
Technische Universität Berlin
Fachbereich Verkehrswesen und Angewandte Mechanik
Institut für Mechanik

Jens-Uwe Gleu
geboren am 12. Juni 1966 in Dresden

Rolldynamik des Luftreifens
mit einer Vielteilchenmethode und der
Methode der Finiten Elemente

Vom
Fachbereich Verkehrswesen und Angewandte Mechanik
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Wissenschaftliche Aussprache am 23. Februar 2001

Promotionsausschuß:

Vorsitzender : Prof. Dr.-Ing. Klaus Knothe
Berichter : Prof. Dr.-tech. Friedrich Böhm
: Prof. Dr.-Ing. Heinrich Schoop

Berlin 2001
D 83

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Weg vorgestellt, auf dem mit vertretbarem Aufwand der Übergangszustand vom abgeplatteten, stehenden zum stationär rollenden Luftreifen mit einer Kombination aus Einschicht- und Mehrschichtmodellen simuliert werden kann.

Zur Analyse der äußeren Mechanik des instationär rollenden Reifens wird basierend auf der Vielteichenmethode (s. [Böhm.66a, Gallrein.92, Zachow.97, u.v.a.]) ein Einschichtmodell aufgebaut.

Dieses liefert die Kontaktkräfte und die Felgenbewegung, welche dann als Ausgangsdaten zur Analyse des inneren Spannungs- und Deformationszustandes mit einem extra dafür entwickelten FE-Code verwendet werden.

Die Zeitintegration des Vielteichenmodells für die äußere Mechanik erfolgt explizit nach einem adaptierten PK-Verfahren. In dem FE-Programm ist als Zeitintegrationsschema für die innere Mechanik des Gürtelreifens der Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus (EMA) [Tarnow.93, Simo.92, Gonzales.96b, u.a.] implementiert.

Dabei werden Stab- und Volumenelemente mit KIRCHHOFFSchem Material verwendet. Außerdem kommen neu entwickelte, sehr robuste Volumenelemente mit MOONEY-RIVLIN-Material zum Einsatz, die bei speziellen Problemen bis zu 70mal schneller rechnen, als die dem Autor zugänglichen, am Markt vorhandenen Elemente.

Weisheit

Every program has at least one bug and can
be shortened by at least one instruction –
from which, by induction one can deduce that

**Every program can be reduced to one
instruction which doesn't work ...**

Meinem Vater

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen Förderern dieser Arbeit herzlichst bedanken.

Insbesondere danke ich meinem verehrten Mentor, Prof. Dr. Friedrich Böhm für viele fachliche Hinweise und die wohlwollende Begleitung des gesamten Forschungsthemas sowie den Mitgliedern des Promotionsausschusses für die geleistete Arbeit.

Großer Dank gilt meinen Kollegen, den Herren Axel Gallrein, Peter Bannwitz, Karl Theet u.v.a., die mir durch zahllose konstruktive Diskussionen sehr geholfen haben.

Ebenfalls für viele inhaltliche Diskussionen, formelle Hinweise und für das aufopferungsvolle und sehr nützliche Korrekturlesen bedanke ich mich herzlichst bei meinem geschätzten Kollegen Dr. Kai Sorge.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie, meiner lieben Ehefrau und allen meinen Freunden bedanken, die mir durch ihren Beistand die Fertigstellung der Arbeit sehr erleichtert haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Instationäre Reifenmodelle	3
1.1.1	Empirische und halbempirische Reifenmodelle	4
1.1.2	Kontinuumsmechanische Reifenmodelle	5
1.1.2.1	Analytische Reifenmodelle	5
1.1.2.1.1	Das Starre Kreisringmodell	6
1.1.2.1.2	Das elastische Kreisringmodell	6
1.1.2.2	Numerische Reifenmodelle	7
1.1.2.2.1	Vielteilchen-Reifenmodelle	7
1.1.2.2.2	FE-Reifenmodelle	8
1.2	Einordnung der Arbeit	8
2	Ein 3D-Modell für die transiente Rolldynamik	10
2.1	Der Vielteilchenansatz für ein räumliches Reifenmodell	10
2.1.1	Abbildung einer anisotropen Membranstruktur	12
2.1.1.1	Analogie zwischen Verschiebungsmethode und Massepunktsystemen	12
2.1.1.2	Ausnutzung der besonderen Anisotropiestruktur des Reifens	16
2.1.1.3	Bewegungsgleichungen der Membranstruktur als Zentralkraftsystem	18
2.1.1.4	Topologische Betrachtungen zur diskreten Modellierungstechnik	20
2.1.1.5	Vor- und Nachteile der diskreten Modellierung	22
2.1.1.6	Topologie der Startkonfiguration	24
2.1.2	Applikation des Innendruckes	25
2.1.3	Biegesteifigkeiten, Schichtkörperverhalten	28
2.1.3.1	Effektive Steifigkeit der Stahlkorde im Schichtverband	29
2.1.3.2	Biegesteifigkeit im diskreten Reifenmodell	30
2.1.4	Das Dämpfungsmodell	34

2.1.5	Parametrisierung des Einschicht-Reifenmodells	35
2.1.5.1	Zur Parametrisierung der Stäbe	36
2.1.5.2	Zur Parametrisierung der Biegung	39
2.2	Explizite Zeitintegration mit einem adaptierten P-K-Verfahren .	40
2.2.1	Die Prädiktor–Korrektor–Gleichungen	40
2.2.2	PK–Methode für mechanische Systeme	41
2.2.3	Der erforderliche Zeitschritt	42
2.3	Kontaktmodellierung	43
2.3.1	Einführung einer Schicht masseloser Sensorpunkte als Pro- tektor	45
2.3.1.1	Annahmen bei der Modellierung eines masselo- sen Protektors	45
2.3.1.2	Berechnung der momentanen Orte der unbelaste- ten Sensorpunkte	47
2.3.2	Führung der Bodenbewegung	48
2.3.3	Kontaktzustände und zugehörige Stollendeformation . . .	49
2.3.3.1	Der Unilateralkontakt	49
2.3.3.2	Kontaktzustände in Normalrichtung	50
2.3.3.3	Kontaktzustände in Tangentialrichtung, Reibung	51
2.3.4	Einfluß der Dämpfung der Laufläche auf die Kontaktdy- namik	53
2.3.5	Zusammenfassung des verwendeten Kontaktalgorithmus’ .	54
3	Ein 3D-FE-Modell für die innere Mechanik	56
3.1	Der EMA als vorteilhafter impliziter Zeitintegrator	57
3.1.1	Allgemeine Probleme bei der Zeitintegration steifer Systeme	57
3.1.2	Das Grundprinzip des EMA, Beispiel des elastischen Pen- dels	61
3.2	Stabelemente für die Modellierung der Korde	72
3.2.1	Ein linearer Feldansatz für Verschiebungen und Geschwin- digkeiten	73
3.2.2	Die räumlich diskreten <i>Lagrangeschen</i> Gleichungen II. Art	73
3.2.3	Der EMA am räumlich diskreten System, die Bewegungs- gleichungen, Elementformulierung	74
3.2.4	Erfassung von Dämpfung und Kordcharakter der Stäbe .	76
3.3	Isotrope Volumenelemente für die Modellierung des Gummi . . .	77
3.3.1	Volumenelemente für Zonen moderater Deformationen, Kontinuumsmechanische Basis	80
3.3.1.1	Das <i>Hamilton</i> -Funktional für <i>Kirchhoffsche</i> Volumen- elemente	81
3.3.1.2	Bewegungsgleichungen nach dem EMA, Erhal- tungseigenschaften und Projektionsgleichungen .	84

3.3.1.3	Rauminterpolation und Elementformulierung . . .	89
3.3.2	Volumenelemente für Zonen großer Deformationen	93
3.3.2.1	Das Energiefunktional für quasi-inkompressible elastische Volumenelemente, Kontinuumsmechanische Basis	95
3.3.2.2	Zeitdiskretisierung nach dem EMA	98
3.3.2.3	Rauminterpolation und Erhaltungseigenschaften Formulierung von <i>Mooney–Rivlin</i> -Elementen . .	100
3.3.2.4	Mehrstufenalgorithmus für die Elementintegration, Behandlung der Projektionsgleichungen . .	111
3.3.3	Modellierung der viskosen Gummidämpfung	113
3.3.3.1	Zu verschiedenen Dissipationsansätzen	113
3.3.3.2	Formulierung der Arbeitsfunktion zur Dissipation	115
3.3.3.3	Variation und Dämpfungskräfte	115
3.3.3.4	Zeitdiskretisierung der Dämpfungskräfte	116
3.3.3.5	Linearisierung der Dämpfungskräfte	117
4	Die Schnittstelle zwischen Vielteilchen– und FE-Modell	119
4.1	Der erforderliche Datensatz	121
4.2	Führungsbewegung der Felge	123
4.3	Zur Lastaufbringung	123
4.3.1	Punktlast auf einer Elementbegrenzungsfläche	124
4.3.2	Zur Identifizierung der belasteten Elemente	124
4.3.3	Filterung der Kontaktkräfte für das FE-Modell	126
5	Simulationsbeispiel eines instationären Rollvorganges	128
5.1	Die äußere Mechanik, Ergebnisse Vielteilchenmodell	129
5.1.1	Parametrisierung	129
5.1.1.1	Geometrieerzeugung des Einschichtmodells . . .	130
5.1.1.2	Randbedingungen des Einschichtmodells	134
5.1.1.3	Parametrisierung des Einschichtmodells	135
5.1.1.4	Anpassung der Parameter an Federkennlinie Pumpfiguren und Eigenfrequenzen	136
5.1.2	Simulationsergebnisse	138
5.1.2.1	Beschreibung des Szenarios des Beispiels	138
5.1.2.2	Achskräfte zufolge der „äußeren Mechanik“ . . .	140
5.1.2.3	Gleitgeschwindigkeit im Latsch bei Schräglauf .	143
5.1.2.4	Kontaktkräfte	145
5.1.2.5	Querdeformation der Reifenquerschnitte	154
5.1.2.6	Biegekräfte	156
5.2	Simulation der inneren Mechanik mit dem FE-Modell	158

5.2.1	Parametrisierung des Finite-Elemente-Modells	159
5.2.1.1	Geometrieerzeugung des FE-Modells	159
5.2.1.2	Randbedingungen des FE-Mehrschichtmodells .	160
5.2.1.3	Elastische Parameter des FE-Mehrschichtmodells	161
5.2.1.4	Dämpfungsparameter des FE-Mehrschichtmodells	163
5.2.2	Simulationsergebnisse	166
5.2.2.1	Szenario des Rechenbeispiels	166
5.2.2.2	Der Zustand des Schichtmodells am Ende des statischen Aufpumpens	167
5.2.2.2.1	Verschiebungszustand der Querschnitte	168
5.2.2.2.2	Zustand der Korde	170
5.2.2.2.3	Zustand des Gummis	170
5.2.2.3	Der Zustand des Schichtmodells am Ende der statischen Abplattung	172
5.2.2.3.1	Verschiebungszustand der Querschnitte	172
5.2.2.3.2	Zustand der Korde	176
5.2.2.3.3	Zustand des Gummis	177
5.2.2.4	Der Zustand des Schichtmodells beim instationären Beschleunigen	182
5.2.2.4.1	Verschiebungszustand der Querschnitte	183
5.2.2.4.2	Zustand der Korde	188
5.2.2.4.3	Zustand des Gummis	189
5.2.2.5	Der Zustand des Schichtmodells beim stationären Rollen	194
5.2.2.5.1	Verschiebungszustand der Querschnitte	194
5.2.2.5.2	Zustand der Korde	199
6	Schluß	201
6.1	Zusammenfassung	201
6.2	Ausblick	202
A	Verifikation der Elemente	205
A.1	Statischer Zug-Druck-Versuch	205
A.2	Statischer Schubversuch	207
A.3	Unplausibilität beim Druckknoten in MARC	207
A.4	Dynamischer Zug-Druck-Versuch	208
A.5	Dynamischer Schubversuch	209
A.6	Geschwindigkeitsvorteil gegenüber dem Vergleichselement	210

B	Zur Numerik der Volumenelemente	212
B.1	Bereichsintegration im isoparametrischen Raum	212
B.1.1	Integrale über beliebige Linien im Raum	212
B.1.2	Oberflächenintegrale über gekrümmte Flächen im Raum .	214
B.1.3	Integral einer Funktion über ein materielles Volumen . . .	215
B.2	Isoparametrische Elementformulierung und <i>Gauss</i> -Quadratur . .	216
B.2.1	GAUSS-Quadratur im isoparametrischen Koordinatenraum	216
B.2.1.1	Berechnung der JACOBI-matrix der Koordinaten- transformation	217
B.2.1.2	Berechnung des Deformationsgradienten als Grund- lage für andere Tensorgrößen	217
B.2.1.3	GAUSSintegration in mehreren Dimensionen . .	218
B.2.2	Das 8-Knoten Brick-Element	219
B.2.3	Das 6-Knoten Penta-Element	219
B.3	Konvergenzbetrachtungen und modifizierter <i>Newton-Raphson</i> -Algorithmus	221
B.3.1	Konvergenzkriterien	221
B.3.2	Anwendung der Konvergenzkriterien für ein adaptives, modifiziertes NEWTON-RAPHSON-Schema	222
C	Zur verwendeten Algebra und Nebenrechnungen	223
C.1	Rechnen mit dem inneren L_2 -Produkt	223
C.2	Häufig benutzte algebraische Ausdrücke	224
D	Digitalfilter bei mechanischen Simulationen	227
	Abbildungsverzeichnis	231
	Tabellenverzeichnis	236
	Symbolverzeichnis	237
	Symbole mit kleinen arabischen Buchstaben	238
	Symbole mit großen arabischen Buchstaben	240
	Symbole mit griechischen Buchstaben	244
	Verwendete Koordinatensysteme und Einheitsvektoren	245
	Indizierungsregeln	245
	Operatoren	246
	Literaturverzeichnis	246

Kapitel 1

Einführung

Der Reifen ist das Bindeglied des Fahrzeugs zur Fahrbahn und hat die fundamentalen Aufgaben, die Gewichtskraft des Fahrzeuges und der Nutzlasten gegen den Erdboden abzustützen und jene Kräfte auf den trägen Körper „Fahrzeug“ zu generieren, die eine gesteuerte Bewegung des Fahrzeuges gemäß dem Willen des Fahrzeuglenkers umsetzen.

Die Fahrbahn kann im einfachsten Fall als eben und starr betrachtet werden. Dann werden die Antriebs-, Brems- und Führungskräfte auf das Fahrzeug ausschließlich durch Reibung zwischen der Lauffläche des Reifens und der Fahrbahn übertragen. Auf nachgiebigem Boden, unebener Fahrbahn bzw. bei vorhandenen nachgiebigen Schichten auf einer ebenen starren Fahrbahn werden die Kräfte nicht mehr nur durch Reibung übertragen, die Profilierung der Lauffläche gewinnt an Bedeutung.

Obwohl der Reifen je nach Design-Auflage ein recht unscheinbares Objekt sein kann, vereinigt er in sich sowohl auf der Seite der Herstellung, als auch auf der Seite der Konstruktion und damit Simulation und Meßtechnik in großem Umfang Hochtechnologie, wenn er die o.g. Hauptfunktionen gemäß heutiger Nutz-, Komfort-, Handlings- und Sicherheitsanforderungen erfüllen soll.

Während die Produktion von Luftreifen aufgrund der Bedeutung der verwendeten Materialien nicht zu Unrecht in der Chemischen Industrie angesiedelt ist, verlangt die konstruktive Auslegung des Reifens ein tiefes Verständnis der komplexen mechanischen Vorgänge. Nur eine richtige Auslegung zusammen mit der Verwendung der aus mechanischer und numerischer Sicht hochkomplizierten Materialien realisiert eine den heutigen Anforderungen entsprechende Präzision und Sicherheit in den vielfältigsten Fahrmanövern wie sie beim Rollen über ein Fahrbahnprofil auftreten, das mit einer stark ausgeprägten statistischen Bandbreite versehen ist.

Dabei realisiert der Luftreifen ein bis heute in der Technik spektakuläres Masse-Leistungsverhältnis.

In den noch gar nicht lange zurückliegenden, frühen Jahren (20er–30er Jahre) der Reifenentwicklung mußte man sich angesichts der zu jener Zeit für die-

se Aufgabe weniger entwickelten Werkzeuge zum Erlangen des Verständnisses der Reifenmechanik auf die Ingenieurskunst der Entwickler und Forscher beschränken. Die Reifenforschung fand fast ausschließlich in den Häusern der großen Reifenfirmen (Goodyear, Dunlop) selbst statt. Es gab lediglich eine einfache Rollmechanik ([SchlippeDietrich]) und eine allgemeine, zunächst Gleichgewichtsquerschnitte beschreibende Theorie und Meßtechnik.

Mit dem Aufleben der Automobilindustrie in der Nachkriegszeit und den damit verbundenen steigenden Anforderungen an die Pneus entwickelten sich seit den 60er Jahren (z.B. [Böhm.66a, u.a.]) mit dann rasantem Fortschritt eine Vielzahl von Reifentheorien. Diese entstanden oft mit dem Ziel, das globale Reifenverhalten möglichst durch seine innere Mechanik zu erklären und diese Kenntnis zur Optimierung der Fahrzeugreifen und der Fahrwerke auszunutzen (s. Abbildung 1.1). Dazu mußte man in die Tiefen bzw. Randbereiche der Reifenmechanik eindringen.

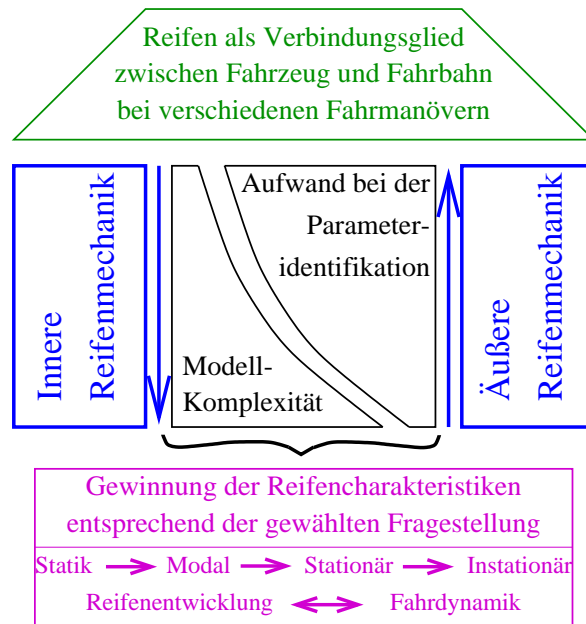


Abbildung 1.1: Zur Inneren und Äußeren Mechanik des Reifens

Stets bestand das allgemeine Problem, daß eine Messung der „inneren Mechanik“ des Luftreifens nicht möglich war, da die Einbringung der Meßtechnik sofort das Reifenverhalten verfälschte. Dadurch blieben Einzelheiten, wie der Luftreifen durch seine „innere Mechanik“ sein äußerlich meßbares Verhalten entwickelt, oft im Dunkeln. Der Drang, diese Schwierigkeit zu überwinden war neben dem in jüngerer Zeit aufkommenden Wunsch, die Eigenschaften ohne den real existierenden Reifen vorhersagen zu können, der Hauptantrieb, die komplexen inneren Zusammenhänge der Reifenmechanik zu erforschen und zu simulieren.

Die Modelle dafür staffeln sich nach Aufwand bei der Simulation und Aufwand bei der Bestimmung der Modellparameter:

Je simpler das Modell ist, um so geringer ist einerseits der Aufwand bei der Simulation und andererseits die Aussagefähigkeit der Modelle bei speziellen Fragestellungen. Gleichzeitig steigt der Aufwand und die Unsicherheit bei der Parameteridentifizierung.

Je aufwendiger aber das Modell ist, umso geringer wird der Aufwand zur Erlangung des Parametersatzes und umso ausgeprägter wird die Fähigkeit der Modelle, detaillierte Fragestellungen zu beantworten (s. Abbildung 1.1).

Angesichts der vielfältigen Möglichkeiten, durch die Variation von Details in der Reifenkonstruktion Einfluß auf das Reifenverhalten zu nehmen, entsteht der Wunsch, eine allgemeingültige Richtlinie zur Konstruktion zu erstellen, ein Grundkonzept, das bei idealer Umsetzung die Anforderungen an den Reifen als besten Kompromiß erfüllt. Heute weiß man, daß dieses Grundkonzept der Membranreifen mit gleichverteiltem Aufstandsdruck und hoher Seitensteifigkeit ist, da eine solche Struktur einerseits die geringste Energie speichern muß, um das Tragverhalten zu realisieren und andererseits optimal die Antriebs-, Brems- und Führungskräfte des Fahrzeugs generiert.

Leider läßt sich dieses Konzept mit realen Materialien und Geometrien nicht vollständig umsetzen. In Reifen wird ein hochfestes und anisotropes Laminat aus Stahlkord und Reyonkord verwendet, die durch Gummi verklebt und abgedichtet sind. Das Verhältnis der E-Moduli der verwendeten Materialien erreicht also Verhältnisse von 1:50000. Es entstehen im alterungsempfindlichen Gummi Schubwinkel von bis zu 25° !

Aufgrund dieser Gegebenheiten ist lediglich ein Kompromiß auf dem Weg zum Ideal realistisch, wodurch die Bedeutung der Einflußanalyse von Konstruktionsdetails offensichtlich wird.

1.1 Reifenmodelle zur Simulation des instationären Rollvorganges

Um die Verbindung zwischen der Reifendeformation und den entstehenden Achskräften beim instationären Rollkontakt herstellen zu können, müssen die Latschkräfte transient generiert werden. Die Latschkräfte hängen in erster Näherung von der Latschgröße und dem dort wirkenden Innendruck und erst sekundär von anderen Effekten ab. Die Latschgröße wiederum stellt sich in Abhängigkeit von der momentanen Achslast, der Elastizität und Eigendynamik der Reifenstruktur ein. Zur Beschreibung dieser Zusammenhänge kann es erforderlich sein, den Aufwand von einfachen linearen Ansätzen bis hin zu hochkomplexen nichtlinearen Computerberechnungen zu steigern.

Im folgenden sollen Modellansätze skizziert werden, mit denen die Ingenieure versuchen, diesen z.Z. wohl aufregendsten Part in der Reifensimulation: die Simulation des instationären Rollvorganges in der Praxis umzusetzen. Daneben

gibt es eine Vielzahl z.T. sehr hochwertiger Reifenmodelle, die jedoch nicht für die Rolldynamik eingesetzt und deshalb hier nicht betrachtet werden.

1.1.1 Empirische und halbempirische Reifenmodelle

Die einfachsten Ansätze zur Ermittlung der Achskräfte reduzieren den Latsch auf einen einzigen Punkt und stellen den Zusammenhang zwischen den Achskräften und der Verspannung bzw. dem Schlupf des Radaufstandspunktes über gemessene Kennfelder her. Eine Betrachtung der inneren Reifenmechanik entfällt. Die Herkunft der verwendeten Achskräfte bleibt vollständig im Dunkeln.

Um in der Flut der für diese Vorgehensweise erforderlichen Kennlinien nicht zu ersticken, haben sich die Ingenieure darauf besonnen, daß die Kennlinien vergleichbare „Formen“ besitzen, die wiederum Ähnlichkeit zu einfachen mathematischen Funktionen aufweisen.

Daraufhin entstand eine Klasse von empirischen Reifenmodellen, bei denen eine mathematische Funktion (die sog. Magic Formula oder auch MF) für die Reifenkennlinien erfunden und mit so vielen Stellparametern ausgestattet wurde, daß eine hinreichende Adaptivität der Funktion an die gemessenen Kennlinien erreicht werden konnte.

Diese subjektiv gewählten Stellparameter wurden dann durch Anfitzen an gemessene Kennlinien bestimmt. Da diese Vorgehensweise ungeeignet ist, selbst einfache Reifeneigenschaften vorherzusagen, müssen diese für alle Kombinationen aus Reifentyp, Rollzustand, Belastungsfall, Fahrbahn usw. durch eine Vielzahl teurer Messungen ermittelt werden.

Die Modelle nach der „Magic Formula“ waren zunächst nur in der Lage, stationäre Rollvorgänge zu begleiten, können aber heute auch niederfrequente (< 8 Hz) transiente Achskräfte für Fahrdynamikanwendungen generieren, weil der Verspannungsvorgang des Reifens beim Rollen unter Schräglauf einer Differentialgleichung 1. Ordnung folgt.

Obwohl diese Modellklasse nicht in der Lage ist, die Vorgänge im Reifeninnern beim Rollvorgang zu beschreiben, fand sie aufgrund ihrer Adaptivität und theoretischen Einfachheit eine große Resonanz vor allem in der Fahrzeugindustrie und angeschlossener Bereiche. Das ist wahrscheinlich der wesentliche Grund dafür, daß sich auch die Reifenindustrie mit dieser Modellklasse beschäftigt. Ein weiterer Vorteil der Einfachheit der MF-Modelle ist die Möglichkeit, in Fahrzeugsimulationen den Aufwandsschwerpunkt von der Reifenkomponente weg zu verlagern, ohne komplett auf reifenartige Achskräfte verzichten zu müssen. Die vielen teuren Messungen, die rationell organisiert und klassifiziert werden müssen, sind wirtschaftlich interessant. Damit erhielt diese Modellklasse angesichts ihrer einfachen Anwendbarkeit einen Aspekt, der ihrer Popularität in fahrdynamischen Simulationen förderlich war.

1.1.2 Kontinuumsmechanische Reifenmodelle

Die nächste Stufe zur Behandlung der Reifenmechanik ist die Approximation des Latsches als eine Linie bzw. die Konzentration der Vorgänge im Latsch auf den Reifenäquator.

Dafür ist die separate Betrachtung der Reifenkomponenten Gürtel, Gürtelunterbau und Laufstreifen sinnvoll. Bei Verwendung dieser Aufteilung kann man den genannten Komponenten kontinuumsmechanische Strukturmodelle zuordnen (s. Abschnitt 1.1.2.1). In der Tat existieren Modelle für alle Kombinationsmöglichkeiten aus diesen Optionen.

Natürlich kann die Aufteilung der Reifenstruktur in weitere Unterstrukturen vorangetrieben werden, die dann durch noch allgemeinere kontinuumsmechanische Modelle wie Membran-, Schalen-, Seil- und Volumenstrukturelemente abgebildet werden. Auf diesem Wege kann man dann die einzelnen Kordlagen über die Strukturbereiche mit gemischtem Charakter (Wulstbereich) bis hin zu einzelnen Stollen detailliert modellieren. Dadurch entstehen Substrukturen, die mit dem Reifen auf den ersten Blick nichts mehr gemein haben.

Ein unverzichtbarer Bestandteil von Reifenmodellen für die Rolldynamik ist eine Kontaktformulierung. Diese Kontaktformulierung ist kontinuumsmechanisch bzw. analytisch nicht geschlossen lösbar. Deshalb haben einige Modelle diesen Part umgangen, indem man die Latschgröße aus einer relativ einfachen Durchdringungsbetrachtung ermittelte und darauf dann Druckgebirge applizierte, die aus anderen Quellen (z.B. Messungen) stammten.

Doch auch Modelle, die die Kontaktaufgabe bei sonst durchgehend kontinuumsmechanischer Formulierung numerisch lösen, werden vom Autor zu den kontinuumsmechanischen Modellen gezählt.

1.1.2.1 Analytische Reifenmodelle

Es ist stets vorteilhaft, technische Strukturen analytisch beschreiben zu können, da man dann nicht nur quantitative, sondern auch qualitative Aussagen über deren Verhalten treffen kann.

Naturgemäß ist der Komplexität analytischer Modelle eine Grenze gesetzt.

Es ist schwierig, bei einem so komplizierten technischen Objekt, wie dem Gürtelreifen eine Grenze zwischen analytischen und numerischen Modellen zu ziehen. Sinnvoll scheint dem Autor, all jene Modelle, bei denen das Verhalten von Gürtel, Seitenwand usw. durch Bewegungsdifferentialgleichungen beschrieben wird, den analytischen Modellen zuzuordnen. Die Beschreibung des Kontaktproblems wird hierbei ausgenommen, da der Kontakt fast ausschließlich numerisch behandelt werden kann (s.o.).

Das am weitesten verbreitete analytische Reifenmodell ist der elastisch gebettete Kreisring mit seinen vielen Variationen:

- Die Modellierung des Gürtels erfolgt je nach Modellstufe als dehnstarrer, biegeschlaffer Ring bis hin zum dehn- und biegeelastischen Balken.
- Der Unterbau (Seitenwand) wird als radialelastische und in besseren Modellen als radial und schubelastische Bettung approximiert.
- Für den Laufstreifen kommen verschiedenste Modellierungstechniken zum Einsatz, vom Weglassen über ein Borstenmodell bis hin zu diskreten Elastizitätsfeldern (WINKLER-Bettungen).

Mit diesen Modellen lassen sich nicht nur Schlupfkennlinien, Reifenflattern und modale Eigenschaften des Gürtelreifens sehr erfolgreich berechnen, sondern auch Rollvorgänge mit einer senkrecht zur Reifenebene auftretenden Dynamik. Als Urväter dieser Modellklasse sollen hier [Tielking.65, Böhm.66b, Böhm.66a, Böhm.89, u.v.a.m.] genannt sein.

Andere Reifenmodelle verwenden zur Approximation der Reifenstruktur komplexere kontinuumsmechanische Ansätze, wie Membrane, Membranschichten und Schalen. Diese Modelle haben möglicherweise noch einen analytischen Ursprung, das Handling der Gleichungen selbst ist aber meist nur noch numerisch möglich.

Eine Ausnahme bildet hierbei die Arbeit [Böhm.85].

1.1.2.1.1 Das Starre Kreisringmodell

Das Starre Kreisringmodell für den Gürtelreifen wurde als instationäres Fahrdynamikmodell 1985 von Böhm entwickelt. Es berücksichtigt mit seinem als dehnstarken Körper modelliertem Gürtel, der gegenüber der Felge elastisch gebettet ist, das Grundschwingungsverhalten des Reifens bis zu Frequenzen von etwa 100 Hz. Die Kontaktfläche zwischen Reifen und Fahrbahn wird näherungsweise aus der Durchdringungsfläche zwischen dem starren Gürtel und der Fahrbahn berechnet. Auf der Kontaktfläche wird ein auf Messungen gestütztes Druckpolster errichtet, das mit der räumlichen Stellung des Gürtels zeitlich veränderlich ist. Der Protektor zwischen Kontaktfläche und Gürtel wird als Borstenmodell diskretisiert, wobei die Stollenmasse und die Stollenform unberücksichtigt bleibt. Die Berechnung der Scherkräfte im Latsch erfolgt durch Schlupf- und Transportgleichungen in EULERScher Darstellung. Mit dieser Modellierung können auf ebener Fahrbahn beliebige Fahrmanöver simuliert werden.

Eine andere Arbeit, in der ein starres Kreisringmodell verwendet wird ist z.B. [Zegelaar.94].

1.1.2.1.2 Das elastische Kreisringmodell

Das Elastische Kreisringmodell (s. Abbildung 1.2) für den Gürtelreifen wurde als instationäres Fahrkomfort-Modell 1989 von Böhm, Csaki und Swierczek ([Böhm.89]) entwickelt. Der Gürtel wird als dehn- und biegeelastische Membran mit schwacher Biegestörung modelliert und ist gegenüber der Felge elastisch gebettet. Die numerische Umsetzung erfolgt über die Diskretisierung des Kontinuums. Je nach Modellierungsstufe wird der Gürtel in mehrere Spuren unterteilt und leistet ab 3 Spuren den Übergang zur Querschnittdynamik. Ein

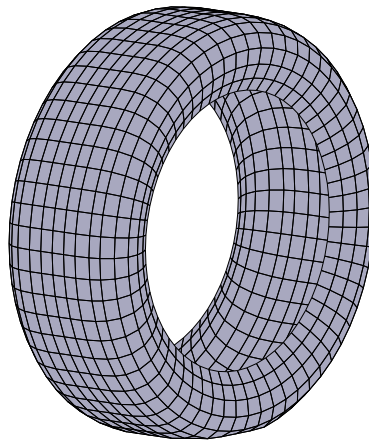


Abbildung 1.2: Das Elastische Kreisringmodell (7 Gürtelspuren)

7–Spur-Kreisringmodell wurde mit einem massebehafteten Membranmodell (je 6 Spuren) für die Seitenwand gekoppelt und liefert Reifenschwingungen bis etwa 600 Hz. Die Gürtelbewegung wird durch lineare Differentialgleichungen berechnet, die Reifenabplattung durch Einführung von Kontaktfedern¹ nichtlinear. Das Druckpolster in der Kontaktfläche berechnet sich dynamisch durch die Reifenabplattung, kann kurzweilige Bodenunebenheiten in den Gürtel einbringen und beeinflusst die Schersteifigkeit des Profils. Die instationären Transportgleichungen für die Schlupfkkräfte berücksichtigen Profilform und Profildynamik noch nicht.

1.1.2.2 Numerische Reifenmodelle

Ohne Numerik kommt heute kein ernstzunehmendes Reifenmodell für den instationären Rollkontakt aus.

Der Autor zählt all jene Ansätze zu den numerischen Modellen, wo das Primitiv, aus dem die Reifenstruktur generiert wird, nicht mehr durch „reifentypische“ Differentialgleichungen oder Variationsformulierungen beschrieben wird und somit auch zur Berechnung von Nichtreifenstrukturen Verwendung findet.

1.1.2.2.1 Reifenmodelle nach der Vielteilchenmethode

Wie in Abschnitt 2.1 noch beschrieben wird, ist die Vielteilchenmethode eine universelle und in speziellen Fällen sehr vorteilhafte Art, ein Kontinuum räumlich zu diskretisieren.

So werden in der Literatur außer den dreidimensionalen Membranmodellen (z.B. [Böhm.93a, Gallrein.92, Zachow.97] auch einfachere, bis hinunter zu 2D–Kreisringmodellen ([Böhm.93c]) mittels der Vielteilchenmethode diskretisiert.

¹unilaterale Kontaktformulierung

Dabei zeigt sich auch die Anwendbarkeit auf dreidimensionale Stollenstrukturen. Es existieren Mehrschichtmembranmodelle (z.B. [Sfb181.B1]), bei denen der Einfluß der Gürtelschichten in einer begleitenden zweidimensionalen Sandwich-Rechnung erfaßt wird.

Im Laufe der Arbeit wird die Vielteilchenmethode umfassend mit anderen numerischen Methoden verglichen. Es wird herausgearbeitet, daß die Vielteilchenmodelle ihren Ursprung in den kontinuumsmechanischen Modellen (s. Abschnitt 1.1.2.1) haben und demzufolge auch die Parametrisierung nach den dort etablierten und vielfach bewährten Vorgehensweisen erfolgt.

1.1.2.2.2 Reifenmodelle mit der Methode der Finiten Elemente

Als überaus adaptives numerisches Werkzeug, wird die Methode der Finiten Elemente natürlich für alle Arten von Reifenmodellen für den instationären Rollkontakt verwendet:

- Reifenmodelle analog zum elastischen Kreisringmodell, aber modelliert mit Balken- und Federelementen ohne Verwendung der Differentialgleichungen des elastischen Kreisringmodells, z.B. in [Kennedy.87, Nakajima.86, Mousseau.94]
- Einsicht-Reifenmodelle als Struktur aus Finiten Membranelementen z.B. in [Wu.97]
- Mehrschicht-Reifenmodelle als Struktur aus Volumenelementen (Solids) z.B. in [Gall.95]
- Mehrschicht-Reifenmodelle als kombinierte Struktur aus Seil-, Balken-, Membran-, Schalen- und Solid-Elementen z.B. in [Feng.94, Kao.97, Koishi.98, Kamoulakos.98]

1.2 Einordnung der Arbeit

In dieser Arbeit werden verschiedene Modelle vorgestellt, die eine Abbildung des Reifenkontinuums auf ein algebraisches Problem realisieren. Das algebraische Problem als Abbild der kontinuumsmechanisch formulierten Reifenmodelle ist letztendlich die Form, die für die Implementierung des Problems in ein Computerprogramm benötigt wird². Dabei sind viele verschiedene Wege der Diskretisierung in Raum und Zeit möglich (s. Abb.1.3), diese werden im Laufe der Arbeit vorgestellt.

Die verwendeten Modelle sind numerischer Natur und sind, obwohl sie unter dem Aspekt der Aufwandsminimierung für die transiente Zeitintegration so

²Dies gilt bis auf die wenigen Ausnahmen, wo kontinuumsmechanische Ansätze direkt oder durch Zuhilfenahme symbolischer Rechenprogramme wie Maple V oder Mathematica gelöst werden können. (Maple V und Mathematica sind eingetragene Warenzeichen.)

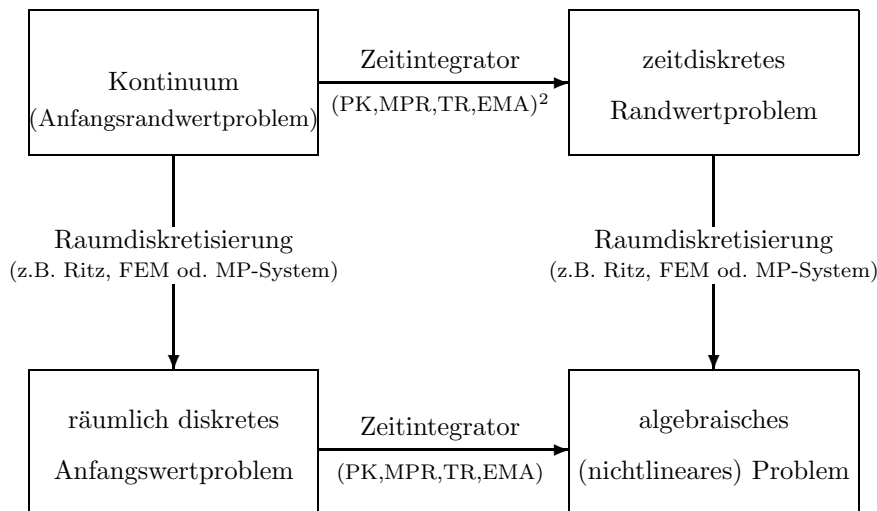


Abbildung 1.3: Vom Kontinuum zum algebraischen Modell

einfach wie möglich gehalten werden, hinsichtlich des betriebenen numerischen Aufwandes und vor allem hinsichtlich der räumlichen Auflösung der Schichtstruktur im oberen Bereich der möglichen Modelle für die Simulation der transienten Rolldynamik von Gürtelreifen anzusiedeln.

Um mit den Modellen eine Zeitintegration bezahlbar zu realisieren, wird besonderes Augenmerk auf die Integrationstechnik gelegt. In diesem Zusammenhang wird einerseits vor allem die Logistik der Vielteilchen–Membranmodelle deutlich verbessert und andererseits durch Kombination und Erweiterung verschiedener Ansätze ein Mehrschichtmodell nach der Methode der Finiten Elemente einer Zeitintegration zugänglich gemacht.

Dabei hat die entworfene Methodik im Gegensatz zu anderen Vorgehensweisen das Potential, auch bei feiner Modellierung von Teilbereichen den Rechenzeitaufwand zu begrenzen.

In die vorgestellten Modelle ging außerdem viel von der Erfahrung ein, die bei den umfangreichen Forschungen der Wissenschaftler am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin unter der Leitung von Prof. Dr. F. Böhm angesammelt werden konnte.

²

- PK ... Prädiktor–Korrektor–Verfahren
(expliziter Zeitintegrator)
- MPR, TR, EMA ... Mittelpunkts– und Trapezregel bzw. Energie–Impuls–Erhaltungsalgorithmus
(implizite Zeitintegratoren)

Kapitel 2

Ein 3D-Einschichtmodell für die transiente Rolldynamik des PKW-Reifens

In diesem Kapitel wird die Methode beschrieben, mit der die „äußere Mechanik“ des Luftreifens erfaßt wird.

Dabei wird der Reifen als einschichtige, anisotrope Membranstruktur mit schwacher Biegestörung approximiert.

Ein solches Modell ist sehr gut in der Lage, die „äußere Mechanik“, also die Zusammenhänge zwischen der Deformation der Reifenquerschnitte und den zugehörigen Kontakt- oder in jeweils einer Schicht zusammengefaßten Strukturspannungen darzustellen.

Im Gegensatz dazu wird im Kapitel 3 erläutert, wie die „innere Mechanik“ modelliert wurde.

Der Sinn dieser Trennung liegt in der Beschleunigung und Stabilisierung der Simulation des Kontaktproblems. Während im Modell für die „äußere Mechanik“ ein expliziter Integrator für ein Mesh mit stark vereinfachter Modellierung der inneren Reifenstruktur und einem borstenartig modellierten Protektor zu Einsatz kommt, wird für die „innere Mechanik“ ein implizit integriertes mehrschichtiges FE-Modell mit speziell optimierten Elementen und realistischeren Materialien verwendet.

2.1 Der Vielteilchenansatz für ein räumliches Reifenmodell aus anisotropen Schalen

Der Grundgedanke des Vielteilchenansatzes besteht in der Diskretisierung einer Struktur durch viele Partikel, deren Eigenschaften auf Punkte und deren Wechselwirkungen untereinander im Sinne eines Zentralkraftsystems auf Linien konzentriert werden.

Diese so zusammengefaßten Eigenschaften sind im wesentlichen die skalarwertigen Feldgrößen der Struktur wie z.B. Masseverteilung und Temperaturverteilung sowie die vektorwertigen Felder zur Beschreibung der Bewegung und der Dynamik.

Dabei repräsentiert jeder Punkt einen disjunkten Bereich der Struktur. Der Anteil des Punktes an den Eigenschaften der Gesamtstruktur wird durch das räumliche Spacing¹ der i.allg. inhomogenen Diskretisierung bestimmt. Dann werden durch Mittelwertbildung bzw. Integration über den repräsentierten Bereich die skalaren Felder zu numerischen Werten und die Spannungsfelder zu Kraftvektoren umgerechnet und somit konzentriert. Die Bewegung der Materie zwischen den Punkten wird als linear verteilt angenommen. Dadurch erhalten die Knoten direkt die Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren ihres momentanen Ortes.

Diese Beschreibung der Struktur, insbesondere die Konzentration der Masse des durch den jeweiligen Punkt P mit den Koordinaten ${}^P\vec{X}$ repräsentierten Bereiches ${}^P\mathcal{B}$ der Struktur in diesem Punkt, mit der daraus resultierenden Vernachlässigung der lokalen Trägheitsmomente der materiellen Punkte $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dieses Bereiches² sowie durch die Reduktion der Spannungs- und Deformationfelder des Kontinuums auf skalarwertige Zustandsgrößen, die ausschließlich entlang der Verbindungslinien der Punkte wirken, eignet sich hervorragend für die Simulation transienter dynamischer Probleme (s. dazu Abschnitt 2.2).

Gerade wegen der Reduktion der Spannungs- und Deformationfelder ist es möglich, für die Beschreibung der elastischen Eigenschaften der Struktur einfachste Beziehungen zu verwenden, wie z.B. Potentialfunktionen quadratischer oder höherer Form. Natürlich können auch andersartige Kraftgesetze verwendet werden, wie das z.B. für die Modellierung von Viskosität und Reibung erforderlich ist.

Alle verwendeten Materialgesetze sollen physikalisch meßbar sein und einen möglichst einfachen Charakter haben, so daß eine evtl. gewünschte genauere Erfassung der strukturellen Eigenschaften nur sekundär durch komplexere Kraftgesetze, primär jedoch durch eine Erhöhung der Diskretisationsdichte erzielt wird. Diese darf aufgrund der per Design geringen Kosten der lokalen Modellierung wie z.B. in [Gallrein.92] beträchtliche Ausmaße annehmen.

¹Spacing ... Synonym für den Abstand zwischen den Diskretisierungselementen

²Gemeint ist hiermit, daß das Trägheitsmoment eines differentiellen Elementes des repräsentierten Bereiches (z.B. $d^P I_{zz} = \int_{{}^P\mathcal{B}} \rho ((x - {}^P x)^2 + (y - {}^P y)^2) dx dy dz$), die durch die

Konzentration der Masse dieses differentiellen Elementes in den Punkt P wegen $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto {}^P x \\ y \mapsto {}^P y \\ z \mapsto {}^P z \end{array} \right\}$ verschwindet und somit in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt wird.

Die Gleichungen für die Gesamtstruktur erhält man, indem man an allen Knoten

- die Koinzidenzbedingungen erfüllt, d.h. die Konfiguration der einander entsprechenden Knoten der hierarchisch übergeordneten (Sub-)Struktur und der sich daran anschließenden Unterstruktur muß übereinstimmen *und*
- das (kinetostatische) Gleichgewicht erfüllt, d.h. die Reaktionskraft auf die momentane Konfiguration der Struktur an einem Knoten setzt sich zusammen aus den internen bzw. Reaktionskräften aller an diesem Knoten angeschlossenen Substrukturen.

Für das Beispiel nach Abb. 2.1 heißt die Gleichgewichtsbeziehung bei einer am Knoten $N_{A,B}$ angreifenden äußeren Kraft ${}^{N_{A,B}}\vec{F}^{ext}$:

$$\vec{0} = {}^{N_{A,B}}\vec{F}^{int} - {}^{N_{A,B}}\vec{F}^{ext}$$

mit ${}^{N_{A,B}}\vec{F}^{int} = n_{c1}\vec{F} + n_{d2}\vec{F} + n_{a3}\vec{F} + n_{b4}\vec{F} \quad . \quad (2.1)$

Da die Strukturreaktion i.allg. nichtlinear von der momentanen Konfiguration³ ${}_t\mathcal{Z}$ abhängt, ist es nicht möglich, eine Beziehung zwischen den Knotenkräften ${}_t\vec{F}$ und der Konfiguration ${}_t\mathcal{Z}$ in der klassischen linearen Form

$${}_t\vec{F} = {}_t\underline{\underline{K}} \cdot {}_t\mathcal{Z} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{K}}^T = \underline{\underline{K}} \quad (2.2)$$

herzustellen. Vielmehr wählt man zur Lösung der nichtlinearen Beziehung

$$\vec{F}^{ext}({}_t\mathcal{Z}, t) - \vec{F}^{int}({}_t\mathcal{Z}, t) = \vec{0} \quad (2.3)$$

eine *inkrementell-iterative* Lösungsstrategie. Die zwei Kerngedanken dieser Vorgehensweise bestehen im folgenden:

- Die Bewegung und die damit verbundenen Änderungen sowohl in der Konfiguration als auch in der Strukturreaktion werden bzgl. der Zeit *inkrementiert*, was ein gleichzeitiges Inkrementieren der Belastungshistorie

³Mit dem Begriff „Konfiguration“ ${}_t\mathcal{Z}$ wird i.allg. die Gesamtheit des Feldes der Ortsvektoren ${}_t\vec{X}$ und des Geschwindigkeitsfeldes ${}_t\dot{\vec{X}}$ bezeichnet: $(...) \mathcal{Z} = \left\{ \begin{matrix} (...) \vec{X} \\ (...) \dot{\vec{X}} \end{matrix} \right\}$.

Dabei kann durch Anwendung des im jeweilig aktuellen Kontext diskutierten Zeitintegrationsoperators das Geschwindigkeitsfeld ${}_t\dot{\vec{X}}$ durch eine geeignete Historie des Feldes der Ortsvektoren ${}_{t_1}\vec{X}, {}_{t_2}\vec{X}, \dots$ und des Zeitschrittes Δt dargestellt werden:

$$\mathcal{I} := \left\{ {}_t\dot{\vec{X}} \mapsto \left\{ {}_{t_1}\vec{X}, {}_{t_2}\vec{X}, \dots, \Delta t \right\} \right\}.$$

Mittels dieses Operators läßt sich die zeitlich kontinuierliche Schreibweise eines Kraftzustandes ${}_t\vec{F} = \vec{F}({}_t\vec{X}, {}_t\dot{\vec{X}}, t)$ in eine an den Stützstellen $\{t + k\Delta t, k \in \{0, 1, \dots\}\}$ gleichwertige, zeitlich diskrete Schreibweise ${}_t\vec{F} = \vec{F}({}_t\vec{X}, {}_{t_1}\vec{X}, {}_{t_2}\vec{X}, \dots, t, \Delta t)$ überführen.

und der Bewegung nach sich zieht.

Man geht also immer von einem bekannten Zustand ${}_t(\dots)$ aus, d.h. von einer bekannten Konfiguration ${}_t\vec{\mathcal{Z}}$ mit dem dazugehörigen Kraftsystem ${}_t\vec{\mathbf{F}}$ und versucht daraus einen nahe gelegenen, zukünftigen Zustand ${}_{t+\Delta t}(\dots)$ zu entwickeln.

- Die Ermittlung des Bewegungszustandes ${}_{t+\Delta t}\mathcal{Z}$ wird ausgehend von einer Näherungslösung ${}^{(i)}_{t+\Delta t}(\dots)$ aus numerischer Sicht *iterativ* durchgeführt. Dazu erzeugt man eine Folge von Lösungsverbesserungen $\Delta\mathcal{Z}$ die sukzessive die Berechnung einer die nichtlineare Beziehung (2.3) besser erfüllenden Lösung ${}^{(i+1)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z} \leftarrow {}^{(i)}_t\mathcal{Z} + \Delta\mathcal{Z}$ für die Iterationen $(0, 1, \dots, i, i+1, \dots)$ ermöglicht. Die Lösungsverbesserung $\Delta\mathcal{Z}$ wird als Lösung des Gleichungssystems berechnet, das bei der Darstellung der Beziehung (2.3) durch seine TAYLOREntwicklung an der Stelle ${}^{(i)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z}$ unter Berücksichtigung der zeitlich veränderlichen Randbedingungen und/oder Belastungen entsteht⁴.

Wird die TAYLOREntwicklung des Kraftsystems ${}_t\vec{\mathbf{F}} \mapsto {}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{F}}$ nach der Änderung der momentanen Konfiguration $\Delta\mathcal{Z}$ mit $\Delta\mathcal{Z} = \left\{ \begin{array}{c} {}^{(i+1)}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{X}} - {}^{(i)}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{X}} \\ {}^{(i+1)}_{t+\Delta t}\dot{\vec{\mathbf{X}}} - {}^{(i)}_{t+\Delta t}\dot{\vec{\mathbf{X}}} \end{array} \right\}$ nach dem ersten Glied abgebrochen, dann liegt ein mit der Computeralgebra relativ gut lösbares, lineares Gleichungssystem vor (s. Gleichung 2.5).

$$\begin{aligned}
 {}^{(i+1)}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{F}}^{ext} \left({}^{(i+1)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z} \right) - {}^{(i+1)}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{F}}^{int} \left({}^{(i+1)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z} \right) &= {}^{(i)}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{F}}^{ext} \left({}^{(i)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z} \right) - {}^{(i)}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{F}}^{int} \left({}^{(i)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z} \right) \\
 &+ \underbrace{\left[\nabla_{\substack{(i) \\ t+\Delta t}\mathcal{Z}} \circ \left({}^{(i)}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{F}}^{ext} - {}^{(i)}_{t+\Delta t}\vec{\mathbf{F}}^{int} \right) \right]}_{= \underline{\underline{\mathbf{K}}}} \cdot \Delta\mathcal{Z} \\
 &+ \mathcal{O}(\Delta\mathcal{Z}^2) \quad \text{und} \quad (2.4) \\
 {}^{(i+1)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z} &\leftarrow {}^{(i)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z} + \Delta\mathcal{Z}
 \end{aligned}$$

In diesem begleitenden Gleichungssystem stellt $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ die JACOBIMatrix des von der Momentankonfiguration abhängigen Kraftvektors $\vec{\mathbf{F}}$ bzgl. der Konfiguration ${}^{(i)}_{t+\Delta t}\mathcal{Z}$ dar. Das Element K_{ij} der JACOBIMatrix beschreibt den linearen Anteil an der Änderung der Kraft F_i zufolge einer kleinen Konfigurationsänderung $\Delta\mathcal{Z}_j$. Man kann also das Element K_{ij} als eine im momentanen Zustand wirkende Feder auffassen, deren Steifigkeit der Zahlenwert von K_{ij} ist.

Die hier beschriebene formale Vorgehensweise ist identisch zur Vielteilchenmethode.

Der Unterschied zwischen den Methoden besteht darin, daß man sich bei der

⁴Diese Vorgehensweise wird ausführlich anhand der für die in dieser Arbeit entwickelten Elemente in Kapitel 3 dargelegt.

Vielteilchenmethode ganz bewußt auf die Verwendung von linienwertigen Elementen beschränkt⁵, während in der Verschiebungsmethode Elemente mit mehr Knoten zur Beschreibung flächenwertiger und volumenwertiger Zusammenhänge vorkommen können.

Warum beschränkt man sich bei der Vielteilchenmethode auf Linienelemente? Mit der Beantwortung dieser Frage gelangt man zum Verständnis darüber, wann man die eine oder andere Methode präferieren sollte.

Die Verwendung höherwertiger Elemente in der Verschiebungsmethode erlaubt die komplexere und adaptivere Beschreibung der Struktur bei Verwendung zunächst einfach strukturierter Grundgleichungen. Oft werden zur Beschreibung der mechanischen Sachverhalte Energiefunktionale verwendet. Solche Funktionale haben den Vorteil eines meist sehr übersichtlichen Charakters. Die Erzeugung der zur Lösung des nichtlinearen Gleichgewichtes erforderliche JACOBI-Matrix erfordert aber früher oder später einen Differentiationsprozeß. Dabei entarten die zunächst übersichtlich strukturierten Funktionale aufgrund der vielen wechselseitigen inneren Abhängigkeiten gewöhnlich zu sehr komplexen Gleichungen, die dann die Beziehungen zwischen allen Knoten eines Elementes untereinander darstellen. Wie stark die Kopplung der Gleichungen ist, hängt nach Abbildung 2.1 von der Knotenanzahl der für die Diskretisierung verwendeten Elemente ab. Je höher die Knotenanzahl ist, umso weitreichender und komplexer ist die lokal formulierte Auswirkung des Zustandes eines Knotens auf die anderen.

In der Vielteilchenmethode wird der Bewegungszustand von nur jeweils zwei Knoten in Beziehung zueinander gebracht. Um die gleiche Anzahl an Wechselbeziehungen zwischen den Knoten eines Elementes mit n Knoten darzustellen, benötigt man $\frac{n!}{2(n-2)!}$ Linienelemente. Das sind gegenüber Dreiknoten– also 3, bei Vierknotenelementen schon 6 Linienelemente, usw.

⁵Hierdurch ist die Beschreibung der Bewegung direkt durch die NEWTONschen Bewegungsgleichungen möglich

Diesem Mehraufwand bei der Vielteilchenmethode stehen folgende Überlegungen gegenüber:

- a.) Oft ist es technisch nicht notwendig, alle denkbaren Wechselbeziehungen eines mehrknotigen Elementes zu betrachten, so daß die erforderliche Anzahl an Linienelementen gravierend kleiner sein kann als $\binom{n}{2}$. Der Ingenieur hat unmittelbaren Einfluß darauf, selektiv nur die Zusammenhänge der Struktur zu erfassen, die praktisch relevant sind, andere, nur formal existierende Zusammenhänge können vernachlässigt werden.
- b.) Viel wichtiger ist aber der Umstand, daß die Linienelemente immer nur sehr spezielle Zusammenhänge in der Struktur abbilden, was zu schwach besetzten Matrizen führt. Es wird mit K_{ij} immer nur die Strukturreaktion an Position i zufolge einer Konfiguration an Position j in Beziehung gesetzt. Diese Beziehungen lassen sich in der Praxis oft durch einfache Gleichungen, z.B. linear elastische Beziehungen ausdrücken. Man erhält die Möglichkeit, einzelne Effekte im Strukturverhalten sehr gezielt und direkt und dabei mit einfachen Mitteln zu parametrisieren. Diese Möglichkeit geht in der Komplexität der Mehrknotenelemente meist unter.

Zusammenfassend kann man sagen

- Die Verschiebungsmethode geht tendenziell von wenigen, einfach strukturierten und allgemein gehaltenen Gleichungen aus und kommt im Prozeß des Aufstellens der Strukturgleichungen für das spezielle System zu sehr komplexen Ausdrücken, die nichts mehr mit der Einfachheit der Ausgangsgleichungen zu tun haben. Dafür ist diese Vorgehensweise allgemein und gut formalisierbar.
- Die Vielteilchenmethode⁶ startet bereits mit einer Vielzahl von einfachen Gleichungen, die dann während der Erzeugung der Strukturgleichungen ihren einfachen Charakter behalten. Praktisch überflüssige Beziehungen können von Anfang an vernachlässigt werden. Die Vielteilchenmethode bietet die Möglichkeit, viel Spezialwissen der Ingenieure problemlos in eine Simulation zu implementieren. Der Aufwand steckt im Handling und der geeigneten Parametrisierung der vielen Gleichungen.

Es hängt vom behandelten Problem ab, mit welcher Methode man am Ende effektiver arbeiten kann.

2.1.1.2 Ausnutzung der besonders strukturierten Anisotropie des Gürtelreifens bei der Modellierung als Massepunktsystem

Das Strukturverhalten des Gürtelreifens wird fast ausschließlich durch die Korde bestimmt. Sie sind die wesentlichen Festigkeitsträger des Kompositverbun-

⁶Dies gilt besonders bei Beispielen aus der Moleküldynamik

des. Demzufolge resultiert das anisotrope Materialverhalten ebenfalls überwiegend aus der Anordnung und den Eigenschaften der Korde.

Die kontinuumsmechanische Grundlage zur Beschreibung der Reifenstruktur mit der Theorie anisotroper Membrane wird in [Böhm.85] dargelegt.

Dort wird auch gezeigt, daß zur Beschreibung des Verhaltens der Querschnitte des Gürtelreifens eine Idealisierung der mehrschichtigen Reifenstruktur in einer einzigen Schicht möglich ist, deren Spannungszustand dann der Summe der Spannungsverteilungen der einzelnen Schichten der Karkasse und des Gürtelpaketes entspricht. Es wird ebenfalls darauf hingewiesen, daß zur Erfassung der Spannungen in den einzelnen Lagen die Verformungsmöglichkeiten des Laminatverbundes zu berücksichtigen sind, die mit den in der zitierten Arbeit verwendeten Mitteln der Theorie einschichtiger, anisotroper elastischer Membrane alleine nicht zu berechnen sind.

Man beobachtet, daß bei einer Rollbewegung des Reifens zwar große Verschiebungen stattfinden, die Lage der materiellen Punkte zueinander sich aber nur gering ändert. Wenn man sich nun auf ein folgenfestes Koordinatensystem bezieht, so stellt man fest, daß die Elemente K_{ij} in all jenen Regionen, wo die Querschnitte nur gering von den Ausgangsquerschnitten abweichen, sich ebenfalls nahezu unveränderlich zeigen.

Änderungen im Materialverhalten der Membran sind also in einem mit dem Membranelement mitgeführten Koordinatensystem fast ausschließlich auf Richtungsänderungen der Korde zurückzuführen und somit geometrischer Natur.

Jetzt diskretisiert man die Reifenstruktur so, daß die Gürtel- und Karkassschichten in einer gemeinsamen mittleren Fläche zusammengefaßt werden. Die Topologie der Knoten wird so gewählt, daß die Verbindungslinien zwischen den Knoten mit den Kordrichtungen möglichst gut übereinstimmen.

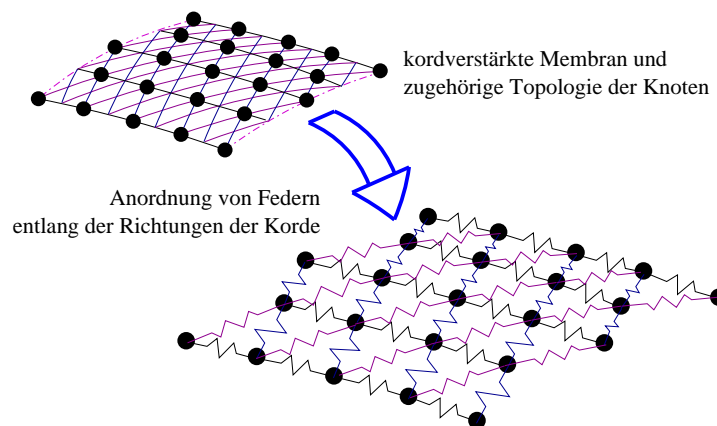


Abbildung 2.2: Kordverstärkte Membran als Massepunktsystem

Dann werden anstelle der Membranelemente Elastizitäten entlang der Kanten gesetzt. Dadurch werden die wesentlichen Terme in der einer Membranstruktur entsprechenden JACOBIMatrix $\underline{\underline{K}}$ (mit den Elementen K_{ij}) durch entsprechend dimensionierte Federn K_{ij} ausgedrückt. Diese sind an den materiellen Punkten der Membran befestigt, werden auf der Grundlage von einfachen physikalischen

Zusammenhängen dimensioniert und folgen zu allen Zeiten den Bewegungen der Korda (s. Abb. 2.2).

Die Wirkung des Matrixmaterials wird durch entsprechend klein dimensionierte Federn berücksichtigt, die quer zu den Kordrichtungen angeordnet werden. (Diese Federn sind in Abb. 2.2 nicht dargestellt.)

2.1.1.3 Aufstellen der Bewegungsgleichungen der anisotropen Membranstruktur des Gürtelreifens als Zentralkraftsystem

Die Grundstruktur der Bewegungsgleichungen folgt dem NEWTONschen Grundgesetz

$${}_t\vec{F} = \underline{\underline{m}} \cdot {}_t\ddot{\vec{X}} \quad . \quad (2.5)$$

Dabei ist ${}_t\vec{F}$ der Vektor der momentan an den Knoten wirkenden freien Kräfte, $\underline{\underline{m}}$ ist die diagonal besetzte Massenmatrix und ${}_t\ddot{\vec{X}}$ ist der Vektor der absoluten Beschleunigungen der Knoten.

Zur Berechnung einer transienten Rollbewegung wird diese Gleichung in der Form

$${}_t\ddot{\vec{X}} = [\underline{\underline{m}}]^{-1} \cdot {}_t\vec{F} \quad (2.6)$$

beginnend bei Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) \Big|_{t=0t} &= {}_0\vec{X} \\ \dot{\vec{X}}(t) \Big|_{t=0t} &= {}_0\dot{\vec{X}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen und Lasten durch die Zeit integriert.

Der Reifen sei nun mit n_{node} Knoten und n_{rods} Stäben diskretisiert. Die Konfiguration eines Knotens A sei zum Zeitpunkt t vollständig beschrieben durch die Vektoren

$$\begin{aligned} {}^A_t\vec{X} &\dots \text{ Ort des Knotens } A \text{ bzgl. des Inertialsystems,} \\ {}^A_t\dot{\vec{X}} &\dots \text{ absolute Geschwindigkeit des Knotens } A \end{aligned}$$

Zu dieser Konfiguration gehöre die zur Bewegung konsistente absolute Beschleunigung ${}^A_t\ddot{\vec{X}}$.

Die Knotenkräfte am Knoten A setzen sich analog zu Gleichung 2.1 zusammen nach

$$\begin{aligned} {}^A_t\vec{F} &= \sum_{i_{rod}=1}^{n_{rods}} Q_{i_{rod}} {}^A_t\vec{F}^{int} \cdot \delta_A^{Q_{i_{rod}}} - \sum_{B=1}^{n_{node}} {}^B_t\vec{F}^{ext} \cdot \delta_A^B \\ \text{mit } \delta_A^B &= \begin{cases} 0 & \text{für } A \neq B \\ 1 & \text{für } A = B \end{cases} \quad \text{und} \end{aligned}$$

Zu berücksichtigen sind nur noch

- ein Algorithmus zur Erstellung einer geeigneten Knotentopologie (s. Abschnitt 2.1.1.4).
- eine geeignete Prozedur zur Applikation des Innendrucks (s. Abschnitt 2.1.2).
- geeignete Maßnahmen, um spezielle Effekte wie Biegung und sonstige Eigenschaften des Schichtverbundes zu erfassen (s. Abschnitt 2.1.3).
- Maßnahmen zur Berücksichtigung des für die Stabilität einer Rollsimulationsrechnung unerlässlichen Dissipationsmodells (s. Abschnitt 2.1.4).
- eine geeignete Parametrisierung der Stäbe (s. Abschnitt 2.1.5).
- ein geeigneter Integrationsalgorithmus für transiente Simulationen (s. Abschnitt 2.2).
- ein geeigneter Kontaktalgorithmus für die Simulation von Rollvorgängen (s. Abschnitt 2.3).

2.1.1.4 Topologische Betrachtungen zur diskreten Modellierungstechnik

Erstellung geeigneter Teilungsverhältnisse

Wenn man ein Membranstück des Gürtels betrachtet, so findet man 3 Vorzugsrichtungen, in denen Korde liegen.

- Korde in Richtung des positiven Lagenwinkels $+\beta$,
- Korde in Richtung des negativen Lagenwinkels $-\beta$ und
- Korde in Querrichtung entlang der Karkasse⁷.

Demzufolge legt man in diese Richtungen jeweils die Diagonalstäbe des Gürtels für die Stahlkorde und die Karkaßstäbe für die Reyonkorde der Karkasse (s. Abb. 2.4).

Ein Membranstück aus der Seitenwand, daß hier aus Gründen der besseren Anschauung nicht in Umfangsrichtung, sondern in Querrichtung orientiert dargestellt ist, hat nur eine Bewehrungsrichtung entlang der Karkaßstäbe (s. Abb. 2.4).

Aus kontinuumsmechanischen Betrachtungen und Messungen ist bekannt, daß die Seitenwand neben der radialen Bettung auch die Torsionsbettung des Gürtels übernimmt.

Die Frequenzen der Torsionsschwingung des Gürtels um die Radachse liegen oft unterhalb der Frequenz der zweiten Biegeeigen schwingung, können aber je nach Setup sogar weit unter der ersten Biegeeigenfrequenz liegen (s. [Zegelaar.97]). Die richtige Erfassung dieser Eigenschwingung ist demzufolge für die Simulation von transienten Rollbewegungen oder von Interaktionen zwischen Reifenmechanik und Schwingungen im Antriebstrang elementar wichtig!

⁷Manchmal (vor allem bei Reifen neuerer Bauart) existiert eine vierte Richtung, die Bandage.

Die Bandage ist eine über der obersten Gürtellage aufgebrachte Schicht aus zwei oder drei Nylonlagen, die in Umfangsrichtung orientiert sind. Ihre Erfassung in der diskreten Modellierung erfolgt nach logischem Verständnis und wird in diesem Abschnitt nicht diskutiert, aber in Abb. 2.4 gezeichnet.

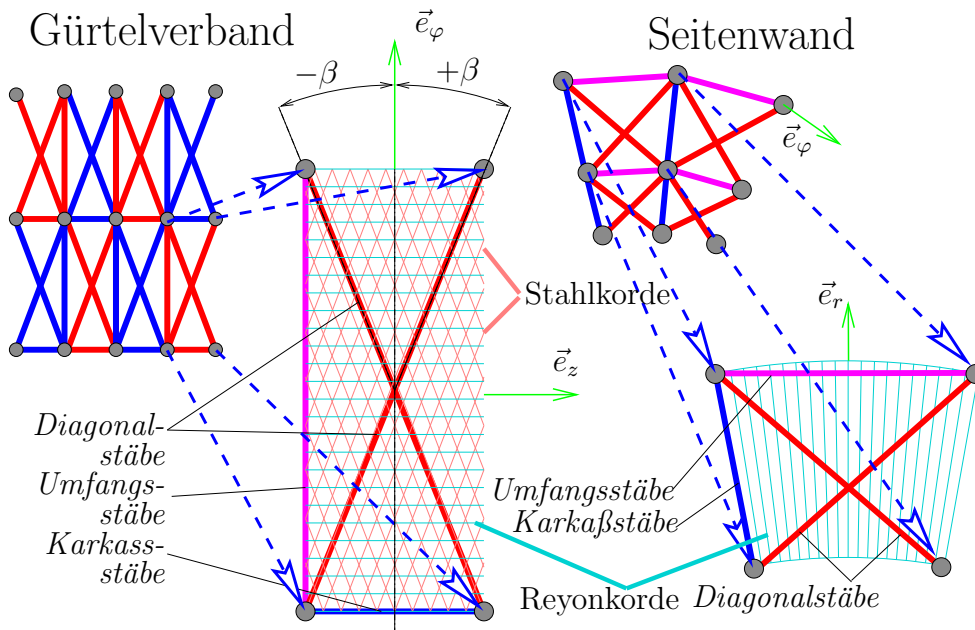


Abbildung 2.4: Zuordnung der Anisotropierichtungen im Gürtelreifen zu den Stäben

Es ergeben sich bei der Abbildung des elastischen Verhaltens der Seitenwand durch die Kombination von Karkass-, Diagonal- und Umfangsstäben folgende zu betrachtende Wechselwirkungen:

- 1.) Die Schubsteifigkeit in Torsionsrichtung⁸ soll im wesentlichen durch die Diagonalstäbe der Seitenwand übernommen werden.
Hierfür werden die Diagonalstäbe mit einer geeigneten Steifigkeit ausgestattet und unter einem entsprechenden Winkel gegen die Karkassstäbe angestellt.
- 2.) Die Diagonalstäbe haben aber gleichzeitig auch Einfluß auf die radiale Steifigkeit der Seitenwand.
- 3.) Desweiteren haben auch die Umfangsstäbe, die zunächst nur für den Gummi stehen, im Zusammenhang mit dem mit den Diagonalstäben gebildeten Dreiecksverband Einfluß auf die Torsionsbettung.
- 4.) Im dreidimensionalen Fall hat die geometrische Form der Seitenwand als doppelt gekrümmte, anisotrope Membran gravierenden Einfluß, auf die letztendlich entstehende elastische Bettung des Gürtels in radialer und Umfangsrichtung. Durch diesen Einfluß werden die Betrachtungen nach (1.)... (3.) in ihrer Wirkung relativiert.

Hier gilt es eine gute Dimensionierung für Steifigkeitsverteilung und Topologie des Meshes zu finden, die in Abschnitt 2.1.5 beschrieben wird.

Der kombinierte Einfluß der Elastizitäten der Stäbe auf die elastischen Eigenschaften des Verbundes ist im Gürtel natürlich genauso vorhanden, wie er an-

⁸Die Schubsteifigkeit der Seitenwand gegen Torsion beschreibt die Elastizität der Verspannung des Gürtelringpaketes in Umfangsrichtung gegen die Felge.

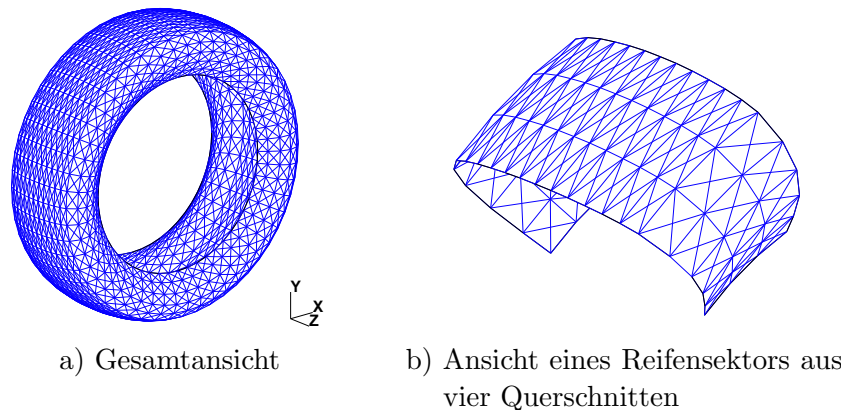


Abbildung 2.5: Membranmodell des Gürtelreifens als Massepunktsystem

hand der Seitenwand oben beschrieben wurde. Im Gürtel spielen diese Wechselwirkungen angesichts der riesigen Anisotropieunterschiede im Material jedoch nur eine untergeordnete Rolle.

Jetzt muß man nur noch betrachten, welchen Bereich der Struktur die jeweiligen Massepunkte und die zwischen ihnen befindlichen Elastizitäten repräsentieren sollen. Daraus ergibt sich, ob man hinreichend viele Punkte eingeführt hat, um die gewünschte Genauigkeit des Modells umzusetzen. Die Eigenschaften der repräsentierten Bereiche werden dann durch Mittelwertbildung bzw. Integration den skalaren Eigenschaften der Knoten bzw. den Parametern der Kraftgesetze zwischen ihnen zugeschlagen. Ausführlich wird dieses Thema im Abschnitt 2.1.5 behandelt.

Wie ein nach dieser Modellierungsphilosophie aufgebautes Modell eines Gürtelreifens aussieht, ist in Abb. 2.5 dargestellt. Die verwendeten Randbedingungen werden in Kapitel 5 erläutert.

2.1.1.5 Vor- und Nachteile der diskreten Modellierung

Die Vorgehensweise nach Abschnitt 2.1.1.3 sichert, daß auch nach großen Starrkörperbewegungen des Rades und überlagerten endlichen Deformation der Reifenstruktur die Richtung der Korde zueinander richtig beschrieben wird. Sie kann also aufgrund der Tatsache, daß der geometrische Anteil an den Einträgen in der JACOBIMatrix erfaßt wird, einen großen Bereich der in der Praxis des Rollvorganges auftretenden Deformationen hinreichend genau abbilden.

Erst wenn das Verhalten der Korde oder des Matrixmaterials merklich nicht-linear wird bzw. den auferlegten Rahmen der einfachen Kraftgesetze sprengt, dann treten Effekte auf, die mit einer Approximation der Struktur als System aus Federn und Massepunkten allein nicht mehr erfaßt werden können. Dann ist es aufgrund der Einfachheit und Übersichtlichkeit dieser Modellierung aber

möglich, solche speziellen Effekte sicher zu erkennen und durch einfache Erweiterungen der Modelle, wie sie z.B. in den folgenden Abschnitten beschrieben werden, zu erfassen.

Der große Vorteil der Modellierung einer anisotropen Membran als ein Massepunktsystem besteht zusammengefaßt darin, daß

- + der Materialanteil der JACOBIMatrix nur einmal, a priori berechnet wird und nur der sich mit der Bewegung verändernde geometrische Anteil berechnet werden muß.
Dies bildet besonders das netzkinematische Verhalten von anisotrop bewährten Strukturen gut ab. Damit senken sich die Kosten eines Zeitschrittes beträchtlich. Das ist vor allem bei transienten Problemen mit sehr vielen Zeitschritten von so großer Bedeutung, daß man dafür die geringen Abstriche an die Genauigkeit der Erfassung von gekoppelten Effekten, die in höherer Ordnung von den Deformationen abhängig sind, gerne toleriert.
- + die Berechnung des geometrischen Anteils an der JACOBIMatrix ohne jeglichen zusätzlichen Aufwand, quasi automatisch als ein Nebeneffekt vonstatten geht.
Dies ist möglich, da die ausschließlich entlang der Verbindungslinien der Knoten wirkenden Elastizitäten durch die Bewegung der Struktur vollständig mitgeführt werden. Diesen Vorteil hat man bei der Formulierung von kontinuierlich wirkenden Elastizitäten wie Volumenelementen und Schalen nicht.
- + die Berechnung der Knotenkräfte als Reaktion auf die Konfiguration im Sinne der Vielteilchenphilosophie beliebig einfach gehalten werden kann.
- + sich ein sehr übersichtliches und dem ingenieurmäßigen Verständnis sehr naheliegendes Modell ergibt, das gleichzeitig Raum für die einfache Implementierung von zusätzlichen Kraftgesetzen und Bedingungen zur Erfassung von Viskosität, innerer und äußerer Reibung sowie Kontakt bietet.
- + sich durch die Konzentration der Masse in den Knoten eine diagonale Massenmatrix ergibt, deren für die Zeitintegration erforderliche Inversion (s. Abschnitt 2.2.2) trivial ist.

Ein Nachteil der diskreten Modellierungstechnik besteht darin, daß man bei der Wahl der Anzahl und der Positionierung der Punkte entlang eines Reifenquerschnittes nicht frei ist, wie es z.B. für eine genauere Modellierung lokaler Bereiche wünschenswert ist.

Aufgrund dieses Nachteils sind folgende, jedoch erfüllbare Bedingungen zu berücksichtigen:

- *Die Federn im Gürtel müssen entlang des gegebenen Lagenwinkels der Korde ausgerichtet werden:*
Das erreicht man, indem man die Teilung in Querrichtung auf die Teilung in Umfangsrichtung, sprich die Anzahl der Spuren in Quer– auf die Anzahl der Querschnitte in Umfangsrichtung abstimmt.

- *Man muß mit einer ganzzahligen Anzahl an Querschnitten auskommen und dabei die Schließbedingung für die Korda in Umfangsrichtung erfüllen:* Es ist einleuchtend, daß man bei einer Diskretisierung, wo die Steifigkeitsträger diskret an die Struktur gekoppelt sind, sicherzustellen hat, daß der erste und letzte Querschnitt nahtlos zusammenpassen. Übergangselemente zur Überbrückung von zueinander versetzten Knoten sind nicht vorgesehen und im Rahmen dieser Modellierungsart auch sinnlos. Durch solche Übergangselemente würde man die Vorteile der diskreten Topologie verspielen.
- *Man muß mit der Diskretisierung den Gürtelrand treffen:* Bei einem gegebenen Kordlagenwinkel und einer gewählten Teilung des Gürtels in Quer- und in Umfangsrichtung ergibt sich zwangsläufig ein Ort in Querrichtung, an dem die Gürtelstäbe enden. Deshalb gilt als zusätzliche Bedingung an die gewählte Teilung, daß dieser sich ergebende Ort mit der tatsächlichen Gürtelbreite übereinstimmen muß. Es ist zulässig, dabei kleine Abweichungen zu tolerieren, weil man diese durch geringe Modifikation der Steifigkeiten der Diagonalfedern am Gürtelrand ausgleichen kann. Diese Möglichkeit wird in Abschnitt 2.1.3 näher erläutert.

2.1.1.6 Erstellung einer geeigneten Topologie der Knoten für die Startkonfiguration

Um eine geeignete rotationssymmetrische Startkonfiguration zu generieren, geht man wie folgt vor:

- 1.) Man wählt einen sinnvollen Ausgangsquerschnitt zur Beschreibung der Reifenkontur in Meridianrichtung aus.
Dieser Querschnitt kann von einem gegebenen Reifen durch Vermessung gewonnen werden oder in der Designphase von Gürtelreifen zunächst nahezu beliebig angenommen werden.
- 2.) Man erzeugt aus dem Ausgangsquerschnitt nach (1.) eine Gleichgewichtsfigur.

Diese Prozedur ist lange bekannt und wird in [Böhm.66b, u.v.a.] beschrieben. Es ist zwar nicht notwendig, aber zweckmäßig, das Modell auf einer Gleichgewichtsfigur aufzubauen. Ansonsten können während der ersten Luftbefüllung des Reifens bei der Simulation große Verschiebungsincremente und damit ein möglicherweise unrealistischer Vorspannungszustand auftreten.

Das Massepunktmodell ist sehr robust. Trotz großer Verschiebungsänderungen zu Beginn des Aufpumpens werden immer noch Lösungen produziert, jedoch macht es den Simulationsstart teurer.

Andererseits befreit man sich mit der Verwendung von Gleichgewichtskonfigurationen von Unwägbarkeiten, die sowohl mit der in (1.) erwähnten Möglichkeit der beliebigen Wahl eines Ausgangsquerschnittes, als auch mit dem subjektiven Faktor zusammenhängen können, der bei der Positionierung der mittleren Ebene in dem relativ dicken Gürtelverband unvermeidlich ist.

- 3.) Man untersucht zuletzt systematisch Kombinationen aus Umfangsteilung und Spuranzahl.

Dazu wickelt man die Gürtelkordel unter einem vorliegenden Lagenwinkel auf dem zur Gleichgewichtsfigur nach (2.) gehörenden Torus räumlich ab. Das ist eine leichte numerische Aufgabe. Wenn man die erforderliche Gürtelbreite hinreichend genau trifft, so hat man eine zulässige Teilungskombination gefunden. Ansonsten wählt man die lt. Systematik nächstmögliche Teilungskombination. Man kann auch den Kordlagenwinkel leicht variieren, wenn man damit nicht die in jeder Reifenproduktion normalerweise auftretenden Toleranzen überschreitet.

In Abb. 2.6 werden Reifentopologien verschiedener Teilungsverhältnisse für das in Abschnitt 5.1 verwendete Reifenmodell gezeigt, die das Ergebnis solcher Betrachtungen sind. Damit wird demonstriert, daß der erwähnte „Nachteil“ der diskreten Modellierungstechnik durch geeignete Maßnahmen völlig ausgeglichen werden kann.

2.1.2 Applikation des Innendruckes

Die Applikation des Innendruckes bedarf einiger zusätzlicher, wenig aufwendiger Betrachtungen, da man zum Aufbringen von verteilten Lasten eigentlich geeignet parametrisierte Flächen benötigt. Diese liegen bei der Diskretisierung mit einem Massepunktsystem in formaler Hinsicht nicht automatisch vor.

Desweiteren sollte berücksichtigt werden, daß durch die Prozedur der Druckkraftberechnung der numerische Aufwand im Zeitschritt gering bleiben soll.

Die primitivsten und damit aus numerischer Sicht geeignetsten Flächenelemente zur Berechnung der Druckkräfte sind Dreiecke. Sie besitzen eine über die Fläche konstante Normale und erlauben die eindeutige Aufteilung der resultierenden Druckkraft auf die Knoten, wobei sowohl die Kraft– als auch die Momentenwirkung identisch der verteilten Druckbelastung ist. Bei komplexeren Flächenelementen ist die Bedingung einer äquivalenten Kraft– und Momentenwirkung allein nicht ausreichend, um zu einer eindeutigen Aufteilung der resultierenden Druckkraft auf die Knoten der Fläche zu kommen. Es müssen Betrachtungen über die Arbeitsäquivalenz der Knotenkräfte durchgeführt werden, um diese erforderlichen zusätzlichen Gleichungen zu generieren. Desweiteren gestaltet sich die Integration der Kraftwirkung zur Drucknormalbelastung über eine nichtebene Fläche schwieriger.

Die Reifenstruktur zeichnet sich dadurch aus, daß sie durch doppelt gekrümmte Flächen begrenzt wird. Wenn man sich nun ausschließlich auf Dreiecksflächen beziehen würde, dann wären die entstehenden Knotenkräfte abhängig von der zufällig gewählten Aufteilung der druckbelasteten Fläche, was solange unzulässig ist, wie man räumlich so grobe Modelle verwendet, daß der Einfluß der zufälligen Aufteilung der Flächen in Dreiecke eine Rolle spielen würde.

Man muß also aus mechanischer Sicht für die Applikation von Druckkräften

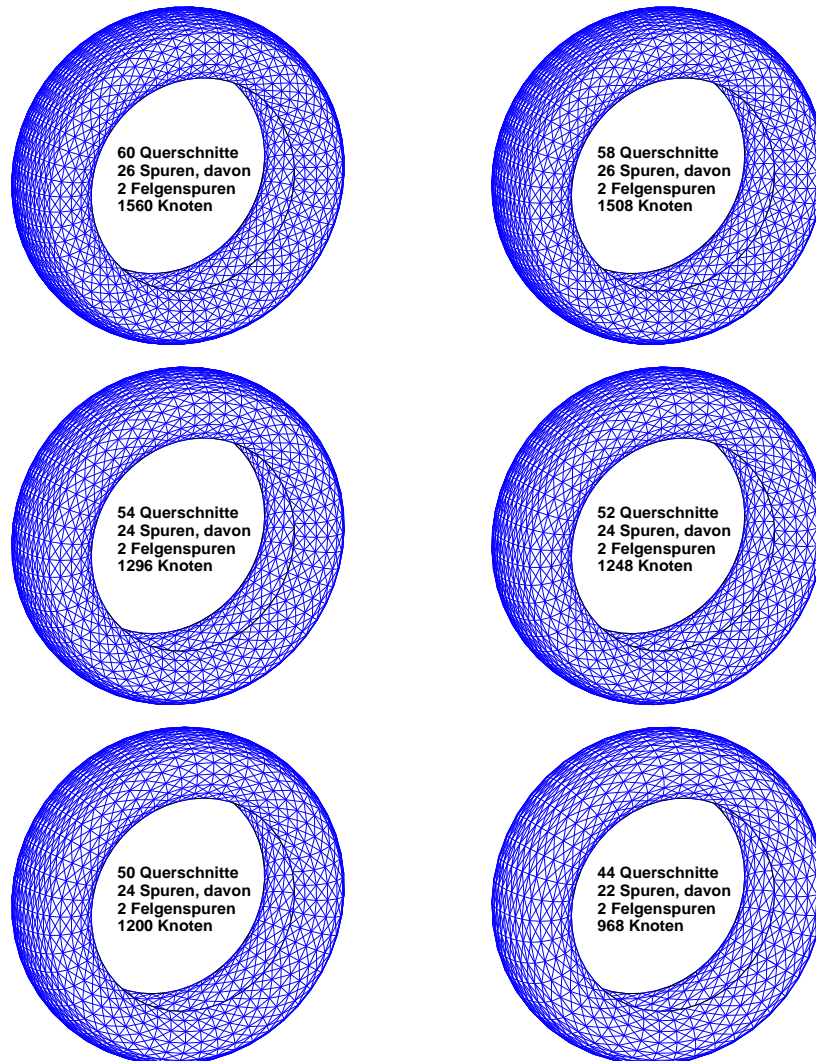


Abbildung 2.6: Beispiele für verschieden feine Teilungsvarianten komplexere Flächen als Dreiecksflächen verwenden.

Um den numerischen Aufwand gering zu halten, bevorzugt man hier eine Vorgehensweise, bei der man die Adaptivität von Vierecksflächen mit den Mitteln der einfachen Applikation von Druckkräften auf Dreiecksflächen kombiniert:

- 1.) Zunächst werden die Flächeninhalte und Normaleneinheitsvektoren aller Dreiecke berechnet, die von je einem Umfangs-, Karkaß- und Diagonalstab gebildet werden können (s. Abb. 2.7). Diese numerische Operation gestaltet sich mittels des Kreuzproduktes der Dreiecksseitenvektoren sehr einfach.
- 2.) Dann werden die zugehörigen Druckkräfte auf die Knoten der Dreiecksfläche verteilt.
- 3.) Zuletzt werden die gewonnenen Druckkräfte jeder betrachteten Dreiecksfläche zur Hälfte den resultierenden Druckkräften der Gesamtstruktur

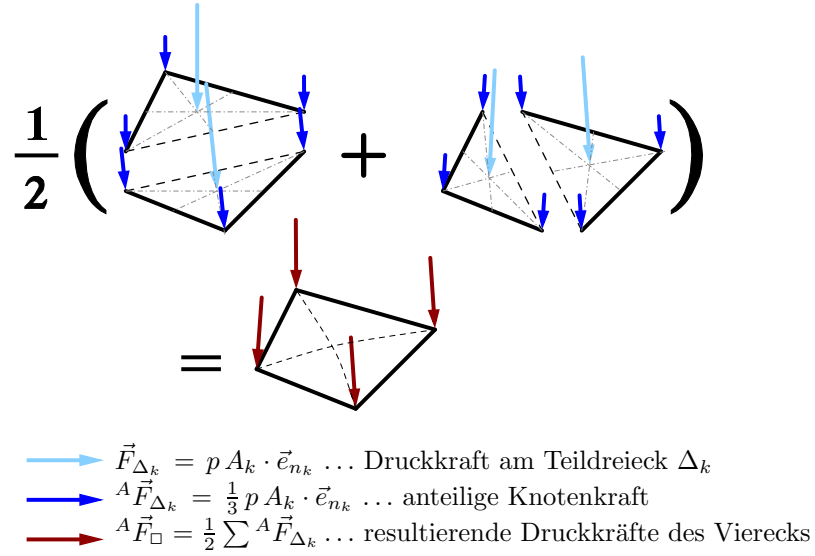


Abbildung 2.7: Kraft durch Innendruck an einer doppelt gekrümmten Fläche

überlagert, da sonst bei der Vorgehensweise nach 1.) exakt die doppelte Fläche verwendet werden würde.

Dieser Algorithmus ermöglicht die Applikation von Druckkräften auf doppelt gekrümmte Reifenoberflächen (s. Abb. 2.8⁹). Vergleichsrechnungen mit der In-

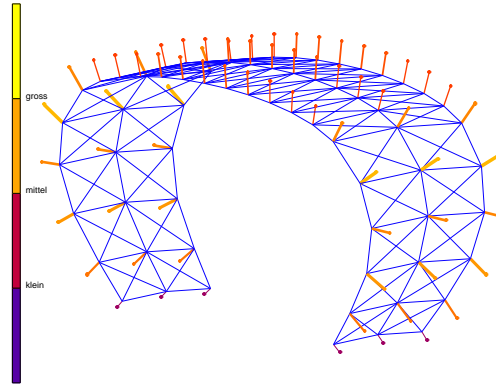


Abbildung 2.8: Knotenkräfte zufolge Innendruck

tegration der Druckspannungen über Vierecksflächen nach der Standardvorgehensweise bei isoparametrischen Finiten Elementen (s. Abschnitt 4.3) ergaben, daß auch für große Deformationen die Genauigkeit der hier vorgestellten Vorgehensweise hervorragend ist. Gleichzeitig bedarf die Druckkraftberechnung über Mittelung der Teilnormalen deutlich weniger numerischen Aufwand.

⁹Bemerkung: Die Größe der Druckkräfte wird durch die Länge und die Farbe der Kraftvektoren illustriert.

2.1.3 Abbildung von Biegesteifigkeiten und dem Schichtkörperverhalten

Bereits ein anisotropes Membranmodell ist sowohl für rotationssymmetrische als auch für Aufgaben der transienten Rollmechanik eine sehr gute Approximation des Gürtelreifens. Dies ist schon seit langer Zeit in der Literatur bekannt: [Böhm.66b, Böhm.85, u.a.]. Auch in neueren Arbeiten wird immer wieder auf diese bewährte Modellierung zurückgegriffen und oft lediglich durch Verwendung kommerzieller Softwarepakete mit optimierter Numerik und modernen Kontaktalgorithmen eine bessere Performance geboten, ohne dabei aus wissenschaftlicher Sicht viel neues zu bieten (s. [Wu.97]).

Ein einfacher Freischnitt des Reifens am Fahrzeug vergegenwärtigt, daß die statische Traglast gleich dem Integral der Kontaktnormalspannungen im Latsch ist. Zur Ausbildung des ungefähr handflächengroßen Latsches sind unter normalen Bedingungen und bei der Geometrie moderner Reifen nur geringe Krümmungsänderungen des Gürtels erforderlich.

Demzufolge sind die guten Ergebnisse, die man mit einem Membranmodell erzielen kann, damit zu erklären, daß das Tragverhalten des Gürtelreifens zum größten Teil auf die Wirkung der gespannten Membran zurückzuführen ist.

Wenn die Anforderungen an die Genauigkeit des Modells steigen und Effekte wie

- Lenkverhalten
- Frequenzantwort
- Überrollen von Hindernissen
- Abplattungen unter Sturzwinkel oder
- Verhalten bei geringem Innendruck

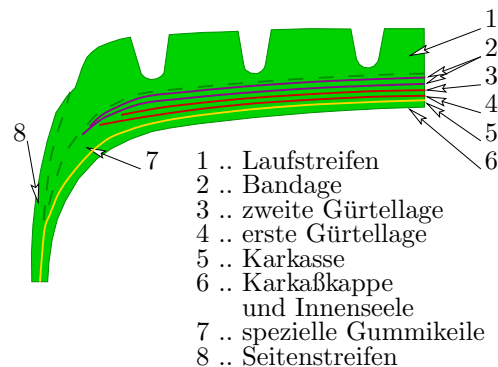


Abbildung 2.9: Prinzipieller Gürtelaufbau

untersucht werden sollen, dann kann man die Biegesteifigkeit der Reifenstruktur nicht mehr vernachlässigen.

Insbesondere das Gürtelpaket und der Wulstbereich der Seitenwand sind wegen der Abstände der Kordlagen von der biegeneutralen Faser z.T. sehr biegesteif (s. Abb. 2.9).

Gleichzeitig wird von frühen Arbeiten bis hin zu neueren Arbeiten [Feng.94, Gall.95] immer wieder auf den Einfluß der Modellierung der Anbindung des Reifens an die Felge hingewiesen. Gemeint ist dabei vor allem das Problem der Modellierung der mehr oder weniger torsionssteifen Anbindung des Wulstes an die Felge und der Biegesteifigkeit des Wulstes selbst sowie die adäquate Abbildung des Kontaktproblems.

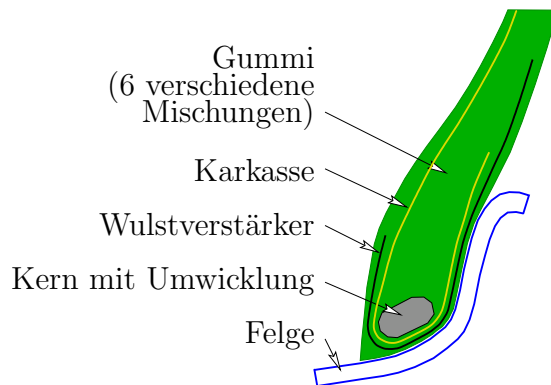


Abbildung 2.10: Reifen auf der Felge

Die Eigenschaften der Einspannung werden von vielen Faktoren beeinflusst. Dazu gehören die dem Kern eigene Torsionssteifigkeit, der je nach Reifentyp unterschiedlich gestaltete Querschnittsformen besitzt und die Art und Weise, wie der Reifenwulst durch die Vorspannung des Kernes gegen die Felge gezwängt wird (s. Abb. 2.10). Je nachdem, wie stark der Wulst an die Felge gepreßt wird, wie groß die biegewirksame Höhe des Felgenhorns ist und wieviel und welches Material sich zwischen Felge und Kern befindet sowie aus den sich einstellenden Kontaktbedingungen kann sich der Wulst unterschiedlich stark am Felgenhorn abstützen.

Die in dieser Arbeit verwendeten Randbedingungen für das Modell der äußeren Mechanik werden in Kapitel 5.1.1.2 beschrieben.

2.1.3.1 Modellierung des Einflusses der hochelastischen Anbindung der Gürtellagen an die Karkasse im Schulterbereich als effektive Steifigkeit der Stahlkorde

Im Zusammenhang mit der Modellierung des Gürtelreifens als einschichtige Membranstruktur ist neben der Biegesteifigkeit noch der Einfluß der Zusammenfassung des mehrschichtigen Verbandes in eine einzelne Membranschicht auf die Steifigkeiten zu berücksichtigen:

Eines der grundlegendsten Elemente zum Verständnis der Funktionsweise eines Gürtelreifens ist die Art des Zusammenspiels im Tragverhalten von Karkasse und Gürtellagen, s. [Böhm.67, Böhm.66a, u.a.].

Damit das Gürtelpaket seine Aufgabe der Umgürtung der Karkasse wahrnehmen kann, müssen sich Zugkräfte in den Stahlkorden der Gürtellagen aufbauen.

Nur so kann der Gürtel seine Tragwirkung gegenüber dem Innendruck entfalten sowie durch diese Tragwirkung die Karkasse entlasten, was erst die gewünschte Querschnittsform herbeiführt. Aufgrund der Bauweise der Gürtelreifen verschwinden die Kordkräfte am Gürtelrand; es ist bekannt, daß sich der Stahlkord unmittelbar am freien Ende vollständig von dem ihn umgebenden Gummimaterial löst und in Luft endet. Die Kräfte, die sich im Stahlkord auszubilden haben, können sich also nur mit dem Integral über die an der Kordoberfläche wirkenden Schubspannungen vom Kordanfang in Richtung Gürtelmitte allmählich aufbauen. Diese Schubspannungen werden nur vom Gummimaterial aufgenommen und führen aufgrund der hohen Flexibilität zu beachtlichen Verformungen: Am Gürtelrand treten lokale Scherdeformationen des Gummis in der Größenordnung von 21° auf, die je nach Reifenkonstruktion erst relativ spät (nach ca. 5mm) abklingen.

Aus der Sicht der diskreten Modellierung des Schulterbereiches in einer Schicht heißt das, daß am Gürtelrand die Diagonalstäbe über eine schubweiche Bettung an die zugrundeliegende Struktur zu koppeln sind. Da ohne Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade nur starre Anbindungen modelliert werden können, muß man die zur Kordsteifigkeit seriell wirkende Schubbettung in einem reduzierten E-Modul der Stahlkorde zusammenfassen.

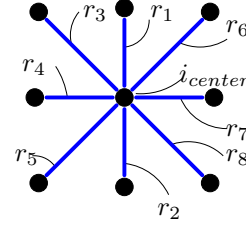
Es ist leicht verständlich, daß der Reifen besonders bei der Ausbildung der Pumpfiguren empfindlich auf diesen Effekt reagiert. Wenn Wulst und Seitenwand in radialer Richtung korrekt modelliert wurden, was bei der einfachen inneren Struktur der Seitenwand (s. Abb. 2.4) sehr sicher erfolgen kann, dann wird die sich einstellende Pumpfigur praktisch nur noch davon beeinflusst, inwieweit der Gürtel in der Lage ist, den Innendruck abzutragen. Biegeeffekte spielen bei der Pumpfigur nur eine zu vernachlässigende Rolle. Damit ergibt sich die Möglichkeit, diesen Effekt durch zerstörungsfreie Messungen zu quantifizieren. Die meisten Stahlkorde besitzen einen E-Modul von ca. $1.8 \cdot 10^5$ MPa, der je nach Marke von $(1.5 \dots 1.9) \cdot 10^5$ MPa variiert.

Bei den für diese Arbeit durchgeführten Untersuchungen ergab sich zur Abbildung der schubweichen Anbindung der Stahlkorde an die Karkasse ein Minderungskoeffizient für die Steifigkeit der Stahlkorde von überall 5, der in der Diagonalstäben am Gürtelrand sogar bis auf das 1.5fache davon erhöht wurde. Man kann also bei der Parametrisierung der Diagonalstäbe des Gürtels nur mit ca. 20% der Steifigkeit rechnen, die man in der Zerreißmaschine für die Korde messen kann.

2.1.3.2 Berücksichtigung von biegeelastischen Reaktionen der Reifenstruktur im Rahmen der diskreten Modellierungstechnik

Bei der gewählten Diskretisierung der Membran durch Massepunkte ist keine direkte Beziehung zwischen Knotenverschiebungen und Biegemomenten möglich, weil es keine Verdrehfreiheitsgrade an den Knoten gibt.

Zur Überwindung dieses Problems nutzt man aus, daß in der vorliegenden Diskretisierungstechnik die Umfangs- und Karkastäbe während der gesamten Simulation nahezu senkrecht zueinander stehen und die lokale Definition eines zweiachsigen Biegezustandes ermöglicht. Dann werden die entstehenden elastischen Biegemomente durch geeignete Kräftepaare auf die beteiligten Knoten ersetzt. Zur Berechnung der Biegemomente um die jeweiligen Achsen benötigt man die biegefreien Referenz- und die momentanen Winkel der entsprechenden Stäbe zueinander, um daran die Änderung des Krümmungswinkels der Fläche um die Hauptbiegerichtungen ablesen zu können. Es muß beachtet werden, daß wegen der Periodizität der Winkelfunktionen keine Mehrdeutigkeiten oder Singularitäten bei der Berechnung der Winkel (Durchschlag, es gilt $\cos(x) = \cos(-x)$, usw.) auftreten. Dies ist lediglich ein organisatorisches Problem. Die bei Biegeeffekten infrage kommenden Knoten ermittelt man über die Stäbe der betrachteten Richtung. Diese findet man am effektivsten, wenn man beim Aufbau der Struktur einen Graphen generiert, in dem die an einem Zentralknoten i_{center} angeschlossenen Stäbe $r_1 \dots r_8$ z.B. nach dem rechts angegebenen Schema abgespeichert sind. Diese Technik erlaubt ein sehr leichtes Auffinden der Knotennummern der Vorgänger und Nachfolger eines Knotens in jeder Stabrichtung. Das an einem Knoten A wirkende Biegemoment



für Quer- und Längsbiegung errechnet sich zusammen mit Abb. 2.11 nach

$$\begin{aligned} {}^A_t \vec{M}_q &= {}^A c_q^b \left({}^A_t \psi - {}^A_0 \psi \right) \cdot {}^A \vec{e}_q \quad \text{und} \\ {}^A_t \vec{M}_l &= {}^A c_l^b \left({}^A_t \gamma - {}^A_0 \gamma \right) \cdot {}^A \vec{e}_l \end{aligned} \quad (2.10)$$

Die am Knoten A wirksamen Biegesteifigkeiten ${}^A c_q^b$ und ${}^A c_l^b$ ermittelt man vollkommen analog zur Biegetheorie der Balken, nachdem die Eigenschaften der diskretisierten Bereiche anteilig den Knoten zugeschlagen wurden (s. Abschnitt 2.1.5).

Zur geeigneten Applikation der Biegemomente ersetzt man diese durch zwei Kräftepaare, deren Kraftwirkung nach außen verschwindet (s. Abb. 2.11¹⁰) und von denen nur noch die Momentenwirkung erhalten bleibt. Diese Kräftepaare müssen (möglichst) senkrecht zu den Stäben wirken, da sie anderenfalls Komponenten in Stablängsrichtung enthalten, die man dann erst wieder eliminieren muß.

¹⁰Es wird das Primitiv für die Berechnung der Biegekräfte dargestellt. Die dicken Linien in Magenta stellen die deformierten Stäbe in r_1 - und r_2 -Richtung und die blauen die in r_4 - und r_7 -Richtung dar. Die zugehörige nichtverbogene Konfiguration ist dünn gestrichelt in gleicher Farbe dargestellt. Die grün dargestellten Vektoren \vec{e}_q und \vec{e}_l bezeichnen die lokalen Hauptbiegeachsen für Quer- und Längsbiegung, die z.B. am Reifenäquator respektive in Umfangs- und Querrichtung verlaufen. Damit ergeben sich die dick schwarz dargestellten Biegekräfte gemäß Gleichung (2.11) parallel zur ebenfalls grün dargestellten Richtung ${}^A \vec{e}_n$ der mittleren Normalen (s. dort).

