

Entwicklung eines Messgerätes zur Bestimmung viskoelastischer Materialeigenschaften aus Prallversuchen

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

DIPLOM-INGENIEUR

an der

**Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme der Technischen
Universität Berlin**

- Institut für Mechanik -

vorgelegt von

Stephan Kusche

Aufgabensteller

Prof. Dr. V. Popov

Mitberichter

Dipl. Ing. J. Thaten

Berlin, 01. März 2012

Vorwort

In dieser Diplomarbeit wird der Rückprall starrer Kugeln von viskoelastischen Oberflächen untersucht. Ziel ist es, dieses physikalische Prinzip der Messung von Materialeigenschaften von Gummi zur Anwendung zu bringen. Die theoretischen Grundlagen werden vorgestellt, ein Messgerät wurde entwickelt.

Der theoretische Teil beginnt mit einer EINLEITUNG, in der die Grundlagen der Viskoelastizität wiederholt und existierende Verfahren, insbesondere dem hier verwendeten Verfahren ähnelnde, vorgestellt werden. Besonderes Augenmerk wird dabei auf Vorgängermodelle gerichtet, die dieser Diplomarbeit zugrunde liegen. Es folgt eine Einführung in die Viskoelastizität. Anschließend wird der RÜCKPRALL STARRER KUGELN VON VISKOELASTISCHEN OBERFLÄCHEN untersucht. Die Bewegungsgleichungen werden aufgestellt und numerisch gelöst. Diese Lösungen werden verwendet, um im folgenden Abschnitt über DAS INVERSE PROBLEM mögliche Verfahren zu testen. Von vier vorgestellten Verfahren wird eines ausgewählt, das als Grundlage für die spätere Auswertung der Messreihen dient.

Mit der ENTWICKLUNG DES MESSGERÄTES beginnt der praktische Teil dieser Arbeit. Der Weg von der Planung bis zur Fertigung wird dargestellt. Verbesserungsvorschläge, die sich im Laufe der Testphase ergaben, runden diesen Abschnitt ab. Der BESCHREIBUNG DES MESSVERFAHRENS ist ein eigenes Kapitel gewidmet, in dem auf die elektrischen Komponenten der Apparatur eingegangen wird. Den Abschluss bildet die Anleitung zur DURCHFÜHRUNG EINER MESSUNG.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Viskoelastizität	5
1.1.1	Materialfunktionen	5
1.1.2	Das Superpositionsprinzip	6
1.1.3	Zeit-Temperaturverschiebung	7
1.1.4	Ersatzmodelle	7
1.2	Messung viskoelastischer Eigenschaften	10
1.2.1	Auf Prallversuchen basierende Verfahren	12
2	Rückprall starrer Kugeln von viskoelastischen Oberflächen	15
2.1	Bewegungsgleichungen	15
2.2	Diskretisierung und numerische Lösung	18
2.2.1	Explizite und Implizite Verfahren für die Eindringphase	19
2.2.2	Lösung nach Sabin für die Eindringphase	21
2.2.3	Bestimmung des Kontaktradius in der Rückzugsphase	22
2.2.4	Explizites Eulerverfahren für die Rückzugsphase	24
3	Das inverse Problem	27
3.1	Lösungen für die Eindringphase	27
3.1.1	Z-Transformation	27
3.1.2	Summierte Trapezregel	28
3.1.3	Regularisierung nach Tikhonov (kleinste Fehlerquadrate)	29
3.1.4	Ansatz mit diskretem Spektrum (Prony-Reihe)	31
3.2	Lösung für die Rückzugsphase	32
3.2.1	Berechnung der Kriechfunktion aus der Relaxationsfunktion	32
3.2.2	Prinzipielles Vorgehen in der Rückzugsphase	33
4	Entwicklung des Messgerätes	35
4.1	Konstruktion	35
4.1.1	Führung des Indentors	35
4.1.2	Antrieb des Indentors	37
4.1.3	Materialwahl	38
4.1.4	Verbesserungsvorschläge	38
4.2	Elektronik	39
4.2.1	Zusätzliche Sensoren	40
5	Beschreibung des Messverfahrens	41
5.1	Beschreibung der Messapparatur	41
5.2	Übertragungsfunktion Magnet - Spule	43
5.3	Schwingversuch zur Abschätzung der Dämpfung	45
5.4	Kalibrierung mittels harmonischer Anregung	47

5.5	Kalibrierung mittels Fallversuch	48
5.6	Wahl des Kontaktpunktes	50
5.7	Ansatz zur Korrektur der Nichtlinearität der Spule	51
6	Durchführung einer Messung	53
6.1	Messwernerfassung mit SignalExpress	53
6.2	Auswertung mit Matlab	53
6.2.1	Konfiguration	54
6.2.2	Kalibrierung	56
6.2.3	Bestimmung der Relaxationsfunktion	56
7	Fazit	59
	Literaturverzeichnis	61
A	Anhang	65
A.1	Verlauf von Kriech- und Relaxationsfunktion	65
A.2	Ersatzmodelle	67
A.3	Konstruktionszeichnungen	68

1 Einleitung

Der erste Teil der Einleitung beschäftigt sich mit der Viskoelastizität. Er basiert auf dem Lehrbuch *Polymermechanik* von Schwarzl [1], insbesondere auf dem Kapitel 8, welches für eine Einführung in dieses Gebiet zu empfehlen ist. Ebenfalls hervorzuheben sind *Viscoelastic Properties of Polymers* [2, Kapitel 1 bis 3] von Ferry und *Kontaktmechanik und Reibung* [3, Kapitel 15] von Popov.

1.1 Viskoelastizität

Unter Viskoelastizität versteht man das Verhalten von Festkörpern (und Schmelzen), die elastische und viskose Eigenschaften in sich vereinen. Dies ist unter anderem bei Polymeren der Fall, unter denen an dieser Stelle die Elastomere (Gummi) genauer betrachtet werden.

Von rein elastischem Deformationsverhalten kann ausgegangen werden, wenn die Deformation γ zu jedem Zeitpunkt eine eindeutige Funktion von der Spannung σ ist. Es gilt also $\gamma = f(\sigma)$. Rein viskoses Verhalten liegt dann vor, wenn die Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ zu jedem Zeitpunkt eine eindeutige Funktion der Spannung zum gleichen Zeitpunkt ist, wenn also $\dot{\gamma} = f(\sigma)$ gilt. Die Kombination aus beidem bedeutet nun Folgendes: wird eine Spannung angelegt, so tritt ein Teil der Verformung sofort auf, mit der Zeit aber folgt eine weitere, kontinuierliche Verformung.

1.1.1 Materialfunktionen

Wird nun eine konstante Spannung σ_0 auf einen zuvor spannungsfreien Körper aufgebracht, so reagiert dieser mit einer zeitlich veränderlichen Verformung $\gamma(\sigma_0, t)$. Diese ist in ihrer Amplitude im Falle linearen Verhaltens proportional zur Spannung. Es gilt:

$$\gamma(\sigma_0, t) = \sigma_0 J(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Da der Körper nur verzögert der Spannung nachfolgt, heißt dieser Versuch Kriechversuch und die Funktion $J(t)$ Kriechfunktion. Aufgrund seines viskosen Charakters wird die Deformation des Körpers mit der Zeit zunehmen, die Kriechfunktion ist also eine mit der Zeit monoton wachsende Funktion: $\dot{J}(t) > 0$. Im Anhang A.1 ist $J(t)$ für ein vernetztes (Abb. 30) und ein unvernetztes Polymer (Abb. 32) dargestellt.

Drehen wir nun das Experiment um und geben einem spannungsfreien Körper plötzlich eine konstante Deformation γ_0 vor. Es stellt sich wieder eine zu der Deformation proportionale, zeitabhängige Spannung $\sigma(\gamma_0, t)$ ein. Da weiterhin lineares Verhalten vorausgesetzt wird, gilt:

$$\sigma(\gamma_0, t) = \gamma_0 G(t), \quad t > 0. \quad (2)$$

Die Spannung ist zu Beginn maximal und baut sich mit der Zeit ab. Aus diesem Grund nennt man diesen Versuch Spannungsrelaxationsversuch und die Funktion $G(t)$ Relaxationsfunktion. Da sich die Spannung mit der Zeit abbaut, ist $G(t)$ eine in der Zeit monoton fallende Funktion: $\dot{G}(t) < 0$. Im Anhang A.1 ist $G(t)$ für ein vernetztes (Abb. 29) und ein unvernetztes Polymer (Abb. 31) dargestellt.

1.1.2 Das Superpositionsprinzip

Für das lineare viskoelastische Verhalten fehlt noch ein grundlegendes Prinzip: das von Boltzmann aufgestellte Superpositionsprinzip. Es sagt aus, dass die Summe zweier Spannungen eine Gesamtdeformation hervorrufen, die gleich der Summe der Einzeldeformationen ist.

Dieser Ansatz kann weiter konkretisiert werden: Gegeben sei eine zeitabhängige Deformation $\gamma(t)$. Diese Deformation zerlegen wir nun in Sprünge an den Stellen ξ , sodass sich $\gamma(t)$ aus allen Teilsprüngen zusammensetzt:

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t d\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^t \dot{\gamma}(\xi) d\xi.$$

Jede dieser sprungartigen Deformationen zu den Zeiten ξ verursacht aber nach (2) eine Spannung zur Zeit t :

$$d\sigma(t, \xi) = d\gamma(\xi)G(t - \xi) = \dot{\gamma}(\xi)G(t - \xi)d\xi, \quad t > \xi.$$

Diese summieren sich nach dem Superpositionsprinzip zu einer Gesamtspannung:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t d\sigma(t, \xi) = \int_{-\infty}^t \dot{\gamma}(\xi)G(t - \xi)d\xi. \quad (3)$$

Wird der Weg über das Kriechexperiment und Gleichung (1) beschritten, so erhält man eine duale Darstellung zu:

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t d\gamma(t, \xi) = \int_{-\infty}^t \dot{\sigma}(\xi)J(t - \xi)d\xi. \quad (4)$$

Mittels einiger Umformungen (siehe [1, S. 164]), kann aus (3) und (4) die folgende Integralgleichung gewonnen werden:

$$\int_0^t G(t - \xi)J(\xi)d\xi = \int_0^t G(\xi)J(t - \xi)d\xi = t. \quad (5)$$

Mithilfe der Laplacetransformation [4, Kap. 3] lassen sich nun die Faltungsintegrale in ein Produkt der Laplacetransformierten $\tilde{G}(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$ und $\tilde{J}(s) = \mathcal{L}\{J(t)\}$ überführen.

$$\tilde{G}(s) \cdot \tilde{J}(s) = 1/s^2 \quad (6)$$

Gleichungen (5) und (6) stellen Möglichkeiten dar, die Kriechfunktion $J(t)$ und die Relaxationsfunktion $G(t)$ voneinander abzuleiten.

1.1.3 Zeit-Temperaturverschiebung

Die Materialfunktionen werden üblicherweise doppelt logarithmisch über der Zeit aufgetragen. Dies liegt an der Größe der Bereiche, über welche sich diese Funktionen erstrecken. Experimentell konnte nun herausgefunden werden [1, S. 202], dass sich die Gestalt der Kurve nicht ändert, wenn sich die Temperatur des Materials ändert. Stattdessen verschiebt sich die Kurve entlang der Zeitachse, und zwar mit steigenden Temperaturen in negative Richtung.

Dieses Verhalten wird ausgenutzt, um den Messbereich von Experimenten zu erweitern. Sei t die Zeitachse zur Temperatur T und x die Zeitachse zu der (willkürlichen) Referenztemperatur T_0 , dann ist die Verschiebung $\log(a) = \log(t) - \log(x)$ durch die folgende Funktion gegeben:

$$\log(a) = -\frac{a_0(T - T_0)}{b_0 + (T - T_0)}. \quad (7)$$

Diese von Williams, Landel und Ferry gefundene Funktion heißt auch WLF-Funktion. Die Konstanten a_0 und b_0 (in der Literatur c_1 und c_2) sind vom Material und von dem gewählten T_0 abhängig. Über folgende Invarianten der WLF-Funktion sind diese auf andere Referenztemperaturen zu überführen:

$$T_0 - b_0 = T_1 - b_1 = T_\infty \text{ und } a_0 \cdot b_0 = a_1 \cdot b_1. \quad (8)$$

Tabelle 1 gibt für drei Beispiele die notwendige Temperatur an, um eine Verschiebung um ± 1 bzw. ± 2 Zehnerpotenzen in der Zeit zu erreichen.

Material	a_0	b_0	T_0	Quelle	T_{-2}	T_{-1}	$T_{\pm 0}$	T_{+1}	T_{+2}
Polyurethan	12,5	42,5	-45	[1, S. 206]	93	47	20	2	-11
Hevea rubber	8,86	101,6	-25	[2, S. 277]	91	49	20	-1	-16
Butylkautschuk	9,03	201,6	25	[2, S. 278]	74	44	20	1	-15

Tabelle 1: Konstanten a_0 [-], b_0 [K bzw. °C] zur Referenztemperatur T_0 [°C]. Daraus abgeleitet die Temperaturen T_x [°C] die nötig sind, um die Materialkurve entlang der Zeitachse um 10^x Sekunden, bzw. um $\log(a) = x$, zu verschieben. $T_{\pm 0}$ gibt damit die gewählte Referenztemperatur an.

1.1.4 Ersatzmodelle

Um viskoelastisches Materialverhalten zu modellieren, wird oft auf Ersatzmodelle zurückgegriffen. Federelemente dienen dazu, Steifigkeiten abzubilden, während Dämpfer das viskose Verhalten simulieren. Im Folgenden werden zwei allgemeine Modelle vorgestellt, aus denen jeweils eine der Materialfunktionen $G(t)$ und $J(t)$ abgeleitet wird. Für ausgewählte Beispiele finden sich im Anhang (A.2) die jeweils zusammengehörenden Funktionen.

Das verallgemeinerte Maxwellmodell

Dieses Modell besteht aus parallel geschalteten Maxwell-Elementen und ist in Abbildung 1 zu sehen. Hinzu kommt ein Federelement G_∞ , das die Steifigkeit gegen unendlich langsame Deformationen beschreibt.

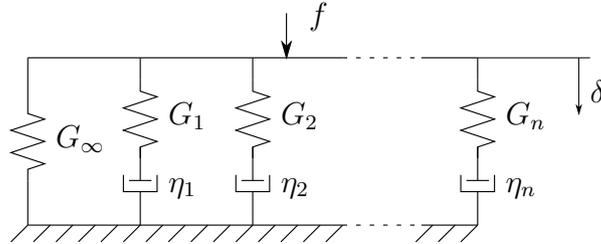


Abb. 1: Verallgemeinertes Maxwellmodell.

Die Relaxationsfunktion $G(t)$ erhalten wir aus der Betrachtung einer plötzlich auftretenden Verschiebung δ_0 und der daraus resultierenden Kraft f . Wir nehmen für δ nun die Sprungfunktion in folgender Form an:

$$\delta(t) = \delta_0 \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Die Kraft f setzt sich aus den Teilkräften f_i der Stränge zusammen, welche mit der Deformation δ , die in jedem Strang gleich ist, verknüpft ist zu:

$$f = G_\infty \delta + \sum_{i=1}^n f_i \quad \text{und} \quad \dot{\delta} = \frac{\dot{f}_i}{\eta_i} + \frac{\dot{f}_i}{G_i}.$$

Nun wenden wir die Laplacetransformation mit den Anfangsbedingungen $\delta(-0) = 0$ und $f_i(-0) = 0$ an, dies bedeutet, dass der Körper vor der Deformation spannungsfrei war. Mit der Laplacetransformierten der Kräfte $F_i(s) = \mathcal{L}\{f_i(t)\}$ und der Deformation $\Delta(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \delta_0/s$ können wir schreiben:

$$F(s) = G_\infty \Delta(s) + \sum_{i=1}^n F_i(s) \quad \text{und} \quad s\Delta(s) = F_i(s) \frac{G_i + s\eta_i}{\eta_i G_i},$$

und durch ineinander Einsetzen nach $F(s)$ auflösen:

$$F(s) = \Delta(s) \left[G_\infty + \sum_{i=1}^n \frac{sG_i}{s + G_i/\eta_i} \right] = \delta_0 \left[\frac{G_\infty}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{s + 1/\tau_i} \right] \quad \text{mit} \quad \tau_i = \frac{\eta_i}{G_i}.$$

Die Rücktransformation liefert die Kraft im Zeitbereich. Diese Sprungantwort enthält das Relaxationsmodul $G(t)$:

$$G(t) = \frac{f(t)}{\delta_0} = G_\infty + \sum_{i=1}^n G_i e^{-t/\tau_i} \quad \text{mit} \quad \tau_i = \frac{\eta_i}{G_i}. \quad (9)$$

Die Kriechfunktion lässt sich leider aus diesem Modell nicht so einfach gewinnen, auch wenn nach Schwarzl das verallgemeinerte Maxwellmodell unter gewissen Voraussetzungen mechanisch äquivalent zu dem verallgemeinerten Kelvinmodell ist [1, S. 147]. Bei dem verallgemeinerten Kelvinmodell werden wir die Kriechfunktion mit den gleichen Mitteln herleiten.

Das verallgemeinerte Kelvinmodell

In Abbildung 2 werden die in Reihe geschalteten Kelvin-Elemente durch eine Feder und einen Dämpfer ergänzt. Der Dämpfer η_0 dient dabei der Beschreibung rein viskosen Materialverhaltens.

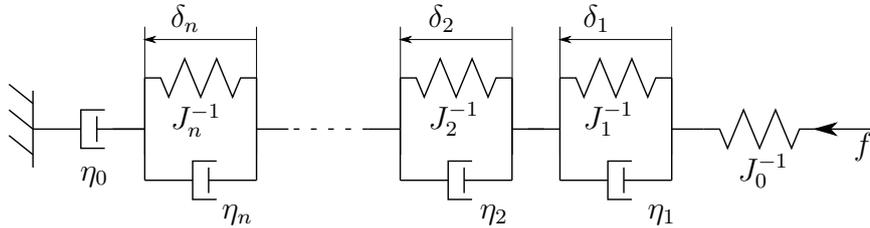


Abb. 2: Verallgemeinertes Kelvinmodell.

Es wird analog zum Maxwellmodell vorgegangen. Die Kraft f ist in jedem Element gleich und berechnet sich aus der Elementverformung δ_i . Die Gesamtverformung δ lässt sich als Summe der Teilverformungen beschreiben, sodass wir folgende zwei Gleichungen erhalten:

$$f(t) = J_i^{-1} \delta_i(t) + \eta_i \dot{\delta}_i(t) \text{ und } \dot{\delta}(t) = \dot{f}(t) J_0 + \sum_{i=1}^n \dot{\delta}_i + \frac{f(t)}{\eta_0}.$$

Wir wenden die Laplacetransformation an und schreiben für die transformierten Verschiebungen $\Delta_i(s) = \mathcal{L}\{\delta_i(t)\}$, sowie für die transformierte Kraft $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Die Anfangsbedingungen lauten wieder $\delta_i(-0) = 0$ und $f(-0) = 0$, so dass wir Folgendes erhalten:

$$F(s) = \Delta_i(s) [J_i^{-1} + s\eta_i] \text{ und } s\Delta(s) = sF(s)J_0 + s \sum_{i=1}^n \Delta_i(s) + \frac{F(s)}{\eta_0}.$$

Wir setzen diesmal für die Kraft die Sprungfunktion an, deren Laplacetransformierte $F(s) = f_0/s$ wir in die Gleichungen einsetzen und nach $\Delta(s)$ auflösen.

$$\Delta(s) = f_0 \left[\frac{J_0}{s} + \sum_{i=1}^n J_i \frac{1/\lambda_i}{s(s + 1/\lambda_i)} + \frac{1}{s^2 \eta_0} \right] \text{ mit } \lambda_i = J_i \eta_i$$

Die Rücktransformation liefert die Kriechfunktion $J(t)$:

$$J(t) = \frac{\delta(t)}{f_0} = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i (1 - e^{-t/\lambda_i}) + \frac{t}{\eta_0} \text{ mit } \lambda_i = J_i \eta_i. \quad (10)$$

Auch hier ist die Bestimmung des Gegenstückes, also der Relaxationsfunktion nicht trivial.

1.2 Messung viskoelastischer Eigenschaften

Standard sind Experimente zum Kriechen und zur Spannungsrelaxation. Bei Kriechversuchen wird eine Probe mit einer Spannung beaufschlagt, worauf eine zeitabhängige, zu messende Deformation folgt. Beim Spannungsrelaxationsversuch wird eine Probe mit einer Deformation beaufschlagt und die Spannung in Abhängigkeit von der Zeit gemessen.

Solche Versuche sind natürlich nicht auf Scherung beschränkt, ebenfalls verbreitet sind Eindringversuche. Hier kann unterschieden werden, ob die Verformung oder die Belastung vorgegeben wird. Nimmt man z.B. einen konischen Indenter mit dem Öffnungswinkel Θ und gibt einen konstanten Vorschub mit der Geschwindigkeit v_0 vor, so erhält man die folgende Beziehung zwischen Kontaktkraft und Relaxationsfunktion [5, S. 133]:

$$\frac{d^2 F(t)}{dt^2} = \frac{8v_0^2 \tan \Theta}{\pi(1-\nu)} G(t). \quad (11)$$

Auf dem gleichen Prinzip beruht das Micro-Fourier-Rheometer, welches in Abbildung 3 schematisch dargestellt ist. Der sehr kleinen Nadel mit einem Durchmesser von ca 0,5 mm, wird eine Bewegung $W(t)$ vorgegeben, weiterhin wird die Kontaktkraft $F(t)$ gemessen. Folgender Zusammenhang gilt zwischen diesen beiden Größen [6, Gl. 15]:

$$F(t) = 2G(t)W(t)lf_{needle}. \quad (12)$$

Auch diese Gleichung ist sehr einfach nach $G(t)$ aufzulösen.

Will man in noch kleineren Größenordnungen messen, so gelangt man in den Bereich der Nanoindentierung. Mit Eindringtiefen unter einem Mikrometer ist es möglich, dünne Schichten eines Materials oder sehr kleine Proben zu analysieren. [7]

Die zu betrachtenden Prallversuche gehören schließlich zu den Eindringversuchen, in denen weder Belastung noch Verformung vorgegeben werden. Der Indentor stößt gegen die Probe und wird gemäß den Materialeigenschaften zurückgeworfen. Bei dieser Methode ist der Versuchsaufbau eher einfach, jedoch sind die Materialfunktionen in nicht so einfachen Gleichungen wie zuvor eingebettet. So

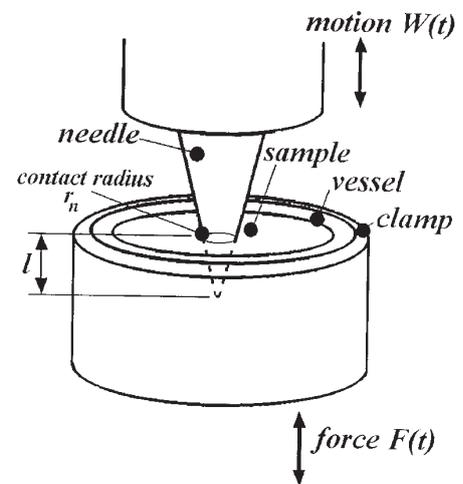


Abb. 3: Micro-Fourier Rheometer, Quelle: [6, Abb. 1, S. 444].

gilt z.B. für den Stoß einer Kugel folgende Beziehung für die Kontaktkraft [8]:

$$F(t) = \frac{8}{3R(1-\nu)} \int_0^t G(t-t') \frac{dr^3(t')}{dt'} dt'. \quad (13)$$

Schwarzl gibt schließlich in der Polymechnik einen Überblick über die Prinzipien der Messung viskoelastischer Materialfunktionen in Hinblick auf das erfasste Zeitfenster. Abbildung 4 zeigt die Zeitachse t , in der Experimente durchgeführt werden. Man erkennt, dass den Kriech- und Relaxationsversuchen ein Zeitbereich von einer Sekunde bis Monate zugänglich ist. Mit Schwingversuchen, durchgeführt bei der Frequenz ν , kann der Messbereich weiter nach unten verschoben werden. (Abs. vgl. [1, S. 172])

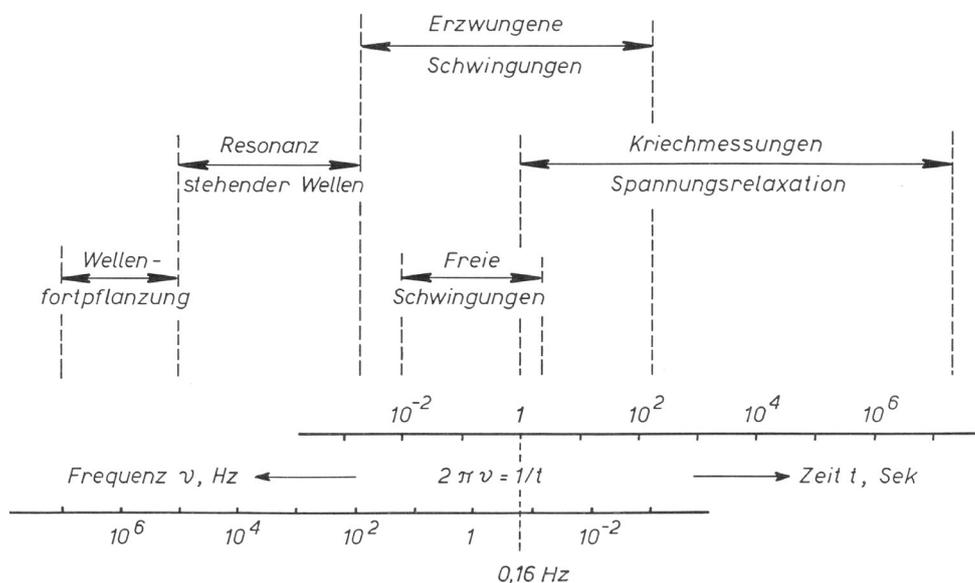


Abb. 4: Lage und experimentelle Fenster verschiedener mechanischer Messmethoden zur Bestimmung des viskoelastischen Materialverhaltens. Quelle: [1, Abbildung 8.37, S. 172].

Die vier Bereiche, in die Schwarzl die Schwingversuche unterteilt, richten sich nach der Dimension der Probe und der Frequenz der Schwingung. (Abs. vgl. [1, S. 173])

1. Man spricht von einer *erzwungenen Schwingung unterhalb der Resonanzfrequenz*, wenn die Wellenlänge der Schwingung groß im Vergleich zu den Dimensionen der Probe ist. Das System kann nicht von allein schwingen, stattdessen wird es von einer externen Kraft angeregt.
2. Werden die *freien Schwingungen* in diesem Frequenzbereich untersucht, so muss ein Trägheitselement an der Probe angebracht werden. Dieses System wird ausgelenkt und anschließend sich selbst überlassen. Die Messung liefert die Eigenfrequenz und das logarithmische Dekrement.

3. Bei höheren Frequenzen untersucht man die *Resonanz stehender Wellen*. Dabei ist die Wellenlänge der Schwingung vergleichbar mit den Abmessungen der Probe, es wird keine Zusatzmasse benötigt. Durch Variation der Frequenz entsteht die Resonanzkurve.
4. Bei noch höheren Frequenzen kann die *Wellenausbreitung* in der Probe studiert werden.

Obwohl die Prallversuche in den Bereich der Relaxationsversuche fallen, decken diese einen Zeitbereich von 10^{-5} bis 10^{-3} Sekunden ab. Die untere Schranke ergibt sich aus der Auflösung der Messung, die obere aus der Dauer des Prallvorganges.

1.2.1 Auf Prallversuchen basierende Verfahren

Prallversuche sind dynamische Eindringversuche, bei denen keine Vorgabe der Belastung oder der Verformung vorliegt. Dadurch sind sie relativ leicht durchzuführen und werden bereits seit einiger Zeit untersucht.

Einfachste Versuche messen dabei nur die Rückprallelastizität e , welche als Quotient der Rückprallgeschwindigkeit v_n und der Aufprallgeschwindigkeit v_0 definiert ist: $e = v_n/v_0$. Üblicherweise geschieht dies durch Messung der Rückprallhöhe und dem Vergleich der zugehörigen potentiellen Energien im Schwerfeld. Beispielfhaft sei der Apparat von Albertoni [9, 1937] genannt, der Experimente ähnlich dem Kerbschlagbiegeversuch ausführen kann. Alternativ kann auch eine Kugel auf die Probe fallen, wie bei Gordon und Grieveson [10, 1958]. Ihr Versuchsaufbau ist zusätzlich gekapselt, um Messungen im Vakuum durchzuführen. Die Temperatur der Probe ist dabei einstellbar, um einen größeren Zeitbereich abzudecken.

Die Messung der Rückprallelastizität hat ebenfalls in Normen Einzug gehalten. Die DIN 53512 [11] beschreibt die Messung mittels eines Pendels. Dieses wird ausgelenkt und trifft am tiefsten Punkt seiner kreisförmigen Bahn auf die Probe. Die Rückstellhöhe wird gemessen. Die DIN EN ISO 8307 [12] beschreibt für weichelastische polymere Schaumstoffe die Bestimmung der Kugel-Rückprallelastizität. Eine Stahlkugel fällt auf die Probe und die Rückprall-Höhe wird gemessen.

Die nächste zu messende Größe stellt die Kontaktzeit dar. Dies gelingt dadurch, dass die Kugel an eine Spannungsquelle angeschlossen wird und sich im Kontakt über die Probe ein Stromkreis schließt. Southern und Thomas [13, 1972] beschichteten dafür die Probe mit Graphit. Ihre Untersuchungen galten dem Einfluß der Probendicke und der Möglichkeit Modellparameter anzupassen. Ähnlich ging Bassi [14, 1978] vor, der einen dünnen Metallfaden über die Probe legte. Mit den beiden gemessenen Größen passte er ein einfaches Feder-Dämpfer Modell an.

Einen Schritt weiter gehen Pouyet und Lataillade [15, 1975], die zusätzlich die maximale Eindringtiefe durch einen Annäherungssensor maßen. Diese Messgröße diente ihnen zur Bestimmung der Härte der Probe. Aus der Rückprallelastizität

schlossen sie auf den Verlustwinkel und von der Kontaktzeit auf die Steifigkeit des Kontaktes.

Lubert, Rink und Pavan [16, 1976] untersuchten schließlich Kraft-Dehnungskurven, die sie mit einem Oszilloskop aufnahmen. Für die Kontaktkraft diente ein Dehnmessstreifen, der die Biegung der Probenhalterung maß. Die Eindringtiefe wurde mittels einer Photozelle erfasst. Nairn [17, 1989] lässt einen zylindrischen Körper auf einen einseitig eingespannten Balken fallen. Als einzige Größe wurde dessen Beschleunigung gemessen. Die Geschwindigkeit und Eindringtiefe erhielt er durch integrieren dieser Größe. Problematisch stellte sich die Neigung des Gewichtes heraus, Eigenschwingungen auszuführen. Erst mittels einer Fouriertransformation konnten diese wieder herausfiltert werden. Ein weiteres Fallexperiment wurde von Larson, Goyal und Aloisio [18, 1996] durchgeführt. Hierbei wird die Kraft gemessen und der Versuch mittels eines Modells beschrieben.

In den bisher vorgestellten Prallexperimenten war es jedoch nie Zielstellung gewesen, die Materialfunktionen direkt zu messen. Man beschränkte sich entweder auf einige wenige Parameter, wie Verlustwinkel und Steifigkeit des Kontaktes, oder stellte Modelle auf, mit denen die experimentellen Ergebnisse vorhergesagt wurden.

