

Suite III - Die Elementare

Teil 6: Essays 235 - 248

ISZ für $x \in E \subseteq \mathbb{N}$. $2 = \{0, 1\}$. $3 = \{0, 1, 2\}$. $4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

$5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. $9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

$\text{ten} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ **unendlich**.

$\text{paar}(x, y)$. $p _E . x$. $x _E _p$. $x _E . y$. **Subtraktion**. **S**. **Division**. **D**.

ALG-Fortsetzung. **RECH-Fortsetzung**. $p + . x$, $x . + p$, $x . + . y$.

$p \cdot . x$, $x \cdot . p$, $x \cdot . y$. $p - . x$, $x \cdot - p$, $x \cdot - . y$. $p \div . x$, $x \div . p$, $x \div . y$.

Andreas Unterreiter

22. August 2013

$$x \cup_{\text{in}} E, E \cup_{\text{ni}} x, E \cup_{\text{ni}} \cup_{\text{in}} D \text{ und } 0, \{0\}.$$

Ersterstellung: 27/03/13

Letzte Änderung: 02/04/13

235-1. Ergänzend zu Vorhergehendem und in Vorbereitung von Folgendem werden hier einige spezielle Terme der Grundform $E_{ni} \cup x$ betrachtet. Die Beweis-Reihenfolge ist a) - b) - c) - e) - f) - g) - d) - h):

235-1(Satz)

- a) $0_{ni} \cup 0 = 0.$
- b) $0_{ni} \cup \{0\} = 0.$
- c) $\{0\}_{ni} \cup 0 = \{0\}.$
- d) $\{0\}_{ni} \cup \{0\} = \{\{0\}\}.$
- e) $\{0\}_{ni} \cup x = \{x\}.$
- f) " $0 \neq \{0\}_{ni} \cup x$ " genau dann, wenn " x Menge".
- g) " $\{0\}_{ni} \cup x = 0$ " genau dann, wenn " x Unmenge".
- h) $E_{ni} \cup \{0\} = \{\lambda \cup \{0\} : \lambda \in E\}.$

$\{\lambda \cup \{0\} : \lambda \in E\}$ **220-2(Def)**

Beweis 235-1 a)

Via **220-11** gilt:

$$0_{ni} \cup 0 = 0.$$

b)

Via **220-11** gilt:

$$0_{ni} \cup \{0\} = 0.$$

c)

Via **220-11** gilt:

$$\{0\}_{ni} \cup 0 = \{0\}.$$

Beweis **235-1 e)**

Thema1.1	$\alpha \in \{0\}_{\text{ni}} \cup x.$
2: Aus Thema1.1 " $\alpha \in \{0\}_{\text{ni}} \cup x$ " folgt via 220-4 :	$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in \{0\}) \wedge (\alpha = \Omega \cup x)).$
3.1: Aus 2 " $x \text{ Menge} \dots$ " folgt via 1-3 :	$x \in \{x\}.$
3.2: Aus 2 " $\dots \Omega \in \{0\} \dots$ " folgt via 1-6 :	$\Omega = 0.$
4: Aus 2 " $\dots \alpha = \Omega \cup x$ " und aus 3.2 " $\Omega = 0$ " folgt:	$\alpha = 0 \cup x.$
5:	$\alpha \stackrel{4}{=} 0 \cup x \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x.$
6: Aus 5 " $\alpha = \dots = x$ " und aus 3.1 " $x \in \{x\}$ " folgt:	$\alpha \in \{x\}.$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{0\}_{\text{ni}} \cup x) \Rightarrow (\alpha \in \{x\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1	" $\{0\}_{\text{ni}} \cup x \subseteq \{x\}$ "
----	--

Thema1.2	$\alpha \in \{x\}.$
2: Aus Thema1.2 " $\alpha \in \{x\}$ " folgt via 1-6 :	$(\alpha = x) \wedge (x \text{ Menge}).$
3: Via 1-5 gilt:	$0 \in \{0\}.$
4: Aus 3 " $0 \in \{0\}$ " und aus 2 " $\dots x \text{ Menge}$ " folgt via 220-4 :	$0 \cup x \in \{0\}_{\text{ni}} \cup x.$
5: Aus 2 " $\alpha = x \dots$ " und aus 4 " $0 \cup x \in \{0\} \cup x$ " folgt:	$0 \cup \alpha \in \{0\}_{\text{ni}} \cup x.$
6: Via 2-17 gilt:	$\alpha = 0 \cup \alpha.$
7: Aus 6 " $\alpha = 0 \cup \alpha$ " und aus 5 " $0 \cup \alpha \in \{0\}_{\text{ni}} \cup x$ " folgt:	$\alpha \in \{0\}_{\text{ni}} \cup x.$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{0\}_{\text{ni}} \cup x).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2	" $\{x\} \subseteq \{0\}_{\text{ni}} \cup x$ "
----	--

Beweis **235-1 e)** ...

- 2: Aus A1 gleich " $\{0\}_{\text{ni}} \cup x \subseteq \{x\}$ " und
 aus A2 gleich " $\{x\} \subseteq \{0\}_{\text{ni}} \cup x$ "
 folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\{0\}_{\text{ni}} \cup x = \{x\}.$$

f) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$0 \neq \{0\}_{\text{ni}} \cup x.$$

- 1: Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$\{0\}_{\text{ni}} \cup x = \{x\}.$$

- 2: Aus VS gleich " $0 \neq \{0\}_{\text{ni}} \cup x$ " und
 aus 1 " $\{0\}_{\text{ni}} \cup x = \{x\}$ "
 folgt:

$$0 \neq \{x\}.$$

- 3: Aus 2 " $0 \neq \{x\}$ "
 folgt via **1-3**:

$$x \text{ Menge.}$$

f) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$x \text{ Menge.}$$

- 1: Aus VS gleich " $x \text{ Menge}$ "
 folgt via **1-3**:

$$0 \neq \{x\}.$$

- 2: Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$\{0\}_{\text{ni}} \cup x = \{x\}.$$

- 3: Aus 1 " $0 \neq \{x\}$ " und
 aus 2 " $\{0\}_{\text{ni}} \cup x = \{x\}$ "
 folgt:

$$0 \neq \{0\}_{\text{ni}} \cup x.$$

g)

$$\{0\}_{\text{ni}} \cup x = 0$$

$$\Leftrightarrow \neg(0 \neq \{0\}_{\text{ni}} \cup x)$$

$$\stackrel{\text{f)}}{\Leftrightarrow} \neg(x \text{ Menge})$$

$$\Leftrightarrow x \text{ Unmenge.}$$

d)

Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$\{0\}_{\text{ni}} \cup \{0\} = \{\{0\}\}.$$

h)

Via **220-1(Def)** gilt:

$$E_{\text{ni}} \cup \{0\} = \{\lambda \cup \{0\} : \lambda \in E\}.$$

□

Nun wird das Analagon von **235-1** für spezielle Terme der Form $x \cup_{\text{in}} E$ etabliert:

235-2(Satz)

- a) $0 \cup_{\text{in}} 0 = 0$.
- b) $0 \cup_{\text{in}} \{0\} = \{0\}$.
- c) $\{0\} \cup_{\text{in}} 0 = 0$.
- d) $\{0\} \cup_{\text{in}} \{0\} = \{\{0\}\}$.
- e) $x \cup_{\text{in}} \{0\} = \{x\}$.
- f) " $0 \neq x \cup_{\text{in}} \{0\}$ " *genau dann, wenn* " x Menge".
- g) " $x \cup_{\text{in}} \{0\} = 0$ " *genau dann, wenn* " x Unmenge".
- h) $\{0\} \cup_{\text{in}} E = \{\{0\} \cup \lambda : \lambda \in E\}$.

$$\{\{0\} \cup \lambda : \lambda \in E\} \text{ 4-1(Def)}$$

Beweis 235-2 a)

Via **220-12** gilt:

$$0 \cup_{\text{in}} 0 = 0.$$

b)

Via **220-12** gilt:

$$0 \cup_{\text{in}} \{0\} = \{0\}.$$

c)

Via **220-12** gilt:

$$\{0\} \cup_{\text{in}} 0 = 0.$$

d)

$$1: \quad \{0\} \cup_{\text{in}} \{0\} \stackrel{\mathbf{220-7}}{=} \{0\}_{\text{ni}} \cup \{0\} \stackrel{\mathbf{235-1}}{=} \{\{0\}\}.$$

2: Aus 1
folgt:

$$\{0\} \cup_{\text{in}} \{0\} = \{\{0\}\}.$$

Beweis 235-2 e)

1:

$$x \cup_{\text{in}} \{0\} \stackrel{\mathbf{220-7}}{=} \{0\}_{\text{ni}} \cup x \stackrel{\mathbf{235-1}}{=} \{x\}.$$

2: Aus 1

folgt:

$$x \cup_{\text{in}} \{0\} = \{x\}.$$

f)

1.1: Via **235-1** gilt:

$$(0 \neq \{0\}_{\text{ni}} \cup x) \Leftrightarrow (x \text{ Menge}).$$

1.2: Via **220-7** gilt:

$$x \cup_{\text{in}} \{0\} = \{0\}_{\text{ni}} \cup x.$$

2: Aus 1.1 und

aus 1.2

folgt:

$$(0 \neq x \cup_{\text{in}} \{0\}) \Leftrightarrow (x \text{ Menge}).$$

g)

1.1: Via **235-1** gilt:

$$(\{0\}_{\text{ni}} \cup x = 0) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge}).$$

1.2: Via **220-7** gilt:

$$x \cup_{\text{in}} \{0\} = \{0\}_{\text{ni}} \cup x.$$

2: Aus 1.1 und

aus 1.2

folgt:

$$(x \cup_{\text{in}} \{0\} = 0) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge}).$$

h)

Via **220-2(Def)** gilt:

$$\{0\} \cup_{\text{in}} E = \{\{0\} \cup \lambda : \lambda \in E\}.$$

□

235-3 Hier wird Ähnliches wie in **235-1,2** für spezielle Terme der Form $E_{ni \cup in} D$ gezeigt. Die Beweis-Reihenfolge ist e) - f) - a) - b) - c) - g) - h) - d):

235-3(Satz)

- a) $0_{ni \cup in} 0 = 0.$
- b) $0_{ni \cup in} \{0\} = 0.$
- c) $\{0\}_{ni \cup in} 0 = 0.$
- d) $\{0\}_{ni \cup in} \{0\} = \{0\}.$
- e) $E_{ni \cup in} 0 = 0.$
- f) $0_{ni \cup in} D = 0.$
- g) $E_{ni \cup in} \{0\} = E.$
- h) $\{0\}_{ni \cup in} D = D.$

Beweis **235-3 e)**

Thema1

$$\alpha \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} 0.$$

2: Aus Thema1 “ $\alpha \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} 0$ ”
folgt via **220-6**:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in 0) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Psi).$$

3: Es gilt 2 “ $\dots \Psi \in 0 \dots$ ”.

Via **0-19** gilt “ $\Psi \notin 0$ ”.

Ex falso quodlibet folgt:

$$\alpha \notin E_{\text{ni} \cup \text{in}} 0.$$

Ergo Thema1:

$$\forall \alpha : (\alpha \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} 0) \Rightarrow (\alpha \notin E_{\text{ni} \cup \text{in}} 0).$$

Konsequenz via **0-19**:

$$E_{\text{ni} \cup \text{in}} 0 = 0.$$

f)

1:

$$0_{\text{ni} \cup \text{in}} D \stackrel{\mathbf{220-7}}{=} D_{\text{ni} \cup \text{in}} 0 \stackrel{\text{e)}}{=} 0.$$

2: Aus 1

folgt:

$$0_{\text{ni} \cup \text{in}} D = 0.$$

a)

Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$0_{\text{ni} \cup \text{in}} 0 = 0.$$

b)

Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$0_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\} = 0.$$

c)

Via des bereits bewiesenen f) gilt:

$$\{0\}_{\text{ni} \cup \text{in}} 0 = 0.$$

Beweis **235-3** g)

Thema1.1

$$\alpha \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}.$$

2: Aus **Thema1.1** “ $\alpha \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}$ ”
folgt via **220-6**:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in \{0\}) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Psi).$$

3: Aus 2 “ $\dots \Psi \in \{0\} \dots$ ”
folgt via **1-6**:

$$\Psi = 0.$$

4: Aus 2 “ $\dots \alpha = \Omega \cup \Psi$ ” und
aus 3 “ $\Psi = 0$ ”
folgt:

$$\alpha = \Omega \cup 0.$$

5:

$$\alpha \stackrel{4}{=} \Omega \cup 0 \stackrel{2-7}{=} \Omega.$$

6: Aus 5 “ $\alpha = \dots = \Omega$ ” und
aus 2 “ $\dots \Omega \in E \dots$ ”
folgt:

$$\alpha \in E.$$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in E).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A1} \mid “E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\} \subseteq E”}$$

...

Beweis **235-3 g)**...

Thema1.2	$\alpha \in E.$
2: Via 1-5 gilt:	$0 \in \{0\}.$
3: Aus Thema1.2 " $\alpha \in E$ " und aus 2 " $0 \in \{0\}$ " folgt via 220-6 :	$\alpha \cup 0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}.$
4:	$\alpha \stackrel{2-7}{=} \alpha \cup 0.$
5: Aus 4 " $\alpha = \dots = \alpha \cup 0$ " und aus 3 " $\alpha \cup 0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}$ " folgt:	$\alpha \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}.$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2 " $E \subseteq E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}$ "
--

2: Aus **A1** gleich " $E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\} \subseteq E$ " und
aus **A2** gleich " $E \subseteq E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\}$ "
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$E_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\} = E.$$

h)

1: $\{0\}_{\text{ni} \cup \text{in}} D \stackrel{220-7}{=} D_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\} \stackrel{\text{g)}}{=} D.$

2: Aus 1
folgt: $\{0\}_{\text{ni} \cup \text{in}} D = \{0\}.$

d)

Via des bereits bewiesenen **f)** gilt:

$$\{0\}_{\text{ni} \cup \text{in}} \{0\} = \{0\}.$$

□

235-4. Es gilt $0 \in E \cup_{\text{in}} D$ genau dann, wenn $0 \in E$ und $0 \in D$:

235-4(Satz)

- a) " $0 \in E \cup_{\text{in}} D$ " genau dann, wenn " $0 \in E, D$ ".
- b) " $0 \notin E \cup_{\text{in}} D$ " genau dann, wenn " $0 \notin E$ " oder " $0 \notin D$ ".

Beweis **235-4** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} D.$$

1: Aus VS gleich " $0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} D$ "

folgt via **220-6**:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (0 = \Omega \cup \Psi).$$

2: Aus 1 " $\dots 0 = \Omega \cup \Psi$ "

folgt via **2-18**:

$$(\Omega = 0) \wedge (\Psi = 0).$$

3.1: Aus 2 " $\Omega = 0 \dots$ " und

aus 1 " $\dots \Omega \in E \dots$ "

folgt:

$$0 \in E$$

3.2: Aus 2 " $\dots \Psi = 0$ " und

aus 1 " $\dots \Psi \in D \dots$ "

folgt:

$$0 \in D$$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$0 \in E, D.$$

1: Aus VS gleich " $0 \in E \dots$ " und

aus VS gleich " $\dots 0 \in \dots D$ "

folgt via **220-6**:

$$0 \cup 0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} D.$$

2: Via **2-17** gilt:

$$0 \cup 0 = 0.$$

3: Aus 2 " $0 \cup 0 = 0$ " und

aus 1 " $0 \cup 0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} D$ "

folgt:

$$0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} D.$$

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt:

$$(0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} D) \Leftrightarrow (0 \in E, D).$$

2: Aus 1

folgt:

$$(0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} D) \Leftrightarrow ((0 \in E) \wedge (0 \in D)).$$

3: Aus 2

folgt:

$$(\neg(0 \in E_{\text{ni} \cup \text{in}} D)) \Leftrightarrow (\neg((0 \in E) \wedge (0 \in D))).$$

4: Aus 3

folgt:

$$(0 \notin E_{\text{ni} \cup \text{in}} D) \Leftrightarrow ((0 \notin E) \vee (0 \notin D)).$$

□

Einiges über $\{x, \dots\}$ mit $0 \leq x$.
ISZ für $x \in E \subseteq \mathbb{N}$.

Ersterstellung: 28/03/13

Letzte Änderung: 03/04/13

236-1. Ergänzend zu **169-2** wird hier $p \in \{x, \dots\}$ im Fall $0 \leq x$ betrachtet:

236-1(Satz)

- a) Aus " $0 \leq x$ " und " $p \in \{x, \dots\}$ " folgt " $x \leq p \in \mathbb{N}$ ".
- b) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $p \in \{x, \dots\}$ " folgt " $x \leq p \in \mathbb{N}$ ".
- c) Aus " $x \leq p \in \mathbb{N}$ " folgt " $p \in \{x, \dots\}$ ".

$\leq$ -Notation.

Beweis 236-1 a) VS gleich

$$(0 \leq x) \wedge (p \in \{x, \dots\}).$$

1: Aus VS gleich "... $p \in \{x, \dots\}$ "
folgt via **169-2**:

$$x \leq p \in \mathbb{Z}.$$

2: Aus VS gleich " $0 \leq x \dots$ " und
aus 1 " $x \leq p \dots$ "
folgt via **107-8**:

$$0 \leq p.$$

3: Aus 2 " $0 \leq p$ " und
aus 1 "... $p \in \mathbb{Z}$ "
folgt via **164-6**:

$$p \in \mathbb{N}.$$

4: Aus 1 " $x \leq p \dots$ " und
aus 3 " $p \in \mathbb{N}$ "
folgt:

$$x \leq p \in \mathbb{N}.$$

b) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (p \in \{x, \dots\}).$$

1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ "
folgt via **164-6**:

$$0 \leq x.$$

2: Aus 1 " $0 \leq x$ " und
aus VS gleich "... $p \in \{x, \dots\}$ "
folgt via des bereits bewiesenen a):

$$x \leq p \in \mathbb{N}.$$

c) VS gleich

$$x \leq p \in \mathbb{N}.$$

1: Aus VS gleich "... $p \in \mathbb{N}$ "
folgt via **164-6**:

$$p \in \mathbb{Z}.$$

2: Aus VS gleich " $x \leq p \dots$ " und
aus 1 " $p \in \mathbb{Z}$ "
folgt via **169-2**:

$$p \in \{x, \dots\}.$$

□

236-2. Im Fall $E \subseteq \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{N}$ nimmt - mit den dortigen Notationen - **ISZ** die nunmehrige, mitunter einfacher als **ISZ** einsetzbare Form an:

236-2(Satz)

Es gelte:

$$\rightarrow) x \in E \subseteq \mathbb{N}.$$

$$\rightarrow) \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E).$$

Dann folgt “ $\{x, \dots\} \subseteq E$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 236-2

1.1: Aus $\rightarrow) “x \in E \dots”$ und
aus $\rightarrow) “\dots E \subseteq \mathbb{N}”$
folgt via **0-4**:

$$x \in \mathbb{N}.$$

Thema1.2

$$\beta \in \mathbb{Z} \cap E.$$

2: Aus **Thema1.2** “ $\beta \in \mathbb{Z} \cap E$ ”

folgt via **2-2**:

$$\beta \in E.$$

3: Aus 2 “ $\beta \in E$ ” und

aus $\rightarrow) “\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)”$

folgt:

$$1 + \beta \in E.$$

Ergo **Thema1.2**:

$$\boxed{\text{A1} \mid “\forall \beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \beta \in E)”}$$

2: Aus 1.1 “ $x \in \mathbb{N}$ ”

folgt via **164-6**:

$$x \in \mathbb{Z}.$$

3: Aus 2 “ $x \in \mathbb{Z}$ ” und

aus $\rightarrow) “x \in E \dots”$

folgt via **2-2**:

$$x \in \mathbb{Z} \cap E.$$

4: Aus 3 “ $x \in \mathbb{Z} \cap E$ ” und

aus **A1** gleich “ $\forall \beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \beta \in E)”$

folgt via **ISZ**:

$$\{x, \dots\} \subseteq E.$$

□

236-3. Auch im Fall $E \subseteq \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{Z}$ nimmt - mit den dortigen Notationen - **ISZ** die nunmehrige, mitunter einfacher als **ISZ** einsetzbare Form an:

236-3(Satz)

Es gelte:

$$\rightarrow) x \in E \subseteq \mathbb{Z}.$$

$$\rightarrow) \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E).$$

Dann folgt " $\{x, \dots\} \subseteq E$ ".

Beweis 236-3

1.1: Aus $\rightarrow) "x \in E \dots"$ und
 aus $\rightarrow) "\dots E \subseteq \mathbb{Z}"$
 folgt via **0-4**:

$$x \in \mathbb{Z}.$$

Thema1.2

$$\beta \in \mathbb{Z} \cap E.$$

2: Aus **Thema1.2** " $\beta \in \mathbb{Z} \cap E$ "
 folgt via **2-2**:

$$\beta \in E.$$

3: Aus 2 " $\beta \in E$ " und
 aus $\rightarrow) "\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)"$
 folgt:

$$1 + \beta \in E.$$

Ergo **Thema1.2**:

$$\boxed{\text{A1} \mid "\forall \beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \beta \in E)"}$$

2: Aus 1.1 " $x \in \mathbb{Z}$ " und
 aus $\rightarrow) "x \in E \dots"$
 folgt via **2-2**:

$$x \in \mathbb{Z} \cap E.$$

3: Aus 2 " $x \in \mathbb{Z} \cap E$ " und
 aus **A1** gleich " $\forall \beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \beta \in E)"$
 folgt via **ISZ**:

$$\{x, \dots\} \subseteq E.$$

□

236-4. Mit der nun zu beweisenden Gleichung $\mathbb{N} = \{0, \dots\}$ kann aus **236-2** eine weitere Version des **ISN** gewonnen werden:

236-4(Satz)

$$\mathbb{N} = \{0, \dots\}.$$

Beweis **236-4**

Thema1.1

$$\alpha \in \mathbb{N}.$$

2: Aus **Thema1.1** “ $\alpha \in \mathbb{N}$ ”
folgt via **164-6**:

$$0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}.$$

3: Aus 2 “ $0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}$ ”
folgt via **169-2**:

$$\alpha \in \{0, \dots\}.$$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \in \{0, \dots\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A1} \mid “\mathbb{N} \subseteq \{0, \dots\}”}$$

Thema1.2

$$\alpha \in \{0, \dots\}.$$

2: Aus **Thema1.2** “ $\alpha \in \{0, \dots\}$ ”
folgt via **169-2**:

$$0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}.$$

3: Aus 2 “ $0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}$ ”
folgt via **164-6**:

$$\alpha \in \mathbb{N}.$$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{0, \dots\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid “\{0, \dots\} \subseteq \mathbb{N}”}$$

2: Aus A1 gleich “ $\mathbb{N} \subseteq \{0, \dots\}$ ” und
aus A2 gleich “ $\{0, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ ”
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\mathbb{N} = \{0, \dots\}.$$

□

236-5. Werden **236-2** und **236-4** geeignet kombiniert ergibt sich die nunmehrige, vertraut scheinende Aussage:

236-5(Satz)

Es gelte:

$$\rightarrow) 0 \in E \subseteq \mathbb{N}.$$

$$\rightarrow) \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E).$$

Dann folgt " $\mathbb{N} \subseteq E$ " und " $E = \mathbb{N}$ ".

RECH-Notation.

Beweis 236-5

- 1: Aus $\rightarrow) "0 \in E \subseteq \mathbb{N}"$ und
 aus $\rightarrow) "\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)"$
 folgt via **236-2**:

$$\{0, \dots\} \subseteq E.$$

- 2: Aus **236-4** " $\mathbb{N} = \{0, \dots\}$ " und
 aus 1 " $\{0, \dots\} \subseteq E$ "

folgt:

$$\mathbb{N} \subseteq E$$

- 3: Aus $\rightarrow) "\dots E \subseteq \mathbb{N}"$ und
 aus 2 " $\mathbb{N} \subseteq E$ "

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$E = \mathbb{N}$$

□

Einiges über $\{x, \dots, y\}$, $\{x, \dots\}$, $\{\dots, y\}$.
Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt $n = \{0, \dots, -1 + n\}$.

Ersterstellung: 03/04/13

Letzte Änderung: 16/04/13

237-1. Als Vorbereitung für Weiteres werden nun einige Aussagen über $\subseteq$ und $\{x, \dots, y\}$ bewiesen. Interessanter Weise gelten Aussagen **fgj**) unabhängig davon, ob $-a + x \in \mathbb{S}$ oder nicht. Ähnliches gilt für **gi**) bezüglich $a + y$ und für **j**) bezüglich $b + y$:

237-1(Satz)

- a) Aus " $u \leq x$ " und " $y \leq v$ " folgt " $\{x, \dots, y\} \subseteq \{u, \dots, v\}$ ".
- b) Aus " $u \leq x$ " folgt " $\{x, \dots, y\} \subseteq \{u, \dots, y\}$ ".
- c) Aus " $u \leq x$ " folgt " $\{x, \dots\} \subseteq \{u, \dots\}$ ".
- d) Aus " $y \leq v$ " folgt " $\{\dots, y\} \subseteq \{\dots, v\}$ ".
- e) Aus " $y \leq v$ " folgt " $\{x, \dots, y\} \subseteq \{x, \dots, v\}$ ".
- f) Aus " $0 \leq a$ " folgt " $\{x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, y\}$ ".
- g) Aus " $0 \leq a$ " folgt " $\{x, \dots, y\} \subseteq \{x, \dots, a + y\}$ ".
- h) Aus " $0 \leq a$ " folgt " $\{x, \dots\} \subseteq \{-a + x, \dots\}$ ".
- i) Aus " $0 \leq a$ " folgt " $\{\dots, y\} \subseteq \{\dots, a + y\}$ ".
- j) Aus " $0 \leq a, b$ " folgt " $\{x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, b + y\}$ ".

RECH. $\leq$ -Notation.

Beweis **237-1** a) VS gleich

$$(u \leq x) \wedge (y \leq v).$$

Thema1

$$\alpha \in \{x, \dots, y\}.$$

2: Aus **Thema1** " $\alpha \in \{x, \dots, y\}$ "
folgt via **169-2**:

$$(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha \leq y).$$

3.1: Aus VS gleich " $u \leq x \dots$ " und
aus 2 " $\dots x \leq \alpha \dots$ "
folgt via **107-8**:

$$u \leq \alpha.$$

3.2: Aus 2 " $\dots \alpha \leq y$ " und
aus VS gleich " $\dots y \leq v$ "
folgt via **107-8**:

$$\alpha \leq v.$$

4: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{Z} \dots$ ",
aus 3.1 " $u \leq \alpha$ " und
aus 3.2 " $\alpha \leq v$ "
folgt via **169-2**:

$$\alpha \in \{u, \dots, v\}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \dots, y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{u, \dots, v\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\{x, \dots, y\} \subseteq \{u, \dots, v\}.$$

b) VS gleich

$$u \leq x.$$

Thema1

$$\alpha \in \{x, \dots, y\}.$$

2: Aus **Thema1** " $\alpha \in \{x, \dots, y\}$ "
folgt via **169-2**:

$$(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha \leq y).$$

3: Aus VS gleich " $u \leq x$ " und
aus 2 " $\dots x \leq \alpha \dots$ "
folgt via **107-8**:

$$u \leq \alpha.$$

4: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{Z} \dots$ ",
aus 3 " $u \leq \alpha$ " und
aus 2 " $\dots \alpha \leq y$ "
folgt via **169-2**:

$$\alpha \in \{u, \dots, y\}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \dots, y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{u, \dots, y\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\{x, \dots, y\} \subseteq \{u, \dots, y\}.$$

Beweis **237-1** c) VS gleich

$$u \leq x.$$

Thema1	$\alpha \in \{x, \dots\}.$
2: Aus Thema1 " $\alpha \in \{x, \dots\}$ " folgt via 169-2 :	$(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha).$
3: Aus VS gleich " $u \leq x$ " und aus 2 " $\dots x \leq \alpha$ " folgt via 107-8 :	$u \leq \alpha.$
4: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{Z} \dots$ " und aus 3 " $u \leq \alpha$ " folgt via 169-2 :	$\alpha \in \{u, \dots\}.$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \dots\}) \Rightarrow (\alpha \in \{u, \dots\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\{x, \dots\} \subseteq \{u, \dots\}.$$

d) VS gleich

$$y \leq v.$$

Thema1	$\alpha \in \{\dots, y\}.$
2: Aus Thema1 " $\alpha \in \{\dots, y\}$ " folgt via 169-2 :	$(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha \leq y).$
3: Aus 2 " $\dots \alpha \leq y$ " und aus VS gleich " $y \leq v$ " folgt via 107-8 :	$\alpha \leq v.$
4: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{Z} \dots$ " und aus 3 " $\alpha \leq v$ " folgt via 169-2 :	$\alpha \in \{\dots, v\}.$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\dots, y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\dots, v\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\{\dots, y\} \subseteq \{\dots, v\}.$$

Beweis **237-1 e)** VS gleich

$$y \leq v.$$

Thema1

$$\alpha \in \{x, \dots, y\}.$$

2: Aus **Thema1** " $\alpha \in \{x, \dots, y\}$ "
folgt via **169-2**:

$$(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha \leq y).$$

3: Aus 2 " $\dots \alpha \leq y$ " und
aus VS gleich " $y \leq v$ "
folgt via **107-8**:

$$\alpha \leq v.$$

4: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{Z} \dots$ ",
aus 2 " $\dots x \leq \alpha \dots$ " und
aus 3 " $\alpha \leq v$ "
folgt via **169-2**:

$$\alpha \in \{x, \dots, v\}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \dots, y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x, \dots, v\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\{x, \dots, y\} \subseteq \{x, \dots, v\}.$$

f) VS gleich

$$0 \leq a.$$

1: Es gilt:

$$(x = +\infty) \vee (x \neq +\infty).$$

Fallunterscheidung**1.1.Fall**

$$x = +\infty.$$

$$2.1: \{x, \dots, y\} \stackrel{1.1.Fall}{=} \{+\infty, \dots, y\} \stackrel{169-8}{=} 0.$$

$$2.2: \text{Via } \mathbf{0-18} \text{ gilt: } 0 \subseteq \{-a + x, \dots, y\}.$$

3: Aus 2.1 " $\{x, \dots, y\} = \dots = 0$ " und
aus 2.2 " $0 \subseteq \{-a + x, \dots, y\}$ "
folgt:

$$\{x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, y\}.$$

...

Beweis **237-1 f)** ...

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall

$x \neq +\infty$.

Thema2

$\beta \in \{x, \dots, y\}$.

3: Aus Thema2 " $\beta \in \{x, \dots, y\}$ "
folgt via **169-2**: $(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \beta \leq y)$.

4: Aus 3 " $\dots x \leq \beta \dots$ "
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

5: Aus 1.2.Fall " $x \neq +\infty$ ",
aus 4 " $x \in \mathbb{S}$ " und
aus VS gleich " $0 \leq a$ "
folgt via **165-2**: $x - a \leq x$.

6: Via **FS**-+ gilt: $-a + x = x - a$.

7: Aus 6 " $-a + x = x - a$ " und
aus 5 " $x - a \leq x$ "
folgt: $-a + x \leq x$.

8: Aus 7 " $-a + x \leq x$ " und
aus 3 " $\dots x \leq \beta \dots$ "
folgt via **107-8**: $-a + x \leq \beta$.

9: Aus 3 " $\beta \in \mathbb{Z} \dots$ ",
aus 8 " $-a + x \leq \beta$ " und
aus 3 " $\dots \beta \leq y$ "
folgt via **169-2**: $\beta \in \{-a + x, \dots, y\}$.

Ergo Thema2: $\forall \beta : (\beta \in \{x, \dots, y\}) \Rightarrow (\beta \in \{-a + x, \dots, y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, y\}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, y\}$.

Beweis **237-1** g) VS gleich

$$0 \leq a.$$

1: Es gilt:

$$(y = -\infty) \vee (y \neq -\infty).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$y = -\infty.$$

$$2.1: \{x, \dots, y\} \stackrel{1.1, \text{Fall}}{=} \{x, \dots, -\infty\} \stackrel{169-8}{=} 0.$$

$$2.2: \text{Via } \mathbf{0-18} \text{ gilt: } 0 \subseteq \{x, \dots, a + y\}.$$

$$3: \text{Aus } 2.1 \text{ "}\{x, \dots, y\} = \dots = 0\text{" und} \\ \text{aus } 2.2 \text{ "}"0 \subseteq \{x, \dots, a + y\}\text{"} \\ \text{folgt: } \{x, \dots, y\} \subseteq \{x, \dots, a + y\}.$$

...

Beweis **237-1** g) VS gleich

$$0 \leq a.$$

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall

$$y \neq -\infty.$$

Thema2

$$\beta \in \{x, \dots, y\}.$$

3: Aus Thema2 " $\beta \in \{x, \dots, y\}$ "
folgt via **169-2**: $(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \beta \leq y).$

4: Aus 3 " $\dots \beta \leq y$ "
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}.$

5: Aus 1.2.Fall " $y \neq -\infty$ ",
aus 4 " $y \in \mathbb{S}$ " und
aus VS gleich " $0 \leq a$ "
folgt via **165-2**: $y \leq y + a.$

6: Via **FSA** gilt: $y + a = a + y.$

7: Aus 5 " $y \leq y + a$ " und
aus 6 " $y + a = a + y$ "
folgt: $y \leq a + y.$

8: Aus 3 " $\dots \beta \leq y$ " und
aus 7 " $y \leq a + y$ " folgt via **107-8**: $\beta \leq a + y.$

9: Aus 3 " $\beta \in \mathbb{Z} \dots$ ",
aus 3 " $\dots x \leq \beta \dots$ " und
aus 8 " $\beta \leq a + y$ "
folgt via **169-2**: $\beta \in \{x, \dots, a + y\}.$

Ergo Thema2: $\forall \beta : (\beta \in \{x, \dots, y\}) \Rightarrow (\beta \in \{x, \dots, a + y\}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{x, \dots, y\} \subseteq \{x, \dots, a + y\}.$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{x, \dots, y\} \subseteq \{x, \dots, a + y\}.$

Beweis 237-1 h) VS gleich

$$0 \leq a.$$

1: Aus VS gleich “ $0 \leq a$ ”

folgt via des bereits bewiesen f): $\{x, \dots, +\infty\} \subseteq \{-a + x, \dots, +\infty\}.$

$$2: \quad \{x, \dots\} \stackrel{169-8}{=} \{x, \dots, +\infty\} \stackrel{1}{\subseteq} \{-a + x, \dots, +\infty\} \stackrel{169-8}{=} \{-a + x, \dots\}.$$

3: Aus 2

folgt: $\{x, \dots\} \subseteq \{-a + x, \dots\}.$

i) VS gleich

$$0 \leq a.$$

1: Aus VS gleich “ $0 \leq a$ ”

folgt via des bereits bewiesen g): $\{-\infty, \dots, y\} \subseteq \{-\infty, \dots, a + y\}.$

$$2: \quad \{\dots, y\} \stackrel{169-8}{=} \{-\infty, \dots, y\} \stackrel{1}{\subseteq} \{-\infty, \dots, a + y\} \stackrel{169-8}{=} \{\dots, a + y\}.$$

3: Aus 2

folgt: $\{\dots, y\} \subseteq \{\dots, a + y\}.$

j) VS gleich

$$0 \leq a, b.$$

1: Aus VS gleich “ $0 \leq a \dots$ ”

folgt via des bereits bewiesenen f): $\{x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, y\}.$

2: Aus VS gleich “ $0 \leq \dots b$ ”

folgt via des bereits bewiesenen g): $\{-a + x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, b + y\}.$

3: Aus 1 “ $\{x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, y\}$ ” und

aus 2 “ $\{-a + x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, b + y\}$ ”

folgt via 0-6: $\{x, \dots, y\} \subseteq \{-a + x, \dots, b + y\}.$

□

237-2. Nun wird der Frage nachgegangen, wann $x \in \{x, \dots, y\}$, $x \in \{x, \dots\}$ und $y \in \{x, \dots, y\}$, $y \in \{\dots, y\}$ gilt:

237-2(Satz)

- a) " $x \in \{x, \dots, y\}$ " genau dann, wenn " $\mathbb{Z} \ni x \leq y$ ".
- b) " $x \in \{x, \dots\}$ " genau dann, wenn " $x \in \mathbb{Z}$ ".
- c) " $y \in \{x, \dots, y\}$ " genau dann, wenn " $x \leq y \in \mathbb{Z}$ ".
- d) " $y \in \{\dots, y\}$ " genau dann, wenn " $y \in \mathbb{Z}$ ".

$\leq$ -Notation.

Beweis **237-2** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$x \in \{x, \dots, y\}.$$

Aus VS gleich " $x \in \{x, \dots, y\}$ "
folgt via **169-2**:

$$(x \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq y).$$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq y).$$

1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{Z} \dots$ "
folgt via **164-5**:

$$x \in \mathbb{S}.$$

2: Aus 1 " $x \in \mathbb{S}$ "
folgt via **107-5**:

$$x \leq x.$$

3: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{Z} \dots$ ",
aus 2 " $x \leq x$ " und
aus VS gleich " $\dots x \leq y$ "
folgt via **169-2**:

$$x \in \{x, \dots, y\}.$$

Beweis **237-2** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$x \in \{x, \dots\}.$$

Aus VS gleich “ $x \in \{x, \dots\}$ ”

folgt via **169-2**:

$$x \in \mathbb{Z}.$$

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$x \in \mathbb{Z}.$$

1: Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{Z}$ ”

folgt via **164-5**:

$$x \in \mathbb{S}.$$

2: Aus 1 “ $x \in \mathbb{S}$ ”

folgt via **107-5**:

$$x \leq x.$$

3: Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{Z}$ ” und

aus 2 “ $x \leq x$ ”

folgt via **169-2**:

$$x \in \{x, \dots\}.$$

c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$y \in \{x, \dots, y\}.$$

Aus VS gleich “ $y \in \{x, \dots, y\}$ ”

folgt via **169-2**:

$$(y \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq y).$$

c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(y \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq y).$$

1: Aus VS gleich “ $y \in \mathbb{Z} \dots$ ”

folgt via **164-5**:

$$y \in \mathbb{S}.$$

2: Aus 1 “ $y \in \mathbb{S}$ ”

folgt via **107-5**:

$$y \leq y.$$

3: Aus VS gleich “ $y \in \mathbb{Z} \dots$ ”,

aus VS gleich “ $\dots x \leq y$ ” und

aus 2 “ $y \leq y$ ”

folgt via **169-2**:

$$y \in \{x, \dots, y\}.$$

Beweis **237-2** d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$y \in \{\dots, y\}.$$

Aus VS gleich “ $y \in \{\dots, y\}$ ”
folgt via **169-2**:

$$y \in \mathbb{Z}.$$

d) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$y \in \mathbb{Z}.$$

1: Aus VS gleich “ $y \in \mathbb{Z}$ ”
folgt via **164-5**:

$$y \in \mathbb{S}.$$

2: Aus 1 “ $y \in \mathbb{S}$ ”
folgt via **107-5**:

$$y \leq y.$$

3: Aus VS gleich “ $y \in \mathbb{Z}$ ” und
aus 2 “ $y \leq y$ ”
folgt via **169-2**:

$$y \in \{\dots, y\}.$$

□

237-3. Aus $x \leq m \in \mathbb{Z}$ folgt $\{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\} = \{x, \dots, m\}$:

237-3(Satz)

- a) Aus " $m \in \mathbb{Z}$ " folgt " $\{x, \dots, m\} \subseteq \{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\}$ ".
- b) Aus " $x \leq m \in \mathbb{Z}$ " folgt " $\{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\} = \{x, \dots, m\}$ ".

RECH. $\leq$ -Notation.

Beweis **237-3** a) VS gleich $m \in \mathbb{Z}$.**Thema1**

$$\alpha \in \{x, \dots, m\}.$$

2: Aus **Thema1** " $\alpha \in \{x, \dots, m\}$ "folgt via **169-2**:

$$(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha \leq m).$$

3: Aus 2 " $\dots \alpha \leq m$ "folgt via **41-5**:

$$(\alpha < m) \vee (\alpha = m).$$

Fallunterscheidung**3.1.Fall**

$$\alpha < m.$$

4: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{Z} \dots$ ",
aus VS gleich " $m \in \mathbb{Z}$ " und
aus **3.1.Fall** " $\alpha < m$ "folgt via **LSZ**:

$$\alpha \leq -1 + m.$$

5: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{Z} \dots$ ",
aus 2 " $\dots x \leq \alpha \dots$ " und
aus 4 " $\alpha \leq -1 + m$ "folgt via **169-2**:

$$\alpha \in \{x, \dots, -1 + m\}.$$

6: Aus 5 " $\alpha \in \{x, \dots, -1 + m\}$ "folgt via **2-2**:

$$\alpha \in \{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\}.$$

3.2.Fall

$$\alpha = m.$$

4: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{Z} \dots$ "folgt via **ElementAxiom**: α Menge.5: Aus **3.2.Fall** " $\alpha = m$ " und
aus 4 " α Menge"folgt via **1-6**:

$$\alpha \in \{m\}.$$

6: Aus 5 " $\alpha \in \{m\}$ "folgt via **2-2**:

$$\alpha \in \{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\}.$$

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:

$$\alpha \in \{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \dots, m\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\{x, \dots, m\} \subseteq \{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\}.$$

Beweis 237-3 b) VS gleich

$$x \leq m \in \mathbb{Z}.$$

1.1: Aus VS gleich “ $\dots m \in \mathbb{Z}$ ” und
aus **schola** “ $0 \leq 1$ ”
folgt via **166-2**:

$$m - 1 \leq m.$$

1.2: Aus VS gleich “ $x \leq m \in \mathbb{Z}$ ”
folgt via **237-2**:

$$m \in \{x, \dots, m\}.$$

1.3: Aus VS gleich “ $\dots m \in \mathbb{Z}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\{x, \dots, m\} \subseteq \{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\}.$$

2.1: Via **FS**–+ gilt:

$$-1 + m = m - 1.$$

2.2: Aus 1.2 “ $m \in \{x, \dots, m\}$ ”
folgt via **1-8**:

$$\{m\} \subseteq \{x, \dots, m\}.$$

3: Aus 2.1 “ $-1 + m = m - 1$ ” und
aus 1.1 “ $m - 1 \leq m$ ”
folgt:

$$-1 + m \leq m.$$

4: Aus 3 “ $-1 + m \leq m$ ”
folgt via **237-1**:

$$\{x, \dots, -1 + m\} \subseteq \{x, \dots, m\}.$$

5: Aus 4 “ $\{x, \dots, -1 + m\} \subseteq \{x, \dots, m\}$ ” und
aus 2.2 “ $\{m\} \subseteq \{x, \dots, m\}$ ”
folgt via **2-12**:

$$\{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\} \subseteq \{x, \dots, m\}.$$

6: Aus 5 “ $\{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\} \subseteq \{x, \dots, m\}$ ” und
aus 1.3 “ $\{x, \dots, m\} \subseteq \{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\}$ ”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{x, \dots, -1 + m\} \cup \{m\} = \{x, \dots, m\}.$

□

237-4. Auch die vorliegenden Resultate wollen erst bewiesen und dann verwendet werden:

237-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow) x \text{ Zahl.}$

Dann folgt:

a) $-1 + (1 + x) = x.$

b) $1 + (-1 + x) = x.$

RECH-Notation.

Beweis 237-4 a)

Aus **schola** " $1 \in \mathbb{C}$ " und

aus $\rightarrow)$ " $x \text{ Zahl}$ "

folgt via **160-3:**

$$-1 + (1 + x) = x.$$

b)

Aus **schola** " $1 \in \mathbb{C}$ " und

aus $\rightarrow)$ " $x \text{ Zahl}$ "

folgt via **160-3:**

$$1 + (-1 + x) = x.$$

□

237-5. Die nun eingeführte parameterfreie Klasse $237.0()$ entpuppt sich in **237-6** als $\mathbb{N}$:

237-5(Definition)

$$237.0() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}.$$

RECH-Notation.

237-6. Nach einige Vorbereitungen wird $n = \{0, \dots, -1 + n\}$ und $1 + n = \{0, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen:

237-6(Satz)

- a) " $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$ "
genau dann, wenn " $p \in \mathbb{N}$ " und " $p = \{0, \dots, -1 + p\}$ ".
- b) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\} \subseteq \mathbb{N}$.
- c) $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$.
- d) $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\})$
 $\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\})$.
- e) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\} = \mathbb{N}$.
- f) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " $n = \{0, \dots, -1 + n\}$ ".
- g) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " $1 + n = \{0, \dots, n\}$ ".

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$ **237-5(Def)**

RECH-Notation.

Beweis **237-6** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$.

Aus VS gleich " $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$ "

folgt: $(p \in \mathbb{N}) \wedge (p = \{0, \dots, -1 + p\})$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p \in \mathbb{N}) \wedge (p = \{0, \dots, -1 + p\})$.

1: Aus VS gleich " $p \in \mathbb{N} \dots$ "

folgt via **ElementAxiom**:

p Menge.

2: Aus 2 " p Menge" und

aus VS gleich " $(p \in \mathbb{N}) \wedge (p = \{0, \dots, -1 + p\})$ "

folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$.

Beweis **237-6** b)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}.$$

Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\} \subseteq \mathbb{N}$.

c)

1.1: Via **+schola** gilt: $-1 + 0 = -1$.

1.2: Via **<schola** gilt: $-1 < 0$.

2: Aus 1.2 “ $-1 < 0$ ”
folgt via **169-7**: $\{0, \dots, -1\} = 0$.

3: $0 \stackrel{2}{=} \{0, \dots, -1\} \stackrel{1.1}{=} \{0, \dots, -1 + 0\}$.

4: Aus **159-10** “ $0 \in \mathbb{N}$ ” und
aus 3 “ $0 = \dots = \{0, \dots, -1 + 0\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:
 $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}.$

Beweis **237-6** d)

Thema1 $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}.$

2.1: Aus **Thema1** " $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$ "
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $\alpha \in \mathbb{N}.$

2.2: Aus **Thema1** " $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}$ "
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:
 $\alpha = \{0, \dots, -1 + \alpha\}.$

3.1: Aus 2.1 " $\alpha \in \mathbb{N}$ "
folgt via **159-11**: α Zahl.

3.2: Aus 2.1 " $\alpha \in \mathbb{N}$ "
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}.$

3.3: Aus 2.1 " $\alpha \in \mathbb{N}$ "
folgt via **AN-Axiom**: $1 + \alpha = \{\alpha\} \cup \alpha.$

3.4: Aus 2.1 " $\alpha \in \mathbb{N}$ "
folgt via **164-6**: $0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}.$

4.1: Aus 3.1 " α Zahl"
folgt via **237-4**: $-1 + (1 + \alpha) = \alpha.$

4.2: Aus 3.4 " $0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}$ "
folgt via **237-3**: $\{0, \dots, -1 + \alpha\} \cup \{\alpha\} = \{0, \dots, \alpha\}.$

5: $1 + \alpha \stackrel{3.3}{=} \{\alpha\} \cup \alpha$
 $\stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$

$\stackrel{2.2}{=} \{0, \dots, -1 + \alpha\} \cup \{\alpha\}$

$\stackrel{4.2}{=} \{0, \dots, \alpha\}$

$\stackrel{4.1}{=} \{0, \dots, -1 + (1 + \alpha)\}.$

6: Aus 3.2 " $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ " und
aus 5 " $1 + \alpha = \dots = \{0, \dots, -1 + (1 + \alpha)\}$ "
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:
 $1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}.$

...

Beweis **237-6** d) ...

Ergo **Thema1**:

$$\begin{aligned} \forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}) \\ \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}). \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \text{Aus c) "0} \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}" , \\ \text{aus b) "}\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\} \subseteq \mathbb{N}" \text{ und} \\ \text{aus d) "}\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}) \\ \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\})" \end{aligned}$$

folgt via **236-5**:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\} = \mathbb{N}.$$

f) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} 1: \text{ Aus VS gleich "n} \in \mathbb{N}" \text{ und} \\ \text{aus e) "}\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\} = \mathbb{N}" \\ \text{folgt:} \quad n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2: \text{ Aus 1 "n} \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = \{0, \dots, -1 + \omega\})\}" \\ \text{folgt via des bereits bewiesenen a):} \quad n = \{0, \dots, -1 + n\}. \end{aligned}$$

g) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} 1.1: \text{ Aus VS gleich "n} \in \mathbb{N}" \\ \text{folgt via } \mathbf{159-11}: \quad n \text{ Zahl.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2: \text{ Aus VS gleich "n} \in \mathbb{N}" \\ \text{folgt via } \mathbf{159-10}: \quad 1 + n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.1: \text{ Aus 1.1 "n Zahl}" \\ \text{folgt via } \mathbf{237-4}: \quad -1 + (1 + n) = n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2: \text{ Aus 1.2 "1 + n} \in \mathbb{N}" \\ \text{folgt via des bereits bewiesenen f):} \quad 1 + n = \{0, \dots, -1 + (1 + n)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3: \text{ Aus 2.2 "1 + n} = \{0, \dots, -1 + (1 + n)\}" \text{ und} \\ \text{aus 2.1 "-1 + (1 + n) = n"} \\ \text{folgt:} \quad 1 + n = \{0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

□

237-7. Falls $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$, dann $n \in 1 + m$. Falls $n \in \mathbb{N}$ und $x \in 1 + n$, dann $x \in \mathbb{N}$ und $x \leq n$:

237-7(Satz)

- a) Aus " $n, m \in \mathbb{N}$ " und " $n \leq m$ " folgt " $n \in 1 + m$ ".
- b) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " und " $x \in 1 + n$ " folgt " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq n$ ".

$\leq$ -Notation.

Beweis 237-7 a) VS gleich

$$(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq m).$$

1.1: Aus VS gleich " $n \dots \in \mathbb{N}$ "
folgt via **164-6**:

$$0 \leq n \in \mathbb{Z}.$$

1.2: Aus VS gleich " $\dots m \in \mathbb{N} \dots$ "
folgt via **237-6**:

$$1 + m = \{0, \dots, m\}.$$

2: Aus 1.1 " $\dots n \in \mathbb{Z}$ ",
aus 1.1 " $0 \leq n \dots$ " und
aus VS gleich " $\dots n \leq m$ "
folgt via **169-2**:

$$n \in \{0, \dots, m\}.$$

3: Aus 2 " $n \in \{0, \dots, m\}$ " und
aus 1.2 " $1 + m = \{0, \dots, m\}$ "
folgt:

$$n \in 1 + m.$$

b) VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in 1 + n).$$

1: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N} \dots$ "
folgt via **237-6**:

$$1 + n = \{0, \dots, n\}.$$

2: Aus VS gleich " $\dots x \in 1 + n$ " und
aus 1 " $1 + n = \{0, \dots, n\}$ "
folgt:

$$x \in \{0, \dots, n\}.$$

3: Aus 2 " $x \in \{0, \dots, n\}$ "
folgt via **169-2**:

$$(x \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \leq x \leq n).$$

4.1: Aus 3

folgt:

$$x \leq n$$

4.2: Aus 3 " $x \in \mathbb{Z} \dots$ " und
aus 3 " $\dots 0 \leq x \dots$ "

folgt via **164-6**:

$$x \in \mathbb{N}$$

□

Ungeordnete Tupel: Vereinigung.

$\{p, q\} = \{r\}$ mit Mengen p, q .

$(x \cup y) \setminus z = (x \setminus z) \cup (y \setminus z)$.

Einiges über $(\{p\} \cup x) \setminus \{q\}$.

Ersterstellung: 05/04/13

Letzte Änderung: 15/04/13

238-1. Ergänzend zu den Betrachtungen von **209** wird hier der die binäre Vereinigung von ungeordneten Tupeln, deren Definition auf Klassen-Sequenzen beruht, durch eine allgemeine Regel festgelegt. Offenbar erweitert diese allgemeine Regel bekannte Aussagen über die Vereinigung geordneter Paare, so dass eine spezielle Erwähnung dieser bereits behandelten Fälle nicht erforderlich ist:

Ungeordnete Tupel: binäre Vereinigung

Ist “#” eine Klassen-Sequenz und ist “@” eine Klassen-Sequenz,
so gilt $\{\#\} \cup \{\@\} = \{\#, \@\}$

238-2. Falls p, q Mengen sind und falls $\{p, q\} = \{r\}$ gilt, so folgt $p = q = r$ und r ist eine Menge:

238-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow) p, q \text{ Menge.}$

$\rightarrow) \{p, q\} = \{r\}.$

Dann folgt:

a) $r \text{ Menge.}$

b) $p = q = r = p.$

Beweis 238-2

1.1: Aus $\rightarrow) "p \dots \text{Menge}"$
folgt via **4-9**:

$$p \in \{p, q\}.$$

1.2: Aus $\rightarrow) "\dots q \text{ Menge}"$
folgt via **4-9**:

$$q \in \{p, q\}.$$

2.1: Aus 1.1 " $p \in \{p, q\}$ " und
aus $\rightarrow) "\{p, q\} = \{r\}"$
folgt:

$$p \in \{r\}.$$

2.2: Aus 1.2 " $q \in \{p, q\}$ " und
aus $\rightarrow) "\{p, q\} = \{r\}"$
folgt:

$$q \in \{r\}.$$

3.1: Aus 2.1 " $p \in \{r\}$ "
folgt via **1-6**:

$$(p = r) \wedge (r \text{ Menge}).$$

3.2: Aus 2.2 " $q \in \{r\}$ "
folgt via **1-6**:

$$q = r.$$

4.a): Aus 3.1
folgt:

$$r \text{ Menge.}$$

4.b): Aus 3.1 " $p = r \dots$ " und
aus 3.2 " $q = r$ "
folgt:

$$p = q = r = p.$$

□

238-3. Falls $q \neq p$, dann $(\{p\} \cup x) \setminus \{q\} = \{p\} \cup (x \setminus \{q\})$. Aus $q = p$ folgt $(\{p\} \cup x) \setminus \{q\} = x \setminus \{q\}$. Im Speziellen gilt die auch anderwertig verfügbare Formel $(\{p\} \cup x) \setminus \{p\} = x \setminus \{p\}$:

238-3(Satz)

- a) $(x \cup y) \setminus z = (x \setminus z) \cup (y \setminus z)$.
- b) Aus " $q \neq p$ " folgt " $\{p\} \setminus \{q\} = \{p\}$ " und " $\{q\} \setminus \{p\} = \{q\}$ ".
- c) Aus " $q \neq p$ " folgt " $(\{p\} \cup x) \setminus \{q\} = \{p\} \cup (x \setminus \{q\})$ ".
- d) Aus " $q \neq p$ " folgt " $(\{q\} \cup x) \setminus \{p\} = \{q\} \cup (x \setminus \{p\})$ ".
- e) Aus " $q = p$ " folgt " $\{p\} \setminus \{q\} = 0$ " und " $\{q\} \setminus \{p\} = 0$ ".
- f) Aus " $q = p$ " folgt " $(\{p\} \cup x) \setminus \{q\} = x \setminus \{q\}$ ".
- g) Aus " $q = p$ " folgt " $(\{q\} \cup x) \setminus \{p\} = x \setminus \{p\}$ ".
- h) $(\{p\} \cup x) \setminus \{p\} = x \setminus \{p\}$.

Beweis 238-3 a)

1:

$$\begin{aligned}
 & (x \cup y) \setminus z \\
 & \stackrel{5-10}{=} (x \cup y) \cap z^C \\
 & \stackrel{\mathbf{DG}^{\cap \cup}}{=} (x \cap z^C) \cup (y \cap z^C) \\
 & \stackrel{5-10}{=} (x \setminus z) \cup (y \cap z^C) \\
 & \stackrel{5-10}{=} (x \setminus z) \cup (y \setminus z).
 \end{aligned}$$

2: Aus 1

folgt:

$$(x \cup y) \setminus z = (x \setminus z) \cup (y \setminus z).$$

Beweis **238-3** b) VS gleich

$$q \neq p.$$

1.1: Via **5-5** gilt:

$$\{p\} \setminus \{q\} \subseteq \{p\}.$$

Thema1.2

$$\alpha \in \{p\}.$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in \{p\}$ "
folgt via **1-6**:

$$\alpha = p.$$

3: Aus 2 " $\alpha = p$ " und
aus VS gleich " $q \neq p$ "
folgt:

$$\alpha \neq q.$$

4: Aus 3 " $\alpha \neq q$ "
folgt via **1-7**:

$$\alpha \notin \{q\}.$$

5: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in \{p\}$ " und
aus 4 " $\alpha \notin \{q\}$ "
folgt via **5-3**:

$$\alpha \in \{p\} \setminus \{q\}.$$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{p\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p\} \setminus \{q\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A1} \mid \{p\} \subseteq \{p\} \setminus \{q\}}$$

1.3: Via **5-5** gilt:

$$\{q\} \setminus \{p\} \subseteq \{q\}.$$

Thema1.4

$$\alpha \in \{q\}.$$

2: Aus **Thema1.4** " $\alpha \in \{q\}$ "
folgt via **1-6**:

$$\alpha = q.$$

3: Aus 2 " $\alpha = q$ " und
aus VS gleich " $q \neq p$ "
folgt:

$$\alpha \neq p.$$

4: Aus 3 " $\alpha \neq p$ "
folgt via **1-7**:

$$\alpha \notin \{p\}.$$

5: Aus **Thema1.4** " $\alpha \in \{q\}$ " und
aus 4 " $\alpha \notin \{p\}$ "
folgt via **5-3**:

$$\alpha \in \{q\} \setminus \{p\}.$$

Ergo **Thema1.4**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{q\}) \Rightarrow (\alpha \in \{q\} \setminus \{p\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid \{q\} \subseteq \{q\} \setminus \{p\}}$$

Beweis 238-3 b) VS gleich

$$q \neq p.$$

...

