

Technische Universität Berlin
Fachbereich Verkehrswesen und angewandte Mechanik
Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik

Kai Grunert
geboren am 4. Juli 1965 in Landshut

**Untersuchungen zur Turbulenzmodellierung
und Berechnung verdrallter Innenströmungen**

Vom Fachbereich
Verkehrswesen und angewandte Mechanik
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Wissenschaftliche Aussprache am 24. Mai 2000
Promotionsausschuß:
Vorsitzender: Prof. Dr.rer.nat. Dr.-Ing. habil. A. Dillmann
Berichter: Prof. Dr.-Ing. F. Thiele
Berichter: Prof. Dr.-Ing. H. Eickhoff

Berlin 2000
D 83

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	4
Tabellenverzeichnis	6
1 Einleitung	8
2 Mathematische Grundlage	14
2.1 Bewegungsgleichungen	14
2.2 Reynolds'sche Mittelung	14
2.3 Wirbelviskositätsmodelle	15
2.4 Schließungsmodell zweiter Ordnung	17
2.4.1 Druck-Scher-Korrelationen	18
2.4.1.1 Lineares Modell	18
2.4.1.2 Quadratisches Modell (SSG)	21
2.4.1.3 Diskussion der Modelle	21
2.5 Grobstruktursimulation	23
3 Aspekte der numerischen Implementierung	25
3.1 Konvektionsschema höherer Ordnung	25
3.2 Vektorisierung des Gleichungslösers	26
3.2.1 Struktur des Rechengitters	27
3.3 Parallelisierung des 3D Verfahrens	28
3.3.1 PC Cluster	29
3.3.2 Netztechnik des Clusters	29
3.3.3 Zeitparallele Kommunikation und Berechnung	30
3.3.4 Kommunikationsbibliothek	33
3.3.5 Effizienz der Parallelisierung	33
3.3.6 Aufbereitung der instationären Ergebnisse	34
3.4 Randbedingungen	35
4 Ergebnisse	38
4.1 Auswahl der Experimente	38
4.1.1 Stationäre rotationssymmetrische Strömungen	39
4.1.1.1 Kein Drall	39
4.1.1.2 Geringer Drall	39
4.1.1.3 Moderater Drall	40
4.1.1.4 Starker Drall	42
4.1.2 Instationäre dreidimensionale Strömung	43

4.1.2.1	Erzeugung der 3D Gitter	43
4.1.2.2	Starker Drall	43
4.2	Einflüsse auf die Berechnung und die Ergebnisqualität	48
4.2.1	Einfluß des Rechengitters und des Konvektionsschemas	48
4.2.2	Einfluß der Einströmrandbedingung	50
4.2.2.1	Geometrie	50
4.2.2.2	Dissipationsrate	53
4.2.3	Einfluß der Abströmbedingung	53
4.3	Vergleich der Modelle mit Meßwerten	55
4.3.1	Kein Drall	55
4.3.2	Geringer Drall	59
4.3.3	Moderater Drall	66
4.3.4	Starker Drall	72
4.3.5	Starker Drall (instationär, 3D)	81
4.3.5.1	Frequenzen	81
4.3.5.2	Asymmetrien und helikale Strukturen	84
4.3.5.3	Mittlere Felder	84
5	Zusammenfassung	95
	Literaturverzeichnis	97

Abbildungsverzeichnis

2.1	Koeffizienten c_1, c_2 des linearen Modells	20
3.1	Rekursion des Gleichungslösers (links), Umgehung (rechts)	28
3.2	Übertragungsrate einer Fast Ethernet Karte mit DEC Chip 21140 (UDP) .	30
3.3	Zeitbedarf von Rechnung und Kommunikation	31
3.4	Rechenzeitbedarf d. Strömungslösers und der Kommunikation	32
3.5	Parallelisierung der POD	36
4.1	Geometrie des Experiments von Ahmed	39
4.2	Geometrie des Experiments von Clausen	40
4.3	Geometrie Johnson und Roback	41
4.4	Originalgeometrie des Experiments von Johnson und Roback	41
4.5	Geometrie des Experiments von Holzäpfel	42
4.6	Geometrie des Experiments von Lehmann	44
4.7	Strömungsverlauf innerhalb der Düse des Experiments von Lehmann (schematisch)	44
4.8	Gesamtansicht des Rechengebiets	45
4.9	2D-Ansicht des ersten (links) und zweiten Drallgenerators (rechts)	46
4.10	3D-Oberflächengitter der Drallerzeuger und der Düse (ohne Brennkammer)	46
4.11	Schnitt Brennkammer-Rechengitter (Experiment von Lehmann)	47
4.12	Schnitt des Rechengitters durch Düse und Kammer (obere Hälfte)	47
4.13	Gittereinfluß auf U ($x=140$ mm) Legende vgl. Tab. 4.1 (Experiment von Holzäpfel)	50
4.14	Ringspalt mit achsialer Zuströmung (Experiment von Holzäpfel)	51
4.15	Ringspalt mit radialer Zuströmung (Experiment von Holzäpfel)	51
4.16	Zuströmung gemäß dem Experiment von Holzäpfel	52
4.17	Vergleich der Einströmrandbed. (Experiment von Holzäpfel)	52
4.18	Achsengeschwindigkeit des Experiments von Clausen	54
4.19	Ahmed: Achsialkomponente	55
4.20	Ahmed: Profile der Achsialgeschwindigkeit U	57
4.21	Ahmed: Profile der Normalspannungskomponente u'^2	58
4.22	Ahmed: Verlauf der Schubspannungskomponente $u'v'$	59
4.23	Ahmed: Profile der Schubspannungskomponente $u'v'$	60
4.24	Clausen: Profile der Achsialgeschwindigkeit U	61
4.25	Clausen: Profile der Umfangsgeschwindigkeit W	63
4.26	Clausen: Profile der Schubspannungskomponente $u'w'$	64
4.27	Clausen: $u'w'$ an an der letzten Meßebene	65
4.28	$u'w'$ -Profile des Experiments von Morse	65

4.29	Johnson und Roback: Rechengitter in der Nähe des Einströmrandes	66
4.30	Johnson und Roback: Profile der Achsialgeschwindigkeit U	67
4.31	Johnson und Roback: Profile der Umfangsgeschwindigkeit W	69
4.32	Johnson und Roback: Profile der Normalspannungskomponente u'	70
4.33	Schubspannungskomponente $u'v'$ 'Johnson und Roback' 25 mm (links) bzw. 203 mm (rechts) stromab der Düse	71
4.34	Experiment von Holzäpfel (S=0.95): Profile der Achsialgeschwindigkeit U	73
4.35	Verlauf des achsialen Volumenstroms (Experiment von Holzäpfel, S=0.95)	75
4.36	Experiment von Holzäpfel (S=0.95): Profile der Umfangsgeschwindigkeit W	76
4.37	Experiment von Holzäpfel (S=0.95): Profile der Schubspannungskomponente $u'v'$	77
4.38	Verlauf der Schubspannung $u'v'$ an der Position x=320 mm.	78
4.39	Profile bei x=360 mm (Experiment von Holzäpfel, S=0.4)	79
4.40	Profile bei x=360 mm (Experiment von Holzäpfel, S=0.95)	80
4.41	Energiedichtespektrum von u' ; x = 19 mm ; y=12.5 mm; z=0 (aus [41]) . .	82
4.42	Energieanteil (links) und Energiedichte (rechts) der Moden	83
4.43	Energiedichtespektrum von drei ausgewählten Moden (Rechnung ohne Feingittermodell)	84
4.44	Stromlinien in der Nähe der Symmetrieachse (Experiment von Lehmann) .	85
4.45	Stromlinie mit Helix in der Nähe der Brennkammerwand (Experiment von Lehmann)	85
4.46	Mittlere Geschwindigkeiten Gasfilmdüse	86
4.47	Mittlere U -Profile (Experiment von Lehmann)	87
4.48	Mittlere V -Profile (Experiment von Lehmann)	88
4.49	Mittlere W -Profile (Experiment von Lehmann)	89
4.50	Mittlere u'^2 -Profile (Experiment von Lehmann)	91
4.51	Mittlere $u'v'$ -Profile (Experiment von Lehmann)	92
4.52	Mittlere $u'v'$ -Profile (Experiment von Lehmann)	93

Tabellenverzeichnis

2.1	Konstanten des $k - \epsilon$ Turbulenzmodells	17
2.2	Konstanten der ϵ -Gleichung bei RSM	18
2.3	Konstanten des IP Modells	21
2.4	Konstanten des SSG Modells	21
4.1	Verwendete Rechengitter (Punktzahl ohne Ringspaltauslass)	49
4.2	Energieanteile der Moden des Experiments von Lehmann	83

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Thiele für die Betreuung der Arbeit bedanken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Eickhoff danke für die freundliche Durchsicht und Begutachtung der Arbeit. Hier ist auch besonders zu erwähnen, daß die Arbeit teilweise vom DLR finanziert wurde.

Herrn Prof. Dr.rer.nat. Dr.-Ing. habil. Dillmann möchte ich für die freundliche Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission danken.

Herzlichen Dank auch an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter des Hermann-Föttinger-Instituts der TU Berlin, ohne deren Hilfe die Arbeit in der vorliegenden Form nicht zustande gekommen wäre.

Weiterhin gilt mein besonderer Dank Thomas Rung, der bei allen Fragen zur Numerik und Turbulenzmodellierung weiterhelfen konnte und mir sein 2D Verfahren zur Verfügung gestellt hat.

Leiping Xue und Holger Lübcke danke ich für ihre Unterstützung bei Fragen zum 3D Verfahren und zur Gittergenerierung.

Bei Stefan Schmidt möchte ich mich herzlich für seine Unterstützung bei der Implementierung des LES-Verfahrens bedanken.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Jörn Beutner; sein 'Muppet' hat das Preprocessing sehr beschleunigt.

Herr Lehmann vom DLR hat mir seine umfangreichen Messungen zur Validierung zur Verfügung gestellt, wofür ich mich herzlich bedanken möchte.

Wolfgang Baumann danke ich für seine kritischen Anmerkungen und die kritische Durchsicht der Arbeit

Die hervorragenden Visualisierungsprogramme von Bob Haines (MIT) haben wesentlich dazu beigetragen, die angefallenen Rohdaten effizient auszuwerten, thanks a lot!

Herzlichen Dank auch an alle Autoren, die im Rahmen des Open Source Projekts dazu beitragen, Software frei zur Verfügung zu stellen.

Zum Schluß möchte ich noch meinen Eltern und meiner Frau Anne für das Vertrauen und die liebevolle Unterstützung in allen Phasen der Arbeit herzlich danken.

1 Einleitung

Bei vielen technischen Strömungen spielt die Wirkung des Dralls, der im Brockhaus als Drehimpuls definiert wird, eine zentrale Rolle. Durch die Drallkomponente des Geschwindigkeitsvektors entstehen Radialkräfte, die z.B. in Zyklonen zum Trennen von Stoffen mit unterschiedlicher Dichte ausgenutzt werden können. Die Radialkräfte können auch genutzt werden, um Diffusoren mit relativ großen Öffnungswinkeln auszulegen. Die Ablösung der Strömung an der Wand tritt im Vergleich zu unverdrallten Strömungen erst bei viel größeren Winkeln auf, ein Diffusor mit Drallströmung baut also bei gleichem Flächenverhältnis wesentlich kürzer als ein Diffusor für unverdrallte Strömungen.

In der Verbrennungstechnik spielen Drallströmungen ebenfalls eine entscheidende Rolle. So wird beispielsweise das Benzin-Luft-Gemisch moderner Kolbenmotoren verdrallt in die Brennräume geführt, um einen möglichst hohen Füllungsgrad zu erreichen. Weiterhin werden die sehr guten Mischungseigenschaften ausgenutzt, Brennstoff-Luft-Gemische auf kleinstem Raum herzustellen. Die guten Mischungseigenschaften lassen sich durch den im Vergleich zu unverdrallten Strömungen wesentlich größeren Geschwindigkeitsgradienten erklären, welcher durch die zusätzliche Geschwindigkeitskomponente in Umfangsrichtung entsteht. Wird die verdrallte Strömung durch eine plötzliche Rohrerweiterung geführt, bildet sich bei ausreichend starkem Drall auf der Symmetrieachse ein lokales Rezirkulationsgebiet. Dieses auch als Wirbelaufplatzen ('vortex breakdown') bezeichnete Phänomen wird in Brennkammern genutzt, um einerseits heiße Abgase zur Flamme zurückzutransportieren (was sich positiv auf den Schadstoffausstoß auswirkt) und um andererseits die Flamme zu stabilisieren.

Aus der Vielzahl der möglichen Anwendungen verdrallter Strömungen sollen in dieser Arbeit vor allem eingeschlossene Strömungen mit achsensymmetrischer Geometrie betrachtet werden, wobei der Schwerpunkt auf Strömungen mit stärkerem Drall und Wirbelaufplatzen liegen soll. Diese Konfigurationen finden sich beispielsweise in Modellbrennkammern, in denen die Phänomene des Wirbelaufplatzens an kalten Strömungen untersucht werden. Die Reynoldszahl liegt hierbei meist in einem Bereich von 10^5 , das heißt die Strömung ist turbulent. Reynoldszahlen dieser Größenordnung finden sich z.B. in Brennkammern von Flugzeugtriebwerken.

Zur Vorhersage der Wirkung des Dralls und der zugehörigen Phänomene bieten sich neben dem Experiment zunehmend numerische Rechenverfahren an. Um die Turbulenzstruktur in dem oben angegebenen Reynoldszahlbereich erfassen zu können, müßten die die Strömung beschreibenden Navier-Stokes-Gleichungen sowohl räumlich als auch zeitlich extrem fein diskretisiert werden. Eine Abschätzung für die räumliche Diskretisierung [73] besagt, daß kleinskalige Strukturen einer turbulenten Gasströmung in einer Größenordnung von 0.1 mm liegen. Ein Rechengitter mit einer solchen Auflösung hätte 1 Million Punkte pro Kubikzentimeter. Eine kleine Modellbrennkammer mit 10 cm Länge und 5 cm Radius müßte also mit knapp 10^9 Punkten diskretisiert werden. Der damit erforder-

liche Speicher- und Rechenzeitbedarf liegt um Größenordnungen über den Möglichkeiten heutiger Höchstleistungsrechner.

Der Turbulenzcharakter von Strömungen wird daher meist nicht über eine direkte numerische Simulation (DNS) erfaßt, sondern über Turbulenzmodelle approximiert. Diese Modelle basieren entweder auf der Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen oder auf einer Grobstruktursimulation.

Das Mittelungsverfahren, welches von Reynolds eingeführt wurde [56], bringt zusätzliche Unbekannte in Form eines Spannungstensors in das Gleichungssystem. Die Turbulenzmodelle schließen das System wieder, indem sie funktionale Zusammenhänge zwischen den neuen Unbekannten und dem gemittelten Geschwindigkeitsfeld bereitstellen. Eine weitere Unterteilung der Turbulenzmodelle erfolgt im Allgemeinen über die Art der Auflösung der Unbekannten.

Die Klasse der Wirbelviskositätsmodelle geht auf einen Ansatz von Boussinesq [9] zurück, der die Komponenten des Spannungstensors über eine turbulente Scheinzähigkeit an die Gradienten des mittleren Geschwindigkeitsfeldes koppelt. Die Schließungsproblematik verschiebt sich hierbei vom Spannungstensor zur Scheinzähigkeit. Sie kann algebraisch über Nullgleichungsmodelle oder mit zusätzlichen Transportgleichungen ermittelt werden. Das bekannteste und in der Industrie sehr häufig eingesetzte Modell dieser Art beruht auf der Lösung von Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie und die Dissipationsrate und wird als $k - \epsilon$ Modell bezeichnet [40].

Ein anderer Ansatz basiert auf der Lösung von Transportgleichungen für die Komponenten des Spannungstensors und definiert die Klasse der Reynoldsspannungsmodelle¹ z.B. [38]. Die Gleichungen für die Reynoldsspannungen enthalten weitere Unbekannte, die durch Modellannahmen aus den bekannten Größen gebildet werden. Außer den Transportgleichungen für die mittleren Geschwindigkeiten müssen bei Verwendung dieser Turbulenzmodelle sechs weitere Transportgleichungen für den Spannungstensor sowie eine Gleichung für die Dissipation (Vernichtung von Turbulenz) gelöst werden, was einen nicht unerheblichen numerischen Aufwand bedeutet.

Die algebraischen Reynoldsspannungsmodelle [20], [54] sind zwischen Zweigleichungsmodellen und Reynoldsspannungsmodellen einzuordnen. Hierbei werden zwei Transportgleichungen zur Bestimmung des turbulenten Zeit- und Längenmaßes gelöst (meist werden k und ϵ verwendet). Die Reynoldsspannungen werden aus diesen und den Geschwindigkeitsfeldern mit algebraischen Beziehungen bestimmt.

Da der numerische Aufwand zur Lösung von zwei Transportgleichungen für die Turbulenz wesentlich geringer ist, finden sich in der Literatur relativ viele Beiträge, die den Einsatz von Wirbelviskositätsmodellen in verdrallten Strömungen beschreiben.

Rhode [59] rechnete mit dem $k - \epsilon$ Modell und mit zwei Varianten eines algebraischen Reynoldsspannungsmodells das Experiment von Vu et al nach [74]. Es handelt sich hierbei um einen eingeschlossenen koaxialen Strahl, wobei die Drallkomponenten der Strahlen je gegensinnig sind (Gegendralldüse). Die Reynoldszahl beträgt ca. $2.5 \cdot 10^5$. Rhode kommt zu dem Schluß, daß aufgrund der großen Scherraten keines der von ihm getesteten Turbulenzmodelle geeignet erscheint, die Strömungsphänomene adäquat vorherzusagen.

Rhode führte auch Messungen an einer idealisierten Brennkammer durch [58] und verglich die Meßwerte mit numerischen Ergebnissen, die er mit einem algebraischen Reynoldsspannungsmodell, sowie mit einem $k - \epsilon$ Modell ermittelte [60]. Die schlechte Wiedergabe

¹'Reynoldsspannungsmodelle' werden auch als 'Schließungsmodell zweiter Ordnung' (second order closure) oder 'Reynoldsspannungs-Schließungsmodell' (reynolds stress closure) bezeichnet.

der Drallkomponente der Strömung führt er auf die schlechte Übereinstimmung der berechneten Profile der Spannungskomponente $u'w'$ mit den Messungen bei allen verwendeten Turbulenzmodellen zurück.

Khodadadi [36] berechnete eine verdrallte Rohrströmung mit dem Standard $k - \epsilon$ Modell, wobei eine von Abujelala [2] empfohlene Veränderung der Konstanten des Modells vorgenommen wurde. Die Modifikation wurde anhand einer verdrallten Strömung, die durch eine plötzliche Erweiterung fließt, optimiert. Khodadadi betont, daß die Modifikation der Konstanten kaum Verbesserungen gegenüber dem Standardmodell bringen. Während bei moderatem Drall Rechnung und Experiment noch gut übereinstimmen, beobachtet er bei hohem Drall deutliche Abweichungen zwischen Experiment und Rechnung.

Hwang [33] implementierte das nichtlineare $k - \epsilon$ Modell von Speziale [68] und führte vergleichende Rechnungen mit diesem und dem Standardmodell durch. Als Basis dienten Experimente von Lilley [46] und Vu [74]. Bei Lilley's Experiment handelt es sich wieder um eine verdrallte turbulente Rohrströmung, welche in eine plötzliche Erweiterung mündet. Vu's Experiment wurde weiter oben bereits beschrieben. Hwang konnte praktisch keine Unterschiede zwischen dem Standardmodell und dem nichtlinearen Modell feststellen. Allerdings wichen beide Modelle bei den mittleren Geschwindigkeiten deutlich von den gemessenen Profilen ab.

Armfield [5] rechnete das Experiment von Clausen [11] mit einem modifizierten $k - \epsilon$ Modell nach. Der Testfall beschreibt eine Diffusorströmung mit einem Öffnungswinkel von 20 Grad (vgl. auch Abschnitt 4.1.1.2). Der Drall wurde so gewählt, daß einerseits keine Ablösung stattfindet und andererseits keine Rezirkulation auf der Achse entsteht. Die Modifikation des Modells bezieht sich auf den diffusiven Einfluß von k in Wandnähe. Ihr Modell unterscheidet zwischen viskoser Unterschicht und vollturbulenten Gebieten. Die Autoren stellten fest, daß ihre Rechnungen sehr gut mit den Messungen übereinstimmen. Diese Aussage kann durch eigene Rechnungen bestätigt werden. Leider finden sich in [5] keine Verläufe von $u'w'$, denn diese zeigen bei den eigenen Rechnungen einen komplett anderen Verlauf als die Messungen. Der Einfluß dieser Größe wurde von Rhode [60] hervorgehoben, der den schlechten Verlauf dieser Komponente für die schlechte Übereinstimmung der Drallkomponente mit den Messungen verantwortlich macht. Die gute Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung der Drallkomponente im Experiment von Clausen läßt sich durch die Art der Drallerzeugung erklären (vgl. auch Abschnitt 4.1.1.2): Der Drallerzeuger in diesem Experiment produziert einen quasi linearen Anstieg der Drallkomponente über den Radius; diese Profilform stellte sich bei den eigenen Validierungen praktisch bei jeder Rechnung mit dem $k - \epsilon$ Modell ein.

In der Literatur finden sich auch viele Beiträge, die sich mit der Modellierung verdrallter Strömungen mit Reynoldsspannungsmodellen befassen.

Für viele Autoren ist hierbei die Stromlinienkrümmung ein Kriterium, das entscheidenden Einfluß auf die Ergebnisqualität hat. Irwin [34] beschreibt in seinem Artikel den Einfluß von Stromlinienkrümmungen auf die Turbulenz. Er zeigt, daß die für die Stromlinienkrümmung zuständigen Anteile in den Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen vergleichsweise klein sind, aber einen großen Einfluß auf die Turbulenz haben und demnach Reynoldsspannungsmodelle potentiell gut geeignet sind, Strömungen mit Stromlinienkrümmungen korrekt vorherzusagen.

Hirai [27] berechnete mit einem Reynoldsspannungsmodell und mit dem Standard $k - \epsilon$ Modell eine Drallströmung, die von einem seiner Co-Autoren vermessen wurde [80]. Das Reynoldsspannungsmodell sagte die Strömung richtig voraus, während das Wirbelvisko-

sitätsmodell deutliche Abweichungen von den gemessenen Profilen berechnete.

Hogg und Leschziner [30] rechneten mit ihrem Verfahren und einem Reynoldsspannungsmodell Strömungen, die von So [67] bzw. von Wilhelmi [78]. vermessen wurden. Auch hier zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmungen mit den Messungen. Vergleichsrechnungen mit dem $k - \epsilon$ Modell ergaben deutlich schlechtere Resultate.

Ein Experiment von So [67] wurde auch von Jones und Pascau [35] nachgerechnet. Sie implementierten ebenfalls ein lineares Reynoldsspannungsmodell und ein $k - \epsilon$ Modell in ihr Verfahren. Zusätzlich benutzen sie einen Korrekturterm in der ϵ Gleichung, der von Bardina et al [6] zur Berücksichtigung der Rotationseffekte vorgeschlagen wurde. Es zeigte sich jedoch, daß dieser Korrekturterm kaum Einfluß auf das Ergebnis der Berechnungen hatte. Der Vergleich Reynoldsspannungsmodell $-k - \epsilon$ lieferte auch hier deutliche Vorteile für das Reynoldsspannungsmodell, wobei die Autoren betonen, daß zwar die mittleren Geschwindigkeiten sehr gut übereinstimmen, die Reynoldsspannungen jedoch bis zu 100 % von den Meßwerten abweichen. Abschließend disqualifizieren sie die Wirbelviskositätsmodelle als ungeeignet, Drallströmungen vorherzusagen und bezeichnen die Reynoldsspannungsmodelle als erste Wahl zur Berechnung solcher Probleme.

Nikjooy et al [50] führten sowohl experimentelle als auch numerische Versuche zu eingeschlossenen Drallströmungen durch. In ihrer Arbeit setzen sie ebenfalls sowohl ein lineares als auch ein algebraisches Reynoldsspannungsmodell ein. Weiterhin untersuchten sie den Einfluß der Randbedingung der Dissipationsrate auf das Strömungsfeld und verglichen verschiedene Konstantensätze für das Reynoldsspannungsmodell. Sie kommen zu dem Schluß, daß die Vorgabe der Dissipationsrate am Einströmrand einen sehr großen Einfluß auf das gesamte Strömungsfeld hat, das heißt das Reynoldsspannungsmodell reagiert sehr empfindlich bezüglich der Vorgabe dieser (meist empirisch bestimmten) Werte. Bei der Wahl der Konstanten für das Druck-Scher-Korrelationsmodell ermittelten sie leichte Vorteile für die von Younis [81] vorgeschlagene Kombination. Bezüglich des algebraischen Modells kommen sie zu dem Schluß, daß diese Modelle ungeeignet zur Berechnung von Drallströmungen sind. Sie empfehlen daher die Verwendung von Reynoldsspannungsmodellen oder die Modifikation von Wirbelviskositätsmodellen, wobei nicht weiter darauf eingegangen wird, wie diese Modifikationen aussehen sollen. Als Kritik am Reynoldsspannungsmodell wird noch die schlechte Modellierung des Druck-Scher-Korrelationsteils bemängelt. Es werden allerdings keine konkreten Verbesserungsvorschläge gemacht.

Wie die anderen Autoren kommen auch Wennerberg und Obi [76] zu dem Schluß, daß das von ihnen verwendete lineare Reynoldsspannungsmodell dem $k - \epsilon$ Modell bei Drallströmungen überlegen ist. Als Testfall verwendeten sie u.a. das Experiment von Roback und Johnson [61] wobei sich auch hier eine gute Übereinstimmung zwischen ihren Rechnungen und den gemessenen Werten zeigte.

Hirsch [28] berechnete verdrallte Strömungen, die von Holzäpfel [31] vermessen wurden, mit Wirbelviskositätsmodellen, einem algebraischen und einem Reynoldsspannungsmodell und kommt zu dem Schluß, daß das Reynoldsspannungsmodell sowohl bei den Mittelwerten als auch bei den Turbulenzgrößen die Meßwerte am besten annähert.

Aus dieser kurzen Literaturübersicht könnte der Eindruck entstehen, daß es ausreichend ist, ein Reynoldsspannungsmodell in ein Verfahren zu implementieren, um Drallströmungen korrekt zu berechnen. Weiterhin erscheint es offensichtlich unsinnig, Drallströmungen mit Wirbelviskositätsmodellen wie dem Standard $k - \epsilon$ Modell berechnen zu wollen. Leider stellt sich die Situation nicht ganz so einfach dar. So existieren eine ganze Anzahl von Reynoldsspannungsmodellen, die formal sehr ähnlich sind aber in verschiedenen Drallkon-

figurationen unterschiedliche Ergebnisse liefern. Diese leicht variierenden Modelle wurden von den Autoren in unterschiedliche Verfahren implementiert, welche meist auf kartesische Rechengitter beschränkt sind. Viele Gruppen haben sich mit diesem Thema beschäftigt und diverse Experimente mit unterschiedlichen Modellvarianten berechnet. Da aber außer dem Turbulenzmodell auch andere Parameter wie Rechengitter, Konvektionsschema etc. variierten, ist eine abschließende Wertung über die Qualität eines bestimmten Modells in verschiedenen Drallkonfigurationen schwierig. Zwar werden in der Literatur sehr häufig verschiedene Turbulenzmodelle für eine bestimmte Konfiguration gerechnet, über mehrere Konfigurationen erstrecken sich diese Berechnungen jedoch meist nicht.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es daher zu ermitteln, ob eines (oder mehrere) der in der Literatur eingesetzten Reynoldsspannungsmodelle in der Lage ist, Innenströmungen mit schwachem sowie mit starkem Drall *ohne* Modifikation am Modell korrekt zu reproduzieren. Die numerischen Experimente sollen sich nur bezüglich des Turbulenzmodells voneinander unterscheiden, alle anderen Parameter sollen jeweils konstant gehalten werden, um Einflüsse der Modelle isolieren zu können. Als Basis für die Validierung soll ein modernes Finite Volumen Verfahren mit körperangepaßtem Koordinatensystem und Konvektionsschemata höherer Ordnung eingesetzt werden. Das Verfahren soll für rotationssymmetrische Strömungen gelten, das heißt die Transportgleichungen für alle drei Geschwindigkeitskomponenten und für die Turbulenzgrößen werden auf einem zweidimensionalen, achsensymmetrischen Rechengitter gelöst. Diese Vereinfachung, die eine erhebliche Einsparung an Rechenzeit und Speicherplatzkapazität bedeutet, setzt natürlich voraus, daß die zur Validierung herangezogenen Experimente achsensymmetrische Lösungen enthalten. Da Strömungen im Allgemeinen dreidimensional sind, können achsensymmetrische Strömungen auch bei achsensymmetrischen Randbedingungen nicht unbedingt erwartet werden. Bei vielen Konfigurationen sind dreidimensionale Effekte sehr klein, sodaß diese Strömungen mit einem achsensymmetrischen Verfahren nachgerechnet werden können. In der Regel sind diese Experimente stationär, was eine zusätzliche Vereinfachung der Modellierung der Strömung ermöglicht.

Insbesondere bei starkem Drall können Strömungen mit achsensymmetrischen Randbedingungen nicht vernachlässigbare dreidimensionale Effekte erzeugen. Solche Strömungen lassen sich nicht mehr mit einem achsensymmetrischen Verfahren berechnen, sondern es muß die komplette Geometrie modelliert werden. Neben der Dreidimensionalität können die Strömungen Instationaritäten enthalten, welche eine instationäre Berechnung erforderlich macht. Dies kann bei Verwendung der Reynolds-gemittelten Gleichungen erhebliche Probleme bereiten. Die Mittelung setzt voraus, daß die Frequenz der modellierten turbulenten Schwankungsbewegungen mehrere Größenordnungen über der Frequenz einer Instationarität liegt [77]. Wenn die dominierenden Frequenzen sehr groß sind, wird diese Voraussetzung verletzt, und die Instationarität kann u.U. nicht mehr dargestellt werden. Sie wird vom Turbulenzmodell wie eine Schwankungsbewegung 'wegmodelliert', das heißt die Strömung wird stationär.

Strömungen, die hohe dominierende Frequenzen enthalten, lassen sich demnach nicht generell mit Reynolds-gemittelten Gleichungen berechnen. Hierbei spielt auch die Wahl des Turbulenzmodells keine Rolle, da bereits der den Modellen zugrundeliegende Ansatz eine nicht mehr zulässige Modellierung darstellt. Eine Berechnung kann folglich nur mit direkter numerischer Simulation bzw. mit der Grobstruktursimulation erfolgen. Die direkte numerische Simulation verbietet sich, wie oben angedeutet, aufgrund des hohen Rechenbedarfs für die meisten ingenieurmäßigen Anwendungen. Daher soll mit Hilfe der

Grobstruktursimulation² untersucht werden ob sich Strömungen, die die oben beschriebenen Effekte enthalten, berechnen lassen.

Die ersten LES-Rechnungen [14] wurden auf sehr groben Gittern durchgeführt, wodurch nur große Strukturen direkt dargestellt werden können. Kleinere Strukturen werden durch ein Feingittermodell modelliert. Der Aufbau der Feingittermodelle (engl.: subgrid scale models; SGS) ist hierbei ein Hauptunterscheidungsmerkmal der Verfahren.

Das am weitesten verbreitete Feingittermodell stammt von Smagorinsky [66]. Bei diesem einfachen Modell wird eine Wirbelviskosität gebildet, welche formal den oben besprochenen Wirbelviskositätsmodellen sehr ähnlich ist. Als Filter dient hierbei normalerweise das Produkt aus Maschenweite des Rechengitters und Scherungstensor, was bedeutet, daß die Wirbelviskosität groß wird, wenn entweder sehr große Gradienten in der Strömung sind, oder wenn die Rechenzellen sehr groß werden. Zur Reduktion der Wirbelviskosität in Wandnähe werden von Driest Dämpfungsterme benutzt, die die Viskositätsbildung in unmittelbarer Wandnähe unterdrücken.

Neben diesem relativ einfachen Feingittermodell haben sich dynamische Modelle etabliert, welche auf Arbeiten von Germano [22] zurückgehen. Im Unterschied zu dem Modell von Smagorinsky [66], das über eine empirische Konstante verfügt, wird diese im dynamischen Modell aus den Strömungsgrößen für jeden Feldpunkt bestimmt. Eine Diskussion des Modells in [18] zeigt neben Vorteilen auch einige Nachteile, die durch die schnelle Veränderung des Modellparameters entstehen können. Insbesondere können negative Wirbelviskositäten entstehen, was erhebliche Stabilitätsprobleme mit sich bringt.

Einen Überblick über den Stand der Technik bietet Grötzbach [25], wobei der Schwerpunkt dieser Arbeit auf Anwendungen in Kernkraftwerken liegt.

Akselvoll und Moin [4] berechneten mit dem dynamischen Modell eine eingeschlossene Strahlströmung ohne Drall. Ihr Vergleich mit experimentellen Daten zeigte eine exzellente Übereinstimmung.

Michalke [48] konnte experimentell ermittelte hohe Frequenzen [41] mit Methoden der Stabilitätstheorie analytisch nachweisen und geht davon aus, daß sie eine nicht-viskose Eigenschaft der Strömung darstellen.

Allen LES-Rechnungen gemeinsam ist der enorm hohe numerische Aufwand. Die meisten Berechnungen dieser Art werden daher heute auf Parallelrechnern durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit wird auch untersucht, inwieweit eine Parallelisierung auf einfachen PC Architekturen für diese Anwendungen sinnvoll durchführbar ist.

²Die 'Grobstruktursimulation' (Large Eddy Simulation, LES) wird häufig auch als 'Feingittermodell' bezeichnet

2 Mathematische Grundlage

2.1 Bewegungsgleichungen

Grundlage zur Beschreibung von Strömungsvorgängen sind die Navier-Stokes-Gleichungen. Den vier Unbekannten (drei Geschwindigkeitskomponenten sowie der Druck) stehen drei Impulsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung gegenüber. Da die Anzahl der Unbekannten der Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen entspricht, ist das Gleichungssystem geschlossen.