Rudnitsky und Djakovich [19, 1996] bestimmten nun das Elastizitätsmodul von elastischen Materialien mittels eines Prallversuches. Dazu untersuchten sie Kraft-Dehnungskurven und stellten einen Zusammenhang zwischen dem Anstieg dieser Kurve und dem zu bestimmenden Elastizitätsmodul auf. Zur Messung der Geschwindigkeit des Indentors wurde dieser mit einem Permanentmagneten gekoppelt und durch eine Spule geführt. Die induzierte Spannung diente als Maß für die Geschwindigkeit. Weiter mit diesem Verfahren beschäftigten sich Vriend und Kren [20, 2004]. Sie verwendeten das gleiche Messprinzip, untersuchten jedoch viskoelastische Materialien. Zunächst taten sie dies jedoch mit der Einschränkung auf ein einfaches Modell, welches nur aus Feder und Dämpfer bestand. Das von ihnen entwickelte Gerät *IVUS* ist schematisch in Abbildung 5 dargestellt. Später benutzen Kren und Naumov [21, 2010] dieses Verfahren, diesmal jedoch ohne ein Modell für das Material vorrauszusetzen. Das von ihnen entwickelte *IMPULSE*-Gerät ist zusätzlich mit einer isolierten Kammer für Versuche bei verschiedenen Temperaturen versehen. Die Abbildung 6 zeigt schematisch dessen Aufbau. Das in dieser Arbeit entwickelte Messgerät ist in hohem Maße an diese beiden Vorgänger angelehnt.

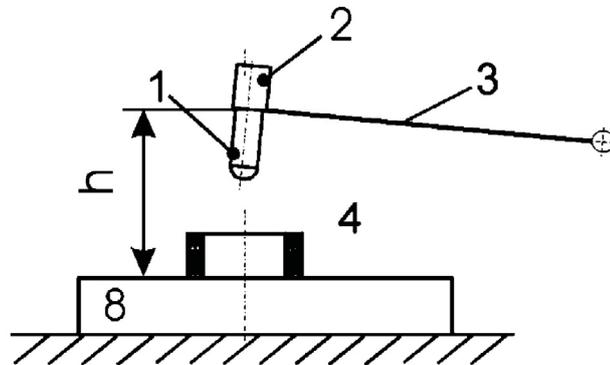


Abb. 5: Messprinzip IVUS (1: Indentor, 2: Magnet, 3: Hebel, 4: Spule, 8: Probe).
Veränderte Abbildung aus [20, Abb. 2].

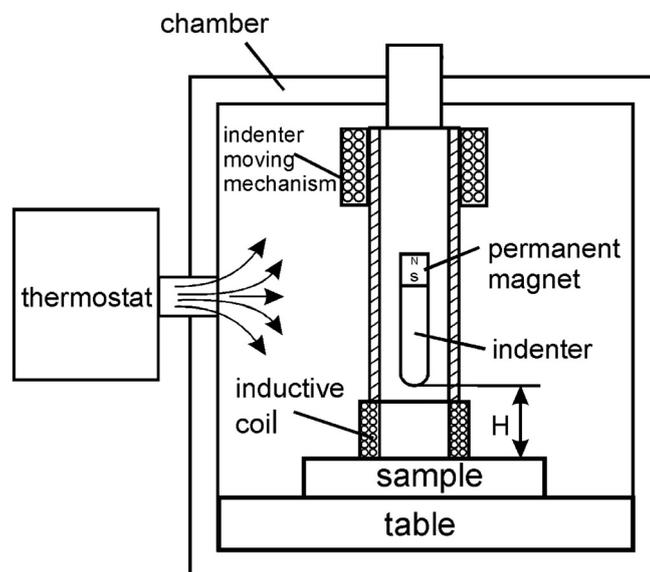


Abb. 6: Messprinzip IMPULSE. Veränderte Abbildung aus [21, Abb. 1].

2 Rückprall starrer Kugeln von viskoelastischen Oberflächen

Im Folgenden wird der freie Stoß einer starren Kugel auf einen viskoelastischen Halbraum untersucht. Die Bewegungsgleichungen werden vorgestellt und numerisch gelöst. Der Matlab Quellcode und eine ausführliche Dokumentation dazu befindet sich auf der beigelegten CD.

2.1 Bewegungsgleichungen

In diesem Kapitel werden die Bewegungsgleichungen für das Kontaktproblem aufgestellt. Eine starre Kugel mit dem Radius R und der Masse m treffe zum Zeitpunkt $t = 0$ normal auf einen viskoelastischen Halbraum. Sie habe dabei die als bekannt angenommene Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Von Interesse ist die Eindringtiefe $x(t)$, der mit ihr verknüpfte Kontaktradius $r(t)$ (siehe Abbildung 7), sowie die Kontaktkraft $P(t)$.

Für die Gleichungen gelten einige Bedingungen, welche hier genannt seien. Die Verzerrungen seien infinitesimal und die zeitliche Änderung langsam, sodass von einer quasistatischen Lösung ausgegangen werden kann. Des Weiteren sei die Querkontraktionszahl konstant, sodass für das Schub- und Kompressionsmodul gelte: $G(t)2(1+\nu) = K(t)3(1-2\nu)$ [22, S. 185]. Zur Beschreibung des zeitabhängigen viskoelastischen Verhaltens diene das Schubmodul $G(t)$ (Relaxationsfunktion) und die Kriechfunktion $J(t)$.

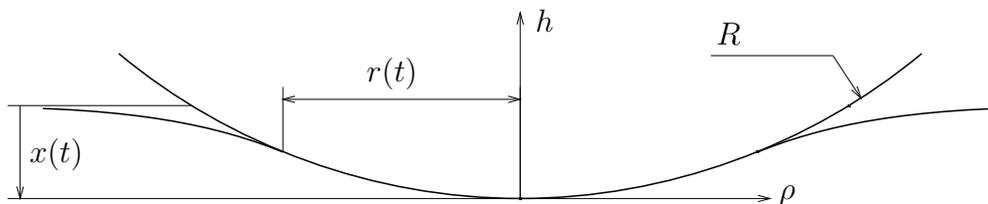


Abb. 7: Hertz'scher Kontakt.

Eindringphase

Die Eindringphase beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem ersten Kontakt und endet, wenn der Umkehrpunkt erreicht ist. Dieser Zeitpunkt sei t_m . Es gilt dann für die Geschwindigkeit $v(t_m) = 0$.

Nach Hertz [23, S. 166] kann der Kontaktradius $r(t)$ beim Kontakt zweier elastischer Körper direkt aus der Eindringtiefe $x(t)$ berechnet werden:

$$r^2(t) = x(t)R. \quad (14)$$

Dieser Gleichung liegt eine Näherung zugrunde, bei der die Kontur der Kugel mittels einer Parabel beschrieben wird. Die Gleichung (15) veranschaulicht dies (siehe Abbildung 7 für die Koordinaten) und gibt den relativen Fehler an. Daraus folgt die Beschränkung auf $r(t) < R/4$, unter der Annahme, dass der Fehler kleiner als 1,6% bleiben soll.

$$\rho^2 = 2hR - h^2 \approx 2hR \rightarrow f = \frac{h^2}{\rho^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - (\rho/R)^2}}{1 + \sqrt{1 - (\rho/R)^2}}. \quad (15)$$

Lee und Radock haben gezeigt, dass diese Gleichung auch für viskoelastische Materialien gilt, so lange der Kontaktradius monoton mit der Zeit wächst [24, S. 440, Gl. 18]. Sie haben ebenfalls eine Gleichung für die Kontaktkraft aufgestellt, in der ein zeitabhängiger Operator das Materialverhalten beschreibt. Dabei kann es sich um einen Differenzialoperator, oder wie bei Hunter [8, Gl. 3.12] um einen Integraloperator handeln. Die Form in Hunters Artikel soll hier verwendet werden:

$$P(t) = \frac{8}{3R(1-\nu)} \int_0^t G(t-t') \frac{dr^3(t')}{dt'} dt'. \quad (16)$$

Vernachlässigen wir die Schwerkraft, so ist dies die einzige wirkende Kraft, und für die Beschleunigung gilt dann $ma(t) = -P(t)$, mit $a(t) = \ddot{x}(t)$. Setzen wir zusätzlich (14) ein, so erhalten wir die folgende Bewegungsgleichung:

$$a(t) = -\frac{4}{mR(1-\nu)} \int_0^t G(t-t') R^{3/2} \sqrt{x(t')} v(t') dt'. \quad (17)$$

Da wir im folgenden die Gleichungen diskretisieren und numerisch behandeln wollen, führen wir die Schrittweite h wie folgt ein: $t = ih$ für $0 \leq i \leq m$ mit $t_m = mh$. Die Eindringtiefe normieren wir auf den Kontaktradius und schreiben $x_i = x(ih)/R$. Die Zeitableitung kann dann auch als Ableitung nach i geschrieben werden, jedoch erscheint dann der Faktor $1/h$. Bei der Integration verhält es sich ähnlich, der Faktor ist hier h . Zusammengefasst gilt:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{di} \frac{di}{dt} = \frac{1}{h} \frac{df}{di} = \frac{1}{h} f' \text{ und } \int f(t') dt' = h \int f(i) di. \quad (18)$$

Die Ableitung nach der normierten Zeit i ergibt die normierte, dimensionslose Geschwindigkeit $v_i = v(ih) \cdot h/R$ und Beschleunigung $a_i = a(ih) \cdot h^2/R$. Die Relaxationsfunktion beziehen wir auf $G(0)$, so dass $g_i = G(ih)/G(0)$ immer kleiner gleich 1 ist. Wenn eine klein geschriebene Größe indiziert ist (z.B. x_i, g_i), heißt dies also, dass sie dimensionslos ist und an der Stelle $t = ih$ ausgewertet wird. Eine groß geschriebene, indizierte Größe (z.B. G_i, J_i) drückt aus, dass sie an der Stelle $t = ih$ ausgewertet wird, nicht aber dimensionslos oder normiert ist. Der Index i muss keine ganze Zahl sein, auch wenn dies später im Falle eines äquidistanten Gitters so sein wird. Die Bewegungsgleichung (17) schreibt sich dann:

$$a_i = -c \int_0^i g_{i-j} \sqrt{x_j} v_j dj \text{ mit } c = \frac{4RG_0 h^2}{m(1-\nu)}. \quad (19)$$

Der Kontaktradius wird ebenfalls auf den Kugelradius bezogen und kann dann berechnet werden durch

$$r_i = \sqrt{x_i}. \quad (20)$$

Rückzugsphase

In dieser Phase verkleinert sich der Kontaktradius zum Ablösezeitpunkt t_n bis auf null. Wenn weiterhin beachtet wird, dass durch die Kriecheigenschaft des viskoelastischen Materials die Kontaktkraft nun mit der Zeit abgebaut wird, kommt man zu dem Schluss, dass bei der Ablösung noch eine Eindringtiefe verbleibt. Dies verträgt sich nicht mit der Gleichung für den Kontaktradius (14), so dass hier eine andere Bedingung gelten muss. Diese Gleichung wird durch die folgende, von Hunter [8, Gl. 4.5] gefundene implizite Gleichung ersetzt:

$$r^2(t) = x(t)R + \int_{t_m}^t J(t-t') \frac{dQ(t')}{dt'} dt' \quad (21)$$

$$Q(t) = \int_{\bar{t}}^t G(t-t') \frac{dr^2(t')}{dt'} dt'. \quad (22)$$

Dabei bezeichnet die Zeit $0 \leq \bar{t} \leq t_m$ den Zeitpunkt in der Eindringphase, bei dem der Kontaktradius $r(\bar{t})$ identisch zum Kontaktradius in der Rückzugsphase $r(t)$ ist (siehe Abb. 8). Dieser Zeitpunkt fällt bei der Lösung dieser Gleichung nebenbei ab und wird zur Bestimmung der Kontaktkraft in der Rückzugsphase [8, Gl. 4.7] benötigt:

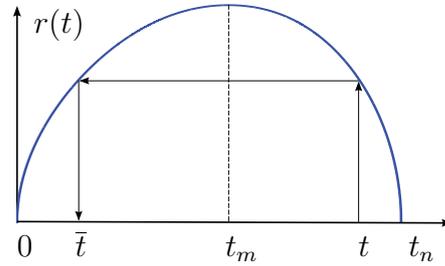


Abb. 8: Berechnung \bar{t} aus t .

$$P(t) = \frac{8}{3R(1-\nu)} \int_0^{\bar{t}} G(t-t') \frac{dr^3(t')}{dt'} dt'. \quad (23)$$

Zunächst betrachten wir die Gleichungen (21) und (22). Die Zeitableitungen erschweren uns die Auswertung, weshalb zuerst jeweils einmal partiell integriert wird. Wir verwenden dabei $Q(t_m) = 0$ und $r(t) = r(\bar{t})$.

$$r^2(t) = x(t)R + J(0)Q(t) + \int_{t_m}^t \dot{J}(t-t')Q(t') dt' \quad (24)$$

$$Q(t) = [G(0) - G(t-\bar{t})]r^2(t) + \int_{\bar{t}}^t \dot{G}(t-t')r^2(t') dt' \quad (25)$$

Wir verwenden wie zuvor normierte Größen und führen konsequenterweise $j_i = J(ih)/J(0)$ und $q_i = Q(ih)/(G_0R^2)$ ein:

$$r_i^2 = x_i + q_i + \int_m^i j'_{i-j} q_j dj \quad (26)$$

$$q_i = (1 - g_{i-\bar{i}}) r_i^2 + \int_{\bar{i}}^i g'_{i-j} r_j^2 dj. \quad (27)$$

Als nächstes wird die Gleichung für die Kontaktkraft behandelt: Da $r(t')$ nur für die Eindringphase gebraucht wird, können wir unter Verwendung von (14) und wieder unter Vernachlässigung der Schwerkraft für die Beschleunigung Folgendes schreiben:

$$a(t) = -\frac{4}{mR(1-\nu)} \int_0^{\bar{t}} G(t-t') R^{3/2} \sqrt{x(t')} v(t') dt', \quad (28)$$

und für die Auswertung dieser Gleichung auf die Werte aus der Eindringphase zuzückgreifen. Unter Verwendung der Normierungen aus der Eindringphase folgt:

$$a_i = -c \int_0^{\bar{i}} g_{i-j} \sqrt{x_j} v_j dj \text{ mit } c = \frac{4RG_0h^2}{m(1-\nu)}. \quad (29)$$

2.2 Diskretisierung und numerische Lösung

Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen diskretisiert und ein Weg aufgezeigt sie numerisch zu lösen. Für die Eindringphase wurde das explizite und das implizite Eulerverfahren verwendet und die Ergebnisse verglichen. Ebenfalls wurde eine Lösung nach Sabin [25] implementiert und als Vergleich für die eigene Implementation herangezogen. Mit der numerischen Lösung beschäftigt sich ebenfalls der Artikel von Calvit [26]. Er stellt ein Verfahren zur Lösung der Gleichung für die Zeit des gesamten Kontakts auf. Von dieser Arbeit inspiriert, wird die Rückzugsphase ebenfalls behandelt. Ein Algorithmus wird entwickelt und implementiert.

Als Testproblem für die folgenden Simulationen werden einheitliche Parameter (Tabelle 3) sowie das Standardmodell (Tabelle 2) verwendet.

$\nu = 0,5$	Querkontraktionszahl
$G_0 = 10^7 \text{ N/mm}^2$	Momentanwert des Schubmoduls
$G_\infty = 10^5 \text{ N/mm}^2$	Gleichgewichtswert des Schubmoduls
$\tau = 1 \text{ ms}$	Relaxationszeit

Tabelle 2: Parameter für das Standardmodell

$R = 20 \text{ mm}$	Radius des Indentors
$m = 10 \text{ g}$	Masse des Indentors
$v_0 = 0,5 \text{ m/s}$	Aufprallgeschwindigkeit

Tabelle 3: Parameter des Indentors

2.2.1 Explizite und Implizite Verfahren für die Eindringphase

Betrachten wir für die Zeitdiskretisierung ein äquidistantes Gitter mit der Schrittweite h . Zur Behandlung der Integrale in (19) verwenden wir die summierte Trapezregel [27, S. 92]:

$$\begin{aligned} \int_0^{nh} f(t') dt' &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(ih) + f(ih + h)] \\ &= \frac{h}{2} \left(f(0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(ih) + f(nh) \right). \end{aligned}$$

Wenden wir dies auf die Beschleunigung (19) an, erhalten wir unter Verwendung von $x_0 = 0$:

$$a_i = -c \left(\frac{\sqrt{x_i} v_i}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} g_{i-k} \sqrt{x_k} v_k \right). \quad (30)$$

Explizite Eulerverfahren

Das explizite Eulerverfahren (Vorwärtsdifferenzen) ist ein Verfahren mit Fehlerordnung 1 [27, S. 20]. Es kann geschrieben werden als:

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot v(t) \rightarrow x_{i+1} = x_i + v_i \quad (31)$$

$$v(t+h) = v(t) + h \cdot a(t) \rightarrow v_{i+1} = v_i + a_i. \quad (32)$$

Die Abbruchbedingung für die Iteration lautet $v_m \leq 0$. Da durch die feste Schrittweite der Punkt $v_m = 0$ nicht direkt getroffen wird, ist es notwendig, diesen erst zu berechnen. Dazu können wir zwischen den Punkten vor und nach dem Umkehrpunkt m die Geschwindigkeit linear interpolieren.

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{v_{m-1}}{v_{m-1} - v_m} \\ x_m &= \delta \cdot (x_m - x_{m-1}) + x_{m-1} \\ v_m &= 0 \\ a_m &= \delta \cdot (a_m - a_{m-1}) + a_{m-1} \end{aligned}$$

Da es nun ungeschickt wäre, für die weitere Behandlung in der Rückzugsphase verschiedene Schrittweiten zu benutzen, kann das Ergebniss mit kubischer Spline-Interpolation [27, S. 75 ff] wieder auf ein Gitter mit äquidistanter Schrittweite

gebracht werden. Zu beachten ist dabei, dass die normierten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von der Schrittweite abhängen. Sie ändern sich nach folgender Vorschrift:

$$h_{alt} \rightarrow h_{neu}, v_i \rightarrow v_i \cdot h_{neu}/h_{alt}, a_i \rightarrow a_i * h_{neu}^2/h_{alt}^2.$$

Implizite Eulerverfahren

Das implizite Eulerverfahren (Rückwärtsdifferenzen) ist ein Verfahren mit Fehlerordnung 1 [27, S. 113]. Es kann geschrieben werden als:

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot v(t+h) \rightarrow x_{i+1} = x_i + v_{i+1} \quad (33)$$

$$v(t+h) = v(t) + h \cdot a(t+h) \rightarrow v_{i+1} = v_i + a_{i+1}. \quad (34)$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Beschleunigung (30) ein, erhalten wir eine implizite Gleichung für die Geschwindigkeit v_{i+1} :

$$v_{i+1} = v_i - c \left(\frac{v_{i+1} \sqrt{x_i + v_{i+1}}}{2} + \sum_{k=1}^i g_{i-k} \sqrt{x_k} v_k \right). \quad (35)$$

Auch hier gilt die Abbruchbedingung $v_m \leq 0$ und eine Interpolation auf die neue Schrittweite ist nötig.

Vergleich des Konvergenzverhaltens

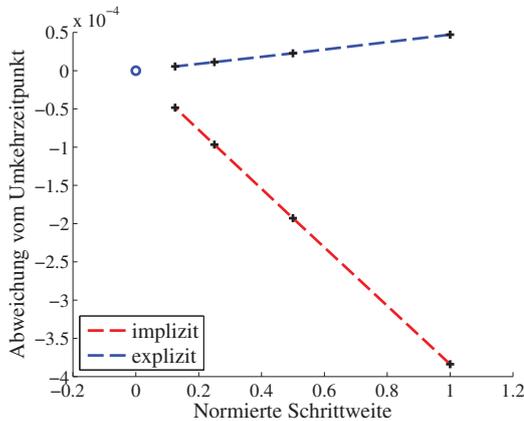


Abb. 9: Relative Abweichung vom Umkehrzeitpunkt, aufgetragen über die normierte Schrittweite.

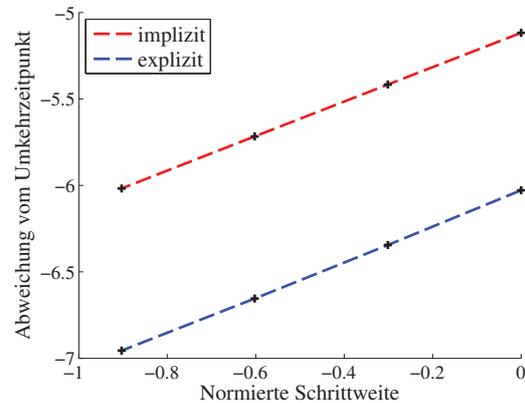


Abb. 10: Doppellogarithmische Darstellung des Umkehrzeitpunktes, der Anstieg gibt die Konvergenzordnung wieder.

Als Maß für den Fehler und zur Betrachtung der Konvergenz schauen wir uns den ermittelten Umkehrzeitpunkt an. Beide Verfahren zeigen im doppellogarithmischen Plot (Abbildung 10) einen Anstieg von 1, was der erwarteten Konvergenzordnung entspricht. Extrapoliert man die gefundene Umkehrzeit für beide

Verfahren getrennt, so erhält man in beiden Fällen nahezu das gleiche Ergebnis (dieser Punkt ist in Abbildung 9 als blauer Kreis eingezeichnet). Dieses Ergebnis wird als Referenzlösung gewertet und dient als Vergleich für die anderen numerischen Lösungen. Beide Verfahren liefern also das gleiche Ergebnis mit gleicher Konvergenzordnung. Da das implizite Verfahren durch die Lösung einer impliziten Gleichung in jedem Zeitschritt aufwändiger ist, wird dem expliziten Verfahren der Vorzug gegeben.

2.2.2 Lösung nach Sabin für die Eindringphase

Sabin [25] stellt eine Lösung der Bewegungsgleichung für die Eindringphase vor, in der eine frei fallende Kugel auf einen elastischen Halbraum trifft. Sie führt auf ein Integral und die Nullstellenbestimmung eines Polynoms. Damit ist es möglich, einen anderen Algorithmus mit dem hier entwickelten zu vergleichen. Die Gleichung für den Kontaktradius [25, Gl. 54,55] lautet:

$$0 = c f_1 r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 - v_0 i + c \sum_{j=1}^{i-1} r_{j+1}^3 (f_{i-j+1} - f_{i-j-1}) \quad (36)$$

$$\text{mit } c = \frac{2G_0 h^2 R}{3(1-\nu)m} \text{ und } f_i = 2 \int_0^i (i-j)g_j dj.$$

Für die Berechnung von f_i verwenden wir die summierte Trapezregel:

$$f_i \approx i + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (i-j)g_j$$

und bestimmen die Differenz, die wir für die Summe in (36) benötigen:

$$\begin{aligned} f_{i-j+1} - f_{i-j-1} &= \left[i - j + 1 + 2 \sum_{k=1}^{i-j} (i - j + 1 - k)g_k \right] \\ &- \left[i - j - 1 + 2 \sum_{k=1}^{i-j-2} (i - j - 1 - k)g_k \right] = 2 + 4 \sum_{k=1}^{i-j-1} g_k + 2 g_{i-j}. \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich eine kubische Gleichung für r_{i+1} :

$$c r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 = c_i = i v_0 - 2 c \sum_{j=1}^{i-1} r_{i+1}^3 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{i-j-1} g_k + g_{i-j} \right], \quad (37)$$

in der die Konstante c_i nach jedem Iterationsschritt neu berechnet wird. Die Abbruchbedingung am Umkehrpunkt lautet $r_{i+1} \leq r_i$. Die Abbildung 11 zeigt die Lösung nach Sabin sowie die Lösung, welche mittels explizitem Eulerverfahren gewonnen wurde. Mit dem bloßem Auge ist zwischen den Graphen kein Unterschied mehr zu erkennen. Es ist also davon auszugehen, dass zum einen das angewandte Verfahren geeignet, zum anderen die Implementierung gelungen ist.

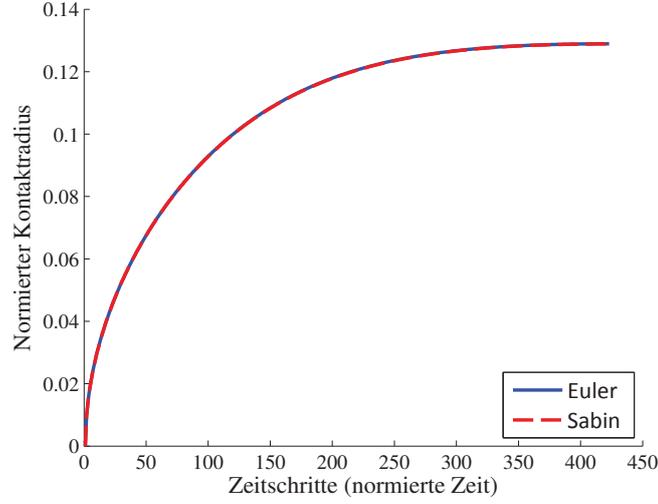


Abb. 11: Lösung für die Eindringphase einer Kugel in einen elastischen Halbraum, gelöst mit den Gleichungen nach Sabin und mittels explizitem Eulerverfahren.

2.2.3 Bestimmung des Kontaktradius in der Rückzugsphase

Ziel ist die Bestimmung des Kontaktradius r_k aus den Gleichungen (26) und (27).

Um die Zeit \bar{k} zu finden, für welche $r_{\bar{k}} = r_k$ gilt, suchen wir zunächst $0 \leq p \leq m$, sodass gilt: $r_p \leq r_k \leq r_{p+1}$. Lineare Interpolation der Größen r_i^2 liefert dann:

$$\delta = \frac{r_{\bar{k}}^2 - r_p^2}{r_{p+1}^2 - r_p^2}, \quad \bar{k} \approx p + \delta. \quad (38)$$

Betrachten wir nun das Integral q_k aus Gleichung (27):

$$\begin{aligned} q_k &= r_k^2 - g_{k-\bar{k}} r_{\bar{k}}^2 + \int_{\bar{k}}^k g'_{k-j} r_j^2 dj \\ &= r_k^2 - g_{k-\bar{k}} r_{\bar{k}}^2 + \underbrace{\int_{\bar{k}}^{p+1} g'_{k-j} r_j^2 dj}_{I_1} + \underbrace{\int_{p+1}^k g'_{k-j} r_j^2 dj}_{I_2}. \end{aligned}$$

Im zweiten Term wird g_i an der Stelle $i = k - \bar{k}$ ausgewertet. Wenn wir davon ausgehen, dass uns g_i nur an diskreten Stellen mit ganzzahligem i bekannt ist, müssen wir hier interpolieren. Die lineare Interpolation liefert:

$$g_{k-\bar{k}} r_{\bar{k}}^2 \approx \delta g_{k-(p+1)} r_{p+1}^2 + (1 - \delta) g_{k-p} r_p^2. \quad (39)$$

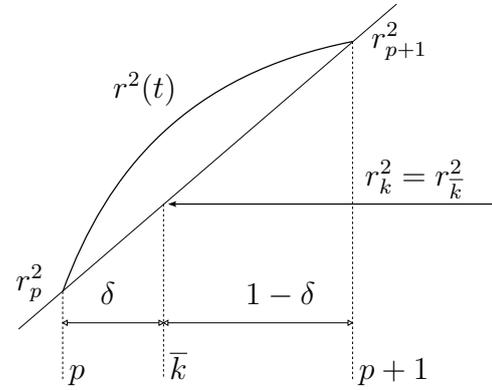


Abb. 12: Lineare Interpolation.

Für das Integral I_1 verwenden wir die Trapezregel und interpolieren anschließend linear. Zu beachten ist, dass das Intervall die Breite $1 - \delta$ hat.

$$\begin{aligned}
I_1 &\approx \frac{1 - \delta}{2} \left(g'_{k-\bar{k}} r_{\bar{k}}^2 + g'_{k-(p+1)} r_{p+1}^2 \right) \\
&\approx \frac{1 - \delta}{2} \left[\delta g'_{k-(p+1)} r_{p+1}^2 + (1 - \delta) g'_{k-p} r_p^2 + g'_{k-(p+1)} r_{p+1}^2 \right] \\
&\approx \frac{1 - \delta}{2} \left[(1 + \delta) g'_{k-(p+1)} r_{p+1}^2 + (1 - \delta) g'_{k-p} r_p^2 \right]
\end{aligned} \tag{40}$$

Das Integral I_2 kann mit der summierten Trapezregel ausgewertet werden. Da alle Intervalle die Länge 1 haben, also gleich lang sind, ist keine Interpolation erforderlich.

$$I_2 \approx \frac{1}{2} \left(g'_{k-(p+1)} r_{p+1}^2 + 2 \sum_{j=p+2}^{k-1} g'_{k-k} r_j^2 + g'_0 r_k^2 \right) \tag{41}$$

Zusammengefasst lässt sich q_k schreiben als:

$$\begin{aligned}
q_k &\approx \left(1 + \frac{1}{2} g'_0 \right) r_k^2 + \left(\frac{1}{2} g'_{k-(p+1)} - \delta g_{k-(p+1)} \right) r_{p+1}^2 - (1 - \delta) g_{k-p} r_p^2 \\
&\quad + \sum_{j=p+2}^{k-1} g'_{k-j} r_j^2 + \frac{1 - \delta}{2} \left[(1 + \delta) g'_{k-(p+1)} r_{p+1}^2 + (1 - \delta) g'_{k-p} r_p^2 \right].
\end{aligned} \tag{42}$$

Wir betrachten nun Gleichung (26), in der wir das Integral mit den summierten Trapezen annähern:

$$r_k^2 = x_k + \sum_{j=m+1}^{k-1} j'_{k-j} q_j + \left(1 + \frac{1}{2} j'_0 \right) q_k = c_0 + c_1 q_k \tag{43}$$

und stellen fest, dass der unbekannte Kontaktradius r_k auf der linken Seite zum Quadrat und auf der rechten Seite in q_k auftaucht. Wären die Koeffizienten in Gleichung (42) konstant, so hätte man in Gleichung (43) eine lineare Abhängigkeit von r_k^2 . Jedoch ändern sich mit r_k auch die Indizes p bzw. $p + 1$, und es muss erneut linear interpoliert werden.

Die in der Summe auftauchenden q_j sind uns bereits aus voran gehenden Rechnungen bekannt, damit ändern sich c_0 und c_1 nicht. Diese implizite Gleichung lösen wir mit dem einfachen Fixpunktverfahren [27, S. 137 ff]. Dazu setzen wir iterativ das r_k^2 immer wieder in Gleichung (43) ein, bis die Änderung klein wird:

$$r_{k,neu}^2 = c_0 + c_1 q_k(r_{k,alt}^2). \tag{44}$$

Das Fixpunktverfahren konvergiert, wenn der Betrag der Ableitung der rechten Seite kleiner eins ist [27, Satz 10.5, S.139]. Dieses Kriterium soll nun untersucht

werden. Gleichung (44) ist näherungsweise (unter Vernachlässigung der Verschiebung der Indizes) linear in r_k^2 . Die Ableitung der rechten Seite ist dann konstant und folgt zu:

$$\phi' = \left(1 + \frac{1}{2}j_0'\right) \left(1 + \frac{1}{2}g_0'\right). \quad (45)$$

Um diese Gleichung auszuwerten, verwenden wir die folgende Ungleichung von Zener [1, S. 165]:

$$0 < J(t)G(t) \leq 1, \quad t > 0. \quad (46)$$

Entwickeln wir nun $G(t)$ und $J(t)$ in einer Taylorreihe bis zum Glied erster Ordnung und werten die Gleichung an der Stelle $t = h/2$ aus, so erhalten wir:

$$G(t) \approx G_0 + t\dot{G}_0 \rightarrow 0 < \left(G_0 + \frac{h}{2}\dot{G}_0\right) \cdot \left(J_0 + \frac{h}{2}\dot{J}_0\right) \leq 1.$$

Durch Ersetzen der Zeitableitung nach Gleichung (18) und durch Normierung von $g = G/G_0$ und $j = J/J_0$ erhalten wir die gesuchte Ableitung:

$$0 < \left(1 + \frac{1}{2}g_0'\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}j_0'\right) = \phi' \leq 1. \quad (47)$$

Damit ist das Fixpunktverfahren in Fällen nicht verschwindender Anfangssteigungen j_0' und g_0' geeignet.

