau.

## 2.6 Amplitudenabhängigkeit

Bei den quasi-statischen Messungen der Spannungs-Dehnungs-Kurven wurde eine starke Abhängigkeit des E-Moduls bei kleinen Amplituden beobachtet, welche sich nicht durch das entropieelastische Materialgesetz (2-2) erklären ließ. Dies wurde mit dem Payne-Effekt erklärt, ohne ihn näher zu erläutern. Im Folgenden stellen wir kurz die molekulare Interpretation des Payne-Effekts vor und beurteilen dann den Amplitudeneinfluss anhand von Messungen an verschiedenen Elastomeren.

### 2.6.1 Molekulare Interpretation des Payne-Effekts

Der Payne-Effekt wird mit den dehnungsabhängigen Veränderungen des Füller-Netzwerks durch aufbrechende Van-der-Waals-Bindungen erklärt (Abbildung 2-17, links).

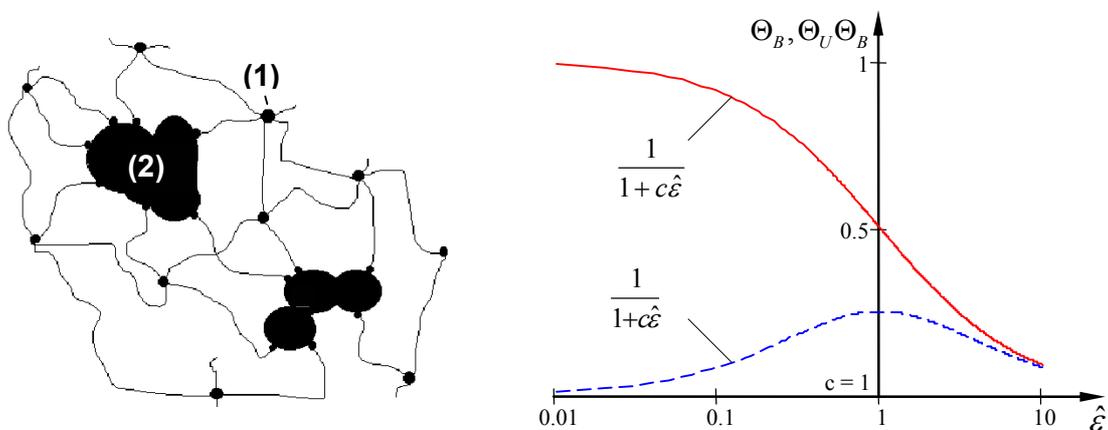


Abbildung 2-17 links: Stabile Vernetzungspunkte (1) und Füllerteilchen mit stabilen und instabilen Bindungen (2) in einem gefüllten Netzwerk. Rechts: Dehnungsabhängige Anteile der besetzten instabilen Wechselwirkungspositionen  $\Theta_B$  und Produkt der besetzten und unbesetzten Wechselwirkungspositionen  $\Theta_U \Theta_B$  zur Gewichtung des dehnungsabhängigen Anteils des Speichermoduls bzw. des Verlustmoduls nach [36].

Im entropieelastischen Materialgesetz (2-2) ist die elastische Konstante proportional zur spezifischen Vernetzungsdichte  $N_0$  des Elastomers. Wird das Elastomer jedoch mit Ruß oder Ähnlichem gefüllt, so ist die Vernetzungsdichte, welche die Steifigkeit bestimmt, differenzierter zu betrachten. Wir beziehen uns auf das *Modell der variablen Netzbogendichte*, welches in [36 und 37] hergeleitet und ausführlich erklärt ist. In diesem Modell teilt sich die spezifische Vernetzungsdichte  $N_0$  aus (2-2) in drei Anteile auf. Ein Anteil enthält die *chemischen* Verbindungen  $N_C$  zwischen den Elastomerketten, ein zweiter die *stabilen* Verbindungen  $N_S$ , die von den Füllerteilchen ausgehen, und ein dritter Anteil beschreibt die *instabilen* Verbindungen  $N_I(\hat{\epsilon})$ , deren Anzahl von der Dehnungsamplitude abhängt. Anstelle der elastischen Konstante des Neo-Hookeschen Gesetzes folgt nun die Aufteilung des Moduls in einen amplitudenunabhängigen und in einen amplitudenabhängigen Anteil:

$$(N_C + N_S + N_I(\hat{\epsilon}))k_bT = 1/3(E'_S + E'_I(\hat{\epsilon})). \quad (2-91)$$

Aus einer statistischen Überlegung heraus stehen nach dem Abklingen von Ausgleichsvorgängen der dehnungsabhängige Anteil der besetzten instabilen Wechselwirkungspositionen  $\Theta_B$ , gewichtet

mit den Adsorptionsraten  $\Phi_d$ , im Gleichgewicht mit dem Anteil der unbesetzten instabilen Wechselwirkungspositionen  $\Theta_U$ , gewichtet mit den Desorptionsraten  $\Phi_a$ . Es gilt:

$$\Theta_U \Phi_a = \Theta_B \Phi_d \text{ und } \Theta_U + \Theta_B = 1. \quad (2-92)$$

Bei dynamischer Beanspruchung werden jedoch vermehrt Ketten von ihren Wechselwirkungspositionen gerissen und die Desorptionsrate  $\Phi_d$  wird proportional zur Dehnungsamplitude gesetzt:

$$\Phi_d = \kappa \hat{\varepsilon}. \quad (2-93)$$

Nach einigen Umformungen erhält man den Anteil der besetzten instabilen Wechselwirkungspositionen  $\Theta_B$ , welcher proportional zum dehnungsabhängigen Anteil des Speichermoduls ist:

$$E'(\hat{\varepsilon}) = E'_S + E'_I \Theta_B(\hat{\varepsilon}) = E'_S + E'_I \frac{1}{1 + c \hat{\varepsilon}} \text{ mit } c = \frac{\kappa}{\Phi_a}. \quad (2-94)$$

Dort, wo sich der dehnungsabhängige Anteil der besetzten instabilen Wechselwirkungspositionen  $\Theta_B$  am stärksten ändert, ist die innere Reibung zwischen der Polymerkette und dem Füllstoff am größten. Somit weist der Verlustmodul in Abbildung 3-15 (rechts) an dieser Stelle ein Maximum auf. Der Verlauf des dehnungsabhängigen Verlustmoduls folgt aus statistischen Überlegungen [36]:

$$E''(\hat{\varepsilon}) = E''_S + E''_I \Theta_B(\hat{\varepsilon}) \Theta_U(\hat{\varepsilon}) = E''_S + E''_I \frac{c \hat{\varepsilon}}{(1 + c \hat{\varepsilon})^2}. \quad (2-95)$$

## 2.6.2 Amplitudensweeps

Mit (2-94) (2-95) ist eine Beschreibung der Amplitudenabhängigkeit infolge innerer Reibung gegeben, nun muss geklärt werden, wie groß die nichtlinearen Einflüsse tatsächlich sind. Hierzu wurden Messungen an jenen Zugproben durchgeführt, welche später der Ermittlung der Masterkurven dienen. Diese so genannten Amplitudensweeps erfolgten bei Raumtemperatur und bei konstanter Frequenz von 10 Hz mit wachsenden Amplituden von 0.01% bis 10%.

Abbildung 2-18 zeigt den gemessenen Verlauf von Speichermodul und Verlustmodul. Anhang 1 enthält zudem die Darstellung des Verlustfaktors und die Tabelle der Messdaten. Die Ergebnisse wurden in den für die Darstellung der linear-viskoelastischen Eigenschaften typischen Wertebereichen mit logarithmischer Modul-Achse aufgetragen ( $E' = 1 \dots 2000 \text{ MPa}$ ,  $\tan \delta = 0 \dots 1$ ). Das ermöglicht es, den Amplitudeneinfluss in unmittelbarem Vergleich zum Einfluss von Frequenz und Temperatur zu bewerten (vgl. Abbildung 2-11).

Für Amplituden bis etwa 0.1 % bleiben Materialsteifigkeit und -dämpfung nahezu konstant. Hier verhalten sich die Elastomere linear. Mit weiter anwachsender Amplitude fällt der Speichermodul dann mehr oder weniger stark ab. Erreicht die Dehnungsamplitude 10%, dann verfügen die hier betrachteten Werkstoffe nur noch über etwa 60% ihrer Steifigkeit; bei Silikon ist der Abfall auf 30% noch stärker. Der Verlustmodul hingegen steigt mit zunehmender Dehnungsamplitude an. Bei großen Amplituden ist oberhalb von 3% Dehnung bei N674-70 und V747-75 auch wieder ein Abfall der Werkstoffdämpfung zu verzeichnen.

Wie der Vergleich der Kurven von Abbildung 2-11 und Abbildung 2-18 zeigt, sind die linear-viskoelastischen Effekte auf den Speicher- und Verlustmodul um Größenordnungen stärker als der Amplitudeneinfluss. Dies gilt insbesondere dort, wo die viskoelastische Materialdämpfung vergleichsweise hoch ist. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die dynamischen Amplituden in der Regel klein bleiben, wird auf die Beschreibung der Amplitudenabhängigkeit respektive der inneren Reibung verzichtet. Die Entwurfsproblematik und die spätere Optimierung der Dämpfung bei der Vorauslegung baut allein auf dem linear-viskoelastischen Materialgesetz unter Berücksichtigung großer Vordeformationen gemäß (2-77) auf. Die folgenden Abschnitte werden zeigen, dass diese lineare Betrachtung sehr weit trägt. Die beispielhaften Messungen von Abbildung 2-18 deuten jedoch die Gültigkeitsgrenzen der linearen Theorie an. Für weitergehende Untersuchungen stehen die Messdaten von Abbildung 2-18 zur Erweiterung des Materialmodells und zur Anpassung der Parameter von (2-94) und (2-95) zur Verfügung.

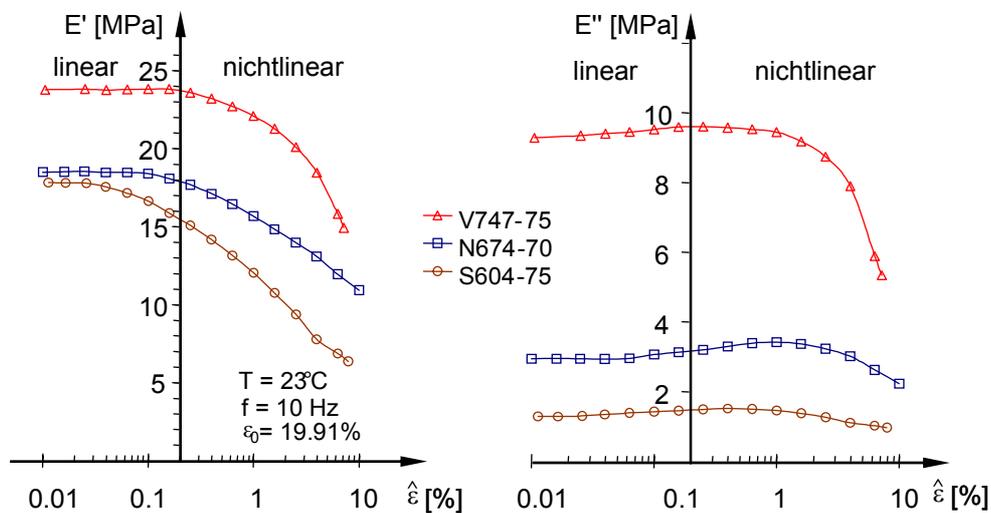


Abbildung 2-18: Gemessener Einfluss der Dehnungsamplitude auf Speichermodul (links) und Verlustmodul (rechts) für unterschiedliche O-Ring-Werkstoffproben. Statische Vordehnung  $\varepsilon_0 = 19.9\%$ .

### 3 Ermittlung von Masterkurven

Der Beschreibung der thermo-viskoelastischen Materialfunktionen mit Hilfe von Masterkurven kommt in dieser Arbeit eine zentrale Bedeutung zu. Durch die Transformation der Temperatur- in eine Frequenzabhängigkeit werden die Masterkurven als Materialfunktion einer reduzierten Frequenz formuliert. Der Speicher- oder Verlustanteil des komplexen E-Moduls ist im relevanten Temperatur- und Frequenzbereich durch jeweils eine Kurve repräsentiert. Diese Darstellung ist Grundlage für ein vereinfachtes graphisches Verfahren zur optimierten Auslegung der Elastomerlager, welches hier entwickelt wird. Ferner liefert die Anpassung der Parameter des generalisierten Maxwell-Modells an die Masterkurven jene in Abschnitt 2.2 beschriebenen Materialfunktionen, mit denen das Stoffgesetz mit inneren Variablen formuliert und ein Elastomerlager berechnet wird.

Für jedes Elastomer sind spezifische Masterkurven zu ermitteln. Selbst kleine Abweichungen in der Rezeptur bzw. die Verwendung eines anderen Vulkanisationsmittels, können bei ein und demselben Basiselastomer zu verschiedenen Werkstoffeigenschaften und somit zu stark abweichendem Kurvenverlauf führen. Die Unterschiede werden oft erst im dynamischen Verhalten sichtbar - die statische Steifigkeit kann dicht beieinander liegen. Die folgende Abbildung verdeutlicht den Einfluss der Gummimischung am Beispiel von NBR. Allein die Verwendung eines anderen Vernetzungsmittels (N674 I) senkt bereits die Glasübergangstemperatur um einige Grad ab. Entsprechend ist die Kurve gegenüber dem Referenzelastomer nach links verschoben.

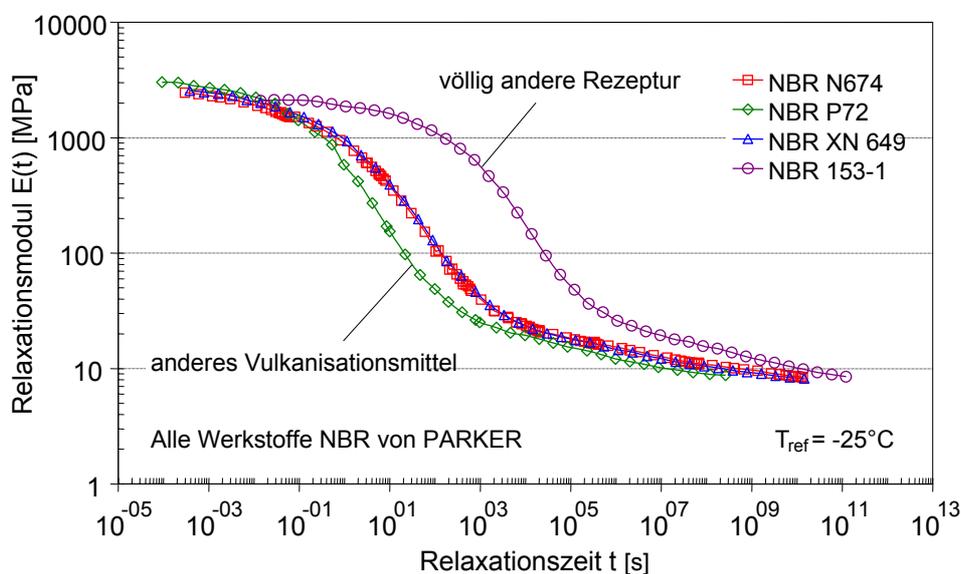


Abbildung 3-1: Vergleich der Masterkurven verschiedener Parker Nitril-Werkstoffe,  $T_{ref} = -25^{\circ}\text{C}$ .

Der Experimentalwerkstoff NBR 153-1 besitzt einen stark erhöhten Acryl-Nitril-Gehalt. Dies führt dazu, dass der Glasübergangsbereich zu höheren Relaxationszeiten hin verschoben wird. Diese Mischung eignet sich als Dämpfungswerkstoff und lässt bei vergleichsweise höheren Temperaturen bzw. niedrigeren Frequenzen höhere Dämpfungswerte erwarten. Der Gleichgewichtsmodul ist bei allen gezeigten NBR Werkstoffen nahezu gleich.

Es ist nicht Ziel dieser Arbeit, neue Werkstoffe zu entwickeln. Hier werden handelsübliche O-Ringwerkstoffe und Rechteckringe aus handelsüblichem Plattenmaterial betrachtet. Mit Ausnahme des Referenzelastomers N674 und des Perfluor-Elastomers P94 lagen dafür jedoch keine Masterkurven vor, so dass diese erst experimentell bestimmt werden mussten.

## 3.1 Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analyse

Die Erstellung von Masterkurven erfolgt auf der Grundlage einer Dynamisch-Mechanisch-Thermischen Analyse (DMTA). Bei unterschiedlichen Temperaturen werden Proben innerhalb eines begrenzten Frequenzbereichs mit einer harmonischen Verformung beaufschlagt und der zugehörige Kraftverlauf gemessen. Alternativ können die Sprungantworten auf einen Dehnungseingang innerhalb eines festgelegten Zeitbereichs gemessen werden. Die Durchführung der Versuche ist weitgehend durch die DIN 53513, ISO 6721-1 und ISO 4664 genormt. Die anschließende Auswertung, das heißt die eigentliche Erstellung der Masterkurve und die Bestimmung der Parameter der Materialfunktionen, erfolgt hingegen mit spezifischen Verfahren des jeweiligen Testlabors oder der Elastomerhersteller.

Die Masterkurven handelsüblicher O-Ringwerkstoffe basieren auf Lohn-Messungen der Fa. Gabo. Probenübersicht und Versuchsbeschreibung sind dem Anhang 3 zu entnehmen.

Bevor eine Masterkurve generiert wird, ist es zweckmäßig, sich anhand der Rohdaten ein Bild über die Güte der Messung zu machen. Geeignete Darstellungen der Messwerte geben zudem einen Überblick über die Dämpfungen und Steifigkeiten der untersuchten Elastomere, bevor die Daten durch den Shiftprozess „manipuliert“ werden.

### 3.1.1 Modul-Ortskurven

Zur raschen Beurteilung des Fehlers und der Verlässlichkeit der gewonnen Messdaten dient ihre Darstellung als „Ortskurven“ des komplexen Moduls nach ISO 10112. Dabei wird der Imaginärteil, d.h. der Verlustmodul bzw. Verlustfaktor, über dem Realteil, d.h. dem Speicheranteil des komplexen Moduls, aufgetragen (Abbildung 3-2).

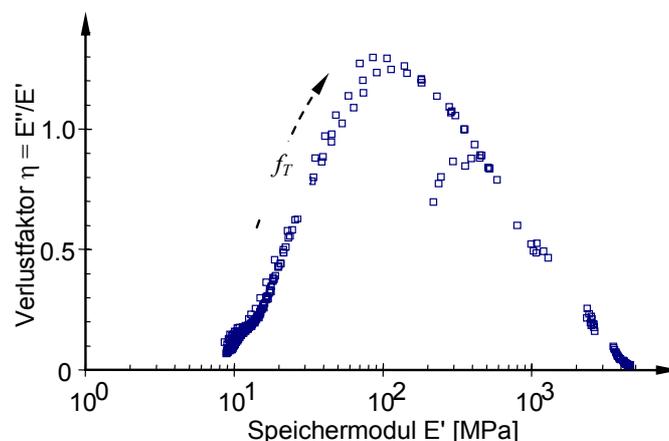


Abbildung 3-2: „Ortskurve“ des komplexen Moduls mit der reduzierten Frequenz  $f_T$  als Bahnparameter. Messung an Schnurproben (O) aus N674-70.

Für ein thermo-rheologisch einfaches Material muss sich eine eindeutige Zuordnung ergeben. Anhand einer Approximation der resultierenden Kurve wird die Streuung und die Zuverlässigkeit der Daten bestimmt. Fehler bei der Frequenz oder Temperaturbestimmung sowie systematische Fehler sind hiermit zwar nicht quantifizierbar, jedoch werden Fehler sichtbar, die, wie in unserem Falle, aus Problemen in der Einspannung herrühren. Die „Modul-Ortskurve“ in Abbildung 3-2 zeigt besonders starke Streuungen im Transitionsbereich bei hohen Verlustfaktoren. Im gegebenen Fall wurde die Messung anstelle der runden Probe mit einer rechteckigen Streifenprobe wiederholt.

### 3.1.2 Isothermen

Bei der DMTA werden die Messwerte in Form von Isothermen aufgezeichnet, aus welchen man später die Masterkurven des Elastomers erstellt. Die Isothermen liefern jedoch sofort eine auf den gemessenen Bereich beschränkte Vorschau der Temperatur- und Frequenzabhängigkeit.

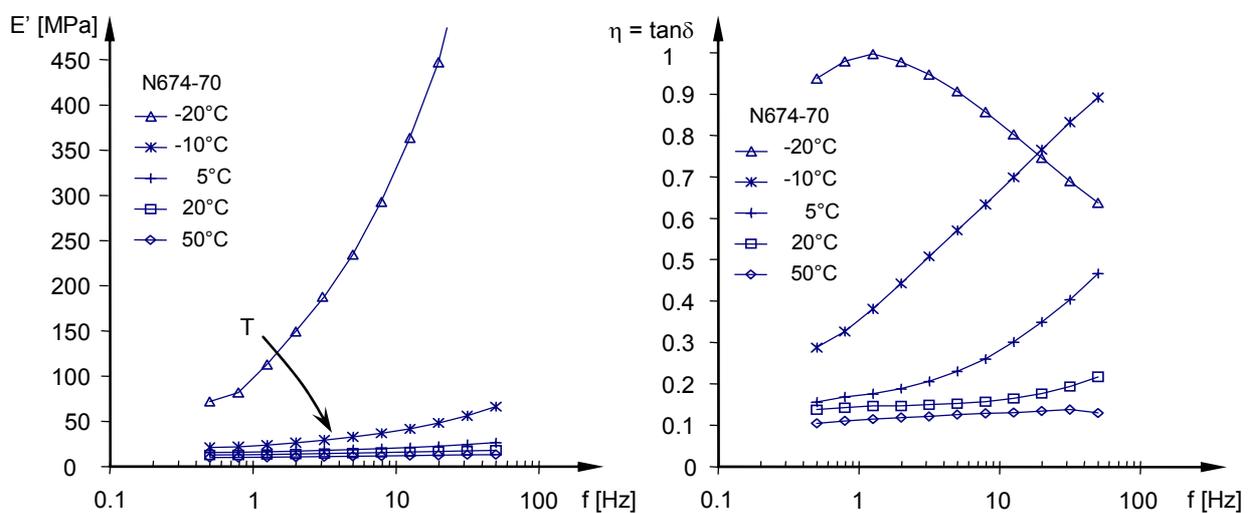


Abbildung 3-3: Ausgewählte Isothermen des Speichermoduls (links) und Verlustfaktors (rechts) des Referenzelastomers N674-70 bei verschiedenen Temperaturen oberhalb der Glastemperatur.

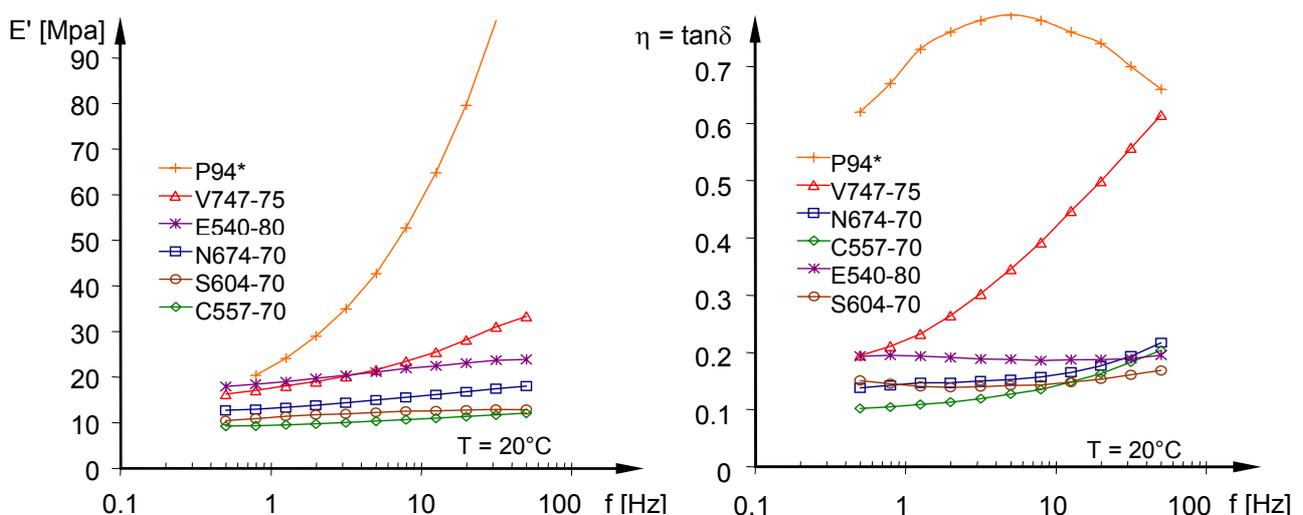


Abbildung 3-4: Isothermen des Speichermoduls (links) und Verlustfaktors (rechts) ausgewählter Elastomere.

Abbildung 3-3 zeigt ausgewählte Isothermen des Referenzelastomers N674-70. Bei hohen Temperaturen fällt die Frequenzabhängigkeit relativ gering aus, in der Nähe der Glastemperatur

### 3. Ermittlung von Masterkurven

ändern sich jedoch Steifigkeit und Verlustfaktor sehr stark. Bei einer vorgegebenen Temperatur von z.B. 20°C treten nun je nach Material verschiedene Verläufe und Werte von Moduln und Verlustfaktoren auf (Abbildung 3-4).

Im Frequenzbereich von 0.5 bis 50 Hz variiert die Steifigkeit der Fluorelastomere P94 und V747 besonders stark. Entsprechend hoch fällt hier der Verlustfaktor aus. Bei 5 Hz weist P94 die maximale Dämpfung auf. Nimmt die Frequenz weiter zu, dann geht der Verlustfaktor zurück. Die frequenzbedingten Steifigkeitsänderungen und die Dämpfungswerte der restlichen Elastomere bleiben dagegen vergleichsweise klein.

#### 3.1.3 Isofrequenzen

Sortiert man die Werte der gemessenen Isothermen nach der jeweiligen Frequenz, so erhält man die Werkstoffeigenschaften als Funktion der Temperatur. Hier wird der Glasübergangsbereich deutlich, in dem je nach Frequenz der Temperatureinfluss dominiert (Abbildung 3-5).

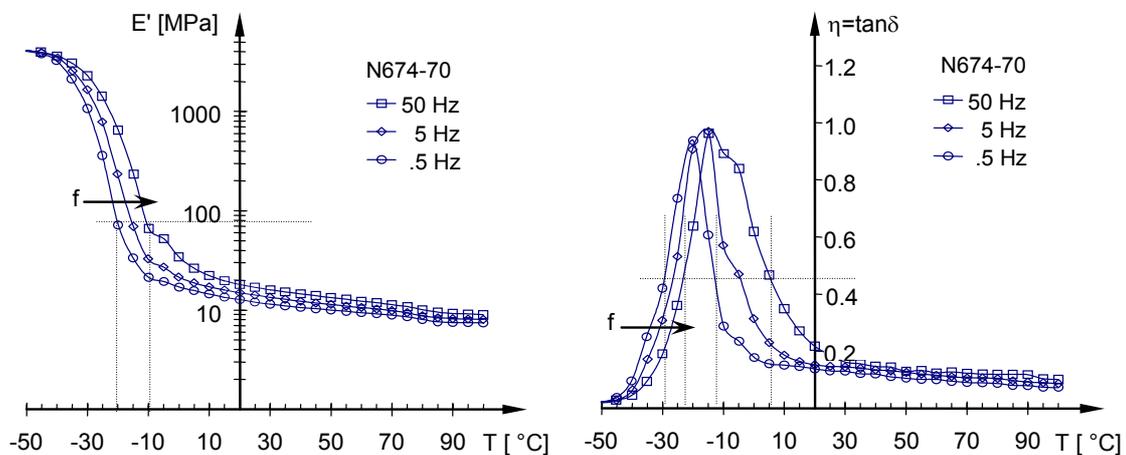


Abbildung 3-5: Speichermodul und Verlustfaktor von N674-70 als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Frequenzen.

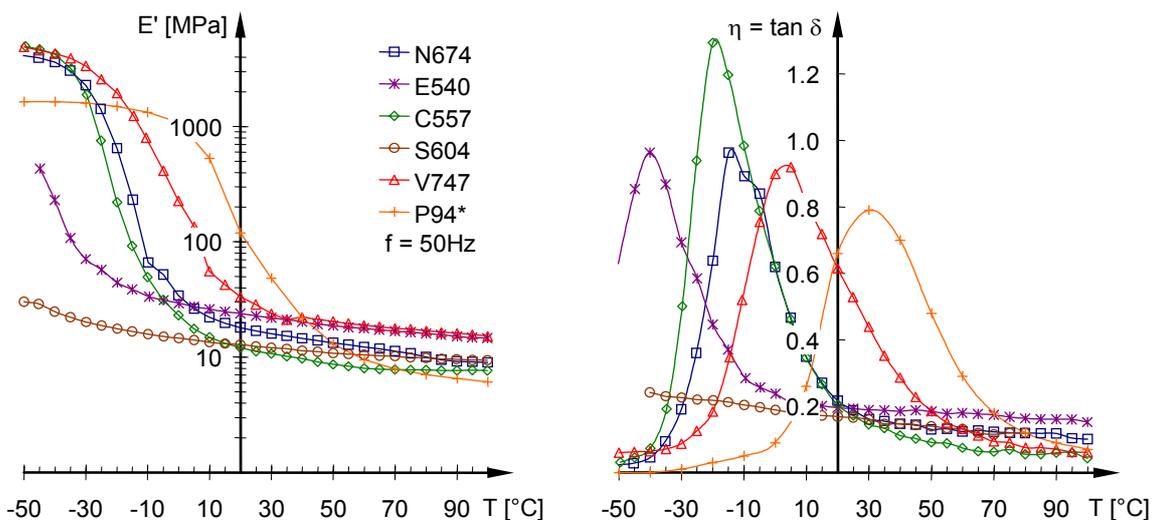


Abbildung 3-6: Speichermodul und Verlustfaktor ausgewählter O-Ringmaterialien bei einer Belastungsfrequenz von 50 Hz in Abhängigkeit von der Temperatur (\*P94 ist kein O-Ring Material).

Die Elastomere sind bei niedrigen Temperaturen um Größenordnungen steifer als bei Raumtemperatur. Dann tritt ein Übergangsbereich auf, bei welchem der Verlustfaktor ein

Maximum aufweist und die Steifigkeit mit steigender Temperatur stark abfällt. Die Elastomereigenschaften sind hier sehr empfindlich gegenüber Änderungen besonders der Temperatur, aber auch der Frequenz.

Abbildung 3-5 illustriert den äquivalenten Einfluss beider Parameter. So wird eine Speichermodul von 70 MPa sowohl bei minus 20°C und 0.5 Hz als auch bei minus 10°C und 50 Hz gemessen. Hier ist der Temperatursprung von 10°C einem Frequenzsprung von 2 Größenordnungen äquivalent. Dem gleichen Frequenzsprung entspricht bei anderen Temperaturen eine andere Temperaturdifferenz. So wird der Verlustfaktor von 0.44 bei minus 30°C oder bei minus 25°C erreicht, je nachdem, ob die Frequenz 0.5 oder 50 Hz beträgt. Der gleiche Frequenzabstand entspricht bei der abfallenden Flanke der Verlustfaktorkurve einem Temperatursprung von minus 13°C auf plus 7°C. In diesem Sinne hängt auch der Bereich hoher Dämpfung von der Frequenz und der Temperatur ab. Im Zuge der Masterkurvenerstellung gilt es genau diese komplexe Funktion der Temperatur-Zeit-Korrespondenz zu bestimmen.

Abbildung 3-6 zeigt, dass sich *hohe Verlustfaktoren* von  $\tan\delta > 0.5$  bei konstanter Frequenz von 50 Hz über einen Temperaturbereich von etwa 30°C hinweg aufrechterhalten. Das Maximum von  $\tan\delta \approx 1$  liegt dann je nach Werkstoff bei etwa 30°C für Perfluorkautschuk P94, 0°C für Fluorkautschuk V747, -10°C für Nitril N674 und sogar unter -50°C für Silikon S604. Das Dämpfungsmaximum korreliert mit den unterschiedlichen Glastemperaturen  $T_g$  der Elastomere. Bei hohen Temperaturen respektive niedrigen Frequenzen treten viskoelastische Effekte wie Steifigkeitszunahme und Dämpfung zunehmend in den Hintergrund. Der Speichermodul liegt in der Nähe des Gleichgewichtsmoduls  $E_0$  und der Verlustfaktor nimmt, je nach Füllungsgrad und Molekülstruktur, unterschiedlich hohe aber nahezu konstante Werte an.

### 3.2 Shiftprozess und Bestimmung der Temperatur-Frequenz-Funktion

Wie wird aus den gewonnenen Messdaten eine repräsentative Materialbeschreibung im Sinne einer Masterkurve nach Abbildung 2-11? Da eine genormte Vorgehensweise hierfür bisher nicht existiert, wird an dieser Stelle etwas detaillierter auf die Shiftprozedur und die Parameterbestimmung eingegangen. Zur Illustration stützen wir uns auf die Bildausgaben der Programmcodes Visco-Shift und Visco-Data [38].

Eine Masterkurve besteht aus einer Vielzahl von Einzelmesswerten, die als Isothermen bei verschiedenen Temperaturen gemessen und dann zu einer Kurve bei einer Referenztemperatur, wie in Abbildung 2-11 gezeigt, verschoben werden. Aus der Verschiebung der Isothermen resultieren zugleich die Parameter der zugehörigen Temperatur-Frequenz-Shift-Funktion gemäß Abschnitt 2.4. Liegen die Isothermen vor, so sind praktisch nur fünf Parameter zu bestimmen. Zunächst gewinnt man  $T_g$  aus der Gleichung (2-71),

$$\lg a_T = y_{WLF}(T) = \frac{c_1(T - T_g)}{c_2 + T - T_g}$$

und später  $T_c^u$ ,  $T_c^o$ ,  $A_e^u$  und  $A_e^o$  aus Gleichung (2-74)

$$\lg a_T(T) = y_{WLF} \left( T_c^{o/u} \right) + M \frac{A_E^{o/u}}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_c^{o/u}} \right).$$

In der Tat gestaltet sich die eindeutige Bestimmung dieser Parameter jedoch recht schwierig.

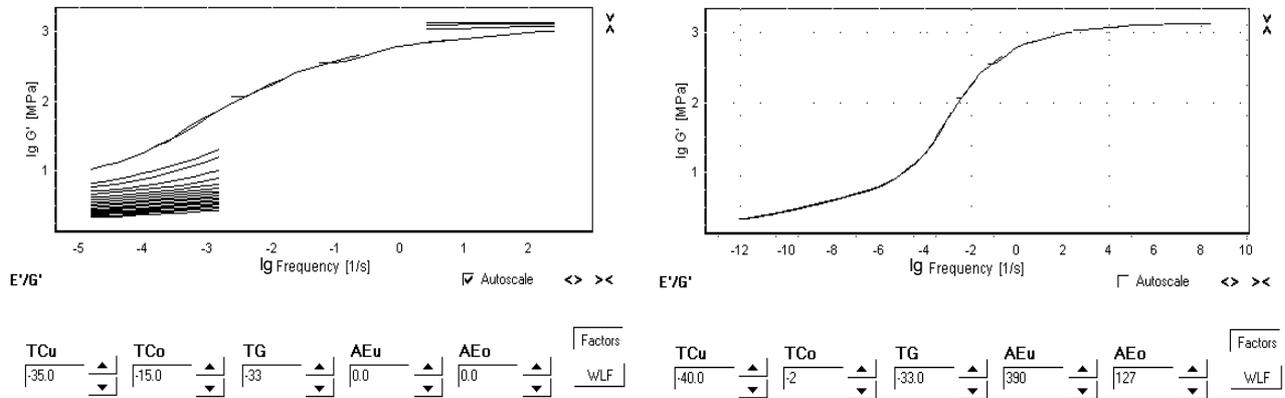


Abbildung 3-7: Bestimmung einer Glasübergangstemperatur  $T_g = -33^\circ\text{C}$  für N674-70 mittels WLF-Shift (links) und manuelle Verschiebung gemessener Isothermen zu einer „glatten“ Masterkurve in Visco-Shift® (rechts).

Bei Versuchen im Frequenzbereich liegen die Isothermen sowohl für den Realteil als auch für den Imaginärteil des komplexen Moduls vor. Der Einfachheit halber beschränkt man sich zunächst auf die Verschiebung und Anpassung der Werte des Speichermoduls, welche einem streng monotonen Verlauf folgen. Folgende Teilschritte sind für die Erstellung der Masterkurve aus den Isothermen erforderlich:

- Bestimmung einer Referenztemperatur (z. B. Glasübergangstemperatur);
- Vertikalshift der Isothermenwerte bezüglich dieser Referenztemperatur;
- Horizontalshift der Isothermen und Bestimmung der Temperatur-Frequenz-Shiftparameter;
- Mathematische Approximation (Glättung) und
- Anpassung der Prony-Parameter des generalisierten Maxwell-Modells.

Zuerst ist die Referenztemperatur der WLF-Gleichung (2-71) festzulegen. Die Glasübergangstemperatur erweist sich hier als sinnvoller und charakteristischer Bezugswert, denn er kann im Rahmen der Auswertung der DTMA allein anhand der gemessenen Isothermen gefunden werden. Berücksichtigt werden dabei nur jene Isothermen, die innerhalb des iterativ zu bestimmenden Transitionsbereichs liegen. Die Glasübergangstemperatur wird durch jenen Wert  $T_g$  der WLF-Gleichung (2-71) repräsentiert ermittelt, bei welcher sich die beste Deckung der verschobenen Isothermen erzielen lässt und die in diesem Bereich auf einen augenscheinlich „glatten“ Kurvenzug führt (Abbildung 3-7, links). Eine Bestimmung der Glastemperatur aus Messungen der Differenzthermoanalyse (DTA) nach DIN 51007, der dynamischen Differenzkalorimetrie (DDK) nach DIN 53765 oder Dilatometrie nach DIN 51045 ist somit nicht erforderlich.

Die Festlegung des Transitionsbereichs erfolgt indirekt durch den Ausschluss jener Isothermen, welche nicht in das WLF-Korrespondenzprinzip passen. Praktischerweise sind damit die Grenztemperaturen der Arrhenius-Funktionen  $T_c^u$  und  $T_c^o$  schon grob festgelegt.

Im zweiten Schritt erfolgt ein Vertikalshift der Modulwerte jener Isothermen, deren Messtemperatur  $T_{mess}$  oberhalb der Glasstemperatur  $T_g$  liegt:

$$E(T_{ref}) = \begin{cases} E(T_{mess}) \frac{T_{ref}}{T_{mess}} & \text{wenn } T_{mess} \geq T_g, \\ E(T_{mess}) & \text{wenn } T_{mess} < T_g. \end{cases} \quad (3-1)$$

Die hier vorgestellte Vertikalshift-Korrektur (3-1) beruht auf dem Neo-Hookeschen Materialgesetz in der Form von (2-2) und gilt streng nur für den entropieelastischen Bereich des Elastomers. Jedoch wird der Korrekturfaktor in der Nähe der Glasstemperatur ohnehin sehr klein. Für Elastomere mit niedriger Glasstemperatur ist die Auswirkung dieser Korrektur auf die Stoffwerte bei Raumtemperatur erheblich.

Schließlich erfolgt der Horizontalshift. Hierzu werden die gemessenen Isothermen unterhalb und oberhalb der Referenztemperatur entlang der Frequenz- bzw. Zeitachse so verschoben, dass sich ein glatter geschlossener Kurvenzug ergibt (Abbildung 3-7, rechts). Dabei werden die vier verbleibenden Parameter der Arrhenius-Funktionen (2-74) bestimmt.

Im Zuge einer manuellen Verschiebung der einzelnen Isothermen resultiert die Shift-Funktion aus der Anpassung des Verlaufs der einzelnen Shift-Faktoren (Abbildung 3-8, links). Die Arrhenius-Grenztemperaturen  $T_{co}$  und  $T_{cu}$  befinden sich dort, wo die entstandene Funktion der Shift-Faktoren Knicke aufweist und das Korrespondenzprinzip nicht mehr der WLF-Funktion folgt.

Manko dieses Verfahrens: Es ist subjektiv und fehleranfällig. Jeder Shift-Fehler pflanzt sich, ausgehend von der Referenztemperatur, über viele Isothermen hinweg fort. Da die zugehörigen Enden der Isothermen jedoch nicht immer parallel verlaufen und es sogar zu Klaffungen kommen kann (Abbildung 3-8, rechts), hängt es vom Ermessen und der Übung des Bearbeiters ab, welchen Faktor er jeweils einstellt.

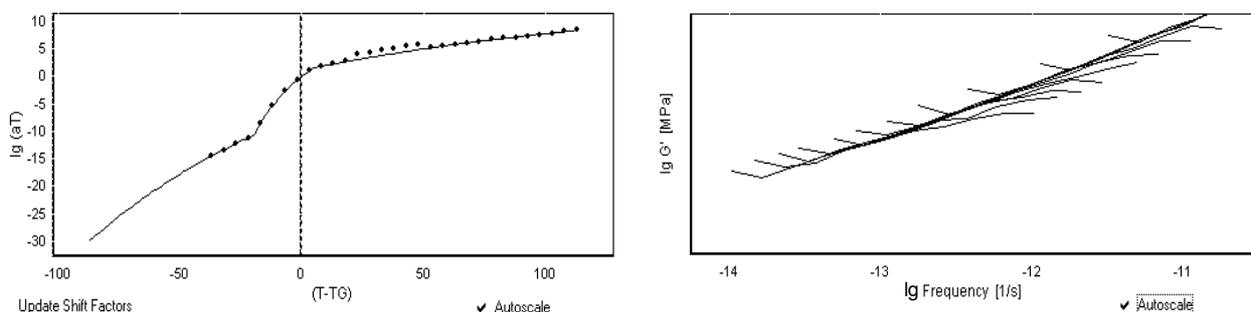


Abbildung 3-8: Probleme beim manuellen Shift der Isothermen: Abweichungen der manuellen Shift-Faktoren von der resultierenden Shift-Funktion (links), ausgefranzte Isothermenzipfel (rechts).

Die Erfahrung hat aber gezeigt, dass trotz der subjektiven Einflüsse beim Shiften aus ein und demselben Datensatz nahezu identische Masterkurven generiert werden. Sind dann alle Parameter des Temperatur-Frequenz-Shifts nach (2-71) und (2-74) bestimmt, müssen die gewonnenen

Funktionen folgerichtig auch auf die vorab manuell verschobenen Isothermen angewendet werden. Die Masterkurve erfährt somit ein Update und sieht dann nicht mehr so „glatt“ aus.

### 3.3 Parameteridentifikation des generalisierten Maxwell-Modells

Im letzten Schritt erfolgt die Identifikation der Prony-Parameter des generalisierten Maxwell-Modells. Dies erfordert die Minimierung eines Fehlerfunktional

$$\sum F^2 = MIN. \quad (3-2)$$

Die Anpassung kann anhand des Speichermoduls (3-3) und/oder anhand des Verlustfaktors (3-6) erfolgen [39]. Im Falle des Speichermoduls lautet der Fehler:

$$F_{E'}(\omega, T) = \frac{\left( E_0 + \sum_{n=1}^{N_{\max}} E_n \frac{(\omega \tau_n a_T(T))^2}{1 + (\omega \tau_n a_T(T))^2} \right) - E_{\text{mess}}(\omega, T)}{E_{\text{mess}}(\omega, T)}. \quad (3-3)$$

Da in (3-3) die Zeitkonstanten  $\tau_k$  unter dem Quadrat stehen, ergibt sich ein nichtlineares Minimierungsproblem. Dieses kann mit einem Gradientenverfahren, z.B. dem Levenberg-Marquardt-Algorithmus [40, 41, 42], gelöst werden. Erfahrungsgemäß sind diese Algorithmen rechenintensiv bzw. führen nur dann zum Ziel, wenn ein guter Startwert für die Lösung vorliegt und die Konvergenz gegen lokale Minima auszuschließen ist. Die ersten Anpassungen von Masterkurven wurden zunächst mit einem eigenen Programmcode vorgenommen, der ein von TSCHOEGEL [43, 39] vorgeschlagenes Verfahren implementiert. Dieses beruht auf einer Festlegung der Relaxationszeiten  $\tau_n$  innerhalb von Anpassungsfenstern und erzeugt somit ein quasi-lineares Minimierungsproblem. Der Algorithmus arbeitet vergleichsweise schnell. Er muss jedoch durch Nebenbedingungen eingeschränkt werden, da sonst auch physikalisch unsinnige negative Werte der Steifigkeitsparameter anfallen. Eine gute Anpassung setzt die dichte Verteilung der vorgegebenen Relaxationszeiten voraus. Nachgeschaltete Routinen sind dann notwendig, um die erforderliche Anzahl der Parameter wieder auf ein Optimum zu reduzieren.

Die Prony-Parameter  $\tau_i$  und  $E_i$ , der hier präsentierten Masterkurven, wurden mit dem Programm Visco-Data [38] bestimmt. Dieses verwendet einen nichtlinearen Optimierungsalgorithmus auf Grundlage der Evolutionsstrategie [44, 45, 46]. Dieser Algorithmus ist besonders robust und erlaubt die Anpassung sowohl der Relaxationszeiten  $\tau_i$  als auch der sogenannten Relaxationsstärken  $E_i$ . Die Art der Kernfunktion ist dabei frei wählbar. Zum jetzigen Zeitpunkt wurde jedoch nur die Anpassung des Speichermoduls nach (3-3) und des Relaxationsmoduls implementiert.

Abbildung 3-9 (links) zeigt die verschobenen Isothermen und den Verlauf der aus der Anpassung resultierenden Materialfunktion  $E'(f)$  bei der Referenztemperatur  $T_g$ . Das darin enthaltene Balkendiagramm repräsentiert das diskrete Relaxationsspektrum, auch Prony-Parameter  $E_i$  und  $\tau_i$  genannt. Für eine angepasste Darstellung wurden die dekadischen Logarithmen der inversen Relaxationszeiten  $1/\tau_i$  gebildet und die Relaxationsstärken  $E_i$  auf den Glasmodul  $E_g$  gemäß (2-29) bezogen.

Das resultierende Spektrum in Abbildung 3-9 (links) wird von der ungleichmäßigen Verteilung der Messwerte geprägt. Der fehlerminimale Algorithmus versucht auch die verbliebenen Klaffungen und Sprünge anzupassen und bewertet den Gummibereich mit bereichsweisen Datenanhäufungen stärker als den Übergangsbereich, in dem die Datenmenge oft knapper ist. Im Ergebnis ist auch die Funktion des Speichermoduls wellig. Da sich diese Welligkeit bei der Berechnung der Verlustgrößen noch verstärkt, kommt es zu einer stärkeren Unsicherheit in der Dämpfungsaussage.

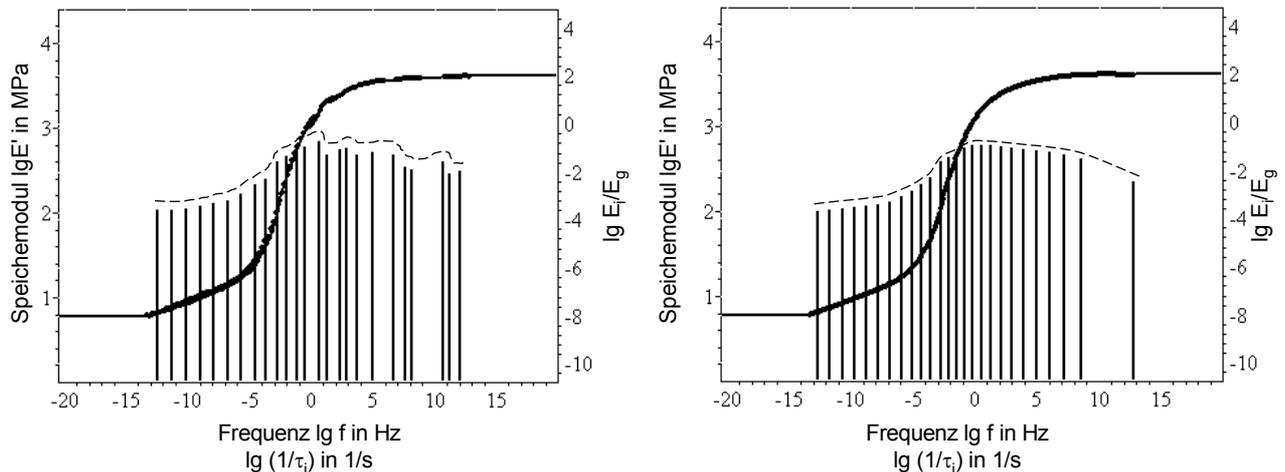


Abbildung 3-9: Parameteranpassung der Masterkurve des Speichermoduls  $E'(f)$  mit Visco-Data. Resultierendes Spektrum der Parameter  $\tau_i$  und  $E_i$  von N674-70 bei Verwendung der ungeglätteten Masterkurve aus den Isothermenwerten (links) oder einer gefitteten Masterkurve (rechts).

In dieser Arbeit wird die aus den Isothermen mit dem ermittelten Temperatur-Frequenz-Shift resultierende Masterkurve vor der Parameteranpassung nochmals gefittet und ein äquidistanter Datensatz erzeugt. Zur Anpassung der doppelt logarithmierten Funktion des Speichermoduls  $\lg E'(\lg f)$  eignen sich gebrochen rationale Funktionen der Art:

$$\lg E'(\lg f) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n (b_n - \lg f)^n}{\sum_{p=0}^P c_p (d_p - \lg f)^p}, \quad (3-4)$$

wobei eine ausreichende Anzahl der Polstellen  $P$  und der Nullstellen  $N$  meist im Bereich von 3...5 liegt. Dadurch, dass die nun anzupassende Masterkurve „glatt“ ist und aus einem äquidistanten Datensatz besteht, erhält man einen quasi kontinuierlichen Verlauf der Amplituden des diskreten Relaxationspektrums (vergleiche Abbildung 3-9 links und rechts). Diese Vorgehensweise verhindert anpassungsbedingte Schwankungen des Verlustfaktors.

### 3.4 Darstellungsweisen

Liegt die Materialbeschreibung in Form der Prony-Parameter des generalisierten Maxwell-Modells und der WLF-/Arrhenius-Funktionen für den Temperatur-Frequenz-Shift vor, dann lassen sich die Moduln  $E'$  und  $E''$  bzw. der Verlustfaktor für den gesamten Temperatur- und Frequenzbereich auftragen. Je nach gewünschter Aussage eignen sich verschiedene Darstellungen.

Abbildung 3-10 zeigt am Beispiel von N674 sehr plastisch, wie die Einflüsse der Temperatur und der Frequenz miteinander verknüpft sind. Das Elastomer verhält sich nur in einem eingeschränkten

### 3. Ermittlung von Masterkurven

Temperatur- und Frequenzbereich wirklich entropieelastisch. In jenem für den Maschinenbau relevanten Einsatzbereich weist N674 eine deutliche Abhängigkeit sowohl von der Temperatur als auch von der Frequenz auf. Der Glasübergang, d.h. der starke Anstieg des Speichermoduls und des Verlustfaktors, vollzieht sich erst bei vergleichsweise niedrigen Temperaturen  $T < 40^\circ\text{C}$  oder aber für sehr hohe Frequenzen oberhalb 10 kHz.

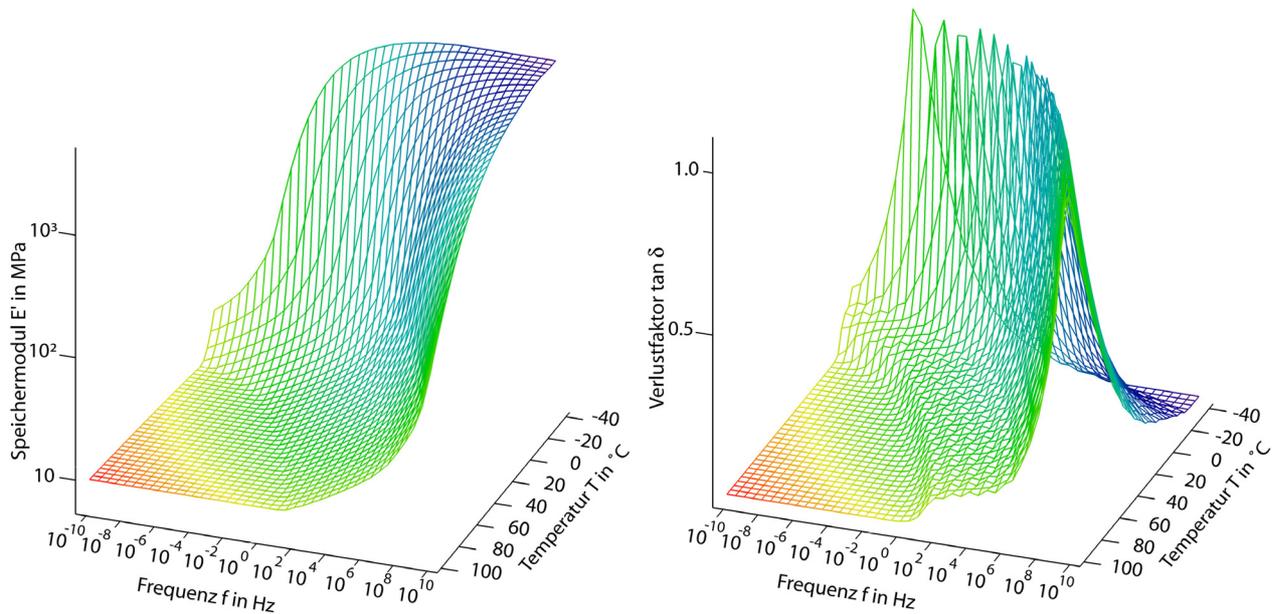


Abbildung 3-10: 3D-Darstellung der Masterkurven des Speichermoduls (links) und des Verlustfaktors (rechts) von N674-70.

In der Praxis hat sich die 2 D-Darstellung der Masterkurve als Nomogramm nach JONES [47] bewährt (Abbildung 3-11).

