

Dreidimensionale Rekonstruktion des Gefäßverlaufes aus biplanen Koronarangiogrammen

Dissertation

Von der Fakultät Elektrotechnik und Informatik
der Technischen Universität Berlin
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation

vorgelegt von:
Dipl.-Ing. Steffen Zeiler

Berlin 2012
D 83

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. O. Hellwich
Berichter: Prof. Dr.-Ing. R. Orglmeister
Berichterin: Prof. Dr.-Ing. B. Meffert

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 5. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Das Herz und die Koronarien	4
1.2	Röntgensysteme für die Koronarangiographie	9
1.3	Anlagen Koordinatensysteme	12
2	Methoden und Anwendungen der biplanen Koronarangiographie	16
2.1	Wissensbasierte Verfahren	17
2.2	Densiometrische Methoden	24
2.3	Bewegungsschätzung	30
2.4	Aktive Konturen	34
2.5	Fusion mit anderen Bildmodalitäten	36
2.5.1	Intravaskulärer Ultraschall und Angiographie	37
2.5.2	SPECT und Angiographie	39
3	Pfadsuche	41
3.1	Problemlösung durch Suche	41
3.2	Metrik und Kostenfunktion	42
3.3	Graphensuche	43
3.4	Die Suchstrategie	46
3.4.1	Die uninformierte Suche	46
3.4.2	Die Breitensuche	48
3.4.3	Die gewichtete Breitensuche	50
3.4.4	Die Tiefensuche	52
3.4.5	Die informierte Suche	52
3.4.6	Heuristische Restschätzung	53
3.4.7	Geordnete Suche	54
3.4.8	Die Bestensuche	58
3.4.9	A*-Suche	58
3.4.10	Band Suche	59
3.4.11	Iterativ kostenbeschränkte Tiefensuche - IDA*	60
3.5	Anwendung der Pfadsuche zur Lösung des Apertur- und Korrespondenz- problems	62
3.5.1	Das Aperturproblem	64
3.5.2	Das Korrespondenzproblem	64
3.5.3	Pfadbasierte Bewegungsschätzung	65
4	Projektive Geometrie	68

4.1	Der projektive Raum	68
4.1.1	Homogene Koordinaten	68
4.1.2	Geraden, Ebenen und Hyperebenen	69
4.1.3	Richtungen	69
4.1.4	Kegelschnitte	70
4.1.5	Modelle des projektiven Raumes	71
4.1.6	Dualität	71
4.1.7	Doppelverhältnis	72
4.2	Lineare Transformationen	72
4.2.1	Affine Transformation	72
4.2.2	Euklidische Transformationen	73
4.3	Projektionen	73
4.3.1	Das Kamerakoordinatensystem	74
4.3.2	Zentralperspektive	74
4.3.3	Interpretation der 3x4 Kamera-Matrix	76
4.4	Epipolargeometrie	76
4.4.1	Projektionen mit zwei Kameras	77
4.4.2	Die kanonische Form der Kameramatrizen	79
4.4.3	Epipole und Epipolarlinien	79
4.4.4	Die Epipole als Nullräume der Fundamentalmatrix	80
4.4.5	Anpassung der Fundamentalmatrix bei Skalierung	80
4.4.6	Joint Image Space	81
4.5	Kegelschnitte in der projektiven Geometrie	81
4.5.1	Die Pol-Polare-Beziehung	82
4.5.2	Konjugierte Punkte	82
4.5.3	Duale Kegelschnitte	84
4.6	Quadriken	85
4.6.1	Beispiele für Quadriken im \mathbb{R}^3	87
4.6.2	Normalenvektor zu einer Quadrik	88
4.6.3	Die Vektorisierung von Matrizen	89
4.6.4	Das Kronecker-Produkt	89
4.6.5	Projektive Bilder von Quadriken	90
4.6.6	Berechnung der Silhouette einer Quadrik im dualen projektiven Raum	92
4.6.7	Ellipsoidenprojektion	95
5	Gefäßsegmentierung und Merkmalsberechnung	102
5.1	Segmentierung	102
5.2	Merkmalsberechnung	104
5.2.1	Die Hesse-Matrix	105
5.2.2	Der lokale Orientierungsvektor	105
5.2.3	Skalenraum	109
5.2.4	Differentialgeometrische Linienfilter	112
5.2.5	Harmonische Operatoren als Linienfilter	112
5.3	Statistische Gefäßmodelle	113

5.3.1	Bilder als Markov-Netzwerke	113
5.3.2	Das statistische Modell für die Bildentstehung	115
5.3.3	Statistische Gefäßsegmentierung	116
5.3.4	Die Pfadmetrik	117
5.3.5	Interpretation des statistischen Modells	118
6	Auswertung	120
6.1	Kapitelüberblick	120
6.2	Merkmale	120
6.3	Anwendung der statistischen Gefäßsegmentierung	130
6.3.1	Schätzung der Vordergrundverteilungsdichte aus Differenzbildern .	130
6.3.2	Hintergrundkompensation	136
6.4	Auswertung für das Frangi-Merkmal	139
6.5	Graphische Benutzerschnittstelle	141
6.6	Virtuelles Phantommodell	142
6.7	Schätzung von Gefäßradius und -mittellinie	143
6.8	Vergleich rekonstruierter Gefäßsegmente mit dem Referenzmodell	147
6.9	Untersuchung von Fehlern in der Aufnahmegeometrie	150
6.9.1	Vorgehensweise	150
6.9.2	Ergebnisse	152
6.10	Rekonstruktion realer Aufnahmen	154
7	Zusammenfassung und Ausblick	157
	Abbildungsverzeichnis	160
	Tabellenverzeichnis	163
	Symbolverzeichnis	164
	Sachregister	166
	Literaturverzeichnis	167

1 Einleitung

Gegenstand der Dissertation ist die Entwicklung von neuen Methoden zur dreidimensionalen Rekonstruktion des koronaren Gefäßbaumes aus biplanen Angiogrammen. Es wird gezeigt, wie aus zwei Röntgenprojektionen des schlagenden Herzens ein dreidimensionales Computermodell der Herzkranzgefäße erstellt werden kann. Motiviert wird die Arbeit durch die Notwendigkeit, Ärzten moderne und leistungsfähige Werkzeuge zur Diagnose und Untersuchung von Herzerkrankungen zur Verfügung zu stellen.

Für die Diagnostik und insbesondere für die Therapie von Erkrankungen der Herzkranzgefäße stellt die biplane Koronarangiographie das Standardverfahren dar. Dabei werden Röntgenbilder der Koronarien unter Kontrastmittelgabe mit zwei zueinander versetzt angeordneten Kamerasystemen aufgezeichnet. Anhand derartiger Bilddaten beurteilen Kardiologen seit Jahrzehnten Herzerkrankungen. Heutzutage sind große Mengen dieser Aufnahmen in den elektronischen Patientenarchiven gespeichert. Einerseits geraten die Methoden der manuellen Inspektion angesichts der Fülle an Informationen zunehmend an ihre Grenzen, andererseits bieten die digitalen Daten neue Möglichkeiten für die Bildauswertung. Eine teilweise oder vollständige Automatisierung dieser Prozesse ist daher erstrebenswert.

Kardiologen setzen ganz gezielt ihre Erfahrungen und Kenntnisse über den Aufbau des Koronarsystems im Rekonstruktionsprozess ein. Sie sind in der Lage, in ihrer Vorstellung ein gedankliches Abbild des koronaren Gefäßbaumes zu erzeugen. Diese mentalen Bilder lassen sich aber nicht konservieren oder mit Computern weiterverarbeiten. Ziel der Dissertation ist es deshalb, neue Methoden zu entwickeln, mit denen die dreidimensionale Vorstellung von der Morphologie des Koronarsystems durch ein beliebig reproduzierbares und manipulierbares Computermodell ergänzt wird.

Mit den Konzepten dieser Arbeit wird versucht, auf sehr allgemeiner Ebene dreidimensionale Gefäßverläufe zu bestimmen. Im Gegensatz zu bestehenden Arbeiten, bei denen geometrische Bedingungen den Prozess der Rekonstruktion bestimmen, werden hier die Nachbarschaftsbeziehungen ausgewertet. Diese können über die Zeit und über verschiedene Bildmodalitäten hinweg als konstant betrachtet werden. Zwei wichtige Beobachtungen liegen dem zugrunde.

1. Benachbarte Objektpunkte werden durch Projektionen auf benachbarte Bildpunkte abgebildet. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)
2. Arterien ermöglichen den Stofftransport zwischen zwei räumlich getrennten Gebieten A und B . Sie bilden eine unterbrechungsfreie Verbindung von A nach B .

1 Einleitung

Um die Rekonstruktion ausführen zu können, wird im Raum aller möglichen Konfiguration des Gefäßbaumes nach jener gesucht, mit der die aufgenommenen Bilddaten am besten erklärt werden können. Der eigentliche Rekonstruktionsprozess wird von der Topologie des Objekts gesteuert. Zur Begrenzung der Suchraumgröße werden außerdem alle verfügbaren Zusatzinformationen, wie Bildmerkmale und Geometriedaten, genutzt. Zum Einsatz kommen Methoden der dynamischen Programmierung und Pfadsuche. Sie bieten die Möglichkeit, lokale Informationen über ausgedehnte räumliche Bereiche hinweg in einem globalen Modell optimal zu integrieren.

Aus der Annahme für die dreidimensionale Rekonstruktion biplaner Angiogramme, dass in einem Suchraum zusammenhängender orientierter Bereiche, die Koronarien den Pfaden extremaler Länge entsprechen, ergeben sich folgende drei Fragen.

1. Was sind Pfade extremaler Länge und wie können sie gefunden werden?
2. Was verbindet zwei unterschiedliche Ansichten desselben Objektes?
3. Wie lassen sich Koronarien im Bild finden?

Die Bedeutung der drei Fragen spiegelt sich auch in der in Abbildung 1.1 schematisch dargestellten Gliederung der Arbeit wieder.

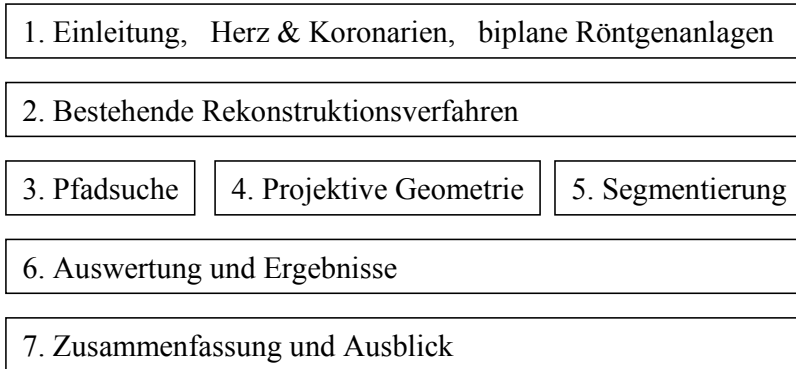


Abbildung 1.1: Kapitelübersicht: Das erste Kapitel beschreibt Motivation, Anatomie und Messtechnik. Kapitel zwei vergleicht und ordnet bestehende Rekonstruktionsmethoden. Kapitel drei, vier und fünf behandeln je eines der Kernthemen der Arbeit. Kapitel sechs bewertet die Ergebnisse und Kapitel sieben bildet den Abschluss.

Den einleitenden Rahmen bilden das erste und zweite Kapitel, mit einer Motivation, einem Überblick über Aufbau und Funktion des Herzens sowie über Bildaufnahmesysteme zur Koronarangiographie und mit der Beschreibung und Einordnung bestehender Rekonstruktionsverfahren.

Die folgenden drei Kapitel hängen eng mit der Beantwortung jeweils einer der weiter oben gestellten Fragen zusammen. Zuerst werden im dritten Kapitel im Rahmen der Graphentheorie Konzepte wie extremale Länge und Metrik definiert und gleichzeitig Eigenschaften und Realisierungen konkreter Suchstrategien erklärt.

Hat man sich auf ein Verfahren zur Zustandsraumsuche festgelegt, ist der einzig verbleibende Freiheitsgrad die Wahl einer geeigneten Pfadmetrik. Für die biplane Angiographie muss diese speziell konstruiert werden, da die Informationen aus zwei unterschiedlichen Ansichten des selben Objektes zu verknüpfen sind. Die mathematische Grundlage dafür findet sich in der projektiven Geometrie, welche die Beziehungen zwischen Abbildung und Objekt und zwischen verschiedenen Abbildungen untereinander beschreiben kann. Wesentlicher Punkt sind Kurven und Flächen zweiter Ordnung zur Definition von Regionen in Räumen unterschiedlicher Dimension.

Für eine vollständige Pfadmetrik fehlt noch die Verknüpfung von Bildinhalt und Koronarien. Dieser letzte Schritt wird in Kapitel fünf vollzogen. Um Bildstrukturen nach Größe und Orientierung unterscheiden zu können, kommen ebenfalls mathematische Beschreibungen von Bildobjekten bis hin zur zweiten Ordnung zum Einsatz.

Den abschließenden Rahmen bilden das sechste und siebente Kapitel. Kapitel sechs enthält die Auswertung der Ergebnisse getrennt nach Segmentierung und Rekonstruktion für synthetische und reale Testfälle. Wurde das Rekonstruktionsverfahren vom allgemeinen Konzept der Zustandsraumsuche bis hin zur konkreten Realisierung einer Pfadmetrik entwickelt, so erfolgt die Auswertung in umgekehrter Reihenfolge. Beginnend mit den Segmentierungsergebnissen für die Koronarien in den Röntgenaufnahmen wird schrittweise die Komplexität der untersuchten Methoden erhöht, bis am Ende das vollständige Rekonstruktionsverfahren getestet und bewertet wird.

In Kapitel sieben endet die Arbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf zukünftige Entwicklungsmöglichkeiten im Bereich der automatischen dreidimensionalen Rekonstruktion der Koronarien aus biplanen Röntgenangiogrammen.

1.1 Das Herz und die Koronarien

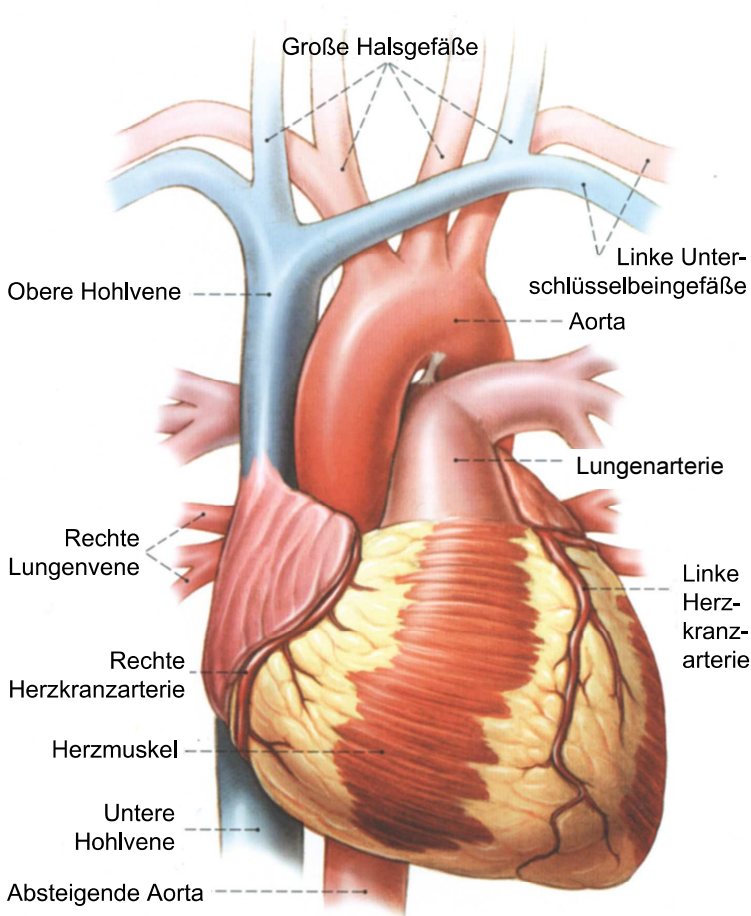


Abbildung 1.2: Anatomische Darstellung von Herz und angrenzenden Gefäßen aus einer frontalen Ansicht [Wei99]

Das Herz ist das zentrale Organ des menschlichen Blutkreislaufs. Als muskuläres Hohlorgan erhält es, mit einer Pumpleistung von ca. 300-400 Litern pro Stunde, die Zirkulation von Nährstoffen und Stoffwechselprodukten innerhalb des geschlossenen Blutgefäßsystems aufrecht. Etwa faustgroß, befindet sich das Herz meist linksseitig hinter dem Brustbein und wird von den Lungenflügeln bedeckt. Die hintere Herzwand liegt nahe der Speiseröhre und der untere Teil wird vom Zwerchfell begrenzt. Die Herzspitze ist nach unten gerichtet

und zeigt nach links vorne.

Das *Septum*¹ unterteilt das Herz in eine linke und rechte Hälfte. In der rechten Hälfte wird das sauerstoffarme Blut aus dem Körper in die Lunge gepumpt. Von der linken Herzhälfte gelangt das sauerstoffreiche Blut aus der Lunge in den Körper. Durch Herzklappen sind beide Hälften in Vorhof und Kammer getrennt. In den Vorhöfen wird das Blut aus dem jeweiligen Kreislauf gesammelt und anschließend von der rechten Kammer in den Lungenkreislauf und von der linken Kammer in die Aorta gepumpt.

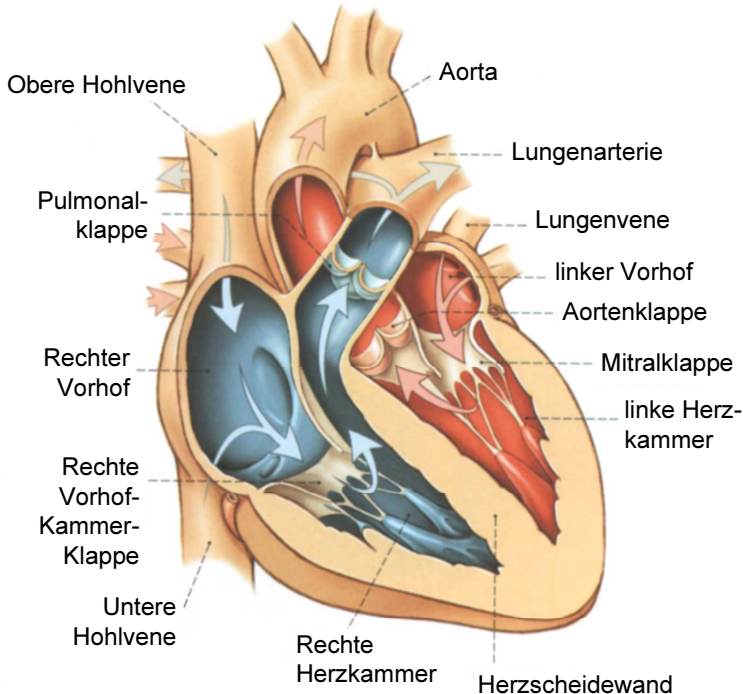


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung des Herzkreislaufs [Wei99]. Das sauerstoffarme Blut aus dem Körper gelangt über die rechte Herzkammer zu den Lungenarterien. Das sauerstoffreiche Blut wird von der linken Herzkammer zurück in den Blutkreislauf des Körpers gepumpt. Zu erkennen sind die Herzkammern und -klappen, sowie die Bewegungsrichtungen des Blutstromes.

Die für die rhythmische Kontraktion des Herzmuskels erforderliche elektrische Erregung erzeugt das Herz selbst. Ausgehend vom Sinus-Knoten und vom Vorhof-Knoten, breitet sich die Erregungswelle in einem System aus impulsleitendem Muskelgewebe über das gesamte Herz aus, und erzeugt so eine zeitlich und räumlich definierte Kontraktion

¹Septum: [lat.] Herzscheidewand, Zwischenwand, zur Trennung benachbarter anatomischer Strukturen

Herzkammern hinunter bis zur Herzspitze. Die RCX läuft links um die Herzbasis, der Ebene zwischen Kammer und Vorhof, zur Rückseite herum.

Tabelle 1.1: Die linken Koronararterien

Abkürzung	Bezeichnung des Abschnitts
RIVA	Ramus interventricularis anterior
RCX	Ramus circumflexus
RD	Ramus diagonalis
RSA	Ramus septalis anterior
RMS	Ramus marginalis sinister
RAS	Ramus atrialis sinister
RPLS	Ramus posterolateralis sinister
RAVS	Ramus atrioventricularis sinister
RIVP	Ramus interventricularis posterior
RSP	Ramus septalis posterior

Die RCA tritt nach vorne aus der Aorta aus. Neben der Versorgung des rechten Ventrikels entspringt aus ihr auch die Sinusknoten-Arterie. Es gibt große individuelle Schwankungen, je nachdem ob die linken oder rechten Koronararterien den Hauptteil der Versorgung des *Myokards*³ übernehmen.

Tabelle 1.2: Die rechten Koronararterien

Abkürzung	Bezeichnung des Abschnitts
RNS	Ramus nodi sinuatrialis
RCO	Ramus coni arteriosi
RVD	Ramus ventricularis dexter
RAD	Ramus atrialis dexter
RMD	Ramus marginalis dexter
RNAV	Ramus nodi atrioventricularis
RIP	Ramus interventricularis posterior
RAVD	Ramus atrioventricularis dexter
RPLD	Ramus posterolateralis dexter
RM	Ramus marginalis
RSP	Ramus septalis dexter

Kommt es durch Veränderungen der im Durchmesser nur wenige Millimeter großen Gefäße zu einem Nährstoffmangel im angeschlossenen Herzmuskelgewebe, so führt das u.U. zu irreversiblen Schäden, die für den gesamten Organismus lebensbedrohend sein können. Ablagerungen in den Gefäßen bilden Engstellen in den Koronarien. Solche Stenosen sind die Ursache für eine Unterversorgung des Myokards und führen in schlimmen Fällen

³Myokard: Herzmuskel

1 Einleitung

zum Myokardinfarkt. Stenosen werden durch eine Ballondilatation (*PTCA*⁴) oder durch Bypassoperationen behandelt.

Eine Methode um Gefäßveränderungen frühzeitig feststellen zu können, ist die Koronarangiographie. Dabei wird über einen Katheter ein Kontrastmittel in die zu untersuchende Gefäßregion eingebracht. Das Kontrastmittel hat einen hohen Absorptionskoeffizienten für Röntgenstrahlung und ist daher im Röntgenbild gut zu erkennen. Ist ein Gefäß vollständig mit Kontrastmittel ausgefüllt, so entspricht das einem Abbild seines Innenvolumens. Analysen sind entweder geometrisch, d.h. durch Erfassen der sichtbaren Kontrastmittellgrenze im Gefäß (Kantenerkennung), oder densitometrisch, d.h. durch Auswertung der Grauwertverteilung im Bild, möglich.

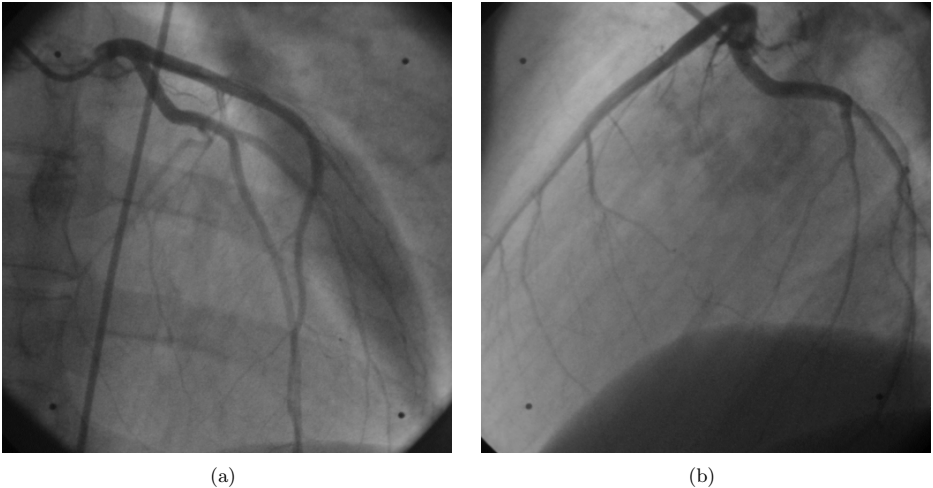


Abbildung 1.5: Typische Röntgenprojektionen der linken Koronararterie, (a) linke Projektion, (b) rechte Projektion. Die Bilder haben eine Auflösung von 512x512 Bildpunkten in 256 Graustufen, die Wirbelsäule des Patienten sowie der Katheter, erkennbar als dunkle Linie, verlaufen vertikal durch das Bild.

Aufnahmen aus unterschiedlichen Projektionsrichtungen erlauben es u.U., einen bestimmten Gefäßabschnitt überlagerungsfrei und ohne perspektivische Verkürzungen abzubilden. Um auch Informationen über die räumliche Lage der Gefäße zu bekommen, werden zwei Angiogramme aus verschiedenen Richtungen aufgenommen. Abbildung 1.5 zeigt ein biplanes Bildpaar. Auf beiden Aufnahmen ist die linke Koronararterie zu erkennen. Der Aufnahmewinkel zwischen beiden Bildern beträgt ca. 90°.

⁴PTCA: Percutaneous Transluminal Coronary Angioplasty

1.2 Röntgensysteme für die Koronarangiographie

Die typische Ausrüstung für die biplane Koronarangiographie besteht aus zwei Röntgensystemen, dem *frontalen* und dem *lateralen* System. Die Abbildung 1.6 zeigt den schematischen Aufbau.

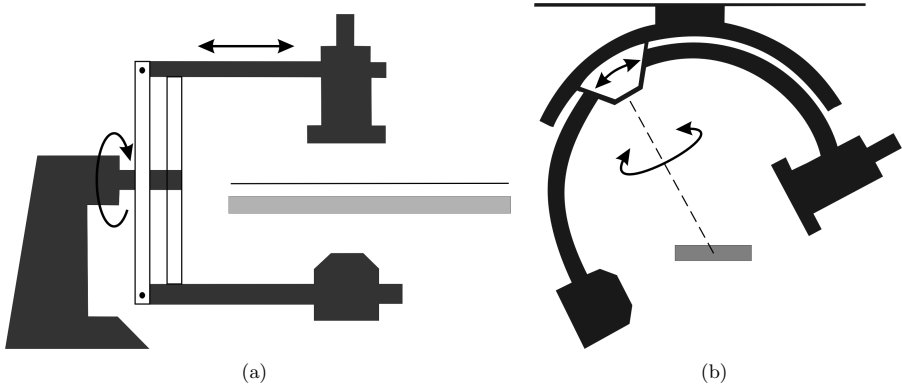


Abbildung 1.6: Aufbau der Röntgenanlage nach [DRG94] (a) Poly DIAGNOST C als frontale Röntgenbildanlage, (b) Poly LATERALARC Röntgenbildanlage. Beim lateralen System handelt es sich um einen C-Arm, der an der Decke montiert ist. In Grundstellung wird der Patient von der Seite aus durchleuchtet. Durch Rotation um die Patientenlängsachse sind auch frontaliere Ansichten möglich. Zusätzlich zu dieser Drehung ist eine Drehung um die Geräteachse möglich.

In zwei Bildverstärkern wird die Strahlung der Röntgenquellen in Bildinformationen umgewandelt. Die entsprechenden Abbildungen werden als *LAO* (right anterior oblique) und *RAO* (left anterior oblique) Ansicht bezeichnet. Wie in Abbildung 1.7 zu erkennen ist, liegt die Bildebene des Bildverstärkers senkrecht zur Hauptachse der gegenüberliegenden Strahlungsquelle. Der Abstand zwischen Röntgenquelle und Bildverstärker und die Winkel für die Blickrichtung sind variabel einstellbar.

Die Aufgabe des Bildverstärkers ist die Umwandlung der Intensität der auftreffenden Strahlung in sichtbares Licht. Gegenüber der direkten Schwärzung eines Filmes durch Röntgenstrahlung kann bei Verwendung eines elektronischen Bildverstärkers eine geringere Strahlendosis verwendet werden. Um die Streustrahlung, die beim Auftreffen auf Materie durch den Compton-Effekt entsteht, zu reduzieren, befindet sich vor dem Bildverstärker ein wenige Millimeter dickes Gitter aus parallel zur Hauptstrahlungsrichtung angeordneten Bleistreifen. Die quer zum Gitter verlaufende Streustrahlung wird dadurch wesentlich stärker gedämpft als die sich parallel zur Vorzugsrichtung ausbreitende Nutzstrahlung.

Die Bewegungen des lateralen, als auch des frontalen Systems, erfolgen um das gemeinsame Isozentrum den gedachten Schnittpunkt der Bildhauptachsen beider Aufnahmesysteme. Die Röntgensysteme lassen sich auf konzentrischen Kreisbahnen um das Isozentrum be-

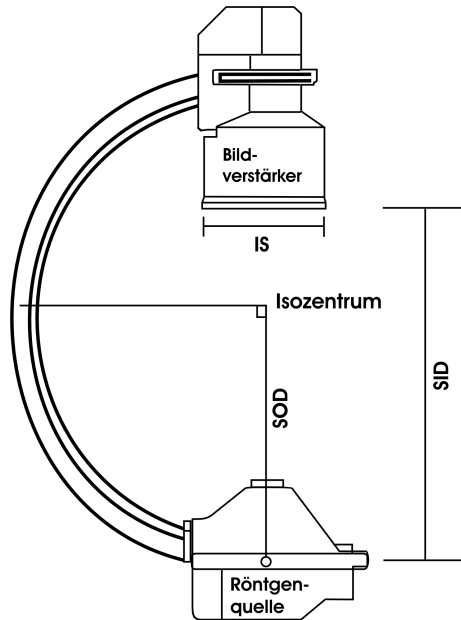


Abbildung 1.7: Die wichtigsten Größen und Abstände des Röntgensystems. Abstand der Röntgenquelle zum Bildverstärker SID (source intensifier distance) Abstand Röntgenquelle Bildverstärker, IS (intensifier size) Größe des Bildverstärkers, SOD (source object distance) Abstand der Röntgenquelle vom Isozentrum

wegen. Bei der biplanen Koronarangiographie wird der Herzschwerpunkt üblicherweise im Isozentrum positioniert, wobei sich der Patient in Rückenlage befindet. Wichtiges Merkmal biplaner Röntgensysteme ist die konstante Position des Isozentrums, unabhängig von Veränderungen der Abstände und Orientierungen der Anlage.

Die Aufnahmen werden in der Regel aus zueinander rechtwinklig angeordneten Richtungen gemacht (siehe Abbildung 1.8), sodass die ausgewählten Gefäßabschnitte verzerrungs- und verdeckungsfrei in den Bildern zu erkennen sind. Die Winkel, mit denen eine links/rechts-Bewegung relativ zum Patienten ausgeführt wird, werden *Rotation* genannt. Die Bewegung der Anlage in Richtung Kopf des Patienten (*cranial*, CR) und in Richtung der Füße (*caudal*, CA) nennt man *Angulation*. Die Orientierung der LAO- und RAO-Ansichten ist durch die Angabe je eines Winkelpaares in einem sphärischen Koordinatensystem bestimmt. Mit dem bildgebenden System kann das Herz mittels Röntgenstrahlung unter LAO- oder RAO-Blickwinkeln mit einer kranialen oder caudalen Angulation betrachtet werden. Eine Einstellung, die weder *Rotation* noch *Angulation* verwendet, wird *Anterior Posterior* (AP) genannt.

Die Bewegungen der Anlage erfolgen auf einer Kugeloberfläche (siehe Abbildung 1.9),

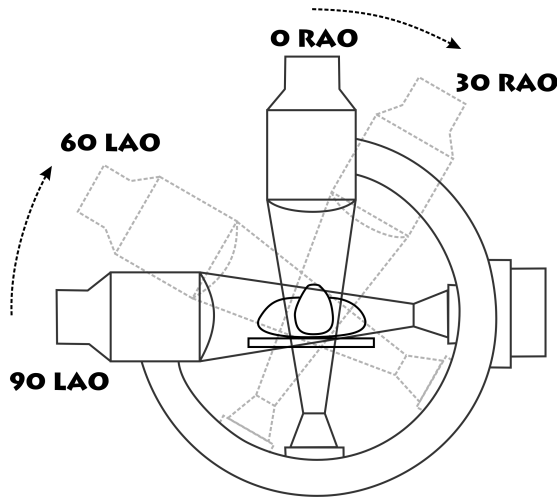


Abbildung 1.8: Skizze typischer Aufnahmewinkel bei der biplanen Angiographie, horizontale Ansicht mit 30° RAO und 60° LAO (ohne zusätzliche Angulation)

wobei zuerst mit einer Rotation entlang des Äquators der Längengrad (*primary angle*) und anschließend der jeweilige Breitengrad (*secondary angle*) gewählt wird. Die Aufnahmen werden so ausgerichtet, dass die Wirbelsäule konventionsgemäß immer vertikal abgebildet wird. Die in Tabellen zusammengestellten Projektionen dienen als Übersicht von Winkeln für eine optimale Darstellung einzelner Gefäßsegmente. So kann anhand des zu untersuchenden Gefäßabschnitts eine geeignete Projektion ermittelt werden.

Die in Abbildung 1.6 beschriebene Anlage ist nur ein Beispiel für ein biplanes Röntgensystem. Es lassen sich zahlreiche weitere mechanische Anordnungen der Röntgensysteme realisieren. Um die unterschiedlichen Anlagen zu klassifizieren werden in der Literatur [PDMS96, Wah94, DRG94] deshalb biplane Anlagen je nach Stativtyp in drei Kategorien unterteilt.

- | | |
|---------|---|
| Typ I | Die Pole liegen seitlich des Patienten |
| Typ II | Die Pole liegen längs des Patienten |
| Typ III | Die Pole liegen ober-/unterhalb des Patienten |

Je nach mechanischer Ausführung ergeben sich die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Typen von Röntgensystemen. Der Raumbedarf eines einzelnen Röntgensystems ist enorm. Für ein biplanes System verdoppeln sich die Ansprüche. Beide Teilsysteme müssen in der Lage sein, einen großen Winkelbereich kollisionsfrei abzudecken. Gleichzeitig muss der Zugang zum Patienten gewährleistet bleiben. Die mechanischen Abmessungen verhindern es, mit beiden Anlagenteilen alle Winkelkombinationen gleichzeitig zu realisieren. Deshalb wird eines der beiden Röntgensysteme bevorzugt für laterale Aufnahmen genutzt und das andere System entsprechend für frontale Ansichten.

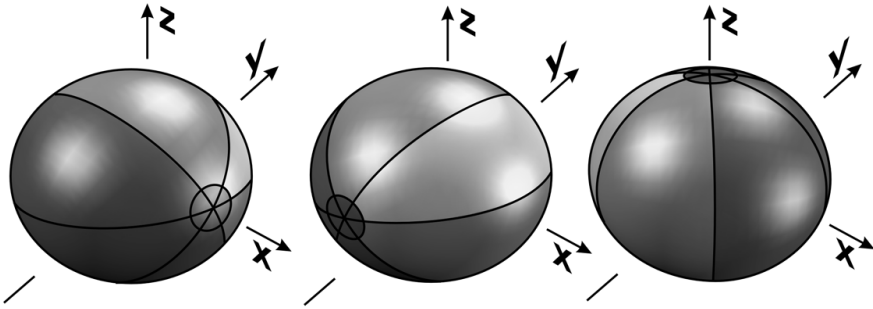


Abbildung 1.9: Die unterschiedlichen Anlagentypen in einer schematischen Darstellung. Wird ein rechtshändiges Koordinatensystem so gewählt, dass die positive x-Achse in Richtung des linken Armes und die positive y-Achse in Richtung Kopf des Patienten weist, so zeigen die Bilder von links nach rechts das Bewegungsschema für Anlagen vom Typ I, II und III. Zuerst wird der Längengrad durch die primäre Winkelangabe eingestellt und anschließend der Breitengrad durch den sekundären Winkel. Charakteristisch für Typ I ist die seitliche Lage der Pole. Für Typ II und III liegen diese jeweils längs des Patienten bzw. vor und hinter dem Patienten.

Um auch später nachvollziehen zu können, unter welchen Blickwinkeln bestimmte Aufnahmen gemacht wurden, sind die Anlageneinstellungen gemeinsam mit den Bilddaten in einer DICOM-Datei gespeichert. Das DICOM-Format ist ein offener Standard für den elektronischen Austausch von Patienteninformationen. Grundlage für diese Arbeit bilden typische DICOM-Dateien, wie sie im Rahmen klinischer Untersuchungen angefertigt werden. Neben den Röntgenbildern und zahlreichen Verwaltungs- und Patienteninformationen finden sich darin auch für die 3D-Rekonstruktion relevante Angaben. Einige der Anlagendaten, wie sie für die Gefäßrekonstruktion benötigt werden, sind als Beispiel in Tabelle 1.3 abgebildet.

1.3 Anlagen Koordinatensysteme

Für die Rekonstruktion ist ein globales Referenz-Koordinaten-System notwendig. Es wird im folgenden als Weltkoordinatensystem bezeichnet. Für das Weltkoordinatensystem *WC* wird das in Abbildung 1.10 dargestellte, am Patienten ausgerichtete, rechtshändige, kartesische Koordinatensystem verwendet.

Die positive y-Achse verläuft parallel zur Wirbelsäule des Patienten in Richtung Kopf, die positive x-Achse zeigt zur linken Seite und die positiven Werte in z-Richtung liegen vor dem Patienten. In der Literatur findet man weitere, unterschiedliche Koordinatensysteme. Dieses spezielle Koordinatensystem wurde so gewählt, dass sich die Einheitsmatrix als Transformationsmatrix für die frontale AP-Projektion ergibt. Der Koordinatenursprung, das Isozentrum als Fixpunkt bezüglich der Anlagen-Drehung, liegt im Herzmittelpunkt.

Tabelle 1.3: Auszug aus dem DICOM-File

Datenfeld	Projektion 1	Projektion 2
DistanceSourceToDetector	952	1088
IntensifierSize	170.0000	170.0000
PositionerPrimaryAngle	-4.8000	90.3000
PositionerSecondaryAngle	-4.2000	-0.3000
NumberOfFrames	92	92
Rows	512	512
Columns	512	512
BitsAllocated	8	8
PixelIntensityRelationship	LOG	LOG

Mit diesem Koordinatensystem erhält man für 0° RAO/LAO und 0° kranial/kaudal Einstellungen die AP-Projektion, d.h. die Transformationsmatrix von Welt- in Anlagenkoordinaten entspricht der Einheitsmatrix.

Als nächstes werden Winkel und Drehsinn für die Rotationen des Röntgenkoordinatensystems entsprechend der Rechte-Hand-Regel festgelegt. Für die *Rotation*, bzw. rechts-links-anteriore Projektion, zeigt der Daumen in Richtung der positiven y-Achse des Weltkoordinatensystems. Die gebeugten Finger geben den mathematisch positiven Drehsinn an. In diesem Fall ist die linksanteriore Projektion mit einer positiven Winkelangabe verknüpft. Der Drehsinn für die *Angulation*, d.h. die kraniale oder kaudale Bewegung, wird auf die gleiche Weise festgelegt. Nur zeigt der Daumen in Richtung der positiven x-Achse. Damit entspricht die Drehung um die x-Achse im mathematisch positiven Drehsinn einer kaudalen Ansicht, eine frontale Projektion von 0° ergibt die Einheitsmatrix als Rotationsmatrix und die kraniale Projektion erfolgt bei negativem Winkel. Eine Projektion $P = P(\alpha, \beta)$ ist eindeutig durch die Rotationswinkel α und den Angulationswinkel β mit

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$$

bestimmt.

Damit ist die Bewegung der Röntgenanlage vollständig beschrieben. Als Zusammenfassung sind in Tabelle 1.4 die verschiedenen Winkel mit ihren Vorzeichen angegeben.

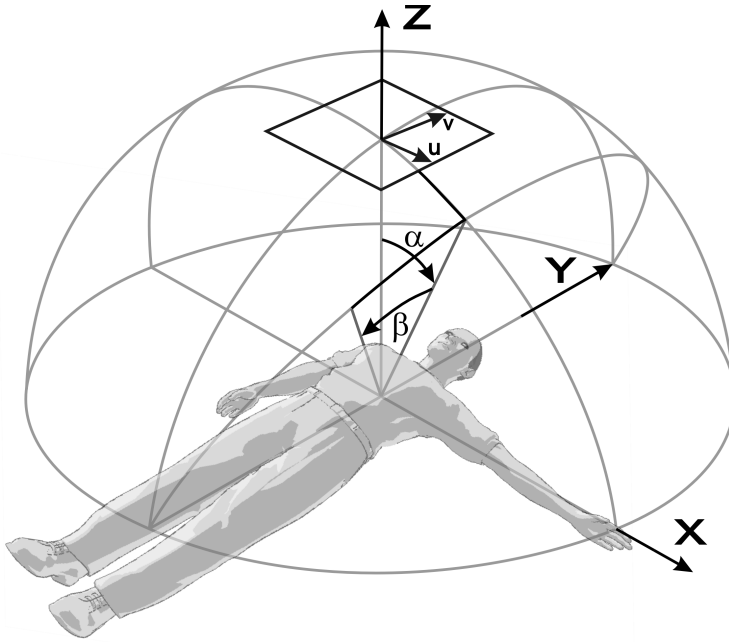


Abbildung 1.10: Welt- und Anlagenkoordinatensystem

Die allgemeinen Rotationsmatrizen um die x-, y- und z-Achse mit dem Winkel ϕ sind:

$$\begin{aligned}
 R_x(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\
 R_y(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \\
 R_z(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Es gibt symmetrische Anlagen, bei denen beide Systeme gleicher Bauart sind und solche mit unterschiedlichen Stativen. Bei Anlagen des Typ I wird der C-Arm zunächst mit β um die X-Achse rotiert, dann mittels des L-Arms mit α um die Y-Achse. Es ergibt sich

Tabelle 1.4: Ansichten und die Winkel der entsprechenden Transformationen

Ansicht	Winkelangabe
LAO-Ansicht	positiver Winkel, $\alpha > 0$
RAO-Ansicht	negativer Winkel, $\alpha < 0$
Kaudal-Ansicht	positiver Winkel, $\beta > 0$
Kranial-Ansicht	negativer Winkel, $\beta < 0$

die Rotationsmatrix R_I für das oben angegebene Koordinatensystem mit

$$\begin{aligned}
 R_I &= R_Y(\alpha)R_X(\beta) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \sin \alpha \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Beim Typ II hingegen erfolgt zuerst eine Rotation von α um die Y-Achse (C-Arm), anschließend von β um die X-Achse (L-Arm bzw. äußerer C-Arm).

$$\begin{aligned}
 R_{II} &= R_X(\beta)R_Y(\alpha) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta & -\sin \beta \cos \alpha \\ -\cos \beta \sin \alpha & \sin \beta & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

Beim Typ III schließlich erfolgt zunächst die Ausrichtung des C-Arms um den Winkel α an der Y-Achse, gefolgt von einer Rotation γ um die Aufhängung des C-Arms, also die Z-Achse.

$$\begin{aligned}
 R_{III} &= R_Z(\gamma)R_Y(\alpha) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \gamma \sin \alpha \\ \cos \gamma \cos \alpha & \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \alpha \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Je nach Anlagentyp ist damit die Transformation von Weltkoordinaten in Anlagenkoordinaten XC beschrieben. Im weiteren wird von einer Anlage Typ II ausgegangen. Es wird deshalb die Rotationsmatrix nach Gleichung 1.1 verwendet. Um vom Anlagenkoordinatensystem in das Kamerakoordinatensystem CC zu gelangen, ist eine weitere Transformation notwendig. Diese bezeichnet die Verschiebung \mathbf{t} des Bildverstärkerhauptpunktes zum Rotationszentrum (Isozentrum) mit der Entfernung SOD (siehe dazu auch Abbildung 1.7).

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{SOD} \end{pmatrix}$$

2 Methoden und Anwendungen der computergestützten biplanen Koronarangiographie

In der kardiologischen Bildgebung stehen für den klinischen Einsatz unterschiedliche Bildmodalitäten wie Ultraschall (US), Computertomographie (CT), Positronen-Emissionstomographie (PET), Magnetresonanztomographie (MRT) und das Röntgen zur Verfügung. Für routinemäßige kardiologische Eingriffe im Gefäßsystem wird hauptsächlich die Angiographie, d.h. das Röntgen mit Kontrastmittel, verwendet. Diese Aufnahmetechnik wird benutzt, um die Herzkammern und die Herzkranzgefäße darzustellen. Es ist damit möglich, Strukturen bis zu 0,1mm Länge mit einer zeitlichen Auflösung von 50 Bildern pro Sekunde zu erfassen. Biplane Anlagen erlauben eine nahezu gleichzeitige Aufnahme der selben anatomischen Strukturen aus zwei unterschiedlichen Blickrichtungen.

Moderne medizinische und chirurgische Methoden, wie z.B. die Ballon- und *Laserangioplastie*¹, erhöhen den Bedarf nach Verfahren zur quantitativen Analyse angiographischer Aufnahmen. Informationen über die dreidimensionale Orientierung von Gefäßen sind z.B. Voraussetzung um densitometrische Analysen von Gefäßquerschnitten sowie Messungen des Blutflusses in der Genauigkeit zu verbessern. Bewegungsstudien des Myokards und die Bestimmung mechanischer Beanspruchungen der Herzwand hängen ebenfalls von einer zuverlässigen 3D-Rekonstruktion ab.

Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, ist das Problem der dreidimensionalen Rekonstruktion des Gefäßbaumes aus zwei radiologischen Projektionen im Allgemeinen unterbestimmt. Zusätzlich führen Aufnahmefehler und Rauschen zu inkonsistenten Daten. Die Ursachen für Störungen sind vielfältiger Natur. Systematische Fehler, z.B. geometrische Verzerrungen, können durch geeignete Kalibrierungen des Bildaufnahmesystems beseitigt werden. Auch die endliche Ausdehnung des Brennflecks der Röntgenröhre im Zusammenhang mit der Übertragungsfunktion des bildgebenden Systems kann z.B. durch

¹Maßnahme zur Wiederherstellung des normalen Gefäßquerschnitts

eine entsprechende PSF^2 in den Abbildungsgleichungen berücksichtigt und weitestgehend kompensiert werden. Hingegen führt die Verwendung der sehr geringen Röntgendosen zu kontrastarmen und stark verrauschten Bildern. Die Gefäßstrukturen sind komplex und in einen Hintergrund aus weiteren anatomischen Strukturen eingebettet. Hier bieten statistische Verfahren in Verbindung mit a priori Wissen über den Aufbau und die Entstehung der Gefäßprojektionen einen Ausweg.

In den folgenden Abschnitten werden Anwendungen und Methoden der computergestützten Auswertung biplaner Koronarangiogramme, mit dem Schwerpunkt auf Ansätzen zur Lösung der dreidimensionalen Rekonstruktionsaufgabe, beschrieben.

2.1 Wissensbasierte Verfahren

Allen wissensbasierten Verfahren ist gemeinsam, dass sie bestimmte Annahmen über die räumliche Struktur, Morphologie oder Topologie der Koronarien bzw. über ihre Abbildungen in den Röntgenaufnahmen machen. Obwohl die Morphologie des Koronargefäßsystems großen individuellen Schwankungen von Mensch zu Mensch unterliegt, sind gewisse Annahmen durchaus gerechtfertigt, da sie strukturelle Gemeinsamkeiten widerspiegeln. So ist das Koronarsystem immer hierarchisch aufgebaut. Wenige große Gefäße teilen sich in kleinere, die sich wiederum in noch kleinere Gefäße aufteilen. Die Gefäßquerschnitte verhalten sich so, dass der Energieaufwand für den Bluttransport durch das gesamte Netzwerk minimal wird, zusätzlich wird das *Lumen*³ des Arteriensystems global minimiert [CC00].

Die baumartige Struktur und der hierarchische Aufbau sind Ausdruck topologischer Eigenschaften. Diese lassen sich in Form eines gerichteten Graphen darstellen. Dazu wird der koronare Gefäßbaum als eine Anordnung aus verschiedenen Segmenten, Verzweigungen (Bifurkationen, Trifurkationen) und Endpunkten betrachtet.

In [WOF93, Wah94] wird ein durchmesserorientiertes Graphenmodell der Koronarien beschrieben. Grundlage ist ein aus der Geologie stammendes Modell zur Beschreibung von Flusshierarchien an Berghängen, das auch unsymmetrische Zuflüsse berücksichtigt. Flusssegmente werden von der Quelle ausgehend in aufsteigender Reihenfolge bis zum Unterlauf in Richtung der Flussmündung durchnummeriert. Da bei Koronarien die Transportrichtung umgekehrt ist, beginnt man bei Koronarien mit der Zählung an der Wurzel (Ostium). Diese Zählweise wird z.B. auch für hierarchische Systeme der Bronchien angewendet, die aber nur symmetrische Verzweigungen berücksichtigen. Die Ordnungsnummer beschreibt die Lage des Segments innerhalb des Baumes. Segmente mit gleicher Ordnungsnummer bilden ein Gefäß, d.h. Asymmetrien werden berücksichtigt. Ein Gefäß besteht aus Segmenten und Knoten. Die Knoten unterteilen ein Gefäß in mehrere Segmente. Segmente werden ihrem *proximalen*⁴ Knoten logisch zugeordnet. Somit kann ein Knoten nur zu einem oder zu keinem Segment gehören. Das Graphenmodell wird mit zusätzlichen strukturellen Attributen erweitert. In einer Datenbank werden die topologischen Informationen

²point spread function: zweidimensionale Impulsantwort des Bildaufnahmesystems

³Lumen [lat. "Licht"] das: Hohlraum eines röhrenförmigen Körperorgans

⁴proximal: [lat.] näher zur Körpermitte gelegen, in diesem Fall näher an der Wurzel gelegen

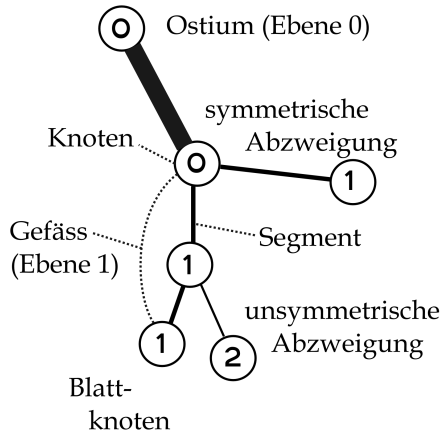


Abbildung 2.1: Format für die Darstellung des Koronargefäßsystems als Graph [Wah94]

und quantitative Daten in hierarchischer Ordnung gespeichert. Strukturelle Attribute beschreiben die Ebene der Hierarchie, in der sich ein Knoten befindet. Jedem Segment sind die entsprechenden Punkte der Gefäßmittellinie zugeordnet.

In der Medizin gibt es ein einheitliches Namenssystem der koronaren Gefäßsegmente. Für eine standardisierte Beschreibung koronarer Erkrankungen ist die einheitliche Namensgebung anatomischer Strukturen Voraussetzung. In [ECKD98] besteht das Ziel in einer automatischen Zuordnung anatomischer Benennungen (*anatomic labeling*) zu einer Graphendarstellung des Gefäßbaumes anhand von Bilddaten. Angestrebt wird eine standardisierte Beurteilung von Stenosen, die quantitative Beschreibung von Gefäßstrukturen und die Unterstützung der automatischen 3D-Rekonstruktion der Koronarien. Bildmerkmale mit gleichem anatomischem Label erleichtern die gegenseitige Zuordnung bei der Suche nach korrespondierenden Gefäßsegmenten für die 3D-Rekonstruktion. Die Topologie ist in einem symbolischen Modell enthalten, das mit Hilfe eines *DAG*⁵ die hierarchische Struktur zwischen den Gefäßsegmenten und -verzweigungen abbildet (entsprechend Abbildung 2.2). Zusätzlich gibt es ein generalisiertes 3D-Modell, das die räumlich-geometrischen Verhältnisse beinhaltet. Mittels dynamischer Programmierung wird die Kohäsion in den Gefäßsegmenten in Verbindung mit zeitlichen Informationen aus den Bildsequenzen zur Auflösung der Mehrdeutigkeiten bei Gefäßüberlappungen für die Rekonstruktion genutzt.

In [CCD⁺89] wird eine Skeltettierung des dreidimensionalen Gefäßbaumes mit anschließender Rückprojektion aus zwei radiologischen Projektionen bestimmt. Das Zuordnungsproblem wird dadurch gelöst, dass die bekannte Geometrie bei der Bildaufnahme und anatomisches Vorwissen miteinander kombiniert werden. Die Modellvorstellung geht davon aus, dass die Gefäße auf der Oberfläche eines Ellipsoiden liegen. Des Weiteren werden

⁵DAG: (*directed acyclic graph*) Graph mit gerichteten Kanten und ohne Schleifen

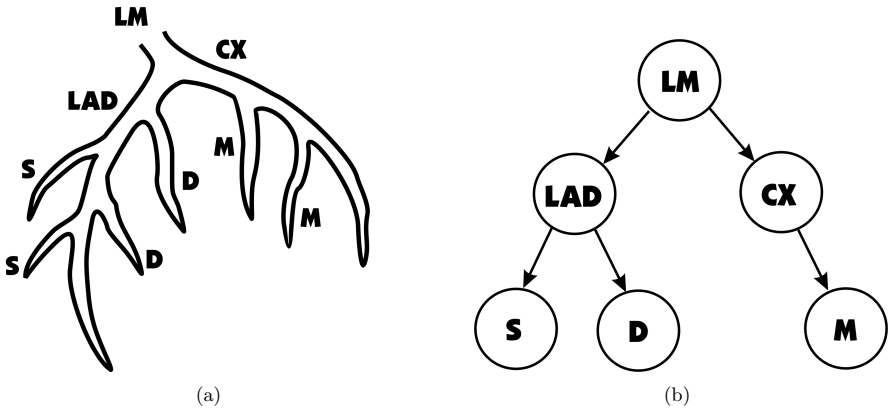


Abbildung 2.2: Repräsentation der topologischen Struktur des linken Gefäßbaumes (a) schematisch, (b) als gerichteter Graph mit Knoten und Kanten. Die Abkürzungen bedeuten dabei: LM (*left main*), LAD (*left ascending*), CX (*circumflexa*), S (*septal branch*), M (*marginal branch*), D (*diagonal branch*)

einfache geometrische Heuristiken ausgenutzt, z.B. dass sich in einer LAO-Ansicht die LAD links vom Baum der CX befindet, in einer RAO-Ansicht umgekehrt (siehe dazu Abbildung 2.3). Ausgangspunkt für das Verfahren zur Rekonstruktion der linken Koronararterie sind zwei bereits skelettierte 2D-Projektionen mit gegebenen Aufnahmeparametern. In einem Matching-Modul werden die Knoten der beiden Skelettbäume, die Bifurkationen des Gefäßbaumes, einander zugeordnet. Der Suchraum wird dabei durch den hierarchischen Aufbau und die Geometrie des anatomischen Modells eingeschränkt.

Die Autoren von [WLB⁺96] stellen fest, dass die biplane Rekonstruktion mehrere Lösungen besitzt und deshalb zusätzliche a priori Informationen erforderlich sind. Sie verwenden Bedingungen wie korrespondierende Durchmesser und die relativen Positionen von Gefäßen untereinander ähnlich denen in Abbildung 2.3.

In [CCCC91] werden strukturelle Regeln für die Beschreibung geometrischer Eigenschaften und Beziehungen verwendet. Als geometrische Information wird die räumliche Lage der Ebenen, in denen die linke und rechte Koronararterie liegt, ausgewertet. Die Segmentierung erfolgt in Gefäßmittellinie und Begrenzungselemente (Gabelungen, Kreuzungen, Endpunkte). Die Wissensbasis existiert in Form von Attributen in einer Datenbank. Zusätzlich existieren auch verschiedene Heuristiken wie z.B.

- Der größte Gefäßquerschnitt tritt an der Wurzel auf
- Eine Verzweigung $A \rightarrow B, C$ erfolgt entweder nach dem Muster $A \rightarrow A, C$ oder $A \rightarrow B, C$

⋮

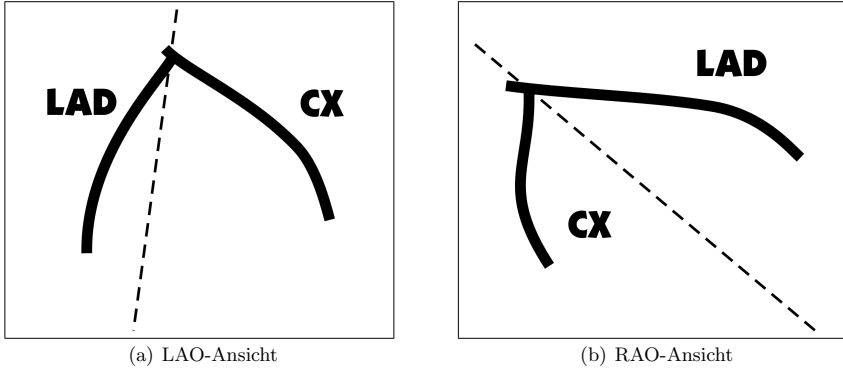


Abbildung 2.3: Position der linken Koronararterien in den Projektionen. (Die gestrichelte Linie gibt die Lage der ventrikulären Achse an). [WLB⁺96]

Es wird zunächst die Menge potentieller 3D-Segmente aus zwei Ansichten bestimmt und anschließend eine Interpretation des gesamten Bildes aus verschiedenen Hypothesen schrittweise aufgebaut. Als zusätzliche Information dient die zeitliche Ausbreitung der Kontrastmittelfront bei der Injektion, die in beiden Ansichten gleichermaßen sichtbar ist. Die Datenbank mit den Regeln wurde in PROLOG implementiert. Ein Auszug aus [GCCC91] ist nachfolgend abgebildet:

```
Anterior_Inter_Ventricular (AIV) branch
MOD (AIV, Name (Anterior_Inter_Ventricular)).
MOD (AIV, Originated_From (LMB, [Relationship (Continuous)])).
MOD (AIV, Originated_From (AIV, [Relationship (Continuous)])).
MOD (AIV, Linked_To (CX, [Relationship (Perpendicular)])).
MOD (AIV, Divides_Into ([D, AIV])).
MOD (AIV, Divides_Into ([S, AIV])).
MOD (AIV, Divides_Into ([D, S, AIV]) : Detected_Bifurcation (AIV, [])).
MOD (AIV, Territory (Plane (IV))).
MOD (AIV, Maximum_Number (1)).
MOD (AIV, Position ([Front, Anterior])).
MOD (AIV, Orientation ([Front])).
MOD (AIV, Optimal_Incidence ([RAO, Trans])).
MOD (AIV, Stenosis_Flag (1)).
Circumflex (CX) branch
MOD (CX, Name (Circumflex)).
MOD (CX, Originated_From (LMB, [])).
MOD (CX, Originated_From (CX, [Relationship (Continuous)])).
MOD (CX, Linked_To (AIV, [Relationship (Perpendicular)])).
MOD (CX, Divides_Into ([LA, CX])).

:
```

In [SMST90] wird die Ausbreitung des Kontrastmittels über mehrere Bilder hinweg verfolgt, um daraus, unter Verwendung der Epipolargeometrie⁶, die dreidimensionale Struktur des Gefäßbaumes zu bestimmen. Dazu werden die Bilder zu Beginn mit einem zweidimensionalen lokalen Filteroperator vorverarbeitet. Aus den segmentierten Daten werden dann die Gefäßmittellinien extrahiert. Zur Kalibrierung der Aufnahmegeometrie wird direkt im Anschluss an die Patientenuntersuchung ein kubischer Kalibrierkörper mit eingelassenen metallischen Markierungen verwendet. Über eine algebraische Rückprojektion werden die 3D-Koordinaten markanter Punkte (Abzweigungen der Gefäße oder chirurgisch implantierte Marker) aus den beiden Projektionen bestimmt. Das einströmende Kontrastmittel erzeugt in beiden Projektionen charakteristische Muster und die führende Kontrastmittelfront liegt auf entsprechenden Epipolarlinien. Über sechs aufeinander folgende Bilder hinweg werden korrespondierende Bildpunkte durch ihren minimalen Abstand zu den Epipolarlinien bestimmt. Die Gefäßquerschnitte sind anhand des im Bild sichtbaren Katheters mit bekanntem Durchmesser berechenbar und werden als Ellipsen modelliert.

Mit dem ermittelten elliptischen Gefäßquerschnitt (d_1 und d_2 sind dabei die Ellipsenhauptachsen) und der Durchgangszeit der führenden Flanke des Kontrastmittels wird der Blutfluss Q berechnet. Dabei soll v die Fließgeschwindigkeit und δl die Länge eines Gefäßteilstückes sein, für das die Transitzeit δt der Kontrastmittelfront gemessen wurde. Dann gilt:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\delta l}{\delta t} \\ Q &= \frac{\pi}{4} d_1 d_2 \frac{\delta l}{\delta t} \end{aligned}$$

Der Fluss Q wird genauso wie die Punktkorrespondenzen aus mehreren aufeinander folgenden Aufnahmen einer Sequenz ermittelt. Die Autoren bestimmten mit dieser Methode die Flussreserve durch den Vergleich von Q und v vor und nach Verabreichung gefäßerweiternder Substanzen.

Blutfluss und Versorgung des Myokards werden in [SRO⁺92] ebenfalls aus Zeit-Dichte-Verläufen des Kontrastmittels im Bild bestimmt. Auf der als Ellipsoid angenommenen Oberfläche des Myokards werden Regionen mit ähnlicher System-Übertragungsfunktion bestimmt. Dazu werden Grauwertkurven, Messungen über die Zeit, an verschiedenen Stellen im Bild ausgewertet. Das Modell geht davon aus, dass die Dispersion des Kontrastmittels distale⁷ Kurven verzögert und abgeflacht erscheinen lässt (siehe Abbildung 2.5). Im Vergleich dazu ist die Kurve am Ostium viel steiler und nicht verzögert. Stenosen führen zu zusätzlichen Verzögerungszeiten und es ist eine sehr exakte Positionierung des Patienten erforderlich, insbesondere sind Atmungs- und Bewegungsartefakte zu vermeiden.

In [DGG⁺92] wird ein Graphenmodell der Koronarien aus den Bilddaten konstruiert und an einen Modellgraphen angepasst. Mit dem als *Consistent Inexact Graph Matching* bezeichneten Verfahren wird versucht, eine Isomorphie zwischen dem Modellgraphen und

⁶Eine ausführliche Beschreibung der Epipolargeometrie erfolgt im Abschnitt 4.4.

⁷distal: [lat.] weiter entfernt von der Körpermitte. In diesem Fall sind Gefäßabschnitte gemeint, die weiter entfernt von der Wurzel des Gefäßbaumes liegen.

