

Vorträge

über

Statik der Baukonstruktionen,

gehalten an der k. Bauakademie in Berlin
von

Dr. Emil Winkler
Professor

Für die Hörer des Verfassers als Manuskript gedruckt.

Berlin, 1878

In den von Winkler publizierten als Manuskript gedruckten Vorlesungsumdrucken, teilweise auch in Büchern, wird auf die Angabe eines Inhaltsverzeichnisses verzichtet. Dieses erschwert es außerordentlich, sich einen Überblick darüber zu verschaffen, was in den jeweiligen Texten enthalten. Aus diesem Grund wird nachfolgend das Inhaltsverzeichnis zu den Vorlesungsumdrucken von 1878 angegeben, wobei allerdings darauf verzichtet wurde, die Paragraphenüberschriften auch noch mit auf zu nehmen. Eingefügt wurden außerdem Hinweise von Winkler, wo man einzelne Kapitel, die im Manuskript nicht ausgeführt sind, finden kann.

Berlin, April 2001

Klaus Knothe

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
§1 - §4	
Hauptsätze der grafischen Statik	7
§5 - §13	

I Theil	Festigkeitslehre	16
I. Kapitel	Allgemeines §14 - §19	16
II. Kapitel	Einfache Festigkeit §20 - §26	23
III. Kapitel	Biegungsfestigkeit gerader Stäbe im Allgemeinen §27 - §42	34
IV. Kapitel	Aeussere Kräfte statisch bestimmter Fälle	64
V. Kapitel	Behandlung der Querschnitte	64
	A. Bestimmung der Querschnittsgrössen im Allgemeinen §1 - §6	65
	B. Der rechteckige Querschnitt §7 - §11	76
	C. Der kreisförmige Querschnitt §12 - §14	85
	D. Zusammengesetzte Querschnitte §15 - §16	88
	E. Symmetrischer I-förmiger Querschnitt §17 - §20	95
	F. Unsymmetrischer I-förmiger Querschnitt §21 - §23	106
II Theil	Statisch bestimmte Stabsysteme	1
I. Kapitel	Allgemeine Behandlung statisch bestimmter Stabsysteme	1
II. Kapitel	Parallelträger mit eintheiligem Gitterwerk	1

III. Kapitel	Parallelträger mit mehrteiligem Gitterwerk	1
IV. Kapitel	Gitterträger mit polygonalen Gurten im Allgemeinen	1
V. Kapitel	Spezielle Anwendungen auf einzelne Formen einfacher Träger	1
VI. Kapitel	Kontinuierliche Gelenkträger mit polygonalen Gurten	1

Hinsichtlich dieser sechs Kapitel verweisen wir auf „Winkler's Vorträge über Brückenbau II Heft. Innere Kräfte der geraden Träger (Balkenträger) Seite 1 bis 53, Seite 79 bis 210.

VII. Kapitel	Gitterpfeiler	1
	A. Aeussere Kräfte	1
	§1 - §5	
	B. Ebene Gitterpfeiler	16
	§6 - §15	
VIII. Kapitel	Hänge- und Sprengwerke	38
	§16 - §20	
IX. Kapitel	Dächer	51
	A. Äussere Kräfte	51
	§21 - §24	
	B. Spannungen	55
	§25 - §31	
X. Kapitel	Formveränderung statisch bestimmter Träger	74
	§1 - §7	
XI. Kapitel	Theorie der statisch unbestimmten Stabsysteme	93
	8 - §9	

III Theil	Gekrümmte Stäbe	1
I. Kapitel	Normalfestigkeit einfach gekrümmter Stäbe §1 - §10	1
II. Kapitel	Kantungstheorie der Gewölbe §11 - §12	19
	A. Symmetrische Anordnung §13 - §15	23
	B. Unsymmetrische Anordnung §16 - §18	27
	C. Allgemein §19 - §23	33
III. Kapitel	Gleitungstheorie der Gewölbe §24 - §25	39
IV. Kapitel	Druck auf das Lehrgerüst	43
Wir verweisen in dieser Beziehung auf das als Manuskript gedruckte Heft: Lehrgerüste steinerner Brücken, 2. Auflage.		
V. Kapitel	Biegungsfestigkeit und einfach gekrümmter Stäbe im Allgemeinen §26 - §35	43
<i>Die nachfolgende Kapitelbezeichnung steht so bei Winkler im fortlaufenden Text. Es handelt sich offensichtlich um einen Irrtum. Vermutlich war vorgesehen, das Ganze unter eine gemeinsame Überschrift Anwendung auf Bogenträger zu stel- len.</i>		
II. cap.	Belastung durch eine Einzellast	61
III. cap.	Totale Belastung	61
IV. cap.	Partielle Belastung	61
V. cap.	Einfluß der Wärme	61
VI. cap.	Anwendung auf einzelne Querschnittsformen	61

Hinsichtlich des II. bis VI. Kapitels verweisen wir auf die Publication „Ueber Theorie der Bogenträger, nach Vorlesungen von Dr. E. Winkler von F. Steiner“

in Försters Allgemeiner Bauzeitung, Jahrg. 1874. Auch als Separatabdruck erschienen.

VII. cap. Der Bogen-Gelenkträger	61
§1 – §5	

VIII. Kapitel Gittertraeger mit zwei Gelenken	73
§6 - §10	

IX. Kapitel Gitterbogentraeger ohne Gelenk	80
§11 - §16	

VORTRÄGE

über

STATIK DER BAUKONSTRUKTIONEN,

gehalten an der k. Bauakademie in Berlin

von

[mit]

DR. E. WINKLER

Professor.

Für die Hörer des Verfassers als Manuscript gedruckt.

BERLIN, 1878.



Statik der Baukonstruktionen.

Einführung.

§ 1. Begriff. Ein Gegenstandswissen vollen Bauwerks ist, wenn es in seiner eigentlichen Bestimmung, daß sie den auf sie einwirkenden Kräften eine Widerstandsfähigkeit gegenstandes widerstand leisten. Die Anwendung der Statik in diesem Sinne nennt man Statik der Baukonstruktionen. Allerdings ist zur Ausführung von Baukonstruktionen nicht nur die Statik, sondern auch die Dynamik erforderlich, weshalb vorwiegend unter die Statik, so daß der Name „Statik der Baukonstruktionen“ wohl gerechtfertigt erscheint.

Eine bestimmte Ausprägung der Begriffes läßt sich vollen „Eingeborene“ durchführen, da sich immerhin Teile persönlich der können unterscheiden, aber auch auf der Statik der Baukonstruktionen, ungehörig aufzuweisen lassen. Wir wollen speziell die folgenden Teile als Teile der „Statik der Baukonstruktionen“ aufzählen:

- 1.) Die Festigkeitslehre in ihren Grundfragen und ihrer Anwendung auf Baukonstruktionen, im Besonderen Böden und Fundamente.
- 2.) Die Statik der Tragwerke in ihrer allgemeinen Auffassung und in ihrer Anwendung auf Böden, und Baukonstruktionen.

3.) Ein Fluorin des Erdalkal

4.) Ein Plastik der Konstruktivkonstruktion insbesondere der stat. Konstruktion und Juncellen.

Die meisten sind nicht schon von dieser Eintheilung fassen, sondern vom Eintheilung zum Besonderen fortzuführen.

Human Kunst. Auch der Begriff „Plastik der Konstruktivkonstruktion“ besteht aus mehreren anderen Begriffen. Beispiel nennt die deutsche Akademie der Wissenschaften das französische Institut des Arts „miquel appliquée et. von Navier“ „Ingenieur der Kunst“, Riller, Professor am Polytechnikum in Aachen, gab auch das Wort „Ingenieurmanufaktur“. Hier der österreichischen Polytechnischen Schule ist das Wort „Ingenieurmanufaktur“ üblich. In der Konstruktivkonstruktion in Berlin, nach fast längere Zeit der Begriff „mathematische Konstruktivkonstruktion“ üblich.

§ 2. Methoden. Ein Probierverfahren zur Prüfung einer Konstruktion lässt sich entweder durch Prüfung oder durch experimentelle Arbeit, d. h. durch geometrische Konstruktion, oder auch durch eine Kombination dieser Methoden kombinieren. Für die Entwicklung der zu dieser Untersuchung nötigen Regeln können alle Theile der Mathematik in Anwendung kommen. Grundsätzlich unterscheidet man die Anwendung der Algebra in allgemeinsten Form der Algebra, auf die analytischen Methoden angewandt, und die Anwendung der Geometrie, auf eine kombinierte Methode ist dunkel. Ein gewisses der analytischen Methoden sind hauptsächlich Formeln, welche entweder durch Prüfung oder durch Nachsetzung in geometrische Konstruktionen verwendet werden, während die

Ergebnisse der geometrischen Naturforschung in der Regel nur auf
größtenteils einen wesentlichen Punkt hin zusammenfassend. Die
geometrischen Methoden sind nach Büllmann größtenteils
veraltet.

Rein die genannten Methoden dürften in allen Fällen der an-
deren vorzuziehen; in einzelnen Fällen führt diese, in anderen
nicht, sondern ist in anderen zum Ziel, oder dient sonst
einem Zweck gegen die anderen, so daß es schwerlich möglich ist, in
Hochzug keine der Methoden prinzipiell, und zu empfehlen. Man
müßte aber dann vielfach Gelegenheit haben, auf die Vorzüge
der einen oder anderen Methode aufmerksam zu machen.

§ 3. Historisch. In welcher Weise die Kenntnisse der Natur
der Körper ihrer Entwicklung nach entstanden, ist uns nicht
genau bekannt; wahrscheinlich ist es, daß sie nur Erfahrungen
regeln sammelten, obwohl sie seit Archimedes (geb. 287 v. Chr.)
einige Kenntnisse in der Mechanik besaßen. Erst mit dem Ende
des 17. Jahrhunderts beginnt man sich mit der Anwendung
der Mechanik auf die Natur zu beschäftigen. Es sind viele
Aufsätze zu verzeichnen die auf dieses Thema bezogen
sind. Die Wichtigkeit von Galilei (geb. 1564), die
Anwendung und Entwicklung seiner Ideen durch Blondel, Mar-
chetti, Fabri und Grandi (1660-1700), die geometrischen Ideen des
Erfinders der Evangelisten Bullen (1691) und Couplet, sowie von
Sallouyer, Roudet und Blaveau, Pelidor, Gadoy, d'Antony
und Gantheu (1700-1770) und die geometrischen Ideen von Lahire (geb. 1710).

Um für die Baukonstruktivwissenschaften so außerordentlich reichliche
Leistungsfähigkeit vor sich zu stellen, ist eine Entdeckung der Elastizitätsgesetze
folgt. Diese von englischen Hooke (1660) und später von Hooke und so
manchen dann auch bald von Leibniz und Newton aufgefundenen
Infinitesimalrechnung auf die Probleme der Biegung angewandt
und zwar durch Bernoulli (gest. 1705) Leibniz (gest. 1716) und Euler
(gest. 1783) und Lagrange (gest. 1813).

Adrian sind als Männer früherer Zeit, welche sich um die Ent-
wicklung der Theorie der Baukonstruktivwissenschaften verdient machten, müssen
den eigentlichen Baustatistiken zu nennen:

Coulomb (gest. 1806) welcher früherer Gedanken in der Festig-
keitslehre (vorherige Theorie der Festigkeiten und Torsion) in der
Theorie der Festigkeiten und der Stabilität miteinwirkte.

Navier (gest. 1836), welcher die erste wissenschaftliche Befund-
lung der gesamten Theorie der Baukonstruktivwissenschaften in seinem klassischen
Werk zu verdanken ist, und der insbesondere außerordentlich fruchtbar
auf dem Gebiete der Festigkeitslehre war. Unvergleichlich und außer-
gewöhnlich wurde seine Lehre von Persy, Poisson, H. Tenant, Poncelet
Bresse u. d.

Poncelet bestätigte sich ebenfalls mit der Festigkeitslehre, be-
sonders aber ist die Theorie der Festigkeiten und der Stabilität seiner
reichlichen Beiträge zu verdanken.

Eytelwein (gest. 1848), der erste Direktor der Berliner Bauakademie,
welcher in seinem „Handbuch der Festigkeitslehre“ die Festigkeits-
lehre und Theorie der Stabilität zum Ziel mit neuen Beiträgen bereicherte.

Görner (gest. 184), berühmter österreichischer Ingenieur und

5

Erbschafts-Infantalt in seinem „Handbuche der Maschinerie“ ebenfalls die Dampfmaschinen und Hebe- und Senkmaschinen.

Moseley wirkte in seinem „Principles of Engineering and Architecture“ ebenfalls die Dampfmaschinen, die Hebe- und Senkmaschinen und die der Senkmaschinen zum Heben von schweren Gegenständen.

Die wichtigsten neueren Leistungen werden wir in der Folge erwähnen.

Siehe die neuere Zeit werden insbesondere die vorzüglichen Methoden, angewandt, sowohl in der Eisenbahnkonstruktion, nämlich der Polygon-Parallelogramm der Kräfte, als in der geographischen Konstruktion. Französische Autoren verdienen hier und die geographischen Arbeiten. Verolet hat die Konstruktion der Eisenbahnkonstruktion ab. Besonders merkt Poncelé bei der Hebe- und Senkmaschinen und der Senkmaschinen von der Hebe- und Senkmaschinen. Götter erwähnen St. Guilhem, Cousinier und Merz die Geometrie. Die erste wissenschaftliche Bearbeitung der geometrischen Methoden in organischen Zusammenhängen liefert aber Kullmann in seinem klassischen Werke: „Die geographische Statik. 1864.“ Wichtigste Beiträge zu der Sache liefern insbesondere Maxwell, Cremona, Rankine, Moir u. s. w.

§ 4. Literatur. Die wichtigsten Werke, welche alle über die meisten Hebe- und Senkmaschinen der Konstruktion behandeln, sind folgende:

1. Bresse. Cours de mécanique appliquée. 3 Bände. Paris 1859-1865.
2. Collignon. Ed. Cours de mécanique appliquée aux constructions.

Paris 1869-1870. 2 Bände (16 Mk)

3. Cullmann C. Die graphische Statik. Zürich. I Auflage 1864
II Auflage d. 1. Bandes 1875 (24 Mk)
4. Eytelwein. Handbuch der Statik fester Körper mit vorzüglichem Rücksicht auf ihre Anwendung in der Architectur. Berlin 1826.
III Auflage 1842 (9 Mk) Herg. rissen.
5. Holzhey Ed. Vorlesungen über Baummechanik. Wien 1872-1874
(22,4 Mk)
6. Moseley. Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst, mit Architectur. Aus dem Englischen von Scheffler. Braunschweig 1845 (13,5 Mk). Herg. rissen.
7. Navier. Mechanik der Baukunst oder Anwendung der Mechanik auf das Gleichgewicht von Bau-Constructtionen. Aus dem Französischen von J. Westphal. Hannover I Auflage 1857
II Auflage 1878 (12 Mk)
8. Ott. K. v. Vorlesungen über Baummechanik, gehalten am k. k. polytechnischen Institut in Prag I Th. Erstes, Entwerfen, Gesäße II Aufl. 1876 (3 Mk) - II Th. Festigkeitslehre (8,80 Mk)
9. Rankine. W. & J. M. A. Manual of Civil Engineering. London I Aufl. 1862. 12. unveränderte Aufl. 1877 (20 Mk)
10. Ritter Fr. K. Lehrbuch der Ingenieurmechanik. Hannover 1875 (14 Mk)

Hierzu sind Artikel über spezielle Theile der Statik der Bauconstructtionen vorhanden, wie auch Zusammenfassung dieser Theile gegeben.

Hauptsätze der grafischen Statik.

Es ganz unmittelbar auf mich bei allen Fällen vorerst zu setzen ist, daß für die Vorwörter über graphische Statik geführt haben, so sollen, in Folgendem die Grundsätze dargestellt, sowie für die auf Kräfte in der Ebene bezogen und insbesondere für die in der Ebene wirkend sind, zusammengefaßt werden. Grundsätzlich sind die folgenden Punkte von Bedeutung und wünschenswert Kräfte müssen wir auf die Vorwörter über graphische Statik anwenden.

§ 5. Kräftepolygon. Wenn man beliebig viele Kräfte der Größe und Richtung nebeneinander weiß, so nennt man die resultierende Gesamtlinie die Kräftepolygon.

Die Resultante beliebig vieler Kräfte in der Ebene
Größe und Richtung durch die die Kräftepolygon
schließende Gerade A F (Fig. 1) dargestellt.

Die Richtung der Resultante ist dieselbe aber in einem Punkt der Umfang des geschlossenen Polygons zu nehmen, nämlich dem Punkt der die gegebenen Kräfte aufeinanderzusetzen ist. Ein Kräfte-

polygon der Annahmestellung der einzelnen Kräfte ist dieselbe
gleichgültig.

Die Richtung der Resultante läßt sich leicht mit dem Satz vom Polygon der Kräfte darstellen.

Und die Kräfte im Gleichgewicht, so ist die Resultante

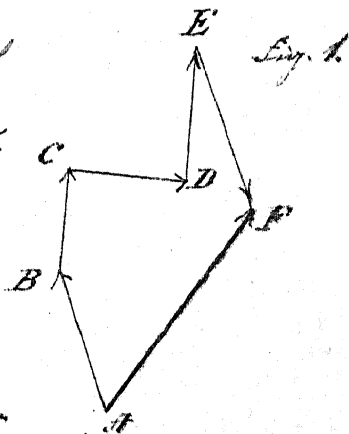
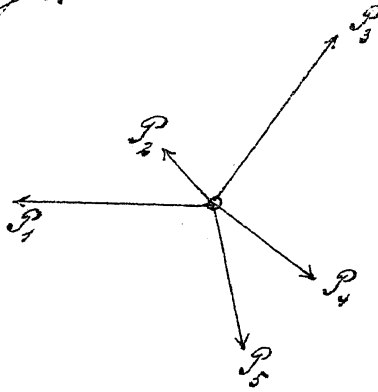
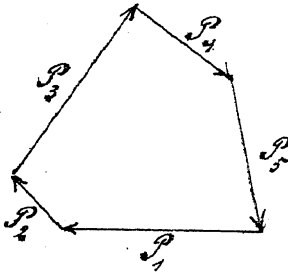


Fig. 2.



gleich Hüll. folglich läßt sich
betrachten: Zu gleichgerichteten
bedingten Kräften lassen sich zu
einem geschlossenen Polygon
zusammensetzen.

§ 6. Seilpolygon. Man an einem Ende, oder an einem
andere beliebig bestimmten Theile beständiger Kräfte
wirken, so nimmt das Seil oder die Kette eine bestimmte gleich-
gerichtet form an, die man das Seilpolygon nennt.

Fig. 3

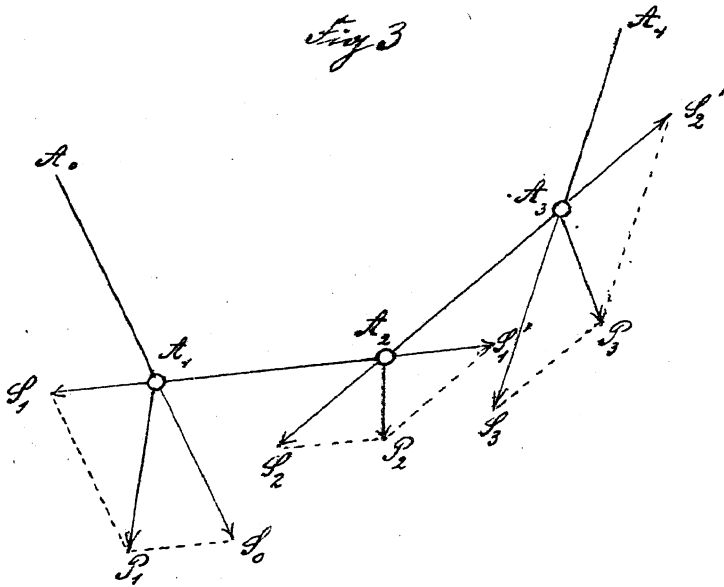
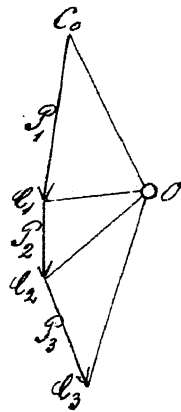


Fig. 3. b.



Ein im Knotenpunkte
 A_1 (Fig. 3) wirkender
Kraft P_1 läßt sich zer-
legen nach Richtung
der Punkte A_1, A_2 und
 A_1, A_3 in die Kräfte
 P_1 und P_2 , welche die
Bewegungen dieser
Punkte hervorrufen.

Die 3 Kräfte lassen sich, da sie im Gleichgewicht sind, zu einem
Dreieck OC_1C_2 (Fig. 3. b) vereinigen. Ebenso läßt sich die im Kno-
tenpunkte A_2 wirkende Kraft P_2 nach Richtung von A_2, A_1 und A_2, A_3
zerlegen in die Kräfte P_3 und P_4 . Will man das Seilstück A_2, A_3 im
Gleichgewicht sein, so muß $P_4 = P_5$ sein. Dann oder läßt sich das
Dreieck OC_1C_2 ; zu welchem sich die Kräfte P_2, P_3, P_4 vereinigen
lassen, unmittelbar an das Dreieck OC_1C_2 ansetzen. Dasselbe

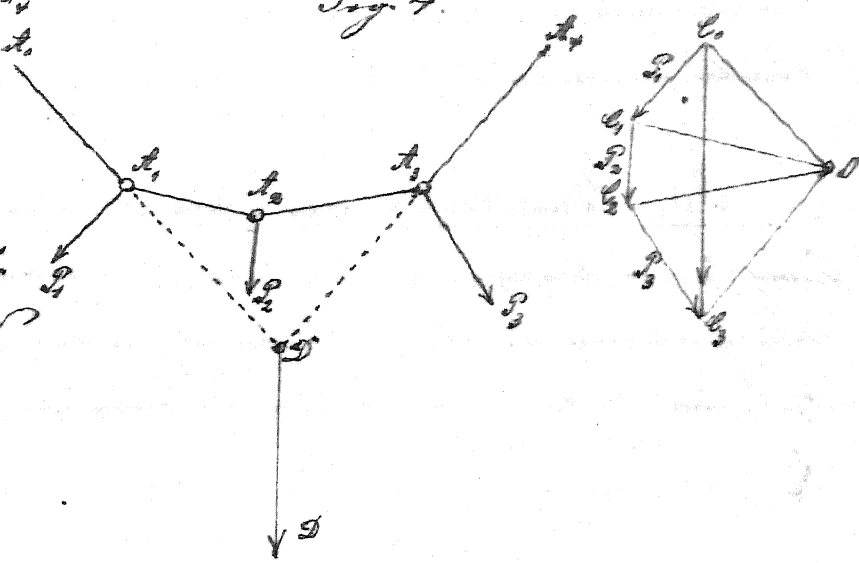
man im Linsen-Ansicht miten, so aufbauen wie ein Pol:

Die Spannung der Pfeile im Polygong lassen sich nach Größe und Richtung herstellen durch Geraden, welche einen Punkt O mit dem Linsen des Kräftepolygons verbinden. Ein Punkt O , nennt man den Pol.

Ist das Kräftepolygon geschlossen, so sind die an ihm wirkenden Kräfte unter sich im Gleichgewichte, da ja zwei ihrer Kräftepaaren im Gleichgewichte sind. Also stellt sich alles auf das Kräftepolygon.

Wahlungst man zwei beliebige Seiten A_1A_2 und A_2A_3 (s. Fig. 4) eines Kräftepolygons mit zum Durchschnitt D , so stellt man geschlossen Polygon $D A_1 A_2 A_3$. Betracht. man wie es sich geschlossen Kräftepolygon, so muß in D eine Kraft wirken, welche gleich der ausgegangenen ist.

Fig. 4.



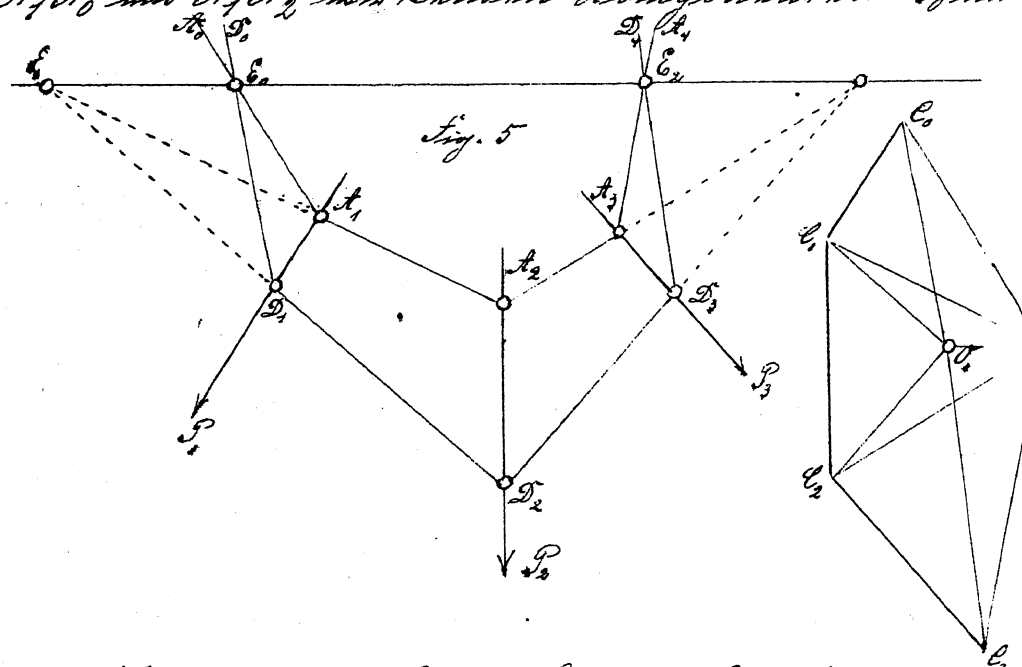
den Resultante der übrigen Kräfte $P_1 P_2 P_3$ ist; nach Größe und Richtung wird dieselbe durch die diagonale C_1C_2 des Kräftepolygons dar. gestellt. Also können dieselben den Satz aufstellen:

Die Resultante aller wirkenden Kräfte geht durch den Durchschnittspunkt der Wirkungslinien dieser Kräfte.

Kräfte und Kräftepolygon können also dazu dienen, Größe, Richtung und Angriffspunkt der Resultante beliebig vieler Kräfte zu bestimmen.

§7. Gleichgewichtsbedingungen. Damit beliebig viele Kräfte unter sich im Gleichgewicht sind, müssen zwei Bedingungen erfüllt werden, nämlich 1. Die Kräfte müssen sich zu einem System geschlossen Kräftepolygon vereinigen lassen und 2. muß zwischen den Kräftewirkungen ein geschlossen Kräftepolygon möglich sein. Nun nur dann, wenn die erste Bedingung erfüllt wird, ist nach §5 jede Kraft gleich und entgegenge setzt der Resultante der übrigen Kräfte, und nur dann, wenn die zweite Bedingung erfüllt wird, wirkt jede Kraft mit der Resultante der übrigen Kräfte in ein und demselben geraden Linie.

§8. Ständerung des Pols. Wir verfahren jetzt den Pol von Punkt O_1 und konstruieren ein neues Kräftepolygon D_1, D_2, D_3, D_4 (s. Fig. 5). Wir zerlegen die Kraft P_1 wieder in die in den Richtungen, von K_1, K_2 und K_3, K_4 bekannten Komponenten P_1 und P_2 und verschieben die in Richtung von D_1, D_2 und D_3, D_4 wirken. Die Komponenten P_1, P_2 der Kraft P_1 sind die entgegenge setzt wirkenden Kräfte P_1, P_2 geben eine Resultante, welche durch den Durchschnittspunkt O ihrer Richtungen geht und nach Größe



die in Richtung von D_1, D_2 und D_3, D_4 wirken. Die Komponenten P_1, P_2 der Kraft P_1 sind die entgegenge setzt wirkenden Kräfte P_1, P_2 geben eine Resultante, welche durch den Durchschnittspunkt O ihrer Richtungen geht und nach Größe

und Richtung eines OO_1 dargestellt wird. Ein Kräft E_1 und ein unabhän-
gig wirkendes gegebenes Kräft E_2 geben eine Resultante, welche
eines der Schwerpunkts E_1 einer Richtung nach und nach Größe
und Richtung einzeichnen eines OO_1 dargestellt ist. Es nun, aber die
Kräfte $E_1 - E_2, E_2 - E_1$ im Gleichgewicht sind, so muß die Resultante
auf E_1 und $-E_2$, sowie auf E_2 und $-E_1$ in der selben Geraden wirken,
also in der Geraden E_1E_2 ; da diese Resultanten nach Größe und Rich-
tung eines OO_1 dargestellt werden, so muß E_1E_2 parallel OO_1 sein.

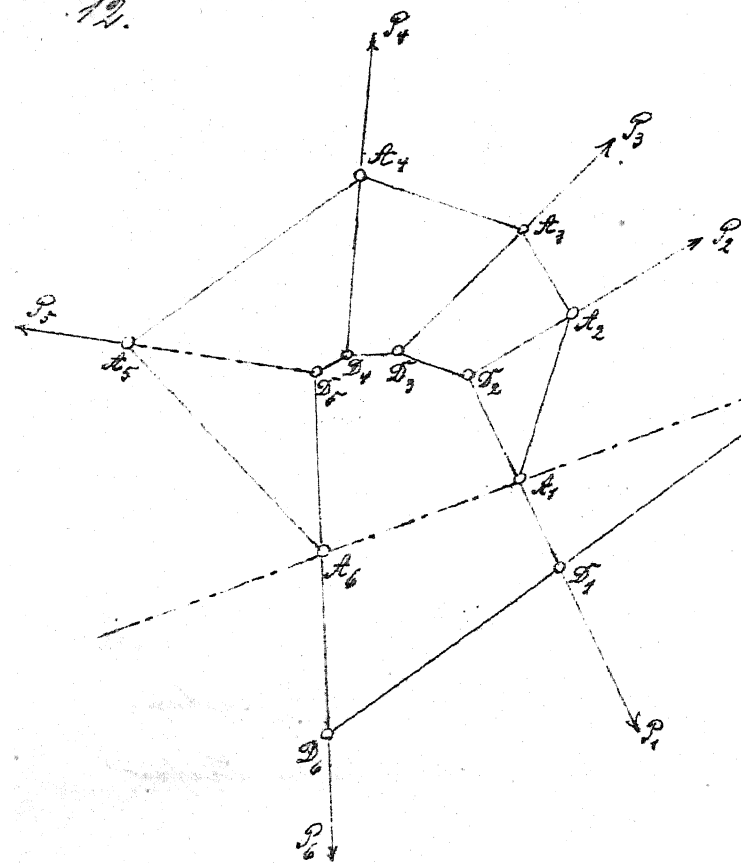
Umso leicht, ist uns vorzuführen, daß die Schwerpunkts E_1 und E_2
der Richtungen der von A_1 und D_2 ausgehenden Polylogonseiten
in einer Geraden zu OO_1 liegen u. s. f. Wir gelangen in dieser
Weise zu dem Satz:

Wenn man zwischen den Richtungen gegebenen Kräfte Poly-
logonen für 2 vorfindenden Pole konstruiert, so liegen die Schwer-
punkts E_1 und E_2 der ausgehenden Polylogonseiten auf einer mit der-
selben Geraden, der Polare, welche die Verbindungsgeraden der
Pole parallel ist.

§ 9. Resultantenpolygon. Läßt man den Pol in einer festen
 O der Kräftepolygon (Fig 6), so stellen die Punkte E_1, E_2, E_3, E_4
 $E_1, E_2, \dots$ und S die Resultanten R_1, R_2, R_3 der Kräfte E_1, E_2 und E_3 ,
 E_1, E_2 und E_3 u. s. f. vor.

Die Punkte D_1, D_2 der Polylogone zwischen den Kräfte E_1 und E_2 ,
welche dem Punkte O von der Länge Null aufweist, ist vollständig
willkürlich. Die Polare muß eines der Schwerpunkts E_1 von
 A_1, A_2 und D_1, D_2 gehen und parallel zu OO_1 sein. Da aber A_1, A_2 falls

Fig. 6.



parallel zu OC_0 ist,
so fällt ein Polus
zusammen mit P_1, P_2 zu.
zusammen.

