

# **Zur nichtlinearen Simulation der Wärmeentwicklung in Elastomer-Kupplungen infolge schwingender Beanspruchung**

vorgelegt von  
Diplom-Ingenieur  
Kemal Öztürk  
aus Berlin

Von der Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades  
„Doktor der Ingenieurwissenschaften“  
-Dr.-Ing.- genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Prof. Dr.-Ing. Henning Jürgen Meyer (Vorsitzender)

Prof. Dr.-Ing. Heinz Mertens (Berichter)

Prof. Dr.-Ing. Robert Gasch (Berichter)

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 28.04.2006

Berlin 2006

D 83

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Konstruktion, Mikro- und Medizintechnik, Fachgebiet Konstruktionslehre der Technischen Universität Berlin.

Für die Betreuung der Arbeit bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.- Ing. H. Mertens.

Bedanken möchte ich mich zudem bei Herrn Prof. Dr.- Ing. R. Gasch für die kritische Durchsicht der Arbeit und seine nützlichen Anregungen.

Herrn Prof. Dr.- Ing. H. Meyer danke ich für die Übernahme des Vorsitzes im Promotionsausschuß.

Danken möchte ich an dieser Stelle allen Mitarbeitern des Fachgebiets Konstruktionslehre für die freundschaftliche und angenehme Atmosphäre am Institut.

Mein Dank gilt zudem meinen Studienarbeitern Herrn Dipl.-Ing. Oliver Capek, Dipl.-Ing. Andreas Möhrer, Dipl.-Ing. Daniel Steudel und Dipl.-Ing. Boris Gieseler für ihr hohes Engagement. Besonderer Dank gebührt dabei Herrn B. Gieseler, der mir als mein späterer Kollege am Institut, weiterhin wertvolle Anregungen geben konnte.

Mein Dank gilt auch dem Herrn Dr.-Ing. Stefan Narberhaus für das Korrekturlesen der Arbeit und dem Herrn Ludwig Rietschel für die Rettung mehrerer aktueller Dateien.

Bedanken möchte ich mich nicht zuletzt bei meiner Frau Eva für die liebevolle Unterstützung und das entgegengebrachte Verständnis während dieser nicht immer einfachen Zeit.

Hannover, im April 2006

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>0</b> | <b>Symbolverzeichnis</b>                                      | <b>1</b>  |
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                             | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Stand der Technik</b>                                      | <b>7</b>  |
| 2.1      | Das ABC-Konzept . . . . .                                     | 7         |
| 2.2      | Kupplungswirkmodelle . . . . .                                | 9         |
| 2.3      | Bauteilmodellierungen . . . . .                               | 11        |
| 2.4      | Materialgesetze . . . . .                                     | 16        |
| 2.5      | Alterung . . . . .                                            | 19        |
| 2.6      | FEM-Modellierungen . . . . .                                  | 24        |
| 2.7      | Zielsetzung der vorliegenden Arbeit . . . . .                 | 26        |
| <b>3</b> | <b>Theoretische Grundlagen</b>                                | <b>28</b> |
| 3.1      | Molekulare Struktur des gefüllten Elastomers . . . . .        | 28        |
| 3.2      | Finite-Elemente-Verfahren . . . . .                           | 32        |
| 3.3      | Materialbeschreibung auf der Grundlage der Kontinuumsmechanik | 36        |
| 3.3.1    | Hyperelastisches Gesetz für die Elastomermatrix . . . . .     | 38        |
| 3.3.2    | Materialgesetz von Pirscher . . . . .                         | 39        |
| 3.3.3    | Das Füllstoff-Materialgesetz . . . . .                        | 40        |
| 3.4      | Das hyperelastische Ogden-Modell . . . . .                    | 42        |
| 3.4.1    | Quasi-Inkompressibilität mit dem Ogden-Modell . . . . .       | 42        |
| 3.4.1.1  | Bestimmung des Cauchy-Spannungstensors $\mathbf{T}$ . .       | 45        |
| 3.5      | Theorie der Wärmeleitung . . . . .                            | 47        |
| 3.5.1    | Die Gesamtenergie eines Körpers . . . . .                     | 47        |

|          |                                                                      |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5.2    | Der erste Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .                      | 47        |
| 3.5.3    | Zugeführte Leistung . . . . .                                        | 48        |
| 3.5.4    | Die Hauptgleichungen der Energieerhaltung . . . . .                  | 48        |
| 3.6      | Wärmeleitung . . . . .                                               | 49        |
| 3.7      | Die Wärmeentwicklung infolge mechanischer Beanspruchung . . .        | 50        |
| <b>4</b> | <b>Durchführung der Versuche</b>                                     | <b>53</b> |
| 4.1      | Probekörperauswahl . . . . .                                         | 53        |
| 4.2      | Das Prüf- und Meßsystem . . . . .                                    | 56        |
| 4.3      | Auswahl der Kennwerte bei Messung der gedämpften Schwingungen        | 57        |
| 4.4      | Ergebnisse . . . . .                                                 | 61        |
| 4.4.1    | Kurzzeitversuche . . . . .                                           | 61        |
| 4.4.2    | Langzeitversuche . . . . .                                           | 63        |
| <b>5</b> | <b>Numerische Umsetzung des viskoplastischen Stoffgesetzes</b>       | <b>66</b> |
| 5.1      | Bestimmung des Verzerrungstensors . . . . .                          | 69        |
| 5.1.1    | Weitere Deformationsgradienten . . . . .                             | 72        |
| 5.2      | Ergebnisse . . . . .                                                 | 73        |
| 5.2.1    | Viskoplastische Berechnungen . . . . .                               | 73        |
| 5.2.2    | Berechnungen mit dem OGDEN-Ansatz . . . . .                          | 75        |
| 5.3      | UMAT-Erstellung für ABAQUS . . . . .                                 | 75        |
| 5.3.1    | Allgemeine Vorgehensweise . . . . .                                  | 76        |
| 5.3.2    | Angabe einer Tangentenmatrix für das Füllstoffgesetz . . .           | 78        |
| <b>6</b> | <b>Parameteroptimierung für das Materialmodell</b>                   | <b>80</b> |
| 6.1      | Auswahl des Optimierungsverfahrens . . . . .                         | 80        |
| 6.1.1    | Evolutionsstrategie [64] . . . . .                                   | 81        |
| 6.1.1.1  | Evolutionsstrategie am Beispiel eines Voigt-Kelvin-Modells . . . . . | 81        |
| 6.1.2    | Qualitätsfunktion . . . . .                                          | 84        |
| 6.1.3    | Der Optimierungsalgorithmus . . . . .                                | 85        |
| 6.2      | Die Parameter des Materialgesetzes . . . . .                         | 85        |

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6.2.1    | Zur Strategie der Kurvenanpassung . . . . .                        | 86        |
| 6.2.2    | Ergebnisse der Parameteranpassung . . . . .                        | 88        |
| 6.3      | Temperaturfunktionen für die Parameter des Materialgesetzes . .    | 90        |
| 6.4      | Schlußfolgerungen aus der Parameteroptimierung . . . . .           | 91        |
| 6.5      | Ein Modifizierungsvorschlag für Pirschers Materialgesetz . . . . . | 92        |
| <b>7</b> | <b>Numerische Berechnung der Wärmeentwicklung</b>                  | <b>93</b> |
| 7.1      | Eingabedaten für die Kupplung . . . . .                            | 94        |
| 7.1.1    | Materialkennwerte . . . . .                                        | 94        |
| 7.2      | Finite-Differenzen-Methode . . . . .                               | 95        |
| 7.2.1    | Differenzenquotienten . . . . .                                    | 96        |
| 7.2.2    | Ortsdiskretisierung . . . . .                                      | 96        |
| 7.3      | Finite Volumen . . . . .                                           | 97        |
| 7.3.1    | Kontrollvolumen (KV) . . . . .                                     | 97        |
| 7.3.2    | Auflösung der Integrale . . . . .                                  | 98        |
| 7.3.3    | Nicht-kartesisches Gitter . . . . .                                | 98        |
| 7.3.4    | Ortsdiskretisierung . . . . .                                      | 99        |
| 7.3.5    | Zeitdiskretisierung . . . . .                                      | 100       |
| 7.4      | Numerische Differentiation . . . . .                               | 101       |
| 7.5      | Randbedingungen . . . . .                                          | 101       |
| 7.5.1    | Zellenorientierte Kontrollvolumen . . . . .                        | 101       |
| 7.5.2    | Eckenorientierte Kontrollvolumen . . . . .                         | 103       |
| 7.5.3    | Gittergenerierung . . . . .                                        | 103       |
| 7.5.3.1  | Kartesisches Gitter . . . . .                                      | 103       |
| 7.5.3.2  | Strukturiertes Gitter . . . . .                                    | 104       |
| 7.5.3.3  | Streckung . . . . .                                                | 106       |
| 7.5.3.4  | Modellierung des physikalischen Gebietes . . . . .                 | 106       |
| 7.6      | Lösung mittels finiter Differenzen . . . . .                       | 107       |
| 7.6.1    | Diskretisierung der DGL bei instationärer Betrachtung . .          | 107       |
| 7.6.1.1  | Randbedingungen . . . . .                                          | 107       |
| 7.7      | Lösung mittels finiter Volumen . . . . .                           | 109       |

|          |                                                                    |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.7.1    | Diskretisierung der DGL bei instationärer Betrachtung . .          | 109        |
| 7.7.1.1  | Veränderliche Parameter . . . . .                                  | 109        |
| 7.7.1.2  | Randbedingungen . . . . .                                          | 109        |
| 7.8      | Ergebnisse . . . . .                                               | 110        |
| 7.9      | Instationäre Betrachtung . . . . .                                 | 111        |
| 7.10     | Kopplung der mechanischen und thermischen Berechnung . . . . .     | 111        |
| <b>8</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                                | <b>114</b> |
| <b>A</b> | <b>Zu den verwendeten Tensoren</b>                                 | <b>122</b> |
| A.1      | Bewegung eines Körpers und der Deformationsgradient . . . . .      | 122        |
| A.2      | Der Gradient . . . . .                                             | 126        |
| A.2.1    | Der Operator $\nabla$ . . . . .                                    | 126        |
| A.3      | Operationen mit $\nabla$ . . . . .                                 | 127        |
| A.4      | Die Zeitableitungen . . . . .                                      | 127        |
| A.5      | Verschiedene kontinuumsmechanische Größen . . . . .                | 127        |
| A.6      | Spureigenschaften . . . . .                                        | 127        |
| A.7      | Determinanten . . . . .                                            | 128        |
| A.8      | Inverse von Tensoren . . . . .                                     | 128        |
| A.9      | Ableitungen der Invarianten . . . . .                              | 129        |
| <b>B</b> | <b>Konsistenter Materialtangenten für elastische Deformationen</b> | <b>130</b> |
| B.1      | Inkrementelles Verfahren . . . . .                                 | 130        |
| B.2      | Verzerrungsinkremente . . . . .                                    | 131        |
| B.3      | Konsistenter Materialtangenten für FEM [57,75] . . . . .           | 131        |
| <b>C</b> | <b>Lineare Regressionsberechnung [76]</b>                          | <b>133</b> |

# Abbildungsverzeichnis

|      |                                                                                                                                                               |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Natürliche Zuordnung von Aussagegüte und Zeitaufwand für Produktunabhängige Berechnungs- und Bewertungsmethoden [53]. . .                                     | 8  |
| 2.2  | Geschichtliche Entwicklung rheologischer Modelle in der Elastomer-Kupplungsforschung. . . . .                                                                 | 9  |
| 2.3  | Abhängigkeit des E-Moduls bei 10%iger Druckverformung von der Shore-A-Härte eines Elastomers, gültig für einen geometrischen Formfaktor von 0.2 [60]. . . . . | 11 |
| 2.4  | Änderung der Temperaturverteilung im Kupplungsquerschnitt durch Einbau einer Kühlscheibe [43]. . . . .                                                        | 12 |
| 2.5  | KÜMMLEES Vorgehen bei der Kopplung von mechanischen und thermischen FEM-Berechnungen [43]. . . . .                                                            | 13 |
| 2.6  | Versuchsanlage von Ziegenhagen [80]. . . . .                                                                                                                  | 14 |
| 2.7  | Viskose- und Schubwinkelamplitudeneffekte [80]. . . . .                                                                                                       | 15 |
| 2.8  | Versuchskupplung von Becker [6]. . . . .                                                                                                                      | 16 |
| 2.9  | Montage der Thermoelemente [6]. . . . .                                                                                                                       | 16 |
| 2.10 | Uniaxiale Versuche [54]. . . . .                                                                                                                              | 17 |
| 2.11 | Vereinfachte rheologische Interpretation des mehrachsigen Materialgesetzes von Pirscher. . . . .                                                              | 18 |
| 2.12 | Lebensdauer von Naturkautschukproben [13]. . . . .                                                                                                            | 20 |
| 2.13 | Krafterregte Langzeitversuche von Käsler [38] . . . . .                                                                                                       | 21 |
| 2.14 | Wegerregte Langzeitversuche von Käsler [38] . . . . .                                                                                                         | 21 |
| 2.15 | Langzeitversuche mit balligen Probekörper [38]. . . . .                                                                                                       | 22 |
| 2.16 | Langzeitversuche mit gerippten Probekörper [38]. . . . .                                                                                                      | 22 |
| 2.17 | Vereinheitlichung der Vorgehensweise für verschiedene Kupplungstypen . . . . .                                                                                | 27 |
| 3.1  | Die molekulare Struktur vom Naturkautschuk . . . . .                                                                                                          | 28 |

|      |                                                                                                                               |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2  | Temperaturerhöhung eines Gummifadens bei adiabater Versuchsführung in Abhängigkeit von der Dehnung. . . . .                   | 29 |
| 3.3  | Dehnungsabhängigkeit eines Gummifadens bei isothermer Versuchsführung und konstanter Last. . . . .                            | 29 |
| 3.4  | Entropie als Maß für Ordnung. . . . .                                                                                         | 31 |
| 3.5  | Modell des ungefüllten und gefüllten Elastomers [62]. . . . .                                                                 | 31 |
| 3.6  | Gleichgewicht der internen und externen Kräfte am FE-Netz . . .                                                               | 33 |
| 3.7  | Statisches Gleichgewicht im Netz . . . . .                                                                                    | 33 |
| 3.8  | NEWTON-RHAPHSON-Verfahren . . . . .                                                                                           | 34 |
| 3.9  | Einfaches Federelement . . . . .                                                                                              | 35 |
| 3.10 | Verlauf des ersten Inkrementes beim NEWTON-RHAPHSON -Verfahren.                                                               | 35 |
| 3.11 | Volumenelement in der unverformten und verformten Lage . . . .                                                                | 36 |
| 3.12 | Kinematische Verfestigung im projizierten Hauptspannungsraum .                                                                | 41 |
| 3.13 | Verlauf der Druckfunktion $p$ über die JAKOBISCHE Determinante $J$ nach Gl. 3.70 . . . . .                                    | 46 |
| 3.14 | Wärmekapazität versus Temperatur [79]. . . . .                                                                                | 51 |
| 3.15 | Wärmeleitkoeffizient versus Temperatur mit der Rußmischung als Parameter [18]. . . . .                                        | 52 |
| 4.1  | Die Beanspruchungen an der VULKAN–Vulkardan E-Kupplung .                                                                      | 53 |
| 4.2  | Unterschiede in der Berechnung der Hydrostatischen Druckes nach unterschiedlichen hyperelastischen Materialgesetzen . . . . . | 55 |
| 4.3  | Krafteinleitung über Starrkörper bzw. über Stahlflansche . . . . .                                                            | 55 |
| 4.4  | Schubspannungen bei Krafteinleitung über Stahlflansche. . . . .                                                               | 56 |
| 4.5  | Schubspannungen bei Krafteinleitung über Starrkörper. . . . .                                                                 | 56 |
| 4.6  | Versuchsaufbau . . . . .                                                                                                      | 57 |
| 4.7  | Aufbau eines Klimasystems am Prüfstand . . . . .                                                                              | 58 |
| 4.8  | Geöffnete Klimakammer . . . . .                                                                                               | 58 |
| 4.9  | Darstellung der Kennwerte an einer Hystereseschleife . . . . .                                                                | 59 |
| 4.10 | Hystereseschleife mit Energieanteilen $W_{pot}$ und $W_D$ . . . . .                                                           | 60 |
| 4.11 | Hysteresen unterschiedlicher Amplitude bei $f=1\text{Hz}$ und $T=22^\circ\text{C}$ .                                          | 62 |
| 4.12 | Dynamische und Verluststeifigkeiten in Abhängigkeit der Frequenz für $T=42^\circ\text{C}$ . . . . .                           | 62 |

|      |                                                                                                                                                             |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.13 | Temperaturabhängigkeit der Kupplungskennwerte bei $f=0,1$ Hz. . .                                                                                           | 63 |
| 4.14 | Temperaturabhängigkeit der Kupplungskennwerte bei $f=1$ Hz. . .                                                                                             | 64 |
| 4.15 | Temperaturabhängigkeit der Kupplungskennwerte bei $f=5$ Hz. . .                                                                                             | 64 |
| 4.16 | Temperaturabhängigkeit der Kupplungskennwerte bei $f=10$ Hz. .                                                                                              | 65 |
| 4.17 | Abhängigkeit der dynamischen Steifigkeit und der Verluststeifigkeit von der Lastspielzahl bei 10 Hz (Laufzeit ca. 6 Stunden). . .                           | 65 |
| 5.1  | Allgemeine Vorgehensweise für die Simulation . . . . .                                                                                                      | 66 |
| 5.2  | Das Projektionsverfahren „Radial–Return“ . . . . .                                                                                                          | 67 |
| 5.3  | Zur rheologischen Veranschaulichung des Prädiktor-Korrektor-Schritts [62] . . . . .                                                                         | 68 |
| 5.4  | Kupplungsgeometrie . . . . .                                                                                                                                | 70 |
| 5.5  | Radiale Verschiebungen aus der MSC.MARC/Mentat-Berechnung.                                                                                                  | 71 |
| 5.6  | Kupplung gleicher Schubverzerrung . . . . .                                                                                                                 | 72 |
| 5.7  | Frequenzeffekte: Gleiche Verdrehungsamplitude; 10 Hz. und 40 Hz.                                                                                            | 74 |
| 5.8  | Amplitudeneffekte: Gleiche Frequenz; 1 Hz. . . . .                                                                                                          | 74 |
| 5.9  | Schwingungsgemische: Überlagerung von zwei unterschiedlichen Frequenzen und Amplituden . . . . .                                                            | 75 |
| 5.10 | Anfachung der Wegerregung bei 1 Hz. . . . .                                                                                                                 | 75 |
| 5.11 | Kupplungsmodellierung mit ABAQUS . . . . .                                                                                                                  | 76 |
| 6.1  | Schwingungs- und Hystereseverläufe der Vorgaben für das Voigt-Kelvin-Modell . . . . .                                                                       | 82 |
| 6.2  | Verlauf der Optimierung mittels Evolutionsstrategie über die Qualitätsfunktion $Q$ . . . . .                                                                | 83 |
| 6.3  | Schrittweitenverlauf in Abhängigkeit von der Generationszahl . .                                                                                            | 83 |
| 6.4  | Optimierungsergebnis für das Beispiel am Umkehrpunkt der Hysteresese, vorgegebene (durchgezogene Linie) und angepasste (gepunktete) Hysteresekurve. . . . . | 84 |
| 6.5  | Struktur des Optimierungsalgorithmus zur Bestimmung der Modellparameter. . . . .                                                                            | 86 |
| 6.6  | Vergleich der Kupplungskennwerte $c'$ und $c''$ der Simulation und Meßwerte (o) für 8 Parameter – 1-Strang-Modell. . . . .                                  | 89 |
| 6.7  | Vergleich der Kupplungskennwerte $c'$ und $c''$ der Simulation und Meßwerte (o) für 15 Parameter, $T=315,5^\circ\text{K}$ – 2-Strang-Modell. . .            | 90 |

|      |                                                                                                                                                           |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1  | Kupplungsgeometrie . . . . .                                                                                                                              | 94  |
| 7.2  | Approximation der Ableitung durch Differenzenquotienten, angedeutet durch die gestrichelten Linien . . . . .                                              | 96  |
| 7.3  | Bezeichnungen entsprechend der Kompassnotation . . . . .                                                                                                  | 98  |
| 7.4  | Approximation der Ableitung in nicht-kartesischen Gittern . . . . .                                                                                       | 99  |
| 7.5  | Approximation der Zeitableitung nach Euler (Links, $\gamma = 0$ ), Crank-Nicolson (Mitte, $\gamma = 0.5$ ) und Laasonen (Rechts, $\gamma = 1$ ) . . . . . | 100 |
| 7.6  | Randkontrollvolumen mit Bezeichnungen . . . . .                                                                                                           | 101 |
| 7.7  | Ausnutzung der Symmetrie . . . . .                                                                                                                        | 102 |
| 7.8  | Erzeugung kartesischer Gitter . . . . .                                                                                                                   | 103 |
| 7.9  | Annäherung der Kupplungsgeometrie . . . . .                                                                                                               | 104 |
| 7.10 | Abbildung vom logischen ins gestreckte und ins physikalische Gebiet                                                                                       | 104 |
| 7.11 | Zusammenhang zwischen physikalischem (rechts) und logischem Gebiet [67] . . . . .                                                                         | 105 |
| 7.12 | Beispiel für die Konzentration von Gitterpunkten in Abhängigkeit des Faktors $\alpha$ [67] . . . . .                                                      | 106 |
| 7.13 | Die Ränder des physikalischen Gebiets . . . . .                                                                                                           | 107 |
| 7.14 | Bildung von KV um die Randpunkte: äußere linke Ecke (1), äußere Kante (2), linke Kante (3), innen (4) . . . . .                                           | 108 |
| 7.15 | Randkontrollvolumen mit Bezeichnungen und Fluss . . . . .                                                                                                 | 110 |
| 7.16 | Verlauf der Temperatur mit nicht gekühlten Flanschen, $\alpha = 20$ $W/m^2K$ . . . . .                                                                    | 111 |
| 7.17 | Verlauf der Temperatur mit nicht gekühlten Flanschen, $\alpha = \text{variabel}$ .                                                                        | 112 |
| 7.18 | Prinzip der Kopplung zwischen der mechanischen und thermischen Berechnung. . . . .                                                                        | 112 |
| 7.19 | Kopplung der mechanischen und thermischen Berechnung . . . . .                                                                                            | 113 |
| A.1  | Abbildung des Deformationsgradienten [75] . . . . .                                                                                                       | 123 |
| C.1  | Konfidenzintervalle für die Regressionsgerade . . . . .                                                                                                   | 134 |

# Tabellenverzeichnis

|     |                                                                                         |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Mechanismen für die Übertragung von 1-D- Materialgesetzen auf 3-D . . . . .             | 18  |
| 3.1 | Größen des Gleichungssatzes des Füllstoff-Materialgesetzes Gln. 3.42 bis 3.46 . . . . . | 42  |
| 3.2 | Parameter des OGDEN-Modells für gefüllten Gummi . . . . .                               | 46  |
| 3.3 | Größen der Energiegleichung 3.96 . . . . .                                              | 50  |
| 6.1 | Größen des Füllstoff-Materialgesetzes . . . . .                                         | 87  |
| 6.2 | Parametersatz des Materialgesetzes (einsträngig) . . . . .                              | 88  |
| 6.3 | Parametersatz des Materialgesetzes (zweisträngig) . . . . .                             | 89  |
| 6.4 | Die Koeffizienten der temperaturabhängigen Parameterfunktionen . . . . .                | 91  |
| 7.1 | Übersicht der numerischen Differentiationsverfahren [67] . . . . .                      | 101 |
| A.1 | Kontinuumsmechanische Größen . . . . .                                                  | 128 |

# Kapitel 0

## Symbolverzeichnis

Allgemein gilt in dieser Arbeit die EINSTEINSche Summenkonvention. Ausnahmen werden an entsprechender Stelle gekennzeichnet.

### Tensoren 4–er Stufe

| Zeichen             | Bedeutung/Bemerkung | Einheit  |
|---------------------|---------------------|----------|
| $\mathcal{C}$       | Elastizitätstensor  | $N/mm^2$ |
| $\underset{<4>}{1}$ | Einheitstensor      | 1        |

### Tensoren 2–er Stufe (Dyaden)

| Zeichen       | Bedeutung/Bemerkung                             | Einheit  |
|---------------|-------------------------------------------------|----------|
| $\mathbf{1}$  | Einheitstensor                                  | 1        |
| $\mathbf{B}$  | linker CAUCHY-GREENScher Verzerrungstensor      | 1        |
| $\mathbf{C}$  | rechter CAUCHY-GREENScher Verzerrungstensor     | 1        |
| $\mathbf{D}$  | Streckungsgeschwindigkeitstensor                | $s^{-1}$ |
| $\mathbf{E}$  | GREEN-LAGRANGEScher Verzerrungstensor           | 1        |
| $\mathbf{F}$  | Deformationsgradient                            | 1        |
| $\mathbf{H}$  | Verschiebungsgradient                           | 1        |
| $\mathbf{P}$  | 1. PIOLA-KIRCHHOFFscher Spannungstensor         | $N/mm^2$ |
| $\mathbf{R}$  | Rotationstensor                                 | 1        |
| $\mathbf{S}$  | 2. PIOLA-KIRCHHOFFscher Spannungstensor         | $N/mm^2$ |
| $\mathbf{T}$  | CAUCHYscher Spannungstensor                     | $N/mm^2$ |
| $\mathbf{U}$  | symmetrischer Strecktensor                      | 1        |
| $\mathbf{V}$  | symmetrischer Strecktensor                      | 1        |
| $\varepsilon$ | linearer Verzerrungstensor                      | 1        |
| $\sigma$      | linearer Spannungstensor                        | 1        |
| $\tau$        | KIRCHHOFFscher Spannungstensor                  | $N/mm^2$ |
| $\mathcal{X}$ | Gegenspannungstensor/ Kinematische Verfestigung | $N/mm^2$ |

## Tensoren 1–er Stufe (Vektoren)

| Zeichen                     | Bedeutung/Bemerkung                                     | Einheit |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------|---------|
| $d\mathbf{A}$               | infinitesimales Oberflächenelement                      | $m^2$   |
| $\mathbf{E}_K, K = 1, 2, 3$ | Kartesische Basisvektoren in der Anfangskonfiguration   | 1       |
| $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ | Kartesische Basisvektoren in der Momentankonfiguration  | 1       |
| $\mathbf{f}$                | massebezogene Volumenkraft                              | $N/kg$  |
| $\mathbf{h}$                | Wärmestromvektor                                        | $W/m^2$ |
| $\mathbf{u}$                | Verschiebung                                            | $m$     |
| $\mathbf{v}$                | Geschwindigkeitsvektor                                  | $m/s$   |
| $\mathbf{X}$                | Ortsvektor eines Teilchens in der Anfangskonfiguration  | $m$     |
| $\mathbf{x}$                | Ortsvektor eines Teilchens in der Momentankonfiguration | $m$     |

## Skalare

Skalare mit dem tiefgestellten rechten Index „0“ beziehen sich i.d.R. auf den Anfangszustand.

| Zeichen         | Bedeutung/Bemerkung                                                 | Einheit  |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------|----------|
| $A$             | Fläche                                                              | $m^2$    |
| $c_p$           | spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck                     | $W/kgK$  |
| $\underline{c}$ | Komplexe Steifigkeit                                                | $N/mm^2$ |
| $\underline{C}$ | Komplexe Steifigkeit (Kap. 2)                                       | $Nm/rad$ |
| $C'$            | dynamische Steifigkeit (Kap. 2)                                     | $Nm/rad$ |
| $C''$           | Verluststeifigkeit (Kap. 2)                                         | $Nm/rad$ |
| $c'$            | dynamische Steifigkeit                                              | $N/mm^2$ |
| $c''$           | Verluststeifigkeit                                                  | $N/mm^2$ |
| $C_1, C_2$      | Konstanten der Verformungsenergiefunktion von Mooney                | $N/mm^2$ |
| $D_1$           | Materialfunktion, Teil der van–der–Waals–Verformungsenergiefunktion | 1        |
| $E$             | Elastizitätsmodul                                                   | $N/mm^2$ |
| $f$             | Frequenz                                                            | $Hz$     |
| $J$             | Determinante des Deformationsgradienten                             | 1        |
| $J_1, J_2, J_3$ | Invarianten des Verzerrungstensors                                  | 1        |
| $G$             | Gleitmodul                                                          | $N/mm^2$ |
| $k$             | Wärmeleitfähigkeit                                                  | $W/mK$   |
| $k$             | BOLTZMANN-Konstante                                                 | $J/K$    |
| $K$             | Kompressionsmodul                                                   | $N/mm^2$ |
| $M_t$           | Drehmoment                                                          | $Nm$     |

|               |                                                           |                                  |
|---------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $N$           | Anzahl der effektiven Kettensegmente                      | 1                                |
| $p$           | hydrostatischer Druck                                     | $N/mm^2$                         |
| $Q$           | Wärmemenge                                                | $J$                              |
| $q$           | spezifische Wärmemenge                                    | $J/kg$                           |
| $S$           | Entropie                                                  | $J/K$                            |
| $t$           | Zeit                                                      | $s$                              |
| $u$           | spezifische innere Energie                                | $J/kg$                           |
| $V$           | Volumen                                                   | $m^3$                            |
| $\mathcal{W}$ | Verformungsenergiefunktion                                | $Nm/kg$ bzw. $Nm/m^3$            |
| $W$           | Arbeit                                                    | $J$                              |
| $U$           | Innere Energie                                            | $J$                              |
| $\alpha$      | Wärmeübergangszahl                                        | $W/m^2K$                         |
| $\alpha_L$    | Wärmeübergangszahl–Luft                                   | $W/m^2K$                         |
| $\alpha_{St}$ | Wärmeübergangszahl–Stahl                                  | $W/m^2K$                         |
| $\alpha$      | Bias-Parameter                                            | 1                                |
| $\alpha$      | Konstante der<br>van–der–Waals–Verformungsenergiefunktion | 1                                |
| $\beta$       | Konstante der<br>van–der–Waals–Verformungsenergiefunktion | 1                                |
| $\varepsilon$ | Dehnung                                                   | 1                                |
| $\phi$        | allgemeiner Funktionswert                                 | 1                                |
| $\delta_{ij}$ | KRONECKER-Symbol                                          | 1                                |
| $\gamma$      | Gleitung                                                  | 1                                |
| $\Gamma$      | Gedächtnisparameter des Füllstoffmaterialgesetzes         | 1                                |
| $\eta$        | massenspezifische Entropiedichte                          | $Nm/kg\ s$                       |
| $\lambda$     | Streckungsverhältnis, Hauptdehnung                        | 1                                |
| $\varphi$     | Verdrehwinkel                                             | $rad$ bzw. $^\circ$ <sup>1</sup> |
| $\rho$        | Dichte                                                    | $kg/m^3$                         |
| $\sigma$      | Spannung                                                  | $N/mm^2$                         |
| $\tau$        | Torsionsspannung $:= \sigma_{\varphi z}$                  | $N/mm^2$                         |
| $\theta$      | absolute Temperatur                                       | $K$                              |
| $\Psi$        | verhältnismäßige Dämpfung                                 | 1                                |
| $\psi$        | HELMHOLTZsche freie Energie                               | $Nm/kg\ s$                       |
| $\Omega$      | thermodynamische Wahrscheinlichkeit                       | 1                                |
| $\Upsilon$    | akkumulierte viskoplastische Verzerrung                   | 1                                |

## Indizes

Laufende Indizes für Tensoren werden mit lateinischen Buchstaben besetzt. Sie werden auf der rechten Seite des Tensors tiefgestellt.  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  werden als sprechende Indizes, d.h. Indizes mit Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem, für Zylinderkoordinaten und  $x$ ,  $y$ ,  $z$  für kartesische Koordinaten eingesetzt. Weitere sprechende Indizes sind I, II, III, womit die

<sup>1</sup>Einheit wird je nach Kontext an entsprechender Stelle angegeben

Hauptspannungs- bzw. Hauptdehnungsrichtungen gekennzeichnet werden.

| <b>Zeichen</b> | <b>Bedeutung/Bemerkung</b>              | <b>Platzierung</b>           |
|----------------|-----------------------------------------|------------------------------|
| $e$            | elastischer Anteil                      | tiefgestellter rechter Index |
| $D$            | Deviatoranteil                          | hochgestellter rechter Index |
| $E$            | Extra-Tensor ohne Zwängungsanteil       | tiefgestellter linker Index  |
| $F$            | Füllstoffanteil                         | hochgestellter linker Index  |
| $M$            | Matrixanteil                            | hochgestellter linker Index  |
| $N$            | Nennamplitude,<br>i.d.R. für Messgrößen | tiefgestellter rechter Index |
| $T$            | transponiert <sup>2</sup>               | hochgestellter rechter Index |
| $v$            | viskoplastischer Anteil                 | tiefgestellter rechter Index |
| $Z$            | Zwängung                                | tiefgestellter linker Index  |

### Operatoren und Sonderzeichen

| <b>Zeichen</b> | <b>Bedeutung/Bemerkung</b> | <b>symbolische/Indexschreibweise</b>                                         |
|----------------|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\otimes$      | dyadisches Produkt         | $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^T = \mathbf{C} \rightarrow a_m b_n = C_{mn}$  |
| $:$            | doppeltes skalares Produkt | $\mathbf{A} : \mathbf{B} = c \rightarrow A_{jk} B_{kj} = c$                  |
| sp             | Spur eines Tensors         | $\text{sp} \mathbf{A} = y \rightarrow \text{sp} A_{mn} = A_{mn} \delta_{nm}$ |

---

<sup>2</sup> $A_{mn} = (A_{nm})^T$

# Kapitel 1

## Einleitung

Gefüllte Elastomere, im technischen Sprachgebrauch auch Gummi genannt, sind im Maschinenbau weit verbreitet. Häufig finden sie Einsatz im Bereich der Antriebstechnik zur gezielten Beeinflussung des Schwingungsverhaltens von Antriebssträngen mittels drehelastischer Kupplungen (Elastomer-Kupplung), wobei das Zusammenspiel der elastischen Eigenschaften von Gummi und die erzeugte Dämpfung durch den Füllstoff die Abstimmung von Antriebssträngen ermöglicht. Zur Vorhersage des Drehschwingungsverhaltens solcher Antriebsstränge werden ausreichend genaue Berechnungsmodelle von Elastomer-Kupplungen benötigt.

Ein wichtiger Schritt zur Kennzeichnung des Kupplungsverhaltens für stationären und instationären Betrieb gelang mittels sog. Kupplungswirkmodelle (KWM), die durch Zusammenschalten verschiedener rheologischer Elemente, z.B. Feder-, Dämpfer-, Kontakt- und Spielelemente, aufgebaut werden können. Diese bieten bei der Vorhersage des dynamischen Drehschwingungsverhaltens eines Antriebsstranges eine schnelle Hilfe und werden im Sinne einer Klassifizierung nach dem ABC-Konzept<sup>1</sup> als C/B-Methode (geringer Zeitaufwand und mittlere Aussagegüte) eingestuft. Die Entwicklung derartiger KWM erfolgte in Rahmen mehrerer Forschungsprojekte, die von der FVA gefördert wurden [5, 77, 80]. Der Einsatz der KWM wurde in der Industrie inzwischen vielfach erfolgreich erprobt. Hervorzuheben ist die Arbeit von ZIEGENHAGEN, die mit einer vergleichsweise geringen Anzahl von Modellparametern auskommt und bereits Ansätze zur Beschreibung der Wärmeentwicklung enthält. Ein Nachteil der KWM ist, dass Modellparameter für jede Kupplungsvariante vorab mittels harmonischer Versuche mit unterschiedlicher Frequenz und Amplitude bestimmt werden müssen und selbst für ähnliche Kupplungen kein ausreichend genaues Umrechnungsverfahren existiert. Eine Einschränkung der Anwendbarkeit bisheriger KWM ergibt sich weiter aus der Tatsache, dass die Kupplungsparameter auch vom aktuellen Betriebszustand, von der Alterung und speziell von der zeitlich veränderlichen Temperaturverteilung, also von der Erwärmung abhängen. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Versuche zeigen, dass insbesondere das Dämpfungsverhalten der

---

<sup>1</sup>Näheres in [52, 53] bzw. ab S. 7.

untersuchten Prüfkupplung im Laufe eines Tages infolge Erwärmung bei Dauerbetrieb um 20% abnehmen kann, sich aber im Ruhezustand infolge der Abkühlung wieder erholt.

Durch ungleichmäßige Temperaturerhöhungen entstehen im Inneren von Kupplungen sogenannte **Wärmenester**. Das lokal stärkere Setzen in diesen Nestern macht sie zu potentiellen Rissorten. KÜMMLEE verwendete zur Bestimmung der Temperaturverteilung in einer Elastomer-Kupplung ein Mischverfahren zwischen FEM<sup>2</sup> und KWM [43]. Wegen der Kombination von linearen FEM und KWM ist sein Vorgehen den B/A-Methoden (mittlere Zeitaufwand und hohe Aussagegüte) zuzuordnen. Er konnte mit diesem Vorgehen bereits die Temperaturverteilung in der untersuchten Elastomer-Kupplung beschreiben. Eine weitere Begleiterscheinung der Temperaturerhöhung zeigt sich darin, dass die anvulkanisierten Gummi-Metall-Verbindungen sich lösen. So kann im Betrieb bei vergleichsweise niedrigeren Belastungen ein Versagen auftreten.

Die erwähnten Vorgehensweisen können Beanspruchungen aus beliebigen mehrachsigen Belastungszuständen nicht verarbeiten. Insbesondere ist es nicht möglich, diese Methoden einzusetzen, wenn keine geschlossenen Hystereseschleifen existieren. Die Beschreibung solcher Beanspruchungszustände erfordert die Verwendung einer A aus A-Methode (hohe Aussagegüte).

In der vorliegenden Arbeit wird angestrebt, eine solche A-Methode zu entwickeln. Es werden verschiedene Materialmodelle mit temperaturabhängigen Materialparametern diskutiert. Für die Erprobung wurde ein FEM/FVM-Programm<sup>3</sup> geschrieben. Grundlagen zu geeigneten Materialgesetzen sind in der Dissertation von PIRSCHER [62] (s. auch S. 18) zu finden, deren Ansatz für die thermomechanische Berechnung erweitert und erprobt wird. Weiter wird eine Standard-Prüfkupplung zur Bestimmung der notwendigen Modellparameter erprobt. Die vorliegende Arbeit liefert die Grundlagen für die Formulierung verbesserter Methoden, aus denen B/A- bzw. C/A-Methoden für Elastomer-Kupplungen ableitbar sein sollten.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeiten wurden folgende Studien und Diplomarbeiten betreut, CAPEK [14], GIESELER [26], MÖHRER [55], STEUDEL [72].

---

<sup>2</sup>FEM: Finite-Elemente-Methode

<sup>3</sup>FVM: Finite-Volumen-Methode

# Kapitel 2

## Stand der Technik in der Elastomer-Kupplungsforschung

Viele Fachgebiete befassen sich mit Elastomerforschung. Die Zielsetzung „Thermomechanische Berechnung von Elastomerbauteilen“ setzt voraus, dass Arbeiten, die sich mit Bauteil-Modellierungen (sog. Wirkmodellen), Materialgesetzen, der Anwendung der Materialgesetze in FEM-Programmen, großen Deformationen sowie Thermodynamik befassen, berücksichtigt werden müssen. Um eine gemeinsame Diskussionsgrundlage für die Klassifizierung dieser verschiedenen Methoden und Bereiche in der Elastomer-Kupplungsentwicklung zu ermöglichen, wird im Folgenden das ABC-Konzept von MERTENS vorgestellt (s. [52, 53]).

### 2.1 Das ABC-Konzept

Um den Produktentstehungsprozeß im Hinblick auf die Lebensdaueroptimierung zu beschleunigen und Versuchszeiten zu kürzen oder gar Versuche einzusparen, werden unterschiedliche Berechnungsmethoden eingesetzt. Der Idealfall für die Konstruktionsabteilung eines Unternehmens ist das Erreichen maximaler Aussagegüte bei möglichst geringem Zeitaufwand für die Vorbereitung, Durchführung und Dokumentation solcher Berechnungen. Im realen Produktentwicklungsprozeß ist dieser Idealfall selten zu erreichen. Die Erfahrung sagt vielmehr:

- Einfache und schnell handzuhabende Berechnungsvorschriften haben oft eine geringe Aussagegüte.
- Die Erzielung einer hohen Aussagegüte ist durch hohen Berechnungs- und/oder Versuchsaufwand und komplizierte Anwendungen möglich.

Mit dem ABC-Konzept von MERTENS erfolgt eine Strukturierung des Zeitaufwandes und der Aussagegüte verschiedener Methoden (siehe **Abb. 2.1**). Der Zeitaufwand wird dabei nicht exakt in Minuten oder Stunden angegeben, sondern

als relativ zu betrachtende Größe behandelt. Methoden mit hohem Zeitaufwand werden der Zeitebene A zugeordnet, Methoden mit geringem Zeitaufwand der Zeitebene C. Die Zeitebene B wird Methoden, die einen mittleren Zeitaufwand erfordern, zugeordnet.

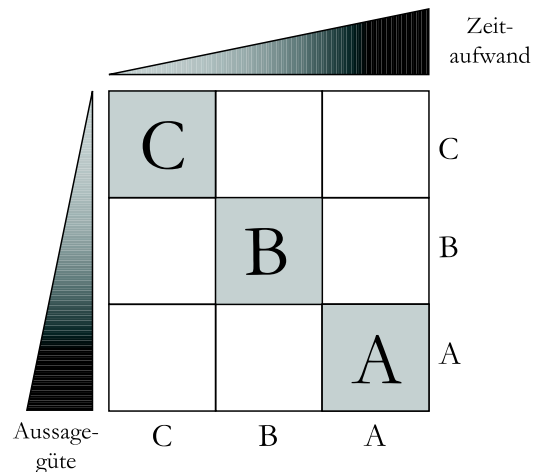


Abbildung 2.1: Natürliche Zuordnung von Aussagegüte und Zeitaufwand für Produktunabhängige Berechnungs- und Bewertungsmethoden [53].

Entsprechend dem Zeitaufwand wird auch die Aussagegüte verschiedener Methoden als relative Größe betrachtet. Die Aussagegüte A kennzeichnet eine Methode mit einer hohen Aussagegüte und die Aussagegüten B bzw. C kennzeichnen Methoden mit mittlerer bzw. niedriger Aussagegüte. In diesem Sinne kann auch eine Klassifizierung von Versuchsmethoden durchgeführt werden.

Bei der Weiterentwicklung eines Produktes kommt das Erfahrungswissen aus den früheren Konstruktionen zum Einsatz. Dies hat i.A. zur Folge, dass zeitlich günstigere Verfahren entstehen. So werden aus zeitaufwendigem Verfahren Sonderverfahren mit niedrigem Zeitaufwand<sup>1</sup>. MERTENS klassifiziert solche Methoden nach der Aussagegüte:

- (B aus A)- oder (C aus A)-Methoden mit der Aussagegüte A. Kurzform B/A bzw. C/A.
- (C aus B)-Methoden mit der Aussagegüte B. Kurzform C/B.

<sup>1</sup>Gilt sowohl für Berechnungs- als auch für Bewertungsmethoden [53].

## 2.2 Kupplungswirkmodelle

Das Drehschwingungsverhalten einer Elastomer-Kupplung kann bei stationärem Betrieb mit harmonischer Belastung durch ein zweiparametriges Voigt-Kelvin-Modell beschrieben werden. Bereits bei mehrfrequentem instationären Betrieb erreicht das Modell seine Grenzen, so dass der Übergang vom Zweiparameter-Modell zu einem mehrparametrigem KWM notwendig wird.

Historisch ist anzumerken, dass die ersten KWMe von JAPS [37] die Frequenz- und die Amplitudenabhängigkeit von Elastomeren additiv durch eine Parallelschaltung abgefederter Dämpfer- und Reibelemente erfassten (s. **Abb. 2.2**). Dieser Ansatz wurde von KÜMMLEE [43] weiterentwickelt und vereinheitlicht sowie von ZIEGENHAGEN [80] um ein nichtlineares Federelement ergänzt.

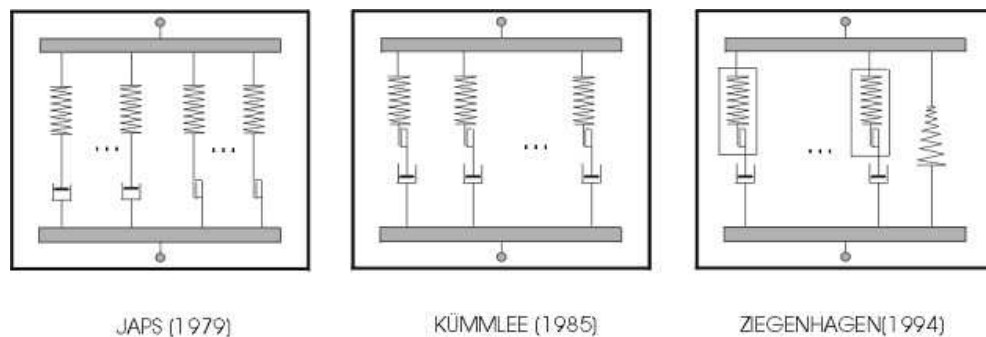


Abbildung 2.2: Geschichtliche Entwicklung rheologischer Modelle in der Elastomer-Kupplungsforschung.

ZIEGENHAGEN gelang weiterhin mittels einer normierten Darstellung in Form von Masterkurven eine praxisgerechte Beschreibung der frequenz- und amplitudenabhängigen Kennwerte. Mit Hilfe des entwickelten Masterkurven-Konzepts kann das Kennwertverhalten über die gemessenen Betriebspunkte hinaus inter- oder in gewissen Grenzen extrapoliert werden. Das Kennwertverhalten wird mit einem Produktansatz beschrieben.

Die Stärken von KWMen resultieren aus der relativ einfachen Abbildung der komplizierten Bauteileffekte. Die KWMe sind eindimensionale Modelle und erreichen schnell ihre Grenzen, wenn es um die Behandlung lokaler Phänomene, wie Spieleffekte, Kontaktprobleme oder eben Wärmenester geht. Durch die „Verschmierung“ dieser lokalen Effekte werden KWMe aber äußerst wirksam.

Die mechanischen Eigenschaften von Elastomeren selbst hängen nicht nur vom Betrag, sondern auch von der Einwirkungszeit der Belastungen ab. Starke lokale Temperaturunterschiede im Material können zu unterschiedlichen Werkstoffkennwerten führen. Unter Umständen sinkt durch Temperaturerhöhung das Dämpfungsvermögen des Materials, was zu einer nicht unerheblichen Änderung des dynamischen Verhaltens im Antriebsstrangs führen kann. Ferner trennt sich erwartungsgemäß die anvulkanisierte Gummi-Metall-Verbindung ab einer bestimmten

Temperatur auf, wodurch eine irreversible Schädigung auftritt und der gesamte Antriebsstrang sein Verhalten zunehmend ändert.

Grundsätzlich kann entstehende Wärme in Elastomerbauteilen durch Berechnung der Dämpfungsleistung ermittelt werden. Die entstehende Wärme muss über Wärmeleitung oder Konvektion abgeführt oder durch Temperatursteigerung aufgefangen werden. Von Bedeutung ist, dass bei Fluchtungsfehlern der Kupplungshälften die Wärmeerzeugung durch die Walkarbeit ansteigt und die Temperaturverteilung im Elastomerbauteil inhomogener als ohne Fluchtungsfehler werden kann. Es ist bekannt, dass der Werkstoff Gummi mit starken physikalischen Nichtlinearitäten behaftet ist. Deshalb ist es notwendig, zur Bestimmung von Wärmenestern und weiterer lokaler Phänomene rechnerisch geeignete kontinuumsmechanische Ansätze auszuwählen. KWM-Modelle sind hierfür ungeeignet. Dennoch bietet die KWM-Modellierung einen guten Startpunkt zur Verallgemeinerung auf mehrachsige Materialgesetze. Zur Lösung des Wärmenester-Problems wird in dieser Arbeit von einem mehrachsigen Materialgesetz Gebrauch gemacht, welches an der TU Berlin von PIRSCHER [62], ausgehend von der Arbeit von ZIEGENHAGEN, entwickelt wurde.

Mit einem KWM werden neben dem Materialverhalten weitere Phänomene, wie beispielsweise Kontaktprobleme zwischen Elastomer-Federelement und Metall „verschmiert“ beschrieben. Für Drehschwingungsbelastungen können ohne Einsatz von aufwendigem Theoriewissen relativ schnell Simulationen von Antriebssträngen durchgeführt werden. Voraussetzung ist die Durchführung mehrerer Versuche für die einzusetzende Kupplung. Damit fangen aber die Nachteile solcher Wirkmodelle an. Der Abbildung aller Phänomene mit einer relativ einfachen Modellierung steht der riesige Versuchsaufwand wegen der Nicht-Extrapolierbarkeit der Kupplungskennwerte auf andere Kupplungsformen gegenüber. Ein Materialgesetz ist dagegen i.A. von der Kupplungsgeometrie unabhängig, da das Verhalten eines differentiellen Elastomer-Elements abgebildet wird. Löst man das Problem der geometrischen Modellierung beispielsweise mit einem kommerziellen Finite-Elemente-Programm, muss nur noch das Materialgesetz in die Routinen eingebaut werden. Durch ausgewählte Experimente an geeigneten Probekörpern sind nur noch ihre Materialkennwerte zu bestimmen. Die anfängliche aufwendigere Formulierung der Theorie wird durch die Einsparung von teuren Versuchen belohnt.

Wie oben schon erwähnt, werden zur Aufstellung eines thermomechanischen Modells für Elastomer-Kupplungen, sei es numerisch, experimentell oder analytisch, verschiedene Werkzeuge benötigt. In diesem Sinne wird hier der Stand der Forschung in Gebiete unterteilt wiedergegeben. Bevorzugt findet man praxisnahe Bauteilmodellierungen, wobei in solchen Arbeiten durchaus von kontinuumsmechanischen bzw. rheologischen Ansätzen Gebrauch gemacht wird. Eine zweite Gruppe bilden die Arbeiten, die sich mit Materialgesetzen befassen. So sind viele Arbeiten, die Gummielastizität, große Deformationen, Viskoelastizität und -plastizität, thermomechanische Modellierungen oder aber die numerische Um-

setzung und experimentelle Validierung behandeln, ebenso zu berücksichtigen. Zuletzt werden einige Arbeiten, die sich mit Alterung von Elastomeren befassen, vorgestellt.

## 2.3 Bauteilmodellierungen

In der Konstruktionspraxis wird oft mit der statischen Federkennlinie des Elastomers gearbeitet. Dabei wird meist von kleinen Deformationen ausgegangen. Als Beispiel sei an dieser Stelle der Beitrag von Lutz [47] erwähnt, wo auch die Anwendung eines geometrischen Formfaktors für die Anpassung der Federkennlinien eingeführt wird. Für diese Vorgehensweise ist es üblich, die Shore-Härte als unterscheidendes Merkmal für die Steigung der statischen Federkennlinie zu nehmen (s. **Abb. 2.3**).