Für die Berechnung turbulenter Strömungen müßte das Rechengebiet zur Auflösung der relevanten Strukturen und Zeitskalen zeitlich und räumlich so fein diskretisiert werden, daß heute verfügbare Rechenanlagen den hierfür erforderlichen Arbeitsspeicher nur für vergleichsweise einfache Strömungskonfigurationen bereitstellen können. Für ingenieurmäßige Berechnungen sind diese direkten numerischen Simulationen (DNS) noch nicht realisierbar, da neben dem extrem hohen Speicherbedarf sehr lange Rechenzeiten erforderlich sind. Eine Abschätzung des Ressourcenbedarfs einer turbulenten Gasströmung [73] zeigt, daß für eine direkte numerische Simulation Rechner erforderlich sind, die ein vielfaches heutiger Superrechner leisten.

Außer der direkten numerischen Simulation gibt es zwei weitere Verfahren, obige Problematik zu umgehen: die Grobstruktursimulation und Mittelungsverfahren. Diese werden nachfolgend kurz vorgestellt.

2.2 Reynolds'sche Mittelung

Das Verfahren der Mittelung geht auf Osborne Reynolds [56] zurück. Reynolds zerlegte eine Strömungsgröße Φ in einen Mittelwert ($\bar{\Phi}$) und eine Schwankungsgröße (Φ'). Der Mittelung liegt der Gedanke zugrunde (vgl. z.B. [73]), daß der gemittelte Wert über die Schwankungsgröße Null ist, d.h. $\bar{\Phi}' = 0$. Um zu einer Definition über die gemittelten Werte zu kommen, bedient man sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nach der turbulente Strömungen als stochastische Prozesse mit der Zufallsvariablen aufzufassen sind. Durch die Mittelung gelangen zusätzliche Unbekannte in das Gleichungssystem:

Kontinuität:

$$\frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.1)$$

Impuls:

$$\frac{D\rho \bar{U}_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \right] - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Das Gleichungssystem (2.1,2.2) besteht nach wie vor aus vier Differentialgleichungen. Diesen Gleichungen stehen neben den Unbekannten für die mittleren Geschwindigkei-

ten und mittleren Druck zusätzliche Unbekannte in Form des Spannungstensors $\overline{u'_i u'_j}$ gegenüber. Es handelt sich hier um einen symmetrischen Tensor, demnach sind durch die Mittelung der Größen sechs zusätzliche Unbekannte in das Gleichungssystem gelangt. Die Bereitstellung funktionaler Zusammenhänge zwischen den neuen Unbekannten und den gemittelten Strömungsgrößen ist Aufgabe der Turbulenzmodellierung und wird als *Schließungsproblem bei der Berechnung turbulenter Strömungen* bezeichnet. Die Schließung des Gleichungssystems (2.1),(2.2) kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen, entweder über die Wirbelviskositätshypothese oder über Transportgleichungen für den Spannungstensor. Die beiden Verfahren werden in den folgenden Abschnitten kurz vorgestellt.

Unabhängig von der Art der Schließung beinhaltet das Mittelungsverfahren eine Modellierung der Strömung. Für die Berechnung von stationären Strömungen sind die gemittelten Gleichungen sehr gut geeignet, da die gemittelten Größen unmittelbar erzeugt werden. Prinzipiell lassen sich mit den gemittelten Gleichungen auch instationäre Strömungen berechnen, wobei die Frequenz der Instationarität um wenigstens ein bis zwei Größenordnungen unter der Frequenz der Geschwindigkeitsfluktuation liegen muß [77]. Liegen die beiden Frequenzen zu nahe beieinander, wird die Instationarität wie eine Fluktuation behandelt, das heißt die Strömung wird im Mittel stationär. Auf diesen Umstand wird in Abschnitt 4.3.5 eingegangen.

2.3 Wirbelviskositätsmodelle

Ein sehr populärer Weg, das Gleichungssystem (2.1),(2.2) zu schließen, geht auf Boussinesq [9] zurück. Boussinesq gab in Anlehnung an den Impulsaustausch in laminaren Strömungen eine Gleichung für den Spannungstensor an, indem er ihn proportional zur Scherung in der Hauptströmung setzt:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (2.3)$$

mit

$$\bar{S}_{ij} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}. \quad (2.4)$$

Gl.(2.3) definiert die große Klasse der Wirbelviskositätsmodelle. Bei ν_t handelt es sich um die *Wirbelviskosität* (eddy viscosity). Im Gegensatz zur laminaren Viskosität ν_l ist ν_t keine Stoff- sondern eine Feldgröße.

Gl. (2.3) stellt eine weitreichende Modellierung der Turbulenz dar, da der turbulente Impulstransport an den Gradienten der Hauptströmung gekoppelt ist. Bei Strömungen mit einer ausgeprägten Hauptströmungsrichtung läßt sich diese Annahme durch Experimente rechtfertigen, da bei dieser Klasse von Strömungen (z.B. ebene Kanalströmung) eine turbulente Schubspannung dominant ist, während die Normalspannungen den Impulsaustausch nicht oder in vernachlässigbarem Maß beeinflussen. Ganz anders verhält es sich bei Strömungen mit Stromlinienkrümmung wie z.B. Drallströmungen. Hier sind mehrere Komponenten des Spannungstensors von Bedeutung, eine Proportionalität zwischen Spannungstensor und dem Schertensor der mittleren Geschwindigkeiten ist nicht mehr gegeben. Davon abgesehen kann es in solchen Strömungen Bereiche geben, bei denen der turbulente Impulstransport gegen den Gradienten der Hauptströmung gerichtet

ist, was nach Gl. (2.3) zu einer negativen Wirbelviskosität führen würde. Da die Wirbelviskositätsmodelle in der Industrie nach wie vor eine bedeutende Rolle spielen, werden sie trotz obiger Defizite kurz vorgestellt.

Die Schließungsproblematik hat sich durch den Ansatz von Boussinesq von dem Spannungstensor zur Wirbelviskosität verschoben. Eine Dimensionsanalyse von Gl. (2.3) zeigt, daß sich die turbulente Scheinzähigkeit als Produkt aus einer charakteristischen Geschwindigkeit u_t und aus einer charakteristischen Länge l_t darstellen läßt:

$$\nu_t \propto u_t l_t. \quad (2.5)$$

Üblicherweise erfolgt eine Klassifizierung der Wirbelviskositätsmodelle über die Anzahl der Transportgleichungen, die für die Bestimmung von ν_t verwendet werden. Bei den Nullgleichungsmodellen wird ν_t allein über algebraische Beziehungen und empirische Annahmen bestimmt. Halbgleichungsmodelle lösen eine gewöhnliche Differentialgleichung, Eingleichungsmodelle eine partielle Differentialgleichung. Da diese Modelle sehr stark auf empirische Eingabewerte angewiesen sind, eignen sie sich nicht für die hier interessierenden komplexen Drallströmungen.

Zur Berechnung der Wirbelviskosität nach Gl. (2.5) werden sowohl eine charakteristische Geschwindigkeit als auch ein charakteristisches Längenmaß verwendet. Da diese beiden Größen von stromauf liegenden Ereignissen abhängen, liegt es nahe, für beide Unbekannte Transportgleichungen aufzustellen und zu lösen. Die (meist empirische) Bestimmung eines turbulenten Längenmaßes, wie es für Null-, Ein- und Halbgleichungsmodelle erforderlich ist, entfällt, die empirische Information fließt allerdings in die Modellierung der Terme der Transportgleichungen ein. Das Ziel der Mehrgleichungsturbulenzmodelle ist es, ein vom jeweiligen Strömungszustand bzw. Testfall *unabhängiges* Modell bereitzustellen, mit dem eine große Klasse von Strömungen ohne Modifikationen am Modell berechnet werden kann. Dies ist für viele Strömungen bereits gelungen, von einem *allgemein gültigen* Modell kann jedoch keine Rede sein. Dies liegt unter anderem in der Wirbelviskositätshypothese begründet, die z.B. anisotrope Normalspannungszustände nicht vorsieht.

In dieser Arbeit wird das weit verbreitete $k - \epsilon$ Modell von Launder und Spalding verwendet [40]. Die entsprechenden Gleichungen lauten unter der Annahme einer stationären Strömung:

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.6)$$

$$P_k = -\overline{\rho u'_i u'_j} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial(\rho U_i k)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho \nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) = P_K - \rho \epsilon \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial(\rho U_i \epsilon)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho \nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) = \frac{\epsilon}{k} (c_{\epsilon 1} P_K - c_{\epsilon 2} \rho \epsilon) \quad (2.9)$$

Die in den Gleichungen (2.6)-(2.9) enthaltenen Konstanten sind in Tabelle 2.1 für das Standard $k - \epsilon$ Modell angegeben.

Zweigleichungsmodelle sind heute in vielen Programmpaketen (KIVA, Fire, StarCD, TAU etc.) eingebaut. Für eine große Klasse von Strömungen sind mit Zweigleichungsmodellen sehr gute Übereinstimmungen mit Messungen erzielt worden. Auf die Problematik

c_μ	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	0.8

Tabelle 2.1: Konstanten des $k - \epsilon$ Turbulenzmodells

der Berechnung verdrallter Strömungen mit einfachen Zweigleichungsmodellen wie dem $k - \epsilon$ Modell wurde bereits in Abschnitt 1 eingegangen. Ein Hauptdefizit der Wirbelviskositätsmodelle ist die oben erwähnte Kopplung der Spannungen an die Geschwindigkeitsgradienten. Die im nächsten Abschnitt vorgestellten Reynoldsspannungsmodelle weisen dieses Defizit nicht auf.

2.4 Schließungsmodell zweiter Ordnung

Eine andere Strategie, das Gleichungssystem (2.1)-(2.2) zu schließen beruht auf der Bildung von Transportgleichungen für den unbekanntem Spannungstensor, die aus den Navier-Stokes-Gleichungen gebildet werden können. Dieser Ansatz enthält keine empirischen Annahmen wie die Wirbelviskositätshypothese und sollte daher komplexe Strömungen besser modellieren können als z.B. das $k - \epsilon$ Modell. Unter der Annahme einer stationären Strömung hat die Transportgleichung folgende Form:

$$\begin{aligned}
 U_k \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_k} = & - \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \text{(Produktion)} \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{1}{\rho} (\overline{u'_i p'} \delta_{jk} + \overline{u'_j p'} \delta_{ik}) - \nu \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right] \text{(Diffusion)} \\
 & + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \text{(Druck - Scher - Korrelation)} \\
 & - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)} \text{(Dissipation)} \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

In Gl. (2.10) sind durch die Mittelung weitere unbekannte Terme entstanden. Hierfür könnten wiederum Transportgleichungen aus den Bewegungsgleichungen gebildet werden, die dann weitere Unbekannte enthalten. Bei der Bewegungsgleichung für die Tripelkorrelation würden unter anderem Korrelationen vierter Ordnung auftreten. Da einerseits der Einfluß der Terme auf die mittleren Geschwindigkeiten sinkt und andererseits bei einer Modellierung höherer Korrelationen auf Basis von Transportgleichungen der numerische Aufwand sehr stark ansteigt, wurde diese Lösungsstrategie bisher nicht eingesetzt. Statt dessen werden für die in Gl. (2.10) unbekanntem Terme Modelle gebildet, die nachfolgend kurz vorgestellt werden. Da sich die in dieser Arbeit verwendeten Reynoldsspannungsmodelle im Druck-Scher-Korrelationsterm unterscheiden, wird die Modellierung dieses Ausdrucks etwas ausführlicher beschrieben. Eine detaillierte Darstellung der Modellierung der einzelnen Terme findet sich z.B. in [38].

Diffusion Der Beitrag der Druckfluktuation wird meist als vernachlässigbar eingeschätzt [10], er wird daher hier nicht weiter berücksichtigt. Die Dreifachkorrelation wird über einen

Gradientenansatz von Daly und Harlow modelliert [15]:

$$-\overline{u'_i u'_j u'_k} = c_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l}; \quad c_s = 0.22 \quad (2.11)$$

Die linke Seite von (2.11) ist im Gegensatz zur rechten Seite *unabhängig* von der Stellung der Indizes. Ein alternatives Modell von Hanjalic und Launder [26] hat diesen formalen Nachteil nicht, ist aber wesentlich komplizierter und numerisch aufwendiger.

$$-\overline{u'_i u'_j u'_k} = \hat{c}_s \frac{k}{\epsilon} \left[\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_l} + \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l} + \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right] \quad (2.12)$$

Vergleichsrechnungen mit eingeschlossenen Drallströmungen von Nikjooy [51] mit beiden Tripelkorrelationsmodellen (Gln. (2.11), (2.12)) haben gezeigt, daß das Modell von Daly und Harlow eine bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten lieferte als das von Hanjalic und Launder. Daher wird hier das einfachere Modell von Daly und Harlow verwendet.

Dissipation Die allgemein verwendete Formulierung für die Dissipationsrate geht auf Rotta zurück [62]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} \quad (2.13)$$

mit

$$U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_\epsilon \frac{k}{\epsilon} \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right) + c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mathcal{P} - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.14)$$

Die Integrationskonstanten unterscheiden sich je nach verwendetem Druck-Scher-Korrelationsmodell (vgl. Abschnitt 2.4.1) geringfügig und sind in Tabelle 2.2 aufgeführt.

Modell	c_ϵ	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$
IP	0.18	1.44	1.92
SSG	0.183	1.44	1.83

Tabelle 2.2: Konstanten der ϵ -Gleichung bei RSM

2.4.1 Druck-Scher-Korrelationen

Dieser Term ist als einziger in der Lage, anisotrope Spannungszustände zu reduzieren. Üblich sind lineare und quadratische Modelle, Modelle von höherer Ordnung als zwei sind entwickelt worden [19], sie haben sich aufgrund der komplexen Numerik und der damit einhergehenden numerischen Stabilitätsproblematik bisher nicht durchsetzen können.

2.4.1.1 Lineares Modell

Das ursprünglich von Launder, Reece und Rodi vorgeschlagene lineare Modell lautet [38]:

$$\Phi_{ij} = -C_1 \epsilon b_{ij} + C_2 k S_{ij} + C_3 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) + C_4 k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \quad (2.15)$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\overline{u'_q u'_q}} - \frac{1}{3} \delta_{ij}.$$

Einige Vereinfachungen [38] erlauben eine wesentlich kompaktere Formulierung des Modells, in der die letzten drei Terme von Gl. (2.15) zu einem Term zusammengezogen werden:

$$\Phi_{ij} = -c_1 \frac{\epsilon}{k} (u'_i u'_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) - c_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) \quad (2.16)$$

Gl. (2.16) wird als IP Modell bezeichnet (IP: Isotropation of **P**roduktion) und stellt das am weitesten verbreitete lineare Druck-Scher-Korrelationsmodell dar, während die kompliziertere Formulierung (Gl. (2.15)) kaum verbreitet ist und als ungeeignet zur Berechnung von verdrallten Strömungen dargestellt wird [39],[82]. Gl. (2.16) läßt sich in der Notation von Gl. (2.15) darstellen. Hierbei muß $C_3 = C_4$ gesetzt werden. Diese Einschränkung, die unter anderem die kompakte Formulierung des IP Modells ermöglicht bedeutet, daß bei diesem Modell keine getrennte Wichtung der Scherrate S_{ij} und der Wirbelstärke W_{ij} erfolgen kann. Ein von Rotta vorgeschlagener Ansatz [62] modelliert nur den ersten Term von Gl. (2.16), der zweite wird nicht berücksichtigt.

Wandeinfluß der Druck-Scher-Korrelation Das IP Modell kann wie alle linearen Modelle das Abklingen von Normalspannungen in der Nähe fester Begrenzungen nicht modellieren. Die meisten Autoren verwenden bei linearen Modellen Wandkorrekturterme, die formal ähnlich wie die Druck-Scher-Korrelationsterme in freier Strömung aufgebaut sind, und den Einfluß der festen Begrenzung(en) mit Hilfe von Wandfunktionen modellieren. Diese Wandterme lassen sich in zwei Anteile aufspalten (vgl. z.B. [81]):

$$\Phi_{ij,w} = \Phi'_{ij,1} + \Phi'_{ij,2} \quad (2.17)$$

mit

$$\Phi'_{ij,1} = c'_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u'_k u'_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u'_k u'_i n_k n_j} - \frac{3}{2} \overline{u'_k u'_j n_k n_i} \right) \cdot f_{wall} \quad (2.18)$$

und

$$\Phi'_{ij,2} = c'_2 \left(\Phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ki,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{kj,2} n_k n_i \right) \cdot f_{wall} \quad (2.19)$$

Die Wandfunktion wird im Allgemeinen folgendermaßen bestimmt:

$$f_{wall} = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{c_{wall} \cdot y_n} \quad (2.20)$$

mit y_n als Wandnormalenabstand und c_{wall} als Normalisierungsgröße, sodaß f_{wall} in Wandnähe 1 wird.

Während der Einfluß einer einzelnen Wand über obige Funktion relativ einfach realisiert werden kann, verkompliziert sich die Bestimmung des Wandabstands bei mehreren Wänden erheblich. Neben der formalen Problematik der Definition des Wandabstandes ist die Berechnung des Abstands bei komplexen 3D-Problemen numerisch sehr aufwendig.

Integrationskonstanten des IP Modells Die freien Konstanten c_1 und c_2 hängen über folgende Beziehung zusammen (vgl. z.B. [44]):

$$\frac{1 - c_2}{c_1} \cong 0.23 \quad (2.21)$$

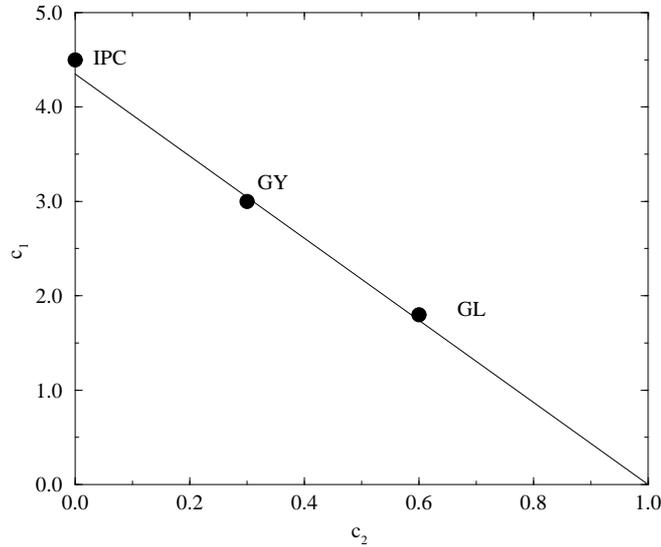


Abbildung 2.1: Koeffizienten c_1, c_2 des linearen Modells

Gl. (2.21) ist in Abb. 2.1 als Gerade eingetragen. Aus dem Vergleich mit experimentell ermittelten Daten eines isotropen Turbulenzfeldes [13] ergibt sich die Konstante c_2 zu 0.6, mit Gl. (2.21) folgt $c_1 = 1.8$. Dieser Konstantensatz wird allgemein als Gibson-Lauder-Modell bezeichnet [23]. Younis [81] modifizierte die Konstanten für ein stark anisotropes Turbulenzfeld zu $c_1 = 3$; $c_2 = 0.3$. Dieser Konstantensatz wird hier als Gibson-Younis-Modell bezeichnet [24]. Der ursprünglich von Rotta vorgeschlagene Term sieht eine Modellierung nur über den ersten Term vor: $c_1 = 4.6$; $c_2 = 0$.

Sowohl die Konstanten von Gibson und Launder als auch die von Gibson und Younis sowie die von Rotta erfüllen Gl. (2.21). Lien betont [44], daß die Einhaltung des Verhältnisses von c_1 und c_2 laut Gl. (2.21) wichtiger ist als die Absolutwerte der Konstanten, insofern kann eine Wertung der einzelnen Modelle zunächst nicht erfolgen.

Die Integrationskonstanten für die Wanddämpfungsterme werden von Gibson und Launder mit $c'_1 = 0.3$; $c'_2 = 0.5$ und von Gibson und Younis mit $c'_1 = 0.5$; $c'_2 = 0.75$ angegeben. In Tabelle 2.3 sind die hier verwendeten Konstanten nochmals zusammengefaßt. Hierbei steht GL für das Modell von **G**ibson und **L**auder [23], GY für das Modell von **G**ibson und **Y**ounis [24] und IPC für das Modell von Rotta. Die Modelle unterscheiden sich lediglich durch die Zahlenwerte der in der Tabelle aufgeführten Konstanten.

Als ein Nachteil der linearen Modelle wird die Wanddämpfungsmodellierung angesehen. Die Terme gemäß Gl. (2.18)-(2.19) gehen von einer ausgebildeten Wandströmung aus, Geschwindigkeitskomponenten quer zur Wand, wie sie bei aufprallenden Strahlen vorkommen, werden mit obigem Modell nicht richtig wiedergegeben.

Modell	c_1	c_2	c'_1	c'_2
GL	1.8	0.6	0.5	0.3
GY	3.0	0.3	0.75	0.5
IPC	4.6	0.	0.5	0.

Tabelle 2.3: Konstanten des IP Modells

Diese Problematik tritt bei Druck-Scher-Korrelationsmodellen höherer Ordnung nicht auf, der quadratische Charakter der Modelle macht ein Einarbeiten von Wandabständen überflüssig. Nachfolgend wird ein solches Modell vorgestellt.

2.4.1.2 Quadratisches Modell (SSG)

Eine quadratische Modellierung der Druck-Scher-Korrelation wird von Speziale et al angegeben [71]. Der Name **SSG** leitet sich aus den Namen der Autoren Speziale, Sakar und Gatski ab. Hier hat der Umverteilungsterm folgende Form:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & - (c_1\epsilon + c_1^*\mathcal{P}) b_{ij} + c_2\epsilon \left(b_{ik}b_{kj} - \frac{1}{3}b_{kl}b_{kl}\delta_{ij} \right) + (c_3 - c_3^*\sqrt{\Pi}) k S_{ij} \\ & + c_4k \left(b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{kl}S_{kl}\delta_{ij} \right) + c_5k (b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

mit

$$\Pi = b_{ij}b_{ij}, \quad \mathcal{P} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

und S_{ij}, W_{ij}, b_{ij} entsprechend Gl. (2.15). Die zugehörigen Konstanten stehen in Tabelle 2.4.

c_1	c_1^*	c_2	c_3	c_3^*	c_4	c_5
3.4	1.8	4.2	0.8	1.3	1.25	0.4

Tabelle 2.4: Konstanten des SSG Modells

2.4.1.3 Diskussion der Modelle

Da sich die hier verwendeten Reynoldsspannungsmodelle ausschließlich im Druck-Scher-Korrelationsterm unterscheiden, soll auch nur auf diesen Term eingegangen werden. Die linearen Modelle unterscheiden sich lediglich in den Integrationskonstanten. Interessant ist hierbei vor allem die Konstante c_2 , die für das GL-Modell auf 0.6 und für das GY Modell auf 0.3 gesetzt wird. In der Notation von Gl. (2.15) entsprechen diese Werte $C_3 = C_4 = 1.2$ (GL) bzw. $C_3 = C_4 = 0.6$ (GY). Die hydrodynamische Stabilitätsanalyse liefert für rotierende homogene Strömungen einen Wert von ≈ 0.4 [63],[69],[70], während dieser Wert für reine Scherströmungen bei ca. 1.2 liegt [1]. Diese beiden Grenzfälle stellen Strömungen dar, in denen entweder S_{ij} oder W_{ij} dominieren. Beide Terme finden sich in der IP Modellierung in dem Ausdruck P_{ij} wieder, eine Analyse kann aber einfacher über die ursprüngliche Gleichung für den Druck-Scher-Korrelationsterm erfolgen (Gl. (2.15)), da hier beide Terme getrennt aufgeführt sind. In Gl. (2.15) stehen die Konstanten C_2 und

C_3 vor Termen mit S_{ij} , die Konstante C_4 vor Termen mit W_{ij} , eine getrennte Wichtung beider Terme kann also erfolgen. Das IP Modell verfügt nicht über mehrere Konstanten für den zweiten Term, hier muß die Konstante c_2 in Gl. (2.16) sowohl den Einfluß der Scherraten S_{ij} als auch den der Wirbelstärke W_{ij} wichten. Somit können die Konstanten des IP Modells entweder für Scherraten oder für die Wirbelstärke optimiert werden; eine ideale Einstellung für Konstellationen, die beide Strömungstypen enthalten, ist gar nicht möglich. Das GL Modell ist offensichtlich für Scherströmungen optimiert ($C_3 = C_4 = 1.2$ stimmt mit dem theoretisch ermittelten Optimum überein), GY für die korrekte Modellierung von W_{ij} ($C_3 = C_4 = 0.6$ liegt nahe an 0.4).

Die schlechte Qualität des Original LRR-Modells bei der Wiedergabe verdrallter Strömungen steht hierzu im Gegensatz [39],[82]. Erklären läßt sich die schlechte Leistung dieses Modells nur durch die Annahme, daß die Integrationskonstanten nicht optimal angepaßt sind (die Originalkonstanten sehen für C_3 1.75 und für C_4 einen Wert von 1.31 vor, beide Konstanten weichen erheblich von den theoretisch optimalen Werten ab).

Das IPC Modell verzichtet komplett auf eine Modellierung des zweiten Terms, damit stellt sich auch die Problematik der Wichtung der beiden Strömungsanteile nicht. Die Modellierung wird stattdessen komplett auf den ersten Term verschoben, was nach Gl. (2.21) zu einer entsprechend großen Integrationskonstante c_1 führt.

Das SSG Modell ist im linearen Teil dem Originalmodell von Launder, Reece und Rodi sehr ähnlich, lediglich die Numerierung der Konstanten ist etwas anders. Es ist also beim quadratischen Modell möglich, die linearen Anteile von Scherrate und Wirbelstärke getrennt zu wichten, was zumindest formal einen Vorteil gegenüber den IP Modellen darstellt. Die Konstanten liegen mit 1.25 bzw. 0.4 ziemlich genau auf den theoretisch ermittelten Werten [1],[63],[69],[70].

Einen weiteren Vorteil bieten die quadratischen Terme, die eine explizite Modellierung von Wanddämpfungstermen unnötig macht. Dies ist aus zwei Gründen von Vorteil: Zum einen entfällt die bei komplexeren Geometrien numerisch sehr aufwendige und zudem nicht immer eindeutige Berechnung des Wandabstandes, und zum anderen ist die Modellierung der Wanddämpfungsterme für nicht anliegende Wandströmungen fragwürdig, Gl. (2.18)-(2.19) gilt formal nur für anliegende Strömungen. Zur Umgehung dieser Problematik wurden alternative Formulierungen der Dämpfungsterme vorgeschlagen [12], eigene Berechnungen mit diesen Korrekturtermen brachten aber keine besseren Resultate.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß das SSG Modell sowohl wegen der allgemeingültigeren Formulierung des linearen Teils als auch wegen dem Vorhandensein der quadratischen Terme den IP Modellen nach der Papierform deutlich überlegen ist. Ein Nachteil des quadratischen Modells ist der höhere numerische Aufwand und die tendenziell geringere Stabilität des Modells, das heißt Rechnungen mit dem SSG Modell divergieren früher als Rechnungen mit den wesentlich stabileren IP Modellen. Bei den IP Modellen ist das GL Modell offensichtlich für Scherströmungen optimiert, während der Konstantensatz von Gibson und Younis den Einfluß des Wirbelstärkentensors korrekt wiedergeben sollte. Da das IPC Modell den zweiten Term in Gl. (2.16) nicht wichtet, ist eine Klassifizierung dieses Modells mit obigen Überlegungen nicht möglich.

2.5 Grobstruktursimulation

Grundgedanke der Grobstruktursimulation (Large Eddy Simulation, LES) ist die Annahme, daß die großen Wirbel ('Large Eddies') den Hauptteil der charakteristischen Eigenschaften einer turbulenten Strömung transportieren. Es sollte also ausreichend sein, diese großen Wirbel zu simulieren und für die kleineren Strukturen Modelle anzunehmen. LES sind dreidimensional, instationär und numerisch sehr aufwendig, aber numerisch wesentlich billiger als eine DNS.

Die Trennung zwischen simulierten und modellierten Strukturen erfolgt bei der LES durch Filterung [42]. Das resultierende Gleichungssystem hat sehr starke Ähnlichkeit mit den Reynolds-gemittelten Gleichungen, wobei die Spannungen nicht für das ganze Feld, sondern nur unterhalb einer Filterlänge modelliert werden. Die Modellierung der Spannungen erfolgt über einen Ansatz analog zu den Wirbelviskositätsmodellen [66]:

$$\tau_{ij}^s - \frac{1}{3}\tau_{kk}^s\delta_{ij} = 2\mu_t S_{ij} \quad (2.23)$$

Die entsprechende Wirbelviskosität ergibt sich zu

$$\mu_t = C_S^2 \rho \Delta^2 |S| \quad (2.24)$$

mit C_S als Modellparameter und Δ als Filterlänge. Δ wird hierbei zu $\Delta = \sqrt[3]{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}$ bestimmt, wobei Δ_i die Länge der Gitterzelle ist. C_S wird beim Smagorinsky-Modell [66] konstant auf 0.1 gesetzt. In der Nähe fester Wände muß die Wirbelviskosität reduziert werden, was über einen van Driest Dämpfungsterm erreicht wird:

$$C_S^* = C_S \left(1 - e^{-\frac{n^+}{A^+}}\right)^2 \quad (2.25)$$

mit n^+ als dimensionslosem Wandabstand und A^+ als Konstante, deren Wert von den meisten Autoren auf 25 gesetzt wird. Der Wandeinfluß des Modells muß insbesondere dann berücksichtigt werden, wenn Grenzschichten aufgelöst werden sollen, wenn also die wandnächsten Zellen einen dimensionslosen Wandabstand in der Größenordnung von 1 haben. Da die bis auf die Wanddämpfung konstante Annahme des Modellparameters nicht allgemeingültig ist, wurden dynamische Feingittermodelle entwickelt, die auf Arbeiten von Germano basieren [22]. Bei diesen Verfahren wird C_S aus der Lösung des Geschwindigkeitsfeldes als Feldgröße bestimmt. Obwohl die dynamischen Modelle im Allgemeinen dem einfachen Smagorinsky-Modell überlegen sind, sind sie nicht unproblematisch. So können z.B. gebietsweise negative Wirbelviskositäten entstehen, ein in der Literatur als 'backscatter' bekanntes Phänomen, bei dem Energie von kleineren zu größeren Strukturen fließt. Treten diese Effekte über ein zu großes Gebiet und/oder über zu lange Zeit auf, wird das zu numerischen Instabilitäten führen. Eine Möglichkeit, diese Problematik zu umgehen besteht in der zeitlichen und räumlichen Mittelung, was sich insbesondere bei komplexeren Geometrien nur relativ aufwendig realisieren läßt. Aufgrund dieser Problematik wurde für die hier durchgeführten Untersuchungen das relativ einfache Smagorinsky-Modell eingesetzt.

Die LES liefert ein instationäres Geschwindigkeitsfeld. Um die Ergebnisse der LES mit anderen Rechnungen oder Messungen vergleichen zu können, müssen die Felder gemittelt werden, wobei der Summand k alle berechneten Zeitschritte durchläuft:

$$\bar{U}_i = \frac{\sum_{k=1}^N U_i(t_k)}{N} \quad (2.26)$$

Die Reynoldsspannungen ergeben sich zu

$$\overline{u_i u_j} = \frac{\sum_{k=1}^N U_i(t_k) \cdot U_j(t_k)}{N} - \overline{U}_i \cdot \overline{U}_j. \quad (2.27)$$

3 Aspekte der numerischen Implementierung

Die Diskretisierung der Transportgleichungen erfolgt auf Basis eines krummlinigen Finite Volumen Verfahrens. Eine genaue Beschreibung der Diskretisierung für das rotationssymmetrische Verfahren findet sich in [17], das 3D Verfahren ist ausführlich in [79] beschrieben. Daher werden die Verfahren nur stichpunktartig beschrieben; eine detaillierte Diskussion findet nur für die im Rahmen dieser Arbeit relevanten Punkte statt.

Durch die Benutzung eines nicht versetzten Gitters können Druck- und Geschwindigkeitsfelder voneinander entkoppelt werden [53]. Dieser Effekt wird auch als Schachbrettlösung bezeichnet und hier durch eine spezielle Interpolationstechnik vermieden [32] [55] [57]. Eine ähnliche Problematik kann bei den Reynoldsspannungsmodellen entstehen, wobei hier die Spannungen von den Geschwindigkeiten entkoppeln können. Obi et al [52] hat eine Interpolationstechnik für diese Entkopplung entwickelt, die der Druck-Geschwindigkeits-Entkopplung sehr ähnlich ist. Dieses Verfahren wurde in den rotationssymmetrischen Code integriert.

Die Diskretisierung der Transportgleichungen führt auf einen Differenzenstern mit fünf (2D) bzw. sieben (3D) Punkten. Implizit werden also nur die unmittelbaren Nachbarpunkte behandelt, Konvektionsschemata höherer Ordnung werden explizit über die rechte Seite des Gleichungssystems behandelt. Da alle Transportgleichungen dieselbe Form haben, kann die sequentielle Lösung aller Gleichungen mit einem Löser erfolgen. In beiden Rechenverfahren wird der voll implizite Löser von Stone [72] eingesetzt.

Wesentlich für das Erreichen gitterunabhängiger Lösungen sind die eben erwähnten Konvektionsschemata höherer Ordnung, da das implizite Upwind-Verfahren nur von Ordnung eins und damit nicht sehr genau ist. Das im rotationssymmetrischen Programm eingesetzte Schema wird nachfolgend kurz vorgestellt.

3.1 Konvektionsschema höherer Ordnung

Die Diskretisierung der Transportgleichung führt für alle Unbekannten auf eine identische Formulierung, bei der die Normaldiffusion und der Upwind-Anteil der Konvektion implizit dargestellt werden. Alle anderen Anteile werden als Quellterm explizit behandelt. Diese Art der Diskretisierung erlaubt eine sehr übersichtliche Integration diverser Konvektionsschemata höherer Ordnung, da lediglich die neuen Ausdrücke als Quellterm integriert werden müssen.