Ein Resultanten R_3
der Kräfte P_1, P_2
mit P_3 , nachfolgend
ein Resultat $C_3 C_4$ usw.
 C_5 entsteht, geht
nach P_6 über. Der
Schnittpunkt der
Längungen der

Polyliniengruppen $A_2 A_1$ mit $A_3 A_4$, der Resultanten Punkt, oder geht nach
dem zweiten Satz ein zum Pol C_0 aufeinander Polyliniengruppen
 $P_3 P_4$, folglich geht der Schnittpunkt der Resultanten R_3 in $P_3 P_4$; $P_3 P_4$
fällt zusammen mit der Richtung der Resultanten R_3 usw., oder all.
gemein:

Die Resultanten $R_1, R_2, R_3, \dots$ der aufeinander folgenden Kräfte
 P_1, P_2 mit P_2, P_3 mit P_3 u. s. w. liegen in der selben Linie Polylini-
genet, weshalb man weiß, wenn man das Pol in der aufeinander
folgenden C_0 der Kräftepolyliniengruppe weiß.

Man nennt daher diese Polyliniengruppe die Resultantenlinie
oder Resultantenpolyliniengruppe.

§ 10. Moment der Kräfte. Ein Resultant R der beliebig
vielen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 , wird nach Größe und Richtung bekanntlich

Durch den
 aufsteigenden
 Diagonale
 $C_0 C_4$ (Fig. 7)
 der Kräfte
 liegen der
 gestalt,
 die Resultate
 der Kräfte
 durch den
 die Kräfte

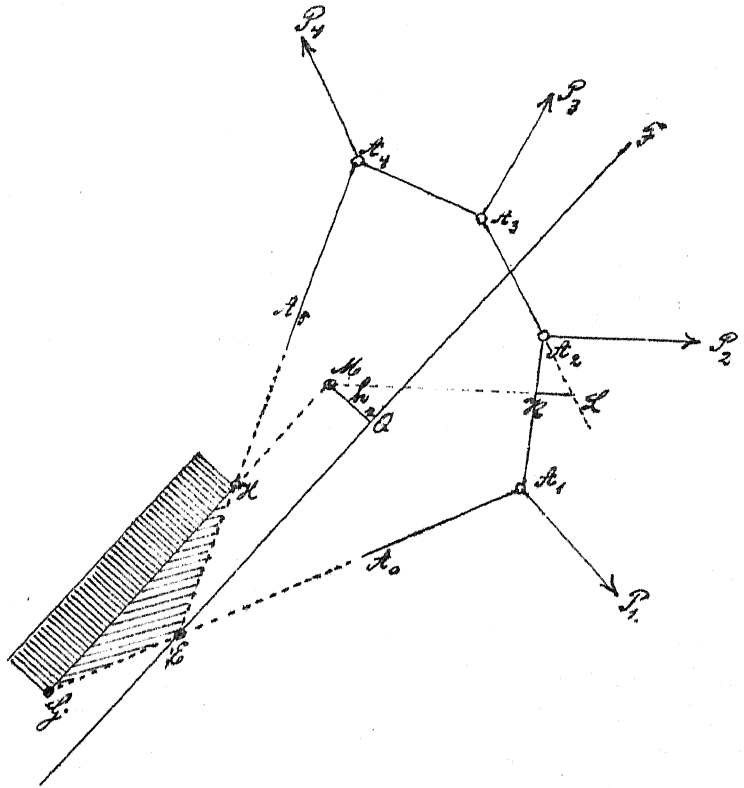
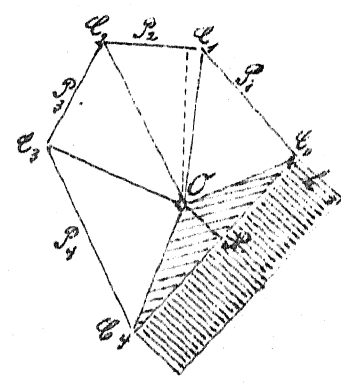


Fig. 7



durch den Punkt E der aufsteigenden Diagonale $C_0 C_4$, nicht
 also in einem Punkt E gefunden, parallel zu $C_0 C_4$, der Moment
 der Resultate R in Bezug auf einen beliebigen Momentenpunkt
 M wird dargestellt durch das Produkt Rh , wenn h den Abstand,
 wenn h Länge der von M auf $C_0 C_4$ gefällten Senkrechten darstellt.
 Rh aber ist der Flächeninhalt eines Rechtecks von der Breite $C_0 C_4$ und
 der Höhe $M A$.

Lässt man durch M eine Parallele zu $C_0 C_4$, welche den auf-
 steigenden Diagonale $C_0 C_4$ in G schneidet, so ist das Dreieck EGH
 dem Dreieck $OC_0 C_4$ ähnlich, weil die Seiten einander verhältnis-
 mäßig sind. Lässt man von O auf $C_0 C_4$ eine Senkrechte ON , so senkrecht auf $C_0 C_4$:
 $GH = ON : MA$, also ist $Rh = C_0 C_4 \cdot MA = ON \cdot GH$. d. h.

Das Moment der Resultate beliebig vieler Kräfte wird auf-
 dargestellt durch das Produkt mit dem Abstand des Punktes O von der
 aufsteigenden Diagonale $C_0 C_4$ der Kräfte und der zugehörigen

den aufeinander wirkenden Kräften der Kräftegleichgewichts Linienanten Parallelen $\vec{P}$ zu einer durch den Momentenmittelpunkt M gehenden, Parallelen zur Resultante $C_0 C_1$.

Zunächst ist der Kraft, $\vec{P}$ als Länge zu nehmen.

Dieser Satz gilt natürlich auch für eine einzelne Kraft. Bz. g. ist das Moment der Kraft P_2 in Bezug auf M gleich dem Produkt aus dem Abstand OM des Punktes M von der Kraft P_2 aufeinander wirkenden Punkten $C_0 C_2$ der Kräftegleichgewichts mit der senkrechten in M zusammen. Hauptanten Kräfte der Kräftegleichgewichts Linienanten Parallelen $\vec{P}$ zu einer durch M gehenden Parallelen zu P_2 .

§ 11. Kraftkurve und Seilkurve. Wenn die Kräfte gleichmäßig verteilt sind, so geht der Kräftegleichgewichts in eine Kraftkurve, der Kräftegleichgewichts in eine Seilkurve über. Alles dieses folgende bleibt auf sich zurück.

Wie in der bekannten Parallelen $P_0 P_1$, wirkenden Kräfte lassen sich zu einer Resultante P , vereinigen,

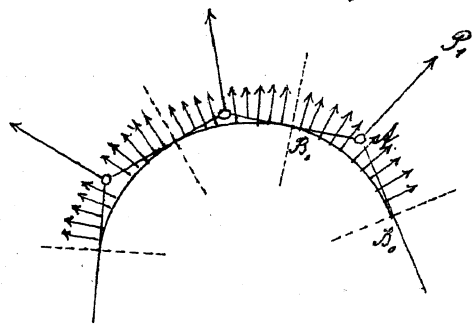
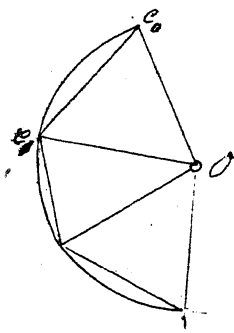


Fig. 8.



welche von P ausgeht und Richtung der Resultante $C_0 C_1$ hat. Aufeinander wirkenden Kräfte der Kraftkurven dargestellt wird. Nach § 6 geht P durch den Kräftemittelpunkt. Der Kräftegleichgewichts, in welcher der Kräftegleichgewichts, in welcher

den P und P_1 liegen, d. h. der Tangenten der Seilkurve, welche den Punkten C_0 und C_1 entsprechen. Zuvor folgt:

gegebenen Parallelen zur Antriebsrichtung. Ein Mittelpunktschwerpunkt, nach dem sich in einer einzigen Ebene übergeben müsste, findet sich nicht vor.

§ 13. Literatur der allgemeinen grafischen Statik.

1. Bauschinger, Klementine zur graphischen Statik (ohne Anwendung der höheren Geometrie) München 1874. 10,50 Mk.
2. Cullmann, K. Die graphische Statik. Zürich. I Aufl. 1866. II Aufl. 2te Aufl. 1875. - 24 Mk.
3. Favaro. Statica graphica. Padova 1875
4. Greene. Graphical analysis of roof trusses. Chicago 1876.
5. Hajda Pois. The elements of graphical statics and their application to framed structures. I Ed. 1875. II Ed. New-York 1877.
6. Lévy. M. La statique graphique et ses applications aux constructions. Paris 1874. 13,20 Mk.
7. Ott, K. v. Die Grundzüge der graphischen Statik mit der graphischen Statik. Prag, III Aufl. 1874. 3 Mk.
8. Steiner, Die graphische Zusammenfassung der Kräfte. Wien 1875. 1,60 Mk.

I Theil

Festigkeitslehre.

I Kapitel.

Allgemeines.

§ 14. Die Elasticität fester Körper. Wenn man einen festen

французам.

Zur Zeit können wir keine Rückschlüsse annehmen, d. h. ist es nicht
der Blickung der verschiedenen Kräfte momentanen zur Ruhe gelangt, so
nimmt die Stromintensität langsam ab und wird sehr schwach,
zumal in unmittelbarer Nähe, indem sie die innere Selbstauskunft der
Körperung sehr vollständig andeutet. Die Kraft der Selbstauskunft der Körperung
ist Stromintensität sehr stark und die elektrische Stromintensität ist bei der
Körperung größer als bei anderen Körperungen. Eine mathematische Formel
der elektrischen Stromintensität ist zur Zeit noch nicht möglich, nur nach dem
Verfahren in der Folge die elektrische Stromintensität nicht nur in der
Kraft geben.

§ 15. Festigkeit. Bei zunehmender Längendrehung wirkt endlich eine Drehung des Röhrens in solchen Maße ein, dass wir allgemein das Zerbrechen des Röhres nennen. Die Größe der zum Zerbrechen nöthigen inneren Kräfte nennen wir die Festigkeit des Röhres.

Ja næst som næst som Klub afgrænses den flaktivitets Cyklus, hvor
 en stor og en lille klubbede Evolventer indvirk,
 og den Cyklus gælder, næsten, men ikke ikke ikke ikke.

Da das Zustandekommen eines Königs eine Folge der Formveränderung
ist, die Vermählung der Brüder, unter welchen ein Zustand
erfolgt, aber für die kaiserliche Krone nicht der Zweck eines
Fürsten der Formveränderung ist, so können wir unter taufkirchlicher
die Folge von der Formveränderung fester Könige verstehen. In dem
missverständlichen Sinne wird allerdings besser die Bedeutung
klarheit zu geben.

Die Leichtigkeitskräfte fortgesetzt zu lesen, nämlich:

I Die Vermittelung der Leichtigkeitskräfte zwischen den verschiedenen Kräften und der Formänderung.

II Die Vermittelung der Leichtigkeitskräfte, welche zwischen den Körpern gegen bleibende Formänderungen oder gegen zerbrechliche, wie für die Physik genutzte Eigenschaften wirken. Hier nennen wir ferner die Leichtigkeitskräfte.

Es folgen beide Kräftearten immer zusammen.

§ 16. Die inneren Kräfte. Wir denken uns im Innern eines Körpers eine beliebige kleine obere Fläche f . Zwischen den auf beiden Seiten dieser Fläche liegenden Theilen des Körpers wirkt sich selbst der Körper seine Form ändert, eine ungespaltenartig wirkende Kraft r einwirken, welche aber die ganze Fläche stetig nach außen ist. Man nennt diese Kraft innere Kraft im Gegensatz zu den äußeren Kräften, welche die Formänderung des Körpers erzeugen. Die in dieser Hinsicht Fläche f nennen wir die von der betreffenden inneren Kraft affizierte Fläche.

Erwidern wir die innere Kraft r , welche die Fläche f affiziert, durch f , so wirkt man die auf die Oberfläche bezogene innere Kraft R . Wir nennen dieselbe die die Fläche f affizierende spezifische Spannung. Die spezifische Spannung R läßt sich in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine A senkrecht auf die Fläche f , die andere T in der Fläche f selbst wirkt. Die senkrecht wirkende Komponente nennen wir Normalspannung. Sie ist entweder ein Zug oder ein Druck, je nachdem sie auf beiden Seiten von f befindlichen Theilen von

ninanten zu aufführen, oder ninanten zu nöthigen Strahl. Finen
Zug ziehen wir als positiven einen Druck, als negativen Zugnung in
Richtung.

Die in der Elipse & selbst wirkenden Komponenten & Strahl, die auf
beiden Seiten der Elipse liegenden Theile iden ninanten zu vertheilen.
ben; wir nennen sie daher Reflexion.

§ 17. Form der Körper. Wir unterscheiden fünf Klassen von
Körperformen: 1) linienförmige Körper mit, in der Regel geringen
Stärke und Breite, 2) flächförmige Körper mit, in der Regel geringen
Stärke, 3) plattförmige Körper oder Platten mit geringen Stärke und
Breite, 4) glattenförmige Körper oder Platten mit geringen Stärke
und 5) Körper, welche nach allen drei Dimensionen sehr gleichm.
gestaltet sind. Die meisten Körperformen kommen vor, wir den Platten
sich an, die diese für die Praxis am wichtigsten sind.

Wir denken uns einen Platz auf dem der Körper der Bewegung eines
ebenen Elipse und zwar dergeachtet, daß sich der Bewegungspunkt der Elipse
auf einer gegebenen Linie, der sogenannten Achse oder Leitkurve
bewegt und die Elipse der Elipse selbst fähig ist, auf dieser Linie steht,
weil sich die Gestalt der Elipse beliebig ändern kann. Die beweg.
liche Elipse nennen wir in irgend einer Lage den Querschnitt der
Körper. Eine beliebige materielle Linie, welche parallel zur Achse ist,
nennen wir eine Seite und den zwischen zwei sehr nahen Querschnitten
enthaltenen Theil eine Reflexion.

Wir unterscheiden Platten mit gerader, in der Regel gekrümmter
und gerader gekrümmter Achse.

§ 18. Die äusseren Kräfte. Ein auf einen Körper wirkender äusserer Kräfte greifen ausserhalb von irgendwelchen Punkten an, und wir nennen sie dann ipoliste Kräfte, oder sie sind über die Charakteristika statisch neutralisiert. Für die Einwirkung der Kräfte, welche auf einen beliebigen Punkt eines Körpers wirken, gebrauchen wir Fig. 10 als Körper mit einem koordinaten System Ox, Oy, Oz und zwar so, dass zwei Ebenen Ox, Oy im Querschnitt liegen, und die zwei zueinander senkrechten Geraden als Charakteristika gefasst, die Werte Ox also die Leitlinien in Charakteristika.

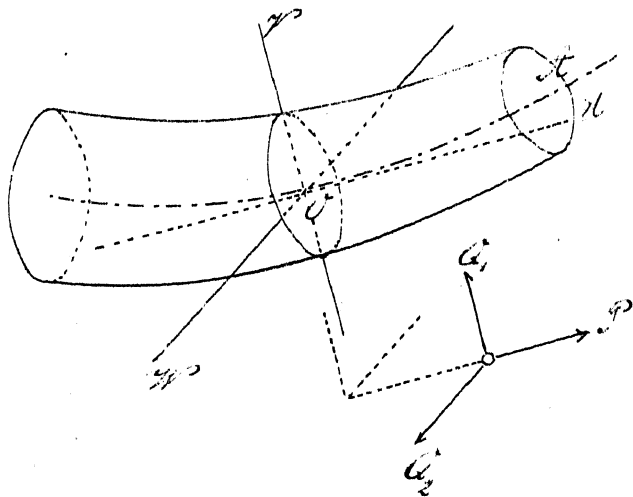
Alle äusseren Kräfte, welche auf den Körper wirken, zerlegen wir nach Richtung dieser drei Ebenen und fassen sie als Resultanten an.

Die Komponente parallel zur Richtung der Tangente Ox wirkenden Komponenten nennen wir die Normalkräfte und bezeichnen sie mit P .

Die Komponente parallel zum Querschnitt in Richtung von Oy, Oz wirkenden Komponenten nennen wir Transversalkräfte, weil sie transversal zur Ebene Ox des Körpers wirken, und bezeichnen sie mit Q_1, Q_2 .

Die Komponente der Momente der äusseren Kräfte in Richtung auf die Ebenen Oy, Oz nennen wir Leigungsmomente oder Kurz Momente und bezeichnen sie mit M_1, M_2 , Die Komponente der Momente in Richtung auf die Tangente Ox , oder das Torsionsmoment und bezeichnen sie mit M .

Fig. 10.



zusammen beschreiben, mit M_0 .

Wahrscheinlich muß beiden Seiten der Querschnitt der Ringenden gleiche Art, & Binnendruck, ist gleichgültig, da der Gleichgewicht der ganzen Bewegung fordert, daß die Resultanten der auf beide Hälften wirkenden Kräfte gleich, obwohl der Richtung nach entgegengesetzt sind.

§ 19. Beanspruchungsweise. Classen sich folgende Arten der Formänderung der Platte unterscheiden:

1. Zwei sehr nahe Querschnitte unterscheiden, oder wir kann sich, ohne sich gegenseitig zu verfehlen, oder zu verdrängen. Sind beide ein, wenn nur vorhanden, oder $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $M_0 = 0$, $M_1 = M_2 = 0$ ist. Wir nennen diesen Fall Normaldehnbarkeit, Normalhaftigkeit und unterscheiden Zugdehnbarkeit, Zughaftigkeit und Druckdehnbarkeit, Druckhaftigkeit. Die Trennung findet zwarischen oder gegenüber.

2. Beide Querschnitte verfehlen sich gegenseitig, ohne ihre Gestalt zu ändern und ohne sich gegenseitig zu drängen. Sind beide ein, wenn nur α_1, α_2 vorhanden, oder $P = 0$, $M_0 = 0$, $M_1 = M_2 = 0$ ist. Wir nennen diesen Fall Reib- oder Gleitungsdehnbarkeit, Reib- oder Reibhaftigkeit, die Trennung der Bewegung Abheben oder Abheben die Zughaftigkeit, Druckhaftigkeit und Reibhaftigkeit kann man sich unter dem Namen imperfekte Haftigkeit zusammenfassen.

3. Der eine Querschnitt drückt sich gegen den anderen nur, wie in einer Ebene liegende und durch einen Reibungswinkel gebogene Platte. Sind beide ein, wenn nur M_1, M_2 vorhanden, oder $P = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $M_0 = 0$ ist. Wir nennen diesen Fall Ringungsdehnbarkeit, Ringungsdehnbarkeit, die Formänderung der Ringen, die Trennung der Reib.

ganz Erbsen.

4. Das eine Stumpfheit tragt sich gegen das andere in einem ebenen oder einem Krümmungspunkt, das heißt ein, wenn wir M_1 aufstellen, also $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $M_1 = M_2 = 0$ ist. Hier nennen diesen Fall Extremalalastbarkeit, Extremalfestigkeit, die Formänderung des Wandrades, die Längung des Abdrucks Abminderung.

In der Folge werden wir unter Extremalalastbarkeit verstehen das Verhalten, bei welchem gleichzeitig Normalalastbarkeit und Extremalalastbarkeit eintritt, das die reine Extremalalastbarkeit zu wenig kommt.

Anmerk. Wird der Längung zu festigkeit, Extremalfestigkeit festigkeit. Krit sind wir auf die Längung absolute festigkeit, rückwirkende festigkeit, relative oder effektive festigkeit in Gebrauch. Hier müssen, trotz dem diese ungenaueren Längung als maximal ausfällt. Ein die zu und Extremalfestigkeit geben wir die gemeinsame, die Längung Normalfestigkeit genügt, weil sie gleiches zu folgen folgen und für die Leistung andere Benutzungsmax. als Norm stehen.

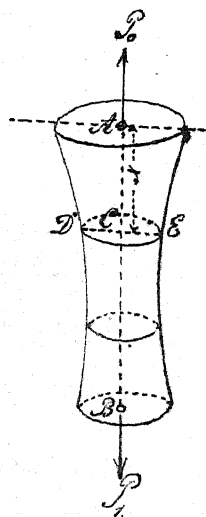
II. Kapitel.

Einfache Festigkeit.

§ 20. Normalfestigkeit. Ein Normalfestigkeit tritt nach § 19 ein, wenn die benutzbare Stumpfheit genügend in der Richtung des Hebels der Hebel benutzen und genau so, gleich gleich gleich. Die Hebel der Hebel, weil wir als genau genau.

folgen, bleibt jedoch unverändert. Diese Voraussetzung hat nur dann
 ein, wenn die Kathode alle auf einen Punkt AC (Fig. 11.) der Kathode
 wirkenden Kräfte aus der Symmetrie mit C der Kathode aus der Symmetrie

Fig. 11.



Schnitt CE geht, und in der Richtung der Axe der
 Kathode wirkt. Ist die Symmetrie der Kathode als Punkt.
 form Kräfte, gegen andere äußere Kräfte nicht
 zu vernachlässigen, so muß die Axe vorüber
 eine partikuläre Länge haben.

Wie folgen daraus, daß außer der Symmetrie
 der Kräfte nur auf die Endflächen A und B
 äußere Kräfte wirken und bezugnehmend mit

P_0 die auf der Seite A wirkende äußere Kräfte,

P_1 die Hebelkräfte, d. i. die Summe aller auf der
 Seite AC der Kräfte wirkenden Kräfte,

g der Symmetrie der Halbmessigkeit der Kathode;

F die Flächeninhalte der Querschnitte C ;

x die Entfernung AC ;

l die Länge der Kathode;

Δl die Längenänderung der ganzen Kathode;

finden wir die Kräfte P_0 positiv oder negativ, je
 nachdem sie gesamt oder zerlegt auf der Kathode, bezüglich auf der
 Punkt C wirken.

Die Kräfte, welche in der Kathode der Gleichgewicht auf der Seite
 B wirken müß, ist $P_0 \pm$ Symmetrie der ganzen Kathode $= P_0 \pm \int F dx$.
 Die Hebelkräfte P_1 ist $P_0 \pm$ Symmetrie der Punkte AC d. i.

$$1. \quad P = P_0 \pm g \int F dx.$$

§ 21. Längenänderung. Ein Zug erzeugt eine Verlängerung, ein Druck eine Verkürzung des Stabes. Das Verhältnis der Längenänderung zur ursprünglichen Länge nennt man die relative Längenänderung. Dem S entsprechend setzt sich dieselbe aus der elastischen und der bleibenden Längenänderung zusammen. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die elastische Längenänderung der spezifischen Normalspannung in jeder Richtung fast nahe proportional ist. Man nennt diesen Gesetz das Elastizitätsgesetz. Bezeichnet man die Längenänderung der Länge l mit Δl , so läßt sich schreiben:

$$5. \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E} = \frac{P}{EF}$$

folgt, wenn E einen Erstlingskoeffizienten, den prozentualen Elastizitätskoeffizienten, bezeichnet. Ist $N = E$, so wird $\Delta l = l$, man erhält also fünfzig der Elastizitätskoeffizienten als hundertfache spezifische Spannung, nach welcher man der Länge l gleiche Längenänderung hervorbringt. Der Wert für E ist im Allgemeinen für Zug und Druck gleich.

Daß das Elastizitätsgesetz nicht vollständig richtig sein kann, sagt schon der Satz, daß bei einem spezifischen Druck, welcher gleich E ist, der Körper nicht zusammengedrückt wird. Für so kleine Längenänderungen, wie sie gewöhnlich in Betracht kommen, kann das empirische Gesetz indess als richtig gallen.

Ist der Querschnitt unveränderlich, indess in bestimmtem Maße, daß man im Abmessen der Querschnitt vernachlässigen kann, so sei Δx die Längenänderung des Winkels α (Fig 10) Δx die Längenänderung des Abstandes x zweier Querschnitte. Also ist:

$$6. \frac{\Delta x}{x} = \frac{N}{E} = \frac{P}{EF}$$

$$7. \Delta x = \frac{1}{E} \int_0^x \frac{P}{F} dx.$$

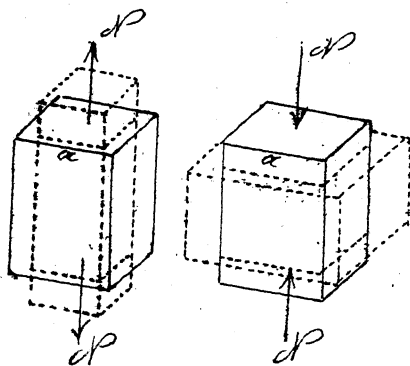
oder die Längenänderung Δl der gegebenen Faser

$$\S. \Delta l = \frac{1}{E_0} \int_0^l \frac{P}{F} dx.$$

Der Elastizitätskoeffizient, nach welchem die Längenänderung der gegebenen Faserung proportional ist (in bestimmten Grenzen selbstverständlich), hat das Gesetz der Hooke im Jahre 1660, durch Versuche mit Metallstäben. Bernoulli bestätigte im Jahre 1684 durch Versuche an hölzernen Pfeilen E. Mariotte und viele spätere Versuche.

§ 22. Transversale Längenänderung. Esproportionalität ist mit jeder Verlängerung eine Querkürzung, mit jeder Querkürzung eine Verlängerung der Querschnittsdimensionen sonst. brücken. (Fig. 14.) Man kann diese Veränderung der Querschnittsdimensionen

Fig. 14.



die transversale Längenänderung nennen, die Längenänderung der Höhe des Quaders nennt, man kann in der Folge nach, auf die longitudinale Längenänderung. Die transversale, oder längliche Längenänderung $\frac{\Delta a}{a}$ ist proportional der longitudinalen Längenänderung $\frac{\Delta l}{l}$ proportional. Wir setzen daher

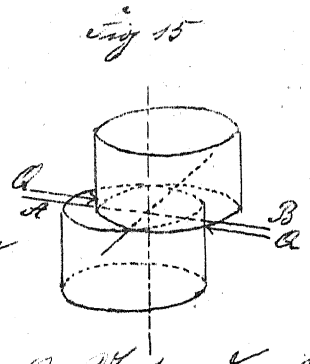
$$9. \frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta l}{l}.$$

Der Koeffizient läßt sich durch Versuche bestimmen, einfachem geben für isotrope Körper, d. i. für Körper, welche in allen Richtungen gleich

elastisch, besitzen, wie Kupfer, und Eisen, Messing, etc. $m = 2,8$ bis $3,3$.

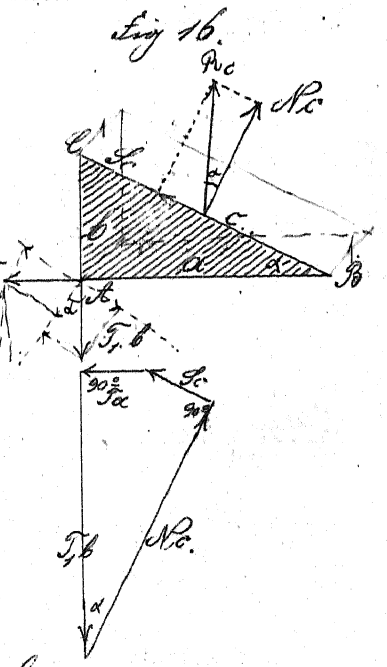
Ein sogenannter Molekularström, aber liefert $m = 4$. Man wird auch, ausgehend im Allgemeinen $m = 3$ bis 4 setzen können.

§ 23 Schubfestigkeit. Damit ein Körper aus einer Schubfestigkeit herausgerissen werden kann, ist nötig, daß auf ihn zwei Kräfte A und B in entgegengesetzten Richtungen wirken. In Kräfte A und B (Fig. 15) ist ein zylindrischer Körper dargestellt, auf den Kräfte A und B in entgegengesetzten Richtungen wirken. In Kräfte A und B (Fig. 15) ist ein zylindrischer Körper dargestellt, auf den Kräfte A und B in entgegengesetzten Richtungen wirken. In Kräfte A und B (Fig. 15) ist ein zylindrischer Körper dargestellt, auf den Kräfte A und B in entgegengesetzten Richtungen wirken.



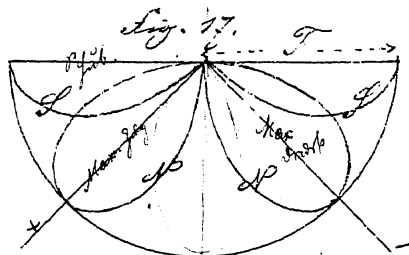
$$10. \quad T = \frac{A}{F}$$

Wir suchen nun ein unendlich kleines Prisma, dessen Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 16) ist, dessen Seiten von der Länge 1 senkrecht auf der Richtung von A stehen und von dem ein Schnitt durch A ein Prisma mit dem Querschnitt F schneidet, wodurch die Seiten AC senkrecht auf der Richtung von A stehen. In der Fläche AB wirkt eine Schubspannung T , in der Fläche AC eine solche T , in der Fläche BC eine solche T . Das Prisma wirkt im Gleichgewicht gegen die Kräfte T_a , T_b , N_c , L_c . Zuerst stellt sich für das Gleichgewicht gegen die Kräfte T_a , T_b , N_c , L_c die Gleichung $T_a \cdot \frac{1}{2} = T_b \cdot \frac{1}{2}$, woraus



$$11. \quad I_1 = I$$

folgt. Man sieht sich gegen Wurfplan in der Richtung von Punkt I . $N = T \sin \alpha + T \cos \alpha$, $I = T \sin \alpha - T \cos \alpha$, oder, da $\alpha = c \cos \alpha$, $b = c \sin \alpha$ ist, $N = 2 T \sin \alpha \cdot \cos \alpha$,



$$I = N (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \text{ oder}$$

$$12. \quad N = T \sin 2\alpha, \quad I = -T \cos 2\alpha.$$

Insbesondere wird N zum Maximum

für $2\alpha = 90^\circ$ oder 270° oder $\alpha = 45^\circ$

oder 135° ; für diese Lage wird $I = 0$. I wird zum Maximum für $\alpha = 0$ oder 180° und genau ist

$$13. \quad \max N = \pm T, \quad \max I = \pm T.$$

Hauptkraft also durch den Punkt in dem Punkt gleiches Gesetz in der Wirk und genau in einem, welche gegen den Wurfplan unter 45° gen. wirkt sind.

Die Resultante R aus I und N ist $R = \sqrt{I^2 + N^2} = T \sqrt{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}$, d. i.

$$14. \quad R = T.$$

Die Resultante R ist also konstant $= T$, wirkt also genau durch den Punkt in dem Punkt des Wurfplan.

§ 24. Formänderung. Ein unendlich kleiner rechteckiger Per. parallelogramm geht durch die Wirkung der Zugs- und Druckkräfte in ein schiefwinkliges über. Man nehme einen unendlich kleinen Dreieck von der Seite $= 1$ an, dessen eine Seitenfläche (Fig. 18) in der Wurfplanfläche liegt und genau mit einer Seite AB parallel zur Richtung A . Ein Änderung der Winkel, welche eine Normale zu einer Fläche mit der Plan einfließt, nennt man die Flächung der betrachteten Fläche. Ist der Querschnitt $ABDC$

Grange warisch, das man den spezifischen Zug, Druck oder Pösch einer ge-
meinen Grange warisch. Das zum Zerkleinen, Zerkleinen oder Abfließen
wässrige spezifische Zug, Druck oder Pösch heißt das Stückigkeit-Koeffizient für
Zug, Druck, oder Pösch oder vief. maßl. die Zug =, Druck =, Pöschstückigkeit, gro-
ßförmigkeit

Ein Koeffizient nimmt man, um die zulässige spezifische Abgrenzung
spezifiziert mit einem bestimmten Maß (von 5 bis 10) das Stückigkeit-
Koeffizienten zu und nennt diesen dann Tragmodul oder zulässige Zu-
sammensinken oder vief. maßl. den Pöschstück-Koeffizienten für Zug, Druck,
Pösch, 5 bis 10 den Pöschstück-Grad

Man bezeichne die Stückigkeit-Koeffizienten für Zug, Druck, Pösch mit
 C, C_1, C_2 , die zulässige Zusammensinken für Zug, Druck, Pösch mit $K,$
 K_1, K_2 , die Hebel- und Drehmomentkraft mit P und A . Als dann ist je
nachdem ob. bei Zug, Druck oder Pösch handelt, zur Berechnung der
Tragkraft oder der Querschnittsfläche bezuglief

$$19. \quad KF = P, \quad K_1 F = P, \quad K_2 F = A.$$

Bei der Zusammensinken auf Zug merkt man istotrogen Bögen, im Ab-
hange in einer gewissen Zug unter 45° geneigten Fläche eintritt, wenn
 $K_2 < \frac{1}{2} K$ merkt, da in dieser Fläche noch 50% der Tragmodul
von $\frac{1}{2} P$ merkt, da beim Versinken, Pösch, Zerkleinen und Abfließen
dieses Abfließen nicht eintritt, so ist $K_2 = \frac{1}{2} K$.