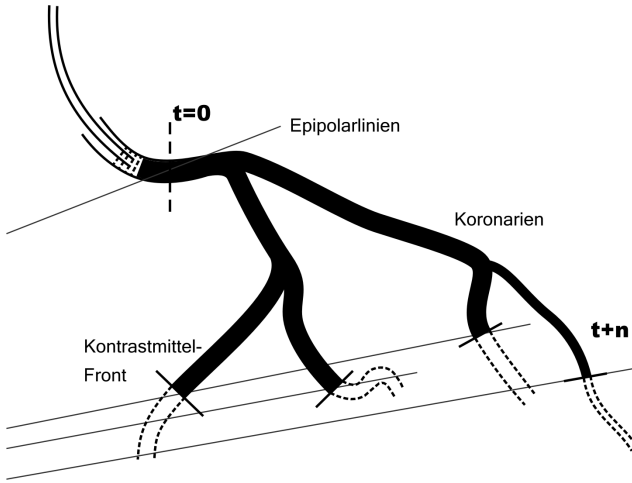


Abbildung 2.4: Die sichtbare zeitliche Ausbreitung des Kontrastmittels in den Koronarien kann für eine dreidimensionale Rekonstruktion des Gefäßbaumes genutzt werden. In beiden Bildern befindet sich die führende Flanke der Kontrastmittelfront auf korrespondierenden Epipolarlinien. Da sich das Kontrastmittel deutlich im Bild abzeichnet, ergibt sich ein gut zu verfolgendes Merkmal im Bild. Die Kontrastmittelfront bewegt sich über die Zeit. Anhand dieser Stützstellen an unterschiedlichen Orten im Bild können durch Rückprojektion dreidimensionale Gefäßpunkte bestimmt werden. Ein spezielles Attribut dieser 3D-Punkte könnte die TTP (*time to peak*) des Kontrastmittels sein, um durch Auswertung dieser Zeiten z.B. Bewegungs- oder Strömungsanalysen durchführen zu können.

dem aus den Bilddaten bestimmten Graphen zu ermitteln. Gesucht ist eine Transformationsfunktion $f : N_M \rightarrow N_D$, die die gelabelten Knoten des Modellgraphen N_M in die Knoten N_D des aus den Bilddaten bestimmten Graphen überführt. Dazu werden *Ersetzen*, *Löschen* und *Einfügen* als drei elementare Transformationen, mit assoziierten Kosten proportional zum Unterschied in den Merkmalen, zugelassen. Gesucht ist die optimale gegebenenfalls inexacte Zuordnung hinsichtlich einer Kostenfunktion. Um den Suchraum zu beschränken, werden vor Beginn der eigentlichen Suche Zuordnungen mit zu hohen Kosten eliminiert. Danach wird mit dem A^* -Algorithmus⁸ nach der besten Zuordnung zwischen beiden Graphen gesucht.

In [OE94] wird bestehendes Vorwissen über die dynamischen Eigenschaften des Koronarsystems und die Eigenschaften der Röntgenprojektionen der Koronarien für die Gefäßrekonstruktion verwendet. Für die Gefäßabbildungen in einer Aufnahme wurde folgender Eigenschaftskatalog aufgestellt:

⁸Eine Beschreibung des A^* -Algorithmus erfolgt im Abschnitt 3.4.9.

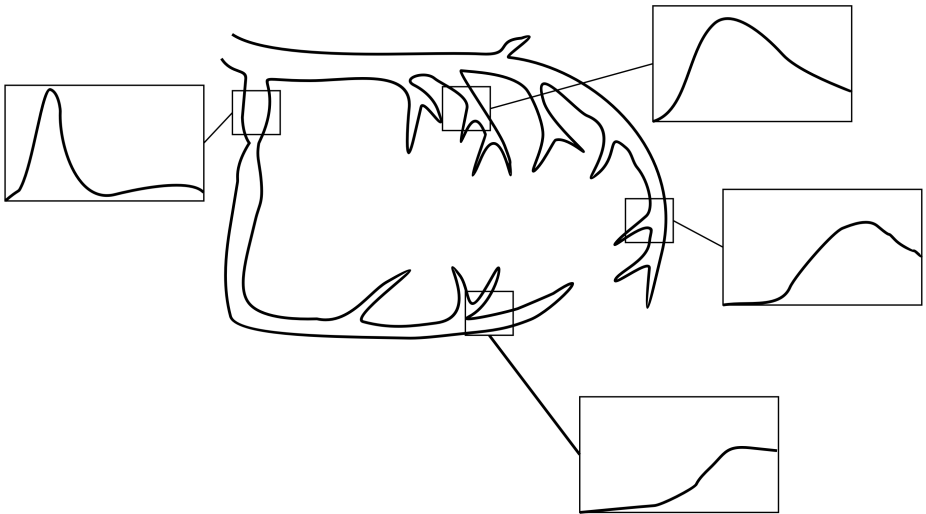


Abbildung 2.5: Zeitverläufe der Grauwertkurven in verschiedenen Abschnitten des Gefäßsystems [SRO⁺92]. Zu erkennen ist die zunehmende Verzögerung des Maximums und das Abflachen der Kurven mit zunehmender Entfernung vom Ostium.

- Bildbereiche, die zu einem Gefäß gehören, sind „dunkler“ als umgebende Hintergrundbereiche.
- Für einen quadratischen Bildausschnitt ausreichender Größe ist das Verhältnis a_v/a_b aus Gefäßfläche (a_v) und Hintergrundfläche (a_b) kleiner als eine vorgegebene Konstante.
- Gefäßsegmente sind längliche Strukturen, d.h. die Ausdehnung entlang der Struktur ist wesentlich größer als rechtwinklig dazu.
- Keine abrupten Änderungen der Gefäßbreite längs der Gefäßrichtung für gesunde Gefäße

Mit einem *seeded region growing*⁹ wird der mögliche Gefäßbereich segmentiert, anschließend skelettiert und in einen Graphen transformiert. Um falsche Segmentierungsergebnisse zu eliminieren und um zeitliche und räumliche Verbindungen herzustellen, wird das ermittelte Gefäßskelett in das nächste Bild der Sequenz übertragen und dient als Grundlage für eine erneute Segmentierung, solange bis das Ende der Sequenz erreicht wird. Als Kostenfunktion für die Graphenzuordnung in den biplanen Aufnahmen wird ein Energie-Funktional über die Knoten beider Graphen verwendet.

⁹Regionenwachstum im Bild, wobei ausgehend von mehreren Saat- bzw. Startpunkten zusammenhängende Bildbereiche anhand eines vorgegebenen Homogenitätskriteriums schrittweise aufgebaut werden.

2.2 Densiometrische Methoden

Ziel densiometrischer Verfahren ist es, die räumliche Kontrastmittelverteilung innerhalb eines Volumens anhand eindimensionaler Intensitätsprofile zu bestimmen. Es wird angenommen, dass die Dichte des Kontrastmittels im gesamten Volumen konstant ist, nur dann sind Rückschlüsse auf die Form des vom Kontrastmittel ausgefüllten Hohlraumes möglich. Im Unterschied zur Gefäßmittellinienrekonstruktion (Skelettierung des Gefäßbaums), liefert die Densiometrie den Gefäßquerschnitt. Grundlage ist die unterschiedliche Absorption von Röntgenstrahlung in Materie:

$$I(\vec{x}) = I_0(\vec{x})e^{-\int_{\vec{\epsilon} \in \mathcal{S}} \mu(\vec{\epsilon})d\vec{\epsilon}} \quad (2.1)$$

Dabei ist $\mu(\vec{\epsilon})$ der ortsabhängige Absorptionskoeffizient und die Integration erfolgt durch das durchstrahlte Volumen \mathcal{S} entlang des Röntgenstrahls $\vec{\epsilon}$. $I(\vec{x})$ ist die am Ort \vec{x} auf dem Röntgendetektor gemessene Intensität. Befindet sich kein absorbierendes Material auf dem Weg des Röntgenstrahls, so entspricht sie der Intensität I_0 .

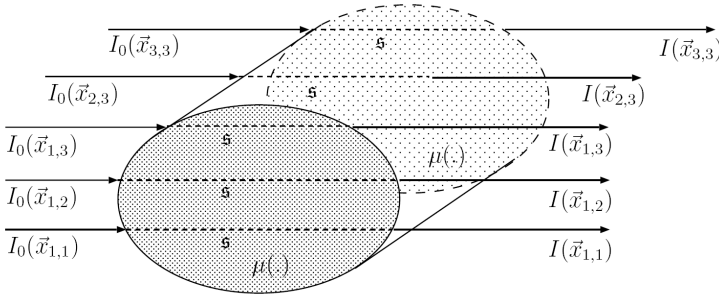


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung der Röntgenabsorption. Die Intensität der Röntgenquelle ist mit I_0 bezeichnet. Nachdem die Röntgenstrahlung ein Objekt mit ortsabhängigem Absorptionskoeffizienten durchdrungen hat, wird am Detektor die Intensität I gemessen.

Für die Querschnittsbestimmung wurden eine Reihe von Verfahren vorgeschlagen, die von vereinfachenden Annahmen ausgehen. Sie fallen alle in den Bereich der Rekonstruktion einer Binär-Matrix aus zwei Projektionen. Die Aufgabe wird so formuliert, dass ein binäres 2D-Muster aus zwei orthogonalen 1D-Mustern (Intensitätsprofile) zu ermitteln ist (Abbildung 2.7). Das Modell geht von einer Parallelprojektion aus und die Höhe des Intensitätsprofils soll proportional zur Dicke des Gefäßes sein. Stapelt man mehrere solcher 2D-Querschnitte übereinander, so lässt sich damit ein vollständiger 3D-Verlauf rekonstruieren. Die Rekonstruktion einer binären Matrix anhand der Zeilen- und Spaltensumme erfolgt in [TBS92] durch Berechnung der Zeilen- und Spaltenmomente. Mit dem *Moment Inversion* genannten Algorithmus werden daraus Gefäßquerschnitte bestimmt, die von der elliptischen Form gesunder Gefäße abweichen können, d.h. es sind nicht

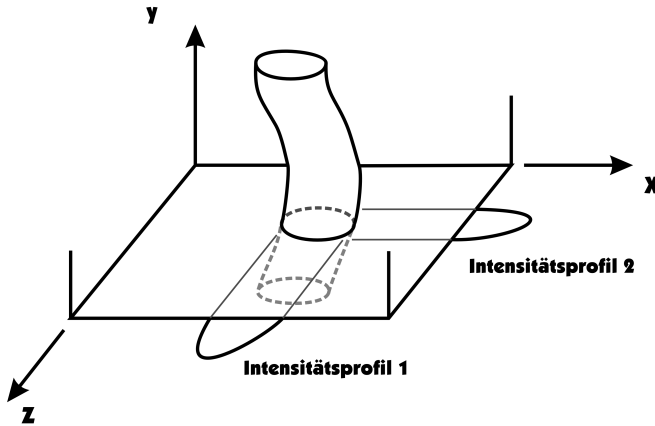


Abbildung 2.7: Horizontaler Schnitt mit Dichteprofilen in den Projektionen [TBS92]

nur konvexe Querschnitte als Lösungen möglich. Es werden empirische Regeln für die Optimierung der Momentenvektoren eingesetzt und es erfolgt eine aufwendige Bildvorverarbeitung (z.B. Störsignalbefreiung mit einem Wiener-Filter, Modellierung der PSF aus der Röntgenstreuung).

Dagegen verwendet [WS92] eine hierarchische Suchstrategie für die Lösung des Binär-Matrix-Problems über mehrere Auflösungsstufen hinweg. Zur Beschneidung des Suchbaumes werden zusätzliche Bedingungen, wie minimaler Umfang der Kontur und Kompaktheit, d.h. keine Löcher im Inneren, verwendet. Die eingesetzten Heuristiken schließen Nicht-Gefäßkonfigurationen aus (z.B. nicht zusammenhängende Gebiete), lassen aber trotzdem genug Spielraum für die Rekonstruktion krankhaft veränderter Gefäßquerschnitte. Mit dem hierarchischen Vorgehen kann die grundsätzliche Form des Gefäßquerschnitts ermittelt werden. Der Ablauf ähnelt einem Quadtree-Verfahren. In feiner aufgelösten Stufen existieren deutlich mehr Lösungen. Diese unterscheiden sich aber nur minimal in kleinen Details. Da bezüglich der tatsächlichen Konfiguration der Binärmaske eine große Unsicherheit besteht, können die untersten Ebenen nur wenig Information zur korrekten Lösung beitragen. Sollte es mehr als eine 3D-Lösung geben, so kann zwischen diesen nicht differenziert werden. Das ist keine Beschränkung des Verfahrens, sondern liegt daran, dass nicht genügend Daten für eine eindeutige Lösung zur Verfügung stehen.

Für die Rekonstruktion des Innenvolumens der Herzkammern kommen ebenfalls densiometrische Verfahren zum Einsatz. Die Aufgabe ist wiederum als Rekonstruktion einer Binärmatrix aus parallelprojizierten Dichteprofilen formuliert. Stapelt man mehrere Querschnittsflächen übereinander, so lässt sich das Kammervolumen rekonstruieren. In [PO96, PO94, PO92] werden zuerst verschiedene geometrische und densiometrische Bildfehler korrigiert. Die wichtigsten sind geometrische Verzerrungen, Streuung und Rauschen, die durch die Physik der Röntgenstrahlung und technische Unzulänglichkeiten des Aufnahme-

systems hervorgerufen werden. Daneben führen eine ungleichmäßige Kontrastmittelfüllung des Volumens und Subtraktionsartefakte zu Fehlern. Das Problem besteht mathematisch darin, $m \cdot n$ binäre Variable $x_{ij} \in \{0, 1\}$ durch Lösen eines Systems aus $m + n$ linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_{ij} &= a_j, \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

mit der Einschränkung

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{i=1}^m b_i$$

zu berechnen. Mit Hilfe der *switching operation*, dem Austauschen der Diagonalelemente in einer 2×2 Umgebung

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

die Zeilen- und Spaltenprojektionen unverändert lassen, werden neue Lösungen aus bereits bestehenden generiert.

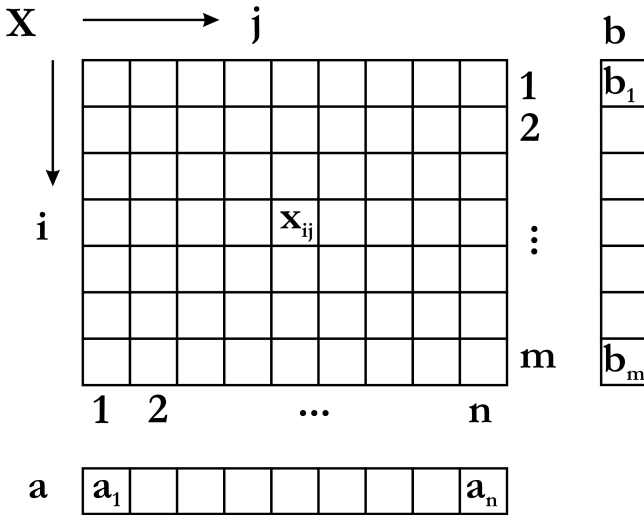


Abbildung 2.8: Binär-Matrix Rekonstruktion aus zwei orthogonalen Projektionen

Die Grauwerte im Bild werden zuerst logarithmisch an die Röntgenabsorption angepasst und anschließend wird eine eventuell nichtlineare Übertragungsfunktion des Systems korrigiert. Nach Auswahl geeigneter Bilder aus einem Herzzyklus werden die Bildschwerpunkte so angepasst, dass sie in beiden Bildern auf korrespondierenden Epipolarlinien liegen. Die beiden eindimensionalen Schnitte werden nochmals angepasst, sodass die mittleren Spaltensummen gleich sind. Als zusätzliche Randbedingung für die Rekonstruktion wird die Ähnlichkeit von Querschnitten sowohl über die Zeit als auch über räumliche Distanzen verwendet. Verschiedene Referenzmodelle durchschnittlicher linker und rechter Ventrikel kommen bei der Initialisierung der Berechnungsphase zum Einsatz. Dreidimensionale morphologische Operationen glätten nachträglich das Oberflächenmodell. Obwohl das Verfahren nur das Kontrastmittel im inneren Volumen der Herzkammer abbildet, soll damit auch die Bewegung der Kammerwand untersucht werden.

In [KM92] wird der Gefäßquerschnitt über elliptische Querschnitte bestimmt. Vorausgesetzt die Bildebene liegt senkrecht zur Schnittebene durch das Gefäß, so kann aus den Intensitätsverteilungen der beiden Ellipsenprojektionen der Flächeninhalt der Ellipse eindeutig bestimmt werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Annahme eines elliptischen Gefäßquerschnittes für Koronararterien gerechtfertigt ist. Die Rekonstruktion basiert zudem auf den vereinfachenden Annahmen einer Parallelprojektion und eines homogenen Bildhintergrundes.

In [PL88] werden die Parameter eines Gefäß-Hintergrund-Modells mit Hilfe eines Maximum-Likelihood-Schätzers an das Intensitätsprofil eines elliptischen Querschnittes angepasst.

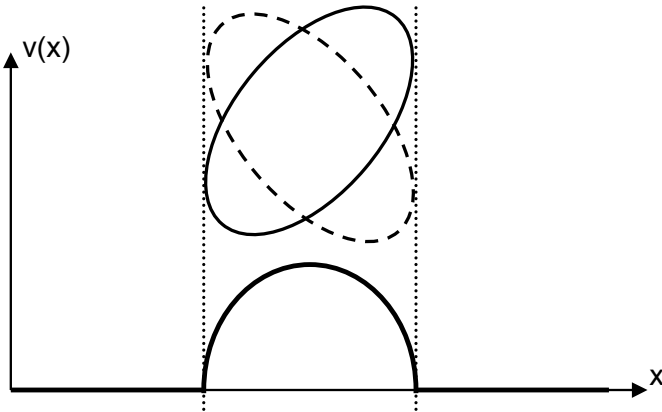


Abbildung 2.9: Für flächengleiche Ellipsen ist die Ermittlung des Rotationswinkels aus der Projektion eines Dichteprofiles $v(x)$ nicht ohne weiteres möglich. Der Flächeninhalt $A_E = \pi ab$ der Ellipse, mit den Ellipsenhalfmessern a und b , lässt sich dagegen eindeutig bestimmen.

Die Projektion einer Ellipse $v(x)$ wird durch das Modell mit r , α und c parametrisiert,

$$v(x) = \begin{cases} 2\alpha\sqrt{r^2 - (x - c)^2}, & \text{für } |x - c| \leq r; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3)$$

wobei $r^2 = a_1^2 \cos^2 \theta + a_2^2 \sin^2 \theta$, a_1 und a_2 die Ellipsenhalfmesser und θ der Rotationswinkel ist. Damit ergibt sich $\alpha = \frac{a_1 a_2}{r^2}$ und die Projektion des Ellipsenschwerpunktes auf die Projektionslinie ist c . Die Querschnittsfläche der Ellipse $A = \pi\alpha r^2$ ist unter beliebigen Projektionswinkeln konstant.

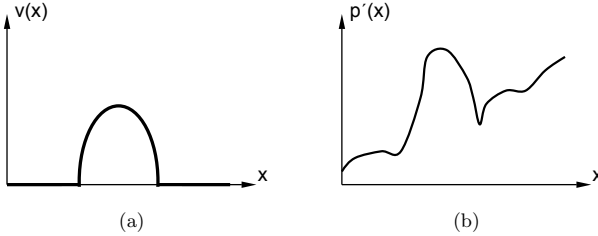


Abbildung 2.10: Die charakteristischen Intensitätsprofile in den Projektionen von Gefäßquerschnitten (a) das ideale Gefäßprofil, (b) tatsächliches Intensitätsprofil mit überlagertem Hintergrundprofil. Das Hintergrundprofil wird häufig als lineare Rampe approximiert. Aufwändigere nichtlineare Modelle versuchen, ein Polynom an den Intensitätsverlauf des Hintergrundes anzupassen.

Der Hintergrund $b(x)$ wird durch ein Polynom niedriger Ordnung modelliert. Die Begründung besteht darin, dass die typischen Hintergrundstrukturen wie Gewebe und Knochen wesentlich größer sind als Blutgefäße und sich die Intensität in ihren Projektionen deshalb nur langsam ändert. Die ideale Gefäßprojektion $p(x)$ wird mit der gaußförmigen Punktantwort (PSF) $g(x)$ des Aufnahmesystems gefaltet. Quantenrauschen¹⁰ und Digitalisierungsrauschen werden durch weißes gaußverteiltes additives Rauschen $w(x)$ modelliert. Damit ergibt sich für das beobachtete densitometrische Profil $f(x)$

$$f(x) = \underbrace{[v(x) + b(x)]}_{p(x)} * g(x) + w(x). \quad (2.4)$$

Ein ähnliches Projektionsmodell wird auch in [KM93] verwendet. Grundlage ist die biplane Projektion eines generalisierten Zylindermodells¹¹.

In [KTS88] wird das Levenberg-Marquardt Verfahren zur Parameterschätzung eingesetzt. Gesucht werden vor allem die Gefäßränder in den Projektionen. Das Modell geht von

¹⁰Fluktuationen in der Intensität der Röntgenstrahlung

¹¹Ein generalisiertes Zylindermodell besteht aus aneinander gesetzten Kegelstümpfen, mit denen ein Gefäßverlauf angenähert wird. In manchen Fällen wird auch eine Ellipse mit variablen Hauptachsen entlang einer definierten Kurve im Raum verschoben.

elliptischen oder kreisförmigen Gefäßquerschnitten sowie von einer Parallelprojektion mit senkrecht angeordneten Bildebenen aus. Die Unschärfe im Bild wird durch eine gaußförmige Punktantwort (PSF) modelliert:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x^2/2\sigma^2)). \quad (2.5)$$

In Bereichen mit niedrigen Raumfrequenzen trägt hauptsächlich die Röntgenstreuung zur Unschärfe im Bild bei. In Bereichen hoher Raumfrequenzen (z.B. Kanten) wird die Unschärfe vorwiegend durch den nicht punktförmigen Röntgenbrennfleck und dessen Anisotropie bedingt. Die Parameter des nichtlinearen Modells umfassen zwei Parameter für die Beschreibung des Intensitätsprofils plus eine Koordinate für die Lage des Schwerpunktes der Ellipse entlang der Profillinie, zwei Parameter des als linear angenommenen Hintergrundprofils $b(x) = q_0 + q_1x$, sowie die Standardabweichung der Punktantwort $g(x)$. Insgesamt ergeben sich sechs zu schätzende Parameter, die in einem Parametervektor a zusammengefasst sind.

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_6]^T$$

Bei der Levenberg-Marquardt-Parameterschätzung handelt es sich um ein Verfahren zur nichtlinearen Optimierung des mittleren quadratischen Fehlers. Gegeben ist der Datenvektor

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T \quad (2.6)$$

mit $f_i = f(x_i)$ und den beobachteten Daten x_i . Die Anzahl der Datenpunkte im Profil ist N . Die Schätzung \hat{f} ist definiert über

$$\hat{f} = [\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_N]^T \quad (2.7)$$

Der Fehlervektor e ergibt sich aus

$$e = \hat{f} - f = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T \quad (2.8)$$

Die $N \times 6$ Jacobi-Matrix ist

$$J = [J_{ij}] = \left[\frac{\partial e_i}{\partial a_j} \right] \quad (2.9)$$

Das rekursive Verfahren minimiert den quadratischen Abstand zwischen $f(x)$ und \hat{f} . Die Formel für die Iteration lautet

$$a_{k+1} = a_k - \left[J^T J + \lambda I \right]^{-1} J^T e \quad (2.10)$$

wobei I die Einheitsmatrix und λ ein Parameter ist, mit dem das Verhalten des Optimierungsprozesses zwischen dem des Gradientenabstiegsverfahrens und dem des Gauß-Newton-Verfahrens variiert werden kann.

In [GDD⁺88] wird ein Polynom 5.Grades an die Intensitätsprofile angepasst. Aus der ersten und zweiten Ableitung des Polynoms werden die Gefäßgrenzen ermittelt. Sollten sich die ermittelten Gefäßdurchmesser für die linke und rechte Projektion unterscheiden, so

wird der Mittelwert aus beiden bestimmt. Zusätzlich wird der ermittelte Gefäßdurchmesser mit einer empirisch ermittelten Korrekturfunktion multipliziert, um systematische Fehler bei der Durchmesserschätzung zu korrigieren.

In Abbildung 2.11 sind Intensitätsprofile gezeigt, wie sie in den ursprünglichen Röntgenaufnahmen gemessen wurden.

2.3 Bewegungsschätzung

Beim Herzen ist, im Gegensatz zu anderen Organen, die Bewegungssituation sehr komplex, denn die im Röntgenbild sichtbare Bewegung ist eine Überlagerung unterschiedlicher Bewegungen eines dreidimensionalen Objektes. Atmung und Herzeigenbewegung erfolgen zyklisch mit unterschiedlichen Periodendauern. Spontane Bewegungen des Patienten sind zufälliger Natur. Zusätzlich kann das Ein- bzw. Ausströmen des Kontrastmittels Ursache für sichtbare Veränderungen in den Bildern sein. Für eine begrenzte Zeit lassen sich Atem- und Bewegungsartefakte des Patienten unterdrücken bzw. minimieren. Trotzdem treten in den Angiogrammen Bewegungen auf. Es gibt mehrere Gründe für eine automatische Bewegungsschätzung:

- Bewegungskompensation, d.h. man möchte eine oder mehrere Bewegungskomponenten im Bild ausgleichen, um z.B. die verbliebene Bewegungskomponente zu analysieren.
- Geschwindigkeitsmessung, ist man in der Lage, die Länge von Verschiebungsvektoren im Bild zu bestimmen, so lassen sich daraus bei bekannter Geometrie und Zeitdifferenz die Geschwindigkeit von Strukturen bzw. der Stofftransport ermitteln.
- Kinematik/Dynamik, d.h. durch Analyse des zeitlichen Geschwindigkeitsverlaufs lassen sich Rückschlüsse z.B. auf die Elastizität von Strukturen ziehen.
- Dreidimensionale Gefäßrekonstruktion, die Bewegung im Bild ist ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal zwischen Koronargefäßen und Hintergrund und kann als Zusatzinformation für die Segmentierung dienen.

Die Bewegungsschätzung ist deshalb ein wichtiges Element bei der automatischen Auswertung von Cine-Angiogrammen¹². Im Folgenden werden einige Methoden der koronaren Bewegungsschätzung und ihre Anwendung vorgestellt.

In [SB00] wird beschrieben wie ohne die Verwendung einer intrakoronaren Doppler-Sonde ein zeitliches und räumliches Geschwindigkeitsprofil entlang eines ausgewählten Gefäßsegmentes ermittelt werden kann. Mit dieser Methode sollen maximale Flussgeschwindigkeit und Flussreserve bestimmt werden. Dabei wird aus biplanen Angiogrammen zunächst ein Modell der Mittellinie eines ausgewählten Gefäßsegments erzeugt und zeitlich extrapoliert. Somit ist es möglich, das Segment vor und während fast vollständiger Kontrastmittelfüllung in den Angiogrammen zu lokalisieren. Zur Mittellinienrekonstruktion wird die Epipolargeometrie benutzt. Die Geschwindigkeit wird aus densitometrischen

¹²Sequenzen von angiographischen Aufnahmen über die Zeit

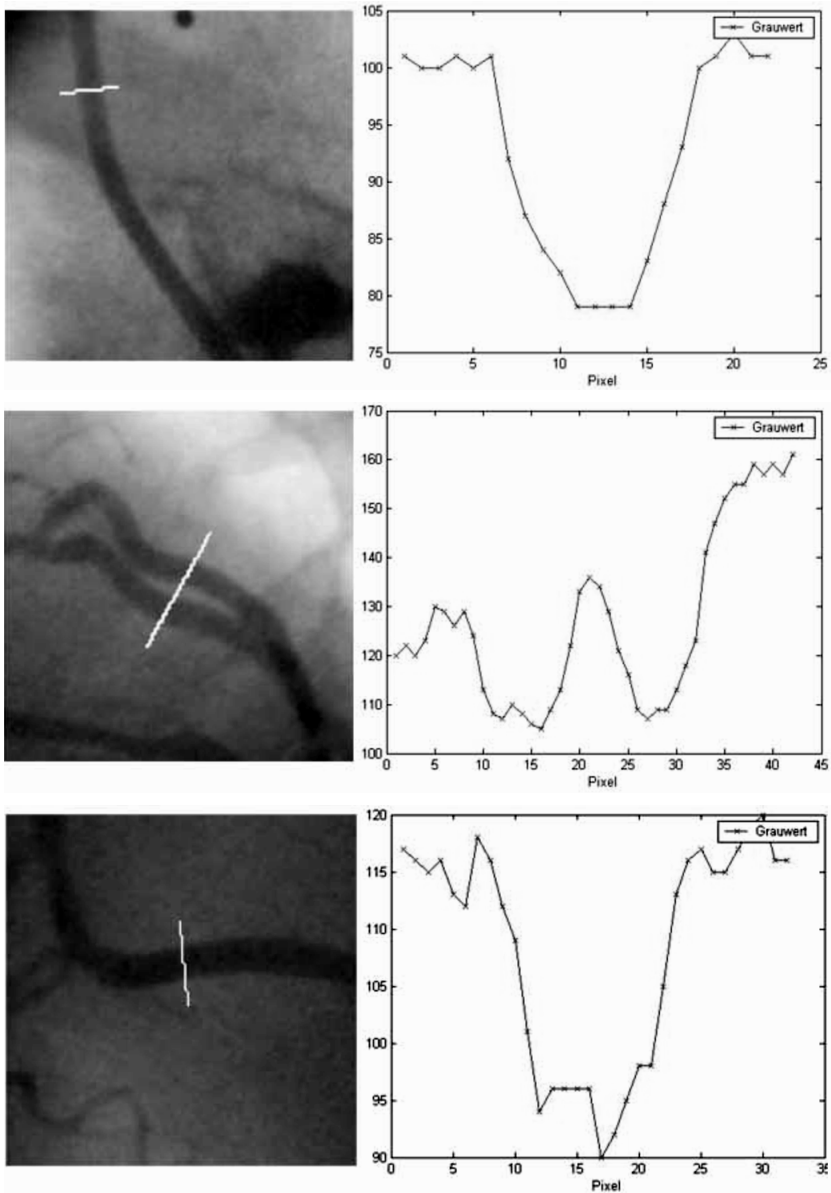


Abbildung 2.11: Beispiele für Intensitätsprofile, wie sie in den Bilddaten gemessen wurden. Links dargestellt ist die Schnittlinie senkrecht zur Gefäßrichtung, rechts das Intensitätsprofil. Die Grauwerte sind ganzzahlig von 0 ... 255, wobei dunkle Bildbereiche kleinen Werten entsprechen

Informationen in den angiographischen Aufnahmen bestimmt. Dazu werden transversale Dichteprofile an jeder Stelle entlang des zu untersuchenden Gefäßes gemessen und Dichtestufen zwischen den Gefäßrändern aufsummiert. Die Krümmung des Gefäßverlaufs und der Neigungswinkel des Gefäßes relativ zur Aufnahmeebene werden berücksichtigt. Es lassen sich daraus Geschwindigkeitskarten für das Gefäßinnere schätzen, ganz ähnlich wie mit einem intrakoronaren Ultraschall-doppler Gerät. Zusätzlich geben räumliche Geschwindigkeitsschwankungen einen Hinweis auf den Grad einer eventuell vorhandenen Stenose.

Will man nicht die Bewegungen des Kontrastmittels innerhalb der Koronarien sondern die Bewegungen der Koronarien selbst anhand biplaner Angiogramme ermitteln, so wird in der Literatur folgende Herangehensweise beschrieben. Der koronare Gefäßbaum wird in einzelne Segmente unterteilt. Die Segmente werden durch parametrische Modelle, sogenannte B-Splines, approximiert. Damit erhält man eine kompakte Repräsentation der Koronarien durch stetig differenzierbare Kurvenstücke. Der Verlauf eines Gefäßsegments wird durch eine dreidimensionale B-Spline-Kurve $C(u)$ vom Grad p , mit dem Kurvenparameter u beschrieben

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,p}(u) \mathbf{v}_i.$$

Dabei sind $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$ die n Kontrollpunkte und $B_{i,p}$ die B-Spline-Basisfunktionen.

Ziel der Bewegungsschätzung ist die Bestimmung der Transformation

$$\mathbf{M}^t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

die jeden Punkt \mathbf{q} des Gefäßbaumes zum Zeitpunkt t_0 in die entsprechende Position \mathbf{q}^t zum Zeitpunkt $t_0 + t$ überführt.

$$\mathbf{q}^t = \mathbf{M}^t(\mathbf{q})$$

In [SDCM⁺03, SDCMM02] wird ein hierarchischer Ansatz zur Bestimmung der Transformation \mathbf{M}^t benutzt. In drei Stufen wird über ein globales Bewegungsmodell starrer Körper, ein globales affines Bewegungsmodell und ein lokales Modell (B-solid-Transformation) die endgültige Transformation berechnet.

$$\mathbf{M}_R^t(\mathbf{q}) = \left[\begin{array}{c|c} R_t & T_t \\ \hline 0 \ 0 \ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{q} \\ 1 \end{array} \right]$$

Dabei ist R_t eine 3×3 Rotationsmatrix und T_t ist ein 3D-Translationsvektor. Da B-Splines invariant gegenüber Transformationen starrer Körper sind, ergibt sich die Transformation für die Kurve $C(u)$ aus

$$\mathbf{M}_R^t[C] = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,p}(u) \mathbf{M}_R^t(\mathbf{v}_i)$$

Zweiter Schritt in der Hierarchie ist die Bestimmung der dreidimensionalen affinen Transformation

$$\mathbf{M}_A^t(\mathbf{q}) = \left[\begin{array}{c|c} A_t & T_t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{q} \\ 1 \end{array} \right]$$

mit der 3×3 Matrix A_t und dem 3D-Translationsvektor T_t . Da B-Splines invariant gegenüber affinen Transformationen sind, ergibt sich die Transformation für die Kurve $C(u)$ als

$$\mathbf{M}_A^t[C] = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,p}(u) \mathbf{M}_A^t(\mathbf{v}_i)$$

Im letzten Schritt erfolgt eine sogenannte B-Solid-Transformation. Damit wird die lokale Verformung der Koronarien berücksichtigt. Dazu wird ein Verschiebungsfeld D_t eingeführt, das einer Verzerrung des dreidimensionalen Volumens entspricht. Das Verschiebungsfeld wird durch ein B-Solid¹³ beschrieben [SORM04]. Für die Transformation ergibt sich

$$\mathbf{M}_B^t = \mathbf{q} + D^t(\mathbf{q}).$$

Die B-Solid Transformation für die Kurve lautet

$$\mathbf{M}_B^t[C] = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,p}(u) \mathbf{M}_B^t(\mathbf{v}_i).$$

In einem dreistufigen Optimierungsprozess wird die Transformation \mathbf{M}^t geschätzt. Zuerst wird die Transformation \mathbf{M}_R^t in einem mit Gaußkernen absteigender Größe gefalteten Merkmalsbild (*maximum multiscale response map*) zum Zeitpunkt $t_0 + t$ bestimmt. Konvergiert die Prozedur für eine bestimmte Auflösung σ_R , so wird die Standardabweichung des Gaußkerns halbiert und die Suche nach \mathbf{M}_R^t in dem nun schärferen Bild fortgesetzt. Die Iteration endet für eine untere Schranke von σ_R . Mit der gefundenen Transformation \mathbf{M}_R^t wird die Mehrskalensuche für die affine Transformation initialisiert. Da nun 12 Freiheitsgrade zur Verfügung stehen, kann es zu nachträglichen Veränderungen in den bereits ermittelten Rotationen und Translation kommen. Das ist beabsichtigt und die Reihenfolge der Schätzung der endgültigen Transformation erfolgt in Richtung zunehmender Freiheitsgrade, um lokale Minima bei der Optimierung zu vermeiden. Im letzten Schritt wird nach der B-Solid-Transformation gesucht. Als Initialisierung dient die affine Transformation. Nach erfolgter Konvergenz ergibt sich die endgültige Transformation

$$\mathbf{M}^t = \mathbf{M}_B^t$$

In [SSRB05] wird eine Erweiterung des Bewegungsmodells für Atmung und die Herzeigenbewegung beschrieben. Die Schätzung des Bewegungszustandes erfolgt also nicht nur für das Herz sondern auch für die Atmung. Dazu werden die im Röntgenbild sichtbaren Bewegungen des Zwerchfells vermessen. Die gesamte Bewegung im Bild setzt sich dann aus der Überlagerung der Bewegungskomponenten der Atmung und der zyklischen Herzeigenbewegung zusammen.

¹³B-Splines, die ein Volumen verändern

2.4 Aktive Konturen

Aktive Konturen verwenden ein geometrisches Linienmodell, das durch Minimierung eines Energie-Funktionalen an die interessierenden Bildstrukturen angepasst wird. Bekannteste Vertreter sind die sogenannten *Snakes*, energieminimierende Splines, deren Gesamtenergie sich aus Form und Position innerhalb des Bildes zusammensetzt. Die bildhafte Analogie zu Schlangen als aktive, flexible, zusammenhängende, linienartige Gebilde ist beabsichtigt. Snakes sind keine Universallösung, wenn es darum geht, Konturen im Bild zu finden. Sie sind von einem übergeordneten Prozess abhängig, der die ungefähre Form und Startposition nahe der gewünschten Kontur initialisiert. Erst dann ist eine Verschiebung des Snakes in Richtung einer entsprechenden Lösung möglich. Bevor Methoden beschrieben werden, die Snakes für die dreidimensionale Rekonstruktion der Koronarien aus biplanen Angiogrammen verwenden, folgt eine kurze Zusammenfassung der Theorie von Snakes [KWT87].

Das zu minimierende Energiefunktional ist eine gewichtete Kombination interner und externer Kräfte. Die internen Kräfte werden über die Form des Snakes generiert, die externen Kräfte stammen aus dem Bild. Ein Snake sei als parametrisierte Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ gegeben. Dabei sind $x(t), y(t)$ die x, y -Koordinaten entlang der Kontur und t liegt im Bereich $[0, 1]$. Das zu minimierende Energiefunktional lautet allgemein

$$E_{\text{total}}(\gamma(t)) = \int_0^1 (E_{\text{intern}}(\gamma(\tau)) + E_{\text{extern}}(\gamma(\tau))) d\tau. \quad (2.11)$$

Die innere Energie E_{intern} hält die „Schlange“ zusammen, sodass sie nicht in mehrere Teile auseinander bricht und verhindert gleichzeitig extreme Knickwinkel innerhalb der Kontur. Damit erzielt man eine gewisse Glattheit der Kurve. Der Ausdruck „glatt“ bezieht sich hierbei auf die Differenzierbarkeit der Kurve. Die interne Energie ist

$$E_{\text{intern}} = \alpha \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 + \beta \left| \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right|^2 \quad (2.12)$$

mit der Elastizität α und der Steifheit β der Kurve.

Der Term für die äußere Energie E_{extern} wird oft über ein Potential erzeugt, das im einfachsten Fall durch ein Abstandsfeld zu bestimmten Bildmerkmalen definiert wird.

$$E_{\text{extern}} = |\text{grad}f(x, y)|^2 \quad (2.13)$$

Dabei ist $f(x, y)$ der Grauwert an der Stelle (x, y) im Bild. Dieses Potential zieht den Snake zu den Bildmerkmalen hin und verformt ihn entsprechend. Snakes sind ursprünglich für die Konturextraktion in zweidimensionalen Bildern entwickelt worden. Für die biplane Gefäßrekonstruktion wird in [CRT⁺00] eine computer-generierte elastische Kurve im Raum so verformt, dass sie sich optimal an die beiden Gefäßprojektionen anpasst. Der Term für die äußere Energie setzt sich aus zwei Anteilen der biplanen Projektionen zusammen. Entsprechend wird das Verfahren als *Biplane Snakes* bezeichnet (siehe Abbildung 2.12). Dieser Ansatz wird auch in [RTVLV98] verwendet. Gefäßsegmentierung und Rekonstruktion erfolgen dort in einem Schritt. Die Form der Gefäße ist dabei durch die physikalischen

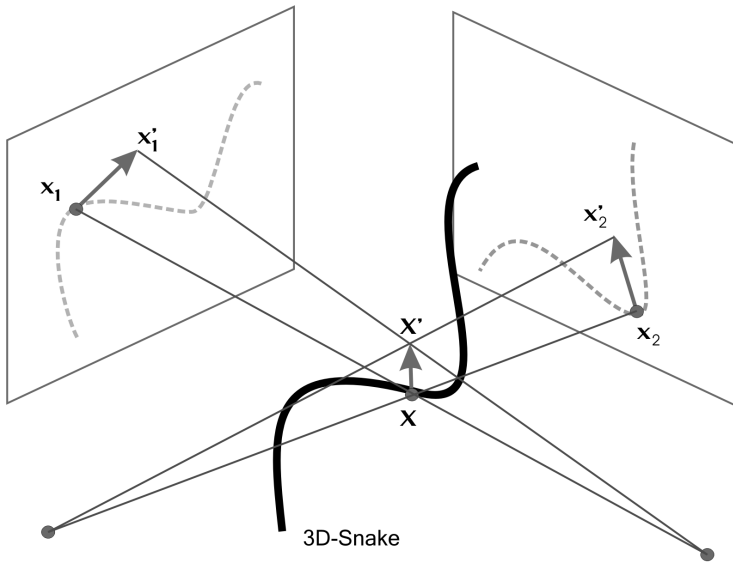


Abbildung 2.12: Biplane Snakes [CVMR02]. Die externen, durch die Bildmerkmale in den Punkte x_1 und x_2 hervorgerufenen Kräfte verschieben den Punkt X des 3D-Snakes in Richtung des Punktes X' . Über mehrere Iterationen hinweg wird der 3D-Snake so verformt, dass sich seine Projektionen optimal an die Merkmale in den Bildern anpassen.

Randbedingungen vorgegeben. Das Modell berücksichtigt implizit räumliche Kontinuität und strukturelle Vorgaben. Der iterative Energieminimierungsprozess endet mit einem 3D-Snake, der unter Einhaltung der Glattheitsbedingung am dichtesten an die Bilddaten angepasst ist. Die interne Energie wirkt wie kleine Federn, die benachbarte Kurvenpunkte anziehen und gleichzeitig eine übermäßige Torsion der Kurve verhindern. Die externen Kräfte stammen aus einem Potential, dessen Werte proportional zur minimalen Entfernung zu den Gefäßkamppunkten sind. Die Gefäßkamppunkte wurden durch eine vorausgehende Merkmalsextraktion in den Bilddaten bestimmt. Um die Präzision der Gefäßrekonstruktion zu erhöhen wird kein statisches, sondern ein variables Isozentrum angenommen. Dazu wird nach einer vollständigen 3D-Snake-Berechnung ein neues Isozentrum geschätzt. Ein Gradientenabstiegsverfahren wertet die Differenzen der Snakeprojektionen und der Kammpunkte im Bild aus. Im zweiten Durchlauf der Snakeberechnung wird mit dem neuen Isozentrum eine höhere Präzision und bessere Konvergenz des Verfahrens erreicht.

In [CVMR02] wird das biplane Snake-Modell so modifiziert, dass die geometrischen Verzerrungen des Bildverstärkers mit berücksichtigt werden. Die Ursachen für die Verzerrungen wurden analysiert und in zwei Klassen eingeteilt. Eine Klasse statischer Fehlerquellen, wie z.B. die Wölbung der Bildsensoroberfläche, wird beschrieben. Fehler mit dynamischer Ursache sind vor allem die rotationswinkelabhängige Verzerrung durch den Einfluss des

Erdmagnetfeldes¹⁴. Nach einer aufwändigen Kalibrierung des Aufnahmesystems wird ein nichtlineares Transformationsmodell berechnet, wobei statische und winkelabhängige Einflüsse unabhängig voneinander durch Polynome niedriger Ordnung approximiert werden.

Um die Konturkonvergenz zu verbessern, wird in [CVMR02] der Einsatz von *GGVF* *Generalized Gradient Vector Flow* vorgeschlagen. Dadurch wird der „Fangbereich“ einer Kontur erweitert. Ein externes Kraftfeld, GVF genannt, wird durch Diffusion aus dem Gradientenbild gewonnen. Das hat den Vorteil, dass Kräfte auch weit entfernt von Kanten wirken können und die Kräfte sind in der Nähe von Kanten so groß, dass sich Snakes auch an Konkavitäten und Einschnürungen anschmiegen können (siehe Abbildung 2.13).

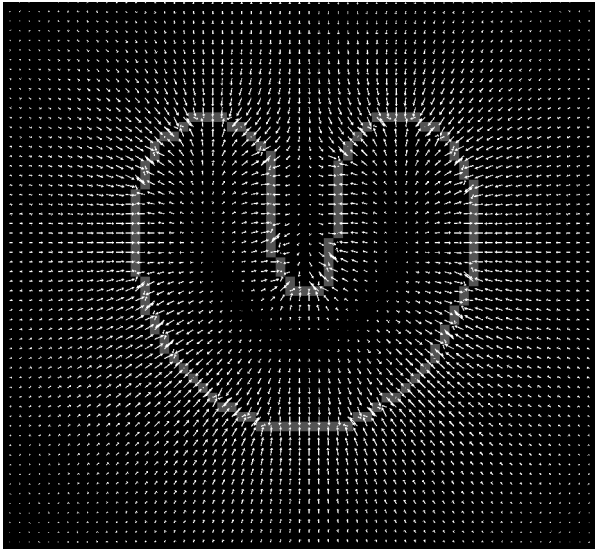


Abbildung 2.13: GGVF-Snake. Das Vektorfeld der externen Kräfte reicht über große Entfernungen und nimmt ein Maximum nahe der Kontur an. Damit lässt sich ein schlecht initialisierter Snake trotzdem gut an die Bildkontur anpassen.

2.5 Fusion mit anderen Bildmodalitäten

Bei der Bildfusion muss man das klassische Bildregistrierungsproblem lösen. Das Ziel besteht darin, unterschiedliche Aufnahmen des gleichen physikalischen Objektes in Übereinstimmung, d.h. Deckungsgleichheit, zu bringen. Dabei können die Aufnahmen von der gleichen, zwischen den Aufnahmen bewegten Bildquelle stammen oder von ganz

¹⁴zu Ursachen und Auswirkung von Bildverzerrungen siehe auch [SWZJ88]

unterschiedlichen Bildquellen, die dann zwangsläufig eine unterschiedliche Aufnahmegeometrie besitzen. Die Luftbildauswertung ist ein gutes Beispiel. Soll z.B. aus mehreren Einzelaufnahmen einer Region während eines Satellitenüberfluges ein einzelnes großes Mosaikbild zusammengesetzt werden, so müssen die Einzelbilder geometrisch so angepasst werden, dass sie sich lückenlos aneinander fügen lassen. Wurden Aufnahmen mit verschiedenen Satelliten oder in unterschiedlichen Bereichen des elektromagnetischen Spektrums angefertigt, so ist ebenfalls eine Bildregistrierung notwendig, um die Einzelaufnahmen in Übereinstimmung zu bringen. Durch die Kombination der Daten aus unterschiedlichen Bildquellen hat man die Möglichkeit, mehr als nur die rein geometrische Information aus den Bildern zu extrahieren. Durch geeignete Kombinationen lassen sich z.B. Bewuchs und Zustand der Vegetation aus Satellitenbildern ableiten.

Ähnliche Ziele verfolgt man bei der Fusion unterschiedlicher bildgebender Verfahren in der Medizin. So ist es z.B. möglich, strukturelle Informationen über den koronaren Gefäßbaum und funktionale Informationen, wie Physiologie und Stoffwechselvorgänge, in einer gemeinsamen Darstellung zusammenzufassen. Eine computergestützte Verknüpfung unterschiedlicher Bildmodalitäten ist notwendig, weil vom Menschen bei getrennter Betrachtung der Bilder und mentaler Fusion der gesamte Informationsinhalt oft nicht vollständig ausgewertet werden kann. In den folgenden zwei Unterabschnitten werden einige Beispiele für Fusionen unterschiedlicher Bildmodalitäten mit biplaner Koronarangiographie beschrieben.

Die Koronarangiographie ist sehr gut in der Lage, Gefäßdurchmesser zu bestimmen und eventuelle Engstellen zu lokalisieren. Eine eingehendere Inspektion des betroffenen Gefäßabschnittes ist dann z.B. mit intravaskulärem Ultraschall möglich. Damit lassen sich Ablagerungen und die Gefäßwand räumlich sehr hoch aufgelöst darstellen. Ist dagegen die Durchblutung des Muskels von Interesse, so ist eine Fusion mit *SPECT*¹⁵-Schichtbildern sinnvoll. Die Koronarangiographie liefert dann strukturelle bzw. anatomische Informationen und die Tomographiedaten ergänzen physiologische bzw. funktionelle Informationen. Mit den Methoden der Bildverarbeitung und 3D-Visualisierung lässt sich daraus ein computergestütztes 3D-Modell der Struktur und Funktion des Koronarsystems erstellen.

2.5.1 Intravaskulärer Ultraschall und Angiographie

Für die genauere Querschnittsrekonstruktion ist eine Fusion der biplanen Angiogramme mit *IVUS*¹⁶ sinnvoll, da sich beide bildgebenden Verfahren ergänzen. Problematisch für die Fusion ist die genaue Bestimmung der Ebene des Ultraschall-Schnittbildes, da der Katheter im Gefäßinneren nicht starr fixiert ist.

In [WOS04] wird aus biplanen Röntgenbildern und den Ultraschalldaten eines EKG-getriggerten Rückzuges ein VRML-Modell¹⁷ für eine virtuelle Endoskopie berechnet. Ziel ist

¹⁵Single Photon Emission Computed Tomography, nuklearmedizinische Methode, um physiologische Vorgänge im lebenden Organismus sichtbar zu machen

¹⁶IVUS: intravaskulärer Ultraschall, Ultraschallaufnahmen aus dem Inneren von Blutgefäßen. An der Katheterspitze befindet sich ein Ultraschall-Sender-Empfänger, mit dem Querschnittsbilder sehr hoher räumlicher Auflösung angefertigt werden können. Diese Untersuchungsmethode ist besonders für die Inspektion der Gefäßinnenwand und zur Untersuchung von Ablagerungen geeignet.

¹⁷VRML: *virtual reality modelling language*, Programmiersprache zur Beschreibung virtueller dreidimen-

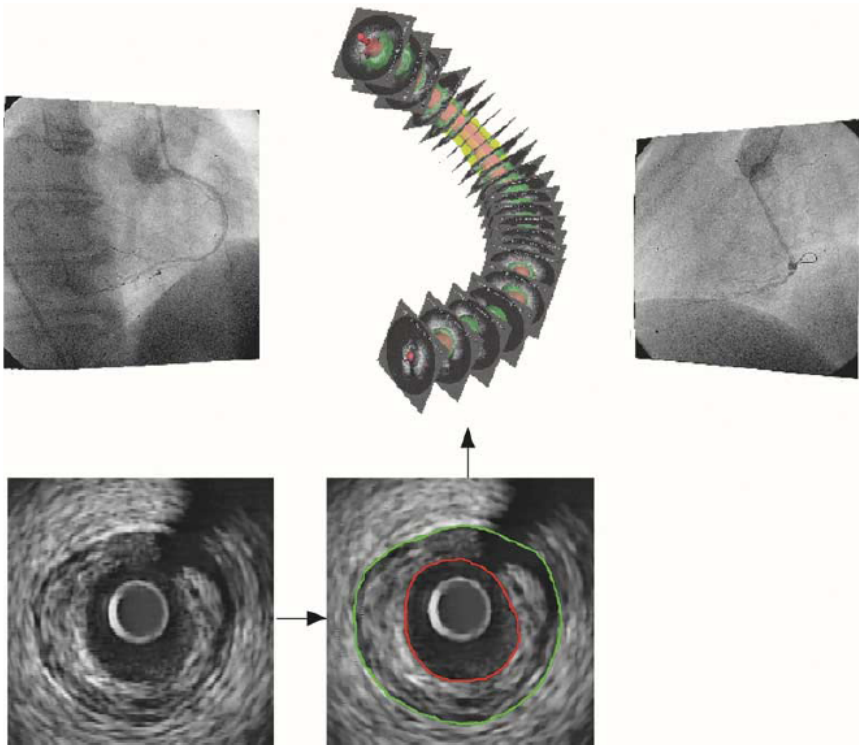


Abbildung 2.14: Angiographie und IVUS-Daten werden zu einem VRML-Modell zusammengefügt [WOS04]

die Darstellung eines virtuellen Fluges durch das Gefäß- bzw. Organinnere. Der räumliche Gefäßverlauf wird aus den Angiographiedaten bestimmt, während die IVUS-Daten sehr genauen Aufschluss über den Zustand der Gefäßinnenwand geben. Durch die geeignete Verknüpfung der unterschiedlichen Bilddaten erreicht man eine detailreiche Darstellung der tatsächlichen Verhältnisse. Um die Lage des Ultraschall-Katheters aus den Röntgenaufnahmen nachträglich bestimmen zu können, wird die Dichte des Kontrastmittels so gewählt, dass sowohl der Führungsdraht als auch die Lumengrenzen erkennbar bleiben. Durch die Torsion des Katheters sind die Aufnahmeebenen der Ultraschallschnittbilder gegeneinander verdreht. Dieser Aufnahmefehler muss nachträglich kompensiert werden. Dazu ist ein Verfahren in [WPVB⁺99] beschrieben, bei dem die Exzentrizität des Katheters relativ zur Gefäßmittellinie ausgenutzt wird. Durch eine nachträgliche Anpassung der Querschnittskonturen kann eine absolute Orientierung aus den Bildern ermittelt werden.

sionaler Szenarien

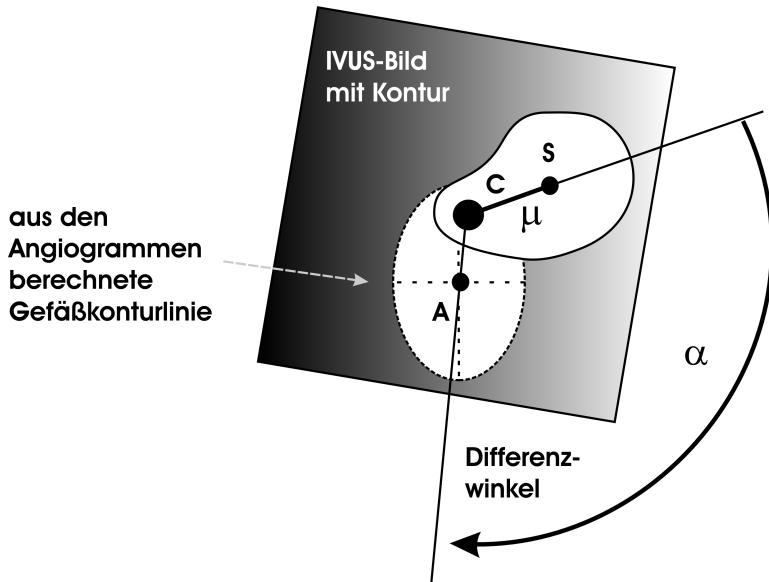


Abbildung 2.15: Bestimmung der absoluten Orientierung durch Ausrichtung der Querschnittsflächen und gleichzeitige Kompensation der relativen Verdrehung benachbarter Schnittbilder [WPVB⁺99]

Siehe dazu Abbildung 2.15.

2.5.2 SPECT und Angiographie

Um die physiologischen Konsequenzen einer Stenose besser untersuchen zu können, verwendet man in [FKF⁺96] eine Kombination aus SPECT- und Angiographiedaten. Dazu wird aus den 2D-SPECT-Schnittbildern ein Modell des Epikards des linken Ventrikels bestimmt. Durch schrittweise Rotation und Translation des zugehörigen 3D-Modells der linken Koronararterie wird eine Ausrichtung beider Modelle vorgenommen. Um die Fehlanpassung zwischen beiden Modellen zu minimieren, wird ein Optimierungsverfahren eingesetzt. Die Kostenfunktion des Optimierungsverfahrens benutzt den Abstand der LAD von der intraventrikulären Furche, den Abstand der LCX von der atrioventrikulären Furche sowie den Mittelwert und die Standardabweichung des Abstandes aller Arterienpunkte von der Herzoberfläche. Das Verfahren wurde an Schweineherzen getestet, in deren Koronarien künstliche Verengungen eingebracht wurden.

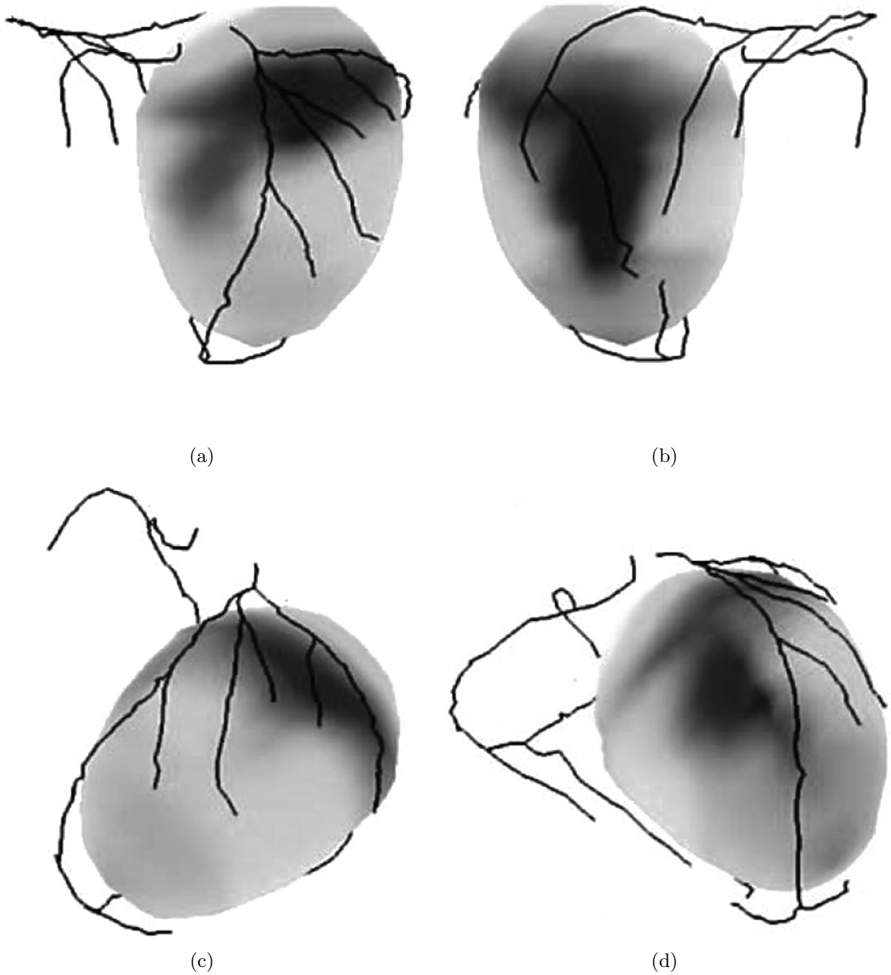


Abbildung 2.16: Beispiel für die Fusion von SPECT und Angiographiedaten aus [NKCK05]. Zu erkennen sind die Koronargefäße als dunkle Linien und in Form von Graustufen ist die Durchblutungssituation des linken Ventrikels dargestellt. (a) anteriore Ansicht, (b) inferiore Ansicht, (c) LAO-Ansicht, (d) RAO-Ansicht

3 Pfadsuche

In diesem Abschnitt werden Konzepte zur optimalen Lösung von Suchproblemen behandelt. Im Wesentlichen betrifft das die Suche nach kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten. Die Darstellung erfolgt im Hinblick auf die Anwendung zur Gefäßverfolgung und dreidimensionalen Rekonstruktion aus biplanen Röntgenaufnahmen. Zum Beispiel könnte für zwei im Bild markierte Punkte der dazwischenliegende Gefäßabschnitt gesucht werden. Es kann sich aber auch um höherdimensionale Räume handeln, in denen nach Konfigurationen gesucht wird, die zwei Gefäßpunkte unter Einhaltung geometrischer und merkmalsbasierter Randbedingungen verbinden. Um Lösungsmöglichkeiten für derartige Probleme zu liefern, sollen im folgenden Abschnitt allgemeine Grundlagen zur Pfadsuche näher erläutert werden.

3.1 Problemlösung durch Suche

Im Allgemeinen verläuft eine Suche über eine Menge unterschiedlicher Konfigurationen, wobei Konfigurationen Anordnungen von Dingen, gedanklicher oder gegenständlicher Art, bezeichnen. Die Suche ist beendet, sobald eine geeignete Zielkonfiguration erreicht wird. Je nach Problemstellung kann das entweder eine beliebige Zielkonfiguration sein, die als erste bestimmte Bedingungen erfüllt (*constraint satisfaction problem*), oder es müssen zusätzliche qualitative Kriterien in einem Maß erfüllt sein, wie das keine andere Zielkonfiguration ermöglicht (*optimization problem*) [Pea84].

Eine Suche wird als systematisch bezeichnet, falls sie folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1. Jede Konfiguration wird höchstens einmal untersucht.
2. Keine Konfiguration wird von der Suche ausgeschlossen.

Der erste Punkt gilt der Effizienz, um aufwendige Mehrfachuntersuchungen zu verhindern. Der zweite Punkt stellt die Vollständigkeit der Suche sicher. Es wird keine Möglichkeit ausgelassen, um eine mögliche Zielkonfiguration zu erreichen.

Für die Anwendung eines Suchalgorithmus sind folgende Voraussetzungen günstig:

- Eine geeignete Kodierung aller für das Problem relevanten Konfigurationen,
- eine Menge von Operatoren zur Umwandlung von Kodierungen, sodass alle Konfigurationen systematisch erzeugt werden können,
- eine effektive Methode zur Auswahl von Operatoren, um möglichst schnell eine Zielkonfiguration zu erreichen.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so lässt sich das reale Problem zu einem Modell abstrahieren und wird damit einer mathematischen Beschreibung zugänglich. Alle relevanten Informationen über einen Zustand der Welt bilden die Zustandskodierung. Die Regeln, nach denen Übergänge zwischen Zuständen innerhalb des Modells erfolgen, entsprechen Operatoren. Die Menge aller Zustände, die man durch Anwendung von Operatoren erreichen kann, bildet den Zustandsraum. Zustände und Zustandsübergänge ergeben das Zustandsraummodell, das sich als Graph darstellen lässt. Die Knoten in diesem Graphen stehen für die Zustände und die Kanten für die Zustandsübergänge. Ein Problem ist durch einen Startzustand und die Beschreibung mindestens eines Zielzustandes innerhalb des Zustandsraumes definiert. Eine Lösung entspricht einem Pfad vom Startzustand zu einem Zielzustand. Ein Lösungspfad bezeichnet die Folge von Zustandsübergängen (Transformations-Operatoren), um den Startzustand in den Zielzustand zu überführen. Sollten mehrere Lösungspfade existieren, so verwendet man zusätzlich Optimalitätskriterien, z.B. eine minimale Anzahl von Zustandsübergängen oder minimale Kosten, um zwischen den unterschiedlichen Lösungen zu differenzieren. Neben dem Lösungspfad existieren auch Teillösungen, bzw. partielle Lösungen, deren Kodierung eindeutig sein muss und Informationen zum verbleibenden Restproblem enthält. Speziell für die informierten Suchstrategien ist das wichtig, damit abgeschätzt werden kann, wie weit eine Lösung im Rahmen der Suche noch entfernt ist. Dazu ein Beispiel:

$$\underbrace{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D}_{\text{Teillösung 1}} \rightarrow \underbrace{\{E, F\}}_{\text{Zustand } n} \rightarrow G \qquad \underbrace{A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D}_{\text{Teillösung 2}} \rightarrow \underbrace{\{E, F\}}_{\text{Zustand } n} \rightarrow G$$

Obwohl sich die partiellen Lösungen unterscheiden, für Teillösung 1 führt der Weg von A nach B über C nach D, für Teillösung 2 von A nach C über B nach D, wird durch n der gleiche Zustand beschrieben, nämlich das verbleibende Problem von D nach G zu gelangen. Entsprechend dem Prinzip der dynamischen Programmierung, dass nur optimale Teilpfade für eine optimale Gesamtlösung in Frage kommen, werden die beiden Teillösungen umgehend rekombiniert und nur die bessere der beiden wird weiterverwendet.

