

**Eine Erweiterung
des Prinzips der virtuellen Verschiebungen
zur Ermittlung von Spannungen**

Eine Erweiterung
des Prinzips der virtuellen Verschiebungen
zur Ermittlung von Spannungen

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur
Gerrit Schutte

Am Fachbereich 9
- Bauingenieurwesen und Angewandte Geowissenschaften -
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor Ingenieur
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuß :

Vorsitzender : Prof. Dr.-Ing. Bernd Hillemeier

Berichter : Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Peter Jan Pahl
Prof. Dr.-Ing. Udo Meißner

Tag der wissenschaftlichen Aussprache : 21.7.2000

Berlin 2000
D 83

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Allgemeine Bauingenieurmethoden der Technischen Universität Berlin. Der intensive Kontakt mit den Studenten bei der Durchführung von Lehrveranstaltungen hat mich in meiner wissenschaftlichen Tätigkeit stark motiviert.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Peter Jan Pahl für die Betreuung der Arbeit. Ohne die umfangreiche Unterstützung und die fachlich sowie persönlich offene und gute Arbeitsatmosphäre am Fachgebiet wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Bei meinen Kollegen und bei allen übrigen Mitarbeitern des Fachgebietes möchte ich mich für die erfolgreiche langjährige und gute Zusammenarbeit bedanken. An die gemeinsame, fruchtbare Zeit am Fachgebiet denke ich gerne zurück.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Udo Meißner möchte ich mich für die engagierte Übernahme der Berichterstattung und bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Hillemeier für den Vorsitz im Promotionsverfahren bedanken.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie und bei meinen Freunden für das entgegengebrachte Verständnis bedanken.

Berlin, im August 2000

Gerrit Schutte

1	Einleitung	1
1.1	Problembeschreibung	1
1.2	Ziel der Arbeit	2
1.3	Vorgehensweise	2
1.4	Stand der Forschung	3
2	Theoretische Grundlagen	4
2.1	Differentialform	4
2.2	Integralform	9
2.3	Algebraische Form	17
2.4	Schnitte durch das Kontinuum	22
3	Spannungsberechnung mit dem erweiterten Prinzip	26
3.1	Ecken und Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete	26
3.2	Glättung des Randes	32
3.3	Glättung des Zustands	44
3.4	Berücksichtigung des Zustands	51
4	Konvergenzuntersuchungen	55
4.1	Konvergenzrate	56
4.2	Scheibe mit Loch	58
4.3	Schubverformter Balken	61
4.4	Zylinder unter konstantem Innendruck	66
4.5	Unendliche Scheibe mit Einschluß	70
4.6	Einzellast auf Halbraum	73
5	Bestimmung aktueller Oberflächen	78
5.1	Topologische Grundlagen	78
5.2	Objektorientierte Modellbildung	82
5.3	Datenstrukturen	86
5.4	Wahl eines Schlüssels	89
5.5	Leistungsbeurteilung	92
6	Evaluation von Elementintegralen	95
6.1	Objektorientierte Modellbildung	95
6.2	Objektorientierte Programmierung	102
6.3	Leistungsbeurteilung	117
7	Instationäre Wärmeströmung	122
7.1	Differentialform	122
7.2	Integrale Form	124
7.3	Räumliche Diskretisierung	125
7.4	Zeitliche Diskretisierung	127
7.5	Beispiel: Wärmeströmung in einem Konstruktionsdetail	128
8	Abschließende Betrachtung	132
	Literatur	134

1 Einleitung

1.1 Problembeschreibung

Für den Entwurf von Ingenieurbauten ist eine zuverlässige Prognose über den Spannungsverlauf im Bauwerk und auf dessen Rand von großer Bedeutung. Eine geschlossene Lösung der elastischen Bestimmungsgleichungen des Bauwerks ist in der Regel nicht verfügbar. Häufig kann sogar die Existenz der Lösung der elastischen Bestimmungsgleichungen ausgeschlossen werden. Die Bestimmungsgleichungen werden daher in eine integrale Form überführt. Ihre Befriedigung erfolgt im Sinne eines integralen Mittelwertes.

Die Bestimmungsgleichungen sind ein System partieller Differentialgleichungen für die gesuchten physikalischen Größen im Bauwerk, wie beispielsweise die Feldfunktion der Verschiebung oder die Feldfunktion der Spannung. Die Formulierung der Bestimmungsgleichungen in integraler Form gründet auf einem Ansatz, der für die gesuchten Feldfunktionen aufgestellt wird. In Abhängigkeit davon, für welche der Feldfunktionen Ansätze gewählt werden, können unterschiedliche integrale Formen hergeleitet werden, wie beispielsweise das Prinzip virtueller Verschiebungen oder das Prinzip virtueller Spannungen.

In der Finite Elemente Methode wird ein Ansatz für eine Feldfunktion im Bauwerk aus der Summe stückweiser, in finiten Elementen unternommener Ansätze gebildet. In Abhängigkeit der gewählten Integralform der Bestimmungsgleichungen können aus der Substitution des Ansatzes unterschiedliche Finite Elemente Modelle abgeleitet werden. Für die Analyse räumlicher Bauwerke haben sich im wesentlichen zwei Modelle als Stand der Technik etabliert: Modelle, die auf einem Ansatz für die Verschiebung gründen, oder Modelle, die neben dem Ansatz für die Verschiebung einen Ansatz für die Spannung im Bauwerk aufstellen.

Diese Finite Elemente Modelle stimmen darin überein, daß die Gleichgewichtsbedingungen im Inneren sowie auf dem Rand des Bauwerkes nur im Sinne eines integralen Mittelwertes befriedigt werden. Der Verlauf der Spannungen, die aus diesen Modellen resultieren, ist am Übergang zweier Elemente diskontinuierlich. Erst durch diese Näherung werden viele Aufgaben einer numerischen Behandlung überhaupt zugänglich. Aus der Integration der Spannungen auf einem Schnitt, der durch das Bauwerk geführt wird oder das Bauwerk von seinen Auflagerflächen trennt, folgt aber, daß das elementare Gleichgewicht der Kräfte nicht befriedigt ist.

Die Befriedigung der Gleichgewichtsbedingungen im Sinne eines integralen Mittelwertes drückt sich darin aus, daß für ein einzelnes Finites Element die Kräfte an den Stützstellen des Ansatzes im Gleichgewicht stehen. Diese Kräfte können in einer nachgeschalteten Berechnung ermittelt werden. Aus der Summe dieser Kräfte über alle Elemente folgen die Auflagerkräfte des Bauwerkes. Sie stehen im Gleichgewicht mit den angreifenden Lasten. Wird ein Schnitt geführt, der die Elemente des Bauwerkes in zwei Mengen zerlegt, so folgen aus der Summe der Kräfte über die Elemente einer der Mengen die Schnittkräfte. Sie stehen im Gleichgewicht mit der Summe der Kräfte aller Elemente der anderen Menge.

Schnitt- und Auflagerkräfte bieten eine hervorragende Möglichkeit Berechnungen mit den etablierten Modellen der Finite Elemente Methode zu prüfen. Als punktförmige Größen eignen sich Kräfte jedoch nicht für die Bemessung des Bauwerkes. Es stellt sich also die Frage, ob ein verteiltes Maß für diese Kräfte aus einer erweiterten Integralform gewonnen werden kann, um zu einer verbesserten Näherung der Spannung in Auflager- und Schnittflächen zu kommen.

1.2 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Bestimmung von Spannungen, die das Gleichgewicht der Kräfte auf einem Schnitt befriedigen. Das Verfahren ist aus kontinuumsmechanischen und mathematischen Grundlagen herzuleiten. Geeignete Kriterien für den Vergleich des Verfahrens mit konkurrierenden Verfahren sind aufzustellen. Anhand dieser Kriterien ist die Güte des Ergebnisses für die Spannungen am Rand des Bauwerks zu untersuchen. Die datentechnischen Voraussetzungen für die rechnergestützte Durchführung des Verfahrens sind aufzuzeigen. Der numerische Aufwand bei der Durchführung des Verfahrens ist in Hinblick auf den Zeit- und den Speicherbedarf zu analysieren. Weiterhin soll die Anwendbarkeit des Verfahrens auf andere physikalische Phänomene im Bauingenieurwesen untersucht werden.

1.3 Vorgehensweise

Theoretische Grundlagen: Aufbauend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen wird eine besondere Integralform der Bestimmungsgleichungen abgeleitet. Dabei werden als unbekannte Funktionen sowohl die Verschiebungen des Bauwerkes als auch die Spannungen am Rand des Bauwerks eingeführt. Die Unterschiede zu bekannten, konkurrierenden Integralformen werden aufgezeigt. Weiterhin wird erläutert, daß die gewählte Integralform als Sonderfall der Betrachtung eines Schnittes durch das Kontinuum hervorgeht. Die algebraische, diskrete Umsetzung der eingeführten Integralform führt auf ein Finite Elemente Modell, das neben den üblichen Freiwerten der Verschiebung auch Freiwerte der Spannung am Rand des Bauwerks enthält.

Spannungsberechnung: Aus einer analytischen Betrachtung wird gefolgert, daß die Ergebnisse für die Spannungen, die aus der Durchführung des Verfahrens resultieren, an Ecken und Kanten eines räumlichen Bauwerks zu nachteiligen Ergebnissen führen können. Es werden daher zunächst Methoden vorgestellt, die eine Ausrundung von Ecken und Kanten im geometrischen, rechnergestützten Modell des Bauwerks möglich machen. Alternativ dazu wird eine Methode entwickelt, die an Ecken und Kanten das Ergebnis aus konkurrierenden Verfahren nutzt, um dieses Ergebnis mit dem vorgestellten Verfahren zu verbessern. Die Methoden werden anhand eines Beispiels verifiziert.

Konvergenzuntersuchungen: Aus der Integration der Spannung am Rand des Bauwerks folgen Kräfte. Das Gleichgewicht der Kräfte ist für die Randspannung aus dem vorgestellten Verfahren immer befriedigt. Als Maß für die Güte dieser Spannung am Rand des Bauwerks wird daher das Integral über das Quadrat der Abweichung des Verlaufes dieser Spannung zum analytisch exakten Verlauf eingeführt. Anhand typischer Beispiele wird die Güte der Spannung aus dem vorgestellten Verfahren mit der Güte der Spannung aus konkurrierenden Verfahren verglichen. Aus dem Vergleich für unterschiedliche Diskretisierungen werden Aussagen über das Konvergenzverhalten gewonnen.

Bestimmung von Schnittflächen: Das vorgestellte Verfahren findet besondere Anwendung auf gedachten Schnitten durch das Bauwerk. Dafür wird eine rechnergestützte Beschreibung des Bauwerkes und der Schnittfläche notwendig. Aufbauend auf topologischen Grundlagen werden zwei bekannte, rechnergestützte Modelle für die geometrischen Eigenschaften des in Finite Elemente zerlegten Bauwerkes vorgestellt. Es wird gezeigt, wie eine Schnittfläche erfaßt wird, die durch das Entfernen von Elementen aus diesem Modell des Bauwerkes entsteht. Die Modelle können mit unterschiedlichen Datenstrukturen hinterlegt werden. Anhand eines Beispiels wird die Leistungsfähigkeit dieser Datenstrukturen bei der Bestimmung einer Schnittfläche untersucht.

Evaluation von Elementintegralen: Die softwaretechnische Umsetzung des vorgestellten Verfahrens führt auf die numerische Berechnung von Elementintegralen. Gegenüber konkurrierenden Verfahren steigt jedoch die Anzahl der zu evaluierenden Integrale sowie die Anzahl unterschiedlicher Typen von Integralen. Aufbauend auf dem Konzept abstrakter Datentypen wird daher ein rechnergestütztes Modell entwickelt, das die unterschiedlichen Typen von Elementintegralen gemeinsam und einheitlich erfaßt. Unter Verwendung dieses Modells wird anhand eines Beispiels der numerische Aufwand für die Durchführung des vorgestellten Verfahrens analysiert.

Instationäre Wärmeströmung: Die Anwendung des vorgestellten Verfahrens ist nicht auf die Bestimmung von Spannungen am Rand des Bauwerks beschränkt, sondern kann auch auf die Bestimmungsgleichungen anderer physikalischer Phänomene im Bauingenieurwesen übertragen werden. Am Beispiel der instationären Wärmeströmung wird dieser Übertrag durchgeführt.

1.4 Stand der Forschung

Die in dieser Arbeit zu Grunde gelegte Integralform kann aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie unter Einführung von Nebenbedingungen abgeleitet werden [3]. Sie steht in Bezug zu dem allgemeinen Variationsprinzip von Hu und Washizu [53] sowie in Bezug zu dem hybriden Verschiebungsmodell [43]. Die Ausführungen in Kapitel 2.2 und Kapitel 2.4 machen dies deutlich. Entsprechend finden sich auch Hinweise auf die Existenz dieser Form in der Ingenieurliteratur zur Finite Elemente Methode [2]/[57]. Sie wird dort aber nicht zur Spannungsberechnung am Rand des Bauwerkes herangezogen. Es steht zu vermuten, daß die in Kapitel 3.1 genannten Gründe dafür ausschlaggebend sind. In Verschiebungsmodellen werden die Spannungen aus der Differentiation der Verschiebungen an den Integrationspunkten im Inneren des Bauwerkes ermittelt [2]/[57]/[4]. Wie in [38] gezeigt wird, ist an diesen Punkten das Ergebnis am genauesten. Entsprechend ist die Prognose für die Spannungen am Rand des Bauwerkes weniger akkurat. Das gilt auch, wenn nachgeschaltete Glättungsverfahren eingesetzt werden.

Aus der Vielzahl jüngerer Beiträge zur Finite Elemente Methode werden zwei Entwicklungsrichtungen herausgegriffen. Stellvertretend für die Klasse der *gemischt hybriden* Elemente sei die Veröffentlichung [22] und stellvertretend für die Klasse der *assumed strain* Elemente sei die Veröffentlichung [48] genannt. Diese erweiterten Elemente zeigen für wichtige Klassen von Aufgaben ein besseres Konvergenzverhalten als die in dieser Arbeit verwendeten, konformen Elemente. Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren steht aber nicht in unmittelbarer Konkurrenz zu diesen Entwicklungsrichtungen, weil auch dort das Gleichgewicht nur im integralen Mittel befriedigt wird. Das vorgestellte Verfahren kann daher grundsätzlich auch auf andere Elementformulierungen angewendet werden, die in der Forschung diskutiert werden. Die Ausführungen in Kapitel 2.3 und in Kapitel 4 machen dies deutlich.

Ein zu dem hier vorgestellten vergleichbares Verfahren ist in [50] publiziert. Dort werden die unbekannten Randspannungen aus der Lösung einer Optimierungsaufgabe bestimmt. Als Zielfunktion der Aufgabe wird das Quadrat der Differenz zwischen den Spannungen aus Differentiation und den unbekannten Randspannungen eingeführt. Das Minimum dieser Zielfunktion wird unter der Nebenbedingung des Gleichgewichts der unbekannten Randspannungen mit den Auflager- und Schnittkräften angenommen. Im Unterschied zum vorgestellten Verfahren ist dieses Verfahren aber nicht durch eine erweiterte Integralform sondern empirisch begründet. Zudem sind die Randspannungen aus diesem Verfahren nicht verträglich mit den am Rand des Bauwerkes eingprägten Spannungen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Differentialform

Kontinuum: Für viele Aufgaben des Bauingenieurs ist die Berücksichtigung der diskreten Struktur von Materie aufgrund des Größenmaßstabes nicht zweckmäßig. Das diskrete, mikrostrukturelle Modell der Materie wird daher in ein phänomenologisches, makrostrukturelles Modell überführt, das als Kontinuum bezeichnet wird. Die Beschreibung eines Kontinuums erfolgt im euklidischen Punktraum $\mathbb{R}^3$ mit raumfester kartesischer Basis. Ein Kontinuum ist eine kompakte und zusammenhängende Teilmenge dieses Punktraums. Den Punkten des Kontinuums werden Materialeigenschaften zugeordnet.

In einem physikalischen Prozeß ändern die Punkte des Kontinuums ihre Lage. Die Lage der Punkte zum Zeitpunkt $t = t_0$ heißt Referenzkonfiguration. Die Lage zu einem beliebigen Zeitpunkt t heißt Momentankonfiguration. In einem stationären, zeitunabhängigen Prozeß genügt es, eine einzige Momentankonfiguration von der Referenzkonfiguration zu unterscheiden. Die Identifikation eines Punktes A des Kontinuums erfolgt entweder mit der Methode von Euler oder mit der Methode von Lagrange. In Bild 2.1 ist ein Kontinuum in Referenz- und Momentankonfiguration dargestellt.

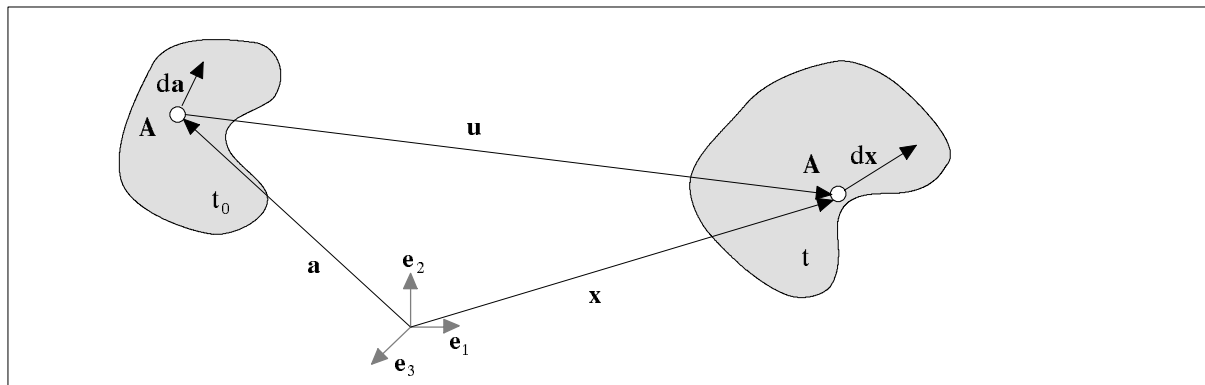


Bild 2.1 : Kontinuum in Referenz- und Momentankonfiguration

Methode von Lagrange: Die Bahnkurve $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ des Punktes A ist eine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit t und von den Koordinaten $\mathbf{a}$ des Punktes in der Referenzkonfiguration. In gleicher Weise sind auch die materiellen Eigenschaften am Punkt A eine Funktion der Zeit t und der Koordinaten $\mathbf{a}$ des Punktes in der Referenzkonfiguration. Der Punkt A und seine materiellen Eigenschaften zu einem Zeitpunkt t werden also mittels der Koordinaten $\mathbf{a}$ identifiziert. Die Koordinaten $\mathbf{a}$ werden als materielle Koordinaten bezeichnet. Die Methode eignet sich besonders für Festkörper, deren Punkte geringe relative Lageänderungen erfahren. Als Referenzkonfiguration wird häufig die unverformte Lage des Körpers angesetzt.

Methode von Euler: Die materiellen Eigenschaften des Punktes A sind eine Funktion der Zeit t und der Koordinaten $\mathbf{x}$ des Punktes in der Momentankonfiguration. In gleicher Weise ist auch die ursprüngliche Lage des Punktes A in der Referenzkonfiguration eine Funktion $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ der Zeit t und der Koordinaten $\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration. Der Punkt A und seine materiellen Eigenschaften werden also mittels der Koordinaten $\mathbf{x}$ identifiziert. Die Koordinaten $\mathbf{x}$ werden als räumliche Koordinaten bezeichnet. Die Methode eignet sich besonders für Flüssigkeiten und Gase, die in der Momentankonfiguration ein bekanntes Raumvolumen füllen.

Deformation: Betrachtet wird eine infinitesimale Linie $d\mathbf{a}$ in der Umgebung eines Punktes A in der Referenzkonfiguration. Die Transformation der Linie von der Referenzkonfiguration $d\mathbf{a}$ in die Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ erfolgt mit dem Deformationsgradienten $\mathbf{F}$:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \hline \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \hline \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \text{Deformationsgradient } \mathbf{F} \quad (1)$$

Nach der Methode von Lagrange ergibt sich die Verschiebung eines Punktes A von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration aus der Differenz der Ortskoordinaten:

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{a}, t_0) = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) - \mathbf{a} \quad (2)$$

Aus Bild 2.1 ist ersichtlich, daß die Transformation der Linie von der Referenzlage $d\mathbf{a}$ in die Momentanlage $d\mathbf{x}$ auch mittels des materiellen Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$ erfolgen kann:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{a} + d\mathbf{u} = d\mathbf{a} + \mathbf{U} d\mathbf{a}$$

$$\mathbf{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{\partial u_1}{\partial a_2} & \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \\ \hline \frac{\partial u_2}{\partial a_1} & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} & \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \\ \hline \frac{\partial u_3}{\partial a_1} & \frac{\partial u_3}{\partial a_2} & \frac{\partial u_3}{\partial a_3} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \text{Verschiebungsgradient } \mathbf{U} \quad (3)$$

Der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ erfaßt die Verzerrung, die Rotation und die Translation der Linie $d\mathbf{a}$. Im Gegensatz dazu erfaßt der Verschiebungsgradient $\mathbf{U}$ ausschließlich die Verzerrung und die Rotation jedoch nicht die Translation der Linie $d\mathbf{a}$.

Verzerrungsmaß: Als zweckmäßiges Verzerrungsmaß des Kontinuums $\mathbf{V}$ dient die Änderung der Länge einer Linie $d\mathbf{a}$ im Quadrat. Diese Definition führt auf den materiellen Dehnungstensor $\mathbf{G}$ nach Green:

$$d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{a}^T d\mathbf{a} = d\mathbf{a}^T (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T + \mathbf{U}^T \mathbf{U}) d\mathbf{a}$$

$$\text{mit } \frac{1}{2} \{ \mathbf{U} + \mathbf{U}^T + \mathbf{U}^T \mathbf{U} \} = \mathbf{G} \quad \text{Dehnungstensor } \mathbf{G} \quad (4)$$

Kleine Verschiebungen: Für geringe Verzerrungen und Rotationen des Körpers ist das Quadrat des materiellen Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ im Vergleich zu 1 klein. Die Vernachlässigung dieses Ausdrucks im materiellen Dehnungstensor $\mathbf{G}$ wird als geometrische Linearisierung bezeichnet. Ist im Vergleich zu den Abmessungen des Kontinuums auch dessen Translation klein, so folgt, daß der Ortsvektor $\mathbf{a}$ in der Referenzkonfiguration näherungsweise gleich dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration ist. Die Ableitung nach den materiellen Koordinaten $\mathbf{a}$ im Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$ kann dann durch die Ableitung nach den räumlichen Koordinaten $\mathbf{x}$ ersetzt werden.

Technische Dehnung: Die verbleibenden Terme des symmetrischen Dehnungstensors $\mathbf{G}$ werden im Dehnungsvektor ϵ zusammengefaßt. Es ist dabei üblich, die Koordinaten G_{ij} mit $i \neq j$ um den Faktor 2 zu mindern, um eine Darstellung zu erzielen, die mit der Ingenieurdefinition des Schubmoduls konsistent ist. Die Komponenten des Dehnungsvektors ϵ werden in Abhängigkeit des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ unter Verwendung der Differentialmatrix $\mathbf{D}$ ausgedrückt.

ϵ_{11}	=	$\frac{\partial}{\partial x_1}$			*	$u_1(x_1, x_2, x_3)$
ϵ_{22}			$\frac{\partial}{\partial x_2}$			$u_2(x_1, x_2, x_3)$
ϵ_{33}				$\frac{\partial}{\partial x_3}$		$u_3(x_1, x_2, x_3)$
ϵ_{12}		$\frac{\partial}{\partial x_2}$	$\frac{\partial}{\partial x_1}$			
ϵ_{23}			$\frac{\partial}{\partial x_3}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$		
ϵ_{31}		$\frac{\partial}{\partial x_3}$		$\frac{\partial}{\partial x_1}$		

$\epsilon = \mathbf{D} \mathbf{u}$

Dehnungsvektor ϵ

(5)

Spannungszustand: Durch einen Punkt A mit den Koordinaten $\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration wird ein gedachter Schnitt geführt. Der Schnitt zerlegt den Körper in die Teilkörper V_+ und V_- . Die Außennormalen $\mathbf{n}_+(\mathbf{x})$ und $\mathbf{n}_-(\mathbf{x})$ auf der Schnittfläche F sind entgegengesetzt orientiert. In der Umgebung des Punktes A wird ein infinitesimales Flächenelement dF in der Schnittfläche F betrachtet. Im Flächenelement dF wirken die Teilkörper V_+ und V_- wechselseitig mit den Kräften $d\mathbf{f}_+$ und $d\mathbf{f}_-$ aufeinander. Nach dem Axiom der Bewegung von Massenpunkten von Newton stehen diese Kräfte im Gleichgewicht, so daß für die Kraft folgt $d\mathbf{f} = d\mathbf{f}_+ = -d\mathbf{f}_-$. Der Grenzwert des Verhältnisses der Kraft $d\mathbf{f}$ zur Fläche dF ist der Spannungsvektor $\mathbf{t}$.

$$\mathbf{t} = \lim_{dF \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}}{dF} \quad \text{Spannungsvektor } \mathbf{t} \quad (6)$$

Der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ am Punkt A in der Momentankonfiguration ist abhängig von der gewählten Schnittfläche mit der Außennormalen $\mathbf{n}$. Aus der Betrachtung des Gleichgewichtes für alle gedachten Schnitte folgt der Spannungstensor $\mathbf{T}$ von Cauchy. Der Tensor beschreibt den Spannungszustand am Punkt A vollständig. Der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ am Punkt A auf einer spezifischen Schnittfläche F wird durch das Produkt des Tensors $\mathbf{T}$ mit der Außennormalen $\mathbf{n}$ der Fläche gewonnen.

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \quad \text{Spannungstensor } \mathbf{T} \quad (7)$$

Punkte eines Festkörpers werden in der Regel mit den materiellen Koordinaten $\mathbf{a}$ identifiziert. Aus der Transformation des Vektors, der das Flächenelement dF beschreibt, in die Referenzkonfiguration folgt der erste Spannungstensor $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ nach Piola-Kirchhoff. Der Kraftvektor $d\mathbf{f}$ nimmt dann Bezug auf eine infinitesimale Fläche dF in der Referenzkonfiguration. Wird zusätzlich der Kraftvektor $d\mathbf{f}$ einer Transformation in die Referenzkonfiguration unterzogen, so folgt der zweite Spannungstensor $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ nach Piola-Kirchhoff. Die Tensoren $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{S}$ können unter Verwendung des Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ ineinander überführt werden. Für kleine Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ist eine Unterscheidung zwischen den Tensoren nicht notwendig.

Spannungszustand in technischer Darstellung: Die Koordinaten des zweiten Spannungstensors $\mathbf{S}$ von Piola-Kirchhoff werden in einer Matrix notiert, die den gleichen Bezeichner hat. Aus dem Matrix-Vektor-Produkt der Spannungsmatrix $\mathbf{S}$ mit der Außennormalen $\mathbf{n}$ einer Schnittfläche oder der Oberfläche des Kontinuums ergibt sich der Spannungsvektor $\mathbf{s}$ auf dieser Fläche:

s_1
s_2
s_3

 $=$

σ_{11}	σ_{21}	σ_{31}
σ_{12}	σ_{22}	σ_{32}
σ_{13}	σ_{23}	σ_{33}

 $*$

n_1
n_2
n_3

$$\mathbf{s} = \mathbf{S} \mathbf{n}$$

Spannungsvektor $\mathbf{s}$

Spannungsmatrix $\mathbf{S}$

(8)

Gleichgewicht: In der Umgebung des Punktes A des Festkörpers V mit den Koordinaten $\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration wird ein infinitesimales Quaderelement dV ausgeschnitten. Auf einer Seitenfläche dF des Quaders wirkt eine Kraft, die aus dem Produkt des Spannungstensors $\mathbf{T}$, der Normalen $\mathbf{n}$ und dem Flächeninhalt der Seitenfläche resultiert. Im Quader dV wirkt eine Kraft, die aus dem Produkt des Volumens mit einer Kraftdichte $\mathbf{q}$ resultiert. Das Gleichgewicht der Kräfte führt auf:

$$\text{div } \mathbf{T} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{Kräftegleichgewicht} \quad (9)$$

Am Punkt A des Körpers wirken Momente infolge der Hebelwirkung der oben genannten Kräfte. Die Symmetrie des Spannungstensors $\mathbf{T}$ folgt aus dem Momentengleichgewicht:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad \text{Momentengleichgewicht} \quad (10)$$

Das Gleichgewicht (9) und (10) kann auch mit den Spannungstensen der Referenzkonfiguration dargestellt werden. Aus dem Momentengleichgewicht folgt dann aber nicht die Symmetrie des Spannungstensors $\mathbf{P}(\mathbf{a})$. Es kommt daher zur Einführung des symmetrischen zweiten Spannungstensors $\mathbf{S}$ von Piola-Kirchhoff. Für kleine Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ist die Unterscheidung der Darstellungen des Gleichgewichts nicht notwendig.

Gleichgewicht in technischer Darstellung: Die Komponenten des symmetrischen zweiten Spannungstensors $\mathbf{S}$ von Piola-Kirchhoff werden im Spannungsvektor $\boldsymbol{\sigma}$ zusammengefaßt. Die Divergenz $\text{div } \mathbf{S}$ kann dann mittels der transponierten Differentialmatrix $\mathbf{D}$ aus Gleichung (5) ausgedrückt werden:

$\frac{\partial}{\partial x_1}$			$\frac{\partial}{\partial x_2}$		$\frac{\partial}{\partial x_3}$
	$\frac{\partial}{\partial x_2}$		$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_3}$	
		$\frac{\partial}{\partial x_3}$		$\frac{\partial}{\partial x_2}$	$\frac{\partial}{\partial x_1}$

 $*$

σ_{11}
σ_{22}
σ_{33}
σ_{12}
σ_{23}
σ_{31}

 $+$

p_{01}
p_{02}
p_{03}

 $= 0$

$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_0 = 0$

Gleichgewicht

(11)

Stoffgesetz: Der Spannungstensor $\mathbf{S}$ nach Piola-Kirchhoff und der Verzerrungstensor $\mathbf{G}$ nach Green werden über den Elastizitätstensor $\bar{\mathbf{E}}$ nach Hooke linear und invertierbar verknüpft:

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{E}} \mathbf{G} \quad \text{Elastizitätstensor } \bar{\mathbf{E}} \quad (12)$$

Aufgrund der Symmetrie von $\mathbf{S}$ und $\mathbf{G}$ folgt, daß von den 81 Koordinaten des Elastizitätstensors $\bar{\mathbf{E}}$ vierter Stufe 36 Koordinaten linear unabhängig sind. Diese Koordinaten werden in der Elastizitätsmatrix $\mathbf{E}$ angeordnet. Weitere Annahmen bezüglich der Symmetrieeigenschaften der diskreten Struktur des gegebenen Stoffs führen zu spezifischen Stoffgesetzen, wie dem der Isotropie. Unter Berücksichtigung gegebener Vorspannung $\boldsymbol{\sigma}_0$ und gegebener Anfangsdehnung $\boldsymbol{\epsilon}_0$ folgt das Stoffgesetz in technischer Darstellung:

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{E} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) \quad \text{Elastizitätsmatrix } \mathbf{E} \quad (13)$$

Randwertaufgabe der Elastostatik: Die vielfältigen physikalischen Wechselwirkungen in einem Kontinuum V werden zweckmäßig eingeschränkt, indem sein Rand F festgelegt wird. Das Kontinuum wird dadurch zum Lösungsgebiet einer Randwertaufgabe. Die Festlegung des Randes F entspricht einem Schnitt. Insbesondere geht aus dieser Betrachtung der Spannungsvektor $\mathbf{s}$ auf der Schnittfläche in den Spannungsvektor auf dem Rand F über und die Normale $\mathbf{n}$ der Schnittfläche wird zur Außennormalen der Oberfläche.

Der Schnitt erfolgt dort, wo unter Beachtung des physikalischen Größenmaßstabs genügend Randbedingungen zur Lösung der Aufgabe festgelegt werden können. Ausreichend sind an jedem Punkt des Randes F in jeder Raumrichtung entweder eine Komponente des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$ oder eine Komponente des Spannungsvektors $\mathbf{s}$. Zur Förderung der Übersichtlichkeit wird zunächst vorausgesetzt, daß an einem Punkt des Randes F entweder alle Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$ oder alle Komponenten des Spannungsvektors $\mathbf{s}$ festgelegt sind. Dadurch werden die Punkte des Randes disjunkt in die Mengen F_u und F_s zerlegt. Die Bestimmungsgleichungen der Randwertaufgabe sind nachfolgend zusammengefaßt:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Kinematik} \quad \text{s.Gl. } (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{E} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Konstitutivgleichung} \quad \text{s.Gl. } (13)$$

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_0 = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Gleichgewichtsbedingung} \quad \text{s.Gl. } (11)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{s} \quad \forall \mathbf{x} \in F \quad \text{Spannung-Randspannung} \quad \text{s.Gl. } (8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in F_u \quad \text{Verschiebungsrandbedingung} \quad (14)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in F_s \quad \text{Spannungsrandbedingung} \quad (15)$$

Die Gleichungen (5), (13) und (11) sind ein gekoppeltes System von 15 linearen partiellen Differentialgleichungen mit zugehörigen Randbedingungen (14) und (15). Gesucht ist die Lösung dieser Randwertaufgabe für die Feldfunktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ mit insgesamt 15 Komponenten. In dieser Arbeit sind dabei die Werte von $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ auf dem Rand F_u von vorangigem Interesse.

2.2 Integralform

Ansatz: Für jede der gesuchten Feldfunktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ kann eine unabhängige Ansatzfunktion $\mathbf{u}^h$, $\boldsymbol{\epsilon}^h$ oder $\boldsymbol{\sigma}^h$ formuliert werden. Dabei kann der Ansatz auch selektiv für eine Komponente der Funktion oder für Teilbereiche des Lösungsgebietes V , wie den Rand F , aufgestellt werden. Diejenigen Feldfunktionen für die kein Ansatz aufgestellt wird, sind damit abhängig von den Ansatzfunktionen und werden mittels eines Teils der Bestimmungsgleichungen als Funktionen der unabhängigen Ansätze ausgedrückt.

Eine Bestimmungsgleichung, die zwei unabhängige Ansätze verknüpft, ist wegen der Unabhängigkeit der Ansätze nicht befriedigt. Für alle weiteren Bestimmungsgleichungen wird eine Wahl getroffen, ob sie bereits durch den Ansatz befriedigt werden. Diese Bestimmungsgleichungen heißen *a priori* befriedigt. Ist eine Bestimmungsgleichung *a priori* befriedigt, so heißen die in der Gleichung notierten Funktionen verträglich. Diese Funktionen können in anderen Bestimmungsgleichungen substituiert werden. Die Auswahl des Ansatzes aus den Feldfunktionen und die Auswahl der mittels des Ansatzes *a priori* befriedigten Bestimmungsgleichungen führen auf unterschiedliche Integralformen der Bestimmungsgleichungen.

Beispiel: Für das Prinzip virtueller Spannungen wird ausschließlich ein Ansatz für die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^h$ unternommen. Der Ansatz muß das Gleichgewicht $\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma}^h + \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ mit den eingepprägten Volumenlasten erfüllen, sowie die Verträglichkeit $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$ mit den eingepprägten Randspannungen gewährleisten. Diese Bestimmungsgleichungen sind daher *a priori* befriedigt. Sowohl die lineare Beziehung $\mathbf{S} \mathbf{n} = \mathbf{s}$ zwischen den inneren Spannungen und den äußeren Spannungen auf dem Rand als auch die lineare, invertierbare Beziehung $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$ werden unmittelbar mit dem Ansatz ausgewertet. Auch diese Bestimmungsgleichungen sind damit *a priori* befriedigt.

Methode der gewichteten Reste: Die verbleibenden, nicht *a priori* befriedigten Bestimmungsgleichungen werden unter Einführung eines geeigneten Differentialoperators $\mathcal{D}_V$ für das Gebiet V sowie $\mathcal{D}_F$ für dessen Rand F kompakt notiert. Die unabhängigen Ansatzfunktionen werden im Vektor $\mathbf{w}^h(\mathbf{x})$ zusammengefaßt und in die Bestimmungsgleichungen eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V \mathbf{w}^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{r}_V(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in V \\ \mathcal{D}_F \mathbf{w}^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{r}_F(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in F \end{aligned} \tag{16}$$

Da der Ansatz $\mathbf{w}^h(\mathbf{x})$ die Differentialgleichungen (16) in der Regel nicht befriedigt, entsteht eine Restfunktion $\mathbf{r}_V(\mathbf{x})$ im Gebiet V und eine Restfunktion $\mathbf{r}_F(\mathbf{x})$ auf dessen Rand F . Die Restfunktionen werden jeweils mit einer zunächst nicht weiter spezifizierten, vektorwertigen Gewichtsfunktion $\mathbf{g}_V(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}_F(\mathbf{x})$ multipliziert, über ihren Definitionsbereich integriert, summiert und zu Null gesetzt:

$$\int \mathbf{g}_V^T \mathbf{r}_V dV + \int \mathbf{g}_F^T \mathbf{r}_F dF = 0 \tag{17}$$

Die exakte Lösung $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ der Differentialgleichungen (16) löst offensichtlich auch die Integralform (17) unabhängig von der Wahl der Gewichtsfunktionen $\mathbf{g}_V$ und $\mathbf{g}_F$. Umgekehrt sind die Differentialgleichungen (16) gelöst, wenn die integrale Form (17) für einen Ansatz $\mathbf{w}^h(\mathbf{x})$ und beliebige Gewichtsfunktionen $\mathbf{g}_V$ und $\mathbf{g}_F$ befriedigt ist. Die Integralform (17) enthält also die exakte und eindeutige Lösung $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ der Differentialgleichungen, sofern diese Lösung existiert. Existiert eine exakte, eindeutige und widerspruchsfreie Lösung der Differentialgleichung, so

sind die Darstellungsformen (16) und (17) äquivalent. Es kann daher auch auf das Superskript ^h für den Ansatz verzichtet werden.

In der mathematischen Literatur wird diese Idee präzisiert [8][21], indem der Funktionenraum der Ansatzfunktionen und der Funktionenraum der Gewichtsfunktionen formal charakterisiert wird. Ausgangspunkt ist dabei eine Erweiterung des Ableitungsbegriffs auf schwache Ableitungen im Sinne einer Verteilung über dem Lösungsgebiet. Der Begriff der schwachen Ableitung beinhaltet insbesondere die Integralsätze von Tensorfeldern. Die Eigenschaften der Ansatz- und der Gewichtsfunktionen hinsichtlich ihrer Differenzierbarkeit werden mit diesem Begriff beschrieben. Damit kann dann der Nachweis geführt werden, daß die mit Gleichung (17) beschriebene integrale Form in jedem Fall eine eindeutige Lösung enthält. Das gilt insbesondere auch dann, wenn eine exakte Lösung der Differentialgleichung nicht widerspruchsfrei existiert. Die integrale Form (17) wird daher als schwache Form der Differentialgleichungen (16) bezeichnet.

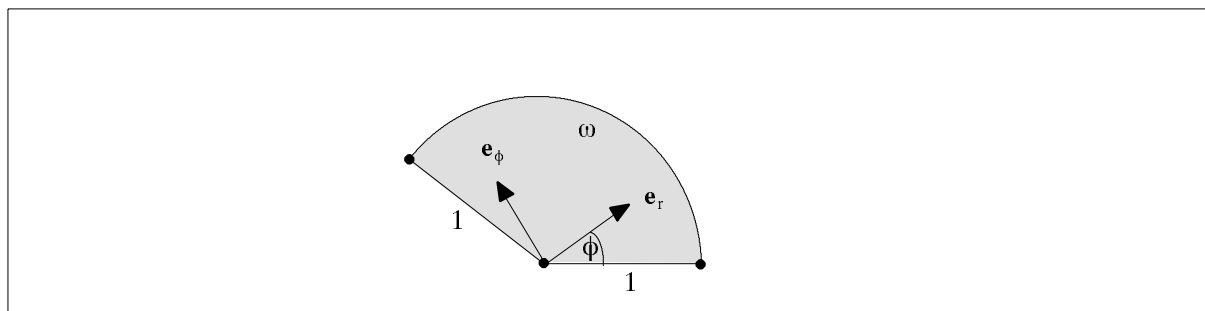


Bild 2.2 : Modellaufgabe Kreisabschnitt

Beispiel: Das Beispiel wird aus [21] entnommen. In Bild 2.2 ist ein Kreisabschnitt $F(r, \phi)$ mit $r \in [0, 1]$ und $\phi \in [0, \omega]$ dargestellt. Für eine skalare Funktion u ist die Lösung der Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ gesucht, die unter Verwendung von Polarkoordinaten r und ϕ spezifiziert wird:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (18)$$

Auf dem gesamten Rand L des Kreisabschnittes F sind die Werte der Funktion u vorgeschrieben:

$$u = 0 \quad \forall r, \phi \in L : \phi = 0 \vee \phi = \omega$$

$$u = \sin\left(\frac{\pi}{\omega} \phi\right) \quad \forall r, \phi \in L : r = 1 \quad (19)$$

Für den Gradienten ∇u am Ursprung folgt aus Differentiation der homogenen Randbedingungen auf den Schenkeln des Abschnitts F :

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi = \mathbf{0} \quad (20)$$

Die Differentialgleichung (18) mit den Randbedingungen (19) besitzt die eindeutige Lösung:

$$u = r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} \phi\right) \quad (21)$$

Aus der Differentiation der Lösung (21) folgt für den Gradienten ∇u im Kreisabschnitt F :

$$\nabla u = \frac{\pi}{\omega} r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} \phi\right) \mathbf{e}_r + \frac{\pi}{\omega} r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} \phi\right) \mathbf{e}_\phi \quad (22)$$

Für $\lim r \rightarrow 0$ und $\omega \leq \pi$ geht der Gradient (22) am Ursprung in den aus der Differentiation der Randbedingung (20) ermittelten Nullvektor über. Für $\lim r \rightarrow 0$ und $\omega > \pi$ ist der Gradient (22) am Ursprung unbeschränkt und steht damit im Widerspruch zu dem aus der Differentiation der Randbedingung (20) ermittelten Nullvektor. Trotz des Widerspruchs ist die schwache Form (17) mit der angegebenen Lösung (21) für beliebige Gewichtsfunktionen befriedigt. Die Lösung ist daher eindeutig, obwohl die Randwertaufgabe in differentieller Form nicht widerspruchsfrei befriedigt werden kann.

Galerkin Methode: Als Gewichtsfunktion wird die Variation $\delta w^h(\mathbf{x})$ des Ansatzes im Gebiet V sowie auf dessen Rand F verwendet. Dadurch entstammt die Gewichtsfunktion dem gleichen Funktionenraum wie die Ansatzfunktion. Diese Wahl wird als Galerkin Methode bezeichnet und führt auf symmetrische algebraische Formen. Die Galerkin Methode liegt den klassischen Arbeitsprinzipien der Elastostatik zu Grunde. Für diese existieren auch Funktionale. Der Zugang zu den Arbeitsprinzipien mittels dieser Funktionale erschließt sich aber nicht in gleicher, direkter Weise wie der Zugang mittels der Methode der gewichteten Reste.

Arbeitsprinzip	Ansatz	(5) $\epsilon = \mathbf{D} \mathbf{u}$	(13) $\sigma = \mathbf{E} \epsilon$	(11) $\mathbf{D}^T \sigma + \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$	(8) $\mathbf{S} \mathbf{n} = \mathbf{s}$	(14) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$	(15) $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$
Hu-Washizu	$\mathbf{u}^h, \epsilon^h, \sigma^h$				a priori		
virtuelle Spannungen	σ^h		a priori	a priori	a priori		a priori
virtuelle Verschiebungen	$\mathbf{u}^h$	a priori	a priori		a priori	a priori	
erweiterte virtuelle Verschiebungen	$\mathbf{u}^h, \mathbf{s}^h$	a priori	a priori				a priori
Hellinger-Reissner	$\mathbf{u}^h, \sigma^h$		a priori		a priori	a priori	

Tabelle 2.1 : Übersicht: Arbeitsgleichungen der Elastostatik

Übersicht: Tabelle 2.1 stellt die konventionellen Arbeitsprinzipien der Elastostatik zeilenweise zusammen. Die erste Spalte zeigt die für die Herleitung des Prinzips zu wählenden Ansätze. In den weiteren Spalten sind die *a priori* befriedigten Bestimmungsgleichungen (5) bis (15) vertafelt. Die in heller Farbe markierte Zeile für das erweiterte Prinzip virtueller Verschiebungen ist die theoretische Grundlage dieser Arbeit. Es ist ersichtlich, daß im Gegensatz zum Prinzip virtueller Verschiebungen die Herleitung des erweiterten Prinzips mit einem Ansatz für Spannungen auf dem Rand F des Lösungsgebietes erfolgt. Im Gegensatz zum Prinzip von Hellinger und Reissner wird dieser Ansatz jedoch nur auf dem Rand F des Lösungsgebietes und nicht im Gebiet V unternommen. Nachfolgend wird diese Abgrenzung im Detail beschrieben.

Prinzip von Hu-Washizu: Für jede der drei Feldfunktionen wird ein Ansatz im Lösungsgebiet V aufgestellt. Die Spannungen s auf dessen Rand F werden mit Gleichung (8) aus dem Ansatz für die Spannungen im Gebiet ermittelt. Keine weiteren Bestimmungsgleichungen sind *a priori* befriedigt. Die gleichzeitige Näherung von sowohl Spannungen als auch Dehnungen im Lösungsgebiet führt im Falle eines linearen, invertierbaren Zusammenhangs zwischen Dehnungen und Spannungen nicht zu genaueren Ergebnissen [8]. Modelle nach Hu und Washizu finden daher wenig Anwendung. Bei gemischten Modellen wird eher auf das Prinzip von Hellinger-Reissner zurückgegriffen, wo dieser Zusammenhang *a priori* befriedigt ist.

Prinzip der virtuellen Spannung: Ein Ansatz σ^h wird ausschließlich für die Spannungen im Gebiet V aufgestellt. Der Ansatz befriedigt das Gleichgewicht (11). Aus dem Ansatz werden die Spannungen s auf dem Rand F mit Gleichung (8) ermittelt. Diese befriedigen die Bestimmungsgleichung (15). Die Befriedigung des Gleichgewichts (11) und der Spannungsrandbedingung (15) bereitet für mehrdimensionale Kontinua erhebliche Schwierigkeiten. Modelle nach dem Prinzip der virtuellen Spannungen finden daher eher Anwendung bei eindimensionalen Stabwerken oder im Zusammenhang mit nicht konformen Finite Elemente Methoden.

Prinzip der virtuellen Verschiebung: Für die Herleitung des Prinzips der virtuellen Verschiebung wird ein Ansatz u^h ausschließlich für die Verschiebungen im Gebiet V aufgestellt. Die Dehnung ϵ , die Spannung σ und die Randspannung s werden mit den Gleichungen (5), (13) und (8) aus dem Ansatz u^h ermittelt. Weder für den Spannungszustand im Gebiet noch für den Spannungsvektor auf dem Rand wird ein eigener Ansatz gewählt. Von dem Ansatz für die Verschiebung u^h wird gefordert, daß der Ansatz die eingepprägten Werte u_0 auf dem Verschiebungsrand F_u annimmt. Dadurch sind die Gleichungen (5), (13), (8) und (14) *a priori* befriedigt. Es verbleiben die Gleichungen (11) und (15) für die Anwendung der Methode der gewichteten Reste:

$$\int_V \delta u^T (D^T \sigma + p_0) dV + \int_{F_s} \delta u^T (s_0 - s) dF = 0$$

Aus der Anwendung des Integralsatzes von Gauß auf den ersten Term der obigen Gleichung folgt:

$$\int_V -\delta(Du)^T \sigma dV + \int_{F_u, F_s} \delta u^T S n dF + \int_V \delta u^T p_0 dV + \int_{F_s} \delta u^T (s_0 - s) dF = 0$$

Die Variation δu der Verschiebung ist auf dem Rand F_u nicht zulässig, da durch die *a priori* befriedigte Gleichung (14) der Verschiebungszustand auf diesem Rand bereits festgelegt ist und nicht variiert werden kann. Das Integral über die Variation δu auf F_u entfällt daher in obiger Gleichung. Aus der Substitution der übrigen *a priori* befriedigten Gleichungen (5), (13) und (8) folgt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$\int_V \delta(Du)^T E (Du) dV = \int_V \delta u^T p_0 dV + \int_{F_s} \delta u^T s_0 dF \quad (23)$$

Das zur Gleichung (23) gehörige, quadratische Funktional ist das elastische Potential:

$$\Pi_{vV}(u) = \int_V \frac{1}{2} (Du)^T E (Du) dV - \int_V u^T p_0 dV - \int_{F_s} u^T s_0 dF \quad (24)$$

Die Forderung nach Stationarität $\delta \Pi_{vV}(u) = 0$ des Funktionals (24) liefert genau das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (23). Am stationären Punkt besitzt das Funktional ein ausgeprägtes Minimum.

Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen: Für die Herleitung des erweiterten Prinzips virtueller Verschiebungen wird ein Ansatz $\mathbf{u}^h$ für die Verschiebungen im Gebiet V und ein unabhängiger Ansatz s^h für die Randspannung auf dem gesamten Außenrand F , aber nicht im Inneren des Gebietes V aufgestellt. Der Dehnungszustand ϵ^h und der Spannungszustand σ^h wird mit den Gleichungen (5) und (13) aus dem Ansatz $\mathbf{u}^h$ ermittelt. Der Ansatz s^h für die Randspannung wird so gewählt, daß er auf dem Spannungsrand F_s die eingepprägten Werte s_0 annimmt. Dadurch sind die Gleichungen (5), (13) und (15) *a priori* befriedigt.

Die Gleichung (8) drückt die Verträglichkeit der Randspannung $S^h \mathbf{n}$, die mit den Gleichungen (5) und (13) aus dem Ansatz $\mathbf{u}^h$ ermittelt wird, mit der unabhängigen Randspannung des Ansatzes s^h aus. Diese Gleichung ist im Gegensatz zum Prinzip in der konventionellen Form hier wegen der Unabhängigkeit der Ansätze $\mathbf{u}^h$ und s^h nicht befriedigt. Außerdem wird im Gegensatz zum Prinzip in der konventionellen Form nicht gefordert, daß der Ansatz $\mathbf{u}^h$ für die Verschiebung am Rand F_u die eingepprägten Werte $\mathbf{u}_0$ auf dem Verschiebungsrand F_u annimmt. Daher verbleiben die Gleichungen (11), (8) und (14) für die Anwendung der Methode der gewichteten Reste:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \sigma + \mathbf{p}_0) dV + \int_{F_u, F_s} \delta \mathbf{u}^T (s - S \mathbf{n}) dF + \int_{F_u} \delta s^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dF = 0$$

Aus der Anwendung des Integralsatzes von Gauß auf den ersten Term der obigen Gleichung folgt:

$$\int_V -\delta (\mathbf{D} \mathbf{u})^T \sigma dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_u, F_s} \delta \mathbf{u}^T s dF + \int_{F_u} \delta s^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dF = 0$$

Die Variation $\delta \mathbf{u}$ der Verschiebung ist auf dem gesamten Rand F zulässig. Aus der Substitution der *a priori* befriedigten Gleichungen (5), (13) und (15) folgt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der erweiterten Form:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta (\mathbf{D} \mathbf{u})^T \mathbf{E} (\mathbf{D} \mathbf{u}) dV - \int_{F_u} \delta \mathbf{u}^T s dF - \int_{F_u} \delta s^T \mathbf{u} dF \\ &= \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_s} \delta \mathbf{u}^T s_0 dF - \int_{F_u} \delta s^T \mathbf{u}_0 dF \end{aligned} \quad (25)$$

Diese Vorgehensweise impliziert, daß bei der Formulierung der differentiellen Form der Bestimmungsgleichungen keine der Gleichungen, die nicht *a priori* befriedigt sind, in eine der anderen Gleichungen substituiert wird. Das gilt insbesondere für die Substitution von Gleichung (8) in Gleichung (15).

Diese Möglichkeit der Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen (25) ist in der Literatur bereits an anderer Stelle erwähnt [2]. Allerdings ist dort der Zusammenhang mit der Methode der gewichteten Reste nicht hergestellt. Vielmehr wird das Prinzip virtueller Verschiebungen willkürlich um weitere Terme angereichert. Insbesondere wird für die Lösung der Gleichungen unterstellt, daß der Ansatz keine Starrkörperverschiebungen enthält. Das ist jedoch nicht notwendig.

Das zur Gleichung (25) gehörige Funktional ist das elastische Potential $\Pi_{\text{evV}}(\mathbf{u})$ mit der zusätzlichen Nebenbedingung der Verträglichkeit gesuchter Verschiebung $\mathbf{u}$ und eingepprägter Verschiebung $\mathbf{u}_0$ am Verschiebungsrand F_u :

$$\Pi_{\text{evV}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \mathbf{E} (\mathbf{D}\mathbf{u}) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV - \int_{F_s} \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 dF - \int_{F_u} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dF \quad (26)$$

Dabei ist für jede Verschiebungsrichtung u_i mit $i = 1, 2, 3$ eine Nebenbedingung aufgestellt worden. Die Lagrange Parameter λ_i der Nebenbedingungen sind im Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ zusammengefaßt. Wenn im Funktional (26) der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ mit dem Vektor der Spannungen $\mathbf{s}$ am Verschiebungsrand F_u gleichgesetzt wird, dann folgt aus der Forderung nach dessen Stationarität $\delta \Pi_{\text{evV}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = 0$ genau die vorgenommene Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen (25). Weiterhin ist aus Gleichung (26) ersichtlich, daß genau dann, wenn der Verschiebungsansatz $\mathbf{u}$ exakt die auf F_u eingepprägte Verschiebung $\mathbf{u}_0$ annimmt, der stationäre Punkt des Funktional $\Pi_{\text{evV}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$ in den stationären Punkt des Funktional $\Pi_{\text{evV}}(\mathbf{u})$ übergeht. Für diesen Fall besitzt also auch das Funktional $\Pi_{\text{evV}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$ ein ausgeprägtes Minimum.

Die Möglichkeit, das elastische Potential durch die Nebenbedingung der Verträglichkeit eingepprägter und gesuchter Randverschiebung anzureichern, ist in der Literatur bereits erwähnt worden [3]. Aus physikalischer Erwägung wird dort gefolgert, daß dem Lagrange Parameter $\boldsymbol{\lambda}$ die Rolle der Randspannung am Verschiebungsrand zukommt. Lagrange Parameter in Form von Gl. (26) werden üblicherweise genutzt, um Kontaktbedingungen oder Übergangsbedingungen nicht konform angeschlossener Teilgebiete zu realisieren. In der Literatur ist nicht erwähnt, daß die Nebenbedingung auch dann sinnvoll sein kann, wenn diese Bedingung exakt befriedigt wird, um die Randspannungen $\mathbf{s}$ auf F_u unmittelbar zu gewinnen.

Prinzip von Hellinger und Reissner: Für die Herleitung des Prinzips von Hellinger und Reissner wird ein Ansatz $\mathbf{u}^h$ für die Verschiebungen und ein unabhängiger Ansatz $\boldsymbol{\sigma}^h$ im gesamten Lösungsgebiet V aufgestellt. Von dem Ansatz für die Verschiebung $\mathbf{u}^h$ wird gefordert, daß der Ansatz auf dem Verschiebungsrand F_u die eingepprägten Werte $\mathbf{u}_0$ annimmt. Dadurch sind die Gleichungen (13), (8) und (14) *a priori* befriedigt. Im Gegensatz zum Prinzip virtueller Verschiebungen und dessen Erweiterung ist wegen der Unabhängigkeit der Ansätze $\mathbf{u}^h$ und $\boldsymbol{\sigma}^h$ die Bestimmungsgleichung (5) hier nicht befriedigt. In der Literatur wird daher häufig explizit zwischen materieller Dehnung $\boldsymbol{\epsilon}_m = \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$ und kinematischer Dehnung $\boldsymbol{\epsilon}_k = \mathbf{D}\mathbf{u}$ unterschieden. Neben dieser Gleichung (5) verbleiben weiterhin die Gleichungen (11) und (15) für die Anwendung der Methode der gewichteten Reste:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_0) dV + \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}\mathbf{u}) dV + \int_{F_s} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}) dF = 0$$

Aus der Anwendung des Integralsatzes von Gauß auf den ersten Term der obigen Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} & \int_V -\delta (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{F_u, F_s} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{n} dF + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_s} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}) dF \\ & + \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}\mathbf{u}) dV = 0 \end{aligned}$$

Die Variation $\delta \mathbf{u}$ der Verschiebung auf dem Rand F_u ist nicht zulässig, da durch die *a priori* befriedigte Gleichung (14) der Verschiebungszustand dort bereits festgelegt ist. Aus der

Substitution der übrigen *a priori* befriedigten Gleichungen (13) und (8) folgt das Prinzip von Hellinger und Reissner:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta(\mathbf{Du})^T \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{Du}) \, dV - \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dV \\ &= \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 \, dV + \int_{F_s} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 \, dF \end{aligned} \quad (27)$$

Die zur Gleichung (27) gehörige Variationsformulierung ist das Funktional von Hellinger und Reissner:

$$\Pi_{\text{HR}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Du} \, dV - \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 \, dV - \int_{F_s} \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 \, dF \quad (28)$$

Für das Funktional (28) existieren verschiedene Darstellungsformen, die mit dem Integralsatz von Gauß ineinander überführbar sind. Das Funktional ist derart konstruiert, daß aus der Forderung nach Stationarität $\delta \Pi_{\text{HR}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0$ genau die integrale Form (27) folgt. Eine Herleitung des Funktionals von Hellinger und Reissner mittels des elastischen Potentials oder des Potentials der Ergänzungsenergie und weiteren Nebenbedingungen ist nicht möglich. Der stationäre Punkt des Funktionals von Hellinger und Reissner ist daher ein Sattelpunkt. Darin besteht ein wesentlicher Nachteil dieses Prinzips.

Beispiel: In Bild 2.3 ist die Anwendung des Prinzips virtueller Verschiebungen, seiner Erweiterung und des Prinzips von Hellinger und Reissner an einem vereinfachten Beispiel illustriert. Betrachtet wird ein hängender Stab der Länge L , der durch seine linear veränderliche Wichte γ_0 belastet wird. Die analytisch exakte Lösung des Randwertproblems ist angegeben.

Für das Prinzip virtueller Verschiebungen wird ein Verschiebungsansatz gewählt, der die Verschiebungsrandbedingung $u(0) = 0$ *a priori* befriedigt. Der Verschiebungsansatz kann die analytische Lösung nicht darstellen. Es ergibt sich eine Näherungslösung, deren Differentiation näherungsweise die Spannungen $\sigma(x)$ im Stab liefert. Die Spannung an den punktförmigen Rändern des Stabs folgt aus dem Produkt von $\sigma(x)$ mit dem Normalenvektor $n(0) = -1$ an der Aufhängung und $n(L) = 1$ am freien Ende. Es ist ersichtlich, daß auch dort der analytisch exakte Wert nicht erreicht wird.

Der Verschiebungsansatz des erweiterten Prinzips virtueller Verschiebungen befriedigt die Verschiebungsrandbedingung nicht *a priori*. Es wird zudem ein Ansatz für die Randspannung an den punktförmigen Rändern aufgestellt. Am freien Ende nimmt der Ansatz die eingeprägte Spannung $s(L) = 0$ an. Das entspricht dem analytisch exakten Wert. Die Näherungslösung für die Verschiebung ist identisch zum Prinzip ohne die vorgenommene Erweiterung, da die Ansätze den gleichen Dehnungszustand darstellen können. Die Näherungslösung für die Spannung $s(L)$ an der Aufhängung liefert den analytisch exakten Wert.

Für das Prinzip von Hellinger-Reissner wird ein Ansatz sowohl für die Verschiebung als auch für die Spannung unternommen. Der Verschiebungsansatz befriedigt die Randbedingung $u(0) = 0$ *a priori*. Die Näherungslösung für die Verschiebung und die Spannung ist identisch zum Prinzip virtueller Verschiebung, da der konstante Anteil des Spannungsansatzes den Dehnungszustand aus dem Verschiebungsansatz darstellen kann. Entsprechend wird auch hier an den Rändern der analytisch exakte Wert für die Spannung $s(0)$ und $s(L)$ nicht erreicht.

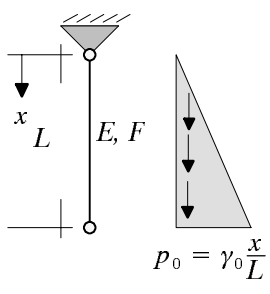
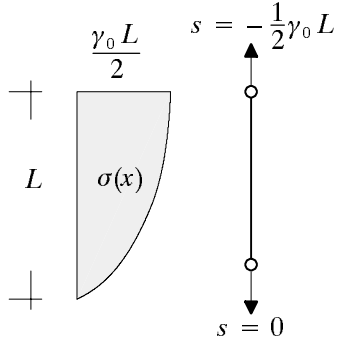
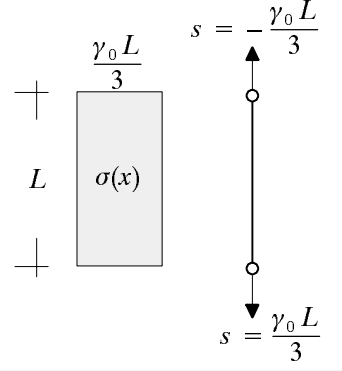
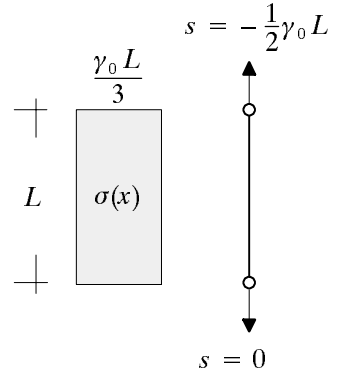
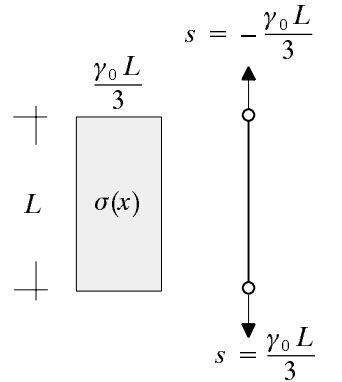
Differentialform  $p_0 = \gamma_0 \frac{x}{L}$ $u(x) = \frac{\gamma_0 L}{2E} \left(x - \frac{x^3}{3L^2} \right)$ $\sigma(x) = \frac{\gamma_0 L}{2} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$	
Prinzip virtueller Verschiebungen $\int \delta \frac{du}{dx} E \frac{du}{dx} dL = \int \delta u p_0 dL$ Ansatz : $u(x) = a_1 x$ beinhaltet $u(0) = 0$ $\delta \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \gamma_0 L^2 \end{bmatrix}$ $a_1 = \frac{\gamma_0 L}{3E}$	
Erweitertes Prinzip virtueller Verschiebungen $\int \delta \frac{du}{dx} E \frac{du}{dx} dL - [\delta u s]_{x=0} - [\delta s u]_{x=0} = \int \delta u p_0 dL$ Ansatz : $u(x) = a_0 + a_1 x$ $s(0) = b_0$ beinhaltet $s(L) = 0$ $\delta \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & EL & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \gamma_0 L \\ \frac{1}{3} \gamma_0 L^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{\gamma_0 L}{3E} \quad b_0 = -\frac{1}{2} p_0 L$	
Prinzip von Hellinger und Reissner $\int \delta \frac{du}{dx} \sigma dL + \int \delta \sigma \frac{du}{dx} dL - \int \delta \sigma \frac{1}{E} \sigma dL = \int \delta u p_0 dL$ Ansatz : $u(x) = a_1 x$ beinhaltet $u(0) = 0$ $\sigma(x) = c_0 + c_1 x$ $\delta \begin{bmatrix} a_1 \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & L & \frac{L^2}{2} \\ L & -\frac{L}{E} & -\frac{L^2}{2E} \\ \frac{L^2}{2} & -\frac{L^2}{2E} & -\frac{L^3}{2E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} a_1 \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \gamma_0 L^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_1 = \frac{\gamma_0 L}{3E} \quad c_0 = \frac{\gamma_0 L}{3} \quad c_1 = 0$	

Bild 2.3 : Beispiel gerader Stab

2.3 Algebraische Form

Galerkin Gleichungen: Als Ansatz $\mathbf{w}^h(\mathbf{x})$ für die Feldfunktionen wird eine Linearkombination aus D linear unabhängigen, gegebenen Funktionen und unbekannten Koeffizienten gewählt. Die linear unabhängigen Funktionen des Ansatzes bilden eine Basis. Mit der Basis wird ein Ansatzraum der Dimension D für die Näherungslösung aufgespannt. Die Konstruktion des Ansatzes ist nicht beliebig, sondern muß den Anforderungen an die Stetigkeit genügen, die aus dem Grad der Ableitung der Integranden in der Integralform ersichtlich sind. Ansätze, die den Stetigkeitsanforderungen genügen, heißen konform.

In der Galerkin Methode werden die Gewichtsfunktionen dem Ansatzraum entnommen. Es ist daher zweckmäßig die D linear unabhängigen Basisfunktionen des Ansatzraums zu wählen. Damit werden die Variationen $\delta \mathbf{w}^h(\mathbf{x})$ des Ansatzes nach den freien Koeffizienten erfaßt. Die Evaluation der Integralform (17) für jede der D Basisfunktionen führt auf D algebraische Gleichungen, die als Galerkin Gleichungen bezeichnet werden. Die Gleichungen bilden ein symmetrisches, lineares Gleichungssystem der Dimension D . Durch die Lösung dieses Gleichungssystems wird die Integralform (17) also nicht für beliebige Gewichtsfunktionen befriedigt, sondern für alle Funktionen aus dem Ansatzraum. Die Lösung ist daher allein im gewählten Ansatzraum eindeutig. Die linearen Gleichungssysteme aus Bild 2.3 sind Beispiele dieser algebraischen Formen.

Finite Elemente Methode: Der Ansatz $\mathbf{w}^h(\mathbf{x})$ für die Feldfunktionen wird als Summe lokaler Interpolationsansätze gebildet. Träger oder Definitionsbereich der lokalen Ansätze sind die finiten Elemente. Ein lokaler Ansatz in einem Element wird durch unbekannte Stützwerte und bekannte Formfunktionen spezifiziert. Die Stützwerte am Übergang zwischen benachbarten Elementen sind gleich. Diese Kopplung der lokalen Ansätze zum globalen Ansatz kann algebraisch durch die Topologiematrix $\mathbf{R}_e$ ausgedrückt werden. Mit der Topologiematrix $\mathbf{R}_e$ wird der Zusammenhang zwischen den Stützwerten eines Elementes und allen Stützwerten eines Ansatzes beschrieben.

Aus der Substitution der Summe lokaler Ansätze in die Integralform (17) folgen Summen über Elementintegrale. Die numerische Evaluation der Integrale unter Verwendung von Integrationsformeln führt auf Elementmatrizen und Elementvektoren. Unter Verwendung der topologischen Beziehung $\mathbf{R}_e$ werden die Elementmatrizen und Elementvektoren zu Systemmatrizen und Systemvektoren zusammengesetzt. Wegen der Definition des Ansatzes als Summe von lokalen Elementansätzen ist die Systemmatrix dünn besetzt. Nachfolgend wird die Anwendung der Finite Elemente Methode auf die Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen beschrieben. Dabei wird wiederum die Abgrenzung zu den konkurrierenden Prinzipien vorgenommen.

Prinzip virtueller Verschiebung: Die Integralgleichung (25) wird in eine Summe von Elementintegralen zerlegt. Dafür wird der globale Ansatz für die Verschiebungen als Summe lokaler Ansätze mit C_0 -Kontinuität ausgedrückt.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_e \mathbf{u}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) \quad \mathbf{u}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) = \phi_e(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{u}}_e \quad \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (29)$$

Der Ansatz (29) muß bereits die Verschiebungsrandbedingung (14) auf dem Rand F_u befriedigen. Dabei ist zu beachten, daß daher die Variation des Ansatz (29) auf dem Rand F_u nicht zulässig ist. Üblich ist es, die Randbedingung (14) zunächst zu verletzen und erst im nachhinein zu berücksichtigen. Dadurch wird die Übersichtlichkeit bei der Herleitung der algebraischen Form

gefördert. Aus der Substitution des Ansatz (29) in die Integralform (23) entstehen die nachfolgenden Systembeiträge:

$$\begin{aligned}
 \sum_e \int_{V_e} \delta(\mathbf{Du})^T \mathbf{E}(\mathbf{Du}) dV &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \delta \hat{\mathbf{u}} \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} && \text{Steifigkeit} && \mathbf{K} \\
 \sum_e \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \hat{\mathbf{p}}_{0e} = \delta \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{p}}_0 && \text{Volumenlast} && \hat{\mathbf{p}}_0 \\
 \sum_e \int_{F_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 dF &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \hat{\mathbf{s}}_{0e} = \delta \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{s}}_0 && \text{Flächenlast} && \hat{\mathbf{s}}_0
 \end{aligned} \quad (30)$$

Jede Variation der Stützwerte $\delta \hat{\mathbf{u}}$ liefert eine Zeile des nachfolgenden symmetrischen Gleichungssystems:

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}}_0 + \hat{\mathbf{s}}_0 \quad (31)$$

Das System (31) ist singulär, weil die Verschiebungsrandbedingung (14) verletzt ist. Die Berücksichtigung der Randbedingung erfolgt, indem der Stützwertevektor der Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}$ in den Vektor $\hat{\mathbf{u}}_u$ der Stützwerte auf dem Verschiebungsrand F_u und in den Vektor $\hat{\mathbf{u}}_s$ für die übrigen Stützwerte aufgeteilt wird:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{su} \\ \hline \mathbf{K}_{us} & \mathbf{K}_{uu} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hline \hat{\mathbf{u}}_u \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{p}}_{0u} + \hat{\mathbf{s}}_{0u} \\ \hline \hat{\mathbf{p}}_{0s} + \hat{\mathbf{s}}_{0s} \\ \hline \end{array} \quad (32)$$

Den Stützwerten $\hat{\mathbf{u}}_u$ werden die Werte der gegebenen Verschiebung $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ an den Stützstellen $\mathbf{x}_i$ punktwise eingeprägt. Daraus folgt ein Übertrag von Spalten. Die Variationen $\delta \hat{\mathbf{u}}_u$ auf dem Rand F_u sind nicht zulässig. Daher entfallen in Gleichung (32) diejenigen Zeilen, die mit diesen Variationen erzeugt wurden. Es verbleibt ein positiv definites Gleichungssystem für die unbekannten Stützwerte der Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}_s$:

$$\mathbf{K}_{ss} \hat{\mathbf{u}}_s = \hat{\mathbf{p}}_{0s} + \hat{\mathbf{s}}_{0s} - \mathbf{K}_{su} \hat{\mathbf{u}}_u \quad (33)$$

Diese Vorgehensweise impliziert, daß nur solche Verschiebungsrandbedingungen $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ vorgegeben werden können, die durch den Ansatz (29) exakt dargestellt werden.