2.1: Aus 1.1 “ $\{p\} \setminus \{q\} \subseteq \{p\}$ ” und
aus A1 gleich “ $\{p\} \subseteq \{p\} \setminus \{q\}$ ”

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\{p\} \setminus \{q\} = \{p\}$$

2.2: Aus 1.3 “ $\{q\} \setminus \{p\} \subseteq \{q\}$ ” und
aus A2 gleich “ $\{q\} \subseteq \{q\} \setminus \{p\}$ ”

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\{q\} \setminus \{p\} = \{q\}$$

c) VS gleich

$$q \neq p.$$

1: Aus VS gleich “ $q \neq p$ ”

folgt via des bereits bewiesenen b):

$$\{p\} \setminus \{q\} = \{p\}.$$

$$2: (\{p\} \cup x) \setminus \{q\} \stackrel{\text{a)}}{=} (\{p\} \setminus \{q\}) \cup (x \setminus \{q\}) \stackrel{1}{=} \{p\} \cup (x \setminus \{q\}).$$

3: Aus 2

folgt:

$$(\{p\} \cup x) \setminus \{q\} = \{p\} \cup (x \setminus \{q\}).$$

d) VS gleich

$$q \neq p.$$

1: Aus VS gleich “ $q \neq p$ ”

folgt:

$$p \neq q.$$

2: Aus 1 “ $p \neq q$ ”

folgt via des bereits bewiesenen c):

$$(\{q\} \cup x) \setminus \{p\} = \{q\} \cup (x \setminus \{p\}).$$

Beweis **238-3 e)** VS gleich

$q = p$.

Thema1.1

$$\alpha \in \{p\} \setminus \{q\}.$$

2: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in \{p\} \setminus \{q\}$ "
folgt via **5-3**:

$$(\alpha \in \{p\}) \wedge (\alpha \notin \{q\}).$$

3: Aus 2 " $\alpha \in \{p\} \dots$ " und
aus VS gleich " $q = p$ "
folgt:

$$\alpha \in \{q\}.$$

4: Es gilt 3 " $\alpha \in \{q\}$ ".
Es gilt 2 " $\dots \alpha \notin \{q\}$ ".
Ex falso quodlibet folgt:

$$\alpha \notin \{p\} \setminus \{q\}.$$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{p\} \setminus \{q\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{p\} \setminus \{q\}).$$

Konsequenz via **0-19**:

$$\{p\} \setminus \{q\} = 0$$

Thema1.2

$$\alpha \in \{q\} \setminus \{p\}.$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in \{q\} \setminus \{p\}$ "
folgt via **5-3**:

$$(\alpha \in \{q\}) \wedge (\alpha \notin \{p\}).$$

3: Aus 2 " $\alpha \in \{q\} \dots$ " und
aus VS gleich " $q = p$ "
folgt:

$$\alpha \in \{p\}.$$

4: Es gilt 3 " $\alpha \in \{p\}$ ".
Es gilt 2 " $\dots \alpha \notin \{p\}$ ".
Ex falso quodlibet folgt:

$$\alpha \notin \{q\} \setminus \{p\}.$$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{q\} \setminus \{p\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{q\} \setminus \{p\}).$$

Konsequenz via **0-19**:

$$\{q\} \setminus \{p\} = 0$$

Beweis 238-3 f) VS gleich

$$q = p.$$

1: Aus VS gleich “ $q = p$ ”

folgt via des bereits bewiesenen e):

$$\{p\} \setminus \{q\} = 0.$$

$$2: (\{p\} \cup x) \setminus \{q\} \stackrel{\text{a)}}{=} (\{p\} \setminus \{q\}) \cup (x \setminus \{q\}) \stackrel{1}{=} 0 \cup (x \setminus \{q\}) \stackrel{2-17}{=} x \setminus \{q\}.$$

3: Aus 2

folgt:

$$(\{p\} \cup x) \setminus \{q\} = x \setminus \{q\}.$$

g) VS gleich

$$q = p.$$

1: Aus VS gleich “ $q = p$ ”

folgt:

$$p = q.$$

2: Aus 1 “ $p = q$ ”

folgt via des bereits bewiesenen f):

$$(\{q\} \cup x) \setminus \{p\} = x \setminus \{p\}.$$

h)

Aus “ $p = p$ ”

folgt via des bereits bewiesenen f):

$$(\{p\} \cup x) \setminus \{p\} = x \setminus \{p\}.$$

□

$2 = \{0, 1\}$. $3 = \{0, 1, 2\}$. $4 = \{0, 1, 2, 3\}$. $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 $7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. $9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
 $\text{ten} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt $n = (1 + n) \setminus \{n\}$.

Ersterstellung: 05/04/13

Letzte Änderung: 15/04/13

239-1. Bei den hier aufgelisteten Eigenschaften von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ten kommen bei den Beweisen ab 3 ohne explizites Zitieren Manipulations-Regeln ungeordneter Paare zum Einsatz:

239-1(Satz)

- a) $2 = \{0, 1\}$.
- b) $3 = \{0, 1, 2\}$.
- c) $4 = \{0, 1, 2, 3\}$.
- e) $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- f) $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- g) $7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- h) $8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- i) $9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
- j) $\text{ten} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Beweis 239-1

RECH-Notation.

a)

1: Aus **schola** "1 $\in \mathbb{N}$ "
folgt via **AN****Axiom**:

$$1 + 1 = \{1\} \cup 1.$$

2: $2 \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 1 \stackrel{1}{=} \{1\} \cup 1 \stackrel{95-1(\text{Def})}{=} \{1\} \cup \{0\} \stackrel{\text{KG}\cup}{=} \{0\} \cup \{1\} \stackrel{4-11}{=} \{0, 1\}.$

3: Aus 2
folgt:

$$2 = \{0, 1\}.$$

Beweis 239-1 b)1: Aus $\in\text{schola}$ “ $2 \in \mathbb{N}$ ”folgt via **AN**Axiom:

$$1 + 2 = \{2\} \cup 2.$$

2: $3 \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 2 \stackrel{1}{=} \{2\} \cup 2 \stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} 2 \cup \{2\} \stackrel{\text{a)}}{=} \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}.$

3: Aus 2

folgt:

$$3 = \{0, 1, 2\}.$$

c)

1: Aus $\in\text{schola}$ “ $3 \in \mathbb{N}$ ”folgt via **AN**Axiom:

$$1 + 3 = \{3\} \cup 3.$$

2: $4 \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 3 \stackrel{1}{=} \{3\} \cup 3 \stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} 3 \cup \{3\} \stackrel{\text{b)}}{=} \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}.$

3: Aus 2

folgt:

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}.$$

d)

1: Aus $\in\text{schola}$ “ $4 \in \mathbb{N}$ ”folgt via **AN**Axiom:

$$1 + 4 = \{4\} \cup 4.$$

2: $5 \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 4 \stackrel{1}{=} \{4\} \cup 4 \stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} 4 \cup \{4\} \stackrel{\text{c)}}{=} \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$

3: Aus 2

folgt:

$$5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

e)

1: Aus $\in\text{schola}$ “ $5 \in \mathbb{N}$ ”folgt via **AN**Axiom:

$$1 + 5 = \{5\} \cup 5.$$

2: $6 \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 5 \stackrel{1}{=} \{5\} \cup 5 \stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} 5 \cup \{5\} \stackrel{\text{d)}}{=} \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$

3: Aus 2

folgt:

$$6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

f)

1: Aus $\in\text{schola}$ “ $6 \in \mathbb{N}$ ”folgt via **AN**Axiom:

$$1 + 6 = \{6\} \cup 6.$$

2: $7 \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 6 \stackrel{1}{=} \{6\} \cup 6 \stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} 6 \cup \{6\} \stackrel{\text{e)}}{=} \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

3: Aus 2

folgt:

$$7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Beweis 239-1 g)

1: Aus **schola** “ $7 \in \mathbb{N}$ ”
folgt via **AN****Axiom**:

$$1 + 7 = \{7\} \cup 7.$$

2: $8 \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 7 \stackrel{1}{=} \{7\} \cup 7 \stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} 7 \cup \{7\} \stackrel{\text{f)}}{=} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7\}$
 $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$

3: Aus 2
folgt:

$$8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

h)

1: Aus **schola** “ $8 \in \mathbb{N}$ ”
folgt via **AN****Axiom**:

$$1 + 8 = \{8\} \cup 8.$$

2: $9 \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 8 \stackrel{1}{=} \{8\} \cup 8 \stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} 8 \cup \{8\} \stackrel{\text{g)}}{=} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{8\}$
 $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$

3: Aus 2
folgt:

$$9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

i)

1: Aus **schola** “ $9 \in \mathbb{N}$ ”
folgt via **AN****Axiom**:

$$1 + 9 = \{9\} \cup 9.$$

2: $\text{ten} \stackrel{+\text{schola}}{=} 1 + 9 \stackrel{1}{=} \{9\} \cup 9 \stackrel{\mathbf{KG} \cup}{=} 9 \cup \{9\} \stackrel{\text{h)}}{=} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{9\}$
 $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

3: Aus 2
folgt:

$$\text{ten} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

□

239-2. Die mit Hilfe der allgemeinen Regeln zur Manipulation ungeordneter Tupel gewonnenen Aussagen von **239-1** haben unter anderem die nunmehrigen, weitreichenden Konsequenzen. Ab sofort werden die allgemeinen Regeln zur Manipulation ungeordneter Tupel ohne weiteren Kommentar auf Singeltons und ungeordnete Paare angewendet, so dass unter anderem kommentarlos aus " $x \in \{0, 1\}$ " die Aussage " $x = 0$ " oder " $x = 1$ " folgt:

239-2(Satz)

- a) $\neg(\exists \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < 0))$.
- b) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 1$ " genau dann, wenn " $x = 0$ ".
- c) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 2$ " genau dann, wenn " $x = 0$ " oder " $x = 1$ ".
- d) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 3$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ ".
- e) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 4$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ ".
- f) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 5$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ ".
- g) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 6$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ ".
- h) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 7$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
oder " $x = 6$ ".

...

$\leq$ -Notation.

239-2(Satz)

...

- i) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 8$ " genau dann, wenn
 " $x = 0$ " oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
 oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
 oder " $x = 6$ " oder " $x = 7$ ".
- j) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 9$ " genau dann, wenn
 " $x = 0$ " oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
 oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
 oder " $x = 6$ " oder " $x = 7$ " oder " $x = 8$ ".
- k) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < \text{ten}$ " genau dann, wenn
 " $x = 0$ " oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
 oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
 oder " $x = 6$ " oder " $x = 7$ " oder " $x = 8$ "
 oder " $x = 9$ ".

 $\leq$ -Notation.**Beweis 239-2 a)**

1: Es gilt: $(\exists \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < 0)) \vee (\neg(\exists \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < 0)))$.

wfFallunterscheidung**1.1.Fall**

$$\exists \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < 0).$$

2: Aus 1.1.Fall "... $\alpha \in \mathbb{N}$...",
 aus **schola** " $0 \in \mathbb{N}$ " und
 aus 1.1.Fall "... $\alpha < 0$ "
 folgt via **197-5**:

$$\alpha \in 0.$$

3: Es gilt 2 " $\alpha \in 0$ ".

Via **0-19** gilt " $\alpha \notin 0$ ".

Ex falso quodlibet folgt:

$$\neg(\exists \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < 0)).$$

Ende wfFallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:

$$\neg(\exists \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < 0)).$$

Beweis **239-2 b)** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 1).$$

- 1: Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ”,
 aus **schola** “ $1 \in \mathbb{N}$ ” und
 aus VS gleich “ $\dots x < 1$ ”
 folgt via **197-5**:

$$x \in 1.$$

- 2: Aus 1 “ $x \in 1$ ” und
 aus **95-1(Def)** “ $1 = \{0\}$ ”
 folgt:

$$x \in \{0\}.$$

- 3: Aus 2 “ $x \in \{0\}$ ”
 folgt:

$$x = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$x = 0.$$

- 1.1: Aus VS gleich “ $x = 0$ ” und
 aus **schola** “ $0 \in \mathbb{N}$ ”
 folgt:

$$x \in \mathbb{N}$$

- 1.2: Aus VS gleich “ $x = 0$ ” und
 aus **schola** “ $0 < 1$ ”
 folgt:

$$x < 1$$

c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 2).$$

- 1: Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ”,
 aus **schola** “ $2 \in \mathbb{N}$ ” und
 aus VS gleich “ $\dots x < 2$ ”
 folgt via **197-5**:

$$x \in 2.$$

- 2: Aus 1 “ $x \in 2$ ” und
 aus **239-1** “ $2 = \{0, 1\}$ ”
 folgt:

$$x \in \{0, 1\}.$$

- 3: Aus 2 “ $x \in \{0, 1\}$ ”
 folgt:

$$(x = 0) \vee (x = 1).$$

Beweis **239-2** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1).$$

1: Nach VS gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x = 0.$$

2: Aus **1.1.Fall** " $x = 0$ "
folgt via des bereits bewiesenen b):

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 1).$$

3: Aus 2 " $\dots x < 1$ " und
aus **<schola** " $1 < 2$ "
folgt via **107-8**:

$$x < 2.$$

4: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 3 " $x < 2$ "
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 2).$$

1.2.Fall

$$x = 1$$

2.1: Aus **1.2.Fall** " $x = 1$ " und
aus **<schola** " $1 \in \mathbb{N}$ "
folgt:

$$x \in \mathbb{N}.$$

2.2: Aus **1.2.Fall** " $x = 1$ " und
aus **<schola** " $1 < 2$ "
folgt:

$$x < 2.$$

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 2).$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 2).$$

d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3).$$

1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
aus **<schola** " $3 \in \mathbb{N}$ " und
aus VS gleich " $\dots x < 3$ "
folgt via **197-5**:

$$x \in 3.$$

2: Aus 1 " $x \in 3$ " und
aus **239-1** " $3 = \{0, 1, 2\}$ "
folgt:

$$x \in \{0, 1, 2\}.$$

3: Aus 2 " $x \in \{0, 1, 2\}$ "
folgt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2).$$

Beweis **239-2 d)** $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2).$$

1: Nach VS gilt:

$$((x = 0) \vee (x = 1)) \vee (x = 2).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$(x = 0) \vee (x = 1).$$

2: Aus **1.1.Fall** “ $(x = 0) \vee (x = 1)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **c)**:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 2).$$

3: Aus 2 “ $\dots x < 2$ ” und
aus **<schola** “ $2 < 3$ ”
folgt via **107-8**:

$$x < 3.$$

4: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 3 “ $x < 3$ ”
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3).$$

1.2.Fall

$$x = 2$$

2.1: Aus **1.2.Fall** “ $x = 2$ ” und
aus **<schola** “ $2 \in \mathbb{N}$ ”
folgt:

$$x \in \mathbb{N}.$$

2.2: Aus **1.2.Fall** “ $x = 2$ ” und
aus **<schola** “ $2 < 3$ ”
folgt:

$$x < 3.$$

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3).$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3).$$

e) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 4).$$

1: Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ”,
aus **<schola** “ $4 \in \mathbb{N}$ ” und
aus VS gleich “ $\dots x < 4$ ”
folgt via **197-5**:

$$x \in 4.$$

2: Aus 1 “ $x \in 4$ ” und
aus **239-1** “ $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ ”
folgt:

$$x \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

3: Aus 2 “ $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ”
folgt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3).$$

Beweis **239-2 e)** $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3).$

1: Nach VS gilt: $((x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2)) \vee (x = 3).$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2).$$

2: Aus **1.1.Fall** " $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2)$ "
folgt via des bereits bewiesenen **d)**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3).$

3: Aus 2 " $\dots x < 3$ " und
aus **<schola** " $3 < 4$ "
folgt via **107-8**: $x < 4.$

4: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 3 " $x < 4$ "
folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 4).$

1.2.Fall

$$x = 3$$

2.1: Aus **1.2.Fall** " $x = 3$ " und
aus **<schola** " $3 \in \mathbb{N}$ "
folgt: $x \in \mathbb{N}.$

2.2: Aus **1.2.Fall** " $x = 3$ " und
aus **<schola** " $3 < 4$ "
folgt: $x < 4.$

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 4).$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 4).$

f) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 5).$

1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
aus **<schola** " $5 \in \mathbb{N}$ " und
aus VS gleich " $\dots x < 5$ "
folgt via **197-5**: $x \in 5.$

2: Aus 1 " $x \in 5$ " und
aus **239-1** " $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ "
folgt: $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$

3: Aus 2 " $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ "
folgt: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4).$

Beweis **239-2 f)** $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4)$.

1: Nach VS gilt: $((x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3)) \vee (x = 4)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3).$$

2: Aus **1.1.Fall** " $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3)$ "
folgt via des bereits bewiesenen **e)**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 4)$.

3: Aus 2 " $\dots x < 4$ " und
aus **<schola** " $4 < 5$ "
folgt via **107-8**: $x < 5$.

4: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 3 " $x < 5$ "
folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 5)$.

1.2.Fall

$$x = 4$$

2.1: Aus **1.2.Fall** " $x = 4$ " und
aus **<schola** " $4 \in \mathbb{N}$ "
folgt: $x \in \mathbb{N}$.

2.2: Aus **1.2.Fall** " $x = 4$ " und
aus **<schola** " $4 < 5$ "
folgt: $x < 5$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 5)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 5)$.

g) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 6)$.

1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
aus **<schola** " $6 \in \mathbb{N}$ " und
aus VS gleich " $\dots x < 6$ "
folgt via **197-5**: $x \in 6$.

2: Aus 1 " $x \in 6$ " und
aus **239-1** " $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ "
folgt: $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

3: Aus 2 " $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ "
folgt: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)$.

Beweis **239-2** g)
 $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5).$
1: Nach VS gilt: $((x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4)) \vee (x = 5).$ **Fallunterscheidung**
1.1.Fall $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4).$

 2: Aus **1.1.Fall** " $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4)$ "
 folgt via des bereits bewiesenen **f**): $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 5).$

 3: Aus 2 " $\dots x < 5$ " und
 aus **<schola** " $5 < 6$ "
 folgt via **107-8**: $x < 6.$

 4: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
 aus 3 " $x < 6$ "
 folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 6).$
1.2.Fall $x = 5$

 2.1: Aus **1.2.Fall** " $x = 5$ " und
 aus **<schola** " $5 \in \mathbb{N}$ "
 folgt: $x \in \mathbb{N}.$

 2.2: Aus **1.2.Fall** " $x = 5$ " und
 aus **<schola** " $5 < 6$ "
 folgt: $x < 6.$

 3: Aus 2.1 und
 aus 2.2
 folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 6).$
Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 6).$

 h) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 7).$

 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **<schola** " $7 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 7$ "
 folgt via **197-5**: $x \in 7.$

 2: Aus 1 " $x \in 7$ " und
 aus **239-1** " $7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ "
 folgt: $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

 3: Aus 2 " $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ "
 folgt: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6).$

Beweis **239-2 h)**

$\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6)$.

1: Nach VS gilt:

$$((x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)) \vee (x = 6).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)$.

2: Aus **1.1.Fall** " $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)$ "
 folgt via des bereits bewiesenen **g**): $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 6)$.

3: Aus 2 " $\dots x < 6$ " und
 aus **<schola** " $6 < 7$ "
 folgt via **107-8**: $x < 7$.

4: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
 aus 3 " $x < 7$ "
 folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 7)$.

1.2.Fall $x = 6$

2.1: Aus **1.2.Fall** " $x = 6$ " und
 aus **<schola** " $6 \in \mathbb{N}$ "
 folgt: $x \in \mathbb{N}$.

2.2: Aus **1.2.Fall** " $x = 6$ " und
 aus **<schola** " $6 < 7$ "
 folgt: $x < 7$.

3: Aus 2.1 und
 aus 2.2
 folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 7)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 7)$.

Beweis **239-2** i) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 8).$$

- 1: Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ”,
 aus **schola** “ $8 \in \mathbb{N}$ ” und
 aus VS gleich “ $\dots x < 8$ ”
 folgt via **197-5**:

$$x \in 8.$$

- 2: Aus 1 “ $x \in 8$ ” und
 aus **239-1** “ $8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ”
 folgt:

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

- 3: Aus 2 “ $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ”

$$\text{folgt: } (x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7).$$

i) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7).$

- 1: Nach VS gilt:

$$((x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6)) \vee (x = 7).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6).$

- 2: Aus **1.1.Fall** “ $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6)$ ”
 folgt via des bereits bewiesenen **h**): $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 7).$

- 3: Aus 2 “ $\dots x < 7$ ” und
 aus **schola** “ $7 < 8$ ”
 folgt via **107-8**:

$$x < 8.$$

- 4: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
 aus 3 “ $x < 8$ ”
 folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 8).$$

...

Beweis **239-2** i) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7)$.

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall	$x = 7$
2.1: Aus 1.2.Fall " $x = 7$ " und aus schola " $7 \in \mathbb{N}$ " folgt:	$x \in \mathbb{N}$.
2.2: Aus 1.2.Fall " $x = 7$ " und aus schola " $7 < 8$ " folgt:	$x < 8$.
3: Aus 2.1 und aus 2.2 folgt:	$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 8)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 8)$.

j) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 9)$.

1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
aus **schola** " $9 \in \mathbb{N}$ " und
aus VS gleich " $\dots x < 9$ "
folgt via **197-5**: $x \in 9$.

2: Aus 1 " $x \in 9$ " und
aus **239-1** " $9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ "
folgt: $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

3: Aus 2 " $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ "
folgt: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8)$.

Beweis **239-2 j)** $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8)$.

1: Nach VS gilt: $((x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7)) \vee (x = 8)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7)$.

2: Aus 1.1.Fall " $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7)$ "
folgt via des bereits bewiesenen i): $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 8)$.

3: Aus 2 " $\dots x < 8$ " und
aus <schola " $8 < 9$ "
folgt via **107-8**: $x < 9$.

4: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 3 " $x < 9$ "
folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 9)$.

1.2.Fall $x = 8$

2.1: Aus 1.2.Fall " $x = 8$ " und
aus <schola " $8 \in \mathbb{N}$ "
folgt: $x \in \mathbb{N}$.

2.2: Aus 1.2.Fall " $x = 8$ " und
aus <schola " $8 < 9$ "
folgt: $x < 9$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 9)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 9)$.

Beweis **239-2 k)** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < \text{ten}).$$

- 1: Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ”,
 aus **schola** “ $\text{ten} \in \mathbb{N}$ ” und
 aus VS gleich “ $\dots x < \text{ten}$ ”
 folgt via **197-5**:

$$x \in \text{ten}.$$

- 2: Aus 1 “ $x \in \text{ten}$ ” und
 aus **239-1** “ $\text{ten} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ”
 folgt:

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

- 3: Aus 2 “ $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ”

$$\text{folgt: } (x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \\ \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9).$$

k) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \\ \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9).$$

- 1: Nach VS gilt: $((x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \\ \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8)) \vee (x = 9).$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \\ \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8).$$

- 2: Aus 1.1.Fall “ $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \\ \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8)$ ”
 folgt via des bereits bewiesenen j): $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 9).$

- 3: Aus 2 “ $\dots x < 9$ ” und
 aus **schola** “ $9 < \text{ten}$ ”
 folgt via **107-8**:

$$x < \text{ten}.$$

- 4: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
 aus 3 “ $x < \text{ten}$ ”
 folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < \text{ten}).$$

...

Beweis **239-2 k)** $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9).$

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall

$$x = 9$$

2.1: Aus 1.2.Fall " $x = 9$ " und
aus **schola** " $9 \in \mathbb{N}$ "
folgt:

$$x \in \mathbb{N}.$$

2.2: Aus 1.2.Fall " $x = 9$ " und
aus **schola** " $9 < \text{ten}$ "
folgt:

$$x < \text{ten}.$$

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < \text{ten}).$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < \text{ten}).$

□

239-3. Gleichsam als Intermezzo werden die nunmehrigen Aussagen im Umgang mit den kleinsten zehn natürlichen Zahlen $\neq 0$ nachgereicht:

239-3(Satz)

- a) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 1$ " folgt " $x \leq 0$ ".
- b) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 2$ " folgt " $x \leq 1$ ".
- c) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 3$ " folgt " $x \leq 2$ ".
- d) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 4$ " folgt " $x \leq 3$ ".
- e) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 5$ " folgt " $x \leq 4$ ".
- f) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 6$ " folgt " $x \leq 5$ ".
- g) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 7$ " folgt " $x \leq 6$ ".
- h) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 8$ " folgt " $x \leq 7$ ".
- i) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < 9$ " folgt " $x \leq 8$ ".
- j) Aus " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x < \text{ten}$ " folgt " $x \leq 9$ ".

$\leq$ -Notation.

Beweis 239-3

RECH-Notation.

a) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 1).$$

1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $1 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 1$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 1.$$

2: Aus 1 " $x \leq -1 + 1$ " und
 aus **schola** " $-1 + 1 = 0$ "
 folgt:

$$x \leq 0.$$

Beweis 239-3 b) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 2).$$

- 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $2 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 2$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 2.$$

- 2: Aus 1 " $x \leq -1 + 2$ " und
 aus **+schola** " $-1 + 2 = 1$ "
 folgt:

$$x \leq 1.$$

c) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3).$$

- 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $3 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 3$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 3.$$

- 2: Aus 1 " $x \leq -1 + 3$ " und
 aus **+schola** " $-1 + 3 = 2$ "
 folgt:

$$x \leq 2.$$

d) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 4).$$

- 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $4 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 4$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 4.$$

- 2: Aus 1 " $x \leq -1 + 4$ " und
 aus **+schola** " $-1 + 4 = 3$ "
 folgt:

$$x \leq 3.$$

e) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 5).$$

- 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $5 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 5$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 5.$$

- 2: Aus 1 " $x \leq -1 + 5$ " und
 aus **+schola** " $-1 + 5 = 4$ "
 folgt:

$$x \leq 4.$$

Beweis **239-3 f)** VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 6).$$

- 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $6 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 6$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 6.$$

- 2: Aus 1 " $x \leq -1 + 6$ " und
 aus **+schola** " $-1 + 6 = 5$ "
 folgt:

$$x \leq 5.$$

g) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 7).$$

- 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $7 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 7$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 7.$$

- 2: Aus 1 " $x \leq -1 + 7$ " und
 aus **+schola** " $-1 + 7 = 6$ "
 folgt:

$$x \leq 6.$$

h) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 8).$$

- 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $8 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 8$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 8.$$

- 2: Aus 1 " $x \leq -1 + 8$ " und
 aus **+schola** " $-1 + 8 = 7$ "
 folgt:

$$x \leq 7.$$

i) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 9).$$

- 1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ ",
 aus **schola** " $9 \in \mathbb{N}$ " und
 aus VS gleich " $\dots x < 9$ "
 folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + 9.$$

- 2: Aus 1 " $x \leq -1 + 9$ " und
 aus **+schola** " $-1 + 9 = 8$ "
 folgt:

$$x \leq 8.$$

Beweis 239-3 j) VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < \mathbf{ten}).$$

1: Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ”,
aus $\in$ **schola** “ $\mathbf{ten} \in \mathbb{N}$ ” und
aus VS gleich “ $\dots x < \mathbf{ten}$ ”
folgt via **LSN**:

$$x \leq -1 + \mathbf{ten}.$$

2: Aus 1 “ $x \leq -1 + \mathbf{ten}$ ” und
aus $+$ **schola** “ $-1 + \mathbf{ten} = 9$ ”
folgt:

$$x \leq 9.$$

□

239-4. Aus **239-2,3** ist die nun vorliegende " $\leq$ -Version" ohne allzu viel Mühe deduzierbar:

239-4(Satz)

- a) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 0$ " genau dann, wenn " $x = 0$ ".
- b) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 1$ " genau dann, wenn " $x = 0$ " oder " $x = 1$ ".
- c) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 2$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ ".
- d) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 3$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ ".
- e) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 4$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ ".
- f) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 5$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ ".
- g) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 6$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
oder " $x = 6$ ".
- h) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 7$ " genau dann, wenn
 $"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
oder " $x = 6$ " oder " $x = 7$ ".

...

$\leq$ -Notation.

239-4(Satz)

...

i) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 8$ " genau dann, wenn

$"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
 oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
 oder " $x = 6$ " oder " $x = 7$ " oder " $x = 8$ ".

j) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq 9$ " genau dann, wenn

$"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
 oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
 oder " $x = 6$ " oder " $x = 7$ " oder " $x = 8$ "
 oder " $x = 9$ ".

k) " $x \in \mathbb{N}$ " und " $x \leq \text{ten}$ " genau dann, wenn

$"x = 0"$ oder " $x = 1$ " oder " $x = 2$ "
 oder " $x = 3$ " oder " $x = 4$ " oder " $x = 5$ "
 oder " $x = 6$ " oder " $x = 7$ " oder " $x = 8$ "
 oder " $x = 9$ " oder " $x = \text{ten}$ ".

 $\leq$ -Notation.Beweis **239-4** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 0).$$

1: Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ "folgt via **159-11**:

$$0 \leq x.$$

2: Aus VS gleich " $\dots x \leq 0$ " undaus 1 " $0 \leq x$ "folgt via **107-13**:

$$x = 0.$$

Beweis **239-4** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$x = 0.$$

1.1: Aus VS gleich " $x = 0$ " und
aus **schola** " $0 \in \mathbb{N}$ "

folgt:

$$x \in \mathbb{N}$$

1.2: Aus VS gleich " $x = 0$ " und
aus **schola** " $0 \leq 0$ "

folgt:

$$x \leq 0$$

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 1).$$

1: Aus VS gleich " $\dots x \leq 1$ "
folgt via **41-5**:

$$(x < 1) \vee (x = 1).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 1.$$

Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 1.1.Fall " $x < 1$ "
folgt via **239-2**:

$$x = 0.$$

1.2.Fall

$$x = 1.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1).$$

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1).$$

1: Aus VS gleich " $(x = 0) \vee (x = 1)$ "
folgt via **239-2**:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 2).$$

2: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 1 " $\dots x < 2$ "
folgt via **239-3**:

$$x \leq 1.$$

3: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 2 " $x \leq 1$ "
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 1).$$

Beweis **239-4** c) $\Rightarrow$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 2).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots x \leq 2$ ”
folgt via **41-5**:

$$(x < 2) \vee (x = 2).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 2.$$

Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus **1.1.Fall** “ $x < 2$ ”
folgt via **239-2**:

$$(x = 0) \vee (x = 1).$$

1.2.Fall

$$x = 2.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2)$.

c) $\Leftarrow$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2).$$

- 1: Aus VS gleich “ $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2)$ ”
folgt via **239-2**:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 3).$$

- 2: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots x < 3$ ”
folgt via **239-3**:

$$x \leq 2.$$

- 3: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 2 “ $x \leq 2$ ”
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 2).$$

Beweis **239-4** d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 3).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots x \leq 3$ ”
folgt via **41-5**:

$$(x < 3) \vee (x = 3).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 3.$$

Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus **1.1.Fall** “ $x < 3$ ”
folgt via **239-2**:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2).$$

1.2.Fall

$$x = 3.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3).$$

d) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3).$$

1: Aus VS gleich “ $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3)$ ”
folgt via **239-2**:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 4).$$

2: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots x < 4$ ”
folgt via **239-3**:

$$x \leq 3.$$

3: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 2 “ $x \leq 3$ ”
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 3).$$

Beweis **239-4 e)** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 4).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots x \leq 4$ ”
folgt via **41-5**:

$$(x < 4) \vee (x = 4).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 4.$$

Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus **1.1.Fall** “ $x < 4$ ”
folgt via **239-2**:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3).$$

1.2.Fall

$$x = 4.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4).$$

e) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4).$$

- 1: Aus VS gleich “ $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4)$ ”
folgt via **239-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 5).$

- 2: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots x < 5$ ”
folgt via **239-3**:

$$x \leq 4.$$

- 3: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 2 “ $x \leq 4$ ”
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 4).$$

Beweis **239-4 f)** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 5).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots x \leq 5$ ”
folgt via **41-5**:

$$(x < 5) \vee (x = 5).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 5.$$

Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus **1.1.Fall** “ $x < 5$ ”
folgt via **239-2**:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4).$$

1.2.Fall

$$x = 5.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5).$$

f) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5).$

1: Aus VS gleich “ $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)$ ”
folgt via **239-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 6).$

2: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots x < 6$ ”
folgt via **239-3**:

$$x \leq 5.$$

3: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 2 “ $x \leq 5$ ”
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 5).$$

Beweis **239-4 g)** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 6).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots x \leq 6$ ”
folgt via **41-5**:

$$(x < 6) \vee (x = 6).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 6.$$

Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus **1.1.Fall** “ $x < 6$ ”
folgt via **239-2**: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5).$

1.2.Fall

$$x = 6.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6).$$

g) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6).$

1: Aus VS gleich “ $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4)$
 $\vee (x = 5) \vee (x = 6)$ ”
folgt via **239-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 7).$

2: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots x < 7$ ”
folgt via **239-3**:

$$x \leq 6.$$

3: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 2 “ $x \leq 6$ ”
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 6).$$

Beweis **239-4 h)** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 7).$$

1: Aus VS gleich "... $x \leq 7$ "
folgt via **41-5**:

$$(x < 7) \vee (x = 7).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 7.$$

Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und

aus **1.1.Fall** " $x < 7$ "

folgt via **239-2**: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6).$

1.2.Fall

$$x = 7.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7).$$

h) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7).$$

1: Aus VS gleich " $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7)$ "
folgt via **239-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 8).$

2: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 1 "... $x < 8$ "
folgt via **239-3**:

$$x \leq 7.$$

3: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 2 " $x \leq 7$ "
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 7).$$

Beweis **239-4** i) $\Rightarrow$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 8).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots x \leq 8$ ”
folgt via **41-5**:

$$(x < 8) \vee (x = 8).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 8.$$

Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus **1.1.Fall** “ $x < 8$ ”

folgt via **239-2**: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)$
 $\vee (x = 6) \vee (x = 7).$

1.2.Fall

$$x = 8.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \\ \vee (x = 7) \vee (x = 8).$$

i) $\Leftarrow$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \\ \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8).$$

1: Aus VS gleich “ $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4)$
 $\vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8)$ ”
folgt via **239-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 9).$

2: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots x < 9$ ”
folgt via **239-3**:

$$x \leq 8.$$

3: Aus 1 “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 2 “ $x \leq 8$ ”
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 8).$$

Beweis **239-4** j) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 9).$$

1: Aus VS gleich "... $x \leq 9$ "
folgt via **41-5**:

$$(x < 9) \vee (x = 9).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < 9.$$

Aus VS gleich " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und

aus **1.1.Fall** " $x < 9$ "

folgt via **239-2**: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)$
 $\vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8).$

1.2.Fall

$$x = 9.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \\ \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9).$$

j) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)$
 $\vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9).$

1: Aus VS gleich " $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4)$
 $\vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9)$ "
folgt via **239-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < \text{ten}).$

2: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 1 " $\dots x < \text{ten}$ "
folgt via **239-3**:

$$x \leq 9.$$

3: Aus 1 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 2 " $x \leq 9$ "
folgt:

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 9).$$

Beweis **239-4 k)** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq \text{ten}).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots x \leq \text{ten}$ ”
folgt via **41-5**:

$$(x < \text{ten}) \vee (x = \text{ten}).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x < \text{ten}.$$

Aus VS gleich “ $x \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus **1.1.Fall** “ $x < \text{ten}$ ”

folgt via **239-2**: $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5)$
 $\vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9).$

1.2.Fall

$$x = \text{ten}.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \\ \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9) \vee (x = \text{ten}).$$

Beweis **239-4 k**) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \\ \vee (x = 4) \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \\ \vee (x = 8) \vee (x = 9) \vee (x = \mathbf{ten}).$$

1: Nach VS gilt: $((x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \vee (x = 5) \\ \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9)) \vee (x = \mathbf{ten}).$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \\ \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9).$$

2: Aus **1.1.Fall** " $(x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3) \vee (x = 4) \\ \vee (x = 5) \vee (x = 6) \vee (x = 7) \vee (x = 8) \vee (x = 9)$ "
folgt via **239-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < \mathbf{ten}).$

3: Aus 2 " $\dots x < \mathbf{ten}$ "
folgt via **41-5**: $x \leq \mathbf{ten}.$

4: Aus 2 " $x \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 3 " $x \leq \mathbf{ten}$ "
folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq \mathbf{ten}).$

1.2.Fall

$$x = \mathbf{ten}.$$

2.1: Aus **1.2.Fall** " $x = \mathbf{ten}$ " und
aus **schola** " $\mathbf{ten} \in \mathbb{N}$ "
folgt: $x \in \mathbb{N}.$

2.2: Aus **1.2.Fall** " $x = \mathbf{ten}$ " und
aus **schola** " $\mathbf{ten} \leq \mathbf{ten}$ "
folgt: $x \leq \mathbf{ten}.$

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq \mathbf{ten}).$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq \mathbf{ten}).$

□

239-5. Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt $n \in 1 + n$ und $n = (1 + n) \setminus \{n\}$:

239-5(Satz)

- a) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " $n < 1 + n$ " und " $n \in 1 + n$ ".
- b) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " $n = (1 + n) \setminus \{n\}$."

Beweis 239-5 a) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

1.1: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **164-6**:

$$n \in \mathbb{Z}.$$

1.2: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **159-10**:

$$1 + n \in \mathbb{N}.$$

1.3: Via <schola gilt:

$$0 < 1.$$

2: Aus 1.1 " $n \in \mathbb{Z}$ " und
aus 1.3 " $0 < 1$ "
folgt via **166-2**:

$$n < n + 1.$$

3: Via **FSA** gilt:

$$n + 1 = 1 + n.$$

4: Aus 2 " $n < n + 1$ " und
aus 3 " $n + 1 = 1 + n$ "

folgt:

$$n < 1 + n$$

5: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ ",
aus 1.2 " $1 + n \in \mathbb{N}$ " und
aus 4 " $n < 1 + n$ "

folgt via **197-5**:

$$n \in 1 + n$$

b) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

1: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **ANAXiom**:

$$1 + n = \{n\} \cup n.$$

2: $(1 + n) \setminus \{n\} \stackrel{1}{=} (\{n\} \cup n) \setminus \{n\} \stackrel{238-3}{=} n \setminus \{n\}.$

3: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **197-4**:

$$n \notin n.$$

4: Aus 3 " $n \notin n$ "
folgt via **5-17**:

$$n \setminus \{n\} = n.$$

5: Aus 2 " $(1 + n) \setminus \{n\} = \dots = n \setminus \{n\}$ " und
aus 4 " $n \setminus \{n\} = n$ "
folgt:

$$(1 + n) \setminus \{n\} = n.$$

6: Aus 5
folgt:

$$n = (1 + n) \setminus \{n\}.$$

□

$$\mathcal{U}_n, n \in \mathbb{N}.$$

Ersterstellung: 27/03/13

Letzte Änderung: 12/04/13

240-1. Als Vorbereitung für die erste “rekursive Parameter-Definition” wird nun 273.0() eingeführt:

240-1(Definition)

$$240.0() = \{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\}.$$

240-2. Mit dem nun in den Essays eingebrachten Konstruktions-Element einer “rekursiven Parameter-Definition” wird nicht nur “rekursives” Neuland betreten - was sich in der Vorgehensweise, anzugeben, wie die “Start-Klasse” fest gelegt ist und dann anzugeben, wie aus einer Klasse die nächste, darauf aufbauende Klasse definiert ist - es werden gleichzeitig *unendlich viele* neue Parameter - hier sind es die Klassen $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$ - in die Essays eingebracht. Da es nicht vorstellbar ist, wie diese unendlich vielen Parameter mit strukturell unterschiedlichen Symbolen bezeichnet werden sollten, wird zu einer indizierte Schreibweise - die im Rahmen der Essays ausdrücklich nichts mit einer “Folge” oder einer anderen Funktion zu tun hat - übergegangen, wodurch sich möglicherweise eine Irrtumsquelle im Umgang mit den Parametern $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, ergibt, wenn an einer Stelle versucht werden sollte, ein Symbol der Form “ $\mathcal{U}_x$ ” für eine Klasse x zu betrachten. Obwohl strukturell an $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, erinnernd ist ein derartiges Symbol nur für $x \in \mathbb{N}$ als Bestandteil der Essays eine Klasse. Dabei soll sich das allgemeine Ersetzungsprinzip auch auf die “Indizes” von $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, erstrecken, so dass etwa $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{\{0\}}$ und $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_{4:2}$ gilt. Nur eine Spur verwickelter ist die Frage, wieso die Parameter $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, nicht unter Einbeziehung einer “Folge”, also etwa einer Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}$, in die Essays eingebracht werden. Dies ist nicht möglich, da, wie sich bald herausstellt, $\mathcal{U}_n$, $0 \neq n \in \mathbb{N}$, eine Unmenge ($\neq \mathcal{U}$) ist.

240-2(Rekursive Parameter-Definition)

a) $\mathcal{U}_0 = \{0\}$.

b) Aus “ $n \in \mathbb{N}$ ” folgt “ $\mathcal{U}_{1+n} = 240.0() \text{ ni} \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n$ ”.

$$240.0() = \{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\} \quad \mathbf{240-1(Def)}$$

240-3. Nun werden einige $\mathcal{U}_1$ betreffende Aussagen bewiesen. Insbesondere $\mathcal{U}_1 = 240.0()$ rechtfertigt 240.0() nicht genauer untersucht zu haben:

240-3(Satz)

- a) $\mathcal{U}_1 = 240.0()$.
- b) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " $\mathcal{U}_{1+n} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n$ ".
- c) Aus " $p \in \mathcal{U}_1$ " folgt " $\exists \Omega : p = \{\Omega\}$ ".
- d) $\{q\} \in \mathcal{U}_1$.
- e) $0 \in \mathcal{U}_1$.
- f) $1 \in \mathcal{U}_1$.
- g) $2 \notin \mathcal{U}_1$.
- h) $\mathcal{U}_1 = \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.
- i) $\mathcal{U}_1$ Unmenge.
- j) $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}$.

$$240.0() = \{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\} \quad \mathbf{240-1(Def)}$$

Beweis 240-3 a)

- 1: Aus **schola** " $0 \in \mathbb{N}$ "
folgt via **240-1(RekParDef)**: $\mathcal{U}_{1+0} = 240.0() \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_0$.
- 2: Aus 1 " $\mathcal{U}_{1+0} = 240.0() \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_0$ " und
aus **schola** " $1 + 0 = 1$ "
folgt: $\mathcal{U}_1 = 240.0() \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_0$.
- 3: Aus 2 " $\mathcal{U}_1 = 240.0() \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_0$ " und
aus **240-1(RekParDef)** " $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ "
folgt: $\mathcal{U}_1 = 240.0() \text{ ni } \cup_{\text{in}} \{0\}$.
- 4: Via **235-3** gilt: $240.0() \text{ ni } \cup_{\text{in}} \{0\} = 240.0()$.
- 5: Aus 3 " $\mathcal{U}_1 = 240.0() \text{ ni } \cup_{\text{in}} \{0\}$ " und
aus 4 " $240.0() \text{ ni } \cup_{\text{in}} \{0\} = 240.0()$ "
folgt: $\mathcal{U}_1 = 240.0()$.

Beweis 240-3 b) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

1.1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N}$ ”

folgt via **240-1(RekParDef)**:

$$\mathcal{U}_{1+n} = 240.0() \text{ ni} \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n.$$

1.2: Via des bereits bewiesenen a) gilt:

$$\mathcal{U}_1 = 240.0().$$

2: Aus 1.1 und

aus 1.2

folgt:

$$\mathcal{U}_{1+n} = \mathcal{U}_1 \text{ ni} \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n.$$

c) VS gleich

$$p \in \mathcal{U}_1.$$

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt:

$$\mathcal{U}_1 = 240.0().$$

2: Aus VS gleich “ $p \in \mathcal{U}_1$ ” und

aus 1 “ $\mathcal{U}_1 = 240.0()$ ”

folgt:

$$p \in 240.0().$$

3: Aus 2 “ $p \in 240.0()$ ” und

aus “ $240.0() = \{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\}$ ”

folgt:

$$p \in \{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\}.$$

4: Aus 3 “ $p \in \{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\}$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : p = \{\Omega\}.$$

Beweis 240-3 d)

1.1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{q\}$ Menge.

1.2: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = q$.

2: Aus 1.2 " $\dots \Omega = q$ "
folgt: $\{q\} = \{\Omega\}$.

3: Aus 1.2 " $\exists \Omega \dots$ " und
aus 2 " $\{q\} = \{\Omega\}$ "
folgt: $\exists \Omega : \{q\} = \{\Omega\}$.

4: Aus 1.1 " $\{q\}$ Menge" und
aus 3 " $\exists \Omega : \{q\} = \{\Omega\}$ "
folgt: $\{q\} \in \{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\}$.

5.1: Aus 4 " $\{q\} \in \{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\}$ " und
aus " $\{\omega : (\exists \Omega : \omega = \{\Omega\})\} = 240.0()$ "
folgt: $\{q\} \in 240.0()$.

5.2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathcal{U}_1 = 240.0()$.

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt: $\{q\} \in \mathcal{U}_1$.

e)

1: Via des bereits bewiesenen d) gilt: $\{\mathcal{U}\} \in \mathcal{U}_1$.

2: Aus **1-5** " $\{\mathcal{U}\} = 0$ " und
aus 1 " $\{\mathcal{U}\} \in \mathcal{U}_1$ "
folgt: $0 \in \mathcal{U}_1$.

f)

1.1: Via **95-1(Def)** gilt: $1 = \{0\}$.

1.2: Via des bereits bewiesenen d) gilt: $\{0\} \in \mathcal{U}_1$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $1 \in \mathcal{U}_1$.

Beweis **240-3** g)

1: Es gilt:

$$(2 \in \mathcal{U}_1) \vee (2 \notin \mathcal{U}_1).$$

wfFallunterscheidung

1.1.Fall

$$2 \in \mathcal{U}_1.$$

2: Aus **1.1.Fall** " $2 \in \mathcal{U}_1$ "
folgt via des bereits bewiesenen c):

$$\exists \Omega : 2 = \{\Omega\}.$$

3: Aus **239-1** " $2 = \{0, 1\}$ " und
aus 2 " $\dots 2 = \{\Omega\}$ "
folgt:

$$\{0, 1\} = \{\Omega\}.$$

4: Aus **schola** "0 Menge",
aus **schola** "1 Menge und
aus 3 " $\{0, 1\} = \{\Omega\}$ "
folgt via **238-2**:

$$0 = 1.$$

5: Es gilt 4 " $0 = 1$ ".
Via **schola** gilt " $0 \neq 1$ ".
Ex falso quodlibet folgt:

$$2 \notin \mathcal{U}_1.$$

Ende wfFallunterscheidung

Beweis **240-3 h)**

Thema1.1

$$\alpha \in \mathcal{U}_1.$$

2: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in \mathcal{U}_1$ "

folgt via des bereits bewiesenen c):

$$\exists \Omega : \alpha = \{\Omega\}.$$

3: Es gilt:

$$(\Omega \text{ Menge}) \vee (\Omega \text{ Unmenge}).$$

3.1.Fall

Ω Menge.

4: Aus **3.1.Fall** " Ω Menge"

folgt via **27-6**:

$$\{\Omega\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

5: Aus 2 " $\dots \alpha = \{\Omega\}$ " und

aus 4 " $\{\Omega\} \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ "

folgt:

$$\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

6: Aus 5 " $\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ "

folgt via **2-2**:

$$\alpha \in \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

3.2.Fall

Ω Unmenge.

4: Aus **3.2.Fall** " Ω Unmenge"

folgt via **1-4**:

$$\{\Omega\} = 0.$$

5: Aus 2 " $\dots \alpha = \{\Omega\}$ " und

aus 4 " $\{\Omega\} = 0$ "

folgt:

$$\alpha = 0.$$

6: Aus 5 " $\alpha = 0$ " und

aus **1-5** " $0 \in \{0\}$ "

folgt:

$$\alpha \in \{0\}.$$

7: Aus 6 " $\alpha \in \{0\}$ "

folgt via **2-2**:

$$\alpha \in \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:

$$\alpha \in \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_1) \Rightarrow (\alpha \in \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A1} \mid \mathcal{U}_1 \subseteq \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}}$$

...

Beweis **240-3** h) ...

Thema1.2

$$\alpha \in \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ "

folgt via **94-8**:

$$(\alpha = 0) \vee (\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}).$$

Fallunterscheidung

2.1.Fall

$$\alpha = 0.$$

3: Via des bereits bewiesenen **e)** gilt:

$$0 \in \mathcal{U}_1.$$

4: Aus **2.1.Fall** " $\alpha = 0$ " und
aus 3 " $0 \in \mathcal{U}_1$ "

folgt:

$$\alpha \in \mathcal{U}_1.$$

2.2.Fall

$$\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

3: Aus **2.2.Fall** " $\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ "

folgt via **27-6**:

$$\exists \Omega : \alpha = \{\Omega\}.$$

4: Via des bereits bewiesenen **d)** gilt:

$$\{\Omega\} \in \mathcal{U}_1.$$

5: Aus 3 " $\dots \alpha = \{\Omega\}$ " und
aus 4 " $\{\Omega\} \in \mathcal{U}_1$ "

folgt:

$$\alpha \in \mathcal{U}_1.$$

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \mathcal{U}_1$.

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}_1).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid \text{"}\{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{U}_1 \text{"}}$$

1.3: Aus **A1** gleich " $\mathcal{U}_1 \subseteq \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ " und

aus **A2** gleich " $\{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{U}_1$ "

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\mathcal{U}_1 = \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

Beweis 240-3 i)

1.1: Via **2-7** gilt:

$$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$$

1.2: Via des bereits bewiesenen **h)** gilt:

$$\{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}} = \mathcal{U}_1.$$

2.1: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:

$$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{U}_1.$$

2.2: Via **27-15** gilt:

$$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \text{ Unmenge.}$$

3: Aus 2.1 " $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{U}_1$ " und
aus 2.2 " $\mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ Unmenge"
folgt via **0-7**:

$$\mathcal{U}_1 \text{ Unmenge.}$$

j)

1: Via des bereits bewiesenen **g)** gilt:

$$2 \notin \mathcal{U}_1.$$

2: Aus **schola** "2 Menge" und
aus 1 " $2 \notin \mathcal{U}_1$ "
folgt via **0-21**:

$$\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}.$$

□

240-4. Die nunmehrige parameter-freie Klassenklammer bereitet den Beweis von **240-5** vor, mit dem - wie zu erwarten - $0 \in \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, bewiesen wird:

240-4(Definition)

$$240.1() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

240-5. Hier werden einige Aussagen über $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$ bewiesen, die in der Aussage $0 \in \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, gipfeln:

240-5(Satz)

- a) “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ” genau dann, wenn
 $“n \in \mathbb{N}”$ und “ $0 \in \mathcal{U}_n$ ”.
- b) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.
- c) $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$.
- d) $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\})$
 $\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\})$.
- e) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}$.
- f) Aus “ $n \in \mathbb{N}$ ” folgt “ $0 \in \mathcal{U}_n$ ”.

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **240-4(Def)**

Beweis **240-5 a)** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

Aus VS gleich “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ”
folgt:

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_n).$$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_n).$$

1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N} \dots$ ”

folgt via **ElementAxiom**:

n Menge.

2: Aus 1 “ n Menge” und

aus VS gleich “ $(n \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_n)$ ”

folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

Beweis **240-5** b)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen **a)**:

$$\alpha \in \mathbb{N}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}.$$

c)

1: Via **1-5** gilt:

$$0 \in \{0\}.$$

2: Aus 1 “ $0 \in \{0\}$ ” und

aus **240-2(RekParDef)** “ $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ ”

folgt:

$$0 \in \mathcal{U}_0.$$

3: Aus **schola** “ $0 \in \mathbb{N}$ ” und

aus 2 “ $0 \in \mathcal{U}_0$ ”

folgt via des bereits bewiesenen **a)**:

$$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

Beweis **240-5** d)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

2: Aus **Thema1** " $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$ "
folgt via des bereits bewiesenen a): $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\alpha).$

3.1: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ "
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}.$

3.2: Aus 2 " $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ "
folgt via **240-3**: $\mathcal{U}_{1+\alpha} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha.$

4: Aus **240-3** " $0 \in \mathcal{U}_1$ " und
aus 2 " $\dots 0 \in \mathcal{U}_\alpha$ "
folgt via **220-6**: $0 \cup 0 \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha.$

5.1: Via **2-17** gilt: $0 \cup 0 = 0.$

5.2: Aus 4 " $0 \cup 0 \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha$ " und
aus 3.2 " $\mathcal{U}_{1+\alpha} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha$ "
folgt: $0 \cup 0 \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt: $0 \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$

7: Aus 3.1 " $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ " und
aus 6 " $0 \in \mathcal{U}_{1+\alpha}$ "
folgt via des bereits bewiesenen a):
 $1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}.$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}).$$

e)

Aus c) " $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ",
aus b) " $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$ " und
aus d) " $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\})$ "
folgt via **236-5**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}.$

Beweis 240-5 f) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

1: Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}.$$

2: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N}$ ” und
aus 1 “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}$ ”
folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

3: Aus 2 “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen a):

$$0 \in \mathcal{U}_n.$$

□

240-6. Mit der nunmehrigen, parameterfreien Klasse wird der Weg zu $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$, $n \in \mathbb{N}$, von **240-7** eröffnet:

240-6(Definition)

$$240.2() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}.$$

240-7. Hier werden einige Aussagen über $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ bewiesen, die in der Aussage $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$, $n \in \mathbb{N}$, gipfeln:

240-7(Satz)

- a) “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ ” genau dann, wenn
“ $n \in \mathbb{N}$ ” und “ $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$ ”.
- b) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}$.
- c) $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$.
- d) $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\})$
 $\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\})$.
- e) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\} = \mathbb{N}$.
- f) Aus “ $n \in \mathbb{N}$ ” folgt “ $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$ ”.

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ **240-6(Def)**

Beweis 240-7 a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$.

Aus VS gleich “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ ”
folgt:

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}).$$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}).$$

1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N} \dots$ ”
folgt via **ElementAxiom**:

n Menge.

2: Aus 1 “ n Menge” und
aus VS gleich “ $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n})$ ”
folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}.$$

Beweis **240-7** b)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $\alpha \in \mathbb{N}.$

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}.$

c)

Thema1.1

$$\alpha \in \mathcal{U}_0.$$

2: Aus **Thema1.1** “ $\alpha \in \mathcal{U}_0$ ” und
aus **240-2(RekParDef)** “ $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ ”
folgt: $\alpha \in \{0\}.$

3: Aus 2 “ $\alpha \in \{0\}$ ”
folgt via **1-6**: $\alpha = 0.$

4: Aus 3 “ $\alpha = 0$ ” und
aus **240-3** “ $0 \in \mathcal{U}_1$ ”
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}_1.$

5: Aus **+schola** “ $1 + 0 = 1$ ”
folgt: $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{1+0}.$

6: Aus 4 “ $\alpha \in \mathcal{U}_1$ ” und
aus 5 “ $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{1+0}$ ”
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}_{1+0}.$

Ergo **Thema1.1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_0) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}_{1+0})$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A1} \mid “\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_{1+0}”}$$

1.2: Aus **eschola** “ $0 \in \mathbb{N}$ ” und
aus **A1** gleich “ $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_{1+0}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}.$

Beweis **240-7** d)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a**):

$$(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha}).$$

3.1: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”

folgt via **159-10**:

$$1 + \alpha \in \mathbb{N}.$$

3.2: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”

folgt via **240-3**:

$$\mathcal{U}_{1+\alpha} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \bigcup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha.$$

Thema4.1

$$\beta \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$$

5: Aus **Thema4.1** “ $\beta \in \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ” und

aus 3.2 “ $\mathcal{U}_{1+\alpha} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \bigcup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha$ ”

folgt:

$$\beta \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \bigcup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha.$$

6: Aus 5 “ $\beta \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \bigcup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha$ ”

folgt via **220-6**:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \mathcal{U}_1) \wedge (\Psi \in \mathcal{U}_\alpha) \wedge (\beta = \Omega \cup \Psi).$$

7: Aus 6 “ $\dots \Psi \in \mathcal{U}_\alpha \dots$ ” und

aus 2 “ $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ”

folgt via **0-4**:

$$\Psi \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$$

8: Aus 6 “ $\dots \Omega \in \mathcal{U}_1 \dots$ ” und

aus 7 “ $\Psi \in \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ”

folgt via **220-6**:

$$\Omega \cup \Psi \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \bigcup_{\text{in}} \mathcal{U}_{1+\alpha}.$$

...

...

...

Beweis **240-7** d) ...

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}.$$

...

Thema4.1

$$\beta \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$$

...