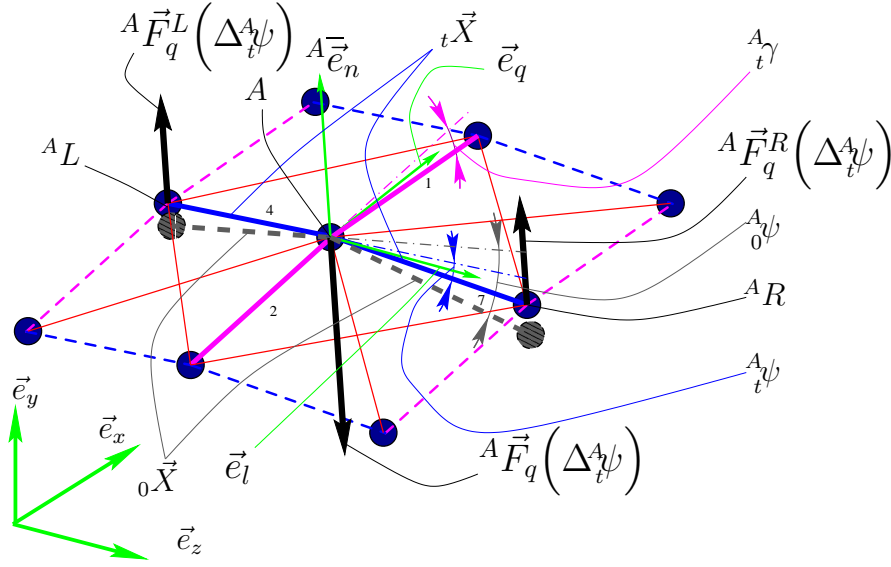


Abbildung 2.11: Kräftepaare als Ersatz für die Biegemomente, Beispiel Querbiegung

Im zweidimensionalen Fall wird diese Art der Applikation von Biegemomenten auf ein Fachwerk seit langer Zeit sehr erfolgreich praktiziert.

Im vorliegenden dreidimensionalen Fall tritt das Problem auf, daß die Ebenen, die zur Quer- und Längsbiegung gehören, dann nicht mehr eindeutig definiert sind, wenn die Stäbe, welche die Ebene definieren eine gestreckte Lage einnehmen. Dies ist während des Rollvorganges vor allem im Latschbereich regelmäßig der Fall und wird durch ein feines Mesh auch an anderen Orten begünstigt.

Deshalb wird in dieser Arbeit die Biegeebene unter Umgehung der o.g. potentiellen Singularitäten anders definiert. In jedem sinnvollen Deformationszustand des Reifens ist es möglich, für jeden Knoten eine nach außen gerichtete mittlere Normale zu ermitteln. Dieser Einheitsvektor liegt bei annähernd senkrecht zueinander ausgerichteten Umfangs- und Querstäben auf der Schnittgeraden der beiden Biegeebenen. Wie diese mittlere Normale berechnet wird, entnehme man Abb. 2.17 in Abschnitt 2.3.1.

Damit ergeben sich die Vektoren ${}^A\vec{e}_q$ und ${}^A\vec{e}_l$ aus Gleichung 2.10 als die Normalvektoren der von der mittleren Normalen und den Stabachsen gebildeten Ebenen.

Die letztendlich am Knoten A (${}^A\vec{F}_q^L(\Delta_t^A\psi)$ für Quer- und ${}^A\vec{F}_l^L(\Delta_t^A\psi)$ für Längsbiegung) sowie an den Nachbarknoten (${}^A\vec{F}_q^L(\Delta_t^A\psi)$ und ${}^A\vec{F}_q^R(\Delta_t^A\psi)$ für Quer- sowie ${}^A\vec{F}_l^V(\Delta_t^A\gamma)$ und ${}^A\vec{F}_l^H(\Delta_t^A\gamma)$ für Längsbiegung) zu applizierenden Kräfte berechnen sich als D'ALEMBERTSche Gleichgewichtsgruppe folgendermaßen

$${}^A\vec{F}_q^L(\Delta_t^A\psi) = -{}^Ac_q^b \frac{{}^A\psi_t - {}^A\psi_0}{{}^A_{tL}} \cdot {}^A\vec{e}_n$$

$$\begin{aligned}
{}^A\vec{F}_q^R(\Delta_t^A\psi) &= -{}^Ac_q^b \frac{{}_t^A\psi - {}_0^A\psi}{{}_t^AL^R} \cdot {}^A\vec{e}_n \\
{}^A\vec{F}_q(\Delta_t^A\psi) &= -\left({}^A\vec{F}_q^L(\Delta_t^A\psi) + {}^A\vec{F}_q^R(\Delta_t^A\psi)\right) \\
&\quad \text{und analog} \\
{}^A\vec{F}_l^V(\Delta_t^A\gamma) &= -{}^Ac_l^b \frac{{}_t^A\gamma - {}_0^A\gamma}{{}_t^AL^V} \cdot {}^A\vec{e}_n \\
{}^A\vec{F}_l^H(\Delta_t^A\gamma) &= -{}^Ac_l^b \frac{{}_t^A\gamma - {}_0^A\gamma}{{}_t^AL^H} \cdot {}^A\vec{e}_n \\
{}^A\vec{F}_l(\Delta_t^A\gamma) &= -\left({}^A\vec{F}_l^V(\Delta_t^A\gamma) + {}^A\vec{F}_l^H(\Delta_t^A\gamma)\right), \quad (2.11)
\end{aligned}$$

wenn ${}_t^ALL$, ${}_t^AL^R$, ${}_t^AL^V$ und ${}_t^AL^H$ respektive die momentanen Stablängen vom Knoten in den Richtungen r_4 , r_7 , r_2 und r_1 nach der Skizze auf Seite 31 sind.

Numerisch ergibt sich durch die hier beschriebene Verwendung von Kräftepaaren zur Applikation der Biegemomente der Kostenvorteil, daß im Zustandsvektor der Zeitintegration keine Biegefreiheitsgrade vorkommen!

Die Nutzung des „Vektors der mittleren Normalen“ an den Knoten wiederholt sich bei der Berechnung der Knotenkräfte zufolge Innendruck (s. Abschnitt 2.1.2) und bei der Modellierung des Protektors durch eine Sensorschicht (s. Abschnitt 2.3.1). Durch diese mehrfache Wiederverwendung des „Vektors der mittleren Normalen“ reduziert sich der Logistikaufwand der Numerik und senkt somit die Kosten eines Zeitschrittes weiter. Abb. 2.12 zeigt die Kräfte zu-

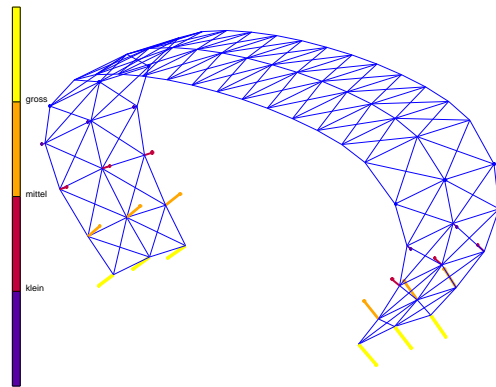


Abbildung 2.12: Biegekräfte an den Knoten zufolge Belastung mit Innendruck

folge der Biegebelastung bei Einnahme einer Pumpfigur. Man sieht, daß durch die Verwendung einer Gleichgewichtsfigur fast ausschließlich im Wulstbereich

Biegung auftritt, die durch das Bestreben der Druckkräfte entsteht, die Seitenwand zu strecken. Dies wird sofort erklärlich, wenn man bedenkt, daß die Simulation mit einer Gleichgewichtsfigur nach der Membrantheorie begonnen wurde, bei der sich die radiale Tragwirkung der Seitenwand vorwiegend durch den Krümmungsradius einstellt. Mit der Einführung der Biegesteifigkeiten werden im Wulstbereich dieser Krümmungsänderung entsprechende Biegekräfte entgegengesetzt (s. Kapitel 5.1.1.2)!

2.1.4 Das Dämpfungsmodell

Die Dämpfung eines Reifenmodells ist unerlässlich für eine stabile Simulation:

- Das System wird im Verlaufe der Simulation z.B durch Antreiben des Rades oder Wegziehen des Bodens ständig nichtkonservativen Kräften ausgesetzt.
 - Wie in Abschnitt 2.3.4 dargelegt entstehen durch abfallende Reibungskennlinien selbsterregte Schwingungen im Kontaktbereich.
 - Durch den Dopplereffekt kommt es im Gürtel und besonders auch in der biegeweichen Seitenwand durch Interferenzen der umlaufenden Wellen zu Resonanzen. Resonanzen führen bekanntlich bei linearen ungedämpften Systemen zu unendlichen Schwingungsamplituden.
- Auch eine nichtlineare, rein elastische Reaktion der Reifenstruktur ist aus der Sicht der Stabilität der Simulation meist nicht in der Lage, solche Amplituden ausreichend zu begrenzen.

Wenn man also nicht in der Lage ist, den mit der Realität übereinstimmenden Effekt der Energiedissipation darzustellen, dann wird das System nach einer gewissen Zeit nicht mehr in der Lage sein, weiter Energie aufzunehmen. Vielmehr reagiert es dann mit übergroßen elastischen Bewegungen („Platzen“) oder überaus stark ausgeprägten lokalen Schwingungen.

Die Dissipation am Reifen findet einerseits im Gummi statt, der durch Füllstoffe innere Reibung besitzt oder durch beigemischte Öle viskose Eigenschaften entwickelt. Andererseits findet auch im Kordverband Dissipation statt. Je nach Kordmarke kann es mehr oder weniger Dissipation im Kordmaterial geben. Der größte Anteil der Reibungsdissipation im Kord rührt jedoch daher, daß die Fasern der Kordfäden untereinander und die Korde im Verband zueinander reibungsbehaftete Relativbewegungen ausüben.

Es gibt viele Arbeiten, in denen die Dämpfungsparameter des Gürtelreifens für kontinuumsmechanische Modelle aus Messungen identifiziert wurden (s. [Bannwitz.95, Zegelaar.97, u.a.]). Dabei wurden die Dämpfungen für die einzelnen Eigenfrequenzen angegeben und lagen zwischen 1.64% und 4.5% LEHRscher Dämpfung.

In dieser Arbeit wird deshalb die Dämpfung ebenfalls auf ein Schwingungssystem bezogen. Als Referenz wird die Eigenfrequenz der Stäbe benutzt. Dann

ergibt sich die kritische Dämpfung für den Stab r mit der Steifigkeit rc zwischen den Punkten mit den Massen 1m und 2m nach:

$${}^rD_{krit} = 2 \frac{\sqrt{{}^rc {}^1m {}^2m ({}^1m + {}^2m)}}{{}^1m + {}^2m} \quad (2.12)$$

In anderen Arbeiten ([Sfb181.B1, u.a.]) wird anstelle der viskosen Dämpfung der Stäbe ein Materialgesetz für innere Reibung in den Stäben verwendet. Diese Vorgehensweise ist dadurch motiviert, daß man die o.g. vielfältigen Formen von Reibung im Reifenmodell abbilden möchte. Das gelingt in den genannten Arbeiten auch sehr gut. Nicht zuletzt wird die erfolgreiche Modellierung von Reibung dadurch begünstigt, daß übersichtliche Massepunktmodelle verwendet wurden.

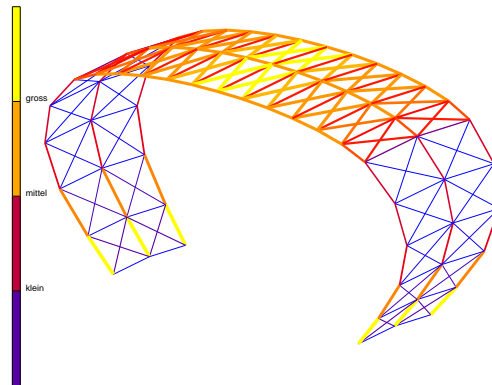


Abbildung 2.13: Kritische Dämpfungszahlen im Querschnitt

In dieser Arbeit wird keine Materialhysterese zufolge von innerer Reibung eingeführt, da

- sie aufwendiger zu programmieren und zu parametrisieren ist,
- sie sich schlecht für modale Betrachtungen eignet
- sie über die Möglichkeiten der in Kapitel 3 vorgestellten Modellierung hinausgeht und nicht zuletzt
- das vorgestellte viskose Dissipationsmodell hervorragende Resultate liefert¹¹ (s. Abschnitt 5.1).

Abbildung 2.13 zeigt die auf diese Weise zusammengestellte Verteilung der kritischen Dämpfungen über die Stäbe eines Querschnittes.

2.1.5 Parametrisierung des Einschicht-Reifenmodells nach der Vielteilchenmethode

Wiederum bemüht man die erprobten kontinuumsmechanischen Modelle, um die Parameter für die Steifigkeiten vorzugeben.

¹¹Es ist bekannt, daß eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung i.allg. einen zu großen Rollwiderstand bei hohen Rollgeschwindigkeiten liefert. Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Beispiel tritt dieser Nachteil jedoch nicht auf.

Die Parameter des Reifenmodells mit dem elastisch gebetteten Kreisringbalken sind beispielsweise in Tabelle 2.1 zusammengefaßt.

Größe	Bedeutung	typischer Wert bei 195/65R15-Reifen
p_0	Innendruck	2.0 \bar{bar}
ρA	Massebelegung des Gürtels	3 $\frac{kg}{m}$
R	Gürtelradius	300 mm
b	Gürtelbreite	156 mm
T_0	Gürtelvorspannkraft bei Innendruck	12.4 kN
EA	Dehnsteifigkeit des Gürtels	26.5 kN
EI_y	Biegesteifigkeit des Gürtels bzgl. Längsbiegung	0.3 Nm^2
EI_x	Biegesteifigkeit des Gürtels bzgl. Querbiegung	1.25 kNm^2
GI_t	Torsionssteifigkeit bzgl. Verdrehung des Gürtelpaketes gegen die Felge um x	61 Nm^2
k_a	radiale Bettungsziffer der Karkasse	1.36 $\frac{N}{mm^2}$
k_τ	radiale Bettungsziffer der Karkasse	0.88 $\frac{N}{mm^2}$
D_1	Dämpfung für erste Biegeeigenform (94.12Hz)	3.1 %
D_2	Dämpfung für zweite Biegeeigenform (112.04Hz)	3.8 %
D_3	Dämpfung für dritte Biegeeigenform	2.9 %
\vdots		
D_7	Dämpfung für 7te Biegeeigenform (259.76Hz)	1.9 %

Tabelle 2.1: Parametersatz eines Kreisringmodells

Existieren solche Angaben nicht, dann kann man diese Parameter durch Näherungsformeln abschätzen (s. [Böhm.67]).

Jetzt muß man durch die Parametrisierung der Seile¹² und Stäbe¹³ und der Biegesteifigkeiten die Struktur so auslegen, daß unter Beachtung der in Abschnitt 2.1.1.4 gemachten Ausführungen die in Tabelle 2.1 angegebenen Parameter erreicht werden. Eine mögliche Vorgehensweise, wie sie im Abschnitt 5.1.1 angewendet wurde, wird in den Abschnitten 2.1.5.1 und 2.1.5.2 vorgestellt.

2.1.5.1 Zur Parametrisierung der Stäbe

Die relevanten Eigenschaften eines Stabes sind seine Länge L , seine Dehnsteifigkeit EA und die Masse seiner Endpunkte. Diese Eigenschaften lassen sich aus den kontinuumsmechanisch motivierten Größen E , A ($=$ Breite $b \cdot$ Dicke t), L und ρ zusammensetzen. Deshalb versucht man zunächst, diese Grundeigenschaften zuzuordnen um dann im nächsten Schritt daraus die elastischen Eigenschaften zu generieren. Damit umgeht man, daß sich zwischen den zusam-

¹²Stäbe mit sehr kleiner Drucksteifigkeit für die Korde

¹³Stäbe mit Drucksteifigkeit für das Matrixmaterial

mengesetzten Eigenschaften möglicherweise innere Widersprüche ergeben.

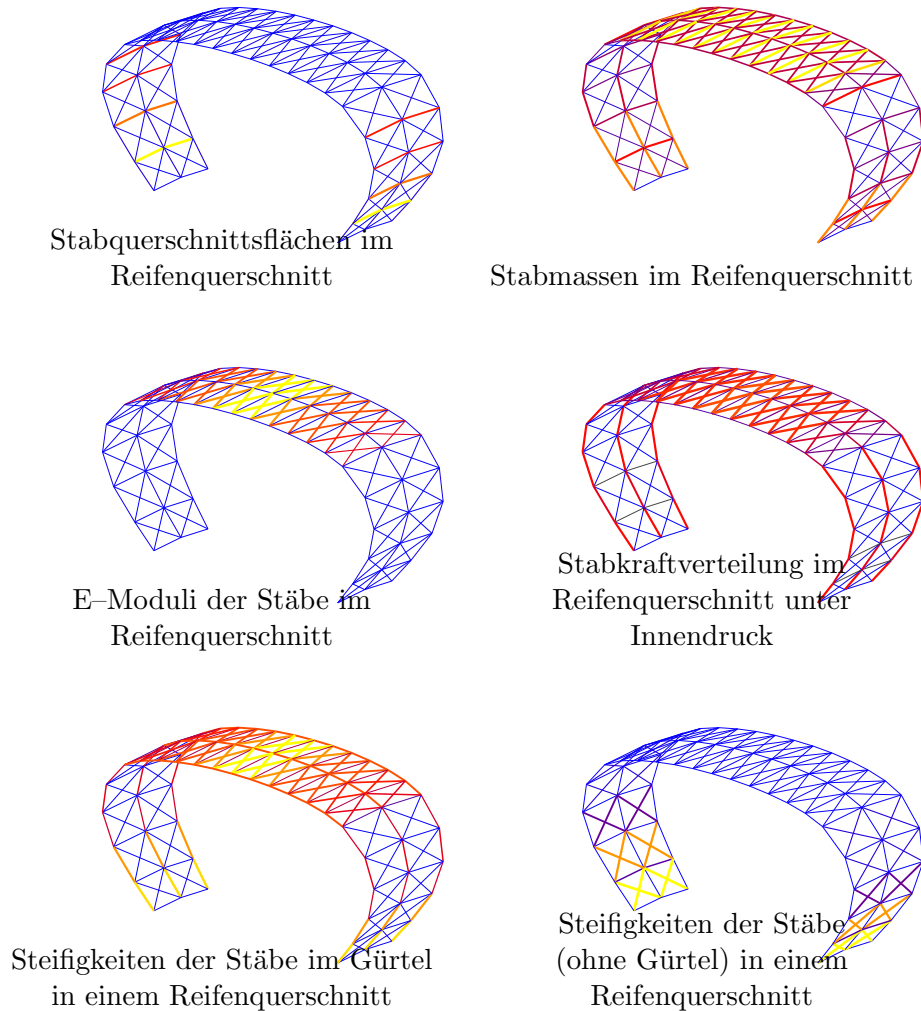


Abbildung 2.14: Beispiel für Parameterverteilung im Querschnitt

Man unterscheidet bei Stabquerschnitten zwischen A_{Kord} und A_{Gummi} . Während A_{Kord} sowohl für die Steifigkeitsberechnung als auch die Masseberechnung der Kordlagen verwendet wird, findet A_{Gummi} nur in die Masseberechnung des Gummimaterials Eingang. Diese Unterscheidung wird von der Tatsache motiviert, daß die Steifigkeit von Gummi gegenüber der Kordsteifigkeit meist vernachlässigbar klein ist. Wenn man die E-Moduli der Korde mit A_{Kord} multipliziert, bekommt man die Steifigkeiten, bei Multiplikation mit Dichte und Stablänge den Kordanteil an der Stabmasse. Letztere Multiplikation mit A_{Gummi} liefert den Gummianteil an der Stabmasse.

Um den Anteil des steifen Kordmaterials in den Kordlagen anzugeben, definiert man außerdem einen prozentualen Volumenanteil ($\%_{Kord}$) in den Kordlagen des Gürtels und der Karkasse.

Der Anteil von Gummi im Laufstreifen gegenüber Luft in den Profiltrillen wird

analog prozentual mit $\%_{Gummi}$ definiert.

Die reale Reifenstruktur wird in Quader aufgeteilt, die sich aus den Vierecken (gebildet aus Stäben der Richtungen r_1 bzw. r_2 und r_4 bzw. r_7) zwischen Umfangs- und Karkastäben und der lokalen Dicke der Reifenstruktur zusammensetzen. Man stellt fest:

- Jeder Stab eines Vierecks repräsentiert $\frac{1}{6}$ der Masse des Quaders, da jeweils 6 Stäbe an der Bildung eines Quaders beteiligt sind.
- Gleichzeitig bekommt jeder Randstab des Vierecks den gleichen Masseanteil vom Nachbarquader. (Er repräsentiert Anteile zweier benachbarter Quader).

Wenn die Berechnung der Volumenanteile in einer Schleife über die Stäbe und nicht über die Quader ausgeführt wird, gilt folgendes:

- ↪ Randstäbe erhalten jeweils $\frac{1}{6}$ der Gummimasse der Quader, die durch den Randstab getrennt werden (also ca. $\frac{1}{3}$ der Gummimasse des Quaders selbst).
- ↪ Diagonalstäbe erhalten $\frac{1}{6}$ der Gummimasse des Quaders, dessen Diagonale sie bilden.

Da die Reifenquerschnitte nicht parallel zueinander liegen, sondern sich mit dem Radius linear aufweiten, definiert man eine Breite \bar{b} bei einem mittleren Abstand \bar{R} des Stabes von der Radachse zu $\bar{b} = \bar{R} \Delta\varphi$. Dabei ist $\Delta\varphi$ der Winkel zwischen zwei Querschnitten in Umfangsrichtung.

Bei der Berechnung von A_{Kord} darf diese Aufweitung nicht mit berücksichtigt werden, da die Fadendichte (n_F) trotz Aufweitung der Querschnitte die gleiche bleibt. Damit ergibt sich A_{Kord} als: A_{Kord} = „Kordlagendicke t “ · „anteilige Breite ${}_0b$ “. Mit ${}_0b = {}_0R \cdot \Delta\varphi$ soll die anteilige Breite an einem Ort ${}_0R$ mit bekannter Fadendichte n_F bezeichnet werden. Außerdem muß die Fläche A_{Kord} weiter mittels des o.g. Anteils an Kordmaterial ($\%_{Kord}$) an den Querschnittsflächen der Kordlagen Lagen reduziert werden, weil die Gummisteifigkeit gegenüber der Kordsteifigkeit vernachlässigbar klein ist.

Zu besseren Anschauung soll hier gezeigt werden, wie die Parameter eines Karkastabes berechnet werden können (Abkürzungen seien $C \dots$ „Kord“, $G \dots$ „Gummi“, $R \dots$ „Reyon“, $Rc \dots$ „Reyonkordlage“, $Stc \dots$ „Stahlkordlage“, $B \dots$ „Bandage“ und $P \dots$ „Protektor“):

$$\begin{aligned}
 E_{Stab} &= E_{Rc} \\
 m_{Stab} &= m_C + \frac{1}{3}m_G \quad \text{mit} \\
 m_C &= \rho_R A_C L_0 \\
 m_G &= \rho_G A_G L_0 \\
 A_C &= \begin{cases} \Delta\varphi R|_{n_F} t_{Rc} \%_C & \text{für } \begin{cases} \text{sonst} \\ \text{im Wulstbereich} \end{cases} \\ 2 \Delta\varphi R|_{n_F} t_{Rc} \%_C & \end{cases} \\
 A_G &= \begin{cases} A_C \cdot (1 - \%_{Kord}) + \bar{b} \cdot \bar{t}_{SW} & \text{in der Seitenwand} \\ \bar{b} \cdot ((t_{Stc} + t_B + t_{Rc})(1 - \%_C) + \bar{t}_P \cdot \%_G) & \text{im Gürtel} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$c_{Stab} = \frac{E_{Stab} A_C}{{}_0L} \quad (2.13)$$

Analog werden nun systematisch

- die Stahlkordlagen,
- die Reyonkorde der Bandage und
- der Gummi

in ihrer Wirkung anteilig auf die Stäbe aufgeteilt. Die Zuordnung der Strukturparameter ergibt sich auf natürliche Art aus der Richtung der Stäbe, die parametrisiert werden sollen.

Erwähnt werden sollen noch folgende Besonderheiten:

- Die Steifigkeit der Stahlkorde muß insgesamt gegenüber den auf der Prüfmaschine gemessenen Werten reduziert werden (vgl. Abschnitt 2.1.3.1).
- Im Schulterbereich ist die Steifigkeit der Stahlkorde zusätzlich um das 1.2...1.5fache zu reduzieren (vgl. Abschnitt 2.1.3.1).
- Die Umfangsstäbe in der Seitenwand haben nur die Dehnsteifigkeit des anteiligen Gummimaterials.
- Als praktisch erwies es sich, die Diagonalstäbe in der Seitenwand so zu parametrisieren, daß deren elastische Eigenschaften durch nur einen einzigen Parameter des Datensatzes skaliert werden können.
Um dennoch zu berücksichtigen, daß die variable Wandstärke der Seitenwand und die stärkere Bewehrung der Karkasse im Wulstbereich Einfluß auf die Schubsteifigkeit der Seitenwand hat, dürfen die Diagonalstäbe nicht gleichartig dimensioniert sein. Diese Vorgehensweise erleichtert das Handling bei Parametervariationen.
- Die Übergangsbereiche müssen besonders sorgfältig dimensioniert werden. So müssen z.B. die Umfangsstäbe am Gürtelrand ihre Parameter anteilig aus der Bandage und aus der (sehr kleinen) Umfangssteifigkeit der Seitenwand erhalten.

2.1.5.2 Zur Parametrisierung der Biegung

In Abschnitt 2.1.3.2, Gleichung 2.10 wurde behauptet, daß die Parametrisierung der Biegesteifigkeiten vollkommen analog zur Biegetheorie der Balken erfolgt. Das soll hier in Abbildung 2.15 noch einmal demonstriert werden.

Bei der Auslegung der Biegefedern ist der Gürtelquerschnitt geometrisch zu vermessen, dann definiert man zur Berechnung des Trägheitsmomentes eine biege neutrale Faser. Dazu kann man entweder auf detaillierte Simulationen oder Erfahrungen zurückgreifen. Ungünstigstenfalls beobachtet man, wie ein aus einem Reifen herausgetrennter Querschnitt auf Biegung um die Quer- und Umfangsrichtung reagiert. Damit ist die Angabe des Flächenträgheitsmomentes bzgl. der neutralen Faser möglich.

Beim Einsetzen des E-Moduls muß beachtet werden, daß die Stahlkorde unter einem Winkel von ca. 21° zur Radebene geneigt die Bandage aber direkt

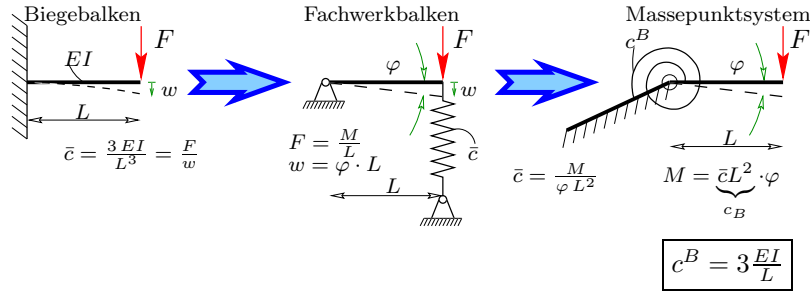


Abbildung 2.15: Biegesteifigkeiten beim Balken und Massepunktsystem

in Umfangsrichtung verbaut sind. Wenn mehrere Biegefedern in der diskreten Struktur parallel wirken (Längsbiegung), muß c_l^B durch die Anzahl der Federn (Spuren) geteilt werden. In Umfangsrichtung oder am Wulst muß zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes eine biegewirksame Breite definiert werden. Die dann berechnete Biegesteifigkeit c_q^B wird direkt von den Biegefedern der Struktur übernommen.

Es wird daran erinnert, daß bei der Dimensionierung der Biegesteifigkeiten die Länge L als der Abstand zwischen den Nachbarknoten quer zur Richtung des Biegemomentes nicht vergessen werden darf.

2.2 Explizite Zeitintegration mit einem adaptierten Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Die Beschreibung des verwendeten Zeitintegrators ist im wesentlichen gleichzeitig eine Darstellung des Programmablaufes. Natürlicherweise ist die Zeitintegration der Bewegung die Hauptaufgabe des Modells für instationäres Rollen. Damit sind alle anderen beschriebenen Algorithmen dieses Kapitels Mittel zum Zweck.

2.2.1 Die Prädiktor-Korrektor-Gleichungen

Die verwendeten Gleichungen sind in der Literatur (s. [Schwarz.93]) bekannt. Der Ausgangspunkt der PK-Methode ist die Trapezregel. Sie löst das Integral

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{x}(x(t), t) dt \quad \text{und} \\ \dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{x}(\dot{x}(t), x(t), t) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

mittels der bekannten Formel

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \Delta t \frac{\dot{x}(x(t), t) + \dot{x}(x(t+\Delta t), t+\Delta t)}{2} \quad \text{und} \\ \dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \Delta t \frac{\ddot{x}(\dot{x}(t), x(t), t) + \ddot{x}(\dot{x}(t+\Delta t), x(t+\Delta t), t+\Delta t)}{2} . \end{aligned}$$

(2.15)

Diese Formel stellt eine **implizite** Integrationsvorschrift dar, da die unbekannten Zustände $x(t + \Delta t)$ und $\dot{x}(t + \Delta t)$ sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung vorkommen und somit eine Lösung des entstehenden Gleichungssystems in jedem Zeitschritt erforderlich machen. Dies ist bei einer Simulation der transienten Rollbewegung, wo schon aus Gründen der hinreichenden Kontaktabtastung Abtaststraten im Bereich einiger 100 kHz erforderlich sind wegen des damit verbundenen Aufwandes für die lineare Algebra prohibitiv.

Deshalb wird diese Gleichung dadurch aufgespalten, daß man zunächst für die Terme $x(t + \Delta t)$ und $\dot{x}(t + \Delta t)$ auf der rechten Seite von Gleichung 2.15 Schätzwerte verwendet, die z.B. aus einer expliziten EULER-Vorwärts-Integration stammen. Damit wird Gleichung 2.15 aufgespalten in die zwei Stufen

Prädiktor:

$$x^{(P)}(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \dot{x}(x(t), t)$$

Korrektor:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{\dot{x}(x(t), t) + \dot{x}^{(P)}(x^{(P)}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{2} \quad (2.16)$$

Mit der Anwendung von Gleichung 2.16 bekommt man einen **expliziten** Algorithmus, mit dem man potentiell folgendermaßen umgeht:

- 1.) Zunächst wird die Bewegung des Reifens zur Zeit $t + \Delta t$ geschätzt, (Berechnung des **Prädiktor_s**).
- 2.) Diese geschätzte Bewegung bildet die Grundlage für die Berechnung aller (elastischen, dissipativen, Kontakt-, äußeren) Kräfte im Reifen.
- 3.) Mit diesen Kräften können nach Gleichung 2.5 (NEWTONSches Grundgesetz) die Beschleunigungen $\ddot{\vec{X}}(t + \Delta t)$ berechnet werden, die eine verbesserte Lösung gegenüber 1.) darstellen.
- 4.) Mit der in 3.) berechneten besseren Approximation der Beschleunigungen $\ddot{\vec{X}}(t + \Delta t)$ geht man in den **Korrektor** um eine verbesserte Lösung für die anderen Größen der Bewegung $\dot{\vec{X}}(t + \Delta t)$ und $\vec{X}(t + \Delta t)$ zu integrieren.
- 5.) Jetzt hat man die Möglichkeit einer Nachiteration, wenn man mit dem Ergebnis von 4.) nochmals in 2.) beginnt, bis sich die Kräfte oder der Bewegungsgrößen zufolge dieser Iteration bei $t + \Delta t$ nicht mehr ändern.

2.2.2 Prädiktor–Korrektor–Methode für die Integration eines mechanischen Sytsems

Gleichung 2.16 stellt die Integrationsvorschrift für eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung dar. Die Bewegungsgleichungen der Mechanik sind Differentialgleichungen 2. Ordnung. Deshalb kann bei der Berechnung der Verschiebungen aus den Beschleunigungen und Geschwindigkeiten sowohl im Prädiktor als auch im Korrektor der differentielle Zusammenhang zwischen den Bewegungsgrößen durch einen Differenzenstern ausgedrückt werden, was folgendes ergibt:

Prädiktor

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{X}}^{(P)}(t+\Delta t) &= \ddot{\vec{X}}(t) \\
\dot{\vec{X}}^{(P)}(t+\Delta t) &= \dot{\vec{X}}(t) + \Delta t \ddot{\vec{X}}(t) \\
\vec{X}^{(P)}(t+\Delta t) &= \vec{X}(t) + \Delta t \dot{\vec{X}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\vec{X}}(t)
\end{aligned}$$

Korrektor

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{X}}(t+\Delta t) &= [\underline{\underline{m}}]^{-1} \cdot \vec{F} \left(\dot{\vec{X}}^{(P)}(t+\Delta t), \vec{X}^{(P)}(t+\Delta t), t+\Delta t \right) \\
\dot{\vec{X}}(t+\Delta t) &= \dot{\vec{X}}(t) + \frac{\Delta t}{2} \left[\ddot{\vec{X}}(t) + \ddot{\vec{X}}(t+\Delta t) \right] \\
\vec{X}(t+\Delta t) &= \vec{X}(t) + \Delta t \dot{\vec{X}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[2 \ddot{\vec{X}}(t) + \ddot{\vec{X}}(t+\Delta t) \right] \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Damit umfaßt bei Anwendung dieses Integrators die Prozedur zur Berechnung der Kräfte ($\vec{F} \left(\dot{\vec{X}}^{(P)}(t+\Delta t), \vec{X}^{(P)}(t+\Delta t), t+\Delta t \right)$) die gesamte Mechanik des rollenden Reifens.

Die Annahme $\ddot{\vec{X}}^{(P)}(t+\Delta t) = \ddot{\vec{X}}(t)$ im Prädiktor von Gleichung 2.17 bedeutet, daß man von einer kleinen Änderung der Beschleunigung im Zeitschritt ausgeht. Diese Annahme kann man zur Definition eines Kriteriums für eine Schrittweitensteuerung heranziehen, welche die Änderung der Beschleunigung im Zeitschritt durch Wahl eines hinreichend kleinen Zeitschrittes Δt unter einer tolerierten Grenze hält.

2.2.3 Der erforderliche Zeitschritt für die explizite Integration einer transienten Reifenrollbewegung nach dem Prädiktor–Korrektor–Verfahren

Ein wichtiger Aspekt bei einer expliziten Integrationsmethode ist immer die Wahl eines adäquaten Zeitschrittes.

In dieser Arbeit wird dafür die Schwingungszelle um einen Massenpunkt A betrachtet (s. Abb. 2.16). Bei annähernd gleicher Masse der Knoten bilden sich

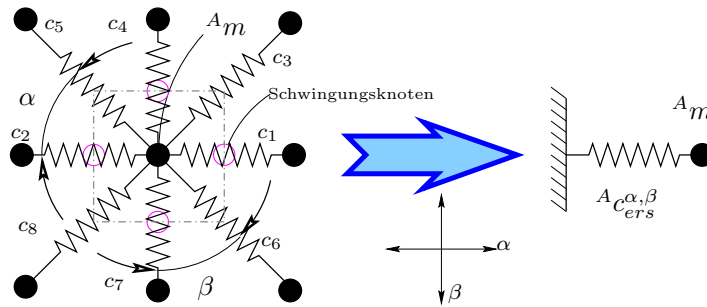


Abbildung 2.16: Zellfrequenz in der Reifenstruktur

jeweils in Federmitte Schwingungsknoten, welche die Grenze der Schwingungszelle definieren. Damit kann man die wirkenden Steifigkeiten für Schwingungen in Richtung $r_1 - r_2$ und $r_4 - r_7$ in $A_{c_{ers}}^{[\alpha, \beta]}$ wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} A_{c_{ers}}^{\alpha} &= 2 [c_1 + c_2 + \cos^2 \alpha (c_3 + c_5 + c_6 + c_8)] \\ A_{c_{ers}}^{\beta} &= 2 [c_4 + c_7 + \cos^2 \beta (c_3 + c_5 + c_6 + c_8)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Auf diesem Wege werden alle Knoten der Struktur in Bezug auf die Schwingfrequenz in α - und in β -Richtung untersucht und die höchste Frequenz ermittelt. Es haben sich sehr zuverlässige Zeitintegrationen ergeben, wenn man *diese höchste Zellfrequenz mit 10 Zeitschritten abtastet*. Dieser geforderte höhere Wert gegenüber den Anforderungen des SHANNONSchen Abtasttheorems (mindestens 2 Abtastungen der höchsten Eigenfrequenz im System) ergibt sich aus der Tatsache, daß

- für das verwendete P–K–Verfahren mindestens 4 Abtastungen der höchsten numerischen Eigenfrequenz für eine stabile Zeitintegration erforderlich sind,
- man eine hinreichende Sicherheit gegen Frequenzverschiebungen während der Zeitintegration zufolge von Nichtlinearitäten der Struktur abfangen muß,
- man Genauigkeitsanforderungen zu erfüllen hat.

Eine Abtastung, die eine stabile Integration gestattet, ist unter dem Gesichtspunkt der Integrationsgenauigkeit unzureichend. Einzig eine Verringerung des Zeitschrittes über die Anforderungen der Integrationsstabilität hinaus kann bei Einschrittverfahren die Genauigkeit steigern.

Eine parallele Betrachtung muß man dem Einfluß des Zeitschrittes auf die Kontaktberechnung widmen. In der Literatur ([Sfb181.A1, Oertel.90, u.a.]) ist überall bekannt, daß bei zu grober Abtastung besonders eines reibungsbehafteten Kontaktes die Stabilität der Rechnung verlorengeht. In dieser Arbeit soll mit mittleren Geschwindigkeiten abgerollt werden. Wenn man mit einer Geschwindigkeit von $72 \frac{km}{h}$ abrollt, durchlaufen 20000 mm Reifenoberfläche bzw. ca. 950 Stollen je Sekunde den Kontakt. Je nach verwendeter Kontaktsteifigkeit, Reibungskoeffizienten, Stollendämpfung und verwendetem Spacing der Sensorkpunkte kann eine weitere Reduktion des Zeitschrittes erforderlich sein.

2.3 Kontaktmodellierung

Es existieren sehr viele Erfahrungen bei der Behandlung sowohl von statischen, quasistatischen als auch stationären und dynamischen zweidimensionalen Kontaktproblemen in der Roll- und Reifenmechanik, s. [Böhm.93c, Mousseau.94, Padovan.84, Nakajima.86, u.a.]

Die Behandlung von dreidimensionalen Kontaktproblemen gestaltet sich schon bei unilateralem, erst recht aber beim allgemeinen Kontakt elastischer Körper ungleich komplizierter. Das Handling solcher Probleme ist wegen der großen

Bedeutung bei industriellen, militärischen und sicherheitstechnischen Aufgabenstellungen heute bereits allgemein gut entwickelt. So werden statische 3D-Kontaktprobleme erfolgreich z.B. bei Simulation von

- Dichtungsproblemen und
- Umformprobleme
- u.a.

und dynamische 3D-Kontaktprobleme z.B. im Bereich der Simulation von

- Crash-Problemen in der Automobilindustrie
- Impact-Problemen bei Sicherheitsfragen von Atomanlagen
- u.a.

untersucht. Auch in der Reifenmechanik ist die Simulation des 3D-Rollkontaktes auf vielfache Art und Weise gelöst worden.

Man stellt fest, daß gerade bei der Behandlung von dynamischen (dreidimensionalen) Kontaktproblemen neben der korrekten Behandlung des lokal formulierten Kontaktes die richtige Beschreibung der dynamischen Bewegung, insbesondere der Beschreibung von großen Drehungen der zugrundeliegenden Struktur von großer Bedeutung ist. Anderenfalls wird die durch den Kontaktstoß initiierte Strukturbewegung und –deformation mit der entsprechenden Rückwirkung auf den Kontaktvorgang nicht richtig abgebildet.

In der Abbildung der durch die Kontaktkräfte ausgelösten Strukturdeformation hat man vor allem durch die Applikation von z.T. sehr aufwendigen FE-Modellen schon beträchtliches geleistet.

Wenn bei Problemen neben der lokalen Strukturdeformation auch große Gesamtbewegungen auftreten (z.B. Eindringen eines Projektils in einen elastoplastischen Körper oder Frontalcrash eines Automobils), dann werden deren translatorische Anteile der Gesamtbewegung bereits zuverlässig erfaßt.

Treten hingegen bei den Problemen auch große Rotationen der in Kontakt tretenden Strukturen auf (z.B. bei halbüberdeckten Crashtests oder realen Unfallszenarien von Fahrzeugen) zeigt sich, daß diese Drehbewegungen in Simulationen, die der Autor bisher sehen konnte noch nicht hinreichend wiederzufinden sind. Man beobachtet z.B. bei einem halbüberdeckten Fahrzeugcrash, daß sich die Crashpartner in Realität deutlich aufeinander zu drehen. Es wird vermutet, daß die verwendeten Zeitintegratoren die Drehbewegung der Strukturen nur unzureichend genau darstellen.

Die in dieser Arbeit verwendeten Zeitintegratoren sowohl für das Massepunktsystem (s. Abschnitt 2.2) als auch für die FE-Modelle (s. Abschnitt 3.1) haben nachgewiesenermaßen aus einerseits natürlichen Gründen (s. Kapitel 2) und andererseits per Konstruktion (s. Anhang A) keine solchen Defizite.

Es gilt also bei der Simulation des unilateralen 3D-Reifenrollkontaktes die Erfahrungen der 2D-Simulationen zu nutzen und Zeitintegratoren und Modelle zu verwenden, die wegen der zu erwartenden kurzen Zeitschritte sowohl numerisch

sehr effektiv arbeiten, als auch zuverlässig in der Lage sind, die Integrale der Bewegung richtig abzubilden (Zentralkraftsysteme, EMA).

In dieser Arbeit wird das Kontaktproblem nur mit dem vorgestellten Modell für die „äußere“ Reifenmechanik gelöst. Die damit gewonnenen Lastkollektive können bei nach außen hin „gleichwertigen“ Reifenmodellen für die Berechnung der „inneren“ Reifenmechanik übernommen werden und damit die Kosten der für die Darstellung der „inneren“ Mechanik überproportional aufwendigeren Modelle erheblich senken.

2.3.1 Einführung einer Schicht masseloser Sensorpunkte als Protektor

Die Simulation eines Reifenrollvorganges ohne die Berücksichtigung einer Lauffläche mit endlicher Dicke ist unrealistisch.

Es bereitet wohl keine formalen Probleme, ein Reifenmodell ohne Protektor direkt auf den Gürtellagen abzuplatten, dabei werden jedoch die Auswirkungen der Tatsache völlig ignoriert, daß durch die Einebnung der doppelt gekrümmten Gürtelebene die Punkte des Gürtels vor allem im Ein- und Auslaufbereich des Latsches z.T. beträchtliche lokale Verdrehungen erfahren. Solche Verdrehungen verursachen bei einer nicht zu vernachlässigenden Dicke des Protektors erhebliche longitudinale und laterale Relativbewegungen bzw. Verspannungen im Kontakt:

Wenn man zur Abschätzung dieser Verdrehungen typischerweise einen Reifen mit dem Radius $R \approx 300$ mm und einer Latschlänge von $2h \approx 80$ mm und bei Vernachlässigung der Biegesteifigkeit des Gürtels betrachtet, so erhält man ca. 15° Verdrehwinkel um die Radachse am Knick des Latschendes. Das kann bei der Laufstreifendicke eines PKW-Reifens von (5...15) mm und Vernachlässigung von Reibung zu theoretischen Bewegungen der realen Kontaktpunkte von (1...4) mm gegenüber dem Fußpunkt auf der Karkasse führen. Bei derartigen Bewegungen stellen sich vollkommen unterschiedliche Gleitzustände ein.

Andererseits ist das Beherrschen des Einebnungsvorganges wichtig für die Kontrolle des Reifenverschleißes, kann aber auch für die Steigerung des Grips ausgenutzt werden. Darum muß dieser Effekt in allen Simulationen, die tiefere Aussagen über das Verhalten des Pneus im Rollkontakt zum Ziel haben, unbedingt enthalten sein.

2.3.1.1 Annahmen bei der Modellierung eines masselosen Protektors

Die Modellierung der besonders bei Winterreifen stark zergliederten Profile der Lauffläche mit eigenen Freiheitsgraden, die dann durch die Zeit mitintegriert werden müssen ist überaus aufwendig. Bei einem transienten Rollvorgang muß

die gesamte Reifenoberfläche modelliert werden, da potentiell jeder Punkt der Oberfläche in Kontakt kommt. (Der einzige Ausweg wäre der Einsatz von Techniken, die in Abhängigkeit von der Entfernung des Punktes vom Kontakt adaptiv das Modell der Lauffläche vergrößern.)

Es würden sich Relationen einstellen, daß man zu viele (80% und mehr) der Modellfreiheitsgrade in der Lauffläche „verschwinden“ läßt.

Das steht nicht im Verhältnis zum Anspruch an das in dieser Arbeit vorgestellte Einschnittmodell und soll entsprechenden anderen Arbeiten vorbehalten bleiben.

Um für das Profil keine extra Freiheitsgrade einzuführen werden hier folgende Annahmen getroffen:

- 1.) *Profilstollen außerhalb der Kontaktzone folgen vollkommen der führenden Bewegung der Struktur der Festigkeitsträger des Reifens.*

Diese Annahme ist zweifellos berechtigt, da die Stollen zu hohe Eigenfrequenzen besitzen, um eine Eigendynamik mit großen Amplituden gegenüber der Reifenstruktur entwickeln zu können und gleichzeitig zu wenig Masse, um durch Trägheitskräfte die Bewegung der Struktur rückwirkend zu beeinflussen. Durch diese Annahme ist es möglich, den Ort jedes von äußeren Gegebenheiten unbelasteten Fußpunktes allein aus der Kenntnis der Bewegung der Festigkeitsträger des Reifens heraus zu jeder Zeit zu bestimmen.

- 2.) *Im Kontakt angeregte Eigenschwingungen der Stollen sind sofort nach erfolgter Erregung wieder abgeklungen.*

Diese Annahme verhindert nicht das Zustandekommen von Stick-Slip-Schwingungen, die in der Praxis ja häufig auftreten (Quietschen). Diese Schwingungen hören nur trägheitslos nach Beendigung der Erregung sofort wieder auf.

Die Laufflächen bei heutigen Pneus werden für einen hohen Abrollkomfort aus Gummimischungen mit hoher Eigendissipation hergestellt. Die sehr hochfrequenten Stollenbewegungen klingen deshalb besonders bei mittleren Fahrgeschwindigkeiten schon kurz nach Verlassen der Kontaktzone völlig ab. In der Tat ist diese Dissipation so wirksam, daß sogar die Eigenformen der Reifenstruktur stark mitgedämpft werden! Bei sehr energiereichen Erregungen an einem Punkt, wie sie bei Messungen zur Parameteridentifikation am Prüfstand verwendet werden, schaffen es die entstehenden Wellen im Gürtel schon bei Erregerfrequenzen weit unterhalb der Stolleneigenfrequenzen nicht, bis zur der Erregung gegenüberliegenden Seite des Reifens umzulaufen.

- 3.) *Die Differenz zwischen dem tatsächlichen Ort eines belasteten, durch den Fußpunkt geführten Sensorpunktes¹⁴ und der theoretischen Position des Sensorpunktes, die er ohne Belastung aufgrund der Führungsbewegung einnehmen würde, läßt sich durch einen rein elastischen Zusammenhang darstellen¹⁵.*

¹⁴Spitze einer Kontaktborste

¹⁵Die Normalkomponente dieser Differenz wird als (rechnerische) Penetration y_P bezeichnet.

Diese Annahme bedeutet die Vernachlässigung von viskoplastischem Materialverhalten auf die Deformation der Sensorpunkte gegenüber der fñhrenden Struktur (Fußpunkte), aber weder das Vorhandensein noch die Berücksichtigung der Rückwirkung solcher Kräfte auf die Struktur. Mit dieser Annahme ist es aber möglich, z.B. sowohl bei Kenntnis der Reibungskräfte den tangentialen Versatz des Fußpunktes als auch bei Kenntnis der theoretischen Penetration die Kontaktnormalkraft anzugeben.

In der vorliegenden Arbeit werden voneinander unabhängig wirkende Deformationen in Tangential- und Normalrichtung angenommen. Der Einfluß von Biegung bei der Deformation der Stollen wird vernachlässigt.

Eine bessere Modellierung soll anderen Arbeiten vorbehalten bleiben.

2.3.1.2 Berechnung der momentanen Orte der unbelasteten Sensorpunkte

Unter Anwendung der Annahmen aus Abschnitt 2.3.1.1 wird jetzt eine Schicht von Sensorpunkten entlang der Oberfläche des Laufstreifens gelegt, die von den Fußpunkten der Reifenstruktur geführt werden. Diese Sensorpunkte sollen die über den Laufstreifen verteilten Stollen repräsentieren. Dazu führt man an jedem Knoten A einen mittleren Normalen-(einheits-)vektor ${}^A\vec{e}_n$ ein, der ähnlich dem Spacing der Stollen über den Gürtel verteilt ist. Diesen Vektor ermittelt

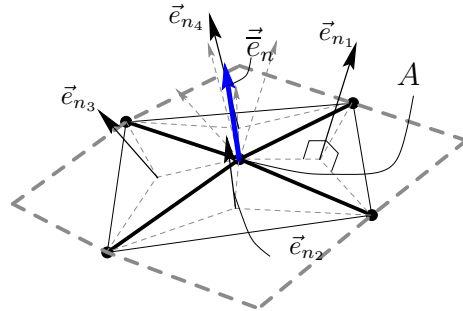


Abbildung 2.17: Mittlerer Normalenvektor am Knoten A

man, indem man zunächst die nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektoren aller Dreiecksflächen bildet, die aus je einem Stab in Quer-, Umfangs- und Diagonalrichtung bestehen und den Knoten gemein haben (s. Abb. 2.17). Von diesen normierten Vektoren bildet man das arithmetische Mittel.

Dadurch bekommt man einen Einheitsvektor mit folgenden nützlichen Eigenschaften:

- + Der Vektor ist immer vom Reifeninneren nach außen gerichtet.
- + Der Vektor repräsentiert gut die Normalenrichtung einer glatten, imaginären Fläche, die durch den Knoten selbst und durch die Nachbarknoten geht.
- + Der Vektor folgt der Bewegung und der Deformation der Struktur.

Der unbelastete Ort eines Sensorpunktes AP berechnet sich damit einfach nach

$${}^AP_t\vec{X} = {}^A_t\vec{X} + {}^Ah_t\vec{e}_n \quad , \quad (2.19)$$

wenn ${}^A h$ der spannungslose Abstand zwischen Sensor- und Führungspunkt ist. Auf diese Weise bekommt man eine Sensorschicht, wie sie in Abb. 2.18 dargestellt ist.

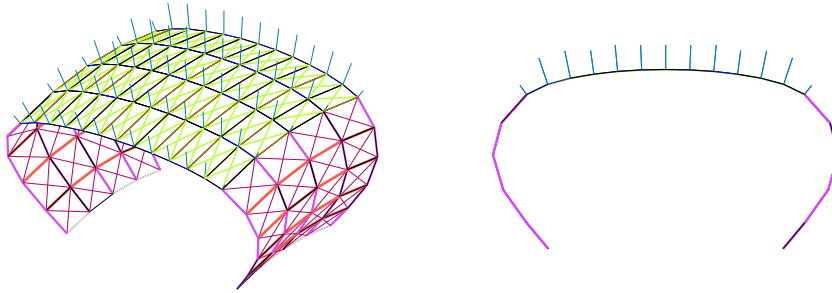


Abbildung 2.18: Borsten als Sensorpunkte der Protektorschicht

2.3.2 Führung der Bodenbewegung

In dieser Arbeit wird die Rollbewegung erzeugt, indem der Boden zeitlich veränderlich so geführt wird, daß sich Abplattung, Rollreibung und Schräglauf einstellt.

Die Felge wird fixiert und ist nur um die Radachse frei drehbar.

Der momentane Rollwinkel¹⁶ des Rades stellt sich durch Integration der durch Reibungskräfte angetriebenen trägen Bewegung des Felge-Reifen-Systems ein.

Damit sind zu jedem Zeitpunkt die Position der Bezugssysteme von Rad und Boden zueinander bekannt. Aus der Kenntnis der Position dieser Bezugssysteme ist es möglich, aus der Vektorkette vom jeweiligen durch den Kontaktalgorithmus bestimmten Bodenpunkt über das Koordinatensystem des Rades zum Führungspunkt des Sensorpunktes die momentane lokale Verspannung und Verspannungsgeschwindigkeit des Stollens zu berechnen.

Zu welchem materiellen Punkt des Bodens der erste Kontakt hergestellt wird, also an welchem Ort die Sensorpunkte auf den Boden treffen, läßt sich durch Abfrage der Penetrationsbedingung feststellen. Im ersten Zeitschritt nach Auftreffen des Sensorpunktes auf den Boden wird aufgrund des plastischen Anteils am Stoßvorgang von Haften ausgegangen. Solange Haften vorliegt, folgt der Sensorpunkt dem Punkt des Bodens, an dem der erste Kontakt auftrat. Diese Bewegung des Bodens gegenüber der Reifenstruktur bestimmt damit sowohl Deformation als auch die Deformationsgeschwindigkeit des Sensorpunktes gegenüber dem Führungspunkt.

Wenn die Haftgrenze überschritten wird, dann tritt der Sensorpunkt (Stollen)

¹⁶Drehwinkel der starren Felge um die Radachse

mit anderen materiellen Punkten des Bodens in Kontakt. Welche Punkte dies sind, hängt nach Annahme 3 in Abschnitt 2.3.1.1 ausschließlich von der o.g. Relativposition des Führungspunktes zum Boden und der elastischen Verspannung des Stollens ab.

Im Falle des Haftens muß der Kontaktpunkt also mit der Bodenbewegung mitintegriert werden, bei Gleiten stellt sich der Kontaktpunkt aufgrund der Kraft am Stollen unter Berücksichtigung der möglichen Richtungsvielfalt des tangentialen Kontakts selbst ein.

2.3.3 Kontakt- und Reibungszustände und entsprechende Berechnung der Orte der Sensorpunkte zum Zeitschrittende

2.3.3.1 Der Unilateralkontakt

In dieser Arbeit rollt der Reifen über eine starre Ebene. Demzufolge läßt sich der Kontakt getrennt nach Normal- und Tangentialrichtung behandeln.

Die Penetration in Normalrichtung bestimmt den Anpreßdruck bzw. die An-

Größe	Beschreibung
${}^P \vec{X}$	Ortsvektor zum unbelasteten Sensorpunkt
${}^B \vec{X}$	Ortsvektor zum Bodenpunkt
\vec{e}_N	Einheitsvektor in Kontaktnormalrichtung (z.B. $\vec{e}_N \uparrow \vec{e}_y$)
\vec{e}_T	Einheitsvektor in Tangentialrichtung des Kontaktes. Es gilt: $[\vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_T] = \vec{0}$, $\vec{e}_T = \vec{e}_{T_1} + \vec{e}_{T_2}$ (z.B. für $\vec{e}_{T_1} \uparrow \vec{e}_x$, $\vec{e}_{T_2} \uparrow \vec{e}_z$)
${}^P \vec{X}_T$	In die Kontaktebene projizierter Ortsvektor des unbelasteten Sensorpunktes ${}^P \vec{X}$: ${}^P \vec{X}_T = {}^P \vec{X} - ({}^P \vec{X} \cdot \vec{e}_N) \vec{e}_N$
${}^B \vec{X}_T$	In die Kontaktebene projizierter Ortsvektor des Bodenpunktes ${}^B \vec{X}$: ${}^B \vec{X}_T = {}^B \vec{X} - ({}^B \vec{X} \cdot \vec{e}_N) \vec{e}_N$
\vec{v}_g	Gleitgeschwindigkeit: $\vec{v}_g = {}^B \dot{\vec{X}}_T - {}^P \dot{\vec{X}}_T$
y_P	Penetration, $y_P = ({}^B \vec{X} - {}^P \vec{X}) \cdot \vec{e}_y$
F_N	Normalkraft
\vec{F}_T	Tangentialkraft
μ_H	Haftreibungskoeffizient
μ_G	Gleitreibungskoeffizient
$\underline{c}_T = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$	Matrix der Kontaktsteifigkeiten in den Tangentialrichtungen \vec{e}_{T_1} und \vec{e}_{T_2}

Tabelle 2.2: Formelzeichen zum Kontaktalgorithmus

preßkraft der Struktur an den Boden. Dabei ist die Kraftwirkung in Normalenrichtung immer genau so groß, daß eine Penetration in den als Halbraum betrachteten Boden nicht stattfindet. Liegt keine Penetration vor, verschwindet die Kontaktkraft, ein Klebenbleiben am Boden wird ausgeschlossen.

Die tangentialen Betrachtungen liefern die auf den Stollen wirkenden Reibungskräfte, deren Orientierung alle Richtungen der Bodenebene annehmen kann. Man spricht vom unilateralen Kontaktmodell.

Die Spannungen bzw. Kräfte in Normalrichtung und in Tangentialrichtung sind durch das Reibungsgesetz miteinander gekoppelt.

Der in dieser Arbeit vorgestellte Kontaktalgorithmus ist nicht auf die Behandlung von ebenem Kontakt begrenzt, sondern kann leicht durch eine entsprechende Orientierung der lokal veränderlichen Kontaktebenen auf den allgemeinen Kontakt eines Reifens mit einer starren Ebene erweitert werden.

Es ist zu beachten, daß ein Kontaktzustand immer sowohl durch die momentane Phase der Kontakthistorie in Normalrichtung (s. Abschnitt 2.3.3.2) als auch durch den Gleitzustand in Tangentialrichtung (s. Abschnitt 2.3.3.3) bestimmt ist.

2.3.3.2 Kontaktzustände in Normalrichtung

In Kontaktnormalrichtung wird der Kontaktzustand durch Penetration und Kontaktnormalkraft kontrolliert. Unter diesem Gesichtspunkt gibt es drei mögliche Zustände in der Historie eines Kontaktvorganges:

- 1.) „beginnender“ Kontakt (advancing contact),
- 2.) „anhaltender“ Kontakt (retaining Contact) und
- 3.) „sich lösender“ Kontakt (releasing contact)

Der beginnende Kontakt („advancing contact“) wird einzig dadurch detektiert, daß im momentanen Zeitschritt Penetration festgestellt wird, während im vorherigen Zeitschritt keine Penetration stattfand. „Advancing contact“ ist penetrations- und damit *verschiebungsgesteuert*.

Der anhaltende und der sich lösende Kontakt werden dagegen nur durch die Kontaktnormalkraft kontrolliert. Beide sind *normalkraftgesteuert*. In beiden Zuständen lag im vorherigen Zeitschritt eine positive Penetration vor, es existiert also eine Normalkraft. Ist die durch den Kontaktalgorithmus berechnete Normalkraft zum Ende des momentanen Zeitschrittes größer als eine untere Schranke, dann geht man von anhaltendem Kontakt aus: Auch im nächsten Zeitschritt ist eine positive Penetration zu erwarten. Anderenfalls öffnet sich der Kontakt, man hat „releasing contact“. Wenn nach Öffnen des Kontaktes im nächsten Zeitschritt wieder eine Penetration festgestellt wird, dann muß die Kontakthistorie von neuem durchlaufen werden.

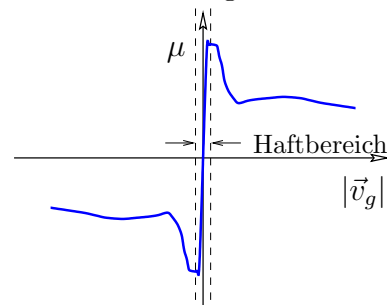
Die Wahl der unteren Schranke für die Normalkraft als Bedingung für „releasing

contact“ ist aus numerischer Sicht wichtig für eine „scatterfreie“ Kontaktstorie.

2.3.3.3 Kontaktzustände in Tangentialrichtung, Reibung

In tangentialer Richtung gibt es Haften und Gleiten sowie die Übergangszustände von einem ins andere. Die Einführung eines Haftzustandes entspricht der physikalischen Beobachtung, daß es einen Bereich mit verschwindender Relativgeschwindigkeit der sich berührenden Flächen der Kontaktpartner zueinander gibt (s. 2.3.3.3). Wenn es nur Gleitreibung geben würde, könnte man zwei Körper in Kontakt gegeneinander tangential verspannen und würde nach beliebig langer Zeit feststellen, daß sich diese Verspannung durch tangentiales Kriechen gelöst hätte. Es gibt aber Experimente, die dieses Verhalten verneinen.

Abb. 2.19 typische Form einer Reibungskennlinie



Im Bereich des Haftens ändert sich der Charakter der Kraftgesetze. Um die Methodik von Kontaktsimulationen zu vereinheitlichen und dieses „Umschalten“ in der Art der Behandlung des Tangentialkontaktproblems zu umgehen, verwenden deshalb einige Autoren eine verstetigte Reibungskennlinie.

Diese Vereinfachung wird in dieser Arbeit aus o.g. Gründen nicht getroffen.

Damit ergeben sich zufolge der tangentialen Kontaktbedingungen ebenfalls vier mögliche Zustände

- 1.) Haften (sticking),
- 2.) Gleiten (sliding) mit evtl. vorausgegangenem Losbrechen aus dem Haftzustand
- 3.) Wiederhaften
- 4.) Indifferenter Zustand mit Verspannung bis an die Grenze der Tangentialkraft (s. dort).

die im folgenden beschrieben werden:

Der Haftzustand

Das Haften wird mit der Haftbedingung kontrolliert, die Normalkräfte und daraus abgeleitete maximal mögliche Tangentialkräfte in Beziehung zueinander setzt. Damit ist der Haftzustand *kraftgesteuert*.

Der den Stollen repräsentierende Sensorpunkt wird durch die Differenz zwischen dem Ortsvektor des Kontaktpunktes am Boden und dem Ortsvektor zur theoretischen Position entsprechend der geführten Stollenbewegung verspannt. Dabei baut er elastisch bestimmte Tangentialkräfte auf. In diesem Zustand sind Relativgeschwindigkeiten zwischen dem Führungspunkt und dem Sensorpunkt zufolge der Verspannungsrate vorhanden.

Der Gleitzustand

Sowohl beim Gleiten und als auch beim Losbrechen aus ehemaligem Haften wird der Ort des Sensorpunktes zum Zeitschrittende durch die elastische Verspannung des Stollen zufolge der Gleitkräfte bestimmt. Deshalb sind dies aus Sicht des applizierten Kontaktalgorithmus' gleichwertige Zustände. Die Entscheidung, ob zum Ende des Zeitschrittes weiter ein Gleitzustand vorliegt, ist ausschließlich *geschwindigkeitsgesteuert*.

Solange der Betrag der tangential gerichteten Gleitgeschwindigkeit zwischen Sensorpunkt und Boden einen unteren Grenzwert, die Gleitgrenze nicht unterschreitet, hält die Gleitbewegung des Sensorpunktes gegenüber dem Boden an. Dabei wird der Stollen zufolge der Gleitreibungskräfte verspannt. Die Amplitude der Gleitreibungskräfte berechnet sich nach dem Reibgesetz aus der Normalkraft, die Richtung ist der Gleitgeschwindigkeit entgegengesetzt. Die Gleitgeschwindigkeit des gewöhnlichen Gleitzustandes ist gleich der Differenz zwischen Tangentialgeschwindigkeit des Führungspunktes und der Tangentialgeschwindigkeit des starren Bodens. Damit kann die Verspannung berechnet werden.

Losbrechen vom Haftzustand

Wenn sich ein Sensorpunkt gerade vom Haftzustand losgebrochen hat, dann ist er bei $\mu_H > \mu_G$ stärker verspannt, als dies die Gleitkräfte zulassen würden. Der Eintritt dieses Zustandes ist also wie der Haftzustand *kraftgesteuert*.

Der sich losbrechende Stollen schnellst trägeheitslos in Richtung der momentanen Verspannung auf die Position zurück, die der maximal möglichen Verspannung zufolge von Gleitkräften entspricht. Wenn diese Gleitkräfte von der Relativgeschwindigkeit abhängig sind (s. Abb. 2.19), dann müssen sie durch iterative Berechnung ermittelt werden:

Man startet mit Gleitkräften, die der Relativgeschwindigkeit zwischen ehemaligen Sensor-(Boden-)punkt und dem Führungspunkt des Reifens entsprechen, berechnet den entstehenden Endpunkt der elastischen Rückschnellbewegung des Stollens, zieht die entsprechende Geschwindigkeit von der o.g. Relativgeschwindigkeit ab und ermittelt neue Gleitkräfte solange, bis sich der entstehende Endpunkt der Rückschnellbewegung nicht mehr ändert. Dieser Algorithmus konvergiert sehr gut.

Wiederhaften

Der Zustand des Wiederhaften tritt ein, wenn im vorherigen Zeitschritt Gleiten vorlag, im aktuellen jedoch die Gleitgrenze (s. dort) unterschritten wird. Damit ist das Wiederhaften ebenfalls *geschwindigkeitsgesteuert*.

Die Berechnung der Gleitgeschwindigkeit und der Stollendeformation erfolgt identisch der Berechnung beim Gleitzustand. Der einzige Unterschied zum Gleitzustand ist, daß der nächste Zeitschritt mit der Annahme eines Haftzustandes für diesen Sensorpunkt beginnt.

Indifferenter Zustand mit Verspannung bis an die Gleitgrenze

Es kann vorkommen, daß beim Losbrechen aus dem Haftzustand die Gleitgeschwindigkeit sehr klein ist und deshalb keine zuverlässige Bestimmung der

Richtung der Gleitkräfte erlaubt. Genauso kommt es vor, daß bei Unterschreiten der Gleitgrenze, also beim Wiederhaften die Tangentialkräfte so groß sind, daß die Haftgrenze überschritten wird.

In beiden Fällen wird der alte Haft-(Gleit-)Zustand für ungültig erklärt, die Bedingung für den neuen Zustand sind aber ebenfalls nicht erfüllt.

Für diesen Fall wird konservativ definiert, daß die Gründe zum Umschlagen des Haft-(Gleit-)Zustandes nicht ausreichend waren und man beim ursprünglichen Zustand verbleibt.

Damit dabei ein physikalisch zulässiger Zustand der Tangentialkräfte entsteht, werden diese auf den entsprechend maximal möglichen Wert (μ_H bzw. μ_G) unter Beibehaltung der alten Richtung skaliert. Der Ort des Sensorpunktes ergibt sich aus der elastischen Deformation zufolge dieser skalierten Kräfte.

Hinweis

Diese diffizilen Betrachtungen sind erforderlich, da bei einer unsauberen oder unphysikalischen Formulierung der Übergangsbedingungen von einem Kontaktzustand zum nächsten Instabilitäten in der Kontaktsimulation die sichere Folge sind. Die für diese Arbeit durchgeführten Simulationen ergaben, daß das o.g. Kontaktmodell als Minimalmodell zu verstehen ist, d.h. bei Vernachlässigung nur eines der genannten Kriterien kommt es zu indifferenten oder instabilen Kontaktzuständen, die dann unphysikalische Lösungen produzieren.

2.3.4 Einfluß der Dämpfung der Lauffläche auf die Kontaktdynamik

Alle in [Böhm.88] gemachten Angaben über den negativen Einfluß stark voneinander abweichender Gleit- und Haftreibungskoeffizienten auf die Rauigkeit der Kontaktkräfte sind solange, wie Simulationen ohne Berücksichtigung der Dämpfungseigenschaften der Lauffläche durchgeführt wurden, auch dem Autor dieser Arbeit widerfahren.

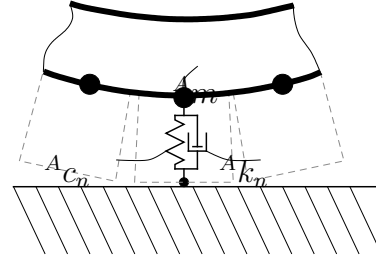
Auch andere Autoren widmen sich dieser Problematik, s. [Feng.91].

Durch abfallende Reibungskennlinien entstehen besonders bei höheren Rollgeschwindigkeiten im Kontakt selbsterregte Reibschwingungen. Dieses Verhalten wird sowohl theoretisch vorausgesagt als auch meßtechnisch belegt. Zur Abhilfe und zur Überwindung des damit verbundenen negativen Einflusses auf Abrieb, Erwärmung und Verlust bei den Führungs-, Brems- und Traktionskräften wird, wie in Abschnitt 2.3.1.1 erwähnt, der Laufstreifen aus Gummimischungen gefertigt, bei denen durch Beigabe entsprechender Füllstoffe eine Erhöhung der inneren Reibung (PAYNE-Effekt) und von Ölen eine Erhöhung der viskosen Dämpfung erreicht wird. Um dieses Verhalten abzubilden, wird in Normalrichtung parallel zur Elastizität ein viskoser Dämpfer eingeführt. Dieser Dämpfer wird mit einer Dämpfung von 80% (!), bezogen auf die kritische Dämpfung des Schwingungssytemes

${}^A m \ddot{y}_p + {}^A k_n \dot{y}_p + {}^A c_n y_p = 0$ ausgestattet, wenn y_p die Penetration des Sensorpunktes in den Boden ist (s. Abb. 2.20). Dieses Dämpfungsmodell funktioniert außerordentlich wirksam, da es bei fortschreitender Komprimierung des Stollens die entstehenden Kontaktkräfte sehr schnell auf die Struktur überträgt und bei Relaxation dafür sorgt, daß der Kontakt weicher beendet, also entprellt wird.

Dieses Verhalten bei Kompressionsbeginn hat eine ähnliche Wirkung wie das Aufweichen des Schubmoduls der Stollen unter Kompression, wie es u.a. in [Böhm.88] beschrieben wird. Die beruhigende Wirkung auf die Rauigkeit der Kontaktkräfte ist so gut, daß sehr große Verhältnisse zwischen dem Haft- und Gleitreibungskoeffizienten ohne Probleme bewältigt wurden. Im Beispiel von Kapitel 5 wurden die Koeffizienten $\mu_H = 0.8$ und $\mu_G = 0.5$ verwendet.

Abb. 2.20 Viskos gedämpfter Stollen



2.3.5 Zusammenfassung des verwendeten Kontaktalgorithmus'

Obwohl man mit den in Abschnitt 2.3.1 bis 2.3.4 in der Lage ist, die in dieser Arbeit verwendete Kontaktmodellierung nachzuvollziehen, soll der Übersicht halber hier nochmal eine Zusammenfassung gegeben werden.

Die in Abbildung 2.21 verwendeten Symbole werden in Tabelle 2.2 zusammengefaßt erläutert.

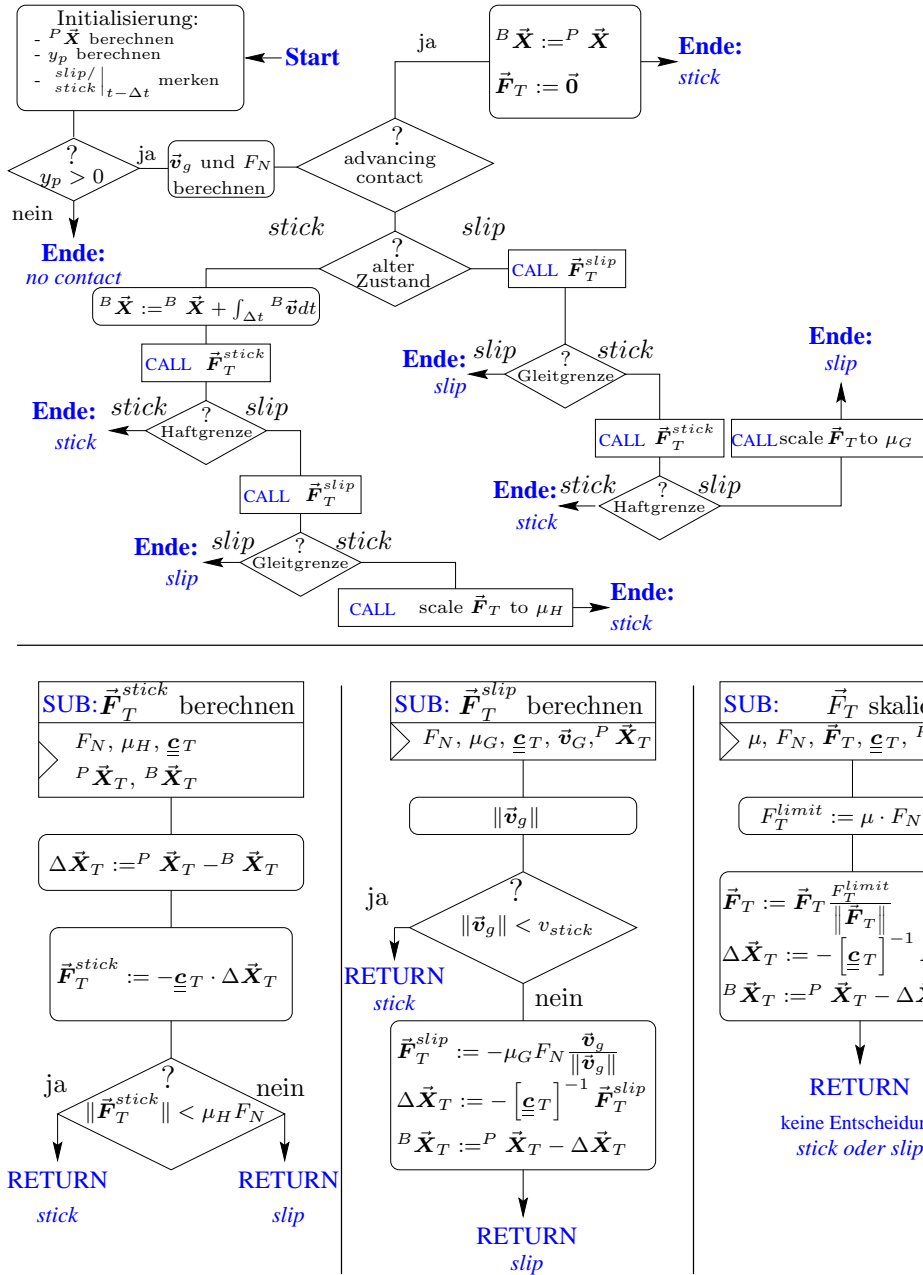


Abbildung 2.21: Algorithmus zur Kontaktkraftberechnung

Kapitel 3

Ein 3D-Mehrschichtmodell mit der Methode der Finiten Elemente für die Simulation der inneren Reifenmechanik

In diesem Kapitel wird die Theorie für das Modell vorgestellt, mit dem die „innere“ Mechanik des Luftreifens dargestellt wird.

Dabei wird hier unter dem Begriff „innere“ Mechanik des Luftreifens verstanden, wie der Reifen durch Zusammenwirken der Details seiner inneren Struktur (Schichtaufbau, räumliche Anordnung von Gummimaterial und Korden, usw.) und durch eine genauere Erfassung des Materialverhaltens der Komponenten das Tragverhalten bei instationärer dynamischer Belastung realisiert. Es geht also immer darum, wie die „äußere Mechanik“ in innere Belange umgesetzt wird.

Diese Simulation der „inneren“ Mechanik ist eng mit der in Kapitel 2 vorgestellten Simulation der „äußeren“ Mechanik verflochten, da durch diese die instationären Bewegungen und Kontaktkräfte berechnet wurden, die dann die o.g. Effekte der „inneren“ Mechanik erst hervorrufen. Ein wesentlicher Gesichtspunkt in diesem Zusammenwirken ist die Kompatibilität der Modelle hinsichtlich der „äußeren“ Mechanik, da sie die Grundvoraussetzung für eine physikalisch sinnvolle Schnittstelle zwischen den Modellwelten ist.

Zur Realisierung des mehrschichtigen Reifenmodells wurde als Zeitintegrationsverhalten der Energie-Impuls-Erhaltungs-Algorithmus verwendet.

Dafür wurde ein FE-Code entwickelt, der die Anwendung dieser tief in die Struktur eines FE-Systems eingreifenden Methode gestattet. Bei der Entwicklung dieses Codes mußten aus Gründen der numerischen Effektivität und dem Handling von Pre- und Postprocessing nahezu alle bei kommerziellen Programmen üblichen Optionen zur Minimierung des Aufwandes bei CPU-Anforderungen, Speicheranforderungen, Massenspeicherzugriff, Protokollsteuerung, Protokollumfang, Struktur der Datensätze des Modells und Ergebnisablage implementiert werden.

Es wurden Stabelemente, die sich besonders zur Abbildung der Korde einer Reifenstruktur eignen (s. Abschnitt 3.2), 8– 6– und 4–Knoten–Volumenelemente, mit KIRCHHOFFSchem Material, die sich für die Modellierung von endlich, aber gering deformiertem Gummimaterial eignen (s. Abschnitt 3.3.1) und 8–, 6– und 4–Knoten quasi–inkompressible Volumenelemente mit MOONEY–RIVLIN–Material zur Modellierung von Gummi mit großen Deformationen entwickelt (s. Abschnitt 3.3.2). Alle entwickelten Elemente weisen eine hervorragende Performance in der Dynamik auf, sind für die Applikation des Energie–Impuls–Erhaltungs–Algorithmus optimiert, meistern aber auch statische Rechenläufe sehr effektiv (s. Anhang A).

Zur Realisierung der Schnittstelle zum Massepunktmodell mußten potente und effektive Möglichkeiten der Applikation von Lasten und zur Führung der Struktur geschaffen werden (s. Kapitel 4).

3.1 Der Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus als vorteilhafter impliziter Zeitintegrator steifer Systeme mit überwiegend konservativem Verhalten

In diesem Abschnitt wird das Design eines Zeitintegrationsalgorithmus’ nach [Simo.92, Tarnow.93, Simo.93b] beschrieben, der in dieser Arbeit zur Zeitintegration der steifen Bewegungsgleichungen eines Gürtelreifens angewendet wird, nachdem er auf die Elastodynamik quasi–inkompressibler Materialien erweitert wurde. Der Schöpfer nannte ihn im Englischen „energy-momentum conserving algorithm“. Daher rührt der in dieser Arbeit geprägte Kurzname EMA.

3.1.1 Allgemeine Probleme bei der Zeitintegration steifer Systeme

Bei der Behandlung von Modellen zur Simulation des instationären Rollvorganges von Reifen befindet man sich in einem widersprüchlichen und sich gegenseitig ausschließenden Umfeld aus Anforderungen der angewendeten numerischen Methoden.

Die Modelle von Gürtelreifen als vorgespanntes Flächentragwerk sind ein typisches Beispiel für steife Systeme, da einem relativ niederfrequenten Gesamtverhalten ein sehr hochfrequenter Anteil in den Bewegungsgleichungen des numerischen Systems gegenübersteht:

Das mechanische Gesamtverhalten des Luftreifens spielt sich in einem Spektrum bis max. 500 Hz ab. Es gibt keine Messungen, bei denen relevante Achskräfte mit höheren Frequenzen festzustellen waren. Wenn man im Gesamtverhalten nicht nur das an der Achse wirksame Frequenzspektrum, sondern auch lokale Strukturreaktionen erfassen möchte, dann muß man die Stollenschwingungen mit einbeziehen, die im akustischen Bereich liegen und bei einer Frequenz von

ca. 5 kHz enden. Bei der Simulation der die Bewegung des Fahrzeugs bestimmenden Kräfte spielen diese akustischen Schwingungen aber schon keine Rolle mehr.

Man kann also mit Bedacht auf Sicherheit die Grenze der mechanisch relevanten Frequenzen im Strukturverhalten eines PKW-Luftreifens in Abhängigkeit von der jeweiligen Fragestellung an die Simulation irgendwo zwischen 0.5 kHz und 5 kHz ziehen.

Demgegenüber steht die Tatsache, daß bei Modellen mit einer halbwegs ernstzunehmenden räumlichen Auflösung der Reifenstruktur sehr schnell Eigenfrequenzen des numerischen Systems entstehen, die im Bereich von über 20 kHz liegen und mit einer Verfeinerung der Struktur oder Einbeziehung weiterer Schichten oder von Stollen rasant in die Höhe klettern. Ein solches Modell mit minimal zulässiger räumlicher Auflösung und mit konsequenter Vernachlässigung struktureller Details wie dem Schichtverhalten, der gegliederten Stollenoberfläche wurde in Kapitel 2 vorgestellt.

Nach dem SHANNONSchen Abtasttheorem muß bei einer transienten Simulation der Zeitschritt so gewählt werden, daß die höchste Eigenfrequenz des numerischen Systems mit mindestens 2 Samples abgetastet wird.

Damit entstehen bei den inherenten Eigenfrequenzen so hohe Abtastraten, daß sich aus Gründen des numerischen Aufwandes *implizite Integratoren verbieten*. Die hohen Eigenfrequenzen entstehen ja erst durch Modelle mit vielen Freiheitsgraden, deren Aufwand für die lineare Algebra mindestens quadratisch mit der Anzahl der Freiheitsgrade steigt. Diesem hohen Aufwand stünde dann der kurze Zeitschritt entgegen. Demzufolge ist die Integration steifer Systeme bei steigendem Diskretisierungsgrad aus klassischer numerischer Sicht *sowieso nur noch durch explizite Algorithmen* zu realisieren. Leider reagieren explizite Integratoren äußerst empfindlich auf Verletzungen des Abtasttheorems und fordern deshalb unerbittlich die kurzen Zeitschritte.

Es stellt sich das Dilemma dar, daß man zum instationären Überrollen praktischer Hindernisse bei mittleren bis hohen Geschwindigkeiten schon bei spartanischsten Modellen (s.o.) eine Abtastfrequenz von einigen 100 kHz benötigt, was einer mechanisch relevanten Systemantwort von lediglich 0.5 kHz gegenübersteht.

Die Tendenz ist entmutigend:

Wenn man zusätzliche Struktureffekte mit in die Modelle einbinden will, wie das Schichtverhalten oder gar die Stollengeometrie, dann führt die erforderliche Abtastung der numerischen Eigenfrequenzen dazu, daß man in der (Echt-) Zeit praktisch nicht mehr vorwärtskommt.

Es gibt Ansätze in der Literatur, dieser Situation zu entfliehen.

So versuchen die einen Autoren das Abtasttheorem zu umgehen, indem durch entsprechend hohe Dämpfungen eine „Stabilisierung“ der Rechnung angestrebt

wird (s. [Kao.97]). Diese Vorgehensweise ist aber abzulehnen, da man ja die realistischen Dämpfungen in der Reifenstruktur kennt.

Andere Autoren versuchen die numerischen Eigenfrequenzen zu eliminieren, indem die hochfrequenten Schwingzellen um die Korde durch algebraische Gleichungen ersetzt werden, so daß „nur“ noch elastisch weicher Gummi und transversale Membraneffekte in die Bewegungsantwort der Reifenstruktur mit einbezogen werden. Die Zulässigkeit der resultierenden Simplifizierung des Strukturverhaltens muß jedoch erst noch nachgewiesen werden. Außerdem produziert das Handling der entstehenden DAEs bei der expliziten Zeitintegration ebenfalls so beträchtlichen Aufwand, das auch der angestrebte Geschwindigkeitsvorteil in der Simulation noch nicht hinreichend nachgewiesen worden ist. Dennoch ist dies ein interessanter Ansatz.

Ein dritter möglicher Weg ist das Bestreben, durch höherwertige und Makroelemente das Spacing und die Anzahl der numerischen Freiheitsgrade auf niedrigem Niveau zu halten und die Struktur durch vermehrt „innere“ Freiheitsgrade zu beschreiben, die den Aufwand der „äußeren“ Zeitintegration nicht erheblich vergrößern (s. [Belkin.93, u.v.a.]).

In dieser Arbeit wird ein grundlegend anderer Weg gegangen. Der Autor besinnt sich auf die größere „Unempfindlichkeit“ impliziter Zeitintegratoren gegenüber der Verletzung des Abtasttheorems und eskaliert die zulässige Verletzung der Abtastanforderungen weiter, indem der *implizite* Energie–Impuls–Erhaltungs–Algorithmus zur Anwendung kommt. Dadurch wird der zur erfolgreichen und stabilen Strukturintegration erforderliche Zeitschritt abgekoppelt vom Diskretisierungsgrad und damit von den inherenten Eigenfrequenzen!

Die Zeitdiskretisierung richtet sich nur noch nach den physikalischen Frequenzinhalten der Bewegung und *nicht* nach der gewählten räumlichen Diskretisierung!

Dies ist möglich, indem die Eigenschaft des EMA ausgenutzt wird, auch bei massiver Verletzung des Abtasttheorems durch die Projektion der konservativen Bewegungsanteile auf die Erhaltungs– bzw. Bilanzsätze der Mechanik physikalisch sinnvolle Lösungen zu produzieren. Dieses Potential ist in der Literatur bekannt ([Tarnow.93]) und wird unter diesem Aspekt in Abschnitt 3.1.2 nochmals dargelegt.

Wie oben bereits diskutiert, endet das mechanisch relevante Systemverhalten des Luftreifens im Hörbereich. Das Reifenmodell in dieser Arbeit (s. Kapitel 5) besitzt im nichtvorgespannten Zustand Eigenfrequenzen bis ca. 150 kHz (s. Abb. 3.1, links). Abgetastet werden aber nur ca. 4 kHz (s. Abb. 3.1, rechts), ohne daß dadurch die Integration beeinträchtigt wird. Das bedeutet eine mehr als 75fache (!) Verletzung des Abtasttheorems. In der Tat ist dies in etwa der Faktor, um den die in dieser Arbeit vorgestellten Elemente schneller sind, als die nach konventioneller NEWMARKmethode integrierenden Elemente (s. Anhang A). (Die kurzzeitig höheren Abtastraten in Abb. 3.1 sind auf die Aktivität der Zeitschrittsteuerung zur Stabilisierung der Simulation gegenüber lokalen

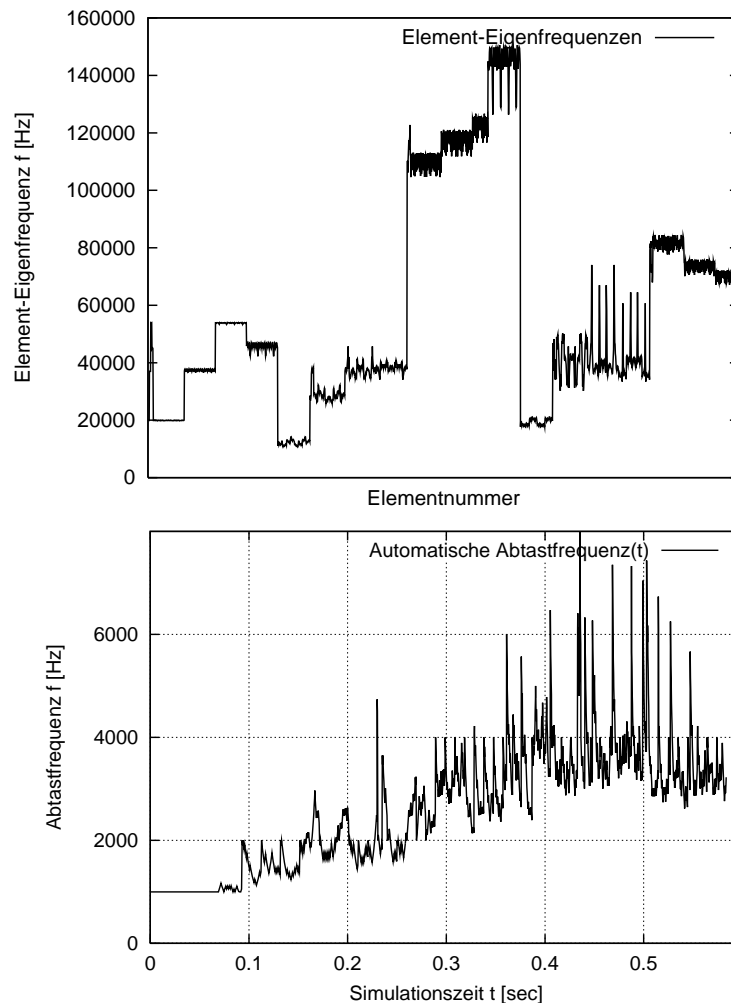


Abbildung 3.1: Eigenfrequenzen der Elemente im FE-Modell nach GERSCHGORIN und deren Abtastung

Rauhigkeiten in der Belastung zurückzuführen, also nicht allgemein bedingt durch die Integrationsmethode. Die Abtastfrequenz bleibt jedoch tendentiell deutlich unter 4 kHz.)

Natürlich entstehen bei groben Verletzungen des Abtasttheorems unabhängig vom Aspekt der Simulationsstabilität gerade bei der Integration von Drehbewegungen immer kleinere Phasenfehler (vgl. Abschnitt 3.1.2).

Jedoch, durch die in dieser Arbeit praktizierte Kopplung von Modellen mit streng nach den Regeln durchgeführter expliziter Zeitintegration für die „äußere“ Mechanik (ohne Phasenfehler) mit dem nach dem EMA integrierten feinen Modell für die „innere“ Mechanik werden gerade Phasen- u.ä. Fehler sicher umgangen:

Die berechnete Rad-/Reifenbewegung des expliziten Modells wird als phasengerechte Führungsbewegung dem impliziten Modell aufgeprägt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß durch diese Arbeit ein Weg aufgezeigt wird, wie man trotz Verwendung feiner Modelle nicht in die – allen steifen Systemen eigene – Schere zwischen gefordertem Detaillierungsgrad und nume-

rischer Realisierbarkeit gerät. In der Tat ist diese Vorgehensweise so effektiv, daß die präsentierten Simulationen allesamt auf einem INTEL–PENTIUM–II-PC mit 350MHz Taktrate durchgeführt werden konnten.

3.1.2 Das Grundprinzip des Energie-Erhaltungs-Algorithmus Das Pendel als einfaches und anschauliches Beispiel

Die Grundelemente des Designs eines Zeitintegrators lassen sich genauso an einem einfachen elastischen Pendel zeigen, wie die Unzulänglichkeiten der „klassischen“ Integrationsalgorithmen. Diese Imperfektionen der Zeitintegratoren im Zeitschritt (s. [Tarnow.93]) sind die Ursache dafür, daß eine Abtastung der mechanisch relevanten Bewegung nicht hinreichend ist, sondern nur die strenge Erfüllung des SHANNONSchen Abtasttheorems zu stabilen Lösungen führt. Deshalb war die Verwendung eines impliziten Integrators von der Berechnung großer steifer Systeme bisher ausgeschlossen.

Wie im folgenden gezeigt wird, rührt die Notwendigkeit der vollständigen Abtastung daher, daß bei „klassischen Integratoren“ immer alle vorhandenen numerischen Eigenfrequenzen des Systems angeregt werden und zwar durch den Integrator und nicht durch die Kräfte oder Randbedingungen des Simulationsbeispiels! Wenn dann der Integrationsalgorithmus z.B. durch einen zu großen Zeitschritt nicht zum korrekten Handling dieser Anregungen fähig ist, führt diese Anregung dem System analog zu einer Selbsterregung ständig Energie zu, die schließlich zum Kollaps der Simulation führt, wenn sie nicht gleichzeitig durch eine entsprechende Dissipation wieder abgeführt wird. Diese zur Stabilität der Integration erforderliche Dissipation ist in jedem Fall unphysikalisch.

Doch nun zum Beispiel des elastischen Pendels ohne Gravitationseinfluß:

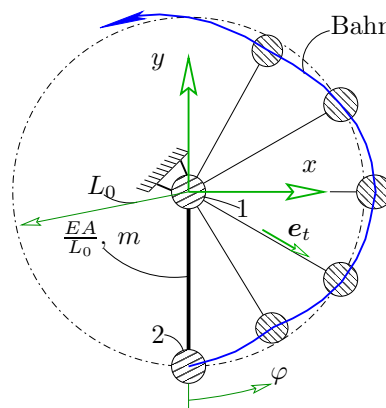


Abbildung 3.2: Elastisches, umlaufendes Pendel

Herleitung der *Hamiltonschen* Bewegungsgleichungen

Das Verschiebungsfeld des Stabes sei durch die Formfunktionen

$${}^1N = \left\{ (s, L) \mapsto 1 - \frac{s}{L} \right\} \quad {}^2N = \left\{ (s, L) \mapsto \frac{s}{L} \right\} \quad (3.1)$$

definiert. Dann lassen sich die Ausdrücke für die interpolierten Feldgrößen aufschreiben mit

$$\begin{aligned} {}_t\boldsymbol{\varphi}^h(s) &= {}^1N(s){}_t^1\boldsymbol{\varphi} + {}^2N(s){}_t^2\boldsymbol{\varphi} && \dots \text{ Orte} \\ {}_t\boldsymbol{p}^h(s) &= {}^1N(s){}_t^1\boldsymbol{p} + {}^2N(s){}_t^2\boldsymbol{p} && \dots \text{ kanonische Impulse} \\ &&& {}_t\boldsymbol{p} \stackrel{\text{def}}{=} {}_t\rho {}_t\boldsymbol{v} \\ \delta\boldsymbol{\varphi}^h(s) &= {}^1N(s)\delta^1\boldsymbol{\varphi} + {}^2N(s)\delta^2\boldsymbol{\varphi} && \dots \text{ Variationen} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Jetzt ergeben sich die räumlich interpolierten Ausdrücke als Funktion der Knotengrößen für die

$$\begin{aligned} \text{kinetische Energie} \quad T({}_t^1\boldsymbol{p}, {}_t^2\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2} \left\langle {}_0\rho^{-1} {}_t\boldsymbol{p}^h, {}_t\boldsymbol{p}^h \right\rangle \quad {}^1) \\ \text{potentielle Energie} \quad V({}_t^1\boldsymbol{\varphi}, {}_t^2\boldsymbol{\varphi}) &= \frac{c}{2} \left(\left| {}_t^2\boldsymbol{\varphi} - {}_t^1\boldsymbol{\varphi} \right| - \left| {}_t^2\boldsymbol{X} - {}_t^1\boldsymbol{X} \right| \right)^2 \\ \text{(Federenergie)} &= \frac{c}{2} \left(\left| \Delta_t \boldsymbol{\varphi}^h \right| - {}_0L \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wenn beide Ausdrücke aus (3.3) zusammengefaßt werden, so hat man die HAMILTONsche des elastischen Pendels in diskreter Form:

$$\mathcal{H}({}_t^1\boldsymbol{p}, {}_t^2\boldsymbol{p}, {}_t^1\boldsymbol{\varphi}, {}_t^2\boldsymbol{\varphi}, t) = \frac{1}{2} \left\langle {}_0\rho^{-1} {}_t\boldsymbol{p}^h, {}_t\boldsymbol{p}^h \right\rangle + \frac{c}{2} \left(\left| \Delta_t \boldsymbol{\varphi}^h \right| - {}_0L \right)^2 \quad (3.4)$$

Durch Anwendung der HAMILTON-Prozedur auf die HAMILTONsche nach (3.4) entstehen die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \left\langle {}_t\dot{\boldsymbol{p}}^h, \delta\boldsymbol{\varphi}^h \right\rangle &= \left\langle -\frac{\delta_t V}{\delta\boldsymbol{\varphi}^h}, \delta\boldsymbol{\varphi}^h \right\rangle \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} -V\left(\Delta_\epsilon \boldsymbol{\varphi}^h\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

¹⁾In Übereinstimmung mit der Literatur wird mit $\langle a, b \rangle$ das L_2 -Innere Produkt der Größen a und b über dem Gebiet \mathcal{B} beschrieben. Dahinter verbirgt sich Rechenvorschrift:

wobei der Punkt zwischen a und b je nach Kontext steht für die (s. Anhang C.1)

$$\langle a, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} a \cdot b d\mathcal{B},$$

- gewöhnliche Multiplikation,
- das Skalarprodukt oder
- das Doppelskalarprodukt.

$$\begin{aligned}
\left\langle {}_t\dot{\boldsymbol{\varphi}}^h, \delta \boldsymbol{p}^h \right\rangle &= \left\langle \frac{\delta {}_tT}{\delta \boldsymbol{p}^h}, \delta \boldsymbol{p}^h \right\rangle \\
&= \dots = \left\langle {}_0\rho^{-1} {}_t\boldsymbol{p}^h, \delta {}_t\boldsymbol{p}^h \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Wegen $\delta \boldsymbol{p}^h \longrightarrow \text{bel.}$ bekommt man aus 3.6:

$${}_t\dot{\boldsymbol{\varphi}}^1 N + {}_t\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 N = {}_t\boldsymbol{v}^1 N + {}_t\boldsymbol{v}^2 N \tag{3.6'}$$

und aus 3.5 mittels Richtungsableitung

$$\begin{aligned}
&\left\langle {}_t\dot{\boldsymbol{p}}^1 N + {}_t\dot{\boldsymbol{p}}^2 N, {}^1N \delta^1 \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \left\langle {}_t\dot{\boldsymbol{p}}^1 N + {}_t\dot{\boldsymbol{p}}^2 N, {}^2N \delta^2 \boldsymbol{\varphi} \right\rangle \\
&= - \frac{d}{d\epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \frac{c}{2} (|\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h + \epsilon \Delta \delta \boldsymbol{\varphi}^h| - {}_0L)^2 \\
&= - \left[c (|\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h + \epsilon \Delta \delta \boldsymbol{\varphi}^h| - {}_0L) \cdot \frac{\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h + \epsilon \Delta \delta \boldsymbol{\varphi}^h}{|\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h + \epsilon \Delta \delta \boldsymbol{\varphi}^h|} \cdot \Delta \delta \boldsymbol{\varphi}^h \right]_{\epsilon=0} \tag{3.5'} \\
&= -c ({}_tL - {}_0L) \frac{\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h}{{}_tL} (\delta^2 \boldsymbol{\varphi} - \delta^1 \boldsymbol{\varphi}) \\
&= c ({}_tL - {}_0L) \frac{\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h}{{}_tL} \delta^1 \boldsymbol{\varphi} - c ({}_tL - {}_0L) \frac{\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h}{{}_tL} \delta^2 \boldsymbol{\varphi} \\
&= {}_tF^N {}_te \delta^1 \boldsymbol{\varphi} - {}_tF^N {}_te \delta^2 \boldsymbol{\varphi}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
{}_tL &= \left| {}_t^2\boldsymbol{\varphi} - {}_t^1\boldsymbol{\varphi} \right| \\
&= |\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h| \\
{}_tF^N &= c (|\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h| - {}_0L) \quad \left(= {}_tF^N (\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h) \right) \\
{}_te &= \frac{\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h}{|\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h|} \quad \left(= {}_te (\Delta {}_t\boldsymbol{\varphi}^h) \right)
\end{aligned}$$

Daraus kann man nun durch Koeffizientenvergleich die Bewegungsgleichungen ablesen:

Wegen $\delta^1 \boldsymbol{\varphi}, \delta^2 \boldsymbol{\varphi} \longrightarrow \text{bel.}$ findet man aus 3.5':

$$\begin{aligned}
\delta^1 \boldsymbol{\varphi}: \quad &{}_tF^N {}_te = \left\langle {}_0\rho^1 N^1 N, 1 \right\rangle {}_t^1\dot{\boldsymbol{v}} + \left\langle {}_0\rho^2 N^1 N, 1 \right\rangle {}_t^2\dot{\boldsymbol{v}} \\
&\frac{3 {}_tF^N {}_te}{m} = {}_t^1\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2} {}_t^2\dot{\boldsymbol{v}} \\
\delta^2 \boldsymbol{\varphi}: \quad &- {}_tF^N {}_te = \left\langle {}_0\rho^1 N^2 N, 1 \right\rangle {}_t^1\dot{\boldsymbol{v}} + \left\langle {}_0\rho^2 N^2 N, 1 \right\rangle {}_t^2\dot{\boldsymbol{v}} \\
&-\frac{3 {}_tF^N {}_te}{m} = \frac{1}{2} {}_t^1\dot{\boldsymbol{v}} + {}_t^2\dot{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich durch Auflösen vereinfachen und man bekommt:

$${}^1_t\dot{\mathbf{v}} = \frac{6}{m} {}_tF^N{}_t\mathbf{e} \quad (3.5'a)$$

$${}^2_t\dot{\mathbf{v}} = -\frac{6}{m} {}_tF^N{}_t\mathbf{e} \quad (3.5'b)$$

und wegen 3.6' gilt:

$${}^1_t\dot{\boldsymbol{\varphi}} = {}^1_t\mathbf{v} \quad (3.6'a)$$

$${}^2_t\dot{\boldsymbol{\varphi}} = {}^2_t\mathbf{v} \quad (3.6'b)$$

Zeitdiskretisierung der kinematischen Teile der Bewegungsgleichungen nach der symplektischen Formel

Die Zeitdiskretisierung der Kinematik erfolgt bei allen Integratoren immer nach der symplektischen Formel:

$$\begin{aligned} {}^Q_{n+\frac{1}{2}}\mathbf{v} &= \frac{{}^Q_{n+1}\mathbf{v} + {}^Q_n\mathbf{v}}{2} = \frac{{}^Q_{n+1}\boldsymbol{\varphi} - {}^Q_n\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} \\ \iff {}^Q_{n+1}\mathbf{v} &= \frac{2}{\Delta t} \left({}^Q_{n+1}\boldsymbol{\varphi} - {}^Q_n\boldsymbol{\varphi} \right) - {}^Q_n\mathbf{v} \quad , Q = 1, 2 \quad (S_0) \end{aligned}$$

Zeitdiskretisierung der dynamischen Bewegungsgleichungen nach der Trapezregel und der Mittelpunktsregel

Als Vergleichsmethoden der Zeitdiskretisierung der Kraftgleichungen werden die *Trapezregel* und die *Mittelpunktsregel* herangezogen. Beide sind weit verbreitet und auch die Klasse der NEWMARKalgorithmen gehört dazu. Die Trapezregel

(s. auch Abschnitt 2.2.1) integriert die Gleichung $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = F(t_2) - F(t_1)$ folgendermaßen:

$$\text{Trapezregel:} \quad F(t_2) - F(t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta t \frac{f(t_2) + f(t_1)}{2}$$

und die Mittelpunktsregel verfährt nach

$$\text{Mittelpunktsregel:} \quad F(t_2) - F(t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta t f\left(\frac{t_2 + t_1}{2}\right)$$

Diese Zeitdiskretisierung auf die Bewegungsgleichungen 3.5'a...3.6'b angewendet ergibt:

$$\text{TR:} \quad \frac{2}{\Delta t} \left({}^Q_{n+1}\varphi - {}^Q_n\varphi - \Delta t {}^Q_n\mathbf{v} \right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{Q+1} \cdot \frac{6}{m} \cdot \Delta t \cdot$$

$$c \left[\underbrace{\frac{1}{2} (|\Delta_{n+1}\varphi^h| - {}_0L)}_{\text{Kraftterm für } t_{n+1}} \underbrace{\frac{\Delta_{n+1}\varphi^h}{|\Delta_{n+1}\varphi^h|}}_{\text{Richtung } t_{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2} (|\Delta_n\varphi^h| - {}_0L)}_{\text{Kraftterm für } t_n} \underbrace{\frac{\Delta_n\varphi^h}{|\Delta_n\varphi^h|}}_{\text{Richtung } t_n} \right] \quad (S_1)$$

und

$$\text{MPR:} \quad \frac{2}{\Delta t} \left({}^Q_{n+1}\varphi - {}^Q_n\varphi - \Delta t {}^Q_n\mathbf{v} \right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{Q+1} \cdot \frac{6}{m} \cdot \Delta t \cdot$$

$$c \left(\underbrace{\left| \frac{\Delta_{n+1}\varphi^h + \Delta_n\varphi^h}{2} \right| - {}_0L}_{\text{Kraftterm für } t_{n+\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta_{n+1}\varphi^h + \Delta_n\varphi^h}{2 \left| \frac{\Delta_{n+1}\varphi^h + \Delta_n\varphi^h}{2} \right|}}_{\text{Richtung für } t_{n+\frac{1}{2}}} \right) \quad (S_2)$$

Diskussion der Zeitdiskretisierungen nach der *Trapezregel* und der *Mittelpunktsregel*

Zum Verständnis der subtil anderen Vorgehensweise des EMA ist es vorteilhaft, sich zunächst die Struktur von Gleichung S_1 und S_2 zu vergegenwärtigen.