Mit dem rotationssymmetrischen Verfahren wurde eine Vielzahl von Konvektionsschemata höherer Ordnung getestet (vgl. [64]), das effizienteste Verfahren stammt nach diesen Tests von Lien und Leschziner [45]. Es handelt sich hierbei um ein unsymmetrisches li-

mitiertes Verfahren dritter Ordnungsgenauigkeit. Der zusätzliche Quelltermanteil ergibt sich mit

$$\kappa^+ = 1 + \kappa; \kappa^- = 1 - \kappa$$

und

$$c_e^\pm = \frac{1 \pm \operatorname{sgn}(U_e)}{2}; c_w^\pm = \frac{1 \pm \operatorname{sgn}(U_w)}{2}$$

$$c_n^\pm = \frac{1 \pm \operatorname{sgn}(V_n)}{2}; c_s^\pm = \frac{1 \pm \operatorname{sgn}(V_s)}{2}$$

sowie

$$\overline{\Delta}_f^- = \min\operatorname{mod}(\Delta_f^-, \omega \Delta_f^-); \tilde{\Delta}_f^- = \min\operatorname{mod}(\Delta_f^-, \omega \Delta_f^-)$$

$$\tilde{\Delta}_f^+ = \min\operatorname{mod}(\Delta_f^+, \omega \Delta_f^+); \overline{\Delta}_f^+ = \min\operatorname{mod}(\Delta_f^+, \omega \Delta_f^+)$$

$$\Delta_e^- = \Phi_P - \Phi_W; \Delta_e = \Phi_E - \Phi_P; \Delta_e^+ = \Phi_{EE} - \Phi_E$$

zu

$$S_\Phi = \frac{1}{4}(\rho U_e)[c_e^+(\kappa^+ \overline{\Delta}_e^- + \kappa^- \tilde{\Delta}_e^-) - c_e^-(\kappa^+ \tilde{\Delta}_e^+ + \kappa^- \overline{\Delta}_e^+)]$$

$$+ \frac{1}{4}(\rho U_w)[c_w^+(\kappa^+ \overline{\Delta}_w^- + \kappa^- \tilde{\Delta}_w^-) - c_w^-(\kappa^+ \tilde{\Delta}_w^+ + \kappa^- \overline{\Delta}_w^+)]$$

$$+ \frac{1}{4}(\rho V_s)[c_s^+(\kappa^+ \overline{\Delta}_s^- + \kappa^- \tilde{\Delta}_s^-) - c_s^-(\kappa^+ \tilde{\Delta}_s^+ + \kappa^- \overline{\Delta}_s^+)]$$

$$+ \frac{1}{4}(\rho V_n)[c_n^+(\kappa^+ \overline{\Delta}_n^- + \kappa^- \tilde{\Delta}_n^-) - c_n^-(\kappa^+ \tilde{\Delta}_n^+ + \kappa^- \overline{\Delta}_n^+)] \quad (3.1)$$

Die Indizes w, e, s, n beschreiben in der Kompaßnotation die linke (west), rechte (east), untere bzw. obere Zellgrenzfläche der Zelle P , die Indizes w, E, S, N die entsprechenden Nachbarpunkte. EE indiziert den übernächsten Nachbarn rechts. Der Parameter ω liegt formal in den Grenzen

$$1 \leq \omega \leq \frac{3 - \kappa}{1 - \kappa}.$$

Testrechnungen haben aber gezeigt, daß ω dem größtmöglichen Wert entsprechen sollte, also

$$\omega = \frac{3 - \kappa}{1 - \kappa}.$$

Der verbleibende Parameter κ sollte zwischen 0.65 und 0.8 liegen, vgl. [64]. Das Verfahren läuft sehr stabil, Gitterunabhängigkeit wird relativ früh erreicht. Die Nachrechnungen des Experiments von Holzäpfel (Abschnitt 4.3.4) zeigten z.B. Gitterunabhängigkeit ab einem Rechengitter von 10000 Zellen. Das Upwindverfahren war selbst bei 30000 Zellen noch nicht gitterunabhängig.

3.2 Vektorisierung des Gleichungslösers

Die Diskretisierung der Transportgleichungen führt wie oben erwähnt auf eine Matrix mit fünf bzw. sieben von Null verschiedenen Diagonalen. Bei der Lösung mit dem Verfahren von Stone [72] werden die Nachbarpunkte implizit behandelt. Dies geschieht in zwei Schleifen, die vorwärts bzw. rückwärts durchlaufen werden. Um die Vektorisierung dieser Schleifen erläutern zu können, wird kurz die Anordnung der Variablen für das rotationssymmetrische Verfahren beschrieben, die Erweiterung auf drei Raumrichtungen funktioniert analog.

3.2.1 Struktur des Rechengitters

Das Rechengitter mit dem der zu berechnende Bereich überzogen ist kann aus einem oder mehreren Blöcken (Laufindex 'M') bestehen. Jeder Block besteht aus $NI(M) \times NJ(M)$ Zellen, wobei $NI(M)$ die Anzahl der Spalten (Laufindex 'I') und $NJ(M)$ die Anzahl der Zeilen (Laufindex 'J') des Blocks darstellt.

Die Numerierung der Zellen innerhalb eines Blocks 'M' beginnt 'unten links' mit 'OFFSET(M)+1' und endet mit 'OFFSET(M)+NI(M)xNJ(M)' 'oben rechts'. Dabei durchläuft der Index in der ersten Spalte alle Zeilen, danach alle Zeilen der zweiten Spalte usw. 'OFFSET(M)' ist für den ersten Block 0 für den zweiten $NI(1) \times NJ(1)$ usw. Die Gesamtanzahl der Zellen ist

$$\sum_{M=1, \text{Maxblo}} NI(M) \cdot NJ(M)$$

Die Blöcke untereinander können beliebig verbunden werden, wobei die Randlinien der Blöcke ohne Versatz ineinander übergehen müssen, das heißt hängende Knoten sind mit dem Verfahren nicht möglich. Beim 3D Verfahren sind hängende Knoten realisiert, die Implementierung ist in [79] beschrieben.

Die diskretisierten Transportgleichungen werden blockweise gelöst. Stoßen zwei Blöcke im Strömungsgebiet aneinander dient die jeweils eine Zelle vom gemeinsamen Rand entfernte Feldgröße als Randbedingung des jeweils anderen Blockes. Wenn also z.B. der Block A mit seiner Ostgrenze an die Südgrenze des Blockes B stößt, ist die Linie $j=2$ des Blocks B Randbedingung für den Block A und die Linie $I=NI-1$ des Blocks A Randbedingung für Block B.

Mit blockstrukturierten Gittern können komplexe Geometrien sehr effizient aufgelöst werden ohne auf die Vorteile strukturierter Gitter verzichten zu müssen:

Die Berechnung der Lösung einer Feldgröße erfolgt i.A. durch geschachtelte Schleifen. Aufgrund des 5-Punkttesterns hängt die Lösung eines Punktes mit dem Index IJ von seinen direkten Nachbarn ab¹. Diese Nachbarn können bei blockstrukturierten Gittern direkt angesprochen werden, wie nachfolgendes Fortran Beispiel zeigt:

```

DO 100 I =2,NI-1
DO 100 J =2,NJ-1
  IJP=J+(I-1)*NJ      !      Index des Punktes 'P':
  IJE=J+(I-1)*NJ + NJ !      Index des Punktes 'E':
  IJW=J+(I-1)*NJ - NJ !      Index des Punktes 'W':
  IJN=J+(I-1)*NJ + 1  !      Index des Punktes 'N':
  IJS=J+(I-1)*NJ - 1  !      Index des Punktes 'S':
100 CONTINUE

```

Beim Durchlauf nach vorne werden zur Berechnung von Φ_{IJ} die Elemente Φ_{IJS} und Φ_{IJW} benötigt, beim Durchlauf nach hinten die Elemente Φ_{IJN} und Φ_{IJE} .

In Abb. 3.1 (links) ist der Schleifendurchlauf für die Vorwärtsrichtung dargestellt. Ein Punkt benötigt in der Schleife den Nachbarn 'unten' und den Nachbarn 'links', was durch die Striche angedeutet ist. Es ist offensichtlich, daß zur Lösung des zweiten Elements das erste zur Verfügung stehen muß, zur Lösung des dritten das zweite etc. Diese Rekursion verhindert eine Vektorisierung der Schleife, die Rechenleistung auf Vektorrechnern ist inakzeptabel. Wenn die Elemente jedoch entsprechend [18] durchlaufen werden

¹bei Approximationen höherer Ordnung kommen weiter entfernte Nachbarn hinzu

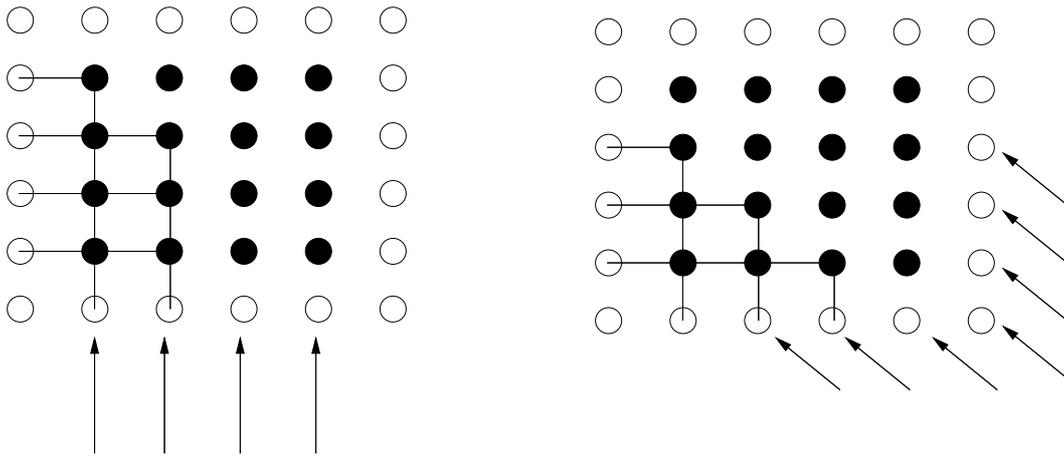


Abbildung 3.1: Rekursion des Gleichungslösers (links), Umgehung (rechts)

(Abb. 3.1 rechts) finden sich entlang eines Durchlaufs keine Rekursionen, die Schleifen können gefahrlos vektorisiert werden. Allerdings kann die Adressierung der Elemente nicht mehr direkt über den Index erfolgen, sondern es muß eine Zuordnungsmatrix (connectivity matrix) für jedes Element aufgestellt werden. Durch die indirekte Adressierung können die Compiler die Vektorisierungsmöglichkeit der Schleife in der Regel nicht automatisch erkennen, daher müssen im Programm explizite Vektorisierungsanweisungen gesetzt werden. Da diese Anweisungen für nicht vektorisierende Compiler wie Kommentare aussehen, kann das Programm auch auf solchen Compilern übersetzt werden. Dem Vorteil der Vektorisierung steht der Nachteil der indirekten Adressierung gegenüber. Da Vektorrechner über ein sehr effizientes Speichersystem verfügen, überwiegt bei diesen Rechnern in jedem Fall der Vorteil der Vektorisierung. Bei modernen Skalarrechnern, die über ihre Pipelines ähnliche Optimierungsmöglichkeiten wie die Vektorisierung haben, können die Vorteile dieser Optimierung die Nachteile der indirekten Adressierung überwiegen. Messungen auf Prozessoren, die über diese Vektorisierung verfügen (z.B. Mips R8000, R10000) haben Rechenzeiteinsparungen von über 10 % ergeben, wobei die Compiler über entsprechende Schalter die Vektorisierung analog zur Syntax der Cray Compiler aktivierten. Sobald ein Compiler die Vektorisierungsanweisungen nicht interpretieren kann (z.B. der gnu Fortran Compiler g77) überwiegen die Nachteile der indirekten Adressierung. In diesem Fall ist von einer Nutzung des vektorisierenden Lösers abzuraten.

3.3 Parallelisierung des 3D Verfahrens

Die in dieser Arbeit verwendete Parallelisierungsverfahren basiert auf dem Austausch von Informationen (engl: Message Passing). Hierbei tauschen Rechenblöcke, die auf verschiedenen Prozessoren berechnet werden jeweils ihre gemeinsamen Randflächen aus. Neben diesen Daten müssen zur Konvergenzsteuerung die Residuen global summiert und dann wieder an alle beteiligten Rechenknoten verschickt werden.

Da die Parallelisierung auf PC Architekturen durchgeführt werden soll, wird im nächsten Abschnitt kurz das Konzept dieser Parallelrechner vorgestellt. Insbesondere werden Unterschiede zu 'richtigen' Parallelrechnern aufgezeigt und Verfahren entwickelt, die geringe Leistungsfähigkeit des Kommunikationsnetzwerks der PCs zu kaschieren. Diese Verfahren

erhöhen im Allgemeinen auch die Leistungsfähigkeit der Parallelrechner, doch fällt der Zugewinn bei diesen Rechnern meist nicht so drastisch aus.

3.3.1 PC Cluster

Die in den letzten Jahren erfolgte Leistungssteigerung moderner PC Systeme macht es überlegenswert, einen Parallelrechner auf Basis von PCs zu realisieren. Diese zuerst am Center of Excellence in Space Data and Information Sciences aufgebauten und als 'Beowulf Cluster' bezeichneten Parallelrechner bestehen aus handelsüblichen PCs, die über ein Netzwerk verbunden werden. Da diese Parallelrechner ausschließlich aus Standardkomponenten aufgebaut sind (im Englischen wird das als 'COTS' bezeichnet; Commercial Off-The-Shelf), sind sie deutlich preiswerter als 'reine' Parallelrechner. Der für die Berechnungen verwendete Cluster besteht aus 24 Rechnern mit je einem 400 MHz Pentium II Prozessor, 128 MB Arbeitsspeicher, 4 GB SCSI Festplatte, Fast Ethernet Netzwerkkarte und einer einfachen Grafikkarte. Auf allen Rechnern ist ein Linux Vollsystem installiert. Alle Rechner sind über Konzentratoren an einen Monitor und eine Tastatur angeschlossen, die direkte Wartung des Systems ist also über einen Arbeitsplatz möglich.

Das 3D Programm ist ursprünglich für MPP-Systeme wie die Cray T3E parallelisiert worden. Die hierfür verwendete Programmbibliothek ist auch für PC Cluster verfügbar. Da das Kommunikationsnetzwerk der T3E um Größenordnungen leistungsfähiger als das Netz der Clusters ist, wurde die Parallelisierung auf mögliches Optimierungspotential untersucht. Hierzu ist es erforderlich, das für das Cluster verwendete Netzwerk zu kennen und insbesondere Unterschiede zum Netzwerk der T3E zu berücksichtigen. Daher werden nachfolgend die Netztechnik und die sich daraus ergebenden Konsequenzen beschrieben.

3.3.2 Netztechnik des Clusters

Kernstück des Netzwerks ist ein Fast Ethernet Switch. Sämtliche Rechenknoten des Clusters sind direkt mit diesem Switch verbunden. Wenn zwei Rechner miteinander Daten austauschen wollen, schaltet der Switch die entsprechende Verbindung durch und die Rechner können kommunizieren. Da jeder Rechner nur über eine Leitung zum Switch verfügt, kann ein Rechner immer nur mit einem anderen Rechner kommunizieren, eine gleichzeitige Kommunikation mit mehreren Nachbarn ist nicht möglich. Die Netzwerkkarten arbeiten allerdings im Vollduplex-Betrieb, das heißt bei einer Kommunikation können beide Rechnern gleichzeitig senden und empfangen. Die T3E verfügt über ein als 3D Torus bezeichnetes Netzwerk. Jeder Rechenknoten hat sechs voneinander unabhängige Kommunikationskanäle, die jeweils im Vollduplex-Betrieb Daten mit den Nachbarn austauschen können. Ein Rechenknoten der Cray ist also in der Lage gleichzeitig mit mehreren Nachbarn zu kommunizieren. Es ist offensichtlich, daß die Kommunikation auf der Cray daher ganz anders aufgebaut werden kann als das bei den PCs der Fall ist.

Die wichtigsten Kenngrößen eines Kommunikationsnetzwerkes sind die Latenzzeit und die Bandbreite. Unter Latenzzeit versteht man die zur Initialisierung der Kommunikation erforderliche Zeit, also die Zeit die vom Aufruf der Kommunikation bis zum ersten Eintreffen der Daten beim Empfänger vergeht. Die Bandbreite bezeichnet die pro Zeiteinheit maximal übertragbare Datenmenge. Die Latenzzeit liegt bei einem Fast Ethernet Netz bei ca. 80 Mikrosekunden, die Bandbreite bei 100 Megabits pro Sekunde. Die entsprechenden Werte der T3E sind jeweils mindestens eine Größenordnung besser. Der Anteil

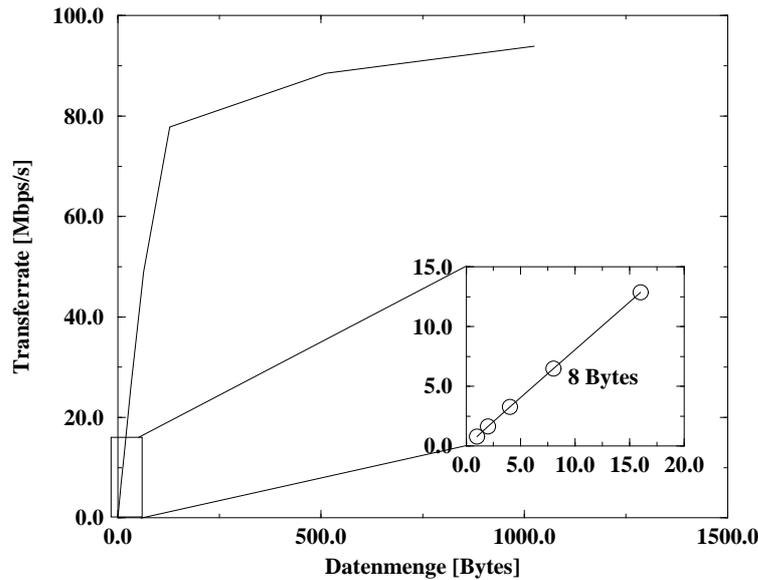


Abbildung 3.2: Übertragungsrate einer Fast Ethernet Karte mit DEC Chip 21140 (UDP)

der Latenzzeit wird bei großen Datenmengen immer geringer, spielt aber bei kleineren Datensätzen eine entscheidende Rolle. Wenn man die Bandbreite einer Verbindung als Funktion über die übertragene Datenmenge aufträgt, ergibt sich etwa das in Abb. 3.2 dargestellte Bild.

Die effektive Übertragungsrate steigt mit größerer Transferrate zunächst steil an, um dann auf einen Maximalwert einzulaufen. Demnach ist es sinnvoller, möglichst selten und dafür umfangreich zu kommunizieren als öfter kleinere Datenmengen auszutauschen. Die Daten in Abb. 3.2 wurden mit dem in Netzkarten sehr vorbereiteten DEC Chip 21140. Andere Chips dürften aber eine sehr ähnliche Charakteristik aufweisen.

3.3.3 Zeitparallele Kommunikation und Berechnung

In der Originalversion des 3D Verfahrens war die Kommunikation so organisiert, daß die Prozessoren an bestimmten Stellen im Programm Daten austauschen. Hierbei sendete jeder Prozessor seine Daten an die anderen Prozessoren ab und wartete dann auf das Eintreffen der an ihn adressierten Daten. Das Senden der Daten erfolgt hierbei meist asynchron, das heißt das Programm springt aus der Senderoutine in die rufende Programmeinheit zurück, bevor die Daten tatsächlich versendet werden. Die Wartezeit bis zum Eintreffen der Daten ist beim Fast Ethernet deutlich höher als bei der T3E. Die CPU kann in dieser Zeit keine Berechnungen durchführen, und dementsprechend sinkt die relative Leistung des Clusters ab. Es ist daher sinnvoll, die Kommunikation zeitparallel mit Berechnungen durchzuführen. Da die Kommunikation ohne Eingreifen der CPU stattfindet, können so Wartezeiten der CPU reduziert werden und die Gesamtleistung steigt. Damit dieses Konzept funktioniert muß gewährleistet sein, daß während der Berechnung die verschickten Daten nicht verändert werden. Außerdem muß der Bereich zwischen Versenden und Empfangen der Daten ausreichend viele Berechnungen enthalten. Wenn man

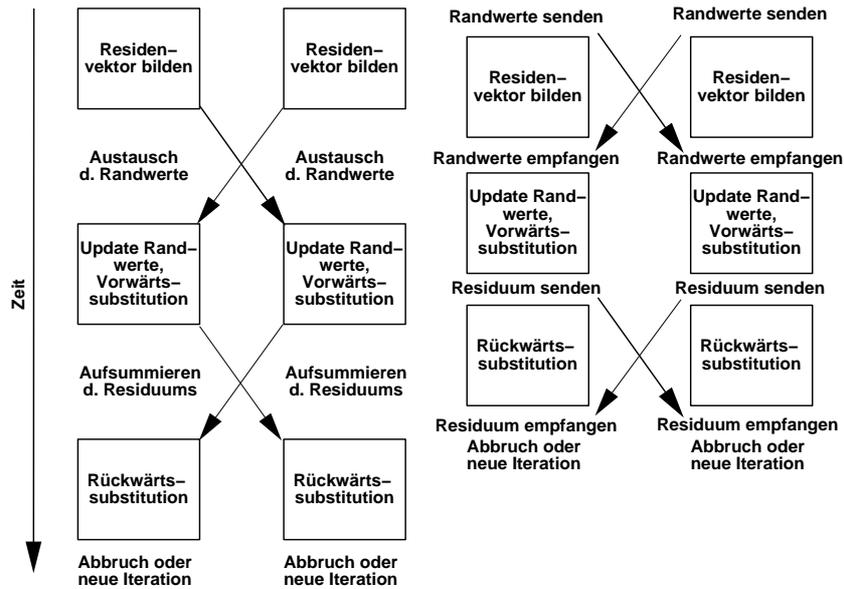


Abbildung 3.3: Zeitbedarf von Rechnung und Kommunikation innerhalb des Strömungslösers. Links: Originalversion. Rechts: Für Cluster optimierte Version

für die Rechengebiete jeweils Würfel mit N Zellen pro Raumrichtung annimmt, läßt sich der Zeitbedarf für die Kommunikation aus Initialisierungszeit und Kommunikationszeit bestimmen. Die Kommunikationszeit ist hierbei eine Funktion von N^2 . Der Rechenbedarf dagegen ist eine Funktion von N^3 , das heißt bei ausreichend großen Problemen wird der Rechenbedarf immer über dem Kommunikationsbedarf liegen.

Nachfolgend soll abgeschätzt werden, ob die zeitparallele Kommunikation für das 3D Verfahren sinnvoll durchführbar ist. Hierzu wurden alle Kommunikationsroutinen sowie der gesamte Programmablauf auf mögliches Optimierungspotential untersucht.

Da die meiste Rechenzeit im Gleichungslöser verbraucht wird und hier viel Interprozesskommunikation stattfindet, ist in dieser Routine auch das größte Einsparpotential zu vermuten. Auf die Details des Lösers soll hier nicht weiter eingegangen werden, sie sind detailliert in [72] beschrieben. Für die Parallelisierung interessant ist der Aufbau der Routine. Nach der Berechnung eines Residuenvektors (Schleife über alle inneren Gitterpunkte jedes Blocks) erfolgt der Austausch der Randelemente. Anschließend erfolgt in einer weiteren Schleife über alle Punkte die Vorwärtssubstitution, danach das aufsummieren aller Residuen (eine Zahl, die als Abbruchkriterium der Iteration verwendet wird). Schließlich wird in einer dritten Schleife der neue Lösungsvektor berechnet. Der Vergleich des Residuums mit einem einstellbaren Konvergenzwert entscheidet über Abbruch oder eine weitere Iteration. Abb. 3.3 links zeigt schematisch den Ablauf der Originalroutine für zwei Prozessoren. Der Austausch der Randwerte findet hier nach Abarbeitung der ersten Schleife statt. Die Kommunikationsbibliotheken verwenden hier einen asynchronen Sendemodus, das heißt die Programmabarbeitung geht weiter, sobald der Sendebefehl an die Netzkarte gegeben wurde, auf ein erfolgreiches Absenden bzw. Ankommen der Daten wird nicht gewartet. Der Empfang erfolgt hier synchron, die Empfangsroutine wartet also das Eintreffen der Daten ab. Da die aktuellen Randwerte vor Beginn der ersten Schleife feststehen, bietet es sich an, den Austausch der Randwerte in zwei Routinen aufzuspalten, Abb. 3.3 rechts. Vor Abarbeitung der ersten Schleife werden die bekannten Randwerte an

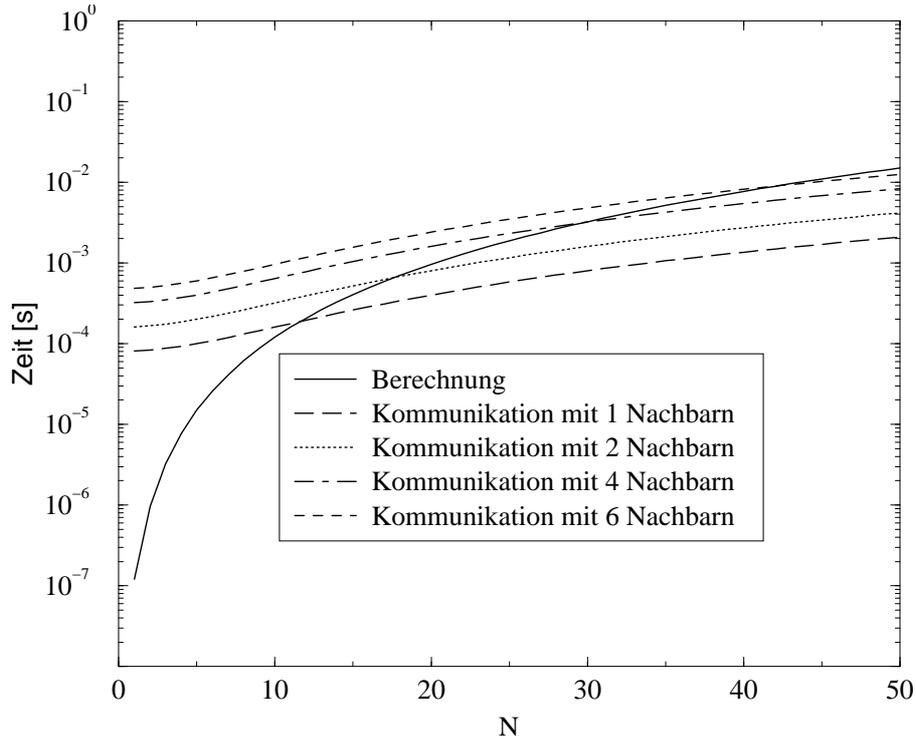


Abbildung 3.4: Rechenzeitbedarf d. Strömungslösers und der Kommunikation

den bzw. die Nachbarn abgeschickt. Durch den asynchronen Modus können nun das Senden der Daten und die Berechnung der Schleife wie oben beschrieben zeitparallel erfolgen. Nach Abarbeitung der Schleife wird dann eine Empfangsroutine aufgerufen, die die Daten der anderen Prozessoren entgegen nimmt.

Zur Abschätzung des Rechenzeitbedarfs sind einige Zusatzinformationen erforderlich. Die Schleife zur Bildung des Residuenvektors enthält 12 Gleitkomma-Operationen pro Punkt und durchläuft alle inneren Punkte des Blockes (unter der Annahme eines Würfels mit N Zellen pro Kante sind das $(N - 2)^3$ Punkte). Die Rechenleistung der Prozessoren wurde mit dem linpack-Benchmark für doppelt genaue Größen abgeschätzt. Die Pentium II Prozessoren mit 400 MHz erreichen dabei ca. 80 MFlops². Da bei der hier interessierenden Schleife sehr viele Rechenoperationen und damit auch sehr viele Ladebefehle durchgeführt werden, ist davon auszugehen, daß die Schleife kaum schneller ablaufen wird als die Schleifen des Benchmarks. Dennoch soll hier von einer Rechenleistung von 100 Mflops ausgegangen werden, damit bleibt die Abschätzung auch für schnellere Prozessoren gültig. Für die Übertragungsleistung des Netzwerkes soll der Einfachheit halber davon ausgegangen werden, daß nach Ablauf der Latenzzeit Daten mit 100 Mbit/s übertragen werden können. Weiterhin wird angenommen, daß pro Seite N^2 doppelt genaue Daten übertragen werden. In Abb. 3.4 sind der Rechen- und Zeitbedarf für die Kommunikation über der Kantenlänge N aufgetragen. In der Praxis sind Kommunikationen mit mehr als vier Nachbarprozessoren sehr selten, sodaß die Kommunikation ab ca. 30.000 Gitterpunkten ($N = 30$) hinter der Rechnung komplett versteckt werden kann (vgl. Abb 3.4). Diese Gittergröße lastet den verfügbaren Arbeitsspeicher des Clusters nur zu etwa 25 % aus, das Konzept der zeitparallelen Kommunikation und Berechnung funktioniert

²1 Mflop entspricht 10^6 Gleitkomma-Operationen; Flop ist die Abkürzung für Floating Point Operation

also schon bei sehr kleinen Gittern.

Die zweite Kommunikation betrifft das Abbruchkriterium. Zu dessen Ermittlung werden alle Residuen an einen Prozessor geschickt, der das Residuum dann aufsummiert und an alle Prozessoren zurückschickt. Da hier nur eine Zahl verschickt wird, entspricht der Zeitbedarf dieser Kommunikation praktisch der Initialisierungszeit der Verbindung. Die Originalversion des Programms sah für diese Kommunikation eine Baumstruktur vor. Bei dieser Technik sind alle Prozessoren in einer Hierarchie geordnet. An der Wurzel sitzt ein Prozessor, der zwei 'Kindsprozessoren' hat. Diese haben wiederum je zwei Kindsprozessoren etc. Bei der Residuensummation schicken die Prozesse ihre Residuen an ihre 'Eltern'. Diese addieren zum empfangenen Wert ihr Residuum und schicken die Summe an ihre Eltern etc. Der Prozessor an der Wurzel berechnet schließlich das Residuum und schickt das Resultat auf umgekehrtem Weg zurück.

Die oben beschriebene Technik ist optimal für sehr große Prozessoranzahlen und Netzwerke mit kleinen Latenzzeiten, also für die T3E. Für das Netz des Clusters ist diese Kommunikation problematisch, da die verschiedenen Ebenen nacheinander Daten verschicken, womit sich die hohe Latenzzeit der Karten addiert. Daher wurde dieser Kommunikationsteil durch direkte Kommunikation an den Wurzelprozessor ersetzt und teilweise zeitparallel mit weiteren Berechnungsschleifen innerhalb des Löser durchgeföhrt.

3.3.4 Kommunikationsbibliothek

Die Interprozesskommunikation kann entweder direkt über Sockets oder unter Zuhilfenahme von Bibliotheksunterroutinen programmiert werden. Eigene Messungen ergaben, daß das Einsparungspotential der direkten Socketprogrammierung relativ gering ist und daher in keinem Verhältnis zum Programmieraufwand steht. Außerdem sollte das Programm ohne grundlegende Änderungen am Code auf der T3E lauffähig bleiben, was mit Socket-Programmierung nicht möglich ist.

Als Bibliothek bieten sich PVM3 und MPI an. PVM3 [21] steht für **P**arallel **V**irtual **M**achine **V**ersion **3** und stellt einen de facto Standard für Kommunikationsbibliotheken dar. Die Originalversion des 3D Verfahrens wurde mit PVM3 parallelisiert. PVM3 ist public domain, also für jede Rechnerplattform verfügbar. Die Bibliothek enthält alle zur Realisierung obiger Kommunikationsaufgaben erforderlichen Funktionalitäten, die in Form von Unterprogrammen implementiert sind.

MPI (**M**essage **P**assing **I**nterface) [47] stellt ähnliche Funktionalitäten wie PVM3 zur Verfügung. Um die Leistungsfähigkeit beider Bibliotheken vergleichen zu können, wurden beide Bibliotheken zur Parallelisierung eingesetzt. Von den diversen MPI-Varianten wurde die frei verfügbare LAM- Implementierung [37] verwendet.

3.3.5 Effizienz der Parallelisierung

Zur Abschätzung der Nützlichkeit der zeitparallelen Kommunikation wurde zunächst das Originalprogramm mit PVM3 auf das Cluster portiert, was mit wenigen Änderungen am Programm möglich war. Daraufhin wurde die zeitparallele Kommunikation in PVM3 implementiert und anschließend diese Variante mit MPI parallelisiert.

Der Einsatz der zeitparallelen Kommunikation brachte eine Einsparung von über 20 % Rechenzeit bei Verwendung des Rechengitters für die Gasfilmdüse. Dieser sehr hohe Wert läßt sich wie folgt erklären. Das Rechengitter enthält teilweise viele sehr kleine Blöcke,

die gemeinsam auf einem Prozessor berechnet werden. Die Originalversion des Programms sieht für jeden Block eine eigene Kommunikation vor. Wenn nun zwölf Blöcke auf Prozessor 'A' berechnet werden und jeweils mit Prozessor 'B' kommunizieren, werden hierfür in der Originalversion 12 Kommunikationsschritte benötigt, das heißt die Latenzzeit der Karten tritt 12 Mal auf. Die Clusterversion sammelt zunächst sämtliche Kommunikationsschritte für zwei Prozessoren und verschickt dann alle Daten auf ein Mal, die Latenzzeit tritt dann nur ein Mal in Erscheinung.

Die Portierung auf MPI brachte eine weitere Zeiteinsparung von ca. 10 %. Vergleichsmessungen der Pack- Sende- und Entpackroutinen beider Bibliotheken ergaben ähnliche Werte, sodaß der Programmüberhang von MPI vermutlich etwas kleiner ist als der von PVM3.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß sich auch mit dem vergleichsweise schwachen Netzwerk beachtliche Rechenleistungen mit einem Cluster erzielen lassen. Als Kriterium für die Effizienz einer Parallelapplikation wird normalerweise der Zeitbedarf der Applikation auf einem Prozessor mit dem Zeitbedarf auf mehreren Prozessoren verglichen. Der Quotient der beiden Zeiten wird als Beschleunigung (engl.: Speed Up) bezeichnet und entspricht im Idealfall der Anzahl der eingesetzten Prozessoren. Da die Rechnungen mit dem 3D Verfahren nicht auf einen Prozessor paßten, wurde diese Kenngröße folgendermaßen bestimmt. Alle Prozessoren ermittelten ihren CPU-Zeitbedarf. Die für die Berechnung benötigte Zeit wurde durch die Summe der CPU-Zeiten dividiert. Bei Berechnung eines Problems mit ca. 600.000 Punkten auf 23 Prozessoren lag der so ermittelte 'Speed Up' bei ca. 17, was einer relativen Effizienz von ca. 75 % entspricht.