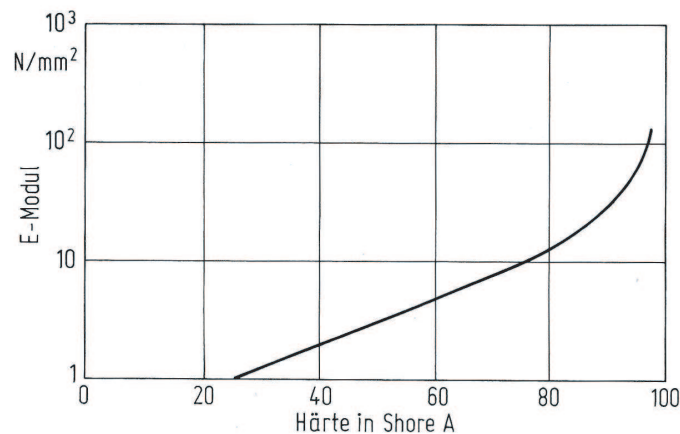


Abbildung 2.3: Abhängigkeit des E-Moduls bei 10%iger Druckverformung von der Shore-A-Härte eines Elastomers, gültig für einen geometrischen Formfaktor von 0.2 [60].

Bei der Untersuchung von dynamischen Eigenschaften von Elastomeren müssen viele Abhängigkeiten berücksichtigt werden. Alle maßgeblichen Größen, wie z.B. Temperatur, Frequenz, dynamische Steifigkeit und Verluststeifigkeit sind miteinander verknüpft. Durch das Einführen eines modifizierten Moduls gelang es erst PAYNE übersichtlichere Darstellungsmethoden zu entwickeln [59].

Bei dynamischen Betrachtungen in der Praxis wird oft von dem sog. Poynting–Thompson–Modell Gebrauch gemacht, wie z.B. in [7] oder [31]. Auch bei der Auslegung von Schwingungstilgern wird dieses Drei-Parametermodell eingesetzt [29].

BENNER [8] zieht ein Modell mit Gedächtnisfunktionen in integraler Darstellung für Elastomer-Kupplungen heran. Ferner trennt er das an der Kupplung wirkende Moment additiv in einen elastischen Anteil (statisch), Reibungs- (statisch) und

Gedächtnisanteil (zeitabhängig). In seiner Dissertation [7] verwendet BENNER ein Poynting–Thompson–Modell (in [7] Zerner–Modell genannt). Ferner führt er eine frequenznormierte Dämpfung ein. Temperatureffekte werden nicht berücksichtigt.

Eine besondere Stellung ist der Arbeit von KÜMMLEE [43] zuzuordnen. Er entwickelte ein Berechnungsverfahren, das die Werkstoffeigenschaften von Gummi im Betrieb berücksichtigt. Versuche führte er an einer Kupplung mit gleichmäßiger Schubverzerrung durch, wodurch er die Ergebnisse direkt als Werkstoffeigenschaften interpretieren konnte. Durch sein FEM-Vorgehen konnte er erstmalig lokale Temperaturerhöhungen in einer Kupplung berechnen und konstruktive Verbesserungen vorschlagen (s. **Abb. 2.4**).

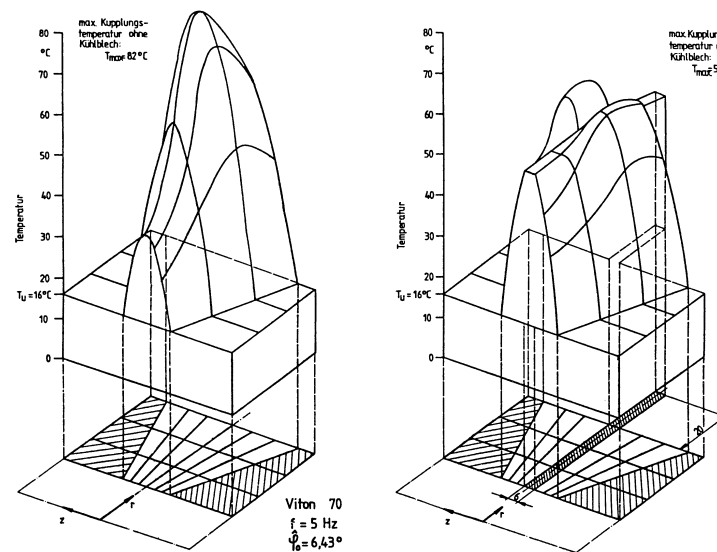


Abbildung 2.4: Änderung der Temperaturverteilung im Kupplungsquerschnitt durch Einbau einer Kühlelemente [43].

KÜMMLEE hat ein nichtlineares rheologisches KWM entwickelt, das in Abb. 2.2 zu sehen ist. Die Stränge dieses Modells setzen sich aus einer linearen Feder, einem geschwindigkeitsabhängigen Dämpfer und einem Coulombschen Reibungselement in Reihenschaltung zusammen. Die einzelnen Stränge werden parallel zusammengeschaltet. Mit diesem sog. Wirkmodell war es möglich, einachsige Beanspruchungszustände zu simulieren.

Um die Temperaturentwicklung bei Torsionsbelastung in der Kupplung zu berechnen, hat KÜMMLEE eine lineare mechanische FEM-Berechnung mit einer thermischen FEM-Berechnung gekoppelt. Kümmlee hat bei der thermischen Berechnung der Kupplung die Dämpfungshysterese zu Hilfe genommen. Die in einer Hystereseschleife erzeugte Wärme wurde einem finiten Element zugeführt. Dieser Prozess wurde solange wiederholt bis der stationäre Zustand für Bauteilsteiifigkeit und -dämpfung erreicht war (s. **Abb. 2.5**). Die Verformungsanalyse erfolgte mit Hookeschem Materialverhalten. KÜMMLEE konnte deshalb mit seiner Methode

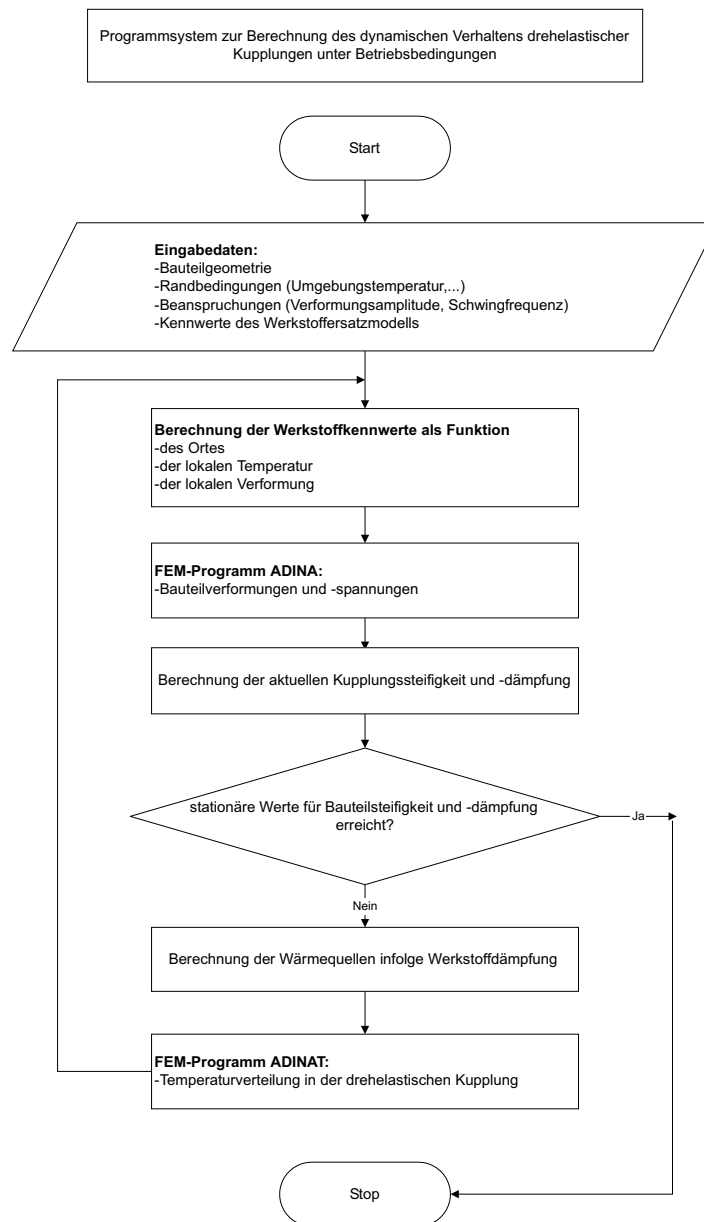


Abbildung 2.5: KÜMMLEES Vorgehen bei der Kopplung von mechanischen und thermischen FEM-Berechnungen [43].

keine geometrischen Nichtlinearitäten berechnen. Wegen der damaligen Rechnerkapazitäten war es mit vertretbarem Zeitaufwand nicht möglich, entsprechende Formulierungen zu verwenden. Er konnte trotzdem über den Verlauf der Wärme qualitative Aussagen treffen und konstruktive Verbesserungen für eine optimierte Wärmeabfuhr, wie den Einsatz eines Kühlblechs, vorschlagen. In Abb. 2.4 ist zu sehen, dass durch das Kühlblech die auftretende Temperaturspitzen geglättet werden können.

VOGE [77] hat das Modell von KÜMMLEE durch Reihenschaltung von drehwinkelgesteuerten Anschlagelementen auf Kupplungen mit Spiel erweitert. Zusätzlich wurde ein lineares Federelement parallel zu den anderen Strängen geschal-

tet. Hierdurch wurde eine Annäherung an die statischen Eigenschaften dieser Kupplungen erzielt. Es wurden experimentell und analytisch das Übertragungsverhalten der Kupplungen in Abhängigkeit der Schwingfrequenz, Belastungszeit, Schwingamplitude, Kupplungsvorspannung und -temperatur untersucht. VOGEL betrieb im Sinne einer Systemidentifikationsaufgabe Systemanalyse und Parameterbestimmung. Seine Versuchsreihen zu diesem Zweck beschränkten sich auf harmonische Belastungen und periodische Trapezverformungen, mit denen auch das Relaxationsverhalten untersucht werden konnte. Er integrierte in seinen Versuchsaufbau auch eine Klimakammer, mit deren Hilfe während der Versuche definierte Umgebungsbedingungen eingehalten werden konnten.

BARUTZKI [5] untersuchte verschiedene Einflussgrößen systematisch. Dabei entwickelte er Prüfverfahren, mit deren Hilfe definierte mehrfrequente Schwingungsanregungen durchgeführt werden konnten. Da das Übertragungsverhalten der Elastomer-Kupplungen von vielen Einflüssen wie Frequenz, Temperatur und Belastungsamplitude, abhängt, sind mehrere Parametervariationen unabdingbar. Zusätzlich zu den experimentellen Arbeiten entwickelte Barutzki ein Temperaturmodell. Mit Hilfe dieses Temperaturmodells konnten iterativ die temperaturabhängigen Kupplungsparameter berechnet und das Steifigkeits- und Dämpfungsverhalten überschlägig bestimmt werden. Ähnlich wie bei KÜMMLEE war dieses Temperaturmodell für stationäre Zustände gültig. Zusätzlichen Wärmeeintrag aus der Walkarbeit hat Barutzki nicht untersucht.

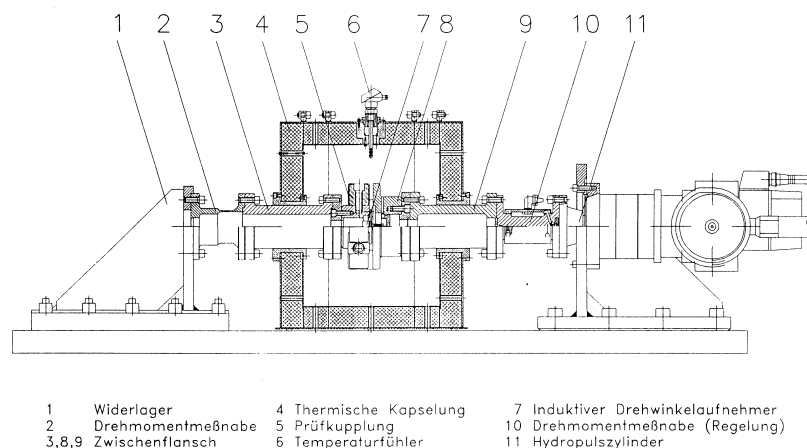


Abbildung 2.6: Versuchsanlage von Ziegenhagen [80].

ZIEGENHAGEN [80] untersuchte auch das Elastomer-Kupplungsverhalten auf analytischem und experimentellem Wege. In **Abb. 2.7** sind gemessene Hysteresekurven für niedrige Belastungsgeschwindigkeiten zu sehen<sup>2</sup>. Experimentell gab Zie-

<sup>2</sup>In Abb. 2.7 ist zu sehen, dass viskose- und Amplitudeneffekte nicht eindeutig getrennt werden können. Dies war auch der Grund, warum KÜMMLEE im Gegensatz zu Japs [37] auf eine additive Trennung dieser Effekte verzichtete (siehe auch Abb. 2.2). Neuerdings wird eine solche additive Trennung bei Gummilagern durch den Einsatz von Polyurethan erreicht [74].

genhagen sich die Zielsetzung vor, die Versuche bezüglich Elastomer-Kupplungen zu vereinheitlichen. Dies erreichte er durch Masterkurven<sup>3</sup> für Schwingwinkelamplitude, Frequenz, Vorspannwinkel-Kupplungstemperatur. Die Kenngrößen konnten mit Masterkurven dimensionslos formuliert werden. Somit erreichte er eine stufenweise Reduzierung des Beschreibungsaufwandes des Kennwertverhaltens mittels Bezugskennwerten. Damit sank auch die Anzahl der benötigten Versuche. Für die erwähnten drei Masterkurven braucht er elf Versuche mit harmonischer Schwingbelastung ohne Kupplungserwärmung bei unterschiedlichen Betriebspunkten.

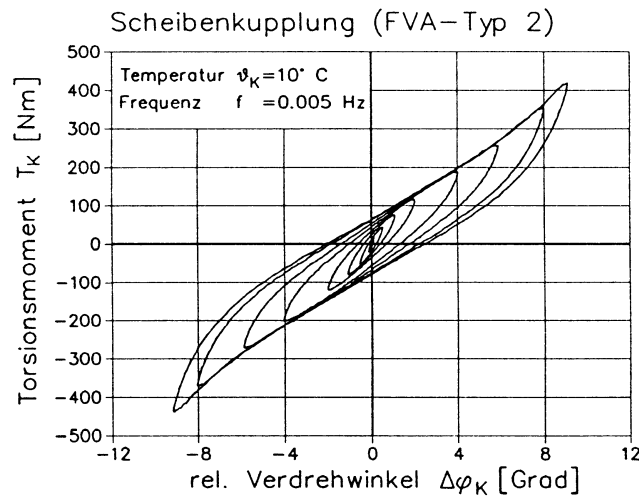


Abbildung 2.7: Viskose- und Schubwinkelamplitudeneffekte [80].

Bei der Erstellung einer Schwingwinkelamplituden-Masterkurve sind die konstanten Größen die Kupplungstemperatur und der Vorspannwinkel. Für eine beliebig gewählte Nennamplitude  $\hat{\varphi}_N$  wird die dynamische Steifigkeit  $C'(\hat{\varphi}_N, f)$  und Verluststeifigkeit  $C''(\hat{\varphi}_N, f)$  bestimmt<sup>4</sup>. Für jede gewählte Frequenz  $f$  werden die Kennwertverläufe  $C'(\hat{\varphi}, f)$ ,  $C''(\hat{\varphi}_N, f)$  auf  $C'(\hat{\varphi}_N, f)$  bzw.  $C''(\hat{\varphi}_N, f)$  bezogen und über  $\hat{\varphi}/\hat{\varphi}_N$  aufgetragen. Die sich ergebende Kurve kann über eine einheitliche Ausgleichsfunktion beschrieben werden, deren Koeffizienten über Versuche zu bestimmen sind. Bei der Erstellung von Masterkurven für Frequenz, Vorspannwinkel-Kupplungstemperatur wird eine ähnliche Vorgehensweise gewählt.

Analytisch hat ZIEGENHAGEN die hohe Anzahl der Stränge, die zur Kupplungssimulation notwendig waren, reduzieren wollen. Das geschwindigkeitsunabhängige Dämpfungsverhalten der Kupplung wurden bis dahin durch Coulombsche Reibungselemente beschrieben. Mit diesen Elementen können nur stückweise stetig-differenzierbare Hysteresen simuliert werden, wodurch sich eine hohe Anzahl der Stränge ergibt. Ziegenhagen umging dieses Problem, indem er ein nichtlineares Coulombsches Reibungselement zu dem Maxwellstrang in Reihe schaltete und

<sup>3</sup>siehe auch [50]

<sup>4</sup>Das Zeichen  $(\hat{\cdot})$  steht für maximale Amplitude

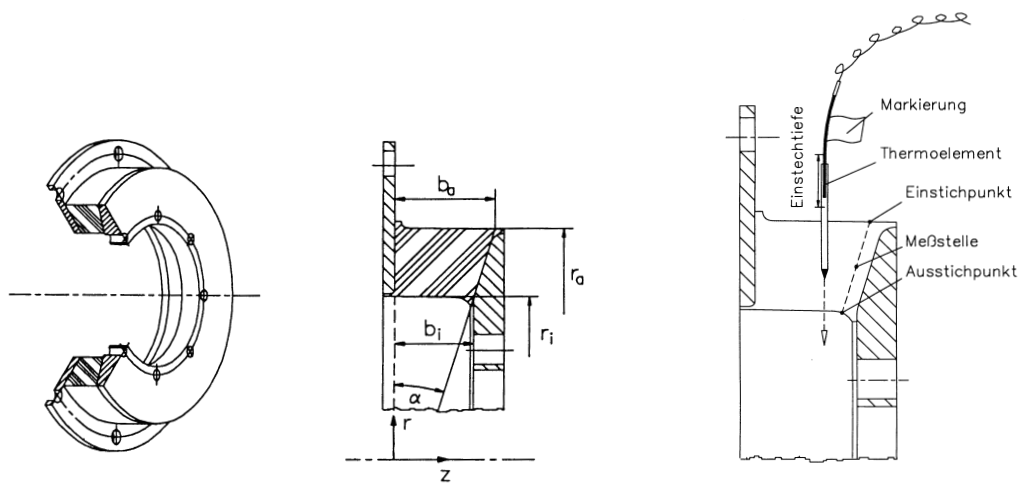


Abbildung 2.8: Versuchskupplung von Becker [6]. Abbildung 2.9: Montage der Thermoelemente [6].

für die numerische Simulation einen Masing-Memory-Algorithmus einsetzte. So konnte auch der Bauschinger Effekt abgebildet werden.

Ferner nutzte ZIEGENHAGEN die Bestimmung der Beharrungstemperatur für einen Standardkörper<sup>5</sup> für die Erweiterung seines KWMs um eine Temperaturberechnung, wobei er auch Effekte, wie die Umströmungsgeschwindigkeit der Kupplung berücksichtigte.

BECKER [6] legte besonderen Wert auf die thermische Dimensionierung der Elastomer-Kupplung bei dynamischer Belastung, um eine thermische Zersetzung zu vermeiden. Wie schon bei KÜMMLEE, wählte er eine Versuchskupplung mit einer konstanten Schubspannungsverteilung (**Abb. 2.8**). BECKER berücksichtigte bei seinen Überlegungen nicht nur die Verdrehung, sondern auch den Radial-, Winkel- und Axialversatz. Zur Temperaturmessung wurden mehrere Thermoelemente auf dem Umfang (s. **Abb. 2.9**) verteilt. Unter der Annahme einer konstanten Energiedissipation wurde eine allgemeine Lösung der Fourierschen Differentialgleichung der Wärmeleitung gesucht, woraus ein Temperaturprofil ermittelt wurde. Die experimentellen Ergebnisse sind zu Kontrollzwecken verwendbar. Seine analytischen Ansätze beziehen sich speziell auf die Bestimmung des stationären Temperaturprofils der Kupplung.

## 2.4 Materialgesetze

MOHR-MATUSCHEK vergleicht in seiner Arbeit [54] mehrere Modelle der Gummielastizität. In **Abb. 2.10** ist der Vergleich von vier Materialgesetzen für Hyperelastizität mit experimentellen Ergebnissen zu sehen. Aus der Abb. 2.10 wird deutlich, dass im Bereich kleiner Deformationen die Materialgesetze mit klei-

<sup>5</sup>in diesem Fall ein Zylinder.

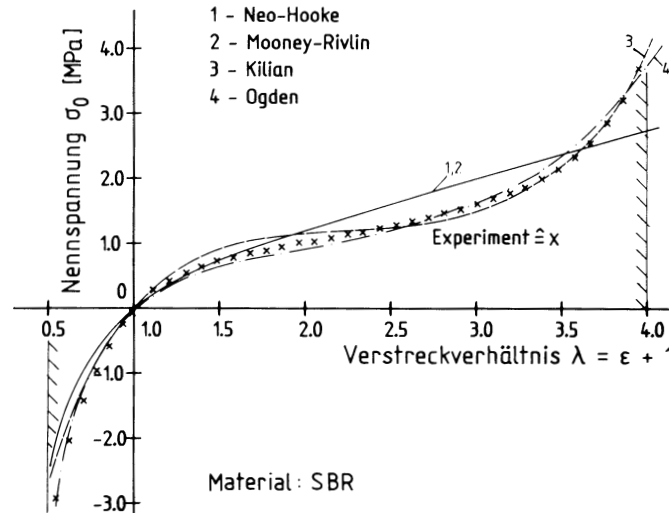


Abbildung 2.10: Uniaxiale Versuche [54].

neren Abweichungen übereinstimmen. Im Bereich großer Deformationen werden die Unterschiede deutlicher. Das Materialverhalten wird vom Kilian- und vom Ogden-Modell sehr gut wiedergegeben. Bei den folgenden Ausführungen favorisieren MOHR-MATUSCHEK aus zwei Gründen das Kilian-Modell gegenüber dem Ogden-Modell. Kilian erreicht die Güte des sechsparametrischen Ogden-Modells bereits mit drei Parametern. Weiterhin ist die Bestimmung der Parameter des Ogden-Modells aufwendiger. Nach den Aussagen von MOHR-MATUSCHEK erweist sich das Kilian-Modell auch als numerisch stabil. Das Modell besteht aus einem nichtlinearen Gleichungssystem, welches mit einem iterativen Verfahren gelöst wird.

LION [46] geht von durch SEDLAN durchgeführten Zugversuchen aus<sup>6</sup>. Hierbei handelt es sich um Versuche mit periodischen Belastungen und zwischenzeitlichen Belastungspausen von einer Stunde. Die Versuche erfolgten bei konstanten Temperaturen. Es wurden verschiedene Temperaturen und Dehnraten ausprobiert. Ausgehend von den Messungen wird der Deformationsgradient in einen mechanischen und thermischen Anteil zerlegt (s. Gl. 2.1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \mathbf{F}_\theta \quad (2.1)$$

$\mathbf{F}_M$  ist zuständig für den isothermen Spannungsanteil der Deformation,  $\mathbf{F}_\theta$  verursacht die spannungsfreie Wärmedehnungen. Der mechanische Anteil wird dann nochmal in einen elastischen und inelastischen Anteil zerlegt. Lion kommt auf einen Gleichungssatz bestehend aus der freien Energie, Potentialbeziehungen, Spannungszerlegung, Entropie und Evolutionsgleichungen. Er kommt mit einem Materialgesetz von 13 Parametern aus. Im untersuchten Bereich zeigen die experimentellen und theoretischen Ergebnisse eine gute Übereinstimmung. Der Autor gibt an, dass die Ergebnisse für vergleichsweise kleine Deformationsraten gelten und erweitert werden müssen.

<sup>6</sup>Für genauere Angaben zur Quelle s. [46]

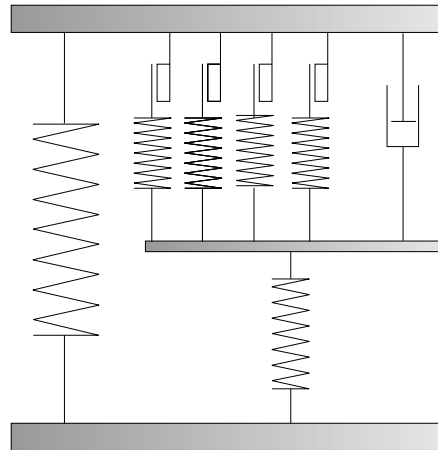


Abbildung 2.11: Vereinfachte rheologische Interpretation des mehrachsigen Materialgesetzes von Pirscher.

PIRSCHER [62] formuliert ein mehrachsiges Materialgesetz für gefüllte Elastomere (s. **Abb. 2.11**). Er wählt eine multiplikative Trennung des Materialverhaltens in einen nichtlinear elastischen und einen viskoplastischen Anteil. Im eindimensionalen Fall wurde bei ZIEGENHAGEN die korrekte Abbildung der Kurvenäste der Dämpfungshysterese durch Speicherung der vorher durchlaufenen Kurvenäste erreicht. Im Hinblick auf eine dreidimensionale Erweiterung ist diese Vorgehensweise problematisch, da ein vorher durchlaufener Kurvenast im dreidimensionalen Raum nicht notwendigerweise wieder erreicht werden muss. Ebenfalls lässt sich die Speicherung der Spannungswerte am Umkehrpunkte der Belastung nicht direkt auf den dreidimensionalen Fall übertragen. Zum Erkennen des Belastungswechsels ließe sich das Konzept der plastischen Fließflächen mit der entsprechenden Definition von Belastung und Entlastung heranziehen. Anstelle der Speicherung der Spannungen am Umkehrpunkt im einachsigen Modell setzt Pirscher das Konzept der kinematischen Verfestigung für die dreidimensionale Verallgemeinerung ein (siehe auch **Tab. 2.1**).

Tabelle 2.1: Mechanismen für die Übertragung von 1-D- Materialgesetzen auf 3-D

| 1-D                                       | 3-D                                        |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Erkennung des Belastungswechsels          | Das Konzept des plastischen Fließens       |
| Speicherung der Spannungen am Umkehrpunkt | Das Konzept der kinematischen Verfestigung |

Für das nichtlinear elastische Verhalten wird das Kilian-Modell<sup>7</sup> verwendet. Die Vorteile durch die Auswahl dieses Gesetzes werden auf S. 17 bzw. durch Abb. 2.10 verdeutlicht. Das viskoplastische Materialverhalten wird ausgehend

<sup>7</sup>Auch Kilian-Van-der-Waals genannt.

vom Chaboche-Modell [15, 16], das bei der Metallplastizität verwendet wird, entwickelt. Näheres zu diesem Modell ist im Abschnitt 3.3.2 zu lesen.

Als letzter Punkt in diesem Abschnitt sollte angesprochen werden, dass ein Materialgesetz mit mehreren Parametern auch das Problem der Parameteridentifikation mit sich bringt. Eine kurze und schnelle Einführung in dieses einerseits numerische und andererseits experimentelle Problem ist der Beitrag von KREISSIG [42], in dem auch Anforderungen an die durchzuführende Experimente aufgelistet werden.

## 2.5 Alterung

Es ist allgemein bekannt, dass bei Elastomeren verschiedene Alterungsprozesse stattfinden. Um vollständige Versagenskriterien aufstellen zu können, sind bei Elastomeren Kurzzeitversuche bzw. -simulationen nicht ausreichend. Dem Langzeitverhalten sollte auch Beachtung geschenkt werden.

In seiner Arbeit geht BÖHM [13] auf drei Phänomene ein. Unter dem Begriff *Alterung* wird eine Änderung der physikalischen Eigenschaften aufgrund von Oxidationsprozessen oder anderen Umgebungseinflüssen verstanden. Der Betrag der Oxidation steigt mit zunehmender Temperatur an. Im Innern von Elastomeren kann durch die fehlende Sauerstoffzufuhr keine Oxidation stattfinden. Ferner geht BÖHM auch auf die Dehnungskristallisation ein, welche sich aus der statistischen Thermodynamik herleiten lässt. Die Prüffrequenz beträgt maximal 5 Hz.

BÖHM stellt Lebensdaueruntersuchungen an Flachproben nach DIN 53504 dar. Als mögliche Ausfallkriterien gibt er an

- einen Anriss des Prüflings mit einer definierten Länge,
- das Abfallen der Federsteifigkeit um einen bestimmten Betrag,
- die vollständige Zerstörung des Prüflings.

In [13] befindet sich auch ein Vergleich bezüglich des Alterungsverhaltens zwischen Silikon- und Naturkautschuk. Da Silikonkautschuk in der vorliegenden Arbeit nicht von Interesse ist, wird lediglich auf Ergebnisse der Versuche mit Naturkautschuk eingegangen. In **Abb. 2.12** ist der Vergleich bezüglich der Schwingfestigkeit von gealterten und ungealterten Naturkautschukproben<sup>8</sup> abgebildet. Hier sind große Unterschiede zwischen den Lebensdauern der Proben zu sehen. Natürlich muss erwähnt werden, dass diese Ergebnisse als Tendenz aufzufassen sind. Wie in [13] auch vermerkt wird, sind die Versuche wegen der geringen Anzahl der Proben statistisch nicht abgesichert, andererseits entspricht der Zeitraffer-Alterungsprozess im Wärmeofen ohne Belastung nicht einer dynamischen Alterung durch mechanische und thermische Belastung im Betrieb.

---

<sup>8</sup>Zugproben nach DIN 53504

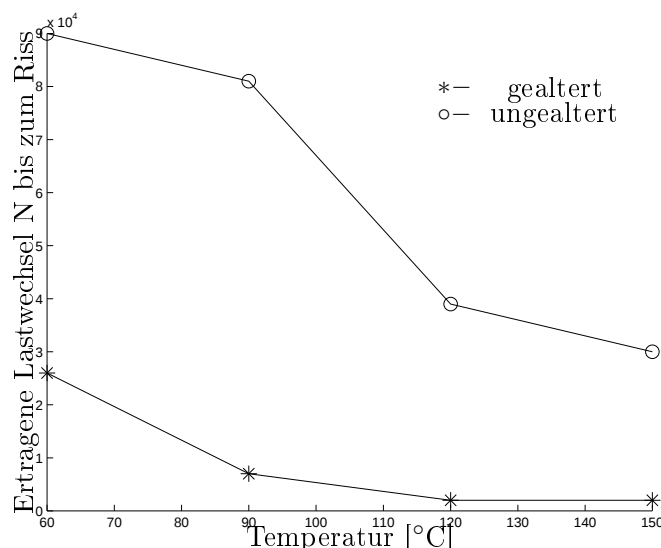


Abbildung 2.12: Lebensdauer von Naturkautschukproben [13].

Dass im Betrieb unterschiedliche Alterungsprozesse wirken, war auch die Motivation für KÄSLER Prüfverfahren für Langzeitversuche zu entwickeln [38]. KÄSLER untersuchte zwei Möglichkeiten der Versuchsregelung (siehe **Abb. 2.13 und 2.14**) und entschied sich letztlich für eine Kraftregelung, da diese auch in den meisten reellen Antriebssystemen eingesetzt werden. Durch diese Entscheidung wird der Vergleich mit anderen wissenschaftlichen Arbeiten erschwert, da für Kurzzeitversuche aus Gründen der Genauigkeit die Wegregelung gewählt wird. Trotzdem können aus KÄSLERS Versuchen mehrere generelle Aussagen hergeleitet werden.

Es fällt auf, dass es nicht möglich ist, eine direkte Proportionalität zwischen der Temperatur und Steifigkeit bzw. Dämpfung festzustellen. Die in den Abbildungen aufgezeichnete Dämpfungskurve ist die sog. bezogene verhältnismäßige Dämpfung. Diese Dämpfung kann als das Verhältnis der Dämpfungsarbeit zur elastischen Arbeit aufgefasst werden. Somit bedeutet in Abb. 2.13 das Konstantbleiben der Dämpfungswerte ab ca.  $1 \cdot 10^5$  Lastwechseln bei steigender dynamischer Steifigkeit nicht ein Konstantbleiben der Dämpfungsarbeit. Diese nimmt dann auch ab, was auch der Vorstellung einer Verhärtung im Material entspricht. Die Zunahme an Verhärtung kann auch durch die dynamische Setzung ausgedrückt werden.

Bei der Temperaturmessung stellt KÄSLER fest, dass die Lage des Temperaturmaximums im Bauteil lediglich von der Bauteilgeometrie abhängt<sup>9</sup>. Diese Feststellung macht deutlich, dass selbst bei einer relativ einfachen Geometrie –Käslers Aussage bezieht sich auf ein balliges Gummielement– ein mehrachsiges thermomechanisches Materialmodell für eventuelle Simulationsberechnungen unabdingbar ist.

In den **Abbildungen 2.15 und 2.16** sind Ergebnisse der Langzeitversuche von

<sup>9</sup>siehe S. 44 in [38].

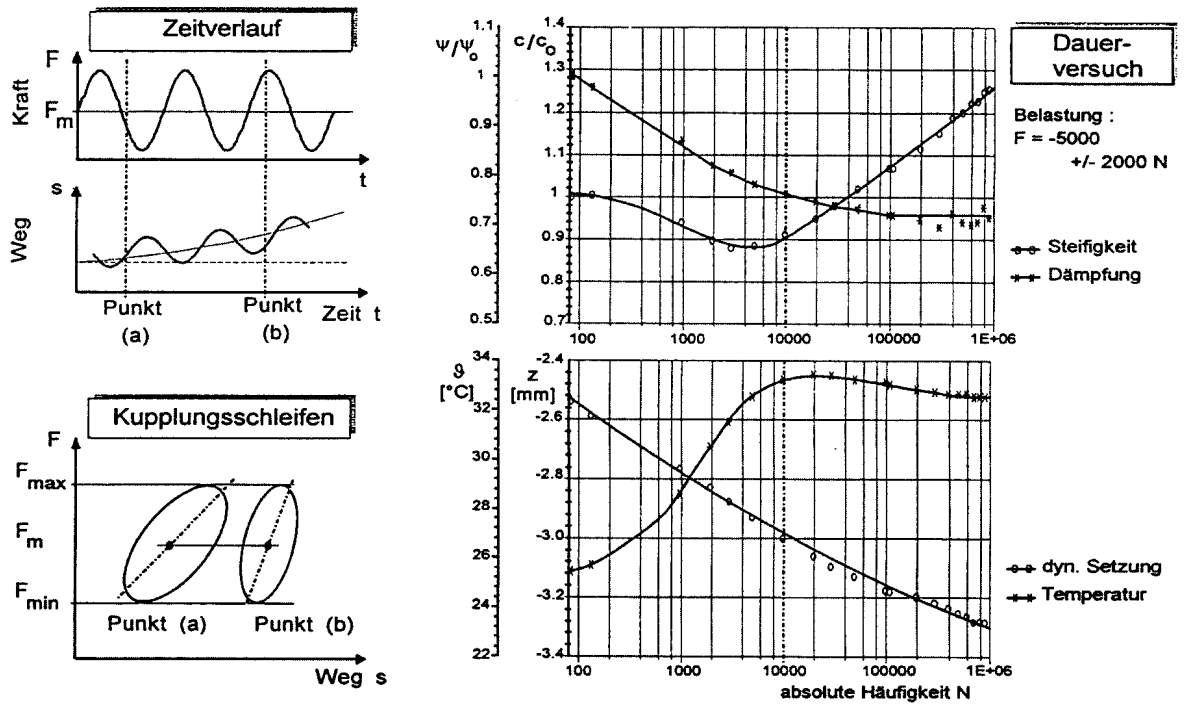


Abbildung 2.13: Krafterregte Langzeitversuche von Käsler [38]

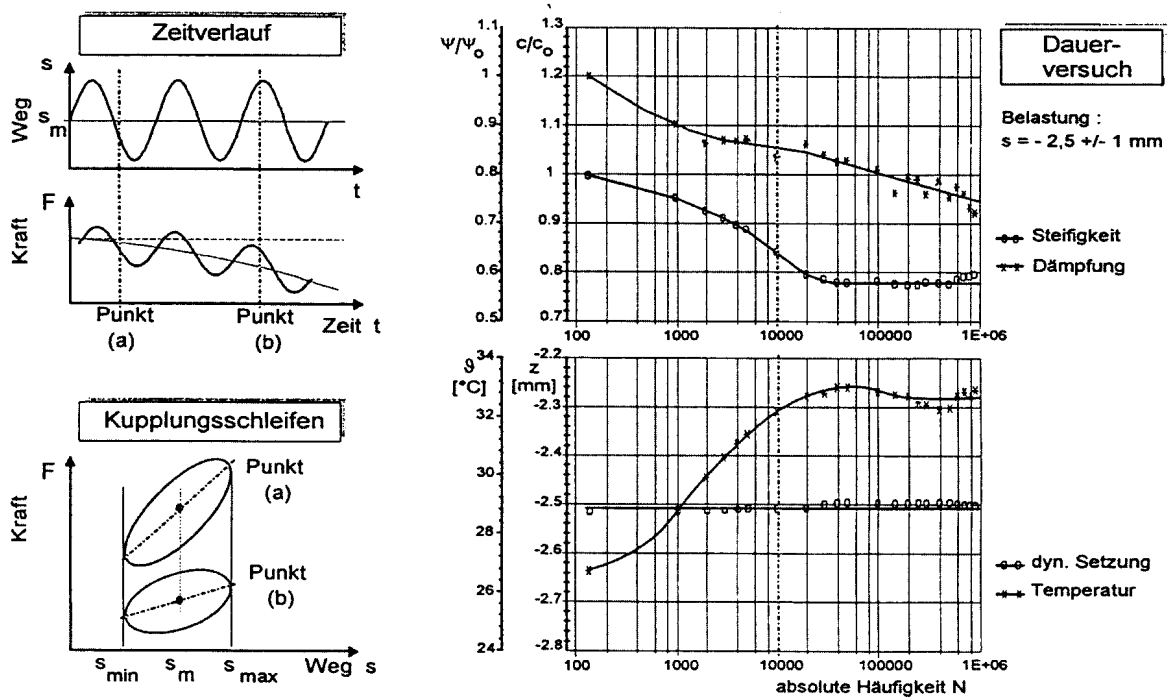


Abbildung 2.14: Wegerregte Langzeitversuche von Käsler [38]

Käsler mit unterschiedlichen Probekörpern abgebildet. Auffällig ist u.a. der ähn-

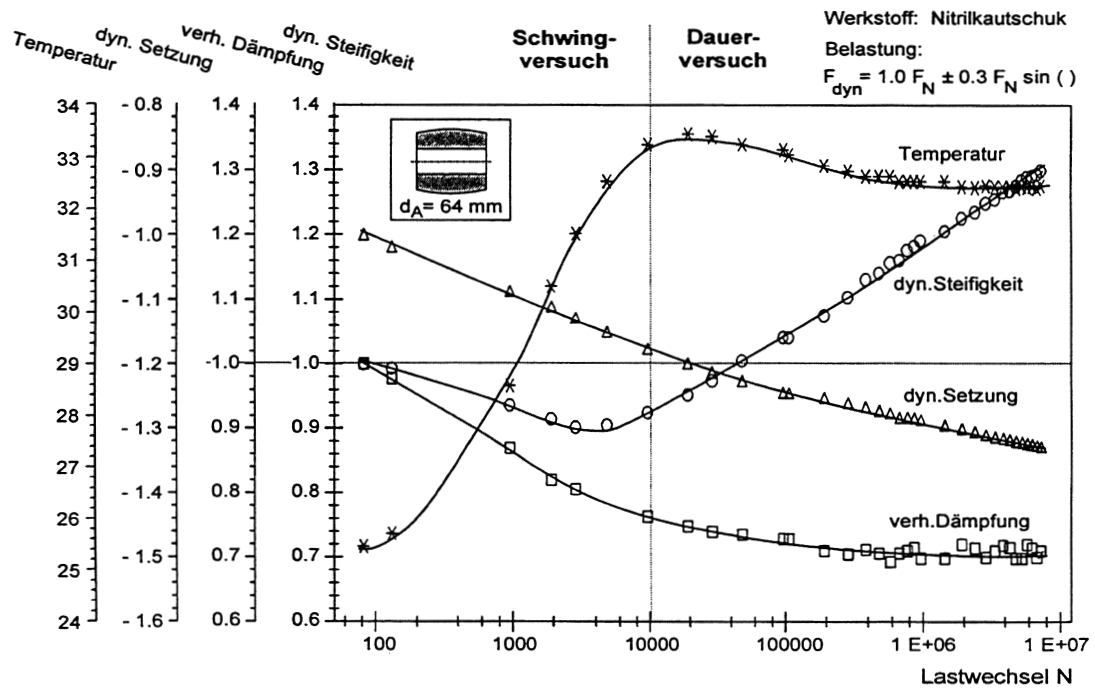


Abbildung 2.15: Langzeitversuche mit balligen Probekörper [38].

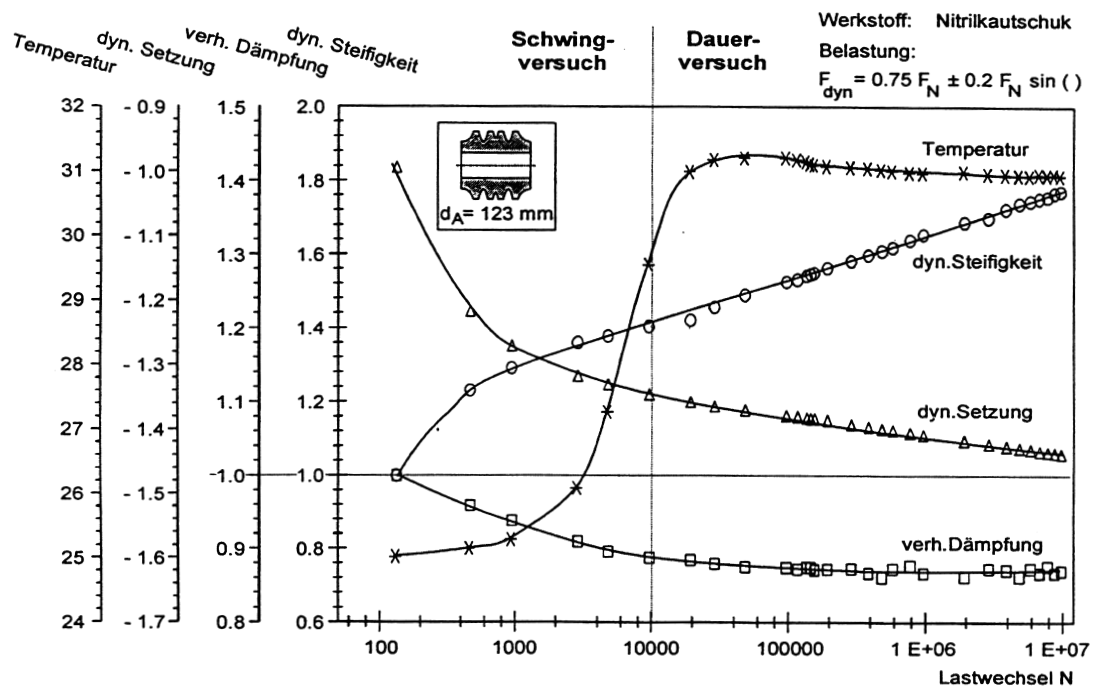


Abbildung 2.16: Langzeitversuche mit gerippten Probekörper [38].

lich bleibende Temperaturverlauf<sup>10</sup>. Ab einer bestimmten Lastwechselzahl hört der Aufstieg der Temperatur auf und der Abstieg mit vergleichsweise leichtere Tangente fängt an. Während die Probengeometrie für den Verlauf der dynamischen Steifigkeit über der Anzahl der Lastwechsel eine Rolle spielt, ist dies bei dem Temperaturverlauf nicht der Fall.

ACHENBACH und DUARTE gehen für ihre Alterungsmodellierung mehr auf physikalische Hintergründe ein [2]. Irreversible Vorgänge bei Elastomeren sind auf Änderungen der Netzwerkdicke zurückzuführen. Dies hat unmittelbar eine Auswirkung auf die elastische Formänderungsenergie. Der Umbau von Elastomernetzwerken kann durch äußere Einflüsse, wie die Einwirkung von Sauerstoff, welcher ein Abbauen der Schwefelbrücken hervorruft, verursacht werden. Es kann aber auch während des Einsatzes durch Temperaturbelastung zu einer Nachvulkanisation kommen. Diese Nachvulkanisation äußert sich in einer Verhärtung des Materials [2]. Die Autoren schlagen ein Alterungsmodell für stationäre Zustände vor. Mit Hilfe dieses Modells werden durch FEM-Simulationen Aussagen über die Lebensdauer von Dichtungen getroffen. Dabei ist das Kriterium, eine bleibende kritische Verformung  $\Delta_{crit}$  zu bestimmen, bei deren Erreichen die Dichtungsfunktion nicht mehr gewährleistet ist.

Ferner führen die Autoren einen Vergleich zwischen der phänomenologischen Theorie und der kinetischen Theorie der Gummielastizität<sup>11</sup> durch. Im Folgenden wird am Beispiel einer einachsigen Zug-Druck-Verformung angegeben

$$\frac{\sigma}{\lambda - \lambda^{-2}} = N \cdot k \cdot \theta, \quad (2.2)$$

wobei

- $\sigma$  : Hauptspannung in Stabrichtung auf den Anfangsquerschnitt bezogen
- $\lambda$  : Streckungsverhältnis in Stabrichtung,
- $N$  : Anzahl der effektiven Kettensegmente,
- $k$  : BOLTZMANN-Konstante ( $k = 1,38044 \cdot 10^{-23}$  J/K),
- $\theta$  : aktuelle Temperatur.

ist.

Gl. 2.2 beschreibt eine lineare Funktion in Abhängigkeit der Temperatur. Da diese Abhängigkeit bei lange andauernder Temperaturbelastung nicht in dieser Form beobachtet wird, muss weiter gedacht werden. Eine Nachvulkanisation hat zur Folge, dass die Anzahl der effektiven Kettensegmente sich ändern. In [2] wird in diesem Sinne eine Differentialgleichung für die Variable  $N$  aufgestellt und gelöst.

---

<sup>10</sup>Der Begriff „ähnlich“ ist mit Vorsicht zu behandeln, die Last in beiden Fällen ist nicht äquivalent. Diese Aussage bezieht sich ebenfalls auf die restlichen Vergleiche in diesem Absatz.

<sup>11</sup>Entropieelastizität

## 2.6 FEM-Modellierungen

Jede Arbeit, sei es Bauteilmodellierung oder Materialmodellierung, muss numerisch umgesetzt werden. In diesem Abschnitt werden Arbeiten, die sich die FEM-Modellierung von Elastomeren zum Thema machen, vorgestellt.

In [34] ist eine ausführliche Übersicht über den Einsatz von FE-Berechnungen bei der Elastomer-Bauteilentwicklung aus dem Jahre 1995 angegeben. Die Schnittstellenarbeit der Berechnungsabteilung zur Konstruktionsabteilung oder gar Präsentationen mittels FE-Simulationen bei den Kunden zeigen, dass der Einsatz von FE-Software unverzichtbar geworden ist, wobei bei solchen Bauteilentwicklungen FE-Berechnungen zu qualitativen Aussagen dienen. Dabei ist der Betrag der maximalen Spannung nicht vom primärem Interesse, sondern die Stelle, wo diese maximale Spannung auftritt und welche Änderung eine optimalere Konstruktion hervorruft.

Es gibt eine Vielzahl von Arbeiten, die sich mit FE-Berechnungen für Elastomere bzw. große Deformationen befassen. Um den Rahmen nicht zu sprengen, werden hier exemplarisch nur einige erwähnt.

Die Reifenindustrie ist der Impulsgeber für viele Untersuchungen, wobei für sie verstärkt Kontakt- und Verschleißprobleme bzw. die Interaktion verschiedener Reifenschichten von Interesse sind (z.B. [27, 36, 78]). Aus diesem Grund werden Arbeiten aus diesem Bereich hier nicht berücksichtigt. Ferner werden auch keine Risswachstumsmodellierungen bei Elastomeren verfolgt, wie z.B. in [30] oder [17].

DÖPPER und ORSCHALL haben auch die Zielsetzung, Wärmenester in Elastomerbauteilen zu bestimmen [20]. Die Autoren beschränken sich hierbei auf das stationäre Temperaturverhalten. Die Inkompressibilität der Elastomere wird umgangen, indem mit Hilfe der Penalty-Methode eine Inkompressibilitätsfunktion verwendet wird. Für das Materialgesetz wird die Verformungsenergiefunktion von Mooney-Rivlin verwendet. Dieses wird in tensorieller Schreibweise für ein FE-System formuliert. Zyklische bzw. dynamische Beanspruchungen werden nicht berücksichtigt.

Auf [20] baut die Dissertation von ORSCHALL [58] auf. BENNERS Ansatz (s. [7]) für Torsionsbeanspruchungen wird auf mehrachsige Spannungszustände erweitert. Die Spannung setzt sich aus einem hyperelastischen, einem reibungsbehafteten und einem viskoelastischen Anteil zusammen. Die Temperaturabhängigkeit des Elastomers wird gelöst indem ein dritter Mooney-Rivlin-Parameter eingeführt wird, der selbst eine Funktion der Temperatur ist. Somit werden die Erwärmungseffekte über das hyperelastische Materialgesetz abgebildet. Mit einem frequenzabhängigen Reibungsanteil wird die Veränderung der Dämpfungsarbeit bei unterschiedlichen Frequenzen erreicht. Letztlich wird mit Hilfe von Gedächtnisintegralen der viskoelastische Anteil aufgestellt.

In [63] werden mit Hilfe von FEM-Modellierungen zwei hyperelastische Verformungsenergiefunktionen –Kilian und Mooney-Rivlin– miteinander verglichen, wo-

bei das Kilian-Gesetz besser abschneidet. Dies entspricht auch der Aussage von MOHR-MATUSCHEK [54]. Als Anwendungsbeispiel wird der Montagevorgang einer Dichtung simuliert.

BESDO und IHLEMANN [10] formulieren ein Materialgesetz auf phänomenologischer Basis. Das Modell hat einen inelastischen und nichtlinear elastischen Anteil, die auf klassische Weise über die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten zusammengeführt werden. Die Validierung erfolgt anhand von Zug- und Schermessungen, wobei acht materialspezifische Parameter zu identifizieren sind. BESDO und IHLEMANN erreichen ihre Zielsetzung, große reversible Verformbarkeit, Hysteresen und den Einfluss der Verformungsgeschichte auf das aktuelle Verformungsgeschichte näherungsweise abzubilden. Bei der Modellierung wird der Einfluss der Verzerrungsgeschwindigkeit nicht berücksichtigt. Es wird eine quasi-inkompressible Beschreibung des hyperelastischen Anteils bevorzugt.

ITSKOV [35] gibt eine Methode an, um mit der Inkompressibilität des Gummis umzugehen. Es wird das bedingte Extremum des elastischen Potentials  $W$  bei genauer Erfüllung der Inkompressibilitätsbedingungen für die Modellierung des nichtlinearen Verhaltens angewandt. Für das elastische Potential werden die üblichen hyperelastischen Modelle<sup>12</sup> für Gummi berücksichtigt. Die Inkompressibilitätsbedingung der linearisierten Form wird als Nebenbedingung verwendet. Mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren wird das Problem gelöst. Itskovs Vorgehen ähnelt der von Döpper und Orschall eingesetzten Penalty-Methode (s. S. 24).

Im Bereich der Elastomer-Kupplungsherstellung werden FEM-Analysen schon in der frühen Konzeptphase von Konstrukteuren eingesetzt. Ziel hierbei ist nicht eine hundertprozentig exakte Aussage zu treffen, sondern eher die unterschiedlichen Antriebsbedingungen und das Festigkeitsverhalten des Elastomers zu berücksichtigen. So können mehrere konstruktive Alternativen verglichen werden. In diesem Sinne benutzt MAHFOUDH [48] die FEM-Software MARC und ein von dieser Software angebotenes nichtlinear-elastisches, erweitertes Mooney-Modell für Elastomere. MAHFOUDH erstellte ein Gesamtkonzept, das von der Auswahl der Gummimischung bis hin zur Fertigung der Elastomer-Kupplung alle Phasen der Produktentwicklung berücksichtigt. Diese Berechnungen dienen zur Auslegung von Kupplungen. Zur Berücksichtigung von viskoelastischen Effekten und der Temperaturverteilung in der Kupplung wird analog zu KÜMMLEE vorgegangen. MAHFOUDH führte auch Versuche durch, mit denen er Ergebnisse aus FEM-Berechnungen vergleicht. Zusätzlich untersucht er die Rissbildung im Elastomerelement der Kupplung.