Bei der Zusammensinken auf Druck dagegen tritt kein Zerkleinen und
Abfließen, sondern Abfließen in der Flut ein. Man darf merkt für $K_2 = \frac{1}{2} K$
oder $K_1 = 2 K_2$ zu setzen, merkt indess die Tragmodulkraft keine
Stimmen, so darf die Koeffizienten für Zerkleinen und Abfließen gesondert
durch Proben zu bestimmen sind.

Bei der angegebenen Beanspruchung auf Stahl ist es zu vermeiden, dass die
 Juxtaflexion unter 45° gegen den Stahl verläuft; manel, weshalb man
 von σ in dieser Richtung der größten Zug macht. Wenn dieser der
 Fall, so muss zu setzen $\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{K}{E}$; der aber $\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{1}{2} \gamma = \frac{m+1}{m} \frac{F}{E}$
 $= \frac{m+1}{m} \cdot \frac{K}{E}$ ist, so wird $K = \frac{m+1}{m} K_2$ oder
 20. $K_2 = \frac{m}{m+1} K$.

Für $m = 3$ und 4 erhält man $K_2 = 0,75 K$ und $0,80 K$. Beim Bemessen
 dieser, Stahl und Gußeisen wird diese Beanspruchung wegen des großen Kraft
 behält, beim Stein nicht. Eine vollständige Bestätigung der
 der Kraft ist nicht zu erwarten, da der der Festigkeit der
 Formel 20 zu Grunde gelegte Elastizitätsgesetz nicht bis zum Bruch gül-
 tig ist.

Lamé & Coulomb (1783) setzen die Bruchfestigkeit auf die Bruchfestigkeit zurück und
 mitteilt die Regel $K_1 = 2 K_2$.

Die von H.öpke aufgestellte und mehrfach angewendete Regel $K_2 = \sqrt{K} \cdot K_1$ (Zusatz
 der Formel. Kraft. mit Zug. November 1858) ist prinzipiell unrichtig.

Ein Bruchfestigkeit findet in der wichtigsten Anwendung bei den Konstruktionen,
 namentlich in der Baukunst über „Brückenbau und Eisenkonstruktionen“ besprochen werden
 sollen.

§. 26 Körper von konstanter Festigkeit. Ist G der Gewicht des
 Körperstückes AC (Fig. 19.), so ist $P = P_0 + G$, $N = \frac{P_0 + G}{F}$. Damit der
 Körper in allen Querschnitten gleichmäßig gezogen oder gestaucht
 werde, muss für jeden Querschnitt $K = \frac{P_0 + G}{F}$, $F \cdot K = P_0 + G$ sein.
 Die Differentiation giebt $K dF = dG$. Nun aber ist offenbar $dG =$
 $F g dx$, mithin $K dF = F g dx$, $dx = \frac{K}{g} \cdot \frac{dF}{F}$,
 $x = \frac{K}{g} \int \frac{dF}{F} = \frac{K}{g} (\log nat F + Const)$

$$P = \sum P_0 \quad Q = \sum Q_0 + \int q dx$$

$$1. \begin{cases} P_0 \leq P_0 & Q_0 = \sum Q_0 + \int q dx \\ M_0 = \sum Q_0(x-\xi) + \sum P_0 \eta + \int q(x-\xi) d\xi \end{cases}$$

Kann sich der Körper durch Wirkung der äusseren Kräfte verformen, so nehmen P, Q und M allerdings andere Abmessungen, je es kann sogar eine in der Richtung der Axa der M wirkende Druckkraft ein Biegemoment in Richtung der Axa der Q und ein Torsionsmoment aufweisen. Wir folgen aber vorwiegend, durch die Verformung so klein sei, dass man die Abmessungen P, Q, M der Formänderung ebenso gross annehmen könne, als vor der Formänderung, und dass die Annahmen keinen grossen zu verwerflichen sind. Dingens zu will, in denen diesel nicht zutrifft ist, werden wir besonders besonders.

$$Q + dQ = \sum Q_0 + \int q dx - q dx = Q - q dx,$$

2. $\frac{dQ}{dx} = -q$

ist ferner a der Abstand der Angriffsmittel der Mittellkraft Q von der Aufl. A wirkenden Partikelkräfte von C , so ist $M = Qa - \frac{1}{2} \rho g \eta$ mit der Biegemoment für einen Grenzfchnitt mit der Abgriffe $x + dx$
 $M + dM = Q(a + dx) - \frac{1}{2} \rho g \eta - \frac{1}{2} \gamma dx^2 = M + Q dx$, also $dM = Q dx$, also

$$3. \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

$$4. \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{d\alpha}{dx} = -q$$

Demnach ist das Differentialquotient des Torsionsmomentes gleich der negativen Last pro Längeneinheit und das Differentialquotient des Biegemomentes gleich der Torsionskraft.

Auf Torsion 3 folgt, dass M für Längeneinheit konstant zum Maximum wird, für welche $\alpha = 0$ wird.

Dies wird sofort im Lichte ersichtlich, so ist $q = 0$. Auf Torsion 4 wird das, wenn α mit b konstante Beziehung,

$$\alpha = a, M = ax + b$$

α ist also konstant und M in Beziehung auf x linear. In jedem Punkt, in welchem eine isolierte Last wirkt, ändert sich natürlich der Ausdruck für α und M . In der gewöhnlichen Darstellung wird α durch eine sprunghafte Linie, M durch eine schiefe Linie dargestellt.

§ 29. Spannungen. Es fragt sich nun, welche Spannungen auf ein gegebenes Gitter innerhalb eines Querschnittes, aufgetragen innerhalb kleiner Parallelzylinder wirken (Fig. 21). Zunächst wirken jedenfalls Normalspannungen N auf die in den Querschnitt senkrechten Flächen in Folge der durch die Längung verursachten Längsverschiebung der Fasern. Dies nennen wir Längsspannung. In Folge der direkten Wirkung der Lasten wirken auf Normalspannungen N , auf die oberen und unteren Flächen, jedoch sind diese wegen N sehr klein (Hauptachsensystem Winkler's Lese nach der Elastizität und Festigkeitsl., 1867. S. 75.) so leicht mit für vernachlässigbar zu machen.

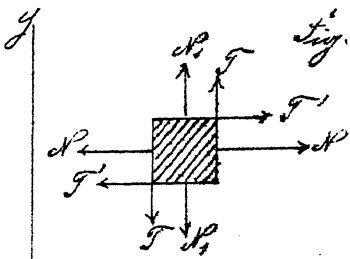
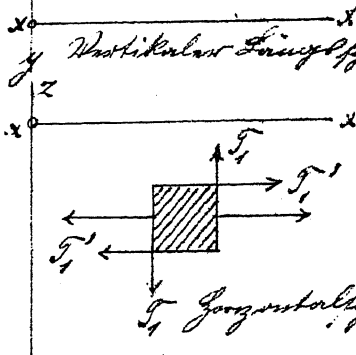


Fig. 21.

Auf der die vordere und hintere Fläche können in Folge der Querschnittsänderung Normalspannungen wirken, die indessen sehr klein sind, als P_1 .

In Folge der Wirkung der Transversalkräfte haben die Querschnitte des Balkens, sich gegen einander zu verschieben, es müssen also Reibkräfte F in den in den Querschnitten liegenden Flüssen in Richtung der äußeren Kräfte (in vertikaler in Richtung der äußeren Kräfte) wirken. In Folge der ungleichen Spannung



Gegenseitig. Richtung) wirken.

In Folge der Wirkung der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 haben die Querschnitte des Balkens, sich gegen einander zu verschieben. Es wirkt daher eine Reibspannung F auf die vordere und hintere Fläche in Richtung der Achse x, x , ferner eine Reibspannung F auf die vordere und hintere Fläche in der Richtung der Achse y, y . Es wirkt daher, wegen der ungleichen Verteilung der Kräfte F , in den in den Querschnitten liegenden Flüssen in Richtung der z, z (in longitudinaler Richtung) wirken, da sonst das Biegemoment nicht in Gleichgewicht gegen die Kräfte der Achse x, x sein könnte.

Bezeichnen wir die Dimensionen des Biegemomentes in Richtung der Achse der x, y, z mit a, b, c , so sind die Wirkungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 $= P_1 b c, P_2 b c, P_3 a c, P_4 a c$, die F gleichmäßig gegen die Kräfte der Achse der x, y, z gleichmäßig, so muß $F b c a = P_1 a c b$ und $F b c a = P_2 a c b$ sein; ferner so

$$5. F = P, \quad F_1 = P_1,$$

so daß in zwei Reibspannungen, welche dieselben Kräfte des Biegemomentes hervorrufen, gleich sind.

Wir haben also die drei Größen N, T, T_1 zu bestimmen. Wirken
 Hmilt oft T nicht vorhanden, oder zu vernachlässigen.

§ 30. Gleichgewicht der inneren und äusseren Kräfte.

Nehmen wir uns den Ringen durch den Querschnitt C (Fig. 20) abhandelt,
 so wirken auf den Punkt A von Querschnitt die Resultanten N, T, T_1 ,
 und von anderen Punkten die Kräfte P, Q . Wenn der Ringen seine Kreis-
 form angenommen hat, so befinden sich diese Kräfte im Gleichgewicht.
 Die Gleichgewichtsbedingungen sind, wenn df der Flächenelement
 der df bedeutet:

$$6. \int N df = P, \int T df = Q, \int T_1 df = 0.$$

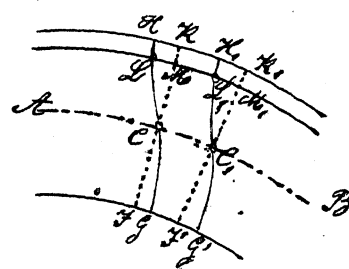
$$7. \int N v df = 0, \int N w df = 0.$$

wobei die Integration über die Auflösung der Grenzen Querschnittes
 zu verstehen ist.

§ 31. Bestimmung der Faserdehnung N . Zuerst kann man

Querschnitt, nachher unabhängig den Abstand dx haben, wegen nach der
 Formänderung in der dx der Ringen der Abstand
 $dx + \epsilon dx$, in einem beliebigen Punkte L mit den
 Querschnittskordinaten v, w den Abstand $dx + \epsilon dx$
 haben. Wir wissen nun die Annahme, dass die
relative Änderung $\frac{d\epsilon dx}{dx}$ der Abstand der Quer-
schnitte in Beziehung auf v und w von oben
herab für die Kraftbestimmung dieses Annahme macht man, macht
die Voraussetzung, dass die Querschnitte eben bleiben. und ist
 dass mit der Annahme von Dehnungsveränderungen im Abstand dx

Fig. 22.



Bestenfalls Normalgleichung kreistrunder Normalen.

Die Normalengleichung ist nun $N = C \frac{d\alpha}{dx}$; wo nun $\frac{d\alpha}{dx}$ in
 Logarithm auf v und w vom selben Grade ist, so wird auf N in La-
 garithm auf v und w vom selben Grade sein. Dies können wir
 setzen

$$8. N^2 = a + bv + cw.$$

Die Substitutionen sind Substituenten in die ersten drei Gleichungen 6
 und in die Gleichung 7 geht

$$\begin{cases} a \int df + b \int v df + c \int w df = P \\ a \int v df + b \int v^2 df + c \int v w df = M \\ a \int w df + b \int v w df + c \int w^2 df = 0. \end{cases}$$

Wo die Koeffizienten v und w durch die Polynomgleichung der Quadranten
 gegeben, so ist

$$\int v df = 0, \quad \int w df = 0.$$

Das Integral $\int df$ ist die Gesamtfläche der Quadranten, welche
 wir mit F bezeichnen. Die Integrale $\int v^2 df$, $\int w^2 df$ sind die träg-
heitsmomente der Quadranten in Logarithm auf die Koeffizienten v
 und w , welche wir mit F , F' bezeichnen: Das Integral $\int v w df$
 zeichnen wir mit H . Konstant ist

$$9. F = \int df, \quad F' = \int v^2 df, \quad F'' = \int w^2 df, \quad H = \int v w df.$$

Die obigen Gleichungen setzen wir über in

$$a F = P, \quad b F' + c H = M, \quad b H + c F'' = 0.$$

Einmal ergibt sich

$$10. a = \frac{P}{F}, \quad b = \frac{F' M}{F F' - H^2}, \quad c = -\frac{H M}{F F' - H^2}$$

und folglich noch

$$11. N = \frac{P}{F} + \frac{M(F' - H w)}{F F' - H^2}.$$

Linien auf, welche die Spannung N und gewisse Y-Achsen, wenn man das nun die Gewichtskraft P , das unter dem Ringmoment M proportional ist.

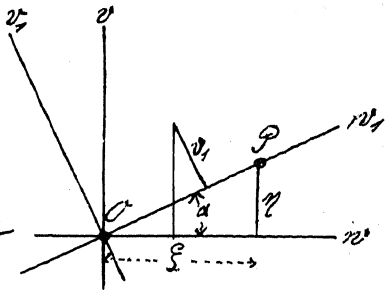
§ 31. Allgemeine Eigenschaften der Trägheitsmomente.

Wir legen uns nun zunächst belieigen Punkt O als Ursprung der Achsen v, w . Für ein um den Winkel α gedrehtes Dreieck mit denselben Koordinatenachsen seien die Koordinaten v_1, w_1 . Als dann ist $v_1 = v \cos \alpha - w \sin \alpha$, $w_1 = v \sin \alpha + w \cos \alpha$. Das Trägheitsmoment für die Achse der w_1 wird

$$J_{w_1} = \int (v \sin \alpha - w \cos \alpha)^2 df = \int (w^2 \sin^2 \alpha - 2vw \sin \alpha \cos \alpha + v^2 \cos^2 \alpha) df. \quad \text{oder}$$

$$J_{w_1} = J_w \sin^2 \alpha - 2H \sin \alpha \cos \alpha + J_v \cos^2 \alpha. \quad \text{Fig. 23.}$$

Wir tragen auf der Achse der w_1 einen Punkt O, P, S auf, welche der Schwerachse w_1 und J_{w_1} proportional ist, so dass wir $s = \frac{h}{J_{w_1}}$ setzen können, wenn h einen beliebigen Faktor bezeichnet. Sind ξ, η die Koordinaten des Punktes P für die v, w .



ferner liege P auf w_1 , so meist $\sin \alpha = \frac{\eta}{s}$, $\cos \alpha = \frac{\xi}{s}$. Einsetzen. folgt gilt

$$\frac{J_v}{h^2} \xi^2 - \frac{2H}{h^2} \xi \eta + \frac{J_w}{h^2} \eta^2 = 1$$

Der Punkt P beschreibt also bei einer Drehung der Achse einen Ringelspinn. Ist für keine Achse das Trägheitsmoment unendlich groß, dann kann, so eine Parabel und Hyperbel, und Graphen, der Punkt P beschreibt also eine Ellipse, welche man die Trägheitsellipse nennt. Die Hauptachsen, nachher den Maxima und Minima des Trägheitsmoments. Die Lage der Achsen erhält man durch

42

indem man $\frac{d\mathcal{H}}{d\alpha} = 0$ setzt. Dies gibt $(\mathcal{F}' - \mathcal{F}) \sin 2\alpha - 2\mathcal{H} \cos 2\alpha = 0$.
oder

$$12. \quad \tan 2\alpha = \frac{2\mathcal{H}}{\mathcal{F}' - \mathcal{F}}$$

Das obige $\mathcal{H}$ gilt für das gegebene Koordinatensystem wenn in

$$\mathcal{H}_1 = \int (w \cos \alpha + v \sin \alpha)(-w \sin \alpha + v \cos \alpha) df$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} (v^2 - w^2) \sin 2\alpha + v \cdot w \cos 2\alpha \right] df \quad \text{oder}$$

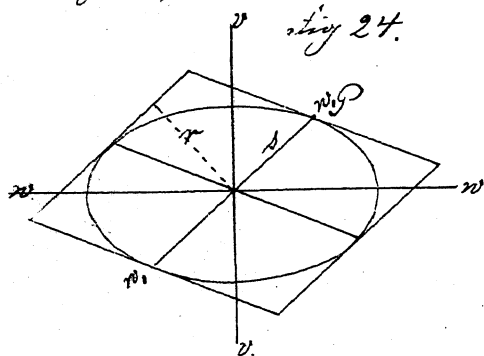
$$13. \quad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} (\mathcal{F}' - \mathcal{F}) \sin 2\alpha + \mathcal{H} \cos 2\alpha.$$

Das in dem das Krümmungsmoment wird nach dem Krümmung

$$(\mathcal{F}' - \mathcal{F}) \sin 2\alpha - 2\mathcal{H} \cos 2\alpha = 0, \quad \text{wobei man}$$

$$\mathcal{H}_1 = 0.$$

Wir wollen nun zeigen, dass das Krümmungsmoment als Kenn der v und w messbar, als Kenn misst



$$14. \quad \begin{cases} \mathcal{F}' = \mathcal{F} \cos^2 \alpha + \mathcal{F}' \sin^2 \alpha \\ \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} (\mathcal{F}' - \mathcal{F}) \sin 2\alpha \end{cases}$$

Setzt man, an die Krümmungsmomente
parallel zu den gegebenen w, w_1 (s. Fig. 24) an,
gibt man sich das Krümmungsmoment der

folgenden von w, w_1 mit r , setzt man voraus, dass man in dem Krümmungsmoment?
gibt man sich das Krümmungsmoment, an das Folgende, so erhält man die neue Form.
gibt man, welche Krümmungsmomente, Krümmungsmomente parallel sind, in Parallel.
gibt man, dass das Krümmungsmoment = $4,5r$ ist. Das Krümmungsmoment das
eine flache Krümmungsmoment, dass das Krümmungsmoment, dass das Krümmungsmoment
gibt man, Krümmungsmomente parallel sind, ist konstant und gleich $= 4ab$, wenn
 a und b die beiden Halbachsen bezeichnen. Das wird $4r = ab$ oder

$$15. \quad r = \frac{ab}{4} = \frac{\sqrt{\mathcal{F}_1} \cdot ab}{4} = \frac{h \sqrt{\mathcal{F}_1}}{4}$$

Es ist r das Krümmungsmoment mit dem Krümmungsmoment

oder dem sogenannten Trägheitsmoment proportional; r geht in den Trägheitsradius über, wenn $I_x = I_y$, $r = \sqrt{\frac{I}{m}}$ wird. Sind oft der Fall, wenn $\frac{I}{m} = \frac{k}{V$ oder $k = \frac{V I}{m}$ gemittelt wird. Wir können also die Trägheitsmomente auf alle Arten erklären, welche von Gewohnheit erfüllt sind, die von der speziellen Art der Trägheitsmomente als Abhängigkeit folgen.

Insbesondere für die Bestimmung des Trägheitsmomentes muss man die Trägheitsmomente auf Centralachsen mit den symmetrischen Hauptachsen des Körpers bestimmen, für welche das Trägheitsmoment zum Minimum wird, weil man die Achsen, die unter den gegebenen Umständen liegen.

Betrachten wir das Trägheitsmoment für einen beliebigen Punkt P , dessen Lage für einen festen Punkt O im Abstand e , und fest im beliebigen Element von der Achse O im Abstand x , so ist $I_x = \int x^2 df$, $I_x' = \int (x+e)^2 df$

$$= \int (x^2 + 2ex + e^2) df. \text{ Da nun aber } \int x df = 0 \text{ ist, so bleibt } I_x' = \int (x^2 + e^2) df \text{ oder}$$

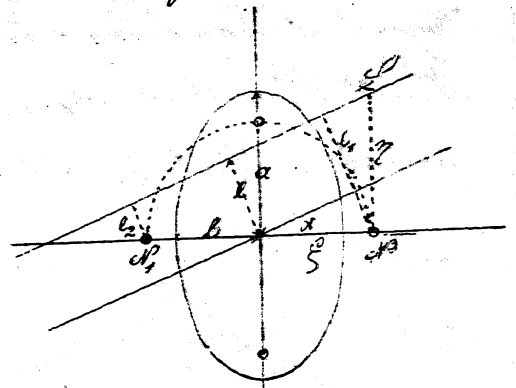
$$16. \quad I_x' = I_x + F e^2.$$

Betrachten wir nun einen Punkt P mit den Koordinaten x, y und den Winkel α im Abstand e mit dem Punkt O mit den Koordinaten x, y .

Wenn ξ und η , so ist $e = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$. Betrachten wir nun die große und kleine Halbachsen der Centralachse mit a und b , so ist $I = I_a^2$ $I' = I_b^2$, also

$$I_x' = F [a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + \xi^2 \sin^2 \alpha - \eta^2 \cos^2 \alpha]$$

Es wird I_x' für alle Lagen eines Punktes P gleich sein, wenn konstant, wenn $a^2 + \eta^2 = b^2 + \xi^2$ und wenn $\xi \eta = 0$ ist. Folglich, wenn $\xi = 0$, so wird



$a^2 + \eta^2 = b^2$, $\eta = \sqrt{b^2 - a^2}$, also η imaginär, da $a > b$ ist. Setzen wir $\eta = 0$, so wird $a^2 = b^2 + \xi^2$, also $\xi = \sqrt{a^2 - b^2}$. Es ist also bei jedem Punkt ξ senkrecht zu den beiden Geraden im Abstand $\sqrt{a^2 - b^2}$ vom Brennpunkt liegenden Punkte N, N_1 , für welche das Dreifach-Pennant konstant wird. Wir nennen die Punkte mit Höhe „Lagepunkte“. Es sei: bei jedem vom Brennpunkt liegenden Abstand, wie die Brennpunkte der Centralellipse.

Nach Formel 16 wird

$$F_1' = F[a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + l^2] = F[a^2 - a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + l^2]$$

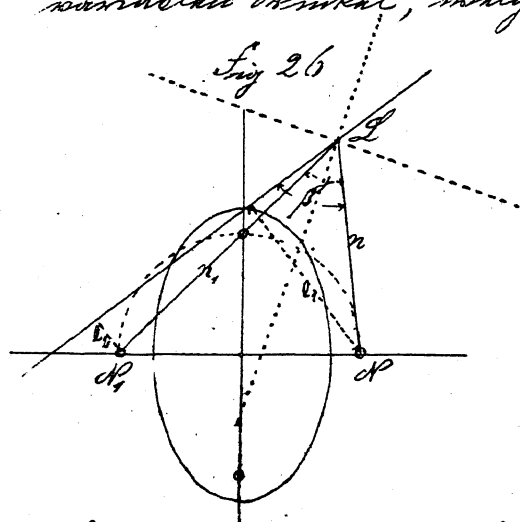
da $\xi^2 = a^2 - b^2$ ist, so wird $F_1' = F(a^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha + l^2)$.

Bedeutet man den Abstand der beiden Punkte N und N_1 mit l_1 und l_2 , so ist $l_1 = l + \xi \sin \alpha$, $l_2 = l - \xi \sin \alpha$,

$l_1 \cdot l_2 = l^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha$, folglich sehr einfach

$$17. \quad F_1' = F(a^2 + l_1 \cdot l_2)$$

Bedeutet man ferner den Abstand eines beliebigen Punktes L von N und N_1 mit n, n_1 , (s. Fig. 26) den Winkel $N L N_1$ mit β und den variablen Winkel, welchen eine Tangente L schneidet N mit $L N_1$ im



pfällt, mit γ , so ist $l_1 = n \sin \gamma$, $l_2 = n_1 \sin(\gamma - \beta)$

also $F_1' = F[a^2 + n \cdot n_1 \sin \gamma \sin(\gamma - \beta)]$;

Es wird F_1' zum Maximum und Mini-

mum für $0 = \sin \gamma \cos(\gamma - \beta) + \sin(\gamma - \beta) \cos \gamma$.

oder für $\sin(2\gamma - \beta) = 0$, d. i. für

$$18. \quad \gamma = \frac{1}{2}\beta \text{ und } \gamma = \frac{1}{2}\beta + 90^\circ$$

Die Tangente der Centralellipse für den Punkt

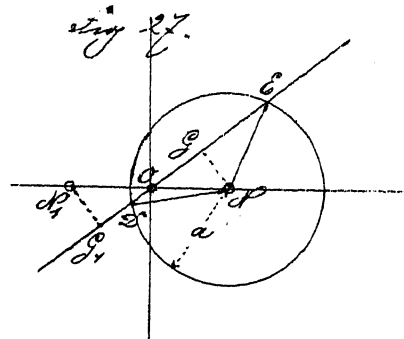
L schneidet die Winkel zwischen $L N$ und $L N_1$.

Mit Hilfe der Lagepunkte läßt sich die Centralellipse leicht

Konstruieren. Auf einem festgesetzten N-Pfeile muss man einen Kreis mit dem Radius a , welcher die festgesetzte Axe in zwei Ecken schneidet. Als dann ist $e_1 = -e_2 = N \cdot d$. $a \cdot N \cdot d = N \cdot e$ oder

$$F_1 = F(N \cdot d^2 - N \cdot e^2) = F \cdot d \cdot e^2$$

Summe ist $d \cdot e$. $d \cdot e$ der Trägheitsmomenten für die festgesetzte Axe DE (Fig. 27)



Die ersten Momente der Trägheitsmomente auf der Polarachse, in die Längsrichtung der Achse werden die Polmomente bezeichnet

S. 32. Wahl der Hauptachsen als Axen der v. und w. Syst. Die Hauptachsen einer Querschnittsfläche sind die Hauptachsen, so ist in der Formel $H = a \cdot z$ folgen, wobei a der Abstand von der Achse zum Schwerpunkt ist.

$$19. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{M \cdot v}{F}$$

In dieser Form kommt der Ausdruck für die Längsspannung aus der Formel N in der Ausdehnung. Wichtig ist hierbei, dass die Querschnittskraft $P = 0$, also keine äußere Kraft wirkt.

$$20. \quad N = \frac{M \cdot v}{F}$$

Wenn Momente M und M_1 in Längsrichtung auf beiden Querschnittsflächen wirken, so ergibt sich die Längsspannung $\frac{M \cdot v}{F}$, M_1 ergibt sich die Längsspannung $\frac{M_1 \cdot w}{F}$, wobei die Querschnittskraft P die Längsspannung $\frac{P}{F}$ ergibt. Die resultierende Längsspannung ist dann

$$21. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{M \cdot v}{F} + \frac{M_1 \cdot w}{F}$$

Wobei F die Querschnittsfläche, M und M_1 die Längsmomente für die Axen der v. und w.

S. 33. Die neutrale Achse. Nach dem Vorigen wird die Gleichung

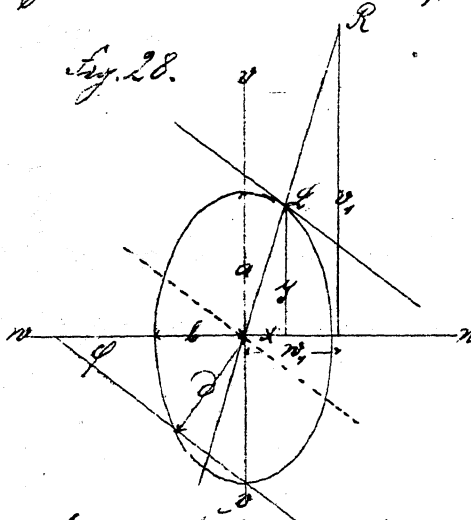
der Linie, in welcher keine Tangentialformung vorfinden ist,

$$\frac{P}{F} + \frac{dv}{F} + \frac{M_1 w}{F_1} = 0.$$

Wenn man diese Gerade die neutrale Axa und die Stübe, macht die neutrale Axa aller Hauptachsen ausfällt, die neutrale Faser. Auf der einen Seite, hinten gestrichen, auf der anderen negativen Begrenzung steht. Die Begrenzung ist sich offenbar proportional dem Abstand von der neutralen Axa, die größten Begrenzungen finden sich in der am meisten von der neutralen Axa entfernten Punkten steht.

Berechnen wir den Winkel, welchen die neutrale Axa mit der Axa der w bildet, mit φ und den normalen Abstand der Axa vom Punkt.

Fig. 28.



günstig mit φ , so ist ihre Gleichung

$$d - v \cos \varphi + w \sin \varphi = 0$$

Die Differentialgleichung mit dieser Gleichung

gibt $\frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{M_1 F}{P F_1}$, $-\frac{\cos \varphi}{\varphi} = \frac{M_2 F}{P F_2}$. Ferner folgt

$$23. \tan \varphi = -\frac{M_1 F}{M_2 F_2}, \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{F}{P} \sqrt{\frac{M_1^2}{F_1^2} + \frac{M_2^2}{F_2^2}}$$

Nach der Koordinatengleichung, der φ ist alle

einigen Punkte auf einer Linie der Hauptachsen zu einer Parabelkurve zusammenfassen lassen, welche den Hauptachsen in einem Punkte Punkt der Koordinaten φ w schneidet, wird $M = P \varphi$, $M_1 = P \varphi_1$. Dann wird $F = F a^2$, $F_1 = F b^2$, so wird $\frac{v_1 v}{a^2} + \frac{w_1 w}{b^2} + 1 = 0$

$$24. \tan \varphi = -\frac{w_1 a^2}{v_1 b^2}, \quad \frac{1}{\varphi} = \sqrt{\frac{v_1^2}{a^4} + \frac{w_1^2}{b^4}}$$

Die Gleichung der Centralellipse ist $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, daher $\frac{x dx}{b^2} = -\frac{y dy}{a^2}$ oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \frac{a^2}{b^2}$. Für den Punkt L, in welchem die Gerade OR die Centralellipse schneidet, ist $\frac{x}{y} = \frac{w_1}{v_1}$. Daher wird für diesen Punkt $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$, d. h. die neutrale Axa ist die Tangente im Punkte L

gerade, oder: Die zur neutralen Lage parallelen Verschiebungen sind die Tangentiallinien der Kraftebene mit dem Schwerpunkt, sind konjugierte Verschiebungen der Centralachse.

Bemerkung: Die Eckpunkte des Kräfteparallelogramms der neutralen Lage sind Tangentialpunkte.

Bemerkung: man kann die Kräfteebene als Flächenelement von der neutralen Lage mit v , das Tangentialmoment und die Größe H für die Punkte mit F' H' , den Abstand des Punktes R von einem zur neutralen parallelen Verschiebung mit e , so ist $N = H v$, also $H \int df v' = P$, $H \int df v'^2 = P(e)$, $H \int df v' w' = 0$, oder

$$H F D = P, H F' = P(D+e), H = 0.$$

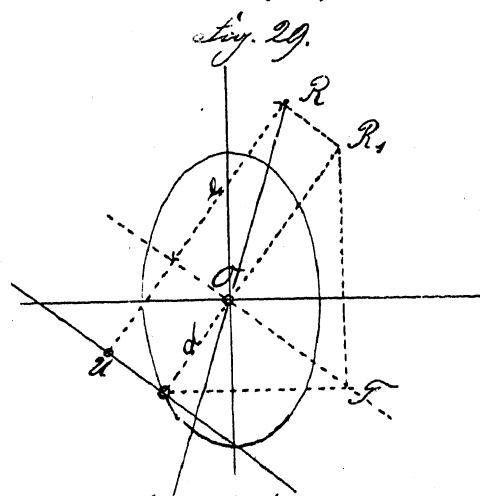
Die letzte Gleichung zeigt, dass die neutralen Lage und eine durch R gehende Tangentiallinie $R U$ zu denselben Momenten der Kräfte gleichgültig für den Punkt U sind. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$D+e = \frac{F'}{F D}. \text{ Bemerkung: man wolle die Tangentialkoordinat für eine zur neutralen Lage parallele Verschiebung mit } r, \text{ so ist } F' = F r e + F D^2$$

$$\text{also } D+e = \frac{r^2 + D^2}{D} \text{ oder } D^2 + D e = r^2 + D^2, \text{ oder}$$

$$25. \quad D = \frac{r^2}{e}.$$

Wählt man auf der zur neutralen Lage parallelen Verschiebung $O F = r$, liegt durch O eine Tangentiallinie zur neutralen Lage, fällt von R auf die selbe die Tangentiallinie $R R_1$, zieht R_1 eine Parallele auf R , in O eine Tangentiallinie, so schneiden dieselben auf der oben aufgestellten Gleichung die zur neutralen Lage parallelen Tangentialverschiebungen in einem Punkte der neutralen Lage. (Fig. 29.)