Bei den Gleichungen der Trapezregel und der Mittelpunktsregel ist zu bemerken, daß immer ein skalarwertiger „Kraftterm“ mit einem vektorwertigen „Richtungsterm“ kombiniert werden:

- Bei der Trapezregel wird der Kraftterm für t_{n+1} mit der Richtung von t_{n+1} und der Kraftterm für t_n mit der Richtung von t_n kombiniert.
- Bei der Mittelpunktsregel wird der Kraftterm für $t_{n+\frac{1}{2}}$ mit einer Richtung ungefähr bei $t_{n+\frac{1}{2}}$ zusammengeführt.

Die Analysen in [Tarnow.93] und [Simo.92] zeigen, daß die Verwendung der mittleren Richtung bei der Mittelpunktsregel dazu führt, daß bei der Integration eines abgeschlossenen Systems der Drall erhalten bleibt und zwar aus rein geometrischen Gründen, unabhängig davon, welcher (z.B. auch unphysikalischer) Kraftterm in dieser mittleren Richtung wirkt. Das führt dazu, daß Drehbewegungen mit der Mittelpunktsregel gut approximiert werden. Leider verletzt sie in jedem Zeitschritt durch die Wahl eines unglücklichen Kraftterms den Energieerhaltungssatz, so daß ein nach der Mittelpunktsregel oder verwandtem Schema integriertes System in praktisch jedem Zeitschritt geringe Mengen an Energie aufnimmt, die nichtkonservativen, erregenden Charakter trägt.

Der Energieerhaltungssatz hingegen wird durch die Trapezregel sehr günstig erfaßt. Ursache dafür sind die verwendeten Kraftterme. Dennoch wird die Energie in jedem Zeitschritt nur dann exakt konserviert, wenn keine elastischen Defor-

mationen auftreten. Gleichzeitig ist die Trapezregel genauso wie die verwandte² NEWMARKregel nicht in der Lage, den Drall richtig zu integrieren, es sei denn, es ist kein Drall vorhanden (rein translatorische Bewegung). In praktisch jedem Zeitschritt erfährt ein rotationsbehaftetes System, das nach der Trapezregel oder verwandter Zeitintegratoren integriert wird, einen Drallstoß.

Zeitdiskretisierung der dynamischen Bewegungsgleichungen nach dem Energie–Impuls–Erhaltungsalgorithmus

Das ist der Ansatzpunkt des EMA. Hier werden Kraftterme verwendet, die zu den Zeiten t_n und t_{n+1} zugeordnet werden können und Richtungen, die zur Zeit $t_{n+\frac{1}{2}}$ gehören. Diese Vorgehensweise sichert in der Tat, daß im Zeitschritt sowohl der Impuls–, als auch der Drall– und die Energieinhalt des geschlossenen Systems erhalten bleibt.

Diese Vorgehensweise kann universell verallgemeinert werden auf andere diskrete und kontinuierliche Systeme, sowie auf andere Materialklassen.

Praktisch bedeutet das, daß man auch bei Zeitschritten, die nicht mit dem SHANNONSchen Abtasttheorem korrespondieren, bei gleichzeitiger Anwendung des EMA immer Lösungen produziert, die die Integrale der Bewegung erfüllen, also nicht physikalisch in sich widersprüchliche Zustände implizieren.

In der numerischen Simulationspraxis bedeutet das weiterhin, daß die Anregung der systeminherenten Eigenfrequenzen, die Impuls, Drall und/oder Energie akkumulieren würde, aufgrund der Erhaltungseigenschaften tendenziell behindert wird. Das ist der Grund für die mögliche Wahl grober Zeitschritte.

Natürlich bedeutet das nicht, daß man nun in jedem Fall die Richtlinie des Abtasttheorems verlassen kann. Vor allem dann, wenn durch die Art der Erregung oder andere Bedingungen das System natürlicherweise mit seinen höheren Eigenfrequenzen reagieren „möchte“, dann versagt der Vorteil des EMA. Im Falle des Luftreifens tritt dieser Fall glücklicherweise nicht auf, da selbst Anregungen im akustischen Bereich unterhalb von den numerischen Eigenfrequenzen liegen.

Die zeitlich diskreten Bewegungsgleichungen des elastischen Pendels, aufgestellt nach dem EMA heißen dann

$$\begin{aligned} \text{EMA:} \quad & \frac{2}{\Delta t} \left({}^Q_{n+1}\varphi - {}^Q_n\varphi - \Delta t {}^Q_n\mathbf{v} \right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{Q+1} \cdot \frac{6}{m} \cdot \Delta t \cdot \\ & c \left(\underbrace{\frac{1}{2} |\Delta_{n+1}\varphi^h|}_{\text{Kraftterm für } t_{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2} |\Delta_n\varphi^h|}_{\text{Kraftterm für } t_n} - {}_0L \right) \cdot \underbrace{\frac{\Delta_{n+1}\varphi^h + \Delta_n\varphi^h}{2 \left[\frac{1}{2} |\Delta_{n+1}\varphi^h| + \frac{1}{2} |\Delta_n\varphi^h| \right]}}_{\text{Richtung für } t_{n+\frac{1}{2}}} \quad (S_3) \end{aligned}$$

²Der Nachweis über die Verwandtschaft von Trapezregel und NEWMARK-Methode ist bekannt und wird hier nicht wiederholt. In der Tat wurden die identische Ergebnisse, wie sie weiter unten gezeigt werden auch mit einem führenden, kommerziellen, nach der NEWMARK-Regel integrierenden FE-Programm erhalten. Die Stabelemente des für diese Arbeit entwickelten Codes hingegen integrieren die Pendelrotation genauso wie der u.g. EMA in seiner primitivsten Form.

Ergebnisse der Zeitintegration des elastischen Pendel nach den verschiedenen Methoden

Die Gleichungen (S_1) , (S_2) und (S_3) stellen jeweils zusammen mit (S_0) eine implizite Rechenvorschrift für ein im Zeitschritt nichtlineares System von Gleichungen, um

aus dem bekannten Zustand bei $t_n : \begin{smallmatrix} \frac{1}{n} \mathbf{v}, \frac{2}{n} \mathbf{v} \end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix} \frac{1}{n} \varphi, \frac{2}{n} \varphi \end{smallmatrix}$
den neuen Zustand bei $t_{n+1} : \begin{smallmatrix} \frac{1}{n+1} \mathbf{v}, \frac{2}{n+1} \mathbf{v} \end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix} \frac{1}{n+1} \varphi, \frac{2}{n+1} \varphi \end{smallmatrix}$

zu berechnen.

Es wird also, wie in Abschnitt 2.1.1.1 vorgestellt, eine *inkrementell-iterative* Lösungsstrategie angewendet. Die dazu erforderlichen JACOBmatrizen können z.B. durch Anwendung symbolischer Rechenprogramme wie Maple oder Mathematica³ leicht erzeugt werden.

In den Abbildungen 3.3 werden die Bewegungsgrößen Drall und Energie für alle genannten Zeitintegratoren bei einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.1$ dargestellt, in den Abbildungen 3.4 der Abstand des Massepunktes zum Lager und der Gesamtimpuls. Bei größeren Zeitschritten, von z.B. $\Delta t = 0.5$ versagen die Trapez- und Mittelpunktsregel quasi sofort, obwohl die ebene Rotation immer noch gut abgetastet wird (s.u.). Das wird hier nicht mehr dargestellt.

Das Pendel wurde folgendermaßen dimensioniert:

- ${}_0EA = 1.0 \cdot 10^7$
- ${}_0L = 5$ und
- ${}_0\rho A = \frac{1}{5} \leadsto m = 1$

Damit ergibt sich als Eigenfrequenz der Longitudinalschwingung $\omega_l^2 = \sqrt{2} \cdot 10^6$. Bei $\Delta t = 0.1$ bedeutet das eine Abtastrate von $ca. \frac{43}{1000}$ (ca. 25 Perioden je Zeitschritt). Alle gezeigten Ergebnisse entstanden aus *konvergierten Zeitschritten*!

Die Longitudinalschwingung wird durch das Setup des Experiments nur marginal (Zentripetalkraft=5 gegenüber einer Steifigkeit des Pendels von 2 000 000) angeregt. Die wesentliche Bewegung ist also die Drehbewegung in der x - y -Ebene, die bei einer Periodendauer von $T_{rot} = 2\pi$ in jedem Fall sehr genau abgetastet wird.

Durch die Resultate wird die o.g. Einschätzung der Zeitintegratoren und die aufgrund der Beweisführung in [Tarnow.93] vorhersagbare Art des Versagens belegt. Die Mittelpunktsregel ist nicht in der Lage die Gesamtenergie zu konservieren.

³Maple und Mathematica sind eingetragene Warenzeichen

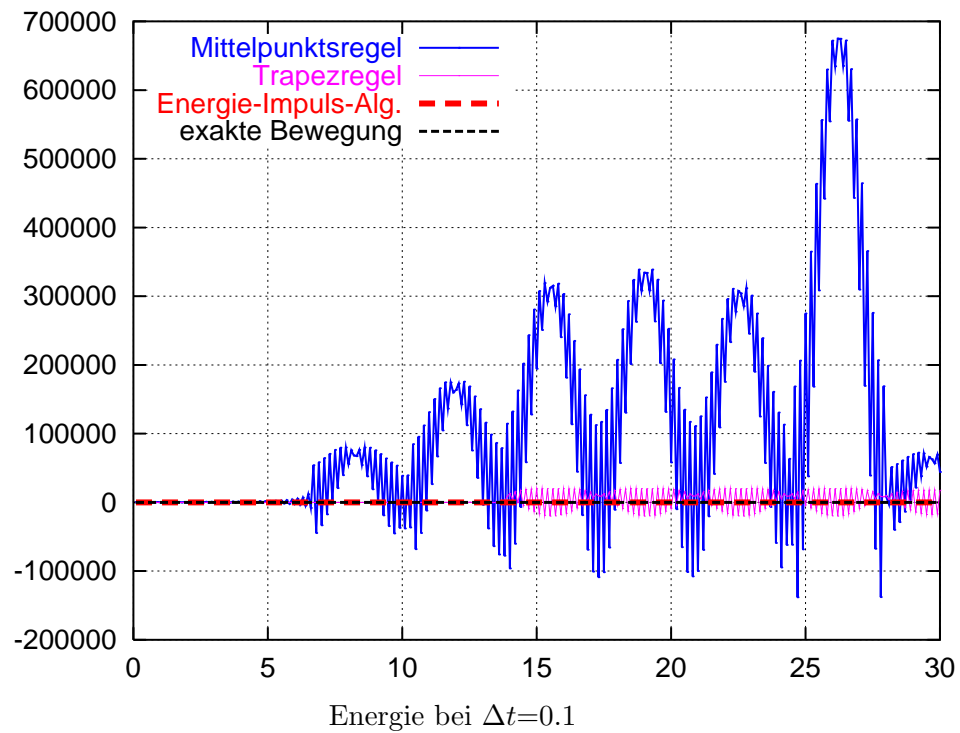
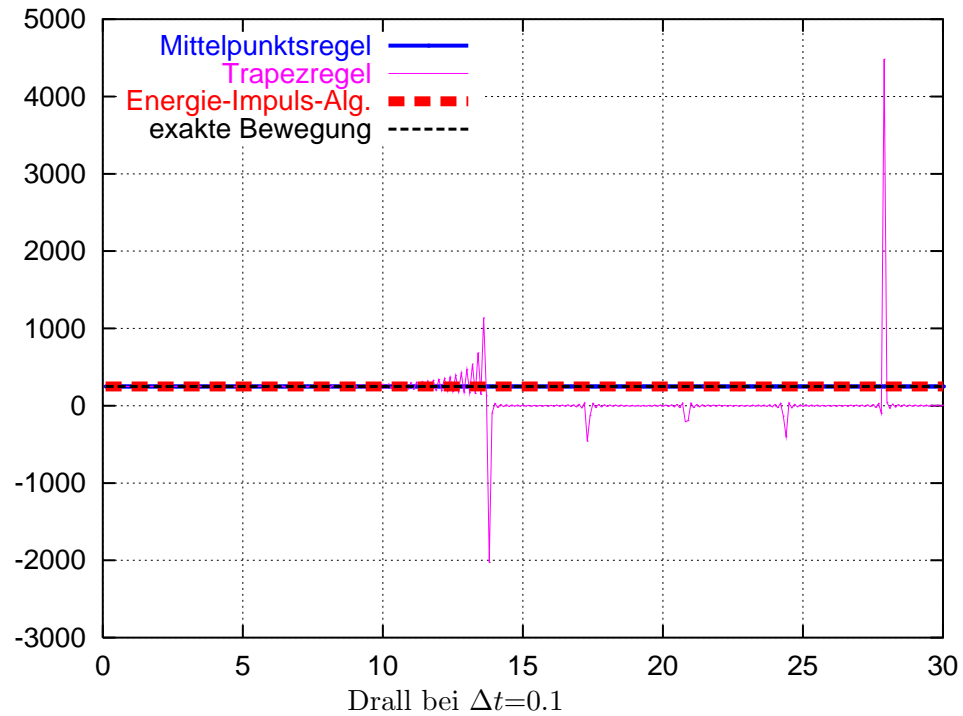


Abbildung 3.3: Trapez-, Mittelpunktsregel und EMA, Drall und Energie bei $\Delta t=0.1$

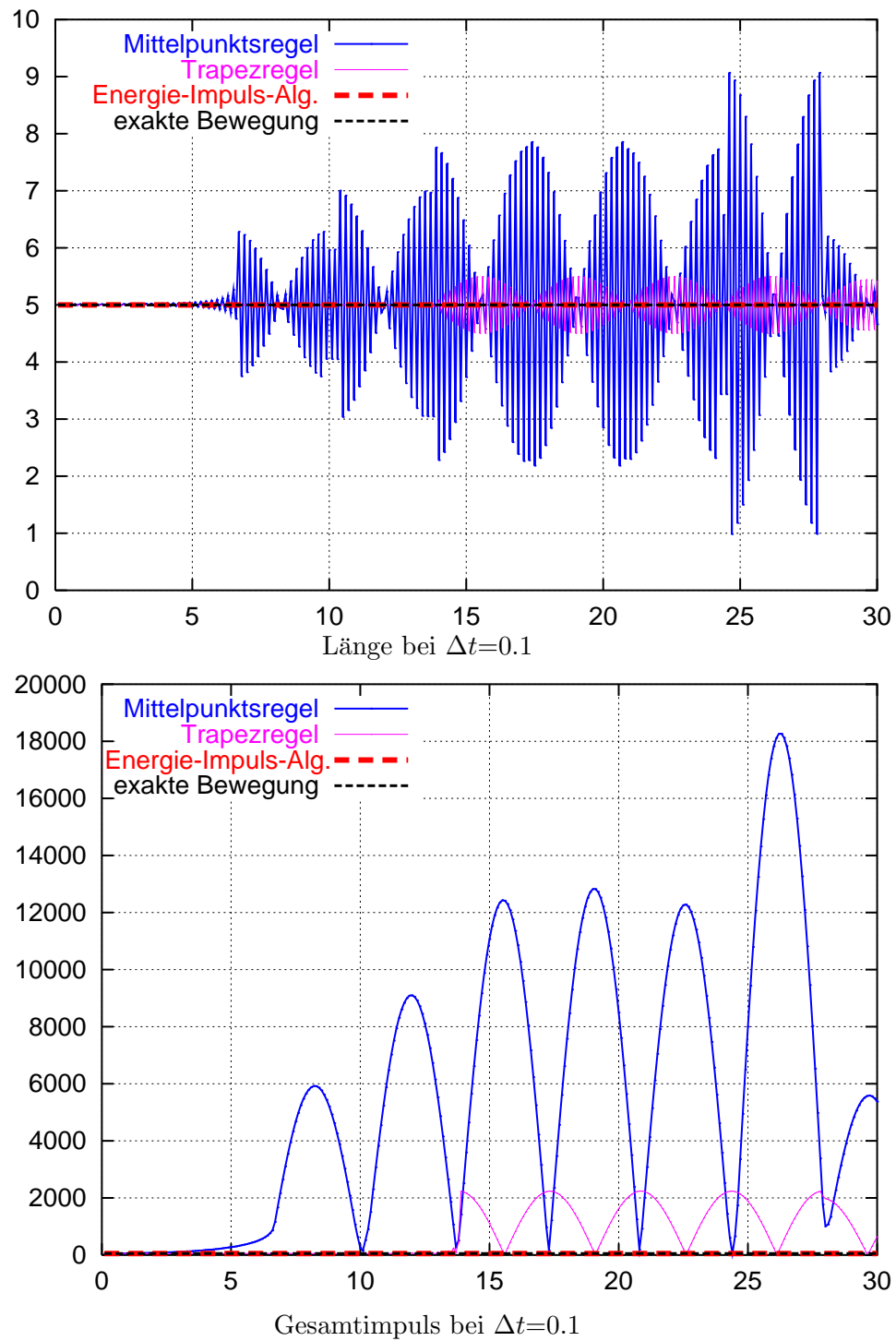
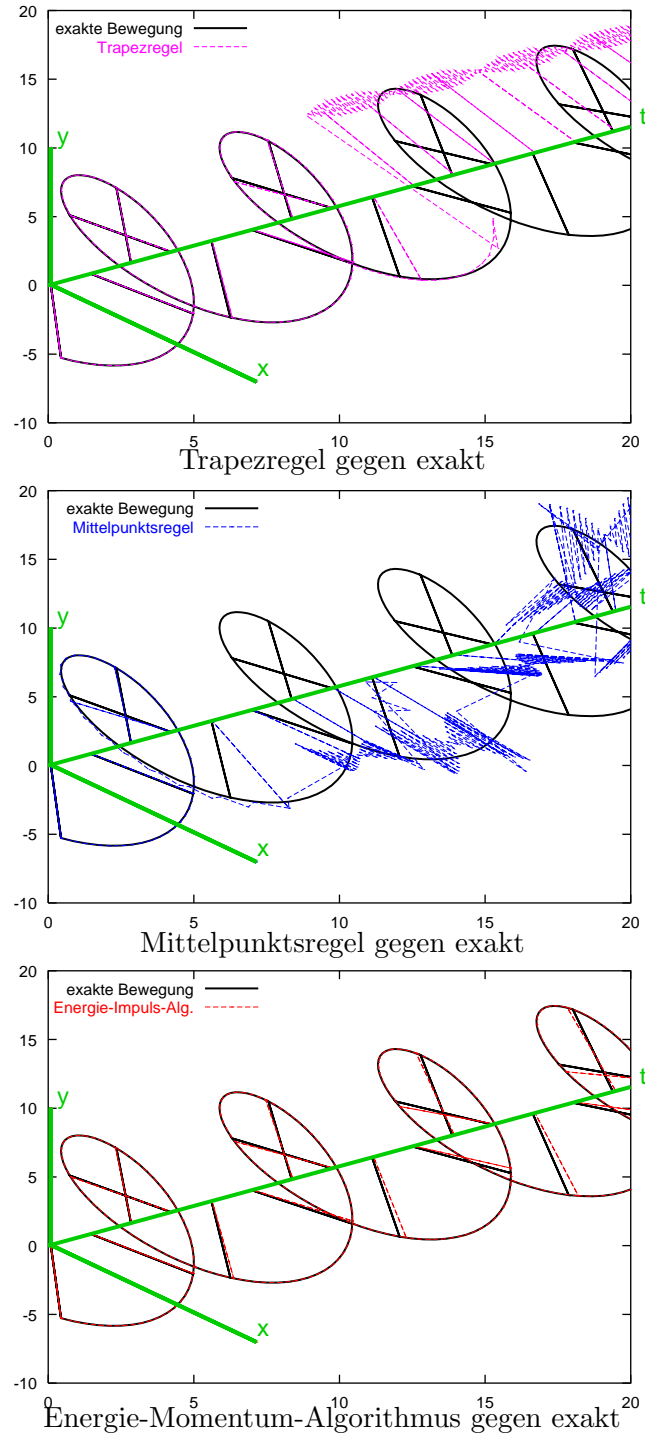
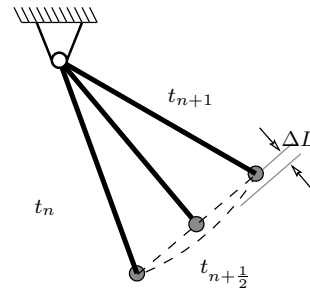


Abbildung 3.4: Trapez-, Mittelpunktsregel und EMA, Länge und Gesamtimpuls

Abbildung 3.5: Darstellung der Bewegung aller Methoden bei $\Delta t=0.1$

Das geschieht dadurch, daß durch Verwendung der mittleren Konfiguration (Länge) zur Bestimmung der Stabkräfte in jedem Zeitschritt ein Longitudinalstoß erzeugt wird (s. Abb. rechts). Dadurch wird durch die Zeitintegrationsregel der hohen longitudinal orientierten Eigenform eine Unmenge an nichtkonservativer Energie zugeführt. Es bauen sich recht schnell Längsschwingungen (s. Abb.3.5) auf, die das Pendel kollabieren lassen.



Erstaunlich ist (s. Abb. 3.3), daß trotz dieses pathologischen Verhaltens der Drall erhalten bleibt!

Die Trapezregel ist bei vorhandener Rotation weder in der Lage, den Energieinhalt noch den Drall richtig zu integrieren. Auch bei der Integration nach der Trapezregel schaukeln sich die Stablängsschwingungen auf. Gleichzeitig wird der Drall permanent verändert. Es ist nur eine Frage der Parameter, welches der beiden Probleme letztendlich zum Versagen der Zeitintegration führt. Jedenfalls verhält sich das Pendel so, daß bei gravierender Verletzung der Drallderhaltung dann auch der Energiehaushalt zerstört wird oder umgekehrt. Im gerechneten Beispiel transferiert die Integration nach der Trapezregel nach und nach alle Rotationsenergie in die Stablängsschwingungen, bis dies dazu führt, daß in einer singulären Bewegung das Pendel auf die gegenüberliegende Seite schnell und dort in reinen Stablängsschwingungen ohne weitere Drehbewegung verharrt. Dieses Verhalten scheint keinen zufälligen Charakter zu haben, denn es tritt auch bei einem Rechenbeispiel auf, wo ein 3D-Würfel um eine seiner Hauptachsen frei im Raum rotiert und sollte in anderen Arbeiten untersucht werden.

Solange die Integration nur mit kleinen Verletzungen des Dralls und der Gesamtenergie einhergeht, wird der Gesamtimpuls von allen Methoden ordentlich abgebildet. Genauso läßt sich zeigen, daß bei Abtastung der Integration nach dem SHANNONSchen Theorem alle drei Integrationsmethoden zuverlässig rechnen. Das bedeutet aber, daß man zufolge des kleineren Zeitschrittes nur mit $\frac{1}{100}$ der Geschwindigkeit durch die Zeit kommt.

Die Integration des Pendels nach dem EMA führt zu keinerlei Instabilitäten. Alle Integrale der Bewegung werden exakt⁴ konserviert. Es ist aber ein Phasenfehler (s. Abb. 3.5) gegenüber der exakten Lösung festzustellen. Dieser Phasenfehler kann auch nur durch eine Verkleinerung des Zeitschrittes verringert werden.

⁴Die numerische Abweichung von der 100%igen Konstanz der Integrale ist genau in der Größenordnung des Abbruchkriteriums der iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems im Zeitschritt.

Hier wurde als relative Abbruchtoleranz $1 \cdot 10^{-10}$ verwendet und auch die numerischen Werte der Integrale variieren erst auf der 9...10ten Stelle.

3.2 Formulierung von Stabelementen zur Darstellung der Kordlagen

In diesem Abschnitt wird das für die Modellierung der Korda verwendete Stab-

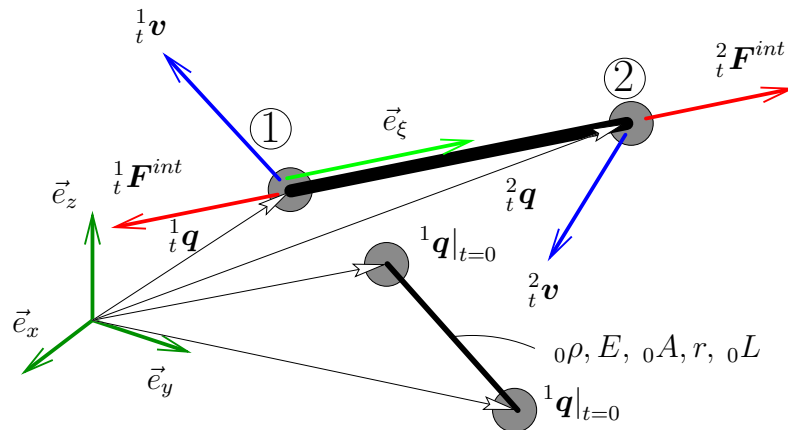


Abbildung 3.6: Finites Stabelement

element (s. Abb. 3.6) vorgestellt. Bei dem Weg vom Kontinuum zur algebraischen Form der Bewegungsgleichungen wird ein gemischter Weg beschritten (s. Abb. 1.3).

- Das elastische Potential des Stabes wird aufgrund der einfachen Struktur der Gleichungen sofort räumlich diskret hingeschrieben.
- Der kinetische Anteil der LAGRANGESchen wird zunächst sowohl räumlich als auch zeitlich kontinuierlich formuliert.
- Als Zeitintegrator vom räumlich diskreten zur algebraischen Formulierung der Bewegungsgleichungen wird der EMA verwendet.

Damit wird ein Stabelement generiert, das

- sehr schnell rechnet,
- die Integrale der konservativen Bewegung exakt abbildet
- geometrisch vollständig nichtlinear arbeitet (große Verschiebungen und Rotationen),
- physikalisch nur teilweise nichtlinear operiert (kleine Deformationen bei dem linearelastischen Material, aber Berücksichtigung der verschwindenden Drucksteifigkeit zur Abbildung der Kordeligenschaften),
- die Trägheitsterme konsistent zur Kinematik des Kontinuums bildet,
- eine am LEHRschen Dämpfungsmaß orientiert parametrisierbare, geschwindigkeitsabhängige Dissipation besitzt und
- auch für statische Berechnungen geeignet ist.

3.2.1 Ein linearer Feldansatz für Verschiebungen und Geschwindigkeiten

Für den verwendeten Stab werden die gleichen Formfunktionen verwendet, wie sie in (3.1) im Abschnitt 3.1.2 bereits vorgestellt wurden. Dadurch ergibt sich eine derart einfache Deformationskinematik, daß man das elastische Potential des Stabes als diskrete Funktion von der Knotenkonfiguration hinschreiben kann. Die Kinematik soll durch folgende Größen und Abkürzungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 {}_{n+T}(\dots) &= T \cdot {}_{n+I}(\dots) + (1 - T) \cdot {}_n(\dots) && \dots \text{Linearkombination einer Größe} \\
 {}_{n+T}^B \mathbf{q} & && \dots \text{Linearkombination „}T\text{“ des} \\
 & && \text{Ortes von Knotens „}B\text{“} \\
 {}_{n+T}^B \mathbf{q} &= {}_{t_0}^B \mathbf{X} + {}_{n+T}^B \mathbf{u} && {}_{n+T} d\mathbf{q} = {}_{n+T}^2 \mathbf{q} - {}_{n+T}^1 \mathbf{q} \\
 {}_n L &= ({}_n d\mathbf{q} \cdot {}_n d\mathbf{q})^{\frac{1}{2}} && {}_{n+I} L = ({}_{n+I} d\mathbf{q} \cdot {}_{n+I} d\mathbf{q})^{\frac{1}{2}} \\
 {}_t \mathbf{v}^h &= {}^1 N_t^1 \mathbf{v} + {}^2 N_t^2 \mathbf{v} &&
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2.2 Das räumlich diskrete *Lagrange*-Funktional für das Stabelement und das zugehörige Anfangswertproblem

Das elastische Potential lautet:

$${}_t V^{int} = \frac{1}{2} \frac{E_0 A}{{}_0 L} |{}_t d\mathbf{q}|^2 \quad (\text{räumlich diskret})$$

Die kinetische Energie errechnet sich zu:

$${}_t T = \frac{1}{2} \left\langle {}_0 A {}_0 \rho {}_t \mathbf{v}^h \cdot {}_t \mathbf{v}^h \right\rangle \quad (\text{räumlich kontinuierlich})$$

Mit ${}^1 N(\xi) = 1 - \frac{\xi}{{}_0 L}$, ${}^2 N(\xi) = \frac{\xi}{{}_0 L}$ und $m = {}_0 \rho {}_0 A {}_0 L$ ergibt die Ausführung des Ausdrucks $\frac{1}{2} \left\langle {}_0 A {}_0 \rho {}_t \mathbf{v}^h \cdot {}_t \mathbf{v}^h \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{\xi=0}^{{}_0 L} {}_0 A {}_0 \rho {}_t \mathbf{v}^h \cdot {}_t \mathbf{v}^h d\xi$ für die kinetische Energie:

$${}_t T = \frac{m}{6} \left({}_t^1 \mathbf{v}_t^1 \mathbf{v} + {}_t^2 \mathbf{v}_t^2 \mathbf{v} + \frac{1}{2} {}_t^1 \mathbf{v}_t^2 \mathbf{v} \right)$$

Zusammengeschrieben lautet die räumlich diskrete LAGRANGEDichte:

$$\begin{aligned}
 {}_t \mathcal{L} = {}_t T - {}_t V &= \frac{m}{6} \left({}_t^1 \mathbf{v}_t^1 \mathbf{v} + {}_t^2 \mathbf{v}_t^2 \mathbf{v} + \frac{1}{2} {}_t^1 \mathbf{v}_t^2 \mathbf{v} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{E_0 A}{{}_0 L} \left(|{}_t d\mathbf{q}| \right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Ermittlung der Bewegungsgleichungen nach dem LAGRANGEformalismus

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial_t T}{\partial^A_t v_i} \right) - \frac{\partial_t V}{\partial^A_t q_i} = {}^A_t F_i^{ext}, \quad \begin{cases} i &= 1..3 \\ A &= 1..2 \end{cases}$$

liefert die EULER-LAGRANGE-Gleichungen, ein Gleichungssystem, das nach ${}^1_t \dot{\mathbf{v}}$ und ${}^2_t \dot{\mathbf{v}}$ aufgelöst die Bewegungsgleichungen in Form eines Anfangswertproblems sind:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{6} {}^1_t \dot{\mathbf{v}} - \frac{E_0 A}{{}_0 L} ({}_t L - {}_0 L) \cdot \frac{{}_t d\mathbf{q}}{|{}_t d\mathbf{q}|} &= {}^1_t \mathbf{F}^{ext} \\ \frac{m_2}{6} {}^2_t \dot{\mathbf{v}} - \frac{E_0 A}{{}_0 L} ({}_t L - {}_0 L) \cdot \frac{{}_t d\mathbf{q}}{|{}_t d\mathbf{q}|} &= {}^2_t \mathbf{F}^{ext} \quad \text{mit} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$${}^A_t \mathbf{F}^{ext} = \left\langle {}^A N, \underbrace{{}_t \mathbf{f}^{ext}}_{\text{verteilte Last}} \right\rangle + \underbrace{{}_t \mathbf{F}^k}_{\text{Einzellast}}, \quad A = 1..2$$

3.2.3 Der Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus am räumlich diskreten System

Herleitung der Bewegungsgleichungen

Formulierung des Elementes mittels konsistenter Linearisierung

Analog zur Diskussion beim Pendel in Abschnitt 3.1.2 kombiniert man auch hier das Mittel der Kräfte, die jeweils aus den Konfigurationen zur Zeit ${}_n t$ und ${}_{n+1} t$ mit der Richtung der mittleren Konfiguration.

Der Beweis für die exakte Konservierung von Impuls, Drall und konservativer Energie erfolgt identisch zu den Untersuchungen in [Tarnow.93] und wird hier nicht wiederholt.

Mit der Abkürzung $F_N({}_{n+\frac{1}{2}} L^1) = \frac{E_0 A}{{}_0 L} ({}_t L - {}_0 L)$ für die Amplitude der elastischen Stabkraft bekommt man also:

$$\frac{m}{6} \left({}^A_{n+1} \mathbf{v} - {}^A_n \mathbf{v} \right) = (-1)^A \Delta t \cdot F_N \left({}_{n+\frac{1}{2}} L \right) \cdot \frac{{}_{n+1}^2 \mathbf{q} - {}_{n+1}^1 \mathbf{q}}{{}_{n+\frac{1}{2}} L}$$

Daraus entsteht durch Elimination von ${}^A_{n+1} \mathbf{v}$ mit

$${}^A_{n+1} \mathbf{v} = \frac{2}{\Delta t} \left({}^A_{n+1} \mathbf{q} - {}^A_n \mathbf{q} \right) - {}^A_n \mathbf{v}, \quad A = 1, 2 \quad (3.10)$$

unter Verwendung der eingeführten Abkürzungen die algebraische Form der Bewegungsgleichungen

$${}^A_t\mathbf{F}^{ext} = \frac{m}{3\Delta t^2} \left({}^A_{n+1}\mathbf{q} - {}^A_n\mathbf{q} - \Delta t {}^A_n\mathbf{v} \right) + F_N \left({}^{n+1}_2L \right) \frac{{}^{n+1}_2\mathbf{q} - {}^{n+1}_1\mathbf{q}}{{}^{n+1}_2L} \quad (3.11)$$

($A = 1, 2$)

Da sich diese Gleichungen nicht in geschlossener Form nach den gesuchten ${}^A_{n+1}\mathbf{q}$, $A = 1, 2$ auflösen lassen, müssen sie im Sinne einer iterativen Lösungsstrategie

$${}^A_{n+1}\mathbf{q}^{(iter+1)} = {}^A_{n+1}\mathbf{q}^{(iter)} + \Delta^A\mathbf{u}$$

nach TAYLOR entwickelt werden. Dazu berechnet man der Gradienten aller vorhandenen Knotenkräfte

$${}^A_t\mathbf{F}^{int} = (-1)^A {}_0c \left(1 - \frac{{}_0L}{{}^{n+1}_TL} \right) {}^{n+1}_T\mathbf{d}\mathbf{q} \quad \text{mit } {}_0c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_0 A}{{}_0L} \quad (3.12)$$

$${}^{n+1}_2\mathbf{F}^{ext} = \left\langle {}^A N, {}_t\mathbf{f}^{ext} \right\rangle + {}^A_t\mathbf{F}^k \quad (3.13)$$

$${}^{n+1}_2\mathbf{F}^{Diss} = \text{s. Abschnitt 3.2.4} \quad (3.14)$$

an der Stelle der aktuellen Knotenvektoren ².

$$\begin{array}{c} {}^n\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad {}^n\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix} \mathbf{v}, \quad \underbrace{{}^{n+1}_1\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ n+1 \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad {}^{n+1}_2\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ n+1 \end{bmatrix} \mathbf{q}}_{\text{für alten Iterationsindex } iter}, \quad {}^{n+1}_1\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ n+1 \end{bmatrix} \mathbf{v}, \quad {}^{n+1}_2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ n+1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \end{array}$$

Der Gradient bzw. die JACOBmatrix wird mit $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ bezeichnet:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \nabla_A \mathbf{u} \circ \left[{}^{n+1}_2\mathbf{F}^{ext} - {}^{n+1}_2\mathbf{F}^{diss} - {}^{n+1}_2\mathbf{F}^{int} \right]^{(iter)}$$

Dann bekommt man die gesuchte Lösungsverbesserung $\Delta^A\mathbf{u}$ zur Berechnung eines neuen ${}^A_{n+1}\mathbf{q}^{(iter+1)}$ durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \Delta\mathbf{u} = {}^{n+1}_2\mathbf{F}^{ext} - {}^{n+1}_2\mathbf{F}^{int} \Big|_{(iter)} - {}^{n+1}_2\mathbf{F}^{diss} \Big|_{(iter)} \quad \text{nach } \Delta\mathbf{u}$$

Der Vektor der elastischen Kräfte ${}^A_t\mathbf{F}^{int}$ läßt sich leicht linearisieren, da gilt:

$$\frac{\partial {}^{n+1}_L}{\partial {}^{n+1}_B\mathbf{q}} = (-1)^B \frac{{}^{n+1}_L\mathbf{d}\mathbf{q}}{{}^{n+1}_L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial {}^{n+1}_L}{\partial {}^{n+1}_B\mathbf{q}} = \frac{-T}{{}^{n+1}_L} (-1)^B \frac{{}^{n+1}_L\mathbf{d}\mathbf{q}}{{}^{n+1}_L}$$

¹Man beachte ${}^{n+1}_2L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} ({}^{n+1}_1L + {}^nL) \neq \frac{1}{2} |{}^{n+1}_1\mathbf{d}\mathbf{q} + {}^n\mathbf{d}\mathbf{q}|$

²Die Geschwindigkeit ${}^{n+1}_2\mathbf{v}$ kann berechnet werden nach (3.10)

außerdem ist

$$\frac{\partial_{n+1} \mathbf{d}\mathbf{q}}{\partial_{n+1}^B \mathbf{q}} = T(-1)^B \mathbf{1}$$

Die Formel für die JACOBIMatrix hat dann folgende einfache (leicht unsymmetrische) Struktur:

$$\begin{aligned} {}^{AB} \underline{\underline{\mathbf{K}}} &= \frac{\partial_T^A \mathbf{F}^{int}}{\partial_{n+1}^B \mathbf{q}} \\ {}^{AB} \underline{\underline{\mathbf{K}}} &= T \cdot {}^0 c(-1)^{A+B} \left[\left(1 - \frac{{}_0 L}{{}_{n+T} L} \right) \mathbf{1} + \frac{{}_0 L}{({}_{n+T} L)^2} \frac{{}_{n+T} \mathbf{d}\mathbf{q}}{{}_{n+1} \mathbf{L}^{n+1}} \mathbf{d}\mathbf{q} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Man stellt fest, daß gilt:

$${}^{11} \underline{\underline{\mathbf{K}}} = {}^{22} \underline{\underline{\mathbf{K}}} \quad {}^{12} \underline{\underline{\mathbf{K}}} = {}^{21} \underline{\underline{\mathbf{K}}} \quad {}^{12} \underline{\underline{\mathbf{K}}} = - {}^{11} \underline{\underline{\mathbf{K}}}$$

3.2.4 Die Erfassung von Dämpfung und verringerter Drucksteifigkeit der Stäbe als Modell für die Seileigenschaften der Korde

Wie bereits öfter erwähnt, ist es unabdingbar, die Elemente für dynamisches Reifenmodell mit Dämpfung auszustatten. Deshalb wird eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung eingebaut, deren Implementierung einfach umsetzbar ist und deren Wirkung durch ihre rheologische Motivation besser ist, als eine RAYLEIGHsche strukturmotivierte Dämpfung.

Bezugnehmend auf Abb. 3.6 werden folgende Hilfsgrößen definiert:

$$\left. \begin{aligned} {}_t \mathbf{d}\mathbf{v} &= {}_t^2 \mathbf{v} - {}_t^1 \mathbf{v} & \dots & \text{Geschwindigkeitsdifferenz} \\ {}_t \mathbf{d}\mathbf{q} &= {}_t^2 \mathbf{q} - {}_t^1 \mathbf{q} & \dots & \text{Knotenabstand} \\ {}_t \underline{\underline{\mathbf{e}}}_\xi &= \frac{{}_t \mathbf{d}\mathbf{q}}{|{}_t \mathbf{d}\mathbf{q}|} = \frac{{}_t \mathbf{d}\mathbf{q}}{{}_t L} & \dots & \text{Einheitsvektor der Elementrichtung} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} {}_t dv &= {}_t \mathbf{d}\mathbf{v} \cdot \frac{{}_t \mathbf{d}\mathbf{q}}{{}_t L} \\ {}_t L &= \sqrt{{}_t \mathbf{d}\mathbf{q} \cdot {}_t \mathbf{d}\mathbf{q}}, \\ & \text{für } t = \{n, n+1\} \end{aligned}$$

Die Dämpfungskraft an Knoten „2“ wirkt entgegengesetzt zu dv und berechnet sich nach:

$$\begin{aligned} {}_n^2 \mathbf{F}^D &= -\mu_n dv_n \underline{\underline{\mathbf{e}}}_\xi & \left({}_n^1 \mathbf{F}^D &= -{}_n^2 \mathbf{F}^D \right) \\ {}_{n+1}^2 \mathbf{F}^D &= -\mu_n dv_{n+1} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_\xi & \left({}_{n+1}^1 \mathbf{F}^D &= -{}_n^2 \mathbf{F}^D \right) \\ &= -\mu_{n+1} dv_{n+1} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_\xi & \left({}_{n+1}^1 \mathbf{F}^D &= -{}_n^2 \mathbf{F}^D \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Linearisierung von Gleichung ${}_{n+1}^A \mathbf{v} = \frac{2}{\Delta t} ({}_{n+1}^A \mathbf{q} - {}_n^A \mathbf{q}) - {}_n^A \mathbf{v}$ (3.10) liefert einige nützliche Formeln,

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_{n+1}^B v_k}{\partial {}_{n+1}^A q_j} &= \frac{+2}{\Delta t} \delta_{kj} \delta_{AB}; & \frac{\partial {}_{n+1} dv_k}{\partial {}_{n+1}^A q_j} &= (-1)^{A+2} \frac{2}{\Delta t} \delta_{kj}; & \frac{\partial {}_{n+1} dq_k}{\partial {}_{n+1}^A q_j} &= (-1)^A \delta_{kj} \\ \frac{\partial \frac{1}{{}_{n+1} L^2}}{\partial {}_{n+1}^A q_j} &= (-1)^A \frac{2}{{}_{n+1} L^3} \frac{\partial |{}_{n+1} \mathbf{d}\mathbf{q}|}{\partial {}_{n+1}^A q_j} & &= (-1)^{A+1} \frac{2}{{}_{n+1} L^4} {}_{n+1} dq_j \end{aligned} \quad (3.18)$$

die für die Berechnung der JACOBIMatrix ${}_{n+\frac{1}{2}}^{21} K_{ij}^D = \frac{1}{2} \frac{\partial {}_{n+1}^{2F_i^D}}{\partial {}_{n+1}^1 q_j}$ benötigt werden:

$$\begin{aligned} {}_{n+\frac{1}{2}}^{21} K_{ij}^D &= \frac{\mu}{2{}_{n+1} L^2} \frac{2}{\Delta t} {}_{n+1} dq_i {}_{n+1} dq_j + \frac{\mu}{2{}_{n+1} L^2} {}_{n+1} dq_i {}_{n+1} dv_j \\ &+ \frac{\mu}{2{}_{n+1} L^2} \mathbf{d}\mathbf{v} \cdot {}_{n+1} \mathbf{d}\mathbf{q} \delta_{ij} - \frac{\mu}{{}_{n+1} L^4} \mathbf{d}\mathbf{v} \cdot {}_{n+1} \mathbf{d}\mathbf{q} {}_{n+1} dq_i {}_{n+1} dq_j \\ {}_{n+\frac{1}{2}}^{21} K_{ij}^D &= \frac{\mu}{{}_{n+1} L^2} \left[\left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{{}_{n+1} dv_k {}_{n+1} dq_k}{{}_{n+1} L^2} \right) {}_{n+1} dq_i \circ {}_{n+1} dq_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2{}_{n+1}} {}_{n+1} dq_i \circ {}_{n+1} dv_j + \frac{1}{2{}_{n+1}} dv_k \cdot {}_{n+1} dq_k \delta_{ij} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Man findet schnell:

$${}_{n+\frac{1}{2}}^{12} K_{ij}^D = {}_{n+\frac{1}{2}}^{21} K_{ij}^D; \quad {}_{n+\frac{1}{2}}^{11} K_{ij}^D = - {}_{n+\frac{1}{2}}^{21} K_{ij}^D; \quad {}_{n+\frac{1}{2}}^{22} K_{ij}^D = - {}_{n+\frac{1}{2}}^{21} K_{ij}^D$$

Die Berücksichtigung des Steifigkeitsverlustes der Korde in Druckrichtung auf ca. 1% der Zugsteifigkeit kann leicht erfaßt werden, da sowohl die elastische Reaktion ${}_{n+1}^A \mathbf{F}^{int}$ (s. Gleichung (3.14)) als auch deren JACOBIMatrix ${}_{n+1}^{AB} \underline{\mathbf{K}}^{int}$ (s. Gleichung (3.15)) linear im E-Modul skaliert werden können.

Es ist also vollkommen ausreichend, den momentanen Dehnungszustand des Stabes zu überwachen und im Druckbereich den zum Aufbau der Kraftvektoren und JACOBIMatrix verwendeten E-Modul entsprechen herunterzuskalieren. Die Unstetigkeit im Lösungsgebiet um die Nulldehnung kann durch eine entsprechend glatte Skalierungsfunktion erreicht werden. Die rechentechnische Praxis zeigt aber, daß das numerische System sehr unempfindlich auf die Art des Überganges von der Zugsteifigkeit auf die Drucksteifigkeit reagiert.

3.3 Formulierung von isotropen Volumenelementen zur Darstellung der Gummischichten

Es gibt Zonen starker und schwacher Deformation im Reifen (s. Abb. 3.7). Die Kenntnis über die Verteilung der Bereiche mit geringeren Deformationen

kann man dazu ausnutzen, diese Teile der Reifenstruktur durch Elemente mit möglichst einfachen Materialmodellen zu diskretisieren.

Ein sehr geeignetes Materialmodell zur Approximation des Verhaltens isotroper Körper bei mäßigen, nichtlinearen Deformationen ist das ST-VENANT-KIRCHHOFFsche Gesetz, dessen Funktion für die spezifische Deformationsenergie eine quadratische Form besitzt. Dadurch sind die Spannungen proportional zu den jeweils zugehörigen, nichtlinear formulierten Verzerrungen.

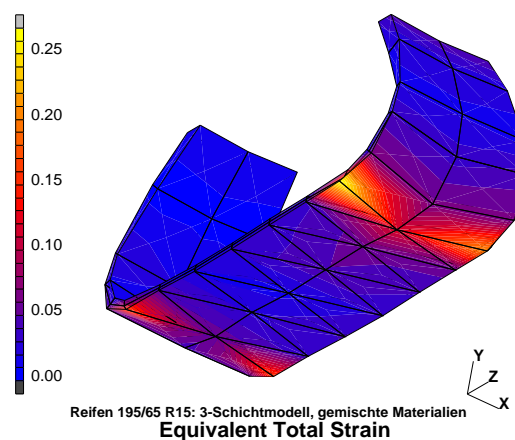


Abbildung 3.7: Vergleichsdeformationen eines Querschnitts im Latsch

Diese einfachen Zusammenhänge gestatten eine aus mechanischer und aus numerischer Sicht einfache und relativ billige Elementformulierung (s. Abschnitt 3.3.1). Das senkt die Kosten bei der Elementintegration im Zeitschritt.

Der Nachteil ist, daß das KIRCHHOFFsche Material bei großen Deformationen bekannterweise falsch rechnet. Diese Eigenschaft ist sowohl angesichts der in der Realität auftretenden großen Deformationen (s. Abb. 3.7) als auch der besonders im Schulterbereich großen Deformationsgradienten nicht tolerierbar. Eine falsche Berechnung der Deformationen am Gürtelrand erzeugt ein qualitativ anderes Tragverhalten der Reifenstruktur.

Außerdem tritt bei KIRCHHOFFschem Material der Effekt des Softening, also eines abfallenden Tangentenmoduls bei steigenden Deformationsamplituden auf. Das Softening führt dazu, daß gerade in den Bereichen großer Deformationen, die ohnehin ein numerisch anfälliges Verhalten zeigen, durch die schwindende Fähigkeit des Reifenmodells, die Deformationen durch entsprechend hohe elastische Spannungszuwachse zu begrenzen, ein statisch instabiles Verhalten auftritt (s. Abb. 3.8).

Das zeigt sich z.B. durch lokal auftretende Volumendurchschläge, die bei keinem dem Autor bekannten kommerziellen FE-Code hinreichend überwacht werden:

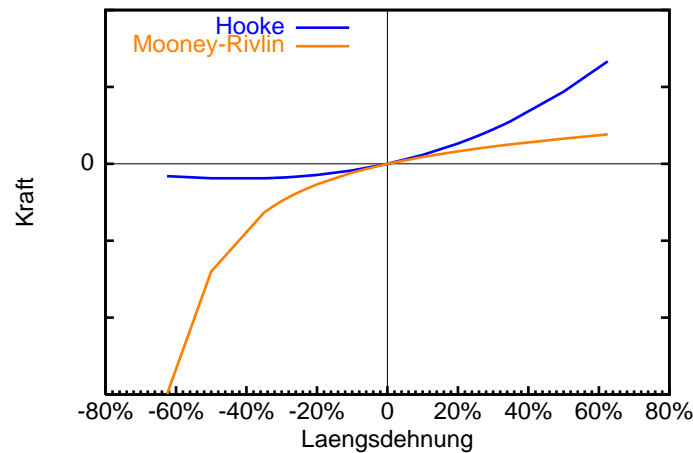


Abbildung 3.8: Zug-/ Druckversuch für einen Würfel aus KIRCHHOFFSchem und MOONEY–RIVLIN-Material mit bei infinitesimalen Deformationen gleichem E-Modul

Die Singularität des begleitenden Gleichungssystems wird nur auf Systemebene überprüft, weil das die billigste und meist auch ausreichende Vorgehensweise ist. Bei den in dieser Arbeit verwendeten Diskretisierungen haben die Instabilitäten aber zunächst ausschließlich lokalen Charakter, die JACOBI-Matrix des Gesamtsystems wird davon nicht numerisch singulär. Das einzig wiederholt festzustellende globale auf Durchschläge hinweisende Merkmal ist der Verlust der strengen Konvergenz der Lösung im Zeitschritt.

Der für diese Arbeit entwickelte Code verfügt über besondere Kontrollmechanismen zur Überwachung von Volumendurchschlägen und Durchschnappen auch auf Elementebene. Bei detektierten Durchschlägen wird nicht weitergerechnet, sondern durch Eingriffe in die Zeitschrittsteuerung versucht, doch noch eine physikalische Lösung zu berechnen. Gelingt dies nicht, wird die Rechnung abgebrochen, da sich einmal durchgeschlagene Elemente nicht wieder stabilisieren können.

Die Unzulänglichkeiten einfacher Materialien beim Einsatz in einer Reifensimulation ziehen die Notwendigkeit nach sich, die Bereiche mit großen Deformationen durch ein entsprechend potentere Materialgesetze abzubilden.

Ein solches Materialmodell muß in der Lage sein, auch bei großen Deformationen das physikalisch komplizierte, technisch aber erwünschte Verhalten von Gummi hinreichend gut abzubilden. Zu diesem Verhalten gehören vor allem die typische Reaktion von Gummi auf deviatorische Belastungszustände und die Inkompressibilität. Letztere beeinflusst besonders bei großen Deformationen das Verhalten der Struktur stark mit.

Die simple Annahme einer Querkontraktionszahl von $\nu \approx 0.5$ führt bekanntlich nur zu singulären KIRCHHOFFSchen Materialkoeffizienten, aber keinesfalls zu Inkompressibilität (außer bei infinitesimalen Verzerrungen). Die Herbeiführung eines Volumendurchschlages zufolge der parallelen Durchdringung der Deck-

durch die Grundfläche ist bei einem 8- oder 20-Knoten-Element mit KIRCHHOFFSchem Material auch bei einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.49999$ problemlos möglich. Instabilitäten entstehen bei den Wendepunkten der Kraft-Weg-Kennlinie.

So ist der Würfel der Kantenlänge 2 wie im dargestellten Beispiel (s. Abbildung 3.9) bei einer Verschiebung der Deckfläche von $\Delta x = -2.0$ auf ein Nullvolumen komprimiert. Die Kennlinie bei weiterer Komprimierung zeigt, wie das Programm mit negativem Volumen einfach weiterrechnet. Auch im Zugbereich ist das Material bei großen Deformationen instabil. Jenseits der dargestellten Zugverschiebung kollabiert das Element zu einer Linie mit Nullvolumen.

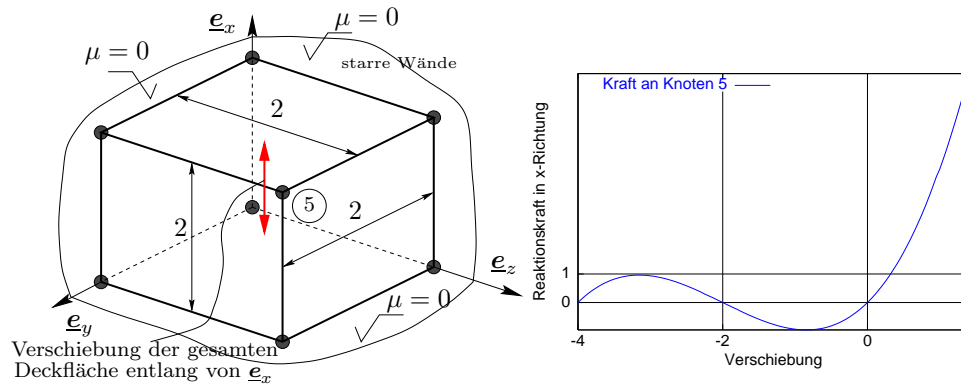


Abbildung 3.9: Snap-Through-Versuch für ein 3D-Kontinuum-Element mit KIRCHHOFFSchem Material

Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll die Grenzen des KIRCHHOFFSchen Materials bei der Modellierung von Reifenstrukturen.

Als einfachen Vertreter einer für Elastomere geeigneten Materialklasse kann man das MOONEY-RIVLIN-Material nennen.

Dieses Materialmodell besitzt außerdem den aus numerischer Sicht nützlichen Versteifungseffekt bei steigenden Druckdeformationen (s. Abb. 3.8). Das hilft, die auftretenden Verzerrungen durch entsprechend überproportionale Spannungsreaktionen zu begrenzen und somit positiven Einfluß auf die statische Stabilität der Simulation auszuüben.

Entsprechende Elemente werden in den Abschnitten 3.3.2 vorgestellt.

3.3.1 Volumenelemente für Zonen moderater Deformationen Kontinuumsmechanische Basis

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen für ein 3D-Kontinuum-Element nach dem Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus hergeleitet und die daraus resultierende Elementformulierung für ein isoparametrisches Interpolationskonzept vorgestellt. Es werden die Beweise zu den Erhaltungseigenschaften des EMA bzgl. der konservativen Energieanteile im Modell geführt.

Diese Gleichungen sind in ähnlicher Form auch in der Literatur ([Tarnow.93]) zu finden.

Sie werden an dieser Stelle trotzdem wiedergegeben. Einerseits sollen anhand der aus der Literatur teilweise bekannten mechanischen und mathematischen Zusammenhänge die in dieser Arbeit verwendeten Schreibweisen illustriert werden. Andererseits ist die vollständige Reproduzierbarkeit der entwickelten Numerik ein Ziel dieser Arbeit, was nur bei Vollständigkeit der hierfür notwendigen Angaben möglich ist. Nicht zuletzt ist aber auch die Systematik der Ausführungen in den Abschnitten 3.3.2 ähnlich der hier vorgestellten und ermöglicht eine deutlich angenehmere Lektüre der späteren Ausführungen.

3.3.1.1 Das *Hamilton-Funktional* für *Kirchhoff*sche Volumenelemente

Kontinuumsmechanische Grundlage

Man bezeichnet die momentane Verschiebungskonfiguration mit

$${}_t\varphi = {}_t\varphi\left(\mathbf{X}, {}_t\mathbf{u}, t\right)$$

deren Definitionsbereich gekennzeichnet ist durch

das vom Körper okkupierte Gebiet \mathcal{B}
mit dem Rand $\Gamma = \overline{\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} \cup \Gamma_{\boldsymbol{\varphi}}}$
der sich aus zueinander disjunkten Bereichen
mit vorgegebenen Lasten $\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}$ und
mit vorgegebenen Verschiebungen $\Gamma_{\boldsymbol{\varphi}}$
zusammensetzt.

Es gilt

$$\begin{aligned} {}_t\mathbb{F} &= \mathbf{X} + {}_t\mathbf{u} & {}_t\mathbb{F} &= \nabla_{\mathbf{X}} \circ {}_t\varphi \iff \\ {}_t\varphi|_{\Gamma_{\boldsymbol{\varphi}}} &= {}_t\bar{\varphi} & {}_t\mathbb{F} &= \mathbb{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \circ {}_t\mathbf{u}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad \text{mit } \det [{}_t\mathbb{F}] > 0 \quad \forall t \quad (3.20)$$

Die Menge aller zulässigen, erzeugbaren Verschiebungskonfigurationen wird durch die Mannigfaltigkeit \mathcal{Q} ausgedrückt, die sich darstellt als die Menge

$$\mathcal{Q} = \left\{ {}_t\varphi : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \det [{}_t\mathbb{F}] > 0 \forall t \text{ und } {}_t\varphi|_{\Gamma_{\boldsymbol{\varphi}}} = {}_t\bar{\varphi} \right\} \quad (3.21)$$

Damit ist eine *Bewegung* als die Entwicklung der Verschiebungskonfiguration ${}_t\varphi$ mit dem dazugehörigen Geschwindigkeitsfeld ${}_t\mathbf{v}$ in der Zeit definiert, welche die kinematischen Randbedingungen ${}_t\bar{\varphi}$ erfüllt und deren Deformationsgradient zu allen Zeiten positiv definit ist. Aus den Geschwindigkeiten lassen sich die

kanonischen Impulse bilden mit ${}_t\mathbf{p} = {}_0\rho_t\mathbf{v}$.

Man bezeichnet mit $\delta\varphi$ eine zulässige Variation der Verschiebungsconfiguration. Es wird ein linearer Phasenraum

$${}_t\mathbf{z} = ({}_t\varphi, {}_t\mathbf{p})$$

vorausgesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} {}_\epsilon\mathbf{z} &= ({}_\epsilon\varphi, {}_\epsilon\mathbf{p}) \\ &= ({}_t\varphi + \epsilon\delta\varphi, {}_t\mathbf{p} + \epsilon\delta\mathbf{p}) \end{aligned}$$

eine zulässig variierte Konfiguration, die man durch den Grenzübergang $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} {}_\epsilon\mathbf{z} = {}_t\mathbf{z}$ in die Momentankonfiguration überführen kann. Dadurch hat man die Möglichkeit, Richtungsableitungen von Funktionen zu berechnen, in denen die Konfiguration als Argument verwendet wird (z.B. HAMILTONprozedur).

Im Zusammenhang mit dem EMA wird immer die Existenz einer Funktion für die spezifische Deformationsenergie in Abhängigkeit vom (symmetrischen) GREEN-LAGRANGESchen Deformationstensor ${}_t\mathbb{E} = \frac{1}{2}({}_t\mathbb{F}^T \cdot {}_t\mathbb{F} - \mathbb{I})$ vorausgesetzt:

$$w := \left\{ ({}_t\mathbb{E}) \longmapsto \mathbb{R}^1 \right\} \quad (3.22)$$

Energetische Terme, die sich weder so beschreiben lassen noch kinetischen Charakter tragen, müssen als nichtkonservative Größen behandelt werden. Die Funktion der spezifischen Deformationsenergie für KIRCHHOFFSches Material und die Komponentendarstellung des isotropen Werkstoffensors wird folgendermaßen geschrieben³:

$$\begin{aligned} w({}_t\mathbb{E}) &= \frac{1}{2} {}_t\mathbb{E}^{(T)} \cdot \overset{<4>}{\mathbb{C}} \cdot {}_t\mathbb{E} \quad \text{mit} \\ \overset{<4>}{\mathbb{C}} &= C_{ijkl} \underline{\mathbf{e}}_i \underline{\mathbf{e}}_j \underline{\mathbf{e}}_k \underline{\mathbf{e}}_l \\ C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Damit läßt sich mittels der DOYLE-ERICKSEN-Formeln der Zweite PIOLA-KIRCHHOFFSche Spannungstensor wie folgt berechnen⁴:

³Der Zusammenhang zwischen den LAMÈschen Konstanten und den elastischen Moduln sei wiederholt: $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ und $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$.

Man kann bei der Entwicklung der Formeln die doppelte Symmetrie des Werkstoffensors ausnutzen. Es gilt: $\overset{4}{C}_{abcd} = \overset{4}{C}_{cdab} = \overset{4}{C}_{abdc} = \overset{4}{C}_{bacd}$ und alle damit weiter erzeugbaren Formen.

⁴Mit ${}_t\mathbb{C} := {}_t\mathbb{F}^T \cdot {}_t\mathbb{F}$ ist der häufig benutzte symmetrische Rechte CAUCHY-GREEN-Deformationstensor gemeint, der ebenfalls symmetrische Linke CAUCHY-GREEN-Tensor berechnet sich nach ${}_t\mathbb{B} := {}_t\mathbb{F} \cdot {}_t\mathbb{F}^T$.

Wegen ${}_t\mathbb{E} = \frac{1}{2}{}_t\mathbb{C} - \frac{1}{2}\mathbb{I} \iff {}_t\mathbb{C} = 2{}_t\mathbb{E} + \mathbb{I}$ gilt $\nabla_{{}_t\mathbb{E}} \circ (..) = 2 \nabla_{{}_t\mathbb{C}} \circ (..)$

$$\begin{aligned}
{}_t\mathbb{S} &:= 2 \nabla_{{}_t\mathbb{C}} \circ \tilde{w}({}_t\mathbb{C}) = \nabla_{{}_t\mathbb{E}} \circ w({}_t\mathbb{E}) \\
&= \frac{1}{2} \overset{\uparrow}{\nabla}_{{}_t\mathbb{E}} \circ \left(\overset{\downarrow}{\mathbb{E}} \cdot \overset{<4>}{\mathbb{C}} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbb{E}} \right) + \frac{1}{2} \overset{\uparrow}{\nabla}_{{}_t\mathbb{E}} \circ \left(\overset{\downarrow}{\mathbb{E}} \cdot \overset{<4>}{\mathbb{C}} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbb{E}} \right) \\
\text{NR: } \frac{\partial E_{ij}}{\partial E_{kl}} \underline{e}_i \underline{e}_j \underline{e}_k \underline{e}_l &= \nabla_{\mathbb{E}} \circ \mathbb{E} = \delta_{ik} \delta_{jl} \underline{e}_i \underline{e}_j \underline{e}_k \underline{e}_l \\
&= \underline{e}_i \underline{e}_j \underline{e}_i \underline{e}_j = \overset{<4^T>}{\mathbb{I}} \quad \dots \text{Transponierer} \\
&= \frac{1}{2} \left[\overset{<4^T>}{\mathbb{I}} \cdot \left(\overset{<4>}{\mathbb{C}} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbb{E}} \right) + \left(\overset{\downarrow}{\mathbb{E}} \cdot \overset{<4>}{\mathbb{C}} \right) \cdot \overset{<4^T>}{\mathbb{I}} \right] \\
{}_t\mathbb{S} &= \overset{\downarrow}{\mathbb{E}} \cdot \overset{<4>}{\mathbb{C}} = \overset{<4>}{\mathbb{C}} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbb{E}}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Die Hamiltonsche für das 3D-Kontinuum

Zum Aufstellen der HAMILTONschen ordnet man die Potentiale und Energieinhalte des Systems nach konservativen (elastischen) Energien, Bewegungsenergie und nichtkonservativer Energie (Dissipation, Arbeit äußerer Lasten). Das elastische Potential lautet einfach⁵:

$${}_tV^{int} = \left\langle w({}_t\mathbb{E}), 1 \right\rangle \tag{3.25}$$

Die kinetische Energie berechnet man wie immer nach

$${}_tT = \frac{1}{2} \left\langle \rho^{-1} {}_t p, {}_t p \right\rangle \tag{3.26}$$

Die nichtkonservativen Energien können als Feld über das Volumen \mathcal{B} oder über die belastete Oberfläche Γ_{σ} des Körpers verteilt sein. Bei räumlich diskretisierten Kontinua ist auch ein punktförmiges Auftreten denkbar, was mittels der Dirac-Distribution in eine Integralform über die Oberfläche oder das Volumen überführt werden kann. Damit lassen sich diese Terme berechnen nach

$${}_tW^{ext} = \left\langle {}_t\varphi, \mathbf{f}^{ext} \right\rangle + \left\langle {}_t\varphi, \bar{\mathbf{t}}^{ext} \right\rangle_{\Gamma_{\sigma}} \tag{3.27}$$

Mit der Schreibweise $\bar{\mathbf{t}}^{ext}$ für die Flächenlasten wird darauf hingewiesen, daß diese Lasten möglicherweise mit der Deformation der Elementoberfläche mitzuführen sind, die Oberflächenintegrale aber über die materielle Fläche durchgeführt werden.

⁵s. Fußnote 1 auf Seite 62

Die Formulierung des ARWP⁶ nach der Hamilton-Prozedur

Jetzt hat man die HAMILTONsche

$${}_t\mathcal{H} = {}_tT + {}_tV^{int} - {}_tW^{ext}$$

die der gleichnamigen Prozedur

$$\text{I: } \langle {}_t\dot{\mathbf{p}}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle = \left\langle \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{\varphi}}, \delta\boldsymbol{\varphi} \right\rangle \quad \text{II: } \langle {}_t\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \delta\mathbf{p} \rangle = \left\langle \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{p}}, \delta\mathbf{p} \right\rangle \quad (3.28)$$

unterzogen wird, um die EULER-LAGRANGE-Gleichungen in Form eines räumlich und zeitlich kontinuierlichen Anfangsrandwertproblems (ARWP) (s. Abb. 1.3) hinzuschreiben:

$$\begin{aligned} \text{mit (3.28 : I)} \quad & \langle {}_t\dot{\mathbf{p}}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle + \left\langle \underbrace{\nabla_{{}_t\mathbb{E}} \circ w({}_t\mathbb{E})}_{\mathbb{S}({}_t\mathbb{E})} \cdot \left(\nabla_{{}_t\boldsymbol{\varphi}} \circ {}_t\mathbb{E} \right)^{(T)}, \delta\boldsymbol{\varphi} \right\rangle \\ & = \langle {}_t\mathbf{f}^{ext}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle {}_t\bar{\mathbf{t}}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle \Big|_{\Gamma_\sigma} \end{aligned}$$

$$\leadsto \text{I: } \langle {}_t\dot{\mathbf{p}}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle \mathbb{S}({}_t\mathbb{E}), {}_t\mathbb{F}^T \cdot \delta\mathbb{F} \rangle = \langle {}_t\mathbf{f}^{ext}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle {}_t\bar{\mathbf{t}}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle \Big|_{\Gamma_\sigma} \quad (3.29)$$

$$\text{II: } \langle {}_t\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \delta\mathbf{p} \rangle = \langle {}_t\mathbf{v}, \delta\mathbf{p} \rangle \quad (3.30)$$

3.3.1.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus Erhaltungseigenschaften und Projektionsgleichungen auf den Arbeitssatz

Es wiederholt sich die Grundidee des EMA (s. Abschnitt 3.2.3):

- Die Spannungen, die aus den Deformationen ${}_n\mathbb{E}$ und ${}_{n+I}\mathbb{E}$ berechnet und erst anschließend „gewichtet gemittelt“ werden sind zu kombinieren mit der Richtung einer „mittleren“ Konfiguration. Die Funktion der Richtung, die bei Linienelementen der Vektor entlang der Elementachse war, übernimmt im dreidimensionalen Fall der Deformationsgradient ${}_{n+T}\mathbb{F}$. Die „gewichtete Mittelung“ kann aufgrund der Linearität der Spannungen bzgl. des GREEN-LAGRANGESchen Deformationstensors bereits auf Deformationsebene durchgeführt werden:

$${}_{n+\tau}\mathbb{E} = \tau {}_{n+I}\mathbb{E} + (1 - \tau) {}_n\mathbb{E} \quad (3.31)$$

⁶ AnfangsRandWertProblem

- Die Zeitdiskretisierung der kinematischen Größen erfolgt nach der symplektischen Formel (S_0).

Man bekommt die zeitdiskreten Bewegungsgleichungen:

$$\text{I: } \frac{1}{\Delta t} \langle {}_{n+I}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle \mathbb{S}({}_{n+I}\mathbb{E}), {}_{n+I}\mathbb{F}^T \cdot \delta\mathbb{F} \rangle = \langle \mathbf{f}^{ext}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle \bar{\mathbf{t}}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle \Big|_{\Gamma_\sigma} \quad (3.32)$$

$$\text{II: } {}_{n+I}\mathbf{v} = \frac{2}{\Delta t} \left({}_{n+I}\boldsymbol{\varphi} - {}_n\boldsymbol{\varphi} - \frac{\Delta t}{2} {}_n\mathbf{v} \right) \quad (3.33)$$

mit $\left\{ \begin{array}{cc} \Delta t & \longrightarrow \infty \\ T & = 1 \end{array} \right\}$ für Statik.

Es wird nun gezeigt, daß diese Diskretisierung den Impuls und den Drall der konservativen Bewegung konserviert.

Impulserhaltung

- Man betrachtet ein abgeschlossenes System: $\mathbf{f}^{ext}(t) = 0, \quad \forall t \in [{}_nt, {}_{n+1}t]$.
- Impulserhaltung bedeutet:
 ${}_{n+I}\mathbf{L} - {}_n\mathbf{L} = 0$ mit ${}_t\mathbf{L} = \int_{\mathcal{B}} {}_t\mathbf{p} \, d\mathcal{B}, \quad t = \{{}_nt, {}_{n+1}t\}$.
- Die Testfunktion in (3.32) sei ein konstanter Vektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$
beliebiger $\left\langle \begin{array}{c} \text{Größe und} \\ \text{Richtung} \end{array} \right\rangle \longrightarrow \delta\mathbb{F} = \nabla_{\mathbb{X}} \circ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$
- Wenn man das in die Bewegungsgleichung (3.32) einsetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \langle {}_{n+I}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \mathbb{S}, \mathbf{0} \rangle &= \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi} \rangle = 0 \\ \langle {}_{n+I}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \rangle &= ({}_{n+I}\mathbf{L} - {}_n\mathbf{L}) \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad {}_{n+I}\mathbf{L} = {}_n\mathbf{L} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Die Impulserhaltung ist also immer gegeben, unabhängig von dem für die Berechnung des Spannungstensors verwendeten Zeitintegrator und wird darum bei der Formulierung anderer 3D–Volumenelemente in späteren Abschnitten nach dem EMA nicht mehr betrachtet.

Drallerhaltung

- Man betrachtet wieder ein abgeschlossenes System:

$$\mathbf{f}^{ext}(t) = 0, \quad \forall t \in [{}_nt, {}_{n+1}t].$$

- Drallerhaltung bedeutet:

$${}_{n+1}\mathbf{J} - {}_n\mathbf{J} = \mathbf{0} \text{ mit } {}_t\mathbf{J} = \int_{\mathcal{B}} {}_t\boldsymbol{\varphi} \times {}_t\mathbf{p} \, d\mathcal{B}, \quad t = \{{}_nt, {}_{n+1}t\}.$$

- Die Testfunktion $\delta\boldsymbol{\varphi}$ in (3.32) sei ein konstantes Drehvektorfeld

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\xi} \times {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^3 \text{ beliebiger } \left\langle \begin{array}{c} \text{Größe und} \\ \text{Orientierung} \end{array} \right\rangle.$$

- Wenn man das in die Bewegungsgleichung (3.32) einsetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left\langle {}_{n+1}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \times {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \left\langle \mathbb{S}, {}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{F}^T \cdot \nabla_{\mathbb{X}} \circ \left[\boldsymbol{\xi} \times {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi} \times {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \right\rangle = 0 \\ & \left(\text{es gilt } \boldsymbol{\xi} \times {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} = \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} \cdot {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \text{ mit } \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymmetrisch}} \right) \\ & \frac{1}{\Delta t} \left\langle {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \times ({}_{n+1}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}), \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \left\langle \mathbb{S} \cdot {}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{F}^T, \nabla_{\mathbb{X}} \circ \left[\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} \cdot {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \right] \right\rangle = 0 = \\ & \frac{1}{\Delta t} \left\langle {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \times ({}_{n+1}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}), \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \underbrace{\left\langle \underbrace{{}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{F} \cdot \mathbb{S}^{(T)}}_{\text{symmetrisch}} \cdot \underbrace{{}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{F}^T, \widehat{\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}^T}}_{\text{anti.}} \right\rangle}_{=0} = 0 = \\ & \frac{1}{\Delta t} \left\langle {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \times ({}_{n+1}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}), \boldsymbol{\xi} \right\rangle = \frac{1}{\Delta t} \left\langle {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \times {}_{n+1}\mathbf{p} - {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi} \times {}_n\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle = 0 \\ & \quad \vdots \\ & \left\langle {}_{n+1}\boldsymbol{\varphi} \times {}_{n+1}\mathbf{p} - {}_n\boldsymbol{\varphi} \times {}_n\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle = \left(\left({}_{n+1}\mathbf{J} - {}_n\mathbf{J} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \text{q.e.d.} \right) \end{aligned}$$

Die Drallerhaltung ist bei 3D-Kontinuumselementen also *immer* gegeben, genau dann wenn man symmetrische Spannungstensoren kombiniert mit Deformationsgradienten der mittleren Verschiebungskonfiguration

${}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{F} = \frac{1}{2}({}_{n+1}\mathbb{F} + {}_n\mathbb{F}) \neq \mathbb{F}({}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi})$ verwendet und wird darum bei der Formulierung anderer 3D-Volumenelemente in späteren Abschnitten nach dem EMA nicht mehr betrachtet.

Energieerhaltung

Man versucht, den Spannungstensor durch einen skalarwertigen Parameter τ so zu modifizieren, daß die skalarwertige Bedingung der korrekten Energiebilanz im Zeitschritt erfüllt wird. Aus mechanischer Sicht bedeutet das folgendes:

- An der Energiebilanz einer Bewegung sind in der Praxis immer konservative und nichtkonservative Anteile beteiligt.
- Wenn die nichtkonservativen Anteile der Bewegung ständig Energie entziehen, dann haben sie dissipativen Charakter (viskose Dämpfung, trockene Reibung, plastische Deformationen).

Bei der Simulation ist sicherzustellen, daß diese Anteile in der Energiebilanz wirklich nie anregend wirken.

- Wenn die nichtkonservativen Anteile der Bewegung Energie hinzufügen, dann wirken sie anregend (äußere Lasten, Selbsterregung, usw.) Diese Anteile können zum „Blow-up“ des Systems führen, was praktisch dem Strukturversagen entspricht.

Bei der Simulation ist sicherzustellen, daß man entweder nur soviel Energie hinzuführt, daß die Struktur die Energie in ihren konservativen Anteile speichern kann oder hinreichend viel Energie wieder dissipiert. Anderenfalls benötigt man ein Versagensmodell für die Struktur, um die unaufhörliche Energiezufuhr entsprechend beantworten zu können.

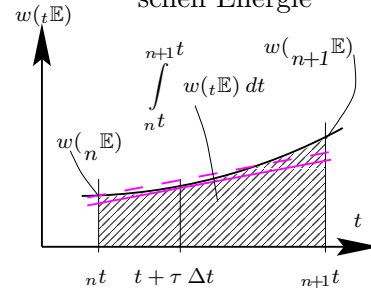
- Durch den Integrationsalgorithmus muß sichergestellt werden, daß die konservative Energie im System (potentielle und kinetische Energie) ihren konservativen Charakter beibehält. Es darf nicht zu Erregungen des Systems als Folge der diskreten Zeitintegration kommen. Sonst produziert der Integrator nichtkonservative Energieanteile, die bei mangelnder Strukturdissipation mit Sicherheit zum „Blow-up“ führen. Die Einführung von Dissipation aus dem einzigen Grunde, der Erregung durch den Zeitintegrator entgegenzuwirken ist als unphysikalisch abzulehnen.
- Die Beherrschung der konservativen Energiebilanz im Zeitschritt ist also neben dem korrekten Handling von Dissipation und Erregung als ein wesentlicher Bestandteil der physikalisch zulässigen Simulation von transienten Langzeitbewegungen anzusehen.

Es wird das Integral der spezifischen Deformationsenergie im Zeitschritt betrachtet. Es ist bei Existenz von $w({}_t\mathbb{E})$ immer möglich, ein τ dergestalt zu finden, daß gilt (s. Abb. 3.10):

$$\int_{n^t}^{n+1^t} w({}_t\mathbb{E}) dt = w({}_n\mathbb{E}) + \Delta t \left. \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \right|_{\bar{\tau}=\tau} w({}_{n+\bar{\tau}}\mathbb{E}) \quad (3.34)$$

Mit der Möglichkeit, ein solches τ zu finden, kann man das Integral der spezifischen Deformationsenergie im Zeitschritt $\Delta V = {}_{n+1}V - {}_nV = \int_{n^t}^{n+1^t} \langle w({}_t\mathbb{E}), 1 \rangle dt$

Abb. 3.10 Integral der elastischen Energie



exakt angeben. Deshalb braucht man nur noch eine Testfunktion zu finden, die in (3.32) eingesetzt die Differenz der kinetischen Energie $\Delta T = {}_{n+I}T - {}_nT$ ergibt. Diese Testfunktion wird dann Grundlage der Berechnung von τ und man generiert die Energieerhaltung zu $\Delta T + \Delta V = 0$.

Eine geeignete Testfunktion ist

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= {}_{n+I}\varphi - {}_n\varphi \\ &= \frac{\Delta t}{2} \left({}_n\mathbf{v} + {}_{n+I}\mathbf{v} \right) \quad \text{wegen } (S_0), \text{ Seite 64.}\end{aligned}\tag{3.35}$$

In (3.32) eingesetzt bekommt man

$$\begin{aligned}& \frac{\Delta t}{\Delta t} \left\langle {}_{n+I}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}, \frac{1}{2}({}_{n+I}\mathbf{v} + {}_n\mathbf{v}) \right\rangle + \left\langle \mathbb{S}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{F}, \nabla_{\mathbb{X}} \circ ({}_{n+I}\varphi - {}_n\varphi) \right\rangle \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left\langle {}_{n+I}\mathbf{p} \cdot {}_{n+I}\mathbf{v} - {}_n\mathbf{p} \cdot {}_n\mathbf{v}, 1 \right\rangle}_{\equiv \Delta T} + \frac{1}{2} \left\langle \mathbb{S}, \underbrace{({}_{n+I}\mathbb{F} + {}_n\mathbb{F}) \cdot ({}_{n+I}\mathbb{F} - {}_n\mathbb{F})}_{\equiv 2({}_{n+I}\mathbb{E} - {}_n\mathbb{E})} \right\rangle \\ &= \Delta T + \Delta V\end{aligned}\tag{3.36}$$

Die Bestimmungsgleichung für τ gewinnt man also aus der für Energieerhaltung notwendigen Bedingung $\Delta V = {}_{n+I}V - {}_nV = \left\langle \mathbb{S}, {}_{n+I}\mathbb{E} - {}_n\mathbb{E} \right\rangle$. Unter Ausnutzung des Zusammenhanges ${}_{n+I}V - {}_nV = \left\langle w({}_{n+I}\mathbb{E}) - w({}_n\mathbb{E}), 1 \right\rangle$ lautet die Bestimmungsgleichung für τ in lokaler Form letztendlich

$$\mathbb{S}({}_n\mathbb{E}) \cdot ({}_{n+I}\mathbb{E} - {}_n\mathbb{E}) = w({}_{n+I}\mathbb{E}) - w({}_n\mathbb{E})\tag{3.37}$$

Wenn man die Formel für den 2. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor (3.24) bei KIRCHHOFFschem Material einsetzt, bekommt man einen Projektionsparameter für Erhaltung der konservativen Energie von

$$\tau = \frac{1}{2}\tag{3.38}$$

der für beliebige KIRCHHOFFsche Materialparameter gilt.

Bei anderen elastischen Materialien gilt die gleiche Prozedur zur Ermittlung von τ , nur ist – bei Materialformulierungen mit anderer Funktion für die spezifische Deformationsenergie –

$$\tau \in [0, 1]\tag{3.39}$$

und muß durch Lösen der (nichtlinearen) Gleichung (3.37) lokal (an jedem Integrationspunkt) berechnet werden.

3.3.1.3 Rauminterpolation und Formulierung der Elemente durch konsistente Linearisierung

Die Rauminterpolation und daraus abgeleitete Elementformulierung erfolgt nach der standardmäßigen Vorgehensweise bei isoparametrischen Elementen. Es ist natürlich und plausibel, daß die Erhaltungseigenschaften auf die räumlich interpolierte Struktur übergehen.

Der Kernpunkt der isoparametrischen Elementformulierung besteht in der räumlichen Interpolation sowohl der Feldgrößen $\vec{f}(x, y, z) \mapsto \vec{f}^h(\xi, \eta, \zeta)$ als auch der Koordinaten des euklidischen Raumes $\langle x, y, z \rangle \mapsto \langle x^h(\xi, \eta, \zeta), y^h(\xi, \eta, \zeta), z^h(\xi, \eta, \zeta) \rangle$ mit den gleichen Formfunktionen. Dadurch hat man die wesentlichen Vorteile, daß

- nahezu beliebig geformte Elemente mit der gleichen numerischen Formulierung behandelt werden können,
- man die Elementintegration, die zur Berechnung von Gleichungen der Form $\mathcal{I} = \langle a(\mathbb{X}), b(\mathbb{X}) \rangle$ erforderlich sind, im isoparametrischen Raum mit der GAUSS-Quadratur durchführen kann, die sich als Addition der Funktionswerte von a und b mit konstanten Gewichten an a priori definierten Orten ${}^{iGauss}\mathbb{X}$ numerisch sehr einfach gestaltet.
- man die allerorten benötigten Ableitungen nach den Koordinaten des euklidischen Raumes $\langle x, y, z \rangle$ auf die sehr einfachen Ableitungen nach den isoparametrischen Koordinaten $\langle \xi, \eta, \zeta \rangle$ zurückführt, was mittels der zu dieser Koordinatentransformation gehörenden JACOBischen Funktionalmatrix äußerst einfach realisieren werden kann: Sie verkörpert bekanntermaßen die in Matrizenform geschriebene Kettenregel.
- man die Applikation von verteilten Lasten konsistent zur restlichen Elementformulierung durchführen kann.

Die entsprechenden Besonderheiten der Gleichungsformulierung werden der Übersichtlichkeit wegen hier nicht aufgeführt. Sie sind in vielen FE-Standardwerken nachlesbar. Man nehme also o.E.d.A. eine physikalische Referenzkonfiguration an, die der isoparametrischen Referenzkonfiguration entspricht: $x \equiv \xi, y \equiv \eta, z \equiv \zeta$. Damit kann die Koordinatentransformationen weggelassen werden. Wenn man wieder auf beliebig geformte Volumenelemente zurückkommen will, dann muß man die Koordinatentransformation einfach wieder einführen. Das verändert die Struktur der Gleichungen nicht.

Das Kontinuum wird durch n_{node} Stützstellen (\Leftrightarrow Knoten) A mit den materiellen Koordinaten ${}^A\mathbb{X}$ approximiert. Die räumlich kontinuierlichen Feldgrößen $\vec{f}(x, y, z)$ werden durch ein interpoliertes Feld mit den Werten $\vec{f}({}^A\mathbb{X})$ an den Knoten ersetzt. Zur Interpolation werden Formfunktionen ${}^AN(\mathbf{X})$ benutzt, die einzig stetig sein müssen und der Vollständigkeitsbedingung

$${}^AN({}^B\mathbf{X}) = \delta_{AB} \quad (3.40)$$

zu genügen haben. Die Güte der Approximation der kontinuierlichen Feldgrößen kann man sowohl durch Steigerung der Knotenanzahl, als auch durch adaptivere Formfunktionen stetig und (theoretisch) beliebig genau erreichen.

Man schreibt

$$\begin{aligned}
 \delta \boldsymbol{\varphi}(\mathbb{X}) &\mapsto \delta \boldsymbol{\varphi}^h(\mathbb{X}) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^A N(\mathbb{X}) \delta {}^A \boldsymbol{\varphi} \\
 {}_{n+T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbb{X}) &\mapsto {}_{n+T} \boldsymbol{\varphi}^h(\mathbb{X}) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^A N(\mathbb{X}) (T {}_{n+1}^A \boldsymbol{\varphi} + (1-T) {}_n^A \boldsymbol{\varphi}) \\
 {}_{n+T} \mathbf{v}(\mathbb{X}) &\mapsto {}_{n+T} \mathbf{v}^h(\mathbb{X}) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^A N(\mathbb{X}) (T {}_{n+1}^A \mathbf{v} + (1-T) {}_n^A \mathbf{v}) \\
 {}_{n+T} \mathbb{F}(\mathbb{X}) &\mapsto {}_{n+T} \mathbb{F}^h(\mathbb{X}) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}_{n+T}^A \boldsymbol{\varphi} \circ \underbrace{\left(\nabla_{\mathbb{X}} \circ {}^A N(\mathbb{X}) \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}[{}^A N]}
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{D}[{}^A N] = \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^A N(\mathbb{X})}{X_1} \\ \frac{\partial {}^A N(\mathbb{X})}{X_2} \\ \frac{\partial {}^A N(\mathbb{X})}{X_3} \end{pmatrix} \text{ oder } = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial {}^A N(\xi, \eta, \zeta)}{X_1} \\ \frac{\partial {}^A N(\xi, \eta, \zeta)}{X_2} \\ \frac{\partial {}^A N(\xi, \eta, \zeta)}{X_3} \end{pmatrix}}_{\text{isoparametrisch}} \quad (3.41)$$

Damit bekommen die zeitdiskreten Bewegungsgleichungen die Gestalt

$$\begin{aligned}
 \text{I:} \quad & \frac{1}{\Delta t} \left\langle {}_{n+1} \mathbf{v}^h - {}_n \mathbf{v}^h, {}_0 \rho \delta \boldsymbol{\varphi}^h \right\rangle + \left\langle {}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F}^h \cdot \mathbb{S}({}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{E}^h), \delta \mathbb{F}^{hT} \right\rangle \\
 & = \left\langle \mathbf{f}^{ext}, \delta \boldsymbol{\varphi}^h \right\rangle + \left\langle \bar{\mathbf{t}}, \delta \boldsymbol{\varphi}^h \right\rangle \Big|_{\Gamma_\sigma} \\
 \text{II:} \quad & {}_{n+1}^A \mathbf{v} = \frac{2}{\Delta t} \left({}_{n+1}^A \boldsymbol{\varphi} - {}_n^A \boldsymbol{\varphi} - \frac{\Delta t}{2} {}_n^A \mathbf{v} \right)
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (II.) in (I.) sowie durch Anwendung von (3.41) kann man (I.) leicht in eine Struktur umformen, in der man die Terme, die bei den beliebigen virtuellen Verrückungen $\delta {}^A \boldsymbol{\varphi}$ stehen, abspalten kann. Diese Terme stellen die Knotenkräfte am Knoten A zufolge der elastischen Spannungen, der Trägheit und der äußeren Kräfte dar⁷.

$${}_T^A \mathbf{F}^{int} = \int_{\mathcal{B}} {}_T^A \mathbf{f}^{int} d\mathcal{B} \quad \text{mit} \quad {}_T^A \mathbf{f}^{int} = {}_{n+T} \mathbb{F} \cdot \mathbb{S}({}_{n+T} \mathbb{E}) \mathbf{D}[{}^A N] \quad (3.42)$$

⁷Die Indices $(..)^h$ werden fortan aus Übersichtlichkeitsgründen weggelassen.

Man sollte sich jedoch vergegenwärtigen, daß immer dann eine durch Interpolation gewonnene Größe gemeint ist, wenn am Symbol der Feldgröße nicht explizit eine Knotennummer erscheint.

$$\begin{aligned}
{}^A_T \mathbf{F}^{dyn} &= \int_{\mathcal{B}} {}^A_T \mathbf{f}^{dyn} d\mathcal{B} \quad \leadsto \quad {}^A_T \mathbf{F}^{dyn} = \frac{2}{\Delta t^2} \sum_{B=1}^{n_{node}} {}^{AB}M ({}^B_{n+1} \boldsymbol{\varphi} - {}^B_n \boldsymbol{\varphi} - \Delta t {}^B_n \mathbf{v}) \\
{}^{AB}M &= \int_{\mathcal{B}} {}^A N {}^B N d\mathcal{B}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
{}^A_T \mathbf{F}^{ext} &= \int_{\mathcal{B}} {}^A_T \mathbf{f}^{ext} d\mathcal{B} \quad + \quad \int_{\Gamma_\sigma} {}^A_T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_\sigma \\
\text{mit} \quad {}^A_T \mathbf{f}^{ext} &= {}_{n+T} \mathbf{f}^{ext} {}^A N, \quad {}^A_T \bar{\mathbf{t}} \text{ analog}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Die Berechnung der JACOBIMatrix erfolgt nach dem in Abschnitt 3.2.3 und den Gleichungen (3.15) und (3.19) skizzierten Weg. Sie wird für die Realisierung der impliziten inkrementell-iterativen Lösungsstrategie benötigt.

Es wird eine lokale Formulierung vorgenommen, was nur bedeutet, daß die berechneten Größen anschließend zur Elementmatrix hochintegriert werden:

$${}^{AB} \underline{\underline{K}}^{int}_T = {}^{AB} K^{int}_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \underline{\mathbf{e}}_j = \int_{\mathcal{B}} {}^{AB} k^{int}_{ij} d\mathcal{B} \underline{\mathbf{e}}_i \underline{\mathbf{e}}_j$$

$$\begin{aligned}
{}^{AB} k^{int}_{ij} &= \frac{\partial}{\partial {}^B_{n+1} \varphi_j} \left({}_{n+T} F_{ik} \left[\mathbb{S}({}_{n+T} \mathbb{E}) \right]_{kl} {}^A N_l \right) \\
&= \underbrace{{}^T {}^B N_k \left[\mathbb{S}({}_{n+T} \mathbb{E}) \right]_{kl} {}^A N_l \delta_{ij}}_{k^{geom}_{ij}} + \underbrace{{}_{n+T} F_{ik} \frac{\partial}{\partial {}^B_{n+1} \varphi_j} \left[\mathbb{S}({}_{n+T} \mathbb{E}) \right]_{kl} {}^A N_l}_{k^{phys}_{ij}}
\end{aligned}$$

mit $T = \frac{1}{2}$. Damit ist k^{geom}_{ij} direkt berechenbar.

Für die Berechnung von k^{phys}_{ij} muß zunächst die Ableitung von S_{kl} und E_{pq} in folgender Nebenrechnung ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
{}^T S_{kl} &= \overset{4}{C}_{klpq} {}_{n+\frac{1}{2}} E_{pq} \\
{}_{n+1} E_{pq} &= \frac{1}{2} {}_{n+1} C_{pq} - \frac{1}{2} \delta_{pq} \\
{}_{n+1} C_{pq} &= {}_{n+1} F_{rp} \quad {}_{n+1} F_{rq}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_{n+1} F_{ik}}{\partial_{n+1} \varphi_j} &= \frac{\partial \sum_{Q=1}^{n_{node}} Q \varphi_i Q N_k}{\partial_{n+1} \varphi_j} = \delta_{BQ} \delta_{ij} Q N_k = {}^B N_k \delta_{ij} \\
&\leadsto \frac{\partial_{n+1} C_{pq}}{\partial_{n+1} \varphi_j} = {}^B N_p {}_{n+1} F_{jq} + {}_{n+1} F_{jp} {}^B N_q \\
&\leadsto \frac{\partial_{n+1} E_{pq}}{\partial_{n+1} \varphi_j} = \frac{1}{2} \left[{}^B N_p {}_{n+1} F_{jq} + {}_{n+1} F_{jp} {}^B N_q \right] \\
&\leadsto \frac{\partial_T S_{kl}}{\partial_{n+1} \varphi_j} = \underbrace{{}^4 C_{klpq}}_{=0} \left[T \frac{\partial_{n+1} E_{pq}}{\partial_{n+1} \varphi_j} + (1-T) \underbrace{\frac{\partial_n E_{pq}}{\partial_n \varphi_j}}_{=0} \right] \\
&= \frac{T}{2} \left[{}^4 C_{klpq} {}^B N_p {}_{n+1} F_{jq} + {}^4 C_{klpq} {}_{n+1} F_{jp} {}^B N_q \right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Nun wird der Materialanteil an der JACOBI-Matrix k_{ij}^{phys} angegeben:

$$\begin{aligned}
{}^{AB} k_{ij}^{phys} &= \frac{T}{2} {}_{n+1} F_{ik} {}^A N_l \left[\underbrace{{}^4 C_{klpq} {}^B N_p {}_{n+1} F_{jq}}_{=} + \underbrace{{}^4 C_{klpq} {}_{n+1} F_{jp} {}^B N_q}_{=} \right] \\
&\leadsto {}^{AB} k_{ij}^{phys} = T {}_{n+1} F_{ik} {}^A N_l {}^4 C_{lkpq} {}^B N_q {}_{n+1} F_{jp}
\end{aligned}$$

und in symbolischer Schreibweise:

$${}^{AB} \underline{\underline{\mathbf{k}}}_T^{phys} = T {}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \circ \mathbf{D}[{}^A \mathbf{N}] \cdot \overset{<4>}{\mathbb{C}} \cdot \mathbf{D}[{}^B \mathbf{N}] \circ {}_{n+1} \mathbb{F}^T \tag{3.46}$$

Jetzt noch die vollständige Formel für die JACOBI-Matrix der elastischen Kräfte:

$$\begin{aligned}
{}^{AB} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_T^{int} &= T \int_{\mathcal{B}} \mathbf{D}[{}^B \mathbf{N}] \cdot \mathbb{S}({}_{n+1} \mathbb{E}) \cdot \mathbf{D}[{}^A \mathbf{N}] \mathbf{1} \\
&\quad + \left({}_{n+1} \mathbb{F} \circ \mathbf{D}[{}^A \mathbf{N}] \right) \cdot \overset{<4>}{\mathbb{C}} \cdot \left(\mathbf{D}[{}^B \mathbf{N}] \circ {}_{n+1} \mathbb{F}^T \right) d\mathcal{B}
\end{aligned}$$

bzw. in Komponentenschreibweise:

$${}^{AB} K_{ij}^{int} = T \int_{\mathcal{B}} {}^B N_k \left[\mathbb{S}({}_{n+1} \mathbb{E}) \right]_{kl} {}^A N_l \delta_{ij} + {}_{n+1} F_{ik} {}^A N_l {}^4 C_{lkpq} {}^B N_q {}_{n+1} F_{jp} d\mathcal{B} \tag{3.47}$$

Bemerkungen

- Die Matrix hat eine schwach unsymmetrische Struktur (Multiplikation des Werkstoffensors von links mit ${}_{n+T}\mathbb{F}$, von rechts aber mit ${}_{n+I}\mathbb{F}$), die bei statischen Problemen und für kleine Zeitschritte verschwindet.
- Es wurde für die Herleitung eine gemischt indizistisch–symbolische Schreibweise gewählt, um an Stellen, wo in der Literatur ([Tarnow.93]) mehrdeutige Lesarten möglich sind, eindeutige Formeln zu liefern. Die orthonormale Vektorbasis erleichtert das Springen zwischen beiden Schreibweisen sehr. Außerdem wird diese an die Belange der Rechnung angepaßte gemischte Schreibweise in allem folgenden Abschnitten von Kapitel 3 weiterbenutzt.
- In den Formeln wird der Parameter $n + T$ als Platzhalter für die Behandlung statischer Probleme mitgeführt. Für dynamische Simulationen gilt bei KIRCHHOFFSchem Material stets $T = \frac{1}{2}$, bei statischen Simulationen gilt stets $T = 1$, bei dynamischen Simulationen anderer Materialien $T \in [0, 1]$.
- Für die Komponente j des Vektors $\mathbf{D}[{}^A N]$ wurde die Schreibweise ${}^A N_j$ gewählt.
- Die Schreibweise für die Komponenten des Rechten CAUCHY–GREEN-Tensors C_{ij} sollte nicht mit denen des elastischen Werkstoffensors ${}^4 C_{klpq}$ verwechselt werden.
- Die JACOBI-Matrix der kinetischen Knotenkräfte ${}_T F^{dyn}$ und der äußeren Knotenkräfte ${}_T F^{ext}$ (s. (3.44)) wird in Abschnitt 3.3.2.3 nachgereicht und ist identisch zu der auch bei dieser Elementformulierung anzuwendenden Formulierung.

3.3.2 Volumenelemente für Zonen großer Deformationen

Wie zu Beginn von Abschnitt 3.3 diskutiert ist das MOONEY–RIVLIN-Materialmodell gut für die Modellierung der Reifenbereiche mit mäßigen bis großen Deformationen geeignet.

Dieses Modell gehört zu einer größeren Klasse von Materialien zur Beschreibung von Elastomeren, die allesamt eine ähnlich aufgebaute Funktion für die spezifische Deformationsenergie zur Grundlage haben: Sie wird als Polynom in den ersten beiden Invarianten des (Rechten oder Linken) CAUCHY–GREENSchen Deformationstensors bzw. den Streckungsmaßen formuliert.

$$w(I_{\mathbb{C}}, II_{\mathbb{C}}) = C_{10}(I_{\mathbb{C}} - 3) + C_{01}(II_{\mathbb{C}} - 3) + C_{11}(I_{\mathbb{C}} - 3)(II_{\mathbb{C}} - 3) + C_{20}(I_{\mathbb{C}} - 3)^2 + C_{30}(I_{\mathbb{C}} - 3)^3 + \dots \text{ usw.} \quad (3.48)$$

Die dritte Invariante $III_{\mathbb{C}}$ kann bei inkompressiblen bzw. quasi-inkompressiblen Materialien in der Deformationsenergie nicht vorkommen, da sie die Inkompressibilität beschreibt und als Nebenbedingung mit singulärem Deformationspo-

tential behandelt wird. Das Fehlen von höheren Konstanten im Polynom (3.48) definiert spezielle Materialien:

$$\begin{aligned}
 \text{MOONEY-RIVLIN-Material} & : C_{11} = C_{20} = C_{30} = \dots = 0 \\
 & \leadsto w_{\text{mooney}} = C_{10}(I_{\mathbb{C}} - 3) + C_{01}(II_{\mathbb{C}} - 3) \\
 \text{NEO-HOOKE-Material} & : \text{auch noch } C_{01} = 0 \\
 & \leadsto w_{\text{neohooke}} = C_{10}(I_{\mathbb{C}} - 3)
 \end{aligned}$$

Hinweis:

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbb{C}} &= \mathbf{1} \cdot \mathbb{C} = \text{tr}(\mathbb{C}) \\
 II_{\mathbb{C}} &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{1} \cdot \mathbb{C})^2 - \mathbf{1} \cdot (\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}) \right] = \frac{1}{2} \left[\text{tr}^2(\mathbb{C}) - \text{tr}(\mathbb{C}^2) \right]
 \end{aligned}$$

Das NEO-HOOKE-Material ist zu primitiv für die Beschreibung von Gummi in einer Reifenstruktur.