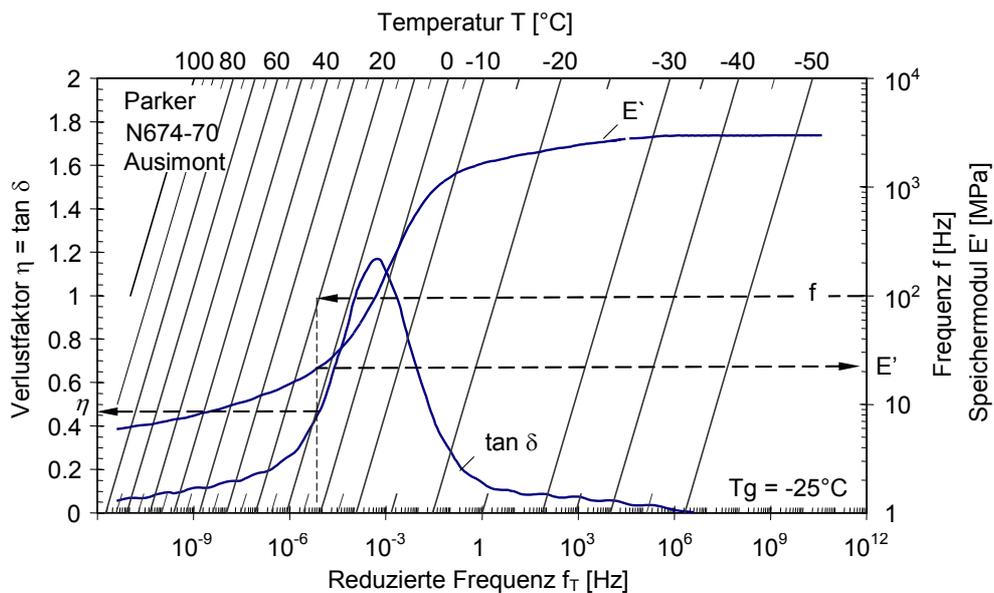


Abbildung 3-11: Masterkurve des Speichermoduls und Verlustfaktors von N674-70 in der Darstellung über der reduzierten Frequenz. Bestimmung der Materialkennwerte  $\eta$  und  $E'$  für 100 Hz und  $20^\circ\text{C}$ .

Dort werden die Werte über der reduzierten Frequenz aufgetragen und können für die gegebenen Temperaturen und Frequenzen direkt abgelesen werden. Die reduzierte Frequenz wird nach (2-75) aus dem Shift-Faktor und der tatsächlichen Frequenz gebildet. Sie ist äquivalent zu jener Frequenz, bei der das Material bei Referenztemperatur  $T_g$  die gleichen mechanischen Eigenschaften aufweist wie unter den vorgegebenen Einsatzbedingungen.

Anhand der eingezeichneten Hilfslinien wird gezeigt, wie für die Frequenz  $f = 100\text{Hz}$  bei  $T = 20^\circ\text{C}$  die reduzierte Frequenz  $f_T$  gefunden und für diese reduzierte Frequenz die gesuchten Parameter  $\eta = 0.47$  und  $E' = 22\text{MPa}$  (Diagramme für die verbleibenden Werkstoffe in Anhang 5).

Für einen direkten Vergleich der Eigenschaften verschiedener Elastomere ist die Darstellung bei einer Referenztemperatur geeignet (Abbildung 3-12). Die gezeigten Werkstoffe besitzen einen Gleichgewichtsmodul  $E_0$  von 5 MPa bis 10 MPa. Bei einer Frequenz von 1 kHz ist der Speichermodul von P94 sehr hoch, der Verlustfaktor nimmt ab und gleicht dem des nachgiebigeren N674. Bei der gleichen Frequenz besitzt V747 sein Dämpfungsmaximum, während der Verlustfaktor der meisten Elastomere weiter zunimmt. Da der Glasübergang das Verhalten bestimmt und dieser bei verschiedenen Temperaturen bzw. Frequenzen auftritt, besitzen die Elastomere in dem für die Rotordynamik interessanten Frequenzband von 1Hz bis 10kHz sehr unterschiedliche dynamische Eigenschaften.

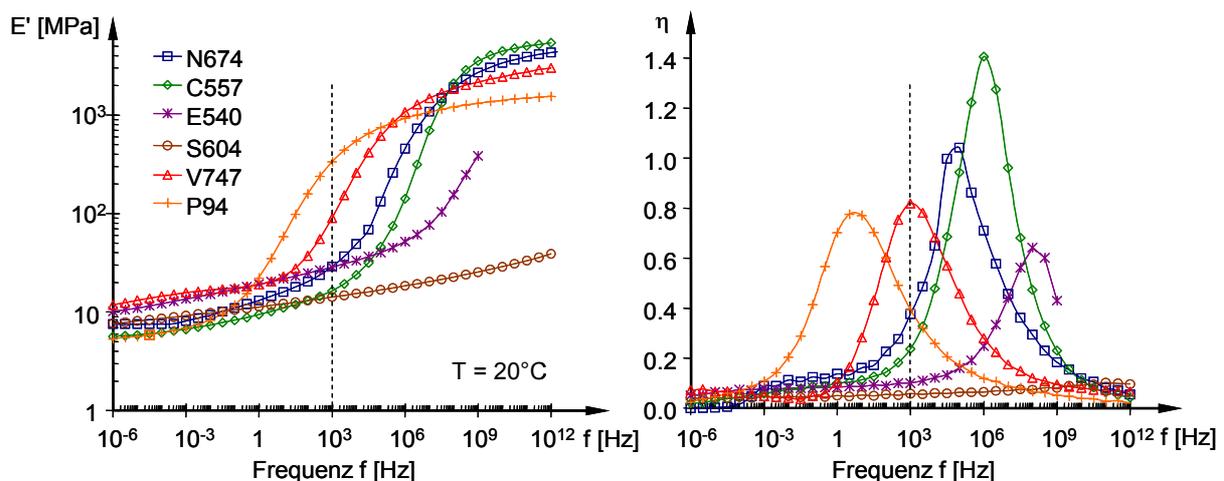


Abbildung 3-12: Masterkurven des Speichermoduls (links) und Verlustfaktors (rechts) von Elastomermaterialien bei  $20^\circ\text{C}$  (Auftragsmessungen bei Gabo, Daten P94 von Parker).

In dieser Arbeit wird eine entwurfsbezogene Darstellung der Masterkurve entwickelt. Dabei entfällt die in Abbildung 3-11 enthaltene reduzierte Frequenz. Stattdessen werden die Isothermen des Speichermoduls im relevanten Frequenzbereich für ausgewählte Temperaturen berechnet. Diese Isothermen werden invertiert und dann als Funktionen der Schwingfrequenz über dem Modulwert auf der rechten y-Achse aufgetragen. Die linke y-Achse ist dem Verlustfaktor vorbehalten, der - wie bei der „Modul-Ortskurve“ in Abbildung 3-2 - als Funktion des Moduls aufgetragen wird. Diese Darstellung ermöglicht die Verknüpfung der Eigenschaften des Lagermaterials mit den Parametern eines Rotorsystems.

### 3. Ermittlung von Masterkurven

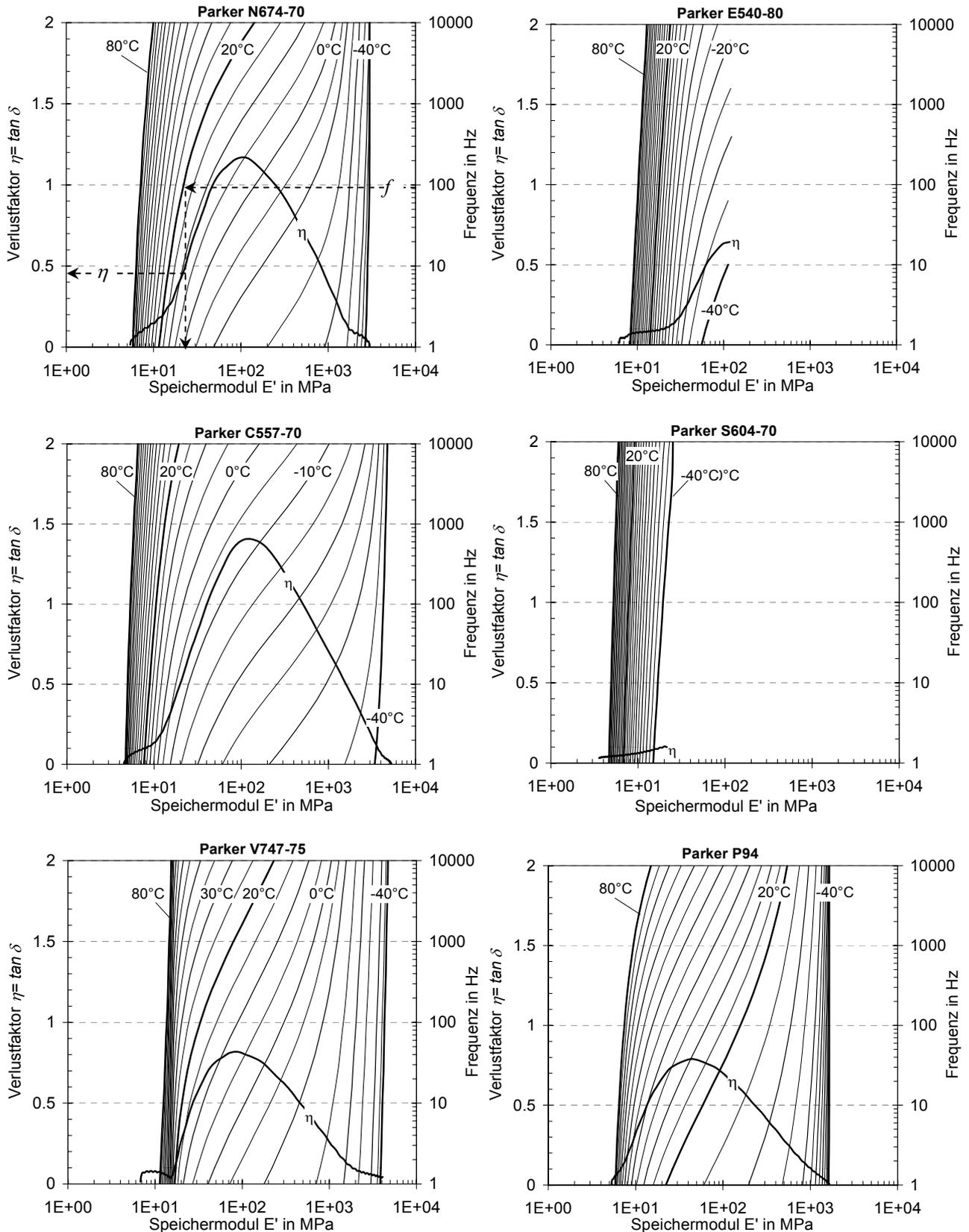


Abbildung 3-13: Entwurfsbezogene Darstellung gemessener Masterkurven von Nitril N674-70, EPDM E540-80, Chloropren C557-70, Silikon S604-70, Fluor-Karbon V747, Perfluor P94.

Abbildung 3-13 oben links enthält das zu Abbildung 3-11 analoge Ablesebeispiel für N674-70.

### 3.5 Fehlerbetrachtung

Jede Masterkurvenmessung besteht aus etwa 500 Messwerten. Dies ermöglicht die statistische Auswertung des relativen Anpassungsfehlers der durchgeführten Messung. Systematische Fehler und Schwankungen der Herstellungsqualität des Elastomers werden ferner durch einen direkten Vergleich von unterschiedlichen Messungen ein und desselben Materials diskutiert, wobei Messmethode, Probenform und Materialcharge variieren.

#### 3.5.1 Fehler der Modul-Ortskurve

Abbildung 3-14 (links) zeigt die Messdaten von zwei verschiedenen Proben ein und desselben Materials N674 anhand der Ortskurven des komplexen Moduls. Probleme bei der Fixierung der O-Ring-Probe resultierten im Glasübergangsbereich in sichtbaren Streuungen. Daraufhin wurde eine Streifenprobe (R-Probe) aus Plattenmaterial des gleichen Elastomers gefertigt und vermessen. Die Wiederholung verbesserte das Ergebnis, allerdings stellt sich auch quantitativ ein anderer Verlauf ein.

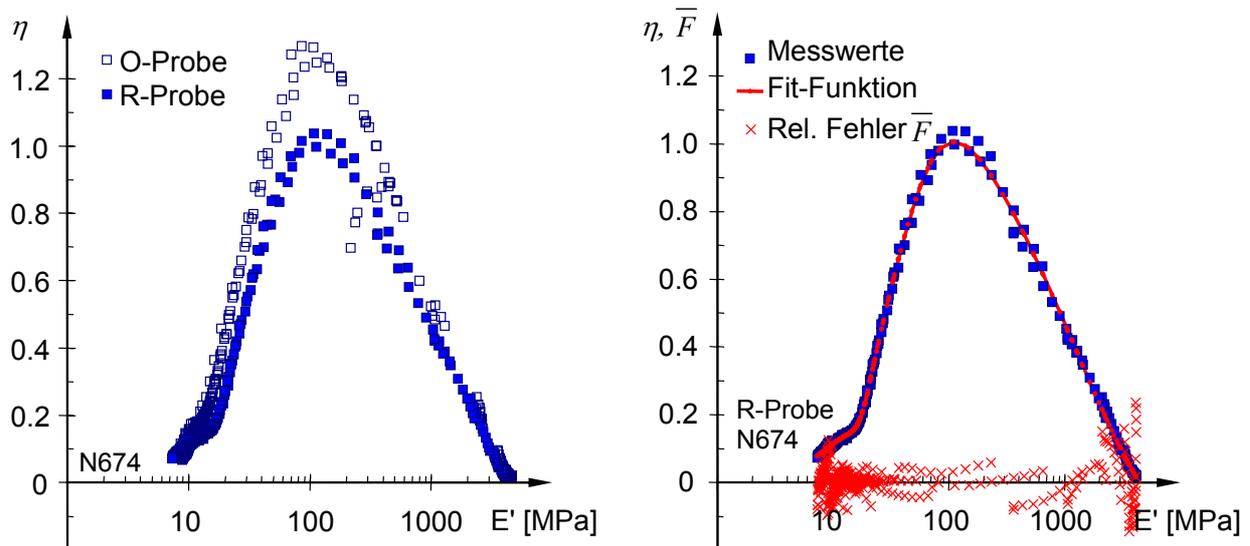


Abbildung 3-14: „Ortskurven“ des komplexen Moduls von N674 in der Verlustfaktordarstellung. Vergleich von Messungen an Schnurproben (O) und Streifenproben (R) (links) sowie Funktion und relativer Fehler bezüglich der Werte der Streifenprobe (rechts).

Abbildung 3-14 (rechts) veranschaulicht den Weg der Fehlerquantifizierung. Die Rohdaten werden durch eine gebrochen-rationale Fit-Funktion approximiert. Diesbezüglich bestimmt sich der mittlere relative Fehler  $\bar{F}$  gemäß (2-19), hier jedoch ohne die Betragsbildung. Die Standardabweichung des relativen Fehlers resultiert aus:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (F_i - \bar{F})^2}, \quad (3-5)$$

wobei  $F_i$  der jeweilige relative Fehler ist. Dieser ist besonders in den Randbereichen bei kleinen Verlustfaktoren groß. Für kleine Speichermoduln trifft man dort auf die ausgefranstesten Isothermenzipfel (vgl. Abbildung 3-8).

### 3. Ermittlung von Masterkurven

Die Tabelle 3-1 fasst die Quantifizierung des Ortskurvenfehlers für die untersuchten Elastomere zusammen. Durch die Verwendung von Streifenproben halbiert sich der Fehler gegenüber dem der eingespannten O-Ring Schnur sowohl bei N674 als auch bei C557. Unterschiede der Kurven des jeweils gleichen Materials spiegeln neben der Probenform und der Einspannung auch Schwankungen der Materialqualität wider. So erklärt sich, dass bei N674 die Werte der Fit-Funktion im Mittel 26% höher als die entsprechenden Werte der Streifenproben sind. Bei C557 beträgt die Differenz 6.7%, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Tabelle 3-1: Standardabweichung der relativen Fehler: Vergleich verschiedener Schnurproben (O) und Streifenproben (R).

Probeneinfluss	N674	C557	S604	E540	V747
O-Ring Schnur (O-Probe)	10%	23%	12%	6.2%	17%
Streifenprobe (R-Probe)	5.3%	9.2%	4.5%		
Mittlere rel. Abweichung (O-R)/R	26%	-6.68%			

#### 3.5.2 Fehler der Anpassung der Materialfunktion

Analog zum Fehler  $F_{E'}$  des Speichermoduls (3-3) bestimmt man den relativen Fehler  $F_{\eta}$  des Verlustfaktors für alle gemessenen Temperatur- und Frequenzwerte aus:

$$F_{\eta}(\omega, T) = \frac{\left( \sum_{k=1}^{N_{\max}} E_k \frac{\omega \tau_k a_T(T)}{1 + (\omega \tau_k a_T(T))^2} \right) - \eta_{\text{mess}}(\omega, T)}{\eta_{\text{mess}}(\omega, T)} \quad (3-6)$$

Abbildung 3-15 zeigt die Verteilung des relativen Anpassungsfehlers des Speichermoduls  $F_{E'}$  und des Verlustfaktors  $F_{\eta}$  für N674-70. Es wird deutlich, dass in den Randbereichen der Fehler insbesondere des Verlustfaktors sprunghaft ansteigt. Einerseits war dieses Phänomen schon bei den Ortskurven des komplexen Moduls sichtbar. Andererseits kommen noch Abschneidefehler hinzu, die ihren Ursprung in der Tatsache haben, dass die Anpassung nur auf die Werte des Speichermoduls, nicht aber anhand des Verlustfaktors erfolgte. Da der Verlustfaktor jedoch mit dem Gradient des Speichermoduls korreliert und dieser an den Rändern besonders schlecht getroffen wird, schlagen sich hier Fehler höherer Ordnung nieder.

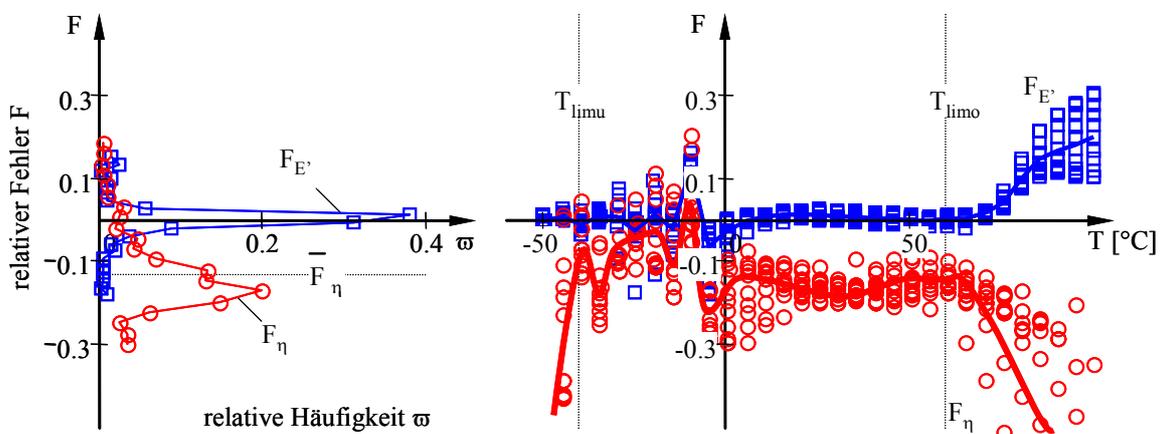


Abbildung 3-15: Relativer Fehler des Speichermoduls  $F_{E'}$  und des Verlustfaktors  $F_{\eta}$  für N674-70. Häufigkeitsverteilung (links) und temperaturbezogene Darstellung des relativen Fehlers (rechts).

Um den Fehler für einen bestimmten Bereich zu minimieren, wurden Auswertintervalle festgelegt. Die resultierende Materialbeschreibung bezieht sich für das Referenzelastomer N674-70 somit auf die im Bereich von  $-50^{\circ}\text{C}$  bis  $60^{\circ}\text{C}$  gemessenen Isothermen. In den Randbereichen unterhalb einer unteren Grenztemperatur  $T_{limu} = -40^{\circ}\text{C}$  und oberhalb von  $T_{limo} = 60^{\circ}\text{C}$  kann das Modell zwar weiterhin verwendet werden, jedoch wächst der Fehler insbesondere des Verlustfaktors stark an.

Innerhalb des Auswertintervalls ( $-40^{\circ}\text{C} \dots 60^{\circ}\text{C}$ ) fällt die mittlere relative Abweichung der berechneten Speichermoduln mit  $0.27\%$  sehr gering aus. Dieser Umstand überrascht nicht, da die fehlerminimale Anpassung der Masterkurve anhand der  $E'$ -Werte erfolgte. Ausgehend von einer Normalverteilung des relativen Fehlers ergibt sich eine Standardabweichung von  $4.3\%$ . Dies entspricht der Streubreite von  $8.6\%$  bei einem Vertrauensbereich von  $95\%$ . Deutlich schlechter ist die Prognostizierbarkeit des Verlustfaktors. Im Mittel liegen hier die gemessenen Werte um  $13\%$  über den Rechenwerten. Auch die Streuung der relativen Fehler ist augenscheinlich größer. Die Standardabweichung beträgt  $8.4\%$  und die Dämpfung kann so nur mit einer Toleranz von  $16.8\%$  im  $95\%$ -Vertrauensbereich angegeben werden.

Mit noch größeren Fehlern sind die Auswertungen des Verlustfaktors für weitere Elastomere behaftet (Tabelle 3-2). Die Standardabweichung des relativen Speichermodulfehlers beträgt je nach Werkstoff zwischen  $2\%$  und  $6.5\%$ . Für den Verlustfaktor liegt diese Unsicherheit im Bereich von  $4.5\%$  bis  $22.1\%$ .

Tabelle 3-2: Mittlerer relativer Fehler  $\overline{F}$  und Standardabweichung  $\sigma^*$  des relativen Fehlers der Anpassung von Speichermodul und Verlustfaktor.

	Auswertintervall		Speichermodulfehler		Verlustfaktorfehler	
	$T_{limu}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$T_{limo}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$\overline{F}_{E'}$	$\sigma_{F_{E'}}^*$	$\overline{F}_{\eta}$	$\sigma_{F_{\eta}}^*$
N674	-40	60	0.27%	4.3%	-12.9%	8.4%
C557	-50	100	0.09%	3.1%	-20.0%	15.2%
E540	-40	100	0.04%	2.0%	-49.9%	7.5%
S604	-50	100	0.15%	3.4%	-62.7%	4.5%
V747	-50	100	-0.09%	6.5%	-39.9%	22.1%

Besonders unbefriedigend ist die Tatsache, dass die Materialdämpfung im Mittel stark unterschätzt wird. Während die Dämpfung des Referenzelastomers mit den ermittelten Parametern der Materialfunktion mit etwa  $-13\%$  geringer berechnet, als im Versuch gemessen wird, so liegt dieser Fehler bei S604 bei etwa  $-60\%$ . Hier rächt sich die Vereinfachung, dass sich die Masterkurven-Erstellung und die nachfolgende Parameteranpassung allein auf die gemessenen Speichermoduln stützen. Die Isothermen des Speichermoduls verlaufen außerhalb der Transition jedoch sehr flach. Deshalb bedingt ein sich fortpflanzender Shift-Fehler mehr oder weniger gestauchte Masterkurven. Auf die Anpassung des Speichermoduls hat dieser Shift-Fehler keinen großen Einfluss, wohl aber auf die Steigung der Modulkurve und damit auf den Verlustfaktor. Aus diesem Grunde wird im Folgenden ein Verfahren zur Optimierung der Anpassung der verschobenen Masterkurven an die Parameter der viskoelastischen Materialfunktionen vorgeschlagen.

### 3.6 Optimierung der Anpassung

In einem automatisierten und reproduzierbaren Shift-Verfahren könnten nur die fünf Parameter der Shift-Funktionen (2-71) und (2-74) variiert und somit alle Isothermen gleichzeitig verschoben werden. Die Fehlerminimierung setzt nach jedem Schritt eine erneute Approximation der vorläufigen Masterkurve voraus. Der Fehler ist sowohl für die Messwerte des Speichermoduls und des Verlustmoduls oder der Einfachheit halber auf den Fehler des Betragsmoduls  $|E^*| = (E''^2 + E'''^2)^{1/2}$  anzuwenden.

Dieses komplexe nichtlineare Optimierungsproblem erfordert umfangreiche Zwischenberechnungen und geht mit erheblichem Rechenaufwand einher. Wenn es jedoch gelingt, vorab mit der Glastemperatur  $T_g$  auch die Gültigkeitsgrenzen  $T_c^o$  und  $T_c^u$  der WLF-Funktion zu bestimmen, dann reduziert sich die Anzahl der freien Parameter des Shift-Prozesses auf die beiden Werte der Aktivierungsenergien  $A_e^{o,u}$ . Werden die Prony-Parameter zudem aus den verschobenen Isothermen des Betragsmoduls bestimmt, so ist nur eine einzige Zielfunktion anzupassen.

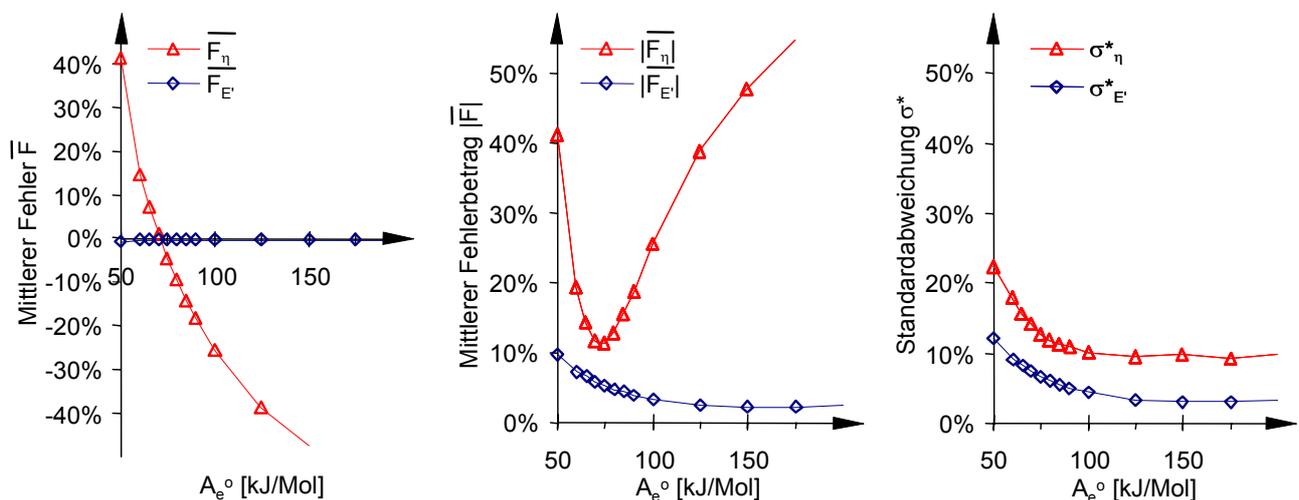


Abbildung 3-16: Einfluss des Temperatur-Shift-Parameters  $A_e^o$  auf den Fehler bei der Beschreibung des Speichermoduls und des Verlustfaktors am Beispiel der Masterkurvenanpassung von S604.

Die Entwicklung eines derartigen Verfahrens sprengt den Rahmen der vorliegenden Arbeit. Hier wird jedoch das Verbesserungspotential anhand der Fehlerkurven des Silikonwerkstoffs S604 verdeutlicht (Abbildung 3-16). Die Anpassung erfolgte bei manuellem Shift mit einer oberen Aktivierungsenergie  $A_e^o = 193 \text{ kJ/mol}$ , was mit einem mittleren Fehler von -62.7% bei der Verlustfaktorbeschreibung einherging. Eine Variation allein dieses Parameters auf  $A_e^o = 71 \text{ kJ/mol}$  lässt den mittleren Fehler des Verlustfaktors verschwinden, der mittlere Fehlerbetrag wird auf 1/6 reduziert. Gleichzeitig steigt jedoch die Standardabweichung des relativen Fehlers unterhalb von  $A_e^o = 100 \text{ kJ/mol}$  sowohl für den Verlustmodul als auch für den Speichermodul deutlich an. Je nachdem, wo die größere Genauigkeit gefragt ist, sind ggf. geeignete Gewichtungsfaktoren festzulegen.

Eine Verallgemeinerung der oben gezeigten Optimierung auf die freien Parameter der Shift-Funktion ermöglicht eine standardisierte, automatisierte und reproduzierbare Generierung der Masterkurve und der zugehörigen thermo-viskoelastischen Modellparameter. Unabhängig von den

offensichtlichen Vorteilen bringt die Automatisierung eine gewisse Gefahr mit sich. So ist die Plausibilität der Ergebnisse und die Anwendbarkeit des Verfahrens in jedem Einzelfall zu prüfen.

### 3.7 Masterkurve des Referenzelastomers

Für das Referenzmaterial N674-70 liegen mehrere Beschreibungen vor, welche auf zwei unterschiedlichen Messungen und verschiedenen Auswerteverfahren beruhen. Die Masterkurven in Abbildung 3-17 basieren zum einen auf den Relaxationsisothermen der Fa. Parker [Parker 1994] und zum anderen auf den für diese Arbeit bei der Fa. Gabo mit der DTMA durchgeführten Hysteresenmessungen.

Die Diskrepanz zwischen den Daten ist unerklärlich. Zwar basieren die Kurven auf verschiedenen Versuchsverfahren, diese sollten jedoch auf identische Ergebnisse führen. Zudem wird das Referenzelastomer seit Jahrzehnten mit nahezu unveränderter Rezeptur hergestellt, was Bedenken bezüglich von Schwankungen der Materialbeschaffenheit ausräumt. Würde man nun die Isothermen der jüngsten Messung mit der Glastemperatur  $T_g = -25^\circ\text{C}$  verschieben, wie sie aus der Anpassung der Daten von 1994 resultiert, so führt dies auf größere Anpassungsfehler und widerspricht dem Prinzip der Unvoreingenommenheit bei der Parameteridentifikation.

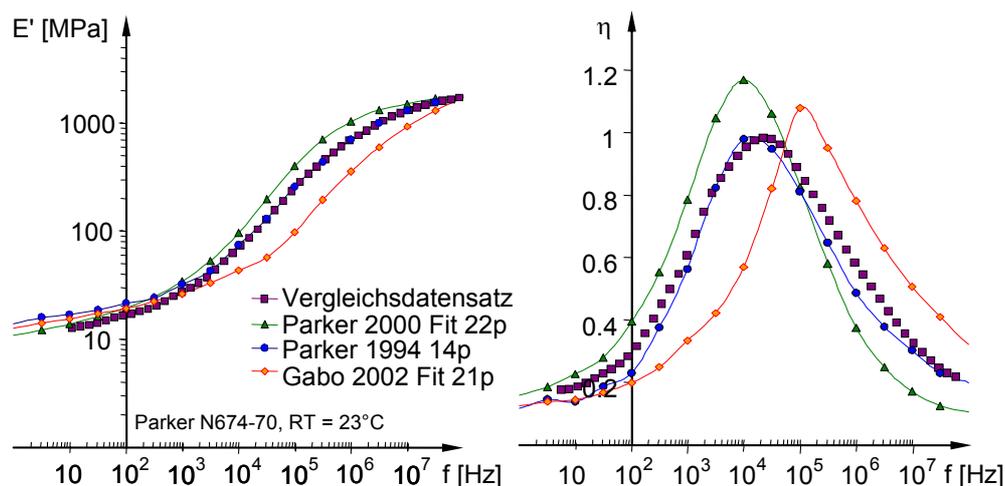


Abbildung 3-17: Vergleich der Masterkurven von N674-70 aus Relaxationsmessungen von Parker ( $T_g = -25^\circ\text{C}$ ) und aus Hysteresenmessungen bei der Fa. Gabo ( $T_g = -33^\circ\text{C}$ ). Referenztemperatur  $T_{ref} = 23^\circ\text{C}$ .

Die in Abbildung 3-17 erkennbaren Abweichungen infolge der verschiedenen Auswertungen ein und derselben Parker Daten (1994 und 2000) deuten auf eine weitere Unsicherheit hin, welche je nach Shift-Prozedur auftreten kann. In der Konsequenz nimmt der Verlustfaktor bei  $23^\circ\text{C}$  und 100 Hz je nach Art der Anpassung den Wert 0,22 oder 0,39 an. Für die Auslegung dynamischer Systeme ist diese Streuung durchaus erheblich.

Folglich ist für Masterkurven eine breitere statistische Basis anzustreben, was umfangreiche Messreihen erfordert. Damit sind Berechnungen anhand der exemplarischen Masterkurven, welche nur auf einer Messreihe beruhen, stets kritisch und ggf. auch experimentell zu prüfen.

Bei der Nachrechnung der Aussagen des Auslegungsdiagramms in Abschnitt 6.5 wird der in Abbildung 3-17 gezeigte Vergleichsdatensatz herangezogen, der auf der Parker-Ausimont Kurve

basiert (siehe Anhang 4, Tabelle A 4). Diese Referenz-Masterkurve wurde anhand der Originaldaten mit  $2 \times 25 + 1$  Parametern angepasst. Er weicht nur geringfügig von der Parker Anpassung von 1994 mit  $2 \times 14 + 1$  Parametern ab, liefert aber im entropieelastischen Bereich Dämpfungs- und Steifigkeitswerte, die näher an den Ergebnissen auf Grundlage der Daten von [Parker 2001] liegen (Abbildung 3-17). Die Werte dieses Vergleichsdatensatzes bzw. die darauf basierenden Vorhersagen stehen in gutem Einklang mit den Messungen an Material- und Bauteilproben.

Um *anhand von Referenz-Masterkurven*, bzw. der daraus resultierenden Materialfunktionen des viskoelastischen Materialgesetzes, das dynamische Verhalten der Elastomerringe oder anderer Bauteile zuverlässig berechnen zu können, wird angeregt, für jede Masterkurve mehrere Messungen durchzuführen, um die Datenbasis zu vergrößern. Im Hinblick auf standardisierte Vorgehensweisen zur Materialbeschreibung der Elastomere werden folgende Vorschläge gemacht:

- Vergleich von Masterkurven auf der Grundlage von Relaxationsmessungen und von Hysteresenmessungen. Prüfen der Äquivalenz der resultierenden Materialfunktionen, ggf. sind zwei getrennte Verfahren festzuschreiben.
- Vereinheitlichung der Messverfahren im Hinblick auf die Gewinnung der Parameter der Materialfunktionen des viskoelastischen Stoffgesetzes. Dazu sind die Probenformen und Einspannungen zu standardisieren sowie die Vordehnungen, Messamplituden, die Temperaturschrittweiten und weitere Messparameter festzulegen.
- Gleichzeitige Bestimmung der Materialfunktion  $E(t \text{ bzw. } \omega)$  und  $G(t \text{ bzw. } \omega)$  für ein isotropes Elastomer.
- Festlegung der Anwendung eines Vertikal-Shifts für Isothermen im entropieelastischen Bereich.
- Kopplung der Shiftprozedur der gemessenen Isothermen an die Parameter der Temperatur-Zeit-Korrespondenz. Optimierung der Parameteranpassung im Hinblick auf eine gute Dämpfungs- und Steifigkeitsbeschreibung.

Von Seiten der Elastomerhersteller und anderer Institute sollte in Betracht gezogen werden, die thermo-viskoelastischen Eigenschaften ausgewählter Elastomere in die allgemein zugänglichen Werkstoffspezifikationen mit einzubeziehen. Für einige *ausgewählte* „Schwinggummis“ wird sich ein weites Anwendungsfeld erschließen, was den damit verbundenen Mess- und Rechenaufwand rechtfertigt.

## 4 Statik des Elastomerlagers

Im folgenden Abschnitt werden vereinfachte Gleichungen für die Steifigkeit verpresster bzw. anvulkanisierter O-Ringe und R-Ringe mit unterschiedlichen Querschnittsformen aufgestellt. Die quasistatische Betrachtung geht nicht von einer Gleichgewichtslage aus, welche sich bei Elastomeren ggf. erst nach sehr langer Zeit einstellt, sondern eliminiert den Zeiteinfluss der Verformungsvorgänge durch Bezug auf eine Referenzzeit. So basieren die meisten Messwerte auf 3 s-Relaxationswerten. Da die Referenzzeit für alle Betrachtungen einheitlich ist, sprechen wir von (Quasi-)Statik, da das Zeitverhalten und die Dämpfung hier keine Rolle spielen.

Das Kraft-Verformungsverhalten der montierten Elastomerringe hängt von der spezifischen Ringgeometrie, der Einbau- und Belastungssituation sowie den entsprechenden Randbedingungen ab. Es wird Rotationssymmetrie der Gleichgewichtslage vorausgesetzt, d.h. Vorauslenkungen infolge einer Gewichtskraft werden nicht betrachtet. Nichtlinearitäten bleiben so auf den Verformungszustand des Einbaus beschränkt. Um diesen Einbauzustand herum werden die Bewegungsgleichungen linearisiert und die viskoelastischen Effekte mitmodelliert.

### 4.1 Geometrie und Einbausituation

Elastomerringe werden mit mehr oder weniger fein abgestuften Abmessungen entweder als O-Ringe oder Rechteckringe (R-Ringe) angeboten. Die Auswahl an Rechteckringen ist begrenzt, diese lassen sich aber individuell aus Plattenmaterial anfertigen oder gleich an einem Metallsupport anvulkanisieren.

Als charakteristische Abmessungen dienen der mittlere Ringdurchmesser  $D_m$ , der Durchmesser  $d$  bzw. die Breite  $b$  und Höhe  $h$  des Schnurquerschnitts. Es werden schlanke Ringe vorausgesetzt, so dass gilt:  $D_m > 5d$ . Abbildung 4-1 zeigt die charakteristischen Abmessungen der Elastomerringe und ihren Einbauzustand.

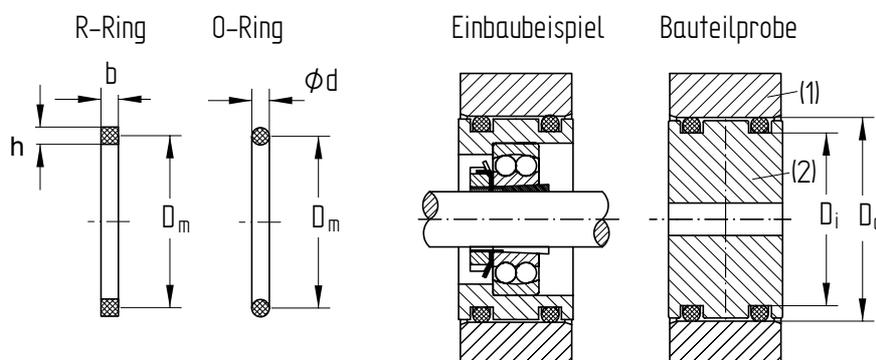


Abbildung 4-1: Schnittdarstellung auf die montierten Elastomerringe; Abmessungen des Elastomerrings mit Rechteck- und Kreisquerschnitt.

Die Einbausituation gleicht der eines Dichtungsringes, die Breite der Nut lässt im eingebauten Zustand seitliches Spiel zu. Somit sind nur der Durchmesser  $D_a$  der Hülse (1) und der Durchmesser  $D_i$  der Montagebuchse (2) maßgebend. Zunächst montiert man den Elastomerring in die Nut. Liegt

diese innen, wird der Ring leicht gedehnt und danach in einer Hülse verpresst. Der Innendurchmesser der Hülse kann so gewählt werden, dass die Umfangsdehnung weitestgehend verschwindet. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf diesen Fall, für den gilt:

$$D_m \approx 0.5(D_a + D_i). \quad (4-1)$$

Da O-Ringe in sehr feinen Abstufungen erhältlich sind und sich Rechteckringe aus Plattenmaterial sehr variabel fertigen lassen, stellt dies keine wirkliche Einschränkung für den Konstrukteur dar. Als charakterisierende Einbaugröße für O-Ringe verbleibt neben dem Durchmesser lediglich die radiale Vorpressung  $\varepsilon_{rO}$  mit:

$$\varepsilon_{rO} = \frac{u_r}{d} = 1 - \frac{D_a - D_i}{2d}, \quad (4-2)$$

wobei typische Werte der Vorpressung bei  $\varepsilon_{rO} = 10\% \dots 20\%$  liegen. Im Falle der R-Ringe gilt analog:

$$\varepsilon_{rR} = \frac{u_r}{h} = 1 - \frac{D_a - D_i}{2h}. \quad (4-3)$$

Die radialen Vorpressungen sind hier mit 5% bis 15 % etwas geringer als bei O-Ringen.

Werden die Rechteckringe anvulkanisiert, so beträgt die Vordehnung quasi null. Kleine Dehnungen aufgrund des Volumenschwunds liegen je nach Werkstoff zwischen 2% und 5%. Anvulkanisierte Ringe werden vor allem durch das Verhältnis  $\beta$  der Querschnittsbreite  $b$  zur Querschnittshöhe  $h$  charakterisiert:

$$\beta = b/h \quad (4-4)$$

Alle dieser Einbausituation überlagerten Deformationen werden als verhältnismäßig klein angenommen, damit einerseits die dann wirkenden tangentialen Schubkräfte an den Kontaktflächen übertragen werden und andererseits die Ringe in der Zugzone nicht vom Zylinder abheben. Somit lassen sich die Steifigkeiten um die Einbaulager herum linearisieren.

## 4.2 Differentielle und integrale Ringsteifigkeiten

Die vereinfachte Modellierung gemäß Abbildung 4-2 geht davon aus, dass sich die Gesamtsteifigkeit aus radialen und tangentialen Steifigkeiten infinitesimal kleiner Ringsegmente um den Umfang herum aufaddiert [48].

Das Kräfte-Gleichgewicht am Ringelement  $d_s$  lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} dn_z &= dn_r \cos \varphi + dn_t \sin \varphi \\ dn_y &= -dn_r \sin \varphi + dn_t \cos \varphi \end{aligned} \quad (4-5)$$

Die differentiellen Kräfte lassen sich aus den infinitesimalen Verschiebungen am Ringelement  $ds$  und den differentiellen Steifigkeiten  $s_r$  und  $s_t$  bilden.

$$\begin{aligned} dn_r &= s_r u_r r_m d\varphi \\ dn_t &= s_t u_t r_m d\varphi \end{aligned} \quad (4-6)$$

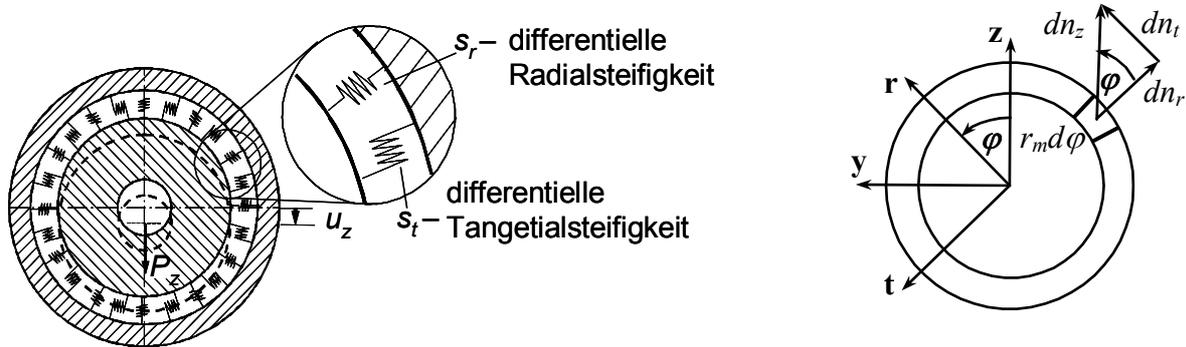


Abbildung 4-2: Modellierung der Ringsteifigkeit (links). Kräftegleichgewicht in z-Richtung am Ringelement ds.

Die Verschiebungen lauten in kartesischen Koordinaten  $u_r = u_z \cos \varphi$  und  $u_t = u_z \sin \varphi$ . Nach der Substitution der radialen und tangentialen Kräfte in (4-5) durch die Kräfte (4-6) ergibt das Integral über den Umfang des Ringes eine Relation zwischen der äußeren Kraft  $P_z$  und den differentiellen Steifigkeiten [48]:

$$\begin{Bmatrix} P_z \\ 0 \end{Bmatrix} = u_z r_m \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} s_r \cos^2 \varphi + s_t \sin^2 \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi (s_r - s_t) \end{Bmatrix} d\varphi. \quad (4-7)$$

Nach erfolgter Integration verbleibt die z-Komponente von (4-7) und die Gesamtsteifigkeit  $s$  lautet:

$$s = \frac{P_z}{u_z} = \pi D_m \frac{s_r + s_t}{2}. \quad (4-8)$$

In Worten ausgedrückt, resultiert die Gesamtsteifigkeit  $s$  eines Elastomerringes aus dem arithmetischen Mittel der differentiellen Steifigkeiten, multipliziert mit dem mittleren Ringumfang. Für jede der Querschnittsformen nach Abbildung 4-3 sind somit lediglich die spezifischen differentiellen Steifigkeiten  $s_r$  und  $s_t$  aus der Ableitung des lokalen Kraft-Verformungs-Zusammenhangs zu bestimmen.

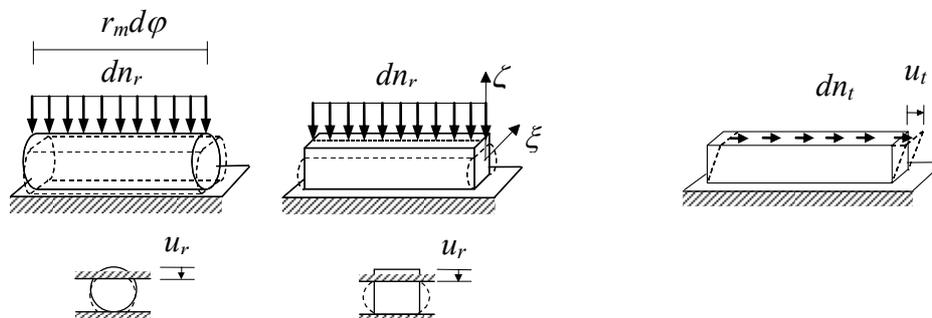


Abbildung 4-3: Differentielle Ringelemente und Belastungsfälle. Radiallasten (oben links) und resultierende Radialverformung (unten links) sowie Tangentiallast und resultierende Verformung (rechts).

Ausgehend von den differentiellen Radial- und Tangentialsteifigkeiten werden in den folgenden Abschnitten die formelmäßigen Zusammenhänge der Gesamtsteifigkeiten für Rechteckringe und für

O-Ringe hergeleitet und mit experimentell gewonnenen Daten verifiziert. Dabei sind für die dynamischen Eigenschaften der Elastomerringe die Steifigkeiten in der jeweiligen Einbausituation maßgebend. Um den Einbauzustand herum bleiben die Amplituden gering. Durch die obigen Vereinfachungen wird ermöglicht, die Gleichung für die Ringsteifigkeit noch analytisch hinzuschreiben. So werden die wesentlichen Einflussgrößen sichtbar.

Um den radialen Belastungsfall eines Elastomerrings zu bestimmen, legt man diesen flach auf eine ebene Unterlage und übt mit einer plan-parallelen Fläche gleichmäßigen Druck aus. Ist der Durchmesser des Ringes groß gegenüber seinem Querschnitt, kann er als unendlich langer prismatischer Körper aufgefasst werden. Im Querschnitt stellt sich ein ebener Dehnungszustand in Umfangsrichtung ein.

### 4.3 Rechteckringe

#### 4.3.1 Differentielle Steifigkeiten des Ringlements mit Rechteckquerschnitt

Zur Herleitung der **differentiellen Radialsteifigkeit** wird die gekrümmte Ringschnur als endloser prismatischer Körper modelliert, dessen horizontaler Rand sich unter einer Kraft  $n_r$  um die Amplitude  $\hat{u}_r$  verschiebt. Es wird Inkompressibilität vorausgesetzt und das Elastizitätsgesetz für den ebenen Dehnungszustand verwendet.

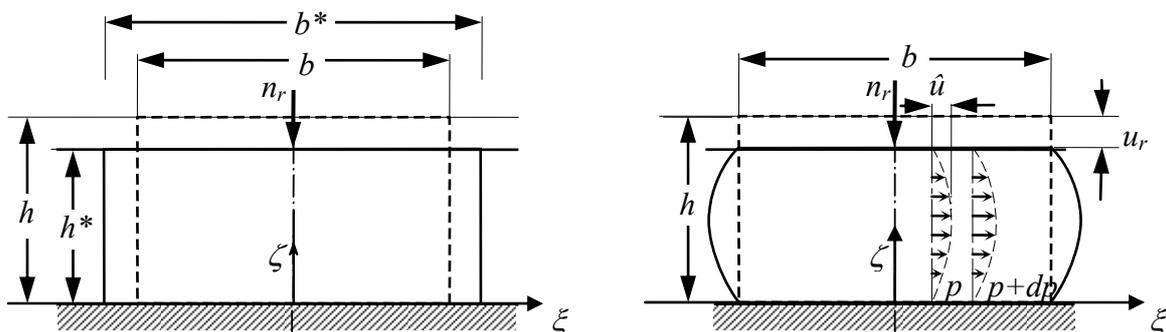


Abbildung 4-4: Deformationszustand des rechteckigen Elastomerquerschnitts unter radialer Last  $n_r$ , ohne Querkontraktionsbehinderung (links), bzw. mit Behinderung der Randverschieblichkeit (rechts).

Abbildung 4-4 zeigt den Deformationszustand eines radial verformten Rechteckquerschnitts. Es wird angenommen, dass an der Kontaktfläche die Querkontraktion vollständig behindert wird, was streng genommen nur bei vulkanisierten oder verklebten Flächen der Fall ist. Gemäß dem Hookeschen Materialgesetz für inkompressible Stoffe (2-57)-(2-59) wird auf dem deformatorischen Anteil des Spannungstensors ein hydrostatischer Druck addiert, um die innere Zwangsbedingung der Volumenkonstanz zu erfüllen. Die Verformungsgeschichte besteht also aus einem deformatorischen Anteil, der einem ebenen Dehnungszustand im Querschnitt entspricht und dem volumetrischen Anteil, der in Form von Spannungsrandbedingungen aus dem hydrostatischen Druck im Gummi resultiert [49, 50].

Für den deformatorischen Anteil gilt freie Randverschieblichkeit, was einen einachsigen Spannungszustand in  $\zeta$ -Richtung mit sich bringt. Dessen Kraftanteil  $n_{rI}$  lautet:

$$n_{r1} = \frac{1}{1-\nu^2} Eb\varepsilon_\zeta. \quad (4-9)$$

Der zweite Verformungsanteil, eine schubartige Deformation, folgt aus der Behinderung der Querdehnung an den Krafrändern. Hier kommt es zu einer Auswölbung der kraftfreien Oberflächen in  $\xi$ -Richtung gemäß Abbildung 4-4.

Für den Verlauf der Verschiebungen  $u_\xi(\xi, \zeta)$  über der Querschnittshöhe  $h$  wird ein quadratischer Ansatz in  $\zeta$  gemacht. Unter der Bedingung der Volumenkonstanz folgt, dass das vertikal verdrängte Elastomervolumen gleich dem Volumen der seitlichen Auswölbungen ist. Somit erhält man näherungsweise die Amplitude der Querdeformation:

$$\hat{u}_\xi(\xi) = \frac{3}{2} \frac{\xi u_r}{h}.$$

Im Elastomervolumen herrscht nach [50] ein hydrostatischer Spannungszustand, die zugehörige differentielle Druckänderung  $dp$  lautet:

$$dp = -\frac{8}{3} \left( \frac{E \hat{u}_\xi(\xi)}{h^2} \right) d\xi$$

und liefert integriert zwischen dem Randwert  $\xi = b/2$  und  $\xi$  den Druck  $p(\xi)$ :

$$p(\xi) = \frac{2Eu_r}{h^3} \left( \frac{b^2}{4} - \xi^2 \right). \quad (4-10)$$

Das Integral dieses Druckterms zwischen den beiden freien Rändern des Querschnitts muss nun mit der Spannungsrandbedingung  $n_{r2}$  im Gleichgewicht stehen:

$$n_{r2} = \frac{Eu_r b^3}{3h^3}. \quad (4-11)$$

Die gesamte Deformationskraft  $n_r$  infolge einer Radialverformung  $u_r$  setzt sich nun aus dem Anteil des ebenen Verzerrungszustands  $n_{r1}$  und dem hydrostatischen Kraftanteil  $n_{r2}$  zusammen.

Somit folgt die differentielle Radialsteifigkeit  $s_r$  eines Ringelementes  $ds$  mit dem Querschnitt der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  zu:

$$s_r = \frac{n_r}{u_r} = E_D \beta = E \left( \frac{1}{1-\nu^2} + \frac{1}{3} \beta^2 \right) \beta \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{b}{h}. \quad (4-12)$$

In (4-12) geht das Querschnittsverhältnis  $\beta = b/h$  als maßgebende Größe ein. Durch die Behinderung der Querkontraktion steigt der so genannte Druckmodul  $E_D$  mit dem Quadrat des Verhältnisses  $\beta$  von Querschnittsbreite zu Höhe  $h$ .

Auf eine äquivalente Formulierung kommt FREAKLEY [50, S.115]. Im Fall  $\nu=0.5$  nimmt der Druckmodul  $E_D$  dort die Form an:

$$E_D = E \frac{4}{3} (1 + S^2) \quad \text{mit} \quad S = \frac{b}{2h}. \quad (4-13)$$

Der Versteifungseffekt wird somit durch einen Formfaktor  $S$  repräsentiert, welcher gleich dem Verhältnis der belasteten Fläche zur kräftefreien Fläche ist. Ferner findet man bei FREAKLEY [50, S.116] eine Korrektur des Formfaktors in Abhängigkeit vom Rußgehalt bzw. der Härte. Mit zunehmender Härte nimmt danach der versteifende Einfluss des Formfaktors ab. Die dort aufgeführten materialspezifischen Werte basieren auf Messungen von LINDLEY [51] mit Naturkautschuk.