Ein neutrales Stab liegt nur in dem Falle auf der Kräfteebene senkrecht, wenn sein Schwerpunkt auf der Schnittlinie in der Kräfteebene liegt; denn nur in diesem Falle wird nach Gleichung 24 $\varphi = 0$.

Erstlichst. Zuerst bezieht sich Galilei (1564-1642) auf die Kräftegleichheit. Er nimmt an, daß sich der Körper beim Zurückgehen um die Punkte A (Fig 30) hinauf und daß sich am Zurückgehen an allen Stellen ein gleich großer Widerstand entgegenzusetzen. Mariotte (1684-1717) befragt sich über die Kräftegleichheit mit Rücksicht auf die Elastizität. Er nimmt an, daß die neutrale Stab in der Mitte der Länge auf der Schnittlinie liegt. Ein sehr wichtige Grundlage zur Bestimmung der neutralen Stab, nämlich, daß die Summe der Biegemomente auf beiden Seiten des selben gleich sein muß, gibt Poisson (Jahrgang 1810). Coulomb (1736-1806) benutzt denselben Grundsatz und findet, daß die neutrale Stab bei symmetrischen Stäben in der Mitte der Länge liegen muß. Erst Kavier (1785-1836) findet, mit Hilfe desselben Grundsatzes, daß die neutrale Stab durch den Schwerpunkt gehen muß und gibt zuerst den Ausdruck $N = \frac{dV}{d\varphi}$. Erßt fixiert durch Kräftegleichgewicht der Stabschnitt ist, zeigt aber zuerst Poisson 1834. Jetzt nimmt Kavier die neutrale Stab von verschiedenen Punkten aus der Kräfteebene an. Daß dieser nur unter einer bestimmten Bedingung richtig ist, zeigt zuerst Poisson (1834). Ein Hilfsmittel zur Bestimmung der neutralen Stab zeigt zuerst De Saint-Venant und gibt zuerst den Ausdruck $N = \frac{dV}{d\varphi} + \frac{dW}{d\varphi}$. Die obige Bestimmung der neutralen Stab mit Hilfe der Kräftegleichheit zeigt zuerst Bresse (1859).

§ 34. Der Kern des Querschnittes. Nach dem Mittelwertsatz läßt sich bei gegebenen Lagen der neutralen Stab auf der Kurve R, d. h. dem Mittelpunkte aller Expositionsrichtungen oder der Kräfte. Der Mittelpunkt der verschiedenen Kräfte im Querschnitt bestimmen. Ist die Gleichung 24 folgt leicht $v_1 = -\frac{a^2}{2} \cos \varphi$, $w_1 = \frac{b^2}{2} \sin \varphi$, man setzt auf die Koordinaten v , w , läßt konstruieren lassen. Ist die

krada Hya durch einen Punkt H mit den Coordinaten m, n , ist
 $\delta = m \cos \varphi - n \sin \varphi$. Setzt man dies ein, so erhält man $m^2 \cos^2 \varphi - n^2 \sin^2 \varphi = a^2 \sin^2 \varphi$
 $m^2 \cos^2 \varphi - n^2 \sin^2 \varphi = b^2 \sin^2 \varphi$, die Elimination von φ gibt

$$2b \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + 1 = 0$$

Einmal bemerkt der Punkt R eine gerade Linie, wenn sich die
krada Hya um einen Punkt H dreht. Dieselbe Gleichung geht aus der
Gleichung § 33 $\frac{v_1^2}{a^2} + \frac{w_1^2}{b^2} + 1 = 0$ hervor, wenn man $v_1 = m$, $w_1 = n$
 $v = v_1$, $w = w_1$ setzt. Einmal ist der Ort der Augenspitzen R bei
der Drehung der neutralen Hya um einen festen Punkt H derartiger
Linie, welche zur neutralen Hya werden würde, wenn R der Augensp.
punkt wäre.

Liegt die neutrale Hya außerhalb der Flächsektors, so fordern alle
 Bestimmungen derselben Konzeption. Alle Augenspitzen, welche für
 diese außerhalb der Flächsektors liegen, sind in der Hya selbst, und
 liegen immerfort in der Fläche, welche man die Flächsektors
 nennt. Der Umfang der Fläche wird von Augenspitzen R be-
 schrieben, wenn die neutrale Hya alle möglichen der Flächsektors be-
 greifenden Lage annimmt. Kurzum diese wird jetzt die
Flächsektors eine gerade Linie der Fläche und jetzt gerade Linie der
Flächsektors eine feste der Fläche entsprechen.

Kurzum das sind einzelne Punkte der Fläche und
 die gerade Linie der Fläche läuft zu Fläche hin.

Wird diese der Fläche durch die Fläche für die größte Fläche
 maßnahme Fläche angenommen. Wenn die Fläche der Fläche
 spitzen R von einer zur neutralen Hya der Fläche
 der Fläche für die Fläche, Fläche der Fläche

Querschnitt konvergierender Parallelen zur neutralen Ase von der zu
der neutralen Faserung bedäutet, so ist die Momentenspannung

Fig. 31.

$$N = \frac{F}{F} + \frac{Pz}{Fz^2} = \frac{P}{F} \frac{r^2 + ez}{r^2}$$

Ist nun der Abstand zweier Parallelen zur neutralen Ase, von denen die eine durch den Krüppelpunkt R , die andere durch den Tangentialpunkt T geht, so ist der zugehörige Krüppelpunkt R gegeben ist, so ist nach dem Obigen $d = \frac{r^2}{e}$ und also $z = \frac{r^2}{h - e}$, also $h^2 + ez = r^2$, $r^2 + ez = h^2$, mithin

$$27. N = \frac{Pz}{Fz^2} = \frac{Mz}{F}$$

manne M das Moment der äußeren

Kräfte in Beziehung auf die durch R gelegte Parallele zur neutralen Ase und F das Krüppelmoment für eine zur neutralen Ase parallele Faserung bezieht. In dem Falle, wo eine Tangente der Querschnitts in der Krüppelung liegt, kommen nur die in dieser Ase liegenden Punkte der Kurve in Betracht; für die wird die Annahme dieser Regel ungemein einfach.

Der Fall der Querschnitts wird zuerst von Bresse (1854) angestrichen.

§ 35 Bestimmung der Schubspannung T . Eine allgemeine Bestimmung der Schubspannung ist nicht möglich; sie ergibt sich nur, wenn die Kurve vorliegt, dass die Schubspannung in der ganzen Länge einer Kurve h im Querschnitt konstant bleibt. Man nimmt an, dass eine Tangente der Querschnitts, die Ase oo in der Krüppelung liegt, und bestimmt die Schubspannung T nach

in einem Querschnitt in Richtung der Axa ww , oder in einem auf der Kraftkante senkrechten Längsschnitt in Richtung der Axa zu wirken. Hier setzen wir voraus, dass der Querschnitt kreisförmig bleibt, oder sich nur sehr wenig verformt. Durch einen gewissen Grad der Verdrehung umgeben Querschnitt den Längsschnitt. Nehmen wir einen Längsschnitt $ACBAC'$ und die zur Axa ww senkrechte Ebene AB . Als dann wirken auf den Ringabschnitt $ACBAC'$ in Richtung der Axa die folgenden Kräfte:

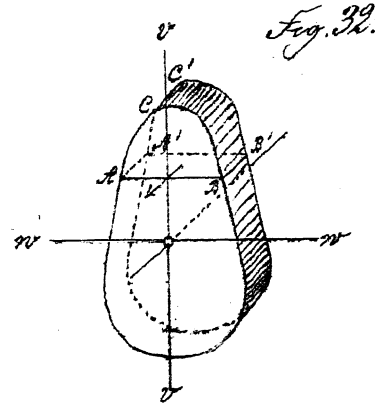


Fig. 32.

1. Auf der Fläche $ACBAC'$ wirkt die Kraft $P dx$, wenn C die Länge der Ebene AB bezeichnet.

2. Auf der Fläche ACB wirkt die Kraft $Q dx$, wenn die Zentrifugalkraft auf den Längsschnitt senkrecht wirkt. Hier aber ist $N = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{F}$. Setzt man diese N ein, so erhält man $\frac{P}{F} \int dx + \frac{Mv}{F} \int v dx = \frac{PQ}{F} + \frac{MvQ}{F}$, wenn C die Fläche ACB und Q ihr spezifisches Moment in Bezug auf die Axa ww bezeichnet. Die Resultante der auf die Flächen ACB und $AC'B$ wirkenden Kräfte ist dann, da man voraussetzen darf, dass die Größen F, F', Q, Q' konstant, oder wenigstens konstant bleiben, und man auf P konstant ist, $= \frac{Q}{F} dM$, oder, weil bekanntlich $dM = Q dx$ ist, $= \frac{Q^2}{F} dx$. Zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung des Punktes $ACBAC'$ muss dann $P dx = \frac{Q^2}{F} dx$ sein. Dann wird

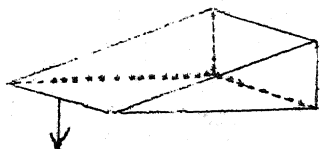
$$28. \quad F = \frac{Q^2}{Fb}$$

Das spezifische Moment Q ist für die Faserwege am größten und wird für die am nächsten von ww entfernten Punkte Null. Wenn b konstant bleibt, oder von ww aus nach beiden Seiten hin zu nimmt, so wird, nach

Die der Pflanzorgane am grössten und in den am weitesten von diesem abliegenden Punkten Kall.

Nun, die für Taupfallellen Formel müss mit Vorzeichen umgeändert werden; bei stark unändeligenen Grundflächen gibt sie sehr schlechte Resultate. Eine leichtere für die Krümmungsformel:

Fig. 33.

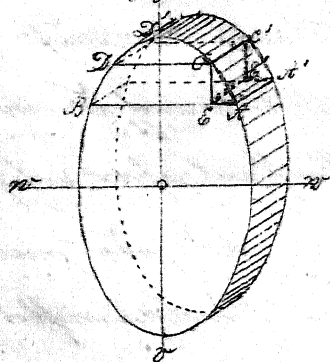


$$T = \frac{Q \cdot Q}{F \cdot b} + \frac{M \cdot \frac{d^2 Q}{dx^2}}{6 \cdot F \cdot x} + \frac{P \cdot \frac{dQ}{dx}}{6 \cdot F \cdot x}$$

anmerken. (Winkler's Lehre von der Elastizität und Festigkeit S. 57). Einmal selbst auf g. S. für einen von der Pflanze be-
lasteten Keil (Fig. 33) der Satz vollständig ist, indem für $v=0$ auf $T=0$
wird, während in den am weitesten abliegenden Enden der Maximum
wird.

S. 36. Bestimmung der Schubspannung T_1 Nehmen wir
betrachten wir in der Symmetrie Ebene bestimmen wir zunächst
die Rückkraft T_1 , welche auf ein am Rand liegendes Flächenelement
unter $CEE'C'$ wirkt (Fig. 34). Auf der horizontalen geraden Linie
unter $AEE'A'$ wirken die folgenden Kräfte:

Fig. 34.



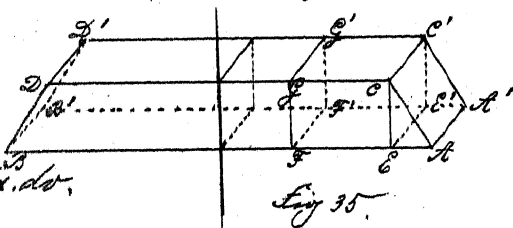
1. Auf der Fläche $AEE'A'$ wirkt die Kraft $\frac{1}{2} T dx \cdot d(=b) = -\frac{1}{2} T dx \cdot db$, wo $AE = \frac{1}{2} db$ ist.
2. Auf der Fläche $CEE'C'$ wirkt die Kraft $T_1 dx \cdot dv$.
3. Auf der Flächen AEC und $A'E'C'$ wirken die Kräfte $\frac{1}{4} N dv \cdot db$ und $\frac{1}{4} (N + dN) dv \cdot db$. In Result. kommt dieser beiden Kräfte ist $\frac{1}{4} dN \cdot dv \cdot db$. Diese aber ist gegen die beiden vorigen Kräfte sehr

geringer und klein.

Consequenter ist Gleichgewicht die Erfüllung der Bedingung
 $= \frac{1}{2} T dx \cdot dv + T_1 dx \cdot dv = 0$. Daraus ist

$$29. T_1 = \frac{1}{2} T \frac{db}{dv}$$

Folgt ist es leicht, die Schubspannung T zu bestimmen, nämlich, wenn ein beliebig unendlich dünnes Element $F G G' F'$ nimmt. Auf der rechten Seite liegt parallel zur xy -Ebene flammend $E F G E' F' G' E'$ wirken die folgenden Kräfte: (Fig. 35)



1. Auf die Fläche $F G G' F'$ wirken die Kräfte $T da, dv$.
2. Auf der Fläche $E E' E' E'$ wirken die Kräfte $T' da, dv$.
3. Auf die Flächen $E F F' E'$ und $E' F' F' E'$ wirken Kräfte mit der Resultante $dS(\frac{1}{2}b-c)da$, wenn c den Abstand des Punktes F von der xy -Ebene bezeichnet.

4. Auf die Flächen $E F G E'$ und $E' F' G' E'$ wirken Kräfte mit der Resultante $dK(\frac{1}{2}b-c)dv$.

Setzen wir die Summe aller dieser Kräfte gleich Null, so erhalten wir $T da, dv - T' da, dv + (dT da + dK dv)(\frac{1}{2}b-c) = 0$ oder

$$T' = T - \left(\frac{dT}{dv} + \frac{dK}{dx} \right) (\frac{1}{2}b-c) = T' = K(\frac{1}{2}b-c)$$

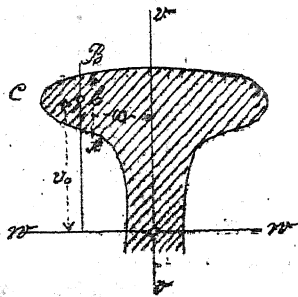
Wenn $c = 0$ muß der Symmetrie zufolge $T = 0$ werden; also wird $0 = T' - K \frac{1}{2}b$, $K = \frac{2T'}{b}$, also $T = T' \left[1 - \frac{2}{b}(\frac{1}{2}b-c) \right] = \frac{2T'c}{b}$ oder

$$30. T = T' \frac{c}{b} \frac{db}{dv}$$

Man sieht hieraus, daß die Schubspannung T verschwindet, wenn die Schubspannung T' verschwindet. Hieraus sieht man auch, daß c mit v wächst, also beim verfließenden Flüssigkeit, wird $T = 0$. Die Schubspannung T nimmt somit nur bei $v = 0$, wo sie Null ist, verschwinden. Dies ist zu zeigen.

§ 37. Schubspannungen in Seitenrippen. Bei Flüssigkeiten mit Seitenrippen, die senkrecht zur Rippenebene verlaufen, lassen sich die auswirkenden Formeln nicht anwenden. Hier ist vielmehr

Ein Knapfen geschnitten, dessen Querschnitt F in einer zur
Fig. 36. Ebene vv geschnitten ist (Fig. 36). Konstant ist,
dass der Knapfen sich bei F und F' in gleicher
Weise ausbreiten wird. Es ergibt sich
das Resultat:



$$29. F' = \frac{Q \cdot Q}{F \cdot b}, \quad F = F' \cdot \frac{v \cdot v_0}{b} + \frac{Q [b^2 + 4(v - v_0)^2]}{8F},$$

wenn Q der statische Moment des Knapfens $A \cdot C \cdot B$ in
Beziehung auf die Ebene vv , b die Breite $A \cdot B$, v den Abstand der Mitte
von $A \cdot B$ von vv bedeutet. (Winkler's Lehrb. von der Statik, 2. Aufl. S. 59)
Wenn die Knapfen dünn ist und sich bei F mit Q nur wenig ver-
ändert, so kann man

$$32. F' = \frac{Q \cdot Q}{F \cdot b}, \quad F = 0$$

folgen.

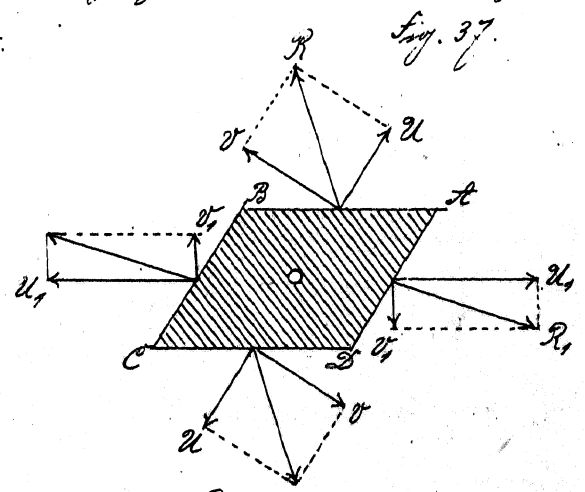
Geschichtliches. Daß die Transversalkraft Q eine Gleitung der Knapfen herbeiführt,
ganz richtig, sagt bereits Coulomb (1783). Pavier nimmt noch an, daß die Knapfen
sich nicht abheben und auf der Querschnittsfläche bleiben. Poncelet gibt
den Knapfen an, daß sich abheben und abheben. Erkman nimmt die Gleitung
mit Querschnitt F über den ganzen Knapfen an, den Knapfen
Knapfenfall zeigt zuerst H. Tenant über den Knapfen H. Tenant's Problem.
zu einem Knapfen nimmt die Querschnittsfläche zuerst von Wöhler (Erkman's
Zeitschrift für Bauwesen 1855) für den Knapfen, dessen Querschnittsfläche von Knapfen
Faradski (1856) und von Leissle und Heibler (Lehrb. der Statik, 1857)
bestimmt. Die Bestimmung der Querschnittsfläche F nimmt zuerst von Erkman
(Erkman's Zeitschrift für Bauwesen 1860) gegeben.

S. 38. Spannungen welche auf ein beliebiges Flächenelement
wirken. Wir wollen nun die Spannungen ausrechnen, welche auf ein
auf ein beliebiges Flächenelement wirkende Spannung zu ermitteln

ist. Wir wollen ferner gezeigt haben, daß nur die Normalkomponente R mit der Zugspannung T zu berücksichtigen sei. Diese beiden Kräfte wirken in einer Ebene, so daß in der Ebene selbst ein beliebiges Gleitbewegungsversuchen mit der Spannung wirken muß.

Wir denken uns gezeigt ein unendlich kleines Prisma mit parallelepipedischer Form mit dem Querschnitt $ABCD$ (Fig. 37) mit den unendlich kleinen Seiten $AB = DC = a$, $AD = BC = a_1$ und c .

Auf die Seitenflächen AB , DC wirkt die Spannung R , auf die Seitenflächen AD , BC die Spannung R_1 , von der wir annehmen, so daß die wirklichen auf die Flächen wirkenden Kräfte Rac , R_1a_1c sind. Wir zerlegen nun R in eine zu a , parallele Komponente



U und eine senkrecht wirkende Komponente V , ebenso R_1 in eine zu a_1 parallele Komponente U_1 und eine senkrecht wirkende Komponente T_1 . Die vier Kräfte U , U_1 , V , T_1 haben sich gegenseitig auf. Jeder wirkt auf das Gleichgewicht gegen die Spannung um eine der die Mitte der Fläche geschnittene, auf der senkrechten senkrechten U die Erfüllung der Bedingung $T_1 a_1 c = T_2 a_1 c$ oder

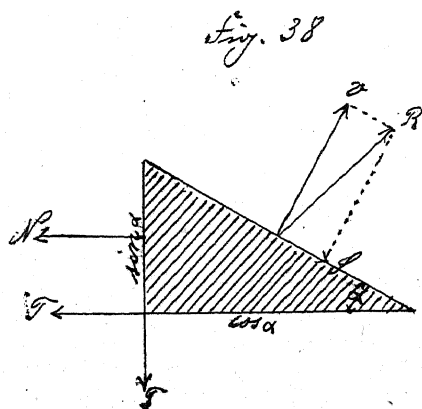
$$T_1 = T_2$$

d. h. Wenn auf ein in ein mit denselben Punkte gehaltenes Element f , f_1 die Spannungen R und R_1 wirken, so ist die Projektion von R auf die Normale von f_1 gleich der Projektion von R_1 auf die Normale von f .

Ein solcher Spezialfall dieses Satzes ist der bereits in § 29 angeführte Fall, daß die Zugspannungen, welche ein mit denselben

Kanten sind unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelogrammen
den, gleich sind.

Wir denken uns nun ein unendlich kleines dreieckiges Prisma
(Fig. 38.) ABC , von welchem die Punkte BC in der Querschnittsfläche, AC

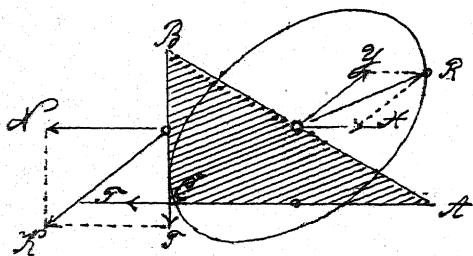


senkrecht auf der Querschnittsfläche und der Kraft, welche senkrecht auf der Fläche BC wirkt, also auch die Normalspannung N und die Schubspannung T , auf der Fläche AC wirkt die Schubspannung T . Die auf BC und die Endflächen, wirken die Schubspannungen T , welche sich auswirken, also auf der beliebigen Fläche AB wirken die Spannung

R , senkrecht in die Normalspannung N und in die Schubspannung T zerlegen lässt. Der Winkel $ABC = \alpha$. Die Länge des Prismenbogens sei gleich 1. Nehmen wir $AB = 1$, so wird $AC = \cos \alpha$, $BC = \sin \alpha$. Auf der Fläche AC wirkt also auch die Schubkraft $T \cos \alpha$, auf der Fläche BC wirkt die Normalkraft $N \sin \alpha$ und die Schubkraft $T \sin \alpha$.

Die Resultante der zwei in BC wirkenden Spannungen N und T sei R . Wir zerlegen nun noch R in zwei Komponenten (Fig. 39.)

Fig. 39.



X und Y , welche in Richtung der in AC wirkenden Spannung T und der in BC wirkenden Spannung N wirken. Also auch sofort das Gleichgewicht des Prismen die Erfüllung der Bedingungen $X = T \cos \alpha$, $Y = N \sin \alpha$.

Es sind also $\sin \alpha = \frac{Y}{T}$, $\cos \alpha = \frac{X}{N}$. Da nun aber $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ist, so wird

$$34. \quad \frac{X^2}{T^2} + \frac{Y^2}{N^2} = 1.$$

Erweitert folgt: Wenn man die auf ein beliebiges Ebenenlamm H B
 bestehende Spannung nach Größe und Richtung durch eine neue geeignete
 Punkte verteilte Spannung ersetzt so liegt das festgelegt durch das
 die auf einen fließen, von mehreren ganz konjugierten Durchschnitten die
 Richtung von T und H geben. Man nennt diese fließen die Spannungslinien.

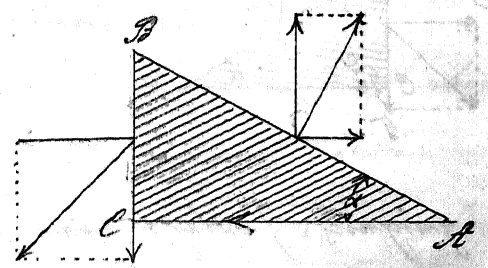
Ein bestimmter Teil der Balken durch fließen durchgehenden Spannungen,
 genannt, man die Spannungslinien.

Ein Strich, welcher von einer Zugspannung offener wird, und
 mehrere gegen die Spannungslinien symmetrisch liegt, muß jedenfalls
 auf gegen die Zugspannung, symmetrisch liegen, d. h. auf der selb-
 sen Seite liegen. Die Zugspannungen sind also symmetrisch der
Spannungslinien.

Erkenne man nun dass ein Zug der beliebigem Strich H B, der
 für von einer Zugspannung H offener wird,
 so bestimmt der Gleichgewicht der Kräfte:

Fig. 39a

(Fig. 39) $H \cos \alpha = T \sin \alpha$, $H \sin \alpha = N \sin \alpha + T \cos \alpha$,
 Erweitert folgt $\tan \alpha = \frac{H}{T}$ und $\tan \alpha = \frac{T}{H-N}$,
 also ist $\frac{H}{T} = \frac{T}{H-N}$ oder $H^2 - NH = T^2$, mithin
 35. $H = \frac{1}{2}N \pm \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T^2}$



Bemerkung man die beiden Zugspannungen mit A und B so ist also

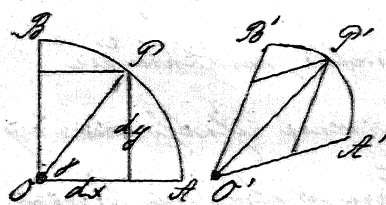
36 $\begin{cases} A = \frac{1}{2}N + \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T^2} \\ B = \frac{1}{2}N - \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T^2} \end{cases}$

Ist N positiv so nennt A positiv, Bruchteil, ist N negativ, so nennt
 ebenfalls A positiv, Bruchteil. Ein ein Zugspannung H ist also das
Maximum, die andere B das Minimum.

$$42. \max I = \sqrt{\frac{1}{2} p^2 + q^2 + r^2}$$

Geschichtliches. Die allgemeinen Gesetze, auf denen das im Innern eines Körpers auf eine beliebige Fläche wirkende Spannungssysteme beruhen, wurde von Cauchy (Exercices de mathématique 1827) entwickelt, aber von Lamé (Leçons sur la théorie de l'élasticité des corps solides 1852) zuerst in geometrischer Form geschrieben. Lamé'sche Gesetze des Bodens: Wenn man eine auf eine beliebige Fläche wirkende Spannung für alle Lagen eines kleinen Stücks und Richtung der einen vom gewählten Punkte ausgehenden Geraden betrachtet, so liegen die Enden aller dieser Geraden auf einem Ellipsoid, dem Spannungsellipsoid. Die drei Achsen des Ellipsoids heißen Spannungssymmetrien; sie sind zugleich Normalspannungen. Die Richtungen von den Maximalspannungsspannungen werden in allgemeinen Form zuerst von Mir (Erk. Kan's Inst. für Bauwesen 1860) gegeben.

§ 40. Ideale Hauptspannungen. Wir denken uns im Innern des Körpers eine materielle unendlich kleine kreisförmige Fläche, in deren Ebene die inneren Kräfte wirken. Die Koordinaten sind x, y . Jeder Punkt P des Kräftefeldes in Eingangsrichtung auf zwei aufeinander senkrechte Durchschnitte dx, dy . Durch die Verformung mögen



dx, dy in dx', dy' übergehen. Die entsprechenden Längsänderungen in Richtung von dx und dy seien b_1, b_2 ; dann wird $dx' = dx(1 + b_1)$, $dy' = dy(1 + b_2)$. Ist der Punkt O der Punkt P der Kreis $= ds$,

$\angle POA = \gamma$, so ist $\cos \gamma = \frac{dx}{ds}$, $\sin \gamma = \frac{dy}{ds}$, oder, weil $dx = \frac{dx'}{1+b_1}$, $dy = \frac{dy'}{1+b_2}$ ist, $\cos \gamma = \frac{dx'}{ds(1+b_1)}$, $\sin \gamma = \frac{dy'}{ds(1+b_2)}$. Nun, aber ist $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$, also:

$$43 \left[\frac{dx'}{ds(1+b_1)} \right]^2 + \left[\frac{dy'}{ds(1+b_2)} \right]^2 = 1.$$

Folgt: Ein unendlich kleine Kreisfläche geht durch die

Kann man auf d. H. gewissen Zweck + Länge, so ist dann angenommen, $m = 3$ zu setzen, man ist sich, das diesen Zweck die isotherme Grenzformung zu geben, also das $m = 4$. Für $m = 3$ aber wird

$$46 \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{4}{3} A + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{3} A^2 + 9 + 9} = \frac{4}{3} A + \frac{4}{3} A \\ L &= \frac{4}{3} A - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{3} A^2 + 9 + 9} = \frac{4}{3} B + \frac{4}{3} A \end{aligned} \right.$$

Geschichtliches. Cauchy (1827) wird gewöhnlich die vollkommenste Artzucht, die eine unendlich kleine Ringel in einem unendlich kleinen Körper aus der die Formation der Körper in ein Ellipsoid übergeht.

§ 4. Festigkeitsbedingungen. Bei einem isotropen Körper wird jedenfalls eine Formung der Hüllfläche dann stattfinden, wenn die, oder die Längensänderung eine gewisse Gränze überschreitet. Ist nun K, K_1 die zulässige Querspannung für Zug und Druck (siehe S. 26), so ist die entsprechende zulässige Längensänderung $\frac{K}{E}$ und $-\frac{K_1}{E}$. Man kann voraussetzen, man setze $\alpha = \frac{K}{E} = \frac{K_1}{E}$, $\beta = \frac{K_1}{E} = -\frac{K}{E}$, oder

$$47. \quad K = K_1, \quad L = -K_1.$$

zu setzen sein, um die Festigkeitsbedingungen, d. h. die Bedingungen zur Vermeidung der Tragfähigkeit eines Körpers; oder zur Vermeidung seiner Verformung bei gegebenen Tragfähigkeit zu erhalten. Man kann unter Umständen auch noch die Bedingungen

$$48. \quad \max L = K_2$$

in Anwendung kommen, wenn K_2 die zulässige Querspannung für Druck bedeutet.

Bei Einschnitten, welche nicht sehr kleinen Stellen setzen, wird Punkt T, gegen A immer kleiner. Wenn man aber Punkt T, annimmt, so wird für jeden beliebigen Punkt von m, wenn A positiv ist, $K = A$

sind wenn K_1 positiv ist, $L = N$. Hier wird dann die Längigkeit der
Längigkeit

$$49. N = K_1 \text{ oder } -N = K_1.$$

Das bedeutet, dass für gewisse Werte von K_1 die Längigkeit der Längigkeit in der Kraftbahn liegt. Das ist dann, wenn für diesen Fall die Abstände der um die Bahn herum verlaufenden Stäbe von der auf der Kraftbahn fortgeführten Bahn der verbleibenden oder gestrichelten Punkte mit a und a_1 so wird, dass K_1 (oder) die Längigkeit der Längigkeit

$$50. \frac{P}{F} + \frac{K_1 a}{F} = K_1, \quad -\frac{P}{F} + \frac{K_1 a_1}{F} = K_1.$$

Ist hierbei $P=0$, so wird $\frac{K_1 a}{F} = K_1$, $\frac{K_1 a_1}{F} = K_1$, oder

$$51. K_1 a = K_1 F, \quad K_1 a_1 = K_1 F.$$

mit hierbei ist zu bedenken, dass die oder gewisse Längigkeit der Längigkeit, je nachdem $\frac{K_1}{a} \leq \frac{K_1}{a_1}$ ist. Dann ist $\frac{K_1}{a} < \frac{K_1}{a_1}$ und wird die Längigkeit $\frac{K_1 a}{F} = K_1$ oder $\frac{K_1}{F} = \frac{K_1}{a}$ erfüllt, so muss $\frac{K_1}{F} < \frac{K_1}{a_1}$ oder $\frac{K_1 a_1}{F} < K_1$ sein, so dass ein gewisser Wert nicht erreicht werden kann und nicht möglich ist

Geschichtliches. Joseph von Mariotte (1782) sagt, dass die Längigkeit der Längigkeit eine gewisse Grenze überschreiten sollte und auf Navier wurde von dem Prinzip Gebrauch gemacht, so dass man die Länge der Längigkeit auf dem Prinzip der Längigkeit der Längigkeit eine gewisse Grenze nicht überschreiten sollte. Es ist Poncelet (Mekanique industrielle 1839) stellt die Längigkeit der Längigkeit der Längigkeit der Längigkeit eine gewisse Grenze nicht überschreiten sollte. Hier in dem Fall, wo nur eine Längigkeit der Längigkeit vorhanden ist, kommen beide Längigkeiten auf das selbe hinaus.