9.1: Aus 6 "... $\beta = \Omega \cup \Psi$ " und
aus 8 " $\Omega \cup \Psi \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_{1+\alpha}$ "
folgt: $\beta \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_{1+\alpha}.$

9.2: Aus 3.1 " $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ "
folgt via **240-3**: $\mathcal{U}_{1+(1+\alpha)} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_{1+\alpha}.$

10: Aus 9.1 " $\beta \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_{1+\alpha}$ " und
aus 9.2 " $\mathcal{U}_{1+(1+\alpha)} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_{1+\alpha}$ "
folgt: $\beta \in \mathcal{U}_{1+(1+\alpha)}.$

Ergo **Thema4.1**: $\forall \beta : (\beta \in \mathcal{U}_{1+\alpha}) \Rightarrow (\beta \in \mathcal{U}_{1+(1+\alpha)}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1	" $\mathcal{U}_{1+\alpha} \subseteq \mathcal{U}_{1+(1+\alpha)}$ "
----	---

4.2: Aus 3.1 " $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ " und
aus A1 gleich " $\mathcal{U}_{1+\alpha} \subseteq \mathcal{U}_{1+(1+\alpha)}$ "
folgt via des bereits bewiesenen a):
 $1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}.$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}).$$

Beweis 240-7 e)

Aus c) “ $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ ” ,

aus b) “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}$ ” und

aus d) “ $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\})$

$$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\})$$

folgt via **236-5**:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\} = \mathbb{N}.$$

f) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

1: Via des bereits bewiesenen e) gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\} = \mathbb{N}.$

2: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N}$ ” und

aus 1 “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ ”

folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}.$$

3: Aus 2 “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{U}_{1+\omega})\}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}.$$

□

240-8. Mit der nunmehrigen, parameterfreien Klasse wird der Weg zu $\mathcal{U}_n$ Unmenge, $n \in \mathbb{N}$, von **240-9** eröffnet:

240-8(Definition)

$$240.3() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}.$$

Beweis **240-9** b)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen a): $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\} \subseteq \mathbb{N}$.

c)

Aus **schola** “ $1 \in \mathbb{N}$ ” und

aus **240-3** “ $\mathcal{U}_1 \text{ Unmenge}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a): $1 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}$.

d)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen a):
 $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\alpha \text{ Unmenge})$.

3.1: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

3.2: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”
folgt via **240-7**: $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha}$.

4: Aus 3.2 “ $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ” und
aus 2 “ $\dots \mathcal{U}_\alpha \text{ Unmenge}$ ”
folgt via **0-7**: $\mathcal{U}_{1+\alpha} \text{ Unmenge}$.

5: Aus 3.1 “ $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ ” und
aus 4 “ $\mathcal{U}_{1+\alpha} \text{ Unmenge}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen a): $1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}$.

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\})$.

Beweis 240-9 e)

Aus c) “ $1 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}$ ” ,

aus b) “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\} \subseteq \mathbb{N}$ ” und

aus d) “ $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\})$

$$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\})$$

folgt via **236-2**: $\{1, \dots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\} = \mathbb{N}$.

f) VS gleich

$$1 \leq n \in \mathbb{N}.$$

1.1: Aus VS gleich “ $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ”

folgt via **236-1**:

$$n \in \{1, \dots\}.$$

1.2: Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$\{1, \dots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\} = \mathbb{N}.$$

2: Aus 1.1 “ $n \in \{1, \dots\}$ ” und

aus 1.2 “ $\{1, \dots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}$ ”

folgt via **0-4**:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}.$$

3: Aus 2 “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \text{ Unmenge})\}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\mathcal{U}_n \text{ Unmenge}.$$

g)

1: Via **SingeltonAxiom** gilt:

$$\{0\} \text{ Menge}.$$

2: Aus 1

folgt:

$$\neg(\{0\} \text{ Unmenge}).$$

3: Aus 2 “ $\neg(\{0\} \text{ Unmenge})$ ” und

aus **240-2(RekParDef)** “ $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ ”

folgt:

$$\neg(\mathcal{U}_0 \text{ Unmenge}).$$

□

240-10. Die nunmehrige parameter-freie Klassenklammer bereitet den Beweis von **240-11** vor, mit dem - wie zu erwarten - $n \in \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, bewiesen wird:

240-10(Definition)

$$240.4() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

240-11. Hier werden einige Aussagen über $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$ bewiesen, die in der Aussage $n \in \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, gipfeln:

240-11(Satz)

- a) “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ” genau dann, wenn
 $“n \in \mathbb{N}”$ und “ $n \in \mathcal{U}_n$ ”.
- b) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.
- c) $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$.
- d) $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\})$
 $\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\})$.
- e) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}$.
- f) Aus “ $n \in \mathbb{N}$ ” folgt “ $n \in \mathcal{U}_n$ ”.

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$ **240-10(Def)**

Beweis 240-11 a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

Aus VS gleich “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ”
 folgt:

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathcal{U}_n).$$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathcal{U}_n).$$

1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N} \dots$ ”
 folgt via **ElementAxiom**:

n Menge.

2: Aus 1 “ n Menge” und
 aus VS gleich “ $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathcal{U}_n)$ ”
 folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

Beweis **240-11** b)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:

$$\alpha \in \mathbb{N}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}.$$

c)

1: Via **1-5** gilt:

$$0 \in \{0\}.$$

2: Aus 1 “ $0 \in \{0\}$ ” und
aus **240-2(RekParDef)** “ $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ ”
folgt:

$$0 \in \mathcal{U}_0.$$

3: Aus **∈schola** “ $0 \in \mathbb{N}$ ” und
aus 2 “ $0 \in \mathcal{U}_0$ ”

folgt via des bereits bewiesenen **a)**:

$$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

Beweis **240-11** d)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \mathcal{U}_\alpha).$

3.1: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}.$

3.2: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”
folgt via **240-3**: $\mathcal{U}_{1+\alpha} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha.$

4: Aus **240-3** “ $\{\alpha\} \in \mathcal{U}_1$ ” und
aus 2 “ $\dots \alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ ”
folgt via **220-6**: $\{\alpha\} \cup \alpha \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha.$

5.1: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”
folgt via **AN Axiom**: $1 + \alpha = \{\alpha\} \cup \alpha.$

5.2: Aus 4 “ $\{\alpha\} \cup \alpha \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha$ ” und
aus 3.2 “ $\mathcal{U}_{1+\alpha} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_\alpha$ ”
folgt: $\{\alpha\} \cup \alpha \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt: $1 + \alpha \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$

7: Aus 3.1 “ $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ ” und
aus 6 “ $1 + \alpha \in \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:
 $1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}.$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}).$$

e)

Aus c) “ $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ”,
aus b) “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$ ” und
aus d) “ $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\})$ ”

$$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\})$$

folgt via **236-5**:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}.$$

Beweis 240-11 f) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

1: Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}.$$

2: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N}$ ” und
aus 1 “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}$ ”
folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}.$$

3: Aus 2 “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\omega)\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen a):

$$n \in \mathcal{U}_n.$$

□

240-12. Die hier angegebenen Aussagen über Elemente von $\mathcal{U}_{1+n}$, $n \in \mathbb{N}$, sind an späterer Stelle gut einsetzbar:

240-12(Satz)

- a) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " und " $x \in \mathcal{U}_{1+n}$ "
folgt " $\exists \Omega, \Psi : (\Psi \in \mathcal{U}_n) \wedge (x = \{\Omega\} \cup \Psi)$ ".
- b) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " und " $x \in \mathcal{U}_n$ " folgt " $\{q\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n}$ ".

Beweis 240-12 a) VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{1+n}).$$

1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N} \dots$ ”
folgt via **240-3**:

$$\mathcal{U}_{1+n} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n.$$

2: Aus VS gleich “ $\dots x \in \mathcal{U}_{1+n}$ ” und
aus 1 “ $\mathcal{U}_{1+n} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n$ ”
folgt:

$$x \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n.$$

3: Aus 2 “ $x \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n$ ”
folgt via **220-6**:

$$\exists \Phi, \Psi : (\Phi \in \mathcal{U}_1) \wedge (\Psi \in \mathcal{U}_n) \wedge (x = \Phi \cup \Psi).$$

4: Aus 3 “ $\dots \Phi \in \mathcal{U}_1 \dots$ ”
folgt via **240-3**:

$$\exists \Omega : \Phi = \{\Omega\}.$$

5: Aus 3 “ $\dots x = \Phi \cup \Psi$ ” und
aus 4 “ $\dots \Phi = \{\Omega\}$ ”
folgt:

$$x = \{\Omega\} \cup \Psi.$$

6: Aus 4 “ $\exists \Omega \dots$ ”,
aus 3 “ $\exists \dots \Psi \dots$ ”,
Aus 3 “ $\dots \Psi \in \mathcal{U}_n \dots$ ” und
aus 5 “ $x = \{\Omega\} \cup \Psi$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \in \mathcal{U}_n) \wedge (x = \{\Omega\} \cup \Psi).$$

b) VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n).$$

1.1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N} \dots$ ”
folgt via **240-3**:

$$\mathcal{U}_{1+n} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n.$$

1.2: Via **240-3** gilt:

$$\{q\} \in \mathcal{U}_1.$$

2: Aus 1.2 “ $\{q\} \in \mathcal{U}_1$ ” und
aus VS gleich “ $\dots x \in \mathcal{U}_n$ ”
folgt via **220-6**:

$$\{q\} \cup x \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n.$$

3: Aus 2 “ $\{q\} \cup x \in \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n$ ” und
aus 1.1 “ $\mathcal{U}_{1+n} = \mathcal{U}_1 \text{ ni } \cup_{\text{in}} \mathcal{U}_n$ ”
folgt:

$$\{q\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n}.$$

□

240-13. Die nunmehrige parameter-freie Klassenklammer bereitet den Beweis von **240-14** vor:

240-13(Definition)

$$240.5() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}.$$

240-14. Hier werden einige Aussagen über 240.5() $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}$ bewiesen, die in der Aussage gipfeln, wonach für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $p \in x \in \mathcal{U}_{1+n}$ auf $x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n$ geschlossen werden kann:

240-14(Satz)

- a) “ $n \in 240.5()$ ” genau dann, wenn
 $“n \in \mathbb{N}”$ und “ $\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+n}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_n)$ ”.
- b) $240.5() \subseteq \mathbb{N}$.
- c) $0 \in 240.5()$.
- d) $\forall \gamma : (\gamma \in 240.5()) \Rightarrow (1 + \gamma \in 240.5())$
- e) $240.5() = \mathbb{N}$.
- f) Aus “ $n \in \mathbb{N}$ ” und “ $p \in x \in \mathcal{U}_{1+n}$ ” folgt “ $x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n$ ”.

$$240.5() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}$$

240-13(Def)

Beweis 240-14 a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich

$n \in 240.5()$.

1: Aus VS gleich “ $n \in 240.5()$ ” und
 aus “ $240.5() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}$ ”
 folgt: $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}$.

2: Aus 1 “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}$ ”
 folgt: $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+n}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_n))$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+n}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_n))$.

1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N} \dots$ ”
 folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

2: Aus 1 “ n Menge” und
 aus VS gleich “ $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+n}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_n))$ ”
 folgt: $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}$.

3: Aus 2 “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}$ ” und
 aus “ $240.5() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\omega}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\omega))\}$ ”
 folgt: $n \in 240.5()$.

Beweis 240-14 b)

Thema1

$$\gamma \in 240.5() .$$

Aus **Thema1** “ $\gamma \in 240.5()$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:

$$\gamma \in \mathbb{N}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \gamma : (\gamma \in 240.5()) \Rightarrow (\gamma \in \mathbb{N}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$240.5() \subseteq \mathbb{N}.$$

Beweis **240-14** c)

Thema1.1

$$\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+0}.$$

2: Aus **Thema1.1** “ $\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+0}$ ” und
aus **+schola** “ $1 + 0 = 0$ ”
folgt:

$$\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_1.$$

3: Aus 2 “ $\dots \alpha \in \mathcal{U}_1$ ”
folgt via **240-3**:

$$\exists \Omega : \alpha = \{\Omega\}.$$

4: Aus **Thema1.1** “ $\beta \in \alpha \dots$ ” und
aus 3 “ $\dots \alpha = \{\Omega\}$ ”
folgt:

$$\beta \in \{\Omega\}.$$

5: Aus 4 “ $\beta \in \{\Omega\}$ ”
folgt via **1-6**:

$$\beta = \Omega.$$

6: Aus 5 “ $\beta = \Omega$ ”
folgt:

$$\{\beta\} = \{\Omega\}.$$

7: Aus 3 “ $\dots \alpha = \{\Omega\}$ ” und
aus 6 “ $\{\beta\} = \{\Omega\}$ ”
folgt:

$$\alpha \setminus \{\beta\} = \{\Omega\} \setminus \{\Omega\}.$$

8: $\alpha \setminus \{\beta\} = \{\Omega\} \setminus \{\Omega\} \stackrel{5-11}{=} 0.$

9: Aus 8 “ $\alpha \setminus \{\beta\} = \dots = 0$ ” und
aus **1-5** “ $0 \in \{0\}$ ”
folgt:

$$\alpha \setminus \{\beta\} \in \{0\}.$$

10: Aus 9 “ $\alpha \setminus \{\beta\} \in \{0\}$ ” und
aus **240-2(RekParDef)** “ $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ ”
folgt:

$$\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_0.$$

Ergo **Thema1.1**:

A1	“ $\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+0}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_0)$ ”
-----------	---

1.2: Aus **+schola** “ $0 \in \mathbb{N}$ ” und

aus **A1** gleich “ $\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+0}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_0)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:

$$0 \in 240.5().$$

Beweis 240-14 d)**Thema1** $\gamma \in 240.5()$.2: Aus Thema1 " $\gamma \in 240.5()$ "

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$(\gamma \in \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\gamma} \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\gamma))).$$

3: Aus 2 " $\gamma \in \mathbb{N} \dots$ "folgt via **159-10**: $1 + \gamma \in \mathbb{N}$.**Thema4.1** $\epsilon \in \delta \in \mathcal{U}_{1+(1+\gamma)}$.5: Aus 3 " $1 + \gamma \in \mathbb{N}$ " undaus Thema4.1 " $\dots \delta \in \mathcal{U}_{1+(1+\gamma)}$ "folgt via **240-12**:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \in \mathcal{U}_{1+\gamma}) \wedge (\delta = \{\Omega\} \cup \Psi).$$

6: Es gilt:

$$(\epsilon = \Omega) \vee (\epsilon \neq \Omega).$$

Fallunterscheidung**6.1.Fall** $\epsilon = \Omega$.7: Aus 6.1.Fall " $\epsilon = \Omega$ " undaus 5 " $\dots \delta = \{\Omega\} \cup \Psi$ "

folgt:

$$\delta = \{\epsilon\} \cup \Psi.$$

8:

$$\delta \setminus \{\epsilon\}$$

$$\stackrel{7}{=} (\{\epsilon\} \cup \Psi) \setminus \{\epsilon\}$$

$$\stackrel{238-3}{=} \Psi \setminus \{\epsilon\}.$$

9: Es gilt:

$$(\epsilon \in \Psi) \vee (\epsilon \notin \Psi).$$

Fallunterscheidung

...

...

...

...

Beweis **240-14** d) ...

Thema1

$\gamma \in 240.5()$.

...

Thema4.1

$\epsilon \in \delta \in \mathcal{U}_{1+(1+\gamma)}.$

...

Fallunterscheidung

6.1.Fall

$\epsilon = \Omega.$

...

Fallunterscheidung

9.1.Fall

$\epsilon \in \Psi.$

10: Aus 9.1.Fall " $\epsilon \in \Psi$ ",
 aus 5 " $\dots \Psi \in \mathcal{U}_{1+\gamma} \dots$ " und
 aus 2 " $\dots \forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\gamma})$
 $\Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\gamma)$ "
 folgt: $\Psi \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_\gamma.$

11: Aus 8 " $\delta \setminus \{\epsilon\} = \dots$
 $\dots = \Psi \setminus \{\epsilon\}$ " und
 aus 10 " $\Psi \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_\gamma$ "
 folgt: $\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_\gamma.$

12: Aus 2 " $\gamma \in \mathbb{N}$ "
 folgt via **240-7**: $\mathcal{U}_\gamma \subseteq \mathcal{U}_{1+\gamma}.$

13: Aus 11 " $\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_\gamma$ " und
 aus 12 " $\mathcal{U}_\gamma \subseteq \mathcal{U}_{1+\gamma}$ "
 folgt via **0-4**: $\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_{1+\gamma}.$

...

...

...

...

Beweis **240-14** d) ...

Thema1

$\gamma \in 240.5()$.

...

Thema4.1

$\epsilon \in \delta \in \mathcal{U}_{1+(1+\gamma)}.$

...

Fallunterscheidung

6.1.Fall

$\epsilon = \Omega.$

...

Fallunterscheidung

...

9.2.Fall

$\epsilon \notin \Psi.$

10: Aus 9.2.Fall " $\epsilon \notin \Psi$ "
folgt via **5-17**: $\Psi = \Psi \setminus \{\epsilon\}.$

11: Aus 8 " $\delta \setminus \{\epsilon\} = \dots$ "
 $\dots = \Psi \setminus \{\epsilon\}$ und
aus 10 " $\Psi = \Psi \setminus \{\epsilon\}$ "
folgt: $\delta \setminus \{\epsilon\} = \Psi.$

12: Aus 11 " $\delta \setminus \{\epsilon\} = \Psi$ " und
aus 5 " $\dots \Psi \in \mathcal{U}_{1+\gamma} \dots$ "
folgt: $\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_{1+\gamma}.$

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: $\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_{1+\gamma}.$

...

...

...

Beweis **240-14** d) ...

Thema1

$\gamma \in 240.5()$.

...

Thema4.1

$\epsilon \in \delta \in \mathcal{U}_{1+(1+\gamma)}.$

...

Fallunterscheidung

...

6.2.Fall

$\epsilon \neq \Omega.$

7.1: Aus 6.2.Fall " $\epsilon \neq \Omega$ "

folgt via **238-3**:

$$(\{\Omega\} \cup \Psi) \setminus \{\epsilon\} = \{\Omega\} \cup (\Psi \setminus \{\epsilon\}).$$

7.2: Aus Thema4.1 " $\epsilon \in \delta \dots$ " und

aus 5 " $\dots \delta = \{\Omega\} \cup \Psi$ "

folgt:

$$\epsilon \in \{\Omega\} \cup \Psi.$$

8.1: Aus 5 " $\dots \delta = \{\Omega\} \cup \Psi$ " und

aus 7.1 " $(\{\Omega\} \cup \Psi) \setminus \{\epsilon\}$ "

$$= \{\Omega\} \cup (\Psi \setminus \{\epsilon\})"$$

folgt:

$$\delta \setminus \{\epsilon\} = \{\Omega\} \cup (\Psi \setminus \{\epsilon\}).$$

8.2: Aus 7.2 " $\epsilon \in \{\Omega\} \cup \Psi$ "

folgt via **94-8**:

$$(\epsilon = \Omega) \vee (\epsilon \in \Psi).$$

9: Aus 8.2 " $(\epsilon = \Omega) \vee (\epsilon \in \Psi)$ " und

aus 6.2.Fall " $\epsilon \neq \Omega$ "

folgt:

$$\epsilon \in \Psi.$$

10: Aus 9 " $\epsilon \in \Psi$ ",

aus 5 " $\dots \Psi \in \mathcal{U}_{1+\gamma} \dots$ " und

aus 2 " $\dots \forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+\gamma})$ "

$$\Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_\gamma)"$$

folgt:

$$\Psi \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_\gamma.$$

...

...

...

...

Beweis **240-14** d) ...

Thema1

$\gamma \in 240.5()$.

...

Thema4.1

$\epsilon \in \delta \in \mathcal{U}_{1+(1+\gamma)}$.

...

Fallunterscheidung

...

6.2.Fall1

$\epsilon \neq \Omega$.

...

11: Aus 2“ $\gamma \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus 10“ $\Psi \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_\gamma$ ”
folgt via **240-12**:

$\{\Omega\} \cup (\Psi \setminus \{\epsilon\}) \in \mathcal{U}_{1+\gamma}$.

12: Aus 8.1“ $\delta \setminus \{\epsilon\} = \{\Omega\} \cup (\Psi \setminus \{\epsilon\})$ ” und
aus 11“ $\{\Omega\} \cup (\Psi \setminus \{\epsilon\}) \in \mathcal{U}_{1+\gamma}$ ”
folgt: $\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_{1+\gamma}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_{1+\gamma}$.

Ergo Thema4.1:

A1 | “ $\forall \epsilon, \delta : (\epsilon \in \delta \in \mathcal{U}_{1+(1+\gamma)}) \Rightarrow (\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_{1+\gamma})$ ”

4.2: Aus 3“ $1 + \gamma \in \mathbb{N}$ ” und
aus A1 gleich “ $\forall \epsilon, \delta : (\epsilon \in \delta \in \mathcal{U}_{1+(1+\gamma)})$
 $\Rightarrow (\delta \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{U}_{1+\gamma})$ ”
folgt via des bereits bewiesenen a): $1 + \gamma \in 240.5()$.

Ergo Thema1:

$\forall \gamma : (\gamma \in 240.5()) \Rightarrow (1 + \gamma \in 240.5())$.

Beweis 240-14 e)

Aus c) " $0 \in 240.5()$ " ,

aus b) " $240.5() \subseteq \mathbb{N}$ " und

aus d) " $\forall \gamma : (\alpha \in 240.5()) \Rightarrow (1 + \gamma \in 240.5())$ "

folgt via **236-5**:

$$240.5() = \mathbb{N}.$$

f) VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \in x \in \mathcal{U}_{1+n}).$$

1: Via des bereits bewiesenen e) gilt:

$$240.5() = \mathbb{N}.$$

2: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ " und

aus 1 " $240.5() = \mathbb{N}$ "

folgt:

$$n \in 240.5() .$$

3: Aus 2 " $n \in 240.5()$ "

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+n}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_n).$$

4: Aus VS gleich " $\dots p \in x \in \mathcal{U}_n$ " und

aus 3 " $\forall \alpha, \beta : (\beta \in \alpha \in \mathcal{U}_{1+n}) \Rightarrow (\alpha \setminus \{\beta\} \in \mathcal{U}_n)$ "

folgt:

$$x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n.$$

□

240-15. Die nunmehrige parameter-freie Klassenklammer bereitet den Beweis von **240-16** vor, mit dem $1 + n \notin \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, bewiesen wird:

240-15(Definition)

$$240.6() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}.$$

240-16. Hier werden einige Aussagen über $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$ bewiesen, die in der Aussage $1 + n \notin \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, gipfeln:

240-16(Satz)

- a) " $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$ " genau dann, wenn
 $"n \in \mathbb{N}"$ und " $1 + n \notin \mathcal{U}_n$ ".
- b) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$.
- c) $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$.
- d) $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\})$
 $\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\})$.
- e) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}$.
- f) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " $1 + n \notin \mathcal{U}_n$ ".

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$ **240-15(Def)**

Beweis 240-16 a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$.

Aus VS gleich " $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$ "
 folgt:

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \notin \mathcal{U}_n).$$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \notin \mathcal{U}_n).$$

1: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N} \dots$ "

folgt via **ElementAxiom**:

n Menge.

2: Aus 1 " n Menge" und

aus VS gleich " $(n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \notin \mathcal{U}_n)$ "

folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}.$$

Beweis **240-16** b)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $\alpha \in \mathbb{N}.$

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}.$

c)

1: Es gilt: $(1 + 0 \in \mathcal{U}_0) \vee (1 + 0 \notin \mathcal{U}_0).$

wfFallunterscheidung

1.1.Fall1

$$1 + 0 \in \mathcal{U}_0.$$

2: Aus **1.1.Fall1** “ $1 + 0 \in \mathcal{U}_0$ ” und
aus **240-2(RekParDef)** “ $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ ”
folgt:

$$1 + 0 \in \{0\}.$$

3: Aus 2 “ $1 + 0 \in \{0\}$ ”
folgt via **1-6**:

$$1 + 0 = 0.$$

4: Aus 3 “ $1 + 0 = 0$ ” und
aus **+schola** “ $1 + 0 = 1$ ”
folgt:

$$1 = 0.$$

5: Es gilt 4 “ $1 = 0$ ”.
Via **≠schola** gilt “ $0 \neq 1$ ”.
Ex falso quodlibet folgt:

$$1 + 0 \notin \mathcal{U}_0.$$

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

A1 | “ $1 + 0 \notin \mathcal{U}_0$ ”

2: Aus **≠schola** “ $0 \in \mathbb{N}$ ” und
aus **A1** gleich “ $1 + 0 \notin \mathcal{U}_0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}.$

Beweis **240-16** d)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:

$$(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha \notin \mathcal{U}_\alpha).$$

3: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”

folgt via **159-10**:

$$1 + \alpha \in \mathbb{N}.$$

4: Es gilt: $(1 + (1 + \alpha) \in \mathcal{U}_{1+\alpha}) \vee (1 + (1 + \alpha) \notin \mathcal{U}_{1+\alpha}).$

wfFallunterscheidung

4.1.Fall

$$1 + (1 + \alpha) \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$$

5: Aus 3 “ $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ ”

folgt via **239-5**:

$$1 + \alpha \in 1 + (1 + \alpha).$$

6.1: Aus 3 “ $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ ”,

aus 5 “ $1 + \alpha \in 1 + (1 + \alpha)$ ” und

aus **4.1.Fall** “ $1 + (1 + \alpha) \in \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ”

folgt via **240-14**:

$$(1 + (1 + \alpha)) \setminus \{1 + \alpha\} \in \mathcal{U}_\alpha.$$

6.2: Aus 3 “ $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ ”

folgt via **239-5**:

$$1 + \alpha = (1 + (1 + \alpha)) \setminus \{1 + \alpha\}.$$

7: Aus 6.1 und

aus 6.2

folgt:

$$1 + \alpha \in \mathcal{U}_\alpha.$$

8: Es gilt 7 “ $1 + \alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ ”.

Es gilt 2 “ $\dots 1 + \alpha \notin \mathcal{U}_\alpha$ ”.

Ex falso quodlibet folgt:

$$1 + (1 + \alpha) \notin \mathcal{U}_{1+\alpha}.$$

Ende wfFallunterscheidung

A1

“ $1 + (1 + \alpha) \notin \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ”

5: Aus 3 “ $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ ” und

aus **A1** gleich “ $1 + (1 + \alpha) \notin \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen **a)**:

$$1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}) \\ \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}).$$

Beweis 240-16 e)

Aus c) “ $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$ ” ,

aus b) “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\} \subseteq \mathbb{N}$ ” und

aus d) “ $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\})$

$$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\})”$$

folgt via **236-5**:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}.$$

f) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

1: Via des bereits bewiesenen e) gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}.$

2: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N}$ ” und

aus 1 “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\} = \mathbb{N}$ ”

folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}.$$

3: Aus 2 “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \omega \notin \mathcal{U}_\omega)\}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$1 + n \notin \mathcal{U}_n.$$

□

240-17. Für $n \in \mathbb{N}$ umfasst $\mathcal{U}_{1+n}$ die Klasse $\mathcal{U}_n$ echt:

240-17(Satz)

- a) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}$ " und " $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{1+n}$ ".
 b) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{1+n}$ ".

Beweis 240-17 VS gleich

$n \in \mathbb{N}$.

1.1: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ "
 folgt via **159-10**:

$1 + n \in \mathbb{N}$.

1.2: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ "
 folgt via **240-7**:

$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$.

1.3: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ "
 folgt via **240-16**:

$1 + n \notin \mathcal{U}_n$.

2: Aus 1.1 " $1 + n \in \mathbb{N}$ "
 folgt via **240-11**:

$1 + n \in \mathcal{U}_{1+n}$.

3.1: Aus 2 " $1 + n \in \mathcal{U}_{1+n}$ " und
 aus 1.3 " $1 + n \notin \mathcal{U}_n$ "
 folgt via **0-10**:

$\mathcal{U}_{1+n} \neq \mathcal{U}_n$.

3.2: Aus 2 " $1 + n \in \mathcal{U}_{1+n}$ "
 folgt via **ElementAxiom**:

$1 + n$ Menge.

4.1.a): Aus 3.1 " $\mathcal{U}_{1+n} \neq \mathcal{U}_n$ "
 folgt:

$\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{1+n}$

4.2.a): Aus 3.2 " $1 + n$ Menge" und
 aus 1.3 " $1 + n \notin \mathcal{U}_n$ "
 folgt via **0-21**:

$\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}$

5.b): Aus 1.2 " $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$ " und
 aus 4.1.a) " $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{1+n}$ "
 folgt via **57-1(Def)**:

$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{1+n}$.

□

240-18. Mit der nunmehrigen parameter-freien Klassen-Klammer 240.7() wird der Beweis der - eventuelle erwarteten - Aussage $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$, $n \in \mathbb{N}$, vorbereitet:

240-18(Definition)

$$240.7() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}.$$

240-19. Hier werden einige Aussagen über $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ bewiesen, die in der Aussage $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$, $n \in \mathbb{N}$, gipfeln:

240-19(Satz)

- a) “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ ” genau dann, wenn
“ $n \in \mathbb{N}$ ” und “ $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”.
- b) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\} \subseteq \mathbb{N}$.
- c) $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$.
- d) $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\})$
 $\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\})$.
- e) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\} = \mathbb{N}$.
- f) Aus “ $n \in \mathbb{N}$ ” folgt “ $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”.
- g) Aus “ $n \in \mathbb{N}$ ” und “ $x \in \mathcal{U}_n$ ” folgt “ x endlich”.

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ **240-18(Def)**

Beweis **240-19** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$.

Aus VS gleich “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ ”
folgt:

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}).$$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}).$$

1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N} \dots$ ”

folgt via **ElementAxiom**:

n Menge.

2: Aus 1 “ n Menge” und

aus VS gleich “ $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})$ ”

folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}.$$

Beweis **240-19** b)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $\alpha \in \mathbb{N}.$

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\} \subseteq \mathbb{N}.$

c)

Thema1.1

$$\alpha \in \mathcal{U}_0.$$

2: Aus **Thema1.1** “ $\alpha \in \mathcal{U}_0$ ” und
aus **240-2(RekParDef)** “ $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ ”
folgt: $\alpha \in \{0\}.$

3: Aus 2 “ $\alpha \in \{0\}$ ”
folgt via **1-6**: $\alpha = 0.$

4: Aus 3 “ $\alpha = 0$ ” und
aus **28-9** “ $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$

Ergo **Thema1.1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_0) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1 “ $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”

1.2: Aus **schola** “ $0 \in \mathbb{N}$ ” und
aus **A1** gleich “ $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen **a)**: $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}.$

Beweis **240-19** d)

Thema1

$$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}.$$

2: Aus **Thema1** “ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}).$$

3: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ”

folgt via **159-10**:

$$1 + \alpha \in \mathbb{N}.$$

Thema4.1

$$\beta \in \mathcal{U}_{1+\alpha}.$$

5: Aus 2 “ $\alpha \in \mathbb{N} \dots$ ” und
aus **Thema4.1** “ $\beta \in \mathcal{U}_{1+\alpha}$ ”

folgt via **240-12**:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Psi \in \mathcal{U}_\alpha) \wedge (\beta = \{\Omega\} \cup \Psi).$$

6: Aus 5 “ $\dots \Psi \in \mathcal{U}_\alpha \dots$ ” und
aus 2 “ $\dots \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”

folgt via **0-4**:

$$\Psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

7: Aus 6 “ $\Psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”

folgt via **28-9**:

$$\{\Omega\} \cup \Psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

8: Aus 5 “ $\dots \beta = \{\Omega\} \cup \Psi$ ” und
aus 7 “ $\{\Omega\} \cup \Psi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”

folgt:

$$\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

Ergo **Thema4.1**:

$$\forall \beta : (\beta \in \mathcal{U}_{1+\alpha}) \Rightarrow (\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A1} \mid “\mathcal{U}_{1+\alpha} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}”}$$

4.2: Aus 3 “ $1 + \alpha \in \mathbb{N}$ ” und
aus **A1** gleich “ $\mathcal{U}_{1+\alpha} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\begin{aligned} & \forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}) \\ & \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}). \end{aligned}$$

Beweis 240-19 e)

Aus c) “ $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ ” ,

aus b) “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\} \subseteq \mathbb{N}$ ” und

aus d) “ $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\})$

$$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\})$$

folgt via **236-5**:

$$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\} = \mathbb{N}.$$

f) VS gleich

$$n \in \mathbb{N}.$$

1: Via des bereits bewiesenen e) gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\} = \mathbb{N}.$

2: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N}$ ” und

aus 1 “ $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ ”

folgt:

$$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}.$$

3: Aus 2 “ $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (\mathcal{U}_\omega \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}})\}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

g) VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n).$$

1: Aus VS gleich “ $n \in \mathbb{N} \dots$ ”

folgt via des bereits bewiesenen f):

$$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

2: Aus VS gleich “ $\dots x \in \mathcal{U}_n$ ” und

aus 1 “ $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”

folgt via **0-4**:

$$x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

3: Aus 2 “ $x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ”

folgt via **28-7**:

x endlich.

□

240-20. In **240-19** wird gezeigt, dass $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, aus endlichen Mengen besteht. Nun wird vorbereitet, dass jede endliche Menge in einer Klasse $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, liegt:

240-20(Definition)

$$240.8() = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega))\}.$$

240-21. Die Klasse $240.8()$ entpuppt sich als $\mathcal{P}_{\text{endl}}$. Konsequenter Weise gibt es zu jeder endlichen Menge x ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathcal{U}_n$:

240-21(Satz)

- a) Aus “ $x \in 240.8()$ ” folgt “ $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega)$ ”.
- b) Aus “ $n \in \mathbb{N}$ ” und “ $x \in \mathcal{U}_n$ ” folgt “ $x \in 240.8()$ ”.
- c) $240.8() \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.
- d) $0 \in 240.8()$.
- e) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in 240.8())) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in 240.8())$.
- f) $240.8() = \mathcal{P}_{\text{endl}}$.
- g) Aus “ x endlich” folgt “ $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega)$ ”.

$$240.8() = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega))\} \quad \mathbf{240-20(Def)}$$

Beweis 240-21 a) VS gleich

$x \in 240.8()$.

- 1: Aus VS gleich “ $x \in 240.8()$ ” und
aus “ $240.8() = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega))\}$ ”
folgt: $x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega))\}$.
- 2: Aus 1 “ $x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega))\}$ ”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega)$.

Beweis **240-21** b) VS gleich

$$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n).$$

1.1: Es gilt:

$$\exists \Omega : \Omega = n.$$

1.2: Aus VS gleich "... $x \in \mathcal{U}_n$ "
folgt via **ElementAxiom**:

x Menge.

2: Aus 1.1 "... $\Omega = n$ " und
aus VS gleich "... $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n)$ "
folgt:

$$(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega).$$

3: Aus 1.1 "... $\exists \Omega \dots$ " und
aus 2 "... $(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega)$ "
folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_\Omega).$$

4: Aus 1.2 " x Menge" und
aus 3 "... $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega)$ "
folgt:

$$x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega))\}.$$

5: Aus 4 "... $x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega))\}$ " und
aus "240.8() = $\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega \in \mathcal{U}_\Omega))\}$ "
folgt:

$$x \in 240.8().$$

c)

Thema1

$$\alpha \in 240.8().$$

2: Aus **Thema1** "... $\alpha \in 240.8()$ "
folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \mathcal{U}_\Omega).$$

3: Aus 2 "... $\Omega \in \mathbb{N} \dots$ " und
aus 2 "... $\alpha \in \mathcal{U}_\Omega$ "
folgt via **240-19**:

α endlich.

4: Aus 3 "... α endlich"
folgt via **28-7**:

$$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in 240.8()) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$240.8() \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

Beweis **240-21** d)

- 1: Aus **1-5** “ $0 \in \{0\}$ ” und
 aus **240-2(RekParDef)** “ $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ ”
 folgt: $0 \in \mathcal{U}_0$.
- 2: Aus **schola** “ $0 \in \mathbb{N}$ ” und
 aus **1** “ $0 \in \mathcal{U}_0$ ”
 folgt via des bereits bewiesenen **b)**: $0 \in 240.8()$.

e)

Thema1	$(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in 240.8()).$
2: Aus Thema1.2 “ $\dots \beta \in 240.8()$ ” folgt via des bereits bewiesenen a) :	$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}_\Omega).$
3: Aus 2 “ $\dots \Omega \in \mathbb{N} \dots$ ” und aus 2 “ $\dots \beta \in \mathcal{U}_\Omega$ ” folgt via 240-12 :	$\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{U}_{1+\Omega}.$
4: Aus 2 “ $\dots \Omega \in \mathbb{N} \dots$ ” folgt via 159-10 :	$1 + \Omega \in \mathbb{N}.$
5: Aus 4 “ $1 + \Omega \in \mathbb{N}$ ” und aus 3 “ $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{U}_{1+\Omega}$ ” folgt via des bereits bewiesenen b) :	$\{\alpha\} \cup \beta \in 240.8().$

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in 240.8())) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in 240.8()).$

f)

- 1.1: Via des bereits bewiesenen **b)** gilt: $0 \in 240.8().$
- 1.2: Via des bereits bewiesenen **e)** gilt:
 $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in 240.8())) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in 240.8()).$
- 1.3: Via des bereits bewiesenen **c)** gilt: $240.8() \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}.$
- 2: Aus **1.1** “ $0 \in 240.8()$ ” und
 aus **1.2** “ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in 240.8())) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in 240.8())$ ”
 folgt via **$\mathcal{P}_{\text{endl}}$ Induktion**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq 240.8().$
- 3: Aus **1.3** “ $240.8() \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$ ” und
 aus **2** “ $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq 240.8()$ ”
 folgt via **GleichheitsAxiom**: $240.8() = \mathcal{P}_{\text{endl}}.$

Beweis 240-21 g) VS gleich

x endlich.

1.1: Aus VS gleich “ x endlich”
folgt via **28-7**:

$$x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

1.2: Via des bereits bewiesenen f) gilt:

$$240.8() = \mathcal{P}_{\text{endl}}.$$

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:

$$x \in 240.8().$$

3: Aus 3 “ $x \in 240.8()$ ”
folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_{\Omega}).$$

□

Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt n endlich.
 $\mathbb{N}$ unendlich.

Ersterstellung: 16/04/13

Letzte Änderung: 16/04/13

241-1. Jede natürliche Zahl ist endlich. $\mathbb{N}$ ist unendlich. Beim Beweis wird hier zum ersten Mal eine sprachlich offensichtliche Ausschließung - endlich versus unendlich - nicht detailgetreu bis zur Definition dargelegt sondern durch kurzen Verweis auf die zu Grunde liegende Definition - hier **29-1(Def)** - begründet. Diese abkürzende Beweisführung wird hier und im Folgenden zur Vereinfachung eingesetzt:

241-1(Satz)

- a) Aus " $n \in \mathbb{N}$ " folgt " n endlich".
- b) $0 \neq \mathbb{N}$.
- c) $\mathbb{N}$ unendlich.

Beweis **241-1** a) VS gleich

$n \in \mathbb{N}$.

1: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **240-11**:

$n \in \mathcal{U}_n$.

2: Aus VS gleich " $n \in \mathbb{N}$ " und
aus 1 " $n \in \mathcal{U}_n$ "
folgt via **240-19**:

n endlich.

b)

Aus **schola** " $0 \in \mathbb{N}$ "
folgt via **0-20**:

$0 \neq \mathbb{N}$.

c)

1: Via **29-1(Def)** gilt:

$(\mathbb{N} \text{ endlich}) \vee (\mathbb{N} \text{ unendlich})$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall

$\mathbb{N}$ endlich.

2: Via des bereits bewiesenen b) gilt:

$0 \neq \mathbb{N}$.

3: Aus 2 " $0 \neq \mathbb{N}$ ",
aus **159-10** " $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$ " und
aus **1.1.Fall** " $\mathbb{N}$ endlich"
folgt via $\leq$ **Satz vom Maximum**:

$\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq \text{Maximum von } \mathbb{N}$.

4: Es gilt 3 "... Ω ist $\leq$ Maximum von $\mathbb{N}$ ".
Es gilt **176-1** " $\mathbb{N}$ hat kein $\leq$ Maximum".
Ex falso quodlibet folgt:

$\mathbb{N}$ unendlich.

Ende wfFallunterscheidung

$\mathbb{N}$ unendlich.

□

241-2. Nun wird ein auch an sich ansprechender Hilfs-Satz bewiesen:

241-2(Satz)

Es gelte:

$$\rightarrow) E \subseteq \mathbb{N}.$$

$$\rightarrow) n \in \mathbb{N}.$$

$$\rightarrow) n \text{ obere } \leq \text{ Schranke von } E.$$

Dann folgt:

$$\text{a) } E \subseteq 1 + n$$

$$\text{b) } E \text{ endlich.}$$

Beweis 241-2 $\leq$ -Notation.

a)

Thema1.1

$$\alpha \in E.$$

2.1: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in E$ " und
 aus $\rightarrow$ " $E \subseteq \mathbb{N}$ "
 folgt via **0-4**:

$$\alpha \in \mathbb{N}.$$

2.2: Aus $\rightarrow$ " n obere $\leq$ Schranke von E " und
 aus **Thema1.1** " $\alpha \in E$ "
 folgt via **35-1(Def)**:

$$\alpha \leq n.$$

3: Aus 2.1 " $\alpha \in \mathbb{N}$ ",
 aus $\rightarrow$ " $n \in \mathbb{N}$ " und
 aus 2.2 " $\alpha \leq n$ "
 folgt via **237-7**:

$$\alpha \in 1 + n.$$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in 1 + n).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$E \subseteq 1 + n.$$

b)

1.1: Aus $\rightarrow$ " $E \subseteq \mathbb{N}$ ",
 aus $\rightarrow$ " $n \in \mathbb{N}$ " und
 aus $\rightarrow$ " n obere $\leq$ Schranke von E "
 folgt via des bereits bewiesenen a):

$$E \subseteq 1 + n.$$

1.2: Aus $\rightarrow$ " $n \in \mathbb{N}$ "
 folgt via **159-10**:

$$1 + n \in \mathbb{N}.$$

2: Aus 1.2 " $1 + n \in \mathbb{N}$ "
 folgt via **241-1**:

$$1 + n \text{ endlich.}$$

3: Aus 1.1 " $E \subseteq 1 + n$ " und
 aus 2 " $1 + n$ endlich"
 folgt via **213-5**:

$$E \text{ endlich.}$$

□

241-3. Nun wird eine durch **241-1** inspirierte Aussagensammlung bewiesen:

241-3(Satz)

- a) Aus " $0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$ " und " E endlich"
folgt " $\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq \text{Maximum von } E$ ".
- b) Aus " $E \subseteq \mathbb{N}$ " und " $\max \text{ ist } \leq \text{Maximum von } E$ " folgt " E endlich".
- c) Aus " $E \subseteq \mathbb{N}$ " und " E unendlich" folgt " E hat kein $\leq \text{Maximum}$ ".
- d) Aus " $0 \neq E \subseteq \mathbb{N}$ " und " E hat kein $\leq \text{Maximum}$ "
folgt " E unendlich".

Beweis **241-3** a) VS gleich $(0 \neq E \subseteq \mathbb{N}) \wedge (E \text{ endlich}).$

1: Aus VS gleich " $\dots E \subseteq \mathbb{N} \dots$ " und
aus **159-10** " $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$ "
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathbb{S}.$

2: Aus VS gleich " $0 \neq E \dots$ ",
aus 1 " $E \subseteq \mathbb{S}$ " und
aus VS gleich " $\dots E$ endlich"
folgt via $\leq$ **Satz vom Maximum**: $\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq \text{Maximum von } E.$

b) VS gleich $(E \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\max \text{ ist } \leq \text{Maximum von } E).$

1: Aus VS gleich " $\dots \max \text{ ist } \leq \text{Maximum von } E$ "
folgt via **38-7**: $(\max \in E) \wedge (\max \text{ obere } \leq \text{Schranke von } E).$

2: Aus 1 " $\max \in E \dots$ " und
aus VS gleich " $E \subseteq \mathbb{N} \dots$ "
folgt via **0-4**: $\max \in E.$

3: Aus VS gleich " $E \subseteq \mathbb{N} \dots$ ",
aus 2 " $\max \in \mathbb{N}$ " und
aus 1 " $\dots \max \text{ obere } \leq \text{Schranke von } E$ "
folgt via **241-2**: E endlich.

Beweis **241-3 c)** VS gleich

$$(E \subseteq \mathbb{N}) \wedge (E \text{ unendlich}).$$

1: Via **38-1(Def)** gilt:

$$(\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq _ \text{Maximum von } E) \vee (E \text{ hat kein } \leq _ \text{Maximum}).$$

wfFallunterscheidung

1.1.Fall

$$\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq _ \text{Maximum von } E.$$

- 2: Aus VS gleich " $E \subseteq \mathbb{N} \dots$ " und
aus **1.1.Fall** " $\dots \Omega \text{ ist } \leq _ \text{Maximum von } E$ "
folgt via des bereits bewiesenen **b)**: E endlich.
- 3: Es gilt 2 " E endlich".
Es gilt VS gleich " $\dots E$ unendlich".
Ex falso quodlibet folgt: E hat kein $\leq _ \text{Maximum}$.

Ende wfFallunterscheidung

$$E \text{ hat kein } \leq _ \text{Maximum}.$$

d) VS gleich

$$(0 \neq E \subseteq \mathbb{N}) \wedge (E \text{ hat kein } \leq _ \text{Maximum}).$$

1: Via **29-1(Def)** gilt:

$$(E \text{ endlich}) \vee (E \text{ unendlich}).$$

wfFallunterscheidung

1.1.Fall

$$E \text{ endlich}.$$

- 2: Aus VS gleich " $0 \neq E \subseteq \mathbb{N} \dots$ " und
aus **1.1.Fall** " E endlich"
folgt via des bereits bewiesenen **a)**:
 $\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq _ \text{Maximum von } E.$
- 3: Es gilt 2 " $\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \leq _ \text{Maximum von } E$ ".
Es gilt VS gleich " $\dots E$ hat kein $\leq _ \text{Maximum}$ ".
Ex falso quodlibet folgt: E unendlich.

Ende wfFallunterscheidung

$$E \text{ unendlich}.$$

□

$\text{paar}(x, y).$

Ersterstellung: 23/04/13

Letzte Änderung: 06/05/13

242-1. Mit der nun in die Essays eingebrachten Klasse $\mathbf{paar}(x, y)$ wird der Boden für etliche interessante Funktionen geebnet. Hier müssen weder x noch y Funktionen oder Relationen sein:

242-1(Definition)

$\mathbf{paar}(x, y)$

$$= 242.0(x, y)$$

$$= \{(\lambda, (\mu, \nu)) : ((\lambda, \mu) \in x) \wedge ((\lambda, \nu) \in y)\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Psi = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

242-2. Nun wird das “Element-Sein” in $\text{paar}(x, y)$ thematisiert. Der Umgang mit $\text{paar}(x, y)$ erfolgt einer ab sofort eingesetzten, auf Vereinfachungen abzielenden Strategie zu Folge durch Hinweis auf Definition **242-1(Def)**:

242-2(Satz)

- a) Aus “ $w \in \text{paar}(x, y)$ ”
folgt “ $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (w = (\Omega, (\Phi, \Gamma)))$ ”.
- b) Aus “ $(p, q) \in \text{paar}(x, y)$ ”
folgt “ $\exists \Phi, \Gamma : ((p, \Phi) \in x) \wedge ((p, \Gamma) \in y) \wedge (q = (\Phi, \Gamma))$ ”.
- c) Aus “ $(p, r) \in x$ ” und “ $(p, s) \in y$ ” folgt “ $(p, (r, s)) \in \text{paar}(x, y)$ ”.

Beweis 242-2 a) VS gleich

$w \in \text{paar}(x, y).$

- 1: Aus VS gleich “ $w \in \text{paar}(x, y)$ ”
folgt via **242-1(Def)**:
 $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Psi = (\Phi, \Gamma)) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$
- 2: Aus 1 “ $\dots \Psi = (\Phi, \Gamma) \dots$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:
 $(\Omega, \Psi) = (\Omega, (\Phi, \Gamma)).$
- 3: Aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Psi)$ ” und
aus 2 “ $(\Omega, \Psi) = (\Omega, (\Phi, \Gamma))$ ”
folgt:
 $w = (\Omega, (\Phi, \Gamma)).$
- 4: Aus 1 “ $\exists \Omega, \Phi, \Gamma \dots$ ”,
aus 1 “ $\dots ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \dots$ ” und
aus 3 “ $w = (\Omega, (\Phi, \Gamma))$ ”
folgt:
 $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (w = (\Omega, (\Phi, \Gamma))).$

Beweis 242-2 b) VS gleich

$$(p, q) \in \text{paar}(x, y).$$

1: Aus VS gleich “ $(p, q) \in \text{paar}(x, y)$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge ((p, q) = (\Omega, (\Phi, \Gamma))).$$

2: Aus VS gleich “ $(p, q) \in \text{paar}(x, y)$ ”

folgt via **ElementAxiom**:

$$(p, q) \text{ Menge.}$$

3: Aus 1 “ $\dots (p, q) = (\Omega, (\Phi, \Gamma))$ ” und
aus 2 “ $(p, q) \text{ Menge}$ ”

folgt via **IGP**:

$$(p = \Omega) \wedge (q = (\Phi, \Gamma)).$$

4.1: Aus 3 “ $p = \Omega \dots$ ”

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(p, \Phi) = (\Omega, \Phi).$$

4.2: Aus 3 “ $p = \Omega \dots$ ”

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(p, \Gamma) = (\Omega, \Gamma).$$

5.1: Aus 4.1 “ $(p, \Phi) = (\Omega, \Phi)$ ” und
aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”

folgt:

$$(p, \Phi) \in x.$$

5.2: Aus 4.2 “ $(p, \Gamma) = (\Omega, \Gamma)$ ” und
aus 1 “ $\dots (\Omega, \Gamma) \in y \dots$ ”

folgt:

$$(p, \Gamma) \in y.$$

6: Aus 1 “ $\exists \dots \Phi, \Gamma \dots$ ”,
aus 5.1 “ $(p, \Phi) \in x$ ”,
aus 5.2 “ $(p, \Gamma) \in y$ ” und
aus 3 “ $\dots q = (\Phi, \Gamma)$ ”

folgt:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((p, \Phi) \in x) \wedge ((p, \Gamma) \in y) \wedge (q = (\Phi, \Gamma)).$$

c) VS gleich

$$((p, r) \in x) \wedge ((p, s) \in y).$$

1.1: Es gilt:

$$\exists \Omega : \Omega = p.$$

1.2: Es gilt:

$$\exists \Phi : \Phi = r.$$

1.3: Es gilt:

$$\exists \Gamma : \Gamma = s.$$

1.4: Es gilt:

$$\exists \Psi : \Psi = (\Phi, \Gamma).$$

1.5: Aus VS gleich “ $(p, r) \in x$ ”

folgt via **12-7**:

$$p, r \text{ Menge.}$$

1.6: Aus VS gleich “ $\dots (p, s) \in y$ ”

folgt via **12-7**:

$$s \text{ Menge.}$$

...

Beweis 242-2 c) VS gleich

$$((p, r) \in x) \wedge ((p, s) \in y).$$

...

2.1: Aus 1.1 "... $\Omega = p$ " und
aus 1.2 "... $\Phi = r$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Phi) = (p, r).$$

2.2: Aus 1.1 "... $\Omega = p$ " und
aus 1.3 "... $\Gamma = s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Gamma) = (p, s).$$

2.3: Aus 1.2 "... $\Phi = r$ " und
aus 1.3 "... $\Gamma = s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Phi, \Gamma) = (r, s).$$

2.4: Aus 1.4 "... $\Psi = (\Phi, \Gamma)$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = (\Omega, (\Phi, \Gamma)).$$

2.5: Aus 1.5 "... r Menge" und
aus 1.6 "... s Menge"
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(r, s) \text{ Menge.}$$

3.1: Aus 2.1 "... $(\Omega, \Phi) = (p, r)$ " und
aus VS gleich "... $(p, r) \in x \dots$ "
folgt:

$$(\Omega, \Phi) \in x.$$

3.2: Aus 2.2 "... $(\Omega, \Gamma) = (p, s)$ " und
aus VS gleich "... $(p, s) \in y$ "
folgt:

$$(\Omega, \Gamma) \in y.$$

3.3: Aus 1.1 "... $\Omega = p$ " und
aus 2.3 "... $(\Phi, \Gamma) = (r, s)$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, (\Phi, \Gamma)) = (p, (r, s)).$$

3.4: Aus 1.5 "... $p \dots$ Menge" und
aus 2.5 "... (r, s) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(p, (r, s)) \text{ Menge.}$$

4: Aus 2.4 "... $(\Omega, \Psi) = (\Omega, (\Phi, \Gamma))$ " und
aus 3.3 "... $(\Omega, (\Phi, \Gamma)) = (p, (r, s))$ "
folgt:

$$(\Omega, \Psi) = (p, (r, s)).$$

5: Aus 4
folgt:

$$(p, (r, s)) = (\Omega, \Psi).$$

...

Beweis 242-2 c) VS gleich

$$((p, r) \in x) \wedge ((p, s) \in y).$$

...

6: Aus 1.1 " $\exists \Omega \dots$ ",
 aus 1.2 " $\exists \Phi \dots$ ",
 aus 1.3 " $\exists \Gamma \dots$ ",
 aus 1.4 " $\exists \Psi \dots$ ",
 aus 3.1 " $(\Omega, \Phi) \in x$ ",
 aus 3.2 " $(\Omega, \Gamma) \in y$ ",
 aus 1.4 " $\dots \Psi = (\Phi, \Gamma)$ " und
 aus 5 " $(p, (r, s)) = (\Omega, \Psi)$ "
 folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Psi = (\Phi, \Gamma))$
 $\wedge ((p, (r, s)) = (\Omega, \Psi)).$

7: Aus 3.4 " $(p, (r, s))$ Menge" und
 aus 6 " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Psi = (\Phi, \Gamma))$
 $\wedge ((p, (r, s)) = (\Omega, \Psi))$ "
 folgt via **242-1(Def)**: $(p, (r, s)) \in \text{paar}(x, y).$

□

242-3. $\text{paar}(x, y)$ ist eine Relation:

242-3(Satz)

$\text{paar}(x, y)$ Relation.

Beweis 242-3

Thema1

$\alpha \in \text{paar}(x, y).$

Aus **Thema1** “ $\alpha \in \text{paar}(x, y)$ ”
folgt via **242-1(Def)**:

$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo **Thema1**:

$\forall \alpha : (\alpha \in \text{paar}(x, y)) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$

Konsequenz via **10-3**:

$\text{paar}(x, y)$ Relation.

□

242-4. Nun werden Definitions- und Bild-Bereich von $\text{paar}(x, y)$ untersucht. Aussage b) zeigt, dass mit $\text{paar}(x, y) = \text{paar}(y, x)$ wohl nur in Spezialfällen zu rechnen ist:

242-4(Satz)

- a) $\text{dom}(\text{paar}(x, y)) = (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y).$
 b) $\text{ran}(\text{paar}(x, y)) = y \circ x^{-1}.$

Beweis 242-4 a)

Thema1.1

$$\alpha \in \text{dom}(\text{paar}(x, y)).$$

2: Aus Thema1.1 “ $\alpha \in \text{dom}(\text{paar}(x, y))$ ”
 folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \text{paar}(x, y).$

3: Aus 2 “ $\dots (\alpha, \Omega) \in \text{paar}(x, y)$ ”
 folgt via **242-2**: $\exists \Phi, \Gamma : ((\alpha, \Phi) \in x) \wedge ((\alpha, \Gamma) \in y).$

4.1: Aus 3 “ $\dots (\alpha, \Phi) \in x \dots$ ”
 folgt via **7-5**: $\alpha \in \text{dom } x.$

4.2: Aus 3 “ $\dots (\alpha, \Gamma) \in y$ ”
 folgt via **7-5**: $\alpha \in \text{dom } y.$

5: Aus 4.1 “ $\alpha \in \text{dom } x$ ” und
 aus 4.2 “ $\alpha \in \text{dom } y$ ”
 folgt via **2-2**: $\alpha \in (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y).$

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \text{dom}(\text{paar}(x, y))) \Rightarrow (\alpha \in (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$\text{A1} \mid \text{“dom}(\text{paar}(x, y)) \subseteq (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y)\text{”}$
--

...

Beweis **242-4** a) ...