3.2 Metrik und Kostenfunktion

Um das Maß an Ähnlichkeit zwischen Dingen beschreiben zu können, ist eine Abstandsfunktion notwendig. Eine allgemeine Darstellung des Abstandes $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ im N-dimensionalen Raum \mathbb{R}^N liefert die Minkowski-Metrik

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \left(\sum_{n=1}^N |\mathbf{x}_{in} - \mathbf{x}_{jn}|^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \gamma \geq 1. \quad (3.1)$$

Für $\gamma = 1$ ergibt sich der *Manhattan-Abstand*¹ und für $\gamma = 2$ erhält man den euklidischen Abstand. Unabhängig davon welche Funktion verwendet wird, müssen drei fundamentale

¹entspricht der L1-Norm

Eigenschaften für eine Metrik erfüllt sein.

Axiome des metrischen Raumes [Jar90]:

$$\begin{array}{ll} \text{Positivität} & d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) > 0, \quad \text{für } \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j \\ & d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0, \quad \text{für } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j \end{array}$$

$$\text{Symmetrie} \quad d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)$$

$$\text{Dreiecksungleichung} \quad d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \leq d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k), \quad \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$$

Die Symmetrie der Abstandsfunktion macht diese richtungsunabhängig. Werden durch Randbedingungen oder zusätzliche Vorgaben Asymmetrien eingeführt, so ersetzt man den Abstand durch die Kosten, die notwendig sind, um von \mathbf{x}_i nach \mathbf{x}_j zu gelangen. Im Gegensatz zur Abstandsfunktion, die nur ungerichtete Verbindungen zulässt, kann mit der Kostenfunktion eine gerichtete Verbindung beschrieben werden. Setzt man die Kosten auf unendliche Werte, so lassen sich auf diese Weise Hindernisse und „Einbahnstraßen“ erzeugen.

Die Kostenfunktion $c(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ liefert die Kosten, die anfallen, um von \mathbf{x}_i zum Nachfolger \mathbf{x}_j zu gelangen. Für alle \mathbf{x}_k , die nicht zur Menge der Nachfolger von \mathbf{x}_i gehören, ist $c(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = \infty$. Die Menge der Nachfolger von \mathbf{x}_i enthält alle Elemente, die durch Anwendung einer zulässigen Transformations-Operation aus \mathbf{x}_i erzeugt werden können. Die optimalen Kosten um von \mathbf{x}_i nach \mathbf{x}_k zu gelangen, wobei \mathbf{x}_i und \mathbf{x}_k nicht zwingend Nachbarn sein müssen, werden mit $c^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k)$ bezeichnet. Kosten und Nachbarschaftsrelationen lassen sich als gerichteter Graph mit Kantengewichten darstellen. Die Kantengewichte entsprechen den Kosten, die notwendig sind, um einen Nachbarknoten im Graphen zu erreichen. Ebenso lassen sich die Gewichte oder Kosten des gerichteten Graphen als Kostenmatrix darstellen. Für einen ungerichteten Graphen ist diese Matrix symmetrisch.

3.3 Graphensuche

Metrik und Topologie des Zustandsraumes lassen sich entkoppeln. Die Metrik wird durch die Kostenfunktion festgelegt. Die Nachbarschaftsbeziehungen lassen sich explizit in Form eines gerichteten Graphen darstellen. Den Kanten des Graphen werden die Kosten in Form von Gewichten zugeordnet (siehe z.B. Abb. 3.1). Der Zustandsgraph wird als bewerteter gerichteter Graph (V, K, c) aus dem Zustandsraum, den Operatoren und einer nichtnegativen Kostenfunktion konstruiert.

$$\begin{array}{ll} V = \{n, n', n'', \dots\} & \text{eine beliebige Knotenmenge} \\ K \subseteq V \times V & \text{eine Menge von Kanten} \\ c : K \rightarrow \mathbb{R}^+ & \text{eine nichtnegative Kostenfunktion} \end{array}$$

Die Zustände bilden die Knoten und die Operatoren entsprechen den Kanten im Graphen. Falls eine gerichtete Kante vom Knoten n zum Knoten n' führt, so schreibt man $n \prec n'$ mit $(n, n') \in K$. Der Knoten n wird als Vorgänger von n' bezeichnet. Entsprechend ist n'

ein Nachfolger des Knotens n . Der Startknoten wird mit $n_s \in V$ bezeichnet und besitzt als einziger Knoten keinen Vorgänger. Der Zielknoten $n_g \in V$ besitzt keinen Nachfolger bezüglich der Präzedenzrelation ' \prec '. Die Anzahl der Nachfolger zu einem Knoten wird Verzweigungsgrad genannt. Für die hier betrachteten diskreten Suchprobleme ist die Knotenmenge immer endlich.

Für eine Graphensuche sind folgende Operationen interessant:

- Knoten generieren: Berechnung der kodierten Darstellung eines Knotens aus der seines Vorgängers
- Knoten expandieren: alle Nachfolger werden generiert

Eine Knotenfolge $(n_s \prec n \prec \dots \prec n_g)$ ist ein Lösungspfad durch den Graphen, falls n_s der Startknoten ist und n_g zur Menge der Zielknoten gehört. Das Graphensuchproblem besteht nun darin, einen Lösungspfad mit extremalen Kosten zu finden. Ein Lösungspfad bildet eine Geodäte im Zustandsraum bezüglich der durch die Kostenfunktion festgelegten Metrik. Insbesondere gilt dies für kontinuierliche Zustandsräume. In kontinuierlichen Zustandsräumen sind die Operatoren durch Vektorfelder ersetzt. Pfade sind integrale Kurven in den Vektorfeldern [LaV06]. Für alle weiteren Betrachtungen sind hier nur Suchprobleme mit diskreten Zustandsräumen relevant.

Um den Verlauf der Suche zu beschreiben wird dem Zustandsraum ein Suchbaum überlagert (siehe z.B. Abb. 3.4). Die Wurzel bildet der Startknoten. Ein Knoten im Suchbaum repräsentiert einen partiellen Pfad durch den Zustandsraum und ist deshalb vom Zustand selbst zu unterscheiden. Obwohl der Zustandsraum endlich ist, z.B. 20 Zustände $\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,L,M,N,O,P,R,S,T,U,V,Z\}$ für den Graphen in Abb. 3.1, existiert eine unendliche Anzahl von Pfaden durch den Zustandsraum, d.h. der Suchbaum selbst besitzt unendlich viele Knoten. Mehrere Knoten im Suchgraphen können den selben Zustand bezeichnen, wenn der Zustand auf unterschiedlichen Wegen erreicht wurde. Die Leistungsfähigkeit von Suchalgorithmen hängt wesentlich davon ab, solche Mehrfachknoten im Suchbaum frühzeitig zu eliminieren.

Um einen partiellen Pfad bzw. Knoten zu benennen, wird eine spezielle Schreibweise eingeführt, die alle relevanten Informationen enthält. Dazu ein Beispiel:

$$\underbrace{\text{sfbuh}}_{\text{Präfix: S-F-B-U-H}} \text{E}_{\text{Kosten}}^{\text{Restschätzung}}$$

Der partielle Pfad endet im Knoten E. Der Präfix aus Kleinbuchstaben beschreibt den Weg, auf dem der Knoten erreicht wurde. In diesem Fall verlief der Weg beginnend bei S über F, B, U und H nach E. Der Subskript-Index entspricht den akkumulierten Pfadkosten. Der Superskript-Index stellt die Zusatzinformationen aus einer eventuell verwendeten Heuristik dar.

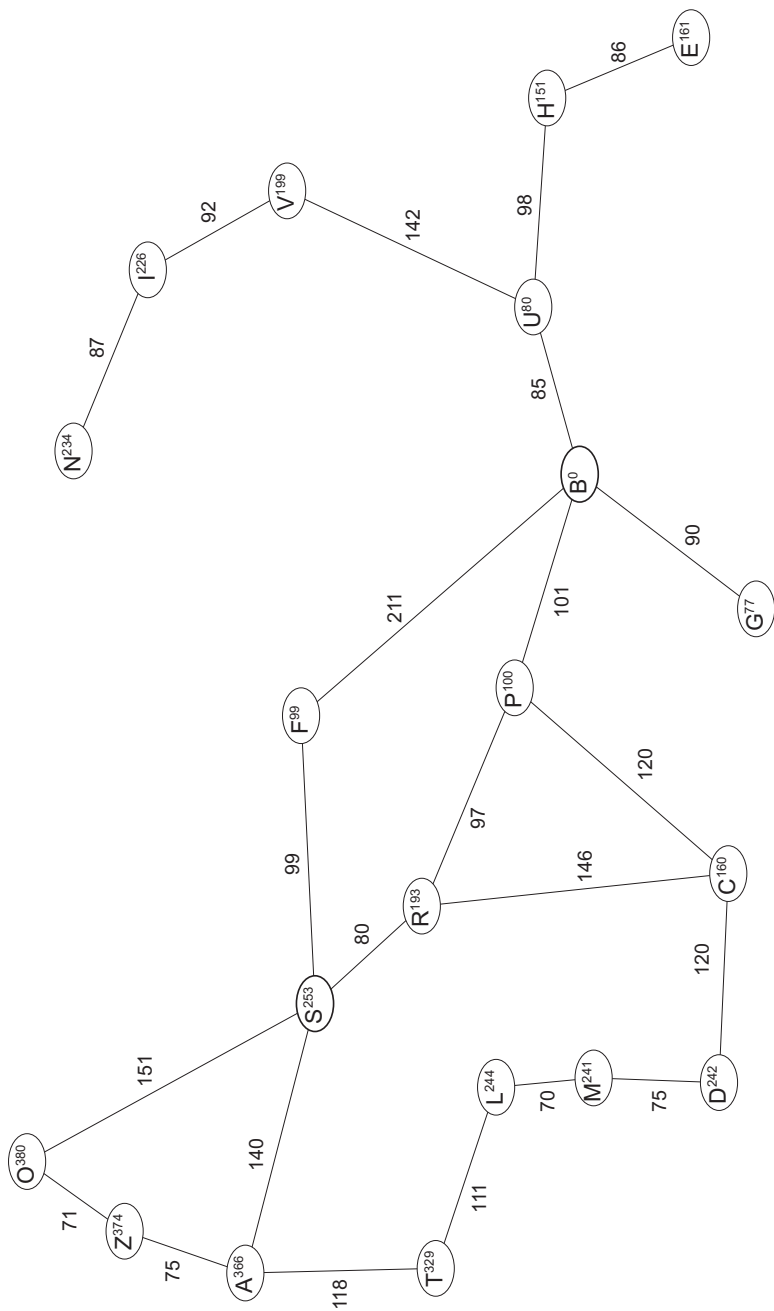


Abbildung 3.1: Ein Graph mit Kantengewichten und den heuristischen Entfernungen zum Knoten B als Superskript-Index. Das Beispiel erinnert an die Straßenkarte Rumäniens aus dem Buch von Russel & Norvig [RN03]. Die heuristischen Kosten ergeben sich aus den Entfernungen per Luftlinie. Da die kürzeste Verbindung zwischen zwei Orten nicht kleiner als die Entfernung per Luftlinie werden kann, ist die Heuristik optimistisch.

3.4 Die Suchstrategie

Eine Suchstrategie steuert den Verlauf der Suche. Der von einem Graphen implizit definierte Zustandsraum wird durch die Suchstrategie in Form eines Suchbaumes explizit gemacht. In den meisten Fällen wird der Suchbaum unendlich groß sein. Eine vollständige Konstruktion scheint unmöglich. Für die meisten Suchprobleme ist das auch nicht notwendig. Alle Suchstrategien versuchen eine Lösung zu finden und dabei so wenig wie möglich des Suchraumes explizit erzeugen zu müssen.

Wesentliche Eigenschaften von Suchstrategien sind

- **Vollständigkeit:** Es wird immer eine Lösung gefunden, vorausgesetzt diese existiert.
- **Zulässigkeit:** Es wird immer eine optimale Lösung gefunden, vorausgesetzt diese existiert.

Während die Suche fortschreitet, nehmen die Knoten folgende Zustände ein.

- **unbekannt:** Der Knoten wurde von der Suche noch nicht erreicht.
- **generiert:** Der Knoten wurde von der Suche erreicht und ist bekannt.
- **teilweise untersucht:** Falls mindestens ein Nachfolger generiert wurde.
- **expandiert:** Der Knoten wurde abschließend untersucht und alle Nachfolger wurden generiert.

Man unterscheidet zwei Typen von Suchstrategien, je nachdem ob die Suchstrategie bei Entscheidungen auf Informationen noch nicht bekannter Knoten zurückgreift. Sind solche Informationen vorhanden, so spricht man von heuristischer bzw. informierter Suche, ansonsten verläuft die Suche blind bzw. uninformiert.

3.4.1 Die uninformierte Suche

Dieser Abschnitt beschreibt jene Klasse von Suchstrategien, bei denen die Reihenfolge der Knotenexpansion nicht von der konkreten Problemstellung abhängig ist. Typische Vertreter uninformierter Suchstrategien sind:

- **Zufällige Suche (*Random Walk Search*):** Der Zustandsraum wird durch zufällige Auswahl von Nachbarknoten durchsucht. Diese Strategie ist in Fällen sinnvoll, in denen das Verhältnis von Ziel- zu Nicht-Ziel-Zuständen groß ist und nur wenig Information über den Suchraum vorhanden ist.
- **Breitensuche (*Breadth First Search*):** Der Zustandsraum wird systematisch durchsucht. Zuerst werden Knoten nahe dem Startknoten untersucht, bevor weiter entfernte Knoten untersucht werden. Die Breitensuche ist für Einheitskosten sinnvoll und ermittelt die minimale Anzahl von Schritten mit denen ein Knoten vom Startknoten ausgehend erreicht werden kann. Der Speicherplatzbedarf wächst exponentiell mit der Pfadlänge.

- **Tiefensuche (*Depth First Search*):** Die Suchstrategie arbeitet nach dem LIFO-Prinzip (*last in first out*) und strebt zuerst in die Tiefe des Suchbaumes. Ist der Suchbaum unendlich groß, so terminiert die Tiefensuche u.U. nicht. Der Vorteil der Tiefensuche ist der geringe Speicherplatzbedarf, da nur die Knoten des aktuell untersuchten Pfades und deren unmittelbare Nachfolger im Speicher gehalten werden müssen.
- **Gewichtete Breitensuche (*Uniform Cost Search*):** Die Suchstrategie findet optimale Lösungen für Zustandsübergänge mit unterschiedlichen Kosten. Es wird eine Prioritätswarteschlange verwendet, um die Knoten in der Reihenfolge ihrer Kosten zu untersuchen.
- **Beschränkte Tiefensuche (*Depth Limited Search*):** Die Suchstrategie entspricht der Tiefensuche, aber es wird nicht bis zur untersten Ebene des Suchbaumes gesucht, sondern nur bis zu einer vorgegeben maximalen Tiefe. Die Suche terminiert damit garantiert in endlicher Zeit.
- **Schrittweise beschränkte Tiefensuche (*Iterative Deepening Search*):** Diese Suchstrategie arbeitet ähnlich der beschränkten Tiefensuche, nur dass die Schranke für die maximale Pfadlänge während der Suche solange schrittweise angepasst wird bis das Ziel erreicht werden kann.
- **Geringste Maximalkostensuche (*Least Maximum Cost Search*):** Diese Suchstrategie findet eine Art Passage durch das Kostengebirge mit der geringsten maximalen Höhe. Der Vorteil dieser Suchstrategie ist, dass die Kosten nicht proportional zur Pfadlänge anwachsen und gute Pfade für lange Zeit ohne Kostenzunahme verfolgt werden können.
- **Zweiseitige Suche (*Bidirectional Search*):** Es wird sowohl vom Start- als auch vom Zielknoten aus eine Suche gestartet. Der Vorteil liegt in der Verkleinerung des zu untersuchenden Bereichs des Suchraumes.
- **Schrittweise Breitensuche (*Iterative Broadening Search*):** Die Suche verläuft wie die Breitensuche, nur dass die Anzahl der Nachfolger zu einem Knoten in jedem Expansionsschritt eingeschränkt ist. Wird im ersten Anlauf keine Lösung gefunden, kann die Suche mit einer erweiterten Anzahl an Nachfolgerknoten wiederholt werden. Der Speicherplatzbedarf fällt zwar geringer aus, wächst aber immer noch exponentiell mit der Pfadlänge.
- **Strahl-Suche (*Beam Search*):** Die Suchstrategie beschränkt die Anzahl der Knoten in der Suchfront und verhindert so ein exponentielles Wachstum des Speicheraufwandes. Probleme treten auf, wenn aufgrund von Speicherplatzbeschränkungen ein Lösungspfad vorzeitig aus der Suchfront entfernt wird.
- **Gradientenverfahren (*Hill Climbing*):** Dabei handelt es sich um eine lokale Suche ähnlich der Tiefensuche, mit dem Unterschied, dass jeweils nur einziger Nachfolgerknoten zur Expansion kommt und kein Backtracking möglich ist.

3.4.2 Die Breitensuche

Die Breitensuche untersucht den Zustandsraum systematisch, indem erst die Nachbarknoten des Startknotens untersucht werden, dann deren Nachbarn und so weiter. Es werden also zuerst Knoten in unmittelbarer Nähe des Startknotens untersucht bevor weiter entfernte Knoten betrachtet werden. Die Suche ist beendet, sobald die kürzeste Verbindung vom Startknoten zu allen anderen Knoten gefunden wurde (siehe Tabelle 3.1). Die Breitensuche ist nur für Einheitskosten optimal. Für unterschiedliche Kosten kommt die gewichtete Breitensuche zum Einsatz, bei der eine Prioritätswarteschlange die Knoten aufnimmt. Die Breitensuche hat den Nachteil eines hohen Speicherplatzbedarfs, denn es müssen alle Knoten in der Suchfront gespeichert werden. Der Speicherplatzbedarf wächst deshalb exponentiell mit der Pfadlänge an.

Tabelle 3.1: Die Breitensuche mit identischen Kosten für alle Übergänge am Beispiel des Suchgraphen aus Abbildung 3.1. Die Präfix-Länge entspricht der Anzahl von Schritten, die notwendig sind, um einen bestimmten Knoten vom Startknoten S aus zu erreichen. Die Suche ist beendet, wenn alle Knoten expandiert wurden.

Nr	expand	OPEN-Liste
1	S	sA, sO, sR, sF
2	sA	sO, sR, sF, saZ, saS, saT
3	sO	sR, sF, saZ, saS, saT, soS, soZ
4	sR	sF, saZ, saS, saT, soS, soZ, srS, srP, srC
5	sF	saZ, saS, saT, soS, soZ, srS, srP, srC, sfS, sfB
6	saZ	saS, saT, soS, soZ, srS, srP, srC, sfS, sfB, sazO, saza
7	saT	soS, soZ, srS, srP, srC, sfS, sfB, sazO, saza, satA, satL
8	srP	srC, sfS, sfB, sazO, saza, satA, satL, srpR, srpC, srpB
9	srC	sfS, sfB, sazO, saza, satA, satL, srpR, srpC, srpB, srcR, srcP, srcD
10	sfB	sazO, saza, satA, satL, srpR, srpC, srpB, srcR, srcP, srcD, sfbF, sfbU, sfbG, sfbP
11	satL	srpR, srpC, srpB, srcR, srcP, srcD, sfbF, sfbU, sfbG, sfbP, satlT, satlM
12	srcD	sfbF, sfbU, sfbG, sfbP, satlT, satlM, srcdC, srcdM
13	sfbU	sfbG, sfbP, satlT, satlM, srcdC, srcdM, sfbuB, sfbuH, sfbuV
14	sfbG	sfbP, satlT, satlM, srcdC, srcdM, sfbuB, sfbuH, sfbuV, sfbgB
15	satlM	srcdC, srcdM, sfbuB, sfbuH, sfbuV, sfbgB, satlmL, satlmD
16	sfbuH	sfbuV, sfbgB, satlmL, satlmD, sfbuhE, sfbuhU
17	sfbuV	sfbgB, satlmL, satlmD, sfbuhE, sfbuhU, sfbuvU, sfbuvI
18	sfbuhE	sfbuhU, sfbuvU, sfbuvI, sfbuheH
19	sfbuvI	sfbuheH, sfbuviN, sfbuviV
20	sfbuviN	sfbuviV, sfbuvinI

Der effektive Verzweigungsgrad

Für ein zweidimensionales unendliches quadratisches Gitter ist der Verzweigungsgrad acht, d.h. für jeden Knoten werden acht Nachfolgerknoten expandiert. Für die Breitensuche mit Einheitskosten ist der effektive Verzweigungsgrad geringer als acht. Mit Sicherheit kann der Schritt zurück zum Vorgängerknoten ausgeschlossen werden, denn er kann nicht Teil des optimalen Pfades sein. Es bleiben also effektiv sieben Nachbarknoten übrig. Auch diese Anzahl lässt sich weiter verringern, wenn man die Tatsache ausnutzt, dass die Schnittmenge aus den Nachbarschaften benachbarter Knoten nicht leer ist. Bestimmte Knoten werden also doppelt generiert. Die Pfadkosten sind aber monoton wachsend, somit kann nur die zuerst erfolgte Expansion zu optimalen Kosten führen. Für diagonale

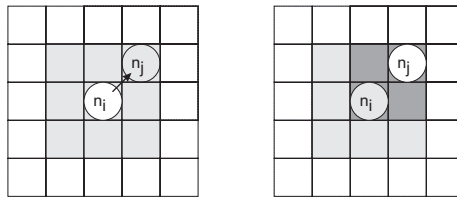


Abbildung 3.2: Zum Knoten n_i gehören die acht hellgrau unterlegten Nachbarknoten. Verwendet die Suche Einheitskosten, so ist der tatsächliche Verzweigungsgrad kleiner. Der Vorgänger zum Knoten n_j ist der Knoten n_i . Es macht daher keinen Sinn den Knoten n_i erneut zu generieren, da der optimale Pfad nicht von n_j nach n_i zurück führen wird. Mit dem gleichen Argument brauchen die vier dunkelgrau unterlegten Knoten im rechten Teilbild nicht als Nachfolger von n_j generiert zu werden. Für den diagonalen Schritt ist der mittlere effektive Verzweigungsgrad deshalb fünf.

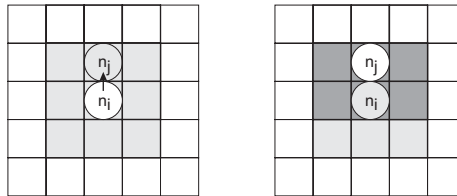


Abbildung 3.3: Für horizontale und vertikale Schritte ist der effektive Verzweigungsgrad drei. Alle sechs im rechten Teilbild dunkelgrau unterlegten Knoten brauchen nicht als Nachfolger von n_j generiert zu werden. Damit ist der mittlere effektive Verzweigungsgrad für die Suche mit Einheitskosten vier.

Richtungen ist das in Abb. 3.2 dargestellt. Für vertikale und horizontale Richtungen ergibt sich eine andere Schnittmenge, siehe Abb. 3.3. Nimmt man diagonale und nicht-diagonale Schritte als gleich häufig an, so ergibt sich ein mittlerer effektiver Verzweigungsgrad von vier. Im Vergleich zum ursprünglichen Verzweigungsgrad von acht kann also rund die

Hälfte aller Knoten bei der Generierung der Nachfolger eingespart werden. Die Halbierung des Verzweigungsgrades ist aber nur für Einheitskosten möglich.

3.4.3 Die gewichtete Breitensuche

Im Unterschied zu Breitensuche mit Einheitskosten, bei der der Suchraum schrittweise in Schichten gleicher Tiefe durchsucht wird, schreitet die gewichtete Breitensuche in Schichten gleicher Kosten voran. Für nichtnegative Kosten ist der zuerst expandierte Zielknoten

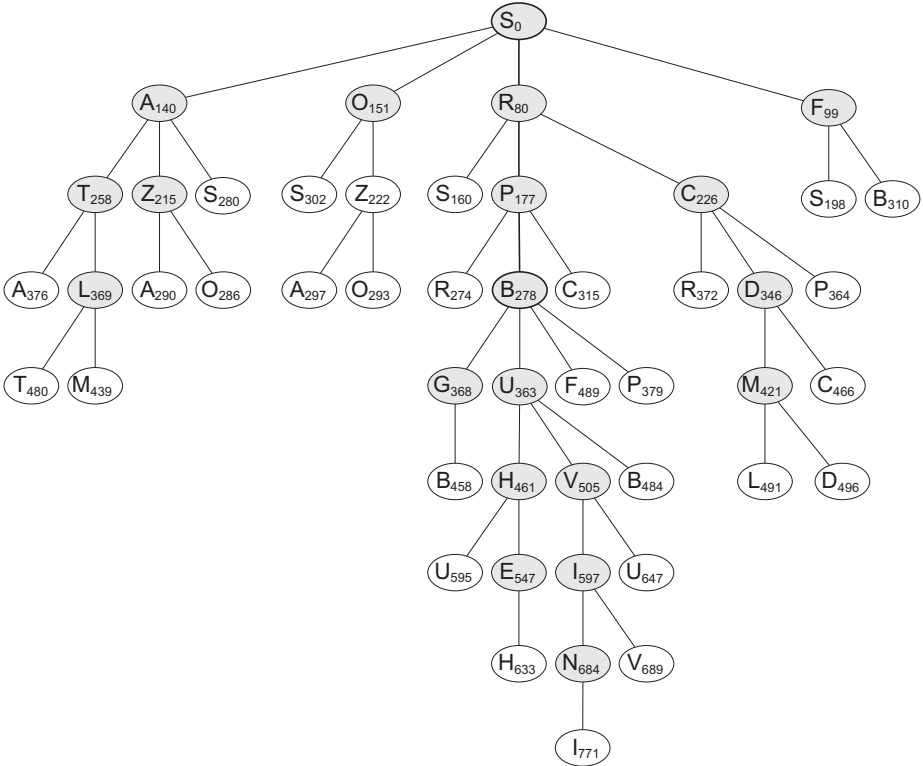


Abbildung 3.4: Der Suchbaum für die gewichtete Breitensuche

auch derjenige mit den geringsten Pfadkosten. Dazu werden alle expandierten Knoten in aufsteigender Reihenfolge ihrer Kosten in eine Prioritätswarteschlange eingefügt. In jedem Schritt der Suche wird der Knoten mit den geringsten Kosten aus der Prioritätswarteschlange entnommen, auf die Zielbedingung geprüft und gegebenenfalls expandiert, wobei die Nachfolger ihrerseits entsprechend den Kosten in die Prioritätswarteschlange eingefügt werden. Ein bekannter Vertreter für das *single source shortest path* Problem ist der Dijkstras-Algorithmus, der eine spezielle Form der dynamischen Programmierung

darstellt. Damit können Graphensuchprobleme mit nichtnegativen Kantengewichten gelöst werden. Für einen vorgegebenen Startknoten werden die Entfernungen zu allen anderen Knoten bestimmt.

Tabelle 3.2: Gewichtete Breitensuche zum Graphen in Abbildung 3.1 beginnend mit dem Knoten S zu allen anderen Knoten. Diese Tabelle dient als Referenz für die optimalen Kosten vom Knoten S zu einem beliebigen anderen Knoten. Zum Beispiel betragen die optimalen Kosten zum Knoten B 278.

Nr	expand	OPEN-Liste
1	S ₀	sR ₈₀ , sF ₉₉ , sA ₁₄₀ , sO ₁₅₁
2	sR ₈₀	sF ₉₉ , sA ₁₄₀ , sO ₁₅₁ , srS ₁₆₀ , srP ₁₇₇ , srC ₂₂₆
3	sF ₉₉	sA ₁₄₀ , sO ₁₅₁ , srS ₁₆₀ , srP ₁₇₇ , sfs ₁₉₈ , srC ₂₂₆ , sfb ₃₁₀ ,
4	sA ₁₄₀	sO ₁₅₁ , srS ₁₆₀ , srP ₁₇₇ , sfs ₁₉₈ , saZ ₂₁₅ , srC ₂₂₆ , saT ₂₅₈ , saS ₂₈₀ , sfb ₃₁₀
5	sO ₁₅₁	srS ₁₆₀ , srP ₁₇₇ , sfs ₁₉₈ , saZ ₂₁₅ , soZ ₂₂₂ , srC ₂₂₆ , saT ₂₅₈ , saS ₂₈₀ , soS ₃₀₂ , sfb ₃₁₀
6	srP ₁₇₇	sfs ₁₉₈ , saZ ₂₁₅ , soZ ₂₂₂ , srC ₂₂₆ , saT ₂₅₈ , srpR ₂₇₄ , srpB ₂₇₈ , saS ₂₈₀ , soS ₃₀₂ , sfb ₃₁₀ , srcP ₃₁₅
7	saZ ₂₁₅	soZ ₂₂₂ , srC ₂₂₆ , saT ₂₅₈ , srpR ₂₇₄ , srpB ₂₇₈ , saS ₂₈₀ , sazO ₂₈₆ , saZA ₂₉₀ , soS ₃₀₂ , sfb ₃₁₀ , srcP ₃₁₅
8	srC ₂₂₆	saT ₂₅₈ , srpR ₂₇₄ , srpB ₂₇₈ , saS ₂₈₀ , sazO ₂₈₆ , saZA ₂₉₀ , soS ₃₀₂ , sfb ₃₁₀ , srcP ₃₁₅ , srcD ₃₄₆ , srcP ₃₆₄ , srcR ₃₇₂
9	saT ₂₅₈	srpR ₂₇₄ , srpB ₂₇₈ , saS ₂₈₀ , sazO ₂₈₆ , saZA ₂₉₀ , soS ₃₀₂ , sfb ₃₁₀ , srcP ₃₁₅ , srcD ₃₄₆ , srcP ₃₆₄ , satL ₃₆₉ , srcR ₃₇₂ , satA ₃₇₆
10	srpB ₂₇₈	saS ₂₈₀ , sazO ₂₈₆ , saZA ₂₉₀ , soS ₃₀₂ , sfb ₃₁₀ , srcP ₃₁₅ , srcD ₃₄₆ , srpbU ₃₆₃ , srcP ₃₆₄ , srpbG ₃₆₈ , satL ₃₆₉ , srcR ₃₇₂ , satA ₃₇₆ , srpbP ₃₇₉ , srpbF ₄₈₉
11	srcD ₃₄₆	srpbU ₃₆₃ , srcP ₃₆₄ , srpbG ₃₆₈ , satL ₃₆₉ , srcR ₃₇₂ , satA ₃₇₆ , srpbP ₃₇₉ , srcdM ₄₂₁ , srcdC ₄₆₆ , srpbF ₄₈₉
12	srpbU ₃₆₃	srcP ₃₆₄ , srpbG ₃₆₈ , satL ₃₆₉ , srcR ₃₇₂ , satA ₃₇₆ , srpbP ₃₇₉ , srcdM ₄₂₁ , srpbuB ₄₄₈ , srpbuH ₄₆₁ , srcdC ₄₆₆ , srpbF ₄₈₉ , srpbuV ₅₀₅
13	srpbG ₃₆₈	satL ₃₆₉ , srcR ₃₇₂ , satA ₃₇₆ , srpbP ₃₇₉ , srcdM ₄₂₁ , srpbuB ₄₄₈ , srpbG ₄₅₈ , srpbuH ₄₆₁ , srcdC ₄₆₆ , srpbF ₄₈₉ , srpbuV ₅₀₅
14	satL ₃₆₉	srcR ₃₇₂ , satA ₃₇₆ , srpbP ₃₇₉ , srcdM ₄₂₁ , satlM ₄₃₉ , srpbuB ₄₄₈ , srpbG ₄₅₈ , srpbuH ₄₆₁ , srcdC ₄₆₆ , satlT ₄₈₀ , srpbF ₄₈₉ , srpbuV ₅₀₅
15	srcdM ₄₂₁	satlM ₄₃₉ , srpbuB ₄₄₈ , srpbG ₄₅₈ , srpbuH ₄₆₁ , srcdC ₄₆₆ , satlT ₄₈₀ , srpbF ₄₈₉ , srcdM ₄₉₁ , srcdM ₄₉₆ , srpbuV ₅₀₅
16	srpbuH ₄₆₁	srcdC ₄₆₆ , satlT ₄₈₀ , srpbF ₄₈₉ , srcdM ₄₉₁ , srcdM ₄₉₆ , srpbuV ₅₀₅ , srpbuH ₅₄₇ , srpbuH ₅₅₉
17	srpbuV ₅₀₅	srpbuH ₅₄₇ , srpbuH ₅₅₉ , srpbuV ₅₉₇ , srpbuV ₆₄₇
18	srpbuH ₅₄₇	srpbuH ₅₅₉ , srpbuV ₅₉₇ , srpbuH ₆₃₃ , srpbuV ₆₄₇
19	srpbuV ₅₉₇	srpbuH ₆₃₃ , srpbuV ₆₄₇ , srpbuV ₆₈₄ , srpbuV ₆₈₉
20	srpbuV ₆₈₄	srpbuV ₆₈₉ , srpbuV ₇₇₁

3.4.4 Die Tiefensuche

Die Tiefensuche kommt mit weniger Speicher aus als die Breitensuche, denn es werden nur die Knoten des aktuellen Pfades und deren Nachbarknoten im Speicher gehalten. Es werden nicht alle Nachfolger eines Knotens expandiert bevor deren Nachfolger untersucht werden, sondern jeweils nur ein Nachfolger-Knoten wird expandiert, dann einer seiner Nachfolger usw.. Die Suche schreitet also zuerst in die Tiefe des Suchbaumes voran und ist nach dem last-in-first-out-Prinzip organisiert. Ein Nachteil der Tiefensuche ist, dass eine gefundene Lösung u.U. nicht mehr optimal ist. Es ist nicht einmal sichergestellt dass überhaupt eine Lösung gefunden wird, falls unendlich lange Pfade bzw. Pfade mit Zyklen existieren. Abhilfe schafft die beschränkte Tiefensuche, bei der eine maximale Länge des Suchpfades eine unendliche Dauer der Suche verhindert. Ebenso verhält es sich bei der schrittweise das Ziel erreicht werden kann.

3.4.5 Die informierte Suche

Benutzt eine Suchstrategie Informationen über noch nicht untersuchte Knoten, so spricht man von einer informierten Suche. Oft sind problemspezifische Zusatzinformationen vorhanden, bzw. es ist eine Schätzung über die verbleibenden Restkosten bis zum Zielknoten verfügbar. Dieses Vorwissen wird in Form einer heuristischen Funktion $h(n)$ beschrieben. Eine Suchstrategie kann diese Funktion verwenden, um die Suche effizienter zu gestalten, d.h. die Anzahl zu expandierender Knoten zu verringern, und somit schneller zum Zielknoten zu gelangen. Eine Heuristik beschreibt im wesentlichen wie hoch die zu erwartenden Kosten für die Lösung des verbleibenden Restproblems sind. Eine Heuristik gibt im Allgemeinen nicht die exakten Restkosten an. Würde man diese kennen, dann bräuhete man keine aufwendige Suche um den optimalen Weg zu finden. Stattdessen ist die Heuristik nur eine Näherung der Restkosten, deren Berechnung aber nur einen Bruchteil des Aufwandes im Vergleich zur Berechnung einer exakten Lösung erfordert. Mit dieser Näherung ist man in der Lage, die Reihenfolge, in der Knoten von der Suchstrategie untersucht werden, so zu beeinflussen, dass die Suche eventuell um Größenordnungen schneller abläuft.

Typische Vertreter aus der Klasse der heuristisch informierten Suchstrategien sind:

- Bestensuche (*Greedy Search*): Bei dieser Suchstrategie handelt es sich um eine naive Form der geordneten Suche. In jedem Schritt wird der Knoten mit der momentan geringsten Restkostenschätzung zur Expansion ausgewählt. Diese Strategie ist nicht optimal und der Erfolg ist sehr stark von den Eigenschaften der gewählten Heuristik abhängig.
- A*-Suche: Diese weitverbreitete Suchstrategie ist optimal und effizient, d.h. kein anderer Algorithmus expandiert bei gleicher heuristischer Information weniger Knoten. Das Suchverhalten kann durch die Wahl einer geeigneten heuristischen Funktion in einem weiten Bereich beeinflusst werden. Der Speicherbedarf wächst exponentiell mit der Pfadlänge.

- Schrittweise kostenbeschränkte Tiefensuche, IDA* (*Iterative Deepening A**): Die Suchstrategie führt eine beschränkte Tiefensuche im Raum der f -Kosten² aus. Die Kostenschranke wird dabei solange schrittweise angepasst, bis ein Ziel gefunden werden kann. IDA* ist optimal und benötigt keinen exponentiell wachsenden Speicherplatz.
- Verzweigen und Beschränken (*Depth First Branch and Bound*): Voraussetzung sind bekannte Kosten für mindestens eine Lösung. Diese werden als obere Schranke für eine Tiefensuche verwendet. Es werden weiter Lösungen mit geringeren Kosten gesucht, wobei die Kosten der zuletzt gefundenen besten Lösung als neue obere Schranke beim nächsten Durchlauf verwendet werden.

3.4.6 Heuristische Restschätzung

Für die Suche soll eine nichtnegative Kostenfunktion c mit $c \in \mathbb{R}^+$ verwendet werden. Diese ist üblicherweise nur für benachbarte Knoten definiert. Diese Einschränkung kann mit folgender Definition der Kostenfunktion aufgehoben werden

$$c(n, n') \begin{cases} < \infty & \forall \quad n \prec n' \\ = \infty & \forall \quad n \not\prec n', \end{cases}$$

d.h. ist der Knoten n' nicht in der Menge der Nachfolgerknoten des Knotens n enthalten, so werden die Kosten auf unendlich gesetzt.

Damit die heuristische Suche keine suboptimalen Lösungen findet, muss gewährleistet sein, dass der erste expandierte Zielknoten auch derjenige mit den geringsten Pfadkosten ist. Voraussetzung dafür ist eine optimistische Heuristik.

$$h(n) \leq h^*(n) \quad \forall n \quad (3.2)$$

Eine optimistische Heuristik (*admissible heuristic*) überschätzt niemals die tatsächlichen Restkosten h^* .

Ist für eine Heuristik die Dreiecksungleichung erfüllt, so bezeichnet man sie als monoton (siehe Abb. 3.5). Eine Heuristik ist monoton, falls für jeden Knoten n und jeden seiner Nachfolger n' die geschätzten Restkosten $h(n)$ bis zum Ziel nicht größer als die Summe der Kosten von n nach n' plus die Restkosten von n' bis zum Ziel sind. Allgemein gilt für alle Knoten n und deren Nachfolger n' einer monotonen Heuristik

$$g(n) + h(n) \leq h(n') + g(n') \quad \forall n \prec n', \quad (3.3)$$

wobei $g(n)$ die akkumulierten Kosten vom Startknoten zum Knoten n bezeichnet.

Für einen Suchbaum ist eine monotone Heuristik ausreichend. Für einen allgemeinen Suchgraphen muss die Abnahme der geschätzten Restkosten für eine optimale Suche jedoch weiter eingeschränkt werden. Man benötigt eine konsistente Heuristik, d.h. auf

² f -Kosten: Summe aus den kumulativen Kosten g vom Startknoten bis zum aktuellen Knoten und einer heuristischen Schätzung h der verbleibenden Restkosten bis zum Zielknoten. $f = g + h$

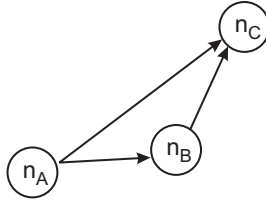


Abbildung 3.5: Um monoton zu sein muss die Heuristik die Dreiecksungleichung erfüllen, d.h. wenn es eine Verbindung zwischen Knoten n_A und n_B gibt und wenn es zusätzlich eine Verbindung von n_A über n_B nach n_C gibt, dann müssen die geschätzten Kosten von n_A nach n_C immer kleiner oder gleich den geschätzten Kosten von n_A nach n_B plus die geschätzten Kosten von n_B nach n_C sein.

dem Weg von Knoten n zum Knoten n' darf die Heuristik nicht stärker als die optimalen Kosten $c^*(n, n')$ abnehmen.

$$g^*(n) + h(n) \leq h(n') + g^*(n') \quad \forall n \prec n', \quad (3.4)$$

Jede konsistente Heuristik ist auch optimistisch (die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht). Gerade konsistente Heuristiken sind interessant, da sich bestimmte algorithmische Vereinfachungen ergeben, die zu einer effizienteren Implementierung der Suche führen, weil z.B. Knoten nicht reexpandiert werden müssen. Zusammengefasst ergeben sich die wichtigsten Eigenschaften von Heuristiken

$$\begin{array}{lll} \text{optimistisch:} & h(n) \leq h^*(n) & \forall n \\ \text{monoton:} & h(n) \leq c(n, n') + h(n') & \\ \text{konsistent:} & h(n) \leq c^*(n, n') + h(n'). & \end{array}$$

3.4.7 Geordnete Suche

Für eine Gruppe von Suchstrategien lässt sich ein gemeinsamer Algorithmus angeben. Je nach Wahl der Kostenfunktion und der Heuristik kann das Verhalten unterschiedlicher Suchstrategien realisiert werden. Die Suchstrategien mit $h = 0$ sind uninformierte Suchstrategien.

Breitensuche	$h(n) = 0$	$c(n, n') = 1$
Tiefensuche	$h(n) = 0$	$c(n, n') = -1$
gewichtete Breitensuche	$h(n) = 0$	$c(n, n') \geq 0$
A*-Suche	$h(n) \leq h^*(n)$	$c(n, n') \geq 0$
Bestensuche	$h(n) \leq h^*(n)$	$c(n, n') = 0$

Die Suche kann mittels der Heuristik stärker zum Ziel gelenkt werden. Je nach Qualität der heuristischen Restschätzung verringert sich der notwendige Suchaufwand (siehe Abb. 3.7). In Algorithmus 1 ist der Pseudocode für die generalisierte Suche dargestellt. Je nach Wahl von $h(n)$ und $c(n, n')$ ergibt sich das Verhalten unterschiedlicher Suchstrategien. In Zeile 2

wird die OPEN-Liste mit dem Startknoten initialisiert. Es wird davon ausgegangen, dass die Suche von einem Startknoten zu einem Zielknoten verläuft. Die Hauptschleife (Zeilen

Algorithmus 1 Geordnete heuristische Suche vom Startknoten n_s zum Zielknoten n_g . Der Rückgabewert entspricht den minimalen Pfadkosten zwischen n_s und n_g .

Require: n_s, n_g

Ensure: $g(n_g) = c^*(n_g, n_s)$

```

1:  $g(n_s) := 0$ 
2:  $OPEN := \{n_s\}$ 
3:  $CLOSED := \emptyset$ 
4: while  $OPEN \neq \emptyset$  do
5:    $n := \operatorname{argmin}_{n \in OPEN} \{ g(n) + h(n) \}$ 
6:   if  $n = n_g$  then
7:     return  $g(n)$ 
8:   end if
9:    $OPEN := OPEN \setminus \{n\}$ 
10:   $CLOSED := CLOSED \cup \{n\}$ 
11:  for all  $n' : n \prec n'$  do
12:    if  $n' \notin CLOSED$  then
13:       $g(n') := g(n) + c(n, n')$ 
14:       $OPEN := OPEN \cup \{n'\}$ 
15:    end if
16:  end for
17: end while
18: return  $\infty$ 
```

4 bis 17) wird solange ausgeführt bis kein Knoten mehr in der OPEN-Liste enthalten ist oder ein Zielknoten in Zeile 6 gefunden wird. Im ersten Fall wurde keine Lösung gefunden. In jedem Schleifendurchlauf wird der beste Knoten in Zeile 5 aus der OPEN-Liste entfernt und in die CLOSED-Liste eingefügt (Zeilen 9 und 10). Die OPEN-Liste entspricht damit der Suchfront und die CLOSED-Liste dem bereits untersuchten Teil des Suchraumes. In den Zeilen 11 bis 16 werden alle Nachfolgerknoten generiert und in die OPEN-Liste eingefügt (Zeile 14).

Wird keine konsistente Heuristik verwendet und ist der generierte Knoten schon in der CLOSED-Liste enthalten, so muss Zeile 12 durch eine Fallunterscheidung erweitert werden. Besitzt der generierte Knoten keine besseren Pfadkosten, dann ändert sich nichts. Sind die neuen Pfadkosten aber besser, so muss der alte Knoten aus der CLOSED-Liste entfernt und durch den neuen Knoten mit den besseren Pfadkosten ersetzt werden. Außerdem müssen alle Knoten in der CLOSED-Liste, die den alten Knoten als Vorgänger hatten, überprüft und aktualisiert werden, d.h. sie müssen gegebenenfalls wieder in die OPEN-Liste eingefügt werden. Im ungünstigsten Fall ergibt sich eine ganze Kette von Reexpansionen. Wenn möglich sollte deshalb immer versucht werden eine konsistente Heuristik zu verwenden, um den Suchaufwand zu verringern (siehe Abb. 3.6).

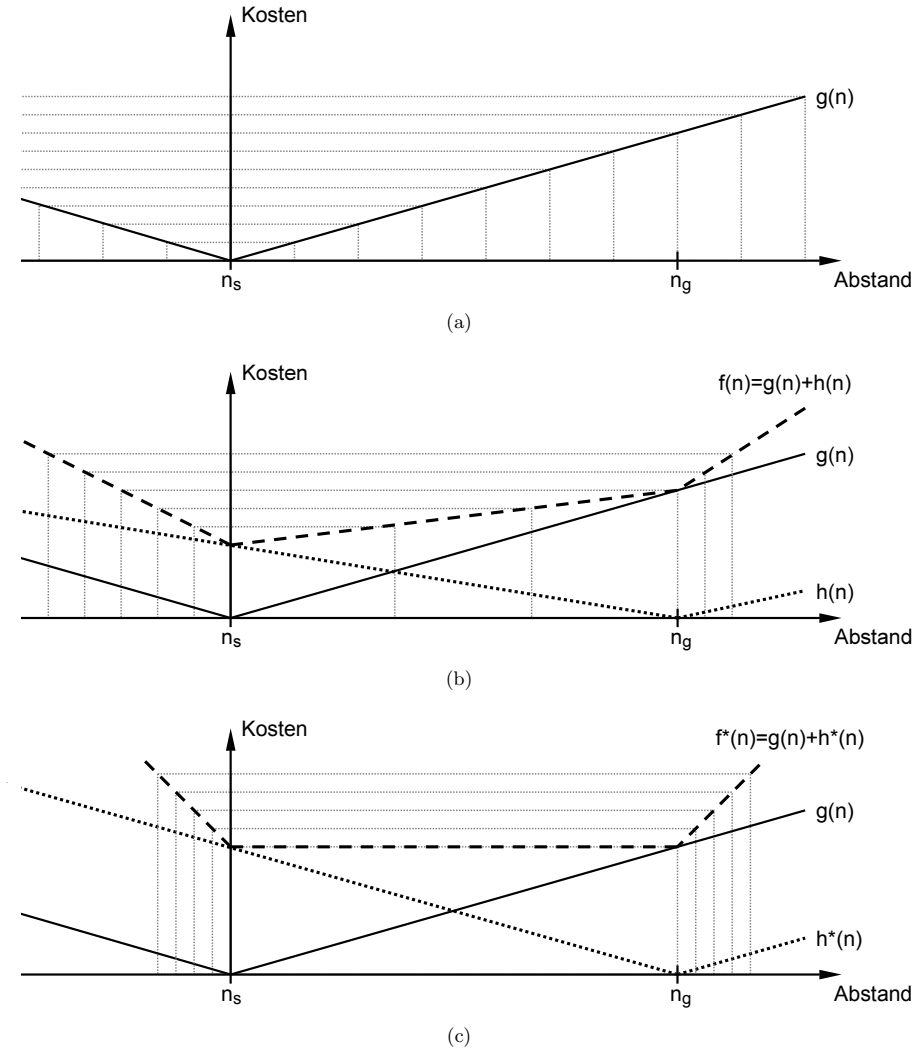


Abbildung 3.6: Eindimensionaler Suchraum für eine (a) uninformierte Suche, (b) heuristisch informierte Suche, (c) perfekt informierte Suche. Die f -Kosten (siehe Seite 53) steigen monoton zum Ziel hin an. Im Idealfall sind die f -Kosten auf dem kürzesten Weg konstant, nämlich dann, wenn die Restkosten fehlerfrei geschätzt wurden. Je flacher der Verlauf der f -Kosten, desto zielstrebigter verläuft die Suche und umso mehr unterscheidet sie sich von der Breitensuche.

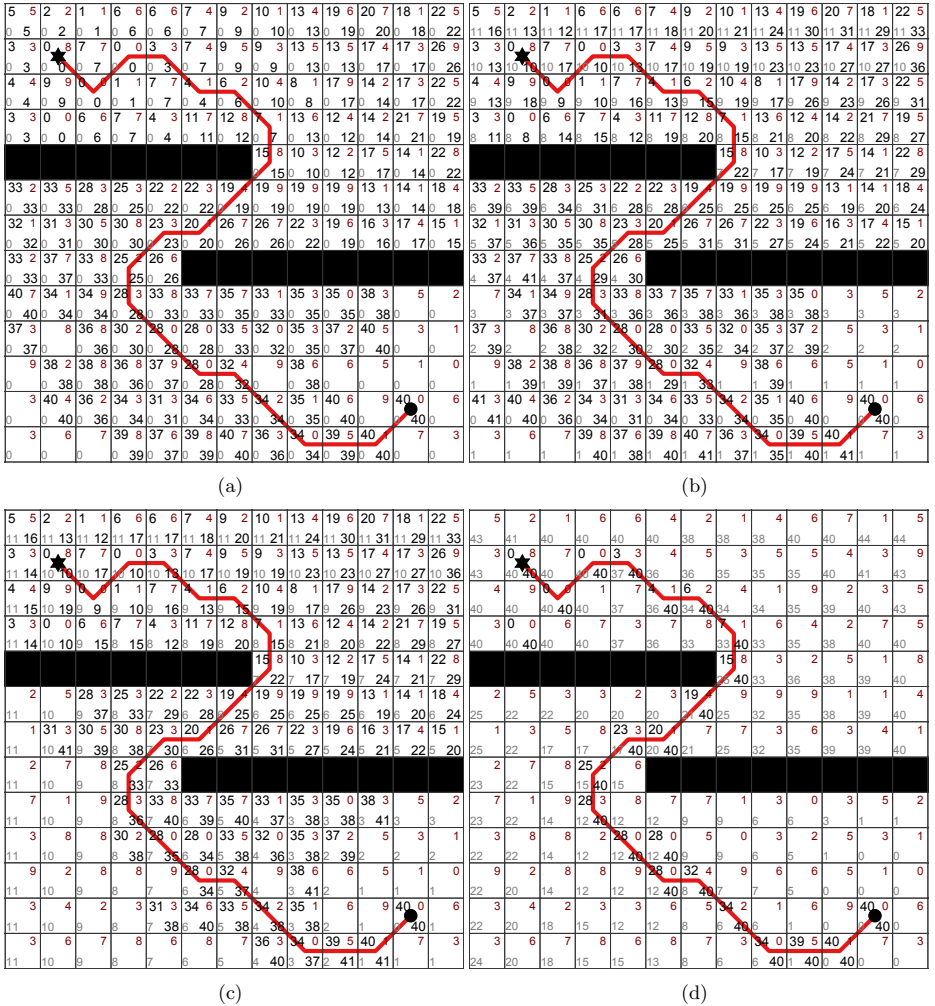


Abbildung 3.7: Vergleich unterschiedlich informierter Heuristiken für die A*-Suche (a) uninformatiert: $h(n) = 0$, (b) y-Abstand: $h(n) = |y_g - y_n|$, (c) Manhattan-Abstand: $h(n) = |x_g - x_n| + |y_g - y_n|$, (d) perfekt informiert: $h(n) = h^*(n)$. Die Zahlen in den Quadraten $\begin{smallmatrix} g & c \\ h & f \end{smallmatrix}$ bezeichnen die g-Kosten (links oben), die c-Kosten (rechts oben), die h-Kosten (links unten), die f-Kosten (rechts unten). Wie zu erwarten, wird immer der gleiche Pfad gefunden, nur die Anzahl der untersuchten bzw. der nicht untersuchten Knoten, zu erkennen an den Feldern ohne eingetragene g-Kosten, unterscheidet sich je nach verwendeter Heuristik.

3.4.8 Die Bestensuche

Die Bestensuche (*Greedy Search*) wählt immer den bezüglich der Restkostenschätzung nächstgelegenen Punkt. Sie verwendet dazu eine OPEN-Liste mit allen generierten Knoten. Die OPEN-Liste bildet somit die Suchfront, aus der ein geeigneter Knoten für den nächsten Expansionsschritt ausgewählt wird. Der Algorithmus minimiert in jedem Schritt nur die verbleibenden Restkosten bis zum Ziel und ignoriert die Gesamtkosten für einen partiellen Pfad. Das ist aber keine optimale Suchstrategie, wie in Tabelle 3.3 zu erkennen ist. Die Suche endet im Zielknoten B mit 310 als Gesamtkosten für die Lösung. Die optimalen Kosten betragen aber 278.

Tabelle 3.3: Die Bestensuche wieder am Beispiel des Suchgraphen aus Abb. 3.1 mit S als Startknoten und B als Zielknoten. Die Heuristik entspricht der euklidischen Distanz und bildet somit eine optimistische Restschätzung für die tatsächlichen Wegkosten (Die Verbindungen zwischen den Städten können nicht kürzer als die Entfernungen per Luftlinie sein). Der Superskript-Index gibt die h-Kosten an. Die OPEN-Liste ist nach aufsteigenden h-Kosten sortiert. In jedem Schritt wird immer der Knoten mit den kleinsten Restkosten zur Expansion ausgewählt. Im dritten Schritt wird ein suboptimaler Weg zum Zielknoten B gefunden, d.h. die Bestensuche ist nicht optimal.

Nr	expand	OPEN-Liste
1	S ₀ ²⁵³	sF ₉₉ ¹⁷⁶ , sR ₈₀ ¹⁹³ , sA ₁₄₀ ³⁶⁶ , sO ₁₅₁ ³⁸⁰
2	sF ₉₉ ¹⁷⁶	sfB ₃₁₀ ⁰ , sR ₈₀ ¹⁹³ , sfS ₁₉₈ ²⁵³ , sA ₁₄₀ ³⁶⁶ , sO ₁₅₁ ³⁸⁰
3	sfB ₃₁₀ ⁰	sfbG ₄₀₀ ⁷⁷ , sfbU ₃₉₅ ⁸⁰ , sfbp ₄₁₁ ¹⁰⁰ , sfbF ₅₂₁ ¹⁷⁶ , sR ₈₀ ¹⁹³ , sfS ₁₉₈ ²⁵³ , sA ₁₄₀ ³⁶⁶ , sO ₁₅₁ ³⁸⁰

3.4.9 A*-Suche

Der A*-Algorithmus wird häufig zur effektiven Suche in diskreten Zustandsräumen eingesetzt. Das Gütefunktional $f(n)$ dient zur Steuerung der geordneten Suche, indem es die Erfolgchancen beschreibt, die mit der Fortsetzung der Suche beim Knoten n verbunden sind. Die Funktion $f(n) = g(n) + h(n)$ gibt die geschätzten Kosten eines optimalen Weges vom Startknoten n_s über den Knoten n bis zum Zielknoten n_g an. Je genauer die Heuristik die Restkosten schätzt, umso geringer fällt der Suchaufwand aus. Ist die Restkostenschätzung exakt, so gibt $h^*(n_s)$ die minimalen Kosten vom Start- zum Zielknoten an. Diese können für die Suche als obere Kostenschranke verwendet werden, da A* keine partiellen Pfade mit $f(n) > h^*(n_s)$ expandieren wird.

Interessant ist, dass A* optimale Lösungen für beliebige Suchgraphen liefert, auch wenn diese aufgrund von Zyklen einen unendlichen Suchbaum ergeben. A* verwendet dazu zwei Listen, die OPEN-Liste für die Suchfront und die CLOSED-Liste zur Speicherung aller expandierten Knoten. Die aufwendige Verwaltung der Listen und die Tests für jeden expandierten Knoten sind auch die größten Nachteile. Selbst Probleme mit moderater Komplexität besitzen einen großen Speicherbedarf.

Tabelle 3.4: Die A*-Suche für den Suchgraphen aus Abb. 3.1 beginnend beim Knoten S bis zum Zielknoten B. Die Heuristik ist wieder die optimistische Restschätzung über die Luftlinienentfernung. Der Superskript-Index gibt die f-Kosten an. Die OPEN-Liste ist nach aufsteigenden f-Kosten sortiert und immer der Knoten mit den kleinsten f-Kosten wird im nächsten Schritt expandiert. Schritte, in denen Knoten expandiert werden, die sich bereits in der CLOSED-Liste befinden und keine gültigen Lösungen ergeben, wurden in der Tabelle ausgelassen.

Nr	expand	OPEN-Liste
1	S_0^{253}	sR_{80}^{273} , sF_{99}^{275} , sA_{140}^{506} , sO_{151}^{531}
2	sR_{80}^{273}	sF_{99}^{275} , srP_{177}^{277} , srC_{226}^{386} , srS_{160}^{413} , sA_{140}^{506} , sO_{151}^{531}
3	sF_{99}^{275}	srP_{177}^{277} , sFB_{310}^{310} , srC_{226}^{386} , srS_{160}^{413} , sfs_{198}^{451} , sA_{140}^{506} , sO_{151}^{531}
4	srP_{177}^{277}	$srPB_{278}^{278}$, sFB_{310}^{310} , srC_{226}^{386} , srS_{160}^{413} , sfs_{198}^{451} , $srPR_{274}^{467}$, $srPC_{315}^{475}$, sA_{140}^{506} , sO_{151}^{531}
5	$srPB_{278}^{278}$	sFB_{310}^{310} , srC_{226}^{386} , srS_{160}^{413} , $srpbU_{363}^{443}$, $srpbC_{368}^{445}$, sfs_{198}^{451} , $srPR_{274}^{467}$, $srPC_{315}^{475}$, $srpbP_{379}^{479}$, sA_{140}^{506} , sO_{151}^{531} , $srpbF_{489}^{665}$

In jedem Expansionsschritt werden die vorläufigen Kosten für jeden Nachbarknoten n' bestimmt. Diese ergeben sich bei Ankunft in n' aus Richtung des Vorgängerknotens n durch Addition von $g(n)$ und $c(n, n')$ mit $g(n_s)=0$ für den Startknoten n_s . Da unter Umständen mehrere Pfade nach n' führen, wird $g(n')$ den wahren Wert überschätzen, solange ausschließlich suboptimale Pfade nach n' expandiert wurden. Durch die systematische Rekombination konvergierender Pfade enthält $g(n')$, nachdem alle Pfade nach n' expandiert wurden, die minimalen Pfadkosten $g^*(n')$ vom Startknoten n_s bis zum Knoten n' , d.h. sobald ein Knoten n zur Expansion kommt gilt: $g(n) = g^*(n)$.

Bei Verwendung einer konsistenten Heuristik vereinfacht sich die Implementierung des Algorithmus. Nach der Knotenexpansion muss nicht geprüft werden, ob der gleiche Knoten evtl. schon mit größeren Kosten in der CLOSED- oder OPEN-Liste vorhanden ist. Der Aufwand für die nachträgliche Anpassung der Kosten und Verweise auf die Elternknoten entfällt bei Verwendung einer konsistenten Heuristik. Ist ein Knoten bereits in der CLOSED-Liste gespeichert, dann kann es keine erneute Expansion des Knotens mit geringeren Kosten geben. Für die OPEN-Liste wird angenommen, dass sich der gleiche Knoten mehrfach mit unterschiedlichen Kosten darin befinden kann.

3.4.10 Band Suche

Die Forderung nach einer optimistischen Heuristik ist manchmal schwer zu erfüllen. Für eine Heuristik h , die die Kosten um maximal ϵ überschätzt, geht die Optimalität nicht vollständig verloren. Der Fehler einer suboptimalen Strategie ist auf ϵ beschränkt (ϵ -admissibility). Eine ϵ -admissible Heuristik ist nicht nur leichter zu formulieren sondern verkürzt für viele Probleme auch die Suchzeiten. Wenn die Heuristik außerdem die wahren

Kosten nur um maximal δ unterschätzt, lassen sich Knoten mit zu großen f-Kosten vorzeitig aus der OPEN-Liste entfernen. Man nennt dieses Verfahren *Bandwidth Search* [Har74], da es nur einen Bereich von zulässigen f-Kosten gibt. Alle Knoten, deren f-Kosten um $\epsilon + \delta$ größer als die momentan besten Kosten in der OPEN-Liste sind, können entfernt werden. Die Verkleinerung der OPEN-Liste wirkt sich beschleunigend auf die Suchzeiten aus.

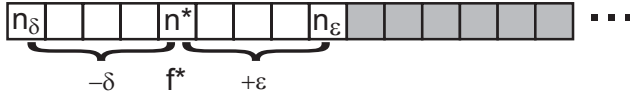


Abbildung 3.8: Bandwidth Search. Der Knoten n^* bezeichnet den optimalen Pfad. Da $g(n)$ für einen bestimmten Pfad immer gleich ist, ergeben sich Unterschiede in den f-Kosten durch h . Die Heuristik überschätzt die wahren Restkosten nur um ϵ und unterschätzt sie um δ . Daraus ergibt sich ein Bereich zulässiger f-Werte. Alle Knoten mit größeren f-Kosten können aus der OPEN-Liste entfernt werden.

3.4.11 Iterativ kostenbeschränkte Tiefensuche - IDA*

Um den Speicheraufwand für die OPEN- und CLOSED-Liste des A*-Algorithmus einzusparen, wurde in [Kor85] die Idee der schrittweisen Kostenbeschränkung auf die A*-Suche angewendet und es entstand der IDA*-Algorithmus. Der Suchbaum wird wie bei der Tiefensuche durchlaufen, wobei es eine obere Schranke für die f-Kosten gibt. In jeder Iteration wird versucht, eine Lösung mit f-Kosten innerhalb der Schranke zu finden. Gelingt dies nicht, wird eine erneute Iteration mit vergrößerter Kostenschranke begonnen. Dazu wurde in der vorhergehenden Iteration der kleinste Wert der f-Kosten gespeichert, der die alte f-Kostenschranke überschritten hat. Dieser Wert wird zur neuen Kostenschranke der aktuellen Iteration. Weil die Anzahl der zu untersuchenden Knoten exponentiell mit der Pfadlänge anwächst, ist nur die letzte Iteration, unmittelbar bevor der Zielknoten gefunden wird, dominierend für die Rechenzeit. Außerdem sind keine aufwendigen Listenoperationen wie bei A* notwendig. IDA* kann deshalb eine echte Alternative zu A* sein. Existieren viele unterschiedliche Kostenwerte, so ist IDA* eher ungünstig, da evtl. nur ein einziger Knoten mit jeder Iteration hinzukommt.

Für die erste Iteration wird die Kostenschranke auf den Wert der heuristischen Restschätzung des Startknotens gesetzt $f(n_s) = h(n_s)$. Das ist plausibel, da $g(n_s) = 0$ gilt. Jeder Knoten n mit $g(n) + h(n) = f(n)$ größer einer vorgegebenen Kostenschranke f -Limit, kann nicht zu einem Lösungspfad der Länge f -Limit gehören und wird deshalb von der Suche in dieser Iteration ausgeschlossen. Am Ende einer erschöpfenden Suche ohne eine Lösung steht fest, dass es keine Lösung innerhalb des f -Limits geben kann. Der Wert des f -Limits wird entsprechend vergrößert und die Suche wiederholt. Das geschieht solange bis der Wert des f -Limits genauso groß wird wie die Kosten für einen optimalen Lösungspfad.