Für die **differentielle Tangentialsteifigkeit** wird ebenfalls vollständiges Haften vorausgesetzt. Die Tangentialkontaktkraft beträgt:

$$n_t = bG\gamma = bG\frac{u_t}{h}, \quad (4-14)$$

die differentielle Tangentialsteifigkeit  $s_t = n_t/u_t$  lautet:

$$s_t = G\beta. \quad (4-15)$$

Laut [52, G2.3.2, Tabelle 7] ist bei derartigen Tangentialverformungen Linearität bis  $\gamma \approx 40^\circ$  gegeben.

### 4.3.2 Integrale Steifigkeit des Rings mit Rechteckquerschnitt

Nach Einsetzen der Beziehung (2-55) in (4-8) folgt für die **Gesamtsteifigkeit** des Rechteckringes:

$$s_R = \pi D_m \frac{s_r + s_t}{2} = E\pi D_m \frac{\beta}{2} \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} + \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \right\}. \quad (4-16)$$

In der obigen Gleichung bezeichnet  $E$  den E-Modul in der Einbausituation. Wird dieser durch die Ableitung des entropieelastischen Materialgesetzes nach (2-7) approximiert und die Querkontraktionszahl  $\nu$  mit Hilfe der Verallgemeinerung (2-69) substituiert, so erhält man einen geschlossenen Ausdruck für die Steifigkeit des eingebauten Rechteckrings  $s_R$ , bezogen auf radiale Auslenkungen  $u_z$  aus der Gleichgewichtslage:

$$s_R = \frac{P_z}{u_z} = \frac{E_{nh}}{(1+\varepsilon_r)^2} \pi D_m \frac{\beta}{2} \left\{ \frac{1}{1 - \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_r}} \right) \right]^2} + \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{2 \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon_r} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_r}} \right) \right]} \right\}. \quad (4-17)$$

Die Steifigkeit  $s_R$  nimmt demnach proportional mit der elastischen Konstante des nichtlinearen Materialgesetzes  $E_{nh}$  und dem mittleren Ringdurchmesser  $D_m$  zu. Weiterhin hängt sie von der radialen Vorpressung  $\varepsilon_r$  und dem Querschnittsverhältnis  $\beta$  ab. Das Querschnittsverhältnis geht in (4-17) zur 3. Potenz ein und besitzt somit maßgebenden Einfluss.

Einen dimensionslosen Ausdruck der *normierten Ringsteifigkeit* erhält man nach Division von (4-17) durch den mittleren Umfang und die elastische Konstante:

$$\bar{s}_R = \frac{s_R}{\pi D_m E}. \quad (4-18)$$

Diese bezogene dimensionslose Ringsteifigkeit  $\bar{s}_R$  enthält lediglich die Geometrie-Parameter der radialen Vorpressung  $\varepsilon_r$  und des Querschnittsverhältnisses  $\beta$ .

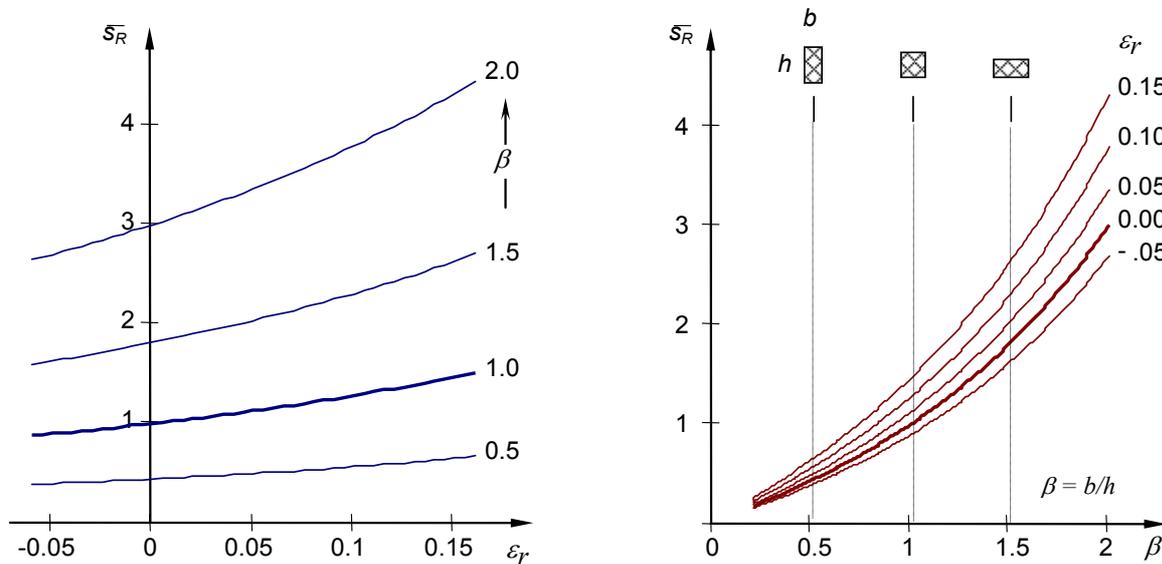


Abbildung 4-5: Bezogene Ringsteifigkeit  $\bar{s}_R = s_R / \pi D_m E$  für Elastomerringe mit rechteckigem Querschnitt als Funktion der radialen Vorpressung  $\varepsilon_r$  (links) bzw. des Querschnittsverhältnisses  $\beta = b/h$  (rechts).

Abbildung 4-5 zeigt den Verlauf der bezogenen Ringsteifigkeit  $\bar{s}_R$  als Funktion der Vorpressung  $\varepsilon_r$  und der Querschnittsgeometrie  $\beta$ . Bei Ringen mit breiten, flachen Schnurquerschnitten werden hohe Steifigkeiten erzielt. Für eine *weichere Lagerung* sollte ein Querschnittsverhältnis  $\beta$  kleiner eins gewählt werden. Die Elastomerringe müssen dann einen relativ schmalen, aber hohen Querschnitt aufweisen. Im Folgenden werden zwei Sonderfälle vorgestellt, für die sich (4-17) deutlich vereinfacht:

**Sonderfall  $\varepsilon_r \approx 0$ :** Für Ringe mit sehr kleiner Vordehnung gilt  $\nu \approx 0.5$  und die dimensionslose Steifigkeit  $\bar{s}_R$  hängt allein vom Querschnittsverhältnis  $\beta$  ab:

$$\bar{s}_R(\varepsilon_r \approx 0) = \frac{s_R}{\pi D_m E} = \frac{\beta}{6} (5 + \beta^2). \quad (4-19)$$

**Sonderfall  $\varepsilon_r \approx 0$  und  $\beta \approx 1$ :** Weist der Ring neben verschwindend kleiner radialer Vorpressung zudem einen quadratischen Querschnitt auf, so nimmt die dimensionslose Steifigkeit den Wert eins an. Die tatsächliche Ringsteifigkeit resultiert allein aus dem Produkt von Umfang und E-Modul:

$$s_R(\varepsilon_r = 0, \beta = 1) = \pi D_m E. \quad (4-20)$$

(4-20) ermöglicht eine überschlägige Lagergestaltung praktisch schon im Kopf. Ein Referenzdurchmesser, welcher sich allein aus der Lagersteifigkeit  $s_L$  und dem Elastizitätsmodul ergibt, wird hiermit definiert zu:

$$D_{ref} = s_L / \pi E. \quad (4-21)$$

Die bisherigen Betrachtungen beschränken sich auf schlanke Elastomerringe. Gummibuchsen beliebigen Rechteckquerschnitts, bei denen die Elastomerringe an Metallhülsen anvulkanisiert sind, wurden jedoch bereits bei GÖBEL [53] und FREAKLEY [50] behandelt. Aus der dort angegebenen Gleichung für die Radialkraft folgt die Ringsteifigkeit:

$$s_R = \frac{\pi b}{\ln(D_a/D_i)}(E_D + G). \quad (4-22)$$

Es wird nun gezeigt, dass die Form (4-22) auf das gleiche Ergebnis führt, wie man es mit dem Ansatz der differentiellen Steifigkeiten im Fall schlanker Ringe für kleine Vorpressungen (4-19) erhält. Dazu wird der Nenner von (4-22) in einer Reihenentwicklung geschrieben:

$$\ln \frac{D_a}{D_i} = \ln \frac{D_m + h}{D_m - h} = \frac{2}{\delta} + \frac{2}{3\delta^3} + \frac{2}{5\delta^5} + \dots \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{D_m}{h}. \quad (4-23)$$

Für schlanke Ringe mit  $\delta \geq 5$  kann man die höheren Terme vernachlässigen. Aus Gleichung (4-22) wird:

$$s_R = \pi D_m \frac{b}{h} \frac{E_D + G}{2}. \quad (4-24)$$

Mit der Gleichung (4-13) für den Druckmodul und mit  $E = 3 G$  ist (4-24) identisch mit (4-19).

Der Sonderfall verschwindend kleiner Vordehnung kann technisch auch durch Klebung realisiert werden. Es sei nochmals angemerkt, dass bei anvulkanisierten Bauteilen negative Vorpressungen auftreten, da nach dem Abkühlen der Querschnitt um 2 bis 5% zusammenschrumpft. Bei der im Folgenden untersuchten Proben ist dies der Fall.

### 4.3.3 Experimentelle Verifikation

Anhand von *Bauteilversuchen* ließen sich die Gleichungen der Ringsteifigkeit verifizieren. Abbildung 4-6 (links) zeigt den gemessenen und den gerechneten Kraft-Verformungs-Zusammenhang für einen eingepressten und für einen anvulkanisierten Ring. Sind die Randbedingungen durch Anvulkanisieren vorgegeben, so lässt sich eine gute Übereinstimmung des gerechneten und gemessenen Kraft-Verschiebungs-Zusammenhangs erzielen. Selbst bei einer Amplitude von über 1,4 mm bleibt der Zusammenhang linear. Beim eingepressten Rechteckring kommt es mit zunehmender Auslenkung des Innenrings aus seiner zentrischen Lage zu Steifigkeitseinbußen. Diese sind in tangentialen Gleiteffekten (stick-slip) und bei hohen Amplituden auch in Klaffungen begründet. Der Kraft-Verschiebungs-Zusammenhang verläuft dann nichtlinear. Zur Bestimmung der Steifigkeit wird die Ableitung der Kurve im Ursprung gebildet.

Abbildung 4-6 (rechts) zeigt die gemessenen Ringsteifigkeiten bei verschiedenen radialen Vordehnungen im Vergleich zur Rechnung. Die gemessenen Steifigkeiten treffen die rechnerischen Vorhersagen bei eindeutigen Kontaktrandbedingungen sehr gut. Werden die Ringe mit zu geringen Vordehnungen eingepresst, kommt es zu Klaffungen und Ablöseeffekten. Bei höheren Verpressungen kann es zu Verdrillungen des Querschnitts und zu Verwerfungen der Kontaktfläche kommen. Die Übereinstimmung von Messung und Rechnung war in diesem Bereich nicht so gut.

Eine *radiale Vorpressung* von 10% hat sich bei quadratischem Querschnitt als zuverlässig und gut montierbar erwiesen.

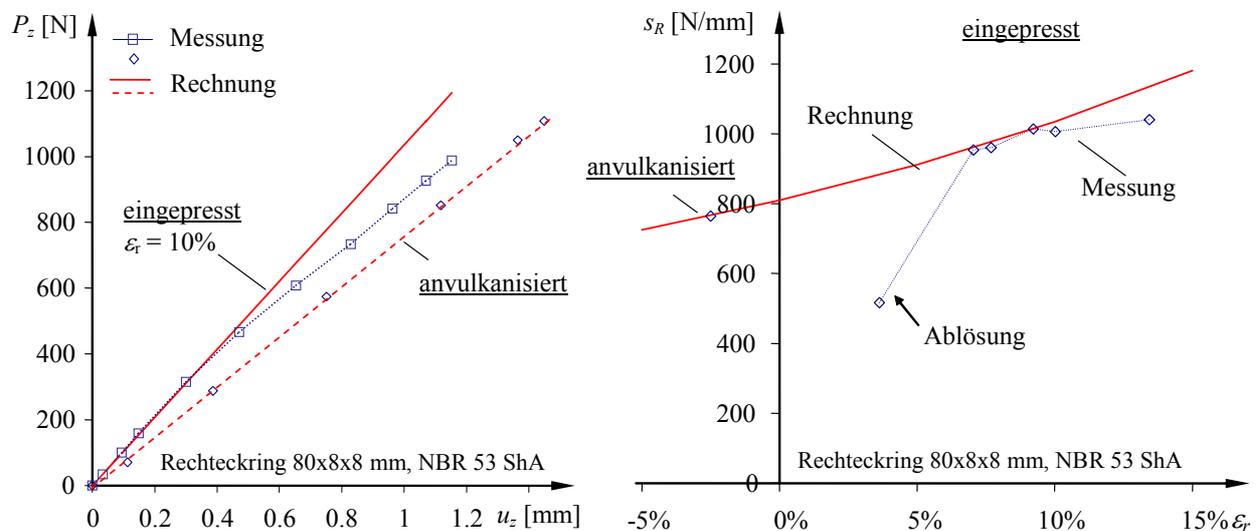


Abbildung 4-6: Kraft-Verschiebungs-Verlauf (links) und vordehnungsabhängige Steifigkeit (rechts) für Rechteckringe mit quadratischem Schnurquerschnitt 8x8mm aus NBR mit der Härte ShA 53. Vergleich der Kontakttrandbedingungen anvulkanisiert und eingepresst.

## 4.4 O-Ringe

Bei O-Ringen ist die kreisförmige Querschnittsform vorgegeben. Als freie Geometrieparameter verbleiben nur der Schnurquerschnitt  $d$ , der mittlere Ringdurchmesser  $D_m$  und die radiale Vorpressung  $\varepsilon_r$ .

### 4.4.1 Analytische Gleichungen der O-Ring-Steifigkeiten

Wie schon bei den Ringen mit Rechteckquerschnitt wird zunächst die **differentielle Radialsteifigkeit** betrachtet. Bereits in den sechziger Jahren hat LINDLEY das Kraft-Verformungsverhalten von flachgelegten O-Ringen analytisch und empirisch beschrieben [54; 55]. Für Ringe aus Naturkautschuk mit zwei verschiedenen Moduln und fünf unterschiedlichen Schlankheitsgraden ( $D/d = 3 \dots 30$ ) leitete er folgende empirische Gleichung für die Normalkontaktkraft ab [50]:

$$n_r = Ed(1.25\varepsilon_r^{3/2} + 50\varepsilon_r^6). \quad (4-25)$$

Aus der Ableitung von (4-25) erhält man einen Ausdruck für die differentielle Radialsteifigkeit:

$$s_r = E(1.875\varepsilon_r^{1/2} + 300\varepsilon_r^5). \quad (4-26)$$

Die in dieser Arbeit verfolgte analytische Beschreibung der radialen Linienlast  $n_r$  an der Kontaktfläche basiert auf der Integration der Kontaktnormalspannungen  $p$  über das Kontaktgebiet eines unendlich langen Zylinders mit dem Schnurquerschnitt  $d$  hinweg:

$$n_r(\varepsilon_r) = \int_{-b/2}^{b/2} p(\varepsilon_r, y) dy. \quad (4-27)$$

Abbildung 4-7 veranschaulicht die Kinematik für diesen Modellierungsansatz. Die Spannungen  $p$  im Kontaktgebiet ergeben sich aus der Länge, um welche die jeweilige Feder zusammengedrückt wurde. Dabei wird ein einachsiger Spannungszustand und das Neo-Hookesche Materialgesetz mit dem Elastizitätsmodul  $E_{nh}$  (2-4) vorausgesetzt [48]. Die resultierende Normalkontaktkraft  $n_r$  lautet:

$$n_r(\lambda_r) = \frac{E_{nh}}{3} d \left[ \lambda_r \arcsin \sqrt{1 - \lambda_r^2} - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{\lambda_r^2} \right) \sqrt{1 - \lambda_r^2} \right] \text{ mit } \lambda_r = 1 - \varepsilon_r. \quad (4-28)$$

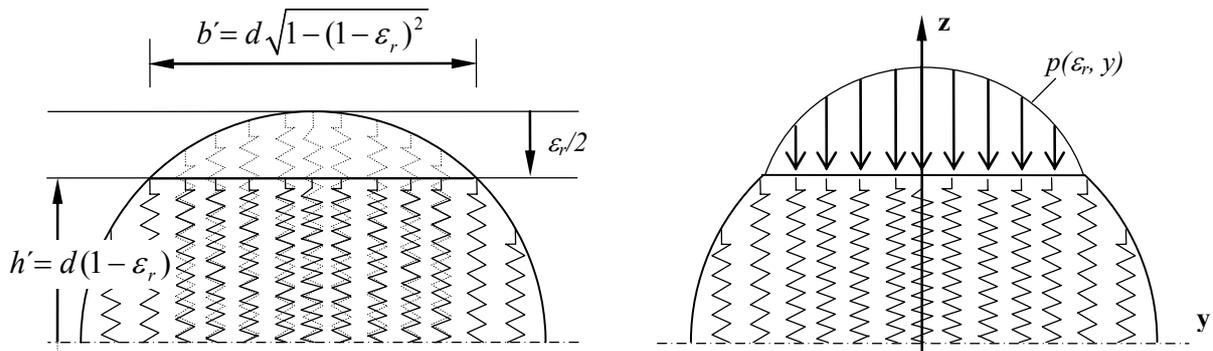


Abbildung 4-7: Beschreibung der radialen Deformation des O-Ring-Einbaus (links) und Druckspannungskomponente  $p$  des ebenen Spannungszustandes an der Kontaktfläche (rechts) [48].

Die differentielle Radialsteifigkeit  $s_{rO}$  des O-Ring-Querschnitts im Einbauzustand folgt aus der Ableitung von (4-28) nach der Vordehnung. Das Ergebnis lässt sich geschlossen analytisch als Funktion der radialen Vordehnung  $\lambda_r$  hinschreiben:

$$s_{rO}(\lambda_r, E_{nh}) = \frac{d}{du_r} n_r = \frac{E_{nh}}{3} \left[ \arcsin \sqrt{1 - \lambda_r^2} - \frac{\lambda_r}{\sqrt{1 - \lambda_r^2}} + \frac{4}{3\lambda_r^3} \sqrt{1 - \lambda_r^2} + \frac{2 + \lambda_r^2}{3\lambda_r} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_r^2}} \right]. \quad (4-29)$$

Die differentielle Radialsteifigkeit des O-Rings ist proportional zum Elastizitätsmodul  $E_{nh}$  und hängt des Weiteren nur von der radialen Deformation  $\lambda_r$  ab. Der Durchmesser  $d$  des Querschnitts hat keinen Einfluss.

Wie Abbildung 4-8 (links) zeigt, steigt die differentielle Radialsteifigkeit im Bereich kleiner Dehnungen sehr schnell an und nimmt im Bereich von 5% bis 20% näherungsweise linear zu. Bei größer werdenden Dehnungen über 25% wächst die Steifigkeit progressiv. Praktisch interessant ist nur der Bereich von 5% bis 20% radialer Vorpressung. Unterhalb davon sind Klaffungen zu erwarten, oberhalb von 20% bekommt man Montageprobleme. In diesem relevanten Bereich liegen die Steifigkeiten gemäß der analytischen Abschätzung etwa 5% bis 20% unter den Werten, die aus der empirischen Formel (4-26) resultieren.

**Die differentielle Tangentialsteifigkeit** wird mit Hilfe äquivalenter Rechteckquerschnitte angenähert. Es wird dabei angenommen, dass die elastische Arbeit genau in jener Querschnittsfläche verrichtet wird, die sich aus der Kontaktbreite  $b'$  und der Spalthöhe  $h'$  im Einbauzustand bildet (Abbildung 4-7). Dieser Ansatz vernachlässigt die variable Normalkraftverteilung im Kontaktgebiet und die Tatsache, dass an den Rändern des Kontaktgebiets nur begrenzt Tangentialkräfte aufgenommen werden. Andererseits wird die mittragende Steifigkeit des Querschnittsbereichs außerhalb des Kontaktgebiets nicht mitgezählt.

In der bereits vom Rechteckquerschnitt her bekannten Gleichung für die Tangentialsteifigkeit (4-14) ist nun die äquivalente Höhe  $h'$  und Breite  $b'$  eine Funktion der Vorpressung  $\varepsilon_r$ :

$$h' = d(1 - \varepsilon_r); \quad b' = d\sqrt{1 - (1 - \varepsilon_r)^2}. \quad (4-30)$$

Daraus folgt für die differentielle Tangentialsteifigkeit des O-Rings  $s_{tO}$ :

$$s_{tO} = G \frac{\sqrt{\varepsilon_r(2 - \varepsilon_r)}}{1 - \varepsilon_r}. \quad (4-31)$$

Der Schubmodul wird nun wiederum durch den E-Modul substituiert. Nach Einsetzen des entropieelastischen Materialgesetzes und der Inkompressibilitätsbedingung (2-69) in (4-32) folgt:

$$s_{tO} = E_{nh} \frac{\sqrt{1 - \lambda_r^2}}{2\lambda_r^2 \left[ 1 - \frac{1}{1 - \lambda_r} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \right) \right]}. \quad (4-32)$$

Zur **Gesamtsteifigkeit des O-Ringes** werden die differentiellen Steifigkeiten (4-32) und (4-29) gemäß (4-8) verknüpft. Die O-Ring-Steifigkeit hängt von einem Materialparameter  $E_{nh}$  und von dem Ringdurchmesser  $D_m$  und der radialen Vordeformation des Einbaus  $\lambda_r = 1 - \varepsilon_r$  ab. Für die normierte, dimensionslose integrale Steifigkeit des O-Rings  $\bar{s}_O$  gilt:

$$\bar{s}_O = \frac{s_O}{\pi D_m E_{nh}} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{-\lambda_r}{\sqrt{1 - \lambda_r^2}} + \frac{4}{3} \frac{\sqrt{1 - \lambda_r^2}}{\lambda_r^3} + \frac{2 + \lambda_r^2}{3\lambda_r \sqrt{1 - \lambda_r^2}} + \arcsin \sqrt{1 - \lambda_r^2} + \frac{3(1 - \lambda_r)\sqrt{1 - \lambda_r^2}}{2\lambda_r(\sqrt{\lambda_r} - \lambda_r^2)} \right\} \quad (4-33)$$

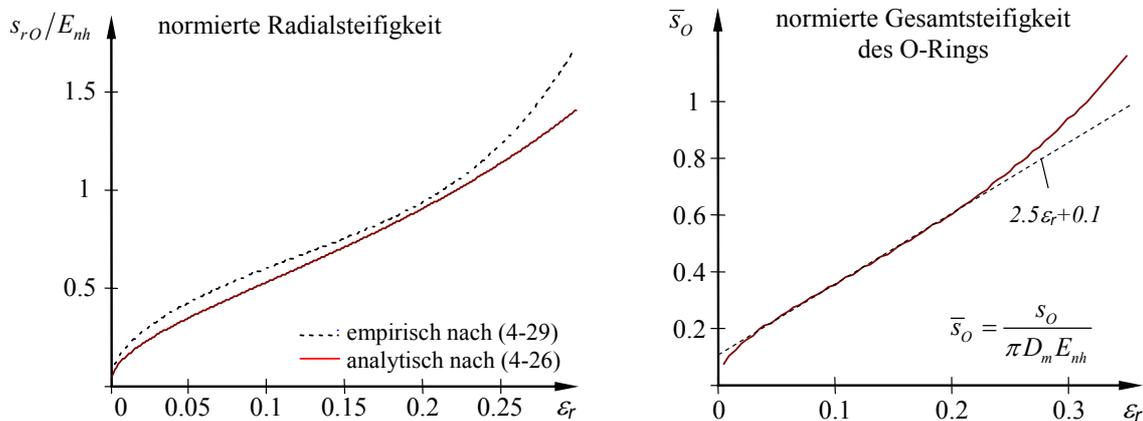


Abbildung 4-8: Analytische und empirische Beschreibung der Radialsteifigkeit  $s_{rO}/E_{nh}$  (links) und bezogene Gesamtsteifigkeit eines O-Rings (rechts) als Funktion der radialen Vorpressung beim Einbau.

Die geschlossene Lösung der bezogenen Steifigkeit (4-33) wird in Abbildung 4-8 (rechts) als Funktion der radialen Vorpressung dargestellt. Die analytische Funktion (4-33) steigt im Bereich von  $\varepsilon_r = 5\% \dots 20\%$  radialer Vorpressung augenscheinlich linear an. Die zugehörige Geradengleichung lautet:

$$s_O \approx E_0 \pi D_m (2.5\varepsilon_r + 0.1). \quad (4-34)$$

Durch die lineare Approximation der Ringsteifigkeit ist das inverse Entwurfsproblem für die Optimierung besser gestellt, denn (4-34) kann nach der Vorpressung  $\varepsilon_r$  aufgelöst werden. Zudem lassen sich an der Geradengleichung die Messergebnisse bequemer anpassen.

#### 4.4.2 Experimentelle Verifikation der differentiellen O-Ring-Steifigkeiten

Die **Radialsteifigkeit** wurde experimentell auf zwei verschiedenen Wegen gewonnen. Ein erster Aufbau misst den Last-Verformungs-Verlauf und die Steifigkeit ergibt sich aus der Steigung der Kurve. Abbildung 4-9 zeigt exemplarisch den gemessenen Verlauf (links) und daraus berechnete Werte der Steifigkeit als Funktion der radialen Stauchung (rechts). Die Verformung wurde mit einer konstanten Verformungsgeschwindigkeit  $d\varepsilon/dt = 0.028/s$  im Bereich bis 35% Dehnung aufgebracht.

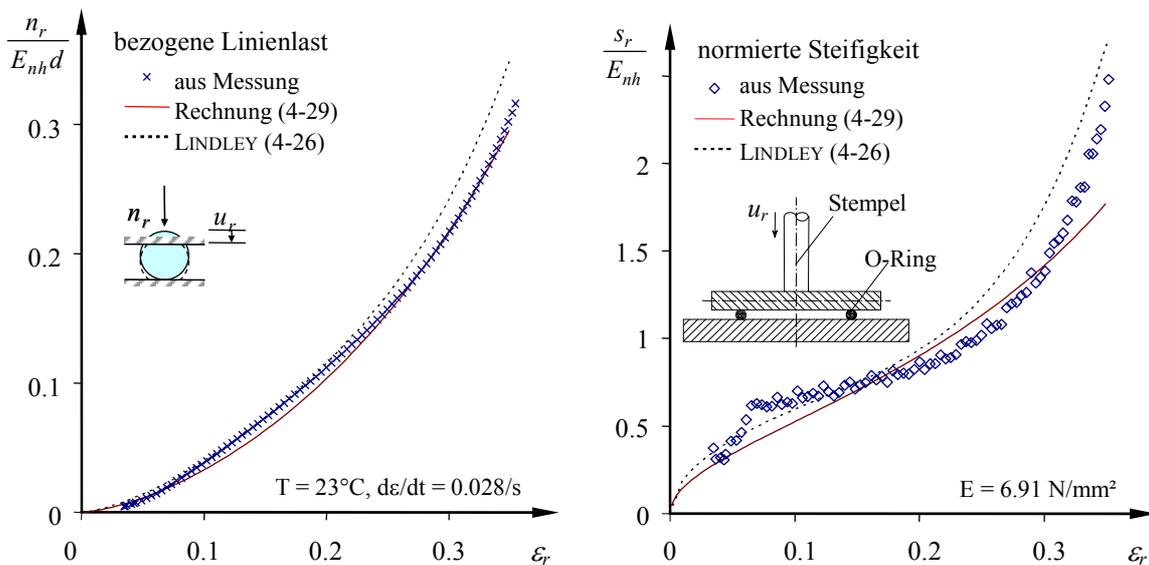


Abbildung 4-9: Kraft-Verformungs-Zusammenhang (links) und normierte Steifigkeit (rechts) eines O-Rings unter radialer Last. Vergleich von Rechnung und Messung (Parker N674, 2-330, 50.16x5.33).

Messung und Rechnung stimmen gut überein. Andererseits schwanken die Werte der Steifigkeit um die rechnerische Kurve der analytischen Lösung. Ein derartiges Verhalten kann auf stick-slip-artigen Effekten (Hemmschlupf) beruhen, wo zeit- und bereichsweises Haften an den Kontaktflächen auftritt, bevor sich der O-Ring unter wachsender Last aufweiten kann bzw. sich die Kontaktfläche vergrößert.

In einer verfeinerten Versuchsanordnung befindet sich anstelle nur eines O-Rings nun ober- und unterhalb des Stempels je ein O-Ring zwischen zwei massiven Platten vorgespannt. Aus der Länge der jeweiligen Distanzstücke ergibt sich die Vorpressung. Je nach Belastungsrichtung wird einer der beiden Ringe zusätzlich belastet, der gegenüberliegende jedoch entlastet. Diese Anordnung wird den Symmetriebedingungen des eingepressten O-Rings gerecht, denn wird dieser aus seiner Gleichgewichtslage radial verschoben, so kommt es an der Oberseite zur Entlastung und die Unterseite wird gestaucht. Nichtlineare Effekte aus der Kontaktgeometrie und dem Materialgesetz sollten sich so gegenseitig eliminieren.

Abbildung 4-10 (links) zeigt die Kraft-Verschiebungs-Verläufe für die radial belasteten O-Ringpaare und die modifizierte Probenhalterung. Trotz der symmetrischen Anordnung verbleiben

auch bei relativ kleinen Amplituden um die jeweilige Gleichgewichtslage herum nichtlineare Effekte, weshalb die Kurven einen leichten S-Schlag aufweisen. Zudem verlaufen die Last-Verschiebungs-Kurven nicht punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, was auf äußere Unsymmetrien in der Lasteinleitung und der Lagerung des Probenhalters hinweist.

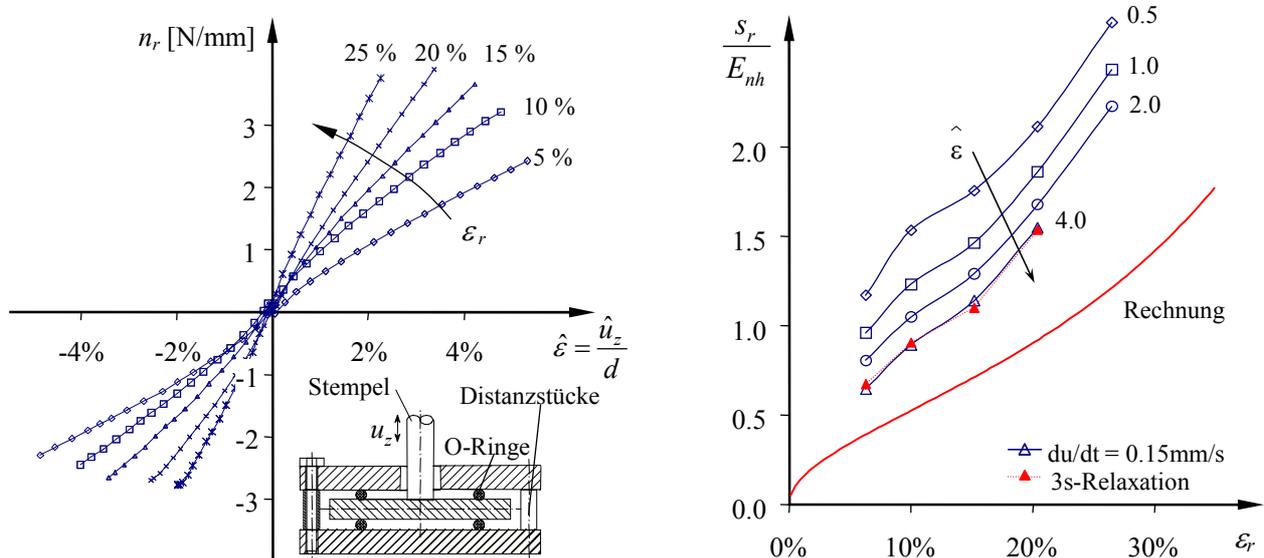


Abbildung 4-10: Kraft-Verformungs-Zusammenhang eines radial beanspruchten O-Ringpaares (links) und amplitudenabhängige Radialsteifigkeit (rechts) bei verschiedenen radialen Vorpressungen  $\varepsilon_r$ . Vergleich der Messung bei konstanter Dehnungsgeschwindigkeit mit der 3 s-Relaxation (Parker 2-330, N674-70, 50.16x5.33).

Die radiale Steifigkeit (Abbildung 4-10, rechts) wird anhand der gemessenen Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene Dehnungsamplituden  $\hat{\varepsilon}$  um die jeweilige Gleichgewichtslage herum bestimmt. Eine Normierung erfolgt mit dem 3 s-Relaxationsmodul nach Tabelle 2-1. Die nun ermittelten Werte liegen sowohl über den mit (4-29) berechneten Steifigkeiten als auch oberhalb jener Steifigkeiten, welche aus der Ableitung der gemessenen Kraft-Verschiebungs-Kurve in Abbildung 4-9 resultieren. Mit wachsenden Amplituden sinkt die gemessene Steifigkeit, weicht aber dennoch deutlich von der rechnerischen Kurve ab. Es sei hier noch angemerkt, dass sich bei den Messungen mit der konstanten Verformungsgeschwindigkeit die gleichen Steifigkeitswerte ergeben wie aus der 3s-Relaxationsmessung (Abbildung 4-10, rechts).

Die **tangentialen** Last-Verformungs-Kennlinien in Abbildung 4-11 (links) wurden bei stufenförmiger Lastaufbringung aus den 3s-Retardationswerten bestimmt (Aufbau siehe Abbildung A 9, Anhang 6).

Bei sehr kleinen Auslenkungen verlaufen die Last-Verformungs-Kurven nahezu linear und treffen die rechnerischen Voraussagen sehr gut. Bei Schubverzerrungen über einem Prozent flachen die Kurven jedoch ab und die Steifigkeiten liegen weit unter den rechnerischen Werten. Ein wichtiger Grund für die verbleibenden Abweichungen ist in den Kontakttrandbedingungen zu finden. Da die tangentialen Steifigkeitskräfte nur über Haftreibung übertragen werden, kommt es je nach Material und Oberflächenbeschaffenheit zu Abminderungen und erwartungsgemäß zu großen Streuungen. Bleiben die Kräfte klein, so verlaufen die Verschiebungskurven noch linear. Bei zunehmenden

Lasten setzt gerade in den Randzonen des Kontaktgebietes ein Gleitmechanismus ein, der bis zum völligen Durchrutschen des Gummis an den Kontaktflächen führen kann.

Aus der Steigung der Kraft-Verschiebungs-Verläufe im Ursprung gewinnt man die Werte der Tangentialsteifigkeit (Abbildung 4-11 rechts). Diese liegt nur knapp unter den berechneten Werten. Die im Vergleich zur Radialsteifigkeit bessere Deckung von Rechnung und Messung wird damit erklärt, dass sich die verschiedenen Fehlereinflüsse bei der Bildung des einfachen Modells gegenseitig aufheben.

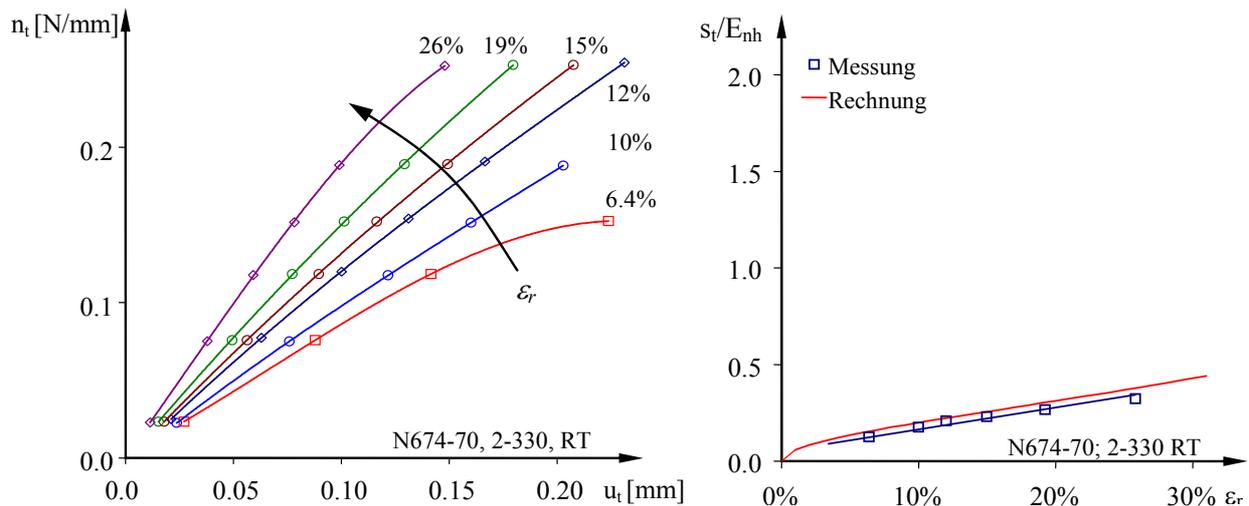


Abbildung 4-11: Tangentiale Last-Verschiebungs-Verläufe aus mehrstufigen 3s-Retardationsmessungen bei verschiedenen radialen Vorpressungen  $\varepsilon_r$  (links) und die daraus resultierende tangentiale Steifigkeit (rechts) für O-Ringe aus NBR N674-70, 53.34x5.33 mit  $E_{ref} = 5.99 \text{ N/mm}^2$ .

#### 4.4.3 Experimentelle Verifikation der integralen O-Ring-Steifigkeiten

Für die versuchstechnische Bestimmung der Gesamtsteifigkeit wurden die Kraft-Verformungs-Kurven von Ringproben mit verschiedenen radialen Vorpressungen aus 3s-Relaxations- bzw. Retardationsmessungen bestimmt. Die Proben wurden dabei wie in Abbildung 4-1 rechts paarweise montiert. Die so gemessene integrale Steifigkeit wird einerseits mit den oben bestimmten und nach (4-8) zur Gesamtsteifigkeit aufsummierten differentiellen Radial- und Tangentialsteifigkeiten und zum anderen mit der rechnerischen Gesamtsteifigkeit nach (4-33) verglichen.

Der Vergleich der gemessenen und summarisch aufgetragenen Steifigkeiten (+) mit den gemessenen integralen Steifigkeiten ( $\diamond$ ) zeigt für beide untersuchten Materialien im Mittel eine gute Übereinstimmung (Abbildung 4-12). Die Messungen der integralen Steifigkeiten ( $\diamond$ ) weisen bei N674 deutlich größere Streuungen auf als jene Werte (+), die aus den differentiellen Steifigkeiten resultieren. Im Mittel bestätigen die Messungen jedoch die Richtigkeit des Ansatzes (4-8), wonach die Gesamtsteifigkeit aus der Aufsummierung der differentiellen Steifigkeiten gebildet wird. Es zeigt sich auch, dass der Anstieg der Steifigkeit bei zunehmender radialer Vorpressung im Bereich von 5% – 20% linearisiert werden kann. Die für N674-70 gemessenen Steifigkeiten sind aber etwa um den Faktor 2 höher als die rechnerisch prognostizierten Werte.

Bei der Suche nach den Ursachen der Abweichungen und Streuungen wurden die Versuchsmethoden, die Randbedingungen und die verwendeten Materialien modifiziert.

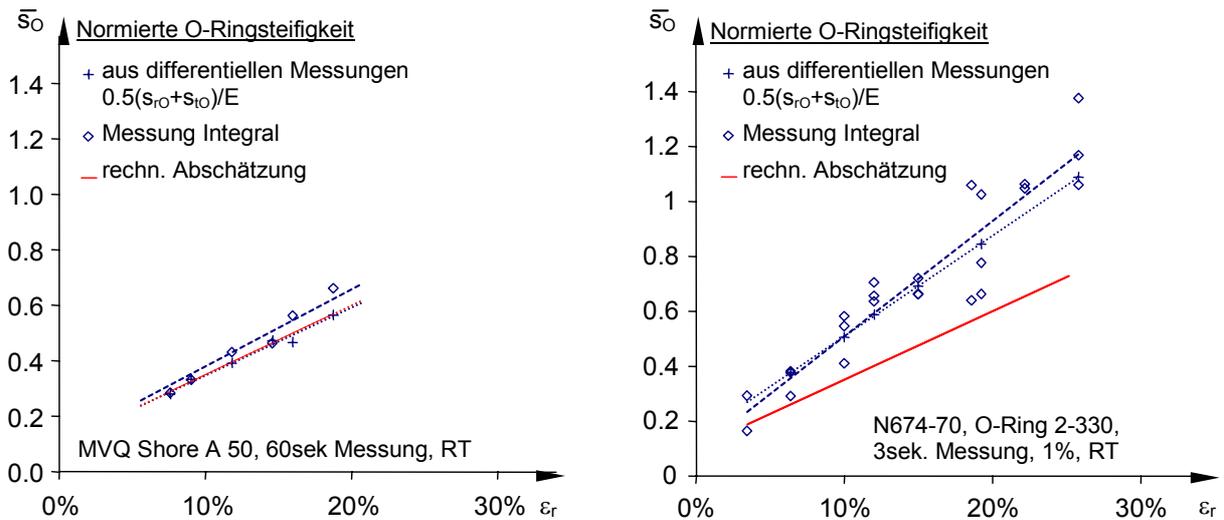


Abbildung 4-12: Normierte Steifigkeit von O-Ringen aus Silikon 40.78x3.55 (links) und Nitril N674-70 53.34x5.33 (rechts). Vergleich der summarisch aus den differentiellen Messungen bestimmten Steifigkeit und der gemessenen integralen Gesamtsteifigkeit mit dem Verlauf der Kurve aus der analytischen Abschätzung.

Abbildung 4-13 zeigt die Ergebnisse für die gleichen Ringproben, jedoch wird hier die Verformung mittels Schrittmotor aufgebracht (s. Anhang 7). Jede Steifigkeitsmessung basiert auf der linearen Approximation einer Kraft-Verschiebungs-Kurve mit je 45 Einzelwerten. Der mittlere Linearisierungsfehler beträgt 2.6%. Anhand der Streuung der gemessenen Steifigkeiten bezüglich des linearen Anstiegs wird die Standardabweichung bestimmt. Je nachdem, wie groß der Vordehnungsbereich gewählt wird, ergibt sich ein Schätzwert der Standardabweichung der Steifigkeit  $\sigma^*$  von 11% bis 18%. Der mittlere Anstieg bleibt jedoch gleich.

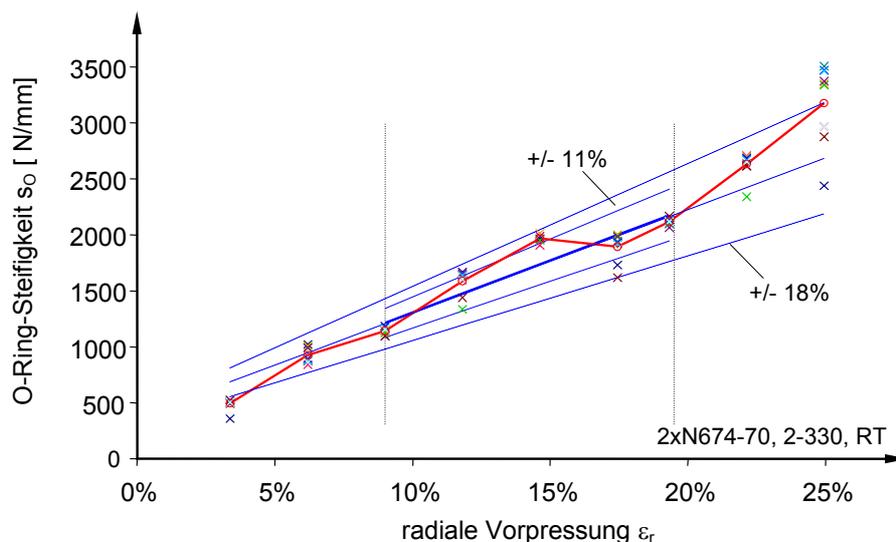


Abbildung 4-13: O-Ring-Steifigkeit in Abhängigkeit von der radialen Vorpressung. Schrittmotoransteuerung mit konstanter Verformungsgeschwindigkeit  $du/dt = 0.02\text{mm/s}$ .

Weitere Zusatzmessungen verdeutlichen den Einfluss einer Schmierung im Kontaktgebiet. Während die Montage der O-Ringe in der Regel mit fettfreien trockenen Kontaktflächen erfolgte, wurden nun

für drei ausgewählte Vorspannungen die Einbauräume wahlweise mit Öl und mit Silikonfett gefüllt. Die resultierenden Steifigkeitseinbußen aufgrund der Schmierung sind lediglich bei der sehr geringen Vorspannungen erkennbar (Abbildung 4-14).

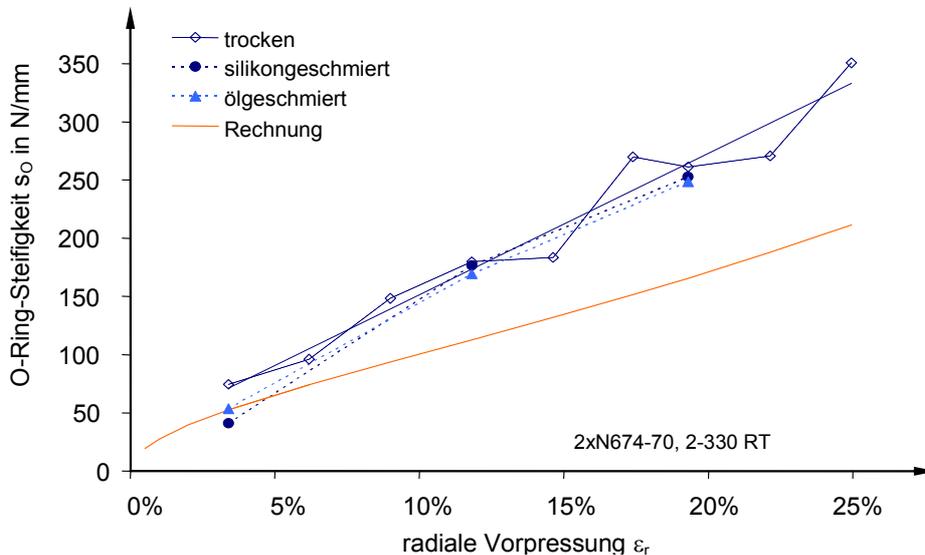


Abbildung 4-14: Einfluss der Schmierung der Kontaktflächen auf die Ringsteifigkeit. Vergleich der gemessenen und gerechneten Steifigkeit von O-Ringen aus N674-70.

Abbildung 4-15 zeigt die aus den Messungen resultierenden Steifigkeitswerte sowie deren lineare Anpassung im Bereich von 10 bis 20 Prozent für N674-70 und weitere repräsentative O-Ring-Werkstoffe nach Tabelle 1-1.

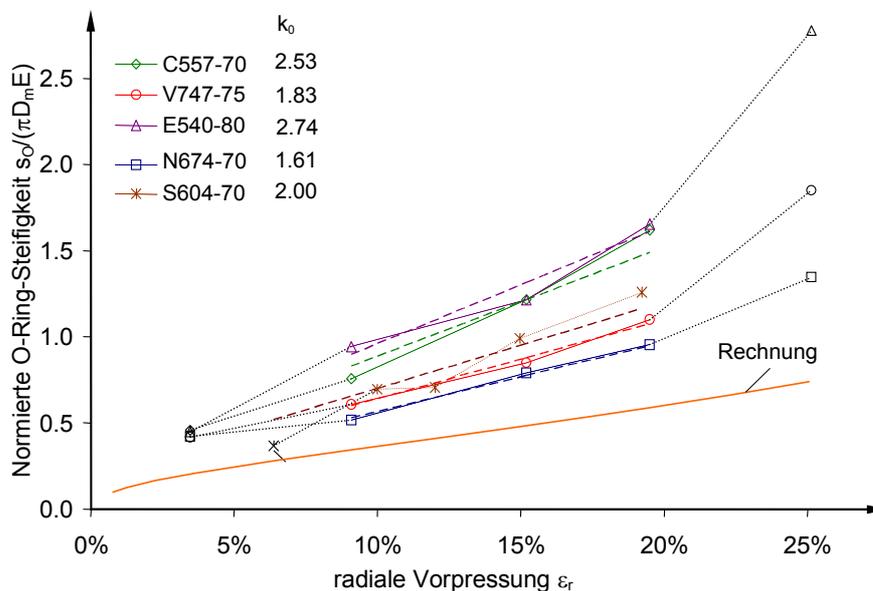


Abbildung 4-15: Gemessene normierte statische Steifigkeit von eingepressten O-Ringen aus verschiedenen Parker Werkstoffen. Lineare Anpassung der Messwerte durch eine Gerade der Form  $s_0 = k_0 E \pi D_m (2.5 \epsilon_r + 0.1)$ . Normierung auf den Modul  $E_0$  aus der Approximation der Zugkurven.

Es ergibt sich für alle Materialien ein ähnliches Bild. Die gemessenen Werte liegen je nach Material um den Faktor 1.6 bis 2.7 höher als jene Steifigkeiten, die auf der Grundlage des gemessenen Zugmoduls berechnet wurden. Im Bereich radialer Vorspannungen von 7 bis 20 Prozent wird der

Verlauf der quasi-statischen Steifigkeit unter Einführung eines materialspezifischen Korrekturfaktors  $k_0$  anstelle mit (4-34) wie folgt angepasst:

$$\bar{s}_0 = \frac{s_0}{E\pi D_m} = k_0(2.5\varepsilon_r + 0.1). \quad (4-35)$$

#### 4.4.4 Anmerkungen zur vereinfachten Ringstatik

Wie sind die bei den integralen O-Ring-Steifigkeiten gemessenen Abweichungen (vgl. Abbildung 4-12 bis Abbildung 4-15) und die Abweichungen bei den differentiellen Radial-Steifigkeiten in Abbildung 4-10 zu erklären, obwohl sich doch Messung und Rechnung der Kraft-Verformungs-Zusammenhänge in Abbildung 4-9 sehr gut decken?

Eine Antwort wurde bereits im Zuge der Anpassung der Zugversuche gegeben (2.1.4). Die Dehnungsamplituden um die Gleichgewichtslage bleiben bei der Belastung der Ringproben extrem klein. Für kleine Verformungen weist jedoch das bei der Auswertung der Zugversuche zugrunde gelegte Neo-Hookesche Materialgesetz Abweichungen von 60 bis 130 Prozent gegenüber den gemessenen Materialsteifigkeiten auf (vgl. Abbildung 2-6). Als besonders problematisch wird die Verwendung von 3-Sekunden-Werten als quasi-statische Stoffwerte gesehen. Nach drei Sekunden ist ein Elastomer in aller Regel noch weit von der Gleichgewichtslage entfernt, es relaxiert noch und verhält sich somit dynamisch. Aus der Analyse des Payne-Effekts wissen wir aber, dass bei dynamischen Versuchen der Modul im Bereich von 0.1% bis 10% Dehnung *aufgrund innerer Reibung stark deformationsabhängig* ist (Abschnitt 2.6.1).

Zu beachten ist des Weiteren, dass die hier bestimmten Stoffkennwerte aus Zugversuchen stammen, die Vorpressung beim Einbau jedoch auf eine Druckbelastung führt. Zudem werden Fehler, die aus der entkoppelten Betrachtung der Belastungszustände im Sinne der differentiellen Steifigkeiten bzw. aus einer Biaxialität des Spannungszustandes herrühren, nicht genauer quantifiziert. Bei den gewählten Ringgeometrien mit sehr geringer Umfangsdehnung sollte dieser Einfluss jedoch klein bleiben.

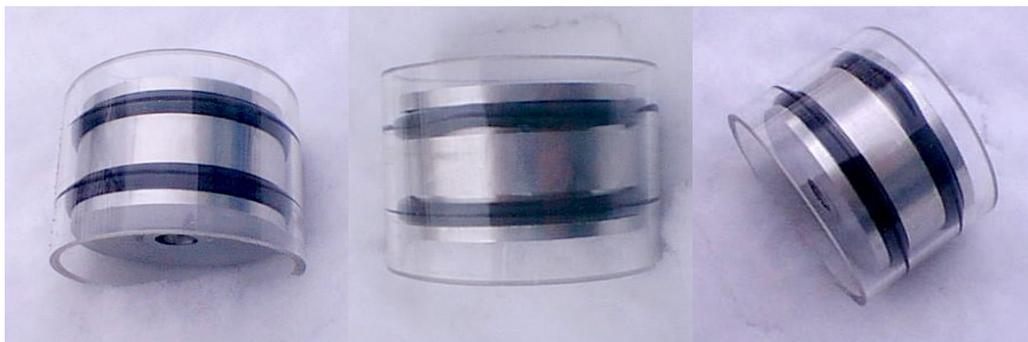


Abbildung 4-16: Einbausituation von O-Ringen mit ideal ausgebildetem Kontaktgebiet (links) mit Verwindung (mittig) und Quetschung (rechts).

Zu diesen Vereinfachungen in der Modellierung kommen Unsicherheiten aus der Probenfertigung, der Montage und den Kontaktrandbedingungen hinzu. Bei der *Montage* kann es lokal zur *Verwindung* des Schnurquerschnitts kommen. Durch mehrmaliges Hin- und Herschieben in Achsrichtung wurden die O-Ringe ausgerollt, was diesen Effekt zumindest schmälern dürfte.

Jedoch besteht bei der Montage auch die Gefahr von *Quetschungen* des Rings im Ringspalt, weshalb dieser nach Möglichkeit sehr klein zu wählen ist.

Eine *sehr gute Übereinstimmung von Rechnung und Messung* wurde bei der Verwendung von *anvulkanisierten Rechteckringen* erzielt. Da bei dem dort verwendeten Elastomer die Shore Härte und damit der Füllgrad gering ist, fallen auch die Einflüsse infolge innerer Reibung geringer aus (vgl. Anhang 2). Legt man also Wert auf hohe Exaktheit, so sind einerseits die Kontaktrandbedingungen klar festzulegen und andererseits sehr weiche Elastomere zu verwenden.

Für vulkanisierte Bauteile stellt sich jedoch die Frage: *Woher kommen die Masterkurven?* Fertigt man jedoch für jedes Lagerbauteil eine Masterkurve an, so ist der experimentelle Aufwand vergleichsweise hoch. Praktisch kann man sich dadurch helfen, indem man aus Bauteilversuchen mit charakteristischen Randbedingungen die Materialparameter zurückrechnet.

Neben anvulkanisierten Rechteckringen bieten die im nächsten Abschnitt beschriebenen Lager aus Zug-Druck-Elastomerelementen die Möglichkeit, eine Lagerung mit klarer Vorgabe der Randbedingungen zu realisieren.