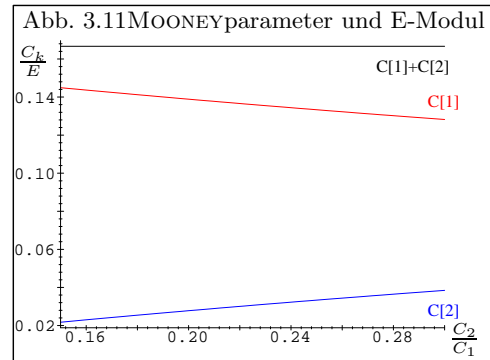
Eine Vorstellung von den Materialkonstanten des MOONEY-RIVLIN-Materials bekommt man aus einem einfachen Zugversuch. Die Zugkraft berechnet sich aus $F(\lambda_1) = 2A_0 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^3}\right) \underbrace{(\lambda_1 C_{10} + C_{01})}_{\text{Geradengleichung}}$ mit $\lambda_1 = \frac{L}{L_0}$. Wenn man nun den Term

$\frac{F(\lambda_1)}{2A_0 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^3}\right)}$ über λ_1 aufträgt und der Graph nahezu einer Geraden entspricht, dann hat man ein Material vor sich, daß sich gut mit der Deformationsenergiefunktion $w(\mathbb{C}) = C_1(I_{\mathbb{C}} - 3) + C_2(II_{\mathbb{C}} - 3)$ beschreiben läßt.

Aus uniformen 2D-Zugversuchen haben [Green.60] ermittelt, daß bei Streckungen bis 200%, (was bei dem o.g. 2D-Zug einem $II_{\mathbb{C}} \approx 4.25$ entspricht,) das Verhältnis der Materialkonstanten mit $\frac{C_2}{C_1} \approx 0.16$ gut beschrieben ist. Bei 1D-Zugversuchen wurden wesentlich größere und bei Torsionsversuchen kleinere Verhältniszahlen für vulkanisierten Gummi ermittelt.

Mit den Werten aus obiger Abbildung 3.11 kann man sich überschlägliche Parameter für Gummi mit bekanntem E-Modul besorgen.

Eine schöne Übersicht über verschiedene Ansätze zur Beschreibung der Materialeigenschaften besonders für Elastomere findet man in [Kaliske.95].



3.3.2.1 Das *Hamilton*-Funktional mit Nebenbedingung als Sonderfall des Dreifeld-*Hu-Washizu*-Funktionals für quasi-inkompressible elastische Volumenelemente Kontinuumsmechanische Basis

Klassische *Hamilton*sche und Locking

Analog zur Vorgehensweise bei konservativen elastischen Materialien, bei denen man die spezifische Deformationsenergie durch eine skalarwertige Funktion in geeignet erscheinenden Deformationstensoren darstellt, besitzt das klassische MOONEY–RIVLIN-Material ein HAMILTON-Funktional der Form

$${}_t\mathcal{H} = \underbrace{\left\langle w^{iso}({}_t\mathbb{C}, {}_t\mathbb{C}), 1 \right\rangle}_{{}_tV^{int}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \rho_t \mathbf{v}, {}_t\mathbf{v} \right\rangle}_{{}_tT}$$

In diesem Funktional ist die Volumendilatation nicht explizit enthalten. Zur Beschreibung dieser Eigenschaft wird für inkompressibles Material eine Nebenbedingung ausgesprochen:

$$\left\langle {}_tJ - 1, 1 \right\rangle = 0, \quad \text{mit } {}_tJ = \mathbb{I} \mathbb{F} = \det {}_t\mathbb{F}$$

oder für schwach kompressible Materialien mit den Kompressionsmoduln K_k ein Potentialterm, ausgedrückt in der Volumendilatation z.B. der Form

$${}_tV^Z = \left\langle w^{vol}, 1 \right\rangle, \quad \text{mit } w^{vol} = \sum_{k=0}^{n_k} K_k ({}_tJ - 1)^k$$

Daraus bildet man eine LAGRANGE-modifizierte HAMILTONsche:

$${}_t\mathcal{H}^L = \left\langle w^{iso}({}_t\mathbb{C}, {}_t\mathbb{C}), 1 \right\rangle + \underbrace{\left\langle {}_tp(\mathbb{I} \mathbb{F} - 1), 1 \right\rangle}_{{}_tV^Z} + \frac{1}{2} \left\langle \rho_t \mathbf{v}, {}_t\mathbf{v} \right\rangle$$

Formulierungen dieses weitverbreiteten, klassischen Typs sind aus Sicht der FEM problematisch, da man regelmäßig zu inkompatiblen Interpolationen des Verschiebungsfeldes ${}_t\boldsymbol{\varphi}^h$ und des hydrostatischen Spannungsfeldes ${}_tp$ kommt. Diese Problematik resultiert daher, daß man bei der Formulierung von Volumenelementen gewöhnlich das Verschiebungsfeld je nach Formfunktion mit deutlich mehr Knoten interpoliert als das Feld der Zwangsspannungen. Meist wird nur ein einziger zusätzlicher Knoten mit einem Freiheitsgrad je Element benutzt, was möglicherweise nur einen einzigen LAGRANGESchen Multiplier für die Forderung nach Volumenkonstanz eines Bereiches bedeutet, der mit vielen Knoten eine sehr viel variabelere Elementkinematik besitzt.

Das führt zu dem sehr unangenehmen Problem des Mesh-Lockings, einem Effekt, daß der Algorithmus nicht in der Lage ist, eine Lösung im Zeitschritt zu finden, die gleichzeitig die Energie minimiert und die Zwangsbedingung der

Volumenkonstanz erfüllt. Ein möglicher Ausweg ist die Verwendung von mehr Freiheitsgraden für die Beschreibung des Feldes der Zwangsspannungen, wodurch die Inkompatibilität zwischen den Interpolationsformen gemildert werden kann. Umfangreiche Untersuchungen hierzu wurden in [Bogert.91a] anhand des sogenannten Constraint-Countings vorgenommen.

Mit Sicherheit wird das Mesh-Locking bei diesem Funktional aber nur verhindert, wenn die Zwangsspannungen und die Verschiebungen völlig gleichartig interpoliert werden, man also an jedem Knoten den Verschiebungsfreiheitsgraden einen Spannungsfreiheitsgrad hinzufügt.

Diese Vorgehensweise ist teuer und deshalb bei transient-dynamischen Problemen abzulehnen.

Multiplikativer Split der Deformationstensoren, Überwindung des Locking

In der Literatur wird ein sehr viel effizienterer Weg gezeigt. Es wird die Interpolation des Verschiebungsfeldes von der Interpolation des Feldes der Zwangsspannungen vollständig entkoppelt.

Die kontinuumsmechanische Grundlage für die Entkopplung ist die multiplikative Aufspaltung der Bewegung und damit der Deformationen in einen deviatorischen und einen isochoren Anteil. Die Aufspaltung der spezifischen Deformationsenergie in volumetrische und deviatorische Anteile ist in der Literatur so weit verbreitet, daß man sie bereits klassisch nennen kann. Sie erfolgt nach natürlichem Verständnis summativ. Deshalb waren die ersten Ansätze, diese Aufspaltung auf die verantwortlichen Deformationen zu übertragen, ebenfalls summativer Natur.

Die Bewegung wird damit mittels der drei Felder

- Verschiebungsfeld⁸ ${}_t\mathbf{u}(\mathbb{X})$
- Spannungsfeld ${}_t\mathbf{p}, {}_t\lambda$ (LAGRANGESche Multiplikatoren) und den
- Dilatationsfeld ${}_t\theta^2(\mathbb{X})$

parametrisiert.

Im weiteren Text gelten folgende (z.T. zweckmäßig gewählte) Schreibweisen:

$$\begin{aligned} {}_t\mathbb{C}^{dev} &= \det {}_t\mathbb{C}^{-\frac{1}{3}} {}_t\mathbb{C} & {}_t\mathbb{C}^{vol} &= {}_t\theta^2 \mathbf{1} & {}_tk^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{{}_t\theta^2}{{}_t\mathbb{C}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ {}_t\bar{\mathbb{C}} &\stackrel{\text{def}}{=} {}_t\mathbb{C}^{vol} \cdot {}_t\mathbb{C}^{dev} & \leftrightarrow {}_t\bar{\mathbb{C}} &= {}_tk^1 {}_t\mathbb{C} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Die Anteile der aufgespaltenen Funktion der spezifischen Deformationsenergie werden geschrieben:

$$w({}_t\bar{\mathbb{C}}, {}_t\theta^2) = \underbrace{w_{{}_t\theta^2}({}_t\bar{\mathbb{C}})}_{\text{deviatorische Energie}} + \underbrace{w_{{}_t\bar{\mathbb{C}}}({}_t\theta^2)}_{\text{Dilatationsenergie}} \quad (3.50)$$

⁸mit dem dazugehörigen Geschwindigkeitsfeld ${}_t\mathbf{v}(\mathbb{X})$

Es werden folgende Rechenregeln verwendet:

$$\begin{aligned}\nabla_{t\mathbb{C}} \circ_t \bar{\mathbb{C}} &= {}_t k^1 \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} {}_t \bar{\mathbb{C}} \circ {}_t \bar{\mathbb{C}}^{-1} \right] & {}_t \bar{\mathbb{C}} \circ {}_t \bar{\mathbb{C}}^{-1} &= {}_t \mathbb{C} \circ {}_t \mathbb{C}^{-1} \\ \nabla_{t\theta^2} \circ_t \bar{\mathbb{C}} &= \frac{1}{3 {}_t \theta^2} {}_t \bar{\mathbb{C}}\end{aligned}\quad (3.51)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Es ist zu beachten, daß sich der Zustandsvektor erweitert hat: $\mathbf{z} = \left({}_t \mathbf{p}, {}_t \boldsymbol{\varphi}, {}_t \theta^2, {}_t p, {}_t \lambda \right)^T$ ⁹. Bezüglich des Verschiebungsfeldes und der kanonischen Impulse wird die HAMILTON-Prozedur angewendet, bzgl. der anderen Zustandsgrößen wird einfach variiert, um die Stationaritätsbedingung des Funktional zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\text{I: } \left\langle \nabla_{t\boldsymbol{\varphi}} \mathcal{H}_L, \delta \boldsymbol{\varphi} \right\rangle &= \left\langle \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2} \cdot \nabla_{t\mathbb{C}} \circ {}_t \bar{\mathbb{C}}^T \cdot \underbrace{\nabla_{t\boldsymbol{\varphi}} \circ {}_t \mathbb{C}^T, \delta \boldsymbol{\varphi}}_{= {}_t \mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} + \delta \mathbb{F}^T \cdot {}_t \mathbb{F}} \right\rangle - \delta {}_t \boldsymbol{\varphi} W^{ext}({}_t \boldsymbol{\varphi}) \\ &\quad + \left\langle {}_t p \det {}_t \mathbb{C} \cdot {}_t \mathbb{C}^{-1} \cdot \underbrace{\nabla_{t\boldsymbol{\varphi}} \circ {}_t \mathbb{C}^T, \delta \boldsymbol{\varphi}}_{= {}_t \mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} + \delta \mathbb{F}^T \cdot {}_t \mathbb{F}} \right\rangle \stackrel{\text{Hamil}}{=} \stackrel{-\text{ton}}{=} \left\langle - {}_t \dot{\mathbf{p}}, \delta \mathbf{p} \right\rangle \\ \text{II: } \left\langle \nabla_{t\mathbf{p}} \mathcal{H}_L, \delta \mathbf{p} \right\rangle &= \left\langle {}_0 \rho^{-1} {}_t \mathbf{p}, \delta \mathbf{p} \right\rangle \stackrel{\text{Hamil}}{=} \stackrel{-\text{ton}}{=} \left\langle {}_t \dot{\mathbf{p}}, \delta \mathbf{p} \right\rangle \\ \text{III: } \left\langle \nabla_{t\theta^2} \mathcal{H}_L, \delta \theta^2 \right\rangle &= \left\langle \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2} \left({}_t \bar{\mathbb{C}} \right) \cdot \frac{1}{3 {}_t \theta^2} {}_t \bar{\mathbb{C}}^T + \underbrace{\nabla_{t\theta^2} w_{t\bar{\mathbb{C}}} \left({}_t \theta^2 \right)}_{=0 \text{ wegen V}} + {}_t \lambda - {}_t p, \delta \theta^2 \right\rangle \\ &= 0 \\ \text{IV: } \left\langle \nabla_{t p} \mathcal{H}_L, \delta p \right\rangle &= \left\langle \det {}_t \mathbb{C} - {}_t \theta^2, \delta p \right\rangle = 0 \\ \text{V: } \left\langle \nabla_{t\lambda} \mathcal{H}_L, \delta \lambda \right\rangle &= \left\langle {}_t \theta^2 - 1, \delta \lambda \right\rangle = 0\end{aligned}\quad (3.52)$$

Die Gleichungen I und III werden vereinfacht:

$$\begin{aligned}\text{I': } \left\langle {}_t \mathbf{p}, \delta \boldsymbol{\varphi} \right\rangle &+ \left\langle 2 {}_t k^1 \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2} \left({}_t \bar{\mathbb{C}} \right) \cdot \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} {}_t \bar{\mathbb{C}} \circ {}_t \bar{\mathbb{C}}^{-1} \right], {}_t \mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} \right\rangle \\ &+ \left\langle 2 {}_t p \det {}_t \mathbb{C} \cdot {}_t \mathbb{C}^{-1}, {}_t \mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} \right\rangle = \delta {}_t \boldsymbol{\varphi} W^{ext} \\ \text{III': } \left\langle {}_t p, \delta \theta^2 \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{3 {}_t \theta^2} \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2} \left({}_t \bar{\mathbb{C}} \right) \cdot {}_t \bar{\mathbb{C}}^T + {}_t \lambda, \delta \theta^2 \right\rangle\end{aligned}$$

Gleichungen III' und IV werden verwendet, um in I' die Größen ${}_t p$ und ${}_t \theta^2$ zu eliminieren, Gleichung II beschreibt die Kinematik (gemeint ist der Zusammenhang zwischen ${}_t \dot{\mathbf{p}}$ und ${}_t \mathbf{v}$), Gleichung V ist die algebraische Gleichung für den

⁹Man beachte die leicht unterschiedliche Schreibweise zwischen den kanonischen Impulsen ${}_t \mathbf{p} = {}_0 \rho {}_t \mathbf{v}$ und dem hydrostatischen Druck ${}_t p$

LAGRANGESchen Multiplier ${}_t\lambda$.

In Gleichung I' wird die Kinetik der Bewegungsgleichungen erkannt.

Nun soll die Bedeutung der einzelnen Terme in Gleichung I' diskutiert werden, damit daraus eine sinnvolle Vorgehensweise bei der Zeitdiskretisierung abgeleitet werden kann:

- 1.) Der erste Term ist die Variation der kinetischen Energie $\delta {}_t\boldsymbol{\varphi} T = \langle {}_t\mathbf{p}, \delta \boldsymbol{\varphi} \rangle$
- 2.) Es gilt: $\delta {}_t\boldsymbol{\varphi} \mathbb{E} = \frac{1}{2}(\delta \mathbb{F}^T \cdot {}_t\mathbb{F} + {}_t\mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F})$ und ${}_t\mathbb{S}^{elast} = 2 \frac{\partial {}_t w}{\partial \mathbb{C}} = \dots = 2 {}_t k^1 \nabla_{\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2}({}_t\bar{\mathbb{C}}) \cdot \left[\frac{4}{3} \mathbb{I} - \frac{1}{3} {}_t\bar{\mathbb{C}} \circ {}_t\bar{\mathbb{C}}^{-1} \right]$.

Damit stellt der zweite Term die Variation des elastischen Spannungspotentials dar: $\delta {}_t\boldsymbol{\varphi} V^{int} = \langle {}_t\mathbb{S}^{elast}, \delta {}_t\boldsymbol{\varphi} \mathbb{E} \rangle$.

- 3.) Die Zwangsspannungen zufolge der Nebenbedingung der Volumenkonstanz sind in der räumlichen Basis der Kugeltensor ${}_t\boldsymbol{\sigma}^Z = {}_t p \mathbf{1}$.

Ein Pullback in die Inertialbasis ergibt gemäß der PIOLA-Transformation den 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor der Zwangsspannungen:

$${}_t\mathbb{S}^Z = {}_t J {}_t\mathbb{F}^{-1} \cdot {}_t\boldsymbol{\sigma}^Z \cdot {}_t\mathbb{F}^{-T} = {}_t J {}_t p {}_t\mathbb{C}^{-1}.$$

Damit ist der dritte Term ein Vielfaches der Variation des Zwangspotentials $\kappa \delta {}_t\boldsymbol{\varphi} V^Z = \langle 2 {}_t J {}_t\mathbb{S}^Z, \delta {}_t\boldsymbol{\varphi} \mathbb{E} \rangle$. Der Faktor κ ist zulässig, da die Variation des Zwangspotentials zufolge der Orthogonalität der Zwangsspannungen zur Bewegung verschwindet und bei einer zulässigen Konfiguration $\Delta t J = 1$ gilt.

3.3.2.2 Herleitung der zeitdiskreten Bewegungsgleichungen nach dem Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus als Differential-Algebraisches System

Nachdem die physikalische Bedeutung der Terme in Gleichung I' identifiziert wurde, kann die Idee des EMA in gleicher Art und Weise wie in Abschnitt 3.3.1.2 benutzt werden, um eine Zeitdiskretisierung $[0, t_{End}] \mapsto \bigcup_{n=1}^{N_n} [{}_n t, {}_{n+1} t]$ zu definieren:

$$\begin{aligned} \text{I}'': \quad & \frac{1}{\Delta t} \langle {}_{n+1}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}, \delta \boldsymbol{\varphi} \rangle + \\ & \left\langle 2 {}_\tau k^1 \nabla_{\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2}({}_t\bar{\mathbb{C}}) \cdot \left[\frac{4}{3} \mathbb{I} - \frac{1}{3} {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \circ {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}^{-1} \right], {}_{n+T}\mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} \right\rangle_{\substack{{}_t\bar{\mathbb{C}} = {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \\ {}_t\mathbb{C} = {}_{n+\tau}\mathbb{C}}} \\ & + \left\langle 2 {}_{n+T} p_\alpha [\det {}_t\mathbb{C} {}_t\mathbb{C}^{-1}], {}_{n+T}\mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} \right\rangle \quad (3.53) \\ & = \left\langle {}_{n+\beta_1} \mathbf{f}^{ext}, \delta \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \left\langle {}_{n+\beta_2} \bar{\mathbf{t}}, \delta \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{\Gamma_\sigma} \\ \text{II}'': \quad & \frac{1}{\Delta t} \langle {}_{n+1}\boldsymbol{\varphi} - {}_n\boldsymbol{\varphi}, \delta \mathbf{p} \rangle = \left\langle {}_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{v}, \delta \mathbf{p} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III}'' : \quad & \left\langle {}_{n+T}p, \delta\theta^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3 {}_{n+T}\theta^2} \nabla_{\bar{\mathbb{C}}} w_{\theta^2}({}_t\bar{\mathbb{C}}) \Big|_{\substack{{}_t\bar{\mathbb{C}} = {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \\ {}_{n+T}\bar{\mathbb{C}} + {}_{n+T}\lambda}} \delta\theta^2 \right\rangle \\
\text{IV}'' : \quad & \left\langle \det {}_{n+T}\mathbb{C} - {}_{n+T}\theta^2, \delta p \right\rangle = 0 \\
\text{V}'' : \quad & \left\langle {}_{n+I}\theta^2, \delta\lambda \right\rangle = \left\langle 1, \delta\lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

Dabei gelten die Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
{}_{n+\tau}\theta^2 &= \tau {}_{n+I}(\theta^2) + (1 - \tau) {}_n(\theta^2) \\
{}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} &= {}_{n+\tau}k^{\star 1} {}_{n+\tau}\mathbb{C} \quad \text{mit } {}_{n+\tau}k^{\star 1} = \left[\frac{{}_{n+\tau}\theta^2}{\det {}_{n+\tau}\mathbb{C}} \right]^{\frac{1}{3}} \\
{}_{\alpha} [\det {}_t\mathbb{C} \, {}_t\mathbb{C}^{-1}] &= \alpha \det {}_{n+I}\mathbb{C} \, {}_{n+I}\mathbb{C}^{-1} + (1 - \alpha) \det {}_n\mathbb{C} \, {}_n\mathbb{C}^{-1}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Die Spannungstensoren werden abgelesen als

$$\begin{aligned}
{}_{\tau}\mathbb{S}^{elast} &= 2 {}_{\tau}k^{\star 1} \nabla_{\bar{\mathbb{C}}} w_{\theta^2}({}_t\bar{\mathbb{C}}) \Big|_{\substack{{}_t\bar{\mathbb{C}} = {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \\ {}_{n+T}\bar{\mathbb{C}} + {}_{n+T}\lambda}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \circ ({}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}})^{-1} \right] \\
{}_{\alpha}\mathbb{S}^{Zwang} &= 2 {}_{n+T}p \left[\alpha \det {}_{n+I}\mathbb{C} \, ({}_{n+I}\mathbb{C})^{-1} + (1 - \alpha) \det {}_n\mathbb{C} \, ({}_n\mathbb{C})^{-1} \right]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Diese Form der Zeitdiskretisierung muß diskutiert werden, da deren Sinnfälligkeit keineswegs direkt aus den bisherigen Überlegungen folgt.

Struktureigenschaften von ${}_t\bar{\mathbb{C}}$ und ${}_{\tau}\bar{\mathbb{C}}$

Ziel war es, wesentliche Struktureigenschaften von ${}_t\bar{\mathbb{C}}$ in die Definition von ${}_{\tau}\bar{\mathbb{C}}$ zu übernehmen.

Man sieht die multiplikative Struktur von ${}_t\bar{\mathbb{C}} = {}_t k^1 {}_t\mathbb{C} = {}_t\mathbb{C}^{vol} \cdot {}_t\mathbb{C}^{dev}$. Diese Struktur bewirkt folgende wichtige Zusammenhänge:

- 1.) $\det ({}_t\mathbb{C}^{dev}) = 1 \, \forall \, {}_t\boldsymbol{\varphi} \in [0, t_{end}]$ wirklich isochorer Deformationsanteil
- 2.) ${}_t\bar{\mathbb{C}}$ Deformationstensor ist symmetrisch
- 3.) $\det ({}_t\mathbb{C}^{vol}) = {}_t\theta^2 \, \forall \, {}_t\boldsymbol{\varphi} \in [0, t_{end}]$ wirklich volumetrischer Deformationsanteil
- 4.) ${}_t\bar{\mathbb{C}} \Big|_{\substack{{}_t\theta^2 = \det {}_t\mathbb{C}}} = {}_t\mathbb{C}$ mechanisch konsistente Formulierung der modifizierten Deformationstensoren, da $\det {}_t\mathbb{C} = \det^2 {}_t\mathbb{F} = {}_t\theta^2 = {}_tJ^2$ ist.
- 5.) $\nabla_{\bar{\mathbb{C}}} \circ {}_t\bar{\mathbb{C}} = {}_t k^1 \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} {}_t\mathbb{C} \circ ({}_t\mathbb{C})^{-1} \right]$ ist die typische Struktur des Gradienten von ${}_t\bar{\mathbb{C}}$ bzgl. ${}_t\mathbb{C}$, was für die Berechnung der zeitlich diskreten elastischen Spannung bedeutungsvoll ist.

Darum wird ${}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}$ wie in Gleichung (3.54) definiert.

Diese Definition ist konsistent zur zeitlichen Formulierung:

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 1}} {}_{n+\tau} \bar{\mathbb{C}} = \begin{cases} {}_n \bar{\mathbb{C}} \\ {}_{n+1} \bar{\mathbb{C}} \end{cases} ; \quad \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 1}} \nabla_{n+\tau} \bar{\mathbb{C}} \circ {}_{n+\tau} \bar{\mathbb{C}} = \nabla_t \bar{\mathbb{C}} \circ {}_t \bar{\mathbb{C}} \Bigg|_{t=\begin{cases} {}_n t \\ {}_{n+1} t \end{cases}}$$

Struktur des diskreten Zwangspotentials

Eine Vereinfachung der zeitlich kontinuierlichen Formulierung mit

$$\left\langle 2 {}_t p \det {}_t \mathbb{C} {}_t \mathbb{C}^{-1}, {}_t \mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} \right\rangle = \left\langle 2 {}_t p \det {}_t \mathbb{C} {}_t \mathbb{F}^{-1} \underbrace{{}_t \mathbb{F}^{-T} {}_t \mathbb{F}^T}_{=1}, \delta \mathbb{F} \right\rangle = \left\langle 2 {}_t p {}_t J^2 {}_t \mathbb{F}^{-1}, \delta \mathbb{F} \right\rangle$$

führt auf einen Ausdruck, wo der Zwangspannungstensor erst nach erneuter Formelmanipulation symmetrisch abgelesen werden kann. Die symmetrische Struktur der Spannungstensoren ist für den Nachweis der Drallerhaltung aber elementar wichtig (s. dort).

Grund für die Verwendung des quadratischen ${}_{n+\tau} \theta^2$ anstatt ${}_{n+\tau} \theta$

Aus den Betrachtungen zur Struktur von ${}_{n+\tau} \bar{\mathbb{C}}$ (s.o.) wird deutlich, daß erst durch eine Nebenbedingung der Form $\left\langle {}_{n+\tau} \theta^2 - \det {}_{n+\tau} \mathbb{C}, \delta p \right\rangle$ der multiplikative Split des Deformationstensors überhaupt überhaupt möglich wird. Diese modifizierte Nebenbedingung leistet die gleiche Arbeit wie eine direkt in den Deformationsgradienten geschrieben klassische Formulierung $\left\langle {}_{n+\tau} \theta - \det {}_{n+\tau} \mathbb{F}, \delta p \right\rangle$.

3.3.2.3 Rauminterpolation und Erhaltungseigenschaften durch Projektionsgleichungen Formulierung der Elemente für *Mooney–Rivlin*-Material durch konsistente Linearisierung

Raumdiskretisierung, gemischte Interpolation

Analog zu Abschnitt 3.3.1.3 wird auch hier die Interpolation nach Gleichung (3.41) für die kinematischen Feldgrößen $\delta \boldsymbol{\varphi} \mapsto \delta \boldsymbol{\varphi}^h$, ${}_t \boldsymbol{\varphi} \mapsto {}_t \boldsymbol{\varphi}^h$, ${}_t \mathbf{u} \mapsto {}_t \mathbf{u}^h$, $\delta \mathbf{p} \mapsto \delta \mathbf{p}^h$, ${}_t \mathbf{p} \mapsto {}_t \mathbf{p}^h$ und ${}_t \mathbf{v} \mapsto {}_t \mathbf{v}^h$ verwendet. Zusätzlich werden die Felder der Volumendilatation und der Multiplikatoren interpoliert ¹⁰:

$$\begin{aligned} \delta \theta^2(\mathbb{X}) &\mapsto \delta \theta^{2h}(\mathbb{X}) = \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a \hat{N}(\mathbb{X}) \delta {}^a \theta \\ {}_{n+T} \theta^2(\mathbb{X}) &\mapsto {}_{n+T} \theta^{2h}(\mathbb{X}) = \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a(\mathbb{X}) (T {}_{n+1}^a \theta^2 + (1-T) {}_n^a \theta^2) \end{aligned}$$

¹⁰Die Indices $(\cdot)^h$ werden aus Übersichtlichkeitsgründen von nun an abermals weggelassen. Man sollte sich jedoch vergegenwärtigen, daß immer dann eine durch Interpolation gewonnene Größe gemeint ist, wenn am Symbol der Feldgröße nicht explizit eine Knotennummer erscheint.

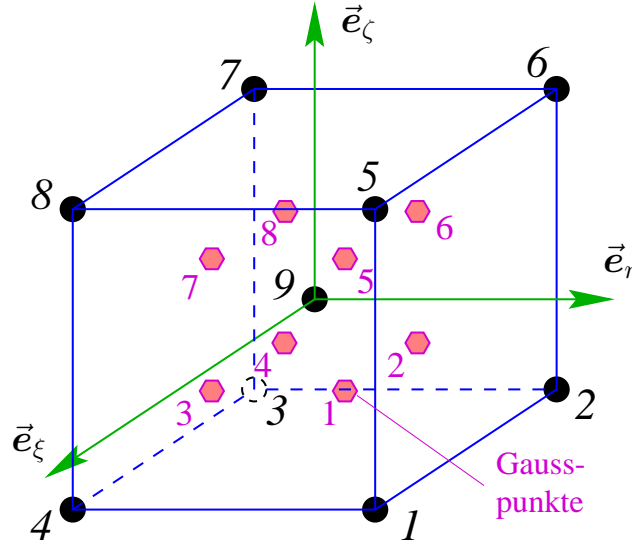


Abbildung 3.12: Das quasiinkompressible 9-Knoten BRICK-Element

$$\begin{aligned}
 \delta\lambda(\mathbb{X}) &\mapsto \delta\lambda^h(\mathbb{X}) = \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a\hat{N}(\mathbb{X}) \delta^a\lambda \\
 {}_{n+T}\lambda(\mathbb{X}) &\mapsto {}_{n+T}\lambda^h(\mathbb{X}) = \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a\hat{N}(\mathbb{X}) (T_{n+1}^a\lambda + (1-T)_n^a\lambda) \\
 \delta p(\mathbb{X}) &\mapsto \delta p^h(\mathbb{X}) = \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a\hat{N}(\mathbb{X}) \delta^a p \\
 {}_{n+T}p(\mathbb{X}) &\mapsto {}_{n+T}p^h(\mathbb{X}) = \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a\hat{N}(\mathbb{X}) (T_{n+1}^a p + (1-T)_n^a p)
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Während die Größen $\delta\varphi^h, {}_t\varphi^h, {}_t\mathbf{u}^h, \delta\mathbf{p}^h, {}_t\mathbf{p}^h$ und ${}_t\mathbf{v}^h$ durch die Formfunktionen ${}^AN(\mathbb{X})$ interpoliert werden, kommen bei den nichtkinematischen Feldern $\delta\theta^{2h}(\mathbb{X}), {}_{n+T}\theta^{2h}(\mathbb{X}), \delta\lambda^h(\mathbb{X}), {}_{n+T}\lambda^h(\mathbb{X}), \delta p^h(\mathbb{X})$ und ${}_{n+T}p^h(\mathbb{X})$ die Formfunktionen ${}^a\hat{N}(\mathbb{X})$, die einer völlig anderen Interpolationsmethode entsprechen können, zum Einsatz. Die interpolierten Feldgrößen befinden sich nicht mehr notwendigerweise im gleichen Raum und können unterschiedlichen Stetigkeitsanforderungen genügen. Damit hat man eine gemischte Interpolation vor sich, welche die zur Verhinderung des Lockings (s.o.) erforderliche Entkopplung der Kinematikinterpolation von der Interpolation der Constraints ermöglicht.

Elimination von ${}_t\theta^2$ und ${}_tp$ und Reduktion auf eine 2-Feld-Formulierung

Um die zusätzlich eingeführten Felder der Dilatation und des hydrostatischen Druckes nicht als globale Unbekannte behandeln zu müssen, werden sie bereits auf Elementebene eliminiert.

Die räumlich diskrete Version von IV''

$$\begin{aligned} \text{IV}'' : \left\langle \det_{n+\tau} \mathbb{C}^{(h)}, \delta p^{(h)} \right\rangle &= \left\langle {}_{n+\tau} \theta^{2(h)}, \delta p^{(h)} \right\rangle \\ &= \left\langle \det_{n+\tau} \mathbb{C}^{(h)}, \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a \hat{N} \delta {}^a p \right\rangle = \left\langle \sum_{b=1}^{m_{node}} {}^b \hat{N}_{n+\tau} {}^b \theta^2, \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a \hat{N} \delta {}^a p \right\rangle \end{aligned}$$

liefert m_{node} Gleichungen. Durch Abspalten der beliebigen Variation $\delta {}^a p$ bekommt man für Knoten a :

$$\text{Gl.,a}'' : \left\langle \det_{n+\tau} \mathbb{C}, {}^a \hat{N} \right\rangle = \sum_{b=1}^{m_{node}} \underbrace{\left\langle {}^a \hat{N}, {}^b \hat{N} \right\rangle_{n+\tau}}_{= {}^{ab} \hat{H}} {}^b \theta^2, \quad a = 1 \dots m_{node}$$

Wenn man das in Matrizenform niederschreibt, bekommt man

$$\left\langle \det_{n+\tau} \mathbb{C}, \underline{\hat{N}} \right\rangle = {}^{ab} \underline{\hat{H}}_{n+\tau} \underline{\theta}^2 \quad \leadsto \quad \boxed{{}_{n+\tau} \underline{\theta}^2 = {}^{ab} \underline{\hat{H}}^{-1} \cdot \left\langle \det_{n+\tau} \mathbb{C}, \underline{\hat{N}} \right\rangle}$$

Meist gilt der Sonderfall¹¹ $m_{node} = 1$ mit ${}^1 \hat{N}(\mathbb{X}) = 1 \leadsto {}^{ab} \underline{\hat{H}}_{<1 \times 1>} = {}_0 V$. Dann kann man direkt angeben:

$${}_{n+\tau} \theta^2 = \frac{\int \det_{n+\tau} \mathbb{C}}{{}_0 V} \quad (3.57)$$

Man erkennt, daß dann die Dilatation ${}_t \theta$ der Mittelwert von ${}_t J$ ist. Damit wird die Forderung ${}_t J = 1 \forall t \in \square$ nicht mehr punktweise erfüllt, sondern im Integral über das Element.

Die räumlich diskrete Version von III'' (s. (3.54))

$$\begin{aligned} \text{III}'' : \left\langle \sum_{b=1}^{m_{node}} {}^b \hat{N}_{n+T} {}^b p, \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a \hat{N} \delta {}^a \theta^2 \right\rangle \\ = \left\langle \frac{1}{3 {}_{n+T} \theta^2} \nabla_{t \bar{\mathbb{C}}} w_{t \theta^2}({}_t \bar{\mathbb{C}}) \Big|_{t \bar{\mathbb{C}} = {}_{n+T} \bar{\mathbb{C}}} \cdot {}_{n+T} \bar{\mathbb{C}} + {}_{n+T} \lambda, \sum_{a=1}^{m_{node}} {}^a \hat{N} \delta {}^a \theta^2 \right\rangle \end{aligned}$$

liefert ebenfalls m_{node} Gleichungen. Durch Abspalten der beliebigen Variation $\delta {}^a \theta^2$ bekommt man für Knoten a :

$$\text{Gl.,a}'' : \sum_{b=1}^{m_{node}} \left\langle {}^a \hat{N}, {}^b \hat{N} \right\rangle_{n+T} {}^b p = \left\langle \frac{1}{3 {}_{n+T} \theta^2} \nabla_{t \bar{\mathbb{C}}} w_{t \theta^2}({}_t \bar{\mathbb{C}}) \Big|_{t \bar{\mathbb{C}} = {}_{n+T} \bar{\mathbb{C}}} \cdot {}_{n+T} \bar{\mathbb{C}} + {}_{n+T} \lambda, {}^a \hat{N} \right\rangle$$

¹¹bei Verwendung nur eines „Multiplier-Knotens“ je Element

Die Matrizenschreibweise lautet

$${}^{ab}\underline{\underline{H}}_{n+T}\underline{p} = \left\langle \frac{1}{3} \frac{1}{n+T} \theta^2 \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2}(t\bar{\mathbb{C}}) \right|_{t\bar{\mathbb{C}}=n+T\bar{\mathbb{C}}} \cdot {}_{n+T}\bar{\mathbb{C}} + {}_{n+T}\lambda, \hat{N} \rangle$$

Auch hier liefert der praktisch häufig auftretende Fall $m_{node} = 1$ mit ${}^1\hat{N}(\mathbb{X}) = 1$ eine explizite Berechnungsvorschrift für ${}_{n+T}p$:

$$\begin{aligned} {}_0V {}_{n+T}p &= \int_{{}_0V} \frac{1}{3} \frac{1}{n+T} \theta^2 \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2}(t\bar{\mathbb{C}}) \Big|_{t\bar{\mathbb{C}}=n+T\bar{\mathbb{C}}} \cdot {}_{n+T}\bar{\mathbb{C}} d_0V + {}_0V {}_{n+T}\lambda \quad \Big| \div {}_0V \\ {}_{n+T}p &= {}_{n+T}\lambda + \frac{1}{{}_0V} \frac{1}{n+T} \theta^2 \int_{{}_0V} \frac{1}{3} \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} w_{t\theta^2}(t\bar{\mathbb{C}}) \Big|_{t\bar{\mathbb{C}}=n+T\bar{\mathbb{C}}} \cdot {}_{n+T}\bar{\mathbb{C}} d_0V \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die Gleichungen (3.57) und (3.58) kann man nun in (3.54) und (3.54) einsetzen und bei Verwendung von (3.54.II'') den Zustandsvektor auf $\mathbf{z} = \left({}_t\boldsymbol{\varphi}, {}_t\lambda \right)^T$, $t = \{n+1, n+1+t\}$, also nur noch 2 unbekannte Feldgrößen bei $n+1+t$ reduzieren.

Erhaltungseigenschaften und Projektionsgleichungen

Der Nachweis der Impulserhaltung und der Drallerhaltung erfolgt völlig identisch zum Vorgehen in Abschnitt 3.3.1.2 unter den Überschriften Impulserhaltung (s. Seite 85) und Drallerhaltung (s. Seite 86) mittels der Verwendung der Testfunktionen $\delta\boldsymbol{\varphi} \mapsto \boldsymbol{\xi}$ bei Impuls- und $\delta\boldsymbol{\varphi} \mapsto \boldsymbol{\xi} \times {}_{n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}$ bei Drallerhaltung. Die Voraussetzungen für den erfolgreichen Nachweis dieser Erhaltungseigenschaften waren Bewegungsgleichungen (I''), wo die Spannungstensoren mit $\delta\mathbb{F}$ multipliziert werden und selbst symmetrisch sind. Das ist gegeben und damit ein erneuter Nachweis unnötig.

Zur Projektion der Terme der Bewegungsgleichungen auf den Energiesatz bemüht man wieder Testfunktionen der Form

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\varphi} &\mapsto {}_{n+1}\boldsymbol{\varphi} - {}_n\boldsymbol{\varphi} \quad \rightsquigarrow \quad \delta\mathbb{F} \mapsto {}_{n+1}\mathbb{F} - {}_n\mathbb{F} \\ \rightsquigarrow {}_{n+1}\mathbb{F}^T \cdot ({}_{n+1}\mathbb{F} - {}_n\mathbb{F}) &= \frac{1}{2} ({}_{n+1}\mathbb{F}^T + {}_n\mathbb{F}^T) \cdot ({}_{n+1}\mathbb{F} - {}_n\mathbb{F}) \\ &= \frac{1}{2} ({}_{n+1}\mathbb{F}^T \cdot {}_{n+1}\mathbb{F} - {}_n\mathbb{F}^T \cdot {}_n\mathbb{F} + {}_n\mathbb{F}^T \cdot {}_{n+1}\mathbb{F} - {}_{n+1}\mathbb{F}^T \cdot {}_n\mathbb{F}) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{({}_{n+1}\mathbb{C} - {}_n\mathbb{C})}_{\dots \text{symmetrisch}} + \frac{1}{2} \underbrace{({}_n\mathbb{F}^T \cdot {}_{n+1}\mathbb{F} - {}_{n+1}\mathbb{F}^T \cdot {}_n\mathbb{F})}_{\dots \text{antisymmetrisch}} \end{aligned}$$

- Der antisymmetrische Term fällt in Gleichung (3.54-I'') bei der Multiplikation mit den symmetrischen Spannungstensoren heraus.

- Der Term $\frac{1}{\Delta t} \langle {}_{n+1}\mathbf{p} - {}_n\mathbf{p}, {}_{n+1}\boldsymbol{\varphi} - {}_n\boldsymbol{\varphi} \rangle = \dots = {}_{n+1}T - {}_nT$ bildet in (3.54-I'') die Änderung der kinetischen Energie im Zeitschritt ab.

Damit müssen die restlichen Terme wie folgt behandelt werden:

$$\begin{aligned}
\langle {}_\tau \mathbb{S}^{elast}, \Delta \mathbb{E} \rangle &= {}_{n+1}V^{int} - {}_nV^{int} \stackrel{!}{=} \langle w_{t\theta^2}({}_{n+1}\bar{\mathbb{C}}) - w_{t\theta^2}({}_n\bar{\mathbb{C}}), 1 \rangle \rightsquigarrow \tau \\
\langle {}_\tau \mathbb{S}^{Zwang}, \Delta \mathbb{E} \rangle &= {}_{n+1}V^{zw} - {}_nV^{zw} \stackrel{!}{=} 0 \rightsquigarrow \alpha \\
\langle {}_{n+\beta_1} \mathbf{f}^{ext}, {}_{n+1}\boldsymbol{\varphi} - {}_n\boldsymbol{\varphi} \rangle &= \langle {}_{n+1} \mathbf{f}^{ext}, {}_{n+1}\boldsymbol{\varphi} \rangle - \langle {}_n \mathbf{f}^{ext}, {}_n\boldsymbol{\varphi} \rangle \rightsquigarrow \beta_1 \\
\langle {}_{n+\beta_2} \bar{\mathbf{t}}, {}_{n+1}\boldsymbol{\varphi} - {}_n\boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Gamma_\sigma} &= \langle {}_{n+1} \bar{\mathbf{t}}, {}_{n+1}\boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Gamma_\sigma} - \langle {}_n \bar{\mathbf{t}}, {}_n\boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Gamma_\sigma} \rightsquigarrow \beta_2
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Die Anwendung der Projektionsgleichungen für die äußeren Lasten (β_1 und β_2) setzt ein a priori-Wissen über die äußere Arbeit voraus. Dieses Wissen ist meist nicht gegeben, weil die äußere Arbeit nichtkonservativ ist und deshalb ihr Integral wegabhängig und allgemein nicht nur von den Zuständen am Rand des Zeitintervalls abhängig ist. Nur wenn man aufgrund besonderer Zusatzkenntnisse die Änderung der nichtkonservativen äußeren Arbeit berechnen kann, macht die Involvierung der Projektion der äußeren Lasten in den Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus und die Berechnung der Projektionsparameter β_1 und β_2 Sinn.

Für die anderen Fälle kann man oft einen geradlinigen Weg- und einen linearen Kraftverlauf im Zeitschritt annehmen und $[\beta_1, \beta_2]$ einfach auf $\beta_k = \frac{1}{2}, k = 1, 2$ setzen. Diese Annahme ist nur dann gültig, wenn der Zeitschritt der Rauigkeit der äußeren Lasten angepaßt ist.

Die Berechnung des Projektionsparameters τ verläuft analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.3.1.2.

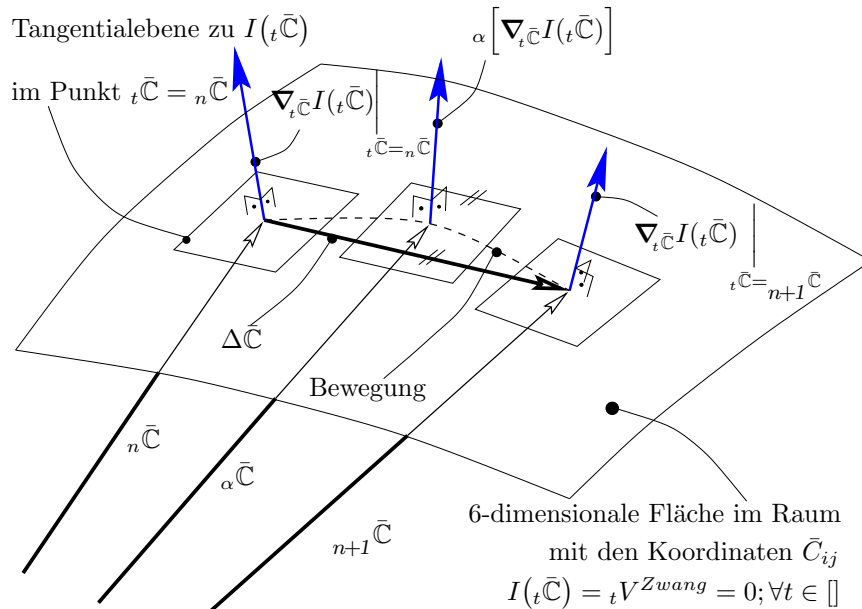
Im Unterschied dazu ist hier wegen der gemischten Interpolation der verschiedenen Feldgrößen *kein* Übergang auf eine lokale Betrachtung möglich:

Die lokale Formulierung der Projektionsgleichung stellt ein wesentlich strengeres Kriterium dar, als es die Gleichungen eigentlich hergeben. Die Projektionsgleichungen stellen lediglich einen funktionalen Zusammenhang zwischen Größen her, nachdem sie über das Elementvolumen integriert bzw. gemittelt wurden (schwache Formulierung). Eine lokale Aussage wird nicht getroffen. Deshalb ist der Übergang auf eine lokale Projektionsgleichung nur dann möglich, wenn *alle* Testfunktionen aus dem gleichen Raum stammen.

Die Projektion der Arbeit der Zwangsspannungen im Zeitschritt auf Null ist für die Stabilität der Rechnung sehr wichtig. Zwangsspannungen dürfen keine Arbeit leisten, da sie orthogonal zur Bewegung gerichtet sein müssen. Wird diese Anforderung verletzt, dann wirkt sich der nichtkonservative Charakter der Zwangsspannungen sofort stark anregend auf die Bewegung aus.

Auch die Berechnung des Projektionsparameters α erfolgt im Integral über das gesamte Element und nicht für jeden einzelnen Integrationspunkt.

Die Ursache ist geometrischer Natur und liegt im Übergang von der zeitlich kontinuierlichen Formulierung der Bewegungsgleichungen auf eine zeitlich diskrete. Dies soll anhand der Projektion der Zwangsspannungen illustriert werden:



Die dargestellte Fläche $I({}_t\bar{\mathbb{C}})$ repräsentiert die Funktion ${}_tV^{Zwang} = 0$ und ist in den 6 voneinander unabhängigen Koordinaten des modifizierten Rechten CAUCHY–GREENSchen Deformationstensors parametrisiert. Der Gradient dieser Fläche bzgl. ihres Argumentes $\nabla_{{}_t\bar{\mathbb{C}}} I({}_t\bar{\mathbb{C}})$ ergibt einen Vektor, der immer orthogonal zur jeweiligen Tangentialebene dieser Fläche im Punkt ${}_t\bar{\mathbb{C}}$ steht. Damit ist in der zeitlich kontinuierlichen Formulierung die Forderung der Orthogonalität der Zwangsspannungen zur Bewegung erfüllt:

$$\nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} I(t\bar{\mathbb{C}}) \cdot \delta\bar{\mathbb{C}} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{I}$$

In der zeitdiskreten Formulierung geht man über von $\delta\bar{\mathbb{C}} \mapsto \Delta\bar{\mathbb{C}}$. Der Vektor $\Delta\bar{\mathbb{C}}$ ist nicht mehr parallel zu $\delta\bar{\mathbb{C}}$ und liegt auch nicht mehr in einer der Tangentialebenen. Um dennoch einen orthogonalen Punkt zu finden bildet man eine Linearkombination der Richtungen $\alpha \left[\nabla_{\bar{\mathbb{C}}} I(t\bar{\mathbb{C}}) \right] := \alpha \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} I(t\bar{\mathbb{C}}) \Big|_{t\bar{\mathbb{C}}=n+I\bar{\mathbb{C}}} + (1-\alpha) \nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} I(t\bar{\mathbb{C}}) \Big|_{t\bar{\mathbb{C}}=n\bar{\mathbb{C}}}$

die dann wieder der Orthogonalitätsanforderung

$$\alpha \left[\nabla_{t\bar{\mathbb{C}}} I(t\bar{\mathbb{C}}) \right] \cdot \Delta \bar{\mathbb{C}} = 0, \quad \alpha \in [0, 1]$$

Diese Orthogonalitätsbedingung ist eine skalarwertige Gleichung zur Bestimmung von α und kann numerisch ohne größeren Aufwand für $\alpha \in [0, 1]$ gelöst

werden. Es ist bei gegenüber der Rauigkeit des Funktionals zu groben Zeitabtastung (einem erklärten Ziel dieser Arbeit) nicht auszuschließen, daß es im Intervall $[0, 1]$ mehrere Lösungen für α gibt, man wählt die am nächsten zu $\alpha \approx \frac{1}{2}$ liegende aus.

Diese Feststellungen führen gleichzeitig zu der Aussage, das *jedes* Zeitintegrationsverfahren, das ja immer mit endlichen Zeitschrittweiten arbeiten muß, zufolge der unterschiedlichen Richtungen von $\delta\bar{\mathbb{C}}$ und $\Delta\bar{\mathbb{C}}$ bei Verwendung von Zwangsbedingungen im Energiefunktional nichtkonservative Energie produziert. Diese Aussage gilt auch für kontinuumsmechanische Formulierungen, die nicht den modifizierten Rechten CAUCHY–GREEN-Tensor benutzen.

Die Geometrie der anderen Projektionsparameter ist völlig analog zur vorgestellten Projektionsgeometrie für α .

Spezialisierung auf *Mooney–Rivlin*-Material

Die spezifische Deformationsenergiefunktion bei Verwendung der 3–Feld–Formulierung lautet:

$$\begin{aligned} w({}_t\mathbb{C}, {}_t\theta^2) &= w_{{}_t\theta^2}({}_t\bar{\mathbb{C}}) = C_1(\mathbf{1} \cdot {}_t\bar{\mathbb{C}} - 3) + \frac{1}{2}C_2\left(\mathbf{1} \cdot ({}_t\bar{\mathbb{C}} \cdot {}_t\bar{\mathbb{C}}) - \mathbf{1} \circ ({}_t\bar{\mathbb{C}} \cdot {}_t\bar{\mathbb{C}}) - 6\right) \\ &= C_1(I_{{}_t\bar{\mathbb{C}}} - 3) + C_2(II_{{}_t\bar{\mathbb{C}}} - 3) \quad \text{damit ist} \\ \nabla_{{}_t\bar{\mathbb{C}}} w_{{}_t\theta^2}({}_t\bar{\mathbb{C}}) &= (C_1 + C_2 \mathbf{1} \cdot {}_t\bar{\mathbb{C}}) \circ \mathbf{1} - C_2 {}_t\bar{\mathbb{C}}^{(T)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Jetzt können die Spannungstensoren, Volumendilatation und der hydrostatische Druck speziell für das MOONEY–RIVLIN-Material formuliert werden:

$$\begin{aligned} {}_\tau\mathbb{S}^{elast} &= 2_\tau k^{\star 1} \left[\left(C_1 + tr({}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}) C_2 \right) \mathbf{1} - C_2 {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left[\left(C_1 + tr({}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}) C_2 \right) tr({}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}) ({}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}})^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - C_2 {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \cdot {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \circ ({}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}})^{-1} \right] \right] \\ {}_\tau\mathbb{S}^{elast} &= 2_\tau k^{\star 1} \left[\left(C_1 + tr({}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}) C_2 \right) \mathbf{1} - C_2 {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left(C_1 I_{{}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}} + 2 C_2 II_{{}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}} \right) \circ ({}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}})^{-1} \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

$${}_\tau\mathbb{S}^{Zwang} = 2_{{}_{n+T}p} \left[\alpha \det_{{}_{n+T}} \mathbb{C} ({}_{n+T}\mathbb{C})^{-1} (1 - \alpha) \det_n \mathbb{C} ({}_n\mathbb{C})^{-1} \right] \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} {}_{n+T}p &= {}_{n+T}\lambda + \frac{1}{{}_0V_{{}_{n+T}}\theta^2} \int_{{}_0V} \underbrace{\frac{1}{3} (C_1 I_{{}_{n+T}\bar{\mathbb{C}}} + 2 C_2 II_{{}_{n+T}\bar{\mathbb{C}}})}_{:= {}_T k^{\star 3}} d_0V \\ &= {}_{n+T}\lambda + \frac{1}{{}_0V_{{}_{n+T}}\theta^2} \int_{{}_0V} {}_T k^{\star 3} d_0V \end{aligned} \quad (3.63)$$

$${}_n\theta^2 = \frac{1}{{}_0V} \int \det {}_n\mathbb{C} \, d{}_0V; \quad {}_{n+1}\theta^2 = \frac{1}{{}_0V} \int \det {}_{n+1}\mathbb{C} \, d{}_0V \quad (3.64)$$

$${}_\tau k^{\star 1} = \left[\frac{{}_{n+\tau}\theta^2}{\det {}_{n+\tau}\mathbb{C}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} {}_{n+\tau}\theta^2 = \tau {}_{n+1}\theta^2 + (1-\tau){}_n\theta^2 \\ {}_{n+T}\theta^2 = T {}_{n+1}\theta^2 + (1-T){}_n\theta^2 \end{cases} \quad (3.65)$$

Die Linearisierung ist aufgrund der multiplikativen Struktur der modifizierten Deformationsgrößen und des Auftretens inverser Tensoren ein ziemlich längliches Geschäft.

Um überhaupt zu verlässlichen Ergebnissen zu kommen, muß man sehr strukturiert, akribisch und systematisch vorgehen. Es wird mit vielen Abkürzungen gearbeitet.

Hier wird aufgrund des großen Umfangs der Formeln nur das Ergebnis der Rechnungen gezeigt.

Die gezeigten Linearisierungen sind durch Verwendung verschiedener analytischer Rechenwege geprüft. Die analytisch durchgeführten Linearisierungen der einzelnen Terme wurden durch entsprechend numerisch ausgeführte Linearisierungen sämtlichst kontrolliert.

Die numerischen Ergebnisse bestätigen auch die Verknüpfung der Unterstrukturen.

Somit ist das gezeigte Ergebnis nach bestem Ermessen verifiziert.

Linearisierung der elastischen Spannungskräfte bzgl. ${}_{n+1}^B\varphi$

Wenn man die (teilweise schon bekannten) Abkürzungen bzw. Rechenregeln

$$\begin{aligned} {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}} &= {}_\tau k^{\star 1} {}_{n+\tau}\mathbb{C}; \quad {}_{n+\tau}\mathbb{C}^{-1} = {}_\tau k^{\star 1} {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}^{-1}; \quad I_{{}_{n+\tau}}\bar{\mathbb{C}} = {}_\tau k^{\star 1} I_{{}_{n+\tau}}\mathbb{C}; \quad II_{{}_{n+\tau}}\bar{\mathbb{C}} = {}_\tau k^{\star 1 2} II_{{}_{n+\tau}}\mathbb{C} \\ {}_\tau k^{\star 1} &= \left[\frac{{}_{n+\tau}\theta^2}{\det {}_{n+\tau}\mathbb{C}} \right]^{\frac{1}{3}}; \quad {}_\tau k^{\star 2} = C_1 + C_2 I_{{}_{n+\tau}}\bar{\mathbb{C}}; \quad {}_\tau k^{\star 3} = \frac{1}{3} (C_1 I_{{}_{n+\tau}}\bar{\mathbb{C}} + 2 C_2 II_{{}_{n+\tau}}\bar{\mathbb{C}}) \\ {}_\tau^A\mathbb{V}^{\star 1} &= {}_{n+T}\mathbb{F} ({}_\tau k^{\star 2} \mathbf{1} - C_2 {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}) \cdot \mathbf{D}[{}^A N]; \quad {}_\tau^A\mathbb{V}^{\star 2} = {}_\tau k^{\star 3} \underbrace{{}_{n+T}\mathbb{F} \cdot {}_{n+\tau}\bar{\mathbb{C}}^{-1} \cdot \mathbf{D}[{}^A N]}_{:= {}_{T,\tau}^A\mathbb{FiCN}} \\ {}_{1,\tau}^A\mathbb{V}^{\star 3} &= \frac{1}{{}_{n+\tau}\theta^2 {}_0V} \int \det {}_{n+\tau}\mathbb{C} * {}_{n+1}\mathbb{F} \cdot {}_{n+\tau}\mathbb{C}^{-1} \cdot \mathbf{D}[{}^A N] \, d{}_0V \end{aligned} \quad (3.66)$$

verwendet, kann man den Tensor der elastischen Spannungen und den Knotenkraftvektor, der analog zu Abschnitt 3.3.1.3, Gleichung (3.44) durch Abspaltung der Terme bei den unabhängigen Variationen $\delta^A\varphi$ gewonnen wird, wie

folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
{}_{\tau}\mathbb{S}^{elast} &= 2_{\tau}k^{\star 1} \left[{}_{\tau}k^{\star 2} \mathbf{1} - C_{2n+\tau} \bar{\mathbb{C}} \right] - 2_{\tau}k^{\star 3} {}_{n+\tau}\mathbb{C}^{-1} \iff \\
{}_{\tau}S_{kl}^{elast} &= 2_{\tau}k^{\star 1} \left[{}_{\tau}k^{\star 2} \delta_{kl} - C_{2n+\tau} \bar{C}_{kl} \right] - 2_{\tau}k^{\star 3} {}_{n+\tau}C_{kl}^{-1} \\
{}_{\tau}^A \mathbf{F}^{int} &= \int_{{}_0V} {}_T^A f_i^{int} \underline{e}_i d_0V \\
{}_{\tau}^A \mathbf{f}^{int} &= 2_{\tau}k^{\star 1} {}_{\tau}^A \mathbb{V}^{\star 1} - 2_{\tau}^A \mathbb{V}^{\star 2} \iff {}_T^A f_i^{int} = 2_{\tau}k^{\star 1} {}_{\tau}^A V_i^{\star 1} - 2_{\tau}^A V_i^{\star 2}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Um die JACOBI-matrix von ${}_{\tau}^A \mathbf{f}^{int}$ hinschreiben zu können, werden zunächst die skalarwertigen, dann die vektorwertigen Abkürzungen linearisiert. Zur Linearisierung der skalarwertigen Größen aus (3.66) werden weitere Abkürzungen definiert:

$$\begin{aligned}
{}_{n+\tau}^B \mathbb{L} &:= {}_{n+\tau} \mathbb{F} \cdot \mathbf{D} [{}^B N] & \mathbf{D}^A \mathbf{N} \mathbf{D}^B N &:= \mathbf{D} [{}^A N] \cdot \mathbf{D} [{}^B N] \\
{}_{1,\tau}^B \mathbb{F} i \mathbb{C} N &:= {}_{n+I} \mathbb{F} \cdot {}_{n+\tau} \mathbb{C}^{-1} \cdot \mathbf{D} [{}^B N] & {}_{1,\tau}^B \mathbb{F} \mathbb{C} N &:= {}_{n+I} \mathbb{F} \cdot {}_{n+\tau} \mathbb{C} \cdot \mathbf{D} [{}^B N] \\
{}_{\tau}^{AB} N i \mathbb{C} N &:= \mathbf{D} [{}^A N] \cdot {}_{n+\tau} \mathbb{C}^{-1} \cdot \mathbf{D} [{}^B N] & {}_{\tau}^{AB} N \mathbb{C} N &:= \mathbf{D} [{}^A N] \cdot {}_{n+\tau} \mathbb{C} \cdot \mathbf{D} [{}^B N] \\
{}_{\tau}^B k^{\star k}_j &:= \frac{\partial}{{}_{n+I}^B \varphi_j} {}_{\tau} k^{\star k} & &, k = 1, 2, 3 \\
{}_{\tau}^{AB} \mathbb{V}^{\star k} &:= \nabla_B \circ_{{}_{n+I} \varphi} {}_{\tau}^A \mathbb{V}^{\star k} = \frac{\partial}{{}_{n+I}^B \varphi_j} {}_{\tau}^A V_i^{\star k} \underline{e}_i \underline{e}_j & &, k = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Dann ergeben einige Nebenrechnungen folgende Linearisierungen

$$\begin{aligned}
{}_{\tau}^B k^{\star 1}_j \underline{e}_j &= -\frac{2\tau}{3} {}_{\tau} k^{\star 1} \left({}_{1,\tau}^B \mathbb{F} i \mathbb{C} N - {}_{1,\tau}^B \mathbb{V}^{\star 3} \right) \\
{}_{\tau}^B k^{\star 2}_j \underline{e}_j &= 2\tau C_2 \left[{}_{\tau} k^{\star 1} {}_{n+I}^B \mathbb{L} - \frac{1}{3} I {}_{n+\tau} \bar{\mathbb{C}} \left({}_{1,\tau}^B \mathbb{F} i \mathbb{C} N - {}_{1,\tau}^B \mathbb{V}^{\star 3} \right) \right] \\
{}_{\tau}^B k^{\star 3}_j \underline{e}_j &= \frac{2\tau}{3} \left\{ {}_{\tau} k^{\star 1} \left(C_1 + 2 C_2 I {}_{n+\tau} \bar{\mathbb{C}} \right) {}_{n+I}^B \mathbb{L} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} \left(C_1 I {}_{n+\tau} \bar{\mathbb{C}} + 4 C_2 II {}_{n+\tau} \bar{\mathbb{C}} \right) \left({}_{1,\tau}^B \mathbb{F} i \mathbb{C} N - {}_{1,\tau}^B \mathbb{V}^{\star 3} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 C_2 {}_{\tau} k^{\star 1 2} {}_{1,\tau}^B \mathbb{F} \mathbb{C} N \right\}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Die Linearisierung der vektorwertigen Hilfsgrößen ergibt:

$$\begin{aligned}
{}^{AB}\mathbb{V}^{\star 1}_{\tau} &= \tau C_2 \tau k^{\star 1} \left[2 \frac{A}{n+T} \mathbb{L} \circ \frac{B}{n+T} \mathbb{L} - \frac{B}{n+T} \mathbb{L} \circ \frac{A}{n+T} \mathbb{L} - D^A N D^B N_{n+T} \mathbb{F} \cdot \frac{B}{n+T} \mathbb{F}^T \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \left(\frac{A}{T, \tau} \mathbb{F} \mathbb{C} \mathbb{N} - I_{n+\tau} \mathbb{C} \frac{A}{n+T} \mathbb{L} \right) \circ \left(\frac{B}{1, \tau} \mathbb{F} i \mathbb{C} \mathbb{N} - \frac{B}{1, \tau} \mathbb{V}^{\star 3} \right) \right] \\
&\quad + T \left[D^A N D^B N_{\tau} k^{\star 2} - C_2 \tau k^{\star 1} \frac{AB}{\tau} N C N \right] \mathbf{1} \\
{}^{AB}\mathbb{V}^{\star 2}_{\tau} &= \frac{A}{T, \tau} \mathbb{F} i \mathbb{C} \mathbb{N} \circ \frac{B}{\tau} k^{\star 3} j \underline{e}_j + T \tau k^{\star 3} \frac{AB}{\tau} N i C N \mathbf{1} \\
&\quad + \frac{\tau}{\det_{n+\tau} \mathbb{C}} \frac{\tau k^{\star 3}}{\tau} \left\{ D^A N D^B N_{n+T} \mathbb{F} \cdot \left[I_{n+\tau} \mathbb{C} - \left(I_{n+\tau} \mathbb{C} - \frac{AB}{D^A N D^B N} \right) \mathbf{1} \right] \cdot \frac{B}{n+T} \mathbb{F}^T \right\} \\
&\quad + \frac{\tau}{\det_{n+\tau} \mathbb{C}} \frac{\tau k^{\star 3}}{\tau} \left\{ I_{n+\tau} \mathbb{C} \left(2 \frac{A}{n+T} \mathbb{L} \circ \frac{B}{n+T} \mathbb{L} - \frac{B}{n+T} \mathbb{L} \circ \frac{A}{n+T} \mathbb{L} \right) + \frac{B}{n+T} \mathbb{L} \circ \frac{A}{1, \tau} \mathbb{F} \mathbb{C} \mathbb{N} \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{T, \tau} \mathbb{F} \mathbb{C} \mathbb{N} \circ \frac{A}{n+T} \mathbb{L} - 2 \frac{A}{n+T} \mathbb{L} \circ \frac{B}{1, \tau} \mathbb{F} \mathbb{C} \mathbb{N} - 2 \frac{A}{T, \tau} \mathbb{F} \mathbb{C} \mathbb{N} \circ \frac{B}{n+T} \mathbb{L} \right\} \\
&\quad - 2 \tau \tau k^{\star 3} \frac{A}{T, \tau} \mathbb{F} i \mathbb{C} \mathbb{N} \circ \frac{B}{1, \tau} \mathbb{F} i \mathbb{C} \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Damit lautet die JACOBIMatrix der elastischen Knotenspannungskräfte:

$${}^{AB}\underline{\underline{k}}^{\text{int}}_{\tau} = 2 \left[{}^a\mathbb{V}^{\star 1} \circ \frac{B}{\tau} k^{\star 1} j \underline{e}_j + \tau k^{\star 1} \frac{AB}{\tau} \mathbb{V}^{\star 1} - \frac{AB}{\tau} \mathbb{V}^{\star 2} \right] \tag{3.71}$$

Linearisierung der Zwangsspannungskräfte bzgl. $\frac{B}{n+T} \varphi$

Die lokale Form des Knotenvektors der Zwangsspannungskräfte lautet

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+T^p} \frac{A}{\alpha} f_i^{\text{zwang}} \\
{}^A f_i^{\text{zwang}} &= \frac{1}{n+T^p} \frac{1}{n+T} \overbrace{F_{ik} \left(2\alpha \det_{n+T} \mathbb{C}_{n+T} C_{kl}^{-1} + 2(1-\alpha) \det_n \mathbb{C}_n C_{kl}^{-1} \right) {}^A N_l}^{\frac{1}{n+T^p} \frac{A}{\alpha} S_{kl}^{\text{zwang}}} \\
&\quad \text{mit } n+T^p = n+T \lambda + \frac{1}{0V} \frac{1}{n+T} \theta^2 \int_{0V} T k^{\star 3} d_0 V
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Der Elementvektor wird daraus durch Integration über das Elementvolumen gewonnen. Damit setzt sich die JACOBIMatrix der Knotenkräfte der Zwangsspannungen wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
{}^{AB}k_{ij}^{\text{zwang}} &= \frac{\partial {}^A f_i^{\text{zwang}}}{\partial \frac{B}{n+T} \varphi_j} \frac{B}{n+T} p_j \\
{}^{AB}k_{ij}^{\text{zwang}} &= \frac{1}{n+T^p} \frac{A}{\alpha} f_i^{\text{zwang}} \circ \frac{\partial \frac{B}{n+T} p}{\partial \frac{B}{n+T} \varphi_j} + T \frac{B}{N_k} \frac{A}{\alpha} S_{kl}^{\text{zwang}} {}^A N_l \delta_{ij} \\
&\quad + 2 \alpha \frac{1}{n+T^p} \frac{1}{n+T} \underbrace{F_{ik} \frac{\partial \det_{n+T} \mathbb{C}_{n+T} C_{kl}^{-1}}{\partial \frac{B}{n+T} \varphi_j} {}^A N_l}_{\Upsilon}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Die Terme ${}_{n+T}^B p_j$ und Υ ergeben sich nach einer längeren Rechnung zu

$$\begin{aligned}
{}_{n+T}^B p_j &= \frac{2T}{3_0 V_{n+T} \theta^2} \int_{_0 V} {}_T k^{\star 1} \left(C_1 + 2C_2 I_{n+T} \mathbb{C} \right) {}_{n+I}^B L_j \\
&\quad - \frac{1}{3} \left(C_1 I_{n+T} \mathbb{C} + 4 C_2 II_{n+T} \mathbb{C} \right) \left({}_{1,T}^B FiCN_j - {}_{1,T}^B V_j^{\star 3} \right) \\
&\quad - 2 C_2 T k^{\star 1 2} {}_{1,T}^B FCN_j d_0 V \\
&\quad + 2T \left({}_{n+T} \lambda - {}_{n+T} p \right) {}_{1,T}^B V_j^{\star 3} \\
\Upsilon &= 2 \alpha_{n+T} p \left\{ {}_{n+T}^B L_i \circ {}_{1,1}^A FCN_j + {}_{T,1}^B FCN_i \circ {}_{n+I}^A L_j \right. \\
&\quad - 2 {}_{n+T}^A L_i \circ {}_{1,1}^B FCN_j - 2 {}_{T,1}^A FCN_i \circ {}_{n+I}^B L_j \\
&\quad + D^A N D^B N {}_{n+T} F_{ik} {}_{n+I} C_{kp} F_{jp} \\
&\quad + {}_{n+T} F_{ik} {}_{n+I} F_{jk} \left({}_{n+I}^{AB} NCN - I_{n+I} \mathbb{C} D^A N D^B N \right) \\
&\quad \left. + I_{n+I} \mathbb{C} \left(2 {}_{n+T}^A L_i \circ {}_{n+I}^B L_j - {}_{n+T}^B L_i \circ {}_{n+I}^A L_j \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

wobei der inverse CAUCHY–GREEN-Tensor zunächst nach dem Satz von CAYLEY–HAMILTON in $\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{III_{\mathbb{C}}} [(\mathbb{C} - I_{\mathbb{C}}) \cdot \mathbb{C} + II_{\mathbb{C}} \mathbf{1}]$ umgeformt wurde.

Mit Verwendung der Abkürzungen von (3.74) lautet die JACOBIMatrix der Zwangsspannungskräfte bzgl. der Knotenverschiebungen:

$${}_{\alpha}^{AB} \underline{\underline{K}}^{Zwang} = \int_{_0 V} \frac{1}{{}_{n+T} p^{\alpha}} {}^a f^{Zwang} \circ {}_{n+T}^B p_j \underline{e}_j + T D[B N]_{\dot{\alpha}} \mathbb{S}^{Zwang} \cdot D[A N] \mathbf{1} + \Upsilon d_0 V \tag{3.75}$$

Linearisierung der Zwangsspannungskräfte bzgl. ${}_{n+I} \lambda$

Unter Berücksichtigung der Struktur des Knotenkraftvektors der Zwangsspannungen in Gleichung (3.72) kann man dessen Gradienten sofort hinschreiben:

$${}_{\alpha}^{A\lambda} \underline{\underline{K}}^{Zwang} = \int_{_0 V} \frac{\partial {}^A f^{Zwang}}{\partial {}_{n+T} \lambda} d_0 V = \frac{T}{{}_{n+T} p} \int_{_0 V} {}^A f^{Zwang} d_0 V \quad \text{wegen } \frac{\partial {}_{n+T} p}{\partial {}_{n+T} \lambda} = T \tag{3.76}$$

Linearisierung der Nebenbedingung bzgl. ${}_{n+I}^B \varphi$

Wegen Gleichung (3.54-V'') ist bei einer Interpolation analog zum Dilatations–

und Druckfeld

$$\begin{aligned}
 V^n: \langle {}_{n+1}\theta^2 - 1, \delta\lambda \rangle &= 0 \leftrightarrow {}_T^a F^\lambda = \langle {}_{n+1}\theta^2 - 1, {}^a \hat{N} \rangle \\
 \text{für } m_{node} = 1 \text{ und } {}^1 N = 1 &\Leftrightarrow \langle {}^1 N, 1 \rangle = {}_0 V \text{ folgt} \\
 {}_T^1 F^\lambda &= \int_{{}_0 V} {}_{n+1}\theta^2 - 1 \, d{}_0 V = {}_0 V ({}_{n+1}\theta^2 - 1)
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Damit berechnet sich unter Berücksichtigung von Gleichung (3.65) die JACO-Bmatrix hiervon wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{NR: } \frac{\partial(\det {}_{n+1}\mathbb{C} - 1)}{\partial {}_{n+1}^B \varphi_j} &= 2 \det {}_{n+1}\mathbb{C}_{1,1} {}^B \mathbb{F}_i \mathbb{C}^N \quad \leadsto \\
 {}_T^B \underline{\mathbf{K}}^\lambda &= {}_0 V \frac{1}{{}_0 V} \int_{{}_0 V} \frac{\partial(\det {}_{n+1}\mathbb{C} - 1)}{\partial {}_{n+1}^B \varphi_j} \, d{}_0 V \underline{\mathbf{e}}_j = 2 {}_0 V {}_{n+1}\theta^2 {}_{1,1}^B \mathbb{V}^{\star 3}
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Linearisierung der dynamischen Knotenkräfte

Nach Gleichung (3.44) lautet der Knotenvektor der Trägheitskräfte

$${}_T^A \mathbf{F}^{dyn} = \frac{2}{\Delta t^2} \sum_{B=1}^{n_{node}} {}^{AB} M ({}_{n+1}^B \boldsymbol{\varphi} - {}_n^B \boldsymbol{\varphi} - \Delta t {}_n^B \mathbf{v})$$

mit ${}^{AB} M = \int_B {}^A N {}^B N \, d\mathcal{B}$. Damit lautet die JACOBmatrix der Trägheitskräfte ganz einfach

$${}_T^{\underline{\underline{AB}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{dyn} = \frac{2}{\Delta t^2} {}^{AB} M \mathbf{1} \tag{3.79}$$

Diese Matrix hat Diagonalform und wird mit kleinerem Zeitschritt Δt immer dominanter zu den restlichen Matrizen des Elementes, was stets eine Invertierbarkeit für $\Delta t \rightarrow 0$ garantiert.

3.3.2.4 Implementierung der Elementintegration als Mehrstufenalgorithmus

Behandlung der Projektionsgleichungen

Es ist ersichtlich, daß zur Berechnung der modifizierten Deformationstensoren und von ${}_{n+T} p$ die Integration der Größen ${}_t \theta^2$, $t = 0, T, \tau, 1$ und ${}_0 V$ erforderlich ist. Außerdem müssen zur Berechnung Elementvektoren und Matrizen zunächst die Projektionsparameter τ und α ermittelt werden. Zu jedem dieser numerischen Aufgaben ist eine Integration über das Elementvolumen erforderlich. Deshalb kann im Gegensatz zu den KIRCHHOFFschen Elementen nicht die klassische Programmieretechnik zum Einsatz kommen, wo während einer einzigen Integrationsschleife alle benötigten Kräfte und Matrizen berechnet werden.

Um die Elementintegration insgesamt effektiv zu gestalten, wird eine mehrstufige Integration vorgeschlagen:

Stufe 0: Elementvektoren initialisieren bzw. assemblieren

Stufe 1: Berechnen und Speichern der Basisgrößen an allen Gaußpunkten sowie Vorintegration:

- Berechnung der zur GAUSS-Quadratur erforderlichen Variablen:
 $\mathbf{D}[^AN], \mathbb{J} = \left[\nabla_{\mathbb{X}} \circ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right], \left[\nabla_{\mathbb{X}} \circ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right]^{-1}, \det \left[\nabla_{\mathbb{X}} \circ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right],$
 Integrationsgewichte
- Berechnen der nichtmodifizierten Deformationstensoren:
 ${}_t\mathbb{F}, {}_t\mathbb{C}, \det {}_t\mathbb{C}, t = {}_n t, {}_{n+\frac{1}{2}} t, {}_{n+1} t$
- und (gleichzeitige) Integration
 - des Elementvolumens
 - der Elementmasse und
 - der Elementdilatation ${}_t\theta^2, t = {}_n t, {}_{n+\frac{1}{2}} t, {}_{n+1} t$

Stufe 2: – Berechnen und Speichern der modifizierten Deformationsgrößen ${}_n\bar{\mathbb{C}}, {}_{n+1}\bar{\mathbb{C}}$ und von ${}_{n+T}k^{*1}$ an allen Gaußpunkten.
 – Dabei Integration des hydrostatischen Drucks ${}_{n+T}p$.

Stufe 3: – Berechnung der Projektionsparameter τ und α , dann
 – Berechnen und Speichern aller τ - und α -indizierten Deformations- und Spannungstensoren sowie aller restlichen erforderlichen Hilfsgrößen.

Stufe 4: – Integration der Elementvektoren ${}_{\tau}^A\mathbf{F}^{int}, {}_{\alpha}^A\mathbf{F}^{Zwang}, {}_T^A\mathbf{F}^{dyn}$ und ${}_T^1\mathbf{F}^{\lambda}$
 – Integration der Elementmatrizen nach (3.71), (3.75), (3.76) und (3.79)

Stufe 5: Berechnung von Kontrollgrößen wie Energie, Drall, Impuls, Elementdurchschlag usw.

Die Berechnung des Projektionsparameters τ für die elastischen Spannungen erfordert das Lösen einer nichtlinearen Gleichung. Diese Gleichung hat unangenehme Eigenschaften, u.a. wird sie singulär, wenn die Änderung des GREEN-LAGRANGESchen Deformationstensors z.B. zufolge einer GALLILEISchen Trägheitsbewegung verschwindet. Das ist mechanisch völlig korrekt und reflektiert nur den Umstand, daß dann eine Projektion der elastischen Spannungen nicht erforderlich ist. Oder beim ersten Iterationsschritt im Zeitschritt stehen noch keine zwei verschiedene Richtungen (s. Abb. 3.13) zur Verfügung, um daraus eine Linearkombination zu bilden. Auch das ist ein völlig natürliches Verhalten. Es resultieren aber numerische Schwierigkeiten. Deshalb wird von einer direkten Lösung bzw. einer NEWTON-Iteration abgesehen und eine Lösung nach Regula-Falsi bevorzugt, wo man die Entwicklung der Lösung während der Iteration hervorragend kontrollieren kann und keine Gradienten zu berechnen sind.

Der Projektionsparameter α der Zwangsspannungen läßt sich direkt als Quotient zweier Integralausdrücke berechnen.

Beide Projektionsparameter können während der ersten Iterationszyklen im Zeitschritt – aufgrund der zunächst stärker von der ausiterierten Endlösung $({}_{n+1}\boldsymbol{\varphi}^{(n_{iter})}, {}_{n+1}\lambda^{(n_{iter})})$ abweichenden Näherung $({}_{n+1}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}, {}_{n+1}\lambda^{(0)})$ zu Beginn der Iterationsprozedur – außerhalb des physikalisch zulässigen Intervalls $\tau, \alpha \in [0, 1]$ liegen.

Für diesen Fall wird der entsprechende Parameter auf $\frac{1}{2}$ gesetzt und weitere Iterationen des Zeitschrittes erzwungen, auch wenn die übrigen Konvergenzkriterien bereits erfüllt sind.

Läßt sich dennoch kein Projektionsparameter im gesuchten Intervall $[0, 1]$ berechnen, dann liegt das an einer bezogen auf den gewählten Zeitschritt zu rauhen Ebene der Projektionsbedingung (s. Abb. 3.13).

Bei – möglicherweise wiederholter – Aufspaltung des Zeitschrittes ließ sich in der numerischen Praxis immer eine zulässige Projektion ermitteln.

3.3.3 Modellierung der viskosen Dämpfung im Gummi analog zur *Newtonschen Flüssigkeit* unter Ausnutzung der Inkompressibilität

Die Rollbewegung eines Reifens nach dem in Kapitel 5 beschriebenen Szenarien bedeutet ständigen Energieeintrag in die Struktur. Zur Verhinderung eines Blow-Up ist neben der Notwendigkeit, Anregungen durch das Integrationsverfahren mittels der Projektion der konservativen Strukturrenergie auf den Energiesatz auszuschließen, auch die Fähigkeit erforderlich, die von den Kontaktkräften dem System zugeführte nichtkonservative Energie in Wärme umzuwandeln.

3.3.3.1 Zu verschiedenen Dissipationsansätzen

Der am einfachsten zu realisierende Ansatz ist eine modal motivierte Dämpfung, die in der Lage ist, einen allgemeinen Energieverlust der Struktur darzustellen. Voraussetzung für diese Klasse von Dissipationsmodellierung ist die Möglichkeit der modalen Zerlegung des Systems, um dann die Gesamtdämpfung durch eine Überlagerung der Dämpfungen in den einzelnen Moden darzustellen:

$$\boldsymbol{\Phi}_i^T \underline{\underline{D}} \boldsymbol{\Phi}_j = 2\omega_i r_i \delta_{ij},$$

wenn $\boldsymbol{\Phi}$ die Eigenvektoren, $\underline{\underline{D}}$ die Dämpfungsmatrix, ω_i die *ite* Eigenfrequenz und r_i das Dämpfungsmaß ist.

Es ist bekannt, daß eine solche Zerlegbarkeit die Orthogonalität der Eigenvektoren zur Dämpfungsmatrix voraussetzt, was nur bei linearer und schwacher Dämpfung näherungsweise zutrifft. Um die massenproportionale Dämpfung zu

parametrisieren ist die Kenntnis der Dämpfungsgrade in den p ersten Eigenfrequenzen der Struktur erforderlich.

Werden genau $p = 2$ Frequenzen betrachtet, spricht man von der RAYLEIGHschen Dämpfung. Dieses Dämpfungsmodell führt stets zu einer überproportionalen Dämpfung der Frequenzen oberhalb der Referenzfrequenzen und einer unterproportionalen Dämpfung der Frequenzen unterhalb der Referenzfrequenzen (s. [Bathe.90]). Wegen der speziellen Anforderungen an die Art der Dämpfung (Linearität, Dämpfungsgrad) und die Über- bzw. Unterdämpfung der verschiedenen Frequenzen ist die RAYLEIGHsche Dämpfung für Simulationsrechnungen des rollenden Reifens ungeeignet.

Sinnvoller und der Nichtlinearität der Kinematik und Dynamik des Rollvorganges adäquater sind rheologisch motivierte Dissipationsmodelle.

Dazu zählen elastoplastische, viskoelastische und viskoelastoplastische Werkstoffmodelle. Zur Modellierung der inneren Reibung im Gummi- und Kordmaterial kommen plastische Modelle zum Einsatz, die besonders bei Linienelementen gut verifizierbare Hysteresen abbilden (s. SFB-Bericht 88–91, S. B1–2 ff). Bei Problemen des dreidimensionalen Kontinuums ist diese Materialklasse numerisch sehr aufwendig (s. z.B. [Kaliske.95]). Viskoelastische Materialmodelle reproduzieren gut die flüssigkeitsähnlichen Eigenschaften von Gummi, sind aber nicht in der Lage, die in der Realität auftretenden bleibenden Hysterese-Effekte (PAYNE-Effekt) zu erfassen. Dafür sind sie einfacher numerisch zu handhaben. Bei der Verwendung von kombinierten viskoelastoplastischen Modellen kommt das Problem einer passenden Parametrisierung hinzu.

In dieser Arbeit sollte ein Reifenmodell zum Einsatz kommen, das nur die unbedingt notwendigen Dissipationseffekte enthält, um mit möglichst geringem Aufwand im Zeitschritt eine plausible Lösung zu produzieren. Darum wurde als physikalischer Ansatz die viskose Dissipation einer zähen Flüssigkeit (s. [Bathe.90], S. 465 ff) gewählt. Durch die Verwendung von quasi-inkompressiblem Material zur Beschreibung der Elastizität haben die CAUCHYschen Spannungen der zähen Flüssigkeit die einfache Form

$${}_t\boldsymbol{\sigma}^{Diss} = 2\mu\mathbb{D}, \quad \text{mit } \mathbb{D} = \frac{1}{2}[\text{grad}\mathbf{v} + (\text{grad}\mathbf{v})^T], \quad (3.80)$$

wobei μ die Zähigkeit und \mathbb{D} der Deformationsgeschwindigkeitstensor bzw. der Tensor der räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeiten (s. [Kaliske.95]) ist ¹².

Die volumetrischen Spannungen einer Flüssigkeit berechnen sich zu

${}_t\boldsymbol{\sigma}^{vol} = -p\mathbf{1}$ und haben hydrostatischen Charakter. Diese Spannungen resultieren bei Flüssigkeiten aus der Inkompressibilität und werden in der Simulation durch Nebenbedingungen erzwungen, z.B. durch die Kontinuitätsgleichung

$$\int_V \text{div}\mathbf{v} \, dV = 0.$$

¹²Der räumliche Geschwindigkeitsgradient $\mathbb{L} = \mathbb{D} + \mathbb{W}$ setzt sich zusammen aus dem symmetrischen Deformationsgeschwindigkeitstensor \mathbb{D} und dem antisymmetrischen Wirbeltensor \mathbb{W} (s. [Gummert.96]).

Bei festen und viskosen Materialien werden die voluminetrischen Spannungen bereits auf andere Weise, z.B. durch Nebenbedingungen für Inkompressibilität oder voluminetrisch formulierte Anteile im elastischen Materialgesetz erfaßt.

Darum wird in dieser Arbeit zur Beschreibung der Viskoelastizität von inkompressiblem Gummi einfach eine Überlagerung der deviatorischen Spannungen der zähen Flüssigkeit mit den hyperelastischen Spannungen des in Abschnitt 3.3.2 vorgestellten MOONEY–RIVLIN-Materials, formuliert in einer materiellen Basis angesetzt.

3.3.3.2 Formulierung der Arbeitsfunktion zur Dissipation

Der zum CAUCHYSchen Spannungstensor arbeitskonjugierte Deformationstensor ist der ALMANZI-Tensor $\mathbf{e} := \frac{1}{2} \left[\text{grad} \mathbf{u} + (\text{grad} \mathbf{u})^T - (\text{grad} \mathbf{u})^T \cdot (\text{grad} \mathbf{u}) \right]$ (s. [Bathe.90] S.420). Damit lautet die lokale Dissipationsarbeit, formuliert in einer räumlichen Basis:

$$w^{Diss} := \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{Diss} \quad (3.81)$$

Die Formulierung der Hyperelastizität erfolgte in einer materiellen Basis. Zur Überlagerung muß dann auch der dissipative Teil der Mechanik in dieser Basis dargestellt werden. Wenn man nun den ALMANZI-Tensor und den Deformationsgeschwindigkeitstensor in die materielle Basis transformiert (s. Anhang C.2) und bedenkt, daß bei symmetrischen Tensoren gilt: ${}^{symm} \mathbb{A} \cdot {}^{allg} \mathbb{T} = {}^{symm} \mathbb{A} \cdot {}^{allg} \mathbb{T}^T$, dann lautet das Arbeitsfunktional bzgl. der materiellen Basis

$${}^{Diss}_t w(\mathbb{F}, \dot{\mathbb{F}}) = \mu \left[\mathbf{1} - \mathbb{F}^{-T} \cdot \mathbb{F}^{-1} \right] \cdot \left[\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1} \right] \quad (3.82)$$

3.3.3.3 Variation und Aufstellen des Knotenvektors der Dämpfungskräfte

Wenn man die Arbeit der Dämpfungskräfte in der Form (3.82) verwendet, führt das auf ähnlich komplexe Ausdrücke wie die Linearisierung der Zwangskräfte in Abschnitt 3.3.2.3. Deshalb besinnt man sich auf die Struktur der EULER–LAGRANGE-Gleichungen in Abschnitt 3.3.1.1 und verwendet den mittels der PIOLA-Transformation auf die materielle Basis zurücktransformierten Tensor der CAUCHYSchen viskosen Spannungen

$$\begin{aligned} {}_t \boldsymbol{\sigma}^{Diss} &= 2\mu {}_t \mathbb{D} \xleftrightarrow{\text{Piola-Transf}} {}_t \mathbb{S}^{Diss} = {}_t J {}_t \mathbb{F}^{-1} \cdot {}_t \boldsymbol{\sigma}^{Diss} \cdot {}_t \mathbb{F}^{-T} \\ {}_t \mathbb{S}^{Diss} &= \mu {}_t J {}_t \mathbb{F}^{-1} \cdot \left({}_t \dot{\mathbb{F}} \cdot {}_t \mathbb{F}^{-1} + {}_t \mathbb{F}^{-T} \cdot {}_t \dot{\mathbb{F}}^{-T} \right) \cdot {}_t \mathbb{F}^{-T} \\ &\text{mit } {}_t J = \det {}_t \mathbb{F}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

um die Variation der Dissipationsarbeit zu definieren als

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\delta {}_t W^{Diss}}{\delta \boldsymbol{\varphi}}, \delta \boldsymbol{\varphi} \right\rangle &= \left\langle \underbrace{2 \nabla_{\mathbb{C}} \circ {}_t w^{Diss}}_{= {}_t \mathbb{S}^{Diss} \text{ nach (3.83)}}, \mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} \right\rangle \\
 &= \left\langle \nabla_{\mathbb{C}} \circ {}_t w^{Diss}, \mathbb{F}^T \cdot \delta \mathbb{F} + \delta \mathbb{F}^T \cdot \mathbb{F} \right\rangle \\
 &\vdots \\
 &= \mu {}_t J \left\langle \left(\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1} + \mathbb{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbb{F}}^T \right) \cdot \mathbb{F}^{-T}, \delta \mathbb{F}^T \right\rangle
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Durch Einführung der Rauminterpolation und anschließender Abspaltung der unabhängigen Variation der Knotenverschiebungen wie in Abschnitt 3.3.1.3 bekommt man den Knotenvektor der Dämpfungskräfte:

$${}^A {}_t \mathbf{F}^{Diss} = \mu \int_{\mathcal{B}} {}_t J \left({}_t \dot{\mathbb{F}} \cdot {}_t \mathbb{F}^{-1} + {}_t \mathbb{F}^{-T} \cdot {}_t \dot{\mathbb{F}}^T \right) \cdot {}_t \mathbb{F}^{-T} \cdot \mathbf{D}[{}^A N] d\mathcal{B}$$

und in lokaler Komponentenschreibweise

$${}^A f_i^{Diss} = \mu \left({}_t \dot{F}_{ik} {}_t F_{kl}^{-1} + {}_t \dot{F}_{ki} {}_t F_{lk}^{-1} \right) {}_t J F_{ml}^{-1} {}^A N_m \tag{3.85}$$

3.3.3.4 Zeitdiskretisierung der Dämpfungskräfte

Um eine sinnvoll Zeitdiskretisierung im Sinne der in Abschnitt 3.3.2.3 im Anschluß an Gleichung (3.59) vorgeschlagenen Berücksichtigung nichtkonservativer Kräfte beim EMA wird die Struktur der Funktion von ${}^A \mathbf{F}^{Diss}$ in (3.85) bzgl. ihrer Eingänge untersucht. Die Eingänge sind ${}_t \dot{\mathbb{F}}$ und ${}_t \mathbb{F}$, wenn man ${}_t J {}_t \mathbb{F}^{-1}$ nach CAYLEY–HAMILTON ersetzt.

Jetzt kann die zeitdiskrete Form definiert werden mit

$$\begin{aligned}
 {}^A {}_T \mathbf{f}^{Diss} &= {}^A {}_T \mathbf{f}^{Diss} \left({}_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{v}, {}_{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varphi} \right) = {}^A {}_T \mathbf{f}^{Diss} \left(\dot{\mathbb{F}} \left({}_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{v} \right), \mathbb{F} \left({}_{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varphi} \right) \right) \leadsto \\
 {}^A f_i^{Diss} &= \mu {}^A N_m \{ J \mathbb{F}^{-1} \}_{ml} \left[\left[{}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F}^{-1} \right]_{lk} {}_{n+\frac{1}{2}} \dot{F}_{ki} + {}_{n+\frac{1}{2}} \dot{F}_{ik} \left[{}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F}^{-1} \right]_{kl} \right] \\
 \text{mit } \{ J \mathbb{F}^{-1} \}_{ml} &:= \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{mn} - I {}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{mn} \right) {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nl} + II {}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{ml} \} \\
 {}_{n+\frac{1}{2}} \dot{\mathbb{F}} &:= \nabla_{\mathbb{X}} \circ {}_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{v} = \frac{1}{\Delta t} \nabla_{\mathbb{X}} \circ \left({}_{n+1} \boldsymbol{\varphi} - {}_n \boldsymbol{\varphi} \right) \\
 {}_{n+\frac{1}{2}} \dot{\mathbb{F}} &= \frac{1}{\Delta t} \left({}_{n+1} \mathbb{F} - {}_n \mathbb{F} \right)
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

3.3.3.5 Linearisierung der Dämpfungskräfte

Unter Berücksichtigung der Nebenrechnungen für den Ausdruck $\frac{\partial \left\{ {}_{n+\frac{1}{2}}^{J\mathbb{F}^{-1}} \right\}_{ml}}{\partial {}_{n+1}^B \varphi_j}$ (s. Anhang C.2) bekommt man als Linearisierung der Dämpfungsknotenkraft:

$${}_{T\underline{\underline{K}}}^{AB}{}^{Diss} = \int_{{}_0V} \frac{\partial {}_{Tf_i}^{A}{}^{Diss}}{\partial {}_{n+1}^B \varphi_j} d_0 V \underline{e}_i \underline{e}_j = \int_{{}_0V} {}_{T\underline{\underline{K}}_{ij}}^{AB}{}^{Diss} d_0 V \underline{e}_i \underline{e}_j$$

mit

$$\begin{aligned} {}_{T\underline{\underline{K}}_{ij}}^{AB}{}^{Diss} = & \frac{\mu}{2\Delta t} {}^A N_m \left\{ \right. \\ & \left[{}^B N_n \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{nl} \delta_{jm} - {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nj} \delta_{ml} \right) + {}^B N_l \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{mj} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{mj} \right) \right. \\ & \quad \left. \left. - {}^B N_j \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{ml} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{ml} \right) \right] \right. \\ & \left[{}_{n+\frac{1}{2}} F_{lk}^{-1} ({}_{n+1} F_{ki} - {}_n F_{ki}) + ({}_{n+1} F_{ik} - {}_n F_{ik}) {}_{n+\frac{1}{2}} F_{kl}^{-1} \right] \\ & + \left[\left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{mn} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{mn} \right) {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nl} + II_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{ml} \right] \cdot \\ & \left[- {}^B N_n {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nj}^{-1} {}_{n+\frac{1}{2}} F_{lk}^{-1} + \frac{1}{\det {}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F}} \left(\right. \right. \\ & \quad {}^B N_n \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{nk} \delta_{jl} - {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nj} \delta_{lk} \right) + {}^B N_k \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{lj} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{lj} \right) \\ & \quad \left. \left. - {}^B N_j \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{lk} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{lk} \right) \right) \right] \cdot \left[{}_{n+1} F_{ki} - {}_n F_{ki} \right] \\ & + \left[\left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{mn} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{mn} \right) {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nl} + II_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{ml} \right] \cdot \\ & \left[- {}^B N_n {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nj}^{-1} {}_{n+\frac{1}{2}} F_{kl}^{-1} + \frac{1}{\det {}_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F}} \left(\right. \right. \\ & \quad {}^B N_n \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{nl} \delta_{jk} - {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nj} \delta_{kl} \right) + {}^B N_k \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{kj} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{kj} \right) \\ & \quad \left. \left. - {}^B N_j \left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{kl} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{kl} \right) \right) \right] \cdot \left[{}_{n+1} F_{ik} - {}_n F_{ik} \right] \\ & + 2 \left[\left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{mn} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{mn} \right) {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nl} + II_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{ml} \right] {}^B N_i \delta_{kj} {}_{n+\frac{1}{2}} F_{lk}^{-1} \\ & \left. + 2 \left[\left({}_{n+\frac{1}{2}} F_{mn} - I_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{mn} \right) {}_{n+\frac{1}{2}} F_{nl} + II_{n+\frac{1}{2}} \mathbb{F} \delta_{ml} \right] {}^B N_k \delta_{ij} {}_{n+\frac{1}{2}} F_{kl}^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Die Berechnung dieser Matrix ist numerisch kostspielig und ihre Implementierung fehleranfällig. Bei den Simulationen für diese Arbeit wurde die JACOBI-matrix der Dämpfungskräfte ausgeblendet. Auch ohne die Nutzung der Gradienten der Dämpfungskräfte konvergierten die Beispiele zufolge der gegenüber der Elastizität insgesamt relativ schwachen Dämpfung sehr gut.

Kapitel 4

Die Schnittstelle zwischen Vielteilchen-Einschicht- und FE-Mehrschichtmodell

In diesem Kapitel werden die Methoden erläutert, mit denen die durch das Vielteilchenmodell nach Kapitel 2 berechnete „äußere Mechanik“ des transienten Rollvorganges für die Simulation der „inneren Mechanik“ während eines Rechenlaufes des FE-Modells nach Kapitel 3 verwendet wird.

Schnittstelle zwischen FE-Modell und Vielteilchenmodell

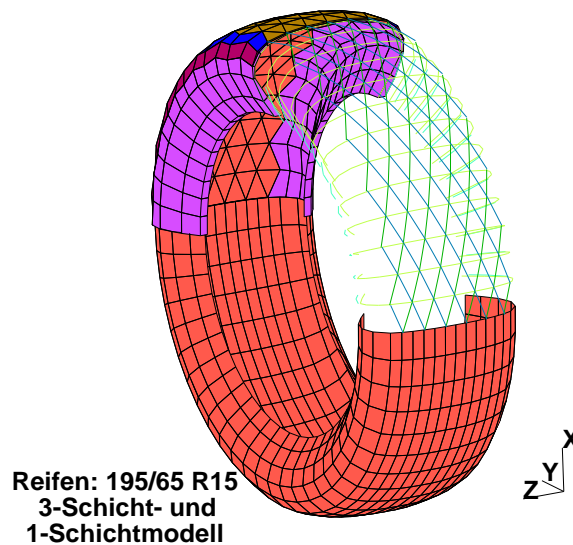


Abbildung 4.1: Kompatible Topologie des Vielteilchen- und des FE-Modells

Der Grundgedanke der Verknüpfung der beiden Modellwelten besteht darin, daß man bei hinreichend guter Parametrisierung eine vergleichbare Reaktion der Reifenquerschnitte auf die Kontakt- und Trägheitskräfte sowohl beim Einschicht- und als auch beim Mehrschichtmodell erzeugt. Dann ist es bei Verwendung einer kompatiblen räumlichen Diskretisierung desselben Reifens möglich,

die Kontaktrechnung aus der aufwendigen Simulationsrechnung des Mehrschichtmodells zu eliminieren. Dafür wird das FE-Modell auf die Felgenbewegung des Einschichtmodells durch eine entsprechende kinematische Führung gezwungen. Gleichzeitig werden die bei der Simulation des transienten Rollens berechneten Kontaktkräfte des Einschichtmodells auf das Mehrschichtmodell direkt als äußere Kräfte appliziert.

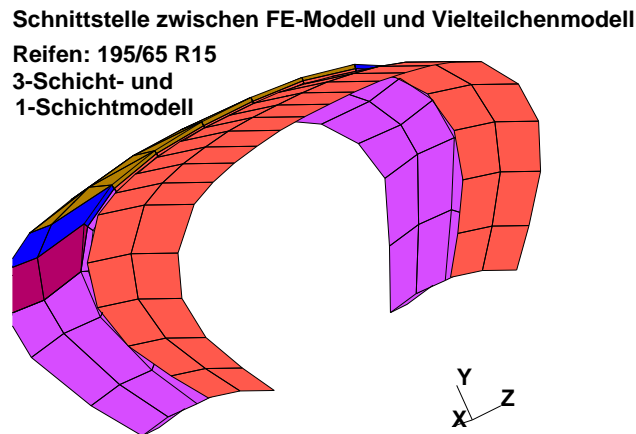


Abbildung 4.2: Kompatible Meshgeometrie, Teilansicht

Durch diese Vorgehensweise kann der insgesamt notwendige numerische Aufwand für transiente Berechnungen beträchtlich gesenkt werden:

Der instationäre Rollvorgang erzeugt immer eine von der Rollgeschwindigkeit und vom gewählten Spacing des Meshes abhängige Rauigkeit der Kontaktkräfte. Diese Rauigkeit muß durch den gewählten Zeitschritt der Simulation genauso abgetastet werden wie die dem Modell inherenten hohen Eigenfrequenzen der Reifenstruktur. Da die durch den Kontakt entstehenden Anforderungen an die Schrittweite denen der Integration mit expliziten Integratoren entspricht, fällt die Wahl des Modells, das genau diese Aufgabe bei vergleichbar geringem numerischem Aufwand sehr gut leistet soll, ganz natürlich auf das vorgestellte Einschichtmodell.

Die Modelle nach der Vielteilchenmethode sind hervorragend in der Lage, den dynamischen Zusammenhang zwischen Kontakt- und Trägheitskräften und der Gesamtdeformation bzw. der Bewegung der Reifenquerschnitte darzustellen, wie das vielfach in der Literatur (s. [Böhm.93a, Böhm.96a, Gallrein.92, Zachow.97, u.a.]) sowie in Abschnitt 5.1 dargestellt ist.

Dadurch bekommt man die Möglichkeit, den Aufwand für die Kontaktberechnung bei einem dafür gut geeigneten, relativ kostengünstigen Modell nur einmal betreiben zu müssen. Man ist dann bei dem zur Simulation der „inneren Mechanik“ erforderlichen, teuren Mehrschichtmodell frei

– von den Problemen der kleinen Schrittweite,

- den Anforderungen an das Spacing der Protektordiskretisierung für eine hinreichende Kontaktabtastung und
- den Kontaktsimulationen meist zugehörigen Stabilitätsproblemen.

Trotzdem ist man in der Lage, die Fragen zur inneren Reaktionen der Struktur auf das instationäre Rollen in hinreichender Güte zu beantworten.

Einzig die Wechselwirkung zwischen der Profilierung des Laufstreifens und der Struktur des Schichtverbundes auf die Kontaktmechanik wird vom FE-Modell nicht erfaßt. Damit kann nur indirekt durch Anpassung der Parameter des Einschichtmodells untersucht werden, welchen Einfluß eine Änderung in der inneren Struktur des Reifens auf die Ausbildung der Kontaktzone und damit der Kontaktkräfte hat. Bei kleinen Änderungen an der Struktur kann man dann aber sehr wohl auf die gute Abbildung des Schichtverhaltens des Gürtelreifens durch das FE-Modell zurückgreifen.

Nicht unerwähnt bleiben sollen die generellen Möglichkeiten, die sich aus der Trennung der Gesamtsimulation in zwei Phasen ergeben.

- Die errechneten Kontaktkräfte können vor der Applikation als äußere Kräfte auf die FE-Struktur aufbereitet werden. So können z.B. extrem hochfrequente Rauigkeiten in den Kontaktkräften herausgefiltert werden, die durch Polygoneffekte im möglicherweise noch zu rauen Vielteilchenmodell induziert wurden und bekannterweise in den vorhandenen Messungen so nicht auftreten. Dadurch werden unphysikalische Erregungen der FE-Struktur vermieden, die den Rechenlauf verteuern.
- Genauso ist die Möglichkeit, vor dem Start der teuren FE-Simulation sicherzustellen, daß die gewählten Parameter des Rechenbeispiels mit hoher Wahrscheinlichkeit zum Erfolg führen werden, besonders für die numerische Praxis von nicht zu unterschätzender Bedeutung.