---

<sup>12</sup>Neo-Hooke-Modell, Mooney-Rivlin-Modell und ein Sonderfall des Ogden-Modells

## 2.7 Zielsetzung der vorliegenden Arbeit

Bei der Konstruktion und Optimierung von Maschinensystemen haben sich Simulationsberechnungen zur Vorhersage des zu erwartenden Schwingungsverhaltens bewährt. Im Konstruktionsalltag werden für solche Berechnungen bevorzugt schnelle und hochgenaue Berechnungs- und Bewertungsmethoden –C/A-Methoden– angestrebt. Die Entwicklung solcher Methoden könnte nur gelingen, wenn zuvor für alle Systembauteile solche schnellen und hochgenauen Berechnungs- und Bewertungsmethoden entwickelt worden wären. Die höchste Genauigkeit solcher Methoden ließe sich dann erreichen, wenn durch umfassende, praxisnahe Bauteilversuche das relevante Bauteilverhalten für die Gesamtlebensdauer des Bauteils abgeleitet werden könnte. Dies ist aber in der Praxis aus zeitlichen und finanziellen Gründen nicht möglich, der Versuchsaufwand muss beschränkt werden!

Man behilft sich, indem man C/B-Methoden, also schnelle und hinreichend genaue Methoden anwendet und bei der Bewertung durch die Erfahrung begründete Sicherheitsabstände fordert. Für drehelastische Elastomer-Kupplungen wurden inzwischen solche C/B-Methoden entwickelt, s. Abschnitt 2.2. Als Berechnungsmodell stehen dafür Kupplungswirkmodelle zur Verfügung, deren Parameter durch genormte Kurzzeit-Prüfstandsversuche ermittelt werden können. Der Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass für jede Kupplungsbaugröße diese Parameter experimentell vom Kupplungshersteller ermittelt werden müssen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es grundsätzlich, den Versuchsaufwand bei der Kupplungsentwicklung zu verringern, die Genauigkeit der Berechnungs- und Bewertungsmethode durch Berücksichtigung der zeitlich veränderlichen Wärmeentwicklung zu steigern und den Anwendungsbereich auf mehrachsige Belastungen zu erweitern. Auf kurze Rechenzeiten soll im Rahmen dieser Arbeit kein Wert gelegt werden. Dies bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten. Ziel ist also die Entwicklung einer A-Methode mit hoher Aussagegüte, mit der später B/A- bzw. C/A-Methoden entwickelt werden können. Die gesamten Gleichungen sind so aufzubereiten, dass sie möglichst leicht in Form eines benutzergeschriebenen Unterprogramms in ein kommerzielles FEM-Programm, z.B. ABAQUS, eingebunden werden können.

Kern der Arbeit ist die Entwicklung und Erprobung eines geeigneten mehrachsigen Materialgesetzes für gefüllte Elastomere. Die Ansätze von PIRSCHER [62], die in erster Linie auf die Formulierung eines mehrachsigen Materialgesetzes für Elastomer-Kupplungen zur Spannungs- und Verformungsermittlung zielen, sind durch die zusätzlich zur Wärmeflussberechnung notwendigen thermodynamischen Gleichungen zu ergänzen. Die Differentialgleichung zur Ermittlung der Wärmeentwicklung ist bereits aus Pirschers Arbeit bekannt. Als Alternative zur verwendeten Verformungsenergiefunktion nach KILIAN soll auch der Ansatz von OGDEN mitgeführt werden.

Flankierend ist ein standardisierbares, möglichst einfaches Versuchs- und

Auswertekonzept zur optimalen Ermittlung der Parameter des Materialgesetzes vorzuschlagen und zu erproben. Die prinzipielle Vorgehensweise ist in **Abb. 2.17** angedeutet. Hierzu ist ein speziell auf den vorzuschlagenden Standardprüfkörper abgestimmtes spezielles FEM-Programm zu schreiben.

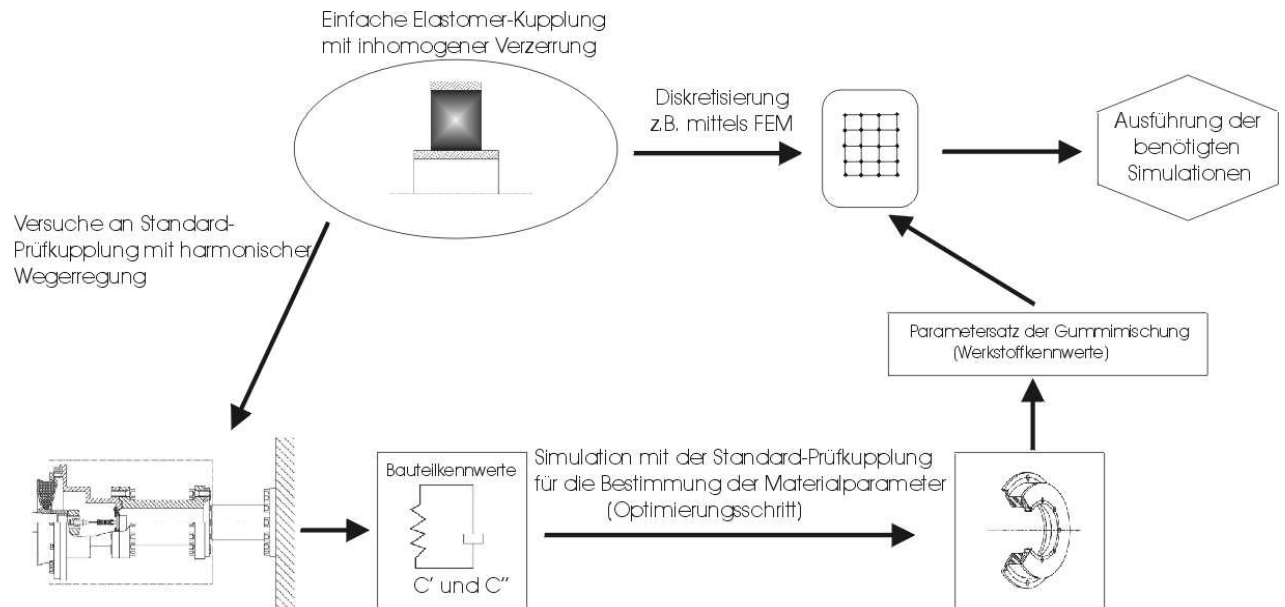


Abbildung 2.17: Vereinheitlichung der Vorgehensweise für verschiedene Kupplungstypen

# Kapitel 3

## Theoretische Grundlagen

### 3.1 Molekulare Struktur des gefüllten Elastomers

Um die Ausführungen zum Stand der Technik (ab S. 7) und zu eigenen Arbeiten zu verdeutlichen, wird an dieser Stelle die molekulare Struktur von Elastomeren anhand einfacher Modelle erläutert.

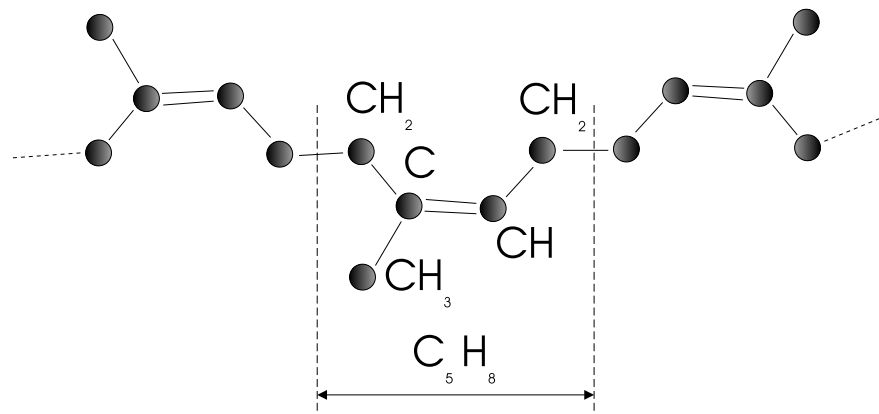


Abbildung 3.1: Die molekulare Struktur vom Naturkautschuk

Der Hydrocarbon-Gummi besteht aus einer Serie von Isopren-Einheiten (C<sub>5</sub>H<sub>8</sub>), die eine kontinuierliche Kette wie in **Abb. 3.1** bilden. In dieser regelmäßigen Kette, trägt jedes einzelne Kohlenstoffatom eine Methyl-Gruppe (CH<sub>3</sub>). Der doppelte Bund an dem Kohlenstoffatom bestimmt das chemische Reaktionsverhalten der Kette. Der zweite Bund ist nicht notwendig, um die Einheit zusammenzuhalten. An dieser Stelle werden während der Vulkanisation Schwefel oder andere Reagenzien gebunden. Das Schwefelatom hat eine Valenzzahl von zwei und kann somit zwei Isopren-Einheiten miteinander verbinden. An diesem kann ausserdem auch Sauerstoff eingebunden werden, wodurch die Oxidations-Alterung entsteht.

Eine typische Naturkautschukette (Polyisopren) enthält etwa 5000 Isopren-Einheiten und ist ca. 10<sup>-4</sup> cm lang. Nach diesen Ausführungen kann man sich

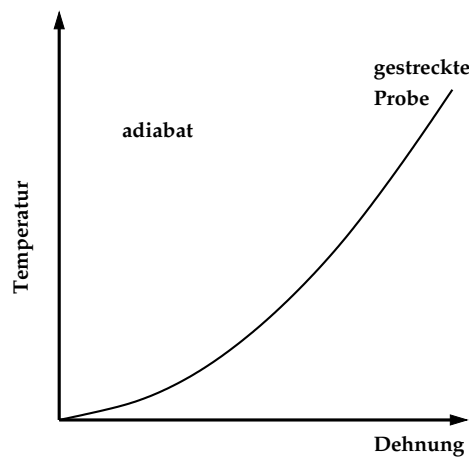


Abbildung 3.2: Temperaturerhöhung eines Gummifadens bei adiabater Versuchsführung in Abhängigkeit von der Dehnung.

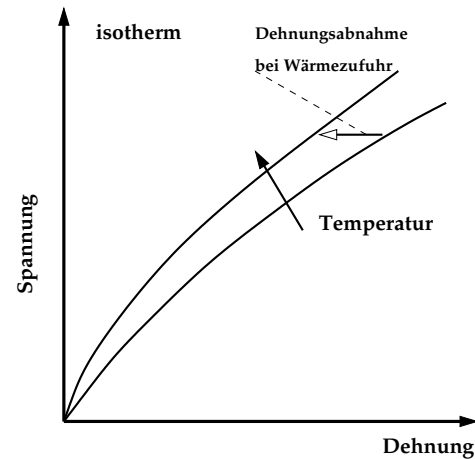


Abbildung 3.3: Dehnungsabhängigkeit eines Gummifadens bei isothermer Versuchsführung und konstanter Last.

vorstellen, dass eine Isopren-Einheit in einem beliebigen Winkel an die andere Isopren-Einheit angehängt wird. Hierdurch entsteht ein komplexes dreidimensionales Gebilde. In **Abb. 3.4** ist die zweidimensionale Abbildung einer einzigen Kette zu sehen. In einem Netzwerk sind die einzelnen Ketten durch Verschlaufungen miteinander verbunden. Bei Deformation werden die Verbindungen des Netzwerkes auseinander gezogen, so dass die Verknäulungen gelöst werden. Dies erklärt die grosse Deformierbarkeit vom Gummi. Es soll bemerkt werden, dass nach diesem Konzept die intermolekulare Potentialenergie durch eine Deformation sich nicht verändert, weil der Abstand benachbarter Atome als konstant angenommen werden kann. Durch die Vulkanisation wird der Gummi nicht nur durch Verknäulungen, sondern auch durch Schwefelbrücken vernetzt. Diese lösen sich nicht bei Belastung, was auch die Erklärung für die Abnahme der Dehnbarkeit nach der Vulkanisation ist.

JOULE hat im Jahr 1859 folgende zwei Phänomene bei isothermer Versuchsführung an Gummi beobachtet, **Abb.3.3**.

1. Wenn einem unter konstanter Last gedehnt gehaltenem Gummi Wärme zugeführt wird, dann zieht er sich zusammen.
2. Gummi gibt Wärme ab (reversibel), wenn er gedehnt wird.

Diese zwei Phänomene werden üblicherweise als GOUGH-JOULE-Effekte bezeichnet.

MÜLLER schreibt zur inneren Energie [56]:

Wir wissen aus der Mechanik, dass die kinetische Energie eines Körpers in potentielle Energie umgewandelt werden kann und umgekehrt.

...

Hier ist wichtig, dass die kinetische Energie eines Körpers nicht verschwinden kann; sie kann sich jedoch auf die Atome verteilen, d.h. sie kann übergehen in kinetische Energie der ungeordneten Atombewegung und in potentielle Energie zwischen den Atomen. Man sieht die Energie dann nicht mehr und sagt darum, die kinetische Energie sei in *innere Energie* übergegangen. Aber man kann sie fühlen und als Temperatur messen: *Tatsächlich ist die Temperatur ein Maß für die (mittlere) kinetische Energie der Atome in einem ruhenden Körper.*

Die Veränderung der inneren Energie,  $\Delta U$ , in einem beliebigen Prozess ist,

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (3.1)$$

wobei  $\Delta Q$  die zugeführte Wärme und  $\Delta W$  die durch die äussere Kraft geleistete Arbeit bezeichnet. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt weiter, dass die Entropiedifferenz in einem reversiblen Prozess

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{\theta} \quad (3.2)$$

ist. Wie oben erwähnt, gibt es bei der Deformation von Gummi keine Änderung der potentiellen Energie. Bei isothermer Versuchsführung ist  $\Delta U = 0$  und es folgt aus Gl. 3.1

$$\Delta W = -\Delta Q. \quad (3.3)$$

Wenn die zugeführte Verformungsarbeit positiv angenommen wird, dann ist die zugeführte Wärme  $\Delta Q$  negativ, d.h.. dass bei Verformung Wärme abgegeben wird. Die Menge der abgegebenen Wärme ist wegen  $\Delta U = 0$  exakt gleich der Arbeit, die durch die eingeprägte Arbeit geleistet wird.

Die innere Energie von Gummi ist auf die thermische Schwankungen der einzelnen konstituierenden Kettenatome zurückzuführen und somit rein kinetisch. Damit ist die innere Energie lediglich eine Funktion der Temperatur und unabhängig von dem Zustand/Lage der Ketten. Solange die innere Energie sich nicht ändert, muss die durch eine eingeprägte Kraft verursachte isothermische Deformation durch eine äquivalente Wärmemenge ausgeglichen werden. Wenn diese Wärme bei adiabatischer Versuchsführung nicht weitergeleitet werden kann, erhöht die durch die äussere Kraft eingebrachte Energie die molekularen thermischen Schwankungen, mit anderen Worten; die Temperatur erhöht sich, **Abb. 3.2**. Dabei ist die Temperaturerhöhung, nennen wir sie  $\Delta\theta$ , gleich  $\Delta Q/C$ , wobei  $C$  die Wärmekapazität und  $\Delta Q$  der äquivalente Wärmeemission bei einer Dehnung  $l - l_0$  bei konstanter Temperatur sind.

In Gl. 3.2 wurde die Entropiedifferenz eingeführt. Die Entropie  $S$  selbst lässt sich berechnen, wenn man für  $\Omega = 1$  die Entropie  $S = 0$  setzt.

$$S = k \cdot \ln \Omega. \quad (3.4)$$

$k$  ist die Boltzmannsche Konstante und  $\Omega$  ist die Zahl der Möglichkeiten mit der, der Zustand von Gummi realisiert werden kann<sup>1</sup>.

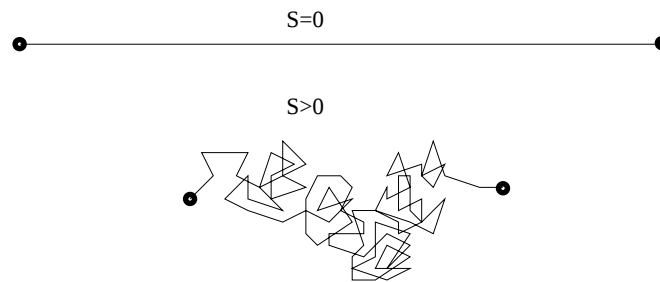


Abbildung 3.4: Entropie als Maß für Ordnung.

Erläuterung: Es gibt viele Diskussionen und Deutungen für den Begriff der Entropie. Eine allgemein bekannte Deutung ist, dass die Entropie ein Maß für Ordnung ist. Am Beispiel einer einzelnen Gummikette kann dieser Erklärung Rechnung getragen werden. Man stelle sich eine entknäulte und zu einem geraden Strang gesetzte Gummikette vor (s. **Abb. 3.4**, oben). Offensichtlich gibt es nur eine einzige Möglichkeit diesen Zustand zu realisieren, also  $\Omega = 1$ , dem  $S = 0$  zugewiesen wird. Dieser ist der ordentlichste Zustand. Für den zweiten Zustand aus Abb. 3.4 gibt es aus statistischer Sicht offenbar eine grosse Anzahl von Möglichkeiten diesen zu realisieren, entsprechend ist die Entropie auch grösser. Bei Streckung nimmt folglich die Entropie ab. Streckung und Entropie sind also gekoppelt. Man spricht i.A. von einer Entropie-Elastizität bzw. speziell von Gummi-Elastizität.

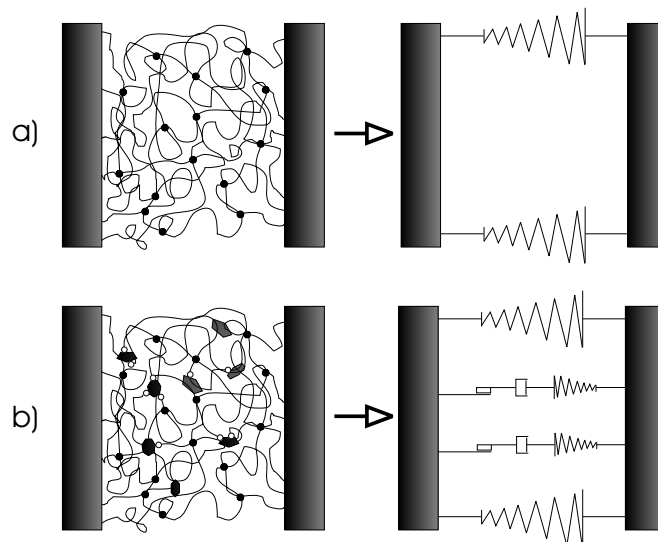


Abbildung 3.5: Modell des ungefüllten und gefüllten Elastomers [62].

In **Abb. 3.5a** links ist die schematische Darstellung eines ungefüllten Elastomers

<sup>1</sup> $\Omega$  ist in der statistischen Physik bekannt als die thermodynamische Wahrscheinlichkeit: Anzahl der Mikrozustände, durch die der betrachtete thermodynamische Zustand („Makrozustand“) realisiert werden kann [76].

zu sehen. Die zugehörige Matrix, die mit Schwefelbrücken<sup>2</sup> verknüpft ist, zeigt nichtlinear-elastische Eigenschaften (Abb. 3.5a rechts). Durch den Zusatz von Füllstoffen wie Ruß oder Kieselsäure wird eine Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Elastomere erzielt (**Abb. 3.5b** links). Das Material gewinnt an Festigkeit und Härte. Hierdurch bekommt es auch die erwünschten Dämpfungseigenschaften. In der Modellierung wird diese Tatsache durch die Dämpfungselemente im Füllstoffstrang ausgedrückt (Abb. 3.5b rechts). Zusätzlich zu den Hauptvalenzbindungen entstehen noch Bindungen zwischen zwei oder mehr Füllstoffteilchen und Bindungen zwischen Füllstoffteilchen und der Matrix, wobei die verwendeten Füllstoffe keine Valenzbindungen mit der Matrix eingehen. Diese beiden Arten von Bindungen sind im Gegensatz zu den Hauptvalenzbindungen nicht fest, sie lösen sich bei einer ausreichenden Spannung; die beteiligten Ketten können dann segmentweise gleiten (Slipmechanismus). Während der Entlastung werden die Bindungen erneut aufgebaut. Dies entspricht in der Modellierung einem Reibungselement mit einer bestimmten Haftgrenze. Die nichtlinear-elastische Eigenschaften des Füllstoffs wird in der Modellierung durch ein Federelement dargestellt, das zu den Reibungs- und Dämpfungselementen in Reihe geschaltet wird.

Die molekulare Struktur des Elastomers gibt auch Aufschluss über die Alterungsprozesse des Werkstoffs. Beispielsweise verursacht die Einwirkung von Sauerstoff Oxidationsprozesse, die über verschiedene Zwischenstufen zu einer weiteren kovalenten Bindung führen. Bei Einwirkung von Ozon hingegen werden die ungesättigten Polymerketten an den Doppelbindungsstellen abgebaut und es kommt zu Rissen [13].

## 3.2 Finite-Elemente-Verfahren

Beim klassischen RITZ-Verfahren werden für Verschiebungen Ansatzfunktionen eingeführt, die über das gesamte Tragwerk erstreckt sind. Die Ansatzfunktionen müssen zulässig sein, sie sind zulässig, wenn die geometrischen Randbedingungen erfüllen und stetig sind.

Mathematisch ausgedrückt wird beim Verfahren von Ritz eine gesuchte Verschiebung  $u(x, y)$ , in einem Problemgebiet  $\mathcal{G}$ , aus einem Satz von linear unabhängigen Verschiebungsfunktionen,  $u_0^*(x, y)$  bis  $u_m^*(x, y)$  mit  $0 > m > \infty$ , aufgebaut. Somit kann mit dem geeigneten Gewichtungskoeffizienten  $a_k$  die gesuchte Funktion angegeben werden:

$$u(x, y) = u_0^*(x, y) + \sum_{k=1}^m a_k u_k^*(x, y) \quad (3.5)$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus der Extremaluntersuchung des Verformungspotentials. Dieses setzt sich aus der Verzerrungsenergie und der negativen Arbeit der äußeren Kräfte zusammen. Da ein stationärer Wert für das Gesamtpotential

---

<sup>2</sup>Die Matrix besteht aus den Monomeren und den Schwefelbrücken.

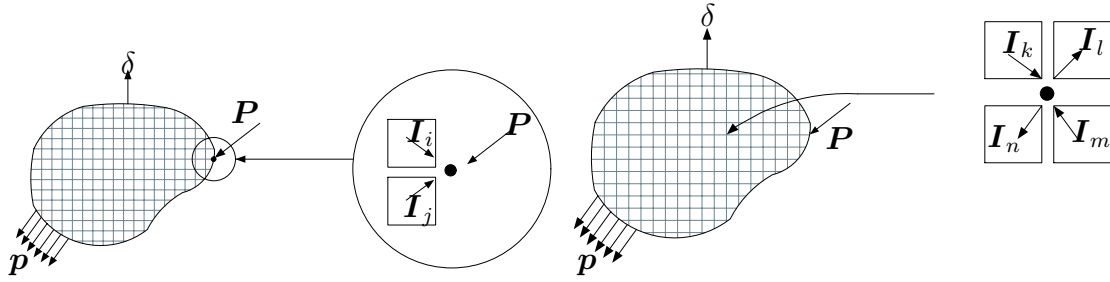


Abbildung 3.6: Gleichgewicht der internen und externen Kräfte am FE-Netz

Abbildung 3.7: Statisches Gleichgewicht im Netz

vorausgesetzt wird, muss die Ableitung des Verformungspotentials nach den Gewichtungskoeffizienten ein Minimum ergeben. Der Grundgedanke des Verfahrens kann z.B. [40] entnommen werden.

Selbst bei nur kleineren Unregelmäßigkeiten in der geometrischen Struktur wird die Suche nach einer geeigneten Ansatzfunktion für das gesamte Gebiet schwierig. Bei der Formulierung der Methode der finiten Elemente wird der Verschiebungszustand deshalb aus Ansätzen aufgebaut, die sich auf Teilbereiche beschränken. Diese Teilbereiche werden als Finite Elemente bezeichnet. Die Verwendung von bereichsweisen Ansätzen liefert also nur Näherungslösungen. Die Ausführungen in diesem Abschnitt zu finiten Elementen lehnen sich an die Ausarbeitung von WRIGGERS [75] an.

Der Grundannahme des statischen Gleichgewichts ist, dass die inneren Kräfte  $\mathbf{I}$  an den Knoten, die sich aus den Elementspannungen ergeben, und die externen Kräfte  $\mathbf{P}$  an jedem Knoten sich ausgleichen (s. **Abb. 3.6, 3.7**):

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{I}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Viele kommerzielle FE-Programme benutzen iterative Verfahren, die auf dem NEWTON-RHAPHSON-Verfahren basieren. Um einen kurzen Überblick zu geben, wird das Verfahren in Stichpunkten beschrieben.

Beim NEWTON-RHAPHSON-Verfahren wird über einen Schritt (Step) eine vorgegebene Last aufgebracht. In nichtlinearen Berechnungen wird die Gesamtlast aus einem Schritt inkrementweise aufzubringen, wobei innerhalb eines Inkrementes mehrere Iterationen durchgeführt werden können um ein Gleichgewichtszustand zu erreichen. D.h. in diesem Verfahren wird angenommen, dass die Lösung  $u_0$  zum vorhergehenden Lastinkrement bekannt ist. Nach einer  $i$ ten Iteration wird eine Näherungslösung  $u_i$  erzielt (s. **Abb. 3.8**).

Die Gleichgewichtsbedingung 3.6 kann in einer diskreten Form angegeben werden,

$$P(u_i + k_{i+1}) - I(u_i + k_{i+1}) = 0 \quad (3.7)$$

wobei  $k_{i+1}$  die Differenz zwischen der Näherung  $u_i$  und der verbesserten Lösung  $u_{i+1}$  ist. Die Entwicklung der Gl. 3.7 in eine TAYLOR-Reihe um die Näherungs-

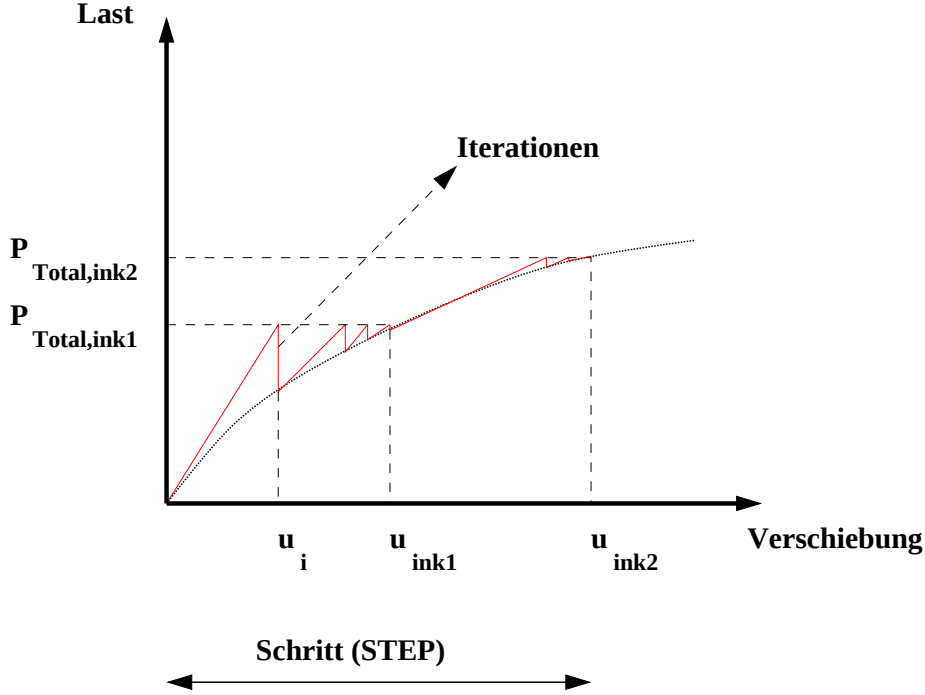


Abbildung 3.8: NEWTON-RHAPHSON-Verfahren

lösung  $u_i$  ergibt:

$$P(u_i) - I(u_i) + \left( \frac{\partial P(u_i)}{\partial u} - \frac{\partial I(u_i)}{\partial u} \right) \cdot k_{i+1} + \dots = 0 \quad (3.8)$$

Durch Vernachlässigung höherer Terme der TAYLOR-Reihe ergibt sich

$$K_i \cdot k_{i+1} = P(u_i) - I(u_i) , \quad (3.9)$$

wobei  $K_i$  die sog. Tangentensteifigkeit ist.

$$K_i = \frac{\partial I(u_i)}{\partial u} - \frac{\partial P(u_i)}{\partial u} \quad (3.10)$$

Die nächste Näherungslösung ist

$$u_{i+1} = u_i + k_{i+1} \quad (3.11)$$

Am einfachen Beispiel einer nichtlinearen Feder mit einer verschiebungsabhängigen Federsteifigkeit (s. **Abb. 3.9**) kann das Verfahren verdeutlicht werden. Dabei wird über eine bestimmte Zeit die äußere Kraft von 0 auf  $P_{end}$  aufgebracht. Als Aufgabe möchten wir die Last in Abhängigkeit der Verschiebung beschreiben.

Angenommen die Lösung  $u_0$  bei der Last  $P_0$  ist bekannt. Ein kleines Lastinkrement,  $\Delta P$  wird auf die Feder appliziert. In Abhängigkeit der Tangentsteifigkeit,  $K_0(u_0)$ , der Endlast  $P_{end}$  und der internen Kräfte aus dem vorherigen Inkrement, wird eine Verschiebungskorrektur  $k_1$  berechnet.

$$K_0 \cdot k_1 = P_{end} - I_0 \quad (3.12)$$

$$= \Delta P \quad (3.13)$$

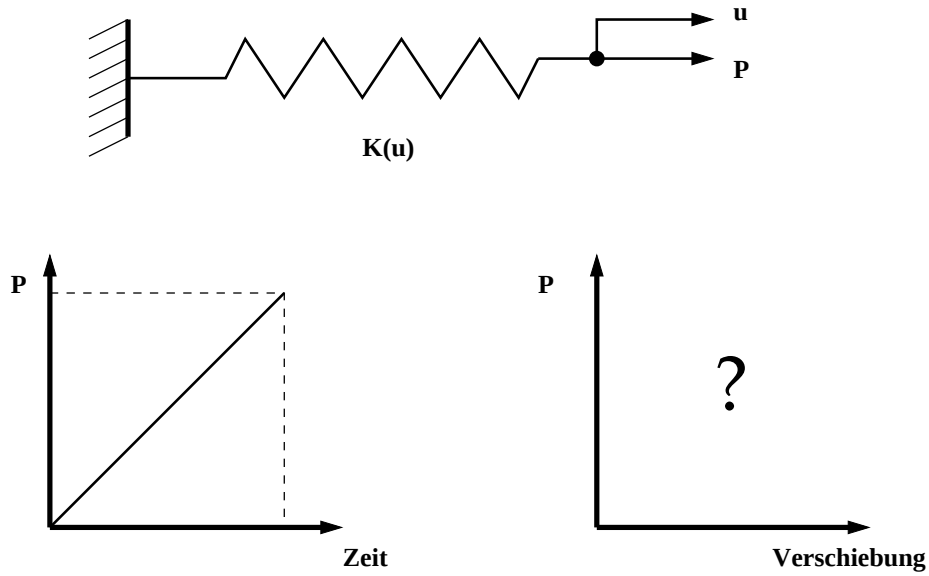


Abbildung 3.9: Einfaches Federelement

Ausgehend von der Verschiebung  $u_1$ , die am Ende der ersten Iteration bestimmt wird, werden  $K_1$  und  $I_1$  neuformuliert und berechnet (s. **Abb. 3.10**).

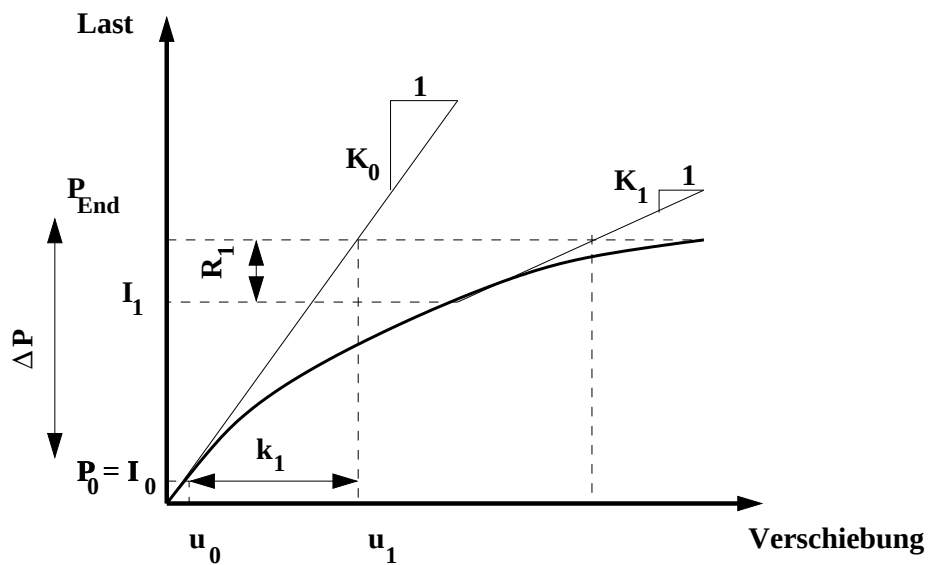


Abbildung 3.10: Verlauf des ersten Inkrementes beim NEWTON-RHAPSON - Verfahren.

Die Differenz zwischen der eingeprägten Gesamtkraft und der inneren Kraft wird das Residium genannt<sup>3</sup> und oft mit  $R$  bezeichnet:

$$R_1 = P_{\text{end}} - I_1 \quad (3.14)$$

<sup>3</sup>In diesem Fall Kraftresidium

Jedes FE-Software wird an dieser Stelle einen Vergleich zwischen einem vorgegebenem oder voreingestelltem Toleranz stellen und falls das Residuum außerhalb der Toleranzgrenze liegt, wird eine weitere Iteration mit neuem  $k_1$  gestartet.

### 3.3 Materialbeschreibung auf der Grundlage der Kontinuumsmechanik

Als ein Eingang zu den kontinuumsmechanischen Formulierungen soll hier vorerst der linearelastische Fall betrachtet werden. Die Dehnung in Belastungsrichtung

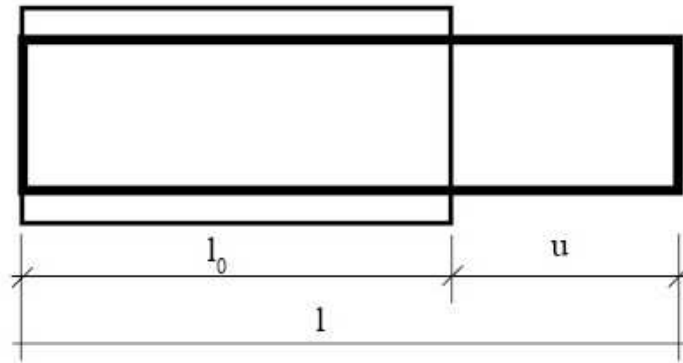


Abbildung 3.11: Volumenelement in der unverformten und verformten Lage

kann in LAGRANGESchen oder in EULERSchen Betrachtungsweise angegeben werden.

| LAGRANGE                                        | EULER                                                                                                         |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varepsilon^L = \frac{\partial u}{\partial x}$ | $\varepsilon^E = \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u / \partial x}{1 - \partial u / \partial x}$ |

So wird beispielsweise die LAGRANGESche Dehnung in EULERSche Dehnung überführt:

$$\varepsilon^E = \frac{\varepsilon^L}{1 - \varepsilon^L} \quad (3.15)$$

Bei einem eindimensionalen Stabelement, dass an einem Ende festgehalten wird, kann die Verformungsenergie in Abhängigkeit der Verschiebung angegeben werden:

$$W = \frac{1}{2} c \cdot u^2. \quad (3.16)$$

Bei einem elastischen Stab mit der Stabsteifigkeit  $c = E A / l$  und einer Dehnung von  $\varepsilon \approx \varepsilon^E \approx \varepsilon^L$

$$W = \frac{1}{2} E A l \varepsilon^2 \quad (3.17)$$

Beim Übergang zu einem elastischen Volumenelement lautet die Verzerrungsenergie entsprechend mit dem Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  und dem Elastizitätstensor  $\boldsymbol{\mathcal{C}} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\mathcal{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.18)$$

wobei die Operation „:“ einer zweifachen Verjüngung entspricht<sup>4</sup>. Die Gl. 3.18 ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \frac{1}{2} [C_{1111} \varepsilon_{11}^2 + C_{2222} \varepsilon_{22}^2 + C_{3333} \varepsilon_{33}^2 \\ & + (C_{1122} + C_{2211}) \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + (C_{2233} + C_{3322}) \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + (C_{3311} + C_{1133}) \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} \\ & + (C_{1212} + C_{2121} + C_{1221} + C_{2112}) \varepsilon_{12}^2 \\ & + (C_{2323} + C_{3232} + C_{2332} + C_{3223}) \varepsilon_{23}^2 \\ & + (C_{3131} + C_{1313} + C_{3113} + C_{1331}) \varepsilon_{31}^2] \end{aligned} \quad (3.19)$$

In FEM-Programmen wird zwecks einer übersichtlicheren Darstellung die Matrix des Elastizitätstensors unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften bei orthotropem Materialverhalten  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$  in der sog. VOIGTSchen Notation angegeben:

$$[\hat{C}_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Der Verzerrungstensor wird als Verzerrungsvektor geschrieben:

$$\{\hat{\varepsilon}_i\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31})^T \quad (3.21)$$

Die volumenbezogene Verformungsenergiefunktion wird geschrieben als

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_i \hat{C}_{ij} \hat{\varepsilon}_j . \quad (3.22)$$

Für linearelastisches Material gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (3.23)$$

bzw. in der Matrixschreibweise (Voigt-Notation)

$$\hat{\sigma}_k = \hat{C}_{kl} \hat{\varepsilon}_l , \quad (3.24)$$

mit dem Spannungsvektor

$$\{\hat{\sigma}_k\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})^T . \quad (3.25)$$

Das linearelastische Materialverhalten in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.26)$$

---

<sup>4</sup>auch doppeltes Skalarprodukt genannt.

### 3.3.1 Hyperelastisches Gesetz für die Elastomermatrix

Bei der Aufstellung nichtlinearer elastischer Materialgesetze wird häufig von massebezogene Verformungsenergiefunktionen<sup>5</sup> Gebrauch gemacht.

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{C}) \Leftarrow \mathcal{W} = \mathcal{W}(J_1(\mathbf{C}), J_2(\mathbf{C}), J_3(\mathbf{C})) , \quad (3.27)$$

wobei  $J_k$  die Invarianten des Verzerrungstensors  $\mathbf{C}$  sind. Grundsätzlich kann der 2. Piola-Kirchoff-Spannungstensor durch Differenzieren der Verformungsenergiefunktion  ${}^M\mathcal{W}$  nach dem rechten Cauchy-Green-Verzerrungstensor erzeugt werden:

$${}^M_E\mathbf{S} = 2 \frac{\partial {}^M\mathcal{W}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left( \frac{\partial {}^M\mathcal{W}}{\partial C_1} \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial {}^M\mathcal{W}}{\partial C_2} \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial {}^M\mathcal{W}}{\partial C_3} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (3.28)$$

wobei hier der Index  $E$  für den Extra-Spannungstensor ohne Zwängungsanteil und der Index  $M$  für den Matrix steht. Bei der Öffnung der partiellen Ableitung 3.28 wird von den Hauptwerten  $C_K$  des Tensors  $\mathbf{C}$ , bzw.  $C_{ij}$  in Indexschreibweise, Gebrauch gemacht. Unter Berücksichtigung der Zwängungsspannung setzt sich der Cauchy-Spannungstensor aus zwei Anteilen:

$$\mathbf{T} = {}_E\mathbf{T} + {}_Z\mathbf{T} \quad (3.29)$$

${}_Z\mathbf{T}$  ist die sogenannte Zwängungsspannung und ergibt sich in diesem Fall aus der Inkompressibilitätsbedingung:

$${}_Z\mathbf{T} = -p\mathbf{1} \quad (3.30)$$

Die partiellen Ableitungen  $\partial C_K / \partial \mathbf{C}$ , mit  $K = 1 \dots 3$ , können mit Hilfe der spektralen Zerlegung bestimmt werden (s. z.B. [12, 75]):

$$\mathbf{C} = C_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \sum_{K=1}^3 C_{(K)} \mathbf{N}_{(K)} \otimes \mathbf{N}_{(K)} = C_1 \mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 + C_2 \mathbf{N}_2 \otimes \mathbf{N}_2 + C_3 \mathbf{N}_3 \otimes \mathbf{N}_3 \quad (3.31)$$

$\mathbf{N}_K$  sind die orthonormalisierten Eigenvektoren von  $\mathbf{C}$ . Entsprechend der Notation in [75] werden durch die Klammer am Index die Summation im Sinne der Einsteinschen Konvention ausgesetzt.

Die Ableitung von  $C_K$  nach dem rechten Cauchy-Green-Verzerrungstensor  $\mathbf{C}$  liefert:

$$\frac{\partial C_K}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{N}_{(K)} \otimes \mathbf{N}_{(K)} \quad (3.32)$$

somit folgt aus Gl. 3.28

$${}^M_E\mathbf{S} = 2 \sum_{K=1}^3 \underbrace{\frac{\partial {}^M\mathcal{W}}{\partial C_K}}_{S_K/2} \mathbf{N}_{(K)} \otimes \mathbf{N}_{(K)} \quad (3.33)$$

$S_K$  entspricht den Eigenwerten von  ${}^M_E\mathbf{S}$ .  $C_K$  und  $\mathbf{N}_K$  lassen sich aus dem Eigenwertproblem

$$(\mathbf{C} - C_K \mathbf{1}) \cdot \mathbf{N}_K = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

---

<sup>5</sup>bzw. Formänderungsenergiefunktion

bestimmen. Die Eigenwerte von  $\mathbf{C}$  entsprechen dem Quadrat der Hauptdehnungen,  $\lambda_K$ , mit  $\lambda_K$  stets größer Null.

Für den symmetrischen reelwertigen Tensor<sup>6</sup>  $\mathbf{C}$  gilt mit  $C_K = \lambda_K^2$  (s. z.B. [75]):

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{54} (-2 J_1(\mathbf{C}) + 9 J_1(\mathbf{C}) J_2(\mathbf{C}) - 27 J_3(\mathbf{C})) \\ q &= \frac{1}{9} (J_1^2(\mathbf{C}) - 3 J_2(\mathbf{C})) \\ \varpi &= \arccos \left( \frac{p}{\sqrt{q^3}} \right) \\ C_1 &= -2\sqrt{q} \cos \left( \frac{\varpi}{3} \right) + \frac{1}{3} J_1(\mathbf{C}) \\ C_2 &= -2\sqrt{q} \cos \left( \frac{\varpi + 2\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} J_1(\mathbf{C}) \\ C_3 &= -2\sqrt{q} \cos \left( \frac{\varpi - 2\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} J_1(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Für den allgemeinen Fall,  $C_1 \neq C_2 \neq C_3$ , sind die Eigenrichtungen

$$\mathbf{N}_{(K)} \otimes \mathbf{N}_{(K)} = \frac{C_K}{2 C_K^3 - J_1 C_K^2 + J_3} \left( \mathbf{C}^2 - (J_1 - C_K) \mathbf{C} + \frac{J_3}{C_K} \mathbf{1} \right), \quad (3.36)$$

mit  $J_K(\mathbf{C}) = J_K$ . Für  $C_1 \neq C_2 = C_3$  und  $C_1 = C_2 = C_3$  siehe [75].

### 3.3.2 Die Gleichungen des Materialgesetzes von Pirscher

Die rechte Seite der **Gl. 3.28** erfordert die Kenntnis der Verformungsenergiefunktion  ${}^M\mathcal{W}$ . Für  ${}^M\mathcal{W}$  können Ansätze verwendet werden, die das hyperelastische Verhalten von Gummi beschreiben. Die bekanntesten Ansätze stammen von Mooney, Mooney-Rivlin und Ogden. Der Mooney-Ansatz wird wegen der relativ einfachen Handhabbarkeit sehr häufig eingesetzt. Ein Sonderfall dieses Ansatzes ist als Neo-Hooke-Gesetz bekannt. Bei kleineren Verzerrungen stimmt der Ansatz recht gut mit Versuchsergebnissen überein. Größere Verzerrungen führen aber zu deutlicheren Abweichungen vom realen Verhalten.

Genauere Angaben und ein Vergleich dieser Ansätze kann [73] entnommen werden. PIRSCHER verwendet den Ansatz von KILIAN (van-der-Waals-Modell). Der Ansatz für die massebezogene Verformungsenergiefunktion nach KILIAN sieht folgendermaßen aus:

$${}^M\mathcal{W} = -\frac{M_G}{\rho} \left\{ 2 {}^M D_M \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{{}^M D_1}{{}^M D_M}} \right) + \sqrt{\frac{{}^M D_1}{{}^M D_M}} \right] + \frac{2}{3} M_a {}^M D_1^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (3.37)$$

In der Funktion  ${}^M D_1$  werden die ersten beiden Invarianten<sup>7</sup> des Verzerrungstensors  $\mathbf{C}$  gewichtet.

<sup>6</sup>da  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ , wird diese Bedingung von dem rechten Cauchy-Green-Tensor erfüllt.

<sup>7</sup>Wegen der Inkompressibilitätsbedingung ist die 3. Invariante  $J_3(\mathbf{C})$  gleich „1“

$${}^M D_1 = {}^M D_1(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} [{}^M \beta J_1(\mathbf{C}) + (1 - {}^M \beta) J_2(\mathbf{C}) - 3] \quad (3.38)$$

Somit enthält die Verformungsenergiefunktion nach der Gleichung 3.37 vier Materialparameter.

|                         |                                                                                                    |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ${}^M G$                | Gleitmodul                                                                                         |
| ${}^M \beta$            | Gewichtung des Einflusses der beiden Invarianten                                                   |
| ${}^M a$ und ${}^M D_M$ | beschreiben die Wechselwirkungen der Ketten untereinander und der Ketten zu den Füllstoffteilchen. |

### 3.3.3 Das Füllstoff-Materialgesetz

Kinematische Verfestigung entspricht der Translation des elastischen Bereichs während des Fließvorgangs im allgemeinen Spannungsraum. Es wird angenommen, dass das Material im Anfangszustand isotrop ist und das Fließen ohne Änderung des Volumens stattfindet. Bei der Formulierung wird von der sog. Gegenspannung<sup>8</sup>  $\boldsymbol{\chi}$  Gebrauch gemacht. Die Gegenspannung gilt als das momentane Zentrum des elastischen Bereiches. Aus diesem Grund wird die Dissipationspotential als eine Funktion der elementaren Invarianten von  ${}^F \mathbf{T} - \boldsymbol{\chi}$  und  $\boldsymbol{\chi}$  formuliert. Da die dritte Invariante ein Maß für die Volumenänderung ist, kann ihr Einfluss vernachlässigt werden. Für das Dissipationspotential wird von CHABOCHE folgende Form gewählt:

$$\Omega = \Omega(\mathcal{J}_2({}^F \mathbf{T} - \boldsymbol{\chi}), \mathcal{J}_2(\boldsymbol{\chi})) \quad (3.39)$$

Da das Fließen ohne Volumenänderung stattfindet, werden nur die Deviatoranteile benutzt:

$$\mathcal{J}_2({}^F \mathbf{T} - \boldsymbol{\chi}) = \sqrt{\frac{3}{2}({}^F \mathbf{T}^D - \boldsymbol{\chi}^D) : ({}^F \mathbf{T}^D - \boldsymbol{\chi}^D)} \quad (3.40)$$

In **Abb. 3.12** wird im projizierten Hauptspannungsraum die Bewegung der Fließfläche vereinfacht dargestellt. Die Form und die Größe der Fläche ändert sich beim Verfestigungsvorgang nicht. Die Berechnung der Gegenspannung basiert auf einer Evolutionsgleichung, die aus zwei Anteilen besteht.

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \underbrace{\frac{2}{3} {}^F C \hat{\mathbf{D}}_v}_{\text{kinematischer Verfestigungsanteil}} - \underbrace{{}^F \Gamma \dot{\boldsymbol{\chi}}^D}_{\text{Memory-Term}} \quad (3.41)$$

Die Bedeutung der Größen befinden sich in der Tabelle 3.1.