2.2.4 Explizites Eulerverfahren für die Rückzugsphase

Wie wir in der Eindringphase bereits gesehen haben, ist es nicht nötig, ein implizites Verfahren zu verwenden. Wir bestimmen also die Eindringtiefe und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $i + 1$ mit dem expliziten Eulerverfahren:

$$x_{i+1} = x_i + v_i, \quad (48)$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i. \quad (49)$$

Mit diesen Größen berechnen wir den aktuellen Kontaktradius r_k für $k = i + 1$ mit dem Fixpunktverfahren aus Gleichung (44). Wir teilen das Integral in Gleichung (29) zur Berechnung in einen Teil bis p , in dem die Teilintervalle immer die Breite 1 haben, und in einen Teil der Breite δ .

$$a_k = -c \int_0^p g_{k-j} \sqrt{x_j} v_j dj - c \int_p^{\bar{k}} g_{k-j} \sqrt{x_j} v_j dj \quad (50)$$

Unter Verwendung der Trapezregel und mit linearer Interpolation für das zweite Integral erhalten wir:

$$\begin{aligned} -\frac{a_k}{c} &\approx \frac{1}{2} g_{k-p} \sqrt{x_p} v_p + \sum_{j=1}^{p-1} g_{k-j} \sqrt{x_j} v_j \\ &+ \frac{\delta}{2} \left[\delta g_{k-(p+1)} \sqrt{x_{p+1}} v_{p+1} + (1 - \delta) g_{k-p} \sqrt{x_p} v_p \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Damit sind alle Größen bekannt. Als Abbruchbedingung dient uns hier der Kontaktradius aus der Fixpunktgleichung (44). Wenn das Quadrat des Radius negativ wird, ist der Ablösezeitpunkt überschritten. Wir interpolieren diesmal linear die Größe r_i^2 zwischen den Punkten vor und nach dem Ablösezeitpunkt t_n . Für die anderen Größen erhalten wir:

$$\delta = \frac{r_{n-1}^2}{r_{n-1}^2 - r_n^2}$$

$$x_n = \delta \cdot (x_n - x_{n-1}) + x_{n-1}$$

$$v_n = \delta \cdot (v_n - v_{n-1}) + v_{n-1}$$

$$a_n = 0.$$

Wie in der Eindringphase wenden wir die kubische Spline-Interpolation an, um die Lösung auf einem äquidistanten Gitter zu erhalten. Ein Ergebnis der Berechnung ist in Abbildung 13 zu sehen.

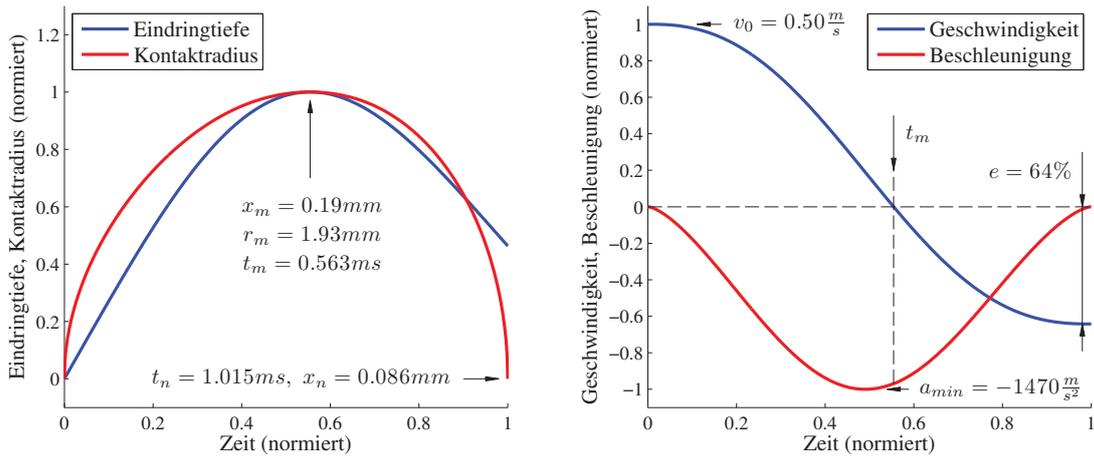


Abb. 13: Lösung für den Stoß einer starren Kugel mit einem viskoelastischen Halbraum.

3 Das inverse Problem

Um die Relaxationsfunktion aus dem Prallexperiment zu bestimmen, sind die Integrale zur Berechnung der Beschleunigung zu invertieren. Die Querkontraktionszahl ν sei dabei als konstant und bekannt anzunehmen. Für viele Polymere ist $\nu > 0,4$, sodass auch die Näherung $\nu \approx 0,5$ benutzt werden kann. Während (19) noch eine Faltung darstellt und demnach einer Integraltransformation zugänglich ist, handelt es sich bei (29) um keine Faltung mehr. Die Auswertung der Rückzugsphase ist im Vergleich zur Eindringphase komplizierter, weshalb nur ein Weg aufgezeigt wird, die Relaxationsfunktion theoretisch zu bestimmen.

3.1 Lösungen für die Eindringphase

Für die Eindringphase werden vier Ansätze vorgestellt. Die Z-Transformation wird diskutiert, erweist sich jedoch als nicht anwendbar. Die summierte Trapezregel und die Regularisierung nach Tikhonov sind Ansätze, bei denen an die Lösung keine Voraussetzungen gestellt werden. Numerisch sind sie jedoch schlecht geeignet im Fall verrauschter Messdaten. Ein Ansatz mit einem diskreten Spektrum für die Lösungsfunktion führt schließlich zum Ziel.

Test der Algorithmen

Um die Algorithmen praktisch zu prüfen, wurden sie implementiert und mit den Daten aus der voran gegangenen Simulation getestet. Es wurden bis auf die Relaxationszeit alle Parameter aus Kapitel 2.2 (Tabelle 3 und 2) verwendet. Die Relaxationszeit wurde auf $\tau = 0,1ms$ verringert, damit die charakteristische Stufe in der Materialfunktion $G(t)$ gut zu erkennen ist. Alle Algorithmen funktionieren bei ungestörten Signalen sehr gut, jedoch sind bei der späteren Messung durchaus verrauschte Signale zu erwarten. Von daher wurden die Daten vor der Auswertung mit einem künstlichen Rauschen versehen, und so die Robustheit der Algorithmen untersucht.

3.1.1 Z-Transformation

Ein Ansatz besteht darin, die Integralgleichung mittels der Z-Transformation [4, Kapitel 5] aufzulösen. Dabei handelt es sich um die Laplacetransformation für diskrete (Mess-) Werte. Der Abstand zweier Werte sei die Schrittweite h . Sie wird formal aus der Laplacetransformation durch Anwendung auf Sprungfunktionen abgeleitet und ist definiert als:

$$A(z) = \mathcal{Z}\{a\} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}, \quad z = e^{h \cdot s}. \quad (52)$$

In Gleichung (19) handelt es sich um eine Faltung (*)

$$a(t) = -c g(t) * f(t) = -c \int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau \text{ mit } f(\tau) = \sqrt{x(\tau)} v(\tau), \quad (53)$$

die mittels des Faltungssatzes in ein Produkt überführt werden kann:

$$A(z) = -c \mathcal{Z}\{g(t) * f(t)\} = -c \mathcal{Z}\{g(t)\} \mathcal{Z}\{f(t)\} = -c G(z) F(z). \quad (54)$$

Diese Gleichung muss nun nach $G(z)$ aufgelöst und zurücktransformiert werden. Es gibt jedoch mehrere Probleme. Zur Berechnung müssen die Reihen bis unendlich entwickelt werden, es sei denn, die Funktionen werden schon vorher zu null. Dies mag bei $a(t)$ und $f(t)$ gegeben sein, da diese nur während des Stoßes ungleich null sind. Jedoch gilt die Gleichung mit der Faltung (19) nur für die Eindringphase, sodass in der Rückzugsphase gar keine Faltung mehr vorliegt: In Gleichung (29) ist die obere Grenze nicht mehr t sondern \bar{t} . Auch würde die Rücktransformation die Materialfunktion $g(t)$ mathematisch im gesamten Zeitbereich ergeben. Das kann physikalisch keinen Sinn machen, da das Langzeitverhalten in diesem Experiment keine Rolle spielt, womit es auch nicht ableitbar ist.

3.1.2 Summierte Trapezregel

Gegeben sei wieder die Integralgleichung (19), wir normieren die Relaxationsfunktion jedoch vorerst nicht. Inspiriert durch die Arbeiten über die Berechnung der Nachgiebigkeitsfunktion aus der Kriechfunktion mittels einfacher Zerlegung der Integrale in Summen (siehe [28] und [29]) verwenden wir die summierte Trapezregel:

$$a_i = -c \left(G_0 \frac{f_i}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} G_{i-k} f_k \right) \text{ mit } f_i = \sqrt{x_i} v_i \text{ und } c = \frac{4Rh^2}{m(1-\nu)}. \quad (55)$$

Durch Auswerten dieser Gleichung für $i = 1$ erhalten wir $G(0)$. Anschließend werten wir die Gleichung iterativ für $i = 2, 3, \dots, m$ aus und erhalten (die nicht normierten) G_i .

$$\begin{aligned} G(0) = G_0 &= -\frac{2a_1}{cf_1} \\ G_{i-1} &= -\frac{1}{f_1} \left[\frac{a_i}{c} + \sum_{k=2}^{i-1} G_{i-k} f_k + G_0 \frac{f_i}{2} \right] \end{aligned} \quad (56)$$

Man erkennt, dass die Lösung sehr von den ersten Messwerten, insbesondere von a_1 und f_1 abhängt. Treten hier Störungen auf, so wird das gesamte Ergebnis zu starken Schwingungen neigen. Es zeigt sich, dass bereits Störungen der Eingangsgrößen um 0,1% das Ergebnis unbrauchbar machen. Für die Auswertung von Messdaten also ein nicht geeignetes Verfahren.

3.1.3 Regularisierung nach Tikhonov (kleinste Fehlerquadrate)

Wir haben gesehen, dass die exakte Lösung (55) anfällig für Störungen ist. Kren und Naumov [21] schlagen deshalb vor, stattdessen den quadratischen Fehler zu minimieren. Für diesen lässt sich folgendes schreiben:

$$\delta = \int_0^m \left(a_k + c \int_0^k G_s f_{k-s} ds \right)^2 dk \rightarrow \min, \text{ mit } c = \frac{4Rh^2}{m(1-\nu)}. \quad (57)$$

In dem Integral wurde eine Substitution durchgeführt, um die Verschiebung auf die Funktion f_i zu übertragen. Ebenfalls ist es wichtig wieder darauf hinzuweisen, dass nur die Gleichung in der Eindringphase in dieser Form verwendet werden kann. Der obere Index im äußeren Integral von (57) muss daher m lauten. In dem oben zitierten Artikel wurde stattdessen der gesamte Kontaktbereich ausgewertet [21, Gl. 12].

Wir wenden auf (57) die Integrale die Trapezregel an, und erhalten eine quadratische Gleichung mit den unbekanntenen Koeffizienten G_i .

$$\delta \approx \frac{1}{2} \left(a_m + c \sum_{i=1}^{m-1} G_i f_{m-i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \left[a_i + c \left(G_0 \frac{f_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} G_j f_{i-j} \right) \right]^2 \quad (58)$$

Diese Gleichung vereinfachen wir, indem wir vereinbaren, dass $f_i = 0$ für $i \leq 0$ ist, denn damit lässt sich in der zweiten Summe die obere Grenze auf $m-1$ erweitern. Die Gleichung differenzieren wir nach G_k und erhalten m Gleichungen für G_0, \dots, G_{m-1} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial G_k} = 0 \rightarrow & -\frac{1}{c} \left(a_m f_{m-k} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} a_i f_{i-k} \right) = \\ & G_0 \left(\sum_{i=1}^{m-1} f_i f_{i-k} \right) + \sum_{j=1}^{m-1} G_j \left(f_{m-j} f_{m-k} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_{i-j} f_{i-k} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Es stellt sich heraus, dass dieses Verfahren ebenfalls anfällig für Störungen ist, weshalb Kren [21, Gl. 12] in seiner Arbeit einen regularisierenden Ansatz nach Tikhonov verwendet:

$$\delta + A \int_0^m \left[G_k^2 + \left(\frac{G_k}{dt} \right)^2 \right] dk \rightarrow \min. \quad (60)$$

Diese Gleichung ist schon im Hinblick auf die Einheiten inkorrekt. Zudem erhalten wir durch die Zeitableitung den Faktor $1/h^2$, womit der Einfluss von G_k^2 verschwindend gering wird. Besser erscheint daher der folgende Stabilisator:

$$\delta + A \int_0^m \left(\frac{G_k}{dk} \right)^2 dk \rightarrow \min. \quad (61)$$

Die Ableitung bilden wir durch einen einfachen Differenzenquotienten (Intervallbreite 1) und benutzen die Mittelpunktsregel für die Integration:

$$\int_0^m \left(\frac{G_k}{dt} \right)^2 dk \approx \sum_{i=0}^{m-1} (G_{i+1} - G_i)^2. \quad (62)$$

Leiten wir nun Gleichung (61) nach G_k ab, so erhalten wir $m + 1$ Gleichungen für die Unbekannten G_0, \dots, G_m :

$$-\frac{1}{c} \left(a_m f_{m-k} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} a_i f_{i-k} \right) = \sum_{j=1}^{m-1} G_j \left(f_{m-j} f_{m-k} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_{i-j} f_{i-k} \right) + \quad (63)$$

$$G_0 \left(\sum_{i=1}^{m-1} f_i f_{i-k} \right) + \frac{2A}{c^2} \begin{cases} 2 G_0 - 2 G_1, & k = 0, \\ -G_{k-1} + 2 G_k - G_{k+1}, & 1 \leq k \leq m-1, \\ -2 G_{m-1} + 2 G_m, & k = m. \end{cases}$$

Die Wahl des Regularisierungsparameters A ist uns überlassen. Wird dieser zu groß gewählt, ist die Lösung sehr glatt, hat aber wenig mit der Ursprungsfunktion zu tun. Wenn er zu klein ist, erhalten wir wieder das System (59), welches sehr stark auf Störungen reagiert. Eine Methode ist es, mehrere A zu verwenden und zu prüfen, wie groß der Fehler δ ist. Die Lösung zu dem A , welches δ minimiert, ist ein guter Kompromiss zwischen Genauigkeit und Glättung.

Leider führt dieser Ansatz nicht zum Ziel. Die Anfälligkeit für Störungen ist immer noch groß, wie die Abbildung 14 zeigt. Außerdem ist es bemerkenswert, dass für $k = m$ aus (63) die Bedingung $G_m = G_{m-1}$ folgt. Das ist natürlich ein Artefakt der Numerik und im allgemeinen nicht sinnvoll.

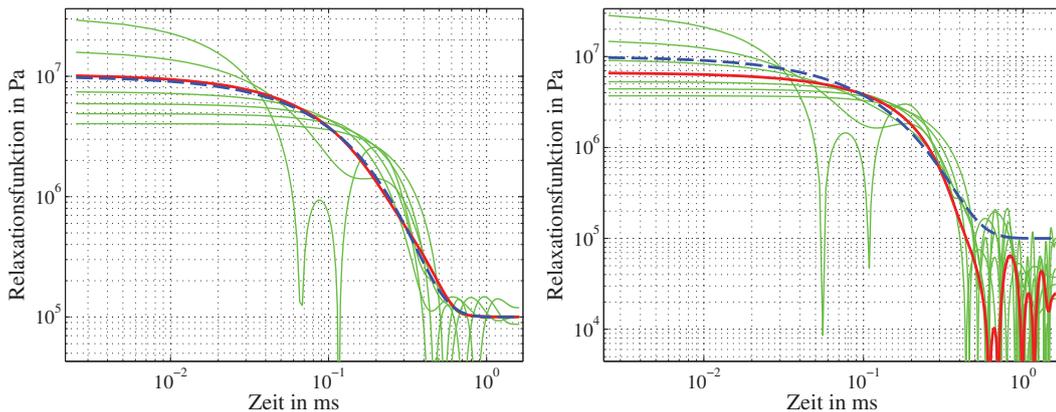


Abb. 14: Lösung mit Regularisierung, links ungestörte Eingangsgrößen, rechts ver-rauschte Eingangsgrößen. In blau ist die exakte Materialfunktion zu sehen, in rot die berechnete und in grün die Schar der Lösungsfunktionen zu verschiedenen Regularisie-rungsparametern.

3.1.4 Ansatz mit diskretem Spektrum (Prony-Reihe)

Nachdem Ansätze mit vollkommen freien Lösungsfunktionen erfolglos waren, legen wir nun im Vorhinein die Art der Funktion fest. Im Rahmen der Berechnung der Kriechfunktion aus der Relaxationsfunktion und umgekehrt, schlägt Liu in [30] und [31] die Verwendung von Prony-Reihen (siehe auch allgemeines Maxwellmodell, Abschnitt 1.1.4) vor:

$$G(t) = A_1 + \sum_{i=2}^n A_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right). \quad (64)$$

Die Relaxationszeiten τ_i werden in Anzahl und Lage sinnvoll festgelegt, um anschließend die unbekanntenen Relaxationsstärken A_i zu berechnen. Mit diesem Ansatz gehen wir in die Gleichung für die Beschleunigung (55). Diese können wir nicht exakt erfüllen, so dass wir für die Abweichung δ_k schreiben:

$$\begin{aligned} \delta_k &= a_k + c \left(G_0 \frac{f_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} G_{k-i} f_i \right) \\ &= a_k + c \left(A_1 \left[\sum_{i=1}^{k-1} f_i + \frac{f_k}{2} \right] + \sum_{j=2}^n A_j \left[\frac{f_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} f_i \exp\left(-\frac{t_k - t_i}{\tau_j}\right) \right] \right) \\ &= \sum_{j=1}^n M_{kj} A_j - d_k. \end{aligned} \quad (65)$$

Wir fordern nun, dass die 2-Norm von δ_k minimal wird. Das Modell gibt uns die anschauliche Bedingung vor, dass die Koeffizienten A_j positiv sein müssen.

$$\sum_{k=1}^m \delta_k^2 = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n M_{kj} A_j - d_k \right)^2 \rightarrow \min \text{ und } A_j \geq 0. \quad (66)$$

Für den Fall mit nicht negativen Koeffizienten und Minimierung des quadratischen Fehlers schlägt Liu die „nonnegative least square method“ von Lawson und Hanson [32] vor, da die Federelemente positive Federkonstanten haben sollen.

Dieser bereits in Matlab implementierte Algorithmus *lsqnonneg* liefert hervorragende Ergebnisse, wie die Abbildung 15 zeigt: Trotz der verrauschten Eingangssignale ist das Materialverhalten rekonstruierbar gewesen. Für das Relaxationsspektrum wurde der Zeitbereich, in dem das Experiment durchgeführt wird, so aufgeteilt, dass der Abstand zweier benachbarter logarithmierter Zeiten τ_i konstant ist, da wir im Vorhinein nichts über die Lage der Spektren wissen.

$$\begin{aligned} \log(\tau_{i+1}) - \log(\tau_i) &= \text{const} = k \rightarrow \log(\tau_i) = (i-2)k + \log(\tau_2) \\ \log(\tau_n) - \log(\tau_2) &= (n-2)k \rightarrow k = \frac{\log(\tau_n) - \log(\tau_2)}{n-2} \end{aligned}$$

Jedoch sollte τ_2 nicht viel kleiner als die Schrittweite h sein, und τ_n nicht viel größer als die Zeit bis zum Umkehrpunkt. Die Begründung ist, dass das Materialverhalten bei schneller oder langsamer Verformung außerhalb des beobachteten Zeitfensters liegt.

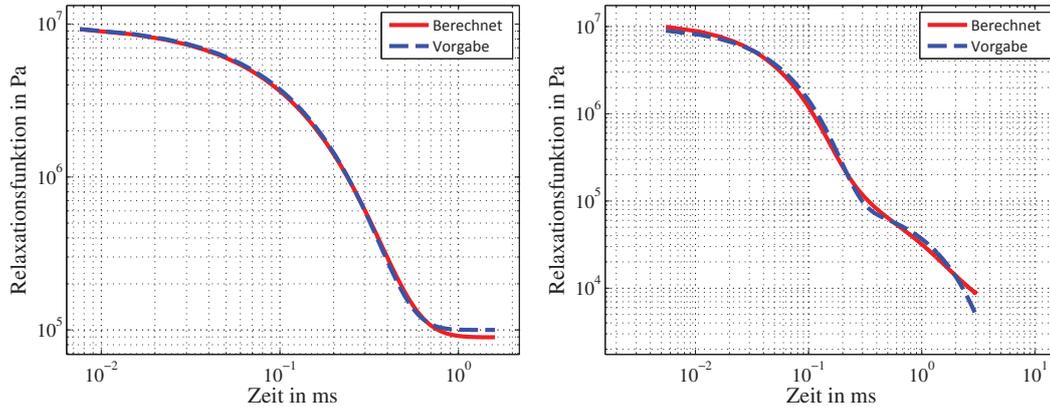


Abb. 15: Lösung mit diskretem Spektrum und „nonnegative least square method“. In beiden Graphen sind die Eingangswerte verrauscht, in der linken Abbildung handelt es sich um das Standardmodell, in der rechten um zwei parallel geschaltene Maxwell-Elemente.

3.2 Lösung für die Rückzugsphase

Das Vorgehen für die Eindringphase kann nicht einfach für die Rückzugsphase übernommen werden. Problem ist hier der Kontaktradius, welcher nicht mehr trivial aus der Eindringtiefe bestimmt werden kann. Zum Einen ist die Kriechfunktion aus der Relaxationsfunktion zu berechnen, ein Verfahren dazu wird vorgestellt. Zum Anderen reicht die bereits bekannte Relaxationsfunktion nur für einen Teil der Rückzugsphase, sodass hier iterativ der Bereich, in dem die Relaxationsfunktion bekannt ist, erweitert werden muss.

3.2.1 Berechnung der Kriechfunktion aus der Relaxationsfunktion

Haben wir für die Eindringphase die Relaxationsfunktion bestimmt, können wir diese invertieren. Ausgangspunkt ist die Integralgleichung (5), die den Zusammenhang zwischen Kriechen und Relaxation beschreibt:

$$t = \int_0^t G(t')J(t-t')dt' = \int_0^t G(t-t')J(t')dt'. \quad (67)$$

Durch die positiven Ergebnisse mit dem Ansatz der Prony-Reihe wenden wir diese erneut an. Die Kriechfunktion lässt sich durch das verallgemeinerte Kelvinmodell

(siehe Abschnitt 1.1.4) wie folgt schreiben:

$$J(t) = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right) \right]. \quad (68)$$

Wir verwenden wieder die Trapezregel um das Integral in eine Summe zu überführen

$$t = kh \approx h \left[\frac{1}{2} G_k J_0 + \sum_{i=1}^{k-1} G_{k-i} J_i + \frac{1}{2} G_0 J_k \right], \quad (69)$$

und setzen den Ansatz (68) ein:

$$k \approx B_0 \left[\frac{G_0 + G_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} G_{k-i} \right] + \sum_{j=1}^n B_j \left\{ \frac{G_0}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_k}{\lambda_j}\right) \right] + \sum_{i=1}^{k-1} G_{k-i} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\lambda_j}\right) \right] \right\} = \sum_{j=0}^n M_{kj} B_j. \quad (70)$$

Der quadratische Fehler δ_k dieser Approximation soll minimal werden, wieder unter der Einschränkung positiver Koeffizienten B_i .

$$\sum_{k=1}^m \delta_k^2 = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n M_{kj} B_j - k \right)^2 \rightarrow \min \text{ und } B_j \geq 0. \quad (71)$$

3.2.2 Prinzipielles Vorgehen in der Rückzugsphase

In der Rückzugsphase ändert sich die Gleichung für den Kontaktradius. In Gleichung (25) wird $G(t)$ an der Stelle $t - \bar{t}$ ausgewertet. Das heißt, sobald $t - \bar{t}$ größer als t_m wird, ist $G(t)$ nicht mehr bekannt, da es im Allgemeinen aus der Eindringphase nur für $0 \leq t \leq t_m$ bekannt ist. Nun gibt es zwei Möglichkeiten das Problem anzugehen.

Zum Einen könnte der Algorithmus die Daten bis t_1 (siehe Abbildung 16) in Gleichung (29) einsetzen, um $G(t)$ bis t_1 zu erhalten. Danach wieder den Kontaktradius bis t_2 berechnen und so weiter. Dieses Verfahren wäre aufwändig, zumal im Falle einiger Algorithmen, wie die Minimierung der Fehlerquadrate, immer alle Funktionswerte ausgewertet werden müssten.

Ein anderer Ansatz bestünde darin, die bis t_m bekannte Lösung für $G(t)$ bis t_n zu extrapolieren, um ein neues $G(t)$ zu berechnen. Mit diesem würde die Rechnung erneut durchgeführt, bis die Änderung zwischen zwei Iterationsschritten klein wird.

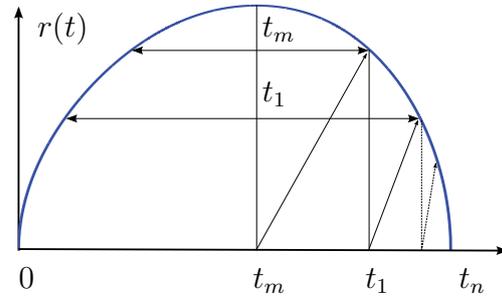


Abb. 16: Inverse Problem in der Rückzugsphase.

4 Entwicklung des Messgerätes

Die Zielstellung war, dass Konzept der IVUS [20] und IMPULSE [21] Geräte aufzugreifen und weiterzuentwickeln. Dabei sollte das Prinzip des sphärischen Indentors sowie das Messprinzip mittels Spule und Magnet zur Anwendung gebracht werden. Wünschenswert war die flexible Nutzung, also ein Design in Form eines Handgerätes, sowie die Einsetzbarkeit in anderen Lagen als der Horizontalen.

4.1 Konstruktion

Die Konstruktion wurde in Catia als CAD Modell entworfen. Die für die Fertigung notwendigen Zeichnungen befinden sich im Anhang A.3. Im Folgenden soll die Konstruktion unter den Gesichtspunkten der Führung des Indentors, dessen Antrieb und der Materialwahl des Gehäuses diskutiert werden. Abschließend wird ein Ausblick auf mögliche Verbesserungen gegeben.

4.1.1 Führung des Indentors

Prinzipiell gibt es drei Möglichkeiten für die Bewegung des Indentors: frei, radial und linear. Jede dieser Optionen hat ihre Vorteile, die im Folgenden diskutiert werden sollen.

Eine Bewegung ohne Führung würde bedeuten, den Indentor frei fallen zu lassen. Damit wäre der Versuch ein reiner Laborversuch, da Umwelteinflüsse nicht fernzuhalten sind, welche Einfluss auf die Bewegung des Indentors nehmen würden. Als Antrieb würde in diesem Fall nur die Schwerkraft in Frage kommen, also müsste der Indentor aus einer definierten Höhe auf die Probe fallen. Das hätte für sich genommen den Vorteil, dass die Aufprallgeschwindigkeit wohldefiniert wäre. Eine Kalibrierung des Messgerätes würde entfallen. In jedem Versuch würde die Kalibrierung automatisch erfolgen, indem im ersten Kontaktmoment die zu berechnende Geschwindigkeit mit der induzierten Spannung der Spule verglichen würde. Von Nachteil ist jedoch die unsichere geometrische Lage. Aufgrund der Abhängigkeit der Position zwischen Magnet und Spule würde die induzierte Spannung mit einer Unsicherheit versehen sein. Insbesondere wenn es beim Stoß zum (leichten) Kippen des Magneten kommt, wäre in der Rückzugsphase der Kalibrierungsfaktor vom Beginn des Experiments hinfällig. Aufgrund der Einfachheit bietet sich dieser Apparat eher für den Einsatz in einer temperierten Umgebung (Zeit-Temperatur-Verschiebung) an, ganz ähnlich wie beim Apparat von Gordon und Grieveson [10]. Da die Entwicklung eines für den Außeneinsatz geeigneten Gerätes gewünscht war, wurde von dieser Möglichkeit schon früh Abstand genommen.

Im Fall einer Kreisbewegung des Indentors, würde die Konstruktion als Führungselement einen Hebelarm sowie eine gelenkige Lagerung vorsehen. Nachteil dieser Konstruktion ist, dass die Bewegungsgleichungen nur für den Normalkontakt Gültigkeit besitzen. Dies kann jedoch durch eine geeignete Wahl der Geometrie, vor allem durch das Verhältnis Hebelarmlänge zu Eindringtiefe, aufgehoben werden. Ist dieses Verhältnis groß genug, so würde die Winkeländerung im Kontakt klein, und die Bewegung näherungsweise als linear anzunehmen sein.

Vorteilhaft ist die Beschränkung auf einen Freiheitsgrad. Dadurch ist die Lage des Magneten zur Spule nur von der Eindringtiefe in der Probe abhängig. Eventuell auftretende Nichtlinearitäten in der Übertragungsfunktion Spule-Magnet könnten damit leichter nachträglich herausgerechnet werden. Es gibt auch keine Beschränkung der räumlichen Ausrichtung der Apparatur, sodass sogar kopfüber gemessen werden könnte. In den Lagern auftretende Reibung kann jedoch die Bewegung beeinflussen. Das ist besonders dann unerwünscht, wenn das auftretende Reibmoment groß, oder schlimmer noch, von der Größe her schwer abschätzbar ist. Diesem Nachteil kann durch Reduzierung der Lagerreibung, z.B. durch Verwendung sehr reibarmer Lager, sowie durch rechnerische Kompensation begegnet werden. Letzteres ist jedoch nur bei genauer Kenntnis des auftretenden Reibmomentes möglich. Ohne zusätzliche Sensoren ist dies jedoch schwierig, da die Effekte der nicht linearen Spule und der Reibung nicht ohne weiteres zu trennen sind. Bei der Lagerwahl ist neben der Leichtgängigkeit auch auf den Temperaturbereich zu achten, in dem die Apparatur eingesetzt werden soll. Ebenfalls von Vorteil ist die sehr gute Resistenz gegenüber Verschmutzung. Durch die Wahl abgedichteter Lager kann das Gerät auch unter widrigen Umständen betrieben werden.

Der Hebelarm selbst birgt den Nachteil möglicher Eigenschwingungen. Wenn das Verhältniss der Steifigkeit des Hebelarmes zur Steifigkeit der Probe klein ist, könnte dieser beginnen mit nicht zu vernachlässigender Amplitude zu schwingen. Um dies zu vermeiden, sollte die Steifigkeit des Hebelarmes groß gewählt werden. Treten in der Messung dann immer noch Störungen auf, so können diese durch eine Fouriertransformation herausgefiltert werden. Von Vorteil ist der Hebelarm natürlich, um einen wie auch immer gearteten Antrieb einzubringen. Er ermöglicht die Messung des Winkels durch ein elektromagnetisches Winkelmesssystem an der Lagerachse, sowie die Messung der Kontaktkraft mittels Dehnmessstreifen auf dem Hebelarm.

Die Linearführung ermöglicht dem Indentor, nur eine geradlinige Bewegung auszuführen. Je nach Konstruktion kann sich dieser eventuell noch um seine eigene Achse drehen. Dies ist jedoch nicht von Belang, da der Versuchsaufbau axialsymmetrisch ist. Diese Bewegung wird auch durch die Bewegungsgleichungen beschrieben, sodass hier keine Näherungen erforderlich sind.