4.1 Der erforderliche Datensatz

Alle Modelle werden in materiellen Koordinaten bzgl. des ruhenden, raumfesten Inertialsystems $\langle {}_0\mathbf{e}_x, {}_0\mathbf{e}_y, {}_0\mathbf{e}_z \rangle$ formuliert.

Diese Wahl des Bezugssystems hat gegenüber der räumlichen, mitgeführten Basis $\langle {}_t\mathbf{e}_\alpha, {}_t\mathbf{e}_\beta, {}_t\mathbf{e}_\gamma \rangle$ nicht nur den Vorteil, daß keine Drift bei der Integration der Referenzstruktur stattfindet – ein Problem, mit dem viele Arbeiten zu kämpfen haben, in denen längere Bewegungsabschnitte von steifen elastischen, in einer räumlichen Basis formulierten Strukturen simuliert werden –, sondern daß sich damit auch der erforderliche Inhalt des Datensatzes der Schnittstelle auf natürliche Art ergibt.

Die äußere Mechanik des rollenden Reifens ist vollständig beschrieben durch Datensätze mit der Historie

- der Felgenstellung im Raum,
- den Verschiebungsvektoren oder Ortsvektoren aller Punkte des Vielteilchenmodells

- einer Aufzählung der sich im Kontakt befindlichen Punkte und
- den Kontaktkräften an den Kontaktpunkten

Die von der Zeit nicht oder nur schwach abhängigen Angaben wie

- die Topologie des Vielteilchenmodells als eine Menge von Vierecksflächen oder Seilstücken,
- den Ortsvektoren der Referenzkonfiguration und
- der Reifendruck

werden in einem separaten File organisiert. Damit kann zu jedem abgespeicherten Zeitpunkt der Ort aller Kontaktpunkte und der dort wirkenden Kontaktkräfte sowie die Orte der Felgenreandpunkte rekonstruiert werden.

Die Frequenz, mit der die Zeitschrittdaten gespeichert werden, muß nicht notwendigerweise der Schrittweite der expliziten Integration entsprechen.

Es müssen aber zumindest so viele Zeitschritte gespeichert werden, daß der zeitliche Abstand zwischen zwei Datensätzen immer kleiner ist, als der kleinste, jemals in der FE-Rechnung vorkommende Zeitschritt. Ansonsten entsteht regelmäßig die Situation, daß bei der FE-Rechnung im Zeitschritt von $_n t$ nach $_{n+1} t$ keine Veränderung der äußeren Lasten bzw. der Felgenbewegung stattfindet, was einem abrupten „Bremsstoß“ insbesondere der Felgenbewegung gleichkommt und die FE-Struktur auf physikalisch unzulässige Art anregt.

Desweiteren sind alle Zeitschritte abzuspeichern, bei denen sich die Liste der in Kontakt befindlichen Punkte ändert.

Da das Speichervolumen der Dateien mit den Zeitschrittdaten sehr voluminöse Ausmaße annehmen kann, ist es insbesondere angesichts der meist geringen Geschwindigkeit der Massenspeicher sinnvoll, ein Indexfile mit dem Inhaltsverzeichnis der Files mit den Zeitschrittdaten anzulegen.

Dadurch wird das rechenzeitaufwendige Auffinden des Datensatzes eines speziellen Zeitschrittes deutlich beschleunigt.

Bei der FE-Zeitintegration muß immer der Datensatz für den jeweiligen Zeitpunkt $_{such} t = _{n+1} t$ neu gefunden werden. Der Datensatz für $_n t$ kann meist vom vorherigen Zeitschritt übernommen werden.

Da man bei Verwendung einer Zeitschrittsteuerung mit variablen Schrittweiten arbeitet, kann ein Zeitpunkt $_{such} t$ nicht direkt gefunden werden. Vielmehr muß man das Intervall $[_{vort} t, _{nacht} t]$ finden, für das $_{vort} t \leq _{such} t \leq _{nacht} t$ gilt und wählt dann den Datensatz aus, der dichter zu $_{such} t$ liegt.

Es wird vorgeschlagen, einfache oder häufig abgefragte Größen, wie die Parameter der Felgenbewegung in separaten Tabellen oder Funktionen abzulegen. Damit schafft man die Möglichkeit, durch Interpolation der Größen die Bewegung vom Vielteilchenmodell glatter und schneller auf das FE-Modell zu übertragen.

4.2 Führungsbewegung der Felge

Die Knoten des FE-Modells, die kinematisch geführt werden sollen, werden in einer Menge gespeichert. Dann kann für jeden Knoten dieser Menge bei bekannter Position des Knotens gegenüber der Felge des Vielteilchenmodells in der Referenzlage durch Anwendung der Parametrisierung der Starrkörperbewegungen die geforderte Lage des Knotens zum Zeitpunkt ${}_n t$ oder ${}_{n+1} t$ berechnet werden. Bei allgemeiner Felgenbewegung ist auf eine singularitätenfreie Darstellung der Starrkörpertransformationen zu achten.

Zur kinematischen Führung der Felgenknoten der FE-Struktur wird das entsprechende Flag für Randbedingungen gesetzt und der jeweilige Verschiebungsvektor für ${}_n t$ und ${}_{n+1} t$ vorgegeben. Damit kann dann die Reaktion der FE-Struktur auf diese Verschiebungen und den dazugehörigen Geschwindigkeiten berechnet und als Lagerreaktionen assembliert werden.

Die Berücksichtigung der FE-Gleichungen an den geführten Freiheitsgraden der Felgenknoten ist nicht erforderlich und wird deshalb bei der Assemblierung übergangen.

4.3 Zur Lastaufbringung

Ein besonders wichtiger Aspekt der Schnittstelle zwischen Vielteilchen- und FE-Modell ist die Organisation der Lastaufbringung. Erst eine adäquate Lastaufbringung garantiert neben der erforderlichen gleichartigen Abbildung der Reifensteifigkeiten ein übereinstimmendes Verhalten der Gesamtstruktur.

Weitere Schwierigkeiten entstehen dadurch, daß einerseits Modelle mit unterschiedlicher Knotentopologie zu vereinen sind, was nichtkontinuierliche Suchvorgänge nach sich zieht. Andererseits soll die Lastaufbringung die Simulation nicht durch zu großen Aufwand „ausbremsen“.

Die von der Schnittstelle gesteuerten Kräfte beinhalten ausschließlich die Kontaktkräfte.

Druckkräfte werden nur durch den skalarwertigen Zeitverlauf des Reifeninnendruckes gesteuert und als Flächenlasten auf die momentane Struktur des Reifens nach Standard-FE-Algorithmen organisiert.

Zunächst gilt es den Ort zu identifizieren, an dem die Kontaktkraft aus dem Vielteilchenmodell wirken soll. Dazu sind ähnlich potente Suchalgorithmen erforderlich, wie bei einer klassischen Kontaktsimulation. Dann sind die als Punkt- oder Flächenlast gegebenen Kräfte auf einen beliebigen Punkt oder Bereich der Elementoberfläche aufzubringen.

Es muß sichergestellt werden, daß gegenüber dem Vielteilchenmodell die Gesamtgröße des Latsches des FE-Modells erhalten bleibt.

- Ansonsten verteilen sich die Kräfte auf eine zu große Fläche und platten den Reifen nicht stark genug ab oder
- die Kräfte wirken zu konzentriert und verursachen überhöhte lokale Deformationen.

Es wird in Analogie zur Trapezregel jeweils das arithmetische Mittel der Kräfte bei ${}_n t$ und ${}_{n+1} t$ appliziert, was die aufgebrachten Lasten zusätzlich glättet.

4.3.1 Punktlast auf einer Elementbegrenzungsfläche

Nach Gleichung (3.29) lautet die virtuelle Arbeit der Lasten auf einer Fläche

$$\delta W^{ext} = \left\langle \bar{\mathbf{t}}, \delta \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{\Gamma_\sigma}$$

Nach Abspaltung der beliebigen Knotenvariationen $\delta^A \boldsymbol{\varphi}$ von der Verschiebungsvariation $\delta \boldsymbol{\varphi}$ nach (3.41) bekommt man die Knotenkräfte mit

$${}^A \mathbf{F}_t^{ext} = \left\langle {}_t \bar{\mathbf{t}}(\xi, \eta), {}^A N(\xi, \eta) \right\rangle_{\Gamma_\sigma} \quad \text{mit} \\ {}_t \bar{\mathbf{t}}(\xi, \eta) = {}^P \mathbf{F}|_{{}^P \xi, {}^P \eta} * \text{Dirac}({}^P \xi, {}^P \eta) \text{ als Punktlast am Punkt } ({}^P \xi, {}^P \eta)$$

Dieses Integral mit der *Dirac*-Distribution errechnet sich bei bekannten isoparametrischen Koordinaten $({}^P \xi, {}^P \eta)$ des Kraftangriffspunktes ${}^P \mathbf{r}$ überaus einfach zu

$${}^A \mathbf{F}_t^{ext} = {}^A N({}^P \xi, {}^P \eta) {}^P \mathbf{F} \quad (4.1)$$

4.3.2 Zur Identifizierung der belasteten Elemente

Die aufzubringenden Kräfte sind immer zusammen mit dem Ort ${}^P \mathbf{r}$, an dem sie wirken abgespeichert. Die Menge aller Angriffspunkte ${}^P \mathbf{r}$ der Kontaktkräfte bestimmen den Latschbreich.

Da im Allgemeinen immer Abweichungen zwischen den sich ehemals entsprechenden Orten der Modelle im Zeitverlauf geben kann, muß die belastete Fläche stets neu identifiziert werden. Dabei tritt gleichzeitig die Schwierigkeit auf, daß der räumliche Kraftangriffspunkt aus dem Vielteilchenmodell i.allg. in keiner Elementebene des FE-Modells liegt (s. Abb. 4.3).

Deshalb wird ein dreistufiger Suchalgorithmus für alle potentiell zu belastenden Elementflächen angewendet:

Stufe 1: Da die Felgenstellung im Vielteilchenmodell und im FE-Modell immer identisch ist, werden die Elementknoten und die Kraftangriffspunkte zunächst in ein felgenfestes, modifiziertes Kugelkoordinatensystem $(r, \varphi, \vartheta)_{<\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\vartheta>}$ transformiert (s. Abb. 4.3). In diesem Koordinatensystem werden die extremalen Sektorkoordinaten $\varphi_{\min}, \varphi_{\max}, \vartheta_{\min}$ und ϑ_{\max} ermittelt.

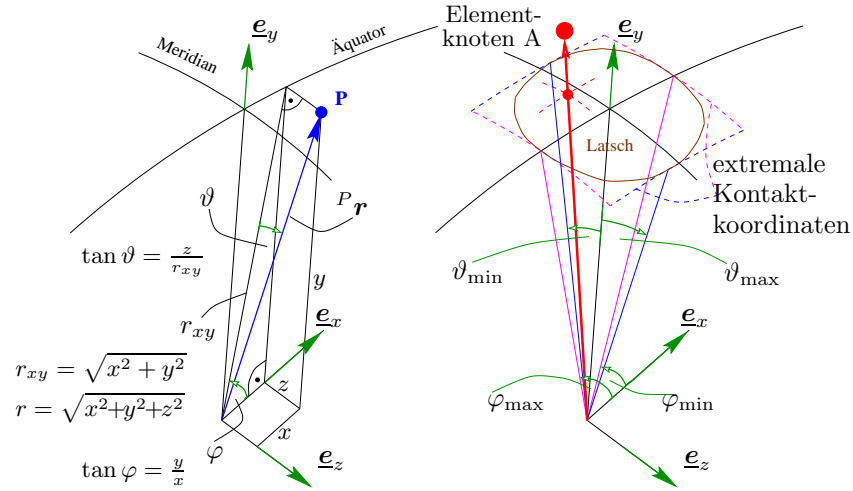


Abbildung 4.3: Modifizierte Kugelkoordinaten und Kontaktsektor

Stufe 2: Von allen FE-Knoten A , die potentiell in Kontakt kommen können, werden nun sukzessive die momentanen Ortsvektoren ${}^A_t\boldsymbol{\varphi} = {}^A\mathbb{X} + {}^A_t\mathbf{u}$ ebenfalls in das Kugelkoordinatensystem (r, φ, ϑ) transformiert als ${}^A_t\boldsymbol{\varphi} = [{}^Ar, {}^A\varphi, {}^A\vartheta]^T$.

Damit kann unabhängig von der Radiuskoordinate Ar entschieden werden, ob ein Knoten des FE-Modells im Kontaktsektor liegt, wenn $\vartheta_{\min} \leq {}^A\vartheta \leq \vartheta_{\max}$ und $\varphi_{\min} \leq {}^A\varphi \leq \varphi_{\max}$.

Stufe 3: Wird festgestellt, daß ein Elementknoten im Kontaktsektor liegt, hat man ein potentiell belastetes Element gefunden. Um endgültig zu entscheiden, ob die Kraft am Punkt ${}^P\mathbf{r}$ das untersuchte Element belastet, werden die isoparametrischen Koordinaten ${}^P\xi, {}^P\eta$ des Durchstoßungspunktes des Vektors ${}^P\mathbf{r}$ durch die Elementrandfläche in der Momentankonfiguration berechnet. Dieser Vorgang wird weiter unten beschrieben.

Wenn die isoparametrischen Koordinaten innerhalb der Elementgrenzen liegen, dann kann die Kraft nach Abschnitt 4.3.1 appliziert werden. Bei der Entscheidung, ob die isoparametrischen Flächenkoordinaten ξ, η im Element liegen, sind die Besonderheiten bzgl. des Wertebereiches der isoparametrischen Flächenkoordinaten bei dreieckigen Elementrandflächen zu beachten.

Der große Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der Eindeutigkeit der Entscheidungsgrundlage und der Variabilität gegenüber nahezu beliebig verzerrten Elementrandflächen bei vergleichsweise niedrigem numerischem Aufwand.

Die Flächenkoordinaten des Durchstoßpunktes durch die Elementebene können wie folgt berechnet werden.

Als Bedingung für den Durchstoßpunkt wird

$$\lambda {}^P\mathbf{r} - {}^{\text{FE}}\mathbf{r}({}^P\xi, {}^P\eta) = \mathbf{0} = \mathbf{g} \begin{pmatrix} {}^P\xi \\ {}^P\eta \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$\lambda \dots$ skalarer Faktor, um ${}^P\mathbf{r}$ auf die Elementfläche zu projizieren,
 ${}^P\xi, {}^P\eta \dots$ isoparametrische Koordinaten des Durchstoßungspunktes
 ${}^P\mathbf{r} \dots$ Ortsvektor des Testvektors und

$${}^{\text{FE}}\mathbf{r} = \sum_{A=1}^{n_{\text{Enodes}}} {}^AN(\xi, \eta) {}^A_t\boldsymbol{\varphi} \dots \text{Ortsvektor der Elementfläche}$$

Damit hat man ein nichtlineares System aus drei Gleichungen, das man nach NEWTON mit der JACOBIMatrix

$$\frac{\partial \mathbf{g} \begin{pmatrix} {}^P\xi \\ {}^P\eta \\ \lambda \end{pmatrix}_i}{\partial \begin{pmatrix} {}^P\xi \\ {}^P\eta \\ \lambda \end{pmatrix}_j}$$

leicht lösen kann. Die JACOBIMatrix ist dabei ganz simpel mit den Gradienten der Formfunktionen $\frac{\partial {}^AN(\xi, \eta)}{\partial (\xi, \eta)}$ und den karthesischen Komponenten des Kraftangriffspunktes ${}^P\mathbf{r}$ gefüllt. Die Erfahrung zeigt, daß dieses Gleichungssystem sehr zügig konvergiert.

Damit hat man durch die Anwendung des dreistufigen Entscheidungsalgorithmus die Möglichkeit mit sehr geringem numerischem Aufwand eine Vorentcheidung zu treffen und dann mit einem sehr stabilen, adaptiven und relativ billigen Verfahren auch bei beliebig verzerrten Elementrandflächen sicher zu entscheiden, ob das gerade betrachtete Element von der gerade untersuchten Kontaktkraft belastet wird. Dabei ist die arbeitskonforme Applikation einer Einzelkraft auf eine isoparametrische Elementfläche sehr einfach zu realisieren.

4.3.3 Filterung der Kontaktkräfte für das FE-Modell

Bereits mehrfach wurde diskutiert, daß das FE-Modell in jedem Fall seinen Zeitschritt auch nach den in den Kontaktkräften enthaltenen Frequenzen richten muß. Mit der Rauigkeit der Kontaktkräfte steigt auch deren Frequenzinhalt. Offensichtlich ist aber die Rauigkeit der vom Vielteilchenmodell berechneten Zeitverläufe eine Folge der relative groben räumlichen Abtastung des Rollkontaktes, tritt so in der Realität nicht auf und ist deshalb unerwünscht.

Vielmehr zeigen Messungen, daß bei Schlagleistenüberfahrten mit realen Fahrzeugen an der Achse keine Kräfte mit Frequenzen jenseits von ca. 300 Hz festzustellen sind.

Deshalb werden in dieser Arbeit die vom Vielteilchenmodell berechneten Kontaktkräfte gefiltert, bevor sie als Lastkollektiv der FE-Struktur aufgeprägt werden.

Mit der Anwendung von Filtern entsteht aber sofort das Problem der Phasenverschiebung der Kontaktkräfte. Es muß unbedingt verhindert werden, daß bei der vorgestellten Schnittstelle der FE-Reifen in die Position eines Zeitschrittes gedreht wird, die dazugehörigen Lasten aber erst phasenverschoben in einem der nächsten Zeitschritte die Struktur erreichen. Ein solches Verhalten führt zu einer Verschiebung des Latsches im FE-Modell in Richtung des Auslaufes und ist als Modellfehler (Latschform wie bei einer Bergabfahrt) unzulässig.

Um dieses Problem zu beheben gibt es im wesentlichen zwei Ansätze:

- Verwendung eines „vorausschauenden“ Filters
- Verwendung eines Filters mit optimierter Laufzeit

Die Realisierung eines „vorausschauenden Filters“ ist denkbar, indem man die Ausgabe der Daten für die Schnittstelle gegenüber dem eigentlich gerechneten Zeitschritt des Vielteilchenmodells zeitlich nach hinten verschiebt. Dadurch hat man zum Zeitpunkt der Ausgabe schon Informationen über den zukünftigen Verlauf der Kontaktkräfte und kann eine phasengetreue Filterung realisieren. Gleichzeitig ist es aber bei dieser Vorgehensweise auf jeden Fall notwendig, die explizite Rechnung möglichst vollständig vor dem FE-Rechenlauf durchzuführen.

Wenn man auch simultan zum aktuellen Zeitschritt die Schnittstelle mit Daten versorgen will, dann muß man ein klassisches Filter verwenden.

Als geeignetes Filter bieten sich die numerisch äußerst effektiven Digitalfilter an. Diese aus der Elektronik bekannten Filter (s. [Tietze.91]) lassen sich sehr leicht implementieren und verschiedene Filtercharakteristiken einstellen.

Unter dem Gesichtspunkt der optimalen Laufzeit und einer hinreichenden Filtergüte wurde ein Besselfilter 2. Ordnung mit einer Grenzfrequenz von 450 Hz eingesetzt. Die dazugehörige Theorie entnehme man Anhang D.

Kapitel 5

Simulation des instationären Rollvorganges eines 195/65R15-PKW-Reifens

In diesem Kapitel werden die Simulationsergebnisse, die mit den Modellen nach Kapitel 2 und 3 sowie deren Verknüpfung nach Kapitel 4 erzielt wurden.

Gegenstand der Simulation ist ein PKW-Reifen vom Typ 195/65 R15 91V der Marke „Top Speed“ aus dem Hause Semperit (s. Abbildung 5.1).

Zur Verifikation der Simulation wurden Meßdaten verwendet, die in umfangrei-



Abbildung 5.1: PKW-Reifen 195/65R15

cher Form im Sonderforschungsbereich 181 („Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugräder“) sowie im Rahmen der Forschungstätigkeit und vieler Veröffentlichungen, Diplomarbeiten und Dissertationen am Institut für Mechanik am Fachbereich Verkehrswesen und Angewandte Mechanik an der Technischen Universität Berlin über viele Jahre für Reifen aller Art und für diesen Reifen im speziellen zusammengetragen wurden.

Es ist nicht Anliegen dieses Kapitels, eine 100prozentige Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den Messungen herbeizuführen bzw. das Potential

der Modelle bis zum letzten auszuschöpfen. Für diese Aufgabe benötigte man einen Parametersatz, der aufgrund der dafür wesentlich höheren Anforderungen optimal an auf die Realität abgestimmt werden müßte. Diese Anforderung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Dennoch ist es gelungen, die verwendeten Modelle so gut zu parametrisieren, daß die Ein- und Mehrschichtmodelle sowohl in erstaunlich gute Übereinstimmung untereinander und als auch zur Realität gebracht werden konnten, obwohl ihre Numerik und theoretische Grundlage z.T. erheblich voneinander abweichen.

Ziel dieses Kapitels soll es vielmehr sein, die Theorie aus den Kapiteln 2 bis 4 anzuwenden und deren Vorteile an hinreichend gut ausgefeilten Modellen für den instationären dynamischen nichtlinearen Rollkontakt von Luftreifen zu demonstrieren.

5.1 Simulation der äußeren Mechanik mit dem Vielteilchenmodell

5.1.1 Parametrisierung

Kriterium für die angestrebte Güte der Parametrisierung des Einschichtmodells ist die Fähigkeit,

- die statischen Federkennlinien und
- die modalen Eigenschaften des frei schwingenden Reifens

mit einem für die transiente Zeitintegration geschaffenen Modell hinreichend genau abzubilden.

Die Forderung nach der Abbildung der Federkennlinien hat zur Folge, daß der (statische) Zusammenhang zwischen Querschnittsdeformation (Abplattung) und Achskraft richtig erfaßt wird. Die Forderung nach adäquater Abbildung der modalen Eigenschaften garantiert die richtige Berechnung der Relationen zwischen Trägheit und Steifigkeit der Struktur sowie deren Dämpfung. Nur die gleichzeitige Erfüllung der statischen und modalen Anforderungen stellt sicher, daß die transiente Dynamik nicht nur hinsichtlich des Frequenzinhaltes und der Dissipation, sondern auch auf dem richtigen Absolutniveau dargestellt wird.

Erst ein Modell, das diesen Anforderungen genügt, ist in der Lage, den Zusammenhang zwischen transienten, instationären Rollbewegungen mit vorwiegend kleinen, aber endlichen Deformationen und den daraus resultierenden dynamischen Achskräften in der Zeit zu berechnen.

Die entstehenden Achskräfte sind neben dem Einfluß der Strukturparametrisierung zusätzlich stark geprägt von der Feinheit der räumlichen und zeitlichen Abtastung des Kontaktes.

Eine falsch auf den – von der Feinheit des Meshes, den Steifigkeiten, Massen und Dämpfungen der Kontaktelemente sowie der Reibungskennlinie abhängigen – Frequenzinhalt abgestimmte zeitliche Abtastung des Kontaktes führt zu

unphysikalischem Verhalten und ist zu unterbinden.

Der Rollkontakt eines profilierten Reifens ist räumlich diskontinuierlich.

Ein Reifenmodell mit spürbarer Polygonalität wird darum stets mehr oder weniger raue Kontakt- und damit Achskräfte produzieren. Diese Rauigkeit ist dabei kein Fehler im Modell, sondern die natürliche Folge eines dem Modell inherenten nichtglatten Abrollvorganges über eine polygone Geometrie, der eigentlich nur eine Serie von Stoßvorgängen darstellt.

Es gibt Untersuchungen, daß erst eine räumliche Abtastung mit ca. 200 Kontaktpunkten in Umfangsrichtung den Polygoneffekt tatsächlich beruhigen und einen profillosen Slickreifen darstellen kann. Das Einschichtmodell in dieser Arbeit besitzt lediglich 52 Protektorpunkte in Umfangsrichtung. Damit wird für jeden Stollen in Umfangsrichtung ungefähr ein Kontaktpunkt zur Verfügung gestellt. In vielen Arbeiten ([Sfb181.A1, Oertel.90, Gallrein.92, Feng.91, Kmoch.92]) ist beschrieben, daß der Kontaktvorgang eines Stollens natürlich deutlich komplizierter ist. Dennoch erschien dem Autor diese Auflösung ein vertretbarer Kompromiß zwischen

- dem Anspruch an die Glattheit der Kontaktkräfte,
- der Anzahl der Modellfreiheitsgrade und damit
- dem numerischem Aufwand (Rechenzeit, Handlebarkeit) des Modells
- sowie dem entstehenden Umfang der Schnittstelle zum Mehrschicht FE-Modell

zu sein.

Die entstehende Anregung durch die Stolleneingriffsfrequenz von $[0 \dots 310]$ Hz ist in der Animation der Latschkkräfte deutlich sichtbar (s. dort).

5.1.1.1 Geometrieerzeugung des Einschichtmodells

Zunächst wurde die Geometrie des Reifenquerschnittes erzeugt.

Dazu wurde der vorhandene Reifen geometrisch vermessen. Es standen mittels Laserabtastung erstellte Pumpfiguren/Reifenquerschnitte für verschiedene Innendrucke zur Verfügung (s. Abbildung 5.2¹).

Diese mit einem Lasermeßkopf vermessenen Pumpfiguren haben einen doppelten Nutzen:

- Einerseits stellen sie vermessene Gleichgewichtsfiguren des Reifenquerschnittes dar. Bei Kenntnis der Anordnung der Kordlagen relativ zur Außenkontur kann man damit die Gleichgewichtskonfiguration direkt messen.
- Der größte Radius der Pumpfiguren verändert sich relativ linear mit dem Innendruck.
Dadurch können die Pumpfiguren zur Anpassung der Kordsteifigkeiten der Seilelemente des Gürtelverbandes genutzt werden (s. dort).

¹Die gratige Kontur am unteren Ende resultiert aus den Singularitäten bei der Abtastung des Felgenhorns.

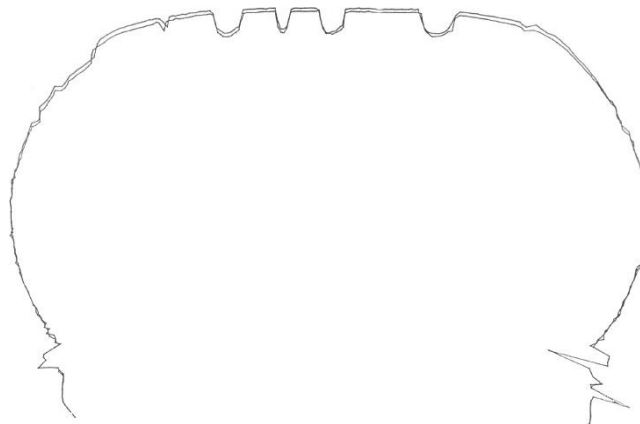


Abbildung 5.2: Pumpfiguren des Conti 195/65R15 Super Contact bei 1 bar und 5 bar Überdruck, jeweils 348 Laserabtastungen der Kontur

Zur Feststellung der Position der Kordlagen innerhalb der Struktur wurde ein Reifensegment aus einem Reifen herausgetrennt. Die Lage der Korde in einem Reifenquerschnitt lassen sich sehr schön mittels Durchreiben mit Kohlepapier ermitteln (s. Abbildung 5.3).

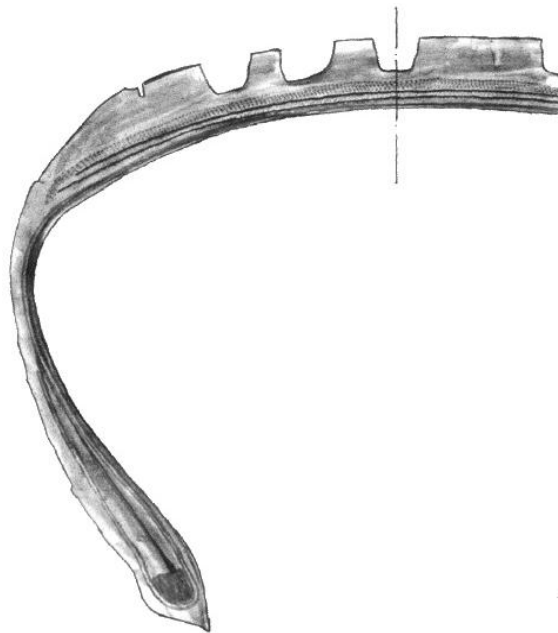


Abbildung 5.3: Mit Kohlepapier durchgeriebene Struktur eines Reifenquerschnittes

Mit dieser Information kann die Lage der Korde im Gleichgewichtsquerschnitt eingetragen werden (s. Abbildung 5.4), der die Grundlage für die Ausgangskonfiguration aller in diesem Kapitel vorgestellten Reifenmodelle bildet.

Beim Einschichtmodell muß der Gürtelverband zu einer einzigen Schicht zu-

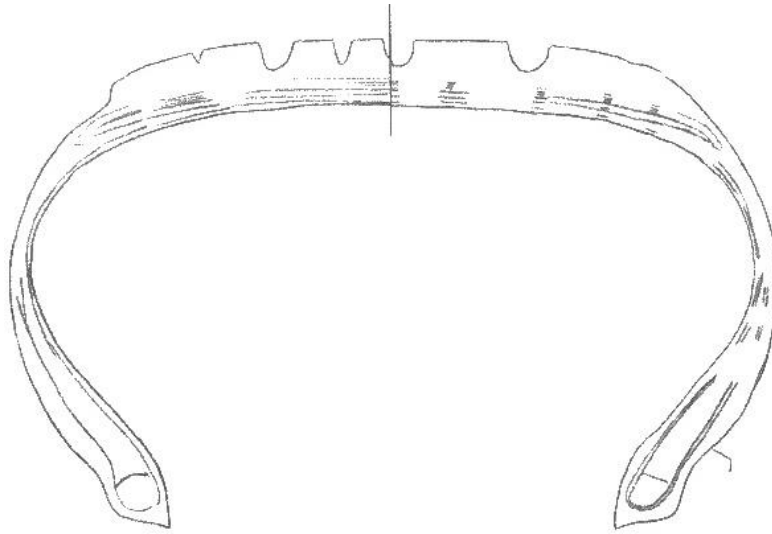


Abbildung 5.4: Kordlagen des 195/65R15 in einer Gleichgewichtskonfiguration

sammengefaßt werden. Dazu legt man eine Linie durch den Querschnitt nach Abbildung 5.4, der in der Seitenwand entlang der Karkasse, im Gürtelbereich entlang der inneren Gürtellage und im Wulstbereich zwischen den Kordlagen, näher zur Karkaßlage mit jeweils glatten Übergängen verläuft.

Die so mit subjektivem Einfluß erstellte Membranlage $\tilde{y}(z)$ wird einer Membrangleichgewichtsrechnung unterzogen. Das wesentliche Element dieser Gleichgewichtsrechnung besteht darin, daß eine Membranlösung für die Karkaßlage produziert wird, die dadurch entsteht, daß im Gürtelbereich der Traganteil des Gürtelverbandes durch eine entsprechende Absenkung des Innendruckes berücksichtigt wird. Dann hat man eine Gleichgewichtskonfiguration $y(z)$ für das Einschichtmodell (s. Abbildung 5.5).

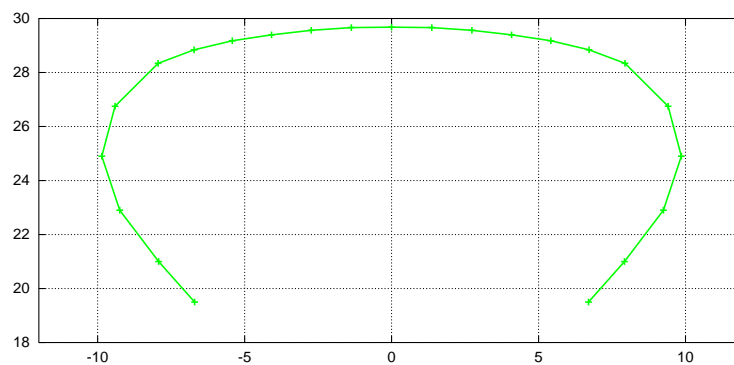


Abbildung 5.5: Gleichgewichtsfigur des 195/65R15 auf Felge 6J15

Um eine zulässige Topologie für das zugehörige Reifenmodell erstellen zu können, muß man eine passende Teilung ermitteln.

Dazu muß der Gürtel in eine diskrete Anzahl von Segmenten und Spuren aufgeteilt werden, wobei die diagonale Verbindung im entstehenden Netz aus Seg-

menten und Spuren mit dem Lagenwinkel β gegenüber der Umfangsrichtung φ ausgerichtet sein und die letzte Spur im Gürtelbereich genau auf dem Gürtelrand $z = B$ liegen muß.

Weiter ist zu beachten, daß die Anzahl der Spuren im halben Reifen ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{2}$ sein muß, da an der halben Gürtelbreite B genau $n = \frac{1}{2}m$ Spuren bei n Segmenten beteiligt sind.

Ein möglicher Algorithmus wird anhand von Abbildung 5.6 beschrieben:

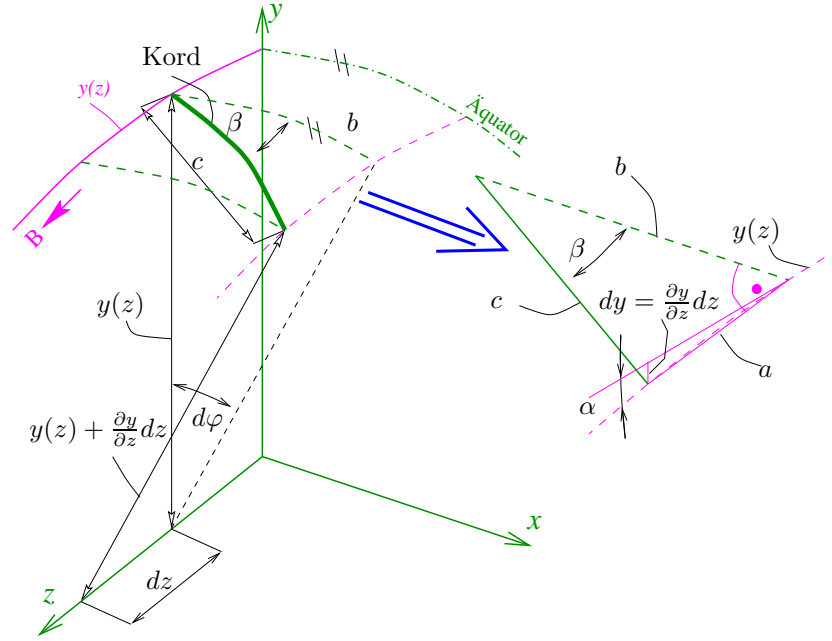


Abbildung 5.6: Geometrie der Abwicklung eines Kordes auf dem Gürtel

Es wird die Existenz bzw. die Kenntnis

- des Kordlagenwinkels β des Gürtelverbandes
- der Gürtelbreite $2B$ und
- einer einmal stetig differenzierbaren Kontur $y(z)$ des halben Gürtels vom Äquator ($z = 0$) bis zur halben Gürtelbreite ($z = B$)

vorausgesetzt. Mit Hilfe der einfachen geometrischen Zusammenhänge

$$\left. \begin{aligned} b &= y(z) \cdot d\varphi \\ a &= b \cdot \tan(\beta) \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial z} dz \\ \tan(\gamma) &= \frac{\partial y}{\partial z} = y'(z) \\ dz &= a \cdot \cos \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow dz = y(z) \tan(\beta) \cdot \cos \left(\arctan(y'(z)) \right) d\varphi \quad (5.1)$$

gewinnt man als Vorschrift für die Berechnung der Breitenkoordinate $z(\varphi)$ das

Integral

$$z(\varphi) = \int_0^\varphi y(z) \tan(\beta) \cos\left(\arctan(y'(z))\right) d\varphi, \quad (5.2)$$

das man mit der Bedingung $z(0) = 0$ als Anfangswertproblem lösen kann, um geeignete Topologien zu finden.

Stufe 1: Zunächst definiert man eine Zielkantenlänge $L_{\varphi_{\min}}$ und $L_{\varphi_{\max}}$ der Elemente in Umfangsrichtung sowie $L_{z_{\min}}$ und $L_{z_{\max}}$ in Querrichtung.

Stufe 2: Aus dem bekannten Außenradius R und der Gürtelbreite $2B$ gewinnt man die dazugehörigen Teilungsbereiche in Umfangsrichtung (Segmente) $s_{\min} = \tilde{s}(L_{\varphi_{\min}})$ und $s_{\max} = \tilde{s}(L_{\varphi_{\max}})$ sowie in Querrichtung (Spuren) $m_{\min} = \tilde{m}(L_{\varphi_{\min}})$ und $m_{\max} = \tilde{m}(L_{\varphi_{\max}})$ nach $\tilde{s}(L) = \text{Integer}\left(\frac{2\pi R}{L}\right)$ und $\tilde{m}(L) = \text{Integer}\left(\frac{2B}{L}\right)$.

Stufe 3: Anschließend berechnet man für alle Kombinationen (s, m) die sich ergebende Gürtelbreite mit $s \in [s_{\min}, s_{\max}]$, $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$ nach

$$B_{(s,n)} = \int_0^{\varphi_n} dz; \text{ mit } n = \frac{1}{2}m, \quad \varphi_n = \frac{2\pi}{s}n \text{ und } dz \text{ nach Gleichung (5.1).}$$

Stufe 4: Wenn man bei der Integration das Intervall $[z \leq B \leq z + dz]$ erreicht hat, wählt man sich den näher zu B liegenden Wert als $B_{(s,m)}$ aus und speichert diesen für den Fall $||B_{(s,m)} - B|| < \varepsilon$ aus eine mögliche Teilungsvariante.

Mehrere auf diese Art erstellte Teilungsvarianten wurden bereits in Abbildung 2.6 in Abschnitt 2.1.1.4 gezeigt.

Es wurde die Topologie aus

- Kordlagenwinkel $\beta = 20.66^\circ$
- Anzahl Querschnitte $QS = 52$
- Anzahl Punkte je Querschnitt $PQS = 23$
- Index der ersten Gürtelspur, abgezählt vom Felgenreand $GSPUR_1 = 6$

ausgewählt, die sich durch die Anzahl der erforderlichen Modellfreiheitsgrade im Verhältnis zur dargestellten Elementkantenlänge in Umfangsrichtung am Reifenäquator und durch die gute Übereinstimmung mit der Teilung des Mehrschichtmodells qualifizierte. Daraus entstehen für den generischen Querschnitt die in Tabelle 5.1 angegebenen Punktkoordinaten, die schon in Abbildung 5.4 dargestellt wurden.

5.1.1.2 Randbedingungen des Einsichtmodells

Wie in Kapitel 2.1.3 beschrieben, spielt die Anbindung des Reifens an die Felge eine wichtige Rolle für die adäquate Abbildung der gemessenen, bekannten

coordinates				
3	23			
\$Spur	x	y	z	
1	0.00000+0	1.95000+1	-6.70000+0	← Felge
2	0.00000+0	2.10000+1	-7.92500+0	← Seiten-
3	0.00000+0	2.29000+1	-9.25000+0	wand
4	0.00000+0	2.49000+1	-9.86000+0	-"-
5	0.00000+0	2.67500+1	-9.41000+0	-"-
6	0.00000+0	2.83420+1	-7.94151+0	← Gürtelrand
7	0.00000+0	2.88396+1	-6.71760+0	← Gürtel
8	0.00000+0	2.91768+1	-5.42043+0	-"-
9	0.00000+0	2.93939+1	-4.08510+0	-"-
10	0.00000+0	2.95625+1	-2.73407+0	-"-
11	0.00000+0	2.96636+1	-1.37018+0	← Gürtel
12	0.00000+0	2.96800+1	0.00000+0	← Gürtelmitte
13	0.00000+0	2.96636+1	1.37018+0	← Gürtel
14	0.00000+0	2.95625+1	2.73407+0	-"-
15	0.00000+0	2.93939+1	4.08510+0	-"-
16	0.00000+0	2.91768+1	5.42043+0	-"-
17	0.00000+0	2.88396+1	6.71760+0	← Gürtel
18	0.00000+0	2.83420+1	7.94151+0	← Gürtelrand
19	0.00000+0	2.67500+1	9.41000+0	← Seiten-
20	0.00000+0	2.49000+1	9.86000+0	wand
21	0.00000+0	2.29000+1	9.25000+0	-"-
22	0.00000+0	2.10000+1	7.92500+0	-"-
23	0.00000+0	1.95000+1	6.70000+0	← Felge
end option				

Tabelle 5.1: Koordinaten des generischen Querschnittes des Einschichtmodells

elastischen Eigenschaften der Querschnitte (z.B. Pumpfiguren, Federkennlinie, Eigenfrequenzen usw.).

In dieser Arbeit wird das Einschichtmodell mittels biegeelastischer Anbindung an die starre Felge gefesselt. Dies wird realisiert, indem den Felgenrandpunkten der aktuelle Verschiebungszustand der geführten Felge aufgeprägt wird. Die Torsionssteifigkeit des Wulstes um den Wulstkern wird durch eine Biegesteifigkeit analog zu Kapitel 2.1.3.2 abgebildet, die gegen eine Querdeformation der ersten Seitenwandspur arbeitet. Es wurde beim verwendeten Mesh eine Steifigkeit von $c_{BW} = 2200 \frac{\text{daN cm}}{\text{rad}}$ die durch Identifikation aus den o.g. elastischen Eigenschaften abgeleitet wurde.

Die Felge wird als starrer träger Körper modelliert, der um die Radachse frei drehbar gelagert ist und ansonsten im Raum fixiert ist (analog zum Flachbandprüfstand).

5.1.1.3 Parametrisierung des Einschichtmodells

Die kontinuumsmechanische Grundlage der Parameter des Vielteilchen-Membran-Modells bildet das Modell des elastisch gebetteten Kreisringmodells (s. [Böhm.66b, Böhm.89, Bannwitz.95, Zegelaar.97, u.a.]). Der auf Grundlage dieses Modellansatzes durch Parameteridentifikation erstellte und in dieser Arbeit verwendete Parametersatz eines 195/65R15-PKW-Reifens wurde in Tabelle 2.1 auf Seite 36 vorgestellt. Die erforderliche Methodik, um auf möglichst allgemeine Art und Weise unter Berücksichtigung der vorhandenen Topologie, Elementlängen

und –abstände diese kontinuumsmechanischen Parameter durch einen diskreten Netzverbund aus Seilen und Stäben nach der Vielteilchenmethode darzustellen, wurde in den Abschnitten 2.1.5.1 und 2.1.5.2 erläutert. Diese Methodik wurde im Simulationsprogramm genau wie dort beschrieben implementiert, wodurch nur noch wenige, meßtechnisch leicht zugängliche Parameter benötigt werden. Diese Parameter werden in Tabelle 5.2 zusammengefaßt angegeben.

Größe	Bedeutung	verwendeter Wert
E_{StC}	E-Modul von Stahl	2070000 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$
E_{StC}	E-Modul der Stahlkorde	310000 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$
E_{Reyon}	E-Modul der Reyonkorde	31000 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$
E_{Gummi}	mittlerer E-Modul des Gummi	65 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$
E_{SWdiag}	E-Modul der SW-Diagonalen	1220 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$
t_{Karkasse}	Dicke aller Karkaßlagen	0.75 cm
t_{Guertel}	Dicke einer Gürtellage	0.05 cm
t_{Bandage}	Dicke der Gürtelbandage	0.24 cm
t_{SW}	maximale Dicke der Seitenwand (Gummi)	1.45 cm
t_{SWmin}	minimale Dicke der Seitenwand	0.60 cm
$t_{\text{Protektor}}$	Dicke des Protektors (Gummi)	1.42 cm
t_{Ring}	Durchmesser des Wulstkerns	1.25 cm
ρ_{Reyon}	Dichte der Reyonlagen	$1.4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$
ρ_{StC}	mittlere Dichte der Stahlkordlagen	$7.20 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$
ρ_{Gummi}	mittlere Dichte des Gummi	$1.18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$
ρ_{St}	Dichte von Stahl	$7.68 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$
c_{bq}	Guertelbiegesteifigkeit quer	3.0 $\frac{\text{daN cm}}{\text{cm}}$
c_{bl}	Guertelbiegesteifigkeit längs	170 $\frac{\text{daN cm}}{\text{cm}}$
c_{bw}	Guertelbiegesteifigkeit Wulst	2200 $\frac{\text{daN cm}}{\text{cm}}$
c_{N}	Stollensteifigkeit Normalrichtung	380 $\frac{\text{N}}{\text{cm}}$
c_{x}	Stollensteifigkeit Umfangsrichtung	140 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}}$
c_{z}	Stollensteifigkeit Querrichtung	140 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}}$
k_{Damp}	LEHRsches Dämpfungsmaß	3.1 %

Tabelle 5.2: Parametersatz des Vielteilchenmodells

5.1.1.4 Anpassung der Parameter an Federkennlinie Pumpfiguren und Eigenfrequenzen

Die Parameter aus Tabelle 5.2 stellen bereits das Ergebnis eines durchgeführten Feintuningprozesses dar. Sie wurden zunächst „grob“ vom kontinuumsmechanischen Parametersatz nach Tabelle 2.1 und wie in Abschnitt 2.1.5 schon erläutert abgeleitet und dann durch geringfügige Variation angepaßt, so daß das Vielteilchenmodell die gemessenen modalen Eigenschaften hinreichend gut abbildete (s. Abbildung 5.7). Außerdem erreicht der Einschichtreifen die Aufstandskraft beim stationären Rollen von 327.4N und beim statischen Abplatten

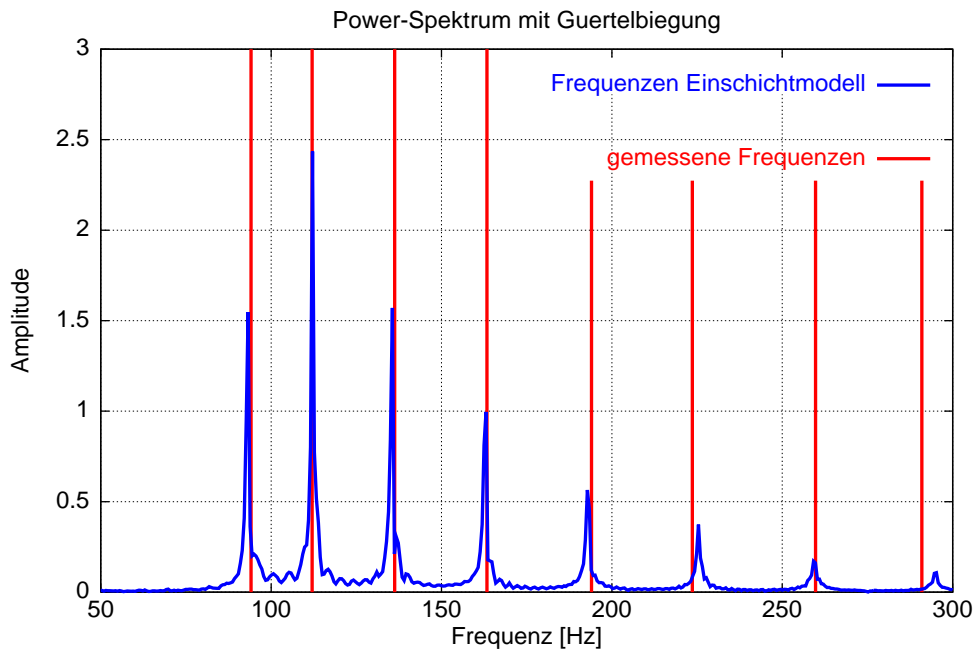


Abbildung 5.7: Eigenfrequenzen der Reifenstruktur nach Parameteroptimierung

von $329.0N$, jeweils bei einer Abplattung von $1.5cm$ an der Achse (s. Abbildungen 5.8 und 5.15).

Dabei wurde der komplexe bekannte und unterschiedliche Einfluß der einzelnen Parameter (vor allem Kordsteifigkeiten, Biegesteifigkeiten des Gürtels in Längs- und Querrichtung, Wulstbiegesteifigkeit, weniger Masseverteilung und Dämpfung) auf die entstehende Achslast und die modalen Eigenschaften des Reifenmodells ausgenutzt.

So kann man durch gezieltes Tuning der für eine hinreichend gute Darstellung der statischen und modalen Eigenschaften leider nur zu grob abschätzbaren Parameter sehr gut Einfluß nehmen

- auf die Verschiebung des Eigenfrequenzspektrums im Frequenzbereich insgesamt,
- auf die Lage vor allem der niederen Eigenfrequenzen zueinander und
- auf die Spreizung des gesamten Eigenfrequenzspektrums über die Frequenzachse.

Damit kann das gemessene Frequenzspektrum und die Federkennlinie dann sehr gut wiedergegeben werden.

Diese Variation wurde manuell, begleitet von einer entsprechenden Serie von Simulationen durchgeführt und kann sicherlich optimaler gestaltet werden.

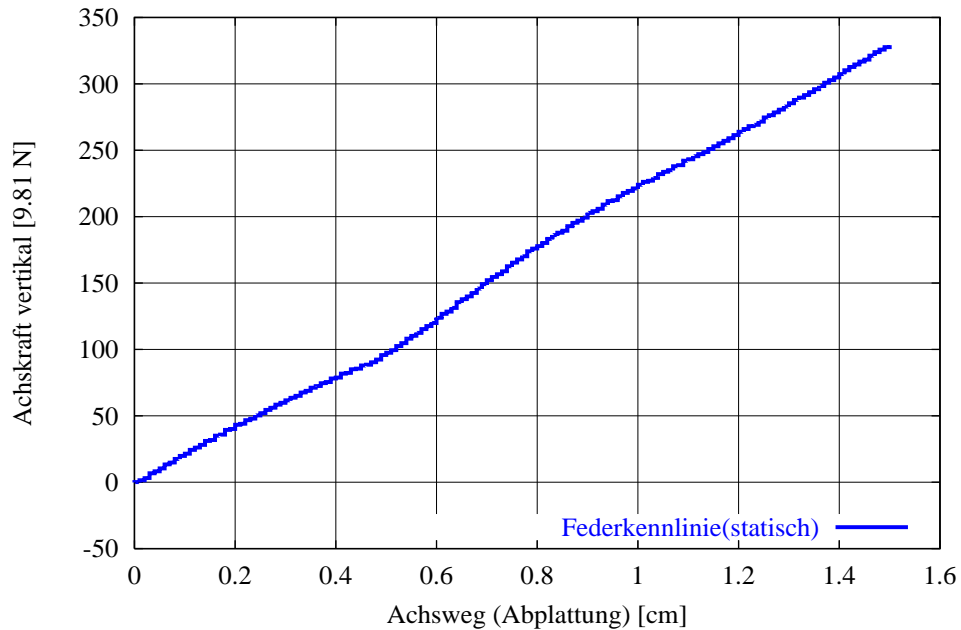


Abbildung 5.8: Federkennlinie des Einschichtmodells

5.1.2 Simulationsergebnisse

5.1.2.1 Beschreibung des Szenarios des Beispiels

Die Simulation des instationären Rollvorganges des Reifens wurde nach folgendem Szenario bei einer Schrittweite von $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ organisiert:

1.) **Inflationphase:**

Luftdruckbefüllung mit linear steigendem Druck von $p = 0 \text{ bar} \mapsto 2.0 \text{ bar}$. Im Anschluß an diesen Vorgang wurde ein Restart-File mit der Konfiguration des aufgepumpten Reifens geschrieben und der Simulationszeit $t_{\text{Start}} = 0.0 \text{ s}$ zugeordnet. Dies ist wegen der unterschiedlich ablaufenden Aufpumphasen beim Einschicht- und Mehrschichtmodell von Vorteil. Dadurch beginnen alle Zeitschriebe bei der Simulation der äußeren Mechanik des Rollvorganges nach dem Aufpumpvorgang.

2.) **Abplattungsphase:**

Jetzt wurde der Reifen, dessen Felge fest, aber drehbar auf der Achse gelagert wurde, innerhalb von $T_{\text{Abpl}} = 0.3 \text{ s}$ um $\Delta z_{\text{achse}} = 0 \text{ cm} \mapsto 1.5 \text{ cm}$, gemessen an der Achse vertikal abgeplattet, (s. Abbildung 5.9). Anschließend wurde die Achse auf dieser Höhe vertikal fixiert und verblieb dort bis zum Ende des Rollvorganges.

Diese Vorgehensweise stellt eine für den Rollvorgang sehr *harte* Bedingung dar, da somit der Achse eine praktisch unendlich große Trägheit zugeordnet wird - die Achse wird dynamisch starr. Das ist ein in der realen Welt nicht auftretender Zustand, da die dynamische Elastizität der Achsaufhängung und der Felge beim praktischen Rollvorgang oder am Prüfstand niemals unendlich hoch ist. In der Tat zeigen Rechnungen

mit ähnlichen Modellen, bei denen die Abplattung durch eine im Gravitationsfeld befindliche realistische Masse an der Achse erzeugt wird, *deutlich* sanftere Kraftverläufe.

3.) **dynamisches, beschleunigtes Rollen:**

Nach Erreichen der vollen Abplattung wird der Boden unter dem Reifen unter einem Winkel von $\delta = 3^\circ$ mit linear ansteigender Geschwindigkeit von $v_{Boden} 0 \frac{km}{h} \mapsto 40 \frac{km}{h}$ über einen Zeitraum von $T_{beschl.} = 0.4 \text{ s}$ weggezogen (s. Abbildung 5.10).

Durch das Wegziehen des Bodens gegenüber dem Reifenlatsch entstehen Reibkräfte, die ein Antriebsmoment auf den Reifen erzeugen.

Die Drehbewegung des Reifens entsteht dann durch Integration der Drehträgheit des Reifens incl. der Felge ($J_{Rim} = 50 \text{ kgcm}^2$) um die reibungsfrei drehbar gelagerte Achse (s. Abbildung 5.11).

Der Reifen hat bis hierher 1 Rotation und 65° Rollbewegung absolviert.

4.) **dynamisches, gleichmäßiges Rollen:**

Wenn die Höchstgeschwindigkeit des Beispiels erreicht wurde, wird mit konstanter Endgeschwindigkeit solange unter Beibehaltung des Schräglaufwinkels weitergerollt, bis sich ein stationärer Rollzustand einstellt (s. Abbildung 5.10).

Als Kriterium für die Entscheidung, ob ein stationärer Rollzustand erreicht wurde, wird die kinetische Energie (s. Abbildung 5.12) benutzt. Zum Ende der Simulation hat der Reifen genau 2.3729 Rotationen ausgeführt, also 2 Rotationen zzgl. ca. 135° Rollbewegung.

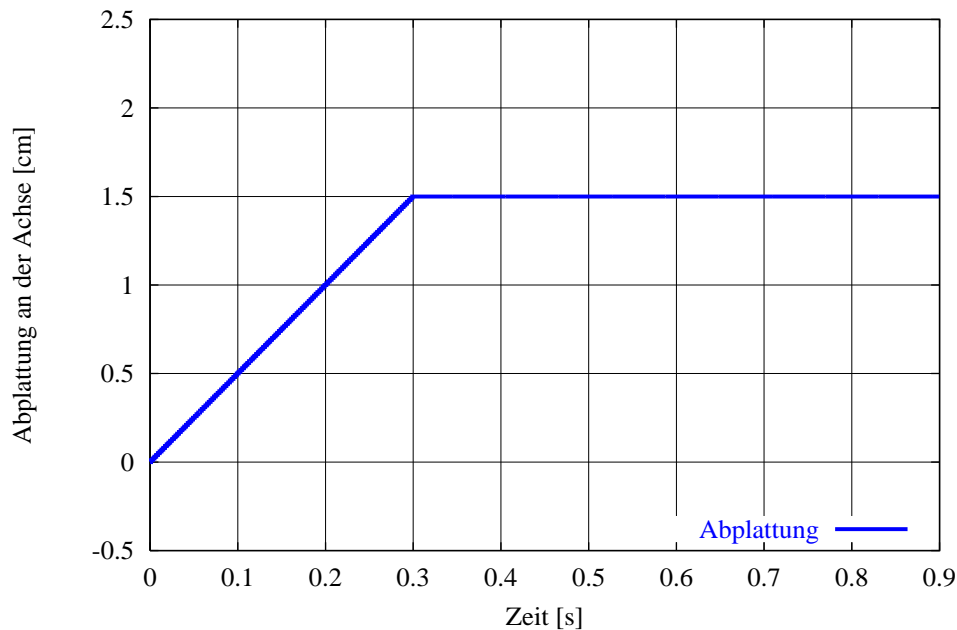


Abbildung 5.9: Abplattung an der Achse während des Rollvorganges

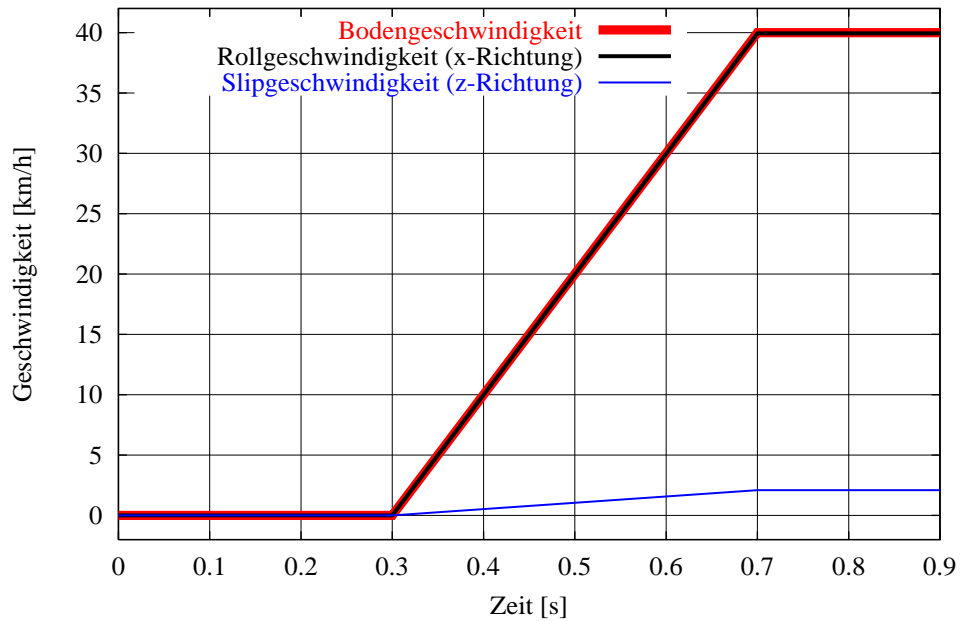


Abbildung 5.10: Geschwindigkeitsverlauf während des Rollvorganges

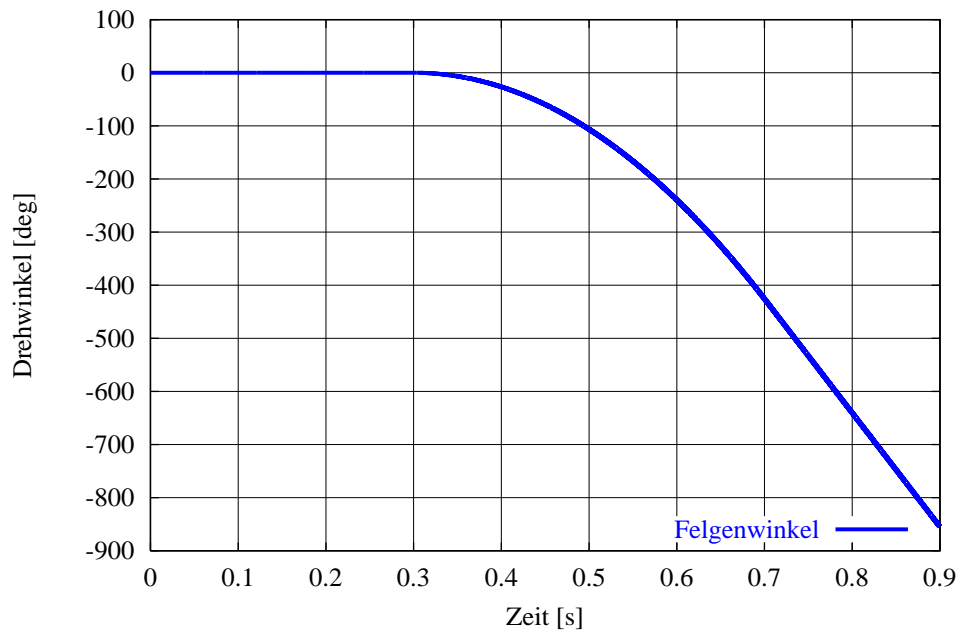


Abbildung 5.11: Felgenwinkel während des Rollvorganges

5.1.2.2 Achskräfte zufolge der „äußeren Mechanik“

Im folgenden sollen die sich einstellen der Achskräfte diskutiert werden.

Zunächst erscheinen die Achskräfte ziemlich rau. Dies ist aber wie bereits zu Anfang dieses Abschnittes diskutiert kein Modellfehler, sondern eine Folge

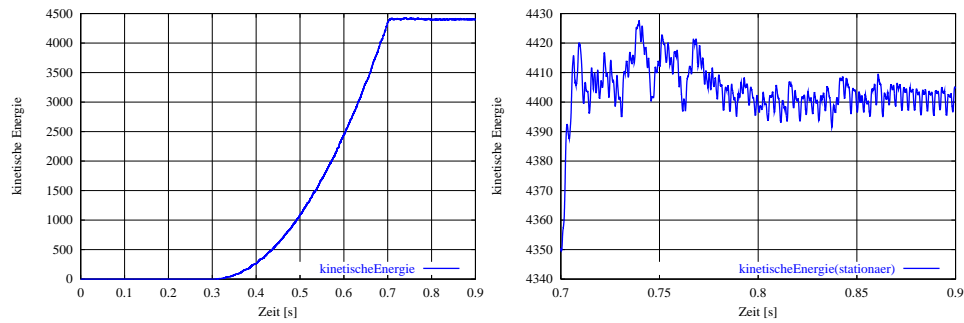


Abbildung 5.12: Kinetische Energie des Einschichtmodells bis zum stationären Rollen

- der starren Achsführung,
 - des Polygoneffektes,
 - der parallel zum Polygoneffekt grob gehaltenen räumlichen Abtastung des Kontaktes durch „Borsten“ an den Gürtelpunkten und
 - des verwendeten Reibungsgesetzes:
- Es wurde mit einem Haftreibungskoeffizient von $\mu_H = 0.8$, $\mu_G = 0.5$ und einer Stickgrenzgeschwindigkeit von $v_{stick} = 0.05 \frac{cm}{s}$ gearbeitet.

Sehr deutlich sind im Spektrum der Achskräfte (s. Abbildung 5.13) beim stationären Rollvorgang die vom Polygoneffekt herrührenden Frequenzen von 310Hz und 620Hz zu erkennen.

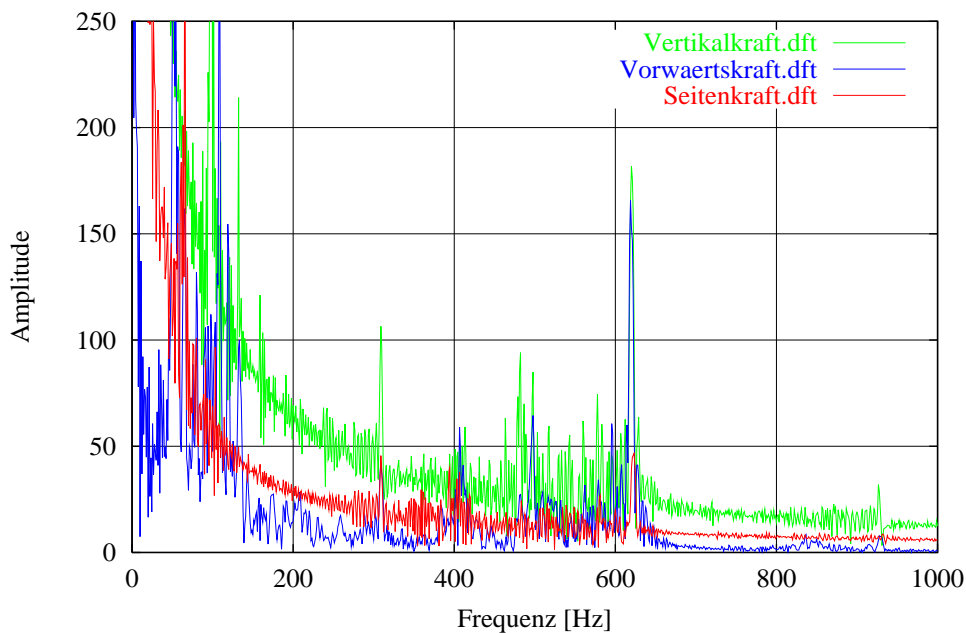


Abbildung 5.13: Spektrum der Achskräfte bei stationärem Rollen mit $v = 40 \frac{km}{h}$

Die Stolleneingriffsfrequenz liegt bei einer Rollgeschwindigkeit von $v_{Boden} =$

$40 \frac{km}{h}$ und einer Polygonkantenlänge von $\Delta s = 35.841 \text{ mm}$ am Äquator bei ziemlich exakt 310Hz. Die Verdopplung dieser Frequenz beim Polygoneffekt liegt daran, daß beim Durchlauf eines Reifensegmentes durch den Kontakt nicht nur dann ein Stoß entsteht, wenn die Spitze des Polygonzuges abbrollt, sondern auch dann, wenn die gerade Verbindungslinie zwischen den Punkten auf den Boden trifft (s. Abbildung 5.14). Diese Verbindungslinie ist gegenüber dem effektiven Reifenradius kleiner und der Reifen „fällt“ praktisch beim Rollen dort hinein.

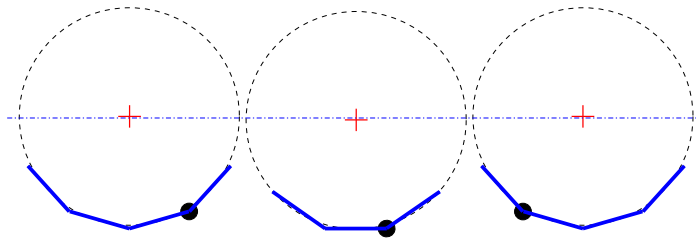


Abbildung 5.14: Gegenüber der Stollengriffsfrequenz doppelte Anregungsfrequenz durch den Polygoneffekt

Einen typischen und in vielen Messungen bestätigten Verlauf zeigt die Vertikalkraft an der Achse (s. Abbildung 5.15).

Der erste lineare Teil entspricht der Abplattungsphase. Dann stellt sich zu Beginn des Rollvorganges zunächst eine temporäre Überhöhung der Vertikalkraft ein. Sehr schön ist der ruhige Bereich bis ca. $t_{einroll} = 0.38 \text{ s}$ zu erkennen, wo der Reifen sich gegen den Schräglaufwinkel zu verspannen beginnt und noch überwiegend haftend rollt. Dem schließt sich der Übergangsbereich an, wo der Reifen tangentiale Stick–Slip–Schwingungen ausführt, die sich auch in der Vertikalkraft wiederfinden. Die steigenden Amplituden der Kraftschwankungen sind darin begründet, daß der Modellreifen bei diesen Geschwindigkeiten durch den Polygoneffekt genau in seinen Eigenfrequenzen angeregt wird.

Nach $t_{const} = 0.7 \text{ s}$ wird die Bodengeschwindigkeit konstant gehalten. Der Reifen geht in einen nahezu stationären Roll– und Schwingungszustand über.

Die bei der Diskussion der Vertikaldynamik getätigten Ausführungen zur Querdynamik werden durch den Zeitschrieb der Seitenkräfte an der Achse bestätigt. Diese Schwingungen finden bei einer anderen Frequenz statt, die durch die gegenüber der Radialsteifigkeit unterschiedliche Seitensteifigkeit des Reifens begründet ist.

Die Vorwärtskraft an der Achse entspricht ebenfalls dem zu erwartenden Zeitverlauf.

Zunächst wird durch die Drehbeschleunigung im Kontakt die nur sehr schwach gedämpfte Umfangsschwingung des Gürtels gegenüber dem Rest des Rades incl. der Felge angeregt. Die dadurch zunächst nahezu harmonisch vonstatten gehende Torsionsschwingung wird dann durch den Einfluß der Quer– und Vertikaldynamik ab $t_{einroll} = 0.38 \text{ s}$, wo der Reifen eine Rollgeschwindigkeit von $v_{Boden} = 8 \frac{km}{h}$ erreicht hat, stark aufgeraut.

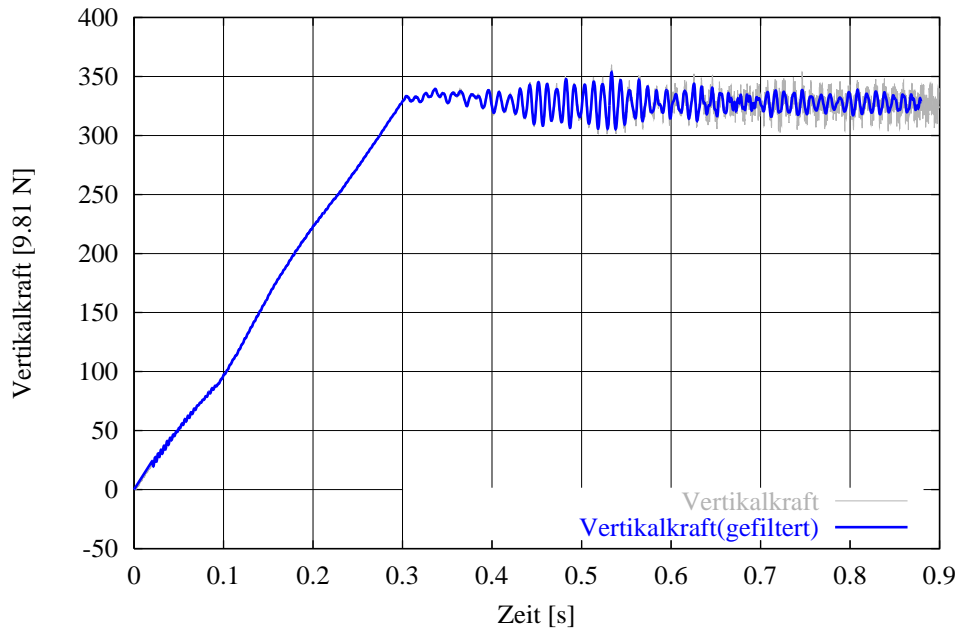


Abbildung 5.15: Achskraft in Vertikal– (y–) Richtung bis zum stationären Rollen

Bei Eintritt in die Phase des gleichmäßigen Rollens schwingt die Vorwärtskraft klarerweise auch auf die antreibende Seite über und pendelt sich dann auf einen Wert von $\bar{F}_x = 1.07 \text{ daN}$ ein. Das entspricht einem Rollwiderstand von nur 0.33%. Der Autor ist sich bewußt, daß dies kein realistischer Wert ist. Es hätte sich ein Rollwiderstand von *ca.* 2%...3% einstellen müssen.

Er erklärt sich dieses Verhalten dadurch, daß der relativ grob modellierte Reifen bzgl. der Torsionsschwingungen möglicherweise zu weich modelliert wurde. Das Reifenmodell hat dadurch die Möglichkeit, den sich aufbauenden Rollwiderstandskräften, die zusätzlich von der rauen Vertikal- und Querdynamik abhängig sind, immer wieder durch entsprechende Torsionsschwingungen auszuweichen. Das kann zur Folge haben, daß sich die Wirkung des – durch Verlagerung der mittleren Aufstandskraft in Rollrichtung nach vorne aufbauenden – Rollwiderstandsmomentes nicht richtig ausbilden kann. In Verbindung mit der Quer- und Vertikaldynamik führt das bei dem Reifenmodell zu einer Verschiebung der Nullachse der Torsionsschwingungen hin zu kleinerem Rollwiderstand. Wie man erkennt, liegt die Schwankung der Achskraft in x-Richtung in der Größenordnung der realistischerweise zu erwartenden Kraft von $F_{x_{soll}} \approx (6.6 \dots 10) \text{ daN}$.

5.1.2.3 Gleitgeschwindigkeit im Latsch bei Schräglauf

Hier soll gezeigt werden, wie das Einsichtmodell in der Lage ist, einen interessanten Effekt beim instationären Rollvorgang abzubilden:

Das Durchlaufen von Wellen der Gleitgeschwindigkeit zwischen Stollen und Bo-

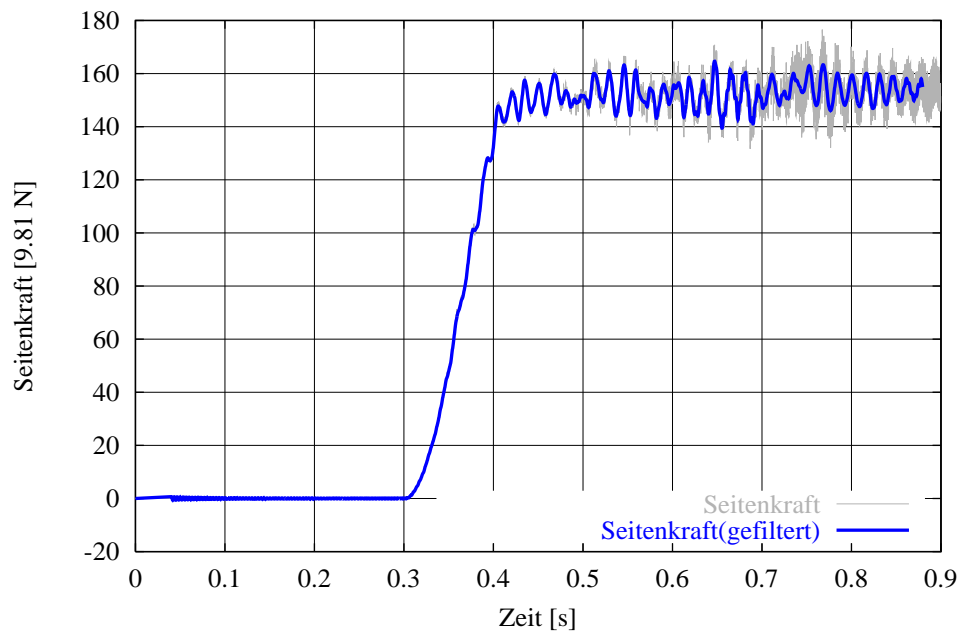


Abbildung 5.16: Achskraft in Quer- (z-) Richtung bis zum stationären Rollen

den in Tangentialrichtung durch den Latsch.

In Umfangsrichtung verteilt sich die Gleitgeschwindigkeit im wesentlichen nach dem bekannten Verteilungen: Nach dem Einlauf tritt vorwiegend Haften auf mit einer sich anschließenden elastischen Verspannung der Stollen. Nach Erreichen der Höchstgrenze des Verspannens tritt Gleiten auf. Dann steigt die Gleitgeschwindigkeit zum Auslauf hin an.

Diese Verteilung der Gleitgeschwindigkeit in x-Richtung bleibt auch dann erhalten, wenn bei höheren Slipgeschwindigkeiten des Reifens fast alle Stollen des Latsches gleiten.

In Tangentialrichtung (z-Richtung) treten recht verschiedene Durchlaufbewegungen auf.

- Bei kleinen Gleitgeschwindigkeiten gleiten vor allem die Stollen auf der Seite des Latsches, der in Richtung des Schräglaufwinkels liegt, der kurveninneren Seite. Bei diesem Beispiel ist das die Seite des Latsches mit positiven z-Koordinaten.
- Bei steigender Slipgeschwindigkeit des Reifens entstehen am Auslauf auf der kurvenäußeren Seite lokale Zentren mit höherer Gleitgeschwindigkeit, die dann auf die kurveninnere Seite (also von negativer z-Seite zur positiven z-Seite) hinüberwandern.
- Wenn die Slipgeschwindigkeit weiter steigt, dann verkürzt sich die Wellenlänge dieser Wanderung derart, daß das eine Gleitgeschwindigkeitszentrum noch nicht am kurveninneren Rand angekommen ist, während am kurvenäußeren Rand schon wieder ein neues entsteht.

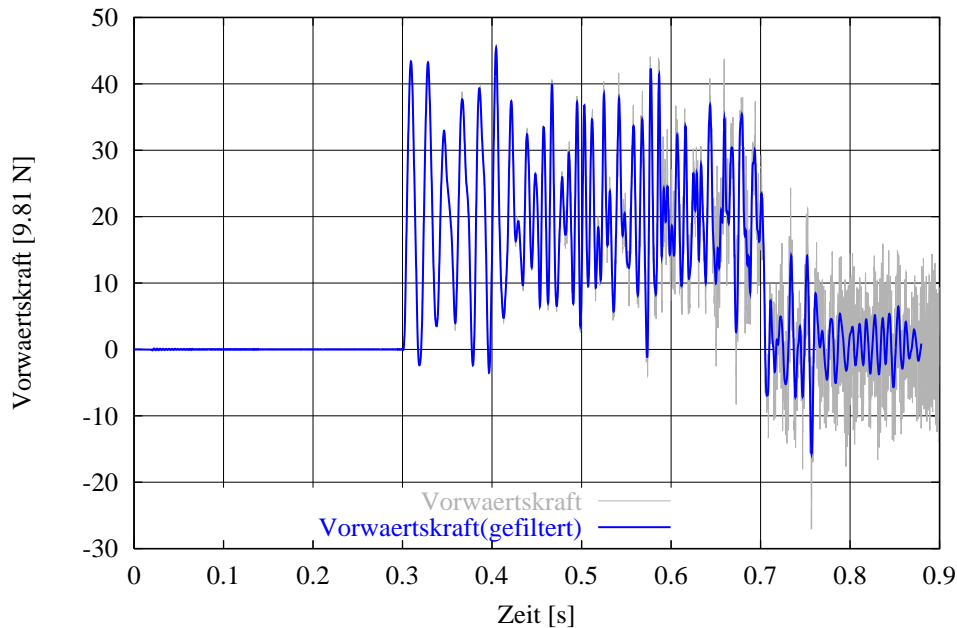


Abbildung 5.17: Achskraft in Vorwärts- (x-) Richtung bis zum stationären Rollen

- Bei der simulierten Endgeschwindigkeit von $v = 40 \frac{km}{h}$ sieht das Wellenbild dann bereits so aus, daß die Gleitzentren ständig von einer Seite des Latsches auf die andere hin- und herwandern.

Der Zustand bei der Rollgeschwindigkeit $v = 40 \frac{km}{h}$ ist in der Bilderserie Abbildung 5.18 auf den Seiten 146...148 dargestellt.

5.1.2.4 Kontaktkräfte

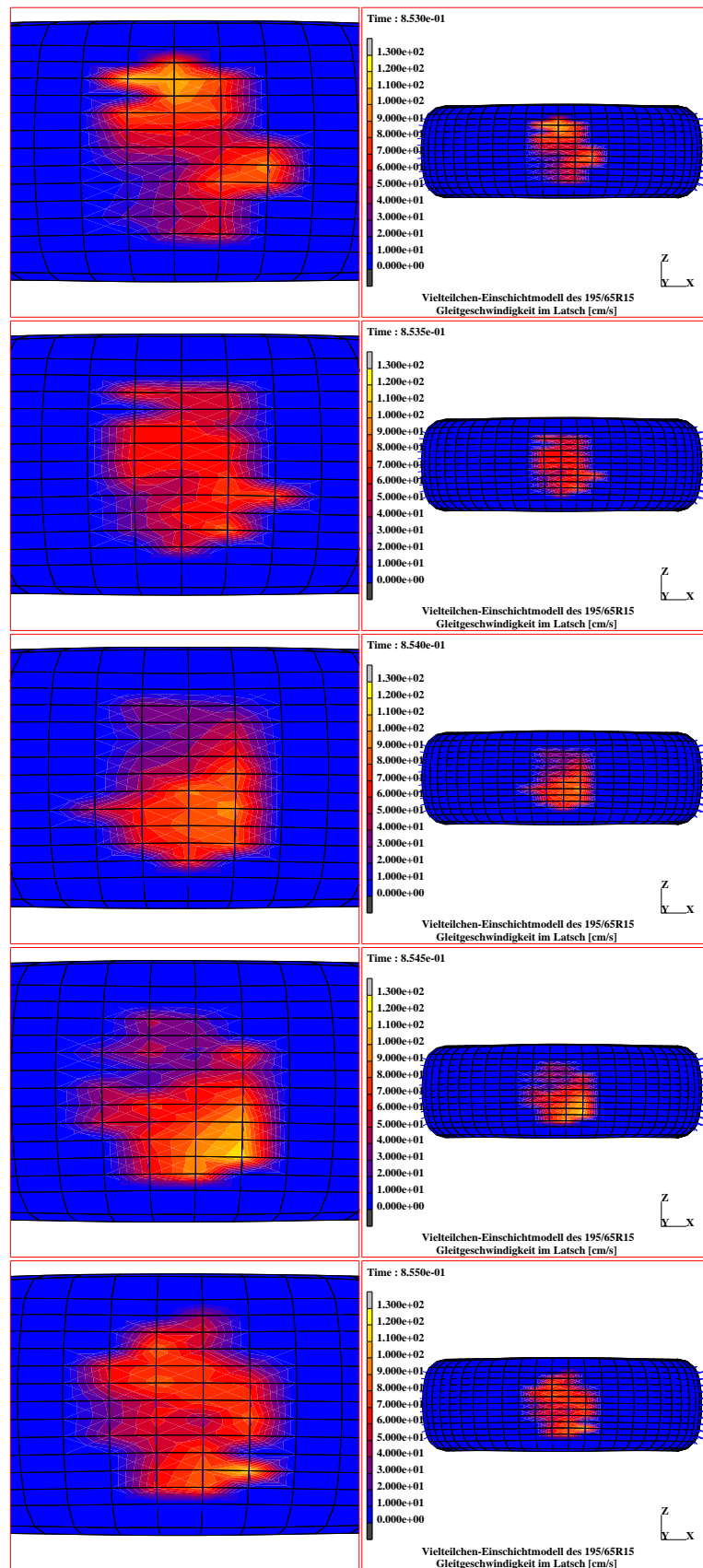
Kontaktzustand nach Abplattung

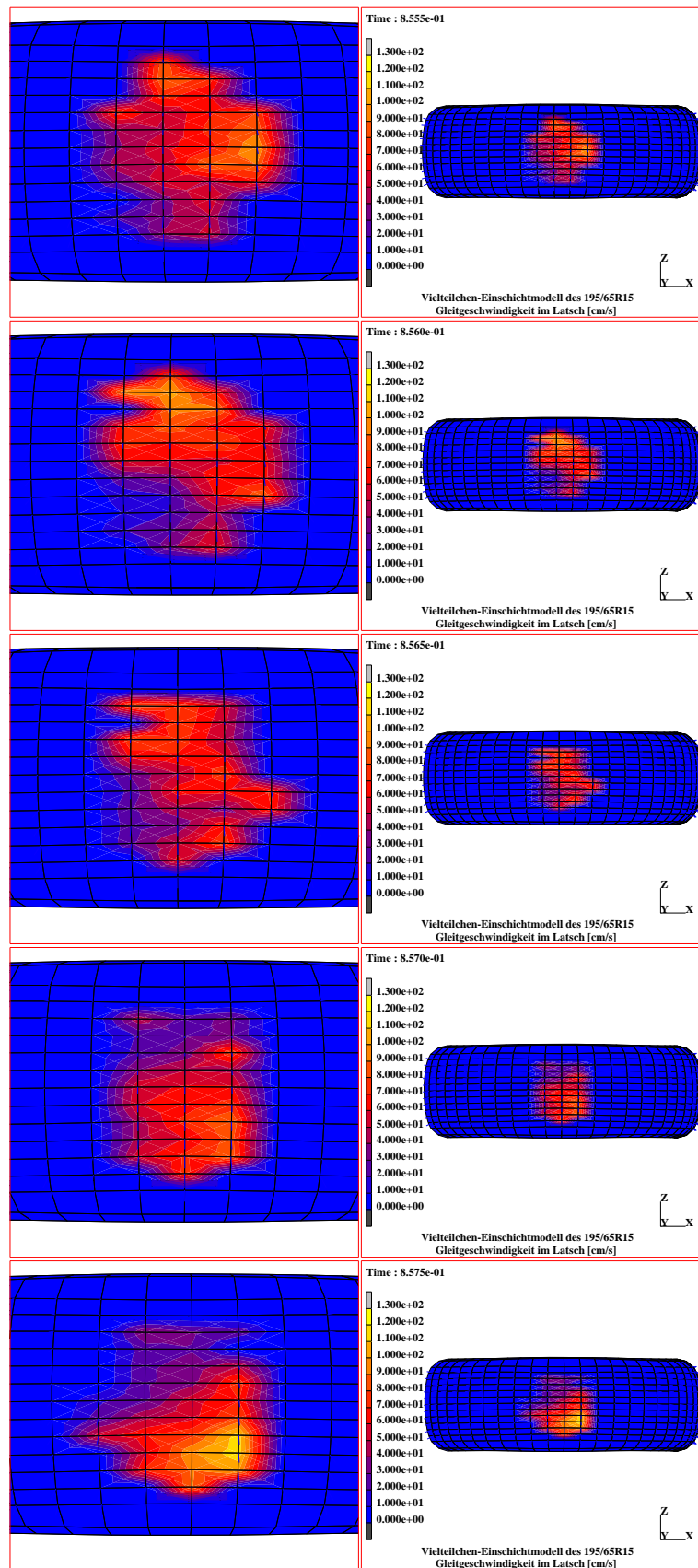
In Abbildung 5.19 werden die Kontaktkräfte zum Ende der Phase des statischen Abplattens dargestellt, die reibungsfrei durchgeführt wurde.

Hinweis:

Aus Übersichtlichkeitsgründen werden die Kräfte, die eigentlich an der Spitze der Stollen wirken so dargestellt, als ob sie am entsprechenden Punkte der führenden Reifenstruktur angreifen. Zusätzlich zur farblichen Unterscheidung wurden die größeren Kontaktkräfte noch länger und mit stärkerer Strichstärke gezeichnet.

Die Vertikalkomponente der Kontaktkraftvektoren ist natürlich immer normal zur Latschoberfläche gerichtet. Zur Unterscheidung von Haft- und Gleitzustand wird diese Komponente bei Gleiten negativ dargestellt, so daß der entstehende Kraftvektor an der x-z-Ebene nach unten gespiegelt erscheint.





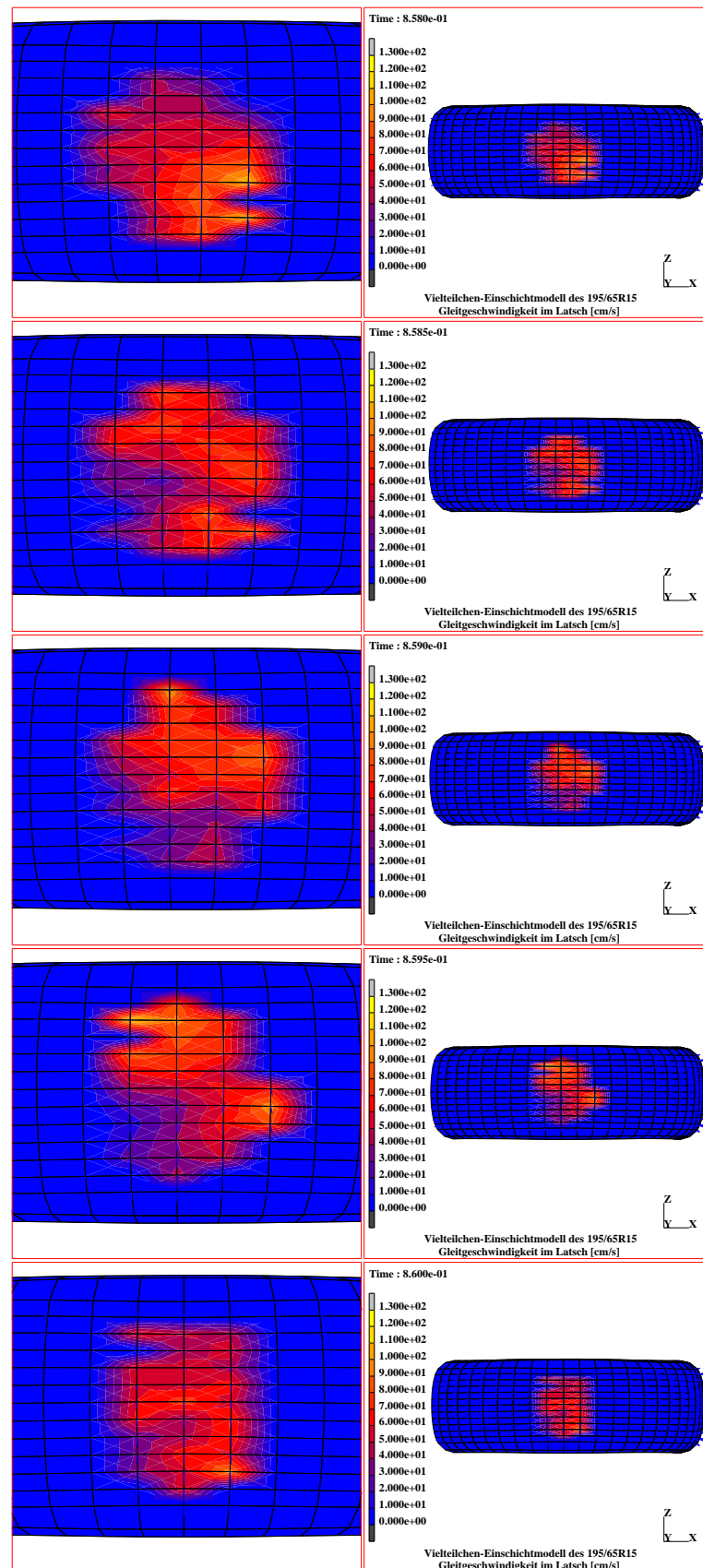


Abbildung 5.18: Wandernde Gleitgeschwindigkeit in Querrichtung beim stationären Rollen

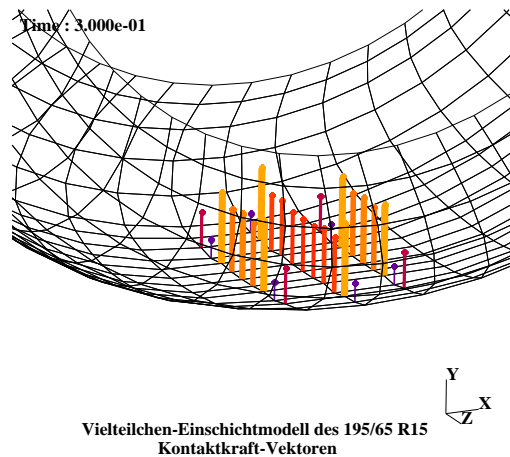


Abbildung 5.19: Kontaktkräfte am Ende der statischen Abplattung

Alle Kräfte stehen senkrecht auf dem Latsch, es gibt noch keine Tangentialkräfte. Man kann deutlich das Kontaktgebirge mit den überhöhten Kontaktkräften am Latschrand erkennen. Diese Überhöhung ist auf den Einfluß der Biegesteifigkeit des Gürtelverbandes zurückzuführen. Außerdem ist eine schwache Welligkeit der Membran zu beobachten, die aufgrund der Bettung der biegesteifen Gürtelschicht auf der elastischen Protektorschicht entsteht und die mechanisch korrekte Lösung darstellt.

Kontaktzustand nach Ende der Haftphase

Im Anschluß an die Statik wurde im Rechenbeispiel der Boden mit einem Schräglaufwinkel von $\delta = 3^\circ$ in x-Richtung weggezogen. In Abbildung 5.20 sind die Kontaktkräfte zum Ende der Haftphase dargestellt².

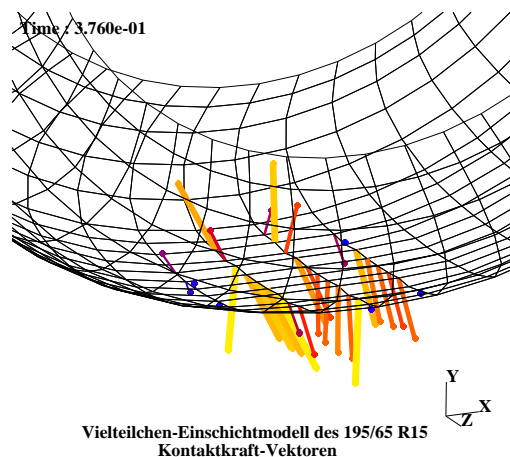


Abbildung 5.20: Kontaktkräfte am Ende der Rollstrecke mit Haftung

Der Reifen hat nun eine Rollgeschwindigkeit von $v = 7.6 \frac{km}{h}$ und ist über einen Weg von $s_x \simeq 8.3 \text{ cm}$ bei einer Querbewegung des Bodens von $s_y \simeq 4.3 \text{ mm}$

²Zur Verdeutlichung des momentanen Haftzustandes werden die Kräfte an gleitenden Kontaktpunkten an der $x-z$ -Ebene gespiegelt dargestellt. Die Kräfte an haftenden Kontaktpunkten werden ohne Modifikation entsprechend ihrer physikalischen Wirkungsrichtung gezeichnet

abgerollt. Der anfänglich dominierende Haftzustand kann von den nun zu stark tangential verspannten Stellen nicht mehr aufrechterhalten werden.

Außer auf der stärker belasteten kurvenäußeren Seite gibt es fortan kaum noch Haftzonen. Nur vereinzelt tritt nach einem Ausschnappen der Stellen Wiederhaften ein, ein Zustand der aufgrund der steigenden Querslipgeschwindigkeit aber immer nur sehr kurz anhält.

Ein typischer Kontaktzyklus

In Abbildung 5.21 soll ein typischer Ablauf eines Kontaktzyklus gezeigt werden, der im Rechenbeispiel im Zeitintervall von $t = [0.7955 \dots 0.8005] \text{ s}$ stattfand.

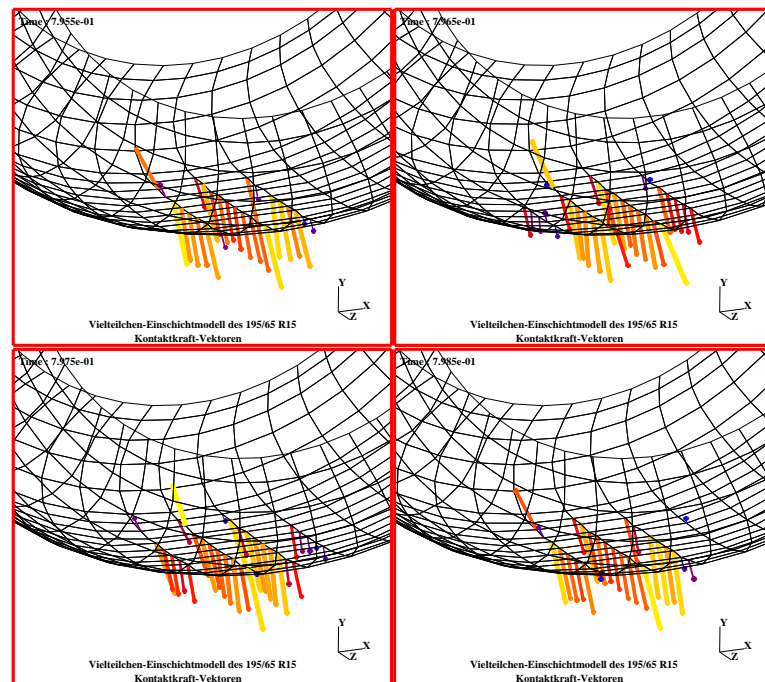


Abbildung 5.21: Darstellung eines Kontaktdurchlaufzyklus

Betrachtet werden soll hauptsächlich die Entwicklung der Kontaktkräfte an dem Reifenquerschnitt, der am Einlauf bei $t = 0.7955 \text{ s}$ gerade noch nicht in Kontakt ist.

1.) $t = 0.7955 \text{ s}$:

In den sich in Richtung Auslauf anschließenden 3 Querschnitten herrscht ein weitgehend homogener Gleitzustand vor. Die Verteilung der Kontaktkräfte besitzt in jedem Querschnitt die Überhöhung zufolge Biegung, wie sie auch in früheren Bildern aufgetreten ist.

Einzig auf der kurvenäußeren Seite des Latsches gibt es Haftzonen, da hier einzelne Punkte noch relativ wenig Tangentialbewegung bei Vorhandensein eines höheren Kontaktdrucks absolviert haben.

2.) $t = 0.7965 \text{ s}$:

Der neue Reifenquerschnitt ist in den Kontakt eingetreten. Nach einer aufgrund des Darstellungsintervalls (100 Zeitschritte) unsichtbar bleibenden

kurzen Haftphase der Punkte beginnen alle Punkte zu gleiten. Die Quergeschwindigkeit des Bodens beträgt zu diesem Zeitpunkt $v_{Boden_z} \simeq 57.64 \frac{cm}{s}$, die Rollgeschwindigkeit $v_{Boden_x} \simeq 11 \frac{m}{s}$. Damit beträgt die Querverschiebung Δs_z des Bodens relativ zum Reifen zwischen zwei dargestellten Bildern $\Delta s_z = 0.576 \text{ mm}$.

Die Haftkraft auf der kurveninneren Latschseite hat mit weiterem Einlauf in den Latsch an Größe zugenommen. Die Kontaktkräfte am Reifenquerschnitt im Auslauf nehmen ab.

3.) $t = 0.7975 \text{ s}$:

Im betrachteten Reifenquerschnitt ist auf der kurvenäußeren Latschseite ein weiterer Punkt in Kontakt gekommen.

Die Haftkraft hat weiter zugenommen.

Die Kontaktkräfte im Auslauf haben weiter abgenommen.

4.) $t = 0.7985 \text{ s}$:

Die Kraft an dem Punkt, der im vorherigen Bild gerade in Kontakt getreten war, hat sich zur größten Haftkraft im Latsch entwickelt, auf der kurveninneren Seite des betrachteten Querschnitts entstand ein neuer Kontaktpunkt.

Der Punkt mit der großen Haftkraft des letzten Bildes hat sich losgerissen und gleitet jetzt.

Der im letzten Bild noch im Kontakt befindliche Querschnitt im Auslauf hat den Latsch verlassen.

5.) $t = 0.7995 \text{ s}$:

Dieser Zustand entspricht dem Kontaktzustand, der bei $t = 0.7955 \text{ s}$ (s.o.) existierte und wird nicht mehr dargestellt.

Der Kontaktzyklus beginnt von neuem.

Darstellung der Kontaktspannungen beim stationären Rollen

Innerhalb der 5 ms , die in den 6 Episoden des stationären Rollzustandes in Abbildung 5.22³ illustriert werden, legt der Reifen einen Rollweg von $s_{Boden_x} \simeq 55.5 \text{ mm}$ zurück, also 1.55 Querschnitte zurück.

Damit diese Bewegung überhaupt sichtbar wird, wurde der Reifen durch Ausblenden von 4 Vierecken aus der Seitenwand markiert. Diese Vierecke befanden sich zu Beginn des Rollvorganges im obersten Reifenquerschnitt.

Sehr schön ist die birnenförmige Ausbildung der Latschform mit der größeren Latschlänge auf der kurvenäußeren Seite zu erkennen.

Gleichzeitig ist das Vor- und Zurückwandern der Zone mit den maximalen Kontaktkräften zwischen Einlauf und Auslauf ersichtlich.

Episoden der Kontaktspannungsverteilung während des Rollvorganges

Zur illustration des insgesamt vollführten Rollvorganges werden in Abbildung 5.23 die Rollzustände mit einem Zeitintervall von $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ zusammengefaßt dargestellt. Der absolvierte Rollwinkel kann mit Hilfe der ausgeblendeten Vierecke aus der Seitenwand abgeschätzt werden.

³In den Darstellungen des Reifens wird von hier an immer dann ein Teil der Seitenwand ausgeblendet, wenn der momentane Rollwinkel erkennbar sein soll. Das ausgeblendete Stück der Seitenwand hat sich zu Beginn der Simulation immer am Top des Reifens befunden.