Ausgehend vom CHABOCHE-Modell [15, 16] leitet PIRSCHER ein Materialgesetz

---

<sup>8</sup>auch kinematische Verfestigung genannt, s. Tab. 3.1

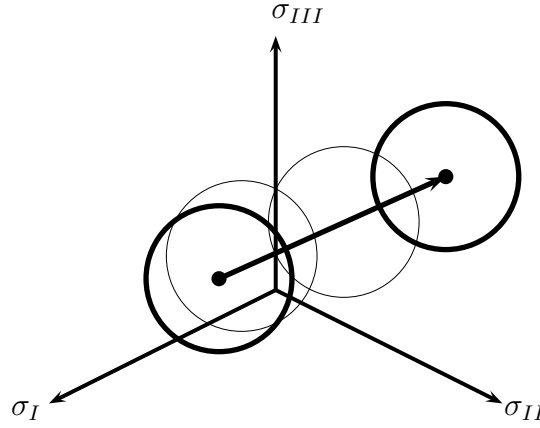


Abbildung 3.12: Kinematische Verfestigung im projizierten Hauptspannungsraum

für gefüllte Elastomere her. Der Gleichungssatz für dieses Gesetz lautet

$$\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}} = \frac{3}{2} \dot{\gamma} \frac{{}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{D}}}{\mathcal{J}_2({}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{D}})} \quad (3.42)$$

$$\dot{\gamma} = \left\langle \frac{\mathcal{J}_2({}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{D}})}{{}^F K} \right\rangle^{F_n} \quad (3.43)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{2}{3} {}^F C \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}} - {}^F \Gamma \dot{\gamma} \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{D}} \quad (3.44)$$

$${}^F \mathbf{T} = {}^F G \left( \frac{\sqrt{{}^F D_m}}{\sqrt{{}^F D_m} - \sqrt{{}^F D_1}} - {}^F a \sqrt{{}^F D_1} \right) \mathbf{B}_{\mathbf{e}} \quad (3.45)$$

$${}^F D_1 = \frac{1}{2} [J_1(\mathbf{B}_{\mathbf{e}}) - 3] \quad (3.46)$$

In Gl. 3.43 wurden die Föpplklammer verwendet:

$$\langle a \rangle = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ 0 & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Die Bedeutung der einzelnen Größen kann der **Tab. 3.1** entnommen werden. Die in der Tab. 3.1 dargestellten Größen der Zwischenplatzierung<sup>9</sup> können durch folgende Operation in der Momentanplatzierung angegeben werden:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.47)$$

Das Ausgangsmodell von CHABOCHE ist in seiner ursprünglichen Form ein Gegenspannungsmodell mit Evolutionsgleichungen. Die Form der Spannungs-Dehnungskurve wird bei zyklischen Beanspruchungen im wesentlichen durch die kinematische Verfestigung vorgegeben. Dieser viskose Spannungsanteil beschreibt

<sup>9</sup>Zwischenplatzierung, s. auch PIRSCHER [62]

Tabelle 3.1: Größen des Gleichungssatzes des Füllstoff-Materialgesetzes Glgn. 3.42 bis 3.46

| Größe                         | Bedeutung/Bemerkung                                                                  | Einheit          |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| <b>Skalare</b>                |                                                                                      |                  |
| ${}^FC$                       | viskose Materialparameter des Füllstoff-Materialgesetzes                             | $\frac{N}{mm^2}$ |
| ${}^F\Gamma$                  | Gedächtnisparameter des Füllstoff-Materialgesetzes                                   | —                |
| $\overline{\Gamma}$           | akkumulierte viskoplastische Verzerrung                                              | —                |
| ${}^FD_m$                     | Materialparameter zur Erfassung der Wechselwirkungen der Ketten zu Füllstoffteilchen | —                |
| ${}^FD_1$                     | Materialfunktion, in Anlehnung an die Van-der-Waals-Funktion                         | —                |
| <b>Tensoren zweiter Stufe</b> |                                                                                      |                  |
| ${}^F\mathbf{T}$              | Füllstoff-Spannungstensor (Cauchy)                                                   | $\frac{N}{mm^2}$ |
| $\hat{\mathbf{D}}_v$          | viskoplastischer Streckungsgeschwindigkeitstensor in der Zwischenplatzierung         | $\frac{1}{s}$    |
| $\hat{\mathcal{X}}$           | kinematische Verfestigung in der Zwischenplatzierung                                 | $\frac{N}{mm^2}$ |
| $\mathbf{B}_e$                | Elastischer linker Cauchy-Green-Verzerrungstensor in der Momentanplatzierung         | —                |

das zeitabhängige Materialverhalten. Ein Vergleich mit einem vereinfachten rheologischen Modell verdeutlicht die Funktionsweise von der Gegenspannungsgleichung. Im eindimensionalen Fall bei einem Material mit der Viskosität  $\eta$  hat der Maxwellstrang die Materialgleichung:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon} \quad (3.48)$$

### 3.4 Das hyperelastische Ogden-Modell

Als Alternative zum KILIAN-Modell kann auch der Ansatz von OGDEN eingesetzt werden. OGDEN wählt folgenden Ansatz für die volumenbezogene Verformungsenergiefunktion

$$\mathcal{W} = \sum_{k=1}^m \mu_k \frac{\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3}{\alpha_k} . \quad (3.49)$$

Es ist möglich diese Verformungsenergiefunktion in andere bekannte Funktionen zu überführen. Als Beispiel liefert die Konstellation  $m = 1$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\mu_1 = G$ , Schubmodul, die sog. Neo-Hookesche Verformungsenergiefunktion:

$$\mathcal{W} = G \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{2} = \frac{G}{2} (J_1(\mathbf{C}) - 3) \quad (3.50)$$

#### 3.4.1 Quasi-Inkompressibilität mit dem Ogden-Modell

Viele Arbeiten beschäftigen sich mit der Quasi-Inkompressibilität in der hyperelastischen Formulierung. Um einige zu nennen, können wir PENG [61], WRIGERS [75] und OGDEN [57] auflisten.

Die Eigenwerte des Cauchy–Spannungstensors  $\mathbf{T}$  ohne Zwängungsspannungen sind:

$$T_j = \frac{\lambda_j}{J} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_j} \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.51)$$

Für isotrop inkompressibles Material lautet die Zwangsbedingung:

$$\det \mathbf{F} = J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (3.52)$$

Unter Berücksichtigung der Zwängungsspannungen  $p$ , auch hydrostatischer Druck genannt, können die Eigenwerte des CAUCHY–Spannungstensors entsprechend

$$T_j = \lambda_j \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_j} - p \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.53)$$

berechnet werden. Es gibt verschiedene Vorgehensweisen um den hydrostatischen Druck zu bestimmen. Eine übliche Vorgehensweise ist die Variationsmethode, in der die Verformungsenergie in ein isochoren und volumetrischen Anteil aufgespalten wird,

$$\mathcal{H}(\mathbf{C}, p) = \mathcal{W}(\mathbf{C}) + {}^*p \mathcal{P}(\mathbf{C}) \quad (3.54)$$

mit der Druckänderung  ${}^*p$  infolge der Kompressibilität und  $\mathcal{P}(\mathbf{C}) = \overline{\mathcal{P}}(J) = 0$  für  $J = 1$ . Das neue Verformungsenergiepotential erfordert die Einführung einer neuen Variable und eines neuen Materialkennwertes. Mit der sog. *Penalty*–Methode wird durch Variation des Potentials eine optimale Aufteilung erreicht:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{C}} + {}^*p \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{C}} = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial {}^*p} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial {}^*p} + {}^*p \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial {}^*p} + \mathcal{P}(\mathbf{C}) = 0 \quad (3.56)$$

Der Penalty-Parameter  $\iota = \frac{\partial \overline{\mathcal{P}}}{\partial {}^*p}$  ist als Materialkennwert zu betrachten. So wird die Anpassung zu verschiedenen Randbedingungen möglich. Die Gleichung 3.56 vereinfacht sich, wenn man

$${}^*p = -\frac{1}{\iota} \overline{\mathcal{P}}(J) \quad (3.57)$$

setzt.  $\mathcal{P}(\mathbf{C})$  bzw.  $\overline{\mathcal{P}}(J)$  sind ein Mass für die Volumenverzerrung in der Nähe von  $J = 1$ , welcher folgende Bedingungen erfüllen muss:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}(J = 1) &= 0 \\ \overline{\mathcal{P}}(J) &\neq 0 \quad \forall J \neq 1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Gebräuchliche Funktionen sind:

$$\overline{\mathcal{P}}(J) = \ln(J) \quad (3.59)$$

$$\overline{\mathcal{P}}(J) = J - 1, \quad (3.60)$$

wobei die zweite Funktionen durch den linearen Anstieg im Bereich größerer Deformationen immer ungünstiger wird. Mit 3.59 ergibt sich der hydrostatische Druck zu:

$$\overset{*}{p} = -\frac{1}{\iota} \ln(J) \quad (3.61)$$

Mit Gl. 3.53 und 3.61 können die Eigenwerte des modifizierten Cauchy-Spannungstensors für den quasi inkompressiblen Fall angegeben werden:

$$T_i = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^m \mu_k \lambda_i^{\alpha_k} - p - \overset{*}{p} \quad (3.62)$$

Im spannungsfreien Zustand mit  $\lambda_i = 1$  und  $\overset{*}{p}$  ergibt sich der hydrostatische Druck  $p$  zu

$$p = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^m \mu_k \quad (3.63)$$

Um eine physikalische Deutung des Penalty-Parameters  $\iota$  zu finden, wird der Fall der reinen Dilatation betrachtet. Für diesen Fall sind die Spannungen und Verzerrungen einheitlich, so dass

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = J^{\frac{1}{3}} \\ T_1 &= T_2 = T_3 = -P \end{aligned} \quad (3.64)$$

Der bekannte Kompressionsmodul  $K$  wird definiert als

$$K = \lim_{J \rightarrow 1} \frac{\partial(-P)}{\partial J} \quad (3.65)$$

Der Einsatz von  $K$  in den Gln. 3.61 und 3.62 liefert:

$$K = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^m \mu_n \alpha_n + \frac{1}{\iota} \quad (3.66)$$

In Gl. 3.65 entspricht  $P$  dem eingepprägten hydrostatischen Druck. Der Vergleich mit der Definition des Kompressionsmoduls  $K = 2G/3 + \Lambda$ , mit Lames Konstante  $\Lambda$ , liefert, dass  $\iota$  der Inverse der Lames Konstante entspricht. Damit wird aus Gl. 3.61

$$\overset{*}{p} = -\Lambda \ln J, . \quad (3.67)$$

PENG [61] modifiziert Ogden's Verformungsenergiefunktion um:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^m \mu_k \left( \frac{\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3}{\alpha_k} - \ln J \right) + \Lambda (J \ln J - J + 1) \quad (3.68)$$

Bei Wahl der Neo-Hookeschen Parameter wird die Verformungsenergiefunktion

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} G (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (3.69)$$

Zur Trennung der kompressiblen und inkompressiblen Anteile der Verformungsenergiefunktion schlägt PENG folgende Druckfunktion vor:

$$\overset{*}{p} = -\frac{\Lambda}{9} \left( \frac{1}{J} - \frac{1}{J^{10}} \right) \quad (3.70)$$

Einsetzen von Gl. 3.70 führt zu der Verformungsenergiefunktion

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1} \mu_k \left( \frac{\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3}{\alpha_k} - \ln J \right) + \frac{\Lambda}{81} (9 \ln J + J^{-9} - 1) \quad (3.71)$$

Dies entspricht der Verwendung einer Penalty-Funktion von:

$$\overline{\mathcal{P}}(J) = \frac{\overset{*}{p}}{\Lambda} = -\frac{1}{9} \left( \frac{1}{J} - \frac{1}{J^{10}} \right) \quad (3.72)$$

### 3.4.1.1 Bestimmung des Cauchy-Spannungstensors $\mathbf{T}$

Die Eigenwerte in der Momentankonfiguration lassen sich aus der Verformungsenergiefunktion Gl. 3.62 berechnen (s. [57]):

$$\begin{aligned} T_j &= \frac{\lambda_j}{J} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_j} - \overset{*}{p} - p, \text{ mit } j = 1, 2, 3 \\ &= \frac{1}{J} \sum_{k=1}^m \mu_k (\lambda_j^{\alpha_k} - 1) - \overset{*}{p}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

wobei  $\overset{*}{p}$  dem hydrostatischen Druck entspricht. Hier kann eine der Funktionen aus dem vorhergehenden Abschnitt z.B. Gl. 3.70, eingesetzt werden.

Für isotrope Festkörper haben der linke Cauchy-Green-Verzerrungstensor  $\mathbf{B}$  und der Cauchy-Spannungstensor  $\mathbf{T}$  die gleichen Eigenvektormatrix  $[\hat{\mathbf{n}}]$ . Die Transformationsvorschrift lautet

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^3 \hat{n}_{ik} T_k \hat{n}_{jk} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T} = T_1 \mathbf{n}^I \otimes \mathbf{n}^I + T_2 \mathbf{n}^{II} \otimes \mathbf{n}^{II} + T_3 \mathbf{n}^{III} \otimes \mathbf{n}^{III} \quad (3.74)$$

Die Eigenvektoren von  $\mathbf{B}$  werden analog Gl. 3.36 berechnet<sup>10</sup>

$$\mathbf{n}^k \otimes \mathbf{n}^k = \frac{B_k}{2B_k^3 - J_1 B_k^2 + J_3} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_k) \mathbf{B} + \frac{J_3}{B_k} \mathbf{1} \right), \quad (3.75)$$

$B_k$  sind die Eigenwerte des Tensors  $\mathbf{B}$ . Die Matrix der Eigenvektoren wird im folgenden angegeben:

$$[\hat{\mathbf{n}}] = [\hat{n}_{ij}] = \begin{pmatrix} n_1^I & n_2^I & n_3^I \\ n_1^{II} & n_2^{II} & n_3^{II} \\ n_1^{III} & n_2^{III} & n_3^{III} \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Mit  $i = I, II, III$  und  $j = 1, 2, 3$ . Die Eigenvektoren können aus der charakteristischen Gleichung berechnet werden.

Beim gefüllten Gummi ergeben Messungen eine Poissons Zahl zwischen 0,4985 und 0,4995 [73]. Bei den üblichen *double precision*-Format stellt dies nicht wirklich ein Problem dar. Das OGDEN-Modell kann für ein quasi-inkompressibles Material mit den Parametern aus [57] (s. **Tab. 3.2**) eingesetzt werden. Für die Bestimmung

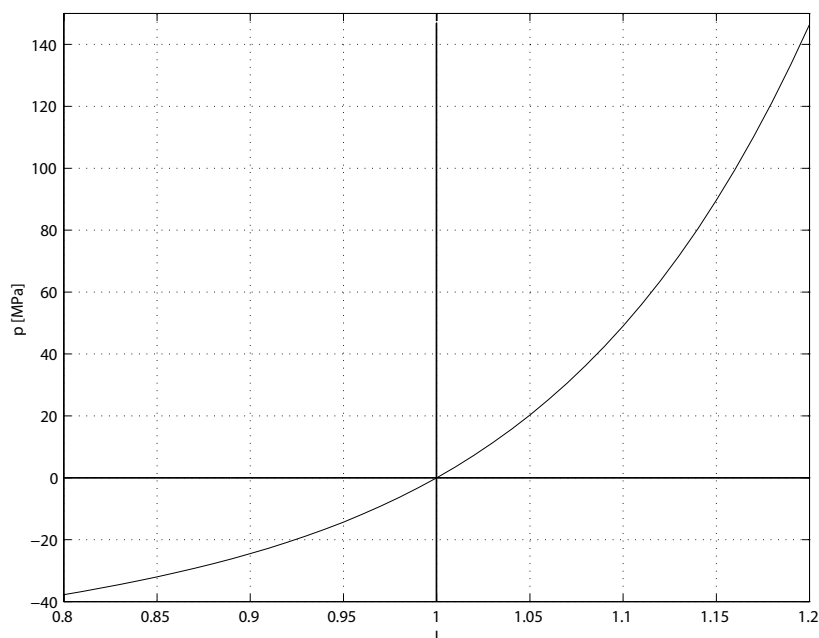
---

<sup>10</sup>  $J_k(\mathbf{B}) = J_k(\mathbf{C})$ .

Tabelle 3.2: Parameter des OGDEN-Modells für gefüllten Gummi

| Index $k$     | 1     | 2        | 3        |
|---------------|-------|----------|----------|
| $\mu_k$ [MPa] | 0,618 | 0.001245 | -0,00982 |
| $\alpha_k$    | 1,3   | 5,0      | -2,0     |

der Druckfunktion 3.70 wird eine Poissonszahl von  $\nu = 0,49932$  genommen<sup>11</sup>. Diese Poissonszahl entspricht einer Laméschen Konstante von  $\Lambda \approx 304,62$  MPa. In **Abb. 3.13** ist der Verlauf der Druckfunktion mit den entsprechenden Werten dargestellt.

Abbildung 3.13: Verlauf der Druckfunktion  $p$  über die JAKOBISChe Determinante  $J$  nach Gl. 3.70

Damit können die Cauchy-Spannungen für das Matrix-Stoffgesetz für  $B_1 \neq B_2 \neq B_3$  hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 {}^M\mathbf{T} = & \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^3 \mu_k (\lambda_1^{\alpha_k} - 1) - p \right\} \frac{B_1}{2B_1^3 - J_1 B_1^2 + J_3} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_1)\mathbf{B} + \frac{J_3}{B_1}\mathbf{1} \right) \\
 & + \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^3 \mu_k (\lambda_2^{\alpha_k} - 1) - p \right\} \frac{B_2}{2B_2^3 - J_1 B_2^2 + J_3} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_2)\mathbf{B} + \frac{J_3}{B_2}\mathbf{1} \right) \\
 & + \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^3 \mu_k (\lambda_3^{\alpha_k} - 1) - p \right\} \frac{B_3}{2B_3^3 - J_1 B_3^2 + J_3} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_3)\mathbf{B} + \frac{J_3}{B_3}\mathbf{1} \right)
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Für die Bestimmung von  $p$  siehe Gl. 3.63. Auf ähnliche Art und Weise kann der 2. Piola-Kirchhoff-Tensor  ${}^M\mathbf{S}$  bestimmt werden. Die Hauptspannungen werden

---

<sup>11</sup>Wert aus [61]

mit Hilfe der Verformungsenergiefunktion Gl. 3.71 bestimmt.

$$S_k = \lambda_k^{-1} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_k} = \lambda_k^{-2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \mu_m (\lambda_k^{\alpha_m} - 1) - p^* J \right\} \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.78)$$

Für isotrope Festkörper haben der 2. Piola-Kirchoff-Spannungstensor und der rechte Cauchy-Green-Tensor die gleichen Eigenwerte (s. Gl. 3.36). Mit Hilfe der Eigenvektormatrix  $\hat{\mathbf{N}}$  und den Hauptspannungen  $S_k$

$$^M S_{IJ} = \sum_{k=1}^3 \hat{N}_{Ik} S_k \hat{N}_{Jk} \quad (3.79)$$

## 3.5 Theorie der Wärmeleitung

### 3.5.1 Die Gesamtenergie eines Körpers

Die Gesamtenergie besteht aus innerer und kinetischer Energie. Die innere Energie setzt sich aus der kinetischen Energie der ungeordneten Atombewegung und der potentiellen Energie zwischen den Atomen zusammen. Definiert man eine innere spezifische Energie  $u$ , so gilt für die innere Energie  $U$  des Körpers:

$$U = \int_V \rho u dV. \quad (3.80)$$

Die kinetische Energie des Körpers wird durch die Summe der kinetischen Energien der Einzelpunkte gebildet:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (3.81)$$

Damit gilt für die Gesamtenergie:

$$W = U + E_{kin} = \int_V \rho u dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (3.82)$$

### 3.5.2 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

Jedes ruhende thermodynamische System besitzt eine charakteristische Zustandsgröße, die innere Energie  $U$ . Sie wächst durch die dem System zugeführte Wärme und die zugeführte Arbeit [76].

$$dU = dQ + dW. \quad (3.83)$$

Die Ableitung der Gl. 3.83 nach der Zeit, ergibt die Änderung der Energie über der Zeit als Summe aus thermischer und mechanischer Leistung:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} + P. \quad (3.84)$$

### 3.5.3 Zugeführte Leistung

Die gesamte zugeführte Leistung setzt sich zusammen aus der Leistung, die über die Oberfläche  $\mathbf{A}$  zugeführt wird, und der Leistung die im Volumen  $V$  eingebracht wird. Die mechanische Leistung  $P$  wird durch die Leistung der Oberflächen- und Volumenkräfte bestimmt zu:

$$P = \int_A \mathbf{T} \mathbf{v} d\mathbf{A} + \int_V \rho \mathbf{f} \mathbf{v} dV, \quad (3.85)$$

wobei  $\mathbf{T}$  den Cauchyschen Spannungstensor,  $\mathbf{f}$  die massebezogenen Volumenkräfte bezeichnet.

Die Wärmezufuhrleistung  $\dot{Q}$  wird über die im Innern durch Wärmequellen  $\dot{q}$  eingebrachte und die durch den Wärmestromvektor  $\mathbf{h}$  abgeführte Leistung berechnet:

$$\dot{Q} = \int_V \rho \dot{q} dV - \int_A \mathbf{h} d\mathbf{A}. \quad (3.86)$$

### 3.5.4 Die Hauptgleichungen der Energieerhaltung

Mit dem ersten Hauptsatz und den Gl. 3.82 bis 3.86 kann die Bilanzgleichung aufgestellt werden:

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho u + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dV = \int_A (\mathbf{T} \mathbf{v} - \mathbf{h}) d\mathbf{A} + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \dot{q}) dV. \quad (3.87)$$

In differentieller Form lautet die Gleichung nach [67] unter Berücksichtigung der Impulserhaltung:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{h} + \rho \dot{q} \quad (3.88)$$

## 3.6 Wärmeleitung

Die Energiebilanz in Gl. 3.88 ist eine Gleichung mit mehreren Unbekannten. Deren Lösung braucht weitere Gleichungen, die in Form von Materialgesetzen zur Verfügung stehen. In diesem Abschnitt werden die Materialgrößen der Wärmeleitung am ruhenden Körper vorgestellt. Die Dichte wird als konstant angenommen. Damit vereinfacht sich die Energiebilanz zu:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \mathbf{h} + \rho \dot{q} \quad (3.89)$$

Die Definition der spezifischen Wärmekapazität lautet

$$c = \frac{dq}{d\theta}. \quad (3.90)$$

Die bei konstantem Volumen zugeführte Wärmemenge wird direkt in innere Energie umgewandelt. Bei konstantem Druck wird zusätzlich Arbeit durch die Wärme-  
dehnung gegen den äußeren Druck geleistet. Die Wärmekapazität für konstantes Volumen

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_v, \quad (3.91)$$

und für konstanten Druck:

$$c_p = c_v + \left( \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_\theta + p \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_p. \quad (3.92)$$

Die Annahme, daß das spezifische Volumen eines Festkörpers annähernd konstant bleibt, führt zu einer annäherungsweise Gleichheit der beiden Terme:

$$c_p \approx c_v \quad (3.93)$$

Mit dem Gesetz von Fourier wird der Wärmestromvektor  $\mathbf{h}$  bestimmt. Für ein isotropes Material, d.h. die Wärmeleitfähigkeit  $k$  ist in allen Richtungen gleich, gilt:

$$\mathbf{h} = -k \nabla \theta. \quad (3.94)$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass der Wärmestrom dem Temperaturgradienten entgegengerichtet ist.

Mit den gewählten Voraussetzungen lautet die Differentialgleichungen 3.89 der Wärmeleitung und 3.94 für den ruhenden Körper in der neuen Form:

$$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla(k \nabla \theta) + \rho \dot{q}. \quad (3.95)$$

### 3.7 Die Wärmeentwicklung infolge mechanischer Beanspruchung

Unter Vernachlässigung der äußeren Wärmequellen kann eine Energiegleichung aus den Bilanzsätzen für das Materialgesetz von PIRSCHER formuliert werden. Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung numerisch erfolgen sollte. Man erhält somit die Temperaturverteilung im Elastomerkörper:

$$\rho c_p \dot{\theta} - k \Delta \theta - \text{sp} \left( {}^F \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{v}} \mathbf{F}^{-1} \right) + \frac{3}{2 {}^F C} \text{sp} \left( \hat{\mathcal{X}} \dot{\mathcal{X}} \right) = 0, \quad (3.96)$$

Die Größen der Gl. 3.96 sind in der **Tabelle 3.3** aufgelistet.

Tabelle 3.3: Größen der Energiegleichung 3.96

| Größe                         | Bedeutung/Bemerkung                                               | Einheit          |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------|------------------|
| <b>Skalare</b>                |                                                                   |                  |
| $\rho$                        | Dichte des Elastomers, wird als konstant angenommen               | $\frac{kg}{m^3}$ |
| $\theta$                      | Temperatur                                                        | $K$              |
| $k$                           | Wärmeleitkoeffizient                                              | $\frac{W}{m K}$  |
| ${}^F C$                      | Materialparameter des Füllstoffmaterialgesetzes                   | $\frac{N}{mm^2}$ |
| $c_p$                         | spezifische Wärmekapazität                                        | $\frac{J}{kg K}$ |
| <b>Tensoren zweiter Stufe</b> |                                                                   |                  |
| $\mathbf{F}$                  | Deformationsgradient                                              | —                |
| ${}^F \mathbf{T}$             | Füllstoff-Spannungstensor (Cauchy)                                | $\frac{N}{mm^2}$ |
| $\mathbf{E}_{\mathbf{v}}$     | viskoplastischer Green-Verzerrungstensor in der Bezugsplatzierung | —                |
| $\hat{\mathcal{X}}$           | kinematische Verfestigung in der Zwischenplatzierung              | $\frac{N}{mm^2}$ |

Dabei stellt die Wärmeentwicklungsgleichung 3.96 die Wärmeerzeugung und -verteilung durch mechanische Leistung dar. Diese Gleichung gilt es numerisch zu lösen. Wie auch aus der Arbeit von PIRSCHER hervorgeht, ist die spezifische Wärmekapazität

$$c_p = \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta}. \quad (3.97)$$

wobei die massenspezifische Entropiedichte  $\eta$  die Ableitung der volumenspezifischen Helmholtzschen freien Energie  $\psi$  nach der Temperatur  $\theta$  ist:

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.98)$$

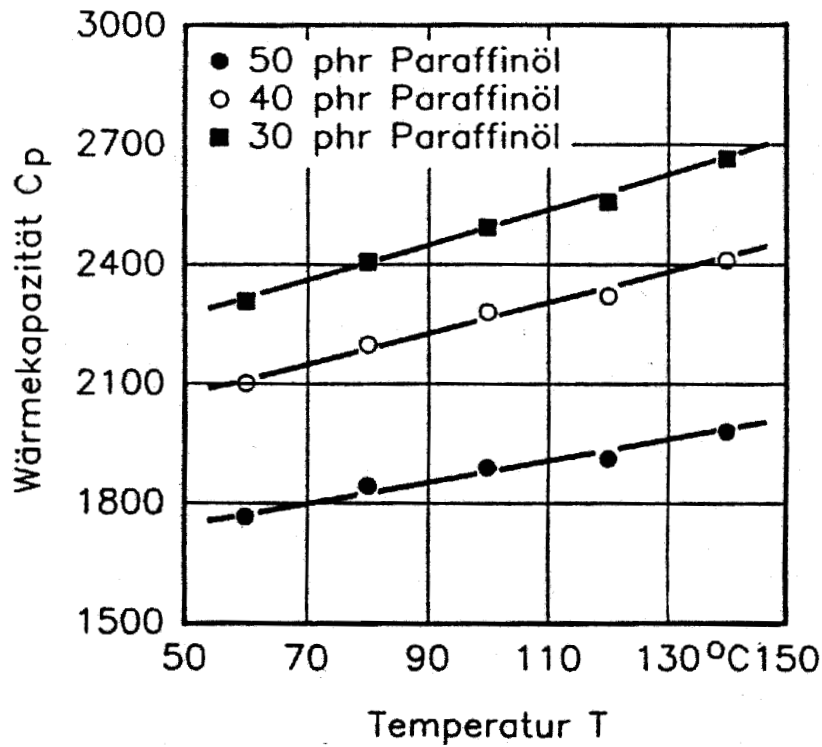


Abbildung 3.14: Wärmekapazität versus Temperatur [79].

In der Arbeit von YU [79] wird unter anderem die spezifische Wärmekapazität eines Elastomers in Abhängigkeit von der Temperatur und dem Weichmachergehalt<sup>12</sup> untersucht. In **Abb. 3.14** ist ein eindeutiger linearer Verlauf der Wärmekapazität über die Temperatur im untersuchten Temperaturbereich zu erkennen<sup>13</sup>. Mit Hilfe dieser linearen Abhängigkeit kann hergeleitet werden, dass  $\partial\eta/\partial\theta$  einem konstanten Faktor entspricht und  $c_p$  somit linear von der Temperatur abhängt. Die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität kann mittels eines bekannten Wertes für die Wärmekapazität bei einer Bezugstemperatur als eine Funktion angegeben werden. Somit vereinfacht sich die Gl. 3.97 zu

$$c_p(\theta) = \frac{\partial c_p}{\partial \theta}(\theta - \theta_{\text{Bezug}}) + c_{p, \text{Bezug}} \quad (3.99)$$

Der Ableitungsterm  $\frac{\partial c_p}{\partial \theta}$  kann aus Abb. 3.14 bestimmt werden.

Für den Wärmeleitkoeffizienten  $k$  ist ebenfalls ein lineares Verhalten zu beobachten. DÖPPER [18] nimmt in seinem Beitrag den konstanten Wert 0,23 W/mK für diesen Koeffizienten an. Aus **Abb. 3.15** geht jedoch hervor, dass bis zu einem Rußgehalt von 40% die Möglichkeit besteht, eine von der Temperatur linear abhängende Funktion anzugeben. Als ein erster Ansatz kann der untersuchte Bereich auf einen Rußgehalt von 0 bis 40% beschränkt werden.

<sup>12</sup>in diesem Fall Paraffinöl

<sup>13</sup>In der Abbildung aus der Arbeit von YU ist die Temperatur mit  $T$  bezeichnet, in der vorliegenden Arbeit wird für die Temperatur  $\theta$  verwendet

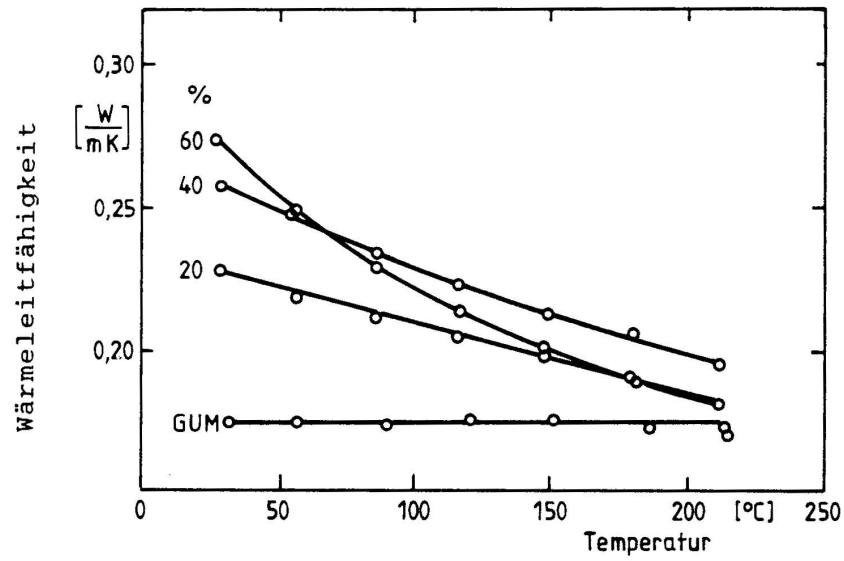


Abbildung 3.15: Wärmeleitkoeffizient versus Temperatur mit der Rußmischung als Parameter [18].

Die Wärmeleitkoeffizient kann ebenfalls als eine Funktion der Temperatur angegeben werden:

$$k = \frac{\partial k}{\partial \theta} |_{\text{Rußgehalt}} \cdot \theta + k|_{\theta=0^{\circ}C} \quad (3.100)$$

Damit kann die Gl. 3.96 beispielsweise mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens nach der Temperatur gelöst werden.

# Kapitel 4

## Durchführung der Versuche

### 4.1 Die Auswahl eines geeigneten Probekörpers

Wie schon mehrmals erwähnt wurde, treten bei Elastomeren sowohl geometrische als auch materielle Nichtlinearitäten auf. Bei alleinigen Einsatz von Zugstäben als Probekörper oder auch Parallelschubfeder ist nicht zu erwarten, dass die Auswirkungen der Nichtlinearität getrennt werden können. Die von KÜMMLEE [43] oder BECKER [6] gewählten Kupplungen scheinen für kupplungsrelevante Untersuchungen am geeignetesten zu sein. Deshalb kam in dieser Arbeit eine ähnliche Kupplung zum Einsatz. Die Geometrie der ausgesuchten Kupplung ist aus

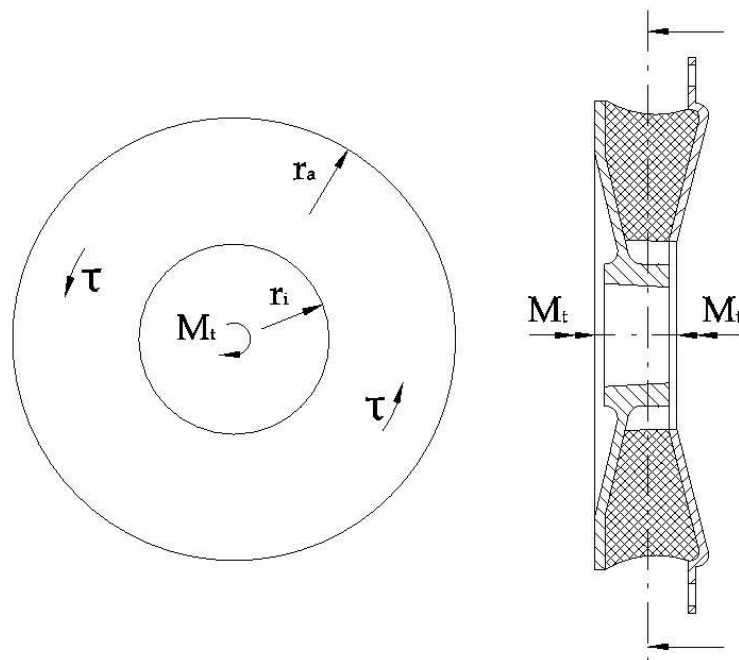


Abbildung 4.1: Die Beanspruchungen an der VULKAN–Vulkardan E-Kupplung

**Abb. 4.1** zu sehen. Als Prüflastung werden zeitveränderliche Drehmomente angesetzt. Für nicht zu große Deformationen kann davon ausgegangen werden,

dass sich in den Gummi-Elementen nahezu gleiche Schubverzerrung einstellen.

Für ein statisches Drehmoment gilt mit der Drehsteifigkeit  $c_\varphi$  und dem Drehwinkel  $\varphi$

$$M_t = c_\varphi \cdot \varphi \quad (4.1)$$

Bei der Bestimmung der Materialparameter werden vergleichsweise kleine Deformationen vorausgesetzt, so dass mit dem Schubmodul  $G$  und der Schubverzerrung  $\gamma$

$$\tau = G \cdot \tan \gamma \quad (4.2)$$

gilt.

Für die Schubverzerrung ergibt sich mit der Probenbreite  $b(r)$

$$\tan \gamma = \frac{\varphi \cdot r}{b(r)}. \quad (4.3)$$

Für die Schubspannung gilt

$$\tau = G \cdot \varphi \cdot \frac{r}{b(r)}. \quad (4.4)$$

Die Kupplung ist so konstruiert, dass das Verhältnis  $b(r)/r$  annähernd konstant ist. Damit ergibt sich eine nahezu konstante Schubspannung  $\tau$  im Gummielement der Kupplung:

Wegen der konstanten Spannungsverteilung können gemessene Werte direkt zur Bestimmung von Materialparametern benutzt werden. Da es sich bei Schubbeanspruchungen um Spannungen handelt, die sich nicht auf der Diagonale des Spannungstensors befinden, ermöglicht die Messung von  $\tau$  zusätzlich die Bestimmung von Materialparametern ohne die Berücksichtigung der Zwangsspannungen, die sich aus den Materialgesetzen von MOONEY oder von KILIAN aus der Inkompressibilität ergeben. Bei der Ermittlung von Materialparametern aus einem Zugversuch muss nebst der geometrischen Faktoren auch die Zwängungsspannung mit Hilfe des Materialgesetzes und Randbedingungeng berechnet werden. In **Abb. 4.2** werden die hydrostatischen Spannungen an einem Zugstab nach Mooney und Kilian berechnet und gegenübergestellt.

In dieser Arbeit wird angestrebt die Materialparameter möglichst direkt aus dem Probekörper zu bestimmen. Bei den Messungen sind Spieleffekte unerwünscht. Deshalb kommen nur Kupplungen mit anvulkanisierten Gummi-Metall-Übergang in Frage. Aus diesem Grund fiel die Wahl auf eine Vulkardan E-Kupplung der Firma VULKAN. Die vom Werk vorgesehene Welle-Nabe-Verbindung wurde durch einen Kegelpressverband ersetzt, um auch hier Spieleffekte auszuschliessen.

Im Vorfeld zu dieser Arbeit wurde der Einfluss der Kupplungsstahlflansche auf die Messwerte durch eine FEM-Simulation untersucht. Theoretisch kann die Verformung der Stahlflansche einen Einfluss auf die Krafteinleitung und damit auf die Messwerte haben. Um dies auszuschliessen, wurde ein Modell mit Starrkörper

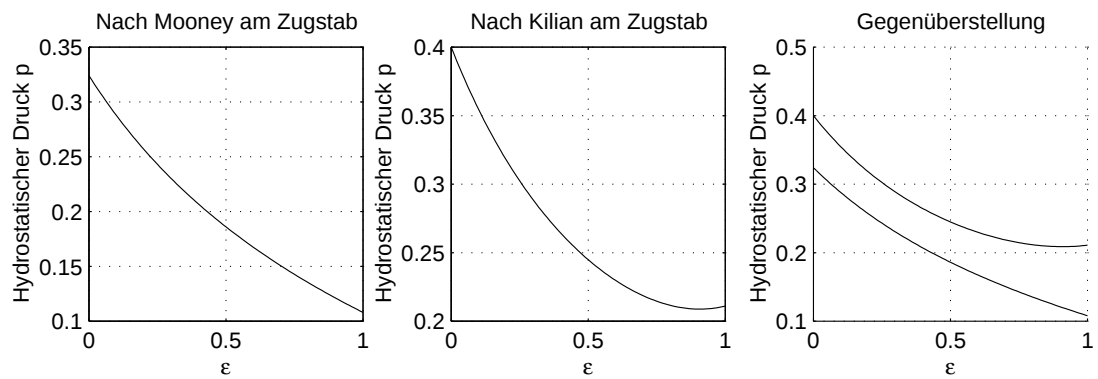


Abbildung 4.2: Unterschiede in der Berechnung der Hydrostatischen Druckes nach unterschiedlichen hyperelastischen Materialgesetzen

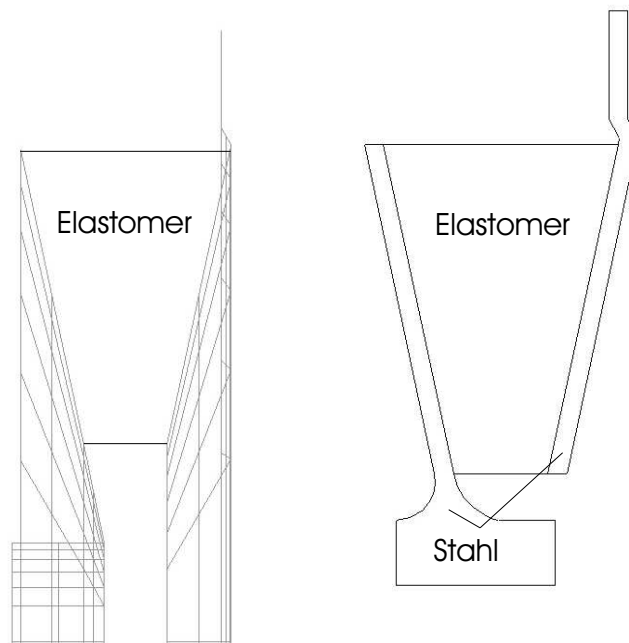


Abbildung 4.3: Krafteinleitung über Starrkörper bzw. über Stahlflansche

anstatt Flanschen und ein Modell mit den entsprechenden Stahlflanschen erstellt (s. **Abb. 4.3**). Da hier lediglich eine qualitative Aussage benötigt wird, wurde ein hyperelastisches Materialgesetz nach Mooney–Rivlin für die Modellierung angewendet.

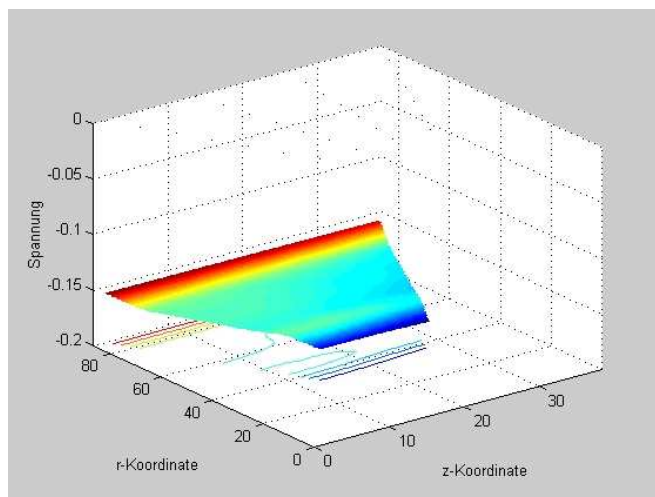


Abbildung 4.4: Schubspannungen bei Krafteinleitung über Stahlflansche.

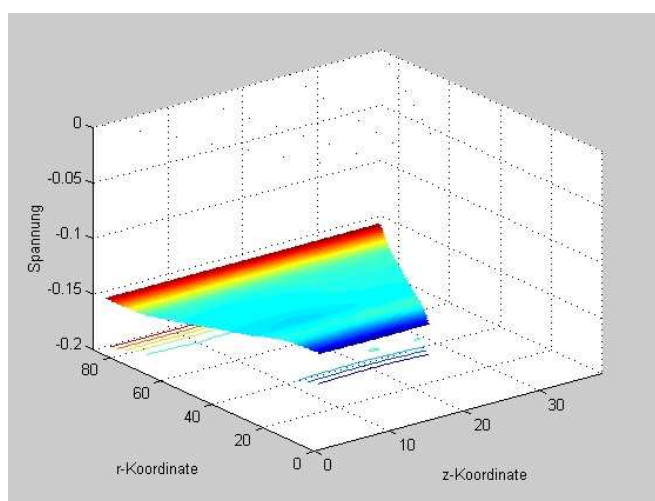


Abbildung 4.5: Schubspannungen bei Krafteinleitung über Starrkörper.

Die Ergebnisse im Gummielement sind kaum zu unterscheiden, so dass der Prüfkörper ohne Bedenken eingesetzt werden kann. Die Schubspannungsverläufe bei der Modelle sind im entsprechenden Schnitt in den **Abbildungen 4.4** und **4.5** dargestellt.

## 4.2 Das Prüf- und Meßsystem

Die erforderlichen Versuche für die Bestimmung der Materialkennwerte werden mit einem Drehprüfstand durchgeführt. Der Antrieb erfolgt über ein Hydropulssystem, das aus einem Hydraulikaggregat, einem hydraulischen Drehzylinder und

einem Steuerschrank besteht. Der Drehzylinder wird von einer Hydraulikpumpe über zwei Druckspeicher versorgt. Im **Abb. 4.6** ist der Prüfstand und der Signalfluss schematisch dargestellt. Das Drehmoment wird am festen Ende des Wellenstranges mit einer Drehmomentmeßnabe (3) gemessen. Der relative Verdrehwinkel ( $\Delta\varphi$ ) wird direkt an der Kupplungsnahe aufgenommen. In **Abb. 4.7**

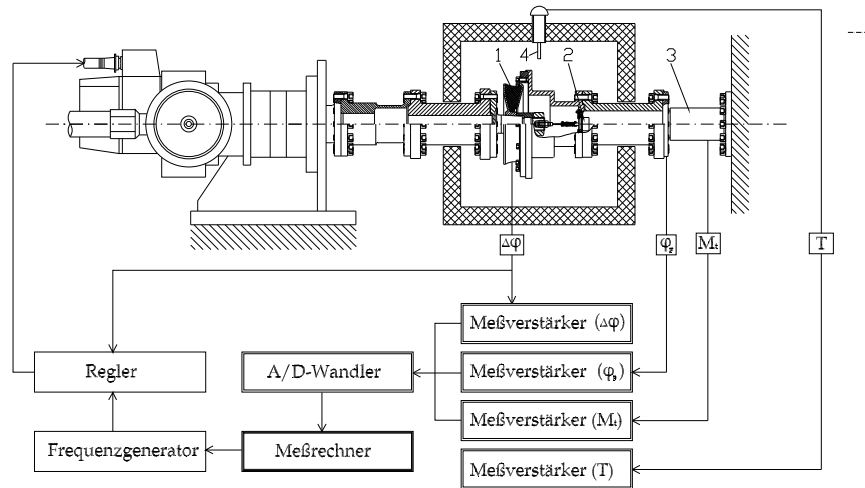


Abbildung 4.6: Versuchsaufbau

ist der prinzipielle Aufbau des Prüfstandes mit dem Klimakammer zu sehen. Die Elastomer-Kupplung wird in einer Klimakammer (1), die über ein Gebläse (3) mit einem Kälte-Wärme-Prüfschrank zu einem geschlossenen Kreislauf verbunden ist, auf die richtige Temperatur gebracht.

### 4.3 Auswahl der Kennwerte bei Messung der gedämpften Schwingungen

Zur Beschreibung des frequenzabhängigen Schwingungsverhaltens von Elastomer-Kupplungen hat sich die komplexe Steifigkeit  $\underline{C}$  bewährt.

$$\underline{C} = C' + i \cdot C'' \quad (4.5)$$

Die komplexe Form der harmonischen Schubwinkelerregung lautet:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \hat{\gamma} \cdot e^{i\omega t} \\ &= \hat{\gamma} \cdot (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Schubspannungsantwort auf die Gleitwinkelerregung 4.6 ist ein Frequenzgemisch, das in Form einer Fourier-Reihe dargestellt werden kann:

$$\underline{\tau} = \tau_0 + \hat{\tau}_1 \cdot e^{i(\omega t + \delta_1)} + \hat{\tau}_2 \cdot e^{i(\omega t + \delta_2)} + \dots \quad (4.7)$$

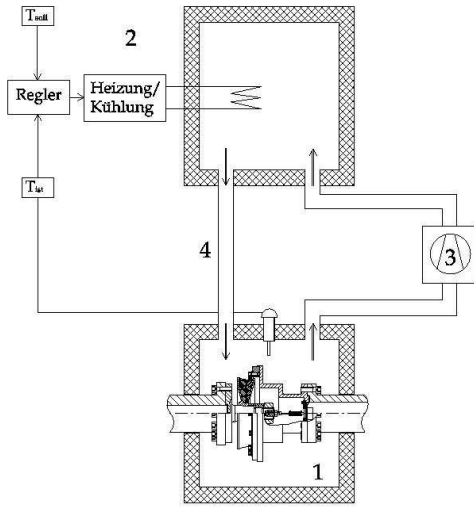


Abbildung 4.7: Aufbau eines Klimasystems am Prüfstand



Abbildung 4.8: Geöffnete Klimakammer

Bei gemessenen Hystereseschleifen haben wir es allgemein mit Nichtlinearitäten zu tun. Um dennoch Kennwerte der linearen Viskoelastizitätstheorie verwenden zu können, wird *das Verfahren der harmonischen Balance* benutzt (s. [23]). Die dissipierte Energie  $W_D$  pro Schwingperiode hängt lediglich von der ersten Harmonischen ab. Die Schubspannungsantwort reduziert sich zu:

$$\underline{\tau} = \hat{\tau}_1 \cdot e^{i(\omega t + \delta_1)} \quad (4.8)$$

Die komplexe Steifigkeit,  $\underline{C} = \underline{\tau} / \underline{\gamma}$ , ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \frac{\hat{\tau}_1 \cdot e^{i(\omega t + \delta_1)}}{\hat{\gamma} \cdot e^{i\omega t}} \\ &= \frac{\hat{\tau}_1}{\hat{\gamma}} (\cos \delta_1 + i \cdot \sin \delta_1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Der Realteil der komplexen Steifigkeit wird „dynamische Steifigkeit“ genannt:

$$C' = \frac{\hat{\tau}_1}{\hat{\gamma}} \cos \delta_1 \quad (4.10)$$

Entsprechend ist die Verluststeifigkeit das Imaginärteil von  $\underline{C}$ :

$$C'' = \frac{\hat{\tau}_1}{\hat{\gamma}} \sin \delta_1 \quad (4.11)$$

Die zur Bestimmung der beiden Kennwerte notwendigen Größen  $\tau$  und  $\gamma$  können einer Hystereseschleife in **Abb. 4.9** entnommen werden. Allerdings ist die direkte Entnahme dieser Werte aus einer gemessenen Hystereseschleife nicht empfehlenswert. Da die Meßstreuungen am Umkehrpunkten und Nulldurchgängen große prozentuelle Abweichungen bei der Bestimmung der Kennwerte bewirken.

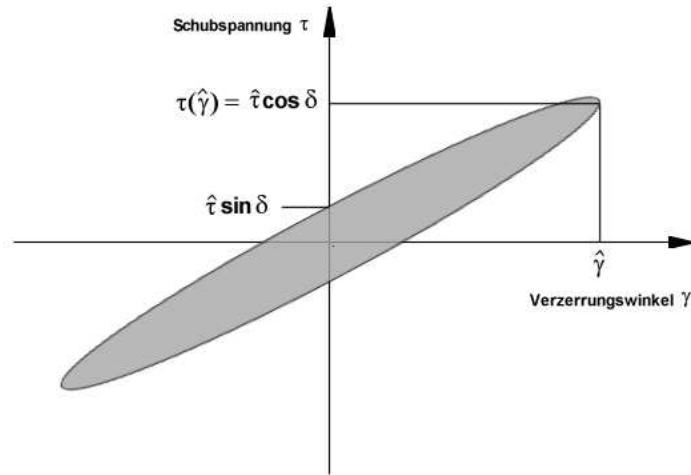


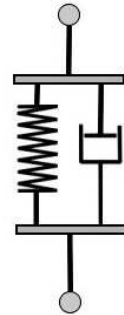
Abbildung 4.9: Darstellung der Kennwerte an einer Hystereseschleife

An einem Voigt-Kelvin-Modell (s. Rechts) können Verknüpfungen zu weiteren, in Schwingungstechnik üblichen Dämpfungsgrößen verdeutlicht werden. Für ein auf Schub beanspruchtes Voigt-Kelvin-Modell ergibt sich die Spannung zu:

$$\tau = c \cdot \gamma + b \cdot \dot{\gamma} \quad (4.12)$$

Für eine harmonische Winkelerregung mit  $\gamma = \hat{\gamma} \cdot \sin \omega t$  lautet die Schubspannungsantwort des Modells:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \hat{\gamma} \cdot [c \cdot \sin \omega t + b \cdot \omega \cdot \cos \omega t] \\ &= c \cdot \hat{\gamma} \left( \sin \omega \cdot t + \frac{b \cdot \omega}{c} \cos \omega \cdot t \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$



Der Faktor  $\frac{b \cdot \omega}{c} = \tan \delta$  ist die sog. Verlustzahl. Die Dämpfungsarbeit, die bei einer Periode geleistet wird, entspricht:

$$W_D = \int_{t=0}^{2\pi} \tau \frac{d\gamma}{d(\omega \cdot t)} d(\omega \cdot t) = \int_{t=0}^{2\pi} (c \hat{\gamma} \sin \omega t + b \cdot \omega \cdot \hat{\gamma} \cdot \cos \omega t) \hat{\gamma} \cos \omega t d(\omega \cdot t) \quad (4.14)$$

Die Auswertung des Integrals über ergibt die Dämpfungsarbeit pro Periode:

$$W_D = b \cdot \hat{\gamma}^2 \omega \pi \quad (4.15)$$

Durch Bestimmung von  $W_D$ ,  $\hat{\gamma}$  und  $\omega$  kann  $b$  berechnet werden.

In der Regel zeigen Gummiwerkstoffe kein ideales Voigt-Kelvin-Verhalten. In diesem Fall wird eine Fourier-Analyse durchgeführt.

$$\tau = \underbrace{c_{eq}}_{A_1} \cdot \hat{\gamma} \sin \omega t + \underbrace{b_{eq} \cdot \hat{\gamma} \cdot \omega}_{B_1} \cos \omega t + A_2 \cdot \sin 2\omega t + B_2 \cdot \cos 2\omega t + \dots \quad (4.16)$$

wobei die in Gl. 4.16 die äquivalenten Steifigkeiten der Fourieranalyse,

$$\int_{t=0}^{2\pi} \tau \sin \omega t d(\omega t) = \pi \cdot c_{eq} \cdot \hat{\gamma} \quad (4.17)$$

$$\int_{t=0}^{2\pi} \tau \cos \omega t d(\omega t) = \pi \cdot b_{eq} \cdot \omega \cdot \hat{\gamma} \quad (4.18)$$

zum Einsatz kommen. Somit lautet die Verlustarbeit

$$W_D = b_{eq} \cdot \hat{\gamma}^2 \omega \pi \quad (4.19)$$

Die Verlustarbeit wird in **Abb. 4.10** veranschaulicht. Die potentielle und dissi-

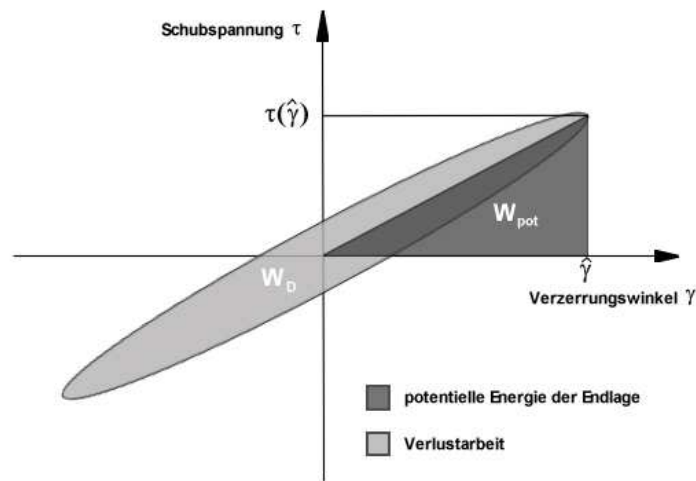


Abbildung 4.10: Hystereseschleife mit Energieanteilen  $W_{pot}$  und  $W_D$

pative Energie können ins Verhältnis gesetzt werden:

$$\Psi = \frac{W_D}{W_{pot}} = 2 \cdot \pi \frac{b \cdot \omega}{c} \quad (4.20)$$

Damit ergibt sich die Verluststeifigkeit zu

$$c'' = c \cdot \tan \delta = \frac{W_D}{\pi \cdot \hat{\gamma}^2} \quad (4.21)$$

Auf der Basis dieser Gleichungen wird ein robuster Auswertungsalgorithmus realisiert. Das Integral zur Berechnung des Flächeninhalts wird mittels der Trapezmethode numerisch gelöst.