### 4.5 Lager aus Zug-Druck-Elastomerelementen

Da die weitere Behandlung der dynamischen Eigenschaften für alle Bauformen der Gummi-Dämpfer gleich ist, gehen wir an dieser Stelle auch auf Feder-Dämpfer-Elemente ein. Solche Elemente sind in der Schwingungstechnik weit verbreitet, sie existieren in den verschiedensten Formen und meist kennt der Hersteller das statische und dynamische Verhalten recht gut. Für eine isotrope Lagerung erfordert jede Lagerebene zumindest zwei um 90 Grad versetzte Elemente. Die Gleichung für die Steifigkeit in der Lagerebene lautet hier:

$$s_F = \frac{P_z}{u_z} = z \frac{s_a + s_q}{2}; \quad z = 2 \dots N, \quad (4-36)$$

wobei  $s_a$  und  $s_q$  die Längs- und Quersteifigkeiten eines Federelementes sind. Diese Steifigkeiten werden den einschlägigen Formelsammlungen entnommen [52, 53]. Für einfache Formen geben wir die Bestimmungsgleichungen exemplarisch an.

Die Quersteifigkeit  $s_q$  ist für Schubwinkel bis  $\gamma = u_T/h^* \leq 0.2^\circ$  linear und proportional zum Quotienten der Schubfläche  $A_D$  und der Gummihöhe  $h^*$ :

$$s_q = \frac{A_D}{h^*} G. \quad (4-37)$$

Die Bestimmung der Längssteifigkeit wird analog zur differentiellen Radialsteifigkeit anhand eines Druckmoduls bestimmt. Dieser berücksichtigt sowohl den deformatorenischen als auch den volumetrischen Anteil der Formänderungsenergie. In der Abbildung 4-17 rechts sind die Formfaktoren zur Bestimmung des Druckmoduls als Funktion des Formkennwerts und in Abhängigkeit von der Härte angegeben. Es wird deutlich, dass der Formeinfluss mit wachsender Härte abnimmt. Zwischen den Kurven mit der Härte Shore A 67 und 72 ist ein Unterschied kaum noch sichtbar.

Die Axialsteifigkeit  $s_a$  für prismatische Elemente mit Kreis- oder Rechteckquerschnitt ergibt sich mit Hilfe des rechnerischen Druckmoduls  $E_D$  nach Abbildung 4-17 aus:

$$s_a = \frac{A_D}{h^*} E_D. \quad (4-38)$$

Schließlich folgt mit (4-36) die Gesamtsteifigkeit  $s_F$  aus den Anteilen (4-37) und (4-38):

$$s_F = \frac{A_D}{h^*} \frac{E_D + G}{2} z. \quad (4-39)$$

In Worten ausgedrückt, ergibt sich die Steifigkeit  $s_F$  einer Lagerung aus prismatischen Gummi-Metall-Elementen aus dem Verhältnis der anvulkanisierten Druckfläche  $A_D$  zur Elementhöhe  $h^*$  multipliziert mit dem Mittelwert aus Druckmodul und Schubmodul und der Anzahl  $z$  der verwendeten Elemente. Für vorgespannte Elemente ist die Steifigkeit entsprechend der Vorspannung mit Hilfe des Neo-Hookeschen Gesetzes zu korrigieren. Handelt es sich um nicht prismatische Elemente, dann sind die Steifigkeiten etwas aufwendiger und ggf. auch experimentell zu bestimmen.

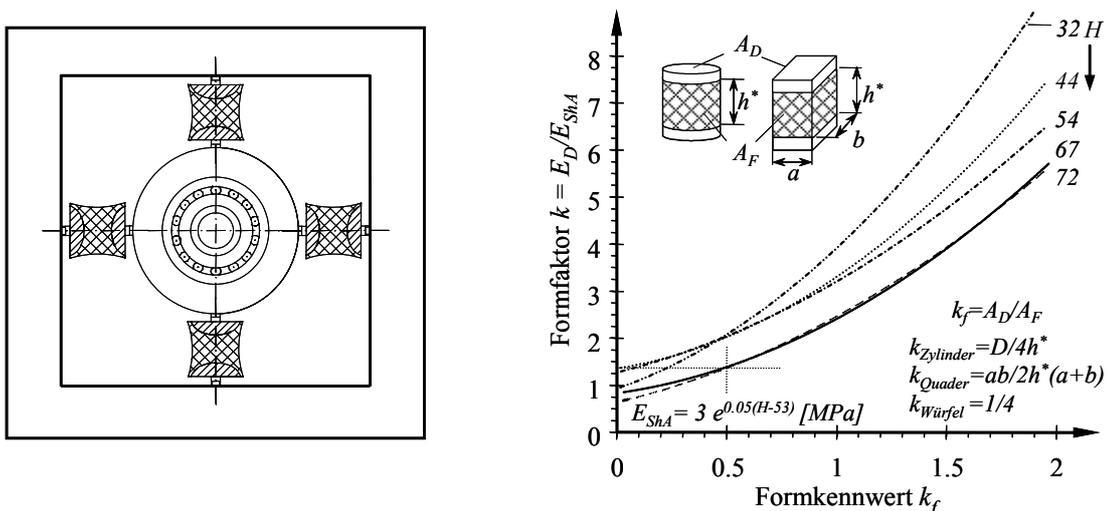


Abbildung 4-17: Lagerung in Einzelfedern aus Gummi-Metall-Verbindungen (links). Formfaktor  $k$  für die statische Steifigkeit als Funktion des Formkennwertes  $k_f$  und der Shore-Härte für prismatische Gummi-Elemente nach [52, G2.3.2, Tabelle 7 bzw. 53].

#### 4.6 Zusammenfassung der Gleichungen zur Lagerauslegung

Für die Auslegung von Elastomerlagern aus einem oder mehreren Elastomerringen werden die oben beschriebenen Gleichungen hier nochmal zusammengefasst und in eine für die Lagerauslegung praktikablere Form gebracht. So hat die Gleichung der Lagersteifigkeit bei Verwendung von schlanken Elastomerringen die allgemeine Form:

$$s_L = z k_L E \pi D_m, \quad (4-40)$$

wobei  $z$  die Ringanzahl,  $E$  die elastische Konstante des nichtlinearen statischen Materialgesetzes und  $k_L$  eine Gestaltfunktion des Lagers ist. Diese Gestaltfunktion ist für die Ringanzahl  $z = 1$  identisch mit der bereits in den Diagrammen gezeigten dimensionslosen Steifigkeit:

$$k_L = \bar{s}_L \text{ für } z = 1. \quad (4-41)$$

Die Gestaltfunktion fasst die Merkmale des Einbauraumes, wie Ringquerschnittsform und radiale Vorpressung, zusammen. Als *Referenzgeometrie* dient dabei der anvulkanisierte Rechteckring mit quadratischem Querschnitt. Die Gestaltfunktion  $k_L$  besitzt hier den Wert 1, denn die Referenzsteifigkeit  $s_{ref}$  eines Ringes lautet gemäß (4-20):

$$s_{ref} = E\pi D_{ref}. \quad (4-42)$$

Durch die Verwendung einer Referenzgeometrie  $D_{ref}$  wird während der Auslegung und Optimierung die Lagergröße nur grob festgelegt und auf Plausibilität geprüft. Die endgültige Ringgeometrie, die Parameter des Einbaus und die Ringanzahl müssen dann erst nach erfolgter Optimierung und ausgehend von dieser Referenzgeometrie festgelegt werden. Der gesuchte Durchmesser des Elastomerlagers resultiert aus der Äquivalenz von (4-40) und (4-42):

$$D_m = \frac{D_{ref}}{zk_L}. \quad (4-43)$$

Für die wichtigsten Querschnittsformen sind die Gestaltfaktoren und die resultierenden Lagerdurchmesser in der Tabelle 4-1 zusammengefasst.

In Abhängigkeit von der radialen Vorpressung kann die Gestaltfunktion bei Rechteckringen nicht mehr so übersichtlich angegeben werden. Der Verlauf ist in Abbildung 4-18 dargestellt.

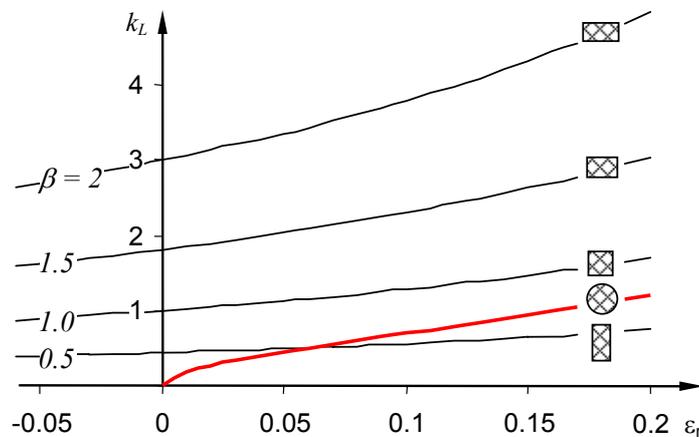


Abbildung 4-18: Gestaltfunktionen  $k_L$  für Rechteckringe als Funktion der radialen Vorpressung  $\epsilon_r$  und der Querschnittsform  $\beta$  im Vergleich mit der Steifigkeit von O-Ringen ( $k_0 = 2$ ).

Mit den oben hergeleiteten Gleichungen ist der Einbauzustand der Elastomerringe mitsamt den nicht-linearen Materialeigenschaften und der Kontaktmechanik beschrieben. Um diesen Einbauzustand herum treten dann nur noch relativ kleine Auslenkungen auf. Das ermöglicht es, die im Folgenden dargestellte Schwingungsproblematik der Lager weitgehend von der Lagergeometrie und Gestaltung entkoppelt zu betrachten. Um also eine Aussage über die dynamischen Lagereigenschaften bei verschiedenen Temperaturen und Frequenzen treffen zu können, muss man vor allem die quasistatische Einbausteifigkeit und die thermo-viskoelastischen Eigenschaften des Werkstoffs im Sinne der Mastercharts kennen.

Tabelle 4-1: Querschnittsformen von Elastomerringen, zugehörige Gestaltfaktoren und die Bestimmung des Ringdurchmessers  $D_m$  anhand der Referenzgeometrie und Gestaltparameter.

Form		Gestaltfaktor	Gleichung	Ringdurchmesser
	$\varepsilon_r = 0, b = h$	$k_L = 1$	(4-20)	$D_m = D_{ref} / z$
	$\varepsilon_r = 0, \beta = b/h$	$k_L = \frac{1}{6}\beta(5 + \beta^2)$	(4-19)	$D_m = \frac{D_{ref}}{z} \frac{6}{\beta(5 + \beta^2)}$
	$\varepsilon_r = 5...20\%$	$k_L = k_0(2.5\varepsilon_r + 0.1)$	(2-34)	$D_m = \frac{D_{ref}}{z} \frac{1}{k_0(2.5\varepsilon_r + 0.1)}$

## 5 Dynamik des Elastomerlagers

### 5.1 Modelle und Bewegungsgleichungen

Im Stoffgesetz wurde die Temperatur- und Frequenzabhängigkeit des Werkstoffes mit der nichtlinearen Statik des Materials multiplikativ verknüpft (Abschnitt 2.5). Wie schon beim Neo-Hookeschen Materialgesetz kann auch aus den Gleichungen der quasistatischen Lagersteifigkeit die elastische Konstante als Vorfaktor ausgeklammert werden (4-40). Die Gleichungen der Lagerdynamik bei harmonischer Belastung erhält man, streng dem Produktansatz (2-76) folgend, indem anstelle der elastischen Konstante der frequenz- und temperaturabhängige komplexe Modul verwendet wird, so wie er aus den Masterkurven hervorgeht. Die komplexe Steifigkeit eines Elastomerlagers  $s_L^*(\Omega)$  folgt somit aus (4-40) und (2-21):

$$\underbrace{s_L^*(\Omega)}_{\text{Lagerdynamik}} = \underbrace{zk_L \pi D_m}_{\text{Lagerstatik}} \underbrace{E'(\Omega)(1 + j\eta(\Omega))}_{\text{Werkstoffdynamik}}. \quad (5-1)$$

Die vorab getroffenen Vereinfachungen im Stoffgesetz und bei der Beschreibung der Lagerstatik ermöglichen es, die Lagerdynamik als Produkt der Lagerstatik und der Werkstoffdynamik aufzufassen. Mit der Lagerstatik sind die im vorangegangenen Kapitel hergeleiteten und in Abschnitt 4.6 zusammengefassten Beziehungen für O-Ringe und Rechteckringe gemeint. Die Werkstoffdynamik ist in den Masterkurven enthalten und schließt neben der Frequenzabhängigkeit von Steifigkeit und Dämpfung auch den Temperatureinfluss mit ein.

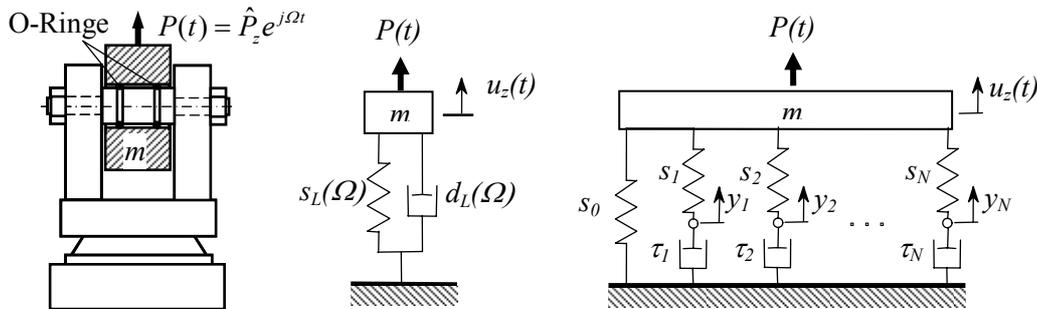


Abbildung 5-1: Beispiel eines Elastomerlagers mit O-Ring-Paar unter harmonischer Belastung (links). Ersatzmodelle mit komplexer Steifigkeit (mittig) und mit inneren Freiheitsgraden (rechts).

Für ein System mit einem Freiheitsgrad gemäß Abbildung 5-1 lautet die Bewegungsgleichung des Außenringes mit der Masse  $m$  bei harmonischer Kräfteerregung mit der Frequenz  $\Omega$ :

$$m\ddot{u}_z(t) + d_L(\Omega)\dot{u}_z(t) + s_L(\Omega)u_z(t) = \hat{P}_z e^{j\Omega t}. \quad (5-2)$$

Durch die Einführung der Verschiebungs-Ansatzfunktion vom Typ der rechten Seite

$$u_z(t) = \hat{u}_z e^{j\Omega t} \quad (5-3)$$

gelingt die Eliminierung des Zeitgesetzes und die dynamische Steifigkeit  $S(j\Omega)$  resultiert aus

$$S(j\Omega) = \frac{\hat{P}_z}{\hat{u}_z} = -m\Omega^2 + s'_L(\Omega) + js''_L(\Omega) \quad (5-4)$$

mit den Koeffizienten:

$$s'_L(\Omega) = s_L(\Omega) = zk_L \pi D_m \left\{ E_0 + \sum_{n=1}^N \frac{E_n (\Omega \tau_n)^2}{1 + (\Omega \tau_n)^2} \right\} \text{ und} \quad (5-5)$$

$$s''_L(\Omega) = \Omega d_L(\Omega) = zk_L \pi D_m \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{E_n \Omega \tau_n}{1 + (\Omega \tau_n)^2} \right\}. \quad (5-6)$$

Der *Verlustfaktor des Lagers* gleicht somit dem *Verlustfaktor des Werkstoffs*, welcher als temperatur- und frequenzabhängige Größe aus der Masterkurve bekannt ist:

$$\eta = \frac{\Omega d_L}{s_L} = \frac{s''}{s'} = \frac{E''}{E'}. \quad (5-7)$$

Aus diesem Grunde wird im Folgenden, wenn nicht anders angegeben, auf eine Unterscheidung von Werkstoff-Verlustfaktor und Bauteil-Verlustfaktor verzichtet.

Zwischen Lehrschem Dämpfungsmaß  $D$  und dem Verlustfaktor in Resonanz  $\eta(\Omega=\omega_0)$  liegt bei einem Ein-Massen-Schwinger genau der Faktor 0.5, denn es gilt:

$$D = \frac{d_L}{2\sqrt{s_L m}} \Big|_{\Omega=\omega_0} = \frac{s''/\omega_0}{2s' \sqrt{s'/m}} = \frac{\eta}{2}. \quad (5-8)$$

Wird das Lager, wie in Abbildung 5-1 (rechts), durch ein generalisiertes Maxwell-Modell mit inneren Freiheitsgraden beschrieben, so resultieren die Steifigkeitsparameter  $s_n$  aus den Prony-Parametern  $E_n$ . Der Koeffizientenvergleich für  $n = 0 \dots N$  ergibt:

$$s_n = zk_L \pi D_m E_n. \quad (5-9)$$

Dementsprechend sind die Zeitkonstanten  $\tau_n$  des Lagermodells identisch mit denen des Materials. In Analogie zum Stoffgesetz mit inneren Freiheitsgraden (2-64) und (2-65) lautet nun die Formulierung für das Lager:

$$\begin{pmatrix} m & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_z \\ \ddot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_z \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} & \mathbf{s}_{21}^T \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_z(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5-10)$$

$$\text{mit } \mathbf{y} = (y_1 \dots y_N)^T, \quad s_{11} = s_0 + \sum_{n=1}^N s_n, \quad \mathbf{s}_{21} = (-s_1 \dots -s_N)^T, \quad \mathbf{S}_{22} = \text{diag}(s_n), \quad \mathbf{D}_{22} = \text{diag}(s_n \tau_n). \quad (5-11)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung mit variablen Koeffizienten (5-2) wird mit (5-10) und (5-11) auf ein System aus  $2+N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten überführt. Die Lösung des Eigenwertproblems und die Stabilitätsanalyse sind nun mit Standardverfahren wie QR-Zerlegung u.a. sehr effizient möglich. Dieses Lagermodell kann nahtlos in FE-Programme integriert werden.

Für Vorgänge bei einer von der Referenztemperatur  $T_g$  verschiedenen Temperatur  $T$  sind die Zeitkonstanten  $\tau_n$  mit dem Faktor  $a_T(T-T_g)$  des Temperatur-Zeit-Shifts aus Abschnitt 0 zu multiplizieren. Äquivalent dazu ist die Verwendung einer reduzierten Anregungsfrequenz (2-75)

$$\Omega_T = a_T \Omega \quad (5-12)$$

möglich, welche dann anstelle der Kreisfrequenz  $\Omega$  in die Ausdrücke der komplexen Lagersteifigkeit (5-1) bis (5-4) eingesetzt wird.

Die folgenden beiden Abschnitte belegen anhand von dynamischen Messungen im niederfrequenten und im höherfrequenten Bereich sowie bei verschiedenen Temperaturen, dass sich die Modellierung der dynamischen Lagersteifigkeit aus Lagerstatik und Werkstoffdynamik nach (5-1) mit den Erfahrungen in der Praxis deckt.

## 5.2 Hysterese-Messungen im niederfrequenten Bereich

Weggesteuerte Hysterese-Versuche im niederfrequenten Bereich zeigen nun, inwiefern Steifigkeit bzw. Verlustfaktor eines Bauteils abhängig sind von den Schwingungsamplituden, der Probenform und den Kontaktrandbedingungen.

### 5.2.1 Messungen bei Raumtemperatur

Die Messungen von Zugproben und Bauteilproben erfolgten bei Raumtemperatur und in einer Klimakammer im niederfrequenten Bereich. Der entsprechende Messaufbau mit Schrittmotorsteuerung wird im Anhang 7 beschrieben.

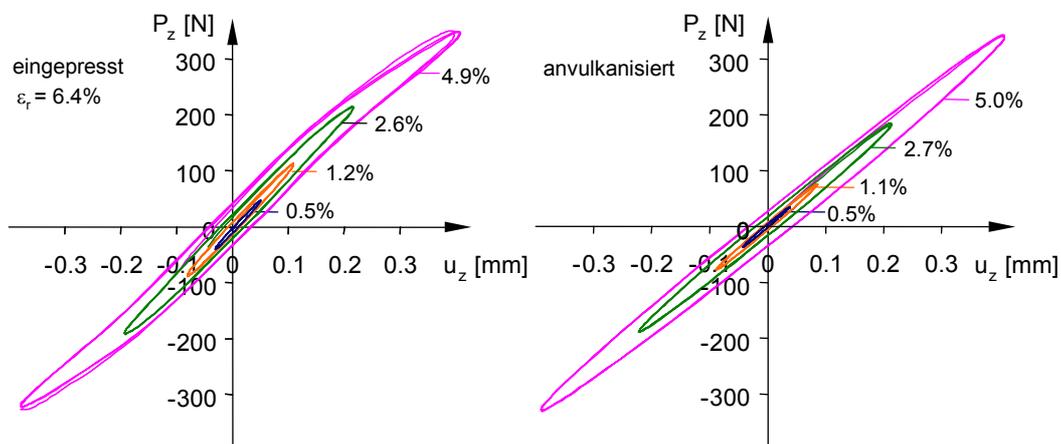


Abbildung 5-2: Gemessene Hysteresen an verpressten und vulkanisierten Ringproben aus NBR mit der Härte Shore A 53 und quadratischem Querschnitt (8x8 mm). Variation der Amplituden bei Raumtemperatur und einer Frequenz von 0.25Hz.

Abbildung 5-2 zeigt bei Raumtemperatur gemessene Hysteresen für Rechteckringe mit unterschiedlichen Kontaktrandbedingungen und anwachsenden Amplituden. Bei kleinen Amplituden zeigen beide Bauteile nahezu lineares Verhalten. Wächst die Amplitude bei verpresstem Bauteil jedoch an, so kommt es zur Krümmung der Hysteresezipfel. Diese Nichtlinearitäten rühren aus der Kontaktrandbedingung her, bei Überschreiten einer Grenzamplitude tritt Reibung und Hemmschlupf ein. Die oben genannten Gleichungen der

Bauteildynamik sind dann nur noch beschränkt gültig. Indem die Rechteckringe anvulkanisiert oder eingeklebt werden, kann man diese Probleme jedoch umgehen.

Die Auswertung der Hysteresen erfolgt anhand flächengleicher Ersatzellipsen, die Vorgehensweise bei der so genannten harmonischen Balance ist in [56] beschrieben. Vergleicht man den gemessenen Verlustfaktor der anvulkanisierten Ringprobe und Materialzugprobe, so verlaufen die Kurven fast deckungsgleich (Abbildung 5-3). Mit wachsender Frequenz und Dehnungsamplitude nimmt der Verlustfaktor zu. Solange die Amplituden jedoch klein bleiben, erscheint eine linearisierte Betrachtung gerechtfertigt. Bei der Materialzugprobe blieb die Dämpfung sogar bei Vordehnungsamplituden von bis zu 15% noch nahezu unverändert (vgl. Abbildung 2-14).

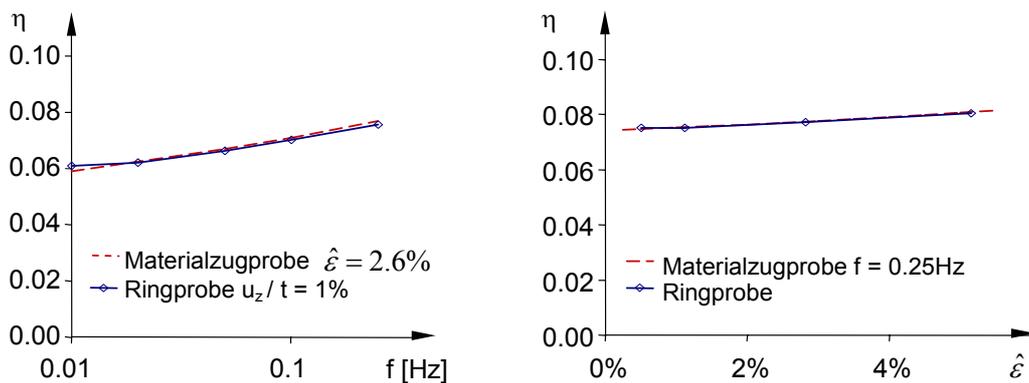


Abbildung 5-3: Vergleich gemessener Verlustfaktoren der Materialzugprobe und der Ringprobe mit anvulkanisiertem Elastomerring aus Hysterese-Messungen mit NBR, Härte Shore A 53.

### 5.2.2 Messungen bei verschiedenen Temperaturen

Anhand von Messungen in der Klimakammer wurde untersucht, inwiefern die thermo-viskoelastischen Werkstoffeigenschaften auch jenseits des entropieelastischen Bereichs das Bauteilverhalten bestimmen und die vereinfachten Gleichungen für die Bauteildynamik auch dort ihre Gültigkeit besitzen. Bei Temperaturen im Bereich von  $-30^{\circ}\text{C}$  bis  $+40^{\circ}\text{C}$  erfolgten die Messungen der Hysteresen sowohl von Materialzugproben als auch des Bauteils mit anvulkanisiertem Rechteckring (Abbildung 5-4).

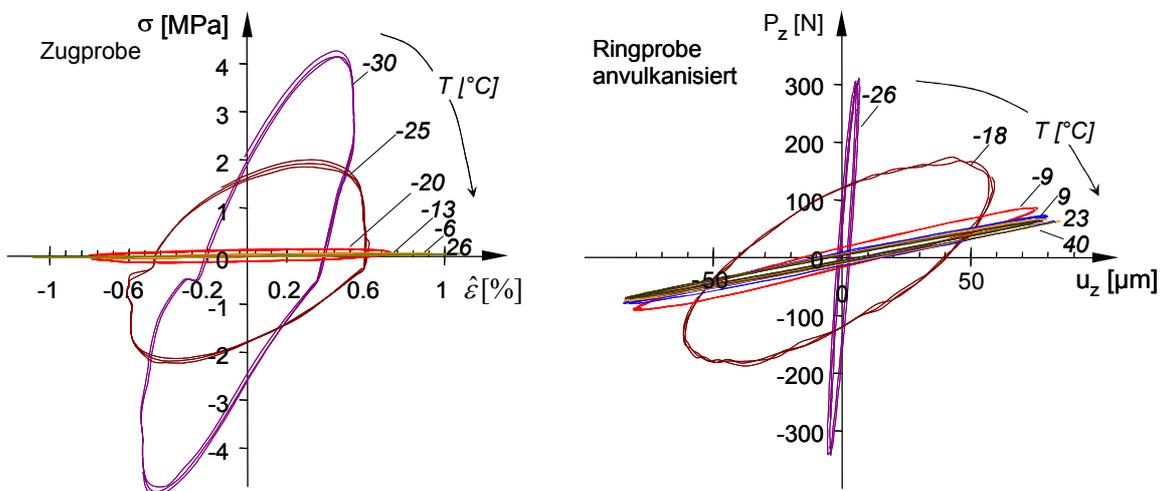


Abbildung 5-4: Hysterese-Messungen bei verschiedenen Temperaturen an der Materialzugprobe (links) und an der anvulkanisierten Ringprobe (rechts) aus NBR mit der Härte ShA 53.

Im energie-elastischen Bereich, d.h. bei sehr niedrigen Temperaturen, treten hohe Kräfte bzw. Spannungen auf. Da der Aufbau auch nur eine begrenzte Steifigkeit besitzt, können die bei Raumtemperatur eingestellten Verformungs- bzw. Dehnungsamplituden von  $\varepsilon = 1\%$  bzw.  $u_z = 80\mu\text{m}$  nicht erreicht werden. Mit zunehmender Erwärmung vergrößern sich die Ellipsenflächen, der Verlustfaktor steigt an und im gleichen Zuge sinkt die Steifigkeit. Die Fläche der Hysteresen und damit der Verlustfaktor erreichten ihr Maximum im Bereich des Glasübergangs von ca.  $-25^\circ\text{C}$ . Bei höheren Temperaturen, d.h. im entropie-elastischen Bereich, verschlanken sich die Ellipsen und die Spannungen bzw. die Kräfte fallen kleiner aus. In diesem Bereich sind die Änderungen der viskoelastischen Eigenschaften so gering, dass man die Hysteresen in Abbildung 5-4 kaum noch auseinander halten kann. Die offensichtlichen Unregelmäßigkeiten in den Ellipsen der Zugprobe (links) sind bedingt durch Spiel bei niedrigen Temperaturen.

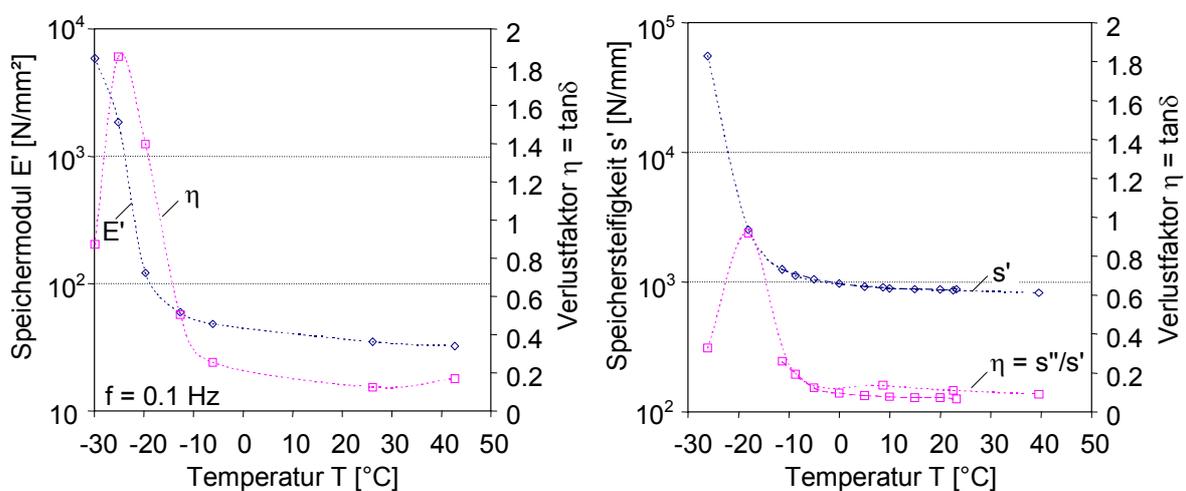


Abbildung 5-5: Speichermodul bzw. Speichersteifigkeit und Verlustfaktor aus Hysterese-Messungen bei verschiedenen Temperaturen an der Materialzugprobe (links) und an der vulkanisierten Ringprobe (rechts) aus NBR mit der Härte ShA 53.

Abbildung 5-5 gibt die aus den gemessenen Hysteresen errechneten Werte der Steifigkeit und des Verlustfaktors als Funktion der Temperatur wieder. Mit Hilfe der Temperatur-Shift-Funktionen (2-71) und (2-74) erfolgte die Umrechnung der Ergebnisse auf eine Referenztemperatur. Bei dieser Temperatur werden die Ergebnisse der Zugprobe und der Ringprobe in Abbildung 5-6 nun gegenübergestellt. Um die Steifigkeitswerte vergleichen zu können, wird der gemessene Wert des Bauteils durch den Umfang und durch den zur Vordehnung von 2.5% gehörenden Gestaltfaktor  $k_L = 0.945$  nach Abbildung 4-18 geteilt.

Die beiden Kurven des Speichermoduls bzw. der reduzierten Speichersteifigkeit in Abbildung 5-6 decken sich über den gesamten Frequenzbereich. Zwischen dem Verhalten des Materials und des Bauteils steht lediglich der aus der Ringstatik bekannte Normierungsfaktor  $\pi D_m k_L$ , welcher die Geometrie und die Einbauverhältnisse des Ringes beschreibt. Auch der Verlustfaktor des Bauteils verläuft nahezu identisch mit dem Verlustfaktor des Materials. Das thermo-viskoelastische Materialverhalten prägt demnach auch das Verhalten des Elastomerlagers im gesamten Temperatur-Frequenzbereich. Der Ansatz (5-1), bei dem die linearer thermo-viskoelastischen Materialeigenschaften mit der nichtlinearen Vorpressung beim Einbau des Elastomerrings

multiplikativ verknüpft sind, wurde hiermit überprüft. Die Kontaktproblematik blieb ausgeklammert, da die Randbedingungen durch Anvulkanisieren vorgegeben waren.

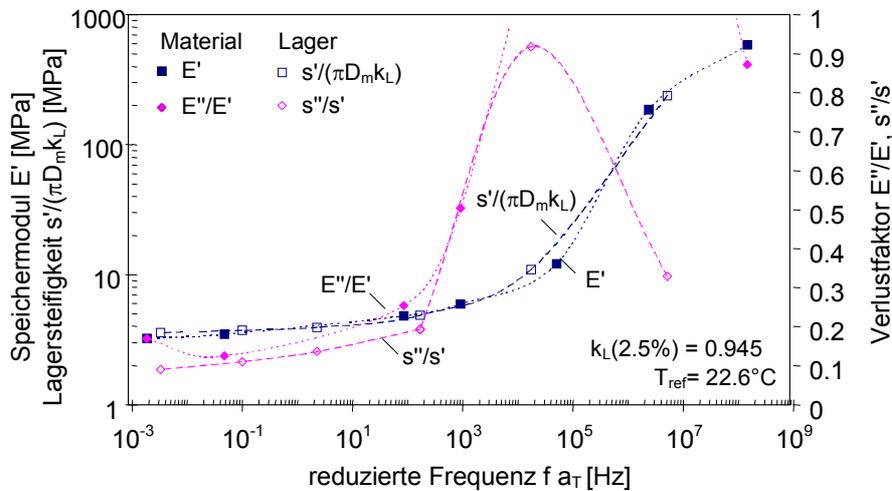


Abbildung 5-6: Speichermodul und Verlustfaktor der Materialzugprobe und äquivalente Größen der anvulkanisierten Ringprobe über der reduzierten Frequenz aus Hysterese-Messungen bei verschiedenen Temperaturen.

Wenn das Materialverhalten multiplikativ mit dem Bauteilverhalten verknüpft ist, dann ist es auch möglich, die Materialeigenschaften aus Bauteilversuchen zu generieren bzw. die Masterkurven mit Bauteilmessungen zu überprüfen. Dazu kommen wir im folgenden Abschnitt.

### 5.3 Resonanzmessungen im höherfrequenten Bereich

Die Messungen im Bereich höherer Frequenzen geben das Verhalten eines Ein-Massenschwingers wieder, dessen Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften allein aus den Elastomerringen herrühren. Aus den Messungen am Bauteil werden für jene Werkstoffe, für die keine Masterkurven vorliegen, auf diese Art abschnittsweise die viskoelastischen Materialdaten gewonnen. Im Vergleich mit der vorhandenen Masterkurve, wird nun das Rechenmodell in einer praxisnahen Anordnung experimentell verifiziert.

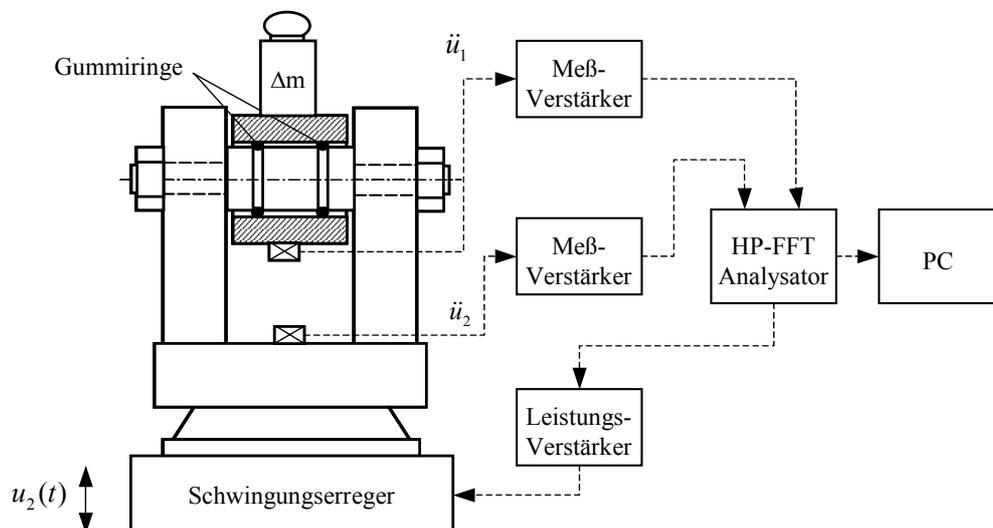


Abbildung 5-7: Versuchsaufbau zur Messung der Elastomer-Ring-Eigenschaften in Resonanz [1].

Abbildung 5-7 zeigt den hierzu verwirklichten Versuchsaufbau. Die Amplituden bleiben jetzt naturgemäß sehr klein. Verschiedene Resonanzfrequenzen bei ein und demselben Material und dem gleichen Ringdurchmesser ergeben sich durch die Variation der Vorspannungen und durch Verstimmung des Systems mit Zusatzmassen.

Als Resonanz bezeichnen wir jene Frequenz, bei welcher der Realteil des komplexen Frequenzgangs verschwindet bzw. der Phasengang einen Winkel von  $90^\circ$  durchläuft. Die Steifigkeits- und Dämpfungsbestimmung erfolgt anhand des Phasenganges in der Umgebung der Resonanz. Bei bekannter Masse des Außenringes  $m_R$  und der mitschwingenden Zusatzmasse  $\Delta m$  ergibt sich die Steifigkeit  $s(f)$  aus der Resonanzfrequenz  $f_R$ :

$$s(f_R) = (2\pi f_R)^2 (m_R + \Delta m). \quad (5-13)$$

Weiterhin folgt die Lehrsche Dämpfung  $D$  aus dem Phasengang:

$$D = \left| \frac{1 - (f(\varphi)/f_0)^2}{2 (f(\varphi)/f_0)} \right| \tan(\varphi). \quad (5-14)$$

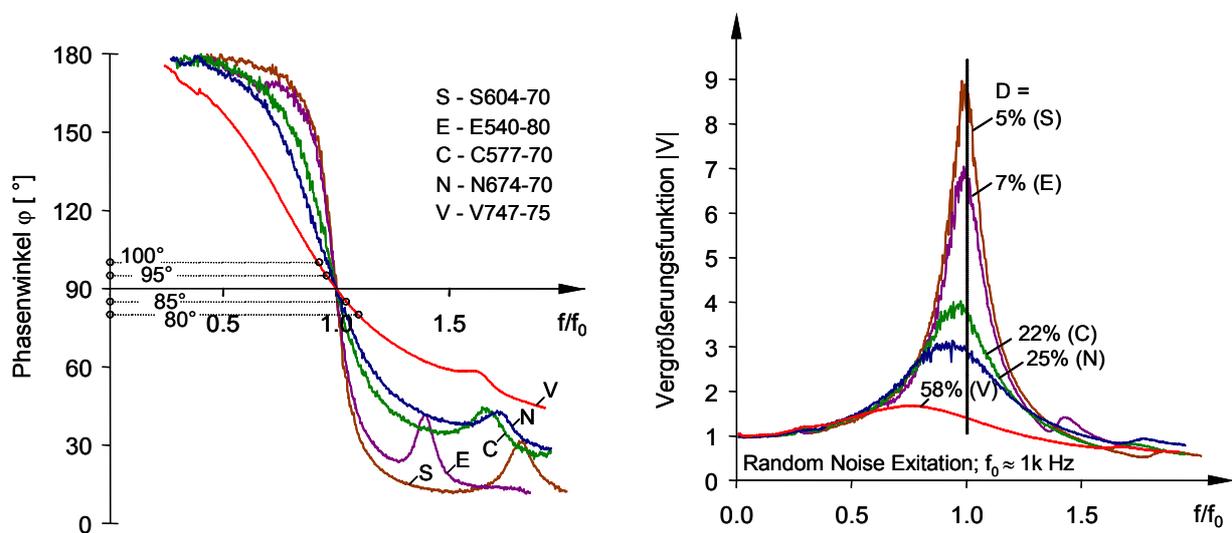


Abbildung 5-8: Gemessener Phasengang (links) und Amplitudengang (rechts) für Resonanzproben mit Elastomerringen aus verschiedenen Materialien. „Random Noise“-Fußpunktserregung im Bereich von 10-2000 Hz bei Raumtemperatur, Resonanzfrequenz 1 kHz.

Abbildung 5-8 zeigt repräsentative Frequenzgänge von O-Ring-Lagerungen für die verschiedenen Materialien. Die Abstimmung der Zusatzmassen und Steifigkeiten wurde so gewählt, dass die Resonanz jeweils bei 1 kHz lag. Die Resonanzmaxima sind deutlich ausgeprägt. Trotz der starken Dämpfung liegen benachbarte Resonanzen weit genug entfernt, so dass eine Auswertung des lateralen Freiheitsgrades möglich ist. Die sichtbaren kleineren Nebenmaxima weisen auf die nachfolgende Kippresonanz hin. Vergleicht man die am Bauteil gemessenen Dämpfungen mit den Werten des Verlustfaktors aus der Masterkurve, so verblüfft die erstaunlich gute Übereinstimmung (Tabelle 5-1). Im Mittel liegen die gemessenen Lagerdämpfungen etwa 2.3% höher als die entsprechenden Werkstoffwerte. Bei C557 beträgt die Differenz zwischen Material- und Lagerdämpfung 7.6%.

Tabelle 5-1: Vergleich der gemessenen Bauteildämpfung mit der Materialdämpfung  $\eta$  der Masterkurven.

Material	S604	E540	C557	N674	V747
Lagerdämpfung D	0.05	0.07	0.22	0.25	0.58
Materialdämpfung $\eta$	0.09	0.15	0.29	0.43	1.15
$D - 0.5\eta$	0.3%	-0.5%	7.6%	3.5%	0.6%

Im Folgenden wird eine Auswahl von Messungen an Elastomerlagern mit Rechteck- und O-Ringen mit unterschiedlichen Vorpressungen und bei unterschiedlichen Frequenzen präsentiert. Durch eine Normierung der frequenzabhängigen Steifigkeit auf den statischen Wert erfolgt die rechnerische Eliminierung der Einbaugeometrie. So wird das statische Rechenmodell überprüft. Alle Messpunkte sollten nun auf einer Kurve liegen. Außerdem wird die gewonnene Kurve mit einer entsprechend normierten Masterkurve direkt verglichen.

### 5.3.1 Dynamik der Rechteckringe

Die Messungen an eingepressten und anvulkanisierten Rechteckringen in Abbildung 5-9 verdeutlichen, wie das viskoelastische Materialverhalten auch die Bauteileigenschaften bestimmt und welchen Einfluss die Vorpressung und die Kontakttrandbedingungen haben.

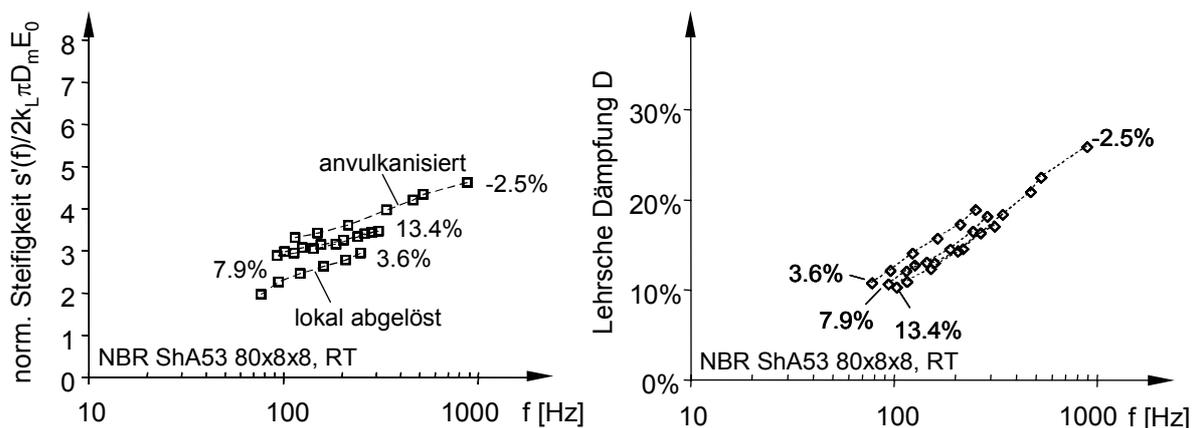


Abbildung 5-9: Normierte Steifigkeit und Dämpfung  $D = \eta/2$  aus Resonanzversuchen mit eingepressten und anvulkanisierten NBR-Ringen mit quadratischem Querschnitt und der Härte Shore A 53.

Mit zunehmender Frequenz nehmen die Steifigkeits- und die Dämpfungswerte zu. Zudem steigt mit zunehmender Vorpressung die Steifigkeit, da die Ergebnisse jedoch mit der statischen Steifigkeit normiert wurden, sollten alle Kurven übereinander liegen. Ist jedoch die radiale Vorpressung zu gering, dann wird die berechnete Einbausteifigkeit nicht erreicht, da lokale Ablösungen auftreten und die Kontaktkräfte zu gering sind. Im gleichen Zuge treten mit abnehmender Vorspannung höhere Dämpfungswerte auf. Dies weist auf vorhandene Reibdämpfung an den Kontaktflächen hin. Minimale Dämpfungswerte und die größte normierte Steifigkeit erreicht die anvulkanisierte Ringprobe. Da für dieses Material keine Masterkurve vorliegt, können die Ergebnisse nicht direkt mit den rechnerischen Vorhersagen verglichen werden. Dies geschieht jedoch im Folgenden anhand der Messwerte von O-Ring-Proben.

### 5.3.2 Dynamik der O-Ringe

Abbildung 5-10 zeigt die bei Raumtemperatur gemessenen Dämpfungen und normierten Steifigkeiten verschiedener O-Ringe im Frequenzbereich von 100 bis 2000 Hz.

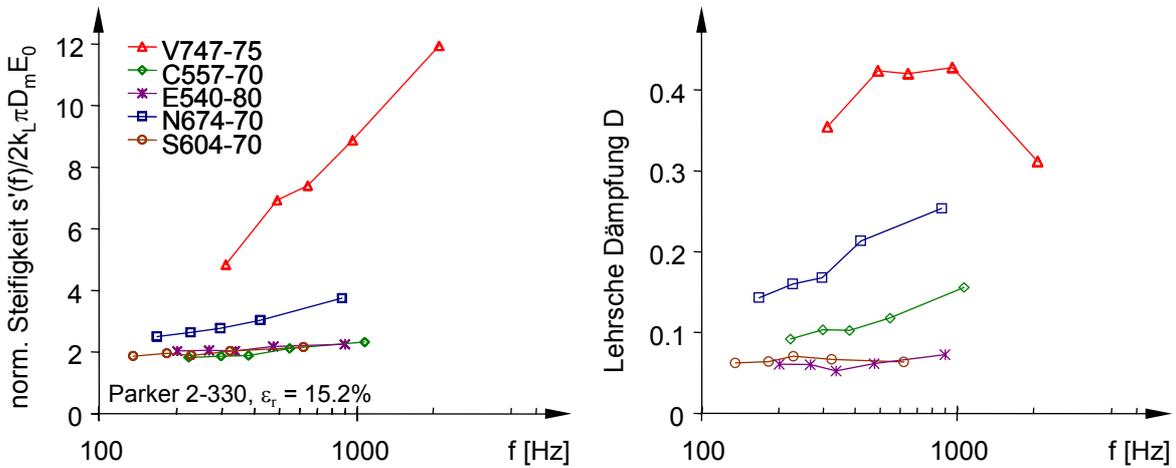


Abbildung 5-10: Normierte Steifigkeit und Dämpfung  $D = \eta / 2$  aus Resonanzversuchen mit eingepressten O-Ringen der Reihe 2-330 der Fa. Parker. Vergleich verschiedener Materialien.

Sowohl EPDM als auch Silikon besitzen sehr niedrige Glasübergangstemperaturen. Hier bleibt sowohl der Verlustfaktor als auch die Steifigkeit nahezu konstant. Die Werte der Dämpfung liegen bei etwa 5-6% (vgl. Masterkurve Abbildung 3-13). Ringe aus Nitril und Neopren erzielen Dämpfungswerte von über 10%, die höchste Dämpfung wird mit Ringen aus FKM V747 erreicht. Da für dieses Material die Glasübergangstemperatur mit  $T_g = -13^\circ\text{C}$  vergleichsweise hoch liegt, nimmt die Dämpfung im untersuchten Bereich schon wieder ab.

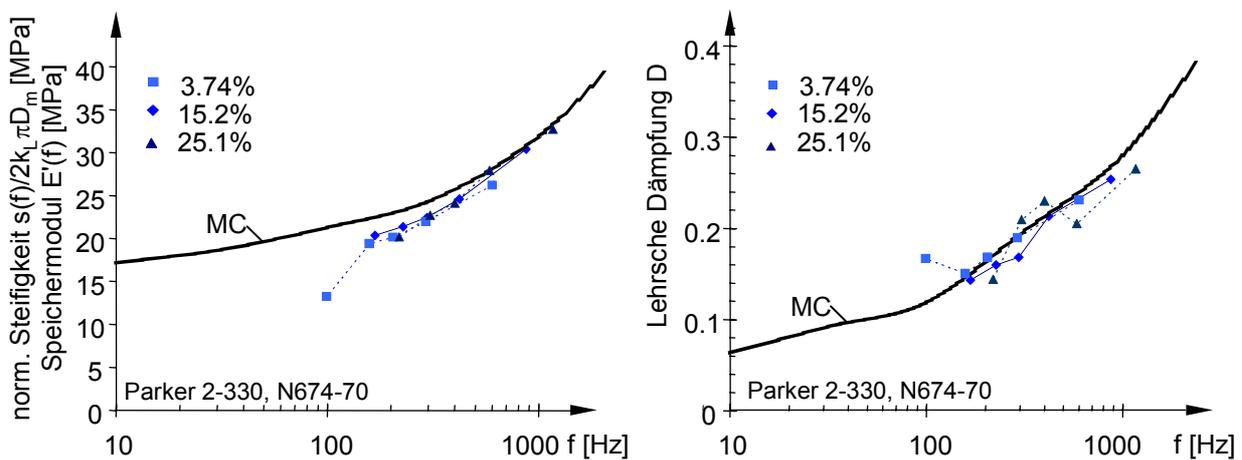


Abbildung 5-11: Normierte Steifigkeit und Dämpfung  $D = \eta / 2$  aus Resonanzversuchen mit O-Ring-Lagern aus Parker NBR N674-70. Vergleich des Verhaltens bei verschiedenen radialen Vordehnungen mit dem Verlauf der Materialwerte aus der Masterkurve (MC)

Abbildung 5-11 (links) zeigt die dynamische Steifigkeit von O-Ring-Proben aus N674. Durch die Normierung auf den Gestaltfaktor  $k_L$ , die Ringanzahl  $z = 2$  und den mittleren Umfang  $\pi D_m$  ergibt sich ein von der Vorpressung unabhängiger geschlossener Kurvenzug eines äquivalenten Modulwertes. Dieser deckt sich sehr gut mit dem Modulwert der Masterkurve, d.h. die frequenzabhängigen Effekte des Materials werden sehr gut am Verhalten des Bauteils sichtbar. Dies trifft auch für den Verlustfaktor zu (Abbildung 5-11 rechts). Hier ist, fast überraschend, im

Rahmen der Streuung der Ergebnisse kein Einfluss der Vorpressung zu erkennen. Die Verlustfaktoren des Bauteils folgen dem ansteigenden Verlauf der Materialdämpfung, so wie es die Masterkurve vorzeichnet.

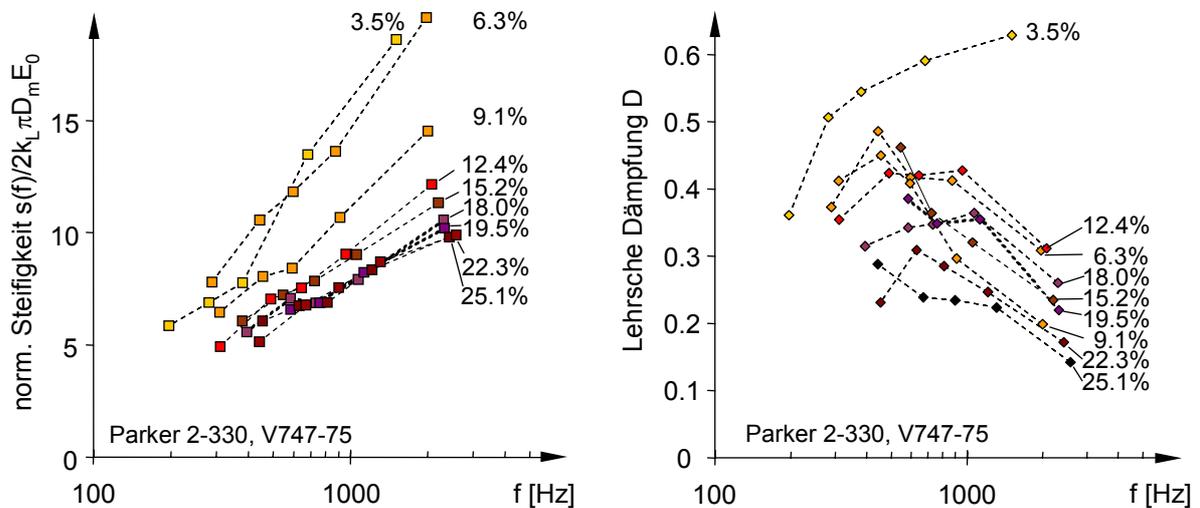


Abbildung 5-12: Normierte Steifigkeit und Dämpfung  $D = \eta/2$  aus Resonanzversuchen mit O-Ringen aus Parker FKM V747-70. Vergleich des Verhaltens bei verschiedenen radialen Vorpressungen  $\varepsilon_r$  in %.

Keine gute Übereinstimmung mit den getroffenen Annahmen wurde bei den stark dämpfenden O-Ringen aus FKM V747 beobachtet. Hier streuen die Ergebnisse stark und besitzen eine ausgeprägte Abhängigkeit der Dämpfung und der normierten Steifigkeiten von den Vorspannungsamplituden. Die normierten Steifigkeiten liegen für hohe Vorpressungen noch dicht beieinander, bei geringeren Vorpressungen sind die Abweichungen jedoch erheblich. Noch stärker als die Steifigkeiten streuen die Dämpfungen (Abbildung 5-12).