Eine höhere Auslastung der Rechner wäre durch Umorganisation der Kommunikation des Abbruchkriteriums möglich. Wenn das Residuum der Iteration 'N' erst nach Berechnung der Iteration 'N+1' abgefragt wird, kann die hierfür erforderliche Kommunikation auch komplett hinter der Rechnung versteckt werden. Mit dieser Veränderung würde die Parallelversion des Programms aber geringfügig andere Ergebnisse als die serielle Version produzieren. Da beide Programmversionen im Rahmen der Rechengenauigkeit in jeder Iteration identische Ergebnisse liefern sollen, wurden Optimierungen dieser Art nicht durchgeführt.

Als kritischer Punkt hat sich bei der Kommunikation die Latenzzeit der Netzwerkkarten herausgestellt. Daher muß bei der Parallelprogrammierung auf Clustern besonders darauf geachtet werden, Mehrfachkommunikationen zu vermeiden und die Kommunikation zeitparallel zur Berechnung durchzuführen. Die Auslastung des Netzwerkes lag bei allen Testrechnungen deutlich unter 30 %, sodaß die Bandbreite des Netzwerkes vollkommen ausreichend war. Diese Tatsache läßt auch die Vermutung zu, daß das 3D Verfahren auch auf deutlich größeren Clustern mit befriedigender Rechenleistung betrieben werden kann.

3.3.6 Aufbereitung der instationären Ergebnisse

Die charakteristischen Frequenzen einer instationären Strömung können mit der POD-Methode (**P**roper **O**rthogonal **D**ecomposition) berechnet werden. Hierzu wird eine Korrelationsmatrix aufgestellt. Die Elemente der (symmetrischen) Matrix ergeben sich aus dem Volumenintegral der Geschwindigkeitsfluktuationen zu verschiedenen Zeiten 'i' und 'j':

$$a_{ij} = \int u'(t_i)u'(t_j)dV. \quad (3.2)$$

Gl. 3.2 macht es erforderlich, daß zur Berechnung der Koeffizienten alle Geschwindigkeitsfelder des betrachteten Zeitraums verfügbar sind. Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix stellen den Energieanteil der einzelnen Moden dar, während eine Fourier-Transformation der Amplituden der Eigenwerte die zugehörigen Frequenzen liefert. Der Aussagewert der POD wächst mit der Anzahl der betrachteten Zeitschritte, deshalb sollten möglichst viele Zeitebenen berücksichtigt werden, was sich auf den Speicherbedarf der POD auswirkt (bei 600.000 Gitterpunkten und 500 Zeitschritten belegt allein der Betrag des Geschwindigkeitsvektors ca. 2,5 GB).

Aufgrund dieses hohen Speicherbedarfs wurde ein am Institut vorhandenes POD Verfahren an den Strömungslöser angepaßt parallelisiert. Während der Strömungsberechnung schreiben die Knoten des Clusters über eine bestimmte Anzahl von Zeitschritten das Geschwindigkeitsfeld von jedem Zeitschritt auf die lokale Festplatte. Das Programm zur Berechnung der POD läuft aus Kapazitätsgründen nach dem Strömungsprogramm und ist nach dem 'Master-Slave'-Schema aufgebaut: Auf einer Workstation wird das 'Masterprogramm' gestartet. Dieses startet auf allen Prozessoren, die für die Strömungsberechnung verwendet wurden, das 'Slaveprogramm'. Die Slaveprogramme lesen von der lokalen Festplatte die Geschwindigkeitsfelder der vorangegangenen Berechnung und berechnen ihren Teil der Koeffizientenmatrix. Alle Teilergebnisse werden an das Masterprogramm geschickt, das die Ergebnisse aufsummiert und die Eigenwerte und -vektoren berechnet. Diese werden wiederum an die Slaveprogramme verteilt, die dann die Amplituden der einzelnen Moden berechnen und wieder an den Masterprozess zurückschicken. Der Masterprozess summiert diese Daten auf. Die Daten können dann visualisiert werden, die charakteristischen Frequenzen werden über eine Fast-Fourier-Transformation bestimmt. Abb. 3.5 zeigt schematisch die Parallelisierung der POD für drei 'Slaves'. Da der Berechnungsaufwand zur Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren im Vergleich zum Berechnungsaufwand der Koeffizienten und Amplituden sehr klein ist, wurde diese Form der Parallelisierung gewählt. Aus Effizienzgründen lesen die Slaveprogramme zunächst alle Geschwindigkeitsfelder ein und berechnen dann die Koeffizienten. Die Maximalanzahl der Zeitschritte ist damit durch den Hauptspeicher der Berechnungs-PCs begrenzt. Es wäre auch denkbar, jeweils nur die zwei Zeitschritte '*i*' und '*j*' einzulesen und dann den Koeffizienten a_{ij} zu berechnen, womit praktisch keine Limitierung der Anzahl der Zeitschritte auftreten kann. Diese Methode würde aber die erforderlichen Einlesevorgänge von N Zeitschritten Mal I Punkten um den Faktor $N/2$ auf $\frac{N^2}{2} \cdot I$ erhöhen. Die Einlesezeit würde sich damit bei 500 Zeitschritten und ca. 30.000 Punkten/Prozessor von 12 Sekunden um den Faktor 250 auf ca. 50 Minuten erhöhen³. Da die Einlesevorgänge neben dem Zeitaufwand eine unnötige Belastung der Festplatten darstellen, wurde die oben geschilderte Methode implementiert und die Beschränkung auf eine bestimmte Anzahl von Zeitschritten in Kauf genommen.

3.4 Randbedingungen

Auf den Berandungen des Rechengebietes können entsprechend den Vorgaben aus dem Experiment folgende Randbedingungstypen eingestellt werden:

³hierbei wird angenommen, daß die Dauertransferrate der Festplatte bei 10 MB/s. liegt

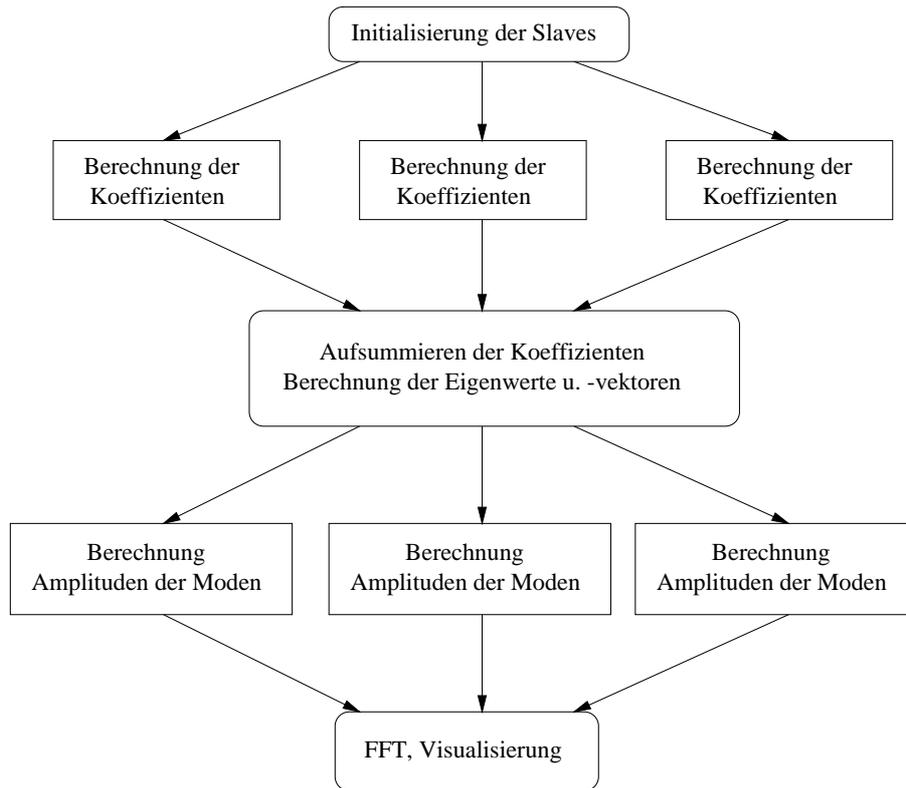


Abbildung 3.5: Parallelisierung der POD

Einströmrand: Alle Werte entlang dieser Ränder müssen vorgegeben werden. Die Werte für die Geschwindigkeiten werden hierbei meist direkt aus den ersten verfügbaren Profilen auf das Rechengitter interpoliert. Sollten keine Werte für die Radialgeschwindigkeit V vermessen worden sein, wird diese zu Null angenommen. Die Komponenten des Spannungstensors werden analog bestimmt. Falls, wie beim Experiment von Johnson und Roback, nicht alle Schubspannungskomponenten vermessen wurden, werden die fehlenden Komponenten durch Beziehungen der Wirbelviskositätsannahme berechnet. Alternativ wurden die Berechnungen mit zu Null gesetzten Schubspannungsverteilungen durchgeführt, die Ergebnisse waren in beiden Fällen praktisch gleich.

Die Dissipationsrate ϵ wird in allen Fällen analog zu [51] bestimmt:

$$\epsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}; l = \frac{1}{5} \cdot R.$$

mit R als Düsenradius.

Ausströmrand: Die hier eingesetzte Nullgradientenbedingung besagt, daß alle Gradienten in Strömungsrichtung verschwinden müssen, d.h.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

mit $\Phi = U, V, W, k, \epsilon, u'^2 \dots$ Es ist offensichtlich, daß diese Randbedingung nur eingesetzt werden kann, wenn in Hauptströmungsrichtung tatsächlich keinen nennenswerten Gradienten mehr bestehen. Alternativ kann am Ausströmrand der Druck vorgegeben werden. Die Geschwindigkeiten ergeben sich dann aus der Druckkorrekturgleichung vgl. [79].

Symmetrie: Über diese Berandung werden keine Flüsse zugelassen, die Geschwindigkeitskomponenten normal zur Fläche werden also zu Null gesetzt. Für die Normalspannungen werden Nullgradientenrandbedingungen eingesetzt, die Schubspannungen müssen aus Symmetriegründen an der Achse zu Null werden.

Wand: An allen festen Berandungen wird das logarithmische Wandgesetz [40] eingesetzt. Dies setzt voraus, daß sich der erste Feldpunkt im vollturbulenten Bereich der Strömung befindet, was der Fall ist, wenn der dimensionslose Wandabstand $y^+ > 12$ ist. Als Obergrenze für den y^+ -Wert des ersten Feldpunktes werden Werte von ≈ 300 angegeben. Bei den Berechnungen stellte sich heraus, daß das Verfahren am Besten konvergiert, wenn an allen Wänden y^+ -Werte kleiner 20 erreicht werden. Bei den Berechnungen wurde der dimensionslose Wandabstand kontrolliert und das Gitter korrigiert, wenn die y^+ -Werte deutlich größer als 20 werden.

4 Ergebnisse

Um die Qualität der in den letzten Abschnitten vorgestellten Modelle beurteilen zu können, sind vergleichende Berechnungen erforderlich. Hierzu werden im Allgemeinen Experimente nachgerechnet.

Zwei wichtige Kenngrößen spielen bei allen Experimenten eine wichtige Rolle, nämlich die Reynoldszahl und die Drallzahl. Die Reynoldszahl $Re = \frac{U \cdot L}{\nu_l}$ wird aus der mittleren Geschwindigkeit in der Düse, dem Düsendurchmesser und der Viskosität des Mediums gebildet und liegt für alle Experimente bei $\approx 10^5$. Die Drallzahl ist definiert als das Verhältnis von Drehimpulsstrom \dot{D} und Axialimpulsstrom \dot{I} mal einem charakteristischen Radius R [28]. Sie ist eine Kennzahl für die relative Stärke der Fliehkräfte zu den anderen Trägheitskräften.

$$S_o = \frac{\dot{D}}{\dot{I} \cdot R} \quad (4.1)$$

4.1 Auswahl der Experimente

Die Experimente, mit denen das rotationssymmetrische Verfahren validiert werden soll, müssen rotationssymmetrische Lösungen enthalten. Dies ist auch bei Vorgabe einer rotationssymmetrischen Geometrie und rotationssymmetrischer Randbedingungen nicht a priori gewährleistet, da turbulente Strömungen im Allgemeinen instationär und dreidimensional sind. Für bestimmte Konfigurationen ist der Einfluß der Dreidimensionalität jedoch sehr klein, sodaß diese Strömungen rotationssymmetrische Lösungen aufweisen. Zusätzlich sind diese Strömungen im Mittel zumeist stationär, es ist ausreichend für solche Strömungen eine stationäre Lösung zu bestimmen.

Für die Validierung des rotationssymmetrischen Verfahrens wurden schließlich vier Experimente ausgewählt, die alle im Reynoldszahlbereich von ca. 10^5 liegen. Die Drallzahl variiert zwischen Null und ca. eins, wobei je ein Experiment über keinen Drall (Drallzahl: 0), geringen Drall (Drallzahl: ca. 0.2), moderaten Drall (Drallzahl: ca. 0.5) und starken Drall (Drallzahl: ca. 1.) verfügt.

Die 3D Grobstruktursimulation wurde an einem Experiment mit starkem Drall validiert. Es weist Instationaritäten auf, die eine Berechnung mit Verfahren, die auf der Reynolds'schen Mittelung beruhen, nicht ermöglichen.

Um einen Eindruck über die Experimente zu vermitteln, werden diese im nächsten Abschnitt zusammen mit einigen Bemerkungen über die Meßtechnik, die Lage und Anzahl der Meßebenen etc. beschrieben.

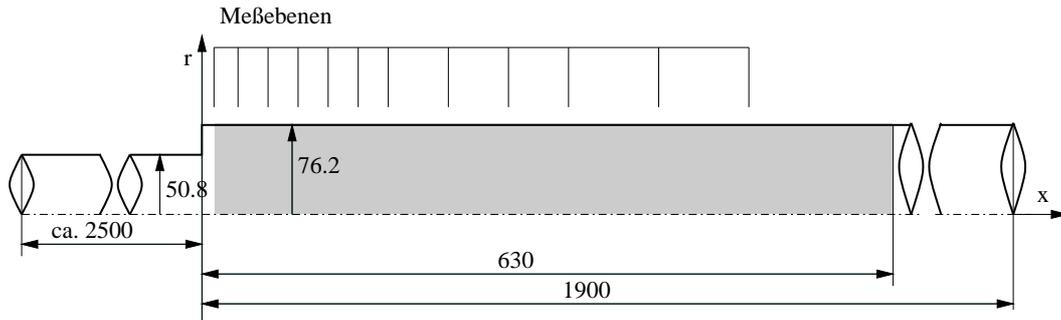


Abbildung 4.1: Geometrie des Experiments von Ahmed

4.1.1 Stationäre rotationssymmetrische Strömungen

4.1.1.1 Kein Drall

Das erste Experiment wurde von Ahmed [3] vermessen. Die Messungen wurden an einer plötzlichen Rohrerweiterung durchgeführt. Das Fluid (Luft) strömt von links nach rechts durch eine plötzliche Rohrerweiterung (Flächenverhältnis der Rohrquerschnitte: 2.25). Das Einströmrohr hat eine Länge von ca. 100 Stufenhöhen, das Abströmrohr ist ca. 75 Stufenhöhen lang. Messungen liegen für die Geschwindigkeitskomponenten, für die Normalspannungen und für $u'v'$ in 12 Schnitten zwischen 0.38 und 18 Stufenhöhen stromab der Erweiterung vor. Alle Messungen wurden mit einer Zwei-Komponenten Laser-Doppler-Anemometrie Anlage durchgeführt. Die gemessenen Daten sind in die Ercoftac Datenbank aufgenommen und dort über das Internet abrufbar¹.

Abb. (4.1) zeigt eine Skizze mit den Hauptabmessungen, das Rechengebiet ist grau eingefärbt. die Reynoldszahl bezogen auf den Rohrdurchmesser am Einlaß ergibt sich zu $1.25 \cdot 10^5$.

Die Markierungen in Abb. 4.1 deuten die achsialen Positionen der Meßebenen an. Die erste Meßebene befindet sich kurz nach der Erweiterung ($x/H=0.38$), die letzte bei $x/H=18$.

Durch die Aufnahme dieses Experiments in die Ercoftac Datenbank ist die Qualität der Messungen garantiert. Da außerdem alle anderen Parameter (rotationssymmetrische Lösung, Reynolds- und Drallzahl liegen im geforderten Bereich, Verfügbarkeit aller wichtigen Meßgrößen in digitaler Form) mit den Anforderungen übereinstimmen, wurde dies Experiment für die Validierung ausgewählt.

Probleme bezüglich der Eignung dieses Experiments als Vergleichsfall sind nicht zu erwarten.

4.1.1.2 Geringer Drall

Das zweite Experiment, eine Diffusorströmung mit Drall, wurde von Clausen vermessen [11]. Das Fluid (Luft) strömt von links nach rechts zunächst durch einen Drallerzeuger, dann durch den Diffusor und schließlich ins Freie. Der Öffnungswinkel des Diffusors beträgt 20 Grad, das Flächenverhältnis wird mit 2,84 angegeben. Vor dem Diffusor kann ein Teil des Zuführungsrohres um seine Längsachse rotiert werden. In dem Rohr befindet sich ein Gleichrichter mit Honigwabenstruktur. Eine Rotation des Rohres prägt der Strömung

¹<http://fluindigo.mech.surrey.ac.uk/account.html>

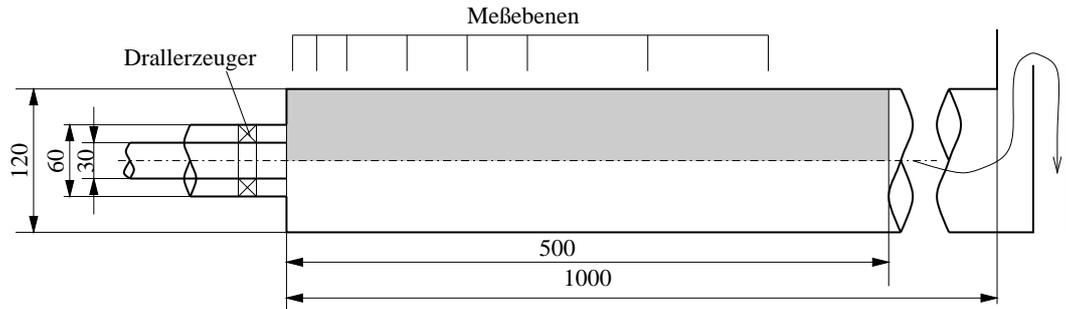


Abbildung 4.3: Geometrie des Experiments Johnson und Roback (Alle Längenangaben in [mm])

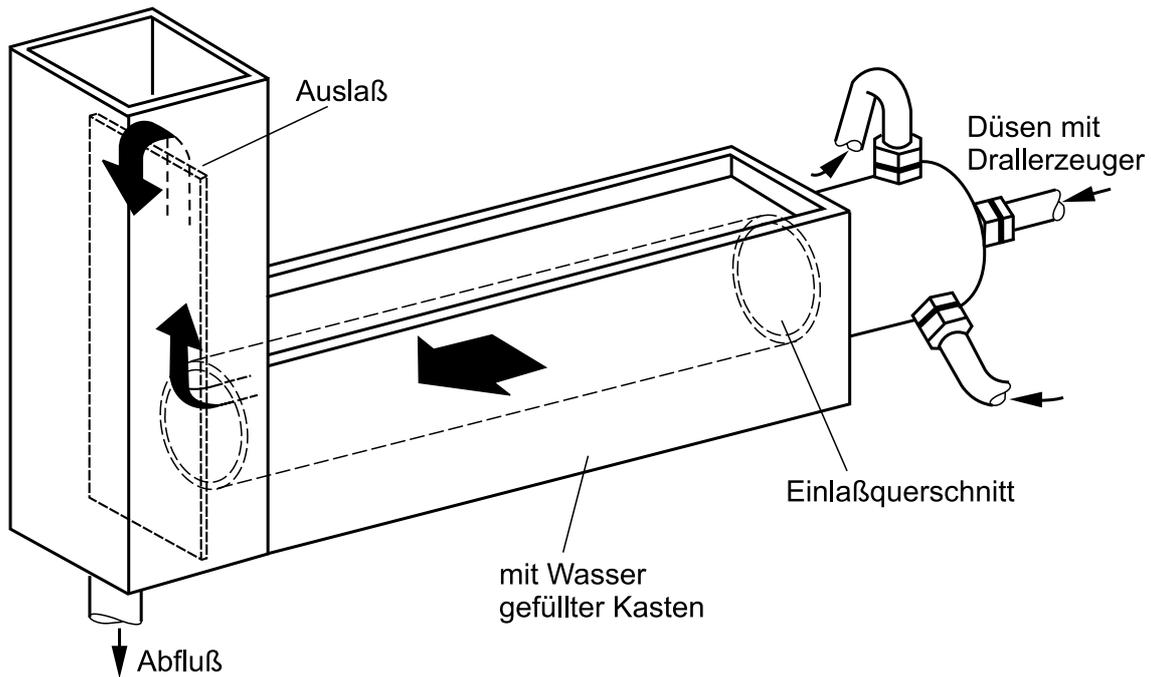


Abbildung 4.4: Originalgeometrie des Experiments von Johnson und Roback

Rezirkulationsgebiet auf der Symmetrieachse zu sorgen ('vortex breakdown'). Bei dem verwendeten Fluid handelt es sich um Wasser, das bei einer Temperatur von 20 Grad Celsius durch die Düsen strömt. Die Reynoldszahl bezogen auf die jeweiligen Düsenquerschnitte beträgt 15900 für den Kern- und 47500 für den Mantelstrahl. Die Autoren geben für Brennkammern im Strahltriebwerken einen Reynoldszahlbereich von 10^4 bis 10^6 an. Hierbei steht die Untergrenze für ein unbelastetes Triebwerk im Leerlauf, die Obergrenze wird bei Vollast (Start des Flugzeuges) erreicht. Die Autoren folgern hieraus, daß die Strömungsbedingungen ihres Testfalls repräsentativ für Zustände in Flugzeugtriebwerksbrennkammern sind. Die Geometrie ist mit den Hauptabmessungen in Abb. 4.3 beschrieben. Die senkrechten Striche in Abb. 4.3 deuten wieder die Lage der Meßebenen an. Die erste Meßebene befindet sich kurz hinter der Düse ($x=5$ mm), die letzte bei $x=406$ mm. Alle Messungen wurden mit einer Zwei-Komponenten LDA-Anlage durchgeführt.

Die Abströmung des Fluids kann bei diesem Experiment ein Problem ergeben. In Abb. 4.4 ist die Originalkonfiguration des Experiments noch einmal dargestellt. Das Fluid

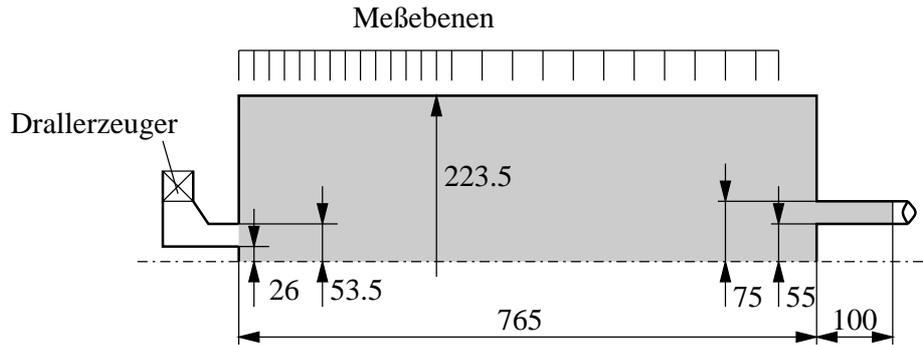


Abbildung 4.5: Geometrie des Experiments von Holzäpfel (Alle Längenangaben in [mm])

strömt durch den Einlaßquerschnitt in die Kammer. Der rechteckige Kasten um die zylindrische Teststrecke war bei Messungen mit Wasser gefüllt, um Ablenkungen der Laserstrahlen zu minimieren. Nach der ca. 1 m langen Teststrecke fließt das Wasser in einen rechteckigen Kasten. Dieser ist durch ein Wehr zweigeteilt. Das Fluid überströmt das Wehr und gelangt schließlich durch den Abfluß in die Kanalisation bzw. für einen weiteren Durchlauf zum Drallerzeuger. Diese Abströmung kann einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Geschwindigkeitsprofile stromauf haben. Hierauf wird in Abschnitt 4.2 noch detaillierter eingegangen.

4.1.1.4 Starker Drall

Die Messungen zu diesem Experiment, die mit einer Hitzdrahtsonde bestehend aus fünf Drähten durchgeführt wurden, stammen von Holzäpfel [31]. Das Fluid (Luft) strömt von links nach rechts durch einen Drallerzeuger und einen Ringspalt in die zylindrische Modellbrennkammer (vgl. Abb. 4.5). Die Umfangskomponente wird mit einem 'Movable blocks'-Drallerzeuger generiert [43]. Mit diese Drallerzeugern kann die Drallzahl in einem weiten Bereich variiert werden. Holzäpfel hat Messungen bei zwei Drallzahlen durchgeführt ($S=0.4$ und $S=0.95$).

Am rechten Rand der Modellbrennkammer befindet sich ein weiterer Ringspalt, durch den das Fluid achsial ausströmt. Der Übergang von Ringspalt zur Brennkammer entspricht einer plötzliche Rohrerweiterung, wobei diese ein sehr großes Flächenverhältnis aufweist (Brennkammerquerschnitt / Einströmquerschnitt >20). Die plötzliche Erweiterung erzeugt zusammen mit der Drallkomponente ein Wirbelaufplatzen (vortex breakdown) mit Ausbildung eines Rezirkulationsgebietes. Der Ringspalt am Auslass sollte eine Präzession der Wirbelachse unterdrücken. Holzäpfel beschreibt, daß bei früheren Messungen mit einem unverblochten achsialen Auslass ein von ihm mit 'Precessing Vortex Core (PVC)' bezeichnetes Phänomen auftrat. Dieser instationäre Effekt konnte durch den Ringspaltauslass vermindert werden, ganz unterdrückt wurde er jedoch nicht. Die Form des Auslasses unterbindet durch die drastische Querschnittsverminderung (Flächenverhältnis ≈ 20) Rückströmgebiete im Auslass, was die numerische Modellierung der Auslassrandbedingungen als Nullgradientenrandbedingung ermöglicht.

Abb. (4.5) zeigt eine Skizze mit den Hauptabmessungen. Das Rechengebiet ist grau eingefärbt.

Die Markierungen in Abb. 4.5 deuten wie bei den vorigen Strömungen die achsialen

Positionen der Meßebenen an. Die erste Meßebene befindet sich am Übergang Ringspalt-Kammer ($x=0$), die letzte bei $x=710\text{mm}$.

Das Experiment wurde für die Validierung mit rotationssymmetrischen Verfahren ausgelegt. Dennoch beschreibt Holzäpfel 3D Effekte, die sich jedoch nur auf den achsnahen Bereich erstrecken.

4.1.2 Instationäre dreidimensionale Strömung

Das Experiment dieses Abschnitts wurden mit dem 3D Verfahren und dem Feingittermodell berechnet. Außer auf das Experiment wird auf die im Vergleich zum rotationssymmetrischen Verfahren wesentlich aufwendigere Gittergenerierung eingegangen.

4.1.2.1 Erzeugung der 3D Gitter

Das 3D Verfahren benötigt neben den Geometrieinformationen zusätzliche Eingabedaten (Topologie, Randbedingungen etc.). Die Erzeugung dieser Informationen geschieht in mehreren Schritten, die nachfolgend kurz beschrieben werden.

Zunächst wird das Rechengebiet durch einzelne 3D Blöcke diskretisiert. Diese Blöcke entstehen durch Transformation bzw. Rotation von 2D Flächen. Die Blöcke werden dann von einem Präprozessor [8] eingelesen. Der Präprozessor findet automatisch Blockgrenzen und erstellt die Gittertopologie. Außerdem werden über eine grafische Benutzeroberfläche die Randbedingungen belegt. Die Ausgabedaten des Präprozessors werden zusammen mit Informationen für die Parallelisierung von einem zweiten Programm gelesen, das sämtliche Eingabedateien für das 3D Verfahren bereitstellt. In diese Dateien werden dann unter anderem die Werte für die Einströmränder eingetragen.

Neben den Eingabedaten erzeugt das Programm auch eine Parameterdatei, in der sämtliche Dimensionierungen des Programms eingetragen sind. Das 3D Verfahren ist in FORTRAN77 geschrieben und benötigt diese Informationen daher zum Zeitpunkt der Übersetzung des Programmes.

4.1.2.2 Starker Drall

Das Experiment wurde von Lehmann mit Laser-Doppler-Anemometrie vermessen [41]. Wie bei den anderen Experimenten handelt es sich um eine eingeschlossene Strömung. Das Fluid (Luft) strömt von links nach rechts durch die Drallerzeuger in die Brennkammer (vgl. Abb. 4.6²). Das Flächenverhältnis Brennkammer / Düse beträgt 16. Weiter stromab verengt sich der Brennkammerquerschnitt bis zur Ausströmebene durch ein Kreissegment auf etwa die Hälfte. Die beiden Drallerzeuger erlauben verschiedene Drallkonfigurationen. Die vorliegenden Daten wurden im Gleichdrallmodus erzeugt, das heißt beide Drallerzeuger haben dieselbe Drehrichtung. Die auf den Düsenquerschnitt bezogene Reynoldszahl liegt mit $Re \approx 10^5$ im Bereich der vorigen Testfälle. Diese Reynoldszahl ist typisch für den Betrieb einer Brennkammer in Strahltriebwerken.

Abb. 4.6 zeigt eine Skizze mit den Hauptabmessungen. Die senkrechten Striche in der Abbildung deuten wieder die Lage der Meßschnitte an, das Rechengebiet ist grau eingefärbt.

²Der experimentelle Versuchsaufbau ist vertikal, die Luft strömt dort von unten nach oben

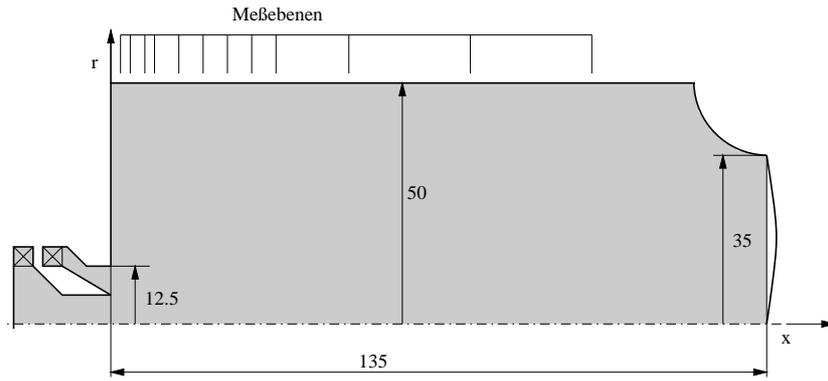


Abbildung 4.6: Geometrie des Experiments von Lehmann (Alle Längenangaben in [mm])

Die Strömungssituation in der Düse zeigt schematisch Abb. 4.7. Die Hauptmassenströme fließen durch die Drallerzeuger (a) und (b) in die Kammer. (c) symbolisiert den Gastrom, der bei den Experimenten ohne Verbrennung durch Luft ersetzt wurde. Das Experiment verfügt also über drei Einlaßbereiche (zwei Drallerzeuger, eine Gaszuführung). Aufgrund der dreidimensionalen Instationaritäten konnte mit dem rotationssymmetri-

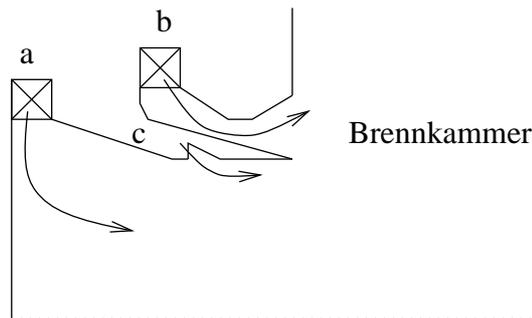


Abbildung 4.7: Strömungsverlauf innerhalb der Düse des Experiments von Lehmann (schematisch)

schen Verfahren keine konvergierte Lösung erzeugt werden. Daher wurde ausgehend von Abb. 4.6 ein 3D- Gitter für die Brennkammer entworfen.

Rechengitter Die Messungen zeigten, daß die Instationaritäten der Strömung auch in der Düse bestehen. Bei der Rechnung sollte aber von stationären Einströmrandbedingungen ausgegangen werden; der Einströmquerschnitt mußte also wenigstens in den Düsenanfang gelegt werden. Da hier keinerlei Messungen über die Drallverteilung etc. gemacht wurden (es gibt keinen optischen Zugang in die Düsen), wurde die gesamte Düse inklusive der Drallerzeuger modelliert. Die Einströmgeschwindigkeiten können dann über die gemessenen Teilvolumenströme ermittelt werden, wobei am Eintritt der Einströmkanäle jeweils Blockprofile für die Geschwindigkeiten angenommen werden. Die Reynoldszahl bezogen auf den Einströmquerschnitt liegt bei ca. 5.000. Abb. 4.8 zeigt das komplette Rechenggebiet im Überblick. Die Einströmung erfolgt über zwei gleichsinnige Drallerzeuger, der hintere verfügt über acht Einströmkanäle, der vordere über zwölf. Das Fluid strömt vom vorderen Drallerzeuger durch eine Ringspaltdüse direkt in die Brennkammer, während das Fluid,

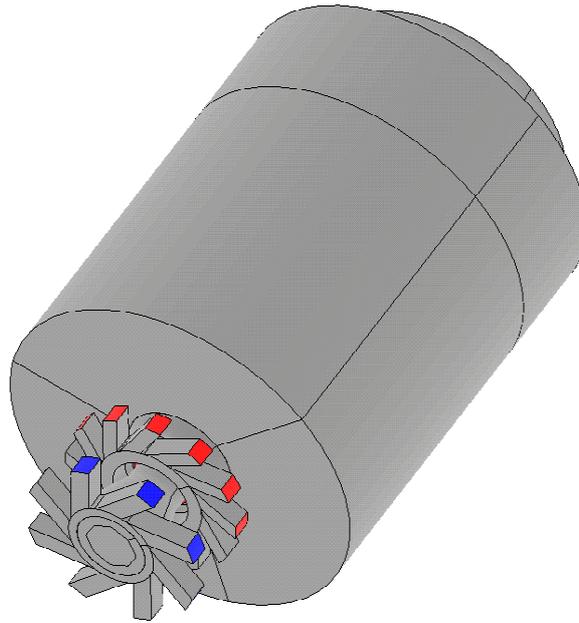


Abbildung 4.8: Gesamtansicht des Rechengebiets

das durch den hinteren Drallerzeuger strömt zunächst durch einen Konus fließt, sich dann mit dem ringförmig eingedüsten Brenngas mischt (bei den Messungen wurde anstelle von Gas Luft verwendet) und schließlich in die Brennkammer einströmt. Die rotations-symmetrischen Bauteile des Gitters werden mit O-Gittern erzeugt, die in Achsenrichtung gestreckt werden. Das Gebiet um die Symmetrieachse wird hierbei mit einem H-Gitter erzeugt, um dieses Gitter werden dann die O-Gitter gelegt. Durch diese Technik werden Diskontinuitäten durch verschwindende Volumina auf der Achse verhindert.