Die Auswertungsroutine erfüllt folgende Aufgaben:

- Einlesen der Meßwerte
- Identifikation der auswertungsrelevanten Meßwertbereiche

- Mittelwertbestimmung
  - Glättung
  - Ruhesignalentfernen
  - Nullstellensuche
  - Periodenweise Extremwertsuche
- Extraktion einer geeigneten Schwingungsperiode
  - Berechnung der Hystereseffläche  $W_D$
  - Berechnung von dynamischer Steifigkeit  $c'$  und Verluststeifigkeit  $c''$

## 4.4 Ergebnisse

### 4.4.1 Kurzzeitversuche

Die Basismessungen zur Kennwertbestimmung werden bei verschiedenen Frequenzen, Amplituden und Temperaturen bei harmonischer Wegerregung in Kurzzeitversuchen durchgeführt. Bei höheren Temperaturen wurde der Wärmeschrank zwei Stunden vor Versuchsbeginn eingeschaltet, um eine gute Durchwärmung der Versuchskupplung in der Klimakammer zu gewährleisten.

Im Betrieb wird die Temperaturverteilung in der Kupplung nach längerer Zeit inhomogen. Bei der Versuchsdurchführung wird vereinfachend angenommen, dass sich die Kupplungstemperatur bei dynamischer Belastung, während der ersten Perioden noch nicht wesentlich ändert, sondern zunächst näherungsweise homogen verteilt und gleich der Umgebungstemperatur ist. Diese Annahme wird dadurch bekräftigt, dass die in den durchgeführten Versuchen ermittelten Systemeigenschaften des Versuchsstandes sich innerhalb der ersten Perioden kaum ändern.

In **Abb. 4.11** wird anhand von Hystereseschleifen der Amplitudeneinfluss auf die mechanischen Eigenschaften eines Elastomers gezeigt. Es ist zu erkennen, dass sich mit zunehmender Amplitude eine flachere Lage der Hystereseschleifen zeigt. Die Kupplung zeigt eine relativ geringe Dämpfung

Die dynamische Steifigkeit  $c'$  des verwendeten Elastomers fällt mit Zunahme des Verzerrungswinkels ab (s. **Abb. 4.12**). Dieser Effekt steht nicht mit den Ergebnissen von linearen viskoelastischen Modellierung im Einklang. Da mit höheren Erregungsamplituden bei gleichbleibender Frequenz die Beanspruchungsgeschwindigkeit ansteigt, wäre mit einem Ansteigen der dynamischen Steifigkeit mit zunehmender Amplitude zu rechnen.

Der gemessene Rückgang der dynamischen Steifigkeit ist auf den Einfluss der Füllstoffe, die wie Reibelemente wirken, zurückzuführen. Mit zunehmender Belastung lösen sich kurzzeitig immer mehr Graphiteinschlüsse und rutschen durch. Somit entspannen sich die viskoelastischen Monomere der Matrix. Da die einzelnen

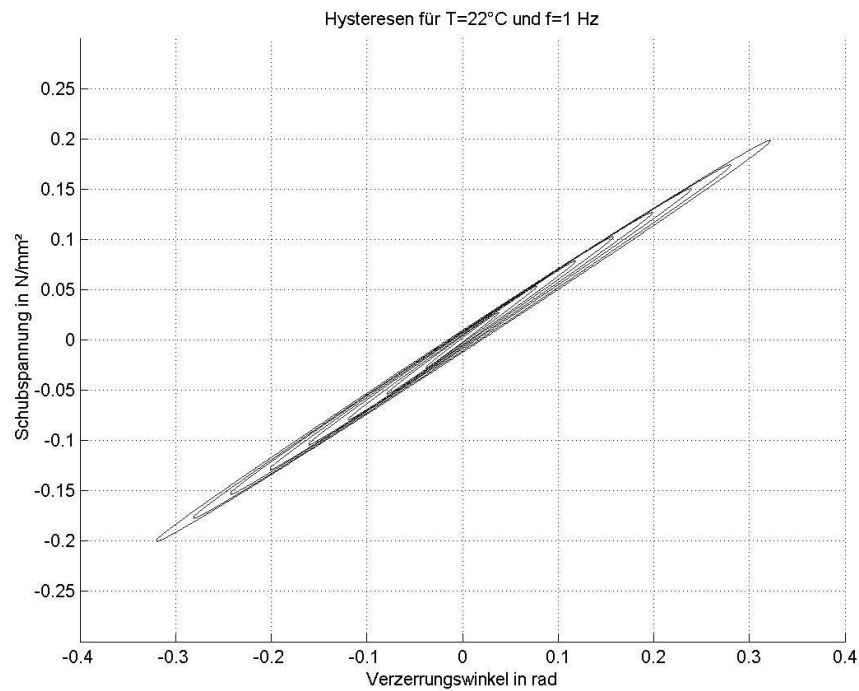


Abbildung 4.11: Hysteresen unterschiedlicher Amplitude bei  $f=1\text{Hz}$  und  $T=22^\circ\text{C}$

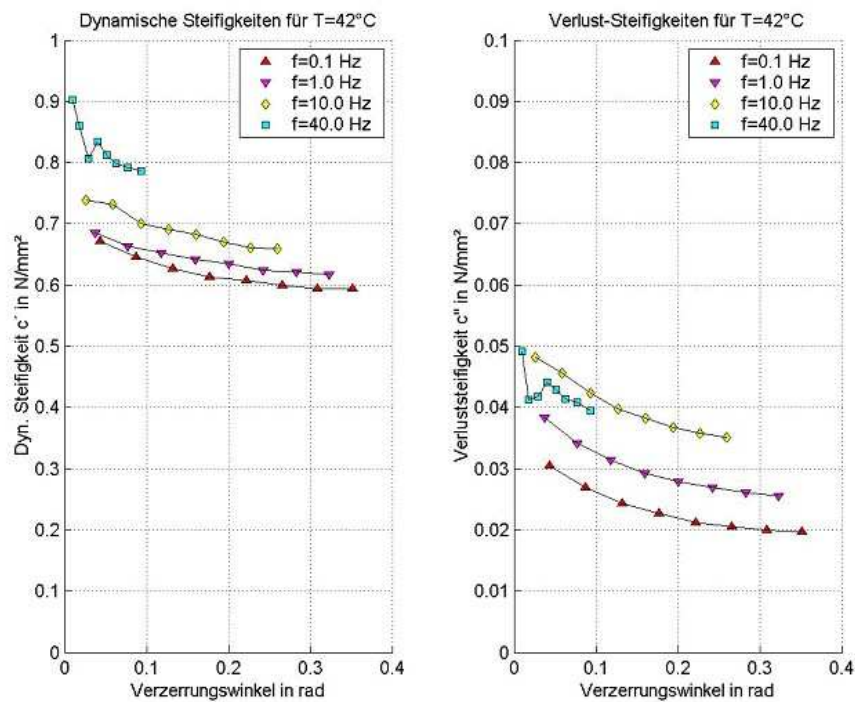


Abbildung 4.12: Dynamische und Verluststeifigkeiten in Abhängigkeit der Frequenz für  $T=42^\circ\text{C}$

Reibelemente unterschiedliche Haftungsmomente aufweisen und auch mehrfach gleiten können, ist die Abnahme der dynamischen Steifigkeit ein kontinuierlicher Prozess.

Die Verluststeifigkeiten zeigen für jede Frequenz bei konstanter Temperatur ebenfalls einen mit zunehmender Amplitude degressiv abfallenden Ablauf (Abb. 4.12), jedoch ist die Abhängigkeit von der Temperatur und Frequenz bei diesem Kennwert wesentlich stärker (**Abbildungen 4.13-4.16**) als bei der dynamischen Steifigkeit ab. Im Intervall von 22°C bis 62°C sinkt die Verluststeifigkeit auf etwa 60% ihres Wertes bei 22°C. Die Verluststeifigkeit ändert sich im untersten Temperaturbereich am stärksten, was sicherlich mit der größeren Wärmeaufnahmefähigkeit des Elastomers in diesem Bereich zu tun hat. Bei der dynamischen Steifigkeit sind keine markanten Veränderungen festzustellen.

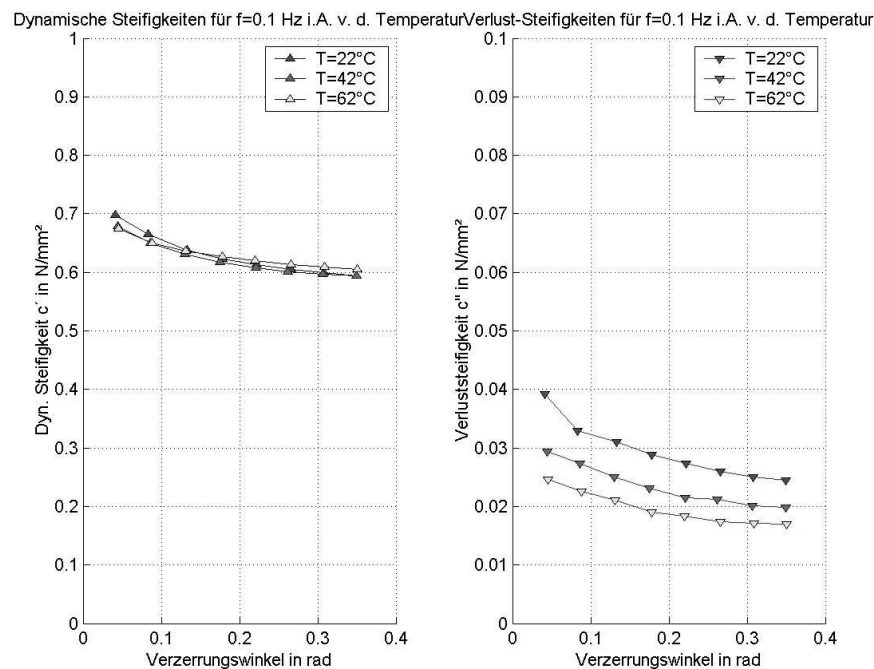


Abbildung 4.13: Temperaturabhängigkeit der Kupplungskennwerte bei  $f=0,1$  Hz.

#### 4.4.2 Langzeitversuche

Die ergänzenden Langzeitversuche wurden über einen Zeitraum von fünf bis sechs Stunden an verschiedenen Tagen durchgeführt. Zusätzlich wurden quasistatische Versuche ( $f=0,05$  Hz.) vor und nach jeder Langzeitbelastung gefahren, um die Auswirkungen der Langzeitbelastung auf das statische Verhalten aufzudecken.

In **Abb. 4.17** werden Kennwertverläufe für die maximalen Wegerregungen von zwei und vier Grad in Abhängigkeit von der Lastspielzahl abgebildet, wobei die Versuche jeweils bis zu einer Lastspielzahl von ca.  $2,5 \cdot 10^5$  durchgeführt werden. Die Frequenz ist 10 Hz, die Umgebungstemperatur wird konstant bei 23°C gehalten. Es wird zum Teil eine Abnahme der Verluststeifigkeit bis zu 25% festgestellt. Diese Tendenz der Kurvenverläufe ist auch bei anderen Frequenzen und Umgebungstemperaturen festzustellen. Eine Pause von ca. 24 Stunden trug zu

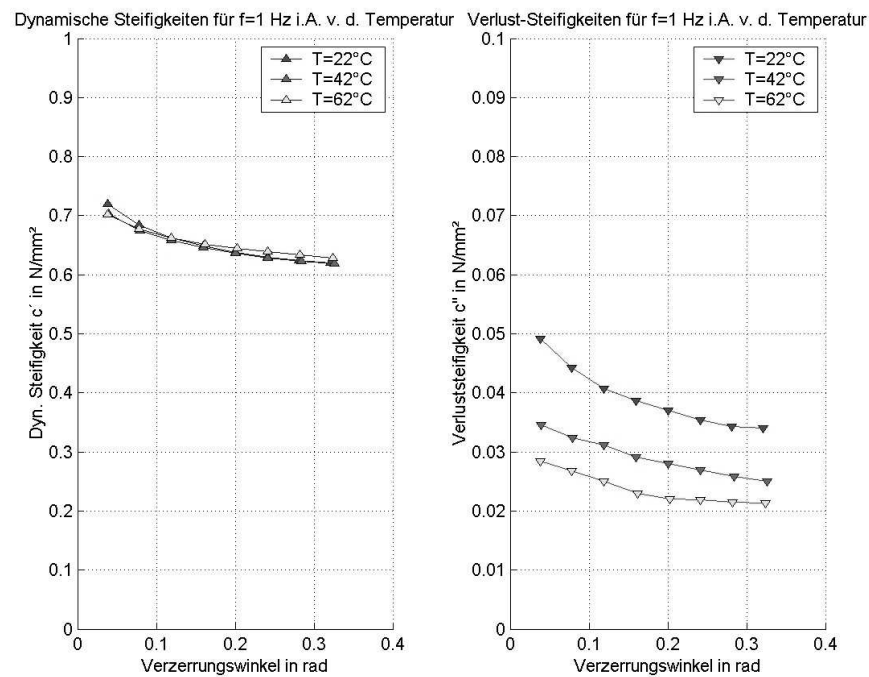


Abbildung 4.14: Temperaturabhängigkeit der Kupplungskennwerte bei f=1 Hz.

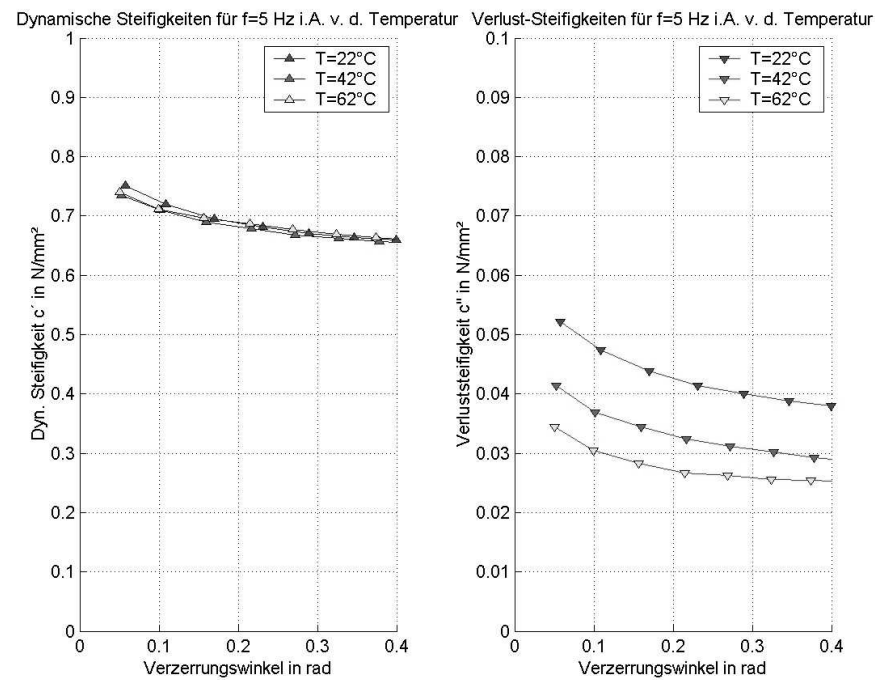


Abbildung 4.15: Temperaturabhängigkeit der Kupplungskennwerte bei f=5 Hz.

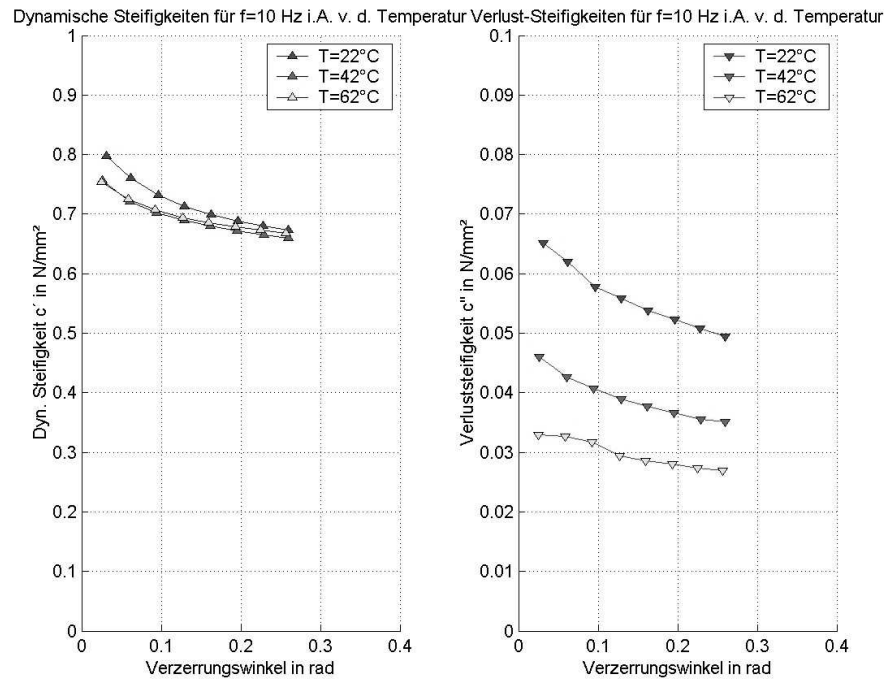
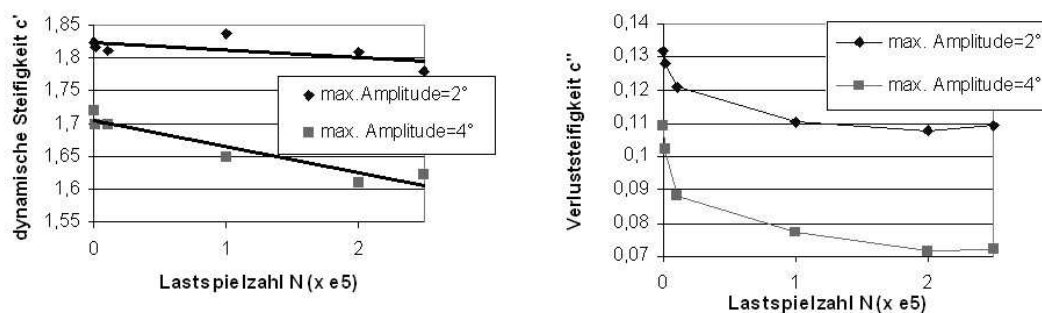
Abbildung 4.16: Temperaturabhängigkeit der Kupplungskennwerte bei  $f=10$  Hz.

Abbildung 4.17: Abhängigkeit der dynamischen Steifigkeit und der Verluststeifigkeit von der Lastspielzahl bei 10 Hz (Laufzeit ca. 6 Stunden).

einer fast vollkommenen Erholung des Materials bei. Am nächsten Tag<sup>1</sup> konnten nahezu identische Kennwertverläufe wie bei den Kurzzeitversuchen gemessen werden. Aus diesem Grund kann gefolgert werden, dass die bei Langzeitversuchen beobachtete Abnahme der Kennwerte eindeutig auf die Temperaturänderungen infolge der mechanischen Belastung zurückzuführen ist.

<sup>1</sup>Nach 18 Stunden.

# Kapitel 5

## Numerische Umsetzung des viskoplastischen Stoffgesetzes

PIRSCHERS Materialgesetz wurde in der vorliegenden Arbeit für kleine Verzerungen und Drehungen in FORTRAN 90 numerisch umgesetzt. Diese Programmiersprache wurde ausgewählt, weil so das Einbauen in einem FEM-Programm wie MSC MARC oder ABAQUS wesentlich einfacher erfolgen kann. Der Ablauf des Berechnungsganges für die Simulation entspricht in groben Unterpunkten der **Abb. 5.1**.

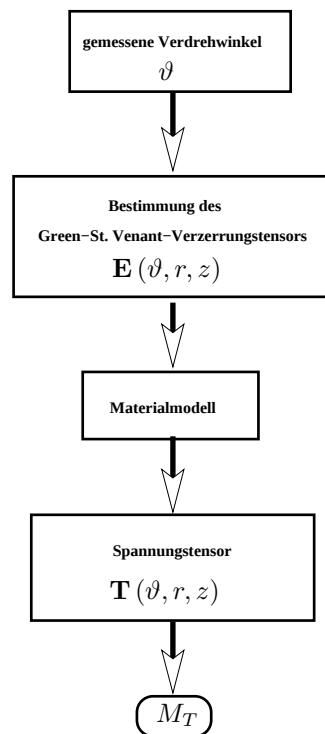


Abbildung 5.1: Allgemeine Vorgehensweise für die Simulation

Im Kapitel 7 wird in diesen Ablauf auch die thermische Beanspruchung eingebaut.

Die Gleichungen des Füllstoffgesetzes werden mit dem Projektionsverfahren Radial-Return gelöst. Dieses Verfahren ist in die Klasse der Prädiktor-Korrektor-Verfahren einzuordnen. Betrachtet wird ein beliebiger Zeitpunkt in der Iteration. Die Spannungen  ${}_i\mathbf{T}$  der  $i$ -ten Iteration sind unbekannt. Mit Hilfe der elastischen

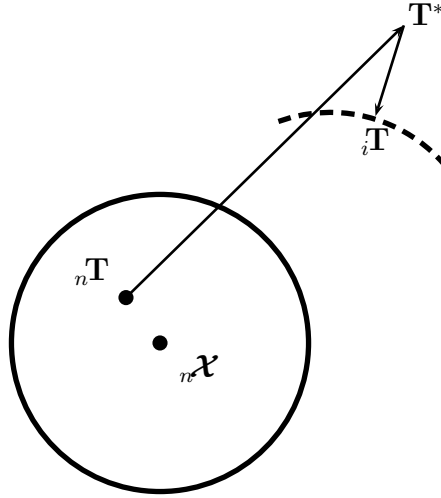


Abbildung 5.2: Das Projektionsverfahren „Radial-Return“

Verzerrung  $\mathbf{B}_e$  wird eine Spannung  $\mathbf{T}^*$  geschätzt. Diese Spannung wird in der normalen Richtung  $\frac{\mathbf{T}^D - \mathbf{\chi}^D}{|\mathbf{T}^D - \mathbf{\chi}^D|}$ , auf die Fließfläche projiziert (s. **Abb. 5.2**).

Zur numerischen Umsetzung mit dem Radial-Return-Algorithmus wird von einer Gesamtverzerrung ausgegangen. Dabei wird über den halben Kupplungsquerschnitt ein bilinearer Verschiebungsansatz verwendet. Im Sinne einer rheologischen Veranschaulichung (s. **Abb. 5.3**) sind die elastischen und viskoplastischen Anteile des Füllstoffgesetzes in Reihe geschaltet. Die Eingangsgröße Gesamtverzerrung  $\tilde{\mathbf{E}}$  wird in einem elastischen Anteil  $\tilde{\mathbf{E}}_e$  und viskoplastischen Anteil  $\tilde{\mathbf{E}}_v$  unterteilt<sup>1</sup>. In einer Reihen-Schaltung müssen an beiden Teilen die gleiche Kraft wirken. Dies ist auch der Ansatzpunkt zur Einleitung eines Korrektorschrittes. Doch zuerst der Prädiktorschritt:

Mit Hilfe der Gesamtverzerrung wird eine elastische Vorverzerrung geschätzt<sup>2</sup>.

$$\tilde{\mathbf{E}}_e^*(t + \Delta t) = \tilde{\mathbf{E}}(t + \Delta t) - \tilde{\mathbf{E}}_v(t) \quad (5.1)$$

Wie aus **Gl. 5.1** ersichtlich ist, wird bei der ersten Belastung in der Schleife (1. Zeitschritt) die viskoplastische Verzerrung zu Null gesetzt<sup>3</sup>. Bei späteren Zeitschritten existiert in der Regel auch für den Prädiktoranteil eine von Null verschiedene viskoplastische Verzerrung. Mit Hilfe der vorgeschätzten elastischen Verzerrung wird ein vorläufiger elastischer linker Cauchy-Green-Verzerrungstensor  $\mathbf{B}_e^*$  und eine vorläufige Füllstoffspannung  ${}^F\mathbf{T}^*$  berechnet. Der Verlauf des Verfahrens

<sup>1</sup>Die linearisierten Größen sind mit einem „ $\sim$ “ versehen

<sup>2</sup>Geschätzte Größen sind mit einem \* versehen.

<sup>3</sup>Der sogenannte ungestörte Zustand

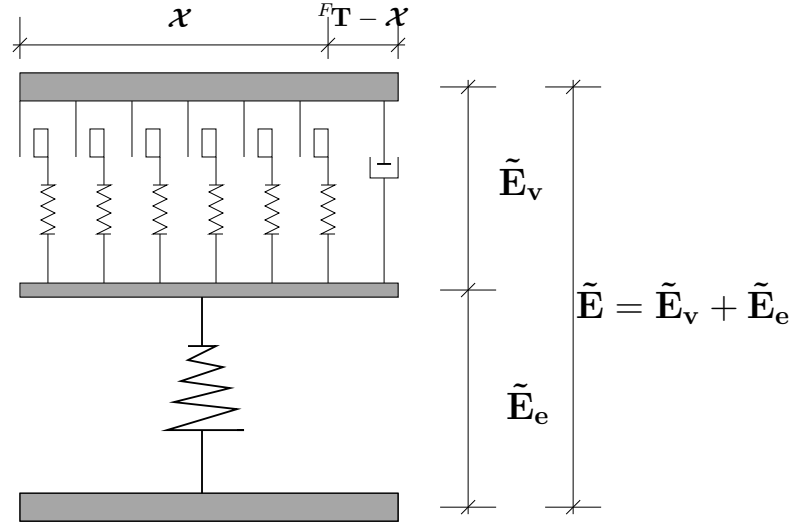


Abbildung 5.3: Zur rheologischen Veranschaulichung des Prädiktor-Korrektor-Schritts [62]

wird unten für kleine Deformationen angegeben, so dass  $\mathbf{B} \approx \mathbf{C}$  ist.

$$\mathbf{B}_e^*(t) \approx 2\tilde{\mathbf{E}}_e^*(t) + \mathbf{1} \quad (5.2)$$

$${}^F\mathbf{T}^*(t) = {}^FG \left( \frac{\sqrt{{}^FD_m}}{\sqrt{{}^FD_m} - \sqrt{{}^FD_1}} - {}^Fa\sqrt{{}^FD_1} \right) \mathbf{B}_e^* \quad (5.3)$$

**Glg. 5.3** ist der Spannungs-Prädiktor-Schritt. Da der viskoplastische und hyperelastische Anteil in Reihe geschaltet sind, kann die hyperelastische (vorläufige) Füllstoffspannung  ${}^F\mathbf{T}^*$  zur Berechnung der viskoplastischen Verzerrungsgeschwindigkeit  $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v(t + \Delta t)$  und der kinematischen Verfestigung  $\boldsymbol{\chi}(t + \Delta t)$  verwendet werden. Es folgt die Berechnung der viskoplastischen Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v(t + \Delta t) = \frac{3}{2} \dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t) \frac{{}^F\mathbf{T}^{*D} - \boldsymbol{\chi}^D(t)}{\mathcal{J}_2({}^F\mathbf{T}^* - \boldsymbol{\chi}(t))} \quad (5.4)$$

mit dessen Hilfe die kinematische Verfestigung, auch Gegenspannung genannt, bestimmt werden kann:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}(t + \Delta t) = \frac{2}{3} {}^FC \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v(t + \Delta t) - {}^F\gamma \dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t) \boldsymbol{\chi}(t) \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\chi}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\chi}(t) + \dot{\boldsymbol{\chi}}(t + \Delta t) \Delta t. \quad (5.6)$$

Mit  $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v(t + \Delta t)$  kann der Korrekturschritt für Verzerrungen eingeleitet werden:

$$\tilde{\mathbf{E}}_v(t + \Delta t) = \tilde{\mathbf{E}}_v(t) + \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v(t + \Delta t) \Delta t \quad (5.7)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_e(t + \Delta t) = \tilde{\mathbf{E}}(t) + \tilde{\mathbf{E}}_v(t + \Delta t) \quad (5.8)$$

Nun ist auch eine Korrektur der Füllstoffspannung möglich:

$${}^F\mathbf{T}(t + \Delta t) = {}^FG \left( \frac{\sqrt{{}^FD_m}}{\sqrt{{}^FD_m} - \sqrt{{}^FD_1}} - {}^Fa\sqrt{{}^FD_1} \right) \mathbf{B}_e(t + \Delta t) \quad (5.9)$$

Wegen der Reihenschaltung reicht die Berechnung einer Spannung,  
 ${}^F\mathbf{T} = {}^F\mathbf{T}_v = {}^F\mathbf{T}_e$ .

Da der elastische Strang von der Matrix zum Füllstoffstrang in Serie geschaltet wird, rechnet man dort aus der Gesamtverzerrung mit Hilfe der hyperelastischen Ansatzes von Kilian eine Matrixspannung  ${}^M\mathbf{T}$  aus. Im Sinne einer Serienschaltung ist die endgültige Spannungszustand zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  aus der Überlagerung der beiden Spannungen zu bestimmen:

$$\mathbf{T}(t + \Delta t) = {}^F\mathbf{T}(t + \Delta t) + {}^M\mathbf{T}(t + \Delta t) \quad (5.10)$$

## 5.1 Bestimmung des Verzerrungstensors für die ausgewählte Versuchskupplung

Die Umsetzung des Materialgesetzes wird an dem Beispiel der oben bereits beschriebenen Kupplung mit gleicher Schubverzerrung realisiert. Die Bezeichnungen der geometrischen Abmessungen und das verwendete Koordinatensystem können **Abb. 5.4** entnommen werden. Die wichtigen geometrischen Abmessungen sind im folgenden explizit angegeben.

|        | $r_a$ | $r_i$ | $h$ | $b$ |
|--------|-------|-------|-----|-----|
| $[mm]$ | 90    | 45    | 18  | 9   |

Sowohl bei der Darstellung als auch der Modellierung wird von der Symmetrie der Kupplung Gebrauch gemacht und nur die Hälfte der Kupplung dargestellt.

Es wird ähnlich dem Vorgehen beim RITZ-Verfahren ein globaler Ansatz gewählt, der sich über den Elastomerbereich der Kupplung erstreckt und der Randbedingungen genügt. Aus den Abbildungen 4.4 und 4.5 geht hervor, dass die Flansche als starr angenommen werden können. Entsprechend dem Vorgehen von PIRSCHER [62] wird ein bilinearer Ansatz für die Verschiebungen gewählt, der folgenden Randbedingungen, bei einer vorgegebenen relativen Verdrehung der Stahlflansche gegeneinander um  $2\vartheta$ , genügen muss.

1.  ${}^1\mathbf{u} = 0$
2.  ${}^2\mathbf{u} = 0$
3.  ${}^3\mathbf{u} = r_a(\cos \vartheta - 1)\mathbf{e}_r + r_a \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi$
4.  ${}^4\mathbf{u} = r_i(\cos \vartheta - 1)\mathbf{e}_r + r_i \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi$

Der Ansatz

$$\mathbf{u}(r, z) = (a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 r z)\mathbf{e}_r + (a_5 + a_6 r + a_7 z + a_8 r z)\mathbf{e}_\varphi \quad (5.11)$$

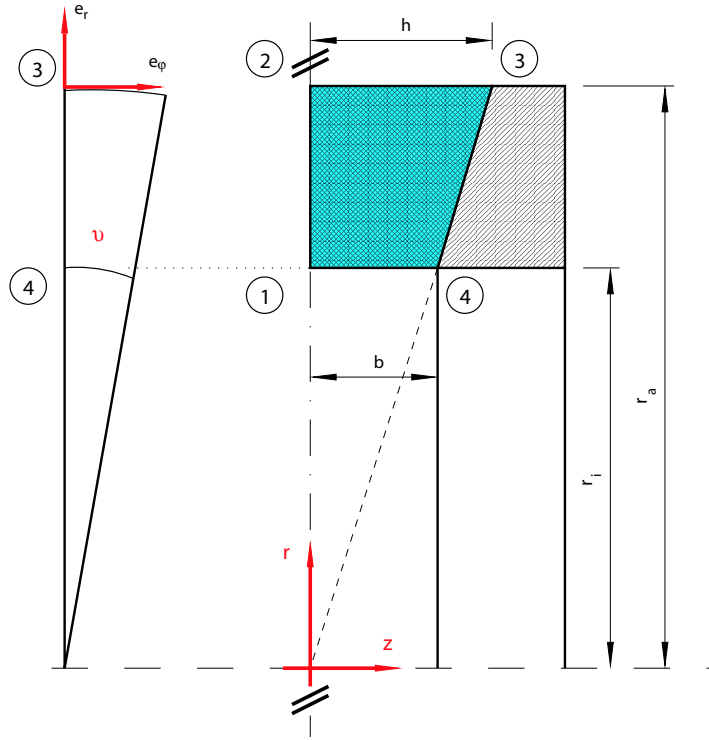


Abbildung 5.4: Kupplungsgeometrie

erfüllt diese Anforderung. Die Konstanten werden aus den Randbedingungen bestimmt.

Wegen  $\frac{r_a}{h} = \frac{r_i}{b} = \frac{r_a - r_i}{h - b}$  gilt

$$a_3 = \frac{r_a}{h} (\cos \vartheta - 1) \quad (5.12)$$

$$a_7 = \frac{r_i}{b} \sin \vartheta . \quad (5.13)$$

Für die restlichen Koeffizienten gilt

$$a_i = 0 \quad (5.14)$$

Mit dem Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_e = \text{grad} \mathbf{u} + \mathbf{1} \quad (5.15)$$

kann der GREENsche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}(\vartheta, r, z) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e - \mathbf{1}) \quad (5.16)$$

bestimmt werden. Nun kann für die Vulkardan-Kupplung ein Verzerrungstensor bestimmt werden. Die Komponenten dieses symmetrischen Tensors werden unten in der Vektornotation angegeben. Es wird die zylindrische Basis  $\langle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j^T \rangle$

verwendet<sup>4</sup>.

$$\begin{pmatrix} E_{rr} \\ E_{\varphi\varphi} \\ E_{zz} \\ E_{r\varphi} \\ E_{\varphi z} \\ E_{zr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{r_a}{h} \left( \frac{r_a}{h} \cdot \frac{z^2}{r^2} - \frac{z}{r} \right) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ 2\frac{r_a^2}{h^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{r_a}{h} \cdot \frac{z}{r} \sin \vartheta \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{r_a}{h} \sin \vartheta \\ -\frac{r_a}{h} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Dieser ist einer der möglichen Verzerrungstensoren mit der relativen Verdrehung  $2\vartheta$ . Die allgemeine Formulierung für eine Kupplung gleicher Bauart kann [62] entnommen werden. Es wurde die vereinfachende Annahme getroffen, dass die Kupplung an den Punkten 1 und 2 (s. Abb. 5.4) keine Verschiebung in  $r$ -Richtung erfährt. Es wurde mit MSC.MARC/Mentat eine entsprechende Elastomer-Kupplung modelliert und berechnet. Das Elastomer wird mit einem hyperelastischen Materialmodell nach Mooney–Rivlin modelliert. Die sich einstellende radiale Verschiebung ist in **Abb. 5.5** dargestellt.

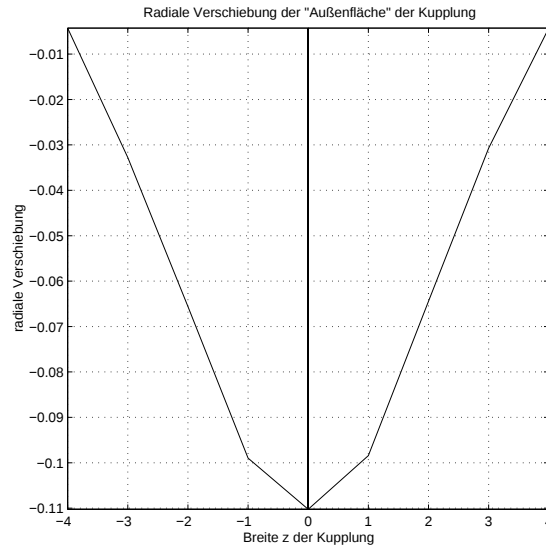


Abbildung 5.5: Radiale Verschiebungen aus der MSC.MARC/Mentat-Berechnung.

Aus Abb. 5.5 geht hervor, dass Ansätze quadratischer Ordnung über den Kupplungsquerschnitt verwendet werden sollten. Dies würde zu einer besseren Näherung der Verschiebungen führen, aber gleichzeitig die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten erhöhen. Da diese Berechnung eine qualitative Aussage ergeben sollte, wurde eine grobe Modellierung gewählt, wodurch eine spitze Form in der Mitte der Kupplung entsteht. Bei Verfeinerung der Modellierung ist hier ein weicher Übergang zu erwarten, dessen Tangente der Abszisse parallel ist.

<sup>4</sup>Mit den Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_z$ .

### 5.1.1 Weitere Deformationsgradienten

Eine ähnliche Vorgehensweise kann auch für eine hochelastische Scheibenkupplung, welche ebenfalls eine Kupplung gleicher Schubverzerrung ist (s. **Abb. 5.6**), benutzt werden.

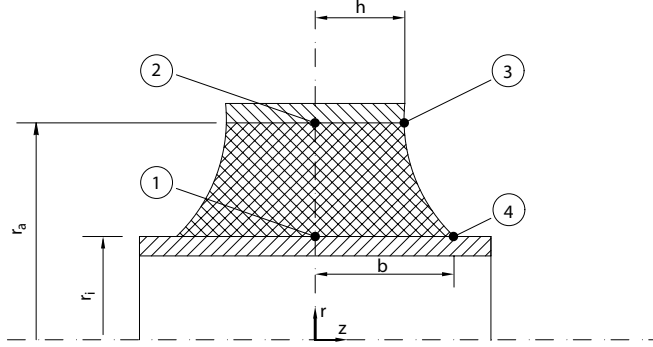


Abbildung 5.6: Kupplung gleicher Schubverzerrung

Für die Bestimmung des Deformationsgradienten werden Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  zu Grunde gelegt. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Nabe sich um einen Winkel  $\vartheta$  relativ zu der Außenscheibe verdreht. So kann angenommen werden, dass die Kupplung am Außenradius festgehalten wird. In  $z$ -Richtung werden keine Verschiebungen zugelassen. Damit lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{u} &= \mathbf{u}(r = r_i, z = 0) = 0 \\
 {}^4\mathbf{u} &= \mathbf{u}(r = r_i, z = b) = 0 \\
 {}^2\mathbf{u} &= \mathbf{u}(r = r_a, z = 0) = r_a (\sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi + (\cos \vartheta - 1) \mathbf{e}_r) \\
 {}^3\mathbf{u} &= \mathbf{u}(r = r_a, z = h) = r_a (\sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi + (\cos \vartheta - 1) \mathbf{e}_r)
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Wie bei der Versuchskupplung aus dem vorherigen Abschnitt kann ein linearer Ansatz gewählt werden, der aber von  $z$  unabhängig ist:

$$\mathbf{u} = (a_1 + a_2 r) \mathbf{e}_r + (a_3 + a_4 r) \mathbf{e}_\varphi \tag{5.19}$$

Die Konstanten  $a_1$  bis  $a_4$  lassen sich aus den Randbedingungen 5.18 bestimmen.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{r_a r_i}{r_a - r_i} (\cos \vartheta - 1) \\
 a_2 &= \frac{r_a}{r_a - r_i} (\cos \vartheta - 1) \\
 a_3 &= -\frac{r_a r_i}{r_a - r_i} \sin \vartheta \\
 a_4 &= \frac{r_a}{r_a - r_i} \sin \vartheta
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Der lineare Ansatz nimmt seinen endgültigen Form an

$$\mathbf{u}(r, z) = a_2(r - r_i)\mathbf{e}_r + a_4(r - r_i)\mathbf{e}_\varphi \quad (5.21)$$

Der Deformationsgradient kann mit Hilfe des Verschiebungsgradienten berechnet werden. Es folgt die Gradientenbildung der Verschiebung  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} (\text{grad}\mathbf{u})_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} &= & a_2 \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} &= & -a_4 \frac{r - r_i}{r} \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} &= & 0 \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{\varphi r} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} &= & a_4 \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} &= & a_2 \frac{r - r_i}{r} \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{\varphi z} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} &= & 0 \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{zr} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} &= & 0 \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{z\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} &= & 0 \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} &= & 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Der Deformationsgradient wird aus  $\mathbf{H}$  wird gebildet

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\text{grad}\mathbf{u})_{rr} + 1 & (\text{grad}\mathbf{u})_{r\varphi} & (\text{grad}\mathbf{u})_{rz} \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{\varphi r} & (\text{grad}\mathbf{u})_{\varphi\varphi} + 1 & (\text{grad}\mathbf{u})_{\varphi z} \\ (\text{grad}\mathbf{u})_{zr} & (\text{grad}\mathbf{u})_{z\varphi} & (\text{grad}\mathbf{u})_{zz} + 1 \end{pmatrix} \langle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j^T \rangle \quad (5.23)$$

## 5.2 Ergebnisse

### 5.2.1 Viskoplastische Berechnungen

Im folgenden wird die Aussagegüte des Materialgesetzes anhand bekannter Effekte von Elastomeren mit dem eigenen Programm qualitativ getestet. Als Berechnungsbeispiel wird eine Elastomer-Kupplung mit gleichmäßiger Schubverzerrung gewählt (s. **Abb. 5.4**).

Die in den folgenden drei Abbildungen (5.7 bis 5.9) dargestellten Spannungen  $\tau$  entsprechen der Komponente  $T_{\varphi z}$  des Spannungstensors. Bei der Berechnung dieser Ergebnisse wurde jeweils ein linearer Ansatz in  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  gewählt. Eine Anpassung dieser Ergebnisse in den Bereich großer Deformationen ist durch die Erhöhung des Polynomgrades der Verschiebungsansätze möglich.

In **Abb. 5.7b** wird der berechnete Verlauf der Schubspannung für zwei harmonische Verdrehwinkelverläufe nach **Abb. 5.7a** dargestellt. Die Erregeramplituden sind für beide Verläufe gleich, während die Frequenzen sich unterscheiden. Die Simulation ergibt für höhere Frequenzen steilere Spannungsverläufe, was einer höheren Steifigkeit entspricht. Die eingeschwungene Spannungs-Verformungs-Hysterese der höherfrequenten Erregung hat zusätzlich eine größere Fläche. Die

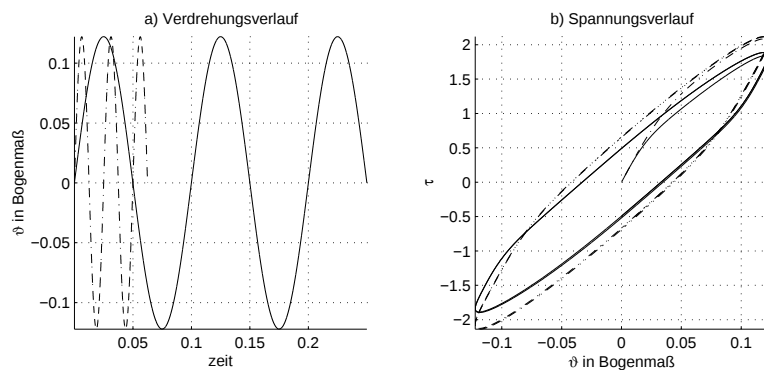


Abbildung 5.7: Frequenzeffekte: Gleiche Verdrehungsamplitude; 10 Hz. und 40 Hz.

Simulationsergebnisse stimmen mit Betrachtungen an Elastomer-Kupplungen überein.

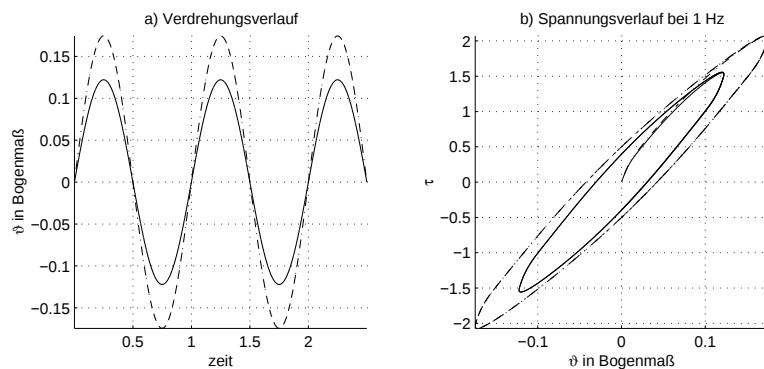


Abbildung 5.8: Amplitudeneffekte: Gleiche Frequenz; 1 Hz.

In **Abb. 5.8b** wird dagegen der Verlauf der Schubspannung für zwei Verdrehwinkelverläufe nach **Abb. 5.8a** mit gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude dargestellt. Für die höhere Drehwinkelamplitude ergibt sich bei gleicher Frequenz eine höhere Verzerrungsgeschwindigkeit. Abb. 5.8 besagt, dass im vorliegenden Fall mit steigender Amplitude die dynamische Steifigkeit abnimmt. Dieser Effekt ist ebenfalls bekannt und bei der Darstellung der Versuchsergebnisse erklärt<sup>5</sup> und kann auf die Reibungseffekte im Elastomer zurückgeführt werden.

Wegen der Nichtlinearität von Elastomeren ist es nicht zulässig, nicht harmonische Schwingungsgemische durch Superposition der jeweiligen Frequenzantworten zu generieren<sup>6</sup>. Vielmehr ist eine gleichzeitige Simulation aller Erregeranteile notwendig. Exemplarisch zeigt **Abb. 5.9** die Simulation eines Schwingungsgemischs. Die Kupplungserregung wird durch eine Superposition zweier harmonischen Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen erreicht.

Es soll hier betont werden, dass das Programm dreidimensionale Spannungs- und

<sup>5</sup>Siehe S. 61

<sup>6</sup>Mit diesem Thema hat sich Barutzki an der TU Berlin ausführlich beschäftigt [5].

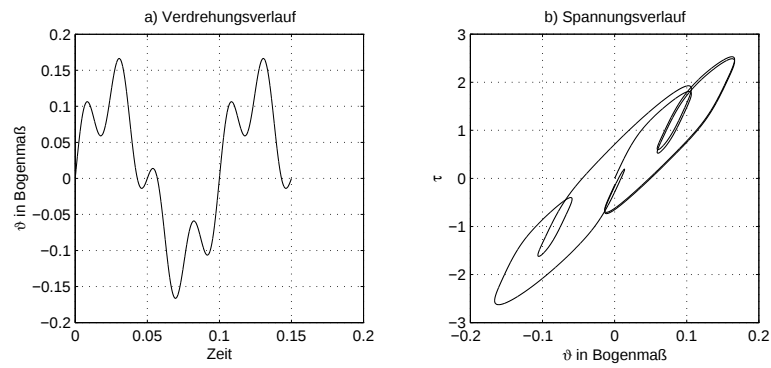


Abbildung 5.9: Schwingungsgemische: Überlagerung von zwei unterschiedlichen Frequenzen und Amplituden

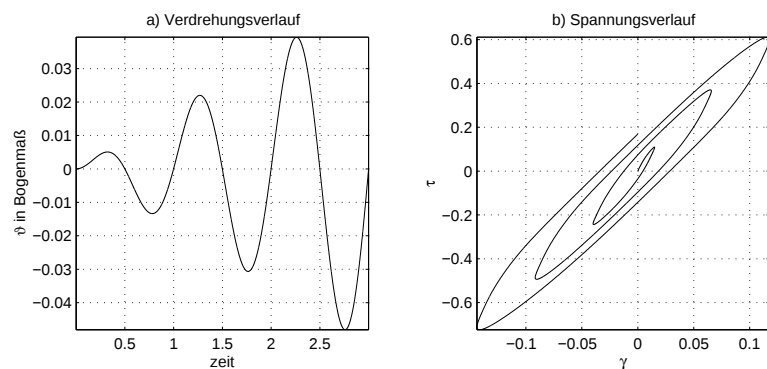


Abbildung 5.10: Anfachung der Wegerregung bei 1 Hz.

Verzerrungszustände verarbeitet, was mit rheologischen Modellen nur mit großen Vereinfachungen möglich ist (s. z.B. [43]).

### 5.2.2 Berechnungen mit dem OGDEN-Ansatz

Als eine mögliche Alternative zum KILIAN-Ansatz wurden auch exemplarisch FEM-Berechnungen mit dem OGDEN-Ansatz durchgeführt (s. **Abb. 5.11**). Als Werkstoffparameter wurden die Werte aus Tab. 3.2 verwendet. Als FE-Software kam ABAQUS zum Einsatz. In dem vorliegenden Beispiel wurde ein Verdrehungswinkel von  $8^\circ$  als Belastung eingeleitet. Die dargestellte Spannung entspricht der  $T_{z\varphi}$ -Komponente der CAUCHY-Spannung. Auch bei diesem Winkel herrscht in der Kupplung eine näherungsweise gleichmäßige Spannungsverteilung.

## 5.3 UMAT-Erstellung für ABAQUS

Es ist nicht immer möglich Ansätze zu finden, die für das gesamte Problemgebiet gültig sind. Eine Lösung ist das Problemgebiet in einer geeigneten kommerziellen

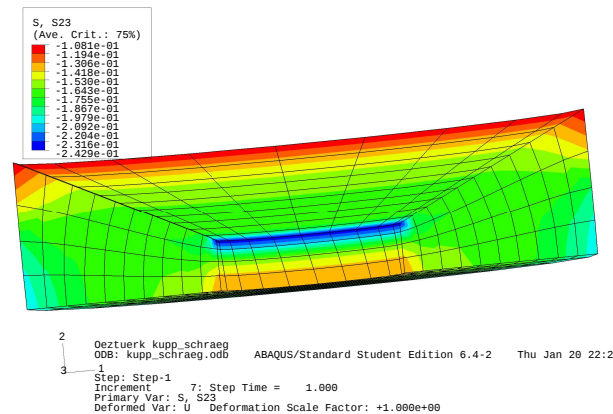


Abbildung 5.11: Kupplungsmodellierung mit ABAQUS

FE-Umgebung wie MARC oder ABAQUS zu modellieren und das Materialgesetz über die hierfür vorgesehene Schnittstelle, in Form eines benutzergeschriebenen Unterprogrammes, einzubinden. Die Schnittstelle von ABAQUS heißt UMAT<sup>7</sup>, und kann in FORTRAN oder C geschrieben werden. In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise zur Erstellung eines UMATs erläutert.