Ähnlich wie bei einem Radiallager ist auch hier mit Reibung zu rechnen. Durch die Vorgabe des Spiels zwischen Indentor und Wand kann hier Einfluß genommen

werden. Problematisch kann sich jedoch die Abdichtung der Linearführung erweisen. Der Indentor muss zu einem Teil aus der Führung herausragen, um mit der Probe in Kontakt zu kommen. Dadurch ist die Anfälligkeit gegen Verschmutzung größer als bei abgedichteten Radiallagern.

Wie zuvor ist auch hier mit Schwingungen des Indentors zu rechnen. Die Eigenfrequenz des Indentors mit der Führungseinheit ist dem entsprechend hoch zu wählen. Die Messung des Weges könnte mittels eines Differenzialtransformators erfolgen. Ein Beschleunigungssensor würde jedoch schwer zu implementieren sein, da die Messleitungen einer größeren Belastung ausgesetzt wären als bei einer (kleinen) radialen Bewegung.

Ausschlaggebend für die Wahl der Führung in Form der Radiallager war vor allem die Stabilität und Robustheit. Die Lösung ohne Führungseinrichtung wurde nicht weiter verfolgt, da das Gerät auch in unterschiedlichen Lagen verwendbar sein sollte und dieses Messprinzip genaue geometrische Verhältnisse verlangt. Auf die Linearführung wurde vor allem wegen der im voraus unbekanntem Reibung, der Anfälligkeit gegen Verschmutzung und dem Mangel an geeigneten Lösungen in ausreichend kleiner Bauform verzichtet.

4.1.2 Antrieb des Indentors

Um die Messung mit einer möglichst großen Bandbreite an Aufprallgeschwindigkeiten, mit denen auch die Kontaktzeit und das damit zugängliche Zeitfenster beeinflusst werden kann, durchzuführen, ist eine Art Antrieb für den Indentor notwendig. Der Antrieb darf im Moment des Kontaktes diesen allerdings nicht mehr beeinflussen, da hier nur die Kontaktkraft wirken soll.

Grundsätzlich seien zwei Alternativen genannt: Die direkte und stetige Beschleunigung mittels eines Antriebes oder die Übertragung eines Impulses auf den Indentor durch einen elastischen Stoß. Es ist im Übrigen für das Experiment unerheblich, mit welcher Genauigkeit die Anfangsgeschwindigkeit vorgegeben werden kann, da diese kurz vor dem Kontakt gemessen wird. Für die Wiederholgenauigkeit spielt sie ebenfalls keine Rolle.

Wird der Indentor direkt angetrieben, so muss eine gewisse Wegstrecke vorliegen auf der dieser beschleunigen kann. Der Antrieb selber kann manuell erfolgen, indem eine Feder gespannt wird. Um diesen Prozess zu automatisieren, kann dies ein Elektromotor oder eine Zylinderspule bewerkstelligen. Wird der Spannmechanismus losgelassen, so wird die gespeicherte Energie in geeigneter Weise, in der hier gewählten Variante über den Hebel, auf den Indentor übertragen. Mittels einer Gewindestange kann in dem Prototypen die Vorspannung der Feder variiert werden.

Wenn für den Indentor nur eine kleine Wegstrecke, z.B. bei einer Linearführung, zur Verfügung steht, kann die Anfangsgeschwindigkeit mittels eines Stoßes auf diesen übertragen werden. Dabei wird die stoßende Masse wie zuvor be-

schrieben aufgeladen. Nachteil dieser Variante ist, dass der Indentor infolge des Anstoßens Schwingungen ausführen wird, die den nachfolgenden Kontakt mit dem eigentlichen Probenkörper beeinflussen könnten. Es wäre denkbar, dass es zum Prellen kommt.

4.1.3 Materialwahl

Das Material des Indentors sollte wesentlich härter sein als die zu messenden Probe. Klassischer Weise wird für den Indentor eine Stahlkugel verwendet. Damit wird sichergestellt, dass sich nur die Probe deformiert.

Auf das Messprinzip hat die Stahlkugel selbst keinen Einfluss. Zwar wird das Magnetfeld durch die Kugel verändert, sodass die Feldlinien in die Kugel gezogen werden, aber dies ändert nur die Form, nicht aber die Stärke des Magnetfeldes. Es ist jedoch nicht zulässig, dass Teile, welche sich relativ zum Indentor bewegen, aus magnetisierbaren Materialien erstellt werden. Die hier auftretenden Kräfte würden den Indentor beeinflussen. Im schlimmsten Falle nicht nur durch eine statische und somit bestimmbare magnetische Kraft, sondern infolge der Bewegung des Magneten auch durch eine von der Lage abhängigen magnetischen Kraft.

Für das Gehäuse stellt sich noch die Frage ob es aus einem leitenden Material bestehen sollte. Vorteil eines metallischen Gehäuses ist die Stabilität und die Eigenschaft elektromagnetische Störfelder von der zur Messung eingesetzten Spule fernzuhalten. In dem gefertigten Prototypen zeigte sich jedoch ein Nachteil durch die aus Aluminium gefertigte Spulenaufnahme: Infolge einer harmonischen Anregung (siehe auch Abschnitt 5.4) schwächt sich das Feld mit steigender Frequenz ab. Dies ist vermutlich auf induzierte Wirbelströme zurückzuführen. Diese Vermutung wird dadurch untermauert, dass im Prallexperiment mit einer Probe aus Aluminium kein zweiter Aufschlag zu hören ist, im Gegensatz zum Prellen einer nicht magnetischen Kugel. Zu beheben wäre diese unerwünschte Eigenschaft, indem die Aufnahme aus Kunststoff gefertigt oder gegen das Gehäuse isoliert und mit einem Querschlitz gegen radial verlaufende Wirbelströme versehen würde. Da die Spulenaufnahme ein separates Teil darstellt, ist dies auch im Nachhinein noch möglich.

Wird der Abschirmung keine große Bedeutung beigemessen, könnte auch das Gehäuse aus Kunststoff gefertigt werden. Insbesondere in der Serienfertigung wäre die Herstellung im Gussverfahren eine preiswerte Alternative.

4.1.4 Verbesserungsvorschläge

Die Möglichkeit der gelenkigen Lagerung des Indentor über einen Hebel hat sich prinzipiell bewährt. Allerdings stellte sich die Steifigkeit als zu gering heraus, so dass infolge von Stoßvorgängen mit harten Proben störende Schwingungen auftraten. In einer Weiterentwicklung ist daher anzuraten kein Rundprofil zu wählen, um die Eigenfrequenzen des Hebels anzuheben.

Sehr gute Messungen gelangen, als der Indentor durch einfaches Fallenlassen ohne Feder beschleunigt wurde. Um die Messapparatur nicht unnötig einzuschränken, ist es sinnvoll, dass Langloch auf der Vorderseite des Gehäuses bis zum Deckel hin durchzuziehen. Unter Laborbedingungen könnten dann auch größere Aufprallgeschwindigkeiten durch größere Fallhöhen erreicht werden. In der horizontalen Lage ist die zusätzliche Beschleunigung durch die Feder ohnehin meistens nicht nötig, da die Eindringtiefe auch mit relativ geringen Fallhöhen bis zu 10% des Indentorradius erreicht.

Ebenfalls stellte sich das Fehlen eines weiteren Sensors als unglücklich heraus. Ein Winkelsensor an der Achse kann auch bei zu geringer Genauigkeit für den Stoßvorgang selbst Informationen über die Position und Geschwindigkeit des Magneten vor dem Stoß liefern. Damit würde die aufwändige Kalibrierung der Spule entfallen, da aus induzierter Spannung und gemessener Winkelgeschwindigkeit für jeden Stoß der Übertragungsfaktor des Spule-Magnet Systems leicht zu bestimmen wäre. Weitere Überlegungen zu Sensoren finden sich im folgenden Abschnitt.

4.2 Elektronik

Wie bereits erwähnt, basiert das Messprinzip auf der Messung der induzierten Spannung in einer Spule infolge der Bewegung des Magneten. Dieser wiederum ist fest mit dem Indentor verbunden. Auf das Messprinzip wird ausführlich im folgenden Abschnitt 5 eingegangen.

Die Konstruktion sieht ausreichend Platz für eine Platine vor. Falls dies infolge von Störungen notwendig gewesen wäre, hätte auf dieser Platine bereits im Gehäuse vorgeschaltete Elektronik verbaut werden können. Insbesondere Verstärker und Filter sind denkbar. Um kabellos Messungen durchführen zu können, wären in einer Weiterentwicklung aber auch AD-Wandler, Speicher und Energieversorgung denkbar. Der hier vorliegende Prototyp jedoch speist das Signal ohne weitere Aufbereitung über den Anschluß in den externen AD-Wandler ein. Dabei handelt es sich um einen USB-6215 von National Instruments. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Eckdaten.

Abtastfrequenz	250kHz
Auflösung	16 bit
Eingangswiderstand	10GΩ
Messbereich	±0,2V (±1V, ±5V, ±10V)

Tabelle 4: Wichtige Daten des USB-6215 AD-Wandlers.

4.2.1 Zusätzliche Sensoren

Es ist zwar möglich aus der gemessenen Geschwindigkeit die Größen Weg und Beschleunigung zu berechnen, jedoch sind weitere Sensoren durchaus sinnvoll. Soll nämlich durch Differenziation die Beschleunigung aus der Geschwindigkeit gewonnen werden, so muss das Messsignal zuerst gefiltert bzw. geglättet werden. Zusätzlich ist die Kennlinie der Spule nichtlinear, was in der Ableitung einen zusätzlichen Term entstehen lässt. Bei der Bestimmung der Eindringtiefe, für die das gemessene Signal integriert werden muss, ist der Anfangszeitpunkt wichtig. Das heißt, dass die Lage des Stoßpunktes gut erkennbar sein muss. Jedoch ändert sich die Geschwindigkeit zu Beginn des Kontaktes nur wenig da die Kontaktkraft sehr klein ist. Die Folge ist eine gewisse Unsicherheit beim Erkennen des Kontaktzeitpunkts.

Für die Beschleunigung bzw. die Kontaktkraft gäbe es die Möglichkeit den Indentor mit einem Piezoelement zu versehen. Alternativ kann der Hebel, welcher den Indentor trägt mit Dehnmesstreifen versehen werden, wodurch aus der Messung der Deformation des Balkens auf die Kontaktkraft geschlussfolgert werden könnte. Beide Methoden haben den Nachteil Messleitungen notwendig zu machen, die im Bereich des Gelenks in das feststehende Gehäuse geführt werden müssen. Da jedoch der Verdrehwinkel klein ist, ist dies mit hinreichend dünnen Leitungen denkbar.

Zur Bestimmung der Eindringtiefe gibt es mehrere Möglichkeiten. Wenn eine Linearführung gewählt wird, bietet sich eine kapazitive Messung an. Da der Messbereich dann klein ist, 1 mm sollte reichen, kann der Indentor eine Scheibe tragen, die zusammen mit einer feststehenden Scheibe einen Kondensator bildet. Der Weg ist in dieser Anordnung zu der Kapazität des Kondensators proportional. Ganz ähnlich funktioniert das Prinzip eines Differenzialtransformators, bei denen sich der Indentor durch drei hintereinanderliegende Spulen bewegt. Um den bereits verbauten Magneten in die Messung einzubeziehen, könnte ein Hall-Sensor verwendet werden. Die hier gemessene Spannung ist von der Stärke des Magnetfeldes, und damit nichtlinear von dem Weg abhängig.

Insgesamt wäre es für einen Prototypen wünschenswert alle drei Zielgrößen, Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung direkt zu messen. Unter Verwendung des kapazitiven Prinzips für die Wegmessung kann die Nichtlinearität der Spule kompensiert werden, was wiederum eine genaue Geschwindigkeitsmessung durch die Spule selbst zulässt. Mit einem Beschleunigungssensor stünde schließlich die letzte unbekannte Größe fest. Durch rechnerischen Vergleich ließe sich die Qualität der gemessenen Werte untersuchen.

5 Beschreibung des Messverfahrens

Um die Gleichungen zur Beschreibung des Prallvorganges auszuwerten, müssen die Größen Kontaktradius $r(t)$ und Kontaktkraft $P(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit bekannt sein. Beide Größen sind einer direkten Messung nicht zugänglich, können jedoch aus anderen Größen abgeleitet werden. Im hier angewandten Verfahren soll die Eindringgeschwindigkeit $v(t)$ gemessen und als Grundlage verwendet werden.

Der Kontaktradius hängt, wenn man sich auf die Eindringphase beschränkt, nur von der Eindringtiefe x ab. Nach Gleichung (14) gilt: $r^2(t) = x(t)R$. Die Eindringtiefe selbst kann durch Integration der Eindringgeschwindigkeit bestimmt werden. Dabei ist allerdings wichtig, den Zeitpunkt des ersten Kontaktes möglichst genau zu kennen. Dessen Bestimmung sollte sich später als problematisch erweisen.

Die Kontaktkraft kann aus der Bewegungsgleichung des Indentors bestimmt werden. Dazu muss dessen Beschleunigung durch Differentiation aus der gemessenen Geschwindigkeit gewonnen werden.

5.1 Beschreibung der Messapparatur

Aufgrund der Notwendigkeit einer Führung für den Indentor, führt dieser keine geradlinige Bewegung aus, sondern bewegt sich kreisförmig um die Lagerachse. Im Kontakt jedoch ist der zurückgelegte Weg (maximale Eindringtiefe weniger als 1 mm) viel kleiner als der Radius der Kreisbewegung, und es kann näherungsweise von einer geradlinigen Bewegung ausgegangen werden. In der Abbildung 17 ist die Anwendung in horizontaler Lage dargestellt.

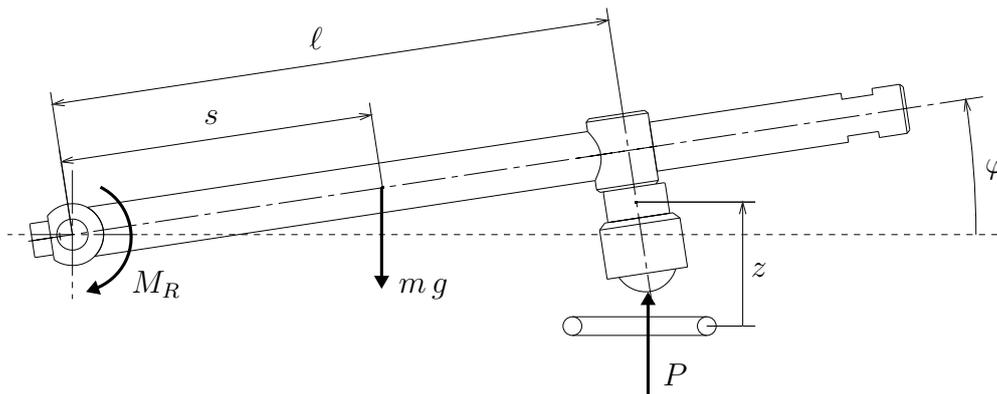


Abb. 17: Geometrie des ausgelenkten Systems.

Die folgenden tabellierten Werte sind aus der CAD Konstruktion in Catia entnommen. Die Masse und das Trägheitsmoment müßten bei einer Messung ohne Lageraußenringe bestimmt werden. Die hier verwendeten Lager sind jedoch

nicht zerstörungsfrei zerlegbar, sodass die Vergleichsmessung nur zur Kontrolle der Größenordnung diene.

$s = 50,2 \text{ mm}$	Abstand Lagerachse zum Schwerpunkt
$\ell = 90 \text{ mm}$	Abstand Lagerachse zum Indentor
$m = 42,58 \text{ g}$	Masse der bewegten Teile
$\Theta = 193,8 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$	Trägheitsmoment bezüglich Lagerachse

Die Abbildung 18 zeigt, wie die Koordinaten z (Abstand Spule-Magnet) und x (Eindringtiefe) definiert werden. Es wird sich herausstellen, dass die induzierte Spannung von der Relativgeschwindigkeit Spule-Magnet \dot{z} und dem Abstand Spule-Magnet z abhängig ist. Das hier die gesuchte Größe Eindringtiefe x nicht enthalten ist, macht für die Auswertung keinen großen Unterschied, es gilt lediglich zu beachten:

$$\dot{x}(t) = -\dot{z}(t) \text{ und } x(0) = 0. \quad (72)$$

Die Kontaktkraft $P(t)$ kann mittels des Drallsatzes aus der Beschleunigung des Indentors gewonnen werden. In der Abbildung 17 sind hierfür die zu berücksichtigenden Kräfte und Momente eingezeichnet. Die Änderung des Winkels φ ist während des Kontaktes sehr klein, sodass der Drallsatz ausgewertet für die Lagerachse eine Gleichung zur Berechnung der Kontaktkraft liefert:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -mgs - M_R + P\ell. \quad (73)$$

Da die Lagerreibung, wie sich später zeigen wird, klein gegenüber der Kontaktkraft ist, kann das Reibmoment vernachlässigt werden. Für die bereits vorausgesetzten kleinen Winkel φ gilt für die zeitliche Änderung des Spulenabstandes z die Näherung:

$$\dot{z} = \dot{\varphi} \ell \cos(\varphi) \approx \ell \dot{\varphi}. \quad (74)$$

Es folgt für die Kontaktkraft die Gleichung:

$$P(t) = \Theta \frac{\ddot{z}}{\ell^2} + mg \frac{s}{\ell}. \quad (75)$$

Wird die Apparatur gedreht, um beispielsweise an einer verbauten Probe zu messen, so ändert sich die Gewichtskraft. Sei α der Winkel um den die Probe zur Horizontalen gedreht ist, so ist $g \cos(\alpha)$ statt g einzusetzen.

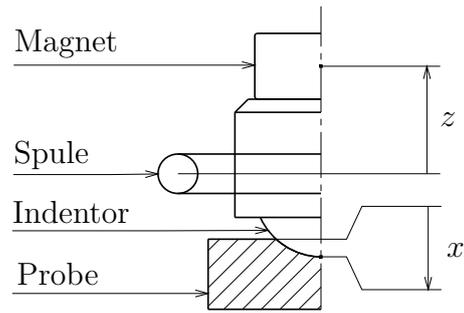


Abb. 18: Koordinaten im Kontakt: z Abstand Spule - Magnet, x Eindringtiefe.

5.2 Übertragungsfunktion Magnet - Spule

Die induzierte Spannung u_{ind} ist, wie aus Experimenten bekannt, proportional zu der Geschwindigkeit \dot{z} mit der sich ein Magnet durch eine Spule oder Leiterschleife bewegt:

$$u_{ind} = k(z) \cdot \dot{z}. \quad (76)$$

Anhand eines Modells soll die Abhängigkeit der Übertragungsfunktion k vom Ort des Magneten untersucht werden. Es sei hier auf das Lehrbuch *Elektromagnetische Felder* von Prof. Henke [33] verwiesen, aus dem die grundlegenden Formeln stammen.

Ausgangspunkt soll das Faradaysche Induktionsgesetz [33, S. 37] sein, nach dem die induzierte Spannung gleich der zeitlichen Abnahme des magnetischen Flusses ψ_m ist. Der magnetische Fluss ist definiert als Integral der magnetischen Induktion \mathbf{B} über der betrachteten Fläche. Bei dieser Fläche handelt es sich um den Kreis, der von der Spule umschlossen wird. Da die Spule jedoch n Windungen aufweist, wird die Fläche mehrfach umschlossen und damit die Fläche um n größer.

$$u_{ind} = -\frac{d\psi_m}{dt} \text{ mit } \psi_m = n \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} \quad (77)$$

Mithilfe des magnetischen Vektorpotentials \mathbf{A} [33, S. 149] lässt sich die magnetische Induktion \mathbf{B} ersetzen. Das Integral für den magnetischen Fluß kann nun unter Verwendung des Stokeschen Satzes in ein Ringintegral entlang des Randes ∂F der ursprünglichen Fläche F überführt werden.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \psi_m = n \int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{F} = n \oint_{\partial F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (78)$$

Der Magnet soll näherungsweise als Dipol betrachtet werden. Da ein Dipol unendlich klein ist, ist dies nur eine Näherung, die für kleine Magnete oder große Abstände zum Magneten gültig ist. Dessen Vektorpotential [33, S. 153] lautet:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_m \times \mathbf{r}. \quad (79)$$

mit dem Dipolmoment \mathbf{p}_m und dem Vektor \mathbf{r} , welcher vom Magneten aus auf den betrachteten Raumpunkt zeigt. Benutzt man die Magnetisierung \mathbf{M} [33, S. 157], so kann man für \mathbf{p}_m schreiben:

$$\mathbf{p}_m = -VM = -VM\mathbf{e}_z,$$

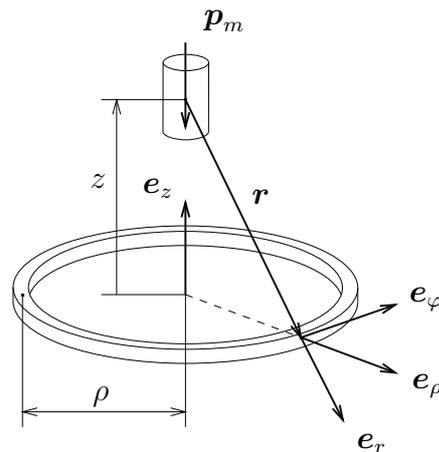


Abb. 19: Magnetischer Dipol über Spule.

und für das Vektorpotential auf der Schleife folgt:

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_z \times \frac{1}{r} \mathbf{r} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \times (\rho \mathbf{e}_\rho - z \mathbf{e}_z) = \frac{\rho}{r} \mathbf{e}_\varphi \rightarrow \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 \rho}{4\pi r^3} VM \mathbf{e}_\varphi. \quad (80)$$

Für das Ringintegral erhält man nun

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_\varphi \rho d\varphi \rightarrow \psi_m = -n \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 \rho^2}{4\pi r^3} VM d\varphi = -\frac{1}{2} \mu_0 n VM \rho^2 \frac{1}{r^3}$$

und leitet dies ab, um die induzierte Spannung zu erhalten:

$$\begin{aligned} u_{ind} &= -\frac{d\psi_m}{dt} = \frac{1}{2} \mu_0 n VM \rho^2 \frac{d}{dt} (\rho^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\underbrace{\frac{3}{2} \mu_0 n VM \rho^2 z}_{k_0} (\rho^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \dot{z} = -\underbrace{k_0 \rho^2 z (\rho^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}}_{k(z)} \dot{z}. \end{aligned} \quad (81)$$

Die Konstante k_0 kann experimentell bestimmt werden. Will man den Ort z nicht extra vermessen, so kann auch das Maximum gemessen werden, welches sich leicht finden lässt. Das Maximum befindet sich bei $\rho/2$ mit dem Wert:

$$\frac{dk(z)}{dz} = 0 \rightarrow z_{max} = \frac{\rho}{2}, \quad k_{max} = \frac{16k_0}{25\sqrt{5}\rho^2}. \quad (82)$$

Die Übertragungsfunktion ist in Abbildung 20 dargestellt. Es ist klar, dass die Berechnung der Geschwindigkeit aus der induzierten Spannung nur für den Fall eines nahezu festen Abstandes einfach ist. In diesem Fall wäre $k(z)$ konstant.

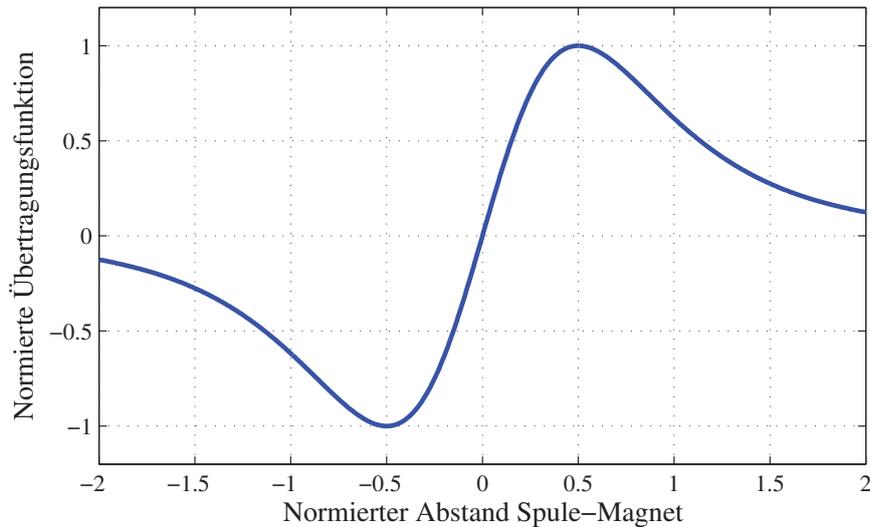


Abb. 20: Übertragungsfunktion (normiert $k(z)/k_{max}$ über z/ρ).

Berechnung von k_0 in der realisierten Apparatur

Auch wenn später die Konstante k_0 experimentell bestimmt wird, sollen hier vorerst Zahlenwerte eingesetzt werden. Dies ist hilfreich, um die Größenordnung der induzierten Spannung abzuschätzen. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick der bekannten Daten.

$\rho = 10,75 \text{ mm}$	Mittlerer Radius der Spule
$b = 1,5 \text{ mm}$	Kantenlänge des quadratischen Spulenquerschnitts
$V = 0,33 \text{ cm}^3$	Volumen des Magneten
$B_r \approx 1,3 \text{ T}$	Remanenz des Magneten [34]

Von der Spule ist die Geometrie und die Induktivität bekannt, leider jedoch nicht die Windungszahl. Für eine lange Luftspule kann man die Induktivität L aus Windungszahl n , umschlossene Fläche F und Länge b berechnen zu:

$$L = \frac{\mu_0 n^2 F}{b}$$

Mithilfe der Formel von Nagaoka [35] kann jedoch diese Gleichung mit einem Korrekturfaktor κ versehen und somit auch für dünne Spulen angewendet werden. Der Berechnungsvorschrift folgend, ergibt sich ein Durchmesser-Längenverhältnis von $\tan(\alpha) = 14,33$, ein Winkel von $\alpha = 86^\circ$ und damit der tabellierte Faktor $\kappa = 0,158$. Es folgt die Windungszahl zu:

$$L = \frac{\kappa \mu_0 n^2 F}{b} \rightarrow n = \sqrt{\frac{Lb}{\kappa \mu_0 \pi \rho^2}} \approx 99. \quad (83)$$

Durch die vom Hersteller angegebene Remanenz B_r ist nun alles bekannt, um k_0 und k_{max} zu berechnen:

$$k_0 = \frac{3}{2} n V \underbrace{\mu_0 M}_{B_r} = 6,381 \cdot 10^{-5} \text{ Vms}$$

$$k_{max} = \frac{16k_0}{25\sqrt{5}\rho^2} = 0,1577 \frac{\text{V}}{\text{m/s}}.$$

Das heißt, an der Stelle größter Sensitivität der Spule induziert eine Geschwindigkeit von 1m/s eine Spannung von 157mV .

5.3 Schwingversuch zur Abschätzung der Dämpfung

Das Gerät wird um 90° gedreht, so dass der Stab nach unten zeigt und frei schwingen kann. Nun wird der Stab aus der ausgelenkten Lage losgelassen und die Spannung über die Zeit gemessen. Das Ergebnis ist in Abbildung 21 zu sehen. Im Folgenden wird die Spannung nur am jeweiligen Maximum ausgewertet. Dies

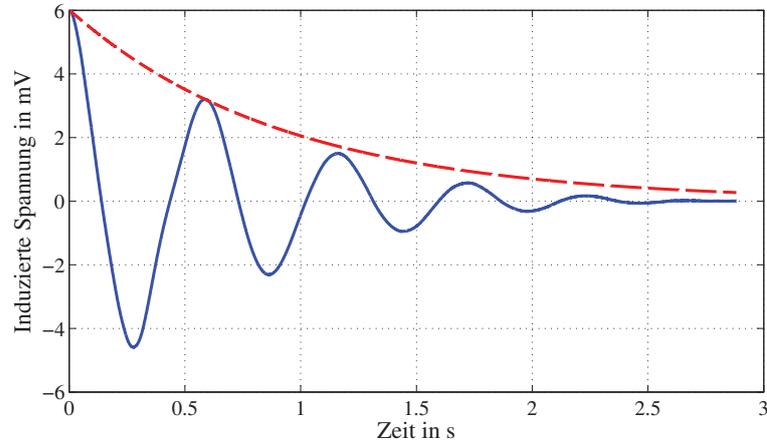


Abb. 21: Freie Schwingung des Stabes (blau: gemessene Daten, rot: exponentielles Abklingen der Amplituden).

ist immer der gleiche Ort, nämlich der Durchgang durch die Ruhelage, denn hier ist die Geschwindigkeit am größten. Demnach ist unabhängig von der Spannungsamplitude der (unbekannte) Übertragungsfaktor konstant.

Für die Bewegungsgleichung kann von Gleichung (73) ausgegangen werden. Für die Schwerkraft ist der Anteil senkrecht zur Stabachse einzusetzen: $g \rightarrow g \sin(\varphi)$. Wie in Abbildung 21 zu sehen, handelt es sich um eine Schwingung mit exponentiell abklingenden Amplituden. Aus diesem Grund wird das Reibmoment als viskose Dämpfung modelliert: $M_R = \nu \dot{\varphi}$. Schließlich ist die Kontaktkraft null und die linearisierte Bewegungsgleichung lautet:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -\nu \dot{\varphi} - s m g \sin(\varphi). \quad (84)$$

Die Auslenkung in horizontaler Richtung beträgt $x = \ell \sin(\varphi)$. Mit der Näherung für kleine Winkel $\sin(\varphi) \approx \varphi$ folgt die Gleichung für x :

$$\Theta \ddot{x} = -\nu \dot{x} - s m g x. \quad (85)$$

Die Lösung dieser Gleichung unter Annahme einer Anfangsauslenkung von null ergibt:

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t) \\ \dot{x} &= x_0 e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega_d t) + \omega_d \cos(\omega_d t)] \propto u_{ind} \end{aligned} \quad (86)$$

mit der Abkürzung δ und der Kreisfrequenz des gedämpften Systems ω_d

$$\delta = \frac{\nu}{2\Theta}, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta} - \delta^2}. \quad (87)$$

Aufgrund der Nichtlinearität der Übertragungsfunktion sind, wie bereits zu Beginn erwähnt, nur induzierte Spannungen am gleichen Ort x vergleichbar. Im Falle der Amplituden ist dies gegeben.

Werden die Amplitudenverhältnisse von mehreren Messungen verglichen, so ergibt sich die Dämpfung zu $\delta = 1,09/s$. Es wurden fünf Messungen durchgeführt, der Vertrauensbereich liegt für eine statistische Sicherheit von 95% bei $\pm 3\%$. Die Dämpferkonstante nimmt damit den Wert $\nu = 4,2 \cdot 10^{-4} N m s$ an.

Um eine Abschätzung für den Einfluß der Reibung auf den Stoßvorgang zu bekommen, wird die Vergleichskraft im Stoßpunkt für eine Geschwindigkeit von $1m/s$ berechnet:

$$F_V = \frac{M_R}{\ell} = \frac{\nu \dot{\varphi}}{\ell} = \frac{\nu \dot{x}}{\ell^2} \approx 52mN.$$

Im Vergleich zur Gewichtskraft $mg \approx 418mN$ ist F_V ein kleiner Wert und im Vergleich zu der noch größeren Kontaktkraft eine zu vernachlässigende Größe.

5.4 Kalibrierung mittels harmonischer Anregung

Ein Ansatz zur experimentellen Bestimmung der Konstante k_0 besteht darin, die Geschwindigkeit mechanisch vorzugeben und die induzierte Spannung zu messen. Aus dem Verhältnis induzierte Spannung zu tatsächlicher Geschwindigkeit im Punkt größter Übertragung folgt dann k_{max} . Im durchgeführten Experiment wurde eine harmonische Anregung gewählt. Die Amplituden der Schwingung können dann verglichen werden.