Erweitertes Prinzip virtueller Verschiebung: Die Integralgleichung (25) wird in eine Summe von Elementintegralen zerlegt. Dafür wird der globale Ansatz für die Verschiebungen als Summe lokaler Ansätze mit C_0 -Kontinuität ausgedrückt. Entsprechend der Zerlegung des Gebietes wird der globale Ansatz für die Randspannung auf dem Verschiebungsrand F_u ebenfalls als Summe lokaler Ansätze mit C_0 -Kontinuität ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum_e \mathbf{u}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) & \mathbf{u}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) &= \phi_e(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{u}}_e & \hat{\mathbf{u}}_e &= \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in V \\
 \mathbf{s}(\mathbf{x}) &= \sum_r \mathbf{s}_r(\mathbf{x}(\mathbf{z})) & \mathbf{s}_r(\mathbf{x}(\mathbf{z})) &= \boldsymbol{\omega}_r(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{s}}_r & \hat{\mathbf{s}}_r &= \mathbf{R}_r \hat{\mathbf{s}} & \forall \mathbf{x} \in F_u
 \end{aligned} \quad (34)$$

Im Gegensatz zum Prinzip ohne Erweiterung muß der Verschiebungsansatz die Verschiebungsrandbedingung (14) hier nicht befriedigen. Es ist daher auch die Variation des Ansatzes auf dem

Rand F_u zulässig. Die Substitution der Ansätze (34) in die Arbeitsgleichung (25) liefert folgende Systembeiträge:

$$\begin{aligned}
 \sum_e \int_{V_e} \delta(\mathbf{Du})^T \mathbf{E}(\mathbf{Du}) dV &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \delta \hat{\mathbf{u}} \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} && \text{Steifigkeit} && \mathbf{K} \\
 \sum_r \int_{F_r} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s} dF &= \sum_r \delta \hat{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{C}_r \hat{\mathbf{s}}_r = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{s}} && \text{Randgleichgewicht} && \mathbf{C} \\
 \sum_e \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \hat{\mathbf{p}}_{0e} = \delta \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{p}}_0 && \text{Volumenlast} && \hat{\mathbf{p}}_0 \\
 \sum_r \int_{F_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 dF &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e \hat{\mathbf{s}}_{0e} = \delta \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{s}}_0 && \text{Flächenlast} && \hat{\mathbf{s}}_0 \\
 \sum_r \int_{F_r} \delta \mathbf{s}^T \mathbf{u}_0 dF &= \sum_r \delta \hat{\mathbf{s}}_r^T \hat{\mathbf{u}}_{r0} = \delta \hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{u}}_0 && \text{Flächenverschiebung} && \hat{\mathbf{u}}_0 \quad (35)
 \end{aligned}$$

Jede Variation der Stützwerte sowohl für die Verschiebungen im Gebiet V als auch für die Randspannungen auf dem Rand F_u liefert eine Zeile des folgenden symmetrischen, positiv semidefiniten, regulären, linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0 + \hat{\mathbf{s}}_0 \\ -\hat{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Das Gleichungssystem (36) wird in drei positiv definite, reguläre, lineare Gleichungssysteme zerlegt. Dazu wird der Stützwertevektor der Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}$ aufgeteilt in den Vektor $\hat{\mathbf{u}}_u$ der Stützwerte auf dem Verschiebungsrand F_u und in den Vektor $\hat{\mathbf{u}}_s$ für die übrigen Stützwerte.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{su} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{us} & \mathbf{K}_{uu} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hat{\mathbf{u}}_u \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_{0s} + \hat{\mathbf{s}}_{0s} \\ \hat{\mathbf{p}}_{0u} + \hat{\mathbf{s}}_{0u} \\ -\hat{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Aus der dritten Zeile der Zerlegung (37) folgt ein symmetrisches Gleichungssystem für die unbekannten Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_u$:

$$\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_u = \hat{\mathbf{u}}_0 \quad (38)$$

Aus der Substitution des Ergebnisses $\hat{\mathbf{u}}_u$ der Gleichung (38) in die erste Zeile der Zerlegung (37) folgt ein symmetrisches Gleichungssystem für die unbekannten Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_s$:

$$\mathbf{K}_{ss} \hat{\mathbf{u}}_s = \hat{\mathbf{p}}_{0s} + \hat{\mathbf{s}}_{0s} - \mathbf{K}_{su} \hat{\mathbf{u}}_u \quad (39)$$

Aus der Substitution des Ergebnisses $\hat{\mathbf{u}}_s$ aus Gleichung (39) und des Ergebnisses $\hat{\mathbf{u}}_u$ aus Gleichung (38) in die zweite Zeile der Zerlegung (37) folgt ein symmetrisches Gleichungssystem für die stetige Randspannungsverteilung $\hat{\mathbf{s}}$ auf dem Rand F_u :

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}_{us} \hat{\mathbf{u}}_s + \mathbf{K}_{uu} \hat{\mathbf{u}}_u - \hat{\mathbf{p}}_{0u} - \hat{\mathbf{s}}_{0u} \quad (40)$$

Wenn der gegebene Verschiebungszustand $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ auf dem Rand F_u vom Ansatz für die Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ exakt erfaßt wird, dann nehmen die Stützwerte $\hat{\mathbf{u}}_u$, berechnet mit Gleichung (38), genau den gegebenen Wert an dieser Stelle an. Dann ist auch das Gleichungssystem (39) identisch zu dem Gleichungssystem (33), das aus dem Prinzip in der konventionellen Form resultiert. Entsprechend ist die Verschiebungslösung $\hat{\mathbf{u}}_s$ des erweiterten Prinzips dieselbe, die durch Anwendung des Prinzips in konventioneller Form erhalten wird.

Die rechte Seite der Gleichung (40) liefert das integrale Residuum bezüglich des inneren Gleichgewichts, die Auflagerkräfte. Im Gegensatz zur Anwendung des konventionellen Prinzips sind die Auflagerkräfte also Teil des erweiterten Prinzips und werden nicht durch eine nachgeschaltete Gleichgewichtsbetrachtung ermittelt. Das Ergebnis $\hat{\mathbf{s}}$ aus Gleichung (40) ist ein Ausdruck für die verteilten Auflagerkräfte, den Randspannungen auf F_u .

Prinzip von Hellinger und Reissner: Die Integralgleichung (27) wird in eine Summe von Elementintegralen zerlegt. Dafür wird der globale Ansatz für die Verschiebungen als Summe lokaler Ansätze mit $\mathcal{C}_0$ -Kontinuität ausgedrückt. Außerdem wird ein unabhängiger globaler Ansatz für die Spannungen im Lösungsgebiet als Summe lokaler Ansätze aufgestellt. Da die Spannungen in der Integralgleichung (27) nicht in einer Ableitung auftreten, müssen die Spannungen am Übergang zweier Elemente nicht $\mathcal{C}_0$ -kontinuierlich sein.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum_e \mathbf{u}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) & \mathbf{u}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) &= \phi_e(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{u}}_e & \hat{\mathbf{u}}_e &= \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in V \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \sum_e \boldsymbol{\sigma}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) & \boldsymbol{\sigma}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) &= \psi_e(\mathbf{z}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e &= \mathbf{R}_e \hat{\boldsymbol{\sigma}} & \forall \mathbf{x} \in V \end{aligned} \quad (41)$$

Der Ansatz (41) für die Verschiebung muß die Verschiebungsrandbedingung (14) auf dem Rand F_u befriedigen. Auch hier ist es üblich, die Randbedingung (14) zunächst zu verletzen, um die Übersichtlichkeit bei der Herleitung der algebraischen Form zu fördern. Die Substitution der Ansätze (41) in die Integralgleichung (27) liefert folgende Systembeiträge:

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{V_e} \delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dV &= \sum_e \delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e^T \mathbf{F}_e \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e = \delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & \text{Nachgiebigkeitsmatrix} & \mathbf{F} \\ \sum_e \int_{V_e} \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D} \mathbf{u}) \, dV &= \sum_e \delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e^T \mathbf{D}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}} & \text{Gleichgewichtsmatrix} & \mathbf{D} \\ \sum_e \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 \, dV &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \hat{\mathbf{p}}_{0e} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{p}}_0 & \text{Volumenlast} & \hat{\mathbf{p}}_0 \\ \sum_r \int_{F_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 \, dF &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \hat{\mathbf{s}}_{0e} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{s}}_0 & \text{Flächenlast} & \hat{\mathbf{s}}_0 \end{aligned}$$

Jede Variation der Stützwerte sowohl für die Verschiebungen als auch für die Spannungen liefert eine Zeile des folgenden symmetrischen, linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{D}^T \\ \hline \mathbf{D} & -\mathbf{F} \\ \hline \end{array}
\begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{u}} \\ \hline \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hline \end{array}
=
\begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{p}}_0 + \hat{\mathbf{s}}_0 \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \end{array}
\quad (42)$$

Das System (42) ist singulär, weil die Verschiebungsrandbedingung (14) verletzt ist. Die Berücksichtigung der Randbedingung erfolgt wiederum, indem der Stützwertevektor der Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}$ in den Vektor $\hat{\mathbf{u}}_u$ der Stützwerte auf dem Verschiebungsrand F_u und in den Vektor $\hat{\mathbf{u}}_s$ für die übrigen Stützwerte aufgeteilt wird:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_u^T \\ \hline \mathbf{D}_s & \mathbf{D}_u & -\mathbf{F} \\ \hline \end{array}
\begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hline \hat{\mathbf{u}}_u \\ \hline \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hline \end{array}
=
\begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{p}}_{0s} + \hat{\mathbf{s}}_{0s} \\ \hline \hat{\mathbf{p}}_{0u} + \hat{\mathbf{s}}_{0u} \\ \hline \mathbf{D}_u \hat{\mathbf{u}}_u \\ \hline \end{array}
\quad (43)$$

Den Stützwerten $\hat{\mathbf{u}}_u$ werden die Werte der gegebenen Verschiebung $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ an den Stützstellen $\mathbf{x}_i$ punktweise eingeprägt. Daraus folgt ein Übertrag von Spalten. Die Variationen $\delta\hat{\mathbf{u}}_u$ auf dem Rand F_u sind nicht zulässig. Daher entfallen in Gleichung (32) diejenigen Zeilen, die mit diesen Variationen erzeugt wurden. Es verbleibt ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Stützwerte $\hat{\mathbf{u}}_s$ und $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{0} & \mathbf{D}_s^T \\ \hline \mathbf{D}_s & -\mathbf{F} \\ \hline \end{array}
\begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hline \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hline \end{array}
=
\begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{p}}_0 + \hat{\mathbf{s}}_0 \\ \hline \mathbf{D}_u \hat{\mathbf{u}}_u \\ \hline \end{array}
\quad (44)$$

Das lineare Gleichungssystem (44) ist regulär aber nicht positiv definit. Die robusten numerischen Lösungsverfahren positiv definiter Systeme können daher nicht eingesetzt werden. Alternativ dazu kann der Stützwertevektor der Spannungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ unter Verwendung der zweiten Zeile von Gleichung (44) als Funktion des Stützwertevektors der Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_s$ ausgedrückt werden. Die Substitution von $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ in die erste Zeile der Gleichung (44) liefert ein positiv definites Gleichungssystem, das aber im allgemeinen keine dünne Besetzung aufweist.

Für den Fall, daß in jedem Element ein unabhängiger Ansatz für die Spannungen aufgestellt wird, kann die vorangehend beschriebene Substitution elementweise durchgeführt werden. Die Ablösung der Spannungen unter Verwendung der zweiten Zeile des Gleichungssystems (44) liefert dann die gemischt hybride Elementsteifigkeit $\mathbf{G}_e$. Im Vergleich zur Systemsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ aus dem Prinzip virtueller Verschiebungen weist die gemischt hybride Systemsteifigkeit $\mathbf{G}$ die gleiche dünne Besetzungsstruktur auf und ist wie diese positiv definit.

Die Konstruktion des Spannungsansatzes kann bei der Anwendung des Prinzips von Hellinger und Reissner nicht beliebig erfolgen. Ein Ansatz, der den aus dem Verschiebungszustand berechenbaren Dehnungszustand erfaßt, führt auf dieselbe Lösung, die auch aus dem Prinzip virtueller Verschiebungen erhalten wird. Ein Ansatz, der weniger Stützwerte $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ für die Spannung als Stützwerte $\hat{\mathbf{u}}_s$ für die Verschiebung besitzt, führt auf Steifigkeitsmatrizen mit Nulleigenformen, die keine Starrkörperverschiebungen sind. Im Falle der hybriden Ablösung können durch die sorgfältige Abstimmung des Ansatzraums der Spannung auf den Ansatzraum der Verschiebung Elemente konstruiert werden, die für wichtige Aufgabenklassen ein gutes Konvergenzverhalten zeigen. Jedoch besitzen diese Elemente nicht den gleichen breiten Anwendungsbereich wie die konformen Elemente der Verschiebungsmethode.

2.4 Schnitte durch das Kontinuum

Die Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen findet besondere Anwendung bei der Bestimmung der Randspannungen auf Schnitten durch das Kontinuum. Derartige Schnitte liegen auch den hybriden Modellen der Finite Elemente Methode zu Grunde. Die Bestimmungsgleichungen werden zunächst um Übergangsbedingungen ergänzt. Durch Anwendung der Methode der gewichteten Reste werden die Übergangsbedingungen in die Integralform aufgenommen. Der Zusammenhang zu den Integralformen aus Kapitel 2.2 wird hergestellt.

Übergangsbedingung: Das Lösungsgebiet wird durch Schnitte in Teilgebiete zerlegt. In jedem Teilgebiet wird die vorher beschriebene Randwertaufgabe gestellt. Die Außennormalen $\mathbf{n}^+(\mathbf{x})$ und $\mathbf{n}^-(\mathbf{x})$ auf einer Schnittfläche F_m zweier Teilgebiete sind entgegengesetzt orientiert. Die Aufgabe wird zusätzlich durch Übergangsbedingungen für den Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ der Punkte in F_m und den Spannungsvektor $\mathbf{s}$ der Punkte auf F_m erweitert:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^- \quad \forall \mathbf{x} \in F_m \quad \text{Verschiebungsübergangsbedingung} \quad (45)$$

$$\mathbf{s}^+ = -\mathbf{s}^- \quad \forall \mathbf{x} \in F_m \quad \text{Spannungsübergangsbedingung} \quad (46)$$

Gleichung (45) folgt aus der zu Grunde liegenden Kontinuumshypothese. Gleichung (46) ist die elementare Aussage des Schnittprinzips, das zur axiomatischen Definition des Cauchy Spannungstensors $\mathbf{T}$ verwendet wurde. Die Gleichungen liefern sechs Übergangsbedingungen für jeden Punkt $\mathbf{x}$ des Überganges F_m . Um größere Übersichtlichkeit zu erzielen wird angenommen, daß das Gebiet durch einen einzigen Schnitt in die Gebiete V_+ und V_- zerlegt wird.

Prinzip virtueller Verschiebung: Im Gebiet V_+ und V_- wird jeweils ein Ansatz $\mathbf{u}_+$ und $\mathbf{u}_-$ für die Verschiebung unternommen. Die Ansätze $\mathbf{u}_+$ und $\mathbf{u}_-$ sind zunächst unabhängig. In jedem Gebiet werden unabhängig voneinander dieselben Bestimmungsgleichungen *a priori* befriedigt, wie im Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Am Übergang F_m der Gebiete ist wegen der Unabhängigkeit der Ansätze $\mathbf{u}_+$ und $\mathbf{u}_-$ die Spannungsübergangsbedingung (46) nicht befriedigt. Der Zusammenhang der Teilgebiete wird hergestellt, indem von den Ansätzen $\mathbf{u}_+$ und $\mathbf{u}_-$ *a priori* die Verträglichkeit auf dem Rand F_m gefordert wird. Es gilt daher $\mathbf{u} = \mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_-$ für alle Punkte des Überganges F_m . Aus der Anwendung der Methode der gewichteten Reste folgt:

$$\int_{V_{\pm}} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_0) dV + \int_{F_{s\pm}} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}) dF - \int_{F_m} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{s}_+ + \mathbf{s}_-) dF = 0 \quad (47)$$

Der erste Term der Gleichung (47) wird für beide Teilgebiete partiell integriert:

$$\int_{V_{\pm}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} dV = - \int_{V_{\pm}} \delta (\mathbf{D} \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{F_u, F_{s\pm}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{n} dF + \int_{F_m} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{S} \mathbf{n}_+ + \mathbf{S} \mathbf{n}_-) dF \quad (48)$$

Aus der Substitution der Gleichung (48) in Gleichung (47) folgt unter Berücksichtigung aller *a priori* befriedigten Bestimmungsgleichungen:

$$\int_{V_{\pm}} \delta (\mathbf{D} \mathbf{u})^T \mathbf{E} (\mathbf{D} \mathbf{u}) dV = \int_{V_{\pm}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_{s\pm}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 dF \quad (49)$$

Gleichung (49) ist das bekannte Prinzip virtueller Verschiebungen. Da in der Herleitung keine Stetigkeit der Randspannung auf F_m vorausgesetzt wurde und alle Terme auf dem Rand F_m entfallen, sind unstetige Randspannungen hier zulässig. Diese Eigenschaft ist auch aus dem Grad der Verschiebungsableitung ersichtlich.

Erweitertes Prinzip virtueller Verschiebungen: Im Gebiet V_+ wird ein Ansatz $\mathbf{u}_+$ für die Verschiebung sowie ein unabhängiger Ansatz $\mathbf{s}_+$ für die Randspannung auf dem gesamten Außenrand F_+ unternommen. Analog dazu werden im Gebiet V_- und auf dessen Rand F_- die Ansätze $\mathbf{u}_-$ und $\mathbf{s}_-$ unternommen. Alle Ansätze sind zunächst unabhängig voneinander. In jedem Gebiet werden dieselben Bestimmungsgleichungen, wie im erweiterten Prinzip virtueller Verschiebungen, *a priori* befriedigt. Insbesondere ist also die Verträglichkeit der unabhängigen Randspannung mit den Spannungen aus dem Verschiebungsansatz in jedem der Gebiete nicht *a priori* befriedigt.

Zur Förderung der Übersichtlichkeit wird zunächst vorausgesetzt, daß keine Verschiebungsrandbedingung spezifiziert ist. Am Übergang F_m der Gebiete ist wegen der Unabhängigkeit der Ansätze $\mathbf{u}_+$ und $\mathbf{u}_-$ die Verschiebungsübergangsbedingung (45) nicht befriedigt. Der Zusammenhang der Teilgebiete wird hier hergestellt, indem von den Ansätzen $\mathbf{s}_+$ und $\mathbf{s}_-$ *a priori* die Verträglichkeit auf dem Rand F_m gefordert wird. Es gilt daher $\mathbf{s} = \mathbf{s}_+ = -\mathbf{s}_-$ für alle Punkte des Übergangs F_m . Aus der Anwendung der Methode der gewichteten Reste folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{V_{\pm}} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_0) dV + \int_{F_{s\pm}} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{s} - \mathbf{S}\mathbf{n}) dF + \int_{F_m} \delta \mathbf{u}_+^T (\mathbf{s} - \mathbf{S}\mathbf{n}_+) dF \\ & + \int_{F_m} \delta \mathbf{u}_-^T (\mathbf{s} - \mathbf{S}\mathbf{n}_-) dF + \int_{F_m} \delta \mathbf{s}^T (\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) dF = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Der erste Term aus Gleichung (50) wird für beide Teilgebiete partiell integriert:

$$\begin{aligned} & \int_{V_{\pm}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} dV = - \int_{V_{\pm}} \delta (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{F_{s\pm}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{S}\mathbf{n} dF \\ & + \int_{F_m} \delta \mathbf{u}_+^T \mathbf{S}\mathbf{n}_+ dF + \int_{F_m} \delta \mathbf{u}_-^T \mathbf{S}\mathbf{n}_- dF \end{aligned} \quad (51)$$

Aus der Substitution der Gleichung (51) in Gleichung (50) folgt unter Berücksichtigung aller *a priori* befriedigten Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} & \int_{V_{\pm}} \delta (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{F_m} (\delta \mathbf{u}_+^T - \delta \mathbf{u}_-^T) \mathbf{s} dF - \int_{F_m} \delta \mathbf{s}^T (\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) dF \\ & = \int_{V_{\pm}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_{s\pm}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 dF \end{aligned} \quad (52)$$

Gleichung (52) generalisiert die in dieser Arbeit vorgenommene Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen (25): Wenn der Verschiebungszustand für eines der Teilgebiete gegeben ist, dann ist der Rand F_m für das andere Teilgebiet ein Verschiebungsrand F_u mit eingepprägten Verschiebungen $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. Weiterhin ist für das Teilgebiet mit gegebenen Verschiebungen deren Variation unzulässig. Es entfallen daher in Gleichung (52) alle Terme die mit diesen unzulässigen Variationen erzeugt werden. Für das andere Teilgebiet folgt dann genau die vorgenommene Erweiterung (25).

Die Volumenintegrale der beiden Teilgebiete V_+ und V_- sind wegen der diskontinuierlichen Verschiebung auf dem Rand F_m unabhängig voneinander. Die Kopplung erfolgt mittels des verträglichen Ansatzes $\mathbf{s}$ für die Randspannung am Übergang. Gehen die Verschiebungen am Übergang F_m ineinander über, so folgt aus Gleichung (52) das Prinzip virtueller Verschiebungen in konventioneller Form (23).

Algebraische Form: Die Herleitung der algebraischen Form der Gleichung (52) erfolgt mit den Ansätzen (34) des erweiterten Prinzips für jedes der Teilgebiete V_+ und V_- . Zur Förderung der Übersichtlichkeit wird wiederum vorausgesetzt, daß keine Verschiebungsrandbedingung spezifiziert worden ist. Der Rand eines Teilgebietes kann daher disjunkt in einen Rand F_s mit Spannungsrandbedingungen und den Übergang F_m zum anderen Teilgebiet zerlegt werden.

Der Ansatz für die Randspannung nimmt in jedem Teilgebiet am Rand F_s die eingepprägten Werte an. Am Übergang F_m ist wegen der Verträglichkeit der Randspannung $s = s_+ = -s_-$ der Ansatz für beide Teilgebiete gleichermaßen gültig. Die Stützwerte der Randspannung am Übergang F_m werden mit $\hat{s}_m$ bezeichnet. In Abhängigkeit der Zugehörigkeit zu einem der Teilgebiete werden die Stützwerte der Verschiebung mit $\hat{u}_+$ und $\hat{u}_-$ bezeichnet. Unter Verwendung der Systembeiträge aus dem erweiterten Prinzip (35) folgt ein symmetrisches, lineares Gleichungssystem, das aber nicht die Eigenschaft besitzt, positiv definit zu sein:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{K}_+ & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_+ \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{K}_- & \mathbf{C}_- \\ \hline -\mathbf{C}_+^T & \mathbf{C}_-^T & \mathbf{0} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{u}}_+ \\ \hline \hat{\mathbf{u}}_- \\ \hline \hat{\mathbf{s}}_m \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{p}}_{0+} + \hat{\mathbf{s}}_{0+} \\ \hline \hat{\mathbf{p}}_{0-} + \hat{\mathbf{s}}_{0-} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \end{array}
 \quad (53)$$

Wenn die unabhängigen Ansätze für die Verschiebung am Übergang F_m den gleichen Verschiebungszustand darstellen können, dann sind die Randgleichgewichtsmatrizen $\mathbf{C}_+$ und $\mathbf{C}_-$ der Teilgebiete V_+ und V_- am Übergang F_m identisch. Aus der dritten Zeile des Systems (53) folgt dann, daß auf dem Rand F_m die Stützwerte $\hat{\mathbf{u}}_+$ gleich den Stützwerten $\hat{\mathbf{u}}_-$ sind. In diesem Fall werden also durch die Lösung der Gleichung (53) die gleichen Ergebnisse für die Verschiebungen erzielt, wie durch die Anwendung des Prinzips virtueller Verschiebungen auf das Gesamtgebiet $V = V_+ \cup V_-$ unter Vernachlässigung der Übergangsbedingungen (45) und (46). Es werden aber zusätzlich und unmittelbar Randspannungen auf F_m gewonnen.

Daraus leitet sich ein Vorgehen ab, das die Lösung des nicht positiv definiten Systems (53) vermeidet: Es wird zunächst eine Berechnung nach dem konventionellen Prinzip virtueller Verschiebungen durchgeführt. Dafür ist die Lösung eines positiv definiten Systems notwendig. Es wird dann entweder das Verschiebungsergebnis für den Teilkörper V_+ in die erste Zeile der Gleichung (53) oder das Verschiebungsergebnis für den Teilkörper V_- in die zweite Zeile der Gleichung (53) substituiert. Daraus resultiert jeweils ein weiteres positiv definites, lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Stützwerte $\hat{s}_m$ der Randspannungen am Übergang F_m . Dabei genügt es, eines der beiden Systeme zu lösen. Wegen der Verträglichkeit der Randspannungen am Übergang F_m ist auf dem anderen Teilgebiet allein das Vorzeichen unterschiedlich.

Beispiel: In Bild 2.4 wird der Anschluß eines Trägers an ein Widerlager betrachtet. Dargestellt ist ein Schnitt durch den Träger, der das Lösungsgebiet in die Gebiete V_+ und V_- zerlegt. Die Analyse des Verschiebungszustands mit einer groben Elementierung ist bereits erfolgt. Die Verschiebung sowie die Randspannung auf der Schnittfläche F_m werden linear interpoliert. Aus der Anwendung der ersten Zeile der Gleichung (53) folgt ein positiv definites Gleichungssystem für die Randspannung auf der Schnittfläche F_m . Im Vektor der rechten Seite dieses Systems befinden sich die Schnittkräfte. Aus dem Beispiel ist ersichtlich, daß ein Schnitt am Verschiebungsrand F_u als Sonderfall der Betrachtung hervorgeht.

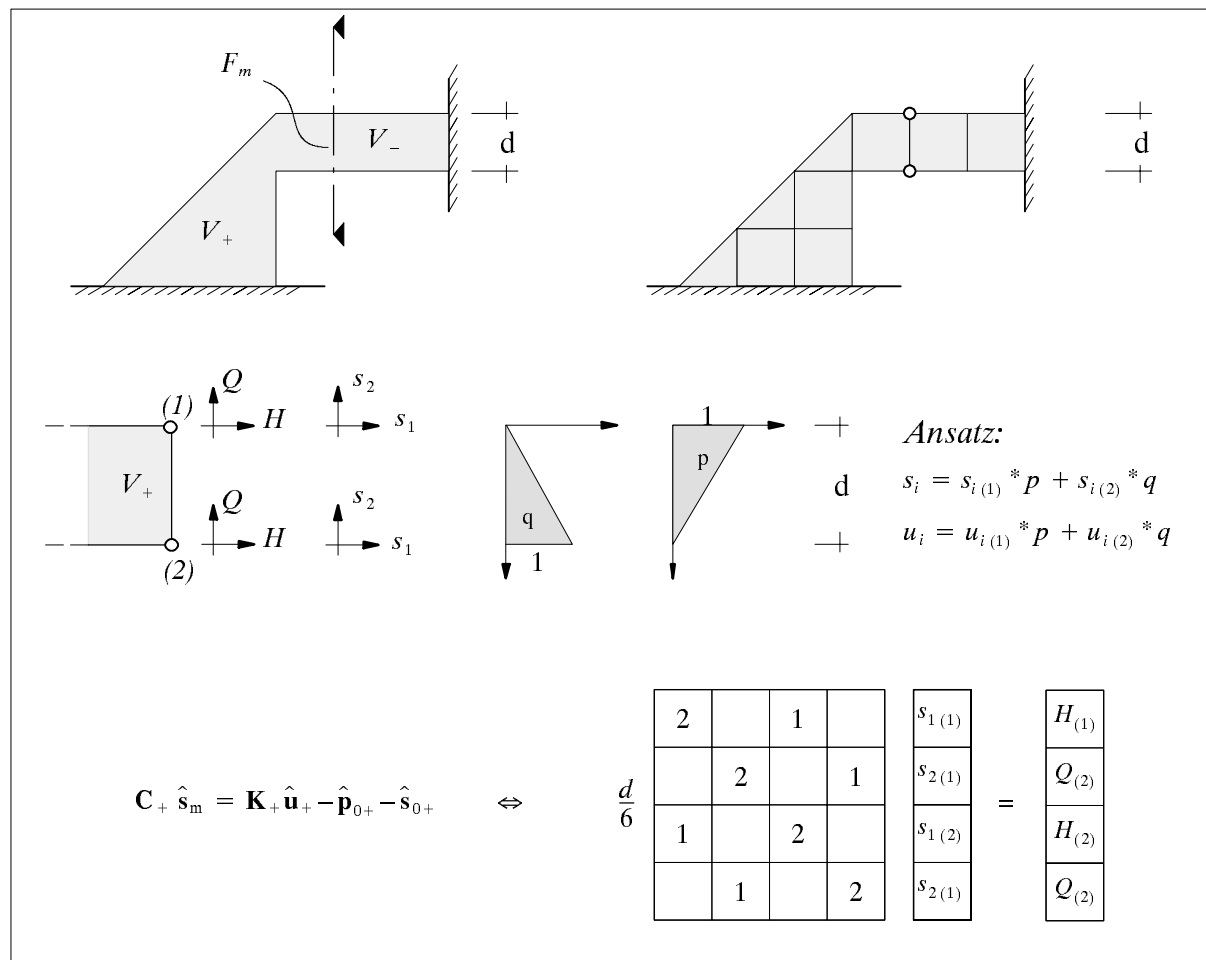


Bild 2.4 : Beispiel Schnittführung

Schnittführung: Die zu führenden Schnitte sind durch den Anwender eines Programms zu spezifizieren. Die Spezifikation kann entweder vor oder nach der Analyse des Verschiebungszustandes erfolgen. Bei einer Spezifikation des Schnittes vor der Analyse des Verschiebungszustandes kann die Oberfläche der Schnittfläche in Analogie zur Spezifikation von Randbedingungen explizit angegeben werden. Eine Schnittführung nach der Analyse des Verschiebungszustandes ist wünschenswert, da die Lage der für die Bemessung maßgeblichen Schnitte im allgemeinen nicht bekannt ist. Es wird dann eine Methode zur Bestimmung aktueller Oberflächen, wie sie in Kapitel 5 dargelegt wird, notwendig.

Sobald eine Analyse des Verschiebungszustandes erfolgt ist, können Schnitte entweder längs der Ränder gegebener Elementierungen oder aber beliebig geführt werden. Für einen Schnitt längs der Ränder gegebener Elementierungen werden auf der Schnittfläche an den Stützstellen der Verschiebung zusätzliche Stützwerte der Randspannung eingeführt, die daraufhin durch die Lösung von entweder der zweiten oder der dritten Zeile der Gleichung (53) bestimmt werden.

Für beliebige geführte Schnitte wird eine temporäre Verfeinerung der geschnittenen Elemente des Gebietes vorgeschlagen, so daß der Schnitt längs der verfeinerten Elementierung geführt wird. Nach erfolgter Analyse der Randspannung auf der Schnittfläche kann die verfeinerte Elementierung wieder verworfen werden. Leistungsfähige, rechnergestützte Methoden für die interaktive Spezifikation und Ausführung derartiger Schnitte sind in [30]/[46] dokumentiert. Sie dienen dort der Visualisierung von Tensorfeldern. Hier werden zusätzlich Stützwerte auf der Schnittfläche eingeführt, um daraufhin die Randspannung mittels Gleichung (53) zu bestimmen.

3 Spannungsberechnung mit dem erweiterten Prinzip

3.1 Ecken und Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete

Die in Kapitel 2.1 eingeführte Randwertaufgabe der Elastostatik ist an Ecken und Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete selten wohldefiniert. Zur Illustration dieses Problems wird zunächst ein zweidimensionales Lösungsgebiet $F(\mathbf{x})$ betrachtet. Der Rand $L(\mathbf{x})$ des Lösungsgebiets wird unter Verwendung einer Bogenkoordinate z durch die Abbildung $\mathbf{x}(z) : z \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ beschrieben. Der Rand $L(\mathbf{x})$ des Lösungsgebiets heißt glatt, wenn die Abbildung $\mathcal{C}_1$ -Kontinuität besitzt. Dann ist die Eindeutigkeit der Außennormalen $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ an allen Punkten des Randes gewährleistet.

Das Lösungsgebiet F sei ein zweidimensionales Polyeder und besitzt daher einen stückweise glatten Rand L . Betrachtet werden zwei Linienstücke des Verschiebungsrandes F_u , die an einem Eckpunkt A inzident sind und dort jeweils einen unterschiedlichen Normalenvektor $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ definieren. Die grundlegenden Definitionen des Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$ aus Gleichung (3) und des linearisierten Dehnungstensor $\mathbf{G} = \mathbf{U} + \mathbf{U}^T$ aus Gleichung (4) werden vorausgesetzt. Diese Tensoren wurden bezüglich der globalen, kartesischen Einheitsbasis eingeführt, die in Bild 2.1 dargestellt ist.

Die Normalenvektoren am Eckpunkt A spannen eine kovariante Basis $\mathbf{B}_* = [\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2]$ auf. Die Basisvektoren der zu $\mathbf{B}_*$ kontravarianten Basis $\mathbf{B}^* = [\mathbf{t}^1 \ \mathbf{t}^2]$ sind die Richtungsvektoren der beiden Linienstücke. Aus dem Produkt $\mathbf{U} \mathbf{B}^*$ des Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$ mit der kontravarianten Basis $\mathbf{B}^*$ folgen spaltenweise die Verschiebungsableitungen in Richtung der Basisvektoren von $\mathbf{B}^*$. Genau diese Ableitungen können durch die Differentiation der gegebenen Verschiebungsrandbedingungen am Eckpunkt A bestimmt werden. Durch Multiplikation von $\mathbf{U} \mathbf{B}^*$ mit der kovarianten Basis $\mathbf{B}_*$ ergibt sich der Verschiebungsgradient $\mathbf{U}$ am Eckknoten. Damit sind dann der Dehnungszustand $\mathbf{G}$, der Spannungszustand $\mathbf{S}$ und die Randspannungen s am Eckpunkt A bestimmt.

Aus der Betrachtung folgt, daß am betrachteten Eckpunkt A die Lösung der Randwertaufgabe bereits durch die Verschiebungsrandbedingungen auf F_u vorgegeben ist. Die Aufgabe ist überbestimmt. Die zusätzliche Bedingung, die aus der Differentiation der Randbedingungen folgt, kann entweder in der exakten Lösung des Randwertproblems enthalten sein oder aber eine widerspruchsfreie Lösung des Randwertproblems existiert nicht. Letzterer Fall wurde bereits am Beispiel des Kreisabschnitts in Kapitel 2.2 illustriert. Ähnliche Überlegungen für Spannungsrandbedingungen auf F_s oder gemischte Randbedingungen werden im Zusammenhang mit dreidimensionalen Lösungsgebieten diskutiert.

Überbestimmtheit und das erweiterte Prinzip: Das erweiterte Prinzip virtueller Verschiebungen zeichnet sich gegenüber der konventionellen Formulierung im wesentlichen durch den zusätzlichen Ansatz s^h für die Randspannung am Rand F_u aus. Nach der Methode von Galerkin liefert das Prinzip an jedem Punkt des Randes F_u für jede Komponente u_i der Verschiebung genau die energetisch konjugierte Komponente s_i der Randspannung. Da aber der unabhängige Ansatz für die Randspannung s im erweiterten Prinzip die Überbestimmtheit der Aufgabe nicht berücksichtigt, kommt es in dem Fall, daß die eindeutige Lösung einer Aufgabe nicht widersprüchlich zu den Randbedingungen auf dem Rand F_u ist, zu einem nachteiligen Ergebnis für deren Näherung. Dieser Fall wird anhand einer Modellaufgabe untersucht.

Modellaufgabe: Gestellt wird die in der Dimension reduzierte Aufgabe des ebenen Dehnungszustandes für ein Quadrat $F(x_1, x_2)$ im Einheitsgebiet $[0, 1] \times [0, 1]$. Der Elastizitätsmodul sei Eins, die Querdehnzahl sei Null. Zwei Fälle gegebener Randbedingungen für den Rand L werden alternativ verglichen:

- ◇ Fall 1: $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [x_1, 0]^T \quad \forall x_1, x_2 \in L: x_1 = 0 \vee x_1 = 1$
 $\mathbf{s}(x_1, x_2) = [0, 0]^T \quad \forall x_1, x_2 \in L: x_2 = 0 \vee x_2 = 1$
- ◇ Fall 2: $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [x_1, 0]^T \quad \forall x_1, x_2 \in L$

In beiden Fällen ist das Einheitsquadrat um die Länge Eins in x_1 -Richtung gestreckt. Im ersten Fall sind die Verschiebungen am linken und rechten Rand eingepreßt, im zweiten Fall an allen Rändern. Die Funktion $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [x_1, 0]^T$ löst die Aufgabe exakt für beide Fälle von Randbedingungen. Aus punktwiser Differentiation folgt, daß an jedem Punkt des Lösungsgebietes die Normalspannung σ_{11} in der x_1 -Richtung konstant Eins ist. Alle anderen Spannungskomponenten sind Null.

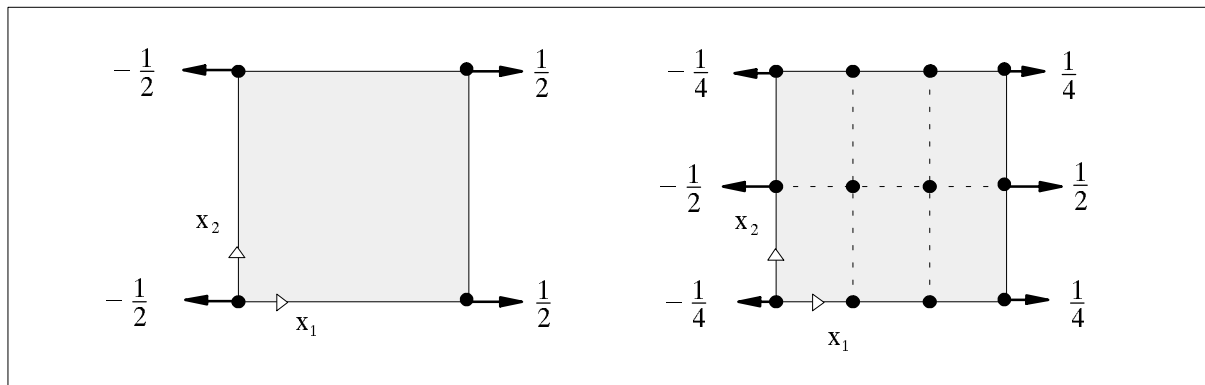


Bild 3.1 : Auflagerkräfte für konstantes σ_{11}

Eine Berechnung nach den Gleichungen (38) und (39) des erweiterten Prinzips mit zwei unterschiedlichen Elementierungen unter Verwendung eines bilinearen Elementansatzes liefert die analytisch exakte Lösung für den Verschiebungszustand. Bereits ein einziges der eingesetzten Elemente kann diesen Zustand darstellen. Aus Differentiation dieses Zustandes folgt daher der analytisch exakte, konstante Spannungszustand im Lösungsgebiet F und auf dessen Rand L .

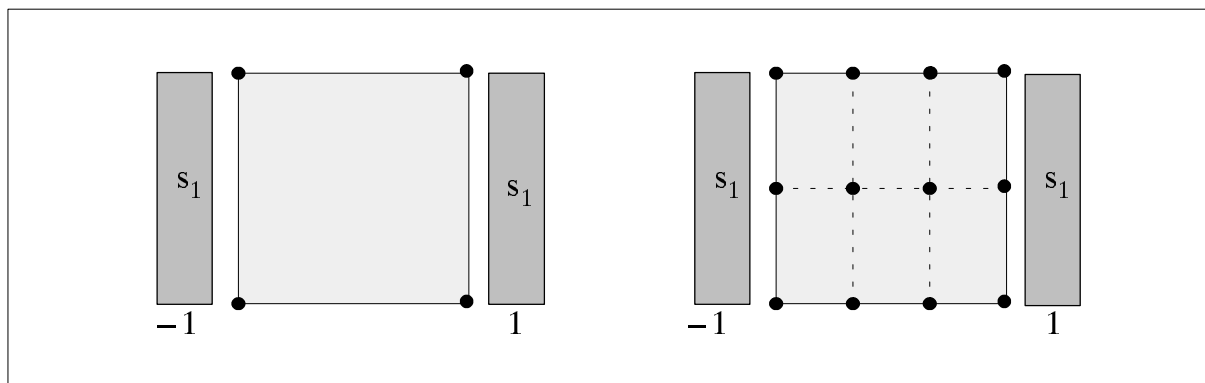


Bild 3.2 : Randspannungen Fall 1

Die Auswertung der rechten Seite von Gleichung (40) führt auf die in Bild 3.1 dargestellten Auflagerkräfte an den Stützstellen des Verschiebungsrandes. Die Auflagerkräfte stehen im Gleichgewicht und unterscheiden sich für beide Fälle von Randbedingungen nicht. Aus der Lösung des linearen Gleichungssystems (40) werden die Randspannungen am Verschiebungsrand ermittelt. In Bild 3.2 sind diese Randspannungen für den Fall 1 und in Bild 3.3 für den Fall 2 der Randbedingungen dargestellt.

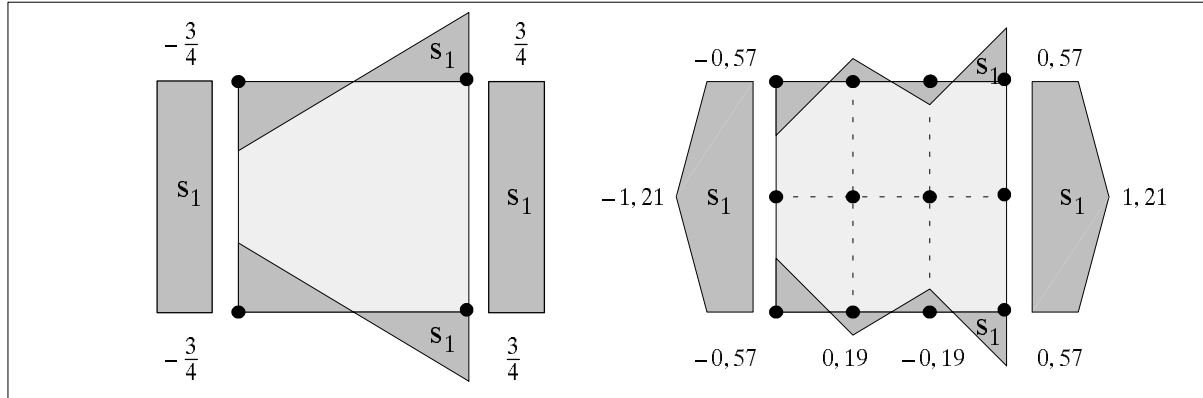


Bild 3.3 : Randspannungen Fall 2

Im ersten Fall wird der analytisch exakte Spannungszustand auf dem Rand gewonnen. Im zweiten Fall stellt sich ein unbefriedigendes Ergebnis ein. Bezüglich der lokalen Koordinatensysteme normal zu den vier Randstücken liefert das erweiterte Prinzip Schubspannungen auf den laut analytischer Lösung spannungsfreien Rändern. Dabei wird durch die Verfeinerung der Elementierung zwar die analytische Lösung angenähert, aber weder das Alternieren des Vorzeichens noch die Genauigkeit sind zufriedenstellend.

Beurteilung: Die Verträglichkeit der Spannungen $\mathbf{s}_n$ im Lösungsgebiet mit den Spannungen $\mathbf{s}$ am Rand F_u wird im erweiterten Prinzip nicht *a priori* sondern schwach befriedigt, indem ein unabhängiger Ansatz für diese Randspannungen unternommen wird. Das Ergebnis in Bild 3.3 ist daher im Sinne eines integralen Mittelwertes korrekt, aber unbefriedigend. Die Korrektheit kann insbesondere dadurch überprüft werden, daß auf dem Rand anstelle der Verschiebungen $\mathbf{u}_0$ die in Bild 3.3 dargestellten Ergebnisse als eingeprägte Spannungen $\mathbf{s}_0$ vorgegeben werden. Werden die Starrkörperverschiebungen entfernt, so folgt aus dieser Belastung das lineare Verschiebungsfeld und dementsprechend der konstante Spannungszustand im Lösungsgebiet.

Durch die Wahl der Elementierung des Einheitsquadrates in der Modellaufgabe wird ein Ansatzraum sowohl für die Randspannung als auch für die Verschiebung aufgespannt. Die in Bild 3.3 dargestellte Näherungslösung für die Randspannung ist im gewählten Ansatzraum der Randspannung eindeutig. Die analytische Lösung für die Verschiebung stammt aus dem Ansatzraum der Verschiebung. Sie wird daher in der Modellaufgabe als eindeutige Näherungslösung erhalten. Aus Differentiation dieser Näherungslösung folgt dann auch die analytische Lösung für die Spannung im Lösungsgebiet. Das ist im allgemeinen nur für eine hinlänglich feine Elementierung in einem asymptotischen Sinn der Fall.

Die Näherungslösung der Randspannung im Fall 2 ist deshalb unbefriedigend, weil eine Lösung der Aufgabe existiert, die widerspruchsfrei in die Randbedingungen am Rand F_u übergeht. Das ist aber im allgemeinen Fall nicht so, wie das Beispiel des Kreisabschnitts in Kapitel 2.2 und die Diskussion der Randbedingungen im räumlichen Fall illustrieren. Existiert keine widerspruchsfreie Lösung der Aufgabe, so ist die Näherungslösung für die Randspannung sogar von Vorteil. Sie suggeriert nämlich nicht die Existenz einer widerspruchsfreien Lösung an denjenigen Punkten, wo eine solche Lösung nicht möglich ist.

Lösungsvorschläge: Es bieten sich zwei grundsätzliche Möglichkeiten, das Ergebnis für die Randspannung aus dem erweiterten Prinzip an Ecken zweidimensionaler sowie an Ecken und Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete zu verbessern:

- ◇ Änderung der Aufgabenstellung, damit der Normalenvektor eindeutig wird
- ◇ Nutzung des durch die Überbestimmtheit gegebenen Spannungszustands

Die Eindeutigkeit der Außennormalen kann durch Abrundung von Ecken gewonnen werden. Dadurch wird der Rand der Lösungsgebiete geglättet. In Kapitel 3.2 werden Methoden für die Glättung vorgestellt und die Auswirkung der Glättung auf das erweiterte Prinzip analysiert.

Bei der Nutzung des Spannungszustands, der durch die Überbestimmtheit der Aufgabe auf F_u bereits gegeben ist, muß berücksichtigt werden, daß dieser Zustand nicht zwangsläufig in der eindeutigen, unbekannten Lösung der Aufgabe enthalten ist. Es wird daher eine heuristische Ergänzung zum erweiterten Prinzip notwendig. Diese Ergänzung wird in Kapitel 3.4 vorgestellt und analysiert.

Die Nutzung des Spannungszustands setzt die Bestimmung des Zustands aus der Differentiation der Verschiebungsrandbedingungen auf F_u voraus. Diese Bestimmung ist nur dann möglich, wenn diese Bedingungen konsistent mit den Bestimmungsgleichungen der Randwertaufgabe formuliert sind. Das ist insbesondere für Ecken und Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete selten der Fall, wie nachfolgend gezeigt wird.

Ecken und Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete: In Bild 3.4 sind ein Tetraeder, ein Keil und eine Pyramide dargestellt. Für jedes Polyeder ist ein exemplarischer Randpunkt gekennzeichnet, für den keine eindeutige Außennormale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ existiert. Die eindeutigen Außennormalen $\mathbf{n}_k$ der zu dem betrachteten Punkten adjazenten Flächenstücke sowie normierte Vektoren $\mathbf{t}^k$, welche die Ebene von Flächenstücken aufspannen, sind angegeben. Auf einem Flächenstück ist in der Umgebung der gekennzeichneten Punkte in jeder Raumrichtung i mit $i = 1, 2, 3$ entweder eine Komponente u_i des Verschiebungszustands oder eine Komponente s_i des Randspannungszustands vorgeschrieben. In der Umgebung der Punkte wird $\mathcal{C}_0$ -Kontinuität für den vorgeschriebenen Zustand unterstellt.

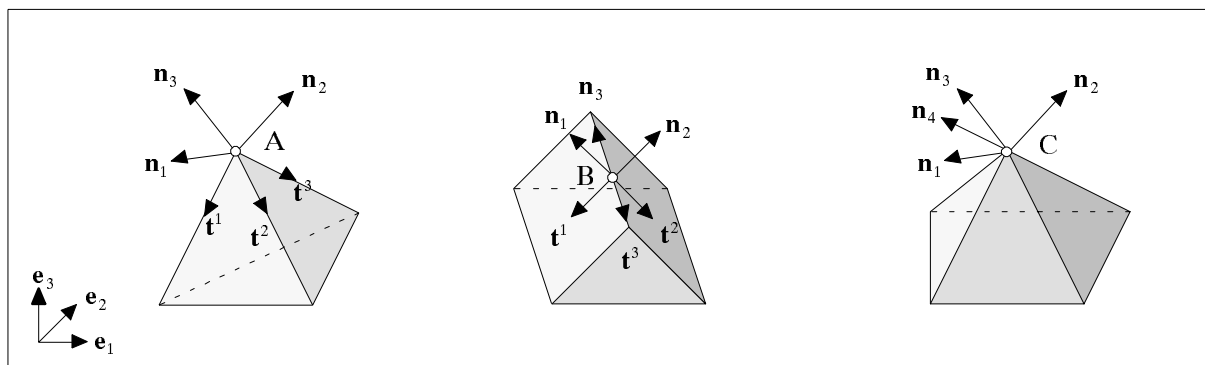


Bild 3.4 : Punkte mit nicht eindeutiger Außennormale

Verschiebungsrandbedingungen: Am Punkt A des Tetraeders in Bild 3.4 sind drei Flächenstücke mit einem Eckpunkt inzident. Die drei Außennormalen $\mathbf{n}_k$ und die drei Kantenvektoren $\mathbf{t}^k$ mit Einheitslänge bilden ein duales, normiertes, schiefwinkeliges Basenpaar $\mathbf{B}_* = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3]$ und $\mathbf{B}^* = [\mathbf{t}^1 \mathbf{t}^2 \mathbf{t}^3]$. Differentiation der gegebenen Verschiebungen in Richtung der kovarianten Basisvektoren von $\mathbf{B}^*$ und anschließende Multiplikation mit der kontravarianten Basis $\mathbf{B}^*$ liefert

den Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$ bezüglich der globalen kartesischen Einheitsbasis $\mathbf{e}_i$. Damit sind dann der Dehnungszustand $\mathbf{G}$, der Spannungszustand $\mathbf{S}$ und die Randspannungen s am Punkt A des Tetraeders bestimmt.

Am Punkt B des Keils in Bild 3.4 sind zwei Flächenstücke mit einem Punkt auf einer Kante inzident. Für jede Komponente u_i des Verschiebungszustandes können daher vier partielle Richtungsableitungen bestimmt werden. Wegen der C_0 -Kontinuität einer Komponente u_i längs der gemeinsamen Kante $\mathbf{t}^3$ sind die partiellen Ableitungen in dieser Richtung gleich. Es stehen wiederum für jede Verschiebungskomponente u_i drei Richtungsableitungen zur Verfügung. Die Ermittlung des Spannungszustands erfolgt wie für das Tetraeder beschrieben, wobei $\mathbf{n}_3$ gleich dem negativen Vektor $\mathbf{t}^3$ der gemeinsamen Kante der Flächenstücke gesetzt wird.

Am Punkt C der Pyramide in Bild 3.4 sind vier Flächenstücke mit einem Eckpunkt inzident. Es können acht partielle Richtungsableitungen für jede Komponente u_i des Verschiebungszustandes bestimmt werden. Wegen der C_0 -Kontinuität längs der gemeinsamen Kanten sind vier dieser Ableitungen linear abhängig. Es stehen also insgesamt zwölf Richtungsableitungen für die neun Koordinaten des Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$ zur Verfügung. Die Aufgabe ist überbestimmt. Ein eindeutiger Spannungszustand am Eckpunkt kann für ein beliebiges gegebenes Verschiebungsfeld mit C_0 -Kontinuität nicht angegeben werden. Das gilt gleichermaßen für eine größere Anzahl als vier inzidenter Flächenstücke.

Beispiel: Zur Illustration werden die in Bild 3.4 gezeigten Polyeder als Finite Elemente der Diskretisierung eines dreidimensionalen Lösungsgebietes angenommen. Die Eckpunkte der Polyeder sind Stützstellen des Verschiebungsansatzes $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$. Die Werte eines auf dem Rand gegebenen Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ mit C_0 -Kontinuität sind an den Stützstellen eingepreßt. An den Punkten A, B und C wird für jede Elementform durch Differentiation des Ansatzes $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ ein eindeutiger Verschiebungsgradient $\mathbf{U}^h$ bestimmt.

Auf einer Seitenfläche des Tetraeders hängt der Verschiebungsansatz $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ nur von den Stützwerten an den Eckpunkten der Seitenfläche ab. Das gilt gleichermaßen für den Keil. Hingegen ist der Verschiebungsansatz $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ auf einer Seitenfläche der Pyramide wegen der Abbildung von normalisierten auf globale Koordinaten abhängig von den Stützwerten aller Eckpunkte. Am Punkte A des Tetraeders und am Punkt B des Keils ist der Verschiebungsgradient $\mathbf{U}^h$ daher gleich dem Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$, der aus der Differentiation der gegebenen Randbedingungen gewonnenen wird. Am Punkt C der Pyramide ist der Verschiebungsgradient $\mathbf{U}^h$ für beliebige Stützwerte bereits ein geglätteter Näherungswert eines gegebenen, inkonsistenten Zustands.

Spannungsrandbedingungen: Der symmetrische Spannungstensor $\mathbf{S}$ besitzt sechs linear unabhängige Koordinaten. Für jedes Flächenstück können drei Koordinaten als Randbedingung spezifiziert worden sein. Am Punkt A des Tetraeders und am Punkt C der Pyramide in Bild 3.4 sind damit mehr als sechs Koordinaten gegeben. Am Punkt B des Keils können die Schubspannungen orthogonal zur Kante $\mathbf{t}^3$ nicht frei gewählt werden. Für jedes der in Bild 3.4 dargestellten Polyeder kann daher kein eindeutiger Spannungszustand $\mathbf{S}$ für beliebige, gegebene Werte der Randspannung s_i angegeben werden. Bei einer freien Wahl der Randbedingungen wird ein zu den Bestimmungsgleichungen des Randwertproblems inkonsistenter, widersprüchlicher Zustand spezifiziert.

Die Verträglichkeit der auf F_q gegebenen Randspannungen s_0 mit den Randspannungen aus der Differentiation des Verschiebungsfeldes ist sowohl für das Prinzip virtueller Verschiebungen als auch für seine Erweiterung Teil der schwachen Formulierung und muß *a priori* nicht hergestellt sein. Auf dem Rand F_q steht die Randspannung durch die Randbedingung s_0 bereits fest.

Eine Näherung ist hier nicht sinnvoll. Die Diskussion der Spannungsrandbedingungen dient ausschließlich der Analyse der gemischten Randbedingungen.

Gemischte Randbedingungen: Am Punkt A des Tetraeders und am Punkt B des Keils in Bild 3.4 ist mit einer Komponente u_i die Zeile i des Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$ eindeutig bestimmt. Am Punkt C der Pyramide ist die Zeile i des Verschiebungsgradienten $\mathbf{U}$ bereits überbestimmt. Aus Zeile und Spalte i folgt die Normaldehnung ϵ_{ii} . Für die Gleitung ϵ_{ij} ist zusätzlich die Ableitung der Verschiebungskomponente u_j in Richtung i notwendig. Der vollständige Dehnungszustand $\mathbf{G}$ kann also nur dann angegeben werden, wenn alle drei Komponenten des Verschiebungszustandes bekannt sind. Werden zusätzlich die gegebenen Randspannungen s_j in den zu u_i orthogonalen Koordinatenrichtungen j berücksichtigt, müssen diese wiederum einem konsistenten Zustand gehorchen.

Glättung des Zustands: Aus den Ausführungen ist ersichtlich, daß ein eindeutiger Spannungszustand $\mathbf{S}$ an Ecken und Kanten allein aus den gegebenen Randbedingungen auf F_u nur dann zu ermitteln ist, wenn diese Bedingungen konsistent mit den Bestimmungsgleichungen der Randwertaufgabe sind. Konsistente Randbedingungen können *a priori* hergestellt werden, schränken aber die Modellierung realistischer Aufgabenstellungen erheblich ein. Der Spannungszustand $\mathbf{S}$ an Ecken und Kanten des Verschiebungsrandes F_u und an gemischten Rändern wird daher näherungsweise bestimmt.

Die näherungsweise Bestimmung nutzt aus, daß zum Zeitpunkt der Bestimmung der Randspannungen mit dem erweiterten Prinzip mittels Gleichung (40) die Verschiebungslösung aus Gleichung (39) bereits bekannt ist. Es kann entweder mit den Stützwerten der Verschiebung ein Verschiebungsfeld mit C_1 -Kontinuität oder mit den Spannungszuständen an den Gaußpunkten ein Spannungsfeld mit C_0 -Kontinuität konstruiert werden. Dieser geglättete Spannungszustand wird ausgenutzt, um die Ergebnisse für die Randspannung aus dem erweiterten Prinzip an Ecken und Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete zu verbessern.

Als Methode für die Glättung wird die gewichtete Fehlerquadrat Interpolation vorgeschlagen, die in Kapitel 3.3 vorgestellt wird. Sie ist Grundlage der gitterlosen Galerkin Verfahren [5]. Einen Überblick über andere bekannte Verfahren zur Spannungsglättung bietet [27].

3.2 Glättung des Randes

Zur Förderung der Übersichtlichkeit wird zunächst ein zweidimensionales Polyeder betrachtet. Die Eindeutigkeit der Außennormale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ an allen Punkten des Randes wird durch Ausrundung des Randes hergestellt. In jede Ecke des Polyeders wird ein Kreis so angelegt, daß die mit der Ecke inzidenten geraden Linienstücke tangential an den Kreis anliegen. Anstelle der Ecke wird der durch den Berührungspunkt der Tangenten festgelegte Kreisabschnitt betrachtet. Das Lösungsgebiet wird somit an konvexen Ecken verkleinert und an reentranten Ecken vergrößert. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, wenn der Polyeder eine Idealisierung realer Geometrie darstellt.

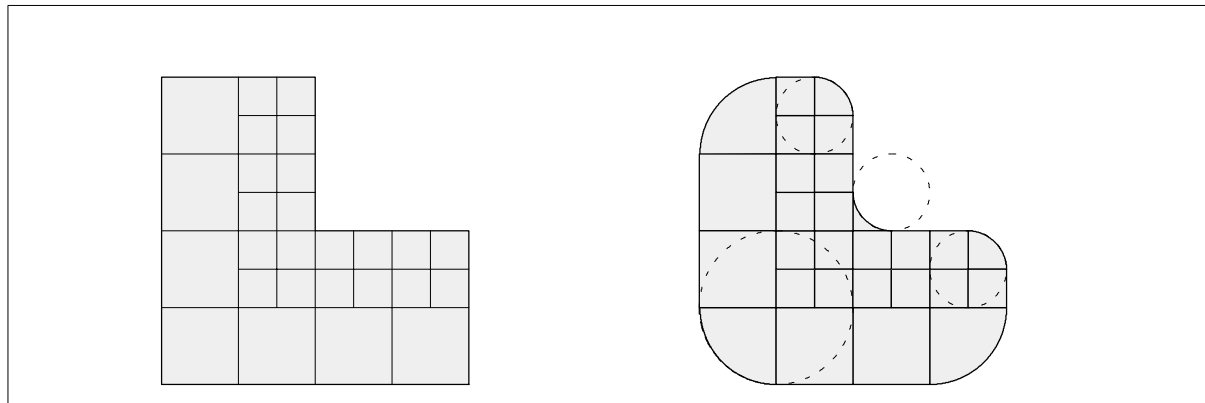


Bild 3.5 : Glättung des Randes

Es wird vorausgesetzt, daß bereits eine angemessene Elementierung für die Aufgabe bekannt ist. Die in diesem lokalen Bereich einer Ecke des Polyeders verwendete, durchschnittliche Gitterweite h wird als Radius R des Kreisabschnitts angesetzt. Das Vorgehen ist in Bild 3.5 illustriert. Der Einfluß der Ausrundung auf das Ergebnis für die Randspannung aus dem erweiterten Prinzip wird anhand einer Modellaufgabe untersucht.

Modellaufgabe: Gegeben seien ein zweidimensionales, kreisförmiges Lösungsgebiet $K(x_1, x_2)$ mit $x_1^2 + x_2^2 \leq 2$ und ein lineares Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [x_1, 0]^T$. Ein Einheitskreis $E(x_1, x_2)$ mit $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ wird aus dem Lösungsgebiet K ausgeschnitten. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten r und φ ist der Spannungsvektor, wie in Bild 3.6 illustriert, normal zum Rand des Kreises E durch $\mathbf{s}^+(\varphi) = [\cos \varphi, 0]^T$ bestimmt und gleich dem negativen Spannungsvektor $\mathbf{s}^-(\varphi)$ normal zum Innenrand des Kreisrings K/E . Die Aufgabe entspricht damit der Ausrundung der Modellaufgabe aus Kapitel 3.1.

Vorgehen bei der Lösung: Es werden drei unterschiedliche Vorgehensweisen zur Erfassung der kreisförmigen Geometrie untersucht:

- ◇ Polygonale Näherung des Kreises
- ◇ Näherung unter Verwendung einer Spline Interpolation
- ◇ Exakte Erfassung des Kreises

Für die Erfassung wird der Kreis K in N Kreisabschnitte mit dem Öffnungswinkel $\Theta = \frac{2\pi}{N}$ unterteilt. Für die Untersuchung konvexer Ecken werden finite Elemente auf den Segmenten des Einheitskreises E spezifiziert. Für die Untersuchung reentranten Ecken erfolgt die Spezifikation auf den Segmenten des Kreisrings K/E mit $1 \leq r \leq 2$. Im folgenden werden Unterteilungen mit $N = \{4, 8, 16\}$ betrachtet.

Ansatz: Der Verschiebungszustand in einem Segment des Einheitskreises E wird mit einem Stützvektor $\mathbf{u}_{(1)}$ am Mittelpunkt und jeweils einem Stützvektor $\mathbf{u}_{(2)}$ und $\mathbf{u}_{(3)}$ am Schnittpunkt der beiden Schenkel des Segmentes mit dem Rand des Kreises interpoliert. Der Verschiebungszustand in einem Segment des Kreisrings K/E wird mit den Stützvektoren $\mathbf{u}_{(1)}$, $\mathbf{u}_{(2)}$, $\mathbf{u}_{(3)}$ und $\mathbf{u}_{(4)}$ am Schnittpunkt der beiden Schenkel mit dem Rändern des Ringes interpoliert. Die exakten Werte des Verschiebungsfeldes sind den Stützvektoren eingeprägt.

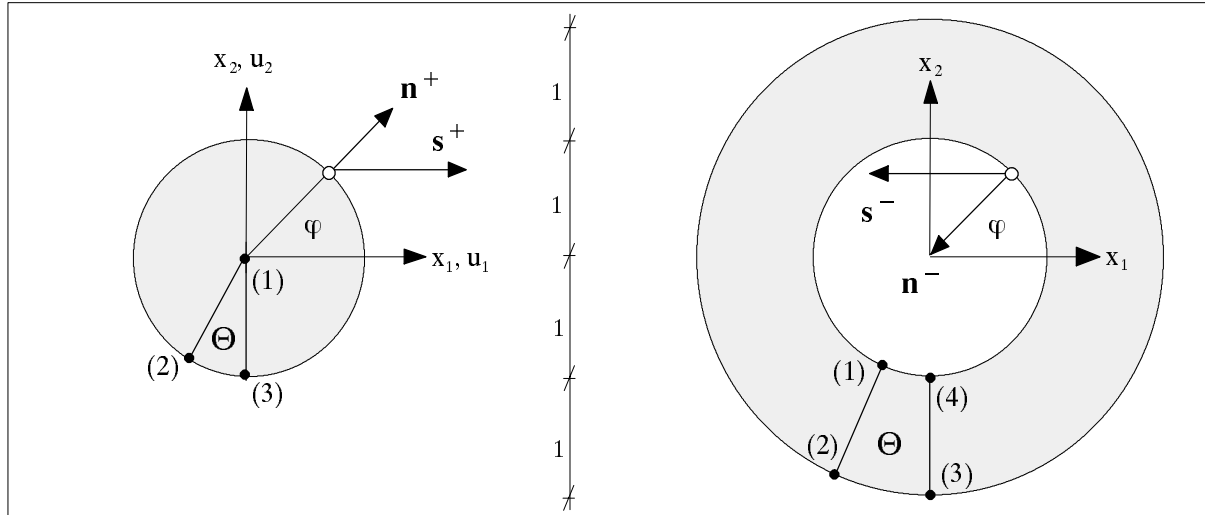


Bild 3.6 : Lösungsgebiet: links konvex, rechts reentrant

An den Stützstellen der Verschiebung auf dem Rand des Einheitskreises E werden Stützvektoren $\mathbf{s}_{(j)}$ der Randspannung $\mathbf{s}$ eingeführt. Die Komponente s_i der Randspannung wird zwischen diesen Stützstellen linear interpoliert.

$$s_i = s_{i(1)}(1 - z) + s_{i(2)}z \quad \forall z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 1 \quad (54)$$

Da die Verschiebungen an den Stützstellen bereits eingeprägt sind, genügt es die Lösung der Gleichung (40) aus dem erweiterten Prinzip zu bestimmen. Daraus wird eine Näherung für die Randspannung $\mathbf{s}$ erhalten. Da keine Querdehnung auftritt, ist die Komponente $s_{2(j)}$ an allen Stützstellen j Null. Die Komponente $s_{1(j)}$ ist symmetrisch bezüglich der Achse x_1 und antisymmetrisch bezüglich der Achse x_2 . Es genügt daher weiterhin, die Näherung für s_1 im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit der exakten Lösung zu vergleichen.

3.2.1 Polygonale Näherung

Konvex: Die konvexe Ecke wird mit Dreiecken angenähert. Dafür wird ein linearer Ansatz in normalisierten Dreieckskoordinaten gewählt:

$$x_i(z_1, z_2, z_3) = x_{i(1)}z_1 + x_{i(2)}z_2 + x_{i(3)}z_3$$

mit

$$\forall z_j \in \mathbb{R} : 0 \leq z_j \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^3 z_j = 1 \quad (55)$$

Durch Substitution von $z_1 = 0$ wird die Näherung des Kreisrands mit geraden Randstücken erfaßt.

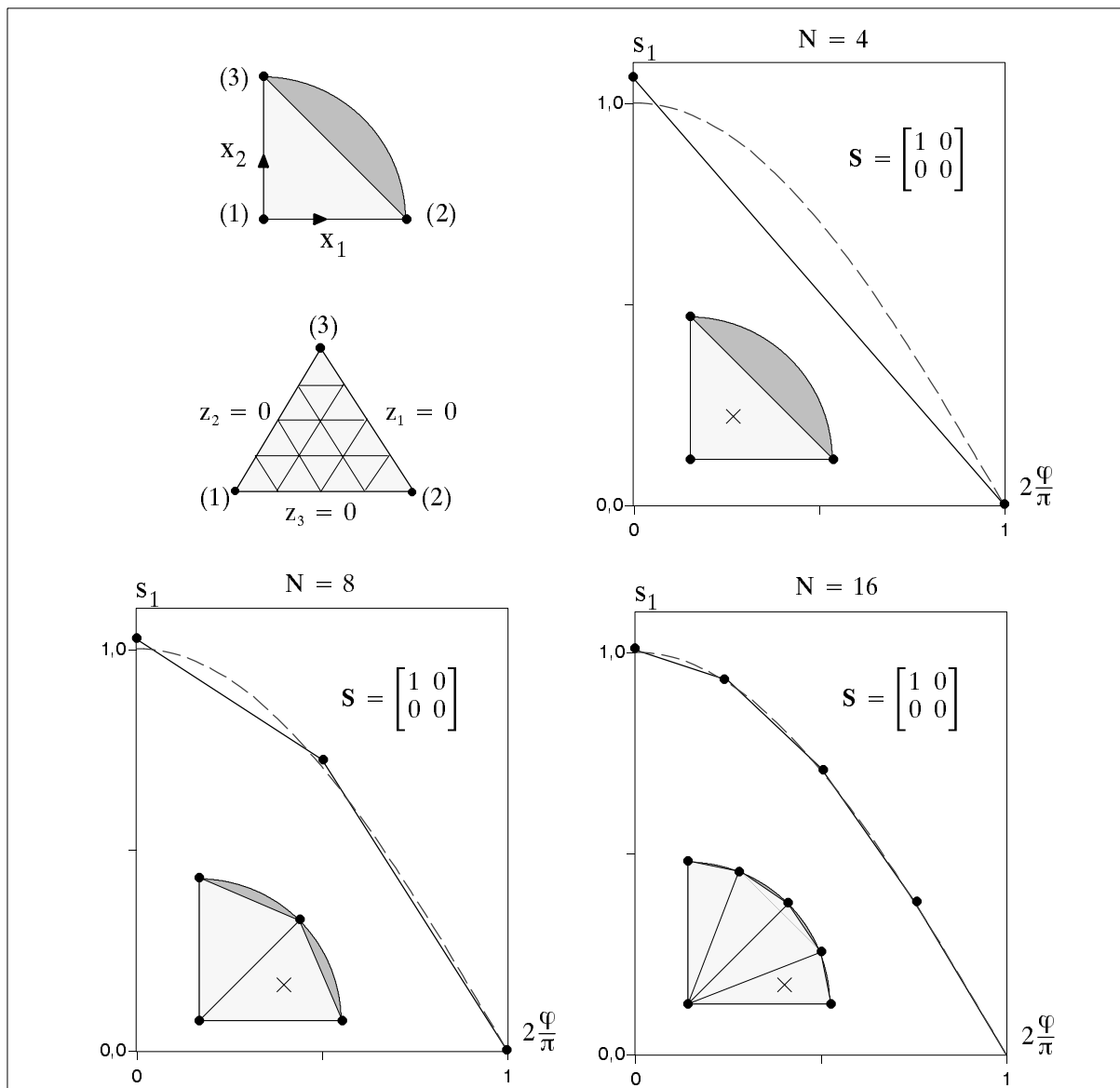


Bild 3.7 : Polygonale Näherung der konvexen Ecke

Als Interpolationsansatz für die Verschiebung wird ein bezüglich der Geometrie isoparametrischer, linearer Ansatz eingesetzt:

$$u_i(z_1, z_2, z_3) = u_{i(1)}z_1 + u_{i(2)}z_2 + u_{i(3)}z_3 \quad (56)$$

Reentrant: Die reentranten Ecke wird mit Viereckselementen angenähert. Dafür wird ein bilinearer Ansatz in normalisierten Koordinaten gewählt:

$$x_i(z_1, z_2) = x_{i(1)}p_1p_2 + x_{i(2)}q_1p_2 + x_{i(3)}q_1q_2 + x_{i(4)}p_1q_2$$

mit

$$p_j = \frac{1}{2}(1 - z_j) \quad q_j = \frac{1}{2}(1 + z_j)$$

$$\forall z_j \in \mathbb{R} : -1 \leq z_j \leq 1 \quad (57)$$

Durch Substitution von $z_1 = -1$ wird die Näherung des Kreisrands mit geraden Randstücken erfaßt.