### 5.3.1 Allgemeine Vorgehensweise

Die Vorgehensweise für UMAT-Erstellung kann [1] entnommen werden. An dieser Stelle wird diese kurz erläutert.

Das Materialgesetz wird mit *einer* der folgenden Definitionen benötigt:

- Explizite Definition der Spannung, für große Deformationen die CAUCHY-Spannung.
- Definition der Spannungsrates.

Zusätzlich werden, so fern vorhanden, benötigt:

- Zeitabhängigkeit,
- Temperaturabhängigkeit,
- Definition der internen Zustandsvariablen in expliziter oder Ratenform.

Die konstitutive Evolutionsgleichung wird durch die Verwendung einer passenden numerischen Integrationsmethode (s. Abschnitt 7.2.1) in eine inkrementellen Gleichung umgewandelt. Hierzu müssen die internen Zustandsvariablen auch in inkrementeller Form vorliegen.

<sup>7</sup>Abkürzung für „User Material“-Benutzerschnittstelle für selbstgeschriebene Unterprogramme zwecks Formulierung von eigenen Materialgesetzen

Im weiteren Vorgehen wird die konsistente Jacobische Matrix bestimmt. Für lineare Elastizität oder große Verformungen mit kleinen Volumenänderungen ist diese

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \frac{1}{J} \frac{\partial \Delta(J\mathbf{T})}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{Hencky}} \quad (5.24)$$

Für hyperelastische Materialgesetze wird die konsistente Jacobische Matrix über die Verzerrungsrate definiert:

$$\delta(J\mathbf{T}) = J \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \delta \mathbf{D} , \quad (5.25)$$

mit der virtuellen Deformationsrate  $\delta \mathbf{D} = \text{sym}(\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1})$ .

Zur Handhabung der materiellen Gleichungen stehen folgende Variablen als Schnittstellengrößen eines UMATs:

- Aktueller Schritt und aktuelle Inkrementnummer,
- Element- und Integrationspunktnummer,
- Spannung, Verzerung und Zustandsvariablen am Anfang der Iteration,
- Verzerrungssinkrement, Rotationsinkrement und Deformationsgradient am Anfang und am Ende der Iteration,
- Totale und inkrementelle Werten der Zeit, Temperatur und benutzerdefinierten Feldvariablen,
- Materialkonstanten, Positionen der Materialpunkte

Für eine UMAT-Verwendung muss nicht notwendigerweise auf all oben genannten Größen zugegriffen werden. Es reicht die Definition von Spannung, Jacobischer Matrix und Zustandsvariablen. Es ist auch möglich bereits in ABAQUS vorhandenen Unterprogramme oder selbstgeschriebene Unterprogramme von UMAT aus aufzurufen. So können beispielsweise die Invarianten, Hauptspannungen und -richtungen durch ABAQUS-Unterprogramme bestimmt werden.

Für das Programmieren des Füllstoffmaterialgesetz (Gln. 3.46) müssen die Gleichungen in inkrementelle Form umgewandelt werden. Hierzu wird als objektive Spannungsrate die JAUMANNsche Zeitableitung des Spannungstensors benötigt,

$${}^F\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \frac{d {}^F T_{ij}}{dt} - \epsilon_{ikl} \omega_k {}^F T_{lj} - \epsilon_{jkl} \omega_k {}^F T_{il} , \quad (5.26)$$

wobei diese Zeitableitung mit dem Symbol ( $\circ$ ) gekennzeichnet wird. In Gl. 5.26 entspricht  $\epsilon$  dem LEVI-CIVATA-Symbol,  $\boldsymbol{\omega}$  der Winkelgeschwindigkeit des materiellen Punktes und  $d/dt$  der materiellen Zeitableitung. Die materielle Zeitableitung für den Spannungstensor lautet:

$$\frac{d {}^F T_{ij}}{dt} = \frac{\partial {}^F T_{ij}}{\partial t} + \dot{x}_q \frac{\partial {}^F T_{ij}}{\partial x_q} \quad (5.27)$$

Für das LEVI-CIVATA-Symbol gilt (s. z.B. [66])

$$\epsilon_{ijk} = \begin{array}{ll} 1 & \text{für } ijk=123 \text{ und seine zyklischen} \\ & \text{Permutationen 231 und 312,} \\ -1 & \text{für } ijk=321 \text{ und seine zyklischen} \\ & \text{Permutationen 213 und 132} \\ 0 & \text{Für alle anderen Kombinationen} \end{array} \quad (5.28)$$

Für das vorliegende Problem ist die einfachste Vorgehensweise an der Modellierung die Netzknoten zu verdoppeln und für jedes Inkrement eine hyperelastische und viskoplastische Berechnung durchzuführen. Am Ende des Inkrementes werden die Spannungen zusammenaddiert. Bei dieser Vorgehensweise muss nur das viskoplastische Materialgesetz programmiert werden. Für den hyperelastischen Anteil stehen verschiedene Ansätze wie Neo Hooke, Mooney-Rivlin, Ogden, Arruda-Boyce und Van der Waals in ABAQUS zur Verfügung.

Eine ausführliche Beschreibung des Vorgehens bei der Erstellung eines UMATs findet man in [41]. In der Arbeit von KÖTTGEN und Mitautoren wird anhand eines MRÓZ-Modells die Grundlagen, Flußdiagramme und für einige Werkstoffe die Unterpogramme bereitgestellt.

### 5.3.2 Angabe einer Tangentenmatrix für das Füllstoffgesetz

Bei der Bestimmung der Tangentenmatrix wird von dem Kettenregel Gebrauch gemacht. Aus Vereinfachungsgründen wird der Füllstoffindex  $F$  weggelassen.

$$C_{abcd} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial T_{ab}}{\partial E_{cd}} = \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{eh}} \frac{\partial B_{eh}}{\partial E_{cd}} \quad (5.29)$$

Diese Gleichung kann termweise abgearbeitet werden. Für die Ableitung der Spannung nach Gl. 5.9 nach dem Verzerrungstensor wird die Ableitung der Materialfunktion  $\sqrt{D_1} = \sqrt{\frac{1}{2} [J_1(\mathbf{B}) - 3]}$  gebildet. Mit

$$\frac{\partial J_1(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{1} \quad (5.30)$$

folgt

$$\frac{\partial \sqrt{D_1}}{\partial B_{eh}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} (J_1(\mathbf{B}) - 3)^{-\frac{1}{2}} \right] \delta_{eh} = \delta_{eh} \sqrt{\frac{1}{8(J_1(\mathbf{B}) - 3)}} \quad (5.31)$$

Nun kann die Ableitung des Spannungstensors gebildet werden. Zur Erinnerung werden die Komponenten des Spannungstensors nach Gl. 3.45 in Indexschreib-

weise wiedergegeben:

$$T_{ab} = G \left( \frac{\sqrt{D_m}}{\sqrt{D_m} - \sqrt{D_1}} - a\sqrt{D_1} \right) B_{ab} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{eh}} &= \frac{G}{2} \left( \frac{\sqrt{D_m}}{\sqrt{D_m} - \sqrt{D_1}} - a\sqrt{D_1} \right) (\delta_{ae}\delta_{bh} + \delta_{ah}\delta_{be}) + \\ &G \left( \sqrt{\frac{1}{8(J_1(\mathbf{B}) - 3)}} \right) \left( \frac{\sqrt{D_m}}{(\sqrt{D_m} - \sqrt{D_1})^2} - a \right) \delta_{eh} B_{ab} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{eh}}{\partial E_{cd}} &\approx 2 \overset{<4>}{\mathbf{1}} = 2 \frac{1}{2} (\delta_{ec}\delta_{hd} + \delta_{ed}\delta_{hc}) \\ &= (\delta_{ec}\delta_{hd} + \delta_{ed}\delta_{hc}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Komponenten der Tangentenmatrix in Indexschreibweise lauten:

$$\begin{aligned} C_{abcd} &= \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{11}} \frac{\partial B_{11}}{\partial E_{cd}} + \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{12}} \frac{\partial B_{12}}{\partial E_{cd}} + \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{13}} \frac{\partial B_{13}}{\partial E_{cd}} + \\ &\frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{21}} \frac{\partial B_{21}}{\partial E_{cd}} + \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{22}} \frac{\partial B_{22}}{\partial E_{cd}} + \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{23}} \frac{\partial B_{23}}{\partial E_{cd}} + \\ &\frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{31}} \frac{\partial B_{31}}{\partial E_{cd}} + \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{32}} \frac{\partial B_{32}}{\partial E_{cd}} + \frac{\partial T_{ab}}{\partial B_{33}} \frac{\partial B_{33}}{\partial E_{cd}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die Tangentenmatrix 5.35 kann durch das Einsetzen der Gleichungen 5.33 und 5.34 in VOIGTSche Notation angegeben werden:

$$\hat{C}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial E_{11}} & \frac{\partial T_{11}}{\partial E_{22}} & \frac{\partial T_{11}}{\partial E_{33}} & \frac{\partial T_{11}}{\partial E_{23}} & \frac{\partial T_{11}}{\partial E_{31}} & \frac{\partial T_{11}}{\partial E_{12}} \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial E_{11}} & \frac{\partial T_{22}}{\partial E_{22}} & \frac{\partial T_{22}}{\partial E_{33}} & \frac{\partial T_{22}}{\partial E_{23}} & \frac{\partial T_{22}}{\partial E_{31}} & \frac{\partial T_{22}}{\partial E_{12}} \\ \frac{\partial T_{33}}{\partial E_{11}} & \frac{\partial T_{33}}{\partial E_{22}} & \frac{\partial T_{33}}{\partial E_{33}} & \frac{\partial T_{33}}{\partial E_{23}} & \frac{\partial T_{33}}{\partial E_{31}} & \frac{\partial T_{33}}{\partial E_{12}} \\ \frac{\partial T_{23}}{\partial E_{11}} & \frac{\partial T_{23}}{\partial E_{22}} & \frac{\partial T_{23}}{\partial E_{33}} & \frac{\partial T_{23}}{\partial E_{23}} & \frac{\partial T_{23}}{\partial E_{31}} & \frac{\partial T_{23}}{\partial E_{12}} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial E_{11}} & \frac{\partial T_{31}}{\partial E_{22}} & \frac{\partial T_{31}}{\partial E_{33}} & \frac{\partial T_{31}}{\partial E_{23}} & \frac{\partial T_{31}}{\partial E_{31}} & \frac{\partial T_{31}}{\partial E_{12}} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial E_{11}} & \frac{\partial T_{12}}{\partial E_{22}} & \frac{\partial T_{12}}{\partial E_{33}} & \frac{\partial T_{12}}{\partial E_{23}} & \frac{\partial T_{12}}{\partial E_{31}} & \frac{\partial T_{12}}{\partial E_{12}} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Beispielhaft wird hier eine Komponente angegeben:

$$\hat{C}_{11} = 2G \left[ \left( \frac{\sqrt{D_m}}{\sqrt{D_m} - \sqrt{D_1}} - a\sqrt{D_1} \right) + \left( \sqrt{\frac{1}{8(J_1(\mathbf{B}) - 3)}} \right) \left( \frac{\sqrt{D_m}}{(\sqrt{D_m} - \sqrt{D_1})^2} - a \right) B_{11} \right] \quad (5.37)$$

Entsprechend Gl. 3.20 ist die Tangentenmatrix nicht vollbesetzt. D.h.  $\hat{C}_{41} = \hat{C}_{51} = \hat{C}_{61} = \hat{C}_{42} = \hat{C}_{52} = \hat{C}_{62} = \hat{C}_{43} = \hat{C}_{53} = \hat{C}_{63} = \hat{C}_{54} = \hat{C}_{64} = \hat{C}_{65} = \hat{C}_{14} = \hat{C}_{15} = \hat{C}_{16} = \hat{C}_{24} = \hat{C}_{25} = \hat{C}_{26} = \hat{C}_{34} = \hat{C}_{35} = \hat{C}_{36} = \hat{C}_{45} = \hat{C}_{46} = \hat{C}_{56} = 0$ .

Die Bestimmung der restlichen Gleichungen des Materialgesetzes kann in UMAT gemäß dem Vorgehen aus S. 67ff ausgeführt werden.

# Kapitel 6

## Parameteroptimierung für das Materialmodell

In diesem Kapitel wird eine Systemidentifikation zwecks Anpassung der Materialparameter durchgeführt. Die Parameter werden jeweils für eine Umgebungstemperatur, jedoch mehrere Frequenzen angepasst, so dass zunächst für Umgebungstemperatur einen Parametersatz entsteht. Da die gekoppelte thermomechanische Berechnung bei verschiedenen Temperaturen lokal auf den entsprechenden frequenzabhängigen Parametersatz zurückgreifen soll, muss für die Zwischenpunkte interpoliert werden. Letztlich läuft die Identifikation darauf hinaus, dass verschiedene temperaturabhängige Funktionen für die mechanischen Parameter erstellt werden.

### 6.1 Auswahl des Optimierungsverfahrens

Die Anpassung der Modellparameter für das Materialmodell an die vorliegenden Messwerte führt zu einem klassischen Optimierungsproblem.

Für Optimierungsprobleme existieren analytische, deterministische und stochastische Verfahren.

Analytische Verfahren finden in einem Berechnungsvorgang das Optimum. Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der zu optimierenden Funktion innerhalb des Lösungsraumes wird vorausgesetzt. Da in vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Materialgleichungen sich nur iterativ lösen lassen, kann zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen kein direkter analytischer Zusammenhang angegeben werden.

Die deterministischen und stochastischen Methoden sind zwar in der Lage, lokale Extrema zu finden, benötigen jedoch zur Ermittlung des globalen Extremums einen bereits bekannten hinreichend optimalen Startpunkt oder -vektor.

Unter einer weniger strengen Voraussetzung als der des optimalen Startpunk-

tes sind genetische Algorithmen in der Lage, globale Optima unabhängig vom Startpunkt zu finden. Dies gelingt in einer geschachtelten Form durch die Überlagerung mehrerer Optimierungsprozeduren. Die basieren i.a. auf ableitungsfreie Optimierungsalgorithmen, so dass auch nichtlineare Probleme bearbeitet werden können, bei denen keine direkten analytischen Beziehungen zwischen Ein- und Ausgangsgrößen bekannt sind. Aus den oben angeführten Gründen wird hier die Evolutionsstrategie von RECHENBERG verwendet [64].

### 6.1.1 Evolutionsstrategie [64]

Die Evolutionsstrategie von RECHENBERG gehört zur Gruppe der stochastischen Optimierungsalgorithmen. Grundlage für dieser Strategien sind die natürlichen genetischen Abläufe wie Fortpflanzung, Mutation und Selektion. Mit der Evolutionsstrategie gelingt es, ableitungsfreie Optimierungsverfahren zu erstellen, wenn die lokalen Extrema einer gewissen Ordnung unterliegen, insbesondere die Extrema räumlich zusammenhängen und ein Evolutionsweg über Qualitätskriterien zum globalen Extremum führt.

Die Bezeichnungen zur Beschreibung der Evolutionsstrategie (ES) lehnen sich stark an die der biologischen Vorgänge an: Eine Anzahl von  $\mu$  Elter(n) erzeugen  $\lambda$  Nachkommen, aus denen der beste oder die  $\mu$  besten selektiert werden. Dies wird u.U. in Populationen über eine Anzahl von Generationen durchgeführt. Diese Bezeichnungen sollen im folgenden beibehalten werden. Es werden hauptsächlich zwischen zwei Strategien unterschieden:

- $(\mu, \lambda)$ -Evolutionsstrategie
- $(\mu + \lambda)$ -Evolutionsstrategie

Bei der  $(\mu, \lambda)$ -ES werden aus  $\mu$  Eltern  $\lambda$  mutierten Nachkommen erzeugt, von denen die  $\mu$  Besten die Eltern der nächsten Generation werden. Das Komma bedeutet, dass die Eltern nicht mit in die Selektion einbezogen werden, sondern lediglich aus den  $\lambda$  Nachkommen die  $\mu$  Besten überleben. Die zweite Variante,  $(\mu + \lambda)$ -ES, bezieht die Eltern mit in die Auswahlmenge ein, was jedoch Nachteile bei der Mutations-Schrittweiten-Regelung nach sich zieht. Eine ausführliche Behandlung des Algorithmus kann [64] entnommen werden.

#### 6.1.1.1 Evolutionsstrategie am Beispiel eines Voigt-Kelvin-Modells

Um das Prinzip der Parameteroptimierung mit der Evolutionsstrategie zu verdeutlichen, wird an dieser Stelle an dem einfachen Beispiel eines Voigt-Kelvin-Modells eine Berechnung durchgeführt. Ziel ist hierbei die Anpassung der zwei Parameter Federsteifigkeit  $c$  und Dämpfungskonstante  $b$  an eine willkürlich vorgegebene Hysteresekurve. Die in diesem Fall elliptische Hysterese ist durch drei Kennwerte eindeutig definiert:

1. Die maximale Erregeramplitude  $\hat{s}_0$ ,
2. Die Kraft bei maximaler Amplitude  $F(\hat{s}_0)$ ,
3. Der Flächeninhalt  $A_0$  als Maß der dissipierten Energie.

Die Erregung erfolgt sinusförmig. Eine entsprechende Hysterese zeigt **Abb. 6.1**. Die Kurven wurden für die Vorgabewerte  $c = 2,98 \text{ N/mm}$  und  $b = 1,12 \text{ Ns/mm}$  berechnet.

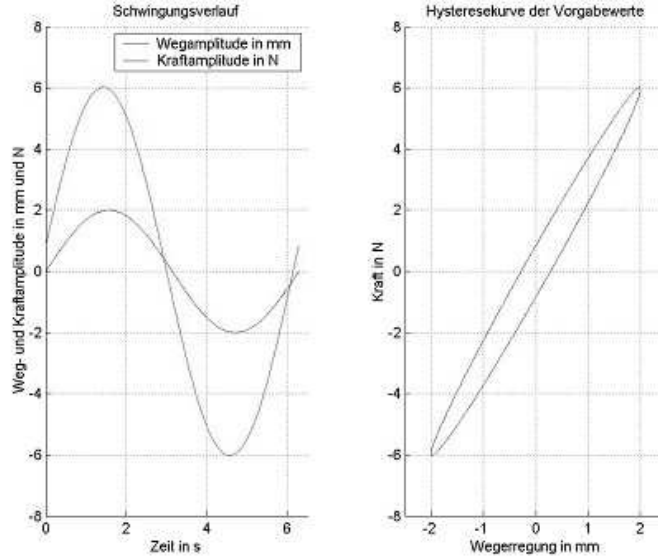


Abbildung 6.1: Schwingungs- und Hystereseverläufe der Vorgaben für das Voigt-Kelvin-Modell

Die Qualität der mutierten Nachkommen wird über eine Simulation mit dem jeweiligen Parametersatz, bestehend aus Federsteifigkeit  $c$  und Dämpfungskonstante  $b$ , bestimmt. Der Maximalwert der Erregeramplitude  $\hat{s}_0$  dient als Eingabewert für die Simulation, somit müssen lediglich die errechneten Kräfte und Flächeninhalte an die Vorgabe angepasst werden.

Für die Optimierung wird eine (1,5)-Evolutionstrategie verwendet, als Qualitätskriterium  $Q$  zur Selektion soll die Summe der relativen Fehlerquadrate für die Kraft<sup>1</sup> bei maximaler Auslenkung und die Hysteresefläche dienen, die minimiert werden soll:

$$Q = \left( \frac{F_0^{s_0} - F_{Sim}^{s_0}}{F_0^{s_0}} \right)^2 + \left( \frac{A_0 - A_{Sim}}{A_0} \right)^2 \quad (6.1)$$

Die Optimierung per Evolutionstrategie führt im Schnitt nach etwa 70-Generationen zu einer Lösung, die innerhalb der definierten Toleranz liegt. Das entspricht einer Menge von 350 generierten Lösungsvektoren. Der dabei zurückgelegte Weg im Lösungsraum ist in **Abb. 6.2** über der Qualitätsfunktion dargestellt, eingezeichnet ist jeweils der beste Nachkomme einer Generation:

<sup>1</sup>Alternativ wäre das Quadrat der Kraft zu erproben.

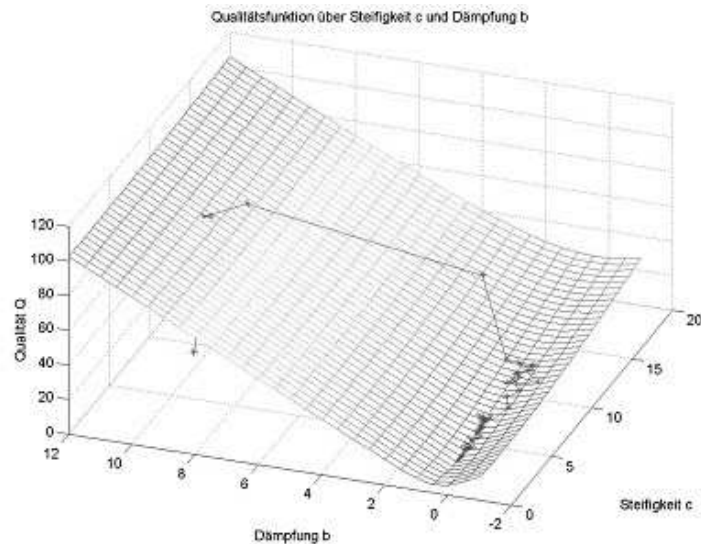


Abbildung 6.2: Verlauf der Optimierung mittels Evolutionsstrategie über die Qualitätsfunktion  $Q$

Den zugehörigen Verlauf der Mutationsschrittweiten zeigt **Abb. 6.3**. Die Schrittweite, ausgehend vom Initialwert 1,0 zunächst stark ansteigt, um mit geringer werdendem Zielabstand wieder stetig abzunehmen.

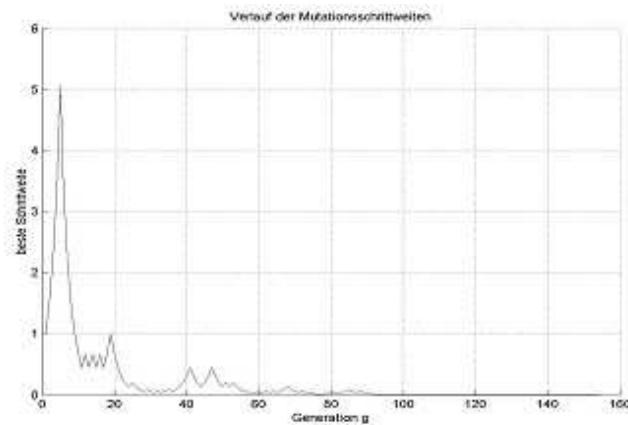


Abbildung 6.3: Schrittweitenverlauf in Abhängigkeit von der Generationszahl

**Abb. 6.4** zeigt den Vergleich zwischen vorgegebener (durchgezogener) und angepasster (gepunkteter) Hysteresekurve bei einem gesetzten Qualitätskriterium von  $Q = 0,01$ , das entspricht einer durchschnittlichen Abweichung von 0,7%. Der in diesem Fall errechnete Qualitätswert beträgt 0,0056, was einer mittleren Abweichung des Qualitätskriteriums von 0,56% entspricht.

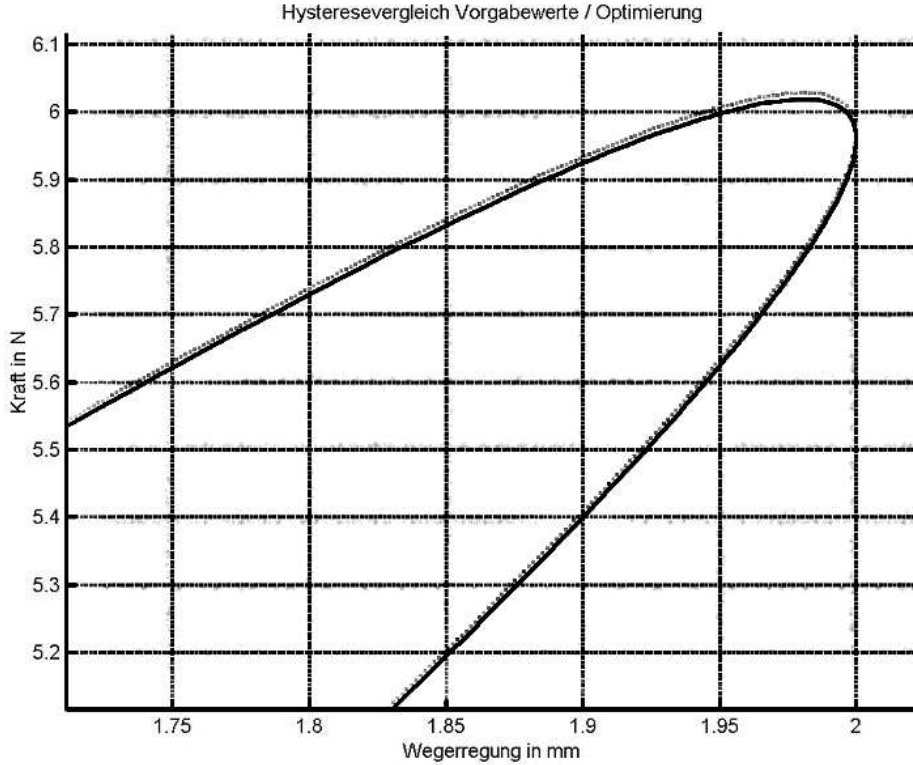


Abbildung 6.4: Optimierungsergebnis für das Beispiel am Umkehrpunkt der Hysteresekurve, vorgegebene (durchgezogene Linie) und angepasste (gepunktete) Hysteresekurve.

### 6.1.2 Qualitätsfunktion

*Evolutionstrategisch arbeiten heisst, nach einer Qualität zu selektieren. Reale Probleme sind so einfach nicht. Wie lässt sich nach mehreren Kriterien zugleich optimieren?*<sup>2</sup>

Für die Bewertung der erzeugten Lösungsmenge wird eine Qualitätsfunktion benötigt. Der Differenz zwischen dem Soll- und Istwert kann absolut oder relativ zum Sollwert berechnet werden, wobei hier der relativen Abweichung der Vorzug gegeben wird. So können die Restabweichungen, verursacht durch mit Schwankungen behafteten Messwerte, die Qualitätswerte nicht beeinträchtigen.

Im Verlauf der vorliegenden Optimierungsaufgabe wird über eine größere Anzahl von Hysteresekurven mit je zwei Kennwerten, der Fläche  $W_D$  bzw.  $A_{Hys}$  und der Spannung bei maximalem Verzerrungswinkel  $\tau(\gamma_{max})$  optimiert. Die Verknüpfung von  $2n$  Qualitätswerten durch die Methode der quadratischen Mittelwertbildung:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Q_{1i}^2 + \sum_{i=1}^n Q_{2i}^2}{2 \cdot n}}, \quad (6.2)$$

wobei  $Q_{1i}$  und  $Q_{2i}$  jeweils die Gütefunktionen der zwei Kennwerten sind.

<sup>2</sup>Aus [64]. Frage 11 aus dem Kapitel „Diskussion um die Evolutionsstrategie“

### 6.1.3 Der Optimierungsalgorithmus

Die für die Parameteroptimierung des Materialgesetzes eingesetzte Variante der Evolutionsstrategie ist, schon wegen der Dimension des Lösungsraumes ( $\geq 8$ ) und der iterativen Berechnung des Verzerrungswinkel-/Schubspannungsverlaufes, komplizierter als das obige Beispiel aufgebaut, wobei viele der im Beispiel genannten Ansätze auch hier zum Einsatz kommen.

Prinzipiell soll für die Parameteroptimierung eine einfach geschachtelte Variante der Evolutionsstrategie eingesetzt werden. Dies hat den Vorteil, dass zum einen bei Existenz mehrerer lokaler Minima der Qualitätsfunktion unter den o.g. Voraussetzungen das globale Maximum gefunden werden und zum anderen bei Annäherung an das Optimum ein schnelles Verkleinern der Schrittweiten in einer neuen Populationsgeneration bei Bedarf korrigiert werden kann. Die grundlegende Struktur des Optimierungsalgorithmus ist in **Abb. 6.5** dargestellt. SIMGUM, ein selbstgeschriebenes Institutsprogramm auf der Basis des KILIAN-Ansatzes und des Füllstoffmaterialgesetzes, bildet den Fortran 90-Kern der mechanischen Berechnung.

## 6.2 Die Parameter des Materialgesetzes

Das Materialgesetz setzt sich aus einem hyperelastischen und viskoplastischen Anteil zusammen. Aussagen zur Temperaturabhängigkeit der einzelnen Parameter können durch Berücksichtigung verschiedener physikalischer Hintergründe getroffen werden.

An dieser Stellen werden die Gleichungen aus dem Abschnitt 3.3.2 wieder aufgelistet:

$$\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}} = \frac{3}{2} \dot{\gamma} \frac{{}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{D}}}{\mathcal{J}_2({}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{D}})} \quad (6.3)$$

$$\dot{\gamma} = \left\langle \frac{\mathcal{J}_2({}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{D}})}{{}^F K} \right\rangle^{F_n} \quad (6.4)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\chi}}} = \frac{2}{3} {}^F C \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}} - {}^F \Gamma \dot{\gamma} \hat{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{D}} \quad (6.5)$$

$${}^F \mathbf{T} = {}^F G \left( \frac{\sqrt{{}^F D_m}}{\sqrt{{}^F D_m} - \sqrt{{}^F D_1}} - {}^F a \sqrt{{}^F D_1} \right) \mathbf{B}_e \quad (6.6)$$

$${}^F D_1 = \frac{1}{2} [J_1(\mathbf{B}_e) - 3] \quad (6.7)$$

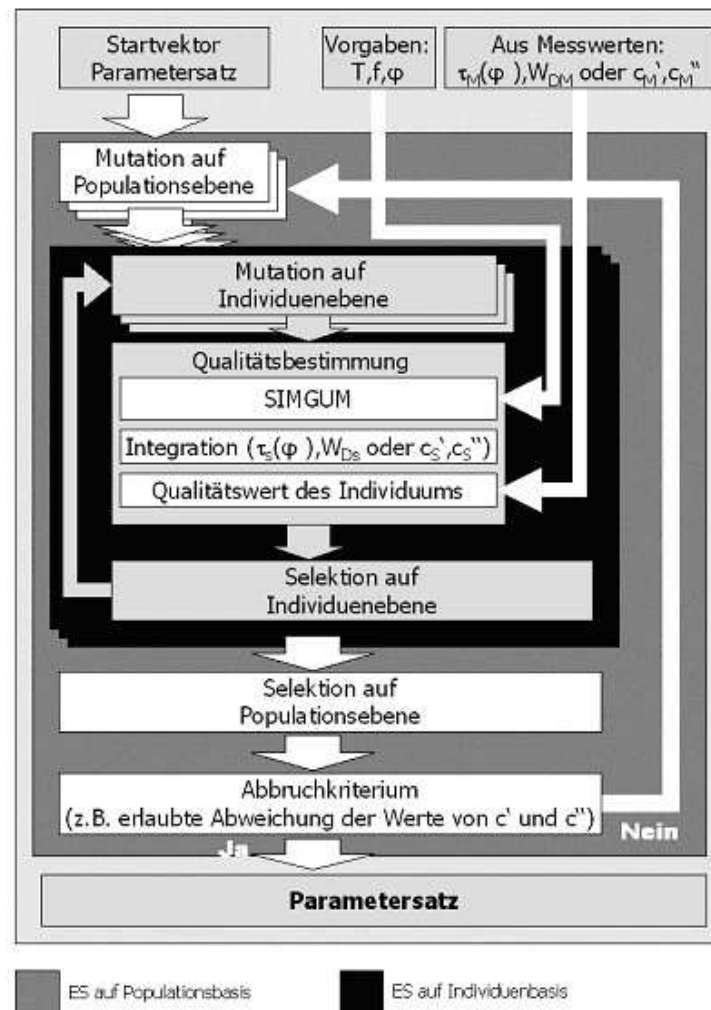


Abbildung 6.5: Struktur des Optimierungsalgorithmus zur Bestimmung der Modellparameter.

### 6.2.1 Zur Strategie der Kurvenanpassung

Je mehr Parameter das Materialgesetz hat, desto einfacher ist die Anpassung des Simulationsergebnisses auf ein breiteres Spektrum von Versuchsergebnissen. Gleichzeitig erhöht sich die Rechenzeitanforderungen. Für diesen Konflikt muss ein Optimum gefunden werden.

Zur besseren Anpassung der Kurven des Kümmler-Versuchs wird zuerst additiv die Füllstoff-Spannung auf mehrere Stränge erweitert, welche die erste Möglichkeit zur Erhöhung der Parameteranzahl ist. Die Möglichkeiten sind,

1. Additive Erweiterung des Füllstoff-Spannungstensors  $^F\mathbf{T}$  auf  $n$ -Teile. Diese entspricht bei einem rheologischen Modell der Addition von  $n - 1$  zusätzlichen Strängen.
2. Erhöhung der Anzahl der Variablen der kinematischen Verfestigung  $\mathcal{X}$

## 3. Kombination der ersten beiden Möglichkeiten

Das Stoffgesetz der Matrix hat den veränderlichen Schubmodulparameter  ${}^M G$ . Bei der Aufstellung hat das Füllstoffgesetz folgende Parameter:

Tabelle 6.1: Größen des Füllstoff-Materialgesetzes

| lfd. | Symbol        | Bedeutung                                            |
|------|---------------|------------------------------------------------------|
| 1    | ${}^F G$      | Schubmodul des Füllstoffgesetzes                     |
| 2    | ${}^F n$      | zur Anpassung der Geschwindigkeitsabhängigkeit $> 0$ |
| 3    | ${}^F K$      | zur Anpassung der Geschwindigkeitsabhängigkeit $> 0$ |
| 4    | ${}^F \Gamma$ | Gedächtnisparameter der Evolutionsgleichung          |
| 5    | ${}^F C$      | viskose Parameter der Evolutionsgleichung            |

Für das Gesamtgesetz gibt es im hyperelastischen Teil die zusätzlichen drei Variablen  ${}^M \beta$ ,  ${}^M a$  und  ${}^M D_m$ , die festgesetzt werden und somit keine Parameter, sondern Kennwerte sind. Diese Werte werden später keinem Optimierungsalgorithmus unterworfen. Vorerst gibt es zusammen mit dem elastischen Schubmodul  ${}^M G$  sechs Parameter.

Um die Kurvenanpassung zu erleichtern kann das Stoffgesetz auf zwei parallele Stränge ausgedehnt werden:

$${}^F \mathbf{T} = {}^F_1 \mathbf{T} + {}^F_2 \mathbf{T} \quad (6.8)$$

Dieser Schritt erfordert allerdings zwei Parametersätze:

1.  ${}^F_1 \mathbf{T} ({}^F G_1, {}^F n_1, {}^F K_1, {}^F \Gamma_1, {}^F C_1)$
2.  ${}^F_2 \mathbf{T} ({}^F G_2, {}^F n_2, {}^F K_2, {}^F \Gamma_2, {}^F C_2)$

Es wird eine Verdopplung der plastischen Parameteranzahl notwendig und man erhält elf Parameter.

Eine zusätzliche Möglichkeit zur besseren Kurvenanpassung kann über eine Erhöhung der Anzahl der Variablen der kinematischen Verfestigung erreicht werden:

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_1 = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{1,1} + \hat{\boldsymbol{\chi}}_{1,2} \quad (6.9)$$

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_2 = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{2,1} + \hat{\boldsymbol{\chi}}_{2,2} \quad (6.10)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_N = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{N,1} + \hat{\boldsymbol{\chi}}_{N,2} \quad (6.11)$$

Insgesamt ergeben sich vier Evolutionsgleichungen. Da nun auch zwei unterschiedliche viskoplastische Verzerrungsakkumulationen existieren, müssen die folgenden

Evolutionsgleichungen nochmals aktualisiert werden.

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\chi}}}_{1,1} = {}^F C_{1,1} \dot{\varepsilon}_{v,ein} - {}^F \Gamma_{1,1} |\dot{\varepsilon}_{v,ein}| \hat{\boldsymbol{\chi}}_{1,1} \quad (6.12)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\chi}}}_{1,2} = {}^F C_{1,2} \dot{\varepsilon}_{v,ein} - {}^F \Gamma_{1,2} |\dot{\varepsilon}_{v,ein}| \hat{\boldsymbol{\chi}}_{1,2} \quad (6.13)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\chi}}}_{2,1} = {}^F C_{2,1} \dot{\varepsilon}_{v,ein} - {}^F \Gamma_{2,1} |\dot{\varepsilon}_{v,ein}| \hat{\boldsymbol{\chi}}_{2,1} \quad (6.14)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\chi}}}_{2,2} = {}^F C_{2,2} \dot{\varepsilon}_{v,ein} - {}^F \Gamma_{2,2} |\dot{\varepsilon}_{v,ein}| \hat{\boldsymbol{\chi}}_{2,2} \quad (6.15)$$

Mit der letzten Erweiterung wird eine Parameteranzahl von 15 erreicht.

### 6.2.2 Ergebnisse der Parameteranpassung

Als erstes wird eine Optimierung mit einem einsträngigen Materialgesetz durchgeführt. Die Evolutionsgleichungen 6.12 bis 6.15 werden damit vereinfacht. Es ergibt sich eine Gesamtparameterzahl von Acht. Die Optimierungsprozedur wurde zunächst für die Umgebungstemperatur von  $T=42^\circ\text{C}$  und den Frequenzbereich von  $f=0,1$  bis 10 Hz durchgeführt. Der ermittelte Parametersatz kann **Tab. 6.2** entnommen werden.

Tabelle 6.2: Parametersatz des Materialgesetzes (einsträngig)

| lfd. | Parameter           | Parametersatz $T=42^\circ\text{C}$ |
|------|---------------------|------------------------------------|
| 1    | ${}^M G$            | 0.609955365848                     |
| 2    | ${}^F G_1$          | 0.209696301212                     |
| 3    | ${}^F n_1$          | 2.0745399843472                    |
| 4    | ${}^F K_1$          | 0.004659598182                     |
| 5    | ${}^F \Gamma_{1,1}$ | 22.071311242470                    |
| 6    | ${}^F \Gamma_{1,2}$ | 1922.92882749100                   |
| 7    | ${}^F C_{1,1}$      | 0.225746556078                     |
| 8    | ${}^F C_{1,2}$      | 6.076795481576                     |
|      | <b>Fehler</b>       | <b>0.05566</b>                     |

Die Kennwerte der komplexen Steifigkeit  $c'$  und  $c''$  bei einem einsträngigen Materialgesetz sind in **Abb. 6.6** dargestellt. Trotz des akzeptablen Qualitätswertes von ca. 0,056 mittlerer Abweichung zeigt die grafische Auswertung, dass insbesondere die Hystereseflächen nur sehr unzureichend approximiert wurden. Bei beiden Kennwerten gelingt keine betragsmäßig gute Abbildung der Frequenzabhängigkeiten. Die prinzipielle Ordnung der Kurven ist hingegen vorhanden.

Das 8-Parameter-Modell ist somit ungeeignet. Durch Hinzufügen eines viskoplastischen Stranges wird die Anzahl der Parameter insgesamt auf 15 erweitert.

Für das 15-Parameter-Modell werden Parametersätze für die Temperaturen  $22^\circ\text{C}$ ,  $42^\circ\text{C}$ ,  $62^\circ\text{C}$  ermittelt. Diese befinden sich in **Tab. 6.3**.

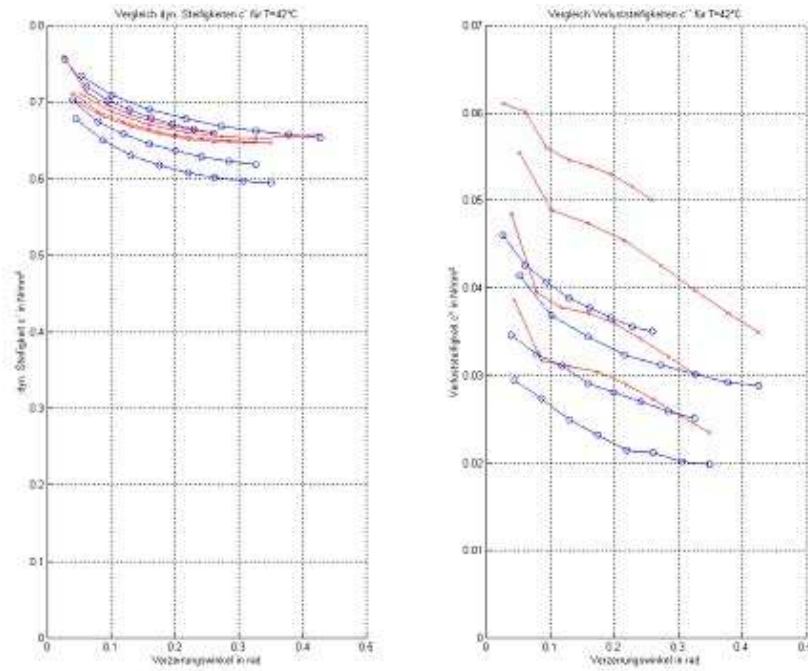


Abbildung 6.6: Vergleich der Kupplungskennwerte  $c'$  und  $c''$  der Simulation und Meßwerte (o) für 8 Parameter – 1-Strang-Modell.

Tabelle 6.3: Parametersatz des Materialgesetzes (zweistängig)

| lfd. | Parameter         | T=22°C          | T=42°C          | T=62°C          |
|------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1    | $^M G$            | 0.315222150317  | 0.298028131777  | 0.322431771646  |
| 2    | $^F G_1$          | 0.004128419834  | 0.003402414360  | 0.002608470710  |
| 3    | $^F n_1$          | 0.116786524999  | 0.221572539557  | 0.117476119629  |
| 4    | $^F K_1$          | 0.000002480435  | 0.000000332136  | 0.000002223224  |
| 5    | $^F \Gamma_{1,1}$ | 0.690686847503  | 0.352166902146  | 0.598455960012  |
| 6    | $^F \Gamma_{1,2}$ | 3.907039536347  | 12.030382741331 | 8.645665104714  |
| 7    | $^F C_{1,1}$      | 0.579182991450  | 0.770190631047  | 0.534253820830  |
| 8    | $^F C_{1,2}$      | 0.287791620407  | 0.145732711170  | 0.252868394472  |
| 9    | $^F G_2$          | 0.485346347035  | 0.457550196915  | 0.423800474090  |
| 10   | $^F n_2$          | 3.919277278657  | 4.412978994683  | 5.031016606250  |
| 11   | $^F K_2$          | 0.027771854023  | 0.025500535816  | 0.022049940111  |
| 12   | $^F \Gamma_{2,1}$ | 0.050426291886  | 0.184353521494  | 0.070000468339  |
| 13   | $^F \Gamma_{2,2}$ | 52.702818760848 | 48.730140877353 | 47.792086871699 |
| 14   | $^F C_{2,1}$      | 2.138394110681  | 2.616772992852  | 2.699920490399  |
| 15   | $^F C_{2,2}$      | 1.311967135041  | 1.310350780733  | 1.300290018727  |
|      | <b>Fehler</b>     | <b>0.04776</b>  | <b>0.02365</b>  | <b>0.02738</b>  |

Die grafischen Ergebnisse der Optimierung für das 15-Parameter-Modell wird ebenfalls für T=42°C und einen Frequenzbereich von 0,1 Hz bis 10 Hz in **Abb. 6.7** dargestellt. Es wird sichtbar, dass der ermittelte Parametersatz leichte Schwächen

in der Abbildung der Frequenzabhängigkeit der dynamischen Steifigkeit  $c'$  besitzt. Die Kurven der Simulationen liegen dichter beieinander als die gemessenen Kurven, obgleich die prinzipielle Ordnung auch in der Simulation abgebildet wird. Dagegen ist die Übereinstimmung der Verluststeifigkeiten  $c''$  deutlich besser. Da die Verluststeifigkeit für die Temperaturentwicklung in der Kupplung ausschlaggebend ist, kann in Rahmen dieser Arbeit auf eine Verbesserung verzichtet werden.

Trotzdem wurde eine weitere Optimierung für ein 22-Parameter-Modell getestet. Bei einer geringfügigen Verbesserung der Qualität, stieg die Rechenzeit erheblich, so dass dieses Modell für den untersuchten Bereich als unlohnend eingestuft wurde.

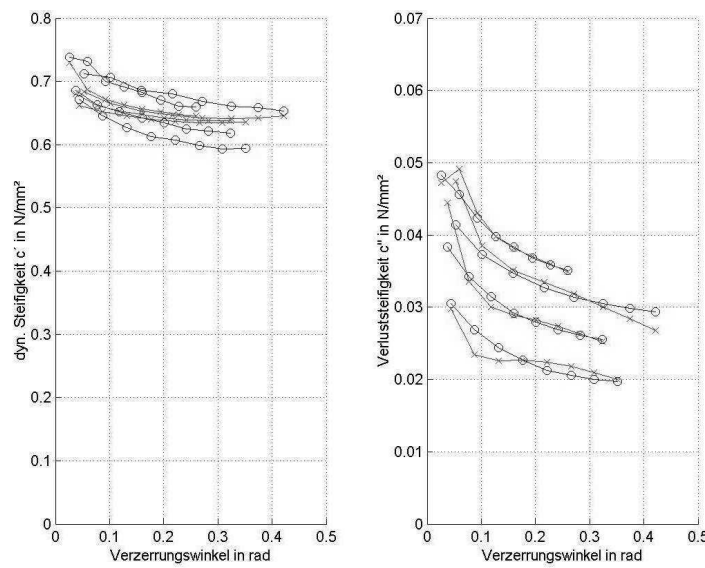


Abbildung 6.7: Vergleich der Kupplungskennwerte  $c'$  und  $c''$  der Simulation und Meßwerte (o) für 15 Parameter,  $T=315,5^\circ\text{K}$  – 2-Strang-Modell.

### 6.3 Temperaturfunktionen für die Parameter des Materialgesetzes

Die Messungen bei unterschiedlichen Temperaturen wurden auf einige Stützpunkte beschränkt. Um bei der Simulation auch zwischen den gemessenen Werten Parameter zu haben, werden mit Hilfe einer linearen Regressionsanalyse Funktionen in Abhängigkeit der Parameter bestimmt. Die Koeffizienten der 15 Regressionsfunktionen nach der Form

$$\mathcal{T}(\theta) = a + b \cdot \theta$$

sind in **Tab. 6.4** aufgelistet. Das Beispiel einer linearen Regressionsberechnung befindet sich im Anhang C.

Tabelle 6.4: Die Koeffizienten der temperaturabhängigen Parameterfunktionen

| Parameter                 | $a$                             | $b$                              |
|---------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| $^M G_1(\theta)$          | 0,315                           | $2,314 \cdot 10^{-4}$            |
| $^F G_1(\theta)$          | $5,879 \cdot 10^{-3}$           | $-4,713 \cdot 10^{-5} \approx 0$ |
| $^F n_1(\theta)$          | 0,164                           | $1,749 \cdot 10^{-4}$            |
| $^F K_1(\theta)$          | $2,933 \cdot 10^{-6} \approx 0$ | $-5,199 \cdot 10^{-8} \approx 0$ |
| $^F \Gamma_{1,1}(\theta)$ | 0,787                           | $-6,022 \cdot 10^{-3}$           |
| $^F \Gamma_{1,2}(\theta)$ | 5,954                           | 0,088                            |
| $^F C_{1,1}(\theta)$      | 0,911                           | $-4,862 \cdot 10^{-3}$           |
| $^F C_{1,2}(\theta)$      | 0,266                           | $-8,505 \cdot 10^{-4}$           |
| $^F G_2(\theta)$          | 0,494                           | $-1,521 \cdot 10^{-3}$           |
| $^F n_2(\theta)$          | 2,936                           | 0,041                            |
| $^F k_2(\theta)$          | 0,032                           | $-2,087 \cdot 10^{-4}$           |
| $^F \Gamma_{2,1}(\theta)$ | 0,078                           | $2,142 \cdot 10^{-3}$            |
| $^F \Gamma_{2,2}(\theta)$ | 51,286                          | 0,267                            |
| $^F C_{2,1}(\theta)$      | 1,616                           | 0,017                            |
| $^F C_{2,2}(\theta)$      | 1,076                           | $6,006 \cdot 10^{-3}$            |

## 6.4 Schlußfolgerungen aus der Parameteroptimierung

Die Anzahl der gefahrenen Versuche ist als „beschränkter Stichprobenumfang“ einzustufen, so dass maximal eine Aussagegüte von B erreichbar ist (s. [53]). Die Ergebnisse der Optimierung bestätigen, dass die gefahrenen Temperaturversuche nicht ausreichend sind und lediglich einen Trend wiedergeben können. Diesem wurde durch die Wahl einer linearen Regressionfunktion teilweise Rechnung getragen. Ausser der Erhöhung der Versuchsanzahl ist die Wahl einer zweiten Versuchsmethode unabdingbar. Beispielsweise erzeugt in dem 15-parametrigen Modell die Variation von  $^F \Gamma_{2,2}$  (s. Tab. 6.3) kaum nennenswerte Änderungen in den Ergebnissen. So kommt die Frage auf, ob dies bei einer anderen Beanspruchungsart anders wäre. Eine zu den gefahrenen Drehschwingungsversuchen „orthogonale“ Versuchsklasse –wie die Zugbeanspruchung– würde ausserdem den Geltungsbereich der Parameter vergrößern. Für zukünftige Untersuchungen wird die parallele Durchführung von schwingenden Torsions- und Zugversuchen empfohlen. Nur so können aus den Versuchen Parameter mit der Aussagegüte A gewonnen werden.

## 6.5 Ein Modifizierungsvorschlag für Pirschers Materialgesetz

Die nähere Betrachtung der Gleichungen 3.37 und 3.38 zeigt, dass bei der numerischen Realisierung Instabilitäten auftreten können. Eine angenommene Gleichheit

$${}^M D_M \approx {}^M D_1 \quad (6.16)$$

führt zu einer numerischen Singularität des Terms  $\ln\left(1 - \sqrt{\frac{{}^M D_1}{{}^M D_M}}\right)$ . Die Festsetzung des Gewichtungsterms  ${}^M \beta$  zu Eins bei reiner Torsion, ergibt  ${}^M D_1 \approx \frac{1}{2}(J_1(\mathbf{C}) - 3)$ , was zu Unstetigkeiten führt. Singularitäten verursachen bei der Parameteroptimierung und später bei der Simulation Probleme. Der Ansatz von KILIAN erweist sich im Gegensatz zum bisherigen Stand der Forschung als nicht robust in der Anwendung. Aus diesem Grund wird hier eine Modifikation für Pirschers Materialgesetz vorgeschlagen. Für den elastischen Anteil im viskoplastischen Füllstoff und für den hyperelastischen Anteil wird der numerisch stabilere OGDEN-Ansatz eingesetzt.