Thema1.2

$$\alpha \in (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y).$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y)$ "

folgt via **2-2**: $(\alpha \in \text{dom } x) \wedge (\alpha \in \text{dom } y).$

3.1: Aus 2 " $\alpha \in \text{dom } x \dots$ "

folgt via **7-2**: $\exists \Phi : (\alpha, \Phi) \in x.$

3.2: Aus 2 " $\dots \alpha \in \text{dom } y$ "

folgt via **7-2**: $\exists \Gamma : (\alpha, \Gamma) \in y.$

4: Aus 3.1 " $\dots (\alpha, \Phi) \in x$ " und

aus 3.2 " $\dots (\alpha, \Gamma) \in y$ "

folgt via **242-2**: $(\alpha, (\Phi, \Gamma)) \in \text{paar}(x, y).$

5: Aus 4 " $(\alpha, (\Phi, \Gamma)) \in \text{paar}(x, y)$ "

folgt via **7-5**: $\alpha \in \text{dom}(\text{paar}(x, y)).$

Ergo **Thema1.2**: $\forall \alpha : (\alpha \in (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y)) \Rightarrow (\alpha \in \text{dom}(\text{paar}(x, y))).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2 " $(\text{dom } x) \cap (\text{dom } y) \subseteq \text{dom}(\text{paar}(x, y))$ "
--

1.3: Aus **A1** gleich " $\text{dom}(\text{paar}(x, y)) \subseteq (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y)$ " und

aus **A2** gleich " $(\text{dom } x) \cap (\text{dom } y) \subseteq \text{dom}(\text{paar}(x, y))$ "

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\text{dom}(\text{paar}(x, y)) = (\text{dom } x) \cap (\text{dom } y).$

Beweis **242-4** b)**Thema1.1**

$$\alpha \in \text{ran}(\text{paar}(x, y)).$$

2: Aus **Thema1.1** “ $\alpha \in \text{ran}(\text{paar}(x, y))$ ”folgt via **7-4**:

$$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \text{paar}(x, y).$$

3: Aus 2 “ $\dots (\Omega, \alpha) \in \text{paar}(x, y)$ ”folgt via **242-2**:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\alpha = (\Phi, \Gamma)).$$

4: Aus 3 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”folgt via **11-4**:

$$(\Phi, \Omega) \in x^{-1}.$$

5: Aus 4 “ $(\Phi, \Omega) \in x^{-1}$ ” undaus 3 “ $\dots (\Omega, \Gamma) \in y \dots$ ”folgt via **14-5**:

$$(\Phi, \Gamma) \in y \circ x^{-1}.$$

6: Aus 3 “ $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma)$ ” undaus 5 “ $(\Phi, \Gamma) \in y \circ x^{-1}$ ”

folgt:

$$\alpha \in y \circ x^{-1}.$$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \text{ran}(\text{paar}(x, y))) \Rightarrow (\alpha \in y \circ x^{-1}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1	“ $\text{ran}(\text{paar}(x, y)) \subseteq y \circ x^{-1}$ ”
-----------	--

...

Beweis **242-4** b) ...

Thema1.2

$$\alpha \in y \circ x^{-1}.$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in y \circ x^{-1}$ "
folgt via **14-3**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x^{-1}) \wedge ((\Phi, \Gamma) \in y) \wedge (\alpha = (\Omega, \Gamma)).$$

3: Aus 2 " $\dots (\Omega, \Phi) \in x^{-1} \dots$ "
folgt via **11-4**:

$$(\Phi, \Omega) \in x.$$

4: Aus 3 " $(\Phi, \Omega) \in x$ " und
aus 2 " $\dots (\Phi, \Gamma) \in y \dots$ "
folgt via **242-2**:

$$(\Phi, (\Omega, \Gamma)) \in \text{paar}(x, y).$$

5: Aus 4 " $(\Phi, (\Omega, \Gamma)) \in \text{paar}(x, y)$ "
folgt via **7-5**:

$$(\Omega, \Gamma) \in \text{ran}(\text{paar}(x, y)).$$

6: Aus 2 " $\dots \alpha = (\Omega, \Gamma)$ " und
aus 5 " $(\Omega, \Gamma) \in \text{ran}(\text{paar}(x, y))$ "
folgt:

$$\alpha \in \text{ran}(\text{paar}(x, y)).$$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in y \circ x^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \text{ran}(\text{paar}(x, y))).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid "y \circ x^{-1} \subseteq \text{ran}(\text{paar}(x, y))"}$$

1.3: Aus **A1** gleich " $\text{ran}(\text{paar}(x, y)) \subseteq y \circ x^{-1}$ " und
aus **A2** gleich " $y \circ x^{-1} \subseteq \text{ran}(\text{paar}(x, y))$ "
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\text{ran}(\text{paar}(x, y)) = y \circ x^{-1}.$$

□

242-5. Falls x oder y injektiv sind ist $\text{paar}(x, y)$ injektiv. Sind f, g Funktionen, so ist $\text{paar}(f, g)$ eine Funktion:

242-5(Satz)

- a) Aus " x injektiv" folgt " $\text{paar}(x, y)$ injektiv".
- b) Aus " y injektiv" folgt " $\text{paar}(x, y)$ injektiv".
- c) Aus " f, g Funktion" folgt " $\text{paar}(f, g)$ Funktion".
- d) Aus " f, g Funktion"
folgt " $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$ ".
- e) Aus " f, g Funktion" und " f injektiv"
folgt " $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$ bijektiv".
- f) Aus " f, g Funktion" und " g injektiv"
folgt " $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$ bijektiv".

Beweis **242-5 a)** VS gleich x injektiv.**Thema1**

$$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \text{paar}(x, y).$$

2.1: Aus **Thema1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in \text{paar}(x, y)$ ”folgt via **242-2**:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge ((\alpha, \Phi) \in y) \wedge (\beta = (\Omega, \Phi)).$$

2.2: Aus **Thema1** “ $\dots (\gamma, \beta) \in \text{paar}(x, y)$ ”folgt via **242-2**:

$$\exists \Psi, \Gamma : ((\gamma, \Psi) \in x) \wedge ((\gamma, \Gamma) \in y) \wedge (\beta = (\Psi, \Gamma)).$$

3.1: Aus 2.1 “ $\dots \beta = (\Omega, \Phi)$ ” undaus 2.2 “ $\dots \beta = (\Psi, \Gamma)$ ”

folgt:

$$(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Gamma).$$

3.2: Aus **Thema1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in \text{paar}(x, y)$ ”folgt via **12-7**: β Menge.4: Aus 2.1 “ $\dots \beta = (\Omega, \Phi)$ ” undaus 3 “ β Menge”

folgt:

 (Ω, Φ) Menge.5: Aus 3.1 “ $(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Gamma)$ ” undaus 4 “ (Ω, Φ) Menge”folgt via **IGP**:

$$\Omega = \Psi.$$

6: Aus 5 “ $\Omega = \Psi$ ”folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\alpha, \Omega) = (\alpha, \Psi).$$

7: Aus 6 “ $(\alpha, \Omega) = (\alpha, \Psi)$ ” undaus 2.1 “ $\dots (\alpha, \Omega) \in x \dots$ ”

folgt:

$$(\alpha, \Psi) \in x.$$

8: Aus VS gleich “ x injektiv”,aus 7 “ $(\alpha, \Psi) \in x$ ” undaus 2.2 “ $\dots (\gamma, \Psi) \in x \dots$ ”folgt via **8-1(Def)**:

$$\alpha = \gamma.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \text{paar}(x, y)) \Rightarrow (\alpha = \gamma).$$

Konsequenz via **8-1(Def)**: $\text{paar}(x, y)$ injektiv.

Beweis **242-5** b) VS gleich y injektiv.**Thema1**

$$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \text{paar}(x, y).$$

2.1: Aus **Thema1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in \text{paar}(x, y)$ ”
folgt via **242-2**:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge ((\alpha, \Phi) \in y) \wedge (\beta = (\Omega, \Phi)).$$

2.2: Aus **Thema1** “ $\dots (\gamma, \beta) \in \text{paar}(x, y)$ ”
folgt via **242-2**:

$$\exists \Psi, \Gamma : ((\gamma, \Psi) \in x) \wedge ((\gamma, \Gamma) \in y) \wedge (\beta = (\Psi, \Gamma)).$$

3.1: Aus 2.1 “ $\dots \beta = (\Omega, \Phi)$ ” und
aus 2.2 “ $\dots \beta = (\Psi, \Gamma)$ ”
folgt:

$$(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Gamma).$$

3.2: Aus **Thema1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in \text{paar}(x, y)$ ”
folgt via **12-7**:

 β Menge.

4: Aus 2.1 “ $\dots \beta = (\Omega, \Phi)$ ” und
aus 3 “ β Menge”
folgt:

$$(\Omega, \Phi) \text{ Menge.}$$

5: Aus 3.1 “ $(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Gamma)$ ” und
aus 4 “ (Ω, Φ) Menge”
folgt via **IGP**:

$$\Phi = \Gamma.$$

6: Aus 5 “ $\Phi = \Gamma$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\gamma, \Phi) = (\gamma, \Gamma).$$

7: Aus 6 “ $(\gamma, \Phi) = (\gamma, \Gamma)$ ” und
aus 2.2 “ $\dots (\gamma, \Gamma) \in y \dots$ ”
folgt:

$$(\gamma, \Phi) \in y.$$

8: Aus VS gleich “ y injektiv”,
aus 2.1 “ $\dots (\alpha, \Phi) \in y \dots$ ” und
aus 7 “ $(\gamma, \Phi) \in y$ ”
folgt via **8-1(Def)**:

$$\alpha = \gamma.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \text{paar}(x, y)) \Rightarrow (\alpha = \gamma).$$

Konsequenz via **8-1(Def)**: $\text{paar}(x, y)$ injektiv.

Beweis **242-5** c) VS gleich f, g Funktion.**Thema1.1**

$$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \text{paar}(f, g).$$

2.1: Aus **Thema1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in \text{paar}(f, g)$ ”folgt via **242-2**:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\alpha, \Omega) \in f) \wedge ((\alpha, \Phi) \in g) \wedge (\beta = (\Omega, \Phi)).$$

2.2: Aus **Thema1** “ $\dots (\alpha, \gamma) \in \text{paar}(f, g)$ ”folgt via **242-2**:

$$\exists \Psi, \Gamma : ((\alpha, \Psi) \in f) \wedge ((\alpha, \Gamma) \in g) \wedge (\gamma = (\Psi, \Gamma)).$$

3.1: Aus VS gleich “ $f \dots$ Funktion”,aus 2.1 “ $\dots (\alpha, \Omega) \in f \dots$ ” undaus 2.2 “ $\dots (\alpha, \Psi) \in f \dots$ ”folgt via **18-18(Def)**:

$$\Omega = \Psi.$$

3.2: Aus VS gleich “ $\dots g$ Funktion”,aus 2.1 “ $\dots (\alpha, \Phi) \in g \dots$ ” undaus 2.2 “ $\dots (\alpha, \Gamma) \in g \dots$ ”folgt via **18-18(Def)**:

$$\Phi = \Gamma.$$

4: Aus 3.1 “ $\Omega = \Psi$ ” undaus 3.2 “ $\Phi = \Gamma$ ”folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Gamma).$$

5: Aus 2.1 “ $\dots \beta = (\Omega, \Phi)$ ” undaus 4 “ $(\Omega, \Phi) = (\Psi, \Gamma)$ ”

folgt:

$$\beta = (\Psi, \Gamma).$$

6: Aus 5 “ $\beta = (\Psi, \Gamma)$ ” undaus 2.2 “ $\dots \gamma = (\Psi, \Gamma)$ ”

folgt:

$$\beta = \gamma.$$

Ergo **Thema1.1**:

A1	“ $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \text{paar}(f, g)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$ ”
-----------	--

1.2: Via **242-3** gilt: $\text{paar}(f, g)$ Relation.2: Aus 1.2 “ $\text{paar}(f, g)$ Relation” undaus **A1** gleich “ $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \text{paar}(f, g)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$ ”folgt via **18-18(Def)**: $\text{paar}(f, g)$ Funktion.

Beweis 242-5 d) VS gleich

f, g Funktion.

1.1: Via 242-4 gilt: $\text{dom}(\text{paar}(f, g)) = (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$.

1.2: Via 242-4 gilt: $\text{ran}(\text{paar}(f, g)) = g \circ f^{-1}$.

1.3: Aus VS gleich " f, g Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen c): $\text{paar}(f, g)$ Funktion.

2: Aus 1.3 " $\text{paar}(f, g)$ Funktion",
aus 1.1 " $\text{dom}(\text{paar}(f, g)) = (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ " und
aus 1.2 " $\text{ran}(\text{paar}(f, g)) = g \circ f^{-1}$ "
folgt via 21-2: $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$.

e) VS gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv})$.

1.1: Via 242-4 gilt: $\text{ran}(\text{paar}(f, g)) = g \circ f^{-1}$.

1.2: Aus VS gleich " f, g Funktion..."
folgt via des bereits bewiesenen d):
 $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$.

1.3: Aus VS gleich "... f injektiv"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\text{paar}(f, g)$ injektiv.

2: Aus 1.2 " $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$ ",
aus 1.1 " $\text{ran}(\text{paar}(f, g)) = g \circ f^{-1}$ " und
aus 1.3 " $\text{paar}(f, g)$ injektiv"
folgt via 22-1(Def): $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$ bijektiv.

f) VS gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (g \text{ injektiv})$.

1.1: Via 242-4 gilt: $\text{ran}(\text{paar}(f, g)) = g \circ f^{-1}$.

1.2: Aus VS gleich " f, g Funktion..."
folgt via des bereits bewiesenen d):
 $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$.

1.3: Aus VS gleich "... g injektiv"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\text{paar}(f, g)$ injektiv.

2: Aus 1.2 " $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$ ",
aus 1.1 " $\text{ran}(\text{paar}(f, g)) = g \circ f^{-1}$ " und
aus 1.3 " $\text{paar}(f, g)$ injektiv"
folgt via 22-1(Def): $\text{paar}(f, g) : (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \rightarrow g \circ f^{-1}$ bijektiv.

□

242-6. Es gilt $(\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D] = x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D]$:

242-6(Satz)

$$(\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D] = x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D].$$

Beweis 242-6

Thema1.1

$$\alpha \in (\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D].$$

2: Aus Thema1.1 “ $\alpha \in (\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D]$ ”

folgt via **11-21**:

$$\exists \Omega : (\Omega \in E \times D) \wedge ((\alpha, \Omega) \in \text{paar}(x, y)).$$

3: Aus 2 “ $\dots (\alpha, \Omega) \in \text{paar}(x, y)$ ”

folgt via **242-2**:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((\alpha, \Phi) \in x) \wedge ((\alpha, \Gamma) \in y) \wedge (\Omega = (\Phi, \Gamma)).$$

4: Aus 3 “ $\dots \Omega = (\Phi, \Gamma)$ ” und

aus 2 “ $\dots \Omega \in E \times D \dots$ ”

folgt:

$$(\Phi, \Gamma) \in E \times D.$$

5: Aus 4 “ $(\Phi, \Gamma) \in E \times D$ ”

folgt via **6-6**:

$$(\Phi \in E) \wedge (\Gamma \in D).$$

6.1: Aus 3 “ $\dots (\alpha, \Phi) \in x \dots$ ” und

aus 5 “ $\Phi \in E \dots$ ”

folgt via **11-22**:

$$\alpha \in x^{-1}[E].$$

6.2: Aus 3 “ $\dots (\alpha, \Gamma) \in y \dots$ ” und

aus 5 “ $\dots \Gamma \in D$ ”

folgt via **11-22**:

$$\alpha \in y^{-1}[D].$$

7: Aus 6.1 “ $\alpha \in x^{-1}[E]$ ” und

aus 6.2 “ $\alpha \in y^{-1}[D]$ ”

folgt via **2-2**:

$$\alpha \in x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D].$$

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in (\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D]) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A1} \mid “(\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D] \subseteq x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D]”}$$

...

Beweis **242-6** ...

Thema1.2

$$\alpha \in x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D].$$

1: Aus **Thema1.2** “ $\alpha \in x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D]$ ”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x^{-1}[E]) \cap (\alpha \in y^{-1}[D]).$

2.1: Aus 1 “ $\alpha \in x^{-1}[E] \dots$ ”
folgt via **11-21**: $\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge ((\alpha, \Phi) \in x).$

2.2: Aus 1 “ $\dots \alpha \in y^{-1}[D]$ ”
folgt via **11-21**: $\exists \Gamma : (\Gamma \in D) \wedge ((\alpha, \Gamma) \in y).$

3.1: Aus 2.1 “ $\dots \Phi \in E \dots$ ” und
aus 2.2 “ $\dots \Gamma \in D \dots$ ”
folgt via **6-6**: $(\Phi, \Gamma) \in E \times D.$

3.2: Aus 2.1 “ $\dots (\alpha, \Phi) \in x$ ” und
aus 2.2 “ $\dots (\alpha, \Gamma) \in y$ ”
folgt via **242-2**: $(\alpha, (\Phi, \Gamma)) \in \text{paar}(x, y).$

4: Aus 3.2 “ $(\alpha, (\Phi, \Gamma)) \in \text{paar}(x, y)$ ” und
aus 3.1 “ $(\Phi, \Gamma) \in E \times D$ ”
folgt via **11-22**: $\alpha \in (\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D].$

Ergo **Thema1.2**: $\forall \alpha : (\alpha \in x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D]) \Rightarrow (\alpha \in (\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid “x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D] \subseteq (\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D]”}$$

1.3: Aus A1 gleich “ $(\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D] \subseteq x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D]$ ” und
asu A2 gleich “ $x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D] \subseteq (\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D]$ ”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\text{paar}(x, y))^{-1}[E \times D] = x^{-1}[E] \cap y^{-1}[D].$

□

$$p \neg E.x. x.E.p. x.E.y.$$

Ersterstellung: 16/04/13

Letzte Änderung: 23/04/13

243-1. Obwohl wohl hauptsächlich für Algebren E und Funktionen x oder y gebraucht werden hier allgemeine Definitionen von $p_{-E}.x$, $x.E_{-}p$ und $x.E.y$ gegeben:

243-1(Definition)

1) $p_{-E}.x$

$$= 243.0(x, p, E) = p_{-E}.x$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((p, \Phi), \Psi) \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

2) $x.E_{-}p$

$$= 243.1(x, p, E) = x.E_{-}p$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((\Phi, p), \Psi) \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

3) $x.E.y$

$$= 243.2(x, y, E) = x.E.y$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

243-2. Nun wird das “Element-Sein” in $p_E.x$, in $xE.p$ und in $x.E.y$ thematisiert:

243-2(Satz)

- a) Aus “ $w \in p_E.x$ ”
folgt “ $\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((p, \Phi), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$ ”.
- b) Aus “ $(q, r) \in p_E.x$ ” folgt “ $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (((p, \Omega), r) \in E)$ ”.
- c) Aus “ $(q, s) \in x$ ” und “ $((p, s), r) \in E$ ” folgt “ $(q, r) \in p_E.x$ ”.
- d) Aus “ $w \in x.E.p$ ”
folgt “ $\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((\Phi, p), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$ ”.
- e) Aus “ $(q, r) \in x.E.p$ ” folgt “ $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, p), r) \in E)$ ”.
- f) Aus “ $(q, s) \in x$ ” und “ $((s, p), r) \in E$ ” folgt “ $(q, r) \in x.E.p$ ”.
- g) Aus “ $w \in x.E.y$ ” folgt “ $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$ ”.
- h) Aus “ $(q, r) \in x.E.y$ ” folgt “ $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), r) \in E)$ ”.
- i) Aus “ $(q, r) \in x$ ” und “ $(q, s) \in y$ ” und “ $((r, s), t) \in E$ ”
folgt “ $(q, t) \in x.E.y$ ”.

Beweis 243-2 a) VS gleich

$w \in p_E.x$.

Aus VS gleich “ $w \in p_E.x$ ”

folgt via **243-1(Def)**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((p, \Phi), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

Beweis 243-2 b) VS gleich

$$(q, r) \in p_E.x.$$

1: Aus VS gleich “ $(q, r) \in p_E.x$ ”

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\exists \Phi, \Omega, \Psi : ((\Phi, \Omega) \in x) \wedge (((p, \Omega), \Psi) \in E) \wedge ((q, r) = (\Phi, \Psi)).$$

2: Aus VS gleich “ $(q, r) \in p_E.x$ ”

folgt via **ElementAxiom**:

$$(q, r) \text{ Menge.}$$

3: Aus 1 “ $\dots (q, r) = (\Phi, \Psi)$ ” und

aus 2 “ (q, r) Menge”

folgt via **IGP**:

$$(q = \Phi) \wedge (r = \Psi).$$

4.1: Aus 3 “ $q = \Phi \dots$ ”

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(q, \Omega) = (\Phi, \Omega).$$

4.2: Aus 3 “ $\dots r = \Psi$ ”

folgt via **PaarAxiom I**:

$$((p, \Omega), r) = ((p, \Omega), \Psi).$$

5.1: Aus 4.1 “ $(q, \Omega) = (\Phi, \Omega)$ ” und

aus 1 “ $\dots (\Phi, \Omega) \in x \dots$ ”

folgt:

$$(q, \Omega) \in x.$$

5.2: Aus 4.2 “ $((p, \Omega), r) = ((p, \Omega), \Psi)$ ” und

aus 1 “ $\dots ((p, \Omega), \Psi) \in E \dots$ ”

folgt:

$$((p, \Omega), r) \in E.$$

6: Aus 1 “ $\exists \dots \Omega \dots$ ”,

aus 5.1 “ $(q, \Omega) \in x$ ” und

aus 5.2 “ $((p, \Omega), r) \in E$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (((p, \Omega), r) \in E).$$

c) VS gleich

$$((q, s) \in x) \wedge (((p, s), r) \in E).$$

1.1: Es gilt:

$$\exists \Omega : \Omega = q.$$

1.2: Es gilt:

$$\exists \Phi : \Phi = s.$$

1.3: Es gilt:

$$\exists \Psi : \Psi = r.$$

1.4: Aus VS gleich “ $(q, s) \in x \dots$ ”

folgt via **12-7**:

$$q \text{ Menge.}$$

1.5: Aus VS gleich “ $\dots ((p, s), r) \in E$ ”

folgt via **12-7**:

$$r \text{ Menge.}$$

...

Beweis **243-2** c) VS gleich

$$((q, s) \in x) \wedge (((p, s), r) \in E).$$

...

2.1: Aus 1.1 "... $\Omega = q$ " und
aus 1.2 "... $\Phi = s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Phi) = (q, s).$$

2.2: Aus 1.1 "... $\Omega = q$ " und
aus 1.3 "... $\Psi = r$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = (q, r).$$

2.3: Aus 1.2 "... $\Phi = s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(p, \Phi) = (p, s).$$

2.4: Aus 1.4 " q Menge" und
aus 1.5 " r Menge"
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(q, r) \text{ Menge.}$$

3.1: Aus 2.1 " $(\Omega, \Phi) = (q, s)$ " und
aus VS gleich " $(q, s) \in x \dots$ "
folgt:

$$(\Omega, \Phi) \in x.$$

3.2: Aus 2.2
folgt:

$$(q, r) = (\Omega, \Psi).$$

3.3: Aus 2.3 " $(p, \Phi) = (p, s)$ " und
aus 1.3 "... $\Psi = r$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((p, \Phi), \Psi) = ((p, s), r).$$

4: Aus 3.3 " $((p, \Phi), \Psi) = ((p, s), r)$ " und
aus VS gleich "... $((p, s), r) \in E$ "
folgt:

$$((p, \Phi), \Psi) \in E.$$

5: Aus 1.1 " $\exists \Omega \dots$ ",
aus 1.2 " $\exists \Phi \dots$ ",
aus 1.3 " $\exists \Psi \dots$ ",
aus 3.1 " $(\Omega, \Phi) \in x$ ",
aus 4 " $((p, \Phi), \Psi) \in E$ " und
aus 3.2 " $(q, r) = (\Omega, \Psi)$ "
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((p, \Phi), \Psi) \in E) \wedge ((q, r) = (\Omega, \Psi)).$$

6: Aus 2.4 " (q, r) Menge" und
aus 5 " $\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((p, \Phi), \Psi) \in E) \wedge ((q, r) = (\Omega, \Psi))$ "
folgt via **243-1(Def)**:

$$(q, r) \in p \text{-} E.x.$$

Beweis **243-2** d) VS gleich

$$w \in x.E_{-p}.$$

Aus VS gleich “ $w \in x.E_{-p}$ ”

folgt via **243-1(Def)**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((\Phi, p), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

e) VS gleich

$$(q, r) \in x.E_{-p}.$$

1: Aus VS gleich “ $(q, r) \in x.E_{-p}$ ”

folgt via des bereits bewiesenen d):

$$\exists \Phi, \Omega, \Psi : ((\Phi, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, p), \Psi) \in E) \wedge ((q, r) = (\Phi, \Psi)).$$

2: Aus VS gleich “ $(q, r) \in x.E_{-p}$ ”

folgt via **ElementAxiom**:

$$(q, r) \text{ Menge.}$$

3: Aus 1 “ $\dots (q, r) = (\Phi, \Psi)$ ” und

aus 2 “ (q, r) Menge”

folgt via **IGP**:

$$(q = \Phi) \wedge (r = \Psi).$$

4.1: Aus 3 “ $q = \Phi \dots$ ”

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(q, \Omega) = (\Phi, \Omega).$$

4.2: Aus 3 “ $\dots r = \Psi$ ”

folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Omega, p), r) = ((\Omega, p), \Psi).$$

5.1: Aus 4.1 “ $(q, \Omega) = (\Phi, \Omega)$ ” und

aus 1 “ $\dots (\Phi, \Omega) \in x \dots$ ”

folgt:

$$(q, \Omega) \in x.$$

5.2: Aus 4.2 “ $((\Omega, p), r) = ((\Omega, p), \Psi)$ ” und

aus 1 “ $\dots ((\Omega, p), \Psi) \in E \dots$ ”

folgt:

$$((\Omega, p), r) \in E.$$

6: Aus 1 “ $\exists \dots \Omega \dots$ ”,

aus 5.1 “ $(q, \Omega) \in x$ ” und

aus 5.2 “ $((\Omega, p), r) \in E$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, p), r) \in E).$$

Beweis 243-2 f) VS gleich

$$((q, s) \in x) \wedge (((s, p), r) \in E).$$

1.1: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = q.$

1.2: Es gilt: $\exists \Phi : \Phi = s.$

1.3: Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = r.$

1.4: Aus VS gleich “ $(q, s) \in x \dots$ ”
folgt via **12-7**: q Menge.

1.5: Aus VS gleich “ $\dots ((s, p), r) \in E$ ”
folgt via **12-7**: r Menge.

2.1: Aus 1.1 “ $\dots \Omega = q$ ” und
aus 1.2 “ $\dots \Phi = s$ ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (q, s).$

2.2: Aus 1.1 “ $\dots \Omega = q$ ” und
aus 1.3 “ $\dots \Psi = r$ ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (q, r).$

2.3: Aus 1.2 “ $\dots \Phi = s$ ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi, p) = (s, p).$

2.4: Aus 1.4 “ q Menge” und
aus 1.5 “ r Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (q, r) Menge.

3.1: Aus 2.1 “ $(\Omega, \Phi) = (q, s)$ ” und
aus VS gleich “ $(q, s) \in x \dots$ ”
folgt: $(\Omega, \Phi) \in x.$

3.2: Aus 2.2
folgt: $(q, r) = (\Omega, \Psi).$

3.3: Aus 2.3 “ $(\Phi, p) = (s, p)$ ” und
aus 1.3 “ $\dots \Psi = r$ ”
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Phi, p), \Psi) = ((s, p), r).$

4: Aus 3.3 “ $((\Phi, p), \Psi) = ((s, p), r)$ ” und
aus VS gleich “ $\dots ((s, p), r) \in E$ ”
folgt: $((\Phi, p), \Psi) \in E.$

...

Beweis **243-2 f)** VS gleich

$$((q, s) \in x) \wedge (((s, p), r) \in E).$$

...

- 5: Aus 1.1 " $\exists \Omega \dots$ ",
 aus 1.2 " $\exists \Phi \dots$ ",
 aus 1.3 " $\exists \Psi \dots$ ",
 aus 3.1 " $(\Omega, \Phi) \in x$ ",
 aus 4 " $((\Phi, p), \Psi) \in E$ " und
 aus 3.2 " $(q, r) = (\Omega, \Psi)$ "
 folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((\Phi, p), \Psi) \in E) \wedge ((q, r) = (\Omega, \Psi)).$
- 6: Aus 2.4 " (q, r) Menge" und
 aus 5 " $\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((\Phi, p), \Psi) \in E) \wedge ((q, r) = (\Omega, \Psi))$ "
 folgt via **243-1(Def)**: $(q, r) \in x.E.p.$

g) VS gleich

$$w \in x.E.y.$$

Aus VS gleich " $w \in x.E.y$ "

folgt via **243-1(Def)**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

h) VS gleich

$$(q, r) \in x.E.y.$$

- 1: Aus VS gleich " $(q, r) \in x.E.y$ "
 folgt via des bereits bewiesenen g):
 $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E) \wedge ((q, r) = (\Omega, \Psi)).$
- 2: Aus VS gleich " $(q, r) \in x.E.y$ "
 folgt via **ElementAxiom**: (q, r) Menge.
- 3: Aus 1 " $\dots (q, r) = (\Omega, \Psi)$ " und
 aus 2 " (q, r) Menge"
 folgt via **IGP**: $(q = \Omega) \wedge (r = \Psi).$
- 4.1: Aus 3 " $q = \Omega \dots$ "
 folgt via **PaarAxiom I**: $(q, \Phi) = (\Omega, \Phi).$
- 4.2: Aus 3 " $q = \Omega \dots$ "
 folgt via **PaarAxiom I**: $(q, \Gamma) = (\Omega, \Gamma).$
- 4.3: Aus 3 " $\dots r = \Psi$ "
 folgt via **PaarAxiom I**: $((\Phi, \Gamma), r) = ((\Phi, \Gamma), \Psi).$
- ...

Beweis 243-2 h) VS gleich

$$(q, r) \in x.E.y.$$

...

5.1: Aus 4.1 " $(q, \Phi) = (\Omega, \Phi)$ " und
aus 1 " $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ "
folgt:

$$(q, \Phi) \in x.$$

5.2: Aus 4.2 " $(q, \Gamma) = (\Omega, \Gamma)$ " und
aus 1 " $\dots (\Omega, \Gamma) \in y \dots$ "
folgt:

$$(q, \Gamma) \in y.$$

5.3: Aus 4.3 " $((\Phi, \Gamma), r) = ((\Phi, \Gamma), \Psi)$ " und
aus 1 " $\dots ((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E \dots$ "
folgt:

$$((\Phi, \Gamma), r) \in E.$$

6: Aus 1 " $\exists \dots \Phi, \Gamma \dots$ ",
aus 5.1 " $(q, \Phi) \in x$ ",
aus 5.2 " $(q, \Gamma) \in y$ " und
aus 5.3 " $((\Phi, \Gamma), r) \in E$ "
folgt:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), r) \in E).$$

i) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge (((r, s), t) \in E).$$

1.1: Es gilt:

$$\exists \Omega : \Omega = q.$$

1.2: Es gilt:

$$\exists \Phi : \Phi = r.$$

1.3: Es gilt:

$$\exists \Gamma : \Gamma = s.$$

1.4: Es gilt:

$$\exists \Psi : \Psi = t.$$

1.5: Aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ "
folgt via **12-7**:

q Menge.

1.6: Aus VS gleich " $\dots ((r, s), t) \in E$ "
folgt via **12-7**:

t Menge.

...

Beweis **243-2** i) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge ((r, s), t) \in E).$$

...

2.1: Aus 1.1 "... $\Omega = q$ " und
aus 1.2 "... $\Phi = r$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Phi) = (q, r).$$

2.2: Aus 1.1 "... $\Omega = q$ " und
aus 1.3 "... $\Gamma = s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Gamma) = (q, s).$$

2.3: Aus 1.1 "... $\Omega = q$ " und
aus 1.4 "... $\Psi = t$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = (q, t).$$

2.4: Aus 1.2 "... $\Phi = r$ " und
aus 1.3 "... $\Gamma = s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Phi, \Gamma) = (r, s).$$

2.4: Aus 1.4 "... $\Psi = t$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Phi, \Gamma), \Psi) = ((\Phi, \Gamma), t).$$

2.5: Aus 1.5 " q Menge" und
aus 1.6 " t Menge"
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(q, t) \text{ Menge.}$$

3.1: Aus 2.1 " $(\Omega, \Phi) = (q, r)$ " und
aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ "
folgt:

$$(\Omega, \Phi) \in x.$$

3.2: Aus 2.2 " $(\Omega, \Gamma) = (q, s)$ " und
aus VS gleich "... $(q, s) \in y \dots$ "
folgt:

$$(\Omega, \Gamma) \in y.$$

3.3: Aus 2.3
folgt:

$$(q, t) = (\Omega, \Psi).$$

3.4: Aus 2.4 " $(\Phi, \Gamma) = (r, s)$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Phi, \Gamma), t) = ((r, s), t).$$

4: Aus 2.4 " $((\Phi, \Gamma), \Psi) = ((\Phi, \Gamma), t)$ " und
aus 3.4 " $((\Phi, \Gamma), t) = ((r, s), t)$ "
folgt:

$$((\Phi, \Gamma), \Psi) = ((r, s), t).$$

...

Beweis 243-2 i) VS gleich $((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge (((r, s), t) \in E).$

...

5: Aus 4 " $((\Phi, \Gamma), \Psi) = ((r, s), t)$ " und
aus VS gleich " $((r, s), t) \in E$ "
folgt: $((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E.$

6: Aus 1.1 " $\exists \Omega \dots$ ",
aus 1.2 " $\exists \Phi \dots$ ",
aus 1.3 " $\exists \Gamma \dots$ ",
aus 1.4 " $\exists \Psi \dots$ ",
aus 3.1 " $(\Omega, \Phi) \in x$ ",
aus 3.2 " $(\Omega, \Gamma) \in y$ ",
aus 5 " $((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E$ " und
aus 3.3 " $(q, t) = (\Omega, \Psi)$ "
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y)$
 $\wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E) \wedge ((q, t) = (\Omega, \Psi)).$

7: Aus 2.5 " (q, t) Menge" und
aus 6 " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E)$
 $\wedge ((q, t) = (\Omega, \Psi))$ "
folgt via **243-1(Def)**: $(q, t) \in x.E.y.$

□

243-3. $p_E.x, x.E_p, x.E.y$ sind Relationen.

243-3(Satz)

- a) $p_E.x$ Relation.
- b) $x.E_p$ Relation.
- c) $x.E.y$ Relation.

Beweis 243-3 a)

Thema1

$$\alpha \in p_E.x.$$

Aus Thema1 " $\alpha \in p_E.x$ "
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$$

Ergo Thema1:

$$\forall \alpha : (\alpha \in p_E.x) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$$

Konsequenz via **10-3**:

$p_E.x$ Relation.

b)

Thema1

$$\alpha \in x.E_p.$$

Aus Thema1 " $\alpha \in x.E_p$ "
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$$

Ergo Thema1:

$$\forall \alpha : (\alpha \in p_E.x) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$$

Konsequenz via **10-3**:

$x.E_p$ Relation.

c)

Thema1

$$\alpha \in x.E.y.$$

Aus Thema1 " $\alpha \in x.E.y$ "
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$$

Ergo Thema1:

$$\forall \alpha : (\alpha \in x.E.y) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$$

Konsequenz via **10-3**:

$x.E.y$ Relation.

□

243-4. Nun werden Definitions- und Bild-Bereiche von $p _E . x, x . E _p$ untersucht:

243-4(Satz)

- a) $\text{dom}(p _E . x) = x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]]$.
- b) $\text{ran}(p _E . x) = E[\{p\} \times \text{ran } x]$.
- c) $\text{dom}(x . E _p) = x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]]$.
- d) $\text{ran}(x . E _p) = E[(\text{ran } x) \times \{p\}]$.

Beweis 243-4 a)

Thema1.1

$$\alpha \in \text{dom}(p _E . x).$$

- 2: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in \text{dom}(p _E . x)$ "
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in p _E . x)$.
- 3: Aus 2 " $(\alpha, \Omega) \in p _E . x$ "
folgt via **243-2**: $\exists \Phi : ((\alpha, \Phi) \in x) \wedge ((p, \Phi), \Omega) \in E$.
- 4: Aus 3 "... $((p, \Phi), \Omega) \in E$ "
folgt via **7-5**: $(p, \Phi) \in \text{dom } E$.
- 5: Aus 4 " $(p, \Phi) \in \text{dom } E$ "
folgt via **9-15**: $\Phi \in (\text{dom } E)[\{p\}]$.
- 6: Aus 3 "... $(\alpha, \Phi) \in x$..." und
aus 5 " $\Phi \in (\text{dom } E)[\{p\}]$ "
folgt via **11-22**: $\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]]$.

Ergo **Thema1.1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \text{dom}(p _E . x)) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1 " $\text{dom}(p _E . x) \subseteq x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]]$ "
--

...

Beweis **243-4** a) ...

Thema1.2

$$\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]]$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]]$ "
folgt via **11-21**: $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } E)[\{p\}]) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x)$.

3: Aus 2 " $\dots \Omega \in (\text{dom } E)[\{p\}] \dots$ "
folgt via **9-15**: $(p, \Omega) \in \text{dom } E$.

4: Aus 3 " $(p, \Omega) \in \text{dom } E$ "
folgt via **7-2**: $\exists \Psi : ((p, \Omega), \Psi) \in E$.

5: Aus 2 " $\dots (\alpha, \Omega) \in x$ " und
aus 4 " $\dots ((p, \Omega), \Psi) \in E$ "
folgt via **243-2**: $(\alpha, \Psi) \in p_E.x$.

6: Aus 5 " $(\alpha, \Psi) \in p_E.x$ "
folgt via **7-5**: $\alpha \in \text{dom } (p_E.x)$.

Ergo **Thema1.2**: $\forall \alpha : (\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]] \Rightarrow (\alpha \in \text{dom } (p_E.x)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2 " $x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]] \subseteq \text{dom } (p_E.x)$ "

1.3: Aus **A1** gleich " $\text{dom } (p_E.x) \subseteq x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]]$ " und
aus **A2** gleich " $x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]] \subseteq \text{dom } (p_E.x)$ "
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\text{dom } (p_E.x) = x^{-1}[(\text{dom } E)[\{p\}]]$.

Beweis **243-4** b)

Thema1.1	$\alpha \in \text{ran}(p _E .x).$
2: Aus Thema1.1 " $\alpha \in \text{ran}(p _E .x)$ " folgt via 7-4 :	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in p _E .x.$
3: Aus 2 " $\dots (\Omega, \alpha) \in p _E .x$ " folgt via 243-2 :	$\exists \Psi : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((p, \Psi), \alpha) \in E).$
4: Aus 3 " $\dots ((p, \Psi), \alpha) \in E$ " folgt via 12-7 :	$(p, \Psi) \text{ Menge.}$
5: Aus 4 " $(p, \Psi) \text{ Menge}$ " folgt via PaarAxiom I :	$p \text{ Menge.}$
6.1: Aus 5 " $p \text{ Menge}$ " folgt via 1-3 :	$p \in \{p\}.$
6.2: Aus 3 " $\dots (\Omega, \Psi) \in x \dots$ " folgt via 7-5 :	$\Psi \in \text{ran } x.$
7: Aus 6.1 " $p \in \{p\}$ " und aus 6.2 " $\Psi \in \text{ran } x$ " folgt via 6-6 :	$(p, \Psi) \in \{p\} \times \text{ran } x.$
8: Aus 3 " $\dots ((p, \Psi), \alpha) \in E$ " und aus 7 " $(p, \Psi) \in \{p\} \times \text{ran } x$ " folgt via 8-8 :	$\alpha \in E[\{p\} \times \text{ran } x].$

Ergo **Thema1.1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \text{ran}(p _E .x)) \Rightarrow (\alpha \in E[\{p\} \times \text{ran } x]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1 " $\text{ran}(p _E .x) \subseteq E[\{p\} \times \text{ran } x]$ "
--

...

Beweis **243-4** b) ...

Thema1.2

$$\alpha \in E[\{p\} \times \text{ran } x]$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in E[\{p\} \times \text{ran } x]$ "
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\} \times \text{ran } x) \wedge ((\Omega, \alpha) \in E).$

3: Aus 2 " $\dots \Omega \in \{p\} \times \text{ran } x \dots$ "
folgt via **6-5**:
 $\exists \Psi, \Phi : (\Psi \in \{p\}) \wedge (\Phi \in \text{ran } x) \wedge (\Omega = (\Psi, \Phi)).$

4.1: Aus 3 " $\dots \Psi \in \{p\} \dots$ "
folgt via **1-6**: $\Psi = p.$

4.2: Aus 3 " $\dots \Phi \in \text{ran } x \dots$ "
folgt via **7-4**: $\exists \Gamma : (\Gamma, \Phi) \in x.$

5: Aus 4.1 " $\Psi = p$ "
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Phi) = (p, \Phi).$

6: Aus 3 " $\dots \Omega = (\Psi, \Phi)$ " und
aus 5 " $(\Psi, \Phi) = (p, \Phi)$ "
folgt: $\Omega = (p, \Phi).$

7: Aus 6 " $\Omega = (p, \Phi)$ "
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \alpha) = ((p, \Phi), \alpha).$

8: Aus 7 " $(\Omega, \alpha) = ((p, \Phi), \alpha)$ " und
aus 2 " $\dots (\Omega, \alpha) \in E$ "
folgt: $((p, \Phi), \alpha) \in E.$

9: Aus 4.2 " $\dots (\Gamma, \Phi) \in x$ " und
aus 8 " $((p, \Phi), \alpha) \in E$ "
folgt via **243-2**: $(\Gamma, \alpha) \in p_E.x.$

10: Aus 9 " $(\Gamma, \alpha) \in p_E.x$ "
folgt via **7-5**: $\alpha \in \text{ran } (p_E.x).$

Ergo **Thema1.2**: $\forall \alpha : (\alpha \in E[\{p\} \times \text{ran } x]) \Rightarrow (\alpha \in \text{ran } (p_E.x)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid "E[\{p\} \times \text{ran } x] \subseteq \text{ran } (p_E.x)"}$$

...

Beweis **243-4** b) ...

- 1.3: Aus A1 gleich " $\text{ran}(p.E.x) \subseteq E[\{p\} \times \text{ran } x]$ " und
 aus A2 gleich " $E[\{p\} \times \text{ran } x] \subseteq \text{ran}(p.E.x)$ "
 folgt via **GleichheitsAxiom**: $\text{ran}(p.E.x) = E[\{p\} \times \text{ran } x]$.

c)

Thema1.1

$$\alpha \in \text{dom}(x.E.p).$$

2: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in \text{dom}(x.E.p)$ "

folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x.E.p).$

3: Aus 2 " $\dots (\alpha, \Omega) \in x.E.p$ "

folgt via **243-2**: $\exists \Phi : ((\alpha, \Phi) \in x) \wedge ((\Phi, p), \Omega) \in E).$

4: Aus 3 " $((\Phi, p), \Omega) \in E$ "

folgt via **7-5**: $(\Phi, p) \in \text{dom } E.$

5: Aus 4 " $(\Phi, p) \in \text{dom } E$ "

folgt via **12-7**: $\Phi \in (\text{dom } E)^{-1}[\{p\}].$

6: Aus 3 " $\dots (\alpha, \Phi) \in x \dots$ " und

aus 5 " $\Phi \in (\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]$ "

folgt via **11-22**: $\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]].$

Ergo **Thema1.1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \text{dom}(x.E.p)) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1	" $\text{dom}(x.E.p) \subseteq x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]]$ "
----	---

...

Beweis **243-4** c) ...

Thema1.2

$$\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]]$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]]$ "
folgt via **11-21**:

$$\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x).$$

3: Aus 2 " $\dots \Omega \in (\text{dom } E)^{-1}[\{p\}] \dots$ "

folgt via **12-7**:

$$(\Omega, p) \in \text{dom } E.$$

4: Aus 3 " $(\Omega, p) \in \text{dom } E$ "

folgt via **7-2**:

$$\exists \Psi : ((\Omega, p), \Psi) \in E.$$

5: Aus 2 " $\dots (\alpha, \Omega) \in x$ " und

aus 4 " $\dots ((\Omega, p), \Psi) \in E$ "

folgt via **243-2**:

$$(\alpha, \Psi) \in x.E.p.$$

6: Aus 5 " $(\alpha, \Psi) \in x.E.p$ "

folgt via **7-5**:

$$\alpha \in \text{dom } (x.E.p).$$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]]) \Rightarrow (\alpha \in \text{dom } (x.E.p)).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2 " $x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]] \subseteq \text{dom } (x.E.p)$ "

1.3: Aus **A1** gleich " $\text{dom } (x.E.p) \subseteq x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]]$ " und

aus **A2** gleich " $x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]] \subseteq \text{dom } (x.E.p)$ "

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\text{dom } (x.E.p) = x^{-1}[(\text{dom } E)^{-1}[\{p\}]].$$

Beweis **243-4** d)

Thema1.1	$\alpha \in \text{ran}(x.E_{\neg p}).$
2: Aus Thema1.1 " $\alpha \in \text{ran}(x.E_{\neg p})$ " folgt via 7-4 :	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x.E_{\neg p}.$
3: Aus 2 " $\dots (\Omega, \alpha) \in x.E_{\neg p}$ " folgt via 243-2 :	$\exists \Psi : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (((\Psi, p), \alpha) \in E).$
4: Aus 3 " $\dots ((\Psi, p), \alpha) \in E$ " folgt via 12-7 :	(Ψ, p) Menge.
5: Aus 4 " (Ψ, p) Menge" folgt via PaarAxiom I :	p Menge.
6.1: Aus 5 " p Menge" folgt via 1-3 :	$p \in \{p\}.$
6.2: Aus 3 " $\dots (\Omega, \Psi) \in x \dots$ " folgt via 7-5 :	$\Psi \in \text{ran } x.$
7: Aus 6.2 " $\Psi \in \text{ran } x$ " und aus 6.1 " $p \in \{p\}$ " folgt via 6-6 :	$(\Psi, p) \in (\text{ran } x) \times \{p\}.$
8: Aus 3 " $\dots ((\Psi, p), \alpha) \in E$ " und aus 7 " $(\Psi, p) \in (\text{ran } x) \times \{p\}$ " folgt via 8-8 :	$\alpha \in E[\{p\} \times \text{ran } x].$

Ergo **Thema1.1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \text{ran}(x.E_{\neg p})) \Rightarrow (\alpha \in E[(\text{ran } x) \times \{p\}]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1 " $\text{ran}(x.E_{\neg p}) \subseteq E[(\text{ran } x) \times \{p\}]$ "
--

...

Beweis **243-4** d) ...

Thema1.2

$$\alpha \in E[(\text{ran } x) \times \{p\}]$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in E[(\text{ran } x) \times \{p\}]$ "

folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{ran } x) \times \{p\}) \wedge ((\Omega, \alpha) \in E).$

3: Aus 2 " $\dots \Omega \in (\text{ran } x) \times \{p\} \dots$ "

folgt via **6-5**:

$$\exists \Psi, \Phi : (\Psi \in \text{ran } x) \wedge (\Phi \in \{p\}) \wedge (\Omega = (\Psi, \Phi)).$$

4.1: Aus 3 " $\dots \Psi \in \text{ran } x \dots$ "

folgt via **7-4**:

$$\exists \Gamma : (\Gamma, \Psi) \in x.$$

4.2: Aus 3 " $\dots \Phi \in \{p\} \dots$ "

folgt via **1-6**:

$$\Phi = p.$$

5: Aus 4.2 " $\Phi = p$ "

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Psi, \Phi) = (\Psi, p).$$

6: Aus 3 " $\dots \Omega = (\Psi, \Phi)$ " und

aus 5 " $(\Psi, \Phi) = (\Psi, p)$ "

folgt:

$$\Omega = (\Psi, p).$$

7: Aus 6 " $\Omega = (\Psi, p)$ "

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \alpha) = ((\Psi, p), \alpha).$$

8: Aus 7 " $(\Omega, \alpha) = ((\Psi, p), \alpha)$ " und

aus 2 " $\dots (\Omega, \alpha) \in E$ "

folgt:

$$((\Psi, p), \alpha) \in E.$$

9: Aus 4.1 " $\dots (\Gamma, \Psi) \in x$ " und

aus 8 " $((\Psi, p), \alpha) \in E$ "

folgt via **243-2**:

$$(\Gamma, \alpha) \in x.E.p.$$

10: Aus 9 " $(\Gamma, \alpha) \in x.E.p$ "

folgt via **7-5**:

$$\alpha \in \text{ran } (x.E.p).$$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in E[(\text{ran } x) \times \{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in \text{ran } (x.E.p)).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid "E[(\text{ran } x) \times \{p\}] \subseteq \text{ran } (x.E.p)"}$$

...

Beweis 243-4 d) ...

1.3: Aus A1 gleich " $\text{ran}(x.E_{-p}) \subseteq E[(\text{ran } x) \times \{p\}]$ " und
aus A2 gleich " $E[(\text{ran } x) \times \{p\}] \subseteq \text{ran}(x.E_{-p})$ "
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\text{ran}(x.E_{-p}) = E[(\text{ran } x) \times \{p\}]$.

□

243-5. In vielleicht erwarteter Weise gilt $x.E.y = E \circ \text{paar}(x, y)$:

243-5(Satz)

- a) $x.E.y = E \circ \text{paar}(x, y)$.
- b) $\text{dom}(x.E.y) = (\text{paar}(x, y))^{-1}[\text{dom } E]$.
- c) $\text{ran}(x.E.y) = E[y \circ x^{-1}]$.

Beweis **243-5 a)**

Thema1.1

$$\alpha \in x.E.y.$$

- 2: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in x.E.y$ "
folgt via **243-2**: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y)$
 $\wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$
- 3: Aus 2 " $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ " und
aus 2 " $\dots (\Omega, \Gamma) \in y \dots$ "
folgt via **242-2**: $(\Omega, (\Phi, \Gamma)) \in \text{paar}(x, y).$
- 4: Aus 3 " $(\Omega, (\Phi, \Gamma)) \in \text{paar}(x, y)$ " und
aus 2 " $\dots ((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E$ "
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Psi) \in E \circ \text{paar}(x, y).$
- 5: Aus 2 " $\dots \alpha = (\Omega, \Psi)$ " und
aus 4 " $(\Omega, \Psi) \in E \circ \text{paar}(x, y)$ "
folgt: $\alpha \in E \circ \text{paar}(x, y).$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in x.E.y) \Rightarrow (\alpha \in E \circ \text{paar}(x, y)).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1	" $x.E.y \subseteq E \circ \text{paar}(x, y)$ "
----	---

...

Beweis **243-5** a) ...

Thema1.2

$$\alpha \in E \circ \text{paar}(x, y).$$

2: Aus **Thema1.2** “ $\alpha \in E \circ \text{paar}(x, y)$ ”
folgt via **14-3**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in \text{paar}(x, y)) \wedge ((\Phi, \Gamma) \in E) \\ \wedge (\alpha = (\Omega, \Gamma)).$$

3: Aus 2 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in \text{paar}(x, y) \dots$ ”

folgt via **242-2**: $\exists \Psi, \Upsilon : ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Upsilon) \in y) \\ \wedge (\Phi = (\Psi, \Upsilon)).$

4: Aus 3 “ $\dots \Phi = (\Psi, \Upsilon)$ ”

folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi, \Gamma) = ((\Psi, \Upsilon), \Gamma).$

5: Aus 4 “ $(\Phi, \Gamma) = ((\Psi, \Upsilon), \Gamma)$ ” und
aus 2 “ $\dots (\Phi, \Gamma) \in E \dots$ ”

folgt: $((\Psi, \Upsilon), \Gamma) \in E.$

6: Aus 3 “ $\dots (\Omega, \Psi) \in x \dots$ ”,

aus 3 “ $\dots (\Omega, \Upsilon) \in y \dots$ ” und

aus 5 “ $((\Psi, \Upsilon), \Gamma) \in E$ ”

folgt via **243-2**: $(\Omega, \Gamma) \in x.E.y.$

7: Aus 2 “ $\dots \alpha = (\Omega, \Gamma)$ ” und

aus 6 “ $(\Omega, \Gamma) \in x.E.y$ ”

folgt: $\alpha \in x.E.y.$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in E \circ \text{paar}(x, y)) \Rightarrow (\alpha \in x.E.y).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid “E \circ \text{paar}(x, y) \subseteq x.E.y”}$$

1.3: Aus **A1** gleich “ $x.E.y \subseteq E \circ \text{paar}(x, y)$ ” und

aus **A2** gleich “ $E \circ \text{paar}(x, y) \subseteq x.E.y$ ”

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$x.E.y = E \circ \text{paar}(x, y).$$

Beweis 243-5 b)

$$1: \quad \text{dom}(x.E.y) \stackrel{\text{a)}}{=} \text{dom}(E \circ \text{paar}(x, y)) \stackrel{14-6}{=} (\text{paar}(x, y))^{-1}[\text{dom } E].$$

$$2: \text{ Aus 1} \\ \text{folgt:} \quad \text{dom}(x.E.y) = (\text{paar}(x, y))^{-1}[\text{dom } E].$$

c)

$$1: \quad \text{ran}(x.E.y) \stackrel{\text{a)}}{=} \text{ran}(E \circ \text{paar}(x, y)) \stackrel{14-6}{=} E[\text{ran}(\text{paar}(x, y))] \stackrel{242-4}{=} E[y \circ x^{-1}].$$

$$2: \text{ Aus 1} \\ \text{folgt:} \quad \text{ran}(x.E.y) = E[y \circ x^{-1}].$$

□

243-6. Nun wird die Injektivität von $p _E .x, x _E _p, x _E .y$ untersucht:

243-6(Satz)

- a) Aus " x, E injektiv" folgt " $p _E .x$ injektiv".
- b) Aus " x, E injektiv" folgt " $x _E _p$ injektiv".
- c) Aus " x, E injektiv" folgt " $x _E .y$ injektiv".
- d) Aus " y, E injektiv" folgt " $x _E .y$ injektiv".

Beweis **243-6** a) VS gleich x, E injektiv.**Thema1**

$$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in p_E.x.$$

2.1: Aus **Thema1** " $(\alpha, \beta) \dots \in p_E.x$ "
 folgt via **243-2**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge ((p, \Omega), \beta) \in E$.

2.2: Aus **Thema1** " $\dots (\gamma, \beta) \in p_E.x$ "
 folgt via **243-2**: $\exists \Phi : ((\gamma, \Phi) \in x) \wedge ((p, \Phi), \beta) \in E$.

3: Aus VS gleich " $\dots E$ injektiv",
 aus 2.1 " $\dots ((p, \Omega), \beta) \in E$ " und
 aus 2.2 " $\dots ((p, \Phi), \beta) \in E$ "
 folgt via **8-1(Def)**: $(p, \Omega) = (p, \Phi)$.

4: Aus 2.1 " $\dots ((p, \Omega), \beta) \in E$ "
 folgt via **12-7**: (p, Ω) Menge.

5: Aus 3 " $(p, \Omega) = (p, \Phi)$ " und
 aus 4 " (p, Ω) Menge"
 folgt via **IGP**: $\Omega = \Phi$.

6: Aus 5 " $\Omega = \Phi$ "
 folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega) = (\alpha, \Phi)$.

7: Aus 6 " $(\alpha, \Omega) = (\alpha, \Phi)$ " und
 aus 2.1 " $\dots (\alpha, \Omega) \in x \dots$ "
 folgt: $(\alpha, \Phi) \in x$.

8: Aus VS gleich " $x \dots$ injektiv",
 aus 7 " $(\alpha, \Phi) \in x$ " und
 aus 2.2 " $\dots (\gamma, \Phi) \in x \dots$ "
 folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in p_E.x) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: $p_E.x$ injektiv.

Beweis **243-6** b) VS gleich x, E injektiv.**Thema1**

$$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x.E_p.$$

2.1: Aus **Thema1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in x.E_p$ ”
 folgt via **243-2**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, p), \beta) \in E).$

2.2: Aus **Thema1** “ $\dots (\gamma, \beta) \in x.E_p$ ”
 folgt via **243-2**: $\exists \Phi : ((\gamma, \Phi) \in x) \wedge (((\Phi, p), \beta) \in E).$

3: Aus VS gleich “ $\dots E$ injektiv”,
 aus 2.1 “ $\dots ((\Omega, p), \beta) \in E$ ” und
 aus 2.2 “ $\dots ((\Phi, p), \beta) \in E$ ”
 folgt via **8-1(Def)**: $(\Omega, p) = (\Phi, p).$

4: Aus 2.1 “ $\dots ((\Omega, p), \beta) \in E$ ”
 folgt via **12-7**: (Ω, p) Menge.

5: Aus 3 “ $(\Omega, p) = (\Phi, p)$ ” und
 aus 4 “ (Ω, p) Menge”
 folgt via **IGP**: $\Omega = \Phi.$

6: Aus 5 “ $\Omega = \Phi$ ”
 folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega) = (\alpha, \Phi).$

7: Aus 6 “ $(\alpha, \Omega) = (\alpha, \Phi)$ ” und
 aus 2.1 “ $\dots (\alpha, \Omega) \in x \dots$ ”
 folgt: $(\alpha, \Phi) \in x.$

8: Aus VS gleich “ $x \dots$ injektiv”,
 aus 7 “ $(\alpha, \Phi) \in x$ ” und
 aus 2.2 “ $\dots (\gamma, \Phi) \in x \dots$ ”
 folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \gamma.$

Ergo **Thema1**: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in x.E_p) \Rightarrow (\alpha = \gamma).$

Konsequenz via **8-1(Def)**: $x.E_p$ injektiv.

Beweis 243-6 c) VS gleich

x, E injektiv.

- 1: Aus VS gleich “ $x \dots$ injektiv”
folgt via **242-5**:

$\text{paar}(x, y)$ injektiv.

- 2: Aus VS gleich “ $\dots E$ injektiv” und
aus 1 “ $\text{paar}(x, y)$ injektiv”
folgt via **14-9**:

$E \circ \text{paar}(x, y)$ injektiv.