Die Generierung der einzelnen Elemente des Gitters wird in den nachfolgenden Abschnitten kurz beschrieben.

Drallerzeuger Abb. 4.9 zeigt Schnitte des Gitters jeweils in Höhe der beiden Drallerzeuger. Das 3D-Gitter wurde durch Streckung in Z-Richtung erzeugt. Die Diskretisierung der inneren Düse erfolgt wie beim Experiment von Johnson und Roback mit einem H- und zwei O-Gittern. Das innere der beiden konzentrischen Gitter hat in Umfangsrichtung wieder halb soviel Zellen wie das äußere. In Abb. 4.10 sind die Oberflächengitter der komplexen Geometrie von Drallerzeuger und Düse dargestellt. Um die Geometrie der Düsen besser erkennen zu können wurden einige Kanäle der Drallerzeuger nicht dargestellt.

Brennkammer Die Modellbrennkammer besteht aus einem zylindrischen Rohr, an dessen Ende eine Verengung angebracht ist, die den Austrittsquerschnitt etwa auf die Hälfte des Kammerquerschnitts reduziert. Die Diskretisierung der Kammer erfolgte im inneren Bereich über ein H-Gitter, um das O-Gitter gelegt werden. Das äußere O-Gitter hat in Umfangsrichtung die doppelte Zellanzahl des inneren Gitters (vgl. Abb. 4.11), um die Volumen der Zellen über den Radius nicht zu unterschiedlich werden zu lassen.

Die äußere Kontur wurde mit 2D-Gittern in der y-z Ebene erzeugt, die dann um die Symmetrieachse rotiert wurden. Abb. 4.12 zeigt einen Längsschnitt durch die Kammer

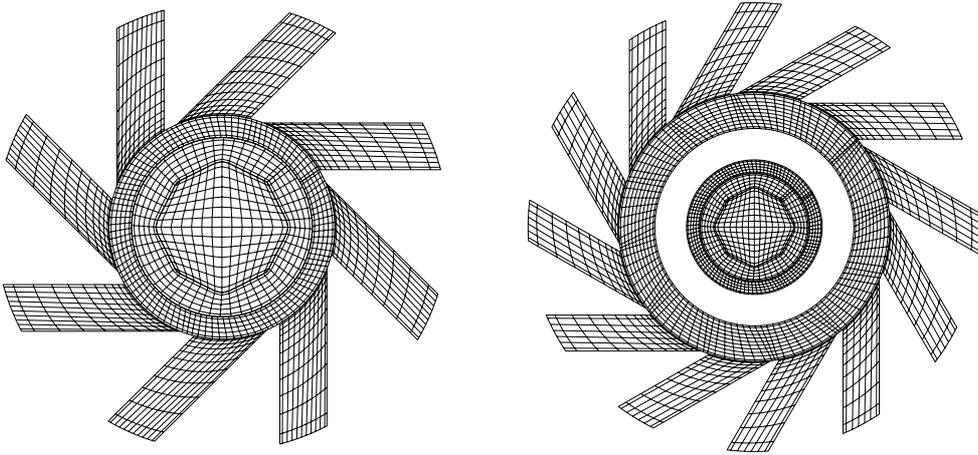


Abbildung 4.9: 2D-Ansicht des ersten (links) und zweiten Drallgenerators (rechts)

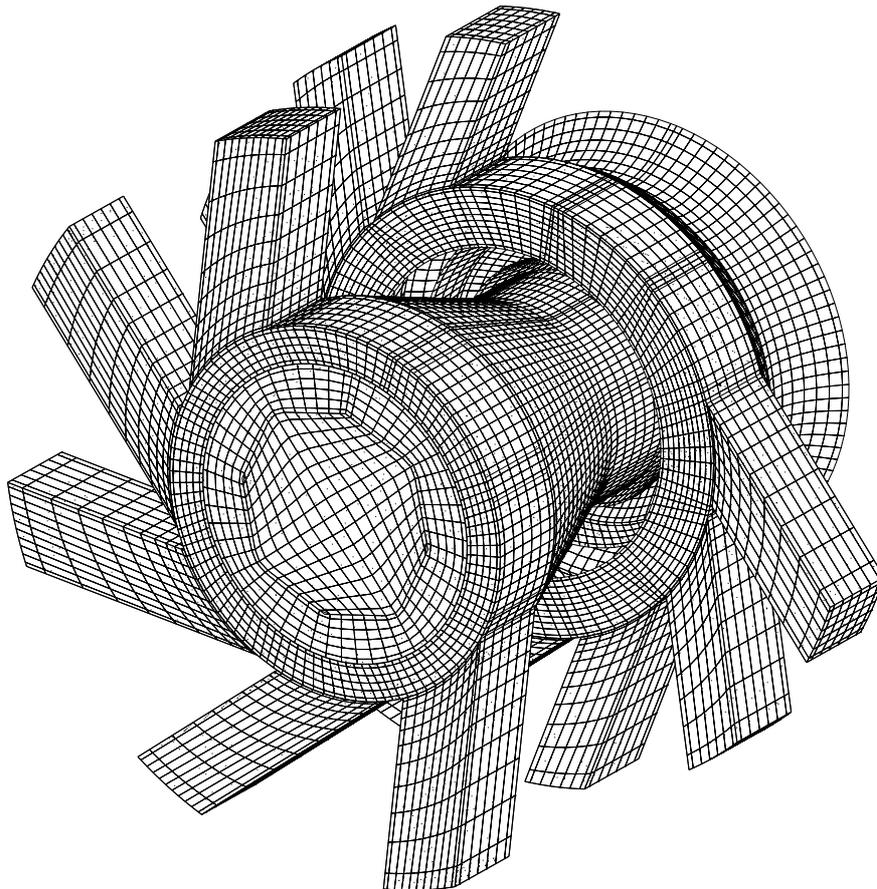


Abbildung 4.10: 3D-Oberflächengitter der Drallerzeuger und der Düse (ohne Brennkammer)

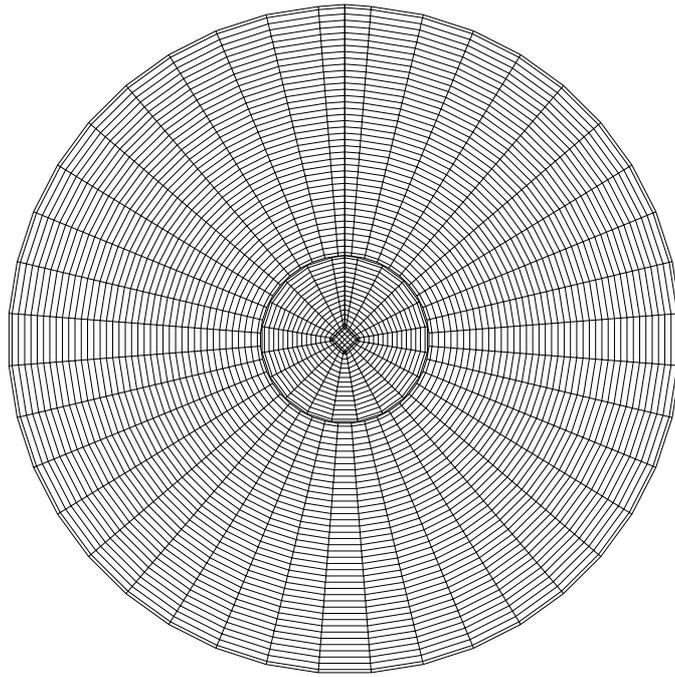


Abbildung 4.11: Schnitt durch das Rechengitter im Bereich der Brennkammer (Experiment von Lehmann, dargestellt sind die Zellzentren)

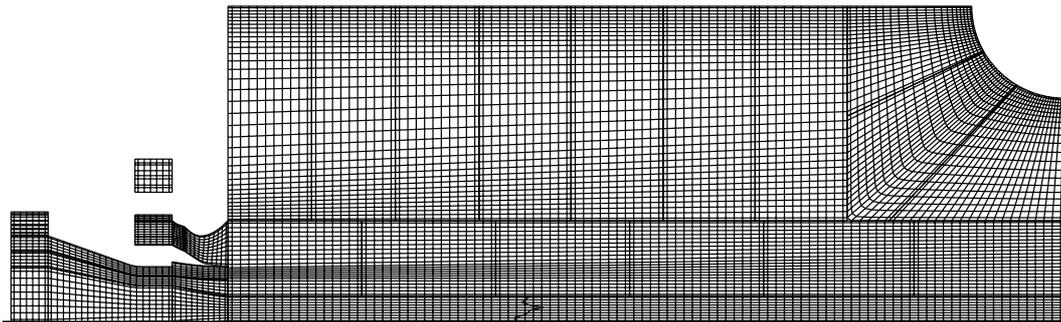


Abbildung 4.12: Schnitt des Rechengitters durch Düse und Kammer (obere Hälfte)

und die Düse.

Parallelisierung Das aus ca. 600.000 Punkten bestehende Rechengitter wurde auf 23 Prozessoren aufgeteilt. Um eine möglichst gleichförmige Auslastung aller Prozessoren zu gewährleisten, wurde das Gitter in 52 Blöcke zerlegt. Der Zeitschritt der Berechnung mußte wegen der hochfrequenten Instationarität von ca. 2 kHz sehr klein gewählt werden. Da die Periode der zu erwartenden Frequenz mit wenigstens zehn Zeitschritten aufgelöst werden sollte, wurde der Zeitschritt auf $4 \cdot 10^{-5}$ s eingestellt.

4.2 Einflüsse auf die Berechnung und die Ergebnisqualität

Zur sicheren Beurteilung eines Berechnungsverfahrens muß sichergestellt sein, daß die Rechnung reproduzierbare Resultate erzeugt. Hierzu hat die Lösung gitterunabhängig zu sein. Eine Rechnung gilt als gitterunabhängig, wenn sich die Lösung bei Verfeinerung des Gitters nicht mehr ändert. Für das Experiment von Holzäpfel wird im nächsten Abschnitt die Gitterproblematik diskutiert (analoge Vorgehensweisen wurden für sämtliche Berechnungen durchgeführt). Eng mit der Gitterproblematik sind Konvektionsschemata höherer Ordnung verbunden. Durch den Einsatz dieser Verfahren kann Gitterunabhängigkeit wesentlich früher als mit Upwindverfahren erreicht werden. Der mögliche Einsatz dieser Schemata wird daher zusammen mit der Gitterproblematik im nächsten Abschnitt diskutiert.

Neben diesen rein numerischen Gesichtspunkten kann die Wahl des Einströmquerschnitts sowie die Bestimmung der Dissipationsrate einen großen Einfluß auf die Ergebnisqualität haben

4.2.1 Einfluß des Rechengitters und des Konvektionsschemas

An ein Rechengitter werden eine Vielzahl von Anforderungen gestellt. Dazu gehören:

Auflösung der Geometrie: Die Geometrie der Modellbrennkammer und des Auslasses läßt sich schlecht auf ein logisches Rechteck abbilden. Daher wurde das Gitter aus zwei Blöcken aufgebaut: der erste Block diskretisiert die Kammer, während der zweite Block den Ringspaltauslass diskretisiert; die Geometrie wurde damit genau erfaßt. An der Schnittstelle werden alle erforderlichen Größen zwischen den Blöcken ausgetauscht.

Orthogonalität der Zellen: Die Zellen des Rechengitters sollten möglichst orthogonal sein, da bei stark verzerrten Zellen Approximationsfehler auftreten können. Bei der einfachen Form der Kammer ergeben sich solche Probleme nicht, die Zellen sind überall praktisch orthogonal.

Seitenverhältnis der Zellen: Bei Zellen mit sehr großem Seitenverhältnis (Länge/Breite) können numerische Fehler bei der Berechnung der Flüsse auftreten. Bei dem letztlich verwendeten Gitter ist das maximal auftretende Seitenverhältnis ≈ 50 . Dies ist ein moderater Wert, obige Rundungsfehler sind daher nicht zu erwarten.

Auflösen der Wandgrenzschicht: Das Berechnungsverfahren löst die Wandgrenzschicht nicht auf, sondern benutzt das logarithmische Wandgesetz. Der dimensionslose Wandabstand zwischen Wand und erster Zelle (der dimensionslose Wandabstand wird allgemein mit y^+ bezeichnet) sollte im Bereich zwischen ca. 10 und 500 liegen. Testrechnungen zeigten, daß das Verfahren besser konvergiert, wenn der Abstand der ersten Zelle möglichst gering ist, $\rightarrow y^+ \approx 10$. Alle Rechengitter wurden daher zu den Wänden hin entsprechend verdichtet.

Nr	Punkte	Bemerkung
1	5.000	-Gitter war zu grob
2	10.000	-letztlich verwendetes Gitter
3	15.000	hohe achsiale Auflösung am Einlaß
4	20.000	erhöhte achsiale Auflösung
5	30.000	feinstes gerechnetes Gitter
6	15.000	hohe radiale Auflösung
7	10.000	wie 2, mit Upwind
8	30.000	wie 5, mit Upwind

Tabelle 4.1: Verwendete Rechengitter (Punktanzahl ohne Ringspaltauslass)

Räumliche Diskretisierung: Das Rechengitter muß fein genug sein, um z.B. Gradienten in der Strömung auflösen zu können. Da andererseits eine unnötig feine Diskretisierung keine Verbesserung der Lösung mit sich bringt, aber sowohl die Rechenzeit pro Iteration als auch die Anzahl der erforderlichen Iterationen erhöht, ergibt sich ein Optimum für die Anzahl und Verteilung der Zellen. Dies Optimum kann in der Regel nur empirisch bestimmt werden, indem man die Punktanzahl des Gitters sukzessive erhöht und die auf diesem Gitter ermittelte Lösung mit den Lösungen der groberen Gitter vergleicht. Sobald sich die Lösung auf einem feinerem Gitter nicht mehr signifikant ändert, spricht man von einer *gitterunabhängigen* Lösung. Diese Technik wird im weiteren verwendet.

Ausgehend von einem relativ groben Gitter wurden Rechnungen auf verfeinerten Rechengittern durchgeführt und untereinander verglichen. Tabelle 4.1 enthält die Punktanzahlen der einzelnen Rechengitter. Die Rechnungen wurden mit einem Konvektionsschema höherer Ordnung durchgeführt (vgl. Abschnitt 3.1, Schema 'NEW'). Zusätzlich wurden Berechnungen mit dem Upwindverfahren durchgeführt. Für alle Berechnungen wurde das lineare Reynoldsspannungsmodell eingesetzt.

Auf alle Rechengitter wurden die Einströmrandbedingungen aus [31] interpoliert, alle anderen Rechnungsparameter wurden konstant gehalten. Die Rechnungen galten als konvergiert, wenn das maximale Residuum der berechneten Größen ein Limit von 10^{-5} unterschreitet. Abb. 4.13 zeigt einen Vergleich aller berechneten Strömungen für die Achsialgeschwindigkeit U . An der gezeigten Position ($x=140$ mm) waren die Abweichungen zwischen den Rechnungen am größten. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Rechnungen '2' bis '6' kaum Unterschiede zeigen, während die Lösungen von '1' und '7' stark von den anderen abweichen. Demnach reicht das grobe Gitter '1' nicht aus, die Strömung ausreichend zu diskretisieren. Die Lösungen auf den anderen Gittern unterscheiden sich kaum voneinander, was dafür spricht, daß ca. 10.000 Punkte ausreichend sind, eine gitterunabhängige Lösung für das Experiment zu erzeugen. Mit den Gittern '3' und '4' wurde die achsiale Auflösung gegenüber Gitter '2' erhöht, Gitter '6' hatte eine erhöhte radiale Auflösung und Gitter '5' war sowohl radial als auch achsial feiner als Gitter '2'.

Auf Gitter '2' wurde eine weitere Rechnung mit dem Upwind-Verfahren durchgeführt und in Abb. 4.13 mit Fall '7' bezeichnet. Die Ergebnisse dieser Rechnung weichen noch stärker von den gitterunabhängigen Lösungen ab. Demnach hat die Wahl eines geeigneten Konvektionsschemas einen erheblichen Einfluß auf die Gitterabhängigkeit der Lösung. Fall '8' zeigt hierzu eine Upwind-Rechnung auf dem feinsten gerechneten Gitter. Diese Lösung zeigt geringere Abweichungen als Fall '7', sie unterscheidet sich aber immer noch

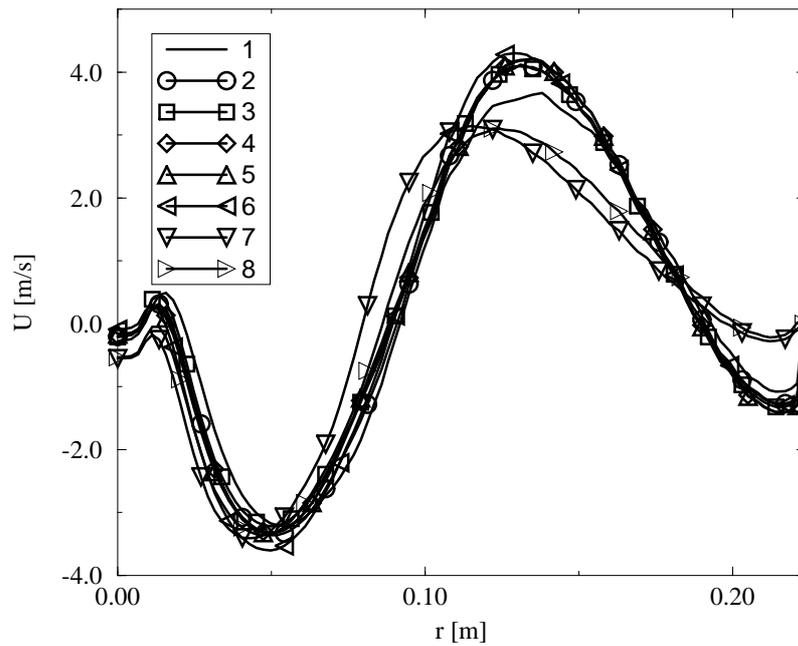


Abbildung 4.13: Gittereinfluß auf U ($x=140$ mm) Legende vgl. Tab. 4.1 (Experiment von Holzäpfel)

von den als gitterunabhängig bezeichneten Fällen '2'-'6'. Da bei den feineren Gittern die erforderliche Rechenzeit stark ansteigt, eine Verbesserung der Lösung bei Verwendung eines Konvektionsschemas höherer Ordnung jedoch nicht eintrat, wurde für die weiteren Validierungen ein Gitter mit 10.000 Punkten verwendet (Auf dem 10.000-Punkte-Gitter werden mit einem linearen Modell ca. 25 Stunden CPU-Zeit verbraucht; auf dem feinsten Gitter benötigt man ca. 130 Stunden je auf einer CRAY YMP-EL gerechnet).

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Wahl des Konvektionsschemas entscheidend für die Gitterunabhängigkeit der Lösung ist. Mit dem Upwindverfahren, wären noch feinere als die hier gerechneten Gitter erforderlich, um Gitterunabhängigkeit zu erreichen. Da die dann erforderlichen Rechenzeiten mit weit über 200 Stunden kaum mehr vertretbar sind, sollten Berechnungsverfahren unbedingt mit einem Konvektionsschema mindestens zweiter Ordnung arbeiten, wobei auch mit diesen Verfahren bei der vorliegenden Strömung vergleichsweise feine Rechengitter erforderlich zu sein scheinen. Die axiale Auflösung liegt bei dem letztlich verwendeten Gitter zw. 0.5 und 20mm die radiale zw. 0.5 und 7mm.

4.2.2 Einfluß der Einströmrandbedingung

4.2.2.1 Geometrie

Der Einströmrand einer Berechnung sollte soweit wie möglich mit dem Experiment übereinstimmen, da Abweichungen dieser Randbedingung einen erheblichen Einfluß auf die Lösung haben können. Für das Experiment von Holzäpfel scheint der Übergang von Ringspalt zur Kammer ein naheliegender Einströmrand zu sein. Da in diesem Querschnitt auch

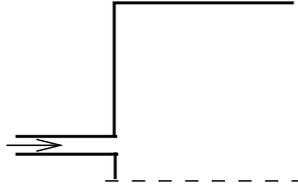


Abbildung 4.14: Ringspalt mit axialer Zuströmung (Experiment von Holzäpfel)

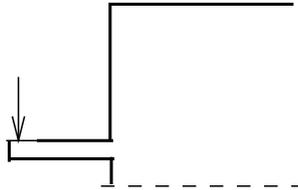


Abbildung 4.15: Ringspalt mit radialer Zuströmung (Experiment von Holzäpfel)

alle Geschwindigkeiten sowie der komplette Spannungstensor zur Verfügung stehen, wurde die Einströmrandbedingung auch hier gesetzt. Hirsch [28] berichtet von einer besseren Übereinstimmung mit den Meßwerten bei Verwendung eines Ringspalteinlasses. Daher wurden im Rahmen der numerischen Untersuchung dieser Strömung eine Reihe von Modifikationen des Einströmrandes durchgeführt:

1. Ringspalt mit axialer Zuströmung
2. Ringspalt mit radialer Zuströmung
3. Zuströmung gemäß Experiment

Ziel der Modifikationen war es herauszufinden, ob die bessere Diskretisierung im Bereich um $x = 0$ mm auch bessere Ergebnisse liefert. Der Ringspalt gibt die wirklichen geometrischen Verhältnisse wieder, während die Vorgabe von Randwerten bei $x = 0$ mm den gesamten Einlauf abschneidet.

Zu 1: Diese Variation wurde analog zu den Rechnungen von Hirsch [28] gewählt: Das Gitter wird um einen Ringspalteinlaß von 100 mm Länge erweitert, vgl. Abb. 4.14 Hierzu wird ein weiterer Block generiert und mit dem Einströmrand des Ursprungsgitters verbunden. An diesem Einströmrand werden Blockprofile für die Achsial- und Umfangskomponente vorgegeben. Die Beträge von U und W werden dabei so gewählt, daß der Massenstrom mit dem im Querschnitt $x=0$ mm gemessenen Massenstrom übereinstimmt. Für die Turbulenzgrößen wird am Einströmrand ein Turbulenzgrad von 100 % angenommen.

Zu 2: Die Geometrie dieser Variante entspricht der ersten Modifikation. Allerdings erfolgt die Zuströmung nicht mehr axial, sondern wie beim Experiment radial. Der durch die Einströmfläche eintretende Massenstrom entspricht den gemessenen Werten im ersten Querschnitt.

Zu 3: Bei der dritten Variante wurde versucht, die geometrischen Verhältnisse nach dem Drallerzeuger entsprechend den Skizzen aus [31] wiederzugeben. Die Einströmung erfolgt wieder radial, wobei die Beträge für V und W der veränderten Geometrie angepaßt wurden. Alle Berechnungen wurden mit dem quadratischen Reynoldsspannungsmodell (SSG) durchgeführt. Abb. 4.17 zeigt Profile der Modifikationen für die Normalspannun-

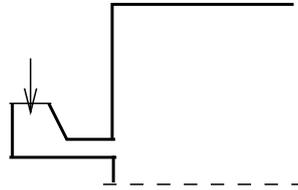


Abbildung 4.16: Zuströmung gemäß dem Experiment von Holzäpfel

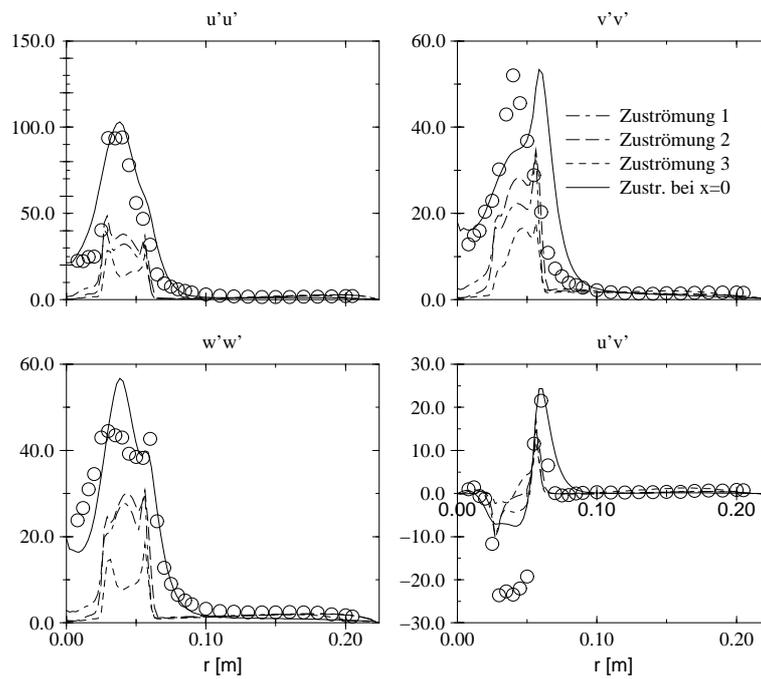


Abbildung 4.17: Vergleich der Spannungen bei $x=20$ mm Zuströmungen: siehe Text (Experiment von Holzäpfel)

gen und die Schubspannung $u'v'$ an der Stelle $x=20\text{mm}$. Außer den Modifikationen sind die Rechenwerte ohne Modifikation und die Meßwerte dargestellt. Es zeigt sich, daß insbesondere die Normalspannungen bei allen Modifikationsrechnungen deutlich zu klein berechnet wurden. Daraufhin wurden systematische Variationen der Turbulenzgrößen an den Einströmrandern durchgerechnet, um ein in den Messungen beobachtetes Niveau der Turbulenzenergie zu erreichen. Es zeigte sich, daß mit keiner der gerechneten Variationen das hohe Turbulenzniveau der Messung nachvollzogen werden kann. Da auch die Profile der Geschwindigkeiten keinerlei qualitative Verbesserung gegenüber der ursprünglichen Geometrie brachte, wurden alle weiteren Rechnungen mit Einlauf bei $x=0\text{mm}$ durchgeführt.

4.2.2.2 Dissipationsrate

Die Dissipationsrate ϵ ist die einzige Größe, die nicht direkt aus gemessenen Größen am Einströmrand bestimmt werden kann. In [29] sind Messungen der Dissipationsrate für verdrallte Strömungen beschrieben, der experimentelle Aufwand zur Bestimmung dieser Größe ist aber sehr hoch. Daher wird die Dissipationsrate meist aus der turbulenten kinetischen Energie und einem (empirischen) Längenmaß gemäß

$$\epsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}$$

bestimmt. l muß nun so bestimmt werden, daß das Turbulenzniveau weiter stromab den gemessenen Werten entspricht. Eine zu kleine Dissipationsrate bewirkt bei Drallströmungen eine zu kurze Rezirkulationszone, zu große Werte verhindern das Ausbilden der Turbulenz. Der von Nikjooy vorgeschlagene Wert von $l = 0.2 \cdot R$; R =Düsendurchmesser [51] ergab für alle gerechneten Strömungen zufriedenstellende Ergebnisse. Daher wurde bei allen Berechnungen die Dissipationsrate gemäß dem Vorschlag von Nikjooy gesetzt.

4.2.3 Einfluß der Abströmbedingung

Der Randbedingung am Ausströmrand kann entscheidende Bedeutung zukommen. Die meisten Berechnungsverfahren setzen hier eine Nullgradientenbedingung ein. Diese für viele Konfigurationen gültige Annahme setzt aber voraus, daß die Gradienten in Richtung der Ausströmung vernachlässigbar gering sind, Verletzungen dieser Bedingung können sich ins gesamte Strömungsfeld auswirken, was folgendes Beispiel verdeutlicht. Als Ausströmrandbedingung des Experiments mit geringem Drall (Abschnitt 4.1.1.2) sollte laut der Beschreibung der Autoren eine Nullgradientenrandbedingung für alle berechneten Größen angenommen werden. Abb. 4.18 zeigt den Verlauf der Geschwindigkeitskomponente U entlang der Diffusorachse. Dargestellt sind die Messungen, sowie zwei Rechnungen, wobei die Austrittsrandbedingung variiert wurde. Einmal wurde die Nullgradientenrandbedingung eingesetzt (gestrichelte Linie), einmal die Druckrandbedingung (durchgezogene Linie). Abb. 4.18 zeigt deutlich, daß

- Der Gradient $\partial U/\partial x$ von Null verschieden ist und daher die Nullgradientenbedingung zumindest für die Achsialkomponente fraglich ist
- die Druckrandbedingung eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten liefert.

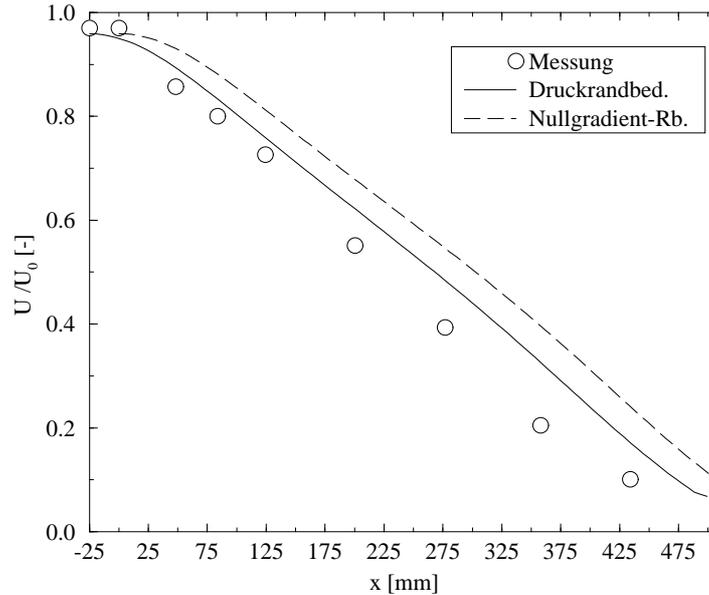


Abbildung 4.18: Achsengeschwindigkeit des Experiments von Clausen

Die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Nullgradienten- und Druckrandbedingung bleibt praktisch über den kompletten Diffusor bestehen, das heißt der Einfluß der Randbedingung macht sich im ganzen Feld bemerkbar. Daher wurde bei Strömungen, die in der Nähe des angenommenen Ausströmrandes einen signifikanten Gradienten der Hauptströmungsrichtung aufweisen, die Druckrandbedingung als Abströmrandbedingung gewählt.

Eine weitere Schwierigkeit kann sich ergeben, wenn die gewählte Lage des Austrittsrandes nicht mit den Gegebenheiten des Experiments übereinstimmt. Ein Beispiel hierfür ist das Experiment von Johnson und Roback (Abschnitt 4.1.1.3) Bei den Berechnungen stellte sich heraus, daß erhebliche Diskrepanzen zwischen den gemessenen und den berechneten Achsialgeschwindigkeitsprofilen bestehen. Nachdem zunächst vermutete Implementierungsfehler des Turbulenzmodells ausgeschlossen werden konnten, ergab eine eingehende Literaturdurchsicht, daß andere Autoren über ähnliche Probleme mit Drallströmungen bei Verwendung eines Reynoldsspannungsmodells berichten ([30],[51],[75]).

Ursächlich für die Geschwindigkeitsgradienten weit stromab ist laut Benjamin [7] das Wirbelaufplatzen ('vortex breakdown'). Hierbei liegt nach dem Überschreiten einer kritischen Drallzahl, ein unterkritischer Strömungszustand innerhalb der Kernströmung vor. Dadurch können sich Störungen stromauf ausbreiten. Laut Hogg [30] ist ein Grund dieses Phänomens die stark abgeschwächte radiale Diffusion der Strömung. Da das $k - \epsilon$ Modell diese Diffusion überschätzt, ist dieser Effekt bei diesem Modell nicht zu sehen. Dellenback [16] hat eine Reihe von Strömungen vermessen, bei denen Rückströmungen auf der Symmetrieachse bis zum Ende des Meßgebiets zu beobachten waren. Die mit Reynoldsspannungsmodellen berechneten Achsialgeschwindigkeitsprofile an den Positionen $x = 305$ mm und $x = 406$ mm sind also sowohl theoretisch als auch bei anderen Testfällen experimentell bestätigt und demnach plausibel.

Dennoch stellt sich die Frage, warum die Messungen von Johnson und Roback dieses Phänomen nicht aufweisen. Der Grund hierfür könnte in der Abströmbedingung liegen.

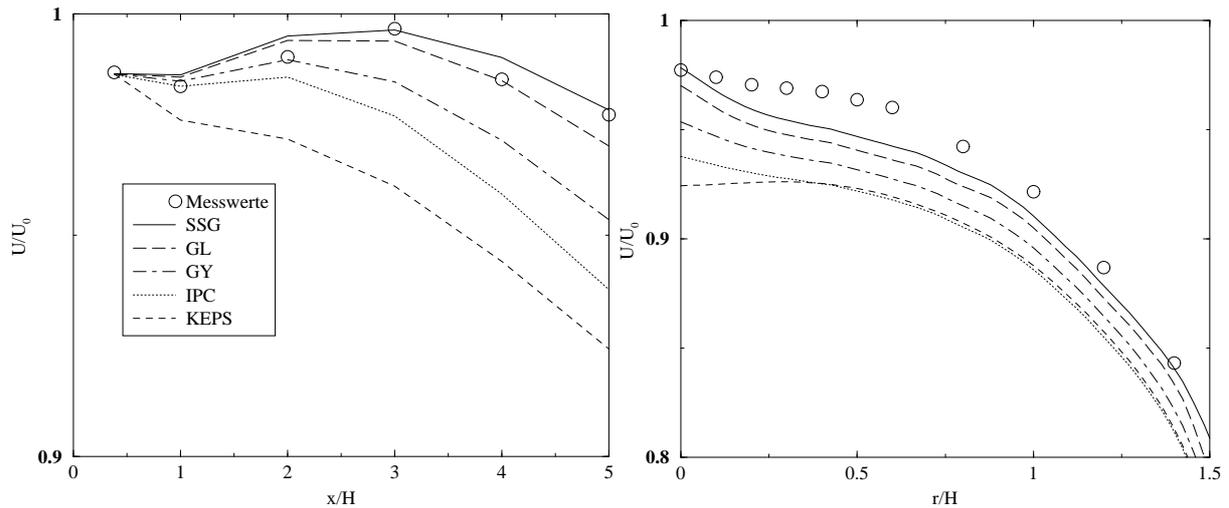


Abbildung 4.19: Ahmed: Verlauf der Achsialkomponente U entlang der Symmetrielinie (links); Detailverlauf in Achsennähe bei $x/H = 5$ (rechts).