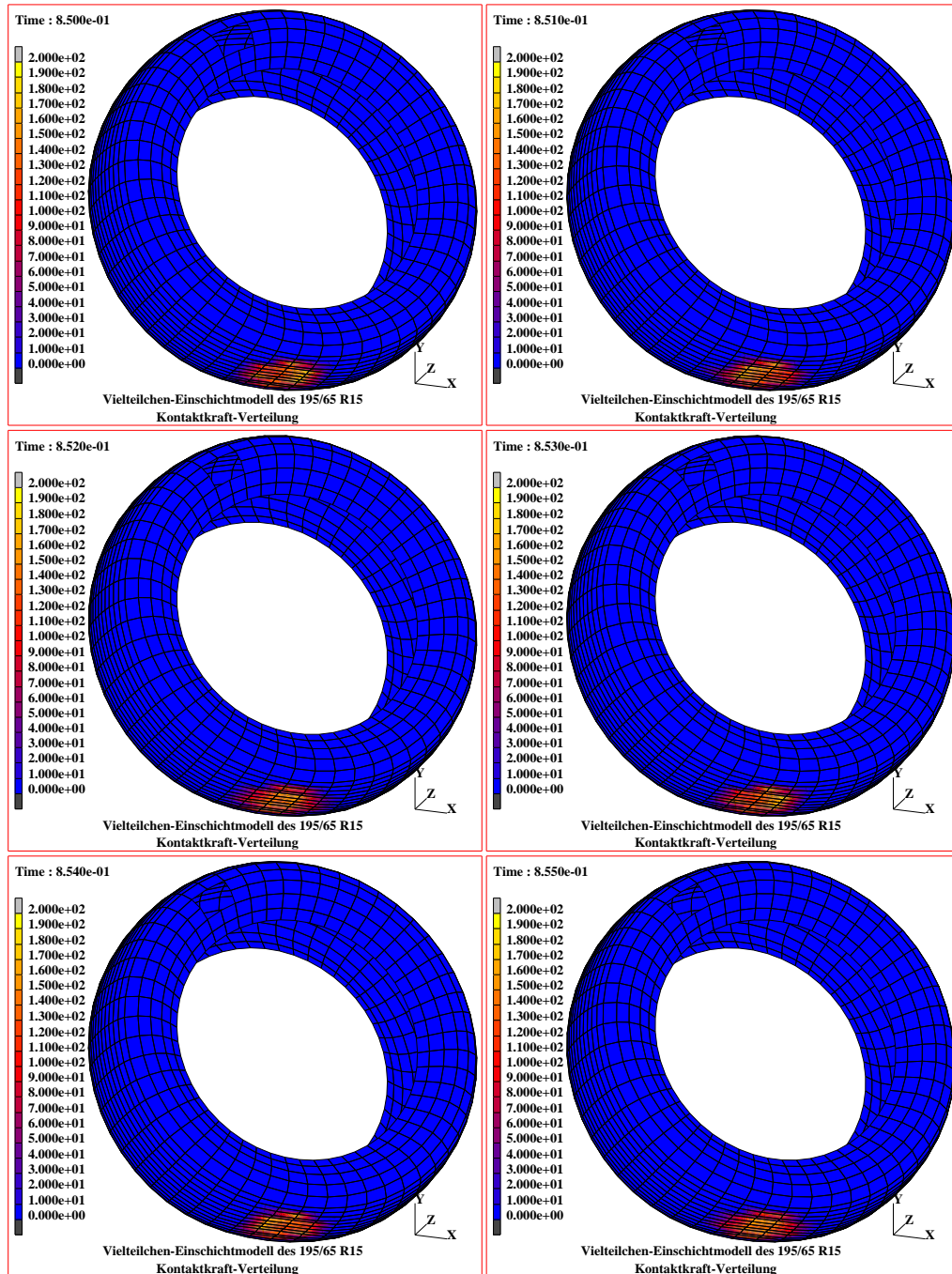


Abbildung 5.22: Darstellung des stationären Kontaktes

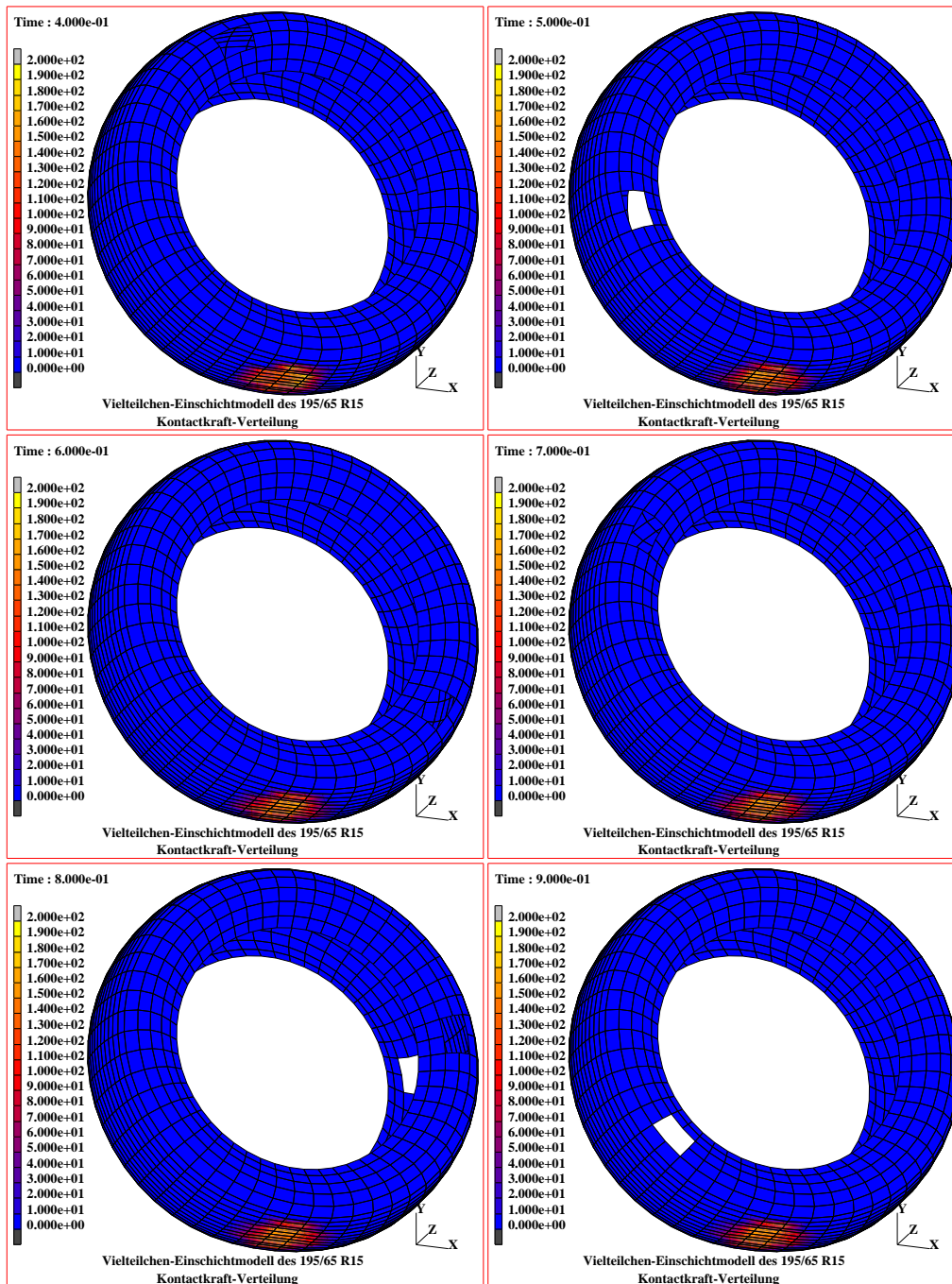


Abbildung 5.23: Episoden der Rollbewegung

Birnenform des Latsches zufolge Schräglauf

Bereits in Abbildung 5.22 konnte die Birnenform des Latsches erkannt werden. Zur deutlicheren Darstellung wird Abbildung 5.24 beigefügt. Aufgrund der gegenüber der Latschgröße relativ groben räumliche Auflösung der Reifenstruktur sind die Ränder des Latsches nicht glatt. Ein weiterer Grund für den zerklüfteten Latschrand ist die Interpolationstechnik des Postprocessor-Programmes, mit dem das Bild erstellt wurde.

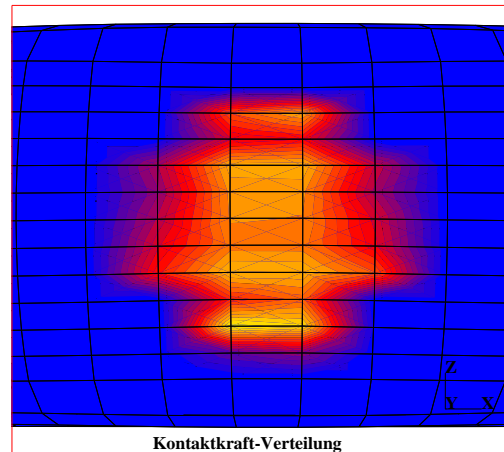


Abbildung 5.24: Birnenform des Latsches zufolge Schräglauf

5.1.2.5 Querdeformation der Reifenquerschnitte

Hier soll die Querdeformation des Reifens zufolge der aus dem Schräglauf resultierenden Seitenkraft dargestellt werden.

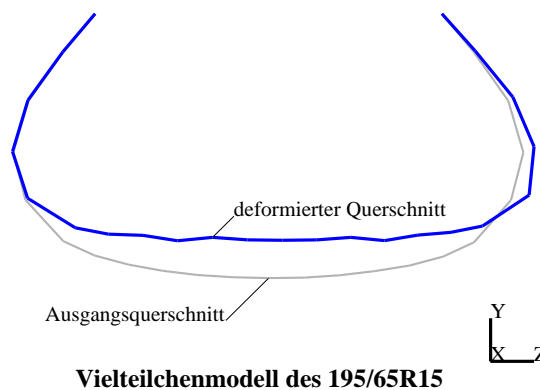


Abbildung 5.25: Querdeformation eines Querschnittes im Latsch zufolge Schräglauf

Zunächst sieht man in Abbildung 5.25, wie stark der Querschnitt in Latschmitte in Richtung der Seitenkraft gegenüber der Referenzlage ohne Kontaktkräfte

ausgelenkt ist.

Deutlich ist die versteifende Wirkung des Wulstes zu erkennen. Sie führt dazu, daß sich die Querdeformation vorwiegend in der Seitenwand abspielt.

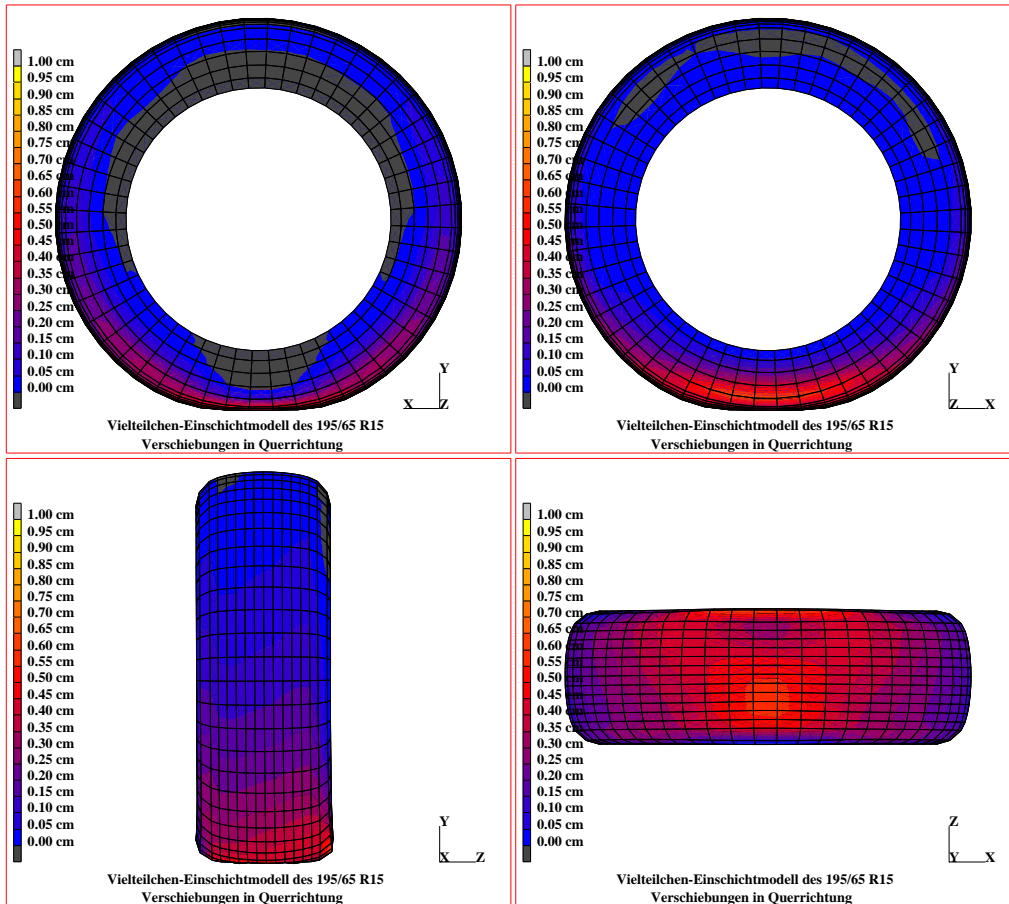


Abbildung 5.26: Querdeformation des Reifens zufolge Schräglauf

Ebenso ist die leicht wellige Deformation der Karkasse erkennbar, die bereits auf Seite 149 im Zusammenhang mit den Kontaktkräften diskutiert wurde.

Zusammenfassend sollen die Felder der Querdeformation in Abbildung 5.26 angegeben werden.

Im Vergleich der y-x-Ansicht und der x-y-Ansicht (obere Reihe) ist zu erkennen, wie der Ring des Gürtels gegenüber der Felge einerseits insgesamt zur kurveninneren Seite verschoben wird und gleichzeitig um die Längsrichtung (x-Achse) zurückgekippt wird. Dadurch tritt im oberen Bereich des Gürtels kaum eine Querverschiebung auf, eine Tatsache, die vor allem bei Radaufhängungen mit knappem Package, wie z.B. McPherson-Federbeinen von großer Bedeutung ist. Durch den gegenläufigen Effekt der Gürtelverschiebung und des Zurückklippens bewegt sich der Gürtel am hochbelasteten kurvenäußeren Rad *nicht* oder nur wenig auf das Dämpferbein zu.

In der unteren Reihe (y-z- und z-x-Ansichten) wird die Querdeformation nach Abbildung 5.25 in ihrer Verteilung über der Reifenumfang gezeigt. Es ist zu bemerken, daß sich die tatsächliche Auslenkung in Querrichtung im wesentlichen im Bereich $\text{ca. } \pm 60^\circ$ um den Aufstandspunkt herum abspielt.

5.1.2.6 Biegekräfte

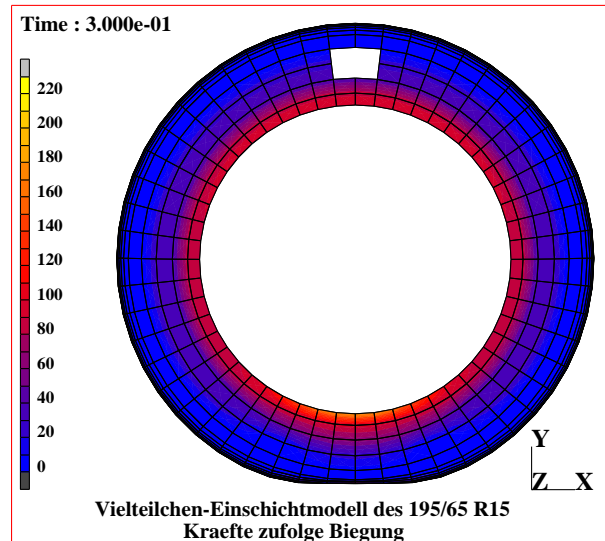


Abbildung 5.27: Biegekräfte im Wulstbereich ohne Querdeformation

Ein interessanter Aspekt bei der Simulation des Kontakt- und Rollvorganges des Reifens ist die durch Abweichung der deformierten Reifenstruktur von der idealen Membranlösung entstehende Biegung.

Wie in der Einleitung diskutiert, ist es in der Praxis leider nicht möglich, den

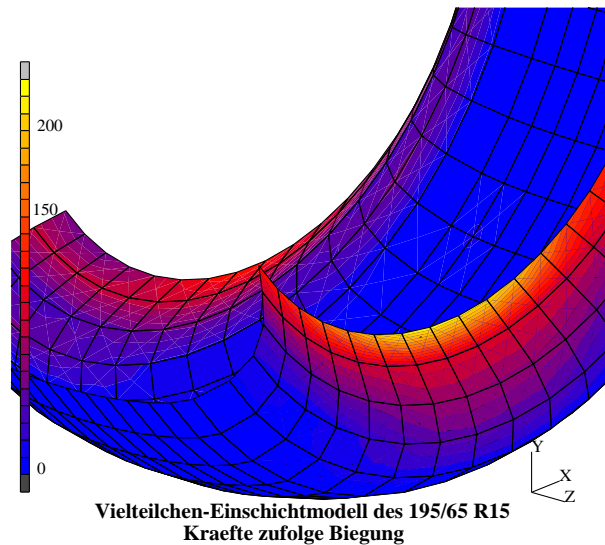


Abbildung 5.28: Biegekräfte in der Seitenwand mit Querdeformation

Reifen so dünn zu bauen, daß er sich wie eine ideale Membran verhält. Durch

den erforderlichen endlichen Abstand zwischen den Kordlagen entsteht eine Biegesteifigkeit. Biegung ist in erster Linie ein unerwünschter Deformationszustand, der energiereicher als der Membranzustand ist. Da die Reifenquerschnitte während des Rollvorganges einen immer wiederkehrenden Biegedeformationszyklus durchlaufen, verursachen die sich dadurch ständig ändernden Biegespannungen eine permanente Dissipation. Das ist vor allem für die Reduktion des Rollwiderstandes von Interesse.

Wenn es aber schon nicht möglich ist, biegemomentenfreie Reifen zu konstruieren, dann kann man auch den Biegeeffekt ausnutzen.

So wird z.B. zur Steigerung der Seitensteifigkeit der Wulst sehr biegesteif ausgeführt, wodurch der Reifen ein präziseres Lenkverhalten bekommt. In Abbildung 5.27 sieht man, wie die Biegekräfte den Gürtelreifen bei der Ausbildung einer im Wulstbereich steilen Kontur unterstützen, wodurch die Radialsteifigkeit des Reifens gesteigert wird.

In Abbildung 5.28 sieht man, wie die Biegekräfte im Wulst die allgemeine Querdeformation der Reifenstruktur im Latschbereich behindert und damit die Seitensteifigkeit anhebt.

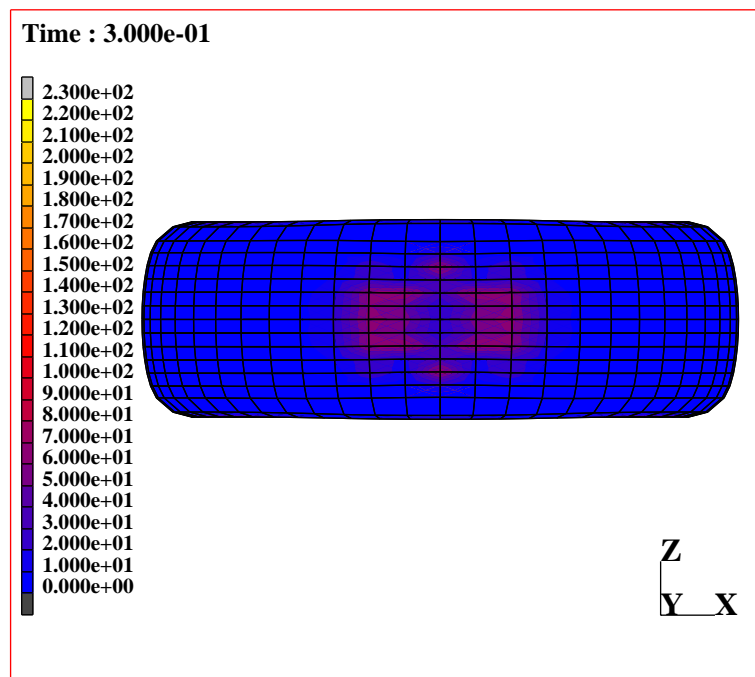


Abbildung 5.29: Biegekräfte im Latschbereich zufolge Einebnung nach statischer Abplattung

Eine andere Möglichkeit, die Biegung auszunutzen bietet sich in der Beeinflussung der Latschform. So erzielt man durch Biegesteifigkeit im Gürtel eine Verkleinerung der Aufstandsfläche. Damit erhöht sich der Kontaktdruck und der Kontakt zur Fahrbahn wird unanfälliger gegenüber Imperfektionen der Ober-

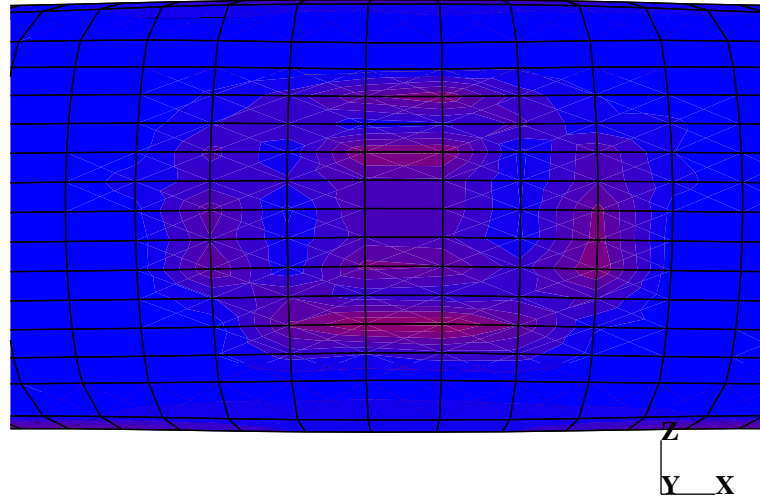


Abbildung 5.30: Typische Biegekräfte im Latschbereich zufolge Einebnung beim Rollen

flächen mit der Folge, daß man die effektive Traktion steigern kann (s. Abbildungen 5.29 und 5.30).

5.2 Simulation der inneren Mechanik mit dem FE-Modell

Für die Simulation der inneren Mechanik wurde ein allgemeiner Finite-Elemente-Code entwickelt, der

- + in der Lage ist, mit dem Umfang des erforderlichen numerischen Aufwandes auf gewöhnlichen PC-Computern umzugehen,
- + 4-, 6- und 8-Knoten Volumenelemente sowie 2-Knoten Stab-/Seilelemente besitzt, in welchen die besonderen Anforderungen des Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus an die Struktur sowohl der Elementunterprogramme als auch des Programmbaumes realisiert und mit KIRCHHOFFSchem und MOONEY-RIVLIN-Material arbeiten,
- + unterschiedlichste Arten der Lastaufbringung ermöglicht,
- + in der Lage ist, Fehler bei der Dynamik-Formulierung von Volumenelementen mit MOONEY-RIVLIN-Material, wie sie in modernen kommerziellen FE-Codes vorhanden sind zu beheben,
- + in der Lage ist, statische und transient dynamische Simulationsläufe sequentiell zu rechnen,
- + durchgehend mit materiellen Koordinaten und *nicht* mit einer räumlichen Formulierung arbeitet, da somit eine Drift bei der Integration des

- von der Struktur okkupierten Raumes (räumliche Integrationsgrenzen) ausgeschlossen wird,
- + eine Datenschnittstelle zum Pre- und Postprocessing-Tool eines führenden Programmsystems für die Anwendung der Finiten-Elemente-Methode auf nichtlineare und nichtkonvexe Variationsprobleme besitzt, wodurch einerseits dort die Erstellung der Modelle und andererseits dort die Auswertung der Ergebnisse möglich ist,
 - + eine Vielzahl von Komfortmerkmalen (verschiedenste Schnittstellen; schlüsselwortgesteuerte Eingabedatei ohne Zwang an Reihenfolge oder Umfang der Karten; Restart; Steuerung des Echos der Simulation, der variablen Einbindung von problemspezifischen Unterprogrammen, der Historie zur Art des Programmlaufes, der Belastungen und Randbedingungen (Führung), des Solvers, variabler Abbruchkriterien, der Verwendung der Schnittstelle zur „äußeren Mechanik“ usw. usf. durch die Eingabedatei ohne Recompilierung; dynamisches Speichermanagement; ökonomisches Filehandling; verschiedene Solver, Topologien, Elemente, Parametrierungen usw. usf.) enthält, ohne die eine Simulation von Problemen der präsentierten Größenordnung praktisch nur sehr schwer durchführbar ist,
 - + streng modular und weitestgehend in ANSI-FORTRAN-77 programmiert sowie gut kommentiert ist, um eine spätere Pflege, Weiterentwicklung, Erweiterung oder Portierung des Codes zu ermöglichen und der schließlich
 - + die Schnittstelle zum Modell für die „äußere Mechanik“ des rollenden Reifens besitzt.

5.2.1 Parametrisierung des Finite-Elemente-Modells

5.2.1.1 Geometrieerzeugung des FE-Modells

Wie bereits früher erwähnt soll das FE-Modell das Schichtverhalten der Reifenstruktur abbilden. Deshalb werden der Gürtel und die Karkasse zu einzelnen Schichten aufgelöst modelliert. Dazu wird die Technik von [Feng.94] angewendet (s. Abbildung 5.31). Dies ermöglicht eine direkte Zuordnung der kontinuumsmechanischen Eigenschaften der Reifenstruktur zu den Parametern der verwendeten Finiten Elemente.

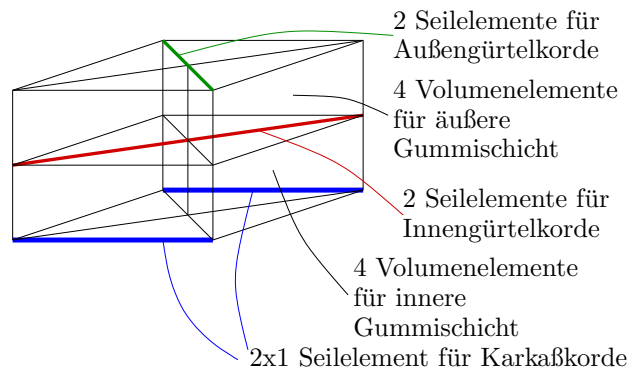


Abbildung 5.31: Auflösung des Schichtverbandes in Volumenelemente und Seile

Die Erzeugung der geeigneten Topologie der einzelnen Layer erfolgt völlig analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.1.1.1. Man ermittelt zunächst die Lage der Korde in einem Gleichgewichtsquerschnitt (s. Abbildung 5.3) und kann daraus direkt die infrage kommenden Koordinaten der Knotenpunkte der Struktur ableiten.

Nachdem die Anordnung der Kordlagen im Querschnitt bekannt sind, wird durch die ebenfalls in Abschnitt 5.1.1.1 dargestellte Technik des Abwickelns auf dem räumlichen Reifentorus eine geeignete Teilung der Struktur in Umfangs- und in Querrichtung ermittelt.

Das vorliegende Reifenmodell des 195/65R15 verwendet eine Teilung von

- 52 Querschnitten,
- 7 Diagonalkorden durch einen Gürtelquerschnitt⁴
- 3 Elementreihen für die Seitenwand und
- 2 Elementreihen für den Übergangsbereich an der Schulter.

Tabelle 5.3 listet die erzeugten Koordinaten des generischen Reifenquerschnittes, aus dem durch Rotation um die Radachse die übrigen Knoten generiert werden. Diese Punkte werden nochmals in Abbildung 5.32 dargestellt.

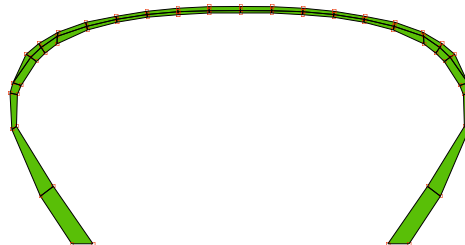


Abbildung 5.32: Generische Querschnittsgeometrie des Schichtmodells

Damit ergeben sich für das Modell die Dimensionen, wie sie in Tabelle 5.4 aufgelistet sind.

5.2.1.2 Randbedingungen des FE-Mehrschichtmodells

Der Vollständigkeit halber sollen die beim Modell der „inneren Mechanik“ verwendeten Randbedingungen genannt werden.

⁴Der Begriff von „Spuren“ wie beim Einschichtmodell ist bei der Modellieretechnik des Schichtmodells nicht geeignet, da ein Finites Volumenelement einen größeren Bereich als eine „Spur“ (nach dem Verständnis der Modellieretechnik beim Einschichtmodell) überstreicht.

coordinates							
3	71						
\$Knoten	x	y	z	\$Knoten	x	y	z
1	0.00000+0	1.94800+2	-6.40000+1	2	0.00000+0	2.20000+2	-8.12000+1
3	0.00000+0	2.46300+2	-9.72000+1	4	0.00000+0	2.60300+2	-9.68000+1
5	0.00000+0	2.64300+2	-9.52000+1	6	0.00000+0	2.74800+2	-8.85000+1
7	0.00000+0	2.78500+2	-8.48000+1	8	0.00000+0	2.82600+2	-7.96000+1
9	0.00000+0	2.88700+2	-6.63600+1	10	0.00000+0	2.92100+2	-5.35600+1
11	0.00000+0	2.94300+2	-4.03800+1	12	0.00000+0	2.95390+2	-2.69800+1
13	0.00000+0	2.96150+2	-1.35100+1	14	0.00000+0	2.96150+2	0.00000+0
15	0.00000+0	2.96150+2	1.35100+1	16	0.00000+0	2.95390+2	2.69800+1
17	0.00000+0	2.94300+2	4.03800+1	18	0.00000+0	2.92100+2	5.35600+1
19	0.00000+0	2.88700+2	6.63600+1	20	0.00000+0	2.82600+2	7.96000+1
21	0.00000+0	2.78500+2	8.48000+1	22	0.00000+0	2.74800+2	8.85000+1
23	0.00000+0	2.64300+2	9.52000+1	24	0.00000+0	2.60300+2	9.68000+1
25	0.00000+0	2.46300+2	9.72000+1	26	0.00000+0	2.20000+2	8.12000+1
27	0.00000+0	1.94800+2	6.40000+1	28	0.00000+0	1.94800+2	-7.32000+1
29	0.00000+0	2.15700+2	-8.68000+1	30	0.00000+0	2.45000+2	-9.92000+1
31	0.00000+0	2.61000+2	-1.00000+2	32	0.00000+0	2.65500+2	-9.87000+1
33	0.00000+0	2.76700+2	-9.10000+1	34	0.00000+0	2.81000+2	-8.65000+1
35	0.00000+0	2.85900+2	-7.95000+1	36	0.00000+0	2.90270+2	-6.67300+1
37	0.00000+0	2.93360+2	-5.37800+1	38	0.00000+0	2.95480+2	-4.05400+1
39	0.00000+0	2.96710+2	-2.70900+1	40	0.00000+0	2.97130+2	-1.35500+1
41	0.00000+0	2.97200+2	0.00000+0	42	0.00000+0	2.97130+2	1.35500+1
43	0.00000+0	2.96710+2	2.70900+1	44	0.00000+0	2.95480+2	4.05400+1
45	0.00000+0	2.93360+2	5.37800+1	46	0.00000+0	2.90270+2	6.67300+1
47	0.00000+0	2.85900+2	7.95000+1	48	0.00000+0	2.81000+2	8.65000+1
49	0.00000+0	2.76700+2	9.10000+1	50	0.00000+0	2.65500+2	9.87000+1
51	0.00000+0	2.61000+2	1.00000+2	52	0.00000+0	2.45000+2	9.92000+1
53	0.00000+0	2.15700+2	8.68000+1	54	0.00000+0	1.94800+2	7.32000+1
55	0.00000+0	2.78000+2	-9.30000+1	56	0.00000+0	2.82700+2	-8.75000+1
57	0.00000+0	2.87700+2	-7.91300+1	58	0.00000+0	2.92050+2	-6.71200+1
59	0.00000+0	2.94670+2	-5.39800+1	60	0.00000+0	2.96870+2	-4.07300+1
61	0.00000+0	2.98220+2	-2.72300+1	62	0.00000+0	2.98920+2	-1.36400+1
63	0.00000+0	2.99000+2	0.00000+0	64	0.00000+0	2.98920+2	1.36400+1
65	0.00000+0	2.98220+2	2.72300+1	66	0.00000+0	2.96870+2	4.07300+1
67	0.00000+0	2.94670+2	5.39800+1	68	0.00000+0	2.92050+2	6.71200+1
69	0.00000+0	2.87700+2	7.91300+1	70	0.00000+0	2.82700+2	8.75000+1
71	0.00000+0	2.78000+2	9.30000+1				
end option							

Tabelle 5.3: Koordinaten des generischen Querschnittes des FE-Schichtmodells

Den Knoten der Felgenrendelemente übernehmen die drei Verschiebungen des EUKLIDischen Raumes zufolge der Führungsbewegung durch die Felge. Dabei sind die Knoten selbst ohne Behinderung der Verdrehungen gelenkig an die starre Felge gekoppelt. Die Torsionssteifigkeit um den Wulst ergibt sich somit aus dem Randfaserabstand und der Steifigkeit der Korde im Wulstbereich der Seitenwand.

Die Führung der Felge sowie die Kontaktkräfte werden von der „äußeren Mechanik“ wie in den Kapiteln 2 und 5.1 beschrieben generiert und wie in Kapitel 4 erläutert appliziert.

5.2.1.3 Elastische Parameter des FE-Mehrschichtmodells

Die Parametrisierung des FE-Modells erfolgt ungleich einfacher als die des Vielteilchen-Einschichtmodells, da hier die Werkstoffkonstanten fast direkt

Knoten	2158
zzgl. Druckknoten	832
Freiheitsgrade	7306
davon geführte Freiheitsgrade	3·208
Gleichungen	6682
Elemente	3510
davon Seil-/Stabelemente	1638
davon MOONEY-RIVLIN-Elemente	832
davon KIRCHHOFFsche-Elemente	1040
Materialkarten	32
Geometriekarten	10

Tabelle 5.4: Modelldimensionen des FE-195/65 R15-Modells

den physikalischen Werten entsprechen. Diese physikalischen Werte sind die E-Moduli, die Fadendichte, die Fadendehnsteifigkeiten und die Massendichte der Bauteile. Diese werden aus Messungen gewonnen bzw. per Design festgelegt und dann durch Verwendung entsprechender Mischungen und Materialien umgesetzt.

Bauteil	E-Modul
Laufstreifen	5.73 $\frac{N}{mm^2}$
Gürtellagen	8.12 $\frac{N}{mm^2}$
Karkaßlagen	4.17 $\frac{N}{mm^2}$
Bandagenlagen	8.00 $\frac{N}{mm^2}$
Karkaßkappe	2.73 $\frac{N}{mm^2}$
Seitenstreifen	2.85 $\frac{N}{mm^2}$
Wulstkeile	8.03 $\frac{N}{mm^2}$
Wulstverstärker	7.99 $\frac{N}{mm^2}$

Tabelle 5.5: E-Moduli der Gummimischungen eines typischen 195/65 R15

Die Tabellen 5.5 und 5.6 zeigen die Parameter von typischerweise verwendeten Materialien im PKW-Reifen.

Layer	Material	Fadendichte	A	EA
Gürtel	Stahl	8.1 ... 10.0 cm^{-1}	0.22 ... 0.36 mm^2	43600 ... 64200 N
Karkasse	Reyon	10 ... 11.7 cm^{-1}	0.28 mm^2	2660 N
Bandage	Nylon	9.0 cm^{-1}	0.28 mm^2	1150 N

Tabelle 5.6: Kordparameter eines typischen 195/65 R15

Diese Materialparameter können bei Kenntnis der Elementtopologie (s. Abschnitt 5.2.1.1) einfach den Elementen zugeordnet werden.

Dabei ist zu beachten:

- Die Fadensteifigkeiten müssen den Fäden des FE-Modells anteilig entsprechend der vom einzelnen Seilelement repräsentierten Fadenanzahl zugeschlagen werden.
Dazu wird aus der Dehnsteifigkeit der E-Modul abgespalten und dem einzelnen Stab-/Seilelement die entsprechende Querschnittsfläche zugeteilt. Dadurch wird gleichzeitig die Masseverteilung adäquat erfaßt.
- Die Stabelemente werden mit einer nahezu verschwindenden Drucksteifigkeit modelliert, so daß damit die wesentliche Eigenschaft der Seile, keine Druckkräfte übertragen zu können, im Modell enthalten ist.
Dies wird dadurch realisiert, daß die E-Moduli der Stabelemente mit einem Faktor skaliert werden, der analog zum Einschichtmodell nichtlinear von der aktuellen Dehnung abhängig ist (Drucksteifigkeit $\approx 0.5\%$ · Zugsteifigkeit).
- Im Wulstbereich werden die Karkaßkorde um dem Wulstkern umgeschlagen und reichen auf der Außenseite der Seitenwand der Karkasse je nach Konstruktion auf bis zu $\frac{1}{3}$ der Seitenwandhöhe hinauf.
Da zur Modellierung von Anfang und Ende dieser Korde aus Kostengründen keine Knoten zur Verfügung gestellt werden, reichen die auf der Außenseite liegenden Wulstkorde bis zum nächsten verfügbaren Knoten hinauf und erhalten dann eine entsprechend geminderte Steifigkeit.
- Das Fehlen der Lauffläche hat einen doppelten Effekt:
 - Die Masse des Laufstreifens muß den darunterliegenden Elementen zugeschlagen werden.
 - Der Gürtelverband verhält sich im Gegensatz zum realen Reifen und zum Einschichtmodell deutlich ähnlicher einer biegeschlaffen Membran. Deshalb werden zur Konservierung der Kompatibilität der Modelle die Kontaktkräfte und Felgenstellungen eines Einschichtmodells mit negierter Biegesteifigkeit appliziert.
- Im Gegensatz zur Arbeit [Feng.94] werden am Gürtelrand keine Übergangselemente von Solid- auf Schalenelemente verwendet, um den realen und numerisch wie physikalisch kritischen Spannungszustand am Gürtelrand besser abzubilden.
Gleichzeitig muß dadurch auch eine Möglichkeit gefunden werden, den dreischichtigen Gürtelverband in den zweischichtigen Verband der Seitenwand zu überführen, was durch entsprechende Volumenelemente realisiert wird.

Zur Kontrolle der verwendeten Massedichten kann die entstehende Massenverteilung im gesamten Reifen herangezogen werden, die aus Messungen und Erfahrung bekannt ist.

5.2.1.4 Dämpfungsparameter des FE-Mehrschichtmodells

Die in der Reifenstruktur vorhandene Dämpfung soll wiederum analog zum aus modalen Messungen bekannten LEHRschen Dämpfungsmaß verteilt werden. Im

verwendeten FE-Modell stehen Seil- und Volumenelemente zur Verfügung, um die im realen Reifen gezielt verwendeten Dissipationseigenschaften der unterschiedlichen Gummimischungen und Kordlagen abzubilden.

So ist die Dämpfung in der Seitenwand unerwünscht (Komfort, Schluckfähigkeit, Lebensdauer usw.) und wird beim Reifendesign minimiert, wogegen man im Laufstreifen den Hauptteil der Dämpfung plazierte, um z.B. hohe Fahrbahnreibung, Laufruhe und eine günstige Akustik zu fördern. Die Gürteldämpfung trägt maßgeblich zum Rollwiderstand bei, da hier ein Großteil der Walkarbeit stattfindet und ist somit eigentlich schwach ausgelegt. Gleichzeitig ist sie aber wichtig für die erforderliche Begrenzung der Stick-Slip-Effekte in der Gleitzone des Latsches und kann damit erfolgreich den effektiv dynamisch zur Verfügung stehenden Grip beeinflussen. Darum ist der Reifenhersteller gefragt, hier je nach Anwendungsfall einen guten Kompromiß zu finden.

Bei den FE-Seilelementen wird die LEHRsche Dämpfung in gleicher Weise wie bei den Seilen des Einschichtmodells erzeugt, wogegen die Parametrierung der Dämpfung für die Volumenelemente des Gummis nicht trivial ist.

Als einziger Parameter für die viskose Dämpfung der Gummielemente dieser Arbeit wird die Zähigkeit μ (s. Abschnitt 3.3.3) verwendet. Mit diesem Parameter soll die LEHRsche Dämpfung der Volumenelemente justiert werden. Aus Analogiebetrachtungen ist ersichtlich, daß neben der Zähigkeit auch die Elastizität, die Dichte und die Größe das jeweils entstehende LEHRsche Dämpfungsmaß eines Volumenelementes beeinflussen. Darum wurde der Einfluß all dieser Parameters anhand einer entsprechenden Serie von Ausschwingversuchen an einem typischen Gürtелеlement ermittelt, in jeweiligen angefütteten funktionalen Zusammenhängen mit z.T. empirischem Charakter dargestellt und zuletzt multiplikativ superponiert.

Die Verteilung der Dämpfung im vorgestellten Reifenmodell dieser Arbeit kann Tabelle 5.7 entnommen werden.

Region	Dämpfung
Protektor	nicht vorhanden
Volumenelemente im Gürtel	4.5 %
Volumenelemente der Schulter	4.5 %
Volumenelemente der Seitenwand	3.0 %
Volumenelemente im Wulstbereich	3.0 %
Seilelemente der Karkasse (Reyon)	2.0 %
Seilelemente im Gürtel (Stahlkord)	3.0 %

Tabelle 5.7: Dämpfungen im verwendeten Reifenmodell des 195/65 R15

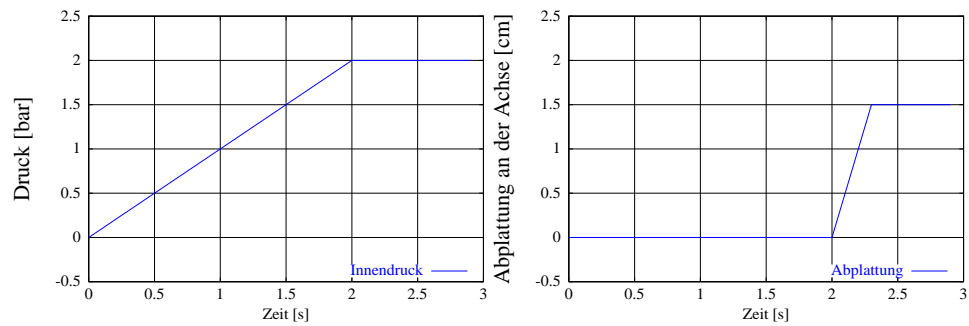


Abbildung 5.33: Historie von Innendruck und Abplattung

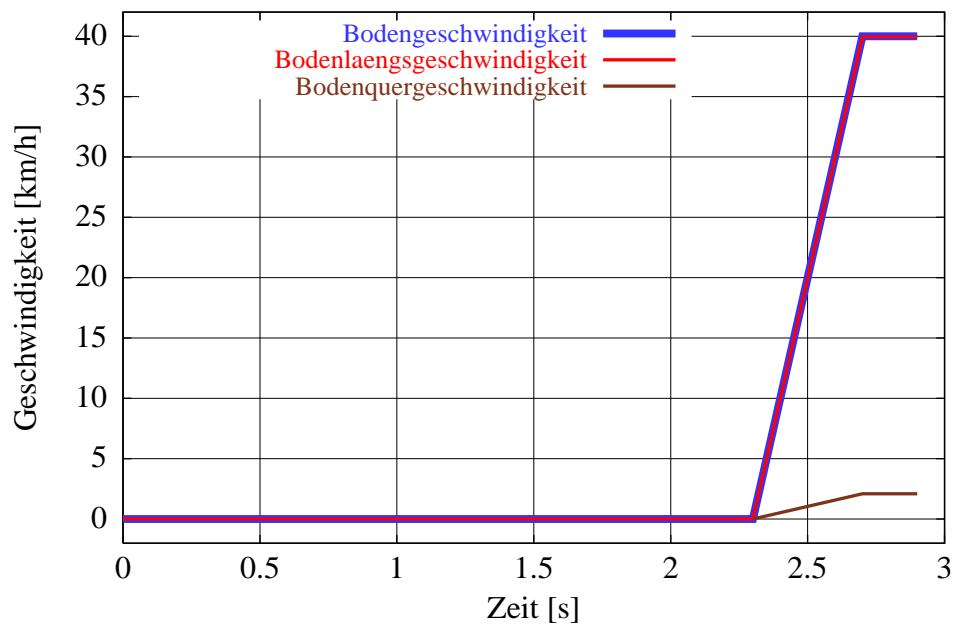


Abbildung 5.34: Historie der Bodengeschwindigkeit

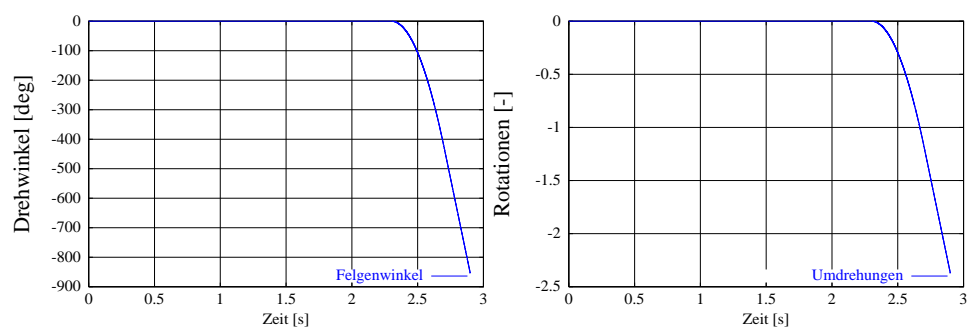


Abbildung 5.35: Historie der Felgendrehung

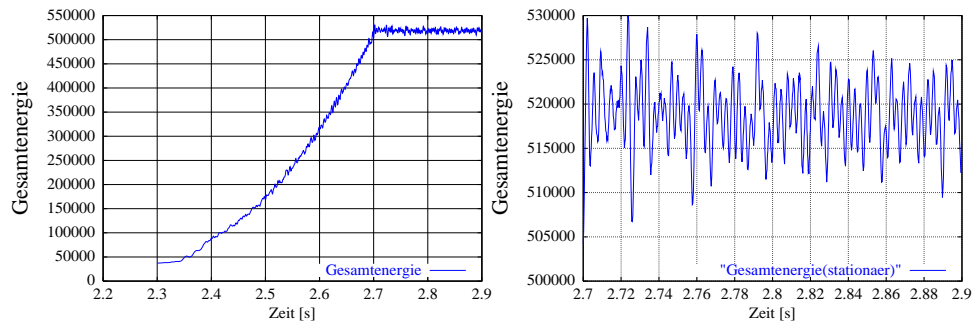


Abbildung 5.36: Historie der Gesamtenergie des Mehrschichtmodells

5.2.2 Simulationsergebnisse

5.2.2.1 Szenario des Rechenbeispiels

Allgemeine Aspekte des Szenario

Natürgemäß muß die Historie, der das FE-Schichtmodell unterworfen wird, identisch zur Historie des Einschichtmodells (s. Abschnitt 5.1.2.1) sein, da von diesem das Belastungskollektiv zur Simulation des Rollvorganges stammt (s. Abbildungen 5.33, 5.34, 5.35 und 5.36).

Numerische Aspekte des Szenario und Rechenzeiten

Es wurde durchgehend ein Sparse-Solver mit dynamischer Speicherverwaltung für unsymmetrische Matrizen verwendet. Die Systemmatrix wurde zusätzlich skylineoptimiert. Damit konnte der erforderliche RAM-Bedarf für die Faktorisierung der Systemmatrix des Modells mit den Dimensionen nach Tabelle 5.4 auf ca. 100MB begrenzt werden.

Dieser vergleichsweise geringe Speicherbedarf beeinflusst direkt den erforderlichen Aufwand für eine $L \cdot U$ -Zerlegung positiv.

Als numerisches Verfahren zur Lösung der (kineto)statischen, vollständig nicht-linearen Kraftgleichungen wurde ein modifiziertes NEWTON-RAPHSON-Verfahren verwendet. Einzelheiten werden näher in Anhang B.3 erläutert.

Dieses modifizierte NEWTON-RAPHSON-Schema reduziert den Zeitaufwand bis zum Erreichen einer hohen Konvergenzgüte gegenüber dem eines klassischen NEWTON-RAPHSON-Schemas beträchtlich und garantiert gleichzeitig, daß im Zeitschritt auftretende starke Nichtlinearitäten hervorragend durch einen adaptiv eingestellten, hinreichend guten Lösungsgradienten erfaßt werden.

Als mittleren Zeitaufwand für eine vollständige $L \cdot U$ -Zerlegung kann man 1 Minute nennen. Diese Zeit schwankt leicht in Abhängigkeit von der momentanen Kondition der Systemmatrix.

Tabelle 5.8 zeigt die durchgeführte Historie und die dazugehörigen Rechenzeiten, wie sie auf einem PC mit einer 350MHz-P II-CPU, 128MB RAM, Linux 2.0.35, dem FORTRAN-Gnu-Compiler g77-0.5.21 und dem Solver *sparse 1.2* von K.S. Kundert (University of California) erzielt wurden.

Phase	Echtzeit	Solver	Steps	CPU-Zeit
Aufpumpen	0.0–2.0 s	statisch	5	0h20'
Abplatten	2.0–2.3 s	statisch	12	1.0h
Beschleunigen	2.3–2.7 s	dynamisch	816	152.5h
Ausrollen	2.7–2.9 s	dynamisch	744	137.0h

Tabelle 5.8: Historie des FE-Rechenlaufes

5.2.2.2 Der Zustand des Schichtmodells am Ende des statischen Aufpumpens

Der Zeitpunkt zum Ende des Aufpumpens liegt bei diesem Beispiel bei $t = 2.0 \text{ sec}$. Wie aus Abbildung 5.33 ersichtlich ist, beträgt der Reifeninnendruck zu diesem Zeitpunkt 2.0 bar und der Reifen wird noch nicht mit Kräften belastet, welche eine der Abplattung entsprechende Deformation hervorrufen.

Folgerichtig liegt ein bzgl. der Radachse rotationssymmetrischer ⁵ Spannungs- und Deformationszustand vor.

Abbildung 5.37 zeigt beispielhaft das Feld der Umfangsverschiebungen an einem deformierten Reifenquerschnitt nach dem Aufpumpen.

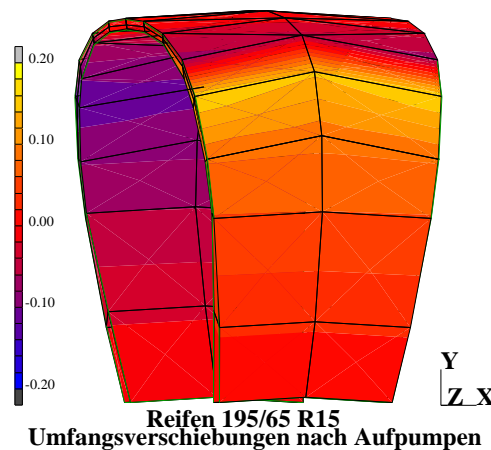


Abbildung 5.37: Feld der Umfangsverschiebungen nach Aufpumpen

⁵Man darf die Rotationssymmetrie nicht mit einem zweidimensionalen Spannungs- / Deformationszustand in der Radial-Quer-Ebene verwechseln.

Der vorliegende Zustand umfaßt auch beträchtliche Deformationen in Umfangsrichtung (s. Abb. 5.40). Deshalb sind rotationssymmetrische Berechnungsmodelle ohne Berücksichtigung der Umfangsverschiebungen einfach falsch.

5.2.2.2.1 Verschiebungszustand der Querschnitte

In Abbildung 5.38 wird die Querschnittskontur des aufgepumpten Reifens dar-

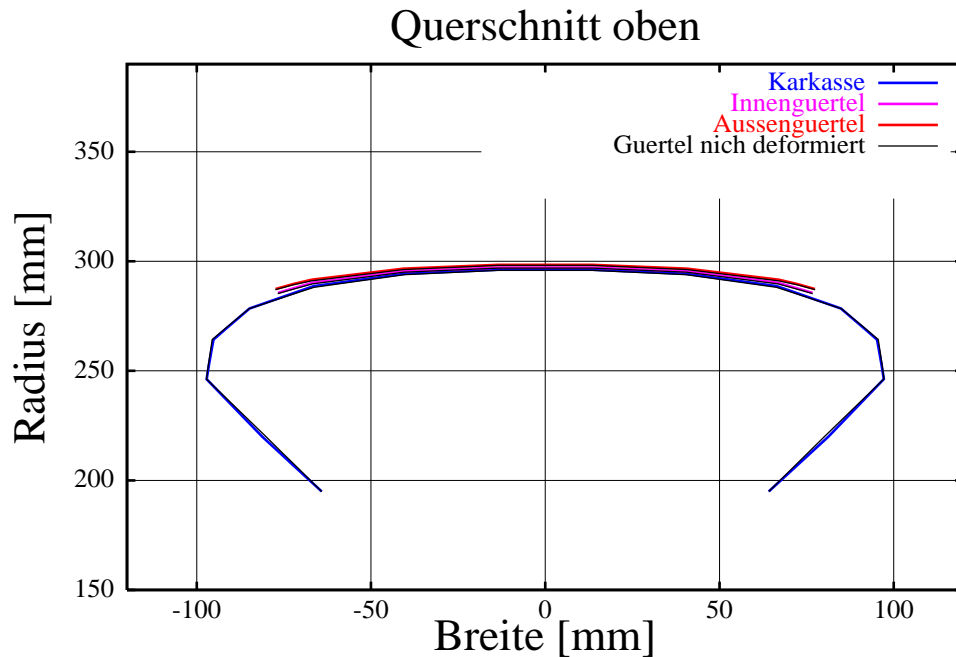


Abbildung 5.38: Querschnittskontur des Schichtmodells nach Aufpumpen

gestellt. Diese Querschnittsform stellt sich rotationssymmetrisch entlang des gesamten Umfanges ein.

In Abbildung 5.39 kann man die in Toruskoordinaten dargestellten Querschnittsverschiebungen sehen. Wiederum wird wegen der Rotationssymmetrie nur der Zustand im oberen Querschnitt dargestellt.

Der Verschiebungszustand deckt sich mit der theoretisch vorausgesagten und aus der Literatur ([Böhm.85, Feng.94, u.v.a.]) allseits bekannten Form.

Zur Erleichterung der Vorstellung der Querschnittsverschiebungen und deren Relationen untereinander werden in Abbildung 5.40 die Verschiebungen an den Knoten der Querschnittskontur als Vektoren dargestellt.

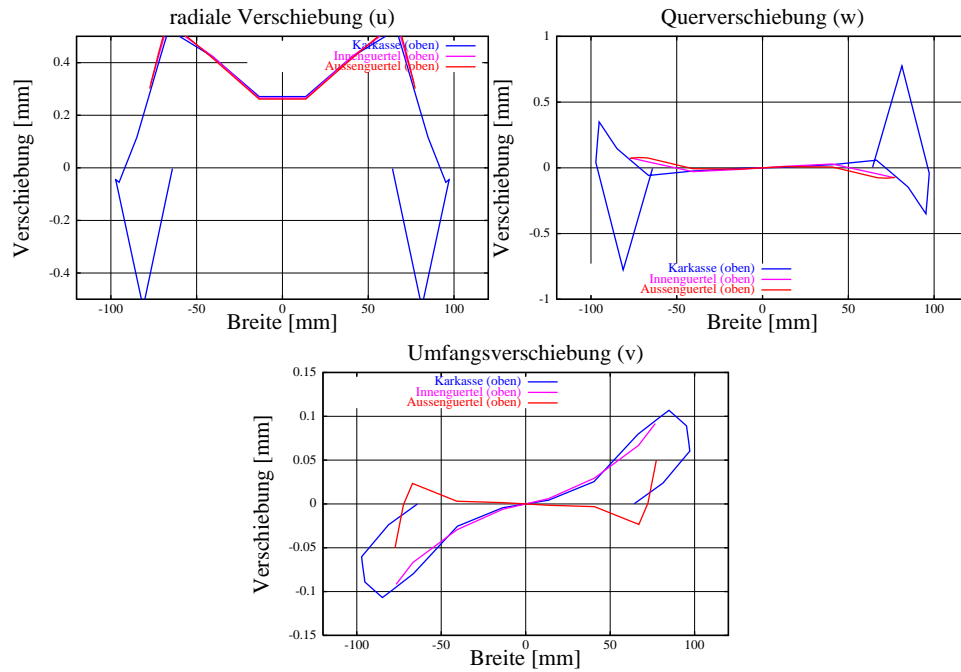


Abbildung 5.39: Verschiebungen des Schichtmodells nach Aufpumpen

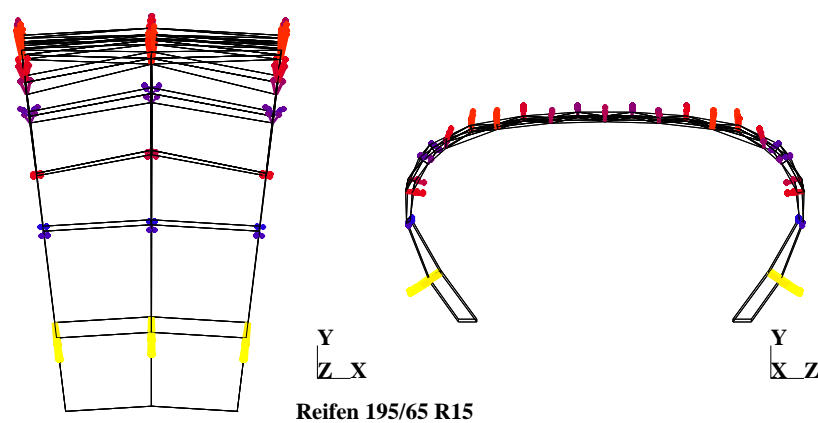


Abbildung 5.40: Verschiebungsvektoren nach Aufpumpen

5.2.2.2.2 Zustand der Korde

In Abbildung 5.41⁶ werden die Kordspannungen nach dem Aufpumpen gezeigt.

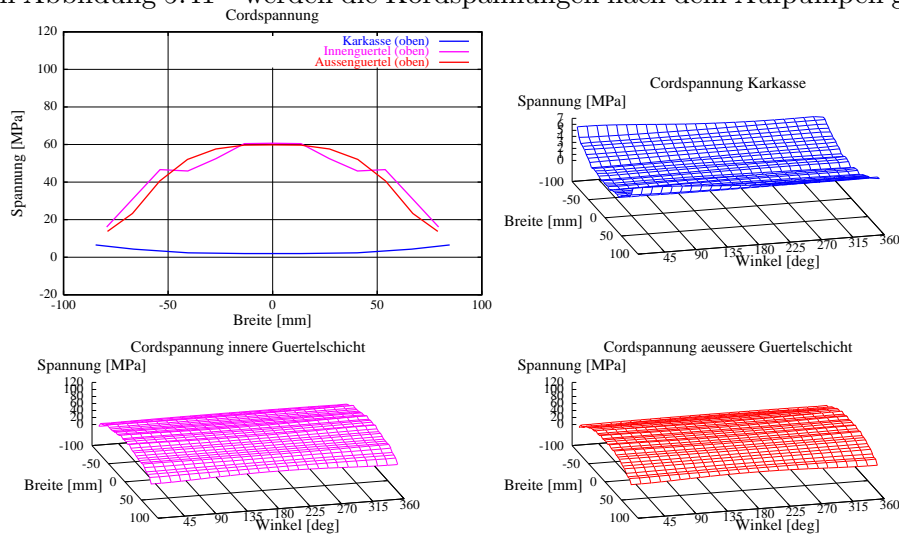


Abbildung 5.41: Kordspannungen des Schichtmodells nach Aufpumpen

Ein Kontrolle der Zahlenwerte beweist die perfekte Rotationssymmetrie auch der Kordspannungen bei diesem Lastzustand.

5.2.2.2.3 Zustand des Gummis

Die Abbildungen 5.42 auf Seite 171 fassen den Deformationszustand des Gummimaterials zusammen. Es ist zu bemerken, daß schon unter Innendruck beachtliche Scherverformungen insbesondere im Schulterbereich auftreten. Die Dehnungen des Gummis sind nicht sonderlich aussagekräftig, außer daß die Inkompressibilität erkennbar ist.

Schön zu erkennen ist jedoch die Mechanik des Zusammenwirkens der einzelnen Lagen beim Aufbau der Gürtelspannungen über die Schubdeformationen. Bei den dargestellten Deformationen für einen Innendruck von 1.6 bar ergeben sich maximale Scherwinkel von ca. 3.4° .

Während bei der Scherdeformation in Radial–Umfangsrichtung die Gürtellagen die „antreibenden“ Schichten sind und die Karkasse den Schubdeformationen im Verband folgt, folgen bei der Scherung in Radial–Querriechung die Gürtellagen der „antreibenden“ Karkasse.

Die Deformation in den Schichtebenen ist schön symmetrisch, was ebenfalls der Theorie entspricht.

⁶Die scheinbar in der Darstellung der Spannungen der Karkaßkorde auftretenden „Ungleichmäßigkeiten“ in Umfangsrichtung sind ausschließlich eine Folge von Interpolationen: Aufgrund der Netztopologie besitzen die Riefenquerschnitte innerhalb der Gürtelbreite eine abwechselnd unterschiedliche Anzahl an Knoten (7 und 8). Damit ist es nicht möglich, auf direktem Wege ein aus Rechtecken bestehendes Netz für die Anzeige zu generieren. Das verwendete Grafikprogramm „gnuplot“ löst das Problem über den Umweg der besagten Interpolationen, welche die numerischen Werte am Gürtelrand leicht verfälscht.

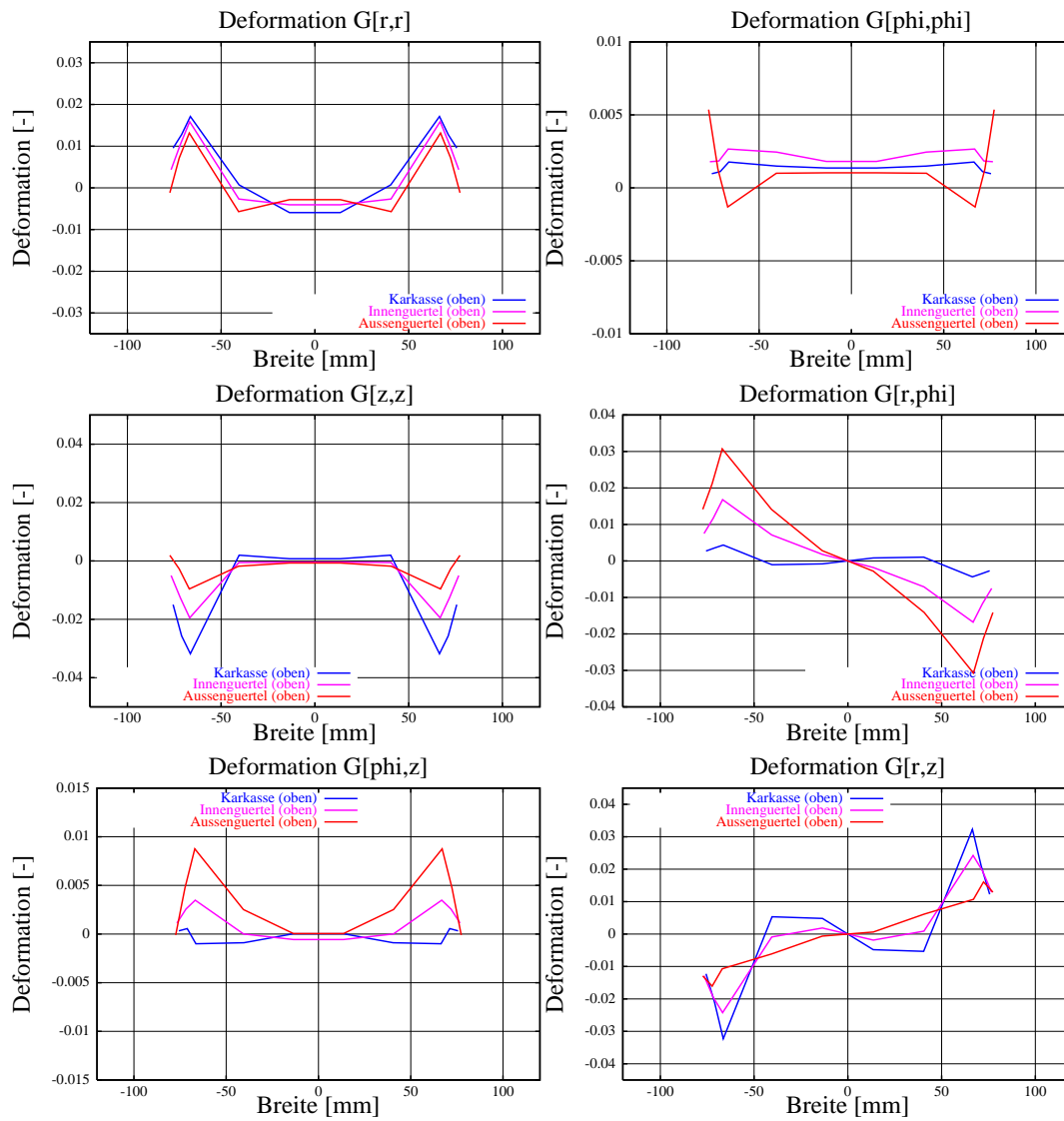


Abbildung 5.42: Deformationen im Gummi des Schichtmodells nach Aufpumpen

5.2.2.3 Der Zustand des Schichtmodells am Ende der statischen Abplattung

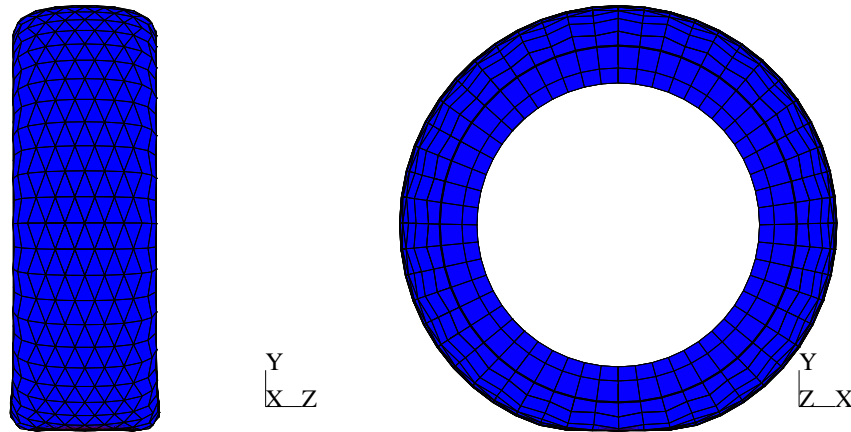


Abbildung 5.43: Reifen 196/65 R15 nach 1.5 cm Abplattung

Der (statische) Zeitpunkt zum Ende des Abplattens liegt bei diesem Beispiel zur Herstellung der zeitlichen Übereinstimmung mit der Rechnung des Einschichtmodells bei $t = 2.3 \text{ sec}$.

Wie aus Abbildung 5.33 (s. Seite 165) ersichtlich ist, beträgt die Abplattung zu diesem Zeitpunkt 1.5 cm . Die Abplattung wird durch die Applikation der Kontaktkräfte erreicht, die vom Einschichtmodell berechnet wurden und bei beiden Modellen die genannte Abplattung bewirken.

Der abgeplattete Spannungs- und Deformationszustand ist nicht mehr rotationssymmetrisch.

Abbildung 5.43 zeigt den Reifen nach der statischen Abplattung von 1.5 cm .

5.2.2.3.1 Verschiebungszustand der Querschnitte

In Abbildung 5.44 werden die Querschnittskonturen des abgeplatteten Reifens dargestellt.

Zur Darstellung der Verschiebungen der Querschnitte in Toruskoordinaten ist ein einziger Querschnitt nicht mehr ausreichend.

Das Verschiebungsfeld ist entlang des Umfangs veränderlich. So sind z.B. in Abbildung 5.45⁷ die veränderlichen Querschnittsverschiebungen am Reifenäquator $z = 0$ zu sehen. Analoge Abbildungen sind aus der Literatur bekannt.

⁷Die abgeschnittene Kurve der Radialverschiebungen in Latschmitte entsteht dadurch, daß beim FE-Modell zufolge der Verwendung der 6-Knoten-Penta-Elemente nur alle zwei Querschnitte ein Knoten direkt auf dem Äquator positioniert ist.

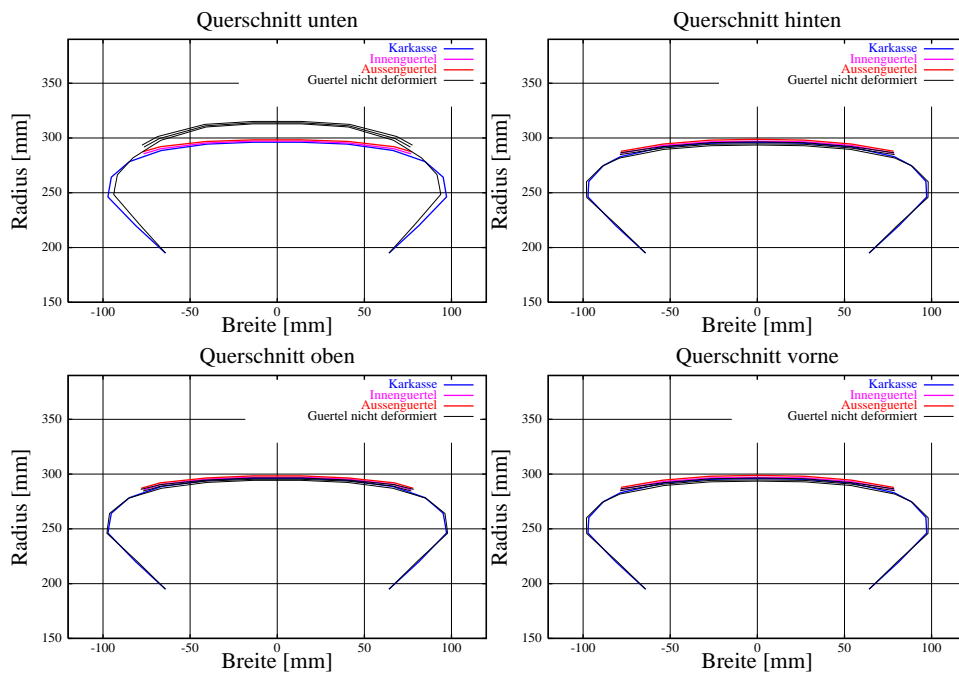


Abbildung 5.44: Querschnittskonturen des Schichtmodells nach der Abplattung

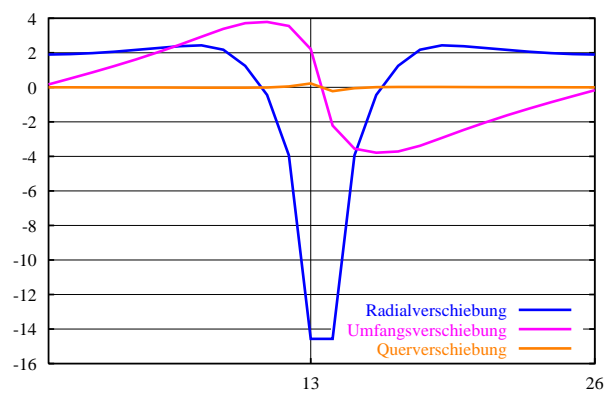


Abbildung 5.45: Äquatorverschiebungen nach dem statischen Abplatten

Die Verschiebungen der Querschnitte sind wiederum über den Querschnitt veränderlich.

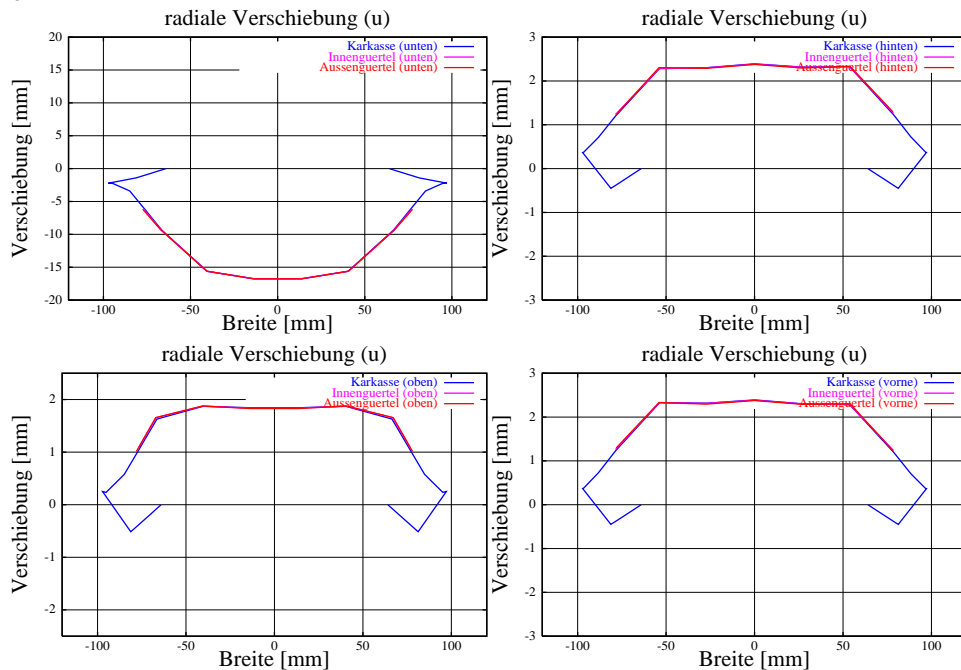


Abbildung 5.46: Verschiebungen des Schichtmodells nach der Abplattung

In den Abbildungen 5.46 bis 5.48 kann man die Querschnittsverschiebungen für

- den vordersten (bei $\varphi = 0^\circ$)
- den obersten (bei $\varphi = 90^\circ$)
- den hintersten (bei $\varphi = 180^\circ$) und
- den untersten (bei $\varphi = 270^\circ$, in Latschmitte)

Querschnitt nach dem statischen Abplatten sehen.

Die radiale Verschiebung ist im vordersten und hintersten Querschnitt gleich ausgebildet. Im oberen Querschnitt verläuft sie ähnlich, aber nicht so groß. Die radialen Verschiebungen im Querschnitt der Latschmitte beschreiben die Einebnungsbewegung dieses Querschnittes. Die Kurven entsprechen der Verschiebungsverteilung entlang des Umfangs lt. Abbildung 5.45.

Die Umfangsverschiebungen der Querschnitte haben antisymmetrischen Charakter. Von der Latschmitte aus werden die Querschnitte beidseitig nach außen weggedrückt. Diese Umfangsverschiebungen müssen sich dann oben aufheben. Deshalb sehen die Umfangsverschiebungen der vordersten und hintersten Querschnitte mit verschiedenem Vorzeichen gleich aus. Die Umfangsverschiebungen des obersten und untersten Querschnittes werden durch die Deformationsmöglichkeiten der Netzkinematik des Gürtelverbandes geprägt.

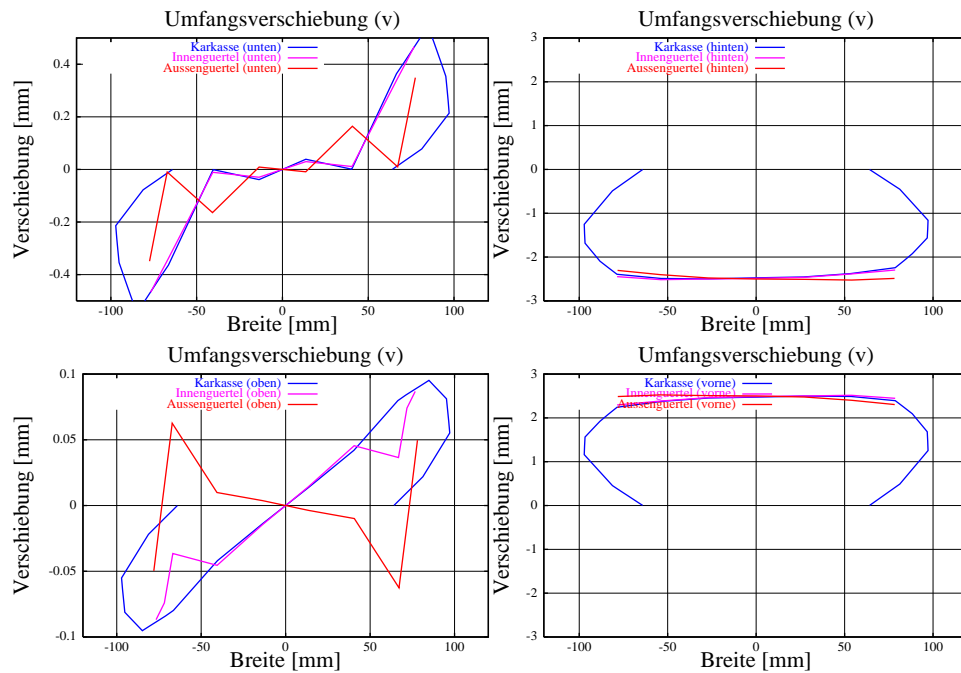


Abbildung 5.47: Verschiebungen des Schichtmodells nach der Abplattung

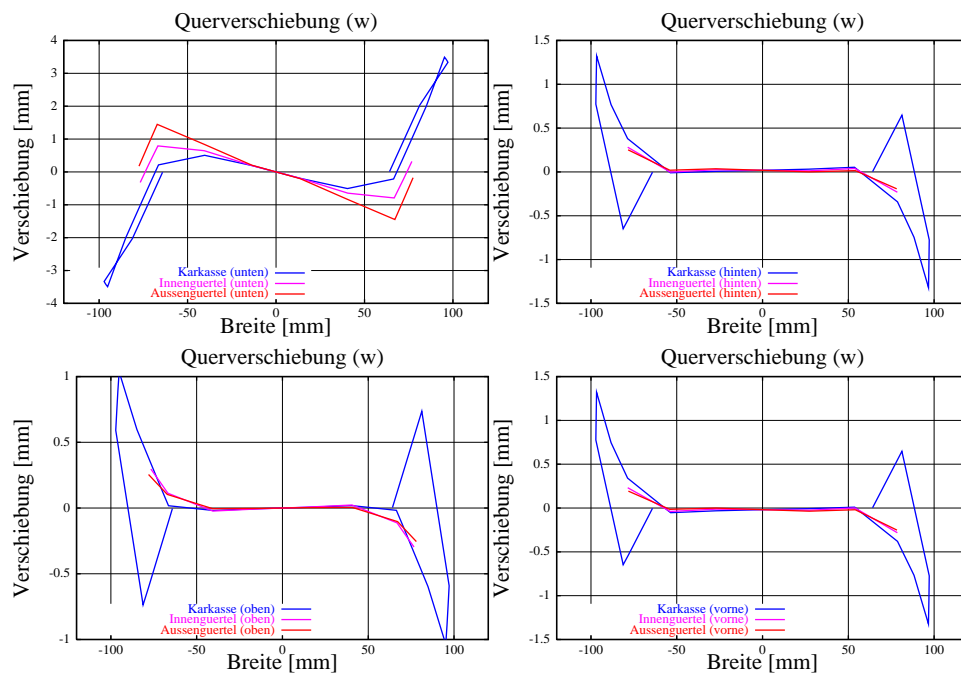


Abbildung 5.48: Verschiebungen des Schichtmodells nach der Abplattung

Die Querverschiebungen der Gürtellagen werden (vorwiegend im Schulterbereich) wiederum von den Querverschiebungen der Karkasse initiiert. Dabei entsprechen die Querverschiebungen überall überwiegend der Pumpfigur, außer im Latschbereich, wo die typische Form bei Reifenabplattung vorherrscht.

5.2.2.3.2 Zustand der Korde

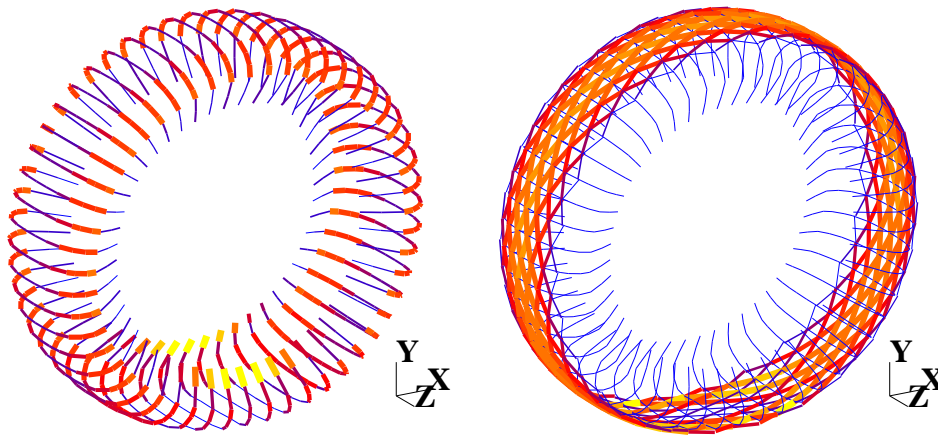


Abbildung 5.49: Kordspannungen nach der statischen Abplattung

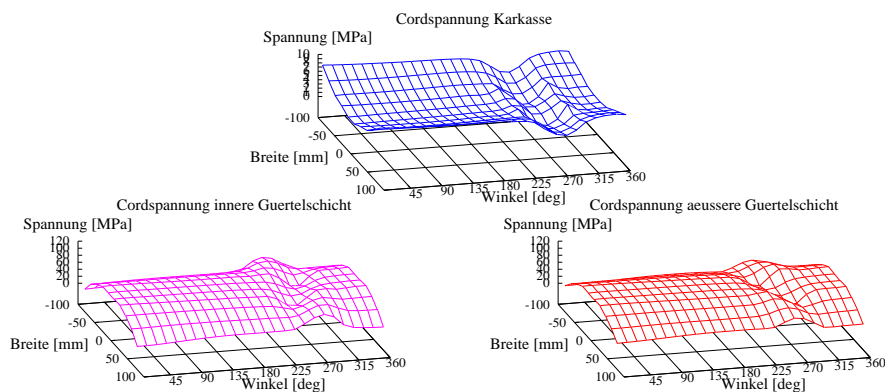


Abbildung 5.50: Kordspannungen der Schichten nach Abplattung

Die Spannungsverteilung in den Korden kann man in den Abbildungen 5.49 und 5.50 sehen. Daraus wurden zur deutlicheren Darstellung die Kordspannungen für den vordersten, obersten, hintersten und untersten Reifenquerschnitt herausgezogen und zusammengefaßt in den Abbildungen 5.51 dargestellt.

Deutlich erkennbar ist die Umgürtungswirkung der Gürtellagen, indem die Kordspannungen der Karkasse im Gürtelbereich stark absinken. Plausiblerweise gleichen sich die Kordspannungen in den Querschnitten außerhalb des Kontaktes sehr.

Im Latschbereich übernehmen die Kontaktspannungen einen Großteil der Umgürtung. Deshalb sinken die Kordspannungen der Gürtellagen auf ca. 22% ab. Gleichzeitig steigen die Kordspannungen des Gürtels im Schulterbereich

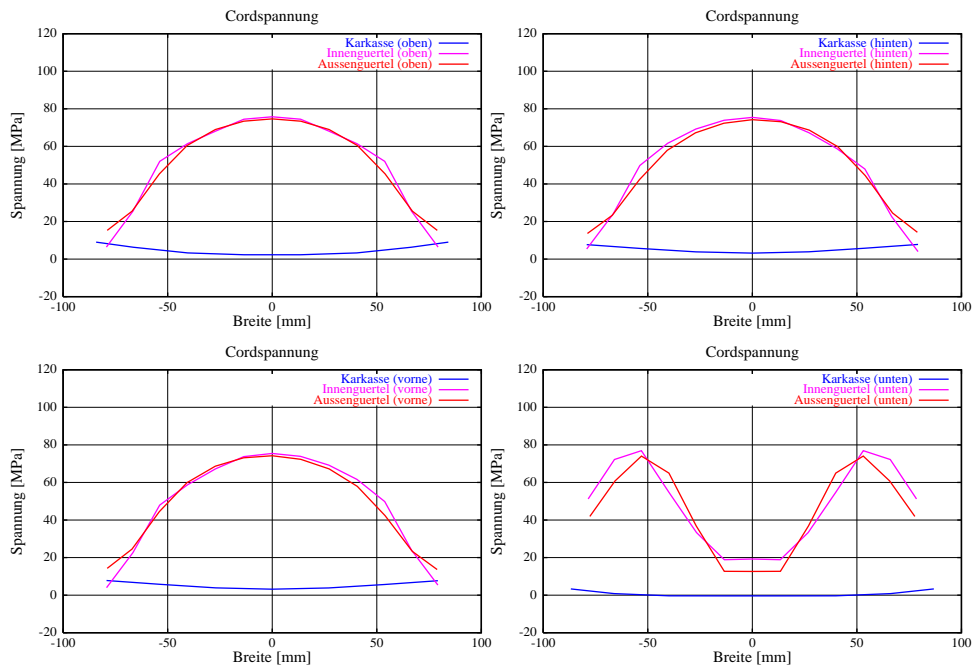


Abbildung 5.51: Kordspannungen der Querschnitte nach Abplattung des in Latschmitte befindlichen Querschnittes an. Dies muß auch geschehen, da der Gürtel zufolge der Einebnung hier eine gegenüber der nichtabgeplatteten Gleichgewichtsfigur eine geringere Krümmung aufweist und dies durch höhere Kordspannungen ausgleichen muß.

5.2.2.3.3 Zustand des Gummis

Wie schon die Querschnittsverschiebungen in den Abbildungen 5.46 bis 5.48 ahnen lassen sind die Deformationen des vordersten und hintersten Querschnittes antisymmetrisch zueinander identisch.

Am obersten Querschnitt und am Querschnitt in Latschmitte sind keine Symmetrien zu erwarten. Deutlich wird wiederum das Zusammenwirken der Lagen bei der Ausbildung der Tragwirkung des Reifens. Während das Abgleiten der Gürtellagen auf der Karkasse die antimetrische Schubverteilung in Radial-Umfangsrichtung bei beiden Querschnitten erklärt, kommt beim Querschnitt in Latschmitte die Behinderung dieser Deformation durch die Kontaktkräfte zum Vorschein. Die Deformationen an der Karkasse folgen der antreibenden Wirkung des Innengürtels.

Selbiger Mechanismus ist beim Schub in der Ebene der Umfangs- und Querrichtung zu erkennen. Im Schulterbereich des obersten und untersten Querschnittes wird der Schub in dieser Ebene durch die Form der Graphen der Umfangsverschiebungen an diesen Orten bestimmt, da diese Deformation die Änderung der Umfangsverschiebungen (s. Abbildung 5.47) über die Breite beschreibt. Folglich sind die Bilder in sich konsistent.

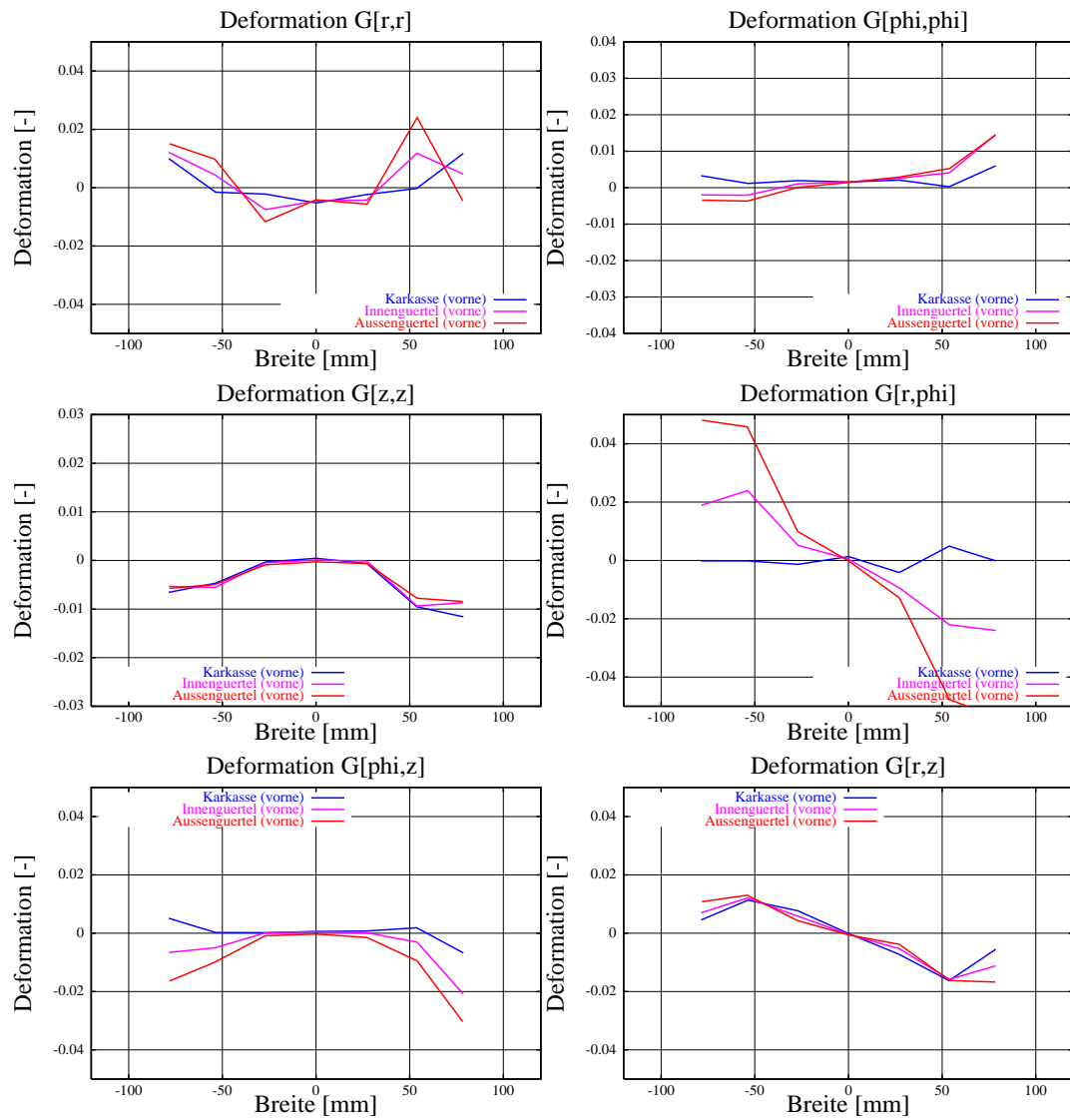


Abbildung 5.52: Deformationen im Gummi des vordersten Querschnittes nach Abplattung

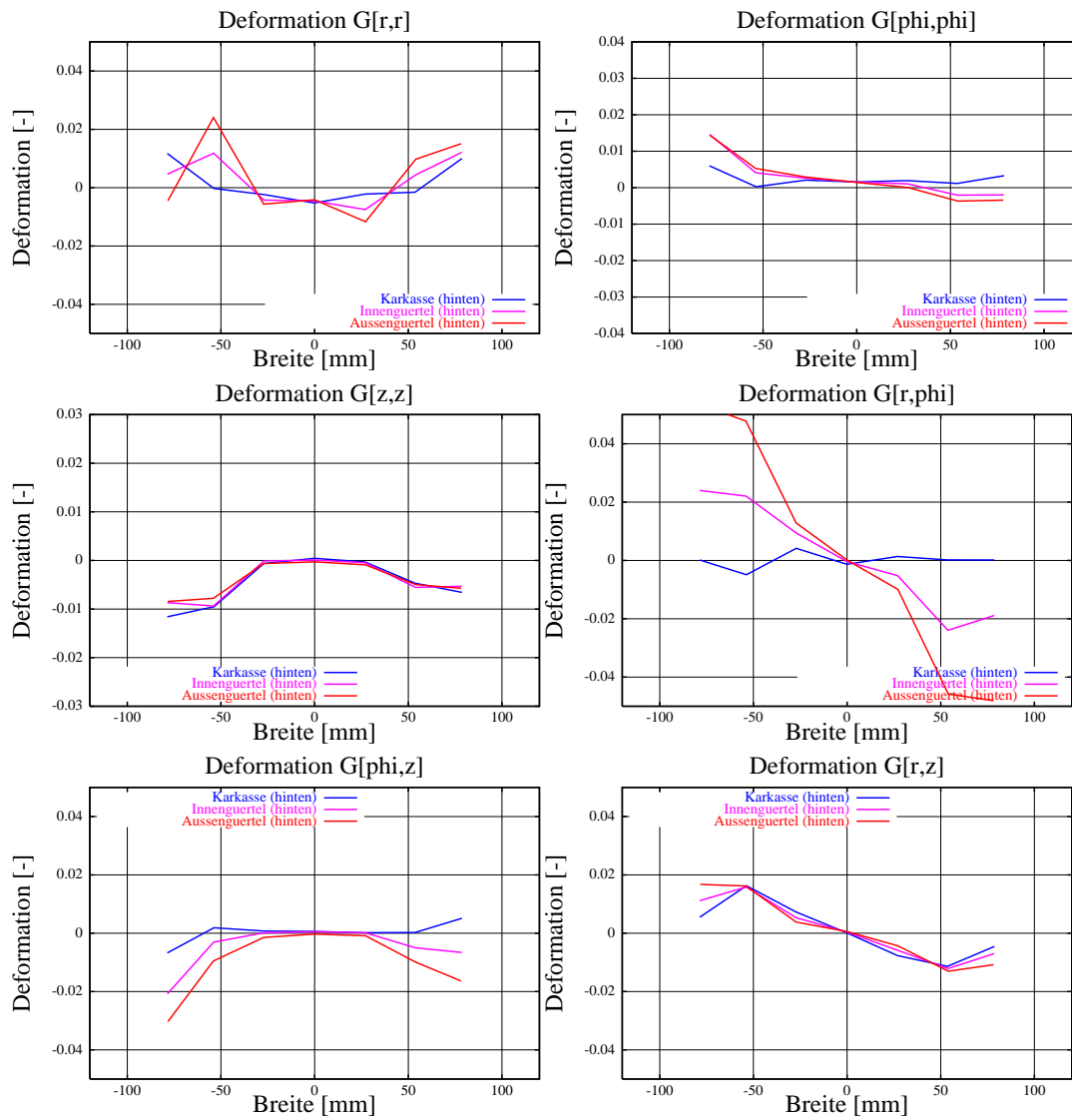


Abbildung 5.53: Deformationen im Gummi des hintersten Querschnittes nach Abplattung

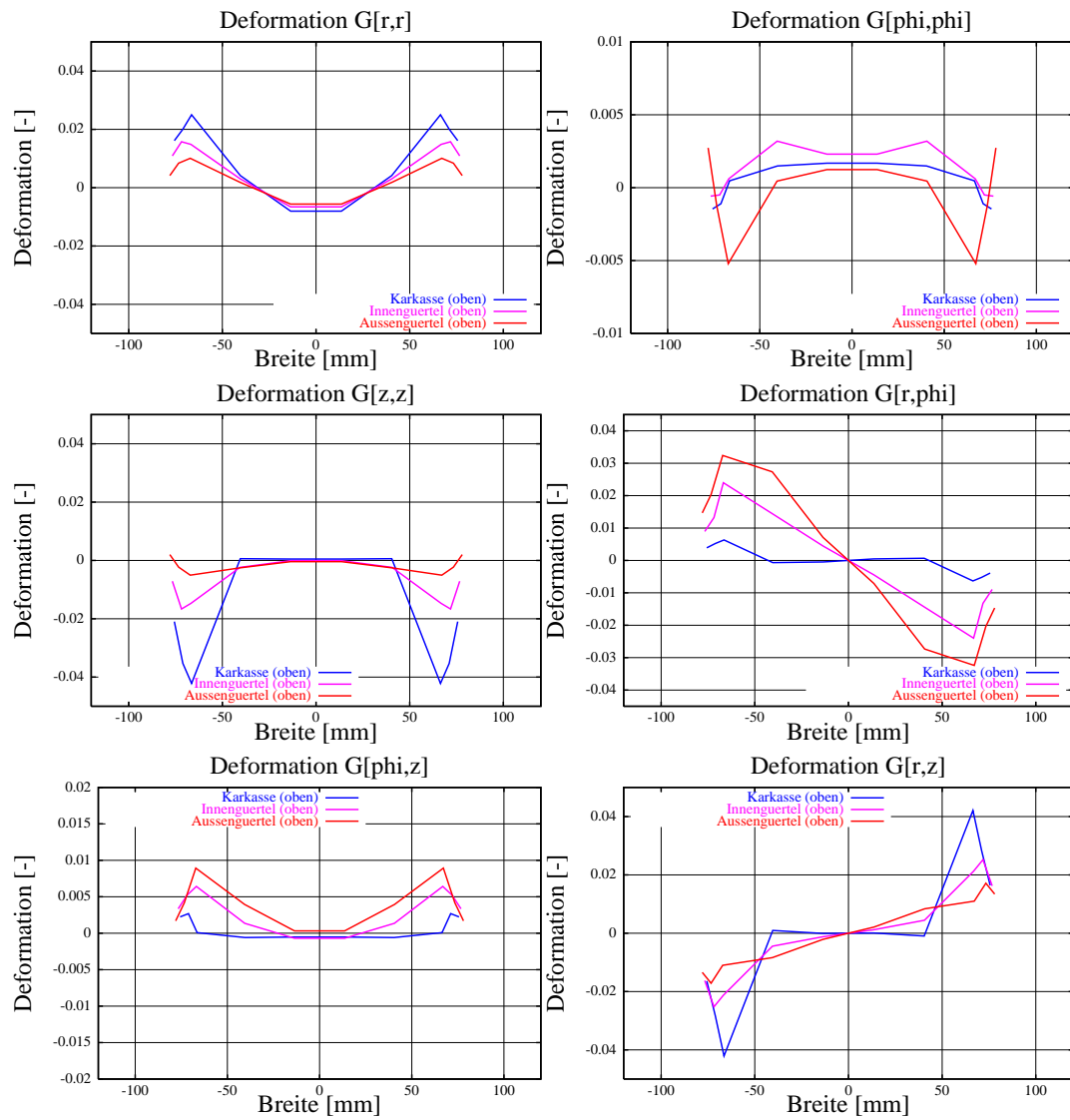


Abbildung 5.54: Deformationen im Gummi des obersten Querschnittes nach Abplattung

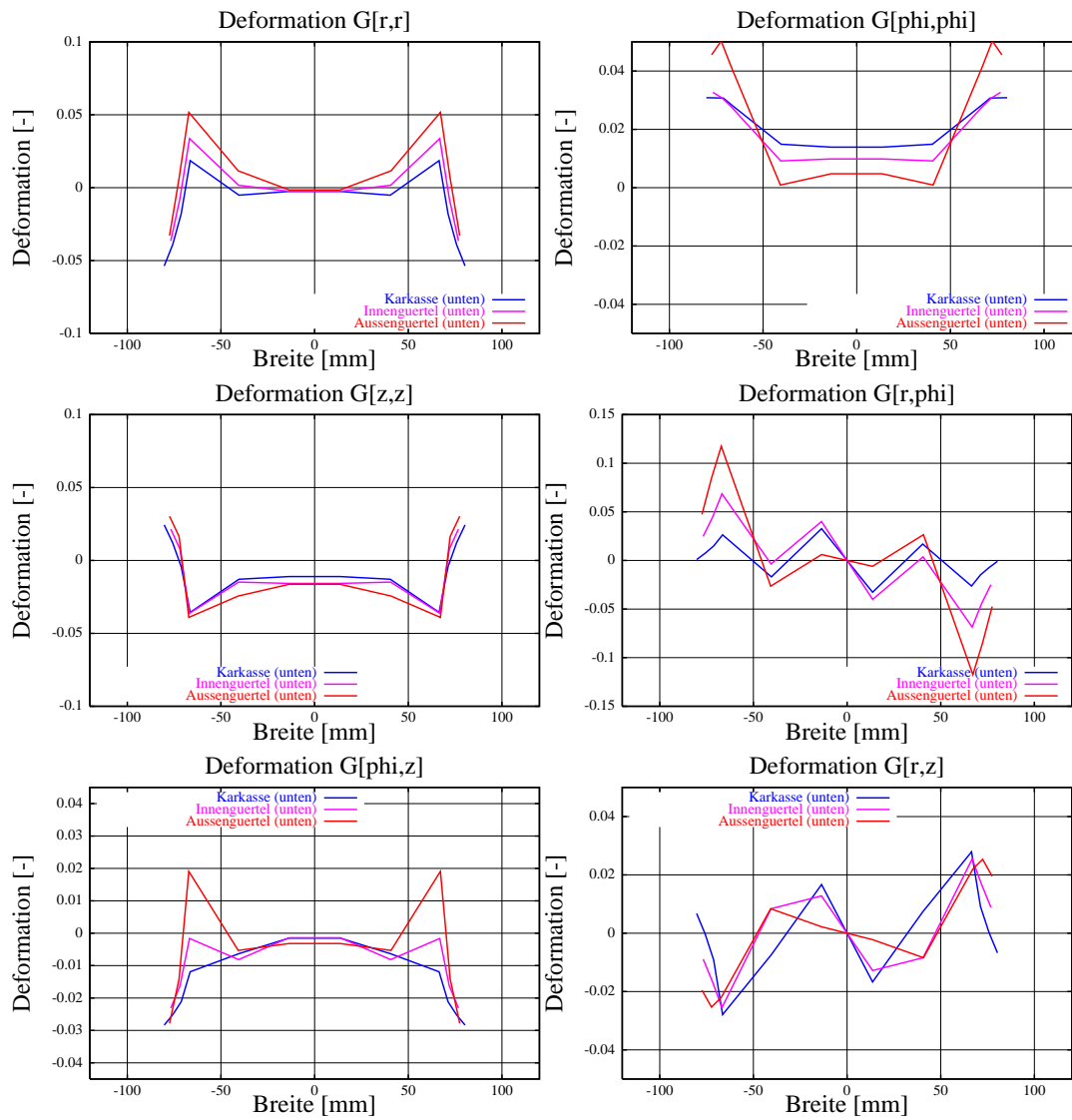


Abbildung 5.55: Deformationen im Gummi des untersten Querschnittes nach Abplattung

5.2.2.4 Der Zustand des Schichtmodells beim instationären Beschleunigen

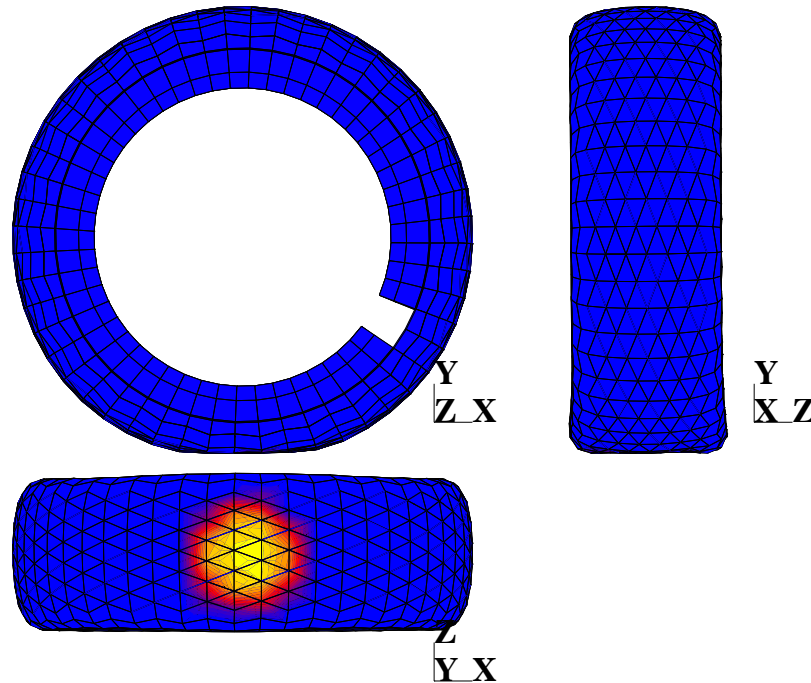


Abbildung 5.56: Reifen 196/65 R15 beim instationären Rollen

Der Zeitbereich, in dem bei diesem Beispiel eine Beschleunigung der Rollbewegung aus dem Stand auf $v_{Boden} = 40 \frac{km}{h}$ stattfindet, reicht von $t = 2.3 \text{ sec}$ bis $t = 2.7 \text{ sec}$. Zur Darstellung eines Zustandes des instationären Rollens wurde der Zeitpunkt $t = 2.6 \text{ s}$ ausgewählt.