- 3: Via **243-5** gilt:

$x.E.y = E \circ \text{paar}(x, y)$.

- 4: Aus 3 “ $x.E.y = E \circ \text{paar}(x, y)$ ” und
aus 2 “ $E \circ \text{paar}(x, y)$ injektiv”
folgt:

$x.E.y$ injektiv.

d) VS gleich

y, E injektiv.

- 1: Aus VS gleich “ $y \dots$ injektiv”
folgt via **242-5**:

$\text{paar}(x, y)$ injektiv.

- 2: Aus VS gleich “ $\dots E$ injektiv” und
aus 1 “ $\text{paar}(x, y)$ injektiv”
folgt via **14-9**:

$E \circ \text{paar}(x, y)$ injektiv.

- 3: Via **243-5** gilt:

$x.E.y = E \circ \text{paar}(x, y)$.

- 4: Aus 3 “ $x.E.y = E \circ \text{paar}(x, y)$ ” und
aus 2 “ $E \circ \text{paar}(x, y)$ injektiv”
folgt:

$x.E.y$ injektiv.

□

243-7. Nun werden unter geeigneten Voraussetzungen $p _E . f$, $f _E _p$, $f _E . g$ auf “Funktions-Eigenschaften” untersucht:

243-7(Satz)

- a) Aus “ f, E Funktion” folgt “ $p _E . f$ Funktion” .
- b) Aus “ f, E Funktion” folgt “ $f _E _p$ Funktion” .
- c) Aus “ f, g, E Funktion” folgt “ $f _E . g$ Funktion” .

Beweis **243-7** a) VS gleich f, E Funktion.**Thema1.1**

$$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in p_E.f$$

2.1: Aus **Thema1.1** " $(\alpha, \beta) \dots \in p_E.f$ "folgt via **243-2**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in f) \wedge ((p, \Omega), \beta) \in E$.2.2: Aus **Thema1.1** " $\dots (\alpha, \gamma) \in p_E.f$ "folgt via **243-2**: $\exists \Phi : ((\alpha, \Phi) \in f) \wedge ((p, \Phi), \gamma) \in E$.3: Aus VS gleich " $f \dots$ Funktion",aus 2.1 " $\dots (\alpha, \Omega) \in f \dots$ " undaus 2.2 " $\dots (\alpha, \Phi) \in f \dots$ "folgt via **18-18(Def)**:

$$\Omega = \Phi.$$

4: Aus 3 " $\Omega = \Phi$ "folgt via **PaarAxiom I**:

$$(p, \Omega) = (p, \Phi).$$

5: Aus 4 " $(p, \Omega) = (p, \Phi)$ "folgt via **PaarAxiom I**:

$$((p, \Omega), \beta) = ((p, \Phi), \beta).$$

6: Aus 5 " $((p, \Omega), \beta) = ((p, \Phi), \beta)$ " undaus 2.1 " $\dots ((p, \Omega), \beta) \in E$ "

folgt:

$$((p, \Phi), \beta) \in E.$$

7: Aus VS gleich " $\dots E$ Funktion",aus 2.2 " $\dots ((p, \Phi), \gamma) \in E$ " undaus 6 " $((p, \Phi), \beta) \in E$ "folgt via **18-18(Def)**:

$$\gamma = \beta.$$

8: Aus 7

folgt:

$$\beta = \gamma.$$

Ergo **Thema1.1**:

A1 " $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in p_E.f) \Rightarrow (\beta = \gamma)$ "

1.2: Via **243-3** gilt: $p_E.f$ Relation.2: Aus 1.2 " $p_E.f$ Relation" undaus **A1** gleich " $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in p_E.f) \Rightarrow (\beta = \gamma)$ "folgt via **18-18(Def)**: $p_E.f$ Funktion.

Beweis **243-7** b) VS gleich f, E Funktion.**Thema1.1**

$$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in f.E_p$$

2.1: Aus **Thema1.1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in f.E_p$ ”folgt via **243-2**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in f) \wedge (((\Omega, p), \beta) \in E).$ 2.2: Aus **Thema1.1** “ $\dots (\alpha, \gamma) \in f.E_p$ ”folgt via **243-2**: $\exists \Phi : ((\alpha, \Phi) \in f) \wedge (((\Phi, p), \gamma) \in E).$ 3: Aus VS gleich “ $f \dots$ Funktion”,aus 2.1 “ $\dots (\alpha, \Omega) \in f \dots$ ” undaus 2.2 “ $\dots (\alpha, \Phi) \in f \dots$ ”folgt via **18-18(Def)**:

$$\Omega = \Phi.$$

4: Aus 3 “ $\Omega = \Phi$ ”folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, p) = (\Phi, p).$$

5: Aus 4 “ $(\Omega, p) = (\Phi, p)$ ”folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Omega, p), \beta) = ((\Phi, p), \beta).$$

6: Aus 5 “ $((\Omega, p), \beta) = ((\Phi, p), \beta)$ ” undaus 2.1 “ $\dots ((\Omega, p), \beta) \in E$ ”

folgt:

$$((\Phi, p), \beta) \in E.$$

7: Aus VS gleich “ $\dots E$ Funktion”,aus 2.2 “ $\dots ((\Phi, p), \gamma) \in E$ ” undaus 6 “ $((\Phi, p), \beta) \in E$ ”folgt via **18-18(Def)**:

$$\gamma = \beta.$$

8: Aus 7

folgt:

$$\beta = \gamma.$$

Ergo **Thema1.1**:

A1 “ $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in f.E_p) \Rightarrow (\beta = \gamma)$ ”
--

1.2: Via **243-3** gilt: $f.E_p$ Relation.2: Aus 1.2 “ $f.E_p$ Relation” undaus A1 gleich “ $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in f.E_p) \Rightarrow (\beta = \gamma)$ ”folgt via **18-18(Def)**: $f.E_p$ Funktion.

Beweis 243-7 c) VS gleich

f, g, E Funktion.

1: Aus VS gleich " $f, g \dots$ Funktion"
folgt via **242-5**:

$\text{paar}(f, g)$ Funktion.

2: Aus VS gleich " $\dots E$ Funktion" und
aus 1 " $\text{paar}(f, g)$ Funktion"
folgt via **18-46**:

$E \circ \text{paar}(f, g)$ Funktion.

3: Via **243-5** gilt:

$f.E.g = E \circ \text{paar}(f, g)$.

4: Aus 3 " $f.E.g = E \circ \text{paar}(f, g)$ " und
aus 2 " $E \circ \text{paar}(f, g)$ Funktion"
folgt:

$f.E.g$ Funktion.

□

Subtraktion. S. Division. D.

Ersterstellung: 29/04/13

Letzte Änderung: 30/04/13

244-1. Mit den beiden nun vorgelegten, parametrfreien Klassen-Termen, werden Subtraktion und Division in die Essays eingebracht:

244-1(Definition)

1) S

$$= 244.0() = \{((\lambda, \mu), \lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathcal{U}\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Omega = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\Psi = \Phi - \Gamma) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

2) “ $\mathfrak{C}$ Subtraktion” genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = S.$$

3) D

$$= 244.1() = \{((\lambda, \mu), \lambda : \mu) : \lambda, \mu \in \mathcal{U}\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Omega = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\Psi = \Phi : \Gamma) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

4) “ $\mathfrak{C}$ Division” genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = D.$$

RECH-Notation.

244-2. S ist die Subtraktion. D ist die Division:

244-2(Satz)

- a) S Subtraktion.
- b) Aus “ $\mathfrak{C}$ Subtraktion” und “ $\mathfrak{D}$ Subtraktion” folgt “ $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$ ”.
- c) D Division.
- d) Aus “ $\mathfrak{C}$ Division” und “ $\mathfrak{D}$ Division” folgt “ $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$ ”.

Beweis 244-2 a)

Aus “ $S = S$ ”

folgt via **244-1(Def)**:

S Subtraktion.

b) VS gleich

$(\mathfrak{C} \text{ Subtraktion}) \wedge (\mathfrak{D} \text{ Subtraktion}).$

1.1: Aus VS gleich “ $\mathfrak{C}$ Subtraktion... ”

folgt via **244-1(Def)**:

$\mathfrak{C} = S.$

1.2: Aus VS gleich “... $\mathfrak{D}$ Subtraktion”

folgt via **244-1(Def)**:

$\mathfrak{D} = S.$

2: Aus 1.1 und

aus 1.2

folgt:

$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}.$

c)

Aus “ $D = D$ ”

folgt via **244-1(Def)**:

D Division.

d) VS gleich

$(\mathfrak{C} \text{ Division}) \wedge (\mathfrak{D} \text{ Division}).$

1.1: Aus VS gleich “ $\mathfrak{C}$ Division... ”

folgt via **244-1(Def)**:

$\mathfrak{C} = D.$

1.2: Aus VS gleich “... $\mathfrak{D}$ Division”

folgt via **244-1(Def)**:

$\mathfrak{D} = D.$

2: Aus 1.1 und

aus 1.2

folgt:

$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}.$

□

244-3. Bei früheren Untersuchungen taucht vorliegendes, im Folgenden benötigtes Resultat über $x - y$ nicht auf. Die Beweis-Reihenfolge ist i) - ii) - iv) - vi) - iii) - v) - vii) - i):

244-3(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi), vii) sind äquivalent:

- i) x, y Zahl.
- ii) $x - y$ Zahl
- iii) $y - x$ Zahl.
- iv) $x - y$ Menge.
- v) $y - x$ Menge.
- vi) $x - y \neq \mathcal{U}$.
- vii) $y - x \neq \mathcal{U}$.

RECH-Notation.

Beweis **244-3** $i) \Rightarrow ii)$ VS gleich

x, y Zahl.

1: Aus VS gleich " $\dots y$ Zahl"
folgt via **96-11**:

$-y$ Zahl.

2: Aus VS gleich " $x \dots$ Zahl" und
aus 1 " $-y$ Zahl"
folgt via **96-13**:

$x + (-y)$ Zahl.

3: Aus " $x - y = x + (-y)$ " und
aus 2 " $x + (-y)$ Zahl"
folgt:

$x - y$ Zahl.

$ii) \Rightarrow iv)$ VS gleich

$x - y$ Zahl.

Aus VS gleich " $x - y$ Zahl"
folgt via **95-6**:

$x - y$ Menge.

Beweis **244-3** $\boxed{\text{iv}) \Rightarrow \text{vi})}$ VS gleich

$x - y$ Menge.

Aus VS gleich " $x - y$ Menge"
folgt via **0-17**:

$x - y \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\text{vi}) \Rightarrow \text{iii})}$ VS gleich

$x - y \neq \mathcal{U}$.

1: Via **FS**—+ gilt:

$x - y = -(y - x)$.

2: Aus 1 " $x - y = -(y - x)$ " und
aus VS gleich " $x - y \neq \mathcal{U}$ "
folgt:

$-(y - x) \neq \mathcal{U}$.

3: Aus 2 " $-(y - x) \neq \mathcal{U}$ "
folgt via **96-11**:

$y - x$ Zahl.

$\boxed{\text{iii}) \Rightarrow \text{v})}$ VS gleich

$y - x$ Zahl.

Aus VS gleich " $y - x$ Zahl"
folgt via **95-6**:

$y - x$ Menge.

$\boxed{\text{v}) \Rightarrow \text{vii})}$ VS gleich

$y - x$ Menge.

Aus VS gleich " $y - x$ Menge"
folgt via **0-17**:

$y - x \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\text{vii}) \Rightarrow \text{i})}$ VS gleich

$y - x \neq \mathcal{U}$.

1: Aus " $y + (-x) = y - x$ " und
aus VS gleich " $y - x \neq \mathcal{U}$ "
folgt:

$y + (-x) \neq \mathcal{U}$.

2: Aus 1 " $y + (-x) \neq \mathcal{U}$ "
folgt via **96-13**:

$y, -x$ Zahl.

3: Aus 2 "... - x Zahl"
folgt via **96-11**:

x Zahl.

4: Aus 3 " x Zahl" und
aus 2 " $y \dots$ Zahl"
folgt:

x, y Zahl.

□

244-4. Vorliegendes ist die “Negations-Version” von **244-3**.

Die Beweis-Reihenfolge ist i) - ii) - iii) - v) - vii) - vi) - iv) - i):

244-4(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi), vii) sind äquivalent:

i) “ $x \notin \mathbb{A}$ ” oder “ $y \notin \mathbb{A}$ ”.

ii) $x - y \notin \mathbb{A}$.

iii) $y - x \notin \mathbb{A}$.

iv) $x - y$ Unmenge.

v) $y - x$ Unmenge.

vi) $x - y = \mathcal{U}$.

vii) $y - x = \mathcal{U}$.

RECH-Notation.

Beweis **244-4** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \text{ VS gleich}$

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$$

1: Nach VS gilt:

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$$x \notin \mathbb{A}.$$

2: Aus **1.1.Fall** " $x \notin \mathbb{A}$ "
folgt via **96-14**:

$$x + (-y) \notin \mathbb{A}.$$

3: Aus " $x - y = x + (-y)$ " und
aus 2 " $x + (-y) \notin \mathbb{A}$ "
folgt:

$$x - y \notin \mathbb{A}.$$

1.2.Fall

$$y \notin \mathbb{A}.$$

2: Aus **1.2.Fall** " $y \notin \mathbb{A}$ "
folgt via **96-12**:

$$-y \notin \mathbb{A}.$$

3: Aus 2 " $-y \notin \mathbb{A}$ "
folgt via **96-14**:

$$x + (-y) \notin \mathbb{A}.$$

4: Aus " $x - y = x + (-y)$ " und
aus 3 " $x + (-y) \notin \mathbb{A}$ "
folgt:

$$x - y \notin \mathbb{A}.$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$x - y \notin \mathbb{A}.$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \text{ VS gleich}$

$$x - y \notin \mathbb{A}.$$

1: Aus VS gleich " $x - y \notin \mathbb{A}$ "
folgt via **96-12**:

$$-(x - y) \notin \mathbb{A}.$$

2: Via **FS** $-+$ gilt:

$$y - x = -(x - y).$$

3: Aus 2 " $y - x = -(x - y)$ " und
aus 1 " $-(x - y) \notin \mathbb{A}$ "
folgt:

$$y - x \notin \mathbb{A}.$$

Beweis **244-4** iii) $\Rightarrow$ v) VS gleich

$$y - x \notin \mathbb{A}.$$

1: Aus “ $y + (-x) = y - x$ ” und
aus VS gleich “ $y - x \notin \mathbb{A}$ ”
folgt:

$$y + (-x) \notin \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 “ $y + (-x) \notin \mathbb{A}$ ”
folgt via **96-14**:

$$y + (-x) \text{ Unmenge.}$$

3: Aus “ $y - x = y + (-x)$ ” und
aus 2 “ $y + (-x)$ Unmenge”
folgt:

$$y - x \text{ Unmenge.}$$

v) $\Rightarrow$ vii) VS gleich

$$y - x \text{ Unmenge.}$$

1: Aus “ $y + (-x) = y - x$ ” und
aus VS gleich “ $y - x$ Unmenge”
folgt:

$$y + (-x) \text{ Unmenge.}$$

2: Aus 1 “ $y + (-x)$ Unmenge”
folgt via **96-14**:

$$y + (-x) = \mathcal{U}.$$

3: Aus “ $y - x = y + (-x)$ ” und
aus 2 “ $y + (-x) = \mathcal{U}$ ”
folgt:

$$y - x = \mathcal{U}.$$

vii) $\Rightarrow$ vi) VS gleich

$$y - x = \mathcal{U}.$$

1:

$$x - y \stackrel{\mathbf{FS}^+}{=} -(y - x) \stackrel{\text{VS}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}.$$

2: Aus 1
folgt:

$$x - y = \mathcal{U}.$$

vi) $\Rightarrow$ iv) VS gleich

$$x - y = \mathcal{U}.$$

Aus VS gleich “ $x - y = \mathcal{U}$ ” und
aus **0U**Axiom “ $\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt:

$$x - y \text{ Unmenge.}$$

Beweis **244-4** $\boxed{\text{iv}) \Rightarrow \text{i})}$ VS gleich

$x - y$ Unmenge.

1: Es gilt:

$(x, y \text{ Zahl}) \vee (\neg(x, y \text{ Zahl}))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall

$x, y \text{ Zahl.}$

2: Aus 1.1.Fall " $x, y \text{ Zahl}$ "
folgt via **244-3**:

$x - y \text{ Menge.}$

3: Es gilt 2 " $x - y \text{ Menge}$ ".
Es gilt VS gleich " $x - y \text{ Unmenge}$ ".
Ex falso quodlibet folgt:

$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

1.2.Fall

$\neg(x, y \text{ Zahl}).$

2: Aus 1.2.Fall
folgt:

$\neg((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})).$

3.1: Aus 2
folgt:

$(\neg(x \text{ Zahl})) \vee (\neg(y \text{ Zahl})).$

3.2: Via **95-4(Def)** gilt:

$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A}).$

3.3: Via **95-4(Def)** gilt:

$(y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{A}).$

4: Aus 3.1,
aus 3.2 und
aus 3.3
folgt:

$(\neg(x \in \mathbb{A})) \vee (\neg(y \in \mathbb{A})).$

5: Aus 4
folgt:

$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:

$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$

□

244-5. Nun wird das “Element-Sein” in S, D thematisiert:

244-5(Satz)

- a) Aus “ $w \in S$ ” folgt “ $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma))$ ”.
- b) Aus “ $(p, q) \in S$ ”
folgt “ $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (p = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi - \Gamma)$ ”.
- c) Aus “ $((r, s), q) \in S$ ” folgt “ $r, s, q \text{ Zahl}$ ” und “ $q = r - s$ ”.
- d) Aus “ $r, s \text{ Zahl}$ ” folgt “ $((r, s), r - s) \in S$ ”.
- e) Aus “ $w \in D$ ” folgt “ $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma))$ ”.
- f) Aus “ $(p, q) \in D$ ”
folgt “ $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (p = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi : \Gamma)$ ”.
- g) Aus “ $((r, s), q) \in D$ ” folgt “ $r, s, q \text{ Zahl}$ ” und “ $q = r : s$ ”.
- h) Aus “ $r, s \text{ Zahl}$ ” folgt “ $((r, s), r : s) \in D$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 244-5 a) VS gleich

$w \in S$.

1.1: Aus VS gleich " $w \in S$ "

folgt via **ElementAxiom**:

w Menge.

1.2: Aus VS gleich " $w \in S$ "

folgt via **244-1(Def)**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Omega = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\Psi = \Phi - \Gamma) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

2: Aus 1.2 " $\dots \Omega = (\Phi, \Gamma) \dots$ " und

aus 1.2 " $\dots \Psi = \Phi - \Gamma \dots$ "

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma).$$

3: Aus 1.2 " $\dots w = (\Omega, \Psi)$ " und

aus 2 " $(\Omega, \Psi) = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma)$ "

folgt:

$$w = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma).$$

4: Aus 3 " $w = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma)$ " und

aus 1.1 " w Menge"

folgt via **12-7**:

$\Phi - \Gamma$ Menge.

5: Aus 4 " $\Phi - \Gamma$ Menge"

folgt via **244-3**:

Φ, Γ Zahl.

6: Aus 1.2 " $\exists \dots \Phi, \dots \Gamma \dots$ ",

aus 5 " Φ, Γ Zahl" und

aus 3 " $w = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma)$ "

folgt:

$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma)).$$

b) VS gleich

$(p, q) \in S$.

1.1: Aus VS gleich " $(p, q) \in S$ "

folgt via **ElementAxiom**:

(p, q) Menge.

1.2: Aus VS gleich " $(p, q) \in S$ "

folgt via des bereits bewiesenen a):

$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge ((p, q) = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma)).$$

2: Aus 1.2 " $\dots (p, q) = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma) \dots$ " und

aus 1.1 " (p, q) Menge"

folgt via **IGP**:

$$(p = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi - \Gamma).$$

3: Aus 1.2 " $\exists \Phi, \Gamma : \Phi, \Gamma \text{ Zahl} \dots$ " und

aus 2 " $(p = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi - \Gamma)$ "

folgt:

$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (p = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi - \Gamma).$$

Beweis 244-5 c) VS gleich

$$((r, s), q) \in S.$$

1.1: Aus VS gleich “ $((r, s), q) \in S$ ”
folgt via **12-7**:

$$(r, s), q \text{ Menge.}$$

1.2: Aus VS gleich “ $((r, s), q) \in S$ ”
folgt via des bereits bewiesenen b):

$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge ((r, s) = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi - \Gamma).$$

2: Aus 1.2 “ $\dots (r, s) = (\Phi, \Gamma) \dots$ ” und
aus 1.1 “ $(r, s) \dots$ Menge”
folgt via **IGP**:

$$(r = \Phi) \wedge (s = \Gamma).$$

3.1: Aus 2 “ $r = \Phi \dots$ ” und
aus 1.2 “ $\dots q = \Phi - \Gamma$ ”
folgt:

$$q = r - \Gamma.$$

3.2: Aus 2 “ $r = \Phi \dots$ ” und
aus 1.2 “ $\dots \Phi \dots \text{Zahl} \dots$ ”
folgt:

$$r \text{ Zahl}$$

3.3: Aus 2 “ $\dots s = \Gamma$ ” und
aus 1.2 “ $\dots \Gamma \text{ Zahl} \dots$ ”
folgt:

$$s \text{ Zahl}$$

4.1: Aus 2 “ $\dots s = \Gamma$ ” und
aus 3.1 “ $q = r - \Gamma$ ”
folgt:

$$q = r - s$$

4.2: Aus 3.2 “ $r \text{ Zahl}$ ” und
aus 3.3 “ $s \text{ Zahl}$ ”
folgt via **244-3**:

$$r - s \text{ Zahl.}$$

5: Aus 4.1 “ $q = r - s$ ” und
aus 4.2 “ $r - s \text{ Zahl}$ ”
folgt:

$$q \text{ Zahl}$$

Beweis **244-5** d) VS gleich

r, s Zahl.

1.1: Es gilt:

$\exists \Phi : \Phi = r.$

1.2: Es gilt:

$\exists \Gamma : \Gamma = s.$

1.3: Es gilt:

$\exists \Omega : \Omega = (\Phi, \Gamma).$

1.4: Es gilt:

$\exists \Psi : \Psi = \Phi - \Gamma.$

1.5: Aus VS gleich " $r \dots$ Zahl" und
aus VS gleich " $\dots s$ Zahl"
folgt via **244-3**:

$r - s$ Zahl.

1.6: Aus VS gleich " $r \dots$ Zahl"
folgt via **95-6**:

r Menge.

1.7: Aus VS gleich " $\dots s$ Zahl"
folgt via **95-6**:

s Menge.

2.1: Aus 1.1 " $\dots \Phi = r$ " und
aus 1.2 " $\dots \Gamma = s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$(\Phi, \Gamma) = (r, s).$

2.2: Aus 1.1 " $\dots \Phi = r$ "
folgt:

$r - s = \Phi - s.$

2.3: Aus 1.5 " $r - s$ Zahl"
folgt via **95-6**:

$r - s$ Menge.

2.4: Aus 1.6 " r Menge" und
aus 1.7 " s Menge"
folgt via **PaarAxiom I**:

(r, s) Menge.

2.5: Aus 1.3 " $\dots \Omega = (\Phi, \Gamma)$ " und
aus 1.4 " $\dots \Psi = \Phi - \Gamma$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$(\Omega, \Psi) = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma).$

3.1: Aus 1.2 " $\dots \Gamma = s$ "
folgt:

$\Phi - s = \Phi - \Gamma.$

3.2: Aus 2.4 " (r, s) Menge" und
aus 2.3 " $r - s$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**:

$((r, s), r - s)$ Menge.

...

Beweis 244-5 d) VS gleich

r, s Zahl.

...

4: Aus 2.2 " $r - s = \Phi - s$ " und
aus 3.1 " $\Phi - s = \Phi - \Gamma$ "
folgt:

$$r - s = \Phi - \Gamma.$$

5: Aus 4
folgt:

$$\Phi - \Gamma = r - s.$$

6: Aus 2.1 " $(\Phi, \Gamma) = (r, s)$ " und
aus 5 " $\Phi - \Gamma = r - s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma) = ((r, s), r - s).$$

7: Aus 2.5 " $(\Omega, \Psi) = ((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma)$ " und
aus 6 " $((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma) = ((r, s), r - s)$ "
folgt:

$$(\Omega, \Psi) = ((r, s), r - s).$$

8: Aus 7
folgt:

$$((r, s), r - s) = (\Omega, \Psi).$$

9: Aus 1.3 " $\exists \Omega \dots$ ",
aus 1.1 " $\exists \Phi \dots$ ",
aus 1.2 " $\exists \Gamma \dots$ ",
aus 1.4 " $\exists \Psi \dots$ ",
aus 1.3 " $\dots \Omega = (\Phi, \Gamma)$ ",
aus 1.4 " $\dots \Psi = \Phi - \Gamma$ " und
aus 8 " $((r, s), r - s) = (\Omega, \Psi)$ "
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : (\Omega = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\Psi = \Phi - \Gamma) \wedge (((r, s), r - s) = (\Omega, \Psi)).$$

10: Aus 9 " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : (\Omega = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\Psi = \Phi - \Gamma)$

$$\wedge (((r, s), r - s) = (\Omega, \Psi))$$
 und

aus 3.2 " $((r, s), r - s)$ Menge"

folgt via **244-1(Def)**:

$$((r, s), r - s) \in S.$$

Beweis 244-5 e) VS gleich

$w \in D$.

1.1: Aus VS gleich " $w \in D$ "
folgt via **ElementAxiom**:

w Menge.

1.2: Aus VS gleich " $w \in D$ "
folgt via **244-1(Def)**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Omega = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\Psi = \Phi : \Gamma) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

2: Aus 1.2 " $\dots \Omega = (\Phi, \Gamma) \dots$ " und
aus 1.2 " $\dots \Psi = \Phi : \Gamma \dots$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma).$$

3: Aus 1.2 " $\dots w = (\Omega, \Psi)$ " und
aus 2 " $(\Omega, \Psi) = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma)$ "
folgt:

$$w = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma).$$

4: Aus 3 " $w = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma)$ " und
aus 1.1 " w Menge"
folgt via **12-7**:

$\Phi : \Gamma$ Menge.

5: Aus 4 " $\Phi : \Gamma$ Menge"
folgt via **96-17**:

Φ, Γ Zahl.

6: Aus 1.2 " $\exists \dots \Phi, \dots \Gamma \dots$ ",
aus 5 " Φ, Γ Zahl" und
aus 3 " $w = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma)$ "
folgt:

$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma)).$$

f) VS gleich

$(p, q) \in D$.

1.1: Aus VS gleich " $(p, q) \in D$ "
folgt via **ElementAxiom**:

(p, q) Menge.

1.2: Aus VS gleich " $(p, q) \in D$ "
folgt via des bereits bewiesenen e):

$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge ((p, q) = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma)).$$

2: Aus 1.2 " $\dots (p, q) = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma)$ " und
aus 1.1 " (p, q) Menge"
folgt via **IGP**:

$$(p = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi : \Gamma).$$

3: Aus 1.2 " $\exists \Phi, \Gamma : \Phi, \Gamma \text{ Zahl} \dots$ " und
aus 2 " $(p = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi : \Gamma)$ "
folgt:

$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (p = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi : \Gamma).$$

Beweis 244-5 g) VS gleich

$$((r, s), q) \in D.$$

1.1: Aus VS gleich “ $((r, s), q) \in D$ ”
folgt via **12-7**:

$$(r, s), q \text{ Menge.}$$

1.2: Aus VS gleich “ $((r, s), q) \in D$ ”
folgt via des bereits bewiesenen f):

$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge ((r, s) = (\Phi, \Gamma)) \wedge (q = \Phi : \Gamma).$$

2: Aus 1.2 “ $\dots (r, s) = (\Phi, \Gamma) \dots$ ” und
aus 1.1 “ $(r, s) \dots$ Menge”
folgt via **IGP**:

$$(r = \Phi) \wedge (s = \Gamma).$$

3.1: Aus 2 “ $r = \Phi \dots$ ” und
aus 1.2 “ $\dots q = \Phi : \Gamma$ ”
folgt:

$$q = r : \Gamma.$$

3.2: Aus 2 “ $r = \Phi \dots$ ” und
aus 1.2 “ $\dots \Phi \dots \text{Zahl} \dots$ ”
folgt:

$$r \text{ Zahl}$$

3.3: Aus 2 “ $\dots s = \Gamma$ ” und
aus 1.2 “ $\dots \Gamma \text{ Zahl} \dots$ ”
folgt:

$$s \text{ Zahl}$$

4.1: Aus 2 “ $\dots s = \Gamma$ ” und
aus 3.1 “ $q = r : \Gamma$ ”
folgt:

$$q = r : s$$

4.2: Aus 3.2 “ $r \text{ Zahl}$ ” und
aus 3.3 “ $s \text{ Zahl}$ ”
folgt via **96-17**:

$$r : s \text{ Zahl.}$$

5: Aus 4.1 “ $q = r : s$ ” und
aus 4.2 “ $r : s \text{ Zahl}$ ”
folgt:

$$q \text{ Zahl}$$

Beweis **244-5** h) VS gleich

r, s Zahl.

1.1: Es gilt:

$\exists \Phi : \Phi = r.$

1.2: Es gilt:

$\exists \Gamma : \Gamma = s.$

1.3: Es gilt:

$\exists \Omega : \Omega = (\Phi, \Gamma).$

1.4: Es gilt:

$\exists \Psi : \Psi = \Phi : \Gamma.$

1.5: Aus VS gleich " $r \dots$ Zahl" und
aus VS gleich " $\dots s$ Zahl"
folgt via **96-17**:

$r : s$ Zahl.

1.6: Aus VS gleich " $r \dots$ Zahl"
folgt via **95-6**:

r Menge.

1.7: Aus VS gleich " $\dots s$ Zahl"
folgt via **95-6**:

s Menge.

2.1: Aus 1.1 " $\dots \Phi = r$ " und
aus 1.2 " $\dots \Gamma = s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$(\Phi, \Gamma) = (r, s).$

2.2: Aus 1.1 " $\dots \Phi = r$ "
folgt:

$r : s = \Phi : s.$

2.3: Aus 1.5 " $r : s$ Zahl"
folgt via **95-6**:

$r : s$ Menge.

2.4: Aus 1.6 " r Menge" und
aus 1.7 " s Menge"
folgt via **PaarAxiom I**:

(r, s) Menge.

2.5: Aus 1.3 " $\dots \Omega = (\Phi, \Gamma)$ " und
aus 1.4 " $\dots \Psi = \Phi : \Gamma$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$(\Omega, \Psi) = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma).$

3.1: Aus 1.2 " $\dots \Gamma = s$ "
folgt:

$\Phi : s = \Phi : \Gamma.$

3.2: Aus 2.4 " (r, s) Menge" und
aus 2.3 " $r : s$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**:

$((r, s), r : s)$ Menge.

...

Beweis 244-5 h) VS gleich

r, s Zahl.

...

4: Aus 2.2 " $r : s = \Phi : s$ " und
aus 3.1 " $\Phi : s = \Phi : \Gamma$ "
folgt:

$$r : s = \Phi : \Gamma.$$

5: Aus 4
folgt:

$$\Phi : \Gamma = r : s.$$

6: Aus 2.1 " $(\Phi, \Gamma) = (r, s)$ " und
aus 5 " $\Phi : \Gamma = r : s$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma) = ((r, s), r : s).$$

7: Aus 2.5 " $(\Omega, \Psi) = ((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma)$ " und
aus 6 " $((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma) = ((r, s), r : s)$ "
folgt:

$$(\Omega, \Psi) = ((r, s), r : s).$$

8: Aus 7
folgt:

$$((r, s), r : s) = (\Omega, \Psi).$$

9: Aus 1.3 " $\exists \Omega \dots$ ",
aus 1.1 " $\exists \Phi \dots$ ",
aus 1.2 " $\exists \Gamma \dots$ ",
aus 1.4 " $\exists \Psi \dots$ ",
aus 1.3 " $\dots \Omega = (\Phi, \Gamma)$ ",
aus 1.4 " $\dots \Psi = \Phi : \Gamma$ " und
aus 8 " $((r, s), r : s) = (\Omega, \Psi)$ "
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : (\Omega = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\Psi = \Phi : \Gamma) \wedge ((r, s), r : s) = (\Omega, \Psi).$$

10: Aus 9 " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : (\Omega = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\Psi = \Phi : \Gamma)$

$$\wedge ((r, s), r : s) = (\Omega, \Psi)" \text{ und}$$

aus 3.2 " $((r, s), r : s)$ Menge"

folgt via **244-1(Def)**:

$$((r, s), r : s) \in D.$$

□

244-6. Unter anderem gilt $x - 0 = x$ genau dann, wenn x Zahl oder $x = \mathcal{U}$:

244-6(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) sind äquivalent:

i) $x - 0 = x$.

ii) $-0 + x = x$.

iii) " x Zahl" oder " $x = \mathcal{U}$ ".

RECH-Notation.

Beweis **244-6** $i) \Rightarrow ii)$ VS gleich

$$x - 0 = x.$$

1:

$$-0 + x \stackrel{\mathbf{FS}^+}{=} x - 0 \stackrel{\mathbf{VS}}{=} x.$$

2: Aus 1
folgt:

$$-0 + x = x.$$

$ii) \Rightarrow iii)$ VS gleich

$$-0 + x = x.$$

1:

$$0 + x \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} -0 + x \stackrel{\mathbf{VS}}{=} x.$$

2: Aus 1 " $0 + x = \dots = x$ "
folgt via **FSA0**:

$$(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

$iii) \Rightarrow i)$ VS gleich

$$(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

1: Aus **VS** gleich " $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$ "
folgt via **FSA0**:

$$x + 0 = x.$$

2:

$$x - 0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} x + 0 \stackrel{\mathbf{1}}{=} x.$$

3: Aus 2
folgt:

$$x - 0 = x.$$

□

244-7. Klarer Weise ist die Subtraktion eine Algebra in $\mathbb{A}$. Falls p, q Zahlen sind, so gilt $S(p, q) = p - q$:

244-7(Satz)

- a) $\text{dom } S = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.
- b) $\text{ran } S = \mathbb{A}$.
- c) S *Relation*.
- d) S *Funktion*.
- e) $S : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$.
- f) S *Algebra in* $\mathbb{A}$.
- g) Aus " p, q Zahl" folgt " $S(p, q) = p - q$ ".
- h) S *Menge*.

ALG-Notation.

Beweis 244-7RECH-Notation.

a)

Thema1.1 $\alpha \in \text{dom } S.$ 2: Aus Thema1.1 " $\alpha \in \text{dom } S$ "folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in S.$ 3: Aus 2 " $\dots (\alpha, \Omega) \in S$ "folgt via **244-5**: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Gamma)).$ 4.1: Aus 3 " $\dots \Phi \dots \text{Zahl} \dots$ "folgt via **95-4(Def)**: $\Phi \in \mathbb{A}.$ 4.2: Aus 3 " $\dots \Gamma \text{ Zahl} \dots$ "folgt via **95-4(Def)**: $\Gamma \in \mathbb{A}.$ 5: Aus 4.1 " $\Phi \in \mathbb{A}$ " undaus 4.2 " $\Gamma \in \mathbb{A}$ "folgt via **6-6**: $(\Phi, \Gamma) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}.$ 6: Aus 3 " $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma)$ " undaus 5 " $(\Phi, \Gamma) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ "

folgt:

 $\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}.$

Ergo Thema1.1:

 $\forall \alpha : (\alpha \in \text{dom } S) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}).$ Konsequenz via **0-2(Def)**:**A1** | " $\text{dom } S \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ "

...

Beweis **244-7** a) ...

Thema1.2

$$\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}.$$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ "

folgt via **6-5**: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Gamma)).$

3.1: Aus 2 " $\dots \Phi \dots \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**: $\Phi \text{ Zahl.}$

3.2: Aus 2 " $\dots \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**: $\Gamma \text{ Zahl.}$

4: Aus 3.1 " $\Phi \text{ Zahl}$ " und
aus 3.2 " $\Gamma \text{ Zahl}$ "

folgt via **244-5**: $((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma) \in S.$

5: Aus 4 " $((\Phi, \Gamma), \Phi - \Gamma) \in S$ "

folgt via **7-5**: $(\Phi, \Gamma) \in \text{dom } S.$

6: Aus 2 " $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma)$ " und
aus 5 " $(\Phi, \Gamma) \in \text{dom } S$ "

folgt: $\alpha \in \text{dom } S.$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \in \text{dom } S).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2 " $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \subseteq \text{dom } S$ "
--

1.3: Aus **A1** gleich " $\text{dom } S \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ " und
aus **A2** gleich " $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \subseteq \text{dom } S$ "

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\text{dom } S = \mathbb{A} \times \mathbb{A}.$$

Beweis **244-7** b)

Thema1.1

$\alpha \in \text{ran } S.$

2: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in \text{ran } S$ "
folgt via **7-4**:

$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in S.$

3: Aus 2 " $\dots (\Omega, \alpha) \in S$ "
folgt via **244-5**:

$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (\alpha = \Phi - \Gamma).$

4: Aus 3 " $\dots \Phi, \Gamma \text{ Zahl} \dots$ "
folgt via **244-3**:

$\Phi - \Gamma \text{ Zahl}.$

5: Aus 3 " $\dots \alpha = \Phi - \Gamma$ " und
aus 4 " $\Phi - \Gamma \text{ Zahl}$ "
folgt:

$\alpha \text{ Zahl}.$

6: Aus 5 " $\alpha \text{ Zahl}$ "
folgt via **95-4(Def)**:

$\alpha \in \mathbb{A}.$

Ergo **Thema1.1**:

$\forall \alpha : (\alpha \in \text{ran } S) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1 | " $\text{ran } S \subseteq \mathbb{A}$ "

...

Beweis **244-7** b) ...

Thema1.2	$\alpha \in \mathbb{A}.$
2: Aus Thema1.2 " $\alpha \in \mathbb{A}$ " folgt via 95-4(Def) :	α Zahl.
3: Aus 2 " α Zahl" und aus scola " 0 Zahl" folgt via 244-5 :	$((\alpha, 0), \alpha - 0) \in S.$
4.1: Aus 2 " α Zahl" folgt via 244-6 :	$\alpha - 0 = \alpha.$
4.2: Aus 3 " $((\alpha, 0), \alpha - 0) \in S$ " folgt via 7-5 :	$\alpha - 0 \in \text{ran } S.$
5: Aus 4.1 " $\alpha - 0 = \alpha$ " und aus 4.2 " $\alpha - 0 \in \text{ran } S$ " folgt:	$\alpha \in \text{ran } S.$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \in \text{ran } S).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2 " $\mathbb{A} \subseteq \text{ran } S$ "
--

1.3: Aus **A1** gleich " $\text{ran } S \subseteq \mathbb{A}$ " und
aus **A2** gleich " $\mathbb{A} \subseteq \text{ran } S$ "
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\text{ran } S = \mathbb{A}.$$

c)

Thema1	$\alpha \in S.$
Aus Thema1 " $\alpha \in S$ " folgt via 244-1(Def) :	$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in S) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$$

Konsequenz via **10-3**:

S Relation.

Beweis **244-7** d)

Thema1.1

$$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in S.$$

2.1: Aus **Thema1.1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in S$ ”

folgt via **244-5**: $\exists \Phi, \Gamma : (\alpha = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\beta = \Phi - \Gamma).$

2.2: Aus **Thema1.1** “ $\dots (\alpha, \gamma) \in S$ ”

folgt via **244-5**: $\exists \Omega, \Upsilon : (\alpha = (\Omega, \Upsilon)) \wedge (\gamma = \Omega - \Upsilon).$

2.3: Aus **Thema1.1** “ $(\alpha, \beta) \dots \in S$ ”

folgt via **12-7**: α Menge.

3.1: Aus 2.1 “ $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma) \dots$ ” und
aus 2.3 “ α Menge”

folgt: (Φ, Γ) Menge.

3.2: Aus 2.1 “ $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma) \dots$ ” und
aus 2.2 “ $\dots \alpha = (\Omega, \Upsilon) \dots$ ”

folgt: $(\Phi, \Gamma) = (\Omega, \Upsilon).$

4: Aus 3.2 “ $(\Phi, \Gamma) = (\Omega, \Upsilon)$ ” und
aus 3.1 “ (Φ, Γ) Menge”
folgt via **IGP**:

$$(\Phi = \Omega) \wedge (\Gamma = \Upsilon).$$

5.1: Aus 4 “ $\Phi = \Omega \dots$ ”

folgt: $\Phi - \Gamma = \Omega - \Gamma.$

5.2: Aus 4 “ $\dots \Gamma = \Upsilon$ ”

folgt: $\Omega - \Gamma = \Omega - \Upsilon.$

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt:

$$\Phi - \Gamma = \Omega - \Upsilon.$$

7: Aus 2.1 “ $\dots \beta = \Phi - \Gamma$ ” und
aus 6 “ $\Phi - \Gamma = \Omega - \Upsilon$ ”
folgt:

$$\beta = \Omega - \Upsilon.$$

8: Aus 7 “ $\beta = \Omega - \Upsilon$ ” und
aus 2.2 “ $\dots \gamma = \Omega - \Upsilon$ ”
folgt:

$$\beta = \gamma.$$

...

Beweis **244-7** d) ...

Ergo Thema1.1:

$\mathbf{A1} \mid \left(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in S) \Rightarrow (\beta = \gamma) \right)$
--

1.2: Via des bereits bewiesenen c) gilt: S Relation.

2: Aus 1.2 "S Relation" und
 aus A1 gleich " $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in S) \Rightarrow (\beta = \gamma)$ "
 folgt via **18-18(Def)**: S Funktion.

ef)

1.1: Via des bereits bewiesenen d) gilt: S Funktion.

1.2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\text{dom } S = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.

1.3: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\text{ran } S = \mathbb{A}$.

2.e): Aus 1.1 "S Funktion",
 aus 1.2 " $\text{dom } S = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ " und
 aus 1.3 " $\text{ran } S = \mathbb{A}$ "
 folgt via **21-2**: $S : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$.

3.f): Aus 2.e) " $S : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ "
 folgt via **93-5(Def)**: S Algebra in $\mathbb{A}$.

g) VS gleich p, q Zahl.

1: Aus VS gleich " p, q Zahl"
 folgt via **244-5**: $((p, q), p - q) \in S$.

2: Via des bereits bewiesenen d) gilt: S Funktion.

3: Aus 2 "S Funktion" und
 aus 1 " $((p, q), p - q) \in S$ "
 folgt via **18-20**: $S(p, q) = p - q$.

h)

1: Via des bereits bewiesenen f) gilt: S Algebra in $\mathbb{A}$.

2: Aus 1 "S Algebra in $\mathbb{A}$ " und
 aus **AAI** " $\mathbb{A}$ Menge"
 folgt via **93-9**: S Menge.

□

244-8. Klarer Weise ist die Division eine Algebra in $\mathbb{A}$. Sind p, q Zahlen, so gilt $D(p, q) = p : q$:

244-8(Satz)

- a) $\text{dom } D = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.
- b) $\text{ran } D = \mathbb{A}$.
- c) D *Relation*.
- d) D *Funktion*.
- e) $D : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$.
- f) D *Algebra in $\mathbb{A}$* .
- g) Aus " p, q Zahl" folgt " $D(p, q) = p : q$ ".
- h) D *Menge*.

ALG-Notation.

Beweis 244-8RECH-Notation.

a)

Thema1.1 $\alpha \in \text{dom } D.$ 2: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in \text{dom } D$ "folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in D.$ 3: Aus 2 " $\dots (\alpha, \Omega) \in D$ "folgt via **244-5**: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Gamma)).$ 4.1: Aus 3 " $\dots \Phi \dots \text{Zahl} \dots$ "folgt via **95-4(Def)**: $\Phi \in \mathbb{A}.$ 4.2: Aus 3 " $\dots \Gamma \text{ Zahl} \dots$ "folgt via **95-4(Def)**: $\Gamma \in \mathbb{A}.$ 5: Aus 4.1 " $\Phi \in \mathbb{A}$ " und
aus 4.2 " $\Gamma \in \mathbb{A}$ "folgt via **6-6**: $(\Phi, \Gamma) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}.$ 6: Aus 3 " $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma)$ " und
aus 5 " $(\Phi, \Gamma) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ "
folgt: $\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}.$ Ergo **Thema1.1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \text{dom } D) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}).$ Konsequenz via **0-2(Def)**:**A1** | " $\text{dom } D \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ "

...

Beweis **244-8** a) ...

Thema1.2

$\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}.$

2: Aus **Thema1.2** " $\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ "

folgt via **6-5**: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Gamma)).$

3.1: Aus 2 " $\dots \Phi \dots \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**: $\Phi \text{ Zahl.}$

3.2: Aus 2 " $\dots \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**: $\Gamma \text{ Zahl.}$

4: Aus 3.1 " $\Phi \text{ Zahl}$ " und
aus 3.2 " $\Gamma \text{ Zahl}$ "

folgt via **244-5**: $((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma) \in D.$

5: Aus 4 " $((\Phi, \Gamma), \Phi : \Gamma) \in D$ "

folgt via **7-5**: $(\Phi, \Gamma) \in \text{dom } D.$

6: Aus 2 " $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma)$ " und

aus 5 " $(\Phi, \Gamma) \in \text{dom } D$ "

folgt: $\alpha \in \text{dom } D.$

Ergo **Thema1.2**:

$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \in \text{dom } D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2 | " $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \subseteq \text{dom } D$ "

1.3: Aus **A1** gleich " $\text{dom } D \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ " und
aus **A2** gleich " $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \subseteq \text{dom } D$ "

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$\text{dom } D = \mathbb{A} \times \mathbb{A}.$

Beweis **244-8** b)

Thema1.1

$\alpha \in \text{ran } D.$

2: Aus **Thema1.1** " $\alpha \in \text{ran } D$ "
folgt via **7-4**:

$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in D.$

3: Aus 2 " $\dots (\Omega, \alpha) \in D$ "
folgt via **244-5**:

$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (\alpha = \Phi : \Gamma).$

4: Aus 3 " $\dots \Phi, \Gamma \text{ Zahl} \dots$ "
folgt via **96-17**:

$\Phi : \Gamma \text{ Zahl}.$

5: Aus 3 " $\dots \alpha = \Phi : \Gamma$ " und
aus 4 " $\Phi : \Gamma \text{ Zahl}$ "
folgt:

$\alpha \text{ Zahl}.$

6: Aus 5 " $\alpha \text{ Zahl}$ "
folgt via **95-4(Def)**:

$\alpha \in \mathbb{A}.$

Ergo **Thema1.1**:

$\forall \alpha : (\alpha \in \text{ran } D) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1 | " $\text{ran } D \subseteq \mathbb{A}$ "

...

Beweis **244-8** b) ...

Thema1.2	$\alpha \in \mathbb{A}.$
2: Aus Thema1.2 " $\alpha \in \mathbb{A}$ " folgt via 95-4(Def) :	α Zahl.
3: Aus 2 " α Zahl" und aus scola " 1 Zahl" folgt via 96-17 :	$((\alpha, 1), \alpha : 1) \in D.$
4.1: Aus 2 " α Zahl" folgt via FSD1 :	$\alpha : 1 = \alpha.$
4.2: Aus 3 " $((\alpha, 1), \alpha : 1) \in D$ " folgt via 7-5 :	$\alpha : 1 \in \text{ran } D.$
5: Aus 4.1 " $\alpha : 1 = \alpha$ " und aus 4.2 " $\alpha : 1 \in \text{ran } D$ " folgt:	$\alpha \in \text{ran } D.$

Ergo **Thema1.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \in \text{ran } D).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A2 " $\mathbb{A} \subseteq \text{ran } D$ "
--

1.3: Aus **A1** gleich " $\text{ran } D \subseteq \mathbb{A}$ " und
aus **A2** gleich " $\mathbb{A} \subseteq \text{ran } D$ "
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\text{ran } D = \mathbb{A}.$$

c)

Thema1	$\alpha \in D.$
Aus Thema1 " $\alpha \in D$ " folgt via 244-1(Def) :	$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$$

Konsequenz via **10-3**:

D Relation.

Beweis 244-8 d)

Thema1.1

$$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in D.$$

2.1: Aus Thema1.1 “ $(\alpha, \beta) \dots \in D$ ”folgt via 244-5: $\exists \Phi, \Gamma : (\alpha = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\beta = \Phi : \Gamma).$ 2.2: Aus Thema1.1 “ $\dots (\alpha, \gamma) \in D$ ”folgt via 244-5: $\exists \Omega, \Upsilon : (\alpha = (\Omega, \Upsilon)) \wedge (\gamma = \Omega : \Upsilon).$ 2.3: Aus Thema1.1 “ $(\alpha, \beta) \dots \in D$ ”folgt via 12-7: α Menge.3.1: Aus 2.1 “ $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma) \dots$ ” und
aus 2.3 “ α Menge”folgt: (Φ, Γ) Menge.3.2: Aus 2.1 “ $\dots \alpha = (\Phi, \Gamma) \dots$ ” und
aus 2.2 “ $\dots \alpha = (\Omega, \Upsilon) \dots$ ”folgt: $(\Phi, \Gamma) = (\Omega, \Upsilon).$ 4: Aus 3.2 “ $(\Phi, \Gamma) = (\Omega, \Upsilon)$ ” und
aus 3.1 “ (Φ, Γ) Menge”folgt via IGP: $(\Phi = \Omega) \wedge (\Gamma = \Upsilon).$ 5.1: Aus 4 “ $\Phi = \Omega \dots$ ”folgt: $\Phi : \Gamma = \Omega : \Gamma.$ 5.2: Aus 4 “ $\dots \Gamma = \Upsilon$ ”folgt: $\Omega : \Gamma = \Omega : \Upsilon.$ 6: Aus 5.1 und
aus 5.2folgt: $\Phi : \Gamma = \Omega : \Upsilon.$ 7: Aus 2.1 “ $\dots \beta = \Phi : \Gamma$ ” und
aus 6 “ $\Phi : \Gamma = \Omega : \Upsilon$ ”folgt: $\beta = \Omega : \Upsilon.$ 8: Aus 7 “ $\beta = \Omega : \Upsilon$ ” und
aus 2.2 “ $\dots \gamma = \Omega : \Upsilon$ ”folgt: $\beta = \gamma.$

...

Beweis **244-8 d)** ...

Ergo Thema 1.1:

$\mathbf{A1} \mid \quad \forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in D) \Rightarrow (\beta = \gamma)$

1.2: Via des bereits bewiesenen c) gilt: D Relation.

2: Aus 1.2 "D Relation" und
 aus A1 gleich " $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in D) \Rightarrow (\beta = \gamma)$ "
 folgt via **18-18(Def)**: D Funktion.

ef)

1.1: Via des bereits bewiesenen d) gilt: D Funktion.

1.2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\text{dom } D = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.

1.3: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\text{ran } D = \mathbb{A}$.

2.e): Aus 1.1 "D Funktion",
 aus 1.2 " $\text{dom } D = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ " und
 aus 1.3 " $\text{ran } D = \mathbb{A}$ "
 folgt via **21-2**: $D : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$.

3.f): Aus 2.e) " $D : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ "
 folgt via **93-5(Def)**: D Algebra in $\mathbb{A}$.

g) VS gleich p, q Zahl.

1: Aus VS gleich " p, q Zahl"
 folgt via **244-5**: $((p, q), p : q) \in D$.

2: Via des bereits bewiesenen d) gilt: D Funktion.

3: Aus 2 "D Funktion" und
 aus 1 " $((p, q), p : q) \in D$ "
 folgt via **18-20**: $D(p, q) = p : q$.

h)

1: Via des bereits bewiesenen f) gilt: D Algebra in $\mathbb{A}$.

2: Aus 1 "D Algebra in $\mathbb{A}$ " und
 aus **AAI** " $\mathbb{A}$ Menge"
 folgt via **93-9**: D Menge.

□

$p _ E.x, x.E _ p, x.E.y$: E Funktion.

$p _ E.f, f.E _ p$: f Funktion.

$f.E.g$: f, g Funktion.

$p _ E.f, f.E _ p$: E, f Funktion.

$f.E.g$: E, f, g Funktion.

Ersterstellung: 30/04/13

Letzte Änderung: 04/05/13

245-1. Falls E eine Funktion ist stellt sich Einiges von $p.E.x, x.E.p, x.E.y$ in einem etwas anderen Licht dar:

245-1(Satz)

Aus " E Funktion" und ...

- a) ... und " $w \in p.E.x$ " folgt " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((p, \Phi) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(p, \Phi)))$ ".
- b) ... und " $(q, r) \in p.E.x$ " folgt " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge ((p, \Omega) \in \text{dom } E) \wedge (r = E(p, \Omega))$ ".
- c) ... und " $(q, s) \in x$ " und " $(p, s) \in \text{dom } E$ "
folgt " $(q, E(p, s)) \in p.E.x$ ".
- d) ... und " $w \in x.E.p$ " folgt " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Phi, p) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(\Phi, p)))$ ".
- e) ... und " $(q, r) \in x.E.p$ " folgt " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge ((\Omega, p) \in \text{dom } E) \wedge (r = E(\Omega, p))$ ".
- f) ... und " $(q, s) \in x$ " und " $(s, p) \in \text{dom } E$ "
folgt " $(q, E(s, p)) \in x.E.p$ ".
- g) ... und " $w \in x.E.y$ " folgt " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge ((\Phi, \Gamma) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(\Phi, \Gamma)))$ ".
- h) ... und " $(q, r) \in x.E.y$ " folgt " $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge ((\Phi, \Gamma) \in \text{dom } E) \wedge (r = E(\Phi, \Gamma))$ ".
- i) ... und " $(q, r) \in x$ " und " $(q, s) \in y$ " und " $(r, s) \in \text{dom } E$ "
folgt " $(q, E(r, s)) \in x.E.y$ ".

ALG-Notation.