§ 42. Einteilung der weiteren Behandlung. Zu beachten ist

inbegriffene die Befestigung der äußeren Kräfte, also namentlich die Bestimmung der Auflagerkräfte und Momente und der durch die Kräfte mit bedingten Größen F , Ω , F_z zu untersuchen. Die äußeren Kräfte sind stets in bestimmten Fällen in engen Zusammenhängen mit der Formänderung des Objekts, so daß gewöhnlich diese letzteren kennen muß. Je nachdem bei Bestimmung der äußeren Kräfte ein Stör-
änderung nicht in Frage kommt, oder in Betracht zu ziehen ist, unter-
scheiden wir statisch bestimmte Fälle und statisch unbestimmte Fälle.
Wir teilen ferner die Probleme nun in: äußere Kräfte statisch be-
stimmte Fälle, Befestigung im Einschnitt, Formänderung, statisch
unbestimmte Fälle.

IV Kapitel.

Außere Kräfte statisch bestimmter Fälle.

Was wir uns hier hauptsächlich einfach Kapital zu geben will, "Winkler, Theorie
der Brücke I Aufl. Äußere Kräfte gewöhnlich Kräfte (d. i. Lastkräfte)
II Kap. Seite 13 bis 52: A. Einfache Kräfte und zwar I Wirkung von
eingeleiteten, II statische Belastung, III Einfluß der Stützkräfte, IV Ein-
wirkende Gelenkkräfte.

V Kapitel.

Behandlung der Querschnitte.

Sind F für sämtliche Punkte der Umfangs der gegebenen Figur, und bezeichnen die Flächen der gegebenen Figuren A F und A F mit F_1, F_2 , so ist

$$F_1 = \int x_1 dy = \frac{1}{a} \int x y dy;$$

$$F_2 = \int x_2 dy = \frac{1}{a^2} \int x y^2 dy.$$

Nun, das ist $\int x y dy$ das statische Moment S , $\int x y^2 dy$ das Krümmungsmoment F der gegebenen Fläche in Bezug auf die Axe A A . Es ist also $F_1 = \frac{S}{a}$, $F_2 = \frac{F}{a^2}$ oder
4. $S = F_1 a$, $F = F_2 a^2$

Nimmt man $a = 1$, so wird direkt $S = F_1$, $F = F_2$. In diesen F_1 und F_2 kann man nun in beliebiger Weise, z. B. mit Hilfe der Planimeter, bestimmen.

Fig. 4 zeigt die Annäherung auf ein Diagrammprofil für eine gewöhnliche Axe, Fig. 5 die Annäherung auf ein Diagrammprofil für die Gegenströmung der Falllinie.

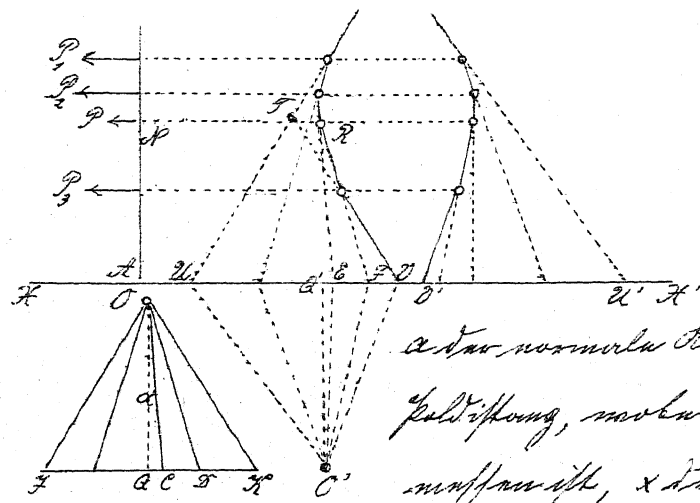
§ 4. Mohr's und Culmann's grafisches Verfahren.

$P_1, P_2, P_3, \dots$ seien in der Ebene in gewissen Abständen wirkende Parallelkräfte. Trägt man dieselben auf einem geraden Pfeil auf (Kräftepolygon), markiert die so erhaltenen Punkte mit einem beliebigen Punkte O , den Pol der Kraft, und zieht zu diesen Punkten gewisse Linien die Kräfte an einem beliebigen Punkt O parallel, so erhält man das Kräftepolygon.

Trägt man, durch den Punkt O die Verbindungen der Kräfte an, so erhält man das Kräftepolygon.

Um längere man die an den Polygonen R , welche den beladungen Kräfte
 Parallelen, auftrahenden Polygonen bis zum Endpunkte E und F mit

Fig. 6.



und die Länge EF , so erhält sich wegen der bezeichneten Ähnlichkeit
 $P : a = e : x$, also ist

$$P x = a e.$$

Das statische Moment einer beladenen Kräfte ist also in Abhängigkeit, und
 mit SD proportional der von den Wirkungsrichtungen der betrachteten
 Kräfte der Parallelen auf der Momentenaxe abgemessenen Gewichte
 EF . Gesamt ergibt sich somit, daß die Summe der statischen Momente
 mehren auf einem Polygonen Kräfte proportional dem auf der
 Momentenaxe von den Wirkungsrichtungen der an diese Kräfte gezogenen
 ganzen Polygonen abgemessenen Stücke ist. Kommt man zu Fol-
 gung $a = 1$, so fallen die Strecken auf der Momentenaxe der Mo-
 mente selbst dar.

Wird man jetzt ein unregelmäßiges Polygon konstruieren, wobei
 die auf der Momentenaxe HH' abgemessenen Stücke EF der Kräfte
 betrachtet werden, so müßte man auf der Momentenaxe in gleichen

einer beladenen den Kräfte
 parallel den HH' , und ist CD die
 der Kräfte Parallelen, so ist $\triangle RCF$
 $\sim \triangle OCD$, die die Punkte bilden
 Triebkräfte parallel sind. Ist daher
 a der normale Abstand der Kräfte F von HH' , so folgt.

Folglich, wobei a nach dem Kräfteverhältnis zu
 messen ist, x der Abstand der Kräfte P von HH' ,

und die Länge EF , so erhält sich wegen der bezeichneten Ähnlichkeit
 $P : a = e : x$, also ist

$$P x = a e.$$

Das statische Moment einer beladenen Kräfte ist also in Abhängigkeit, und
 mit SD proportional der von den Wirkungsrichtungen der betrachteten
 Kräfte der Parallelen auf der Momentenaxe abgemessenen Gewichte
 EF . Gesamt ergibt sich somit, daß die Summe der statischen Momente
 mehren auf einem Polygonen Kräfte proportional dem auf der
 Momentenaxe von den Wirkungsrichtungen der an diese Kräfte gezogenen
 ganzen Polygonen abgemessenen Stücke ist. Kommt man zu Fol-
 gung $a = 1$, so fallen die Strecken auf der Momentenaxe der Mo-
 mente selbst dar.

Wird man jetzt ein unregelmäßiges Polygon konstruieren, wobei
 die auf der Momentenaxe HH' abgemessenen Stücke EF der Kräfte
 betrachtet werden, so müßte man auf der Momentenaxe in gleichen

Fläche, so fort man, wie nöthig, Einmal parallel zur gegebenen Mannich-
 we in der Flächenebene zu ziehen und die Flächeninhalte der Flächen, die
 Kreise, anzupassen. Man nimmt für die eigentliche innerliche Form der Flächen.
 Kreise, annahmeme, nicht, das Parallelgesetz, nimmt für die in einer
 Fläche zu ziehen. Hält man die Fläche in der Fläche der Flächenebene
 und legt man die Fläche in der Flächenebene der Flächenebene, so.
 Das Flächenelement ist ja gemein auf einer Fläche folgenden Flächenelement in
 einer. Das Flächenelement ist das Flächenelement der Flächenebene, so
 parallel zur Mannichwe. Ungleichheit ist die Flächenebene, das
 die Fläche die Fläche das Flächenelement, nach der Fläche der
 Flächenebene, wenn man für die Fläche, in der Fläche,
 Flächenelement der Fläche, nicht die Fläche. Die Flächenelemente
 liegen für die, in der Flächenebene der Flächenebene der Fläche.
 Flächenebene (Fig. 7). Eine eine Flächenebene, Flächenebene 7
 ist die Fläche, das Flächenelement, nach der Fläche, mit
 Fläche der Fläche zu bestimmen ist, bei der Bestimmung der Fläche.
 Flächenelement, man die Fläche, nicht zu ziehen und Flächenelement, mit der
 bekannte Flächenebene der Fläche, nicht Flächenelement.
 der Fläche, das Flächenelement, für die Fläche, nicht.
 Flächenelement der Fläche der Fläche $ACBF = f$, welche man der Fläche,
 Flächenelement der Fläche, Flächenelement der Fläche, mit der Fläche.
 Fläche, nicht Flächenelement, ist die Fläche, nicht.
 Flächenelement, so ist nach dem Obigen

$$6. F = 2af.$$

Man kann, wie nach der Fläche, in der Fläche, nicht.
 Flächenelement, nicht, das $2a = 1$ oder 2 wird. Flächenelement $0a$

gleich $\frac{1}{2} F R$, oder gleich $2a =$ dem Stützpunktsatze des Hauptstützpunkts, so
münd

$$7 \quad F = F.f.$$

Ein Stützpunkt kann man durch Rechnung oder mit Hilfe des Glanzenkants
bestimmen, diese Methode müßte, sobald sie bekannt, zuerst von Mohr
angewandt werden. (S. 73)

§ 5. Momentenplanimeter von Amster. Amster, in Kaffhausen
hat den von ihm erfundenen Polarplanimeter durch Eingfügung von
gemeinen Rollen verbessert, so daß seine Umformung eines Stützpunkts in
eine Rolle sehr leicht ist, ein anderer sehr leicht ist. Momentenplanimeter etc.
sind für irgend eine Art, auf welche die Punkte zu bringen
sind, geeignet.

Der eine Punkt A ist ein Punkt, der auf einer Geraden A.A., der
andere Punkt B auf einer beliebigen Kurve. Gegeben. Gegeben sind
zwei Punkte A und B, unendlich kleinen Punkte A.A' = dx sind gleichgültig
diese sind die Punkte, die den Winkel B.A.B' = dφ. Den den Punkt, der im
inneren der Geraden A.A. sind die Punkte, die auf der Kurve stehen, gleichgültig
Rolle, die die Kurve der Rolle, auf der die Punkte A und B, nach der Rolle CC'
Längsform mit CC' mit du, so ist du = AC dφ. Längsform mit der Rolle
Winkel B.A.A' mit φ, so ist im Winkel A.A'B: A.B: dx = sin φ: dφ,
nachdem, wenn wir mit AC = b setzen

$$AC = \frac{\sin \varphi \cdot dx}{d\varphi} + b,$$

also

$$du = \sin \varphi \cdot dx + b d\varphi.$$

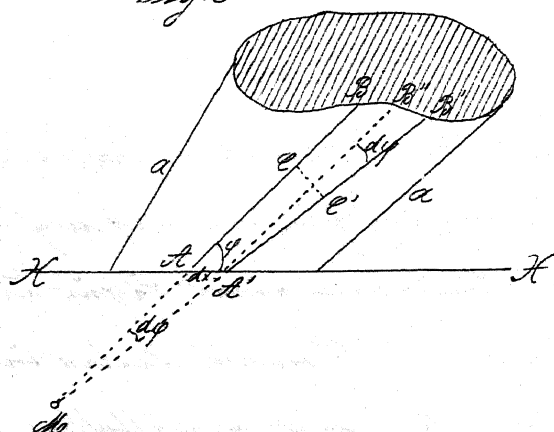
folgt. Umformen wir mit dem Punkt B den Punkt A in der Geraden

steigen, und begreifen hierbei die Drehung der Rolle mit μ , so ist offenbar

$$u = \int \sin \varphi dx + b \int d\varphi.$$

Es sei aber das Räder keine Umformung der geschlossenen Steige zum Fall, sondern Winkel nach vornwärts Kraft, um nachfolgendes nicht zu zwingen Kraft, so ist $\int d\varphi = 0$, mithin

Fig. 8.



$$u = \int \sin \varphi dx.$$

Man begreife, um den Fließwinkelfall der Windekel $A A' B' B$, der statische Moment und das Drehmoment dasselbe. In der Eingangsrichtung auf die HH' mit dF , dF' , dF'' durch die Lage

der Windekel B in ein Parallelogramm $A A' B' B$ und ein Winkel $A' B' B''$ ergibt sich, wenn man die Winkellängen mit a begreift,

$$dF = a \sin \varphi dx + \frac{1}{2} a^2 d\varphi.$$

$$dF' = \frac{1}{2} a^2 \sin^2 \varphi dx + \frac{1}{3} a^3 \sin^3 \varphi d\varphi.$$

$$dF'' = \frac{1}{3} a^3 \sin^3 \varphi dx + \frac{1}{4} a^4 \sin^4 \varphi d\varphi.$$

Der Fließwinkelfall F , der statische Moment F' und das Drehmoment F'' der Umformung geschlossenen Steige ergibt sich, wenn man beachtet, daß der Winkel hierbei in seiner ursprünglichen Lage zwingen Kraft, also $\int d\varphi = 0$, $\int \sin \varphi d\varphi = 0$, $\int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \pi$, mithin

$$8. \quad F = a \int \sin \varphi dx.$$

$$9. \quad F' = \frac{1}{2} a^2 \int \sin^2 \varphi dx$$

$$10. \quad F'' = \frac{1}{3} a^3 \int \sin^3 \varphi dx$$

Der Vergleich mit obigen Ausdrücken für u zeigt, daß der Fließwinkelfall der Umformung der Rolle proportional ist. Es wird aber noch

möglich machen, das statische und Trägheitsmoment durch eine Rolle angegeben zu lassen, wenn es gelingt, die Ausdrücke für $\sin^2 \varphi$ auf die Form des Winkels für φ zurückzuführen, d. h. wenn es gelingt, $\sin^2 \varphi$ und $\sin^3 \varphi$ durch den Sinus eines einfachen Winkels auszu-
 zudrücken. Nun aber lehrt die Geometrie, daß $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$,
 und $\sin^3 \varphi = \frac{1}{4}(3 \sin \varphi - \sin 3\varphi)$ ist. Demnach wird, da $\int dx = 0$ ist

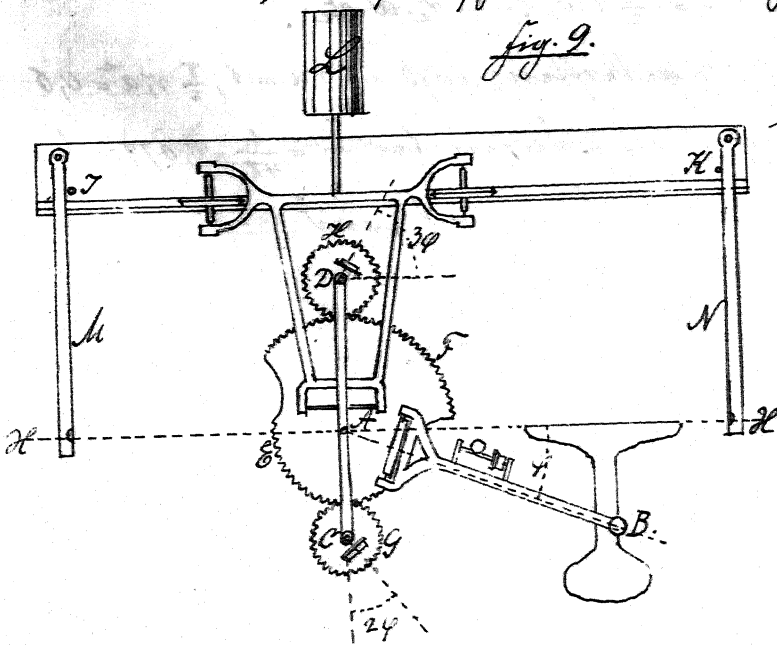
$$11.) I = -\frac{1}{4} a^2 \int \cos 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4} a^2 \int \sin(90 - 2\varphi) dx$$

$$12.) I = \frac{1}{12} a^3 \int (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) dx = \frac{1}{4} Fa^2 - \frac{1}{12} a^3 \int \sin 3\varphi dx$$

Es wäre es leicht möglich, den Ausdruck für $\sin^2 \varphi$ durch zwei Rollen
 angegeben zu lassen, wenn man dafür sorgt, daß die Ogen der
 einen um den Winkel 2φ , die der anderen um den Winkel
 3φ drehen, jedoch so, daß die erste mit der Normalen zur Oge H H den
 Winkel 2φ bildet.

Diese Bedingung ist beim Amsterdamer Momentengleichgewicht
 erfüllt. Der Hebel A B (Fig. 9), dessen Ende B die Figur umfaßt, trägt
 die Rolle, welche den flüchrichtigen angibt. Bei einer Verschiebung
 der Hebel drehen sich die mit ihm verbundenen Zapfen
 der E und F, welche in die Zapfenlöcher G und H eingreifen, welche
 die beiden, das statische und das Trägheitsmoment angezeigten
 Rollen tragen, wobei die Rollen

Fig. 9.



nachträglich auf dem Papier gleich
 sein. Der Radius der Rollen
 E und F ist zweimal, resp.
 dreimal so groß als der Ra-
 dius der Rollen H und G.
 Die Ogen aller Zapfenlöcher

müssen sich beim Umlaufen der Figuren um gleich viel vorwärts,
zu welchem Zweck sie ihr gemeinschaftliches Gestell mit Hilfe zweier
in der Nutzlins des Linsens des Laufendes Rollen gerollt nachfol-
gen läßt. Das Linsal läßt sich mit Hilfe der gleich Laufen und
normal zum Linsal gestellten Hebeln M und N gerollt zu der
in Rotationsstand Montantange fallen. Es ist ein Gegenstand
zum Überhaken eines Hebel des Ganzen des Apparates,
um dadurch die Bewegung zu erleichtern, indem der größte
Teil des Druckes auf die neue der Nutzlins des Linsens gestellten Rollen
gelegt wird. Alle weiteren Details lassen sich von besten durch La-
schen des Apparates selbst erkennen.

Betrachtet man die Bewegung der Rollen mit u, u_1, u_2 , so ist
nach dem Obigen

$$u = \int \sin \varphi \cdot dx, \quad u_1 = \int \sin(90 - 2\varphi) dx, \quad u_2 = \int \sin 3\varphi \cdot dx, \quad \text{mit} \quad \sin$$

$$13.) \quad F = \alpha \cdot u; \quad I = \frac{1}{4} \alpha^2 \cdot u_1; \quad T = \frac{1}{4} \alpha^3 u - \frac{1}{12} \alpha^3 u_2.$$

Der Umlauf einer Rolle entspricht der Ableitung 1. Betrachtet man
nun die Ableitung der drei Rollen mit v, v_1, v_2 , den Radien der,
fallen mit r, r_1, r_2 , so ist offenbar $u = 2\pi r v, u_1 = 2\pi r_1 v_1, u_2 = 2\pi r_2 v_2$, daher

$$F = 2\pi r \alpha v; \quad I = \frac{\pi}{2} r_1 \alpha^2 \cdot v_1; \quad T = \frac{\pi}{2} r \alpha^3 v - \frac{\pi}{6} r_2 \alpha^3 \cdot v_2.$$

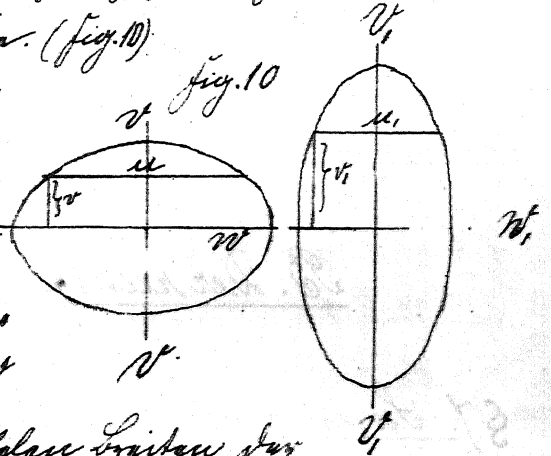
Gemäß ist die Anordnung so getroffen, daß $2\pi r \alpha = 1, \frac{\pi}{2} r_1 \alpha^2 = 0,6$
 $\frac{\pi}{2} r \alpha^3 = 1, \frac{\pi}{6} r_2 \alpha^3 = 0,4$ wird. Hierzu ist $\alpha = 2$ Zentimeter, $r = \frac{1}{4\pi} = 0,0795$ de-
zimeter, $r_1 = r_2 = \frac{0,3}{\pi} = 0,0956$ Zentimeter. Demnach wird

$$14.) \quad F = v; \quad I = 0,6 v_1; \quad T = v - 0,4 v_2.$$

Zu unserer Zeit hat indess Kessler einige Änderungen in
der Konstruktion vorgenommen.

§ 6. Der affine Querschnitt. Unter zwei „affinen“ Querschnitten verstehen wir solche, bei welchen sowohl die Abschnitte als auch die Ordinaten entsprechender Punkte des Durchschnitts in beiden der Stelle Verhältnisse haben, wobei jedoch das Verhältniß zwischen dem Abschnitte und dem Abstand zum Centrum, als gewissen den Ordinaten. So z. B. sind alle Rechtecke, alle gleichschenkeligen Dreiecke, alle Ellipsen u. s. w. affine Querschnitte. (Fig. 10)

Betrachten wir die Breiten und Höhen, oder irgend zwei entsprechende Dimensionen in Richtung der x und y mit b, h und b_1, h_1 , die Ordinaten zweier, oder entsprechender Punkte mit v, v_1 und die entsprechenden zur Oxy der v parallelen Breiten der Querschnitte mit u, u_1 , so ist



$$v_1 = \frac{h_1}{h} \cdot v, u_1 = \frac{b_1}{b} \cdot u, dv_1 = \frac{h_1}{h} \cdot dv, \text{ daher wird}$$

$$F = \int u \cdot dv, F_1 = \int u_1 \cdot dv_1 = \frac{b_1 h_1}{bh} \int u \cdot dv$$

$$I = \int u v^2 dv, I_1 = \int u_1 v_1^2 dv_1 = \frac{b_1 h_1^3}{bh^3} \int u v^2 dv.$$

$$15.) \frac{F_1}{F} = \frac{b_1 h_1}{bh}, \frac{I_1}{I} = \frac{b_1 h_1^3}{bh^3},$$

d. h. Die affinen Querschnitte verhalten sich die Flächen, wie die Produkte aus Breite und Höhe, die Trägheitsmomente wie die Produkte aus Breite und dritter Potenz der Höhen und die Flächenträgheitsmomente wie die Produkte aus Breite und Quadrat der Höhen.

Wenn man a, a_1 die Abschnitte der entsprechenden Seiten zur Oxy der w betrachtet, so verhält sich $a : a_1 = h : h_1$, folglich verhalten sich die Widerstandsmomente wie

$$16.) \frac{I}{a} : \frac{I_1}{a_1} = bh^2 : b_1 h_1^2.$$

Für specialer Fall der Affinität ist die Ähnllichkeit. Man tritt ein, wenn $\frac{b}{b_1} = \frac{h}{h_1}$ ist. Für Ähnlige Querschnitte wird daher

$$17.) \frac{F}{F_1} = \frac{b^2}{b_1^2}, \frac{I}{I_1} = \frac{b^4}{b_1^4}, \frac{I_a}{I_{a1}} = \frac{b^3}{b_1^3}$$

d. h. Bei Ähnligen Querschnitten verhalten sich die Flächen wie die Quadrate (der Seiten), die Trägheitsmomente wie die 4. Potenzen, die Widerstandsmomente wie die 3. Potenzen der entsprechenden Dimensionen.

B. Der rechteckige Querschnitt.

§7. Spannungen. Die Hauptachsen des Rechtecks sind den Seiten parallel (Fig. 11). Betrachten wir die Seite des Rechtecks, d. h. die auf der Kraftebene senkrechte Seite mit b , sind die Längs, d. h. die der Kraftebene parallele Seite mit h , so ist $F = bh$ und das statische Moment S , sowie das Trägheitsmoment I

$$S = b \int_0^{h/2} v \, dv, \quad I = b \int_0^{h/2} v^2 \, dv, \quad \text{d. h.}$$

$$18.) S = \frac{1}{8} b (h^2 - 4v^2), \quad I = \frac{1}{12} b \cdot h^3.$$

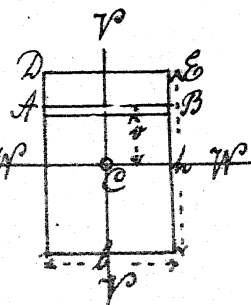
Die Normal- und Schubspannungen werden daher nach Formel 20) Seite 45, 28) Seite 51 und 29) Seite 52, wenn wir normiert setzen, daß keine Querkraft vorhanden ist,

$$19.) N = \frac{12 M v}{b h^3}, \quad T = 0, \quad T_0 = \frac{3(h^2 - 4v^2) Q}{2 b h^3}.$$

N wird, wie stets, zum Maximum für $v = \pm \frac{1}{2} h$, T dagegen für $v = 0$ und zwar ist

$$20.) \max N = \frac{6 M}{b h^2}, \quad \max T = \frac{3 Q}{2 b h}.$$

Diese Formeln lassen sich leicht auf die verschiedenen Querschnitte



weisen annehmen. Wir wollen dies nur beispielweise für v ,
 wenn man das Ende auf Hitzau rufen und gleichmäßig be-
 lasteten Halb Hitz. für denselben ist bei der Belastung q pro Längen-
 einheit im Abstand x von einem Ende: $Q = \frac{1}{2} q (l - 2x)$, $M = \frac{1}{2} q x (l - x)$, also

$$N = \frac{6 q v x (l - x)}{b h^3}, \quad T = \frac{3 q (h^2 - 4 v^2) \cdot (l - 2x)}{4 b h^3}.$$

§8. Hauptspannungen. Als Grenzspannung H und ideale Grenz-
 spannung G ergibt sich nach Formel 35) Seite 57 und 46) Seite 62 die
 Einsetzung der Werte für N , T , und T :

$$21.) H = \frac{6 M}{b h^3} \left[v \pm \sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{16 M^2} (h^2 - 4 v^2)^2} \right].$$

$$22.) G = \frac{4 M}{b h^3} \left[v \pm 2 \sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{16 M^2} (h^2 - 4 v^2)^2} \right]$$

Spannung H zum analytischen Maximum für

$$23.) 64 \mu v^6 + 16 (3 - 2 \mu) h^2 v^4 - 4 (2 - \mu) h^4 v^2 + h^6 = 0.$$

und G 24.) zum analytischen Maximum für

$$24.) 256 \mu^2 v^6 + 16 \mu (15 - 8 \mu) h^2 v^4 + 8 (6 - 7 \mu + 2 \mu^2) h^4 v^2 - \mu h^6 = 0,$$

worin zur Abkürzung $\frac{Q^2 h^2}{M^2} = \mu$ gesetzt ist. Zum wirklichen Maxi-
 mum kann aber auf H und G für $v = \pm \frac{h}{2}$ managen. Zu folgen,
 der Tabelle sind die Werte von G_0 , G_1 von G für $v = 0$, $v = \frac{1}{2} h$ und

$\frac{Qh}{M}$	G_0	G_1	G_1	v'	$\frac{Qh}{M}$	G_0	G_1	G_1	v'
∞	2	2,000	0	0	5	2	2,022	1,000	0,054
10	2	2,001	0,600	0,025	4	2	2,025	1,500	0,073
9	2	2,006	0,667	0,028	3	2	2,073	2,000	0,113
8	2	2,008	0,750	0,032	2,883	2	2,081	2,081	0,121
7	2	2,010	0,857	0,037	2	2	—	3,000	—
6	2	2,014	1,000	0,044	1	2	—	6,000	—
	$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot h$		$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot h$

und das unelastische Maximum G' (für $v = v'$) bei nachfolgenden
 Werten von h zusammengefaßt. Hiermit geht hervor, daß, wenn
 $ah < 2,883 h$ ist, das G' das Maximum von h ist. Zugleich zeigt
 die Tabelle, daß, wenn $ah > 2,883 h$ ist, das wirkliche Maximum G'
 von dem Werte G_0 nur sehr wenig abweicht, so daß man für die
 Prüfung annehmen kann: G wird zum Maximum für $v = 0$ oder v
 $= \pm \frac{h}{2}$ und zwar ist

$$25.) \begin{cases} v=0, G_0 = \pm 2 \frac{Q}{bh}, \\ v=\pm \frac{1}{2}h, G_1 = \pm 6 \frac{M}{bh^2}. \end{cases}$$

Man sieht sich, daß, wenn $ah < 3,678$ ist, das L für $v = \pm \frac{1}{2}h$
 größer ist, als das unelastische Maximum von L .

Für das in vorigen § gewählte Beispiel sind in Fig. 12 die
 Größen N , T , H und G graphisch dargestellt.

Fig. 13

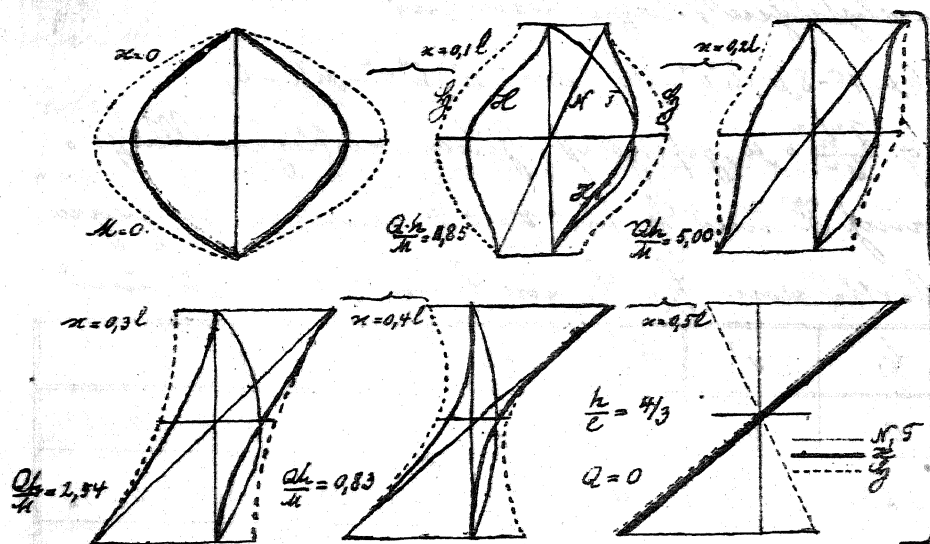
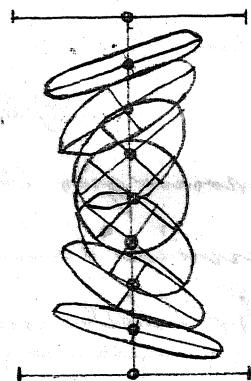


Fig. 12.



Nach Journal 37.) (Paris
 Nr 58) wird, wenn
 a den Krümmungs-

radius der inneren Gurtungsspannung bezeichnet

$$26.) \alpha = \frac{H}{T}$$

für $v = 0$ wird $\alpha = T$, also $\alpha = 45^\circ$; für $v = \pm \frac{1}{2}h$ wird $T = 0$, also wird
 $\alpha = 90^\circ$. In Fig. 13 sind die Ellipsen der Flächigkeit graphisch dargestellt.

Da die größte positive und negative ideale Formänderung
einander gleich sind, so wird ein Bruch durch Zerschneiden oder
Zusammenrücken eintreten, wenn $K \leq K'$ ist, wenn K, K' nach §41
(Seite 62) die zulässige Formänderung für Zug und Druck bezugl.,
wenn K, K' der kleinste der Koeffizienten K, K' , so ist die festig-
keitsbedingung

$$27a) Qh < 2,88 M : K' = \frac{6M}{bh^2},$$

$$27b) Qh > 2,88 M : K' = \frac{2Q}{bh}.$$

Bei gleichem Querschnitt Q gibt; wenn die Länge gegen die
Stärke groß ist, so ist die Gleichung 27a) größere Dimensionen, als
die Gleichung 27b), so daß die letztere meist nicht zu brauchen ist.