Die Abplattung wird durch die Applikation der Kontaktkräfte erreicht, die vom Einschichtmodell berechnet wurden und bei beiden Modellen die genannte Abplattung bewirken.

Die Rollbewegung wird aufgeprägt, indem die Felge des FE-Modells zu jedem Zeitpunkt in die gleiche Stellung geführt wird, wie sie sich beim Einschichtmodell zufolge der trägen Rollbewegung eingestellt hat.

Der Spannungs- und Deformationszustand ist zeitlich und örtlich instationär. Eine umfassende Darstellung ist prinzipiell auf dem Papier nicht mehr möglich, es muß auf eine Animation zurückgegriffen werden ⁸. In dieser Arbeit können darum nur bruchstückhafte Ausschnitte zur Illustration des Strukturverhaltens beim Rollen wiedergegeben werden. Zur Vergleichbarkeit mit den Darstellungen in der Statik wird sich auf eine Wiedergabe der Größen zum Zeitpunkt $t = 2.6 \text{ s}$

⁸Die zur Animation dieses Zeitbereiches erforderlichen Daten umfassen in komprimierter (compress 4.2.4) Form ein Datenvolumen von 454.564 MegaByte bei einer Auflösung von 1 kHz im Zeitbereich (also 400 Zeitschritte). Diese Daten können in komprimierter selbstverständlich beim Autor gegen Erstattung des Selbstkostenaufwandes auf CD-ROM angefordert werden. In dekomprimierter Form (2210.636 MegaByte) ist der Datentransport unpraktisch.

in einer zum Abschnitt 5.2.2.3 analogen Form beschränkt.

Zum Zeitpunkt $t = 2.6\text{ s}$ wurde der Boden insgesamt um 1248.3 mm in Längsrichtung und um 65.4 mm in Querrichtung weggezogen.

Die Felge hat 0.664329 Umdrehungen ausgeführt, was bei einem mittleren Rollradius von $R_{Latsch} = 296\text{ mm}$ einem Rollweg von 1235.5 mm entspricht. Demzufolge hat ein Längsschlupf von absolut gesehen 12.75 mm stattgefunden.

Abbildung 5.56 zeigt den Reifen bei einer Rollgeschwindigkeit von $v_{Boden} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nach dem o.g. bereits zurückgelegten Rollweg kann man davon ausgehen, daß die Einrollstrecke bereits absolviert wurde. Deutlich ist die seitliche Verspannung des Latsche zufolge des aufgebrauchten Schräglaufwinkels zu erkennen.

5.2.2.4.1 Verschiebungszustand der Querschnitte

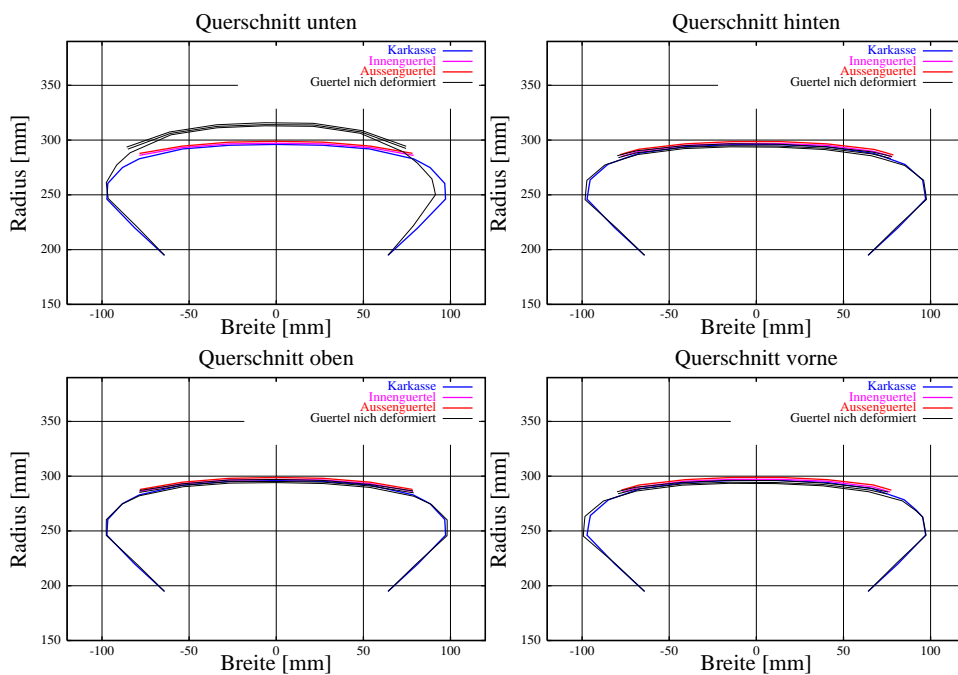


Abbildung 5.57: Querschnittskonturen des Schichtmodells beim stationären Rollen

In Abbildung 5.57 werden die Querschnittskonturen des bei $t = 2.6\text{ s}$ rollenden Reifens dargestellt. Während man beim tiefsten Querschnitt die seitliche Verspannung als Reaktion auf die vom Schräglauf produzierten Kontaktkräfte erwartet, deuten die unterschiedlichen Auslenkungen am Ort der maximalen Breite aller anderen Querschnitte auf das Vorhandensein einer über den Umfang ungleichmäßigen Querverschiebung hin: Seitenwandwellen.

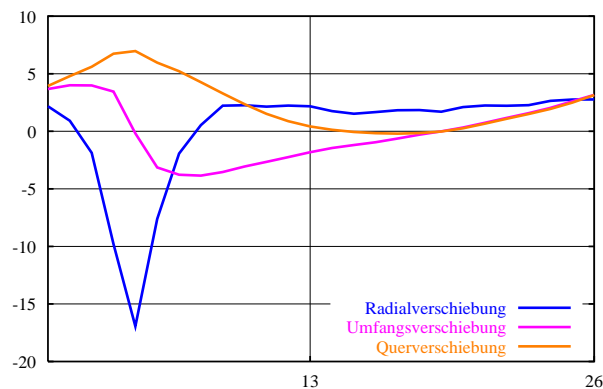


Abbildung 5.58: Äquatorverschiebungen beim instationären Rollen

Die klassischen Diagramme zur Darstellung der Verschiebungen der Reifenstruktur in Umfangsrichtung haben beim instationären Rollen ein gegenüber stationären oder statischen Zuständen abweichendes Aussehen.

In Abbildung 5.58 werden die Radial-, Umfangs- und Querverschiebungen der Punkte des Äquators dargestellt. Der in der Latschmitte befindliche materielle Querschnitt ist nicht mehr beim räumlich gemessenen Umfangswinkel $\varphi = 270^\circ$ zu finden, sondern ca. $\frac{2}{3}$ Umdrehungen weiter. Auch in dieser Abbildung ist vor allem bei den Radialverschiebungen deutlich eine überlagerte Welle zu erkennen.

Die in dieser Arbeit verwendeten Reifenmodelle zur Beschreibung des instationären Rollzustandes sind im Gegensatz zu stationären Modellen in der Lage, solche umlaufende Wellen durch die Struktur in der Simulation zu erfassen.

Solche Wellen treten je nach momentanem Erregungszustand sowohl in der Seitenwand als auch im Gürtel auf. Eine Klassifizierung (Zuordnung von modalen Moden, Frequenzinhalt etc.) ist wegen der sowohl zeitlich als auch örtlich ständig variierenden Erregungen durch die Kontaktkräfte und der sich dadurch ebenfalls ständig verändernden Bewegungszustände nicht sehr sinnvoll. Die Reifenstruktur reagiert auf die Erregungen stets mit allen modalen Moden, die dann mit ständig veränderlicher Amplitude und Phase auftreten.

Zur Illustration möglicher Modalschwingungen wird in Abbildung 5.59 eine der Literatur entnommene Eigenform dargestellt.

In den Abbildungen 5.60 und 5.61 sind radiale Gürtel- und quergerichtete Seitenwandwellen dargestellt.

Analog zum Abschnitt 5.2.2.3 werden die Verschiebungen der momentan bei $\varphi = [0, 90, 180 \text{ und } 270]^\circ$ befindlichen Querschnitte in den Abbildungen 5.62 bis 5.64 dargestellt.

In diesen Darstellungen kann man ebenso die erwähnten Wellen sehen.

Die Veränderlichkeit der Verschiebungsfelder kann man in den Abbildungen 5.65 bis 5.66 wiederfinden.



Abbildung 5.59: Modalform eines Gürtelreifens

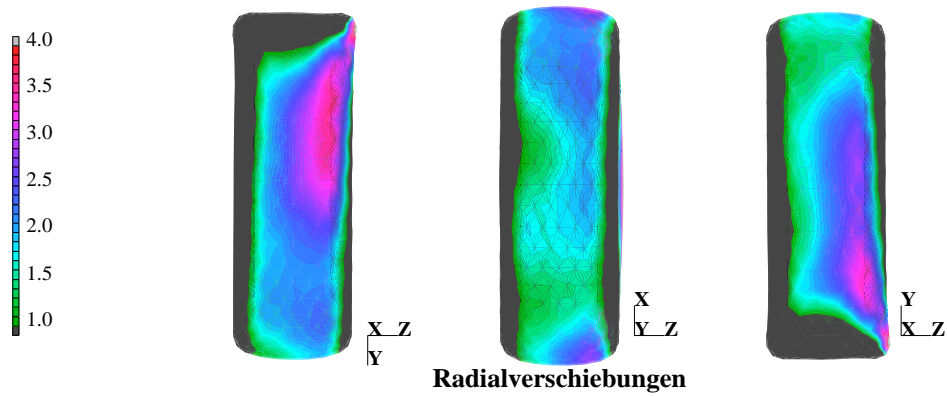


Abbildung 5.60: Gürtelwellen, Ansicht von vorne/oben/hinten beim instationären Rollen

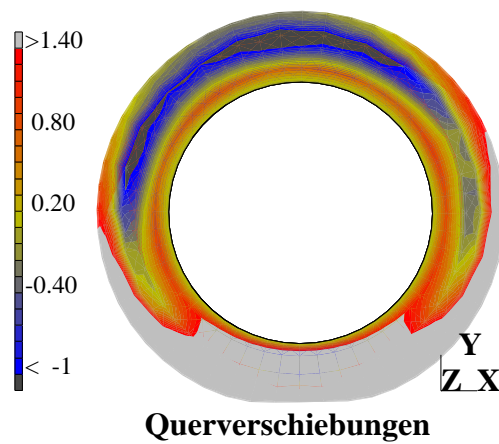


Abbildung 5.61: Seitenwandschwingungen beim instationären Rollen

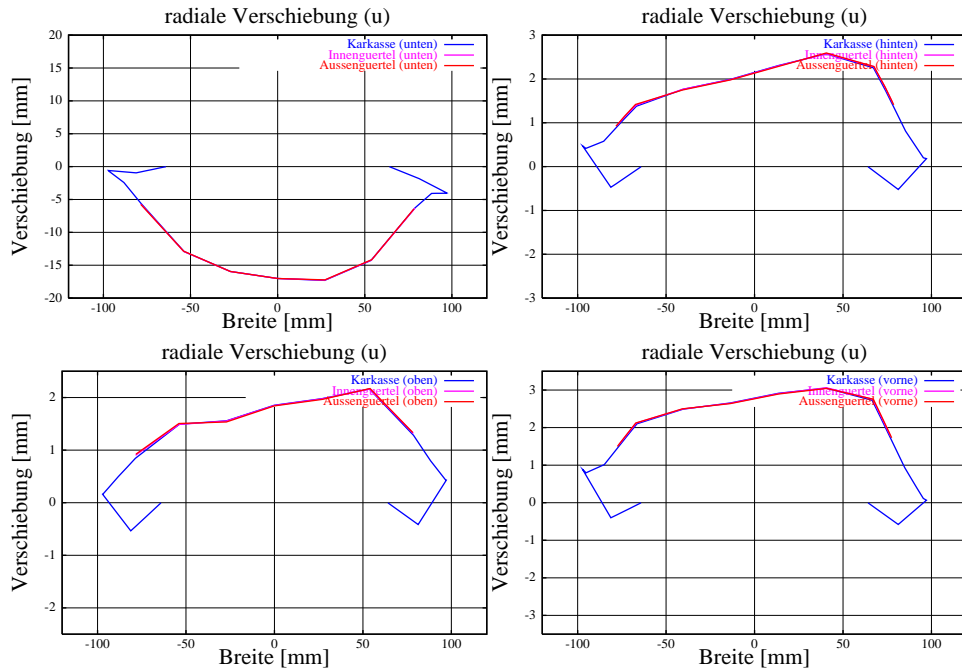


Abbildung 5.62: Radialverschiebungen des Schichtmodells beim instationären Rollen

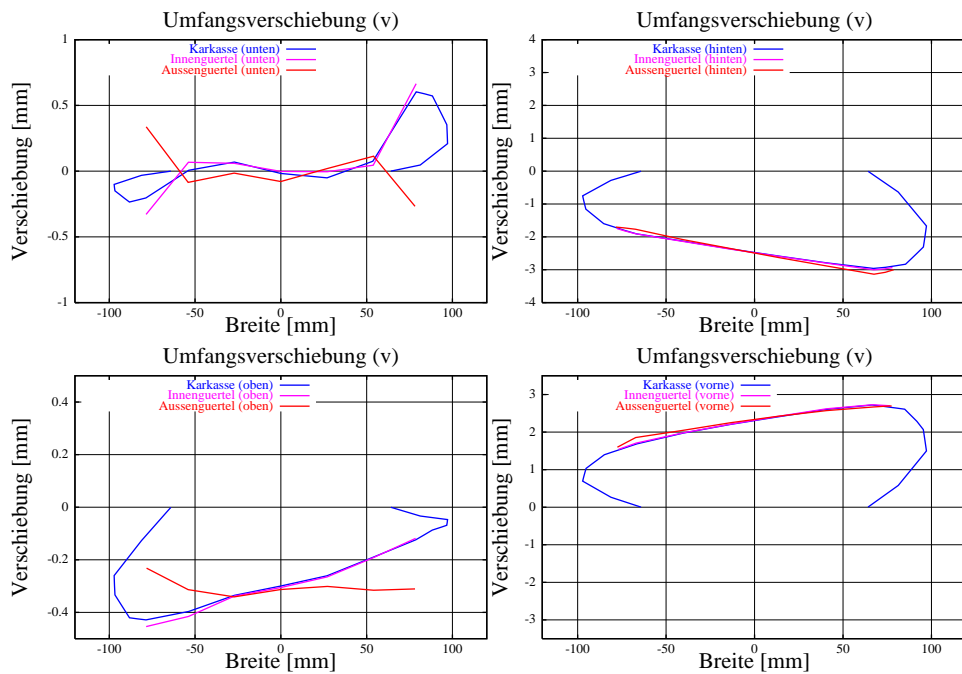


Abbildung 5.63: Umfangsverschiebungen des Schichtmodells beim instationären Rollen

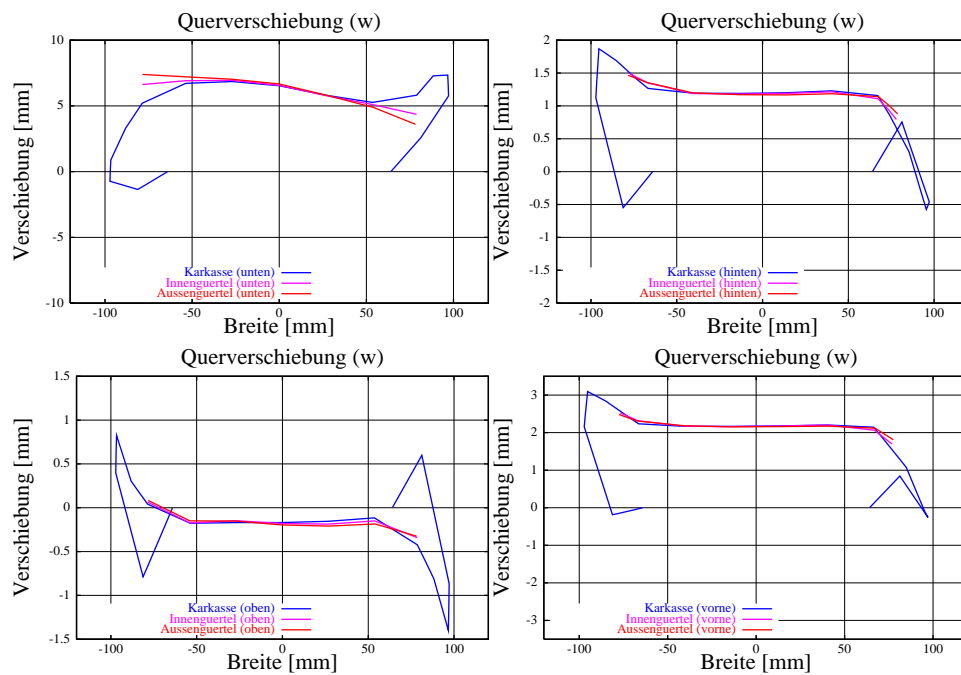


Abbildung 5.64: Querverschiebungen des Schichtmodells beim instationären Rollen

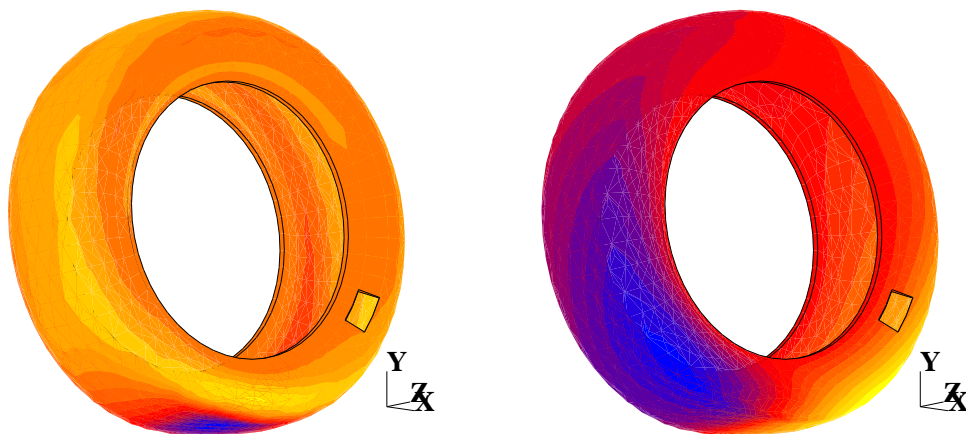


Abbildung 5.65: Radial- und Umfangsverschiebungen beim instationären Rollen

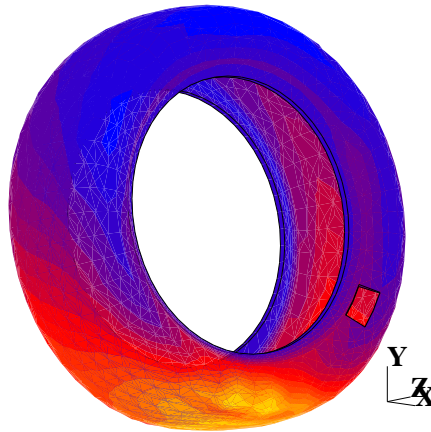


Abbildung 5.66: Querverschiebungen beim instationären Rollen

Ansonsten finden sich natürlich zu den Querschnittsverschiebungen nach statischer Abplattung ähnliche Tendenzen. Zusätzlich findet man jedoch die typische Reaktion der Reifenstruktur auf eine allgemeine Verschiebung des Latsches aus der Reifenmittelebene heraus, wie er bereits in Abschnitt 5.1.2.5 beim Einschichtmodell für die „äussere“ Mechanik diskutiert wurde.

5.2.2.4.2 Zustand der Korde

Die Spannungen der Korde sind übersichtlich in Abbildung 5.67 zu sehen. Im

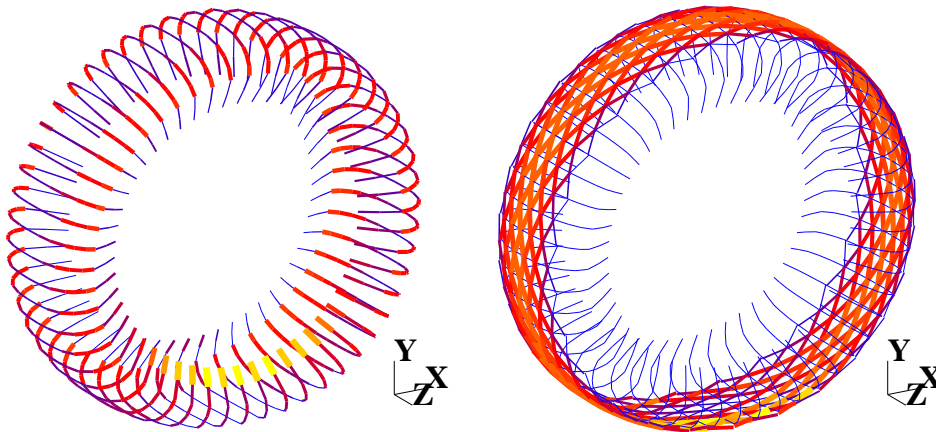


Abbildung 5.67: Kordspannungen beim instationären Rollen

linken Teilbild wurden nur die Spannungen der Karkaßkorde dargestellt, da diese im Vergleich zu den Gürtelkorde (s. rechtes Teilbild) sonst nicht sichtbar wären. Die Spannungen in den Karkaßkorden sind wiederum im Gürtelbereich abgesunken.

Zur vergleichenden Darstellung werden zusätzlich die Kordspannungen für den vordersten, obersten, hintersten und untersten Reifenquerschnitt sowie für die

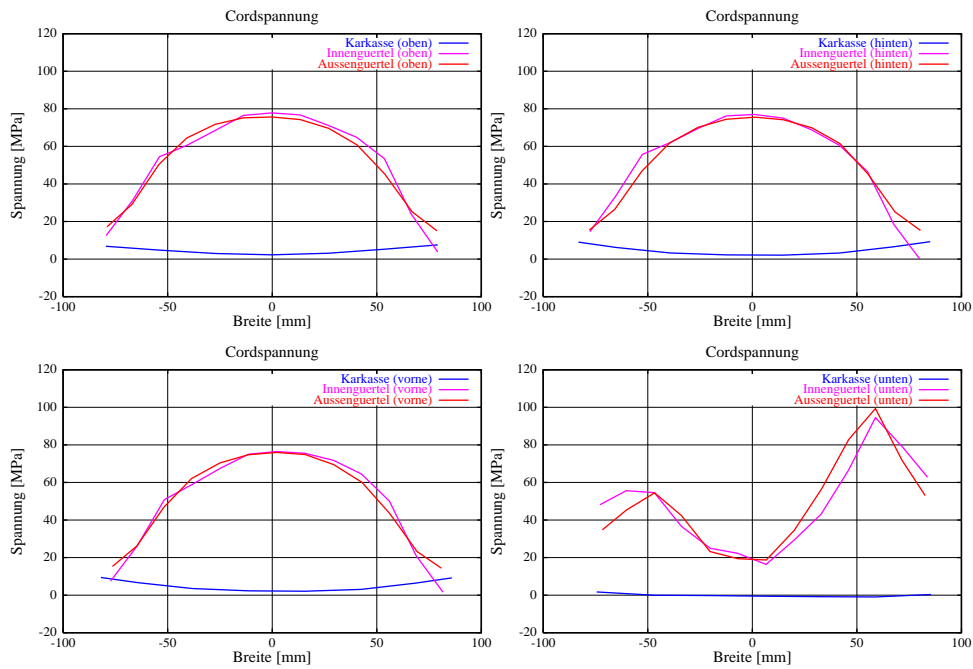


Abbildung 5.68: Kordspannungen der Querschnitte beim instationären Rollen

einzelnen Schichten in zusammengefaßter Form in den Abbildungen 5.68 und 5.69 wiedergegeben. Die Karkaßspannungen sinken im Bereich des Kontaktes

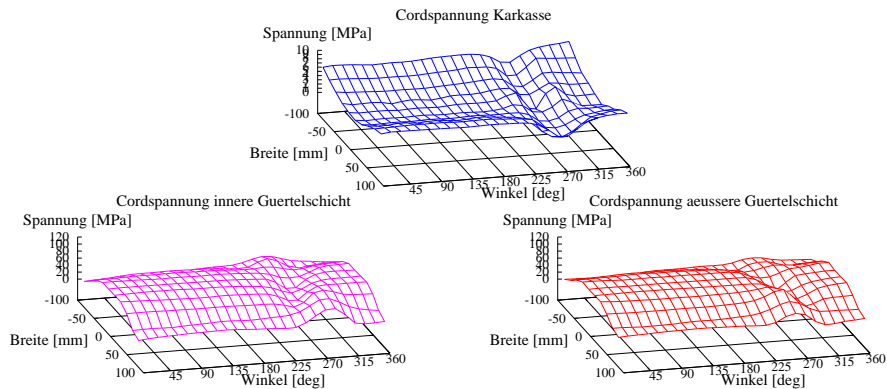


Abbildung 5.69: Kordspannungen der Schichten beim instationären Rollen

noch tiefer ab, als dies beim statischen Abplatten im Latsch der Fall war. Dafür steigen die Kordspannungen in den Gürtellagen auf der kurveninneren Seite um ca. 25%.

5.2.2.4.3 Zustand des Gummis

Der Deformationszustand des Gummi erklärt sich aus der Kenntnis der Verschiebungssituation heraus am einfachsten.

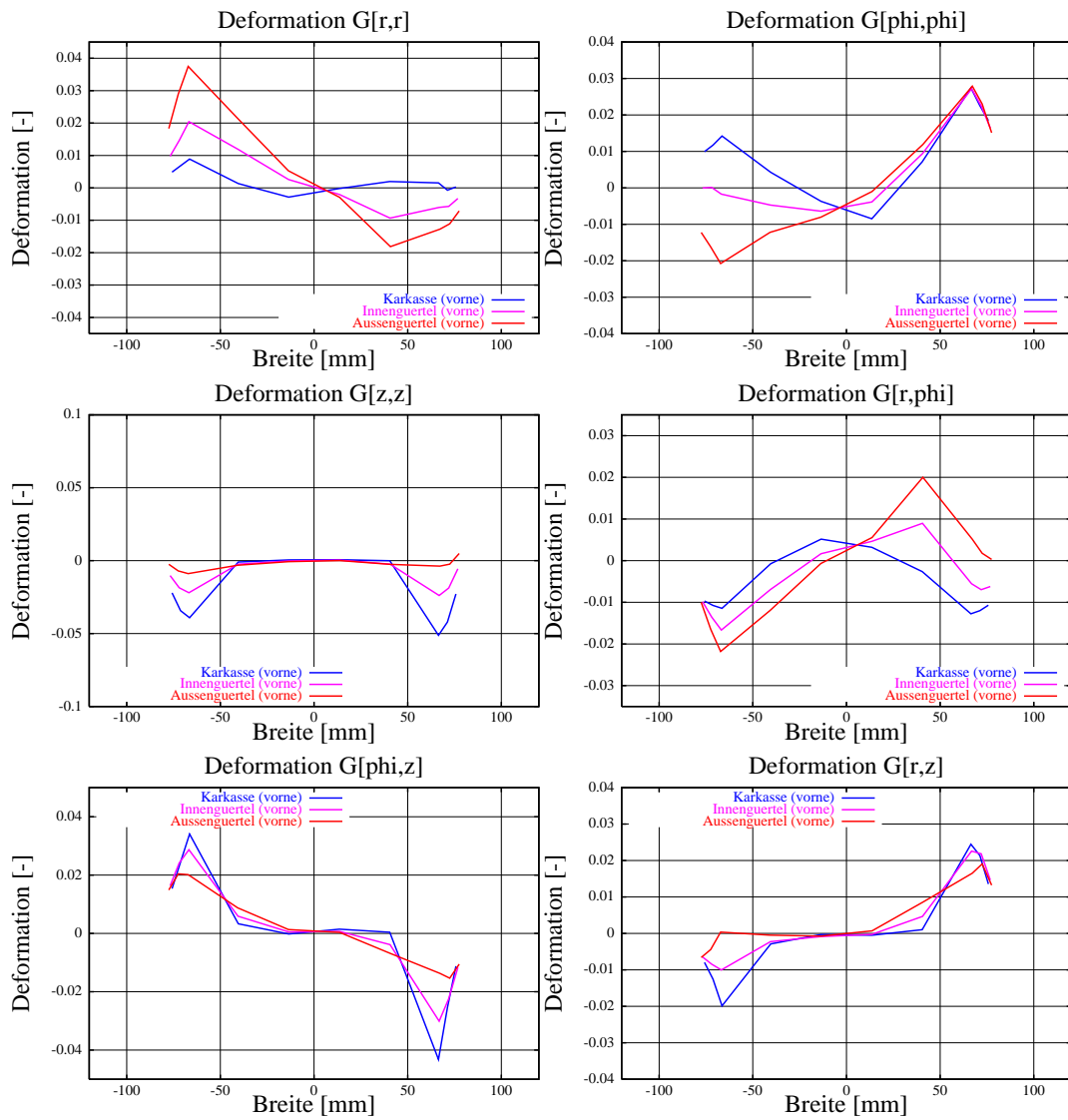


Abbildung 5.70: Deformationen im Gummi bei $\varphi = 0^\circ$ (vorne) und instationärem Rollen

Die zueinander antisymmetrischen Verläufe des vordersten und hintersten Querschnittes gehen durch die tangentielle Verspannung des Latsches und durch die überlagerten Deformationen aus den entstandenen Wellen verloren. Dennoch ist der antisymmetrische Grundcharakter des Verschiebungsfeldes bei diesen Querschnitten noch zu erkennen.

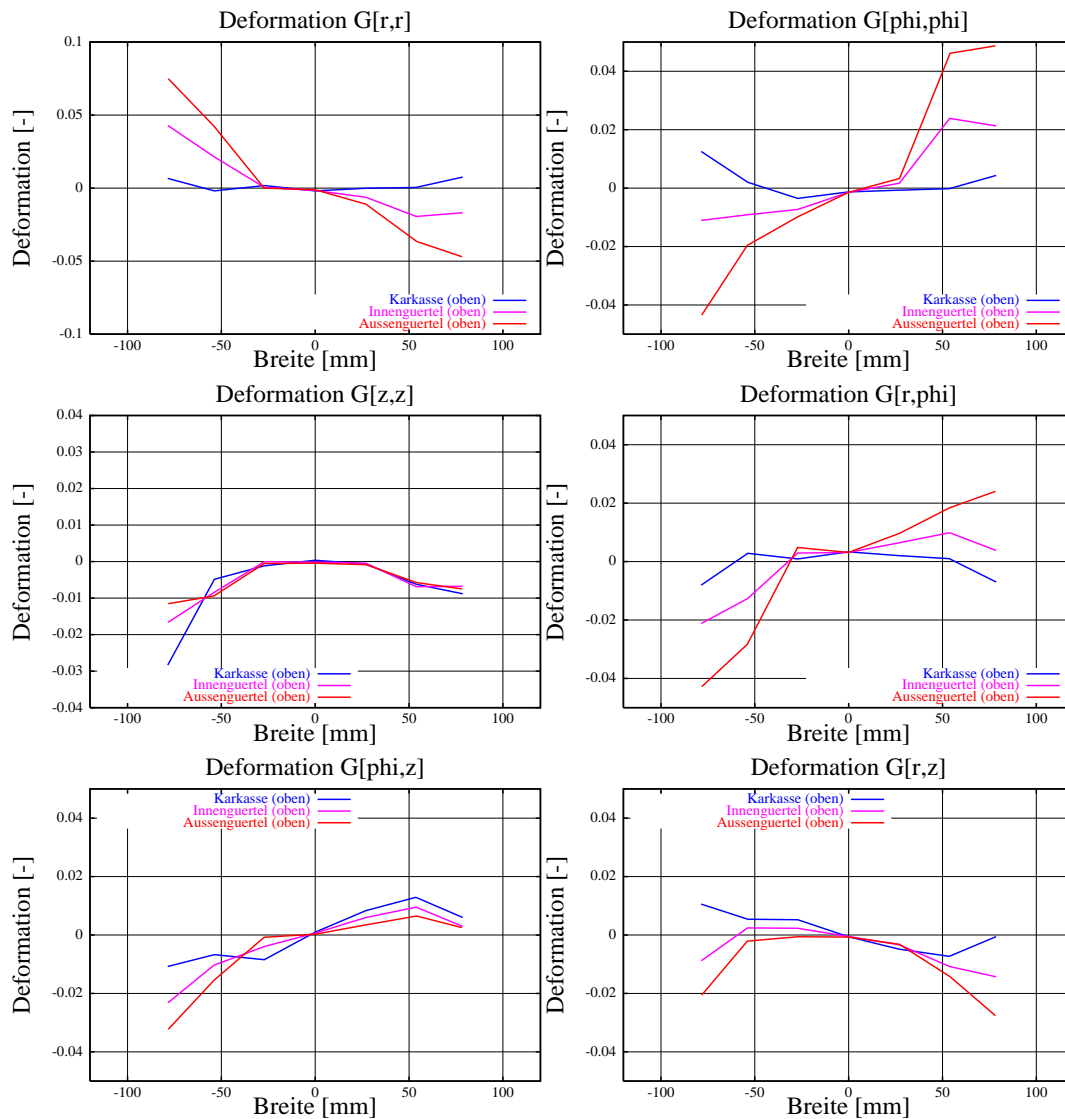


Abbildung 5.71: Deformationen im Gummi bei $\varphi = 90^\circ$ (oben) und instationärem Rollen

Sowohl die Längs– als auch die Schubverzerrungen weisen an allen Querschnitten einen im Vergleich zum statischen Abplatten völlig anderen Charakter auf.

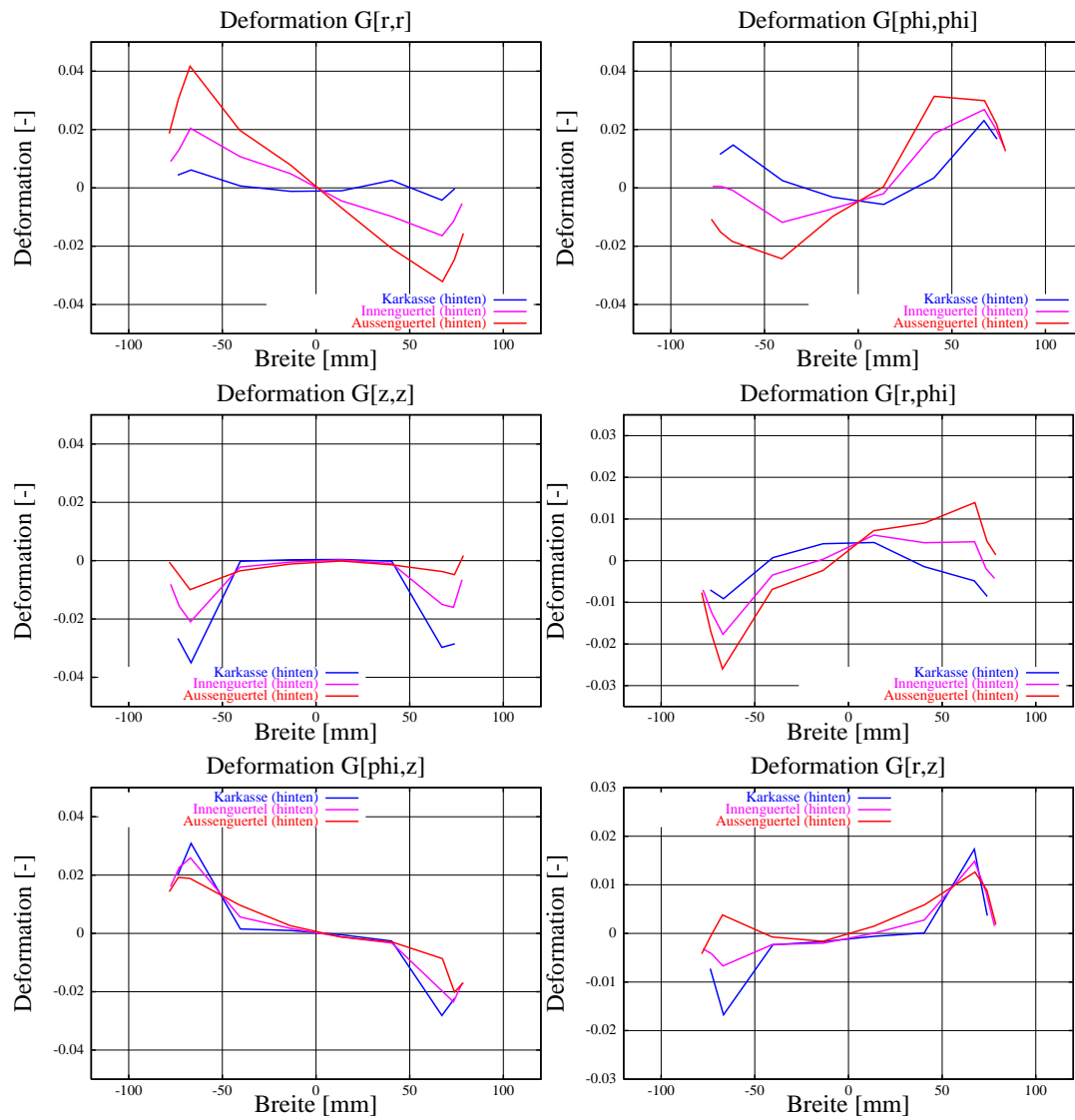


Abbildung 5.72: Deformationen im Gummi bei $\varphi = 180^\circ$ (hinten) und instationärem Rollen

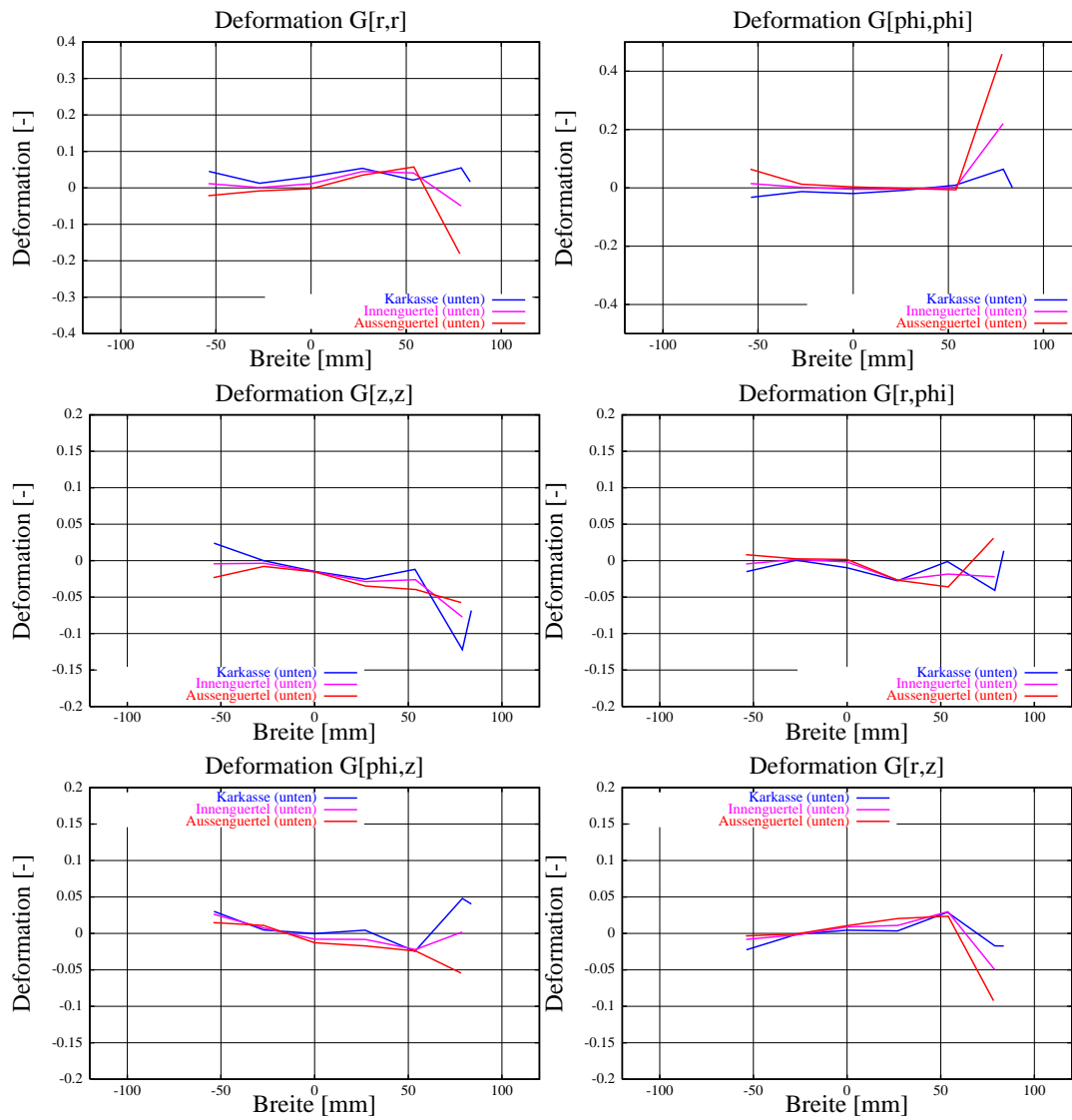


Abbildung 5.73: Deformationen im Gummi bei $\varphi = 270^\circ$ (Latschmitte) und instationärem Rollen

Es treten Vorzeichenumkehrungen auf, und die maximalen Deformationen nehmen meist doppelte, teilweise bis zu zehnfache Werte an.

Es wird klar, daß zur realistischen Analyse der inneren Belastungen des Reifens bei veränderlichen Rollzuständen eine statische Analyse völlig unzureichend ist.

5.2.2.5 Der Zustand des Schichtmodells beim stationären Rollen

Das Rollen bei $v_{Boden} \stackrel{const}{=} 40 \frac{km}{h}$ über den Zeitbereich von $t = 2.7..2.9 s$ produziert ein auszuwertendes Datenvolumen von unkomprimiert 1099.799 MegaByte und komprimiert ⁹ von 226.723 MegaByte.

Der Reifen legt in dieser Zeit einen Felgenwinkel von $\varphi_{Felge} = 429^\circ$ zurück, was einem Rollweg von $x = 2219.2 mm$ (3 mm Längsschlupf) bzw. $n_{Felge} = 1.19$ Umdrehungen entspricht. Insgesamt hat der Reifen nach 0.6 s Echtzeit in diesem Beispiel dann $n_{Felge} = 2.373$ Umdrehungen vollführt.

Nach einer Beruhigungs- bzw. Ausschwingphase – der plötzliche Wegfall der Längsbeschleunigung ist ebenfalls eine stoßartige Anregung der Reifenstruktur – geht der Reifen in einen quasistationären Rollzustand über. Dieser Zustand wird identifiziert, indem man eine periodische Abfolge in der Funktion der Gesamtenergie der Struktur erkennt (s. dazu Abbildung 5.36).

Bei genauerer Betrachtung erkennt man, daß die Gesamtenergie keineswegs eine reine periodische Form annimmt. Dies ist zum einen sicher auch damit zu begründen, daß hier Kontaktkräfte von Strukturen zusammengeführt werden, die sich selbstverständlich in ihrer Bewegungsantwort schwach unterscheiden. Vorwiegend führt aber der Umstand, daß es einen ideal stationären Rollzustand überhaupt nicht gibt, dazu, daß die Gesamtenergie keinen rein periodischen Kurvenverlauf findet.

In Abbildung 5.74 ist der im quasistationären Zustand rollende Reifen zu sehen. Sowohl die Führungsbewegung der Felge als auch die Kontaktkräfte werden analog zur vorherigen Phase, dem instationären Rollen, appliziert.

5.2.2.5.1 Verschiebungszustand der Querschnitte

Der Verschiebungszustand der Querschnitte beim stationären gleicht weitgehend dem beim instationären Rollen, da beide Verschiebungszustände von der Strukturreaktion des Reifens auf die tangentialen Verspannung des Latsches dominiert sind.

Die Darstellungen der Verschiebungen der Querschnitte bei $\varphi_{Felge} = [0, 90, 180 \text{ und } 270]^\circ$ entnehme man den Abbildungen 5.77 bis 5.79.

Abweichungen zum instationären Rollen, die in den Verschiebungen aller Richtungen zu finden sind, kann man darauf zurückführen, daß Momentanaufnahmen eines von Wellen überlagerten Grundverschiebungszustand verglichen werden.

⁹mit compress 2.4.2

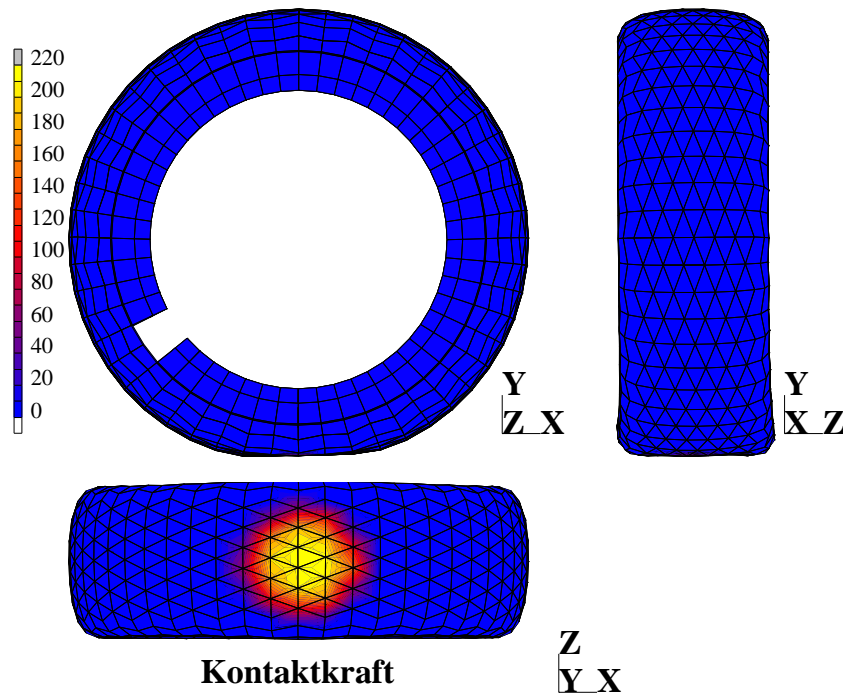


Abbildung 5.74: Reifen 196/65 R15 beim stationären Rollen mit $v_{Boden} = 40 \frac{km}{h}$

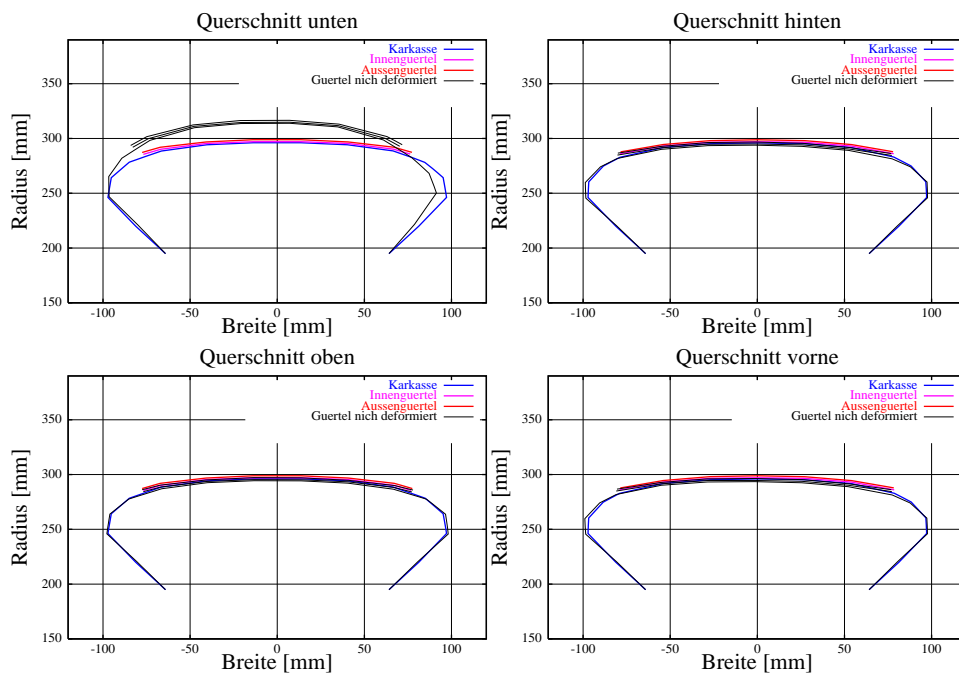


Abbildung 5.75: Querschnittskonturen des Schichtmodells beim stationären Rollen

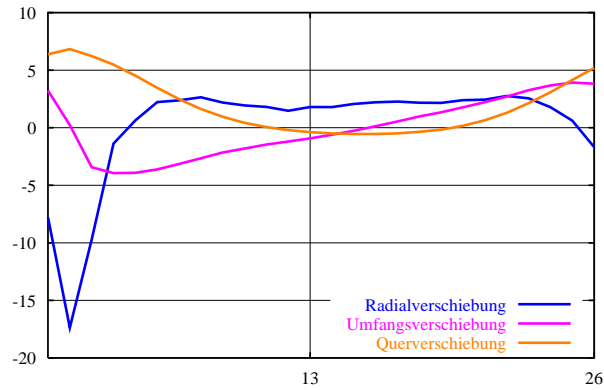


Abbildung 5.76: Äquatorverschiebungen beim stationären Rollen

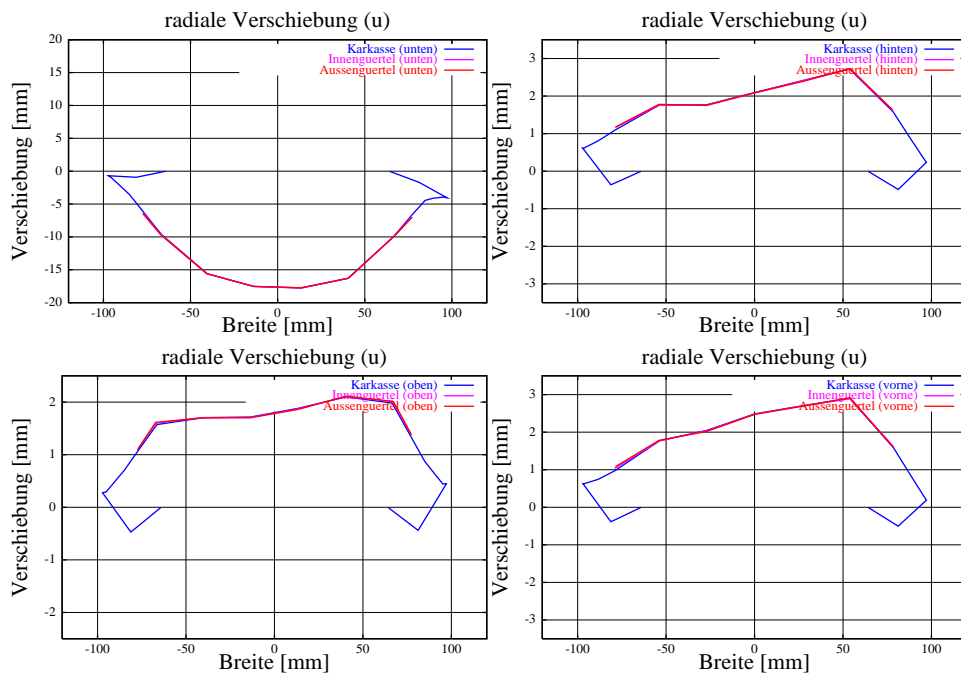


Abbildung 5.77: Radialverschiebungen des Schichtmodells beim stationären Rollen

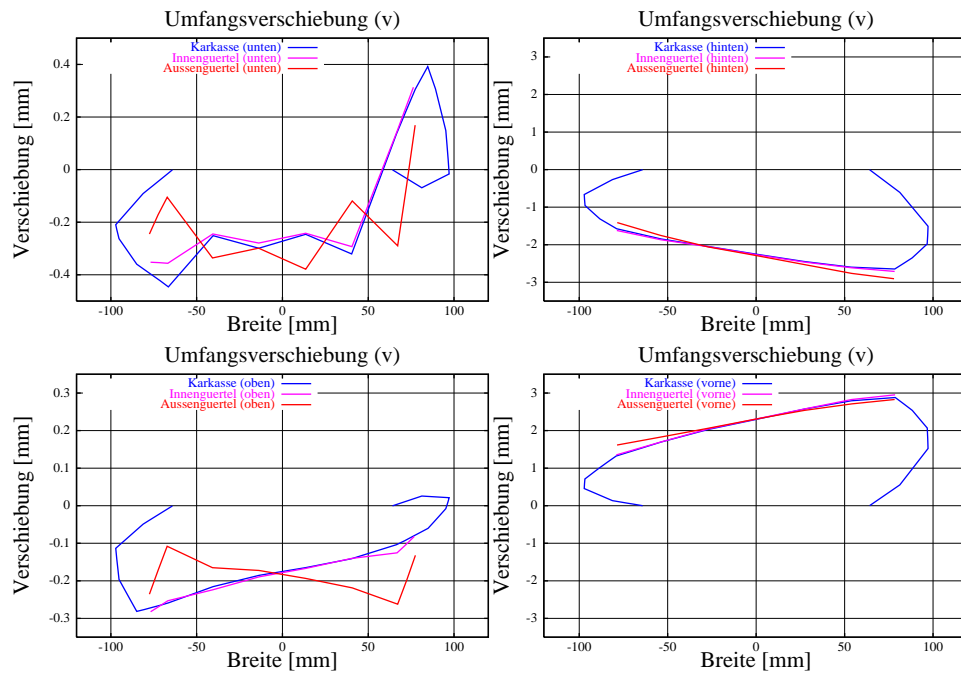


Abbildung 5.78: Umfangsverschiebungen des Schichtmodells beim stationären Rollen

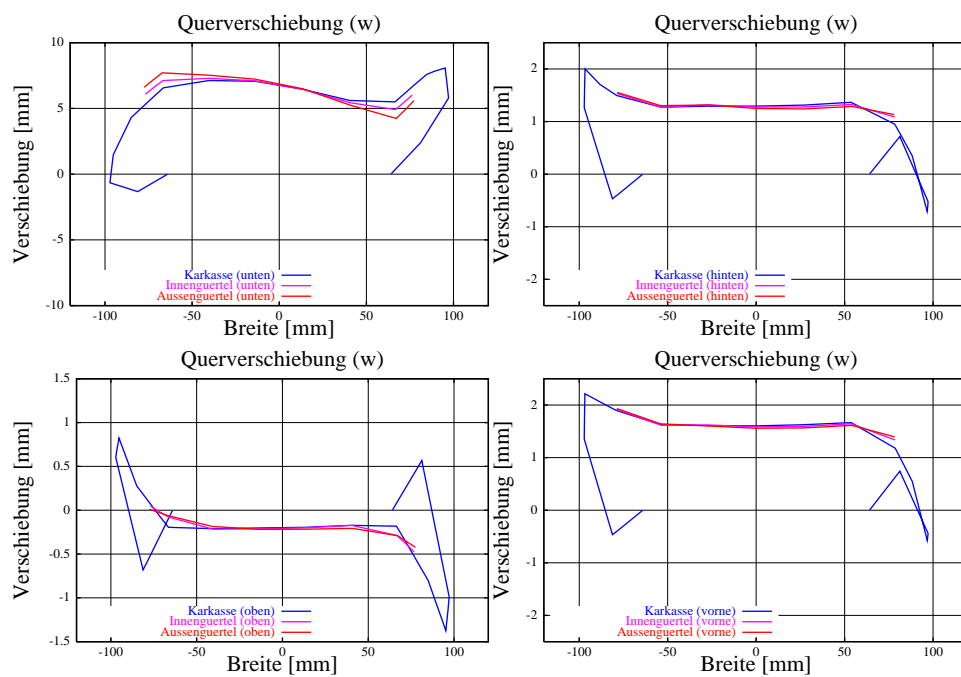


Abbildung 5.79: Querverschiebungen des Schichtmodells beim stationären Rollen

Allgemein fallen die Querschnittsverschiebungen beim stationären Rollzustand geringer aus als beim instationären, was in diesem Fall seine Ursache in der beim instationären Zustand größeren Beschleunigung findet. Diese Beschleunigung führt zu einer insgesamt stärkeren Verspannung der Reifenstruktur.

Insgesamt nimmt die Reifenstruktur einen gegenüber dem Vergleichsfall stärker um die Vorwärtsachse gekippten Zustand an, wie man am Verlauf der Querverschiebungen des Äquators in Abbildung 5.76 sieht.

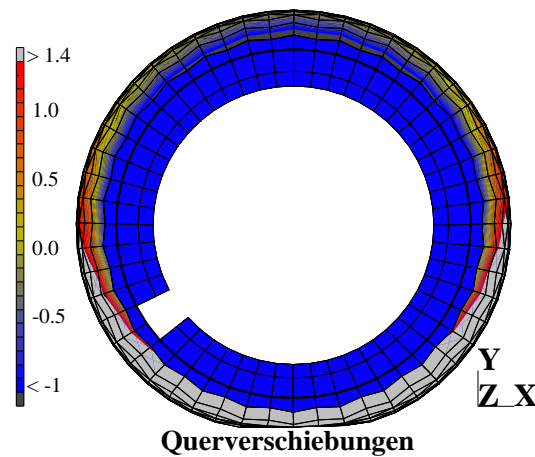


Abbildung 5.80: Fehlende Seitenwandschwingungen beim stationären Rollen

Die Ausbildung von Seitenwandwellen ist sehr viel geringer ausgeprägt (s. Abbildung 5.80, während man noch deutlich die Gürtelwellen sieht (s. Abbildung 5.81).

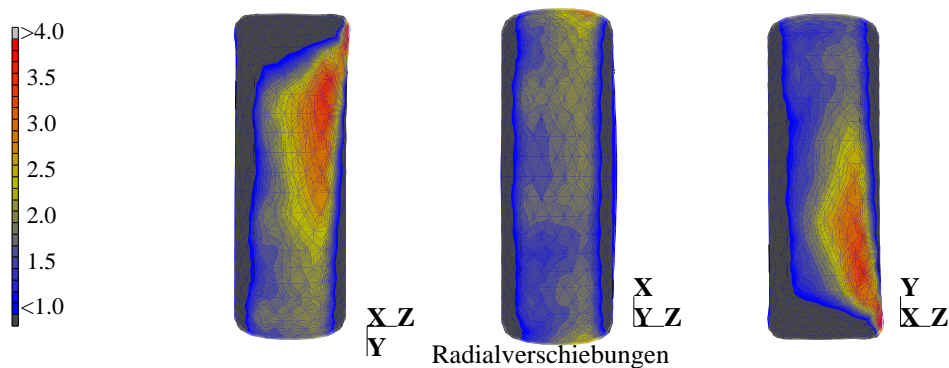


Abbildung 5.81: Gürtelwellen, Ansicht von vorne/oben/hinten beim stationären Rollen

5.2.2.5.2 Zustand der Korde

In der Darstellung des Feldes der Kordspannungen in Abbildung 5.82 findet

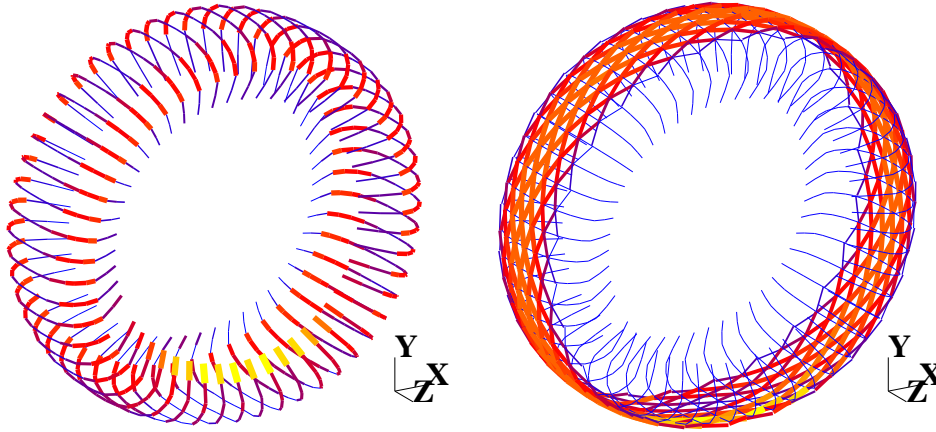


Abbildung 5.82: Kordspannungen beim stationären Rollen
mein keinen Unterschied zum in Abschnitt 5.2.2.4.2 Zustand.

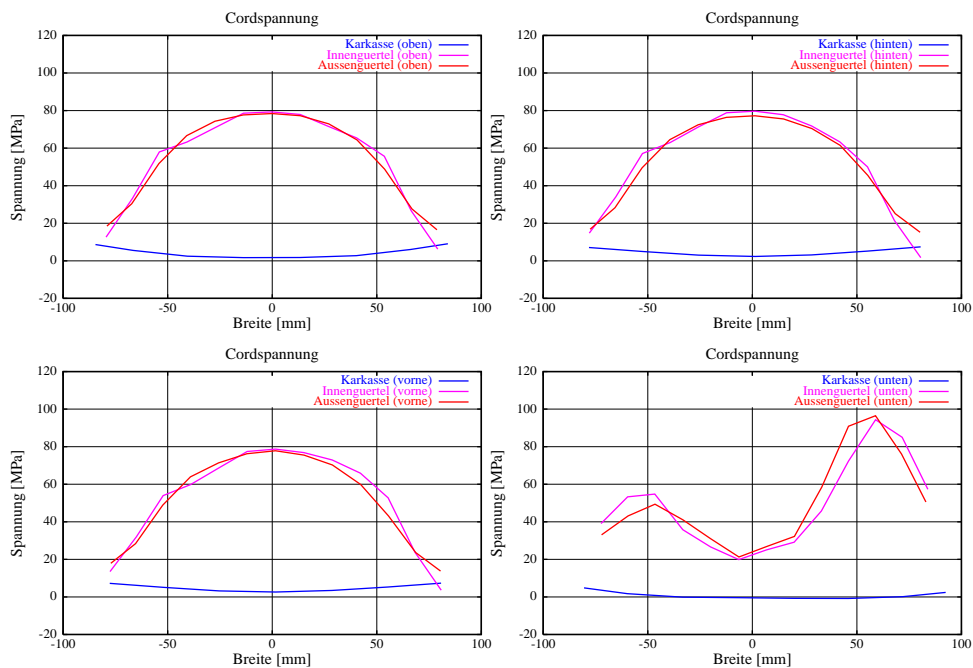


Abbildung 5.83: Kordspannungen der Querschnitte beim stationären Rollen

Erst in Abbildung 5.83 sind die etwas anders ausfallenden Gürtelspannungen im Latschbereich zu erkennen. Deshalb kann man davon ausgehen, daß die in Abschnitt 5.2.2.5.1 diskutierten Unterschiede im Verschiebungszustand des Reifens während des beschleunigten Rollens bei $v_{Boden} = 30 \frac{km}{h}$ und während des quasistationären Rollens bei $v_{Boden} = 40 \frac{km}{h}$ keine nennenswerte Auswirkung

auf den Belastungszustand der Korde hat.

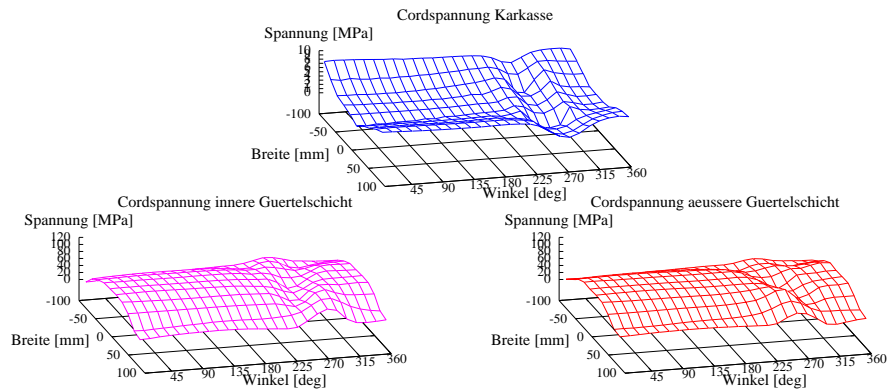


Abbildung 5.84: Kordspannungen der Schichten beim stationären Rollen

Die nur im Latschbereich in der Karkasse zu identifizierenden verschiedenen Kordspannungen beschreiben Abweichungen um Null herum, ohne jedoch in größerem Maße in den Druckbereich zu geraten (s. Abbildung 5.85).

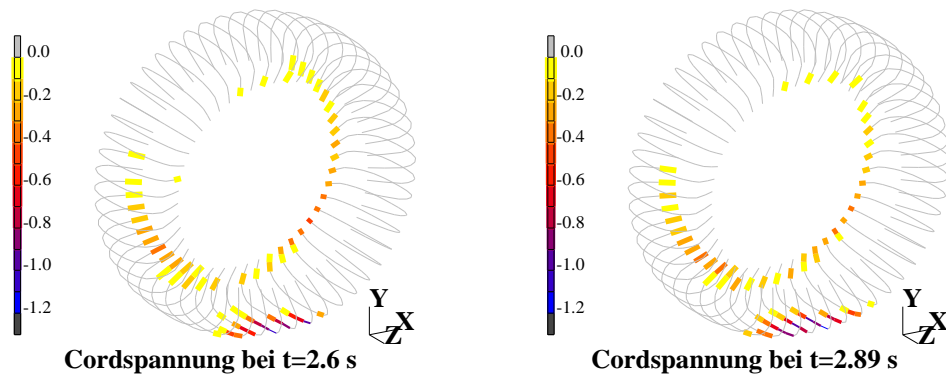


Abbildung 5.85: Druckspannungen in den Karkaßkorden bei Schräglauf

Kapitel 6

Schluß

6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein spezielles Zeitintegrationsverfahren, der Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus (EMA) zur Anwendung in der Methode der Finiten Elemente so erweitert, daß er bei Materialien mit nichtkonvexem Elastizitätsfunktional zum Einsatz gebracht werden konnte. Damit gelang es, die dynamische, instationäre Rollbewegung eines mittelgroßen Modells zur Untersuchung der „inneren Mechanik“ des Reifens mit vertretbarem Aufwand implizit durch die Zeit zu integrieren.

Zur Generierung der dazu erforderlichen „äußeren“ Reifenmechanik wurde ein parallel und unabhängig arbeitendes Reifenmodell erstellt, welches mittels klassischer, expliziter Zeitintegrationsverfahren sehr effizient in der Lage ist, die dynamischen Zusammenhänge zwischen Reifenbewegung, Querschnittsdeformation und Kontaktkräften zu simulieren.

Um eine Applikation der Ergebnisse dieser Simulation der äußeren Rollmechanik als Führungs- und Belastungskollektiv auf den Finite-Elemente-Reifen zu ermöglichen, wurde für beide Modelle eine Parametrisierung generiert, die ein vergleichbares Strukturverhalten der Modelle untereinander und des Modells der „äußeren Mechanik“ zu verfügbaren Messungen produzierte. Es wurde eine Schnittstelle zwischen den Modellwelten realisiert.

Durch diese Vorgehensweise wurde ein Weg aufgezeigt, den drastisch ansteigenden Aufwand, der bei einer dynamisch transienten Simulation von größeren Modellen der Reifenrolldynamik entsteht, auf ein tolerierbares Maß zu reduzieren. Dies geschieht durch die Entkopplung erforderlichen Zeitschrittes von den Eigenfrequenzen des numerischen Ersatzmodells.

Mit der vorgestellten Verwendung einer kombinierten Modellstrategie in Verbindung mit dem Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus wird

- + der für die stabile Zeitintegration des Finite-Elemente-Reifens erforderliche Zeitschritt nur noch vom Frequenzinhalt der Erregung und der realen Bewegung der Struktur diktiert,
- + der zur Kontaktrechnung erforderliche numerische Aufwand (z.B. Recycle-Schritte bei Änderungen des Kontaktzustandes) bei dem vergleichsweise wenig aufwendigen Modell für die „äußere Mechanik“ realisiert, was den zur Kontaktsimulation erforderlichen Aufwand in Summe merklich senkt,
- + die Möglichkeit, sich durch unterschiedlich feine Modelle an die Komplexität der behandelten Probleme heranzutasten, sehr vereinfacht und mit geringstem Aufwand umgesetzt.

Für die Realisierung des Energie-Impuls-Erhaltungsalgorithmus' wurde ein allgemeiner FE-Code mit Merkmalen entwickelt, wie sie zu Anfang von Abschnitt 5.2 andeutungsweise beschrieben wurden.

Für die Simulation der „äußeren“ Reifenmechanik wurde unter Ausnutzung der im Bereich von Prof. Dr. F. Böhm existierenden großen Erfahrung zur Reifensimulation am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin ein Einschichtmodell des behandelten Reifens geschaffen, das

- + dem Grundcharakter des Gürtelreifens als Membranstruktur entspricht,
- + in der Lage ist, die das Reifenverhalten überwiegend bestimmende Kordkinematik der Reifenstruktur auf sehr einfache und dadurch effiziente Weise zu erfassen
- + in der Lage ist, die Biegesteifigkeiten in der Reifenstruktur zu erfassen,
- + einen Protektor besitzt, um die Prozesse der Kontaktmechanik beim rollenden Reifen richtig zu erfassen,
- + mit einem sehr stabilen expliziten Zeitintegrator arbeitet
- + mit der bei der Erstellung des FE-Codes durch den Autor gewonnenen Programmiererfahrung eine auch bei heutiger Rechentechnik sehr zufriedenstellende Performance bei der Simulation von transient-dynamischen Rechenbeispielen entwickelt und
- + dessen Parameter daraufhin optimiert sind, gemessene modale Reifeneigenschaften, Pumpfiguren und die Federkennlinien richtig wiederzugeben.

6.2 Ausblick

Nach Ansicht des Autors bietet die vorgestellte Arbeit Ansatzpunkte für eine Vielzahl lohnender weiterer Forschungsvorhaben. Diese Anregungen sollen gegliedert nach den grundlegenden Themengebieten der vorliegenden Arbeit wiedergegeben werden.

Weiteres Vorgehen bei den Reifenmodellen

Allgemein sollte ein Weg gefunden werden, die vorgestellten Reifenmodelle besser und algorithmisch zu parametrisieren, um mit deutlich weniger Arbeitsaufwand und zielsicherer die Reifenmodelle mit vorhandenen Messungen in

Einklang zu bringen bzw. Vorhersagen über das Strukturverhalten von neu entwickelten Reifen treffen zu können. Diese Aufgabe ist von nicht zu unterschätzender theoretischer Bedeutung und deckt sich stark mit den praktischen Anforderungen der Reifen- und Automobilindustrie an Simulationstools in der Reifenmechanik. Beide vorgestellten Reifenmodelle wurden „per Hand“ parametrisiert und sind deshalb sicherlich als noch nicht optimal abgestimmt anzusehen.

Die Struktur vom Einschichtmodell der Reifen ist bereits sehr gut entwickelt. Entwicklungspotential besteht vor allem in der besseren Darstellung des Laufstreifens und damit der besseren und vor allem genaueren Erfassung der Stollendynamik. Die derzeitige Modellierung des Laufstreifens ist zu diffus, um den Anforderungen der Reifenindustrie gerecht zu werden. Bei Einführung von deutlich mehr Sensorpunkten, der Berücksichtigung von Biegung im Gummi des Laufstreifens und der Erfassung der Profilierung könnte das vorgestellte Einschichtmodell sicherlich für solch anspruchsvollen Aufgaben wie der Profilloptimierung herangezogen werden. Eine Ausstattung des Stollenfeldes mit eigener Trägheit ist nach Einschätzung des Autors noch nicht erforderlich. Vorarbeiten zur realistischeren Protektormodellierung sind im Forschungsbereich von Prof. Dr. F. Böhm an der Technischen Universität Berlin und vielen von dort hervorgegangenen Wissenschaftlern vorhanden. Sie wurden in dieser Arbeit nicht zum Einsatz gebracht, da dies den Umfang sprengen würde.

Der Struktur des FE-Modells mangelt es noch sehr an einem Laufstreifen. Eine Vergleichbarkeit zwischen dem Einschicht- und dem FE-Modell konnte bisher nur durch Negation des Biegeinflusses im Einschichtmodell erzielt werden, da das FE-Modell zu wenig Biegesteifigkeit besitzt. Hier herrscht dringender Handlungsbedarf.

Zur Realisierung des Protektors mit vertretbarem Aufwand schlägt der Autor die Verwendung von Makroelementen vor – eine Idee, die am Institut für Technische Mechanik der Universität Rostock beginnend bei Scheibenelementen sehr erfolgreich etabliert wurde. Mit einer solchen Diskretisierungstechnik würde die Anzahl der Freiheitsgrade, die zur Modellierung des Protektors erforderlich sind, gering bleiben.

Das FE-Modell benötigt weiter ein besser zu parametrisierendes Dissipationsmodell. Die grundlegende Vorgehensweise von rheologisch motivierten Dämpfungsmodellen sollte dabei nicht aufgegeben werden.

Mit beiden Modellierungstechniken sollten weitere Reifen und weitere Rechen-szenarien realisiert werden, um damit die Aufnahme dieser Modellierungstechniken in eine Reifenmodellhierarchie zu ermöglichen. Diese Idee der Modellhierarchien wird bereits von mehreren Wissenschaftlern erfolgreich verfolgt, um adaptiv zur momentanen Simulationaufgabe dasjenige Individuum einer ganzen Modellfamilie auszuwählen, das der Fragestellung mit minimalem numerischen Aufwand am ehesten entspricht.

Weiteres Vorgehen bei der Entwicklung des EMA

Sehr deutlich ist in dieser Arbeit der numerische Vorteil herausgearbeitet worden, der sich bei korrektem Handling des konservativen Anteils einer Struktur bei der Zeitintegration ergibt. Um diesen Vorteil universeller nutzen zu können, sollte der EMA auf weitere bei der Reifensimulation interessante Materialklassen (spezielle Materialmodelle für Gummi und Korde) erweitert werden.

Die Steigerung der Performance des EMA bei der Zeitintegration steifer Systeme sollte im Rahmen der o.g. Generierung weiterer Reifenmodelle mit anderen numerischen Eigenfrequenzen und weiterer Szenarien mit anderen Frequenzen in der Anregung weiter untersucht und abgesichert werden.

Weiteres Vorgehen bei der Entwicklung des Programmcodes zum Einschichtmodell

Einzelne Aspekte wurden bereits oben erwähnt.

Einer der wenigen erforderlichen Arbeiten zur Optimierung dieses Codes wäre die Angliederung an kommerzielle Preprozessoren und die elegantere Behandlung von statischen Problemen.

Weiteres Vorgehen bei der Weiterentwicklung des FE-Programmcodes

Der generierte FE-Code bietet in der jetzigen Form eine gute Grundlage für seine Weiterentwicklung.

In den nächsten Ausbaustufen sollten Kontaktformulierungen realisiert werden sowie eine Umsetzung des Codes auf andere Plattformen und modernere Programmiersprachen (z.B. FORTRAN90) angegangen werden. Bei der Auswahl der Plattformen sollte angesichts der zu erwartenden Problemgrößen deren Potential zum Handling großer Datenmengen, ein geringer Anteil an Selbstbeschäftigung des Systems bei der Realisierung von I/O-Tasks und die Effektivität bei Multiprozessorimplementierungen bei der Entscheidungsfindung zugrundegelegt werden.

Zur größeren Variabilität bei der Generierung von Reifenmodellen sollten quadratische Volumenelemente, Schalen und Balken implementiert werden. Adaptives Re-Meshing und die o.g. Makroelemente können helfen, die Anzahl der erforderlichen numerischen Freiheitsgrade zu senken.

Zur Reduzierung des manuellen Aufwandes bei der Modellgenerierung sollte über Schnittstellen zu anderen FE-/CAD-Datenformaten nachgedacht werden, auf dem Markt verfügbare, schnellere Gleichungslöser und evtl. eine Parallelisierung des gesamten Codes sollten den Zeitaufwand Aufwand im Zeitschritt senken helfen.

Anhang A

Verifikation der Elemente

Die für diese Arbeit entwickelten Elemente wurden sehr sorgfältig für alle vorgesehenen Materialien und Parameterbereiche geprüft. Natürlich wurden solche elementaren Tests wie die Starrkörperbewegungen und Patchtest erfolgreich absolviert.

Hier sollen auszugsweise Rechnungen vorgestellt werden, in denen die Lösungen der EMA-Elemente mit denen eines der bei der Simulation von Gummi führenden FE-Programm-Systeme MARC®K 6-1 verglichen werden.

Dabei wird gefordert, daß die Elemente bei statischen Aufgaben identisch rechnen, da die in den Elementformulierungen verwendete Theorie völlig vergleichbar ist. Es wird davon ausgegangen, daß Elemente, die zum Kern-Know-How eines Systemhauses der FE-Entwicklung gehören, hinreichend gegen die Praxis abgeprüft sind.

Bei dynamischen Aufgaben dürfen leichte, aber nur plausible Unterschiede auftreten, da die Integrationstechnik der in dieser Arbeit verwendeten Elemente über den Stand der Technik kommerzieller Programme hinausgeht.

Es soll nur die Verifikation der Volumenelemente dargestellt werden. Die Stabelemente wurden ebenfalls mit dem kommerziellen Code verglichen und hatten bei statischen Aufgaben sowie bei hinreichender Abtastung auch bei dynamischen Aufgaben identische Lösungen. Bei den in dieser Arbeit betriebenen Verletzungen des SHANNONSchen Abtasttheorems verhielt sich das Vergleichs-Stabelement identisch zum in Abschnitt 3.1 nach der Trapezregel integrierten Pendelstab, das Stabelement aus dieser Arbeit aber wie der nach dem EMA integrierten Pendelstab.

A.1 Statischer Zug-Druck-Versuch

Beim Zug-/Druck-Versuch wird bei beiden Programmen ein Würfel der spannungslosen Kantenlänge „1“ statisch bestimmt gelagert (s. Abbildung A.1). Anschließend wird die Deckfläche (bestehend aus den Knoten 5-6-7-8) um

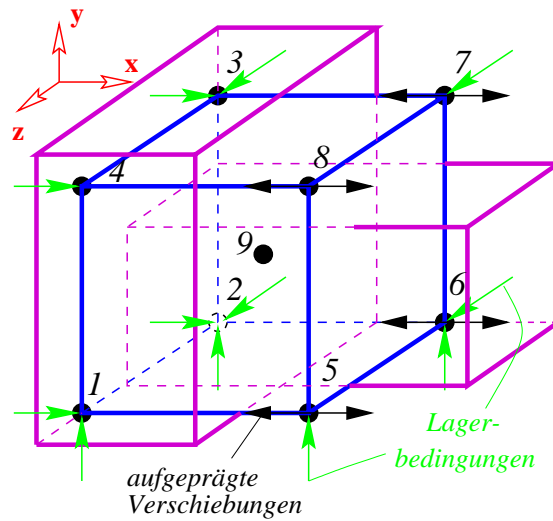


Abbildung A.1: Setup des Zug-/Druck-Vergleiches

$\Delta x = \pm 0.5$ verfahren, die Verschiebungen an Knoten 8 sowie die sich einstellenden Spannungen werden aufgezeichnet und in Abbildung A.2 miteinander verglichen. Gezeigt wird hier das Ergebnis für MOONEY-RIVLIN-Material, bei

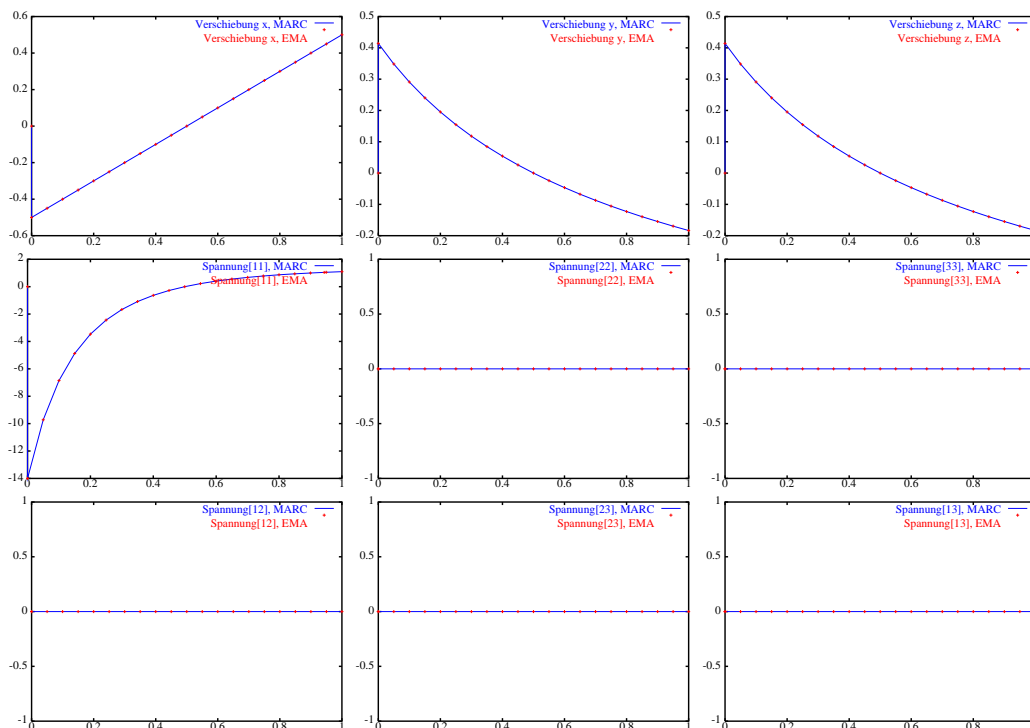


Abbildung A.2: Elementvergleich für statischen Zug-Druck-Versuch

KIRCHHOFFSchem Material entsteht analoge Deckungsgleichheit.

A.2 Statischer Schubversuch

Beim Schubversuch wird der gleiche Würfel wie in Anhang A.1 auf der einen Seite (Knoten 1–4–8–5) fixiert und mit der Seite 1–2–6–5 auf eine Ebene gestellt. Dann wird die Seite 2–3–7–6 um $\Delta y = \pm 0,5$ “ ausgelenkt, so daß der Würfel mit $\gamma_{xy} = \pm 30^\circ$ Schubwinkel belastet wird (s. Abbildung A.3). Die bei

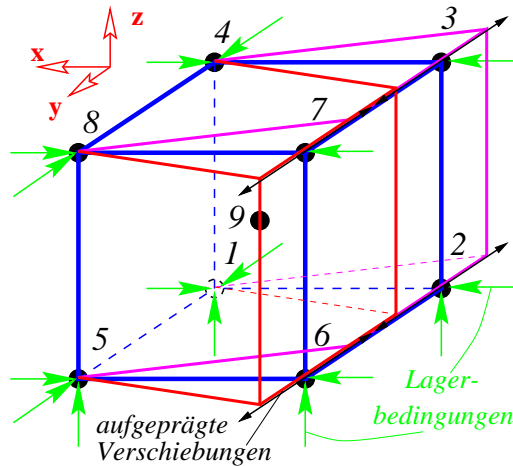


Abbildung A.3: Setup des Schub-Vergleiches

diesem Versuch errechneten Vergleichswerte an Knoten 8 entnehme man den Abbildungen A.4.

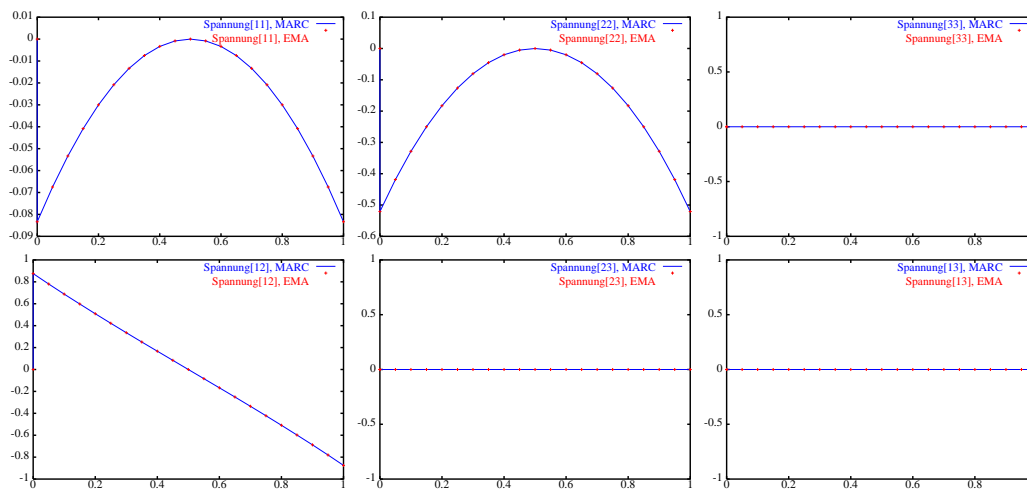


Abbildung A.4: Elementvergleich für statischen Schub-Versuch

A.3 Unplausibilität beim Druckknoten in MARC

Um den Vergleich der Elemente in der Dynamik vorzubereiten soll hier auf einen Fehler bei der Zeitintegration des hydrostatischen Spannungszustandes

der MARC-Volumenelemente hingewiesen werden. Der hydrostatische Spannungszustand wird über den Verschiebungsfreiheitsgrad des neunten Elementknotens parametrisiert und steuert die Aufrechterhaltung der Inkompressibilitätsnebenbedingung.

Diese Nebenbedingung ist eine algebraische Gleichung, die vom FE-Code MARC offensichtlich nicht korrekt behandelt wird, sondern genauso wie alle anderen Verschiebungsfreiheitsgraden durch die Zeit integriert. Dies kann man daran erkennen, das im Ergebnisfile für diesen Knoten eine Geschwindigkeit ausgegeben wird.

Der Druckknoten darf aber keine Dynamik besitzen, da sonst der algebraische Charakter dieser Gleichung verloren geht.

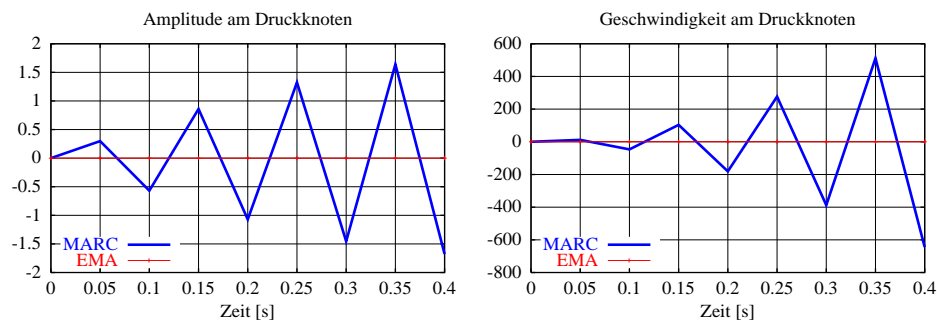


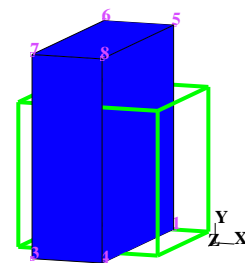
Abbildung A.5: MARC-Fehler bei der Zeitintegration des Druckes

Die in Abbildung A.5 gezeigten Kurven entstanden bei einem Beispiel, analog zu Anhang A.4, wo ein spannungsfreier, am Boden aufliegender Würfel auf der freien Seite mit einer Anfangsgeschwindigkeit beauftragt wird.

Dabei sind die gezeigten Fehler kein Problem des Zeitschrittes, im Gegenteil, bei einer Verringerung des Zeitschrittes bis hin zur vorschrittsmäßigen Schrittweite eskaliert die Amplitude und die Frequenz des Ausschlags um die Mitte immer weiter.

A.4 Dynamischer Zug-Druck-Versuch

Bei dynamischen Zug-/Druck-Schwingversuch wird der Testwürfel bei beiden Programmen zunächst von beiden Seiten normal zur x-Achse um „0.5“ zusammengepreßt und dann frei im schwerelosen Raum schwebend losgelassen. Es stellt sich ein Entspannungsstoß ein, der den Würfel zum Schwingen bringt (s. Abbildung rechts).



Man erkennt die prinzipielle Übereinstimmung der verglichenen Elemente. Das Element nach dem EMA arbeitet simultaner, die Schwingung des MARC-Elementes verläuft mit einem kleinen Phasenversatz zur Bewegung des EMA-Elementes.

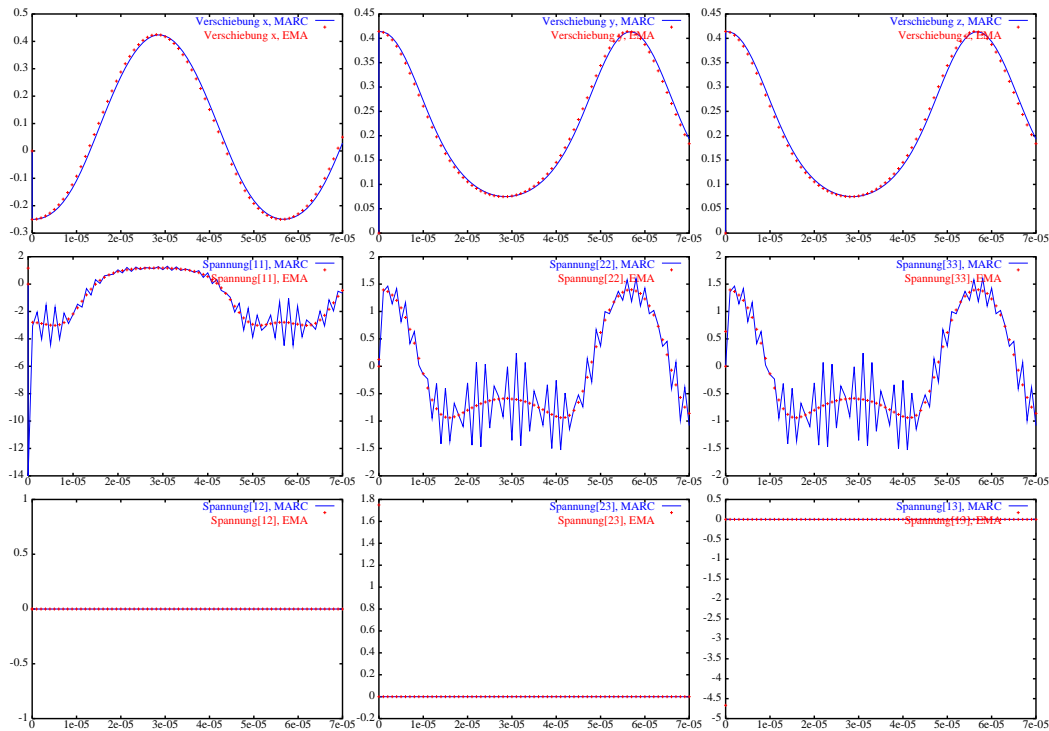
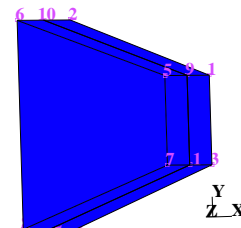


Abbildung A.6: Elementvergleich für dynamischen Zug-Druck-Versuch

Deutliche Unterschiede sind bei den Spannungen zu erkennen. Die Rauigkeiten des MARC-Elementes rühren von der in Anhang A.3 beschriebenen wahrscheinlich falschen Zeitintegration des hydrostatischen Spannungszustandes. Die Lösung des EMA-Elementes ist nicht verzappelt, sondern verläuft stetig und entlang des mitlaufenden Mittelwertes des MARC-Elementes.

A.5 Dynamischer Schubversuch

Beim dynamischen Ausschwingversuch mit vorwiegend Schubspannungen wird der Testwürfel auf der einen Seite um beidseitig „0.2“ gestaucht, auf der anderen Seite um „0.2“ gedehnt, so daß sich ein Ausgangsscherwinkel von ca. 21.8° ergibt (s. Abbildung rechts).



Dabei mußte der Würfel in zwei Teilwürfel zerlegt werden, da ansonsten die große kinematische Scherverformung leicht zum Locking führt.

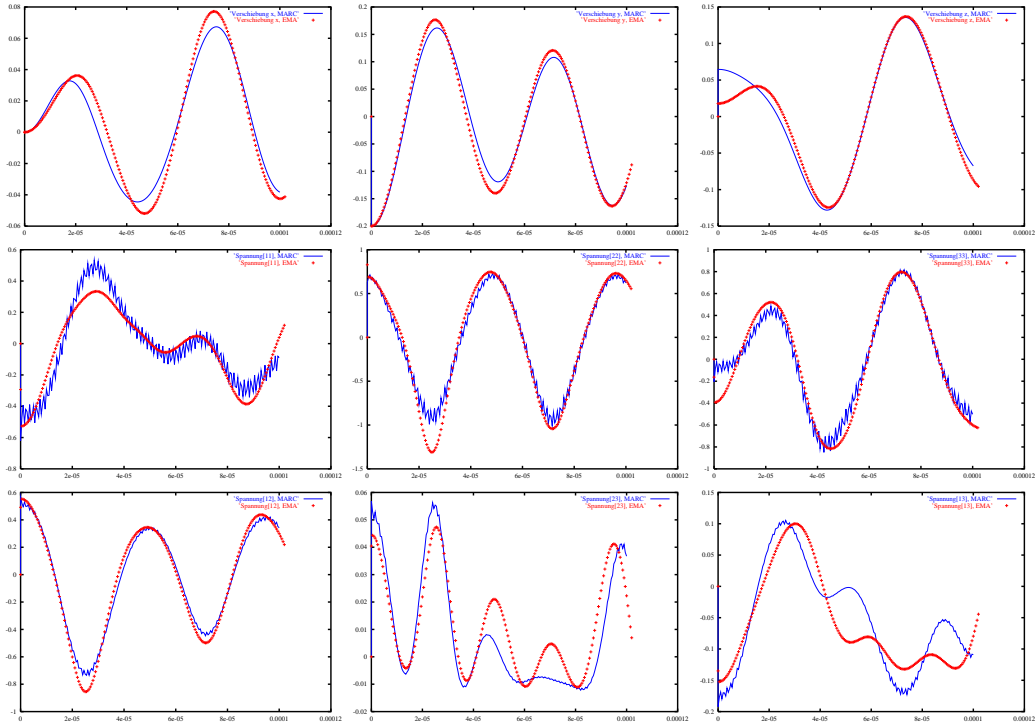


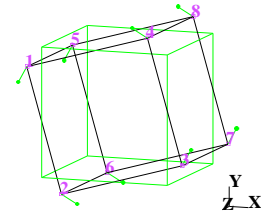
Abbildung A.7: Elementvergleich für dynamischen Schub-Versuch

A.6 Geschwindigkeitsvorteil gegenüber dem Vergleichselement

Abschließend soll der Geschwindigkeitsvorteil der Elemente nach dem EMA an einem Beispiel nach rechter Abbildung demonstriert werden.

Der Würfel hat einem E-Modul von $E_{Gummi} = 5$, eine POISSONSche Konstante von $\nu = 0.49$, eine Dichte von $\rho = 3.0 \cdot 10^{-9}$ und eine Kantenlänge von $h = 20$.

Der Würfel bekommt einen Anfangsdrehgeschwindigkeit von $\omega_z = 1$ und schwebt dann frei drehend im schwerelosen Raum. Die Rotationsbewegung wird mit konstanten Zeitschritten integriert.



Dabei ist MARC in der Lage das System noch mit einer Schrittweite von $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-4}$ stabil zu integrieren und benötigt für die Echtzeit des Beispiels von $t_{fine} = 7 \text{ s}$ insgesamt 29926 Gleichungslösungen. Bei einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 1.5 \cdot 10^{-4}$ bricht die Zeitintegration nach 13248 Gleichungslösungen für $t_{Kollaps} = 0.621 \text{ s}$ erfolglos ab.

Das KIRCHHOFFsche Element nach dem EMA benötigt für die Distanz von $t_{fine} = 7 \text{ s}$ wegen der möglichen größeren Schrittweiten nur 429 Gleichungslösungen. Dabei werden die Integrale der Bewegung (Drall, Impuls, Energie) mit der Genauigkeit des Abbruchkriteriums der iterativen Lösung im Zeitschritt kon-

serviert.

Man stellt einen Geschwindigkeitsvorteil der EMA-Elemente von $\frac{29926}{429} \approx 70$ fest.

Natürlich gilt dieser Geschwindigkeitsvorteil vorzugsweise für Beispiele, wo der Frequenzinhalt der Anregungen deutlich unterhalb der numerischen Eigenfrequenzen der Struktur liegt. Bei steifen Systemen ist dies regelmäßig der Fall.

Anhang B

Numerische Aspekte bei der Formulierung von Volumenelementen

In Kapitel 3 gipfelte die Elementformulierung in der Angabe von Gleichungen zur Berechnung der Knotenkraftvektoren und deren JACIBmatrizen. Um diese Gleichungen berechnen zu können, muß die Elementtopologie mit den dazugehörigen Formfunktionen definiert werden. Diese Prozedur wiederholt sich bei der Implementierung der Elementgleichungen stets aufs neue, ebenso wie die Technik der isoparametrischen Elementformulierung.

In diesem Anhang wird das dazu erforderliche Handwerkszeug zusammengefaßt. Es wurde bewußt eine von der klassischen matrizenorientierten Programmier-technik (s. [Bathe.90]) abweichende, mehr indizistisch orientierte Programmier-technik gewählt, da diese den nichtlinearen kontinuumsmechanischen Gleichungen sehr viel natürlicher entspricht.

B.1 Bereichsintegration im isoparametrischen Raum

B.1.1 Integrale über beliebige Linien im Raum

Es soll die Feldfunktion ${}_t\mathbf{u}$ entlang des Linienrandes eines Elementes integriert werden (s. Abbildung B.1).

Feldinterpolation der Funktion:

$${}_t\mathbf{u}(s) \mapsto {}_t\mathbf{u}^h(\xi) = \sum_{A=1}^{n(=3)} {}^A N(\xi) {}_t^A \mathbf{u}$$

mit ${}_t^A \mathbf{u} \dots$ Stützstellen der Funktion z.Zeitpunkt „ t “.

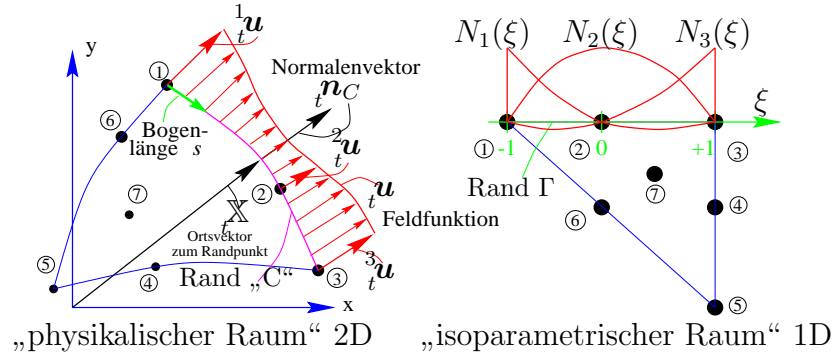


Abbildung B.1: Randintegral über isoparametrische Linien

Koordinateninterpolation:

$${}_t\mathbb{X}(x, y, z) \mapsto {}_t\mathbb{X}^h(\xi) = \sum_{A=1}^{n(=3)} {}^A N(\xi) {}_t\mathbf{u}^A$$

mit ${}^A\mathbb{X} \dots$ Knotenkoordinaten der Linie z. Zeitpunkt „t“.

Transformation der Bogenlänge:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \right)^2$$

$$\leadsto ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \right)^2} d\xi$$

Ausführen des Linienintegrals

$$\mathcal{I} = \int_{(C)} {}_t\mathbf{u} ds = \int_{(\Gamma)} {}_t\mathbf{u}^h(\xi) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \right)^2} d\xi$$

In dieser Form kann das Linienintegral sehr einfach durch GAUSSquadratur numerisch berechnet werden.

Zusätzlich bietet die isoparametrische Interpolation die Möglichkeit, häufig in mechanischen Formeln benötigte Kurvenparameter wie Tangentenvektor und Hauptnormalenvektor für krummlinienige Ränder aufzuschreiben.

Man berechnet $\frac{\partial s}{\partial \xi} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d\mathbb{X}}{d\xi} \right)^2} = \left| \frac{d\mathbb{X}}{d\xi} \right|$. Dann schreibt sich der

Tangentenvektor als ${}_t\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial {}_t\mathbb{X}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{{}_t\mathbb{X}_{,\xi}}{\left| \frac{d\mathbb{X}}{d\xi} \right|}$ und man kann ausführen den

Hauptnormalenvektor als ${}_t\mathbf{n} = \frac{{}_t\mathbf{t},\xi}{|{}_t\mathbf{t},\xi|}$ und den

Krümmungsradius als ${}_t\rho = \frac{|{}_t\mathbb{X},\xi|}{|{}_t\mathbf{t},\xi|}$.