Beweis 245-1 a) VS gleich

$$(E \text{ Funktion}) \wedge (w \in p_{-E}.x).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots w \in p_{-E}.x$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((p, \Phi), \Psi) \in E \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

- 2.1: Aus 1 “ $\dots ((p, \Phi), \Psi) \in E$ ”
folgt via **7-5**:

$$(p, \Phi) \in \text{dom } E.$$

- 2.2: Aus VS gleich “ E Funktion...” und
aus 1 “ $\dots ((p, \Phi), \Psi) \in E \dots$ ”
folgt via **18-20**:

$$\Psi = E(p, \Phi).$$

- 3: Aus 2.2 “ $\Psi = E(p, \Phi)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(p, \Phi)).$$

- 4: Aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Psi)$ ” und
aus 3 “ $(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(p, \Phi))$ ”
folgt:

$$w = (\Omega, E(p, \Phi)).$$

- 5: Aus 1 “ $\exists \Omega, \Phi \dots$ ”,
aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
aus 2.1 “ $(p, \Phi) \in \text{dom } E$ ” und
aus 4 “ $w = (\Omega, E(p, \Phi))$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((p, \Phi) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(p, \Phi))).$$

b) VS gleich

$$(E \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in p_{-E}.x).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in p_{-E}.x$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge ((p, \Omega), r) \in E.$$

- 2.1: Aus 1 “ $\dots ((p, \Omega), r) \in E$ ”
folgt via **7-5**:

$$(p, \Omega) \in \text{dom } E.$$

- 2.2: Aus VS gleich “ E Funktion...” und
aus 1 “ $\dots ((p, \Omega), r) \in E$ ”
folgt via **18-20**:

$$r = E(p, \Omega).$$

- 3: Aus 1 “ $\exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 2.1 “ $(p, \Omega) \in \text{dom } E$ ” und
aus 2.2 “ $r = E(p, \Omega)$ ”
folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge ((p, \Omega) \in \text{dom } E) \wedge (r = E(p, \Omega)).$$

Beweis 245-1 c) VS gleich $(E \text{ Funktion}) \wedge ((q, s) \in x) \wedge ((p, s) \in \text{dom } E).$

1: Aus VS gleich “ E Funktion...” und
 aus VS gleich “ $\dots (p, s) \in \text{dom } E$ ”
 folgt via **18-22**: $((p, s), E(p, s)) \in E.$

2: Aus VS gleich “ $\dots (q, s) \in x \dots$ ” und
 aus 1 “ $((p, s), E(p, s)) \in E$ ”
 folgt via **243-2**: $(q, E(p, s)) \in p.E.x.$

d) VS gleich $(E \text{ Funktion}) \wedge (w \in x.E.p).$

1: Aus VS gleich “ $\dots w \in x.E.p$ ”
 folgt via **243-2**:
 $\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (((\Phi, p), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$

2.1: Aus 1 “ $\dots ((\Phi, p), \Psi) \in E \dots$ ”
 folgt via **7-5**: $(\Phi, p) \in \text{dom } E.$

2.2: Aus VS gleich “ E Funktion...” und
 aus 1 “ $\dots ((\Phi, p), \Psi) \in E \dots$ ”
 folgt via **18-20**: $\Psi = E(\Phi, p).$

3: Aus 2.2 “ $\Psi = E(\Phi, p)$ ”
 folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(\Phi, p)).$

4: Aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Psi)$ ” und
 aus 3 “ $(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(\Phi, p))$ ”
 folgt: $w = (\Omega, E(\Phi, p)).$

5: Aus 1 “ $\exists \Omega, \Phi \dots$ ”,
 aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
 aus 2.1 “ $(\Phi, p) \in \text{dom } E$ ” und
 aus 4 “ $w = (\Omega, E(\Phi, p))$ ”
 folgt: $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Phi, p) \in \text{dom } E)(w = (\Omega, E(\Phi, p))).$

Beweis 245-1 e) VS gleich

$$(E \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in x.E_p).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in x.E_p$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, p), r) \in E).$$

2.1: Aus 1 “ $\dots ((\Omega, p), r) \in E$ ”
folgt via **7-5**:

$$(\Omega, p) \in \text{dom } E.$$

2.2: Aus VS gleich “ E Funktion...” und
aus 1 “ $\dots ((\Omega, p), r) \in E$ ”
folgt via **18-20**:

$$r = E(\Omega, p).$$

3: Aus 1 “ $\exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 2.1 “ $(\Omega, p) \in \text{dom } E$ ” und
aus 2.2 “ $r = E(\Omega, p)$ ”
folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge ((\Omega, p) \in \text{dom } E) \wedge (r = E(\Omega, p)).$$

f) VS gleich

$$(E \text{ Funktion}) \wedge ((q, s) \in x) \wedge ((s, p) \in \text{dom } E).$$

1: Aus VS gleich “ E Funktion...” und
aus VS gleich “ $\dots (s, p) \in \text{dom } E$ ”
folgt via **18-22**:

$$((s, p), E(s, p)) \in E.$$

2: Aus VS gleich “ $\dots (q, s) \in x \dots$ ” und
aus 1 “ $((s, p), E(s, p)) \in E$ ”
folgt via **243-2**:

$$(q, E(s, p)) \in x.E_p.$$

Beweis 245-1 g) VS gleich

$$(E \text{ Funktion}) \wedge (w \in x.E.y).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots w \in x.E.y$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

2.1: Aus 1 “ $\dots ((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E \dots$ ”
folgt via **7-5**:

$$(\Phi, \Gamma) \in \text{dom } E.$$

2.2: Aus VS gleich “ E Funktion... ” und
aus 1 “ $\dots ((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E \dots$ ”
folgt via **18-20**:

$$\Psi = E(\Phi, \Gamma).$$

3: Aus 2.2 “ $\Psi = E(\Phi, \Gamma)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(\Phi, \Gamma)).$$

4: Aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Psi)$ ” und
aus 3 “ $(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(\Phi, \Gamma))$ ”
folgt:

$$w = (\Omega, E(\Phi, \Gamma)).$$

5: Aus 1 “ $\exists \Omega, \Phi, \Gamma \dots$ ”,
aus 1 “ $\dots ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \dots$ ”,
aus 2.1 “ $(\Phi, \Gamma) \in \text{dom } E$ ” und
aus 4 “ $w = (\Omega, E(\Phi, \Gamma))$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge ((\Phi, \Gamma) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(\Phi, \Gamma))).$$

h) VS gleich

$$(E \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in x.E.y).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in x.E.y$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (((\Phi, \Gamma), r) \in E).$$

2.1: Aus 1 “ $\dots ((\Phi, \Gamma), r) \in E$ ”
folgt via **7-5**:

$$(\Phi, \Gamma) \in \text{dom } E.$$

2.2: Aus VS gleich “ E Funktion... ” und
aus 1 “ $\dots ((\Phi, \Gamma), r) \in E$ ”
folgt via **18-20**:

$$r = E(\Phi, \Gamma).$$

3: Aus 1 “ $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \dots$ ”,
aus 2.1 “ $(\Phi, \Gamma) \in \text{dom } E$ ” und
aus 2.2 “ $r = E(\Phi, \Gamma)$ ”
folgt:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (r = E(\Phi, \Gamma)).$$

Beweis 245-1 i)

VS gleich $(E \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge ((r, s) \in \text{dom } E).$

- 1: Aus VS gleich “ E Funktion...” und
 aus VS gleich “ $\dots (r, s) \in \text{dom } E$ ”
 folgt via **18-22**:

$$((r, s), E(r, s)) \in E.$$

- 2: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in x \dots$ ”,
 aus VS gleich “ $\dots (q, s) \in y \dots$ ” und
 aus 1 “ $((r, s), E(r, s)) \in E$ ”
 folgt via **243-2**:

$$(q, E(r, s)) \in x.E.y.$$

□

245-2. Falls f eine Funktion ist, stellt sich Einiges von $p _E . f$, $f . E _p$ leicht modifiziert dar:

245-2(Satz)

Aus " f Funktion" und ...

- a) ... und " $w \in p _E . f$ "
folgt " $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((p, f(\Omega)), \Psi) \in E \wedge (w = (\Omega, \Psi))$ ".
- b) ... und " $(q, r) \in p _E . f$ " folgt " $q \in \text{dom } f$ " und " $((p, f(q)), r) \in E$ ".
- c) ... und " $((p, f(q)), r) \in E$ " folgt " $(q, r) \in p _E . f$ ".
- d) ... und " $w \in f . E _p$ "
folgt " $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((f(\Omega), p), \Psi) \in E \wedge (w = (\Omega, \Psi))$ ".
- e) ... und " $(q, r) \in f . E _p$ " folgt " $q \in \text{dom } f$ " und " $((f(q), p), r) \in E$ ".
- f) ... und " $((f(q), p), r) \in E$ " folgt " $(q, r) \in f . E _p$ ".

Beweis 245-2 a) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in p _E . f).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots w \in p _E . f$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in f) \wedge ((p, \Phi), \Psi) \in E \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

- 2.1: Aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in f \dots$ ”
folgt via **7-5**:

$$\Omega \in \text{dom } f.$$

- 2.2: Aus VS gleich “ f Funktion $\dots$ ” und
aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in f$ ”
folgt via **18-20**:

$$\Phi = f(\Omega).$$

- 3: Aus 2.2 “ $\Phi = f(\Omega)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(p, \Phi) = (p, f(\Omega)).$$

- 4: Aus 3 “ $(p, \Phi) = (p, f(\Omega))$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((p, \Phi), \Psi) = ((p, f(\Omega)), \Psi).$$

- 5: Aus 4 “ $((p, \Phi), \Psi) = ((p, f(\Omega)), \Psi)$ ” und
aus 1 “ $\dots ((p, \Phi), \Psi) \in E \dots$ ”
folgt:

$$((p, f(\Omega)), \Psi) \in E.$$

- 6: Aus 1 “ $\exists \Omega, \dots \Psi \dots$ ”,
aus 2.1 “ $\Omega \in \text{dom } f$ ”,
aus 5 “ $((p, f(\Omega)), \Psi) \in E$ ” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Psi)$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((p, f(\Omega)), \Psi) \in E \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

Beweis **245-2 b)** VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in p\text{-}E.f).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in p\text{-}E.f$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in f) \wedge (((p, \Omega), r) \in E).$$

2.1: Aus 1 “ $\dots (q, \Omega) \in f \dots$ ”

folgt via **7-5**:

$$q \in \text{dom } f$$

2.2: Aus VS gleich “ f Funktion. . . ” und
aus 1 “ $\dots (q, \Omega) \in f \dots$ ”
folgt via **18-20**:

$$\Omega = f(q).$$

3: Aus 2.2 “ $\Omega = f(q)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(p, \Omega) = (p, f(q)).$$

4: Aus 3 “ $(p, \Omega) = (p, f(q))$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((p, \Omega), r) = ((p, f(q)), r).$$

5: Aus 4 “ $((p, \Omega), r) = ((p, f(q)), r)$ ” und
aus 1 “ $\dots ((p, \Omega), r) \in E$ ”

folgt:

$$((p, f(q)), r) \in E$$

c) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (((p, f(q)), r) \in E).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots ((p, f(q)), r) \in E$ ”
folgt via **12-7**:

$$(p, f(q)) \text{ Menge.}$$

2: Aus 1 “ $(p, f(q))$ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$f(q) \text{ Menge.}$$

3: Aus 2 “ $f(q)$ Menge”
folgt via **17-5**:

$$q \in \text{dom } f.$$

4: Aus VS gleich “ f Funktion. . . ” und
aus 3 “ $q \in \text{dom } f$ ”
folgt via **18-22**:

$$(q, f(q)) \in f.$$

5: Aus 4 “ $(q, f(q)) \in f$ ” und
aus VS gleich “ $\dots ((p, f(q)), r) \in E$ ”
folgt via **243-2**:

$$(q, r) \in p\text{-}E.f.$$

Beweis 245-2 d) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f.E.p).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots w \in f.E.p$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in f) \wedge ((\Phi, p), \Psi) \in E \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

- 2.1: Aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in f \dots$ ”
folgt via **7-5**:

$$\Omega \in \text{dom } f.$$

- 2.2: Aus VS gleich “ f Funktion $\dots$ ” und
aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in f$ ”
folgt via **18-20**:

$$\Phi = f(\Omega).$$

- 3: Aus 2.2 “ $\Phi = f(\Omega)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Phi, p) = (f(\Omega), p).$$

- 4: Aus 3 “ $(\Phi, p) = (f(\Omega), p)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Phi, p), \Psi) = ((f(\Omega), p), \Psi).$$

- 5: Aus 4 “ $((\Phi, p), \Psi) = ((f(\Omega), p), \Psi)$ ” und
aus 1 “ $\dots ((\Phi, p), \Psi) \in E \dots$ ”
folgt:

$$((f(\Omega), p), \Psi) \in E.$$

- 6: Aus 1 “ $\exists \Omega, \dots \Psi \dots$ ”,
aus 2.1 “ $\Omega \in \text{dom } f$ ”,
aus 5 “ $((f(\Omega), p), \Psi) \in E$ ” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Psi)$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((f(\Omega), p), \Psi) \in E \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

Beweis **245-2 e)** VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f.E.p).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in f.E.p$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in f) \wedge (((\Omega, p), r) \in E).$$

2.1: Aus 1 “ $\dots (q, \Omega) \in f \dots$ ”

folgt via **7-5**:

$$q \in \text{dom } f$$

2.2: Aus VS gleich “ f Funktion. . . ” und
aus 1 “ $\dots (q, \Omega) \in f \dots$ ”
folgt via **18-20**:

$$\Omega = f(q).$$

3: Aus 2.2 “ $\Omega = f(q)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, p) = (f(q), p).$$

4: Aus 3 “ $(\Omega, p) = (f(q), p)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Omega, p), r) = ((f(q), p), r).$$

5: Aus 4 “ $((\Omega, p), r) = ((f(q), p), r)$ ” und
aus 1 “ $\dots ((\Omega, p), r) \in E$ ”

folgt:

$$((f(q), p), r) \in E$$

f) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (((f(q), p), r) \in E).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots ((f(q), p), r) \in E$ ”
folgt via **12-7**:

$$(f(q), p) \text{ Menge.}$$

2: Aus 1 “ $(f(q), p) \text{ Menge}$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$f(q) \text{ Menge.}$$

3: Aus 2 “ $f(q) \text{ Menge}$ ”
folgt via **17-5**:

$$q \in \text{dom } f.$$

4: Aus VS gleich “ f Funktion. . . ” und
aus 3 “ $q \in \text{dom } f$ ”
folgt via **18-22**:

$$(q, f(q)) \in f.$$

5: Aus 4 “ $(q, f(q)) \in f$ ” und
aus VS gleich “ $\dots ((f(q), p), r) \in E$ ”
folgt via **243-2**:

$$(q, r) \in f.E.p.$$

□

245-3. Falls f, g Funktionen ist, stellt sich Einiges von $f.E.g$ leicht modifiziert dar:

245-3(Satz)

Aus " f, g Funktion" und ...

- a) ... und " $w \in f.E.g$ " folgt " $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g))$
 $\wedge (((f(\Omega), g(\Omega)), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$ ".
- b) ... und " $(q, r) \in f.E.g$ "
 folgt " $q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ " und " $((f(q), g(q)), r) \in E$ ".
- c) ... und " $((f(q), g(q)), r) \in E$ " folgt " $(q, r) \in f.E.g$ ".

Beweis 245-3 a) VS gleich

$$(f, g \text{ Funktion}) \wedge (w \in f.E.g).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots w \in f.E.g$ ”
folgt via **243-2**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Psi : ((\Omega, \Phi) \in f) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in g) \\ \wedge (((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

2.1: Aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in f \dots$ ”
folgt via **7-5**:

$$\Omega \in \text{dom } f.$$

2.2: Aus VS gleich “ $f \dots$ Funktion” und
aus 1 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in f \dots$ ”
folgt via **18-20**:

$$\Phi = f(\Omega).$$

2.3: Aus 1 “ $\dots (\Omega, \Gamma) \in g \dots$ ”
folgt via **7-5**:

$$\Omega \in \text{dom } g.$$

2.4: Aus VS gleich “ $\dots g$ Funktion” und
aus 1 “ $\dots (\Omega, \Gamma) \in g \dots$ ”
folgt via **18-20**:

$$\Gamma = g(\Omega).$$

3.1: Aus 2.1 “ $\Omega \in \text{dom } f$ ” und
aus 2.3 “ $\Omega \in \text{dom } g$ ”
folgt via **2-2**:

$$\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g).$$

3.2: Aus 2.2 “ $\Phi = f(\Omega)$ ” und
aus 2.4 “ $\Gamma = g(\Omega)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Phi, \Gamma) = (f(\Omega), g(\Omega)).$$

4: Aus 3.2 “ $(\Phi, \Gamma) = (f(\Omega), g(\Omega))$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Phi, \Gamma), \Psi) = ((f(\Omega), g(\Omega)), \Psi).$$

5: Aus 1 “ $\dots ((\Phi, \Gamma), \Psi) \in E \dots$ ” und
aus 4 “ $((\Phi, \Gamma), \Psi) = ((f(\Omega), g(\Omega)), \Psi)$ ”
folgt:

$$((f(\Omega), g(\Omega)), \Psi) \in E.$$

6: Aus 1 “ $\exists \Omega \dots \Psi \dots$ ”,
aus 3.1 “ $\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ ”,
aus 5 “ $((f(\Omega), g(\Omega)), \Psi) \in E$ ” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Psi)$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge ((f(\Omega), g(\Omega)) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

Beweis 245-3 b) VS gleich

$$(f, g \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f.E.g).$$

1: Aus VS gleich "... $(q, r) \in f.E.g$ "

folgt via **243-2**: $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in f) \wedge ((q, \Gamma) \in g) \wedge (((\Phi, \Gamma), r) \in E).$

2.1: Aus 1 "... $(q, \Phi) \in f$..."

folgt via **7-5**:

$$q \in \text{dom } f.$$

2.2: Aus VS gleich " f ... Funktion..." und

aus 1 "... $(q, \Phi) \in f$..."

folgt via **18-20**:

$$\Phi = f(q).$$

2.3: Aus 1 "... $(q, \Gamma) \in g$..."

folgt via **7-5**:

$$q \in \text{dom } g.$$

2.4: Aus VS gleich "... g Funktion..." und

aus 1 "... $(q, \Gamma) \in g$..."

folgt via **18-20**:

$$\Gamma = g(q).$$

3.1: Aus 2.1 " $q \in \text{dom } f$ " und

aus 2.3 " $q \in \text{dom } g$ "

folgt via **2-2**:

$$q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$$

3.2: Aus 2.2 " $\Phi = f(q)$ " und

aus 2.4 " $\Gamma = g(q)$ "

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Phi, \Gamma) = (f(q), g(q)).$$

4: Aus 3.2 " $(\Phi, \Gamma) = (f(q), g(q))$ "

folgt via **PaarAxiom I**:

$$((\Phi, \Gamma), r) = ((f(q), g(q)), r).$$

5: Aus 4 " $((\Phi, \Gamma), r) = ((f(q), g(q)), r)$ " und

aus 1 "... $((\Phi, \Gamma), r) \in E$ "

folgt:

$$((f(q), g(q)), r) \in E$$

Beweis 245-3 c) VS gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (((f(q), g(q)), r) \in E).$

1: Aus VS gleich “ $\dots ((f(q), g(q)), r) \in E$ ”
folgt via **12-7**: $(f(q), g(q)) \text{ Menge.}$

2: Aus 1 “ $(f(q), g(q)) \text{ Menge}$ ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(f(q) \text{ Menge}) \wedge (g(q) \text{ Menge}).$

3.1: Aus 2 “ $f(q) \text{ Menge} \dots$ ”
folgt via **17-5**: $q \in \text{dom } f.$

3.2: Aus 2 “ $\dots g(q) \text{ Menge}$ ”
folgt via **17-5**: $q \in \text{dom } g.$

4.1: Aus VS gleich “ $f \dots \text{Funktion} \dots$ ” und
aus 3.1 “ $q \in \text{dom } f$ ”
folgt via **18-22**: $(q, f(q)) \in f.$

4.2: Aus VS gleich “ $\dots g \text{Funktion} \dots$ ” und
aus 3.2 “ $q \in \text{dom } g$ ”
folgt via **18-22**: $(q, g(q)) \in g.$

5: Aus 4.1 “ $(q, f(q)) \in f$ ”,
aus 4.2 “ $(q, g(q)) \in g$ ” und
aus VS gleich “ $((f(q), g(q)), r) \in E$ ”
folgt via **243-2**: $(q, r) \in f.E.g.$

□

245-4. Sind E, f Funktionen, so wird **245-2** in Vorliegendes übergeführt:

245-4(Satz)

Aus " E, f Funktion" und ...

- a) ... und " $w \in p.E.f$ " folgt " $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((p, f(\Omega)) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(p, f(\Omega))))$ ".
- b) ... und " $(q, r) \in p.E.f$ "
folgt " $q \in \text{dom } f$ " und " $(p, f(q)) \in \text{dom } E$ " und " $r = E(p, f(q))$ ".
- c) ... und " $(p, f(q)) \in \text{dom } E$ " folgt " $(q, E(p, f(q))) \in p.E.f$ ".
- d) ... und " $w \in f.E.p$ " folgt " $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((f(\Omega), p) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(f(\Omega), p)))$ ".
- e) ... und " $(q, r) \in f.E.p$ "
folgt " $q \in \text{dom } f$ " und " $(f(q), p) \in \text{dom } E$ " und " $r = E(f(q), p)$ ".
- f) ... und " $(f(q), p) \in \text{dom } E$ " folgt " $(q, E(f(q), p)) \in f.E.p$ ".

ALG-Notation.

Beweis **245-4 a)** VS gleich

$$(E, f \text{ Funktion}) \wedge (w \in p\text{-}E.f).$$

- 1: Aus VS gleich "... f Funktion..." und
aus VS gleich "... $w \in p\text{-}E.f$ "
folgt via **245-2**:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((p, f(\Omega)), \Psi) \in E \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

- 2.1: Aus 1 "... $((p, f(\Omega)), \Psi) \in E$..."
folgt via **7-5**:

$$(p, f(\Omega)) \in \text{dom } E.$$

- 2.2: Aus VS gleich " E ... Funktion..." und
aus 1 "... $((p, f(\Omega)), \Psi) \in E$ "
folgt via **18-20**:

$$\Psi = E(p, f(\Omega)).$$

- 3: Aus 2.2 " $\Psi = E(p, f(\Omega))$ "
folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(p, f(\Omega))).$$

- 4: Aus 3 " $(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(p, f(\Omega)))$ " und
aus 1 "... $w = (\Omega, \Psi)$ "
folgt:

$$w = (\Omega, E(p, f(\Omega))).$$

- 5: Aus 1 " $\exists \Omega \dots$ ",
aus 1 "... $\Omega \in \text{dom } f$...",
aus 2.1 " $(p, f(\Omega)) \in \text{dom } E$ " und
aus 4 " $w = (\Omega, E(p, f(\Omega)))$ "
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((p, f(\Omega)) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(p, f(\Omega))))$.

b) VS gleich

$$(E, f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in p\text{-}E.f).$$

- 1: Aus VS gleich "... f Funktion..." und
aus VS gleich "... $(q, r) \in p\text{-}E.f$ "
folgt via **245-2**:

$$(q \in \text{dom } f) \wedge ((p, f(q)), r) \in E).$$

- 2.1: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

- 2.2: Aus 1 "... $((p, f(q)), r) \in E$ "

folgt via **7-5**:

$$(p, f(q)) \in \text{dom } E$$

- 2.3: Aus VS gleich " E ... Funktion..." und
aus 1 "... $((p, f(q)), r) \in E$ "

folgt via **18-20**:

$$r = E(p, f(q))$$

Beweis 245-4 c) VS gleich $(E, f \text{ Funktion}) \wedge ((p, f(q)) \in \text{dom } E).$

1: Aus VS gleich “ $E \dots \text{Funktion} \dots$ ” und
 aus VS gleich “ $\dots (p, f(q)) \in \text{dom } E$ ”
 folgt via **18-22**: $((p, f(q)), E(p, f(q))) \in E.$

2: Aus VS gleich “ $\dots f \text{ Funktion} \dots$ ” und
 aus 1 “ $((p, f(q)), E(p, f(q))) \in E$ ”
 folgt via **245-2**: $(q, E(p, f(q))) \in p.E.f.$

d) VS gleich $(E, f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f.E.p).$

1: Aus VS gleich “ $\dots f \text{ Funktion} \dots$ ” und
 aus VS gleich “ $\dots w \in f.E.p$ ”
 folgt via **245-2**:
 $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((f(\Omega), p), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$

2.1: Aus 1 “ $\dots ((f(\Omega), p), \Psi) \in E \dots$ ”
 folgt via **7-5**: $(f(\Omega), p) \in \text{dom } E.$

2.2: Aus VS gleich “ $E \dots \text{Funktion} \dots$ ” und
 aus 1 “ $\dots ((f(\Omega), p), \Psi) \in E$ ”
 folgt via **18-20**: $\Psi = E(f(\Omega), p).$

3: Aus 2.2 “ $\Psi = E(f(\Omega), p)$ ”
 folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(f(\Omega), p)).$

4: Aus 3 “ $(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(f(\Omega), p))$ ” und
 aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Psi)$ ”
 folgt: $w = (\Omega, E(f(\Omega), p)).$

5: Aus 1 “ $\exists \Omega \dots$ ”,
 aus 1 “ $\dots \Omega \in \text{dom } f \dots$ ”,
 aus 2.1 “ $(f(\Omega), p) \in \text{dom } E$ ” und
 aus 4 “ $w = (\Omega, E(f(\Omega), p))$ ”
 folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((f(\Omega), p) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(f(\Omega), p))).$

Beweis 245-4 e) VS gleich

$$(E, f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f.E.p).$$

- 1: Aus VS gleich "... f Funktion..." und
 aus VS gleich "... $(q, r) \in f.E.p$ "
 folgt via **245-2**:

$$(q \in \text{dom } f) \wedge (((f(q), p), r) \in E).$$

2.1: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.2: Aus 1 "... $((f(q), p), r) \in E$ "

folgt via **7-5**:

$$(f(q), p) \in \text{dom } E$$

2.3: Aus VS gleich " $E \dots$ Funktion..." und
 aus 1 "... $((f(q), p), r) \in E$ "

folgt via **18-20**:

$$r = E(f(q), p)$$

f) VS gleich

$$(E, f \text{ Funktion}) \wedge ((f(q), p) \in \text{dom } E).$$

- 1: Aus VS gleich " $E \dots$ Funktion..." und
 aus VS gleich "... $(f(q), p) \in \text{dom } E$ "
 folgt via **18-22**:

$$((f(q), p), E(f(q), p)) \in E.$$

- 2: Aus VS gleich "... f Funktion..." und
 aus 1 "... $((f(q), p), E(f(q), p)) \in E$ "
 folgt via **245-2**:

$$(q, E(f(q), p)) \in f.E.p.$$

□

245-5. Sind f, g und E Funktionen, so wird **245-3** in Vorliegendes übergeführt:

245-5(Satz)

Aus " E, f, g Funktion" und ...

- a) ... und " $w \in f.E.g$ "
folgt " $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge ((f(\Omega), g(\Omega)) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(f(\Omega), g(\Omega))))$ ".
- b) ... und " $(q, r) \in f.E.g$ "
folgt " $q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ " und " $(f(q), g(q)) \in \text{dom } E$ "
und " $r = E(f(q), g(q))$ ".
- c) ... und " $(f(q), g(q)) \in \text{dom } E$ " folgt " $(q, E(f(q), g(q))) \in f.E.g$ ".

ALG-Notation.

Beweis **245-5 a)** VS gleich $(E, f, g \text{ Funktion}) \wedge (w \in f.E.g).$

1: Aus **VS** gleich "... f, g Funktion..." und
aus 1 "... $w \in f.E.g$ "

folgt via **245-3**:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (((f(\Omega), g(\Omega)), \Psi) \in E) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

2.1: Aus 1 "... $((f(\Omega), g(\Omega)), \Psi) \in E$..."

folgt via **7-5**:

$$(f(\Omega), g(\Omega)) \in \text{dom } E.$$

2.2: Aus **VS** gleich " E ... Funktion..." und
aus 1 "... $((f(\Omega), g(\Omega)), \Psi) \in E$ "

folgt via **18-20**:

$$\Psi = E(f(\Omega), g(\Omega)).$$

3: Aus 2.2 " $\Psi = E(f(\Omega), g(\Omega))$ "

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(f(\Omega), g(\Omega))).$$

4: Aus 1 "... $w = (\Omega, \Psi)$ " und

aus 3 " $(\Omega, \Psi) = (\Omega, E(f(\Omega), g(\Omega)))$ "

folgt:

$$w = (\Omega, E(f(\Omega), g(\Omega))).$$

5: Aus 1 " $\exists \Omega$..." ,

aus 1 "... $\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$..." ,

aus 2.1 " $(f(\Omega), g(\Omega)) \in \text{dom } E$ " und

aus 4 " $w = (\Omega, E(f(\Omega), g(\Omega)))$ "

folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge ((f(\Omega), g(\Omega)) \in \text{dom } E) \wedge (w = (\Omega, E(f(\Omega), g(\Omega)))).$$

b) VS gleich

$$(E, f, g \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f.E.g).$$

1: Aus **VS** gleich "... f, g Funktion..." und

aus **VS** gleich "... $(q, r) \in f.E.g$ "

folgt via **245-3**:

$$(q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (((f(q), g(q)), r) \in E).$$

2.1: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.2: Aus 1 "... $((f(q), g(q)), r) \in E$ "

folgt via **7-5**:

$$(f(q), g(q)) \in \text{dom } E$$

2.3: Aus **VS** gleich " E ... Funktion..." und

aus 1 "... $((f(q), g(q)), r) \in E$ "

folgt via **18-20**:

$$r = E(f(q), g(q))$$

Beweis 245-5 c) VS gleich $(E, f, g \text{ Funktion}) \wedge ((f(q), g(q)) \in \text{dom } E).$

- 1: Aus VS gleich “ $E \dots$ Funktion...” und
 aus VS gleich “ $(f(q), g(q)) \in \text{dom } E$ ”
 folgt via **18-22**: $((f(q), g(q)), E(f(q), g(q))) \in E.$
- 2: Aus VS gleich “... f, g Funktion...” und
 aus 1 “ $((f(q), g(q)), E(f(q), g(q))) \in E$ ”
 folgt via **245-3**: $(q, E(f(q), g(q))) \in f.E.g.$

□

245-6. Nun werden $(p _E.f)(q)$, $(f.E_p)(q)$, $(f.E.g)(q)$ für Funktionen E, f, g und q in den jeweiligen Definitions-Bereichen thematisiert:

245-6(Satz)

- a) Aus “ E, f Funktion” und “ $q \in \text{dom}(p _E.f)$ ”
folgt “ $(p _E.f)(q) = E(p, f(q))$ ”.
- b) Aus “ E, f Funktion” und “ $q \in \text{dom}(f.E_p)$ ”
folgt “ $(f.E_p)(q) = E(f(q), p)$ ”.
- c) Aus “ E, f, g Funktion” und “ $q \in \text{dom}(f.E.g)$ ”
folgt “ $(f.E.g)(q) = E(f(q), g(q))$ ”.

ALG-Notation.

Beweis 245-6 a) VS gleich $(E.f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom}(p _E.f)).$

- 1: Aus VS gleich “ E, f Funktion... ”
folgt via **243-7**: $p _E.f$ Funktion.
- 2: Aus 1 “ $p _E.f$ Funktion” und
aus VS gleich “... $q \in \text{dom}(p _E.f)$ ”
folgt via **18-22**: $(q, (p _E.f)(q)) \in p _E.f.$
- 3: Aus VS gleich “ E, f Funktion... ” und
aus 2 “ $(q, (p _E.f)(q)) \in p _E.f$ ”
folgt via **245-4**: $(p _E.f)(q) = E(p, f(q)).$

b) VS gleich $(E.f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom}(f.E_p)).$

- 1: Aus VS gleich “ E, f Funktion... ”
folgt via **243-7**: $f.E_p$ Funktion.
- 2: Aus 1 “ $f.E_p$ Funktion” und
aus VS gleich “... $q \in \text{dom}(f.E_p)$ ”
folgt via **18-22**: $(q, (f.E_p)(q)) \in f.E_p.$
- 3: Aus VS gleich “ E, f Funktion... ” und
aus 2 “ $(q, (f.E_p)(q)) \in f.E_p$ ”
folgt via **245-4**: $(f.E_p)(q) = E(f(q), p).$

Beweis 245-6 c) VS gleich $(E, f, g \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom}(f.E.g)).$

1: Aus VS gleich “ E, f, g Funktion. . . ”
folgt via **243-7**:

$f.E.g$ Funktion.

2: Aus 1 “ $f.E.g$ Funktion” und
aus VS gleich “. . . $q \in \text{dom}(f.E.g)$ ”
folgt via **18-22**:

$(q, (f.E.g)(q)) \in f.E.g.$

3: Aus VS gleich “ E, f, g Funktion. . . ” und
aus 2 “ $(q, (f.E.g)(q)) \in p.E.f$ ”
folgt via **245-5**:

$(f.E.g)(q) = E(f(q), g(q)).$

□

Aus x^{-1} injektiv und $E \subseteq \text{ran } x$ folgt $E = x[x^{-1}[E]]$.

Ersterstellung: 06/05/13

Letzte Änderung: 06/05/13

246-1. Nacharbeiten hilft. So bin ich bei der nachträglichen Erstellung der Formelsammlung für **Suite I - Die StrukturGebende** auf **13-5** gestoßen, wo aus x^{-1} injektiv und $E \subseteq \text{ran } x$ und x Relation auf $E = x[x^{-1}[E]]$ geschlossen wird. In der Tat muss für die Schlussfolgerung $E = x[x^{-1}[E]]$ die Klasse x nicht notwendiger Weise eine Relation sein. Die Definition von Bild und Urbild blenden mögliche “Nicht-Relations-Anteile von x ” von x geflissentlich aus:

246-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow) \quad x^{-1} \text{ injektiv.}$

$\rightarrow) \quad E \subseteq \text{ran } x.$

Dann folgt “ $E = x[x^{-1}[E]]$ ”.

Beweis 246-1**Thema1.1**

$$\alpha \in x[x^{-1}[E]].$$

2: Aus **Thema1.1** “ $\alpha \in x[x^{-1}[E]]$ ”
 folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in x^{-1}[E]) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x).$

3: Aus 2 “ $\dots \Omega \in x^{-1}[E] \dots$ ”
 folgt via **11-21**: $\exists \Psi : (\Psi \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x).$

4.1: Aus 2 “ $\dots (\Omega, \alpha) \in x$ ”
 folgt via **11-4**: $(\alpha, \Omega) \in x^{-1}.$

4.2: Aus 3 “ $\dots (\Omega, \Psi) \in x$ ”
 folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in x^{-1}.$

5: Aus $\rightarrow$ “ x^{-1} injektiv”,
 aus 4.1 “ $(\alpha, \Omega) \in x^{-1}$ ” und
 aus 4.2 “ $(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$ ”
 folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \Psi.$

6: Aus 5 “ $\alpha = \Psi$ ” und
 aus 3 “ $\dots \Psi \in E \dots$ ”
 folgt: $\alpha \in E.$

Ergo **Thema1.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in x[x^{-1}[E]]) \Rightarrow (\alpha \in E).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\mathbf{A1} \mid “x[x^{-1}[E]] \subseteq E”$$

1.2: Aus $\rightarrow$ “ $E \subseteq \text{ran } x$ ”
 folgt via **13-1**: $E \subseteq x[x^{-1}[E]].$

2: Aus 1.2 “ $E \subseteq x[x^{-1}[E]]$ ” und
 aus **A1** gleich “ $x[x^{-1}[E]] \subseteq E$ ”
 folgt via **GleichheitsAxiom**: $E = x[x^{-1}[E]].$

□

□ Algebra in A : $p \sqsubseteq x$, $x \sqsubseteq p$, $x \sqsubseteq y$.
ALG-Fortsetzung.

Ersterstellung: 06/05/13

Letzte Änderung: 08/05/13

247-1. Ist $\square$ eine Algebra in A , so stellen sich einige Resultate über $p \square x$, $x \square p$ und $x \square y$ in eigener Form dar:

247-1(Satz)

Aus " $\square$ Algebra in A " und ...

- a) ... und " $w \in p \square x$ " folgt " $p \in A$ "
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in A) \wedge (w = (\Omega, p \square \Phi))$ ".
- b) ... und " $(q, r) \in p \square x$ " folgt " $p \in A$ "
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in A) \wedge (r = p \square \Omega)$ ".
- c) ... und " $(q, r) \in x$ " und " $p, r \in A$ " folgt " $(q, p \square r) \in p \square x$ ".
- d) ... und " $w \in x \square p$ " folgt " $p \in A$ "
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in A) \wedge (w = (\Omega, \Phi \square p))$ ".
- e) ... und " $(q, r) \in x \square p$ " folgt " $p \in A$ "
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in A) \wedge (r = \Omega \square p)$ ".
- f) ... und " $(q, r) \in x$ " und " $p, r \in A$ " folgt " $(q, r \square p) \in x \square p$ ".
- g) ... und " $w \in x \square y$ " folgt " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y)$
 $\wedge (\Phi, \Gamma \in A) \wedge (w = (\Omega, \Phi \square \Gamma))$ ".
- h) ... und " $(q, r) \in x \square y$ " folgt " $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y)$
 $\wedge (\Phi, \Gamma \in A) \wedge (r = \Phi \square \Gamma)$ ".
- i) ... und " $(q, r) \in x$ " und " $(q, s) \in y$ " und " $r, s \in A$ "
folgt " $(q, r \square s) \in x \square y$ ".

ALG-Notation.

Beweis 247-1 a) VS gleich

$$(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in p_{\square}x).$$

1: Aus VS gleich “ $\square$ Algebra in $A \dots$ ”
folgt via **93-6**:

$$(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$$

2: Aus 1 “ $\square$ Funktion. . . ” und
aus VS gleich “ $\dots w \in p_{\square}x$ ”
folgt via **245-1**:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((p, \Phi) \in \text{dom } \square) \wedge (w = (\Omega, p_{\square}\Phi)).$$

3: Aus 2 “ $\dots (p, \Phi) \in \text{dom } \square \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt:

$$(p, \Phi) \in A \times A.$$

4.1: Aus 3 “ $(p, \Phi) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$p \in A$$

4.2: Aus 3 “ $(p, \Phi) \in A \times A$ ”
folgt via **6-6**:

$$\Phi \in A.$$

5: Aus 2 “ $\exists \Omega, \Phi \dots$ ”,
aus 2 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
aus 4.2 “ $\Phi \in A$ ” und
aus 2 “ $\dots w = (\Omega, p_{\square}\Phi)$ ”

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in A) \wedge (w = (\Omega, p_{\square}\Phi))$$

Beweis 247-1 b) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A \times A) \wedge ((q, r) \in p_{\square} x).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus 1 “ $\square \text{ Funktion.} \dots$ ” und
aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in p_{\square} x$ ”
folgt via **245-1**: $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge ((p, \Omega) \in \text{dom } \square) \wedge (r = p_{\square} \Omega).$

3: Aus 2 “ $\dots (p, \Omega) \in \text{dom } \square \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt: $(p, \Omega) \in A \times A.$

4.1: Aus 3 “ $(p, \Omega) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$p \in A$$

4.2: Aus 3 “ $(p, \Omega) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$\Omega \in A.$$

5: Aus 2 “ $\exists \Omega \dots$ ”,
aus 2 “ $\dots (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 4.2 “ $\Omega \in A$ ” und
aus 2 “ $\dots r = p_{\square} \Omega$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in A) \wedge (r = p_{\square} \Omega)$$

c) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A \times A) \wedge ((q, r) \in x) \wedge (p, r \in A).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus VS gleich “ $\dots p, r \in A$ ”
folgt via **6-6**: $(p, r) \in A \times A.$

3: Aus 2 “ $(p, r) \in A \times A$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt: $(p, r) \in \text{dom } \square.$

4: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in x \dots$ ”,
aus 3 “ $(p, r) \in \text{dom } \square$ ” und
aus 1 “ $\square \text{ Funktion.} \dots$ ”
folgt via **245-1**: $(q, p_{\square} r) \in p_{\square} x.$

Beweis 247-1 d) VS gleich

$$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in x.\Box p).$$

1: Aus VS gleich “ $\Box \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**:

$$(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \Box = A \times A).$$

2: Aus 1 “ $\Box \text{ Funktion} \dots$ ” und
aus VS gleich “ $\dots w \in x.\Box p$ ”
folgt via **245-1**:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Phi, p) \in \text{dom } \Box) \wedge (w = (\Omega, \Phi.\Box p)).$$

3: Aus 2 “ $\dots (\Phi, p) \in \text{dom } \Box \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \Box = A \times A$ ”
folgt:

$$(\Phi, p) \in A \times A.$$

4.1: Aus 3 “ $(\Phi, p) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$p \in A$$

4.2: Aus 3 “ $(\Phi, p) \in A \times A$ ”
folgt via **6-6**:

$$\Phi \in A.$$

5: Aus 2 “ $\exists \Omega, \Phi \dots$ ”,
aus 2 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
aus 4.2 “ $\Phi \in A$ ” und
aus 2 “ $\dots w = (\Omega, \Phi.\Box p)$ ”

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in A) \wedge (w = (\Omega, \Phi.\Box p))$$

Beweis 247-1 e) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A \times A) \wedge ((q, r) \in x.\square.p).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus 1 “ $\square \text{ Funktion.} \dots$ ” und
aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in x.\square.p$ ”
folgt via **245-1**: $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge ((\Omega, p) \in \text{dom } \square) \wedge (r = \Omega.\square.p).$

3: Aus 2 “ $\dots (\Omega, p) \in \text{dom } \square \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt: $(\Omega, p) \in A \times A.$

4.1: Aus 3 “ $(\Omega, p) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$p \in A$$

4.2: Aus 3 “ $(\Omega, p) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$\Omega \in A.$$

5: Aus 2 “ $\exists \Omega \dots$ ”,
aus 2 “ $\dots (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 4.2 “ $\Omega \in A$ ” und
aus 2 “ $\dots r = \Omega.\square.p$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in A) \wedge (r = \Omega.\square.p)$$

f) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A \times A) \wedge ((q, r) \in x) \wedge (r, p \in A).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus VS gleich “ $\dots r, p \in A$ ”
folgt via **6-6**: $(r, p) \in A \times A.$

3: Aus 2 “ $(r, p) \in A \times A$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt: $(r, p) \in \text{dom } \square.$

4: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in x \dots$ ”,
aus 3 “ $(r, p) \in \text{dom } \square$ ” und
aus 1 “ $\square \text{ Funktion.} \dots$ ”
folgt via **245-1**: $(q, r.\square.p) \in x.\square.p.$

Beweis 247-1 g) VS gleich

$$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in x.\Box.y).$$

1: Aus VS gleich “ $\Box$ Algebra in $A \dots$ ”
folgt via **93-6**:

$$(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \Box = A \times A).$$

2: Aus 1 “ $\Box$ Funktion. . . ” und
aus VS gleich “ $\dots w \in x.\Box.y$ ”
folgt via **245-1**:

$$\begin{aligned} &\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \\ &\wedge ((\Phi, \Gamma) \in \text{dom } \Box) \wedge (w = (\Omega, \Phi _ \Box _ \Gamma)). \end{aligned}$$

3: Aus 2 “ $\dots (\Phi, \Gamma) \in \text{dom } \Box \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \Box = A \times A$ ”
folgt:

$$(\Phi, \Gamma) \in A \times A.$$

4: Aus 3 “ $(\Phi, \Gamma) \in A \times A$ ”
folgt via **6-6**:

$$\Phi, \Gamma \in A.$$

5: Aus 2 “ $\exists \Omega, \Phi, \Gamma \dots$ ”,
aus 2 “ $\dots ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \dots$ ”,
aus 4 “ $\Phi, \Gamma \in A$ ” und
aus 2 “ $\dots w = (\Omega, \Phi _ \Box _ \Gamma)$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in A) \wedge (w = (\Omega, \Phi _ \Box _ \Gamma)).$$

Beweis 247-1 h) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge ((q, r) \in x.\square.y).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus 1 “ $\square \text{ Funktion.} \dots$ ” und
aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in x.\square.y$ ”
folgt via **245-1**: $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge ((\Phi, \Gamma) \in \text{dom } \square)$
 $\wedge (r = \Phi.\square.\Gamma).$

3: Aus 2 “ $\dots (\Phi, \Gamma) \in \text{dom } \square \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt: $(\Phi, \Gamma) \in A \times A.$

4: Aus 3 “ $(\Phi, \Gamma) \in A \times A$ ”
folgt via **6-6**: $\Phi, \Gamma \in A.$

5: Aus 2 “ $\exists \Phi, \Gamma \dots$ ”,
aus 2 “ $\dots ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \dots$ ”,
aus 4 “ $\Phi, \Gamma \in A$ ” und
aus 2 “ $\dots r = \Phi.\square.\Gamma$ ”
folgt:
 $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in A) \wedge (r = \Phi.\square.\Gamma).$

i) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A \times A) \wedge ((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge (r, s \in A).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus VS gleich “ $\dots r, s \in A$ ”
folgt via **6-6**: $(r, s) \in A \times A.$

3: Aus 2 “ $(r, s) \in A \times A$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt: $(r, s) \in \text{dom } \square.$

4: Aus VS gleich “ $\dots ((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \dots$ ”,
aus 3 “ $(r, s) \in \text{dom } \square$ ” und
aus 1 “ $\square \text{ Funktion.} \dots$ ”
folgt via **245-1**: $(q, r.\square.s) \in x.\square.y.$

□

247-2. Nun werden Definitions- und Bild-Bereich von $p _ \square .x$, $x _ \square .p$, $x _ \square .y$ für eine Algebra $\square$ in A thematisiert:

247-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow) \square$ Algebra in A .

Dann folgt:

- a) $\text{dom}(p _ \square .x) \subseteq x^{-1}[A]$.
- b) $\text{dom}(x _ \square .p) \subseteq x^{-1}[A]$.
- c) $\text{dom}(x _ \square .y) = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$.
- d) $\text{dom}(p _ \square .x) = \text{dom}(x _ \square .p)$.
- e) $\text{dom}(x _ \square .y) = \text{dom}(y _ \square .x)$.
- f) $\text{ran}(p _ \square .x) \subseteq A$.
- g) $\text{ran}(x _ \square .p) \subseteq A$.
- h) $\text{ran}(x _ \square .y) \subseteq A$.

Beweis 247-2 abc)

1: Aus VS gleich “ $\square$ Algebra in A ”
folgt via **93-6**:

$$\text{dom } \square = A \times A.$$

2.1: Via **9-23** gilt:

$$(A \times A)[\{p\}] \subseteq A.$$

2.2: Via **12-14** gilt:

$$(A \times A)^{-1}[\{p\}] \subseteq A.$$

2.3: Via **242-6** gilt:

$$(\text{paar}(x, y))^{-1}[A \times A] = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A].$$

3.1: Aus 2.1 “ $(A \times A)[\{p\}] \subseteq A$ ”
folgt via **11-18**:

$$x^{-1}[(A \times A)[\{p\}]] \subseteq x^{-1}[A].$$

3.2: Aus 2.2 “ $(A \times A)^{-1}[\{p\}] \subseteq A$ ”
folgt via **11-18**:

$$x^{-1}[(A \times A)^{-1}[\{p\}]] \subseteq x^{-1}[A].$$

$$4.1: \quad \text{dom}(p _ \square . x) \stackrel{243-4}{=} x^{-1}[(\text{dom } \square)[\{p\}]] \stackrel{1}{=} x^{-1}[(A \times A)[\{p\}]] \stackrel{3.1}{\subseteq} x^{-1}[A].$$

$$4.2: \quad \text{dom}(x _ \square . p) \stackrel{243-4}{=} x^{-1}[(\text{dom } \square)^{-1}[\{p\}]] \stackrel{1}{=} x^{-1}[(A \times A)^{-1}[\{p\}]] \stackrel{3.2}{\subseteq} x^{-1}[A].$$

$$4.3: \quad \text{dom}(x _ \square . y) \stackrel{243-5}{=} (\text{paar}(x, y))^{-1}[\text{dom } \square] \stackrel{1}{=} (\text{paar}(x, y))^{-1}[A \times A] \stackrel{2.3}{=} x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A].$$

5.a): Aus 4.1
folgt:

$$\text{dom}(p _ \square . x) \subseteq x^{-1}[A].$$

5.b): Aus 4.2
folgt:

$$\text{dom}(x _ \square . p) \subseteq x^{-1}[A].$$

5.c): Aus 4.3
folgt:

$$\text{dom}(x _ \square . y) = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A].$$

Beweis **247-2** d)

1: Aus $\rightarrow$ "□ Algebra in A "
folgt via **93-6**:

$$\text{dom } \square = A \times A.$$

2:

$$\text{dom } (p_{-}\square.x)$$

$$\stackrel{243-4}{=} x^{-1}[(\text{dom } \square)[\{p\}]]$$

$$\stackrel{1}{=} x^{-1}[(A \times A)[\{p\}]]$$

$$\stackrel{12-13}{=} x^{-1}[(A \times A)^{-1}[\{p\}]]$$

$$\stackrel{1}{=} x^{-1}[(\text{dom } \square)^{-1}[\{p\}]]$$

$$\stackrel{243-4}{=} \text{dom } (x.\square.p).$$

3: Aus 2
folgt:

$$\text{dom } (p_{-}\square.x) = \text{dom } (x.\square.p).$$

e)

1.1: Aus $\rightarrow$ "□ Algebra in A "

folgt via des bereits bewiesenen c):

$$\text{dom } (x.\square.y) = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A].$$

1.2: Aus $\rightarrow$ "□ Algebra in A "

folgt via des bereits bewiesenen c):

$$\text{dom } (y.\square.x) = y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A].$$

$$2: \quad \text{dom } (x.\square.y) \stackrel{1.1}{=} x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A] \stackrel{\text{KG}\cap}{=} y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A] \stackrel{1.2}{=} \text{dom } (y.\square.x).$$

3: Aus 2
folgt:

$$\text{dom } (x.\square.y) = \text{dom } (y.\square.x).$$

f)

1: Aus $\rightarrow$ "□ Algebra in A "

folgt via **93-6**:

$$\text{ran } \square \subseteq A.$$

2:

$$\text{ran } (p_{-}\square.x) \stackrel{243-4}{\subseteq} \square[\{p\} \times \text{ran } x] \stackrel{8-10}{\subseteq} \text{ran } \square \stackrel{1}{\subseteq} A.$$

3: Aus 2

folgt via **0-6**:

$$\text{ran } (p_{-}\square.x) \subseteq A.$$

Beweis 247-2 g)

1: Aus $\rightarrow$ " $\square$ Algebra in A "

folgt via **93-6**:

$$\text{ran } \square \subseteq A.$$

2:

$$\text{ran } (x.\square.p) \stackrel{243-4}{\subseteq} \square[(\text{ran } x) \times \{p\}] \stackrel{8-10}{\subseteq} \text{ran } \square \stackrel{1}{\subseteq} A.$$

3: Aus 2

folgt via **0-6**:

$$\text{ran } (x.\square.p) \subseteq A.$$

h)

1: Aus $\rightarrow$ " $\square$ Algebra in A "

folgt via **93-6**:

$$\text{ran } \square \subseteq A.$$

2:

$$\text{ran } (x.\square.y) \stackrel{243-5}{=} \square[y \circ x^{-1}] \stackrel{8-10}{\subseteq} \text{ran } \square \stackrel{1}{\subseteq} A.$$

3: Aus 2

folgt via **0-6**:

$$\text{ran } (x.\square.y) \subseteq A.$$

□

247-3. Der Definitions-Bereich und gelgentlich der Bild-Bereich von $p \sqsubset x$ und $x \sqsubset p$ kann für eine Algebra $\square$ in A präzisiert werden, wenn bekannt ist, ob p ein Element von A ist - oder nicht:

247-3(Satz)

Aus " $\square$ Algebra in A " und ...

- a) ... und " $p \in A$ " folgt " $\text{dom}(p \sqsubset x) = x^{-1}[A]$ ".
- b) ... und " $p \in A$ " folgt " $\text{dom}(x \sqsubset p) = x^{-1}[A]$ ".
- c) ... und " $p \notin A$ "
folgt " $\text{dom}(p \sqsubset x) = 0$ " und " $\text{ran}(p \sqsubset x) = 0$ " und " $p \sqsubset x = 0$ ".
- d) ... und " $p \notin A$ "
folgt " $\text{dom}(x \sqsubset p) = 0$ " und " $\text{ran}(x \sqsubset p) = 0$ " und " $x \sqsubset p = 0$ ".

Beweis 247-3 ab) VS gleich

$$(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (p \in A).$$

1.1: Aus VS gleich " $\square$ Algebra in $A \dots$ "

folgt via **93-6**:

$$\text{dom } \square = A \times A.$$

1.2: Aus VS gleich " $\dots p \in A$ "

folgt via **2-29**:

$$0 \neq \{p\} \cap A.$$

2: Aus 1.2 " $0 \neq \{p\} \cap A$ "

folgt via **KG** $\cap$:

$$0 \neq A \cap \{p\}.$$

3.1: Aus 2 " $0 \neq A \cap \{p\}$ "

folgt via **9-23**:

$$(A \times A)[\{p\}] = A.$$

3.2: Aus 2 " $0 \neq A \cap \{p\}$ "

folgt via **12-14**:

$$(A \times A)^{-1}[\{p\}] = A.$$

$$4.1: \quad \text{dom}(p \sqsubset x) \stackrel{243-4}{=} x^{-1}[(\text{dom } \square)[\{p\}]] \stackrel{1}{=} x^{-1}[(A \times A)[\{p\}]] \stackrel{3.1}{=} x^{-1}[A].$$

$$4.2: \quad \text{dom}(x \sqsubset p) \stackrel{243-4}{=} x^{-1}[(\text{dom } \square)^{-1}[\{p\}]] \stackrel{1}{=} x^{-1}[(A \times A)^{-1}[\{p\}]] \stackrel{3.2}{=} x^{-1}[A].$$

5.a): Aus 4.1

folgt:

$$\text{dom}(p \sqsubset x) = x^{-1}[A].$$

5.b): Aus 4.2

folgt:

$$\text{dom}(x \sqsubset p) = x^{-1}[A].$$

Beweis 247-3 c) VS gleich

$$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (p \notin A).$$

1.1: Aus VS gleich “ $\Box \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**:

$$\text{dom } \Box = A \times A.$$

1.2: Aus VS gleich “ $\dots p \notin A$ ”
folgt via **2-30**:

$$\{p\} \cap A = 0.$$

1.3: Via **243-3** gilt:

$$p_{\Box} . x \text{ Relation.}$$

2: Aus 1.2 “ $\{p\} \cap A = 0$ ”
folgt via **KG**:

$$A \cap \{p\} = 0.$$

3: Aus 2 “ $A \cap \{p\} = 0$ ”
folgt via **9-23**:

$$(A \times A)[\{p\}] = 0.$$

4: $\text{dom } (p_{\Box} . x) \stackrel{243-4}{=} x^{-1}[(\text{dom } \Box)[\{p\}]] \stackrel{1}{=} x^{-1}[(A \times A)[\{p\}]] \stackrel{3}{=} x^{-1}[0] \stackrel{11-17}{=} 0.$

5: Aus 4

folgt:

$$\text{dom } (p_{\Box} . x) = 0$$

6.1: Aus 5 “ $\text{dom } (p_{\Box} . x) = 0$ ”

folgt via **7-7**:

$$\text{ran } (p_{\Box} . x) = 0$$

6.2: Aus 1.3 “ $p_{\Box} . x \text{ Relation}$ ” und
aus 5 “ $\text{dom } (p_{\Box} . x) = 0$ ”

folgt via **92-5**:

$$p_{\Box} . x = 0$$

Beweis 247-3 d) VS gleich

$$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (p \notin A).$$

1.1: Aus VS gleich “ $\Box$ Algebra in $A \dots$ ”
folgt via **93-6**:

$$\text{dom } \Box = A \times A.$$

1.2: Aus VS gleich “ $\dots p \notin A$ ”
folgt via **2-30**:

$$\{p\} \cap A = 0.$$

1.3: Via **243-3** gilt:

$$x.\Box_p \text{ Relation.}$$

2: Aus 1.2 “ $\{p\} \cap A = 0$ ”
folgt via **KG**:

$$A \cap \{p\} = 0.$$

3: Aus 2 “ $A \cap \{p\} = 0$ ”
folgt via **12-14**:

$$(A \times A)^{-1}[\{p\}] = 0.$$

$$4: \quad \text{dom } (x.\Box_p) \stackrel{243-4}{=} x^{-1}[(\text{dom } \Box)[\{p\}]] \stackrel{1}{=} x^{-1}[(A \times A)^{-1}[\{p\}]] \\ \stackrel{3}{=} x^{-1}[0] \stackrel{11-17}{=} 0.$$

5: Aus 4

folgt:

$$\text{dom } (x.\Box_p) = 0$$

6.1: Aus 5 “ $\text{dom } (x.\Box_p) = 0$ ”

folgt via **7-7**:

$$\text{ran } (x.\Box_p) = 0$$

6.2: Aus 1.3 “ $x.\Box_p$ Relation” und
aus 5 “ $\text{dom } (x.\Box_p) = 0$ ”

folgt via **92-5**:

$$x.\Box_p = 0$$

□

247-4. Ist $\square$ eine Algebra in A , so steht das vorliegende, gefällige Kriterium für $q \in \text{dom}(p \square x)$ zur Verfügung:

247-4(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow) \square$ Algebra in A .

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(p \square x)$.

ii) $q \in \text{dom}(x \square p)$.

iii) " $p \in A$ " und " $q \in x^{-1}[A]$ ".

Beweis 247-4

ALG-Notation.

i) $\Rightarrow$ ii) VS gleich

$q \in \text{dom}(p \square x)$.

1: aus $\rightarrow) \square$ Algebra in A
folgt via **247-2**:

$\text{dom}(p \square x) = \text{dom}(x \square p)$.

2: Aus VS gleich " $q \in \text{dom}(p \square x)$ " und
aus 1 " $\text{dom}(p \square x) = \text{dom}(x \square p)$ "
folgt:

$q \in \text{dom}(x \square p)$.

Beweis **247-4** $\text{ii}) \Rightarrow \text{iii})$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(x \sqcup p).$$

1.1: Aus $\rightarrow$ “ $\sqcup$ Algebra in A ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x \sqcup p) \subseteq x^{-1}[A].$$

1.2: Aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(x \sqcup p)$ ”
folgt via **7-2**:

$$\exists \Omega : (q, \Omega) \in x \sqcup p$$

2.1: Aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(x \sqcup p)$ ” und
aus 1.1 “ $\text{dom}(x \sqcup p) \subseteq x^{-1}[A]$ ”

folgt via **0-4**:

$$q \in x^{-1}[A]$$

2.2: Aus $\rightarrow$ “ $\sqcup$ Algebra in A ” und
aus 1.2 “ $\dots (q, \Omega) \in x \sqcup p$ ”

folgt via **247-1**:

$$p \in A$$

$\text{iii}) \Rightarrow \text{i})$ VS gleich

$$(p \in A) \wedge (q \in x^{-1}[A]).$$

1: Aus VS gleich “ $\dots q \in x^{-1}[A]$ ”
folgt via **11-21**:

$$\exists \Omega : (\Omega \in A) \wedge ((q, \Omega) \in x).$$

2: Aus $\rightarrow$ “ $\sqcup$ Algebra in A ”,
aus 1 “ $\dots (q, \Omega) \in x$ ”,
aus VS gleich “ $p \in A \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \Omega \in A \dots$ ”
folgt via **247-1**:

$$(q, p \sqcup \Omega) \in p \sqcup x.$$

3: Aus 2 “ $(q, p \sqcup \Omega) \in p \sqcup x$ ”
folgt via **7-5**:

$$q \in \text{dom}(p \sqcup x).$$

□

247-5. Ist $\square$ eine Algebra in A , so steht ein Kriterium für $q \in \text{dom}(x.\square.y)$ zur Verfügung:

247-5(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow) \square$ Algebra in A .

... sind die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(x.\square.y)$.

ii) $q \in \text{dom}(y.\square.x)$.

iii) $q \in x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$.

iv) $q \in y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A]$.

v) " $q \in x^{-1}[A]$ " und " $q \in y^{-1}[A]$ ".

vi) " $q \in y^{-1}[A]$ " und " $q \in x^{-1}[A]$ ".