Liegt z. B. der gleichmäßig belastete Balken constanten Querschnitts
mit den Enden auf Stützen, so ist $\max Q = \frac{1}{2}ql$, $\max M = \frac{1}{8}ql^2$, daher
nach Formel 25) (Seite 78)

$$\max G_0 = \frac{ql}{bh}, \quad \max G_1 = \frac{3ql^2}{4bh^2},$$

so daß nur $\max G_0 > \max G_1$ wird, wenn $1 < \frac{4}{3}h$ ist. Ist, wie gewöhnlich,
d. h. $1 > \frac{4}{3}h$, so ist G_1 das Maximum von G und daher nur die Glei-
chung 27a) für die Festigkeit maßgebend. Diese gibt

$$4K' \cdot b \cdot h^2 = 3ql^2.$$

Nimmt man das Verhältnis $\frac{l}{h}$ an und setzt $= n$, so wird, wenn
es auf die Bestimmung der Dimensionen ankommt

$$h = \sqrt[3]{\frac{3ql^2}{4nK'}}.$$

Umwandlung bei Balken in Gebirgen, folgen aus Balkenbrücken S. f. v. d.

§9. Körper von constanter Festigkeit. Für einen Körper von con-
stanter Festigkeit muß nach dem oben Gesagten

$$28.) bh = \frac{2Q}{\pi},$$

sein, wenn $Q \cdot h > 2,88 M$ ist

$$29.) bh^2 = \frac{6M}{\pi},$$

wenn $Q \cdot h < 2,88 M$ ist. Der Röhren wird dann auf stat. und gew. ausgelegt, wenn Forman größer als zulässig sein, sonst wenn die Forman für $Q \cdot h > 2,88 M$, die andere für $Q \cdot h < 2,88 M$ Gültigkeit hat. Wir wollen nun, zum Fall nachfolgend, die Länge des Rohres l bestimmen.

1. Der Röhren ist an einem Ende eingespannt und am freien Ende mit G belastet. Im Abstand x vom freien Ende ist $Q = q \cdot x$, $M = \frac{q \cdot x^2}{2}$. Ist die Breite und Höhe des eingespannten Endes b, h , so ist $b \cdot h^2 = \frac{6Q}{\pi}$, $\frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{b \cdot h^2}{6}$, also $bh = \frac{2q}{\pi}$ und $bh^2 = \frac{6q \cdot x}{\pi}$ oder

$$30.) \begin{cases} \text{Höhe constant (Fig. 14): } b = \frac{b_1 \cdot h_1}{3L}, b = \frac{b_1 \cdot x}{L} \\ \text{Breite constant (Fig. 15): } h = \frac{h_1}{L}, h = h_1 \sqrt{\frac{x}{L}} \end{cases}$$

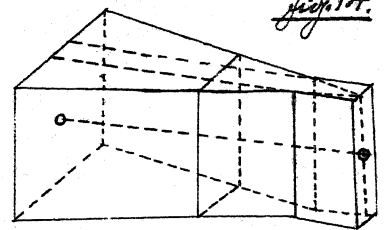


Fig. 14.

Ist P das Volumen des Rohrs ($= b \cdot h \cdot l$) mit const. konstanten Querschnitt, so wird, wenn man von dem Röhren feststellt, das Volumen bei constanter Höhe $= \frac{1}{2} P$, bei constanter Breite $= \frac{2}{3} P$.

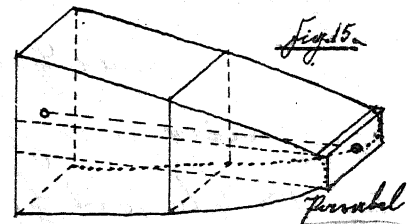


Fig. 15.

Parabel

2. Der Röhren ist an einem Ende eingespannt und gleichmäßig mit q pro Längeneinheit belastet. Hier ist im Abstand x vom freien Ende: $Q = q \cdot x$, $M = \frac{1}{2} q x^2$. Es wird daher für $b, h, = \frac{3qL^2}{\pi}$, $\frac{q}{\pi} = \frac{b \cdot h^2}{3L^2}$, also, so $bh = \frac{2q \cdot x}{\pi}$, $bh^2 = \frac{3q \cdot x^2}{\pi}$ oder

$$31.) \begin{cases} \text{Höhe constant (Fig. 16): } b = \frac{2b_1 \cdot h_1 \cdot x}{3L^2}, b = \frac{b_1 \cdot x^2}{L^2} \\ \text{Breite constant (Fig. 17): } h = \frac{2h_1^2 \cdot x}{3L^2}, h = \frac{h_1 \cdot x}{L} \end{cases}$$

Querschnitt gleich (Fig. 18): $h = h_1 \sqrt{\frac{2h_1 \cdot x}{3L^2}}; h = h_1 \sqrt{\frac{x}{L^2}}$.

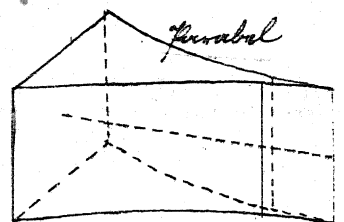


Fig. 16.

Fig. 17.

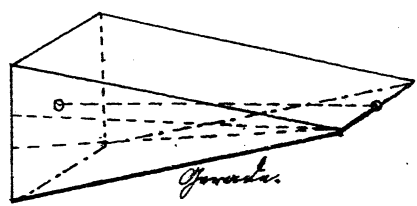
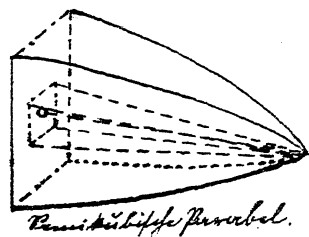


Fig. 18.

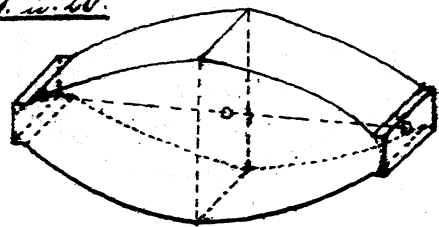
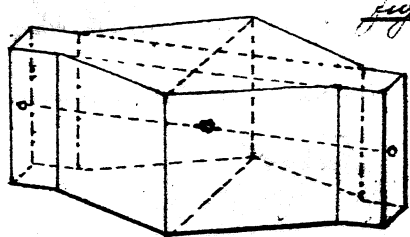


Bei constanten Breite kann man die eine Form wählen, mit geben und geben die v. p. oder geben, je nachdem $\frac{2h_1^2 x}{3l^2} \geq \frac{h_1 x}{l}$, d. i. $h_1 \geq \frac{3}{2} l$ ist. Das Volumen wird für

bei constanten Höhe $= \frac{1}{3} V$, bei constanten Breite $= \frac{1}{2} V$, bei veränderlichen Querschnitten $= \frac{3}{2} V$.

3. Der Körper ist von beiden freien Enden unterstützt und in der Mitte mit 2 G belastet. Der Körper besteht für offenbar aus zwei Teilen, deren jeder nach dem in der 1. gefundenen Gesetz gebildet ist.

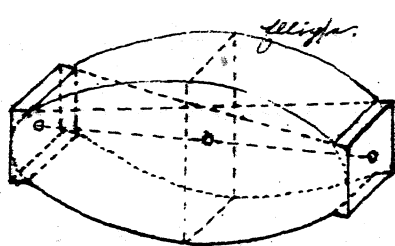
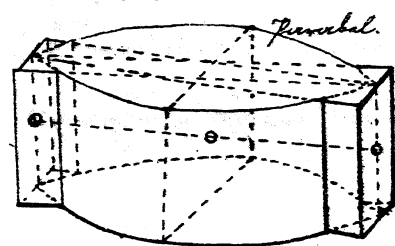
Fig. 19. u. 20.



4. Der Körper ist von beiden Enden unterstützt und mit einer Punktlast G von veränderlicher Länge belastet. Nach dem früher gefundenen kann Kapillaren wird in einem Querschnitte sowohl Querschnitt

Fig. 21.

Fig. 22.



M zum Maximum, wenn die Last an der freien Querschnitte liegt. Obgleich es im Abfluss der x von einem Ende

$Q = G(1 - \frac{x}{l})$, $M = G \frac{x}{l} \cdot (1 - \frac{x}{l})$. Ist h_1 , h_2 die Breite und Höhe in der Mitte, so ist $h_1 h_2 = \frac{3G}{2\pi}$, also

$$32. \begin{cases} bh = \frac{4b_1 h_1^2 (l-x)}{3l^2}, & bh^2 = \frac{4b_1 h_1^2 x (l-x)}{l^2}; \\ \text{Höhen constant (Fig. 21)} & : b = \frac{4b_1 h_1^2 (l-x)}{3l^2}, \quad b = \frac{4b_1 x (l-x)}{l^2}; \\ \text{Breiten constant (Fig. 22)} & : h = \frac{4h_1^2 (l-x)}{3l^2}, \quad b = \frac{2h_1^2 x (l-x)}{l}. \end{cases}$$

Das Kolonnen ist fikt bei constanter Länge = $\frac{2}{3} V$, bei constanten Breite $h = \frac{I}{4} = 0,785 V$.

5. Der Körper ist von beiden Seiten unterstützt und gleichmäßig, Fig mit q pro Längeneinheit belastet. Für einen Abstand x vom Ende $Q = \frac{1}{2} q \cdot (l - 2x)$, $M = \frac{1}{2} q x (l - x)$, $b, h^2 = \frac{3 q l^2}{4 x^2}$, also

$$33. \begin{cases} bh = \frac{4 b_1 h_1^2 (l - 2x)}{3 l^2}, & bh^2 = \frac{4 b_1 h_1^2 x (l - x)}{l^2}; \\ \text{Für support (Fig. 23): } b = \frac{4 b_1 h_1 (l - 2x)}{3 l^2}, & b = \frac{4 b_1 x (l - x)}{l^2} \\ \text{Für support (Fig. 24): } h = \frac{4 h_1^2 (l - 2x)}{3 l^2}, & h = \frac{2 h_1 \sqrt{x (l - x)}}{l} \end{cases}$$

Fig. 23.

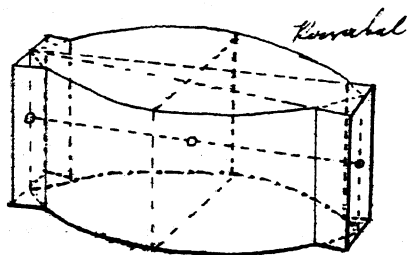
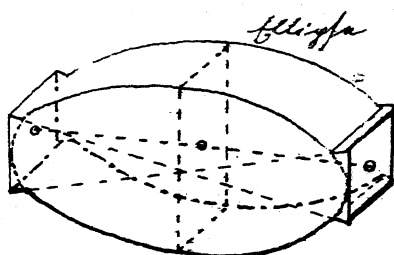


Fig. 24.



die zwischen h ,
man findet ganz
identisch mit der,
von der vorigen
Fall.

§10. Das Rechteck im Kreise. Wenn ein Balken mit recht, aktigen Querschnitten über einem runden Hammer gegossen wird, so ist er meist quadratisch, die Seiten des Rechtecks so zu wählen, daß der Durchmesser des Hammers möglichst klein wird, oder, noch mehr das selbe hervorhebt, daß die Tragkraft des Balkens, wenn gegeben Hammer gegossener Balken möglichst groß ausfällt.

Ist d der Durchmesser des dem Rechteck umschriebenen Kreises, und das Verhältnis $b : h$, so ist $d^2 = b^2 + h^2 = (n^2 + 1) h^2$, also

$$h = \frac{d}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad b = \frac{nd}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Es folgt nach Formel 27a:

$$6M = K' \cdot \frac{n \cdot d^3}{(n^2 + 1) \sqrt{n^2 + 1}}.$$

oder

$$d = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{6M}{K'}} = \sqrt[3]{2}$$

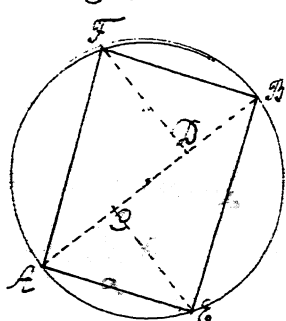
$$\frac{dd}{dn} = \frac{2n^2-1}{2\sqrt{n^2+1}} \cdot \sqrt{\frac{6M}{K'}}$$

Demnach wird d bei gegebenem M zum Minimum wenn $2n^2=1$ oder

$$34. \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

ist, so daß sich nachzu $b:h = 7:10$ ergibt. Demnach ergibt sich leicht eine einfache Construction (Fig. 25): Man zeichne einen Kreisbogen

Fig. 25.



A B in drei gleiche Teile und verführe, auf demselben in C, D nach aufeinandergefügten Ruten Rutenstücke. Die Verbindung der so im Kreis bestimmten Punkte E, F mit den Enden des Rutenstücks gibt das gesündeste Rutenstück.

Die Forderung des Rutenstücks n gibt

$$35. \quad M = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot K' d^3 = 0,0641 K' d^3.$$

Wenn man mit einem Hammer zwei Latten bildet, so ergibt sich $n = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0,354$. (Folgt.)

Wenn man die einzelnen Latten zur Bildung eines Balges nebeneinander legt, so ist die Rute eine bestimmte Breite a nötig, von Manne das Hammerstück $= m d^2$, wenn m die Anzahl der nötigen Hammer bedeutet, die $m = \frac{a}{b} = \frac{a\sqrt{n^2+1}}{nd}$, Lösung durch Fingerringe vorausgesetzt, also wird die nötige Holzmenge proportional der Größe $a \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} d = \frac{n^2+1}{n\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{6M}{K'}}$. Der Differentialquotient nach $\frac{n^2+1}{n\sqrt{n}}$ ist $\frac{2n^2-1}{2\sqrt{n^2+1}}$, so daß die Holzmenge zum Minimum wird für $n^2=2$ oder $n = \sqrt{2}$ so daß sich im vorigen Falle gefundenen Wert hält und sich für das zweckmäßigste ist, wenn man vier Latten nicht, sondern fünf Latten legt. Das selbe Resultat, das ergibt sich auch für Folgt.

§11. Gekippte Lage. Sei eine Gürtelzone, welche mit der Erde h. ge.,
vollst. ist, fließt mit der Kraftebene den Winkel α ein (Fig. 26.) Wir mög.,
den Winkel der beiden Gürtelzonen als θ bzw. φ . Ist M das Moment
für die auf der Kraftebene wirkende Ebene $\pi\pi'$, so ist das Moment
für die Ebene $\pi\pi'$ und $\pi\pi'$ bezüglich $M \cos \alpha$ und $M \sin \alpha$.
Dieser wird nach Formel 21 (Seite 45):

$$N = M \left(\frac{\varphi}{\pi} \cos \alpha + \frac{\theta}{\pi} \sin \alpha \right),$$

wobei diejenigen Punkte der Gürtelzonen, als Polstrichen
einführen sind, nach welchen zu die Kraft wirkt wirkt.
(in der Figur links und oben.) Hier aber ist für den
verfälschten Querschnitt $I = \frac{1}{12} b h^3$, $I_1 = \frac{1}{12} b^3 h$, mit der

$$36. \quad N = \frac{12 M}{b h} \left(\frac{\varphi}{\pi} \cos \alpha + \frac{\theta}{\pi} \sin \alpha \right).$$

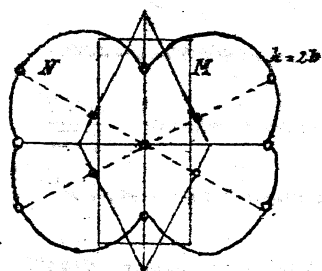
Der Maximum erreicht N für $\varphi = \pm \frac{1}{2} h$, $\theta = \pm \frac{1}{2} b$, also in einer
Seite und gerad ist

$$37. \quad \max N = \pm \frac{6 M}{b^2 h^2} (h \sin \alpha + b \cos \alpha).$$

Setzen wir nun als Festigkeitsbedingung $\max N = K$, so ergibt sich

$$38. \quad K = \frac{\pi' b^2 h^2}{6 (h \sin \alpha + b \cos \alpha)}.$$

Fig. 27.



Es mag auffällig sein, dass $\max N$ und K leicht durch eine geo.,
metrische Konstruktion graphisch dargestellt werden, Fig. 27, wobei
dann $\max N$ und K aus beiden neuen Konstruktionen und
auf der Ebene der α verläuft. Es lässt sich leicht nach,
wieweit, dass, wenn die Linie für $\max N$ ein Kreis
(für dessen Mittelpunkt $\theta \alpha = \frac{h}{2}$ ist) und die Linie
für K eine Gerade ist.

Der kleinste Wert K für $\theta \alpha = \frac{b}{2}$ oder, wenn die Linie, die
gerade ist, der Kraftebene senkrecht steht. Der größte Wert dagegen

wird M , wenn die größte der Kräfte b und h (mit anderen h als die für P ist) der Kraftbahn parallel ist.

Zeichnen wir die Diagonale mit d , so ist für die kleinste Zugkraft $\sin \alpha = \frac{h}{d}$, $\cos \alpha = \frac{b}{d}$ und für die größte $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, daher wird

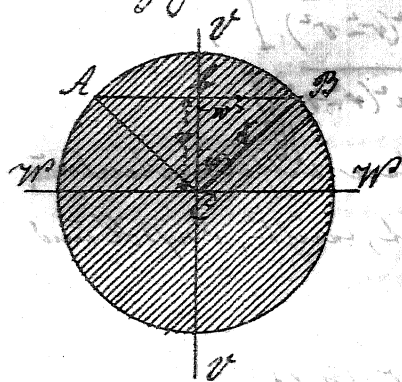
$$39. \max M = \frac{K' b h^2}{6}, \min M = \frac{K' b h^2}{6d}.$$

$$40. \max h: \min M = d : b.$$

C. Der kreisförmige Querschnitt.

§12. Spannungen. Ist r der Radius, b die der Axa $W^o W^o$ parallele Breite, v ihr Abstand von C , φ der Winkel ACW^o oder BCW^o , so ist $b =$

Fig. 28.



$2r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$, $dr = r \cos \varphi d\varphi$, daher wird

$$I = \int b \cdot dv \cdot v = 2r^3 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi,$$

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} b \cdot dv \cdot v^2 = 4r^4 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi.$$

Man ist aber $\int \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi$, $\int \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{8} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi)$. Dies eingesetzt, gibt, wenn man noch den Durchmesser mit d bezeichnet

$$41. I = \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi, I = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{64} d^4.$$

Wir weisen nun, daß nur Kräfte in der Längsrichtung $P^o P^o$ gefunden werden können. Als Beispiel die Spannungen N , T , T' nach den Formeln 20 (P. 45), 28 (P. 51) und 30 (P. 53)

$$42. \begin{cases} N = \frac{Mv}{I} = \frac{4K \sin \varphi}{\pi r^3}, \\ T = \frac{Qv}{Ib} = \frac{4Q \cos^2 \varphi}{3\pi r^2}, \\ T' = -T \frac{v}{b} \frac{db}{dv} = T \frac{\sin \varphi}{r \cos^2 \varphi} = \frac{4Q \sin \varphi}{3\pi r^2}. \end{cases}$$

$$b = 2r \cos \varphi, v = r \sin \varphi, \\ db = -2r \sin \varphi d\varphi, dv = r \cos \varphi d\varphi, \\ \frac{db}{dv} = -\tan \varphi$$

T' wird für ein gegebenes φ oder φ zum Maximum für $\sin \varphi =$

$\frac{1}{2}b = r \cos \varphi$, d. f. von Krümmungen. Hier wird:

$$43. \quad T' = \frac{4Q \sin \varphi \cos \varphi}{3\pi r^2}$$

T und T' lassen sich zu einer Resultantsumme T_1 zusammensetzen, nämlich $= \sqrt{T^2 + T'^2} = \frac{4Q \cos \varphi}{3\pi r^2} \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$, d. i.

$$44. \quad T_1 = \frac{4Q \cos \varphi}{3\pi r^2}$$

Es ist der Winkel, welchen T mit der Ogen $W^o W$ bildet $= \beta$, so ist $\tan \beta = \frac{T'}{T} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \cot \varphi = \frac{1}{\tan \varphi}$, d. f. T wirkt in Richtung der Längsachse.

§13. Hauptspannungen. Als Hauptspannung H und ideale Längsspannung G ergibt sich aus Formel 35 (P. 57) und 46 (P. 62) durch Einsetzung der Ausdrücke für T und T' , wenn man zur Abkürzung

$$\frac{2Qr}{3M} = n \quad \text{setzt.}$$

$$45. \quad \begin{cases} H = \frac{2M}{\pi r^3} [\sin \varphi \pm \sqrt{\sin^2 \varphi + n^2 \cos^2 \varphi}] = \frac{2M}{\pi r^3} [v \pm \sqrt{v^2 + n^2 (r^2 - v^2)}] \\ G = \frac{4M}{3\pi r^3} [\sin \varphi \pm 2\sqrt{\sin^2 \varphi + n^2 \cos^2 \varphi}] = \frac{4M}{3\pi r^3} [v \pm 2\sqrt{v^2 + n^2 (r^2 - v^2)}] \end{cases}$$

Es ergibt sich, indem man von H und G den Differentialquotient nach r oder φ bildet und denselben $= 0$ setzt, leicht, daß H und G zum Maximum wird für

$$46. \quad \begin{cases} H \text{ für } v = \pm \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}, (n > 1); v = \pm r, (n < 1) \\ G \text{ für } v = \pm \frac{nr}{\sqrt{3 - 7n^2 + 4n^4}}, (n > \sqrt{3/2}); \end{cases}$$

Logischer ist die Stelle von G für $v = 0$, $v = \pm r$ mit G_0, G_1 , und das analytische Maximum von G mit G' , so wird

$$47. \quad \begin{cases} G_0 = \frac{16Q}{9\pi r^2}, G_1 = \frac{4M}{\pi r^3} \\ G' = \frac{16(4n^2 - 3)}{27n\sqrt{3 - 7n^2 + 4n^4}} \cdot \frac{Q}{r} \end{cases}$$

Es ist die Tabelle P. 87 beizulegen. Man sieht daraus, daß das analytische Maximum von G sehr geringfügig oberhalb von dem größeren der Werte G_0 und G_1 , und zwar beträgt

$\frac{r}{h}$	n	$\frac{Qr}{h}$	f_0	f_1	f_2	δ bei f_1
0	∞	∞	1,778	1,778	0	0
0,2	5	7,5	1,778	1,791	0,533	0,104
0,4	2,5	3,75	1,778	1,820	1,067	0,233
0,6	1,667	2,5	1,778	1,899	1,600	0,439
0,8	1,25	1,875	1,778	2,137	2,133	0,924
0,817	1,224	1,837	1,778	2,177	2,177	1
1,0	1	1,5	1,778	—	2,667	—
			$\cdot \frac{Q}{f}$	$\cdot \frac{Q}{f}$	$\cdot \frac{Q}{f}$	$\cdot r$

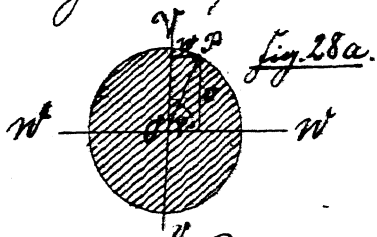
die Überwindung nur auf
 als 6 Prozent. Es sind also,
 für in der Regel geringere,
 den größeren der Werte
 f_0 und f_1 , als Maximum
 von f anzunehmen.
 die Festigkeitsbedingungen,
 genau werden ableiten
 bei der zulässigen Spannung,
 Zugspannung K :

$$48. \begin{cases} \frac{16Q}{9\pi r^3} = K, (Q > \frac{9Kh}{4r}) \\ \frac{4Kh}{2r^3} = K, (Q < \frac{9Kh}{4r}) \end{cases}$$

Ist der Stab mit constantem Querschnitt von der Länge l von einem
 Ende eingespannt, von anderen mit G belastet, so ist $Q = G$, max $K = Gl$.
 Dieser würde die erste Gleichung in Anwendung kommen müssen,
 wenn $G > \frac{9Gl}{4r}$ oder $r > \frac{9}{4}l$ ist, die zweite dagegen, wenn $r < \frac{9}{4}l$ ist.

§14. Beanspruchung in verschiedener Richtung. Wir wollen
 jetzt annehmen, daß sowohl für die Achse $W'W'$ ein Moment M_1 , als
 auch für die Achse $V'V'$ ein Moment M_2 wirkt, die in Richtung von
 $V'V'$ und $W'W'$ wirkenden Druckverspannkraften seien Q_1, Q_2 . Ableiten
 ist in einem beliebigen Punkte P des Querschnitts nach der ersten
 der Formel 42 und der Formel 44:

$$49. \begin{cases} N = \frac{4(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)}{\pi r^3}, \\ f_1 = \frac{4(Q_1 \cos \varphi + Q_2 \sin \varphi)}{5\pi r^2}. \end{cases}$$



Da $\frac{dN}{d\varphi} = \frac{4}{\pi r^3} (M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)$ ist, so wird N zum Maximum

für $M_1 \cos \varphi = M_2 \sin \varphi$ oder für $\tan \varphi = \frac{M_1}{M_2}$. für diesen Punkt wird $\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi}} = \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}$, $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi}} = \frac{M_2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}$. Einbezugsetzt gibt

$$50. \max N = \frac{4}{\pi r^3} \cdot \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

Mancho wird T_1 zum Maximum für $\tan \varphi = \frac{Q_2}{Q_1}$ und zwar ergibt sich

$$51. \max T_1 = \frac{4}{3\pi r^2} \cdot \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}.$$

Bestimmt man nun die ideale Spannung $\mathcal{G} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_1^2}$, so ergibt sich auch für, wie im vorigen Falle, daß das analytische Maximum von $\mathcal{G}$ nur sehr wenig abweicht vom geringsten Wert, der von $\mathcal{G}$, welcher für $T_1 = 0$, $N = \max N$ oder für $N = 0$, $T_1 = \max T_1$, tritt. Bezeichnen wir die bezüglichen Werte von $\mathcal{G}$ wieder mit $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_0$, so ist $\mathcal{G}_1 = \max N$, $\mathcal{G}_0 = \frac{4}{3} \max T_1$, mithin ist

$$52. \begin{cases} \mathcal{G}_0 = \frac{16}{9\pi r^2} \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}, \\ \mathcal{G}_1 = \frac{4}{\pi r^3} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \end{cases}$$

Also sind die Festigkeitsbedingungen

$$53. \begin{cases} \frac{16}{9\pi r^2} \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} = \mathcal{K}^0, (Q_1^2 + Q_2^2 > \frac{81}{16} \frac{M_1^2 + M_2^2}{r^2}), \\ \frac{4M}{\pi r^3} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \mathcal{K}^0, (Q_1^2 + Q_2^2 < \frac{81}{16} \frac{M_1^2 + M_2^2}{r^2}). \end{cases}$$

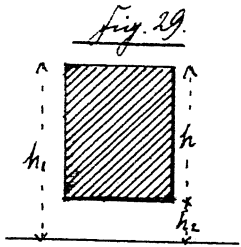
Die Anwendung dieser Formeln auf die Lastführung von Balken bei Lastenverbindungen wird im „Brückenbau“ behandelt.

D. Zusammengesetzte Querschnitte.

§15. Querschnittsgrößen zusammengesetzter Querschnitte. Zusammen-
gesetzte Querschnitte zerlegt man bei Anwendung der
Rechnung zur Bestimmung der Fläche, des statischen und des
Torsionsmoments in einfache Figuren. Wir übergehen hier
die theoretische Behandlung derartiger Querschnittsformeln ab-
maße in die Vorträge über „Allgemeine Maschinen“ gehörig.

und begnügen uns mit der Zusammenfassung der hier gewonnenen wichtigsten Formeln.

1. Rechteck. (Fig. 29.)



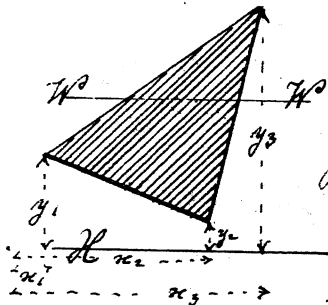
$$54. \begin{cases} F = bh, & S = \frac{1}{2}b(h_1^2 - h_2^2) = \frac{1}{2}F(h_1 + h_2), \\ J = \frac{1}{3}b(h_1^3 - h_2^3) = \frac{1}{3}F(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2). \end{cases}$$

Ist die Axe eine Seite des Rechtecks, also $h_2 = 0, h_1 = h$, so ist

$$55. \quad S = \frac{1}{2}bh^2, \quad J = \frac{1}{3}bh^3.$$

2. Dreieck. Ganz allgemein (Fig. 30) ist:

Fig. 30.

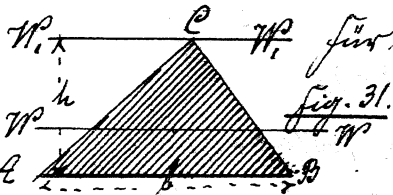


$$56. \begin{cases} F = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)], \\ S = \frac{1}{3}F(y_1 + y_2 + y_3), \\ J = \frac{1}{6}F(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2). \end{cases}$$

für eine Ebeneaxe ist

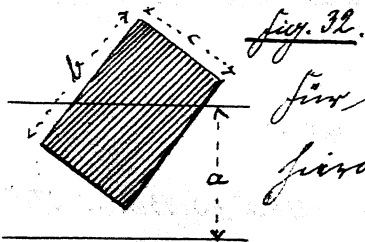
$$57. \quad J = \frac{1}{18}F(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2),$$

wenn sich y_1, y_2, y_3 auf die beliebige Axe KL beziehen.



für die Axe $AB, W_1W_2, W_1W_3, W_2W_3$ (Fig. 31) wird:

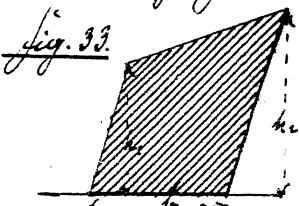
$$58. \begin{cases} \text{Axe } AB: S = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{3}Fh, \quad J = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{6}Fh^2, \\ \text{Axe } W_1W_2: S = 0, \quad J = \frac{1}{36}bh^3 = \frac{1}{18}Fh^2, \\ \text{Axe } W_1W_3: S = \frac{1}{3}bh^2 = \frac{2}{3}Fh, \quad J = \frac{1}{4}bh^3 = \frac{1}{2}Fh^2. \end{cases}$$



für ein unter 45° geneigtes Rechteck (Fig. 32) kann man folgendes leicht ableiten:

$$59. \quad S = abc, \quad J = \frac{1}{3}bc(3a^2 + b^2 + c^2).$$

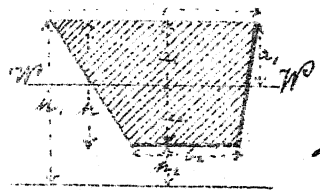
3. Trapez. Wird die nicht parallele Seite ^{AB} (Fig. 33) als Axe angenommen, so ist



$$60. \begin{cases} F = \frac{1}{2}b(h_1 + h_2), \\ S = \frac{1}{6}b(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) \\ J = \frac{1}{12}b(h_1 + h_2)(h_1^2 + h_2^2) = \frac{1}{6}F(h_1^2 + h_2^2). \end{cases}$$

Wird die Axe KL parallel zu den beiden parallelen Seiten (Fig. 34), so ist

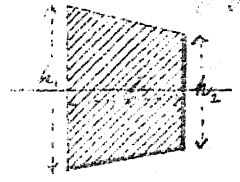
Fig. 34.



$$61. \begin{cases} F = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \cdot (h_1 + h_2), \\ L = \frac{1}{6} h [b_1 (2h_1 + h_2) + b_2 (h_1 + 2h_2)], \\ J = \frac{1}{12} h [(b_1 + b_2)(h_1 + h_2)^2 + 2b_1 h_1^2 + 2b_2 h_2^2] \end{cases}$$

Bei symmetrischer Form gegen die Symmetrie (Fig. 35):

Fig. 35.