B.1.2 Oberflächenintegrale über gekrümmte Flächen im Raum

Die Ausführung der Randintegrale über eine im isoparametrischen Raum parametrisierte Fläche verläuft analog zur vorherigen Abschnitt.

Koordinateninterpolation:

$${}_t\mathbb{X}(x, y, z) \mapsto {}_t\mathbb{X}^h(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n(=4)} {}^AN(\xi, \eta) {}_t^A\mathbf{u}$$

mit ${}_t^A\mathbb{X} \dots$ Knotenkoordinaten der Linie z. Zeitpunkt „t“.

Diese Koordinateninterpolation stellt eine Parametrisierung der Fläche $\mathbf{g}(x, y, z) = 0$ in den Parametern (ξ, η) dar.

Interpolation der Feldfunktion:

$${}_t\mathbf{u}(x, y, z) \mapsto {}_t\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n(=4)} {}^AN(\xi, \eta) {}_t^A\mathbf{u}$$

mit ${}_t^A\mathbf{u} \dots$ Stützstellen der Funktion z. Zeitpunkt „t“.

Oberflächenintegralintegral

$$\boxed{\mathcal{I} = \int\int_{(S)} f(x, y, z) dS = \int\int_{(\Gamma)} f({}_t\mathbb{X}(\xi, \eta)) \underbrace{\sqrt{{}_t\mathbb{X},\xi}^2 {}_t\mathbb{X},\eta}^2 - \left({}_t\mathbb{X},\xi {}_t\mathbb{X},\eta\right)^2}_{dS} \overbrace{d\xi d\eta}^{d\Gamma}}$$

Dieses Integral kann bei geeigneter Interpolation der Fläche und bekannten Funktionswerten an den Stützstellen stets numerisch berechnet werden.

Den Hauptnormalenvektor kann man ebenfalls berechnen aus

$${}_t\mathbf{n} = \frac{{}_t\mathbb{X},\xi \times {}_t\mathbb{X},\eta}{|{}_t\mathbb{X},\xi \times {}_t\mathbb{X},\eta|}.$$

B.1.3 Integral einer Funktion über ein materielles Volumen

Nachdem die Integrationsprozeduren über gekrümmte Flächen und Linien angegeben wurden, fehlt zu Vollständigkeit noch das Volumenintegral.

Zunächst schreibt man die Koordinateninterpolation hin als

$${}_t\mathbb{X} = \begin{pmatrix} {}_tx(\xi, \eta, \zeta) \\ {}_ty(\xi, \eta, \zeta) \\ {}_tz(\xi, \eta, \zeta) \end{pmatrix} \mapsto {}_t\mathbb{X}^h(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^AN(\xi, \eta, \zeta) {}_t^A\mathbb{X}$$

und bildet zur Übung formal die Ableitung der materiellen nach den isoparametrischen Koordinaten $\mathbf{r} := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$:

$$\frac{\partial \mathbb{X}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial X_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial r_j} = \underbrace{\sum_{A=1}^{n_{node}} \frac{\partial {}^AN(\xi, \eta, \zeta)}{\partial r_j} {}^AX_i}_{\text{Element (i,j) der JACOBI matrix}} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

$\mathbb{J} = (J_{ij})_{3 \times 3}$ der Koord.-transf.

Interpolation der Feldfunktion:

Die interpolierte Feldfunktion ${}_tu$ findet man mit

$${}_tu \begin{pmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{pmatrix} \mapsto {}_tu^h(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^AN(\xi, \eta, \zeta) {}_t^Au$$

mit ${}_t^Au \dots$ Stützstellen der Funktion z. Zeitpunkt „ t “.

Dabei kann die Feldfunktion ${}_tu$ auch als Komponente i einer vektorwertigen Funktion ${}_t\mathbf{V}$ oder die Komponente (i, j) einer tensorwertigen Funktion ${}_t\mathbb{T}$ aufgefaßt werden. Bildet man den Gradienten der im physikalischen Raum parametrisierten Feldfunktion ${}_tu$ nach den isoparametrischen Koordinaten muß man die Kettenregel bemühen:

$$\frac{\partial {}_tu_i}{\partial r_j} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial r_j} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y(\xi, \eta, \zeta)}{\partial r_j} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial r_j}$$

Wenn man nun den Gradienten $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ in Matrizenschreibweise sucht kann man daraus ablesen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial X_j(\xi, \eta, \zeta)}{\partial r_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial}{\partial X_j} \mathbf{e}_j = (\mathbb{J})_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j} \mathbf{e}_i$$

und damit $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbb{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} \iff \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} = \mathbb{J}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$

Mit diesem Werkzeug kann man jetzt den materiellen Gradienten einer im physikalischen Raum existierenden und danach isoparametrisch interpolierten Feldfunktion hinschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} {}_tu^h(\mathbb{X}) = \mathbb{J}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_t} u^h(\xi, \eta, \zeta) \quad (\text{B.1})$$

Um jetzt das Integral der Funktion ${}_t u(\mathbb{X})$ über das Volumen V bilden zu können benötigt man nur noch die Beziehung

$$dV = dx \, dy \, dz = \det \mathbb{J} d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

und findet

$$\boxed{\int\int\int_{(V)} {}_t u(\mathbb{X}) dV = \int\int\int_{(V_{-1}^{+1})} {}_t u(\mathbb{X}(\xi, \eta, \zeta)) d\xi \, d\eta \, d\zeta}$$

B.2 Isoparametrische Elementformulierung und Gauss-Quadratur

B.2.1 GAUSS-Quadratur im isoparametrischen Koordinatenraum

Die Transformation der im physikalischen Raum befindlichen Elemente in den isoparametrischen Koordinatenraum verfolgt im wesentlichen zwei Ziele:

- die numerische Ausführung von Ableitungen von Feldfunktionen bzgl. materieller oder räumlicher Koordinaten und
- die numerische Ausführung von Bereichsintegralen von Feldfunktionen über einen materiellen oder räumlichen, ein- oder mehrdimensionalen Bereich.

Ein positiver Nebeneffekt des isoparametrischen Konzeptes ist die Möglichkeit, stark tordierte Elementformen behandeln zu können, wodurch die Adaptivität eines Mesh an das physikalische Objekt beliebig gesteigert werden kann.

Dabei kann die Feldfunktion skalaren, vektoriellen oder tensoriellen Charakter haben. Wenn die Funktion vektor- oder tensorwertig ist, werden die Differentiations- bzw. Integrationsoperationen auf die skalarwertigen Koordinatenfunktionen zurückgeführt.

Die Grundidee der GAUSS-Quadratur besteht in der umkehrbaren Abbildung des physikalischen Elementraumes auf einen Raum fester Geometrie (meist von -1 bis +1 reichend), für den dann durch einen mathematischen Optimierungsprozeß das Bereichsintegral in eine gewichtete Summe über die Funktionswerte an einer erforderlichen Anzahl von Stützstellen der Feldfunktion überführt wird. In den Optimierungsprozeß inbegriffen sind bei der GAUSS-Quadratur sowohl die isoparametrischen Orte der Stützstellen, als auch deren Anzahl und Gewichte. Damit wird erreicht, daß man für jeden zu integrierenden Polynom eine Integrationsvorschrift angeben kann, die das Integral exakt löst.

Da die Theorien sowohl des isoparametrischen Konzeptes, als auch der GAUSS-quadratur in der Literatur ausführlich behandelt sind, werden hier nur die praktisch anzuwendenden Gleichungen aufgelistet.

Betrachtet wird ein Element mit n_{node} Elementknoten. Für diese Elementknoten sind die Orte ${}^A\mathbb{X}$ und die Werte ${}^Af(\mathbb{X})$ der betrachteten Funktion gegeben. Daraus wird die Transformation des Koordinatenraumes gebildet mittels

$${}_t\mathbb{X}(x, y, z) \mapsto {}_t\mathbb{X}^h(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^AN(\xi, \eta, \zeta) {}_t\mathbb{X}^A$$

und die Interpolation der Feldfunktion mittels

$${}_tf(x, y, z) \mapsto {}_tf^h(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^AN(\xi, \eta, \zeta) {}_tf^A$$

Hierfür werden Interpolationfunktionen ${}^AN(\xi, \eta, \zeta)$ benötigt, die einzig der Bedingung ${}^AN({}^B\mathbb{X}) = \delta_A^B$ genügen müssen.

Mit den in Anhang B.1 gemachten Ausführungen kann man jetzt diese Funktionen unter Ausnutzung der Kettenregel (B.1) beliebige Differentiationoperationen ausführen.

B.2.1.1 Berechnung der JACOBI-Matrix der Koordinatentransformation

Wird für $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ mit ${}^AN_{,j}$ die Ableitung $\frac{\partial {}^AN(\xi, \eta, \zeta)}{\partial r_j}$ beschrieben, kann man die JACOBI-Matrix der Koordinatentransformation hinschreiben in der gut programmierbaren Form:

$$\mathbb{J} = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^AX_i {}^AN_{,j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{B.2})$$

Eine alternative, praktische Formulierung unter Verwendung des Gradientenvektors der Formfunktionen $\mathbf{D} [{}^AN] := {}^AN_{,i} \mathbf{e}_i$ lautet

$$\mathbb{J} = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}_t\mathbb{X}^A \otimes \mathbf{D} [{}^AN].$$

Aus dieser Matrix kann man dann die für die Ausführung von Volumenintegralen benötigte JACOBI-determinante $J := \det \mathbb{J}$ z.B. nach der SARRUSSchen Regel und die für materielle Ableitungen benötigte JACOBI-inverse \mathbb{J}^{-1} nach der CRAMERSchen Regel für jeden benötigten isoparametrischen Ort \mathbf{r} berechnen.

B.2.1.2 Berechnung des Deformationsgradienten als Grundlage für andere Tensorgrößen

Der Deformationsgradient ist die materielle Ableitung der Konfiguration zur Zeit t bzgl. der Referenzkonfiguration.

Wenn die spannungslose Lage die Referenzlage ist, kann geschrieben werden ${}_t\mathbb{X} = {}_0\mathbb{X} + {}_t\mathbf{u}$ mit ${}_t\mathbf{u}$ als Verschiebungsfeld zum Zeitpunkt t .

Wenn man daraus den Deformationsgradienten berechnet so entsteht in einer Orthonormalbasis

$$\begin{aligned} {}_t\mathbb{F} &:= \frac{\partial {}_tX_i}{\partial {}_0X_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \left(\delta_i^j + \frac{\partial {}_tX_i}{\partial {}_0X_j} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_i^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \sum_{A=1}^{n_{node}} {}_t^A u_i {}^A N_{,j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= \nabla_{{}_0\mathbb{X}} {}_t\mathbb{X} = \mathbf{1} + \nabla_{{}_0\mathbb{X}} {}_t\mathbf{u} = \mathbf{1} + \sum_{A=1}^{n_{node}} {}_t^A \mathbf{u} \otimes \mathbf{D} [{}^A N] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Hat man den Deformationsgradienten programmiert, kann man alle anderen, in den Elementgleichungen dieser Arbeit vorkommenden, tensoriellen Deformationsgrößen berechnen.

B.2.1.3 GAUSSintegration in mehreren Dimensionen

Um das Integral $\iiint_{(B)} f(\mathbb{X}) dV$ zu berechnen muß zunächst entschieden werden, welchem Polynomgrad die Funktion f entspricht.

In Abhängigkeit davon wird die für eine genaue Integration erforderliche Stützstellenanzahl im Integrationsgebiet festgelegt. Es gilt, daß eine Funktion F dann exakt integriert wird, wenn bei Verwendung von n_{Gauss} Stützstellen Sie ein Polynom von maximal $(2n_{Gauss} - 1)$ ter Ordnung ist. Dabei ist zu beachten, daß eine zu große Stützstellenzahl vermehrt Rundungsfehler induziert und daß bei mehrdimensionalen Integralen die Grade der Polynome jeder einzelnen Richtung den Grad des zu integrierenden Polynoms der Feldfunktion vergrößern.

Werden n_{Gauss} Stützstellen mit den Koordinaten ${}^{iG}\mathbf{r}$ und den Gewichten ${}^{iG}w$ den Tabellen entnommen, dann errechnet man zunächst die physikalischen Orte bzw. Funktionswerte und die JACOBI-determinanten an diesen physikalischen Orten. Mit diesen Werten berechnet sich dann das Integral entlang einer oder mehrere Koordinatenrichtungen folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \int_{(L)} f(\mathbb{X}) dL &= \sum_{iG=1}^{n_{Gauss}} {}^{iG}w_{\xi} f(\mathbb{X}({}^{iG}\mathbf{r})) \\ \iint_{(S)} f(\mathbb{X}) dS &= \sum_{iG=1}^{n_{Gauss}} {}^{iG}w_{\xi} {}^{iG}w_{\eta} f(\mathbb{X}({}^{iG}\mathbf{r})) \\ \iiint_{(V)} f(\mathbb{X}) dV &= \sum_{iG=1}^{n_{Gauss}} {}^{iG}w_{\xi} {}^{iG}w_{\eta} {}^{iG}w_{\zeta} f(\mathbb{X}({}^{iG}\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Dabei sind ${}^{iG}w_i$ das Integrationsgewicht, das am GAUSSpunkt iG für die Integrationsrichtung i steht. Die Orte der Integrationspunkte und deren Gewichte

werden bei der Diskussion der Elementtopologien (s. Abschnitte B.2.2 und B.2.3) genannt.

B.2.2 Das 8-Knoten Brick-Element

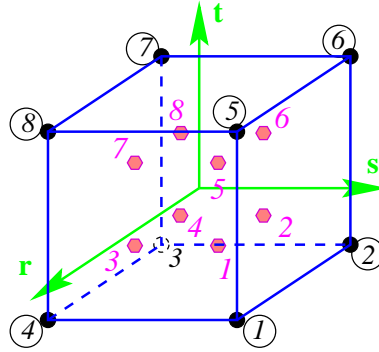


Abbildung B.2: Das 8-Knoten Volumenelement

Abbildung B.2 zeigt die Topologie des Brick-Elementes. Wenn ein Druckknoten als neunter Knoten hinzugefügt werden soll, dann wird er, ohne physikalische Koordinaten zu besitzen, in das Elementzentrum gelegt.

Den Tabellen B.1 und B.2 kann man die isoparametrischen Koordinaten der

Knoten	r	s	t	$N(r, s, t)$
1	1.0	1.0	-1.0	$\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$
2	-1.0	1.0	-1.0	$\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$
3	-1.0	-1.0	-1.0	$\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$
4	1.0	-1.0	-1.0	$\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$
5	1.0	1.0	1.0	$\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$
6	-1.0	1.0	1.0	$\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$
7	-1.0	-1.0	1.0	$\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$
8	1.0	-1.0	1.0	$\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$

Tabelle B.1: Formfunktionen des 8-Knoten Brick-Elementes

Knotenpunkte und der GAUSSpunkte sowie die Integrationsvorschrift entnehmen. Das 8-Knoten Brickelement ist in seiner Topologie und Integration ein Klassiker und bedarf keiner weiteren Erläuterungen.

B.2.3 Das 6-Knoten Penta-Element

Es gibt verschiedene Wege, die Topologie eines 6-Knoten-Penta-Elementes zu generieren. Die einfachste und vielfach praktizierte Variante ist das Kollabieren eines 8-Knotenelementes, indem man auf der Deck- und Grundfläche zwei Elementknoten jeweils dieselben externen Knotennummern gibt.

Diese Vorgehensweise ist jedoch problematisch, da die durch das Zusammenlegen der vorher linearen Interpolationsfunktionen entlang der 4 Elementkanten von einem kollabierten zu einem nichtkollabierten Knoten reichen, nicht

iG	r	s	t	$iG_w = \prod_{k=[r,s,t]} iG_w_k$
1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.000 000 000 000 000
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.000 000 000 000 000
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.000 000 000 000 000
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.000 000 000 000 000
5	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.000 000 000 000 000
6	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.000 000 000 000 000
7	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.000 000 000 000 000
8	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.000 000 000 000 000
$\int_{t=-1}^{+1} \int_{s=-1}^{+1} \int_{r=-1}^{+1} f \, dr \, ds \, dt = \sum_{iG=1}^8 iG_w f^h(iG_r iG_s iG_t)$				

Tabelle B.2: Integrationsvorschrift des 8-Knoten Brick-Elementes

mehr länger linear sind. Somit kann es in der Gesamtstruktur zu inkompatiblen Verschiebungszuständen mit Überlappungen und Klaffungen kommen, wenn zufällig Elemente mit linearer und nichtlinear denaturierter Verschiebungskinetik an der Elementkante zusammentreffen.

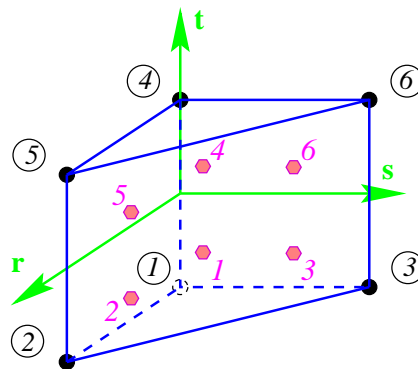


Abbildung B.3: Das 6-Knoten Volumenelement

In dieser Arbeit wird diese „Ungenauigkeit“ nicht begangen, sondern ein anderer Weg beschritten. Das Penta-Element bekommt an der Grund- und Deckfläche die Verschiebungskinetik eines Dreieckelementes, das dann mittels einer linearen Transportfunktion auf die gegenüberliegende Fläche projiziert wird.

Das so entstehende Element zeigt Abbildung B.3. Die Elementkinematik erfüllt die Anforderungen des Patchtestes und kann spannungslos Starrkörperbewegungen darstellen.

Wenn ein Druckknoten als siebter Knoten hinzugefügt werden soll, dann wird er, ohne physikalische Koordinaten zu besitzen, in das Elementzentrum gelegt.

Knoten	r	s	t	${}^A N(r, s, t)$
1	0.0	0.0	-1.0	$\frac{1}{2}(1-r-s) \quad (1-t)$
2	1.0	0.0	-1.0	$\frac{1}{2}r \quad (1-t)$
3	0.0	1.0	-1.0	$\frac{1}{2}s \quad (1-t)$
4	0.0	0.0	1.0	$\frac{1}{2}(1-r-s) \quad (1+t)$
5	1.0	0.0	1.0	$\frac{1}{2}r \quad (1+t)$
6	0.0	1.0	1.0	$\frac{1}{2}s \quad (1+t)$

Tabelle B.3: Formfunktionen des 6–Knoten Penta–Elementes

Den Tabellen B.3 und B.4 kann man die isoparametrischen Koordinaten der Knotenpunkte und der Gausspunkte sowie die Integrationsvorschrift entnehmen.

iG	r	s	t	$iG_w = \prod_{k=[r,s,t]} iG_w_k$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.333 333 333 333 333
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.333 333 333 333 333
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.333 333 333 333 333
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.333 333 333 333 333
5	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.333 333 333 333 333
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.333 333 333 333 333
$\int_{t=-1}^{+1} \int_{s=0}^{+1} \int_{r=0}^{1-s} f \, dr \, ds \, dt = \sum_{iG=1}^6 \frac{1}{2} iG_w f^h(iG_r iG_s iG_t)$				

Tabelle B.4: Integrationsvorschrift des 6–Knoten Penta–Elementes

B.3 Konvergenzbetrachtungen und modifizierter Newton–Raphson-Algorithmus

B.3.1 Konvergenzkriterien

In der Literatur sind verschiedene Konvergenzkriterien bekannt. In dieser Arbeit wird die Norm des Verschiebungszuwachses, die Norm der Elementfehlkräfte und das Skalarprodukt diese beiden Vektoren als eine Art Fehlenergie im Iterationsschritt und im gesamten Zeitschritt überwacht. Dabei kommen absolute Betrachtungen und relative Betrachtungen infrage. Bei der Relativbeurteilung wird die Änderung der Kontrollgrößen im Iterationsschritt auf die Gesamtänderung im Zeitschritt bezogen.

Wenn die monitorte Kontrollgröße relativ oder absolut unter die vorgegebene Toleranz absinkt, dann wird die Konvergenz des Zeit– oder Lastschrittes definiert.

Stets wird überwacht, ob eine der drei Kontrollgrößen von einem Iterationsschritt zum nächsten divergiert.

Dies und die Fälle, daß die Projektionsparameter einzelner Elemente nicht im vorgeschriebenen Intervall von $\tau, \alpha \in [0..1]$ liegen, oder daß ein Elementdurchschlag festgestellt wurde, verhindern die positive Konvergenzaussage.

Die Forderung nach strenger Konvergenz hat sich als sehr positiv für die Stabilität der Zeitintegration erwiesen. Wenn während eines Zeitschrittes Probleme bei der strengen Konvergenz und der problemlosen Bestimmung der Projektionsparameter auftreten, hat dies zumeist die Ursache in einer temporär vergrößerten Nichtlinearität oder Rauigkeit der Lösung. Dadurch steigt die Wahrscheinlichkeit, daß folgende Zeitschritte ebenfalls nicht mehr oder nur schwer konvergieren.

Damit hat man ein Kriterium für eine Zeitschrittsteuerung vorliegen.

B.3.2 Anwendung der Konvergenzkriterien für ein adaptives, modifiziertes NEWTON–RAPHSON–Schema

Als numerisches Verfahren zur Lösung der (kineto)statischen, vollständig nicht-linearen Kraftgleichungen wurde ein modifiziertes NEWTON–RAPHSON–Verfahren verwendet. Dabei wurden bei den jeweils ersten zwei Iterationen des Steps vollständige NEWTON–Schritte (d.h. die komplette $L \cdot U$ –Zerlegung einer frisch assemblierten Systemmatrix mit anschließender Lösung mittels Vorwärts–Rückwärts–Einsetzen) ausgeführt und danach – durch strengmonotone Konvergenzkriterien (s. Abschnitt B.3.1) überwacht – im Durchschnitt nur bei jeder vierten Iteration die $L \cdot U$ –Zerlegung einer frisch assemblierten Systemmatrix berechnet, ansonsten wurde die $L \cdot U$ –zerlegte Matrix des vorherigen Iterationsschrittes verwendet.

Diese Vorgehensweise ist dadurch motiviert, daß in einem Zeitschritt während der ersten Iterationen der größte Teil der erforderlichen Konvergenz stattfindet und die verbleibende noch zu erreichende Konvergenz der Lösung während der späteren Iterationen nur langsam vonstatten geht, wobei gleichzeitig aufgrund der Nähe der Lösung zur konvergierten Gleichgewichtslage die nichtlinearen Einflüsse abnehmen.

Wurde die streng monotone Konvergenz nach einem reduzierten NEWTONschritt verletzt (s.o.), dann wurde im direkt nachfolgenden Iterationsschritt ein vollständiger NEWTONschritt erzwungen und gleichzeitig das Reassembly–Intervall verkürzt.

Dieses modifizierte NEWTON–RAPHSON–Schema reduziert den Zeitaufwand bis zum Erreichen einer hohen Konvergenzgüte gegenüber dem eines klassischen NEWTON–RAPHSON–Schemas beträchtlich und garantiert gleichzeitig, daß im Zeitschritt auftretende starke Nichtlinearitäten hervorragend durch einen adaptiv eingestellten, hinreichend guten Lösungsgradienten erfaßt werden.

Anhang C

Zur verwendeten Algebra und Nebenrechnungen

C.1 Rechnen mit dem inneren L_2 -Produkt

Vor allem in Kapitel 3 wurde häufig von der Schreibweise

$$\langle \dots \rangle$$

Gebrauch gemacht.

Dahinter verbirgt sich das Innere L_2 -Produkt, eine in der Literatur sehr geläufigen Schreibweise in der Variationsrechnung. Sie stellt im Gegensatz zur differentialgeometrisch formulierten die schwache Formulierung der kontinuumsmechanischen Gleichungen dar. Das bedeutet, bei der schwachen Formulierung wird lediglich die Bilanz der kontinuumsmechanischen Größen im Integral über den Definitionsbereich zueinander in Beziehung gesetzt. Das ermöglicht die Verknüpfung von Funktionen oder gar Distributionen, die aus verschiedenen Räumen stammen in gemeinsamen Gleichungen. Die Methode der Finiten Elemente benutzt z.B. die Verknüpfung von Funktionsräumen mit unterschiedlichen Stetigkeitsanforderungen regelmäßig.

Praktisch ausgeführt heißt $\langle a, b \rangle$, daß man a und b zunächst durch Multiplikation, miteinander verknüpft und anschließend über den Definitionsbereich integriert.

Dabei gelten folgende natürliche bzw. leicht zu beweisende, sehr der gewöhnlichen Matrizenalgebra ähnliche Rechenregeln:

Regel 1: $\langle a, b \rangle = \int_B a \cdot b \, d\mathcal{B}$, wenn a oder b eine Verknüpfung über das *Doppeleskalarprodukt* erfordert.

Regel 2: $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \int_{\mathcal{B}} \underline{a} \cdot \underline{b} d\mathcal{B}$, wenn einer der beiden Eingänge ein vektorwertiges Argument ist und somit ein *Skalarprodukt* ausweist.

Regel 3: $\langle a, b \rangle = \int_{\mathcal{B}} a * b d\mathcal{B}$, wenn einer der beiden Eingänge ein skalarwertiges Argument ist und somit nur ein *einfaches Produkt* definierbar ist.

Regel 4: *Kommutativität*
 $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

Regel 5: *Assoziativität*
 $\langle 1, abc \rangle = \langle a, bc \rangle = \langle ab, c \rangle = \langle abc, 1 \rangle$

Regel 6: *Distributivität*
 $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$

Regel 7: *Transposition*
 $\langle ab, cd \rangle = \langle b^T a^T, d^T c^T \rangle$

Regel 8: *Skalierung*
 $\langle \xi a, b \rangle = \langle a, \xi b \rangle = \xi \langle a, b \rangle$

C.2 Häufig benutzte algebraische Ausdrücke

In diesem Abschnitt wird eine lose Sammlung von Formeln niedergeschrieben, welche die Nachvollziehbarkeit der Herleitungen dieser Arbeit unterstützen sollen.

Die gesamte Algebra in dieser Arbeit bezieht sich auf eine orthonormale Inertialbasis. Das vereinfacht viele Ausdrücke gegenüber der Verwendung einer allgemeinen, schiefwinkligen Basis.

Invarianten eines Tensors und seine Ableitungen

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbb{A}} &= A_{pp} = \mathbf{1} \cdot \mathbb{A} & III_{\mathbb{A}} &= \det \mathbb{A} \\
 II_{\mathbb{A}} &= \frac{1}{2} [A_{pq} A_{qp} + A_{pp}^2] = \frac{1}{2} [I_{\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}} + I_{\mathbb{A}}^2] = \frac{1}{2} [\mathbf{1} \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}) + (\mathbf{1} \cdot \mathbb{A})^2] \\
 \nabla_{\mathbb{A}} I_{\mathbb{A}} &= \mathbf{1} & \iff \frac{\partial I_{\mathbb{A}}}{\partial A_{pq}} &= \delta_{pq} \quad \text{mit } \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ 1 & p = q \end{cases} \\
 \nabla_{\mathbb{A}} II_{\mathbb{A}} &= I_{\mathbb{A}} \mathbf{1} - \mathbb{A}^T & \iff \frac{\partial II_{\mathbb{A}}}{\partial A_{pq}} &= I_{\mathbb{A}} \delta_{pq} - A_{qp}
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathbb{A}} \mathbb{M}_{\mathbb{A}} = \mathbb{M}_{\mathbb{A}} \mathbb{A}^{-T} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbb{M}_{\mathbb{A}}}{\partial A_{pq}} = \mathbb{M}_{\mathbb{A}} (\mathbb{A}^{-1})_{qp}$$

Satz von CAYLEY-HAMILTON

$$\mathbb{M}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{-1} = (\mathbb{C} - I_{\mathbb{C}} * \mathbf{1}) \cdot \mathbb{C} + II_{\mathbb{C}} * \mathbf{1}$$

Linearisierungen des Deformationsgradienten

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{n+T}^{\mathbb{F}}}{\partial_{n+1}^B \varphi_j} &= T^B N_j \\ \frac{\partial II_{n+T}^{\mathbb{F}}}{\partial_{n+1}^B \varphi_j} &= T(I_{n+T}^{\mathbb{F}} \delta_{pq} - {}_{n+T}F_{qp})^B N_q \delta_{pj} = T(I_{n+T}^{\mathbb{F}} {}^B N_j - {}^B L_j) \\ \frac{\partial {}_{n+T}F_{pq}}{\partial_{n+1}^B \varphi_j} &= T \frac{\partial \sum_C {}_{n+1}^C \varphi_p {}^C N_q}{\partial_{n+1}^B \varphi_j} = T \delta_{jp} \delta_{BC} {}^C N_q = {}^B N_q \delta_{jp} \end{aligned}$$

Nach zuvoriger Darstellung von ${}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}-1}$ nach dem Satz von CAYLEY-HAMILTON erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}-1} F_{kl}^{-1}}{\partial_{n+1}^B \varphi_j} &= -\frac{1}{2} {}^B N_{n+\frac{1}{2}} F_{nj}^{-1} {}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}-1} F_{kl}^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{2 \det {}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}}} \left[{}^B N_n ({}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} F_{nl} \delta_{jk} - {}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} F_{nj} \delta_{lk}) \right. \\ &\quad \left. + {}^B N_l ({}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} F_{kj} - I_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} \delta_{kj}) - {}^B N_j ({}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} F_{kl} - I_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} \delta_{kl}) \right] \\ \frac{\partial \det {}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} {}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}-1} F_{ml}^{-1}}{\partial_{n+1}^B \varphi_j} &= -\frac{1}{2} \left[{}^B N_n ({}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} F_{nl} \delta_{jm} - {}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} F_{nj} \delta_{ml}) \right. \\ &\quad \left. + {}^B N_l ({}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} F_{mj} - I_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} \delta_{mj}) - {}^B N_j ({}_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} F_{ml} - I_{n+\frac{1}{2}}^{\mathbb{F}} \delta_{ml}) \right] \end{aligned}$$

Linearisierungen des Rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensors

$$\begin{aligned} \nabla_{n+1}^B \varphi_j \circ {}_{n+T}^{\mathbb{C}} &= T \frac{\partial {}_{n+1}^{\mathbb{C}} C_{pq}}{\partial_{n+1}^B \varphi_j} = T \left({}^B N_p {}_{n+1} F_{jq} + {}_{n+1} F_{jp} {}^B N_q \right) \underline{e}_p \underline{e}_q \underline{e}_j \\ \frac{\partial \det {}_{n+\tau}^{\mathbb{C}}}{\partial_{n+1}^B \varphi_j} \underline{e}_j &= 2 \tau \det {}_{n+\tau}^{\mathbb{C}} {}_{n+1} F_{jp} {}_{n+\tau} C_{pq}^{-1} {}^B N_q \underline{e}_j \end{aligned}$$

Über den Umweg

$$\begin{aligned} \nabla_{n+1}^B \circ (\det_{n+T} \mathbb{C}_{n+T} \mathbb{C}^{-1}) = \\ \nabla_{n+T}^{\mathbb{C}} \circ \left(({}_{n+T} \mathbb{C} - I_{n+T}^{\mathbb{C}} * \mathbf{1}) \cdot {}_{n+T} \mathbb{C} + II_{n+T}^{\mathbb{C}} * \mathbf{1} \right) \cdot \left(\nabla_{n+1}^B \circ {}_{n+T} \mathbb{C} \right)^T \end{aligned}$$

findet man mittels der Quotientenregel

$$\begin{aligned} \nabla_{n+1}^B \circ {}_{n+T} \mathbb{C}^{-1} = \tau \left[\left({}^B N_{k_{n+I}} F_{jp} + {}_{n+I} F_{jk} {}^B N_p - 2 \delta_{kp_{n+I}} F_{jq} {}^B N_q \right) {}_{n+\tau} C_{pl} \right. \\ \left. + \left({}_{n+\tau} C_{kp} - I_{n+\tau}^{\mathbb{C}} \delta_{kp} \right) \left({}^B N_{p_{n+I}} F_{jl} + {}_{n+I} F_{jp} {}^B N_l \right) \right. \\ \left. + 2 \left(I_{n+\tau}^{\mathbb{C}} \delta_{pq} - {}_{n+\tau} C_{qp} \right) {}^B N_{q_{n+I}} F_{jp} \delta_{kl} \right] \underline{e}_k \underline{e}_l \underline{e}_j \end{aligned}$$

*Transformation des ALMANZI-Spannungstensors
in die materielle Basis \mathbb{X}*

Es gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{grad } \mathbf{a}}_{\text{räumlicher Gradient } \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}} &= \overbrace{\text{Grad } \mathbf{a} \cdot \mathbb{F}^{-1}}^{\text{materieller Gradient } \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}}} \\ \Rightarrow \text{grad } \mathbf{u} &= \text{Grad } \mathbf{u} \cdot \mathbb{F}^{-1} = (\mathbb{F} - \mathbf{1}) \cdot \mathbb{F}^{-1} \quad (\text{wegen } \mathbb{F} = \mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u}) \\ \text{grad } \mathbf{u} &= \mathbf{1} - \mathbb{F}^{-1} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left[\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T - (\text{grad } \mathbf{u})^T \cdot (\text{grad } \mathbf{u}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} - \mathbb{F}^{-1} + \mathbf{1} - \mathbb{F}^{-T} - (\mathbf{1} - \mathbb{F}^{-T}) \cdot (\mathbf{1} - \mathbb{F}^{-1}) \right] \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} - \mathbb{F}^{-T} \cdot \mathbb{F}^{-1} \right] = \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} - \underbrace{\mathbb{B}}_{\text{Linker CAUCHY-GREEN-Tensor}}^{-1} \right] \end{aligned}$$

*Transformation des Deformationsgeschwindigkeitstensors
in die materielle Basis \mathbb{X}*

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \frac{1}{2} \left[\text{grad } \mathbf{v} - (\text{grad } \mathbf{v})^T \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbb{F}^{-1} - (\text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbb{F}^{-1})^T \right] \\ \mathbb{D} &= \frac{1}{2} \left[(\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1}) - (\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1})^T \right] \end{aligned}$$

Anhang D

Digitalfilter in der Simulation transienter mechanischer Probleme

In Kapitel 4 wurden auf Seite 121 die Vorteile genannt, die sich bei einer Filterung der Kontaktkräfte mittels eines Tiefpasses ergeben. Dabei wurde das Problem des Phasenversatzes der Kontaktkräfte erwähnt.

Es gibt prinzipiell die Möglichkeit, durch eine komplizierte Logistik zu organisieren, daß man bei der Simulation des Einschichtmodells immer schon mehr Zeitschritte gerechnet hat als den Zeitpunkt, für den man gerade das Interface zum FE-Modell ausgibt. Dadurch könnte man ein „vorausschauendes“ Filter konstruieren.

In dieser Arbeit wurden jedoch praktikable, simultan arbeitende, digitale Filter nach [Tietze.91] verwendet, die durch das Design der Filterparameter einen nur minimalen Phasenversatz generieren.

Man schreibt für das diskrete ($\mu = 0, 1, \dots$)

Eingangssignal (D.1)

$$x(t_\mu) = x_0 \sin \omega t_\mu \quad \text{mit } t_\mu = t_0 + \mu \Delta t \text{ und das}$$

Ausgangssignal

$$\begin{aligned} y(t_\mu) &= x_0 e^{j\omega(t_\mu - T_a)} && \text{mit } T_a \dots \text{Verzögerungsglied} \\ &= x_0 e^{j\omega t_\mu} \cdot e^{-j\omega T_a} \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion kann man mittels der LAPLACE-Transformation schreiben als

$$L\{y(t)\} = A(p) L\{x(t)\}$$

mit $p = j\omega$

und $A(p) \dots$ analoge Übertragungsfunktion

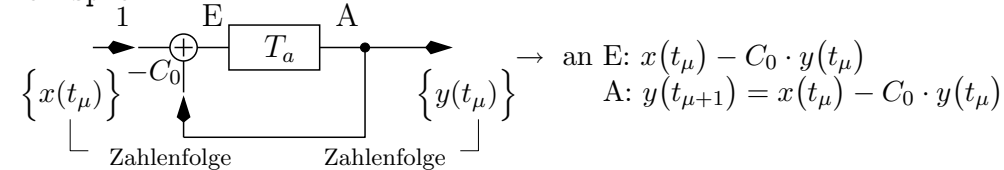
Nach Einführung der \mathcal{Z} -Transformation $z := e^{+pT_a}$ schreibt man mit $\tilde{A}(z) = z^{-1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y(t_\mu)\} &= \tilde{A}(z)\mathcal{Z}\{x(t_\mu)\} \text{ mit} \\ \mathcal{Z}\{x(t_\mu)\} &= X(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} x(t_\mu)z^{-\mu}\end{aligned}\quad (\text{D.2})$$

für die \mathcal{Z} -Transformierte der Eingangsfunktion. Das Ausgangssignal bekommt man dann durch Rücktransformation.

Man nennt $\tilde{A}(z)$ die digitale Übertragungsfunktion.

Beispiel



Jetzt führe man die \mathcal{Z} -Transformation durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y(t_{\mu+1})\} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} y(t_{\mu+1})z^{-(\mu+1)} = z^{-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} [x(t_\mu)z^{-\mu} - C_0 y(t_\mu)z^{-\mu}] \\ &= z^{-1} [X(z) - C_0 Y(z)] = [X(z) - C_0 Y(z)] \tilde{A}(z) \\ \text{es gilt} \quad \mathcal{Z}\{y(t_{\mu+1})\} &= \tilde{A}(z) \cdot \mathcal{Z}\{x(t_{\mu+1})\} \\ \leadsto \mathcal{Z}\{x(t_{\mu+1})\} &= X(z) - C_0 Y(z)\end{aligned}$$

Wenn $\mathcal{Z}\{y(t_{\mu+1})\} = Y(z)$, dann wird

$$\begin{aligned}Y(z) &= [X(z) - C_0 Y(z)] z^{-1} \quad \Big| \div X(z) \\ \leadsto 1 + C_0 z^{-1} &= 1 = z^{-1} z + C_0 z^{-1} = z^{-1}(z + C_0) \\ \leadsto z^{-1} &= \frac{1}{C_0 + z} = \tilde{A}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}\end{aligned}\quad (\text{D.3})$$

Von der analogen zur digitalen Übertragungsfunktion:

Den Weg von der analogen Übertragungsfunktion zur digitalen findet man jetzt folgendermaßen:

- 1.) führe ein $P = j\Omega$
- 2.) $A(P) \mapsto \tilde{A}(z)$ mit $P = l \frac{z-1}{z+1}$ und $l = \frac{\cos \frac{\pi}{\Omega_a}}{\sin \frac{\pi}{\Omega_a}} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{\Omega_a}}$
mit $\Omega_a = \frac{f_a}{f_g} \dots$ auf die Grenzfrequenz normierte Abtastfrequenz
- 3.) Ω -Achse dehnen, so daß $|A(j\infty)|$ bei $\frac{1}{2}\Omega_a$ erscheint

4.) analog gilt $A(P) = \frac{d_0 + d_1 P + d_2 P^2}{c_0 + c_1 P + c_2 P^2}$ mit $P = l \frac{z-1}{z+1}$
 und digital $\tilde{A}(z) = \frac{D_0 + D_1 z + D_2 z^2}{C_0 + C_1 z + C_2 z^2}$

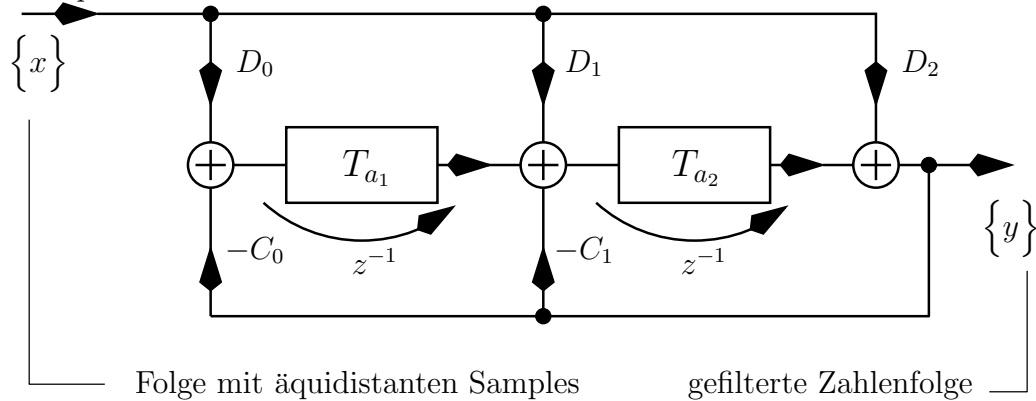
Eine Umrechnung der Koeffizienten ergibt daraus

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{d_0 - d_1 l + d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2} & C_0 &= \frac{c_0 - c_1 l + c_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2} \\ D_1 &= \frac{2(d_0 - d_2 l^2)}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2} & C_1 &= \frac{2(c_0 - c_2 l^2)}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2} \\ D_2 &= \frac{d_0 + d_1 l + d_2 l^2}{c_0 + c_1 l + c_2 l^2} & C_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{2. Ordnung} \quad (\text{D.4})$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{d_0 - d_1 l}{c_0 + c_1 l} & C_0 &= \frac{c_0 - c_1 l}{c_0 + c_1 l} \\ D_1 &= \frac{d_0 + d_1 l^2}{c_0 + c_1 l} & C_1 &= 1 \\ D_2 &= 0 & C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{1. Ordnung}$$

Entwurf eines Tiefpaßfilters 2. Ordnung

Schaltplan:



Übertragungsfunktion:

$$Y(z) = D_2 X(z) + z^{-1} \{ D_1 X(z) - C_1 Y(z) + z^{-1} [D_0 X(z) - C_0 Y(z)] \}$$

$$\leadsto \tilde{A}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{D_0 + D_1 z + D_2 z^2}{C_0 + C_1 z + C_2 z^2}, \text{ was man analog zu (D.3) zeigen kann.}$$

In der Literatur [Tietze.91] findet man für einen

- Tiefpaß: $d_1 = d_2 = 0$
- Hochpaß: $d_0 = d_1 = 0$ und einen
- Bandpaß: $d_0 = d_2 = 0$ sowie
- $d_0 \dots$ Proportionalitätsfaktor (frequenzabhängige Verstärkung)
 $\leadsto d_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, c_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$

Damit entstehen bei Ausnutzung der Ausführungen nach D.5 die Filterparame-

ter:

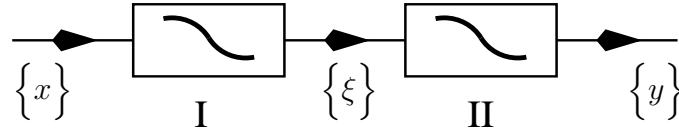
$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{1 + c_1 l + c_2 l^2} & D_1 &= 2 D_0 & D_2 &= D_0 \\ C_0 &= (1 - c_1 l + c_2 l^2) D_0 & C_1 &= 2 D_0 (1 - c_2 l^2) & C_2 &= 1 \end{aligned}$$

Bei der zeitdiskreten Formulierung $y_i = D_2 x_i + D_1 x_{i-1} - C_1 y_{i-1} + D_0 x_{i-2} - C_0 y_{i-2}$ findet man zuletzt die zeitdiskrete Filterfunktion

$$y_i = \frac{x_i + 2x_{i-1} + x_{i-2} - 2y_{i-1}(1 - c_2 l^2) - y_{i-2}(1 - c_1 l + c_2 l^2)}{1 + c_1 l + c_2 l^2} \quad (\text{D.5})$$

Filter höherer Ordnung

Filter höherer Ordnung erhält man einfach durch Kaskadierung,



$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{1}{1 + c_1^I l^I + c_2^I l^{I^2}} \left[x_i + 2x_{i-1} + 2x_{i-2} - 2\xi_{i-1}(1 - c_2^I l^{I^2}) \right. \\ &\quad \left. - \xi_{i-2}(1 - c_1^I l^I + c_2^I l^{I^2}) \right] \\ y_i &= \frac{1}{1 + c_1^{II} l^{II} + c_2^{II} l^{II^2}} \left[\xi_i + 2\xi_{i-1} + 2\xi_{i-2} - 2y_{i-1}(1 - c_2^{II} l^{II^2}) \right. \\ &\quad \left. - y_{i-2}(1 - c_1^{II} l^{II} + c_2^{II} l^{II^2}) \right] \end{aligned}$$

wobei jetzt die Filtercharakteristik von $\{x\}$ nach $\{y\}$ insgesamt der gewünschten Filterqualität entsprechen soll. Deshalb werden die Filter „I“ und „II“ mit unterschiedlichen Filterparametern ausgestattet.

Parametrisierung dieses Filters

Bei der Auslegung eines Filters muß man stets einen Kompromiß zwischen Phasentreue, Welligkeit und Flankensteilheit finden. Mit verschiedener Wichtung der einzelnen Anforderungen entstehen daraus optimierte Filter wie der BESSEL-, BUTTERWORTH- und TSCHEBYSCHJEFF-Tiefpaß. Das beste Phasenverhalten hat das BESSELfilter, die geringste Welligkeit das BUTTERWORTHfilter. Beim TSCHBYSCHEFFfilter erkaufte man sich eine höhere Flankensteilheit durch eine höhere Welligkeit.

Aus den o.g. Anforderungen ergibt sich für die Anwendung in dieser Arbeit als optimaler Filter der BESSELTiefpaß, da ein Phasenfehler kritischer bewertet

wird, als eine geringe Flankensteilheit.

Zur Berechnung der digitalen Übertragungsfunktion bestimmt man zuerst den dimensionslosen Parameter l :

$$l = \frac{1}{\tan\left[\frac{\pi \cdot f_g}{f_a}\right]} \text{ mit } \begin{cases} f_g & \dots \text{ (-3dB)-Frequenz des Filters} \\ f_a & \dots \text{ Samplefrequenz des Signals,} \\ & f_a = \frac{1}{\Delta t} \end{cases}$$

Die Parameter $c_1^{(k)}$ und $c_2^{(k)}$ entnehme man für einen BESSELTiefpaß Tabelle D.1. Die Werte für andere Filtertypen findet man in [Tietze.91].

Mit diesen Parametern lassen sich jetzt wie in der Vorschrift (D.5) das gefilterte Signal aus der Historie des Eingangssignales berechnen. Bei einer expliziten Zeitintegration nach dem P-K-Verfahren liegt die Historie der Größen bei t_i , t_{i-1} und t_{i-2} stets vor. Für Filter höherer Ordnung muß eine längere Historie gespeichert werden.

Ordnung	Kaskadenindex (k)	$c_1^{(k)}$	$c_2^{(k)}$
1	I	1.0000	0.0000
2	I	1.3617	0.6180
3	I	0.7560	0.0000
	II	0.9996	0.4772
4	I	1.3397	0.4889
	II	0.7743	0.3890
5	I	0.6656	0.0000
	II	1.1402	0.4128
	III	0.6216	0.3245
6	I	1.2217	0.3887
	II	0.9686	0.3505
	III	0.5131	0.2756
7	I	0.5937	0.0000
	II	1.0944	0.3395
	III	0.8304	0.3011
	IV	0.4332	0.2381
8	I	1.1112	0.3162
	II	0.9754	0.2979
	III	0.7202	0.2621
	IV	0.3728	0.2087

Tabelle D.1: Filterparameter für BESSELTiefpässe

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zur Inneren und Äußeren Mechanik des Reifens	2
1.2	Das Elastische Kreisringmodell (7 Gürtelspuren)	7
1.3	Vom Kontinuum zum algebraischen Modell	9
2.1	Hierarchie der Diskretisierung nach der Verschiebungsmethode . .	12
2.2	Kordverstärkte Membran als Massepunktsystem	17
2.3	Seilelement mit konzentrierter Punktmasse	19
2.4	Zuordnung der Anisotropierichtungen im Gürtelreifen zu den Stäben	21
2.5	Membranmodell des Gürtelreifens als Massepunktsystem	22
2.6	Beispiele für verschieden feine Teilungsvarianten	26
2.7	Kraft durch Innendruck an einer doppelt gekrümmten Fläche . .	27
2.8	Knotenkräfte zufolge Innendruck	27
2.9	Prinzipieller Guertelaufbau	28
2.10	Reifen auf der Felge	29
2.11	Kräftepaare als Ersatz für die Biegemomente, Beispiel Querbiegung	32
2.12	Biegekräfte an den Knoten zufolge Belastung mit Innendruck . .	33
2.13	Kritische Dämpfungszahlen im Querschnitt	35
2.14	Beispiel für Parameterverteilung im Querschnitt	37
2.15	Biegesteifigkeiten beim Balken und Massepunktsystem	40
2.16	Zellfrequenz in der Reifenstruktur	42
2.17	Mittlerer Normalenvektor am Knoten A	47
2.18	Borsten als Sensorpunkte der Protektorschicht	48
2.19	Typische Form einer Reibungskennlinie	51
2.20	Viskos gedämpfter Stollen	54
2.21	Algorithmus zur Kontaktkraftberechnung	55
3.1	Eigenfrequenzen der Elemente im FE-Modell nach GERSCHGO- RIN und deren Abtastung	60
3.2	Elastisches, umlaufendes Pendel	61
3.3	Trapez-, Mittelpunktsregel und EMA, Drall und Energie bei $\Delta t=0.1$	
	68	

3.4	Trapez-, Mittelpunktsregel und EMA, Länge und Gesamtimpuls	69
3.5	Darstellung der Bewegung aller Methoden bei $\Delta t=0.1$	70
3.6	Finites Stabelement	72
3.7	Vergleichsdeformationen eines Querschnittes im Latsch	78
3.8	Zug-/ Druckversuch für einen Würfel aus KIRCHHOFFschem und MOONEY–RIVLIN-Material mit bei infinitesimalen Deformationen gleichem E-Modul	79
3.9	Snap-Through-Versuch für ein 3D-Kontinuum-Element mit KIRCHHOFFschem Material	80
3.10	Integral der elastischen Energie im Zeitschritt	87
3.11	MOONEY–RIVLIN-Parameter und E-Modul	94
3.12	Das quasiinkompressible 9-Knoten BRICK-Element	101
3.13	Projektionsgeometrie	105
4.1	Kompatible Topologie des Vielteilchen- und des FE-Modells	119
4.2	Kompatible Meshgeometrie, Teilansicht	120
4.3	Modifizierte Kugelkoordinaten und Kontaktsektor	125
5.1	PKW-Reifen 195/65R15	128
5.2	Pumpfiguren des Conti 195/65R15 Super Contact bei 1 bar und 5 bar Überdruck, jeweils 348 Laserabtastungen der Kontur	131
5.3	Mit Kohlepapier durchgeriebene Struktur eines Reifenquerschnittes	131
5.4	Kordlagen des 195/65R15 in einer Gleichgewichtskonfiguration	132
5.5	Gleichgewichtsfigur des 195/65R15 auf Felge 6J15	132
5.6	Geometrie der Abwicklung eines Kordes auf dem Gürtel	133
5.7	Eigenfrequenzen der Reifenstruktur nach Parameteroptimierung	137
5.8	Federkennlinie des Einschichtmodells	138
5.9	Abplattung an der Achse während des Rollvorganges	139
5.10	Geschwindigkeitsverlauf während des Rollvorganges	140
5.11	Felgenwinkel während des Rollvorganges	140
5.12	Kinetische Energie des Einschichtmodells bis zum stationären Rollen	141
5.13	Spektrum der Achskräfte bei stationärem Rollen mit $v = 40 \frac{km}{h}$	141
5.14	Gegenüber der Stollengriffsfrequenz doppelte Anregungsfrequenz durch den Polygoneffekt	142
5.15	Achskraft in Vertikal- (y-) Richtung bis zum stationären Rollen	143
5.16	Achskraft in Quer- (z-) Richtung bis zum stationären Rollen	144
5.17	Achskraft in Vorwärts- (x-) Richtung bis zum stationären Rollen	145
5.18	Wandernde Gleitgeschwindigkeit in Querrichtung beim stationären Rollen	148
5.19	Kontaktkräfte am Ende der statischen Abplattung	149

5.20	Kontaktkräfte am Ende der Rollstrecke mit Haftung	149
5.21	Darstellung eines Kontaktdurchlaufzyklus	150
5.22	Darstellung des stationären Kontaktes	152
5.23	Episoden der Rollbewegung	153
5.24	Birnenform des Latsches zufolge Schräglauf	154
5.25	Querdeformation eines Querschnittes im Latsch zufolge Schräglauf	154
5.26	Querdeformation des Reifens zufolge Schräglauf	155
5.27	Biegekräfte im Wulstbereich ohne Querdeformation	156
5.28	Biegekräfte in der Seitenwand mit Querdeformation	156
5.29	Biegekräfte im Latschbereich zufolge Einebnung nach statischer Abplattung	157
5.30	Typische Biegekräfte im Latschbereich zufolge Einebnung beim Rollen	158
5.31	Auflösung des Schichtverbandes in Volumenelemente und Seile .	159
5.32	Generische Querschnittsgeometrie des Schichtmodells	160
5.33	Historie von Innendruck und Abplattung	165
5.34	Historie der Bodengeschwindigkeit	165
5.35	Historie der Felgendrehung	165
5.36	Historie der Gesamtenergie des Mehrschichtmodells	166
5.37	Feld der Umfangsverschiebungen nach Aufpumpen	167
5.38	Querschnittskontur des Schichtmodells nach Aufpumpen	168
5.39	Verschiebungen des Schichtmodells nach Aufpumpen	169
5.40	Verschiebungsvektoren nach Aufpumpen	169
5.41	Kordspannungen des Schichtmodells nach Aufpumpen	170
5.42	Deformationen im Gummi des Schichtmodells nach Aufpumpen .	171
5.43	Reifen 196/65 R15 nach 1.5 cm Abplattung	172
5.44	Querschnittskonturen des Schichtmodells nach der Abplattung .	173
5.45	Äquatorverschiebungen nach dem statischen Abplatten	173
5.46	Verschiebungen des Schichtmodells nach der Abplattung	174
5.47	Verschiebungen des Schichtmodells nach der Abplattung	175
5.48	Verschiebungen des Schichtmodells nach der Abplattung	175
5.49	Kordspannungen nach der statischen Abplattung	176
5.50	Kordspannungen der Schichten nach Abplattung	176
5.51	Kordspannungen der Querschnitte nach Abplattung	177
5.52	Deformationen im Gummi des vordersten Querschnittes nach Abplattung	178
5.53	Deformationen im Gummi des hintersten Querschnittes nach Ab- plattung	179
5.54	Deformationen im Gummi des obersten Querschnittes nach Ab- plattung	180

5.55	Deformationen im Gummi des untersten Querschnittes nach Abplattung	181
5.56	Reifen 196/65 R15 beim instationären Rollen	182
5.57	Querschnittskonturen des Schichtmodells beim instationären Rollen	183
5.58	Äquatorverschiebungen beim instationären Rollen	184
5.59	Modalform eines Gürtelreifens	185
5.60	Gürtelwellen, Ansicht von vorne/oben/hinten beim instationären Rollen	185
5.61	Seitenwandschwingungen beim instationären Rollen	185
5.62	Radialverschiebungen des Schichtmodells beim instationären Rollen	186
5.63	Umfangsverschiebungen des Schichtmodells beim instationären Rollen	186
5.64	Querverschiebungen des Schichtmodells beim instationären Rollen	187
5.65	Radial- und Umfangsverschiebungen beim instationären Rollen .	187
5.66	Querverschiebungen beim instationären Rollen	188
5.67	Kordspannungen beim instationären Rollen	188
5.68	Kordspannungen der Querschnitte beim instationären Rollen . .	189
5.69	Kordspannungen der Schichten beim instationären Rollen	189
5.70	Deformationen im Gummi bei $\varphi = 0^\circ$ (vorne) und instationärem Rollen	190
5.71	Deformationen im Gummi bei $\varphi = 90^\circ$ (oben) und instationärem Rollen	191
5.72	Deformationen im Gummi bei $\varphi = 180^\circ$ (hinten) und instationärem Rollen	192
5.73	Deformationen im Gummi bei $\varphi = 270^\circ$ (Latschmitte) und instationärem Rollen	193
5.74	Reifen 196/65 R15 beim stationären Rollen mit $v_{Boden} = 40 \frac{km}{h}$.	195
5.75	Querschnittskonturen des Schichtmodells beim stationären Rollen	195
5.76	Äquatorverschiebungen beim stationären Rollen	196
5.77	Radialverschiebungen des Schichtmodells beim stationären Rollen	196
5.78	Umfangsverschiebungen des Schichtmodells beim stationären Rollen	197
5.79	Querverschiebungen des Schichtmodells beim stationären Rollen	197
5.80	Fehlende Seitenwandschwingungen beim stationären Rollen . . .	198
5.81	Gürtelwellen, Ansicht von vorne/oben/hinten beim stationären Rollen	198
5.82	Kordspannungen beim stationären Rollen	199
5.83	Kordspannungen der Querschnitte beim stationären Rollen . . .	199
5.84	Kordspannungen der Schichten beim stationären Rollen	200

5.85	Druckspannungen in den Karkaßkorden bei Schräglauf	200
A.1	Setup des Zug-/Druck-Vergleiches	206
A.2	Elementvergleich für statischen Zug-Druck-Versuch	206
A.3	Setup des Schub-Vergleiches	207
A.4	Elementvergleich für statischen Schub-Versuch	207
A.5	MARC-Fehler bei der Zeitintegration des Druckes	208
A.6	Elementvergleich für dynamischen Zug-Druck-Versuch	209
A.7	Elementvergleich für dynamischen Schub-Versuch	210
B.1	Randintegral über isoparametrische Linien	213
B.2	Das 8-Knoten Volumenelement	219
B.3	Das 6-Knoten Volumenelement	220

Tabellenverzeichnis

2.1	Parametersatz eines Kreisringmodells	36
2.2	Formelzeichen zum Kontaktalgorithmus	49
5.1	Koordinaten des generischen Querschnittes des Einschichtmodells	135
5.2	Parametersatz des Vierteilchenmodells	136
5.3	Koordinaten des generischen Querschnittes des FE-Schichtmodells	161
5.4	Modelldimensionen des FE-195/65 R15-Modells	162
5.5	E-Moduli der Gummimischungen eines typischen 195/65 R15 . .	162
5.6	Kordparameter eines typischen 195/65 R15	162
5.7	Dämpfungen im verwendeten Reifenmodell des 195/65 R15 . . .	164
5.8	Historie des FE-Rechenlaufes	167
B.1	Formfunktionen des 8-Knoten Brick-Elementes	219
B.2	Integrationsvorschrift des 8-Knoten Brick-Elementes	220
B.3	Formfunktionen des 6-Knoten Penta-Elementes	221
B.4	Integrationsvorschrift des 6-Knoten Penta-Elementes	221
D.1	Filterparameter für BESSELtiefpässe	231

Symbolverzeichnis

Symbole mit kleinen arabischen Buchstaben

b	Gürtelbreite [36] ¹
$A_{c_l}^b$	Steifigkeit der Membranstruktur an Knoten „A“ gegenüber Längsbiegung [31]
$A_{c_q}^b$	Steifigkeit der Membranstruktur an Knoten „A“ gegenüber Querbiegung [31]
r_c	Stab- bzw. Seilsteifigkeit [35]
A_{c_n}	Kontaktsteifigkeit in Normalenrichtung am Knoten „A“ gegenüber Querbiegung [54]
$\underline{\underline{e}}_T$	Matrix der tangentialen Kontaktsteifigkeiten [49]
$\overset{A}{\underset{t}{e}}_n$	Vektor der Mittleren Normalen am Knoten „A“ z.Z. „t“ [32]
$\underline{e}_{\langle \dots \rangle}$	Einheitsvektor, Bedeutungen von $\langle \dots \rangle$ s. unter „Koordinatensysteme und Einheitsvektoren“ auf Seite 245
$\overset{A}{\underset{t}{f}}^{int} = \overset{A}{\underset{t}{f}}_i^{int} \underline{e}_i$	arbeitskonforme spezifische Spannungskräfte am Knoten „A“ z.Z. „t“, die aus Werkstoffgesetzen zufolge von Deformation oder Deformationsgeschwindigkeit des Kontinuums entstehen [90]
$\underset{t}{f}^{ext} = \underset{t}{f}_i^{ext} \underline{e}_i$	Feld der spezifischen, auf ein differentielles Volumenelement wirkenden äußeren Lasten [75]
$\overset{A}{\underset{t}{f}}^{ext} = \overset{A}{\underset{t}{f}}_i^{ext} \underline{e}_i$	arbeitskonforme spezifische Knotenkräfte am Knoten „A“ z.Z. „t“ zufolge von äußeren Lasten [91]
\mathbf{g}	Zielfunktion für Durchstoßungspunkt [126]
$\overset{A}{h}$	spannungsfreier Abstand zwischen Stollen-(Sensor-)punkt und dem zugehörigen Führungspunkt im Gürtel [47]
i, j, k, l, m, n	ganzzahliger Zählindex, meist von 1..3
p, q, r, s, t	
$iter$	Iterationszähler
i_{Gauss}, i_G	Zähler des GAUSSpunktes
i_{node}	Zähler des aktuellen Knotens
i_{rod}, i_{elem}	Zähler des aktuellen Stabes bzw. Elementes

¹Die Zahlen in eckigen Klammern kennzeichnen die Seite des ersten Auftretens des beschriebenen Symbols.

k_a	radiale Bettungsziffer des Gürtels [36]
k_τ	Schubbettungsziffer des Gürtels [36]
Ak_n	Kontaktnormalendämpfung der Lauffläche am Knoten „A“ [54]
m	Masse [35], [73]
\underline{m}	Massenmatrix in Diagonalform [18]
$n_{\langle \cdot \rangle}$	Anzahl von $\langle \cdot \rangle$, z.B. Knoten, Elemente, Iterationen und Zeitschritte für n_{node} , n_{elem} , n_{iter} und n_{step}
p_0	statischer Reifeninnenüberdruck [36]
${}_t\mathbf{p} = {}_t\varrho \cdot {}_t\mathbf{v}$	Feld der kanonischen Impulse [62]
${}_t^A\mathbf{q}$	Ortsvektor zu einem Stab- bzw. Seilknotenpunkt „A“ z.Z. „t“ [73]
r	Dämpfungsbeiwert [113]
r_1, r_2, \dots, r_8	Stabrichtungsindices in der Membranstruktur [31]
${}^P\mathbf{r}$	Ortsvektor zum Angriffspunkt der Kontaktkraft [126]
s	Weg oder Koordinate in Elementlängsrichtung [62]
t	Zeit [13]
${}_nt, {}_{n+1}t$	Zeitpunkte zum Anfang und zum Ende des betrachteten Zeitschrittes [65]
$t_{\langle \cdot \rangle}$	Dicke von $\langle \cdot \rangle$ [38], [136]
${}_t\bar{\mathbf{t}}$	auf den deformierten Rand wirkende verteilte Last z.Z. „t“, bezogen auf die Referenzkonfiguration [83]
${}_t\mathbf{u}$	Verschiebungsfeld z.Z. „t“ [81]
${}_t^A\mathbf{u}$	Verschiebung an Knoten „A“ z.Z. „t“ [73]
$\Delta\mathbf{u}$	Änderung des Verschiebungsfeldes [75]
$\Delta^A\mathbf{u}$	Änderung der Verschiebung an Knoten „A“ [75]
u, v, w	Komponenten der Verschiebung eines Punktes des Reifentorus in radialer, Umfangs- und Querrichtung
${}_t\mathbf{v} = {}_t\dot{\boldsymbol{\varphi}}$	Geschwindigkeitsfeld z.Z. „t“ [62]
${}_t^A\mathbf{v}$	Geschwindigkeit an Knoten „A“ z.Z. „t“ [63]
\mathbf{v}_g	Gleitgeschwindigkeit, Vektor in der momentanen Gleitebene [51]
v_{stick}	Grenze der Relativgeschwindigkeit für die Gleitbedingung [55]
w	spezifische Deformationsenergie [82]
$w^{iso} = w^{dev}$	spezifische Deformationsenergie zufolge isochorer Deformation [95]
w^{vol}	spezifische Deformationsenergie zufolge volumetrischer Deformation bzw. Volumendilatation [95]
w^{diss}	lokale Dissipationsarbeit [115]
${}^{iG}w_k$	Integrationsgewicht des GAUSSpunktes „iG“ bzgl. Richtung „k“ [220]
y_p	Penetration [54]
${}_t\mathbf{z}$	linearer Phasenraum [82]

Symbole mit großen arabischen Buchstaben

$\mathbf{1} = \delta_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j$	Einheitstensor zweiter Stufe [96]
A	Querschnittsfläche [36]
${}_0A$	Querschnittsfläche in der spannungsfreien Referenzkonfiguration [72]
$A, B, C, Q, ..$	Knotenindices
\mathcal{B}	Gebiet [81]
${}_t\mathbb{B} = {}_tB_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j$	Linker CAUCHY–GREENScher Deformationstensor z.Z. „t“ [82]
$2B$	Gürtelbreite [133]
C_1, C_2 oder C_{10}, C_{01}	MOONEY–RIVLINSche Materialparameter [93]
${}_t\mathbb{C} = {}_tC_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j$	Rechter CAUCHY–GREENScher Deformationstensor z.Z. „t“ [82]
${}_t\mathbb{C}^{dev}$	deviatorischer bzw. isochorer Anteil von ${}_t\bar{\mathbb{C}}$ [96]
${}_t\mathbb{C}^{vol}$	volumetrischer bzw. Dilatationsanteil von ${}_t\bar{\mathbb{C}}$ [96]
${}_t\bar{\mathbb{C}}$	multiplikatorisch zerlegter bzw. modifizierter Rechter CAUCHY–GREENScher Deformationstensor z.Z. „t“ [96]
$\langle 4 \rangle$	
$\mathbb{C} = C_{ijkl} \underline{e}_i \underline{e}_j \underline{e}_k \underline{e}_l$	Werkstofftetraeder des ST.-VENANT-KIRCHHOFFschen bzw. Kappusschen Materialgesetzes [82]
D_k	LEHRsche Dämpfung der k ten Biegeeigenform [36]
${}^rD_{krit}$	kritische LEHRsche Dämpfung des Stabes bzw. Seiles [35]
$\mathbf{D}^{[A]N} = {}^AN_{,j} \underline{e}_j$	Gradientenvektor der Formfunktion AN [90]
$\underline{\underline{D}}$	modale Dämpfungsmatrix [113]
\mathbb{D}	Deformationsgeschwindigkeitstensor [114]
E	E-Modul [36]
EA	Dehnsteifigkeit des Gürtels [19]
EI_y	Biegesteifigkeit des Gürtels bzgl. Längsbiegung [36]
EI_x	Biegesteifigkeit des Gürtels bzgl. Querbiegung [36]
${}_t\mathbb{E} = {}_tE \underline{e}_i \underline{e}_j = {}_t\mathbb{G}$	GREEN–LAGRANGEScher Deformationstensor [82]
${}_t\mathbb{F}$	Deformationsgradient z.Z. „t“ [81]
${}_t\vec{F}^{ext}$	Knotenkraft zufolge externer Lasten z.Z. „t“ [13]
${}^A_t\mathbf{F}^{Diss} = \int_{\mathcal{B}} {}^A_t\mathbf{f}^{Diss} d\mathcal{B}$ $= {}^A_tF_i^{Diss} \underline{e}_i$	Knotenkraft zufolge viskoser Spannungen am Knoten „A“ z.Z. „t“ [75]
${}^A_t\mathbf{F}^{dyn} = \int_{\mathcal{B}} {}^A_t\mathbf{f}^{dyn} d\mathcal{B}$ $= {}^A_tF_i^{dyn} \underline{e}_i$	Knotenkraft zufolge Trägheitswirkung am Knoten „A“ z.Z. „t“ [91]

${}^A_t\mathbf{F}^{ext} = \int_B {}^A_t\mathbf{f}^{ext} d\mathcal{B}$ $= {}^A_t\mathbf{F}_i^{ext} \underline{\mathbf{e}}_i$	Knotenkraft zufolge externer Lasten am Knoten „A“ z.Z. „t“ [13], [75]
${}^A_t\mathbf{F}^{elast} = \int_B {}^A_t\mathbf{f}^{elast} d\mathcal{B}$ $= {}^A_t\mathbf{F}_i^{elast} \underline{\mathbf{e}}_i$	Knotenkraft zufolge elastischer Spannungen am Knoten „A“ z.Z. „t“ [19]
${}^A_t\mathbf{F}^{int} = \int_B {}^A_t\mathbf{f}^{int} d\mathcal{B}$ $= {}^A_t\mathbf{F}_i^{int} \underline{\mathbf{e}}_i$	Knotenkraft zufolge von Spannungen aus Materialgesetzen am Knoten „A“ z.Z. „t“ [13], [90]
${}_t\dot{\mathbb{F}}$	materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten z.Z. „t“ [115]
F_N	Betrag der Seil- bzw. Stablängskraft [74]
F_N	Normalkraft im Kontakt [49]
${}^A\mathbf{F}_q^L$	Querbiegekraft in Umfangsrichtung links vom Knoten „A“ zufolge von ${}^A\vec{M}_q$ (s. dort) [32]
${}^A\mathbf{F}_q^R$	Querbiegekraft in Umfangsrichtung rechts vom Knoten „A“ zufolge von ${}^A\vec{M}_q$ (s. dort) [32]
${}^A\mathbf{F}_q$	Querbiegekraft am Knoten „A“ zufolge von ${}^A\vec{M}_q$ (s. dort) [32]
${}^A\mathbf{F}_l^V$	Längsbiegekraft in Umfangsrichtung vor dem Knoten „A“ zufolge von ${}^A\vec{M}_l$ (s. dort) [32]
${}^A\mathbf{F}_l^H$	Längsbiegekraft in Umfangsrichtung nach dem Knoten „A“ zufolge von ${}^A\vec{M}_l$ (s. dort) [32]
${}^A\mathbf{F}_l$	Längsbiegekraft am Knoten „A“ zufolge von ${}^A\vec{M}_l$ (s. dort) [32]
\vec{F}_T	Tangential- bzw. Querkraft im Kontakt [49]
GI_t	Torsionssteifigkeit des Gürtels [36]
${}_t\mathbb{G} = {}_tG \underline{\mathbf{e}}_i \underline{\mathbf{e}}_j = {}_t\mathbb{E}$	GREEN-LAGRANGEScher Deformationstensor z.Z. „t“ (s. unter \mathbb{E})
${}_t\mathcal{H}$	HAMILTONsche, Energiefunktional z.Z. „t“ [62]
${}^{ab}\hat{\underline{\underline{\mathbf{H}}}}$	Interpolationsmatrix [102]
\mathbb{I}	Einheitstensor 2. Stufe [81] (s. auch $\mathbf{1}$)
$\langle{}^4\rangle$	Einheitstensor 4. Stufe, Einheitstetrade [97]
$\langle{}^4_T\rangle$	Transponierer [83]
${}_tJ = \mathbb{I}_{{}_t\mathbb{F}}$	JACOBI-determinante [95]
${}_t\mathbf{J}$	Drallvektor z.Z. „t“ [86]
J_{Rim}	Massenträgheitsmoment der Felge um die Radachse [139]
${}_t\mathbb{J}$	JACOBIMatrix der Koordinatentransformation in den isoparametrischen Raum [112], [217]

${}_t\underline{\underline{\mathbf{K}}} = {}_tK_{ij}\underline{\mathbf{e}}_i\underline{\mathbf{e}}_j$	JACOBI-matrix der Kräfte z.Z. „t“ bzgl. der Verschiebungen z.Z. „t“ [13]
${}^{AB}{}_t\mathbf{K}^{<\Upsilon>} = \int_{{}_t\mathcal{B}} {}^{AB}{}_t\mathbf{k}^{<\Upsilon>} d\mathcal{B}$ $= {}^{AB}{}_tK_{ij}^{<\Upsilon>} \underline{\mathbf{e}}_i\underline{\mathbf{e}}_j$	der Teil der JACOBI-matrix einer Knotenkraft mit der physikalischen Bedeutung $<\Upsilon>$, welcher nach Multiplikation mit einer Verschiebung am Knoten „B“ die Kraftwirkung dieser Verschiebung am Knoten „A“ z.Z. „t“ ergibt. Damit ein Teil der Matrizengleichung $\sum_{B=1} n_{node} {}^{AB}K \cdot \Delta^B \mathbf{u} = \Delta^A \mathbf{F}$. Der Platzhalter $<\Upsilon>$ steht z.B. für <i>int, ext, zwang, phys, geom, Diss</i> usw. [91]
${}_t\mathbf{L} = \int_{{}_t\mathcal{B}} {}_t\varrho_t \mathbf{v} d\mathcal{B}$	Impuls z.Z. „t“ [85]
${}_tL$	Länge z.Z. „t“ [19]
${}_0L$	Länge z.Z. „t=0“, spannungslose Länge [19]
${}_t\mathcal{L}$	LAGRANGESche, Energiefunktional z.Z. „t“ [73]
${}^A\vec{M}_q$	Reaktionsmoment der Reifenstruktur auf Biegung um die Querachse am Knoten „A“ [31]
${}^A\vec{M}_l$	Reaktionsmoment der Reifenstruktur auf Biegung um die Längsachse am Knoten „A“ [31]
$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = [{}^{AB}M]$	arbeitskonforme Massenmatrix zur Berechnung der Trägheitswirkung von verteilten Massen auf die dynamischen Knotenkräfte [91]
AN	Formfunktion am Knoten „A“ des Elementes zur Interpolation der kontinuierlichen Felder, damit Approximation der kontinuierlichen Felder durch diskrete Felder, die durch Stützpunkte an den Knoten „A“ dargestellt werden [62], [219], [221]
\mathcal{Q}	Mannigfaltigkeit der möglichen Konfigurationen während einer Bewegung [81]
R	Radius [134]
\bar{R}	Gürtelradius [36]
\mathbb{R}^n	Vektorraum der Ordnung „n“, es kommen $n = 1, 2, 3, 6$ vor [81]
${}_t\mathbb{S} = {}_tS_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i\underline{\mathbf{e}}_j$	2.PIOLA-KIRCHHOFFscher bzw. KAPPUSScher Spannungstensor z.Z. „t“ [83]
${}_t\mathbb{S}^{elast}$	2.PIOLA-KIRCHHOFFscher elastischer Spannungstensor z.Z. „t“ [98]
${}_t\mathbb{S}^Z, {}_t\mathbb{S}^{Zwang}$	2.PIOLA-KIRCHHOFFscher Zwangsspannungstensor z.Z. „t“ [98]
${}_t\mathbb{S}^{Diss}$	2.PIOLA-KIRCHHOFFscher Dissipationsspannungstensor z.Z. „t“ [115]

T_0	Gürtelvorspannung, z.B. zufolge von Innendruck [36]
T	kinetische bzw. Bewegungsenergie [62]
T_{rot}	Periodendauer der Rotationsbewegung [67]
T	Zeitpunkt für das Kräftegleichgewicht, in der Dynamik gilt $T \in [{}_n t, {}_{n+1} t]$, in der Statik gilt $T = {}_{n+1} t$ [73]
${}_0 V$	Volumen in der Referenzkonfiguration [102]
${}_t V$	Potential z.Z. „t“ [62]
${}_t V^{int}$	Potential der inneren, konservativen Kräfte z.Z. „t“ [83]
${}_t V^Z, {}_t V^{Zwang}$	Potential der Zwangsspannungen z.Z. „t“ [98]
${}_t W^{ext}$	Arbeit der äußeren Lasten z.Z. „t“ [83]
\mathbf{X}	Feld der materiellen Koordinaten, Koordinaten eines beliebigen aber festen Punktes des Kontinuums bzgl. der Referenzkonfiguration [13]
${}_0 \mathbf{X}$	Feld der Ortsvektoren zu den materiellen Punkten in der Referenzkonfiguration, in dieser Arbeit gilt $\mathbf{X} = {}_0 \mathbf{X}$ [18]
${}_t \mathbf{X}$	Feld der Ortsvektoren zu den materiellen Punkten z.Z. „t“, in dieser Arbeit gilt ${}_t \mathbf{X} = {}_0 \mathbf{X} + {}_t \mathbf{u}$ [13]
${}_t^A \mathbf{X}$	diskreter Ortsvektor zum Knotenpunkt „A“ z.Z. „t“ [18]
${}_t \dot{\mathbf{X}}$	materielles, absolutes Geschwindigkeitsfeld z.Z. „t“ [13]
${}_t^A \dot{\mathbf{X}}$	materielle, absolute Geschwindigkeit des Knotenpunktes „A“ z.Z. „t“ [18]
$\mathbf{X}^{(P)}(t)$	Prädiktor für Ortsvektor zum Punkt „A“ für die Zeit „t“, analog $\dot{\mathbf{X}}^{(P)}(t)$ und $\ddot{\mathbf{X}}^{(P)}(t)$ [42]
${}_t^B \vec{\mathbf{X}}$	Ortsvektor zum Bodenpunkt „B“ z.Z. „t“ [49]
${}_t^P \vec{\mathbf{X}}^A$	Ortsvektor zum unbelasteten Sensorpunkt „P“ an Knoten „A“ z.Z. „t“ [47]
${}_t^B \vec{\mathbf{X}}_T$	in die momentane Kontaktebene projizierter Ortsvektor ${}_t^B \vec{\mathbf{X}}$ (s. dort) [49]
${}_t^P \vec{\mathbf{X}}_T$	in die momentane Kontaktebene projizierter Ortsvektor ${}_t^P \vec{\mathbf{X}}$ (s. dort) [49]
${}_t \mathcal{Z}$	Konfiguration z.Z. „t“ als Gesamtheit des Orts- und Geschwindigkeitsfeldes aller materiellen Punkte z.Z. „t“ [13]
$\Delta \mathcal{Z}$	endliche Änderung der Konfiguration [14]

Symbole mit griechischen Buchstaben

α	Projektionsparameter für Zwangsspannungen [99]
β	Kordlagenwinkel im Gürtel, gemessen gegenüber der Äquatortorrichtung [20]
β_1, β_2	Projektionsparameter für externe Lasten [99]
${}^A\gamma_t$	Biegewinkel für Gürtel-Längsbiegung [31]
δ	Schräglaufwinkel [139]
$\delta\Upsilon$	Variation der Größe Υ
δ_A^B, δ_{ij}	KRONECKERSymbol [19]
ξ, η, ζ	Koordinaten im isoparametrischen Raum [215]
${}_t\theta^2$	Dilatationsfeld z.Z. „t“. Es wird stets das Quadrat der Volumendilatation $\theta = {}_tJ = \text{III}_{{}_t\mathbb{F}}$ verwendet, wegen ${}_t\theta^2 = \text{III}_{{}_t\mathbb{C}} = \text{III}_{{}_t\mathbb{F}}^2$. [96]
λ, μ	LAMÈsche Konstanten [82]
${}_t\lambda$	Feld der LAGRANGESchen Multiplikatoren zur Einhaltung von Zwangsbedingungen z.Z. „t“ [96]
μ	Viskosität [114]
μ	Reibungsbeiwert [51]
μ_H, μ_G	Reibungsbeiwert bei Haften und Gleiten [52]
ν	PÖISSONSche Zahl bzw. Querkontraktionszahl [80]
ξ	beliebiges, konstantes Vektorfeld [86]
$\underline{\xi}$	beliebiges, konstantes Drehmatrizenfeld [86]
ϱ	Massendichte [62]
${}_t\sigma^{Diss}$	räumliche viskose Spannungen z.Z. „t“ [114]
τ	Projektionsparameter für die elastischen Spannungen [84]
φ	Umfangskoordinate [38]
${}_t\varphi = {}_t\varphi_i \underline{e}_i$	Ortsvektorenfeld z.Z. „t“, ${}_t\varphi = {}_t\mathbf{X}$ [81]
${}_t^A\varphi = {}_t^A\varphi_i \underline{e}_i$	Ortsvektoren der Knotenpunkte „A“ z.Z. „t“, es gilt ${}_t^A\varphi = {}_t^A\mathbf{X}$ [62]
${}_t\dot{\varphi} = {}_t\mathbf{v}$	Feld der absoluten Geschwindigkeiten, es gilt ${}_t\dot{\varphi} = {}_t\dot{\mathbf{X}}$ [63]
${}^A\psi_t$	Biegewinkel für Querbiegung am Knoten „A“ z.Z. „t“ [31]
ω	Eigenkreisfrequenz [113]
Γ	Rand eines Gebietes \mathcal{B} [81]
Γ_φ	der Teil des Randes Γ , für den die Verschiebungen vorgegeben sind [81]
Γ_σ	der Teil des Randes Γ , für den die Lasten vorgegeben sind [81]
Φ	Eigenvektor [113]
Ω	Elementdomäne, Integrationsgebiet [12]
Δt	Zeitschrittweite bzw. Zeitinkrement [13]

Verwendete Koordinatensysteme und Einheitsvektoren

\underline{e}_i	Einheitsvektor einer Orthonormalbasis in Richtung „ i “, $i = 1..3$
$\langle \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z \rangle$	karthesische Orthonormalbasis
$\langle \underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta \rangle$	orthonormale Basis des Elementes mit den isoparametrischen Koordinaten ξ, η, ζ [217]
$\langle \underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z \rangle$	orthonormale Basis der Reifentorus mit Radial-, Umfangs- und Querrichtung [21]
$\langle \underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_\vartheta \rangle$	orthonormales System der modifizierten Kugelkoordinaten [124]
\underline{e}_N	Einheitsvektor in Kontaktnormalenrichtung [49]
\underline{e}_T	Einheitsvektor in Tangentialrichtung des Kontaktes [49]
$\underline{e}_\xi, \underline{e}_s$	Einheitsvektor in Stablängsrichtung [19], [63], [72]
$\underline{e}_q, \underline{e}_l$	Richtungsvektoren für Biegemoment zufolge Quer- und Längsbiegung [31]

Indizierungsregeln

Alle Symbole werden nach Bedarf möglichst nach folgender Schreibweise indiziert:

- ${}^A\mathfrak{F}_i^{name}$: Komponente „ i “ der Größe \mathfrak{F} z.Z. „ t “ an Knoten „ A “ mit der physikalischen Unterbedeutung „ $name$ “
Wenn diese Vielzahl von Indices nicht benötigt wird, dann können die Indices der linken Seite auf die rechte wandern, wobei die linke dann meist nicht mehr belegt wird.
- \mathfrak{F}^h bedeutet, daß die kontinuierliche Feldgröße \mathfrak{F} nun durch ein interpoliertes Feld approximiert wird mit den Stützstellen (Knotenwerten) bzw. endlich vielen Freiheitsgraden ${}^A\mathfrak{F}$ und den Formfunktionen ${}^AN(\mathbf{X})$ nach

$$\mathfrak{F}^h(\mathbf{X}) = \sum_{A=1}^{n_{node}} {}^AN(\mathbf{X}) {}^A\mathfrak{F}$$

Der Index „ h “ wird weggelassen, wenn der Übergang vom kontinuierlichen Feld auf das endlichdimensionale, interpolierte Feld insgesamt vollzogen wurde.

Operatoren

$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Skalarprodukt zwischen vektor- oder tensorwertigen Größen \underline{a} und \underline{b}
$\underline{a} \circ \underline{b}$ oder $\underline{a} \underline{b}$	tensorielles Produkt zwischen vektor- oder tensorwertigen Größen \underline{a} und \underline{b}
$\underline{a} \times \underline{b}$	Kreuzprodukt zwischen den Vektoren \underline{a} und \underline{b}
$\Delta \mathfrak{F}$	Änderung der Größe \mathfrak{F}
$\overset{(\uparrow)}{\nabla_{\mathfrak{F}}} \circ \dots \overset{(\downarrow)}{\mathfrak{F}} \dots = \dots \frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial \mathfrak{F}_j} \dots \underline{e}_i \underline{e}_j$	Gradient der Größe \mathfrak{F} bzgl. \mathfrak{F} . Das Ergebnis ist vektor- oder tensorwertig, je nach Wertigkeit der Eingangsgrößen. Bei Eindeutigkeit werden die Pfeile weggelassen.
$I_{\mathbb{A}}$	erste Invariante des Tensors (2. Stufe) „ \mathbb{A} “
$II_{\mathbb{A}}$	zweite Invariante des Tensors „ \mathbb{A} “
$III_{\mathbb{A}}$	dritte Invariante des Tensors „ \mathbb{A} “
\mathcal{I}	Integral
$\mathcal{L}\{\dots\}$	LAPLACetransformation von „ $\{\dots\}$ “

Literaturverzeichnis

- [Bannwitz.95] Bannwitz, P. und Oertel, Ch.:
Adaptive Reifenmodelle: Aufbau, Anwendung und Parameterbestimmung, VDI Berichte, Nr. **1224**, **1995**
- [Bathe.90] Bathe, K.-J.:
Finite-Elemente-Methoden, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **1990**
- [Belkin.93] Belkin, A.E. und Tchernetsov, A.A.:
Strategy of analysing the stress-strain state of radial car tire by the non-linear theory of three-layerded shells Vestnik MG-TU, Ser. Mashinostroenie, Nr. **2**, in russisch, S.113–125, Moskau, **1993**
- [Bogert.91a] Bogert, P.A.J. van den, Borst, R., Luiten, G. and Zeilmaker, J.:
Robust Finite Elements for 3D-Analysis of Rubber-like Materials, Engineering computations Vol. **8**, 3–17, Pineridge Press **1991**
- [Bogert.91b] Bogert, P.A.J. van den:
Computational Modelling of Rubberlike Material Behavior, Dissertationsschrift, Delft University of Technology, **1991**
- [Bogert.94] Bogert, P.A.J. van den:
On the Behaviour of Rubberlike Materials in Compression and Shear, Archive of Applied Mechnics **64**, 136–146, Springer-Verlag **1994**
- [Böhm.66a] Böhm, F.:
Mechanik des Gürtelreifens, Ingenieurarchiv, **35.** Band, 2. Heft, 82–101, Springer-Verlag **1966**
- [Böhm.66b] Böhm, F.:
Zur Mechanik des Luftreifens, Habilitationsschrift, TH Stuttgart **1966**
- [Böhm.67] Böhm, F.:
Zur Statik und Dynamik des Gürtelreifens, ATZ, Jahrgang **69** Heft 8 **1967**

- [Böhm.78] Böhm, F.:
Computing and Measurements of the Handling Qualities of the Belted Tire Skriptum der Semperit AG, Wien **1978**
- [Böhm.85] Böhm, F., Duchow, A., Hahn, P.:
Beanspruchung und Verformung des Gürtelreifens unter Innendruck, Automobilindustrie **3**, 317–323, **1985**
- [Böhm.88] Böhm, F.:
Einfluß der Laufflächeneigenschaften von Gürtelreifen auf den instationären Rollkontakt, Kautschuk und Gummi, Kunststoffe, Jahrgang **41**, Heft 4/88, 359–365, Hüthig Verlag Heidelberg, **1988**
- [Böhm.89] Böhm, F., Swierczek, M. Csaki, G.:
Hochfrequente Rolldynamik des Gürtelreifens – das Kreisringmodell und seine Erweiterung, VDI-Fortschrittsberichte Reihe 12, Nr. **135**, VDI-Verlag **1989**
- [Böhm.90] Böhm, F.:
Elastodynamik der Fahrzeugbewegung, Beitrag zur Fahrzeugdynamik-Fachtagung, Essen, 19.-20. Februar **1990**
- [Böhm.93a] Böhm, F.:
Tire Models for Computational Car Dynamics in the Frequency Range up to 1000 Hz, Tyre Models for Vehicle Dynamics Analysis, Swets & Zeitlinger **1993**
- [Böhm.93b] Böhm, F.:
Dynamik technischer Reibungsvorgänge mit Anwendung auf den Luftreifen, Festschrift zum 65. Geburtstag Prof. Dr. Trostel, TU-Berlin, **1993**
- [Böhm.93c] Böhm, F.:
Reifenmodell für hochfrequente Rollvorgänge auf kurzwelligen Fahrbahnen, VDI-Berichte Nr. **1088**, 65–81, **1993**
- [Böhm.94a] Böhm, F.:
From Non-Holonomic Constraint Equation to Exact Transport Algorithm for Rolling Contact, Beitrag zur 4th Mini Conference on Vehicle System Dynamics Identification and Anomalies, TU-Budapest, **1994**
- [Böhm.94b] Böhm, F.:
Über die Wirkung von Hysterese und Kontaktreibung auf das dynamische und thermische Verhalten von Luftreifen Beitrag zur Deutschen Kautschuk-Tagung, Stuttgart, 27.-30.Juni **1994**

- [Böhm.96a] Böhm, F. und Zachow, D.:
3D-Reifenmodell für die Berechnung höherfrequenter Reifenschwingungen im allgemeinen Rollzustand, Beitrag zum NALS im DIN und VDI – Symposium „Innovative Ideen zur Minderung der Kraftfahrzeug-Rollgeräusche“, München **1996**
- [Böhm.96b] Böhm, F.:
Berechnung der Lastkollektive von Reifen, Achsen und Fahrbahn auf vorgegebenen Prüfstrecken, Beitrag zum Lehrgang „Reifentechnik“ im TAE-Weiterbildungszentrum Nov. **1996**
- [Böhm.97a] Böhm, F.:
On the Roots of Tire Mechanics, Vehicle System Dynamics Supplement **27**, 303–317, Swets & Zeitlinger **1997**
- [Böhm.99] Böhm, F.:
Material characterisation of tire structure used in explicit time integration of differential equations of the rolling process Proceedings of the First European Conference on Constitutive Models for Rubber, Wien, 9.-10. September 1999, published in „Constitutive Models for Rubber“, Dorfmann & Muhr (eds), Balkema/Rotterdam/Brookfield **1999**
- [Dankert] Dankert, J.:
Numerische Methoden der Mechanik, Springer Verlag
- [Feng.91] Feng, K.:
Einfluß der viskoelastischen Eigenschaften des Reifenprotectors auf den Rollkontakt, ZAMM · Z. angew. Math. Mech., Vol. **74**, No. 4, 249–251, Akademie Verlag **1991**
- [Feng.94] Feng, K.:
Statische Berechnung des Gürtelreifens unter besonderer Berücksichtigung der kordverstärkten Lagen, Fortschrittsberichte VDI, Reihe 12, Nr. 258, VDI Verlag, Berlin **1994**
- [Flügge.65] Truesdell C. and Noll, W.:
The Nonlinear Field Theories of Mechanics, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik Bd. III/3 Springer-Verlag, Berlin **1965**
- [Gall.95] Gall, R., Tabaddor, F., Robbins, D., Majors, P., Sheperd, W. and Johnson, S.:
Some Notes on the Finite Element Analysis of Tires, Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. 23, No. 3, 175–188, July–September **1995**
- [Gallrein.92] Gallrein, A.:
Berechnung hochfrequenter Stollendynamik am Gürtelreifen, Diplomarbeit am 1. Institut für Mechanik an der TU–Berlin **1992**

- [Gipser.87] Gipser, M.:
DNS-Tire – ein dynamisches, räumliches, nichtlineares Reifenmodell Reifen, Fahrwerk, Fahrbahn, VDI-Berichte Nr. 650, Düsseldorf, VDI-Verlag **1987**
- [Gonzales.95a] Gonzales, O.:
Time Integration and Diskrete HAMILTONian Systems, Journal of Nonlinear Science **6**, 449–467, **1995**
- [Gonzales.95b] Gonzales, O. and Simo, J.C.:
Exact Energy-Momentum Conserving Algorithms for General Models in Nonlinear Elasticity, **1996**
- [Gonzales.96a] Gonzales, O. and Simo, J.C.:
On the Stability of Symplectic and Energy-Momentum Algorithms for Nonlinear HAMILTONian Systems with Symmetry, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **134**, 197–222, **1996**
- [Gonzales.96b] Gonzales, O.:
Mechanical Systems Subject to Holonomic Constraints: Differential-Algebraic Formulations and Conservative Integration, Physica D , **1996**
- [Green.60] Green, A.E. and Adkins, J.E.:
Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics, Oxford at the Clarendon Press, **1960**
- [Gummert.96] Gummert, P.:
Materialtheorie, Skript zur Vorlesung „Materialtheorie“ im Sommersem. 96, TU-Berlin, **1996**
- [Hammer.58] Hammer, P. and Stroud, A.:
Numerical Evaluation of Multiple Integrals, Mathematical Tables and Other Aids to Computaion, Vol. **12**, 272–280, National Academy of Science – National Research Council (U.S.A.) **1958**
- [Hughes.78] Hughes, T.J. and Pister, K.S.:
Consistent Linearization in Mechanics of Solids and Structures, Computers and structures, Vol. 8, 391–397, Pergamon Press **1978**
- [Kaliske.95] Kaliske, M.:
Zur Theorie und Numerik von Polymerstrukturen unter statischen und dynamischen Einwirkungen, in H. Rothert (ed.) Mitteilungen des Instituts für Statik der Universität Hannover, 41–95, **1995**

- [Kamoulakos.98] Kamoulakos, A. and Kao, B. G.:
Transient Dynamics of a Tire Rolling over Small Obstacles – A Finite Element Approach with Pam-Shock, Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. 26, No. 2, 84–108, April–June **1998**
- [Kao.97] Kao, B.G. and Muthukrishnan, M.:
Tire Transient Analysis with an Explicit Finite Element Program, Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. 25, No. 4, 230–244, October–December **1997**
- [Kennedy.87] Kennedy, R. and Padovan, J.:
Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/-Rolling Nonlinear Viscoelastic Structure – II. Shell and Three Dimensional Simulations, Computers and Structures, Vol. **27**, 259–273, Pergamon Press **1987**
- [Klingbeil.89] Klingbeil, E.:
Tensorrechnung für Ingenieure, BI-Hochschultaschenbücher; Band **197**, 2. überarb. Aufl., BI-Wiss-Verlag, Zürich **1989**
- [Kmoch.92] Kmoch, K.:
Meßtechnische Methoden zur Bewertung dynamischer Reifeneigenschaften, Dissertationsschrift am Fachbereich Physikalische Ingenieurwissenschaften der TU-Berlin **1992**
- [Koishi.98] Koishi, M., Kabe, K. and Shiratori, M.:
Tire Cornering Simulation Using an Explicit Finite Element Analysis Code, Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. 26, No. 2, 109–119, April–June **1998**
- [Masenger.90] Masenger, U.:
Zur Rolldynamik von AS-Reifen auf der Straße ZAMM **70** 4, S. 92–95, **1990**
- [Miehe.94] Miehe, C.:
Aspects of the Formulation and Finite Element Implementation of Large Strain Isotropic Elasticity, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. **37**, 1981–2004, John Wiley & Sons Ltd. **1994**
- [Mousseau.94] Mousseau, C.W. and Clark, S.K.:
An Analytical and Experimental Study of a Tire Rolling Over a Stepped Obstacle at Low Velocity, Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. 22, No. 3, 162–181, July–September **1994**
- [Nakajima.86] Nakajima, Y. and Padovan, J.:
Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/Rolling Nonlinear Viscoelastic Structure – III. Impact/Contact Simulations, Computers and Structures, Vol. **27**, No. 2, 275–286, Pergamon Press **1987**

- [Oertel.90] Oertel, Ch.:
Untersuchung von Stick-Slip-Effekten am Gürtelreifen Fortschrittsberichte VDI, Reihe 12, Nr. 147, VDI Verlag, Düsseldorf **1990**
- [Padovan.84] Padovan, J., Tovichakchaikul, S. and Zeid, I.:
Finite Element Analysis of Steadily Moving Contact Fields, Computers and Structures, Vol. **18**, No. 2, 191–199, Pergamon Press **1984**
- [Pelle.93] Pelle, R.G.:
FEM Simulation of the Tire/Rim Seating Process, Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. **22**, No. 2, 76–98, **1994**
- [Priss.91] Priss, L.S. and Shumskaya, A.G.:
Elastic Properties and Mechanical Losses in Rubbers in Complex Stress States, Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. **19**, No. 2, 100–112, **1991**
- [Rhyne.93] Rhyne, T.B., Gall, R and Chang, L.Y.:
Influence of Rim Run-Out on the Nonuniformity of Tire-Wheel Assemblies Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. **22**, No. 2, 99–120, **1994**
- [SchlippeDietrich] Schlippe, B. von and Dietrich, R.:
Das Flattern eines bepneuten Rades, Bericht 140 der Lilienthal-Gesellschaft **1941**
- [Schwarz.91a] Schwarz, H.R.:
Methode der Finiten Elemente, 3. Aufl., Teubner Verlag Stuttgart **1991**
- [Schwarz.91b] Schwarz, H.R.:
FORTTRAN-Programme zur Methode der Finiten Elemente, 3. Aufl., Teubner Verlag Stuttgart **1991**
- [Schwarz.93] Schwarz, H.R.:
Numerische Mathematik, 3. Aufl., Teubner Verlag Stuttgart **1993**
- [Sfb181.A1] Böhm, F., Eichler, M., Kmoch, K., Oertel, Ch., Szefer, G.:
Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugräder, Teilprojekt A1: Hochfrequente Kontaktkräfte bei vorgegebener Führungsbewegung des Gürtelreifens Forschungsbericht 2. Halbjahr 1988–1. Halbjahr 1991 des Sonderforschungsbereiches, S. A1–1 – A1–80, Technische Universität Berlin **1991**
- [Sfb181.B1] Böhm, F., Bruno, A., Csaki, G., Eichler, M., Fünten, M. aus der, Klei, J., Kmoch, K., Masenger, U., Gallrein, A., Swierczek, M.:

- Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugräder,*
Teilprojekt B1: Gürteldynamik zufolge Bodenwellen im Fre-
quenzbereich bis einige 100 Hz Forschungsbericht 2. Halbjahr
 1988–1. Halbjahr 1991 des Sonderforschungsbereiches, S. B1–
 1 – B1–119, Technische Universität Berlin **1991**
- [Sfb181.B2] Heckl, M., Kropp, W.:
Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugräder,
Teilprojekt B2: Bewegungsverlauf von Reifenstollen in der
Kontaktzone und deren Umgebung im Bereich 100–3000 Hz
 Forschungsbericht 2. Halbjahr 1988–1. Halbjahr 1991 des Son-
 derforschungsbereiches, S. B2–1 – B2–73, Technische Univer-
 sität Berlin **1991**
- [Simo.84] Simo, J.C., Taylor, R.L. and Pister, K.S.:
Variational and Projection Methods for the Volume Con-
straint in Finite Deformation Elasto-plasticity, Computer meth-
 ods in applied mechanics and engineering, **51**, **1985**, 177–
 208, North-Holland
- [Simo.91a] Simo, J.C. and Taylor, R.L.:
Quasi-Incompressible Finite Elasticity in Principal Stretches.
Continuum Basis and Numerical Algorithms, Computer meth-
 ods in applied mechanics and engineering, **85**, **1991**, 273–
 310, North-Holland
- [Simo.91b] Simo, J.C. and Wong, K.K.:
Unconditionally Stable Algorithms for Rigid Body Dynamics
that Exactly Preserve Energy and Momentum, International
 Journal of Numerical Methods in Engineering, **1991**, **31**, 19–
 52
- [Simo.92] Simo, J.C. and Tarnow, N.:
The Discrete Energy Momentum Method. Conserving Algo-
rithms for Nonlinear Elastodynamics, Zeitschrift für angew.
 Mathematik und Physik ZAMP, Vol. **43**, 757–793, Birkhäuser
 Verlag Basel **1992**
- [Simo.93b] Simo, J.C. and Gonzales, O.:
Assesment of Energy-Momentum and Symplectic Schemes for
Stiff Dynamical Systems, Americam Society of Mechanical En-
 gineers, ASME Winter Annual Meeting, New Orleans, **1993**
- [Simo.94] Simo, J.C. and Tarnow, N.:
A New Energy and Momentum Conserving Algorithm for
Nonlinear Dynamics of Shells, Int. Journal for Numerical Me-
 thods in Engineering, Vol. **37**, 2527–2549, **1994**

- [Tarnow.93] Tarnow, N.:
Energy and Momentum Conserving Algorithms for HAMILTONian Systems in the Nonlinear Dynamics of Solids, Ph.D. at Dep. of Mechanical Engineering, Stanford University SU-DAM Report No. 93-4 **1993**
- [Tietze.91] Tietze, U. und Schenk, Ch.:
Halbleiter-Schaltungstechnik 9. Aufl., Springerverlag **1991**
- [Trostel.91] Trostel, R.:
Grundlagen der Vektor- und Tensoralgebra, Schriftenreihe Physikalische Ingenieurwissenschaft, Band 10, TU-Berlin, 2. Institut für Mechanik, Berlin, **1991**
- [Wriggers.88] Wriggers, P.:
Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode, Habilitationsschrift, Universität Hannover, **1986**
- [Wu.97] Wu, S.R., Gu, L. and Chen, H.:
Airbag Tire Modeling by the Explicit Finite Element Method, Tire Science and Technology, TSTCA, Vol. 25, No. 4, 288-300, October-December **1997**
- [Zachow.97] Zachow, D.:
3D Membrane Shell Model in Application of a Tractor and Pkw Tire, Vehicle System Dynamics Supplement **27**, 163-172, Swets & Zeitlinger **1997**
- [Zegelaar.94] Zegelaar, P.W.A., Gong, S. and Pacejka, H.B.:
Tyre Models for the study of in-plane dynamics, Contribution to 13th IAVSD Symposium, Chengdu, P.R. China, **1993**
- [Zegelaar.95] Zegelaar, P.W.A., Pacejka, H.:
The In-Plane Dynamics of Tires on Uneven Roads, Contribution to 14th IAVSD Symposium, AnnArbor, U.S.A., **1995**
- [Zegelaar.97] Zegelaar, P.W.A.:
Modal Analysis of Tire In-Plane Vibration, SAE International Congress and Exposition, Detroit, U.S.A., February 24-27, **1997**
- [Zhong.93] Zhong, Z.:
Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems, Oxford University Press, New York **1993**
- [Tielking.65] Tielking, J.T.:
Plane Vibration Characteristics of a Pneumatic Tire Model, SAE Meeting 1965, 650493