Tabelle 3.5: IDA*-Suche am Beispiel des Suchgraphen 3.1 beginnend beim Knoten S bis zum Zielknoten B. Die Heuristik ist die optimistische Restschätzung über die Luftlinienentfernung. Der Superskript-Index gibt die f-Kosten an. Schritte in denen Knoten expandiert werden, die sich bereits in der CLOSED-Liste befinden und keine gültigen Lösungen darstellen, wurden übersprungen und sind in der Tabelle nicht dargestellt.

Nr	f_{\max}	OPEN-Liste
1	253	S_0^{253}
2	253	$S_0^{253} \left\{ sA_{140}^{506}, sO_{151}^{531}, sr_{80}^{273}, sf_{99}^{275} \right\}$
3	273	$S_0^{253} \left\{ sA_{140}^{506}, sO_{151}^{531}, sr_{80}^{273} \left\{ srS_{160}^{413}, srP_{177}^{277}, srC_{226}^{386} \right\}, sf_{99}^{275} \right\}$
4	275	$S_0^{253} \left\{ sA_{140}^{506}, sO_{151}^{531}, sr_{80}^{273} \left\{ srS_{160}^{413}, srP_{177}^{277}, srC_{226}^{386} \right\}, sf_{99}^{275} \left\{ sfs_{198}^{451}, sfB_{310}^{310} \right\} \right\}$
5	277	$S_0^{253} \left\{ sA_{140}^{506}, sO_{151}^{531}, sr_{80}^{273} \left\{ srS_{160}^{413}, srP_{177}^{277} \left\{ srpB_{274}^{467}, srpC_{315}^{475}, srpB_{278}^{278} \right\}, srC_{226}^{386} \right\}, sf_{99}^{275} \left\{ sfs_{198}^{451}, sfB_{310}^{310} \right\} \right\}$
6	278	$S_0^{253} \left\{ sA_{140}^{506}, sO_{151}^{531}, sr_{80}^{273} \left\{ srS_{160}^{413}, srP_{177}^{277} \left\{ srpB_{274}^{467}, srpC_{315}^{475}, srpB_{278}^{278} \right\} \right\} \right\} \leftarrow \text{ZIEL}$

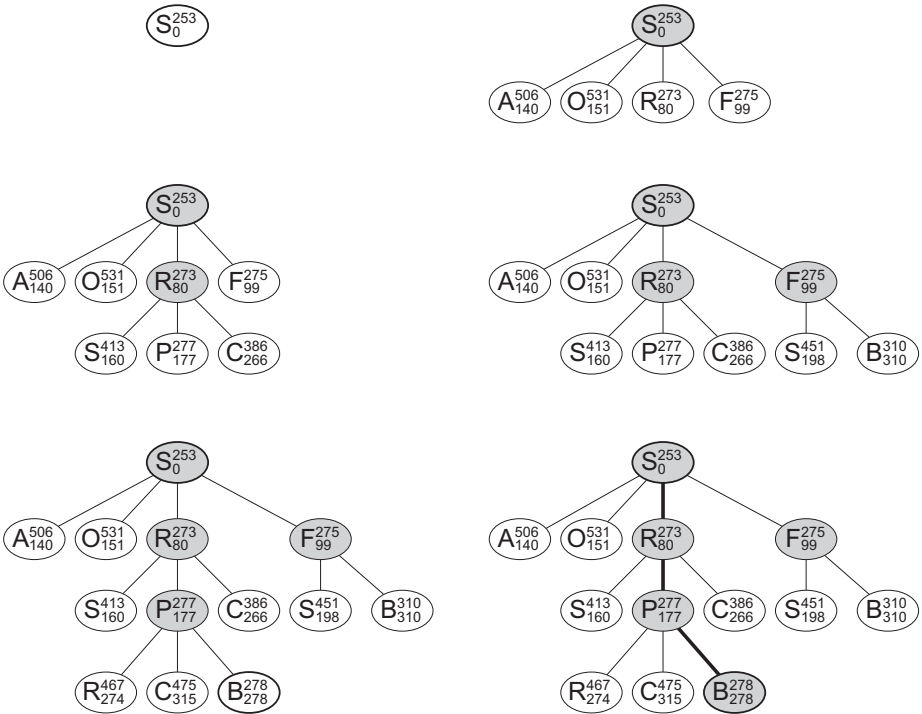


Abbildung 3.9: Die Schritte bei der Konstruktion des Suchbaumes für die IDA*-Suche

In dieser letzten Iteration wird ein optimaler Lösungspfad gefunden.

3.5 Anwendung der Pfadsuche zur Lösung des Apertur- und Korrespondenzproblems

Bekannte Verfahren zur Schätzung von Bewegungsvektoren, wie z.B. die Methoden des optischen Flusses, geraten bei komplizierten Bildinhalten schnell an ihre Grenzen. Eine besondere Herausforderung stellt dabei die Bestimmung der Bewegungsvektoren in Röntgenbildsequenzen aus der Koronarangiographie dar. In der Regel sind die Bewegungen der Koronarien unterabtastet, d.h. die Bewegung der Koronarien wird bei kleinen Abtastfrequenzen (<20 Hz) nicht mehr fein genug aufgelöst und es treten große Verschiebungsvektoren auf. Die mechanische Flexibilität der Koronarien verhindert eine Modellierung als starrer Körper. Als Konsequenz der Durchleuchtung überlappen sich im

Bild mehrere Strukturen mit unterschiedlichen Bewegungskomponenten. Relevante Strukturen im Bild sind durch lokale Methoden deshalb nur schwer differenzierbar. Es kommt zu Verwechslungen und falsche Bewegungsvektoren werden berechnet. Insbesondere entlang der Koronarien erwartet man aber einen glatten Verlauf des Bewegungsvektorfeldes.

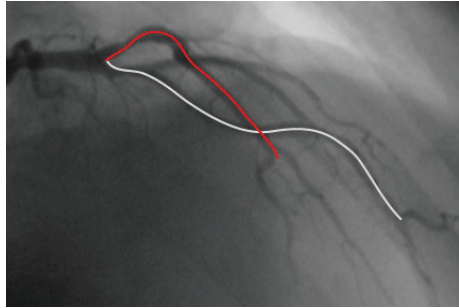


Abbildung 3.10: Zwei vorgegebene Pfade sollen in ein anderes Bild der gleichen Sequenz übertragen werden.

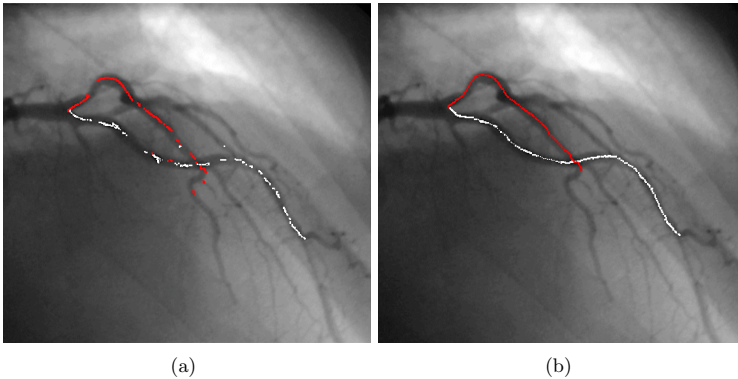


Abbildung 3.11: Vergleich zwischen lokaler und pfadbasierter Bewegungsschätzung der Koronarien. Die initialen Pfade aus dem ersten Bild wurden in das nachfolgende Bild einer Sequenz automatisch übertragen. (a) mit lokaler Suche (maximaler Korrelationskoeffizient), (b) mit pfadbasierter Suche (Pfad mit maximaler Summe über alle Korrelationskoeffizienten).

Die beiden wichtigsten Probleme sind dabei das Apertur- und Korrespondenzproblem. Korrespondenzprobleme ergeben sich u.a. bei zeitlicher Unterabtastung der Bewegungen. Für ähnliche Strukturen im Bild existieren mehrere Lösungen für das Bewegungsvektorfeld (siehe Abbildung 3.11a). Um ein kontinuierliches Bewegungsvektorfeld zu erhalten ist

zusätzlich eine Kontinuitätsbedingung erforderlich. In [Sun99] wird ein Verfahren beschrieben, bei dem Bewegungsvektoren entlang von Bildspalten berechnet werden. Durch die Suche nach kürzesten Wegen erhält man dann einen kontinuierlichen Verlauf der Bewegungsvektoren. Die Annahme, dass die Kontinuitätsbedingung entlang der Bildspalten erfüllt wird, ist im Allgemeinen bei den Angiogrammen nicht gegeben. Statt der Bildspalten werden bei der hier beschriebenen Methode Linien im Bild gewählt, entlang derer die Kontinuität des Bewegungsvektorfeldes erhalten bleibt (siehe Abbildung 3.11b). Diese Linien entsprechen dem Verlauf der Koronarien im Bild.

3.5.1 Das Aperturproblem

Durch die Apertur, d.h. die beschränkte Fenstergröße für die Berechnung der Korrelation, ist die Schätzung der Bewegungsvektoren auf die Komponenten senkrecht zu den linienartigen Gefäßstrukturen im Bild eingeschränkt. Die notwendige Fenstergröße ist abhängig von der Verteilung der im Bild vorhandenen Strukturinformation. Das Aperturproblem tritt auf, wenn die Fenstergröße einen kritischen Wert unterschreitet.

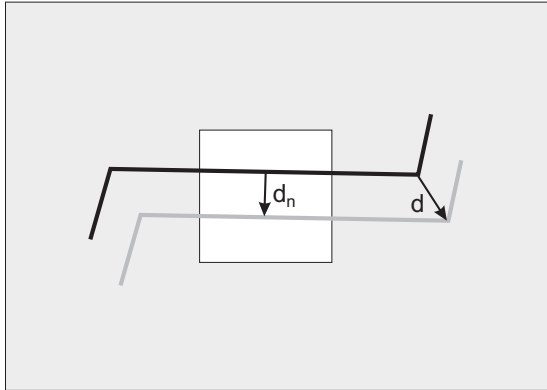


Abbildung 3.12: Ein Beispiel für das Aperturproblem. Die zu geringe Größe des Bildausschnitts (weißes Quadrat) erlaubt keine exakte Schätzung des Bewegungsvektors d . Lediglich die Komponente d_n in Normalenrichtung kann bestimmt werden. Ein wesentlich größerer Ausschnitt wäre notwendig, damit z.B. an einem Eckpunkt eine eindeutige Bestimmung der Bewegungsrichtung möglich wird. Die schwarze Linie ist die Struktur vor der Bewegung, die hellgraue Linie ist die Struktur nach der Bewegung.

3.5.2 Das Korrespondenzproblem

Das Korrespondenzproblem tritt auf, wenn die Fenstergröße zur Berechnung der Korrelationskoeffizienten einen kritischen Wert überschreitet, ab dem es zu Verwechslungen zwischen ähnlichen Elementen innerhalb des Bildausschnitts kommt. Die Fenstergröße kann aber nicht beliebig verkleinert werden, da sonst nicht genügend räumlich unterschiedliche

Strukturen im Bild enthalten sind, und aufgrund des Aperturproblems keine eindeutige Lösung für das Bewegungsvektorfeld existiert. Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet die neue pfadbasierte Bewegungsschätzungsmethode. Da man nicht ausschließlich auf lokale Informationen angewiesen ist, kann die Apertur klein gewählt werden, um Verwechslungen zu vermeiden. Die in einigen Bildbereichen fehlende strukturelle Information wird durch die globale Optimierungsstrategie der Pfadsuche aus Bereichen mit ausreichenden Richtungsinformationen ergänzt.

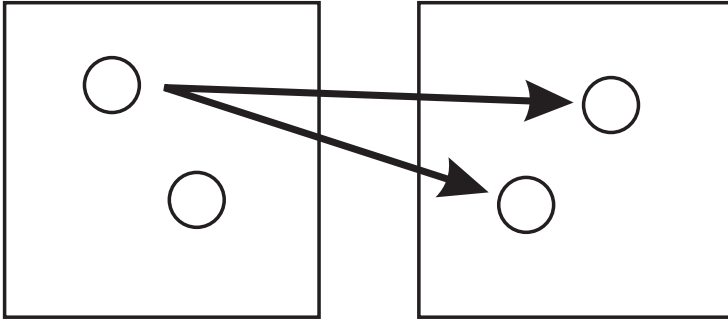


Abbildung 3.13: Das Korrespondenzproblem tritt auf, wenn im gewählten Bildausschnitt mehrere ähnliche Strukturen auftreten und deshalb keine eindeutige Bestimmung der tatsächlichen Bewegung möglich ist. Um die Zuordnung eindeutig zu machen, muss man den Bildausschnitt verkleinern, sodass nur noch ein Objekt enthalten ist. Gleichzeitig muss gewährleistet werden, dass sich das Objekt nicht aus dem Ausschnitt bewegt. Dazu muss die zeitliche Abtastung der Bewegung schnell genug erfolgen, damit keine Bewegungsvektoren auftreten, die das Objekt über die Fenstergrenzen hinaus verschieben können.

3.5.3 Pfadbasierte Bewegungsschätzung

Als Lösung für das Apertur- und Korrespondenzproblem bei der Bewegungsschätzung von Koronarien in Angiogrammen wird eine pfadbasierte Methode angewendet [ZGO04]. Anstatt nur die lokalen Maxima der Kreuzkorrelation innerhalb des Bildausschnittes zu verwenden, wird die Summe der Korrelationskoeffizienten entlang der Koronarien maximiert. Bei der Suche wird für jeden Knoten eine 3x3 Nachbarschaft expandiert. Damit bleibt die Kohäsion der einzelnen Pfadpunkte innerhalb der Gefäßkontur erhalten und es sind trotzdem große Verschiebungsvektoren für das Gefäß als Ganzes möglich. Die Apertur ist künstlich verkleinert und das Korrespondenzproblem wird vermieden. Durch die globale Optimierung des gesamten Pfades kann an Stellen mit wenig räumlicher Struktur auf Information weiter entfernter Bildbereiche zurückgegriffen werden. In den Abbildungen 3.14 und 3.15 findet sich eine Zusammenfassung des Verfahrens und die Darstellung ausgewählter Ergebnisse.

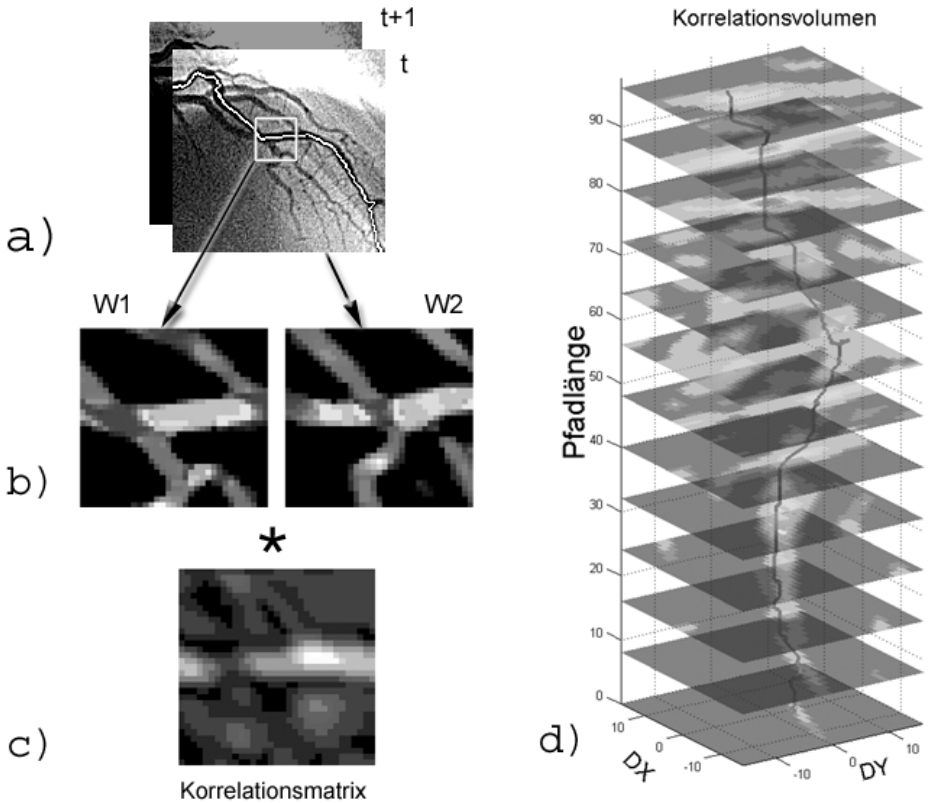


Abbildung 3.14: Schritte bei der Bewegungsschätzung. In zwei aufeinander folgenden Bildern werden die Gefäßmerkmale bestimmt (a). Anschließend wird für einen Ausschnitt um einen Pfadpunkt herum (Fenstergröße 16x16 Pixel) die Korrelation mit dem entsprechenden Ausschnitt im Nachfolgebild ausgeführt (b). Die zweidimensionalen Korrelationsbilder (c) werden für jeden Punkt entlang des Pfades zum Volumen der Korrelationskoeffizienten aufgestapelt. Durch dieses Volumen wird von unten nach oben eine Pfadsuche ausgeführt. Diese bestimmt, ausgehend vom initialen Pfad im ersten Bild, einen optimalen Pfad im Nachfolgebild, sodass die integralen Kosten durch das Volumen der Korrelationskoeffizienten optimal werden (d). Für die Pfadsuche wird eine 3x3 Punkte große Nachbarschaft im folgenden Korrelationsbild verwendet.

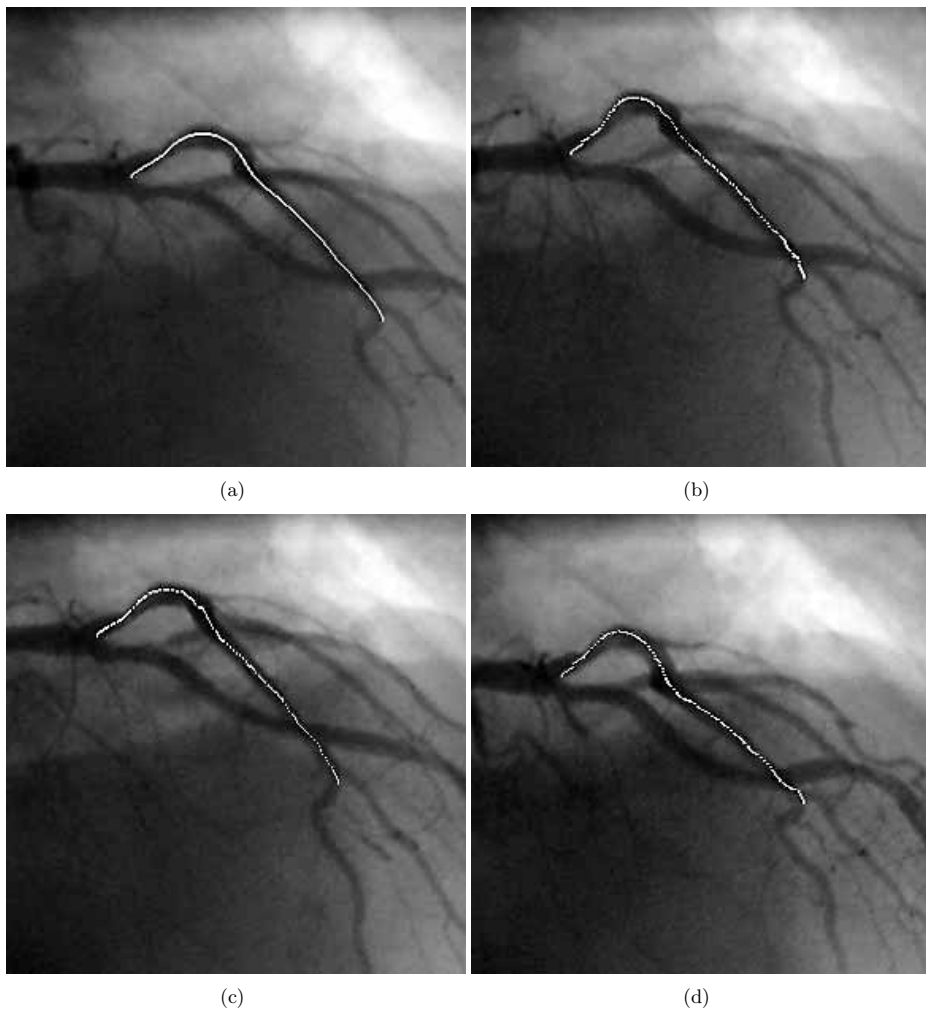


Abbildung 3.15: Ergebnisse nach der Übertragung des initialen Pfades im ersten Bild (a) in das dritte Bild der Sequenz (b), in das sechste Bild der Sequenz (c) und in das letzte von neun Bildern (d). Das mit der Pfadsuche geschätzte Verschiebungsvektorfeld wurde dazu benutzt, den Ausgangspfad in die Folgebilder zu übertragen.

4 Projektive Geometrie

Grundlage der Bildgewinnung für die biplane Angiographie sind perspektivische Abbildungen der Gefäße. Diese sind gekennzeichnet durch Verzerrungen der tatsächlichen Objektgrößen im Bild. Das bedeutet, dass von zwei gleich großen Objekten das weiter entfernte in der Projektion kleiner erscheint. Außerdem schneiden sich parallele Geraden und hohe Geschwindigkeiten entfernter Objekte können nicht von geringen Geschwindigkeiten naher Objekte unterschieden werden. Bilder mit diesen Eigenschaften zentralperspektivischer Abbildungen lassen sich mit Hilfe der projektiven Geometrie beschreiben.

Die projektive Geometrie ist eine Erweiterung der euklidischen Geometrie. Es werden unendlich ferne bzw. uneigentliche Elemente in die geometrischen Vorstellungen mit aufgenommen. Durch Hinzunahme der Fernelemente zum euklidischen Raum entsteht der projektiv-abgeschlossene euklidische Raum. Die notwendige Algebra und die Konsequenzen für die Behandlung perspektivischer Abbildungen werden im folgenden Kapitel beschrieben. Es erfolgt eine Zusammenfassung der Konzepte der projektiven Geometrie, wie sie für die dreidimensionale Rekonstruktion von Koronarien erforderlich sein werden.

4.1 Der projektive Raum

Der n -dimensionale projektive Raum \mathbb{P}^n kann mit der Menge aller eindimensionalen Unterräume eines Vektorraumes \mathbb{R}^{n+1} assoziiert werden. Die Elemente von \mathbb{P}^n werden *Punkte* genannt, entsprechen formal aber Geraden durch den Ursprung im \mathbb{R}^{n+1} . Ein Punkt im n -dimensionalen projektiven Raum \mathbb{P}^n ist durch einen $(n+1)$ -Vektor mit den Koordinaten $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})^\top$ gegeben [SK52]. Dabei dürfen nicht alle x_i zugleich null sein.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1.1 Homogene Koordinaten

Die Koordinaten des Punktes werden homogene bzw. projektive Koordinaten genannt. Homogene Koordinaten besitzen für die projektive Geometrie die gleiche Bedeutung wie die kartesischen Koordinaten für die euklidische Geometrie. Obwohl die projektive Geometrie selbst ohne Koordinaten auskommt, sind sie für praktische Anwendungen, in denen Winkel und Abstände berechnet werden müssen, unerlässlich. Eine Besonderheit stellt die Gleichheit von Punkten im \mathbb{P}^n dar. Zwei Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} sind genau dann gleich,

wenn es ein Skalar $\lambda \neq 0$ gibt, sodass gilt:

$$x_i = \lambda y_i, \quad 1 \leq i \leq (n+1)$$

d.h. zwei Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} sind identisch, falls die homogenen Koordinatenvektoren linear abhängig sind. Durch die Einführung homogener Koordinaten werden die Punkte des n -dimensionalen Raumes mit den eindimensionalen Untervektorräumen des \mathbb{R}^{n+1} identifiziert. So wie es unterschiedliche Schreibweisen für ein und dieselbe rationale Zahl gibt,

$$0.5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{6}{12} = \frac{50}{100} = \frac{100}{200} \dots$$

existiert eine Menge von Punkten im \mathbb{R}^{n+1} für einen einzigen Punkt im \mathbb{P}^n .

4.1.2 Geraden, Ebenen und Hyperebenen

Ein 2D-Punkt $\mathbf{x} = (x, y)^\top$ liegt auf der Geraden $\mathbf{l} = (a, b, c)^\top$ wenn gilt

$$ax + by + c = 0. \quad (4.1)$$

Mit Hilfe homogener Koordinaten kann diese Beziehung als inneres Produkt von Vektoren geschrieben werden.

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Diese Gleichung bleibt für einen beliebigen Skalierungsfaktor $\lambda \neq 0$ gültig. Punkte auf einer Geraden können durch den Nullraum der Geraden parametrisiert werden.

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 + \lambda \mathbf{p}_2 \quad (4.3)$$

Dabei sind \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 zwei Punkte auf der Geraden \mathbf{l} und es gilt

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{p}_1 = \mathbf{l}^\top \mathbf{p}_2 = 0.$$

Die Ebenen des \mathbb{P}^3 werden durch 4D-Vektoren dargestellt. Für einen Punkt \mathbf{X} in der Ebene $\mathbf{\Pi} = [a, b, c, d]^\top$ gilt $\mathbf{\Pi}^\top \mathbf{X} = 0$. Ein entsprechender Zusammenhang gilt für die Punkte und Hyperebenen im \mathbb{P}^n mit $n \geq 4$ [HZ04].

4.1.3 Richtungen

Anders als in der euklidischen Geometrie, in der parallel verlaufende Geraden als Sonderfall behandelt werden, schneiden sich Geraden und Hyperebenen im Projektiven immer.

Der Schnittpunkt zweier paralleler Geraden $\mathbf{l}_2 = (a, b, c)^\top$ und $\mathbf{l}_1 = (a, b, c')^\top$ ist der unendlich ferne Punkt¹

$$\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = (c' - c)(b, -a, 0)^\top.$$

¹Für $x_3 \rightarrow 0$ gehen $x = \frac{x_1}{x_3}$ und $y = \frac{x_2}{x_3}$ gegen ∞ . Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ in homogenen Koordinaten entspricht deshalb einem Punkt auf der Ferngeraden.

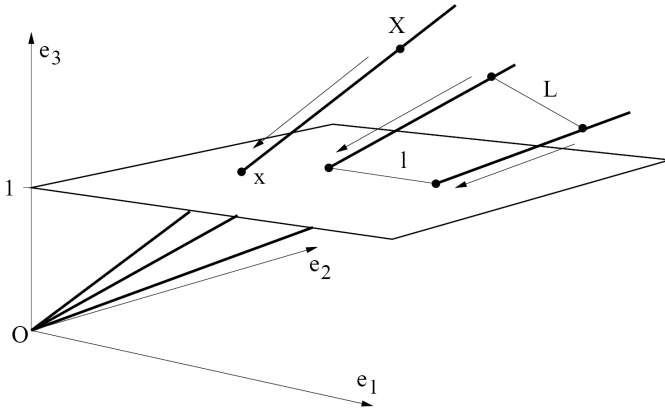


Abbildung 4.1: Geradenmodell der projektiven Geometrie. Punkte \mathbf{X} des \mathbb{P}^2 entsprechen Geraden durch den Ursprung im \mathbb{R}^3 . Geraden \mathbf{L} des \mathbb{P}^2 sind Ebenen im \mathbb{R}^3 . Die Punkte \mathbf{x} und Geraden \mathbf{l} des euklidischen Raumes lassen sich durch Projektion auf die Ebene $[0, 0, 1]^T$ zurückgewinnen.

Jeder Richtung des euklidischen Raumes entspricht ein unendlich ferner Punkt im dazugehörigen projektiven Raum. Richtungen im \mathbb{P}^2 haben in homogenen Koordinaten die Form $(x, y, 0)^T$. Somit entspricht jeder Äquivalenzklasse zueinander paralleler Geraden ein Fernpunkt. Zueinander parallele Geraden schneiden sich im Fernpunkt ihrer Geradenrichtung. Alle unendlich fernen Punkte des \mathbb{P}^2 liegen auf der unendlich fernen Geraden. Diese ist durch den Koordinatenvektor $(0, 0, 1)^T$ repräsentiert. Ebenso entspricht im dreidimensionalen projektiven Raum jeder Äquivalenzklasse zueinander paralleler Ebenen eine Ferngerade. Diese besteht aus denjenigen Fernpunkten, deren Geradenrichtung parallel zu diesen Ebenen ist. Die Menge aller Fernpunkte bzw. -geraden bildet die Fernebene. Analoges gilt für höhere Dimensionen.

4.1.4 Kegelschnitte

Kurven zweiter Ordnung wie Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln verlieren ihre Unterschiede in der projektiven Geometrie, denn sie sind alle projektiv äquivalent. Sie können durch projektive Transformationen ineinander überführt werden. Man bezeichnet sie deshalb auch einheitlich als Kegelschnitte². Kegelschnitte werden durch eine symmetrische quadratische Matrix \mathbf{C} beschrieben, sodass für alle Punkte \mathbf{X} des Kegelschnitts

$$\mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X} = 0 \quad (4.4)$$

gilt.

²Im Englischen ist die Bezeichnung *conics* gebräuchlich. Für höhere Dimensionen spricht man von Quadriken (engl. *quadrics*).

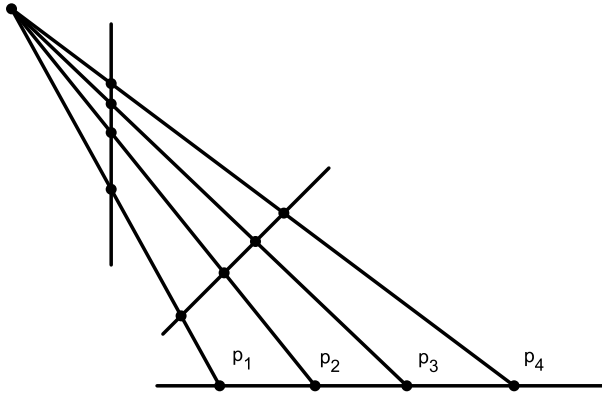


Abbildung 4.2: Das Doppelverhältnis aus vier kollinearen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 bleibt für projektive Transformationen invariant.

4.1.5 Modelle des projektiven Raumes

Obwohl drei Koordinaten verwendet werden, ist der \mathbb{P}^2 topologisch äquivalent zur Kugeloberfläche. Punkte im \mathbb{P}^2 können auch als gegenüberliegende Punkte auf der Einheitskugel betrachtet werden. Geraden im \mathbb{P}^2 bilden dann Großkreise auf der Einheitskugel. Somit existiert, neben der Darstellung eines Punktes im \mathbb{P}^2 als Strahl durch den Ursprung des \mathbb{R}^3 (siehe Abb. 4.1), noch ein weiteres Modell zur Beschreibung des Äquivalenzklassenprinzips.

4.1.6 Dualität

Zwischen Punkten und Geraden existiert eine Dualität. Die Gleichung 4.2 ist symmetrisch bezüglich der Rollen von Geraden und Punkten, d.h. $\mathbf{l}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$. Die Möglichkeit Punkte mit Geraden (bzw. Ebenen oder Hyperebenen) zu vertauschen, ist als Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie bekannt.

Punkte können als Schnittpunkt zweier Geraden \mathbf{l}_1 und \mathbf{l}_2 definiert werden

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2. \quad (4.5)$$

Umgekehrt lässt sich eine Gerade durch das äußere Produkt zweier Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 ausdrücken.

$$\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \quad (4.6)$$

4.1.7 Doppelverhältnis

Das Doppelverhältnis aus vier kollinearen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 , wie in Abb. 4.2 zu sehen, bildet ein projektiv invariantes Abstandsmaß.

$$DV(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\overline{P_1 P_3}}{\overline{P_2 P_3}} \bigg/ \frac{\overline{P_1 P_4}}{\overline{P_2 P_4}} \quad (4.7)$$

Dabei ist $\overline{P_i P_j}$ der Abstand des Punktes P_i vom Punkt P_j .

Ebenso lässt sich ein Doppelverhältnis für vier Geraden angeben [HZ04].

$$DV(l_1, l_2, l_3, l_4) = \frac{\sin \theta_{13}}{\sin \theta_{23}} \bigg/ \frac{\sin \theta_{14}}{\sin \theta_{24}}, \quad (4.8)$$

wobei θ_{ij} der Winkel zwischen Gerade l_i und Gerade l_j ist.

4.2 Lineare Transformationen

Allgemeine lineare Transformationen der Form $\mathbf{x}_2 = \mathbf{H}\mathbf{x}_1$ bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, d.h. das Produkt zweier linearer Transformationen ist wieder eine lineare Transformation. Mehrere einzelne Transformationen lassen sich so zu einer Gesamttransformation kombinieren. Außerdem unterscheidet man lineare Transformationen je nach Gestalt der zugehörigen Transformationsmatrix \mathbf{H} . Projektive Transformationen bilden die allgemeinste Form linearer Transformationen. Projektive Transformationen im \mathbb{P}^3 sind durch beliebige 4x4 Matrizen \mathbf{H}_P beschrieben.

$$\mathbf{H}_P = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Durch Einschränkungen der Transformationsmatrix ergeben sich weitere Untergruppen wie die affinen und euklidischen Transformationen. Die Klassifizierung erfolgt dabei nach den geometrischen Invarianten unter dem Einfluss der jeweiligen Transformation, z.B. erhalten euklidische Transformationen Längen und Winkel. Unter dem Einfluss affiner Transformationen bleiben Parallelität und Längenverhältnisse unverändert. Perspektivische Transformationen unterliegen den geringsten Einschränkungen, nur Doppelverhältnisse sind invariant.

4.2.1 Affine Transformation

Mit affinen Transformationen kann der Zusammenhang zwischen zwei Koordinatensystemen durch eine lineare Transformation, beschrieben durch eine nichtsinguläre Matrix \mathbf{A} und eine Translation \mathbf{t} , hergestellt werden.

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{t} \quad (4.10)$$

In homogenen Koordinaten lässt sich schreiben:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{H}_A \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Merkmal affiner Transformationen ist die Erhaltung von Parallelität und Längenverhältnissen, d.h. unendlich ferne Punkte bleiben erhalten. Für $\det \mathbf{A} > 0$ spricht man von orientierungserhaltender Transformation. Eine Umkehrung der Orientierung erfolgt für $\det \mathbf{A} < 0$. Falls $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{I}$ gilt, so handelt es sich um eine euklidische Transformation.

4.2.2 Euklidische Transformationen

Mit euklidischen Transformationen kann die Bewegung starrer Körper mathematisch beschrieben werden. Es gilt

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}\mathbf{x}_1 + \mathbf{t}, \quad (4.13)$$

wobei \mathbf{R} eine orthogonale Matrix und \mathbf{t} ein Translationsvektor ist. In homogenen Koordinaten lautet 4.13

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{H}_R \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{H}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Eine Ähnlichkeitstransformation erhält man aus der euklidischen Transformation durch Hinzunahme eines isotropen³ Skalierungsfaktors σ .

$$\mathbf{x}_2 = \sigma \mathbf{R} \mathbf{x}_1 + \mathbf{t} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \sigma r_{11} & \sigma r_{12} & \sigma r_{13} & t_1 \\ \sigma r_{21} & \sigma r_{22} & \sigma r_{23} & t_2 \\ \sigma r_{31} & \sigma r_{32} & \sigma r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.3 Projektionen

In diesem Abschnitt wird das zentralperspektivische Kameramodell erläutert, das Objektpunkte $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^\top$ auf zweidimensionale Bildpunkte $\mathbf{x} = (u, v)^\top$ abbildet. Dabei handelt es sich um ein lineares Modell $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}$, dessen physikalische Interpretation der Kameraparameter im folgenden erklärt wird.

³isotrop: unabhängig von der Richtung

4.3.1 Das Kamerakoordinatensystem

Bei physikalischen Kameramodellen unterscheidet man äußere und innere Kameraparameter. Die äußeren Parameter beschreiben die Position und Orientierung der Kamera, d.h. die Lage des dreidimensionalen Kamerakoordinatensystems relativ zur Umgebung. Diese ist durch das Welt- bzw. Objektkoordinatensystem festgelegt und eine Koordinatentransformation wird durch eine rechtsseitige Matrixmultiplikation realisiert. Die inneren Kameraparameter beschreiben die Projektion von Punkten des Kamerakoordinatensystems in das zweidimensionale Bildkoordinatensystem. Diese wird durch linksseitige Matrixmultiplikation erreicht.

Die mit den externen Kameraparametern verknüpfte Transformation bewirkt einen Wechsel vom Weltkoordinatensystem mit beliebigem Ursprung in das Kamerakoordinatensystem. Dieser Übergang zwischen den Koordinatensystemen erfolgt mittels einer euklidischen Transformation, bei der Kamera und Objekte als starre Körper behandelt werden. Die längen- und winkeltreue Transformation der Objektkoordinaten in das Kamerakoordinatensystem lässt sich folgendermaßen realisieren:

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{t}), \quad (4.17)$$

wobei \mathbf{X}_C die Koordinaten des Objektpunktes \mathbf{X} in Kamerakoordinaten sind. Der Transformationsvektor \mathbf{t} entspricht den Koordinaten des Ursprungs des Weltkoordinatensystems in Kamerakoordinaten. Damit kann die Position der Kamera an einen beliebigen Ort verschoben werden. Mit der orthogonalen Matrix \mathbf{R} lässt sich die Blickrichtung der Kamera festlegen.

4.3.2 Zentralperspektive

Nachdem die Koordinaten aller Objektpunkte durch Anwendung von Gleichung 4.17 in das Kamerakoordinatensystem überführt wurden, wird eine zentralperspektivische Transformation der Objektpunkte in die Bildebene ausgeführt. Das entspricht einem einfachen Lochkameramodell mit der Brennweite $f = 1$.

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}, \quad (4.18)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Damit ist die Projektion von Punkten im Kamerakoordinatensystem auf Punkte in der Bildebene beschrieben. Oft ist aber noch eine zusätzliche Transformation der Bildebene in Pixelkoordinaten notwendig, z.B. liegt der Ursprung fensterbasierter Ausgabegeräte häufig in der linken oberen Ecke und der Ausgabebereich ist nicht notwendigerweise

quadratisch. Für die Umrechnung der Pixelkoordinaten $(u, v)^T$ in die Koordinaten der Bildebene $(x, y)^T$ wird die Matrix \mathbf{K} verwendet.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \gamma f & sf & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sie wird als Kalibriermatrix bezeichnet und ihre Parameter sind:

- u_0, v_0 die Koordinaten des Ursprungs des Fensterkoordinatensystems
- f ist die Brennweite
- γ das Seitenverhältnis für nicht-quadratische Bildelemente
- s ist die Schiefe für nicht-rechteckige Bildelemente

In homogenen Koordinaten lassen sich durch linksseitige Matrixmultiplikation mit \mathbf{K} die inneren Kameraparameter berücksichtigen. Durch rechtsseitige Matrixmultiplikation lassen sich die äußeren Kameraparameter wie Translation und Rotation berücksichtigen. Damit läßt sich die Transformation von Objektkoordinaten in Pixelkoordinaten zu einer einzigen Matrixoperation $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{X}$ kombinieren.

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{R} \quad -\mathbf{R}t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Die Projektion von dreidimensionalen Objektpunkten auf die Bildebene ist durch die 3x4 Projektionsmatrix \mathbf{P} vollständig beschrieben [HZ04].

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{X} = \mathbf{K} [\mathbf{R} \quad -\mathbf{R}t] \mathbf{X} \quad (4.21)$$

Die Matrix besitzt zwölf Freiheitsgrade. Diese entsprechen den sechs äußeren Parametern, je drei für Translation und Rotation (z.B. drei Euler-Winkel), sowie den fünf internen Kameraparametern und einem globalen Skalierungsfaktor λ .

Die Umkehrung, von zweidimensionalen Bildpunkten zurück zu dreidimensionalen Objektpunkten, ist nicht eindeutig, da die Projektionsmatrix nicht invertierbar ist. Es sind deshalb mehrere Ansichten eines Objektpunktes nötig, um ihn eindeutig rekonstruieren zu können.

Hat man mehrere Projektionen eines Objektpunktes und kennt zusätzlich die zugehörigen Kameramatrizen, so kann man die dreidimensionalen Koordinaten durch Lösen des folgenden Gleichungssystems berechnen [HZ04]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{P}_2 & 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathbf{P}_n & 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -\lambda_1 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

4.3.3 Interpretation der 3x4 Kamera-Matrix

Für die Zeilen- und Spaltenvektoren der Projektionsmatrix gibt es eine anschauliche Interpretation. So entsprechen die Zeilen von \mathbf{P} Ebenen durch den Ursprung des Objektkoordinatensystems. Die Koeffizienten der Ebenengleichung sind im Objekt-Koordinatensystem gegeben und der Normalenvektor entspricht den ersten drei Einträgen des Zeilenvektors. Die ersten beiden Zeilen von \mathbf{P} sind die Ebenen, die die Bildebene in der Geraden $x = 0$ bzw. $y = 0$ schneiden. Die dritte Zeile entspricht der Ebene parallel zur Bildebene, die durch das Kamerazentrum verläuft. Der Vektor aus den ersten drei Einträgen der dritten Zeile gibt die Richtung der Bild-Hauptachse an. Der unendlich ferne Punkt auf der Bild-Hauptachse wird auf den Bild-Hauptpunkt mit den Koordinaten $(x_0, y_0)^T$ abgebildet.

Ähnlich den Zeilen können auch die Spalten von \mathbf{P} interpretiert werden. In der ersten Spalte stehen die homogenen Bild-Koordinaten des Fluchtpunktes (unendlich ferner Punkt) der X-Achse. Entsprechend lassen sich die zweite und dritte Spalte als die Fluchtpunkte der Y- und Z-Achse interpretieren. Die vierte Spalte von \mathbf{P} ist das Bild des Ursprungs des Objektkoordinatensystems.

Das Kamerazentrum \mathbf{C} hat die Eigenschaft, dass alle Punkte \mathbf{X} einer Geraden durch \mathbf{C} auf einen gemeinsamen Bildpunkt abgebildet werden. \mathbf{C} entspricht den homogenen Koordinaten des Projektionszentrums. Im allgemeinen Fall schneiden sich die durch \mathbf{P} definierten Ebenen in einem Punkt. Für den Fall, dass \mathbf{C} der unendlich ferne Punkt⁴ ist, beschreibt \mathbf{P} die Parallelprojektion in Richtung \mathbf{X} . Die Projektionsmatrix \mathbf{P} ist von Rang drei. Ihr rechtsseitiger Nullraum entspricht dem Kamerazentrum \mathbf{C} mit $\mathbf{PC} = 0$.

4.4 Epipolargeometrie

Die Epipolargeometrie bildet die Grundlage für die dreidimensionale Rekonstruktion. Das Kameramodell entspricht dem einfachen Lochkameramodell. Der Objektraum ist der dreidimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^3 . Dieser ist im projektiven Raum \mathbb{P}^3 eingebettet und der Bildraum entspricht dem \mathbb{P}^2 . Die Kamera beschreibt eine lineare projektive Abbildung vom \mathbb{P}^3 in den \mathbb{P}^2 mit folgender Zerlegung der Kameramatrix \mathbf{P}

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{PX} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{b}] \mathbf{X} \quad (4.22)$$

Die Matrix \mathbf{B} soll vollen Rang haben, sodass das optische Zentrum⁵ nicht im Unendlichen liegt. In Abbildung 4.3 ist die geometrische Anordnung der beiden Kameras am Beispiel der biplanen Koronarangiographie dargestellt.

⁴ $\mathbf{C} = (\mathbf{X}, 0)^T$

⁵Die Begriffe optisches Zentrum, Kamerazentrum bzw. Brennpunkt werden synonym verwendet und mit \mathbf{C} bezeichnet. Sie beschreiben den gemeinsamen Schnittpunkt aller Sehstrahlen. Es gilt $\mathbf{C} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

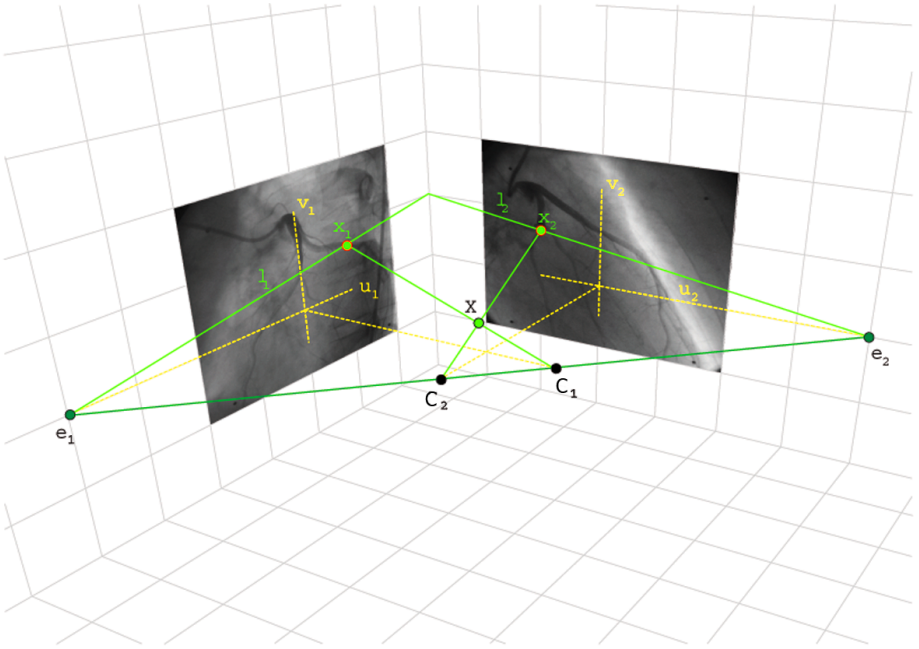


Abbildung 4.3: Die Epipolargeometrie, vereinfacht dargestellt am Beispiel der biplanen Koronarangiographie. Die Kamerazentren (Orte des Röntgenbrennflecks) sind mit C_1 und C_2 bezeichnet. Sie bilden gemeinsam mit dem Objektpunkt X eine Epipolarebene. Diese schneidet die beiden Bildebenen in den Epipolarlinien l_1 bzw. l_2 . Auf der Epipolarlinie l_1 im ersten Bild befindet sich der Bildpunkt x_1 . Die Projektion des Objektpunktes X auf die zweite Bildebene ist der Punkt x_2 . Dieser liegt auf der entsprechenden Epipolarlinie l_2 . Die beiden Epipole e_1 und e_2 sind die gemeinsamen Schnittpunkte aller Epipolarlinien der rechten bzw. linken Bildebene.

4.4.1 Projektionen mit zwei Kameras

Für zwei Kameras wird X aus Gleichung 4.22 eliminiert.

$$\lambda_1 x_1 = P_1 X$$

$$\lambda_1 x_1 = [B_1 \quad b_1] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = B_1 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + b_1$$

Nach den dreidimensionalen Punktkoordinaten umgestellt erhält man

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1^{-1}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)$$

und in die Abbildungsgleichung der zweiten Kamera eingesetzt

$$\begin{aligned} \lambda_2 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{P}_2 \mathbf{X} \\ &= [\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{b}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{-1}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 \\ &= \lambda_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{b}_1. \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $\mathbf{H}_{12} = \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1}$ und $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{b}_1$ wird der Zusammenhang zwischen \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 deutlich.

$$\lambda_2 \mathbf{x}_2 = \lambda_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{x}_1 + \mathbf{e}_2 \quad (4.23)$$

Das Kreuzprodukt mit einem dreidimensionalen Vektor kann durch eine entsprechende Matrixmultiplikation ersetzt werden. Dazu wird das Kreuzprodukt $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ als Multiplikation mit der schiefsymmetrischen Matrix $[\mathbf{x}]_{\times}$ geschrieben⁶, d.h.

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = [\mathbf{x}]_{\times} \mathbf{y}, \quad \text{mit } [\mathbf{x}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Durch Multiplikation von Gleichung 4.23 mit $[\mathbf{e}_2]_{\times}$ von links erhält man

$$[\mathbf{e}_2]_{\times} \lambda_2 \mathbf{x}_2 = [\mathbf{e}_2]_{\times} \lambda_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{x}_1 + [\mathbf{e}_2]_{\times} \mathbf{e}_2.$$

Das Sortieren der Terme und die Verwendung von

$$[\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{e} = \mathbf{e} \times \mathbf{e} = 0$$

und ein anschließendes Skalarprodukt mit \mathbf{x}_2 von links ergibt

$$0 = \mathbf{x}_2 \cdot [\mathbf{e}_2]_{\times} \mathbf{H}_{12} \mathbf{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{x}_2 \cdot ([\mathbf{e}_2]_{\times} \mathbf{x}_2).$$

Unter Verwendung von

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

⁶Es gilt $[\mathbf{x}]_{\times} = -[\mathbf{x}]_{\times}^{\top}$.

erhält man schließlich

$$0 = \mathbf{x}_2 [\mathbf{e}_2]_x \mathbf{H}_{12} \mathbf{x}_1.$$

Der Ausdruck $\mathbf{F} = [\mathbf{e}_2]_x \mathbf{H}_{12}$ wird als *Fundamentalmatrix* [HZ04] bezeichnet und beschreibt den Zusammenhang korrespondierender Bildpunkte zu einem gegebenen Objektpunkt.

$$\mathbf{x}_2^\top \mathbf{F} \mathbf{x}_1 = 0 \quad (4.24)$$

Das ist die Grundgleichung der Epipolargeometrie. Sie besagt, dass ein zu \mathbf{x}_1 im ersten Bild korrespondierender Bildpunkt auf der entsprechenden Epipolarlinie $\mathbf{l}_2 = \mathbf{F} \mathbf{x}_1$ im zweiten Bild liegen muss. So lässt sich Gleichung 4.24 auch als $\mathbf{x}_2^\top \mathbf{l}_2 = 0$ interpretieren.

4.4.2 Die kanonische Form der Kameramatrizen

Da für die Epipolargeometrie nur die relative Lage der beiden Kameras zueinander relevant ist, wird eine kanonische Darstellung der Kameramatrizen mit der ersten Kamera in Nullage berechnet. Die Kameramatrizen sind folgendermaßen parametrisiert

$$\mathbf{P}_1 = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{b}_1], \quad \mathbf{P}_2 = [\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{b}_2], \quad (4.25)$$

Zur Transformation der Kameras wird die Matrix \mathbf{H} verwendet

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{-1} & -\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Es ergibt sich die kanonische Form der Kameramatrizen mit der ersten Kamera in Nullage

$$\mathbf{P}'_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{H} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$$

und der zweiten Kamera

$$\mathbf{P}'_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{H} = [\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \quad \mathbf{b}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{b}_1].$$

4.4.3 Epipole und Epipolarlinien

Gegeben sind die optischen Zentren \mathbf{C}_1 und \mathbf{C}_2 der beiden Kameras, \mathbf{x}_1 ist das Bild des Objektpunktes \mathbf{X} in der ersten Bildebene Π_1 und \mathbf{x}_2 der entsprechende Bildpunkt in der zweiten Bildebene Π_2 . Für einen Bildpunkt \mathbf{x}_1 liegt der entsprechende Bildpunkt \mathbf{x}_2 auf der Geraden \mathbf{l}_2 , der Schnittgeraden der Bildebene Π_2 mit der Ebene durch \mathbf{X} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 . Diese Gerade wird Epipolarlinie genannt. Die Epipolarlinie \mathbf{l}_1 , die zu \mathbf{x}_1 gehört, ist die Schnittgerade der Epipolarebene mit der Bildebene Π_1 . Die beiden Geraden \mathbf{l}_1 und \mathbf{l}_2 bilden konjugierte Epipolarlinien. Jeder Punkt auf der ersten Epipolarlinie hat seinen entsprechenden Punkt auf der zweiten Epipolarlinie. Die Punkte \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 sind die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 mit Π_1 und Π_2 (siehe auch Abbildung 4.3). Die Punkte \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 bezeichnet man als Epipole. Sie sind die gemeinsamen Schnittpunkte aller Epipolarlinien im ersten bzw. zweiten Bild.

Als Epipol bezeichnet man die Projektion eines Kamerazentrums in die jeweils andere Bildebene. Das Kamerazentrum \mathbf{C} entspricht dem rechtsseitigen Nullraum der Projektionsmatrix \mathbf{P} .

Die Gleichung für das erste Kamerazentrum lautet

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (4.27)$$

4.4.4 Die Epipole als Nullräume der Fundamentalmatrix

Die Epipole entsprechen den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Nullräumen der Fundamentalmatrix [HZ04]. Sie lassen sich aus der Singulärwertzerlegung von \mathbf{F} bestimmen

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$$

mit einer Diagonalmatrix \mathbf{D} und zwei orthonormalen Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} .

Die letzte Spalte von \mathbf{V} ergibt den Epipol \mathbf{e}_1 . Die letzte Spalte von \mathbf{U} liefert den zweiten Epipol \mathbf{e}_2 .

Der rechte Nullraum von \mathbf{F} ist \mathbf{e}_1 . Entsprechend ist \mathbf{e}_2 der linke Nullraum zu \mathbf{F} .

$$\mathbf{F} \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{F}^T \mathbf{e}_2 = 0 \quad (4.28)$$

Die Koeffizienten der Geradengleichung der Epipolarlinien $\mathbf{l} = ax + by + c$ lassen sich mit

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{F} \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{l}_1 = \mathbf{F}^T \mathbf{x}_2 \quad (4.29)$$

berechnen.

Manchmal ist es notwendig, eine Epipolarlinie aus einer Ansicht in eine andere Ansicht zu übertragen. Der Transfer von Epipolarlinien zwischen verschiedenen Ansichten erfolgt mit

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{F} [\mathbf{e}_1]_x \mathbf{l}_1, \quad \mathbf{l}_1 = \mathbf{F}^T [\mathbf{e}_2]_x \mathbf{l}_2. \quad (4.30)$$

4.4.5 Anpassung der Fundamentalmatrix bei Skalierung

Bei der Mehrskalendarstellung von Bildern hat man es mit einer Bildpyramide zu tun, bei der jede Bildebene einer bestimmten Auflösungsstufe des Originalbildes entspricht. Dabei ändert sich die Bildgröße. Um trotzdem die Gleichungen der Epipolargeometrie anwenden zu können, ist eine Anpassung der Projektionsmatrizen und der Fundamentalmatrix an die geänderte Bildgröße notwendig. Dazu wird eine Transformationsmatrix \mathbf{T} berechnet. Der Skalierungsfaktor s sei der Quotient aus der neuen und der bestehenden Bildgröße in Pixeln. Damit ergibt sich die Transformationsmatrix als einfache Skalierungsmatrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad s = \frac{\text{neue Bildgröße}}{\text{alte Bildgröße}}.$$

Die an die neue Bildauflösung angepasste Fundamentalmatrix lautet

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{F} \mathbf{T}^{-1}. \quad (4.31)$$

Die entsprechend angepassten Projektionsmatrizen sind

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{T}\mathbf{P}_1, \quad \tilde{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{T}\mathbf{P}_2.$$

4.4.6 Joint Image Space

Die Epipolargeometrie bestimmt eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit eingebettet in den \mathbb{R}^4 [AA00]. Die Fundamentalmatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$$

stellt die Beziehung zwischen zwei korrespondierende Bildpunkten \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 her (siehe 4.24). Mit $\mathbf{q} = (p_{1x}, p_{1y}, p_{2x}, p_{2y})^\top$, einem Punkt im 4-dimensionalen Joint Image Space $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$, kann diese Beziehung auch folgendermaßen geschrieben werden

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\top & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.32)$$

Dabei ist \mathbf{C} eine symmetrische 5×5 Matrix, die einer Quadrik im \mathbb{R}^5 entspricht. Da \mathbf{C} Rang vier hat, handelt es sich um einen Kegel [SK52].

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ 0 & 0 & F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & 0 & 0 & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{13} & F_{23} & 2F_{33} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Auf dem Mantel dieses Kegels liegen alle Punkte des Joint Image Space die der durch die Fundamentalmatrix beschriebenen Epipolargeometrie genügen. Die Spitze des vierdimensionalen Kegels wird durch den Joint Epipol $\mathbf{q}_e = (e_{1x}, e_{1y}, e_{2x}, e_{2y})^\top$ gebildet.

4.5 Kegelschnitte in der projektiven Geometrie

In der euklidischen Geometrie der Ebene unterscheidet man drei Typen von Kegelschnitten: Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln. In der projektiven Geometrie hingegen sind alle drei Typen äquivalent zueinander, d.h. sie lassen sich durch Transformationen ineinander überführen und brauchen nicht mehr gesondert behandelt zu werden. Man bezeichnet sie deshalb auch einheitlich als Kegelschnitte [HZ04]. So wie ein Kreis in der euklidischen Geometrie durch die Menge aller Punkte mit gleichem Abstand zum Kreismittelpunkt definiert ist, so ist ein Kegelschnitt in der projektiven Geometrie über die Menge aller Punkte mit einem konstanten Doppelverhältnis zu vier vorgegebenen Punkten definiert. Der euklidische Abstand zwischen zwei Punkten bei der Definition des Kreises wird durch das projektiv invariante Doppelverhältnis ersetzt. Der folgende Abschnitt behandelt die algebraischen Grundlagen und Anwendungen der projektiven Geometrie. Ziel ist es, am Ende einen Epipolartransfer von elliptisch approximierten Bildbereichen zwischen zwei Projektionen ausführen zu können.

4.5.1 Die Pol-Polare-Beziehung

Parametrisiert man eine Gerade durch zwei Punkte $\mathbf{l} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$, so kann man die Schnittpunkte mit einem Kegelschnitt \mathbf{C} durch Lösen folgender Gleichung bestimmen

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y})^T \mathbf{C} (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) &= 0, \\ \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + 2\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{y} + \lambda^2 \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{y} &= 0.\end{aligned}$$

Somit existieren immer zwei Schnittpunkte zwischen Gerade und Kegelschnitt. Diese können reell oder komplex sein.

Die Polare ist zugleich die Tangente, falls \mathbf{x} auf dem Kegelschnitt liegt. Damit gilt $\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. Allgemeiner ist die *Pol-Polare-Beziehung*, falls \mathbf{x} nicht auf \mathbf{C} liegt:

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0.$$

Ein Kegelschnitt \mathbf{C} und ein homogener Punkt \mathbf{x} in der Ebene des Kegelschnittes definieren eine Gerade \mathbf{l}

$$\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (4.34)$$

Der Punkt \mathbf{x} wird als Pol und die Gerade \mathbf{l} als Polare bezeichnet. Liegt der Pol außerhalb des Kegelschnittes (Abbildung 4.4a), dann existieren zwei Schnittpunkte. Für den Fall dass der Pol auf dem Kegelschnitt liegt (Abbildung 4.4b), ist die Polare auch die Tangente an \mathbf{C} im Punkt \mathbf{x} und es existiert nur ein Schnittpunkt. Ist der Pol im Inneren des Kegelschnittes, so gibt es keine reellen Schnittpunkte (Abbildung 4.4c).

Die Gerade \mathbf{l} wird Polare von \mathbf{x} bezüglich \mathbf{C} genannt und der Punkt

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}$$

ist der Pol von \mathbf{l} bezüglich \mathbf{C} . Die Polare \mathbf{l} von \mathbf{x} schneidet \mathbf{C} in zwei Punkten. Die Tangenten an \mathbf{C} in diesen beiden Punkten schneiden sich ihrerseits in \mathbf{x} .

4.5.2 Konjugierte Punkte

Konjugierte Punkte bezüglich \mathbf{C} erfüllen die Bedingung

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{C} \mathbf{x}_2 = 0.$$

Für Punkte \mathbf{x}_2 auf der Polaren $\mathbf{l}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1$ gilt

$$\mathbf{l}_1^T \mathbf{x}_2 = (\mathbf{C}\mathbf{x}_1)^T \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{C} \mathbf{x}_2 = 0.$$

Aufgrund der Symmetrie $\mathbf{x}_1^T \mathbf{C} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^T \mathbf{C} \mathbf{x}_1 = 0$, kann man sagen, dass falls sich \mathbf{x}_2 auf der Polaren von \mathbf{x}_1 befindet, auch \mathbf{x}_1 auf der Polaren von \mathbf{x}_2 ist (siehe Abbildung 4.4d).

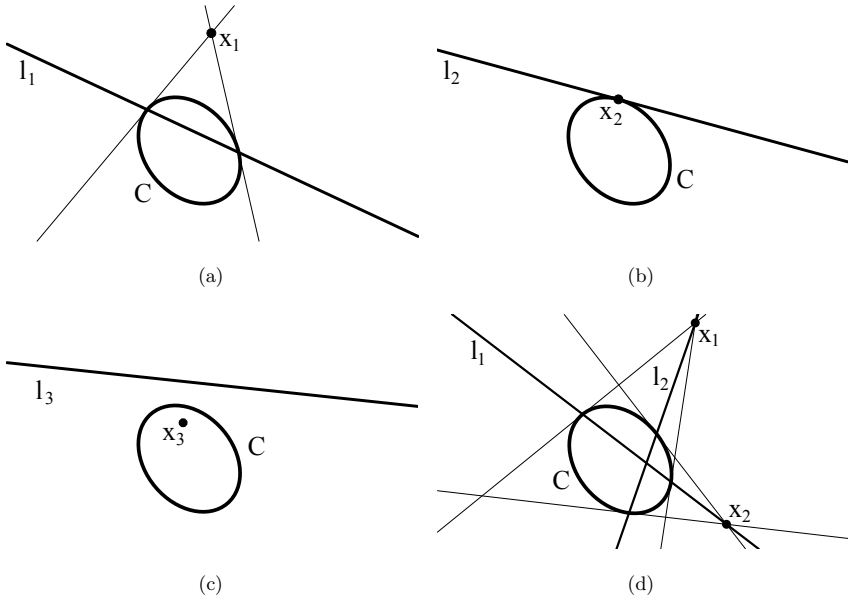


Abbildung 4.4: (a) Der Pol x_1 liegt außerhalb des Kegelschnittes C . Die Polare l_1 schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten. Die beiden Schnittpunkte sind zugleich die Berührungspunkte der Tangenten von x_1 an den Kegelschnitt C , (b) Liegt der Punkt x_2 auf dem Kegelschnitt, so ist die Polare l_2 auch die Tangente an C im Punkt x_2 , (c) Befindet sich der Pol im Inneren des Kegelschnittes, so existieren keine reellen Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt. Die Polare befindet sich außerhalb des Kegelschnittes, (d) Der Punkt x_2 befindet sich auf der Polaren l_1 des Poles x_1 und der Punkt x_1 befindet sich auf der Polaren zum Punkt x_2 . Die Punkte x_1 und x_2 werden deshalb als konjugierte Punkte bezüglich C bezeichnet.

4.5.3 Duale Kegelschnitte

Neben der Möglichkeit, einen Kegelschnitt $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0$ durch die Menge der Punkte \mathbf{x} auf seinem Rand zu definieren, ist es ebenfalls möglich, eine Definition über die Menge der Tangenten \mathbf{l}

$$\mathbf{l}^T \mathbf{C}^* \mathbf{l} = 0$$

an den Kegelschnitt vorzunehmen. Dabei bezeichnet \mathbf{C}^* den durch die Menge der Tangenten bestimmten dualen Kegelschnitt. Dieser steht mit dem durch Punkte bestimmten Kegelschnitt in folgender Beziehung [HZ04]

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{-1}. \quad (4.35)$$

Wie in Abbildung 4.5 gezeigt, bilden die Tangenten die Einhüllende für den dualen Kegelschnitt \mathbf{C}^* .