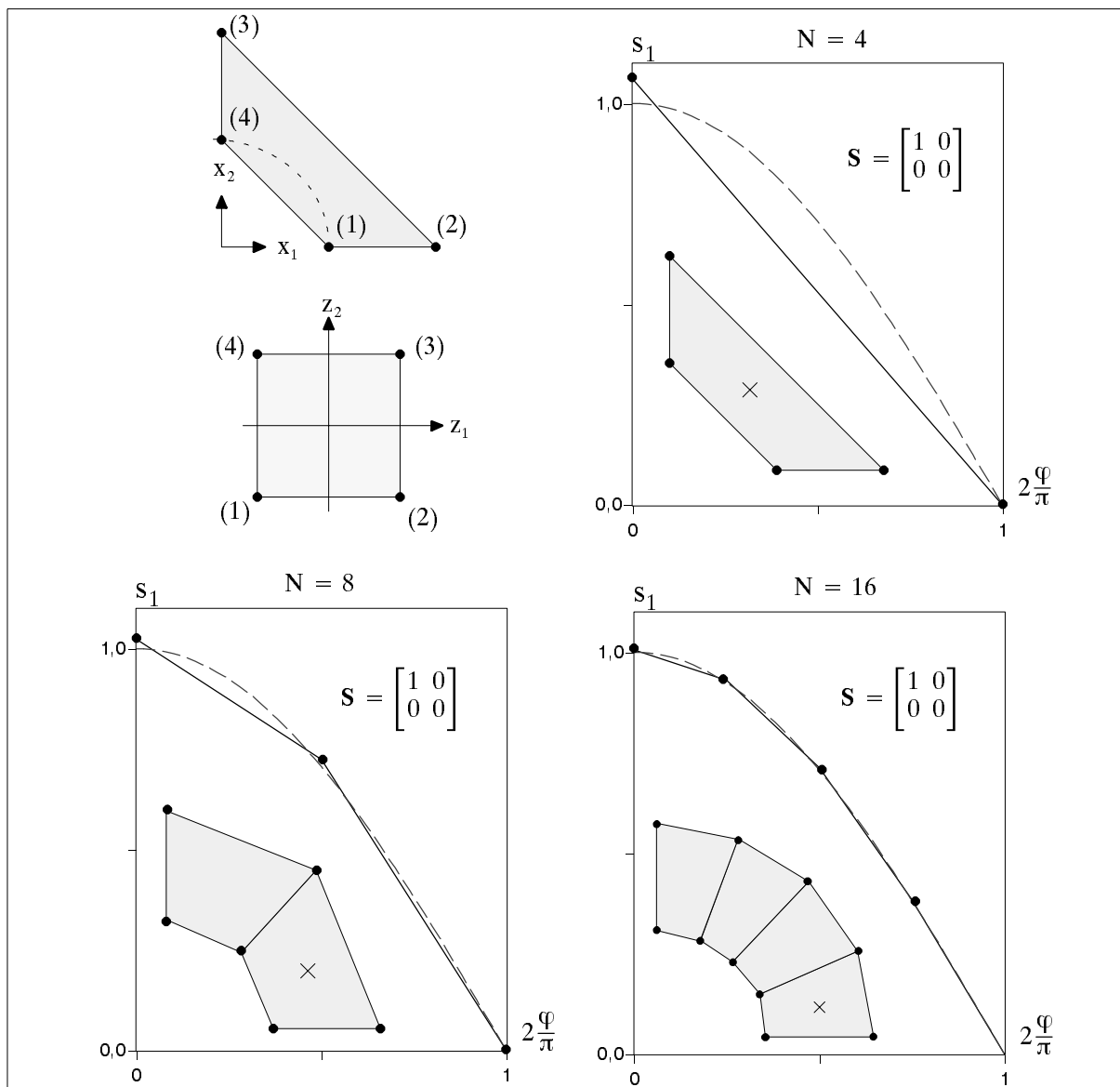


Bild 3.8 : Polygonale Näherung der reentranten Ecke

Als Interpolationsansatz für die Verschiebung wird ein bezüglich der Geometrie isoparametrischer, bilinearer Ansatz eingesetzt:

$$u_i(z_1, z_2) = u_{i(1)}p_1p_2 + u_{i(2)}q_1p_2 + u_{i(3)}q_1q_2 + u_{i(4)}p_1q_2 \quad (58)$$

Beurteilung: Die Ergebnisse der Näherung der konvexen Ecke mit Dreiecken und der Näherung der reentranten Ecke sind in Bild 3.7 und Bild 3.8 illustriert. In den Diagrammen ist die Näherungslösung und der exakte Verlauf für die Spannungskomponente $s_1 = \cos \varphi$ für die unterschiedlichen Elementierungen aufgetragen. Außerdem ist die Belegung der Spannungsmatrix $\mathbf{S}$ des mit einem Kreuz gekennzeichneten Elementes angegeben.

In beiden Fällen ist bereits mit grober Diskretisierung eine gute Näherung für den Verlauf der Randspannung eines konstanten Spannungszustands auf einer ausgerundeten Ecke erzielt. Unabhängig von der Diskretisierung vermag der lineare Elementansatz zudem den Spannungszustand exakt wiederzugeben. Das Ergebnis für die Randspannungskomponente s_1 ist im konvexen Fall gleich dem negativen Ergebnis im reentranten Fall, was im folgenden erläutert wird.

Aus der Vereinigung der Elemente des Kreises E mit denen des Kreisringes K/E folgt eine Elementierung des Kreises K . Anstelle einer separaten Berechnung der Fälle wird eine Berechnung der Gleichung (39) mit der Vereinigung der Elemente durchgeführt, wobei ausschließlich den Stützwertevektoren auf dem Kreisrand $r = 2$ die exakten Werte des Verschiebungsfeldes eingeprägt sind. Da der Elementansatz das Verschiebungsfeld exakt darstellen kann, werden genau die für die separate Berechnung eingeprägten, exakten Größen der Stützwertevektoren der Verschiebung erhalten.

Für die anschließende Berechnung der Gleichung (40) werden die Elemente durch einen Schnitt wieder in die ursprünglichen Mengen zerlegt. Aus der Berechnung der rechten Seite von Gleichung (40) für den Kreis E oder Kreisring K/E folgen die Schnittkräfte an den Stützstellen. Sie stehen im Gleichgewicht. Die Lösung der Gleichung (40) führt daher zu einem Ergebnis für die Randspannung, das sich nur im Vorzeichen unterscheidet. Die weiterhin betrachteten Elementansätze sind nicht in der Lage, das Verschiebungsfeld exakt darzustellen. Somit stimmen die eingeprägten Stützwerte nicht mit dem Ergebnis einer Berechnung mit der Vereinigung der Elemente überein. Demzufolge ist auch das Ergebnis für die Randspannung nicht komplementär.

3.2.2 Spline Näherung

Konvex: Betrachtet wird eine Sekante der Länge L , die durch die Schnittpunkte der Schenkel eines Segmentes mit dem Kreisrand gebildet wird. Am Mittelpunkt der Sekante wird eine lokale orthonormierte Basis $\mathbf{B}$ eingeführt (Bild 3.9). Die lokale Koordinate y_i transformiert linear bezüglich dieser Basis in die globale Koordinate x_i :

$$x_i = B_{ij}y_j + x_{0i} \quad i, j = \{1, 2\} \quad (59)$$

Der Kreisrand wird mit einem kubischen Polynom $y_2(y_1) = c_0 + c_1y_1 + c_2y_1^2 + c_3y_1^3$ in Abhängigkeit von der Koordinate y_1 angenähert. Die Koeffizienten des Polynoms werden unter Verwendung der bekannten Stützwerte $y_2\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ und $y_2\left(-\frac{L}{2}\right) = 0$ sowie den Ableitungen $\frac{\partial y_2}{\partial y_1}\left(\frac{L}{2}\right) = -\tan\frac{\Theta}{2}$ und $\frac{\partial y_2}{\partial y_1}\left(-\frac{L}{2}\right) = \tan\frac{\Theta}{2}$ bestimmt, die aus den Tangenten an den Kreisrand gewonnen werden. Die Ableitung an benachbarten Randstücken ist somit gleich. Dadurch ist die Eindeutigkeit der Außennormale $\mathbf{n}$ auf dem gesamten Rand gewährleistet. Aufgrund der Symmetrie verschwindet der kubische Anteil des Polynoms und es verbleibt eine quadratische Interpolation für den gekrümmten Rand eines Segmentes. Der Ortsvektor $\mathbf{y}_{(M)}$ mit den Koordinaten $y_{1(M)} = 0$ und $y_{2(M)} = y_2(0)$ wird durch diese Interpolation ermittelt.

Die Geometrie der konvexen Ecke wird unter Verwendung des zuvor bestimmten Ortsvektors $\mathbf{y}_{(M)}$ mit einer unvollständig quadratischen Vorschrift in normalisierten Dreieckskoordinaten interpoliert:

$$y_i(z_1, z_2, z_3) = y_{i(1)}(2z_1^2 - z_1 + 2z_1z_2 + 2z_3z_1) + y_{i(2)}(2z_2^2 - z_2 + 2z_1z_2) + y_{i(3)}(2z_3^2 - z_3 + 2z_1z_3) + y_{i(M)}(4z_2z_3) \\ \forall z_j \in \mathbb{R} : 0 \leq z_j \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^3 z_j = 1 \quad (60)$$

Durch Substitution von $z_3 = 0$ ist die Geometrie des quadratischen Verlaufs des Randstücks auf dem Kreisrand erfasst.

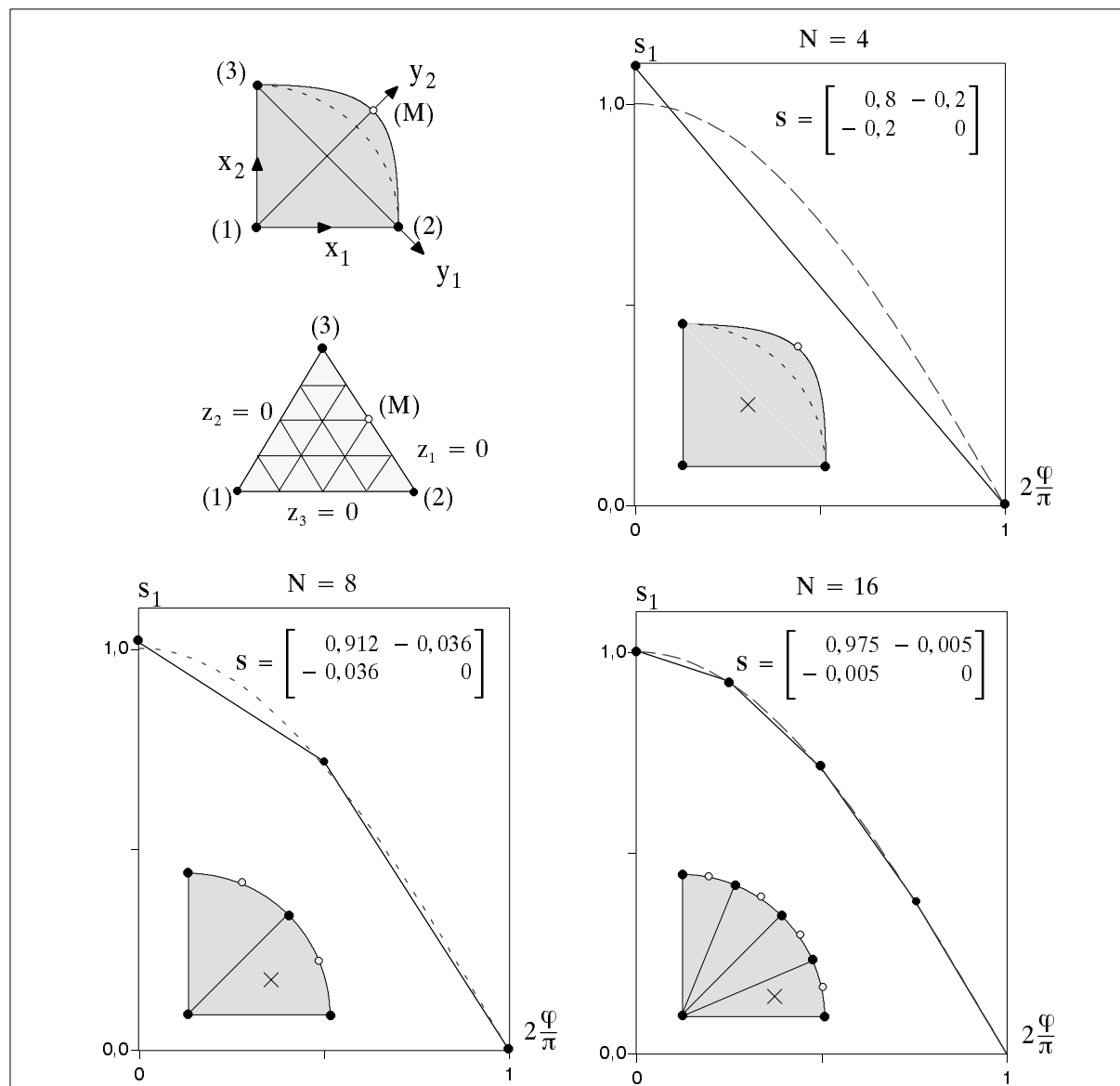


Bild 3.9 : Näherung der konvexen Ecke mit einem Spline

Als Interpolationsansatz für die Verschiebung wird ein bezüglich der Geometrie subparametrischer, linearer Ansatz eingesetzt:

$$u_i(z_1, z_2, z_3) = u_{i(1)}z_1 + u_{i(2)}z_2 + u_{i(3)}z_3 \quad (61)$$

Reentrant: Die Geometrie der reentranten Ecke wird mit einer unvollständig quadratischen Vorschrift in normalisierten Koordinaten interpoliert. Dafür wird wiederum der zuvor bestimmte Ortsvektor $y_{(M)}$ eingesetzt:

$$y_i(z_1, z_2) = y_{i(1)}\left(p_1 p_2 - \frac{1}{2} p_1 m_2\right) + y_{i(2)} q_1 p_2 + y_{i(3)} q_1 q_2 + y_{i(4)}\left(p_1 q_2 - \frac{1}{2} p_1 m_2\right) + y_{i(M)} p_1 m_2$$

$$\forall z_j \in \mathbb{R} : -1 \leq z_j \leq 1$$

$$\text{mit} \quad p_j = \frac{1}{2}(1 - z_j) \quad m_j = (1 - z_j)(1 + z_j) \quad q_j = \frac{1}{2}(1 + z_j) \quad (62)$$

Durch Substitution von $z_1 = -1$ ist die Geometrie des quadratischen Verlaufs des Randstücks auf dem Kreisrand erfaßt.

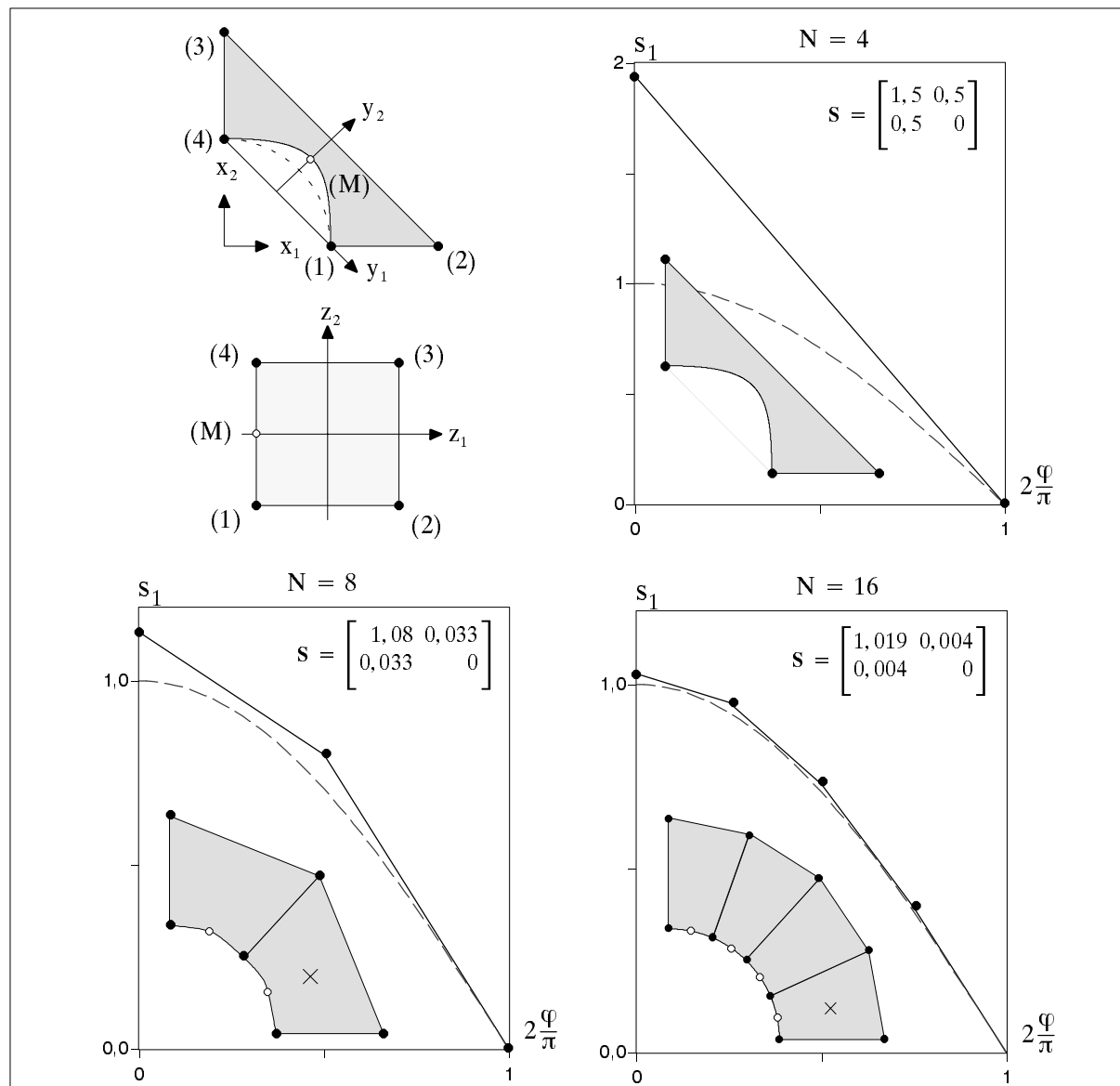


Bild 3.10 : Näherung der reentranten Ecke mit einem Spline

Als Interpolationsansatz für die Verschiebung wird ein bezüglich der Geometrie subparametrischer, linearer Ansatz eingesetzt:

$$u_i(z_1, z_2) = u_{i(1)} p_1 p_2 + u_{i(2)} q_1 p_2 + u_{i(3)} q_1 q_2 + u_{i(4)} p_1 q_2 \quad (63)$$

Beurteilung: Die Ergebnisse der Näherung des Kreises mit einem Spline sind in Bild 3.9 und in Bild 3.10 dargestellt. Im konvexen Fall wird bereits mit grober Elementierung eine befriedigende Näherung erzielt. In reentranten Fall ist eine größere Anzahl von Elementen notwendig. Mit zunehmender Güte der Näherung für die Randspannung verbessert sich auch das Ergebnis für den Spannungszustand. Der konstante Spannungszustand wird in beiden Fällen nicht wiedergegeben. Im folgenden wird die dafür verantwortliche Schwäche iso- oder subparametrischer Elementansätze erläutert, die aus [38] entnommen wird:

Gegeben sei eine bilineare Abbildung $U_{\text{global}} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ mit vier freien Parametern $a_{i(k)}$ für jede Richtung i :

$$u_i(x_1, x_2) = a_{i(0)} + a_{i(2)} x_1 + a_{i(3)} x_2 + a_{i(4)} x_1 x_2 \quad (64)$$

und weiterhin eine lineare Abbildung $X : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit drei freien Parametern $b_{i(k)}$ für jede Richtung i :

$$x_i(y_1, y_2) = b_{i(0)} + b_{i(2)} y_1 + b_{i(3)} y_2 \quad (65)$$

Die Abbildungen werden gekettet. Die resultierende Abbildung $U_{\text{lokal}} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ist vollständig quadratisch und besitzt daher 6 Parameter $c_{i(k)}$ für jede Richtung i , die mit den freien Parametern $a_{i(k)}$ und $b_{i(k)}$ ausgedrückt werden können.

$$u_i(y_1, y_2) = c_{i(0)} + c_{i(2)} y_1 + c_{i(3)} y_2 + c_{i(4)} y_1 y_2 + c_{i(5)} y_1^2 + c_{i(6)} y_2^2 \quad (66)$$

Im vorliegenden Fall einer Kettung eines gegebenen linearen Feldes $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [x_1, 0]^T$ mit der durch die Gleichung (59) gegebenen linearen Koordinatentransformation $\mathbf{x}(y_1, y_2)$ ist die resultierende Abbildung $\mathbf{u}(y_1, y_2)$ weiterhin linear. Die Koordinatentransformation (59) nimmt keinen Einfluß.

Betrachtet wird weiterhin eine bilineare Abbildung $U_{\text{lokal}} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ mit vier freien Parametern $c_{i(k)}$ für jede Richtung i :

$$u_i(y_1, y_2) = c_{i(0)} + c_{i(2)} y_1 + c_{i(3)} y_2 + c_{i(4)} y_1 y_2 \quad (67)$$

und eine bilineare Vorschrift $Y : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ mit vier freien Parametern $d_{i(k)}$ für jede Richtung i :

$$y_i(z_1, z_2) = d_{i(0)} + d_{i(2)} z_1 + d_{i(3)} z_2 + d_{i(4)} z_1 z_2 \quad (68)$$

Die Abbildungen werden gekettet. Die resultierende Abbildung $U_{\text{normal}} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ist vollständig biquadratisch und besitzt daher neun Parameter $e_{i(k)}$ für jede Richtung i , die mit den freien Parametern $c_{i(k)}$ und $d_{i(k)}$ ausgedrückt werden können.

$$u_i(z_1, z_2) = e_{i(0)} + e_{i(2)} z_1 + e_{i(3)} z_2 + e_{i(4)} z_1 z_2 + e_{i(5)} z_1^2 + e_{i(6)} z_2^2 + e_{i(7)} z_1^2 z_2 + e_{i(8)} z_1 z_2^2 + e_{i(9)} z_1^2 z_2^2 \quad (69)$$

Im vorliegenden Fall der Kettung der linearen Abbildung $\mathbf{u}(y_1, y_2)$ mit den unvollständig quadratischen Geometriedarstellungen $\mathbf{y}(z_1, z_2)$ aus Gleichung (60) und (62) ist die resultierende Abbildung $\mathbf{u}(z_1, z_2)$ unvollständig quadratisch. Der für den konvexen Fall gewählte Elementansatz (61) ist hingegen linear und im reentranten Fall (63) bilinear. Die Ansätze können daher das gegebene lineare Feld nicht darstellen.

3.2.3 Exakte Erfassung der Kreisgeometrie

Konvex: Die exakte Erfassung eines Kreissegmentes erfolgt durch die Spezifikation von Zylinderkoordinaten:

$$x_1(r, \varphi) = r \cos \varphi \quad x_2(r, \varphi) = r \sin \varphi \quad (70)$$

Die Zylinderkoordinaten r und φ werden unter Verwendung unabhängiger normalisierter Koordinaten interpoliert:

$$r = z_1 R \quad \varphi = z_2 \Theta \quad \forall z_i \in \mathbb{R} : 0 \leq z_i \leq 1 \quad (71)$$

Durch Substitution von $z_1 = 1$ wird die Kreisgeometrie exakt erfaßt. Die übrigen Seiten sind gerade und gewährleisten dadurch einen Anschluß an ein Polyeder.

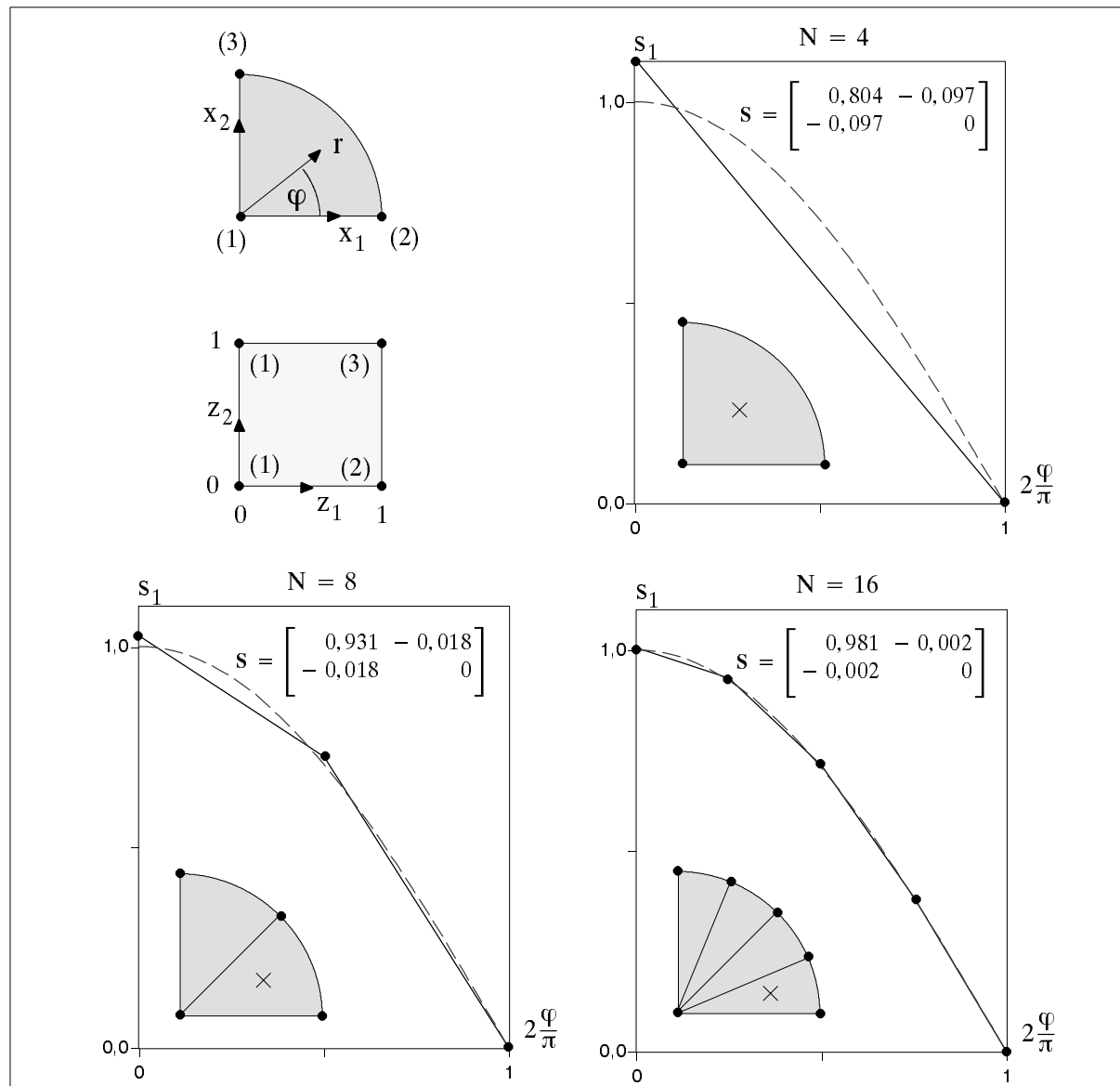


Bild 3.11 : Exakte Erfassung der konvexen Ecke

Für eine konforme Approximation des Verschiebungsfelds wird ein Ansatz mit C_0 -Kontinuität in Abhängigkeit der normalisierten Zylinderkoordinaten durch Inspektion bestimmt:

$$u_i(r, \varphi) = u_{i(1)}(1 - z_1) + u_{i(2)}(1 - z_2)z_1 + u_{i(3)}z_1z_2 \quad (72)$$

Reentrant: Für die Spezifikation der Geometrie eines Segmentes des Kreisrings, die einen lückenlosen Anschluß an ein Polyeder gewährleistet, wird in jedem Segment eine lokale ortho-normierte Basis $\mathbf{B}$ eingeführt, die um den Winkel $\frac{\Theta}{2}$ bezüglich der globalen Einheitsbasis gedreht ist. Die lokale Koordinate y_i transformiert linear bezüglich dieser Basis in die globale Koordinate x_i :

$$x_i = B_{ij}y_j + x_{0i} \quad i, j = \{1, 2\}$$

Am Ursprung des Kreises wird darauf ein Zylinderkoordinatensystem eingeführt, dessen Achse r für $\varphi = 0$ mit der Achse y_1 des lokalen Koordinatensystems inzident ist. Eine Abbildung der Zylinderkoordinaten im Intervall $[R, 2R] \times [-0.5\Theta, 0.5\Theta]$ auf lokale Koordinaten y_i wird durch Inspektion bestimmt.

$$\begin{aligned} y_1(r, \varphi) &= r \cos\left(|\varphi| \left\{2 - \frac{r}{R}\right\} + \frac{\Theta}{2} \left\{\frac{r}{R} - 1\right\}\right) \\ y_2(r, \varphi) &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (73)$$

Bei der Evaluation der Elementintegrale ist zu berücksichtigen, daß die partielle Ableitung $\frac{\partial y_1}{\partial \varphi}$ für $\varphi = 0$ nicht stetig ist. Die Belegung der Jacobi Matrix wird analytisch ermittelt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial r} &= \cos\left(|\varphi| \left\{2 - \frac{r}{R}\right\} + \frac{\Theta}{2} \left\{\frac{r}{R} - 1\right\}\right) - r \sin\left(|\varphi| \left\{2 - \frac{r}{R}\right\} + \frac{\Theta}{2} \left\{\frac{r}{R} - 1\right\}\right) \left(\frac{\Theta}{2R} - \frac{|\varphi|}{R}\right) \\ \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} &= -r \sin\left(|\varphi| \left\{2 - \frac{r}{R}\right\} + \frac{\Theta}{2} \left\{\frac{r}{R} - 1\right\}\right) \text{signum}(\varphi) \left(2 - \frac{r}{R}\right) \\ \frac{\partial y_2}{\partial r} &= \sin \varphi \\ \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} &= r \cos \varphi \end{aligned} \quad (74)$$

Die Zylinderkoordinaten r und φ werden unter Verwendung unabhängiger, normalisierter Koordinaten z_1 und z_2 interpoliert:

$$\begin{aligned} r &= R p_1 + 2R q_1 \\ \varphi &= -\frac{\Theta}{2} p_2 + \frac{\Theta}{2} q_2 \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad p_j = \frac{1}{2}(1 - z_j) \quad q_j = \frac{1}{2}(1 + z_j)$$

$$\forall z_j \in \mathbb{R} : -1 \leq z_j \leq 1 \quad (75)$$

Durch Substitution von $z_1 = -1$ ist die Geometrie des kreisförmigen Verlaufs für $r = R$ erfaßt.

Als Interpolationsansatz für die Verschiebung wird ein bilinearer Ansatz eingesetzt:

$$u_i(z_1, z_2) = u_{i(1)}p_1p_2 + u_{i(2)}q_1p_2 + u_{i(3)}q_1q_2 + u_{i(4)}p_1q_2 \quad (76)$$

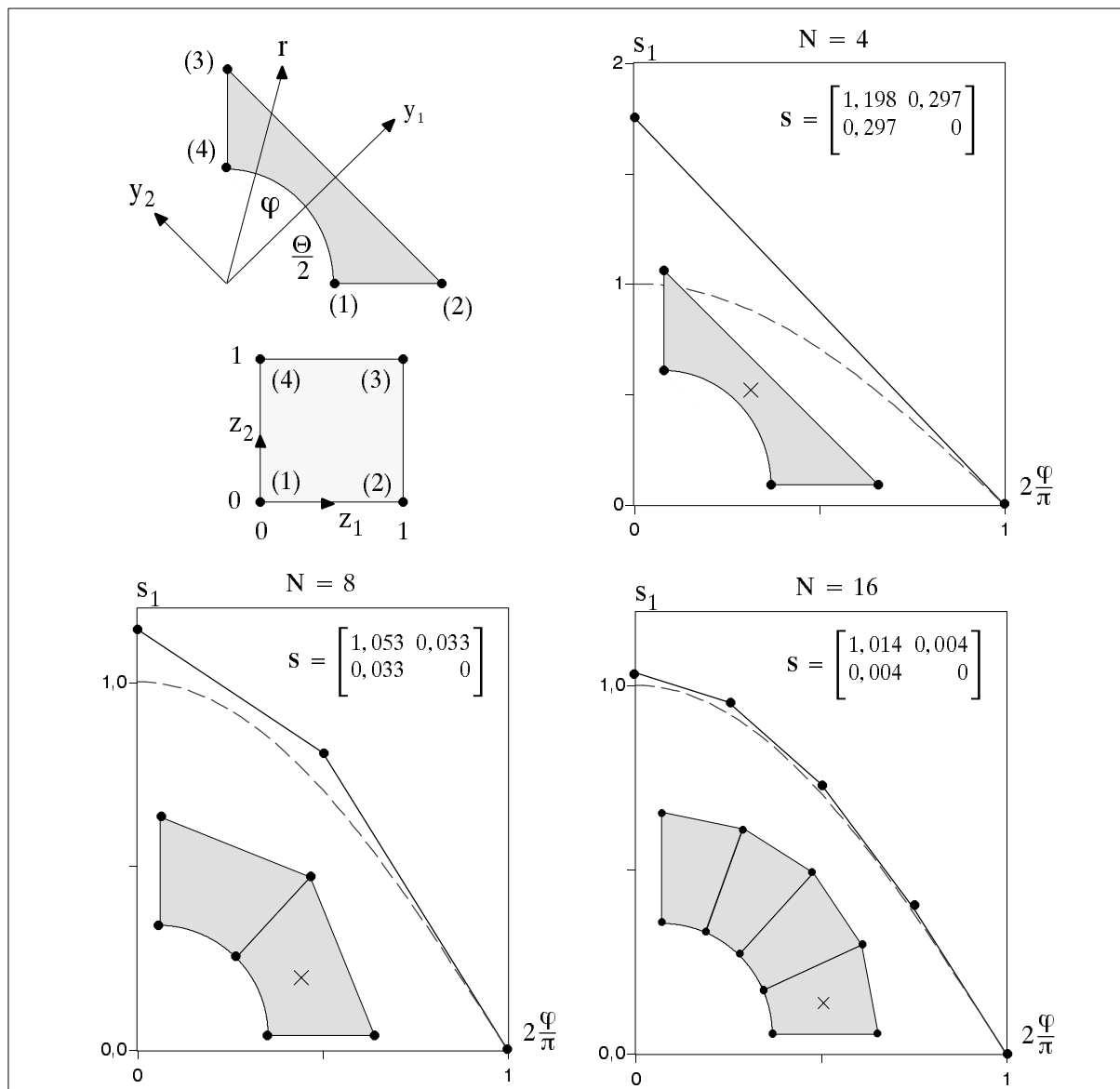


Bild 3.12 : Exakte Erfassung der reentranten Ecke

Beurteilung: Die Ergebnisse der Näherung bei exakter Erfassung der Kreisgeometrie sind in Bild 3.11 und in Bild 3.12 dargestellt. Im konvexen Fall wird bereits mit grober Elementierung eine befriedigende Näherung erzielt. In reentranten Fall ist eine größere Anzahl von Elementen notwendig. Insgesamt sind die Ergebnisse etwas besser als diejenigen, die durch die Näherung mit einem Spline gewonnen werden.

Bezüglich der Güte der Näherung sind die im Falle des Splines getroffenen Aussagen gleichermaßen für die exakte Erfassung der Kreisgeometrie gültig: Das gegebene lineare Feld $u_1(y_1, y_2)$ kann wegen der nicht linearen Abbildung $y_i(r(z_1, z_2), \varphi(z_1, z_2))$ durch den Ansatz $u_1(z_1, z_2)$ nicht dargestellt werden. Es ist aber zu berücksichtigen, daß mit den Ansätzen im Falle des Splines und der exakten Erfassung der Kreisgeometrie ein Funktionenraum aufgespannt wird, der anderen gegebenen Feldern besser angepaßt sein kann.

Bei der Einführung einer nicht linearen geometrischen Abbildung $Y : z \in \mathbb{R}^2 \rightarrow y \in \mathbb{R}^2$ ist darüber hinaus zu berücksichtigen, daß die positive Definitheit der Jacobimatrix $\frac{\partial y_i}{\partial z_k}$ nicht für alle z gewährleistet ist. An einer Nullstelle der Determinante dieser Matrix besitzt ein Elementansatz $u(y)$ bezüglich der lokalen Koordinaten y eine Singularität. Ein Ansatz mit dieser Eigenschaft kann konstruiert werden, um eine erwartete singuläre Antwort der zu

untersuchenden Aufgabe vorwegzunehmen. Im allgemeinen ist aber zu vermeiden, daß die Singularität für Punkte $\mathbf{z}$ auftritt, die innerhalb des Elementes liegen, da mit zunehmender Nähe zur Singularität eine zuverlässige Evaluation des Elementintegrals nicht gewährleistet werden kann.

Erweiterung der Modellaufgabe: Weiterhin wird die Untersuchung eines gegebenen bilinearen Feldes der Form $u_1(x_1, x_2) = a_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_1x_2$ mit den gewählten Elementansätzen diskutiert. Im Rahmen einer linearen Theorie können die Terme superponiert werden. Der konstante Anteil liefert keine Spannungen. Der lineare Anteil in x_1 ist vorangehend untersucht worden. Der lineare Anteil in x_2 liefert ein zur Spannungskomponente s_1 identisches Ergebnis für die Komponente s_2 . Das Untersuchungsergebnis für den bilinearen Anteil wird wegen der mit Gleichung (66) dargestellten Eigenschaften der Koordinatentransformation (65) in gleichem Maße für die Randspannung wie für den Spannungszustand nachteilig beeinflusst. Eine Untersuchung mit einer Querdehnzahl $\nu \neq 0$ führt zu einer Verteilung des Fehlers auf die Komponenten.

Grundsätzlich kann die Darstellbarkeit gegebener Funktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ durch die Einführung weiterer Stützstellen im Ansatz $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ für die Verschiebungen erreicht werden. Entsprechend kommt es dann zur Einführung weiterer Stützstellen für die Randspannung $\mathbf{s}(\mathbf{z})$. Aus den Eigenschaften der Abbildungen (65) und (68) ist ersichtlich, daß bereits für die Darstellung eines gegebenen, polynominalen Verschiebungsfeldes mit niedrigem Grad ein polynominaler Ansatz mit relativ hohem Grad erfolgen muß. Die Konstruktion eines solchen Ansatzes wird durch die Forderung nach einem C_0 -kontinuierlichen, konformen Anschluß an ein benachbartes Element mit niedrigem Polynomgrad erschwert.

Beurteilung: Durch die Ausrundung von Ecken wird das Randwertproblem wohldefiniert. Dann geht auch die Lösung für die Randspannung aus dem erweiterten Prinzip in die analytisch exakte Lösung der Modellaufgabe über. Geeignete parametrische Darstellungen für die Elementgeometrie können nach bekannten Prinzipien gefunden werden. Darüber hinaus ist erkennbar, daß die Güte der dadurch ermittelten Randspannungen mit der Güte der aus Differentiation der Verschiebungen ermittelten Spannungen korreliert. Dieser Zusammenhang wird durch die Konvergenzuntersuchungen in Kapitel 4 quantifiziert.

Die Wahl eines geeigneten Radiuses für die Ausrundung ist in gleicher Weise schwierig wie die Wahl einer geeigneten Diskretisierung einer Aufgabe. Für nicht singular gestörte Probleme kann der Radius bereits durch den Verlauf der gegebenen Randbedingung $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ auf F_u abgeschätzt werden. Für singular gestörte Probleme kann die Ausrundung zur Glättung der Singularität in Ecken des Lösungsgebiets führen, was für eine ingenieurgerechte Untersuchung wünschenswert ist. Das setzt jedoch voraus, daß die Auswirkung der Singularität lokal beschränkt ist. Die Untersuchung dieser Frage führt auf eine Sensitivitätsanalyse der Spannungen nach den Formparametern [6].

3.3 Glättung des Zustands

Aufgabe: Gegeben sei eine Menge von N Stützstellen $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^D$ mit $i = 1, \dots, N$ in einem Gebiet Ω und Tensoren $\mathbf{T}_i$ eines Feldes an diesen Stellen. Die Koordinaten der Tensoren nehmen Bezug auf eine gemeinsame Basis. Gesucht ist eine Interpolationsvorschrift für das Feld. Jede Koordinate des Tensorfeldes wird unabhängig interpoliert. Daher erfolgt die nachstehende Ableitung mit den für eine Koordinate der Tensoren $\mathbf{T}_i$ stellvertretenden N Stützwerten $u_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \dots, N$.

Interpolationsvorschrift: Die Interpolationsvorschrift $u^h(\mathbf{x})$ wird ausgedrückt als Skalarprodukt eines Koeffizientenvektors $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$ und eines Vektors $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^M$, dessen Komponenten eine Basis der Interpolationsvorschrift bilden :

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (77)$$

Als Basis werden im folgenden Monome betrachtet. Beispielsweise ist für $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{p}^T = [1, x_1, x_2, x_1 x_2, x_1^2, x_2^2]$ eine quadratische Basis des Interpolationsraumes. Zur Bestimmung des Koeffizientenvektors $\mathbf{a}$ wird eine Fehlnorm eingeführt und anschließend minimiert.

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad (78)$$

Der geklammerte Ausdruck in (78) bewertet das Quadrat der Differenz zwischen tatsächlichem Stützwert und dem durch die Interpolation erreichten Wert. Der Faktor $w_i(\mathbf{x})$ bezeichnet eine Gewichtsfunktion für jede Stützstelle i .

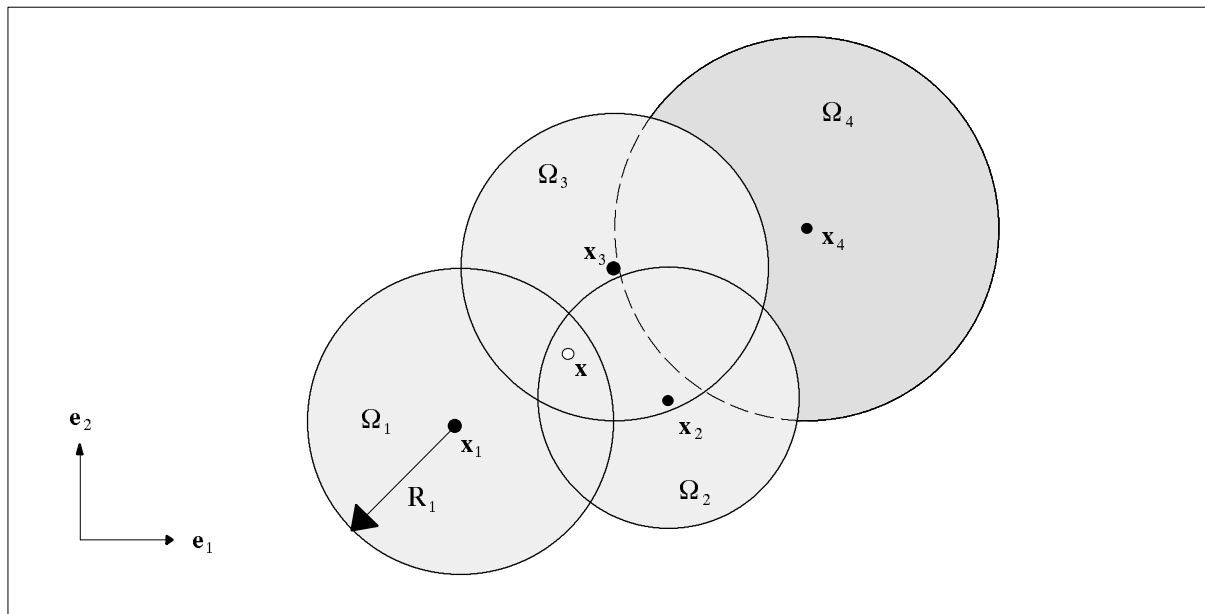


Bild 3.13 : Stützstellen und Definitionsbereiche Ω_i

Gewichtsfunktion: Der Definitionsbereich Ω_i einer Gewichtsfunktion $w_i(\mathbf{x})$ wird mit einer Hyperkugel mit Radius R_i beschrieben, deren Mittelpunkt die Stützstelle $\mathbf{x}_i$ ist. Die Definitionsbereiche der Stützstellen sind nicht disjunkt. Ist eine zu interpolierende Stelle $\mathbf{x}$ Element des Definitionsbereichs Ω_i einer Gewichtsfunktion $w_i(\mathbf{x})$, so wird das zugehörige Stützpaar $(\mathbf{x}_i, u_i)$ zur Interpolation herangezogen. In Bild 3.13 sind die Stützstellen $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ und die kreisförmigen Definitionsbereiche Ω_i ihrer Gewichtsfunktionen $w_i(\mathbf{x})$ dargestellt. Die mit einem weißen Punkt gekennzeichnete Stelle $\mathbf{x}$ ist nicht Element des Definitionsbereichs Ω_4 . Es werden daher zur Interpolation an dieser Stelle nur drei der vier Stützpaare $(\mathbf{x}_i, u_i)$ herangezogen.

Die Definition einer Gewichtsfunktion erfolgt, indem zunächst eine Translation zur Stützstelle $\mathbf{x}_i$ vorgenommen wird, so daß $w_i(\mathbf{x}) \equiv w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$. Für alle Gewichtsfunktionen wird weiterhin der gleiche Verlauf angenommen, der durch den Radius des Definitionsbereichs parametrisiert ist, so daß $w_i(\mathbf{x}) \equiv w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, R_i)$. Die Gewichtsfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

- ◇ $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, R_i) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad \text{und} \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, R_i) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \notin \Omega_i$
- ◇ $|\mathbf{a} - \mathbf{x}_i| \leq |\mathbf{b} - \mathbf{x}_i| \Rightarrow w(\mathbf{a} - \mathbf{x}_i, R_i) \leq w(\mathbf{b} - \mathbf{x}_i, R_i) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega$
- ◇ $\int w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, R_i) \, d\Omega = 1$

Aus der ersten Eigenschaft ist ersichtlich, daß eine Gewichtsfunktion außerhalb ihrer Umgebung verschwindet. Dadurch ist die Interpolationsaufgabe lokal beschränkt. Die zweite Eigenschaft kennzeichnet monotonen Verhalten der Gewichtsfunktion mit zunehmendem Abstand von der Stützstelle. Dadurch wird ein Stützwert an einer Stützstelle in der Nähe der zu interpolierenden Stelle $\mathbf{x}$ stärker berücksichtigt, als der Stützwert einer weiter entfernten Stützstelle. Mit der dritten Eigenschaft kann gezeigt werden, daß Funktionen, die sich aus einer Linearkombination der Basis $\mathbf{p}$ darstellen lassen, exakt darstellbar sind. Diese Gleichung ist Ausgangspunkt für kontinuierliche Darstellungen von Funktionen mit Hilfe von Kernen und dient dem Nachweis der Differenzierbarkeitseigenschaften der Interpolation.

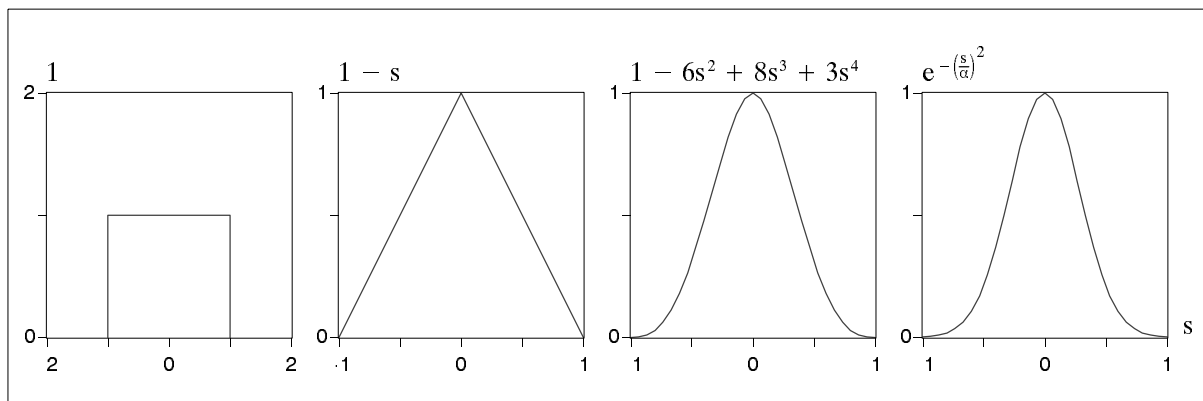


Bild 3.14 : Gewichtsfunktionen

Die Gewichtsfunktionen werden so konstruiert, daß die gewünschten Differenzierbarkeitseigenschaften von $u^h(\mathbf{x})$ gegeben sind. Eine Auswahl möglicher Gewichtsfunktionen wird nachstehend als Funktion einer normierten Koordinate s aufgeführt. Die Verläufe dieser Gewichtsfunktionen sind in Bild 3.14 graphisch dargestellt.

$w(s) = 1$	konstante Gewichtsfunktion
$w(s) = 1 - s$	lineare Gewichtsfunktion
$w(s) = 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4$	quartischer Spline
$w(s) = e^{-(\frac{s}{\alpha})^2}$	exponentielle Gewichtsfunktion

mit

$$s = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{R_i}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{normierte Koordinate } s \quad (79)$$

Die Wahl der Gewichtsfunktion entscheidet über die Differenzierbarkeitseigenschaften der Interpolation. Bei einer konstanten Gewichtsfunktion ist $u^h(\mathbf{x})$ nur dann global stetig, wenn der Radius des Definitionsbereichs unbeschränkt ist. Mit einer linearen Gewichtsfunktion ist $u^h(\mathbf{x})$ C_0 -kontinuierlich. Der quartische Spline ist so konstruiert, daß $u^h(\mathbf{x})$ C_2 -kontinuierlich ist. Bei der Wahl einer exponentiellen Gewichtsfunktion ist $u^h(\mathbf{x})$ wiederum nicht stetig, da $w(1) \neq 0$. Der Parameter α kann aber so eingestellt werden, daß die Interpolationsfunktion $u^h(\mathbf{x})$ näherungsweise beliebige Kontinuität gewinnt.

Formfunktionen: Zur Bestimmung des unbekannten Koeffizientenvektors $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ wird die Fehler-norm J aus Gleichung (78) minimiert. Die Norm ist eine quadratische Funktion in Abhängigkeit des Koeffizientenvektors. Es genügt daher, die Stationarität bezüglich $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ zu fordern:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \right) \mathbf{a}(\mathbf{x}) &= [w_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \ w_2(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \ \dots \ w_N(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)] [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T \\ \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{a} &= \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (80)$$

Die Forderung führt auf ein lineares Gleichungssystem. Dabei sind die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M \times N}$. Die Matrix $\mathbf{A}$ wird als Momentenmatrix bezeichnet. Ihre Inverse wird an jeder zu interpolierenden Stelle $\mathbf{x}$ gebildet, um den Koeffizientenvektor $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^M$ zu bestimmen. Das lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Anzahl M der N Vektoren $w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$ linear unabhängig sind. Substitution von (80) in die Interpolationsvorschrift (77) liefert schließlich die Formfunktionen $s \in \mathbb{R}^N$ der Interpolation:

$$\begin{aligned} u^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{s}^T \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (81)$$

Durch die Beschränkung des Definitionsbereichs der Gewichtsfunktionen erhält die Interpolation lokalen Charakter: Für eine zu interpolierende Stelle $\mathbf{x}$, die außerhalb des Definitionsbereichs einer Gewichtsfunktion $w_i(\mathbf{x})$ liegt, sind das dyadische Produkt $w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p} \mathbf{p}^T$ sowie die Skalierung $w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}$ aus Gleichung (80) identisch Null, so daß sie nicht ausgewertet werden müssen. Mit kleinen Radien R_i der Definitionsbereiche werden nur Stützpaare in einem lokalen, beschränkten Bereich herangezogen. Dadurch ist insbesondere die Dimension des linearen Gleichungssystems (80) gering. Andererseits ist die Lösbarkeit des Systems (80) an jeder Stelle $\mathbf{x}$ nur durch die Wahl von genügend großen Radien R_i garantiert.

Anwendung: Die gewichtete Fehler-Quadrat-Minimierung ist ein generalisiertes Interpolationsverfahren: Die Fehler-Quadrat-Minimierung ergibt sich durch die Wahl einer konstanten und unbeschränkten Gewichtsfunktion. Dann sind die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nicht abhängig von $\mathbf{x}$, so daß die Inversion nur einmalig für gegebene Stützpaare $(\mathbf{x}_i, u_i)$ erfolgt. Besteht die Basis dabei aus Monomen und ist deren Anzahl gleich der Anzahl der Stützstellen, so ergibt sich das Interpolationsverfahren von Lagrange. Die Shepard-Interpolation ergibt sich durch Wahl der Basis $\mathbf{p}^T = \{1\}$. Die Formfunktionen dieser Interpolation ergeben sich zu:

$$s_i = \frac{w_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x})} \quad (82)$$

Aus Gleichung (82) ist ersichtlich, daß bei der Wahl einer konstanten Gewichtsfunktion die Shepard-Interpolation in eine Mittelwertbildung übergeht. In die Basis $\mathbf{p}$ können auch exponentielle oder trigonometrische Funktionen aufgenommen werden. Dadurch besteht eine große Flexibilität bei der Anwendung dieses Interpolationsverfahrens.

Beispiel: Das Verfahren wird mit einem Beispiel illustriert. Gegeben sind vier Stützstellen $x_i \in \mathbb{R}$ und zugehörige Stützwerte $u_i \in \mathbb{R}$ durch die Paare $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$ und $(3, 4)$. Als Basis des Interpolationsraums wird $\mathbf{p}^T = [1, x]$ gewählt. Das Interpolationsergebnis für drei unterschiedlich gewählte Gewichtsfunktionen $w(s)$ ist in Bild 3.15 zeilenweise dargestellt.

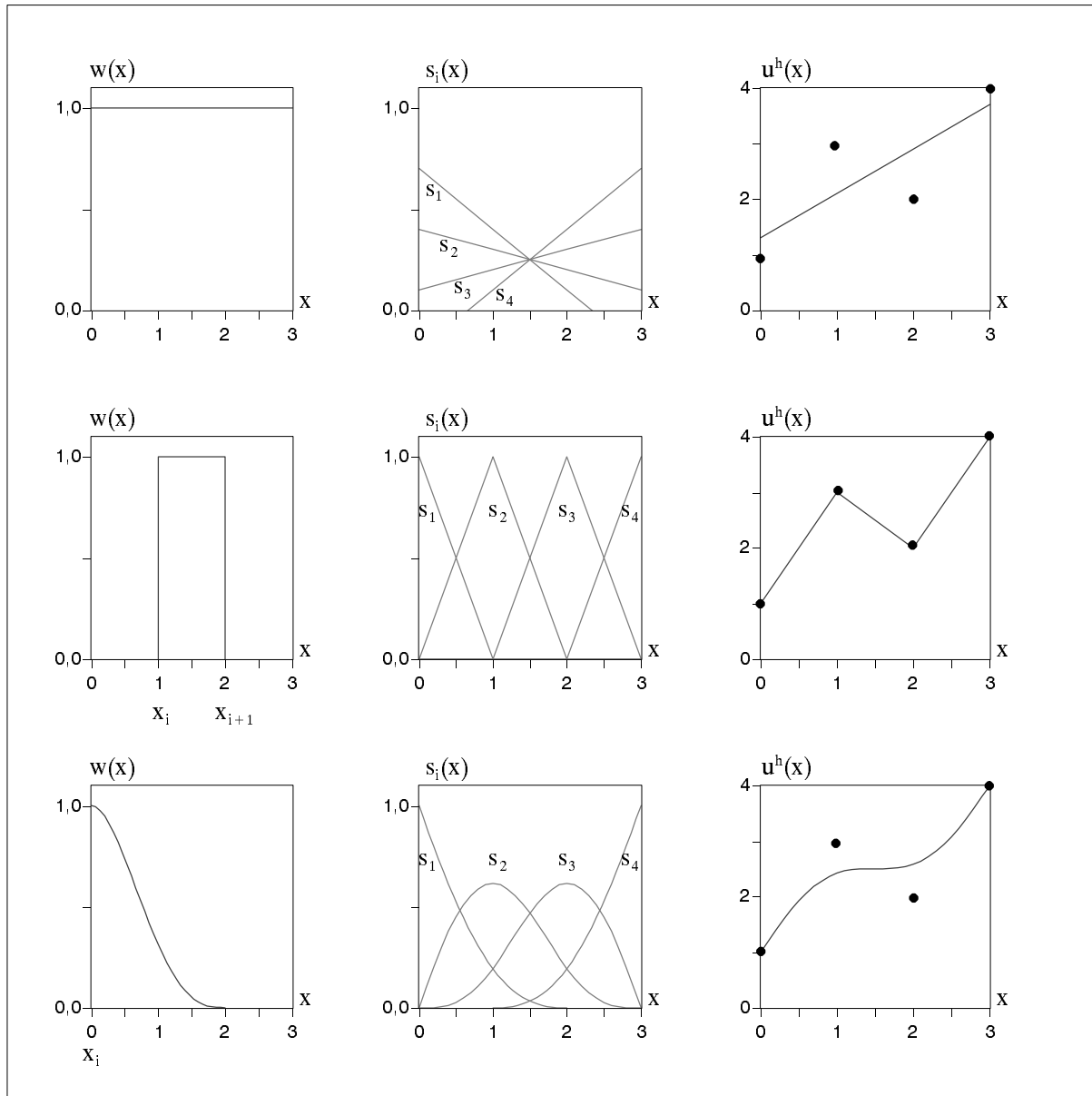


Bild 3.15 : Beispiel gewichtete Fehler Quadrat Interpolation

In der ersten Zeile von Bild 3.15 wird die Gewichtsfunktion jeder Stützstelle als konstant angenommen. Der Definitionsbereich jeder Gewichtsfunktion ist unbeschränkt. Damit wird die Interpolation zur Fehler-Quadrat-Interpolation. Bei der gewählten Basis sind die Formfunktionen s_i Geraden. Als Interpolationsergebnis wird die Ausgleichsgerade der Stützpaare erhalten.

In der zweiten Zeile von Bild 3.15 wird wiederum die Gewichtsfunktion jeder Stützstelle als konstant angenommen. Der Definitionsbereich jeder Gewichtsfunktion wird implizit über die Lage der zu interpolierenden Stelle festgelegt. Nur die Gewichtsfunktionen der links und rechts

benachbarten Stützstellen nehmen einen von Null verschiedenen Wert an. Als Interpolationsergebnis wird stückweise eine Lagrange Interpolation erhalten.

In der dritten Zeile von Bild 3.15 wird als Gewichtsfunktion jeder Stützstelle der quartische Spline angenommen. Der Radius des Definitionsbereiches wird mit $R = 2$ festgelegt. Damit stehen an jeder zu interpolierenden Stelle x mindestens zwei linear unabhängige Vektoren $w_i(x)p(x_i)$ zur Bestimmung der Formfunktionen s_i zur Verfügung. Als Interpolationsergebnis wird eine Näherung mit C_2 -Kontinuität erhalten.

Ableitungen: Zur Bestimmung von Ableitungen $\frac{\partial u^h(\mathbf{x})}{\partial x_j} = u^h_{,j}(\mathbf{x})$ der Interpolationsfunktion wird die Produktregel auf Gleichung (77) angewandt:

$$u^h_{,j} = \mathbf{p}^T_{,j} \mathbf{a} + \mathbf{p}^T \mathbf{a}_{,j} \quad (83)$$

Die Ableitung $\mathbf{p}_{,j}$ der Basis $\mathbf{p}$ nach einer Koordinate x_j ist unmittelbar bestimmbar. Für die Ableitung $\mathbf{a}_{,j}$ des Koeffizientenvektors $\mathbf{a}$ wird die Gleichung (80) auf beiden Seiten differenziert und nach $\mathbf{a}_{,j}$ umgestellt:

$$\mathbf{A}_{,j} \mathbf{a} + \mathbf{A} \mathbf{a}_{,j} = \mathbf{B}_{,j} \hat{\mathbf{u}}$$

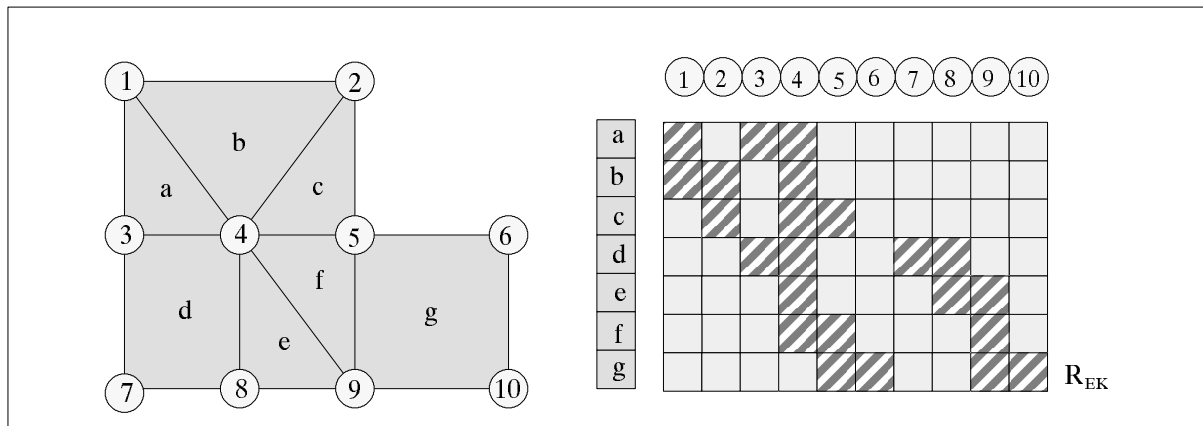
$$\Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{a}_{,j} = \mathbf{B}_{,j} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{A}_{,j} \mathbf{a} \quad (84)$$

Die Bestimmung der Ableitung $\mathbf{a}_{,j}$ des Koeffizientenvektors $\mathbf{a}$ führt auf ein lineares Gleichungssystem (84) mit der gleichen Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, deren Inverse bereits für die Ermittlung des Koeffizientenvektors $\mathbf{a}$ gebildet wurde. Eine Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ muß daher nur einmalig erfolgen. Auf der rechten Seite des Gleichungssystems (84) treten die Ableitungen $\mathbf{A}_{,j}$ und $\mathbf{B}_{,j}$ der Koeffizientenmatrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ auf. Für deren Bestimmung genügen die Ableitung der Gewichtsfunktionen $\frac{\partial w_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j}$, die aus den Gleichungen (79) unmittelbar ermittelt werden können.

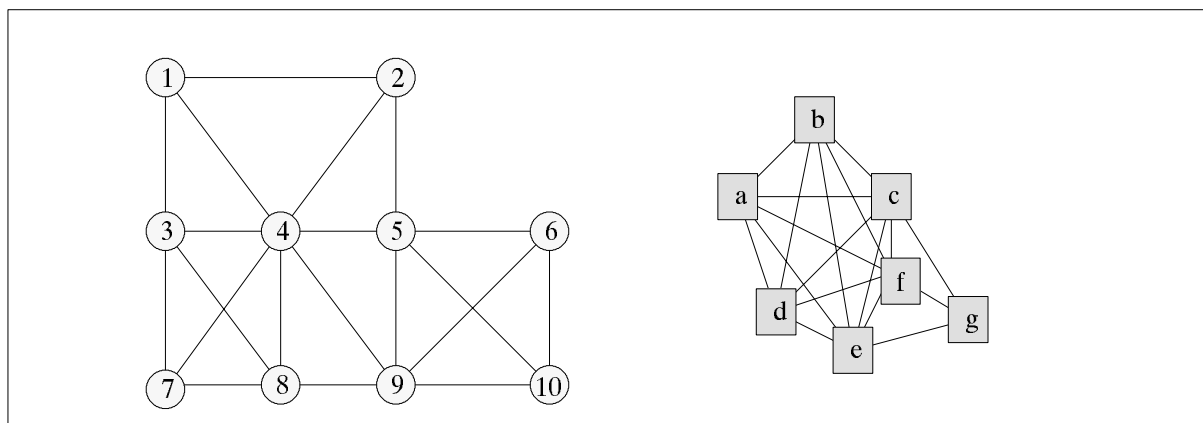
Implementierung: Eine effiziente Implementierung der Interpolationsvorschrift erfordert die Bestimmung der nächstgelegenen Stützstellen x_i zu einer zu interpolierenden Stelle x . Diese fundamentale Aufgabe rechnergestützter Geometrie kann effizient mit Quadrees und deren Generalisierung zu höheren Dimensionen bearbeitet werden [14]/[19]. Für die Interpolationsaufgabe, die in dieser Arbeit gestellt wird, liegt bereits eine Elementierung des Lösungsgebietes vor. Diese wird für die Bestimmung von nah gelegenen Stützstellen ausgenutzt.

Dafür wird in Bild 3.16 die Elementierung eines L-förmigen Lösungsgebietes betrachtet. Gegeben sind die Menge der Knoten $K = \{1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der finiten Elemente $E = \{a, b, c, \dots\}$ und die binäre heterogene Element-Knoten-Relation $R_{EK} \subset E \times K$. Die algebraische Darstellung der Relation R_{EK} mit einer Matrix erlaubt zeilenweise die topologische Nachbarschaft eines Elementes mit adjazenten Knoten und spaltenweise die topologische Nachbarschaft eines Knotens mit adjazenten Elementen zu lesen.

Aus der Kettung der Relation R_{EK} mit ihrer Transponierten $R_{EK}^T = R_{KE}$ folgt die Element-Element Relation $R_{EE} = R_{EK} \circ R_{KE} \subset E \times E$. Aus der Kettung der Transponierten $R_{EK}^T = R_{KE}$ mit der Relation R_{EK} folgt die Knoten-Knoten Relation $R_{KK} = R_{KE} \circ R_{EK} \subset K \times K$. Die Graphen der Relationen R_{EE} und R_{KK} sind in Bild 3.17 dargestellt. Die Relationen sind binär, homogen, identitiv und symmetrisch. Eine Zeile der Relation R_{KK} beschreibt die topologische Nachbarschaft eines Knotens zu allen anderen Knoten. Eine Zeile der Relation R_{EE} beschreibt die topologische Nachbarschaft eines Elementes zu allen anderen Elementen. Das gilt wegen der Symmetrie der Relationen gleichermaßen für die Spalten.

Bild 3.16 : Element-Knoten Relation R_{EK}

Aus der n -fachen Kettung $R^n = R \circ R \circ \dots \circ R$ einer binären, homogenen, symmetrischen Relation R mit sich selbst folgt die symmetrische Potenzrelation R^n des n -ten Nachbarn. Eine Zeile der Relation R_{KK}^n beschreibt die topologische Nachbarschaft zweier Knoten über genau n weitere Knoten. Eine Zeile der Relation R_{EE}^n beschreibt die topologische Nachbarschaft zweier Elemente über genau n weitere Elemente. Aus der Vereinigung der Potenzrelationen $R^n = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$ wird eine Relation erhalten, die zeilenweise die Nachbarschaft über maximal n weitere Knoten bzw. finite Elemente beschreibt.

Bild 3.17 : Graphen der homogenen Relationen R_{KK} und R_{EE}

Das Vorgehen ist in Bild 3.18 anhand der Relation R_{KK} illustriert. Jede Zeile einer Potenz von R_{KK} kann unabhängig ermittelt werden. In Bild 3.18 werden die Potenzen der Zeile des Knotens mit dem Identifikator 7 gebildet. Für $n = 3$ sind bereits alle Knoten des Lösungsgebietes erreicht. Das Vorgehen entspricht damit einer Breitensuche im Graphen der Relation R_{KK} ausgehend von dem Knoten mit dem Identifikator 7.

Mit jedem Knoten des Lösungsgebietes ist ein Verschiebungszustand $\mathbf{u}$ und mit jedem finiten Element sind Spannungszustände $\mathbf{s}$ an den Gaußpunkten assoziiert. Die näherungsweise Bestimmung des Spannungszustands $\mathbf{s}^h(\mathbf{x})$ an einem Punkt $\mathbf{x}$ auf einer Ecke oder Kante eines dreidimensionalen Lösungsgebietes erfolgt mit der gewichteten Fehler-Quadrat-Interpolation. Es wird entweder mit den Stützwerten der Verschiebung der Gradient eines Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ mit C_1 -Kontinuität oder mit den Stützwerten der Spannung ein Spannungsfeld $\mathbf{s}^h(\mathbf{x})$ mit C_0 -Kontinuität interpoliert. Dafür wird die Vereinigung der Potenzrelationen der n -ten Nachbarn von R_{KK} bzw. R_{EE} herangezogen. Die Potenz n , die Basis $\mathbf{p}$ des Interpolationsraums sowie die Gewichtsfunktion $w(\mathbf{x})$ werden durch die Anwendung spezifiziert.