Alle Autoren, die das Experiment von Johnson und Roback nachgerechnet haben, gingen von einer Nullgradientenrandbedingung am Ausströmrand aus, der bei $x = 500$ bis $x = 700$ mm liegt. Die tatsächlich vermessene Geometrie sieht aber ganz anders aus vgl. Abb. 4.4 auf Seite 41.

Da der Auslass nicht achsensymmetrisch ist und außerdem keinerlei Abmessungen für den Auslass vorliegen, ist eine Simulation des Gesamtsystems nicht möglich. Es ist aber denkbar, daß der Auslass einen Einfluß auf die Strömung im Rohr haben kann, insofern sind die Messungen der Achsialkomponente plausibel, die Abweichungen der berechneten Größen erklärbar.

4.3 Vergleich der Modelle mit Meßwerten

Im Rahmen der Validierung werden nur Komponenten gezeigt, die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen erklären. Eine komplette Dokumentation aller Testfälle ist im Internet abrufbar:

<http://www.hfi.TU-Berlin.DE/>

--> CFD --> Forschung --> Veröffentlichungen

4.3.1 Kein Drall

Die Profile (Abb. 4.20 - 4.23) zeigen die Entwicklung der Strömung bis 5 Stufenhöhen nach der plötzlichen Rohrerweiterung. Die Abszisse stellt den Radius (aufgetragen in Stufenhöhen) dar, die Ordinate die mit der Einströmgeschwindigkeit normierte Größe. Am Beispiel der Achsialkomponente U und den Spannungen u'^2 und $u'v'$ werden im weiteren die Unterschiede der einzelnen Modelle diskutiert.

Gitter Das Rechengitter dieser Rechnung besteht aus 100 Punkten in axialer und 60 Punkten in radialer Richtung. Es wurde zur oberen Wand hin verdichtet und in Achsen-

richtung gestreckt. Rechnungen auf feineren Gittern brachten keine signifikante Änderung der Lösung mit sich.

Geschwindigkeiten Eine Übersicht der Achsialgeschwindigkeiten (Abb. 4.20) zeigt für alle Modelle zunächst ein sehr ähnliches Bild: Die plötzliche Rohrerweiterung sorgt für die Ausbildung eines Rezirkulationsgebietes im Bereich $r > 2H$, das sich beim Experiment bis $x/H \approx 8$ ausdehnt. Alle Nachrechnungen kommen auf eine etwas kürzere Rezirkulationszone. Die Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse bleibt bis $x/H \approx 5$ praktisch konstant und sinkt weiter stromab kontinuierlich (hier nicht gezeigt). Eine genauere Auswertung der Achsialgeschwindigkeit auf der Symmetrielinie ist in Abb. 4.19 links dargestellt. U sinkt demnach von der ersten zur zweiten Meßstelle marginal ab, steigt dann bis zur vierten Meßposition an und verringert sich weiter stromab. Sowohl das quadratische als auch das GL Modell geben diese Strömungseigenschaften richtig wieder, während GY und IPC das Ansteigen der Geschwindigkeit im Bereich $1 \leq x/H \leq 3$ kaum darstellen können; das Wirbelviskositätsmodell schließlich sagt überhaupt keinen Anstieg voraus. Ein Detailverlauf in Achsennähe ist an der Position $x/H = 5$ in Abb. 4.19 rechts dargestellt. Es ist gut zu erkennen, daß sich die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen erst im Bereich der starken Verzögerung der Strömung abbauen.

Spannungen Ähnliche Unterschiede können im Verlauf der Spannungen gezeigt werden. Abb. 4.21 zeigt die Normalspannung u'^2 für dieselben Positionen wie die Geschwindigkeiten, Abb. 4.23 die entsprechenden Profile der Schubspannungskomponente $u'v'$. Die Normalspannungsverläufe zeigen alle ein Maximum im Bereich großer Geschwindigkeitsgradienten ($r/H \approx 2$). Quantitativ wird dieses Maximum am besten vom SSG Modell wiedergegeben. An der achsialen Position $x/H = 2$ weichen die Modelle in Achsennähe analog zu den bei der Achsialgeschwindigkeit gefunden Unterschieden voneinander ab. SSG und GL folgen den Meßwerten am besten, die anderen Modelle zeigen deutlichere Abweichungen.

Die Verläufe der Schubspannung $u'v'$ (Abb. 4.23) zeigen wie bei der Normalspannung eine sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr gute Übereinstimmung des quadratischen Modells mit den Messungen; bei den anderen Modellen ergeben sich wiederum Abweichungen. Sehr interessant sind die Verläufe von $u'v'$ in Achsennähe. Bereits kurz nach dem Einströmquerschnitt weichen GY und IPC stark von den Meßwerten ab (Abb. 4.22 links), während GL und SSG sehr gut mit den Meßwerten übereinstimmen. Die Abweichungen zwischen Messung und Rechnungen auf der Achse können durch Meßungenauigkeiten bzw. minimale 3D Effekte entstanden sein. Die Symmetrierandbedingung fordert verschwindende Beiträge der Schubspannungen auf der Achse, die Messungen zeigen hier von Null verschiedenen Werte. Etwas weiter stromab (Abb. 4.22 rechts) berechnen IPC und GY in Achsennähe das Vorzeichen für $u'v'$ falsch, während GL und SSG wiederum gut mit den Messungen übereinstimmen. Dieser bereichsweise vollkommen falsche Verlauf der Schubspannung dürfte die Ursache für die unterschiedlichen Achsialgeschwindigkeitsprofile sein.

Zusammenfassung Für die Abweichungen kann nur die Formulierung der verschiedenen Druck-Scher-Korrelationsmodelle verantwortlich sein, da ja alle anderen Parameter bei den Rechnungen gleich waren. Nach den Einschätzungen in Abschnitt 2.4.1.3 müßten

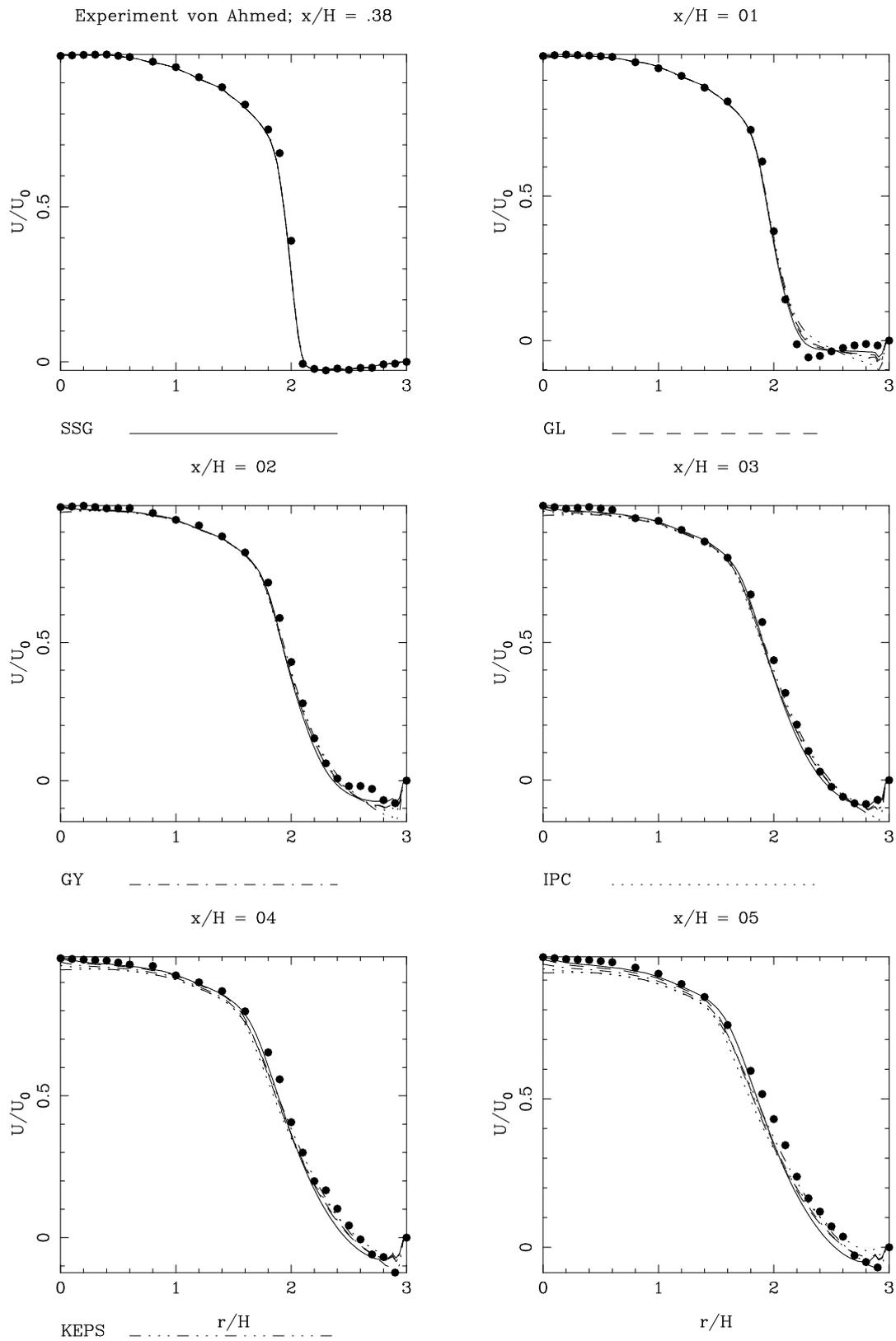


Abbildung 4.20: Ahmed: Profile der Achsialgeschwindigkeit U

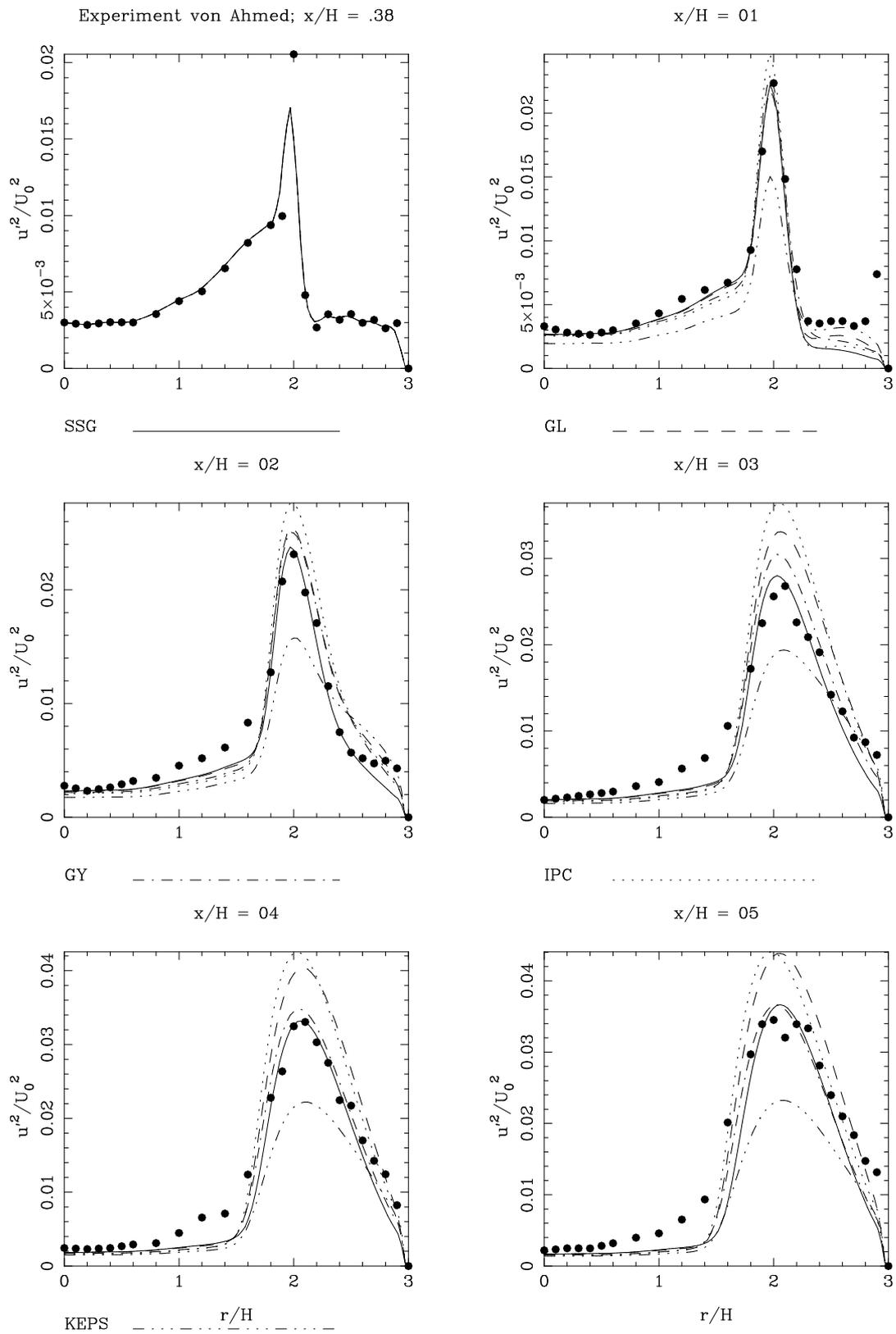


Abbildung 4.21: Ahmed: Profile der Normalspannungskomponente u'^2

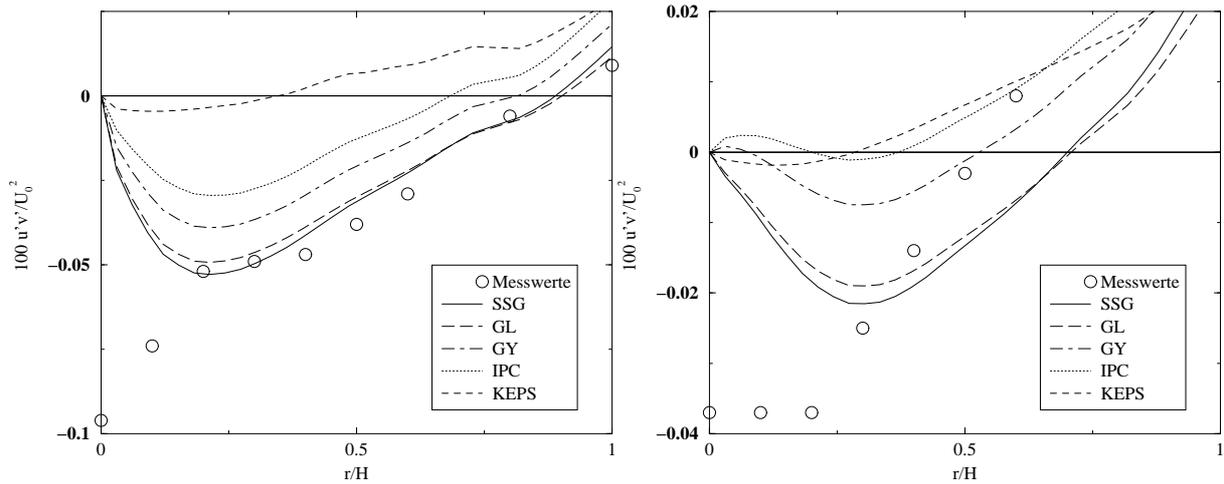


Abbildung 4.22: Ahmed: Verlauf der Schubspannungskomponente $u'v'$ in Achsennähe bei $x/H = 2$ (links) bzw. $x/H = 5$ (rechts).

GL und SSG die Strömung am besten wiedergeben, da die Integrationskonstanten dieser Modelle für Strömungen mit Scherung optimiert sind. SSG und GL liefern für diese Validierung tatsächlich die besten Übereinstimmungen, insofern sind die Aussagen aus Abschnitt 2.4.1.3 zumindest für die hier besprochene Strömung plausibel. Analog läßt sich die Leistung des GY Modells erklären. Die für die korrekte Modellierung der Wirbelstärke optimierte Konstante liefert in diesem Fall (der ja mangels Drall auch keine Wirbelstärke enthält) schlechtere Ergebnisse, da die Scherraten zu wenig berücksichtigt werden. Eine alleinige Wichtung des ersten Terms des Modells, wie er bei IPC vorgenommen wird, bringt für diesen Typ Strömung noch schlechtere Ergebnisse als das GY Modell; diese Modellierung ist offensichtlich für Strömungen mit vernachlässigbarem Drall ungeeignet. Demnach spielt die Modellierung der Druck-Scher-Korrelation über die Scherraten bei Strömungen ohne Drall eine wichtige Rolle.

Das $k - \epsilon$ Modell liefert deutlich schlechtere Ergebnisse als GL oder SSG. Die Wirbelviskositätshypothese weist demnach auch bei Strömungen ohne Drall Defizite auf.

4.3.2 Geringer Drall

Die Darstellung der Profile erfolgt hier in einem Koordinatensystem parallel zur Diffusorwand (System XM, RM in Abb. 4.2), die Abszisse in den Abb. 4.24-4.27 stellt an der Diffusorwand mit $r=0$ beginnend Schnitte normal zur Diffusorwand dar, die Ordinate die mit der Einströmgeschwindigkeit normierte Größe. Unterschiede zwischen den Modellen werden anhand der Achsialkomponente U , der Umfangskomponente W und der Schubspannungskomponente $u'w'$ diskutiert.

Gitter Das Rechengitter folgt der Berandung des Diffusors und ist zur Wand hin verdichtet. Gitterunabhängigkeit wurde mit 100 Punkten in achsialer und etwa 70 Punkten in radialer Richtung erreicht.

Geschwindigkeiten Bei den Rechnungen sind keine Ablösungen zu beobachten, weder an der Wand noch auf der Achse, auch die Messungen zeigen keinerlei Ablösung. Die

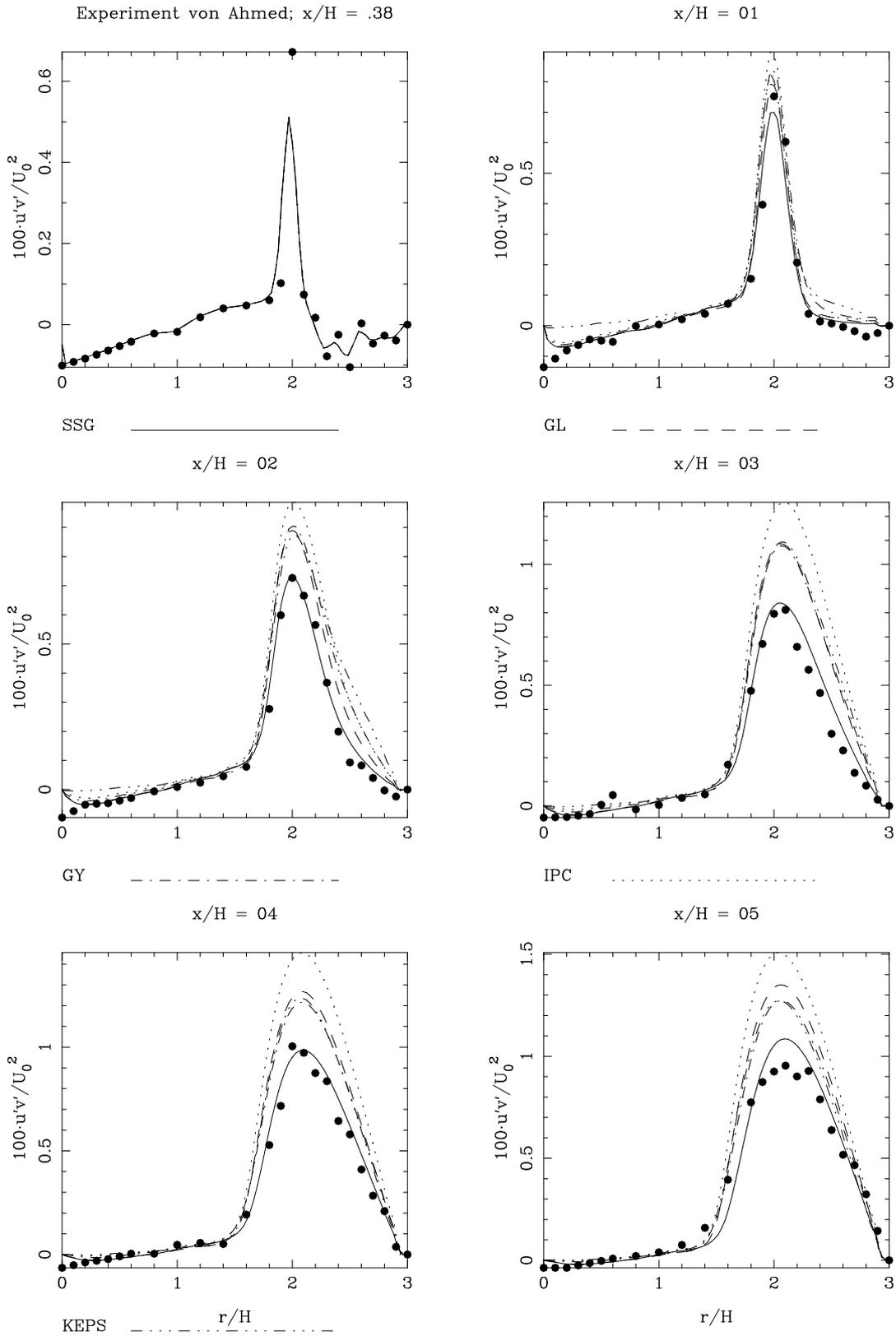


Abbildung 4.23: Ahmed: Profile der Schubspannungskomponente $u'v'$

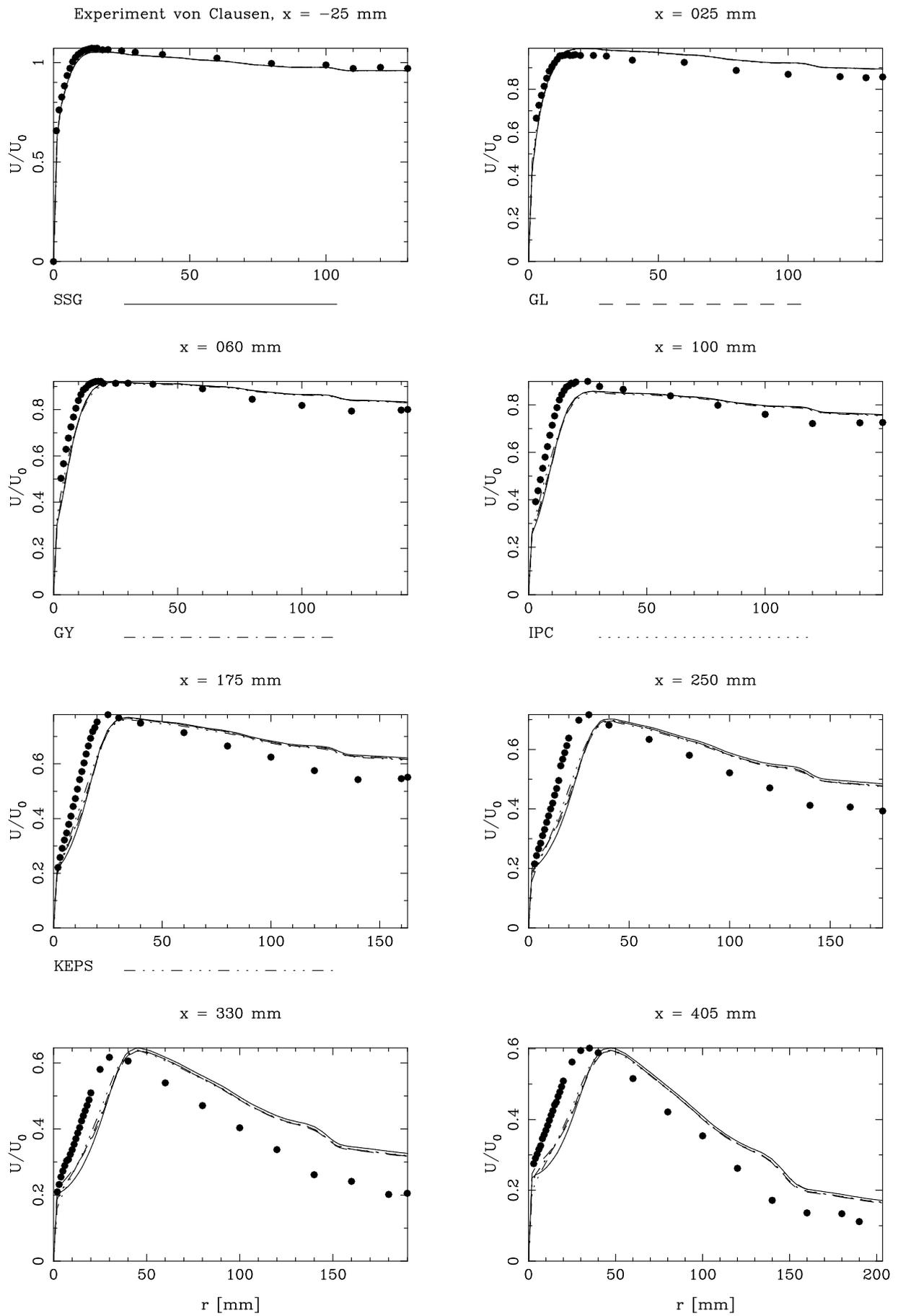


Abbildung 4.24: Clausen: Profile der Achsialgeschwindigkeit U

Aufweitung des Querschnitts sorgt für ein Absinken des Geschwindigkeitsniveaus von U . Zusätzlich bewirkt die Drallkomponente eine Reduktion von U auf der Achse. Der Drall ist jedoch nicht stark genug, um ein Rezirkulationsgebiet zu erzeugen. Beide Effekte werden von allen Modellen richtig wiedergegeben. Generell sind die Unterschiede der Achsialgeschwindigkeitsprofile zwischen den Modellen sehr gering. Im Vergleich mit den Messungen zeigt sich bei der Achsialkomponente U (Abb. 4.24), daß die Rechnungen ab $x=100$ mm eine dickere Grenzschicht berechnen. Auch ist das Geschwindigkeitsniveau auf der Achse generell etwas höher als bei den Messungen.

Die berechneten Umfangskomponenten W (Abb. 4.25) unterscheiden sich fast überhaupt nicht voneinander. Analog zur Achsialkomponente weisen die gerechneten Profile eine Verschiebung gegenüber den Messungen auf. Ein bei $x=405$ mm gemessenes lokales Maximum unmittelbar an der Wand wird von Rechnungen nicht nachvollzogen. Allerdings zeigen Messung und Rechnungen im Verlauf der Stationen die Ausbildung eines plateauartigen Gebiets in der Nähe der Diffusorwand, sodaß insgesamt von einer sehr guten Übereinstimmung mit den Messungen gesprochen werden kann. Die gute Übereinstimmung der W -Profile des Wirbelviskositätsmodells mit den Messungen läßt sich zunächst nicht mit den in der Literatur gefundenen Erfahrungen in Einklang bringen, da der häufigste Kritikpunkt des $k - \epsilon$ Modells die schlechte Übereinstimmung mit den W Profilen betrifft. Durch die Art der Drallerzeugung entspricht das Profil der Umfangskomponente einer Starrkörperrotation, diese Profilform wird vom $k - \epsilon$ Modell immer berechnet. Insofern ist die gute Übereinstimmung der Profile für W in diesem Fall plausibel.

Spannungen Von den Spannungen ist der Verlauf der Schubspannungskomponente $u'w'$ (Abb. 4.26) aufschlußreich. Er wird vom $k - \epsilon$ Modell völlig falsch wiedergegeben, während das SSG, GY und IPC Modell die Entwicklung richtig darstellen. Das GL Modell entspricht an den ersten Meßstellen anderen Druck-Scher-Korrelationsmodellen. Doch bereits ab $x \approx 100$ mm weicht das mit dem GL Modell berechnete Profil zunehmend von den anderen Messungen ab, ab $x \approx 330$ mm weist das Profil teilweise sogar ein falsches Vorzeichen auf. Ursächlich hierfür ist die zu starke Wichtung des Produktionsterms bzw. der Wirbelstärke. In Abb. 4.27 ist der Verlauf von $u'w'$ an der letzten Meßstelle noch einmal aufgetragen. Zusätzlich zu den bisher besprochenen Modellen wurde der Wandreflektionsteil der Modelle GL und GY ausgeschaltet (o.W. in der Abb.). Der Vergleich GL/GL ohne Wandterm und GY/GY ohne Wandterm zeigt, daß der Einfluß der Wandbehandlung deutlich kleiner ist als der Unterschied GL/GY.

Somit ist die Wandfunktion als Ursache für die starken Abweichungen der linearen Modelle untereinander auszuschließen.

Ähnliche Unterschiede bei der Schubspannungskomponente $u'w'$ werden von Younis [82] bei der Nachrechnung eines verdrallten Freistrahles beschrieben, das entsprechende Experiment stammt von Morse [49]. Younis mißt dem Verlauf von $u'w'$ entscheidende Bedeutung für die Beurteilung der Qualität der Modelle bei. Als Druck-Scher-Korrelationsmodell verwendet er neben dem SSG Modell das Originalmodell von Launder, Reece und Rodi, das er als LRR1 bezeichnet und das GL Modell, das von ihm als LRR2 bezeichnet wird. Younis kommt zu dem Schluß, daß einzig das quadratische Modell in der Lage ist, die $u'w'$ -Verteilung richtig vorherzusagen. Younis belegt dies auch an den quadratischen Termen, einzig diese Ausdrücke seien für die gute Übereinstimmung der Rechnung mit den Messungen verantwortlich. Dies steht im Gegensatz zu den in Abschnitt 2.4.1.3 gemachten Aussagen, nach denen die Wichtung der linearen Anteile einen