Die neue viskoplastische Formulierung lautet:

$$\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}} = \frac{3}{2} \dot{\gamma} \frac{{}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{D}}}{\mathcal{J}_2({}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{D}})} \quad (6.17)$$

$$\dot{\gamma} = \left\langle \frac{\mathcal{J}_2({}^F \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{D}})}{{}^F K} \right\rangle^{F_n} \quad (6.18)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{2}{3} {}^F C \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}} - {}^F \Gamma \dot{\gamma} \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{D}} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} {}^F \mathbf{T} = & \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^m \mu_k^F (\lambda_1^{F_{\alpha_k}} - 1) \right\} \frac{B_1}{2B_1^3 - J_1 B_1^2 + 1} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_1) \mathbf{B} + \frac{1}{B_1} \mathbf{1} \right) \\ & + \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^m \mu_k^F (\lambda_2^{F_{\alpha_k}} - 1) \right\} \frac{B_2}{2B_2^3 - J_1 B_2^2 + 1} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_2) \mathbf{B} + \frac{1}{B_2} \mathbf{1} \right) \\ & + \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^m \mu_k^F (\lambda_3^{F_{\alpha_k}} - 1) \right\} \frac{B_3}{2B_3^3 - J_1 B_3^2 + 1} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_3) \mathbf{B} + \frac{1}{B_3} \mathbf{1} \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Entsprechend den Ausführungen im Kapitel *Theoretische Grundlagen* folgt die hyperelastische Formulierung:

$$\begin{aligned} {}^M \mathbf{T} = & \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^3 \mu_k (\lambda_1^{\alpha_k} - 1) - p \right\} \frac{B_1}{2B_1^3 - J_1 B_1^2 + J_3} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_1) \mathbf{B} + \frac{J_3}{B_1} \mathbf{1} \right) \\ & + \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^3 \mu_k (\lambda_2^{\alpha_k} - 1) - p \right\} \frac{B_2}{2B_2^3 - J_1 B_2^2 + J_3} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_2) \mathbf{B} + \frac{J_3}{B_2} \mathbf{1} \right) \\ & + \left\{ \frac{1}{J} \sum_{k=1}^3 \mu_k (\lambda_3^{\alpha_k} - 1) - p \right\} \frac{B_3}{2B_3^3 - J_1 B_3^2 + J_3} \left( \mathbf{B}^2 - (J_1 - B_3) \mathbf{B} + \frac{J_3}{B_3} \mathbf{1} \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

# Kapitel 7

## Numerische Berechnung der Wärmeentwicklung

Unter Vernachlässigung äußerer Wärmequellen kann eine Energiegleichung aus den Bilanzsätzen für das Materialgesetz von PIRSCHER formuliert werden. Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren numerische Lösung die Temperaturverteilung im Elastomerkörper liefert. Im Abschnitt 3.7 wurden bereits einige Ansätze zur Lösung der Glg. 7.1 vorgestellt.

$$\rho c_p \dot{\theta} - k \Delta \theta - \underbrace{\text{sp} \left( {}^F \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{v}} \mathbf{F}^{-1} \right)}_{\text{Spannungsleistung}} + \underbrace{\frac{3}{2 {}^F C} \text{sp} \left( \hat{\mathbf{x}} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \right)}_{\text{Verfestigungsleistung}} = 0 \quad (7.1)$$

Der dritte und vierte Term aus Gl. 7.1 repräsentieren gemeinsam eine Wärmequelle. Das „ $\Delta$ “ in Gl. 7.1 ist der sog. LAPLACE-Operator. Die Interaktion einzelner Quellen und der Wärmetransport im Material über die Ränder wird durch die restlichen Faktoren zum Ausdruck gebracht. Die Angabe der Gl. 7.1 in verallgemeinerter Form ermöglicht den Vergleich mit bereits bekannten Lösungen der Gl. 3.95 bzw. eine strukturierte Vorgehensweise für die numerische Umsetzung.

$$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla (k \nabla \theta) + \rho \dot{q} \quad (7.2)$$

Die Temperatur im Innern wird der Kupplung durch Gl. 7.2 und die Randbedingungen bestimmt. Die Verluste durch Strahlung seien zu vernachlässigen. Damit ergibt sich für den Wärmestrom in die Luft,

$$h_L = \alpha_L (\theta - \theta_a). \quad (7.3)$$

Die Aussentemperatur  $\theta_a$  wird als konstant angenommen. Beim Versuch wird dies durch vorheriges Einschalten des Wärme-/Kälteschranks gewährleistet. Der Quellterm (s. Gl. 7.1) wird zusammenfassend mit  $\rho \dot{q}$  bezeichnet. Die Berechnung des Quellterms findet mit dem mechanischen Programm statt. Die zu betrachtende Gleichung lautet damit umgestellt:

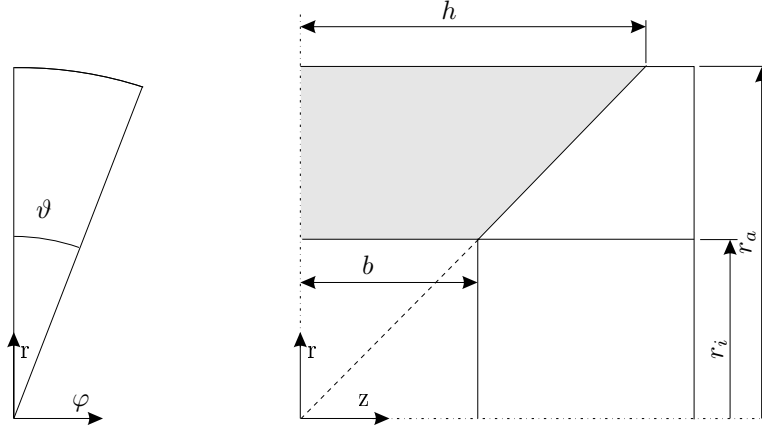


Abbildung 7.1: Kupplungsgeometrie

$$\nabla(k \nabla \theta) + \rho \dot{q} = \rho c_p \dot{\theta}. \quad (7.4)$$

Die Differentialgleichung wird somit über die temperaturabhängigen Größen  $\rho \dot{q}$ ,  $\rho$ ,  $k$ ,  $c_p$  gesteuert. Das Elastomer-Element ist als homogen anzunehmen. So entfällt die Ortsabhängigkeit der Größen  $\rho$ ,  $k$ ,  $c_p$ . Die Rotationssymmetrie der Kupplung wird durch Überführung der Gl. 7.4 in zylindrischen Koordinaten zum Ausdruck gebracht.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k r \frac{\partial \theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (k \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial \theta}{\partial z}) + \rho \dot{q} = \rho c_p \dot{\theta}. \quad (7.5)$$

Die Belastungsart der Versuchskupplung ist Torsion. Durch diese rotationssymmetrische Belastung stellt sich eine von der Koordinate  $\varphi$  unabhängige Temperaturverteilung ein. Die Gl. 7.5 vereinfacht sich zu:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k r \frac{\partial \theta}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial \theta}{\partial z}) + \rho \dot{q} = \rho c_p \dot{\theta}. \quad (7.6)$$

## 7.1 Eingabedaten für die Kupplung

Die geometrischen Daten für die Kupplung (s. Abb. 7.1) sind

$$\begin{aligned} r_i &= 0,045 \text{ m}, & r_a &= 0,087 \text{ m}, \\ b &= 0,009 \text{ m}, & h &= 0,018 \text{ m}. \end{aligned}$$

### 7.1.1 Materialkennwerte

**Dichte  $\rho$ :** Da die Kontrollvolumina als nahezu konstant angenommen werden, wird eine Volumendehnung nicht berücksichtigt. Die Dichte wird als konstanter Faktor betrachtet und beträgt  $\rho = 930 \text{ kg/m}^3$  ( $\rho$ -Wert aus [65]).

**Wärmeleitfähigkeit  $k$ :** Ansätze zur Behandlung der Wärmeleitfähigkeit wurden bereits auf S. 52 beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wird von zwei Ansätzen Gebrauch gemacht:

1. Konstante Wärmeleitfähigkeit: Für Naturkautschuk wird eine Wärmeleitfähigkeit von  $k = 0,23 \text{ W/m K}$  empfohlen (s. [51]).
2. Temperaturabhängigkeit: Die Abhängigkeit für eine Rußmischung von 20% nach Abb. 3.15 wird linearisiert,

$$\rightarrow k = (0,23 - 0,0002 \cdot \theta) [\text{W/m K}]$$

**Wärmekapazität  $c_p$ :** Nach Abb. 3.14 (S. 51) werden zwei Fälle eingesetzt:

1. KÜMMLEES Vorschlag von  $c_p = 1600 \text{ J/kg K}$  wird angenommen [43].
2. Die Abhängigkeit wird angenähert durch die lineare Funktion,  
 $\rightarrow c_p = [1700 + 2,5(\theta - 273,15)] [\text{J/kg K}]$

**Wärmeübergangszahl  $\alpha$ :** Das Temperaturgefälle senkrecht zum Stahlblech wird vernachlässigt. Für den Wärmeübergang an den Innen- und Aussenseiten der Kupplung wird in erster Näherung von einer freien Strömung ausgegangen. Bei freier Konvektion an einem waagerechten Zylinder wird ein Bereich von  $\alpha_L = 3 \dots 20 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  angegeben (s. [28]). In dem eigenen Versuchsstand findet eine Kühlung der Flansche durch Rotation nicht statt. Da hauptsächlich Kurzzeitbelastungen aufgebracht werden, wird vereinfachend bei Stillstand mit dem gleichen  $\alpha_L$ -Wert gearbeitet wie in [43].

Das vorliegende Problem wurde mit der Finite-Differenzen- und mit der Finite-Volumen-Methode numerisch umgesetzt. Beide Verfahren wurde in Anlehnung an [67] durchgeführt. Im folgenden wird die Umsetzung dargestellt.

## 7.2 Finite-Differenzen-Methode

Die Gleichung 7.2 ist unter Berücksichtigung entsprechender Rand- und Anfangsbedingungen numerisch lösbar. Da es sich bei der betrachteten Prüfkupplung um eine relativ einfache Geometrie handelt, kann die Finite-Differenzen-Methode eingesetzt werden. Bei der Finite-Differenzen-Methode wird das Problemgebiet mittels Gittern und Gitterpunkten diskretisiert. Differenzenquotienten ersetzen an den Gitterpunkten die Differentialquotienten, womit ein lineares Gleichungssystem entsteht, das mit den üblichen numerischen Verfahren gelöst werden kann. Die Finite-Differenzen-Methode ermöglicht eine schnelle Ergebniserzielung.

### 7.2.1 Differenzenquotienten

Die partiellen Ableitungen in der Gl. 7.2 können durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Das lineare Gleichungssystem der materiellen Punkte im Problemgebiet können so numerisch gelöst werden. Die Ableitung wird durch folgende Differenzenquotienten angenähert (s. z.B. [67]):

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_P \approx \frac{\theta_E - \theta_P}{\Delta x} \equiv \delta_x^+ \theta_P, \quad (7.7)$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_P \approx \frac{\theta_P - \theta_W}{\Delta x} \equiv \delta_x^- \theta_P, \quad (7.8)$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_P \approx \frac{\theta_E - \theta_W}{2\Delta x} \equiv \delta_x \theta_P. \quad (7.9)$$

**Abb. 7.2** verdeutlicht die Gln. 7.7 bis 7.9, wobei für  $\Delta x$  entweder  $x_P - x_w$  oder  $x_E - x_P$  ist. Wegen der Lage des Punktes  $P$  werden die Ausdrücke auch Vorwärts-, Rückwärts-, und Zentraldifferenz genannt.

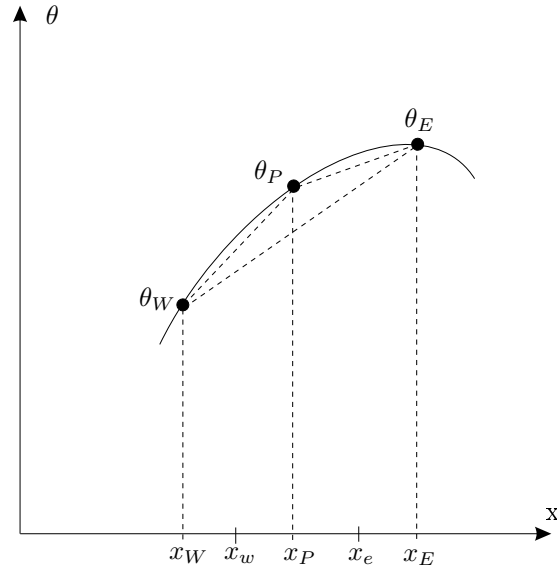


Abbildung 7.2: Approximation der Ableitung durch Differenzenquotienten, angedeutet durch die gestrichelten Linien

Die Approximation der Steigung in Punkt  $e$  zwischen  $x_W$  und  $x_P$  durch die Vorwärts- und in Punkt  $w$  zwischen  $x_P$  und  $x_E$  durch die Rückwärtsdifferenz führt zu der zweiten Ableitung in Punkt  $P$ :

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)_P \approx \frac{\theta_E - 2\theta_P + \theta_W}{(\Delta x)^2} \equiv \delta_x^2 \theta_P. \quad (7.10)$$

### 7.2.2 Ortsdiskretisierung

Zunächst wird die partielle DGL bezüglich der Ortskoordinaten diskretisiert. Dies führt für jeden Punkt  $P$  zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung in der Zeit:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_P = \psi(\theta(t)). \quad (7.11)$$

Der Operator  $\psi$  wurde zur Abkürzung der rechten Seite eingeführt. Für den zweidimensionalen Fall gilt beispielsweise:

$$\psi(\theta(t)) = \frac{\theta_E - 2\theta_P + \theta_W}{(\Delta x)^2} + \frac{\theta_N - 2\theta_P + \theta_S}{(\Delta y)^2} + f. \quad (7.12)$$

## 7.3 Finite Volumen

### 7.3.1 Kontrollvolumen (KV)

Die Volumenintegration der DGL 7.2 verhilft zu der Vorstellung eines Kontrollvolumens (KV).

$$\int_V (\nabla(k\nabla\theta)) dV = \int_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho\dot{q}\right) dV. \quad (7.13)$$

Angewendet auf die linke Seite, ergibt sich mit dem Satz von Gauss die Gleichung:

$$\int_S (k\nabla\theta) \mathbf{n} dS = \int_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho\dot{q}\right) dV, \quad (7.14)$$

wobei  $S$  die Oberfläche des KV,  $dS$  ein Flächenelement  $\mathbf{n}$  den Einheitsnormalenvektor an der Oberfläche bezeichnen.

Für die Diskretisierung ist es notwendig, die Stelle innerhalb des KV festzulegen, an der die unbekannten Variablen bestimmt werden. Es wird zwischen ecken- und zellenorientierter Ordnung unterschieden, wobei hier der zellenorientierte Anordnung zum Einsatz kommt. In **Abb. 7.3** wird die verwendete Kompassnotation verdeutlicht. Für die Randpunkte, Seiten und Vektoren werden kleine Buchstaben benutzt, für die KV-Mittelpunkte Großbuchstaben. Das Oberflächenintegral kann in die Summe der vier Oberflächenintegralen über die vier Seiten  $S_c$  ( $c = n, e, s, w$ ) aufgespalten werden:

$$\sum_c \int_{S_c} (k\nabla\theta) \mathbf{n}_c dS_c = \int_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho\dot{q}\right) dV. \quad (7.15)$$

Die linke Seite der Gl. 7.15 beschreibt die Flüsse  $F_c$  über die Ränder des Kontrollvolumens, die in ihrer Summe dem Volumenterm entsprechen. In Gl. 7.15 kommt die Summenkonvention von EINSTEIN nicht zum Einsatz.

$$F_c = \int_{S_c} (k\nabla\theta) \mathbf{n}_c dS_c \quad (7.16)$$

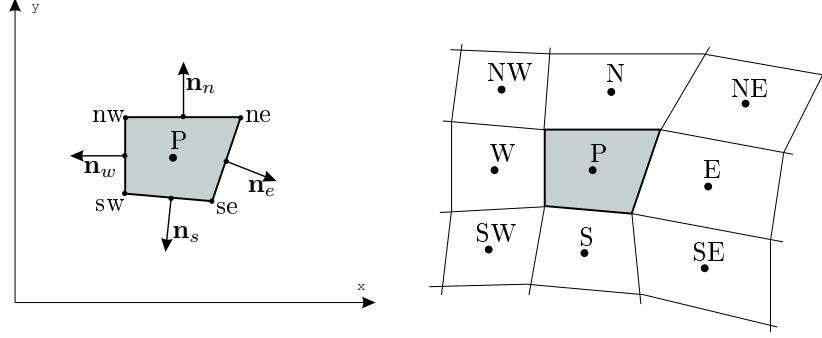


Abbildung 7.3: Bezeichnungen entsprechend der Kompassnotation

### 7.3.2 Auflösung der Integrale

Für die Approximation der Integrale wird das Mittelpunktsverfahren gewählt:

$$\sum_c \int_{S_c} (k \nabla \theta) \mathbf{n}_c dS_c = \sum_c \mathbf{n}_c \int_{S_c} (k \nabla \theta) dS_c \approx \sum_c \mathbf{n}_c (k \nabla \theta)_c S_c. \quad (7.17)$$

Die Oberflächenintegrale werden durch Werte im Schwerpunkt der Flächen approximiert.

Das Volumenintegral wird durch den Mittelpunktssatz des KV angenähert:

$$\int_V \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho \dot{q} \right) dV \approx \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho \dot{q} \right)_P V. \quad (7.18)$$

Das Oberflächenintegral wird durch Werte in den Seitenmittelpunkten approximiert. Gegeben bzw. gesucht sind die Werte für die Schwerpunkte der KV. Da die Seitenmittelpunkte zwischen zwei benachbarten Kontrollvolumina liegen, bietet sich das Zentralfindungsverfahren zur Bildung der Ableitungen an.

### 7.3.3 Nicht-kartesische Gitter

In nicht-kartesischen Koordinaten liegen im Allgemeinen entlang der Normalenrichtung keine Gitterpunkte. Daher muss die Normalableitung nach geeigneten anderen Koordinaten ausgedrückt werden. SCHÄFER [67] schlägt dazu die Richtungen  $\tilde{\xi}$  und  $\tilde{\eta}$  vor (s. **Abb. 7.4**).  $\tilde{\xi}$  ist definiert durch die Verbindungslinie zwischen P und E,  $\tilde{\eta}$  durch die Richtung betrachteteten der Seite des KV. Die Abweichung zwischen den Richtungen  $\tilde{\xi}$  und  $\tilde{\eta}$  in den Seitenmittelpunkten  $\xi$  und  $\eta$  und den Richtungen  $\tilde{\xi}$  und  $\tilde{\eta}$  bestimmen die Größe des Diskretisierungsfehlers.

Nach [67] erhält man so mittels Koordinatentransformation,  $(x, y) \rightarrow (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  für die Normalenableitung:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} n_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y} n_2 = \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \tilde{\eta}} n_1 - \frac{\partial x}{\partial \tilde{\eta}} n_2 \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\xi}} + \left( \frac{\partial x}{\partial \tilde{\xi}} n_2 - \frac{\partial y}{\partial \tilde{\xi}} n_1 \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\eta}} \right] \quad (7.19)$$

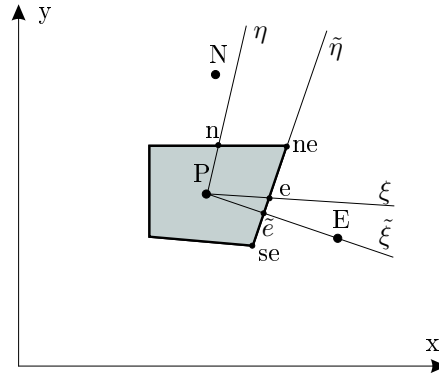


Abbildung 7.4: Approximation der Ableitung in nicht-kartesischen Gittern

mit der Jacobi-Determinante

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \tilde{\eta}} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \tilde{\eta}}. \quad (7.20)$$

Die Metrikgrößen werden angenähert mit:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tilde{\xi}} \approx \frac{\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_P|} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tilde{\eta}} \approx \frac{\mathbf{x}_{ne} - \mathbf{x}_{se}}{|\mathbf{x}_{ne} - \mathbf{x}_{se}|}. \quad (7.21)$$

Bei der Bildung der Ableitungen mittels Zentraldifferenzen ist bei

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\eta}} \approx \frac{\theta_{ne} - \theta_{se}}{|\mathbf{x}_{ne} - \mathbf{x}_{se}|} \quad (7.22)$$

zu beachten, dass die Punkte  $\theta_{ne}$  und  $\theta_{se}$  nicht bekannt sind und mittels Interpolation ermittelt werden müssen.

### 7.3.4 Ortsdiskretisierung

Durch Auflösung der Integrale Gl. 7.15 7.16 ergibt sich für jeden Punkt P eine gewöhnliche DGL in der Zeit. Durch Umformung erhält man:

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_P = \psi(\theta(t)) \quad (7.23)$$

mit

$$\psi(\theta(t)) = \frac{\sum_c F_c}{V} + \rho \dot{q} \quad (7.24)$$

### 7.3.5 Zeitdiskretisierung

Für die Ableitung nach der Zeit stehen drei Verfahren zur Verfügung.

Bei der Vorwärtsdifferenz ist die Ableitung zum jetzigen Zeitpunkt, angezeigt durch den hochgestellten Index  $^{(n)}$ , bekannt. Diese setzt man dem Differenzenquotienten gleich. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^{(n)} \approx \frac{\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}}{\Delta t} = \psi(\theta^{(n)}). \quad (7.25)$$

Bei der Rückwärtsdifferenz ist die Ableitung zu einem zukünftigen Zeitpunkt  $^{(n+1)}$  bekannt. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^{(n+1)} \approx \frac{\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}}{\Delta t} = \psi(\theta^{(n+1)}). \quad (7.26)$$

Die Zentralsdifferenz wird als Mittelwert von Vorwärts- und Rückwärtsdifferenz gebildet:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^{(n+1/2)} \approx \frac{\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}}{\Delta t} = \frac{1}{2}[\psi(\theta^{(n+1)}) + \psi(\theta^{(n)})]. \quad (7.27)$$

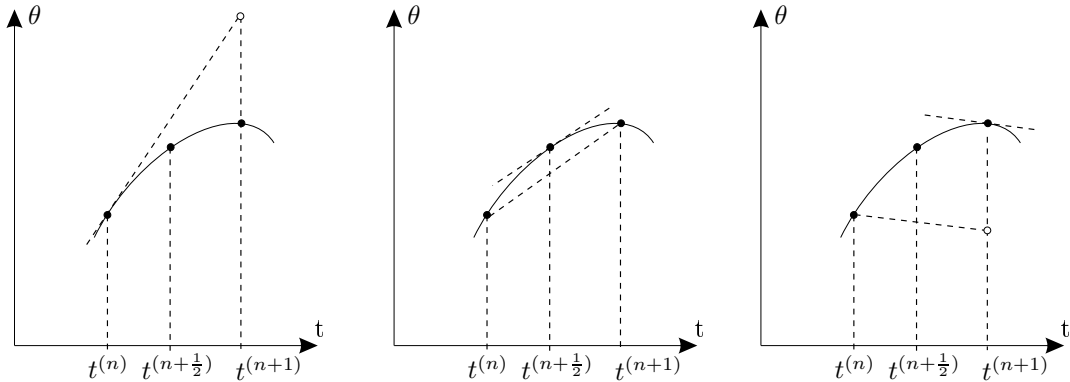


Abbildung 7.5: Approximation der Zeitableitung nach Euler (Links,  $\gamma = 0$ ), Crank-Nicolson (Mitte,  $\gamma = 0.5$ ) und Laasonen (Rechts,  $\gamma = 1$ )

Oftmals wird ein Steuerparameter  $\gamma \in [0, 1]$  eingeführt, mit dem die Verfahren in einer Gleichung zusammengefaßt werden können:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^{(n+1/2)} \approx \frac{\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}}{\Delta t} = \gamma \psi(\theta^{(n+1)}) + (1 - \gamma) \psi(\theta^{(n)}). \quad (7.28)$$

## 7.4 Numerische Differentiation

Ausgehend von den beschriebenen Verfahren für zeitliche und örtliche Ableitung, bieten sich für die Diskretisierung der DGL drei verschiedene Verfahren an (**Tab. 7.1**).

| $\gamma$      | Unbekannte | Lösungsmethode | Abschneidefehler                              | Methode                                                    |
|---------------|------------|----------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 0             | 1          | Explizit       | $0[\Delta t, (\Delta r)^2, (\Delta z)^2]$     | Forward-time, central-space (FTCS); Euler Methode          |
| $\frac{1}{2}$ | 5          | Implizit       | $0[(\Delta t)^2, (\Delta r)^2, (\Delta z)^2]$ | Midpoint-time, central-space (MTCS); Crank-Nicolson method |
| 1             | 5          | Implizit       | $0[\Delta t, (\Delta r)^2, (\Delta z)^2]$     | Backward-time, central-space (BTCS); Laasonen method       |

Tabelle 7.1: Übersicht der numerischen Differentiationsverfahren [67]

Die Genauigkeit des Crank-Nicolson Verfahrens ist um eine Ordnung besser. Man kann zeigen, daß das Crank-Nicolson Verfahren das genaueste Verfahren zweiter Ordnung ist [67]. Die impliziten Verfahren sind jedoch etwas aufwendiger, da zu deren Lösung das Gleichungssystem gelöst werden muß. Für die Lösung stehen sowohl direkte als auch iterative Lösungsverfahren zur Verfügung.

## 7.5 Randbedingungen

### 7.5.1 Zellenorientierte Kontrollvolumen

Bei zellenorientierten KV liegen die Punkte  $P$  nicht in den Randpunkten (**Abb. 7.6**):

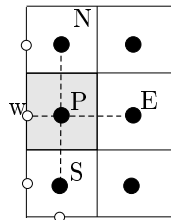


Abbildung 7.6: Randkontrollvolumen mit Bezeichnungen

Bei gegebenem Wert  $\theta_c$  auf dem Rand erhält man mit der Vorwärtsdifferenzenformel für den Fluß über die Seite  $c$  (Abb. 7.6:  $c=w$ ):

$$F_c = k_c \frac{\theta_P - \theta_c}{x_P - x_c} \delta S_c. \quad (7.29)$$

Ist der Strom  $h_c$  senkrecht zur Oberfläche bekannt, so kann der Fluß über die Seite einfach berechnet werden, in dem man den Strom mit der Fläche der Seite multipliziert.

$$F_c = h_c \delta S_c. \quad (7.30)$$

Die Bauteil- und Temperatursymmetrie stellt insofern einen Spezialfall dar, als der Fluß die Symmetrielinie in einem rechten Winkel trifft. Damit gilt für den Fluß:

$$F_c = \mathbf{n}_c (k \nabla \theta)_c \delta S_c = 0. \quad (7.31)$$

Deshalb kann durch Ausnutzung der Symmetrie das Gebiet analog zur mechanischen Modellierung halbiert werden (**Abb. 7.7**).

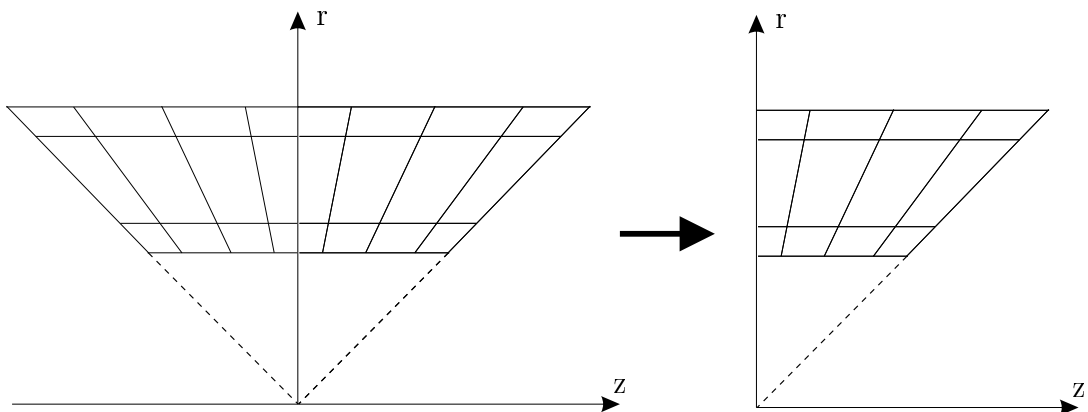


Abbildung 7.7: Ausnutzung der Symmetrie

Im Falle der Wärmeübertragung ist der Strom noch zu berechnen. Es gilt:

$$\mathbf{n}_c (k \nabla \theta)_c = \alpha (\theta_a - \theta_c) \quad (7.32)$$

Da die Punkte  $P$  bei zellenorientierten KV nicht mit den Randpunkten übereinstimmen, muß der Wert  $\theta_c$  im Randpunkt noch approximiert werden. Der Fluss ergibt sich zu:

$$F_c = \alpha (\theta_a - \theta_c) \delta S_c. \quad (7.33)$$

### 7.5.2 Eckenorientierte Kontrollvolumen

Für eckenorientierte KV liegen die Punkte  $P$  exakt in den Randpunkten. Bei gegebener Temperatur ist damit keine weitere Rechnung nötig. Für die Randbedingungen nach NEUMANN oder CAUCHY gelten die Gleichungen analog zur zellenorientierten Betrachtung [67]. Eine Approximation ist jedoch nicht notwendig.

### 7.5.3 Gittergenerierung

Die Vulkan-Kupplung wird durch ein Modell entsprechend **Abb. 7.1** diskretisiert. Für die grau hinterlegte Fläche gilt es ein Gitter zu generieren.

#### 7.5.3.1 Kartesisches Gitter

Zunächst wird ein Gitter erzeugt und über das physikalische Gebiet gelegt. Als nächstes wird aufgrund von Randfunktionen entschieden, welche Gitterpunkte zum Problemgebiet gehören. Die Entscheidung wird binär in einer Matrix gespeichert und steht für die weiteren Berechnungen zur Verfügung. Die Koordinaten der Gitterpunkte, die nicht zum Problemgebiet gehören, können nun zu Null gesetzt werden (**Abb. 7.8**).

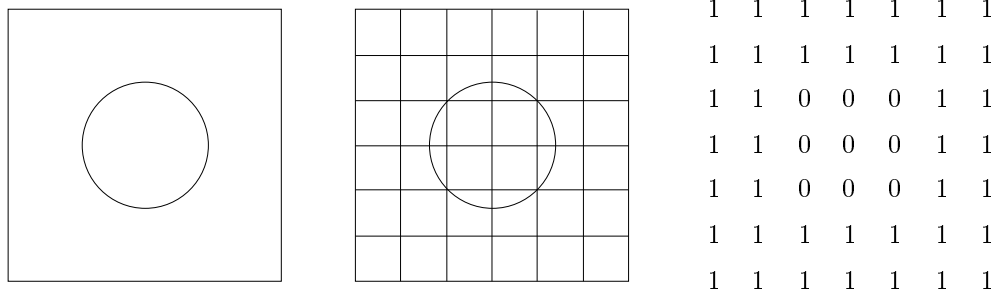


Abbildung 7.8: Erzeugung kartesischer Gitter

Die Annäherung der Kupplungsgeometrie erfolgt durch ein kartesisches Modell entsprechend **Abb. 7.9**.

Die Koordinaten  $(r, z)$  der Gitterpunkte  $P(i, j)$  mit

$$\begin{aligned} i &= 0, \dots, N, \\ j &= 0, \dots, M \end{aligned} \tag{7.34}$$

werden festgelegt durch:

$$r(i, j) = r_i + \frac{r_a - r_i}{N} i, \tag{7.35}$$

$$z(i, j) = \frac{h - b}{M} j + b \tag{7.36}$$

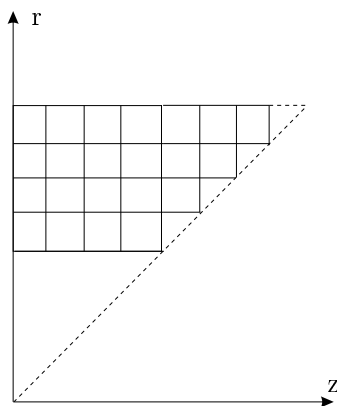


Abbildung 7.9: Annäherung der Kupplungsgeometrie

Die Punkte, für die gilt:

$$z(i, j) < \frac{l_a}{r_a} r(i, j) \quad (7.37)$$

gehören zum Problemgebiet.

### 7.5.3.2 Strukturiertes Gitter

Ziel der Gittergenerierung sei die Erzeugung eines strukturierten Gitters, bei dem die Dichte der Gitterlinien variiert werden kann. Die Vorgehensweise besteht daher aus zwei Unterpunkten, wo das logische Gebiet, also das reguläre Gebiet in ein gestrecktes Gebiet abgebildet wird und das gestreckte Gebiet ins physikalische, also in das irreguläre Gebiet abgebildet wird (s. **Abb. 7.10**).

1. Abbildung vom logischen ins gestreckte Gebiet.
2. Abbildung vom gestreckten ins physikalische Gebiet.

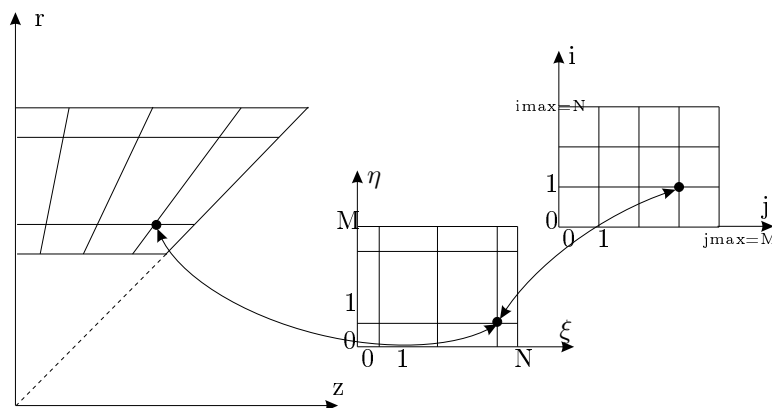


Abbildung 7.10: Abbildung vom logischen ins gestreckte und ins physikalische Gebiet

Die Aufgabe der Erzeugung von strukturierten Gittern besteht nach SCHÄFER [67]<sup>1</sup> darin, eine eindeutige Abbildung

$$(x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad \text{bzw.} \quad (\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) \quad (7.38)$$

zwischen gegebenen diskreten Werten  $\xi = 0, 1, \dots, N$  und  $\eta = 0, 1, \dots, M$  (logisches Gebiet) und den physikalischen Problemkoordinaten  $(x, y)$  zu finden (**Abb. 7.11**).

Eine Methode zur strukturierten Gittergenerierung ist die algebraische Gittererzeugung. Ausgehend von den Randpunkten des Problemgebietes

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, 0) &= \mathbf{x}_s(\xi), \quad \mathbf{x}(\xi, M) = \mathbf{x}_n(\xi) \quad \text{für} \quad \xi = 0, \dots, N, \\ \mathbf{x}(0, \eta) &= \mathbf{x}_w(\eta), \quad \mathbf{x}(N, \eta) = \mathbf{x}_e(\eta) \quad \text{für} \quad \eta = 0, \dots, M \end{aligned}$$

werden die Punkte im Innern über eine Interpolationsvorschrift ermittelt. Für eine einfache lineare Interpolation gibt SCHÄFER die Vorschrift:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, \eta) &= (1 - \frac{\eta}{M})\mathbf{x}_s(\xi) + \frac{\eta}{M}\mathbf{x}_n(\xi) + (1 - \frac{\xi}{N})\mathbf{x}_w(\eta) + \frac{\xi}{N}\mathbf{x}_e(\eta) \\ &\quad - \frac{\xi}{N} \left[ \frac{\eta}{M}\mathbf{x}_n(N) + (1 - \frac{\eta}{M})\mathbf{x}_s(N) \right] \\ &\quad - (1 - \frac{\xi}{N}) \left[ \frac{\eta}{M}\mathbf{x}_n(0) + (1 - \frac{\eta}{M})\mathbf{x}_s(0) \right] \end{aligned} \quad (7.39)$$

an, die als transfinite Interpolation bezeichnet wird.

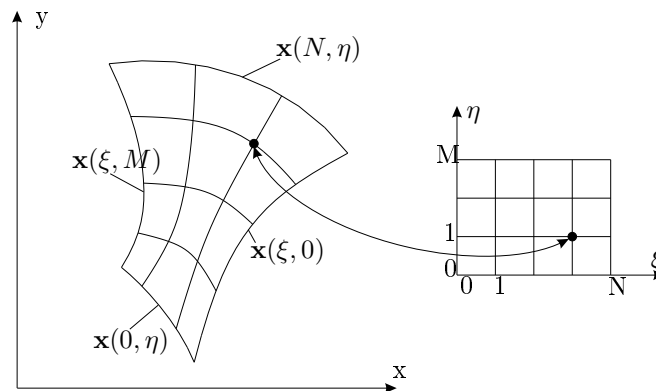


Abbildung 7.11: Zusammenhang zwischen physikalischem (rechts) und logischem Gebiet [67]

Eine einfache Möglichkeit, in bestimmten Bereichen lokal die Diskretisierungs-genauigkeit zu erhöhen, besteht darin, Gitterlinien in bestimmten Bereichen zu verdichten. Meist sind dies Bereiche, in denen große Gradienten der Problemvariablen auftreten.

<sup>1</sup>s. S. 58 in [67]

Mittels der Streckfunktion aus [67] verdichten sich die Gitterpunkte an der rechten Seite des Intervalls. Die Verdichtung wird über den sog. Bias-Parameter  $\alpha$  (**Abb. 7.12**), der gewählt wird, gesteuert.



Abbildung 7.12: Beispiel für die Konzentration von Gitterpunkten in Abhängigkeit des Faktors  $\alpha$  [67]

$$x_i = x_0 + \frac{\alpha^i - 1}{\alpha^N - 1}(x_N - x_0) \quad \text{für } i = 0, \dots, N \quad (7.40)$$

Für die linke Seite lautet die Funktion entsprechend:

$$x_i = x_N - \frac{\alpha^{(N-i)} - 1}{\alpha^N - 1}(x_N - x_0) \quad \text{für } i = 0, \dots, N. \quad (7.41)$$

### 7.5.3.3 Streckung

Da der Temperaturgradient an den Rändern am größten ist, wird dort eine Konzentration der Gitterlinien angestrebt. Es muß ein Stretching in beiden Raumrichtungen vorgenommen werden, jeweils zu den Rändern hin. Die Realisierung in beiden Raumrichtungen stellt kein Problem dar; für jede Richtung kann dieselbe Subroutine aufgerufen werden. Zu den Rändern hin wird das Gitter verdichtet.

### 7.5.3.4 Modellierung des physikalischen Gebietes

Die Kupplung wird als symmetrisch zur r-Achse angesehen. Daher verkleinert sich das zu betrachtende Gebiet (**Abb. 7.13**).

Die Ränder des Gebietes werden beschrieben durch die Funktionen

$$\mathbf{x}_s(\xi) = \left( \frac{b}{N}\xi; r_i \right) \mathbf{e} \quad (7.42)$$

$$\mathbf{x}_n(\xi) = \left( \frac{h}{N}\xi; r_a \right) \mathbf{e} \quad (7.43)$$

$$\mathbf{x}_w(\eta) = \left( 0; \frac{r_a - r_i}{M}\eta + r_i \right) \mathbf{e} \quad (7.44)$$

$$\mathbf{x}_e(\eta) = \left( b + \frac{h-b}{M}\eta; r_i + \frac{r_a - r_i}{M}\eta \right) \mathbf{e}, \quad (7.45)$$

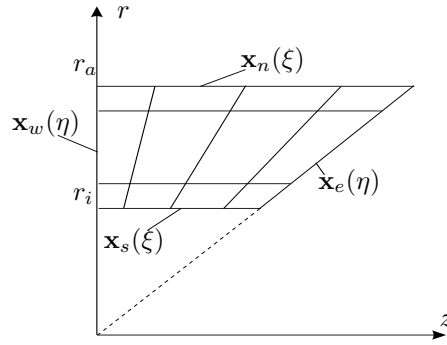


Abbildung 7.13: Die Ränder des physikalischen Gebiets

wobei die Basis  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r)$  verwendet wird. Gl. 7.42 bis Gl. 7.45 eingesetzt in Gl. 7.39 ergibt die Abbildungsvorschrift.

## 7.6 Lösung mittels finiter Differenzen

Bei Lösung mittels finiter Differenzen wird die Kupplungsgeometrie durch ein kartesisches Gitter approximiert.

### 7.6.1 Diskretisierung der DGL bei instationärer Betrachtung

Im einfachsten Fall werden die Parameter als konstant angenommen und können ausgeklammert werden. Die Anwendung des Euler Verfahrens auf das vorliegende Problem liefert:

$$k_n \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_P}\right) \frac{\theta_N^{(n)} - \theta_P^{(n)}}{(\Delta r)^2} - k_s \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_P}\right) \frac{\theta_P^{(n)} - \theta_S^{(n)}}{(\Delta r)^2} + k_e \frac{\theta_E^{(n)} - \theta_P^{(n)}}{(\Delta z)^2} - k_w \frac{\theta_P^{(n)} - \theta_W^{(n)}}{(\Delta z)^2} + \rho \dot{q} = \rho c_p \frac{\theta_P^{(n+1)} - \theta_P^{(n)}}{\Delta t}, \quad (7.46)$$

Neben örtlichen Abhängigkeit der Parameter, muss auch die zeitliche Abhängigkeit der Parameter berücksichtigt werden. Beim Euler-Verfahren werden die Parameter zum jetzigen Zeitpunkt berechnet und bleiben innerhalb des Zeitschrittes konstant. Für das neue Temperaturfeld werden die Parameter dann neu berechnet und stehen für den nächsten Zeitschritt zur Verfügung.

#### 7.6.1.1 Randbedingungen

Die Temperaturen an den Rändern sind nicht bekannt. Da der Fluss bekannt ist, wird um die Randpunkte ein Kontrollvolumen gebildet und eine Energiebilanz

aufgestellt (**Abb. 7.14**).

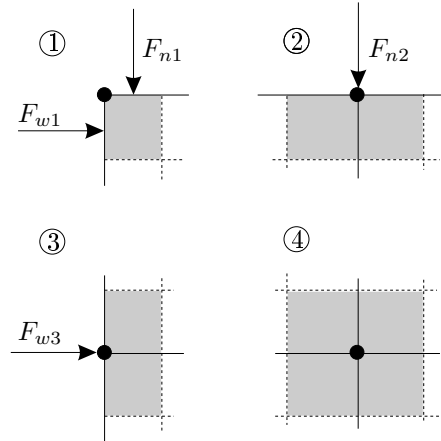


Abbildung 7.14: Bildung von KV um die Randpunkte: äußere linke Ecke (1), äußere Kante (2), linke Kante (3), innen (4)

$$k_s A_s \frac{\theta_S - \theta_P}{\Delta r} + k_e A_e \frac{\theta_E - \theta_P}{\Delta z} + \alpha_L A_n (\theta_a - \theta_P) + \rho \dot{q} V = \rho c_p V \frac{\theta_P^{(n+1)} - \theta_P}{\Delta t}, \quad (7.47)$$

für die äußere Kante:

$$\begin{aligned} k_s A_s \frac{\theta_S - \theta_P}{\Delta r} + k_e A_e \frac{\theta_E - \theta_P}{\Delta z} + k_w A_w \frac{\theta_W - \theta_P}{\Delta z} + \alpha_L A_n (\theta_a - \theta_P) + \rho \dot{q} V \\ = \rho c_p V \frac{\theta_P^{(n+1)} - \theta_P}{\Delta t} \end{aligned} \quad (7.48)$$

und für die linke Kante:

$$\begin{aligned} k_s A_s \frac{\theta_S - \theta_P}{\Delta r} + k_n A_n \frac{\theta_N - \theta_P}{\Delta r} + k_e A_e \frac{\theta_E - \theta_P}{\Delta z} + \rho \dot{q} V \\ = \rho c_p V \frac{\theta_P^{(n+1)} - \theta_P}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen wurde die Indizierung des Rechenschritts „<sup>(n)</sup>“ in den Größen des aktuellen Zeitpunktes weggelassen.

Die Gleichungen für die restlichen Ecken und Kanten lassen sich entsprechend ableiten. Man beachte die unterschiedliche Größe der Kontrollvolumen. Am Rand entspricht es einer halben, an der Ecke einer viertel Zelle.

Das Gleichungssystem ist explizit lösbar, damit können die Temperaturen  $\theta_P$  für jeden Zeitschritt neu berechnet werden.

## 7.7 Lösung mittels finiter Volumen

### 7.7.1 Diskretisierung der DGL bei instationärer Betrachtung

Auf das vorliegende Problem wird ebenfalls das Euler Verfahren angewendet, womit auf einen neuen Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems verzichtet werden kann (s.a. Gl. 7.17 und 7.18):

$$\sum_c \mathbf{n}_c (k \nabla \theta)_c^{(n)} \delta S_c + \rho \dot{q} V = \rho^{(n)} c_p^{(n)} V \frac{\theta_P^{(n+1)} - \theta_P^{(n)}}{\Delta t}, \quad (7.50)$$

Die Ableitungen werden entsprechend der Gl. 7.19 gebildet. Für den Fluss durch Seite  $e$  (s. Abb. 7.4) erhalten wir, unter Beachtung des zylindrischen Koordinatensystems analog zu SCHÄFER [67]:

$$F_e \approx k [D_e (\theta_E - \theta_P) + N_e (\theta_{ne} - \theta_{se})] A_e. \quad (7.51)$$

mit den Transformationsfaktoren

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{\sqrt{(r_{ne} - r_{se})^2 + (z_{ne} - z_{se})^2}}{(r_{ne} - r_{se})(z_E - z_P) - (z_{ne} - z_{se})(r_E - r_P)} \\ N_e &= \frac{(r_{ne} - r_{se})(r_E - r_P) + (z_{ne} - z_{se})(z_E - z_P)}{(z_{ne} - z_{se})(r_E - r_P) - [(r_{ne} - r_{se})(z_E - z_P)] |\mathbf{x}_{ne} - \mathbf{x}_{se}|} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Die Zwischenwerte  $\theta_{ne}$  und  $\theta_{se}$  sind nicht bekannt und müssen mittels einer Interpolation abgeschätzt werden [67].

#### 7.7.1.1 Veränderliche Parameter

Das Vorgehen erfolgt analog zum instationären Fall in finiten Differenzen (s. S. 107)

#### 7.7.1.2 Randbedingungen

Die Randbedingungen werden analog Gl. 7.33 und Gl. 7.31 aufgestellt. Die Temperatur an der Oberfläche des Randvolumens wird vereinfachend durch den Wert im Punkt  $P$  approximiert (s. **Abb. 7.15**). Ein genauere Wert kann am Punkt  $w$  ermittelt werden. Damit lautet die Energiebilanz für die linke, äußere Ecke:

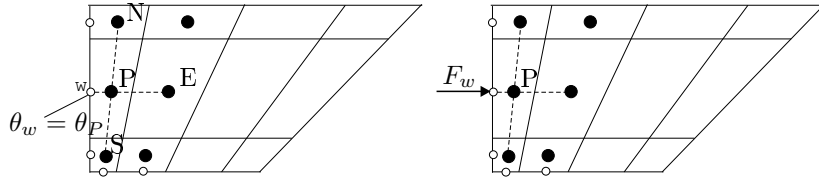


Abbildung 7.15: Randkontrollvolumen mit Bezeichnungen und Fluss

$$k_e[D_e(\theta_E - \theta_P) + N_e(\theta_{ne} - \theta_{se})]A_e + k_s[D_s(\theta_S - \theta_P) + N_e(\theta_{se} - \theta_{sw})]A_s + \alpha_l(\theta_a - \theta_P)A_n + \rho\dot{q}V = \rho c_p V \frac{\theta_P^{(n+1)} - \theta_P^{(n)}}{\Delta t}, \quad (7.53)$$

Für die obere Kante:

$$k_e[D_e(\theta_E - \theta_P) + N_e(\theta_{ne} - \theta_{se})]A_e + k_s[D_s(\theta_S - \theta_P) + N_e(\theta_{se} - \theta_{sw})]A_s + k_w[D_w(\theta_W - \theta_P) + N_w(\theta_{sw} - \theta_{nw})]A_w + \alpha_l(\theta_a - \theta_P)A_n + \rho\dot{q}V = \rho c_p V \frac{\theta_P^{(n+1)} - \theta_P^{(n)}}{\Delta t}, \quad (7.54)$$

und für die linke Kante:

$$k_n[D_n(\theta_N - \theta_P) + N_n(\theta_{nw} - \theta_{ne})]A_n + k_e[D_e(\theta_E - \theta_P) + N_e(\theta_{ne} - \theta_{se})]A_e + k_s[D_s(\theta_S - \theta_P) + N_s(\theta_{se} - \theta_{sw})]A_s + \rho\dot{q}V = \rho c_p V \frac{\theta_P^{(n+1)} - \theta_P^{(n)}}{\Delta t}. \quad (7.55)$$

Die Gleichungen für die restlichen Ecken und Kanten lassen sich entsprechend ableiten.

## 7.8 Ergebnisse

KÜMMLEES Untersuchungen legen eine Kupplung mit wassergekühlten Stahlflanschen zu Grunde. Dieser Fall wurde in der vorliegenden Arbeit experimentell nicht untersucht. Aus diesem Grund wurden Berechnungen mit nicht gekühlten Flanschen durchgeführt.

Es wurden Kontrollberechnungen für den instationären Fall mit einem Quellterm von  $\dot{Q} = 100000 \text{ W/m}^3$  durchgeführt. Nach vergleichenden Beispielberechnungen mit dem Finite-Differenzen- und Finite-Volumen-Verfahren wurde das Finite-Volumen-Verfahren mit strukturierten Gittern wegen der schnelleren Rechenzeiten bei geringfügigem Verlust der Genauigkeit dem Finite-Differenzen-Verfahren vorgezogen.

## 7.9 Instationäre Betrachtung

Die folgenden Abbildungen zeigen den Temperaturverlauf in der Kupplung zu verschiedenen Zeitpunkten. Hängen die Randbedingungen und Parameter nicht direkt von der Zeit ab, so stellt sich für  $t \rightarrow \infty$  der stationäre Zustand ein (Aufheiz- oder Abkühlprozesse).

Simuliert wird über einen Zeitraum von  $t = 10000$  s. Bei einer Einteilung in 100000 äquidistante Schritte erhält man eine Schrittweite von  $\Delta t = 0.1$  s.

Für die erste Berechnung wurde eine konstante Wärmeübergangszahl von  $\alpha = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$  (s. **Abb. 7.16**) angenommen. Als Anfangstemperatur gilt die Umgebungstemperatur von  $293,15 \text{ K}$ . Wie erwartet tritt die maximale Temperatur auf der Symmetrieachse der Kupplung auf. Bedingt durch die schlechte Wärmeleitfähigkeit vom Gummi herrschen im Inneren der Kupplung höhere Temperaturen. Um den Einfluß der Kühlung zu zeigen, wurde in einer zweiten Berech-

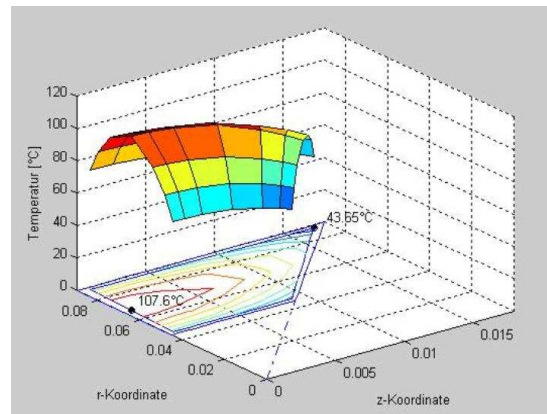


Abbildung 7.16: Verlauf der Temperatur mit nicht gekühlten Flanschen,  $\alpha = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

nung der Kupplungsbetrieb eines zweipoligen E-Motors mit einer Drehzahl von  $n = 1500 \text{ min}^{-1}$  simuliert. In dieser Berechnung wurde ein veränderliches  $\alpha$  angenommen. Für diesen Fall können Wärmeübergangszahlen in Abhängigkeit der Luftgeschwindigkeit dem DUBBEL entnommen werden [4]. Aus den Abbildungen 7.16 und 7.17 geht hervor, dass der Verlauf der Temperatur qualitativ ähnlich ist. Allerdings zeigt sich, dass die Kühlung durch die Rotationsströmung zu niedrigeren Temperaturwerten führt (Vergleich der Maxima:  $107,6^\circ\text{C} \Leftrightarrow 80,51^\circ$ ).