Beweis 247-5 **i) $\Rightarrow$ ii)** VS gleich

$q \in \text{dom}(x.\square.y)$.

1: Aus $\rightarrow)$ " $\square$ Algebra in A "

folgt via **247-2**:

$\text{dom}(x.\square.y) = \text{dom}(y.\square.x)$.

2: Aus VS gleich " $q \in \text{dom}(x.\square.y)$ " und

aus 1 " $\text{dom}(x.\square.y) = \text{dom}(y.\square.x)$ "

folgt:

$q \in \text{dom}(y.\square.x)$.

ii) $\Rightarrow$ iii) VS gleich

$q \in \text{dom}(y.\square.x)$.

1: Aus $\rightarrow)$ " $\square$ Algebra in A "

folgt via **247-2**:

$\text{dom}(y.\square.x) = y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A]$.

2: Aus VS gleich " $q \in \text{dom}(x.\square.y)$ " und

aus 1 " $\text{dom}(y.\square.x) = y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A]$ "

folgt:

$q \in y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A]$.

3: Via **KG** $\cap$ gilt:

$y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A] = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$.

4: Aus 1 " $q \in y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A]$ " und

aus 3 " $y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A] = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$ "

folgt:

$q \in x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$.

Beweis **247-5** iii) $\Rightarrow$ iv) VS gleich

$$q \in x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A].$$

1: Via **KG** gilt:

$$x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A] = y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A].$$

2: Aus **VS** gleich “ $q \in x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$ ” und
aus 1 “ $x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A] = y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A]$ ”
folgt:

$$q \in y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A].$$

iv) $\Rightarrow$ v) VS gleich

$$q \in y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A].$$

1: Aus **VS** gleich “ $q \in y^{-1}[A] \cap x^{-1}[A]$ ”
folgt via **2-2**:

$$(q \in y^{-1}[A]) \wedge (q \in x^{-1}[A]).$$

2: Aus 1
folgt:

$$(q \in x^{-1}[A]) \wedge (q \in y^{-1}[A]).$$

v) $\Rightarrow$ vi) VS gleich

$$(q \in x^{-1}[A]) \wedge (q \in y^{-1}[A]).$$

Aus **VS**
folgt:

$$(q \in y^{-1}[A]) \wedge (q \in x^{-1}[A]).$$

vi) $\Rightarrow$ i) VS gleich

$$(q \in y^{-1}[A]) \wedge (q \in x^{-1}[A]).$$

1: Aus **VS** gleich “ $\dots q \in x^{-1}[A]$ ” und
aus **VS** gleich “ $q \in y^{-1}[A] \dots$ ”
folgt via **2-2**:

$$q \in x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A].$$

2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x.\square.y) = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A].$$

3: Aus 1 “ $q \in x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$ ” und
aus 2 “ $\text{dom}(x.\square.y) = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$ ”
folgt:

$$q \in \text{dom}(x.\square.y).$$

□

247-6. Ist $\square$ eine Algebra in A und ist f eine Funktion, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(p _ \square . f)$ zur Verfügung:

247-6(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow) \square$ Algebra in A .

$\rightarrow) f$ Funktion.

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(p _ \square . f)$.

ii) $q \in \text{dom}(f _ \square . p)$.

iii) $p, f(q) \in A$.

Beweis **247-6** $\boxed{\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}}$ VS gleich

Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(p \cdot \square \cdot f)$ ”
folgt via **247-4**:

$\boxed{\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}}$ VS gleich

1.1: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(f \cdot \square \cdot p)$ ”

folgt via **247-4**:

1.2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(f \cdot \square \cdot p)$ ”
folgt via **247-4**:

2: Aus $\rightarrow$ “ f Funktion” und
aus 1.2 “ $q \in f^{-1}[A]$ ”

folgt via **18-29**:

$\boxed{\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}}$ VS gleich

1: Aus $\rightarrow$ “ f Funktion” und
aus VS gleich “ $\dots f(q) \in A$ ”
folgt via **18-29**:

2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ”,
aus VS gleich “ $p \dots \in A$ ” und
aus 1 “ $q \in f^{-1}[A]$ ”
folgt via **247-4**:

$$p \in \text{dom}(p \cdot \square \cdot f).$$

$$q \in \text{dom}(f \cdot \square \cdot p).$$

$$q \in \text{dom}(f \cdot \square \cdot p).$$

$$p \in A$$

$$q \in f^{-1}[A].$$

$$f(q) \in A$$

$$p, f(q) \in A.$$

$$q \in f^{-1}[A].$$

$$q \in \text{dom}(p \cdot \square \cdot f).$$

□

247-7. Ist $\square$ eine Algebra in A und sind f, g Funktionen, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(f.\square.g)$ zur Verfügung:

247-7(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow) \square$ Algebra in A .

$\rightarrow) f, g$ Funktion.

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(f.\square.g)$.

ii) $q \in \text{dom}(g.\square.f)$.

iii) $f(q), g(q) \in A$.

Beweis **247-7** $\boxed{\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(f \cdot \square \cdot g).$$

Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(f \cdot \square \cdot g)$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(g \cdot \square \cdot f).$$

$\boxed{\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(g \cdot \square \cdot f).$$

1: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(g \cdot \square \cdot f)$ ”
folgt via **247-5**:

$$(q \in f^{-1}[A]) \wedge (q \in g^{-1}[A]).$$

2.1: Aus $\rightarrow$ “ $f \dots$ Funktion” und
aus 1 “ $q \in f^{-1}[A] \dots$ ”

folgt via **18-29**:

$$f(q) \in A$$

2.2: Aus $\rightarrow$ “ $\dots g$ Funktion” und
aus 1 “ $\dots q \in g^{-1}[A]$ ”

folgt via **18-29**:

$$g(q) \in A$$

$\boxed{\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}}$ VS gleich

$$f(q), g(q) \in A.$$

1.1: Aus $\rightarrow$ “ $f \dots$ Funktion” und
aus VS gleich “ $f(q) \dots \in A$ ”
folgt via **18-29**:

$$q \in f^{-1}[A].$$

1.2: Aus $\rightarrow$ “ $\dots g$ Funktion” und
aus VS gleich “ $\dots g(q) \in A$ ”
folgt via **18-29**:

$$q \in g^{-1}[A].$$

2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ”,
aus 1.1 “ $q \in f^{-1}[A]$ ” und
aus 1.2 “ $q \in g^{-1}[A]$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(f \cdot \square \cdot g).$$

□

ALG-Notation(Fortsetzung) Mit der nun vorliegenden Konvention vereinfachen sich etliche Schreibweisen:

ALG-Notation

- 1) $p \sqcup x(q) = p \sqcup (x(q)).$
- 2) $x(p) \sqcup q = (x(p)) \sqcup q.$
- 3) $x(p) \sqcup x(q) = (x(p)) \sqcup (x(q)).$

247-8. Vielleicht am häufigsten kommen $p \sqsubseteq f$, $f \sqsubseteq p$ zum Einsatz, wenn $\sqsubseteq$ eine Algebra in A und f eine Funktion ist. Für diesen Fall ist Vorliegendes entworfen:

247-8(Satz)

Aus “ $\sqsubseteq$ Algebra in A ” und “ f Funktion” und ...

- a) ... und “ $w \in p \sqsubseteq f$ ” folgt “ $p \in A$ ”
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in A) \wedge (w = (\Omega, p \sqsubseteq f(\Omega)))$ ”.
- b) ... und “ $(q, r) \in p \sqsubseteq f$ ” folgt “ $p, f(q) \in A$ ”
und “ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = p \sqsubseteq f(q)$ ”.
- c) ... und “ $p, f(q) \in A$ ”
folgt “ $(q, p \sqsubseteq f(q)) \in p \sqsubseteq f$ ” und “ $(p \sqsubseteq f)(q) = p \sqsubseteq f(q)$ ”.
- d) ... und “ $q \in \text{dom } (p \sqsubseteq f)$ ” folgt “ $(p \sqsubseteq f)(q) = p \sqsubseteq f(q)$ ”.
- e) ... und “ $w \in f \sqsubseteq p$ ” folgt “ $p \in A$ ”
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in A) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) \sqsubseteq p))$ ”.
- f) ... und “ $(q, r) \in f \sqsubseteq p$ ” folgt “ $p, f(q) \in A$ ”
und “ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = f(q) \sqsubseteq p$ ”.
- g) ... und “ $p, f(q) \in A$ ”
folgt “ $(q, f(q) \sqsubseteq p) \in f \sqsubseteq p$ ” und “ $(f \sqsubseteq p)(q) = f(q) \sqsubseteq p$ ”.
- h) ... und “ $q \in \text{dom } (f \sqsubseteq p)$ ” folgt “ $(f \sqsubseteq p)(q) = f(q) \sqsubseteq p$ ”.

ALG-Notation.

Beweis 247-8 a) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (w \in p_{\square} f).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus VS gleich “ $\dots w \in p_{\square} f$ ”,
aus 1 “ $\square \text{ Funktion} \dots$ ” und
aus VS gleich “ $\dots f \text{ Funktion} \dots$ ”
folgt via **245-4**:
 $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((p, f(\Omega)) \in \text{dom } \square) \wedge (w = (\Omega, p_{\square} f(\Omega))).$

3: Aus 2 “ $\dots (p, f(\Omega)) \in \text{dom } \square \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt: $(p, f(\Omega)) \in A \times A.$

4.1: Aus 3 “ $(p, f(\Omega)) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$p \in A$$

4.2: Aus 3 “ $(p, f(\Omega)) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$f(\Omega) \in A.$$

5: Aus 2 “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \dots$ ”,
aus 4.2 “ $f(\Omega) \in A$ ” und
aus 2 “ $\dots w = (\Omega, p_{\square} f(\Omega))$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in A) \wedge (w = (\Omega, p_{\square} f(\Omega)))$$

Beweis 247-8 b) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in p_{-}\square.f).$

1: Aus VS gleich " $\square \text{ Algebra in } A \dots$ "

folgt via **93-6**:

$$(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$$

2: Aus VS gleich " $\dots (q, r) \in p_{-}\square.f$ ",

aus 1 " $\square \text{ Funktion} \dots$ " und

aus VS gleich " $\dots f \text{ Funktion} \dots$ "

folgt via **245-4**: $(q \in \text{dom } f) \wedge ((p, f(q)) \in \text{dom } \square) \wedge (r = p_{-}\square.f(q)).$

3.1: Aus 2

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

3.2: Aus 2

folgt:

$$r = p_{-}\square.f(q)$$

3.3: Aus 2 " $\dots (p, f(q)) \in \text{dom } \square \dots$ " und

aus 1 " $\dots \text{dom } \square = A \times A$ "

folgt:

$$(p, f(q)) \in A \times A.$$

4.1: Aus 3.3 " $(p, f(q)) \in A \times A$ "

folgt via **6-6**:

$$p \in A$$

4.2: Aus 3.3 " $(p, f(q)) \in A \times A$ "

folgt via **6-6**:

$$f(q) \in A$$

Beweis **247-8** c) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \in A).$

1.1: Aus VS gleich " $\square \text{ Algebra in } A \dots$ "

folgt via **93-6**:

$$(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$$

1.2: Aus VS gleich " $\dots p, f(q) \in A$ "

folgt via **6-6**:

$$(p, f(q)) \in A \times A.$$

2.1: Aus 1.2 " $(p, f(q)) \in A \times A$ " und
aus 1.1 " $\dots \text{dom } \square = A \times A$ "

folgt:

$$(p, f(q)) \in \text{dom } \square.$$

2.2: Aus 1.1 " $\square \text{ Funktion} \dots$ " und
aus VS gleich " $\dots f \text{ Funktion} \dots$ "

folgt via **243-7**:

$$p_{\square}.f \text{ Funktion.}$$

3: Aus 2.1 " $(p, f(q)) \in \text{dom } \square$ ",
aus 1.1 " $\square \text{ Funktion} \dots$ " und
aus VS gleich " $\dots f \text{ Funktion} \dots$ "

folgt via **245-4**:

$$(q, p_{\square}.f(q)) \in p_{\square}.f$$

4: Aus 2.2 " $p_{\square}.f \text{ Funktion}$ " und
aus 3 " $(q, p_{\square}.f(q)) \in p_{\square}.f$ "

folgt via **18-20**:

$$(p_{\square}.f)(q) = p_{\square}.f(q)$$

d) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (p_{\square}.f)).$

1: Aus VS gleich " $\square \text{ Algebra in } A \dots$ "

folgt via **93-6**:

$$\square \text{ Funktion.}$$

2: Aus VS gleich " $\dots q \in \text{dom } (p_{\square}.f)$ ",
aus 1 " $\square \text{ Funktion}$ " und

aus VS gleich " $\dots f \text{ Funktion} \dots$ "

folgt via **245-6**:

$$(p_{\square}.f)(q) = p_{\square}.f(q).$$

Beweis 247-8 e) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f.\square.p).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”

folgt via **93-6**:

$$(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$$

2: Aus VS gleich “ $\dots w \in f.\square.p$ ”,

aus 1 “ $\square \text{ Funktion} \dots$ ” und

aus VS gleich “ $\dots f \text{ Funktion} \dots$ ”

folgt via **245-4**:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge ((f(\Omega), p) \in \text{dom } \square) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega).\square.p)).$$

3: Aus 2 “ $\dots (f(\Omega), p) \in \text{dom } \square \dots$ ” und

aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”

folgt:

$$(f(\Omega), p) \in A \times A.$$

4.1: Aus 3 “ $(f(\Omega), p) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$p \in A$$

4.2: Aus 3 “ $(f(\Omega), p) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$f(\Omega) \in A.$$

5: Aus 2 “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \dots$ ”,

aus 4.2 “ $f(\Omega) \in A$ ” und

aus 2 “ $\dots w = (\Omega, f(\Omega).\square.p)$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in A) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega).\square.p))$$

Beweis 247-8 f) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f.\square.p).$

1: Aus VS gleich “ $\square \text{ Algebra in } A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in f.\square.p$ ”,
aus 1 “ $\square \text{ Funktion} \dots$ ” und
aus VS gleich “ $\dots f \text{ Funktion} \dots$ ”
folgt via **245-4**: $(q \in \text{dom } f) \wedge ((f(q), p) \in \text{dom } \square) \wedge (r = f(q).\square.p).$

3.1: Aus 2

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

3.2: Aus 2

folgt:

$$r = f(q).\square.p$$

3.3: Aus 2 “ $\dots (f(q), p) \in \text{dom } \square \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt:

$$(f(q), p) \in A \times A.$$

4.1: Aus 3.3 “ $(f(q), p) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$p \in A$$

4.2: Aus 3.3 “ $(f(q), p) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$f(q) \in A$$

Beweis 247-8 g) VS gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \in A).$

1.1: Aus VS gleich " $\Box \text{ Algebra in } A \dots$ "

folgt via **93-6**:

$$(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \Box = A \times A).$$

1.2: Aus VS gleich " $\dots p, f(q) \in A$ "

folgt via **6-6**:

$$(f(q), p) \in A \times A.$$

2.1: Aus 1.2 " $(f(q), p) \in A \times A$ " und
aus 1.1 " $\dots \text{dom } \Box = A \times A$ "

folgt:

$$(f(q), p) \in \text{dom } \Box.$$

2.2: Aus 1.1 " $\Box \text{ Funktion. } \dots$ " und
aus VS gleich " $\dots f \text{ Funktion. } \dots$ "
folgt via **243-7**:

$$f.\Box p \text{ Funktion.}$$

3: Aus 2.1 " $(f(q), p) \in \text{dom } \Box$ ",
aus 1.1 " $\Box \text{ Funktion. } \dots$ " und
aus VS gleich " $\dots f \text{ Funktion. } \dots$ "

folgt via **245-4**:

$$(q, f(q).\Box p) \in f.\Box p$$

4: Aus 2.2 " $f.\Box p \text{ Funktion}$ " und
aus 3 " $(q, f(q).\Box p) \in f.\Box p$ "

folgt via **18-20**:

$$(f.\Box p)(q) = f(q).\Box p$$

h) VS gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f.\Box p)).$

1: Aus VS gleich " $\Box \text{ Algebra in } A \dots$ "

folgt via **93-6**:

$$\Box \text{ Funktion.}$$

2: Aus VS gleich " $\dots q \in \text{dom } (f.\Box p)$ ",
aus 1 " $\Box \text{ Funktion}$ " und
aus VS gleich " $\dots f \text{ Funktion. } \dots$ "

folgt via **245-6**:

$$(f.\Box p)(q) = f(q).\Box p.$$

□

247-9. Vielleicht am häufigsten kommt $f.\square.g$ zum Einsatz, wenn $\square$ eine Algebra in A und f, g Funktionen sind. Für diesen Fall ist Vorliegendes entworfen:

247-9(Satz)

Aus " $\square$ Algebra in A " und " f, g Funktion" und ...

- a) ... und " $w \in f.\square.g$ "
 folgt " $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \in A)$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) _ \square _ g(\Omega)))$ ".
- b) ... und " $(q, r) \in f.\square.g$ "
 folgt " $q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ " und " $f(q), g(q) \in A$ "
 und " $r = f(q) _ \square _ g(q)$ ".
- c) ... und " $f(q), g(q) \in A$ " folgt " $(q, f(q) _ \square _ g(q)) \in f.\square.g$ "
 und " $(f.\square.g)(q) = f(q) _ \square _ g(q)$ ".
- d) ... und " $q \in \text{dom } (f.\square.g)$ " folgt " $(f.\square.g)(q) = f(q) _ \square _ g(q)$ ".

ALG-Notation.

Beweis 247-9 a) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion}) \wedge (w \in f.\square.g).$

1: Aus VS gleich " $\square \text{ Algebra in } A \dots$ "

folgt via **93-6**:

$$(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$$

2: Aus 1 " $\square \text{ Funktion.} \dots$ ",

aus VS gleich " $\dots f, g \text{ Funktion.} \dots$ " und

aus VS gleich " $\dots w \in f.\square.g$ "

folgt via **245-5**:

$$\begin{aligned} & \exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \\ & \wedge ((f(\Omega), g(\Omega)) \in \text{dom } \square) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) _ \square _ g(\Omega))). \end{aligned}$$

3: Aus 2 " $\dots (f(\Omega), g(\Omega)) \in \text{dom } \square \dots$ " und

aus 1 " $\dots \text{dom } \square = A \times A$ "

folgt:

$$(f(\Omega), g(\Omega)) \in A \times A.$$

4: Aus 3 " $(f(\Omega), g(\Omega)) \in A \times A$ "

folgt via **6-6**:

$$f(\Omega), g(\Omega) \in A.$$

5: Aus 2 " $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \dots$ ",

aus 4 " $f(\Omega), g(\Omega) \in A$ " und

aus 2 " $\dots w = (\Omega, f(\Omega) _ \square _ g(\Omega))$ "

folgt:

$$\begin{aligned} & \exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \in A) \\ & \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) _ \square _ g(\Omega))). \end{aligned}$$

Beweis 247-9 b) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f.\square.g).$

1: Aus VS gleich “ $\square$ Algebra in $A \dots$ ”
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A).$

2: Aus 1 “ $\square$ Funktion. $\dots$ ”,
aus VS gleich “ $\dots f, g \text{ Funktion. } \dots$ ” und
aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in f.\square.g$ ”
folgt via **245-5**: $(q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge ((f(q), g(q)) \in \text{dom } \square)$
 $\wedge (r = f(q) _ \square _ g(q)).$

3.1: Aus 2

folgt:

$$q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$$

3.2: Aus 2

folgt:

$$r = f(q) _ \square _ g(q)$$

3.3: Aus 2 “ $\dots (f(q), g(q)) \in \text{dom } \square \dots$ ” und
aus 1 “ $\dots \text{dom } \square = A \times A$ ”
folgt:

$$(f(q), g(q)) \in A \times A.$$

4: Aus 3.3 “ $(f(q), g(q)) \in A \times A$ ”

folgt via **6-6**:

$$f(\Omega), g(\Omega) \in A$$

Beweis 247-9 c) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion}) \wedge (f(q), g(q) \in A)$.

1.1: Aus VS gleich " $\square \text{ Algebra in } A \dots$ "
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\text{dom } \square = A \times A)$.

1.2: Aus VS gleich " $\dots f(q), g(q) \in A$ "
folgt via **6-6**: $(f(q), g(q)) \in A \times A$.

2.1: Aus 1.2 " $(f(q), g(q)) \in A \times A$ " und
aus 1.1 " $\dots \text{dom } \square = A \times A$ "
folgt: $(f(q), g(q)) \in \text{dom } \square$.

2.2: Aus 1.1 " $\square \text{ Funktion. } \dots$ " und
aus VS gleich " $\dots f, g \text{ Funktion. } \dots$ "
folgt via **243-7**: $f.\square.g \text{ Funktion.}$

3: Aus 2.1 " $(f(q), g(q)) \in \text{dom } \square$ ",
aus 1.1 " $\square \text{ Funktion. } \dots$ " und
aus VS gleich " $\dots f, g \text{ Funktion. } \dots$ "

folgt via **245-5**:

$$(q, f(q)_{-}\square_{-}g(q)) \in f.\square.g$$

4: Aus 2.2 " $f.\square.g \text{ Funktion}$ " und
aus 3 " $(q, f(q)_{-}\square_{-}g(q)) \in f.\square.g$ "

folgt via **18-20**:

$$(f.\square.g)(q) = f(q)_{-}\square_{-}g(q)$$

d) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f.\square.g))$.

1: Aus VS gleich " $\square \text{ Algebra in } A \dots$ "
folgt via **93-6**: $\square \text{ Funktion.}$

2: Aus VS gleich " $\dots q \in \text{dom } (f.\square.g)$ ",
aus 1 " $\square \text{ Funktion}$ " und
aus VS gleich " $\dots f, g \text{ Funktion. } \dots$ "
folgt via **245-6**: $(f.\square.g)(q) = f(q)_{-}\square_{-}g(q)$.

□

247-10. Ist $\square$ eine Algebra in A , die kommutativ auf A ist, so gilt $p _ \square . x = x _ \square _ p$ und $x _ \square . y = y _ \square . x$:

247-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\square$ Algebra in A .

$\rightarrow)$ $\square$ kommutativ auf A .

Dann folgt:

a) $p _ \square . x = x _ \square _ p$.

b) $x _ \square . y = y _ \square . x$.

Beweis 247-10ALG-Notation.

a)

1: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ”
 folgt via **93-6**:

$$\text{dom } \square = A \times A.$$

Thema2.1

$$\alpha \in p_{\square} . x.$$

2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ” und
 aus **Thema2.1** “ $\alpha \in p_{\square} . x$ ”
 folgt via **247-1**: $(p \in A) \wedge (\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in A) \wedge (\alpha = (\Omega, p_{\square} \Phi)))$.

3.1: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ”,
 aus 2 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
 aus 2 “ $p \in A \dots$ ” und
 aus 2 “ $\dots \Phi \in A \dots$ ”
 folgt via **247-1**: $(\Omega, \Phi_{\square} p) \in x_{\square} p.$

3.2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ kommutativ auf A ” und
 aus 1 “ $\text{dom } \square = A \times A$ ”
 folgt via **233-3**: $p_{\square} \Phi = \Phi_{\square} p.$

4: Aus 3.2 “ $p_{\square} \Phi = \Phi_{\square} p$ ”
 folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, p_{\square} \Phi) = (\Omega, \Phi_{\square} p).$

5: Aus 2 “ $\dots \alpha = (\Omega, p_{\square} \Phi)$ ” und
 aus 4 “ $(\Omega, p_{\square} \Phi) = (\Omega, \Phi_{\square} p)$ ”
 folgt: $\alpha = (\Omega, \Phi_{\square} p).$

6: Aus 5 “ $\alpha = (\Omega, \Phi_{\square} p)$ ” und
 aus 3.1 “ $(\Omega, \Phi_{\square} p) \in x_{\square} p$ ”
 folgt: $\alpha \in x_{\square} p.$

Ergo **Thema2.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in p_{\square} . x) \Rightarrow (\alpha \in x_{\square} p).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1 “ $p_{\square} . x \subseteq x_{\square} p$ ”

...

Beweis **247-10** a) ...

Thema2.2

$$\alpha \in x.\square.p.$$

2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ” und
 aus **Thema2.2** “ $\alpha \in x.\square.p$ ”
 folgt via **247-1**: $(p \in A) \wedge (\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in A) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi \square p)))$.

3.1: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ”,
 aus 2 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
 aus 2 “ $p \in A \dots$ ” und
 aus 2 “ $\dots \Phi \in A \dots$ ”
 folgt via **247-1**: $(\Omega, p \square \Phi) \in p \square x$.

3.2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ kommutativ auf A ” und
 aus 1 “ $\text{dom } \square = A \times A$ ”
 folgt via **233-3**: $\Phi \square p = p \square \Phi$.

4: Aus 3.2 “ $\Phi \square p = p \square \Phi$ ”
 folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi \square p) = (\Omega, p \square \Phi)$.

5: Aus 2 “ $\dots \alpha = (\Omega, \Phi \square p)$ ” und
 aus 4 “ $(\Omega, \Phi \square p) = (\Omega, p \square \Phi)$ ”
 folgt: $\alpha = (\Omega, p \square \Phi)$.

6: Aus 5 “ $\alpha = (\Omega, p \square \Phi)$ ” und
 aus 3.1 “ $(\Omega, p \square \Phi) \in p \square x$ ”
 folgt: $\alpha \in p \square x$.

Ergo **Thema2.2**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in x.\square.p) \Rightarrow (\alpha \in p.\square.x).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid “x.\square.p \subseteq p.\square.x”}$$

2.3: Aus **A1** gleich “ $p.\square.x \subseteq x.\square.p$ ” und
 aus **A2** gleich “ $x.\square.p \subseteq p.\square.x$ ”
 folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$p.\square.x = x.\square.p.$$

Beweis **247-10** b)

1: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ”
folgt via **93-6**:

$$\text{dom } \square = A \times A.$$

Thema2.1

$$\alpha \in x.\square.y.$$

2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ” und
aus **Thema2.1** “ $\alpha \in x.\square.y$ ”

$$\text{folgt via } \mathbf{247-1}: \quad \exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \\ \wedge (\Phi, \Gamma \in A) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi \square \Gamma)).$$

3.1: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ Algebra in A ”,

aus 2 “ $\dots (\Omega, \Gamma) \in y \dots$ ”,

aus 2 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,

aus 2 “ $\dots \Gamma \in A \dots$ ” und

aus 2 “ $\dots \Phi \dots \in A \dots$ ”

folgt via **247-1**:

$$(\Omega, \Gamma \square \Phi) \in y.\square.x.$$

3.2: Aus $\rightarrow$ “ $\square$ kommutativ auf A ” und

aus 1 “ $\text{dom } \square = A \times A$ ”

folgt via **233-3**:

$$\Phi \square \Gamma = \Gamma \square \Phi.$$

4: Aus 3.2 “ $\Phi \square \Gamma = \Gamma \square \Phi$ ”

folgt via **PaarAxiom I**:

$$(\Omega, \Phi \square \Gamma) = (\Omega, \Gamma \square \Phi).$$

5: Aus 2 “ $\dots \alpha = (\Omega, \Phi \square \Gamma)$ ” und

aus 4 “ $(\Omega, \Phi \square \Gamma) = (\Omega, \Gamma \square \Phi)$ ”

folgt:

$$\alpha = (\Omega, \Gamma \square \Phi).$$

6: Aus 5 “ $\alpha = (\Omega, \Gamma \square \Phi)$ ” und

aus 3.1 “ $(\Omega, \Gamma \square \Phi) \in y.\square.x$ ”

folgt:

$$\alpha \in y.\square.x.$$

Ergo **Thema2.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in x.\square.y) \Rightarrow (\alpha \in y.\square.x).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

A1 “ $x.\square.y \subseteq y.\square.x$ ”

...

Beweis **247-10** b) ...

Thema2.1

$$\alpha \in y.\sqcup.x.$$

2: Aus $\rightarrow$ “ $\sqcup$ Algebra in A ” und
aus **Thema2.1** “ $\alpha \in y.\sqcup.x$ ”

folgt via **247-1**: $\exists \Omega, \Gamma, \Phi : ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$
 $\wedge (\Gamma, \Phi \in A) \wedge (\alpha = (\Omega, \Gamma \sqcup \Phi))$.

3.1: Aus $\rightarrow$ “ $\sqcup$ Algebra in A ”,
aus 2 “ $\dots (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
aus 2 “ $\dots (\Omega, \Gamma) \in y \dots$ ”,
aus 2 “ $\dots \Phi \in A \dots$ ” und
aus 2 “ $\dots \Gamma \dots \in A \dots$ ”

folgt via **247-1**: $(\Omega, \Phi \sqcup \Gamma) \in x.\sqcup.y.$

3.2: Aus $\rightarrow$ “ $\sqcup$ kommutativ auf A ” und
aus 1 “ $\text{dom } \sqcup = A \times A$ ”

folgt via **233-3**: $\Gamma \sqcup \Phi = \Phi \sqcup \Gamma.$

4: Aus 3.2 “ $\Gamma \sqcup \Phi = \Phi \sqcup \Gamma$ ”

folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Gamma \sqcup \Phi) = (\Omega, \Phi \sqcup \Gamma).$

5: Aus 2 “ $\dots \alpha = (\Omega, \Gamma \sqcup \Phi)$ ” und
aus 4 “ $(\Omega, \Gamma \sqcup \Phi) = (\Omega, \Phi \sqcup \Gamma)$ ”

folgt: $\alpha = (\Omega, \Phi \sqcup \Gamma).$

6: Aus 5 “ $\alpha = (\Omega, \Phi \sqcup \Gamma)$ ” und
aus 3.1 “ $(\Omega, \Phi \sqcup \Gamma) \in x.\sqcup.y$ ”

folgt: $\alpha \in x.\sqcup.y.$

Ergo **Thema2.1**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in y.\sqcup.x) \Rightarrow (\alpha \in x.\sqcup.y).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\text{A2} \mid “y.\sqcup.x \subseteq x.\sqcup.y”}$$

2.3: Aus **A1** gleich “ $x.\sqcup.y \subseteq y.\sqcup.x$ ” und
aus **A2** gleich “ $y.\sqcup.x \subseteq x.\sqcup.y$ ”

folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$x.\sqcup.y = y.\sqcup.x.$$

□

247-11. Bereits mehrfach implizit verwendet werden nun einige “Funktions-Eigenschaften” explizit festgehalten:

247-11(Satz)

Aus “ $\square$ Algebra in A ” und ...

- a) ... und “ f Funktion” folgt “ $p_{\square}f, f_{\square}p$ Funktion”.
- b) ... und “ f, g Funktion” folgt “ $f_{\square}g, g_{\square}f$ Funktion”.

Beweis 247-11 a) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion}).$

- 1: Aus VS gleich “ $\square$ Algebra in $A \dots$ ”
folgt via **93-6**:

$\square$ Funktion.

- 2.1: Aus 1 “ $\square$ Funktion” und
aus VS gleich “ $\dots f$ Funktion”

folgt via **243-7**:

$p_{\square}f$ Funktion

- 2.2: Aus 1 “ $\square$ Funktion” und
aus VS gleich “ $\dots f$ Funktion”

folgt via **243-7**:

$f_{\square}p$ Funktion

b) VS gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion}).$

- 1: Aus VS gleich “ $\square$ Algebra in $A \dots$ ”
folgt via **93-6**:

$\square$ Funktion.

- 2.1: Aus 1 “ $\square$ Funktion” und
aus VS gleich “ $\dots f, g$ Funktion”

folgt via **243-7**:

$f_{\square}g$ Funktion

- 2.2: Aus 1 “ $\square$ Funktion”,
aus VS gleich “ $\dots g$ Funktion” und
aus VS gleich “ $\dots f \dots$ Funktion”

folgt via **243-7**:

$g_{\square}f$ Funktion

$\square$

RECH-Fortsetzung.

$$p +. x, x .+ p, x .+. y.$$

$$p \cdot. x, x \cdot. p, x \cdot\cdot y.$$

$$p -. x, x \cdot- p, x \cdot-. y.$$

$$p \div. x, x \div. p, x \div\cdot y.$$

Ersterstellung: 08/05/13

Letzte Änderung: 08/05/13

RECH-Notation. Fortsetzung. In Fortsetzung der RECH-Notation werden nun die Klassen $p \square x$, $x \square p$, $x \square y$ für $\square = A, S, M, D$ mit eigenen Abkürzungen versehen. Hierfür eine eigene Notations-Bezeichnung einzuführen erscheint mir mehr zu verwirren als Vorteile zu bringen:

RECH-Notation

$$41) \quad p +. x = p_A.x.$$

$$42) \quad x .+ p = x_A.p.$$

$$43) \quad x .+. y = x_A.y.$$

$$44) \quad p \cdot x = p_M.x.$$

$$45) \quad x \cdot p = x_M.p.$$

$$46) \quad x \cdot\cdot y = x_M.y.$$

$$47) \quad p -. x = p_S.x.$$

$$48) \quad x \cdot - p = x_S.p.$$

$$49) \quad x \cdot\cdot y = x_S.y.$$

$$50) \quad p :. x = p_D.x.$$

$$51) \quad x :. p = x_D.p.$$

$$52) \quad x :. y = x_D.y.$$

248-1. Als Vorbereitung für Weiteres wird nun bewiesen, dass A, M kommutativ auf $\mathbb{A}$ sind:

248-1(Satz)

- a) A kommutativ auf $\mathbb{A}$.
- b) M kommutativ auf $\mathbb{A}$.

Beweis 248-1

RECH-Notation.

a)

Thema1

$$\alpha, \beta \in \mathbb{A}.$$

Via **FSA** gilt:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha + \beta = \beta + \alpha).$$

Konsequenz via **210-1(Def)**:

A kommutativ auf $\mathbb{A}$.

b)

Thema1

$$\alpha, \beta \in \mathbb{A}.$$

Via **KGM** gilt:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

Ergo **Thema1**:

$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha).$$

Konsequenz via **210-1(Def)**:

M kommutativ auf $\mathbb{A}$.

□

248-2. Da es sich bei $\mathbf{A}$ um eine Algebra in $\mathbb{A}$ handelt ergeben sich die nunmehrigen Aussagen ohne viel Mühe aus bereits Bekanntem:

248-2(Satz)

- a) Aus " $w \in p + . x$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p + \Phi))$ ".
- b) Aus " $(q, r) \in p + . x$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = p + \Omega)$ ".
- c) Aus " $(q, r) \in x$ " und " p, r Zahl" folgt " $(q, p + r) \in p + . x$ ".
- d) Aus " $w \in x . + p$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi + p))$ ".
- e) Aus " $(q, r) \in x . + p$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = \Omega + p)$ ".
- f) Aus " $(q, r) \in x$ " und " p, r Zahl" folgt " $(q, r + p) \in x . + p$ ".
- g) Aus " $w \in x . + . y$ " folgt " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi + \Gamma))$ ".
- h) Aus " $(q, r) \in x . + . y$ " folgt " $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (r = \Phi + \Gamma)$ ".
- i) Aus " $(q, r) \in x$ " und " $(q, s) \in y$ " und " r, s Zahl"
folgt " $(q, r + s) \in x . + . y$ ".

RECH-Notation.

Beweis 248-2 a) VS gleich

$$w \in p +. x.$$

- 1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $w \in p +. x$ "
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, p + \Phi)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

p Zahl

2.2: Aus 1 " $\dots \Phi \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

Φ Zahl.

- 3: Aus 1 " $\dots \exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ",
aus 2.2 " Φ Zahl" und
aus 1 " $\dots w = (\Omega, p + \Phi)$ "

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p + \Phi))$$

b) VS gleich

$$(q, r) \in p +. x.$$

- 1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $(q, r) \in p +. x$ "
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (r = p + \Omega).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

p Zahl

2.2: Aus 1 " $\dots \Omega \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

Ω Zahl.

- 3: Aus 1 " $\dots \exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ",
aus 2.2 " Ω Zahl" und
aus 1 " $\dots r = p + \Omega$ "

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = p + \Omega)$$

Beweis 248-2 c) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge (p, r \text{ Zahl}).$$

1: Aus VS gleich "... p, r Zahl"
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, r \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ " und
aus 1 " $p, r \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-1**:

$$(q, p + r) \in p +. x.$$

d) VS gleich

$$w \in x +. p.$$

1: Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $w \in x +. p$ "
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, \Phi + p)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 "... $\Phi \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi \text{ Zahl.}$$

3: Aus 1 "... $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ",
aus 2.2 " $\Phi \text{ Zahl}$ " und
aus 1 "... $w = (\Omega, \Phi + p)$ "

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi + p))$$

Beweis **248-2 e)** VS gleich

$$(q, r) \in x . + p.$$

- 1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $(q, r) \in x . + p$ "
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (r = \Omega + p).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

p Zahl

2.2: Aus 1 " $\dots \Omega \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

Ω Zahl.

- 3: Aus 1 " $\dots \exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ",
aus 2.2 " Ω Zahl" und
aus 1 " $\dots r = \Omega + p$ "

folgt:

$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = \Omega + p)$

f) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge (p, r \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich " $\dots p, r \text{ Zahl}$ "
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, r \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ " und
aus 1 " $p, r \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-1**:

$$(q, r + p) \in x . + p.$$

g) VS gleich

$$w \in x . + . y.$$

- 1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $w \in x . + . y$ "
folgt via **247-1**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, \Phi + \Gamma)).$$

- 2: Aus 1 " $\dots \Phi, \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ "
folgt via **95-4(Def)**:

Φ, Γ Zahl.

- 3: Aus 1 " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \dots$ ",
aus 2 " Φ, Γ Zahl" und
aus 1 " $\dots w = (\Omega, \Phi + \Gamma)$ "
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi + \Gamma)).$$

Beweis 248-2 h) VS gleich

$$(q, r) \in x .+ . y.$$

- 1: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus **VS** gleich “ $(q, r) \in x .+ . y$ ”

folgt via **247-1**:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (r = \Phi + \Gamma).$$

- 2: Aus 1 “ $\dots \Phi, \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi, \Gamma \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \dots$ ”,

aus 2 “ $\Phi, \Gamma \text{ Zahl}$ ” und

aus 1 “ $\dots r = \Phi + \Gamma$ ”

folgt:
$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (r = \Phi + \Gamma).$$

i) **VS** gleich

$$((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge (r, s \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus **VS** gleich “ $\dots r, s \text{ Zahl}$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$r, s \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”,

aus **VS** gleich “ $(q, r) \in x \dots$ ”,

aus **VS** gleich “ $\dots (q, s) \in y \dots$ ” und

aus 1 “ $r, s \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-1**:

$$(q, r + s) \in x .+ . y.$$

□

248-3. Nun werden Definitions- und Bild-Bereich von $p +. x$, $x .+ p$, $x .+. y$ thematisiert:

248-3(Satz)

- a) $\text{dom}(p +. x) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- b) $\text{dom}(x .+ p) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- c) $\text{dom}(x .+. y) = x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.
- d) $\text{dom}(p +. x) = \text{dom}(x .+ p)$.
- e) $\text{dom}(x .+. y) = \text{dom}(y .+. x)$.
- f) $\text{ran}(p +. x) \subseteq \mathbb{A}$.
- g) $\text{ran}(x .+ p) \subseteq \mathbb{A}$.
- h) $\text{ran}(x .+. y) \subseteq \mathbb{A}$.

RECH-Notation.

Beweis 248-3

1.a): Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(p +. x) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.b): Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x .+ p) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.c): Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x .+ . y) = x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.d): Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(p +. x) = \text{dom}(x .+ p).$$

1.e): Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x .+ . y) = \text{dom}(y .+ . x).$$

1.f): Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(p +. x) \subseteq \mathbb{A}.$$

1.g): Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(x .+ p) \subseteq \mathbb{A}.$$

1.h): Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(x .+ . y) \subseteq \mathbb{A}.$$

□

248-4. Je nachdem, ob es sich p um eine Zahl oder nicht handelt, stellen sich die Definitions-Bereiche von $p +. x$ und $x .+ p$ unterschiedlich dar:

248-4(Satz)

- a) Aus “ p Zahl”
folgt “ $\text{dom}(p +. x) = x^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $\text{dom}(x .+ p) = x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.
- b) Aus “ $p \notin \mathbb{A}$ ” folgt “ $\text{dom}(p +. x) = 0$ ” und “ $\text{ran}(p +. x) = 0$ ”
und “ $p +. x = 0$ ”.
- c) Aus “ $p \notin \mathbb{A}$ ” folgt “ $\text{dom}(x .+ p) = 0$ ” und “ $\text{ran}(x .+ p) = 0$ ”
und “ $x .+ p = 0$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 248-4 a) VS gleich

p Zahl.

1: Aus VS gleich “ p Zahl”
folgt via **95-4(Def)**:

$p \in \mathbb{A}$.

2.1: Aus **AAII** “A Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**:

$$\text{dom}(p +. x) = x^{-1}[\mathbb{A}]$$

2.2: Aus **AAII** “A Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**:

$$\text{dom}(x .+ p) = x^{-1}[\mathbb{A}]$$

b) VS gleich

$p \notin \mathbb{A}$.

Aus **AAII** “A Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $p \notin \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**: $(\text{dom}(p +. x) = 0) \wedge (\text{ran}(p +. x) = 0) \wedge (p +. x = 0).$

c) VS gleich

$p \notin \mathbb{A}$.

Aus **AAII** “A Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $p \notin \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**: $(\text{dom}(x .+ p) = 0) \wedge (\text{ran}(x .+ p) = 0) \wedge (x .+ p = 0).$

□

248-5. Es steht das vorliegende, gefällige Kriterium für $q \in \text{dom}(p + . x)$ zur Verfügung:

248-5(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(p + . x)$.

ii) $q \in \text{dom}(x . + p)$.

iii) “ p Zahl” und “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-5** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \text{ VS gleich}$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(p + . x)$ "
folgt via **247-4**:

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \text{ VS gleich}$

1.1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(x . + p)$ "
folgt via **247-4**:

1.2: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(x . + p)$ "

folgt via **247-4**:

2: Aus 1.1 " $p \in \mathbb{A}$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}} \text{ VS gleich}$

1: Aus **VS** gleich " $p \text{ Zahl. } \dots$ "
folgt via **95-4(Def)**:

2: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus 1 " $p \in \mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $\dots q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ "
folgt via **247-4**:

$$q \in \text{dom}(p + . x).$$

$$q \in \text{dom}(x . + p).$$

$$q \in \text{dom}(x . + p).$$

$$p \in \mathbb{A}.$$

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$$

$$p \text{ Zahl}$$

$$(p \text{ Zahl}) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$$p \in \mathbb{A}.$$

$$q \in \text{dom}(p + . x).$$

□

248-6. Nun steht ein Kriterium für $q \in \text{dom}(x .+. y)$ zur Verfügung:

248-6(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi) sind äquivalent:

- i) $q \in \text{dom}(x .+. y)$.
- ii) $q \in \text{dom}(y .+. x)$.
- iii) $q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.
- iv) $q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- v) “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $q \in y^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.
- vi) “ $q \in y^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-6** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \text{ VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(x .+. y).$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(x .+. y)$ "
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(y .+. x).$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \text{ VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(y .+. x).$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(y .+. x)$ "
folgt via **247-5**:

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)}} \text{ VS gleich}$

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$ "
folgt via **247-5**:

$$q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}].$$

$\boxed{\text{iv)} \Rightarrow \text{v)}} \text{ VS gleich}$

$$q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}].$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}]$ "
folgt via **247-5**:

$$(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$\boxed{\text{v)} \Rightarrow \text{vi)}} \text{ VS gleich}$

$$(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}]).$$

Aus **VS** gleich " $(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}])$ "
folgt:

$$(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$\boxed{\text{vi)} \Rightarrow \text{i)}} \text{ VS gleich}$

$$(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}])$ "
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(x .+. y).$$

□

248-7. Ist f eine Funktion, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(p +. f)$ und für $q \in \text{dom}(f +. p)$ zur Verfügung:

248-7(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) f Funktion.

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(p +. f)$.

ii) $q \in \text{dom}(f +. p)$.

iii) $p, f(q)$ Zahl.

RECH-Notation.

Beweis **248-7** $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(p + . f).$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ "f Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(p + . f)$ "
 folgt via **247-6**:

$$q \in \text{dom}(f . + p).$$

$\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(f . + p).$$

1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ "f Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(f . + p)$ "
 folgt via **247-6**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \text{ Zahl.}$$

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ VS gleich

$$p, f(q) \text{ Zahl.}$$

1: Aus VS gleich " $p, f(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ "f Funktion" und
 aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-6**:

$$q \in \text{dom}(p + . f).$$

□

248-8. Sind f, g Funktionen, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(f .+. g)$ und für $q \in \text{dom}(g .+. f)$ zur Verfügung:

248-8(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$ f, g Funktion.

...sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(f .+. g)$.

ii) $q \in \text{dom}(g .+. f)$.

iii) $f(q), g(q)$ Zahl.

RECH-Notation.

Beweis **248-8** $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(f .+. g).$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ "f, g Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(f .+. g)$ "
 folgt via **247-7**:

$$q \in \text{dom}(g .+. f).$$

$\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(g .+. f).$$

1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ "f, g Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(g .+. f)$ "
 folgt via **247-7**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \text{ Zahl.}$$

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ VS gleich

$$f(q), g(q) \text{ Zahl.}$$

1: Aus VS gleich " $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ "f, g Funktion" und
 aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-7**:

$$q \in \text{dom}(f .+. g).$$

□

248-9. Nun wird das “Element-Sein” in $p + \cdot f$, $f \cdot + p$ für Funktionen f untersucht:

248-9(Satz)

Aus “ f Funktion” und ...

- a) ... und “ $w \in p + \cdot f$ ” folgt “ p Zahl“
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p + f(\Omega)))$ ”.
- b) ... und “ $(q, r) \in p + \cdot f$ ” folgt “ $p, f(q)$ Zahl“ und
“ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = p + f(q)$ ”.
- c) ... und “ $p, f(q)$ Zahl”
folgt “ $(q, p + f(q)) \in p + \cdot f$ ” und “ $(p + \cdot f)(q) = p + f(q)$ ”.
- d) ... und “ $q \in \text{dom } (p + \cdot f)$ ” folgt “ $(p + \cdot f)(q) = p + f(q)$ ”.
- e) ... und “ $w \in f \cdot + p$ ” folgt “ p Zahl“
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) + p))$ ”.
- f) ... und “ $(q, r) \in f \cdot + p$ ” folgt “ $p, f(q)$ Zahl“ und
“ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = f(q) + p$ ”.
- g) ... und “ $p, f(q)$ Zahl”
folgt “ $(q, f(q) + p) \in f \cdot + p$ ” und “ $(f \cdot + p)(q) = f(q) + p$ ”.
- h) ... und “ $q \in \text{dom } (f \cdot + p)$ ” folgt “ $(f \cdot + p)(q) = f(q) + p$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-9 a)** VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in p +. f).$$

- 1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich "... $w \in p +. f$ "
 folgt via **247-8**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, p + f(\Omega))).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 "... $f(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(\Omega) \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 "... $\exists \Omega : \Omega \in \text{dom } f \dots$ ",
 aus 2.2 " $f(\Omega) \text{ Zahl}$ " und
 aus 1 "... $w = (\Omega, p + f(\Omega))$ "

folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p + f(\Omega)))$$

b) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in p +. f).$$

- 1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich "... $(q, r) \in p +. f$ "
 folgt via **247-8**:

$$(p, f(q) \in \mathbb{A}) \wedge (q \in \text{dom } f) \wedge (r = p + f(q)).$$

2.1: Aus 1 " $p \dots \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.3: Aus 1 "... $f(q) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q) \text{ Zahl}$$

2.4: Aus 1

folgt:

$$r = p + f(q)$$

Beweis **248-9 c)** VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich "... $p, f(q)$ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-8**:

$$((q, p + f(q)) \in p + \cdot f) \wedge ((p + \cdot f)(q) = p + f(q)).$$

d) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom}(p + \cdot f)).$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus VS gleich "... $q \in \text{dom}(p + \cdot f)$ "
folgt via **247-8**:

$$(p + \cdot f)(q) = p + f(q).$$

e) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f \cdot + p).$$

- 1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus VS gleich "... $w \in f \cdot + p$ "
folgt via **247-8**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) + p)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 "... $f(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(\Omega) \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 "... $\exists \Omega : \Omega \in \text{dom } f \dots$ ",
aus 2.2 " $f(\Omega)$ Zahl" und
aus 1 "... $w = (\Omega, f(\Omega) + p)$ "

folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) + p))$$

Beweis 248-9 f) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f .+ p).$$

1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich " $\dots (q, r) \in f .+ p$ "
 folgt via **247-8**: $(p, f(q) \in \mathbb{A}) \wedge (q \in \text{dom } f) \wedge (r = f(q) + p).$

2.1: Aus 1 " $p \dots \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.3: Aus 1 " $\dots f(q) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q) \text{ Zahl}$$

2.4: Aus 1

folgt:

$$r = f(q) + p$$

g) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \text{ Zahl}).$$

1: Aus VS gleich " $\dots p, f(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**: $p, f(q) \in \mathbb{A}.$

2: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-8**: $((q, f(q) + p) \in f .+ p) \wedge ((f .+ p)(q) = f(q) + p).$

h) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f .+ p)).$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich " $\dots q \in \text{dom } (f .+ p)$ "
 folgt via **247-8**:

$$(f .+ p)(q) = f(q) + p.$$

□

248-10. Vielleicht am häufigsten kommt $f .+. g$ zum Einsatz, wenn f, g Funktionen ist. Für diesen Fall ist Vorliegendes entworfen:

248-10(Satz)

Aus “ f, g Funktion” und ...

- a) ... und “ $w \in f .+. g$ ”
 folgt “ $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl})$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) + g(\Omega)))$ ”.
- b) ... und “ $(q, r) \in f .+. g$ ”
 folgt “ $q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ ” und “ $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ ”
 und “ $r = f(q) + g(q)$ ”.
- c) ... und “ $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ ” folgt “ $(q, f(q) + g(q)) \in f .+. g$ ”
 und “ $(f .+. g)(q) = f(q) + g(q)$ ”.
- d) ... und “ $q \in \text{dom } (f .+. g)$ ” folgt “ $(f .+. g)(q) = f(q) + g(q)$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 248-10 a) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f .+. g)$.

- 1: Aus **AAII** “ A Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f, g Funktion...” und
 aus VS gleich “... $w \in f .+. g$ ”
 folgt via **247-9**:
 $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) + g(\Omega)))$.
- 2: Aus 1 “... $f(\Omega), g(\Omega) \in \mathbb{A}$...”
 folgt via **95-4(Def)**:
 $f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl}$.
- 3: Aus 1 “ $\exists \Omega : \Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$...”,
 aus 2 “ $f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl}$ ” und
 aus 1 “... $w = (\Omega, f(\Omega) + g(\Omega))$ ”
 folgt:
 $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl})$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) + g(\Omega)))$.

Beweis **248-10** b) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f .+. g).$$

- 1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus VS gleich "... $(q, r) \in f .+. g$ "
 folgt via **247-9**:

$$(q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(q), g(q) \in \mathbb{A}) \wedge (r = f(q) + g(q)).$$

2.1: Aus 1

folgt:

$$q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$$

2.2: Aus 1 "... $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$..."

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \text{ Zahl}$$

2.3: Aus 1

folgt:

$$r = f(q) + g(q)$$

c) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (f(q), g(q) \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich "... $f(q), g(q)$ Zahl"
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-9**:

$$((q, f(q) + g(q)) \in f .+. g) \wedge ((f .+. g)(q) = f(q) + g(q)).$$

d) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f .+. g)).$$

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus VS gleich "... $q \in \text{dom } (f .+. g)$ "
 folgt via **247-9**:

$$(f .+. g)(q) = f(q) + g(q).$$

□

248-11. Wenig überraschend gilt $p +. x = x .+ p$ und $x .+ y = y .+ x$. Falls f eine Funktion ist, so sind $p +. f$ und $f .+ p$ Funktionen. Falls f, g Funktionen sind, sind $f .+ g$ und $g .+ f$ Funktionen:

248-11(Satz)

- a) $p +. x = x .+ p$.
- b) $x .+ y = y .+ x$.
- c) Aus " f Funktion" folgt " $p +. f, f .+ p$ Funktion".
- d) Aus " f, g Funktion" folgt " $f .+ g, g .+ f$ Funktion".

RECH-Notation.

Beweis 248-11 a)

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **248-1** "A kommutativ auf $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-10**:

$$p +. x = x .+ p.$$

b)

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **248-1** "A kommutativ auf $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-10**:

$$x .+ y = y .+ x.$$

c) VS gleich

f Funktion.

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " f Funktion"
folgt via **247-11**:

$$p +. f, f .+ p \text{ Funktion.}$$

d) VS gleich

f, g Funktion.

Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " f, g Funktion"
folgt via **247-11**:

$$f .+ g, g .+ f \text{ Funktion.}$$

□

248-12. Da es sich bei $\mathbf{M}$ um eine Algebra in $\mathbf{A}$ handelt ergeben sich die nunmehrigen Aussagen ohne viel Mühe aus bereits Bekanntem:

248-12(Satz)

- a) Aus " $w \in p \cdot x$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p \cdot \Phi))$ ".
- b) Aus " $(q, r) \in p \cdot x$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = p \cdot \Omega)$ ".
- c) Aus " $(q, r) \in x$ " und " p, r Zahl" folgt " $(q, p \cdot r) \in p \cdot x$ ".
- d) Aus " $w \in x \cdot p$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi \cdot p))$ ".
- e) Aus " $(q, r) \in x \cdot p$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = \Omega \cdot p)$ ".
- f) Aus " $(q, r) \in x$ " und " p, r Zahl" folgt " $(q, r \cdot p) \in x \cdot p$ ".
- g) Aus " $w \in x \cdot \cdot y$ " folgt " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi \cdot \Gamma))$ ".
- h) Aus " $(q, r) \in x \cdot \cdot y$ " folgt " $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (r = \Phi \cdot \Gamma)$ ".
- i) Aus " $(q, r) \in x$ " und " $(q, s) \in y$ " und " r, s Zahl"
folgt " $(q, r \cdot s) \in x \cdot \cdot y$ ".

RECH-Notation.

Beweis **248-12** a) VS gleich

$$w \in p \cdot x.$$

- 1: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $w \in p \cdot x$ ”
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, p \cdot \Phi)).$$

- 2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

- 2.2: Aus 1 “ $\dots \Phi \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
aus 2.2 “ $\Phi \text{ Zahl}$ ” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, p \cdot \Phi)$ ”

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p \cdot \Phi))$$

b) VS gleich

$$(q, r) \in p \cdot x.$$

- 1: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $(q, r) \in p \cdot x$ ”
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (r = p \cdot \Omega).$$

- 2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

- 2.2: Aus 1 “ $\dots \Omega \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Omega \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 2.2 “ $\Omega \text{ Zahl}$ ” und
aus 1 “ $\dots r = p \cdot \Omega$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = p \cdot \Omega)$$

Beweis 248-12 c) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge (p, r \text{ Zahl}).$$

1: Aus VS gleich "... p, r Zahl"
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, r \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ " und
aus 1 " $p, r \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-1**:

$$(q, p \cdot r) \in p \cdot x.$$

d) VS gleich

$$w \in x \cdot p.$$

1: Aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $w \in x \cdot p$ "
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, \Phi \cdot p)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 "... $\Phi \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi \text{ Zahl.}$$

3: Aus 1 "... $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ",
aus 2.2 " $\Phi \text{ Zahl}$ " und
aus 1 "... $w = (\Omega, \Phi \cdot p)$ "

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi \cdot p))$$

Beweis **248-12 e)** VS gleich

$$(q, r) \in x \cdot p.$$

- 1: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $(q, r) \in x \cdot p$ ”
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (r = \Omega \cdot p).$$

2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 “ $\dots \Omega \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Omega \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 2.2 “ $\Omega \text{ Zahl}$ ” und
aus 1 “ $\dots r = \Omega \cdot p$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = \Omega \cdot p)$$

f) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge (p, r \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots p, r \text{ Zahl}$ ”
folgt via **95-4(Def)**:
- 2: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
aus VS gleich “ $(q, r) \in x \dots$ ” und
aus 1 “ $p, r \in \mathbb{A}$ ”
folgt via **247-1**:

$$p, r \in \mathbb{A}.$$

$$(q, r \cdot p) \in x \cdot p.$$

g) VS gleich

$$w \in x \cdot y.$$

- 1: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $w \in x \cdot y$ ”
folgt via **247-1**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, \Phi \cdot \Gamma)).$$

2: Aus 1 “ $\dots \Phi, \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi, \Gamma \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \dots$ ”,
aus 2 “ $\Phi, \Gamma \text{ Zahl}$ ” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Phi \cdot \Gamma)$ ”

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi \cdot \Gamma)).$$

Beweis 248-12 h) VS gleich

$$(q, r) \in x \cdot y.$$

- 1: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
 aus VS gleich " $(q, r) \in x \cdot y$ "
 folgt via **247-1**:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (r = \Phi \cdot \Gamma).$$

- 2: Aus 1 " $\dots \Phi, \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi, \Gamma \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 " $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \dots$ ",
 aus 2 " $\Phi, \Gamma \text{ Zahl}$ " und
 aus 1 " $\dots r = \Phi \cdot \Gamma$ "

folgt: $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (r = \Phi \cdot \Gamma).$

i) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge (r, s \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich " $\dots r, s \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$r, s \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ ",
 aus VS gleich " $\dots (q, s) \in y \dots$ " und
 aus 1 " $r, s \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-1**:

$$(q, r \cdot s) \in x \cdot y.$$

□

248-13. Nun werden Definitions- und Bild-Bereich von $p \cdot x$, $x \cdot p$, $x \cdot y$ thematisiert:

248-13(Satz)

- a) $\text{dom}(p \cdot x) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- b) $\text{dom}(x \cdot p) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- c) $\text{dom}(x \cdot y) = x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.
- d) $\text{dom}(p \cdot x) = \text{dom}(x \cdot p)$.
- e) $\text{dom}(x \cdot y) = \text{dom}(y \cdot x)$.
- f) $\text{ran}(p \cdot x) \subseteq \mathbb{A}$.
- g) $\text{ran}(x \cdot p) \subseteq \mathbb{A}$.
- h) $\text{ran}(x \cdot y) \subseteq \mathbb{A}$.