Worin liegen diese starken Streuungen begründet? Zunächst vermutet man eine Materialerwärmung infolge hoher Dämpfung. Gerade bei geringen Vordehnungen und somit kleinem Kontaktgebiet wäre die Wärmeabfuhr ja behindert. Eine Erwärmung hätte dann auch den Anstieg der Dämpfungswerte zur Folge, da das Dämpfungsmaximum bei niedrigeren Frequenzen bzw. höheren Temperaturen zu erwarten ist. Diesem Erklärungsversuch widerspricht die Tatsache der Steifigkeitszunahme der Ringe mit geringer Vorpressung. Bei stärkerer Erwärmung sollte umgekehrt eine Steifigkeitsabnahme auftreten. Es wird deshalb nicht ausgeschlossen, dass es aufgrund starker Dämpfung doch zu einer Überlagerung der Kippschwingungen des Probenringes und so zu einer Verfälschung der berechneten Dämpfungen und Steifigkeiten kam. Zudem sei darauf hingewiesen, dass die hier angewendeten, vereinfachten elastizitätstheoretischen Modelle, basierend auf nur einer Materialfunktion, im Glasbereich ihre Gültigkeit verlieren.

## 5.4 Elastomerlager aus Materialpaarungen

Der Einsatzbereich eines Elastomerdämpfers ist auf einen engen Temperatur- bzw. Frequenzbereich beschränkt, wenn hohe Dämpfung verlangt wird. Möchte man den Bereich hoher Dämpfungswerte verbreitern, so wäre die Entwicklung spezieller Elastomere denkbar und möglich. In dieser Arbeit beschränken wir uns jedoch auf den Einsatz handelsüblicher Elastomere und O-Ring-Werkstoffe.

Durch die Verwendung mehrerer Ringe aus verschiedenen Materialien gelingt es, den Bereich einer minimalen gewünschten Dämpfung zu erweitern. Bei  $Q$  unterschiedlichen Ringen wirken die komplexen Steifigkeiten im Sinne einer Parallelschaltung:

$$s_Q^* = \sum_q^Q k_L \pi D_m E'_q (1 + j\eta_q). \quad (5-15)$$

Sowohl die Real- als auch die Imaginärteile der komplexen Steifigkeiten sind zu addieren. Im Falle von O-Ringen lautet  $k_L = k_0(2.5\varepsilon_r + 0.1)$ . Somit gilt bei identischer Vorpressung  $\varepsilon_r$  und gleichem Ringdurchmesser  $D_m$ :

$$s_Q^* = \pi D_m (2.5\varepsilon_r + 0.1) \sum_q^Q k_{0q} E'_q \left[ 1 + j \frac{\sum_q^Q \eta_q k_{0q} E'_q}{\sum_q^Q k_{0q} E'_q} \right]. \quad (5-16)$$

Hier sind  $k_{0q}$  die materialspezifischen Korrekturfaktoren zur Bestimmung der statischen Steifigkeit eingepresster O-Ringe, die vorab experimentell bestimmt wurden (vgl. Abschnitt 4.4.3). Wenn diese Faktoren nicht zu stark voneinander abweichen, kann man sie aus den Summen auch ausklammern. Bei Verwendung von zwei verschiedenen Materialien gilt dann:

$$\eta_{1-2} = \frac{\eta_1 E'_1 + \eta_2 E'_2}{E'_1 + E'_2}. \quad (5-17)$$

Abbildung 5-13 verdeutlicht den Effekt der Kombination von Ringen zweier Werkstoffe am Beispiel der Kurven von Perfluor P94 und Nitril N674. Dem arithmetischen Mittel folgend nimmt die Materialsteifigkeit monoton zu. Dagegen resultiert der Verlustfaktor aus dem mit den Einzelsteifigkeiten gewichteten Mittel der jeweiligen Verlustfaktoren und muss letztlich kleiner oder gleich dem jeweils größeren bzw. größer oder gleich dem jeweils kleineren Verlustfaktor sein.

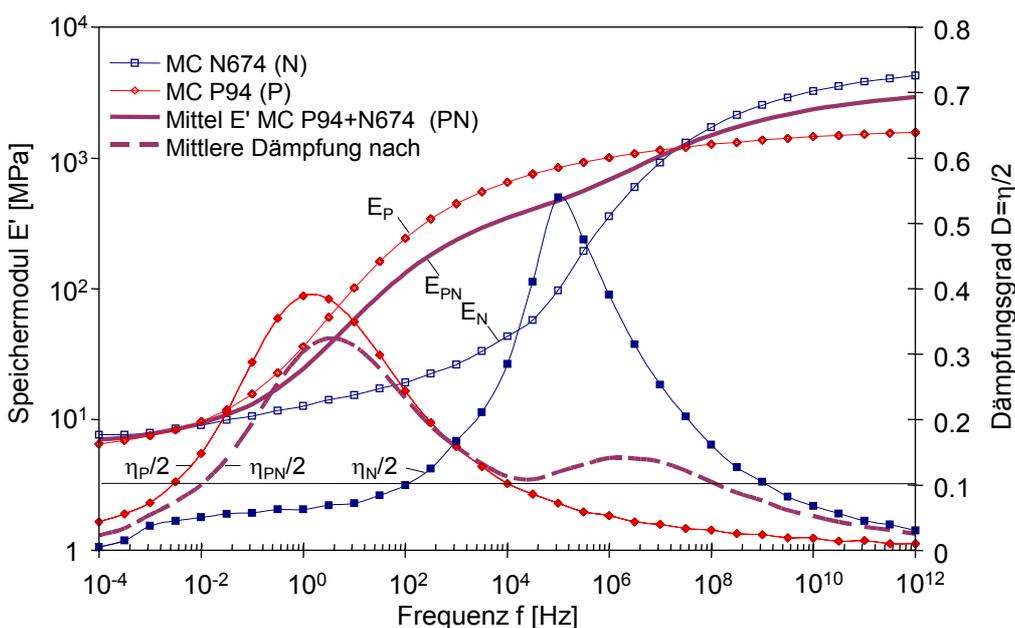


Abbildung 5-13: Aus den Masterkurven (MC) berechnete Lagerwerkstoffeigenschaften bei Kombination von Ringen verschiedener Elastomere.

Das Maximum der Dämpfung beider Elastomere liegt bei Raumtemperatur etwa 5 Dekaden auseinander, der Bereich, in dem die Lager mehr als 10% Dämpfungsgrad liefern, umfasst etwa 6 bis 7 Dekaden. Durch die Kombination beider Werkstoffe kann dieser Bereich auf 10 Dekaden ausgeweitet werden. Das Dämpfungsmaximum des Perfluorwerkstoffs bleibt fast vollständig ausgeprägt erhalten. Die hohen Dämpfungswerte des NBR sind jedoch an eine deutlich geringere Steifigkeit gekoppelt, somit fallen sie in der Mittelung nicht so sehr ins Gewicht.

Im Versuch wurde die Werkstoffkombination Fluorkarbon V747 und Nitril N674 getestet. Die Probenaufnahme, welche sonst zwei gleiche Ringe beherbergt, fasst nun je einen O-Ring des jeweiligen Elastomers.

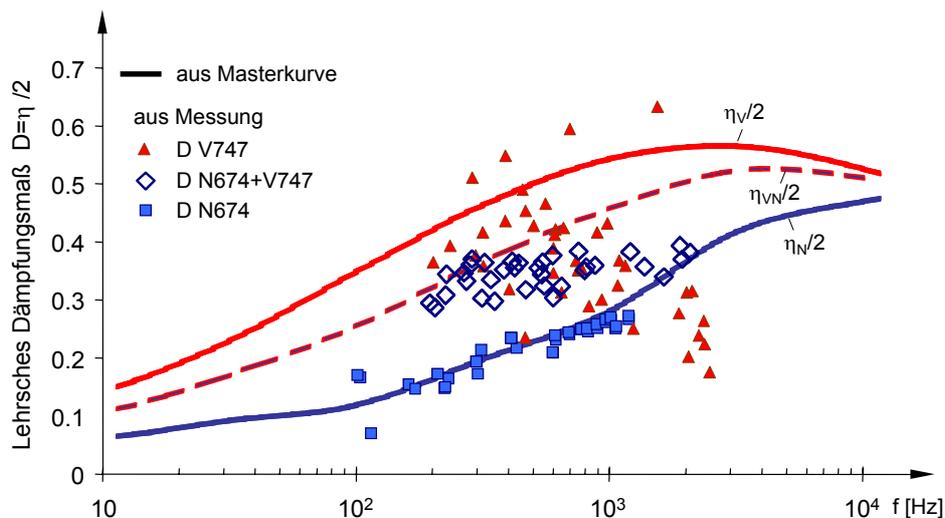


Abbildung 5-14: Vergleich der berechneten und gemessenen Lagerwerkstoffeigenschaften bei Kombination von Ringen verschiedener Elastomere.

Die gemessenen Dämpfungswerte für das Lager mit der Werkstoffkombination finden sich im Mittel über den Werten von Nitril und unter den Werten von Fluorkarbon wieder, so wie es die rechnerische Voraussage erwarten ließ. Während die Werte für Fluorkarbon erheblichen Streuungen unterworfen waren, liegen die Ergebnisse der Kombination ähnlich dicht beieinander wie die gemessenen Dämpfungen von N674. Da die Dämpfung, die aus der Masterkurve von N674 resultiert, deutlich unterhalb der entsprechenden Messwerte verläuft, ist es auch nur folgerichtig, dass die gerechnete mittlere Dämpfung unterhalb der entsprechenden Messwerte liegt (Abbildung 5-14).

Bei der Kombination von eingepressten Ringen ist zu beachten, dass die Gefahr verstärkter Reibeffekte besteht. Die obigen Gleichungen gelten jedoch nur, wenn beiden Ringen die gleichen Verformungen aufgeprägt werden. Dies wird durch eine anvulkanisierte Verbindung von Gummi und Metall garantiert.

## 6 Auslegung und Optimierung ideal-typischer Rotorsysteme

In diesem Kapitel werden die Bewegungsgleichungen repräsentativer Rotorsysteme in Elastomerlagern aufgestellt und gelöst sowie die wichtigsten Aspekte dargestellt, die für eine gezielte Auslegung und Optimierung von Bedeutung sind. Dabei wird, angefangen beim starren Rotor über die Lavalwelle bis hin zum Mehrscheibenrotor, der Einfluss von Materialabstimmung und vom Verhältnis Lager- zur Wellensteifigkeit auf die Rotordämpfung sowie die Auswirkung bei mehreren elastischen Moden diskutiert.

Der Einsatz von Elastomerdämpfern ist in Form *zusätzlicher Hilfslager* möglich. In diesem Fall wird Zusatzsteifigkeit und Dämpfung in der Nähe des zu dämpfenden Freiheitsgrads in das System eingebracht. Das Elastomer kann seine Dämpfung aber nur dann voll entfalten, wenn die Lagersteifigkeit relativ groß gegenüber der Systemsteifigkeit an dieser Stelle ist. Meist fehlt dem Konstrukteur in der Praxis jedoch der gestalterische Spielraum, um Elastomerlager an beliebigen Stellen zu platzieren. Wir betrachten somit in dieser Arbeit vornehmlich den Fall der Aus- bzw. Nachrüstung vorhandener Lagerstellen, z.B. durch Bettung von Wälzlagern in O-Ringen (Abbildung 4-1).

Wir setzen hier voraus, dass sich die Elastomerlager isotrop verhalten und nehmen vereinfachend an, dass die Rotoren symmetrisch sind und dass das Eigengewicht des Rotors keine Rolle spielt, d.h. in der Ruhelage fallen Lagermittelpunkt und Wellenmittelpunkt zusammen.

### 6.1 Starrer Rotor

Beim starren Rotor in Abbildung 6-1 resultieren die Dämpfungseigenschaften allein aus der abgestimmten Wahl des Gummis. Die Resonanzstelle wird durch die Steifigkeit des Lagers festgelegt. Die Beschreibung der Lagereigenschaften erfolgt sowohl mit komplexer Steifigkeit (A) als auch mit äquivalenten Modellen mit inneren Freiheitsgraden (B), welche in Abbildung 6-1 durch ein 3-Parameter-Standardmodell vertreten sind.

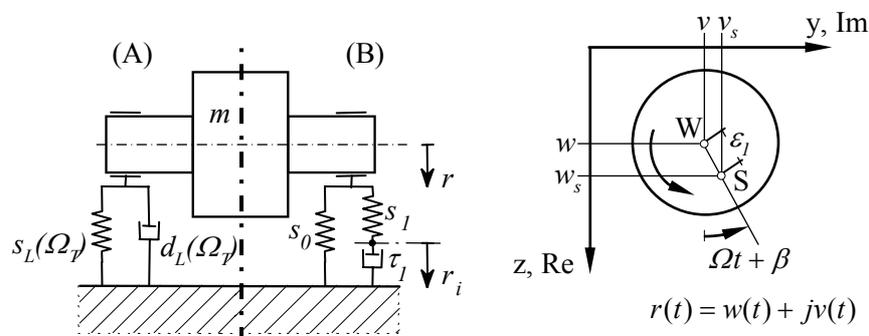


Abbildung 6-1: Symmetrischer starrer Rotor in isotropen Elastomerlagern. Lagerungsmodell (A) mit den Anteilen der komplexen Lagersteifigkeit bzw. (B) mit einem komplexen inneren Freiheitsgrad  $r_i$  und 3 konstanten Parametern (links). Freiheitsgrade  $w$ ,  $v$ , Schwerpunkt  $S$ , Wellenmittelpunkt  $W$  und Exzentrizität  $\varepsilon_1$  (rechts).

### 6.1.1 Modellierung mit komplexer Lagersteifigkeit

Aufgrund der Isotropie lassen sich die beiden Freiheitsgrade  $w$  und  $v$  komplex zusammenfassen:

$$r(t) = w(t) + jv(t). \quad (6-1)$$

Die Bewegungsgleichung des starren Rotors schreibt man direkt mittels Schwerpunktsatz hin, wobei die Schwerpunktskoordinaten über die Exzentrizität  $\varepsilon_l$  durch die Koordinaten des Wellenmittelpunkts ausgedrückt werden. Mit der komplexen Zusammenfassung (6-1) erhält man somit für das Lagerungsmodell (A):

$$m\ddot{r} + d_L(\Omega a_T)\dot{r} + s_L(\Omega a_T)r = m\varepsilon_l e^{j\beta} \Omega^2 e^{j\Omega t}. \quad (6-2)$$

Hierbei ist  $\Omega a_T = \Omega_T$  die reduzierte Anregungsfrequenz in der gemäß (2-75) der Temperatureinfluss schon einbeschrieben ist. Auf die explizite Nennung des Temperatureinflusses wird aus Gründen der Übersichtlichkeit im Folgenden jedoch verzichtet. Die partikuläre Lösung erhält man mit dem Ansatz nach Art der rechten Seite:

$$r(t) = \hat{r} e^{j\Omega t}. \quad (6-3)$$

Nach Elimination des Zeitgesetzes lassen sich Dämpfung und Steifigkeit zu einer komplexen Lagersteifigkeit  $s^*(\Omega)$  nach (5-1) zusammenfassen. Die auf die Exzentrizität bezogene Antwortamplitude lautet:

$$\hat{r}_\varepsilon(\Omega) = \frac{\hat{r}_\varepsilon(\Omega)}{\varepsilon_l} = \frac{\Omega^2}{\frac{s_L'(\Omega)}{m} - \Omega^2 - j \frac{\eta(\Omega)s_L'(\Omega)}{m}}. \quad (6-4)$$

Ist der Verlustfaktor gering, so hat das System eine ausgeprägte Resonanz bei der kritischen Drehzahl  $\Omega_R$

$$\Omega_R = \sqrt{s_L'(\Omega)/m}, \quad (6-5)$$

deren Lage vom Verhältnis der Lagersteifigkeit zur Rotormasse  $s_L'/m$  bestimmt wird. Die komplexe Lagersteifigkeit  $s^*(\Omega)$  resultiert zum einen aus den thermo-viskoelastischen Materialeigenschaften des Elastomers und zum anderen aus der Statik des Einbaus der Gummiringe gemäß der bereits hergeleiteten Gleichung (5-1):

$$s_L^*(\Omega) = \bar{s}_L \pi D_m E^*(\Omega) = zk_L \pi D_m E'(\Omega)(1 + j\eta(\Omega)). \quad (5-1)$$

Für die Lage der Resonanz ist die Gestalt und Vorpresseung des Elastomerlagers in Verbindung mit dem frequenzabhängigen Werkstoffmodul verantwortlich. Der Verlustfaktor bei der Resonanzfrequenz bestimmt die Größe der Resonanzamplituden. Legt man die Frequenz und die Temperatur fest, so ist daraufhin eine geeignete Werkstoffauswahl zu treffen. Kennt man die Schwingfrequenz nicht, so lässt sich die Bewegungsgleichung dadurch lösen, indem man mit Hilfe innerer Freiheitsgrade die Frequenzabhängigkeit eliminiert. Das resultierende Gleichungssystem ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung und kann mit Standardverfahren gelöst werden. Dies wird hier exemplarisch für das System mit einem inneren Freiheitsgrad gezeigt.

### 6.1.2 Elastomerlager mit einem inneren Freiheitsgrad

Der folgende Abschnitt stellt qualitativ dar, wie eine geeignete Abstimmung der frequenzabhängigen Gummieigenschaften auf das Rotorverhalten erfolgt. Hierzu werden die Elastomerlager mit einem inneren Freiheitsgrad modelliert (Abbildung 6-1 (B)). Nach (5-9) folgt die Gleichgewichtsteifigkeit  $s_0$  des Elastomerlagers:

$$s_0 = \bar{s} \pi D_m E_0 \quad (6-6)$$

und für die Spontansteifigkeit  $s_{00}$  des Lagers gilt:

$$s_{00} = s_0 + s_1 = \bar{s} \pi D_m (E_0 + E_1). \quad (6-7)$$

Im Fall der Unwuchterregung bei konstanter Temperatur lauten die Bewegungsgleichungen in raumfesten Koordinaten mit (5-10) und (5-11) nach komplexer Zusammenfassung der inneren und äußeren Freiheitsgrade:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{r}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_1 \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{r}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 + s_1 & -s_1 \\ -s_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ r_i \end{pmatrix} = m \varepsilon_1 \Omega^2 \begin{pmatrix} e^{j\Omega t} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\beta}. \quad (6-8)$$

Die **homogene Lösung** der Bewegungsdifferentialgleichung folgt dem Ansatz

$$\mathbf{r}_h(t) = \hat{\mathbf{r}}_h e^{\lambda t}. \quad (6-9)$$

Um die Anzahl der Parameter zu reduzieren, werden folgende Abkürzungen eingeführt. Das Materialsteifigkeitsverhältnis  $\sigma_M$

$$\sigma_M = \frac{s_0 + s_1}{s_0} = \frac{E_0 + E_1}{E_0} \quad (6-10)$$

beschreibt die Relation von Spontanmodul zum Gleichgewichtsmodul. Dieses Verhältnis kann anschaulich als der Anstieg der Steifigkeit pro Frequenzdekade aufgefasst werden. Mit der Eigenkreisfrequenz des Rotors in vollständig relaxierten Gummi

$$\omega_0 = \sqrt{s_0 / m} \quad (6-11)$$

werden die Relaxationszeit

$$\tau_\omega = \tau_1 \omega_0 \quad (6-12)$$

und die Eigenwerte

$$\chi_\omega = \chi / \omega_0 \quad (6-13)$$

dimensionslos gemacht. Somit erhält man das charakteristische Polynom

$$\chi_\omega^3 + \frac{1}{\tau_\omega} \chi_\omega^2 + \sigma_M \chi_\omega + \frac{1}{\tau_\omega} = 0, \quad (6-14)$$

dessen Lösung zwei konjugiert komplexe und einen rein reellen Eigenwert liefert. Aus den konjugiert komplexen Eigenwerten folgen die bezogene Schwingfrequenz  $\omega/\omega_0$

$$\bar{\omega} = \omega / \omega_0 = \sqrt{\text{Re}(\chi_\omega)^2 + \text{Im}(\chi_\omega)^2} \quad (6-15)$$

und das Dämpfungsmaß  $D$

$$D = \frac{-\operatorname{Re}(\chi_\omega)}{\sqrt{\operatorname{Re}(\chi_\omega)^2 + \operatorname{Im}(\chi_\omega)^2}} \quad (6-16)$$

für den materiellen äußeren Freiheitsgrad.

Abbildung 6-2 (links) zeigt die Wurzelortskurve der drei Eigenwerte, von denen einer rein reell und zwei konjugiert komplex zueinander sind. Die bezogene Relaxationszeit  $\tau_\omega$  kennzeichnet die Abstimmung des Rotors auf die dämpfenden Lagereigenschaften.  $\tau_\omega$  ist als Bahnparameter in der Wurzelortskurve enthalten.

Abbildung 6-2 (rechts) zeigt den Verlauf der Dämpfung  $D$  und der Schwingfrequenz  $\omega$ . Verläuft die Relaxation des Gummis im Lager schnell, bzw. dauert der Schwingungsvorgang ausreichend lange, so schwingt das System mit der Bezugsfrequenz des relaxierten Systems  $\omega_0$ . Relaxiert das Material jedoch langsamer, so greifen die Mechanismen der Steifigkeitszunahme und Dämpfung, die aus dem thermo-viskoelastischen Materialverhalten herrühren.

Wenngleich der innere Freiheitsgrad in diesem Modell ohne Masse ist und somit nicht schwingt, wird der Verlauf des berechneten rein reellen Eigenwertes in Abbildung 6-2 (rechts) gezeigt. Das Dämpfungsmaß  $D$  erreicht interessanterweise genau dann sein Maximum, wenn der Betrag dieses „inneren“ Eigenwertes den Wert der Schwingfrequenz  $\omega$  annimmt. Dies ist eine mathematische und zugleich anschauliche Erklärung für den Glasübergang.

Im weiteren Verlauf nimmt die Dämpfung ab, die Materialsteifigkeit wächst jedoch weiter an, bis der Wert  $s_0 + s_1$  erreicht ist und das System mit der Frequenz  $\omega = \sqrt{(s_1 + s_2)/m}$  schwingt. Die Größe des maximalen Dämpfungswertes hängt direkt von dem durch das Verhältnis  $\sigma_M$  definierten Steifigkeitszuwachs ab. Der Wert  $\sigma_M = 4$  repräsentiert z.B. ein Material mit hoher Dämpfung.

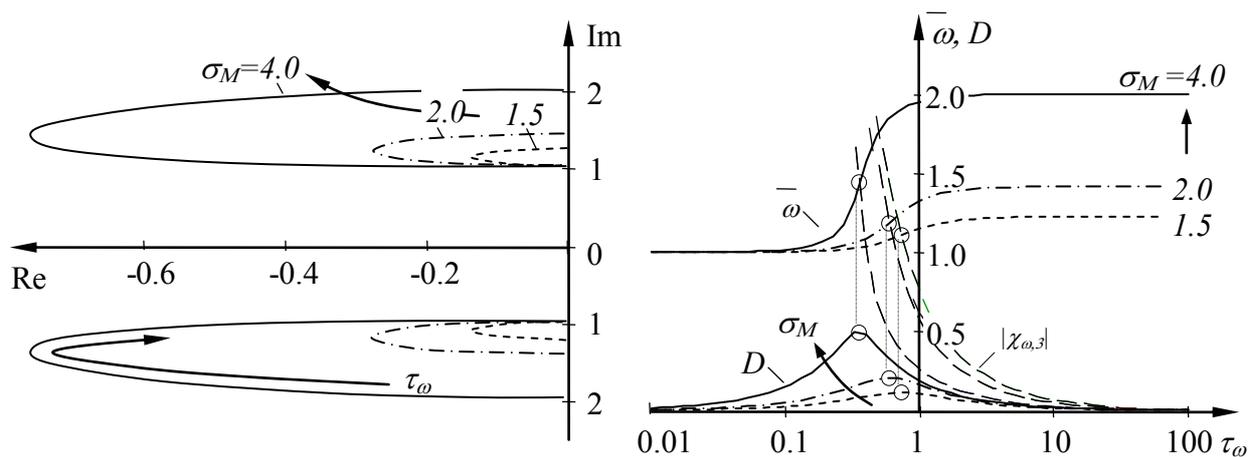


Abbildung 6-2: Einfluss des Steifigkeitsgradienten  $\sigma_M$  und des Abstimmungsparameters  $\tau_\omega$  auf den Verlauf der konjugiert komplexen Eigenwerte in der Wurzelortskurvendarstellung (links) und auf die Verlauf der Schwingfrequenz  $\omega$  und Dämpfung  $D$  nach (6-15) bzw. (6-16) (rechts).

**Unwuchtantwort:** Auch bei noch so geringer Dämpfung klingen die freien Schwingungen nach geraumer Zeit ab und es verbleibt nur die partikuläre Lösung. Diese erhält man durch den Ansatz nach Art der rechten Seite:

$$\mathbf{r}_p = \hat{\mathbf{r}}_p e^{j(\Omega t + \beta)}. \quad (6-17)$$

Die Auslenkungen  $\mathbf{r}$  werden auf die Exzentrizität  $\varepsilon$  bezogen,

$$\mathbf{r}_\varepsilon = \mathbf{r} / \varepsilon_1. \quad (6-18)$$

Mit den Abkürzungen (6-10) bis (6-12) und der Beziehung für eine dimensionslose Erregerfrequenz

$$\bar{\Omega} = \Omega / \omega_0 \quad (6-19)$$

folgt die partikuläre Lösung der Bewegungsgleichung (6-8) aus dem algebraischen Gleichungssystem:

$$\left[ \begin{pmatrix} -\bar{\Omega}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -j(1-\sigma_M)\tau_\omega\bar{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_M & 1-\sigma_M \\ 1-\sigma_M & -(1-\sigma_M) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \hat{r}_\varepsilon \\ \hat{r}_{\varepsilon_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Omega}^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6-20)$$

Nach der Invertierung erhält man zwei Lösungen, von denen uns nur die Antwortamplitude des äußeren Freiheitsgrades interessiert:

$$\hat{r}_\varepsilon(\sigma_M, \tau_\omega, \bar{\Omega}) = \frac{\bar{\Omega}^2}{\frac{1 + \sigma_M(\tau_\omega\bar{\Omega})^2}{1 + (\tau_\omega\bar{\Omega})^2} - \bar{\Omega}^2 + j \frac{\sigma_M - 1}{\frac{1}{\tau_\omega\eta_0} + \tau_\omega\bar{\Omega}}}. \quad (6-21)$$

Im Gegensatz zu (6-4) enthält (6-21) durch die Verwendung eines inneren Freiheitsgrades keine frequenzabhängigen Koeffizienten mehr und die Resonanzfrequenz  $\Omega_R$  wird direkt aus den konstanten Parametern des Systems gewonnen:

$$\bar{\Omega}_R = \frac{\Omega_R}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_M - 1/\tau_\omega^2 + \sqrt{(\sigma_M - 1/\tau_\omega^2)^2 + 4/\tau_\omega^2}}. \quad (6-22)$$

Den Verlauf der Schwingungsamplituden bei der Resonanzdurchfahrt zeigt Abbildung 6-3.

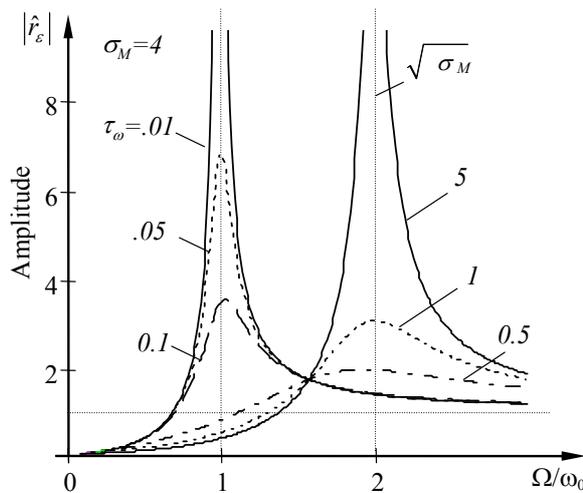


Abbildung 6-3: Schwingungsamplituden bei der Resonanzdurchfahrt des unwuchterregten, starren Rotors in Elastomerlagern bei unterschiedlichen Abstimmungsverhältnissen  $\tau_\omega = \tau_1\omega_0$  auf ein fiktives hoch dämpfendes Elastomermaterial mit  $\sigma_M = 4$ .

Mit  $\sigma_M = 4$  wurde ein Material mit hohem Dämpfungsmaximum ausgewählt. Je nach Abstimmung der Schwingfrequenz auf das Relaxationsverhalten des Gummis  $\tau_\omega$  werden die Amplituden unterschiedlich stark gedämpft. Für geringe  $\tau_\omega$  liegt die Resonanz in der Nähe der Eigenfrequenz eines Systems in vollständig relaxierten Gummis – hier treten hohe Amplituden auf. Durch geschickte Materialauswahl oder optimierte Abstimmung des Schwingverhaltens kann eine starke Reduktion der Amplituden erzielt werden. Hierfür muss bei der Resonanz die *Periodendauer im Bereich der charakteristischen Relaxationszeit* liegen, da der *Verlustfaktor des Elastomerlagers dort am höchsten* ist.

## 6.2 Lavalrotor

Der Lavalrotor wird hier verwendet, um die grundlegenden Phänomene zu erklären, die sich später für Rotoren mit mehreren Freiheitsgraden verallgemeinern lassen (Abbildung 6-4). In Erweiterung des starren Rotors besitzt der Lavalläufer nun eine elastische Welle mit der Steifigkeit  $s_w$ . Der Abstimmung der Lagersteifigkeit auf die Wellenelastizität kommt im Folgenden besondere Bedeutung zu.

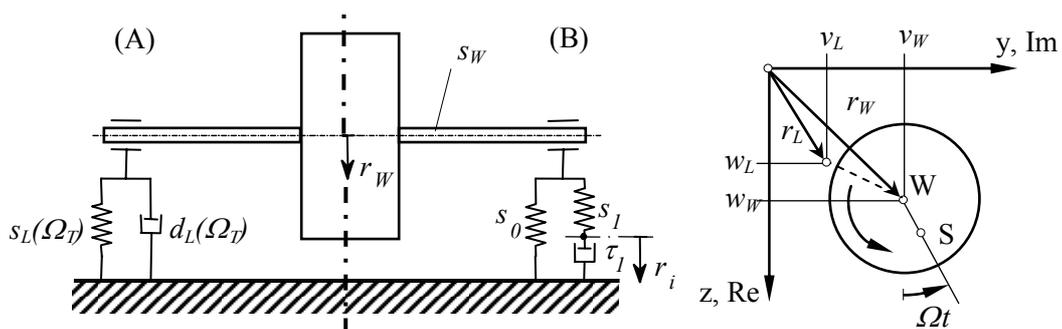


Abbildung 6-4: Lavalrotor in isotropen Elastomerlagern. Lagerung (A) mit den frequenzabhängigen Koeffizienten oder (B) als Standardkörper mit 3 konstanten Parametern und einem inneren Freiheitsgrad  $r_i$ .

Wie beim starren Läufer aus Abbildung 6-1 wird Isotropie und Symmetrie vorausgesetzt, die Freiheitsgrade werden nach (6-1) komplex zusammengefasst. So lauten die Bewegungsgleichungen des Lavalläufers in Elastomerlagern mit frequenzabhängigen Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten bei Unwuchterregung [1]:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}_w \\ \ddot{r}_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_L(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_w \\ \dot{r}_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_w & -s_w \\ -s_w & s_w + s_L(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_w \\ r_L \end{pmatrix} = m \varepsilon_1 \Omega^2 \begin{pmatrix} e^{j\Omega t} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6-23)$$

Wenden wir uns zuerst der Formulierung mit inneren Freiheitsgraden zu, welche vorteilhaft zur homogenen Lösung der Bewegungsgleichung verwendet wird.

### 6.2.1 Homogene Lösung der Bewegungsgleichungen mit inneren Freiheitsgraden

Im Unterschied zum starren Läufer kommt neben der Bewegung des Wellenmittelpunktes  $r_w$  der zusätzliche „halbe“ Freiheitsgrad des Wellenendes  $r_L$  hinzu, welchem keine Masse zugeordnet ist. Die Bewegungsgleichungen für das Lagermodell mit einem inneren Freiheitsgrad (Abbildung 6-1, B) lauten nun:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}_W \\ \ddot{r}_L \\ \ddot{r}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_W \\ \dot{r}_L \\ \dot{r}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_W & -s_W & 0 \\ -s_W & s_W + s_0 + s_1 & -s_1 \\ 0 & -s_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_W \\ r_L \\ r_i \end{pmatrix} = m \varepsilon_1 \Omega^2 \begin{pmatrix} e^{j\Omega t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6-24)$$

Als Bezugskreisfrequenz für die bezogenen Eigenwerte  $\lambda_\omega$  dient anders als in Gleichung (6-13) jetzt die Laval-Frequenz des konservativen Systems in starren Lagern:

$$\omega_L = \sqrt{s_W / m}. \quad (6-25)$$

Zusätzlich zu dem Steifigkeitsverhältnis  $\sigma_M$  des Materials (6-10) wird das Verhältnis  $\sigma_W$  der Steifigkeit der Welle  $s_W$  zur Relaxationssteifigkeit  $s_0$  des Lagers eingeführt:

$$\sigma_W = s_W / s_0. \quad (6-26)$$

Die Lösung des Eigenwertproblems führt mit dem Ansatz (6-9) auf das charakteristische Polynom:

$$\chi_\omega^3 + \frac{1}{\tau_\omega} \frac{\sigma_W + 1}{\sigma_W + \sigma_M} \chi_\omega^2 + \frac{\sigma_M}{\sigma_W + \sigma_M} \chi_\omega + \frac{1}{\tau_\omega} \frac{1}{\sigma_W + \sigma_M} = 0. \quad (6-27)$$

Die Wurzelortskurve der komplexen Eigenwerte in Abbildung 6-5 weist Ähnlichkeiten mit jener des starren Rotors von Abbildung 6-2 auf. Jedoch ist hier die Abstimmung der Wellensteifigkeit auf die Lagersteifigkeit  $\sigma_W$  ausschlaggebend für die Lage der Eigenfrequenzen und das Maß der Dämpfung. Das Steifigkeitsverhältnis des Materials wurde mit  $\sigma_M = 4$  festgelegt, was zu einem hohen Dämpfungsmaximum führt (vgl. Abbildung 6-2).

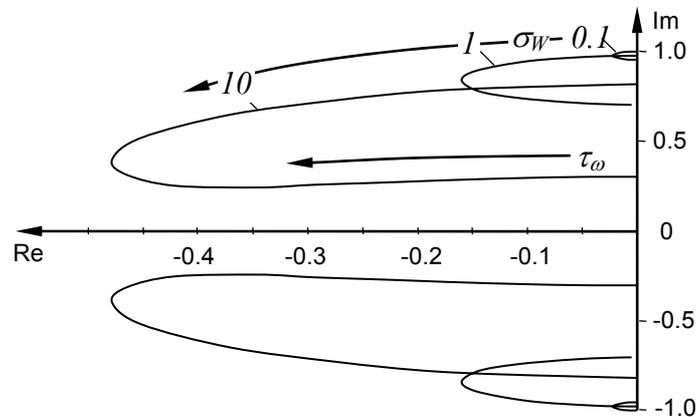


Abbildung 6-5: Wurzelortskurve des elastomergelagerten Lavalläufers bei Modellierung mit einem inneren Lager-Freiheitsgrad. Einfluss des Welle-Lager-Steifigkeitsverhältnisses  $\sigma_W$  auf Schwingfrequenz und Dämpfung bei gegebenem Materialfaktor  $\sigma_M = 4$ .

Bleibt die Wellensteifigkeit mit  $\sigma_W = 0.1$  klein bzw. ist das Lager zehnmal steifer als die Welle, dann verschwindet die Dämpfungswirkung des Elastomers und das System schwingt nahezu in der Laval-Frequenz. Ist die Welle genauso nachgiebig wie das Lager ( $\sigma_W = 1$ ), dann verlagern sich die Eigenwerte dichter an die reale Achse und die Frequenz sinkt. Jetzt kommt es auf die Abstimmung von Rotorfrequenz und Zeitkonstante des Elastomerlagers  $\tau_\omega$  an, um maximale Dämpfung zu erhalten. Besonders hohe Dämpfungswerte sind jedoch nur für hohe Werte von  $\sigma_W$  erreichbar, also wenn das Elastomerlager sehr nachgiebig gegenüber der Lavalwelle ist. Die Eigenfrequenzen des Systems fallen dann entsprechend niedrig aus.

Um das viskoelastische Verhalten quantitativ richtig zu erfassen, ist das verallgemeinerte Maxwell-Modell des Lagers nach Abbildung 5-1 mit  $2N+1$  Parametern zu verwenden. Die Bewegungsgleichungen werden nach komplexer Zusammenfassung der inneren Freiheitsgrade  $y_n^* = y_w + jy_v$  analog zum 3-Parameter-Modell (6-24) mit (5-10) und (5-11) aufgebaut:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_w \\ \ddot{r}_L \\ \ddot{y}_1^* \\ \vdots \\ \ddot{y}_N^* \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_N \tau_N & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_w \\ \dot{r}_L \\ \dot{y}_1^* \\ \vdots \\ \dot{y}_N^* \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} s_w & -s_w & \cdots & 0 \\ -s_w & s_w + \sum s_n & -s_1 & -s_N \\ \vdots & -s_1 & s_1 & \vdots \\ 0 & \cdots & -s_N & s_N \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} r_w \\ r_L \\ y_1^* \\ \vdots \\ y_N^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6-28)$$

Das System aus 2 gekoppelten Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten (6-23) wurde somit auf ein System aus  $2+N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten überführt. Die Lösung des Eigenwertproblems und die Stabilitätsanalyse sind nun mit Standardverfahren wie QR-Zerlegung u.a. möglich.

### 6.2.2 Unwuchtantwort der Formulierung mit komplexer Steifigkeit

Bei bekannter Anregungsfrequenz lassen sich die Bewegungsgleichungen in der kompakteren Form von (6-23) lösen. Mit dem Ansatz nach Art der rechten Seite erhält man das algebraische Gleichungssystem:

$$\left[ -\Omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_w & -s_w \\ -s_w & s_w + s_L'(\Omega)(1 + j\eta(\Omega)) \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \hat{r}_w \\ \hat{r}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\varepsilon_1 \Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6-29)$$

Wir führen nun das Verhältnis  $\sigma_L$  der Lagersteifigkeit  $s_w$  zur Wellensteifigkeit  $s_L$

$$\sigma_L = s_L / s_w \quad (6-30)$$

und die auf die Laval-Frequenz des starr gelagerten Läufers bezogene Anregungsfrequenz  $\bar{\Omega}$

$$\bar{\Omega} = \Omega / \omega_L \quad (6-31)$$

ein und normieren ferner die Amplituden des Rotors und des Lagers auf die Exzentrizität. Für die Rotoramplituden  $r_{\varepsilon w} = \hat{r}_w / \varepsilon_1$  erhält man:

$$r_{\varepsilon w} = \frac{\bar{\Omega}^2}{1 - \frac{1 + \sigma_L}{(1 + \sigma_L)^2 + (\eta\sigma_L)^2} \bar{\Omega}^2 + j \frac{\eta\sigma_L}{(1 + \sigma_L)^2 + (\eta\sigma_L)^2}}. \quad (6-32)$$

Abbildung 6-6 (links) zeigt den Verlauf der Rotoramplitude bei festgelegtem Verlustfaktor aber mit unterschiedlichen Lagersteifigkeiten. Von besonderem Interesse ist hier die Lage und Größe der Amplitudenmaxima. Je nachgiebiger die Elastomerlagerung ist, desto geringer werden die Amplituden des Rotors in der Resonanz. Gleichermaßen verschiebt sich auch die Resonanzstelle zu kleineren Frequenzen hin.

Die Auflösung des Gleichungssystems (2-29) liefert analog zu (6-32) die Amplitude des Wellenendes  $r_{\varepsilon L}$ . Zwischen der Rotor- und der Lageramplitude besteht unabhängig von der Erregerfrequenz das Verhältnis:

$$r_{\varepsilon L} = r_{\varepsilon W} \frac{1}{1 + \sigma_L(1 + i\eta)}. \quad (6-33)$$

Der Verlauf der Lageramplituden ist in Abbildung 6-6 (rechts) eingezeichnet. Im Vergleich zur Amplitude in Rotormitte bleibt die maximale Lageramplitude immer kleiner oder gleich. Bei dem gewählten Verlustfaktor von  $\eta = 0.1$  ist die *maximale Lageramplitude unabhängig vom Steifigkeitsverhältnis  $\sigma_L$  nahezu konstant*.

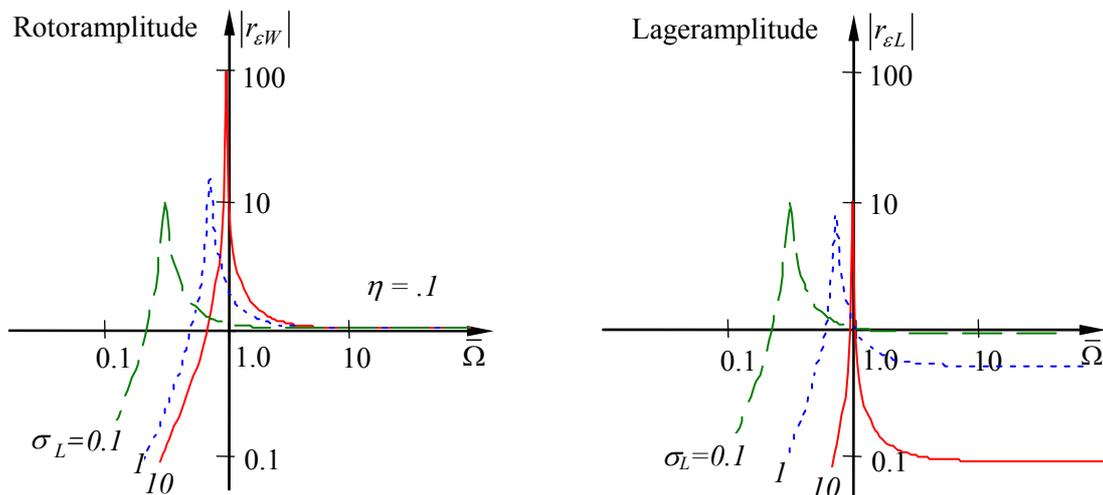


Abbildung 6-6: Normierte Rotoramplitude (links) und normierte Lageramplitude (rechts) für Elastomerlager mit Verlustfaktor  $\eta = 0.1$  und verschiedenen relativen Lagersteifigkeiten  $\sigma_L$ .

Die in Abbildung 6-6 dargestellten Kurven beruhen auf der Annahme, dass der Verlustfaktor über mehrere Dekaden hinweg konstant bleibt. Dies ist für reale Elastomere im Allgemeinen nicht erfüllt. Da bei bekannter Anregungsfrequenz jedoch der Verlustfaktor aus den Masterkurven abgelesen und die tatsächliche Rotoramplitude bestimmt werden kann, tut dies den hier getroffenen Aussagen keinen Abbruch.

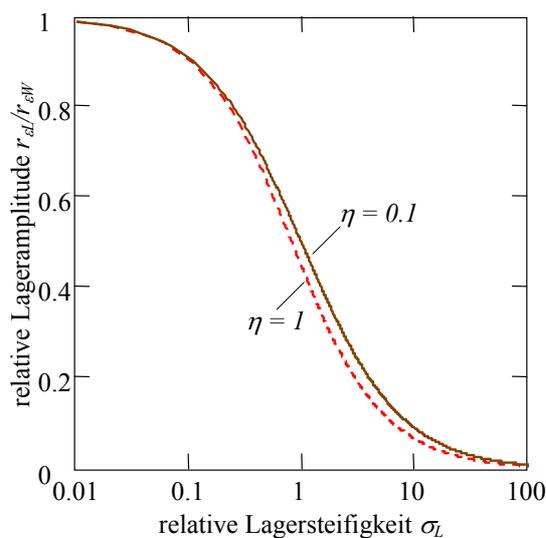


Abbildung 6-7: Relative Lageramplitude als Funktion von Lagersteifigkeit und Verlustfaktor (6-33).

Den Zusammenhang zwischen von Lageramplitude und Lagersteifigkeit illustriert die Abbildung 6-7. Schon durch einen geschärften Blick auf Gleichung (6-33) wird deutlich, dass mit

nachgiebigen Gummilagern ( $\sigma_L \rightarrow 0$ ) die Amplituden am Wellenende genauso groß sind, wie an der Scheibe in der Rotormitte. Mit steiferen Lagern gehen die Lageramplituden  $r_L$  im Verhältnis zur Rotoramplitude  $r_W$  zurück, der Einfluss des Verlustfaktors auf dieses Verhältnis ist nur zweitrangig.

Wir wollen nun gleichzeitig den Einfluss der Lagerdämpfung  $\eta$  und der Lagersteifigkeit  $\sigma_L$  darstellen und beschränken uns im folgenden Abschnitt auf die Amplituden in der Resonanz.

### 6.2.3 Verhalten in der Resonanz

In der Resonanz verschwindet der Realteil der Schwingungsantwort (6-32) und das System schwingt mit der dimensionslosen Resonanzfrequenz  $\bar{\Omega}_R = \Omega_R / \omega_L$ :

$$\bar{\Omega}_R = \sqrt{1 - \frac{1 + \sigma_L}{(1 + \sigma_L)^2 + (\eta \sigma_L)^2}}. \quad (6-34)$$

Der Parameter  $\bar{\Omega}_R$  beschreibt die Lage der Resonanz in Bezug auf die Laval-Frequenz des Rotors in starren Lagern. Für die Resonanzamplitude  $r_{\varepsilon W.R}$  ergibt sich nach Einsetzen von (6-34) in (6-32) der Ausdruck:

$$r_{\varepsilon W.R} = \frac{1 + \sigma_L(1 + \eta^2)}{\eta}. \quad (6-35)$$

Die Resonanzamplituden in der Lagerebene resultieren ferner aus (6-35) und (6-33):

$$r_{\varepsilon L.R} = \frac{1 + \sigma_L(1 + \eta^2)}{\eta[1 + \sigma_L(1 + j\eta)]}. \quad (6-36)$$

Die folgende Abbildung 6-8 zeigt die auf die Unwucht bezogenen Resonanzamplituden des Rotors und des Wellenendes als Funktion der relativen Steifigkeit (links) und des Verlustfaktors des Lagers (rechts).

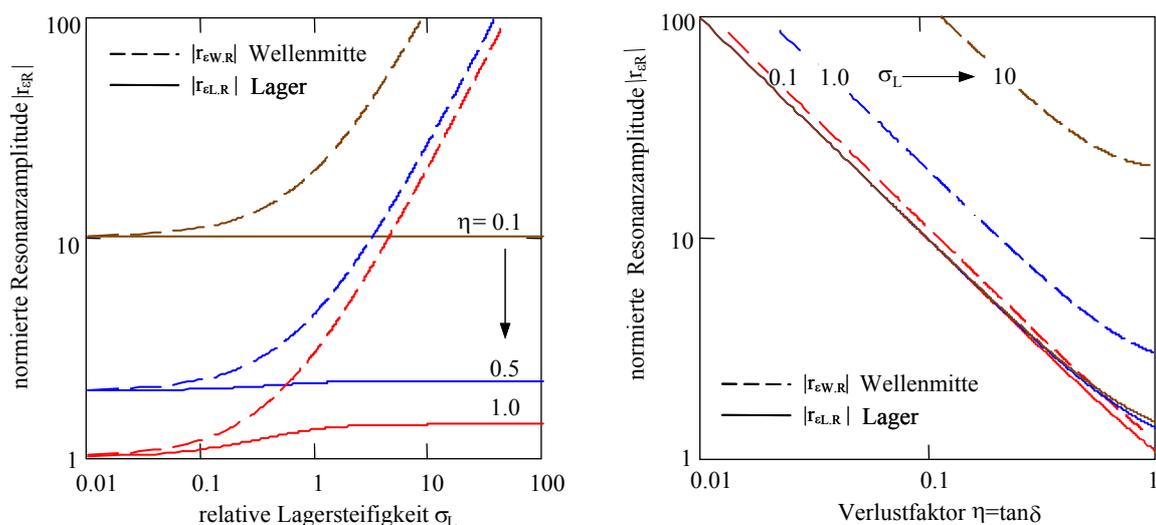


Abbildung 6-8: Unwuchtbezogene Resonanzamplituden des Rotors und des Lagerzapfens als Funktion der relativen Steifigkeit (links) und des Verlustfaktors (rechts) des Lagers.

Die unwuchtbezogene Rotorauslenkung in der Resonanz  $r_{\varepsilon W.R}$  hängt sowohl vom Verlustfaktor  $\eta$  als auch von der relativen Steifigkeit  $\sigma_L$  des Lagers ab. Eine hohe Lagersteifigkeit verhindert quasi, dass die Lagerdämpfung sich entfalten kann und geht mit hohen Resonanzamplituden der Rotorscheibe einher. Bleibt diese Steifigkeit hingegen gering, so bestimmt allein das Maß der Lagerdämpfung  $\eta$  die Höhe der Resonanzamplituden sowohl in der Wellenmitte als auch am Lager. Bei nicht allzu starker Lagerdämpfung  $\eta < 0.5$  betragen die unwuchtbezogenen Resonanzamplituden in der Lagerebene unabhängig von der Lagersteifigkeit etwa das Reziproke des Verlustfaktors.

### 6.3 Optimierte Auslegung des Lavalrotors

In diesem Abschnitt wird die Lösung der Bewegungsgleichung in den Kontext einer Entwurfsaufgabe gebracht. Ziel soll es sein, die Resonanzamplituden eines Lavalrotors nach Abbildung 6-4 zu minimieren und dabei die Werkstoffeigenschaften des Lagers optimal zu nutzen. Wichtigste Systemparameter sind hier das Verhältnis von Lager- zu Wellensteifigkeit  $\sigma_L = s_L/s_W$ , der Verlustfaktor  $\eta$  des Werkstoffs und das Verhältnis der kritischen Drehzahl  $\Omega_R$  zur Lavalfrequenz  $\omega_L$ . Der Bezug zur dimensionsbehafteten Wirklichkeit wird über die Rotormasse  $m$  und durch die tatsächliche Schwingfrequenz  $f = \Omega/2\pi$  hergestellt. Letztere legt gemeinsam mit der Temperatur die relevanten Werkstoffeigenschaften fest.

#### 6.3.1 Einfluss der Rotor-Lagerabstimmung

In Analogie zum Ein-Massenschwinger führen wir eine Systemdämpfung  $D$  als Zielfunktion ein, welche umgekehrt proportional zur Rotoramplitude in der Resonanz  $r_{\varepsilon W.R}$  ist. Aus (6-35) folgt nun:

$$D = \frac{1}{2r_{\varepsilon W.R}} = \frac{\eta}{2} \frac{1}{1 + \sigma_L(1 + \eta^2)}. \quad (6-37)$$

Niedrige Resonanzamplituden bzw. hohe Systemdämpfung werden nur dann erreicht, wenn einerseits die Lagersteifigkeit klein gegenüber der Wellensteifigkeit und andererseits der Verlustfaktor  $\eta$  ausreichend hoch ist. Das erforderliche Steifigkeitsverhältnis  $\sigma_L$  folgt nach Umformung von (6-34) zu

$$\sigma_L = \frac{s_L}{s_W} = \frac{1 - 2\bar{\Omega}_R^2 - \sqrt{1 - 4\eta^2\bar{\Omega}_R^2(\bar{\Omega}_R^2 - 1)}}{2(1 + \eta^2)(\bar{\Omega}_R^2 - 1)}. \quad (6-38)$$

Setzt man den gewonnenen Ausdruck in (6-37) ein, so erhält man die damit erreichbare Systemdämpfung:

$$D = \frac{\eta(1 - \bar{\Omega}_R^2)}{1 + \sqrt{1 - 4\eta^2\bar{\Omega}_R^2(\bar{\Omega}_R^2 - 1)}}. \quad (6-39)$$

Diese erreichbare Systemdämpfung  $D$  und das dafür erforderliche Steifigkeitsverhältnis  $\sigma_L$  hängen von der Werkstoffdämpfung und der Resonanzfrequenz  $\Omega_R/\omega_L$  ab. Die Darstellung dieser Zusammenhänge enthält Abbildung 6-9. Tabelle 6.1 gibt dazu eine Übersicht der möglichen Lager-

Rotor-Abstimmungen mit Beispielwerten für einen Verlustfaktor  $\eta = 0.2$ . Zur Erläuterung der oben gezeigten Fallunterscheidung werden zunächst die Grenzfälle betrachtet.

**Fall A:** Die Konfigurationen im Auslegungsdiagramm ganz links repräsentieren einen Rotor mit quasi-starrer Welle. Dieser „starre Rotor“ erzielt mit einer Systemdämpfung  $D_{max} = \eta/2$  die beste Dämpfungsausbeute.

**Fall D:** Der Lavalrotor in quasi-starren Lagern ist als entgegengesetzter Grenzfall in diesem Diagramm ganz rechts bei einem Resonanzverhältnis  $\Omega_R \approx \omega_L$  zu finden. Auch bei sehr großem Verlustfaktor des Lagers bleibt der Rotor in diesem Fall nur schwach gedämpft.

In der Regel wird man sich für relativ weiche (**Fall B**) oder relativ steife Lager (**Fall C**) entscheiden. Mit zunehmend weicherer Lagerung sinkt die Resonanzfrequenz  $\Omega_R$ , und die Systemdämpfung bei gegebenem Verlustfaktor steigt. Die Grenze zwischen Fall B und C verläuft dort, wo das Elastomerlager genauso steif wie die Rotorwelle ist ( $s_L/s_W = 1$ ). Wenn hier das Lager z.B. einen Verlustfaktor von  $\eta = 0.2$  aufweist, dann beträgt die Resonanzfrequenz  $\Omega_R$  etwa 70% der Lavalfrequenz  $\omega_L$  und die Systemdämpfung  $D$  erreicht 5%. Der Linie  $s_L/s_W = 1$  folgend nimmt mit steigendem Verlustfaktor auch die Systemdämpfung zu, und die Resonanzfrequenz verschiebt sich leicht nach rechts. Nimmt der Verlustfaktor bei gleich bleibendem  $s_L/s_W$  weiter zu ( $\eta > 1$ ), so wird praktisch keine weitere Amplitudenreduktion erzielt, im Gegenteil, die Systemdämpfung  $D$  kann sogar wieder kleiner werden. Da praktisch allen Elastomeren ein Verlustfaktor von  $\eta \geq 0.05$  zueigen ist, wird eine Systemdämpfung  $D \approx 1\%$  mit Gummilagern mühelos erzielt, solange das Lager nur ausreichend weich ist ( $\sigma_L < 1$ ).