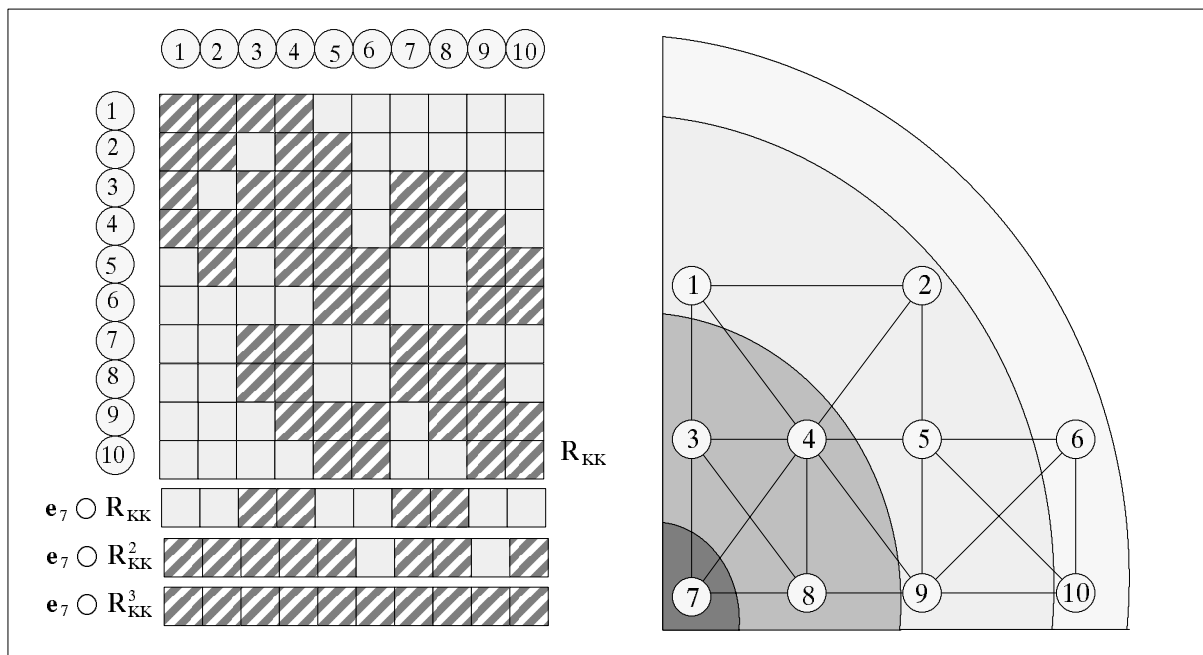


Bild 3.18 : Homogene Relationen R_{KK} und R_{EE}

Beurteilung: Mit dem vorgestellten Verfahren werden die vielfältigen Möglichkeiten, den diskontinuierlichen Verlauf der Spannungen im Lösungsgebiet zu glätten, gemeinsam erfaßt. Verschiedene Autoren [38][27] empfehlen für diese Aufgabe eine Lagrange-Interpolation über benachbarte Gaußpunkte, weil an diesen der Fehler in der Näherung am geringsten ist. Auch dieses Verfahren geht im vorgestellten Verfahren auf, wenn eine konstante Gewichtsfunktion gewählt wird und die Anzahl der Stützstellen gleich der Anzahl der Funktionen in der Basis ist. Es wird hier zusätzlich die Flexibilität gewonnen, für eine größere Anzahl benachbarter Gaußpunkte die Interpolation in einen Fehler-Quadrat Abgleich übergehen zu lassen. Es muß also nicht auf eine spezifische Topologie Rücksicht genommen werden.

Die grundsätzliche Schwierigkeit bei der Wahl eines geeigneten Interpolationsverfahrens liegt in der Abschätzung der Beschaffenheiten des unterliegenden, tatsächlichen Funktionsverlaufs. Erst dann kann eine geeignete Basis des Interpolationsraums aufgestellt werden. In der Literatur [27][49] werden Aussagen über die Güte von Glättungsverfahren daher anhand von Beispielen empirisch gewonnen. Auch im Zusammenhang mit gitterlosen Verfahren [5] wird die Wahl der Anzahl, der Anordnung und der Radien der Stützstellen sowie die Wahl der Basis $\mathbf{p}$ rein empirisch begründet. Auf eine Untersuchung derartiger Beispiele wird hier verzichtet, weil das Glättungsverfahren nicht Bestandteil des erweiterten Prinzips ist, sondern dazu dient, die Ergebnisse an Ecken und Kanten zu verbessern, wie in Kapitel 3.4 gezeigt wird. Zudem genügt es dabei, einen groben Schätzwert zu bestimmen, wie beispielsweise den Mittelwert aus inzidenten Elementen.

3.4 Berücksichtigung des Zustands

Betrachtet werden Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des Verschiebungsrandes F_u für die eine Eindeutigkeit der Außennormale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ nicht gewährleistet ist. Der Spannungszustand $\mathbf{S}^h$ an diesen Punkten wird zunächst näherungsweise aus einem Glättungsverfahren bestimmt. Aus diesem geglätteten Zustand werden die Randspannungen $\mathbf{S}^h \mathbf{n}_i$ auf den zum Eckknoten adjazenten Flächen i mittels deren Außennormalen $\mathbf{n}_i$ bestimmt. Diese Randspannungen werden als zusätzliche, fiktive Belastung s_0 am Verschiebungsrand F_u aufgebracht.

Die zusätzliche, fiktive Belastung s_0 nimmt keinen Einfluß auf das Näherungsergebnis für den Verschiebungszustand, da Belastungen auf dem Rand F_u nicht in dessen Berechnung eingehen. Es wird jedoch das Residuum um die zusätzlich aufgebrachte Belastung gemindert. Es kommt daher zur Bestimmung vermindelter, restlicher Randspannungen Δs am Rand F_u . Aus der Summe der restlichen Randspannungen Δs mit der zusätzlichen Belastung s_0 werden dann die Randspannungen $s = \Delta s + s_0$ an Punkten mit nicht eindeutiger Normale ermittelt. Diese Randspannungen stehen weiterhin im Gleichgewicht mit den angreifenden Lasten. Dadurch ist der Vorzug des erweiterten Prinzips gewahrt. Das Vorgehen wird anhand der Modellaufgabe aus Kapitel 3.1 untersucht.

Modellaufgabe: Gegeben sei die Aufgabe des ebenen Dehnungszustands im Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Der Elastizitätsmodul sei Eins, die Querdehnzahl sei Null. Am gesamten Außenrand des Quadrats ist der Verschiebungszustand durch $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [x_1, 0]^T$ vorgegeben. Diese Funktion löst die Aufgabe auch im Gebiet analytisch exakt. Daraus wird der analytisch exakte Dehnungszustand und der Spannungszustand zu $\boldsymbol{\sigma} = [1, 0, 0]^T$ ermittelt. Die Berechnung des Verschiebungszustands mit den in Bild 3.19 dargestellten Elementierungen mittels der Gleichungen (38) und (39) kann die analytisch exakte Lösung darstellen. Der geglättete Spannungszustand $\mathbf{S}^h$ entspricht in dieser Aufgabe daher dem konstanten, analytisch exakten Zustand.

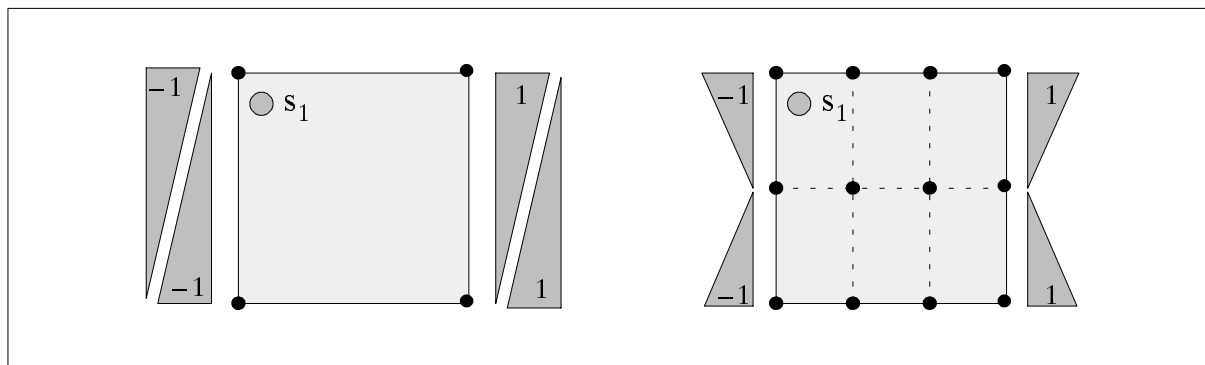


Bild 3.19 : Zusätzliche Belastungen auf F_u

Aus dem geglätteten Spannungszustand $\mathbf{S}^h$ werden Randspannungen an den Eckpunkten der Aufgabe ermittelt. Diese Randspannungen werden gemäß der Interpolation der unbekannten, mit dem erweiterten Prinzip zu ermittelnden Randspannung als Belastung s_0 des Verschiebungsrandes F_u aufgebracht, wie in Bild 3.19 dargestellt ist. In der Anwendung der rechten Seite der Gleichung (40) werden dadurch die in Bild 3.1 dargestellten Auflagerkräfte der Aufgabe um das Integral über die zusätzlich aufgebrachte Belastung s_0 vermindert.

Die Lösung der Gleichung (40) erfolgt nun mit den verminderten Auflagerkräften. Die aus der Lösung resultierenden, restlichen Randspannungen Δs sind in Bild 3.20 dargestellt. Die Randspannungen der Aufgabe setzen sich aus der Summe der in Bild 3.19 und Bild 3.20 dargestellten Randspannungen zusammen. Für beide Elementierungen wird das analytisch exakte Ergebnis erreicht.

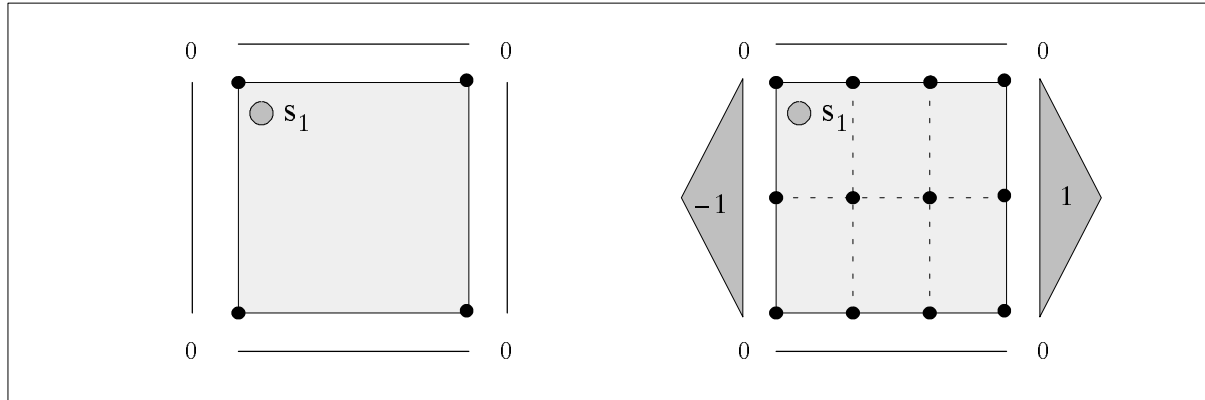


Bild 3.20 : Ermittlung der restlichen Randspannungen auf F_u

Erweiterung der Modellaufgabe: Die Untersuchung wird mit einem gegebenen bilinearen Feld der Form $u_1(x_1, x_2) = a_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_1x_2$ fortgesetzt. Im Rahmen einer linearen Theorie können die Terme superponiert werden. Der konstante Anteil liefert keine Spannungen. Der lineare Anteil in x_1 ist vorangehend untersucht worden. Der lineare Anteil in x_2 liefert ein zur Spannungskomponente s_1 identisches Ergebnis für die Komponente s_2 . Es wird daher der bilineare Anteil untersucht.

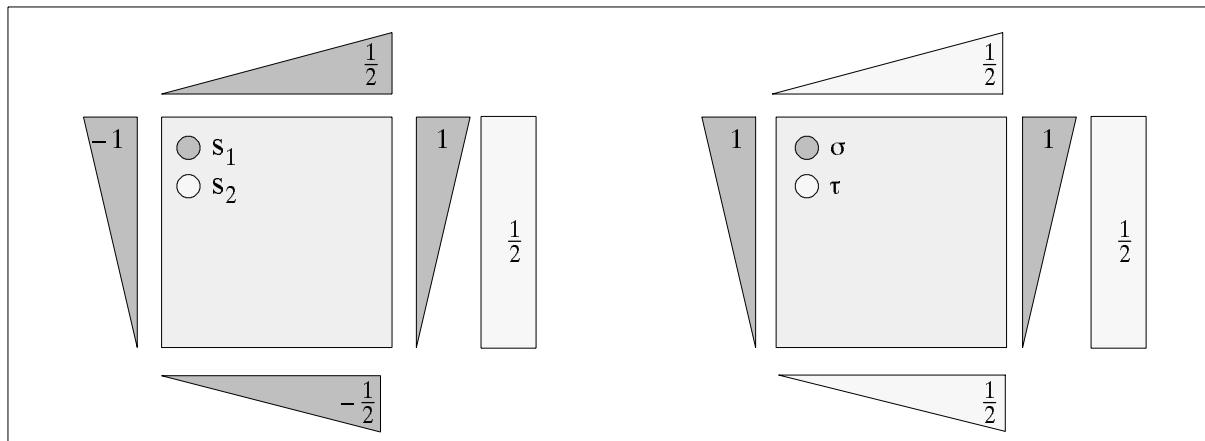


Bild 3.21 : Analytisch exakte Randspannung s

Dafür wird das Einheitsquadrat am gesamten Außenrand mit dem Feld $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [x_1x_2, 0]^T$ beaufschlagt. Zudem wird eine konstante Flächenlast $\mathbf{p}_0 = \left[0, -\frac{1}{2}\right]^T$ aufgebracht. Dann löst die Funktion $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [x_1x_2, 0]^T$ die Aufgabe im Gebiet analytisch exakt. Aus Differentiation des Verschiebungsfeldes folgt der Spannungszustand im Lösungsgebiet zu $\boldsymbol{\sigma} = \left[x_2, 0, \frac{1}{2}x_1\right]^T$. Die Komponenten der zugehörigen, analytisch exakten Randspannung s sind bezüglich des gemeinsamen globalen Koordinatensystems in Bild 3.21 links dargestellt. Zusätzlich ist eine Darstellung dieser Randspannung bezüglich der lokalen Koordinatensysteme auf den vier Randstücken rechts nebengestellt.

Es wird zunächst das erweiterte Prinzip ohne eine zusätzliche Belastung an den Eckknoten angewendet. Aus der Lösung der Gleichungen (38) und (39) mit den schon zuvor verwendeten Elementierungen folgt die analytisch exakte Verschiebungslösung, die durch den bilinearen Ansatz dargestellt werden kann. Aus der Lösung der Gleichung (40) folgen die Randspannungen s auf dem Verschiebungsrand F_u , die in Bild 3.22 dargestellt sind. Die Zahlenwerte an den Eckknoten sind angegeben. Es ist deutlich, daß durch die Überbestimmtheit der Aufgabe der Verlauf der Randspannung auch für die erweiterte Modellaufgabe im Vergleich zur Lösung aus Differentiation des Verschiebungsfeldes nicht befriedigend ist.

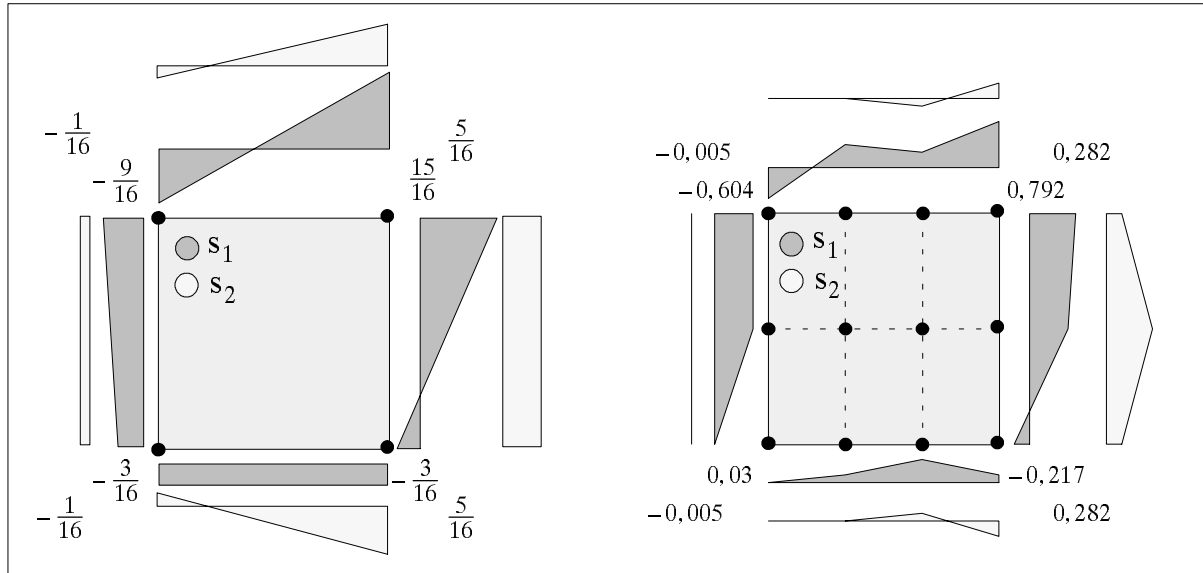


Bild 3.22 : Genäherte Randspannung ohne zusätzliche Belastung

Es erfolgt weiterhin eine Berechnung mit zusätzlicher Belastung an den Eckknoten. Dafür wird aus dem Verschiebungszustand, der mit den Gleichungen (38) und (39) gewonnen wird, zunächst ein geglätteter Spannungszustand S^h bestimmt. In dieser Aufgabe ist dieser geglättete Wert wiederum gleich dem analytisch exakten Wert. Gemäß der Interpolation der unbekannten Randspannung wird daher das analytisch exakte Ergebnis aus Bild 3.21 als Belastung s_0 aufgebracht, wie es in Bild 3.23 dargestellt ist.

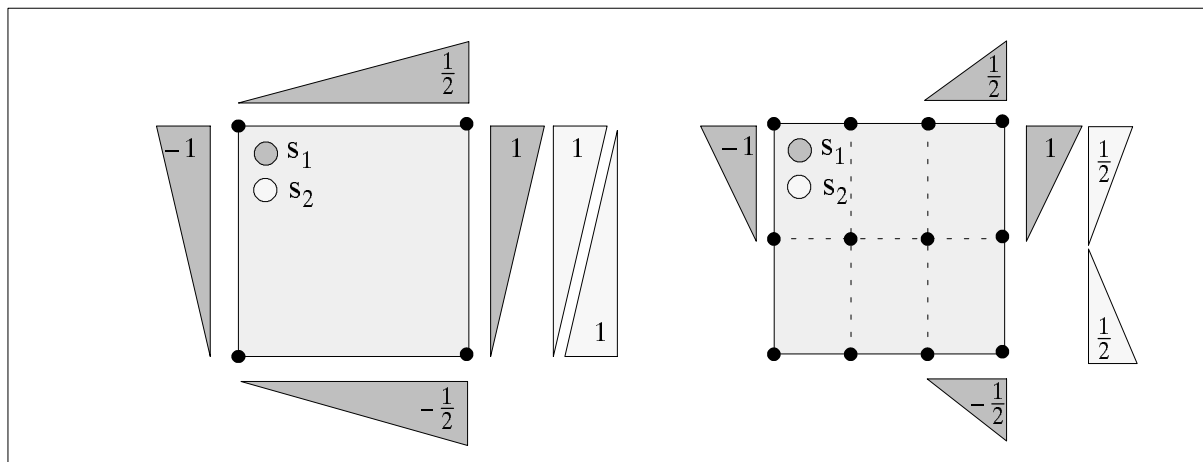


Bild 3.23 : Zusätzliche Belastung auf F_u

Die Lösung der Gleichung (40) erfolgt unter Berücksichtigung der zusätzlichen Belastung s_0 , die die Auflagerkräfte mindert. Die aus der Lösung resultierenden Randspannungen Δs sind in Bild 3.24 dargestellt. Die Randspannungen der Aufgabe setzen sich aus der Summe der in Bild 3.23 und Bild 3.24 dargestellten Randspannungen zusammen. Für beide Elementierungen wird wiederum exakt das analytische Ergebnis erreicht.

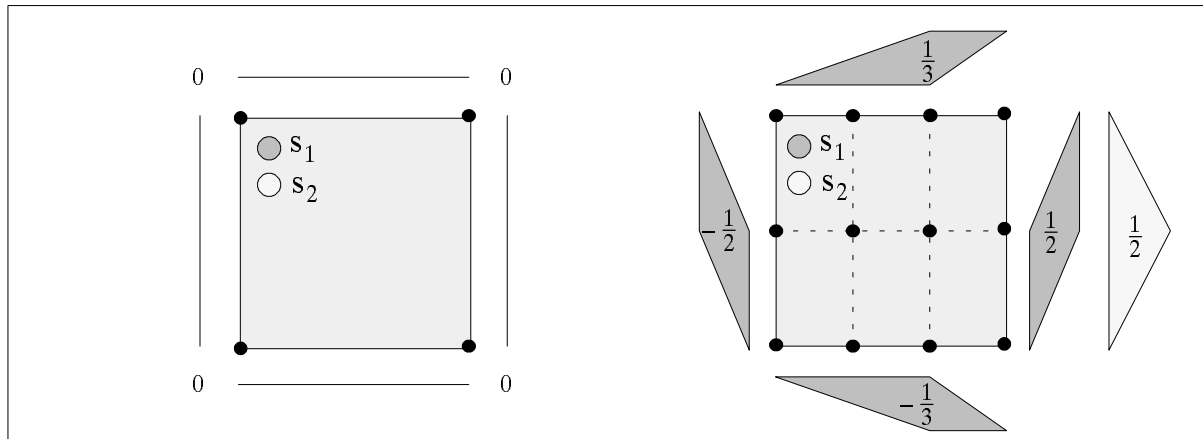


Bild 3.24 : Ermittlung der restlichen Randspannung

Beurteilung: Die Untersuchung weiterer Aufgaben zeigt: Wenn die analytische Verschiebungslösung einer Aufgabe durch den Elementansatz exakt dargestellt werden kann, dann sind die mit dem erweiterten Prinzip und zusätzlicher Belastung berechneten Randspannungen unabhängig von der Geometrie des Lösungsgebietes und unabhängig von dessen Elementierung auch exakt. Zudem stimmen sie dann offenbar auch mit den Randspannungen überein, die durch Differentiation des Verschiebungszustands im Element ermittelt werden können.

Für eine realistische Aufgabenstellung wird die Verschiebungslösung nur näherungsweise bestimmt. Unabhängig davon, ob eine zusätzliche äußere Belastung aufgebracht wird, stellen die Randspannungen aus dem erweiterten Prinzip das Gleichgewicht mit den äußeren Belastungen für die Näherung her. Durch die zusätzliche, fiktive Belastung auf F_u an Eckpunkten oder an Punkten von Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete wird erreicht, daß alle verfügbaren Informationen über den Spannungszustand eingebracht werden. Das dient dem einzigen Fall, wo ein nachteiliges Ergebnis gegenüber den Spannungen aus Differentiation zu erwarten ist: Überbestimmte, aber konsistent formulierte Verschiebungsrandbedingungen, die zudem für eine Verfeinerung der Diskretisierung asymptotisch exakt befriedigt werden.

Es steht somit ein zu der Glättung der Geometrie alternatives, heuristisches Vorgehen zur Verfügung, um die identifizierten Mängel in der Anwendung der Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen zu überwinden. Das Vorgehen ist absolut stabil, auch wenn Randbedingungen auf F_u inkonsistent spezifiziert wurden oder im Widerspruch zur schwachen Lösung stehen. Es wird in diesem Zusammenhang noch einmal betont, daß nicht das erweiterte Prinzip diese heuristische Ergänzung notwendig macht, sondern die Überbestimmtheit der Aufgabe an Ecken und Kanten dreidimensionaler Lösungsgebiete.

4 Konvergenzuntersuchungen

Vorgehensweise: In diesem Kapitel wird die Güte der Randspannung untersucht, die aus der Erweiterung des Prinzips virtueller Weggrößen gewonnen wird. Diese Randspannung wird nachfolgend als äußere Randspannung bezeichnet. Das Untersuchungsziel ist die Abschätzung der Konvergenzrate der äußeren Randspannung. Die Rate wird der Konvergenzrate der Randspannung gegenübergestellt, die aus Differentiation der Verschiebungslösung gewonnen wird. Diese Randspannung wird nachfolgend als innere Randspannung bezeichnet. Für den Vergleich der Raten der Randspannungen wird zusätzlich die Konvergenzrate im gesamten Gebiet ermittelt. Dazu werden eine Reihe numerischer Studien an verschiedenen Beispielen ausgeführt:

- ◇ Stellvertretend für Aufgaben, die maßgeblich durch einen Zug- bzw. Druckzustand charakterisiert sind, wird eine zugbeanspruchte Scheibe mit einem Loch untersucht. Im Gebiet wird ein lineares Dreieckselement eingesetzt. Der untersuchte Rand ist geradlinig. Auf dem Rand wird ein linearer Ansatz für die Randspannung gewählt.
- ◇ Stellvertretend für Aufgaben, die durch einen Biegezustand charakterisiert sind, wird ein Schubverformter Balken untersucht. Im Gebiet werden rechteckige Elemente mit unterschiedlichem Polynomgrad des Verschiebungsansatzes eingesetzt. Der untersuchte Rand ist geradlinig. Auf dem Rand werden lineare und quadratische Ansätze für die Randspannung gewählt.
- ◇ Stellvertretend für Aufgaben, die durch einen rotationssymmetrischen Zustand charakterisiert sind, wird ein Zylinder unter Innendruck untersucht. Im Gebiet wird ein isoparametrisches bilineares Element eingesetzt. Untersucht werden radiale sowie ringförmige Ränder. Die Verfeinerung der Diskretisierung führt zu einer Glättung der ringförmigen Ränder. Auf dem Rand wird ein linearer Ansatz für die Randspannung gewählt.
- ◇ Stellvertretend für Aufgaben, die durch eine inhomogene Materialbelegung charakterisiert sind, wird ein kreisförmiger Einschuß eines Materials in ein anderes untersucht. Im Gebiet werden isoparametrische Dreiecks- und Viereckselemente eingesetzt. Untersucht werden radiale sowie ringförmige Ränder. Die Verfeinerung der Diskretisierung führt zu einer Glättung der ringförmigen Ränder. Auf dem Rand wird ein linearer Ansatz für die Randspannung gewählt.
- ◇ Stellvertretend für Aufgaben, die durch lokale Singularitäten charakterisiert sind, wird ein Halbraum unter Einzellast untersucht. Im Gebiet werden quaderförmige Elemente mit unterschiedlichem Polynomgrad des Verschiebungsansatzes eingesetzt. Der untersuchte Rand besitzt auch bei asymptotischer Verfeinerung eine nicht eindeutige Außennormale. Für den Rand werden viereckige ebene Elemente mit unterschiedlichem Polynomgrad des Ansatzes für die Randspannung eingesetzt.

Für die Beispiele existieren analytisch exakte Lösungen, die in geschlossener Form angegeben werden können. Die Untersuchung der Konvergenzrate für Aufgaben, deren Lösung nicht bekannt ist, kann durch den Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Diskretisierungen mit anschließender Extrapolation erfolgen. Für Aufgaben, die nur in einem schwachen Sinn gelöst werden, führt die Anwendung solcher Methoden aber nicht zu einer zuverlässigen Prognose der Konvergenzrate sondern erlaubt nur eine Abschätzung des Fehlers. Diese Methoden finden daher hier keine Anwendung.

4.1 Konvergenzrate

Zur Definition von Konvergenzraten werden zunächst Begriffe für den Fehler einer Näherungslösung eines elastischen Problems eingeführt. Dafür wird ein Gebiet Ω und dessen Rand Γ betrachtet. Mit $\mathbf{u}$ wird das exakte Verschiebungsfeld, mit $\boldsymbol{\epsilon}$ das exakte Dehnungsfeld und mit $\mathbf{E}$ die Materialmatrix für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ notiert. Mit $\mathbf{s}$ wird das Randspannungsfeld für alle $\mathbf{x} \in \Gamma$ notiert. Das Superskript h kennzeichnet analog die Näherungslösungen.

Verschiebungsfehler: Die L^2 -Fehlernorm $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)}$ bewertet die Abweichung der Verschiebung im Quadrat summiert über die Koordinatenrichtungen i im Gebiet Ω :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} (u_i - u_i^h) (u_i - u_i^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (85)$$

Energiefehler: Die Energie Fehlernorm $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{E(\Omega)}$ bewertet die Abweichung in der potentiellen Energie. Sie ist ein Maß für die Güte der Spannungen im Gebiet Ω :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{E(\Omega)} = \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^h)^T \mathbf{E} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (86)$$

Randspannungsfehler. Die L^2 -Fehlernorm $\|\mathbf{s} - \mathbf{s}^h\|_{L^2(\Gamma)}$ bewertet die Abweichung der Randspannungen im Quadrat summiert über die Koordinatenrichtungen i auf dem Rand Γ :

$$\|\mathbf{s} - \mathbf{s}^h\|_{L^2(\Gamma)} = \left[\int_{\Gamma} (s_i - s_i^h) (s_i - s_i^h) d\Gamma \right]^{\frac{1}{2}} \quad (87)$$

Relativer Fehler: Eine relative Fehlernorm wird durch Quotientenbildung der absoluten Normen des Unterschiedes zwischen exakter und genäherter Lösung mit der absoluten Norm der exakten Lösung definiert. So ist beispielsweise der relative Fehler der potentiellen Energie:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{rel E(\Omega)} = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{E(\Omega)}}{\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)}} \quad (88)$$

Gleichgewichtsfehler: Der Fehler in der Befriedigung des Kräftegleichgewichts $\mathbf{r} \equiv \mathbf{0}$ und des Momentengleichgewichts $\mathbf{m} \equiv \mathbf{0}$ auf dem Rand Γ ergibt sich aus:

$$\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{s} - \mathbf{s}^h d\Gamma \quad (89)$$

$$\mathbf{m} = \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times (\mathbf{s} - \mathbf{s}^h) d\Gamma \quad (90)$$

Der Gleichgewichtsfehler ist keine Norm. Für die Untersuchung dieses Fehlers werden selektiv Komponenten des Fehlervektors $\mathbf{r}$ für die Kraft und des Fehlervektors $\mathbf{m}$ für das Moment auf Teilen des Randes Γ betrachtet. Die genäherte Komponente wird durch die analytisch exakte Komponente der Kraft bzw. des Momentes geteilt, um ein relatives Maß zu erhalten. Im

vorgestellten Verfahren ist das Kräfte- sowie das Momentengleichgewicht für die Randspannungen exakt befriedigt. Die Fehlervektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{m}$ sind daher immer Null. Die Güte des Verfahrens ist durch den L^2 -Fehler der Randspannungen näher quantifiziert.

Konvergenzrate: Die Diskretisierung der Näherungslösung ist durch den durchschnittlichen Gitterabstand h charakterisiert. Eine Näherungslösung konvergiert, wenn der relative Fehler $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\text{rel}}$ in einer der genannten Normen mit feinerer Diskretisierung h abnimmt. Das Verhältnis der Änderung des relativen Fehlers zu einer infinitesimalen Änderung des Gitterabstandes wird als Konvergenzrate bezeichnet.

Erwartungswert der Konvergenzrate: Abschätzungen der Konvergenzrate setzen eine präzise und formale Beschreibung des Ansatzraumes voraus. Die Eigenschaften eines Ansatzraumes können die zu lösende Aufgabe stark einschränken. Für technische Produkte treffen diese Einschränkungen meist nicht zu. Beispielsweise werden glatte Ränder, homogene Materialbelegungen, nicht gemischte Randbedingungen oder stetige Belastungsverläufe gefordert. Eine unter den vorangehend genannten Einschränkungen getroffene Abschätzung für lineare, elliptische Randwertprobleme 2. Ordnung wird aus [9] entnommen:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\text{rel } L^2(\Omega)} \leq C h^{2p} \qquad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\text{rel } E(\Omega)} \leq C h^p \qquad (91)$$

Dabei ist C eine beliebige Konstante, h die durchschnittliche Gitterweite und p der Grad eines vollständigen Polynoms, das den Ansatzraum aufspannt. Aus der Abschätzung folgt beispielsweise für einen Elementansatz mit $p = 1$ (linearer Ansatz), daß bei doppelt feiner Diskretisierung der Fehler in der potentiellen Energie mindestens halbiert wird. Der Erwartungswert der Konvergenzrate ist daher Eins. Hingegen wird der Fehler in der Verschiebung mindestens geviertelt. Der Erwartungswert der Konvergenzrate ist daher Zwei. Diese Erwartungswerte sind aber nur Anhaltswerte und weder eine obere noch eine untere Schranke für die Konvergenzrate, da die für Gl. (91) vorgenommenen Einschränkungen für keine der untersuchten Aufgaben zutreffen.

Von besonderem Interesse ist in dieser Arbeit der Fehler (87) für die Randspannung. Da der Fehler der potentiellen Energie das Konvergenzverhalten der Spannung im Lösungsgebiet charakterisiert, ist für die innere Randspannung, die aus Differentiation gewonnen wird, eine ähnliche Konvergenzrate zu erwarten, wie die der potentiellen Energie. Wird weiterhin argumentiert, daß der Fehler in der potentiellen Energie mit dem Fehler in den Auflagerkräften korreliert, so ist diese Rate vermutlich auch für die äußere Randspannung aus dem erweiterten Prinzip maßgeblich.

Berechnung der Fehler: Die Berechnung der genannten Fehler erfolgt, indem die Beiträge der Elementintegrale im Gebiet oder auf dem Rand des Gebietes summiert werden. Die Elementintegrale werden numerisch integriert. Dafür ist eine hohe Anzahl von Integrationspunkten notwendig. Diese Anzahl ist nämlich auch abhängig von der Beschaffenheit der analytischen Lösung und nicht ausschließlich von der Beschaffenheit der Ansatzfunktion, wie bei der Ermittlung der Näherungslösung. Üblicherweise stehen analytische Lösungen als Funktion globaler Koordinaten bereit. Die Werte der Näherungslösung werden im Element an den Integrationspunkten interpoliert. Die Werte der analytischen Lösung werden aus der Transformation der normalisierten Koordinaten der Integrationspunkte in globale Koordinaten gewonnen.

4.2 Scheibe mit Loch

Aufgabe: Betrachtet wird eine elastische, unendlich ausgedehnte Scheibe mit einem kreisförmigen Loch. Die Scheibe wird im Unendlichen durch eine konstante horizontale Normalspannung vom Betrag Eins beansprucht. Die anderen Spannungskomponenten sind dort Null. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Mittelpunkt des Lochs, dessen Rand spannungsfrei ist. Die analytische Lösung der Aufgabe wird in [52] in Zylinderkoordinaten entwickelt und lautet für die Verschiebungen:

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta) &= \frac{a}{8G} \left[\frac{r}{a} (k + 1) \cos \theta + 2 \frac{a}{r} ((1 + k) \cos \theta + \cos 3\theta) - 2 \frac{a^3}{r^3} \cos 3\theta \right] \\ u_2(r, \theta) &= \frac{a}{8G} \left[\frac{r}{a} (k - 3) \sin \theta + 2 \frac{a}{r} ((1 - k) \sin \theta + \sin 3\theta) - 2 \frac{a^3}{r^3} \sin 3\theta \right] \end{aligned} \quad (92)$$

Dabei ist k die Kosolov Konstante mit $k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ für den ebenen Spannungszustand und $k = 3 - 4\nu$ für den ebenen Dehnungszustand. Die Lösung für die Spannungen lautet:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(r, \theta) &= -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta + 1 \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \end{aligned} \quad (93)$$

Aufgrund der Symmetrie in Geometrie und Belastung wird nur ein Viertel der Scheibe als Rechenmodell verwendet, wie in Bild 4.1 dargestellt ist. Außer den Symbolen für die Maße und die Belastung sind die Punkte A, B, C, D und E der Scheibe gekennzeichnet sowie die verwendeten Stoffparameter und Abmessungen zusammengestellt.

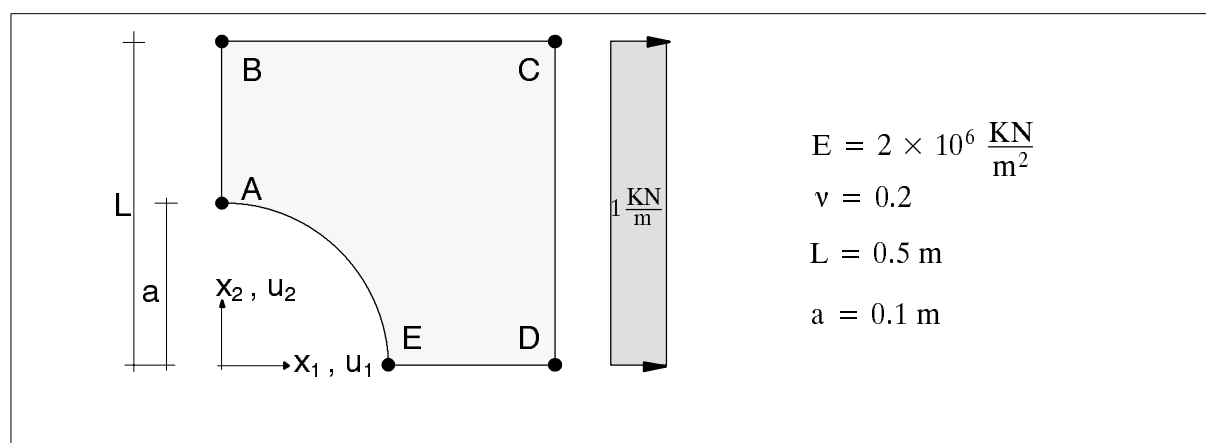


Bild 4.1 : Unendlich ausgedehnte Scheibe mit Loch unter horizontaler Einheitsspannung

Da eine unendliche Ausdehnung mit konventionellen finiten Elementen nicht dargestellt werden kann, werden an den Rändern der Scheibe die analytisch exakten Randbedingungen in linearer Näherung aufgebracht. Das Randstück AB ist in der x_1 -Richtung und das Randstück DE in der x_2 -Richtung Verschiebungsrand. Sie gehorchen in diesen Richtungen Gl. (92). Alle weiteren Randstücke sind in allen Richtungen Spannungsränder und gehorchen Gl. (93).

Lösung: Im Gebiet werden lineare Dreieckselemente eingesetzt. Auf dem Rand AB wird für die Komponente s_1 der Randspannung und auf dem Rand DE für die Komponente s_2 der Randspannung ein linearer Ansatz unternommen. Die im Gebiet verwendeten Elementierungen sind in Bild 4.2 dargestellt.

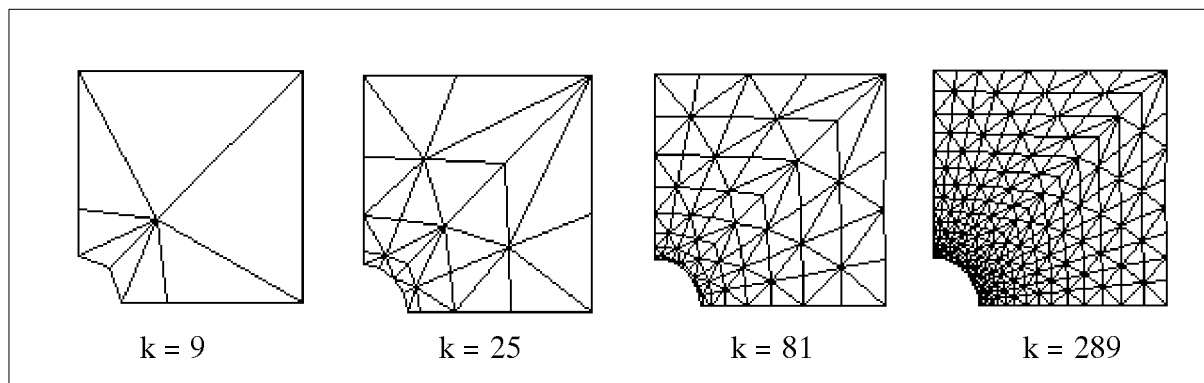


Bild 4.2 : Elementierungen lineares Dreieckselement

Tabelle 4.1 zeigt die Ergebnisse für die ausgezeichneten Punkte A, B und C. Aufgrund der Symmetrie bleibt das Randstück DE spannungsfrei. Anhand von Punkt C kann die Konvergenz in den Verschiebungen beobachtet werden. Von besonderem Interesse ist die Randspannung σ an den Punkten A und B für die unterschiedlichen Elementierungen: Der erste der vertafelten Werte ist die innere Spannung, die aus Differentiation des Verschiebungsverlaufs im Element erhalten wird. Da die betrachteten Punkte inzident zu mehreren Elementen sind, ist innerhalb der Tabelle das arithmetische Mittel aufgeführt. Bei der nachfolgenden Berechnung der Fehler ist dieser Wert am Integrationspunkt eindeutig. Der zweite, fett gedruckte Wert ist die äußere Randspannung, die mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren bestimmt wird.

Ort	Größe	exakt	k = 9	k = 25	k = 81	k = 289
A	u_2	-50,0	-22,77	-34,89	-45,20	-48,51
	σ	3,0	1,265 / 2,650	1,833 / 3,440	2,394 / 3,618	2,753 / 3,386
B	u_2	-63,76	-49,10	-52,27	-61,64	-62,83
	σ	1,022	1,020 / 1,051	1,032 / 1,019	1,028 / 1,017	1,025 / 1,016
C	u_1	257,06	246,92	252,72	255,74	256,62
	u_2	-51,06	-43,93	-48,40	-50,32	-50,80

Tabelle 4.1 : Ergebnisse Scheibe mit Loch

Die Verschiebungen an den betrachteten Punkten nähern sich monoton von unten dem exakten Wert. Entsprechend werden zu geringe Spannungen aus Differentiation am Punkt A berechnet. Die Spannungen am Punkt A aus dem vorgestellten Verfahren sind deutlich größer, zeigen aber kein monotonen Verhalten. Ursache dafür ist, daß nicht nur die Lösung sondern gleichzeitig das Lösungsgebiet im Bereich des Lochs angenähert wird. Die Spannungen am Punkt B entziehen sich einer Bewertung, da bereits mit wenigen Elementen eine gute Näherung erreicht ist.

Konvergenz im Gebiet: Der Verschiebungsfehler und der Energiefehler werden für jede Elementierung berechnet. In Bild 4.3 sind die Berechnungsergebnisse in doppelt logarithmischer Darstellung in Diagrammen aufgetragen. Stellvertretend für die durchschnittliche Gitterweite h wird die Quadratwurzel der Knotenanzahl k verwendet. Die Berechnungsergebnisse werden linear interpoliert. Die Steigung der Ausgleichsgeraden wird berechnet.

Die negative Steigung der dargestellten Kurven entspricht der Konvergenzrate. Für den Verschiebungsfehler wird die Rate $R = 1,86$ ermittelt. Das Ergebnis liegt nahe an der theoretischen Rate $R = 2$. Für den Energiefehler wird die Rate $R = 1,11$ ermittelt und liegt damit nahe an der theoretischen Rate $R = 1$. Diese Raten sind in ähnlicher Güte für diese Aufgabe von anderen Autoren berichtet worden [51].

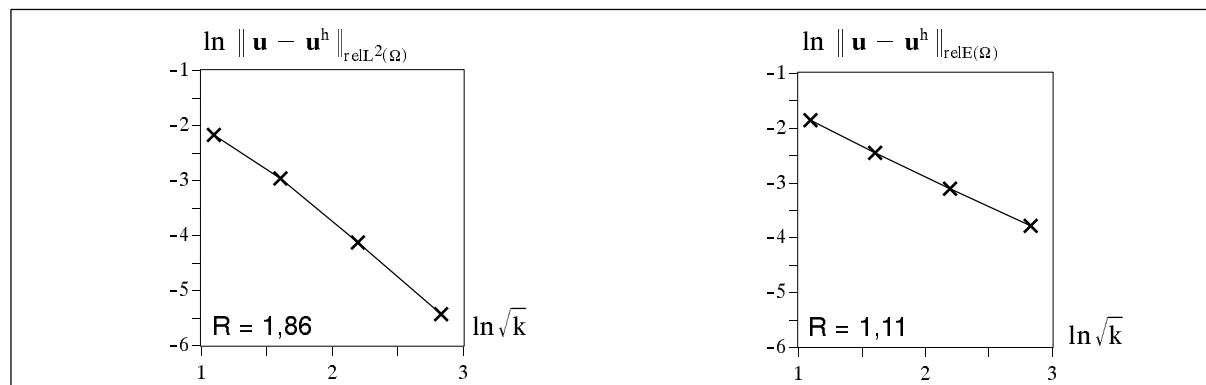


Bild 4.3 : Konvergenz $||u - u^h||_{L^2(\Omega)}$ und $||u - u^h||_{E(\Omega)}$ im Gebiet

Konvergenz auf dem Rand: Auf dem Rand AB wird sowohl für die innere Spannung als auch für die äußere Spannung aus der Erweiterung des Prinzips der Fehler in der Normalkraft, in der Querkraft und in den Randspannungen ermittelt. In Bild 4.4 sind diese Fehler in jeweils einem Diagramm in Abhängigkeit der Knotenanzahl k aufgetragen. Im Diagramm des Fehlers in den Randspannungen ist eine doppelt logarithmische Darstellung gewählt.

Der Fehler in der Normalkraft und der Querkraft ist für die äußere Randspannung Null. Im Gegensatz dazu ist der Fehler in der Normalkraft und der Querkraft für die innere Randspannung erst für $k = 81$ geringer als 3%. Der Fehler in den Randspannungen ist für die äußere Randspannung durchweg geringer. Beispielsweise beträgt für $k = 9$ der Fehler $e^{-1,70} \approx 18\%$ im Gegensatz zu $e^{-1,18} \approx 31\%$ für die innere Randspannung. Zudem ist die Konvergenzrate R_a für die äußere Randspannung größer. Beide Konvergenzraten liegen in der Größenordnung der Rate des Energiefehlers.

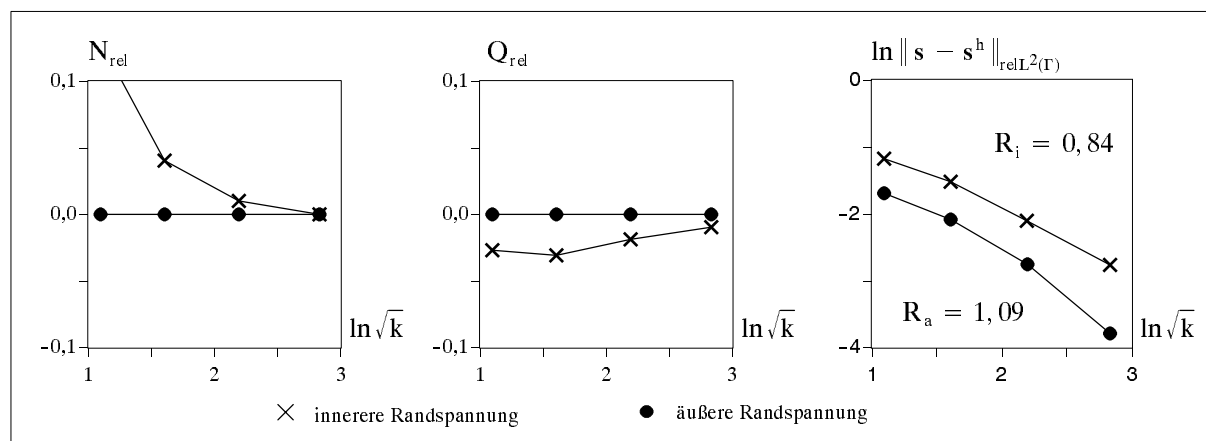


Bild 4.4 : Konvergenz N, Q und $||s - s^h||_{relL^2(\Gamma)}$ auf dem Rand Γ_{AB}

4.3 Schubverformter Balken

Aufgabe: Betrachtet wird ein Balken der Länge L mit rechteckigem Querschnitt, Einheitsbreite und Höhe H . Der linke Rand des Balkens ist eingespannt und der rechte Rand wird durch eine vertikale Einzellast P beansprucht. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich auf dem linken Rand der Mittellinie des Balkens. Die analytische Lösung der Aufgabe wird in [52] in kartesischen Koordinaten entwickelt und lautet für die Verschiebungen:

$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{P}{6E^*I} \left[(6L - 3x_1)x_1 + ((2 + \nu^*)x_2^2) - \frac{3H^2}{2}(1 + \nu^*) \right]$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{P}{6E^*I} [(3L - x_1)3\nu^*x_2^2 + (3L - x_1)x_1^2] \quad (94)$$

Dabei ist das Flächenträgheitsmoment $I = -\frac{H^3}{12}$ sowie Materialkennwerte $E^* = E$ bzw. $\nu^* = \nu$ für den ebenen Spannungszustand und $E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$ bzw. $\nu^* = \frac{\nu}{1 - \nu}$ für den ebenen Dehnungszustand. Die Lösung für die Spannungen lautet:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = -\frac{P}{I}(L - x_1)x_2$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = 0$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = \frac{P}{2I} \left(\frac{H^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (95)$$

In Bild 4.5 ist das Rechenmodell des Balkens dargestellt. Die antisymmetrische Belastung des symmetrischen Systems wird nicht ausgenutzt, um auch den linken Rand des Balkens mit einem einzigen Element modellieren zu können. Außer den Symbolen für die Maße und die Belastung sind die Punkte A, B und C des Balkens gekennzeichnet sowie die verwendeten Stoffparameter und Abmessungen zusammengestellt.

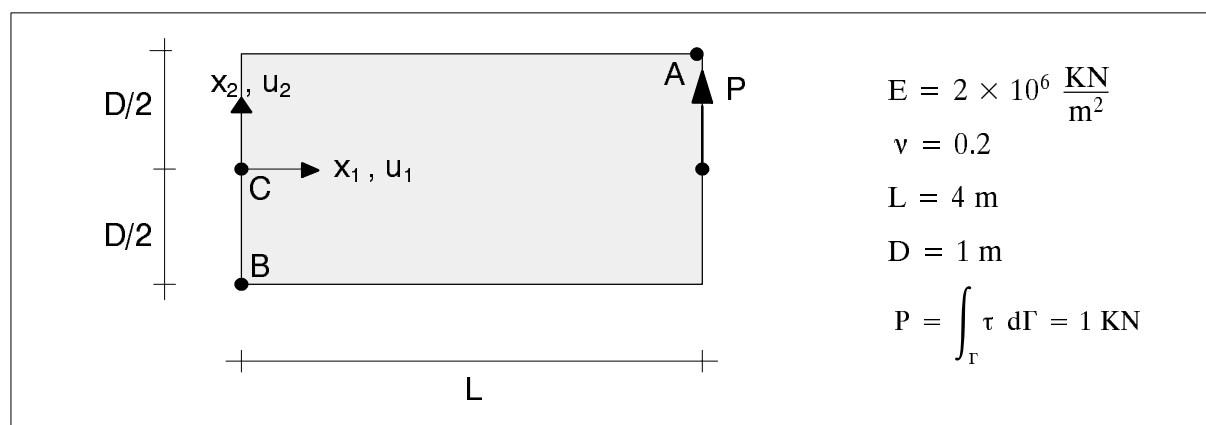


Bild 4.5 : Schubverformbarer Balken

Für die folgenden Berechnungen wird ein ebener Spannungszustand gewählt. An den Rändern der Scheibe werden die analytisch exakten Randbedingungen in linearer Näherung aufgebracht. Das linke Randstück ist in beiden Richtungen Verschiebungsrand und gehorcht Gl. (94). Alle übrigen Randstücke sind Kraftränder und gehorchen Gl. (95). Insbesondere wird am rechten Rand anstelle der Einzellast P der parabolische Schub aufgebracht.

Lösung: Im Gebiet werden zunächst bilineare Rechteckelemente verwendet. Auf dem linken Rand des Balkens wird ein linearer Ansatz für die Randspannung gewählt. Die im Gebiet verwendeten Elementierungen sind in Bild 4.6 dargestellt.

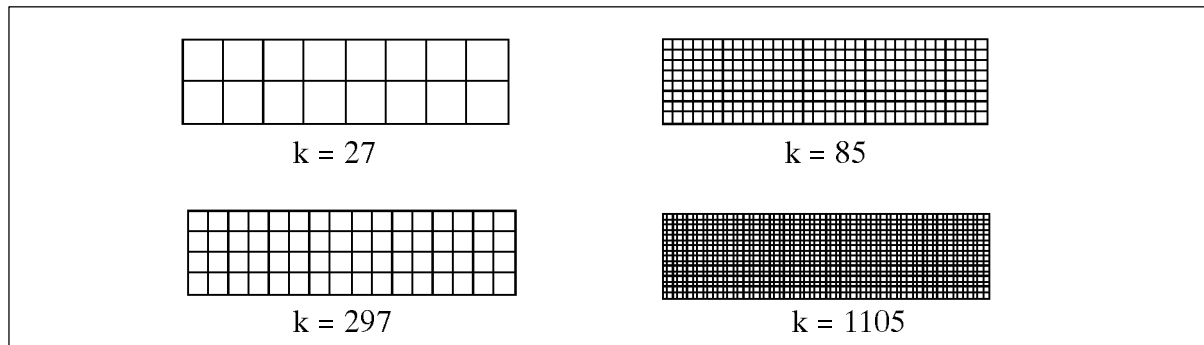


Bild 4.6 : Elementierungen des Balkens mit bilinearen Elementen

Tabelle 4.2 zeigt die Ergebnisse für die ausgezeichneten Punkte A, B und C. Anhand von Punkt A kann die Konvergenz in den Verschiebungen beobachtet werden. Von besonderem Interesse ist die Randspannung σ und τ an den Punkten B und C für die unterschiedlichen Elementierungen: Der erste der vertafelten Werte ist die innere Spannung, die aus Differentiation des Verschiebungsverlaufs im Element erhalten wird. Der zweite, fett gedruckte Wert ist die äußere Spannung, die mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren bestimmt wird. Werte, die als exakt gekennzeichnet sind, unterscheiden sich nicht vom analytischen Wert der in der Tabelle gewählten Darstellungsgenauigkeit.

Ort	Größe	analytisch	k = 27	k = 85	k = 297	k = 1105
A	u_1	-23,38	-20,89	-22,69	-23,19	-23,32
	u_2	128,0	114,43	124,27	127,04	127,75
B	σ	240,0	205,57 / 240,0	227,82 / 247,87	235,47 / 245,78	238,16 / 243,37
	τ	0,0	50,49 / 2,84	28,98 / 1,75	15,23 / 1,09	7,78 / 0,63
C	σ	0,0	exakt	exakt	exakt	exakt
	τ	15,0	53,28 / 17,16	37,62 / 15,72	26,99 / 15,12	21,13 / 15,02

Tabelle 4.2 : Ergebnisse bilineares Rechteckelement

Die Verschiebungen am Punkt A nähern sich erwartungsgemäß monoton von unten dem exakten Wert an. Entsprechend werden am Punkt B zu geringe Werte für die innere Normalspannung σ ermittelt. Der parabolische Schubverlauf wird mit den inneren Spannungen nur unzulänglich erfaßt. Die Spannungen an den Punkten B und C aus dem vorgestellten Verfahren werden erheblich besser eingeschätzt und sind zudem alle größer oder gleich dem exakten Wert. Die Normalspannung σ für die Elementierung $k = 27$ ist wegen der Symmetrie und wegen des linearen Verlaufs der analytischen Lösung sowie des Ansatzes zwangsläufig exakt.

Konvergenz im Gebiet: Die Diagramme in Bild 4.7 stellen den Verschiebungsfehler und den Energiefehler in Abhängigkeit der uniformen Gitterweite h dar. Für die Diagramme ist eine doppelt logarithmische Darstellung gewählt. Die Ergebnisse stehen in sehr gutem Einklang mit den theoretischen Erwartungswerten $R = 2$ für die Verschiebungen und $R = 1$ für die Energie.

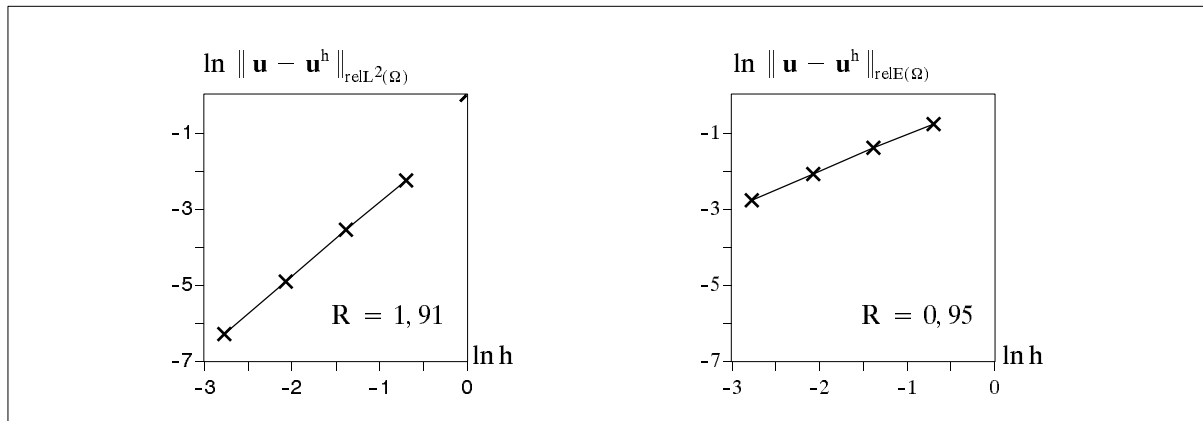


Bild 4.7 : Konvergenz $\|u - u^h\|_{\text{rel}L^2(\Omega)}$ und $\|u - u^h\|_{\text{rel}E(\Omega)}$ im Gebiet Ω

Konvergenz auf dem Rand: Die Diagramme in Bild 4.8 stellen den Fehler im Moment, in der Querkraft und in den Randspannungen am linken Rand des Balkens dar.

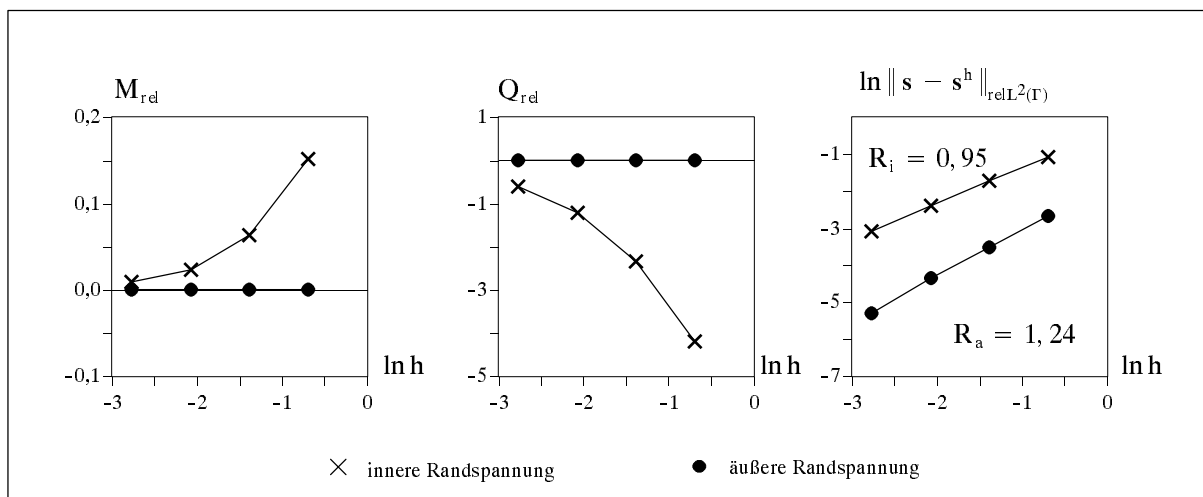


Bild 4.8 : Konvergenz Q_{rel} , M_{rel} und $\|s - s^h\|_{L^2(\Gamma)}$ auf dem Rand

Der Fehler in der Querkraft für die inneren Spannungen beträgt selbst für die feinste Elementierung 61% im Gegensatz zum exakten Wert für die äußeren Spannungen. Dieser Fehler kennzeichnet den für diese Aufgabe häufig beobachteten Schubversteifungseffekt beim Einsatz konformer Verschiebungselemente. Entsprechend ist auch der Fehler in der Randspannung für die innere Spannung deutlich größer als der Fehler für die äußere Spannung. Beispielsweise beträgt der Fehler unter Verwendung der feinsten Elementierung 5% für die innere Spannung im Gegensatz zu 0,5% für die äußere Spannung. Zudem ist die Rate der äußeren Spannung größer als die Rate der inneren Spannung. Letztere ist für diese Aufgabe identisch mit der Rate des Energiefehlers.

Weitere Lösung: Die Untersuchung der Aufgabe wird mit einem unvollständig quadratischen acht Knoten Rechteckelement durchgeführt. In Bild 4.9 werden die verwendeten Elementierungen gezeigt. Die Knoten auf den Seitenmitten sind nicht dargestellt. Auf dem linken Rand des Balkens wird nun ein quadratischer Ansatz für die Randspannung unternommen.

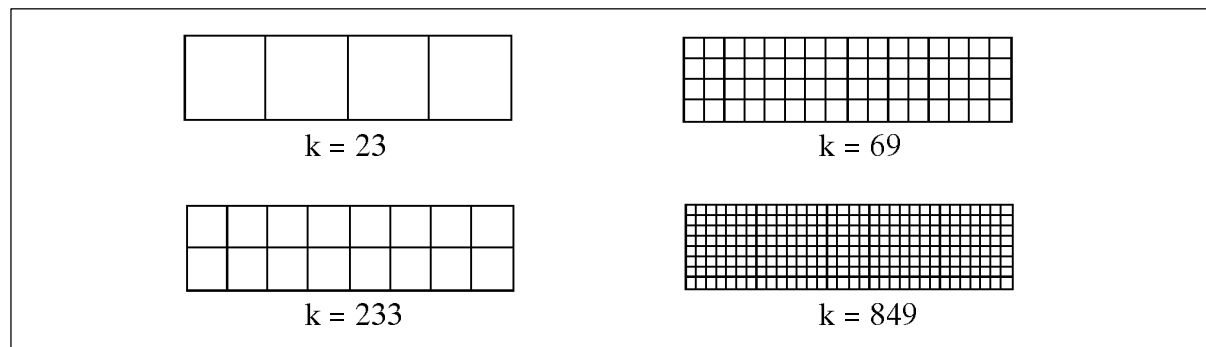


Bild 4.9 : Elementierungen des Balkens mit quadratischen Elementen

Tabelle 4.3 zeigt die Ergebnisse für die ausgezeichneten Punkte A, B und C in Analogie zur Tabelle 4.2:

Ort	Größe	analytisch	k = 23	k = 69	k = 233	k = 849
A	u_1	-23,38	-23,36	exakt	exakt	exakt
	u_2	128,0	127,82	exakt	exakt	exakt
B	σ	240,0	237,68 / exakt	239,69 / exakt	235,47 / exakt	238,16 / exakt
	τ	0,0	13,02 / 8,33	3,31 / 2,20	0,83 / 0,56	0,21 / 0,14
C	σ	0,0	exakt	exakt	exakt	exakt
	τ	15,0	14,27 / 10,83	18,31 / 17,27	15,83 / 15,56	15,21 / 15,14

Tabelle 4.3 : Ergebnisse quadratisches Rechteck Element

Die Verschiebungen am Punkt A erreichen schnell den exakten Wert im Rahmen der für die Tabelle gewählten Darstellungsgenauigkeit. Abgesehen von dem Wert für die Schubspannung bei der größten Elementierung am Punkt C sind die Ergebnisse für die äußeren Randspannungen aus dem vorgestellten Verfahren wiederum besser und oberhalb oder gleich der exakten Werte.

Konvergenz im Gebiet: Die Diagramme in Bild 4.10 stellen den Verschiebungsfehler und den Energiefehler in Abhängigkeit der uniformen Gitterweite h dar. Für die Diagramme ist eine doppelt logarithmische Darstellung gewählt. Die Ergebnisse stehen in gutem Einklang mit den theoretischen Erwartungswerten $R = 4$ für die Verschiebungen und $R = 2$ für die Energie.

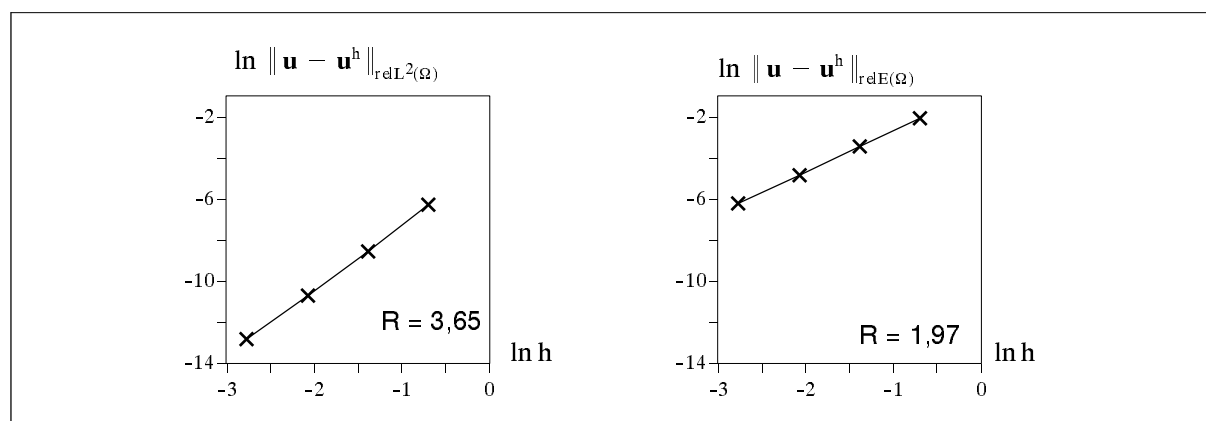


Bild 4.10 : Konvergenz $\|u - u^h\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|u - u^h\|_{E(\Omega)}$ im Gebiet

Konvergenz auf dem Rand: Die Diagramme in Bild 4.11 stellen den Fehler im Moment, in der Querkraft und in den Randspannungen am linken Rand des Balkens in Abhängigkeit der uniformen Gitterweite h dar.

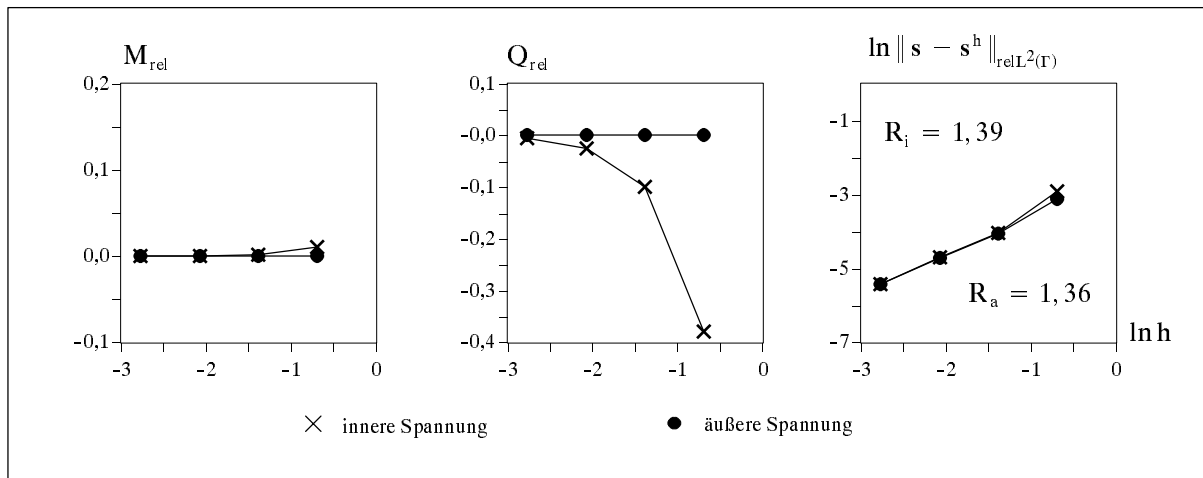


Bild 4.11 : Konvergenz $\|s - s^h\|_{L^1(\Gamma)}$ und $\|s - s^h\|_{L^2(\Gamma)}$ auf dem Rand

Der Fehler im Moment beträgt bei der gröbsten Elementierung ca.1% und ist dann vernachlässigbar gering. Der Fehler in der Querkraft schwindet von ca. 38% zu 0.6%. Der Fehler in der Randspannung ist für das vorgestellte Verfahren nur geringfügig kleiner. Die Raten sind insbesondere für die feineren Elementierungen nahezu identisch. Die analytische Lösung ist für diese Elementierungen weitgehend reproduziert.

4.4 Zylinder unter konstantem Innendruck

Aufgabe: Betrachtet wird ein Zylinder unter einem konstanten Innendruck p . Der Innenradius des Zylinders wird mit a und der Außenradius mit b bezeichnet. Die Länge des Zylinders ist idealisiert unendlich. Die analytische Lösung der Aufgabe wird in [52] entwickelt. Aufgrund der Rotationssymmetrie hängt die Lösung in Zylinderkoordinaten r, θ nur von der Koordinate r ab. Die Verschiebungslösung lautet:

$$u_r(r) = \frac{a^2 p r}{E(b^2 - a^2)} \left\{ 1 - \nu + \frac{b^2}{r^2} (1 + \nu) \right\}$$

$$u_\theta(r) = 0 \quad (96)$$

Die Radialspannung σ_r und die Ringspannung σ_θ im Zylinder sind nachfolgend gegeben. Die Schubspannung $\sigma_{r\theta}$ ist wie die Verschiebung u_θ in Ringrichtung θ aufgrund der Rotationssymmetrie Null.

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \frac{b^2}{r^2} \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left\{ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right\}$$

$$\sigma_{r\theta}(r) = 0 \quad (97)$$

Bild 4.12 zeigt das verwendete Rechenmodell. Wegen der Symmetrie in Geometrie und Belastung wird nur ein Viertel des Zylinders betrachtet. Außer den Symbolen für die Maße und die Belastung sind die Punkte A, B und C des Zylinders gekennzeichnet sowie die verwendeten Stoffparameter und Abmessungen zusammengestellt.

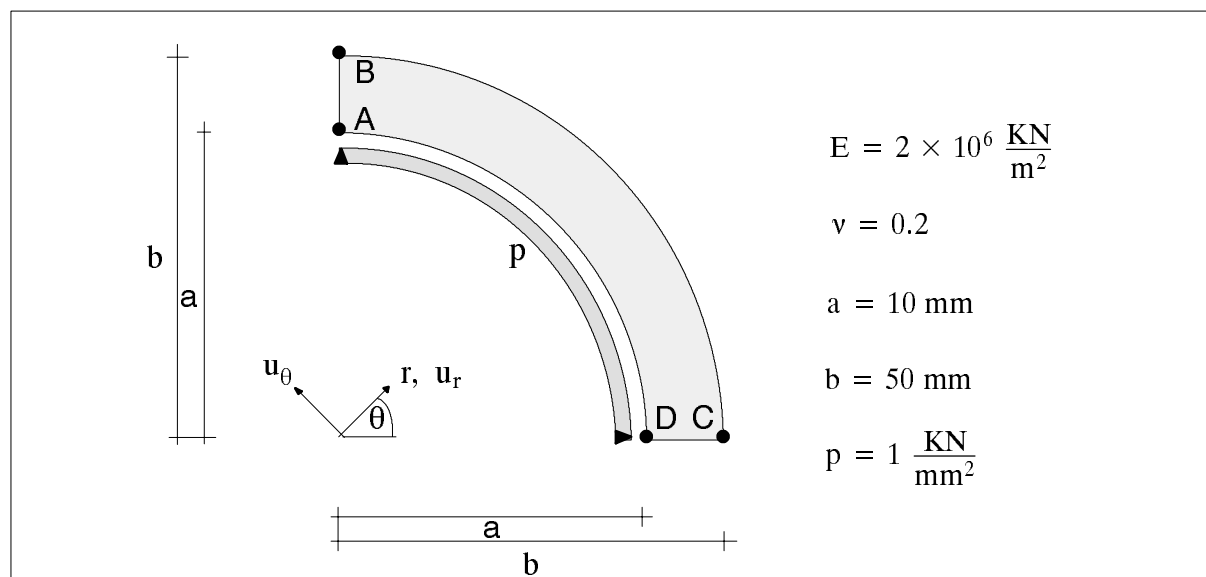


Bild 4.12 : Zylinder unter konstantem Innendruck

Das Randstück AB und das Randstück DC sind in der θ -Richtung Verschiebungsränder und gehorchen (96). Alle übrigen Randstücke sind Kraftränder und gehorchen (97).