Versuchsaufbau

Ein Funktionsgenerator erzeugt eine sinusförmige Spannung, welche nach einem Leistungsverstärker eine Tauchspule (Shaker) speist. Der Shaker ist mittels eines Hebels an den Stab der Messapparatur gekoppelt, siehe dazu Abbildung 22. Ein auf dem Hebel sitzender Beschleunigungssensor gibt eine zur Beschleunigung proportionale Spannung aus, die integriert wird, um die Geschwindigkeit des Hebels zu erhalten. Mittels des Abstandsverhältnisses Lager-Magnet zu Lager-Hebel kann die Geschwindigkeit des Magneten bestimmt werden. Diese wird mit der induzierten Spannung verglichen (siehe Blockschaltbild in Abbildung 23).

Versuchsauswertung

Bei der Auswertung der Messreihen stellt sich heraus, dass der Übertragungsfaktor k_{max} von der Frequenz der harmonischen Anregung abhängig ist. Die Reihe in Tabelle 5 zeigt in etwa eine lineare Abhängigkeit. Dieses unerwartete Ergebnis macht eine Kalibrierung mit dieser Methode leider nicht möglich. Die harmonische Anregung ist auch nicht ohne weiteres mit tiefen Frequenzen (weit unter 50 Hz) durchzuführen, da dann entweder die Amplituden groß oder die Durchgangsgeschwindigkeit, und damit die induzierte Spannung, klein werden.

Die Ursachen für dieses Verhalten sind noch nicht abschließend geklärt. Vermutlich liegt dies jedoch an den induzierten Wirbelströmen im Spulenaufnehmer aus Aluminium. Deren Magnetfeld ist gegen die Ursache, das verursachende

Magnetfeld, gerichtet und schwächt dieses ab. Das Feld des magnetischen Dipolstrahlers ist linear abhängig von der Frequenz, wie in [33, S. 312 ff.] nachzulesen ist. Damit wird die induzierte Spannung mit steigender Frequenz kleiner und der Übertragungsfaktor größer.

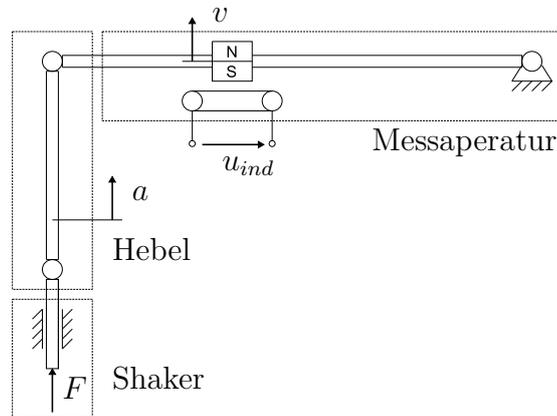


Abb. 22: Messaufbau zur harmonischen Anregung mittels Shaker.

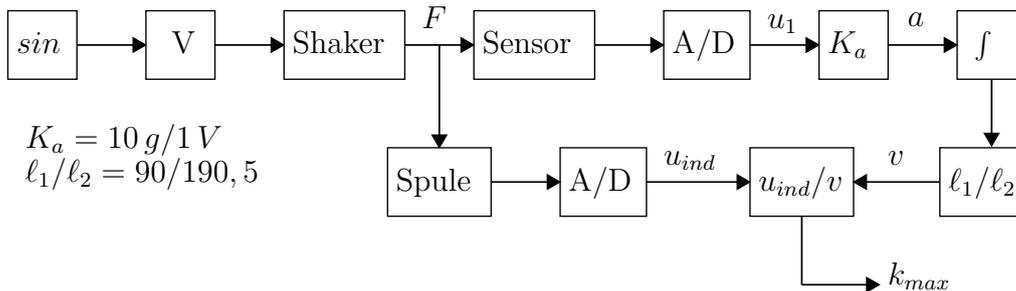


Abb. 23: Blockschaltbild des Versuchaufbaus.

Frequenz f in Hz	36	59	90	133	197
Übertragungsfaktor k_{max} in Vs/m	0,189	0,214	0,238	0,249	0,348

Tabelle 5: Übertragungsfaktor in Abhängigkeit von der Frequenz der harmonischen Anregung

5.5 Kalibrierung mittels Fallversuch

Das Experiment zur Kalibrierung mit harmonischer Anregung zeigte störende Einflüsse bei hohen Frequenzen. Ausweichend kann ein Versuch durchgeführt werden, der näher am eigentlichen Prallversuch liegt. Fällt der Stab einfach nach unten, so kann die Lösung der Bewegungsgleichung mit der gemessenen Spannung

verglichen werden. Die Frequenz liegt hier bei ca 2 Hz, so dass die Wirbelströme einen geringeren Einfluß haben sollten.

Da in der Übertragungsfunktion nur k_0 unbekannt ist, wird eine Gleichung zu deren Bestimmung abgeleitet. Dazu betrachten wir die Gleichung (81) und integrieren beide Seiten über die Zeit, vom Zeitpunkt $t = 0$, bei dem die Anfangsgeschwindigkeit 0 ist bis zum Erreichen der Spulenmitte. Dieser Punkt kann im Experiment leicht erkannt werden, da sich hier das Vorzeichen der Spannung umkehrt. Das Integral auf der rechten Seite lässt sich umschreiben durch $\dot{z}dt = dz$, und es folgt:

$$\int_0^T u_{ind} dt = - \int_{z_0}^0 k_0 \rho^2 z (\rho^2 + z^2)^{-5/2} dz = k_0 \frac{\rho}{3} [\rho^{-3/2} - (\rho^2 + z_0^2)^{-3/2}]. \quad (88)$$

Die Bewegung ist frei wählbar, sollte jedoch nur wenige Störungen (Wackeln) aufweisen und nicht zu schnell sein. Der Anfangspunkt ist am oberen Anschlag konstruktiv begrenzt bei $z_0 = 15,5 \text{ mm}$. Am einfachsten ist es, den Stab auszu lenken und schließlich fallen zu lassen. Störungen in der Anfangsphase sind hier vernachlässigbar, da die Sensitivität der Spule noch gering ist.

Bei Versuchen zeigte sich, dass der Umkehrpunkt in der Spulenmitte je nach verwendeter Distanzscheibe (siehe nächstes Kapitel) nicht zu erreichen ist. Dann wurde die steile Kurve kurz vor dem Aufprall auf die Begrenzung linear auf $u_{ind} = 0$ extrapoliert, siehe dazu auch die Abbildungen 24. Die gemessenen Faktoren lauten nun:

$$k_0 \approx 7,25 \cdot 10^{-5} \text{ Vms}, \quad k_{max} \approx 0,18 \frac{\text{V}}{\text{m/s}}.$$

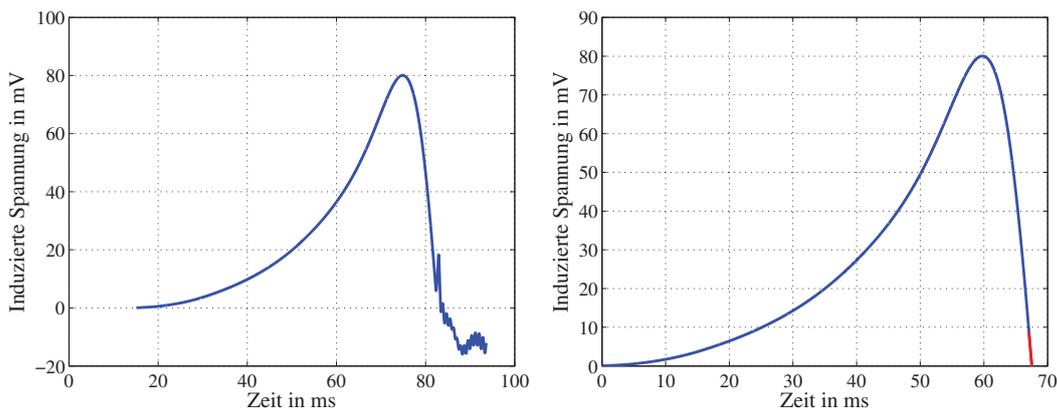


Abb. 24: Induzierte Spannung beim Fallversuch ohne Probe: links endet der freie Fall am Anschlag, rechts wurde dieser Teil linear extrapoliert (rot).

5.6 Wahl des Kontaktpunktes

Zu Beginn der Konstruktion war eine der Annahmen, dass die Nichtlinearität der Spule kein Problem darstellt. Zwar würde die Übertragungsfunktion vom Ort abhängen, jedoch die Verschiebung während des Kontaktes so klein sein, dass sie vernachlässigbar ist. Die folgende Abschätzung zeigt, wie groß der Fehler durch diese Annahme ist. Die Experimente zeigen Kontaktzeiten von ca 1 ms. Bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 0,5 m/s ergibt das eine Eindringtiefe von ca. 0,5 mm. Die relative Änderung der Übertragungsfunktion sei wie folgt definiert:

$$\Delta k(z) := \frac{\max\{|k(z) - k(z + \Delta z)|, |k(z) - k(z - \Delta z)|\}}{k(z)}. \quad (89)$$

Der grafische Verlauf ist in Abbildung 25 zu sehen. Würde die Übertragungsfunktion in der Auswertung als konstant angenommen, so wäre Gleichung (89) der Fehler, mit dem die gemessene Geschwindigkeit behaftet wäre. Es zeigt sich im Fernfeld ($z/\rho > 1$) ein Fehler von ca 7%. Im Maximum der Übertragungsfunktion ($z/\rho = 1/2$) liegt der Fehler bei ca 1%. Es ist also sinnvoll, den Stoßpunkt in das Maximum zu legen, zumal die Sensitivität hier am höchsten ist.

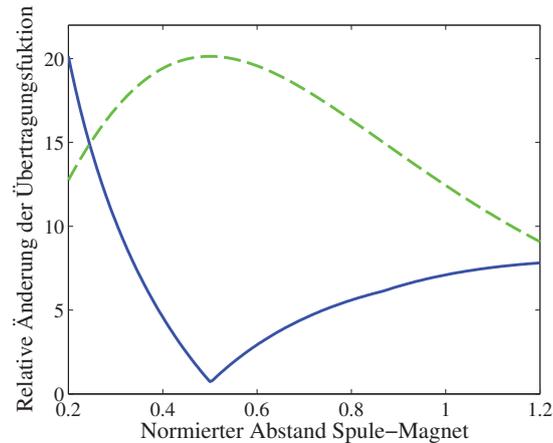


Abb. 25: Relative Änderung der Übertragungsfunktion in % für eine Eindringtiefe von 0,5 mm.

Kontaktpunkt einstellen

Um den Stoßpunkt einzustellen, wird die Dicke der Unterlegscheibe zwischen Indentor und Magnet variiert. Anschließend führt man einen Prallversuch auf einen harten Gegenstand durch und betrachtet die Ableitung der induzierten Spannung. Im gesuchten Maximum ist $k' = 0$ und mit $\ddot{z} = -g$ folgt:

$$-\dot{u}_{ind} = \frac{d(k\dot{z})}{dt} = k\ddot{z} + \frac{dk}{dz} \frac{dz}{dt} \dot{z} = k\ddot{z} + k'\dot{z}^2 \rightarrow \dot{u}_{ind} = g k_{max}.$$

5.7 Ansatz zur Korrektur der Nichtlinearität der Spule

Im Folgenden soll ein Weg beschrieben werden, wie die Nichtlinearität der Spule in der Auswertung der Meßdaten ausgeglichen werden kann. Dazu wird eine Annahme an die Bewegung vor dem Aufprall getroffen, anhand derer der genaue Kontaktpunkt bestimmt wird. Anschließend wird das hergeleitete Modell genutzt, um die Geschwindigkeit aus der induzierten Spannung zu berechnen.

Nehmen wir wieder die Bewegungsgleichung (73) und gehen von viskoser Dämpfung aus. Da es noch keinen Kontakt gibt, fällt die Kontaktkraft heraus. Es folgt die Bewegungsgleichung

$$0 = \ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \tilde{g}, \quad \tilde{g} = \frac{msl}{\Theta}g = 0,993 \cdot g \approx g \quad (90)$$

mit der Lösung:

$$z(t) = \frac{\tilde{g} + 2\delta\dot{z}_0}{4\delta^2}(1 - e^{-2\delta t}) - \frac{\tilde{g}t}{2\delta} + z_0. \quad (91)$$

Setzt man diese Lösung in die Gleichung für die induzierte Spannung ein, so erhält man ein Modell mit den noch unbekanntem Parametern z_0 und \dot{z}_0 . Nun kann das Modell mit den gemessenen Werten u_{ind} verglichen werden. Die Parameter lassen sich durch Minimierung der Summe der Fehlerquadrate finden:

$$\sum_{i=0}^n [u_{ind}(t_i) + k(z(t_i)) \cdot \dot{z}(t_i)]^2 \rightarrow \min. \quad (92)$$

Einsetzen der Zeit des Kontaktbeginns liefert den Spulenabstand und die Geschwindigkeit zu Beginn der Eindringphase. Numerisches integrieren ergibt die Eindringtiefe, die in jedem Zeitschritt gebraucht wird, um den neuen Übertragungsfaktor zu errechnen. Sei $t = t_c$ der Zeitpunkt des ersten Kontaktes und folgende Notation gegeben:

$$t_i = t_c + ih, \quad z_i = z(t_i), \quad v_i = v(t_i), \quad u_i = u_{ind}(t_i), \quad (93)$$

so ist in jedem Schritt unter Verwendung der Trapezregel die folgende Berechnung durchzuführen:

$$v_{i+1} = \frac{u_{i+1}}{k_i}, \quad z_{i+1} = z_i - h \frac{v_i + v_{i+1}}{2}, \quad k_{i+1} = k(z_{i+1}). \quad (94)$$

6 Durchführung einer Messung

Die Überlegungen aus den vorangegangenen Abschnitten werden für die Messdatenauswertung in Matlab umgesetzt. Mit ihnen ist es möglich die Zielfunktion allein aus der gemessenen Geschwindigkeit zu rekonstruieren. Wie dies gelingt, ist in den folgenden Abschnitten erläutert.

6.1 Messwerterfassung mit SignalExpress

Für die Messdatenerfassung wurden der AD-Wandler USB-6215 und die Software SignalExpress, Teil des Softwarepaketes LabView, von National Instruments verwendet. Da beide Produkte vom gleichen Hersteller stammen, sind diese aufeinander abgestimmt. Die Kompatibilität war erwartungsgemäß gut. Für die Datenerfassung wurde ein Skript geschrieben. Dieses liest die Daten aus und speichert diese, wenn ein Prallversuch erkannt wurde. Das Skript und eine ausführliche Dokumentation dazu befinden sich auf der beigelegten CD im Ordner SignalExpress.

Eine Messung mit oder auch ohne Probe wird nun wie folgt durchgeführt:

1. Skript *prall.seproj* in SignalExpress laden.
2. Im letzten Schritt den Dateinamen der Ausgabe anpassen.
3. Skript ausführen.
4. Eine beliebiger Anzahl an Messungen durchführen.
5. Skript stoppen.

Jede Messung wird in einer separaten Datei abgelegt, die Dateinamen werden fortlaufend nummeriert. Beim Beenden des Skriptes legt SignalExpress die letzten Messdaten ein zweites mal ab, sodass die zuletzt gespeicherte Datei gelöscht werden kann.

6.2 Auswertung mit Matlab

Die zuvor gespeicherten ASCII Dateien werden mit Matlab-Programmen ausgewertet. Auf der beigelegten CD befinden sich im Ordner Matlab die entsprechenden Programme (*.m) und eine ausführliche Dokumentation. Die ebenfalls dort hinterlegten ausführbaren Anwendungen (*.exe) sind auf einem Rechner ohne installiertem Matlab erst nach Installation der MCRInstaller.exe nutzbar.

6.2.1 Konfiguration

Die Konfiguration geschieht mittels der Datei `parameter.txt`. Hier werden Variablen zur Programmsteuerung gesetzt, wie auch in Tabelle 6 als Überblick ersichtlich ist. Prinzipiell sind alle Daten in SI-Einheiten anzugeben. Die Bedeutung der Variablen wird im Folgenden erklärt.

Parameter	Kurzbeschreibung	Beispiel
Filterung der Daten (Butterworth-Tiefpassfilter)		
LP_G	Stufe des Filters	0, 1, 2, ...
LP_T	Kehrwert der Grenzfrequenz	1e-3
Glättung der Daten (Savitzky Golay Filter)		
SG_G	Grad des Interpolationspolynoms	1, 2, 3, ...
SG_F	Fensterbreite	21, 23, ...
Extrapolationspolynom		
EX_G	Grad des Polynoms	2, 3, ...
Geometrieparameter		
AP_G	Effektive Erdbeschleunigung	9.81
AP_R	Mittlerer Radius der Spule	10.75e-3
AP_D	Dämpfung durch Lagerreibung	1
AP_K	Maximaler Übertragungsfaktor	0.1800
AP_H	Maximale freie Fallhöhe des Indentors	15.5e-3
Eigenschaften des Indentors		
IN_R	Radius der Kugel	5e-3
IN_M	reduzierte Masse des Indentors	23.93e-3
Materialparameter		
MA_N	Querkontraktionszahl	0.5

Tabelle 6: Kurzreferenz der in der `parameter.txt` hinterlegten Variablen (alle Angaben in SI-Einheiten).

Tiefpassfilter

Der Tiefpassfilter soll unerwünschte Schwingungen die oberhalb der Grenzfrequenz liegen herausfiltern. Er ist in Matlab als Butterworth-Filter mit vorzuzugender Stufe (LP_G) implementiert. Die Grenzfrequenz wird durch ein Zeitfenster (LP_T) definiert, welches der Periodendauer einer durch den Filter nicht gedämpften Schwingung entspricht. Für das Zeitfenster kann also der Kehrwert der Grenzfrequenz eingesetzt werden. Das Zeitfenster darf jedoch nicht größer als die Dauer einer Messung (Standard: 0,2 Sekunden) sein. Soll der Filter nicht benutzt werden, ist dessen Stufe auf 0 zu setzen. Da ein Stoßvorgang ca. 1 Millisekunde dauert, ist dies eine geeignete Größe für das Zeitfenster.

Glättung der Daten

Mittels eines Savitzky Golay Filters werden die Daten geglättet. Dazu wird für jeden Messpunkt ein interpolierendes Polynom an die Messwerte in dessen Umgebung angepasst. Die Koeffizienten die dafür benötigt werden, berechnet Matlab mittels der Minimierung der Fehlerquadratrate. Ein Vorteil dieses Filters ist die Möglichkeit die (geglätteten) Ableitungen ebenfalls berechnen zu können.

Die Größe der Umgebung wird durch ein Fenster definiert, dass die Punkte links und rechts, sowie den Mittelpunkt beinhaltet. Die Anzahl der Werte, die dieses Fenster enthalten soll (SG_F) ist vorzugeben. Die Zahl muss ungerade und größer als der Polynomgrad sein. Je breiter das Fenster, desto stärker ist die Glättung.

Das anzupassende Polynom wird über seinen Grad (SG_G) definiert. Je höher der Polynomgrad, desto besser die Approximation und schlechter die Glättung. Um Ableitungen zu berechnen, muss der Polynomgrad jedoch mindestens so groß wie die höchste gewünschte Ableitung sein. Da im Programm die erste Ableitung berechnet wird, ist hier mindestens ein Grad von eins anzusetzen. Gute Ergebnisse wurden mit einem Grad von zwei erzielt.

Extrapolation

Um den Zeitpunkt des ersten Kontaktes zu finden, werden die Messwerte, welche sicher vor diesem Punkt liegen, extrapoliert. Wenn ein Punkt gefunden ist, für den die nachfolgenden Punkte in eine Richtung von dieser Extrapolation abweichen, ist das der gesuchte Stoßpunkt. Mit dem Parameter EX_G wird der Grad des zu verwendenden Polynoms für die Extrapolation festgelegt.

Geometrieparameter

Der mittlere Radius der Spule (AP_R) und die maximale freie Fallhöhe (AP_H) werden für die Kalibrierung gebraucht. Die verwendeten Gleichungen für den Fallversuch sind in Abschnitt 5.5 enthalten. Der hier gewonnene maximale Übertragungsfaktor (AP_K) wird in der Auswertung benötigt.

Für eine spätere Umsetzung der Korrektur der Nichtlinearität der Spule (siehe Abschnitt 5.7) werden die effektive Fallbeschleunigung (AP_G) und die Dämpfung (AP_D) gebraucht. Sei α der Winkel, um den die Probe zur Horizontalen gedreht ist, so ist g durch $g\cos(\alpha)$ zu ersetzen. Die Dämpfung folgt aus einem Schwingversuch, der in Abschnitt 5.3 dargestellt ist. Die beiden Parameter werden in der aktuellen Programmversion nicht benutzt, da die Übertragungsfunktion der Spule als konstant angenommen wird.

Eigenschaften des Indentors

Der Radius der verbauten Kugel ist als IN_R und die reduzierte Indentormasse als IN_M zu hinterlegen. Die reduzierte Masse m_R (siehe Gleichung (75)) berechnet sich wie folgt:

$$m_R = \Theta / \ell^2 = \frac{193,8 \cdot 10^{-6} \text{kgm}^2}{(90\text{mm})^2} \approx 23,93\text{g} \quad (95)$$

Dabei ist Θ das Trägheitsmoment bezüglich der Lagerachse, und ℓ der Abstand der Lagerachse zum Indentor.

Materialparameter

In der Versuchsauswertung wird die Querkontraktionzahl ν als zeitlich konstant angenommen. Sie wird mit dem Parameter MA_N festgelegt.

6.2.2 Kalibrierung

Wie in Abschnitt 5.5 erläutert ist, wird für die Kalibrierung ein Fallversuch ohne Probe durchgeführt. Das Programm gibt einen Plot der induzierten Spannung über der Zeit und zusätzlich die berechneten Faktoren aus. Der Aufruf aus Matlab bzw. in der Kommandozeile lautet:

Matlab	Kommandozeile
Programm: kalib.m	Programm: kalib.exe
Aufruf: kalib('Dateiname.txt')	Aufruf: kalib Dateiname.txt

6.2.3 Bestimmung der Relaxationsfunktion

Das Programm zur Auswertung wird wie folgt gestartet:

Matlab	Kommandozeile
Programm: run.m	Programm: run.exe
Aufruf: run('Dateiname.txt')	Aufruf: run Dateiname.txt

Die Daten werden im Programm gefiltert und geglättet (Butterworth-Filter und Savitzky Golay Filter, siehe Konfiguration).

Um den Zeitpunkt des ersten Kontaktes zu finden, werden die Messwerte, welche sicher vor dem Kontaktpunkt liegen, extrapoliert. Anschließend wird ein Punkt gesucht, für den die nachfolgenden Werte in eine Richtung abweichen. Dies ist in guter Näherung der gesuchte Stoßpunkt. Allerdings kann es bei verrauschten Signalen erschwert sein, den Punkt automatisiert zu finden. Im folgenden Plot (siehe Abbildung 26) wird die Geschwindigkeit in blau (oben), die Beschleunigung

in blau (unten), das Extrapolationspolynom in rot, die Grenzen des Intervalls der zur Extrapolation verwendeten Werte mit zwei roten Punkten und das Zeitfenster der Eindringphase durch einen schwarzen Rahmen dargestellt. Der Benutzer kann nun den linken Rand des Zeitfensters, also den Zeitpunkt des ersten Kontaktes, mithilfe der Pfeiltasten verschieben (Strg, Alt und Shift erhöhen die Schrittweite). Ist das Zeitfenster gut gewählt, kann das Fenster geschlossen oder Return gedrückt werden. Die Berechnung der Relaxationsfunktion wird anschließend automatisch angestoßen. Mittels des in Abschnitt 3.1.4 vorgestellten Verfahrens wird

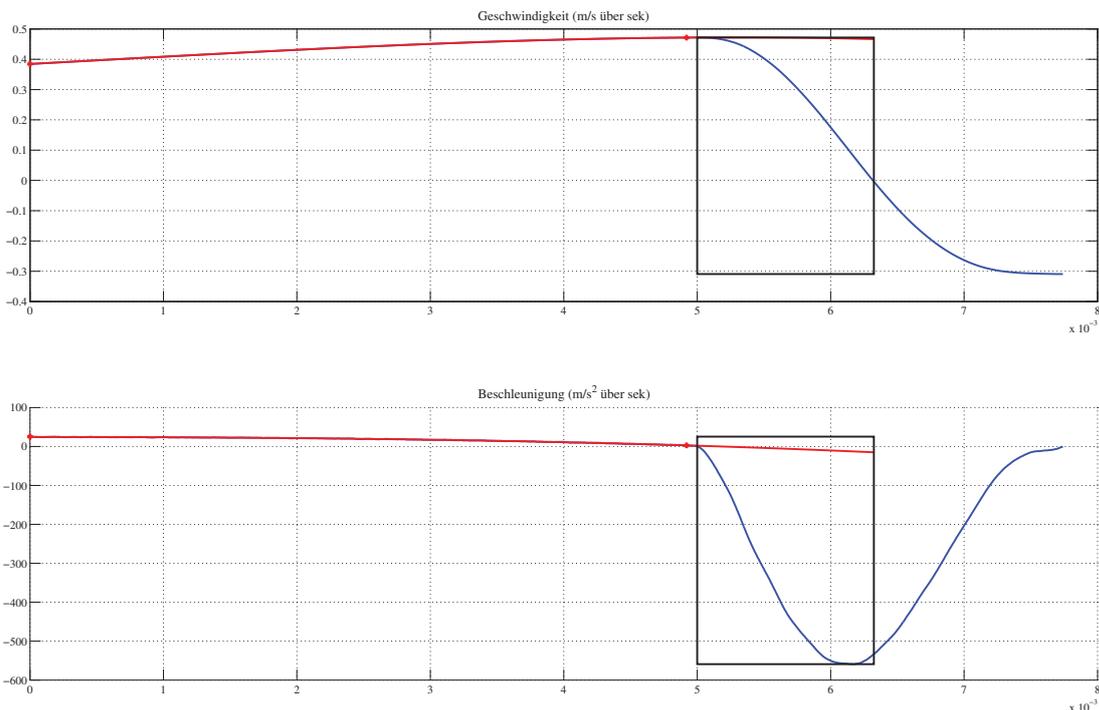


Abb. 26: Anzeige der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, der schwarze Rahmen bezeichnet den Bereich der Eindringphase.

nun die Relaxationsfunktion berechnet. Das Ergebnis wird verwendet, um die Eindringphase zu simulieren und ein vergleichender Plot erzeugt. Folgende Ausgabe erzeugt einen Programmdurchlauf (aufgerufen mit Dateiname.txt):

Ausgabe	Datei
Relaxationsfunktion (Grafik)	Dateiname_relax.pdf (Abb. 27)
Relaxationsfunktion (Gewichte)	Dateiname_relax.mat
Vergleichender Plot (Grafik)	Dateiname_vergleich.pdf (Abb. 28)

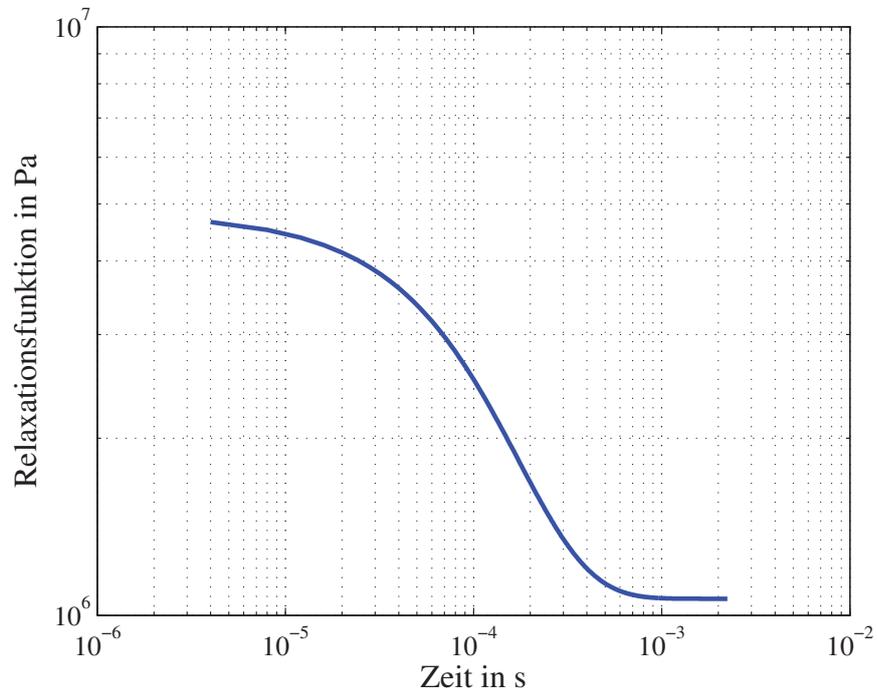


Abb. 27: Gemessene Relaxationsfunktion.

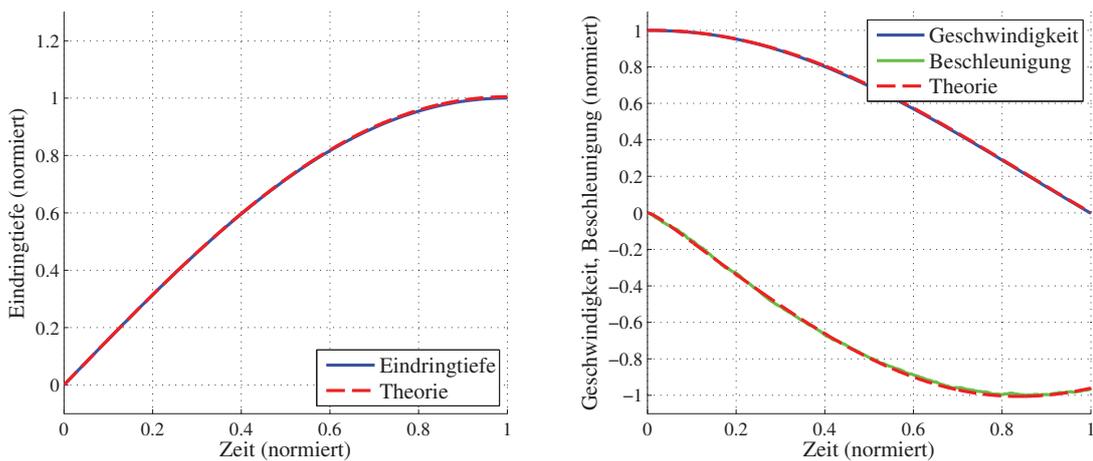


Abb. 28: Vergleich zwischen der aus der gemessenen Relaxationsfunktion (siehe Abbildung 27) berechneten Lösung und den Messwerten. Die dargestellten Größen sind jeweils auf das Maximum der Messwerte bezogen.

7 Fazit

Es ist nun gelungen das Prinzip des Stoßes eines sphärischen Indentors mit einem viskoelastischen Halbraum für ein Messverfahren zur Anwendung zu bringen. Die Schwierigkeiten bei der Lösung des inversen Problems sind der maßgebliche Grund, warum dieses Verfahren nur eine geringe Verbreitung gefunden hat. Erst mit einem expliziten Ansatz für die Zielfunktion ist dies gelungen. Andere Verfahren bieten die Lösung bereits in expliziter Form (siehe Abschnitt 1.2), und sind daher einfacher in ihrer Anwendung.

Als schwierig stellte sich die Identifizierung des Zeitpunktes des ersten Kontaktes heraus. Da die gemessenen Größen sich nur langsam ändern, besteht hier eine gewisse Unsicherheit. Dadurch war in der Softwarelösung eine Automatisierung leider nicht umsetzbar. Jedoch ist der Kompromiss, mittels Benutzereingabe den gefundenen Punkt zu überprüfen, effektiv und stellt die Konsistenz der Daten sicher.