## 7.10 Kopplung der mechanischen und thermischen Berechnung

Zur Berechnung der Wärmeentwicklung infolge einer Schwingbeanspruchung der Versuchskupplung wurde das Fortran-Programm für das Materialgesetz nach PIRSCHER (s. Abschnitt 5) mit dem schnelleren Wärmeberechnungsprogramm nach

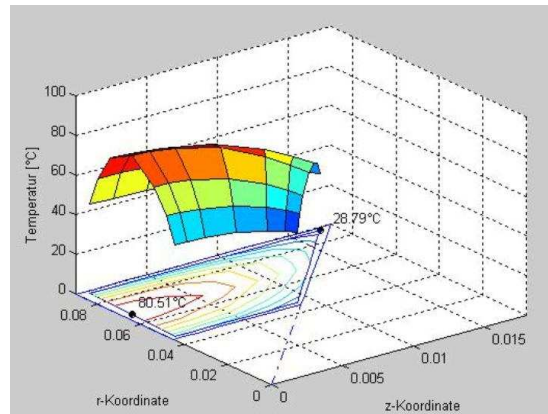


Abbildung 7.17: Verlauf der Temperatur mit nicht gekühlten Flanschen,  $\alpha =$  variabel.

der Finite-Volumen-Methode entsprechend **Abb. 7.18** gekoppelt. Diese Vorgehensweise ähnelt dem von KÜMMLEE verwendeten Mischverfahren. Anders als bei ihm findet hier die Interaktion zwischen Wärme- und Spannungsberechnung pro Zeitschritt statt. In Gl. 7.56 werden nochmals die maßgebenden Terme für die Wärmeentwicklung gekennzeichnet.

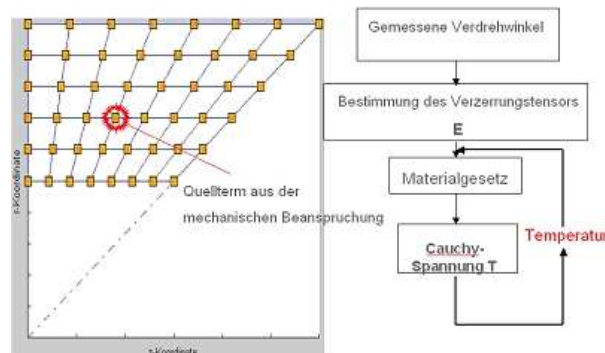


Abbildung 7.18: Prinzip der Kopplung zwischen der mechanischen und thermischen Berechnung.

$$\rho c_p \dot{\theta} - k \Delta \theta - \overbrace{\text{sp} \left( {}^F \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{v}} \mathbf{F}^{-1} \right) + \frac{3}{2 {}^F C} \text{sp} \left( \dot{\hat{\mathbf{x}}} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \right)}^{\text{Terme aus dem mechanischen Simulationsprogramm}} = 0 \quad (7.56)$$

Die Berechnung erfolgte bei einem Frequenz von 10 Hz und einer eingepprägten Winkelerregung von 4°. Die Temperaturen liegen bei der Berechnung etwas höher als bei den vorhergehenden Berechnungen (**Abb. 7.19**). Eine Kontrolle der einzelnen Terme in der Wärmeentwicklungsgleichung ergibt, dass der kinematische Verfestigungsterm etwas stärker als die anderen Terme schwankt. Die Ursache hierfür ist auf die zum Teil unsicheren Parameterbestimmung zurückzuführen. Die Durchführung zusätzlicher Versuche, in denen auch die Terme der Hauptdiagonale des Spannungstensors angesprochen werden, müsste hier Abhilfe schaffen.

Aus diesem Grund wird für zukünftige Untersuchungen eine Kombination aus Zug- und Torsionsversuchen vorgeschlagen.

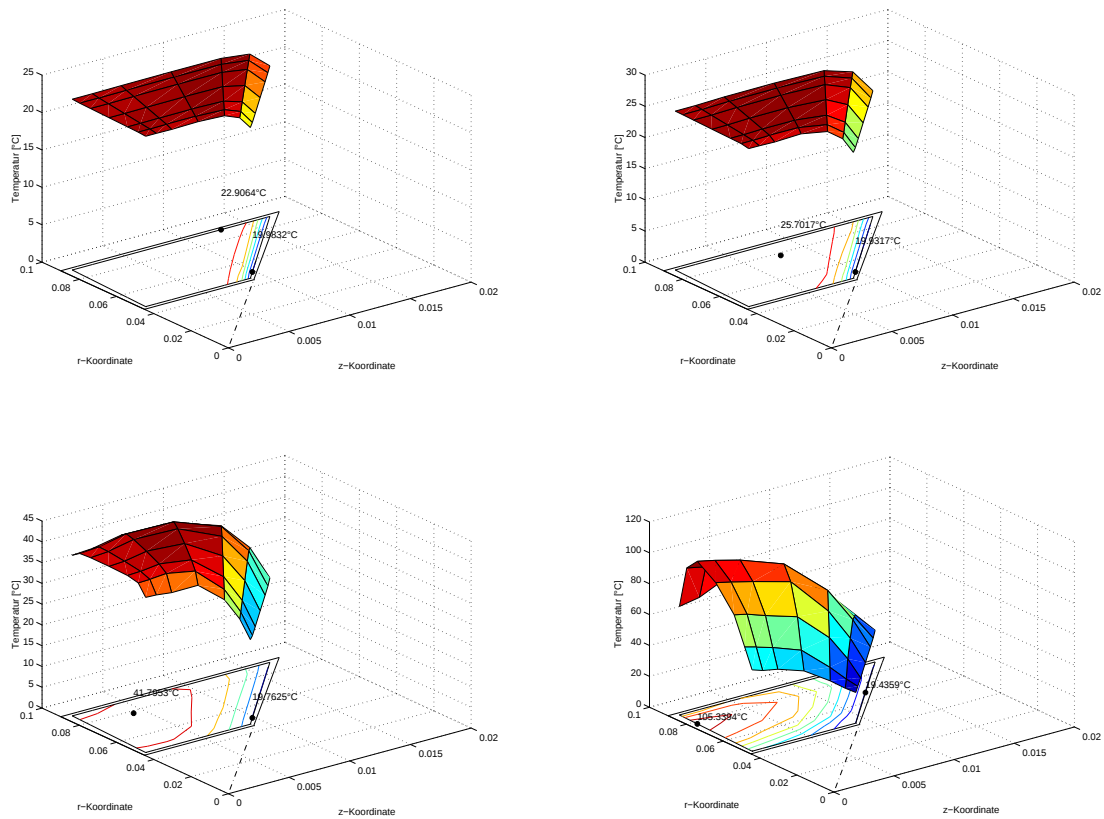


Abbildung 7.19: Kopplung der mechanischen und thermischen Berechnung

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass durch Anwendung eines Gesamtkonzeptes, welches auf standardisierten Messungen, numerischen Modellierungen und Systemidentifikation basiert, die Behandlung von lokalen Phänomenen wie Wärmenestern möglich ist. Auch im instationärem Betrieb können mechanische Beanspruchungen als Erzeuger thermischer Quellen im Material behandelt werden. Ferner wird die Änderung der Materialeigenschaften durch Veränderung des Temperaturbetrags berücksichtigt und somit eine Rückkopplung zu den mechanischen Beanspruchungen erstellt. Konvektionseffekte bei der Wärmeberechnung sind in der vorliegenden Arbeit nicht eingehend untersucht worden.

Durch die verallgemeinerte Vorgehensweise können grundsätzlich Versuche an verschiedenen Baugrößen eingespart werden. Im Sinne einer Werkstoffprobe liefert eine geeignete Prüfkupplung die notwendigen Datensätze für eine bestimmte Gummimischung. Die Parameteroptimierung und die Simulation verlangt von dem Ingenieur vertieftes Fachwissen und kann wie jede A-Methode nicht ohne weiteres durchgeführt werden. Um die Praxistauglichkeit zu gewährleisten, sollte in einem nächsten Schritt aus den Modellen der A-Ebene der Rückschluss zur B-Ebene in Form von Kupplungswirkmodellen (KWM) erfolgen. Aus den FEM-Simulationen können die Parametersätze der KWM für verschiedene Baugrößen ermittelt werden. Die scheinbar aufwendigen Simulationen werden deutlich kosten- und zeitgünstiger als Messungen an den entsprechenden Baureihen.

Langzeitmessungen haben eine beachtliche Änderung der Bauteilkennwerte aufgezeigt, weswegen Langzeitsimulationen zur Vorhersage des Änderung des Schwingungsverhaltens unabdingbar erscheinen. Die Bereitstellung der vorgestellten Werkzeuge macht auch die Simulationen in diesem Bereich möglich.

Die Durchführung von Langzeitsimulationen für Betriebsfestigkeitsberechnungen erscheinen noch nicht sinnvoll. Vor allem müsste ein sinnvolles Schadenskriterium gefunden werden. Hierfür wären Messungen mit höheren Lastspielzahlen und Belastungen notwendig, was im Prüffeld des Fachgebiets derzeit nicht möglich ist. Denkbar wären Schadensuntersuchungen an Gummi-Metall-Anvulkanisierungen. Hier können auch bei niedrigeren Belastungen Schäden auftreten. Die Bestim-

mung eines lokalen Temperaturwertes, der für dieses Schadensbild maßgeblich ist, ist bereits mit dem vorgestellten Modell möglich.

Bei der numerischen Umsetzung traten häufig Instabilitäten auf, die die Parametersuche erschwerten und die Simulationszeit verlängerten. Ferner deuten die größeren Ungenauigkeiten bei der Optimierung der dynamischen Steifigkeiten darauf hin, dass das verwendete Materialmodell für den untersuchten Bereich nicht genügend Stränge hat. Eine Erhöhung der Anzahl der Parameter führt aber zu erhöhten Rechenzeiten! Die Frage muss gestellt werden, ob das Modell in dieser Form beibehalten werden soll. Der Austausch des hyperelastischen Kilian-Ansatzes durch den Ansatz von Ogden (s. Abschnitt 3.4) könnte die erwünschte Stabilität bringen, dafür müsste man drei zusätzliche Parameter in Kauf nehmen, womit allenfalls die minimale Parameteranzahl des Ziegenhagenschen Modells erreicht wird.

Das Einbauen des Materialgesetzes in einem kommerziellen Software, wie z.B. ABAQUS ist prinzipiell möglich. Hier bietet ABAQUS eine direkte Schnittstelle, wo das Materialgesetz, einmal als konsistente Materialtangente formuliert (s. Abschnitt 5.3.2), in Form eines Unterprogramms eingebaut werden kann. Dies würde die Variation der Geometrie und somit die Untersuchung von Kupplungen unterschiedlicher Bautypen und insbesondere Baugrößen ermöglichen.

Mit ZIEGENHAGENS Vorgehensweise stehen dem Konstrukteur bereits sehr wirk-same Werkzeuge für die Auslegung von Elastomer-Kupplungen zur Verfügung. Die vorliegende Arbeit macht den Anfang, weiterführende Methoden und Werkzeuge in diesem Bereich einzusetzen. Die nachfolgenden Untersuchungen sollten zur Zielsetzung haben aus den für den konstruktiven Alltag aufwendigen und schwer verständlichen A-Methoden B- und C-Methoden herzuleiten. Einige Punkte sollten aus der Sicht des Autors beachtet werden. Die Bestimmung der Parameter für eine Gummimischung anhand einer Versuchsklasse ist nicht ausreichend. Die Parameteridentifikation mit der Versuchsklasse der Torsionsbelastung sollte durch Zugversuchen an geeigneten Probekörper ergänzt werden. In der vorliegenden Arbeit stand eine Kupplung mit einer vergleichsweise geringen Hystereseffläche zur Verfügung. Dieser Umstand war bei der Aufdeckung von elastomerspezifischen Phänomenen ungünstig. Mit der Umsetzung der vorgeschlagenen Verbesserung der Versuche sollten Parameter mit der Aussagegüte A gewonnen werden können. Die Beeinflussung des Wärmeflusses durch die Rotation des Antriebsstranges wurde nicht berücksichtigt. Die offenen Punkte können Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten sein

# Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS, Inc.: *ABAQUS Analysis User's Manual*. ABAQUS, Inc. 2003.
- [2] Achenbach, M.; Duarte, J.: *Lebensdauersimulation von elastomeren Dichtungen mit Hilfe der Finiten Elemente Methode*. Benutzertreffen MARC/MENTAT in Bad Kissingen, Aug. 2000.
- [3] Achenbach, M.; Streit, G. : *Thermodynamische Beschreibung der Gummielastizität*. Gummi Fasern Kunststoffe 54. Jhrg. März 2001, S. 164-178.
- [4] Beitz, W. (Hrsg.); Küttner, K.-H.(Hrsg.): *DUBBEL-Taschenbuch für den Maschinenbau*. 17. Auflage, Berlin, Heidelberg, New York, u.a.: Springer 1990.
- [5] Barutzki, F. : *Ermittlung des Übertragungs- und Temperaturverhaltens von Elastomer-Kupplungen bei Schwingungsanregung mit mehreren Frequenzen*. Dissertation TU Berlin, 1992.
- [6] Becker, M. : *Ein Beitrag zur Untersuchung der Temperaturentwicklung in einer Drehelastischen Scheibenkupplung bei dynamischer Beanspruchung unter besonderer Berücksichtigung des im Betrieb auftretenden Winkelversatzes*. Dissertation Uni Kaiserslautern, 1994.
- [7] Benner, J. : *Experimentelle Untersuchungen des mechanischen Verhaltens drehnachgiebiger Wellenkupplungen und Entwicklung eines Ersatzmodells*. Dissertation TH Aachen, 1984.
- [8] Benner, J. : *Mathematisches Modell zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens drehnachgiebiger Wellenkupplungen*. Antriebstechnisches Kolloquium ATK'84, VDI-Berichte 524. Düsseldorf: VDI-Verlag 1984.
- [9] Bergström, J. S.; Boyce, M. C.: *Constitutive modelling of the large strain time-dependent behaviour of elastomers*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 46, No. 5 (1998), S. 931-954.
- [10] Besdo, D.; Ihlemann, J.: *Zur Modellierung des Stoffverhaltens von Elastomeren*. Kautschuk+Gummi · Kunststoffe 7-8 (1996) S. 495-504.
- [11] Betten, J. : *Tensorrechnung für Ingenieure* Stuttgart: Teubner 1987.

- [12] Betten, J. : *Kontinuumsmechanik*. Berlin, Heidelberg, New York, u.a.: Springer 1993.
- [13] Böhm, P. ; Mehlan, A. : *Silikonkautschuk-Ein Werkstoff für elastische Kupplungen öffnet neue Einsatzgebiete*. VDI Berichte 1323 (1997), S. 177-194.
- [14] Capek, O. : *Experimentelle Ermittlung der dynamischen Eigenschaften einer Elastomerkupplung bei verschiedenen Betriebszuständen*. Unveröffentlichte Studienarbeit an der TU Berlin, 2002.
- [15] Chaboche, J., -L. : *Cyclic Viscoplastic Constitutive Equations, Part I: A Thermodynamically Consistent Formulation*. J. Applied Mechanics 60 (1993), S. 813-821.
- [16] Chaboche, J., -L. : *Cyclic Viscoplastic Constitutive Equations, Part II: Stored Energy-Comparison between Models and Experiments*. J. Applied Mechanics 60 (1993), S. 821-828.
- [17] Chang, J. H.; Gao, Y.T.: *Numerical evaluation of  $J_2$ -integral for rubbery materials under dynamic loads with finite element method*. Computational Mechanics 20 (1997), S. 460-467.
- [18] Döpper, R. : *Thermische Beanspruchung von elastischen Wellenkupplungen*. Antriebstechnisches Kolloquium ATK'84, VDI-Berichte 524. Düsseldorf: VDI-Verlag 1984.
- [19] Döpper, R. : *Ein Beitrag zur Berechnung von Spannungen und Temperaturen in Elastomerelementen am Beispiel nichtschaltbarer Kupplungen*. Dissertation TH Aachen, 1988.
- [20] Döpper, R. ; Orschall, B. : *Wärmenester*. Forschungsheft FVA 299, 1989.
- [21] Edwards, S. F.; Takano, H.; Terentjev, E. M. : *Dynamic mechanical response of polymer networks*. Journal of chemical physics V. 113 N. 13 (2000) S. 5531-5538.
- [22] Everaers, R.: *Constrained fluctuation theories of rubber elasticity: General results and an exactly solvable model*. Eur. Phys. J. B 4 (1998), S. 341-350.
- [23] Federn, K. : *Dämpfung elastischer Kupplungen-Wesen, einwirkende Parameter, Ermittlung*. VDI-Berichte 299 (1977).
- [24] Geißler, E. : *Anwendung eines speziellen Stoffgesetzes für nichtlineare viskoelastische Werkstoffe in einem Finite Elemente Programm*. Dissertation TH Karlsruhe, 1992.
- [25] Gerwig, W. : *Bestimmung des Elastizitätsmoduls und des Verlustfaktors von Gummielementen im akustischen Frequenzbereich*. Konstruktion 31 (1979) S. 241-247.

- [26] Gieseler, B. : *Berechnung der Wärmeentwicklung infolge mechanischer Belastungen am Beispiel einer Elastomer-Kupplung*. Unveröffentlichte Studienarbeit an der TU Berlin, 2002.
- [27] Greer, J.M.; Palazotto, A.N.: *Application of a total lagrangian corotational finite element scheme to inflation of a tire*. Int. J. Solids Structures, Vol. 34, No. 27 (1997), S. 3541-3570.
- [28] Gröber; Erk; Grigull : *Wärmeübertragung*. 3. Auflage Berlin: Springer-Verlag 1963.
- [29] Haberstroh, E. ; Ehbing, H.; Stommel, M. : *Ein Auslegungskonzept für Schwingungstilger*. Kautschuk, Gummi, Kunststoffe 2 (1997), S. 102-105.
- [30] Haberstroh, E.; Stommel, M.: *Rechnerunterstützte Vorhersage des Rißwachstums in Elastomerbauteilen*. Kautschuk+Gummi · Kunststoffe 51/7-8 (1998) S. 518-524.
- [31] Hammele, W. ; Liu, X. : *Dimensionierung von Gummifedern mit FEM*. Kautschuk, Gummi, Kunststoffe 52/6 (1999), S. 446-451.
- [32] Heinrich, G.; Helmig, G.; Vilgis, T.: *Polymere Netzwerke-Entwicklungsstand der molekular-statistischen Theorie*. Kautschuk, Gummi, Kunststoffe 48/10 (1995) S. 689-701.
- [33] Medalia, A. I. Aus: Hepburn, C.; Reynolds, J. R. (Hrsg.): *Elastomers: Criteria for engineering design*. London, Applied Science Publishers Ltd. 1979.
- [34] Hüls, F.; Brokering, L.: *Einfluß der FEM auf den Entwicklungsprozeß eines Elastomerbauteils*. Kautschuk, Gummi, Kunststoffe 48/10 (1995) S. 709-712.
- [35] Itskov, M. : *Finite-Elemente-Analyse gummiartiger inkompressibler Elastomere unter großen Verzerrungen und Kontaktwechselwirkungen*. ZAMM (1997) 77/8, S. 585-594.
- [36] Jagusch, J.; Rothert, H.: *Modellbildung in der Reifenberechnung*. ZAMM (1996) 76/5, S. 225-226.
- [37] Japs, D.: *Ein Beitrag zur analytischen Bestimmung des statischen und dynamischen Verhaltens gummielastischer Wulstkupplungen unter Berücksichtigung von auftretenden Axialkräften*. Dissertation Uni Dortmund, 1979.
- [38] Käsler, R. : *Standardisierte Prüfverfahren zur Qualitätssicherung von Elastomerelementen in nachgiebigen Verbindungen*. Forschungsheft FVA 501, 1996.
- [39] Klingbeil, D. ; Arndt, S. : *Finite-Elemente-Methoden in der nichtlinearen Festkörpermechanik*. Vorlesungsskript ILR TU Berlin, 1997.

- [40] Knothe, K; Wessels, H.: *Finite Elemente*. Berlin, Heidelberg, Springer 1992.
- [41] Köttgen, V. B.; Anthes, R. J.; Seeger, T.: *Implementation des Werkstoffmodells von Mróz in das Finite Elemente Programm ABAQUS-eil 1: Grundlagen*. TH Darmstadt, 1991.
- [42] Kreissig, R.: *Numerische Methoden für die Parameteridentifikation*. ZAMM (1998) 78/2, S. 555-558.
- [43] Kümmler, H. : *Ein Verfahren zur Vorhersage des nichtlinearen Steifigkeits und Dämpfungsverhaltens sowie der Erwärmung drehelastischer Gummikupplungen bei stationärem Betrieb*. Düsseldorf: VDI-Verlag 1986.
- [44] Lambertz, K.-H; Konter A.W.A.: *Coupled analysis of heat production in cyclically loaded viscoelastic rubber components*. Kautschuk+Gummi · Kunststoffe 51/12 (1998) S. 868-874.
- [45] Lambertz, S. : *Nichtlineares Materialgesetz für technische Gummiwerkstoffe mit deformationsabhängigen Eigenschaften und seine experimentelle Überprüfung an Gummifederelementen*. Aachen: Shaker 1994.
- [46] Lion, A. : *On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 45, No. 11/12 (1997), S. 1805-1834.
- [47] Lutz, Th. : *Ein Beitrag zur Berechnung der statischen Steifigkeit druckbelasteter elastomerer Rundlager*. Kautschuk+Gummi · Kunststoffe 44/2 (1991) S. 147-151.
- [48] Mahfoudh, S. : *Numerische Analyse der mechanischen und thermischen Beanspruchungen zur Entwicklung einer hochelastischen Elastomer-Kupplung*. Düsseldorf VDI-Verlag 1999.
- [49] Marotzke, C. : *Untersuchung von Werkstoffgesetzen für Elastomere und Lösung von damit zusammenhängenden Randwertproblemen der nichtlinearen finiten Elastizitätstheorie mit Hilfe der Methode der Finiten-Elemente*. Dissertation TU Berlin, 1983.
- [50] Mertens, H.; Fairlie, B. : *Standardisierte Kennwertermittlung bei Elastomer-Kupplungen bei stationärem Betrieb*. Tischvorlage zur Arbeitskreissitzung „Nichtsichtbare Kupplungen“ am 25.08.1994 in Frankfurt/Main.
- [51] Menges, G.: *Metallgummi-Bauteile*. Forschungsheft, FKM, Heft 101, 1983.
- [52] Mertens, H. : *Festigkeitsberechnungen im Konstruktionsprozeß*. Antriebstechnisches Kolloquium/ATK 97-Aachen 1997.
- [53] Mertens, H. : *Aussage und Zeitaufwand-Kriterien zur Auswahl von Berechnungsmethoden im Konstruktionsprozeß*. VDI Berichte 1442 (1998).

- [54] Mohr-Matuschek, U. : *Auslegung von Kunststoff- und Elastomerformteilen mittels Finite-Elemente-Simulationen*. Düsseldorf, VDI-Verlag , 1992.
- [55] Möhrer, A. : *Messung und Simulation des Temperaturabhängigen Betriebsverhaltens von Elastomerkupplungen*. Unveröffentlichte Diplomarbeit an der TU Berlin, 2003.
- [56] Müller, I.: *Grundzüge der Thermodynamik*. Berlin, Heidelberg, New York, u.a. , Springer 1999.
- [57] Ogden, R. W. : *Non-linear Elastic Deformations*. New York, Dover 1997.
- [58] Orschall, B. : *Mathematisches Modell für die Simulation viskoelastischer und reibungsbehafteter Elastomereigenschaften*. Dissertation TH Aachen, 1990.
- [59] Payne, A. R. : *Dynamic mechanical properties of filler loaded vulcanisates*. Rubber and plastics age, Vol. 42, 1961.
- [60] Peeken, H. ; Troeder, C.: *Elastische Kupplungen*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer 1986.
- [61] Peng, Shu H. : *A compressible Approach in finite element analysis of rubber-elastic materials formulation, programming and application*. Dissertation University of South Carolina, 1995.
- [62] Pirscher, A. : *Ein Materialgesetz für gefüllte Elastomere unter mehrachsiger dynamischer Beanspruchung*. Dissertation TU Berlin, 1999.
- [63] Raos, P.; Zhu, Y.Y.; Cescotto, S.: *Large strain analysis of rubber-like Materials by FEM*. Kautschuk+Gummi · Kunststoffe 47/1 (1994) S. 39-44.
- [64] Rechenberg, I.: *Evolutionsstrategie*. Stuttgart, frommann-holzboog 1994.
- [65] Saechtling, H.: *Kunststoff-Taschenbuch*. München, Wien: Carl Hanser Verlag 1992.
- [66] Schade, H.: *Tensoranalysis*. Berlin, New York, Walter de Gruyter 1997.
- [67] Schäfer, M.: *Numerik im Maschinenbau*. Berlin, Heidelberg, New York, u.a. , Springer 1999.
- [68] Schwarz, H.R.: *Methode der finiten Elemente*. Stuttgart, Teubner 1991.
- [69] Sedlan, K. ; Haupt, P.: *Nichtlineare Viskoelastizität von gummiartigen Werkstoffen: Experimentelle Untersuchung, Modellierung und Identifikation*. Technische Mechanik, 19/4 (1999), S. 269-278.
- [70] Sponagel, S. : *Analytische Berechnung von Gummi-Metall-Verbindungen*. Konstruktion 39 (1987) S. 151-158.

- [71] Staat, M.; Ballmann, J.: *Zur Problematik tensorieller Verallgemeinerungen einachsiger nichtlinearer Materialgesetze*. ZAMM 69/2 (1989), S. 73-81
- [72] Steudel, D. : *Untersuchung von Materialmodellen für Elastomere-Einsatz im Finite Elemente Programm MSC:Marc-Mentat*. Unveröffentlichte Studienarbeit an der TU Berlin, 2003.
- [73] Treloar, L. R. G. : *The Mechanics of Rubber Elasticity*. J. Polymer SCI. Polymer Symposium 48 (1974) S. 107-123.
- [74] Wahle, M. : *Auf sicheren Füßen stehen*. Der Konstrukteur 6 (2000) S. 30-32.
- [75] Wriggers, P. : *Nichtlineare Finite-Elemente-Methoden*. Berlin, Heidelberg, New York, u.a. , Springer 2001.
- [76] Vojta, G., Vojta, M. : *Taschenbuch der statistischen Physik*. Stuttgart, Leipzig, Teubner 2000.
- [77] Voge, M. : *Identifikation des statischen und dynamischen Verhaltens nichtlinearer drehelastischer Kupplungen*. Dissertation TU Berlin, 1990.
- [78] Volk, H. : *Einsatz der Finiten Element Methode bei der Auslegung und Optimierung von Reifen*. Kautschuk+Gummi · Kunststoffe 47/10 (1994) S. 739-743.
- [79] Yu, Y. ; *Die Wärmeleitfähigkeit von Kautschukmischungen unter Scherung*. Düsseldorf: VDI-Verlag 1993.
- [80] Ziegenhagen, S. : *Standardisierte Beschreibung des Übertragungsverhaltens von Elastomer-Kupplungen bei stationärem und instationärem Betrieb*. Dissertation TU Berlin, 1994.

# Anhang A

## Zu den verwendeten Tensoren

In diesem Anhang werden als kleiner Überblick einige kontinuumsmechanische Größen und Operationen erklärt. Für detailliertere Ausführungen s. [11, 12, 75].

### A.1 Bewegung eines Körpers und der Deformationsgradient

Aus **Abb. A.1** geht die Bewegung eines Körpers hervor. Die Konfiguration zum Zeitpunkt „0“ wird die Referenzkonfiguration  $\varphi$  genannt<sup>1</sup>.

Für die Position des Partikels  $X$  zur Zeit  $t > 0$  gilt

$$\mathbf{x} = \varphi_t(X) = \varphi(X, t) \quad (\text{A.1})$$

Die Ort des Partikels  $X$  in der Referenzkonfiguration ist  $\mathbf{X}$ . Für  $t > 0$  kann auch

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.2})$$

geschrieben werden.

$$\mathbf{F} := \text{grad}_{\mathbf{X}} \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A.3})$$

Die Inverse geht auch:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{A.4})$$

Damit aber die Inverse definiert ist, muß

$$\det(\mathbf{F}) > 0 \quad (\text{A.5})$$

gelten.

---

<sup>1</sup>Die Bezugskonfiguration muss nicht notwendigerweise mit der Anfangskonfiguration  $t = 0$  übereinstimmen, aber diese Vorgehensweise ist in vielen Anwendungen eine Erleichterung.

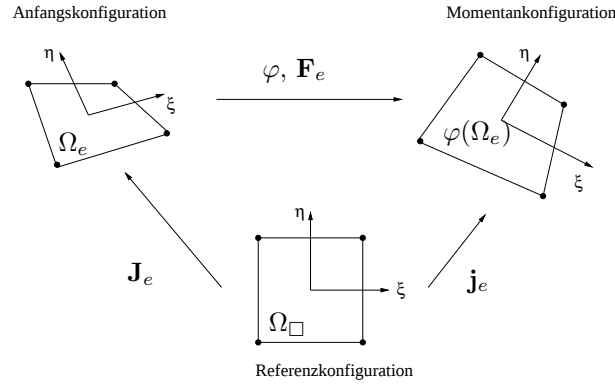


Abbildung A.1: Abbildung des Deformationsgradienten [75]

Die Determinante aus der Ungleichung A.5 ist gleichzeitig die sog. Jacobische Determinante:

$$J := \det(F_{ij}) = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) \quad (\text{A.6})$$

### Verschiebungsgradient:

Differenz zwischen Momentan- und Bezugsplatzierung ergibt die Verschiebung:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (\text{A.7})$$

Gradientenbildung an A.7 ergibt den Verschiebungsgradienten:

$$\mathbf{H} := \text{grad}_{\mathbf{X}} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{1} \quad (\text{A.8})$$

### Einachsiger Spannungs- und Verzerrungszustand:

Für die Veranschaulichung eines räumlichen Zustandes wird ein einachsig belasteter Zugstab mit konstantem Querschnitt betrachtet. Hierbei sind:

- $\mathbf{X}$  : Die Länge in der Anfangskonfiguration
- $\mathbf{x}$  : Die Länge in der Momentankonfiguration
- $\mathbf{u}$  : Die Verschiebung

$$(\text{Grad} \mathbf{u})_{11} = \frac{u}{X} \quad (\text{A.9})$$

$$(\text{grad} \mathbf{u})_{11} = \frac{u}{x} \quad (\text{A.10})$$

Hieraus werden die entsprechenden Komponenten des Deformationsgradienten

hergeleitet:

$$F_{11} = 1 + \frac{u}{X} \quad (\text{A.11})$$

$$= 1 + \frac{x - X}{X} \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{x}{x - (x - X)} \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{x}{x - u} \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{x}\right)} \quad (\text{A.15})$$

Die Beziehung zwischen dem Cauchyschen Spannungstensor und dem 2. Piola-Kirchoff-Spannungstensor lautet bei Volumenkonstanz lautet:

$$\sigma_{11} = \left(1 + \frac{u}{X}\right) \cdot S_{11} \quad (\text{A.16})$$

### Transformation eines Linienelementes:

Ein Linienelement wird mit Hilfe des Deformationsgradienten von der Bezugs- in die Momentanplazierung entsprechend Abb.A.1 transformiert:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (\text{A.17})$$

Um den Begriff Verzerrung zu definieren, wird eine Metrik als Maß für die Verzerrungen eingeführt. Der Vergleich der Differenz der Quadrate der Linienelemente ist mathematisch einfacher als unmittelbar der der Linienelemente. Wir benötigen in jeder Plazierung drei unabhängige Linienelemente.

Insgesamt ergeben sich sechs Skalarprodukte, unten werden exemplarisch zwei angegeben:

$$d\mathbf{x}_1^T d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 \quad (\text{A.18})$$

$$d\mathbf{x}_2^T d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_2^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 \quad (\text{A.19})$$

### Definition und Umrechnung von verschiedenen Verzerrungstensoren:

Der *rechte Cauchy-Green-Verzerrungstensor*:

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{A.20})$$

Analog der *linke Cauchy-Green-Verzerrungstensor*:

$$\mathbf{B} := \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{A.21})$$

Aus A.20 ergibt sich der *Green-St. Venant-Verzerrungstensor*:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (\text{A.22})$$

Ähnlich wird der sog. *Hamel-Almansi-Verzerrungstensor* definiert:

$$\mathbf{e} := \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{A.23})$$

Mit einer pull-back-Operation gelingt die Umrechnung:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \quad (\text{A.24})$$

Aus dem GREEN-St. VENANT-Verzerrungstensor entsteht durch Linearisierung der elementare *lineare Verzerrungstensor*. Mit A.8 und A.20:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} ((\mathbf{H} + \mathbf{1})^T (\mathbf{H} + \mathbf{1}) - \mathbf{1}) \quad (\text{A.25})$$

Durch Ausmultiplizieren und Linearisieren aus A.25 folgt

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (\text{A.26})$$

oder in Indexschreibweise:

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.27})$$

Da der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor gegenüber beliebigen Starrkörperbewegungen invariant ist, wird er insbesondere bei Problemen mit großen Verschiebungen aber kleinen Verzerrungen eingesetzt.

Die verallgemeinerte Form für Verzerrungstensoren aus [75] lautet:

$$\mathbf{E}^\alpha = \frac{1}{\alpha} (\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{1}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{A.28})$$

Zur Definition des verallgemeinerten Verzerrungsmaßes wurde von den symmetrischen Strecktensor Gebrauch gemacht.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (\text{A.29})$$

$\mathbf{R}$  ist eine orthogonale Rotationstensor, für den gilt  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ , also

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{R} \mathbf{U})^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \underbrace{\mathbf{R}^T \mathbf{R}}_{\mathbf{1}} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (\text{A.30})$$

$\mathbf{C}$  kann auch über die Spektralzerlegung von  $\mathbf{U}$  mit den Eigenvektoren  $\mathbf{N}_i$  dargestellt werden. In diesem Fall ist die Bestimmung der Wurzel von  $\mathbf{U}$  nicht problematisch.

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (\text{A.31})$$

Zur Bestimmung der Hauptstreckungen  $\lambda_i > 0$  ist die charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{1}) = 0 \quad (\text{A.32})$$

zu lösen. Somit ergibt sich mit der Normierung  $\|\mathbf{N}_i\| = 1$

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 + \lambda_2 \mathbf{N}_2 \otimes \mathbf{N}_2 + \lambda_3 \mathbf{N}_3 \otimes \mathbf{N}_3 \quad (\text{A.33})$$

bzw. in Matrizenschreibweise können die dyadischen Produkte  $\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i$  durch  $\mathbf{N}_i \mathbf{N}_i^T$  ersetzt werden, wobei  $\mathbf{N}_i$  eine 3x1 Vektor ist. Somit ergibt sich, wie erwartet eine 3x3-Matrix aus dem dyadischen Produkt. Der dazu gehörige orthogonale Rotationstensor  $\mathbf{R}$  wird aus

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} \quad (\text{A.34})$$

berechnet.

## A.2 Der Gradient

Wie können wir beispielsweise die Ableitung der Temperatur nach dem Ort bilden? Differenzieren wir die Temperatur nach  $x$ , nach  $y$  oder nach  $z$ , bzw. nach  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ .

Mit dem Nabla-Operator  $\nabla$

$$\begin{aligned} \text{grad } \theta = \nabla \theta &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\ \text{bzw.} &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

### A.2.1 Der Operator $\nabla$

Da sich Differentialoperatoren selbst wie die Komponenten eines Vektors transformieren, können wir sie als Komponenten eines Vektoroperators bezeichnen.

$$\begin{aligned} \text{grad } \theta = \nabla \theta &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\ \text{bzw.} &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

beispielsweise,

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{A.37})$$

Wir wissen, dass das Verhältnis, in dem sich  $\theta$  in einer Richtung ändert, die Komponente von  $\nabla \theta$  in dieser Richtung ist. Der Gradient von  $\theta$  hat die Richtung des steilsten Anstiegs von  $\theta$ .

## A.3 Operationen mit $\nabla$

Z.B. eine skalare Multiplikation mit einem Vektor:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \quad (\text{A.38})$$

$\nabla \cdot \mathbf{h}$  ist ein skalares Feld, das die physikalische Größe *Divergenz* darstellt.

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div} \mathbf{h} \quad (\text{A.39})$$

## A.4 Die Zeitableitungen

Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes bezogen auf die Referenzkonfiguration<sup>2</sup> wird durch die materielle Zeitableitung

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\varphi}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.40})$$

In der räumlichen Beschreibung gilt für die Geschwindigkeit eines Punktes  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  in  $\varphi(B)$  einnimmt,

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{v}}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.41})$$

Die Zeitableitung des Deformationsgradienten ergibt

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{Grad} \dot{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad} \mathbf{v} = \text{grad} \hat{\mathbf{v}} \mathbf{F} \quad (\text{A.42})$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\text{grad} \hat{\mathbf{v}}$  wird auch mit  $\mathbf{l}$  bezeichnet.

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.43})$$

Die Zeitableitung der Green-Langrangeschen Verzerrungstensors ist

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right) \quad (\text{A.44})$$

## A.5 Verschiedene kontinuumsmechanische Größen

## A.6 Spureigenschaften

$$\text{sp}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.45})$$

$$\text{sp}(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \text{sp}(\mathbf{S}) + \text{sp}(\mathbf{T}) \quad (\text{A.46})$$

$$\text{sp}(\mathbf{S} \mathbf{T}) = \text{sp}(\mathbf{T} \mathbf{S}) \quad (\text{A.47})$$

---

<sup>2</sup>auch Bezugskonfiguration genannt.

Tabelle A.1: Kontinuumsmechanische Größen

| Bezeichnung                               | Ausgangskonfiguration $B$                                                 | Momentankonfiguration $\varphi(B)$                                      | Mischkonfiguration                                                             |
|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Green-Lagrangischer<br>Verzerrungstensor  | $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$                       |                                                                         |                                                                                |
| Hamel-Almansische<br>Verzerrungstensor    |                                                                           | $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1})$                |                                                                                |
| rechter<br>Cauchy-Green-Tensor            | $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$                                    |                                                                         |                                                                                |
| linker<br>Cauchy-Green-Tensor             |                                                                           | $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$                                  |                                                                                |
| Cauchysche<br>Spannungstensor             |                                                                           | $\mathbf{T}$ bzw. $\boldsymbol{\sigma}$                                 |                                                                                |
| 1. Piola-Kirchhoffsche<br>Spannungstensor |                                                                           |                                                                         | $\mathbf{P}$ bzw. $\mathbf{T}_P$ mit<br>$P_{Ak} = J \sigma_{ik} (F_{iA})^{-1}$ |
| 2. Piola-Kirchhoffsche<br>Spannungstensor | $\overline{\mathbf{T}}$ bzw.<br>$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$ |                                                                         |                                                                                |
| Kirchhoffsche<br>Spannungstensor          |                                                                           | $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = J \mathbf{T}$ |                                                                                |

## A.7 Determinanten

$$\det(\alpha \mathbf{T}) = \alpha^3 \det(\mathbf{T}) \quad (\text{A.48})$$

$$\det(\mathbf{S} \mathbf{T}) = \det(\mathbf{S}) \det(\mathbf{T}) \quad (\text{A.49})$$

$$\det(\mathbf{T}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{T})} \quad (\text{A.50})$$

## A.8 Inverse von Tensoren

Für die Inverse der Summe eines allgemeinen zweistufigen Tensors mit einem dyadischen Produkt gilt die SHERMAN-MORRISON-Gleichung:

$$[\mathbf{T} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]^{-1} = \mathbf{T}^{-1} - \frac{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{T}^{-1}}{1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{T}^{-1} \mathbf{a}} \quad (\text{A.51})$$

## A.9 Ableitungen der Invarianten

$J_1(\mathbf{C})$ ,  $J_2(\mathbf{C})$ ,  $J_3(\mathbf{C})$  sind Invarianten von  $\mathbf{C}$  und somit auch von  $\mathbf{B}$ . Es gilt:

$$J_1(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (\text{A.52})$$

$$J_2(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (\text{A.53})$$

$$J_3(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial J_1(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1} \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial J_2(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = J_1(\mathbf{C}) \mathbf{1} - \mathbf{C} \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial J_3(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = J_3(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{A.57})$$

## Anhang B

# Konsistenter Materialtangent für elastische Deformationen

Der Einsatz eines Materialgesetzes in kommerziellen FE-Software erfordert die Angabe des konsistenten Materialtensors. Bei der Kombination von hyperelastischen und viskoplastischen Materialgesetzen wird beispielsweise in Abaqus [1] der elastische Anteil, ähnlich dem Vorgehen in der vorliegenden Arbeit, zur Bestimmung der Prädiktor-Spannung verwendet. Für eine Kombination beider Gesetze ist in der abaquseigenen User-Subroutine „UMAT“ der Einsatz von Inkompressibilität des hyperelastischen recht mühsam. Aus diesem Grund wird bei der FE-Modellierung empfohlen, den Ansatz von OGDEN in der Form, wie er im Abschnitt 3.4 vorgestellt wurde, einzusetzen. Auf den folgenden Seiten wird für ein solches Vorgehen die Formulierung eines konsistenten Materialtangenten nach [75] und [57] vorgestellt.

### B.1 Inkrementelles Verfahren

Für die Modellierung mit der Finiten Elementen Methode muss ein lineares Gleichungssystem für die Knotenfreiheitsgrade erzeugt werden. In dem die gesamte Zeitspanne der Deformation in Zeitinkremente unterteilt wird erreicht das Gleichungssystem die erwünschte Linearisierung. Die Größen der Gleichung werden in einer Taylorreihe entwickelt.

$$\zeta(t + \Delta t) = \zeta(t) + \frac{d\zeta(t)}{dt} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (\text{B.1})$$

In inkrementeller Form lautet die Gleichung:

$$\Delta\zeta = \zeta(t + \Delta t) - \zeta(t) = \frac{d\zeta(t)}{dt} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (\text{B.2})$$

Als erstes werden die Verzerrungsinkremente in der total Lagrangeschen Betrachtungsweise hergeleitet.

## B.2 Verzerrungsinkremente

Das Inkrement des Verschiebungstensors lautet [49]

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (\text{B.3})$$

Das Inkrement des Verschiebungsgradienten wird mit Hilfe von B.3 gebildet:

$$\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}(t + \Delta t) - \mathbf{H}(t) = \text{Grad}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - \text{Grad} \mathbf{u} = \text{Grad} \Delta \mathbf{u} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (\text{B.4})$$

Das inkrementelle Deformationsgradient folgt aus dem Verschiebungsgradienten:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t) = \Delta \mathbf{H} \quad (\text{B.5})$$

Das rechte Cauchy-Green-Verzerrungstensor in inkrementeller Form,

$$\Delta \mathbf{C} = \mathbf{C}(t + \Delta t) - \mathbf{C}(t) = \Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}^T + \Delta \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{H} \quad (\text{B.6})$$

In dem Inkrement des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors verschwindet der Einheitstensor durch die Differenzenbildung

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}^T + \Delta \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{H}) \quad (\text{B.7})$$

## B.3 Konsistenter Materialtangent für FEM [57, 75]

Der Materialtensor in der Total-Lagrange-Formulierung lautet

$$\Delta \mathbf{S} = \mathfrak{L} : \Delta \mathbf{E} \quad (\text{B.8})$$

In Hauptachsenformulierung kann die inkrementelle Spannung angegeben werden.

$$\Delta \mathbf{S} = \sum_{A=1}^3 \Delta S_A \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A + S_A \Delta (\mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A) \quad (\text{B.9})$$

Die inkrementelle Form der Hauptspannungen lauten:

$$\Delta S_A = \sum_{B=1}^3 \frac{\partial S_A}{\partial C_B} \Delta C_B = \sum_{B=1}^3 \frac{\partial S_A}{\partial E_B} \Delta E_B \quad (\text{B.10})$$

Die inkrementelle Form der Eigenvektorprodukt ist etwas aufwendiger (s. [75] S. 233-236):

$$\Delta (\mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A) = \Delta \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_A \otimes \Delta \mathbf{N}_A \quad (\text{B.11})$$

$$\Delta \mathbf{N}_A = \sum_{B=1}^3 (\mathbf{N}_B \otimes \mathbf{N}_B) \cdot \Delta \mathbf{N}_A = \sum_{B=1}^3 \underbrace{(\mathbf{N}_B \cdot \Delta \mathbf{N}_A)}_{\Omega_{BA}} \mathbf{N}_B \quad (\text{B.12})$$

Damit kann die inkrementelle Form des Eigenvektorproduktes angegeben werden:

$$\Delta(\mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A) = \sum_{B=1}^3 \Omega_{BA} (\mathbf{N}_B \otimes \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B) \quad (\text{B.13})$$

Das Skalarprodukt zweier Eigenvektoren ist gleich dem Kronecker-Delta

$$\Delta(\mathbf{N}_A \cdot \mathbf{N}_B) = \delta_{AB} \quad (\text{B.14})$$

was besagt, dass  $\Omega_{AB}$  einer schiefsymmetrischen Matrix entspricht.

$$\sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 S_A \Omega_{BA} (\mathbf{N}_B \otimes \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B) = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 (S_A - S_B) \Omega_{BA} (\mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B) \quad (\text{B.15})$$

Der Spannungsinkrement ergibt sich zu:

$$\Delta \mathbf{S} = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 \left[ \frac{\partial S_A}{\partial E_B} \Delta E_B \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A + (S_A - S_B) \Omega_{BA} \cdot \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B \right] \quad (\text{B.16})$$

Das Inkrement des Cauchy-Green-Verzerrungstensors wird ähnlich berechnet:

$$\Delta \mathbf{E} = \sum_{A=1}^3 \Delta E_A \mathbf{N}_{(B)} \otimes \mathbf{N}_{(B)} + \sum_{B=1}^3 (E_A - E_B) \Omega_{BA} \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B \quad (\text{B.17})$$

Der Materialtensor  $\mathfrak{L}$  kann aus dem Verhältnis beider Inkremente berechnet werden [57]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 \frac{\partial S_A}{\partial E_B} \Delta E_B \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B \otimes \mathbf{N}_B \\ &+ \sum_{A=1}^3 \sum_{B \neq A=1}^3 \frac{1}{2} \frac{S_A - S_B}{E_A - E_B} (\mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B \otimes \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B + \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_B \otimes \mathbf{N}_B \otimes \mathbf{N}_A) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Die Symmetrieeigenschaften von  $\mathfrak{L}$  können anhand der Formulierung

$$\mathfrak{L} = L_{ijkl} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_l, \quad (\text{B.19})$$

geklärt werden. Mit  $\text{diag}(S_{ij}^H) = S_A$  und  $\text{diag}(E_{ij}^H) = E_A$

$$L_{ijkl} = \begin{cases} \frac{\partial S_{ij}^H}{\partial E_{kl}^H} & \text{for } i = j \text{ und } k = l \\ \frac{1}{2} \left( \frac{S_{ik}^H - S_{jl}^H}{E_{ik}^H - E_{jl}^H} + \frac{S_{il}^H - S_{jk}^H}{E_{il}^H - E_{jk}^H} \right) & \text{for } i \neq j \text{ und } k \neq l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Da es sich bei  $\text{diag}(S_{ij}^H)$  um eine Matrix handelt, die nur an der Hauptdiagonale besetzt ist, sind alle Werte ausser  $i = j$  gleich Null. Die Symmetrieeigenschaften von  $\mathfrak{L}$  sind

$$L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} \quad (\text{B.21})$$

Weiterhin gilt für hyperelastische Materialgesetze

$$L_{ijkl} = L_{klij} \quad \text{da} \quad \frac{\partial S_{ij}^H}{\partial E_{kl}^H} = \frac{\partial S_{kl}^H}{\partial E_{ij}^H}. \quad (\text{B.22})$$

# Anhang C

## Lineare Regressionsberechnung [76]

Nicht alle Parameter lassen sich bis zu 140°C bestimmen. Die Messungen hören bei 62°C auf und die Extrapolation der Messwerte führt nicht immer zu sinnvollen Ergebnissen. Als Stützpunkte dienen Messwerte aus fünf Temperaturen (22°C, 32°C, 42°C, 52°C, 62°C). Um die Vorgehensweise zu verdeutlichen wird eine Regressionsberechnung ausführlich dargestellt. Die restlichen Funktionen werden in der **Tab. 6.4** angegeben.

**Schubmodul  $^MG$ :** Mittlere Temperatur:

$$\theta_{mittel} = 42^\circ\text{C} \quad (\text{C.1})$$

Mittlerer Schubmodul:

$$^MG_{mittel} = 0,325 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.2})$$

Form der Regressionsgerade:

$$f(\theta) = b \cdot \theta + a \quad (\text{C.3})$$

Steigung der Regressionsgerade:

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot ^MG_i - \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot \sum_{i=1}^n ^MG_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n \theta_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \right)^2} = 0,0002314 \quad (\text{C.4})$$

mit  $n = 5$ . Konstanter Term der Regressionsgerade:

$$a = ^MG_{mittel} - b \cdot \theta_i = 0,315 \quad (\text{C.5})$$

Genauigkeit der Regressionsgerade: Mit der Varianz der  $\theta$ -Werte

$$S_\theta = \sqrt{\frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \right)^2 \right\}} = 14,142, \quad (\text{C.6})$$

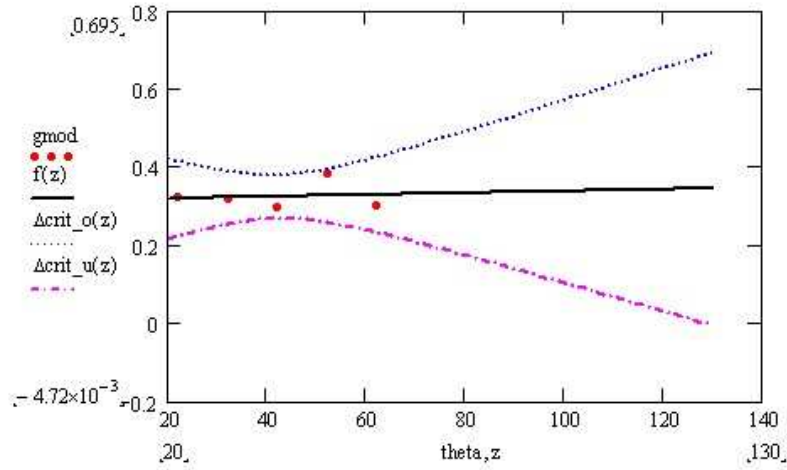


Abbildung C.1: Konfidenzintervalle für die Regressionsgerade

und der Varianz der  $MG$ -Werte

$$S_G = \sqrt{\frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n MG_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n MG_i \right)^2 \right\}} = 0,03, \quad (C.7)$$

folgt der Standardschätzfehler:

$$\sigma_{standard} = \sqrt{\frac{n \cdot S_G^2 - n \cdot b^2 \cdot S_\theta^2}{n - 2}} = 0,039. \quad (C.8)$$

Bestimmung der Konfidenzintervalle für eine Fehlerwahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$ : Obere Grenze  $1 - \alpha/2$  für  $t = 3,182$

$$\Delta_{crit,oben} = f(\theta) + t \cdot \sigma_{standard} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\theta - \theta_{mittel})^2}{n \cdot S_\theta^2}} \quad (C.9)$$

Untere Grenze  $\alpha/2$

$$\Delta_{crit,unten} = f(\theta) - t \cdot \sigma_{standard} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\theta - \theta_{mittel})^2}{n \cdot S_\theta^2}} \quad (C.10)$$