Lösung: Der Zylinder wird als ebener Dehnungszustand modelliert. Bild 4.13 stellt die verwendeten Elementierungen mit einem isoparametrischen, bilinearen Viereckselement dar.

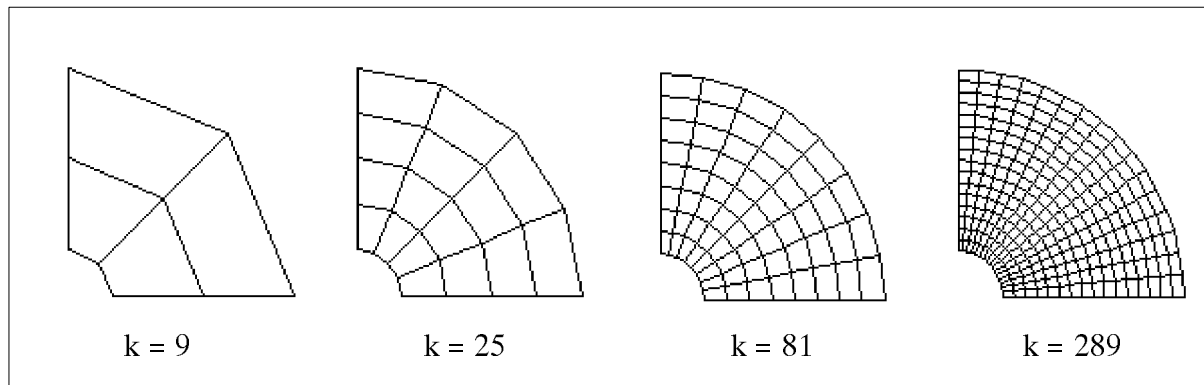


Bild 4.13 : Elementierungen des Zylinders mit bilinearen Elementen

Tabelle 4.4 zeigt die Ergebnisse für den ausgezeichneten Punkt A. Von besonderem Interesse ist die Spannung normal zum Rand AB für die unterschiedlichen Elementierungen: Der erste der vertafelten Werte ist die innere Spannung, die aus Differentiation des Verschiebungsverlaufs im Element erhalten wird. Der zweite, fett gedruckte Wert ist die äußere Spannung, die mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren bestimmt wird.

Ort	Größe	analytisch	k = 9	k = 25	k = 81	k = 289
A	u_r [mm]	6,416	4,997	5,804	6,246	6,371
	σ [N/mm ²]	1083	983 / 924	1111 / 999	1141 / 1083	1128 / 1103
	τ [N/mm ²]	0	-226 / exakt	-141 / exakt	-83 / exakt	-45 / exakt

Tabelle 4.4 : Ergebnisse bilineares Viereckelement

Das vorgestellte Verfahren liefert aufgrund der Lagerungsbedingungen keine Schubspannung. Die Schubspannung aus Differentiation ist auch für die feinste Elementierung nicht befriedigend. Für die Normalspannung ist aus den Ergebnissen am Punkt A keine Beurteilung des vorgestellten Verfahrens möglich. Auch in dieser Aufgabe ist zu berücksichtigen, daß gleichzeitig mit der Lösung das Lösungsgebiet angenähert wird.

Konvergenz im Gebiet: Die Diagramme in Bild 4.14 stellen den Energiefehler und den Verschiebungsfehler in Abhängigkeit der Diskretisierung dar. Stellvertretend für die durchschnittliche Gitterweite h wird die Quadratwurzel der Knotenanzahl k verwendet. Die Ergebnisse stehen in sehr gutem Einklang mit den theoretischen Konvergenzraten.

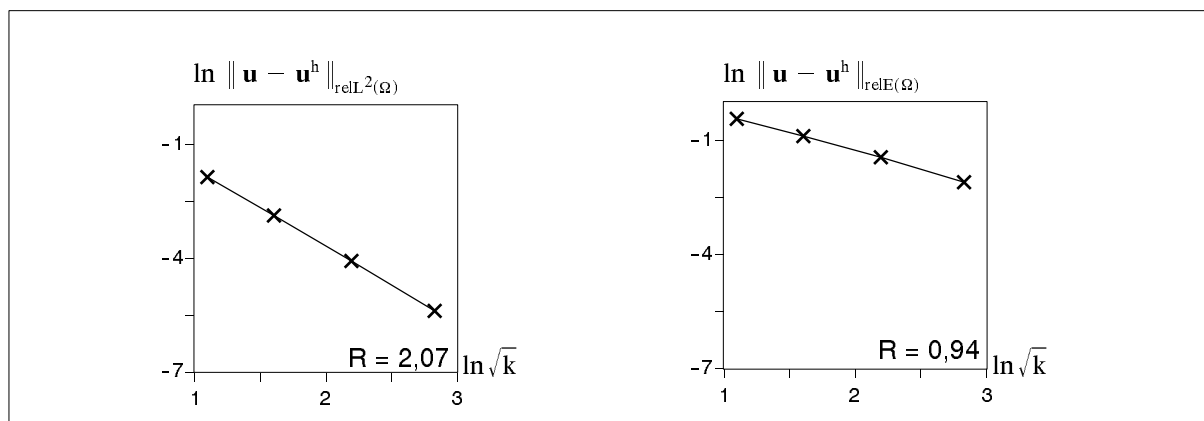


Bild 4.14 : Konvergenz $\|u - u^h\|_{\text{rel}L^2(\Omega)}$ und $\|u - u^h\|_{\text{rel}E(\Omega)}$ im Gebiet Ω

Konvergenz auf dem Rand: Die Diagramme in Bild 4.11 stellen den Fehler im Moment, in der Querkraft und in den Randspannungen am linken Rand des Balkens in Abhängigkeit der Quadratwurzel der Knotenanzahl k dar.

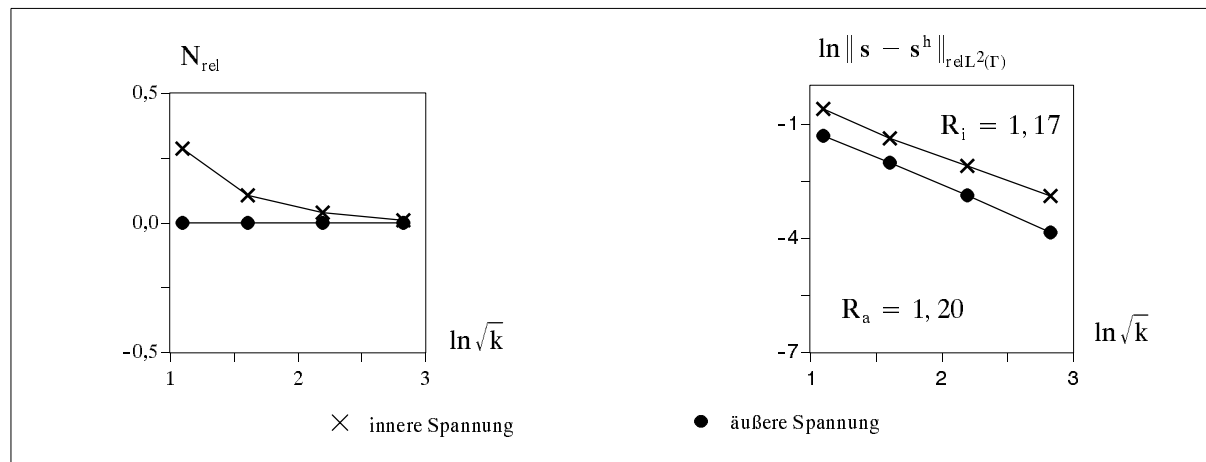


Bild 4.15 : Konvergenz $\|s - s^h\|_{rel L^1(\Gamma)}$ und $\|s - s^h\|_{rel L^2(\Gamma)}$ auf dem Rand Γ_{AB}

Der Fehler in der Normalkraft für die innere Spannung sinkt von 28% auf ca. 1% gegenüber dem exakten Wert. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen entsteht in diesem Beispiel auch für die äußere Spannung ein geringer Fehler ($< 1\%$) in der Normalkraft, da die berechnete Normalkraft im Gleichgewicht mit der linearen Näherung der Belastung und nicht mit der für die Berechnung des Fehlers verwendeten analytisch exakten Belastung steht. Der Fehler in den Randspannungen ist für die äußeren Spannungen durchweg geringer. Sowohl die Konvergenzrate $R_a = 1,20$ der äußeren Spannung als auch die Konvergenzrate $R_i = 1,17$ der inneren Spannung sind von der Größenordnung vergleichbar mit der Rate des Energiefehlers $R = 0,94$.

Radialer Schnitt: In Bild 4.16 ist links ein radialer Schnitt mit $\theta = \frac{\pi}{4}$ durch das Lösungsgebiet dargestellt. Die Ergebnisse für die äußeren Spannungen auf diesem Schnitt sind wegen der Rotationssymmetrie identisch zu den in Tabelle 4.4 und Bild 4.15 dargestellten Ergebnissen. Für die inneren Spannungen besteht nun die Möglichkeit zunächst das arithmetische Mittel des Spannungszustands S der Punkte auf dem Schnitt zu bilden, um darauf die Werte der Randspannung s normal zur Schnittlinie zu bestimmen. Wegen der Rotationssymmetrie ist dann auch die Schubspannung aus Differentiation Null. Für die Normalspannung ergibt sich keine Änderung. Der Fehler für die innere Spannung wird durch die Mittelwertbildung verringert und ist in Bild 4.16 zusammen mit dem Fehler für die äußere Spannung rechts dargestellt. Der Fehler liegt nach wie vor oberhalb des Fehlers für die äußere Spannung. Die Konvergenzraten sind unverändert.

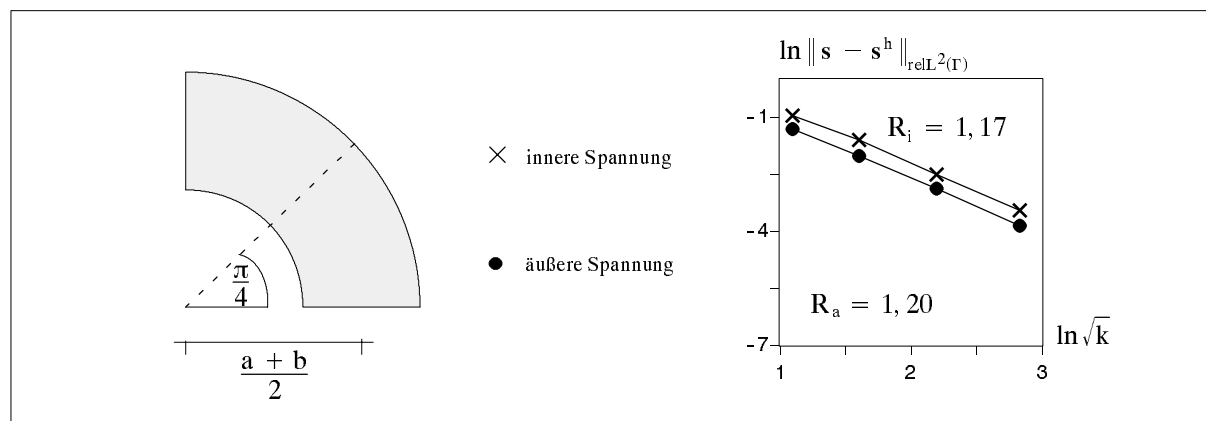


Bild 4.16 : Konvergenz $\|s - s^h\|_{rel L^2(\Gamma)}$ auf radialem Schnitt

Ringförmiger Schnitt: In Bild 4.17 ist links ein ringförmiger Schnitt mit $r = \frac{a+b}{2}$ durch den Punkt F des Lösungsgebietes geführt. Am Punkt F sind vier Elemente inzident, deren Lage mit den Symbolen α , β , γ und δ bezeichnet ist. Für jedes der Elemente sind in Tabelle 4.5 die Werte der inneren Spannung normal zur Schnittlinie in Abhängigkeit der Knotenanzahl k vertafelt. Die Ergebnisse der Elemente α und β beziehungsweise γ und δ unterscheiden sich nur im Vorzeichen der Schubspannung. Sie sind daher in einer gemeinsamen Tabellenzeile aufgeführt. In den letzten beiden Tabellenzeilen sind die Werte der äußeren Randspannung, die mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren am Punkt F bestimmt werden, fett gedruckt vertafelt.

Ort	Größe	analytisch	k = 9	k = 25	k = 81	k = 289
F	$\sigma_{\alpha,\beta}$ [N/mm ²]	-74,07	-263,03	-133,43	-100,36	-86,63
	$\tau_{\alpha,\beta}$ [N/mm ²]	0	+73,70	+26,74	+12,28	+5,91
	$\sigma_{\gamma,\delta}$ [N/mm ²]	-74,07	-9,51	-34,18	-51,97	-62,50
	$\tau_{\gamma,\delta}$ [N/mm ²]	0	+31,70	+18,84	+10,37	+5,43
	σ [N/mm ²]	-74,07	-64,75	-70,40	-72,94	-73,71
	τ [N/mm ²]	0	0	0	0	0

Tabelle 4.5 : Ergebnisse bilineares Viereckelement

Die Güte der inneren Spannung normal zum Schnitt für die einzelnen Elemente ist gering. Es wird daher wiederum an den Integrationspunkten der Randspannung auf dem Schnitt das arithmetische Mittel des Spannungszustands s ermittelt, um darauf die Werte $s = \mathbf{S} \mathbf{n}$ normal zur Schnittlinie zu bestimmen. Mit diesen gemittelten Werten wird der Fehler in den Randspannungen für die innere Spannung ermittelt. Es muß betont werden, daß diese Glättung nicht das vorgestellte Verfahren berührt, sondern notwendig ist, um konkurrenzfähige Werte für das Verfahren zu erzielen.

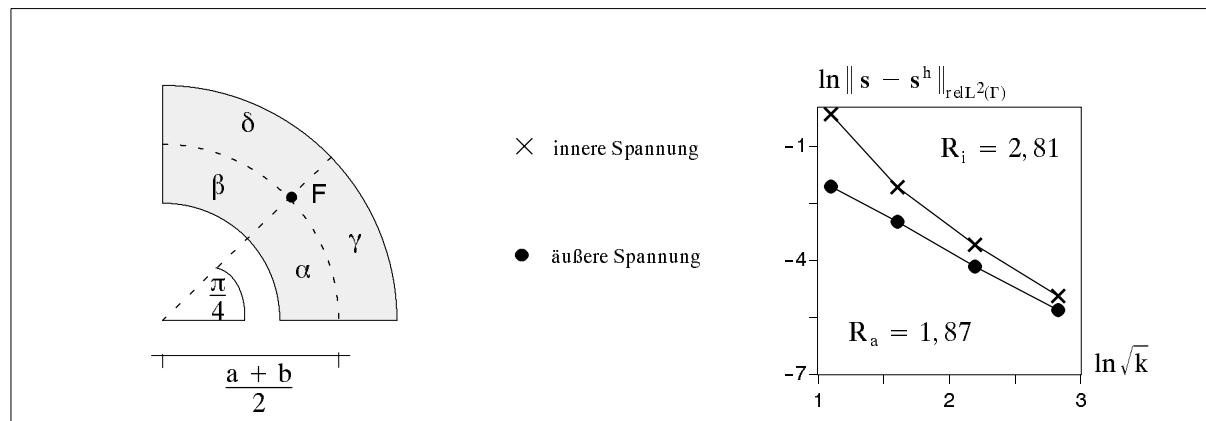


Bild 4.17 : Konvergenz $\|s - s^h\|_{\text{rel } L^2(\Gamma)}$ auf radialem und ringförmigem Schnitt

Der Fehler in den Randspannungen ist in Bild 4.17, rechts, dargestellt. Trotz des Einsatz dieses, wenn auch einfachen, Glättungsverfahrens wird nicht die Güte der äußeren Randspannungen aus dem vorgestellten Verfahren erreicht. Der Fehler der inneren Spannungen ist für alle Elementierungen größer als der Fehler der äußeren Spannungen. Die hohe Konvergenzrate $R_i = 2,81$ für die inneren Spannungen ist mit der geringen Güte für die grobe Elementierung zu erklären. Sie gleicht sich zunehmend an die Rate $R_a = 1,87$ des vorgestellten Verfahrens an. Der ringförmige Schnitt illustriert die Qualität des Verfahrens für eine in einem asymptotischen Sinn ausgerundete Geometrie.

4.5 Unendliche Scheibe mit Einschuß

Aufgabe: Betrachtet wird eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit einem kreisförmigen Einschuß, dessen Radius R ist. Die Materialkonstanten von Lamé werden für den Einschuß mit μ_1 und λ_1 sowie für die Scheibe mit μ_2 und λ_2 bezeichnet. Der Einschuß unterliegt einem initial eingepprägten, konstanten dilatorischen Eigendehnungszustand des Betrags d_0 . Aufgrund der Rotationssymmetrie hängt die analytische Lösung der Aufgabe in Zylinderkoordinaten r, θ nur von der Koordinate r ab. Aus dem gleichen Grund sind auch die Verschiebung $u_\theta(r)$, die Dehnung $\epsilon_{r\theta}(r)$ sowie die Spannung $\sigma_{r\theta}(r)$ Null. Die Lösung für die Verschiebung lautet:

$$\begin{aligned}
 u_r(r) &= C r & \forall r: & r \leq R \\
 u_r(r) &= C \frac{R^2}{r} & \forall r: & r > R \\
 \text{mit } C &= \frac{(\mu_1 + \lambda_1) d_0}{\mu_1 + \lambda_1 + \mu_2} \\
 u_\theta(r) &= 0
 \end{aligned} \tag{98}$$

Unter Berücksichtigung der Zylinderkoordinaten folgt für die Dehnungen:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{rr}(r) &= \epsilon_{\theta\theta}(r) = C & \forall r: & r \leq R \\
 \epsilon_{rr}(r) &= -\epsilon_{\theta\theta}(r) = -C \frac{R^2}{r^2} & \forall r: & r > R \\
 \epsilon_{r\theta}(r) &= 0
 \end{aligned} \tag{99}$$

Bei Anwendung des Materialgesetzes in der Darstellung von Lamé folgt für die Spannungen:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(r) &= \sigma_{\theta\theta}(r) = 2C(\mu_1 + \lambda_1) & \forall r: & r \leq R \\
 \sigma_{rr}(r) &= -\sigma_{\theta\theta}(r) = -2C\mu_2 \frac{R^2}{r^2} & \forall r: & r > R \\
 \sigma_{r\theta}(r) &= 0
 \end{aligned} \tag{100}$$

In Bild 4.18 sind die Aufgabe, die gewählten Abmessungen und Materialparameter sowie eine Elementierung des Lösungsgebietes dargestellt. Für die Berechnung wird ein kreisförmiger Bereich aus dem Kontinuum ausgeschnitten. Wegen der Symmetrie in Geometrie und Belastung wird nur ein Viertel des Ausschnitts modelliert. Die Randstücke zwischen den Punkten AB und AC des Symmetrierandes sind in der θ -Richtung gefesselt. Das Randstück BC gehorcht (98).

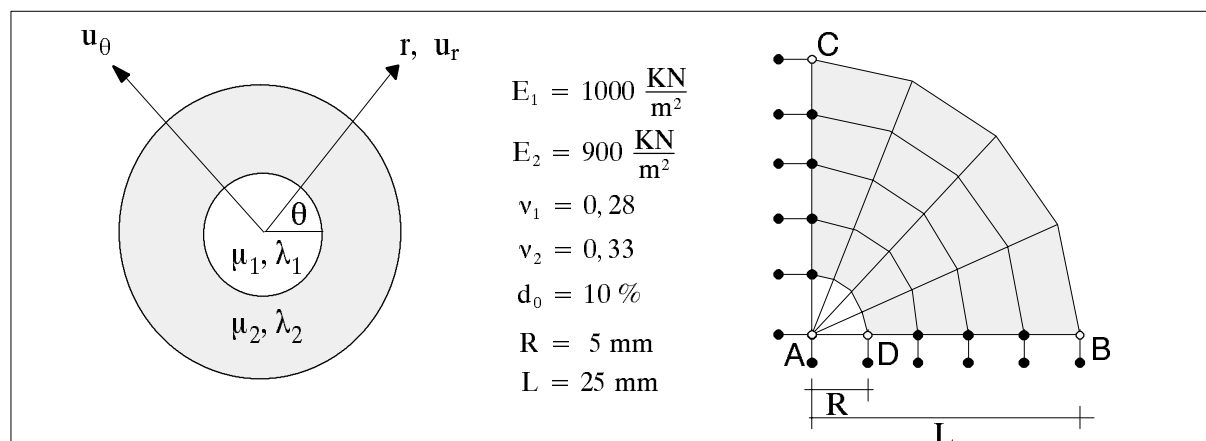


Bild 4.18 : Unendliche Scheibe mit Einschuß

Lösung: Der Einschluß wird mit linearen Dreieckselementen angenähert. Für den übrigen Ausschnitt werden bilineare Viereckselemente eingesetzt. In Bild 4.19 ist die Radialverschiebung u_r , die Radialdehnung ϵ_{rr} und die Ringdehnung $\epsilon_{\theta\theta}$ der analytischen Lösung in Abhängigkeit von der Koordinate r aufgetragen. Zusätzlich ist die Näherungslösung für u_r markiert, die mit der in Bild 4.18 dargestellten Elementierung gewonnen wird. Die Näherung für die Dehnungen ϵ_{rr} sowie $\epsilon_{\theta\theta}$ wird aus deren Differentiation bestimmt. Dargestellt ist deren Wert im Flächenschwerpunkt des Elementes. Die Verschiebungen und dementsprechend die Dehnungen der Näherungslösung sind erwartungsgemäß zu gering. Die Diskontinuität in der Radialdehnung wird qualitativ reproduziert.

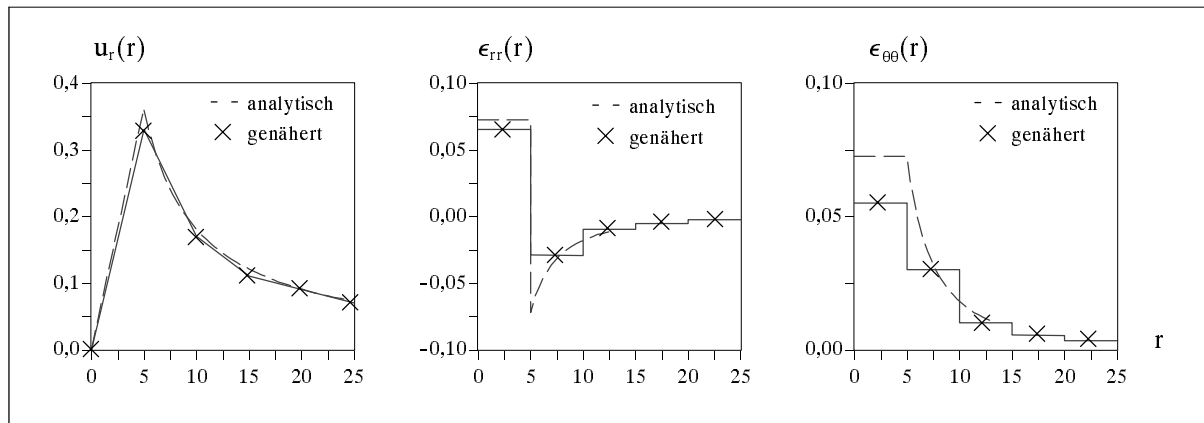


Bild 4.19 : Verschiebungen $u_r(r)$ sowie Dehnungen $\epsilon_{rr}(r)$ und $\epsilon_{\theta\theta}(r)$

Die Außennormale am Rand AB ist $\mathbf{n} = [0, -1]^T$. Dort ist die Randspannung $\mathbf{s}$ der analytischen Lösung $\mathbf{s} = [0, -\sigma_{\theta\theta}]^T$. Die äußere Spannung ist für die erste Komponente dieses Vektors *per Definition* exakt. Von besonderem Interesse ist die Diskontinuität der analytischen Lösung an der Stelle $r = R$ für die zweite Komponente dieses Vektors. Die äußere Spannung ist für diese Komponente wegen des C_0 -kontinuierlichen Ansatzes stetig. Diese Näherung ist in Bild 4.20 zusammen mit der Näherung der inneren Spannung links aufgetragen.

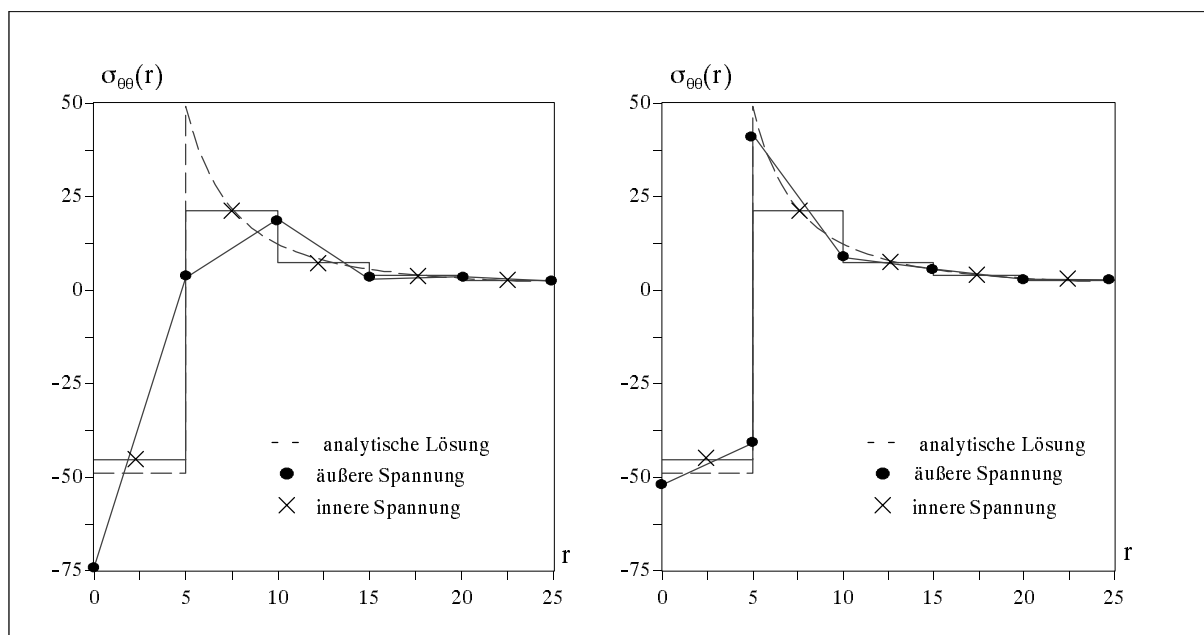


Bild 4.20 : Ringspannung $\sigma_{\theta\theta}(r)$ inhomogen (links) und homogen (rechts)

Die Spannungen aus Differentiation vermögen die Diskontinuität der Ringspannung $\sigma_{\theta\theta}(r)$ an der Stelle $r = R$ qualitativ wiederzugeben. Das Ergebnis für die äußere Spannung ist aufgrund der Annahme der Stetigkeit der Randspannungen kontinuierlich und damit unbefriedigend.

Radialer Schnitt: Das unbefriedigende Ergebnis kann durch geeignete Schnittführung verbessert werden, indem der Einschluß aus der Scheibe ausgeschnitten wird. Die Analyse der Randspannung auf dem Schnitttrand wird mit der Gleichung (40) für das Randstück AD sowie das Randstück DB separat durchgeführt. Das damit erzielte Ergebnis für die Ringspannung $\sigma_{\theta\theta}$ ist auf der rechten Seite von Bild 4.20 dargestellt. Durch die Trennung des Lösungsgebietes in Teilgebiete mit homogener Materialbelegung wird das Ergebnis insbesondere an der Stelle $r = R$ wesentlich verbessert.

Ringförmiger Schnitt: Eine Näherung für die Radialspannung σ_{rr} wird erhalten, indem mehrere ringförmige Schnitte längs der in Bild 4.18 dargestellten Elementierung geführt werden. Ein derartiger Schnitt ist auf der linken Seite von Bild 4.21 illustriert. Auf jedem der Schnitte wird eine Analyse der Randspannung vorgenommen. Aufgrund der Symmetrie des Modells wird auf jeder Schnittfläche ein konstanter Wert für die Normalspannung erhalten. Die Werte stellen eine Näherung des Verlaufs der Radialspannung σ_{rr} dar und werden als lineare Interpolation zusammen mit der analytisch exakten Lösung in das Diagramm in Bild 4.21 aufgenommen. Zusätzlich ist die Lösung für die inneren Spannungen aufgetragen. Für die Darstellung dieser Näherungslösung wird der Wert in Elementmitte herangezogen.

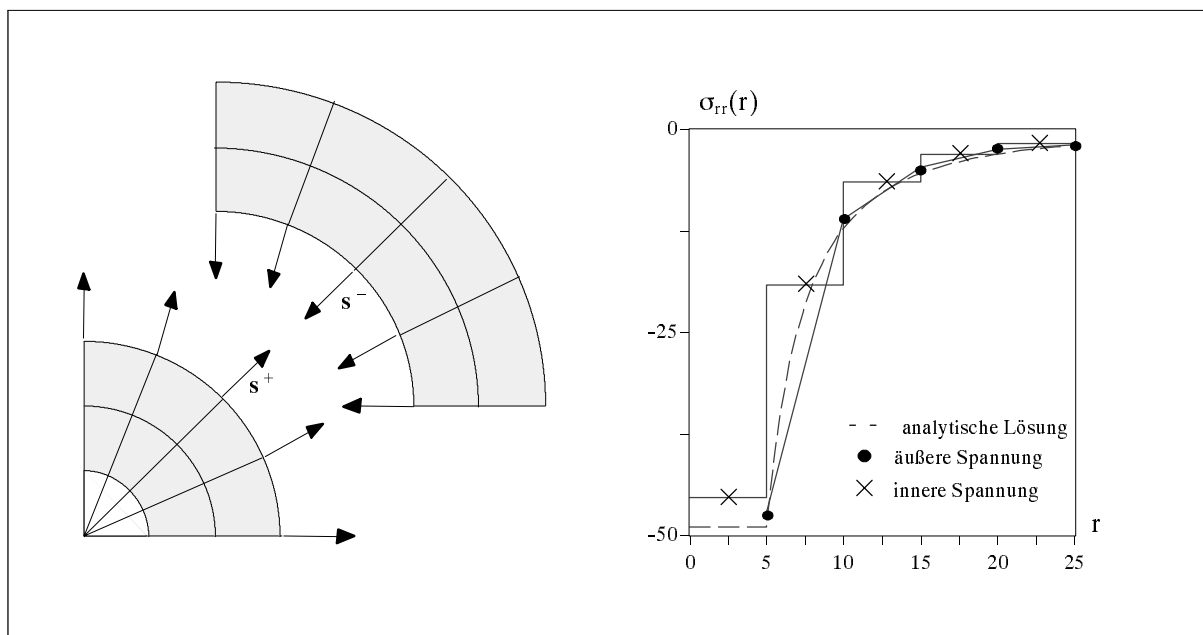


Bild 4.21 : Prinzipskizze Schnitt und Radialspannung $\sigma_{rr}(r)$

Die Radialspannung aus Differentiation wird dem Verschiebungsergebnis entsprechend zu gering eingeschätzt. Die Ergebnisse aus dem vorgestellten Verfahren zeigen eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung für den jeweiligen Schnitt. Der ringförmige Schnitt illustriert wiederum die Qualität des Verfahrens für eine in einem asymptotischen Sinn ausgerundete Geometrie.

4.6 Einzellast auf Halbraum

Aufgabe: Betrachtet wird ein linear isotroper elastischer Halbraum, der durch eine vertikale Einzellast P beansprucht wird. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet am Angriffspunkt der Last. Die analytische Lösung der Aufgabe wird in [52] in Zylinderkoordinaten entwickelt. Sie lautet für die rotationssymmetrischen Verschiebungen:

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= \frac{P}{4\pi G a} \left\{ \frac{r z}{a^2} - (1 - 2\nu) \frac{r}{a + z} \right\} \\ u_\theta(r, z) &= 0 \\ u_z(r, z) &= \frac{P}{4\pi G a} \left\{ \frac{z^2}{a^2} - 2(1 - \nu) \right\} \end{aligned} \quad (101)$$

Dabei bezeichnet die Funktion $a(r, z)$ den Abstand eines Punktes A zum Angriffspunkt der Last. Die zugehörigen Spannungen lauten:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z) &= \frac{P}{2\pi a} \left\{ \frac{1 - 2\nu}{z + a} - \frac{3zr^2}{a^4} \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}(r, z) &= \frac{P(1 - 2\nu)}{2\pi a} \left\{ \frac{z}{a^2} - \frac{1}{a + z} \right\} \\ \sigma_{zz}(r, z) &= -\frac{3Pz^3}{2\pi a^5} \\ \sigma_{zr}(r, z) &= -\frac{3Prz^2}{2\pi a^5} \\ \sigma_{r\theta}(r, z) &= \sigma_{\theta z}(r, z) = 0 \end{aligned} \quad (102)$$

Aufgrund der Symmetrie wird ein Viertel des Halbraums betrachtet und mit einem Viertel der Kraft belastet. Ein würfelförmiger Körper mit Kantenlänge k wird ausgeschnitten. In Bild 4.22 sind der Würfel sowie die gewählten Abmessungen und Stoffparameter dargestellt.

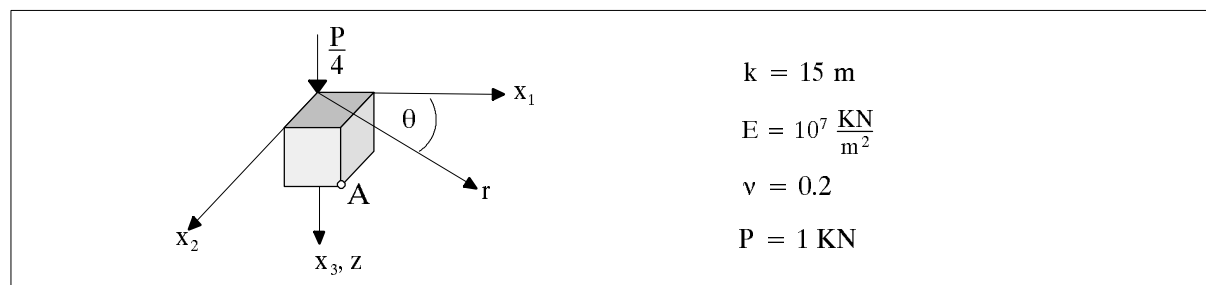


Bild 4.22 : Einzellast auf Halbraum

Auf den Symmetrieflächen sind die Verschiebungen normal zur Fläche gesperrt. Auf der Oberfläche ist eine reine Spannungsrandbedingung mit Betrag Null angesetzt. Auf den übrigen Flächen des Ausschnittes sind reine Verschiebungsrandbedingungen angesetzt, deren Werte aus der analytischen Lösung (101) entnommen sind.

Lösung im Gebiet: In Bild 4.23 ist die Elementierung des Lösungsgebietes dargestellt. Das Lösungsgebiet ist mit einem orthogonalen Raster überzogen. Die Rasterflächen $x_i(j)$ werden in jeder Raumrichtung i mit einer quadratischen Funktion in Abhängigkeit von ihrer Anzahl N und von dem Laufindex j erzeugt. Es werden sowohl ein isoparametrisches trilineares 8 Knoten Quaderelement als auch ein isoparametrisches triquadratisches 27 Knoten Quaderelement eingesetzt. Wegen des quadratischen Bildungsgesetzes der Knotenkoordinaten ist die Elementierung dem qualitativen Verlauf der Lösung angepaßt. Die Raster mit $N = \{3, 5, 9, 17\}$ werden für die Konvergenzanalyse herangezogen.

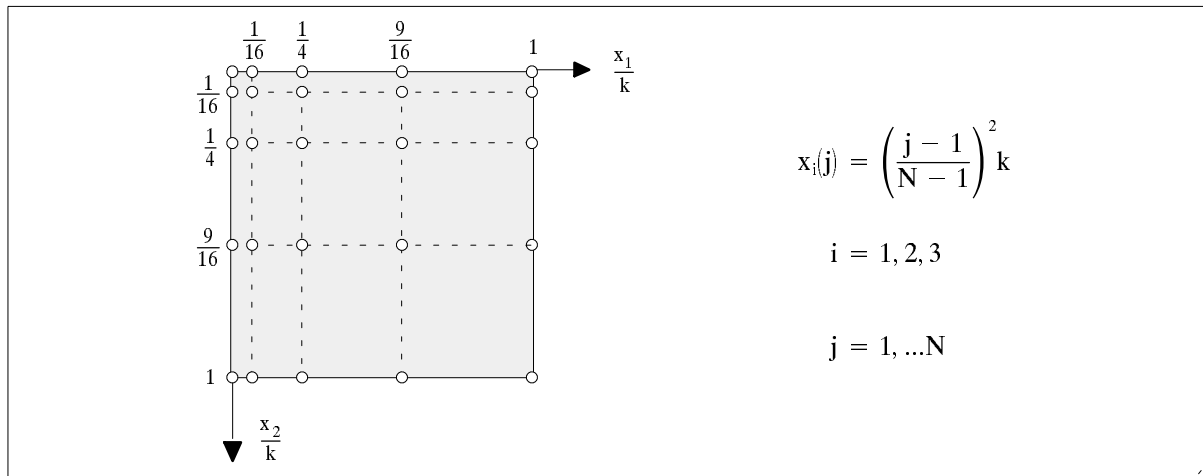


Bild 4.23 : Einzellast auf Halbraum

In Bild 4.24 ist für das Raster mit $N = 5$ jeweils der Verschiebungsverlauf $u_r(r, 0)$ und $u_z(0, z)$ in einem Diagramm aufgetragen. Für die Darstellung der Näherungslösungen in den Diagrammen sind die Verschiebungswerte zwischen den Knoten linear interpoliert.

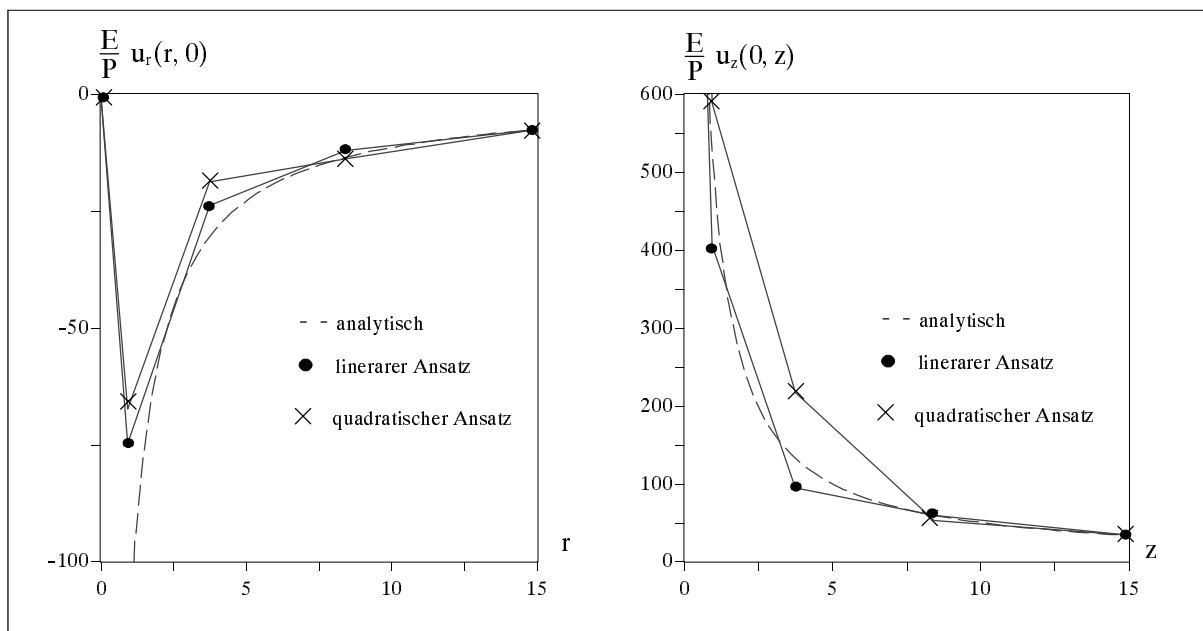


Bild 4.24 : Verschiebungen $u_r(r, 0)$ und $u_z(0, z)$ im Gebiet

Da am Außenrand die analytische Lösung eingepreßt ist, nimmt die Güte des Ergebnisses in der Nähe der Singularität unter der Einzellast ab. Das gilt gleichermaßen für die inneren Spannungen, die aus Differentiation der Verschiebungen bestimmt werden. Die Auswirkung des Widerspruchs zwischen der Symmetriebedingung $u_r = 0$ und der analytischen Lösung $u_r = \infty$ am Ursprung ist ersichtlich.

Konvergenz im Gebiet: In Abhängigkeit vom Abstand a ist die analytische Lösung qualitativ durch einen Ausdruck der Form $\frac{1}{a}$ für Verschiebungen und einen Ausdruck der Form $\frac{1}{a^2}$ für Spannungen bestimmt. Wegen des divergierenden Integrals

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{a^2} da \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{a} da = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \epsilon = \infty$$

ist sowohl die Verschiebungsnorm $\| \mathbf{u} \|_{L^2(\Omega)}$ als auch die Energienorm $\| \mathbf{u} \|_{E(\Omega)}$ unbeschränkt. Für die Konvergenzanalyse im Gebiet werden daher die Verschiebungen mit a und die Spannungen mit a^2 multipliziert. Es werden also die Ergebnisse mit zunehmender Entfernung zur Singularität stärker gewichtet. Das Ergebnis der Analyse ist in Bild 4.25 dargestellt.

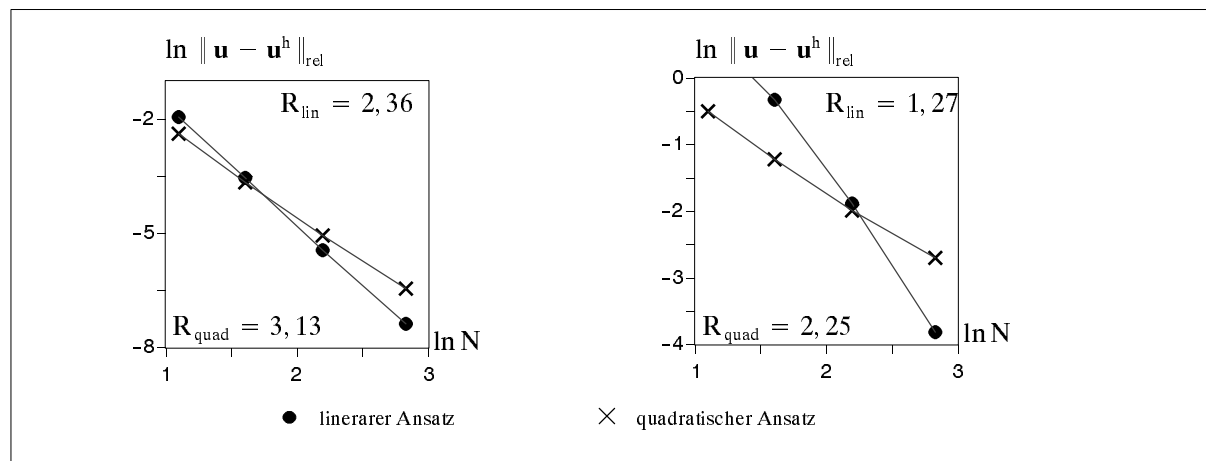


Bild 4.25 : Konvergenz $\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_{\text{rel}L^2(\Omega)}$ und $\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_{\text{rel}E(\Omega)}$ im Gebiet Ω

Aufgrund des Gewichtungsfaktors entsprechen die in den Diagrammen aufgetragenen Werte nicht den zu Beginn dieses Kapitels eingeführten Normen. Durch die Gewichtung wird dem Ansatzraum eine andere Metrik zu Grunde gelegt. Dennoch ist ein polynomialer Zusammenhang zwischen der Rasteranzahl N und dem Fehler erkennbar, der in der doppelt logarithmischen Skalierung des Diagramms als Gerade hervortritt. Die erzielte Rate des quadratischen Elementansatzes ist sowohl für die Verschiebungen als auch für die Spannungen größer als die entsprechende Rate des linearen Ansatzes. Der Fehler des linearen Ansatzes ist für die groben Elementierungen hingegen geringer. Damit wird illustriert, daß trotz des größeren Lösungsaufwands mit höherem Polynomgrad in der Nähe einer Singularität keine Verbesserung des Ergebnisses erzielt wird. Für die feineren Elementierungen überwiegt der Beitrag zum Fehler, der in größerer Entfernung von der Singularität erzielt wird.

Lösung auf dem Rand, linear: Die Randspannungen werden auf den drei Flächen des Würfels untersucht, die weder Oberfläche des Halbraums noch Symmetriefläche des Ausschnitts sind. Der Verschiebungsansatz auf diesen Flächen ist durch die Elementierung in Bild 4.23 bereits gegeben. Für die Randspannung wird im Falle des trilinearen Verschiebungsansatzes ein bilinearer Ansatz und für den Fall des triquadratischen Verschiebungsansatzes ein biquadratischer Ansatz gewählt.

An allen Punkten auf einer Schnittkante zweier Flächen besitzt der Rand zwei Außennormalen. Am Schnittpunkt A der drei Flächen mit den Koordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = 15 \text{ m}$ besitzt der Rand drei Außennormalen $\mathbf{n}_i$ mit $i = 1, 2, 3$. Die Außennormalen $\mathbf{n}_i$ entsprechen dort den Basisvektoren der kartesischen Einheitsbasis, die in Bild 4.22 dargestellt ist. Die Spannungsvektoren $\mathbf{s}_i$ mit $i = 1, 2, 3$ auf diesen Flächen stimmen daher mit den Spaltenvektoren der Spannungsmatrix $\mathbf{S}$ des Punktes A bezüglich dieser Basis überein.

Zunächst wird die Näherung der Randspannung am Punkt A für das Raster $N = 5$ untersucht. In Bild 4.26 ist das Resultat dargestellt, das mit linearen Elementansätzen erzielt wird. Zur besseren Illustration der Zahlen ist als Belastung des Halbraums $P = -1 \text{ MN}$ angesetzt. Die analytisch exakte Spannungsmatrix S ist der Matrix der inneren Spannungen S_{innen} gegenübergestellt, die aus Differentiation der Näherungslösung für die Verschiebung gewonnen wird. Die Spaltenvektoren dieser Matrix entsprechen der Näherung für die innere Randspannung auf den drei zum Punkt P inzidenten Randflächen. Die unmittelbare Anwendung des vorgestellten Verfahrens führt zum äußeren Randspannungsvektor s_a , der für alle drei Randflächen gleichermaßen gültig ist.

$$S = \begin{bmatrix} 95 & 87 & 136 \\ 87 & 95 & 136 \\ 136 & 136 & 136 \end{bmatrix} \quad S_{\text{innen}} = \begin{bmatrix} 171 & 119 & 233 \\ 119 & 171 & 233 \\ 233 & 233 & 274 \end{bmatrix} \quad s_a = \begin{bmatrix} 106 \\ 106 \\ 120 \end{bmatrix} \quad \Delta s_a = \begin{bmatrix} -68 \\ -68 \\ -126 \end{bmatrix}$$

Bild 4.26 : Spannungen für $x_1 = x_2 = x_3 = 15 \text{ m}$ lineare Elementansätze

Außerdem wird in dieser Aufgabe die in Kapitel 3.3 dargestellte, heuristische Ergänzung des erweiterten Prinzips angewendet: Am Punkt A wird ein Näherungswert für den Spannungszustand als zusätzliche Belastung des Randes F_u aufgebracht. Als Näherungswert des Spannungszustands am Punkt A werden die inneren Spannungen S_{innen} verwendet. Die Anwendung des vorgestellten Verfahrens führt dann auf den in Bild 4.26 dargestellten Vektor Δs_a der äußeren, restlichen Randspannung. Die absoluten, äußeren Randspannungsvektoren s_a für jede Fläche i mit $i = 1, 2, 3$ ergeben sich dann aus der Summe Δs_a mit dem i -ten Spaltenvektor von S_{innen} .

Die inneren Spannungen S_{innen} liegen deutlich oberhalb des analytisch exakten Wertes. Das Ergebnis für S_{innen} ist plausibel, wenn der lineare Elementansatz und der zum Abstand a umgekehrt quadratisch proportionale Verlauf der analytischen Verschiebung berücksichtigt wird. Der äußere Spannungsvektor s_a aus der unmittelbaren Anwendung des vorgestellten Verfahrens liefert eine akzeptable Näherung. Die Näherung wird durch die Summe von $s_{i,a} = S_{\text{innen}} \mathbf{n}_i + \Delta s_a$ weiter verbessert. Allerdings führt weder die unmittelbare Anwendung des Verfahrens noch die zusätzliche Belastung des Verschiebungsrands auf den symmetrischen Spannungstensor S am Punkt A, der in dieser Aufgabe aus der Differentiation der eindeutigen Lösung hervorgeht und zudem widerspruchsfrei zu den Randbedingungen ist.

Lösung auf dem Rand, quadratisch: In Bild 4.27 ist das Resultat der Untersuchung am Punkt A, das mit quadratischen Elementansätzen und dem Raster $N = 5$ erzielt wird, dargestellt. Die Spannungen S_{innen} aus Differentiation werden im Vergleich zum linearen Ansatz deutlich besser eingeschätzt. Wegen des quadratischen Verschiebungsansatzes, der quadratischen Vorschrift der Elementgeometrie und der auf den Außenflächen eingprägten analytisch exakten Werte wird die analytische Lösung bereits weitgehend erreicht.

$$S_{\text{ana}} = \begin{bmatrix} 95 & 87 & 136 \\ 87 & 95 & 136 \\ 136 & 136 & 136 \end{bmatrix} \quad S_{\text{Diff}} = \begin{bmatrix} 107 & 93 & 149 \\ 93 & 107 & 149 \\ 149 & 149 & 140 \end{bmatrix} \quad s_a = \begin{bmatrix} 111 \\ 111 \\ 161 \end{bmatrix} \quad \Delta s_a = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Bild 4.27 : Spannungen für $x_1 = x_2 = x_3 = 15 \text{ m}$ quadratische Elementansätze

Der äußere Spannungsvektor s_a aus der unmittelbaren Anwendung des Verfahrens führt am Punkt A zu keiner Verbesserung des Ergebnisses. Eine Belastung des Randes mit den Spannungen S_{innen} aus Differentiation führt wegen deren Güte auf geringe zusätzliche Randspannungen Δs_a . Die absoluten, äußeren Randspannungsvektoren s_a für jede Fläche i mit $i = 1, 2, 3$ ergeben sich wiederum aus der Summe Δs_a mit dem i -ten Spaltenvektor von S_{innen} . Diese Vektoren liefern eine verbesserte Näherung der Spannung am Punkt A.

Konvergenz auf dem Rand: Da am betrachteten Rand keine Singularität vorliegt, kann der Fehler in den Randspannungen berechnet werden. In Bild 4.28 ist das Konvergenzverhalten der Randspannung für den linearen Elementansatz dargestellt. Im linken und mittleren Diagramm sind die Komponenten des Fehlers r im Gleichgewicht der Kräfte aufgetragen. Aufgrund der Symmetrie ist das Ergebnis für die Komponenten r_1 und r_2 identisch. Für diese Diagramme ist unerheblich, ob die Werte für die äußere Randspannung mit oder ohne zusätzliche Belastung gewonnen werden. Im rechten Diagramm ist der Fehler in den Randspannungen dargestellt. Für dieses Diagramm sind die Werte für die äußeren Spannungen mit der zusätzlichen Belastung herangezogen worden. Die Ergebnisse, die aus unmittelbarer Anwendung des vorgestellten Verfahrens gewonnen werden, unterscheiden sich nur geringfügig zu Gunsten der inneren Spannungen von den in diesem Diagramm dargestellten Ergebnissen.

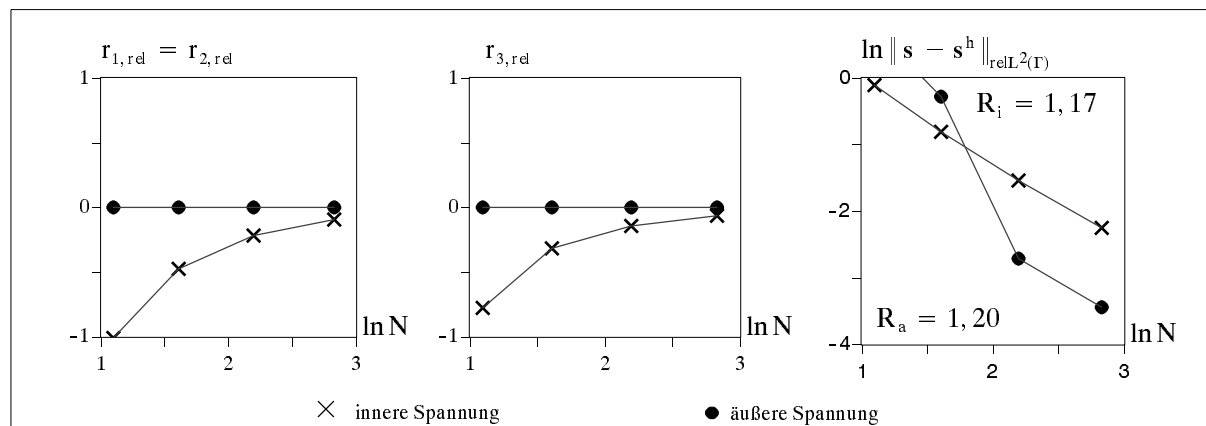


Bild 4.28 : Konvergenz r_{rel} und $\|s - s^h\|_{relL^2(\Gamma)}$ auf den Randflächen, linear

Der Fehler im Gleichgewicht der inneren Spannungen ist selbst bei feinsten Elementierungen noch größer als 6% gegenüber dem exakten Wert für die äußeren Spannungen. Für die groben Elementierungen ist hingegen der Fehler der inneren Spannung geringer als der Fehler der äußeren Spannung. Dieses Ergebnis wird näher untersucht.

Der wesentliche Beitrag zum Fehler entsteht aus einer falschen Einschätzung eines positiven Schubs $\sigma_{rz}(r, z) > 0$ für kleine Werte von z . Wegen der spannungsfreien Oberfläche ist aber $\sigma_{rz}(r, 0) = \sigma_{rz}(r, 0) = 0$ und weiterhin durch Gleichung (102) im Verlauf bestimmt. Dieser Fehler rührt aus einer Fehleinschätzung der Auflagerkräfte in z -Richtung an der freien Oberfläche. Ursache für diese Einschätzung der Auflagerkräfte ist der Widerspruch zwischen der Symmetriebedingung $u_r = 0$ und der analytischen Lösung $u_r = \infty$ am Ursprung. Dieser Widerspruch kann nicht durch Änderung der Lagerungsbedingungen oder eine veränderte Modellbildung überwunden werden, sondern charakterisiert die Singularität.

Auch im Falle des biquadratischen Ansatzes für die Randspannung zeigt sich, daß für grobe Elementierungen ein Ergebnis zu Gunsten der inneren Spannungen erhalten wird. Für feine Elementierungen sind die Fehler in den inneren und äußeren Randspannungen weitgehend identisch. Aus dem geringen Fehler im Gleichgewicht der inneren Spannungen für die feinen Elementierungen ist ersichtlich, daß dann am betrachteten Rand die analytische Lösung weitgehend reproduziert ist.

5 Bestimmung aktueller Oberflächen

Vorgehensweise: Die Ermittlung von Randspannungen auf Schnitten durch den zu untersuchenden Körper ist in Kapitel 2.4 dargestellt. Die softwaretechnische Umsetzung beschränkt sich auf Schnitte längs der Ränder der gegebenen Elementierung eines Körpers. Auf interaktive Anforderung des Nutzers werden die Elemente einzeln aus dem Lösungsgebiet ausgeschnitten. Die ausgeschnittenen Elemente werden in einen Stapel eingestellt. Von dort kann das zuletzt ausgeschnittene Element wieder dem Körper hinzugefügt werden. Das Ausschneiden und das Hinzufügen von Elementen ändert die Oberfläche des Körpers. Die aktuelle Oberfläche ist für die Bestimmung der Randspannungen sowie für die Visualisierung des geschnittenen Körpers notwendig. Dafür wird der Körper zunächst mit einer abstrakten Zellzerlegung beschrieben. Anhand derer wird die Lösung der Aufgabe unabhängig von der softwaretechnischer Umsetzung aufgezeigt. Die Umsetzung erfolgt darauf mit unterschiedlichen Datenstrukturen, die gegeneinander abgewogen werden.

5.1 Topologische Grundlagen

Topologischer Raum: Betrachtet werden alle Punkte des euklidischen Raums $\mathbb{R}^D$ der Anschauung mit $D = 1, 2, 3$. Die Metrik $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ bestimmt den Abstand zweier Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ dieses Raums. Mit $U(\mathbf{x}, \epsilon) = \{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^D \wedge d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon \}$ wird eine Umgebung $U(\mathbf{x}, \epsilon)$ eines Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ mit Radius $\epsilon \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Eine Teilmenge des euklidischen Raums heißt offen, wenn zu jedem Punkt $\mathbf{x}$ der Teilmenge eine Umgebung $U(\mathbf{x}, \epsilon)$ existiert, die in der Teilmenge enthalten ist. Damit wird der euklidische Raum $\mathbb{R}^D$ zum topologischen Raum.

Topologische Abbildung: Betrachtet wird die abgeschlossenen Kugel E^D , die durch die Ungleichung $\mathbf{x}^2 \leq 1$ definiert wird. Der Rand der Kugel ist die Sphäre S^{D-1} , die durch die Gleichung $\mathbf{x}^2 = 1$ beschrieben ist. Das Innere der Kugel ist die offenen Menge $E^D - S^{D-1}$, die durch das Komplement der Schnittmenge von E^D und S^{D-1} gebildet wird und durch die Ungleichung $\mathbf{x}^2 < 1$ beschrieben ist. Die topologischen Räume $\mathbb{R}^D$ und $E^D - S^{D-1}$ sind umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abbildbar. Eine derartige Abbildung heißt topologisch oder homöomorph.

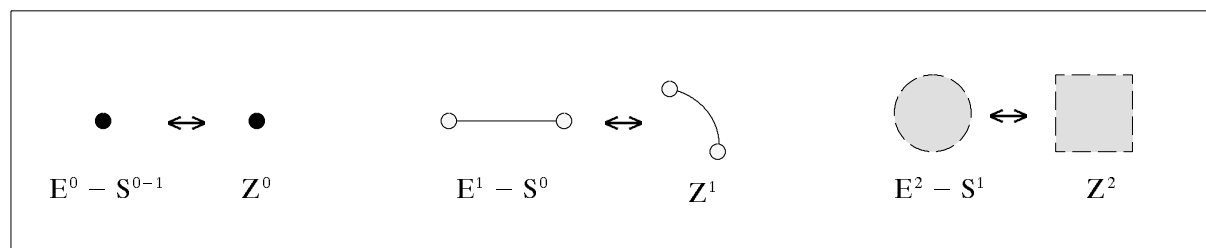


Bild 5.1 : Offene Kugeln und Zellen

Zelle: Eine D -dimensionale Zelle Z^D ist ein topologischer Raum, der zu $E^D - S^{D-1}$ homöomorph ist. Die Abbildung einer spezifischen Zelle heißt charakteristische Abbildung. Die Zelle schließt ihren Rand nicht ein. Der um eine Dimension reduzierte Rand der Zelle ergibt sich, wenn die charakteristische Abbildung auf die Punkte der Sphäre S^{D-1} angewendet wird. Die charakteristische Abbildung ist nicht gleichzusetzen mit der Formgleichung $\mathbf{x}(\mathbf{z})$ eines finiten Elementes. Ihre Existenz kann jedoch mit der Invertierbarkeit von $\mathbf{x}(\mathbf{z})$ nachgewiesen werden. In Bild 5.1 ist die Abbildung von offenen Kugeln $E^D - S^{D-1}$ auf Zellen Z^D für unterschiedliche Dimensionen D dargestellt.

Orientierung einer Zelle: Jede Zelle Z^D mit $D > 0$ kann in eine von zwei möglichen Richtungen orientiert werden. Eine anschauliche Deutung des Begriffs *Orientierung* wird aus [28] entnommen: Eine Zelle Z^1 wird orientiert, indem für ihre beiden Randpunkte eine Reihenfolge erklärt wird. Eine Zelle Z^2 wird orientiert, indem für die Eckpunkte eines auf sie gelegten Dreiecks eine Reihenfolge erklärt wird. Das entspricht der Festlegung eines Drehsinns. Eine Zelle Z^3 wird orientiert, indem für die Eckpunkte eines in sie gelegten Tetraeders eine Reihenfolge erklärt wird. Das entspricht der Festlegung des Drehsinns einer Schraube. Die Orientierung einer Zelle induziert die Orientierung ihres Randes.

Geometrie des finiten Elementes: Für die Beschreibung der Geometrie eines finiten Elementes wird zunächst ein normalisierter Punktraum $Z \subset \mathbb{R}^k$ betrachtet. Die Festlegung dieses Raums erfolgt mittels offener Intervalle der normalisierten Koordinaten $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$. Der normalisierte Raum P ist homöomorph zur Einheitskugel $E^k - S^{k-1}$. Die Punkte von Z werden mittels der Formgleichung $\mathbf{x}(\mathbf{x}_i, \mathbf{z})$ auf den globalen Punktraum $X \subset \mathbb{R}^j$ mit den globalen Koordinaten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^j$ des finiten Elementes abgebildet. Die Abbildung erfolgt, indem zunächst einige ausgezeichnete Punkte $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^k$ umkehrbar eindeutig auf Punkte $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^j$ abgebildet werden. Die übrigen Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^j$ des finiten Elementes werden durch die Formgleichung $\mathbf{x}(\mathbf{x}_i, \mathbf{z})$ implizit erfaßt. Die Gewährleistung der Homöomorphie des Punktraumes X des finiten Elementes zum normalisierten Punktraum Z und damit zur Einheitskugel $E^d - S^{d-1}$ ist dabei abhängig von einer geeigneten Wahl der Punkte $\mathbf{x}_i$.

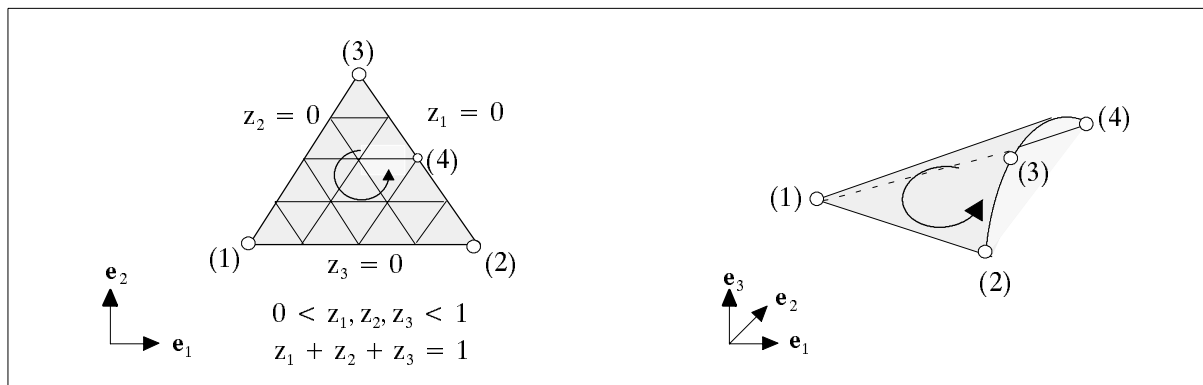


Bild 5.2 : Punktraum Z und Punktraum X

Beispiel: In Bild 5.2 wird ein gekrümmtes finites Element betrachtet. Auf der linken Seite ist der orientierte, normalisierte Punktraum Z und auf der rechten Seite der Punktraum X des finiten Elementes dargestellt. Die Punkte von Z werden durch die offenen Intervalle der Dreieckskoordinaten $\mathbf{z}$ erfaßt. Zwei dieser Koordinaten sind unabhängig, so daß $Z \subset \mathbb{R}^2$. Die Punkte $\mathbf{z}_{(i)}$ mit $i = 1, \dots, 4$ werden ausgezeichnet. Die umkehrbar eindeutige Abbildung dieser Punkte auf Punkte $\mathbf{x}_{(i)} \in \mathbb{R}^3$ ist durch die Wahl gleicher Identifikatoren gekennzeichnet. Die Formgleichung dieses Elementes wurde bereits in Kapitel 3.2 mit Gleichung (60) genannt. Ihre Anwendung auf die Intervallgrenzen der normalisierten Koordinaten liefert den orientierten Rand des finiten Elementes.

Körper: Ein Körper K der Dimension D wird als Vereinigung einer Menge von paarweise disjunkten, offenen Zellen Z^d mit $d \leq D$ beschrieben. Folgende Bedingungen werden für die Vereinigung der Zellen gefordert:

- i) Der Rand jeder Zelle Z^d ist in einer Teilmenge von K enthalten
- ii) Jede Zelle Z^d mit $d < D$ liegt auf dem Rand von mindestens einer Zelle Z^{d+1} aus K
- iii) Der Durchschnitt des Randes zweier Zellen Z^D ist leer oder enthält eine Zelle Z^{D-1}

Bedingung i) gewährleistet, daß der Körper abgeschlossen ist. Bedingung ii) führt zu regulären Körpern. Mit Bedingung ii) und iii) ist gewährleistet, daß jede Umgebung eines Punktes auf dem Rand des Körpers homöomorph zu einer offenen Hyperkugel der Dimension Z^{D-1} ist. Der Körper ist damit $D-1$ -mannigfaltig.

Beispiel: Bild 5.3 stellt Mengen von paarweise disjunkten Zellen mit Dimension $D \leq 2$ im Raum $\mathbb{R}^2$ dar. Diese Mengen verletzen die oben genannten Bedingungen. Der Körper im linken Teilbild ist nicht abgeschlossen. Drei Zellen sind nicht durch eine Zelle niedrigerer Dimension berandet. Bedingung i) ist verletzt. Der Körper im mittleren Teilbild ist nicht regulär und auch nicht mannigfaltig. Die hängende Kante liegt nicht auf dem Rand einer zweidimensionalen Zelle. Bedingung ii) ist verletzt. Der Körper im rechten Teilbild ist regulär aber nicht mannigfaltig. Der Durchschnitt des Randes der zweidimensionalen Zellen enthält einen Punkt. Bedingung iii) ist verletzt.

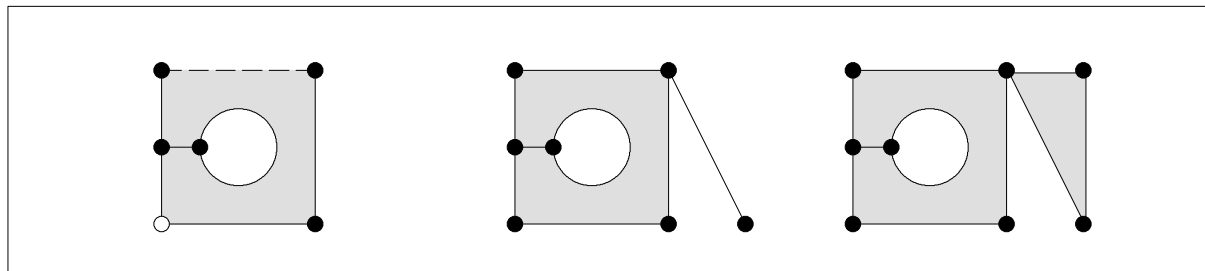


Bild 5.3 : Unzulässige Körper

Einschränkung: Mit der zweiten und dritten Bedingung werden die aus der mathematischen Literatur bekannten CW-Zellkomplexe weiter eingeschränkt. Durch die vorgenommenen Einschränkungen werden die Möglichkeiten, die Geometrie eines Lösungsgebietes mit finiten Elementen zu modellieren, nicht ausgeschöpft. Alternativ zur Beschreibung des Körpers als eine Vereinigung paarweise disjunkter offener Zellen kann die Beschreibung als eine Vereinigung abgeschlossener Zellen vorgenommen werden. Es müssen dann aber Bedingungen an die Schnittmengen gestellt werden. Die systematische Umsetzung nicht mannigfaltiger Modelle erfordert weitergehende Konzepte, die nicht Gegenstand dieser Arbeit sind. Es wird daher auf die Literatur verwiesen [55]/[54]/[7].

Weiterhin muß für eine vollständige Beschreibung der topologischen Eigenschaften zwischen der Beschreibung der Geometrie und der Beschreibung des Zustands unterschieden werden. Es werden in diesem Kapitel nur die geometrische Zusammenhänge diskutiert. Für isoparametrische Elementansätze ist diese Unterscheidung nicht notwendig

Adjazenz und Inzidenz: Zwei Zellen unterschiedlicher Dimension heißen inzident, wenn eine der Zellen auf dem Rand der anderen Zelle liegt. Zwei Zellen gleicher Dimension, die eine gemeinsame Randzelle besitzen, heißen adjazent.

Kohärente Orientierung: Wenn alle adjazenten Zellen Z^D eines Körpers K der Dimension D gleichsinnig orientiert sind, dann ist der Körper kohärent orientiert. Dadurch sind auch alle Zellen Z^{D-1} auf dem Rand des Körpers orientiert. Die kohärente Orientierbarkeit eines Körpers ist invariant gegenüber einer topologischen Abbildung.

Inzidenz- und Adjazenzrelationen: Die Topologie eines in Zellen zerlegten Körpers K der Dimension D wird mit D heterogenen binären Relationen $R_k \subset Z^k \times Z^{k-1}$ mit $k = D, \dots, 1$ erfaßt. Die Paare der Relation beschreiben die Inzidenz einer Zelle zu einer Randzelle, deren Dimension um Eins niedriger ist. Aus der Kettung $R_k \circ R_{k-1}$ folgt die Relation der Inzidenz von Zellen zu Randzellen, deren Dimension um Zwei niedriger ist. Aus der Kettung der Relationen $R_k \circ R_k^T$ folgt die Relation der Adjazenz von Zellen gleicher Dimension. Die Anwendung einer derartigen Kettung ist bereits in Kapitel 3.5 bei der Bestimmung adjazenter Elemente vorgestellt worden.

Zellinzidenzgraph: Der ungerichtete Graph der Relationen R_k wird als Zellinzidenzgraph bezeichnet. Der Zellinzidenzgraph einer Zerlegung eines einfach zusammenhängenden, zweidimensionalen Gebietes ist in Bild 3.18 dargestellt. Neben den Inzidenzrelationen R_1 und R_2 sind zusätzlich die Relation R_3 und die Relation R_0 dargestellt. Die Relation R_3 drückt die Adjazenz der flächigen Zellen des Körpers zu einer gedachten Zelle homöomorph zum Raum $\mathbb{R}^3$ aus. Die Relation R_0 beschreibt die Adjazenz der punktförmigen Randzellen zur leeren Menge.