Tabelle 6-1: Klassifizierung der Rotor-Lager Abstimmung gemäß Abbildung 6-9 und repräsentative Systemparameter bei gegebenem Verlustfaktor  $\eta = 0.2$ .

	A	B	C	D
	Quasi-starre Welle	Steife Welle, weiche Lager	Weiche Welle, steife Lager	Quasi starre Lager
$\eta = 0.2$				
$\sigma_L = s_L/s_W$	< 1/20	1/10 ... 1	1 ... 10	>10
$\Omega_R/\omega_L$	< 0.2	0.2 ... 0.7	0.7 ... 0.95	> 0.95
$D$	10%	10% ... 5%	5% ... 1%	<1%

### 6.3.2 Einfluss des Lagermaterials

Bis hierher bleibt unklar, welcher Verlustfaktor im Lager tatsächlich vorliegt und welcher E-Modul dazu gehört. Da in unserem Fall die Lagerdämpfung gleich der Werkstoffdämpfung ist, hängt der Verlustfaktor hier allein von der Wahl des Elastomers ab. Also wählt man aus den entwurfsbezogenen Masterkurven von Abbildung 3-13, die den Verlustfaktor und E-Modul für die relevanten Frequenzen und Temperaturen enthalten, einen geeigneten Werkstoff aus. Abbildung 6-10 zeigt exemplarisch die Materialeigenschaften des Elastomerlagers aus N674-70. Diese Materialeigenschaften haben eine gemeinsame primäre y-Achse mit dem Auslegungsdiagramm der Rotoreigenschaften von Abbildung 6-9. Mit der Masterkurve kommen die Achsen der Betriebsfrequenz  $f$  und des Speichermoduls  $E'$  hinzu. Der Verlustfaktor  $\eta(E')$  ist mit den Modulwerten  $E'(f, T)$  verknüpft.

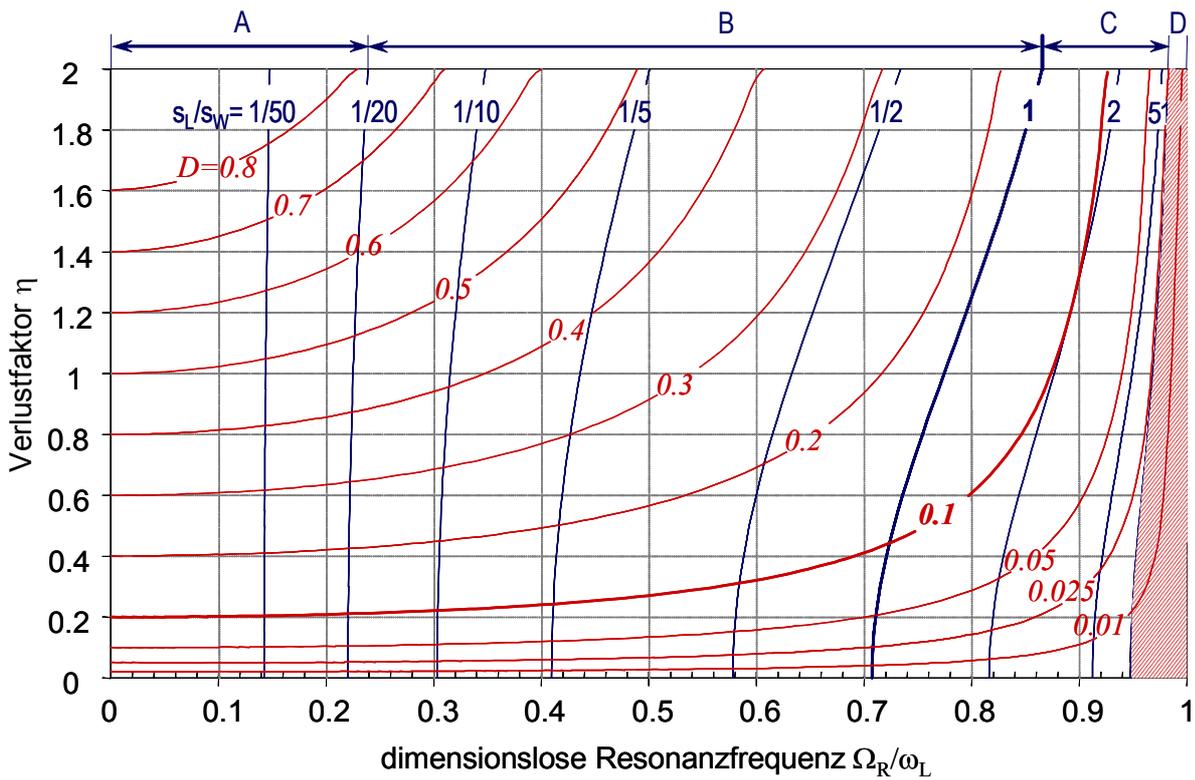


Abbildung 6-9: Auslegungsdiagramm des Lavalrotors: Erreichbare Systemdämpfung  $D$  und benötigtes Steifigkeitsverhältnis  $\sigma_L$  in Abhängigkeit von Resonanzabsenkung  $\Omega_R/\omega_L$  und Verlustfaktor  $\eta = \tan \delta$ .

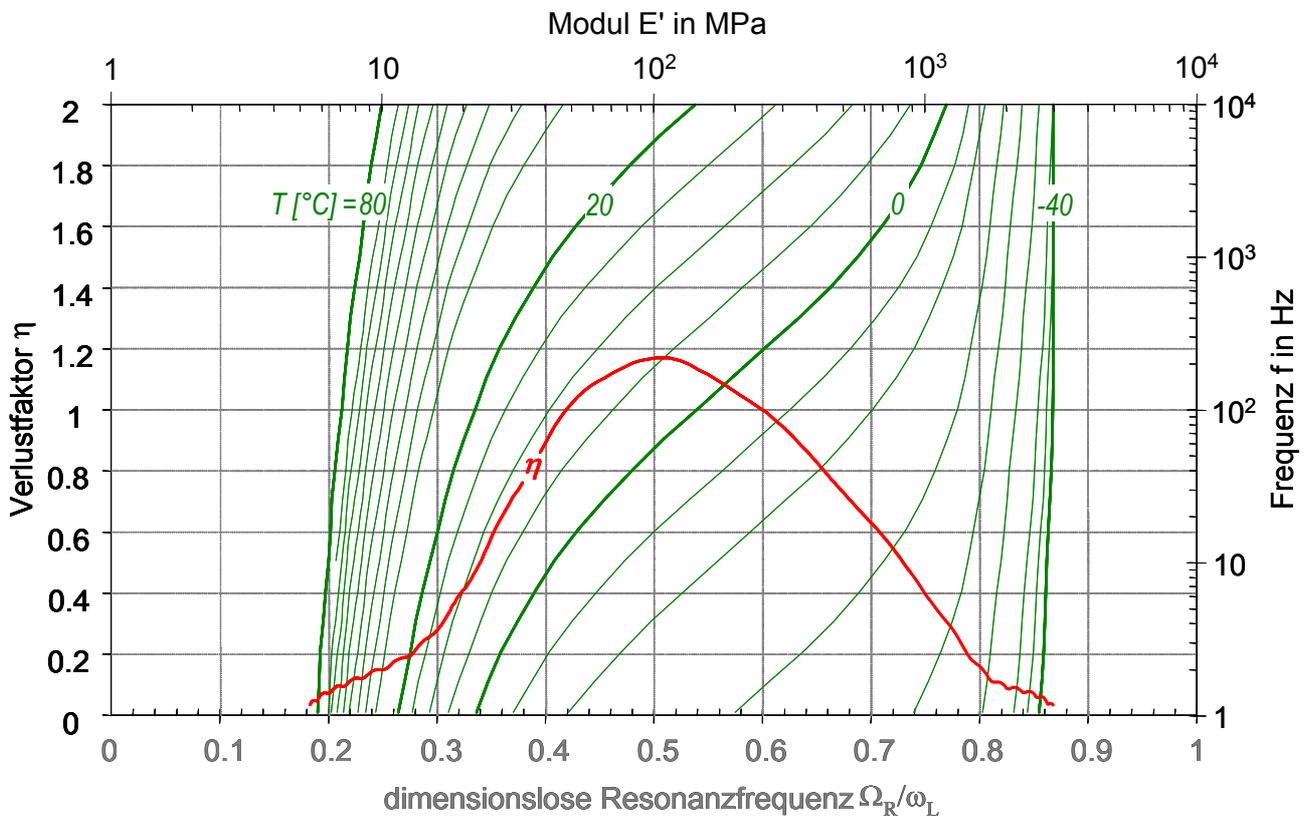


Abbildung 6-10: Materialsteifigkeit  $E'(f, T)$  und Verlustfaktor  $\eta(E'(f, T))$  des Elastomerlagers aus NBR N674-70. Entwurfsbezogene Darstellung der Masterkurve nach Abbildung 3-13.

### 6.3.3 Auslegungsdiagramm des Lavalrotors

Über diese gemeinsame Verlustfaktor-Achse werden die Diagramme der Rotor-Lagerabstimmung und die entwurfbezogene Masterkurve zu einem materialspezifischen Auslegungsdiagramm des Lavalrotors verknüpft. Das Auslegungsdiagramm Abbildung 6-11 ist somit eine Überlagerung der beiden Diagramme von Abbildung 6-9 und Abbildung 6-10. Damit stehen der erreichbaren Systemdämpfung und dem erforderlichen Steifigkeitsverhältnis die bei der jeweiligen Resonanzfrequenz und Betriebstemperatur vorhandenen Werte der Lagerdämpfung und der Steifigkeit des Lagermaterials gegenüber.

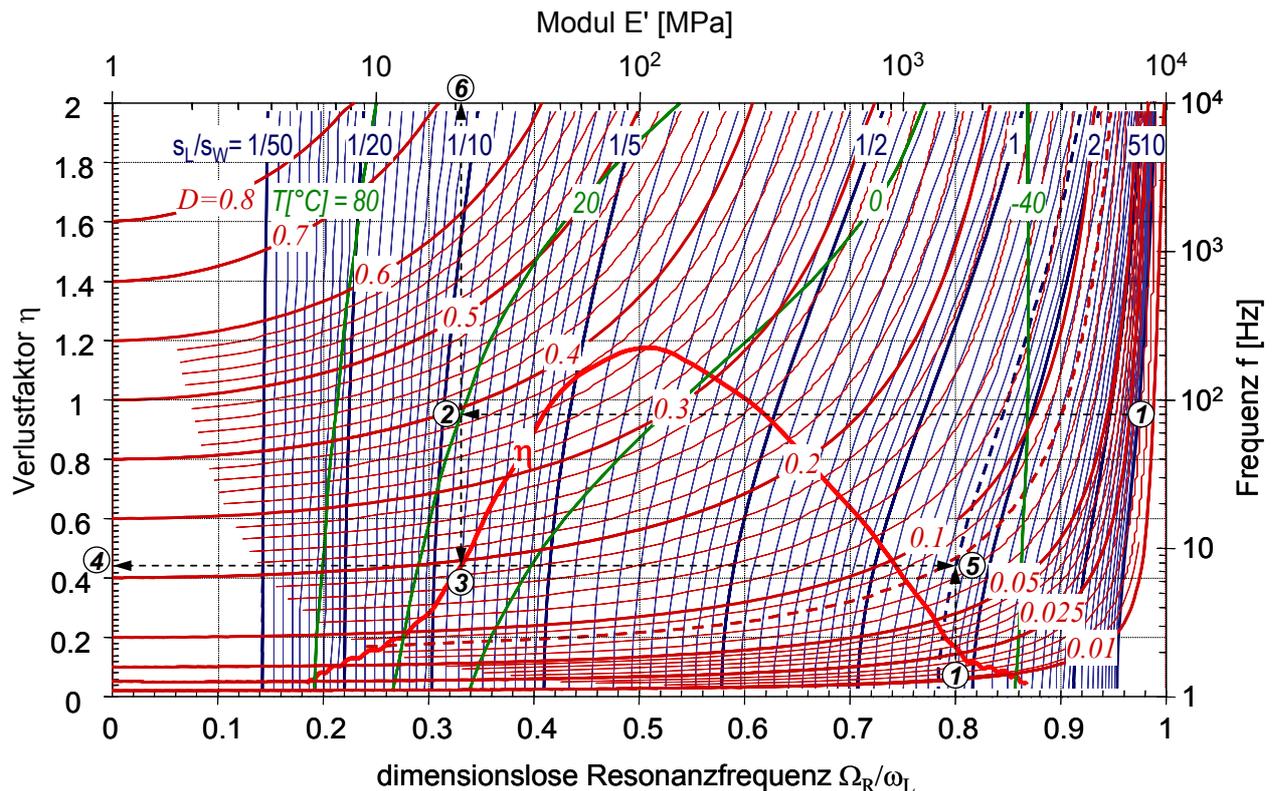


Abbildung 6-11: Auslegungsdiagramm des Lavalrotors in Elastomerlagern aus NBR N674-70. Beispielauslegung für einen Rotor mit der Resonanzfrequenz in starren Lagern bei 100 Hz und einer Resonanzabsenkung in Elastomerlagern auf 80 Hz im Betriebspunkt bei 20°C.

Die schwingungsgerechte Dimensionierung eines Elastomerlagers erfolgt so mithilfe eines einzigen Diagramms (Abbildung 6-11) und weniger Rechenschritte. Die eigentliche Lagergestaltung erfolgt dabei erst als letzter Schritt, wenn sichergestellt ist, dass mit dem gewählten Material die gewünschte Dämpfung bei der zugelassenen Resonanzabsenkung innerhalb des Bereichs der Betriebstemperaturen erreicht wird. Im Folgenden wird die Handhabung des Auslegungsdiagramms anhand eines Entwurfsbeispiels erläutert.

### 6.3.4 Handhabung und Auswertung des Auslegungsdiagramms - Beispielauslegung

Ein wälzgelagerter Lavalrotor, mit der Masse  $m = 15 \text{ kg}$  und der Resonanz  $f_L = 100 \text{ Hz}$ , soll durch zusätzliche Elastomerlager eine Systemdämpfung von  $D \geq 0.05$  erhalten, um die Amplituden in der Resonanz zu begrenzen. Die Steifigkeit der Lager ist dabei so zu bemessen, dass die kritische Drehzahl bei der Betriebstemperatur  $T_{\text{nein}} = 20^\circ\text{C}$  maximal auf 80% der Lavalfrequenz absinkt

( $\Omega_R/\omega_L = 0.8$ ). Auch bei Betriebstemperaturen von  $T_{min} = 0^\circ\text{C}$  und  $T_{max} = 80^\circ\text{C}$  muss der Rotor noch ausreichend gedämpft werden. Als Elastomer dient das Referenzmaterial N674-70.

Tabelle 6-2: Ablauf der Lagerauslegung mit Hilfe des Auslegungsdiagramms von Abbildung 6-11.

Schritt	Beschreibung	Beispielwerte
Auslegungsdiagramm	① Eingabe der Lavalfrequenz. Festlegung der zulässigen Resonanzabsenkung $\Omega_R/\omega_L$ bzw. der Resonanzfrequenz $f_R$ , der Nenntemperatur $T_{nenn}$ und der gewünschten Dämpfung $D$ .	$f_L = \omega_L/2\pi = 100 \text{ Hz}$ $\Omega_R/\omega_L = 0.8$ , d.h. $f_R = 80 \text{ Hz}$ $D \geq 5\%$ , $T_{nenn} = 20^\circ\text{C}$
	② Ermittlung des Schnittpunktes $E'(f_R, T_{nenn})$ .	
	③ Ermittlung des Schnittpunktes $\eta(E'(f_R, T_{nenn}))$ .	
	④ Ablesen des Verlustfaktors $\eta(E'(f_R, T_{nenn}))$ .	$\eta = 0.44$
	⑤ Ermittlung des Schnittpunktes von $\eta(E'(f))$ mit $\Omega_R/\omega_L$ , Ablesen der erreichbaren Systemdämpfung $D$ , Prüfen ob Dämpfung OK. Ablesen der erforderlichen relativen Lagersteifigkeit $s_L/s_W$ .	$D = 7.6\% \geq 5\%$ ist OK $s_L/s_W = 1.6$
	⑥ Ablesen des Speichermoduls $E'(f_R, T_{nenn})$ .	$E' = 21 \text{ MPa}$
⑦ Iterative Bestimmung der Resonanzabsenkung und der Dämpfung bei anderen Betriebstemperaturen.	$T_{min} = 0^\circ\text{C}$ $T_{max} = 80^\circ\text{C}$	
⑧ Lagerabschätzung. Eingabe der Rotormasse $m$ , Bestimmung des Referenzdurchmessers.	$m = 15 \text{ kg}$ $D_{ref} = 72 \text{ mm}$	
⑨ Lagergestaltung durch Festlegung von Durchmesser $D_m$ , Ringanzahl, Querschnittsform und Vorpressung.	$D_m, k_L, z$	

Die Sequenz der erforderlichen Schritte der Lagerauslegung ist in Tabelle 6-2 beschrieben. Die Punkte ① bis ⑥ korrespondieren mit den Schritten, die das Auslegungsdiagramm in Abbildung 6-11 enthält. Im gegebenen Fall wird mit einem Verlustfaktor von 0.44 eine Systemdämpfung  $D = 7.6\%$  erzielt. Die Dämpfungsforderung  $D \geq 5\%$  wurde also erreicht. Um diese Dämpfung bei der gegebenen Resonanzfrequenz  $\Omega_R/\omega_L$  zu verwirklichen, muss das Lager 1.6-mal so steif wie die Rotorwelle sein. Über dieses erforderliche  $\sigma_L$  ist die Lagersteifigkeit bei der Nenntemperatur festgelegt.

Nach Schritt ⑥ bleibt zu prüfen, ob dieses Lager auch bei anderen Temperaturen die gewünschte Dämpfung liefert. Diese Prüfung erfolgt iterativ, denn die Resonanzfrequenz kann man zunächst nur schätzen (Tabelle 6-3). Bei sinkenden Temperaturen wird sich die Steifigkeit des Lagers proportional zur Steifigkeit des Materials erhöhen. Für  $0^\circ\text{C}$  ist unser Elastomerlager also schon so steif, dass man die Resonanz bei knapp 100Hz vermutet. Der Speichermodul liegt also etwa bei 155 MPa und das neue Steifigkeitsverhältnis liegt bei  $s_L/s_W(0^\circ\text{C}) \approx 11.8$ . Mit dieser Vorgabe bestimmt man nun den Verlustfaktor, die Systemdämpfung sowie die Resonanzabsenkung. Dabei

Tabelle 6-3: Ergebnisse der Beispielauslegung bei verschiedenen Temperaturen.

Laval-Frequenz $f_L=100\text{Hz}$	$T_{nenn}$ 20°C	$T_{min}$ 0°C	$T_{max}$ 80°C
Resonanzfrequenz $f_R=\Omega_R/\omega_L$	80	98	58
Speichermodul $E'$ [MPa]	21	145	7
Verlustfaktor $\eta$	0,44	1,12	0,10
Steifigkeitsverhältnis $\sigma_L$	1,60	11,30	0,53
Erreichbare Dämpfung $D$ [%]	7,6	3,3	2,1

kann man wieder das Auslegungsdiagramm oder aber die Masterkurve und die Gleichungen (6-37) und (6-34) verwenden. Ist die berechnete Resonanzabsenkung nicht identisch mit jener, welche eingangs angenommen wurde, so muss die Iteration mit dem neuen Startwert wiederholt werden. Das Verfahren konvergiert jedoch sehr schnell.

Wie wir schon in [57] für dieses Beispiel zeigten, kommt es mit steigenden Temperaturen zu einer Abnahme des Verlustfaktors. Die einhergehende Steifigkeitsabnahme und somit auch die eintretende Resonanzverschiebung haben jedoch zur Folge, dass mit 3.3% immerhin noch etwas Systemdämpfung vorhanden ist. Kritischer fällt der Betrieb bei niedrigen Temperaturen aus. Hier kommt man in den Glasübergangsbereich des Werkstoffs. Obwohl eine sehr hohe Lagerdämpfung von  $\eta = 1.1$  vorherrscht, kommt aufgrund einer um den Faktor 8 größeren Lagersteifigkeit dem System nur eine Dämpfung von 2.1% zugute. Auch diese verspricht eine deutliche Reduktion der Resonanzamplituden, so dass wir mit dem Ergebnis zufrieden sind.

Erst jetzt, nachdem sichergestellt ist, dass das Lagermaterial die gewünschte Dämpfung liefert, kann man beginnen, die Größe des Lagers abzuschätzen. Dabei ist mit dem aus dem Auslegungsdiagramm abgelesenen Speichermodul  $E' = 21 \text{ MPa}$  die erforderliche Lagersteifigkeit  $s_L$  zu erzielen. Nimmt man zunächst die einfache Referenzkonfiguration des anvulkanisierten Rechteckrings mit quadratischem Querschnitt an, so gilt:

$$s_L = s_{ref} = \pi D_{ref} E' . \quad (4-42)$$

Bei bekannter Rotormasse  $m$  und der Lavalfrequenz mit  $\omega_L^2 = s_W/m$  beträgt die Lagersteifigkeit:

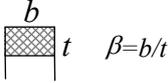
$$s_L = s_W \sigma_L = \sigma_L \omega_L^2 m . \quad (6-40)$$

(4-42) wird mit (6-40) nach dem Referenzdurchmesser aufgelöst:

$$D_{ref} = \frac{\sigma_L}{\pi E} \omega_L^2 m . \quad (6-41)$$

Mit  $D_{ref} = 72 \text{ mm}$  ist eine machbare Größenordnung für den Referenzdurchmesser eines Elastomerlagers erreicht. Dass diese Machbarkeit nicht immer gegeben ist, werden wir anhand anderer Materialien im Folgenden noch zeigen. Die gezeigte Beispielauslegung war also ein ausgesprochen guter Griff.

Tabelle 6-4: Beispielauslegung von Elastomerlagern gleicher Steifigkeit bezogen auf die Referenzkonfiguration mit quadratischem Querschnitt und Durchmesser  $D_{ref} = 72 \text{ mm}$ .

Quadratform	Rechteckform	O - Ringe
	 $\beta = b/t$	 $k_{0.N674} = 1.61$
$D_m = \frac{D_{ref}}{z}$	$D_m = \frac{1}{z} \frac{6 D_{ref}}{\beta (5 + \beta^2)}$	$D_m = \frac{1}{z} \frac{D_{ref}}{k_0 (2.5 \varepsilon_r + 0.1)}$
$z=2$ $D_m = 35.9 \text{ mm}$	$z=2$ $z=1$ $\beta = .67$ $\beta = 1.2$	$z=2$ $z=1$ $\varepsilon_r = 11\%$ $\varepsilon_r = 26\%$

Verfügt man nun, wie in unserem Fall, über Ringe mit einem mittleren Durchmesser von 58.9 mm oder ist der Bauraum auf einen festgelegten Durchmesser begrenzt, so ergeben sich die Gestaltungsmöglichkeiten wie in Tabelle 4-1 beschrieben. Die Ergebnisse für unser Beispiel zeigt Tabelle 6-4. Bei Rechteckringen mit Vorpressung gelingt die Invertierung der Berechnungsgleichungen nicht mehr. Das gesuchte Querschnittsverhältnis bzw. die erforderliche Vorpressung kann jedoch Abbildung 4-18 entnommen werden. Die Gestaltfunktion  $k_L$  hängt von

der Ringanzahl  $z$  ab und beträgt für  $D_m = 58.9 \text{ mm}$   $k_L = 1.22/z$ . Bei Verwendung eines O-Ring-Paars sind die Ringe beim Einbau radial 11% vorzupressen.

Neben dem Einsatz von Elastomerringen ist auch die Verwendung linearer anvulkanisierter Gummi-Metall-Federn gemäß Abschnitt 4.5 zu erwägen, insofern dafür die entsprechenden Masterkurven vorliegen.

### 6.3.5 Optimierte Werkstoffausnutzung

Das im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Beispiel ging von einer bestimmten Frequenzvorgabe aus. Das Material war zudem vorgegeben und die Systemdämpfung lag somit bereits fest. Ist man jedoch mit der Lage der Resonanzfrequenz flexibel und gilt es, die Amplituden nach allen Möglichkeiten zu minimieren, so kann für jede Temperatur ein optimales Resonanzverhältnis  $\Omega_R/\omega_L$  mit maximaler Systemdämpfung  $D$  gefunden werden. Auf die Werkstoffauswahl wird dabei erst später eingegangen.

Wiederholt man rechnerisch oder graphisch die Schritte (1) bis (5) der Auslegung für mehrere Frequenzen, so erhält man den Verlauf der erzielbaren Systemdämpfung als Funktion der Resonanzabsenkung, z.B. für das Referenzelastomer N674-70 (Abbildung 6-12). Jetzt kann man deutlicher erkennen, dass trotz fallender Verlustfaktoren des Werkstoffs mit der abgesenkten Resonanzfrequenz mehr Dämpfung aus dem Lager ins System gebracht wird. Je nachdem, welche Temperatur zugrunde liegt, ergibt sich ein unterschiedlicher Zugewinn an Dämpfung.

Während bei der Beispielauslegung für  $\Omega_R/\omega_L = 0.8$  bei  $20^\circ\text{C}$  ca. 7% Dämpfung erzielt wurden, kann man die Dämpfung etwa verdoppeln bzw. die Resonanzamplituden halbieren, wenn man die Resonanzfrequenz durch weichere Lager auf 40 Hz absenkt. Erfolgt die Auslegung auf höhere Betriebstemperaturen hin, so sinkt das Dämpfungsniveau bei  $\Omega_R/\omega_L = 0.8$  auf 1.69%. Auch hier bringt die Gestaltung nachgiebiger Lager bei  $\Omega_R/\omega_L = 0.4$  mit 3.65% mehr als das Doppelte an Dämpfung.

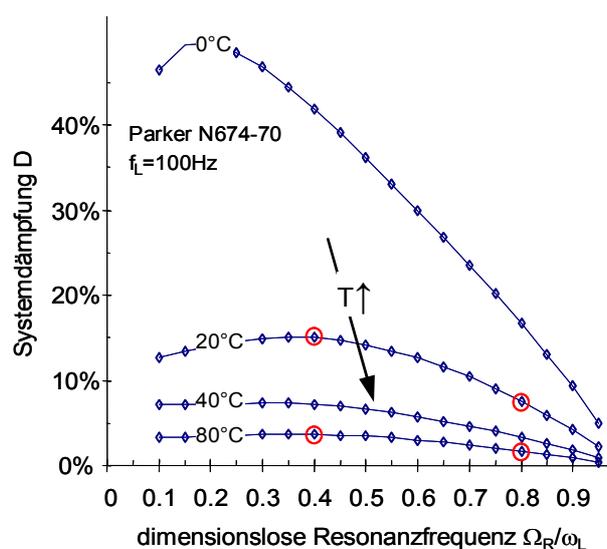


Abbildung 6-12: Erreichbare Systemdämpfung in Lagern aus N674 als Funktion der Resonanzfrequenz  $\Omega_R$  bei gegebener Laval-Resonanz  $f_L = 100 \text{ Hz}$ .



minimal abgesenkt werden, so wird man auch hier von dem hohen Verlustfaktor des Lagermaterials profitieren, der bei gleich bleibender Temperatur stets vergleichsweise mehr Dämpfung bringt.

Kommt nun jedoch noch ein *Temperaturanstieg* hinzu, so schmilzt der knappe Dämpfungsvorteil des V747 nicht nur dahin, sondern das Blatt wendet sich sogar zugunsten des Nitrilgummis. In Abbildung 6-14 sind die Dämpfungen für die ausgewählten Elastomere nach Tabelle 1-1 bei zwei charakteristischen Temperaturen als Funktionen der dimensionslosen Resonanzfrequenz dargestellt. Die zugehörigen Kennwerte der Lagerauslegung fasst Tabelle 6-5 zusammen.

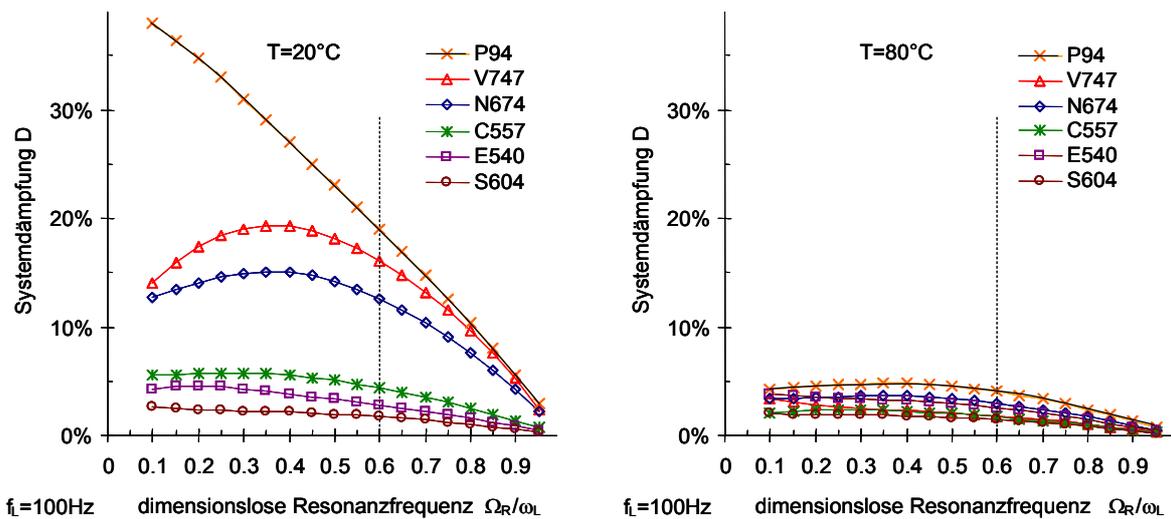


Abbildung 6-14: Erreichbare Systemdämpfung in Lagern aus verschiedenen Elastomeren als Funktion der dimensionslosen Resonanzfrequenz  $\Omega_R$  bei gegebener Laval-Resonanz  $f_L = 100$  Hz.

Alle hier gezeigten Elastomere weisen bei hohen Temperaturen deutlich geringere Dämpfungswerte auf. Bei 80°C schrumpft so die Systemdämpfung der teuren Materialien wie PFR und FKM etwa auf das Niveau der preiswerten NBR und EPDM Elastomere. Das FKM Elastomer V747 schneidet sogar schlechter ab als N674 und EPDM. Jedoch ermöglicht der Perfluor-Werkstoff P94 auch bei hohen Temperaturen noch die größte Dämpfung. Nur dürfte es schwierig werden, aus diesem Material überhaupt ein Lager zu gestalten.

Tabelle 6-5: Kennwerte der Beispielauslegung von Elastomerlagern aus verschiedenen Materialien bei Raumtemperatur 20°C und bei 80°C. Resonanzfrequenz  $f_R = 60$  Hz, Lavalfrequenz  $f_L = 100$  Hz und Rotormasse  $m = 15$  kg.

$f_L = 100$ Hz $\Omega_R/\omega_L = 0.6$	20°C					80°C				
	$E$ [MPa]	$\eta$	$D$	$\sigma_L$	$D_{ref}$ [mm]	$E$ [MPa]	$\eta$	$D$	$\sigma_L$	$D_{ref}$ [mm]
P94	129	0.64	19.0%	0.50	3.6	7.14	0.13	4.0%	0.56	74
V747	28.6	0.53	16.1%	0.51	16.9	13.31	0.06	1.8%	0.56	40
N674	20.0	0.41	12.6%	0.53	25.0	6.88	0.09	3.0%	0.56	77
C557	10.1	0.14	4.4%	0.56	52.1	5.25	0.05	1.7%	0.56	101
E540	17.5	0.09	2.8%	0.56	30.2	10.0	0.08	2.5%	0.56	53
S604	7.69	0.05	1.7%	0.56	68.9	5.15	0.05	1.4%	0.56	103

Betrag der Referenzdurchmesser bei NBR für eine Auslegung bei 80 Hz noch 72 mm, so schrumpft dieser Wert für  $\Omega_R/\omega_L = 0.6$  auf 25 mm. Bei sehr geringer radialer Vorspannung lässt sich ein passender O-Ring gerade noch finden. Um aus PFR-Ringen bei 20°C die hohe Dämpfung herauszuholen, wäre für den 15kg Rotor ein Lager mit einem Referenzdurchmesser von 3.6 mm zu

entwerfen - keine leichte Aufgabe, wie man sich anhand der Gestaltfunktionen von Tabelle 4-1 schnell überzeugen kann.

Dieses Kapitel hat gezeigt, wie mit Hilfe von Auslegungsdiagrammen der graphische Vorentwurf der Kennwerte eines Elastomerlagers, eine schnelle und transparente Systemabstimmung sowie die Optimierung der Werkstoffausnutzung und –auswahl gelingt. Dabei wurde deutlich, dass einer weichen Lagerabstimmung größte Bedeutung zukommt, um eine maximale Dämpfungsausbeute zu erreichen. Aber just die Gestaltung weicher Lager erweist sich bei hoch dämpfenden Lagermaterialien als besonders schwierig, da bei *hohen Verlustfaktoren auch die Materialsteifigkeiten sehr hoch* sind. Dies führt auf Lager mit sehr *kleinem Referenzdurchmesser*, für die aus konstruktiver Sicht keine herkömmlichen Elastomerringe mehr in Frage kommen.

Ein großer Vorteil der Auslegungsdiagramme und der dahinter stehenden Auslegungsphilosophie besteht darin, dass die *eigentliche Lagergestaltung erst nach der Systemoptimierung beginnt*, also dann, wenn man mit der Amplitudenreduktion zufrieden ist und ggf. auch andere Betriebspunkte bei anderen Temperaturen erfolgreich geprüft wurden. Die den Auslegungsdiagrammen zugrunde liegenden Gleichungen lassen sich auch problemlos programmtechnisch umsetzen. Die nachfolgende Lagergestaltung kann dann mit der Methode der Finiten Elemente unterstützt werden.

Obwohl die Auslegungsdiagramme und die daraus abgeleiteten Aussagen für eine optimierte Dämpfung nur am Lavalrotor gewonnen wurden, werden wir im Folgenden zeigen, dass sich die Ergebnisse auch auf komplexere Rotorsysteme mit mehreren Freiheitsgraden übertragen lassen.

#### 6.4 Rotoren mit mehreren Freiheitsgraden – der Mehrscheibenrotor

Ziel dieses Abschnitts ist es aufzuzeigen, wie sich die vom elastomergelagerten Lavalrotor bekannten Aussagen zur optimierten Gestaltung von Elastomerlagerungen auf Rotoren mit mehreren Resonanzstellen übertragen lassen. Um die umfangreichen Herleitungen auf ein Minimum zu reduzieren, beziehen wir uns auf den in GASCH/NORDMANN [1, S192 ff.] ausführlich beschriebenen isotropen 3-Scheiben-Rotor mit glatter Welle. Anstelle der dort verwendeten starren Lager werden nun zwei identische isotrope Gummilager mit den entsprechenden Lagerfreiheitsgraden  $r_L$  und  $r_R$  in komplexer Zusammenfassung eingeführt (Abbildung 6-15).

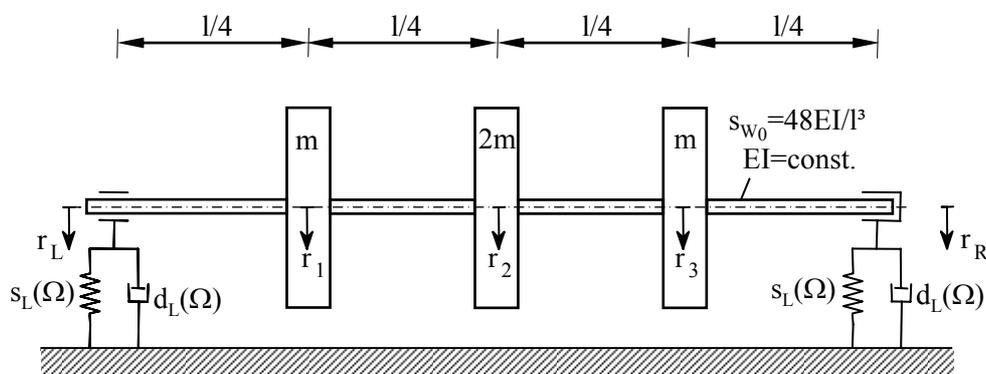


Abbildung 6-15: Modell des 3-Scheiben-Rotors in Elastomerlagern.

Selbstverständlich hängt die Lagerdämpfung und Steifigkeit im Allgemeinen noch immer von der Frequenz und der Temperatur ab, der Übersicht wegen wird dies hier nicht mehr explizit benannt.

### 6.4.1 Referenzrotor in starren Lagern

Im Sinne eines benachbarten konservativen Bezugssystems wird zunächst der dämpfungsfreie 3-Scheiben-Rotor in starren Lagern vorgestellt [siehe 1, S.192 ff.]. Dieses konservative Referenzsystem entspricht dem Grenzfall zunehmender Lagersteifigkeit ( $s_L \rightarrow \infty$ ), da dann eine vorhandene Lagerdämpfung nicht mehr zum Zuge kommt.

Die Bewegungsgleichungen dieses Referenzrotors lauten mit der Abkürzung  $s_{W_0} = 48 EI/l^3$ :

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & 2m & \\ & & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_{0,1} \\ \ddot{r}_{0,2} \\ \ddot{r}_{0,3} \end{Bmatrix} + \frac{4}{7} s_{W_0} \begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{0,1} \\ r_{0,2} \\ r_{0,3} \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} m \varepsilon_1 e^{j\beta_1} \\ 2m \varepsilon_2 e^{j\beta_2} \\ m \varepsilon_3 e^{j\beta_3} \end{Bmatrix} e^{j\Omega t} \quad (6-42)$$

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{S}_0 \mathbf{r}_0 = \Omega^2 \mathbf{M}_0 \hat{\mathbf{e}} e^{j\Omega t}$$

**Eigenschwingungen – homogene Lösung:** Setzt man die rechte Seite zu null und führt den Eigenschwingungsansatz

$$\mathbf{r}_{0,h}(t) = \boldsymbol{\phi}_{0,i} e^{\chi_i t} \quad (6-43)$$

ein, so liefert die Lösung des Eigenwertproblems die konjugiert komplexen Eigenwerte

$$\begin{aligned} \chi_{0,1/2} &= \pm j \omega_{0,1} = \pm j 4.025 \sqrt{\frac{EI}{l^3 m}}, \\ \chi_{0,2/2} &= \pm j \omega_{0,2} = \pm j 4.869 \omega_{0,1}, \\ \chi_{0,3/2} &= \pm j \omega_{0,3} = \pm j 8.96 \omega_{0,1} \end{aligned} \quad (6-44)$$

und die dazugehörige Matrix  $\boldsymbol{\Phi}_0$

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = \left[ \begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{\phi}_{0,1} & \boldsymbol{\phi}_{0,2} & \boldsymbol{\phi}_{0,3} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{4 + \sqrt{137}}{11} & 0 & \frac{4 - \sqrt{137}}{11} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-45)$$

der Eigenformen  $\boldsymbol{\phi}_{0,i}$  in welchen der Rotor bei den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{0,i}$  schwingt.

**Erzwungene Schwingungen - partikuläre Lösung:** Nach einer Transformation  $\boldsymbol{\Phi}_0 \mathbf{r} = \mathbf{q}$  der Rotorfreiheitsgrade in generalisierte Freiheitsgrade und der Multiplikation der Bewegungsgleichung (6-42) von links mit der transponierten Modalmatrix  $\boldsymbol{\Phi}_0^T$  gelingt mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen die Transformation auf eine äquivalente entkoppelte Form, bei der nur die Hauptdiagonalen der Systemmatrizen besetzt sind:

$$\begin{bmatrix} m_{\text{gen}0,1} & & \\ & m_{\text{gen}0,2} & \\ & & m_{\text{gen}0,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_{0,1} \\ \ddot{q}_{0,2} \\ \ddot{q}_{0,3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{\text{gen}0,1} & & \\ & s_{\text{gen}0,2} & \\ & & s_{\text{gen}0,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{0,1} \\ q_{0,2} \\ q_{0,3} \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_3 e^{j\beta_3} e^{j\Omega t} \quad (6-46)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_0^T \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\Phi}_0 \ddot{\mathbf{q}}_0 + \boldsymbol{\Phi}_0^T \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\Phi}_0 \mathbf{q}_0 = \Omega^2 \boldsymbol{\Phi}_0^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{e}} e^{j\Omega t}$$

Der Einfachheit halber wurde hier  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  zu null gesetzt, so dass nur eine Unwucht an der Scheibe 3 angreift. Die generalisierten Massen  $m_{gen0,i}$  und Steifigkeiten  $s_{gen0,i}$  lauten:

$$\begin{aligned} m_{gen0,1} &= 2.93m, & s_{gen0,1} &= 98.44 EI/l^3, \\ m_{gen0,2} &= 2m, & s_{gen0,2} &= 768 EI/l^3, \\ m_{gen0,3} &= 6.08m, & s_{gen0,3} &= 3877 EI/l^3. \end{aligned} \quad (6-47)$$

Der 3-Scheiben-Rotor in starren Lagern ist somit vollständig beschrieben. Sowohl die homogene Lösung als auch die Unwuchtantwort lassen sich als Überlagerung der eigenformspezifischen Anteile darstellen. In jeder Eigenform schwingt das konservative System wie ein Lavalläufer mit der zugehörigen generalisierten Masse und Steifigkeit.

#### 6.4.2 Referenzrotor in dämpfungsfreien, elastischen Lagern

Nun wird der 3-Scheiben-Rotor in dämpfungsfreien Lagern mit einer endlichen Steifigkeit  $s_L$  betrachtet. Dieses konservative Hilfssystem entspricht dem rein theoretischen Grenzfall der verschwindenden Lagerdämpfung. Wie schon beim Lavalläufer in Abbildung 6-4 werden die „halben“ Lagerfreiheitsgrade  $r_L$  und  $r_R$  eingeführt. Der Verschiebungsvektor lautet nun:

$$\mathbf{r}^T = \{r_1, r_2, r_3, r_L, r_R\}. \quad (6-48)$$

Die Steifigkeitsmatrix resultiert aus den Elementmatrizen der regelmäßigen Einzelfelder. Nach *statischer Kondensation* [58] der Winkelfreiheitsgrade folgt die Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix} m & & & & & & \\ & 2m & & & & & \\ & & m & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \mathbf{M} & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_2 \\ \ddot{r}_3 \\ \ddot{r}_L \\ \ddot{r}_R \end{bmatrix} + \frac{4}{7} s_{W_0} \begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 & -17/2 & -3/2 \\ -22 & 32 & -22 & 6 & 6 \\ 9 & -22 & 23 & -3/2 & -17/2 \\ -17/2 & 6 & -3/2 & -15/4 + 7/4\sigma_{L_0} & 1/4 \\ -3/2 & 6 & -17/2 & 1/4 & -15/4 + 7/4\sigma_{L_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_L \\ r_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ m\varepsilon_3\Omega^2 \\ \\ \end{bmatrix} e^{j\Omega t} \quad (6-49)$$

wobei  $\sigma_{L_0}$  die Abkürzung für  $\sigma_{L_0} = s_L/s_{W_0} = s_L l^3/48 EI$  ist. Durch eine weitere *gemischte Kondensation* nach [58] wird (6-49) in eine etwas transparentere Form gebracht. Dabei bleiben die Lagerfreiheitsgrade erhalten und die Rotorfreiheitsgrade werden durch die modalen, generalisierten Koordinaten ausgedrückt:

$$\mathbf{r} = \mathbf{\Phi} \mathbf{q} \text{ mit } \mathbf{q}^T = \{q_1, q_2, q_3, r_L, r_R\} \quad (6-50)$$

Die Transformationsmatrix der gemischten Kondensation  $\mathbf{\Phi}$  enthält an den Positionen  $\Phi_{i,j}$  für  $i = 1 \dots 3$  und  $j = 1 \dots 3$  die aus [1, S. 195] bekannte Modalmatrix  $\mathbf{\Phi}_0$  des konservativen Referenzsystems:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c|c} \phi_{0,1} & \phi_{0,2} & \phi_{0,3} \end{array} \right] & \begin{matrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{matrix} \\ & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}. \quad (6-51)$$



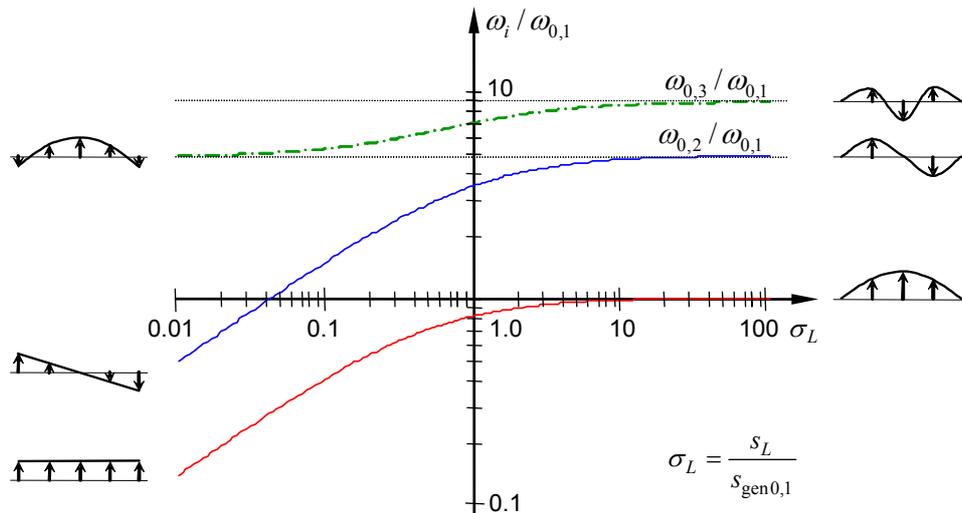


Abbildung 6-16: Normierte Eigenfrequenzen und charakteristische Eigenformen des dämpfungsfreien 3-Scheiben-Rotors in Abhängigkeit von der relativen Lagersteifigkeit  $\sigma_L = s_L/s_{gen0,1}$ .

### 6.4.3 Der 3-Scheiben-Rotor in Elastomeren – Einfluss der Lagerdämpfung

Da uns hier ausschließlich harmonische Kraft- und Bewegungsabläufe interessieren, wird die bisherige konservative Lagersteifigkeit in (6-52) durch die frequenz- und temperaturabhängige komplexe Steifigkeit ersetzt, welche die Dämpfungsaussage enthält:

$$s_L^* = s_L + j\Omega d_L = s_L(1 + j\eta). \quad (6-57)$$

**Unwuchtantwort:** Die partikuläre Lösung folgt der Ansatzfunktion:

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}e^{j\Omega t}. \quad (6-58)$$

Mit einer Normierung der generalisierten Verschiebungsamplituden  $\mathbf{q}$  auf die Exzentrizität  $\varepsilon_3$  und Division der Steifigkeitsmatrix durch die generalisierte Steifigkeit  $s_{gen0,1}$  erhält man das dimensionslose algebraische Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \bar{m}_{gen0,1} & & & & & \\ & \bar{m}_{gen0,2} & & & & \\ & & \bar{m}_{gen0,3} & & & \\ 2.428 & 0.5 & 0.3 & 1.125 & 0.875 & \\ 2.428 & -0.5 & 0.3 & 0.875 & 1.125 & \end{pmatrix} - 0.165 \frac{\omega_{0,1}^2}{\Omega^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \sigma_{0,2} & & & & \\ & & \sigma_{0,3} & & & \\ & & & \sigma_L(1+j\eta) & & \\ & & & & \sigma_L(1+j\eta) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_{\varepsilon 1} \\ \hat{q}_{\varepsilon 2} \\ \hat{q}_{\varepsilon 3} \\ \hat{r}_{\varepsilon L} \\ \hat{r}_{\varepsilon R} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}. \quad (6-59)$$

Zur Bestimmung der Unwuchtantwort wird dieses nach den generalisierten Koordinaten aufgelöst. Die Rotoramplituden folgen dann aus den Beiträgen der modalen generalisierten Koordinaten  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  und der Lagerfreiheitsgrade  $r_L$  und  $r_R$  durch die Rücktransformation  $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon = \Phi \hat{\mathbf{q}}_\varepsilon$ .

Abbildung 6-17 zeigt die normierten Rotoramplituden für drei verschiedene relative Lagersteifigkeiten  $\sigma_L = s_L/s_{gen0,1}$  bei einer Lagerdämpfung  $\eta = 0.1$  und für den starr gelagerten Rotor. Die Resonanzstellen sind sehr deutlich ausgeprägt. In der Resonanz schwingt das System vornehmlich in der dazugehörigen Eigenform, deren Verlauf hier für die jeweiligen Grenzfälle analog zu Abbildung 6-16 noch einmal skizziert ist. Wie schon beim Lavalrotor von Abbildung 6-6 nehmen die Rotoramplituden in Abbildung 6-17 mit wachsender Lagersteifigkeit zu. Die Kurven mit  $\sigma_L = 10$  sind kaum von der Unwuchtantwort des starr gelagerten Rotors mit  $\sigma_L = \infty$  zu

unterscheiden. Damit die Dämpfung sich entfalten kann, darf also auch hier die Lagerung nicht zu steif sein. Dieses Verhalten zeigt sich qualitativ auch bei der Resonanz der zweiten Eigenform. Das Verhalten bei der dritten kritischen Drehzahl  $\Omega/\omega_{0,3}$  weist jedoch Besonderheiten auf. Hier nimmt die Rotoramplitude bei sinkender Lagersteifigkeit wie gewohnt zunächst ab, steigt dann aber für  $\sigma_L = 0.1$  wieder an.

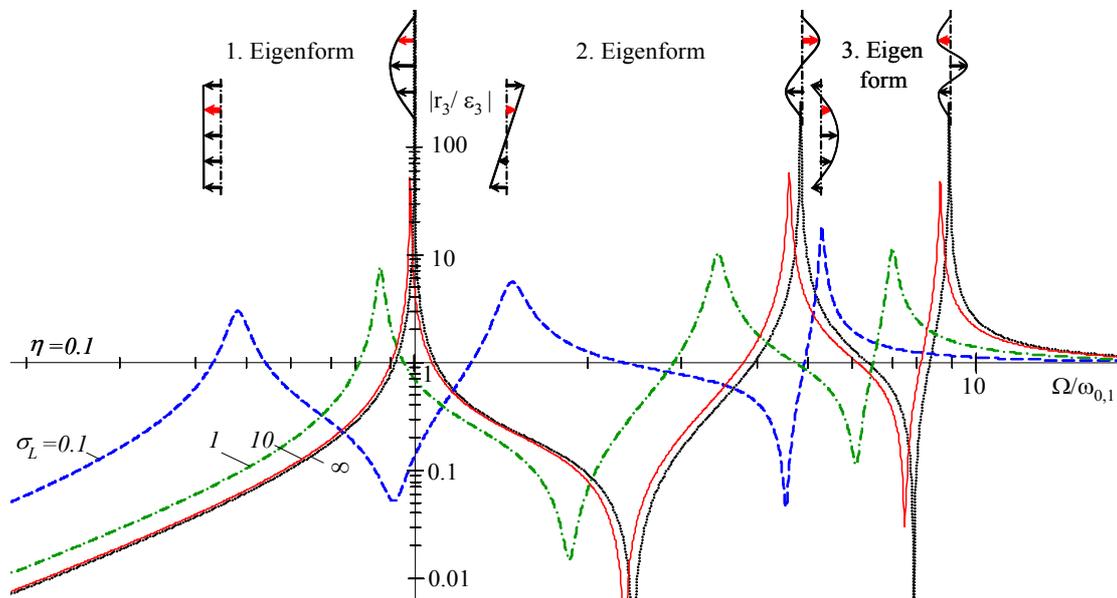


Abbildung 6-17: Normierte Rotoramplituden infolge Unwuchterregung in den drei elastischen Eigenformen und für verschiedene relative Lagersteifigkeiten  $\sigma_L = s_L/s_{gen0,1} = 0.1, 1, 10, \infty$  bei einem Verlustfaktor  $\eta = 0.1$ .

Dieses Verhalten wird bei der Betrachtung der Amplitudenmaxima in der Resonanz, welche sich für das jeweilige Steifigkeitsverhältnis  $\sigma_L = s_L/s_{gen0,1}$  einstellen, noch deutlicher (Abbildung 6-18).

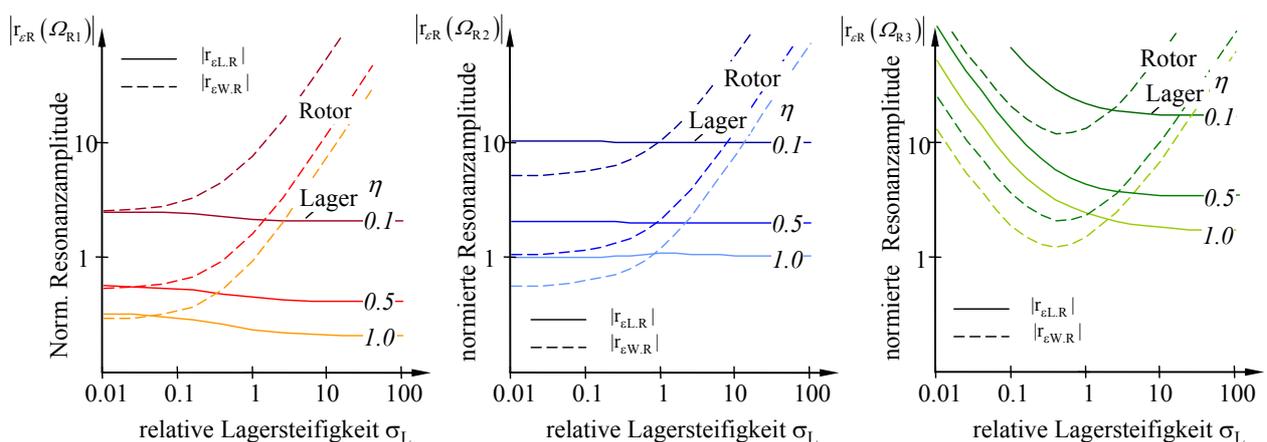


Abbildung 6-18: Unwuchtbezogene Resonanzamplituden  $|r_{eR}| = r_R/\epsilon_3$  in der jeweiligen Resonanz  $\Omega_{Ri}$  über der relativen Lagersteifigkeit  $\sigma_L = s_L/s_{gen0,1}$  bei verschiedenen Verlustfaktoren des Lagers  $\eta = s_L''/s_L'$ .