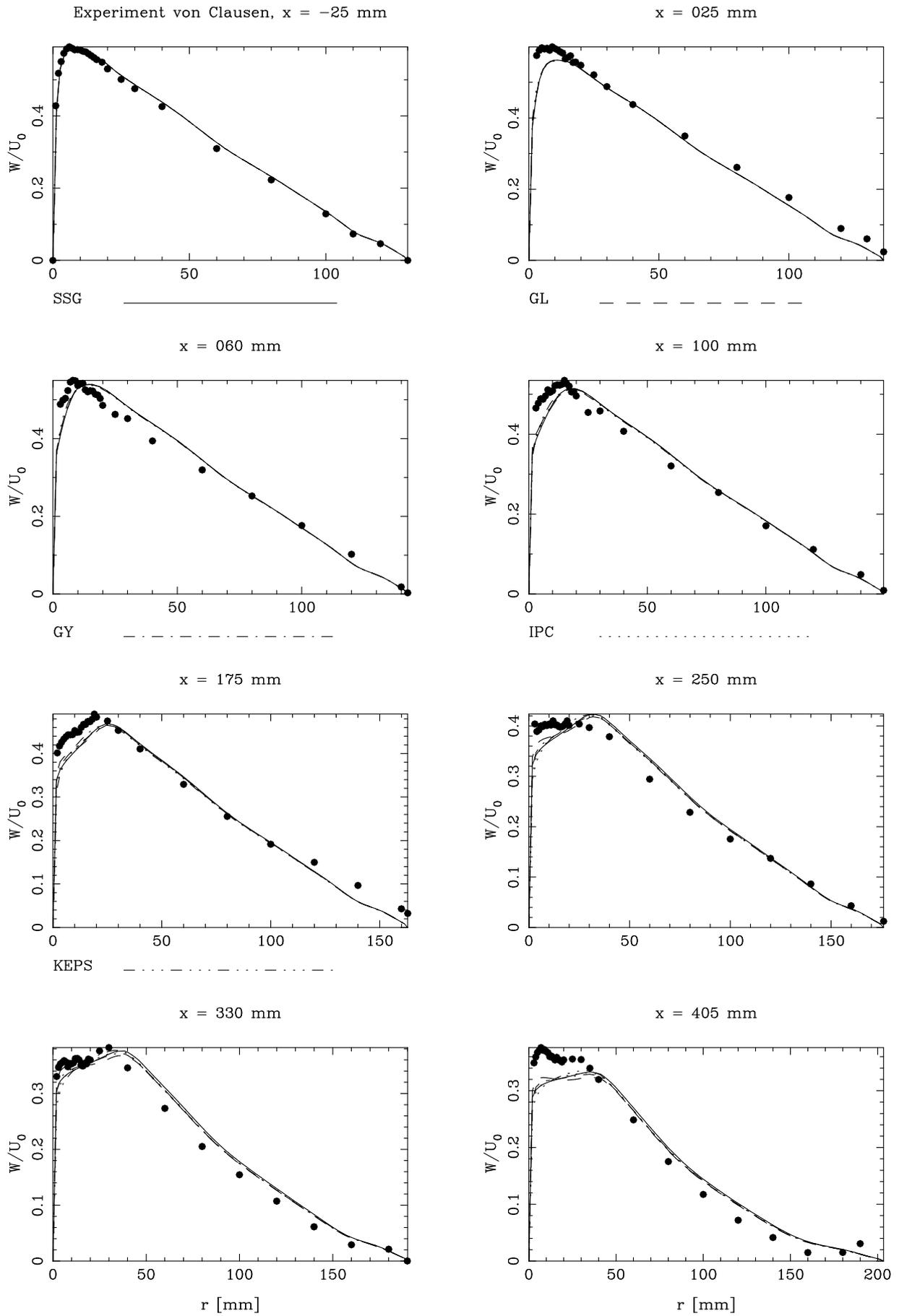


Abbildung 4.25: Clausen: Profile der Umfangsgeschwindigkeit W

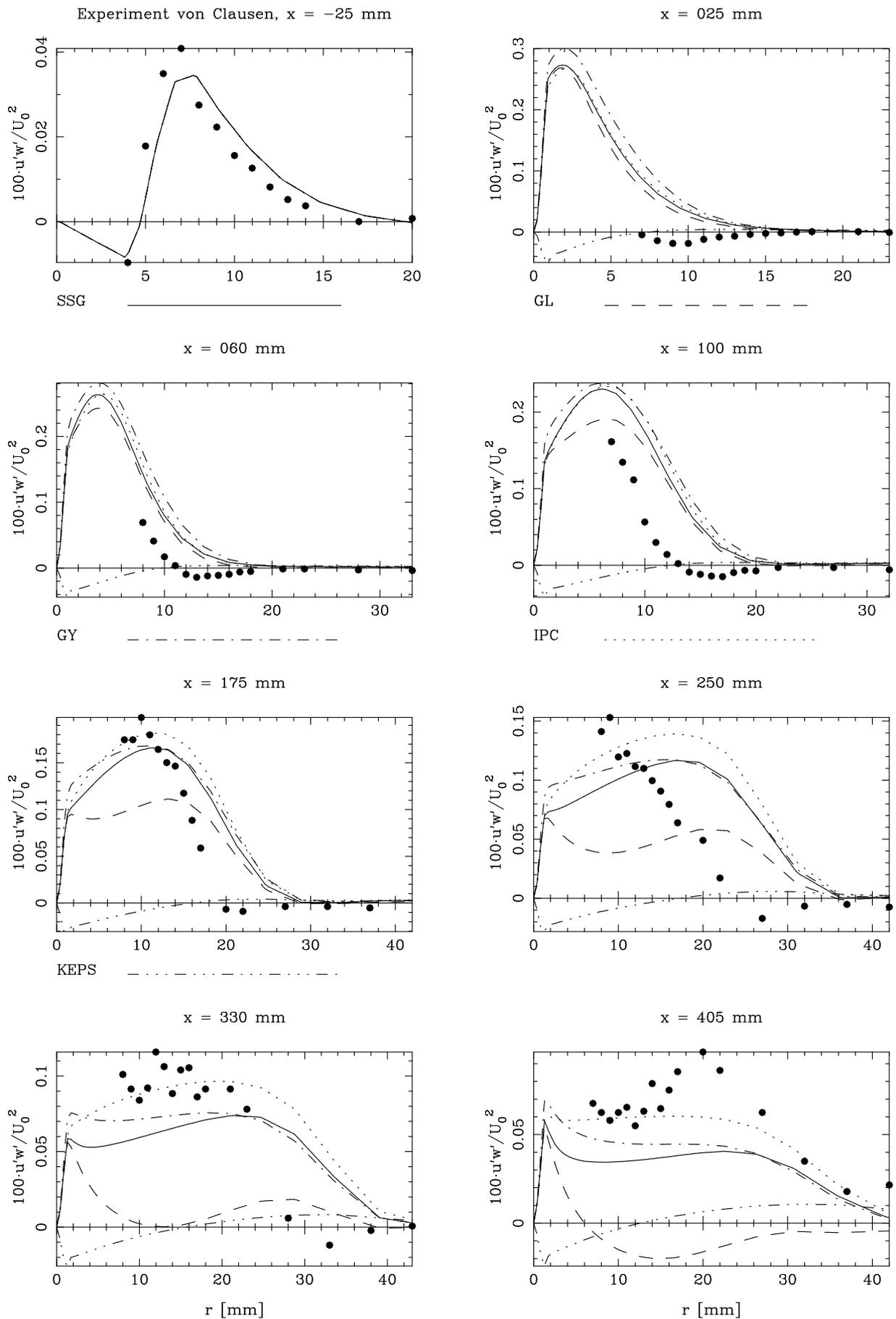


Abbildung 4.26: Clausen: Profile der Schubspannungskomponente $u'w'$

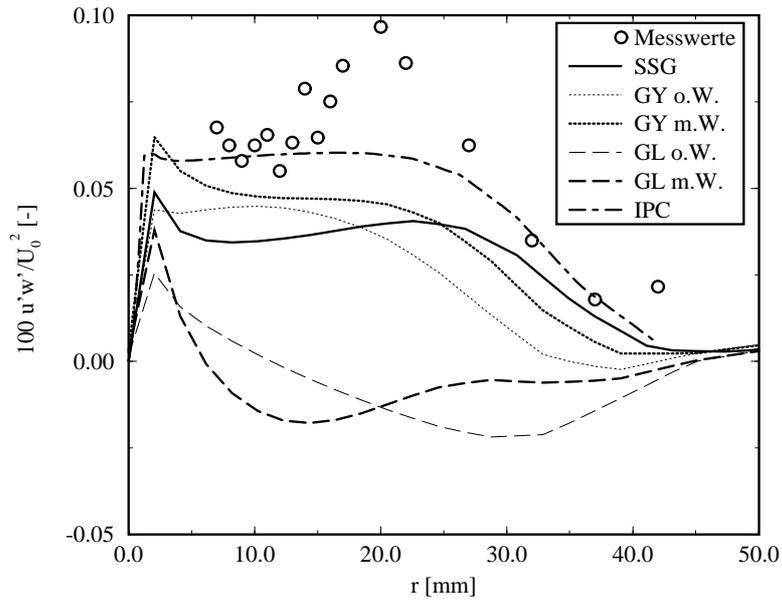


Abbildung 4.27: Clausen: Verlauf der Schubspannungskomponente $u'w'$ an an der letzten Meße ebene: Vergleich verschiedener Druck-Scher-Korrelationsmodelle

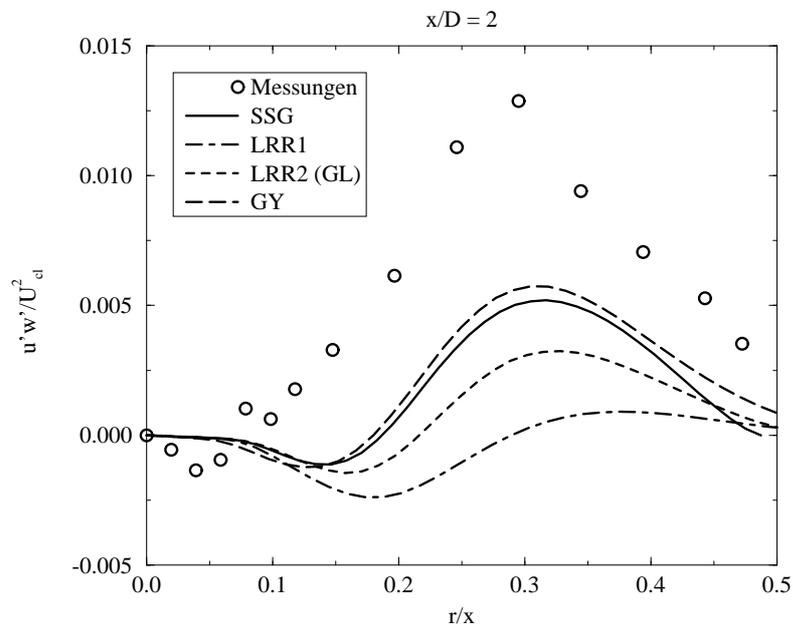


Abbildung 4.28: $u'w'$ -Profile des Experiments von Morse

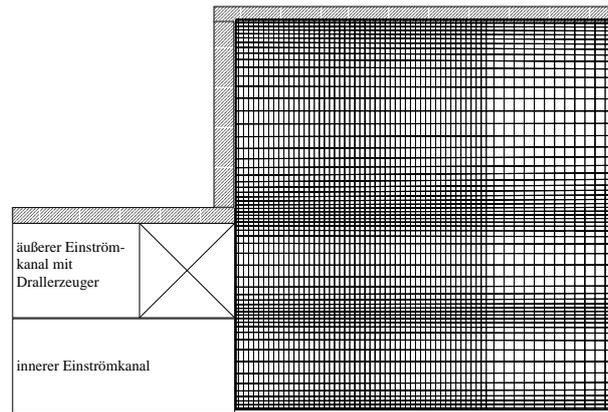


Abbildung 4.29: Johnson und Roback: Rechengitter in der Nähe des Einströmrandes

entscheidenden Einfluß auf die Qualität der Lösung hat. Daher wurde das Experiment von Morse mit dem Verfahren von Younis nachgerechnet. Abb. 4.28 stellt die $u'w'$ Verteilung zwei Düsendurchmesser stromab der Düse dar. Die Profile der Modelle LRR1, LRR2 und SSG entsprechen den Profilen in [82]. Zusätzlich ist in der Abbildung der Verlauf des GY Modells eingetragen, mit dem das Experiment zusätzlich berechnet wurde. Die gute Übereinstimmung des GY Modells mit den Meßwerten deutet darauf hin, daß offensichtlich nicht die quadratischen Terme, sondern die korrekte Wichtung von Scherrate und Wirbelstärke im linearen Teil für die Qualität des Modells verantwortlich ist.

Ebenfalls sehr gute Übereinstimmung mit den gemessenen Werten liefert das IPC Modell. Demnach kann für diesen Strömungstyp, bei dem moderate Scherraten und Wirbelstärken auftreten, die komplette Wichtung des Druck-Scher-Korrelationsterms auf den ersten Teil des Modells verschoben werden.

4.3.3 Moderater Drall

Das Experiment von Johnson und Roback ist von vielen Gruppen nachgerechnet worden. Die Berechnungen, die Nikjooy et al mit einem Reynoldsspannungsmodell durchgeführt hat [51], stimmen mit den hier vorgestellten Berechnungen sehr gut überein. Nikjooy weist ebenso wie Wennerberg [75] auf eine Diskrepanz zwischen Meßwerten und Berechnungen der Hauptgeschwindigkeitskomponente U in Achsennähe hin.

Es werden die Profile von U , W , u' sowie von $u'w'$ an ausgewählten Stellen gezeigt. Die Abszisse in den Abb. 4.30-4.33 stellt den Kammerradius dar, die Ordinate die entsprechende Größe, wobei die Werte entsprechend den experimentellen Daten nicht normiert wurden.

Gitter Das Rechengitter für dies Experiment besteht aus 100 Punkten in achsialer und 60 Punkten in radialer Richtung. Die radiale Verteilung ist aus Abb. 4.29 ersichtlich. Das Gitter wurde zur Achse und zur Wand hin verdichtet. Zusätzlich wurde das Gitter im Nachlauf der Düsen verfeinert. In achsialer Richtung wird der Zellabstand mit zunehmendem Abstand vom Einströmrand größer. Feinere Gitter ergaben keine signifikanten Änderungen der Lösung.

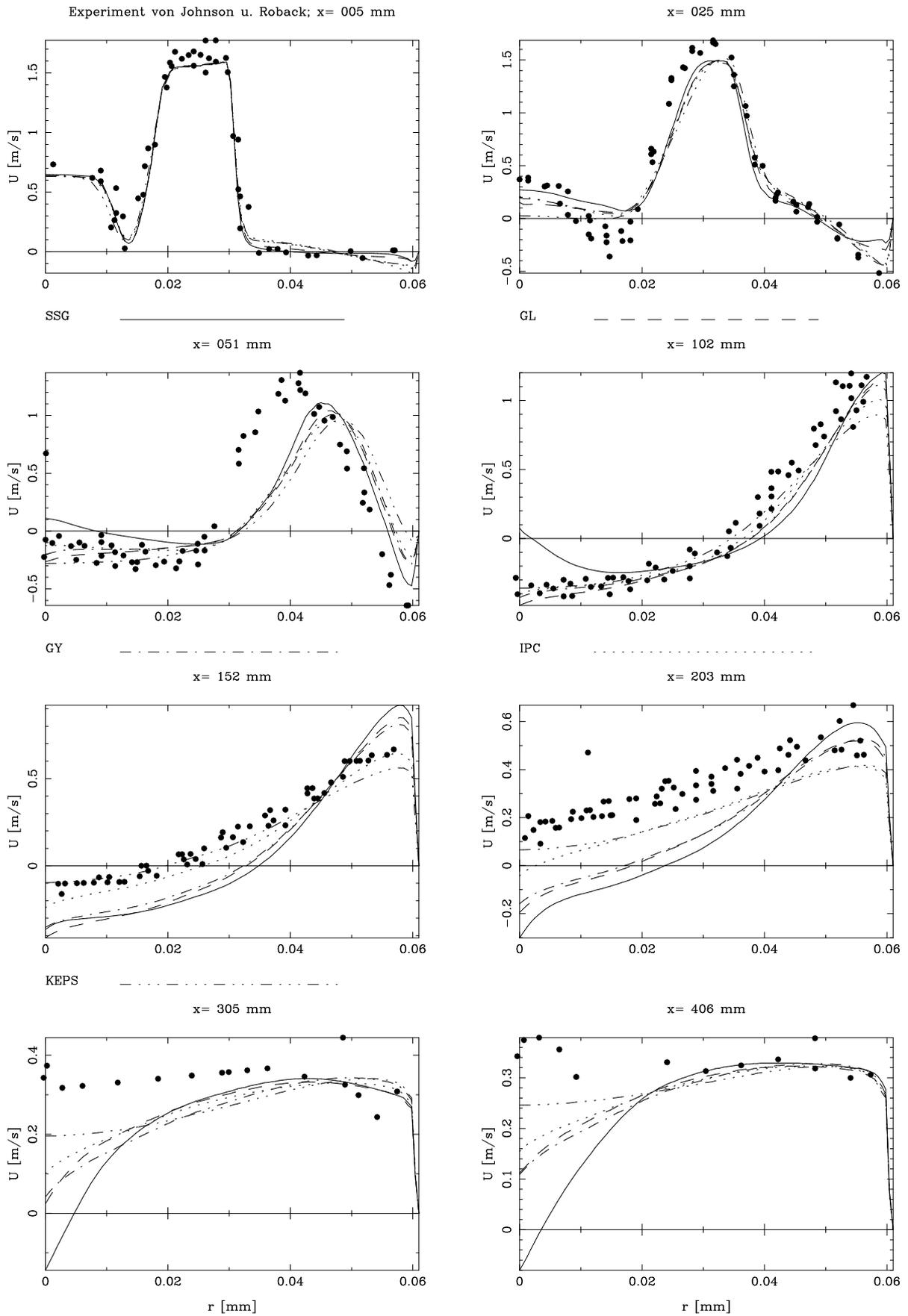


Abbildung 4.30: Johnson und Roback: Profile der Achsialgeschwindigkeit U

Geschwindigkeiten Die Achsialkomponente U der Strömung (Abb. 4.30) besteht aus den beiden konzentrischen Strahlen, die mit 0.6 bzw. 1.6 m/s in die Kammer einströmen. Der innere Strahl wird durch die Drallkomponente schnell abgebaut, es kommt zur Ausbildung eines Rezirkulationsgebietes auf der Achse. Der äußere Strahl wird durch den Drall nach außen abgelenkt und trifft bei ca. $x=102$ mm auf die Brennkammerwand. Weiter stromab gleichen sich die Geschwindigkeiten auf der Achse und in Wandnähe immer weiter an, ab ca. $x = 305$ mm liegt für die experimentellen Werte eine ausgebildete Rohrströmung vor.

Das Wirbelviskositätsmodell zeigt für U eine gute Übereinstimmung mit den Messungen. Für die Reynoldsspannungsmodelle sind die Übereinstimmungen bis ca. $x= 203$ ebenfalls sehr gut, danach treten jedoch insbesondere auf der Achse erhebliche Unterschiede zu den Messungen auf. An den letzten beiden Meßstationen ergeben für die Reynoldsspannungsmodelle Geschwindigkeitsgradienten in radialer Richtung, von ausgebildeter Rohrströmung kann hier keine Rede sein. Die Ursachen für die Differenzen zwischen Experiment und Rechnung mit den Reynoldsspannungsmodellen wurden in Abschnitt 4.2.3 diskutiert.

Sehr interessant ist die Entwicklung der Drallkomponente W (Abb. 4.31). Von den beiden konzentrischen Strahlen hat nur der äußere eine Drallkomponente. Bis $x = 51$ mm ist daher in Achsennähe keine Drallkomponente meßbar; Das Maximum von W verschiebt sich in diesem Bereich zur Kammerwand hin. Weiter stromab entwickelt sich ein starker Geschwindigkeitsgradient auf der Symmetrieachse und es bildet sich zwischen $r \approx 10$ mm und $r \approx 60$ mm ein Gebiet mit relativ gleichförmiger Drallgeschwindigkeit aus, das zur Achse bzw. zur Wand auf Null abfällt. Das Maximum der Drallkomponente befindet sich bei ca. $r = 20$ mm.

Die Entwicklung des Dralls wird bis $x = 102$ mm am besten vom Wirbelviskositätsmodell und dem IPC Modell wiedergegeben, die Kurven der anderen Modelle liegen unter diesen Werten. An den hinteren Stationen entwickelt das $k - \epsilon$ Modell immer mehr ein Starrkörperrotationsprofil und entfernt sich damit deutlich von den gemessenen Werten. Die linearen Reynoldsspannungsmodelle sagen an den hinteren Meßstationen gegenüber dem Wirbelviskositätsmodell die Drallkomponente deutlich besser voraus. Das quadratische Modell gibt die gemessenen Verhältnisse an den hinteren Stationen am besten wieder. Es gibt als einziges Modell die Lage des Maximums der Drallgeschwindigkeit richtig wieder. Da sich das quadratische Modell an den hinteren Stationen deutlich von den linearen Modellen GY und GL unterscheidet, müssen hier die quadratischen Terme des Modells eine Rolle spielen. Ein Vergleich des GL mit dem GY Modell zeigt deutliche Unterschiede ab $x = 102$ mm, wobei das GY Modell eine bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten aufweist. Etwa ab dieser Meßstelle werden die Gradienten der Achsialgeschwindigkeit (Abb. 4.30) kleiner, das heißt der Einfluß der Scherraten nimmt ab. Der Gradient der Umfangskomponente baut sich dagegen auf, der Einfluß der Wirbelstärke nimmt also zu.

Spannungen Die Normalspannungsverläufe weisen im Einströmquerschnitt am Übergang der zwei Strahlen ein großes und am Übergang zw. äußerem Strahl und Kammerwand ein kleineres Maximum auf. Beide Maxima werden weiter stromab in Richtung größerer Radien verschoben und vermischen sich bei ca. $x = 102$ mm mit dem wandinduzierten Maximum. Weiter stromab sinken die Werte auf etwa 10 % der Eingangsintensität ab. Dieser Trend wird von allen Modellen richtig wiedergegeben. u' wird betragsmäßig von den Reynoldsspannungsmodellen richtig wiedergegeben, das $k - \epsilon$ Modell sagt das Niveau im Bereich zwischen 150 und 200 mm geringfügig zu klein voraus, vgl. Abb. 4.32.

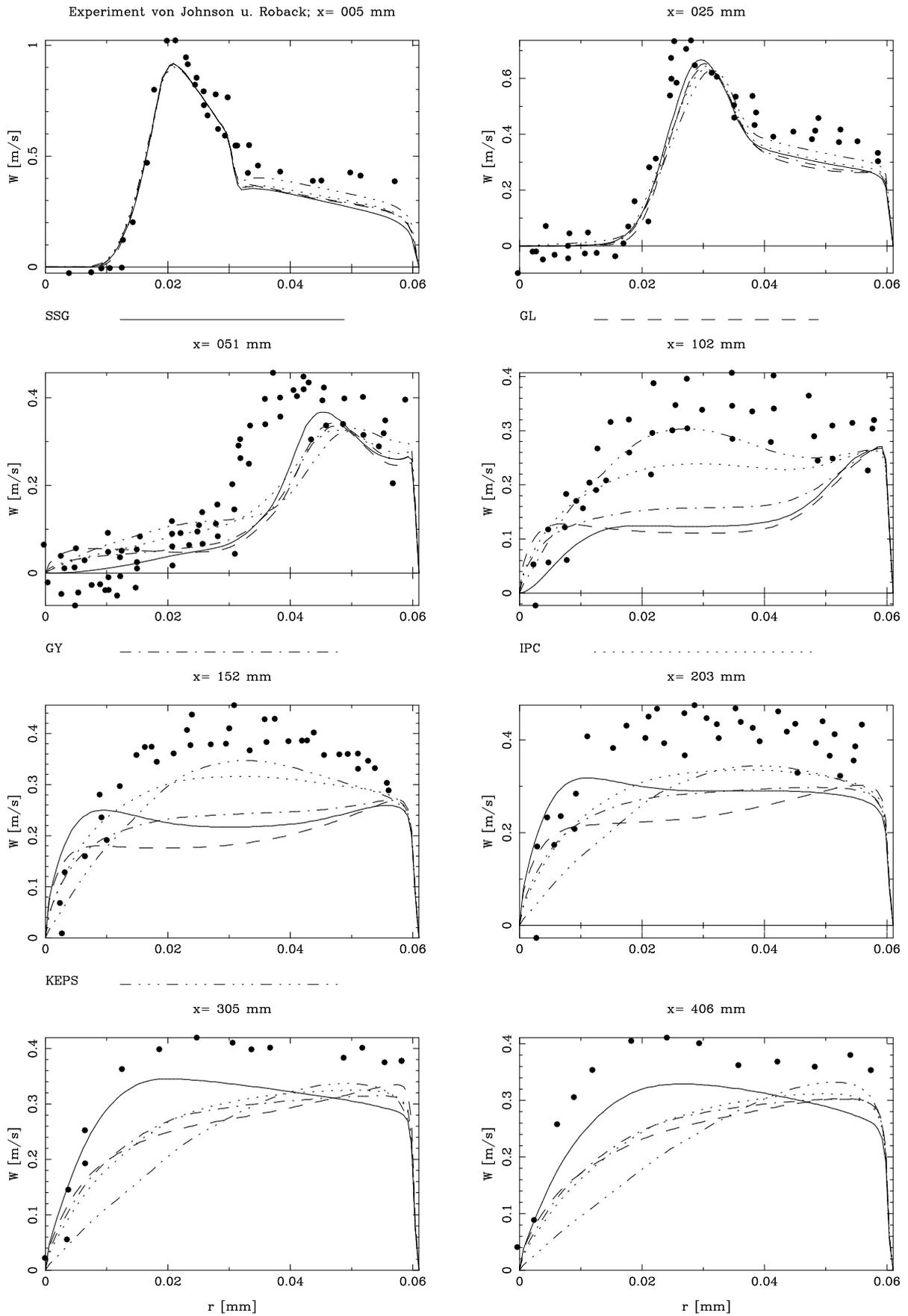


Abbildung 4.31: Johnson und Roback: Profile der Umfangsgeschwindigkeit W

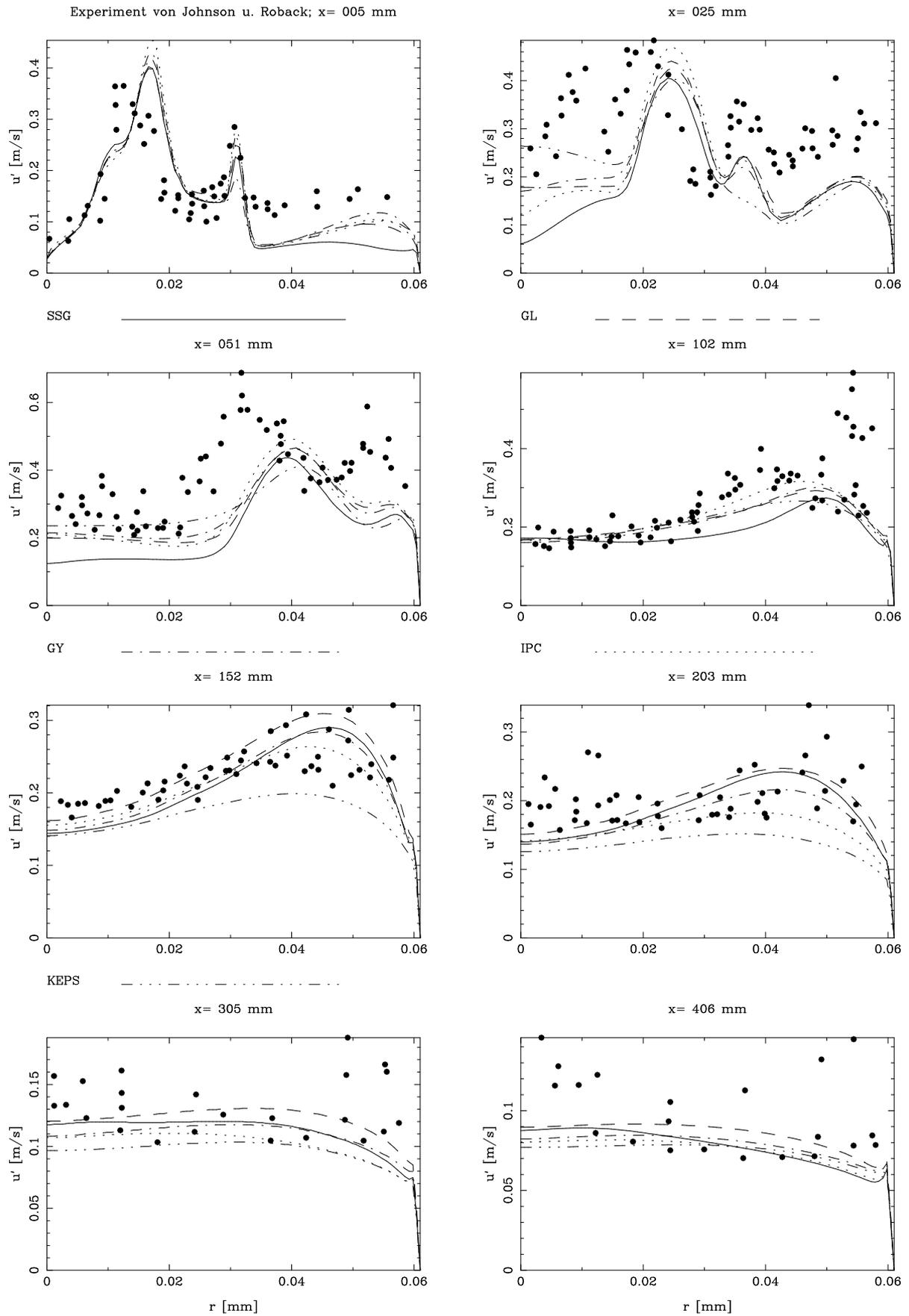


Abbildung 4.32: Johnson und Roback: Profile der Normalspannungskomponente u'

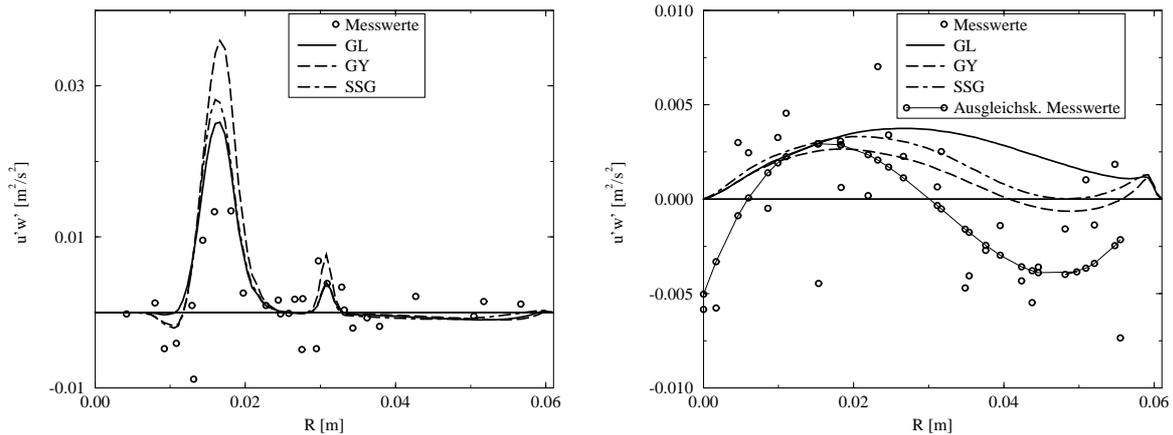


Abbildung 4.33: Schubspannungskomponente $u'w'$ 'Johnson und Roback' 25 mm (links) bzw. 203 mm (rechts) stromab der Düse

Von den Schubspannungen interessierte zuerst die Komponente $u'w'$, die bei dem letzten Experiment Unterschiede zwischen den linearen Modellen zeigte. In Abb. 4.33 sind Profile für die Komponente $u'w'$ an zwei Positionen (25 mm und 203 mm stromab der Düse) aufgetragen. Die Position 25 mm stromab befindet sich in einem Bereich mit starker Rezirkulation, während die Position bei 203 mm keine Rückströmungen aufweist. An der hinteren Meßstelle (in der Abb. rechts) sind die Verhältnisse ähnlich wie bei dem Experiment von Clausen, das GY Modell stimmt mit den Meßwerten wesentlich besser überein als das GL Modell. Da die Meßwerte sehr stark streuen, wurde in die Abbildung eine Ausgleichskurve, die nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt wurde, gelegt. Die Form dieser Kurve stimmt mit dem GY und dem SSG Modell sehr gut überein, während das GL Modell den Vorzeichenwechsel im äußeren Radiusbereich nicht mitmacht. Diese Ergebnisse stimmen im wesentlichen mit den Ergebnissen für die schwache Drallströmung überein. Wenn man jedoch Profile in Düsennähe betrachtet, verändert sich das Bild; hier ist GL Modell näher an den Meßwerten als das GY Modell, die Leistung des quadratischen Modells ist mit dem GL Modell vergleichbar.

Zusammenfassung Bei Johnson und Roback's Experiment zeigen sich zum ersten Mal deutliche Unterschiede bei den mittleren Geschwindigkeiten zwischen den Reynoldsspannungsmodellen und dem Wirbelviskositätsmodell. Zu erwarten war die bessere Übereinstimmung der Reynoldsspannungsmodelle mit der Drallkomponente. Das $k - \epsilon$ Modell ist offensichtlich nicht in der Lage insbesondere nach dem Rezirkulationsgebiet das Profil der Drallgeschwindigkeit richtig vorherzusagen. Ausgehend von einer sehr guten Übereinstimmung mit den Messungen bei den ersten Meßstellen stellt sich weiter stromab immer mehr ein Starrkörperrotationsprofil ein, das mit den wirklichen Verhältnissen wenig gemeinsam hat. Dies scheint eine typische Eigenschaft des $k - \epsilon$ Modells zu sein, da alle Autoren die das $k - \epsilon$ Modell bei verdrahten Strömungen eingesetzt haben von einem solchen Verhalten berichten. Insofern ist die gute Übereinstimmung der Drallkomponente mit dem $k - \epsilon$ Modell bei der Strömung mit geringem Drall nicht weiter verwunderlich, da der Drallerzeuger ein Starrkörperrotationsprofil für W erzeugt hat, was sich dann im

Diffusor nicht veränderte. Die Reynoldsspannungsmodelle tendieren nicht bzw. nicht so ausgeprägt zur Bildung eines Starrkörperrotationprofils. Allerdings scheint nur das quadratische Modell in der Lage zu sein, das W -Profil weiter stromab richtig vorherzusagen. Die Unterschiede der Reynoldsspannungsmodelle ließen sich wieder durch die in Abschnitt 2.4.1.3 gemachten Aussagen erklären.

Die bessere Übereinstimmung bei der Drallkomponente scheint auf den ersten Blick durch eine wesentlich schlechtere Übereinstimmung mit der Achsialgeschwindigkeit U erkauft worden zu sein. Bei Betrachtung der vermessenen Geometrie (Abb. 4.4) zeigt sich aber, daß die Abströmung nicht achsensymmetrisch ist. Außerdem ist davon auszugehen, daß die Umlenkung der Strömung einen Einfluß auf die Achsialgeschwindigkeit hat. Messungen von Dellenback [16] an einer plötzlichen Rohrerweiterung ohne Umlenkung zeigen bei verschiedenen Drallzahlen radiale Geschwindigkeitskomponenten der Achsialgeschwindigkeit bzw. ein Rückstromgebiet, das sich bis zum Ende der Meßstrecke ausdehnt. Daher kann davon ausgegangen werden, daß die Rechnung mit der verwendeten Abströmbedingung plausible Resultate für die Achsialgeschwindigkeit liefert.

Obiges Phänomen zeigt auch, daß die Ansprüche an den Testaufbau und insbesondere die Abströmverhältnisse bei der Vermessung bzw. Berechnung verdrallter Strömungen sehr hoch sind. Beim folgenden Testfall wurde die Geometrie am Auslass so modifiziert, daß keine Rückströmungen auftreten können.

4.3.4 Starker Drall

Holzäpfel hat die Modellbrennkammer bei verschiedene Drallzahlen vermessen. Es steht je ein Datensatz für moderaten ($S = 0.4$) und starken Drall ($S = 0.95$) zur Verfügung. Beide Drallzahlen wurden mit allen Varianten der Modelle nachgerechnet und stehen im Internet für Vergleiche zur Verfügung. Im Rahmen dieser Arbeit werden die wesentlichen Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen anhand einiger Schnitte von U , W und u'/v' für starken Drall präsentiert, der Dralleinfluß auf die Modelle wird an einem Schnitt gezeigt.

Das Experiment wurde zuerst von Hirsch [28] nachgerechnet. Hirsch weist darauf hin, daß die Meßwerte im Bereich unter $r \approx 50$ mm nicht für Vergleiche mit stationär und achsensymmetrisch berechneten Werten herangezogen werden sollten, da die Strömung in diesem Bereich deutlich niederfrequente nicht periodische Sekundärströmungen aufweist, die je nach relativer Lage der Hitzdrahtsonde zu durchaus nicht verschwindenden Mittelwerten der Radialgeschwindigkeit führen können.

Die eigenen Berechnungen mit dem Wirbelviskositätsmodell und dem GL Modell stimmen mit den von Hirsch [28] gezeigten Ergebnissen überein.

Gitter Für dies Experiment wurden detaillierte Untersuchungen zur Wahl des Rechengitters durchgeführt (vgl. Abschnitt 4.2.1). Gitterunabhängige Lösungen konnten mit dem Konvektionsschema aus Abschnitt 3.1 mit 10.000 Punkten in der Brennkammer erreicht werden.