RECH-Notation.

Beweis 248-13

1.a): Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(p \cdot x) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.b): Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x \cdot p) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.c): Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x \cdot y) = x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.d): Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(p \cdot x) = \text{dom}(x \cdot p).$$

1.e): Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x \cdot y) = \text{dom}(y \cdot x).$$

1.f): Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(p \cdot x) \subseteq \mathbb{A}.$$

1.g): Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(x \cdot p) \subseteq \mathbb{A}.$$

1.h): Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(x \cdot y) \subseteq \mathbb{A}.$$

□

248-14. Je nachdem, ob es sich p um eine Zahl oder nicht handelt, stellen sich die Definitions-Bereiche von $p \cdot x$ und $x \cdot p$ unterschiedlich dar:

248-14(Satz)

- a) Aus “ p Zahl”
folgt “ $\text{dom}(p \cdot x) = x^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $\text{dom}(x \cdot p) = x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.
- b) Aus “ $p \notin \mathbb{A}$ ” folgt “ $\text{dom}(p \cdot x) = 0$ ” und “ $\text{ran}(p \cdot x) = 0$ ”
und “ $p \cdot x = 0$ ”.
- c) Aus “ $p \notin \mathbb{A}$ ” folgt “ $\text{dom}(x \cdot p) = 0$ ” und “ $\text{ran}(x \cdot p) = 0$ ”
und “ $x \cdot p = 0$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 248-14 a) VS gleich

p Zahl.

1: Aus VS gleich “ p Zahl”
folgt via **95-4(Def)**:

$p \in \mathbb{A}$.

2.1: Aus **AAII** “M Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**:

$$\text{dom}(p \cdot x) = x^{-1}[\mathbb{A}]$$

2.2: Aus **AAII** “M Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**:

$$\text{dom}(x \cdot p) = x^{-1}[\mathbb{A}]$$

b) VS gleich

$p \notin \mathbb{A}$.

Aus **AAII** “M Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $p \notin \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**: $(\text{dom}(p \cdot x) = 0) \wedge (\text{ran}(p \cdot x) = 0) \wedge (p \cdot x = 0)$.

c) VS gleich

$p \notin \mathbb{A}$.

Aus **AAII** “M Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $p \notin \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**: $(\text{dom}(x \cdot p) = 0) \wedge (\text{ran}(x \cdot p) = 0) \wedge (x \cdot p = 0)$.

□

248-15. Es steht das vorliegende, gefällige Kriterium für $q \in \text{dom}(p \cdot . x)$ zur Verfügung:

248-15(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

- i) $q \in \text{dom}(p \cdot . x)$.
- ii) $q \in \text{dom}(x \cdot . p)$.
- iii) “ p Zahl” und “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-15** $\boxed{\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(p \cdot x).$$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(p \cdot x)$ "
folgt via **247-4**:

$$q \in \text{dom}(x \cdot p).$$

$\boxed{\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(x \cdot p).$$

1.1: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(x \cdot p)$ "
folgt via **247-4**:

$$p \in \mathbb{A}.$$

1.2: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(x \cdot p)$ "

folgt via **247-4**:

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$$

2: Aus 1.1 " $p \in \mathbb{A}$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

$\boxed{\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}}$ VS gleich

$$(p \text{ Zahl}) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

1: Aus **VS** gleich " $p \text{ Zahl} \dots$ "
folgt via **95-4(Def)**:

$$p \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus 1 " $p \in \mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $\dots q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ "
folgt via **247-4**:

$$q \in \text{dom}(p \cdot x).$$

□

248-16. Nun steht ein Kriterium für $q \in \text{dom}(x \cdot y)$ zur Verfügung:

248-16(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi) sind äquivalent:

- i) $q \in \text{dom}(x \cdot y)$.
- ii) $q \in \text{dom}(y \cdot x)$.
- iii) $q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.
- iv) $q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- v) " $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ " und " $q \in y^{-1}[\mathbb{A}]$ ".
- vi) " $q \in y^{-1}[\mathbb{A}]$ " und " $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ".

RECH-Notation.

Beweis **248-16** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$q \in \text{dom}(x \cdot y).$$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(x \cdot y)$ "
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(y \cdot x).$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$q \in \text{dom}(y \cdot x).$$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(y \cdot x)$ "
folgt via **247-5**:

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$ "
folgt via **247-5**:

$$q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}].$$

$\boxed{\text{iv)} \Rightarrow \text{v)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}].$$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}]$ "
folgt via **247-5**:

$$(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$\boxed{\text{v)} \Rightarrow \text{vi)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}]).$$

Aus **VS** gleich " $(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}])$ "
folgt:

$$(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$\boxed{\text{vi)} \Rightarrow \text{i)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **VS** gleich " $(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}])$ "
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(x \cdot y).$$

□

248-17. Ist f eine Funktion, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(p \cdot f)$ und für $q \in \text{dom}(f \cdot p)$ zur Verfügung:

248-17(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) f Funktion.

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(p \cdot f)$.

ii) $q \in \text{dom}(f \cdot p)$.

iii) $p, f(q)$ Zahl.

RECH-Notation.

Beweis **248-17** $\boxed{\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(p \cdot f).$$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(p \cdot f)$ "
 folgt via **247-6**:

$$q \in \text{dom}(f \cdot p).$$

$\boxed{\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(f \cdot p).$$

1: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(f \cdot p)$ "
 folgt via **247-6**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \text{ Zahl.}$$

$\boxed{\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ VS gleich

$$p, f(q) \text{ Zahl.}$$

1: Aus VS gleich " $p, f(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-6**:

$$q \in \text{dom}(p \cdot f).$$

□

248-18. Sind f, g Funktionen, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(f \circ g)$ und für $q \in \text{dom}(g \circ f)$ zur Verfügung:

248-18(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$ f, g Funktion.

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(f \circ g)$.

ii) $q \in \text{dom}(g \circ f)$.

iii) $f(q), g(q)$ Zahl.

RECH-Notation.

Beweis **248-18** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \quad \text{VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(f \cdot g).$$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(f \cdot g)$ "
 folgt via **247-7**:

$$q \in \text{dom}(g \cdot f).$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \quad \text{VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(g \cdot f).$$

1: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus **VS** gleich " $q \in \text{dom}(g \cdot f)$ "
 folgt via **247-7**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \text{ Zahl.}$$

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}} \quad \text{VS gleich}$

$$f(q), g(q) \text{ Zahl.}$$

1: Aus **VS** gleich " $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-7**:

$$q \in \text{dom}(f \cdot g).$$

□

248-19. Nun wird das “Element-Sein” in $p \cdot f$, $f \cdot p$ für Funktionen f untersucht:

248-19(Satz)

Aus “ f Funktion” und ...

- a) ... und “ $w \in p \cdot f$ ” folgt “ p Zahl”
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p \cdot f(\Omega)))$ ”.
- b) ... und “ $(q, r) \in p \cdot f$ ” folgt “ $p, f(q)$ Zahl” und
“ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = p \cdot f(q)$ ”.
- c) ... und “ $p, f(q)$ Zahl”
folgt “ $(q, p \cdot f(q)) \in p \cdot f$ ” und “ $(p \cdot f)(q) = p \cdot f(q)$ ”.
- d) ... und “ $q \in \text{dom } (p \cdot f)$ ” folgt “ $(p \cdot f)(q) = p \cdot f(q)$ ”.
- e) ... und “ $w \in f \cdot p$ ” folgt “ p Zahl”
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) \cdot p))$ ”.
- f) ... und “ $(q, r) \in f \cdot p$ ” folgt “ $p, f(q)$ Zahl” und
“ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = f(q) \cdot p$ ”.
- g) ... und “ $p, f(q)$ Zahl”
folgt “ $(q, f(q) \cdot p) \in f \cdot p$ ” und “ $(f \cdot p)(q) = f(q) \cdot p$ ”.
- h) ... und “ $q \in \text{dom } (f \cdot p)$ ” folgt “ $(f \cdot p)(q) = f(q) \cdot p$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-19** a) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in p \cdot f).$$

- 1: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
aus VS gleich “ f Funktion...” und
aus VS gleich “ $\dots w \in p \cdot f$ ”
folgt via **247-8**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, p \cdot f(\Omega))).$$

2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 “ $\dots f(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(\Omega) \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega : \Omega \in \text{dom } f \dots$ ”,
aus 2.2 “ $f(\Omega) \text{ Zahl}$ ” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, p \cdot f(\Omega))$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p \cdot f(\Omega)))$$

b) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in p \cdot f).$$

- 1: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
aus VS gleich “ f Funktion...” und
aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in p \cdot f$ ”
folgt via **247-8**:

$$(p, f(q) \in \mathbb{A}) \wedge (q \in \text{dom } f) \wedge (r = p \cdot f(q)).$$

2.1: Aus 1 “ $p \dots \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.3: Aus 1 “ $\dots f(q) \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q) \text{ Zahl}$$

2.4: Aus 1

folgt:

$$r = p \cdot f(q)$$

Beweis 248-19 c) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \text{ Zahl}).$

1: Aus VS gleich "... $p, f(q)$ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-8**:

$$((q, p \cdot f(q)) \in p \cdot f) \wedge ((p \cdot f)(q) = p \cdot f(q)).$$

d) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom}(p \cdot f)).$

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus VS gleich "... $q \in \text{dom}(p \cdot f)$ "
folgt via **247-8**:

$$(p \cdot f)(q) = p \cdot f(q).$$

e) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f \cdot p).$

1: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus VS gleich "... $w \in f \cdot p$ "
folgt via **247-8**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) \cdot p)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$p \text{ Zahl}$

2.2: Aus 1 "... $f(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$f(\Omega) \text{ Zahl.}$

3: Aus 1 "... $\exists \Omega : \Omega \in \text{dom } f \dots$ ",
aus 2.2 " $f(\Omega) \text{ Zahl}$ " und
aus 1 "... $w = (\Omega, f(\Omega) \cdot p)$ "

folgt:

$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) \cdot p))$
--

Beweis 248-19 f) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f \cdot p).$$

- 1: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f Funktion...” und
 aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in f \cdot p$ ”
 folgt via **247-8**:

$$(p, f(q) \in \mathbb{A}) \wedge (q \in \text{dom } f) \wedge (r = f(q) \cdot p).$$

2.1: Aus 1 “ $p \dots \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.3: Aus 1 “ $\dots f(q) \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q) \text{ Zahl}$$

2.4: Aus 1

folgt:

$$r = f(q) \cdot p$$

g) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots p, f(q) \text{ Zahl}$ ”
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f Funktion...” und
 aus 1 “ $p, f(q) \in \mathbb{A}$ ”
 folgt via **247-8**:

$$((q, f(q) \cdot p) \in f \cdot p) \wedge ((f \cdot p)(q) = f(q) \cdot p).$$

h) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f \cdot p)).$$

Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f Funktion...” und
 aus VS gleich “ $\dots q \in \text{dom } (f \cdot p)$ ”
 folgt via **247-8**:

$$(f \cdot p)(q) = f(q) \cdot p.$$

□

248-20. Vielleicht am häufigsten kommt $f \cdot g$ zum Einsatz, wenn f, g Funktionen ist. Für diesen Fall ist Vorliegendes entworfen:

248-20(Satz)

Aus “ f, g Funktion” und ...

- a) ... und “ $w \in f \cdot g$ ”
 folgt “ $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl})$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) \cdot g(\Omega)))$ ”.
- b) ... und “ $(q, r) \in f \cdot g$ ”
 folgt “ $q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ ” und “ $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ ”
 und “ $r = f(q) \cdot g(q)$ ”.
- c) ... und “ $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ ” folgt “ $(q, f(q) \cdot g(q)) \in f \cdot g$ ”
 und “ $(f \cdot g)(q) = f(q) \cdot g(q)$ ”.
- d) ... und “ $q \in \text{dom } (f \cdot g)$ ” folgt “ $(f \cdot g)(q) = f(q) \cdot g(q)$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 248-20 a) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f \cdot g)$.

- 1: Aus **AAII** “M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f, g Funktion...” und
 aus VS gleich “... $w \in f \cdot g$ ”
 folgt via **247-9**:
 $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) \cdot g(\Omega)))$.
- 2: Aus 1 “... $f(\Omega), g(\Omega) \in \mathbb{A}$...”
 folgt via **95-4(Def)**:
 $f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl}$.
- 3: Aus 1 “ $\exists \Omega : \Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \dots$ ”,
 aus 2 “ $f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl}$ ” und
 aus 1 “... $w = (\Omega, f(\Omega) \cdot g(\Omega))$ ”
 folgt:
 $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl})$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) \cdot g(\Omega)))$.

Beweis **248-20** b) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f \cdot g).$$

- 1: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f, g Funktion...” und
 aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in f \cdot g$ ”
 folgt via **247-9**:

$$(q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(q), g(q) \in \mathbb{A}) \wedge (r = f(q) \cdot g(q)).$$

2.1: Aus 1

folgt:

$$q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$$

2.2: Aus 1 “ $\dots f(q), g(q) \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \text{ Zahl}$$

2.3: Aus 1

folgt:

$$r = f(q) \cdot g(q)$$

c) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (f(q), g(q) \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots f(q), g(q) \text{ Zahl}$ ”
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f, g Funktion...” und
 aus 1 “ $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ ”
 folgt via **247-9**:

$$((q, f(q) \cdot g(q)) \in f \cdot g) \wedge ((f \cdot g)(q) = f(q) \cdot g(q)).$$

d) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f \cdot g)).$$

Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f, g Funktion...” und
 aus VS gleich “ $\dots q \in \text{dom } (f \cdot g)$ ”
 folgt via **247-9**:

$$(f \cdot g)(q) = f(q) \cdot g(q).$$

□

248-21. Wenig überraschend gilt $p \cdot x = x \cdot p$ und $x \cdot y = y \cdot x$. Falls f eine Funktion ist, so sind $p \cdot f$ und $f \cdot p$ Funktionen. Falls f, g Funktionen sind, sind $f \cdot g$ und $g \cdot f$ Funktionen:

248-21(Satz)

- a) $p \cdot x = x \cdot p$.
- b) $x \cdot y = y \cdot x$.
- c) Aus " f Funktion" folgt " $p \cdot f, f \cdot p$ Funktion".
- d) Aus " f, g Funktion" folgt " $f \cdot g, g \cdot f$ Funktion".

RECH-Notation.

Beweis 248-21 a)

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **248-1** "M kommutativ auf $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-10**:

$$p \cdot x = x \cdot p.$$

b)

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus **248-1** "M kommutativ auf $\mathbb{A}$ "
folgt via **247-10**:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

c) VS gleich

f Funktion.

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " f Funktion"
folgt via **247-11**:

$$p \cdot f, f \cdot p \text{ Funktion.}$$

d) VS gleich

f, g Funktion.

Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " f, g Funktion"
folgt via **247-11**:

$$f \cdot g, g \cdot f \text{ Funktion.}$$

□

248-22. Da es sich bei **S** um eine Algebra in **A** handelt ergeben sich die nunmehrigen Aussagen ohne viel Mühe aus bereits Bekanntem:

248-22(Satz)

- a) Aus " $w \in p - . x$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p - \Phi))$ ".
- b) Aus " $(q, r) \in p - . x$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = p - \Omega)$ ".
- c) Aus " $(q, r) \in x$ " und " p, r Zahl" folgt " $(q, p - r) \in p - . x$ ".
- d) Aus " $w \in x . - p$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi - p))$ ".
- e) Aus " $(q, r) \in x . - p$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = \Omega - p)$ ".
- f) Aus " $(q, r) \in x$ " und " p, r Zahl" folgt " $(q, r - p) \in x . - p$ ".
- g) Aus " $w \in x . - . y$ " folgt " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi - \Gamma))$ ".
- h) Aus " $(q, r) \in x . - . y$ " folgt " $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (r = \Phi - \Gamma)$ ".
- i) Aus " $(q, r) \in x$ " und " $(q, s) \in y$ " und " r, s Zahl"
folgt " $(q, r - s) \in x . - . y$ ".

RECH-Notation.

Beweis 248-22 a) VS gleich

$$w \in p - . x.$$

- 1: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $w \in p - . x$ ”
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, p - \Phi)).$$

2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

p Zahl

2.2: Aus 1 “ $\dots \Phi \in \mathbb{A} \dots$ ”
folgt via **95-4(Def)**:

Φ Zahl.

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
aus 2.2 “ Φ Zahl” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, p - \Phi)$ ”

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p - \Phi))$$

b) VS gleich

$$(q, r) \in p - . x.$$

- 1: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $(q, r) \in p - . x$ ”
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (r = p - \Omega).$$

2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

p Zahl

2.2: Aus 1 “ $\dots \Omega \in \mathbb{A} \dots$ ”
folgt via **95-4(Def)**:

Ω Zahl.

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 2.2 “ Ω Zahl” und
aus 1 “ $\dots r = p - \Omega$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = p - \Omega)$$

Beweis 248-22 c) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge (p, r \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich "... p, r Zahl"
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, r \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **244-7**"S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ " und
aus 1 " $p, r \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-1**:

$$(q, p - r) \in p - x.$$

d) VS gleich

$$w \in x - p.$$

- 1: Aus **244-7**"S Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $w \in x - p$ "
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, \Phi - p)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 "... $\Phi \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 "... $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ",
aus 2.2 " $\Phi \text{ Zahl}$ " und
aus 1 "... $w = (\Omega, \Phi - p)$ "

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi - p))$$

Beweis **248-22 e)** VS gleich

$$(q, r) \in x . - p.$$

- 1: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $(q, r) \in x . - p$ ”
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (r = \Omega - p).$$

2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

p Zahl

2.2: Aus 1 “ $\dots \Omega \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

 Ω Zahl.

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 2.2 “ Ω Zahl” und
aus 1 “ $\dots r = \Omega - p$ ”

folgt:

$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = \Omega - p)$

f) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge (p, r \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots p, r \text{ Zahl}$ ”
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, r \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
aus VS gleich “ $(q, r) \in x \dots$ ” und
aus 1 “ $p, r \in \mathbb{A}$ ”
folgt via **247-1**:

$$(q, r - p) \in x . - p.$$

g) VS gleich

$$w \in x . - . y.$$

- 1: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $w \in x . - . y$ ”
folgt via **247-1**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, \Phi - \Gamma)).$$

- 2: Aus 1 “ $\dots \Phi, \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ ”
folgt via **95-4(Def)**:

 Φ, Γ Zahl.

- 3: Aus 1 “ $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \dots$ ”,
aus 2 “ Φ, Γ Zahl” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, \Phi - \Gamma)$ ”
folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi - \Gamma)).$$

Beweis 248-22 h) VS gleich

$$(q, r) \in x \dot{-} y.$$

- 1: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $(q, r) \in x \dot{-} y$ ”

folgt via **247-1**:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (r = \Phi - \Gamma).$$

- 2: Aus 1 “ $\dots \Phi, \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi, \Gamma \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \dots$ ”,

aus 2 “ $\Phi, \Gamma \text{ Zahl}$ ” und

aus 1 “ $\dots r = \Phi - \Gamma$ ”

$$\text{folgt: } \exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (r = \Phi - \Gamma).$$

i) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge (r, s \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots r, s \text{ Zahl}$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$r, s \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ”,

aus VS gleich “ $(q, r) \in x \dots$ ”,

aus VS gleich “ $\dots (q, s) \in y \dots$ ” und

aus 1 “ $r, s \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-1**:

$$(q, r - s) \in x \dot{-} y.$$

□

248-23. Nun werden Definitions- und Bild-Bereich von $p - . x$, $x . - p$, $x . - . y$ thematisiert:

248-23(Satz)

- a) $\text{dom}(p - . x) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- b) $\text{dom}(x . - p) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- c) $\text{dom}(x . - . y) = x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.
- d) $\text{dom}(p - . x) = \text{dom}(x . - p)$.
- e) $\text{dom}(x . - . y) = \text{dom}(y . - . x)$.
- f) $\text{ran}(p - . x) \subseteq \mathbb{A}$.
- g) $\text{ran}(x . - p) \subseteq \mathbb{A}$.
- h) $\text{ran}(x . - . y) \subseteq \mathbb{A}$.

RECH-Notation.

Beweis 248-23

1.a): Aus 244-7 "S Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via 247-2:

$$\text{dom}(p - . x) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.b): Aus 244-7 "S Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via 247-2:

$$\text{dom}(x . - p) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.c): Aus 244-7 "S Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via 247-2:

$$\text{dom}(x . - . y) = x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.d): Aus 244-7 "S Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via 247-2:

$$\text{dom}(p - . x) = \text{dom}(x . - p).$$

1.e): Aus 244-7 "S Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via 247-2:

$$\text{dom}(x . - . y) = \text{dom}(y . - . x).$$

1.f): Aus 244-7 "S Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via 247-2:

$$\text{ran}(p - . x) \subseteq \mathbb{A}.$$

1.g): Aus 244-7 "S Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via 247-2:

$$\text{ran}(x . - p) \subseteq \mathbb{A}.$$

1.h): Aus 244-7 "S Algebra in $\mathbb{A}$ "
folgt via 247-2:

$$\text{ran}(x . - . y) \subseteq \mathbb{A}.$$

□

248-24. Je nachdem, ob es sich p um eine Zahl oder nicht handelt, stellen sich die Definitions-Bereiche von $p - . x$ und $x . - p$ unterschiedlich dar:

248-24(Satz)

- a) Aus “ p Zahl”
folgt “ $\text{dom}(p - . x) = x^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $\text{dom}(x . - p) = x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.
- b) Aus “ $p \notin \mathbb{A}$ ” folgt “ $\text{dom}(p - . x) = 0$ ” und “ $\text{ran}(p - . x) = 0$ ”
und “ $p - . x = 0$ ”.
- c) Aus “ $p \notin \mathbb{A}$ ” folgt “ $\text{dom}(x . - p) = 0$ ” und “ $\text{ran}(x . - p) = 0$ ”
und “ $x . - p = 0$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 248-24 a) VS gleich

p Zahl.

1: Aus VS gleich “ p Zahl”
folgt via **95-4(Def)**:

$p \in \mathbb{A}$.

2.1: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**:

$$\text{dom}(p - . x) = x^{-1}[\mathbb{A}]$$

2.2: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**:

$$\text{dom}(x . - p) = x^{-1}[\mathbb{A}]$$

b) VS gleich

$p \notin \mathbb{A}$.

Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $p \notin \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**: $(\text{dom}(p - . x) = 0) \wedge (\text{ran}(p - . x) = 0) \wedge (p - . x = 0).$

c) VS gleich

$p \notin \mathbb{A}$.

Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $p \notin \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**: $(\text{dom}(x . - p) = 0) \wedge (\text{ran}(x . - p) = 0) \wedge (x . - p = 0).$

□

248-25. Es steht das vorliegende, gefällige Kriterium für $q \in \text{dom}(p - . x)$ zur Verfügung:

248-25(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(p - . x)$.

ii) $q \in \text{dom}(x . - p)$.

iii) “ p Zahl” und “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-25** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \quad \text{VS gleich}$

Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $q \in \text{dom}(p - . x)$ "
folgt via **247-4**:

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \quad \text{VS gleich}$

1.1: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $q \in \text{dom}(x . - p)$ "
folgt via **247-4**:

$$p \in \mathbb{A}.$$

1.2: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $q \in \text{dom}(x . - p)$ "

folgt via **247-4**:

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$$

2: Aus 1.1 " $p \in \mathbb{A}$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}} \quad \text{VS gleich}$

$$(p \text{ Zahl}) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

1: Aus VS gleich " $p \text{ Zahl} \dots$ "
folgt via **95-4(Def)**:

$$p \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus 1 " $p \in \mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $\dots q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ "
folgt via **247-4**:

$$q \in \text{dom}(p - . x).$$

□

248-26. Nun steht ein Kriterium für $q \in \text{dom}(x \cdot - \cdot y)$ zur Verfügung:

248-26(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi) sind äquivalent:

- i) $q \in \text{dom}(x \cdot - \cdot y)$.
- ii) $q \in \text{dom}(y \cdot - \cdot x)$.
- iii) $q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.
- iv) $q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- v) “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $q \in y^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.
- vi) “ $q \in y^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-26** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \text{ VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(x \cdot - \cdot y).$$

Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(x \cdot - \cdot y)$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(y \cdot - \cdot x).$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \text{ VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(y \cdot - \cdot x).$$

Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(y \cdot - \cdot x)$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)}} \text{ VS gleich}$

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}].$$

$\boxed{\text{iv)} \Rightarrow \text{v)}} \text{ VS gleich}$

$$q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}].$$

Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”
folgt via **247-5**:

$$(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$\boxed{\text{v)} \Rightarrow \text{vi)}} \text{ VS gleich}$

$$(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}]).$$

Aus VS gleich “ $(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}])$ ”
folgt:

$$(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$\boxed{\text{vi)} \Rightarrow \text{i)}} \text{ VS gleich}$

$$(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}])$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(x \cdot - \cdot y).$$

□

248-27. Ist f eine Funktion, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(p - . f)$ und für $q \in \text{dom}(f . - p)$ zur Verfügung:

248-27(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) f Funktion.

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(p - . f)$.

ii) $q \in \text{dom}(f . - p)$.

iii) $p, f(q)$ Zahl.

RECH-Notation.

Beweis **248-27** $\boxed{\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(p - . f).$$

Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(p - . f)$ "
 folgt via **247-6**:

$$q \in \text{dom}(f . - p).$$

$\boxed{\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(f . - p).$$

1: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(f . - p)$ "
 folgt via **247-6**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \text{ Zahl.}$$

$\boxed{\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ VS gleich

$$p, f(q) \text{ Zahl.}$$

1: Aus VS gleich " $p, f(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-6**:

$$q \in \text{dom}(p - . f).$$

□

248-28. Sind f, g Funktionen, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(f \cdot - \cdot g)$ und für $q \in \text{dom}(g \cdot - \cdot f)$ zur Verfügung:

248-28(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$ f, g Funktion.

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(f \cdot - \cdot g)$.

ii) $q \in \text{dom}(g \cdot - \cdot f)$.

iii) $f(q), g(q)$ Zahl.

RECH-Notation.

Beweis **248-28** $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(f \cdot - \cdot g).$$

Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(f \cdot - \cdot g)$ "
 folgt via **247-7**:

$$q \in \text{dom}(g \cdot - \cdot f).$$

$\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(g \cdot - \cdot f).$$

1: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(g \cdot - \cdot f)$ "
 folgt via **247-7**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \text{ Zahl.}$$

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ VS gleich

$$f(q), g(q) \text{ Zahl.}$$

1: Aus VS gleich " $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-7**:

$$q \in \text{dom}(f \cdot - \cdot g).$$

□

248-29. Nun wird das “Element-Sein” in $p - . f$, $f . - p$ für Funktionen f untersucht:

248-29(Satz)

Aus “ f Funktion” und ...

- a) ... und “ $w \in p - . f$ ” folgt “ p Zahl“
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p - f(\Omega)))$ ”.
- b) ... und “ $(q, r) \in p - . f$ ” folgt “ $p, f(q)$ Zahl“ und
“ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = p - f(q)$ ”.
- c) ... und “ $p, f(q)$ Zahl”
folgt “ $(q, p - f(q)) \in p - . f$ ” und “ $(p - . f)(q) = p - f(q)$ ”.
- d) ... und “ $q \in \text{dom } (p - . f)$ ” folgt “ $(p - . f)(q) = p - f(q)$ ”.
- e) ... und “ $w \in f . - p$ ” folgt “ p Zahl“
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) - p))$ ”.
- f) ... und “ $(q, r) \in f . - p$ ” folgt “ $p, f(q)$ Zahl“ und
“ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = f(q) - p$ ”.
- g) ... und “ $p, f(q)$ Zahl”
folgt “ $(q, f(q) - p) \in f . - p$ ” und “ $(f . - p)(q) = f(q) - p$ ”.
- h) ... und “ $q \in \text{dom } (f . - p)$ ” folgt “ $(f . - p)(q) = f(q) - p$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-29** a) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in p - . f).$$

- 1: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich "... $w \in p - . f$ "
 folgt via **247-8**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, p - f(\Omega))).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 "... $f(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(\Omega) \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 "... $\exists \Omega : \Omega \in \text{dom } f \dots$ ",
 aus 2.2 " $f(\Omega) \text{ Zahl}$ " und
 aus 1 "... $w = (\Omega, p - f(\Omega))$ "

folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p - f(\Omega)))$$

b) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in p - . f).$$

- 1: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich "... $(q, r) \in p - . f$ "
 folgt via **247-8**:

$$(p, f(q) \in \mathbb{A}) \wedge (q \in \text{dom } f) \wedge (r = p - f(q)).$$

2.1: Aus 1 " $p \dots \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.3: Aus 1 "... $f(q) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q) \text{ Zahl}$$

2.4: Aus 1

folgt:

$$r = p - f(q)$$

Beweis **248-29** c) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \text{ Zahl}).$

- 1: Aus VS gleich "... $p, f(q)$ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-8**:

$$((q, p - f(q)) \in p - . f) \wedge ((p - . f)(q) = p - f(q)).$$

d) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom}(p - . f)).$

Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus VS gleich "... $q \in \text{dom}(p - . f)$ "
folgt via **247-8**:

$$(p - . f)(q) = p - f(q).$$

e) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f . - p).$

- 1: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus VS gleich "... $w \in f . - p$ "
folgt via **247-8**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) - p)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$p \text{ Zahl}$

2.2: Aus 1 "... $f(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$f(\Omega) \text{ Zahl}.$

- 3: Aus 1 "... $\exists \Omega : \Omega \in \text{dom } f \dots$ ",
aus 2.2 " $f(\Omega) \text{ Zahl}$ " und
aus 1 "... $w = (\Omega, f(\Omega) - p)$ "

folgt:

$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) - p))$
--

Beweis 248-29 f) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f \cdot - p).$$

1: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich " $\dots (q, r) \in f \cdot - p$ "
 folgt via **247-8**: $(p, f(q) \in \mathbb{A}) \wedge (q \in \text{dom } f) \wedge (r = f(q) - p).$

2.1: Aus 1 " $p \dots \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.3: Aus 1 " $\dots f(q) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q) \text{ Zahl}$$

2.4: Aus 1

folgt:

$$r = f(q) - p$$

g) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \text{ Zahl}).$$

1: Aus VS gleich " $\dots p, f(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**: $p, f(q) \in \mathbb{A}.$

2: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-8**: $((q, f(q) - p) \in f \cdot - p) \wedge ((f \cdot - p)(q) = f(q) - p).$

h) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f \cdot - p)).$$

Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich " $\dots q \in \text{dom } (f \cdot - p)$ "
 folgt via **247-8**:

$$(f \cdot - p)(q) = f(q) - p.$$

□

248-30. Vielleicht am häufigsten kommt $f \dot{-} g$ zum Einsatz, wenn f, g Funktionen ist. Für diesen Fall ist Vorliegendes entworfen:

248-30(Satz)

Aus “ f, g Funktion” und ...

- a) ... und “ $w \in f \dot{-} g$ ”
 folgt “ $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl})$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) - g(\Omega)))$ ”.
- b) ... und “ $(q, r) \in f \dot{-} g$ ”
 folgt “ $q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ ” und “ $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ ”
 und “ $r = f(q) - g(q)$ ”.
- c) ... und “ $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ ” folgt “ $(q, f(q) - g(q)) \in f \dot{-} g$ ”
 und “ $(f \dot{-} g)(q) = f(q) - g(q)$ ”.
- d) ... und “ $q \in \text{dom } (f \dot{-} g)$ ” folgt “ $(f \dot{-} g)(q) = f(q) - g(q)$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 248-30 a) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f \dot{-} g).$

- 1: Aus **244-7** “S Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f, g Funktion...” und
 aus VS gleich “... $w \in f \dot{-} g$ ”
 folgt via **247-9**:
 $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) - g(\Omega))).$
- 2: Aus 1 “... $f(\Omega), g(\Omega) \in \mathbb{A}$...”
 folgt via **95-4(Def)**:
 $f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl}.$
- 3: Aus 1 “ $\exists \Omega : \Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \dots$ ”,
 aus 2 “ $f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl}$ ” und
 aus 1 “... $w = (\Omega, f(\Omega) - g(\Omega))$ ”
 folgt:
 $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl})$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) - g(\Omega))).$

Beweis **248-30** b) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f \dot{-} g).$$

- 1: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus VS gleich "... $(q, r) \in f \dot{-} g$ "
 folgt via **247-9**:

$$(q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(q), g(q) \in \mathbb{A}) \wedge (r = f(q) - g(q)).$$

2.1: Aus 1

folgt:

$$q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$$

2.2: Aus 1 "... $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$..."

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \text{ Zahl}$$

2.3: Aus 1

folgt:

$$r = f(q) - g(q)$$

c) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (f(q), g(q) \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich "... $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-9**:

$$((q, f(q) - g(q)) \in f \dot{-} g) \wedge ((f \dot{-} g)(q) = f(q) - g(q)).$$

d) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f \dot{-} g)).$$

Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus VS gleich "... $q \in \text{dom } (f \dot{-} g)$ "
 folgt via **247-9**:

$$(f \dot{-} g)(q) = f(q) - g(q).$$

□

248-31. Falls f eine Funktion ist, so sind $p \dot{-} f$ und $f \dot{-} p$ Funktionen. Falls f, g Funktionen sind, sind $f \dot{-} g$ und $g \dot{-} f$ Funktionen:

248-31(Satz)

- a) Aus " f Funktion" folgt " $p \dot{-} f, f \dot{-} p$ Funktion".
 b) Aus " f, g Funktion" folgt " $f \dot{-} g, g \dot{-} f$ Funktion".

RECH-Notation.

Beweis 248-31 a) VS gleich

f Funktion.

Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ " und
 aus VS gleich " f Funktion"
 folgt via **247-11**:

$p \dot{-} f, f \dot{-} p$ Funktion.

b) VS gleich

f, g Funktion.

Aus **244-7** "S Algebra in $\mathbb{A}$ " und
 aus VS gleich " f, g Funktion"
 folgt via **247-11**:

$f \dot{-} g, g \dot{-} f$ Funktion.

□

248-32. Da es sich bei D um eine Algebra in $\mathbb{A}$ handelt ergeben sich die nunmehrigen Aussagen ohne viel Mühe aus bereits Bekanntem:

248-32(Satz)

- a) Aus " $w \in p :. x$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p : \Phi))$ ".
- b) Aus " $(q, r) \in p :. x$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = p : \Omega)$ ".
- c) Aus " $(q, r) \in x$ " und " p, r Zahl" folgt " $(q, p : r) \in p :. x$ ".
- d) Aus " $w \in x :. p$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi : p))$ ".
- e) Aus " $(q, r) \in x :. p$ " folgt " p Zahl"
und " $\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = \Omega : p)$ ".
- f) Aus " $(q, r) \in x$ " und " p, r Zahl" folgt " $(q, r\Phi : p) \in x :. p$ ".
- g) Aus " $w \in x :. y$ " folgt " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y)$
 $\wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi : \Gamma))$ ".
- h) Aus " $(q, r) \in x :. y$ " folgt " $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y)$
 $\wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (r = \Phi : \Gamma)$ ".
- i) Aus " $(q, r) \in x$ " und " $(q, s) \in y$ " und " r, s Zahl"
folgt " $(q, r : s) \in x :. y$ ".

RECH-Notation.

Beweis **248-32** a) VS gleich

$$w \in p :. x.$$

- 1: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $w \in p :. x$ ”
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, p : \Phi)).$$

- 2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

- 2.2: Aus 1 “ $\dots \Phi \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ”,
aus 2.2 “ $\Phi \text{ Zahl}$ ” und
aus 1 “ $\dots w = (\Omega, p : \Phi)$ ”

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p : \Phi))$$

b) VS gleich

$$(q, r) \in p :. x.$$

- 1: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $(q, r) \in p :. x$ ”
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (r = p : \Omega).$$

- 2.1: Aus 1 “ $p \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

- 2.2: Aus 1 “ $\dots \Omega \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Omega \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\dots \exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ”,
aus 2.2 “ $\Omega \text{ Zahl}$ ” und
aus 1 “ $\dots r = p : \Omega$ ”

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = p : \Omega)$$

Beweis 248-32 c) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge (p, r \text{ Zahl}).$$

1: Aus VS gleich "... p, r Zahl"
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, r \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ " und
aus 1 " $p, r \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-1**:

$$(q, p : r) \in p :. x.$$

d) VS gleich

$$w \in x :. p.$$

1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $w \in x :. p$ "
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, \Phi : p)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 "... $\Phi \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi \text{ Zahl.}$$

3: Aus 1 "... $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi) \in x \dots$ ",
aus 2.2 " $\Phi \text{ Zahl}$ " und
aus 1 "... $w = (\Omega, \Phi : p)$ "

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Phi \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi : p))$$

Beweis **248-32 e)** VS gleich

$$(q, r) \in x \therefore p.$$

- 1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $(q, r) \in x \therefore p$ "
folgt via **247-1**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (r = \Omega : p).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 " $\dots \Omega \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Omega \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 " $\dots \exists \Omega : (q, \Omega) \in x \dots$ ",
aus 2.2 " $\Omega \text{ Zahl}$ " und
aus 1 " $\dots r = \Omega : p$ "

folgt:

$$\exists \Omega : ((q, \Omega) \in x) \wedge (\Omega \text{ Zahl}) \wedge (r = \Omega : p)$$

f) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge (p, r \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich " $\dots p, r \text{ Zahl}$ "
folgt via **95-4(Def)**:
- 2: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " $(q, r) \in x \dots$ " und
aus 1 " $p, r \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-1**:

$$p, r \in \mathbb{A}.$$

$$(q, r : p) \in x \therefore p.$$

g) VS gleich

$$w \in x \therefore y.$$

- 1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ " und
aus VS gleich " $w \in x \therefore y$ "
folgt via **247-1**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, \Phi : \Gamma)).$$

2: Aus 1 " $\dots \Phi, \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi, \Gamma \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 " $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \dots$ ",
aus 2 " $\Phi, \Gamma \text{ Zahl}$ " und
aus 1 " $\dots w = (\Omega, \Phi : \Gamma)$ "

folgt:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, \Phi : \Gamma)).$$

Beweis 248-32 h) VS gleich

$$(q, r) \in x \dot{\vdash} y.$$

- 1: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
 aus VS gleich “ $(q, r) \in x \dot{\vdash} y$ ”
 folgt via **247-1**:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \in \mathbb{A}) \wedge (r = \Phi : \Gamma).$$

- 2: Aus 1 “ $\dots \Phi, \Gamma \in \mathbb{A} \dots$ ”
 folgt via **95-4(Def)**:

$$\Phi, \Gamma \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 “ $\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \dots$ ”,
 aus 2 “ $\Phi, \Gamma \text{ Zahl}$ ” und
 aus 1 “ $\dots r = \Phi : \Gamma$ ”
 folgt:

$$\exists \Phi, \Gamma : ((q, \Phi) \in x) \wedge ((q, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (r = \Phi : \Gamma).$$

i) VS gleich

$$((q, r) \in x) \wedge ((q, s) \in y) \wedge (r, s \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots r, s \text{ Zahl}$ ”
 folgt via **95-4(Def)**:

$$r, s \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ $(q, r) \in x \dots$ ”,
 aus VS gleich “ $\dots (q, s) \in y \dots$ ” und
 aus 1 “ $r, s \in \mathbb{A}$ ”
 folgt via **247-1**:

$$(q, r : s) \in x \dot{\vdash} y.$$

□

248-33. Nun werden Definitions- und Bild-Bereich von $p :. x$, $x :. p$, $x :. y$ thematisiert:

248-33(Satz)

- a) $\text{dom}(p :. x) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- b) $\text{dom}(x :. p) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- c) $\text{dom}(x :. y) = x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.
- d) $\text{dom}(p :. x) = \text{dom}(x :. p)$.
- e) $\text{dom}(x :. y) = \text{dom}(y :. x)$.
- f) $\text{ran}(p :. x) \subseteq \mathbb{A}$.
- g) $\text{ran}(x :. p) \subseteq \mathbb{A}$.
- h) $\text{ran}(x :. y) \subseteq \mathbb{A}$.

RECH-Notation.

Beweis 248-33

1.a) : Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(p :. x) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.b) : Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x :. p) \subseteq x^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.c) : Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x :. y) = x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

1.d) : Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(p :. x) = \text{dom}(x :. p).$$

1.e) : Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{dom}(x :. y) = \text{dom}(y :. x).$$

1.f) : Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(p :. x) \subseteq \mathbb{A}.$$

1.g) : Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(x :. p) \subseteq \mathbb{A}.$$

1.h) : Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”
folgt via **247-2**:

$$\text{ran}(x :. y) \subseteq \mathbb{A}.$$

□

248-34. Je nachdem, ob es sich p um eine Zahl oder nicht handelt, stellen sich die Definitions-Bereiche von $p :. x$ und $x :. p$ unterschiedlich dar:

248-34(Satz)

- a) Aus “ p Zahl”
folgt “ $\text{dom}(p :. x) = x^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $\text{dom}(x :. p) = x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.
- b) Aus “ $p \notin \mathbb{A}$ ” folgt “ $\text{dom}(p :. x) = 0$ ” und “ $\text{ran}(p :. x) = 0$ ”
und “ $p :. x = 0$ ”.
- c) Aus “ $p \notin \mathbb{A}$ ” folgt “ $\text{dom}(x :. p) = 0$ ” und “ $\text{ran}(x :. p) = 0$ ”
und “ $x :. p = 0$ ”.

RECH-Notation.

Beweis 248-34 a) VS gleich

p Zahl.

1: Aus VS gleich “ p Zahl”
folgt via **95-4(Def)**:

$p \in \mathbb{A}$.

2.1: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**:

$$\text{dom}(p :. x) = x^{-1}[\mathbb{A}]$$

2.2: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**:

$$\text{dom}(x :. p) = x^{-1}[\mathbb{A}]$$

b) VS gleich

$p \notin \mathbb{A}$.

Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $p \notin \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**: $(\text{dom}(p :. x) = 0) \wedge (\text{ran}(p :. x) = 0) \wedge (p :. x = 0)$.

c) VS gleich

$p \notin \mathbb{A}$.

Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $p \notin \mathbb{A}$ ”

folgt via **247-3**: $(\text{dom}(x :. p) = 0) \wedge (\text{ran}(x :. p) = 0) \wedge (x :. p = 0)$.

□

248-35. Es steht das vorliegende, gefällige Kriterium für $q \in \text{dom}(p :. x)$ zur Verfügung:

248-35(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

- i) $q \in \text{dom}(p :. x)$.
- ii) $q \in \text{dom}(x :. p)$.
- iii) “ p Zahl” und “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-35** $\boxed{\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(p :. x).$$

Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(p :. x)$ ”
folgt via **247-4**:

$$q \in \text{dom}(x :. p).$$

$\boxed{\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ VS gleich

$$q \in \text{dom}(x :. p).$$

1.1: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(x :. p)$ ”
folgt via **247-4**:

$$p \in \mathbb{A}.$$

1.2: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $q \in \text{dom}(x :. p)$ ”

folgt via **247-4**:

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$$

2: Aus 1.1 “ $p \in \mathbb{A}$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

$\boxed{\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ VS gleich

$$(p \text{ Zahl}) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

1: Aus VS gleich “ $p \text{ Zahl} \dots$ ”
folgt via **95-4(Def)**:

$$p \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
aus 1 “ $p \in \mathbb{A}$ ” und
aus VS gleich “ $\dots q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”
folgt via **247-4**:

$$q \in \text{dom}(p :. x).$$

□

248-36. Nun steht ein Kriterium für $q \in \text{dom}(x \dot{\vdash} y)$ zur Verfügung:

248-36(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi) sind äquivalent:

- i) $q \in \text{dom}(x \dot{\vdash} y)$.
- ii) $q \in \text{dom}(y \dot{\vdash} x)$.
- iii) $q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.
- iv) $q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}]$.
- v) “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $q \in y^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.
- vi) “ $q \in y^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-36** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$q \in \text{dom}(x \dots y).$$

Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus **VS** gleich “ $q \in \text{dom}(x \dots y)$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(y \dots x).$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$q \in \text{dom}(y \dots x).$$

Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus **VS** gleich “ $q \in \text{dom}(y \dots x)$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}].$$

Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus **VS** gleich “ $q \in x^{-1}[\mathbb{A}] \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}].$$

$\boxed{\text{iv)} \Rightarrow \text{v)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}].$$

Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus **VS** gleich “ $q \in y^{-1}[\mathbb{A}] \cap x^{-1}[\mathbb{A}]$ ”
folgt via **247-5**:

$$(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$\boxed{\text{v)} \Rightarrow \text{vi)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}]).$$

Aus **VS** gleich “ $(q \in x^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in y^{-1}[\mathbb{A}])$ ”
folgt:

$$(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

$\boxed{\text{vi)} \Rightarrow \text{i)}} \boxed{\text{VS}}$ gleich

$$(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}]).$$

Aus **244-8** “D Algebra in $\mathbb{A}$ ” und
aus **VS** gleich “ $(q \in y^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (q \in x^{-1}[\mathbb{A}])$ ”
folgt via **247-5**:

$$q \in \text{dom}(x \dots y).$$

□

248-37. Ist f eine Funktion, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(p :. f)$ und für $q \in \text{dom}(f :. p)$ zur Verfügung:

248-37(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) f Funktion.

...sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(p :. f)$.

ii) $q \in \text{dom}(f :. p)$.

iii) $p, f(q)$ Zahl.

RECH-Notation.

Beweis **248-37** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \quad \text{VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(p \cdot f).$$

Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(p \cdot f)$ "
 folgt via **247-6**:

$$q \in \text{dom}(f \cdot p).$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \quad \text{VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(f \cdot p).$$

1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(f \cdot p)$ "
 folgt via **247-6**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \text{ Zahl.}$$

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}} \quad \text{VS gleich}$

$$p, f(q) \text{ Zahl.}$$

1: Aus VS gleich " $p, f(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f Funktion" und
 aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-6**:

$$q \in \text{dom}(p \cdot f).$$

□

248-38. Sind f, g Funktionen, so steht ein gefälliges Kriterium für $q \in \text{dom}(f \cdot g)$ und für $q \in \text{dom}(g \cdot f)$ zur Verfügung:

248-38(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$ f, g Funktion.

... sind die Aussagen i), ii), iii) äquivalent:

i) $q \in \text{dom}(f \cdot g)$.

ii) $q \in \text{dom}(g \cdot f)$.

iii) $f(q), g(q)$ Zahl.

RECH-Notation.

Beweis **248-38** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}} \quad \text{VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(f \dots g).$$

Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(f \dots g)$ "
 folgt via **247-7**:

$$q \in \text{dom}(g \dots f).$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}} \quad \text{VS gleich}$

$$q \in \text{dom}(g \dots f).$$

1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus VS gleich " $q \in \text{dom}(g \dots f)$ "
 folgt via **247-7**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \text{ Zahl.}$$

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}} \quad \text{VS gleich}$

$$f(q), g(q) \text{ Zahl.}$$

1: Aus VS gleich " $f(q), g(q)$ Zahl"
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus $\rightarrow$ " f, g Funktion" und
 aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-7**:

$$q \in \text{dom}(f \dots g).$$

□

248-39. Nun wird das “Element-Sein” in $p :. f$, $f :. p$ für Funktionen f untersucht:

248-39(Satz)

Aus “ f Funktion” und ...

- a) ... und “ $w \in p :. f$ ” folgt “ p Zahl“
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p : f(\Omega)))$ ”.
- b) ... und “ $(q, r) \in p :. f$ ” folgt “ $p, f(q)$ Zahl“ und
“ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = p : f(q)$ ”.
- c) ... und “ $p, f(q)$ Zahl”
folgt “ $(q, p : f(q)) \in p :. f$ ” und “ $(p :. f)(q) = p : f(q)$ ”.
- d) ... und “ $q \in \text{dom } (p :. f)$ ” folgt “ $(p :. f)(q) = p : f(q)$ ”.
- e) ... und “ $w \in f :. p$ ” folgt “ p Zahl“
und “ $\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) : p))$ ”.
- f) ... und “ $(q, r) \in f :. p$ ” folgt “ $p, f(q)$ Zahl“ und
“ $q \in \text{dom } f$ ” und “ $r = f(q) : p$ ”.
- g) ... und “ $p, f(q)$ Zahl”
folgt “ $(q, f(q) : p) \in f :. p$ ” und “ $(f :. p)(q) = f(q) : p$ ”.
- h) ... und “ $q \in \text{dom } (f :. p)$ ” folgt “ $(f :. p)(q) = f(q) : p$ ”.

RECH-Notation.

Beweis **248-39** a) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in p :. f).$$

- 1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich " $\dots w \in p :. f$ "
 folgt via **247-8**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, p : f(\Omega))).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1 " $\dots f(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(\Omega) \text{ Zahl.}$$

- 3: Aus 1 " $\dots \exists \Omega : \Omega \in \text{dom } f \dots$ ",
 aus 2.2 " $f(\Omega) \text{ Zahl}$ " und
 aus 1 " $\dots w = (\Omega, p : f(\Omega))$ "

folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, p : f(\Omega)))$$

b) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in p :. f).$$

- 1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f Funktion..." und
 aus VS gleich " $\dots (q, r) \in p :. f$ "
 folgt via **247-8**:

$$(p, f(q) \in \mathbb{A}) \wedge (q \in \text{dom } f) \wedge (r = p : f(q)).$$

2.1: Aus 1 " $p \dots \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.3: Aus 1 " $\dots f(q) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q) \text{ Zahl}$$

2.4: Aus 1

folgt:

$$r = p : f(q)$$

Beweis 248-39 c) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \text{ Zahl}).$

1: Aus VS gleich "... $p, f(q)$ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

2: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus 1 " $p, f(q) \in \mathbb{A}$ "
folgt via **247-8**:

$$((q, p : f(q)) \in p :. f) \wedge ((p :. f)(q) = p : f(q)).$$

d) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom}(p :. f)).$

Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus VS gleich "... $q \in \text{dom}(p :. f)$ "
folgt via **247-8**:

$$(p :. f)(q) = p : f(q).$$

e) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f :. p).$

1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f Funktion..." und
aus VS gleich "... $w \in f :. p$ "
folgt via **247-8**:

$$p \in \mathbb{A} \text{ und } \exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) : p)).$$

2.1: Aus 1 " $p \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$p \text{ Zahl}$

2.2: Aus 1 "... $f(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ "

folgt via **95-4(Def)**:

$f(\Omega) \text{ Zahl}.$

3: Aus 1 "... $\exists \Omega : \Omega \in \text{dom } f \dots$ ",
aus 2.2 " $f(\Omega) \text{ Zahl}$ " und
aus 1 "... $w = (\Omega, f(\Omega) : p)$ "

folgt:

$\exists \Omega : (\Omega \in \text{dom } f) \wedge (f(\Omega) \text{ Zahl}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) : p))$
--

Beweis **248-39 f)** VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f \text{.} : p).$$

- 1: Aus **244-8**“D Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f Funktion...” und
 aus VS gleich “ $\dots (q, r) \in f \text{.} : p$ ”
 folgt via **247-8**:

$$(p, f(q) \in \mathbb{A}) \wedge (q \in \text{dom } f) \wedge (r = f(q) : p).$$

2.1: Aus 1 “ $p \dots \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$p \text{ Zahl}$$

2.2: Aus 1

folgt:

$$q \in \text{dom } f$$

2.3: Aus 1 “ $\dots f(q) \in \mathbb{A} \dots$ ”

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q) \text{ Zahl}$$

2.4: Aus 1

folgt:

$$r = f(q) : p$$

g) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (p, f(q) \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich “ $\dots p, f(q) \text{ Zahl}$ ”
 folgt via **95-4(Def)**:

$$p, f(q) \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **244-8**“D Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f Funktion...” und
 aus 1 “ $p, f(q) \in \mathbb{A}$ ”
 folgt via **247-8**:

$$((q, f(q) : p) \in f \text{.} : p) \wedge ((f \text{.} : p)(q) = f(q) : p).$$

h) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f \text{.} : p)).$$

Aus **244-8**“D Algebra in $\mathbb{A}$ ”,
 aus VS gleich “ f Funktion...” und
 aus VS gleich “ $\dots q \in \text{dom } (f \text{.} : p)$ ”
 folgt via **247-8**:

$$(f \text{.} : p)(q) = f(q) : p.$$

□

248-40. Vielleicht am häufigsten kommt $f \dot{\vdash} g$ zum Einsatz, wenn f, g Funktionen ist. Für diesen Fall ist Vorliegendes entworfen:

248-40(Satz)

Aus " f, g Funktion" und ...

- a) ... und " $w \in f \dot{\vdash} g$ "
folgt " $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl})$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) : g(\Omega)))$ ".
- b) ... und " $(q, r) \in f \dot{\vdash} g$ "
folgt " $q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$ " und " $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ "
und " $r = f(q) : g(q)$ ".
- c) ... und " $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ " folgt " $(q, f(q) : g(q)) \in f \dot{\vdash} g$ "
und " $(f \dot{\vdash} g)(q) = f(q) : g(q)$ ".
- d) ... und " $q \in \text{dom } (f \dot{\vdash} g)$ " folgt " $(f \dot{\vdash} g)(q) = f(q) : g(q)$ ".

RECH-Notation.

Beweis 248-40 a) VS gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in f \dot{\vdash} g)$.

- 1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
aus VS gleich " f, g Funktion..." und
aus VS gleich " $\dots w \in f \dot{\vdash} g$ "
folgt via **247-9**:
 $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \in \mathbb{A}) \wedge (w = (\Omega, f(\Omega) : g(\Omega)))$.
- 2: Aus 1 " $\dots f(\Omega), g(\Omega) \in \mathbb{A} \dots$ "
folgt via **95-4(Def)**:
 $f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl}$.
- 3: Aus 1 " $\exists \Omega : \Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g) \dots$ ",
aus 2 " $f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl}$ " und
aus 1 " $\dots w = (\Omega, f(\Omega) : g(\Omega))$ "
folgt:
 $\exists \Omega : (\Omega \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(\Omega), g(\Omega) \text{ Zahl})$
 $\wedge (w = (\Omega, f(\Omega) : g(\Omega)))$.

Beweis **248-40** b) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge ((q, r) \in f \dot{\vdash} g).$$

- 1: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus VS gleich "... $(q, r) \in f \dot{\vdash} g$ "
 folgt via **247-9**:

$$(q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)) \wedge (f(q), g(q) \in \mathbb{A}) \wedge (r = f(q) : g(q)).$$

2.1: Aus 1

folgt:

$$q \in (\text{dom } f) \cap (\text{dom } g)$$

2.2: Aus 1 "... $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$..."

folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \text{ Zahl}$$

2.3: Aus 1

folgt:

$$r = f(q) : g(q)$$

c) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (f(q), g(q) \text{ Zahl}).$$

- 1: Aus VS gleich "... $f(q), g(q) \text{ Zahl}$ "
 folgt via **95-4(Def)**:

$$f(q), g(q) \in \mathbb{A}.$$

- 2: Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus 1 " $f(q), g(q) \in \mathbb{A}$ "
 folgt via **247-9**:

$$((q, f(q) : g(q)) \in f \dot{\vdash} g) \wedge ((f \dot{\vdash} g)(q) = f(q) : g(q)).$$

d) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \text{dom } (f \dot{\vdash} g)).$$

Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ ",
 aus VS gleich " f, g Funktion..." und
 aus VS gleich "... $q \in \text{dom } (f \dot{\vdash} g)$ "
 folgt via **247-9**:

$$(f \dot{\vdash} g)(q) = f(q) : g(q).$$

□

248-41. Falls f eine Funktion ist, so sind $p \circ f$ und $f \circ p$ Funktionen. Falls f, g Funktionen sind, sind $f \circ g$ und $g \circ f$ Funktionen:

248-41(Satz)

- a) Aus " f Funktion" folgt " $p \circ f, f \circ p$ Funktion".
 b) Aus " f, g Funktion" folgt " $f \circ g, g \circ f$ Funktion".

RECH-Notation.

Beweis 248-41 a) VS gleich

f Funktion.

Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ " und
 aus VS gleich " f Funktion"
 folgt via **247-11**:

$p \circ f, f \circ p$ Funktion.

b) VS gleich

f, g Funktion.

Aus **244-8** "D Algebra in $\mathbb{A}$ " und
 aus VS gleich " f, g Funktion"
 folgt via **247-11**:

$f \circ g, g \circ f$ Funktion.

□

- **F. Erwe**, *Differential- und Integralrechnung. Band 1*,
B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1962.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt,
1970.
- matlab Version 7.2.0.294 (R2006a) 27.01.2006, *Dokumentation*.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).