Die Zunahme der Lagerdämpfung  $\eta$  resultiert in einer etwa umgekehrt proportionalen Abnahme der normierten Resonanzamplituden des Rotors in der jeweiligen Eigenform. Bei den ersten beiden Schwingformen bleiben zudem die Lageramplituden nahezu gleich groß, egal welche Lagersteifigkeit vorliegt. Beide Phänomene sind bereits vom Lavalrotor aus Abbildung 6-8 bekannt.

Neu hingegen ist der Verlauf der Amplituden in der dritten Resonanz. Die *Rotoramplituden* erreichen ein *Minimum* etwa bei  $\sigma_L = 0.63$ , was etwa dem *Wendepunkt der Eigenfrequenzabnahme* in Abbildung 6-16 entspricht. Von diesem Punkt an bringt eine weitere Absenkung der Lagernachgiebigkeit keine weitere Amplitudenreduktion, im Gegenteil, sowohl die Amplituden des Lagers als auch die Rotoramplituden nehmen von da an mit sinkender Lagersteifigkeit deutlich zu. Den Einfluss der Lagersteifigkeit  $\sigma_L$  auf die Schwingformen und die Abhängigkeit dieser Formen von der Lagerdämpfung verdeutlicht Abbildung 6-19.

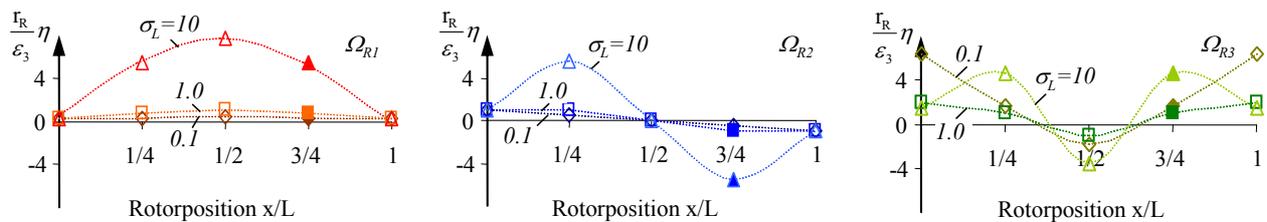


Abbildung 6-19: Einfluss der Lagersteifigkeit  $\sigma_L$  auf die normierten Schwingformen für  $\eta=0.1$  in der jeweiligen Resonanz  $\Omega_{Ri}$ .

Abbildung 6-19 zeigt die bei der Lagerdämpfung  $\eta = 0.1$  für verschiedene Lagersteifigkeiten berechneten Unwuchtamplituden infolge der Exzentrizität  $\epsilon_3$ . Es wird deutlich, wie die ersten beiden elastischen Schwingformen in einen translatorischen Quer- und einen rotatorischen Kippmode übergehen. Wie beim Lavalrotor wird mit sinkender Steifigkeit der Grenzfall der Resonanzabsenkung  $\Omega_R/\omega_L = 0$  angestrebt, wobei die Amplituden im Lager trotz hoher Nachgiebigkeit durch die vorhandene Dämpfung „festgehalten“ werden. Dieses Verhalten gleicht dem des Lavalläufers, die Aussagen des Auslegungsdiagramms lassen sich adäquat auf diese Resonanzen übertragen.

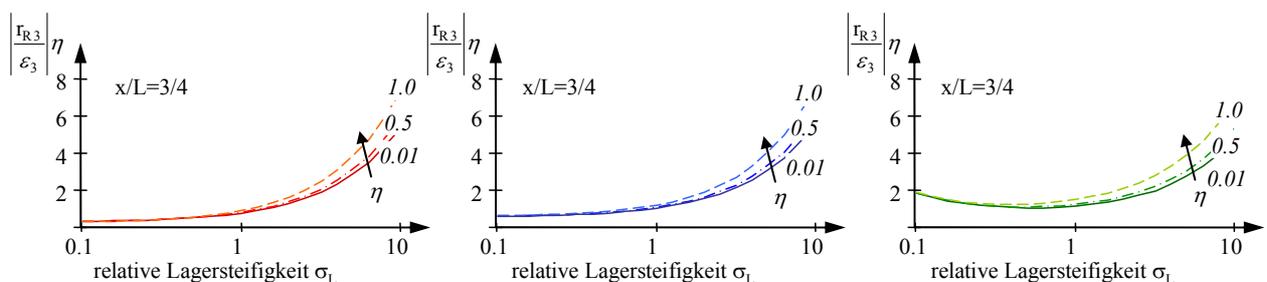


Abbildung 6-20: Einfluss der Lagerdämpfung  $\eta$  auf die normierte Resonanzamplituden  $|r_{3R\epsilon_3}| \eta = r_{3R} \eta/\epsilon_3$  in der jeweiligen Resonanz.

Bei Berücksichtigung höherer Eigenformen  $(2+N)$  wirkt jedoch ein neuer Mechanismus. Die Steifigkeitsabnahme führt hier zur Ausbildung einer anderen elastischen Schwingform mit einer geringeren Eigenfrequenz und generalisierten Steifigkeit. Sobald der Rotor in dieser neuen Eigenform „eingefangen“ wird, nehmen bei sinkender Lagersteifigkeit die Rotor- und die Lageramplituden wieder zu. Die Lagerdämpfung wirkt dann zwar immer noch mindernd auf die Amplituden, die Lagernachgiebigkeit hilft ab diesem Punkt aber nicht mehr mit! Es liegt nahe, dass sich dieses Phänomen bei allen  $N$  elastischen Moden eines so genannten  $2+NS$ systems wiederholt, wobei die Zahl 2 die Anzahl der Starrkörpereigenformen meint. Da hier bis zum Erreichen des Minimums bei  $\sigma_L = 0.63$  schon ein erheblicher Dämpfungseinfluss bezüglich der dritten Resonanz geltend gemacht wurde, sind die Aussagen des Auslegungsdiagramms zumindest eingeschränkt

übertragbar. Eine einfache quantitative Verallgemeinerung des Auslegungsdiagramms auf generalisierte Mehrfreiheitsgrad-Rotoren ist jedoch nicht möglich. Zum Abschluss noch ein Nachtrag zum Dämpfungseinfluss auf die Schwingformen. In Abbildung 6-19 erfolgte eine Normierung der Amplituden durch Multiplikation mit dem Verlustfaktor. Abbildung 6-20 zeigt nun, dass die Schwingformen auch bei starker Dämpfung und unsymmetrischer Unwuchtverteilung etwa gleich sind. Erst bei Verlustfaktoren von  $\eta \geq 0.5$  treten Abweichungen von mehr als 5% gegenüber den schwach gedämpften Schwingformen auf.

### 6.5 Experimentelle Verifikation am Versuchsrotor

Der letzte Abschnitt beschreibt die experimentelle Verifikation der Aussagen für die Lagersteifigkeit und die Auslegungsdiagramme anhand eines realen Rotors. Für verschiedene Lagerungen und Wellensteifigkeiten wurden die Systemantwort bei Unwuchtanregung und die Antwort auf einen Impulseingang sowohl bei stehender als auch bei rotierender Welle gemessen. Neben der spürbaren Verbesserung der Laufruhe wurde eine gute Übereinstimmung der rechnerischen Vorhersagen mit den gemessenen Ergebnissen erzielt. Abbildung 6-21 zeigt den Rotor und die Versuchsanordnung im Labor des Instituts für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin.

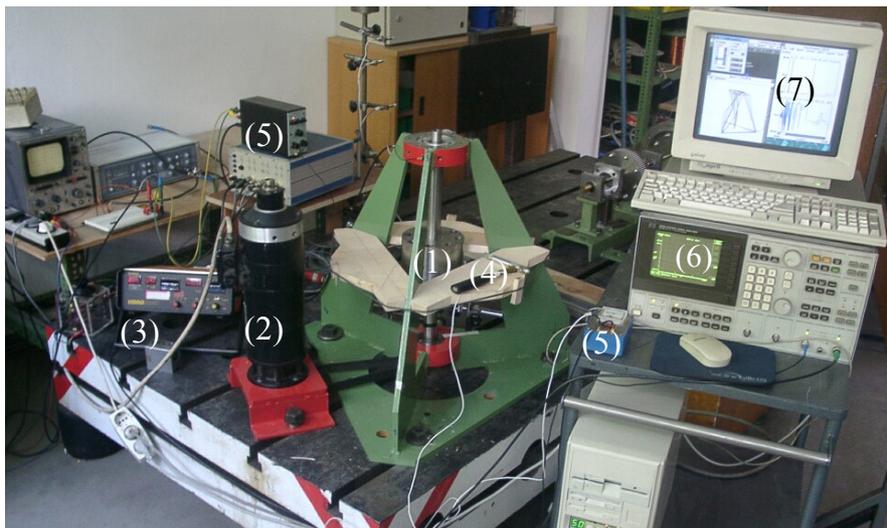


Abbildung 6-21: Versuchsrotor (1) mit Servoantrieb (2), Frequenzganganalysator (Vibroport) (3), Impulshammer (4), Messverstärker (5), FFT-Analysator (6) und PC mit Auswerteprogramm (7).

#### 6.5.1 Modellierung und Anpassung der Bewegungsgleichungen

Der in dieser Arbeit entwickelte vertikalachsige Versuchsrotor von Abbildung 6-21 ist in Abbildung 6-22 als Seitenansicht zu sehen. Er verhält sich im Wesentlichen wie ein isotrop gelagerter Lavalrotor. Der Antrieb erfolgt unterhalb des unteren starren Lagers über einen Riementrieb, die Dynamik des Antriebs ist so weitgehend von der des Rotors entkoppelt. Das obere Kugellager kann wahlweise in Elastomerlagern mit verschiedenen Vorspannungen gebettet oder auch quasi-starr eingespannt werden. Die Elastomerlager sind mit jenen identisch, die schon als Lagerkomponenten statisch und dynamisch untersucht wurden.

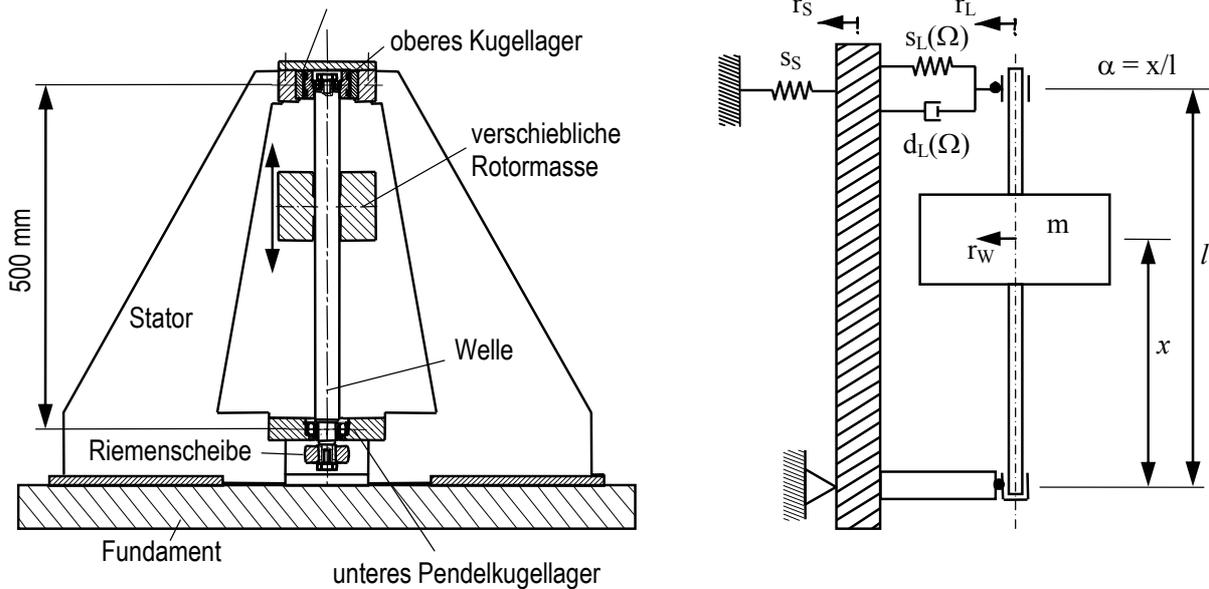


Abbildung 6-22: Vertikalachsiger Versuchsrotor mit verschieblicher Masse und einstellbaren Lager- und Wellensteifigkeiten. Skizze des Aufbaus (links) und mechanisches Ersatzmodell (rechts).

Der Versuchsrotor besitzt seine rechnerische Resonanz in starren Lagern (ohne Elastomerringe) bei 103 Hz, für den Fall, dass sich die verschiebbare Masse in der Mitte der Welle befindet. Der Servoantrieb bringt den Rotor auf eine maximale Betriebsdrehzahl von 12000 U/min. In Elastomerlagern sind so die Resonanzdurchfahrt und der Betrieb in Resonanznähe möglich.

Die Bewegungsgleichungen des Versuchsrotors unterscheiden sich von den Gleichungen des Lavaläufers (6-23) allein in der Steifigkeitsmatrix. Die Lagersteifigkeit ist nur vom oberen Wellenende her wirksam und muss zudem auf den Wellenmittelpunkt umgerechnet werden. Die Steifigkeit des Stators  $s_s$  wird erst später berücksichtigt. Zunächst lauten die nach (6-23) modifizierten Bewegungsgleichungen bei  $s_s \rightarrow \infty$ :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}_w \\ \ddot{r}_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_L(\Omega_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_w \\ \dot{r}_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_w & -\alpha s_w \\ -\alpha s_w & \alpha^2 s_w + s_L(\Omega_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_w \\ r_L \end{pmatrix} = m \varepsilon_1 \Omega_T^2 \begin{pmatrix} e^{j\Omega_T t} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6-60)$$

Die Wellensteifigkeit  $s_w$  hängt von der relativen Lage der Rotormasse  $\alpha = x/l$  ab. Für die Welle mit unveränderlichem Querschnitt gilt:

$$s_w = s_{w0} \frac{1}{\alpha^2 (1-\alpha)^2} \quad \text{mit} \quad s_{w0} = \frac{3EI}{l^3}. \quad (6-61)$$

Führt man auch hier das Steifigkeitsverhältnis  $\sigma_L^*$  des Lagers zur Welle ein, so lässt sich leicht zeigen, dass die Gleichungen aus dem vorangegangenen Abschnitt unverändert gelten. Jedoch wird die relative Steifigkeit  $\sigma_L^*$  auf die Rotorebene umgerechnet. Für das Steifigkeitsverhältnis  $\sigma_L$  gilt:

$$\sigma_L = \frac{\sigma_L^*}{\alpha^2}. \quad (6-62)$$

Die Auslegungsdiagramme des Lavalrotors können nun unter Berücksichtigung von (6-62) auch auf die modifizierten Rotorgeometrien angewandt werden.

### 6.5.2 Messergebnisse

Die *Modalanalyse* des konservativen *räumlichen* Systems erfolgt im Stillstand mittels Modalhammer-Erregung an 13 Punkten bei gleichzeitiger Messung der Antwortbeschleunigung. Zur Auswertung und Visualisierung wird eine kommerzielle Software herangezogen. Die Modalanalyse bestätigt die Isotropie des Systems und bestätigt, dass die Eigenfrequenzen und Eigenformen des Rotors von den restlichen Moden des Systems weit genug entfernt liegen. Sie gibt zudem Aufschluss über die Nachgiebigkeit des Stators. Auf eine Darstellung der umfangreichen Ergebnisse wird hier verzichtet. Nur soviel: Die Resonanzfrequenz in starren Lagern liegt bei 103 Hz. Der Aufbau bringt praktisch keine eigene Dämpfung mit und die benachbarten Resonanzen der Querschwingungen des Stators liegen mit 58 Hz und 260 Hz jeweils weit genug entfernt. Die Stator-Torsion bei 88 Hz hat keine praktische Relevanz.

Anhand von *Frequenzgangmessungen am stehenden Rotor* werden die vereinfachten Berechnungsgleichungen des Rotorsystems zunächst allein für die *Dämpfungsaussage im Sinne der Auslegungsdiagramme* überprüft. In einem weiteren Schritt erfolgt der Vergleich der gerechneten und gemessenen Frequenzgänge. Somit werden auch die vereinfachten *Annahmen für die Ringsteifigkeit überprüft*.

Wie schon bei den Bauteilversuchen in Abschnitt 5.3 erhält man Dämpfung und Steifigkeit direkt aus dem Frequenzgang. Hier erfolgen die Impulsanregung und die Messung der Systemantwort direkt an der Rotormasse. Eine korrekte Auswertung setzt voraus, dass die Resonanzstellen sowohl im Phasengang als auch im Amplitudengang klar ausgeprägt und entkoppelt sind. Dies ist trotz einer zum Teil starken Lagerdämpfung der Regelfall, da die Systemdämpfung vergleichsweise geringe Werte annimmt.

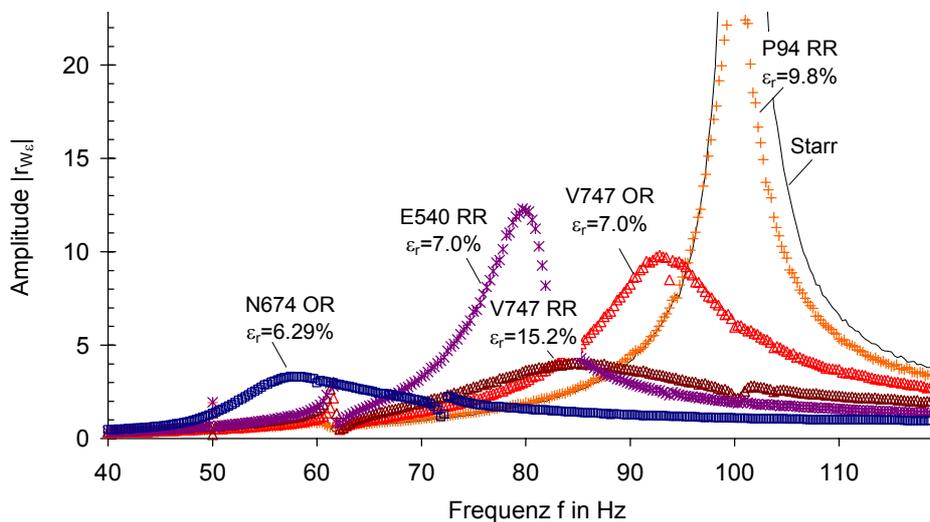


Abbildung 6-23: Amplitudenverlauf des Versuchsrotors bei Impulserregung in starren Lagern und in Lagern für Rechteckringe (RR) und O-Ringe (OR) aus verschiedenen Elastomeren sowie für verschiedene Ringgeometrien und Vorspannungen ( $D_m = 58.9 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 0.54$ ).

Abbildung 6-23 zeigt exemplarisch einige gemessene Vergrößerungsfunktionen des Versuchsrotors, welche in starren Lagern und in Elastomerlagern mit verschiedenen Werkstoffen, Ringgeometrien und Vorspannungen bestimmt wurden. Die Dämpfung ist umgekehrt proportional zur Größe der Resonanzamplituden. Diese Darstellung bestätigt die Aussagen des Auslegungsdiagramms, wonach

Rotoren in steifen Elastomerlagern nur wenige Prozent Systemdämpfung erfahren, selbst wenn die Materialien sehr hohe Verlustfaktoren besitzen. Erst durch die Verringerung der Lagersteifigkeit, wie bei V747 sehr schön zu sehen ist, kommt die Dämpfungswirkung des Materials zur Entfaltung. Hat der Werkstoff selbst jedoch wenig Dämpfung, so ist der Rotor auch in nachgiebigen Lagern nur schwach gedämpft (EPDM). Nitril N674 und Fluorkarbon V747 verfügen bei Raumtemperatur über völlig unterschiedliche Verlustfaktoren, in der gezeigten Einbausituation bringen sie jedoch die gleiche Reduktion der Resonanzamplituden.

### 6.5.3 Verifikation der Dämpfungsaussage des Auslegungsdiagramms

Nun erfolgt ein quantitativer Vergleich der gemessenen Dämpfungswerte mit den Werten des Auslegungsdiagramms. Die dimensionslose Resonanzfrequenz wird dabei experimentell bestimmt und die zugehörige Systemdämpfung aus dem Auslegungsdiagramm abgelesen bzw. nach (6-15) berechnet. Vergleicht man diesen Rechenwert mit der am Rotor bestimmten Dämpfung, bleiben jene Fehler, welche aus der Modellierung der Steifigkeit der Elastomerlager herrühren, ausgeblendet.

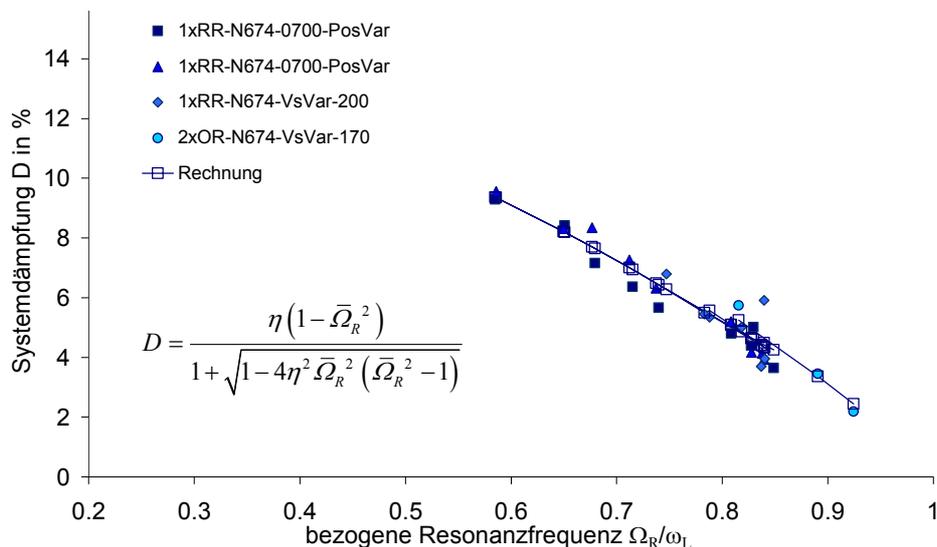


Abbildung 6-24: Experimentell bestimmte Systemdämpfung in der ersten Resonanz des Versuchsrotors in unterschiedlichen Lagern aus NBR N674-70. Vergleich der Messdaten mit den Rechnungen für N674.

Abbildung 6-24 zeigt die gemessenen Steifigkeiten, aufgetragen über der bezogenen Resonanzfrequenz des Rotors in Lagern aus Nitril N674-70. Einerseits wurde der Rotor in Rechteckringen mit 7% radialer Vorspannung durch Verschieben der Rotormasse modifiziert, andererseits erfolgte bei gegebener Rotorposition der Austausch der Elastomerlager mit unterschiedlichen Querschnittsformen und Vorspannungen. Jeder Datenpunkt steht also für eine eigene Systemkonfiguration. Die redundanten Messreihen (■) und (▲) geben einen Eindruck von der Reproduzierbarkeit wieder. Die Streuung der Dämpfungswerte fällt überraschend gering aus. Rechnung und Messung können in Abbildung 6-24 Punkt für Punkt verglichen werden. Die Standardabweichung beträgt lediglich 0.5% bezüglich des absoluten Dämpfungsmaßes  $D$ . Vor dem Hintergrund der noch verbliebenen Unsicherheiten bei der Dämpfungsaussage der Masterkurven ist diese prompte Übereinstimmung von Rechnung und Messung zugleich ein Zeichen für die verbindliche Güte des Referenzdatensatzes für N674 (s. Anhang 4).

In Abbildung 6-25 sind zusätzlich zu den Werten für N674 auch die Ergebnisse für das Perfluor P94 und für Silikon S604 aufgetragen. Perfluor verfügt bei Raumtemperatur und der Frequenz 100 Hz gemäß der Masterkurve über einen Verlustfaktor von 0.65. Die daraus berechnete Kurve der resultierenden Systemdämpfung im Sinne der Auslegungsdiagramme deckt sich ebenfalls ausgezeichnet mit den Messwerten.

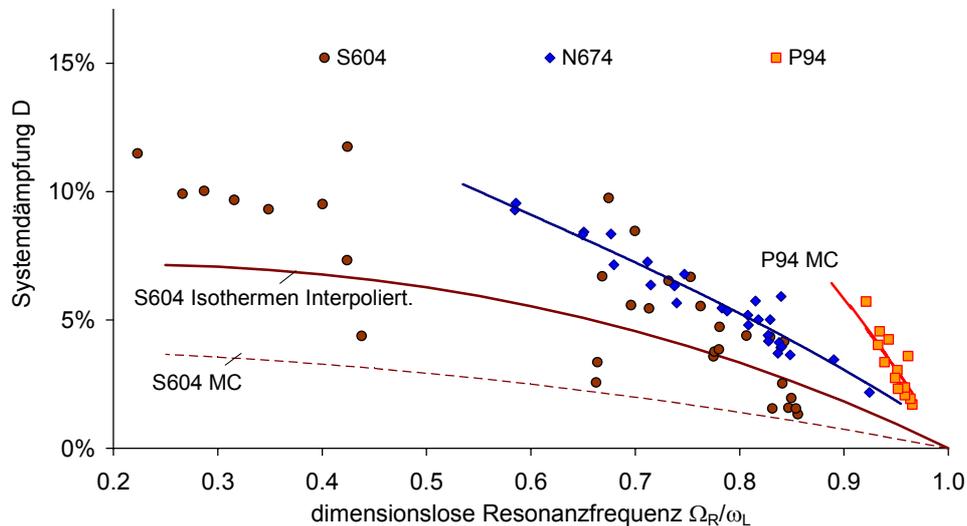


Abbildung 6-25: Gemessene und gerechnete Systemdämpfung in Lagern aus Silikon S604-70, Perfluor Kautschuk P94 und N674.

Diese gute Übereinstimmung ist jedoch keineswegs selbstverständlich. Der Abgleich der Messwerte am Rotor mit den Materialwerten der Masterkurve will bei S604 nicht gelingen. Insbesondere die Dämpfungsvorhersage der Masterkurve erweist sich hier als unbrauchbar. Selbst wenn man die Masterkurve korrigiert, wobei der anpassungsbedingte Korrekturfaktor berücksichtigt, dass die Dämpfungswerte der Masterkurve im Mittel etwa um 64% unter den gemessenen Verlustfaktoren der Isothermen liegen, führt die Rechnung trotz Korrekturfaktor noch immer auf zu geringe Werte der Systemdämpfung. Anstatt die Masterkurve zu verwenden, wurden nun die *tatsächlich* bei Raumtemperatur im Bereich von 0.5 bis 50 Hz gemessenen Verlustfaktoren aus den Isothermen extrapoliert. Auf dieser Grundlage erhält man auch eine rechnerische Vorhersage, die sich mit den am Rotor gemessenen Werten annähernd deckt. Dennoch bleibt bei Verwendung der „weicheren“ Silikonringe eine mittlere Abweichung und die gemessene Streuung ist um ein Vielfaches größer.

Die Ursache der Streuungen wird zum einen in der geringen Haftreibung von Silikon an den Kontaktflächen vermutet. Da Silikon von Haus aus wenig viskoelastische Dämpfung mit sich bringt und die geringe Steifigkeit zudem größere Lageramplituden ermöglicht, schlagen nichtlineare Effekte stärker zu Buche. Neben der äußeren Dämpfung an der Kontaktfläche ist jedoch auch der Anteil innerer Reibung entsprechend den Messungen in Abbildung 2-18 relativ hoch.

### 6.5.4 Verifikation des Gesamtmodells

Die vorangegangene Verifikation bezieht sich nur auf die Dämpfungsaussage des Auslegungsdiagramms. Um jedoch das gesamte Rotorverhalten zu berechnen und auch die Lagersteifigkeit zu verifizieren, müssen die vollständigen Bewegungsgleichungen gelöst und die Antwortamplitude berechnet werden. Um diese Fehlerquelle auszuschließen, werden Statorsteifigkeit  $s_S$  und mitschwingende Statormasse  $m_S$  berücksichtigt.

$$\begin{pmatrix} m_R \\ m_L \\ m_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}_W \\ \ddot{r}_L \\ \ddot{r}_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_L(\Omega) & -d_L(\Omega) \\ -d_L(\Omega) & d_L(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_W \\ \dot{r}_L \\ \dot{r}_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_W & -s_W\alpha \\ -s_W\alpha & s_W\alpha^2 + s_L(\Omega) \\ -s_L(\Omega) & s_S + s_L(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_W \\ r_L \\ r_S \end{pmatrix} = m_R \epsilon \Omega^2 \begin{pmatrix} e^{j\Omega t} \\ \\ \end{pmatrix}. \quad (6-63)$$

Die Wellensteifigkeit des Rotors folgt aus (6-61) und die Lagereigenschaften bei gegebener Erregerfrequenz  $\Omega$  resultieren aus (5-1) und (5-5) mit den Prony-Parametern der Masterkurve gemäß Tabelle A 4. Aus der Verluststeifigkeit  $s_L''$  gewinnt man die Lagerdämpfung  $d_L = \eta s_L' / \Omega$  nach Division durch die Frequenz  $\Omega$ . Statorsteifigkeit  $s_S$  und generalisierte Statormasse  $m_S$  wurden in der Modalanalyse vorab bestimmt.

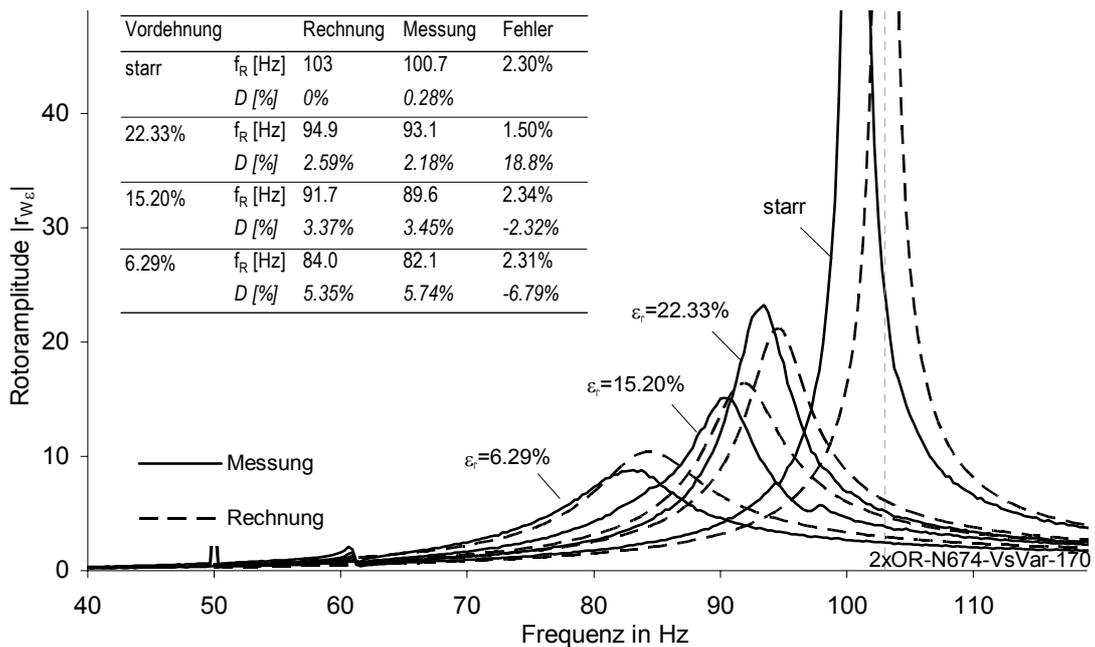


Abbildung 6-26: Gerechnete und gemessene Übertragungsfunktion des Versuchsrotors in Elastomerlagern aus N674 mit verschiedenen Vorspannungen bei  $\alpha = 0.48$ ,  $T = 21^\circ\text{C}$ . Referenzdatensatz für die Rechnung nach Anhang 4.

Wie Abbildung 6-26 zeigt, stimmen sowohl die berechneten Resonanzfrequenzen als auch die ermittelten Dämpfungswerte sehr gut überein. Damit wurde nicht nur die Werkstoffbeschreibung und die vereinfachte Rotormodellierung, sondern auch die Gültigkeit der Gleichungen zur Berechnung der Lagerdämpfung und Steifigkeit verifiziert. Die Ergebnisse wurden in der abgebildeten Tabelle zusammengefasst. Während die Resonanzfrequenz im Mittel 2.1% zu hoch berechnet wurde, streut das relative Dämpfungsmaß  $D$  betragsmäßig um etwa 12 %. Die absolute Abweichung der Dämpfung macht hingegen maximal 0.4% aus.

Abbildung 6-27 zeigt die Ergebnisse der Steifigkeits- und der Dämpfungsmessungen im Vergleich mit den Resultaten der Gesamtrechnung und der Dämpfungsrechnung nach dem Auslegungsdiagramm für den Nitrilwerkstoff N674 und für das Perfluorelastomer P94. Die Ringquerschnitte sind hier rechteckig ausgeführt. Das Lager mit Perfluorringen ist so steif, dass die Resonanzfrequenzen sich mit denen des starr gelagerten Rotors nahezu decken. Entsprechend gering fällt auch die Dämpfung aus, obgleich die Werkstoffdämpfung mit  $\eta = 0.65$  dem Doppelten des Wertes von Nitril entspricht. Wird die Rotormasse in Richtung Elastomerlager verschoben, so steigt die Resonanzfrequenz, anders als bei N674, wo die Lager deutlich nachgiebiger sind, wieder

an. Da mit zunehmender Massenposition  $\alpha = x/l$  der Lagerabstand bezüglich der Rotormasse sinkt, steigt auch die Dämpfungswirkung kontinuierlich an.

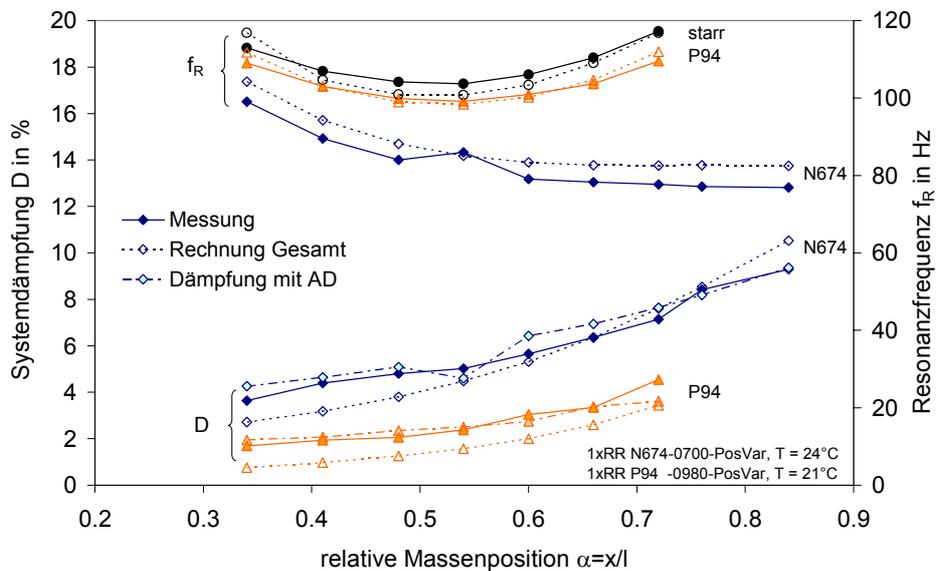


Abbildung 6-27: Dämpfungswerte und Resonanzfrequenzen des Versuchsrotors in Elastomerlagern mit Rechteckringen aus N674 und P94. Systemverstimmung durch Änderung der Position der Rotormasse.

Die Steifigkeitsaussage bzw. die gemessene Resonanzfrequenz stimmt bei P94 mit dem Rechenwert besser überein als im Fall starrer Lagerung (Tabelle 6-6). Hier heben sich offensichtlich vorhandene Fehler in der Rotor- und der Lagermodellierung gegenseitig auf. Die Fehler in der Steifigkeitsbestimmung werden indirekt in den relativen Abweichungen der Dämpfungsaussage deutlich. Der Fehler dort beträgt 14.7% bzw. 11.2% nach Korrektur der Eigendämpfung des Rotors. Wird die Dämpfung unter Umgehung der Rotor-Lager-Berechnung wie beim Auslegungsdiagramm allein durch Verwendung der (gemessenen) Resonanzabsenkung und des Verlustfaktors nach (6-39) bestimmt, so liegt der Fehler noch ein Drittel darunter. Eine *Korrektur der gemessenen Dämpfungen* war notwendig, da der Rotor auch ohne Zusatzdämpfung schon *Dämpfung aus den Fügestellen* besitzt. Nachmessungen ergaben einen prozentualen Dämpfungswert  $D = 0.65\%$ .

Tabelle 6-6: Prozentualer Fehler der Frequenzbestimmung und der Dämpfungsberechnung des Versuchsrotors in starren Lagern und in Lagern aus Perfluor Elastomer P94 und aus Nitril N674.

Fehler in %	Frequenz		Dämpfung		
	rel. Fehler	mittl. Fehler	rel. Fehler	rel. Fehler nach Korr.	rel. Fehler nach AD
P 94	1.1	0.91	37.0	14.7%	10.5
N 674	5.4	0.25	12.4	11.2%	7.8
starr	2.3	0.65	-		

Besonders für Rotoren in steifen Elastomerlagern ist bei der Dämpfungsvorhersage zu beachten, dass der Fehler der Lagerdämpfung quadratisch eingeht und mit der relativen Lagersteifigkeit gewichtet wird (vgl. (6-37)). Bei der dann ohnehin geringen Systemdämpfung fallen die Fehler in der Lagerberechnung nun umso stärker ins Gewicht.

### 6.5.5 Rotorbetrieb mit Unwuchterregung

Die bisherigen Messungen erfolgten im Stillstand. Unter realen Betriebsbedingungen können sich die Temperaturen und die Amplituden je nach Betriebszustand verändern und zu einer anderen Systemantwort führen. Die abschließenden *Messungen am rotierenden System* dienen insbesondere der Überprüfung der Linearität des Systems. Dabei läuft der Rotor mit und ohne Elastomerlager stufenweise stationär. Bei fester Drehzahl wird die umlauffrequente Antwort auf gezielte Unwuchtsetzungen mittels Frequenzganganalysators (Vibroport) bestimmt. Ausgehend von einem Wuchtzustand äquivalent zur Gütestufe G 0.4 nach DIN ISO 1940 dienen als Testunwuchten die Unwuchtäquivalente zu den vier nächst höheren Gütestufen G 1...G 16.

Erwartungsgemäß steigt die Amplitude der Unwuchtantwort mit zunehmender Unwucht an. Bei der kleinsten Setzung (G 1), welche in der Größenordnung der Unwucht liegt, wird das Ergebnis jedoch fehlerhaft (Abbildung 6-28, links).

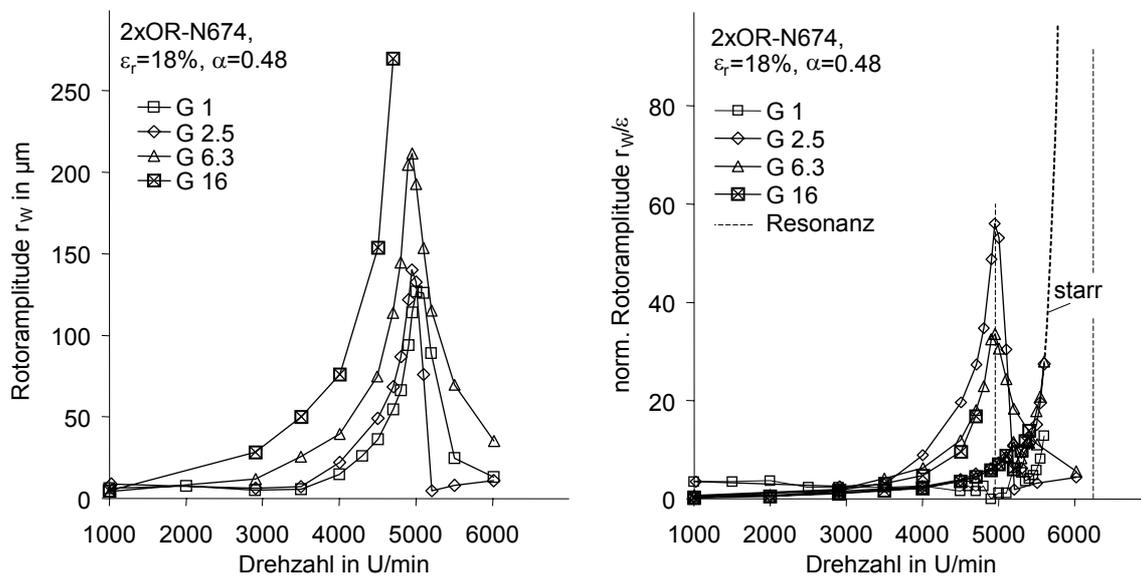


Abbildung 6-28: Gemessene Rotoramplitude  $r_w$  des elastomergelagerten Rotors (links) und unwuchtbezogene Amplitude im Vergleich zum starren Rotor (rechts) bei unterschiedlichen Unwuchtsetzungen. Lagerung in zwei O-Ringen aus N674-70 mit 18% Vorpressung. Rotormasse etwa in Mittenposition ( $\alpha = 0.48$ ).

Aus der Darstellung der Rotoramplitude, bezogen auf die Exzentrizität in Abbildung 6-28 (rechts), lässt sich die Linearität des Systems sofort erkennen. Hier sind sowohl die normierten Amplituden des starr gelagerten Systems als auch des Rotors in Elastomerlagern zu sehen. Mit Ausnahme der kleinsten Stufe G 1 verlaufen die normierten Amplituden des starr gelagerten Rotors deckungsgleich – das System verhält sich linear.

Auch im Fall der Elastomerlagerung kommt es zu einer guten Deckung der normierten Amplituden, zumindest für die Setzung der zu G 6.3 und G 16 äquivalenten Unwuchten. Die Kurven für G 2.5 weisen auf leichte Abweichungen von der Linearität hin. In Anbetracht der Tatsache, dass sich der Gummi im andauernden Betrieb unterschiedlich stark erwärmt und die Lagertemperatur schwankt, sind die Abweichungen jedoch überraschend gering.

Eine *Erwärmung* des Lagers ist in jedem Fall festzustellen. Bei den ursprünglich verwendeten Pendelrollenlagern beträgt die Lagertemperatur  $30^\circ\text{C}$  bis  $80^\circ\text{C}$ , was stark von der Vorspannung des

Lagers abhängt. Später kamen auch einfache Rillenkugellager zum Einsatz, welche sich wiederum auf ca. 35°C erwärmten. Eine zusätzliche Erwärmung durch Dissipation in den Elastomerlagern war nicht messbar.

Der *starr gelagerte Rotor* lässt sich auch bei kleinster Unwucht stationär nur bis 10% unterhalb der Resonanzdrehzahl betreiben. Ein überkritischer Betrieb ohne Dämpfung ist in keinem Fall empfehlenswert, da innere Dämpfungsmechanismen den Läufer anfachen und zerstören können. Werden hingegen *Elastomerringe* eingesetzt, so ist der Betrieb eines gut gewuchteten Rotors in der Resonanz und oberhalb davon problemlos möglich. Die Elastomerringe bringen in aller Regel ausreichend Dämpfung ins System, um sowohl die Resonanzdurchfahrt, den Betrieb in Resonanznähe als auch etwaige Stabilitätsprobleme in den Griff zu bekommen. Durch die Lagernachgiebigkeit mit Elastomerringen wird die Dämpfungswirkung auf das System verstärkt, dabei kommt es zu einer Resonanzabsenkung. Mit den in dieser Arbeit präsentierten Materialdaten, Berechnungsgleichungen und Auslegungsdiagrammen können die Lagersteifigkeit und die Dämpfungswirkung sehr gut quantifiziert werden.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit ermöglicht die Bestimmung der Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften von Lagern mit Elastomerringen und die optimierte Abstimmung der Lagereigenschaften zur Schwingungsberuhigung schwach gedämpfter Rotoren. Ausgehend von der *Werkstoffebene* führen die Betrachtungen über die *Ring- bzw. Elastomerlagerbeschreibung* auf die Beschreibung idealtypischer *Rotorsysteme*. Die theoretisch erarbeiteten Grundlagen werden durch *umfangreiche Versuche* auf allen drei Ebenen untermauert.

In erster Näherung ist die *Steifigkeit eines Elastomerrings gleich dem Produkt aus mittlerem Umfang und E-Modul*. Für nicht vorgedehnte anvulkanisierte Ringe mit quadratischem Querschnitt trifft dies exakt zu, weshalb wir diese Form als Referenzgeometrie auswählen. Die klar *definierten Kontaktrandbedingungen* verbessern zudem die Übereinstimmung von Messung und Vorhersage gegenüber vorgepressten Ringen, da hier die Reibung im Kontaktgebiet keine Rolle spielt. Das Seitenverhältnis eines Rechteckquerschnitts geht mit der dritten Potenz in die Steifigkeit ein. Die radiale Vorpressung ist aus Gründen des Einbaus auf einen kleinen Bereich um 10% herum begrenzt und spielt eine untergeordnete Rolle. Nicht so bei O-Ringen. Hier ist die radiale Vorpressung bei festgelegtem Durchmesser der einzige Gestaltparameter. Die Steifigkeit nimmt linear mit der Vorpressung zu, welche idealerweise im Bereich von 5% bis 20% liegt. Dehnungen in Umfangsrichtung wurden ausgeschlossen. In der Regel führen O-Ringe selbst bei hoher Vorpressung auf nachgiebigere Lager als Ringe mit Rechteckquerschnitt, was bei der Schwingungsberuhigung von Vorteil ist. Der Einfluss der Einbauparameter und der Ringgeometrie findet sich zusammengefasst in Gestaltfunktionen  $k_L$  des Lagers in Tabelle 4-1 wieder.

Anhand einer repräsentativen Auswahl handelsüblicher *O-Ring-Werkstoffe* wird das breite Spektrum der möglichen Elastomereigenschaften abgedeckt. Im quasi-statischen Verhalten treten dabei keine großen Unterschiede auf, in der Dynamik sind die Unterschiede hingegen enorm. Die Temperatur- und Frequenzabhängigkeit dieser Werkstoffe wird anhand der für diese Arbeit gemessenen Masterkurven deutlich, welche die thermo-viskoelastischen Eigenschaften repräsentieren.

*Hohe Verlustfaktoren* von  $\tan\delta > 0.5$  lassen sich bei konstanter Frequenz von 50 Hz über einen Temperaturbereich von etwa 30°C aufrechterhalten. Das Maximum von  $\tan\delta \approx 1$  liegt dann je nach Werkstoff bei etwa 30°C für Perfluorkautschuk P94, 0°C für Fluorkautschuk V747, -10°C für Nitril N674 und sogar unter -50°C für Silikon S604. Bei konstanter Temperatur von 20°C wirken diese hohen Werkstoffdämpfungen von  $\tan\delta > 0.5$  über einen Frequenzbereich von etwa drei Dekaden. Das Maximum liegt hier für Perfluorkautschuk bei 6 Hz, für Fluorkautschuk bei 1 kHz und für Nitril bei 30 kHz.

Durch *multiplikative Verknüpfung* der thermo-viskoelastischen Eigenschaften des *Materials* mit der nichtlinearen Einbaustatik des *Lagers* gelingt es, die komplexen Abhängigkeiten von Frequenz und Temperatur von der Einbaugeometrie und der Kontaktproblematik zu entkoppeln. Voraussetzung hierfür ist, dass die Schwingungen um den Einbauzustand herum klein bleiben und

amplitudenabhängige Effekte eine untergeordnete Rolle spielen. Dann ist *der Verlustfaktor des Lagers gleich dem Verlustfaktor des Materials*. Die Steifigkeit resultiert aus dem Produkt von Speichermodul des Werkstoffs, mittlerem Umfang und der genannten Gestaltfunktion  $k_L$ . Letztere nimmt für die Referenzgeometrie den Wert  $k_L = 1$  an. Die dynamischen Messungen auf der Bauteilebene bestätigen diesen Ansatz.

Am Beispiel des Lavalrotors wird gezeigt, dass die Abstimmung der Lager- zur Wellensteifigkeit darüber entscheidet, wie viel Dämpfung aus dem Lager ins System gelangt. Eine hohe Systemdämpfung setzt eine deutliche Absenkung der Resonanz und hohe Werkstoffdämpfung im Lager voraus. Durch die Kombination der Masterkurve und der Zusammenhänge des Rotorsystems entstehen hier komplexe Auslegungsdiagramme. Diese Auslegungsdiagramme geben, ausgehend von der Resonanz des ungedämpften Systems, für alle denkbaren Temperaturen des Lagers und Resonanzabsenkungen des Rotors Auskunft über die erzielbare Systemdämpfung und die dafür erforderliche Lagersteifigkeit. Noch bevor das Elastomerlager im Detail gestaltet wird, erlaubt die graphische Methode das Nachprüfen der Systemeigenschaften bei veränderten Betriebsbedingungen und eine Optimierung, die auf die Ausnutzung und Auswahl des Lagerwerkstoffs im Hinblick auf maximale Systemdämpfung abzielt.

Wie praxisnahe Rechenbeispiele illustrieren, sind Lager aus hochdämpfenden Gummis nicht immer realisierbar und sinnvoll, da hohe viskoelastische Dämpfung stets mit einer hohen Steifigkeit aber auch mit großer Empfindlichkeit gegenüber Änderungen der Betriebsbedingungen einhergeht. Jenseits des Maximums fällt die Dämpfung relativ schnell ab. Um den engen Bereich hoher Dämpfungswerte auszudehnen, wird vorgeschlagen, in den Lagern eine Werkstoffkombination von Elastomeren mit benachbarten Glastemperaturen einzusetzen.

Will man ohnehin eine sehr steife Lagerung bei maximierter Dämpfung erreichen, so sind teure Perfluor-Kautschuke die erste Wahl. Dagegen geben auch Lager aus deutlich preiswerteren Elastomeren wie Nitril, Chloropren oder EPDM jenes, für die Verbesserung der Laufruhe und Stabilität notwendige Quäntchen an Dämpfung, wenn sie im Sinne des zu dämpfenden Freiheitsgrads mit ausreichender Nachgiebigkeit eingesetzt werden. Ein Verhältnis von Lagersteifigkeit zu Wellensteifigkeit von  $s_L = 1$  stellt dabei einen guten Kompromiss zwischen weicher Abstimmung bei nicht zu großer Absenkung der Lavalfrequenz von  $\Omega_R/\omega_L \approx 0.7$  dar.

Die Aussagen anhand des Lavalrotors lassen sich auf die Gestaltung der Elastomerlager von Rotoren mit mehreren Freiheitsgraden bzw. Resonanzstellen übertragen. Dabei wirkt die Resonanzabsenkung nur solange mindernd auf die Amplituden, bis die Schwingform in einer darunter liegenden elastischen Eigenform eines frei-frei gelagerten Rotors „eingefangen“ wird.

Die Formulierung des Stoffgesetzes mit inneren Freiheitsgraden auf Basis der Masterkurven des Elastomers ermöglicht, unter Verwendung der hier entwickelten Lagerbeschreibung, die Bewegungsgleichungen auch komplexer *Rotorsysteme* mit frequenzabhängigen Koeffizienten in *gewöhnliche Differentialgleichungssysteme* zweiter Ordnung zu überführen, welche dann mit Standardverfahren gelöst werden. Diese Darstellung kann sehr gut mit der Methode der Finiten Elemente kombiniert werden.

Abschließend wurden die auf Material-, Bauteil- und Rotorebene gebildeten Modelle an einem realen *Versuchsrotor* unter Einsatz verschiedener Elastomere und Bauformen überprüft. Dabei

wurden die Dämpfungsaussage des Auslegungsdiagramms und die Berechnung des Gesamtmodells verifiziert. Der Fehler in der Dämpfungsbestimmung liegt im Bereich von 10 bis 15 %. Die Resonanzfrequenz wurde auf 1-3 % genau getroffen. Im Betrieb mit gezielten Unwuchtsetzungen zeigt sich, dass sich, selbst bei großen Unwuchtamplituden und verhältnismäßig hoher lokaler Lagerdämpfung, das Rotorssystem weitgehend linear verhält.

In der Zukunft sollte die *Datenbasis* sowohl der linear thermo-viskoelastischen als auch der nichtlinear-hyperelastischen Eigenschaften *ausgewählter Materialien erweitert werden*. Zusätzlich zu den üblichen Zugversuchen sind die Materialfunktionen des Schubmoduls  $G(t)$  im Sinne der Masterkurven zu bestimmen. Für die Erstellung und Anpassung der Masterkurven existieren bisher keine einheitlichen Algorithmen und Standards. Es wird ein Verfahren skizziert, welches durch optimierte Anpassung der fünf Temperatur-Frequenz-Shiftparameter eine bessere Beschreibung der Dämpfung mit den resultierenden Materialfunktionen ermöglicht. Die Umsetzung führt auf eine genauere und besser reproduzierbare Steifigkeits- und *Dämpfungsbeschreibung*.

Je nach Fragestellung ist es sinnvoll, die Stoffgesetze und die Beschreibung der Ringstatik weiter zu verfeinern. Erweiterte Materialgesetze besitzen jedoch mehr Parameter, die Transparenz und Einfachheit des hier gezeigten Weges geht verloren. Durch FE-Modelle können der räumliche Verzerrungszustand beim Einbau und die lokalen Effekte an der Kontaktfläche genauer erfasst werden. Es sollte versucht werden, die bis jetzt noch *empirischen Korrekturfaktoren* für die O-Ringsteifigkeiten auch auf rechnerischem Wege zu bestimmen. Die Einbeschreibung des Payne-Effekts in das Stoffgesetz für Elastomerringe weist dabei in eine viel versprechende Richtung. Voraussetzung der verfeinerten Modellbildungen sind jedoch umfassendere Materialbeschreibungen.