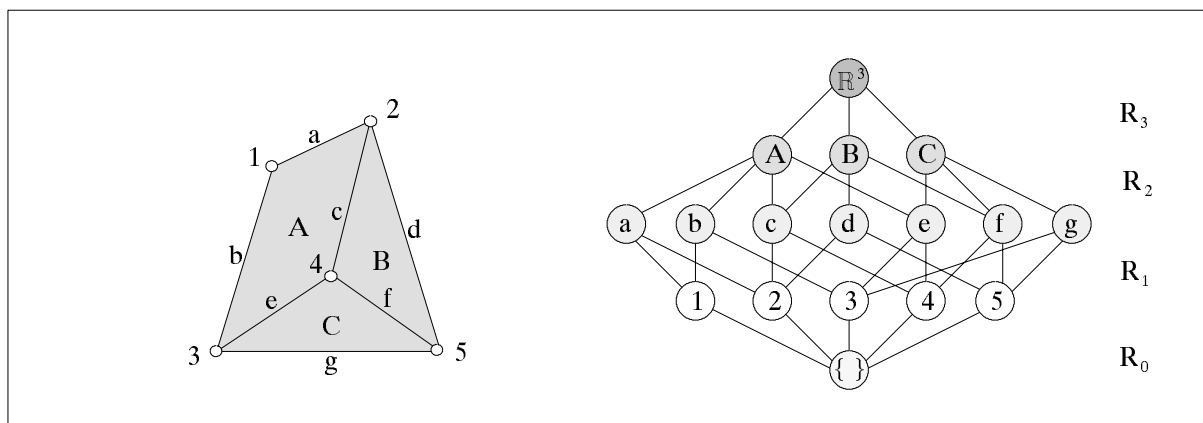


Bild 5.4 : Zerlegtes Gebiet und Zellinzidenzgraph

Implementierung: Die Frage nach einer zweckmäßigen Implementierung der Inzidenzrelationen ist nur aus dem Kontext der Anwendung heraus entscheidbar. Zur Entscheidungsfindung können die folgenden Fragen dienen: Welche Nachbarschaftsbeziehungen werden wie häufig benötigt? Welche Zellen werden wie häufig erzeugt und gelöscht? Ist der Graph ständig in einen konsistenten Zustand zu überführen? Dabei ist weiterhin zu berücksichtigen, daß Anwendungen neben den topologischen Zusammenhängen auch geometrische Zusammenhänge wie das Suchen einer Zelle zu einem gegebenen Punkt anfragen. Zur effizienten Bearbeitung solcher Anfragen müssen daher zusätzliche geometrische Suchstrukturen wie Raster, Quadrees oder binäre Halbzerlegungen mitgeführt werden [34].

5.2 Objektorientierte Modellbildung

Klassen und Beziehungen: Der Zellinzidenzgraph offenbart mögliche Implementierungen der topologischen Zusammenhänge. Die Knoten des Graphen werden mit der Äquivalenzrelation „ist homöomorph zu“ in Klassen zerlegt. Die Kanten des Graphen werden als Beziehungen zwischen den Klassen ausgedrückt. Die Beziehungen stehen damit stellvertretend für die topologischen Relationen. Klassen und deren Beziehungen beschreiben den statischen Aspekt eines objektorientierten Modells. Dessen Prägung zu einem Zeitpunkt der Laufzeit eines Programms wird als Objektgraph bezeichnet. Nachfolgend werden objektorientierte Modelle aus dem Anwendungskontext der Finite Elemente Methode untersucht. Anstelle des abstrakten Zellbegriffs werden die Begriffe aus diesem Kontext verwendet.

Symbole: Mit einer aus der Unified Modelling Language[17] entlehnten Symbolik werden die Relationen in Hinblick auf eine Implementierung qualifiziert. Rechtecke stehen stellvertretend für Klassen. Eine Verbindungslinie zwischen zwei Klassen kennzeichnet eine Relation zwischen den Objekten dieser Klassen. Ein Kreis- oder eine Raute-Symbol am Ende einer solchen Linie kennzeichnet, welche Navigationsrichtung für die Objekte des Modells implementiert sein muß. Dadurch ist keine Datenstruktur festgelegt, obwohl das Symbol häufig als Verweis von einem Objekt der Klasse ohne Symbol auf ein Objekt der Klasse mit Symbol interpretiert wird. Im Unterschied zum Kreissymbol wird mit einem Rautensymbol ein Hinweis darauf gegeben, daß die semantische Integrität eines Objektes nur zusammen mit den durch die Raute verbundenen Objekten gewährleistet ist [25]. Die Angabe von Zahlen an den Enden von Linien kennzeichnet die Kardinalität eines Verweises. Die Angabe von Folgen kennzeichnet, daß die Verweise eine Ordnung besitzen.

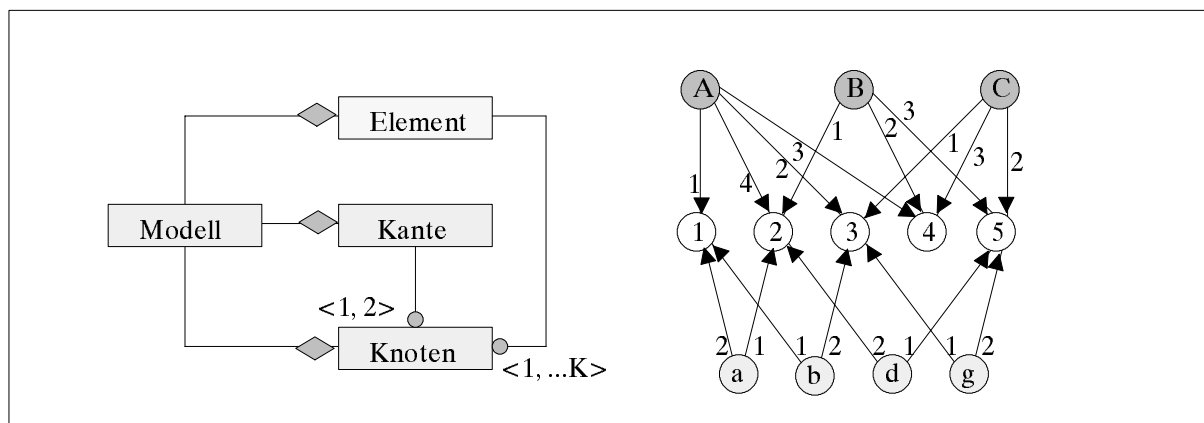


Bild 5.5 : Konventionelles Modell: Klassendiagramm und Objektgraph

Konventionelles Modell: In Bild 5.5 ist links das Klassendiagramm eines objektorientierten, zweidimensionalen Finite Elemente Modells dargestellt. Der Objektgraph für das Beispiel aus Bild 5.4 ist in Bild 5.5 rechts nebengestellt. Das Diagramm drückt die topologischen Aspekte der konventionellen Datenstruktur der Finite Elemente Methode aus. Ein zu untersuchender Körper besteht aus Knoten, Kanten und Elementen. Sowohl die Elemente und als auch die Kanten verweisen jeweils in einer geordneten Folge auf ihre Knoten. Die Angabe der Kanten beschränkt sich auf die Menge der Außenkanten. Dabei werden häufig nur diejenigen Kanten angegeben, die eine Verschiebungskomponente oder eine von Null verschiedene Belastungskomponente spezifizieren. Das Modell ist hinsichtlich des Speicherbedarfs und des Zeitbedarfs der auf dem Modell operierenden Algorithmen sehr bewährt.

Reduktion des Zellinzidenzgraphen: Der für die geometrischen Zusammenhänge wesentliche Aspekt des konventionellen Modells liegt darin, daß die Elemente mit der Äquivalenzrelation „*hat identische Formgleichung*“ in Klassen zerlegt werden können. Dadurch kann die Informationsmenge des Zellinzidenzgraphen auf die Menge der im Objektgraph von Bild 5.5 dargestellten Informationen reduziert werden. Es gehen aber keine Informationen verloren. Diejenigen Inzidenzbeziehungen, die nicht explizit im Objektgraph aufgeführt werden, können algorithmisch bestimmt werden. Der Zeitbedarf für die Ausführung dieser Algorithmen kompensiert die erzielte Ersparnis im Speicherbedarf.

Softwaretechnisch kann die Zerlegung in Formen durch Einführung von Subklassen der Elementklasse umgesetzt werden. In Bild 5.6 werden beispielhaft einige Formen als Unterklassen der Vaterklasse *Element* abgeleitet. Solche Vererbungsbeziehungen werden mit einem Dreieckssymbol gekennzeichnet. Zwei der dargestellten Subklassen verwenden vier Knoten zur Spezifikation der Form. Dadurch ist ersichtlich, daß allein die Kardinalität der Folge von Knoten eines Elementes zur Spezifikation der Elementgeometrie nicht hinreichend ist. Erst mit der Information über die Form und der Folge von Eckknoten kann der Zellinzidenzgraph algorithmisch vollständig bestimmt werden.

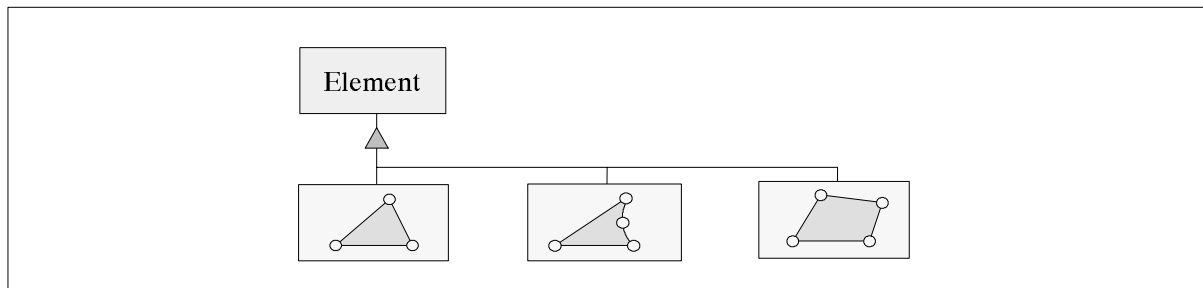


Bild 5.6 : *Element: Klasse und Subklassen*

Ausschneiden eines Elementes: Das Ausschneiden eines Elementes illustriert eine algorithmische Bestimmung von Information, die implizit durch den Objektgraphen gegeben ist. Die Menge der Finiten Elemente und die der Außenkanten sind gegeben. Ein Finite Element wird ausgeschnitten. Mittels der Form und der geordneten Folge der Eckknoten werden temporär alle Kanten des ausgeschnittenen Elementes erzeugt. Für jede temporäre Kante muß geprüft werden, ob in der Menge der Außenkanten bereits eine Kante mit identischer Reihenfolge der Eckknoten enthalten ist. In diesem Fall wird die Kante aus der Menge der Außenkanten entfernt. Andernfalls wird die Orientierung der temporären Kante durch Änderung der Reihenfolge der Eckknoten geändert. Die temporäre Kante wird daraufhin als neues Element in die Menge der Außenkanten dauerhaft aufgenommen.

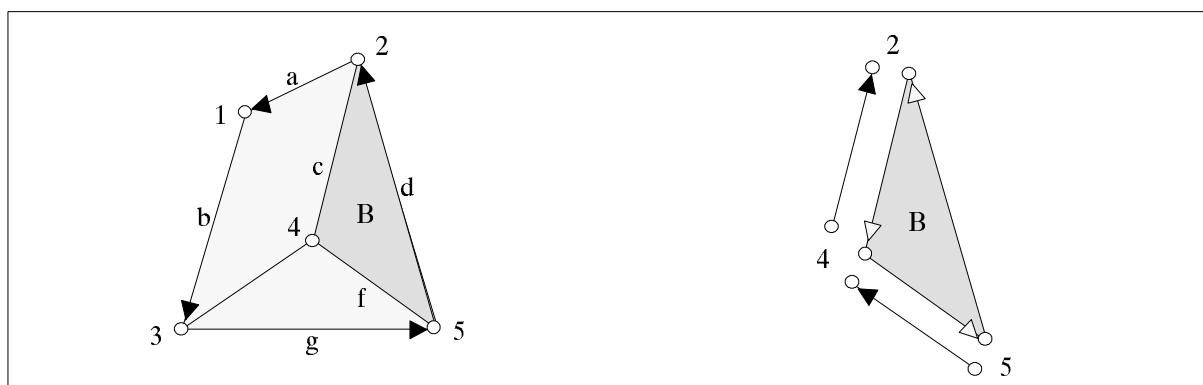


Bild 5.7 : *Ausschneiden eines Elementes*

Beispiel: Das Vorgehen ist in Bild 5.7 an einem Beispiel illustriert. Gegeben sei die Elementierung eines Lösungsgebietes. Die orientierten Außenkanten des Gebietes sind mit schwarzen Pfeilspitzen markiert. Das Element mit dem Identifikator “B” wird ausgeschnitten. Die mit weißen Pfeilspitzen gekennzeichneten Außenkanten des Elementes “B” werden temporär erzeugt. Die Kante “d” ist bereits in der Menge der Außenkanten enthalten und wird aus der Menge entfernt. Die Orientierung der beiden übrigen Kanten “c” und “f” wird getauscht. Sie werden in die Menge der Außenkanten eingestellt.

Hinzufügen eines Elementes: Das Hinzufügen von Elementen erfolgt analog zum Ausschneiden. Der Unterschied zum Ausschneiden besteht allein darin, daß die temporären Ränder mit umgekehrter Orientierung erzeugt werden müssen. Es ist daher zweckmäßig für jede Form eine Methode bereitzustellen, die den Rand dieser Form liefert, sowie eine weitere Methode, um die Orientierung des Randes zu tauschen. Ausgehend vom initial leeren Modell des Körpers wird mittels dieser Methoden inkrementell mit dem Erzeugen jedes finiten Elementes die Oberfläche des Körpers aktualisiert. Eine Spezifikation des gesamten Außenrandes durch den Benutzer des Programms ist dann nicht notwendig.

Verallgemeinerung: Das Vorgehen beim Ausschneiden und Hinzufügen unter Beibehaltung des konventionellen Modells kann auf gekrümmte Ränder sowie flächige Ränder dreidimensionaler Körper verallgemeinert werden. Im dreidimensionalen Fall bilden die Eckknoten einer temporären Randfläche einen Zyklus. Für die Darstellung des Zyklus in einer Folge existieren sovieler Möglichkeiten, wie der Zyklus Knoten besitzt. Da in der Menge der Identifikatoren der Eckknoten eine strenge Ordnung herstellbar ist, wird diejenige Folge von Eckknoten des Zyklus gewählt, die mit einem minimalen Identifikator beginnt. Dadurch ist sichergestellt, daß beim Ausschneiden oder Hinzufügen eines dreidimensionalen Elementes für jede temporäre Randfläche nur eine einzige Folge dahingehend geprüft werden muß, ob in der Menge der Außenflächen eine Randfläche mit identischer Folge existiert.

Winged Edge Modell: In Bild 5.8 ist links das Klassendiagramm eines anderen zweidimensionalen Finite Elemente Modells dargestellt. Der Objektgraph für das Beispiel aus Bild 5.4 ist in Bild 5.9 gezeigt. Das Diagramm drückt die geometrischen Aspekte des als “Winged Edge” bezeichneten Modells der Finiten Elemente aus. Ein zu untersuchender Körper besteht wiederum aus Knoten, Kanten und Elementen. Sowohl die Elemente als auch die Knoten verweisen jeweils auf eine einzige inzidente Kante. Jede Kante besitzt acht Verweise, die mit vier zweigliedrigen Folgen geordnet sind.

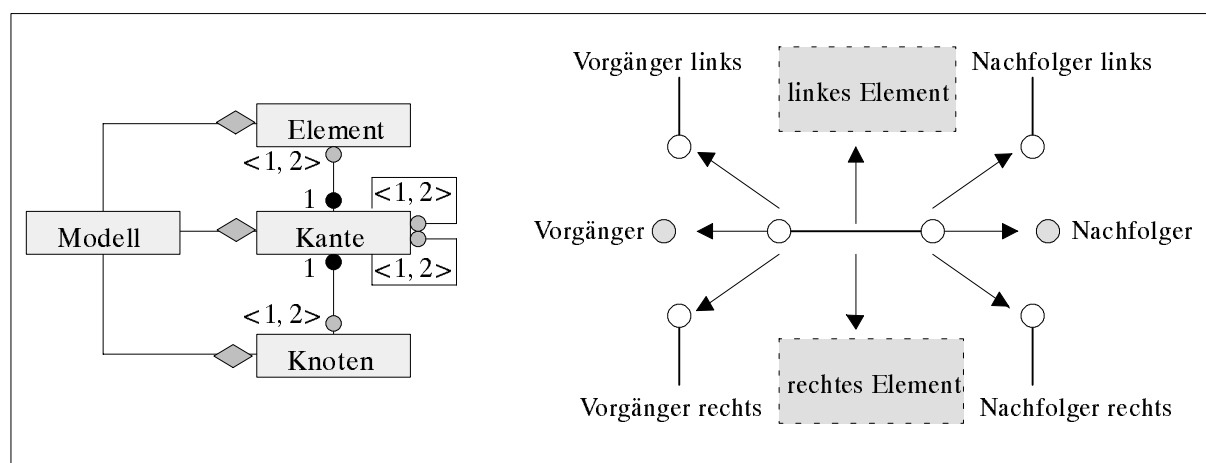


Bild 5.8 : Klassendiagramm “Winged Edge” Modell und stellvertretende Kante

Die Bedeutung der von einer Kante ausgehenden Verweise ist in Bild 5.8 rechts erläutert. Ein Verweis auf einen beliebigen Eckknoten wird als Vorgänger bezeichnet. Der Verweis auf den an-

deren Eckknoten der Kante heißt dann Nachfolger. Bezüglich dieser Ordnung werden die Verweise auf die zwei zur Kante inzidenten Elemente als linkes Element und rechtes Element geordnet. Zudem verweist die Kante auf alle adjazenten Kanten, die inzident zu den linken und rechten Elementen sind. Auch diese Verweise werden bezüglich der Folge der Eckknoten geordnet.

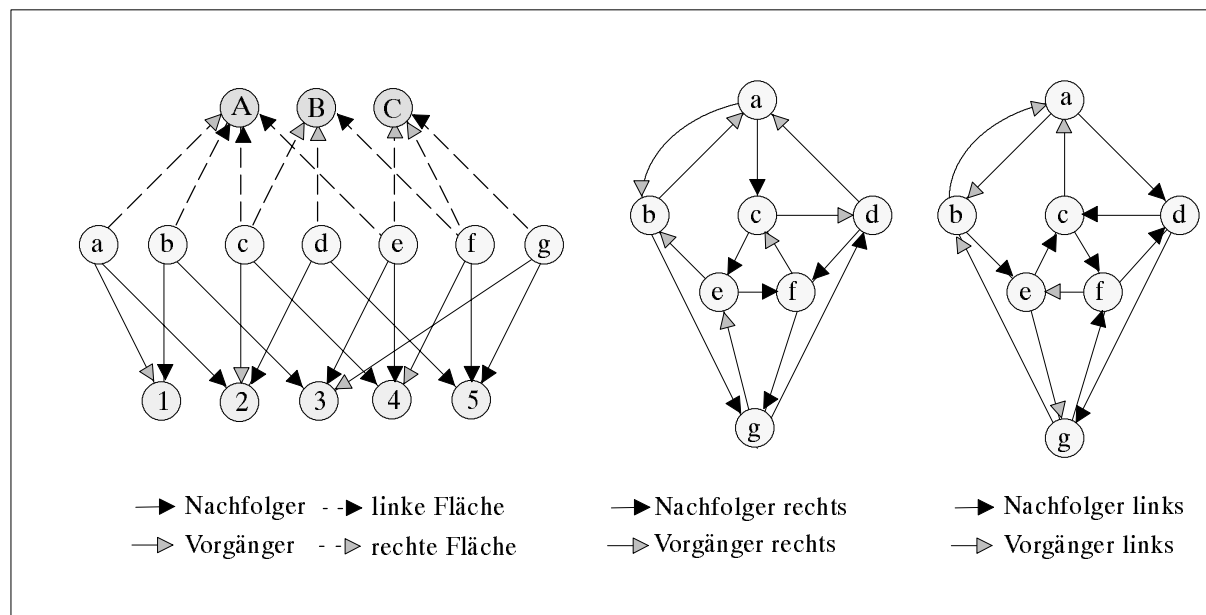


Bild 5.9 : Objektgraph "Winged Edge" Modell

Reduktion des Zellinzidenzgraphen: Auch das "Winged Edge" Modell reduziert die Informationsmenge des Zellinzidenzgraphen. Gegenüber dem konventionellen Modell ist die Menge aber größer, da alle Kanten mit jeweils acht Verweisen mitgeführt werden. Die Anzahl überwiegt die Ersparnis, die mit einem einzigen Verweis von jedem Element auf einen Eckknoten gegenüber allen Eckknoten im konventionellen Modell erzielt wird. Andererseits ist der Zeitbedarf der algorithmischen Bestimmung impliziter Informationen aus dem Objektgraphen häufig geringer.

Beispiel: Für den Einbau einer Elementmatrix in die Systemmatrix wird die Inzidenz des Elementes zu seinen Eckknoten benötigt. Der zugehörige Algorithmus verwendet zunächst den einzigen Verweis auf eine zum Element inzidente Kante. Darauf wird das Element zyklisch umfahren. Dafür werden die Verweise der Kante auf adjazente Kanten verwendet. Aus dem Objektgraph in Bild 5.9 ist ersichtlich, daß mit Verweisen auf "linke Kanten" eine Umfahrung in positiver Orientierung und mit Verweisen auf "rechte Kanten" eine Umfahrung in negativer Orientierung möglich ist. Mit dem Zyklus der Kanten ist auch der Zyklus der Eckknoten bestimmt. Der Zeitbedarf der Operation ist dabei allein abhängig von der Anzahl der das Element berandenden Kanten. Diese Anzahl ist unabhängig von der Modellgröße durch eine Konstante beschränkt. Das gilt gleichermaßen für das Ausschneiden eines Elementes, da nur Verweise von berandenden Kanten aktualisiert werden müssen, um den Objektgraph in einen konsistenten Zustand zu überführen.

Verallgemeinerung: Das "Winged Edge" Modell ist auch auf gekrümmte Ränder anwendbar. Eine Erweiterung auf nicht mannigfaltige Körper ist in [54] beschrieben. In der Erweiterung auf dreidimensionale Körper nehmen Flächen die Rolle der Kanten an [7]. Die topologischen Anfragen sind dann aber ungleich schwieriger zu implementieren, da die Flächen keinen einfachen Zyklus um ein Element bilden. Ein bezüglich der Dimension generalisiertes "Winged Border" Modell, welches das beschriebene zweidimensionale Modell als Spezialisierung enthält, ist nicht bekannt.

Das “Winged Edge” Modell wird im Zusammenhang mit adaptiven Finite Elemente Methoden genutzt [23]. Die Adaption eines Elementes kann die Änderung seiner Form, seine Zerlegung in kleinere Elemente oder eine Anreicherung des Elementansatzes erforderlich machen. Daraus folgen unmittelbare Änderungen der zum adaptierten Element inzidenten Kanten. Die Änderung der zum adaptierten Element adjazenten Elemente wird erst bei der Umfahrung von deren Kanten erfaßt. Daraus wird der Elementansatz zur Laufzeit konstruiert. Allerdings ist die Konstruktion eines Elementansatzes allein aus der Kenntnis der Randkanten und ihrer Ansätze nur in einfachen Fällen möglich. Daher ist dieses Verfahrens nur im Zusammenhang mit p-adaptiver Verfeinerung drei- und viereckiger Elementformen erfolgreich nachgewiesen worden.

5.3 Datenstrukturen

Unstrukturierte Menge: In der vorliegenden Arbeit wird das konventionelle Modell der Finiten Elemente Methode, das für den zweidimensionalen Fall im Bild 5.5 dargestellt ist, weitgehend aufrecht erhalten. Es wird lediglich die Menge der Außenkanten geeignet strukturiert. Da dieser Menge zunächst keine Struktur aufgeprägt ist, erfordert das Prüfen jeder temporären Kante eine Suche, deren Zeitbedarf proportional zur Anzahl der Außenkanten ist. Wird diese Anzahl mit N bezeichnet, so ist der Aufwand des Algorithmus von der Ordnung $O(N)$.

Ordnungsrelation: Der Zeitbedarf der Prüfung kann gesenkt werden, indem der Menge eine Struktur aufgeprägt wird. Mit der Relation “*ist kleiner als*” werden die Folgen der Identifikatoren der Eckknoten von Kanten paarweise geordnet. Dadurch wird eine strenge, lexikographische Ordnung in der Menge hergestellt. Die geordnete Menge kann in einem Feld oder einem Baum abgespeichert werden. Da beim Führen mehrerer Schnitte Elemente häufig entfernt oder hinzugefügt werden, ist ein Baum besser geeignet als ein Feld.

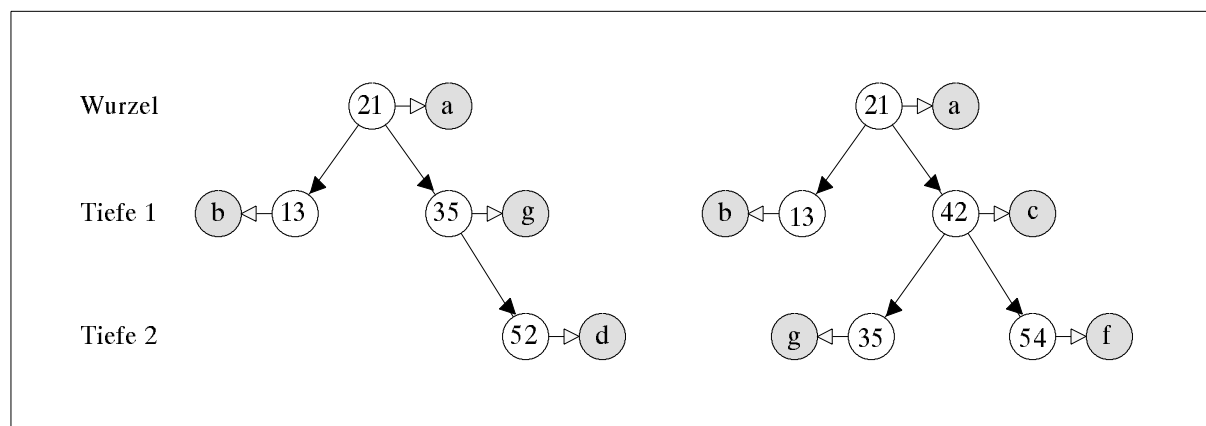


Bild 5.10 : Anordnung der Kanten in einem Baum

Suchbaum: Die Anordnung von Kanten in einem binären Suchbaum wird anhand des Beispiels von Bild 5.7 erläutert. In Bild 5.10 ist der zugehörige Baum vor dem Ausschneiden des Elementes auf der linken Seite und nach dem Ausschneiden auf der rechten Seite dargestellt. Ein Knoten des Baums beherbergt die Identifikatoren der Eckknoten einer Kante und verweist auf diese. Zudem verweist ein Knoten auf höchstens zwei nachfolgende Knoten. Die Verweise sind bezüglich der Identifikatoren dieser Nachfolger geordnet. In der Darstellung ist der Nachfolger mit kleinerem Identifikator links und der Nachfolger mit größerem Identifikator rechts angeordnet. Eine Suche im Baum nach einem gegebenen Identifikator beginnt mit der Wurzel und verfolgt dann in Abhängigkeit vom Ergebnis des Vergleichs mit den eingetragenen Identifikatoren einen Weg im Baum.

Aufwand: Die Anzahl der Vorgänger eines Knotens bis hin zur Wurzel wird als Tiefe bezeichnet. Die Äste des Baumes in Bild 5.10 besitzen unterschiedliche Tiefe. Im schlechtesten Fall haben alle Knoten des Baums eine unterschiedliche Tiefe. Die Suche nach einer Kante ist dann proportional zur Anzahl N der eingetragenen Kanten. Im besten Fall ist unterscheiden sich Knoten, die keine zwei Nachfolger haben, in der Tiefe um höchstens Eins. Die Suche ist dann proportional zum Logarithmus der Anzahl N der eingetragenen Kanten zur Basis Zwei. Die Ordnung eines Algorithmus, der eine Suche im Baum vornimmt, liegt daher zwischen $O(\log N)$ und $O(N)$.

Bäume werden im wesentlichen durch die Methoden zur Herstellung einer ausgeglichenen Tiefe unterschieden. In dieser Arbeit wird eine im *Java2* Sprachumfang enthaltene Implementierung eines Bruder-Baums verwendet, der im Quellcode von *Java2* als Rot-Schwarz-Baum bezeichnet wird [60]. Ein Bruder-Baum zeichnet sich gegenüber anderen binären Suchbäumen durch einen günstigen durchschnittlichen Aufwand für jede der drei Elementaroperationen Einfügen, Entfernen und Suchen aus [34]. Der günstige Aufwand wird erzielt, indem einige Knoten des Baums nicht auf ein eingetragenes Objekt verweisen. Dadurch ist zwar der Speicherbedarf dieser Baums gegenüber anderen ausgeglichenen Bäumen größer, aber durch die Konstante $\frac{5}{3}N$ beschränkt [34]. Eine Leistungsbeurteilung dieses Verfahrens bei der Bestimmung von Randkanten wird im Kapitel 5.5 vorgenommen.

Hashing: Eine weitere Reduktion des Zeitbedarfs kann mit einem Hash-Verfahren erreicht werden. Hash-Verfahren sind dann sinnvoll, wenn wenige Elemente einer potentiell großen Urmenge auf Elemente einer Bildmenge abgebildet werden. Ein Identifikator eines Elementes der Urmenge wird als Schlüssel bezeichnet. Mittels einer Hashfunktion wird aus dem Schlüssel eine natürliche Zahl berechnet. Diese Zahl dient als Index eines Feldes, das als Hashtabelle bezeichnet wird. Die Größe der Hashtabelle ist durch die Wertemenge der Hashfunktion bestimmt. Die Einträge der Hashtabelle sind Verweise auf geordnete Paare, die aus dem Element der Urmenge und dem der Bildmenge bestehen.

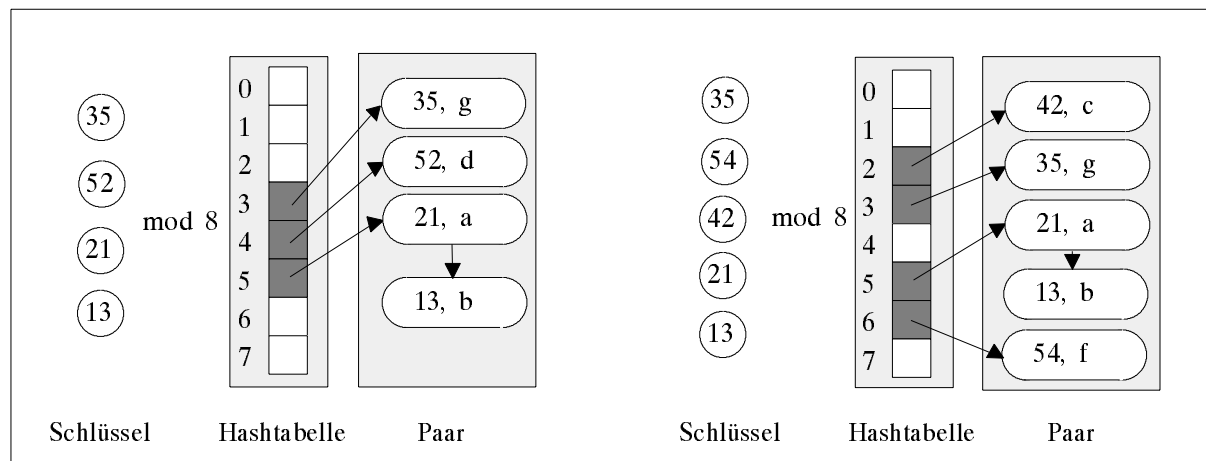


Bild 5.11 : Bestimmung von Randkanten durch Hashing

Das Ausschneiden und Hinzufügen eines Elementes unter Anwendung des Hash-Verfahrens wird anhand des Beispiels von Bild 5.7 erläutert. Auf der linken Seite von Bild 5.11 ist die Anordnung der Menge der Außenkanten $\{g, d, a, b\}$ in der Hashtabelle vor dem Ausschneiden und auf der rechten Seite ist die Anordnung der Menge der Außenkanten $\{g, f, c, a, b\}$ in der Hashtabelle nach dem Ausschneiden dargestellt. Das Einstellen einer Kante in die Tabelle erfolgt, indem die geordnete Folge der Identifikatoren ihrer Eckknoten zu einem Schlüssel zusammengekettet wird. Beispielsweise erhält die Kante "g" mit den Eckknoten 3 und 5 die natürliche Zahl

35 als Schlüssel. Die Hashfunktion Modulo 8 liefert den Index 3 der Hashtabelle. Dort ist ein Verweis auf das Paar (35, "g") eingetragen.

Beim Ausschneiden des Elementes mit dem Identifikator "B" aus Bild 5.7 werden die drei Kanten dieses Elementes temporär erzeugt. Für jede der Kanten wird mittels der Hashfunktion geprüft, ob für deren geketteten Identifikator bereits ein Eintrag vorliegt. Für den Schlüssel 52 der Außenkante "d" ist das der Fall. Der Eintrag wird aus der Hashtabelle entfernt. Die Orientierung der temporär erzeugten Kanten "c" und "f" wird getauscht und sie werden mitsamt ihren Schlüsseln in die Hashtabelle eingestellt. Die Hashtabelle ist nun aktualisiert. Anstelle einer Suche, deren Zeitbedarf proportional zur Anzahl der Außenkanten des Körpers ist, werden Berechnungen der Hashfunktion ausgeführt, deren Zeitbedarf im besten Fall proportional zur Anzahl der Außenkanten eines Finiten Elementes sind.

Der beste Fall tritt genau dann ein, wenn die Hashfunktion für jeden auftretenden Schlüssel einen unterschiedlichen Index berechnet. In Bild 5.11 wird aus den Schlüsseln der Kanten "a" und "b" der gleiche Index bestimmt. Es kommt zur Kollision. Im Beispiel von Bild 5.11 werden die Eckknoten mit den natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ identifiziert. Die Urmenge besitzt potentiell $5^2 = 25$ Elemente. Mit der Hash-Funktion Modulo 25 ist garantiert, daß eine Kollision nicht auftreten kann. Es genügt dann, anstelle eines Verweises auf ein Schlüssel-Kante Paar einen Verweis allein auf die Kante in die Tabelle einzutragen. Die Tabelle ist dann aber groß und eine Traverse über die Kanten hat deshalb einen erhöhten Zeitbedarf.

Aufwand: Hash-Verfahren unterscheiden sich wesentlich in der Behandlung von Kollisionen. Für die Kollisionsbehandlung kann entweder eine Folge unterschiedlicher Hashfunktionen solange angewendet werden, bis ein freier Index bestimmt worden ist oder aus Paaren mit gleichem Index kann eine verkettete Liste konstruiert werden. Dabei können die Glieder der Liste in einer sekundären Struktur oder in die Tabelle selbst aufgenommen werden. Eine Entscheidung darüber, welche Kollisionsbehandlung Anwendung findet, ist abhängig vom Umfang des Hinzufügens und Entfernens von Paaren zur Laufzeit sowie der Größe der zu speichernden Einträge. Hash-Verfahren unterscheiden sich weiterhin in den Hashfunktionen. Die Wahl einer Hashfunktion ist abhängig von der stochastischen Verteilung der Schlüsselmenge über der Urmenge. Im schlechtesten Fall degeneriert das Hash-Verfahren zu einer Struktur, für die die Bestimmung des Paares für einen gegebenen Schlüssel proportional zur Anzahl der Einträge ist. Die Ordnung eines Algorithmus, der mittels eines Hashverfahrens die Außenkanten bestimmt, liegt daher zwischen $O(1)$ und $O(N)$.

In dieser Arbeit wird eine im *Java2* Sprachumfang enthaltene Implementierung eines Hash-Verfahrens verwendet. Dort werden Kollisionen mittels einer sekundären, einfach verketteten Liste behandelt. Die Hashfunktion kann durch die Anwendung indirekt gesteuert werden, indem geeignete Schlüssel als Argumente des Modulo Operators erzeugt werden. Mittels der stochastischen Verteilung dieser Schlüssel kann der Aufwand eines Hashverfahrens näher abgeschätzt werden. Die Wahl eines solchen Schlüssels bei der Bestimmung von Randkanten wird im nachfolgenden Kapitel 5.4 diskutiert. Eine Leistungsbeurteilung der vorgestellten Datenstrukturen wird in Kapitel 5.5 vorgenommen.

5.4 Wahl eines Schlüssels

Aufwandsabschätzung: Der Quotient $\lambda = \frac{N}{M}$ aus der Anzahl N tatsächlicher gespeicherter Paare und der Größe M einer Hashtabelle wird als Lastfaktor λ bezeichnet. Der Lastfaktor λ charakterisiert den Zustand eines Hashverfahrens zur Laufzeit. Eine Aufwandsabschätzung wird aus [32] entnommen: Mittels des Lastfaktors λ wird der theoretische Zeitbedarf eines Hashverfahrens näherungsweise quantifiziert, welches alle Einträge in der Tabelle selbst und nicht in einer sekundären Struktur beherbergt. Für ein derartiges Hashverfahren ist der Lastfaktor sinnvoll im Intervall $0 \leq \lambda \leq 1$ definiert. Es wird ferner angenommen, daß Kollisionen mittels aufeinander folgender Aufrufe unterschiedlicher Hashfunktionen behandelt werden.

Wenn eine Gleichverteilung der Schlüssel vorausgesetzt wird, dann ist die Wahrscheinlichkeit $p(\lambda)$ einen kollisionsfreien Eintrag eines neuen Pairs P in die Tabelle vorzunehmen gleich $1 - \lambda$. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht der Wahrscheinlichkeit das zuvor eingetragene neue Paar P mit genau einem Aufruf der Hashfunktion zu bestimmen. Der Kehrwert $v(\lambda) = \frac{1}{1 - \lambda}$ wird als Näherung für die Anzahl der dafür notwendigen Aufrufe der Hashfunktionen herangezogen.

Mit einem Neueintrag verändert sich der Lastfaktor λ . Die Änderung wird näherungsweise als kontinuierlich unterstellt. Die durchschnittliche Anzahl an Operationen $S(\lambda)$ für die Bestimmung eines Paares aus der Menge aller Paare wird aus der Integration über die Anzahl der Operationen $v(\mu)$ für jedes Paar mit $\mu \leq \lambda$ bestimmt.

$$S(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{1}{1 - \mu} d\mu = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1 - \lambda} \quad (103)$$

Aus den Eigenschaften der Funktion $S(\lambda)$ ist ersichtlich, daß für $\lambda \rightarrow 1$ der Zeitbedarf des Verfahrens unbeschränkt wächst. Aus der Definition des Lastfaktors folgt, daß für $\lambda \rightarrow 0$ der Speicherbedarf relativ zur Anzahl eingetragener Paare stark wächst. Für eine Kollisionsbehandlung mittels einer verketteten Liste trifft der Grenzwert für $\lambda \rightarrow 1$ nicht zu, da im schlechtesten Fall die Anzahl der Operationen nicht größer als die Anzahl der Paare ist. Dennoch wird die Gleichung (103) als empirische Grundlage herangezogen.

Hashtabelle: Eine zweckmäßige Balance des Lastfaktors λ ist durch das Intervall $\frac{1}{4} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$ gegeben. Daraus ergibt sich das Intervall $1,2 \leq S(\lambda) \leq 1,8$ für die durchschnittliche Anzahl $S(\lambda)$ notwendiger Operationen und das Intervall $4N \leq M \leq \frac{4}{3}N$ für den Speicherbedarf M der Tabelle. Wesentlich ist, daß mit der Beschränkung von λ auch $S(\lambda)$ durch eine Konstante beschränkt ist. Somit kann die Ordnung eines Hashalgorithmus unabhängig von der Kardinalität der Eingangs-menge mit $O(1)$ angegeben werden.

Da die Anzahl N der tatsächlichen Einträge in die Tabelle in der Regel nicht *a priori* bekannt ist, verfolgt das Hash-Verfahrens von *Java2* eine einfache Strategie, um den Lastfaktor λ unter einem Schwellwert λ_0 zu halten: Fortgesetztes Eintragen in die Tabelle findet so lange statt, bis der Lastfaktor λ größer als der Schwellwert λ_0 ist. Daraufhin wird eine neue Tabelle doppelter Größe abzüglich Eins angelegt. Alle bisherigen Einträge werden in die neue Tabelle eingestellt. Die initiale Größe M_0 der Hashtabelle sowie der Schwellwert λ_0 können durch die Anwendung festgelegt werden, oder sie sind zu $\lambda_0 = \frac{3}{4}$ und $M_0 = 101$ gesetzt. Ein dynamisches Schrumpfen der Tabelle bei fortgesetztem Entfernen von Einträgen ist nicht implementiert.

Die einfache Strategie des Verdoppelns gewährleistet, daß der Lastfaktor im Intervall $\frac{\lambda_0}{2} \leq \lambda \leq \lambda_0$ liegt und daß unabhängig von der Anzahl der Verdopplungen die gesamte Anzahl

vorgenommener Einträge nicht größer als zweimal der Anzahl N der Paare ist. Es muß aber betont werden, daß damit nur dann eine konstante Anzahl von Operationen für die Suche gewährleistet ist, wenn die Schlüssel gleichverteilt aus der Urmenge entnommen werden. Andernfalls kann die Tabelle degenerieren, da sie sich adaptiv zur Anzahl der Einträge und nicht zur Anzahl der Kollisionen anpaßt.

Hashfunktion: Als Argument der Hashfunktion werden 32 Bit breite Ganzzahlen verwendet. Die Urmenge des Hashing in *Java2* sind daher die Ganzzahlen im Intervall $[-2^{31}, 2^{31} - 1]$. Die Hashfunktion in *Java2* addiert zunächst 2^{31} zum Argument, um ein positives Vorzeichen sicherzustellen. Die bei der Addition überlaufenden Bits werden abgeschnitten. Der Index in der Hashtabelle wird daraufhin aus dem Rest der ganzzahliger Division mit der Tabellengröße M bestimmt. In die Tabelle werden Objektpaare eingestellt. Das erste Objekt wird als Schlüsselobjekt bezeichnet. Ein Element der Urmenge wird durch Aufruf der Methode *hashCode()* am Schlüsselobjekt gewonnen. Die Implementierung dieser Methode in der Klasse *Object*, die Oberklasse aller Objekte ist, liefert die eindeutige 32 Bit breite Objektreferenz.

Objektidentifikatoren: Die Methode *hashCode()* kann durch andere Klassen überladen werden. Dabei ist es nicht notwendig, einen eindeutigen Objektidentifikator als Schlüssel zu liefern. Zwei unterschiedliche Objekte, die den gleichen Schlüssel besitzen, werden zwar zwangsläufig auf die gleiche Position in der Tabelle abgebildet, es wird dann aber mittels der Methode *equals()* deren Äquivalenz geprüft. Die Implementierung dieser Methode in der Oberklasse *Object* vergleicht die beiden Objektreferenzen. Durch das Überladen dieser Methode können Objekte mit unterschiedlichem Speicherbereich anhand ihrer Attribute verglichen werden. Das ist für die vorliegende Anwendung wesentlich, da die Äquivalenz zweier Kanten mittels deren Knotenfolge festgestellt wird.

Fortlaufende Numerierung: Wenn Objekte, die als Schlüsselobjekt eines Eintrags in eine Hashtabelle dienen, mit einer fortlaufenden Ganzzahl identifiziert werden und diese Ganzzahl als Rückgabewert der Methode *hashCode()* dient, dann ist aus den Eigenschaften der Modulo Funktion ersichtlich, daß das Hashverfahren nicht degeneriert. Das gilt auch wenn jedes Objekt mit einem einzigen Zeichen der Aufzählung des Alphabets identifiziert wird, da die Zeichen im Unicode fortlaufende Ganzzahlen repräsentieren.

Referenzen: Objektreferenzen sind Zahlen des 32 Bit breiten virtuellen Adressraumes. Für nacheinander erzeugte Objekte ist die Wahrscheinlichkeit groß, daß diese Zahlen in einer strengen Folge und bei Objekten gleichen Typs in einer Sprungfolge geordnet sind. Wenn der Sprung einer solchen Folge ein gemeinsames Vielfaches mit der Tabellengröße M besitzt, dann degeneriert die Tabelle aufgrund der Eigenschaften der Modulo Funktion. Die initiale Wahl der Primzahl $M_0 = 101$, die Subtraktion von Eins nach deren Verdopplung und unterschiedliche Objektgrößen machen die Existenz eines solchen Faktors unwahrscheinlich. Mit einer Reihe verschiedener Testszenarien wurde diese Annahme experimentell verifiziert.

Zusammengesetzte Identifikatoren: Wenn Objekte über mehrere Attribute identifiziert werden, dann werden die Attribute zu einer binären Zahl hintereinander gekettet. Die Zahl ist meist größer als die größte Zahl der Urmenge eines Hashverfahrens. In *Java2* muß diese Zahl daher unter Verwendung der Methode *hashCode()* zunächst auf die Urmenge abgebildet werden. Erst danach wird die oben beschriebene Hashfunktion angewendet. Grundsätzlich ist es auch möglich, den Modulo Operator auf beliebig lange Zahlen anzuwenden [39]. Unabhängig davon muß aber die Verteilung innerhalb des Datentyps jedes Attributes genau geprüft werden.

Zeichenketten: Betrachtet wird eine Zeichenkette von $\langle z_1, z_2, \dots, z_N \rangle$ von N Zeichen, die als zusammengesetzter Identifikator eines Objektes dienen. Für die Bearbeitung von Zeichenketten

steht in *Java2* die Klasse *String* zur Verfügung. Die Implementierung der Methode *hashCode()* in dieser Klasse bildet die Zeichen nach folgender Formel auf 32 Bit breite Ganzzahlen h ab:

$$h = z_1 * 31^{N-1} + z_2 * 31^{N-2} \dots z_{N-1} * 31 + z_N \quad (104)$$

Jedes Zeichen z_i mit $i = 1, \dots, N$ wird mit der $(N - i)$ -ten Potenz der Basis 31 multipliziert. Daraufhin wird die Summe der Produkte gebildet. Der Überlauf wird abgeschnitten. Dabei erklärt sich die Wahl der Basis 31 aus den nachfolgenden heuristischen Überlegungen:

Es ist zu vermeiden, daß die Basis ein gemeinsames Vielfaches mit der Tabellengröße M besitzt. Daraus folgt die Wahl einer Primzahl. Zudem wird angestrebt, daß für eine geringe Anzahl Zeichen die berechnete Ganzzahl h möglichst eindeutig ist. Bei der Verwendung des lateinischen Alphabets sind nur die letzten sechs Bits jedes 16 Bit breiten Zeichens in *Java* signifikant. Daraus folgt eine Basis deren Darstellung ca. sechs Bits breit ist. Weiterhin wird eine schnelle Berechenbarkeit von h angestrebt. Binäre Multiplikationen mit $2^k - 1$, $k = 0, 1, \dots, N$ können mittels einer Verschiebung des Operanden um k Bits und Subtraktion desselben vom Resultat schnell ausgeführt werden.

Zusammengesetzter Identifikator einer Kante: In der vorgestellten Anwendung des Hashverfahrens werden Kanten über die Folge ihrer Eckknoten identifiziert. Aus den Identifikatoren der Eckknoten muß daher in Analogie zur Formel (104) ein geeigneter Identifikator h für die Kante erstellt werden. Das ist nur möglich, wenn der Wertebereich der Identifikatoren der Eckknoten berücksichtigt wird. Die einfachste Lösung dieser Aufgabe besteht darin, die Eckknoten mit Zeichenketten zu identifizieren. Der zusammengesetzte Identifikator einer Kante folgt dann aus der Kettung dieser Ketten. Hinsichtlich des Speicherbedarfs für Zeichenketten und des Zeitbedarfs für deren Bearbeitung ist dieses Verfahren aber nicht optimal. Weiterhin können fortlaufende Ganzzahlen für die Identifikatoren der Eckknoten genutzt werden. Dann ist die Konstruktion einer zweckmäßigen Formel aber abhängig von der Anzahl der erzeugten Eckknoten. Werden anstelle von fortlaufenden Ganzzahlen die Referenzen der Eckknoten verwendet, dann ist die Konstruktion nicht nur abhängig von der Anzahl und sondern auch von der Größe der Objekte der Eckknoten.

Eine Unabhängigkeit von der Verteilung der Identifikatoren der Knoten wird mit folgender Methode angestrebt: Mit einem gleichverteilenden Zufallsgenerator wird bei der Erzeugung jedes Knotens eine 32 Bit breite Zufallszahl erzeugt und am Knoten gespeichert. Diese Zahl dient als gleichverteilter, randomisierter Identifikator eines Knotens. Die Methode *hashCode()* einer Kante verknüpft die randomisierten Identifikatoren ihrer Eckknoten mit einem booleschen XOR zu einem Identifikator der Kante. Der verknüpfte Identifikator dient dann als gleichverteiltes Argument für den Modulo Operator. Dieses Vorgehen erweist sich für die Problemstellung auch im räumlichen Fall als äußerst stabil und effizient. Ähnliche, auf Zufallsgeneratoren basierende Methoden zur Erzeugung von Eingangswerten des Modulo Operators, finden sich auch in der Fachliteratur [34].

Im Rahmen dieser Arbeit wurden weitere numerische Studien unternommen, n -stellige Relationen mit Hashverfahren softwaretechnisch umzusetzen. Dabei zeigt sich, daß diese sehr sensibel gegenüber stochastischen Verteilungen in den n -Grundmengen sind, deren kartesisches Produkt die Urmenge des Verfahrens ist. Die Schwierigkeit liegt darin, daß die Verteilung entweder *a priori* nicht bekannt ist oder daß eine systematische Abschätzung der Verteilung voneinander abhängige stochastische Parameter berücksichtigen muß.

5.5 Leistungsbeurteilung

Modellaufgabe: Der tatsächliche Zeit- und Speicherbedarf für das Ausschneiden und Hinzufügen von Elementen wird anhand einer Modellaufgabe diskutiert: Im dreidimensionalen Raum sind in jeder Raumrichtung $i = 1, 2, 3$ $R_i + 1$ orthogonale Rasterflächen aufgespannt. Die äußeren Rasterflächen begrenzen damit einen Quader, der unter Verwendung der inneren Rasterflächen in $E = R_1 * R_2 * R_3$ quaderförmige Elemente zerlegt wird. Die Belegung der Inzidenzrelationen eines volumenhaften Lösungsgebietes wird durch eine konstante Anzahl Rasterflächen $R_i = R$ in allen drei Raumrichtungen imitiert. Die Belegung für ein flächenhaftes Lösungsgebiet wird durch eine konstante Anzahl $R_1 = R_2 = R$ in zwei Raumrichtungen und die Anzahl $R_3 = 1$ in der dritten Raumrichtung ausgedrückt. Die Anzahl N der rechteckförmigen Außenflächen beträgt für die volumenhafte Anordnung $N = 6 * R^2$ und für die flächenhafte Anordnung $N = 2 * R^2 + 4 R$.

Speicherbedarf: Die Elemente und Knoten werden in Feldern abgelegt. Dabei muß berücksichtigt werden, daß in *Java*, im Gegensatz zu *C++*, kein zusammenhängender Speicherbereich für mehrere Objekte einer Klasse herstellbar ist. In einem Feld können lediglich Werte von Basisdatentypen oder typsichere Verweise auf Objekte eingetragen werden. Der Speicherbedarf für Elemente, Knoten und deren Felder wird gemeinsam bestimmt. Für die Außenflächen kommen die Datenstrukturen doppelt verkettete Liste, Baum und Hashtabelle zum Einsatz. Der Speicherbedarf jeder Datenstruktur wird gemeinsam mit dem Bedarf für die eingetragenen Außenflächen bestimmt.

Erwartungswert des Speicherbedarfs: Die Anzahl von Objekten der jeweiligen Klassen kann mit der Rasterflächenanzahl R bestimmt werden. Der Erwartungswert für den Speicherbedarf folgt aus der Summe des Bedarfs der erzeugten und nicht freigegebenen Objekte. Auf einem 32 Bit System nimmt eine Objektreferenz in *Java* 4 Byte in Anspruch. Die Größe eines Objektes, das keine Attribute besitzt, ist in der Spezifikation der Laufzeitumgebung, die als *Java Virtual Machine* bezeichnet wird, nicht festgelegt. Die gebräuchlichen Laufzeitumgebungen verwenden hingegen 16 Byte für jedes erzeugte Objekt. Wegen der konsequenten Unterstützung nebenläufiger Prozesse mit gemeinsamem Adressbereich genügen die aus *C++* bekannten 8 Byte nicht.

Beispielsweise erfordert das Einstellen einer neuen Außenfläche in die verkettete Liste ein Objekt für das Glied der Liste sowie ein Objekt für die Außenfläche selbst. Das Glied verweist auf Vorgänger, Nachfolger und die Außenfläche selbst. Die Außenfläche verweist auf ein Feld von Knoten, das seinerseits auf vier Eckknoten verweist. Damit beträgt der Speicherbedarf einer Außenfläche unter Berücksichtigung der Größe von Objekten und Referenzen bei der Verwendung einer doppelt verketteten Liste insgesamt $2 * 16 + 3 * 4 + 1 * 4 + 4 * 4 = 64$ Byte.

Zeitbedarf: Unter Verwendung eines gleichverteilenden Zufallsgenerators wird ein Element aus dem Quader ausgeschnitten und unmittelbar im Anschluß daran wieder eingefügt. Die Oberfläche des Körpers wird in beiden Schritten aktualisiert. Der Vorgang wird E -fach für $E > 1000$ und 1000-fach für eine kleinere Anzahl von Elementen wiederholt. Zu bestimmen ist der Zeitbedarf für die $2E$ bzw. 2000 Aktualisierungen. Daraus wird ein durchschnittlicher Wert für die Aktualisierung des Ausschneidens und Einfügens eines Elementes abhängig von der Anzahl N der Außenflächen für die unterschiedlichen Datenstrukturen ermittelt.

Erwartungswert des Zeitbedarfs: Der Aufwand für die Suche in der doppelt verketteten Liste ist proportional zur Anzahl der Außenflächen N . Der Aufwand für die Suche im Binärbaum ist proportional zum Logarithmus dieser Anzahl zur Basis 2. Der Aufwand für das Hashverfahren ist dann konstant, wenn die Schlüssel gleichverteilt sind. Es werden daher zwei unterschiedliche

Implementierungen der Methode *hashCode()* von Kanten eingesetzt: In dem einen Fall wird die Formel (104) eingesetzt. Dabei werden die Knoten der Aufgabe mit einer fortlaufenden Ganzzahl identifiziert. In dem anderen Fall werden die Identifikatoren der Knoten zufällig erzeugt und mit booleschen XOR verknüpft.

Die zugehörigen Proportionalitätskonstanten können durch detaillierte Betrachtung der im Quelltext des Programms niedergeschriebenen Anweisungen für eine Außenfläche ermittelt werden. Der Erwartungswert für eine Anweisung ist abhängig von deren Typ, den vorangehenden und nachfolgenden Anweisungen, der Laufzeitumgebung und der Maschine. Da das wesentliche Untersuchungsziel der Nachweis der weitgehenden Konstanz der Proportionalitätsfaktoren ist, wird auf eine Analyse der Konstanten verzichtet.

Umgebung: Die Messung erfolgt mit einem Intel PII Prozessor, 400 MHz Taktung, 512K Level 2 Cache und 256 MB Arbeitsspeicher. Als ausführendes Programm dient die Standard-Laufzeitumgebung von *Java* 1.2 unter dem Betriebssystem Windows NT 4.0. Die Laufzeitumgebung wird angewiesen initial 124 MB Arbeitsspeicher bereitzustellen. Sie gestattet es, aus dem Anwendungsprogramm heraus zu jedem Zeitpunkt der Laufzeit näherungsweise den nicht verbrauchten, verfügbaren Teil dieser Zuweisung zu ermitteln.

Für die Bestimmung der Zeitbedarfs wird anstelle der Prozeßzeit näherungsweise die Systemzeit gemessen. Der Einfluß der Prozeßverwaltung des Betriebssystems auf diese Messung wird minimiert, indem keine weiteren Anwendungsprogramme laufen und Mittelwerte aus mehreren Durchläufen gebildet werden. Der Einfluß der Freispeicherverwaltung der Laufzeitumgebung wird durch die initiale Speicherzuweisung minimiert. Zudem wird diesem nebenläufigen und nicht zu unterdrückenden Prozeß vor jeder Messung etwas Zeit zur Ausführung gegeben.

Messung: In Bild 5.12 ist das Ergebnis der Messung des Zeitbedarfs auf der linken Hälfte und das Ergebnis der Messung des Speicherbedarfs auf der rechten Hälfte dargestellt. Der obere Teil des Bildes zeigt das Ergebnis für die volumenhafte Elementierung und der untere Teil für die flächenhafte Elementierung. Der Bedarf ist in Abhängigkeit der Anzahl N der Außenflächen aufgetragen. Zusätzlich sind die zugehörige Elementanzahl E sowie die Anzahl der Rasterflächen R angegeben. In den Diagrammen für den Zeitbedarf ist eine logarithmische Darstellung zur Basis 2 für die Anzahl N gewählt worden. In den Diagrammen für den Speicherbedarf ist der Bedarf jeweils nur für die drei größten verwendeten Werte von N dargestellt.

Beurteilung des Speicherbedarfs: Die gemessenen Werte für den Speicherbedarf entsprechen den Erwartungswerten. Beispielsweise sind für 9600 Außenflächen in der verketteten Liste $9600 * 64 \text{ Byte} \approx 0,59 \text{ MB}$ notwendig und es werden $0,64 \text{ MB}$ gemessen. Eine Abweichung bis zu ca.10% des geforderten zum tatsächlichen Bedarf ist auch für alle anderen Messungen zu beobachten. Die Abweichung ist durch die Freispeicherverwaltung der Laufzeitumgebung bedingt, die ihrerseits blockweise virtuellen Speicher vom Betriebssystem anfordert. Der Gesamtbedarf der Außenflächen ist für die volumenhafte Elementierung unerheblich und für die flächenhafte Elementierung wesentlich. Der Bedarf für die Hashtabelle ist im Vergleich zu der verketteten Liste nur geringfügig größer. Der Bedarf des Baums ist näherungsweise um einen konstanten Faktor größer als der Bedarf der Hashtabelle. Auch dieser Faktor entspricht dem Erwartungswert. Für die größte Anzahl Außenflächen übersteigt der Gesamtbedarf die initial angeforderten 124 MB.

Beurteilung des Zeitbedarfs: Die Kurven für die Darstellung des Zeitbedarfs entsprechen sehr gut den Erwartungen. Bezüglich der logarithmischen Darstellung verläuft die Kurve für die verkettete Liste parabolisch. Diese Datenstruktur ist nicht tragfähig, wenn eine große Anzahl von Elementen aus dem Lösungsgebiet ausgeschnitten wird. Die verkettete Liste wird daher im Diagramm für die flächenhafte Elementierung nicht fortgesetzt. Die Kurve des Baums ist gerade und

die Kurve des Hashverfahrens mit randomisierten Identifikatoren konstant. Die Überlegenheit des Hash-Verfahrens in diesem Anwendungskontext ist damit nachgewiesen. Jenseits der initial angeforderten 124 MB ist für beide Verfahren ein deutlicher Zuwachs im Zeitbedarf ersichtlich.

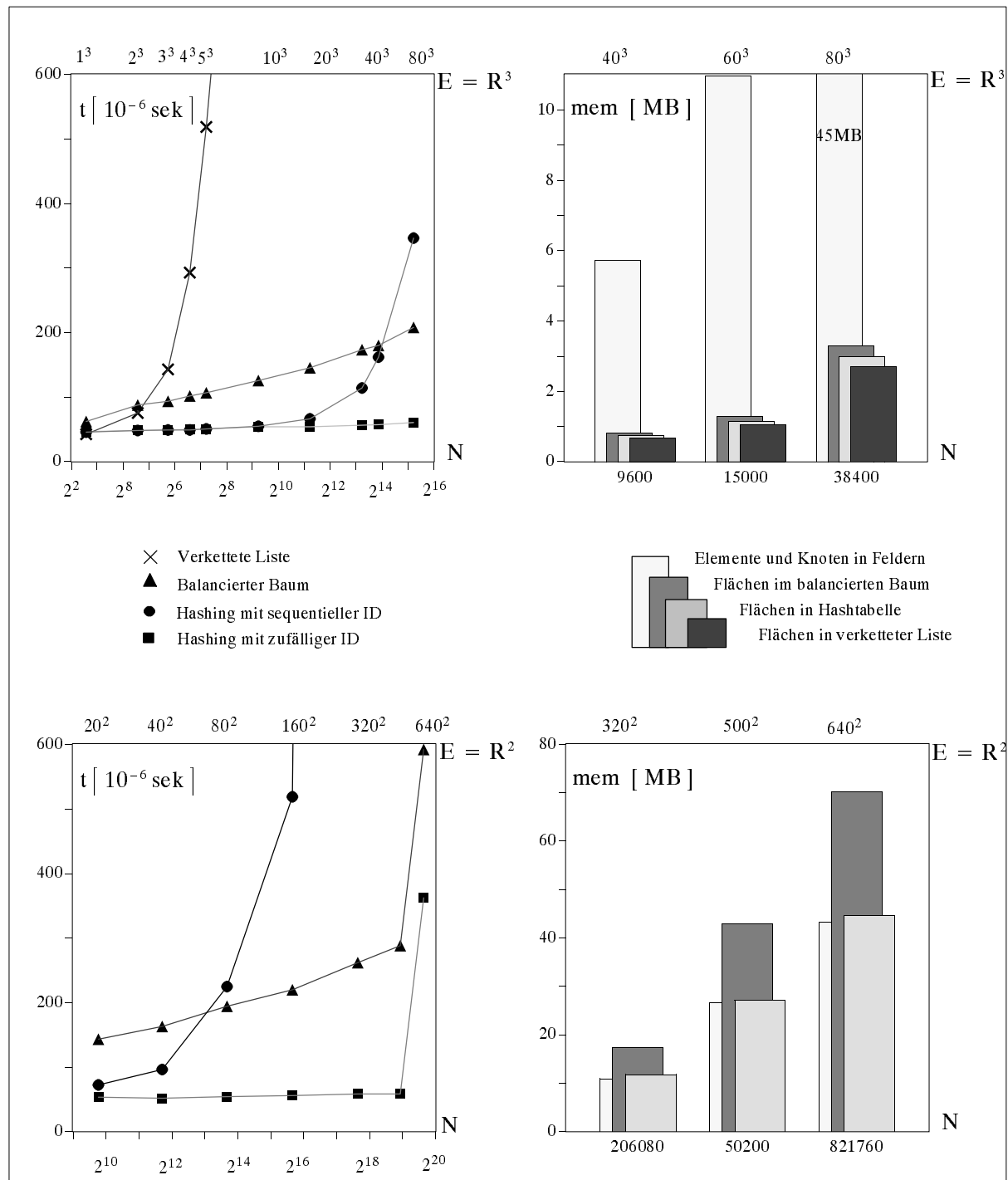


Bild 5.12 : Zeit- und Speicherbedarf in Abhängigkeit der Anzahl Außenflächen N

Es ist deutlich, daß bei der Anwendung von Formel (104) mit fortlaufenden Ganzzahlen als Identifikator das Hashverfahren mit bereits $N \approx 15000$ Einträgen dem Baum unterlegen ist und dann zu einer linearen Struktur degeneriert. Wenn als Identifikator eines Knotens die Referenz gewählt wird und die Knoten annähernd sequentiell erzeugt werden, dann kann bei Verwendung von Formel (104) die gleiche Beobachtung gemacht werden. Bessere Formeln können nur unter Berücksichtigung der jeweils verwendeten Objektanzahl gefunden werden. Mit randomisierten Identifikatoren wird eine Unabhängigkeit davon erreicht.

6 Evaluation von Elementintegralen

Vorgehensweise: Die Berechnung der Elementintegrale (35) und das Lösen der linearen Gleichungssysteme (38), (39) und (40) bestimmen den numerischen Aufwand für das erweiterte Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Im Folgenden wird ein generalisiertes, objektorientiertes Modell zur Berechnung von Elementintegralen vorgestellt. Das Modell wird aus den softwaretechnischen Forderungen nach Effizienz, Erweiterbarkeit und Anwendbarkeit hergeleitet. Mit dem Modell wird anschließend der numerische Aufwand für das erweiterte Prinzip anhand einer Modellaufgabe untersucht.

6.1 Objektorientierte Modellbildung

Die softwaretechnische Umsetzung der Finite Elemente Methode erfolgt mittels der Einführung eines Datentyps für Elemente und eines Datentyps für Knoten. Mittels der Datentypen wird von den spezifischen Stützstellen der Geometrie und des Zustands eines finiten Elementes abstrahiert. Diese werden erst mit der Prägung von Knoten und Elementen als Instanz des jeweiligen Typs festgelegt. Diese Datentypen sind notwendig, um unabhängig von spezifischen Stützstellen Methoden zu implementieren, die die Evaluation der Elementintegrale ausführen, und um die Ergebnisse in den Systemgleichungen unterzubringen. Dieses bewährte Konzept wird nicht aufgegeben.

In einem objektorientierten Modell werden Typen und deren Prägungen durch Klassen und Objekte ersetzt. Klassen erweitern Datentypen um Methoden, die Zugriff auf die Variablen des Objektes besitzen. Es liegt nun nahe, die Evaluation eines Elementintegrals als eine Methode der Klasse eines Elementes zu implementieren und die Ausführung dieser Methode am Elementobjekt anzustoßen. Derartige Modelle sind von verschiedenen Autoren berichtet worden [11][44]. Dieser Weg wird hier nicht verfolgt. Vielmehr wird ein Modell aufgebaut, das die Klasse des Elementes von Klassen trennt, die Methoden für die Berechnung von Elementintegralen definieren. Die Ausführung dieser Methoden wird weiterhin am Elementobjekt angestoßen.

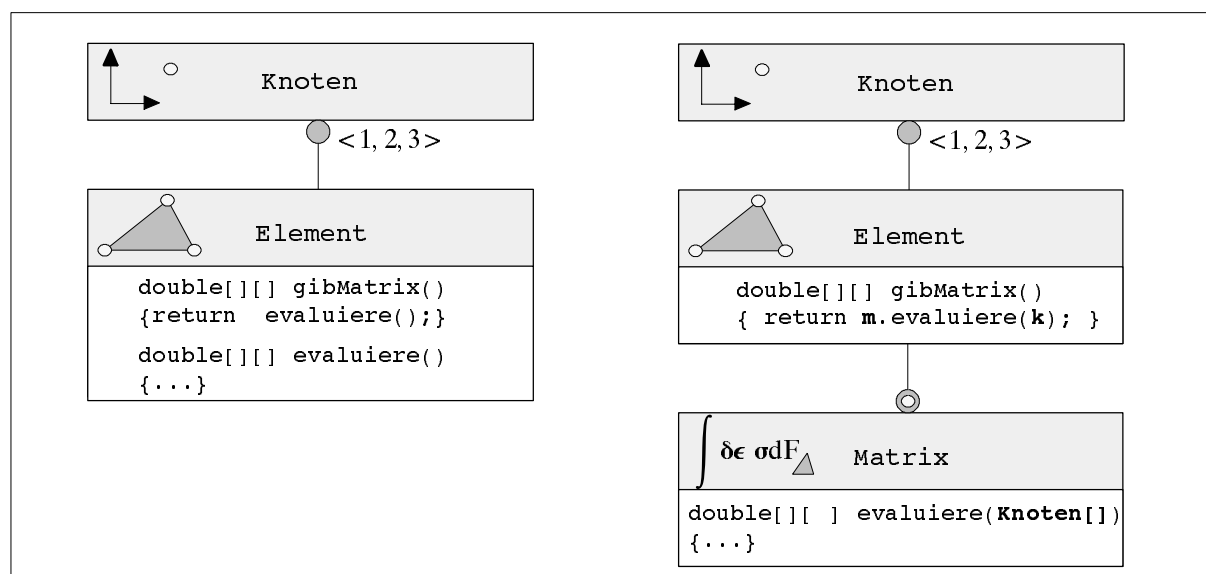


Bild 6.1 : Grobe Modellbildung: links konventionell, rechts neuartig

Der wesentliche Unterschied beider Konzepte ist in Bild 6.1 an einem vereinfachten Beispiel illustriert. Auf der linken Seite ist eine Klasse für Elemente sowie eine Klasse für Knoten dargestellt. Die Elementklasse besitzt eine Objektmethode `gibMatrix()` zur Bestimmung der Elementmatrix. Diese Methode wird im Zuge des Aufbaus der Systemgleichungen angestoßen. Sie zwingt ihrerseits die Objektmethode `evaluiere()` der selben Klasse zur Ausführung. Mittels der Verweise auf Knoten kann schließlich der Einbau der Elementmatrix in die Systemmatrix erfolgen.

Im Unterschied dazu ist auf der rechten Seite die Methode `evaluiere(Knoten[])` in einer Klasse mit der Bezeichnung **Matrix** angeordnet, die mit einem Integralsymbol gekennzeichnet ist. Dieser Methode werden die für die Berechnung der Elementmatrix notwendigen Knoten übergeben. Mit dem Ringsymbol an der Matrixklasse wird gekennzeichnet, daß alle dreieckigen finiten Elemente auf dasselbe und einzige Objekt dieser Klasse verweisen.

Strukturierung der Menge: Der Vorteil dieser Betrachtungsweise offenbart sich, wenn der Versuch unternommen wird, die Menge unterschiedlicher Elementintegrale zu strukturieren. Dafür werden Unterscheidungsmerkmale von Elementintegralen aufgezeigt:

- ◇ Die Elementstufe bzw. die Anzahl lokaler Koordinaten der Elementgeometrie
- ◇ Die geometrische Dimension der Punkte der Elementgeometrie
- ◇ Die Interpolationsvorschrift der Elementgeometrie
- ◇ Die Integrationsregel
- ◇ Der Aufbau des Integranden

Dabei kann der Aufbau des Integranden nach folgenden Gesichtspunkten unterschieden werden:

- ◇ Anzahl der Faktoren des Integranden
- ◇ Stufe und Dimension des Tensorfeldes des jeweiligen Faktors
- ◇ Interpolationsvorschrift des Tensorfeldes des jeweiligen Faktors
- ◇ Stützwerte der Interpolationsvorschrift des jeweiligen Faktors bekannt bzw. unbekannt

Beispielsweise besitzt ein Elementintegral für eine Linienlast am Rand einer Scheibe die Elementstufe 1 und die geometrische Dimension 2. Ist die Linie eine Gerade, so kann die Interpolationsvorschrift durch Anfangs- und Endpunkt spezifiziert sein. Als Integrationsregel kann eine Formel nach Gauß dienen. Der Integrand setzt sich aus dem Produkt der Interpolationsvorschrift für die Verschiebung und der Interpolationsvorschrift für die Belastung zusammen. Die beiden Faktoren sind daher Tensorfelder der Stufe 1 und der Dimension 2. Dabei mag der Verschiebungsverlauf linear und der Belastungsverlauf quadratisch interpoliert werden. Für letzteren sind die Stützwerte der Interpolation bekannt.