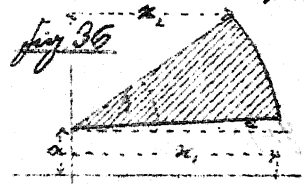
$$62. F = \frac{1}{48} b_1 \cdot (h_1 + h_2) \cdot (h_1^2 + h_2^2)$$

für die Symmetrie der Seiten, parallele Seiten b1, b2 (Fig. 34) wird

$$63. \begin{cases} a_1 = \frac{2b_1 + b_2}{3(b_1 + b_2)} h, a_2 = \frac{b_1 + 2b_2}{3(b_1 + b_2)} h; \\ J = \frac{1}{36} \cdot \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2} \end{cases}$$

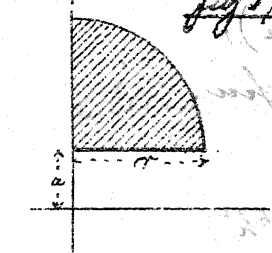
4. Kreisviereck. Wenn ein Kreis α, β durch α, β geht, α, β gegeben sind, so ist (Fig. 36)

Fig. 36.



$$64. \begin{cases} F = \frac{1}{2} r^2 (\beta - \alpha), \\ L = \frac{1}{6} r^2 [3\alpha (\beta - \alpha) + 2r (\cos \alpha - \cos \beta)] = \frac{1}{6} r^2 [3\alpha (\beta - \alpha) + 2(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ J = \frac{1}{48} r^2 [6(4\alpha^2 + r^2)(\beta - \alpha) + 9\alpha r (\cos \alpha - \cos \beta) - 3r^2 (\sin 2\beta - \sin 2\alpha)] \\ = \frac{1}{24} r^2 [3(4\alpha^2 + r^2)(\beta - \alpha) + 19\alpha (\alpha_1 - \alpha_2) - 6(\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2)]. \end{cases}$$

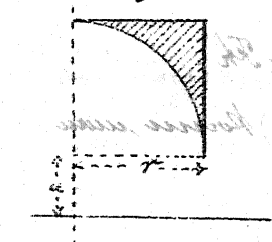
Fig. 37.



für den Kreisbogen (Fig. 37) wird folgende:

$$65. \begin{cases} F = \frac{1}{4} r^2 \pi = 0,785 r^2, \\ L = \frac{1}{12} r^2 (3\pi a \pm 4r) = r^2 (0,785 a \pm 0,333 r), \\ J = \frac{1}{48} r^2 [3\pi (4a^2 + r^2) \pm 32ar] = r^2 [0,785 a^2 \pm 0,667 ar + 0,196 r^2]. \end{cases}$$

Fig. 38.



für die Ergänzung des Kreisbogens zum Kreisbogen (Fig. 38):

$$66. \begin{cases} F = \frac{1}{4} (4 - \pi) r^2 = 0,215 r^2, \\ L = \frac{1}{12} r^2 [3(4 - \pi) a \pm 2r] = r^2 (0,215 a \pm 0,167 r), \\ J = \frac{1}{48} r^2 [12(4 - \pi) a^2 \pm 16ar + (16 - 3\pi) r^2] = r^2 (0,215 a^2 \pm 0,333 ar + 0,127 r^2). \end{cases}$$

Oben oder unten gegeben ist zu wissen, je nachdem die Fläche außerhalb oder innerhalb des Kreises C.H. liegt.

Wenn die Symmetrie der Momente gegeben ist, so wird für den Kreisbogen (Fig. 39):

$$67. J = \frac{1}{16} r^2 [(1 - \pi) r^2 + 4\pi a^2] = r^2 (0,0714 r^2 + 0,785 a^2).$$

fig. 39.

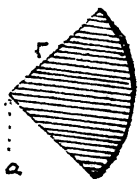
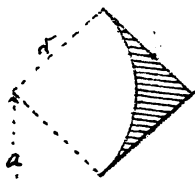


fig. 40.



und für die Freigängung zum Quadrat (fig. 40):

$$68. \quad J = \frac{1}{48} r^2 [(10-3\pi)r^2 + 12(4-\pi)a^2] = r^2 (0,0119r^2 + 0,05a^2).$$

5. Rechtecksektor (fig. 41). S, T bezieht sich auf

die der Kanten AB parallele Ebenen AK & KL , T auf die Symmetrieebene YY

$$69. \quad \begin{cases} S = \frac{2}{3} r^2 [3a(a - \sin \alpha \cos \alpha) \pm 2r \sin^3 \alpha], \\ J = \frac{1}{24} r^2 [3(4a^2 + r^2)(a - \sin \alpha \cos \alpha) \pm 2r \sin \alpha (3a \sin^2 \alpha \pm 3r \cos^2 \alpha)], \\ J_1 = \frac{1}{24} r^2 (6a - 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha). \end{cases}$$

Ob oben oder unten Vorzeichen gilt, je nachdem die Fläche oberhalb oder unterhalb K liegt.

6. Parabel (fig. 42). S, T bezieht sich auf die der Kanten AB und Parabeltangente parallele Ebenen AK & KL , T auf die Symmetrieebene YY .

$$70. \quad \begin{cases} S = \frac{1}{3} bh \\ S = \frac{2}{15} bh (5a + 3h) \\ J = \frac{2}{105} bh (35a^2 + 42ab + 15h^2) \\ J_1 = \frac{1}{30} b^2 h \end{cases}$$

für die der KL & AK parallele Ebenen AK & KL wird:

fig. 43.

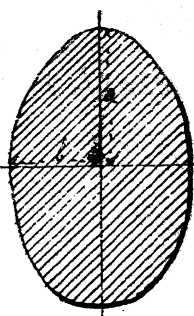
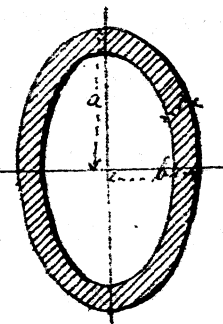


fig. 44.



$$71. \quad \begin{cases} -a_1 = \frac{2}{5} h, a_2 = \frac{3}{5} h \\ J = \frac{8}{175} b h^3 \end{cases}$$

7. Ellipse für die volle Ellipse (fig. 43) ist:

$$72. \quad J = \frac{\pi}{4} a^3 b.$$

für den Ring mit dem Durchmesser d ist also:

$$73. \quad J = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{64} d^4.$$

für den elliptischen Ring mit konstanter sehr kleiner Dicke δ (fig. 44) ist

$$74. \quad J = \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b) \delta,$$

oder für den Durchmesser:

$$75. J = \pi r^3 \delta = \frac{\pi}{8} d^3 \delta.$$

§

§16. Beispiele

1. Beispiel. Glasfaserkugel mit einem Mantel aus einem in fig 45 angegebenen Einwandform. Der Mantel ist als Hohlzylinder aus Glas und ganz homogen. Der Abriss, den man bekommt, wenn man sich die Kugel aus der fig. 45 anschaut, ist als Hohlzylinder aus Glas und ganz homogen.

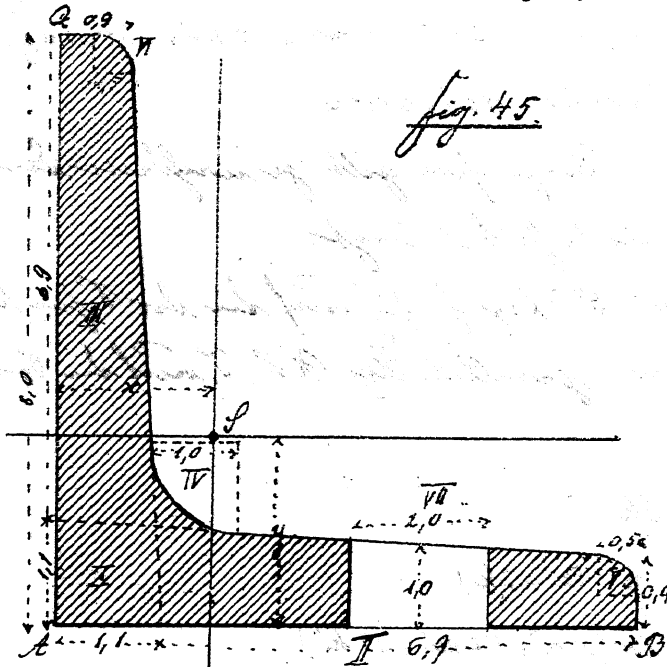


fig. 45.

und ganz homogen. Der Abriss, den man bekommt, wenn man sich die Kugel aus der fig. 45 anschaut, ist als Hohlzylinder aus Glas und ganz homogen. Der Abriss, den man bekommt, wenn man sich die Kugel aus der fig. 45 anschaut, ist als Hohlzylinder aus Glas und ganz homogen.

$$J = 1,1 \cdot 1,1 + 6,9 \cdot \frac{1,1+0,9}{2} + 6,9 \cdot \frac{1,1+0,9}{2} + 0,215 \cdot 1^2 - 0,215 \cdot 0,5^2 - 0,215 \cdot 0,5^2 - 2 \cdot 1^2$$

$$= 1,210 + 6,900 + 6,900 + 0,215 + 0,053 - 2,000 = 13,118$$

Der statische und der Trägheitsmoment J_x und J_y für die Achse A-B und A-C wird ohne Rücksicht auf das Mantel

$$J_x = 1,1 \cdot \frac{1,1^3}{12} + \frac{6,9}{6} \cdot (1,1^2 + 1,1 \cdot 0,9 + 0,9^2) + \frac{6,9}{6} \cdot [0,9(2,8,0 + 1,1) + 1,1(2,1,1 + 8,0)] + 1^2(0,215 \cdot 2,1 - 0,167 \cdot 1,0) - 0,5^2(0,215 \cdot 0,4 + 0,167 \cdot 0,5) - 0,5^2(0,215 \cdot 7,5 + 0,167 \cdot 9,5) = 34,541.$$

$$J_y = \frac{1}{3} \cdot 1,1 \cdot 1,1^3 + \frac{6,9}{6} \cdot (1,1^2 + 0,9^2) + \frac{6,9}{12} \cdot [(0,9 + 1,1)(8,0 + 1,1)^2 + 2 \cdot 0,9 \cdot 8,0^2 + 2 \cdot 1,1 \cdot 1,1^2] + 1^2(0,215 \cdot 2,1^2 - \frac{1}{3} \cdot 2,1 \cdot 1,0 + 0,137 \cdot 1^2) - 0,5^2(0,215 \cdot 0,4^2 + \frac{1}{3} \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,137 \cdot 0,5^2) - 0,5^2(0,215 \cdot 7,5^2 + \frac{1}{3} \cdot 7,5 \cdot 0,5 + 0,137 \cdot 0,5^2) = 162,820.$$

Dafer wird mit Rücksicht auf das Mantel für die Achse A-B: $J_x = 34,54 - 2,05 = 32,54$, für die Achse A-C: $J_y = 162,820 - \frac{1}{3} \cdot 2,1^3 = 162,15$.

$$34,54 - 2,45 = 25,54, \quad J_y = 162,82 - \frac{1}{3}(5,5^2 - 3,5^2) = 121,65.$$

Die Abstände y, x des Bezugspunktes von A B und A C werden nun

$$y = \frac{33,541}{13,118} = 2,557; \quad x = \frac{25,541}{13,118} = 1,947.$$

sind die Trägheitsmomente J_1, J_2 für die zu A B und A C parallelen Bezugswegen:

$$J_1 = 162,154 - 33,541 \cdot 2,557 = 76,39$$

$$J_2 = 121,653 - 25,541 \cdot 1,947 = 21,95.$$

Für einen gegen A B und A C unter 45° geneigten Längs z gefundenen Ogen A D wird das Trägheitsmoment J_z :

$$J_z = 2 \cdot \frac{1}{12} [4,31 \cdot 5,66^3 - 9,76 \cdot 5,02^3] + 0,0119 \cdot 1^4 -$$

$$2 \cdot 0,5^2 (0,0119 \cdot 0,5^2 + 0,215 \cdot 5,02^2) - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 2,83^2 + 2^2 + 1^2) = 136,00 + 0,01 - 2,71 - 19,35 = 282,18.$$

Der Abstand des Bezugspunktes von der Ogen A D ist $(y-x)$ sin $45^\circ = (2,557 - 1,947) \cdot 0,707 = 0,431$.
Also ist das Trägheitsmoment J_3 für die zu A D parallele Bezugswegen:

$$J_3 = 113,95 - 13,118 \cdot 0,431^2 = 111,51.$$

Nach der ersten Gleichung des § 31. (P. 41), nämlich $J_1 = J \cos^2 \alpha - H \sin^2 \alpha + J' \sin^2 \alpha$ wird $J_3 = \frac{1}{2} J_1 - H + \frac{1}{2} J_2$, also $H = \frac{1}{2} (J_1 + J_2) - J_3 = \frac{1}{2} (76,39 + 21,95) - 111,51 = -37,34$.
Betrachtet man nun Günstigen mit der Geraden A B den Winkel α an, so ist nach Gleichung 12. (P. 42):

$$\tan 2\alpha = + \frac{2 \cdot 37,34}{76,39 - 21,95} = 16,82.$$

$$2\alpha = 86^\circ 35' 51'' \text{ oder } 266^\circ 35' 51''$$

$$\alpha = 43^\circ 17' 56'' \text{ oder } 133^\circ 17' 56''.$$

Nach der ersten der Gleichungen 14. (P. 42) ist nun $J_1 = J \cos^2 \alpha + J' \sin^2 \alpha + J_2 = J \sin^2 \alpha + J \cos^2 \alpha$.
Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen giebt: $J_1 + J_2 = J + J'$, $J_1 - J_2 = (J - J')(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = (J - J') \cos 2\alpha$.

hi. $\tilde{J} + \tilde{J}' = 148,34$, $0,0596(\tilde{J} - \tilde{J}') = 4,44$ oder
 $\tilde{J} + \tilde{J}' = -148,34$
 $\tilde{J} - \tilde{J}' = 74,70$.

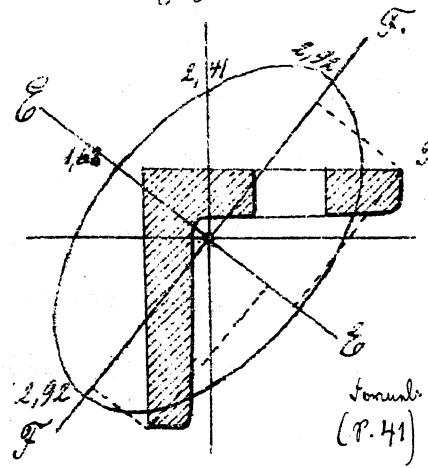
Somit folgt:

$\tilde{J} = 111,52$, $\tilde{J}' = 36,82$.

Die aufgefundenen Inertienradien sind:

$r = \sqrt{\frac{111,52}{13,12}} = 2,92$, $r' = \sqrt{\frac{36,82}{13,12}} = 1,68$.
 $r_1 = \sqrt{\frac{76,38}{13,12}} = 2,41$, $r_2 = \sqrt{\frac{71,95}{13,12}} = 2,34$.

Fig. 47.



Die drei Punkte A, B und C sind in der Stellung Fig. 47 angenommen und vertical belastet, so sind ist M , das Biegemoment für den ges. scheinbaren Querschnitt, so sind die Momente für die Springergelenke E und F : $M = M_{cos\alpha} = 0,728 M$, $M' = M_{sin\alpha} = 0,686 M$. Die größte Biegung wird ausgedrückt im Punkte A, B oder C, nämlich; die Abstände dieser Punkte, die leicht zu berechnen sind, sind in Fig. 47 eingezeichnet. Nach der Gleichung 21 (S. 45) ist:

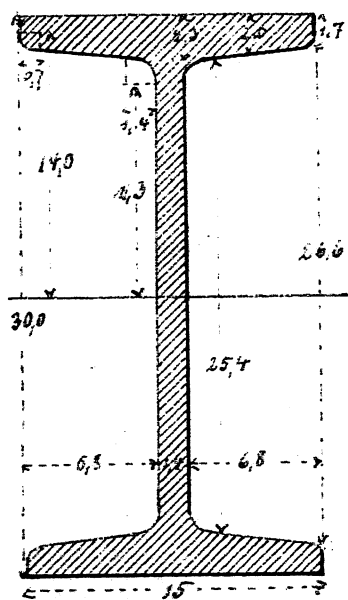
gibt sich jetzt als spezifische Biegungen N_1, N_2, N_3 in diesen 3 Punkten:

für A: $N_1 = - \frac{0,728 M \cdot 0,21}{111,52} - \frac{0,686 M \cdot 3,20}{36,82} = - 0,0610 M$,
 für B: $N_2 = - \frac{0,728 M \cdot 6,01}{111,52} + \frac{0,686 M \cdot 2,55}{36,82} = - 0,0102 M$,
 für C: $N_3 = + \frac{0,728 M \cdot 5,31}{111,52} + \frac{0,686 M \cdot 2,31}{36,82} = + 0,0777 M$.

Es tritt also der größte Druck in A, der größte Zug in C ein. Nimmt man die zulässige Spannung für Druck zu 600 kg, für Zug zu 750 kg pro qcm an, so würde für A: $M_1 = \frac{500}{0,0610} = 9836 \text{ kg cm} = 98,36 \text{ kg m}$, für C: $M_2 = \frac{750}{0,0777} = 9653 \text{ kg cm} = 96,53 \text{ kg m}$ sein können. Für die Ausarbeitung würde der kleinere Wert maßgebend sein.

Siehe das vorstehende Bild, in welchem die Krümmungen des Oberflächenschnitts oft gezeichnet werden müssen, um den Verlauf des Widerstands zu verfolgen. In solchen Fällen sind die Krümmungen nach vorstehendem durch Symmetrie bekannt. Die Angaben sind zu noch ein Beispiel.

2. Beispiel. Symmetrischer I-Eisen mit den in Fig. 48 angegebenen Dimensionen. Wir haben hier in der Regel nur das Krümmungs-



moment für die zum Bogen festgelegte Symmetrie nötig. Für die Spannung und das Biegemoment sind die Krümmungen als Differenz eines Krümmungs und eines Krümmungs zu betrachten. Die Abstände sind der Mittelkreis. Abstände sind:

$$J = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 30^3 - 2 \cdot \frac{1}{48} \cdot 6,8 (25,4 + 26,6) (25,4^2 + 26,6^2) + 4 \cdot 1,4^2 (0,215 \cdot 14,0^2 + 0,333 \cdot 14,0 \cdot 1,4 + 0,137 \cdot 1,4^2) - 7 \cdot 2,7^2 (0,215 \cdot 14,0^2 + 0,333 \cdot 14,0 \cdot 2,7 + 0,137 \cdot 2,7^2) = 33750 - 19450 + 259 - 76 = 14003.$$

Man kann nun eine Zusammenfassung nach Kraft,

also an, so würde man erhalten: $J = \frac{1}{12} (15 \cdot 30^3 - 2 \cdot 6,8 \cdot 26,6^2) = 13831$, d. h. 1,2 prozent zu klein.

E. Symmetrischer I-förmiger Querschnitt.

§ 17. Spannungen im Träger mit I-förmigem Querschnitt. Der Träger besteht aus drei Teilen: dem Kopf oder der Lauffläche mit einer bestimmten Dicke und den beiden Flanken, deren jedes die Oberflächensfläche f hat. Es sei h die ganze Höhe, k der Abstand der Schwerpunkt der Flankenquerschnitte k die Größe der Lauffläche zur Verbindungsstelle mit den Flanken gerechnet, i das Krümmungsmoment und J das Flächenträgheitsmoment. Nur in der Lauffläche können die Spannungen so groß werden, daß sie beachtet werden müssen die Flanken,

querschnittsfläche F und des Längheitsmoment J des ganzen Querschnittes sind:

$$76. F = 2f + k_2 d, \quad J = \frac{1}{2} f \cdot h_1^2 + \frac{1}{12} d h_2^3 + 2i.$$

Das Flächenträgheitsmoment I eines Querschnittes bis zum Abscissa v von der Symmetrieachse, ist:

$$77. I = \frac{1}{2} f h_1^2 + \frac{1}{8} d (h_2^2 - 4v^2).$$

Die spezifische Normalspannung N in einem Punkte des Trägers und die spezifische Schubspannung T in einem beliebigen Punkte der Längsachse sind

$$78. N = \frac{Mv}{J}, \quad T = \frac{Q \cdot I}{J \cdot F} = \frac{Q}{J \cdot F} \left[\frac{1}{2} f h_1^2 + \frac{1}{8} (h_2^2 - 4v^2) \right].$$

Die totale Querspannung Y ist in den Fäden $= N$ und erreicht ihr Maximum für $v = \pm \frac{1}{2} h_2$. Die totale Querspannung in der Längsachse erreicht nach Formel 46 (S. 62):

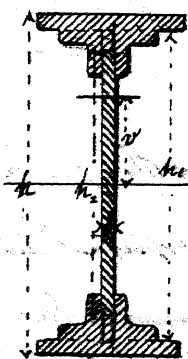
$$79. Y = \frac{M}{3J} \left[v \pm 2 \sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{M^2} \left[\frac{1}{2} f h_1^2 + \frac{1}{8} (h_2^2 - 4v^2) \right]^2} \right].$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{f h_1^2}{2 h_2^2} + \frac{h_2^2}{4 h_2^2} = \alpha$, $\frac{Q^2 h_2^2}{M^2} = \beta$, so wird

$$Y = \frac{M}{3J} \left[v \pm 2 \sqrt{v^2 + \beta h_2^2 \left(\alpha - \frac{v^2}{h_2^2} \right)^2} \right]$$

Derzeit kann man sich auf das Y für verschiedene Werte von α, β und v , so findet man, dass wenn M klein, β klein ist, das wirkliche Maximum von

Fig. 49.

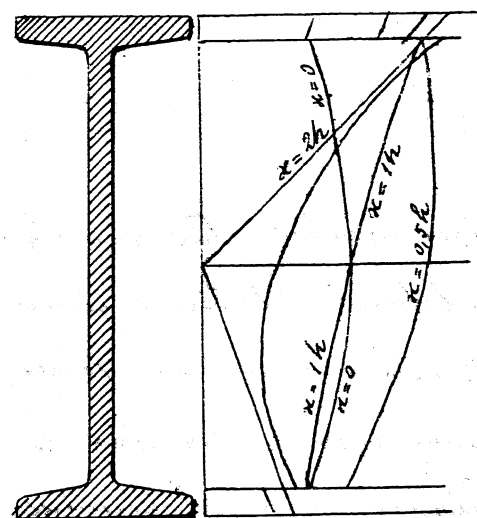


Y für $v = \pm \frac{1}{2} h_2$ oder $v = \pm \frac{1}{2} h_2$ eintritt. Bei kleinem M kann Y zum analytischen Maximum für einen gewissen v und $\pm \frac{1}{2} h_2$ gelangen. Weshalb man v variieren, indem man sich auf die, wie man nachteiligste Querschnitte, daß als dann das analytische Maximum, wenn man Y mit v variieren kann für $v = 0$ oder $v = \pm \frac{1}{2} h_2$ gilt, liegen. Weshalb man Y abnimmt. Man kann daher mit Sicherheit, der Genauigkeit nach, daß Y entweder für $v = 0$, $v = \pm \frac{1}{2} h_2$ oder $v = \pm \frac{1}{2} h_2$ zum Maximum wird. Legen wir die nachfolgenden, den Werten von Y mit Y_0, Y_1, Y_2 , so wird

$$80. \begin{cases} y_0 = \frac{2Q}{3J} \left(\frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{4} h_2^2 \right), \\ y_1 = \frac{M h_2}{6 J} \left[1 + 2 \sqrt{1 + \left(\frac{2Q h_1}{M h_2} \right)^2} \right], \\ y_2 = \frac{M h}{2 J}. \end{cases}$$

Zu fig. 50 sind die positiven Werte von y für einzelne Querschnitte in. und total, und gleichmäßig belasteten Träger (k = $\frac{1}{4}l$, d = 1) graphisch dargestellt.

fig. 50.



$x=0$	$\frac{y}{h} = \infty$
$= 0,5h$	$= 1,71$
$= 1,0h$	$= 0,67$
$= 1,5h$	$= 0,27$
$= 2h$	$= 0$

§ 13. Träger mit konstantem Querschnitte und gleichmäßiger Belastung.

Die Länge des Trägers sei l , die Querschnittsfläche F , der Abstand eines beliebigen Querschnitts vom linken Ende sei x . Bei totaler Belastung wird, wenn wir $\frac{x}{l} = n$ setzen

$$81. \begin{cases} Q = \frac{1}{2} q l (1 - 2n) = \frac{1}{2} q l (1 - 2n) \\ M = \frac{1}{2} q x (l - x) = \frac{1}{2} q l^2 n (1 - n) \end{cases}$$

Wenn wir das rechte Ende bis zum fraglichen Querschnitt belasten, so wird (der Längenausdruck l wird nicht mehr gebraucht):

$$82. Q = \frac{1}{2} q \frac{(l-x)^2}{l} = \frac{1}{2} q l (1-n)^2, M = \frac{1}{2} q \frac{x(l-x)^2}{l} = \frac{1}{2} q l^2 n (1-n)^2.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{2 l h_1}{3 J} = A$, $\frac{q l^2 h_2}{12 J} = B$, so wird

$$83. \begin{cases} \text{totale Belastung: } y_1 = B [n(1-n) + 2 \sqrt{n^2(1-n)^2 + A^2(1-2n)^2}], \\ \text{einseitige Belastung: } y_1 = B (1-n)^2 [n + 2 \sqrt{n^2 + A^2}]. \end{cases}$$

Es ist für einzelne Werte von A und n die Tabelle (P. 98) für y berechnet. Man merke sich diese Tabelle deutlich, daß y entweder für $x=0$ bei totaler Belastung zum Maximum wird.

y_0 wird zum Maximum für $x=0$ bei totaler Belastung, da für die

α	$A = 1$		$A = 0,3$		$A = 0,5$		$A = 0,4$		$A = 0,3$		$A = 0,2$		$A = 0$	
	tot.	part.	tot.	part.	tot.	part.	tot.	part.	tot.	part.	tot.	part.	tot.	part.
0	2,00	2,00	1,60	1,60	1,20	1,20	0,80	0,80	0,60	0,60	0,40	0,40	0	0
0,2	1,39	1,43	1,18	1,18	0,96	0,94	0,72	0,70	0,64	0,59	0,56	0,49	0,48	0,38
0,4	0,87	0,92	0,82	0,79	0,78	0,66	0,75	0,55	0,73	0,50	0,72	0,47	0,72	0,43
0,5	0,75	0,09	0,75	0,60	0,75	0,52	0,75	0,45	0,75	0,42	0,75	0,39	0,75	0,38
0,5	0,27	0,47	0,82	0,42	0,78	0,37	0,75	0,53	0,73	0,31	0,72	0,30	0,72	0,29
0,8	1,39	0,13	1,18	0,12	0,96	0,11	0,72	0,10	0,64	0,10	0,56	0,10	0,48	0,10
0,1	2,00	0	1,60	0	1,20	0	0,80	0	0,60	0	0,40	0	0	0

je nach fall bekanntlich σ das absolute Maximum erreicht. für $\alpha = 0$ aber wird $G_0 > G_1$. Es sagt man wird für $\alpha = \frac{1}{2}l$ bei totaler Belastung zum Maximum, da für diesen fall bekanntlich M zum absoluten Maxi., und es wird. für $\alpha = \frac{1}{2}l$ aber wird $G_2 > G_1$. Beweis wird unter aber G_0 für $\alpha = 0$ oder G_2 für $\alpha = \frac{1}{2}l$, beides bei totaler Belastung das Maximum von G sein. die betreffenden Werte von G_0 und G_2 werden

$$84. G_0 = \frac{ql}{3f} \left(\frac{h_1}{f} + \frac{1}{4} h_2^2 \right), G_2 = \frac{ql^2 h}{16f}.$$

Setzt man nun $G_0 = G_2 =$ der zulässigen Spannung K , setzt für f seinen Wert ein und reducirt die erhaltenen beiden Gleichungen auf σ und f , so erhält man

$$85. \begin{cases} \sigma = \frac{6ql^2 h}{K(qlh_1 - 12h_1 h_2^2 + 8h_2^3)} \\ f = \frac{(3l - 4h_1)\sigma}{16K_1} = \frac{3ql^2 h (3l - 4h_2^2)}{8K_1 (qlh_1 - 12h_1 h_2^2 + 8h_2^3)} \end{cases}$$

Obwohl es nicht, wenn wir $h_1 = h_2 = h$ setzen

$$86. \begin{cases} \sigma = \frac{6ql^2}{Kh(ql - 4h)} \\ f = \frac{(3l - 4h)\sigma}{16} = \frac{3ql^2(3l - 4h)}{8Kh(ql - 4h)} \end{cases}$$

ist h gegen l sehr klein, so wird mit noch geringerer Annäherung:

$$87. \quad S = \frac{3ql}{8Kh}, \quad f = \frac{3}{16} l^2 = \frac{ql^2}{8Kh}.$$

Die gesamte Querschnittsfläche F wird benötigt, wenn für 0 und f die Ausdrücke 87 eingesetzt werden:

$$88. \quad F = 2f + kh = \frac{3ql^2}{4Kh} \cdot \frac{3l + 4h}{9l - 4h}.$$

Man sucht nach dem Minimum für $h = \frac{9}{20} l = 0,45l$. Auswendiglernen Rückfragen lohnt sich, inlassen eine so große Größe in der Regel nicht zu merken.

Nutzen mit kritischen Werten $h = \frac{9}{20} l$, f wird nach der Formel 86

$$S = 5,65 \cdot \frac{q}{K}.$$

für singuläre ^{brücken} Längsprofile wird benötigt

$l =$	5	10	20	30	40	50	100	150 m
$K =$	0,60	0,63	0,68	0,71	0,71	0,75	0,80	0,87 t pro qm
$q =$	0,056	0,038	0,034	0,034	0,034	0,035	0,042	0,054 t pro qm
$S =$	0,33	0,41	0,29	0,27	0,26	0,27	0,29	0,37 cm

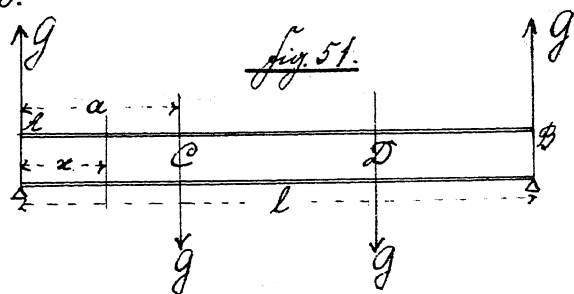
Bei ungleichmäßigen Brücken wird S ungenügend hoch gehalten. Man muss, je nach Fall, in der Regel die Lasten mit gleichmäßiger Last, je größer, ungenügender werden muss, als Handlung erforderlich ist. Nimmt man aber S größer an, so ist $G < K$ und es ist also keine f mehr durch die Gleichung $G_2 = K$ bestimmt. Diese Gleichung gibt

$$89. \quad f = \frac{3ql^2h - 4Kh^3}{24Kh^2},$$

und mit geringer Annäherung $h_1 = h_2 = h$ gesetzt:

$$90. \quad f = \frac{ql^2}{8Kh} - \frac{h^2}{6} \quad F = \frac{ql^2}{4Kh} + \frac{2h^2}{3}.$$

§ 19. Träger mit constantem Querschnitt, durch zwei Einzel-
lasten symmetrisch belastet. Jede der beiden Lasten $f_1 = f_2$ ist



Abstand von der rechten Stütze = a . Das
Biegemoment des Trägers sei zu irgend
einem Zeitpunkt der äußeren Punkte
 AC (Fig. 48) ist

$$91. Q = q, M = q \cdot x$$

und innerhalb der mittleren Strecke CD ist

$$92. Q = 0, M = q \cdot a.$$

Der Untersuchungen zufolge wiederholen die ideale Grenzsymmetrie
 g_1 . Da innerhalb der Strecke AC die Querkraftkraft Q konstant
ist, so muß g_1 gleichzeitig mit M zum Maximum werden, d. i.
für $x = a$. Innerhalb der Strecke CD ist $Q = 0$ und M konstant, also auf
 g_1 konstant. Da für zwei unmittelbare links und rechts neben C
liegende Querschnitte M gleich groß, Q aber für den linken Querschnitt
größer ist, so wird g_1 für den unmittelbar links neben C , un-
terschiedlich auf für den unmittelbar rechts neben D liegenden Querschnitt
größer sein. Man erhält also das Maximum von g_1 ,
wenn man $Q = q, M = q \cdot a$ setzt.

g_0 ist innerhalb der Strecke CD konstant. Die Werte von g_0 in
der Strecke AC , von g_1 unmittelbar links neben C und von g_2 in
der Strecke CD werden:

$$g_0 = \frac{2q}{3f} \left(\frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{4} h_2^2 \right),$$

$$g_1 = \frac{q a h_2}{6f} \left[1 + 2 \sqrt{1 + \left(\frac{2 f h_1}{a h_2} \right)^2} \right],$$

$$g_2 = \frac{q a h}{2f}.$$

Es ergibt sich ferner leicht, daß $g_0 > g_1$ wird, wenn

$$\frac{2f}{h_2} < - \frac{3a^2 + 4ah_2 - 4h_2^2}{8h_1(a - 2h_2)}$$

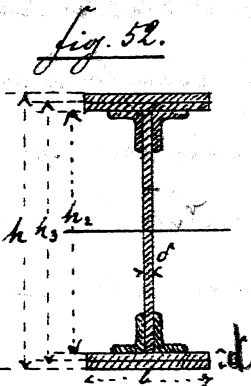
ist. Wenn $a > 2h_2$ ist, so kann diese Bedingung nicht erfüllt werden.