Für die Beschreibung der rotordynamisch relevanten Eigenschaften von Elastomerringlagern stellt die vorliegende Arbeit mit den oben beschriebenen Erkenntnissen einen deutlichen Fortschritt dar. Detailliertere *Berechnungen der Quasi-Statik des Elastomerlagers mittels der Methode der Finiten Elemente* können direkt auf den hier gezeigten Ergebnissen der optimierten Rotor-Lager-Auslegung aufsetzen.

# Anhang

## Anhang 1: Ergebnisse der Amplitudensweep-Messungen

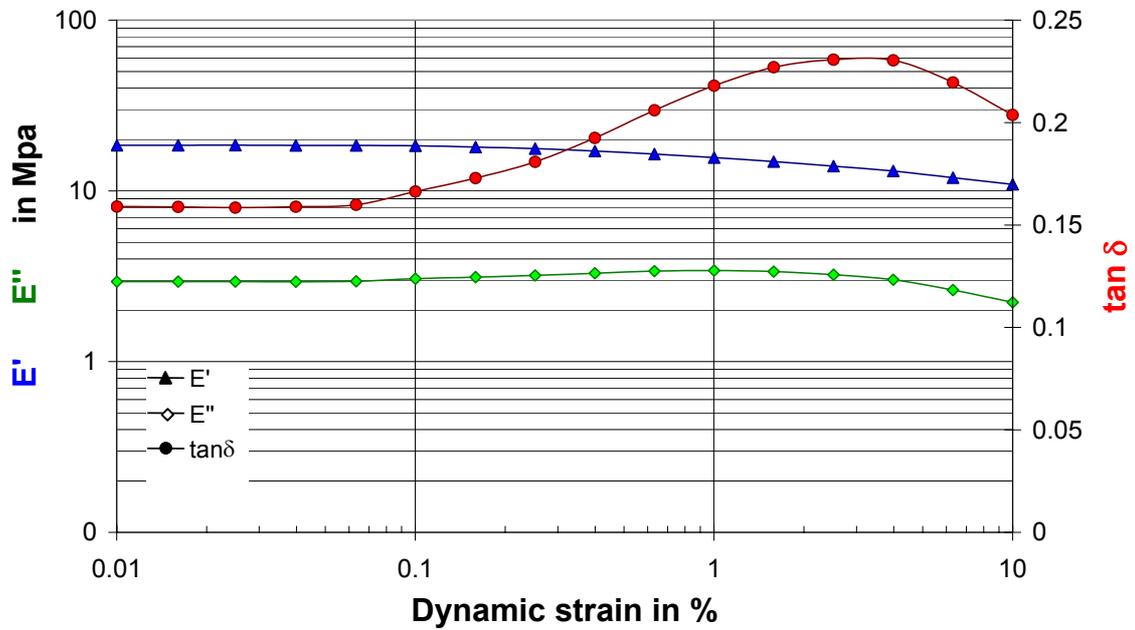


Abbildung A 1: Amplitudensweep von N674-70 bei  $T = 23.08^{\circ}\text{C}$ , 10 Hz, Vordehnung  $\varepsilon_0 = 19.91\%$ , Schnur-Proben-Durchmesser  $d = 2.62 \text{ mm}$ , Länge,  $L_0 = 7.146 \text{ mm}$ .

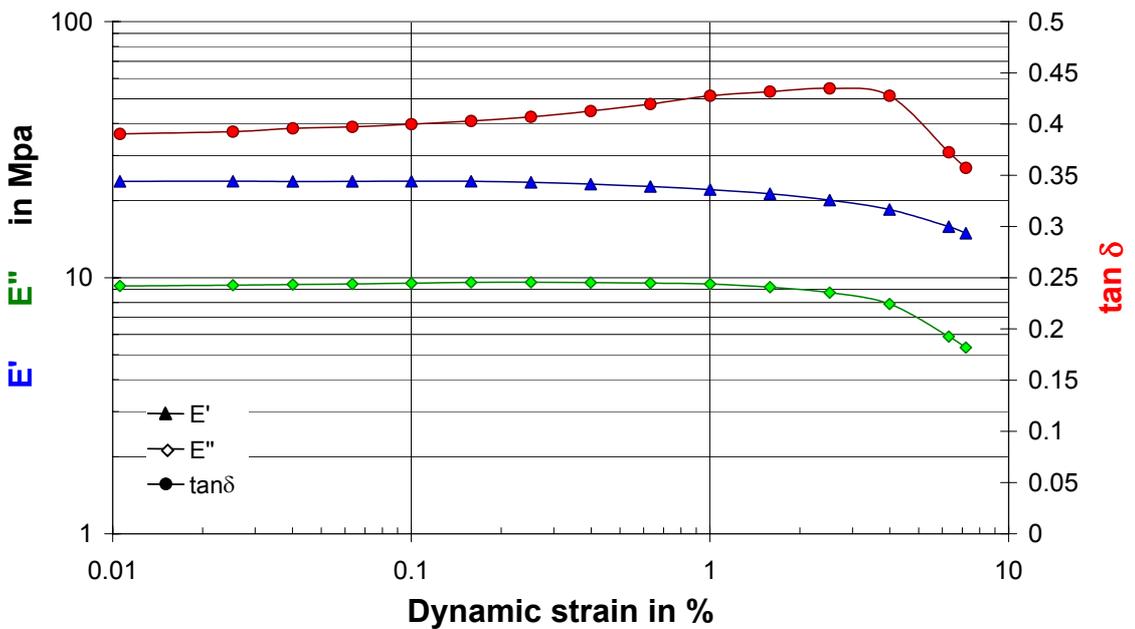


Abbildung A 2: Amplitudensweep von V747-75 bei  $T = 23.09^{\circ}\text{C}$ , 10 Hz, Vordehnung  $\varepsilon_0 = 19.91\%$ , Schnur-Proben-Durchmesser  $d = 1.78 \text{ mm}$ , Länge,  $L_0 = 11.141 \text{ mm}$ .

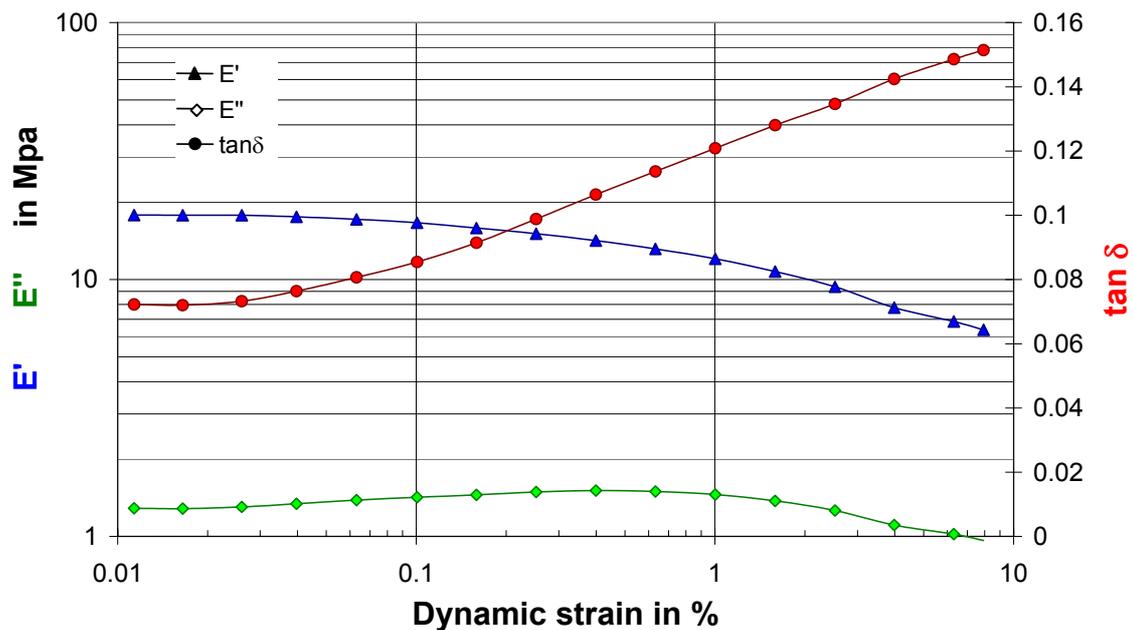


Abbildung A 3: Amplitudensweep von S604-70 bei  $T = 22.90^{\circ}\text{C}$ , 10 Hz, Vordehnung  $\varepsilon_0 = 19.91\%$ , Schnur-Proben-Durchmesser  $d = 3.53 \text{ mm}$ , Länge,  $L_0 = 9.849 \text{ mm}$ .

Tabelle A 1. Ergebnisse der Amplitudensweeps bei RT  $23^{\circ}\text{C}$ ,  $f = 10 \text{ Hz}$ .

V747-75				N674-70				S604-70			
Strain dyn.	$E'$	$E''$	$\tan \delta$	Strain dyn.	$E'$	$E''$	$\tan d$	Strain dyn.	$E'$	$E''$	$\tan \delta$
%	MPa	MPa		%	MPa	MPa		%	MPa	MPa	
0.0106	23.7772	9.2816	0.3904	0.0100	18.4905	2.9401	0.1590	0.0114	17.8212	1.2875	0.0722
0.0253	23.8083	9.3479	0.3926	0.0161	18.5196	2.9417	0.1588	0.0165	17.8039	1.2824	0.0720
0.0401	23.7570	9.4034	0.3958	0.0250	18.5325	2.9381	0.1585	0.0260	17.7856	1.3026	0.0732
0.0635	23.7914	9.4520	0.3973	0.0398	18.4712	2.9360	0.1590	0.0397	17.5476	1.3404	0.0764
0.1001	23.8068	9.5198	0.3999	0.0633	18.4706	2.9531	0.1599	0.0631	17.1611	1.3846	0.0807
0.1587	23.8080	9.5943	0.4030	0.1001	18.4021	3.0612	0.1663	0.1006	16.6264	1.4210	0.0855
0.2516	23.5862	9.6008	0.4070	0.1591	18.0735	3.1249	0.1729	0.1590	15.8656	1.4511	0.0915
0.3987	23.2018	9.5768	0.4128	0.2519	17.6866	3.1987	0.1809	0.2519	15.0761	1.4900	0.0988
0.6318	22.7043	9.5263	0.4196	0.3992	17.1054	3.2929	0.1925	0.3990	14.1688	1.5083	0.1065
1.0012	22.0894	9.4455	0.4276	0.6324	16.4367	3.3868	0.2061	0.6320	13.1564	1.4953	0.1137
1.5874	21.2686	9.1808	0.4317	1.0005	15.6693	3.4163	0.2180	1.0025	12.0458	1.4560	0.1209
2.5173	20.0894	8.7355	0.4348	1.5859	14.8368	3.3688	0.2271	1.5914	10.7404	1.3753	0.1281
3.9928	18.4635	7.8946	0.4276	2.5128	13.9774	3.2253	0.2307	2.5246	9.3722	1.2621	0.1347
6.3095	15.8219	5.8914	0.3724	3.9836	13.0850	3.0150	0.2304	3.9830	7.7723	1.1073	0.1425
7.1954	14.9270	5.3329	0.3573	6.3112	11.9530	2.6249	0.2196	6.3082	6.8670	1.0206	0.1486
				10.0028	10.9306	2.2269	0.2037	7.9319	6.3698	0.9646	0.1514

## Anhang 2: Torsionspendelversuch zur Dämpfungsklassifizierung

Neben der geschwindigkeitsproportionalen viskoelastischen Dämpfung ist eine geschwindigkeitsunabhängige Reibungsdämpfung zu erwarten. Diese lässt sich unterteilen in:

äußere Reibung durch tangentielle Relativbewegung von Teilen der Kontaktfläche (micro-slip) oder auch globalem Verrutschen (macro-slip) und innere Reibung zwischen den Molekülketten und eingelagerten Füllmaterialien (z.B. Rußpartikel).

Diese Coulombsche Reibung lässt sich mittels statischer Hysterese verdeutlichen (Abbildung A 4). Anteile der aus einer äußeren Belastung oder Verformung resultierenden inneren Verspannungen bzw. Verzerrungen bleiben nach der Entlastung „gespeichert“. In Abhängigkeit von der Ausbildung der Kontaktzonen, in denen Reibung auftritt, variieren die entsprechenden Reibungskräfte.

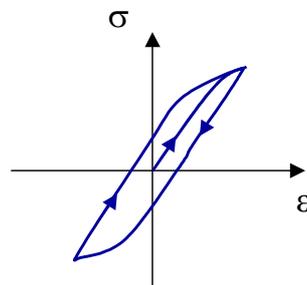


Abbildung A 4: Spannungs-Dehnungs-Verlauf für einen Elastomer mit statischer Hysterese.

Der exemplarisch nach DIN - EN ISO 6721-2 geführte Torsions-Ausschwingversuch (Abbildung A 5) zeigt rein viskoelastisches Materialverhalten mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung. Sind die Verschiebungen des Bauteils relativ klein, und ist der Gummi nicht verstärkt bzw. nicht sehr stark gefüllt, so kann der Anteil der inneren Reibung vernachlässigt werden.

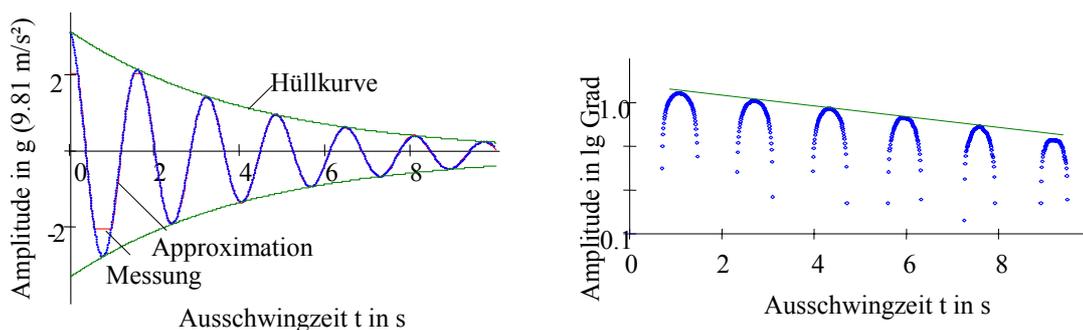


Abbildung A 5: Ausschwingkurve im Torsions-Ausschwingversuch nach DIN – EN ISO 6721-2 für ein Elastomer NBR Shore A53 mit viskoser Proportionaldämpfung,  $f = 0.613 \text{ Hz}$ ,  $\delta = 0.24 \text{ s}^{-1}$ ;  $D = 6.2\%$  und  $G = 1.23 \text{ N/mm}^2$ .

Der Anteil der äußeren Reibung hängt jedoch stark von der Gestaltung der Rand- bzw. Kontaktgeometrie ab und wird erst in der Amplitudenabhängigkeit der Dämpfung des Bauteils sichtbar. Die Messungen an Bauteilen Abbildung 5-11 zeigten jedoch, dass dieser vordehnungsabhängige Effekt vor dem Hintergrund hoher viskoser Dämpfung eine untergeordnete Rolle spielt und durch das Anvulkanisieren des Elastomerrings gänzlich verschwindet (Abbildung 5-3).

### Anhang 3: Übersicht über die Messungen der DTMA

Als Zugproben dienten Schnüre mit Rechteck- und mit Kreisquerschnitt. Als Werkstoffe wurden das Referenzelastomer N674-70 und vier weitere Werkstoffe nach Tabelle 1.1 ausgewählt. Im ersten Anlauf wurden handelsübliche O-Ringe mit Schnurdicken von 3.63 mm aufgeschnitten und als Zugproben untersucht. Die Einspannung der O-Ring-Schnüre erwies sich teilweise als problematisch. Standardmäßig werden ca. 10 mm breite Streifenproben aus Plattenmaterial untersucht. Diese Probenform diente den Wiederholungsmessungen. Die Vermessung der Bauteilprobe bereitete aufgrund der zu hohen Kräfte bei tieferen Temperaturen unlösbare Probleme.

Tabelle A 2. Übersicht über die im Auftrag bei der Fa. Gabo durchgeführten Messungen.

Messt.	Probe	Typ	Material	Mode	Amplitude [%]	f [Hz]	T [°C]
1	1	S	N674-70	MC	0.2...0.5%	0.5 ... 50	-50...150
2	1	S	N674-70	AS	0.01...10%	10	23
3	1B	P	N674-70	MC	0.07..0.01	0.5 ... 50	-50...100
4	1B	P	N674-70	AS	0.007...10	10	0
5	1B	P	N674-70	AS	0.01...10	10	26
6	2	B	N674-70	MC	0.0008	0.5 ... 50	10...80
7	3	S	S604-70	MC	0.2...0.5%	0.5 ... 50	-50...150
8	3	S	S604-70	AS	0.01...7.1%	10	RT
9	3B	P	S604-70	MC	0.07..0.01	0.5 ... 50	-100...95
10	4	S	V747-70	MC	0.2...0.5%	0.5 ... 50	-50...150
11	4	S	V747-70	AS	0.01...7.9%	10	RT
12	5	S	C557-70	MC	0.2...0.5%	0.5 ... 50	-50...150
13	5B	P	C557-70	MC	0.05..0.1	0.5 ... 50	-60...100
S	Schnurprobe			P	Plattenmaterial	AS	Amplitudensweep
B	Bauteilprobe					MC	Masterkurve

Der Eplexor<sup>®</sup> temperiert die Proben in einer relativ kleinen Kammer. Die Temperatur geht in 5°C-Schritten von -100°C bis 100°C – ein Bereich, der für die meisten Elastomere zweckmäßig ist. Um den Glasbereich von Silikon zu erfassen, muss man mit den Temperaturen jedoch noch weiter runter gehen. Bei 1% Vordehnung werden die Zugproben dann mit Dehnungsamplituden von 0.1% im Frequenzbereich von 0.5...50 Hz beansprucht. Aus dem Verlauf des Eingangs- und Ausgangssignals bestimmt das Messgerät zu jeder Frequenz und Temperatur die jeweiligen Anteile der komplexen Steifigkeit. Der Verlustfaktor wird direkt aus dem Phasenwinkel abgelesen.

Tabelle A 3. Vergleich der Versuchsbedingungen und wichtige Ergebnisse der erneuten Anpassung der Relaxationsisothermen im Vergleich zu Auswertung der Gabo-Messungen.

	Parker 1994	Gabo 2002	Gabo 2002
Versuchsart	Relaxation	Hysteresen	Hysteresen
Probenform	Streifenprobe	O-Ring Schnur	Streifenprobe 2x10mm
Frequenz/Zeitbereich	3 ... 600 s	0.5 ... 50 Hz	0.5 ... 50 Hz
Tempo. Bereich	23°C ... -40°C	70°C ... -50°C	70°C ... -50°C
Vordehnung	ca. 1%	1%	1%
Amplitude	< 1%	0.1%	0.1%
Anzahl Isothermen	9	24	24
Vertikalshift-Korrektur	Ja (neue Anpassung)	Ja	Ja
Glastemperatur	-25°C	-33°C	-33°C
Mittler Fehlerbetrag E'	2.21%	6.1%	2.0%
Max. Fehlerbetrag	17.89%	50.6%	10.2%

**Anhang 4: Referenzdatensatz N674**

*Tabelle A 4: Shift-Daten und Prony-Parameter der Referenzmasterkurve für Parker N674-70 mit  $E_0=3.88$  MPa und  $E_g = 2995$  MPa.*

Prony-Parameter		Arrhenius-Shift-Faktoren				Glastemp. WLF-Konstanten		
$e_i=E_i/E_g$	$\tau_i$	$T_c^u$	$A_e^u$	$T_c^o$	$A_e^o$	$T_g$	$c_1$	$c_2$
[-]	[s]	[°C]	[kJ/mol]	[°C]	[kJ/mol]	[°C]	-	[K]
1.95E-02	1.37E-04	-30	231.1	-10	154.5	-25	-17.44	51.6
9.63E-02	1.37E-04							
8.84E-02	2.06E-03							
6.82E-02	1.37E-04							
1.07E-01	1.80E-02							
2.90E-03	1.85E-01							
1.29E-01	5.95E+00							
1.21E-01	1.85E-01							
7.03E-02	1.80E-02							
4.93E-02	1.04E+00							
7.47E-02	3.08E+01							
1.03E-01	1.04E+00							
1.92E-02	1.04E+00							
2.46E-02	1.17E+02							
1.94E-03	1.17E+02							
7.32E-04	1.89E+06							
1.37E-02	6.23E+02							
3.94E-03	6.06E+03							
1.49E-03	7.63E+04							
7.42E-04	1.53E+07							
3.71E-04	6.63E+05							
1.19E-04	1.53E+07							
3.77E-04	4.26E+09							
2.28E-04	1.50E+09							
3.91E-04	1.75E+08							

## Anhang 5: Masterkurven ausgewählter O-Ring-Werkstoffe

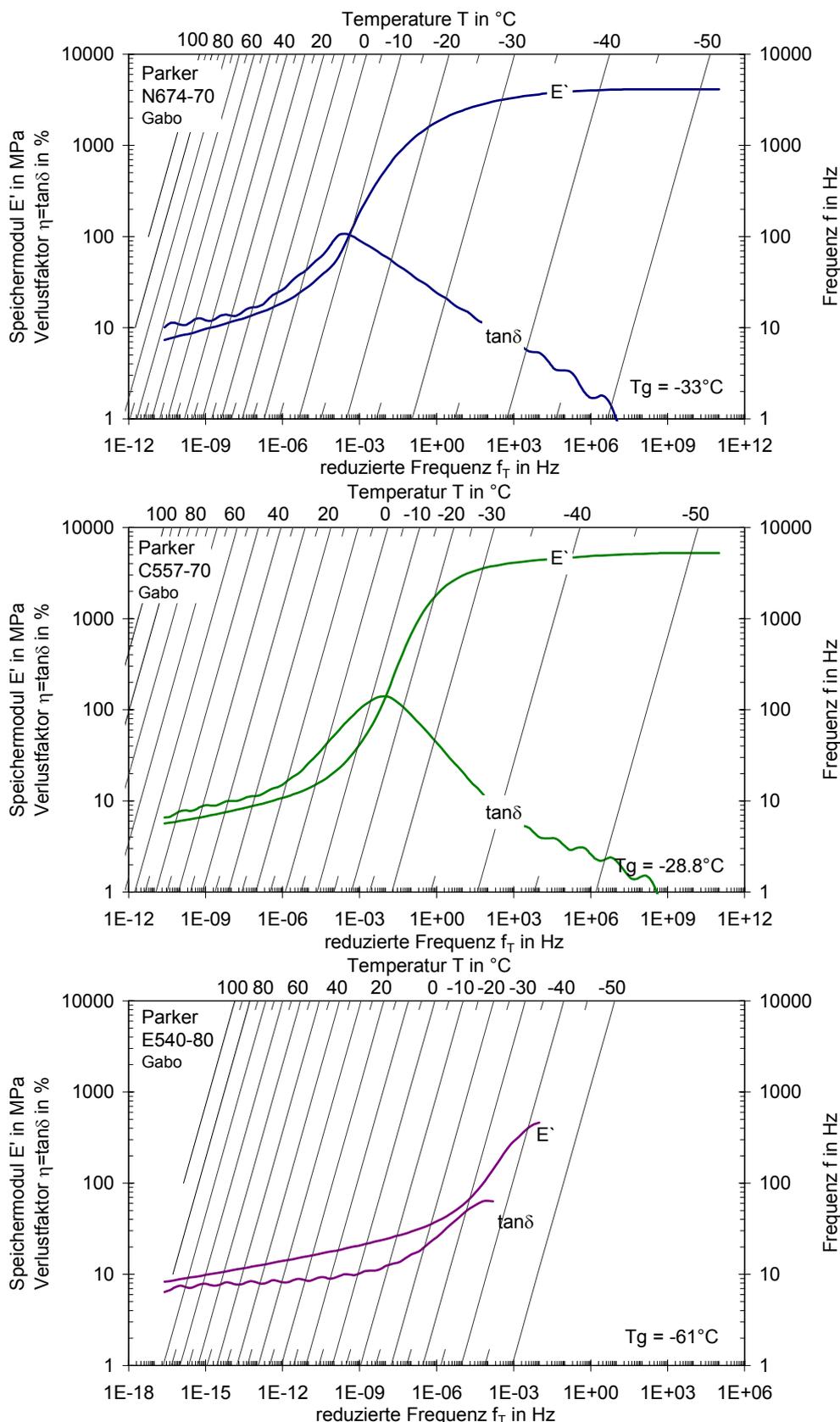


Abbildung A 6.: Masterkurven repräsentativer O-Ring-Werkstoffe aus Lohnprüfungen bei der Fa. Gabo Qualimeter. Verlauf auf Grundlage der angepassten Prony-Parameter. V.o.n.u.: N674-70, C557-70, E540-80.

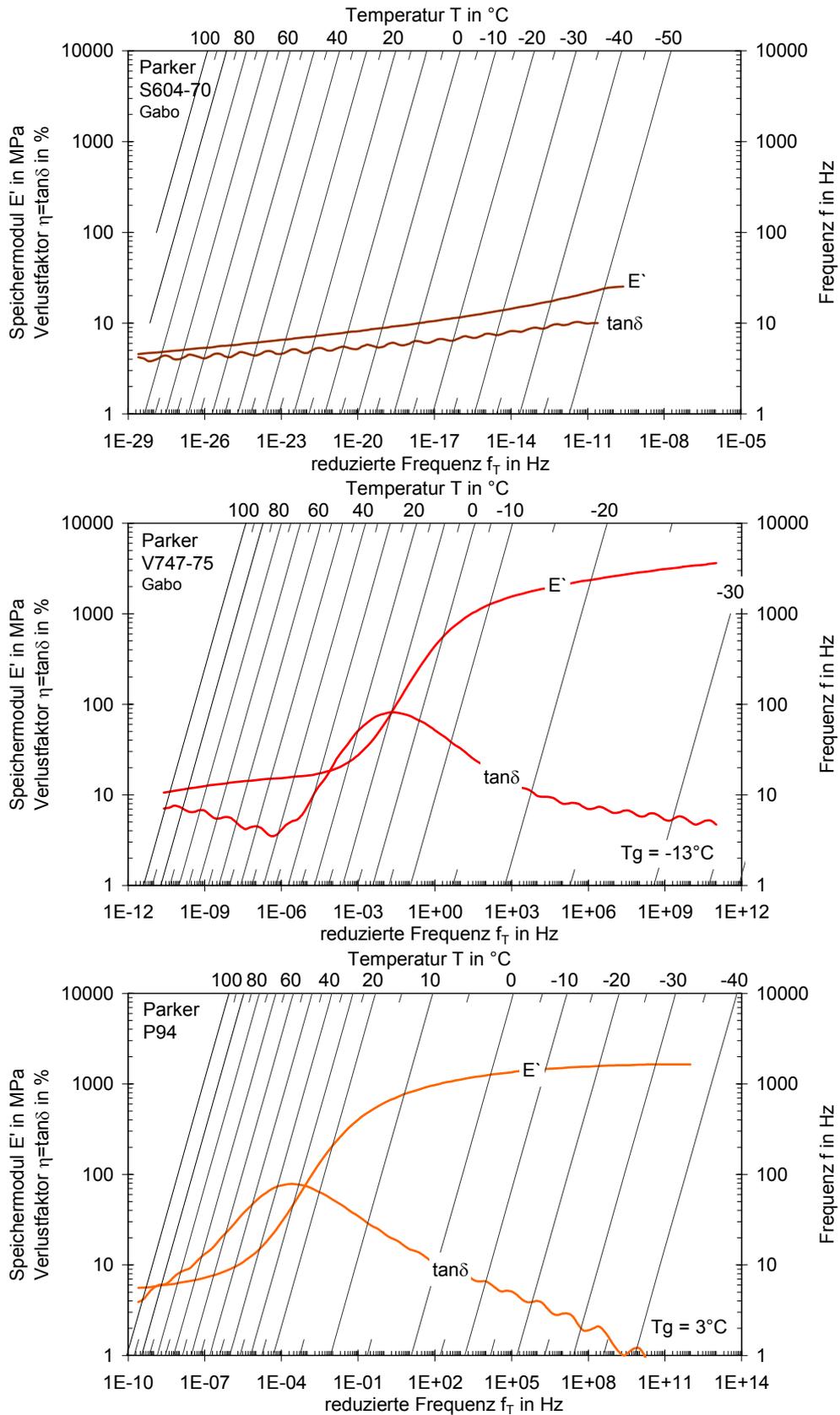


Abbildung A 7: Masterkurven repräsentativer O-Ring-Werkstoffe aus Lohnprüfungen bei der Fa. Gabo Qualimeter. Verlauf gemäß Prony-Parameter. V.o.n.u.: S604-70, V747-70, P94. (P94 Daten von Parker).

## Anhang 6: Versuchsaufbauten zur Quasistatik

Eine hohe Genauigkeit wird durch die Verwendung von Gewichten erzielt. Diese Versuchsart ist jedoch zeitaufwendig und die Größe der handhabbaren Gewichte reicht aufgrund der hohen Steifigkeiten einiger Elastomerringe sehr bald nicht mehr aus. Anstelle der Gewichtskraft erfolgten später auch weggesteuerte Versuche mit dem Schrittmotoraufbau, wobei die hier gezeigte Probenanordnung im Prinzip übernommen wurde (Anhang 7).

### Messung der differentiellen Radialsteifigkeit von Elastomerringen.

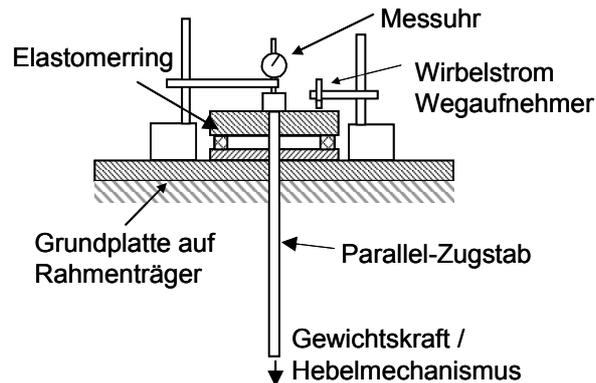


Abbildung A 8: Messanordnung zur Bestimmung der differentiellen Radialsteifigkeit von Elastomerringen.

### Differentielle Radialsteifigkeit von Elastomerringen.

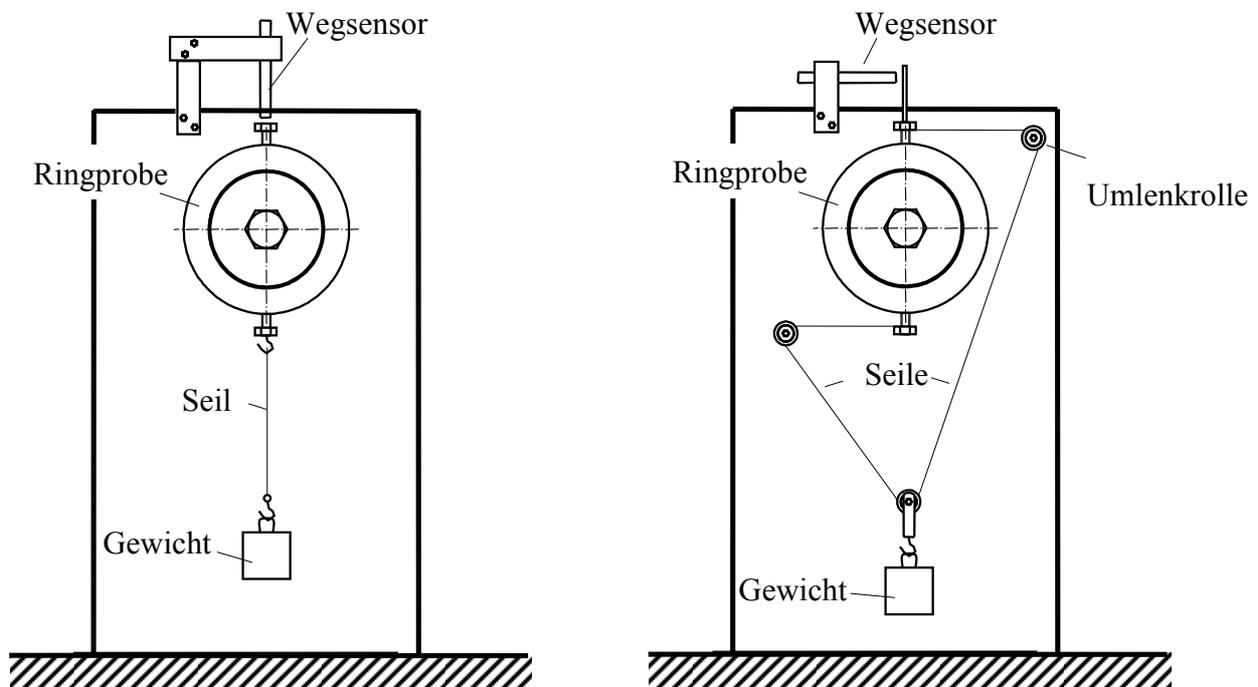


Abbildung A 9: Skizzierter Aufbau zur Bestimmung der Gesamtsteifigkeit (links) und der differentiellen Tangentialsteifigkeit (rechts). Kraftgesteuerte Lastaufbringung.

## Anhang 7: Aufbau mit Schrittmotorsteuerung

Die Schrittmotoransteuerung ermöglicht eine definierte Wegvorgabe im Bereich von einigen  $\mu\text{m}$  bis hin zu 30 mm. Durch den Schrittmotor können Wege in Form von Sprung-, Stufen-, Rampen- und Sinusfunktionen vorgegeben werden. Messgrößen sind Kraft und Weg.

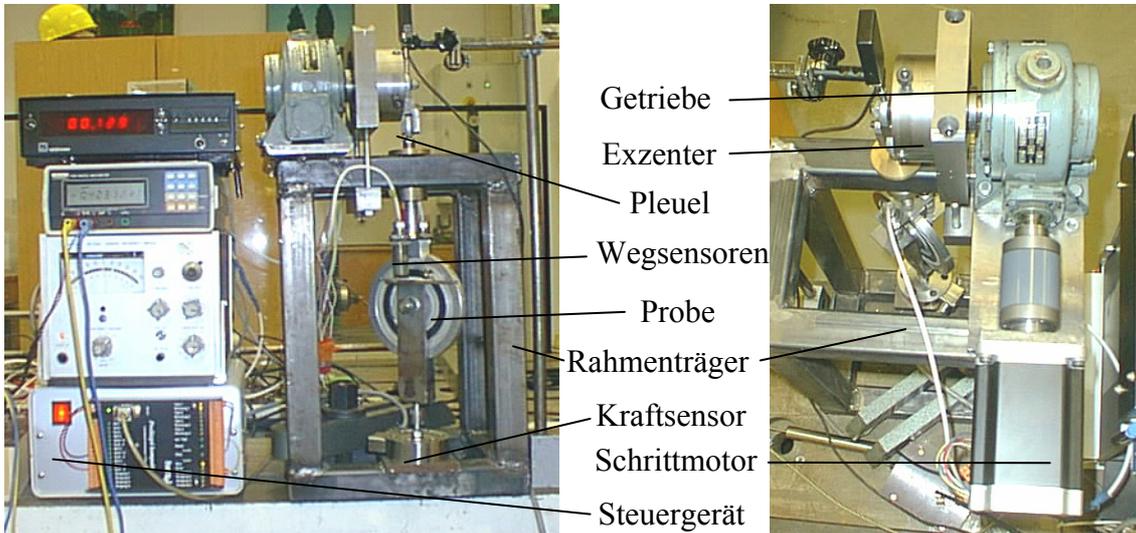


Abbildung A 10: Aufbau zur statischen und dynamischen Untersuchung von Elastomerproben. Mit schrittmotorgesteuerter Wegvorgabe.

**Kinematik:** Die Wegvorgabe auf den Probanden erfolgt vom Schrittmotor über einen Exzenter auf eine Pleuelstange. Die Exzentrizität in der Kraftachse kann mittels Stellschrauben stufenlos von 0...20 mm eingestellt werden. Analog ist die Vorgabe einer Vorlast möglich.

**Zeitverhalten:** Konstruktiv bedingt ist der Schrittmotor dabei eher ein quasi-statischer bzw. niederfrequenter Antrieb. Die Schrittfrequenz beträgt bis zu 10 kHz, jedoch benötigt der Motor 200 Schritte für eine Umdrehung und liefert sein maximales Moment nur bis zu einer Drehfrequenz von etwa 2.5 Hz (Abbildung A 11).

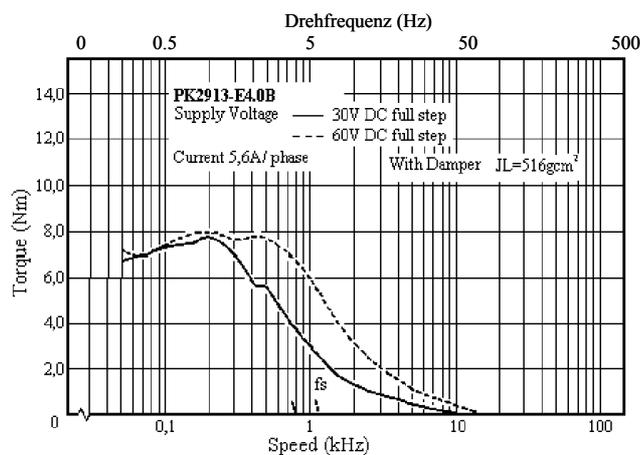


Abbildung A 11: Drehmoment-Schrittfrequenz-Kennlinie des Schrittmotors der Fa. Herzl.

Durch ein Untersetzungsgetriebe zwischen Motor und Exzenter mit dem Übersetzungsverhältnis von 15:1 stellt sich ein höheres Haltemoment bzw. eine höhere Steifigkeit ein. Die Drehfrequenz ist nun auf 0.25 Hz begrenzt.

## Anhang 8: Rotorversuchsstand

Ausbaustufen:

- I Ausgangszustand nach Zeichnung
- II Verrippung der Statorstreben
- III 2ter Rotor

Technische Daten:

<b>ROTOR</b>	
Rotormasse (I-II)	12.31 kg
Rotormasse (III)	11.82 kg
<b>STATOR (Stufe I)</b>	
gen. Statormasse $m_s$	11.281 kg
gen. Statorsteifigkeit	$40.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
<b>WELLE</b>	
Wellenmasse	3.742 kg
Länge	0.50 m
Durchmesser	0.035 m
E	$2.10 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
FTM $I_y$	$7.3662 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
Biegesteifigkeit $EI_y$	$1.55 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$
$S_{\text{Laval}}$	$5.94 \cdot 10^6 \text{ N/m}$

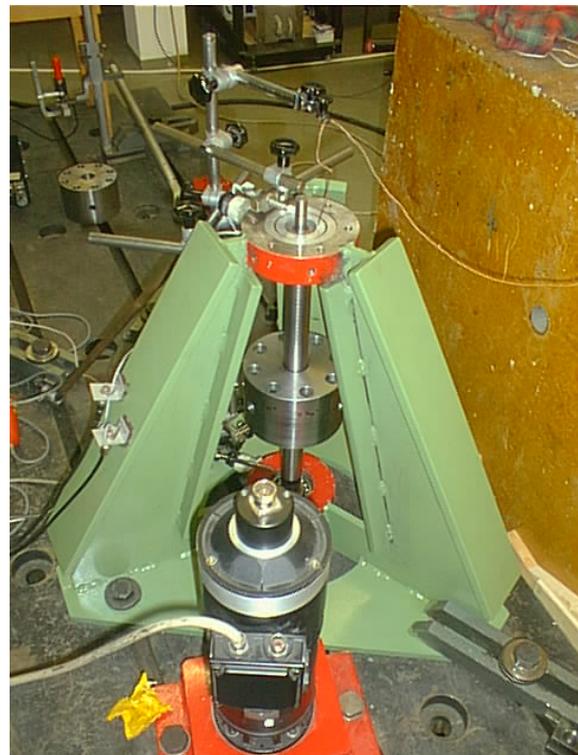
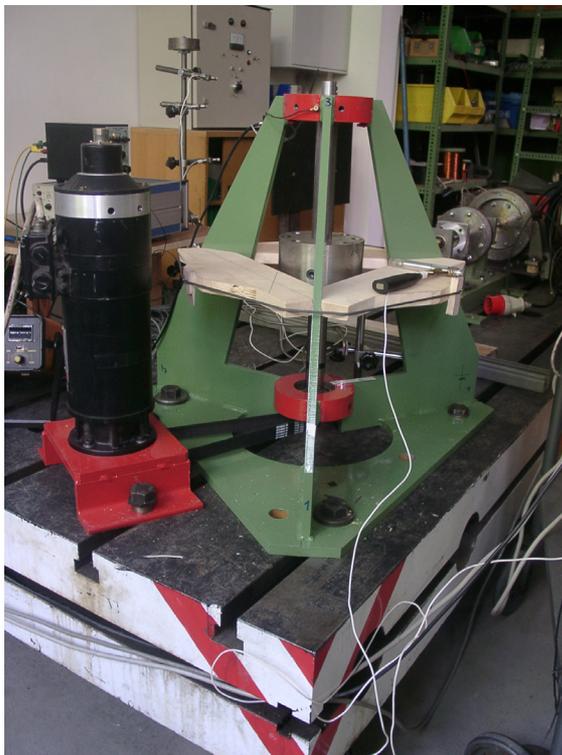


Abbildung A 12: Ausbaustufen des Versuchsrotors. Stufe I (links) und Stufe II – III (rechts).

## Quellenverzeichnis

### Unveröffentlichte Aufsätze und Daten

In Rahmen dieser Arbeit entstanden an der TU Berlin zwei unveröffentlichte Studienarbeiten:

- Habib, S. (2000) Experimentelle und analytische Untersuchungen an Elastomer-Rechteckringen
- Skutnik, S. (2002) Optimierung der Elastomerdämpfung wälzgelagerter Rotoren.

Des Weiteren werden folgende unveröffentlichte Firmendokumente zitiert:

- Achenbach, M. (2002) Stand der Materialbeschreibung technischer Elastomere unter besonderer Berücksichtigung ihrer dynamischen Eigenschaften. Seminarvortrag am ILR der TU Berlin.
- Achenbach, M. (1991) Thermoelastisches Verhalten von Gummi am Beispiel einer "Gummimaschine". Bericht Parker-Prädifa GmbH, Februar 1991.
- Parker (1994) Herstellerangabe, Messungen bei Ausimont, Technical Service Development, Bollate (Milano), Italy.
- Parker (2001) Viskoelastische Materialdaten. Parker-Hannifin GmbH. Erstellt 30.11.2000, Stand 15.06.2001.

### Normenverzeichnis

- DIN 51007 (1994-06) Thermische Analyse (TA); Differenzthermoanalyse (DTA); Grundlagen.
- DIN 51045-1 (1999-12) Bestimmung der thermischen Längenänderung fester Körper - Teil 1: Grundlagen (Norm-Entwurf).
- DIN 53505 (1987-06) Prüfung von Kautschuk, Elastomeren und Kunststoffen, Härteprüfung nach Shore A und Shore D.
- DIN 53513 (1990-03) Prüfung von Kautschuk und Elastomeren; Bestimmung der viskoelastischen Eigenschaften von Elastomeren bei erzwungenen Schwingungen außerhalb der Resonanz.
- DIN 53535 (1982-03) Prüfung von Kautschuk und Elastomeren. Grundlagen der dynamischen Prüfverfahren. Anhang B.
- DIN 53765 (1994-03) Prüfung von Kunststoffen und Elastomeren; Thermische Analyse; Dynamische Differenzkalorimetrie (DDK).
- DIN ISO 1629 (1987) Kautschuk und Latices - Einteilung, Kurzzeichen. Ausgabe:1992-03, Identisch mit ISO 1629.
- DIN ISO 1940 (1993-12) Mechanische Schwingungen, Anforderungen an die Auswuchtgüte starrer Rotoren, Bestimmung der zulässigen Restunwucht.
- DIN ISO 6721-2 Torsionspendelversuch.
- ISO 10112 (1991) Damping materials – Graphical presentation of the complex modulus. 1st. ed.

ISO 4664 (1998-05)	Kautschuk - Leitfaden für die Bestimmung der dynamischen Eigenschaften.
ISO 6721-1 (2001-05)	Kunststoffe - Bestimmung dynamisch-mechanischer Eigenschaften - Teil 1: Allgemeine Grundlagen.
VDI 3833 (2003-12)	Schwingungsdämpfer und Schwingungstilger. Blatt 1: Schwingungsdämpfer, Begriffe, Kenngrößen, Realisierung, Anwendung.

## Literaturverzeichnis

- [1] Gasch, R., Nordmann, R. und Pfützner, H. (2002): Rotordynamik. 2. vollst. überarb. und erw. Aufl., Berlin, Springer.
- [2] Schweitzer, G. et al. (1993): Magnetic Bearings. Springer.
- [3] Smalley, A. J., Darlow, M. S. and Mehta, R. K. (1978-01): The Dynamic Characteristics of O-Rings. Transactions of the ASME, Vol. 100, 132-138.
- [4] Smalley A. J. (1980): Use of elastomeric elements in control of rotor stability. NASA CP 2133. Lewis Res. Center. In High-Performance Turbo machinery, 453ff.
- [5] Chiang, T., Tessarzik J. M. and Badgley, R. H. (1972-03): Development of Procedures for Calculating Stiffness and Damping of Elastomers in Engineering Applications. Part 1: Verification of basic methods. NASA-CR-120965.
- [6] Gupta, P. K., Tessarzik J. M. and Czigenyi L. (1974-04): Development of Procedures for Calculating Stiffness and Damping of Elastomers in Engineering Applications. Part 2: Elastomer Characteristics at Constant Temperature. NASA-CR-134704.
- [7] Smalley , A. J., Tessarzik, J. M. (1975-11): Development of Procedures for Calculating Stiffness and Damping of Elastomers in Engineering Applications. Part 3: The effect of temperature, dissipation level and geometry. NASA-CR-134939.
- [8] Darlow M. S. and Smalley A. J. (1977-11): Development of Procedures for Calculating Stiffness and Damping of Elastomers in Engineering Applications. Part 4: Testing of Elastomers under rotating load. NASA-CR-135355.
- [9] Tecza, J. A., Darlow, M. S., Smalley, A. J. (1979-02): Development of Procedures for Calculating Stiffness and Damping of Elastomers in Engineering Appl. Part 5: Elastomer Performance Limits and the Design and Test of an Elastomer Damper. NASA-CR-159552.
- [10] Rieger, A., Burges, G. and Zorzi, E. (1980-04): Development of Procedures for Calculating Stiffness and Damping of Elastomers in Engineering Applications. Part 6. NASA-CR-159838.
- [11] Rieger, A. and Zorzi, E. (1980-09): Development of Procedures for Calculating Stiffness and Damping of Elastomers in Engineering Applications. Part 7. NASA-CR-165138.
- [12] Achenbach, M. und Streit, G. (2001): Thermodynamische Beschreibung der Gummielastizität. Kautschuk+Gummi Kunststoffe. 54, 03.
- [13] MSC Marc Mentat 2000. Users Manual. Volume A: Material Library. p.7-33.
- [14] Tobisch, K. (1981): Über den Zusammenhang zwischen Härte und Elastizitätsmodul. Kautschuk+Gummi Kunststoffe. 34, 02, 105-109.
- [15] Petzold, H. (1979): Elastizitätsmodul von Elastomeren. Industrie-Anz. 101 Nr.103/104, 40-42.

- [16] Schmiers, T. (1991): Beitrag zur Berechnung vorgespannter Elastomer-Metall-Verbindungen mit der Finiten-Elemente-Methode unter bes. Berücksichtigung des Materialverhaltens elast. Zwischenlagen und der Kontaktproblematik. Diss. Hochschule f. Verkehrswesen Dresden.
- [17] Achenbach, M. (1990): Kautschuk+Gummi Kunststoffe. 43, 861-865.
- [18] Stambaugh, R. B. (1942): Ind. Eng. Chem., 34, 1358.
- [19] Payne, A. R. (1962): J. Appl. Polym. Sci., 6, 57.
- [20] Ferry, I. D. (1980): Viscoelastic Properties of Polymers. 3rd ed., John Wiley, New York.
- [21] Haupt, P. (1971): Viskoelastizität inkompressibler und isotroper Stoffe. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- [22] Biot, M. A. (1954): Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. J. Appl. Phys. 25, Nr.11, 1385ff.
- [23] Findley, W. N., Lai, J. S. und Onaran, K. (1976): Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials. Amsterdam: North-Holland Publish.
- [24] Fung, Y.C. (1965): Foundations of Solid Mechanics. London etc.: Prentice-Hall.
- [25] Morro, A. (1987): Symmetry and monotonicity of the relaxation function in linear viscoelasticity. Acta mechanica 66. 263-268.
- [26] Ahrens, R. (1993): Innere variablen in linear-viskoelastischen Schwingungssystemen. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 181. Düsseldorf : VDI-Verlag.
- [27] Ottl, D. (1987): Beschreibung linear-viskoelastischer Schwingungssysteme mit Hilfe von inneren Variablen. Z. angew. Math. Mech. 67, 4, T122-T124.
- [28] Ottl, D. (1981): Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung. VDI-Forschungsheft Nr. 603.
- [29] Klaus, W.G. (1992): The investigation of their mechanical properties of thermo viscoelastic materials. Soc. Exp. Mech. 1, 22-26 (Proceedings of the VII International Congress on experimental Mechanics, Las Vegas, NV).
- [30] Tschoegl, N. W., Knauss, W. G. und Emiri I. (2002): Poisson's ration in linear Viscoelasticity – a critical review. Mechanics of Time-Depend Materials 6: 3-51, Kluwer Acad. Publishers.
- [31] Eisele, U. (1990): Introduction to Polymer Physics. Berlin u.a. Springer-Verlag.
- [32] Ferry, J. D. (1970): Viscoelastic Properties of Polymers. 2nd Edition, New York etc., John Wiley.
- [33] Schwarzl, F. R. (1990): Polymermechanik. Berlin usw.: Springer-Verlag.
- [34] Tobolsky, A. V. (1967): Mechanische Eigenschaften und Struktur von Polymeren. Stuttgart: Berliner Union.
- [35] Nashif, A. D., Jones, D. I., Henderson, J. P. (1985): Vibration Damping. John Wiley & Sons; New York.
- [36] Maier, P. (1996): Molekulare Interpretation des Payne-Effekts. Dissertation, Regensburg.
- [37] Böhm, J. (2001): Der Payne-Effekt: Interpretation und Anwendung in einem neuen Materialgesetz für Elastomere. Diss. Uni. Regensburg.
- [38] Herdy, M. (2004): [www.viscodata.de](http://www.viscodata.de). Visco-Shift und Visco-Data sind Programme des Ingenieurbüros Herdy, die gemeinsam mit der Fa. Parker zur Auswertung von DMTA Daten entwickelt wurden.

- [39] Tschoegel, N. W. und Emri, I. (1993): Generating line spectra from experimental responses. Part II: Storage and loss functions. *Rheological Acta* 32, 322-327.
- [40] Marquardt, D. W. (1963): An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 11, 431-441, June 1963.
- [41] Levenberg, K. (1944): A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, II(2): 164-168.
- [42] Mor, J. J. (1977): The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory, in *Numerical Analysis*, G. A. Watson, ed., *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 630. Berlin: Springer-Verlag, 105-116.
- [43] Tschoegel, N. W. und Emri, I. (1993): Generating line spectra from experimental responses. Part I: Relaxation modulus and creep compliance. *Rheological Acta* 32, 311-321.
- [44] Rechenberg, I. (1994): *Evolutionsstrategie '94*, Stuttgart: Frommann-Holzboog.
- [45] Herdy, M. und Achenbach, M. (1999): Ermittlung viskoelastischer Materialparameter aus thermorheologischen Messwerten mittels Evolutionsstrategie, Tagungsband XXVI. FEM-Kongress, Baden-Baden, A. Streckhardt-Kongressorganisation-FEM, 15./16. November 1999.
- [46] Achenbach, M. und Herdy, M. (2003): Determination of Visco-Elastic Constitutive Parameters from Thermo-Rheological Measurements Using Evolutionary Strategy. In: *Kautschuk+Gummi Kunststoffe*. 56, 1/2, 24-31.
- [47] Jones, D. I. G. (1987): A reduced temperature nomogram for characterization of damping material behaviour. *Shock and Vibration Bulletin*. Vol. 48, No.2. 13-22.
- [48] Liu, Q., Gasch, R., Menz, I. und Hilt, N. (1994): Steifigkeitsverhalten von O-Ringen. Erste Untersuchungen. Technische Universität Berlin, ILR Mitteilung.
- [49] Williams, J. G. (1973): *Stress analysis of polymers*. London: Longman, 206 ff.
- [50] Freakley, P. K. und Payne, A. R. (1978): *Theory And Practice Of Engineering With Rubber*. London: Applied Science Publish, TTD.
- [51] Lindley, P.B. (1970): *Engineering Design with Natural Rubber*. Technical Bulletin, Malaysian Rubber Producers' Research Assn.
- [52] Dubbel (1999). *Handbuch für den Maschinenbau*. CD-Rom. Version 1.0, 04. Aug. 1999.
- [53] Göbel, E. F. (1969): *Berechnung u. Gestaltung von Gummifedern*. 3. Aufl. Berlin, Springer.
- [54] Lindley, P. B. (1996): *J. Strain Anal.*, Volume 1(3), 190 ff.
- [55] Lindley, P. B. (1967): *J. Instn. Rubb. Ind.*, Volume 4(1), 209 ff.
- [56] Ziegenhagen, S. (1994): *Standardisierte Beschreibung des Übertragungsverhaltens von Elastomer-Kupplungen bei stationärem und instationärem Betrieb*. Diss. TU-Berlin.
- [57] Bormann, A., Skutnik, S. und Gasch, R. (2003): "Steifigkeits- und Dämpfungsparameter von Elastomerringen zur Schwingungsberuhigung von Rotoren". In: *Schwingungen in rotierenden Maschinen (SIRM) VI*. Wiesbaden: Vieweg&Sohn. 271 ff.
- [58] Gasch, R. und Knothe, K. (1989): *Strukturmechanik Bd.2. Kontinua und ihre Diskretisierung*. Springer.