Weitere Beispiele der Unterscheidung von Elementintegralen nach den aufgestellten Merkmalen sind in Bild 6.2 dargestellt.

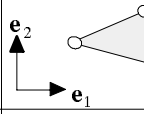
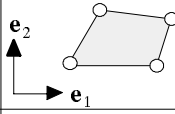
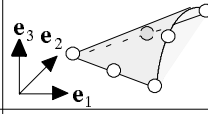
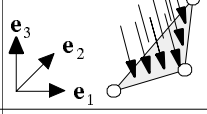
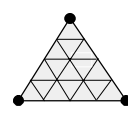
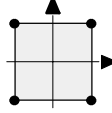
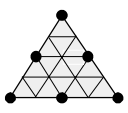
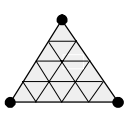
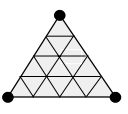
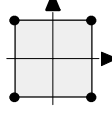
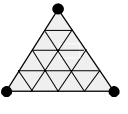
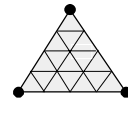
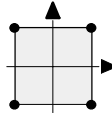
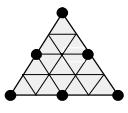
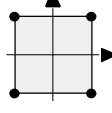
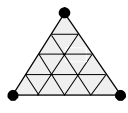
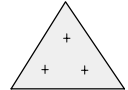
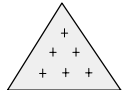
Integrationsbereich					
	Stufe	2	2	2	2
	Dimension	2	2	3	3
	Interpolation				
Integral		$\int \delta \epsilon \mathbf{E} \epsilon_0 dF$	$\int \delta \epsilon \mathbf{E} \epsilon dF$	$\int \delta g \mathbf{C} g dF$	$\int \delta \mathbf{u} \mathbf{p}_0 dF$
Faktor 1, Zustand		unbekannt	unbekannt	unbekannt	unbekannt
	Stufe	2	2	1	1
	Dimension	2	2	2	3
	Interpolation				
Faktor 2, Stoff		bekannt	bekannt	bekannt	-
	Stufe	4	4	2	-
	Dimension	2	2	2	-
	Interpolation	konstant		konstant	-
Faktor 3, Zustand		bekannt	unbekannt	unbekannt	bekannt
	Stufe	2	2	1	1
	Dimension	2	2	2	3
	Interpolation				konstant
Integrationsregel					

Bild 6.2 : Beispiele von Elementintegralen

Vertikale Klassifikation: In den Spalten der Tabelle von Bild 6.2 sind unterschiedliche Elementintegrale dargestellt. Für jede Spalte der Tabelle wird eine eigene Klasse definiert. Diese vertikale Klassifikation entspricht einer Strukturierung der Menge der Elementintegrale einer Aufgabe durch die Äquivalenzrelation *“evaluiert identisches Elementintegral”*. Die potentielle Anzahl der Spalten in der Tabelle ist sehr groß, wobei offensichtlich eine Vielzahl identischer Einträge in der Tabelle stehen.

Mittels der Äquivalenzrelation *“besitzt identische Interpolation für Geometrie, zu bestimmendes Tensorfeld, Stoff und Belastungen”* kann die Anzahl der Klassen zweckmäßig reduziert werden. Die dadurch entstehenden Klassen entsprechen dem gebräuchlichen Verständnis von Elementtypen oder Elementklassen in der Ingenieurliteratur [2][4][57]. Dabei wird häufig implizit vorausgesetzt, daß die Belastungen mit der gleichen Interpolation wie das zu bestimmende Tensorfeld eingepreßt werden und die Interpolation des Stoffs konstant ist. Das ist zweckmäßig aber nicht notwendig. Die Menge dieser Klassen bleibt nach wie vor groß.

In Bild 6.3 sind solche Elementklassen dargestellt. Die Klassen entsprechen den Spalten 2 und 3 aus Bild 6.2. Zur Klassifikation werden alle in diesen Spalten dargestellten Informationen herangezogen. Dadurch ist die Interpolation der Geometrie, des zu bestimmenden Feldes und des Stoffs festgelegt. Damit kann die Berechnung der Elementmatrix in der Methode `evaluiere()` implementiert werden. Die Methode `evaluiere()` wird zweckmäßig in einer Oberklasse **Element** deklariert und in den Subklassen definiert. Dadurch werden Verzweigungen bei der Berechnung der Elementmatrix in Abhängigkeit des Typs vermieden. Das der Deklaration der Methode vorangestellte Schlüsselwort `abstract` drückt aus, daß deren Definition zwangsläufig in einer Kindklasse vorgenommen werden muß. Das Modell entspricht einer Verfeinerung des linken Modells von Bild 6.1.

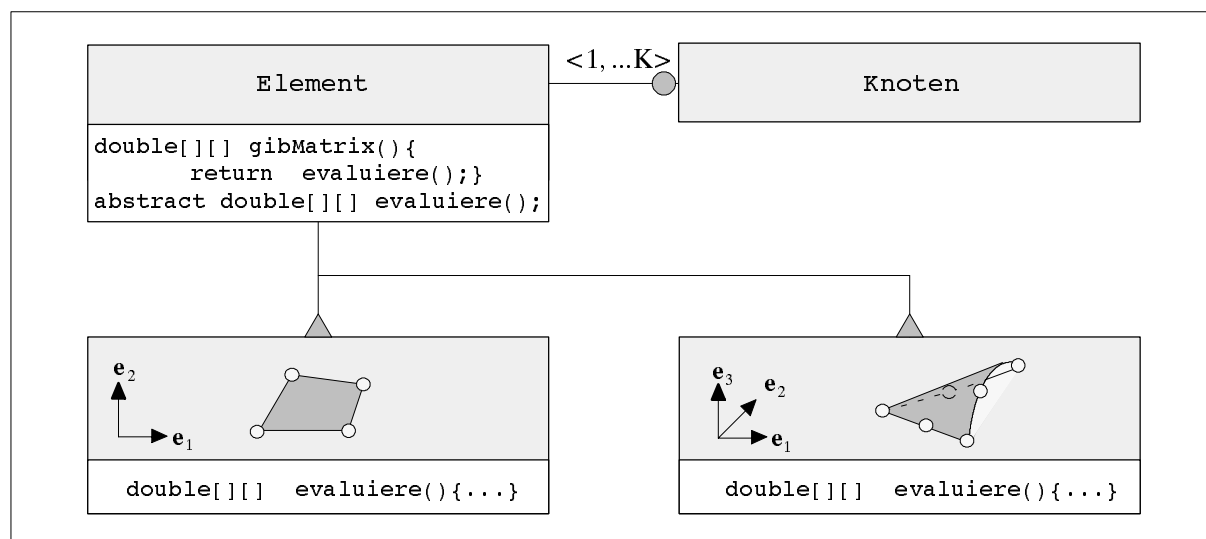


Bild 6.3 : Vertikale Klassifikation

Die vertikale Klassifikation ist unbefriedigend, da eine Vielzahl von identischen Einträgen in Bild 6.2 mehrfach definiert werden müssen. Soll für eine Elementklasse beispielsweise der Verlauf einer eingepreßten Belastung quadratisch anstatt linear interpoliert werden, führt das zur Definition einer neuen Klasse, die sich allein durch die Interpolation der Belastung und gegebenenfalls durch Änderung der Anzahl der Gaußpunkte für deren Integration von der alten unterscheidet. Sollen bestehende Elementklassen beispielsweise um ein neues Stoffgesetz erweitert werden, führt das auf eine Verdopplung der bestehenden Klassen, die sich allein durch das Stoffgesetz unterscheiden.

Horizontale Klassifikation: Für jede durch einen Doppelstrich getrennte, unterschiedliche Zeile der Tabelle von Bild 6.2 werden Klassen eingeführt. Weiterhin wird eine Klasse für die Interpolation eingeführt. Das führt auf die in Bild 6.4 dargestellten Klassen für Geometrie, Zustand, Stoff, Integral und Integrationsregel. Jedes Objekt der Klassen Geometrie, Zustand und Stoff verweist auf ein Objekt aus der Klasse der Interpolation. Eine Unterscheidung zwischen der Klasse für den Stoff und der Klasse für den Zustand ist aus formaler Sicht nicht notwendig. Sie wird aus Gründen der Effizienz getroffen.

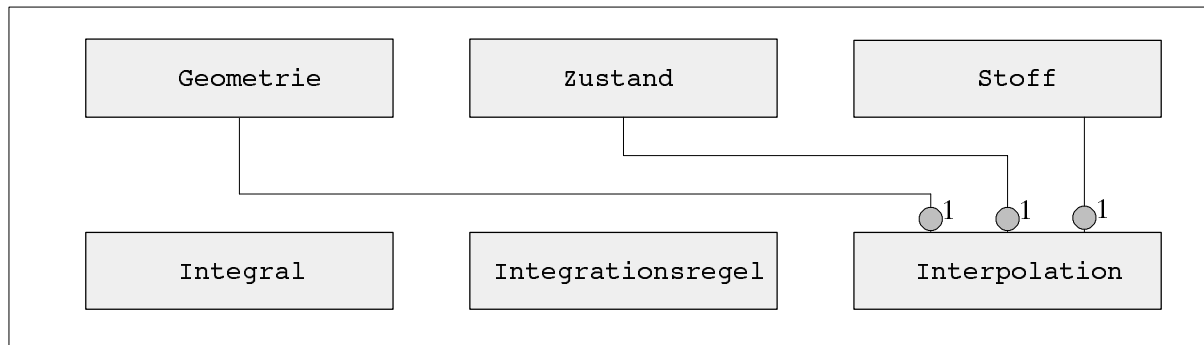


Bild 6.4 : Horizontale Klassifikation

Die Klasse für die Geometrie wird nicht weiter zerlegt. Die Objekte dieser Klasse unterscheiden sich ausschließlich durch den Verweis auf unterschiedliche Interpolationsvorschriften. Die übrigen Klassen werden weiterhin in Subklassen zerlegt. Für den Zustand und für den Stoff sind die Subklassen die Tensorfelder unterschiedlicher Stufen, für das Integral die Elementmatrix, die Randgleichgewichtsmatrix und der Elementvektor, für die Integrationsregel die mit unterschiedlichen Interpolationen assoziierten Regeln und für die Interpolation die unterschiedlichen Interpolationsansätze. Die horizontale Klassifikation vermeidet mehrfache Definition identischer Einträge in Bild 6.2. Sie entspricht der Strukturierung der Menge mit mehreren Äquivalenzrelationen, wie beispielsweise der Relation „besitzt identisches Stoffgesetz“. Eine Äquivalenzrelation vermeidet mehrfache Definitionen, weil ihre Quotientenmengen disjunkt sind.

Unzulängliche Zusammenführung: Die Zusammenführung der Funktionalität der Klassen aus Bild 6.4 kann in unterschiedlicher Weise erfolgen. Bild 6.5 zeigt zunächst eine vereinfachte Zusammenführung der Klassen in einem Modell, das aus einer Verfeinerung des in Bild 6.3 gezeigten Modells hervorgeht. Die Klassen für Geometrie, Zustand, Stoff und Integrationsregel werden als Subklasse der allgemeinen Elementklasse ausgebildet. Für diese Klassen wird die oben beschriebene Zerlegung in Subklassen vorgenommen, die zur Förderung der Übersichtlichkeit im Klassendiagramm nicht dargestellt ist. Die Klasse für einen Elementtyp wird schließlich mittels mehrfacher Vererbung aus jeweils einer Subklasse für Geometrie, Zustand, Stoff und Integrationsregel gebildet.

Einer mehrfachen Vererbung liegt keine Äquivalenzrelation zu Grunde. Sie führt nicht zu disjunkten Objektmenge der jeweiligen Klassen. Es kommt daher zu Namenskonflikten und mehrdeutigen Interpretationen der Attribute eines Objekts. Beispielsweise entsteht ein Namenskonflikt, indem sowohl die Klasse für die Geometrie als auch die Klasse für den Zustand einen identischen Bezeichner für eine Methode oder ein Attribut verwenden. Eine mehrdeutige Interpretation von Attributen liegt beispielsweise dann vor, wenn zwischen dem Zustand des zu bestimmenden Feldes und dem Zustand der Belastung unterschieden werden soll. Es müssen dann zwei Zustände ererbt und unterschieden werden. In einigen Programmiersprachen, die mehrfache Vererbung erlauben, können diese Schwierigkeiten unter erheblichen Einbußen an die Übersichtlichkeit des Programmtextes syntaktisch aufgelöst werden. Klassifikationen

mittels mehrfacher Vererbung dienen allein der Vermeidung mehrfacher Definitionen und führen nur selten zu einer übersichtlichen Modellstruktur.

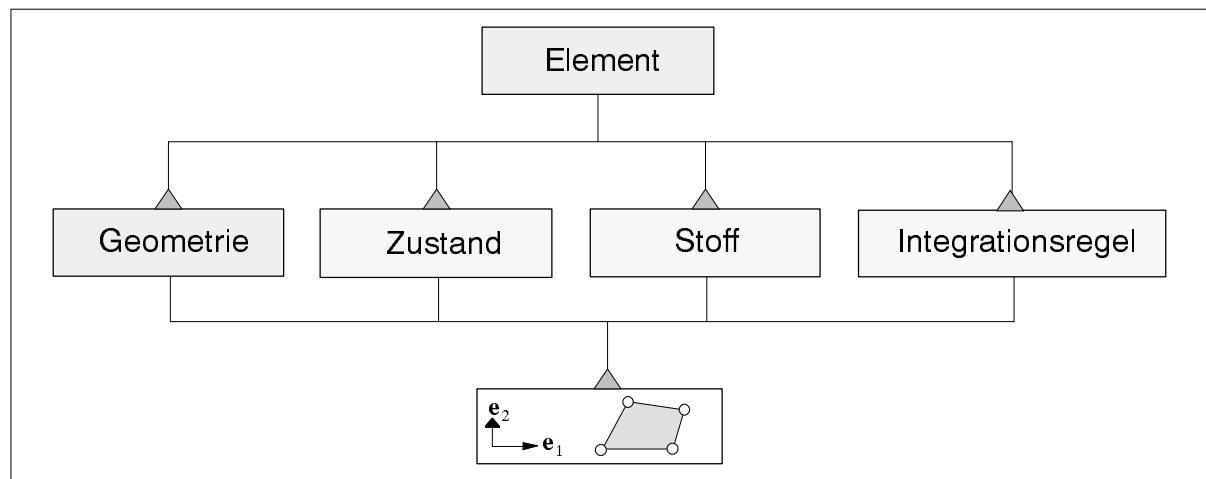


Bild 6.5 : Unzulängliche Zusammenführung mittels mehrfacher Vererbung

Zweckmäßige Zusammenführung: Eine zweckmäßige Zusammenführung unter Vermeidung von Vererbungsbeziehungen ist bereits in Bild 6.4 vorgenommen worden. Die für die Definition der Geometrie, des Zustands oder des Stoffs notwendige Interpolationsvorschrift wird nicht aus einer Subklasse der Interpolationsklasse ererbt, sondern mittels eines Verweises auf ein Interpolationsobjekt gewonnen. Entsprechend wird die für die Definition der Berechnung einer Elementmatrix notwendige Geometrie, der Zustand und der Stoff nicht aus mehrfacher Vererbung sondern mittels Verweisen auf Objekte aus diesen Klassen gewonnen. Schließlich wird in konsequenter Anwendung dieses Prinzips das Element aus Verweisen auf Objekte zur Berechnung der Elementmatrix und des Elementvektors gebildet.

Das Klassendiagramm des zugehörigen Modells ist in Bild 6.6 dargestellt. Ein Objekt der Klasse für das Element verweist auf ein Objekt der Klasse Integral. Die Subklassen dieser Klasse definieren die Methoden zur Evaluation der unterschiedlichen Elementintegrale. Die Objekte der Subklassen verweisen auf die für die Evaluation notwendigen Objekte aus den Klassen Geometrie, Zustand, Stoff und Integrationsregel. In diesem Modell wird weder mehrfache Vererbung angewandt, noch kommt es zur mehrfachen Definition gleicher Funktionalität. Insbesondere werden die Methoden zur Berechnung eines Integrals, wie beispielsweise der Elementmatrix, nur einmalig und unabhängig von der Interpolation der Geometrie, des Zustands, des Stoffs und der Integrationsregel definiert.

Mit diesem Modell wird eine generalisierte Berechnung der Elementintegrale erzielt, die im Zusammenhang mit strukturierter Programmierung bereits von anderen Autoren berichtet worden [24][35] ist. Die Zusammenführung der mit den Klassen von Bild 6.4 beschriebenen Funktionalität geschieht dort mittels Funktionszeigern. Die Programme besitzen einen hohen Abstraktionsgrad und zeichnen sich durch eine geringe Anzahl von Funktionen und übersichtliche Flußdiagramme aus. Hier werden zusätzlich die Vorteile der objektorientierten Programmierung genutzt, indem die Funktionen als Objektmethode von Klassen ausgebildet werden. Deren Objektvariablen sind im wesentlichen die für die Berechnung notwendigen Felder. Im Gegensatz zum strukturierten Ansatz werden die Felder zusammen mit den Funktionen bereit gestellt. Dabei schützen die Klassen der Objekte den Zugriff auf die Felder. Sie sorgen zudem für eine klare Trennung der Namensräume von Bezeichnern. Aus der Sicht der Anwendung entsprechen die Objekte aus diesen Klassen weitgehend den in Integralformen verwendeten Symbolen.

Dynamische Klassifikation: Aus dem Diagramm in Bild 6.6 ist ersichtlich, daß die Objekte der Elementklasse keinerlei statische Informationen über das zu evaluierende Elementintegral tragen. Vielmehr wird der Elementtyp durch einen oder mehrere Verweise **m** des Objektes der Elementklasse auf Objekte der Integralklasse bestimmt. Die Zuweisung dieser Objekte kann zur Laufzeit erfolgen, beispielsweise indem ein Elementobjekt angestoßen wird, eine Elementmatrix oder einen Elementvektor für einen bestimmten Elementtyp zu berechnen. Die Klassifikation in Elementtypen erfolgt bei diesem Modell daher dynamisch.

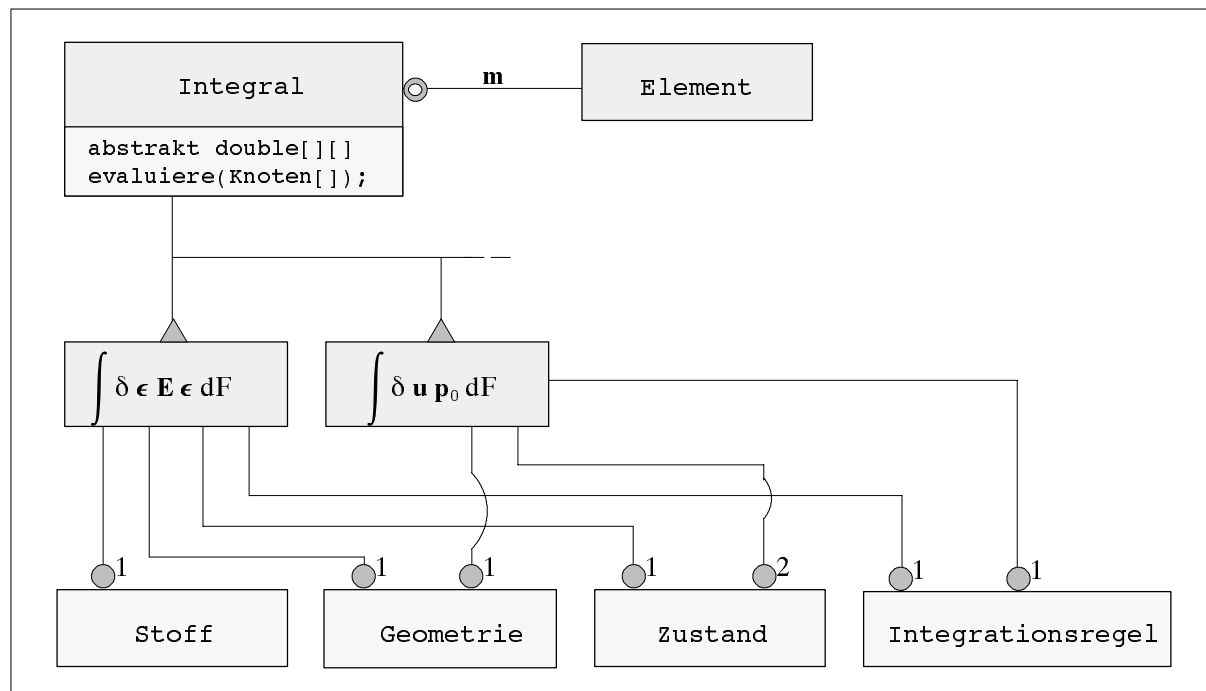


Bild 6.6 : Zweckmäßige Zusammenführung mittels Typzuweisung

Im Sprachgebrauch der objektorientierten Modellierung entspricht die dynamische Klassifikation einem Rollenmuster[25]. Beispielsweise nimmt ein Objekt der Elementklasse zur Laufzeit zunächst die Rolle zur Berechnung der Elementmatrix einer Wärmestromaufgabe an. Nach der Ermittlung des Temperaturverlaufs kann dasselbe Objekt eingesetzt werden, um den Elementvektor eines eingprägten Dehnungsverlaufs zu ermitteln. Die Detaillierung des Modells zeigt, daß eine sehr große Flexibilität in der Wahl der Rollen erreicht wird, indem die Stützstellen der Elementgeometrie getrennt von Stützstellen der Zustände des Elements behandelt werden und deren Anzahl in den Klassen für die Berechnung nicht angefragt wird.

Eine präzise Detaillierung eines objektorientierten Modells mit graphischen Symbolen für Klassen und deren Beziehungen ist wegen deren informellen Charakters nicht möglich. Das ist insbesondere für ein numerisches Modell der Fall, wenn eine effiziente Implementierung angestrebt wird. Die Detaillierung des Modells wird daher mit Auszügen aus dessen prototypischer Implementierung in der Programmiersprache *Java* vorgenommen. Es werden ausschließlich die Grundelemente dieser Sprache herangezogen. Da die Schlüsselwörter der Programmiersprache aus dem Englischen entstammen, werden zur besseren Lesbarkeit auch die eingeführten Klassen und Variablen englisch bezeichnet. Weiterhin werden aus gleichem Grund die Modifikatoren für Zugriffsrechte `public`, `protected` und `private` und der für die Effizienz wichtige Modifikator `final`, der den Aufruf einer Methode durch ihren Inhalt ersetzt, nicht aufgeführt.

6.2 Objektorientierte Programmierung

6.2.1 Interpolation

Formfunktionen: Funktionen werden in Abhängigkeit normalisierter Koordinaten $\mathbf{z}$ interpoliert. Die Interpolationsvorschrift setzt sich aus dem Produkt von Stützwerten mit Formfunktionen zusammen. Die gleichartige Nutzung unterschiedlicher Formfunktionen und ihrer Ableitungen nach den normalisierten Koordinaten $\mathbf{z}$ wird durch die Einführung der Schnittstelle **ShapeInterface** ermöglicht:

```
interface ShapeInterface{
    int      getNumberOfSupports();
    double[] getShapeFunctions(double[] z);
    double[][] getShapeDerivatives(double[] z);
    int      getNumberOfIndependentCoordinates();
    int      getNumberOfNormalizedCoordinates();
    double[][] getDependencyMatrix();
}
```

Die Schnittstelle deklariert Methoden, um für eine Interpolationsvorschrift die Anzahl der verwendeten Stützstellen, die Formfunktionen, die Ableitungen und die Anzahl unabhängiger und abhängiger normalisierter Koordinaten sowie deren Beziehung zueinander anzufragen. Die in der Schnittstelle deklarierten Methoden werden dafür in Klassen für Interpolationsvorschriften definiert.

In Bild 6.7 ist das Klassendiagramm für exemplarische Interpolationsvorschriften dargestellt. Gezeigt ist die lineare Lagrange Interpolation und die lineare Interpolation in einem Simplex mittels baryzentrischer, abhängiger Koordinaten. Für diese Interpolationsvorschriften wird nicht jeweils eine eigene Klasse für jede unterschiedliche Anzahl unabhängiger Koordinaten eingeführt. Sie besitzen stattdessen eine Objektvariable für diese Anzahl.

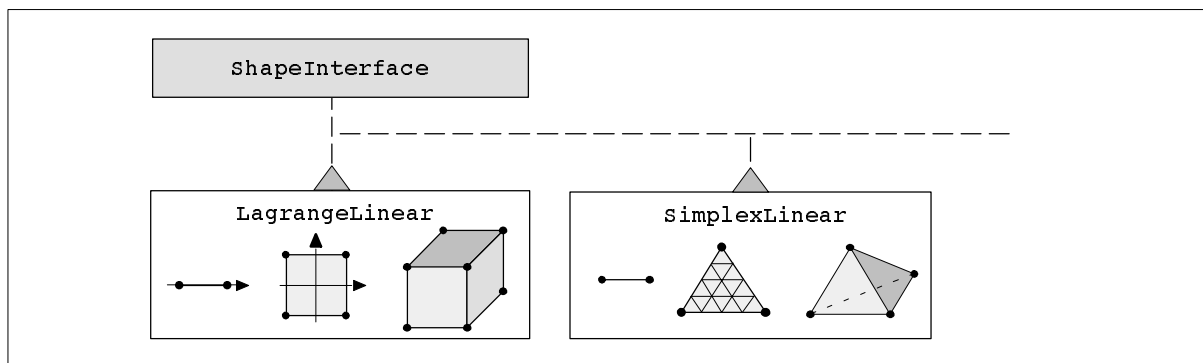


Bild 6.7 : Interpolation: Schnittstelle und implementierende Klassen

Klassifikation nach einem Attribut: Die Objekte aus einer dieser Klassen werden mittels des Wertes der Variablen für die Anzahl unabhängiger Koordinaten klassifiziert. Das entspricht einer Klassifikation nach einem Attribut. Eine Klassifikation nach einem Attribut ist immer dann zweckmäßig, wenn die Definition der Methoden einer Klasse unabhängig von ihren Attributen vorgenommen werden kann. Dadurch wird die Einführung einer Vielzahl von Bezeichnern für Subklassen einer solchen generalisierten Klasse vermieden, die sich allein in der Belegung der Variablen unterscheiden. Interpolationsvorschriften können mittels Attributen für Ansatzgrade und für optionale Korrekturfunktionen noch sehr viel weitergehend generalisiert werden, als es hier dargestellt ist [24].

Beispiel: Gesucht sind die Werte der Formfunktionen einer bilinearen Interpolationsvorschrift am Ursprung des normalisierten Koordinatensystems:

```
// schaffe eine bilineare Interpolation
ShapeInterface shape = new LangrangeLinear(2);
// evaluiere am Ursprung
double[] z = {0.0,0.0};
double[] s = shape.getShapeFunctions(z);
```

Es wird zunächst ein Interpolationsobjekt für eine Lagrange Interpolation geschaffen. Die Anzahl der unabhängigen Koordinaten wird im Konstruktor des Objekts angegeben. Daraufhin wird die Interpolationsvorschrift am Ursprung ausgewertet. Das Interpolationsobjekt der bilinearen Interpolation muß dabei nur einmalig für alle Auswertungen geschaffen werden.

Schnittstellen: Auf eine Interpolationsvorschrift wird ausschließlich über die in der Schnittstelle deklarierten Methoden zugegriffen. Dafür ist allein die Kenntnis der Schnittstelle und nicht die Kenntnis über die tatsächlich unterliegende Interpolationsvorschrift notwendig. Für diejenigen Objekte, welche die Schnittstelle nutzen, ist die Interpolation transparent. Die Nutzung von Schnittstellen entspricht daher der Nutzung abstrakter Klassen. Im Klassendiagramm werden Schnittstellen deshalb mit den gleichen Symbolen wie Klassen und deren Vererbungsbeziehungen dargestellt. Zur Unterscheidung wird anstelle einer durchgezogenen eine gestrichelte Linie verwendet.

Da Schnittstellen im Gegensatz zu abstrakten Klassen keine Attribute besitzen, ist eine mehrdeutige Interpretation von Attributen ausgeschlossen, wenn eine Klasse mehrere Schnittstellen implementiert. In *Java* kann eine Klasse mehr als eine Schnittstelle implementieren, mehrfache Vererbung ist hingegen nicht erlaubt. Es besteht also in *Java* für eine Klasse, welche die Methoden einer Schnittstelle definiert, die Möglichkeit, weitere Schnittstellen zu definieren oder Subklasse einer anderen Klasse zu sein. Schnittstellen sind daher nach Möglichkeit abstrakten Klassen vorzuziehen. Namenskonflikte müssen jedoch vom Programmierer durch die Wahl geeigneter Bezeichner verhindert werden. Ein Resolutionsoperator zur Auflösung von Namenskonflikten existiert in *Java* nicht.

6.2.2 Geometrie

Punkte: Der Zugriff auf die Stützstellen zur Interpolation der Geometrie eines Elementintegrals wird mit der Schnittstelle **PointInterface** festgelegt:

```
interface PointInterface{
    int    getDimension();
    double getCoordinate(int direction);
}
```

Die in der Schnittstelle deklarierten Methoden sind durch die Anwendung zu definieren. Die Anwendung definiert die Methoden entweder in einer Klasse für Knoten, die Stützstellen der Geometrie mit den Stützstellen des Zustands bündelt, oder sie definiert Klassen für Punkte unterschiedlicher geometrischer Dimension, wie es in Bild 6.8 illustriert wird.

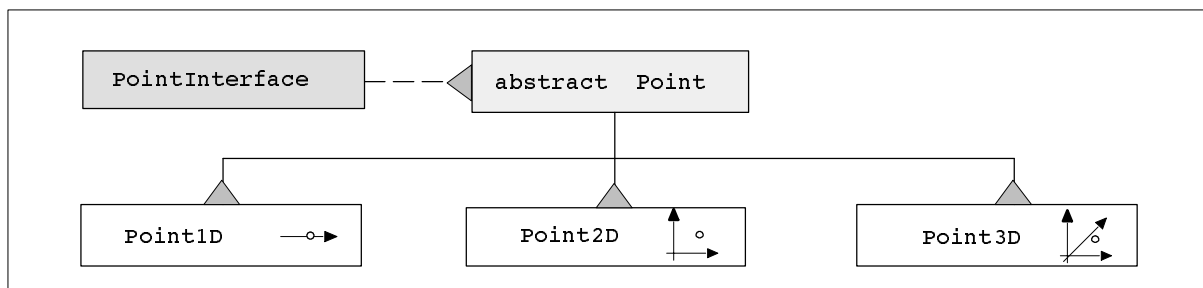


Bild 6.8 : Punkte: Schnittstelle und Klassen

Geometrie: Die gleichartige Nutzung unterschiedlicher Elementgeometrien wird durch die Einführung der Schnittstelle **GeometryInterface** ermöglicht:

```
interface GeometryInterface{
    void      set(PointInterface[] p);
    double    getDetJacobi(double[] z);
    double[][] getLocalDerivatives(double[] z);
}
```

Die Schnittstelle deklariert eine Methode zum Setzen der spezifischen Stützstellen einer Elementgeometrie. Die Stützstellen werden der Methode als Argument übergeben. Deren Klasse definiert die zuvor eingeführte Schnittstelle **PointInterface**. Weiterhin werden Methoden zur Berechnung der Determinante der Jacobi Matrix und der Ableitungen der lokalen Koordinaten der Elementgeometrie nach den normalisierten Koordinaten **z** deklariert. Als Argument dieser Methoden dient ein Punkt der Elementgeometrie in normalisierten Koordinaten **z**.

Die in der Schnittstelle **GeometryInterface** deklarierten Methoden werden in der Klasse **Geometry** definiert:

```
class Geometry implements GeometryInterface
{
    ShapeInterface shape = null;
    ... // define interface
    Geometry(ShapeInterface shape){
        this.shape = shape;
        ...// alloc
    }
}
```

Die Definition erfolgt unter Nutzung der zuvor eingeführten Schnittstelle **ShapeInterface**. Ein Objekt der Klasse **Geometry** verweist auf ein Interpolationsobjekt, dessen Klasse die Schnittstelle **ShapeInterface** definiert, wie es in Bild 6.9 illustriert wird. Das Interpolationsobjekt wird dem Konstruktor des Geometrieobjektes als Argument übergeben. Mit dessen

Schnittstelle kann die Größe der für die Berechnung notwendigen Felder ermittelt werden, die daraufhin erzeugt werden. Mit den in der Schnittstelle **ShapeInterface** deklarierten Methoden kann die Definition der Klasse **Geometry** unabhängig von dem Interpolationsansatz der Elementgeometrie vorgenommen werden.

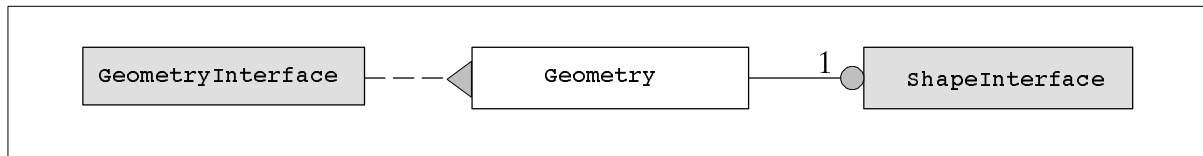


Bild 6.9 : *Geometrie: Schnittstelle und Klasse*

Die Klasse **Geometry** unterstützt insbesondere gekrümmte Elementgeometrien deren Elementstufe kleiner als die geometrische Dimension ist. Dabei wird die Stufe mittels der Schnittstelle des Interpolationsobjekts aus der Anzahl unabhängiger Koordinaten und die geometrische Dimension mittels der Schnittstelle der Stützstellen aus der Dimension dieser Punkte bestimmt.

Beispiel: Gesucht ist die Determinante der Jacobi Matrix am Mittelpunkt einer räumlichen, bilinear interpolierten Fläche:

```

// schaffe eine bilineare Interpolation der Geometrie
int stufe = 2;
GeometryInterface geometry = new Geometry(new LangrangeLinear(stufe));
// erzeuge und setze spezifische Stützstellen
Point3D[] points = ...;
geometry.set(points);
// evaluiere am Mittelpunkt
double[] z = {0.,0.}
double det = geometry.getDetJacobi(z);

```

Es wird zunächst ein Geometrieobjekt für die bilineare Interpolation von Flächen geschaffen. Daraufhin werden dem Objekt die spezifischen Stützstellen einer Fläche zugewiesen. Schließlich wird die Determinante der Jacobi Matrix am Mittelpunkt dieser Fläche ausgewertet. Das Geometrieobjekt muß dabei nur einmalig für alle bilinearen Interpolationen einer Fläche geschaffen werden. Sind die spezifischen Stützstellen einer Fläche gesetzt, so können die übrigen Methoden des **GeometryInterface** an beliebigen Punkten dieser Fläche ausgewertet werden.

6.2.3 Zustand

Basis: Für die allgemeine Beschreibung des Zustands sind Tensoren unumgänglich. Die Koordinaten eines Tensors nehmen Bezug auf seine Basis. Die prototypische Implementierung unterstützt ausschließlich orthonormale Basen. Dafür wird die Klasse **Base** eingeführt. Die Basisvektoren werden in Feldern von Gleitpunktzahlen abgelegt. Basen werden entweder aus linearen Transformationen anderer Basen oder durch die Angabe von Punkten erzeugt :

```
class Base
{
    double[][] base = null;
    int dimension;
    ...// define linear transforms
    Base(PointInterface[] points){...}
}
```

Tensor: Die gleichartige Nutzung unterschiedlicher Tensoren wird durch die Einführung der Schnittstelle **TensorInterface** ermöglicht:

```
interface TensorInterface
{
    int getOrder();
    int getDimension();
    Base getBase();
    void setBase(Base b);
    double getCoordinate(int index);
    void setCoordinate(int index, double coor);
    boolean getStatus(int index);
    void setStatus(int index, boolean status);
}
```

Mit diesen Methoden wird der Zugriff auf die Stufe, die Dimension und die Koordinaten eines Tensors festgelegt. Da einige Koordinaten eines Tensors erst nach der Durchführung einer Berechnung bekannt sind, besteht weiterhin die Möglichkeit, Koordinaten des Tensors zu setzen. Mit der Abfrage nach dem Status wird zwischen unbekannten und bekannten Tensorkoordinaten unterschieden. Zudem besteht die Möglichkeit, die Bezugsbasis der Koordinaten eines Tensors anzufragen oder diese bezüglich einer gegebenen Basis zu transformieren. In Ermangelung variabler Argumentlisten in *Java* wird unabhängig von der Stufe des Tensors auf dessen Koordinaten mit einem einzigen Index zugegriffen. Dafür wird eine Reihenfolge der Koordinaten festgelegt.

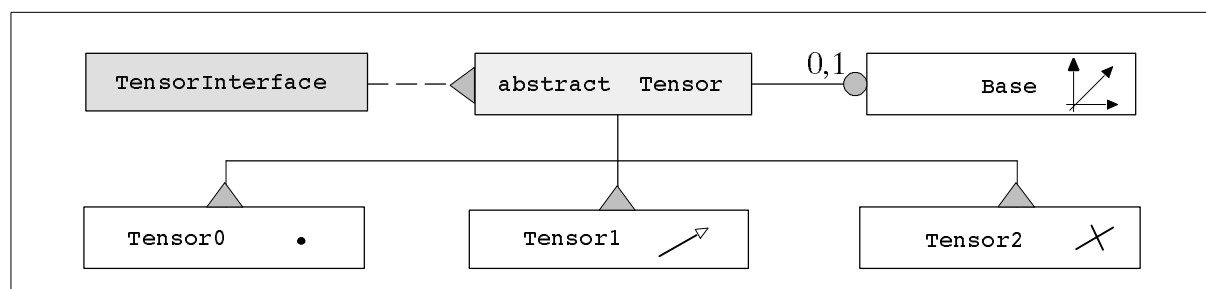


Bild 6.10 : Tensor: Schnittstelle und Klassen

Die in der Schnittstelle deklarierten Methoden werden durch die in Bild 6.10 dargestellten Klassen für Tensoren unterschiedlicher Stufen definiert. Unterstützt werden Tensoren der Stufen 0 und 1 sowie symmetrische Tensoren der Stufe 2, die als Subklasse einer abstrakten Tensorklasse ausgebildet werden. Die Klassifikation nach der Dimension der Tensoren erfolgt mittels eines Attributes. Die Koordinaten der Tensoren sind Gleitpunktzahlen. Für die Stufen 1 und 2 werden die Koordinaten in Feldern abgelegt. Besitzt der Verweis auf die Basis den Wert `null`, so nehmen

die Koordinaten implizit Bezug auf die globale kartesische Einheitsbasis. In gleicher Weise wird nur dann ein Feld von Wahrheitswerten für den Status erzeugt, wenn für eine der Koordinaten der Status wahr ist. Dadurch können Methoden, die auf das **TensorInterface** zugreifen, beschleunigt und der Speicherbedarf gesenkt werden. In der Programmierung ist dann aber eine Verzweigung in Abhängigkeit von den Werten der Verweise auf Basis und Status erforderlich.

Tensorfeld: Die über die Elementgeometrie zu integrierenden Größen sind Tensorfelder und deren Ableitungen. Für die gleichartige Nutzung der Interpolation von Tensorfeldern wird die Schnittstelle **StateInterface** eingeführt:

```
interface StateInterface{
    int      getOrder();
    int      getDimension();
    // Anzahl Stütztensoren
    int      getNumberOfSupports();
    // Koordinaten eines Tensorfeldes
    double[] interpolate(          double[] z,
                                   TensorInterface[] t);
    // Koordinaten des Gradienten bzw. des Dehnungstensors
    double[] interpolateDerivative( double[] z,
                                   double[][] localDerivatives,
                                   TensorInterface[] t);
    // Interpolationsvektor einer Koordinate eines Tensorfeldes
    double[] getCoordinate(        double[] z);
    // Interpolationsmatrix des Gradienten bzw. des Dehnungstensors
    double[][] getDerivative(       double[] z,
                                   double[][] localDerivatives);
}
```

Über die Schnittstelle kann die Anzahl der Stütztensoren sowie die Stufe und die Dimension eines Tensorfeldes angefragt werden. Mittels der übrigen Methoden wird die Interpolation eines Feldes und dessen Gradienten an einer in normalisierten Koordinaten **z** spezifizierten Stelle angestoßen. Dabei wird zwischen der Berechnung von Interpolationsmatrizen ohne gegebene Stütztensoren und einer vollständig ausgeführten Interpolation mit gegebenen Stütztensoren unterschieden. Letztere liefern aus Effizienzgründen als Rückgabewerte Felder von Gleitpunktzahlen anstelle von Objekten aus den eingeführten Klassen für Tensoren. Für die Interpolation der Gradienten eines Tensorfeldes sind außerdem die Ableitungen der lokalen Elementkoordinaten nach den normalisierten Koordinaten zu übergeben.

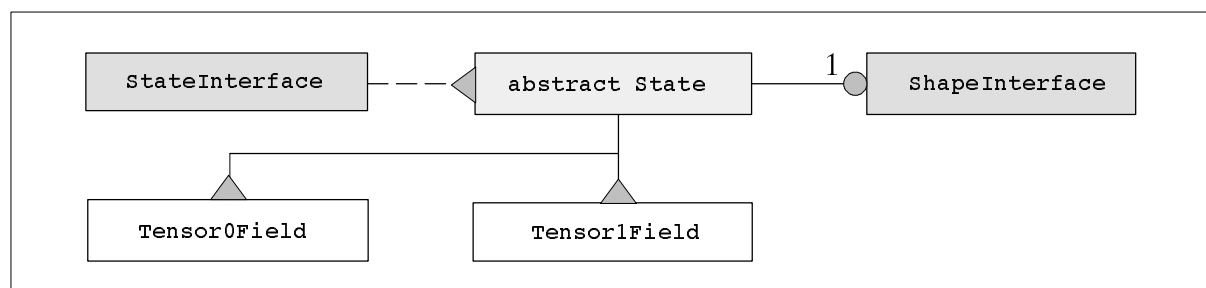


Bild 6.11 : Zustand: Schnittstelle und Klasse

Die Schnittstelle **StateInterface** unterstützt keine allgemeine Interpolation von Tensorfeldern beliebiger Stufe. Eine allgemeine Schnittstelle muß die Indices einer Koordinate des Feldes berücksichtigen, um die Koordinate sowie deren Gradienten zu interpolieren. Die Methoden der Schnittstelle **StateInterface** haben keinen Index zur Bezeichnung einer Koordinate des Tensorfeldes. Für Tensorfelder der Stufe 0 wird implizit die einzige Koordinate dieses Feldes unterstellt. Für Tensorfelder der Stufe 1 wird anstelle eines Tensors der Dehnungsvektor in Ingenieurdarstellung als Feld von Gleitpunktzahlen beziehungsweise dessen Interpolationsmatrix

zurückgegeben. Der Vorteil dieser Beschränkung liegt darin, daß bei der Evaluation von Elementintegralen anstelle allgemeiner Tensorprodukte effizientere Matrizenprodukte ausgeführt werden können.

Die in der Schnittstelle **StateInterface** deklarierten Methoden werden durch die in Bild 6.11 dargestellten Klassen definiert. Zur Definition wird wiederum die Schnittstelle **ShapeInterface** herangezogen. Dafür wird analog zur Klasse **Geometry** im Konstruktor der abstrakten Klasse **State** ein Interpolationsobjekt angegeben. Die Anzahl der Stütztensoren ergibt sich aus der Anzahl der Stützstellen des Interpolationsobjektes. Die Dimension des Tensorfeldes ergibt sich aus der Anzahl unabhängiger Koordinaten des Interpolationsobjektes. Die Klassifikation nach dem Interpolationsansatz sowie nach der Dimension des Tensorfeldes erfolgt daher mittels eines Attributes. Die Klassifikation nach der Stufe wird durch die Einführung von Subklassen für die Stufen 0 und 1 vorgenommen. Mit der Stufe, der Dimension und der Anzahl der Stütztensoren liegen die Größen der für die Interpolation notwendigen Matrizen und Felder vor. Sie werden daraufhin im Konstruktor eines Zustandsobjektes erzeugt.

Beispiel: Über der bilinear interpolierten Fläche aus dem vorangehenden Beispiel wird ein Verschiebungsfeld biquadratisch interpoliert. Gesucht ist der Dehnungszustand am Mittelpunkt der Fläche in normalisierten Koordinaten z :

```
// schaffe eine biquadratische Interpolation des Zustands
StateInterface state = new Tensor1Field(new LangrangeQuadratic(2));
// erzeuge spezifische Stütztensoren
Tensor1[] tensors = ...;
// evaluiere am Mittelpunkt
Tensor2 strain = new Tensor2(
    state.interpolateDerivative(
        z, geometry.getLocalDerivatives(z), tensors));
```

Es wird zunächst ein Zustandsobjekt für die biquadratische Interpolation eines Tensorfeldes der Stufe 1 geschaffen. Daraufhin werden die Stütztensoren eines spezifischen Verschiebungsfeldes erzeugt. Schließlich wird die Interpolation mit den Stütztensoren und dem Geometrieobjekt aus dem vorangehenden Beispiel ausgewertet. Das Ergebnis der Auswertung dient als Argument eines Konstruktors für einen Tensor der Stufe 2. Das Zustandsobjekt muß nur einmalig für alle biquadratischen Zustandsinterpolationen geschaffen werden.

6.2.4 Stoffgesetze

Die Schnittstelle **ConstitutiveInterface** wird für die gleichartige Nutzung von Stoffgesetzen eingeführt:

```
interface ConstitutiveInterface{
    void          set(double[] parameters, Base base);
    double[][]    get();
    TensorInterface getBehaviour(TensorInterface t);
    TensorInterface getInverseBehaviour(TensorInterface t);
}
```

Mit der Methode `set(double[] parameters, Base base)` können spezifische Stoffparameter und eine Bezugsbasis für die Koordinaten eines Stofftensors gesetzt werden. Die Koordinaten des Tensors werden mit der Methode `get()` als Matrix von Gleitpunktzahlen erhalten. Weiterhin werden in der Schnittstelle optionale Methoden deklariert, die für einen gegebenen Tensor das Stoffgesetz auswerten. Diese Methoden müssen gegebenenfalls leer definiert werden, da in *Java* nicht zwischen optional und obligatorisch zu definierenden Methoden unterschieden werden kann.

Die Schnittstelle **ConstitutiveInterface** unterstützt ausschließlich konstante Stofftensoren der Stufen 2 und 4. Dabei wird für einen Stofftensor der Stufe 4 vorausgesetzt, daß die Definition der Methode `get()` so vorgenommen wird, daß unmittelbar die Ingenieurdarstellung des Elastizitätstensors zurückgegeben wird. Dieses Vorgehen ist konsistent mit der vorangehend beschriebenen Zustandsinterpolation und dient einer effizienten Berechnung.

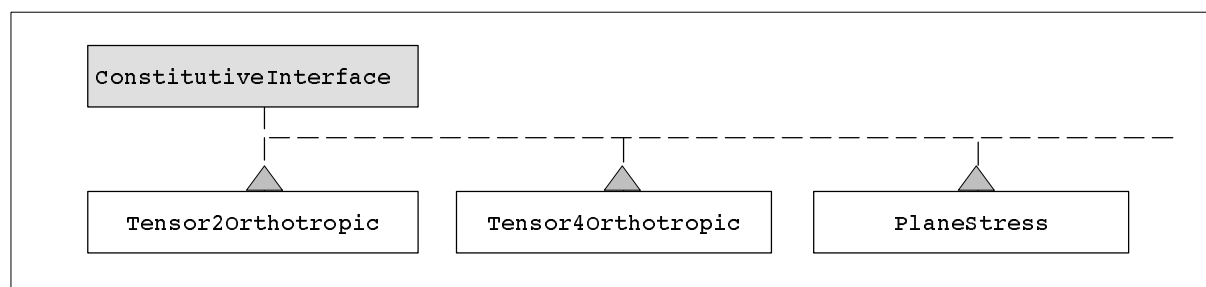


Bild 6.12 : Stoff: Schnittstelle und implementierende Klassen

Die Schnittstelle **ConstitutiveInterface** wird durch die in Bild 6.12 dargestellten Klassen für Stoffgesetze definiert. Isotrope Stoffgesetze gehen als Sonderfall aus den orthotropen Stoffgesetzen hervor.

Beispiel: Für den Dehnungszustand aus dem vorangehenden Beispiel ist der ebene Spannungszustand zu bestimmen.

```
// schaffe ein Stoffgesetz
ConstitutiveInterface constitutive = new PlaneStress();
// setze spezifische Parameter
double[] params={2.1E8,0.2};
constitutive.set(params,null);
// evaluiere
Tensor2 stress = constitutive.getBehaviour(strain);
```

Zunächst wird ein Objekt für den ebenen Spannungszustand geschaffen. Die spezifischen Parameter eines Stoffs werden gesetzt. Das Gesetz wird mit dem Dehnungstensor des vorangehenden Beispiels evaluiert. Dabei muß das Stoffgesetz unabhängig von den Stoffparametern nur einmalig erzeugt werden.

6.2.5 Integrationsregeln

Die Schnittstelle **IntegrationRuleInterface** wird für die gleichartige Nutzung von Integrationsregeln eingeführt:

```
interface IntegrationRuleInterface{
    int            getNumberOfIntegrationPoints();
    double[]       getIntegrationPoint(int index);
    double         getIntegrationWeight(int index);
}
```

Die Schnittstelle deklariert Methoden, um für eine Integrationsregel die Integrationspunkte, die Integrationsgewichte sowie deren Anzahl anfragen zu können. Die Methoden werden durch die in Bild 6.13 exemplarisch dargestellten Klassen definiert. Einige Integrationsregeln sind hinsichtlich der Elementstufe sowie der Anzahl von Integrationspunkten in den Koordinatenrichtungen weitergehend generalisierbar.

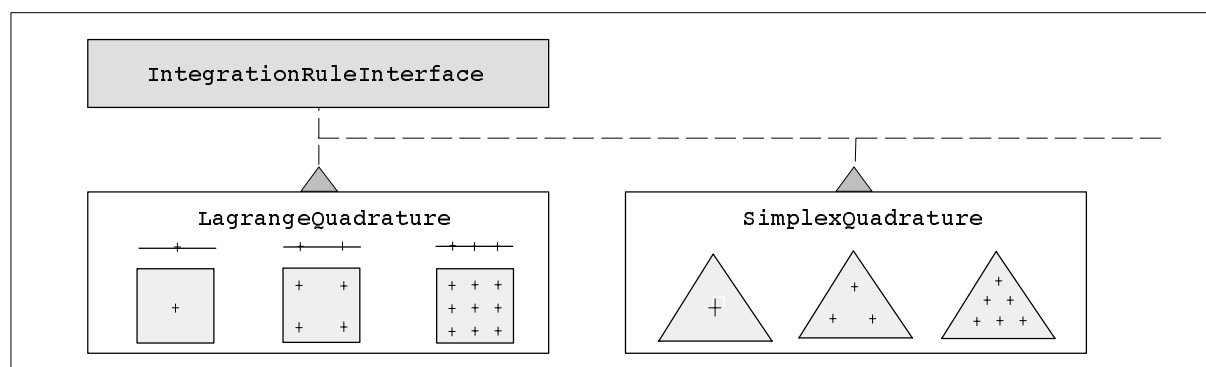


Bild 6.13 : Integration: Schnittstelle und Klassen

Für die Herleitung der Integrationsregeln werden Interpolationsvorschriften herangezogen. Daher können Integrationsregeln in gleicher Weise wie Interpolationsvorschriften klassifiziert werden. Es ist aber nicht zweckmäßig eine Regel zusammen mit der assoziierten Interpolation in einer Klasse zu definieren, da nur selten allein über eine einzige Interpolationsvorschrift in normalisierten Koordinaten zu integrieren ist.

Beispiel: Der Flächeninhalt der in den vorangehenden Beispielen bilinear interpolierten Fläche ist durch numerische Integration mit 3 Gaußpunkten für jede normalisierte Koordinate zu bestimmen:

```
// schaffe eine Integrationsregel
IntegrationRuleInterface rule = new LagrangeQuadrature(3, 3, 0);
// initialisiere Ergebnis
double area = 0.0;
// integriere
for(int i = 0; i < rule.getNumberOfIntegrationPoints(); i++)
    area += geometry.getDetJacobi(rule.getIntegrationPoint(i))
            *rule.getIntegrationWeight(i);
```

Dem Konstruktor eines Objektes für die Integration wird die Anzahl der Integrationspunkte in drei normalisierten Richtungen übergeben. Anschließend wird eine Variable für das Ergebnis der Integration initialisiert. Die spezifischen Stützstellen des Geometrieobjektes sind bereits gesetzt. In einer Schleife über die Anzahl der Integrationspunkte wird die Determinante der Jacobi Matrix an den Integrationspunkten ausgewertet und mit dem Integrationsgewicht multipliziert. Dabei muß die Regel unabhängig von ihrer Anwendung nur einmalig erzeugt werden.

6.2.6 Integrale

Algebraische Operationen: Die Größe eines Feldes kann in *Java* zur Laufzeit bestimmt werden. Operatoren können in *Java* nicht überladen werden. Aus diesen Gründen werden keine Klassen für Matrizen und Vektoren eingeführt, sondern es wird die Definition der abstrakten Klasse **MatVec** vorgenommen:

```
abstract class MatVec{
    static void mv (double[][] res,      double[][] m,      double[] v){...}
    static void vPv(double[] res,      double[] v,      double[] v){...}
    static void vEs(double[] v,      double s){...}
    ...
}
```

Die Klasse **MatVec** besitzt ausschließlich Klassenmethoden, denen Felder von Gleitpunktzahlen als Argumente übergeben werden. Das erste Argument einer Methode steht für das Ergebnis einer Operation. Die weiteren Argumente sind Operanden. Für die Bezeichner der Methoden wird eine Syntax festgelegt: Die Zeichen *m*, *v* und *s* bezeichnen Matrizen, Vektoren und Skalare. Hintereinander gestellte Zeichen kennzeichnen eine Produktbildung. Mit den Zeichen *P*, *S* und *T* werden Addition, Subtraktion und Transposition gekennzeichnet. Mit dem Zeichen *E* wird das Ergebnis einer Operation linksassoziativ überschrieben.

Beispiel: Die oben dargestellten Methoden der Klasse **MatVec** definieren das Produkt einer Matrix mit einem Vektor, die Addition zweier Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar.

Integral: Alle Elementintegrale werden numerisch integriert. Dafür wird der Integrand eines Integrals an Integrationspunkten ausgewertet und mit einem Integrationsgewicht multipliziert. Das Integrationsergebnis folgt aus der Summe des Ergebnisses an den Integrationspunkten. Für die Ausführung der Integration wird die abstrakte Klasse **Integral** eingeführt:

```
abstract class Integral{
    GeometryInterface geometry    = null;
    IntegrationRuleInterface rule = null;
    double[][] result            = null;
    // liefert den Integranden
    abstract double[][] evaluate(double[] z);
    // führt Integration aus
    void integrate(){
    // erster Integrationspunkt
        MatVec.ms( result,
            evaluate(rule.getIntegrationPoint(0)),
            rule.getIntegrationWeight(0)
            *geometry.getDetJacobi(rule.getIntegrationPoint(0)));
    // weitere Integrationspunkte
        for(int i = 1; i < rule.getNumberOfIntegrationPoints(); i++)
            MatVec.mPEms(result,
                evaluate(rule.getIntegrationPoint(i)),
                rule.getIntegrationWeight(i)
                *geometry.getDetJacobi(rule.getIntegrationPoint(i)));
    } }
}
```

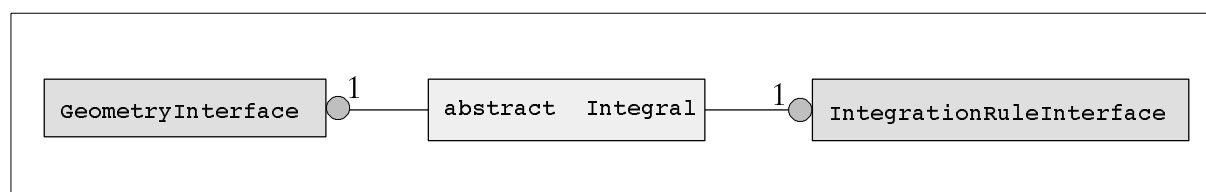


Bild 6.14 : *Integral*: verwendete Schnittstellen

Ein Objekt der Klasse **Integral** verweist auf ein Objekt, dessen Klasse die Schnittstelle **GeometryInterface** definiert, sowie auf ein Objekt, dessen Klasse die Schnittstelle **IntegrationRuleInterface** definiert, wie in Bild 6.14 dargestellt ist. Zudem existiert mit der Variablen `double[][] result` ein Verweis auf Felder von Gleitpunktzahlen, die das Ergebnis einer ausgeführten Integration repräsentieren. Diese Verweise werden in Subklassen der Klasse **Integral** initialisiert. Weiterhin ist in der Klasse die abstrakte Methode `evaluate(double[] z)` deklariert. Diese Methode wird in Subklassen der Klasse geeignet definiert. Sie liefert den Wert des Integranden an einem Integrationspunkt `z`.

In der Methode `integrate()` der Klasse **Integral** ist die Ausführung der Integration bereits vollständig definiert. Dabei wird die Transformation des Integrationsbereichs in eine normalisierte Darstellung berücksichtigt. In einer Schleife über die Anzahl der Integrationspunkte wird der Integrand an jedem Integrationspunkt evaluiert. Der Integrand wird daraufhin mit dem zugehörigen Integrationsgewicht und der Determinante der Jacobi Matrix multipliziert. Im ersten Schleifendurchlauf wird der Speicherbereich für das Ergebnis der Integration überschrieben. In den weiteren Durchläufen wird auf den Speicherbereich für das Ergebnis aufaddiert.

Die Klasse **Integral** wird durch Subklassen für die unterschiedlichen Elementintegrale weiter zerlegt. Einige der in dieser Arbeit definierten Subklassen sind in Bild 6.15 dargestellt. Neben einer Klasse zur Berechnung des überstrichenen Rauminhaltes sind eine Klasse für Elementmatrizen, eine Klasse für Elementvektoren sowie eine Klasse für Elementvektoren aus initial eingepprägten Gradienten im Klassendiagramm aufgetragen. Weitere Klassen für die Berechnung der Randgleichgewichtsmatrizen aus Kapitel 2 und für die Berechnung der in Kapitel 3 untersuchten Fehlernormen existieren.

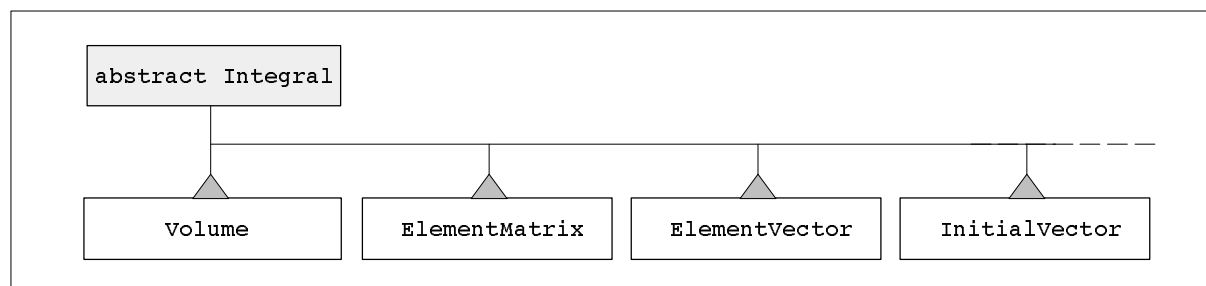


Bild 6.15 : *Integrale*

Die Subklassen der Klasse **Integral** in Bild 6.15 unterscheiden sich allein durch die Definition des Integranden in der Methode `evaluate(double[] z)` sowie durch die Initialisierung der Felder für den Integranden und das Integrationsergebnis. Die Definition einer solchen Subklasse wird zunächst für die Klasse **Volume** erläutert:

```

class Volume extends Integral{
    double[][] integrand={{1.}};
    Volume(GeometryInterface geometry,
           IntegrationRuleInterface rule){
        this.geometry = geometry;
        this.rule = rule;
        this.result = new double[1][1];
    }
    double[][] evaluate(double[] z){ return integrand;}
    double get(PointInterface[] p){
        geometry.set(p);
        integrate();
        return result[0][0];}
}
  
```


Beim Erzeugen eines Objektes der Klasse **volume** wird dem Konstruktor der Klasse ein Objekt für die Geometrie und ein Objekt für die Integrationsregel übergeben. Diese Objekte definieren die zuvor eingeführten Schnittstellen in ihren jeweiligen Klassen. Die Verweise auf diese Objekte werden in den zugehörigen Variablen der Oberklasse **Integral** gespeichert. Für eine Berechnung des Rauminhaltes ist der Integrand konstant Eins. Dieser Wert wird in einer Matrix von Gleitpunktzahlen abgelegt, um die Definition der Methode `evaluate(double[] z)` vornehmen zu können. Der Methode `get(PointInterface[] p)` werden die spezifischen Stützstellen einer Geometrie übergeben. Sie stößt daraufhin die Integration an.

Beispiel: Der Inhalt der Fläche aus den vorangehenden Beispielen ist durch numerische Integration mit drei Gaußpunkten für jede normalisierte Koordinate zu bestimmen:

```
// schaffe ein Integral
Integral integral = new Volume( new Geometry( new LagrangeLinear(2)),
                                new LagrangeQuadrature(3,3,0));

// initialisiere Eckpunkte
Point3D[] p = ...;
// integriere
area = integral.get(p);
```

Zunächst wird ein Objekt der Integralklasse für die Integration bilinear interpolierter Flächen geschaffen. Daraufhin werden spezifische Stützstellen einer Fläche erzeugt mit denen die Integration ausgeführt wird. Das Objekt der Integralklasse muß dabei unabhängig von den Stützstellen nur einmalig geschaffen werden.

Elementmatrix: Eine weitere Definition einer Subklasse der Klasse **Integral** nimmt die Klasse **ElementMatrix** vor:

```
class ElementMatrix extends Integral{
    StateInterface          state=null;
    ConstitutiveInterface    constitutive=null;
    double[][]              integrand=null;

    ElementMatrix(          GeometryInterface geometry,
                      StateInterface state,
                      ConstitutiveInterface constitutive
                      IntegrationRuleInterface rule){
        ...//schaffe Speicher für result und integrand
    }

    double[][] evaluate(double[] z){
        double[][] zy    =    geometry.getLocalDerivatives(z);
        double[][] g      =    state.getDerivative(z,zy);
        double[][] c      =    constitutive.getMatrix();
        MatVec.mmmT(integrand,g,c);
        return integrand;
    }

    double[][] get(PointInterface[] p, double[] params,Base base){
        geometry.set(p);
        constitutive.set(params,base);
        integrate();
        return result;
    } }
}
```

Beim Erzeugen eines Objektes der Klasse **ElementMatrix** wird dem Konstruktor der Klasse jeweils ein Objekt für die Geometrie, für den Zustand, für das Stoffgesetz und für die Integrationsregel übergeben. Die Klassen dieser Objekte definieren die zuvor eingeführten Schnittstellen, wie in Bild 6.16 dargestellt ist. Die Verweise auf diese Objekte werden in den zugehörigen Variablen gespeichert. Mittels der Schnittstelle des Zustandsobjekts wird die Größe

der Elementmatrix ermittelt. Für diese sowie für den Integranden werden daraufhin Felder von Gleitpunktzahlen angefordert.

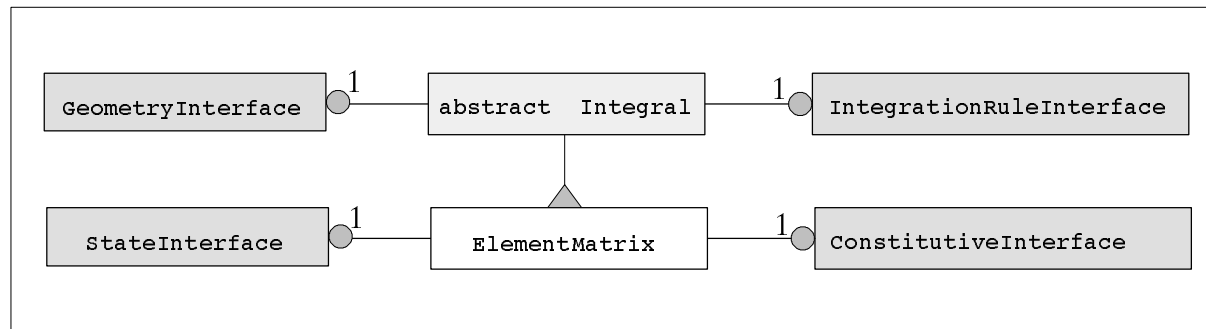


Bild 6.16 : Elementmatrix: verwendete Schnittstellen

In der Methode `evaluate(double[] z)` wird der Integrand am Integrationspunkt ausgewertet. Dafür werden zunächst die lokalen Ableitungen mit der Schnittstelle des Geometrieobjektes gewonnen, um daraufhin mit der Schnittstelle des Zustandsobjektes die Interpolationsmatrix des Gradienten oder die des Dehnungstensors zu bestimmen. Weiterhin wird mittels der Schnittstelle des Stoffs die Stoffmatrix ermittelt. Schließlich wird das symmetrische Matrizenprodukt ausgeführt, das für die Elementmatrix einer Galerkin Methode kennzeichnend ist. Damit ist der Wert des Integranden am Integrationspunkt bestimmt und wird zurückgegeben.

Die Methode `double[][] get(PointInterface[] p, double[] params, Base b)` liefert die Elementmatrix für ein spezifisches Element. Der Methode werden die Stützstellen dieses Elementes und die Parameter sowie die Basis für das Stoffgesetz übergeben. Die spezifischen Stützstellen des Zustands sind für die Berechnung der Elementmatrix nicht notwendig. Die Objekte für die Geometrie und den Stoff werden daraufhin mit ihren Schnittstellen initialisiert. Schließlich wird die Integration in der Oberklasse angestoßen und das Ergebnis der Integration, die Elementmatrix, zurückgegeben.

Beispiel: Für das geometrisch bilinear und physikalisch biquadratisch interpolierte Element aus den vorangehenden Beispielen ist ein Elementmatrixobjekt zu erzeugen. Mit dem Objekt soll daraufhin die Steifigkeitsmatrix für spezifische Stützstellen berechnet werden.

```

// schaffe einen Elementtyp
ElementMatrix matrix= new ElementMatrix(
    new Geometry(new LangrangeLinear(2),
    new Tensor1Field(new LangrangeQuadratic(2),
    new PlaneStress(),
    new GaussQuadrature(3,3,0));
// erzeuge spezifisches Element
Point3D[] points    = ...;
double[] parameters = {2.1E8,0.2};
// stosse Berechnung an
double[][] ke = matrix.get(points,parameters,null);
  
```

Zunächst werden Objekte aus den Klassen der horizontalen Zerlegung erzeugt. Diese Objekte werden dem Konstruktor eines Objektes für die Berechnung der Elementmatrix übergeben. Daraufhin werden die Stützstellen der Geometrie eines spezifischen Elementes erzeugt und dessen Elastizitätsmodul und Querdehnzahl in ein Feld eingestellt. Schließlich wird die Berechnung der Steifigkeitsmatrix am Elementmatrixobjekt angestoßen. Dabei muß die Erzeugung des Elementmatrixobjektes nur einmalig für alle Steifigkeitsmatrizen dieses Elementtyps erfolgen.

Vorteil: Die gezeigte Definition der Klasse **ElementMatrix** ist nicht nur unabhängig von den spezifischen Stützstellen eines Elementes, sondern sie ist auch unabhängig von der Interpolationsvorschrift der Geometrie, des Zustands und des Stoffs des Elementes. Die Definition der Berechnung einer Elementmatrix wird nur einmalig und im Gegensatz zu konventionellen Modellen nicht für jeden Elementtyp vorgenommen. Ein Elementtyp im konventionellen Sinn wird bei diesem Modell durch Konstruktion eines Objektes der Klasse **ElementMatrix** erzeugt und nicht durch eine Klasse statisch festgelegt. Darin liegt die Zielsetzung und die Neuartigkeit des vorgestellten Modelles.

Die Definition weiterer Subklassen der Klasse **Integral** erfolgt analog zur Klasse **ElementMatrix**. Im Unterschied zu dieser Klasse berücksichtigen diejenigen Klassen, die stellvertretend für die Berechnung von Elementlastvektoren stehen, neben den Stützstellen der Geometrie auch die Stütztensoren der zu integrierenden Tensorfelder. In diesem Zusammenhang wird noch einmal auf Bild 6.6 verwiesen.

Statthalterklasse: Alle Objekte, die aus einer der Subklassen der Klasse **Integral** geprägt werden, werden zweckmäßig in einer Statthalterklasse abgelegt. In einer Anwendung wird auf diese Objekte über die Statthalterklasse zugegriffen. Sie gewährleistet, daß von jeder Subklasse, höchstens einmalig ein Objekt mit unterschiedlichen Attributen geprägt wird. Da die Objekte aus den Subklassen der Klasse **Integral** stellvertretend für Typen stehen, wird die Statthalterklasse in Anlehnung an Datenbanken als Repository bezeichnet.

Beispiel: Für die Spalten der Tabelle von Bild 6.2 sind Integraltypen zu erzeugen und in einer Statthalterklasse abzulegen.

```
abstract class Repository{
    static Integral spalte1 = null;
    static Integral spalte2 = null;
    ...
    static Integral getSpalte1(){
        if(spalte1 == null)
            spalte1 = new InitialVector(
                new Geometry(new SimplexLinear(2)),
                new Tensor1Field(new SimplexLinear(2)),
                new Orthotropic2D(),
                new Tensor1Field(new SimplexQuadratic(2)),
                new SimplexQuadrature(2,3));
        return spalte1;
    }
    static Integral getSpalte2(){
        if(spalte2 == null)
            spalte2 = new ElementMatrix(
                new Geometry(new LagrangeLinear(2)),
                new Tensor1Field(new LagrangeLinear(2)),
                new Orthotropic2D(),
                new LagrangeQuadrature(3,3,0));
        return spalte2;
    }
    ...
}
```

Für jede Spalte der Tabelle von Bild 6.2 ist eine Klassenvariable angelegt. Dadurch ist gewährleistet, daß unabhängig von der Elementanzahl die Felder der Elementmatrizen und Elementvektoren nur einmalig angelegt werden. Zudem werden die Variablen erst und nur dann initialisiert, wenn das Objekt tatsächlich benötigt wird. Dadurch kann auch bei einer Vielzahl von Integraltypen, die in ein Repository eingetragen sind, ein geringer Speicherbedarf gewährleistet werden.