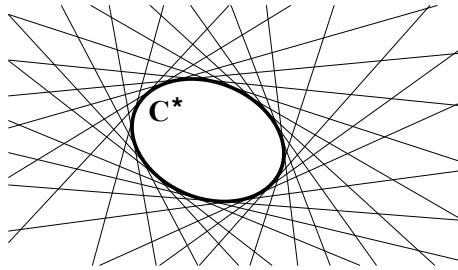


Abbildung 4.5: Der duale Kegelschnitt \mathbf{C}^* wird nicht durch eine Menge von Punkten bestimmt, sondern durch die Menge der tangential verlaufenden Geraden.

Kegelschnitte sind von besonderem Interesse, weil sie unter dem Einfluss projektiver Transformationen \mathbf{H} erhalten bleiben.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}' &= \mathbf{H}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{C}' \mathbf{x}' &= \mathbf{x}'^T (\mathbf{H}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{x}' \\ &= (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{x}')^T \mathbf{C} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{x}') \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise lässt sich der duale Kegelschnitt \mathbf{C}^* transformieren

$$\mathbf{C}^{*'} = \mathbf{H} \mathbf{C}^* \mathbf{H}^T. \quad (4.36)$$

4.6 Quadriken

Jeder Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten (x, y, z) einer Quadrik \mathcal{Q} erfüllt folgende algebraische Gleichung zweiter Ordnung [HZ04]

$$f(x, y, z) =$$

$$q_{11}x^2 + 2q_{12}xy + q_{22}y^2 + 2q_{13}xz + 2q_{23}yz + q_{33}z^2 + 2q_{14}x + 2q_{24}y + 2q_{34}z + q_{44} = 0$$

oder in homogenen Koordinaten mit der Substitution $(x, y, z) \mapsto (x_1/x_4, x_2/x_4, x_3/x_4)$

$$\begin{aligned} q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2 + 2q_{13}x_1x_3 + 2q_{23}x_2x_3 + \\ q_{33}x_3^2 + 2q_{14}x_1x_4 + 2q_{24}x_2x_4 + 2q_{34}x_3x_4 + q_{44}x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich die äquivalente Matrixdefinition einer Quadrik \mathcal{Q} als Menge aller Punkte X mit folgender Eigenschaft

$$\mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{X} \mid \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = 0 \right\}. \quad (4.37)$$

Man bezeichnet Gleichung 4.37 auch als quadratische Form. Die Symmetrie der Matrix \mathbf{Q} muss für eine quadratische Form nicht vorausgesetzt werden. Für eine allgemeine quadratische Matrix lässt sich die quadratische Form folgendermaßen symmetrisieren

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) \mathbf{X}.$$

Alle Quadriken lassen sich durch eine projektive Transformation \mathbf{H} in eine Einheitsform überführen und sind deshalb projektiv äquivalent.

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{Q}_0 \mathbf{H}^{-1}$$

Die Gleichung der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 in Nullage lautet z.B. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ mit $r = 1$.

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Gleichung für eine Quadrik lässt sich auch folgendermaßen schreiben

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0.$$

Dabei sind \mathbf{A} eine quadratische Form, \mathbf{b} eine Linearform und c eine Konstante. Mit einer Hauptachsentransformation lässt sich die Quadrik in die Normalform bringen. Je nach Vorzeichen der Eigenwerte der Normalform unterscheidet man zwischen drei Typen:

- elliptisch, bei gleichem Vorzeichen der Eigenwerte
- parabolisch, falls der Eigenwert 0 auftritt
- hyperbolisch, bei verschiedenen Vorzeichen der Eigenwerte.

Für eine ausführliche Liste siehe Tabelle 4.1. Die Halbachsenlängen $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ der Quadrik entsprechen den reziproken Wurzeln aus den Beträgen der Eigenwerte λ_i .

Tabelle 4.1: Normalformen von Quadriken im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 . Die positiven Skalare a_i entsprechen den Halbachsenlängen der Quadrik.

\mathbb{R}^n	Normalform	Bezeichnung
n=2	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punkt
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbel
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0$	Ellipse
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - 1 = 0$	paralleles Geradenpaar
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	Parabel
n=3	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	Punkt
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	elliptischer (Doppel-)Kegel
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Gerade
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidende Ebenen
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelebene
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0$	Ellipsoid
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0$	elliptischer Zylinder
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - 1 = 0$	parallele Ebenen
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	elliptisches Paraboloid
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	hyperbolisches Paraboloid
	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	parabolischer Zylinder

4.6.1 Beispiele für Quadriken im \mathbb{R}^3

Ein Ellipsoid mit den Hauptachsenlängen $2a$, $2b$ und $2c$ wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = \mathbf{X}^\top \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0.$$

Eine Kugel ist ein spezieller Ellipsoid mit $r = a = b = c$.

Hat die Matrix der Quadrik keinen vollen Rang, so spricht man von degenerierten Quadriken. Ein Beispiel dafür ist ein elliptischer Zylinder mit den Hauptachsenlängen $2a$ und $2c$.

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = \mathbf{X}^\top \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0$$

Ein Kreiszylinder mit Radius r ist ein Spezialfall mit $r = a = c$.

Eine kegelige Quadrik ist ebenfalls möglich, z.B. ein elliptischer Kegel mit Hauptachsenlängen $2a$ und $2c$ und der Höhe eins. Auch die Matrix für kegelige Quadriken hat keinen vollen Rang.

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - y^2 + \frac{z^2}{c^2} = \mathbf{X}^\top \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0$$

Ein Kreiskegel ist ein Spezialfall mit $r = a = c$.

Jede der zuvor beschriebenen quadratischen Flächen kann durch eine euklidische Transformation \mathbf{T} in beliebige Lage und Orientierung gebracht werden. Die Gleichung für die transformierte Quadrik $\tilde{f}(x, y, z)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{Q}' \mathbf{X} = 0 \quad (4.38)$$

mit der Transformationsvorschrift $\mathbf{Q}' = \mathbf{T}^\top \mathbf{Q} \mathbf{T}$. Um die Einheitskugel in Nullage in den

Punkt $(1, 1, 1)$ zu verschieben wird folgende Transformation angewendet.

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x, y, z) &= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 1 \\
 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 - 1 \\
 &= \mathbf{X}^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +2 \end{bmatrix} \mathbf{X} \\
 &= \mathbf{X}^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \\
 &= \mathbf{X}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{Q}' \mathbf{X} = 0
 \end{aligned}$$

Für eine Kugel ergibt sich die folgende Parametermatrix:

$$\mathbf{Q}_{\text{Kugel}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_{14} \\ 0 & 1 & 0 & q_{24} \\ 0 & 0 & 1 & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix}.$$

Der Kugelmittelpunkt ist $(-q_{14}, -q_{24}, -q_{34})$ und der Radius $\sqrt{q_{14}^2 + q_{24}^2 + q_{34}^2 - q_{44}}$.

4.6.2 Normalenvektor zu einer Quadrik

Die Normale zu einer implizit definierten Fläche $f(x, y, z) = 0$ am Schnittpunkt P erhält man als Gradient der Funktion f in diesem Punkt. Dazu müssen die partiellen Ableitungen in die x -, y - und z -Richtung bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}(x, y, z)|_P &= \nabla f(x, y, z)|_P = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{array} \right) \Big|_P \\
 N_x &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{X}^\top}{\partial x} \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{X}^\top \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} = 2 \frac{\partial \mathbf{X}^\top}{\partial x} \mathbf{Q} \mathbf{X} \\
 &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{X} = 2(q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z + q_{14}) \\
 N_y &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{X}^\top}{\partial y} \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{X}^\top \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} = 2 \frac{\partial \mathbf{X}^\top}{\partial y} \mathbf{Q} \mathbf{X} \\
 &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{X} = 2(q_{12}x + q_{22}y + q_{23}z + q_{24}) \\
 N_z &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{X}^\top}{\partial z} \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{X}^\top \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = 2 \frac{\partial \mathbf{X}^\top}{\partial z} \mathbf{Q} \mathbf{X} \\
 &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{X} = 2(q_{13}x + q_{23}y + q_{33}z + q_{34})
 \end{aligned}$$

Der Normalenvektor \mathbf{N} ist kein Einheitsvektor und muss gegebenenfalls noch normiert werden.

4.6.3 Die Vektorisierung von Matrizen

Die Matrix-Vektorisierung ist eine lineare Transformation. Sie wird zur Umwandlung von Matrizen in Spaltenvektoren verwendet. Als Ergebnis der Vektorisierung $\text{vec}(\mathbf{A})$ einer $m \times n$ Matrix \mathbf{A} erhält man einen $mn \times 1$ Spaltenvektor, bei dem die Spalten der Matrix \mathbf{A} übereinander angeordnet sind.

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = [a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, a_{1n}, \dots, a_{mn}]^T$$

Eine symmetrische Matrix \mathbf{A} ist vollständig durch ihre untere Dreiecksmatrix bestimmt, d.h. die Information über die Symmetrie und die $n(n+1)/2$ Elemente auf und unterhalb der Hauptdiagonalen reicht, um \mathbf{A} eindeutig festzulegen. Deshalb ist eine Halb-Vektorisierung im Vergleich zur vollständigen Vektorisierung effizienter. Als Ergebnis der Halb-Vektorisierung $\text{vech}(\mathbf{A})$ einer symmetrischen $n \times n$ Matrix \mathbf{A} erhält man einen $n(n+1)/2 \times 1$ Spaltenvektor. Dieser entspricht der Vektorisierung der unteren Dreiecksmatrix von \mathbf{A} .

$$\text{vech}(\mathbf{A}) = [a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{22}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{n-1,n-1}, a_{n-1,n}, a_{nn}]^T.$$

Es gibt eindeutige Matrizentransformationen zur Umwandlung der Halb-Vektorisierung in die Vektorisierung und umgekehrt [MN88]. Diese nennt man Duplizierungs- bzw. Eliminierungs-Matrix.

Die Duplizierungs-Matrix \mathbf{D}_n ist die $n^2 \times n(n+1)/2$ Matrix, die für jede $n \times n$ symmetrische Matrix \mathbf{A} $\text{vec}(\mathbf{A})$ in $\text{vec}(\mathbf{A})$ transformiert.

$$\mathbf{D}_n \text{vec}(\mathbf{A}) = \text{vec}(\mathbf{A}). \quad (4.39)$$

Die Eliminierungs-Matrix \mathbf{E}_n ist die $n(n+1)/2 \times n^2$ Matrix, die für jede $n \times n$ untere Dreiecksmatrix \mathbf{A} $\text{vec}(\mathbf{A})$ in $\text{vech}(\mathbf{A})$ transformiert

$$\mathbf{E}_n \text{vec}(\mathbf{A}) = \text{vech}(\mathbf{A}). \quad (4.40)$$

4.6.4 Das Kronecker-Produkt

Das Ergebnis des Kronecker-Produkts zweier Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} ist ein Vektor mit allen elementweisen Produkten $x_i y_j$. Dies steht in folgender Beziehung zur spaltenweisen Vektorisierung des äußeren Produktes.

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{y}\mathbf{x}^T)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} = \text{vec} \begin{pmatrix} y_1 x_1 & \dots & y_1 x_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_l x_1 & \dots & y_l x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_1 \\ \vdots \\ y_l x_1 \\ y_1 x_k \\ \vdots \\ y_l x_k \end{pmatrix}$$

Für mehr als zwei Dimensionen wird das Kronecker-Produkt mehrmals wiederholt.

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} = \text{vec}(\text{vec}(\mathbf{zy}^T)\mathbf{x}^T)$$

Das Kronecker-Produkt lässt sich auch für Matrizen schreiben. Für eine $m \times n$ Matrix \mathbf{A} und eine $p \times r$ Matrix \mathbf{B} ist das Kronecker-Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ definiert als

$$\mathbf{C} = (a_{ij} \cdot \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis ist eine Matrix \mathbf{C} der Dimension $mp \times nr$. Das Kronecker-Produkt ist assoziativ

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}.$$

Speziell für die Arbeit mit den Bilinearformen der Quadriken im nächsten Abschnitt ist folgende Äquivalenz hilfreich

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{C} \quad \implies \quad \text{vec}(\mathbf{AXB}) = \text{vec}(\mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X}). \quad (4.41)$$

4.6.5 Projektive Bilder von Quadriken

Die Rückprojektion eines Kegelschnittes \mathbf{C} aus der Bildebene ergibt die kegelige Quadrik \mathbf{Q} im Kamerakoordinatensystem

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}, \quad \text{mit } \mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{X} \mid \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = 0 \right\}.$$

Ein 3D-Punkt $\mathbf{X} \in \mathcal{Q}$ in homogenen Koordinaten wird auf einen Punkt $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{X}$ der Silhouette der Quadrik in der Bildebene projiziert. Die 3×4 -Projektionsmatrix \mathbf{P} enthält die Kameraparameter. Schreibt man die Matrix $\mathbf{P} = [\mathbf{B} \ \mathbf{b}]$, so kann die Projektionsgleichung folgendermaßen erweitert werden:

$$\lambda \mathbf{x} = [\mathbf{B} \ \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Für \mathbf{X}_3 erhält man

$$\mathbf{X}_3 = \lambda \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \lambda \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{c} \quad (4.42)$$

mit dem Kamerazentrum $\mathbf{c} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ der ersten Kamera.

Schreibt man für die Parametermatrix \mathbf{Q} der Quadrik

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{33} & \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^T & q \end{bmatrix},$$

wobei \mathbf{Q}_{33} eine symmetrische 3×3 Matrix, \mathbf{q} ein Vektor und q ein Skalar ist, so ergibt sich aus der Bestimmungsgleichung für eine Quadrik

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} \\ &= [\mathbf{X}_3^T \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{33} & \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^T & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{X}_3^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{X}_3 + \mathbf{q}^T \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3^T \mathbf{q} + q \\ &= \mathbf{X}_3^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{X}_3 + 2\mathbf{X}_3^T \mathbf{q} + q. \end{aligned}$$

Setzt man für \mathbf{X}_3 Gleichung 4.42 ein

$$\begin{aligned}
 0 &= (\lambda \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{c})^T \mathbf{Q}_{33} (\lambda \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{c}) + 2(\lambda \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{c})^T \mathbf{q} + q \\
 &= (\lambda \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x})^T \mathbf{Q}_{33} (\lambda \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}) + \mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + 2\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + 2\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{q} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{q} + q \\
 &= \left(\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} \right) \lambda^2 + 2 \left(\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{q} \right) \lambda + \left(\mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{q} + q \right),
 \end{aligned}$$

so erhält eine quadratische Gleichung in λ . Die Silhouette einer Quadrik im Bild wird durch die Menge der Schnittpunkte aller Strahlen, die tangential vom Kamerazentrum aus zur Quadrik verlaufen, mit der Bildebene gebildet. Für einen Strahl, der die Quadrik schneidet, existieren zwei Schnittpunkte, je einer für die Eintritts- und Austrittsstelle aus der Quadrik. Dann liegt der gemeinsame Bildpunkt \mathbf{x} der beiden Durchstoßpunkte im Inneren des Bildes der Quadrik. Dieser Fall tritt auf, wenn es zwei unterschiedliche reelle Lösungen für λ gibt. Für eine konjugiert komplexe Lösung existieren keine Schnittpunkte des Strahls mit der Quadrik. Der Strahl verläuft tangential zur Quadrik, wenn es eine Doppellösung für λ gibt. Der Bildpunkt liegt dann auf dem Rand der ins Bild projizierten Quadrik und gehört damit zur Silhouette.

Die Lösungsgleichung für λ lautet

$$\lambda_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

mit den Substitutionen

$$\begin{aligned}
 a &= \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} \\
 b &= 2 \left(\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{q} \right) \\
 c &= \mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{q} + q.
 \end{aligned}$$

Die Bedingung für eine Doppellösung $\lambda_+ = \lambda_-$ lautet $b^2 - 4ac = 0$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 &= 4 \left(\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{q} \right)^2 - 4 \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} \left(\mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{q} + q \right) \\
 &= \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + 2(\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{q}) + \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{q} \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{q} - \\
 &\quad \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} - \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} 2\mathbf{c}^T \mathbf{q} - \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} q \\
 &= \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} \mathbf{Q}_{33}^T \mathbf{c}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} + 2(\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}) + \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} - \\
 &\quad \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} 2\mathbf{c}^T \mathbf{q} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{Q}_{33} q \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} \\
 &= \mathbf{x}^T \left(\mathbf{B}^{-T} \left[\mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} \mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33}^T + 2\mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} \mathbf{q}^T + \mathbf{q} \mathbf{q}^T - \mathbf{Q}_{33} \left(\mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{q} + q \right) \right] \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Das ist genau die Gleichung eines Kegelschnittes $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0$ mit

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-T} \left[\mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} \mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33}^T + 2\mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} \mathbf{q}^T + \mathbf{q} \mathbf{q}^T - \mathbf{Q}_{33} \left(\mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{33} \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{q} + q \right) \right] \mathbf{B}^{-1}.$$

4.6.6 Berechnung der Silhouette einer Quadrik im dualen projektiven Raum

Die Silhouette einer Quadrik im Bild lässt sich im dualen projektiven Raum einfacher berechnen [Cro00]. Dort gilt

$$\lambda \mathbf{C}^* = \mathbf{P} \mathbf{Q}^* \mathbf{P}^\top \quad (4.43)$$

mit der dualen Quadrik \mathbf{Q}^* und dem dualen Kegelschnitt \mathbf{C}^* . Die Parametermatrix der dualen Quadrik \mathbf{Q}^* ist proportional der Adjunkten der Matrix \mathbf{Q} .

Um eine Quadrik aus den Konturen im Bild berechnen zu können, wird Gleichung 4.43 umgeformt. Unter Verwendung von 4.41 erhält man

$$\lambda \text{vec}(\mathbf{C}^*) = \text{vec}(\mathbf{P} \mathbf{Q}^* \mathbf{P}^\top) = (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}) \text{vec}(\mathbf{Q}^*).$$

Da \mathbf{C}^* und \mathbf{Q}^* jeweils symmetrische Matrizen sind, lässt sich mit 4.39 folgendes schreiben

$$\lambda \mathbf{D}_3 \text{vech}(\mathbf{C}^*) = (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}) \mathbf{D}_4 \text{vech}(\mathbf{Q}^*).$$

Die Matrizen \mathbf{D}_3 und \mathbf{D}_4 sind die Duplizierungsmatrizen für drei- bzw. vierdimensionale symmetrische Matrizen (siehe dazu 4.39).

Durch Multiplikation mit der Pseudoinversen $\mathbf{D}_3^+ = (\mathbf{D}_3^\top \mathbf{D}_3)^{-1} \mathbf{D}_3^\top$ von links erhält man eine symmetrisierte Variante von 4.43 in der Form eines Gleichungssystems $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Die Projektion einer dualen Quadrik in einen dualen Kegelschnitt lautet damit

$$\lambda \text{vech}(\mathbf{C}^*) = \mathbf{P}_{6 \times 10} \text{vech}(\mathbf{Q}^*), \quad \text{mit } \mathbf{P}_{6 \times 10} = (\mathbf{D}_3^\top \mathbf{D}_3)^{-1} \mathbf{D}_3^\top (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}) \mathbf{D}_4.$$

Die 6×10 Projektionsmatrix lautet

$$\mathbf{P}_{6 \times 10}^\top = \begin{bmatrix} P_{11}P_{11} & P_{11}P_{21} & P_{11}P_{31} & P_{21}P_{21} & P_{21}P_{31} & P_{31}P_{31} \\ 2P_{11}P_{12} & P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21} & P_{11}P_{32} + P_{12}P_{31} & 2P_{21}P_{22} & P_{21}P_{32} + P_{22}P_{31} & 2P_{31}P_{32} \\ 2P_{11}P_{13} & P_{11}P_{23} + P_{13}P_{21} & P_{13}P_{31} + P_{11}P_{33} & 2P_{21}P_{23} & P_{23}P_{31} + P_{21}P_{33} & 2P_{31}P_{33} \\ 2P_{11}P_{14} & P_{14}P_{21} + P_{11}P_{24} & P_{11}P_{34} + P_{14}P_{31} & 2P_{21}P_{24} & P_{24}P_{31} + P_{21}P_{34} & 2P_{31}P_{34} \\ P_{12}P_{12} & P_{12}P_{22} & P_{12}P_{32} & P_{22}P_{22} & P_{22}P_{32} & P_{32}P_{32} \\ 2P_{12}P_{13} & P_{12}P_{23} + P_{13}P_{22} & P_{12}P_{33} + P_{13}P_{32} & 2P_{22}P_{23} & P_{23}P_{32} + P_{22}P_{33} & 2P_{32}P_{33} \\ 2P_{12}P_{14} & P_{14}P_{22} + P_{12}P_{24} & P_{14}P_{32} + P_{12}P_{34} & 2P_{22}P_{24} & P_{24}P_{32} + P_{22}P_{34} & 2P_{32}P_{34} \\ P_{13}P_{13} & P_{13}P_{23} & P_{13}P_{33} & P_{23}P_{23} & P_{23}P_{33} & P_{33}P_{33} \\ 2P_{13}P_{14} & P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} & P_{13}P_{34} + P_{14}P_{33} & 2P_{23}P_{24} & P_{23}P_{34} + P_{24}P_{33} & 2P_{33}P_{34} \\ P_{14}P_{14} & P_{14}P_{24} & P_{14}P_{34} & P_{24}P_{24} & P_{24}P_{34} & P_{34}P_{34} \end{bmatrix}.$$

Um eine Quadrik aus den Silhouetten mehrerer Bilder zu konstruieren, ist das folgende Gleichungssystem zu lösen [Cro00]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,6 \times 10} & \mathbf{C}_1^* & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{P}_{2,6 \times 10} & 0 & \mathbf{C}_2^* & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \mathbf{P}_{n,6 \times 10} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{C}_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^* \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0.$$

Die Matrizen $\mathbf{P}_{n,6 \times 10}$ sind die Projektionsmatrizen für das n -te Bild.

Eine Lösung für das Gleichungssystem kann zum Beispiel durch eine Singulärwertzerlegung berechnet werden. Für $n \geq 3$ ist das Gleichungssystem für \mathbf{Q}^* überbestimmt. Eine Lösung mit minimalem quadratischem Fehler kann aus dem kleinsten Singulärwert der SVD⁷ der linken Seite berechnet werden.

Der für die biplane Angiographie interessante Fall der Rekonstruktion einer Quadrik aus zwei Silhouetten besitzt keine eindeutige Lösung, da es nur acht unabhängige Gleichungen gibt [Cro00].

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,6 \times 10} & \mathbf{C}_1^* & 0 \\ \mathbf{P}_{2,6 \times 10} & 0 & \mathbf{C}_2^* \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Die Lösung für \mathbf{Q}_v^* und die duale Quadrik kann folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\mathbf{Q}^* = \alpha \mathbf{Q}_1^* + \beta \mathbf{Q}_2^* \quad (4.45)$$

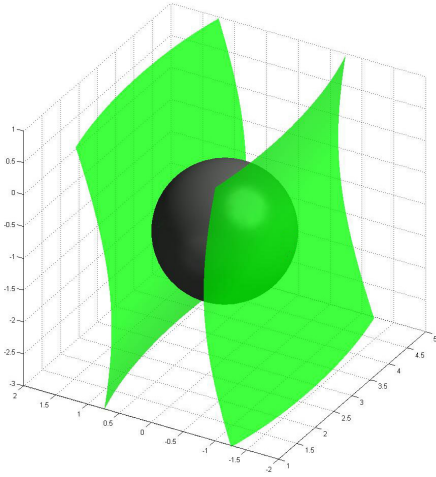
wobei \mathbf{Q}_1^* und \mathbf{Q}_2^* den Nullraum aufspannen und α und β beliebige Skalare sind. Um von der dualen Quadrik zur Quadrik selbst zu gelangen muss man die Adjunkte von 4.45 bestimmen. Das ergibt

$$\mathbf{Q} = \alpha^3 \mathbf{Q}_1 + \alpha^2 \beta \mathbf{Q}_2 + \alpha \beta^2 \mathbf{Q}_3 + \beta^3 \mathbf{Q}_4 \quad (4.46)$$

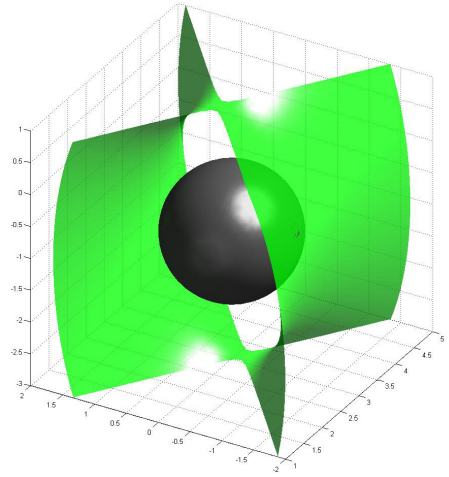
mit den konstanten 4×4 Parametermatrizen $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4$, die nur von \mathbf{Q}_1^* und \mathbf{Q}_2^* abhängig sind.

Zur Veranschaulichung sind die vier Quadriken $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4$ zusammen mit der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt $[3, 0, -1]$ in Abbildung 4.6 dargestellt.

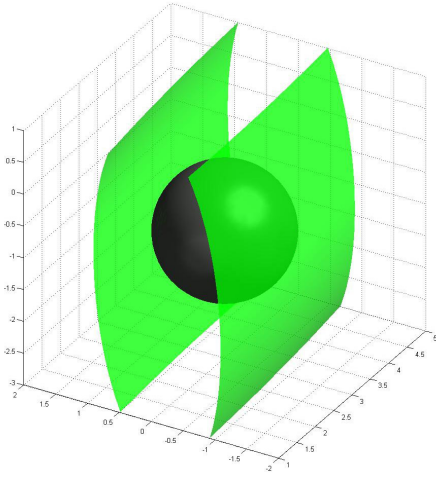
⁷SVD: singular value decomposition, Singulärwertzerlegung



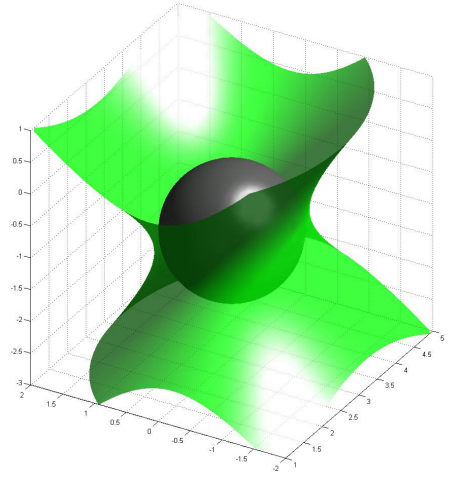
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 4.6: Für die Einheitskugel mit dem Mittelpunkt $[3, 0, -1]$ sind die vier Quadriken Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 aus Gleichung 4.46 dargestellt. Als Referenz wurde die originale Quadrik (dunkel gefärbte Kugel) zusätzlich dargestellt. Die Darstellung der Quadriken erfolgte für die Projektionsmatrizen

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2437.5986 & 22.7569 & -1767.23 & 129280 \\ -7.642650 & 3010.88 & -8.85409 & 129280 \\ 0.6508337 & 0.08884 & 0.75399 & 505 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1742.6111 & 4.46781 & 2265.88 & 116224 \\ -151.5937 & 2851.03 & 139.886 & 116224 \\ -0.734802 & 0.01745 & 0.67805 & 454 \end{bmatrix}.$$

4.6.7 Ellipsoidenprojektion

Nachdem die Grundlagen für die Projektion von Quadriken und die Rückprojektion von Kegelschnitten erläutert wurden, soll im folgenden Abschnitt eine Anwendung für die dreidimensionale Gefäßrekonstruktion beschrieben werden. Die Idee dabei ist, entlang eines virtuellen Gitters eine Pfadsuche auszuführen. Ziel der Pfadsuche ist es, einen optimalen Pfad zwischen zwei vorgegebenen Punkten zu ermitteln. Dabei soll der optimale Pfad den dreidimensionalen Gefäßverlauf möglichst gut annähern. Die Kostenfunktion der Pfadsuche

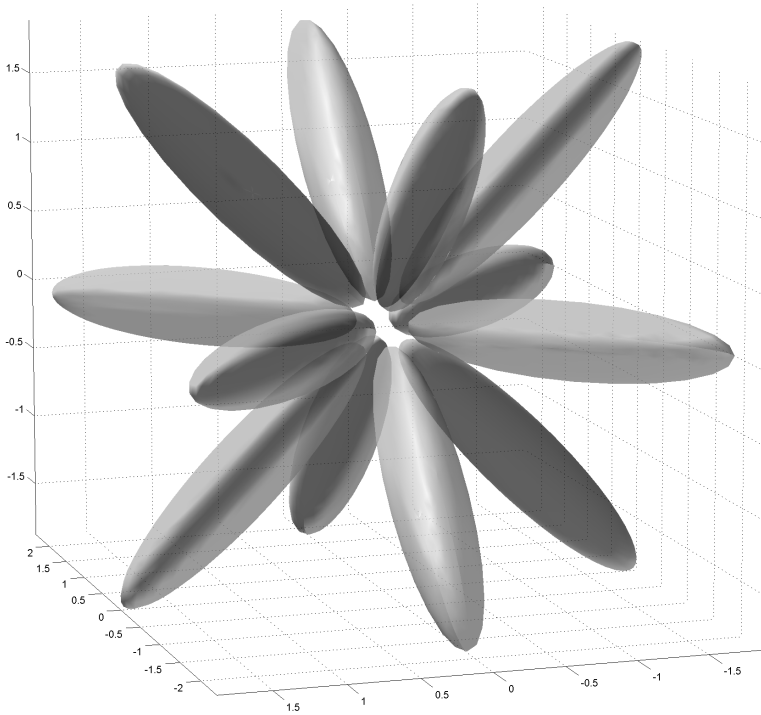


Abbildung 4.7: Zu jedem Punkt existieren zwölf Nachbarn. Ein mögliches Gefäßsegment zwischen zwei benachbarten 3D-Punkten wird durch einen Ellipsoiden approximiert. Man erkennt die zwölf Ellipsoide zu den entsprechenden Nachbarn des Punktes $(0, 0, 0)$.

verwendet ein Maß für die Gefäßartigkeit kleiner Bildausschnitte. Diese Bildausschnitte entsprechen den Projektionen einer vorgegebenen Quadrik in verschiedenen Ansichten. Ein einzelner Schritt der Pfadsuche, d.h. der Übergang von einem Zustand in einen Nachbarzustand entlang des virtuellen Gitters, wird durch einen Ellipsoiden repräsentiert (siehe Abbildung 4.7). Insgesamt gibt es zwölf Ellipsoide, je einen für den Übergang zu einem der zwölf Nachbarzustände. Für das virtuelle Gitter wird das in Abbildung

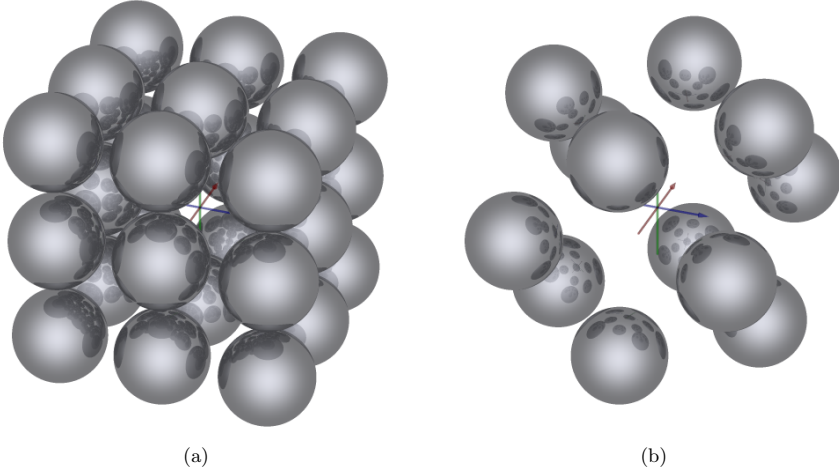


Abbildung 4.8: Der Vergleich zwischen dem kubischen (a) und dem kubisch-flächenzentrierten Gitter (b) zeigt, dass für das kubisch-flächenzentrierte Gitter nur 12 Nachbarn existieren. Für das kubische Gitter sind es 26. Außerdem sind die Abstände zu den Nachbarn im kubisch-flächenzentrierten Gitter alle gleich groß. Das kubische Gitter besitzt dagegen eine Anisotropie in Diagonalenrichtung.

4.8 dargestellte kubisch-flächenzentrierte Gitter verwendet. Es besitzt gegenüber dem kubischen Gitter einige Vorteile für die dreidimensionale Pfadsuche. Die Anzahl der Nachbarzustände ist zwölf. Damit verringert sich der Verzweigungsgrad im Vergleich zu einer Suche entlang eines kubischen Gitters um mehr als die Hälfte. Die mittlere Pfadlänge erhöht sich etwas, aber der damit verbundene Mehraufwand ist im Vergleich zum exponentiell mit dem Verzweigungsgrad anwachsenden Suchaufwand gering. Auch decken die Projektionen der Ellipsoide den Bildbereich für die unterschiedlichen Winkeleinstellungen besser ab (siehe Abbildung 4.10), d.h. es gibt nur wenige Sichtachsen, in denen Bildbereiche von den Ellipsenprojektionen überhaupt nicht erfasst werden. Beim kubischen Gitter kommt es häufiger vor, dass sich alle Ellipsoide entlang einer Sichtachse überlagern.

Zusätzlich ist das kubisch-flächenzentrierte Gitter bezüglich der Abstände zu den Nachbarknoten vollkommen isotrop, d.h. im Gegensatz zum kubischen Gitter müssen keine unterschiedlichen Entfernungen zu den Nachbarknoten berücksichtigt werden. So können alle zwölf Ellipsoide gleich gewählt werden. Sie unterscheiden sich lediglich im Mittelpunkt und der Orientierung der großen Hauptachse. Jeder der Ellipsoide kann mit drei konstanten und drei variablen Parametern beschrieben werden. Die drei variablen Parameter entsprechen dem Mittelpunkt $\mu_{\mathbf{Q}} = (\mathbf{p} + \mathbf{p}_n)/2$ des Ellipsoiden. Dieser liegt auf halber Strecke zwischen einem Gitterpunkt \mathbf{p} und einem seiner zwölf Nachbarkpunkte \mathbf{p}_n mit $1 \leq n \leq 12$. Die Ellipsoiden lassen sich mit einer positiv definiten Matrix beschreiben.

Diese lässt sich als inverse Kovarianzmatrix bzw. als Trägheitstensor interpretieren. Betrachtet man Abbildung 4.7, so fällt auf, dass sich alle zwölf Ellipsoide durch eine $\pm 45^\circ$ Rotation um eine der drei Koordinatenachsen aus einem Ellipsoiden in Nullage ableiten lassen. Somit sind alle 12 Matrizen mit drei Werten a, b, c parametrisierbar.

Es treten nur drei verschiedene Muster für die inverse Kovarianzmatrix mit den Konstanten a, b und c auf

$$\Sigma_{\mathbf{Q}_x}^{-1} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\mathbf{Q}_y}^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\mathbf{Q}_z}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Durch Wechsel des entsprechenden Vorzeichens von a, b oder c lassen sich die $\pm 45^\circ$ Rotationen realisieren. Die 4×4 Matrix für die duale Quadrik erhält man durch

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} \Sigma - \mu\mu^\top & -\mu \\ -\mu^\top & 1 \end{bmatrix}.$$

Für jeden Gitterpunkt wird der entsprechende Kegelschnitt als Projektion der Quadrik ins Bild berechnet. Aus den ersten und zweiten Momenten des Kegelschnitts werden die Parameter einer zweidimensionalen Normalverteilungsfunktion berechnet (siehe Abbildung 4.9). Das Merkmalsbild wird mit diesem Filterkern multipliziert. Als Ergebnis erhält man die gewichtete Summe der Bildmerkmale innerhalb eines kleinen Ausschnitts um den Mittelpunkt des ins Bild projizierten Ellipsoids.

Bei der Implementierung sind einige Vereinfachungen möglich. Aus der dualen Quadrik wird der duale Kegelschnitt gemäß

$$\mathbf{C}_i^* = \mathbf{P}_i \mathbf{Q}^* \mathbf{P}_i^\top, \quad 1 \leq i \leq 2$$

berechnet. Aus diesem können direkt die Parameter für die zweidimensionale Normalverteilungsfunktion berechnet werden, ohne vorher den dualen Kegelschnitt berechnen zu müssen. Die Parameter der Normalverteilungsfunktion μ und Σ ergeben sich zu

$$\mu = \frac{1}{c_{33}^*} \begin{pmatrix} c_{13}^* \\ c_{23}^* \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \frac{1}{c_{55}^* c_{55}^*} \begin{pmatrix} -c_{11}^* c_{33}^* + c_{13}^* c_{13}^* & -c_{12}^* c_{33}^* + c_{13}^* c_{23}^* \\ -c_{12}^* c_{33}^* + c_{13}^* c_{23}^* & -c_{22}^* c_{33}^* + c_{23}^* c_{23}^* \end{pmatrix}.$$

Die Gewichte für die Filtermaske an der Stelle $\mathbf{x} = (x_i, y_i)^\top$ im Bild ergeben sich aus der Normalverteilungsfunktion

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right).$$

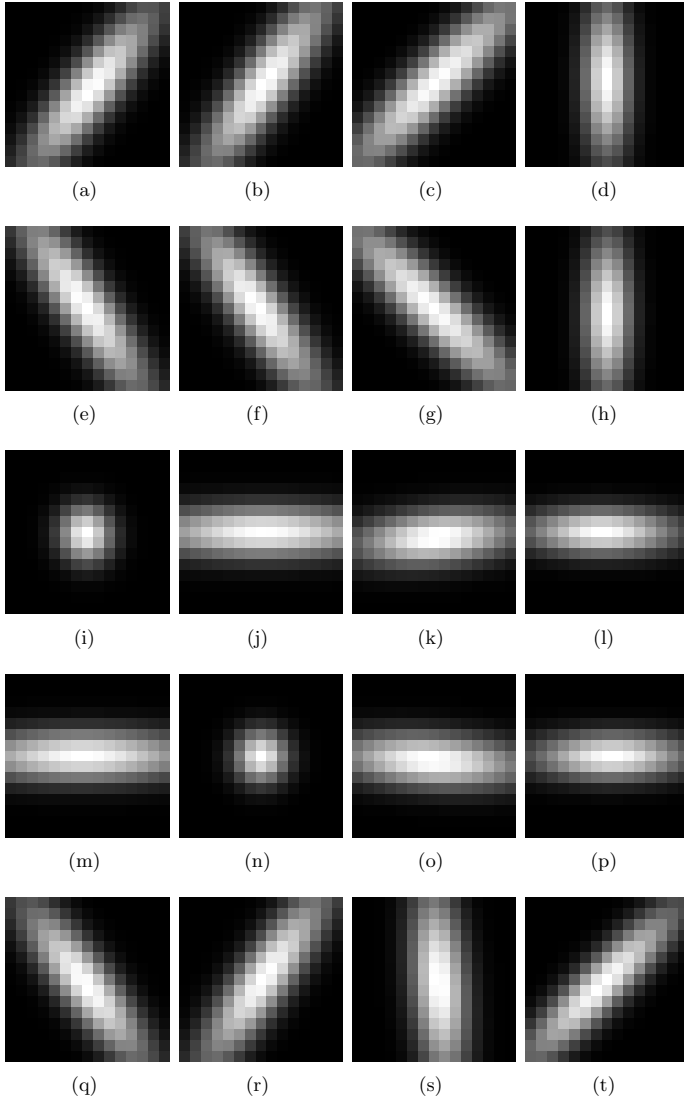


Abbildung 4.9: Die Faltungskerne für das Gefäßfilter für fünf der zwölf Ellipsoiden aus Abbildung 4.7 sind für jeweils vier unterschiedliche Aufnahmewinkel in die Bildebene projiziert. Aus der entstehenden Ellipse werden die Parameter für eine zweidimensionale Normalverteilungsfunktion bestimmt. Die Normalverteilungsfunktion wird diskretisiert und ergibt den Faltungskern für das Gefäßfilter. (a-d) Filterkerne für den ersten Ellipsoiden. (a) Aufnahmewinkel RAO44/CAUD5.4, (b) LAO44.8/CRAN0.3, (c) RAO4.8/CRAN4.2, (d) LAO90.3/CRAN0.3, (e-t) Filterkerne für vier weitere Ellipsoiden. Die Aufnahmewinkel befinden sich in der selben Reihenfolge wie in (a-d).

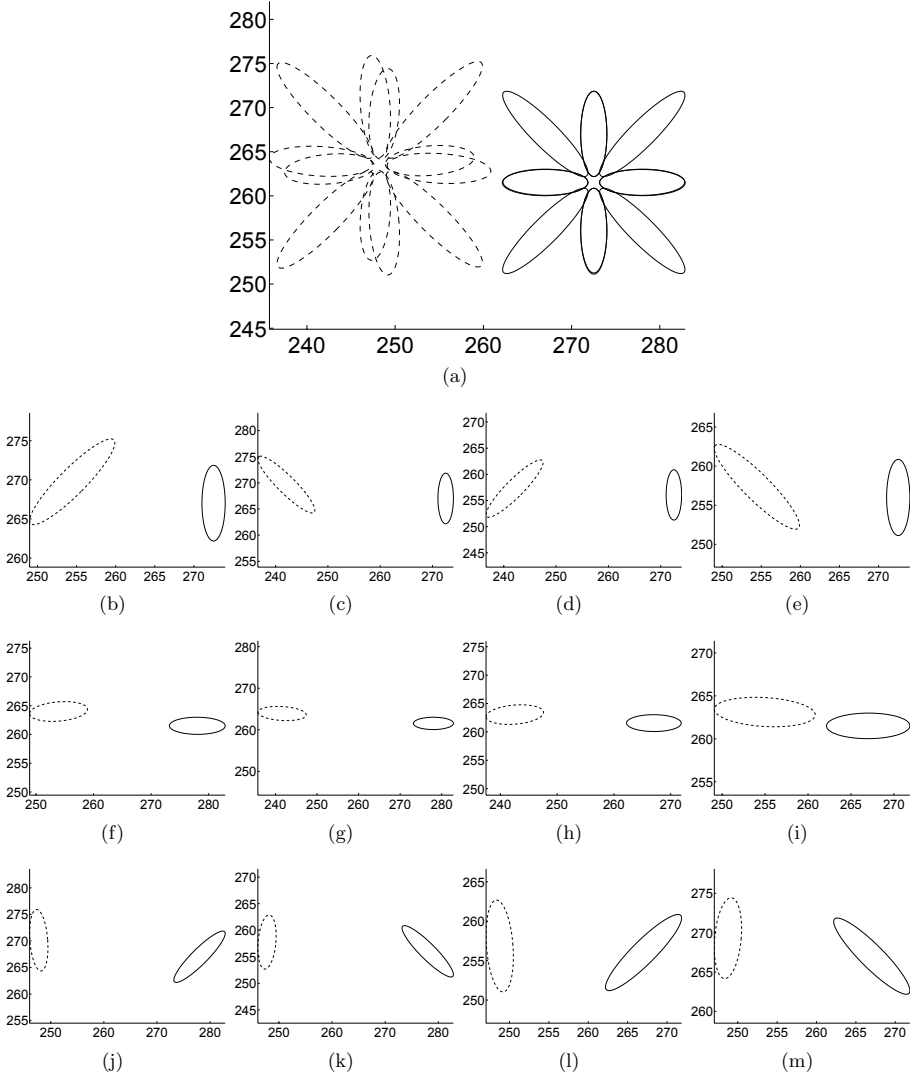


Abbildung 4.10: Es wurden die zwölf Ellipsoide zu den Nachbarn des 3D-Punktes $(-1, 1, 3)$ in zwei Ansichten projiziert und im gleichen Koordinatensystem dargestellt. Die Aufnahmewinkel für die durchgezogenen Ellipsen sind RAO4.8/CRAN4.2. Die gestrichelt gezeichneten Ellipsen entsprechen der Ansicht LAO90.3/CRAN0.3.

Gefäßrekonstruktion durch Ellipsoidenprojektion

Zum Ende des Kapitels erfolgt noch einmal eine Zusammenfassung der wichtigsten Schritte zur Rekonstruktion des dreidimensionalen Gefäßverlaufs mittels Pfadsuche und Ellipsoidenprojektion. Jeder Schritt der Pfadsuche entspricht einem orientierten Bereich des dreidimensionalen Raumes, der als Ellipsoid beschrieben wird. Der Ellipsoid besitzt eine längere und zwei gleichlange, aber kürzere Hauptachsen. Der Ellipsoid wird in beide Aufnahmen projiziert und aus den ersten beiden Momenten des sich ergebenden Kegelschnitts werden die Parameter für eine zweidimensionale Normalverteilungsfunktion berechnet. Aus der zweidimensionalen Normalverteilungsfunktion ergibt sich eine Filtermaske, mit der ein kleiner Bereich des Merkmalsbildes gewichtet aufsummiert wird. Stimmen die Orientierung und Lage des Ellipsoiden mit dem dreidimensionalen Gefäßverlauf überein, so stimmen auch die Projektionen mit den Gefäßmerkmalen im Bild überein. Für eine einzige Messung ist das Ergebnis nicht notwendigerweise optimal. Werden die Einzelergebnisse aber durch die Pfadsuche miteinander verknüpft, so kann mit der optimalen Sequenz einzelner Ellipsoide der dreidimensionale Gefäßverlauf gefunden werden.

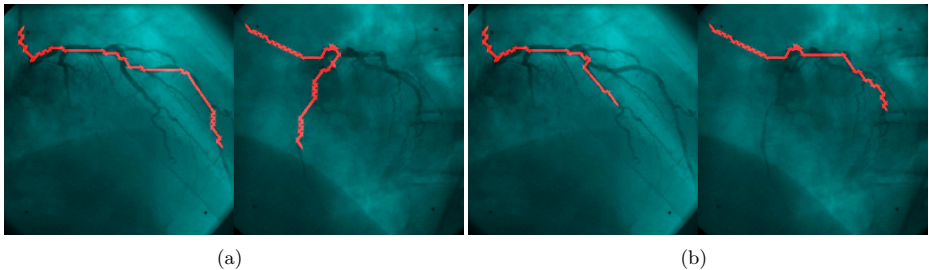


Abbildung 4.11: Zwei Pfade für (a) LCA und (b) CX wie sie mit der Methode der Ellipsoidenprojektion rekonstruiert wurden. Die Aufnahmewinkel für das linke Teilbild sind $RAO40,8/CAUD5,1^\circ$ und für das rechte $LAO47,3/CAUD1,0$. Um die Sichtbarkeit zu erhöhen, sind die Ellipsenprojektionen größer dargestellt (größerer Radius in der Rückprojektion).

Die durch Ellipsoide beschriebenen Übergänge zwischen den Gitterpunkten entlang eines kubisch-flächenzentrierten Gitters erfüllen geometrische Bedingungen, wie sie sich für einen typischen Gefäßverlauf ergeben. Die Krümmung des Gefäßes überschreitet bestimmte Grenzen nicht. Die Länge der großen Hauptachse der Ellipsoide ist so gewählt, dass sich damit auch maximale Krümmungen approximieren lassen. Die Länge der beiden kleinen Halbachsen entspricht dem mittleren zu erwartenden Gefäßdurchmesser. In Abbildung 4.12 ist ein rekonstruierter Gefäßverlauf dargestellt. Es handelt sich um die Kombination der beiden in Abbildung 4.11 dargestellten einzelnen Pfade.

Mit diesem Verfahren ist eine Rekonstruktion des Gefäßverlaufs möglich. Das tatsächliche Aussehen der Gefäße kann aber nur angenähert werden. Die grobe Auflösung des Gitters und die geringe Anzahl räumlicher Nachbarn erlauben keine detaillierte Darstellung der Morphologie. Um trotzdem ein realistisches Oberflächenmodell zu bekommen, werden

die Verfahren zur Gefäßsegmentierung in Kombination mit Pfadverfolgungsalgorithmen eingesetzt. Der bisher bestimmte Gefäßverlauf ist dabei die Voraussetzung für eine Begrenzung des Suchraumes, um überhaupt eine detaillierte Suche unter Einbeziehung aller Gefäßmerkmale im Bild durchführen zu können.

Das nächste Kapitel erklärt die Möglichkeiten zur Gefäßsegmentierung und bietet eine sinnvolle Auswahl geeigneter Methoden, um Gefäße und Hintergrund im Bild zu trennen. Es werden vor allem Multiskalenverfahren beschrieben, die gute Gefäßmerkmale ermitteln können.

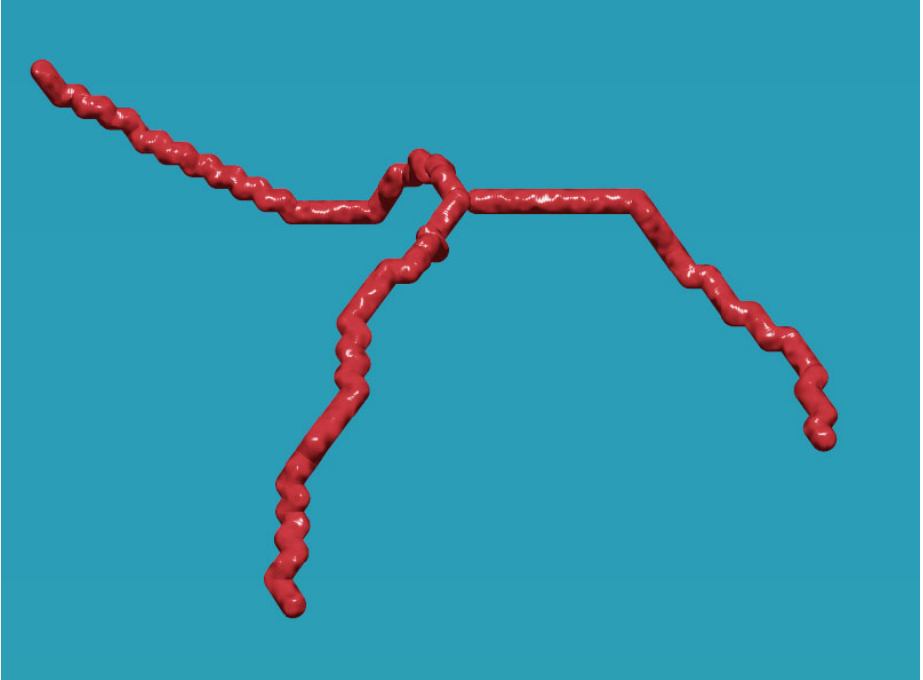


Abbildung 4.12: Beispiel für eine Pfad-Rekonstruktion. Die Aufnahmeparameter entsprechen LAO47,3/CAUD1.0. Dreidimensional dargestellt ist die Vereinigung der beiden Pfade aus Abbildung 4.11.

5 Gefäßsegmentierung und Merkmalsberechnung

5.1 Segmentierung

Ziel der Segmentierung ist die Gruppierung von Bildbereichen mit ähnlichen Merkmalen zu Regionen. Bildpunkte innerhalb einer Region sollen ein vorgegebenes Ähnlichkeitskriterium erfüllen. Die Wahl eines solchen Kriteriums ist vom konkreten Anwendungsfall abhängig und erfordert im Allgemeinen eine vorherige Merkmalsextraktion. Erfolgt die Segmentierung als Regionenwachstumsprozess, so wird das Ähnlichkeitskriterium als Kostenfunktion formuliert. Sie gibt an, welche Kosten bei der Zuordnung eines bestimmten Bildpunktes zu einer Region entstehen. Da der koronare Gefäßbaum eine einzige zusammenhängende Region bildet, würde man eine Segmentierung in zwei Klassen vornehmen. Die Gefäßprojektionen bilden den Vordergrund und die verbleibenden Bildanteile den Hintergrund. Alle Bildpunkte, die ein bestimmtes Gütekriterium für die Zugehörigkeit zum Gefäßbaum erfüllen, werden dem Vordergrund zugeordnet, die restlichen Bildpunkte gehören zum Hintergrund.

Als Vorverarbeitungsschritt ist eine Berechnung geeigneter Bildmerkmale für die Segmentierung notwendig, da die eigentlichen Bilddaten keine direkte Segmentierung, z.B. durch eine Schwellwertbinarisierung der Grauwerte, zulassen (siehe Abbildung 5.1). Es erfolgt zunächst eine Transformation vom Bild- in den Merkmalsraum. Damit verbunden ist eine Reduktion von Bildfehlern und Bildrauschen. Bildmerkmale lassen sich häufig auf einem gröberen Raster, d.h. mit einer geringeren räumlichen bzw. zeitlichen Auflösung darstellen als die Originaldaten [Jäh05].

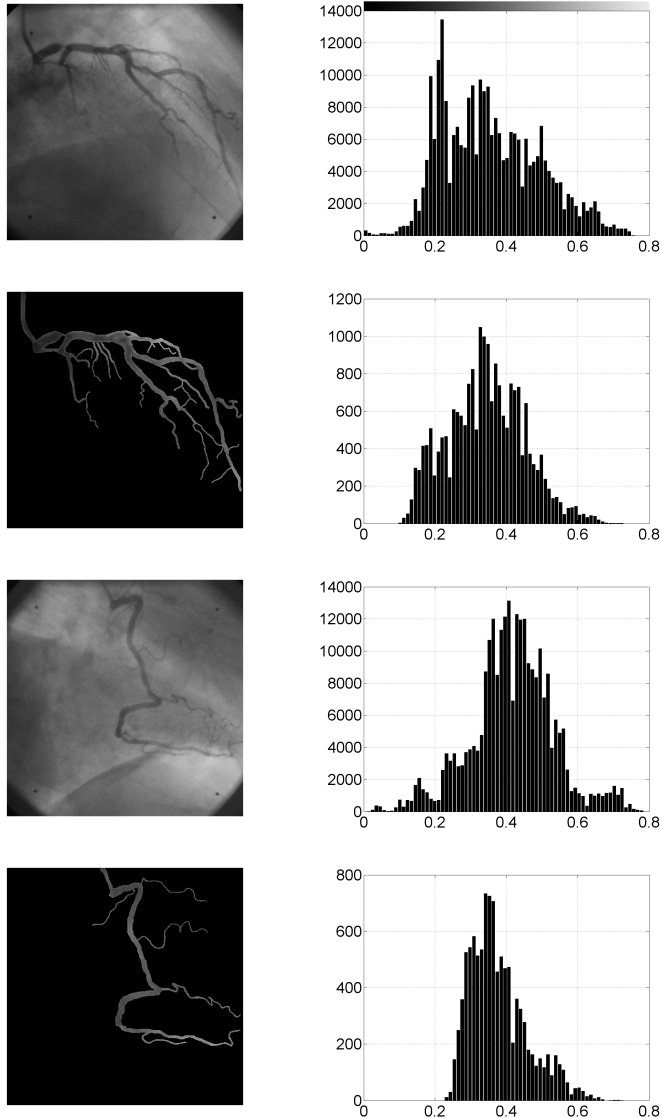


Abbildung 5.1: Die Gefäße können nicht durch einen einzelnen Schwellwert vom Hintergrund getrennt werden. Wie an den Histogrammen zu erkennen ist, überlappen sich die Grauwertbereiche für Gefäße und Bildhintergrund fast vollständig. Der Grauwert alleine ist deshalb kein brauchbares Merkmal für eine Segmentierung der Bilder und die Berechnung besser geeigneter Merkmale ist erforderlich. Der in zwei Teilbildern schwarz ausmaskierte Bildhintergrund gehört zur Maske und wurde deshalb nicht zum Grauwert Null des Histogramms hinzugezählt.

5.2 Merkmalsberechnung

Um geeignete Merkmale für die Segmentierung der Arterien in den biplanen Koronaran-
giogrammen auswählen zu können, wurde eine Übersicht der Gefäßeigenschaften (Tabelle
5.1) erstellt. Dieser orientiert sich an den Eigenschaften der Gefäßprojektionen in den
aufgenommenen Bildern. Die meisten der Kriterien sind für gesunde Gefäße formuliert.

Tabelle 5.1: Katalog der Gefäßeigenschaften

Nr.	Regel
1	Gefäßprojektionen sind dunkler als der Bildhintergrund
2	Gefäßquerschnitte ändern sich kontinuierlich
3	Querschnitte liegen in einem bestimmten Durchmesser-Intervall
4	Gefäße bewegen sich durch die Kontraktion des Herzmuskels
5	Bewegungen der Gefäße erfolgen periodisch
6	der Anteil von Objektpunkten beträgt nur ca. 2-4%
7	Gefäße sind längliche Bildstrukturen, d.h. Breite \ll Länge
8	die Grauwerte ändern sich wenig in Gefäßrichtung
9	die Grauwerte ändern sich stark senkrecht zur Gefäßrichtung
10	der gesamte Gefäßbaum bildet eine zusammenhängende Region

Durch krankheitsbedingte Veränderungen an den Gefäßen kann es zu Abweichungen von
diesen idealisierten Annahmen kommen. Die Segmentierungsverfahren müssen deshalb
hinreichend robust gegenüber Abweichungen entworfen werden.

Gesucht sind algorithmische Umsetzungen von Gefäßfiltern, die die in Tabelle 5.1
umgangssprachlich formulierten Gefäßeigenschaften im Bild berücksichtigen. Zum Ein-
satz kommen Methoden der Bildverarbeitung. Diese lassen sich nach den angewendeten
Operatoren in drei Klassen unterteilen [Jäh05].

- Punktoperatoren
- Lokale Operatoren
- Globale Operatoren

Die Einteilung basiert auf der Anzahl der Punkte, die für die Ermittlung eines neuen
Bildwertes für die Operation $f(x, y)$ benötigt werden. Die Punktoperatoren (z.B. Histo-
grammtransformation, Kontrastveränderung, Helligkeitsveränderung) benötigen lediglich
den Bildwert an der Stelle (x, y) . Die Lokaloperatoren (z.B. lineare und nichtlineare Filter,
morphologische Operatoren) benötigen Punkte aus der Nachbarschaft $f(x + dx, y + dy)$

mit $-N/2 < dx < N/2$ und $-M/2 < dy < M/2$ bei einer Nachbarschaft der Breite N und Höhe M . Schließlich benötigen die globalen Operationen (z.B. Fourier-Transformation, Radon-Transformation) gleichzeitig alle Bildpunkte zur Ermittlung eines neuen Bildwertes.

Wichtig sind im folgenden sogenannte Multiskalenverfahren, bei denen Bildmerkmale nicht nur in einer festen räumlichen Auflösung berechnet werden, sondern in mehreren unterschiedlichen Auflösungsstufen (Skalen). Das ist für die Segmentierung der Koronarien in Röntgenaufnahmen wichtig, da die Gefäßdurchmesser aus einem begrenzten Durchmesserintervall stammen. Unterschiedlich große Bildstrukturen können mit lokalen Operatoren nicht alle gleichzeitig optimal gefiltert werden. Es ist sinnvoll, die Filterung an unterschiedliche Auflösungen anzupassen und die Ergebnisse in geeigneter Weise zu kombinieren. Diese sogenannte Mehrgitter- oder Multiskalendarstellung hat sich in vielen Bereichen der medizinischen Bildverarbeitung bewährt [Jäh05].

5.2.1 Die Hesse-Matrix

Die Taylorreihenentwicklung zweiter Ordnung einer Funktion $f(\mathbf{x})$ um einen Punkt \mathbf{x}_0 ist gegeben mit

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + [\nabla f(\mathbf{x}_0)]^\top \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^\top \mathcal{H}(\mathbf{x}_0) \Delta\mathbf{x}. \quad (5.1)$$

Dabei ist ∇ der Gradient von f und \mathcal{H} die Hesse-Matrix.

$$\mathcal{H}(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix fasst die partiellen zweiten Ableitungen einer mehrdimensionalen Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ zusammen. Mit Hilfe der Hesse-Matrix \mathcal{H} lässt sich der Charakter einer Funktion bis zur zweiten Ordnung bestimmen. Dazu werden die Eigenwerte der Hesse-Matrix ermittelt. Sind für einen Punkt x alle Eigenwerte der Hesse-Matrix von f größer als Null, d.h. ist \mathcal{H} positiv definit, so ist der Punkt ein Minimum der Funktion. Sind alle Eigenwerte kleiner als Null, d.h. ist \mathcal{H} negativ definit, so handelt es sich um ein Maximum. Für einen Sattelpunkt der Funktion treten gemischte Vorzeichen auf. In diesem Fall ist die Matrix \mathcal{H} indefinit. Ist Null ein Eigenwert, so muss der Charakter des kritischen Punktes auf anderem Wege ermittelt werden.

5.2.2 Der lokale Orientierungsvektor

Um die quadratische Variation in Gleichung 5.1 zu analysieren, ist es sinnvoll, den Ausdruck $\Delta\mathbf{x}^\top \mathcal{H} \Delta\mathbf{x}$ in eine kanonische Form zu bringen, sodass alle gemischten Ableitungen Null werden. Das wird durch Diagonalisierung von \mathcal{H} mit einer geeigneten Rotationsmatrix \mathbf{R}

erreicht. Das ist zugleich die Lösung des Eigenwertproblems [Jäh05].

$$\mathbf{R}^T \mathcal{H} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f_{xx} \cos^2 \phi + f_{yy} \sin^2 \phi + f_{xy} \sin 2\phi & 1/2(f_{yy} - f_{xx}) \sin 2\phi + f_{xy} \cos 2\phi \\ 1/2(f_{yy} - f_{xx}) \sin 2\phi + f_{xy} \cos 2\phi & f_{xx} \sin^2 \phi + f_{yy} \cos^2 \phi - f_{xy} \sin 2\phi \end{bmatrix}$$

Alternativ dazu lassen sich die Eigenwerte als Lösungen der quadratischen Gleichung schreiben.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(f_{xx} + f_{yy} \pm \sqrt{(f_{xx} - f_{yy})^2 + 4f_{xy}^2} \right) \quad (5.2)$$

Die entsprechenden Eigenvektoren lauten:

$$v_{1,2} = \begin{pmatrix} f_{yy} + f_{xy} - \lambda_{1,2} \\ \lambda_{1,2} - f_{xx} + f_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird im weiteren $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ angenommen. Die Eigenwerte λ_1 und λ_2 werden benutzt, um ein Gefäßfilter zu entwerfen. Für gefäßartige Strukturen lassen sich hierfür folgende Eigenschaften ausnutzen:

1. $|\lambda_1|$ nimmt einen großen Wert an, da eine starke lokale Krümmung senkrecht zur Gefäßrichtung vorliegt.
2. λ_1 muss positiv sein ¹
3. v_1 zeigt in Richtung der stärksten Krümmung
4. v_2 ist parallel zur lokalen Gefäßrichtung
5. $|\lambda_2|$ ist sehr klein.

Damit ergeben sich die Kriterien für die Eigenwerte:

$$|\lambda_2| \approx 0, \quad |\lambda_1| \gg |\lambda_2|, \quad \lambda_1 > 0 \quad (5.4)$$

Aus den Eigenwerten werden die Merkmale R_b und S bestimmt [FNVV98].

$$R_b = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}, \quad S = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (5.5)$$

Dabei ist S ein Maß für die Stärke der lokalen Krümmung, d.h. in homogenen Bildbereichen erwartet man einen flachen Verlauf und S ist klein. Für eine ausgeprägte Struktur mit hohem lokalen Kontrast erhält man dagegen große Werte für S . Um den Charakter der lokalen Struktur zu erfassen, wird R_b verwendet. Das Verhältnis der Längen der Eigenvektoren ist dabei maßgebend. Ist $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$, dann besitzt die lokale Struktur eine Vorzugsrichtung und ähnelt einer Linie. Sind beide Eigenwerte etwa gleich groß, ist sie eher einer Kreisscheibe ähnlich.

¹Gefäße erscheinen dunkler als der Bildhintergrund. Die 2. Ableitung ist deshalb positiv.