Ein kleineres Problem besteht noch in dem Verfahren der kleinsten positiven Fehlerquadrate. Zum Einen ist die Wahl des Relaxationspektrums (gleichverteilt auf logarithmischer Zeitachse) empirisch zwar zufriedenstellend jedoch noch nicht mathematisch fundiert. Zum Anderen sind die Messgrößen zu Beginn des Stoßes klein, und damit die zugehörigen zu minimierenden Fehlerquadrate in der Summe unterrepräsentiert. Dies ist durch eine geeignete Gewichtung der Summe in Gleichung (66) zu lösen.

Vorteil und Nachteil zu gleich ist die kurze Dauer des Experiments. Da die Messung nur ca. drei Sekunden dauert, ist sie natürlich schnell durchzuführen. Dadurch reicht es bei der Nutzung der Zeit-Temperatur-Verschiebung die Probe zu kühlen bzw. zu erhitzen, denn sie kann nur mit begrenzter Zeit die Umgebungstemperatur annehmen. Durch die zeitliche Auflösung des AD-Wandlers (Abtastrate) umfasst das auszuwertende Zeitfenster jedoch nur zwei bis drei Zehnerpotenzen. Dieses Zeitfenster lässt sich nur schwer vergrößern. Eine höhere Kontaktzeit erfordert eine größere Aufprallgeschwindigkeit, die damit eine höhere Eindringtiefe bedeutet, die wiederum nur zulässig ist, wenn der Indentorradius groß genug ist. Die gesamte Apparatur wäre also zu vergrößern.

Wie zu erwarten war, leidet der Prototyp noch unter einigen Kinderkrankheiten. Das Gerät ist zwar gut benutzbar, jedoch einigen konstruktiven Verbesserungen durchaus zugänglich. Insbesondere der Verwendung zusätzlicher Sensoren sollte in einer weiteren Arbeit besonderer Raum eingeräumt werden. Ebenfalls interessant wäre die Möglichkeit, das Zeitfenster durch mehrere Stoßvorgänge in kurzer Zeit zu erweitern.

Literaturverzeichnis

- [1] SCHWARZL, Friedrich R.: *Polymermechanik: Struktur und mechanisches Verhalten von Polymeren*. Springer, 1990
- [2] FERRY, John D.: *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley & Sons, 1980
- [3] POPOV, V. L.: *Kontaktmechanik und Reibung: Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Nanotribologie bis zur numerischen Simulation*. Springer, 2009
- [4] WEBER, Hubert ; ULRICH, Helmut: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation: Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 2012
- [5] CHENGA, Yang-Tse ; CHENG, Che-Min: Scaling, dimensional analysis, and indentation measurements. In: *Materials Science and Engineering* 44 (2004), S. 91–149
- [6] SEE, Howard ; MAHER, Ann-Marie ; FIELD, John ; PFISTER, Bruno ; SWAIN, Michael ; PHAN-THIEN, Nhan: Measurement of the viscoelastic properties of bituminous materials using an oscillating needle technique. In: *Rheologica Acta* 38 (1999), S. 443–450
- [7] HUANG, G. ; LU, H.: Measurements of Two Independent Viscoelastic Functions by Nanoindentation. In: *Experimental Mechanics* 47 (2007), Nr. 1, S. 87–98
- [8] HUNTER, S. C.: The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960), Nr. 4, S. 219–234
- [9] ALBERTONI, Geo. J.: Impact Machine for Rubber Testing: Determining the Stress-Strain Diagram at High Speed. In: *Industrial & Engineering Chemistry Analytical Edition* 9 (1937), Nr. 1, S. 30–34
- [10] GORDON, Manfred ; GRIEVESON, Brian M.: Rebound relaxation spectra and principle of constant isoelastic curing rates. In: *Journal of Polymer Science* 29 (1958), Nr. 119, S. 9–35
- [11] Norm DIN 53512 April 2000. *Bestimmung der Rückprall-Elastizität (Schob-Pendel)*
- [12] Norm DIN EN ISO 8307 März 2008. *Weich-elastische polymere Schaumstoffe - Bestimmung der Kugel-Rückprallelastizität*

-
- [13] SOUTHERN, E. ; THOMAS, A. G.: The Impact of Rigid Spheres on Rubber. In: *JOURNAL OF APPLIED POLYMER SCIENCE* 16 (1972), S. 1641–1651
- [14] BASSI, A. C.: Dynamic Modulus of Rubber by Impact and Rebound Measurements. In: *Polymer Engineering and Science* 18 (1978), Nr. 10, S. 750–754
- [15] POUYET, J. ; LATAILLADE, J. L.: Dynamic investigation of hard viscoelastic materials by ball bouncing experiments. In: *Journal of Material Science* 10 (1975), S. 2112–2116
- [16] LUBERT, W. ; RINK, M. ; PAVAN, A.: Force-displacement evaluation of macromolecular materials in flexural impact tests. I. Apparatus and data handling. In: *Journal of Applied Polymer Science* 20 (1976), Nr. 4, S. 1107–1116
- [17] NAIRN, J. A.: Measurement of polymer viscoelastic response during an impact experiment. In: *Polymer Engineering & Science* 29 (1989), S. 654–661
- [18] LARSON, Ronald G. ; GOYAL, Suresh ; ALOISIO, Charles: A predictive model for impact response of viscoelastic polymers in drop tests. In: *Rheologica Acta* 35 (1996), Nr. 3, S. 252–264
- [19] RUDNITSKY, V. A. ; DJAKOVICH, V. V.: The Estimation of Elastic Modulus of Metallic Materials by Dynamic Indentation Method. In: *Materials Science Forum* 210-213 (1996), Nr. 6, S. 391–396
- [20] VRIEND, Nathalie M. ; KREN, Alexander P.: Determination of the viscoelastic properties of elastomeric materials by the dynamic indentation method. In: *Polymer Testing* 23 (2004), S. 369–375
- [21] KREN, A. P. ; NAUMOV, A.O.: Determination of the relaxation function for viscoelastic materials at low velocity impact. In: *International Journal of Impact Engineering* 37 (2010), S. 170–176
- [22] JOHNSON, K. L.: *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985
- [23] HERTZ, Heinrich: Ueber die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), S. 156–171
- [24] LEE, E. H. ; RADOK, J. R. M.: The contact problem for viscoelastic bodies. In: *Journal of Applied Mechanics* 27 (1960), Nr. 3, S. 438–444
- [25] SABIN, G.C.W.: The impact of a rigid axisymmetric indenter on a viscoelastic half-space. In: *International Journal of Engineering Science* 2 (1987), S. 235–251

-
- [26] CALVIT, Harry H.: Numerical solution of the problem of impact of a rigid sphere onto a linear viscoelastic half-space and comparison with experiment. In: *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967), Nr. 6, S. 951–960
- [27] BOLLHÖFER, Matthias ; MEHRMANN, Volker: *Numerische Mathematik: Eine projektorientierte Einführung für Ingenieure, Mathematiker und Naturwissenschaftler*. Vieweg, 2004
- [28] HOPKINS, I. L. ; HAMMING, R. W.: On Creep and Relaxation. In: *Journal of Applied Physics* 28 (1957), Nr. 8, S. 906–909
- [29] KNOFF, Warren F. ; HOPKINS, Irving L.: An Improved Numerical Interconversion for Creep Compliance and Relaxation Modulus. In: *Journal of Applied Polymer Science* 16 (1972), S. 2963–2972
- [30] LIU, Yunkang: Calculation of discrete relaxation modulus and creep compliance. In: *Rheologica Acta* 38 (1999), Nr. 4, S. 357–364
- [31] LIU, Yunkang: A direct method for obtaining discrete relaxation spectra from creep data. In: *Rheologica Acta* 40 (2001), Nr. 3, S. 256–260
- [32] LAWSON, C. L. ; HANSON, R. J.: *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, 1974
- [33] HENKE, Heino: *Elektromagnetische Felder - Theorie und Anwendung*. Springer, 2003
- [34] SCHMITT, Franz-Josef: *Physikalische Magnet-Daten*. Fa. Webcraft GmbH, www.supermagnete.de/data_table.php, Abruf: 04.02.2012
- [35] NAGAOKA, Hantaro: The Inductance Coefficients of Solenoids. In: *Journal of the college of science, imperial university, tokoy, Japan* XXVII (1909), Nr. 6

A Anhang

A.1 Verlauf von Kriech- und Relaxationsfunktion

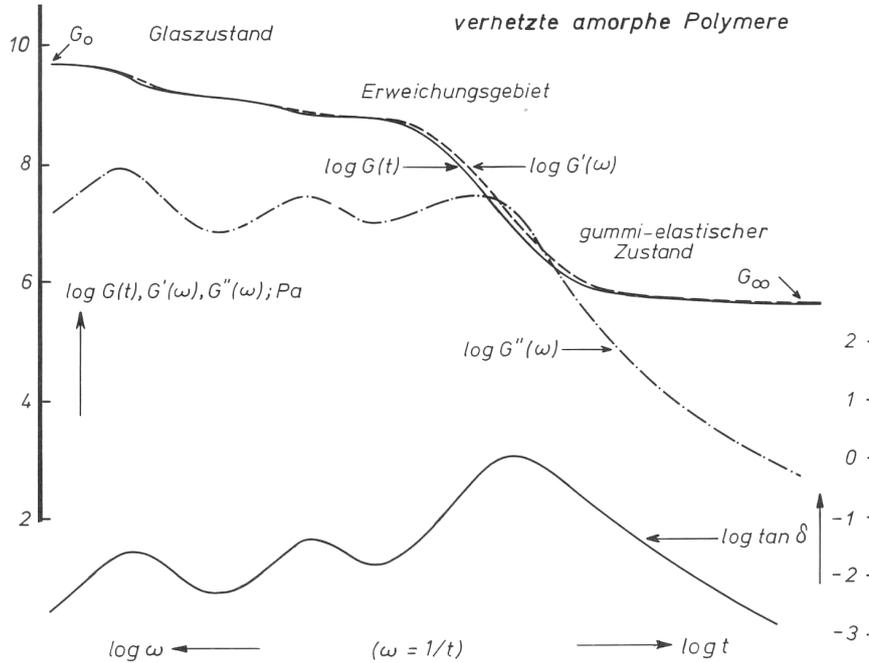


Abb. 29: Relaxationsfunktion in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz in doppelt logarithmischer Darstellung für amorphe, vernetzte Polymere. Quelle: [1, Abbildung 8.45, S. 193].

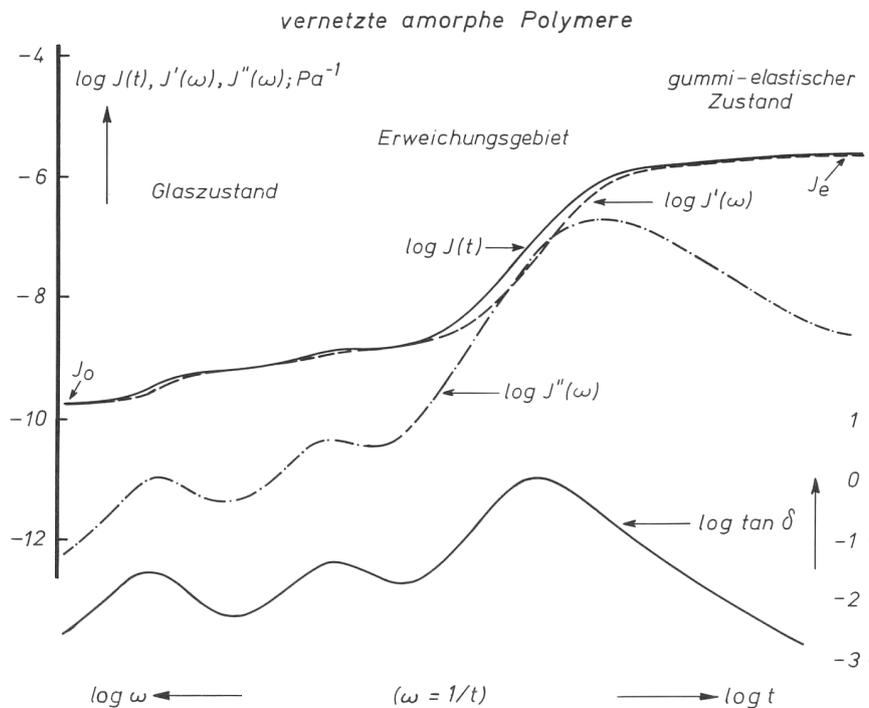


Abb. 30: Kriechfunktion in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz in doppelt logarithmischer Darstellung für amorphe, vernetzte Polymere. Quelle: [1, Abbildung 8.44, S. 192].

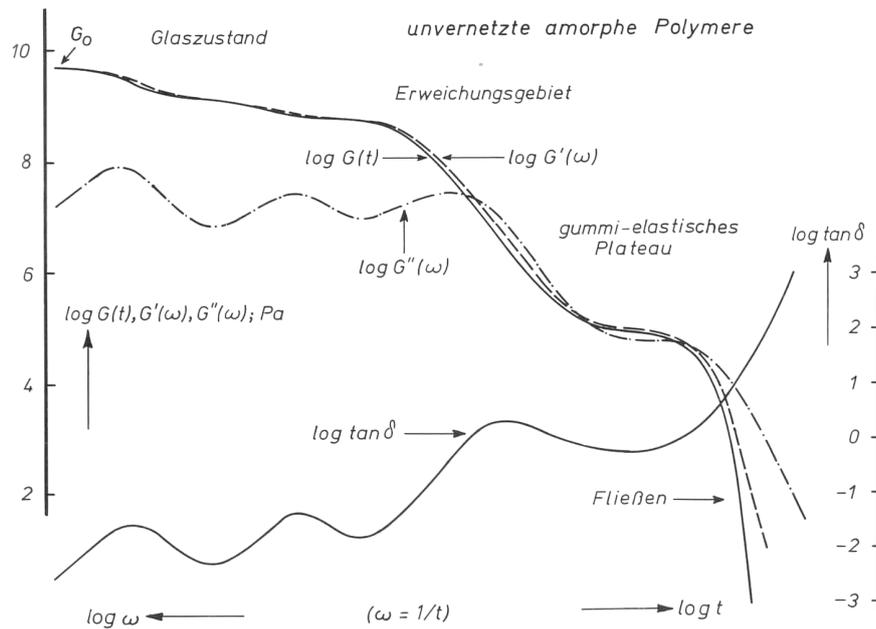


Abb. 31: Relaxationsfunktion in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz in doppelt logarithmischer Darstellung für amorphe, unvernetzte Polymere. Quelle: [1, Abbildung 8.47, S. 195].

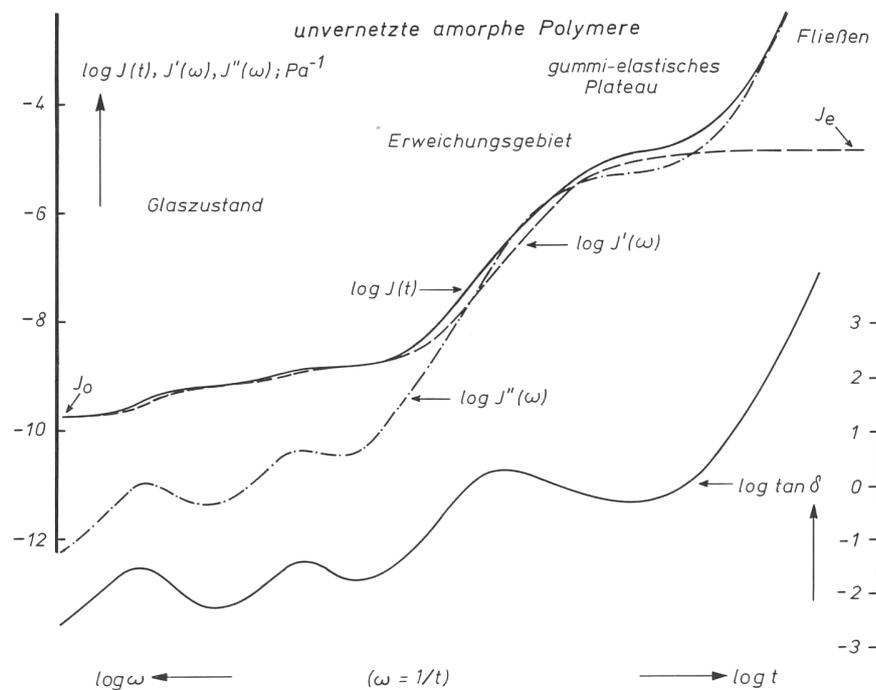
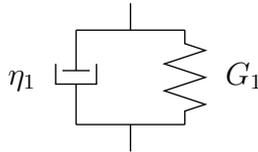


Abb. 32: Kriechfunktion in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz in doppelt logarithmischer Darstellung für amorphe, unvernetzte Polymere. Quelle: [1, Abbildung 8.46, S. 194].

A.2 Ersatzmodelle

Voigt-Modell



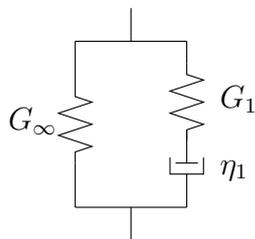
Aus dem allgemeinen Kelvin-Modell erhalten wir die Kriechfunktion zu:

$$J(t) = G_1^{-1} [1 - \exp(-t/\tau_1)] \text{ mit } \tau_1 = \eta_1/G_1$$

Abb. 33: Voigt-Modell. und mittels Gleichung (6) die Relaxationsfunktion zu:

$$G(t) = G_1 \exp(-t/\tau_1) + \delta(t)\eta_1.$$

Standard-Modell



Aus dem allgemeinen Maxwell-Modell erhalten wir die Relaxationsfunktion zu:

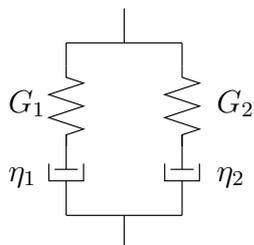
$$G(t) = G_\infty + G_1 \exp(-t/\tau_1) \text{ mit } \tau_1 = \eta_1/G_1$$

und mittels Gleichung (6) die Kriechfunktion zu:

$$J(t) = \frac{G_1}{G_\infty(G_\infty + G_1)} \left[\frac{G_\infty}{G_1} + 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1} \frac{G_\infty}{G_0 + G_1}\right) \right].$$

Abb. 34: Standard-Modell.

Zwei Maxwell-Elemente



Aus den allgemeinen Maxwell-Modell erhalten wir Relaxationsfunktion zu:

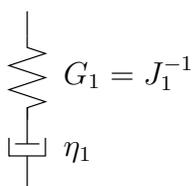
$$G(t) = G_1 e^{-t/\tau_1} + G_2 e^{-t/\tau_2} \text{ mit } \tau_i = \eta_i/G_i$$

und mittels Gleichung (6) die Kriechfunktion zu:

$$J(t) = \frac{G_1 \tau_1 (t + \tau_1) + G_2 \tau_2 (t + \tau_2)}{(G_1 \tau_1 + G_2 \tau_2)^2} - \frac{G_1 G_2 (\tau_1 - \tau_2)^2}{(G_1 + G_2)(G_1 \tau_1 + G_2 \tau_2)^2} \exp\left(-t \frac{G_1 \tau_1 + G_2 \tau_2}{(G_1 + G_2) \tau_1 \tau_2}\right).$$

Abb. 35: Zwei Maxwell-Elemente.

Maxwell-Element



Dieses Element ist als Spezialfall in beiden allgemeinen Modellen enthalten. Damit folgen die Materialfunktionen zu:

$$J(t) = J_1 + \frac{t}{\eta_1}$$

$$G(t) = G_1 \exp(-t/\tau_1) \text{ mit } \tau_1 = \eta_1/G_1.$$

Abb. 36: Maxwell-Element.

A.3 Konstruktionszeichnungen

Die Konstruktion wurde in CATIA entworfen und schließlich in Form der folgenden Zeichnungen in die Fertigung gegeben. In Abbildung 37 ist ein Schnitt durch das Modell zu sehen und in Abbildung 38 das gebaute Messgerät.

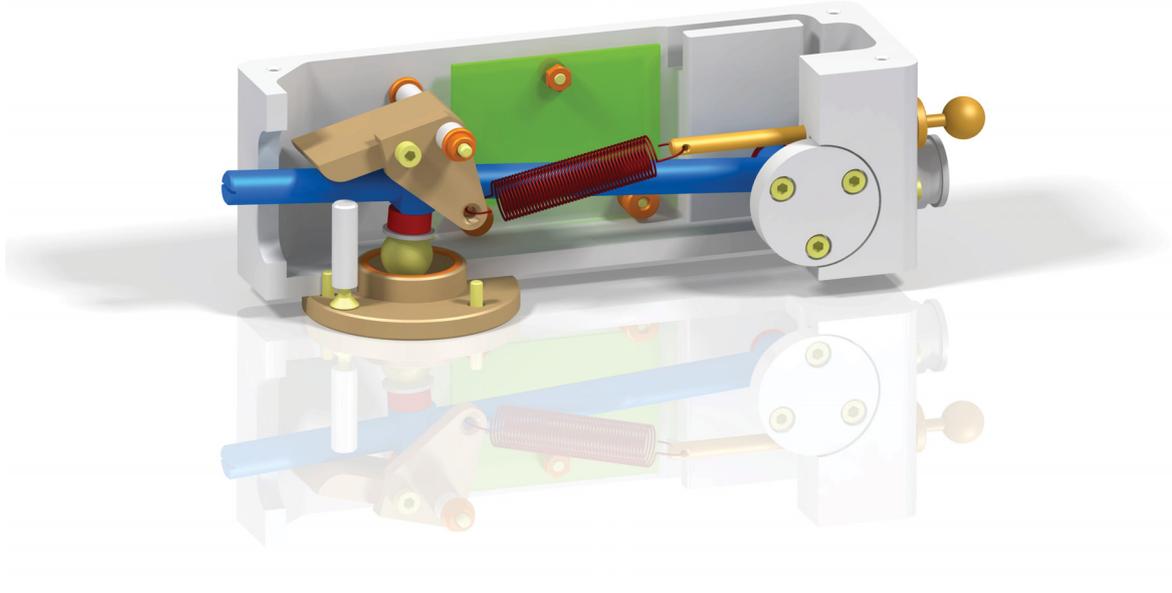


Abb. 37: 3D Modell der Messapertur.



Abb. 38: Bild des Prototypen.

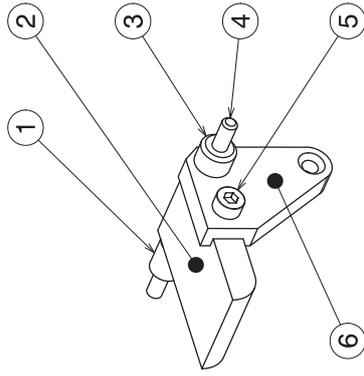
Pos.	Anz.	Benennung	Teilzeichnung/Anmerkung	Material
1	1	Abstandshülse	Blatt 04	Aluminium (AlMgSi0,5)
2	1	Spannaufklage	Blatt 05	Aluminium (AlMgSi0,5)
3	1	DIN 705 - A3	Stellring	Messing (CuZn39Pb3), vernickelt
4	1	Spannachse	Blatt 04	Messing (CuZn39Pb3)
5	1	ISO 4762 - M3x8	Zylinderschraube mit Innensechskant	Aluminium (AlMg3)
6	1	Spannhebel	Blatt 06	Aluminium (AlMgSi0,5)
10	1	ISO 4032 - M3	Sechskantmutter	Aluminium (AlMg3)
11	1	Platine	Lochrasterplatine 35x50	
12	2	Platinenaufnehmer	Blatt 07	Aluminium (AlMgSi0,5)
13	1	Distanzstück	Blatt 07	Aluminium (AlMgSi0,5)
14	3	ISO 10642 - M3x12	Senkschraube mit Innensechskant	Aluminium (AlMg3)
20	1	Griff	Blatt 08	Aluminium (AlMgSi0,5)
21	1	Gewichtsaufnahme	Blatt 09	Aluminium (AlMgSi0,5)
22	1	Stab	Blatt 10	Aluminium (AlMgSi0,5)
23	2	Sprengring A5 DIN 7993	Runddraht-Sprengring	Federstahldraht (DIN 17 223)
24	1	Radialkugellager	Fa. NMB: L-1050ZZ oder Fa. PBI: MR105ZZ	Stahl
25	1	Achse	Blatt 11	Messing (CuZn39Pb3)
26	1	ISO 4762 - M3x14	Zylinderschraube mit Innensechskant	Aluminium (AlMg3)
27	1	Radialkugellager mit Flansch	Fa. NMB: LF-1050ZZ oder Fa. PBI: MF105ZZ	Stahl
28	1	Ringmagnet	Außen-/Innendurchmesser: 10/4 mm, Höhe 5 mm	NdFeB
29	1	Scheibe ISO 7089 - 4	Unterlegscheibe, Art und Dicke nach Kalibrierung	Stahl (X12Cr13)
30	1	Kugelaufnahme	Blatt 12	Aluminium (AlMgSi0,5)
31	1	Indenter	Blatt 12	Stahl (X12Cr13)
40	1	Deckel	Blatt 13	Polycarbonat (klar)
41	8	ISO 10642 - M3x10	Senkschraube mit Innensechskant	Aluminium (AlMg3)
42	1	Anschlag	Blatt 14	Aluminium (AlMgSi0,5)
43	6	ISO 4762 - M3x10	Zylinderschraube mit Innensechskant	Aluminium (AlMg3)
44	1	Lagerdeckel links	Blatt 15	Aluminium (AlMgSi0,5)
45	1	Spulenaufnahme	Blatt 17	Aluminium (AlMgSi0,5)
46	1	Spule	Außen-/Innendurchmesser: 23/20 mm, Höhe 1 mm	Kupfer
47	2	DIN 1850 - V 3x6x4	Bundlager, ölgetränkt	Sinterbronze (Sint-B50)
48	1	Kasten	Blatt 18	Aluminium (AlMgSi0,5)
49	1	Lagerdeckel rechts	Blatt 16	Aluminium (AlMgSi0,5)
50	2	ISO 1207 M3x6	Zylinderschraube mit Schlitz	Aluminium (AlMg3)
51	1	Einbaukupplung	DIN Steckverbinder mit Bajonettverschluss, 4 Pole	
52	1	Kugelknopf DIN 319 - C 12		Messing (CuZn39Pb3)
53	1	Rändelmutter DIN 467 M4		Messing (CuZn39Pb3)
54	1	Zugstab	Blatt 14	Messing (CuZn39Pb3)
55	1	Feder	Freie Länge 40mm, max. Ausdehnung 50mm, max. Kraft 5N Einbau: Zwischen Zugstab (54) und Spannhebel (6)	

Nummer und Bauteilbezeichnung

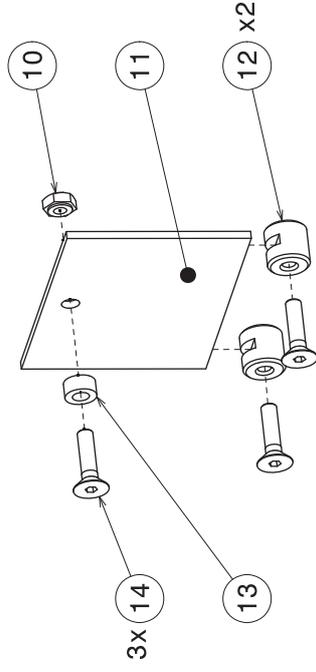
Stückliste

Werkstoff		Allgemeintoleranzen	
Maßstab	Blatt 01	Datum 13.01.12	Ersteller Stephan Kusche