Aus dem Beispiel ist ersichtlich, daß einige Objekte aus den Klassen der horizontalen Zerlegung mehrfach erzeugt werden, obwohl sie sich in ihren Attributen nicht unterscheiden. Dieser unnötige Speicherverbrauch kann nicht durch die Verwendung von Klassenvariablen anstelle von Objektvariablen vermieden werden, da die Objekte der horizontalen Zerlegung nicht nur durch Subklassen sondern auch über ihre Attribute klassifiziert sind. Eine Vermeidung ist möglich, indem auch die Objekte der horizontalen Zerlegung in einer Statthalterklasse abgelegt werden. In Hinblick darauf, daß die Anzahl der in einer Berechnung verwendeten Integraltypen gegenüber der Anzahl der zu evaluierenden Integrale gering ist, kann darauf jedoch verzichtet werden.

Bibliothek: Der Aufbau einer Elementbibliothek im konventionellen Sinn erfolgt, indem für jeden Elementtyp ein manueller Eintrag für sein Elementmatrixobjekt und sein Elementvektorobjekt in ein Repository vorgenommen wird. Mittels der softwaretechnischen Umsetzung einer mehrstelligen Relation kann dieser Vorgang automatisiert werden. Die Stellen der n-Tupel dieser Relation entsprechen den Bezeichnern von Klassen und optionalen Attributen aus den Klassen. Da für eine große Anzahl von Elementen sehr häufig auf das Repository zugegriffen wird, kommt diese deutlich kompaktere, aber zeitaufwendigere Lösung nicht zum Einsatz.

6.3 Leistungsbeurteilung

Vorgehensweise: Ein Vergleich der Evaluation eines Integrals nach dem vorgestellten Modell mit einem Elementtyp, der nach dem konventionellen Modell in der Sprache *Java* implementiert wird, zeigt, daß für beide Modelle die gleiche Rechenleistung erzielt wird. Dieses Ergebnis wird durch konsequente Verwendung des Modifikators `final` und durch den vorangehend beschriebenen Entwurf der Schnittstellen erreicht: Für die Evaluation des Integranden liefern die Schnittstellen ausschließlich Felder von Gleitpunktzahlen und nicht Objekte, so daß in den zeitkritischen algebraischen Operationen nicht auf Objekte mittels derer Methoden zugegriffen wird.

Ein Vergleich weitgehend identischer Programmierungen eines Elementtyps in der Sprache *Java* und der Sprache *C++* zeigt, daß mit dem derzeitigen Stand der vorausschauenden Interpreter für diese Aufgabe *Java* ca. 70% der Leistung von *C++* erreicht. Für Maschinen aus der IBM RS6000 Reihe existiert zudem ein Compiler, der den plattformunabhängigen Binärcode von *Java* in spezifischen Code dieser Maschinen übersetzt. Insbesondere kann bei diesem Compiler die bei der Ausführung von *Java* Programmen vorgenommene Überprüfung des Gültigkeitsbereichs der Indices von Feldern unterdrückt werden. Dadurch kann *Java* für diese Aufgabe die gleiche Leistung wie *C++* erreichen.

Aus den Vorbemerkungen ist ersichtlich, daß die absolute numerische Leistung in Abhängigkeit der Maschine, des Compilers und des Interpreters stark schwanken kann. Es wird daher der Zeitbedarf der Berechnung der Elementintegrale (35) relativ zum Bedarf für die Lösung der linearen Gleichungssysteme (38), (39) und (40) beurteilt. Die Leistung wird in einer typischen Ingenieurumgebung untersucht. Dafür wird in Analogie zur Bestimmung aktueller Oberflächen aus Kapitel 6 eine Modellaufgabe spezifiziert.

Für die Evaluation der Elementintegrale (35) wird das zuvor beschriebene objektorientierte Modell eingesetzt. Für die Lösung der linearen Gleichungssysteme werden Verfahren aus der Literatur herangezogen [18], die in *Java* implementiert wurden. Die Lösung der linearen Gleichungssysteme (38), (39) und (40) erfolgt entweder durch das direkte Verfahren von Cholesky oder durch das iterative Verfahren der konjugierten Gradienten. Für das iterative Verfahren wird die Konditionierung der Systemmatrix durch unvollständige Cholesky Zerlegung verbessert.

Umgebung: Die Messungen erfolgen auf einem Personal Computer mit Intel PII Prozessor mit 400 MHz, 512K Level 2 Cache und 256 MB Arbeitsspeicher. Als ausführendes Programm dient die Standard-Laufzeitumgebung von Java 1.2 für x86 Architekturen [60] unter dem Betriebssystem Windows NT 4.0. Mit einer in Java geschriebenen Version der gebräuchlichen LINPACK Eichung werden in dieser Konfiguration 34,3 MFLOPS erreicht [58]. Der Laufzeitumgebung wird initial soviel Arbeitsspeicher zugewiesen, daß für alle Untersuchungen kein Speicher auf sekundäre Medien ausgelagert wird.

Modellaufgabe: Im dreidimensionalen Raum ist in jeder Raumrichtung $i = 1, 2, 3$ die Anzahl $R_i + 1$ orthogonale Rasterflächen aufgespannt. Der Abstand benachbarter Rasterflächen beträgt 1m. Die äußeren Rasterflächen begrenzen damit einen Quader, der unter Verwendung der inneren Rasterflächen in $E = R_1 * R_2 * R_3$ würfelförmige Elemente zerlegt ist. Der Quader besteht aus einem homogen isotropen Stoff mit den Paramtern $E = 1 \frac{N}{m^2}$ und $\nu = 0.2$. Die Belegung der Inzidenzrelationen eines volumenhaften Lösungsgebietes wird durch eine konstante Anzahl Rasterflächen $R_i = R$ in allen drei Raumrichtungen imitiert. Die Belegung eines flächenhaften Lösungsgebiets wird durch eine konstante Anzahl $R_1 = R_2 = R$ in zwei Raumrichtungen und die Anzahl $R_3 = 1$ in der dritten Raumrichtung ausgedrückt.

Auf dem gesamten Außenrand des Quaders ist der Verschiebungszustand mit $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ gegeben. Die Würfel werden trilinear isoparametrisch interpoliert. Der Verschiebungsansatz kann die gegebenen Verschiebungen exakt darstellen. Die Berechnung des Gleichungssystems (38) ist daher nicht notwendig. Die Randspannungen auf den quadratischen Außenflächen werden bilinear interpoliert. Sowohl für die Elementintegrale des Gebietes als auch für die Elementintegrale auf dem Rand werden zwei Gaußpunkte in jeder Richtung verwendet. Untersucht wird der Zeitbedarf und der Speicherbedarf für unterschiedliche Werte der Rasteranzahl R .

Erwartungswert des Speicherbedarfs: Der Speicherbedarf für Elemente, Außenflächen und Knoten entspricht weitgehend demjenigen aus der Modellaufgabe von Kapitel 5.5. Dabei müssen die Knoten noch mit einem konstanten Faktor für die Koordinaten der Punkte, des Verschiebungstensors und des Randspannungstensors beaufschlagt werden. Für die Darstellung des Bedarfs wird daher auf die Diagramme von Bild 5.12 verwiesen. Der Speicherbedarf für die Evaluation der Elementintegrale ist vernachlässigbar gering und wird daher nicht aufgeführt.

Der Speicherbedarf für die Lösung der linearen Gleichungssysteme kann für die gegebene Aufgabe gut abgeschätzt werden. Dabei wird die Abschätzung auf den Bedarf für die Systemmatrizen beschränkt, da diese den wesentlichen Anteil des verfügbaren Speichers verbrauchen. Die Dimension des Gleichungssystems wird mit D bezeichnet. Für die Bestimmung des Erwartungswertes für die Systemmatrizen aus Gleichung (39) und (40) werden zunächst die Datenstrukturen der beiden eingesetzten Lösungsverfahren vorgestellt.

Für das direkte Verfahren von Cholesky mit Profilstruktur sind alle Koeffizienten innerhalb des Profils zeilenweise in einem einzigen Koeffizientenfeld von Gleitpunktzahlen gespeichert. In einem Feld von Ganzzahlen der Länge D ist die Tiefe des Profileinschnitts für jede Zeile der Matrix vermerkt. In einem weiteren Feld von Ganzzahlen der Länge D ist der Anfangsindex des Koeffizientenfeldes für jede Zeile des Systems eingetragen. Der Bedarf für die Felder von Ganzzahlen kann vernachlässigt werden. Für das direkte Verfahren ergibt sich bei einer mittleren Bandbreite b daher ein Bedarf von $b \cdot D$ Gleitpunktzahlen.

Für das iterative Lösungsverfahren sind alle tatsächlich besetzten Koeffizienten zeilenweise in einem einzigen Koeffizientenfeld von Gleitpunktzahlen abgelegt. Bei einer mittleren Anzahl k tatsächlich besetzter Koeffizienten einer Zeile kann die Länge des Koeffizientenfeldes mit $k \cdot D$ abgeschätzt werden. Die unvollständige Zerlegung dieses Feldes führt zu einem weiteren Feld gleicher Länge und gleichen Typs. Weiterhin wird ein Feld gleicher Länge vom Typ Ganzzahl verwendet, das für jeden Koeffizienten in den zuvor genannten Feldern den Spaltenindex der Systemmatrix speichert, sowie ein Feld vom Typ Ganzzahl der Länge D , das den Index des Beginns jeder Zeile im davor genannten Feld speichert. Unter Vernachlässigung des zuletzt genannten Feldes und unter Berücksichtigung, daß für eine Ganzzahl die Hälfte des Bedarfs einer Gleitpunktzahl veranschlagt wird, folgt für das iterative Verfahren ein Bedarf von $2,5 \cdot k \cdot D$ Gleitpunktzahlen.

An jedem Knoten der Modellaufgabe sind drei Freiheitsgrade zu berücksichtigen. Für die Abschätzung der Bandbreite b des direkten Verfahrens wird eine lexikographische Sortierung der Punktkoordinaten der Knoten unterstellt. Für das iterative Verfahren wird mittels der Adjazenzrelation der Knoten die Anzahl tatsächlich besetzter Koeffizienten k in einer Zeile für die Steifigkeitsmatrix aus (39) mit $k = 3 \cdot 3^3$ und für die Randgleichgewichtsmatrix aus (40) mit $k = 3 \cdot 3^2$ abgeschätzt. Der Bedarf für eine Gleitpunktzahl beträgt 8 Byte. In Tabelle 6.1 sind die Erwartungswerte des Speicherbedarfs für die Matrizen für einige der verwendeten Elementierungen in Abhängigkeit der Rasteranzahlen R_i zusammengestellt.

Raster $R_1 \times R_2 \times R_3$	Steifigkeitsmatrix aus (47)			Randgleichgewichtsmatrix aus (48)		
	D	PCG [MB]	LL ^T [MB]	D	PCG [MB]	LL ^T [MB]
8x8x8	1029	1,7	1,2	1158	0,6	0,2
16x16x16	10125	16,4	54,7	4614	2,5	1,5
32x32x32	89373	144,8	2061,3	18438	9,3	12,9
32x32x1	0	0	0	6534	3,3	4,6
64x64x1	0	0	0	25350	13,2	37,7
128x128x1	0	0	0	99846	53,1	302,0

Tabelle 6.1 : Erwartungswerte des Speicherbedarfs

Für die flächenhafte Elementierung muß kein Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungen gelöst werden, da an allen Knoten die Verschiebungen eingeprägt sind. Für die fett gedruckten Einträge steht nicht genügend Arbeitsspeicher zur Verfügung. Für eine große Anzahl von Freiheitsgraden ist der Speicherbedarf des konjugierten Gradientenverfahrens deutlich geringer als der Bedarf des Cholesky Verfahrens. Dieser Vorteil ist im räumlichen Fall noch ausgeprägter, da dort die Bandbreite des direkten Verfahrens quadratisch mit der Rasteranzahl wächst. Die gemessenen Werte weichen bis zu 10% von den Erwartungswerten ab. Unter Berücksichtigung der für die Abschätzung der Erwartungswerte vorgenommenen Vereinfachungen und der im Kapitel 5.5 erwähnten Meßtoleranz ist die Abweichung plausibel. Auf eine Dokumentation der Meßergebnisse wird verzichtet.

Erwartungswert des Zeitbedarfs: Die Absolutwerte des Zeitbedarfs sind von nachrangigem Interesse. Untersucht wird der Zeitbedarf für die Evaluation der Elementintegrale im Verhältnis zum Zeitbedarf der Lösung der zugehörigen Gleichungssysteme. Dafür wird der Gesamtbedarf des Lösungsvorgangs einschließlich des Aufbaus der Systemgleichungen und abzüglich des Bedarfs der Evaluation der Integrale bewertet. Für die Evaluation der Elementintegrale ist dabei ein linearer Zusammenhang des Zeitbedarfs mit der Anzahl von Elementen bzw. Außenflächen zu erwarten. Der Aufwand für die Lösung der linearen Gleichungssysteme wird in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade abgeschätzt.

Eine Aufwandsabschätzung für das Cholesky Verfahren wird aus [40] entnommen. Der Aufwand wird dort getrennt für die Zerlegung der Koeffizientenmatrix, der Vorwärts- und der Rückwärtsauflösung abgeschätzt. Wesentlich ist die Zerlegung mit einem Aufwand $O(b^2 N)$, wobei b die mittlere Bandbreite und N die Dimension des Gleichungssystems bezeichnet. Für das konjugierte Gradientenverfahren gilt zunächst, daß in N Schritten die Lösung erreicht ist, so daß der Aufwand pessimistisch mit $O(k N^2)$ abgeschätzt werden kann, wobei k die mittlere Anzahl besetzter Koeffizienten in einer Zeile und N die Dimension des Systems bezeichnet. Unter dieser Abschätzung ist mit dem konjugierten Gradientenverfahren nur dann ein Gewinn hinsichtlich des Zeitbedarfs zu erzielen, wenn $b^2 > k \cdot N$. Eine engere Abschätzung wird daher aus [8] entnommen:

$$\frac{\|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_i\|_E}{\|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_0\|_E} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^i \quad (105)$$

Dabei bezeichnet $\hat{\mathbf{u}}$ die Lösung, $\hat{\mathbf{u}}_i$ die Näherung im i -ten Schritt, $\|\cdot\|_E$ die quadratische Norm der Systemmatrix und κ deren Spektralradius. Aus der Formel ist ersichtlich, daß mit dem Spektralradius eine Obergrenze der Konvergenzrate des Iterationsverfahrens festgelegt werden kann.

Mit einem geringen Spektralradius ist eine hohe Konvergenzrate zu erzielen, so daß eine Lösung im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit in deutlich weniger als N Schritten erreicht ist. Die Vorkonditionierung des Verfahrens mit der unvollständigen Cholesky Zerlegung zielt darauf ab, den Spektralradius zu senken. Auch die Abschätzung (105) ist pessimistisch [8]. Eine akkurate Abschätzung muß die Verteilung aller Eigenwerte der Matrix im Spektrum berücksichtigen.

Messung: In Bild 6.17 ist das Ergebnis der Zeitmessung in doppelt logarithmischen Diagrammen zur Basis Zwei dargestellt. Die beiden Diagramme im oberen Teil des Bildes vermaßen die Ergebnisse der volumenhaften Elementierung und das untere Diagramm steht für die flächige Elementierung.

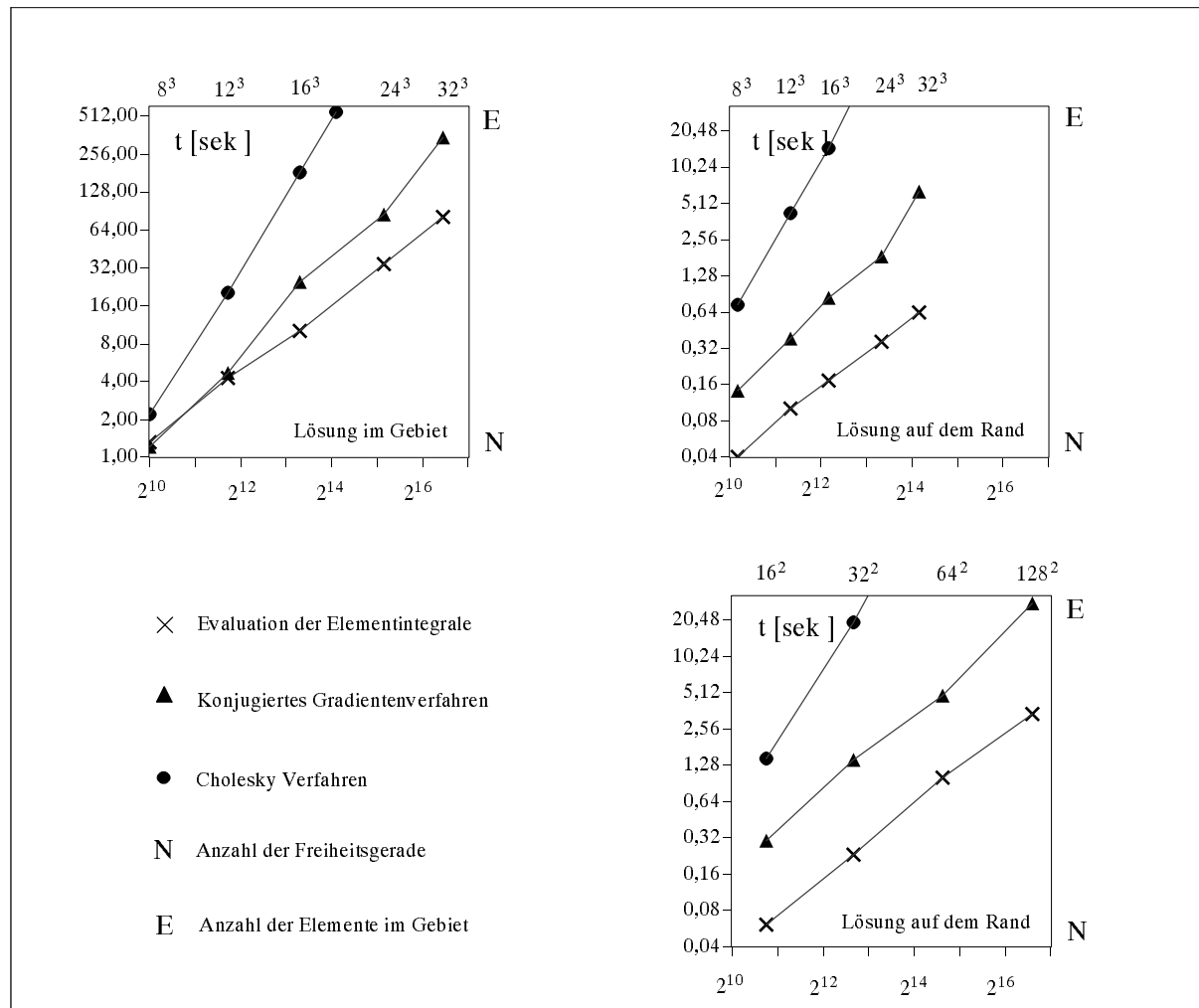


Bild 6.17 : Zeitbedarf des erweiterten Prinzips für die Modellaufgabe

Beurteilung: Die Absolutwerte des Zeitbedarfs zeigen, daß die Berechnung des Randgleichgewichts aus der Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen zu einem deutlich geringeren Zeitbedarf gegenüber der Lösung im Gebiet führt. In allen Diagrammen ist der erwartete lineare Zusammenhang zwischen der Anzahl der Freiheitsgrade und dem Zeitbedarf für die Evaluation der Elementintegrale ersichtlich. Weiterhin bestätigt sich die Aufwandsabschätzung für das Cholesky-Verfahren in allen Diagrammen. Dabei ist aber für die Lösung des Randgleichgewichts zu berücksichtigen, daß die lexikographische Anordnung der Knoten nach ihren Koordinaten zu einer suboptimalen Anordnung führt, so daß der Absolutwert des Zeitbedarfs noch gesenkt werden kann.

Gegenüber dem Verfahren von Cholesky ist der erheblich geringere Zeitbedarf des konjugierten Gradientenverfahrens deutlich. Dabei streuen die Werte stärker als im deterministischen Verfahren nach Cholesky. Auf dem Rand wird für grobe und mittlere Elementierungen ein fast lineares Wachstum zur Aufgabengröße erzielt. Insbesondere gegenüber dem konjugierten Gradientenverfahren zeigt sich, daß der Zeitbedarf für die Evaluation der Elementintegrale auch für eine lineare Aufgabe nicht zu vernachlässigen ist. Das gilt auch für Ansätze mit geringem Polynomgrad, wie in dieser Aufgabe.

Die dargestellten Kurven können nicht dazu dienen, die Verfahren zur Lösung positiv definiter linearer Gleichungssysteme zu vergleichen. Die betrachteten Systemmatrizen sind durch die Wahl eines uniformen Gitters und eines linearen Elementansatz sehr gut konditioniert, wie eine Prüfung des Spektralradius zeigt. Zudem ist die Materialbelegung im Gebiet homogen. Andererseits zeigt sich für das System auf dem Rand auch für nicht uniforme Gitter eine hohe Konvergenzrate des konjugierten Gradientenverfahrens. Da für die Elementbeiträge zur Randgleichgewichtsmatrix $\mathbf{C}$ aus Gl. (40) nicht über die Ableitungen der Ansätze integriert wird und keine Stoffmatrix eingeht, ist die Matrix $\mathbf{C}$ stark diagonal dominant.

7 Instationäre Wärmeströmung

Die in dieser Arbeit diskutierte Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen entsteht aus der Wahl, einen Ansatz für die energetisch konjugierte Größe auf dem Verschiebungsrand aufzustellen. Die resultierende Arbeitsgleichung folgt aus der konsequenten Anwendung der Methode der gewichteten Reste. Dieses Vorgehen ist nicht auf das lineare Randwertproblem der Elastostatik beschränkt. An Beispiel des Anfangswertproblems der instationären Wärmeströmung wird gezeigt, daß die gewonnenen Ergebnisse auf erweiterte Aufgabenstellungen übertragbar sind.

7.1 Differentialform

Betrachtet wird ein Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ und dessen Rand $F \subset V$. Im Gebiet V sind Feldfunktionen für alle Punkte $\mathbf{x} \in V$ und alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{R}$ zu bestimmen:

$$T = T(t, \mathbf{x}) \quad \text{Temperaturfeld } T$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \text{Wärmeflußdichte } \mathbf{f}$$

$$w = w(t, \mathbf{x}) \quad \text{Wärmequellldichte } w$$

Im Gebiet V sind folgende Funktionen bekannt und über die Zeit t als konstant vorausgesetzt:

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}) \quad \text{Wärmeleitfähigkeit } \Lambda$$

$$c = c(\mathbf{x}) \quad \text{spezifische Wärmespeicherkapazität } c$$

$$\varrho = \varrho(\mathbf{x}) \quad \text{Dichte } \varrho$$

Unter Berücksichtigung der Linearisierung der stoffabhängigen Größen folgen die Bestimmungsgleichungen der instationären Wärmeströmung:

$$\mathbf{f} = -\Lambda \nabla T \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Leitungsrelation} \quad (106)$$

$$w = \varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = \varrho c \dot{T} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Speicherungsrelation} \quad (107)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} + w = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Leistungsbilanz} \quad (108)$$

Der Rand F des betrachteten Gebietes besitzt bis auf eine endliche Menge von Punkten eine eindeutige Außennormale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Die aus dem Rand tretende Energiemenge pro Flächen- und Zeiteinheit wird als Wärmestromdichte bezeichnet. Für den Wärmestrom $q(\mathbf{x})$ auf dem Rand gilt:

$$q = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in F \quad \text{Wärmestrom} \quad (109)$$

Die Menge der Randpunkte kann disjunkt in die Teilmengen F_T und F_q zerlegt werden. An jedem Punkt des Randes ist für jeden Zeitpunkt eine der nachfolgenden Randbedingungen gegeben:

$$T = T_0(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in F_T \quad \text{Temperaturrand} \quad (110)$$

$$q = q_0(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in F_q \quad \text{Wärmestromrand} \quad (111)$$

Zum Anfangszeitpunkt t_0 sind die Werte des Temperaturverlaufs T im Lösungsgebiet V bekannt:

$$T = T(t_0, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Anfangswerte} \quad (112)$$

Die Gleichungen (106), (107), (108) und (109) beschreiben die Wärmeleitung als lineares Anfangswertproblem erster Ordnung mit der Anfangsbedingung (112) und den Randbedingungen (110) und (111).

Eine Voraussetzung für die Gültigkeit der obigen Beziehungen ist, daß die materiellen Teilchen des Körpers um eine feste Mittellage schwingen. Diese Voraussetzung trifft für realistische Problemstellungen häufig nicht zu. An dem Übergang zu einem konvektiven Bereich wird dann eine geeignete Randbedingung spezifiziert:

$$q = \alpha (T - T_0) \quad \forall \mathbf{x} \in F_q \quad \text{Konvektionsrand} \quad (113)$$

Mit Gleichung (113) wird eine lineare Beziehung zwischen dem Wärmestrom q und der Differenz aus Umgebungstemperatur T_0 und vorhandener Temperatur T auf dem betrachteten Konvektionsrand eingeführt. Die Proportionalitätskonstante α wird als Wärmeübergangskoeffizient bezeichnet. Sie wird experimentell ermittelt.

Eine weitere Voraussetzung für die Gültigkeit der obigen Beziehungen ist, daß die Wärme nicht durch Strahlung übertragen wird. Auch diese Annahme trifft für realistische Problemstellungen häufig nicht zu. An dem Übergang zu einem angestrahlten Bereich wird dann eine Strahlungsrandbedingung spezifiziert:

$$q = \kappa (T^4 - T_0^4) \quad \forall \mathbf{x} \in F_q \quad \text{Strahlungsrand} \quad (114)$$

Die Konstante κ wird aus der Stefan-Boltzmann Konstanten unter Berücksichtigung des Emissionsvermögens des Strahlers, des Absorptionsvermögens des Randes und geometrischer Faktoren bestimmt [4]. Unter Berücksichtigung von Gleichung (114) wird das Anfangswertproblem nicht linear. Für eine geringe Temperaturdifferenz zwischen Umgebungstemperatur T_0 und vorhandener Temperatur T kann die Strahlungsrandbedingung (114) durch eine lineare Beziehung der Form (113) ersetzt werden.

7.2 Integrale Form

Für die Herleitung der Arbeitsgleichung wird ein Ansatz T^h für die Temperatur im Lösungsgebiet V und ein unabhängiger Ansatz q^h für den Wärmestrom auf dem gesamten Außenrand F für alle Zeitpunkte t gewählt. Der Wärmefluß wird mittels der Leitungsrelation (106) und die Wärmequelle mittels der Speicherungsrelation (107) aus dem Ansatz T^h ermittelt. Der Ansatz q^h für den Wärmestrom nimmt auf dem Wärmestromrand (111) die eingepprägten Werte q_0 an. Dadurch sind die Gleichungen (106), (107) und (111) *a priori* befriedigt.

Die Gleichung (109) drückt die Verträglichkeit des Wärmestroms, der mit den Gleichungen (106) und (107) aus dem Ansatz T^h ermittelt wird, mit dem Wärmestrom des Ansatzes q^h aus. Diese Gleichung ist im Gegensatz zu der konventionellen Ableitung der Arbeitsgleichung hier wegen der Unabhängigkeit der Ansätze T^h und q^h nicht befriedigt. Weiterhin wird im Gegensatz zur Ableitung der Arbeitsgleichung in der konventionellen Form nicht gefordert, daß der Ansatz T^h die eingepprägten Werte T_0 auf dem Rand F_T annimmt. Es verbleiben daher die Gleichungen (108), (109) und (110) für die Anwendung der Methode der gewichteten Reste:

$$\int_V \delta T (\nabla \cdot \mathbf{f} + w) dV + \int_{F_T, F_q} \delta T (q - \mathbf{n}^T \mathbf{f}) dF + \int_{F_T} \delta q (T - T_0) dF = 0$$

Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf den ersten Term der obigen Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} & \int_V -\delta (\nabla T)^T \mathbf{f} dV + \int_{F_T, F_q} \delta T \mathbf{n}^T \mathbf{f} dF + \int_V \delta T w dV \\ & + \int_{F_T, F_q} \delta T (q - \mathbf{n}^T \mathbf{f}) dF + \int_{F_T} \delta q (T - T_0) dF = 0 \end{aligned}$$

Die Variationen δT der Temperatur sind auf dem gesamten Rand F zulässig. Nach Aufhebung von Identitäten und Substitution der *a priori* befriedigten Bestimmungsgleichungen (106), (107) und (111) folgt die Arbeitsgleichung der instationären Wärmeströmung in der erweiterten Form:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta T \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_V \delta (\nabla T)^T \Lambda \nabla T dV + \int_{F_T} \delta T q dF + \int_{F_T} \delta q T dF = \\ & \int_{F_q} \delta T q_0 dF + \int_{F_T} \delta q T_0 dF \end{aligned} \quad (115)$$

Diese Vorgehensweise impliziert, daß bei der Formulierung der differentiellen Form der Bestimmungsgleichungen keine der Gleichungen, die nicht *a priori* befriedigt sind, in eine der anderen Gleichungen substituiert wird. Das gilt insbesondere für die Substitution von Gleichung (109) in Gleichung (111).

7.3 Räumliche Diskretisierung

Die Integralgleichung wird in eine Summe von Elementintegralen zerlegt. Dafür wird der globale Ansatz für die Temperatur als Summe lokaler Ansätze mit C_0 -Kontinuität ausgedrückt. Entsprechend der Zerlegung des Gebietes wird der globale Ansatz für den Wärmestrom am Rand des Gebietes als Summe lokaler Ansätze mit C_0 -Kontinuität ausgedrückt.

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{x}) &= \sum_e T_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) & T_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) &= \boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{T}}_e & \hat{\mathbf{T}}_e &= \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{T}} & \forall \mathbf{x} \in V \\
 q(\mathbf{x}) &= \sum_r q_r(\mathbf{x}(\mathbf{z})) & q_r(\mathbf{x}(\mathbf{z})) &= \boldsymbol{\omega}_r(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{q}}_r & \hat{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{R}_r \hat{\mathbf{q}} & \forall \mathbf{x} \in F_T
 \end{aligned} \quad (116)$$

Substitution der Ansätze (116) in die Arbeitsgleichung (115) liefert folgende Systembeiträge:

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta T \, \rho \, c \, \frac{\partial T}{\partial t} \, dV &= \delta \hat{\mathbf{T}}^T \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial t} & \text{Speichermatrix} & \mathbf{M} \\
 \int_V \delta (\nabla T)^T \boldsymbol{\Lambda} \nabla T \, dV &= \delta \hat{\mathbf{T}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{T}} & \text{Leitmatrix} & \mathbf{K} \\
 \int_{F_T} \delta T q \, dF &= \delta \hat{\mathbf{T}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}} & \text{Randgleichgewichtsmatrix} & \mathbf{C} \\
 \int_{F_q} \delta T q_0 \, dF &= \delta \hat{\mathbf{T}}^T \hat{\mathbf{q}}_0 & \text{Flächenstromvektor} & \hat{\mathbf{q}}_0 \\
 \int_{F_T} \delta q T_0 \, dF &= \delta \hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{T}}_0 & \text{Flächentemperaturvektor} & \hat{\mathbf{T}}_0
 \end{aligned} \quad (117)$$

Jede Variation δT der Stützwerte der Temperatur und jede Variation δq der Stützwerte des Wärmestroms auf dem Rand F_T liefert jeweils eine Zeile des nachfolgenden Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_0 \\ \hat{\mathbf{T}}_0 \end{bmatrix} \quad (118)$$

Zur Lösung des Systems wird der Stützwertevektor der Temperatur $\hat{\mathbf{T}}$ in einen Stützwertevektor der Temperatur $\hat{\mathbf{T}}_T$ auf dem Temperaturrend F_T und einem Stützwertevektor $\hat{\mathbf{T}}_q$ der übrigen Stützwerte geteilt:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{M}_{qq} & \mathbf{M}_{qT} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{M}_{Tq} & \mathbf{M}_{TT} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{T}}_q \\ \hline \hat{\mathbf{T}}_T \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{K}_{qq} & \mathbf{K}_{qT} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{K}_{Tq} & \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{T}}_q \\ \hline \hat{\mathbf{T}}_T \\ \hline \hat{\mathbf{q}} \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{q}}_{0q} \\ \hline \hat{\mathbf{q}}_{0T} \\ \hline \hat{\mathbf{T}}_0 \\ \hline \end{array}
 \quad (119)$$

Aus der dritten Zeile der Gleichung (119) folgt ein lineares, symmetrisches, reguläres Gleichungssystem für die unbekannten Temperaturen $\hat{\mathbf{T}}_T$ für jeden Zeitpunkt t :

$$\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{T}}_T = \hat{\mathbf{T}}_0 \quad (120)$$

Wird der gegebene Temperaturverlauf $T_0(t, \mathbf{x})$ auf dem Rand F_T vom Ansatz für die Temperatur $T(t, \mathbf{x})$ exakt erfaßt, so nehmen die Stützwerte $\hat{\mathbf{T}}_T$ berechnet mit Gleichung (120) genau den gegebenen Wert an dieser Stelle an. Die Berechnung dieser Gleichung ist dann nicht notwendig.

Aus der Substitution der Lösung $\hat{\mathbf{T}}_T$ aus Gleichung (120) in die erste Zeile der Gleichung (119) folgt das aus der Literatur bekannte System linearer Differentialgleichungen der instationären Wärmeströmung [4][41]. Die Koeffizientenmatrizen dieses Systems sind symmetrisch und positiv definit.

$$\mathbf{M}_{qq} \dot{\hat{\mathbf{T}}}_q + \mathbf{K}_{qq} \hat{\mathbf{T}}_q = \hat{\mathbf{q}}_{0q} - \mathbf{M}_{qT} \dot{\hat{\mathbf{T}}}_T - \mathbf{K}_{qT} \hat{\mathbf{T}}_T \quad (121)$$

Aus der Substitution der Lösung $\hat{\mathbf{T}}_q$ und $\dot{\hat{\mathbf{T}}}_q$ aus Gleichung (121) und der Lösung $\hat{\mathbf{T}}_T$ aus Gleichung (120) in die zweite Zeile der Gleichung (119) folgt ein lineares, symmetrisches, reguläres Gleichungssystem für den Wärmestrom $\hat{\mathbf{q}}$ auf dem Rand F_T für jeden Zeitpunkt t :

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}_{0T} - \mathbf{M}_{Tq} \dot{\hat{\mathbf{T}}}_q - \mathbf{M}_{TT} \dot{\hat{\mathbf{T}}}_T - \mathbf{K}_{Tq} \hat{\mathbf{T}}_q - \mathbf{K}_{TT} \hat{\mathbf{T}}_T \quad (122)$$

Die rechte Seite der Gleichung (122) liefert das integrale Residuum bezüglich der inneren Leistungsbilanz. Ist durch die Bearbeitung der Gleichung (121) die Temperatur im gesamten Lösungsgebiet für einen Zeitpunkt t gegeben, so können für diesen Zeitpunkt durch Lösung des linearen Gleichungssystems (122) die Wärmeströme $\hat{\mathbf{q}}$ auf dem Rand F_T bestimmt werden. Diese Wärmeströme stehen dabei zu jedem Zeitpunkt t im Gleichgewicht mit den Wärmeströmen, die auf dem Rand F_q eingepreßt werden.

Der Ansatz q^h für den Wärmestrom muß nicht auf den Außenrand F beschränkt werden, sondern kann auch auf Schnitten durch das Lösungsgebiet unternommen werden. Dafür wird in Analogie zu Kapitel 2.4 die Aufgabe durch Übergangsbedingungen für die Temperatur und den Wärmestrom auf dem Schnitt erweitert. Folglich genügt es auch hier, einmalig die Temperatur im Gesamtgebiet zu bestimmen, um anschließend auf beliebigen Schnitten die Stützwerte des Wärmestroms $\hat{\mathbf{q}}$ mit Gleichung (122) zu ermitteln. Zur Förderung der Übersichtlichkeit wird diese Eigenschaft für die instationäre Wärmeströmung nicht nachgewiesen.

7.4 Zeitliche Diskretisierung

Zur Förderung der Übersichtlichkeit werden die Subskripte in der zeitabhängigen Gleichung (121) nicht aufgeführt und die rechte Seite der Gleichung im Vektor $\mathbf{b}$ zusammengefaßt:

$$\mathbf{M} \dot{\hat{\mathbf{T}}}(t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{T}}(t) = \hat{\mathbf{b}}(t) \quad (123)$$

Auf der Zeitachse t werden Stützstellen t_i mit $i = 0, 1, \dots, \infty$ für die Komponenten des unbekannten Stützwertevektors $\mathbf{T}(t_i) = \mathbf{T}^i$ und des bekannten Vektors $\mathbf{b}(t_i) = \mathbf{b}^i$ eingeführt. Unter Verwendung einer normalisierten Koordinate wird ein linearer Ansatz für den Verlauf der Stützwerte in einem Zeitintervall h unternommen:

$$h = t_{i+1} - t_i$$

$$t = t_i + h s \quad \forall s : 1 \geq s \geq 0$$

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}^i + (\mathbf{T}^{i+1} - \mathbf{T}^i) s$$

$$\hat{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{b}^i + (\mathbf{b}^{i+1} - \mathbf{b}^i) s$$

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}(t) = \frac{\mathbf{T}^{i+1} - \mathbf{T}^i}{h} \quad (124)$$

Die Aufgabe wird wiederum mit der Methode der gewichteten Reste gelöst. Durch Substitution der Ansätze (124) in Gleichung (123) wird das Residuum $\mathbf{r}(s)$ ermittelt:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{M} \frac{\mathbf{T}^{i+1} - \mathbf{T}^i}{h} + \mathbf{K} (\mathbf{T}^i + (\mathbf{T}^{i+1} - \mathbf{T}^i) s) - \mathbf{b}^i - (\mathbf{b}^{i+1} - \mathbf{b}^i) s \quad (125)$$

Das Residuum $\mathbf{r}(s)$ wird über das Zeitintervall h integriert. Als Gewichtung wird die Kollokation am Zeitpunkt $t = t_{i+1}$ verwendet. Daraus folgt eine Iterationsvorschrift für den Stützwertevektor der Temperatur $\mathbf{T}^i$, die in der Literatur [4] als explizites Eulerverfahren bezeichnet wird:

$$(\mathbf{M} + h\mathbf{K}) \mathbf{T}^{i+1} = \mathbf{M} \mathbf{T}^i + h \mathbf{b}^{i+1} \quad (126)$$

Bei gegebener Anfangslösung $\mathbf{T}^0$ kann die Lösung für die nachfolgenden Zeitpunkte $\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2 \dots \mathbf{T}^\infty$ iterativ bestimmt werden, indem das lineare Gleichungssystem (126) in jedem Zeitschritt gelöst wird. Im Fall eines linearen Anfangswertproblems bleibt dabei die Systemmatrix unverändert und es genügt, sie einmalig zu zerlegen. Als Anfangslösung wird im Folgenden die stationäre Lösung verwendet.

Durch Substitution der Lösung $\mathbf{T}^{i+1}$ der Gleichung (126) in das Gleichungssystem (122) können für jeden Zeitschritt die unbekannten Stützwerte des Wärmestroms $\hat{\mathbf{q}}$ auf dem Rand F_T oder auf einem Schnitt durch das Lösungsgebiet V bestimmt werden. Die Bestimmung des Wärmestroms $\hat{\mathbf{q}}$ muß dabei nicht in jedem Zeitschritt erfolgen und die Schnitte können festgelegt werden, nachdem die Lösung $\mathbf{T}^{i+1}$ der Gleichung (126) bestimmt worden ist.

7.5 Beispiel: Wärmeströmung in einem Konstruktionsdetail

Aufgabe: Untersucht wird das sommerliche Wärmeverhalten eines Konstruktionsdetails. Dazu wird ein Würfel mit 1,44 m Kantenlänge aus einem Bauwerk ausgeschnitten. Die Wände und Decken des Bauwerks sind mehrschichtig aufgebaut. Der Aufbau ist in Bild 7.1 gezeigt. Auf der linken Seite ist der Ausschnitt und auf der rechten Seite sind die Schichten des Ausschnitts dargestellt.

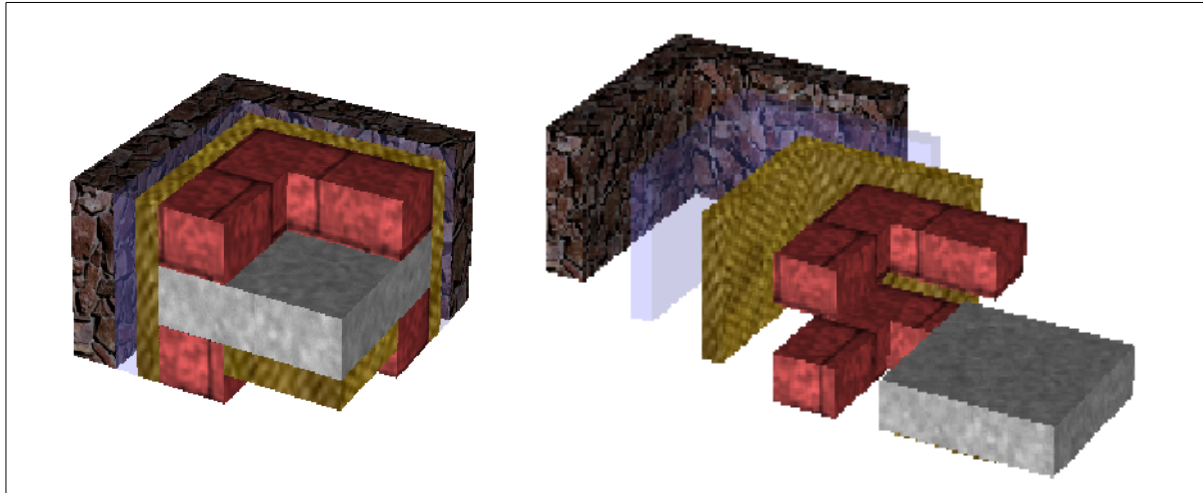


Bild 7.1 : Konstruktionsdetail

Innerhalb einer Schicht werden die Materialparameter als konstant vorausgesetzt. Tabelle 7.1 stellt die Werte der in der Untersuchung verwendeten Parameter und Schichtdicken zusammen:

Material	Dicke [m]	Leitfähigkeit [W/mK]	Kapazität [Nm/kgK]	Dichte [kg/m ³]
Ziegel	0,24	0,96	1000	2000
Luft	0,12	0,07	1000	1,25
Dämmung	0,12	0,15	1300	500
Mauerwerk	0,36	0,70	1000	1400
Beton	0,24	2,1	1000	2400

Tabelle 7.1 : Geometrie und Materialparameter

Randbedingungen: Auf den Schnittflächen des Detailausschnittes wird ein Wärmestrom mit Betrag Null eingeprägt. Hier herrscht vollkommene Isolation normal zur Fläche. An den übrigen Außenflächen der Konstruktion wird eine Konvektionsrandbedingung (113) angesetzt. Dazu wird an der Außenseite des Hauses ein sinusförmiger Temperaturverlauf zwischen 10⁰ und 30⁰ Celsius angenommen. Oberhalb der Betondecke wird die Temperatur mit konstant 20⁰ Celsius und unterhalb mit 15⁰ Celsius festgelegt. Die Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{\text{ausßen}} = \frac{1}{0,04} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ und $\alpha_{\text{innen}} = \frac{1}{0,13} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ werden bauphysikalischen Tabellen entnommen.

Lösung im Gebiet: Die Aufgabe wird mittels der Iterationsvorschrift von Gleichung (126) gelöst. Dafür wird zunächst die stationäre Lösung ermittelt. Ausgehend von diesem Anfangszustand wird mit Zeitschritten von $h = 30 \text{ min}$ iteriert. Bild 7.2 zeigt die Isoflächen der Temperatur für den Anfangszustand $t = 0 \text{ h}$ sowie für den Zeitpunkt $t = 12 \text{ h}$. Der Verlauf wird im Intervall $[10^0; 20^0]$ linear zwischen Rot und Blau im RGB Modell interpoliert.

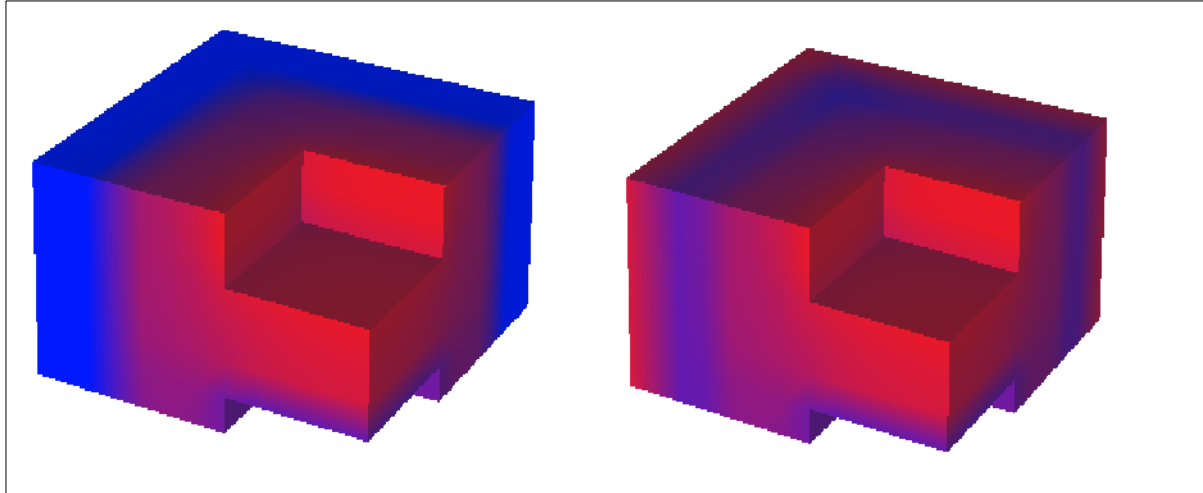


Bild 7.2 : Temperaturen $t = 0 \text{ h}$ und $t = 12 \text{ h}$ im Gebiet

Bild 7.3 zeigt die zugehörigen Temperaturgradienten an den Integrationspunkten. Die Gradienten werden als Pfeile innerhalb der transparent gezeichneten Konstruktion dargestellt. Berücksichtigt sind alle Gradienten, deren Betrag den Schwellwert $10 \frac{\text{K}}{\text{m}}$ übersteigt. Der maximale Betrag ist ca. $20 \frac{\text{K}}{\text{m}}$. Der gewünschte, steile Temperaturabfall in der Dämmschicht wird erzielt.

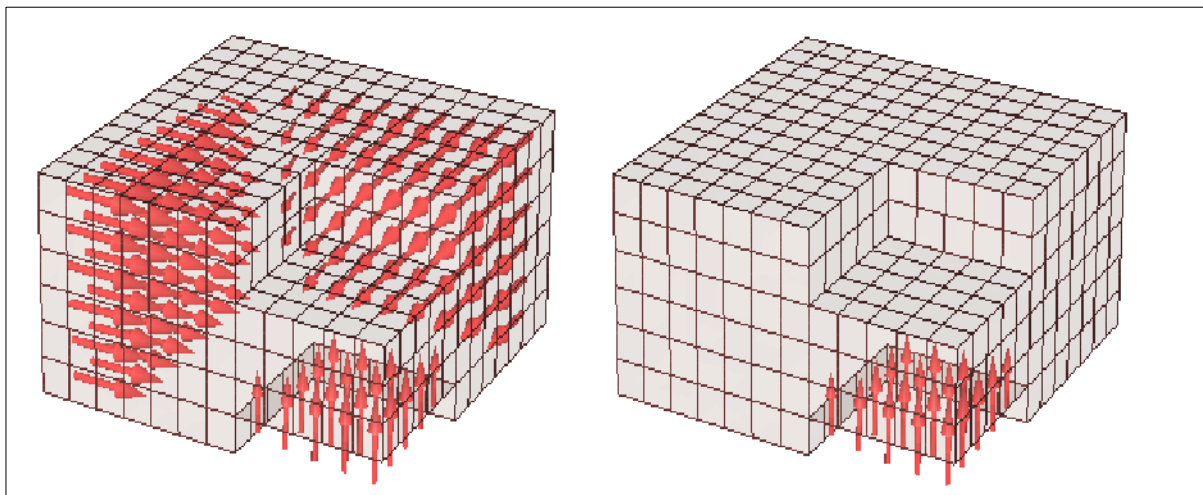
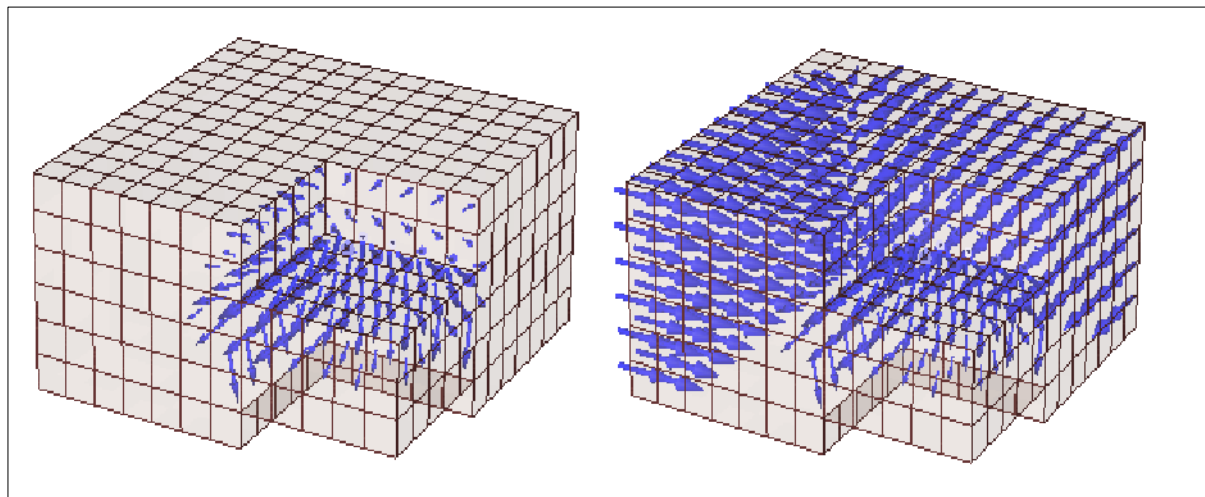


Bild 7.3 : Gradienten $t = 0 \text{ h}$ und $t = 12 \text{ h}$ im Gebiet

Bild 7.4 zeigt die zugehörigen Wärmeflüsse an den Gaußpunkten. Die Flüsse werden als Pfeile innerhalb der transparent gezeichneten Konstruktion dargestellt. Aufgetragen sind alle Flüsse, deren Betrag den Schwellwert $5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ übersteigt. Der maximale Betrag ist ca. $15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$. Ein Wärmeabfluß durch die stark leitende Betondecke ist erkennbar. Die geringe Leitfähigkeit der Wärmedämmung sowie die hohe Kapazität des Mauerwerks verhindern ein starkes Zuströmen von Wärme bei hoher Außentemperatur.


 Bild 7.4 : Wärmeflüsse $t = 0\text{ h}$ und $t = 12\text{ h}$ im Gebiet

Lösung auf dem Rand: Auf dem gesamten Außenrand der Aufgabe sind die Wärmeströme durch die Randbedingungen (111) und (113) bereits vorgegeben. Eine Randbedingung in Form von Gleichung (110) liegt nicht vor, so daß das Gleichungssystem (122) für die Wärmeströme auf dem Außenrand nicht zu lösen ist. Das Beispiel wird daher eingesetzt, um die in Kapitel 3.5 und Kapitel 5 diskutierten, interaktiv geführten Schnitte zu illustrieren. Der Ansatz für den Wärmestrom wird in der Schnittfläche aufgestellt. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem der Form (122), dessen Lösung die Wärmeströme an den Stützstellen des Ansatzes auf der Schnittfläche sind.

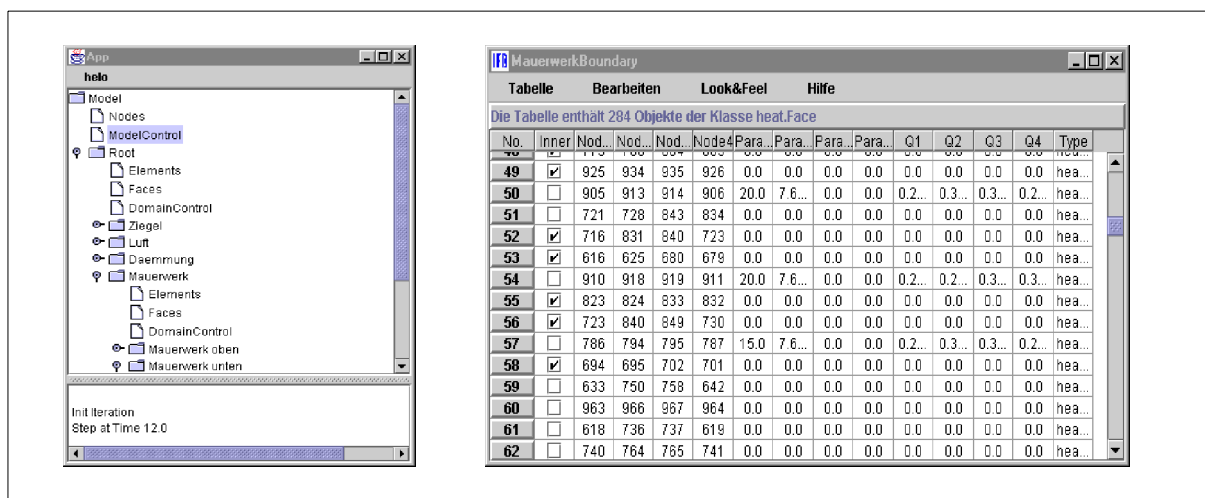


Bild 7.5 : Disjunkte Teilmengen und Oberflächenbestimmung

Die Elemente des Lösungsgebietes werden in einem hierarchischen Mengensystem verwaltet. Die Menge aller zur Berechnung herangezogenen finiten Elemente ist die Wurzelmenge. Die Wurzelmenge wird in disjunkte Teilmengen zerlegt. Durch fortgesetzte Zerlegung der Teilmengen entsteht ein Baum. Für das Beispiel wird die Menge aller finiten Elemente zunächst in Mengen für Elemente gleichen Materials zerlegt. Innerhalb einer Menge gleichen Materials werden die Elemente in Mengen für die in Bild 7.1 dargestellten Teilkörper zerlegt. In Bild 7.5 links ist die graphische Navigationskomponente des Baums dargestellt. Mittels der Navigationskomponente kann die Zerlegung interaktiv geändert werden.

Die Bestimmung der Oberfläche einer Teilmenge ist als Objektmethode einer Knotenklasse des Baums implementiert. Dafür wird das in Kapitel 5.4 beschriebene Verfahren eingesetzt. Die Anwendung dieser Objektmethode auf die Wurzelmenge liefert den gesamten Außenrand des Modells. In Bild 7.5 ist auf der rechten Seite das Ergebnis der Anwendung auf eine Teilmenge der Wurzelmenge in der zugehörigen Tabellenkomponente der graphischen Nutzeroberfläche dargestellt.

Unter Verwendung der Oberfläche einer Teilmenge kann der unbekannte Wärmestrom q auf dieser Fläche berechnet werden. Bild 7.6 zeigt die Isolinien des Wärmestromes auf der Schnittfläche der Betondecke zu den angrenzenden Bauteilen zum Zeitpunkt $t = 12 \text{ h}$. Der Verlauf wird linear im Intervall $[-5; 5] \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ zwischen Rot und Blau im RGB Modell interpoliert.

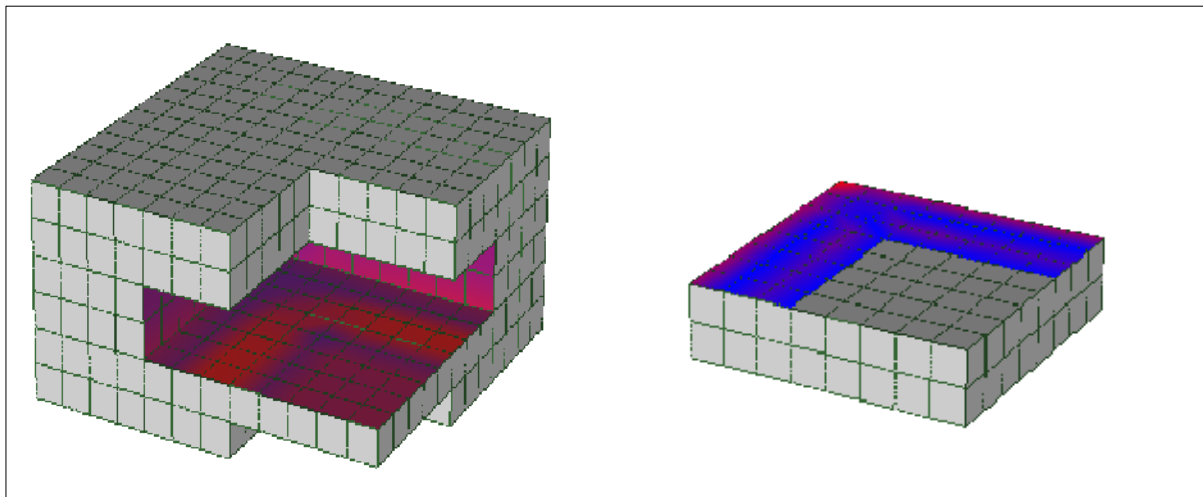


Bild 7.6 : Wärmestrom auf Schnitt an der Betonoberfläche $t = 12 \text{ h}$

Die Berechnung kann entweder mit der Oberfläche, die aus der Menge der Elemente der Betondecke bestimmt wird, oder mit der Oberfläche aller übrigen Elemente vorgenommen werden. Das Ergebnis ist für beide Berechnungen abgesehen vom Vorzeichen identisch, da die Wärmeströme auf dem Schnitt im Gleichgewicht stehen.

8 Abschließende Betrachtung

Zusammenfassung: Durch Anwendung der Methode der gewichteten Reste konnte eine Integralform hergeleitet werden, die einer Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen entspricht. Aus dieser theoretischen Grundlage folgen unmittelbar Spannungen an den Auflagerflächen des Bauwerks. Diese Spannungen stehen im Gleichgewicht zu den angreifenden Lasten. Es wurde nachgewiesen, daß der stationäre Punkt des zugehörigen quadratischen Funktionals ein Minimum ist. Damit ist eine robuste, numerische Lösung der zugehörigen Galerkin Gleichungen garantiert.

An einem Eckpunkt oder an Punkten einer Kante eines dreidimensionalen Lösungsgebietes können die mit dem erweiterten Prinzip ermittelten Randspannungen die Überbestimmtheit der Aufgabe nur in einem schwachen Sinn befriedigen. Die schwache Befriedigung ist nachteilig, wenn trotz der Überbestimmtheit der Aufgabe eine Lösung existiert, die am Eckpunkt oder an Punkten der Kante widerspruchsfrei ist. Es wurde für diesen Fall gezeigt, daß das Ergebnis für die Randspannung auf einer asymptotisch geglätteten Geometrie in die widerspruchsfreie Lösung übergeht. Alternativ zu diesem Vorgehen wurde gezeigt, daß das Ergebnis aus Differentiation der Verschiebung an Ecken und Kanten genutzt werden kann, um das Ergebnis für die Randspannung aus dem erweiterten Prinzip in die widerspruchsfreie Lösung übergehen zu lassen.

Mit dem Integral über das Quadrat der Abweichung der genäherten Randspannung zu einer vorhandenen analytischen Lösung konnte ein geeignetes Kriterium zur Bewertung des Fehlers der Spannungen am Rand des Lösungsgebietes aufgestellt werden. Die Konvergenzrate des Fehlers für die Spannungen aus dem erweiterten Prinzip ist vergleichbar mit der Rate, die aus der Differentiation der Verschiebungslösung gewonnen wird. Außer für die groben Elementierungen in der Nähe einer Singularität sind die Absolutwerte dieses Fehlers jedoch für alle untersuchten Beispiele durchweg geringer. Damit wurde die Zweckmäßigkeit des vorgestellten Verfahrens in einer Vielzahl von Fällen nachgewiesen.

Die Anwendung des erweiterten Prinzips auf Auflager- oder Schnittflächen erforderte die Bestimmung dieser Flächen aus einer gegebenen Elementierung des Lösungsgebietes. Mit der Relationenalgebra [37] erschlossen sich die topologischen Zusammenhänge in natürlicher Weise. Die rechnergestützte Umsetzung auf diesem Abstraktionsniveau steht jedoch im Spannungsfeld zwischen kompakter, transparenter Programmierung und numerischer Effizienz. Es wurde die Wahl getroffen, für die Elementierung im Lösungsgebiet die bewährte Datenstruktur der Finite Elemente Methode weitgehend aufrecht zu erhalten. Die Bestimmung der Flächen erfolgte mit einem Hashverfahren. Der Zeit- und Speicherbedarf für das Finite Elemente Modell des erweiterten Prinzips wurde mit diesen Datenstrukturen quantifiziert.

Die Programmierung des erweiterten Prinzips läßt die große Menge potentieller Elementtypen weiter wachsen. Es wurde daher von der in der objektorientierten Programmierung gebräuchlichen Methode, für Elementtypen Klassen einzuführen, Abstand genommen. Stattdessen wurde nach algorithmischen Kriterien klassifiziert. Daraus resultiert ein übersichtliches Modell von Klassen mit einem geringem Umfang an Programmcode. Elementtypen werden mit diesem Modell als Objekte geprägt und sind nicht statisch festgelegt. Daraus resultiert eine große Flexibilität bei der Anwendung dieses Modells. Der Zeit- und Speicherbedarf für Berechnungen mit dem erweiterten Prinzip wurde mit diesem Modell quantifiziert.

Ausblick: Das Verfahren ist unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen und linear elastischen Materialverhaltens hergeleitet worden. Der Anwendung des Verfahrens auf geometrisch und physikalisch nichtlineare Theorien steht zunächst nichts entgegen. Der Nachweis darüber muß aber noch erbracht werden. In diesem Zusammenhang wäre es wünschenswert, das Modell zur Evaluation der Elementintegrale um Algorithmen für Materialgesetze und zur Berechnung der Elementmatrizen aus geometrischer Nichtlinearität zu erweitern. Diese Erweiterung betrifft insbesondere die Parameterlisten in den eingeführten Schnittstellen um Argumente für die Tensoren aus vorangehenden Berechnungsschritten.

Das Verhalten des Verfahrens in der Nähe von Singularitäten ist noch nicht erschöpfend erforscht. Hier ist insbesondere die Frage des Einflusses einer lokalen Abrundung auf die Lösung im Gesamtgebiet weiter zu untersuchen. Der Zusammenhang des vorgestellten Verfahrens mit residualen Fehlerschätzern, die beispielsweise in [31] dokumentiert werden, ist herzustellen. Dort wird der Fehler im Gleichgewicht als Maß für die Bewertung der Diskretisierung genutzt. In diesem Themenkreis ist auch zu erforschen, ob das vorgestellte Verfahren bei der Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren Vorteile besitzt.

Die rechnergestützte Umsetzung des Verfahrens blieb auf nicht mannigfaltige Bauwerksgeometrien beschränkt. Die gewählten Anwendungsbeispiele waren für das untersuchte physikalische Verhalten des Bauwerkes signifikant, besaßen aber nicht die geometrische Komplexität realistischer Bauwerksmodelle. Die systematische Erfassung mannigfaltiger, komplexer Bauwerksmodelle für die Näherung physikalischen Verhaltens ist insbesondere in Hinblick auf eine veränderliche Granularität des Modells Gegenstand weiterer Forschung.

Literatur

- [1] Altenbach, J./ Altenbach, H.
Einführung in die Kontinuumsmechanik
Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1994
- [2] Argyris, J./ Mlejnek H.-P.
Die Methode der Finiten Elemente, Bd.2
Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987
- [3] Babuska, I.
The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers
Numer. Math. 20, S.179-192, 1973
- [4] Bathe, K.J.
Finite element procedures in engineering
Prentice Hall, 1995
- [5] Belytschko, T. et.al.
Meshless methods: An overview and recent developments
Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg. 139 , S.3-47, 1996
- [6] Bochniak, M. / Sändig, A.-M.
Sensitivity Analysis in presence of stress singularities
<http://www.uni-stuttgart.de>, 1999
- [7] Borkner-Delcarlo, O.
Eine Halbfacetten Datenstruktur für die Modellierung von "non-manifold" Körpern
Dissertation, TU München, 1996
- [8] Braess, D.
Finite Elemente
Springer, Berlin 1997
- [9] Brenner, C. / Ridgway, L.
The mathematical theory of Finite Element Methods
Springer, New York, 1994
- [10] Bronstein-Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik
Teubner Verlagsgesellschaft, Moskau 1991
- [11] Chuboda R./ Krysl P.
Explicit Finite Element Computations : Object Oriented Approach
Sixth International Conference on Computing in Civil and Building Engineering,
Berlin, 1995
- [12] Damrath, R.
Objekt Based Visualisation of Physical Behaviour
Fifth International Conference on Computing in Civil and Building Engineering,
Anaheim, 1993
- [13] Damrath, R. / Laabs, A
Editing Methods for Physical Visualisation
Sixth International Conference on Computing in Civil and Building Engineering,
Berlin, 1995
- [14] De Berg, M. et. al
Computational Geometry
Springer, Berlin 1997

- [15] dtv-Atlas zur Mathematik, Bände 1 und 2
Deutscher Taschenbuch Verlag, 10. Auflage, München 1994
- [16] Enseleit, J. / Laabs, A. / Damrath, R. / Pahl, P. J.
Analyse und Visualisierung zeitabhängiger physikalischer Zustände dreidimensionaler Körper
Institut für Bauingenieurwesen, Bericht an die DFG 1996
- [17] Fowler, M. / Scott, K.
UML konzentriert
Addison Wesley, 1998
- [18] Golub, G.H. / Van Loan, C.F.
Matrix Computations
JOHNS Press, Baltimore, 1989
- [19] Goodman, J.E. / O'Rourke, J.
Handbook of discrete and computational geometry
CRC Press, New York, 1998
- [20] Grisvard, P.
Elliptic problems in nonsmooth domains
Pitman Publishing, London, 1985
- [21] Großmann, Ch. / Roos, H.-G.
Numerik partieller Differentialgleichungen
B.G. Teubner, Stuttgart, 1994
- [22] Harbord, R. / Gellert, M. /Knippers, J.
A mixed hybrid FE formulation for solution of elasto-viscoplastic problems
Comp. Mech. 9, 1992, p.173-184
- [23] Holzer, S.
Concepts of CAD integrated Finite Element Analysis
Tagungsband, European Conference of Computational Mechanics, München, 1999
- [24] Huhnt, W.
Datentechnik für einen generalisierten Finite Elemente Prozessor
Tagungsband, JuWiFo Bochum, VDI, 1992
- [25] Kappel, G. / Schrefl, M.
Objektorientierte Informationssysteme, Konzepte, Darstellungsmittel, Methoden
Springer Verlag Wien 1996
- [26] Kardestuncer, H.
Finite Element Handbook
McGraw-Hill, New York 1987
- [27] Knothe, H.
Finite Elemente
Springer, Berlin 1987
- [28] Kruschwitz, E.
Konstruieren mit Euler-Operatoren
Dissertation, TU Berlin 1996
- [29] Laabs, Andreas
Methoden für die Modellierung mit Objekten im Bauingenieurwesen
Dissertation, Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden 1997, TU Berlin

- [30] Laabs, Andreas / Damrath, Rudolf
Visualisierung dreidimensionaler Körper - Theoretische Grundlagen
Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden 1994, TU Berlin
- [31] Meißner U. / Wibbeler H.
*A least square principle for the a posteriori computation
of finite element approximation errors*
Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg. 85 , S.89-108, 1991
- [32] Nievergelt, J. / Hinrichs K.
Algorithms and Data Structures
Prentice Hall, New Jersey, 1993
- [33] Olbrich, M.
Relationenorientiertes Modellieren mit Objekten
Fortschrittberichte Reihe 4 Bauingenieurwesen, Nr. 150, Düsseldorf 1998
- [34] Ottmann, T. / Widmayer, P.
Algorithmen und Datenstrukturen
Reihe Informatik Band 70, Wissenschaftsverlag BI, 1990
- [35] Pahl, P. J.
C-Technik für Element Methoden
Tagungsband, Anwendungen der Mathematik im Bauwesen, HAB Weimar, 1991
- [36] Pahl, P. J.
Die Visualisierung dreidimensionaler Finite Elemente Modelle
IBM Hochschulkongress 1992, Dresden
- [37] Pahl, P. J. / Damrath, R.
Mathematische Grundlagen der Ingenieurinformatik
voraussichtlich Springer Berlin, 2000
- [38] Pahl, P. J. / Damrath, R.
Systemplanung
als Skript veröffentlicht, Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden, 1982
- [39] Pahl, P. J.
Theoretische Methoden I
als Skript veröffentlicht, Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden, 1999
- [40] Pahl, P. J.
Theoretische Methoden II
als Skript veröffentlicht, Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden, 1992
- [41] Pahl, P. J.
Theoretische Methoden IV
als Skript veröffentlicht, Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden, 1991
- [42] Pahl, P. J.
Zur Berechnung von Spannungen in großflächigen Auflagern von Spezialbauwerken
Festschrift zum Ehrenkolloquium Prof. E.Hampe, HAB Weimar, 1993
- [43] Pian, T. H. H.
Mixed and hybrid finite element methods
Finite Element Handbook, p.2.173-p.2.202, Mc-Graw Hill, 1987
- [44] Remy, P / Devlo B.
PZ : An object oriented enviroment for scientific computing
Comp. Methods App. Mech. Eng. 150, S. 123-153, 1997

- [45] Rumbaugh, J. / Blaha, M. / Premerlani, W. / Eddy, F. / Lorensen, W.
Object-Oriented Modelling and Design
Prentice-Hall International Editions, 1991
- [46] Schutte, G.
Generierung von Tetraedernetzen für dreidimensionale Gebiete
Diplomarbeit am Institut für Bauingenieurwesen, TU Berlin, August 1995
- [47] Sedgwick, Robert
Algorithmen
Addison-Wesley 1995
- [48] Simo, J.C. / Armero F.
Improved version of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems
Comp. Meth. Appl. Mech., 110 1993, 359-386
- [49] Soh, A.K. / Ong, L.S. / Khong, P.W.
Determination of inter and free boundary stresses using surface fitting methods
Finite Elements in Analysis and Design 7, S.243-252, 1990
- [50] Stein, E. / Ahmad, R.
An equilibrium method for stress calculation using finite element displacement models
Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg. 10, S.175-198, 1977
- [51] Sukumar, N.
The natural element method in solid mechanics
Dissertation, Northwestern University, 1998
- [52] Timoshenko, S.P. / Goodier, J.N.
Theory of Elasticity
McGraw-Hill, New York, 1970
- [53] Washizu, K.
Variational methods in elasticity and plasticity - 3. ed.
Pergamon, 1982
- [54] Weiler, K.J.
Topological Structures for Geometric Modelling
Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, USA, 1986
- [55] Zeid, I.
Non manifold geometric modeling: an overview
Geometry and optimization techniques for structural design, Elsevier Science, 1995
- [56] Zi Cai Li
Numerical Methods for elliptic problems with singularities
World Scientific, Singapore, 1990
- [57] Zienkiewicz O.C.
Methode der finiten Elemente
Hanser, München, 1984
- [58] <http://www.netlib.org>
- [59] <http://www.spec.org>
- [60] <http://www.sun.com>