Die gewonnenen Strukturinformationen aus S und R_b werden in einer Funktion zusammengefasst [FNVV98].

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \lambda_1 < 0 \\ e^{-R_b^2/2\beta^2}(1 - e^{-S^2/2c^2}) & , \text{sonst} \end{cases} \quad (5.6)$$

Einen Überblick über die Auswirkungen der Parameter β und c auf das Merkmalsbild gibt Abbildung 5.3.

Orientierung und Stärke der lokalen Struktur lassen sich gemeinsam in einem Merkmalsbild darstellen (siehe Abbildung 5.2). Das ist einmal als Vektorfeld möglich, wobei nur die Orientierung der Strukturen im Bereich $0 \dots \pi$ und nicht die Richtung $0 \dots 2\pi$ relevant ist. Deshalb wurden keine Vektorpfeile sondern nur Geradenstücke gezeichnet. Die Länge ist proportional zur Linienartigkeit der Struktur an der Stelle im Bild und der Geradenanstieg entspricht der Orientierung. Es lässt sich auch eine farbkodierte Darstellung der lokalen Stärke und Orientierung der Gefäßstrukturen im Bild verwenden. Die Orientierung der Strukturen wird auf den RGB Farbraum abgebildet. Die Helligkeit ist proportional zur Linienartigkeit der Struktur [Jäh05].

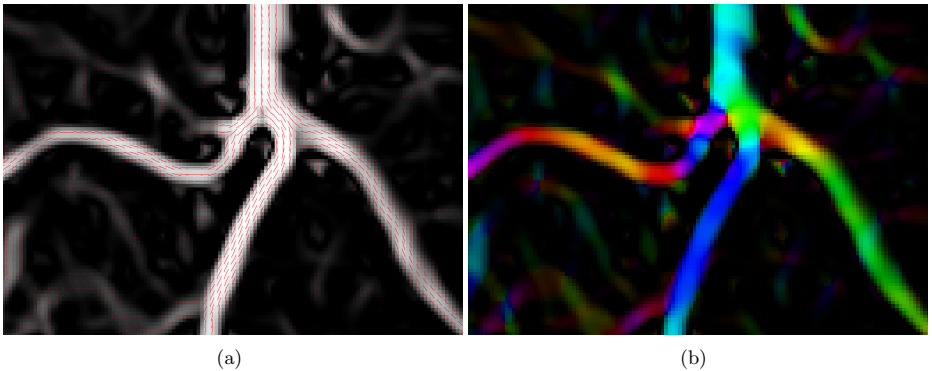


Abbildung 5.2: (a) Die lokale Stärke und Orientierung der Gefäßstrukturen im Bild wird durch ein Vektorfeld symbolisiert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde das Vektorfeld nur für jeden dritten Punkt in x- und y-Richtung eingezeichnet. (b) Die lokale Stärke und Orientierung der Gefäßstrukturen im Bild wird durch eine Farbkodierung symbolisiert. Im Gegensatz zur Darstellung als Vektorfeld können bei der farbkodierten Darstellung alle Merkmale für alle Bildpunkte gleichzeitig und übersichtlich präsentiert werden.

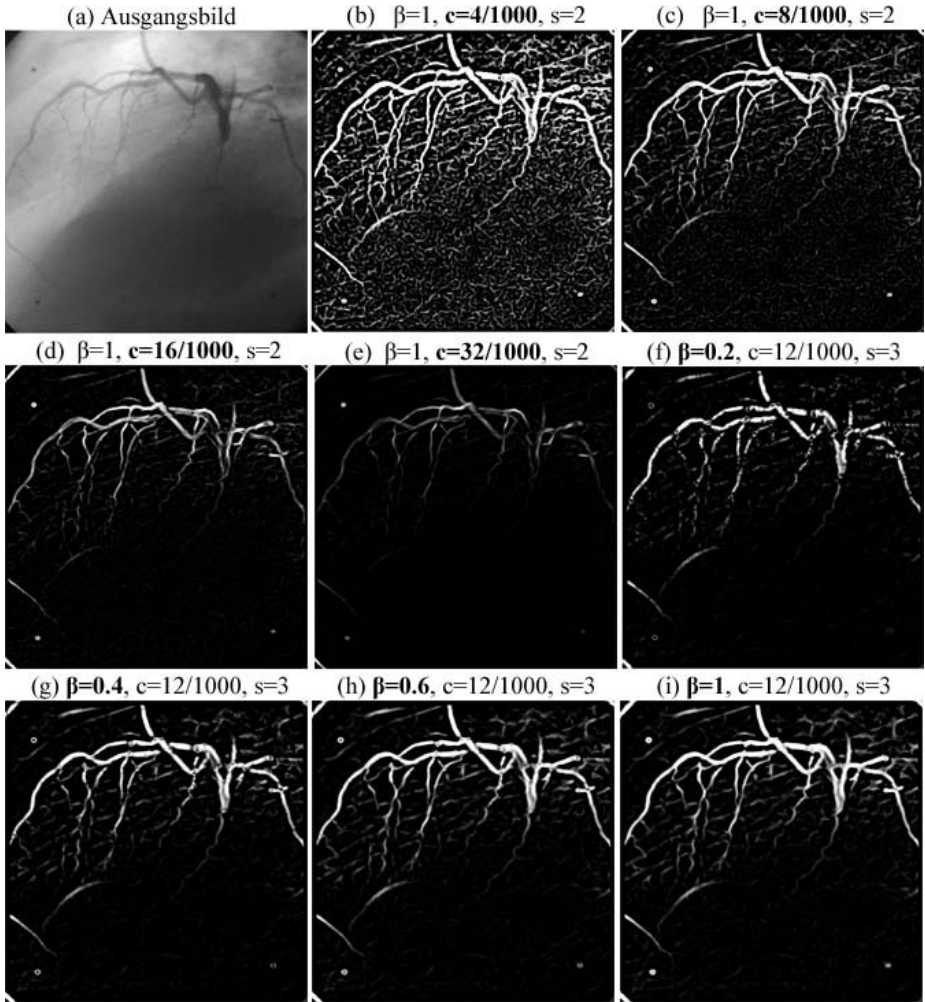


Abbildung 5.3: Ergebnisse der Segmentierung mit den Eigenwerten der Hesse-Matrix für unterschiedliche Parameter. Prinzipiell kann für die Auswirkung der Filterparameter folgendes gesagt werden: Für zu kleine Werte von β erscheinen feine und stark gewundene Gefäße unterbrochen und für zu große Werte treten die Hintergrundstrukturen hervor. Für zu kleine Werte von c werden kontrastarme Strukturen überbewertet und für zu große Werte sind nur die kontrastreichsten Gefäße sichtbar [Fil04].

5.2.3 Skalenraum

In der Bildverarbeitung werden Diffusionsvorgänge angewendet um sogenannte Skalenräume zu erzeugen. In einem solchen Skalenraum ist die Glättung eines Bildes abhängig von einem einstellbaren Skalenparameter s . Je größer der Skalenparameter ist, desto stärker ist die Glättung und desto stärker werden kleine Strukturen im Bild unterdrückt. Die Diffusion kann benutzt werden, um Bildstörungen zu beseitigen oder bestimmte Bildstrukturen hervorzuheben indem Strukturen kleiner als der Skalenparameter unterdrückt werden [Lin94].

Hier wird die Diffusionsgleichung

$$\partial_t I = \nabla^2 I \quad (5.7)$$

benutzt, um einen linearen Skalenraum $I(\cdot, s)$ aus einem Bild I_0 mit der Anfangsbedingung $I(\cdot, 0) = I_0$ zu erzeugen. Die Lösung zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$I(\cdot, t) = I_0 * G^{\sqrt{2t}}. \quad (5.8)$$

Es zeigt sich, dass die lineare, isotrope Diffusion einer Faltung mit einer Gaußfunktion entspricht [Lin94]. Die Gaußfunktion für einen gegebenen Skalenparameter s lautet:

$$G^s(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2s^2}. \quad (5.9)$$

Dabei sind Skalenparameter s und Diffusionszeit t über $s = \sqrt{2t}$ miteinander verknüpft.

In der Bildverarbeitung wird die mathematische Ableitung durch gaußsche Ableitungen ersetzt

$$\partial I \rightarrow \partial^s I = \partial(L * G^s) = I * \partial G^s, \quad (5.10)$$

d.h. statt die Ableitung zu bestimmen wird eine Faltung mit einem entsprechend abgeleiteten Gaußkern durchgeführt.

Differenziert man die Gaußfunktion mehrmals hintereinander ergibt sich ein Muster, bei dem die Gaußfunktion und ein zusätzlicher Polynom-Term entsteht. Die entsprechenden Funktionsgraphen sind in Abbildung 5.4 zu sehen.

$$\begin{aligned} G_0^s &= G^s \\ G_1^s &= -\frac{x}{s^2} G^s \\ G_2^s &= \frac{x^2 - s^2}{s^4} G^s \\ G_3^s &= -\frac{x^3 - 3xs^4}{s^6} G^s \\ G_4^s &= \frac{x^4 - 6x^2s^2 + 3s^4}{s^8} G^s \\ G_5^s &= -\frac{x^5 - 10x^3s^2 + 15xs^4}{s^{10}} G^s \end{aligned}$$

Teilt man durch die Gaußfunktion G^s , so erhält man die Polynome

$$1, -\frac{x}{s^2}, \frac{x^2 - s^2}{s^4}, -\frac{x^3 - 3xs^2}{s^6}, \frac{x^4 - 6x^2s^2 + 3s^4}{s^8}, -\frac{x^5 - 10x^3s^2 + 15xs^4}{s^{10}}, \dots$$

die mit den Hermite-Polynomen n -ter Ordnung $H_n(x)$ für $x \rightarrow \frac{x}{s\sqrt{2}}$ übereinstimmen.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Die Ableitungen der Gaußfunktion ergeben sich dann zu

$$\frac{d^n}{dx^n} G^s(x) = \left(\frac{-1}{s\sqrt{2}} \right)^n H_n \left(\frac{x}{s\sqrt{2}} \right) G^s(x). \quad (5.12)$$

Für die Berechnung von $H_n(x)$ werden die rekursiven Berechnungsvorschriften

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

verwendet.

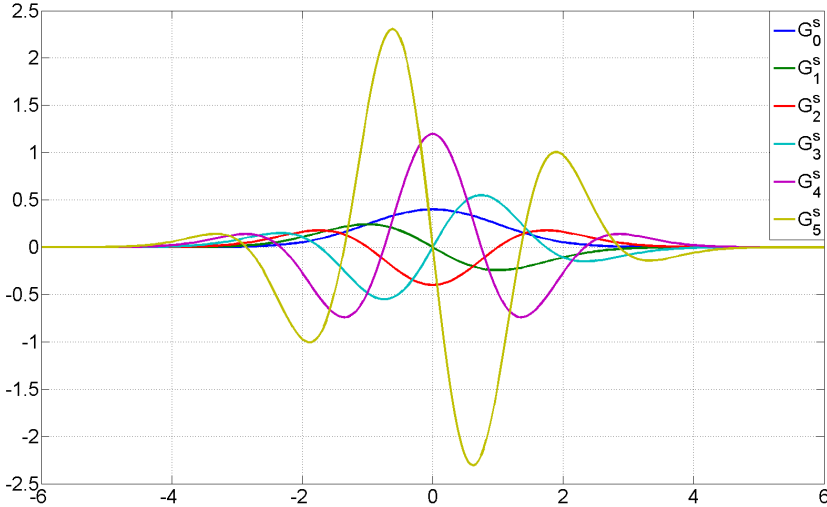


Abbildung 5.4: Darstellung der Ableitungen der Gaußfunktion bis zur fünften Ordnung. Durch Diskretisierung von G_1 und G_2 erhält man die Gauß-Filterkerne, mit denen das Bild in horizontaler und vertikaler Richtung gefaltet wird, um die ersten und zweiten Ableitungen im Bild zu bestimmen.

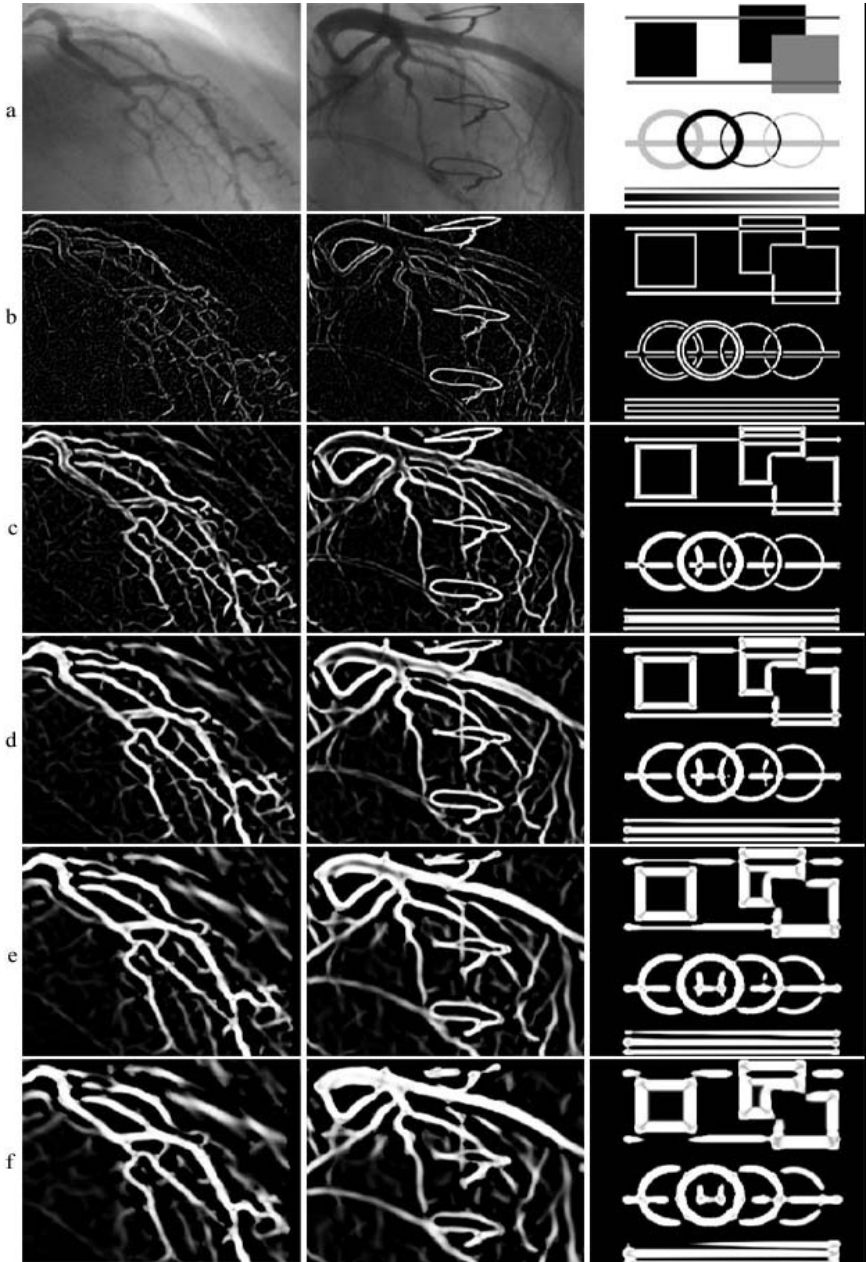


Abbildung 5.5: Die Segmentierungsergebnisse der Hesse-Matrix für folgende Parameter: $\beta = 1$, $c = \frac{12}{1000}$. Die Ergebnisse für die Skalen $s \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ sind in (b),(c),(d),(e),(f) für die jeweiligen Originalbilder in (a) dargestellt.[Fil04]

5.2.4 Differentialgeometrische Linienfilter

Bei differentialgeometrischen Ansätzen betrachtet man Bilder $f(x, y)$ als eine Fläche $(x, y, f(x, y))$ im \mathbb{R}^3 . Die Bildeigenschaften werden nicht mehr aus dem ursprünglichen Bild gewonnen, sondern aus den Krümmungs- und den Faltungslinien dieser Fläche [KD92]. Entscheidend bei der Untersuchung der Flächen sind Linien minimaler und maximaler Krümmung. Dazu werden die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 in einem Punkt (x, y) definiert. Es gibt noch zwei weitere Größen zur Angabe der Krümmung, das gaußsche Krümmungsmaß als Produkt der Hauptkrümmungen

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad (5.13)$$

und die mittlere Krümmung

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (5.14)$$

als das arithmetische Mittel der Hauptkrümmungen. Diese lassen sich allgemein aus den ersten (f_x, f_y) und zweiten Ableitungen (f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}) im Bild bestimmen

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{1 + f_x^2 + f_y^2}, \quad H = \frac{f_{xx} + f_{yy} + f_{xx}f_y^2 + f_{yy}f_x^2 - 2f_xf_yf_{xy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}. \quad (5.15)$$

Für den Fall, dass der Gradient Null ist, vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \det(\mathcal{H}), \quad H = \frac{f_{xx} + f_{yy}}{2} = \frac{1}{2}\text{trace}(\mathcal{H}). \quad (5.16)$$

Die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 sind gleichzeitig auch die Eigenwerte von \mathcal{H} .

Koendernik [KD92] leitet daraus zwei Linienmerkmale ab, den *shape-index*

$$s = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right), \quad (\kappa_1 \geq \kappa_2) \quad (5.17)$$

und die *curvedness*

$$c = \sqrt{\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}}. \quad (5.18)$$

Diese können benutzt werden, um ein Linienfilter zu entwerfen.

5.2.5 Harmonische Operatoren als Linienfilter

In [Lin03] wird eine Transformation der Ableitungsoperatoren in den *harmonic function space* als Vorstufe für ein Linienfilter vorgeschlagen. Der Grund ist, dass die gaußschen Ableitungsoperatoren nicht orthogonal sind. Deshalb werden die gaußschen Ableitungsoperatoren zweiter Ordnung (g_{xx}, g_{yy}, g_{xy}) in den *harmonic function space* transformiert

$$\begin{pmatrix} b_{20} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{xx} \\ g_{yy} \\ g_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

und man erhält einen neuen Satz von Operatoren b_{20}, b_{21}, b_{22} .

Das Bild wird dann nicht wie bisher mit den zweimaligen Ableitungen des Gaußkerns gefaltet, sondern mit dem Satz transformierter Operatoren.

$$\begin{pmatrix} f_{20} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} = I * \begin{pmatrix} b_{20} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} = I * \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{xx} \\ g_{yy} \\ g_{xy} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} \\ f_{yy} \\ f_{xy} \end{pmatrix}$$

Aus den neuen Ableitungsbildern f_{20}, f_{21}, f_{22} werden abstrakte Merkmale berechnet, die zur quantitativen Beschreibung der Stärke, Form und Orientierung von Bildbereichen besser geeignet sind als die ursprünglichen Gaußableitungen [Lin03].

Die Stärke a ist definiert als

$$a = \sqrt{f_{20}^2 + f_{21}^2 + f_{22}^2}. \quad (5.20)$$

Die Form ist definiert als

$$\tau = \arctan \frac{f_{20}}{\sqrt{f_{21}^2 + f_{22}^2}} \quad (5.21)$$

und der Orientierungswinkel ist

$$\phi = \frac{1}{2} \arg(f_{21}, f_{22}). \quad (5.22)$$

Für eine perfekte Linie muss der Formparameter $\tau = \pm \arctan \sqrt{\frac{1}{2}}$ betragen. Daraus wird ein Merkmal k_{line} für die Linienartigkeit einer Bildstruktur abgeleitet.

$$k_{\text{line}} = \frac{2\sqrt{2}f_{20}\sqrt{f_{21}^2 + f_{22}^2}}{2f_{20}^2 + f_{21}^2 + f_{22}^2} \quad (5.23)$$

Für eine Linie im Bild wird für k_{line} das Maximum von Eins erreicht. Für eine kreisrunde Struktur ist $k_{\text{line}} = 0$.

5.3 Statistische Gefäßmodelle

5.3.1 Bilder als Markov-Netzwerke

Das Bild wird als zweidimensionale Matrix von diskreten Zufallsvariablen interpretiert. Charakteristisch für ein solches Markov-Netzwerk (*markov random field*) ist die räumlich begrenzte Wechselwirkung der Zufallsvariablen innerhalb einer kleinen Nachbarschaft, ähnlich den begrenzten Wechselwirkungen bei Markov-Ketten.

Jeder Knoten n des Netzwerkes hat eine Anzahl von Nachbarknoten. Die Anzahl B der Nachbarn zu einem Knoten entspricht dem Verzweigungsgrad. Ein geordnetes

Paar von Nachbarknoten definiert eine Richtung und bildet ein Segment innerhalb des Markov-Netzwerkes erster Ordnung. Die Menge aller Segmente x wird als $\chi = \{x\}$ definiert.

Ein Pfad $X = \{n_0, n_1, \dots, n_N\}$ ist eine geordnete Menge verbundener Nachbarknoten. Der Knoten n_0 definiert die Wurzel eines Baumes, in dem jede Kante einem Segment x entspricht. Pfade X in einem durch den Wurzelknoten n_0 festgelegten Baum, sind deshalb ebenfalls geordnete Teilmengen von χ . Zum Beispiel kann die Kontur eines projizierten Gefäßverlaufes durch einen Pfad $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ der Länge N im Bild beschrieben werden.

Zu jedem Segment $x \in \chi$ gibt es eine Beobachtung y_x . Das ist im Allgemeinen das Ergebnis eines Merkmalsfilters zur Bestimmung der Gefäßartigkeit. Die Menge aller Beobachtungen wird als $Y = \{y_x : x \in \chi\}$ definiert. Die zu einem Pfad $X = \{x_i : 1 \leq i \leq N\}$ korrespondierenden Beobachtungen $Y_X = \{y_{x_1}, y_{x_2}, \dots, y_{x_N}\}$ werden mit $Y_X = \{y_i\}$ abgekürzt.

Das statistische Modell erlaubt es, den Pfad mit maximaler Wahrscheinlichkeit, bei gegebenen Beobachtungen, zu finden.

$$X^* = \underset{\forall X}{\operatorname{argmax}} P(X|Y), \quad P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} \quad (5.24)$$

Für die Berechnung dieser maximum a posteriori Wahrscheinlichkeit sind die Pfadwahrscheinlichkeit $P(X)$ und die Beobachtungswahrscheinlichkeit $P(Y|X)$ unter Verwendung des Satzes von Bayes notwendig.

Unter Benutzung der Markovbedingung erster Ordnung lässt sich die Pfadwahrscheinlichkeit $P(X)$ folgendermaßen schreiben

$$P(X) = \prod_{i=1}^N P(x_i).$$

Sind die geometrischen Eigenschaften der Gefäßprojektionen verschiebungsinvariant bezüglich der tatsächlichen Positionen der Segmente, so kann dieses Vorwissen als Verteilungsdichtefunktion über die Richtungen der Nachbarzustände eines Knotens n ausgedrückt werden, d.h. nicht mehr die absolute Position eines Knotens ist entscheidend, sondern nur die relative Lage in Bezug auf die Nachbarknoten.

$$P(n_i|n_{i-1}) = P_{\Delta}(x_i)$$

Sind alle Nachbarzustände gleich wahrscheinlich, so geht $P_{\Delta}(x)$ in die Gleichverteilung $U(x)$ über.

Zur Berechnung der Beobachtungswahrscheinlichkeit $P(Y|X)$ eines Pfades wird ein statistisches Modell der Bildentstehung verwendet, welches im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

5.3.2 Das statistische Modell für die Bildentstehung

Das Modell für die Bildentstehung $P(Y|X)$ geht von der Existenz einer Filterfunktion $f(x)$ aus, die ein Merkmal y_x für die Gefäßartigkeit des Segments x im Bild liefert. Die Filtereigenschaften werden als verschiebungsinvariant angenommen.

Eine Beobachtung y_x stammt von der Verteilungsdichtefunktion $p_1(y)$, falls das Segment x auf dem Pfad X liegt. Ansonsten entstammt y_x einer Hintergrundverteilung $p_0(y)$. Die beiden Verteilungsdichten $p_1(y)$ für Gefäß und $p_0(y)$ für Bildhintergrund sind folgendermaßen definiert

$$p_1(y_x) = P(Y = y_x|H_1) = P(Y = y_x|x \in X). \quad (5.25)$$

Das bedeutet, dass p_1 die bedingte Wahrscheinlichkeit für die Filterantwort Y eines Gefäßfilters, gegeben die Hypothese H_1 , ist und es sich bei dem Segment x tatsächlich um die Abbildung eines Gefäßes im Bild handelt. Weiterhin sei

$$p_0(y_x) = P(Y = y_x|H_0) = P(Y = y_x|x \notin X)$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit für die Hintergrundhypothese, d.h. die Abwesenheit einer Gefäßprojektion für das Segment x im Bild.

Man benötigt also zwei Verteilungsdichtefunktionen für Vorder- und Hintergrund. Diese können als Histogramme empirisch aus Trainingsdaten bestimmt werden. Dazu werden die relativen Häufigkeiten der beobachteten Werte y für beide Klassen ermittelt. Die Trainingsdaten besitzen ein Attribut, das die Klassenzugehörigkeit beschreibt. Es ist ebenfalls möglich, mit den Trainingsdaten die Parameter einer kontinuierlichen Verteilungsdichte, z.B. einer Normalverteilungsdichte, zu lernen.

Das vollständige Abbildungsmodell $P(Y|X)$ lautet [CY99]

$$P(Y|X) = \prod_{x \in X} P(y_x|H_1) \prod_{x \notin X} P(y_x|H_0)$$

mit

$$\prod_{x \notin X} P(y_x|H_0) = \prod_{x \in \chi \setminus X} P(y_x|H_0) = \frac{\prod_{x \in \chi} P(y_x|H_0)}{\prod_{x \in X} P(y_x|H_0)}. \quad (5.26)$$

Es lässt sich für einen Pfad X der Länge N auch folgendermaßen berechnen

$$P(Y|X) = \prod_{i=1}^N \frac{p_1(y_i)}{p_0(y_i)} \prod_{x \in \chi} p_0(y_x) \quad (5.27)$$

mit der Filterantwort y_i für das Segment x_i des Pfades. Der letzte Term ist unabhängig vom Zielpfad X und kann deshalb für die Maximierung ignoriert werden.

Für die Bestimmung der tatsächlichen Gefäßlage im Bild wird eine maximum a posteriori Schätzung nach Gleichung 5.24 verwendet. Dabei ist $P(Y) = \sum_Y P(Y|X)P(X)$ ein Normierungsfaktor, damit die Bedingung $\sum_{x \in X} P(X|Y) = 1$ erfüllt ist.

Für die effiziente Suche des Pfades X^* mit maximaler a posteriori Wahrscheinlichkeit

$$X^* = \operatorname{argmax}_{\forall X} \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \operatorname{argmax}_{\forall X} P(Y|X)P(X)$$

werden die in Kapitel 3 beschriebenen heuristisch informierten Graphensuchverfahren eingesetzt.

5.3.3 Statistische Gefäßsegmentierung

Um zu entscheiden ob ein Pfad X zu einem Gefäß gehört oder nicht, wird das Verhältnis der Verbundwahrscheinlichkeiten für die Beobachtungen entlang des Pfades für die Vordergrund- und Hintergrundhypothese

$$\frac{p_1(y_1, y_2, \dots, y_N)}{p_0(y_1, y_2, \dots, y_N)} < T$$

berechnet und mit einem geeigneten Schwellwert T verglichen. Das heißt, dass man die Verbundwahrscheinlichkeit für die Beobachtungen entlang des Pfades bezogen auf die H_1 Hypothese durch die Verbundwahrscheinlichkeit der Beobachtungen entlang des Pfades bezogen auf die Hintergrundhypothese H_0 teilen muss. Der Quotient ist ein Maß für die Übereinstimmung der tatsächlichen Beobachtungen mit den Beobachtungen entlang eines typischen Gefäßverlaufs. Nimmt man statistische Unabhängigkeit der Beobachtungen untereinander an, so ergibt sich

$$\frac{p_1(y_1, y_2, \dots, y_N)}{p_0(y_1, y_2, \dots, y_N)} = \frac{p_1(y_1)p_1(y_2) \dots p_1(y_N)}{p_0(y_1)p_1(y_2) \dots p_1(y_N)}. \quad (5.28)$$

Die Beobachtungen y müssen nicht nur auf skalare Werte beschränkt sein. Wird die Gefäßzugehörigkeit für verschiedene Auflösungsstufen des Bildes ermittelt, so kann die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte für mehrere Filter mit dem Skalenparameter s verwendet werden.

$$P(\{Y^s = y^s : s = 0, 1, 2, \dots\} | H) \quad (5.29)$$

Da im Allgemeinen die Skalen s miteinander korreliert sind [Jäh05], kann 5.29 nicht als

$$\prod_{s=0,1,2,\dots} P(Y^s = y^s | H)$$

faktorisiert werden. Es muss daher die Verbundwahrscheinlichkeit verwendet werden. Diese kann z.B. als multivariate Gaußverteilung mit dem Mittelwert μ und der Kovarianzmatrix Σ

$$P(Y^{s=1} = y^{s=1}, Y^{s=2} = y^{s=2}, \dots) = \mathcal{N}(\mathbf{y}, \mu, \Sigma) \quad (5.30)$$

für unterschiedliche Skalenparameter s approximiert werden. Das statistische Modell hat den Vorteil, dass die Ergebnisse mehrerer unterschiedlicher Gefäßfilter auf einheitliche Weise zusammengefasst werden können. Wollte man bisher die Informationen unterschiedlicher Filter miteinander kombinieren, so war man auf ad hoc Methoden zur Kombination der unterschiedlichen Ergebnisse angewiesen (Maximum, gewichtete Summe, etc.). Hiermit braucht man nur zwei multivariate Verteilungsdichtefunktionen für Vorder- und Hintergrund anhand von Trainingsdaten zu bestimmen und die Entscheidung über die Gefäßzugehörigkeit kann anhand eines einzigen Schwellwertes getroffen werden.

5.3.4 Die Pfadmetrik

Für die Suche nach einem optimalen Pfad ist eine geeignete Pfadmetrik erforderlich. Diese wird so gewählt, dass der optimale Pfad die logarithmierte a posteriori Wahrscheinlichkeit $\Gamma(X)$ maximiert [CY99].

$$\Gamma(X) = \sum_{i=1}^N \log \frac{p_1(y_i)}{p_0(y_i)} + \sum_{i=1}^N \log P_{\Delta}(x_i) \quad (5.31)$$

Die Pfadmetrik besteht aus zwei Teilen, dem Geometrieterm, $\log P_{\Delta}$, und einem Intensitätsterm, $\log(p_1/p_0)$. Der Geometrieterm beschreibt das Vorwissen über die Form eines Gefäßverlaufes. Falls ein Gefäß unter bestimmten Aufnahmebedingungen typischerweise immer von links oben nach rechts unten im Bild verläuft, so kann man das dadurch berücksichtigen, dass Segmente x parallel zu dieser Richtung mit größerer Wahrscheinlichkeit auftreten. P_{Δ} unterscheidet sich dann von einer Gleichverteilung.

Der Intensitätsterm ist vom tatsächlichen Bildinhalt und den verwendeten Filterfunktionen abhängig. Die statistische Unabhängigkeit der Beobachtungen vorausgesetzt, lässt sich die Pfadmetrik rekursiv formulieren [CD95]

$$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \left[\log \frac{p_1(y_{i+1})}{p_0(y_{i+1})} + \log P_{\Delta}(x_{i+1}) \right]. \quad (5.32)$$

Das ist für iterative Suchverfahren wie die Dynamische Programmierung sehr nützlich, da in jedem Suchschritt auf bereits berechnete Zwischenergebnisse zurückgegriffen wird.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger falscher Pfad der Länge N eine größere mittlere Metrik $E\{\Gamma(X_N)\}$ als der tatsächliche Pfad aufweist, nimmt mit zunehmender Pfadlänge exponentiell ab [CY99]. Im Exponenten steht u.a. die Kullback-Leibler-Divergenz (KLD) zwischen p_1 und p_0 . Die KLD ist ein Maß für die Unterschiedlichkeit zweier Verteilungsdichtefunktionen, z.B. zwischen den Verteilungsdichten der Merkmale für Bildvordergrund $p_1(y)$ und Bildhintergrund $p_0(y)$. Formal lässt sich die KLD für diskrete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen p_1 und p_0 folgendermaßen bestimmen

$$D(p_1 \| p_0) = \sum_{y \in Y} p_1(y) \log \frac{p_1(y)}{p_0(y)}, \quad (5.33)$$

wobei Y die Menge aller möglichen Beobachtungen beschreibt.

Werden die Verteilungen für kontinuierliche Werte durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p_1(y)$ und $p_0(y)$ dargestellt, wird das Integral berechnet:

$$D(p_1||p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y) \log \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy \quad (5.34)$$

Die KLD zwischen der Vorder- und Hintergrundverteilung ist ein entscheidendes Kriterium für die Auswahl einer geeigneten Gefäßfilterfunktion, da sie nicht nur die Qualität der Gefäßdetektion sondern auch die Konvergenzrate der Pfadsuche beeinflusst.

Der Ordnungsparameter [CY99]

$$K = D(p_1||p_0) + D(P_{\Delta}||U) - \log B$$

beschreibt das Risiko, einen größeren Wert für die Metrik eines falschen Pfades verglichen mit dem Wert des korrekten Pfades zu bekommen. Für ein gegebenes Problem mit p_1 , p_0 , P_{Δ} und dem Verzweigungsgrad B kann mit dem Ordnungsparameter K abgeschätzt werden wie schwierig die Suche nach einem optimalen Pfad ausfallen wird.

Je nach Vorzeichen von K ergeben sich unterschiedliche Bereiche. Für $K < 0$ ist es wahrscheinlicher, für einen falschen Pfad die größere Pfadmetrik als für den richtigen Pfad zu bekommen. Kein Suchalgorithmus wird den korrekten Pfad zuverlässig finden können [CY99]. Ist $K > 0$ so gilt, dass ein Pfad umso leichter zu verfolgen ist, je größer K ist. Ist der Ordnungsparameter nicht groß genug, muss eine andere Merkmalsberechnung verwendet werden, um die KLD zwischen p_1 und p_0 zu vergrößern, oder man muss den Verzweigungsgrad verringern.

Für die eigentliche Suche ist es gleichgültig, welches Verfahren man zur Merkmalsberechnung verwendet, solange gewährleistet ist, dass der Ordnungsparameter K hinreichend groß ist und eine Suchstrategie somit in der Lage ist, den optimalen Pfad effizient zu finden.

5.3.5 Interpretation des statistischen Modells

Betrachtet man die rekursive Suche nach dem Pfad mit maximaler a posteriori Wahrscheinlichkeit für ein gegebenes Bild, so lässt sich der Prozess als Untersuchung der Evidenz für eine konkrete Pfadhypothese H bei gegebenen Daten Y und einem gegebenen Vorwissen W betrachten. Die Evidenz ist in [Jay03] definiert als

$$e(H|YW) \equiv 10 \log_{10} \frac{P(H|YW)}{P(\bar{H}|YW)}. \quad (5.35)$$

Jede einzelne Messung liefert einen gewissen Beitrag an Evidenz zur Hypothese H und zu \bar{H} . Wurde genügend Evidenz für die Hypothese H akkumuliert, so wird man diese akzeptieren. Die Größe des Schwellwertes hängt von dem Maß an Sicherheit ab, das man verlangt, bevor eine Hypothese akzeptiert werden soll. Letztendlich entscheidet die Bewertung des Risikos sich zu irren über die Höhe des Schwellwertes.

Die Verwendung des Zehnerlogarithmus in Verbindung mit dem Vorfaktor von 10 macht es möglich, die Evidenz in Dezibel anzugeben. Das ist praktisch, da sie dem natürlichen Größenempfinden entspricht. Eine Veränderung der Evidenz von 1 db entspricht ungefähr der kleinsten Änderung der Plausibilität, die der Intuition zugänglich ist. Die folgende Tabelle aus [Jay03] soll den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Evidenz deutlich machen.

Tabelle 5.2: Vergleich zwischen Evidenz in Dezibel, Chance und Wahrscheinlichkeit

Evidenz in dB	Chance	Wahrscheinlichkeit
0	1 : 1	1/2
3	2 : 1	2/3
6	4 : 1	4/5
10	10 : 1	10/11
20	100 : 1	100/101
30	1000 : 1	0.999
40	10 ⁴ : 1	0.9999

Die heuristisch informierte Pfadsuche ist ein Mittel, um aus einer immensen Anzahl von Pfadhypothesen im Bild diejenige mit maximaler Evidenz iterativ zu finden. Dazu werden Messungen der Gefäßartigkeit an verschiedenen Stellen im Bild vorgenommen. Deren Ergebnisse können die jeweils betrachtete Pfadhypothese stützen oder deren Evidenz verringern und gleichzeitig die Evidenz der Hintergrundhypothese vergrößern oder verkleinern. Die Suchstrategie ist dabei ein Rezept, um auszuwählen, welche Pfadhypothesen, vor dem Hintergrund aller bisher gesammelten Informationen, als nächstes untersucht werden sollen. Am Ende erhält man eine Schätzung des Pfades mit maximaler a posteriori Wahrscheinlichkeit. Im Kapitel 3 wurden die Bedingungen für Optimalität und Effizienz von Suchstrategien erklärt. In diesem Kapitel wurde erläutert, wie die Kullback-Leibler-Divergenz als Maß für die Auswahl geeigneter Gefäßfilter genutzt werden kann. Beides zusammen dient als Anleitung zum Entwurf und Test von Gefäßsegmentierungsverfahren.

6 Auswertung

6.1 Kapitelüberblick

Die Auswertung gliedert sich in drei Teile, die mit den thematischen Schwerpunkten dieser Arbeit, der statistischen Segmentierung, der projektiven Geometrie und der Pfadsuche zusammenhängen.

Nach einer Übersicht der in Kapitel 5 beschriebenen Merkmale, die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung für die Bestimmung der Linienartigkeit von Bildstrukturen verwenden, wird im ersten Teil ein statistisches Segmentierungsverfahren bewertet, das ohne handsegmentierte Trainingsdaten auskommt. Dies wird durch die Auswertung der Bewegungsinformationen in den Aufnahmen ermöglicht. Das Verfahren bestimmt die Trainingsdaten für die Vordergrund- und Hintergrundverteilungsdichten selbstständig aus den Röntgenbildsequenzen.

Es werden die in Kapitel 5 beschriebenen Merkmale, die Ableitungen im Bild bis zur zweiten Ordnung zur Bestimmung der Linienartigkeit von Bildstrukturen verglichen. Dazu wird ihre Eignung für die Gefäßsegmentierung hinsichtlich der Fehlerraten und Abstände der Verteilungsdichten für univariate und multivariate Verfahren untersucht.

Ein weiterer Teil ist den geometrischen Aspekten der Rekonstruktion gewidmet, speziell werden die Auswirkungen von Fehlern in den Winkelangaben auf das Rekonstruktionsergebnis untersucht. Dazu wird ein eigens erstelltes virtuelles Phantommodell des Gefäßbaumes verwendet, um den Röntgenprozess unter definierten Bedingungen zu simulieren. Die Auswirkungen von Fehlern in den Geometrieangaben, wie sie z.B. durch eine unzureichende Kalibrierung entstehen können, werden mit dem Phantommodell als Referenz untersucht.

Im letzten Teil werden reale Röntgenbildsequenzen verwendet, um Koronarien dreidimensional zu rekonstruieren. Die Ergebnisse liegen als Rückprojektionen in die ursprünglichen Aufnahmen vor und werden zusätzlich als dreidimensionale gerenderte Objekte stereoskopisch dargestellt.

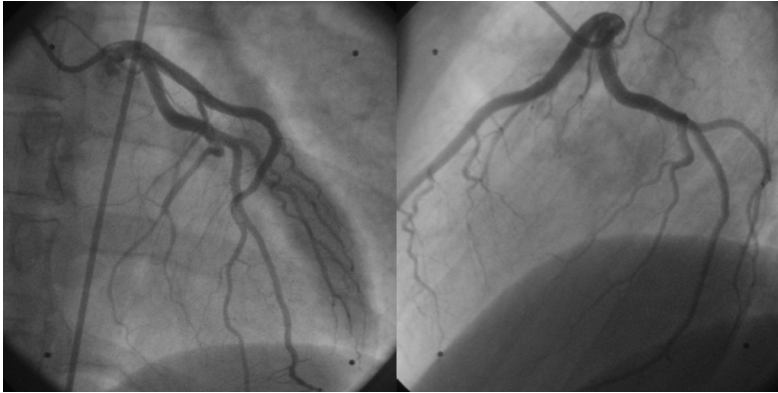
6.2 Merkmale

In diesem Abschnitt werden die im vorangegangenen Kapitel erläuterten Merkmale zweiter Ordnung zur Bestimmung der Gefäßartigkeit an Beispielen illustriert. Skalare Merkmale sind als Grauwertbilder dargestellt. Das Minimum eines Merkmals ist schwarz dargestellt und das Maximum ist weiß im Bild. Zwischenwerte werden den verbleibenden Grautönen proportional zugeordnet. Komplexe Merkmale mit bis zu drei Komponenten werden als Farbbild dargestellt, wobei die unterschiedlichen Informationen Farbe, Sättigung und Helligkeit modulieren. Entsprechende Erläuterungen befinden sich bei den Farbbildern.

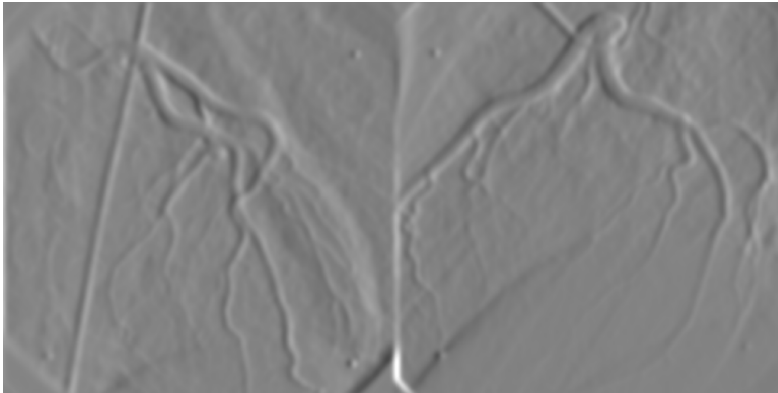
Den ersten Teil bilden die ersten und zweiten Ableitungen im Bild $(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})$. Anschließend folgen Abbildungen der Eigenwerte der Hesse-Matrix und der Orientierungswinkel $(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$. Aus diesen ergeben sich die von Frangi eingeführten Linienmerkmale (V, S, R_b) . Danach sind die nach Lin transformierten Merkmale (f_{20}, f_{21}, f_{22}) , und die daraus abgeleiteten Linienmerkmale $(a, \tau, k_{\text{line}})$ dargestellt. Es folgen die differentialgeometrischen Merkmale (K, H) . Den Abschluss bilden zwei komplexwertige Merkmale, eine Kombination aus Orientierung und Stärke lokaler Strukturen für die Linienmerkmale nach Frangi und eine Kombination der Linien-, Sattel- und Blob-Artigkeit wie sie sich für die Lin-Merkmale bestimmen lassen.

Tabelle 6.1: Übersicht der Bildmerkmale.

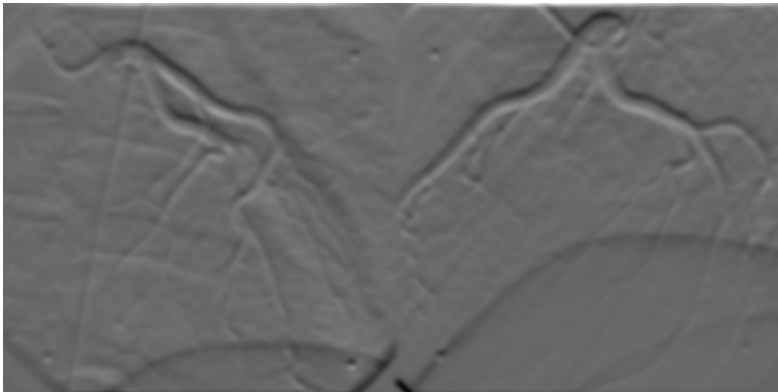
Merkmal	Abbildung	Beschreibung
I	6.1(a) S.122	Originalbild
f_x	6.1(b) S.122	erste Ableitung in x-Richtung
f_y	6.1(c) S.122	erste Ableitung in y-Richtung
f_{xx}	6.2(a) S.123	zweite Ableitung in x-Richtung
f_{xy}	6.2(c) S.123	zweite gemischte Ableitung
f_{yy}	6.2(b) S.123	zweite Ableitung in y-Richtung
λ_1	6.5(a) S.126	größerer Eigenwert
λ_2	6.5(b) S.126	kleinerer Eigenwert
ϕ	6.5(c) S.126	Rotationswinkel
V	6.6(c) S.127	Frangi-Merkmale
S	6.6(a) S.127	Amplitude
R_b	6.6(b) S.127	Verhältnis der Eigenwerte
f_{20}	6.3(a) S.124	erster Koeffizient im Harmonic Function Space
f_{21}	6.3(b) S.124	zweiter Koeffizient im Harmonic Function Space
f_{22}	6.3(c) S.124	dritter Koeffizient im Harmonic Function Space
a	6.4(a) S.125	Amplitude Lin-Merkmale
τ	6.4(b) S.125	Shape Angle
k_{line}	6.4(c) S.125	Linienartigkeit nach Lin
K	6.7(b) S.128	gaußsche Krümmung
H	6.7(a) S.128	mittlere Krümmung
c	6.8(a) S.129	komplexes Hesse-Merkmal
l	6.8(b) S.129	komplexes Lin-Merkmal



(a) Original

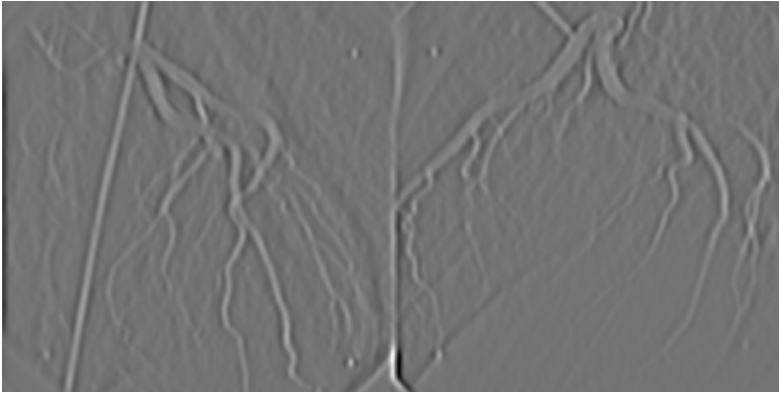
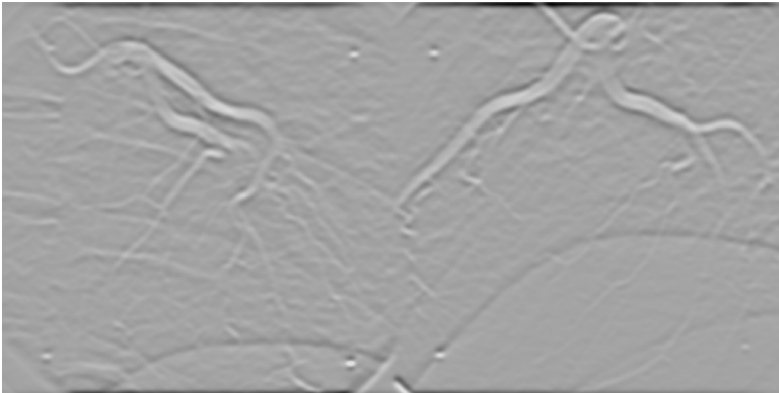
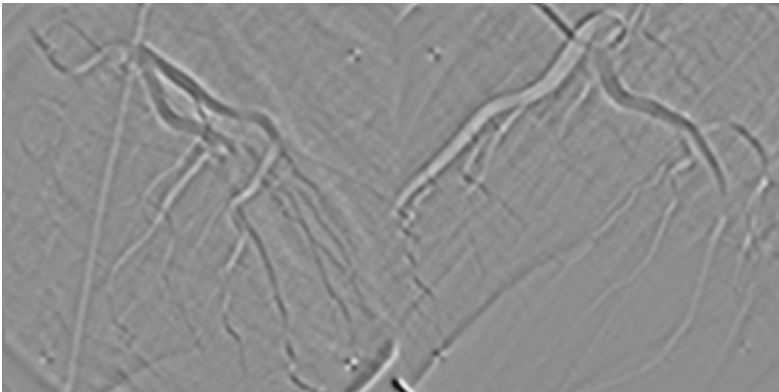


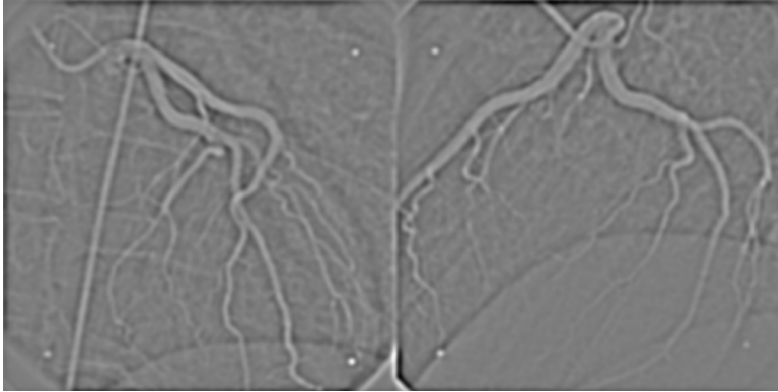
(b) erste Ableitung in x-Richtung f_x



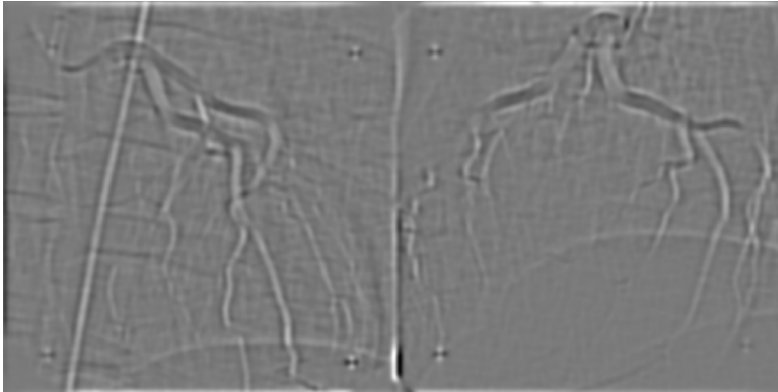
(c) erste Ableitung in y-Richtung f_y

Abbildung 6.1: Die erste Ableitung für einen Skalenparameter von $s = 3.7$.

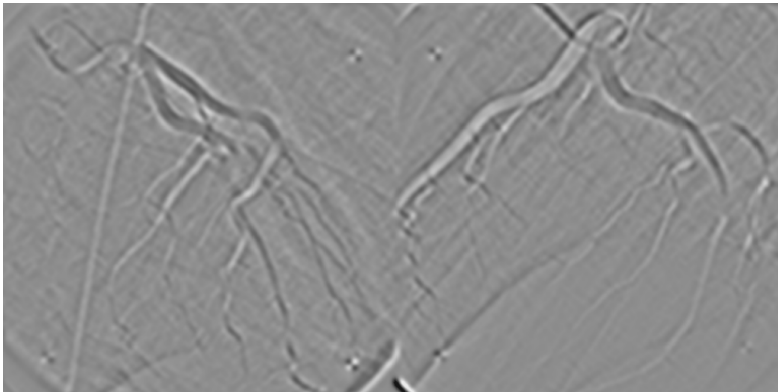
(a) zweite Ableitung in x-Richtung f_{xx} (b) zweite Ableitung in y-Richtung f_{yy} (c) zweite gemischte Ableitung f_{xy} **Abbildung 6.2:** Die zweiten Ableitungen für einen Skalenparameter von $s = 3.7$.



(a) erster Koeffizient f_{20}

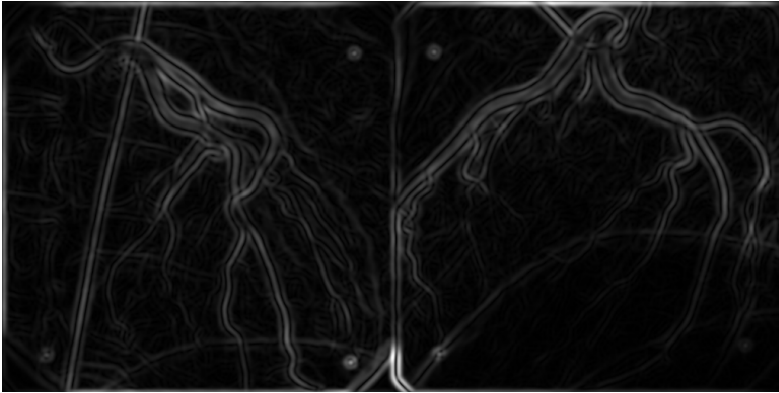
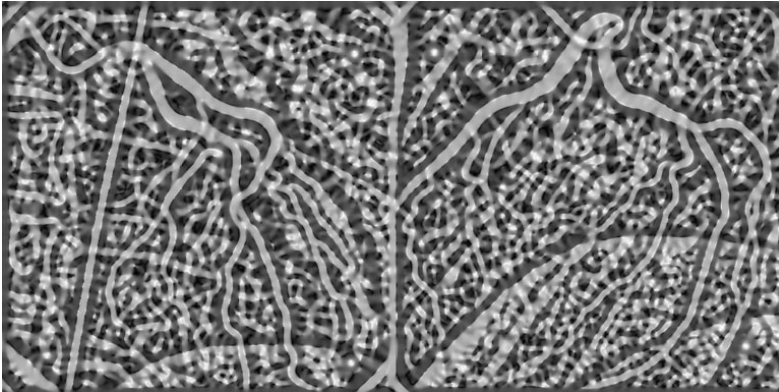
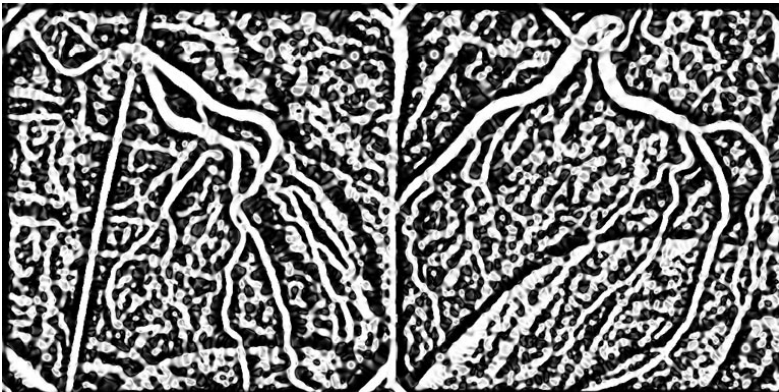


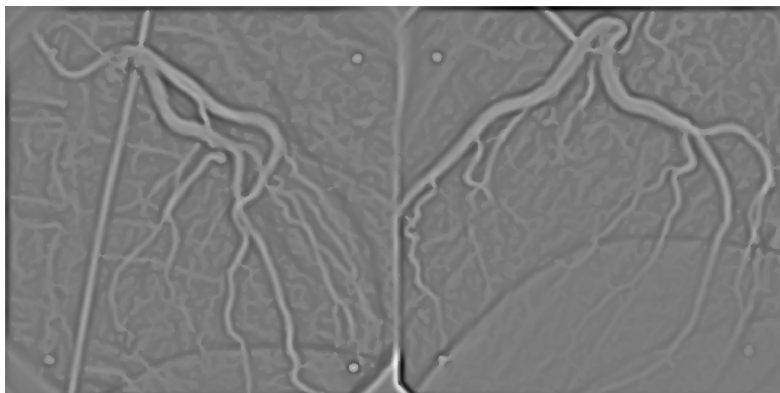
(b) zweiter Koeffizient f_{21}



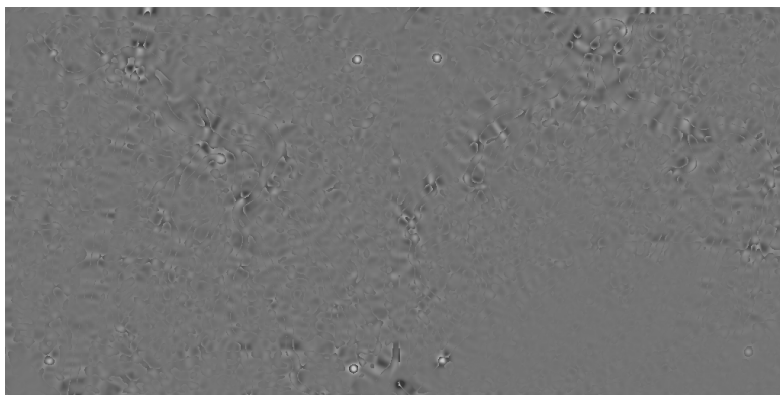
(c) dritter Koeffizient f_{22}

Abbildung 6.3: Harmonic Function Space für einen Skalenparameter von $s = 3.7$.

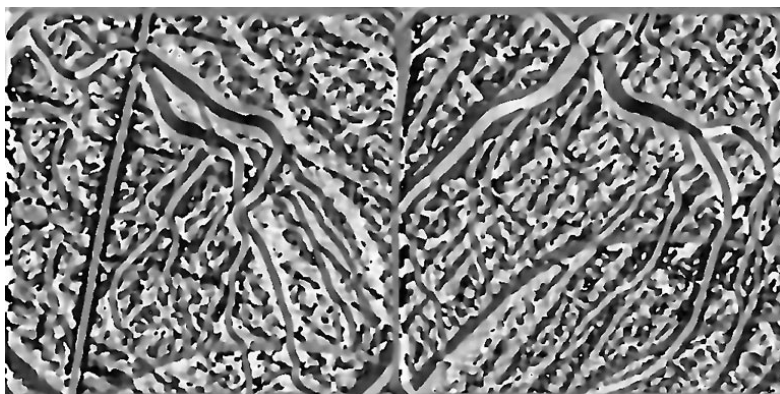
(a) Amplitude a (b) Shape Angle τ (c) Linienartigkeit k_{line} **Abbildung 6.4:** Die Lin-Merkmale für einen Skalenparameter von $s = 3.7$.



(a) größter Eigenwert der Hesse-Matrix λ_1

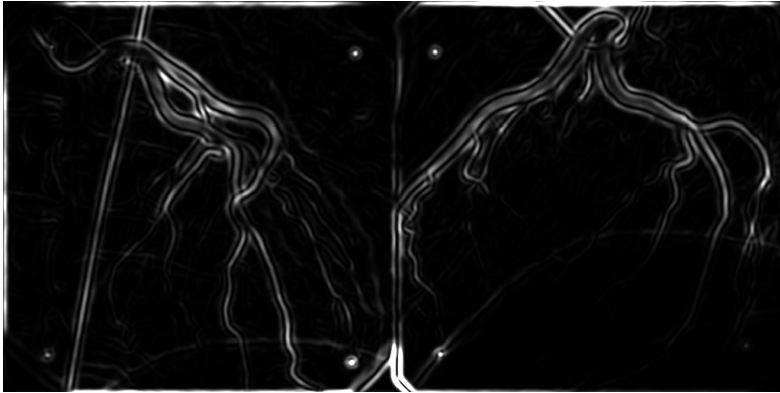
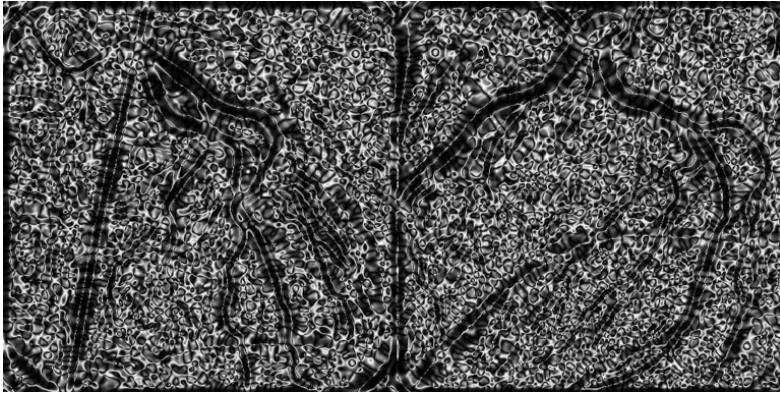
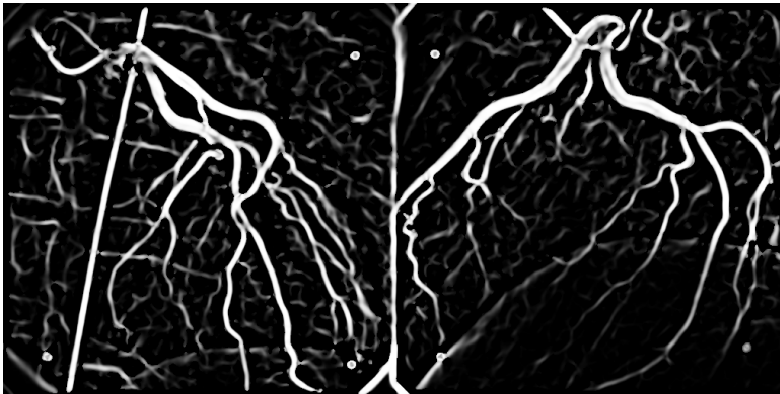


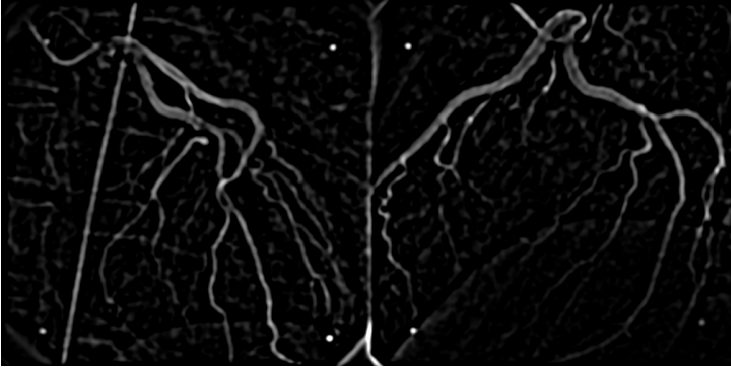
(b) kleinster Eigenwert der Hesse-Matrix λ_2



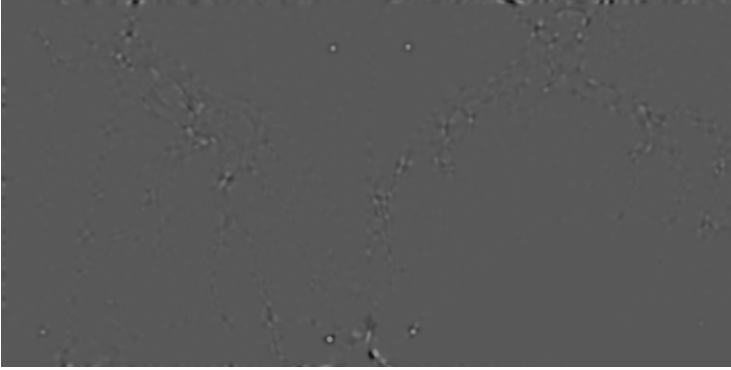
(c) Rotationswinkel ϕ

Abbildung 6.5: Die Hesse-Merkmale für einen Skalenparameter von $s = 3.7$.

(a) Amplitude S (b) Verhältnis der Eigenwerte R_b (c) Frangi-Linienmerkmal V **Abbildung 6.6:** Die Frangi-Merkmale für einen Skalenparameter von $s = 3.7$.