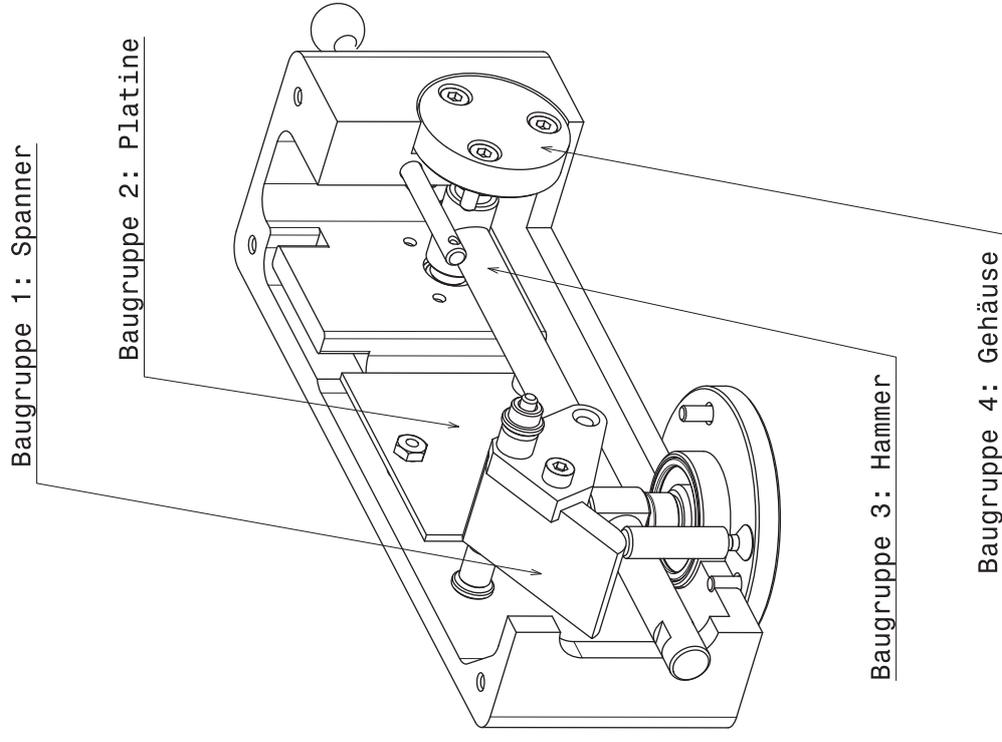
Baugruppe 1: Spanner



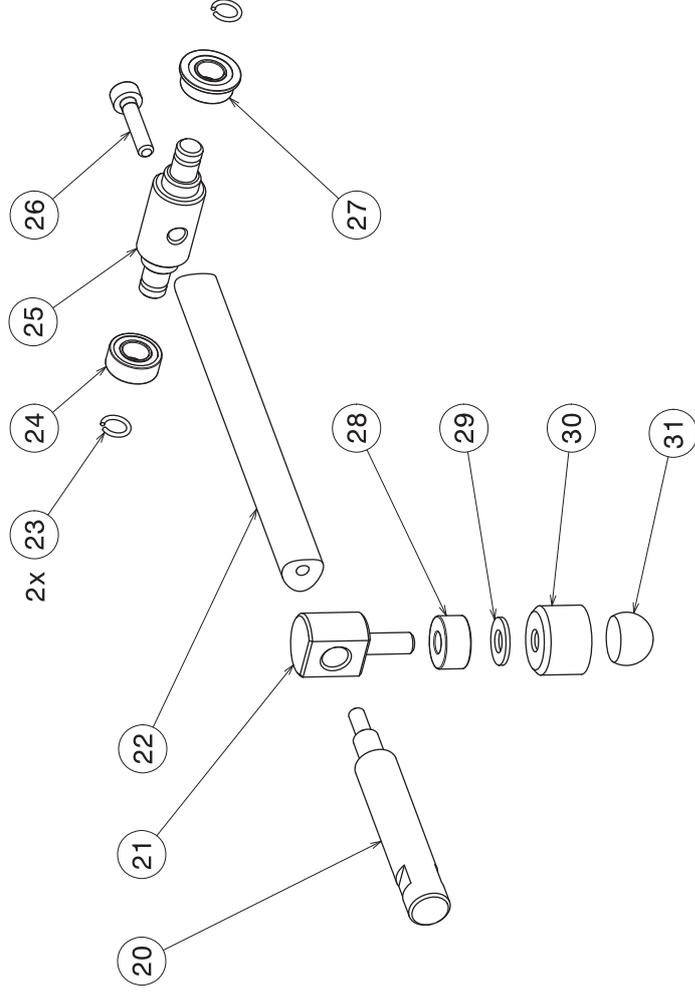
Baugruppe 2: Platine



Baugruppenübersicht



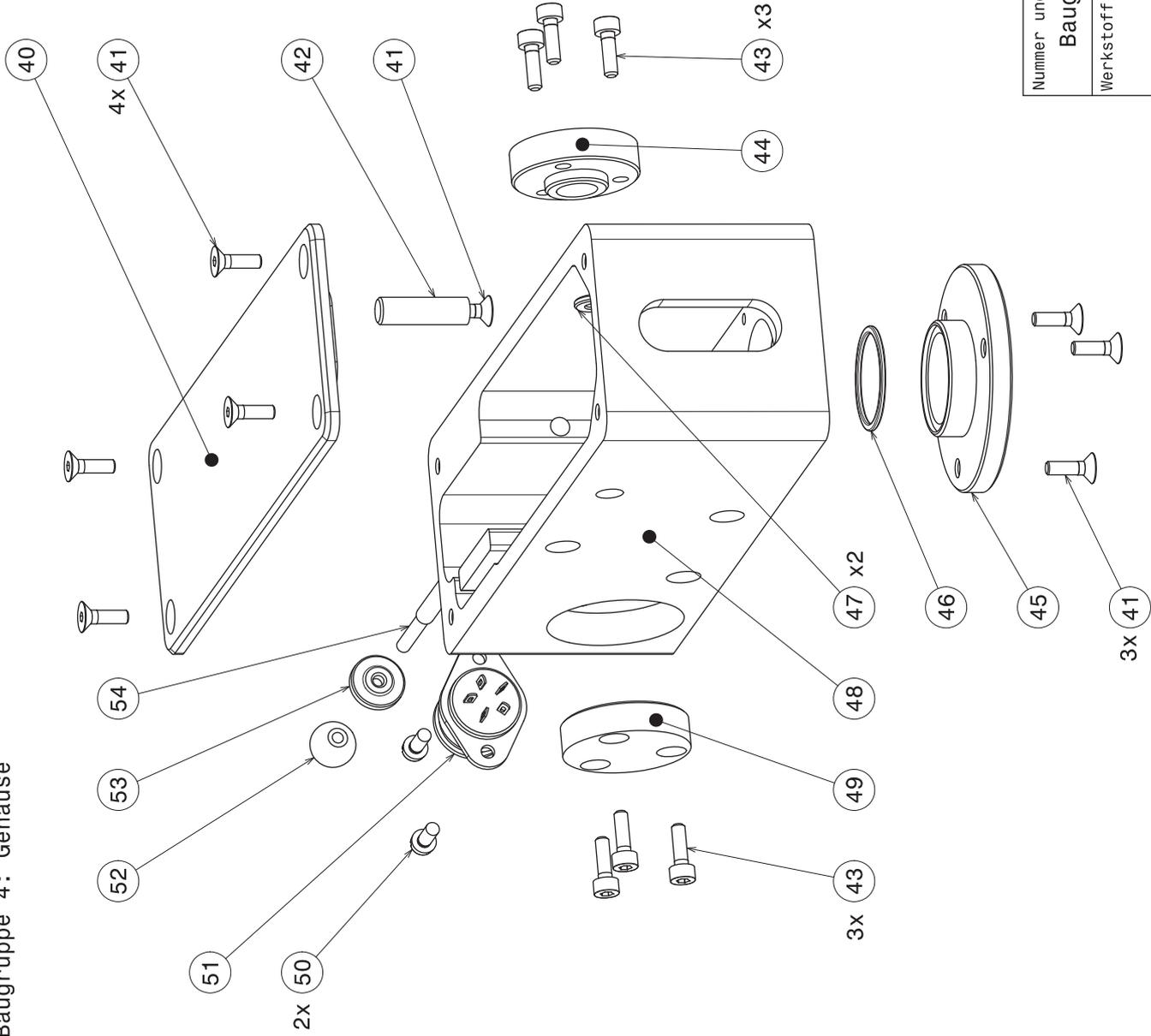
Baugruppe 3: Hammer



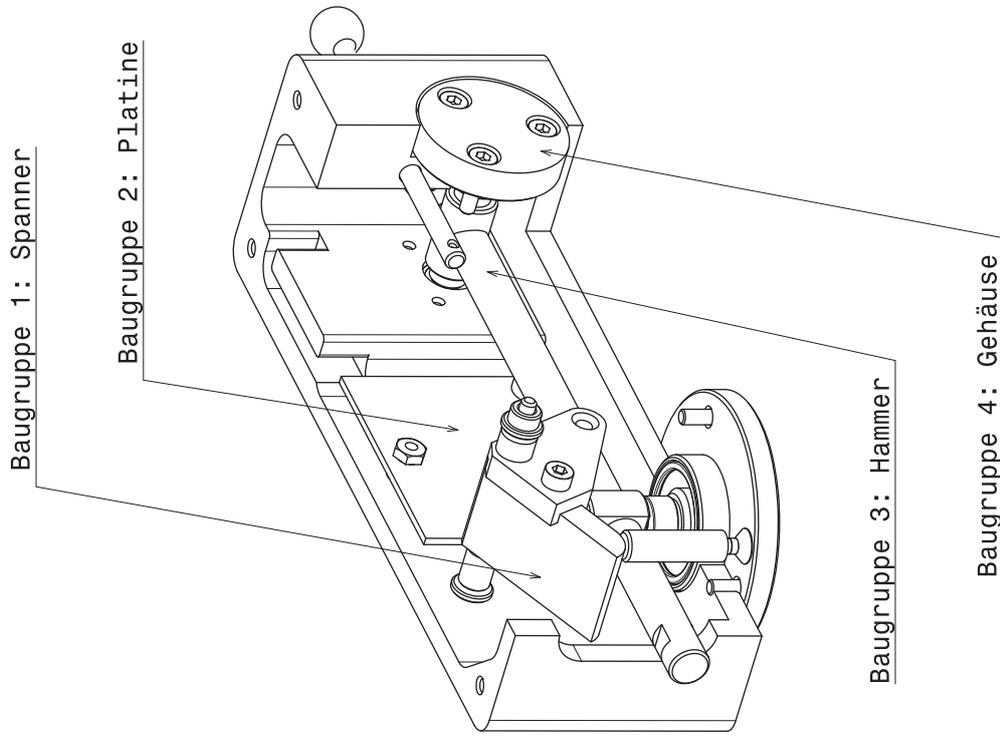
Packmaße (LxBxH): 185x50x58

Nummer und Bauteilbezeichnung		Format	
Baugruppenübersicht und Baugruppe 1 bis 3		A3	
Werkstoff			
Allgemeintoleranzen			
Maßstab	Blatt	Datum	Ersteller
1:1	02	13.01.2012	Stephan Kusche

Baugruppe 4: Gehäuse



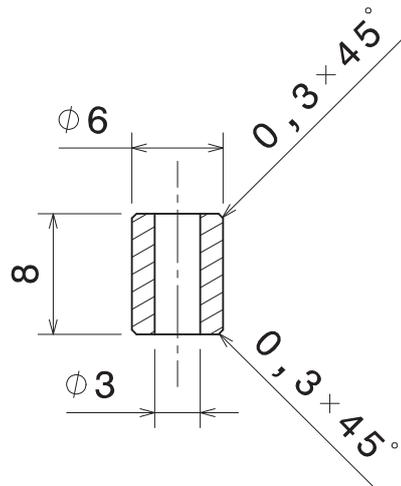
Baugruppenübersicht



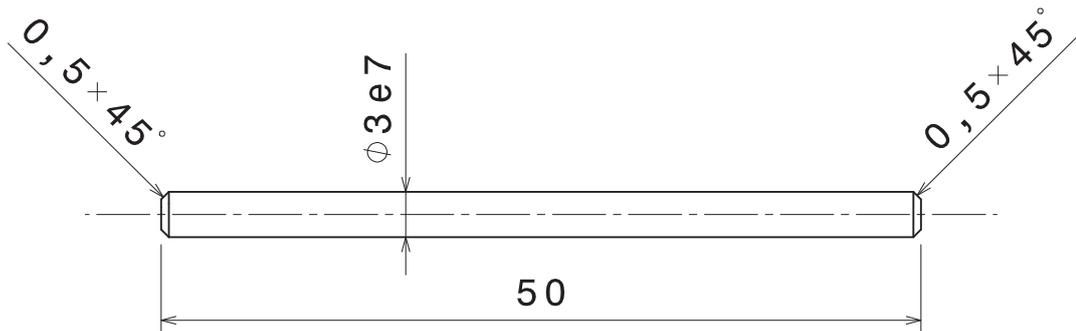
Packmaße (LxBxH): 185x50x58

Nummer und Bauteilbezeichnung		Format	
Baugruppenübersicht und Baugruppe 4		A3	
Werkstoff			
Allgemeintoleranzen			
Maßstab	Blatt	Datum	Ersteller
1:1	03	13.01.2012	Stephan Kusche

01 Abstandshülse



04 Spannachse



Nummer und Bauteilbezeichnung

01 Abstandshülse / 04 Spannachse

Format

A4

Werkstoff

01: AlMgSi0,5 / 04: CuZn39Pb3

Allgemeintoleranzen

DIN ISO 2768-1 m

Maßstab

2:1

Blatt

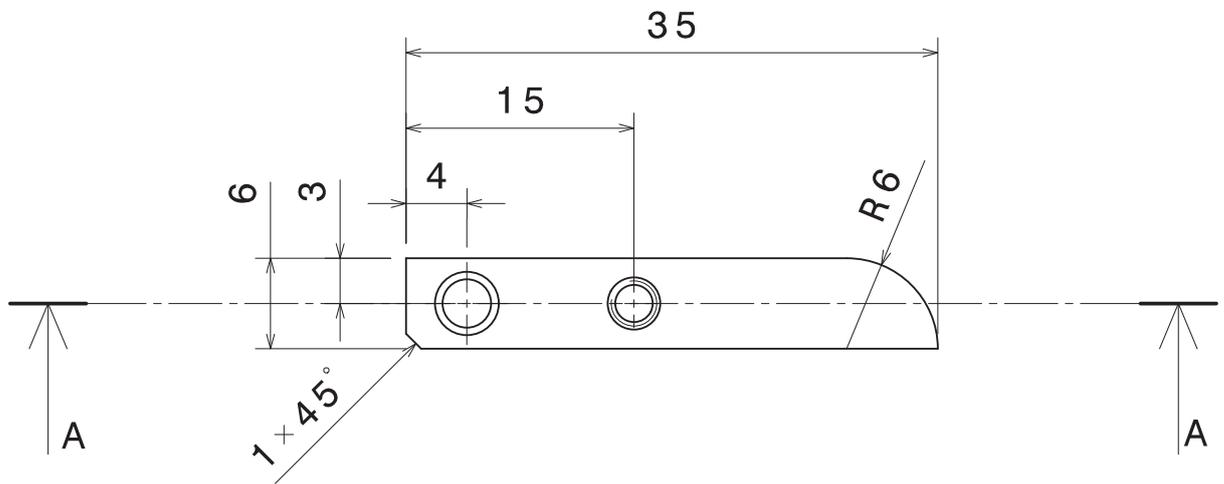
04

Datum

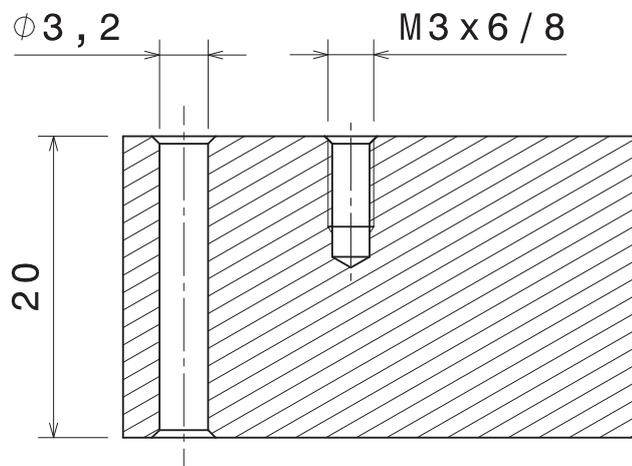
13.01.2012

Ersteller

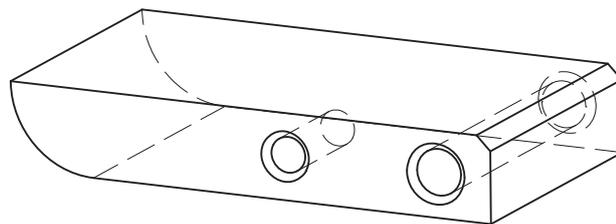
Stephan Kusche



Schnitt A-A



Isometrische Ansicht



Nicht bemaßte Senkungen $\phi 3,5 \times 90^\circ$

Nummer und Bauteilbezeichnung
02 Spannauflage

Format
A4

Werkstoff
AlMgSi0,5

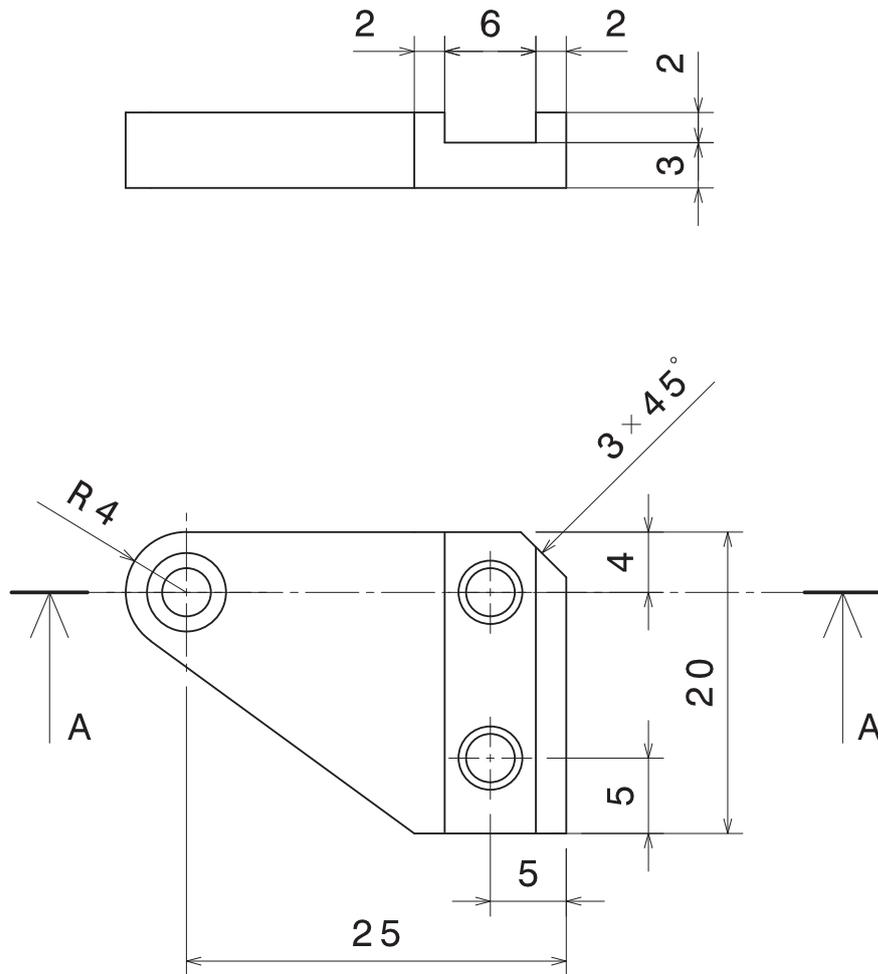
Allgemeintoleranzen
DIN ISO 2768-1 m

Maßstab
2:1

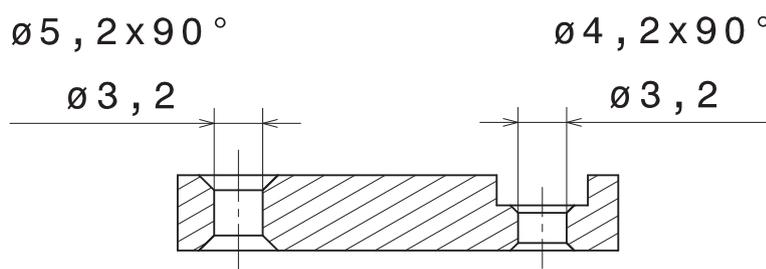
Blatt
05

Datum
13.01.2012

Ersteller
Stephan Kusche



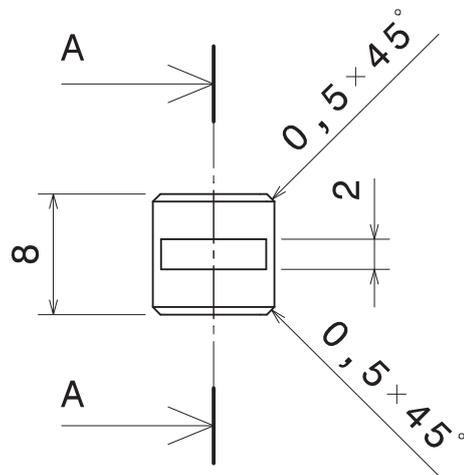
Schnitt A-A



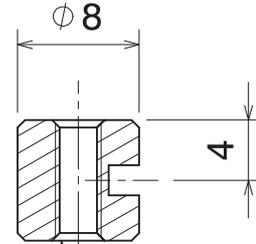
Alle Senkungen beidseitig

Nummer und Bauteilbezeichnung 06 Spannhebel			Format A4
Werkstoff AlMgSi0,5		Allgmeintoleranzen DIN ISO 2768-1 m	
Maßstab 2:1	Blatt 06	Datum 13.01.2012	Ersteller Stephan Kusche

12 Platinenaufnehmer

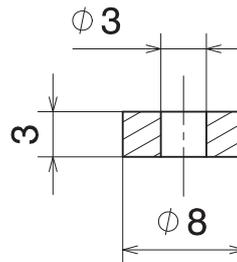


Schnitt A-A



ø3,5x90° beidseitig
M3

13 Distanzstück



Nummer und Bauteilbezeichnung

12 Platinenaufnehmer, 13 Distanzstück

Format

A4

Werkstoff

AlMgSi0,5

Allgemeintoleranzen

DIN ISO 2768-1 m

Maßstab

2:1

Blatt

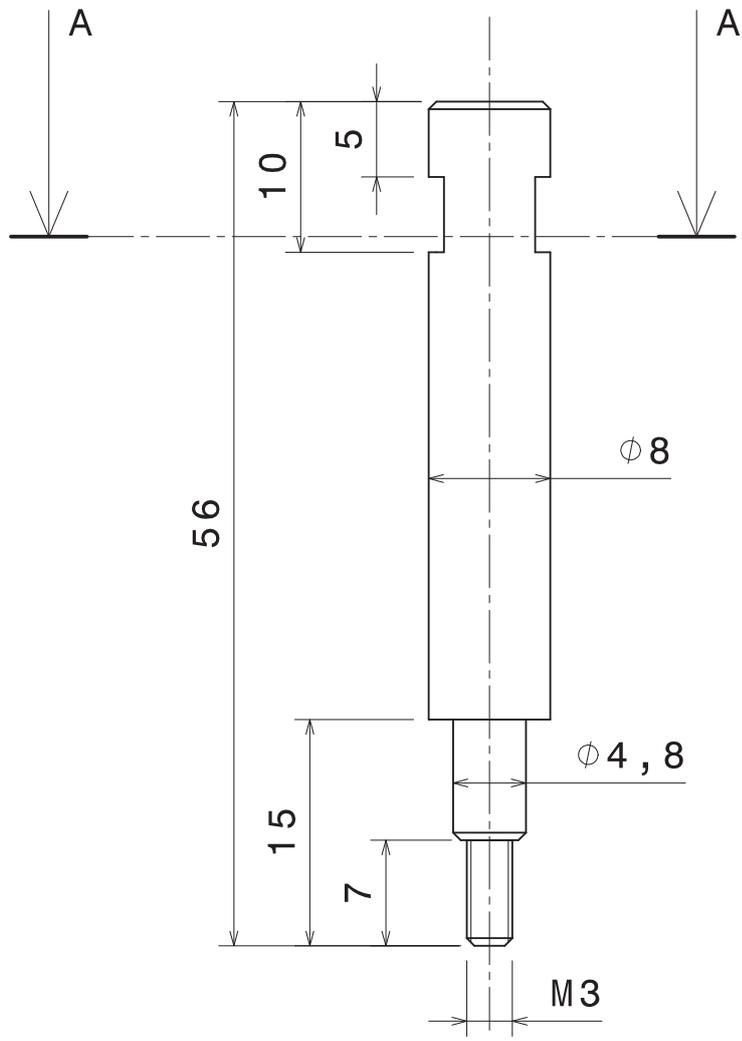
07

Datum

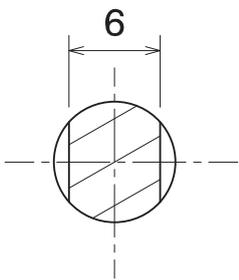
13.01.2012

Ersteller

Stephan Kusche



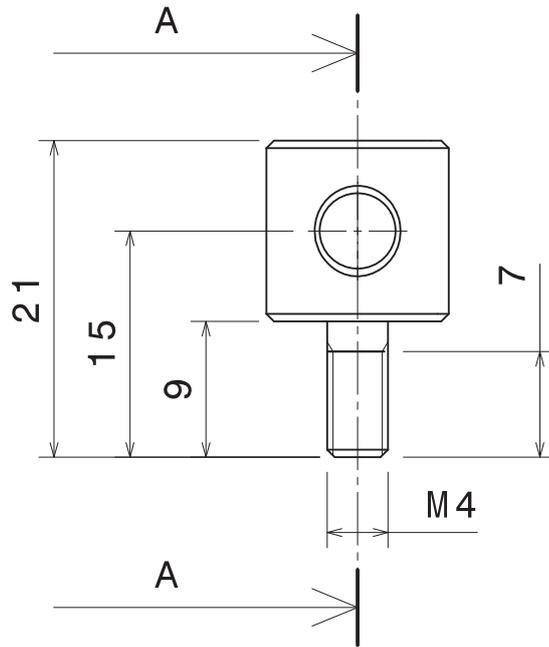
Schnitt A-A



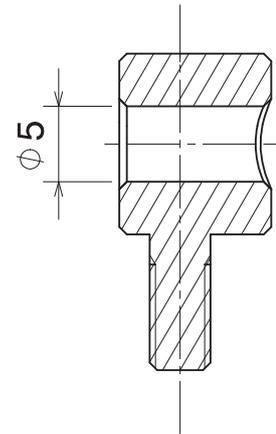
Nicht bemaßte Fasen 0,5 x 45°

Nummer und Bauteilbezeichnung 20 Griff			Format A4
Werkstoff AlMgSi0,5		Allgmeintoleranzen DIN ISO 2768-1 m	
Maßstab 2:1	Blatt 08	Datum 13.01.2012	Ersteller Stephan Kusche

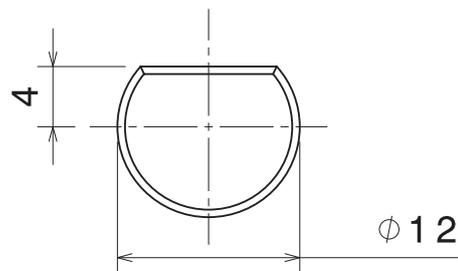
Vorderansicht



Schnitt A-A



Draufsicht



Nicht bemaßte Fasen $0,5 \times 45^\circ$

Nummer und Bauteilbezeichnung
21 Gewichtsaufnahme

Format
A4

Werkstoff
AlMgSi0,5

Allgemeintoleranzen
DIN ISO 2768-1 m

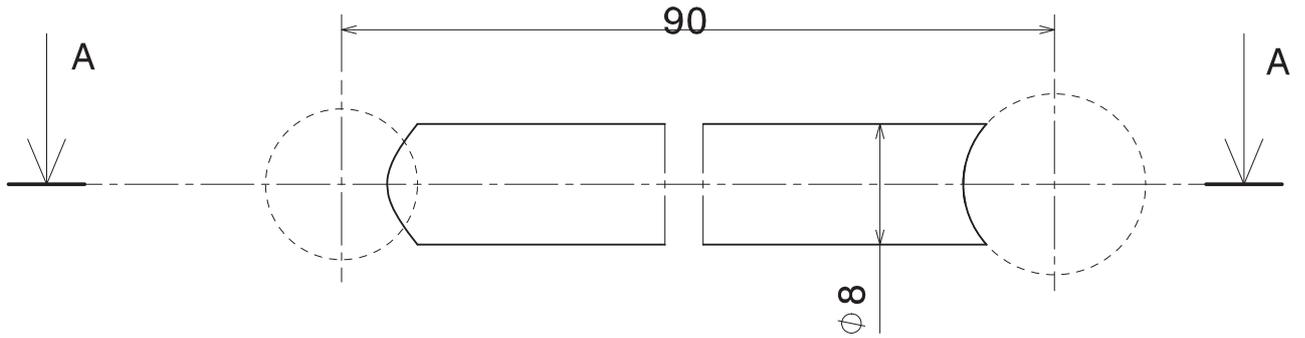
Maßstab
2:1

Blatt
09

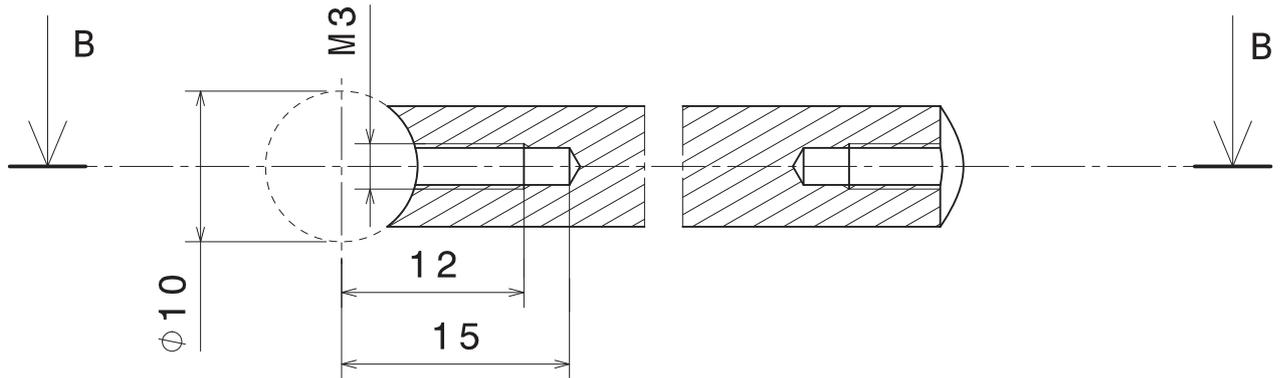
Datum
13.01.2012

Ersteller
Stephan Kusche

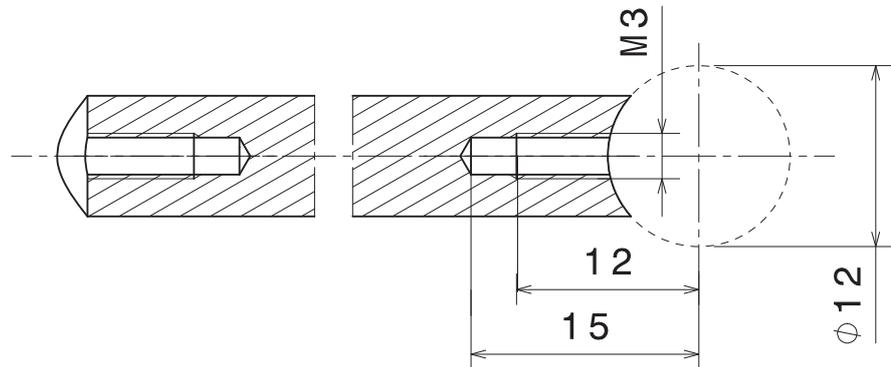
Vorderansicht



Schnitt A-A



Schnitt B-B



Isometrische Ansicht



Kanten mit Fase 0,5 x 45°

Nummer und Bauteilbezeichnung

22 Stab

Format

A4

Werkstoff

AlMgSi0,5

Allgemeintoleranzen

DIN ISO 2768-1 m

Maßstab

2:1

Blatt

10

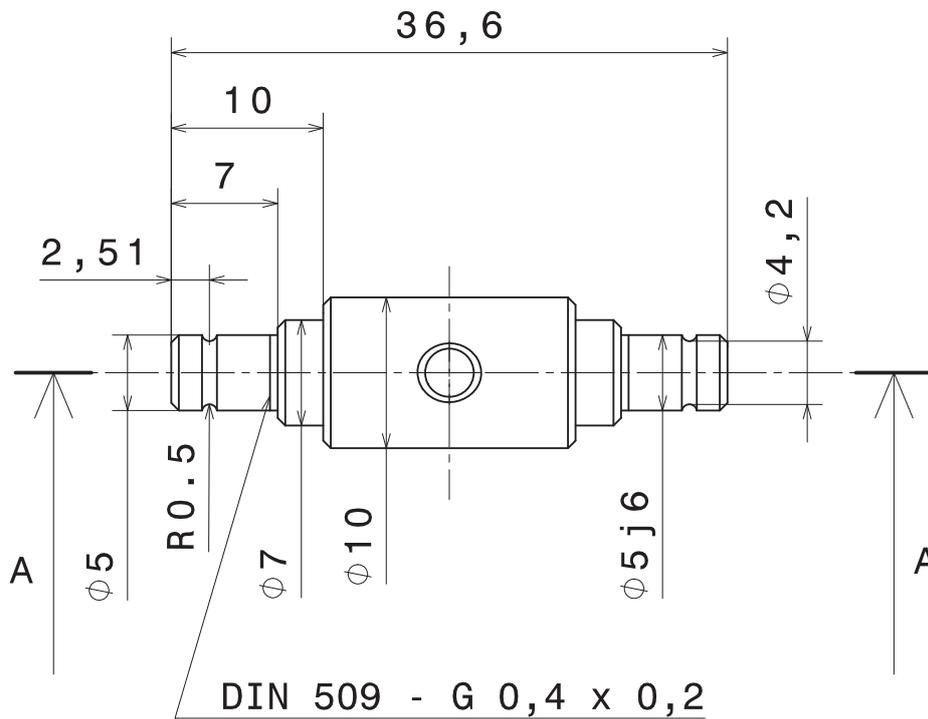
Datum

13.01.2012

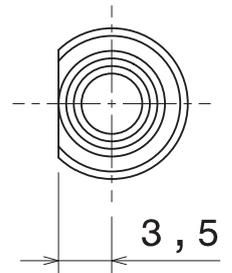
Ersteller

Stephan Kusche

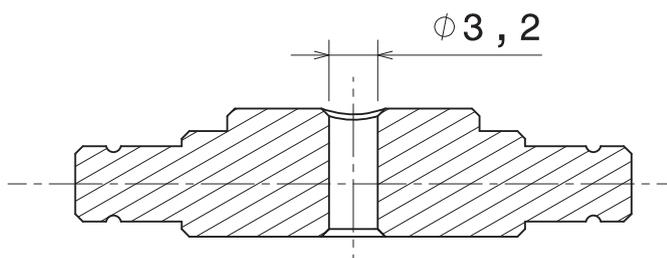
Vorderansicht



Seitenansicht links



Schnitt A-A



Nicht bemaßte Fasen 0,5 x 45°

Nummer und Bauteilbezeichnung

25 Achse

Format

A4

Werkstoff

CuZn39Pb3

Allgemeintoleranzen

DIN ISO 2768-1 m

Maßstab

2:1

Blatt

11

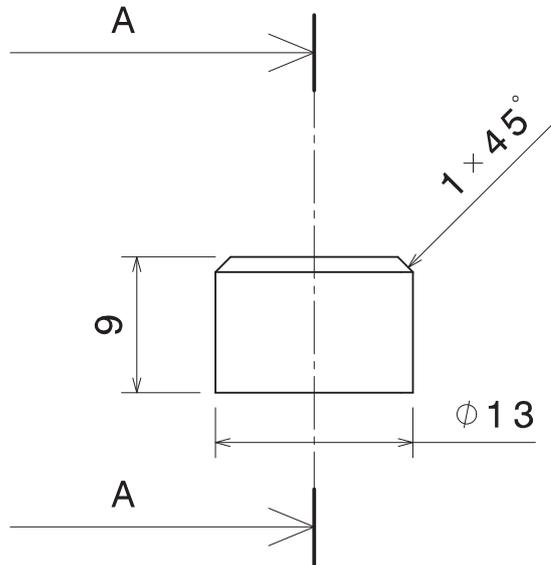
Datum

13.01.2012

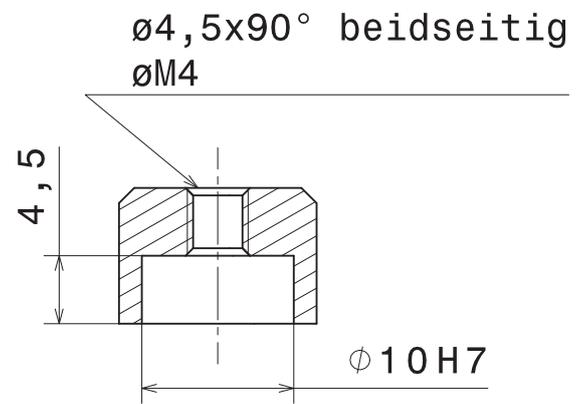
Ersteller

Stephan Kusche

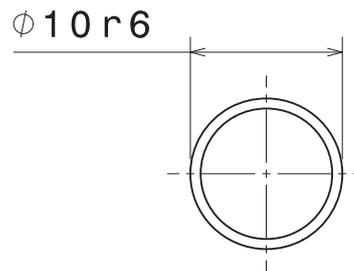
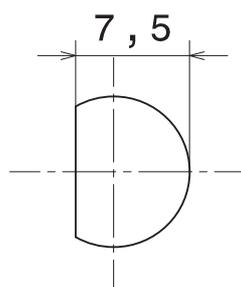
30 Kugelaufnahme