Mit Rücksicht auf den Aufwand, daß die Blechdicke nicht zu groß angenommen werden muß, als ob Horatsch notwendig ist und daß allgemein in der Regel h_2 das Maximum von h ist, wird man am besten die Blechdicke annehmen und die Gleitung $h_2 = K$ nach F auflösen. Man erhält nach Einsetzung des Widerstandes für F mit Berücksichtigung von i :

$$94. \quad f = \frac{3gl - 2Kh_2^3}{12Kh_2^2}.$$

Man bemerkt nun aber noch nach dem Formel 93 h_2 und h_1 , um sich zu überzeugen, daß keiner dieser Werte größer ist als K . Sollte dies der Fall sein, so muß man d größer annehmen und neu berechnen.

§ 20. Berechnung der Blechträger im Allgemeinen. Zugiefert man das Trägheitsmoment des Blechbundes nach der zur Verbindung mit den Horizontalblechen oder Lammellen hinreichenden Winkel α mit J_0 , die Querschnittsfläche der Lammellen in einem Punkte mit f , die Breite der Lammellen mit b , ihre Gesamthöhe in einem Punkte mit d , ferner die Abstände der Pflanzpunkte der Lammellen, querschnitt mit h_3 . Allgemein ist das Trägheitsmoment für die auf der Blechbündel senkrechten Pflanzung



$$95. \quad J = J_0 + \frac{1}{2} f h_3^2 + \frac{1}{6} b d^3.$$

In der Regel wird h_2 das Maximum von h sein, so ist allgemein $K = \frac{Kh}{2f}$ oder $2Kh = Kh$ zu setzen, so

96. $2K(\gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma k_3^2 + \frac{1}{6} b d^3) = Mh$.

Die Näherungsregel ersetzt man, wenn man $k_3 = h$ setzt und das Glied mit d^3 vernachlässigt. Also dann ist $2K(\gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma h^2) = Mh$, also

97. $f = \frac{h}{Kk} - \frac{2\gamma_0}{h^2}$.

Genauer ist bei der Größe h der Lastenwert $k_3 = h_4 + d$, $h = h_4 + 2d$, daher, wenn man $f = b d$ setzt

$2K[\gamma_0 + \frac{1}{2} b d (h_4 + d)^2 + \frac{1}{6} b d^3] = M(h_4 + 2d)$.

Die Relation mit $b d$ gibt

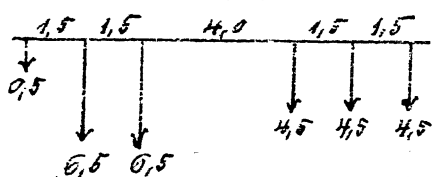
98. $b d = \frac{6[M(h_4 + 2d) - 2K\gamma_0]}{2K[3(h_4 + d)^2 + d^2]}$.

Den besseren wird man zuerst die richtige Näherungsregel 97 anwenden: Man setzt also dann entweder die Werte d dafür ein, fest sind berechnet nach Formel 98 die Werte b oder, wobei der Regel dort, was am besten ist, man setzt die Werte b fest und berechnet die Werte d nach Formel 98. Diese Gleichung werden in Beziehung mit b vom dritten Grade sein; indessen kann, wenn sie als Gleichung 4. ten Grades annehmen, indem man für d nach der ersten Reihe den bei der ersten Lösung gefundenen Näherungswert einsetzt.

Die Vereinfachung dieser Rechnung ist so im Allgemeinen nach Möglichkeit für verschiedene Gütegrade die Werte der inneren Spannungungen γ_0 und γ_1 nach den Formeln 80 zu berechnen und sich zu überzeugen, daß an keiner Stelle die als Hauptspannung γ K wird. Wollte sich der Fall zeigen, so müßte die Lasten entsprechend größer angenommen oder an der entsprechenden Stelle eine Localverstärkung durch — angegeben werden. Näheres über die Lastenverteilung (Masten, Holmen, etc.) im „Brückenbau“.

Aufgabe. Bestimmung eines Lastträgeres für eine einseitige, 2-fachüberbrückte mit $10\text{ m} = 1000\text{ cm}$ Spannweite, $h_2 = 1\text{ m} = 100\text{ cm}$ Trägerhöhe. Der Eigengewicht sei $0,8\text{ t pro m}$, die zufällige Lastung der Lastverteilung fig. 53 gegeben. Die zulässige Flächspannung sei $R = 0,6\text{ t pro qcm}$.

Fig. 53.

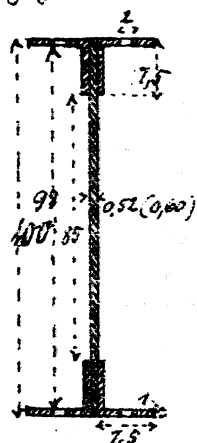


Die spezielle Bestimmung des Maximalmomentes ergibt:

$x = 0$	1	2	3	4	5 m
$M_g = 0$	2,3	4,0	5,3	6,0	6,3 t m
$M_p = 0$	16,5	21,4	25,1	29,6	40,3 "
$M = 0$	18,8	31,4	40,4	45,6	46,6 "

Wir nehmen die Lasten zu $0,6\text{ cm}$ stark an (abgerundet), wegen der Beschränkung durch Nistlöcher nehmen wir aber nur $0,87$ stark, d. i. $d = 0,87 \cdot 0,6 = 0,52\text{ cm}$ an. Für die übrigen müssen wir die in fig. 54. angegebenen Dimensionen nehmen. Also ist

Fig. 54.



$$J_0 = \frac{1}{12} [(0,52 + 2,75 - 2,2) 100^3 - 2(7,5 - 1 - 2) 98^3 - 2 \cdot 1,85^3]$$

$$= \frac{1}{12} [11,52 \cdot 100^3 - 9 \cdot 98^3 - 2 \cdot 85^3] = 151752.$$

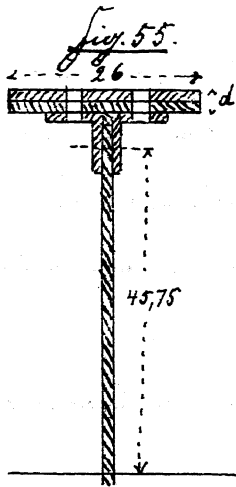
(Oben Rücktritt mit der Beschränkung durch Nistlöcher wird bei $J_0 = 178021$ gegeben.)

Nach der Moirerungsformel 97 wird nun

$$f = \frac{M}{96 \cdot 100} - \frac{2 \cdot 151752}{100^2} = \frac{1}{60} M - 30,35$$

Gerner ergibt sich, wenn man die Breite b zu 16, d. h. auf Abzug der Nistlöcher zu 22 annimmt, also $d = \frac{f}{2}$

folgt:	$x = 0$	1	2	3	4	5 m
$f = -30,3$	+1,0	22,0	37,0	45,7	47,7	48 cm
$d = -1,38$	+0,04	1,00	1,68	2,08	2,16	cm.

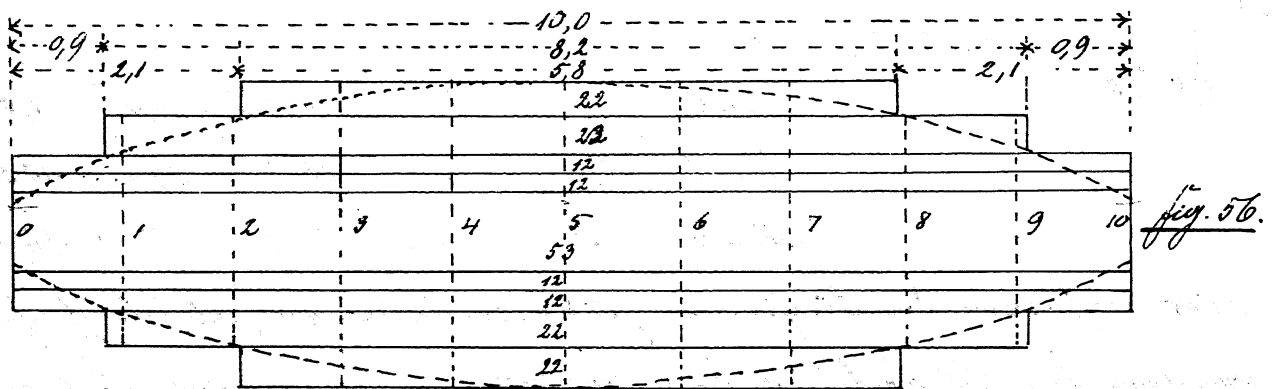


Nach der gewöhnlichen Formel 98 ergibt sich jetzt, wenn man für α mit der rechten Seite des oben berechneten Niv., formel einsetzt:

$$\alpha = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad m$$

$$\alpha = -1,41 + 0,04 \quad 1,02 \quad 1,71 \quad 2,13 \quad 2,22 \text{ cm}$$

Formel ergibt sich die in Fig. 56. gezeichnete Materialverteilung. In der Mitte sind zwei Laminellen, und die



Ende ist gar keine Laminelle angeordnet.

Zur Bestimmung der Normierungen ermittelt man zunächst die Querschnittskräfte und Momente für totale und partielle Belastung. Es ergibt sich:

Totale belastet (für max M):

$\alpha = 0$	0,9	1	2	2,1	3	4	5	m
$Q_g =$	2,5	2,0	2,0	1,5	1,4	1,0	0,5	0 t
$Q_p =$	19,5	16,9	16,5	13,7	13,2	8,0	5,5	3,3 "
$Q =$	22,0	18,8	18,5	15,2	14,6	9,0	6,0	3,3 "
$M_g =$	0	2,1	2,3	4,0	4,1	5,3	6,0	6,3 t m
$M_p =$	0	14,9	16,5	27,4	28,2	35,1	39,6	40,3 "
$M =$	0	17,0	18,8	31,4	32,3	40,4	45,6	46,6 "

Partiell belastet (für max Q)

$\alpha = 0$	0,9	1	2	2,1	3	4	5	m
$Q =$	2,5	2,0	2,0	1,5	1,4	1,0	0,5	0 t.

x	Eigenschaften		zu füllige Luft				Temperatur			
	Q	M	tot. Q	tot. M	tot. Q	tot. M	tot. Q	tot. M	tot. Q	tot. M
0	2,5	0	19,5	19,5	0	0	22,0	27,0	0	0
0,9	2,0	210	16,9	16,9	1490	1490	18,8	18,8	1700	1700
1	2,0	230	16,5	16,5	1650	1650	18,5	18,5	1880	1880
2	1,5	400	13,7	13,7	2740	2740	15,2	15,2	3140	3140
2,1	1,4	410	13,2	13,5	2820	2810	14,6	14,9	3230	3220
3	1,0	530	8,0	11,3	3510	3390	9,0	12,3	4040	3920
4	0,5	600	5,5	9,2	3960	3680	6,0	9,7	4560	4280
5	0	630	3,3	7,2	4030	3600	3,3	7,2	4660	4230
	t	t _{max}	t	t	t _{max}	t	t	t	t _{max}	t

hier ist zuverfügt
 $G_0 = \frac{4Q\varphi}{370}$
 Gierste ist
 bei Bestimmung
 von L und J
 die Verteiler
 nicht abzüglich,
 es ergibt sich
 alsdann:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eine Lammelle: } L = 2209, J = 178020, G_0 = 0,0276 Q \\ \text{zwei Lammellen: } L = 3655, J = 324190, G_0 = 0,0251 Q \\ \text{drei Lammellen: } L = 5163, J = 476790, G_0 = 0,0241 Q \end{array} \right.$$

ferner wird $G_2 = \frac{4h}{2f}$.

Bei Bestimmung von J sind die Verteiler abzüglich. Es wird

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eine Lammelle: } \frac{1}{2}h = 50,0, J = 151750, G_2 = 0,000328 M, \\ \text{zwei Lammellen: } \frac{1}{2}h = 51,1, J = 276100, G_2 = 0,000186 M, \\ \text{drei Lammellen: } \frac{1}{2}h = 52,2, J = 404550, G_2 = 0,000129 M. \end{array} \right.$$

Es ist

$$G_1 = \frac{4}{3}N + \frac{4}{3}\sqrt{14N^2 + 5^2}$$

$$N = \frac{Mv}{J}, \quad J = \frac{Q\varphi}{J\delta}$$

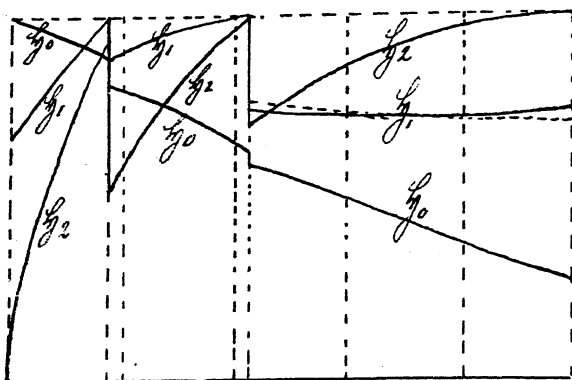
Bei Bestimmung von J sind die Verteiler nicht abzüglich, wohl aber bei Bestimmung von L und J , also ist $\delta = 0,55 \text{ cm}$; ist bei der Bestimmung der angegebenen Werte zu nehmen, $\delta = 45,75$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eine Lammelle: } J = 178020, L = 1459, N = 0,000257 M, F = 0,0155 Q, \\ \text{zwei Lammellen: } J = 324190, L = 2905, N = 0,000141 M, F = 0,0169 Q, \\ \text{drei Lammellen: } J = 476790, L = 4413, N = 0,000096 M, F = 0,0174 Q. \end{array} \right.$$

die Resultate der Berechnung sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

x	g_0 gemess. Belastung	g_2 Betal Belastung	g_1 Betal Belastung	g_1 gemess. Belastung
0	0,607	0	0,401	0,401
0,9-0	0,522	0,560	0,598	0,598
0,9+0	0,474	0,315	0,532	0,532
1	0,464	0,348	0,537	0,537
2	0,382	0,581	0,596	0,596
2,1-0	0,374	0,598	0,597	0,600
2,1+0	0,359	0,417	0,436	0,440
3	0,296	0,521	0,433	0,458
4	0,234	0,588	0,457	0,457
5	0,174	0,601	0,452	0,433
m	± gem.			

Fig. 57.



In Fig. 57 sind diese Diagramme, wie gewöhnlich dargestellt. Man sieht, daß das Maximum von g für $x = 0,9$, $2,1$ und 5 m. gemessen $0,6$ oder ungefähr $0,6$ t. großem wird, aber $0,6$ t. großem nicht übersteigt. Nur für $x = 0$ wird

g_0 ein wenig größer. Durch die starke unregelmäßige Verteilung der Lasten wird indes eine zu starke Beanspruchung hervorgerufen. Ferner, da indes $0,6$ cm die unterste Dicke sein, ist zu befürchten, dass die Lasten im vorliegenden Falle gegeben könnte.

F. Unsymmetrischer I-förmiger Querschnitt.

§ 21. Querschnittsgrößen. Zunächst ist es notwendig, für einen gegebenen Träger die Tragfähigkeit zu bestimmen, so ist es leicht, durch direkte Ausmessung der Dimensionen die Lage des Schwerpunktes und das Trägheitsmoment des Querschnittes zu be-

finden. Sind aber die Dimensionen für einen gegebenen Tragfähigkeit zu bestimmen, so werden die gewöhnlichen Ausdrucke für das Trägheitsmoment bereits so complicirt, daß ihre Benützung auf viele Schwierigkeiten stößt. Ein einfacher ist es, zunächst die Dimensionen durch Messungstragwerke zu bestimmen. Alsdann kann man leicht die Symmetriegen, welche in dem so erhaltenen Träger auftreten, genau bestimmen und hierauf möglichst vollständig die Querschnittsdimensionen vergrößern oder vermindern.

Wir nehmen an, daß die Dicke δ des Trägers und die Seiten d, d_1 der Flügel nicht klein sind gegen die Größe h . Die Flügel des Trägers seien f, f_1 , ihre Breiten b, b_1 , ihre Abstände von der zum Träger parallelen Symmetrie a, a_1 . Das statische Moment in Bezug auf die

Achse $z-z$ ist also $f \cdot \delta + h \cdot d \cdot \frac{1}{2} h + f_1 \cdot h = \frac{1}{2} h^2 \delta + f_1 \cdot h$. Danach ist $F \cdot a = \frac{1}{2} h^2 \delta + f_1 \cdot h$. da $F = f + f_1 + h \delta$ ist, so wird auch $F \cdot a = \frac{1}{2} F h - \frac{1}{2} (f - f_1) h$, also $a = \frac{1}{2} h - \frac{(f - f_1) h}{2 F}$; ferner wird nun $a_1 = h - a$, d. i.

$$99. \quad a = \frac{1}{2} h - \frac{(f - f_1) h}{2 F}, \quad a_1 = \frac{1}{2} h + \frac{(f - f_1) h}{2 F}.$$

so ist also

$$100. \quad \frac{a}{a_1} = \frac{F + f_1 - f}{F - f_1 + f} = \frac{2 f_1 + h \delta}{2 f + h \delta}.$$

Das Trägheitsmoment für die Achse $z-z$ ist $f_1 h^2 + \frac{1}{3} \delta h^3$, also das Trägheitsmoment J für die Symmetrie $= f_1 h^2 + \frac{1}{3} \delta h^3 - F a^2$. Setzt man obigen Ausdruck für a ein, so erhält man

$$J = f_1 h^2 + \frac{1}{3} \delta h^3 - \frac{1}{4} F h^2 + \frac{(f - f_1) h^2}{2} - \frac{(f - f_1)^2 h^2}{4 F}.$$

Setzt man im dritten Gliede $F = f + f_1 + h \delta$, so erhält man

$$101. \quad J = \frac{1}{12} h^3 \delta + \frac{1}{4} (f + f_1) h^2 - \frac{(f - f_1)^2 h^2}{4 F}.$$

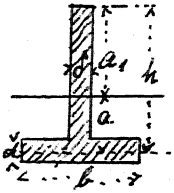
so läßt sich J in verschiedenen anderen Formen ausdrücken, z. B.

$$102. \quad J = \frac{1}{4} F h^2 - \frac{1}{6} h^3 \delta - \frac{(f - f_1) h^2}{4 F},$$

$$102. \quad \bar{J} = \frac{1}{12} h^3 \delta + \frac{(f + f_1) h \delta + 12 f f_1 + h^2 \delta^2}{(f + f_1) h \delta + h^2 \delta^2},$$

$$= F a_1 a_2 - \frac{1}{6} h^3 \delta.$$

Fig. 59.



für den L-förmigen Querschnitt (Fig. 59) wird $f_1 = 0$, mithin

$$103. \quad a = \frac{1}{2} h - \frac{f h}{2 F}, \quad a_1 = \frac{1}{2} h + \frac{f h}{2 F}.$$

$$104. \quad \bar{J} = \frac{1}{12} h^3 \delta + \frac{1}{4} f h^2 - \frac{f^2 h^2}{4 F},$$

$$= \frac{1}{4} F h^2 - \frac{1}{6} h^3 \delta - \frac{f^2 h^2}{4 F},$$

$$= \frac{1}{12} h^3 \delta \frac{4 f + h \delta}{f + h \delta}.$$

§ 22. Festigkeitsbedingungen. Wir wollen nun normabestimmen, daß die Nagelste mit gewöhnlichen Pfählen größer gemacht werden muß, als es die Theorie erfordert, so daß nur die Normalspannungen in Betracht kommen. Legen wir die zugehörige Querschnittsfläche für Druck, und überlegt mit K, K_1 , so sind die zu erfüllenden Festigkeitsbedingungen:

$$105. \quad K \bar{J} = M a, \quad K_1 \bar{J} = M a_1.$$

Daraus folgt zunächst

$$106. \quad \frac{a}{a_1} = \frac{K}{K_1}.$$

Setzen wir für $\frac{a}{a_1}$ den Ausdruck 100, so erhalten wir

$$107. \quad \frac{2 f_1 + h \delta}{2 f + h \delta} = \frac{K}{K_1}.$$

Die Reduktion auf f_1 giebt

$$f_1 = \frac{2 K f + (K_1 - K) h \delta}{2 K_1},$$

daher wird

$$f + f_1 = \frac{2 (K + K_1) f - (K_1 - K) h \delta}{2 K_1},$$

$$f - f_1 = \frac{(K_1 - K) (2 f + h \delta)}{2 K_1},$$

$$F = f + f_1 + h \delta = \frac{(K + K_1) (2 f + h \delta)}{2 K_1}.$$

Setzt man dies in den Ausdruck 101 für f eingesetzt, ergibt:

$$f = \frac{K^2}{K+K_1} f h^2 - \frac{K_1 - 2K}{6(K+K_1)} h^3 \delta$$

Setzt man dies in die Gleichung $K \cdot f = M$ ein und beachtet dabei, daß $a = \frac{K}{K+K_1} h$ wird, so erhält man die erste der Gleichungen

$$108. \begin{cases} K f h - \frac{1}{6}(K_1 - 2K) h^2 \delta = M, \\ K_1 f_1 h - \frac{1}{6}(2K_1 - K) h^2 \delta = M. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung ergibt sich durch Vertauschung von f mit f_1 , K mit K_1 . Daraus wird nun

$$109. \begin{cases} f = \frac{M}{K h} + \frac{K_1 - 2K}{6K} h \delta, \\ f_1 = \frac{M}{K_1 h} - \frac{2K_1 - K}{6K_1} h \delta; \end{cases}$$

$$110. F = \frac{K+K_1}{K \cdot K_1} \left[\frac{M}{h} + \frac{1}{6}(K+K_1) h \delta \right].$$

Nach der letzten Gleichung wird f bei variablem h und constantem δ zu einem Minimum, wenn $\frac{M}{h} = \frac{1}{6}(K+K_1) h \delta$ ist. Ist $y = a + bx + \frac{c}{x}$, so ist $\frac{dy}{dx} = b - \frac{c}{x^2}$. Daraus wird y zu einem Maximum oder Minimum, wenn $b = \frac{c}{x^2}$ oder $x = \sqrt{\frac{c}{b}}$ oder $bx = \frac{c}{x}$ ist und genau ist $\max y$ oder $\min y = a + 2\sqrt{bc}$. Es wird also zum Minimum für

$$111. h = \sqrt{\frac{6M}{(K+K_1)\delta}}.$$

Bei gleichmäßiger Belastung mit der Last q pro Längeneinheit werden bei constantem Querschnitt $M = \frac{1}{8} q l^2$ zu setzen sein, also

$$112. \frac{h}{l} = \sqrt{\frac{3q}{4(K+K_1)\delta}}.$$

Es wird für diese Größe

$$113. \begin{cases} \min F = \frac{2\sqrt{(K+K_1)^3}}{K \cdot K_1 \sqrt{\delta}} \sqrt{M\delta} = \frac{(K+K_1)^2 h \delta}{3K K_1}, \\ f = \frac{2K_1 - K}{K \sqrt{6(K+K_1)}} \sqrt{M\delta}, \quad f_1 = \frac{2K - K_1}{K_1 \sqrt{6(K+K_1)}} \sqrt{M\delta}. \end{cases}$$

Nimmt man die Dicke δ proportional der Höhe h an und
gesetzt $\delta = \frac{1}{m} h$, so wird nach der Gleichung 110 F zu einem Min-
imum für

$$114. \delta = \sqrt[3]{\frac{3M}{m^2(K+K_1)}}$$

Hieraus folgt $M = \frac{1}{3} m^2 (K+K_1) \delta^3$. Wird in die Ausdrücke 109 und
110 eingesetzt, ergibt

$$115. f = \frac{K_1}{2K} h \delta, f_1 = \frac{K}{2K_1} h \delta, F = \frac{(K+K_1)^2}{2KK_1} h \delta.$$

Hieraus ergibt sich

$$116. f : f_1 = K_1^2 : K^2.$$

§ 20. Anwendung auf Gußeisen. Der unregelmäßige I förmige
Querschnitt findet häufigst beim Gußeisernen Auswurf,
Lüftung.

Brückversuche mit Trägern mit I förmigem Querschnitt
gaben, wenn auf K und K_1 auf Druck bezogen, das Verhältnis

$$117. K_1 : K = 2,1 \text{ bis } 2,9, \text{ im Mittel } 2,5,$$

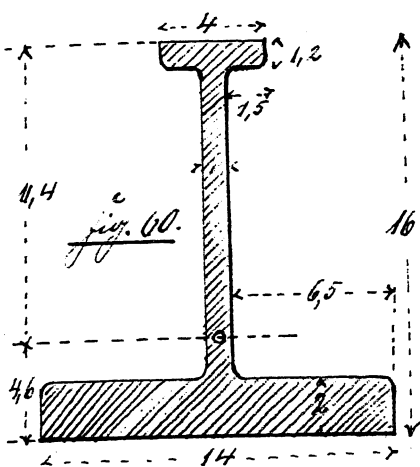
und zwar ist bei dem Rißfortschreiten s durchschnittlich $Ks = 2100$,
 $K_1 s = 5300$.

Auf die Formeln 109 und 110 würde

$$118. f = \frac{M}{Kh} + 0,083 h \delta, f_1 = \frac{M}{K_1 h} - 0,267 h \delta, F = 1,4 \frac{M}{Kh} + 0,163 h \delta = 3,5 \frac{M}{K_1 h} + 0,163 h \delta.$$

Auf der dritten der Gleichungen 113 für f , bei der zweitener,
größten Höhe für ein constantes δ ergibt sich f_1 negativ, so daß
sich für diese Querschnittsform zwar nicht realisieren läßt. Man
kann dagegen nach δ den h proportional, so wird nach den
Gleichungen 115 und 116:

$$119. f = 1,25 h \delta, f_1 = 0,20 h \delta, F = 2,45 h \delta, \frac{f}{f_1} = 6,25.$$



Nach dieser Maßhaltungen ist der Querschnitt fig. 60
construiert. Für die ringsgefehrtenen Maßhaltungen
gesetzt ist die Maßhaltungen = 1 gesetzt. Für diese Maß-
haltungen wird

$$120. \quad I = 1289 \text{ cm}^4.$$

$$121. \quad S = 0,207 \sqrt[3]{\frac{M}{K_1}} = 0,153 \sqrt[3]{\frac{M}{K_1}}.$$

Beispiel. Für 1,5 m breiter Fußweg soll bei
einer Belastung von 0,45 Tonnem pro qm

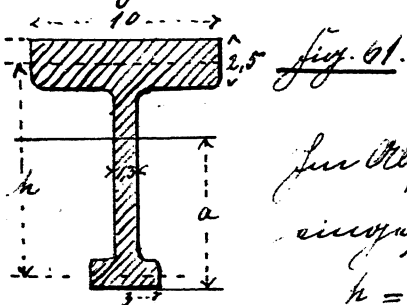
(incl. Eigenlast) eine geeignete Längs- und Querschnittsform, welche einen Ab-
stand von 2,5 m haben, unterstützt werden. Es sind die Quers-
chnittsdimensionen der Längs- und Querschnittsform zu bestimmen.

Für Längs- und Querschnittsform ist die Last 1,5 · 2,5 · 0,45 = 1,688 Tonnem zu setzen.
Das Moment für die Längs- und Querschnittsform $\frac{1,688 \cdot 2,5}{2} = 1,266$ Tonnemmeter = 126 Ton-
nemmeter. Setzen wir bei gegebenem Längs- und Querschnittsform $K = 0,21$, $K_1 =$
 $0,53$ Ton. pro qm, so wird für den Querschnitt fig. 60: $S = 0,207 \sqrt[3]{\frac{126,6}{0,53}} = 1,28 \text{ cm}.$
Wir wollen diese Werte und die entsprechenden Dimensionen
des Querschnitts halbschalen, indem wir den Ober- und Unter-
flansch für den Querschnitt zu nehmen, entsprechend nehmen. Wir
setzen die in fig. 61. angegebenen Dimensionen fest, lassen dabei
aber die Maße unbestimmt. Bekannt ist $f = 2,5$, $f_1 = 8$, daher wird nach
den Formeln 118: $2,5h = \frac{M}{0,21} + 0,108h^2$, $8h = \frac{M}{0,53} - 0,347h^2$, oder

$$\begin{cases} h^2 - 230h + 44,1M = 0 \\ h^2 - 23,1h - 5,44M = 0 \end{cases}$$

Für Abstände x konstruieren sich $M = 126,6 \cdot x^2$. Diese
eingesetzt und mit h reduziert ergibt:

$$h = +135 - \sqrt{16225 - 5583x^2}, \quad h = -13,5 + \sqrt{183,2 + 688,7x^2}.$$



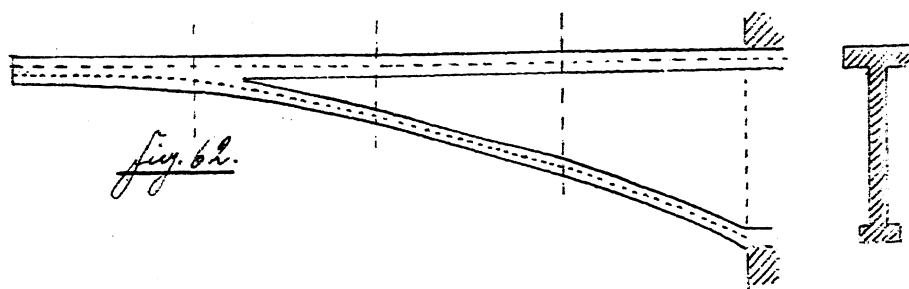


Fig. 62.

für $\alpha = 0, 0,25, 0,50,$
 $0,75, 1$ ergibt
 sich nach der ^{ersten} Formel
 Formel $k = 0, 1,5$
 $5,3, 10,4, 16,0$, nach

der ersten Formel $k = 0, 1,3, 5,3, 12,1, 22,6$, so daß $k = 0, 1,5, 5,3, 12,1, 22,6$ zu setzen ist. Die entsprechende Formel zeigt Fig. 62, mit praktischer Anwendung, wird man sich selbst überlegen.

Nehmen wir die Gesamtlänge von der Stützweite $22,6 + \frac{1}{2} \cdot 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 1,6 = 24,6$, also zu 25 cm an, so wird

$$F = 10 \cdot 25 - (10 - 1,3) 22,5 + (5 - 1,3) \cdot 1,6 = 60,17;$$

$$\text{für die Last } S = \frac{1}{2} [10 \cdot 25^2 - (10 - 1,3) 22,5^2 + (5 - 1,3) \cdot 1,6^2] = 921,8;$$

$$J_1 = \frac{1}{6} [10 \cdot 25^3 - (10 - 1,3) 22,5^3 + (5 - 1,3) \cdot 1,6^3] = 19056;$$

$$a = \frac{S}{F} = \frac{921,8}{60,17} = 15,41; \quad \alpha_1 = k - a = 9,59.$$

$$J = J_1 - S a = 19056 - 921,8 \cdot 15,41 = 4756.$$

Der größte Zug N und der größte Druck N_1 werden ferner

$$N = \frac{126,6 \cdot 9,6}{4756} = 0,256, \quad N_1 = \frac{126,6 \cdot 9,6 \cdot 15,4}{4756} = 0,410.$$

Da jedoch nur ein Zug von $0,21$ gegeben ist, so ist die Größe größer zu nehmen. Nehmen wir die Gesamtlänge zu 28 cm, so ergibt sich die gleiche Last $F = 64,07$; $\alpha = 16,56$; $\alpha_1 = 21,44$; $J = 6857$; $N = 0,207$; $N_1 = 0,295$. Sind Substitutionen möglich, so ferner die Länge zu $24,8$ cm, dafür 28 cm. angegeben.