(a) gaußsche Krümmung H



(b) mittlere Krümmung K

Abbildung 6.7: Die differentialgeometrischen Merkmale für einen Skalenparameter von $s = 3.7$.

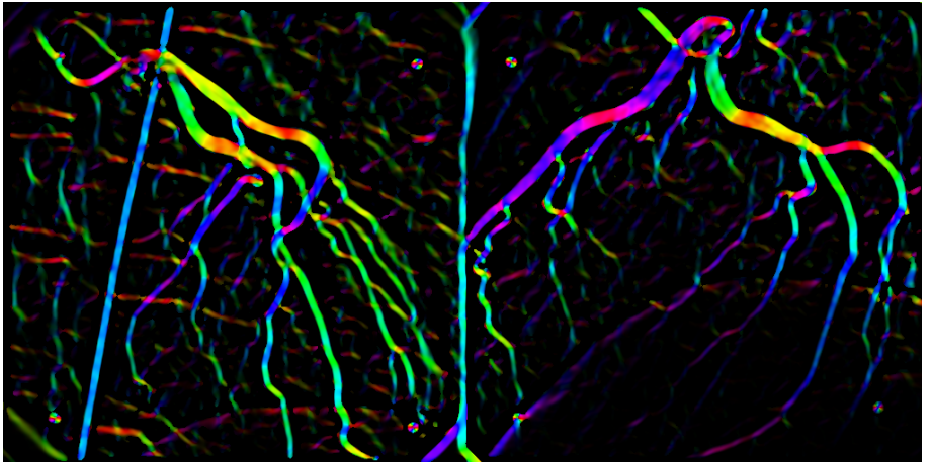
Für die mittlere Krümmung H gibt es noch einen interessanten Zusammenhang mit dem LoG⁻¹-Operator. Dieser wird häufig zur Kantenerkennung eingesetzt. Die Bestimmung von Kantenerkennung erfolgt durch Detektion von Nulldurchgängen in den zweiten Ableitungen des Intensitätsbildes.

Sofern der Gradient von f verschwindet, ist die Spur der Hesse-Matrix \mathcal{H} dem LoG-Operator proportional

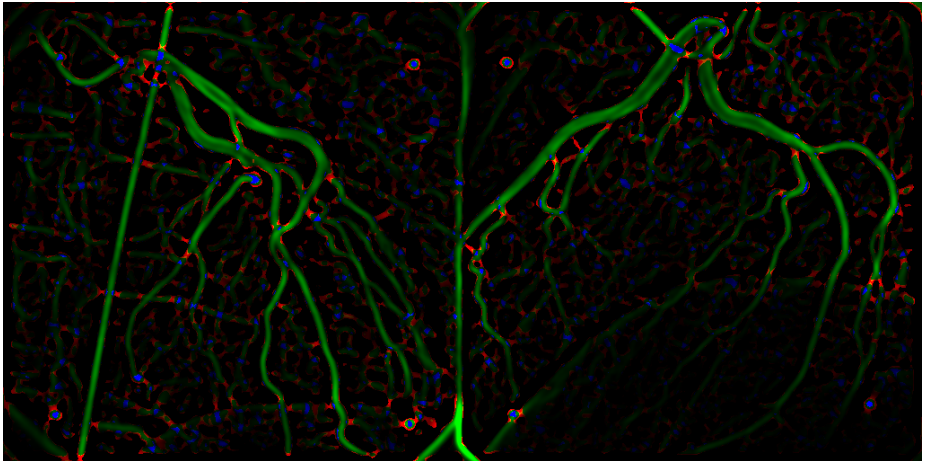
$$\text{trace}(\mathcal{H}) = (\lambda_1 + \lambda_2) = f_{xx} + f_{yy} = \nabla^2 f,$$

bzw. die mittlere Krümmung $H = \frac{1}{2}\text{trace}(\mathcal{H})$.

¹LoG: *Laplacian of Gaussian*



(a) komplexwertiges Frangi-Merkmal farbkodiert, Intensität:Linienartigkeit, Farbe: Orientierung



(b) Lin-Merkmal farbkodiert, grün:Linienartigkeit, rot:Sattelartigkeit, blau:Kreisartigkeit

Abbildung 6.8: Kombinierte Linienmerkmale

6.3 Anwendung der statistischen Gefäßsegmentierung

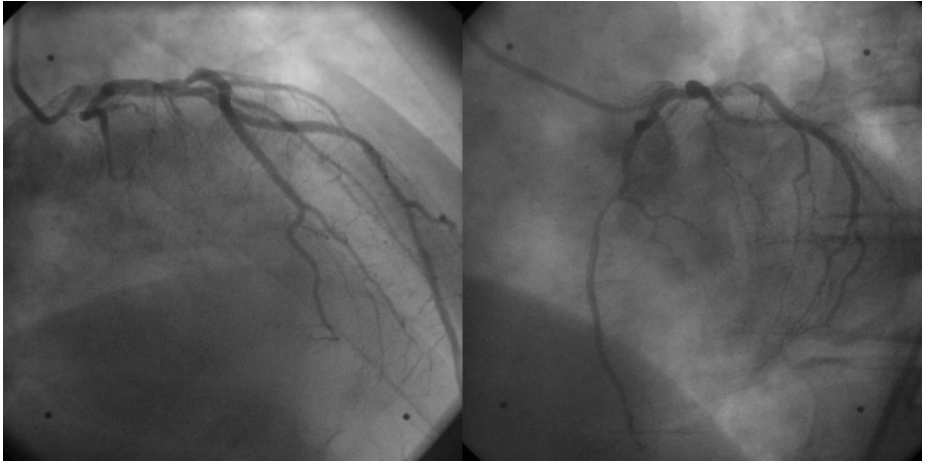
Mit Hilfe der statistischen Segmentierungsmethoden wurde ein neues Segmentierungsverfahren für Gefäße in Röntgenbildsequenzen entwickelt. Die Entscheidung über die Gefäßzugehörigkeit wird anhand des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeiten für Gefäß und Bildhintergrund getroffen. Dazu müssen die Verteilungsdichtefunktionen der beiden Klassen anhand geeigneter Trainingsdaten bestimmt werden. Man wählt repräsentative Bildbereiche für jede der beiden Klassen aus und benutzt diese als Grundlage für die Schätzung der Verteilungsdichtefunktionen. Neu ist, dass die beiden Verteilungsdichten für Vorder- und Hintergrund direkt aus den Bildsequenzen gelernt werden können. Damit ist keine Handsegmentierung für die Trainingsdaten mehr notwendig. Außerdem werden die Parameter unterschiedlicher Bildfolgen nicht nur aus einer einmalig bestimmten Verteilungsdichte berechnet, sondern es können für jede Bildfolge ganz individuelle Verteilungsdichten ermittelt werden. Grundlage ist die natürliche Bewegung der Koronarien, wie sie in den Röntgenbildfolgen sichtbar ist. Für ein Röntgenbildpaar wie in Abbildung 6.9(a) werden die Label der Trainingsdaten, „Gefäß“ bzw. „nicht Gefäß“, aus dem Differenzbild mit den beiden Nachbarbildern innerhalb einer Sequenz, wie in Abbildung 6.9(b) gezeigt, bestimmt.

6.3.1 Schätzung der Vordergrundverteilungsdichte aus Differenzbildern

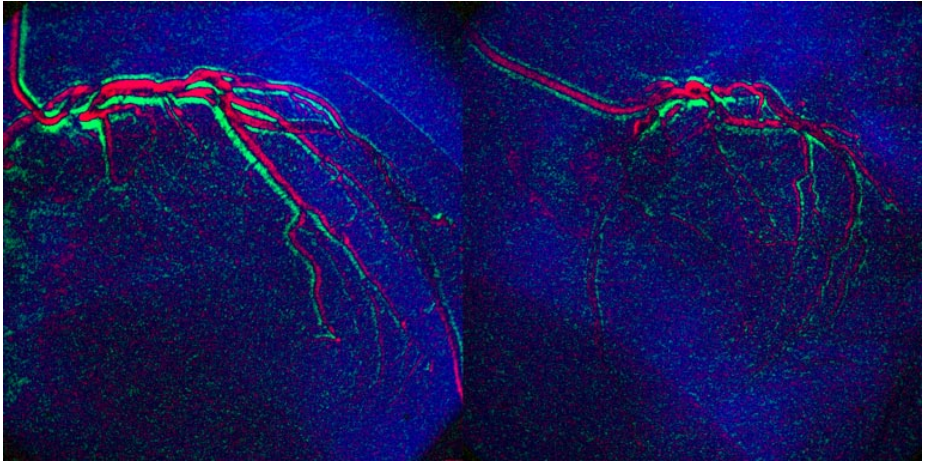
Die Voraussetzung ist, dass sich Gefäße bewegen, der Hintergrund dagegen nicht bzw. mit einer Geschwindigkeit die deutlich unter der von Koronarien liegt. Bewegungen werden anhand der Grauwertveränderung im Bild erkannt. Das Kontrastmittel verringert die Intensität der detektierten Röntgenstrahlung. Ein mit Kontrastmittel gefülltes Gefäß erscheint daher dunkler als der Bildhintergrund. Ändert sich der Grauwert von hell nach dunkel, so wird der hellere Hintergrund von einem Gefäß verdeckt. Zum Zeitpunkt t befindet sich also an dieser Stelle im Bild ein Gefäß, wo sich zum Zeitpunkt $t - 1$ noch Bildhintergrund befand. Umgekehrtes gilt für eine Änderung des Grauwertes von dunkel nach hell. Dabei wird heller Hintergrund sichtbar, der zum Zeitpunkt $t - 1$ noch von einem dunkleren Gefäß verdeckt war. Mit $I_{\text{diff}} = 2I_t - (I_{t-1} + I_{t+1})$ wird ein Differenzbild I_{diff} für das Bild I_t zum Zeitpunkt t berechnet. In Abbildung 6.9(b) ist eine farbkodierte Darstellung des Differenzbildes zu sehen. Positive Werte für die Differenz, grün im Bild, lassen auf Hintergrund schließen, negative Werte, rot dargestellt, stehen für Vordergrund. Werte nahe Null lassen keine eindeutige Zuordnung zu, da nicht genügend sichtbare Bewegung stattgefunden hat. Das Differenzbild enthält ebenfalls Teile des Bildrauschens. Es ist deshalb sinnvoll, einen Schwellwert zu benutzen, um nur geeignete Stellen im Bild für das Training zuzulassen. Die Merkmale des i -ten Bildpunktes für das Training gehen gewichtet mit dem Betrag des Differenzbildes w_i in die Berechnung ein. Die Formeln für den gewichteten Mittelwert μ_w und die gewichtete Kovarianz Σ_w lauten

$$\mu_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, \quad \Sigma_w = \frac{\sum w_i (x_i - \mu)(x_i - \mu)^T}{\sum w_i}. \quad (6.1)$$

Um zu überprüfen, ob sich die Verteilungsdichten aus Differenzbildern bestimmen lassen, wurden verschiedene Experimente durchgeführt. Es wurden handsegmentierte und



(a) Originalbild



(b) Farbkodiertes Differenzbild, rot: Vordergrund, grün: Hintergrund

Abbildung 6.9: Direkt aus dem Differenzbild werden die Trainingsdaten abgeleitet.

automatisch mit den Differenzbildern berechnete Trainingsdaten benutzt, um Vorder- und Hintergrundverteilungsdichten zu trainieren. Für 14 unterschiedliche Aufnahmen in acht unterschiedlichen Skalen wurden drei verschiedene Methoden verglichen, um die Verteilungsdichten zu lernen.

1. manuelle Segmentierung für Vorder- und Hintergrund
2. gewichtete Differenzbildsegmentierung

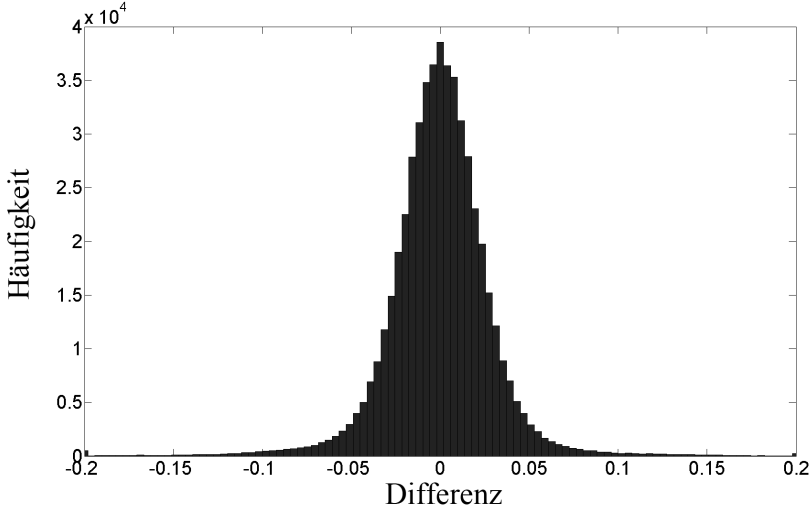


Abbildung 6.10: Das Histogramm des gesamten Differenzbildes I_{diff} .

3. gewichtete Differenzbildsegmentierung, wobei als Menge der Hintergrundpunkte das Komplement der Menge der Vordergrundpunkte gewählt wurde

Die dritte Variante benutzt mehr Punkte für die Schätzung des Hintergrundes als die zweite Variante. Eventuell lässt sich die Schätzung dadurch verbessern. Aus dem Differenzbildhistogramm in Abbildung 6.10 wurde ein Schwellwert zur Unterdrückung kleiner Differenzen von 0.07 abgeleitet. Die Unterschiede innerhalb der Gruppe der Vordergrundverteilungen und innerhalb der Gruppe der Hintergrundverteilungen sollten möglichst klein sein, dann lässt sich jedes der drei Verfahren gleichwertig zur Schätzung der Verteilungsdichten verwenden. Als Kriterium für die Unterschiedlichkeit von Verteilungsdichtefunktionen wird die Kullback-Leibler-Divergenz (*KLD*) verwendet. Für zwei Normalverteilungsdichten lässt sich die KLD analytisch berechnen [Do03].

$$D(\mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1) \parallel \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_2)) = \frac{1}{2} \left[\log \frac{\det \Sigma_2}{\det \Sigma_1} - d + \text{trace}(\Sigma_2^{-1} \Sigma_1) + (\mu_1 - \mu_2)^\top \Sigma_2^{-1} (\mu_1 - \mu_2) \right]$$

Dabei sind μ_1, μ_2 die Mittelwerte der beiden Verteilungen, Σ_1 und Σ_2 die Kovarianzmatrizen und d die Dimension der Daten. Die KLD ist für identische Verteilungsdichten gleich Null. Diese Eigenschaft der KLD soll genutzt werden, um die Verteilungsdichten, die aus manueller und automatischer Segmentierung gelernt werden zu vergleichen. Es wurden insgesamt 14 Bilder in acht Auflösungsstufen handsegmentiert. Daraus wurden die Referenzverteilungsdichten für Vorder- und Hintergrund gelernt. Für jedes Merkmal

sind die Mittelwerte aus den 14x8 Messungen mit den zugehörigen Standardabweichungen in Tabelle 6.2 eingetragen. Als erstes wird der Abstand der gelernten Vordergrundver-

Tabelle 6.2: Mittlere KLD und Standardabweichung zwischen Verteilungen aus automatisch und handsegmentierten Daten gemittelt über 14 Bilder und acht Skalen für alle Merkmale aus Tabelle 6.1. Es werden die drei Fälle von Seite 132 unterschieden. \overline{KLD}_{FF} : Abstand zwischen handsegmentiertem Vordergrund(F) und automatisch segmentiertem Vordergrund(F), \overline{KLD}_{12} : Abstand zwischen handsegmentiertem Hintergrund(1) und automatisch segmentiertem Hintergrund(2), \overline{KLD}_{13} : Abstand zwischen handsegmentiertem Hintergrund(1) und automatisch segmentiertem Vordergrundkomplement(3), \overline{KLD}_{23} : Abstand zwischen automatisch segmentiertem Hintergrund(2) und automatisch segmentiertem Vordergrundkomplement(3)

	\overline{KLD}_{FF}	\overline{std}_{FF}	\overline{KLD}_{12}	\overline{std}_{12}	\overline{KLD}_{13}	\overline{std}_{13}	\overline{KLD}_{23}	\overline{std}_{23}
I	0.03157	0.0412	0.47840	0.3292	0.51875	0.3550	0.00073	0.0005
f_x	0.05383	0.0719	0.16239	0.1234	0.18251	0.1382	0.00097	0.0008
f_y	0.06750	0.0455	0.10965	0.0747	0.12118	0.0837	0.00059	0.0005
f_{xx}	0.05915	0.0638	0.27472	0.1295	0.30668	0.1401	0.00177	0.0012
f_{xy}	0.02789	0.0367	0.26665	0.1213	0.33918	0.1555	0.01107	0.0087
f_{yy}	0.08362	0.0849	0.23312	0.1590	0.26297	0.1726	0.00140	0.0007
λ_1	0.06674	0.0431	0.40858	0.2038	0.44940	0.2160	0.00183	0.0008
λ_2	0.04857	0.0289	0.29510	0.1509	0.35773	0.1835	0.00823	0.0070
ϕ	0.02439	0.0182	0.02884	0.0427	0.03150	0.0463	0.00008	0.0000
V	0.08244	0.0658	0.28220	0.3423	0.20498	0.2476	0.01493	0.0140
R_b	0.01202	0.0147	0.03747	0.0365	0.04218	0.0400	0.00013	0.0000
f_{20}	0.08400	0.0543	0.39432	0.1866	0.44271	0.1994	0.00250	0.0012
f_{21}	0.06427	0.0449	0.11982	0.1811	0.13197	0.1970	0.00044	0.0003
f_{22}	0.02789	0.0367	0.26665	0.1213	0.33918	0.1555	0.01107	0.0087
a	0.07280	0.0523	0.41179	0.2709	0.45633	0.2896	0.00148	0.0009
τ	0.08322	0.0680	<u>0.63827</u>	0.4584	<u>0.79460</u>	0.5376	0.00559	0.0015
k_{line}	0.08872	0.0805	<u>0.85039</u>	0.7099	<u>1.00020</u>	0.8025	0.00381	0.0012
H	0.08289	0.0553	0.39528	0.2091	0.44755	0.2253	0.00324	0.0017
\emptyset	0.05897	0.0504	0.31409	0.2139	0.35720	0.2325	0.00388	0.0027

teilungsdichten für manuell und automatisch ermittelte Trainingsdaten bestimmt. Die mit \overline{KLD}_{FF} bezeichnete Spalte zeigt die Ergebnisse für alle Merkmale. Die kleinen Werte für die KLD zeigen, dass die automatisch segmentierten Daten zu einem Vordergrundmodell führen, das dem aus der Handsegmentierung weitestgehend entspricht. Als nächstes werden die zwei Varianten zur automatischen Schätzung des Hintergrundmodells verglichen. Zunächst wird untersucht wie sehr sich das aus manueller Segmentierung gelernte Hintergrundmodell von dem aus automatischer Segmentierung gelernten unterscheidet. Die Spalte \overline{KLD}_{12} in Tabelle 6.2 gibt den Abstand zwischen handsegmentiertem und automatisch segmentiertem Hintergrundmodell an. Ganz ähnlich ist in der Spalte

\overline{KLD}_{13} der Abstand zwischen handsegmentiertem Hintergrundmodell und dem aus der Komplementärmenge der Vordergrundpixel gelernten Hintergrundmodell eingetragen. Die Hintergrundverteilungen liegen dicht beieinander. Es ergeben sich zwar größere Werte für die KLD, trotzdem bleibt sie im Mittel bis auf wenige Ausnahmen klein. Für die meisten Merkmale kann damit auch das Modell der Hintergrundverteilung erfolgreich aus den Differenzbildern gelernt werden.

Werden Hintergrundpunkte durch einen Wechsel von dunkel nach hell automatisch segmentiert, so werden damit ungefähr fünf Prozent aller möglichen Hintergrundpunkte ausgewählt. Deutlich mehr Hintergrundpunkte erhält man, wenn man als Trainingsdaten für das Hintergrundmodell das Komplement der Menge der automatisch segmentierten Vordergrundpixel wählt. Die Ergebnisse sind in der mit KLD_{23} bezeichneten Spalte in Tabelle 6.2 angegeben. Die geringe KLD lässt darauf schließen, dass die unterschiedlichen Varianten zur automatischen Auswahl der Hintergrundpunkte nur zu minimalen Unterschieden in der gelernten Hintergrundverteilung führen.

Tabelle 6.3: Mittlere KLD und Standardabweichung zwischen Vorder- und Hintergrundverteilungsdichte über 14 Bilder und acht Skalen gemittelt. 1: handsegmentiert Vorder- und Hintergrund, 2: automatisch segmentierter Vorder- und Hintergrund, 3: automatisch segmentierter Vordergrund und Hintergrund als Komplementärmenge des Vordergrundes.

Merkmal	\overline{KLD}_1	\overline{std}_1	\overline{KLD}_2	\overline{std}_2	\overline{KLD}_3	\overline{std}_3
I	0.82362	0.24856	0.39088	0.27027	0.4911	0.36846
f_x	0.11395	0.14184	0.10988	0.066206	0.076607	0.053758
f_y	0.085648	0.04433	0.11181	0.088235	0.065862	0.056721
f_{xx}	1.1112	0.31491	0.49623	0.1689	0.39633	0.10906
f_{xy}	0.11556	0.079153	0.42544	0.057724	0.41279	0.14952
f_{yy}	1.331	0.82834	0.57442	0.25152	0.39296	0.11703
λ_1	<u>2.461</u>	0.91941	<u>1.1065</u>	0.34532	<u>0.7544</u>	0.16153
λ_2	0.15012	0.06944	0.2969	0.094663	0.20459	0.064931
ϕ	0.0909	0.10877	0.029947	0.040512	0.021212	0.012852
V	<u>2.2029</u>	0.64007	<u>1.7799</u>	0.41522	<u>1.3271</u>	0.28619
R_b	0.049611	0.042977	0.15031	0.076389	0.10118	0.040526
f_{20}	<u>2.5144</u>	0.83067	<u>1.0643</u>	0.27984	<u>0.73438</u>	0.13947
f_{21}	0.22752	0.22646	0.12239	0.097003	0.071502	0.066836
f_{22}	0.11556	0.079153	0.42544	0.057724	0.41279	0.14952
a	0.13567	0.19389	0.59559	0.2339	0.50268	0.15578
τ	4.2931	1.2032	2.2016	0.60294	1.1346	0.36601
k_{line}	4.5672	1.7066	2.4403	0.86344	1.2303	0.39812
H	<u>2.5705</u>	0.83395	<u>1.077</u>	0.26968	<u>0.71387</u>	0.13637

Weiterhin wurde für jedes der Merkmale untersucht, wie sehr sich die Vorder- und Hintergrundverteilungen bezüglich der KLD unterscheiden. Dies ist ein entscheidendes Kriterium für die Effizienz der Pfadsuche. In Tabelle 6.3 sind die Ergebnisse zusammen-

gestellt. Für einige Merkmale fällt der Abstand viel zu gering aus. Andere erscheinen geeigneter. Betrachtet man die Bilder zu folgenden Merkmalen: λ_1 auf Seite 126, V auf Seite 127, H auf Seite 128 und f_{20} auf Seite 124, so fällt auf, dass sich die Gefäße in den Merkmalsbildern besonders deutlich erkennen lassen. Die genannten Merkmale weisen eine hohe KLD zwischen Vorder- und Hintergrundverteilung auf (siehe die markierten Einträge in Tabelle 6.3). Diese wird nur von τ und k_{line} übertroffen. Leider wird bei diesen Merkmalen der Hintergrund nur schlecht modelliert. Man erkennt das an den in Tabelle 6.2 markierten großen Werten der KLD zwischen dem handsegmentierten Referenzhintergrundmodell und den automatisch gelernten Modellen. Es ergibt sich zwar eine große KLD zwischen Vorder- und Hintergrundmodell, für die Merkmale τ und k_{line} weicht dieses aber stark vom Gefäßreferenzmodell ab.

Die KLD zwischen den gelernten Vorder- und Hintergrundverteilungsdichten ist nur ein Kriterium für die Auswahl geeigneter Merkmale für die Segmentierung. Die Merkmale müssen noch weiter auf ihre Klassifizierungsleistung untersucht werden. Dazu werden in Tabelle 6.5 die mittleren Fehleraten falsch positiv (fp), falsch negativ (fn), Bayes Error (be) mit den Standardabweichungen für 14 verschiedene Bilder und acht Skalen mit dem für die Segmentierung verwendeten Schwellwert (th) angegeben. Die Werte für die jeweils besten Merkmale sind unterstrichen.

Bayes Error, Falsch-Positiv- und Falsch-Negativ-Rate

Ein Klassifikator ist eine Abbildung von Merkmalsvektoren \mathbf{x} auf Klassen C_0, C_1, \dots, C_K . Die Leistungsfähigkeit eines Klassifikators lässt sich anhand seiner Fehlklassifikationen beurteilen. Dazu werden im Folgenden die Falsch-Positiv- und Falsch-Negativ-Rate und der Bayes Error exemplarisch beschrieben.

Falsch-Positiv- und Falsch-Negativ-Rate lassen sich gut aus einer Verwechslungsmatrix (Tabelle 6.4) ableiten. Dazu werden alle Kombinationen aus Klassifikationsergebnis und bekannter Klassenzugehörigkeit gebildet. Die erste Spalte sind die Treffer (*true positive*) und Fehlalarme (*false positive*). In der zweiten Spalte stehen die übersehenen (*false negative*) und die richtigen Zurückweisungen (*true negative*).

Tabelle 6.4: Die Verwechslungsmatrix eines Klassifikators und falsch positiv und falsch negativ Beispiele.

tatsächliche Klasse	vorausgesagte Klasse	
	ja	nein
ja	TP : true positive	FN : false negative
nein	FP : false positive	TN : true negative

Die Falsch-Positiv-Rate (fp) und die Falsch-Negativ-Rate (fn) ergeben sich zu [DHS01]

$$\text{fp} = \frac{\text{FP}}{\text{TN} + \text{FP}}, \quad \text{fn} = \frac{\text{FN}}{\text{TP} + \text{FN}}.$$

Der Bayes Error (be) eines Klassifikators ist die Wahrscheinlichkeit einer Fehlklassifikation [DHS01].

$$\begin{aligned}
 \text{be} &= P(\mathbf{x} \in H_0, C_1) + P(\mathbf{x} \in H_1, C_0) \\
 &= P(\mathbf{x} \in H_0|C_1)P(C_1) + P(\mathbf{x} \in H_1|C_0)P(C_0) \\
 &= \int_{\mathbf{x} \in H_0} p(\mathbf{x}|C_1)P(C_1) d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{x} \in H_1} p(\mathbf{x}|C_0)P(C_0) d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Tabelle 6.5: Fehlerraten für verschiedene Merkmale bezogen auf die manuelle Referenzsegmentierung über 14 Bilder und acht Skalen gemittelt. fp: falsch positiv Rate, fn: falsch negativ Rate, be: Bayes Error, th: Schwellwert für die Segmentierung

Merkmal	$\overline{\text{fp}}$	$\overline{\text{std}}$	$\overline{\text{fn}}$	$\overline{\text{std}}$	$\overline{\text{be}}$	$\overline{\text{std}}$	$\overline{\text{th}}$	$\overline{\text{std}}$
f_x	5.270	3.222	5.328	1.294	3.513	3.602	0.162	0.138
f_y	4.763	2.609	5.376	1.336	2.713	3.330	0.179	0.117
f_{xx}	4.549	3.419	3.626	0.993	1.600	1.897	0.918	0.459
f_{xy}	4.631	1.747	4.356	1.210	4.594	2.405	0.101	0.135
f_{yy}	5.042	3.869	3.853	1.280	1.093	1.288	0.798	0.328
λ_1	<u>2.794</u>	0.850	<u>2.981</u>	0.945	1.046	0.819	1.637	0.463
λ_2	6.241	2.475	5.237	1.223	1.201	1.829	0.304	0.159
ϕ	5.126	1.459	5.939	1.267	5.431	1.528	0.510	0.469
S	4.436	0.746	4.554	0.961	3.850	1.580	0.185	0.179
R_b	4.852	1.723	5.806	1.170	5.305	1.871	0.240	0.097
V	<u>2.685</u>	0.632	<u>2.960</u>	0.983	5.420	0.317	5.789	4.305
f_{20}	<u>3.058</u>	0.803	3.241	0.939	0.773	0.778	1.573	0.389
f_{21}	5.125	0.919	4.947	1.174	3.619	2.886	0.363	0.336
f_{22}	4.631	1.747	4.356	1.210	4.594	2.405	0.101	0.135
τ	5.540	0.149	5.815	1.178	5.726	0.115	5.040	1.888
a	4.495	0.697	4.764	1.195	4.349	0.671	0.324	0.421
k_{line}	5.094	0.227	4.925	1.023	6.435	0.363	5.075	2.187
H	<u>3.083</u>	0.685	<u>3.212</u>	0.953	0.695	0.581	1.606	0.390

6.3.2 Hintergrundkompensation

Das Ergebnis der statistischen Segmentierungsmethode enthält noch zahlreiche Hintergrundstrukturen wie man sie auch in Abbildung 6.12(a) erkennen kann. Um diese Störungen zu entfernen, wird für die Bildsequenz eine Hintergrundschätzung berechnet. Für jeden Bildpunkt wird der maximale Grauwert über die Zeit bestimmt. Die Annahme ist, dass der hellere Bildhintergrund von den Gefäßen gelegentlich verdeckt wird. Der maximale Grauwert gehört mit hoher Wahrscheinlichkeit zum Hintergrund, denn es reicht ein einziges Bild in dem ein Bildpunkt nicht von Gefäßen verdeckt ist, um den

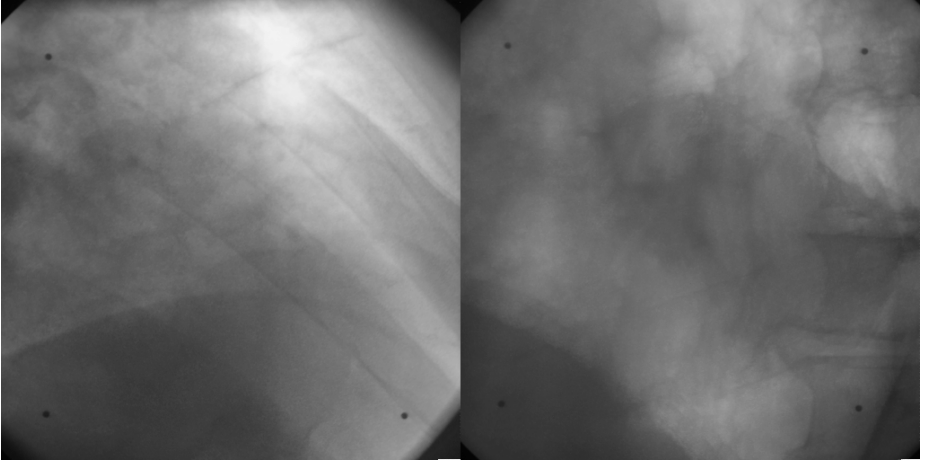


Abbildung 6.11: Aus einer Bildsequenz wird der statische Hintergrund als maximaler Grauwert über eine Sequenz geschätzt.

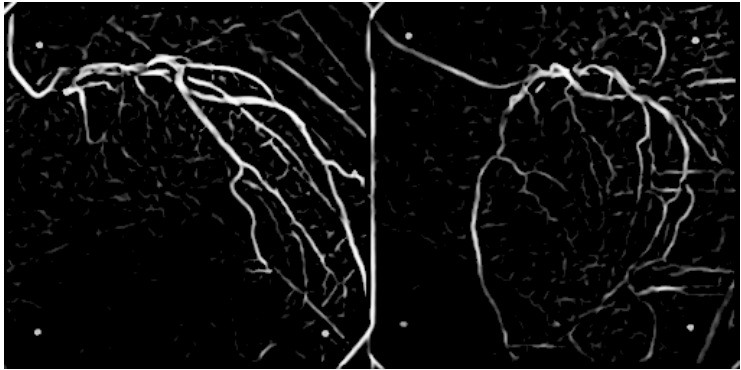
statischen Hintergrund sehen zu können. Es ergibt sich das geschätzte Hintergrundbild I_b in Abbildung 6.11. Für dieses Hintergrundbild werden ebenfalls die Gefäßmerkmale (Abbildung 6.12(b)) berechnet. Aus dem Merkmalsbild mit segmentierten Vorder- und Hintergrundstrukturen werden die geschätzten Hintergrundstrukturen entfernt. Dazu wird das logarithmierte Verhältnis $\mathcal{L} = \log(p_1/p_0)$ aus den Wahrscheinlichkeiten für die Zugehörigkeit eines Punktes zur Vorder- und der Hintergrundklasse angepasst. Es wird normalerweise benutzt, um durch Vergleich mit einem geeigneten Schwellwert die Klassenzugehörigkeit eines Bildpunktes zu bestimmen. Für die Hintergrundkompensation wird stattdessen ein modifiziertes Log-Likelihood Verhältnis \mathcal{L}_b verwendet

$$\mathcal{L} = \log \frac{p_1}{p_0} - \mathcal{L}_b$$

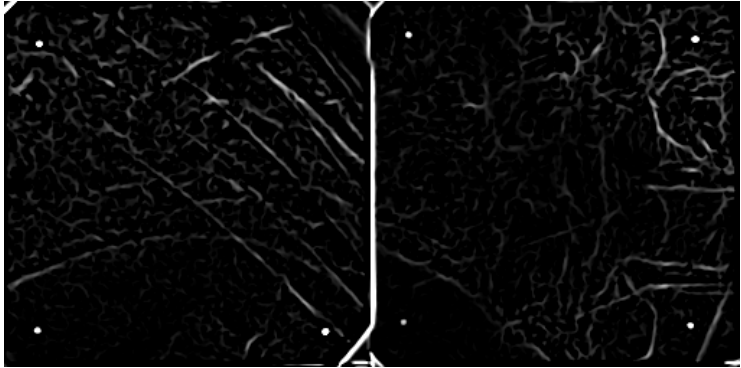
mit

$$\mathcal{L}_b = \log \frac{p_1(I_b(x))}{p_0(I_b(x))},$$

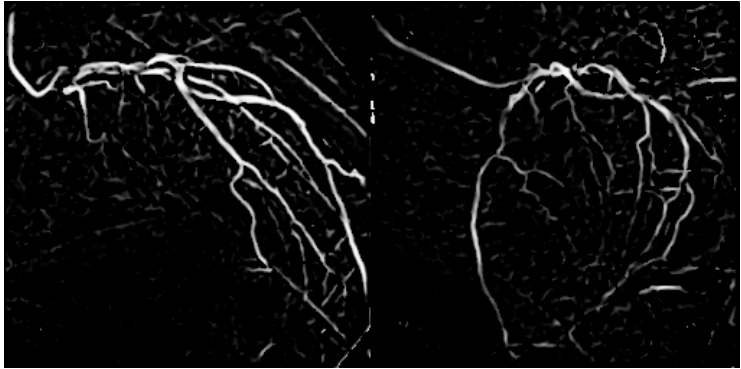
wobei \mathcal{L}_b die Merkmale des geschätzten Bildhintergrundes I_b an der Stelle x berücksichtigt. Als Ergebnis erhält man das in Abbildung 6.12(c) dargestellte Merkmalsbild mit unterdrückten Hintergrundmerkmalen.



(a) Segmentierung mit Hintergrundstrukturen



(b) Merkmale die zum Hintergrund gehören



(c) Segmentierungsergebnis mit unterdrücktem Bildhintergrund

Abbildung 6.12: Unterdrückung des Bildhintergrundes am Beispiel das Frangi-Merkmals.

6.4 Auswertung für das Frangi-Merkmal

Beispielhaft werden für das Linienmerkmal nach Frangi die Fehlerraten und der Bayes-Fehler für 14 verschiedene Bilder und acht Skalen genauer untersucht, um den Erfolg von Hintergrundkompensation und Multiskalenauswertung abschätzen zu können. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 6.6 bis 6.8 zu sehen.

Tabelle 6.6: Fehlerraten in Prozent bezogen auf die handsegmentierten Referenzbilder für das Frangi-Linienmerkmal ohne Hintergrundkompensation

Skale	fp	std	fn	std	be	std	kld	std
1.5	3.2521	0.6487	3.5430	1.0148	5.9195	0.2443	1.1270	0.06547
1.8	2.9561	0.6700	3.2030	1.0424	5.9187	0.1245	1.2631	0.14625
2.3	2.6107	0.5481	2.9179	1.0206	5.6911	0.1577	1.7863	0.32279
2.7	2.5315	0.6151	2.7862	1.0181	5.4838	0.3317	2.2054	0.39592
3.1	2.4623	0.6213	2.7437	0.9780	5.1956	0.3960	2.5120	0.43715
3.5	2.4519	0.6436	2.7328	0.9435	4.9889	0.4424	2.7793	0.45941
4.5	2.5280	0.6776	2.7939	0.8619	4.7429	0.5233	3.0610	0.49722
6.0	2.7300	0.6962	2.9894	0.8195	4.7850	0.3641	3.0219	0.36040

Mit Hintergrundkompensation lassen sich die Fehlerraten und der Bayes-Fehler verkleinern. Siehe dazu die Ergebnisse in Tabelle 6.7.

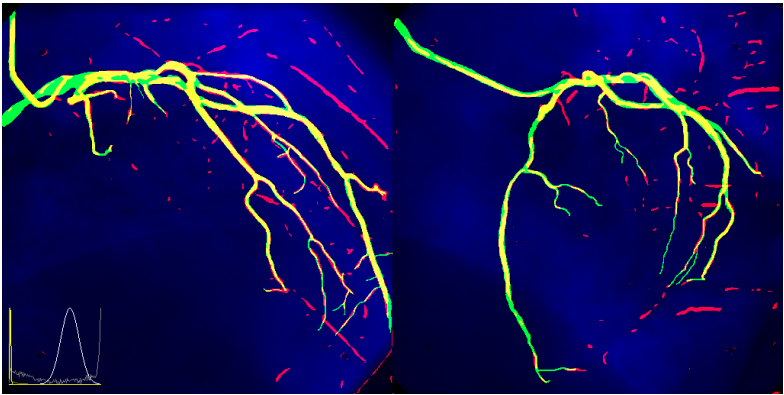
Tabelle 6.7: Fehlerraten des Frangi-Linienmerkmals wie in Tabelle 6.6 aber mit Hintergrundkompensation.

Skale	fp	std	fn	std	be	std	kld	std
1.5	3.1739	0.7835	3.4660	1.1064	4.0018	0.4904	2.9748	0.56768
1.8	2.9167	0.7658	3.0258	1.0275	3.9278	0.6669	3.2497	0.62548
2.3	2.4939	0.7895	2.6414	1.0397	3.7876	0.6698	3.5135	0.58952
2.7	2.2079	0.6745	2.4966	0.9879	3.7454	0.6265	3.5987	0.52837
3.1	2.1345	0.7141	2.4015	0.9722	3.8473	0.6381	3.5585	0.50437
3.5	2.0970	0.7468	2.3454	0.9155	3.9535	0.6971	3.5475	0.50662
4.5	2.0782	0.7435	2.3449	0.8568	4.3646	0.7751	3.3352	0.50582
6.0	2.2069	0.7871	2.4584	0.8369	5.0400	0.6987	2.9620	0.41383

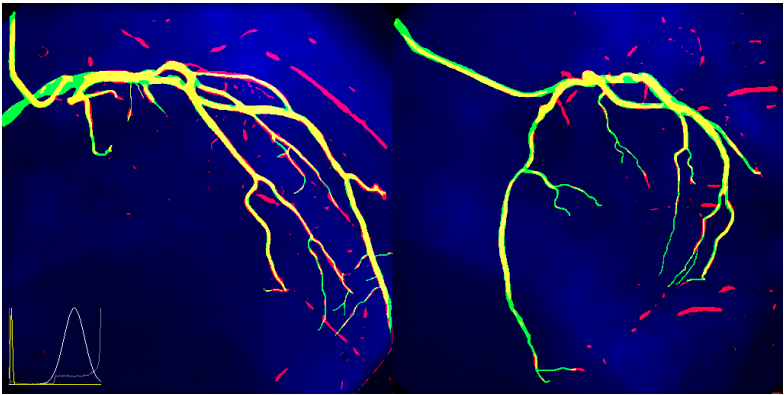
Die Fehlerrate lässt sich nochmals verkleinern, wenn zusätzlich zur Hintergrundkompensation eine Multiskalenverarbeitung erfolgt. Anstatt die Merkmale nur auf einer einzigen Skale zu berechnen, werden die Ergebnisse mehrerer Skalen kombiniert und als Modell wird eine multivariate Normalverteilung gelernt. Die Resultate sind in Tabelle 6.8 zusammengestellt. Entsprechende Bilder finden sich in Abbildung 6.13.

Tabelle 6.8: Fehlerraten des Frangi-Multiskalen-Merkmals mit Schwellwerten (th).

fp	fn	th	Erläuterung
2.4767	1.8425	13.7919	ohne Hintergrundkompensation, nur eine Skale (2.7)
2.026	2.1097	19.00	ohne Hintergrundkompensation, nur eine Skale (2.7)
2.4569	1.8282	11.8364	ohne Hintergrundkompensation, mehrere Skalen (1.7, 3.7)
2.1561	1.6012	12.4355	mit Hintergrundkompensation, nur eine Skale (2.7)
1.8108	1.7475	15.00	mit Hintergrundkompensation, nur eine Skale (2.7)
2.0502	1.4547	10.0483	mit Hintergrundkompensation, mehrere Skalen (3.7, 1.7)
1.6638	1.6264	12.000	mit Hintergrundkompensation, mehrere Skalen (3.7, 1.7)



(a) mit Hintergrundschätzung, eine Skale



(b) mit Hintergrundschätzung, mehrere Skalen

Abbildung 6.13: Frangi-Linienmerkmale, grün: falsch negativ (fn), rot: falsch positiv(fp), gelb: korrekte Segmentierung, blau: korrekte Zurückweisung

6.5 Graphische Benutzerschnittstelle

Zur Unterstützung der manuellen Eingabe korrespondierender Punkte in den Röntgenaufnahmen wurde eine graphische Benutzerschnittstelle (GUI) in MATLAB erstellt. Jeweils zwei zusammengehörende Aufnahmen bilden den statischen Hintergrund der zweidimensionalen Eingabefläche (siehe Abbildung 6.14), welche zusätzliche graphische Elemente enthält. Ganz wesentlich ist die Anzeige der korrespondierenden Epipolarlinie zu einem markierten Punkt. Diese wird gemeinsam mit dem Grauwertprofil entlang der Epipolarlinie gezeichnet und in die entsprechende Ansicht eingeblendet. Der als Funktionsgraph in der unteren Bildhälfte gezeichnete Grauwertverlauf entlang der Epipolarlinie erleichtert die exakte Positionierung von Punkten. So lassen sich anhand der lokalen Extrema des Grauwertprofils und unter Verwendung des Fadenkreuz-Cursors Punkte wesentlich einfacher in der Gefäßmitte platzieren. Die Punktauswahl kann durch Drücken der ALT-Taste auf eine schon im Bild vorhandene Epipolarlinie eingeschränkt werden. Korrespondierende Punktpaare lassen sich damit sehr zuverlässig auswählen.

Zusätzlich zu den dynamischen Einblendungen gibt es noch statische Einblendungen. Sie betreffen die Aufnahmegeometrie, Dateinamen der Bildfolge und die Bildnummer innerhalb der Sequenz. Sie dienen vor allem der Orientierung des Nutzers bei der Verwendung der GUI. Ein Beispiel für die Gestaltung der verwendeten GUI ist in Abbildung 6.14 zu sehen.

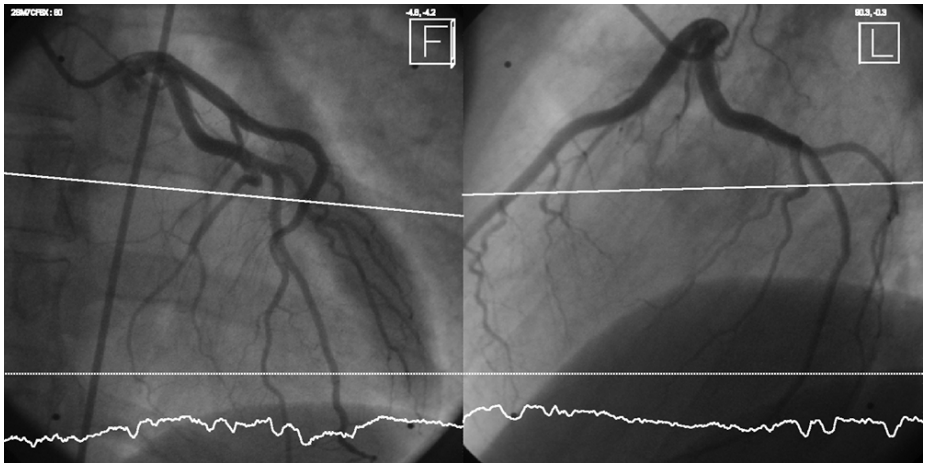


Abbildung 6.14: Beispielansicht der GUI zur Bestimmung von 3D-Punkten mit den bipanen Angiogrammen und eingezeichneten Epipolarlinien sowie den Grauwertprofilen entlang der Epipolarlinien. Zusätzlich eingeblendet sind die 3D-Orientierungshilfen, Aufnahmewinkel und der Dateiname.

6.6 Virtuelles Phantommodell

Für die Bewertung der Rekonstruktionsverfahren sind dreidimensionale Referenzdaten der Koronarien erforderlich. Diese lassen sich aber nicht nachträglich aus den Patientenaufnahmen bestimmen. Es war deshalb notwendig, ein virtuelles Phantommodell der Koronarien zu erstellen. Verschiedene Versuche sind in Abbildung 6.15 zu sehen.

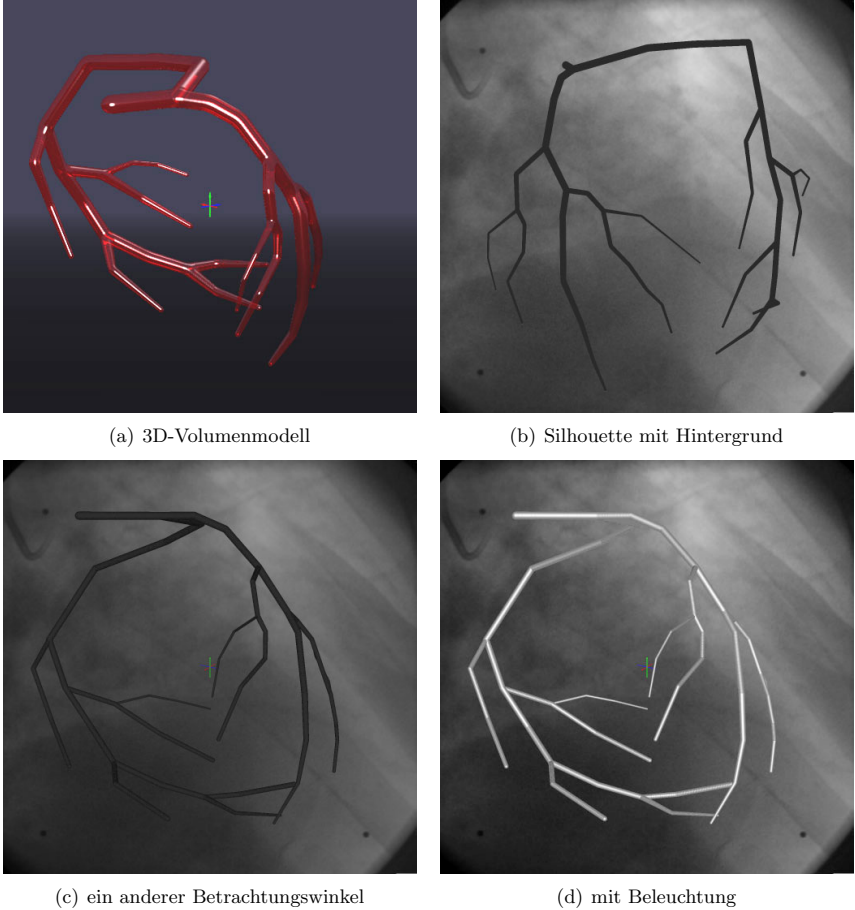


Abbildung 6.15: Beispiele für verschiedene Phantommodelle

Um ein Volumenmodell zu bekommen, wurden, ausgehend von den Koordinaten eines Drahtmodells aus der Diplomarbeit von Bösold und Spornhauer [BS03], Kugeln mit variierendem Durchmesser zu Pfaden aneinandergereiht. Ist der Abstand der Kugeln hinreichend klein, so erscheint die Gefäßberandung als glatte Oberfläche. Diese approximiert

den Rand eines generalisierten Zylinders. Die Form des ursprünglichen Phantoms, mit

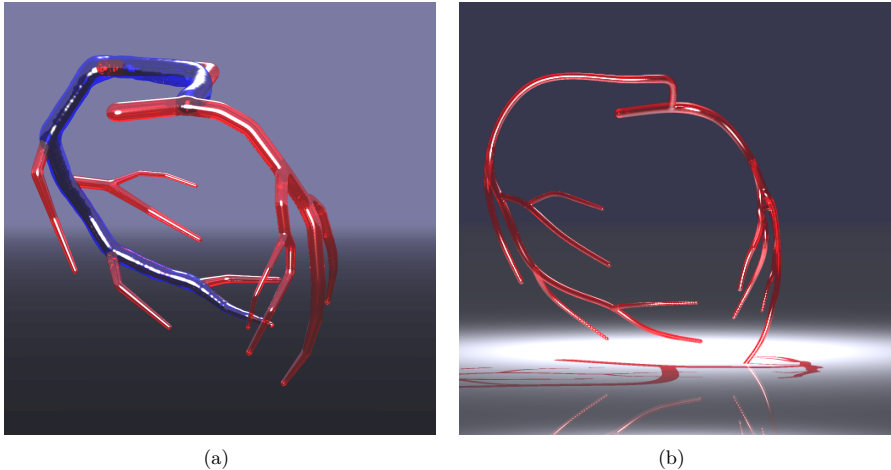


Abbildung 6.16: Beispiel für die Rekonstruktion des virtuellen Phantoms. (a) ursprüngliches Modell in rot mit abrupten Übergängen. Blau ist ein rekonstruierter Gefäßverlauf eingezeichnet. Man erkennt im oberen Bildbereich deutlich die Tendenz der Pfadsuche eine „Ecke zu schneiden“, falls das Gefäß in der Epipolarebene liegt. (b) Verbessertes Phantommodell mit interpoliertem Gefäßverlauf.

den ausgeprägten geradlinigen Abschnitten, den Knicken und abrupten Übergängen wirkt nicht sehr realistisch, außerdem erschweren die Knickstellen die Rekonstruktion. Damit der Fehler zwischen Referenzpfad und Rekonstruktion möglichst klein wird, müsste die Pfadsuche einen Weg bis in die Spitze des Knicks verfolgen. In der Projektion erscheint aber der abrupte Übergang oft unter einem flacheren Winkel und die Pfadsuche wird versuchen, die Ecke zu schneiden. Ein Beispiel dafür lässt sich im oberen Teil von Abbildung 6.16(a) gut erkennen. Um dem Phantommodell ein organischeres Aussehen zu verleihen und die unnatürlich erscheinenden Geraden und Knicke zu beseitigen, wird ein gerundeter Gefäßverlauf interpoliert. Zum Einsatz kommt die Spline-Toolbox von MATLAB. Die Interpolation erfolgt dabei so, dass alle Kontrollpunkte auch im endgültigen Modell enthalten sind. Das Resultat ist in Abbildung 6.16(b) zu sehen.

6.7 Schätzung von Gefäßradius und -mittellinie

Mit Hilfe der Pfadsuche lässt sich der dreidimensionale Gefäßverlauf bestimmen. Der gefundene Pfad nähert das Gefäß aber nur entlang des kubisch-flächenzentrierten Gitters an. Aus Gründen des Rechenaufwandes bei der Suche kann der Abstand der Gitterpunkte nicht beliebig klein gewählt werden. Um zu einem kontinuierlichen Verlauf zu gelangen, wird das im Folgenden beschriebene Gefäßmodell verwendet. Ausgehend von der initialen

Schätzung des Gefäßes durch die 3D-Pfadsuche wird eine Anpassung des Gefäßmodells, bezüglich kontinuierlicher Koordinaten für Mittellinie und Radius, an die beiden Röntgenbilder durchgeführt. Der Radius an einer Stelle entlang des Gefäßes ist dabei durch jene Kugel bestimmt, die sich gerade noch innerhalb des Gefäßes befindet, sodass in beiden Röntgenbildern die Projektion der Kugel innerhalb der projizierten Gefäßränder liegt. Die geordnete Menge aller Kugelmittelpunkte bildet die Gefäßmittellinie. Das Prinzip ist in Abbildung 6.17 dargestellt. Um ein entsprechendes Gefäßmodell für zwei gegebene Rönt-

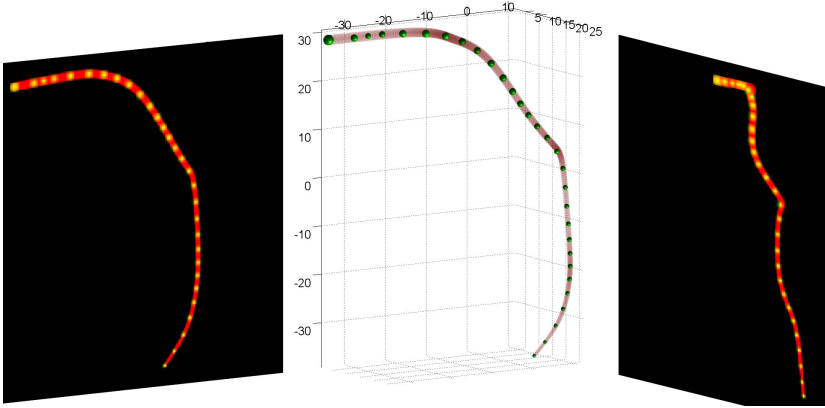


Abbildung 6.17: Beispiel für eine Kette von Kugeln, die optimal an die Projektion eines virtuellen Gefäßes angepasst wurden. Das virtuelle Gefäß ist rot eingezeichnet. Die Kugeln sowie ihre Projektionen sind grün. Durch die additive Überlagerung der Farben erscheint die Schnittmenge aus projiziertem Gefäß und projizierten Kugeln gelb. Je mehr gelbe und je weniger grüne Farbe, umso größer ist die Menge gemeinsamer Punkte und umso besser ist das Ergebnis. Je mehr Kugeln für die Gefäßrekonstruktion verwendet werden, desto stärker nähert sich das Modell einem kontinuierlichen Verlauf an.

genbilder und einen initialen Gefäßverlauf zu bestimmen, wird ein Sampling-Verfahren angewendet. Für jeweils drei aufeinander folgende Pfadpunkte (P_1, P_2, P_3) wird die Ebene bestimmt die P_2 enthält und deren Normalenrichtung parallel zur Strecke $\overline{P_1P_3}$ ist (siehe Abbildung 6.18). Aus der Ebenengleichung werden Mittelwert und Kovarianzmatrix für eine Normalverteilungsfunktion berechnet. Aus den Koordinaten des Durchstoßpunktes der Strecke $\overline{P_1P_3}$ durch die Ebene wird der Mittelwert bestimmt. Aus der Ebenengleichung wird die Kovarianzmatrix berechnet. Es werden zwei weitere Richtungsvektoren a, b , die jeweils senkrecht zueinander und senkrecht zum Normalenvektor \mathbf{n} sind, bestimmt.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} \quad (6.2)$$

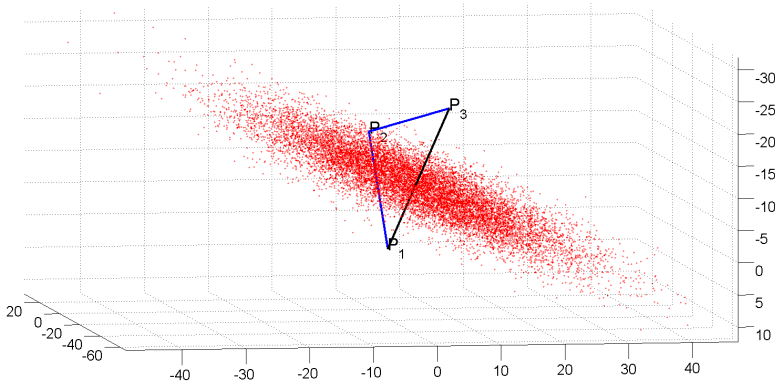


Abbildung 6.18: Darstellung der Situation beim Sampling alternativer Mittelpunkte für den Punkt P_2 . Für drei Punkte P_1, P_2, P_3 entlang eines Gefäßverlaufs, blau dargestellt, werden innerhalb der Ebene die durch P_2 verläuft und senkrecht zur Strecke $\overline{P_1 P_3}$ ist, neue Punkte gesampelt.

Mittels dieser drei orthogonalen Vektoren kann eine symmetrische positiv definite Matrix C konstruiert werden.

$$C = RDR^T, \quad R = \begin{pmatrix} n_x & a_x & b_x \\ n_y & a_y & b_y \\ n_z & a_z & b_z \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Wählt man die Hauptachsen des Ellipsoids zu $d_1 \ll d_2 = d_3$, so erhält man eine flache Scheibe. Für das Sampling stehen oft nur normierte gaußverteilte Zufallszahlen z zur Verfügung. Um Zufallszahlen $x = Lz + \mu$ mit der gewünschten Statistik zu bekommen muss man die gaußverteilten normierten Zufallszahlen z mit der oberen Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung L der Kovarianzmatrix $C = L^T L$ von links multiplizieren und den Mittelwert addieren. Für die Normalverteilungsfunktion werden N (z.B. 1000) Samples berechnet. Für jede der so gesampelten Kugeln wird eine Bewertung durch Rückprojektion der Kugel in die beiden Merkmalsbilder vorgenommen. Die Samples werden entsprechend der Größe ihrer Bewertungen in absteigender Reihenfolge sortiert. Nur die besten ein Prozent (ca. 1-10 Samples) werden als verbesserte Alternativen des mittleren Punktes P_2 weiterverwendet. Der Sampling-Prozess wird für alle Tripel P_1, P_2, P_3 aufeinander folgender Pfadpunkte fortgesetzt. Man erhält eine Sequenz von Alternativen für die Elemente des initialen Pfades, wobei diese sich bezüglich der Bewertung in den Bildern kaum unterscheiden, da es sich um die besten ein Prozent handelt. Um durch die Menge der Alternativen einen optimalen Pfad zu finden wird eine Pfadsuche ausgeführt. Als Abstandsmaß für die Suche wird der euklidische Abstand gewählt. Die Idee dahinter ist, dass der Zielpfad einen möglichst glatten Verlauf, d.h. ohne Knicke und abrupte Sprünge der Gefäßmittellinie haben soll.

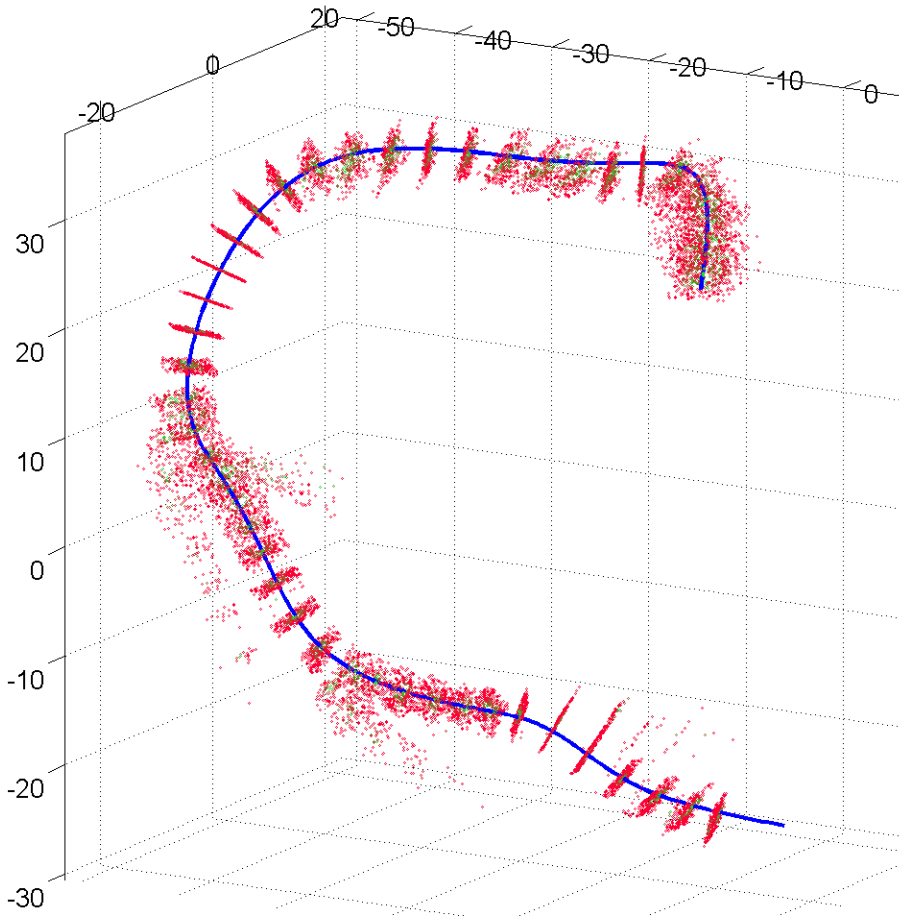


Abbildung 6.19: In einer Umgebung des Pfades (blau dargestellt) werden Mittelpunkte und Radien gesampelt. Daraus lassen sich Kugeln bestimmen, die in die beiden Merkmalsbilder projiziert werden. Je besser die Kugeln zum Merkmalsbild passen, d.h. je besser sie im Inneren des Gefäßes liegen und je größer ihr Radius dabei ist, desto besser fällt die Bewertung aus. Im Bild ist die Bewertung farblich kodiert und variiert von rot, für schlecht, bis grün für gut. Kugeln, die in einer Projektion ganz außerhalb eines Gefäßes liegen, werden verworfen. Deshalb erscheinen die Regionen mit möglichen Kugeln nicht unbedingt kreisförmig, sondern sind u.U. seitlich beschnitten. Man erkennt auch, dass die Regionen unterschiedlich groß sein können, und dass zusätzliche 3D-Strukturen haluziniert werden. Beides liegt an der beschränkten Menge an geometrischer Information, die sich aus nur zwei Ansichten gewinnen lässt.

6.8 Vergleich rekonstruierter Gefäßsegmente mit dem Referenzmodell

Vergleicht man die diskreten Beschreibungen rekonstruierter Gefäßsegmente mit den entsprechenden Referenzsegmenten des Phantoms, so steht man vor dem Problem, dass es keine direkte Entsprechung zwischen beiden Kurven gibt. Nicht nur die Positionen der Kurvenpunkte unterscheiden sich, auch die Anzahl der das Gefäß approximierenden Punkte ist verschieden. In Abbildung 6.20 findet man ein Beispiel. Es sind die x -, y - und z -Koordinaten für Rekonstruktion und Referenzpfad aufgetragen. Die Kurven ähneln sich, sind aber relativ zueinander gestaucht oder gestreckt.