Schnitt A-A

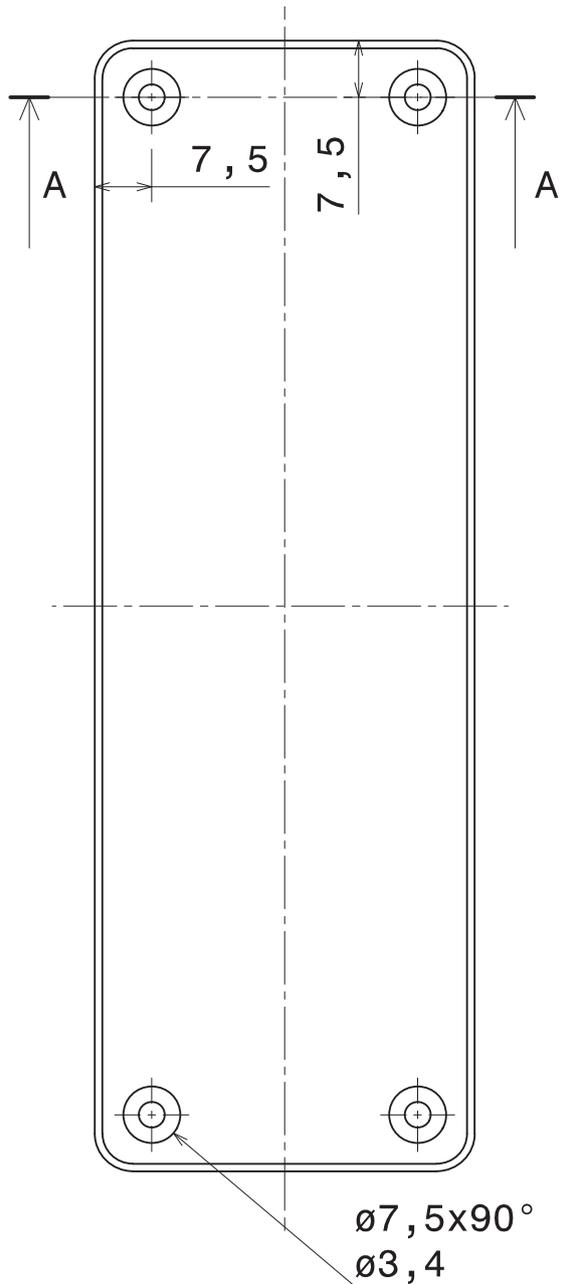


31 Indenter

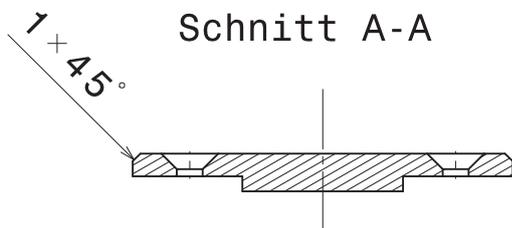
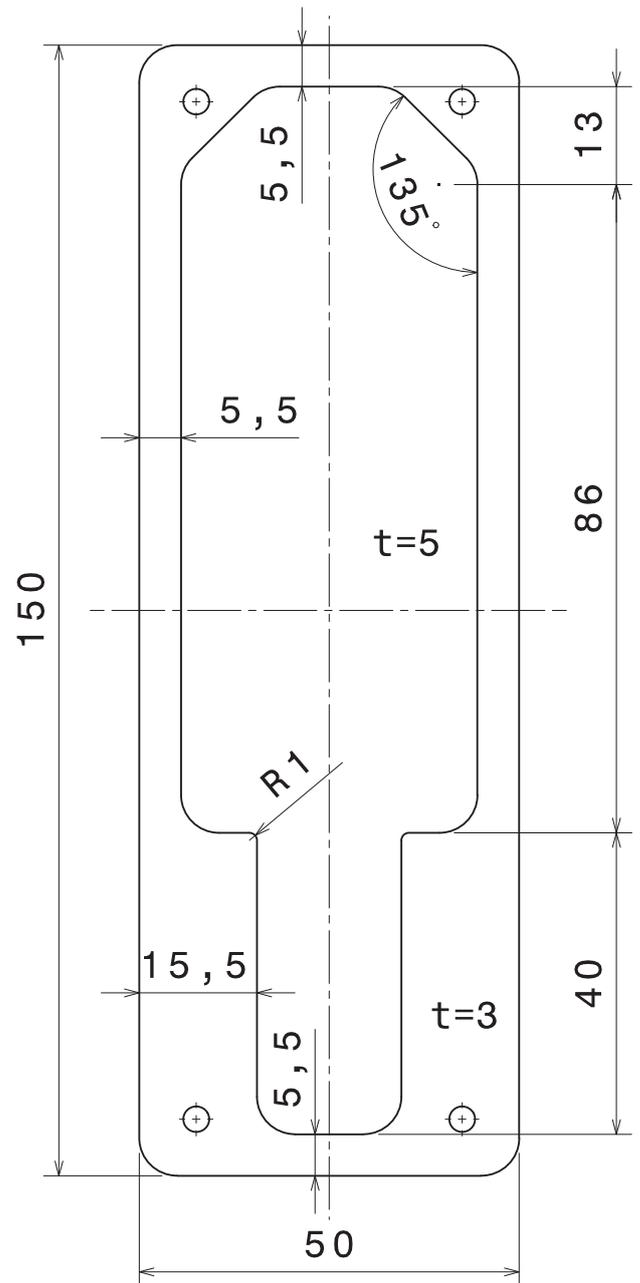


Nummer und Bauteilbezeichnung 30 Kugelaufnahme / 31 Indeter			Format A4
Werkstoff 30: AlMgSi0,5 / 31: X12Cr13		Allgmeintoleranzen DIN ISO 2768-1 m	
Maßstab 2:1	Blatt 12	Datum 13.01.2012	Ersteller Stephan Kusche

Vorderansicht



Rückansicht



Nicht bemaßte Radien $R=5\text{mm}$

Nummer und Bauteilbezeichnung
40 Deckel

Format
A4

Werkstoff
Polycarbonat (klar)

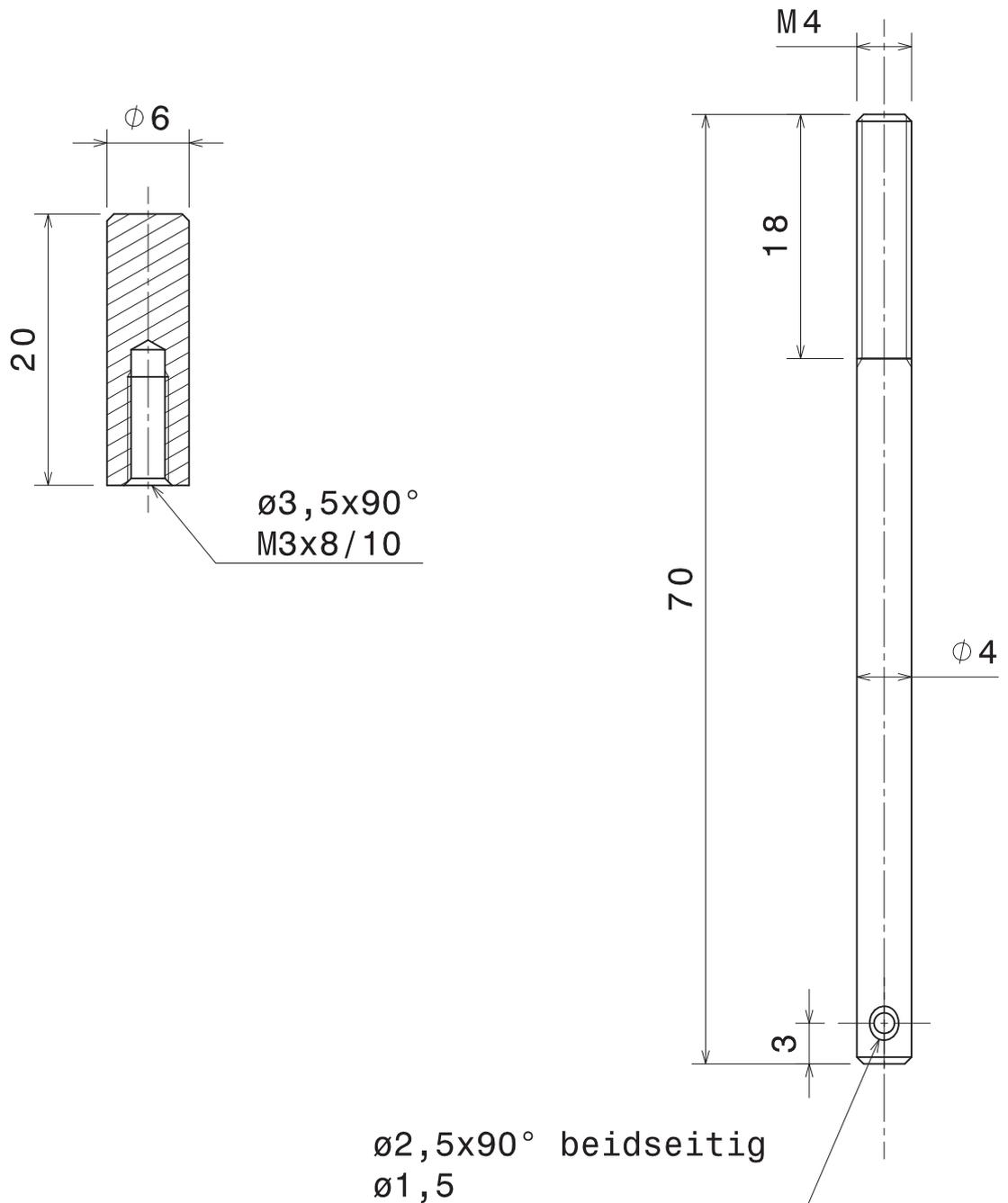
Allgemeintoleranzen
DIN ISO 2768-1 m

Maßstab **1:1** Blatt **13** Datum **13.01.2012**

Ersteller
Stephan Kusche

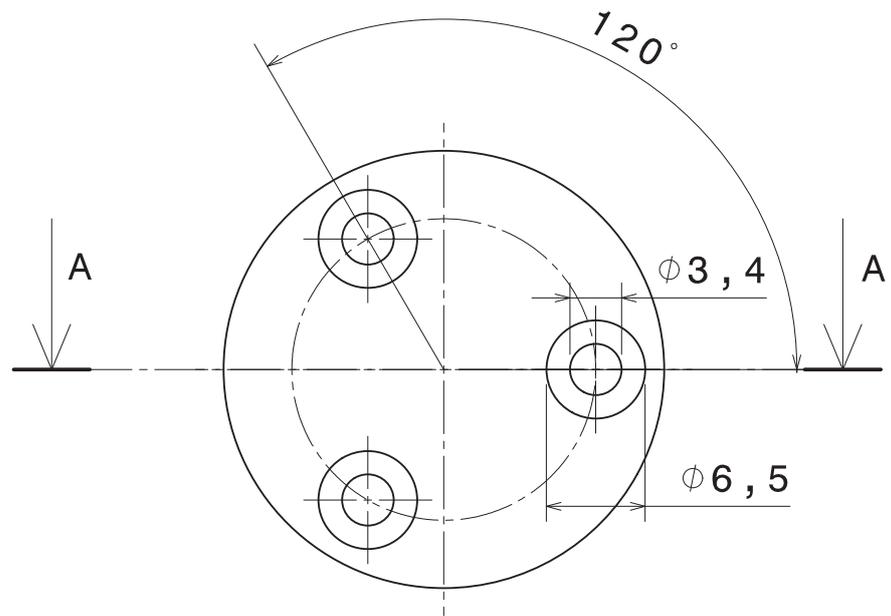
41 Anschlag

54 Zugstab

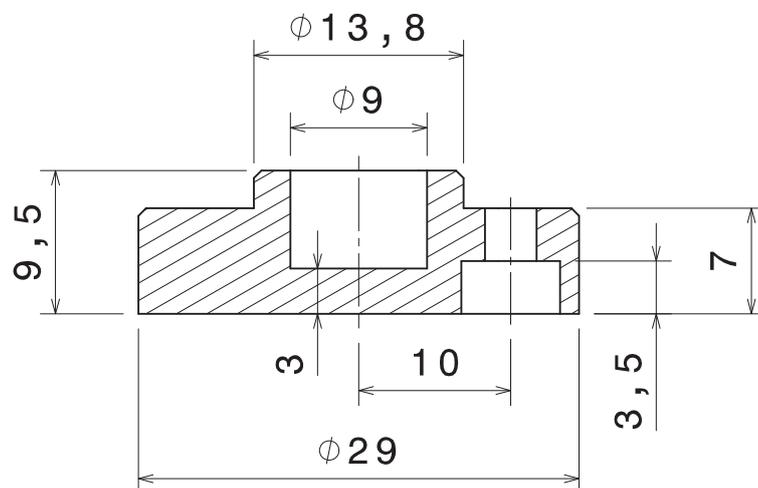


Alle Fasen $0,5 \times 45^\circ$

Nummer und Bauteilbezeichnung 41 Anschlag / 54 Spannachse			Format A4
Werkstoff 41: AlMgSi0,5 / 54: CuZn39Pb3		Allgemeintoleranzen DIN ISO 2768-1 m	
Maßstab 2:1	Blatt 14	Datum 13.01.2012	Ersteller Stephan Kusche

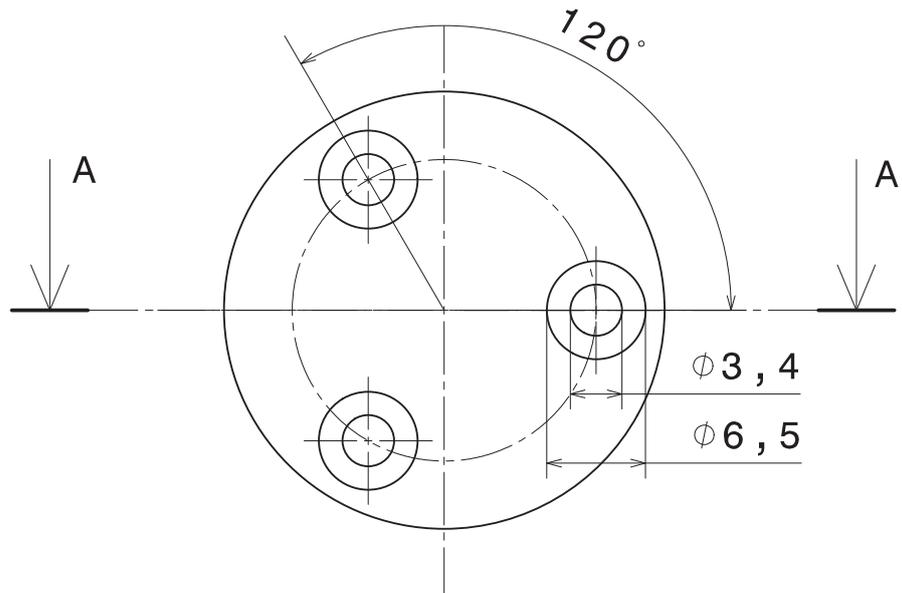


Schnitt A-A

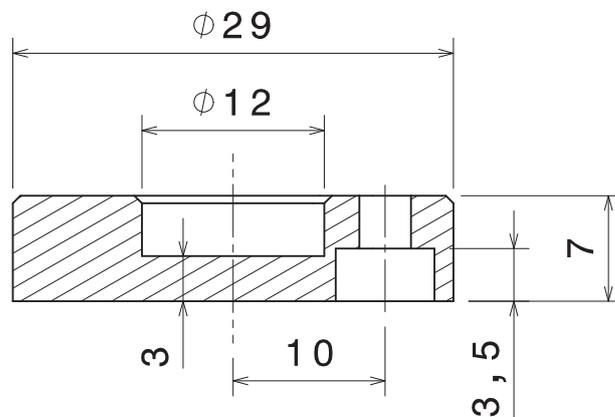


Alle Fasen 0,5x45°

Nummer und Bauteilbezeichnung 44 Lagerdeckel links			Format A4
Werkstoff AlMgSi0,5		Allgemeintoleranzen DIN ISO 2768-1 m	
Maßstab 2:1	Blatt 15	Datum 13.01.2012	Ersteller Stephan Kusche

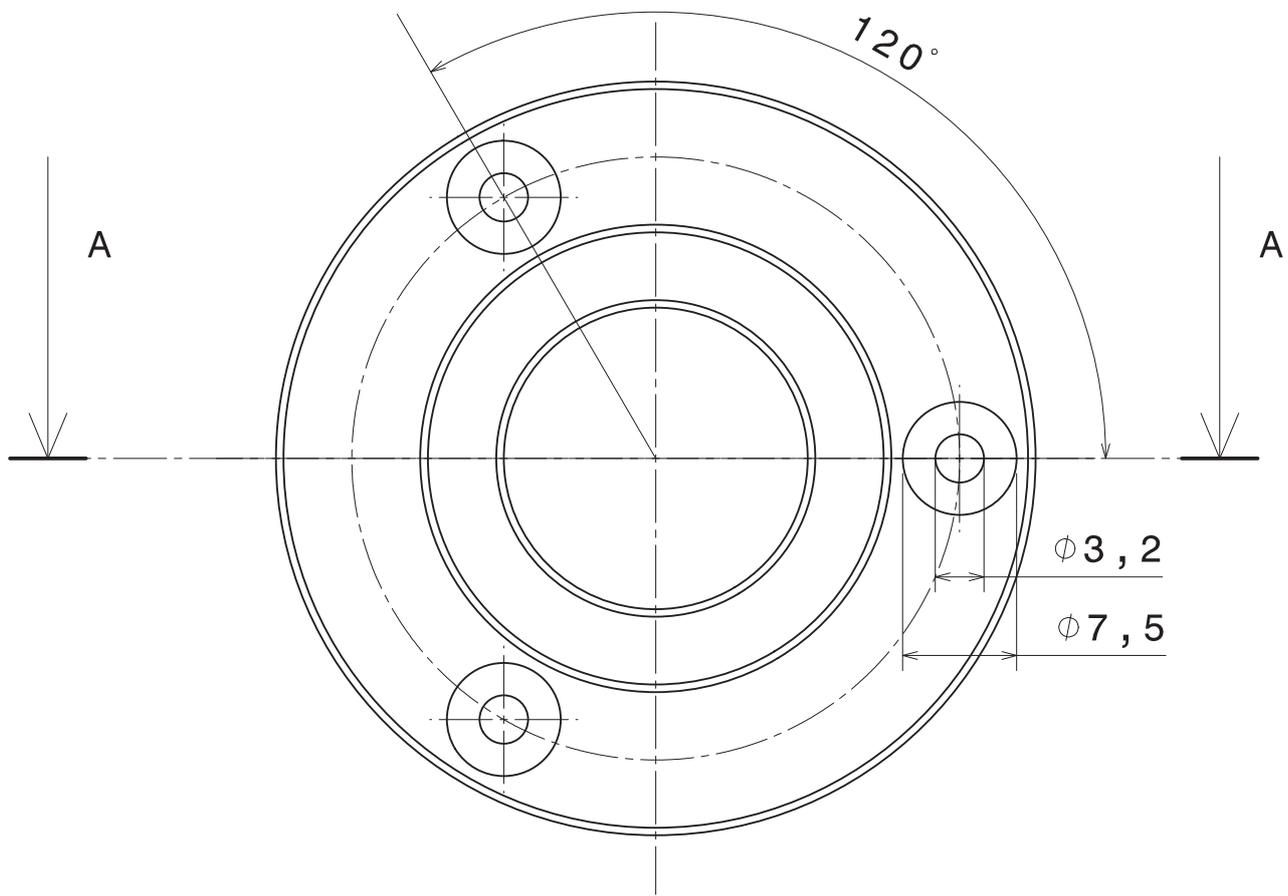


Schnitt A-A

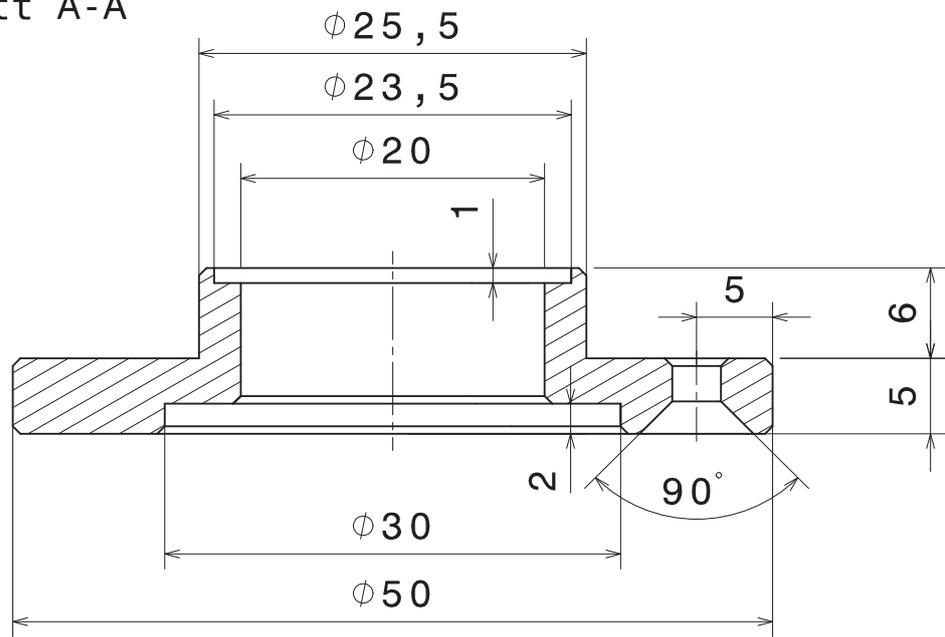


Alle Fasen 0,5x45°

Nummer und Bauteilbezeichnung 49 Lagerdeckel rechts			Format A4
Werkstoff AlMgSi0,5		Allgemeintoleranzen DIN ISO 2768-1 m	
Maßstab 2:1	Blatt 16	Datum 13.01.2012	Ersteller Stephan Kusche



Schnitt A-A

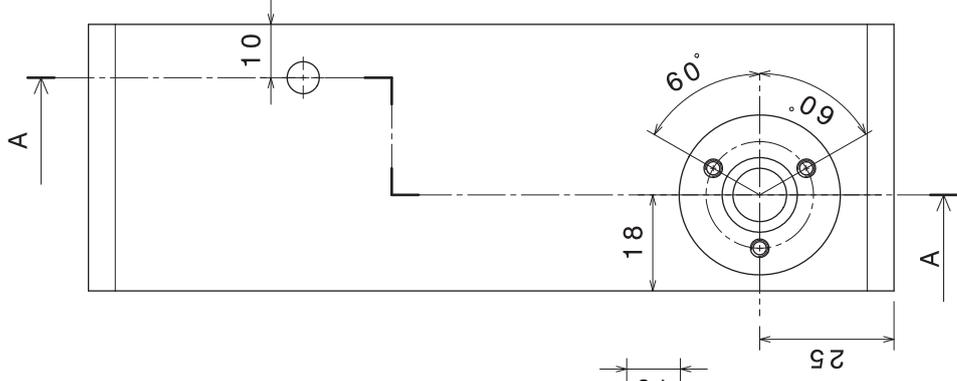
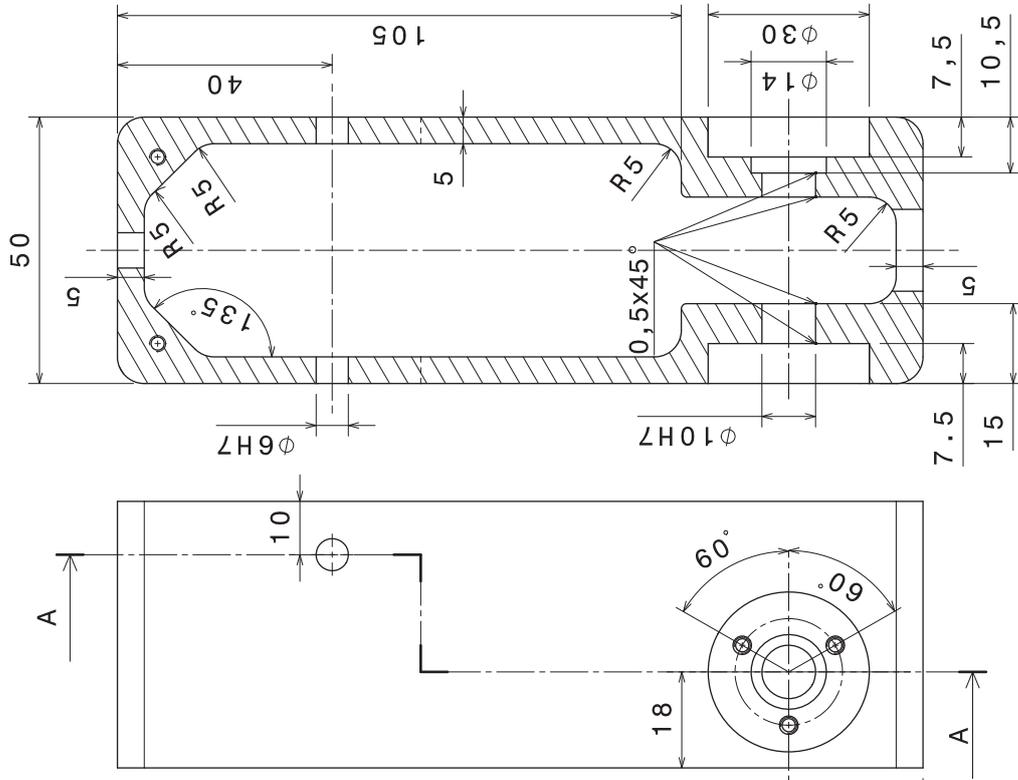


Nicht bemaßte Fasen 0,5 x 45°

Nummer und Bauteilbezeichnung 45 Spulenaufnahme			Format A4
Werkstoff AlMgSi0,5		Allgemeintoleranzen DIN ISO 2768-1 m	
Maßstab 2:1	Blatt 17	Datum 13.01.2012	Ersteller Stephan Kusche

Äußere Körperkanten mit Fase 0,5x45°
Nicht bemaste Verrundungen R=1mm

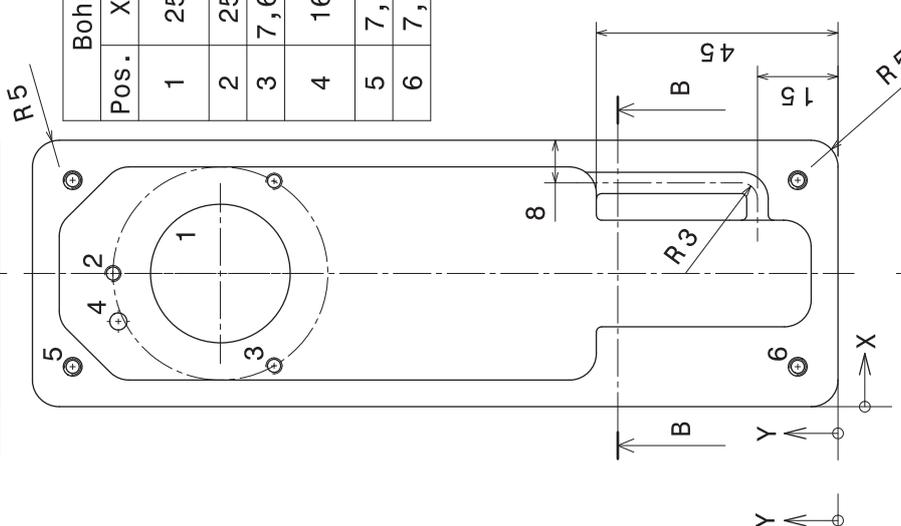
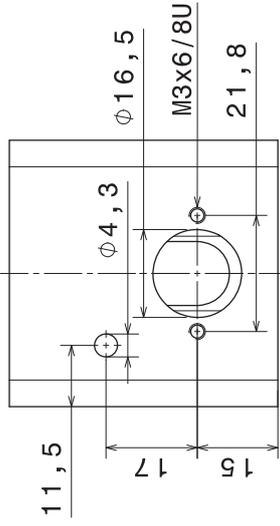
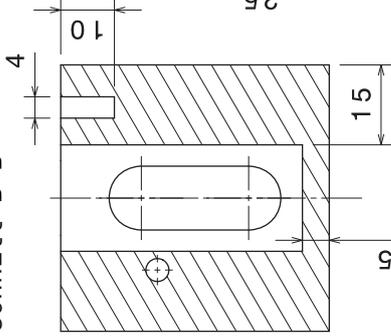
Schnitt A-A



Bohrungstabelle 2

Pos.	X	Y	d
1	25	115	B- \emptyset 27x90° B- \emptyset 26
2	25	135	B- \emptyset 3,5x90° B-M3
3	7,68	105	B- \emptyset 7,5x90° B- \emptyset 3,2
4	16	134	B- \emptyset 7,5x90° B- \emptyset 3,2
5	7,5	142,5	\emptyset 3,5x90° M3x10/13
6	7,5	7,5	M3x10/13

Schnitt B-B



Bohrungstabelle 1

Pos.	Z	Y	d
a	42	75	\emptyset 7,5x90° \emptyset 3,2
b	10	95	\emptyset 7,5x90° \emptyset 3,2
c	10	55	\emptyset 3,5x90° M3
d	8	25	\emptyset 3,5x90° M3

Nummer und Bauteilbezeichnung
48 Kasten

Format
A3

Werkstoff
AlMgSi0,5

Allgemeintoleranzen
DIN ISO 2768-1 m

Maßstab
1:1

Blatt
18

Datum
13.01.2012

Ersteller
Stephan Kusche