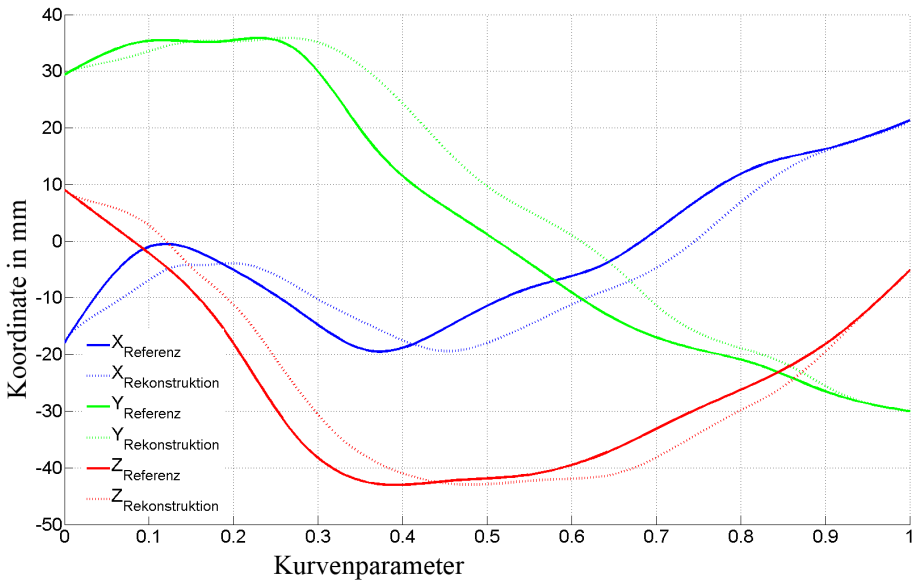


Abbildung 6.20: Kurven vor der dynamischen Achsenverzerrung. In horizontaler Richtung ist der Kurvenparameter von Null bis Eins aufgetragen. In vertikaler Richtung sind die x , y , z -Koordinaten der Kurvenpunkte in mm eingezeichnet.

Das Ziel ist es für alle Kurven in Abbildung 6.20 eine paarweise deckungsgleiche Zuordnung zwischen Ziel- und Referenzkurve im Sinne der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers, zu bekommen. Das Problem soll durch eine Pfadsuche nach minimalen Kosten gelöst werden. Dazu wird eine Methode zur dynamischen Achsenverzerrung verwendet, die auch als *dynamic time warping* (DTW) bekannt ist. Die Kurven für das rekonstruierte Gefäß und das Referenzgefäß werden entlang ihres dreidimensionalen Verlaufs parametrisiert. Trägt man in horizontaler Richtung den Kurvenparameter der Referenzkurve auf und in vertikaler Richtung den Kurvenparameter der Vergleichskurve, so erhält man ein zweidimensionales Diagramm ähnlich dem in Abbildung 6.21. Für jede

Kombination von Punkten des ersten q_i und des zweiten Pfades r_j wird der euklidische Abstand d_{ij} ermittelt, der im Bild als Grauwert dargestellt ist.

$$d_{ij} = \sqrt{(q_{ix} - r_{jx})^2 + (q_{iy} - r_{jy})^2 + (q_{iz} - r_{jz})^2} \quad (6.4)$$

Führt man eine Suche nach einem Pfad mit minimalen akkumulierten Kosten vom gemeinsamen Anfang beider Kurven, in der linken unteren Ecke des Bildes, bis zum gemeinsamen Endpunkt beider Kurven in der rechten oberen Ecke aus, wobei man die Distanzen d_{ij} als Kosten auffasst, so erhält man eine Abbildung aller Punkte der ersten Kurve auf die Punkte der zweiten Kurve, sodass der mittlere quadratische Fehler für den euklidischen Abstand minimal wird. Die Nachbarschaft für den Expansionsschritt der Suche wird durch die drei Nachbarpunkte $(q + 1, r)$, $(q, r + 1)$, $(q + 1, r + 1)$ gebildet, bei denen mindestens einer der beiden Pfadparameter vergrößert wird.

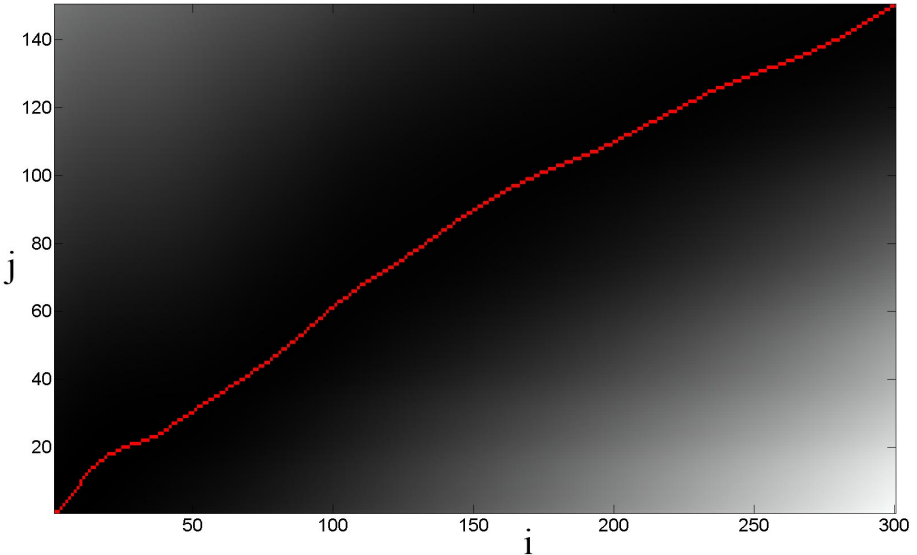


Abbildung 6.21: Kosten für die Suche nach einer optimalen Zuordnung (rote Kurve) zwischen Vergleichs- und Referenzpfad. Horizontal sind die Indizes der Punkte i der Referenzkurve aufgetragen, vertikal die Punktindizes j der Zielkurve. Die Grauwerte sind proportional zum euklidischen Abstand zwischen allen Punkten von Ziel- und Referenzpfad.

Das Ergebnis der Pfadsuche ist in Abbildung 6.22 zu erkennen. Alle drei Kurven sind bis auf einzelne Abweichungen paarweise deckungsgleich.

Der Fehler zwischen den Paaren von Kurvenpunkten ist in Abbildung 6.23 zu sehen.

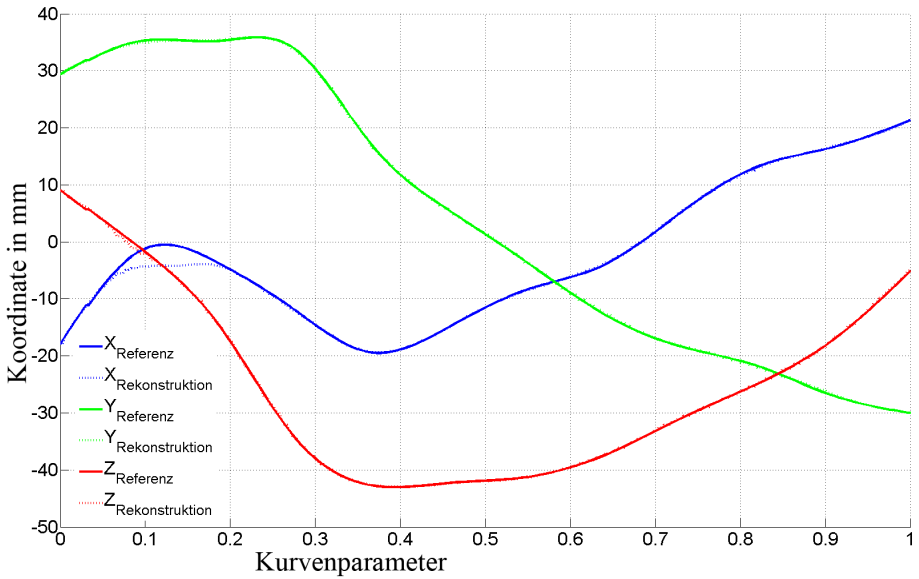


Abbildung 6.22: Kurven nach dem Ausgleich durch die dynamische Achsenverzerrung.

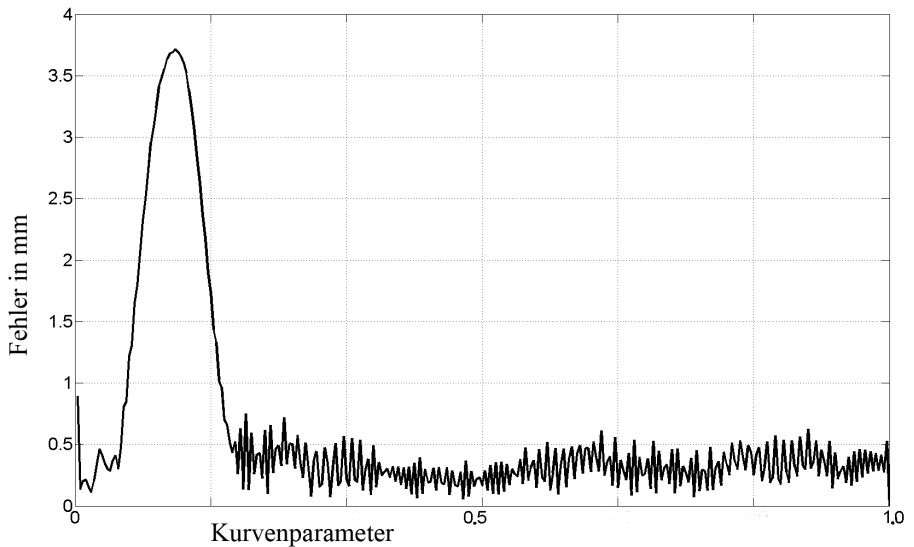


Abbildung 6.23: Fehler in mm zwischen den Kurvenpunkten des Referenzpfades und den Kurvenpunkten des rekonstruierten Pfades.

6.9 Untersuchung von Fehlern in der Aufnahmegeometrie

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurden mit dem virtuellen Phantom und den Methoden zum Vergleich von rekonstruierten Pfaden und Referenzpfaden die Voraussetzungen geschaffen, um den Einfluss von Abweichungen der angezeigten zu den tatsächlichen Aufnahmeparametern zu untersuchen. Im Folgenden wird untersucht, wie sich Fehler in den Winkelangaben der Röntgenanlage auf den rekonstruierten Gefäßverlauf auswirken.

Die Ursachen für Fehler in den Angaben zur Aufnahmegeometrie stammen hauptsächlich aus den äußeren Kameraparametern. Die inneren Kameraparameter können als zeitinvariant angenommen werden und sind durch Herstellerangaben oder nach einer einmaligen Kalibrierung der Röntgenanlage bekannt. Die äußeren Kameraparameter hingegen werden im normalen Betrieb der Röntgenanlage ständig variiert und sind auch nach herstellerseitiger Kalibrierung zeitlichen Abweichungen von den angezeigten Werten unterworfen [Wah94]. Der Einfluss von Winkelfehlern auf das Rekonstruktionsergebnis soll deshalb anhand des virtuellen Phantoms untersucht werden.

6.9.1 Vorgehensweise

Zunächst werden zwei Ansichten des Phantoms für festgelegte Winkleinstellungen erzeugt. Diese bilden die Referenz für die Bewertung. Ausgehend von den Referenzaufnahmen werden mehrere Rekonstruktionen mit jeweils variierenden Abweichungen zu den Referenzwinkeln erstellt. Anschließend werden die Mittellinien der rekonstruierten Gefäße mit denen des virtuellen Phantoms unter Verwendung der Methoden aus Abschnitt 6.8 verglichen. Am Ende erhält man den mittleren Fehler aller Abweichungen von der Gefäßmittellinie als Funktion der Winkelabweichungen. Ein Beispiel ist in Abbildung 6.24(a) zu sehen.

Für die Untersuchungen wurde ein Bereich der Winkelabweichungen von $\pm 2^\circ$ in jeweils 11 Schritten um jede der beiden Achsen festgelegt. Für mehr als 2° war es nicht immer möglich, korrespondierende Punkte im Gefäßinneren zu finden. Das kleine Intervall stellt aber keine Einschränkung dar, da damit der zu erwartende Bereich von mechanisch verursachten Winkelfehlern abgedeckt ist. Es ergeben sich insgesamt 121 Einzelmessungen, bei denen die Gefäßsegmente des Phantoms mit den entsprechenden Segmenten der Rekonstruktion verglichen wurden. Um eine zufällige Abhängigkeit von den gewählten Referenzwinkeln auszuschließen, wurde die gesamte Untersuchung für unterschiedliche Referenzwinkel wiederholt. In Abbildung 6.25 ist die Verteilung des Fehlers für einen Satz von 121 Messungen zu erkennen. Neben den relativ kleinen Abweichungen von der Mittellinie, die aus der Verdrehung der Anlage resultieren, gibt es wenige betragsmäßig große Abweichungen im Bereich bis 9 Millimeter. Diese kommen dadurch zustande, dass bei der automatischen Rekonstruktion die Pfadsuche in seltenen Fällen kurzzeitig zu einem eng benachbarten Gefäß überspringt. Der Mittelwert ist empfindlich für sporadische im Betrag große Störungen. Wie in Abbildung 6.24 gezeigt ist der Median besser geeignet, den Einfluss der Winkelfehler von dem des Rekonstruktionsverfahrens zu trennen.

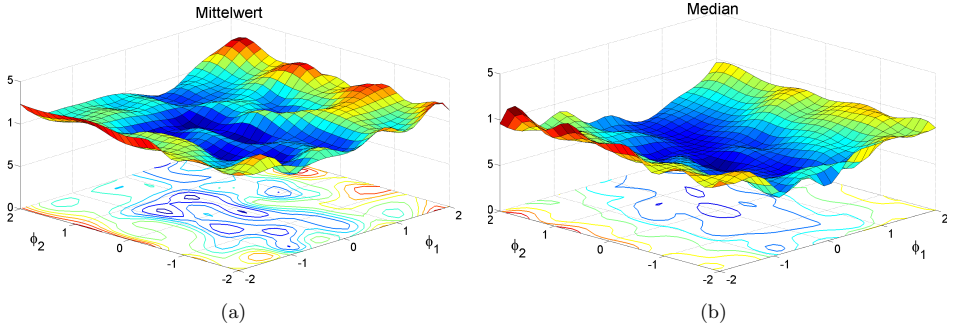


Abbildung 6.24: Vergleich von Mittelwert und Median des Fehlers in Millimeter zwischen den Kurvenpunkten des Referenzpfades und des rekonstruierten Pfades aufgetragen über die Winkelabweichungen ϕ_1 und ϕ_2 in Grad um beide Achsen. Der Mittelwert in (a) wird von einzelnen großen, durch das Rekonstruktionsverfahren hervorgerufenen Abweichungen stärker beeinflusst als der Median in (b), der den Einfluss der winkelabhängigen Abweichungen deutlicher widerspiegelt.

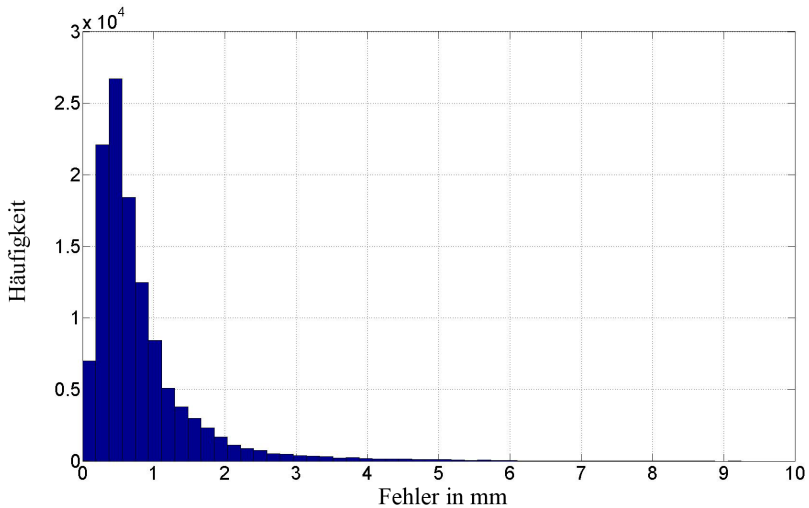


Abbildung 6.25: Verteilung des Rekonstruktionsfehlers in mm für unterschiedliche Winkelfehler ϕ_1 und ϕ_2 .

6.9.2 Ergebnisse

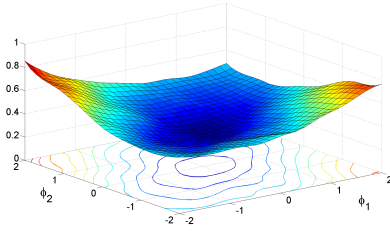
In Abbildung 6.26 sind die Simulationsergebnisse zu sehen. Die Diagramme zeigen den bei der Rekonstruktion entstehenden Fehler zwischen den Referenzpfaden und den mit abweichenden Winkelangaben rekonstruierten Pfaden. Das virtuelle Phantom diene als Referenz. Es besteht aus 11 Gefäßsegmenten unterschiedlicher Länge, die ihrerseits aus über 1400 Kugeln bestehen. Eine einzelne Messung vergleicht über 1400 Referenzpositionen mit den entsprechenden Positionen des rekonstruierten Gefäßbaumes. Mit Winkelabweichungen ϕ_1 und ϕ_2 im Bereich von $\pm 2^\circ$ in beiden Achsen werden 121 solcher Messungen durchgeführt. Für acht Messreihen ist in Abbildung 6.26 der Medianwert des Rekonstruktionsfehlers in Abhängigkeit von den Winkel Fehlern ϕ_1 und ϕ_2 dargestellt.

Wie zu erwarten war, liegt das Minimum des Rekonstruktionsfehlers bei Null Grad Abweichung ($\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$) in den Winkelangaben. Der Rekonstruktionsfehler wird nicht genau Null, da zwei weitere Fehlerkomponenten in das Endergebnis einfließen. Einerseits liefert das Rekonstruktionsverfahren keine perfekten Rekonstruktionen und andererseits trägt auch der Fehler des Vergleichsverfahrens von Referenzpfad und rekonstruiertem Pfad zum Gesamtfehler bei. Trotzdem lassen sich einige wichtige Ergebnisse ableiten.

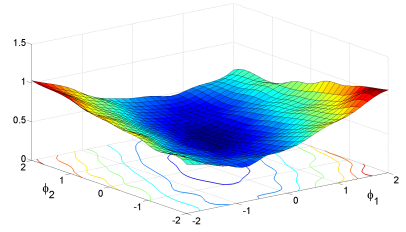
Der Rekonstruktionsfehler ändert sich nur schwach in der Nähe des Minimums. Das hat den Vorteil, dass kleine Abweichungen von den tatsächlichen Angulationswinkeln auch nur geringe Fehler verursachen. Es lässt sich auch kein abruptes Anwachsen des Rekonstruktionsfehlers für große Winkelabweichungen beobachten. Lediglich eine Verdopplung des Fehlers tritt für Abweichungen von maximal 2° ein. Darüber hinaus ist eine Pfadsuche nicht mehr möglich, weil keine korrespondierenden Bereiche innerhalb der Gefäßprojektionen in beiden Bildern für Start- und Endpunkt gefunden werden können.

Interessant ist, dass es in Abhängigkeit von der tatsächlichen Angulation eine Vorzugsrichtung zu geben scheint, in der sich der Rekonstruktionsfehler geringer ändert als senkrecht dazu. Erkennen kann man das an dem „Tal“, das in allen Diagrammen in Abbildung 6.26 zu beobachten ist. Zu erwarten wäre ein gleichförmiges Anwachsen des Fehlers in alle Richtungen weg vom Minimum gewesen.

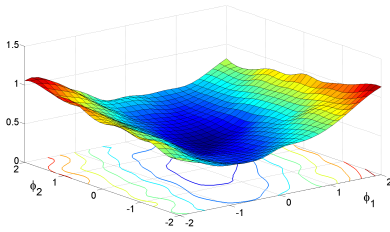
Als Fazit bleibt, dass Fehler in den Winkelangaben vom untersuchten Rekonstruktionsverfahren toleriert werden, erst bei Abweichungen über $\pm 2^\circ$ bricht das Verfahren wegen mangelnder Korrespondenzen zusammen. Es muss betont werden, dass eine präzise Kalibrierung immer dann notwendig wird, wenn Durchmesser und Positionen von Gefäßen exakt bestimmt werden sollen. Die Pfadsuche kann nur den räumlichen Zusammenhang zwischen korrespondierenden zweidimensionalen Bildbereichen und passenden gefäßartigen dreidimensionalen Regionen herstellen. Die Qualität der daraus abgeleiteten metrischen Größen wie Gefäßdurchmesser und Gefäßquerschnitte hängt dabei entscheidend von der Qualität der Kalibrierung ab.



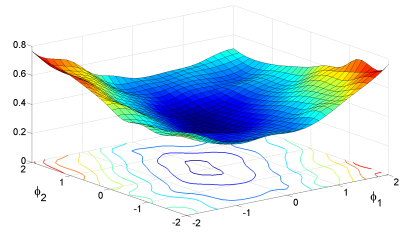
(a) $(+45, -45), (0, 0)$



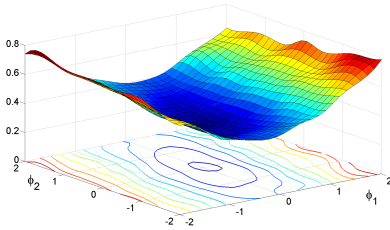
(b) $(-20, 0), (70, 0)$



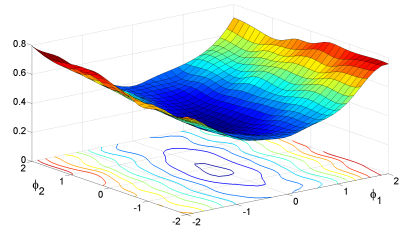
(c) $(0, 0), (90, 0)$



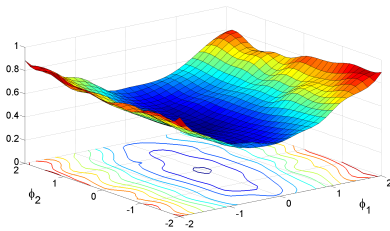
(d) $(+45, 0), (-45, 0)$



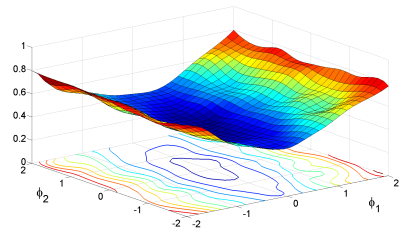
(e) $(-45, -20), (45, 0)$



(f) $(-45, -40), (45, 0)$



(g) $(-45, 40), (+45, -50)$



(h) $(-45, 60), (45, -30)$

Abbildung 6.26: Winkelabhängige Verteilung des Rekonstruktionsfehlers in mm bei Fehlern in den Angaben der Rotationswinkel ϕ_1 und ϕ_2 von bis zu ± 2 Grad für das Frangi-Linienmerkmal.

6.10 Rekonstruktion realer Aufnahmen

Zum Abschluss folgt noch ein Beispiel für Koronarien, die aus Röntgenaufnahmen rekonstruiert wurden. Ausgangspunkt war das Röntgenbildpaar in Abbildung 6.28(a), für das mit dem Frangi-Merkmal die Gefäßwahrscheinlichkeit in den Aufnahmen geschätzt wurde. Mit Hilfe der Pfadsuche wurden anschließend verschiedene Gefäßverläufe bestimmt. In Abbildung 6.27 ist das mit Matlab gerenderte Modell zu sehen. Die Koronarien sind in roter Farbe. Blau ist die Rekonstruktion des Katheters dargestellt.

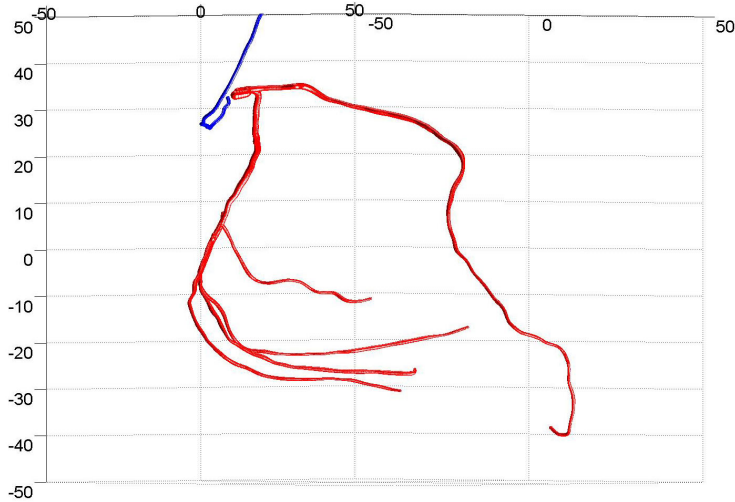


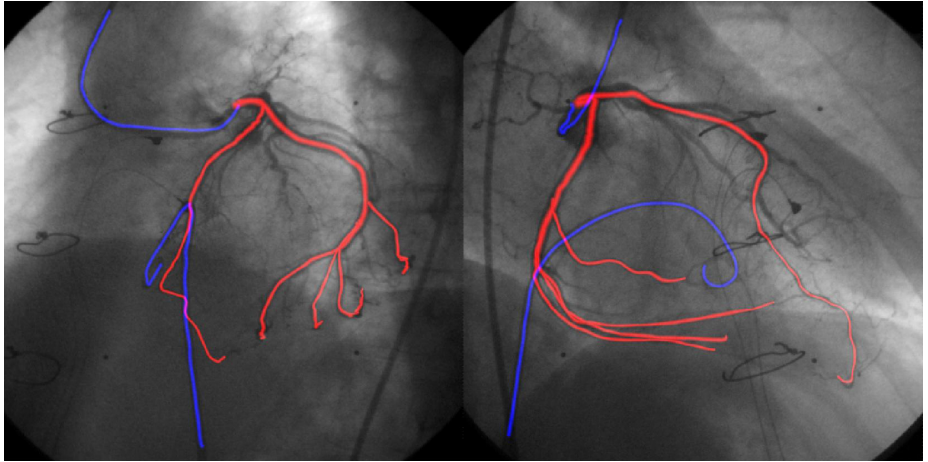
Abbildung 6.27: Matlab-Darstellung der rekonstruierten Koronarien (rot). Zusätzlich ist der rekonstruierte Katheter in blau eingezeichnet. Der Maßstab ist in mm angegeben.

Schwierig für die Rekonstruktion waren die im Bild sichtbaren Elektroden und Klammern. Es wurde eine Bildmaske verwendet, sodass die die Pfadsuche nicht durch Artefakte behindert wurde. Start- und Endpunkte für die Gefäßsegmente sind einmalig mit der in Abschnitt 6.5 beschriebenen GUI manuell ausgewählt worden. Jedes Gefäßsegment wurde automatisch rekonstruiert und in das 3D-Modell eingefügt. Der längste zusammenhängende Pfad ergab sich für den absteigenden Ast der linken Koronararterie. Dieser, wie auch alle anderen Gefäßsegmente, konnte von der Pfadsuche ohne Unterbrechungen gefunden werden. In Abbildung 6.28(b) ist eine Rückprojektion der gefundenen Gefäße in die Originalaufnahmen dargestellt. Rot sind Gefäße und blau die beiden im Bild sichtbaren Katheter. Ohne genaue Kalibrierung war nur die Rekonstruktion der Gefäße mit den größten Durchmessern möglich, da es bei Gefäßen mit geringen Durchmessern bei Abweichungen oft keine korrespondierenden Start- und Endpunkte im Inneren der Gefäßprojektionen mehr gab.

In Abbildung 6.29 ist noch eine aufwendiger gerenderte Version des rekonstruierten



(a)



(b)

Abbildung 6.28: Gefäßrekonstruktion aus realen Aufnahmen (a) Original, (b) mit überlagerter Rückprojektion der rekonstruierten Modelle

Gefäßbaumes zu sehen. Es wurden zwei Ansichten aus unterschiedlichen Blickwinkeln mit einer Beleuchtungssimulation berechnet. Beide Bilder können ohne Hilfsmittel zu einer 3D-Ansicht verschmolzen werden. Dazu betrachtet man mit je einem Auge das linke und das rechte Bild mit entspannter Augenmuskulatur. Mit etwas Übung verschmelzen dann beide Teilbilder zu einer einzigen dreidimensionalen Ansicht.

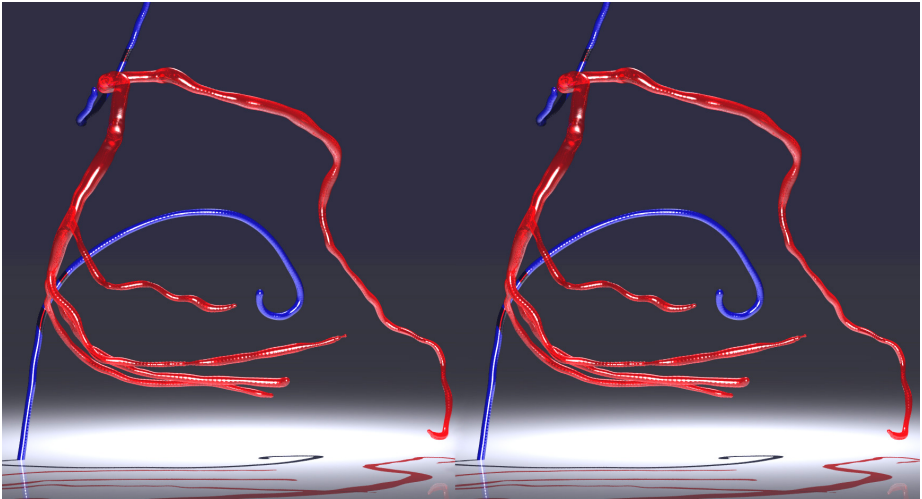


Abbildung 6.29: Mit Material und Beleuchtungssimulation gerenderte stereoskopische Darstellung der rekonstruierten Szene. Beide Bilder können mit der *parallel view* Technik zu einer 3D-Ansicht fusioniert werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschreibt ein konzeptionell neues Vorgehen für die automatische Rekonstruktion des dreidimensionalen Gefäßverlaufs aus biplanen Koronarangiogrammen. Die Herausforderung besteht darin, ohne spezielle Kalibrierung der Röntgenapparatur die räumliche Lage und Orientierung der Koronarien anhand kontrastarmer Röntgenprojektionen aus zwei unterschiedlichen Richtungen automatisch zu schätzen. Erschwert wird das Ganze durch die individuelle Morphologie und die Dynamik des koronaren Gefäßbaumes. Daraus ergeben sich bestimmte Einschränkungen für zulässige Lösungsansätze. So ist die Annahme einer idealisierten Geometrie, wie sie z.B. für bestehende Rekonstruktionsmethoden mittels des Strahlensatzes vorausgesetzt wird, wegen unvermeidlicher Fehler bei der Kalibrierung und durch Unsicherheiten der Gefäßsegmentierung nicht gerechtfertigt.

Die vorliegende Arbeit beschreibt, wie sich diese Beschränkungen durch eine neue Herangehensweise an das Rekonstruktionsproblem überwinden lassen. Die Grundlage bildet ein Zustandsraummodell für die Lage und Orientierung kleiner Gefäßabschnitte. Die Idee ist, Pfade extremaler Länge im Suchraum mit den Koronarien zu identifizieren. Die theoretische Basis dafür liefert die Graphentheorie, im Rahmen derer Konzepte wie extremale Länge und Metrik definiert und gleichzeitig Eigenschaften und Realisierungen konkreter Suchstrategien erklärt werden. Die Vielfalt der Suchstrategien und deren Eigenschaften werden an zahlreichen Beispielen ausführlich beschrieben, mit der Idee, dass für ein konkretes Rekonstruktionsverfahren je nach den zur Verfügung stehenden Ressourcen unterschiedliche Suchstrategien zum Einsatz kommen können. Somit ist die Suchstrategie selbst nur eine Komponente innerhalb der Pfadsuche, und kann durch andere Suchstrategien ersetzt werden, sofern auch eine zulässige Pfadmetrik bereitgestellt wird.

Die Pfadmetrik muss für die biplane Koronarangiographie speziell konstruiert werden, da gleichzeitig zwei unterschiedliche Ansichten des Gefäßbaumes für die Rekonstruktion zum Einsatz kommen. Die mathematische Grundlage findet sich in der Theorie der projektiven Geometrie, deren für die Rekonstruktion relevanten Aspekte beschrieben sind. Wesentlich ist, dass kleine Bildbereiche statt einzelner Bildpunkte für die Rückprojektion benutzt werden. Diese werden in der projektiven Geometrie als Kurven und Flächen zweiter Ordnung, sogenannte Quadriken, zusammengefasst. Benutzt man nicht nur Punkte für die Rekonstruktion, sondern verwendet ausgedehnte Bereiche, so lassen sich die Einschränkungen bestehender Strahlensatz-Rekonstruktionsverfahren vermeiden und es wird möglich, Abstandsmaße zu definieren, die eine Optimierung des gefundenen Gefäßverlaufes im Falle von Abweichungen von der idealen Aufnahmegeometrie erlauben. Die Theorie der Quadriken ermöglicht es, eine robuste Metrik für die biplane Koronarangiographie zu konstruieren.

Für eine vollständige Pfadmetrik muss noch der Zusammenhang mit dem Bildinhalt hergestellt werden. Um in den Bilddaten zusammenhängende Bereiche finden zu können,

sind entsprechende Segmentierungsverfahren die Voraussetzung. So werden Bildsegmentierungsverfahren untersucht, die Strukturen im Bild bis zur zweiten Ableitung beschreiben. Es handelt sich um Gefäßfilter, die auf der Auswertung der Hesse-Matrix beruhen. Durch die Konstruktion eines Skalenraumes werden die digitalen Bildverarbeitungsverfahren an die Größe der zu segmentierenden Objekte optimal angepasst. Im Ergebnis erhält man Informationen über die Stärke einer Bildstruktur, deren Orientierung und Form. Man kann somit kreisförmige von linienförmigen Strukturen mit hell-dunkel bzw. dunkel-hell Kontrasten unterscheiden.

Für die Pfadmetrik wird ein statistisches Gefäßmodell eingesetzt. Man ist somit nicht auf ein bestimmtes Segmentierungsverfahren festgelegt. Nicht die Signalstärke am Gefäßfilterausgang ist das entscheidende Kriterium, vielmehr ist das Verhältnis aus den Wahrscheinlichkeiten für die Zugehörigkeit zu den beiden Klassen Gefäß und Bildhintergrund bei gegebenem Gefäßfilter relevant. In der Arbeit wird das automatische Lernen von Bildvorder- und Hintergrundmodellen direkt aus den Röntgenbildsequenzen für die Gefäßsegmentierung eingeführt. Es kann gezeigt werden, dass sich die in den Bildern sichtbare Bewegung der Koronarien dazu verwenden lässt, entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Merkmale von Punkten des Vorder- und Hintergrundes zu lernen. Mit den automatisch gelernten Verteilungen lassen sich anschließend alle Bildpunkte klassifizieren. Je größer der Abstand der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ist, umso einfacher ist das Suchproblem zu lösen und umso geringer fällt das Risiko aus, einen inkorrekten Pfad als Lösung zu akzeptieren.

Im Zusammenhang mit der Pfadsuche wurde auch die Verwendung des kubisch-flächenzentrierten Gitters als neue Form der Diskretisierung des Suchraumes eingeführt. Der Verzweigungsgrad für die Pfadsuche kann damit im Vergleich zum kubischen Gitter mehr als halbiert werden und die einheitlichen isotropen Gitterabstände vereinfachen die Implementierung einer geeigneten Pfadmetrik. Der große Vorteil der Pfadsuche besteht in der verzögerten Entscheidung ob ein bestimmter Bildpunkt zu einem Gefäß gehört oder nicht. Verglichen mit der Entscheidung über einen isolierten Punkt ist die Integration von Informationen über hunderte von Pfadpunkten robuster gegenüber Störungen.

War die in den Bildern sichtbare Bewegung der Koronarien hilfreich für die Segmentierung, so erschweren die komplexen Bewegungsmuster die Gefäßverfolgung. Mit Hilfe der Pfadsuche konnte in Kapitel drei ein neues Bewegungsschätzungsverfahren für Koronarien vorgestellt werden, das einen vorgegebenen Pfad in beliebige Folgebilder übertragen kann. Eine geeignete Kostenfunktion erlaubt die Auswahl eines optimalen Verschiebungsvektorfeldes und die Übertragung von Informationen in Bereiche mit mangelnder lokaler Struktur entlang eines Pfades und vermeidet somit den negativen Einfluss des Blenden- bzw. Korrespondenzproblems auf die Bewegungsschätzung.

Für die Auswertung mussten die dreidimensionalen Referenzpfade, aus einem speziell für die Arbeit entwickelten virtuellen Phantommodell des koronaren Gefäßbaumes, mit den Rekonstruktionsergebnissen verglichen werden. Problematisch war die Ermittlung der Abstände zwischen dem Referenzpfad und dem gefundenen Lösungspfad mit unterschiedlichen Längen und Parametrisierungen. Die Lösung bestand darin, die dynamische Achsenverzerrung als Suchproblem in einem Zustandsraum zu formulieren und darauf die vorhandenen Pfadsuchalgorithmen anzuwenden. Das Verfahren hat sich als praktisch für

die Simulation der Auswirkungen von Winkelfehlern auf die 3D-Rekonstruktion erwiesen.

Aus den Ergebnissen der vorgestellten Arbeit lässt sich eine breite Palette zukünftiger Entwicklungen ableiten. Zum einen gibt es zahlreiche Anwendungen der biplanen Koronarangiographie, für die eine gute 3D-Rekonstruktion die Voraussetzung ist. Neben der Ermittlung von quantitativen Größen wie Längen, Durchmessern und Querschnitten, lassen sich aus Bewegungsanalysen mechanische Eigenschaften der Koronarien, wie sie z.B. für die Elastographie notwendig sind, gewinnen. Auch Analysen von Volumen, Volumenströmen und Druckverhältnissen und Simulationen des Stofftransportes innerhalb der Koronarien werden möglich. Zum anderen ergibt sich die Frage, wie mit neuen Methoden die Information aus einer gesamten biplanen Bildsequenz einheitlich in ein Suchverfahren integriert werden kann. Momentan überschreitet der enorm große Suchraum die Grenzen der Technik und man bleibt auf eine diskrete Approximation beschränkt. Interessant ist in diesem Zusammenhang die Frage nach einer differentialgeometrischen Beschreibung des biplanen Rekonstruktionsproblems in einem kontinuierlichen Zustandsraum, mit den darin enthaltenen Geodäten als Lösungen. Die Struktur des Zustandsraumes für die biplane Koronarangiographie wurde als vierdimensionale Mannigfaltigkeit in Form eines Kegels im *joint image space* identifiziert. Dessen Parameter ließen sich als *maximum likelihood* Schätzung über eine gesamte Bildsequenz bestimmen. Eine vollständige differentialgeometrische Beschreibung des dreidimensionalen Rekonstruktionsproblems stellt eher ein langfristiges Forschungsziel dar. Mittelfristig besteht eine Anwendung der Ergebnisse dieser Arbeit wohl eher in der Entwicklung einer speziellen grafischen Benutzerschnittstelle zur dreidimensionalen Rekonstruktion, ähnlich den *intelligent scissors* [MB95], die dem Kardiologen größtmögliche Unterstützung bei der interaktiven Segmentierung und 3D-Rekonstruktion, inklusive der automatischen Ermittlung daraus ableitbarer quantitativer Größen, bietet.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Kapitelübersicht	2
1.2	Anatomische Darstellung von Herz und Gefäßen	4
1.3	Schematischer Herzkreislauf	5
1.4	Das Koronargefäßsystem	6
1.5	Typische biplane Röntgenprojektionen	8
1.6	Aufbau der Röntgenanlage	9
1.7	Abstände und Größen des Röntgensystems	10
1.8	Typische Aufnahmewinkel	11
1.9	Unterscheidung der Anlagentypen	12
1.10	Welt- und Anlagenkoordinatensystem	14
2.1	Graphendarstellung des Koronargefäßsystems	18
2.2	Topologische Struktur des linken Gefäßbaumes	19
2.3	Position der linken Koronararterien in den Projektionen	20
2.4	Ausbreitung der Kontrastmittelfront und Epipolargeometrie	22
2.5	Zeitverläufe von Grauwertkurven	23
2.6	Schematische Darstellung der Röntgenabsorption	24
2.7	Horizontale Schnitte und Dichteprofile	25
2.8	Binär-Matrix Rekonstruktion	26
2.9	Flächeninhalt und Rotationswinkel von Ellipsen	27
2.10	Charakteristische Intensitätsprofile	28
2.11	Gemessene Intensitätsprofile	31
2.12	Biplane Snakes	35
2.13	Generalized Gradient Vector Flow Snakes	36
2.14	Modell aus IVUS und Angiographiedaten	38
2.15	Ausrichtung von Ultraschall-Schnittbildern	39
2.16	Fusion von Spect- und Angiographiedaten	40
3.1	Graph mit Kantengewichten und den heuristischen Entfernungen	45
3.2	Effektiver Verzweigungsgrad für diagonale Schritte	49
3.3	Effektiver Verzweigungsgrad für horizontale und vertikale Schritte	49
3.4	Der Suchbaum für die gewichtete Breitensuche	50
3.5	Dreiecksungleichung und monotone Heuristiken	54
3.6	Vergleich von informierten und uninformierten Suchstrategien	56
3.7	Vergleich unterschiedlicher Heuristiken	57
3.8	Bandwidth Search	60
3.9	Suchbaum für die IDA*-Suche	62

3.10	Bewegungsschätzung entlang von Pfaden	63
3.11	Vergleich zwischen lokaler und pfadbasierte Bewegungsschätzung	63
3.12	Aperturproblem	64
3.13	Korrespondenzproblem	65
3.14	Schritte bei der Bewegungsschätzung	66
3.15	Pfadbasierte Bewegungsschätzung der Koronarien	67
4.1	Geradenmodell der projektiven Geometrie	70
4.2	Das Doppelverhältnis	71
4.3	Die Epipolargeometrie	77
4.4	Die Pol-Polare-Beziehungen	83
4.5	Line-Conic	84
4.6	Nullraum der rekonstruierten Quadrik	94
4.7	Die zwölf Nachbarsegmente	95
4.8	Kubisches und kubisch-flächenzentriertes Gitter	96
4.9	Die Faltungskerne für das Gefäßfilter	98
4.10	Zwölf Ellipsoide	99
4.11	Zwei Pfade für LCA und CX	100
4.12	Rekonstruierte Pfade	101
5.1	Trennung von Gefäßen und Hintergrund mittels Schwellwert	103
5.2	Richtungsinformationen	107
5.3	Ergebnisse der Segmentierung mit den Eigenwerten der Hesse-Matrix	108
5.4	Ableitungen der Gaußfunktion	110
5.5	Segmentierungsergebnisse Hesse-Matrix	111
6.1	Die erste Ableitung	122
6.2	Die zweite Ableitung	123
6.3	Harmonic Function Space	124
6.4	Die Lin-Merkmale	125
6.5	Hesse-Merkmale	126
6.6	Frangi-Linienmerkmal	127
6.7	Differentialgeometrische Merkmale	128
6.8	kombinierte Merkmale	129
6.9	Segmentierung und Differenzbilder	131
6.10	Histogramm des Differenzbildes	132
6.11	Hintergrundschätzung	137
6.12	Segmentierung mit unterdrücktem Bildhintergrund	138
6.13	Fehlerraten für das Frangi-Linienmerkmal	140
6.14	Matlab-GUI	141
6.15	Auswahl verschiedener Phantommodelle	142
6.16	Rekonstruktionsbeispiel des Phantoms	143
6.17	Beispiel für eine Kette von Kugeln	144
6.18	Sampling alternativer Mittelpunkte	145

6.19 Pfade als Menge von Kugeln 146

6.20 Kurven vor der dynamischen Achsenverzerrung 147

6.21 DTW Kostensuche 148

6.22 Kurven nach der dynamischen Achsenverzerrung 149

6.23 Fehler zwischen Referenzpfad und rekonstruiertem Pfad 149

6.24 Vergleich von Mittelwert und Median des Rekonstruktionsfehlers 151

6.25 Verteilung des Winkelfehlers 151

6.26 Winkelabhängige Verteilung des Rekonstruktionsfehlers 153

6.27 Matlab Rekonstruktion 154

6.28 Gefäßrekonstruktion realer Aufnahmen 155

6.29 3D-Rekonstruktion als Stereobild 156

Tabellenverzeichnis

1.1	Die linken Koronararterien	7
1.2	Die rechten Koronararterien	7
1.3	Auszug aus dem DICOM-File	13
1.4	Winkelübersicht	15
3.1	Breitensuche	48
3.2	Gewichtete Breitensuche	51
3.3	Die Bestensuche	58
3.4	Die A*-Suche	59
3.5	IDA*-Suche	61
4.1	Normalformen von Quadriken	86
5.1	Katalog der Gefäßeigenschaften	104
5.2	Evidenz	119
6.1	Merkmale	121
6.2	Mittlere KLD zwischen automatisch und handsegmentierten Daten	133
6.3	Mittlere KLD zwischen Vorder- und Hintergrundverteilungsdichte	134
6.4	Verwechslungsmatrix	135
6.5	Fehlerraten gemittelt	136
6.6	Fehlerraten ohne Hintergrundkompensation	139
6.7	Fehlerraten mit Hintergrundkompensation	139
6.8	Fehlerraten mit Multiskalen-Merkmalen	140

Symbolverzeichnis

κ_1, κ_2	Hauptkrümmungen
λ_1	größter Eigenwert der Hessematrix
λ_2	kleinster Eigenwert der Hessematrix
\mathcal{H}	Hessematrix
C	3×3 Matrix eines Kegelschnittes in der Ebene
I_n	$n \times n$ dimensionale Einheitsmatrix
J	Trägheitstensor
Q	4×4 Quadrik-Matrix in homogenen Koordinaten
ϕ	Orientierungswinkel
τ	Shape Angle (S.125)
0_n	n -dimensionaler Nullvektor
c	Kamerazentrum
e	Epipol
a	Amplitude des Lin-Merkmals (S.125)
c	komplexwertiges Hesse-Merkmal (S.129)
$c(n_i, n_j)$	Kosten vom Knoten n_i zum Knoten n_j
$c^*(n_i, n_j)$	optimale Kosten vom Knoten n_i zum Knoten n_j
$f(n)$	geschätzte Pfadkosten vom Start zum Ziel durch n
f_x, f_y	erste Ableitungen in x - und y -Richtung
f_{20}, f_{21}, f_{22}	Koeffizienten im Harmonic Function Space (S.124)
f_{xx}, f_{yy}	zweite Ableitung in x - und y -Richtung
f_{xy}	zweite gemischte Ableitung
$g(n)$	Pfadkosten vom Startknoten bis zum Knoten n

H	mittlere Krümmung
$h(n)$	geschätzte Restkosten bis zum Ziel, $h(n_g) = 0$
$h^*(n)$	optimale Kosten vom Knoten n bis zum Zielknoten
$h^*(n_s)$	optimale Pfadkosten vom Start- zum Zielknoten
K	Gaußsche-Krümmung
k_{line}	Linienartigkeit nach Lin (S.125)
l	komplexwertiges Lin-Merkmal (S.129)
n_g	Zielknoten
n_s	Startknoten
R_b	Verhältnis der Eigenwerte (S.127)
S	Amplitude des Frangi-Gefäßmerkmals (S.127)
V	Frangi-Gefäßmerkmal
x_i	i -tes Pfadsegment
y_i	Beobachtung für das i -te Pfadsegment x_i

Sachregister

Admissible Heuristic, 53
Angulation, 10
Anterior Posterior, 10

Beam Search, 47
Bidirectional Search, 47
Breadth First Search, 46

caudal, 10
CC, 15
Constraint Satisfaction Problem, 41
cranial, 10
curvedness, 112

DAG, 18
Depth First Branch and Bound, 53
Depth First Search, 47
Depth Limited Search, 47
DICOM, 12
Dynamic Time Warping, 147

f-Kosten, 53
Fundamentalmatrix, 79

GGVF, 36
Greedy Search, 52

Hill Climbing, 47

Intelligent Scissors, 159
IS, 10
Isozentrum, 9
Iterative Deepening A*, 53
Iterative Broadening Search, 47
Iterative Deepening Search, 47
IVUS, 37

KLD, 132

LAO, 9
Laserangioplastie, 16
LCA, 6
Least Maximum Cost Search, 47
Lumen, 17

Manhattan Abstand, 43
Markov Random Field, 113
Maximum Multiscale Response Map, 33
Myokard, 7

Optimization Problem, 41
Ostium, 6

proximal, 17
PSF, 17
PTCA, 8

Random Walk Search, 46
RAO, 9
RCA, 6
RCX, 6
RIVA, 6
Rotation, 10

Septum, 5
Shape Index, 112
SID, 10
Snake, 34
SOD, 10
SPECT, 37

Uniform Cost Search, 47

WC, 12
XC, 15

Literaturverzeichnis

- [AA00] ANANDAN, P. ; AVIDAN, S.: Integrating Local Affine into Global Projective Images in the Joint Image Space. In: *ECCV00*, 2000, S. 907–921
- [BS03] BOSOLD, S. ; SPORNHAUER, B.: *3D-Rekonstruktion von Koronararterien mittels biplanarer angiographie*, Fachhochschule Giessen-Friedberg, Diplomarbeit, 2003
- [CC00] CHANGIZI, M.A. ; CHERNIAK, C.: Modeling the large-scale geometry of human coronary arteries. In: *Can. J. Physiol Pharmacol.* 78 (2000), S. 603–611
- [CCD⁺89] COPPINI, G. ; CAGNONI, S. ; DEMI, M. ; L'ABBATE, A. ; MARRACCINI, P. ; VALLI, G.: A knowledge-based method for 3-D coronary imaging. In: *Computers in Cardiology 1989. Proceedings.* (19-22 Sept. 1989), S. 161 – 164
- [CD95] COOK, G. ; DELP, E. J.: Multiresolution Sequential Edge Linking. In: *22nd Allerton Conference on Communication, Control, and Computation*, 1995, S. 782–791
- [Cro00] CROSS, G.: *PhD thesis, Surface Reconstruction from Image Sequences*, Oxford, Diss., 2000
- [CRT⁺00] CANERO, C. ; RADEVA, P. ; TOLEDO, R. ; VILLANUEVA, J.J. ; MAURI, J.: 3D curve reconstruction by biplane snakes. In: *2000. Proceedings. 15th International Conference on Pattern Recognition* Volume 4 (3-7 Sept. 2000), S. 563 – 566
- [CVMR02] CANERO, C. ; VILARINO, F. ; MAURI, J. ; RADEVA, P.: Predictive (un)distortion model and 3-D reconstruction by biplane snakes. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Volume 21, Issue 9 (Sept. 2002), S. 1188 – 1201
- [CY99] COUGHLAN, J. M. ; YUILLE, A. L.: Bayesian A* Tree Search with Expected $O(N)$ Convergence Rates for Road Tracking. In: *In Proceedings EMMCVPR 99.*, Springer, 1999, S. 189–204
- [DGG⁺92] DUMAY, A.C.M. ; GEEST, R.J. van d. ; GERBRANDS, J.J. ; JANSEN, E. ; REIBER, J.H.C.: Consistent inexact graph matching applied to labeling coronary segments in arteriograms. In: *11th IAPR Conf. Pattern Recognition* Volume 3 (1992), S. 439–442

- [DHS01] DUDA, R.O. ; HART, P.E. ; STORK, D.G.: *Pattern classification*. Wiley, New York, 2001. – ISBN 0-471-05669-3
- [Do03] DO, M.N.: Fast Approximation of Kullback-Leibler Distance for Dependence Trees and Hidden Markov Models. In: *IEEE Signal Processing Letters*, Volume 10, Issue 4, Apr 2003, S. 115–118
- [DRG94] DUMAY, A.C.M. ; REIBER, J.H.C. ; GERBRANDS, J.J.: Determination of Optimal Angiographic Viewing Angles: Basic Principles and Evaluation Study. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Vol. 13, No. 1. (1994), S. 13–24
- [ECKD98] EZQUERRA, N. ; CAPELL, S. ; KLEIN, L. ; DUIJVES, P.: Model-Guided Labeling of Coronary Structure. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Volume 17, Issue 3 (June 1998), S. 429–441
- [Fil04] FILSCH, O.: *Segmentierung humaner Herzkranzgefäße in medizinischen Röntgenaufnahmen mittels Mehrgitterdarstellung*, TU-Berlin, Diplomarbeit, 2004
- [FKF+96] FABER, T.L. ; KLEIN, J.L. ; FOLKS, R.D. ; HOFF, J.G. ; PEIFER, J.W. ; MALVEAUX, E.J. ; COOKE, C.D. ; GARCIA, E.V.: Automatic unification of three-dimensional cardiac perfusion with three-dimensional coronary artery anatomy. In: *Computers in Cardiology 1996* (8-11 Sept. 1996), S. 333 – 336
- [FNVV98] FRANGI, A.F. ; NIESSEN, W.J. ; VINCKEN, K.L. ; VIERGEVER, M.A.: Multiscale Vessel Enhancement Filtering. In: *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*. 1998, S. 130–137
- [GCCC91] GARREAU, M. ; COATRIEUX, J.L. ; COLLOREC, R. ; CHARDENON, C.: A knowledge-based approach for 3-D reconstruction and labeling of vascular networks from biplane angiographic projections. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Volume 10, Issue 2 (June 1991), S. 122 – 131
- [GDD+88] GUGGENHEIM, N. ; DORSAZ, P.A. ; DORIOT, P.A. ; DESCOUTS, P. ; RUTISHAUSER, W.: Determination of intra-arterial volumes from biplane coronary angiography. In: *Computers in Cardiology Proceedings* (25-28 Sept. 1988), S. 71 – 74
- [Har74] HARRIS, L.R.: The heuristic search under conditions of error. In: *Artificial Intelligence* Vol. 5, Issue 3 (1974), S. 217–234
- [HZ04] HARTLEY, R.I. ; ZISSERMAN, A.: *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Second. Cambridge University Press, 2004. – ISBN 0521540518
- [Jar90] JAROSLAWSKI, L.P.: *Einführung in die digitale Bildverarbeitung*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1990. – ISBN 3326005415

- [Jay03] JAYNES, E.T.: *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003
- [Jäh05] JÄHNE, B.: *Digitale Bildverarbeitung, 6. überarb. u. erw. Aufl.* Springer, 2005
- [KD92] KOENDERINK, J.J. ; DOORN, A.J. v.: Surface Shape and Curvature Scales. In: *Image and Vision Computing* Bd. 10, 1992, S. 557–565
- [KM92] KAYIKCIOGLU, T. ; MITRA, S.: Unique determination of shape and area of coronary arterial cross-section from biplane angiograms. In: *Fifth Annual IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems* Proceedings (14-17 June 1992), S. 596 – 603
- [KM93] KAYIKCIOGLU, T. ; MITRA, S.: A new method for estimating dimensions and 3-D reconstruction of coronary arterial trees from biplane angiograms. In: *Proceedings of Sixth Annual IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems* (13-16 June 1993), S. 153 – 158
- [Kor85] KORF, R.E.: Depth-first iterative deepening: an optimal admissible tree search. In: *Artificial Intelligence* Vol. 27, Issue 1 (1985), S. 97–109
- [KTS88] KITAMURA, K. ; TOBIS, J.M. ; SKLANSKY, J.: Estimating the 3D skeletons and transverse areas of coronary arteries from biplane angiograms. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Volume 7, Issue 3 (Sept. 1988), S. 173 – 187
- [KWT87] KASS, M. ; WITKIN, A. ; TERZOPOULOS, D.: Snakes - Active Contour Models. In: *International Journal of Computer Vision* 1 (1987), S. 321–331
- [LaV06] LAVALLE, S.M.: *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, 2006
- [Lin94] LINDBERG, T.: *Scale-Space Theory in Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1994
- [Lin03] LIN, Qingfen: *Enhancement, Detection, and Visualization of 3D Volume Data*, Linköping University, Diss., May 2003. – Dissertations No. 824
- [MB95] MORTENSEN, E. ; BARRETT, W.: Intelligent scissors for image composition. In: *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 1995, S. 191–198
- [MN88] MAGNUS, J.R. ; NEUDECKER, H.: *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. New York: John Wiley, 1988. – ISBN 047198633X
- [NKCK05] NAKAJO, H. ; KUMITA, S. ; CHO, K. ; KUMAZAKI, T.: Three-dimensional registration of myocardial perfusion SPECT and CT coronary angiography. In: *Annals of Nuclear Medicine* Vol. 19, No. 3 (2005), S. 207–215

- [OE94] O'BRIEN, J.F. ; EZQUERRA, N.F.: Automated Segmentation of Coronary Vessels in Angiographic Image Sequences Utilizing Temporal, Spatial and Structural Constraints. In: *Spatial and Structural Constraints, in: Proceedings of SPIE Visualization in Biomedical Computing*, 1994, S. 25–37
- [PDMS96] PRAUSE, G.P.M. ; DEJONG, S.C. ; MCKAY, C.R. ; SONKA, M.: Geometricaly correct 3-D reconstruction of coronary wall and plaque: combining biplane angiography and intravascular ultrasound. In: *Computers in Cardiology 1996* (Sept. 1996), S. 325 – 328
- [Pea84] PEARL, J.: *Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*. Addison-Wesley, 1984. – ISBN 0201055945
- [PL88] PAPPAS, T.N. ; LIM, J.S.: A New Method for Estimation of Coronary Artery Dimensions in Angiograms. In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* Vol. 36 (1988), S. 1501–1513
- [PO92] PRAUSE, G.P.M. ; ONNASCH, D.G.W.: Steps of image correction and processing for the binary reconstruction of the ventricles from biplane angiocardiograms. In: *Proceedings Computers in Cardiology 1992* (11-14 Oct. 1992), S. 27 – 30
- [PO94] PRAUSE, G.P.M. ; ONNASCH, D.G.W.: 3-D reconstruction of the ventricular dynamic shape from the density profiles of biplane angiocardiographic image sequences. In: *Computers in Cardiology 1994* (25-28 Sept. 1994), S. 193 – 196
- [PO96] PRAUSE, G.P.M. ; ONNASCH, D.G.W.: Binary reconstruction of the heart chambers from biplane angiographic image sequences. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Volume 15, Issue 4 (Aug. 1996), S. 532 – 546
- [RN03] RUSSELL, S.J. ; NORVIG, P.: *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson Education, 2003. – ISBN 0137903952
- [RTVLV98] RADEVA, P. ; TOLEDO, R. ; VON LAND, C. ; VILLANUEVA, J.: 3D vessel reconstruction from biplane angiograms using snakes. In: *Computers in Cardiology 1998* (13-16 Sept. 1998), S. 773 – 776
- [SB00] SARRY, L. ; BOIRE, J.-Y.: Functional stenosis assessment using biplane coronaryography sequence processing. In: *Proc. 22. Annual EMBS International Conference, Chicago* (July 23-28, 2000), S. 665–668
- [SDCM⁺03] SHECHTER, G. ; DEVERNAY, F. ; COSTE-MANIERE, E. ; QUYYUMI, A. ; McVEIGH, E.R.: Three-dimensional motion tracking of coronary arteries in biplane cineangiograms. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Volume 22, Issue 4 (April 2003), S. 493 – 503

- [SDCMM02] SHECHTER, G. ; DEVERNAY, F. ; COSTE-MANIERE, E. ; McVEIGH, E.R.: Temporal Tracking of 3D coronary arteries in projection angiograms. In: *Proc. SPIE Med. Imaging* (2002)
- [SK52] SEMPLE, J.G. ; KNEEBONE, G.T.: *Algebraic Projective Geometry*. Oxford University Press, 1952
- [SMST90] SAITO, T. ; MISAKI, M. ; SHIRATO, K. ; TAKISHIMA, T.: Three-dimensional quantitative coronary angiography. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* Volume 37, Issue 8 (Aug. 1990), S. 768 – 777
- [SORM04] SHECHTER, G. ; OZTURK, C. ; RESAR, J.R. ; McVEIGH, E.R.: Respiratory Motion of the Heart From Free Breathing Coronary Angiograms. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Vol. 23, No. 8 (Aug. 2004), S. 1046–1056
- [SRO⁺92] SOLZBACH, U. ; ROMBACH, M.R. ; OSER, U. ; SCHUHLEN, H. ; WOLLSCHLAGER, H. ; JUST, H.: Tomographic myocardial perfusion imaging from biplane coronary angiograms using impulse response analysis. In: *Proceedings Computers in Cardiology 1992* (11-14 Oct. 1992), S. 623 – 625
- [SSRB05] SHECHTER, G. ; SHECHTER, B. ; RESAR, J.R. ; BEYAR, R.: Prospective Motion Correction of X-Ray Images for Coronary Interventions. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Volume 24, Issue 4 (April 2005), S. 441 – 450
- [Sun99] SUN, C.: Fast Optical Flow Using Cross Correlation and Shortest-Path Techniques. In: *Digital Image Computing: Techniques and Applications* (1999), S. 143–148
- [SWZJ88] SOLZBACH, U. ; WOLLSCHLAGER, H. ; ZEIHNER, A. ; JUST, H.: Optical distortion due to geomagnetism in quantitative angiography. In: *Proceedings Computers in Cardiology* (25-28 Sept. 1988), S. 355 – 357
- [TBS92] TRAN, L. van ; BAHN, R.C. ; SKLANSKY, J.: Reconstructing the cross sections of coronary arteries from biplane angiograms. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Volume 11, Issue 4 (Dec. 1992), S. 517 – 529
- [Wah94] WAHLE, A.: *Präzise dreidimensionale Rekonstruktion von Gefäßsystemen aus biplanen angiographischen Projektionen und deren klinische Anwendung*, TU-Berlin, Diss., 1994
- [Wei99] WEITZ, B.: *Atlas der Anatomie*. KOMET MA-Service und Verlagsgesellschaft mbH, 1999. – ISBN 3898362345
- [WLB⁺96] WINDYGA, P. ; LOPEZ, L. ; BEVILACQUA, G. ; GARREAU, M. ; COATRIEUX, J.L.: Utility of 2D properties in the reconstruction of coronary arteries from biplane angiographic images. In: *Engineering in Medicine and Biology Society 1996 Bridging Disciplines for Biomedicine. Proceedings of the 18th*

- Annual International Conference of the IEEE* Volume 2 (31 Oct.-3 Nov. 1996), S. 666 – 667
- [WOF93] WAHLE, A. ; OSWALD, O. ; FLECK, E.: A New 3-D Attributed Data Model for Achiving and Interchanging of Coronary Vessel Systems. In: *Computers in Cardiology 1993* Volume 5-8, Sep 1993 (1993), S. 603 – 606
- [WOS04] WAHLE, A. ; OLSZEWSKI, E. ; SONKA, M.: Interactive Virtual Endoskopy in Coronary Arteries Based on Multimodality Fusion. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* Vol. 23, No. 11 (2004), S. 1391–1403
- [WPVB⁺99] WAHLE, A. ; PRAUSE, G.P.M. ; VON BIRGELEN, C. ; ERBEL, R. ; SONKA, M.: Fusion of angiography and intravascular ultrasound in vivo: establishing the absolute 3-D frame orientation. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* Volume 46, Issue 10, (Oct. 1999), S. 1176 – 1180
- [WS92] WANG, R. ; SKLANSKY, J.: Multiresolution method for reconstructing the cross sections of coronary arteries from biplane angiograms. In: *Conference C: Image, Speech and Signal Analysis, Proceedings., 11th IAPR International Conference on Pattern Recognition* Vol.III. (1992), S. 667 – 670
- [ZGO04] ZEILER, S. ; GLOOR, F. ; ORGLMEISTER, R.: Pfadbasierte Methode zur Bewegungsvektorschätzung. In: *Biomedizinische Technik* 49(2) (2004), S. 182–183