Geschwindigkeiten Der Verlauf der Achsialkomponente U ist relativ komplex (vgl. Abb. 4.34). Der in die Kammer eintretende Strahl wird durch das große Flächenverhältnis zunächst verzögert und weitet sich auf. Auf der Achse sorgt die Drallkomponente für die Ausbildung eines Rezirkulationsgebietes. Ab $x = 80$ mm ist in Achsennähe der Einfluß

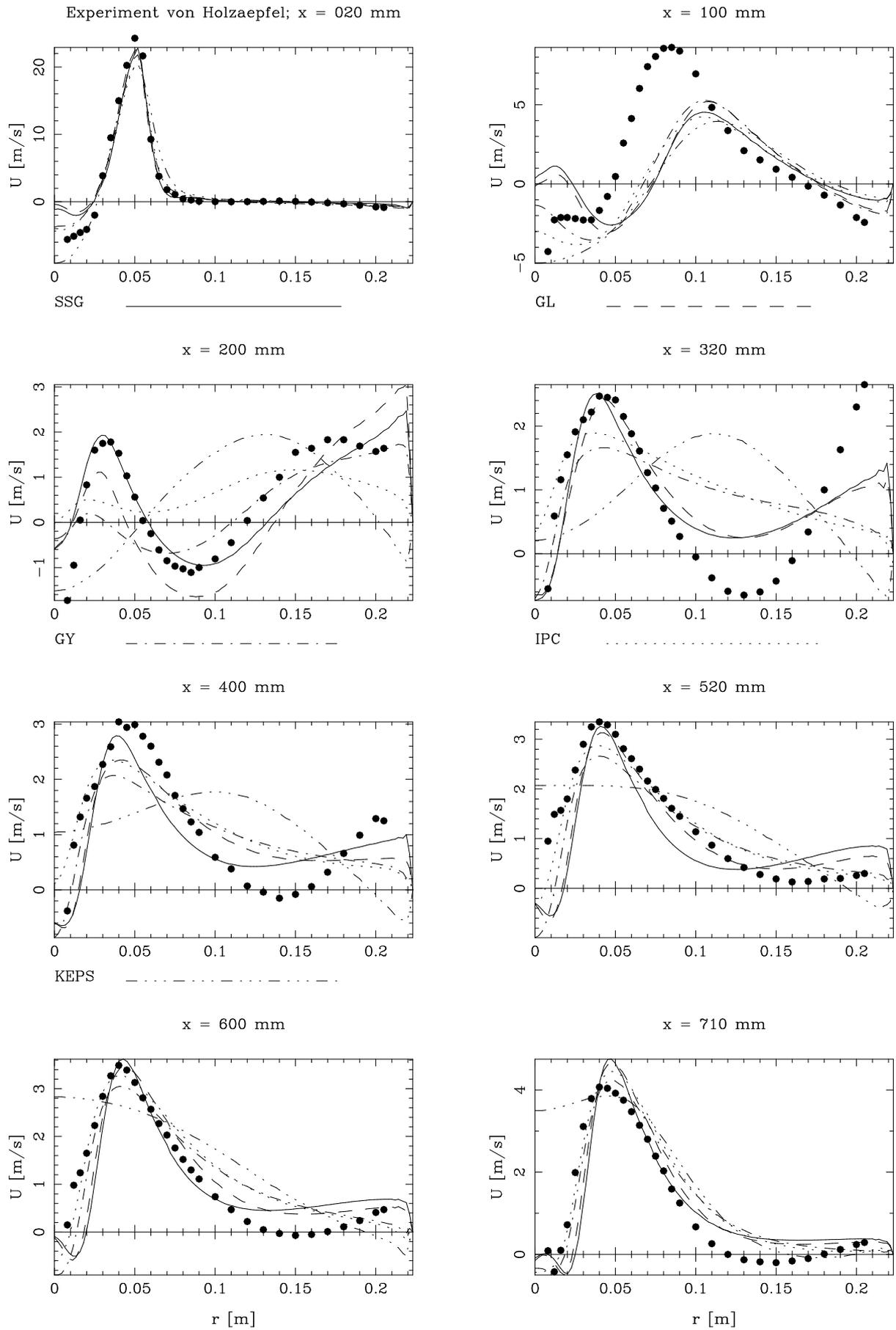


Abbildung 4.34: Experiment von Holzäpfel ($S=0.95$): Profile der Achsialgeschwindigkeit U

des Ringspaltauslasses bemerkbar, der bei $r \approx 50$ mm für die Ausbildung einer positiven Achsialkomponente sorgt. Dadurch wird das Rezirkulationsgebiet in einen sehr schmalen Bereich auf der Achse und einen größeren Bereich oberhalb des Ringspaltstrahls zerteilt. Das innere Rezirkulationsgebiet verläuft praktisch über die gesamte Kammerlänge, während sich das zweite Gebiet bis zu $x \approx 400$ mm erstreckt. Zusätzlich findet sich ein drittes Rezirkulationsgebiet an der oberen Kammerwand, das sich vom Einlaß bis $x \approx 160$ mm erstreckt. Bedingt durch das große Flächenverhältnis sinken die Achsialgeschwindigkeiten unter 10 % der Einströmgeschwindigkeit. Im Bereich $x > 400$ bildet sich im Bereich des Auslass-Ringspalts ($55 \leq r \leq 75$ mm) ein Geschwindigkeitsmaximum aus.

Alle beschriebenen Strömungsphänomene werden von den Reynoldsspannungsmodellen reproduziert, wobei sich graduelle Unterschiede ergeben. Alle Modelle unterschätzen die Länge der zweiten Rezirkulationszone. Das GL Modell und das quadratische Modell zeigen die beste Übereinstimmung mit den Messungen, während das GY und insbesondere das IPC Modell die Ausbildung der zweiten Rezirkulationszone und den Einfluß des Auslaßstrahls viel zu schwach berechnen. Da bei dieser Strömung die Scherraten wieder eine große Rolle spielen, läßt sich die schlechte Leistung des GY Modells über die Unterbewertung der Scherrate erklären. Die Verschiebung des Gewichtes auf den ersten Term des Druck-Scher-Korrelationsterms scheint also bei Strömungen mit starkem Drall und starken Scherraten schlechte Ergebnisse zu liefern.

Nennenswerte Unterschiede zu den Messungen ergeben sich für die Maximalbeträge von U im Bereich des Strahls zwischen $x \approx 20$ mm und $x \approx 160$ mm. Die Messungen liegen hier jeweils deutlich über den berechneten Werten. Eine Analyse der Erhaltung des Volumenstroms gemäß

$$\dot{V} = \int_{r=0}^R U r dr \quad (4.2)$$

zeigte, daß die gemessenen achsialen Volumenströme der Messungen im Bereich bis $x \approx 200$ mm deutlich über denen der Rechnung liegen (vgl. Abb. 4.35). Holzäpfel hat diese Diskrepanz in seiner Arbeit auch erkannt und fehlende Geschwindigkeitswerte in Wandnähe für die Unterschiede verantwortlich gemacht. Er sieht daher den integralen Volumenstrom nur eingeschränkt als Sensor für die Meßgenauigkeit. Trotzdem liegt die größte Differenz von gemessenem und berechnetem Volumenstrom genau in dem Bereich, wo die Messungen einen starken Anstieg des Volumenstroms zeigen.

Das $k - \epsilon$ Modell kann die beschriebenen Phänomene nicht reproduzieren. Der Einfluß des Auslaßstrahls wird überhaupt nicht berechnet, sodaß die Profile im Bereich zwischen $x \approx 200$ mm und $x \approx 300$ mm völlig falsch verlaufen vgl. Abb. 4.34 b. Während die Messungen und die Rechnungen mit den Reynoldsspannungsmodellen zwei Geschwindigkeitsmaxima bei $r \approx 50$ mm und bei $r > 150$ mm zeigen, findet das $k - \epsilon$ Modell ein Maximum bei $r \approx 110$ mm; an der Stelle zeigen die Messungen und die anderen Modelle ein Geschwindigkeitsminimum. Auch weiter stromab sind die Abweichungen des $k - \epsilon$ Modells erheblich.

Die Drallkomponente W (Abb. 4.36) zeigt über die gesamte Brennkammer ein Maximum bei $r \approx 50$ mm. Zwischen $x \approx 60$ mm und $x \approx 100$ mm verschiebt sich das Maximum auf $r \approx 80$ mm um dann wieder auf $r \approx 50$ mm zurückzulaufen. Dadurch bildet sich zwischen $x = 100$ mm und $x = 120$ mm ein Plateau aus, das sich stromab wieder abbaut.

Alle Effekte werden von den Reynoldsspannungsmodellen richtig wiedergegeben. Die Verschiebung des Maximums wird von den Modellen etwas früher berechnet. Die Über-

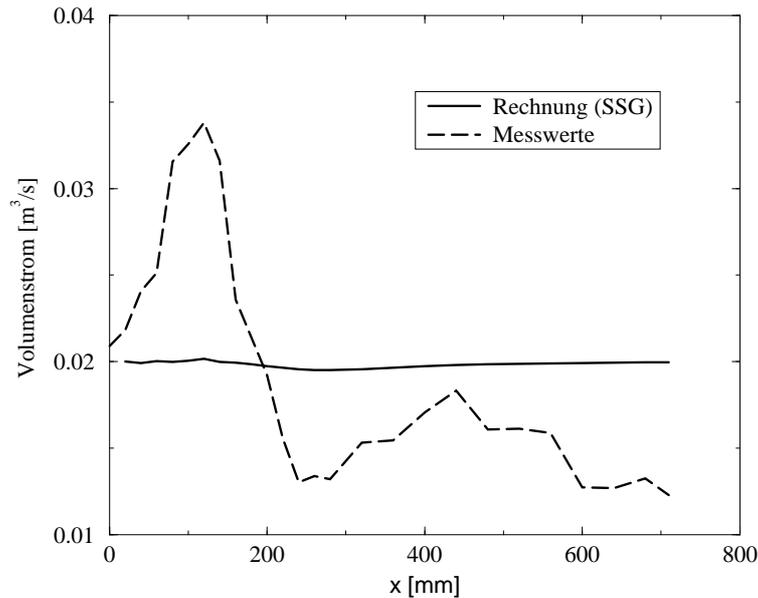


Abbildung 4.35: Verlauf des achsialen Volumenstroms (Experiment von Holzäpfel, $S=0.95$)

einstimmung mit den Messungen ist - wie auch bei der Achsialkomponente - für das GL Modell und das quadratische Modell am besten. Die Abweichungen des GY und des IPC Modells lassen sich analog erklären.

Das Wirbelviskositätsmodell entwickelt wieder ein Starrkörperrotationsprofil, daß mit den Meßwerten wenig gemeinsam hat.

Spannungen Die Schubspannungskomponente $u'v'$, Abb. 4.37 wird bis $x \approx 180$ mm von den Reynoldsspannungsmodellen zu groß berechnet, während das $k - \epsilon$ Modell in diesem Bereich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messungen aufweist. Ab $x \approx 240$ mm wechselt das Profil von $u'v'$ im Aussenbereich das Vorzeichen. Dieser Wechsel wird vom Wirbelviskositätsmodell nicht nachvollzogen, sodaß ab $x = 260$ mm die mit dem $k - \epsilon$ Modell berechneten Profile entgegengesetzt zu den gemessenen und den mit den Reynoldsspannungsmodellen berechneten Profilen verlaufen.

Es ist naheliegend, den Verlauf der $u'v'$ -Profile des $k - \epsilon$ Modells mit einem Versagen der Wirbelviskositätshypothese zu erklären. Wenn man jedoch aus den Geschwindigkeits- und Viskositätsfeldern des Reynoldsspannungsmodells $u'v'$ mit den Formeln der Wirbelviskositätshypothese berechnet zeigt sich, daß dies offensichtlich nicht der Fall ist (vgl. Abb. 4.38).

Die durchgezogene Linie in Abb. 4.38 zeigt den Verlauf von $u'v'$, wenn Transportgleichungen für alle Reynoldsspannungen gelöst werden, die strichpunktierte Linie stellt die Lösung des $k - \epsilon$ -Modells dar. Die gestrichelte Linie stellt

$$u'v' = -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

mit den Geschwindigkeits- und Viskositätsfeldern des Reynoldsspannungsmodells. Aus

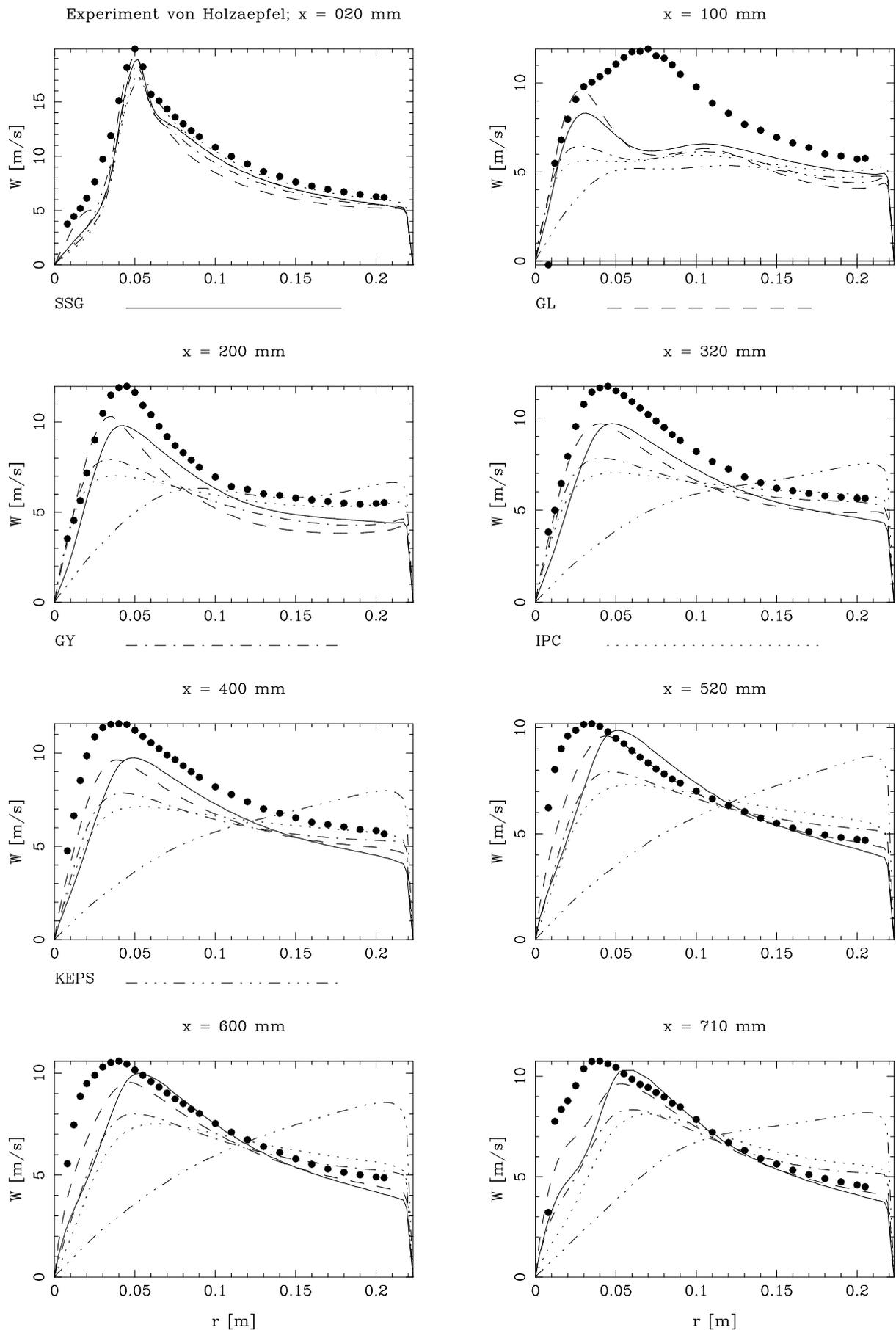


Abbildung 4.36: Experiment von Holzäpfel ($S=0.95$): Profile der Umfangsgeschwindigkeit W

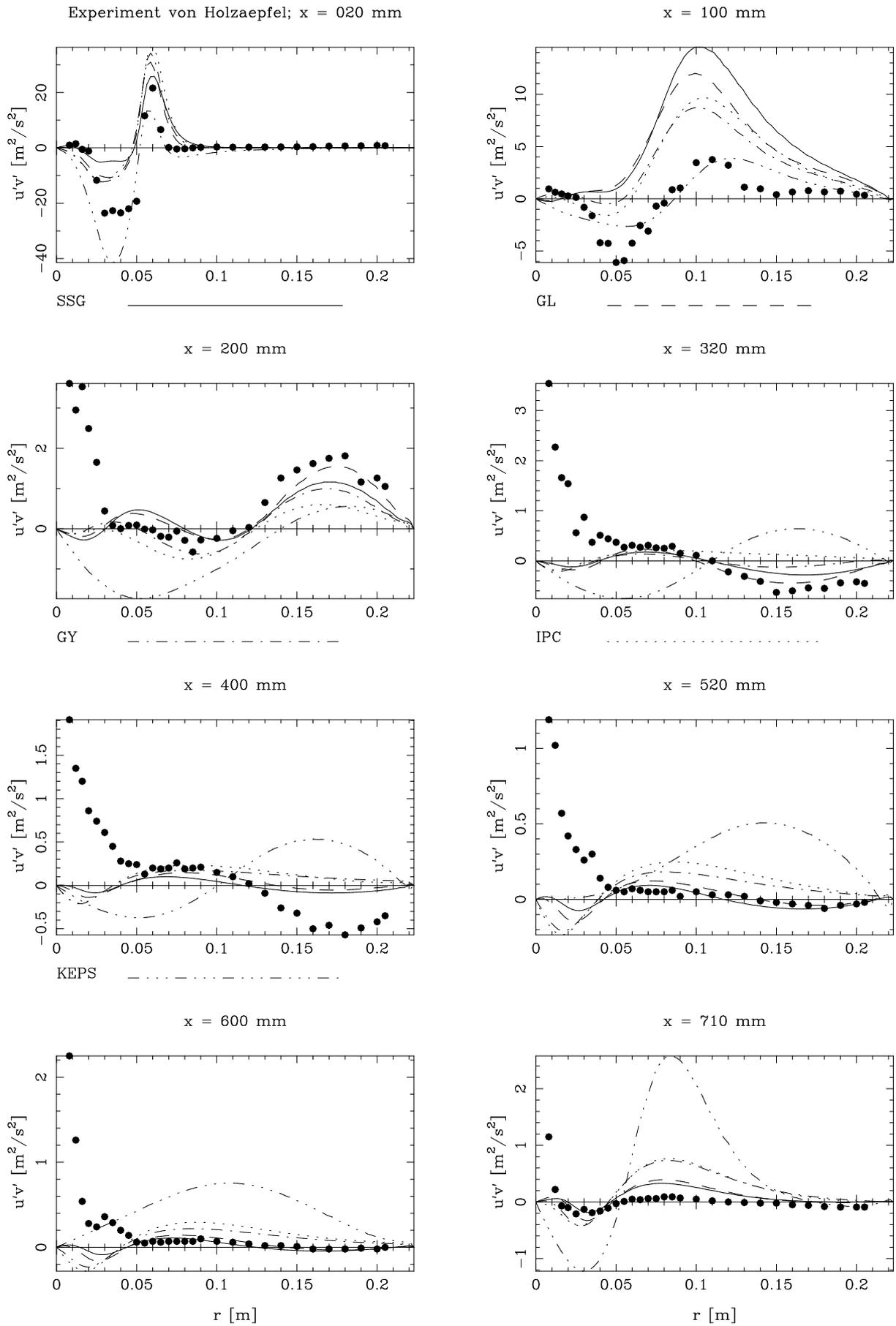


Abbildung 4.37: Experiment von Holzäpfel ($S=0.95$): Profile der Schubspannungskomponente $u'v'$

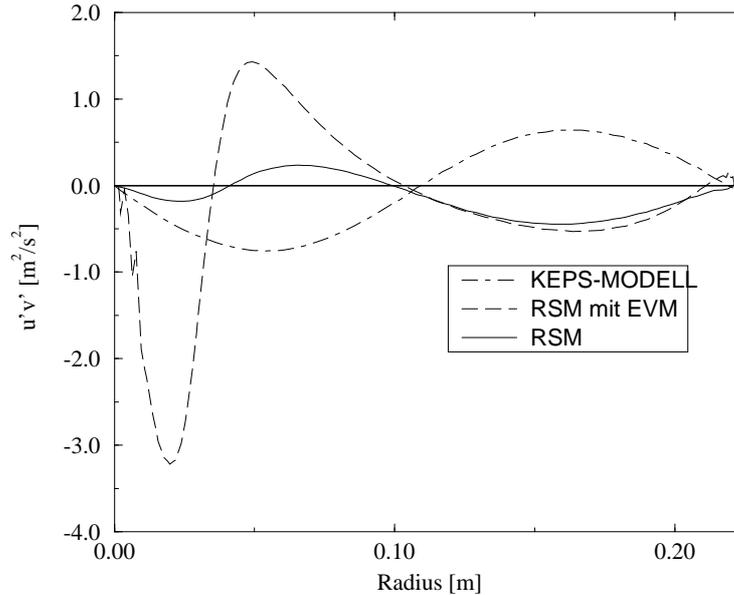


Abbildung 4.38: Verlauf der Schubspannung $u'v'$ an der Position $x=320$ mm.

Abb. 4.38 ist klar ersichtlich, das zumindest im Bereich größerer Radien die Wirbelviskositätshypothese und das Transportgleichungsmodell für $u'v'$ praktisch identische Profile liefert. Für kleinere Radien stimmen die Ergebnisse qualitativ überein; das mit obiger Formel dargestellte Profil berechnet hier quantitativ größere Werte. Demnach ist es nicht korrekt, pauschal von einem Versagen der Wirbelviskositätshypothese zu sprechen.

Vergleich der Drallzahlen Holzäpfel hat die Modellbrennkammer bei zwei verschiedenen Drallzahlen vermessen. Ein direkter Vergleich des Verhaltens der Modelle bei unterschiedlichem Drall bietet sich also an. Abb. 4.39 zeigt Profile der wesentlichen Größen etwa in der Mitte der Brennkammer bei der kleineren Drallzahl ($S=0.4$), Abb. 4.40 stellt die gleiche Situation für $S=0.95$ dar. Bei schwachem Drall (Abb. 4.39) weicht das GL Modell sowohl bei der Achsialkomponente U als auch bei der Umfangskomponente W deutlich von den anderen Modellen und den Messungen ab. Das Minimum der Schubspannungskomponente $u'v'$ wird vom GL Modell viel zu klein berechnet, während die anderen Modelle sehr gut mit den Messungen übereinstimmen.

Bei starkem Drall (Abb. 4.40) dreht sich das Bild um. Hier stimmt das GL Modell wesentlich besser mit dem quadratischen Modell und den Messungen überein als das GY Modell.

Schlüssig erklären läßt sich die unterschiedliche Leistung der linearen Modelle wieder mit dem Einfluß von S_{ij} und W_{ij} , die aufgrund der kompakten Formulierung der IP Modelle über eine Konstante gewichtet werden.

Zusammenfassung Analog zum Experiment von Johnson & Roback zeigen sich beim Experiment von Holzäpfel deutliche Unterschiede insbesondere zwischen den Reynoldsstärkungsmodellen und dem $k-\epsilon$ Modell. Wie bei Johnson & Roback bildet die Drallkomponente des Wirbelviskositätsmodells ein Starrkörperrotationsprofil aus, das sich weder

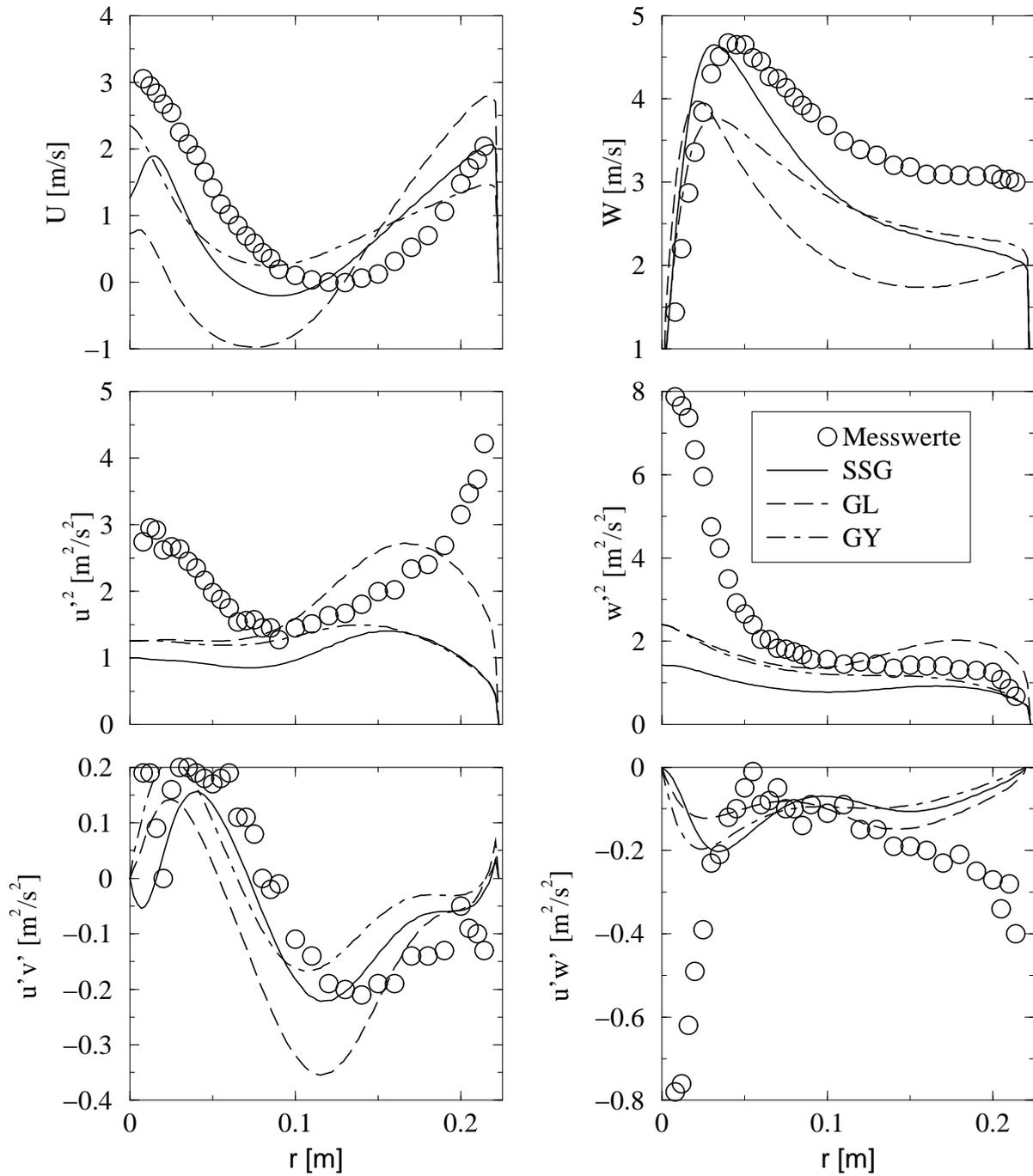
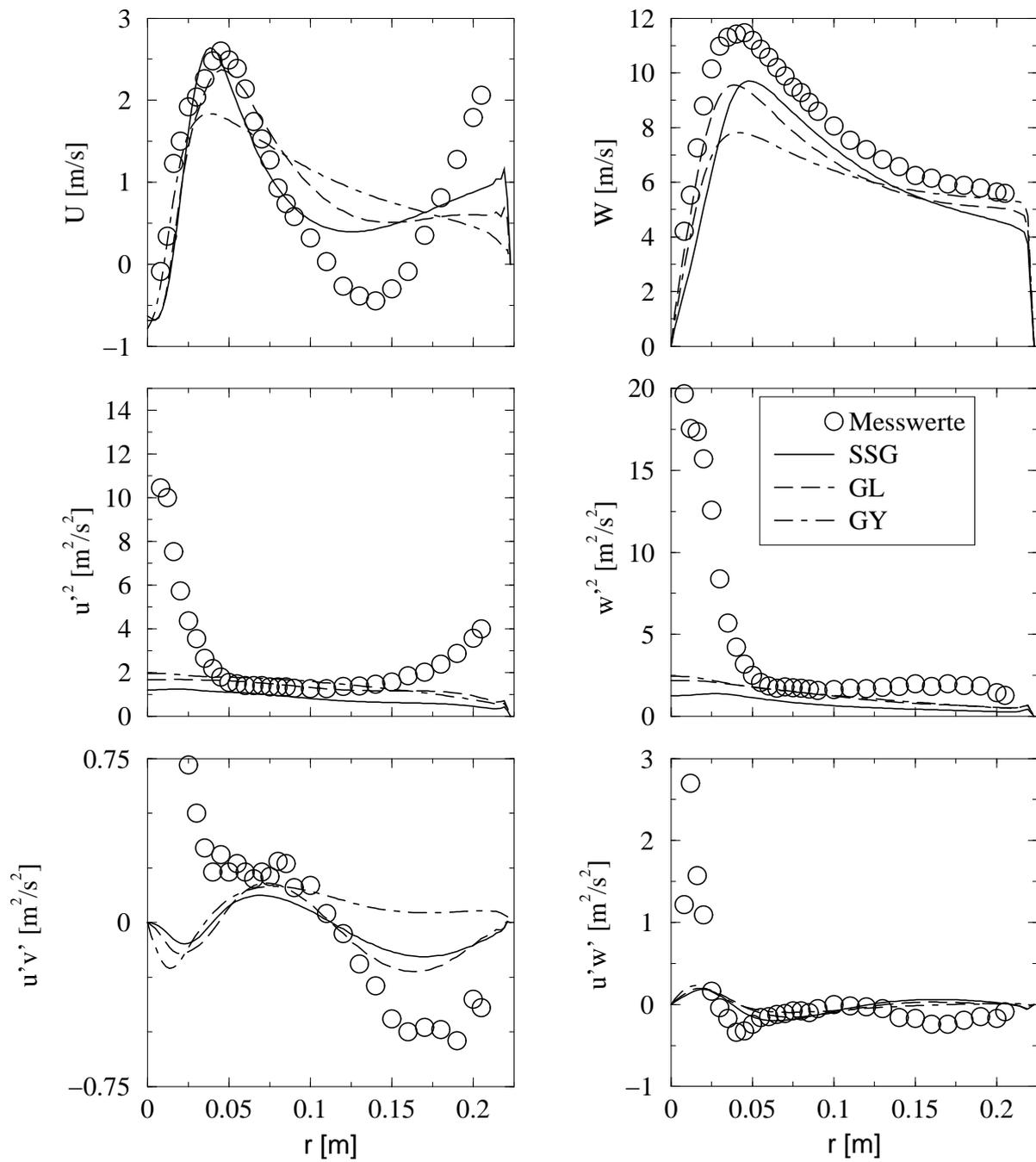


Abbildung 4.39: Profile bei $x=360$ mm (Experiment von Holzäpfel, $S=0.4$)

Abbildung 4.40: Profile bei $x=360$ mm (Experiment von Holzäpfel, $S=0.95$)

in den Messungen noch bei den anderen Rechnungen findet. Die Achsialkomponente, die beim letzten Testfall noch sehr gut mit den Messungen übereinstimmte, wird hier vom $k - \epsilon$ Modell völlig falsch berechnet. Im Gegensatz zu den anderen Fällen, bei denen in der Regel graduelle Unterschiede zu finden waren, verlaufen die Profile der Achsialkomponente vom $k - \epsilon$ Modell bereichsweise entgegengesetzt zu den gemessenen bzw. zu den mit den Reynoldsspannungsmodellen gerechneten. In diesen Bereichen verläuft auch die vom $k - \epsilon$ Modell berechnete Schubspannungskomponente $u'v'$ entgegengesetzt zu den anderen Profilen. Da ein mit der Wirbelviskositätshypothese berechnetes Schubspannungsprofil korrekte Verläufe zeigt, wenn man die korrekten, das heißt mit dem Reynoldsspannungsmodell berechneten, Felder für die Geschwindigkeiten einsetzt, scheint die Kopplung der Spannungen an die Geschwindigkeitsgradienten zumindest im Bereich der verkehrt verlaufenden Profile nicht die Ursache für das Versagen des $k - \epsilon$ Modells zu sein. Das $k - \epsilon$ Modell kann die Ausbildung des Auslaßstrahls ab $x \approx 80$ mm nicht nachbilden. Es ist denkbar, daß hierfür eine an die Geschwindigkeitskomponenten gekoppelte Schubspannung $u'v'$ im Bereich $x < 100$ mm und $r < 50$ mm verantwortlich ist. Leider sind die Meßwerte in diesem Bereich (Achsennähe) aus den oben angeführten Gründen nicht sehr zuverlässig, sodaß eine endgültige Aussage hier nicht möglich ist.

Insgesamt zeigt die Auswertung der Strömung mit ihren komplexen Profilen eine deutliche Überlegenheit der Reynoldsspannungsmodelle bzw. ein vollständiges Versagen des $k - \epsilon$ Modells. Obwohl das Wirbelviskositätsmodell in den vorigen Testfällen relativ gut abgeschnitten hatte, kann angesichts der für diesen Fall berechneten Ergebnisse für komplexere Drallströmungen nur ein Schließungsmodell höherer Ordnung empfohlen werden. Von den Reynoldsspannungsmodellen zeigen SSG und GL die beste Übereinstimmung, die in den vorigen Testfällen mit geringem Drall überlegenen Modelle GY und IPC zeigen hier eine relativ schlechte Leistung. Dies läßt sich wie bei den vorhergehenden Fällen schlüssig durch die in Abschnitt 2.4.1.3 gemachten Aussagen erklären.

4.3.5 Starker Drall (instationär, 3D)

Eine charakteristische Eigenschaft dieser Strömung sind hohe dominante Frequenzen, die im nächsten Abschnitt besprochen werden. Anschließend werden wie bei den anderen Experimenten die mittleren Profile mit der Rechnung verglichen.

4.3.5.1 Frequenzen

In Abb. 4.41 ist das Energiedichtespektrum von u' etwa einen Düsendurchmesser stromab der Düse in Höhe des Düsenradius aufgetragen. Das Maximum bei knapp 2.000 Hz zeigt die dominante Frequenz der Strömung, die experimentell praktisch überall in der Kammer nachgewiesen werden kann und beim Betrieb der Düse auch deutlich zu hören ist.

Diese Frequenz ist zu groß, um mit Reynolds-gemittelten Gleichungen aufgelöst werden zu können. Aus den gemessenen Fluktuationen und den in Abschnitt 3.4 gemachten Annahmen lassen sich für die erste Meßebene Werte für die turbulente kinetische Energie $k \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$ und die Dissipationsrate $\epsilon \left[\frac{m^2}{s^3} \right]$ bestimmen. Der Quotient aus ϵ und k stellt die turbulente Frequenz dar, die nach Wilcox [77] einige Größenordnungen über der aufzulösenden Frequenz liegen muß. mit $k \approx 500 \text{ m}^2/\text{s}^2$ und einem Längenmaß von $\frac{R}{5}$ ergibt sich diese Frequenz zu ca. 2.000 Hz. Die Bedingung von Wilcox ist damit für diese Strömung nicht erfüllt, das heißt die Frequenzen können hier mit statistischen Turbulenzmodellen

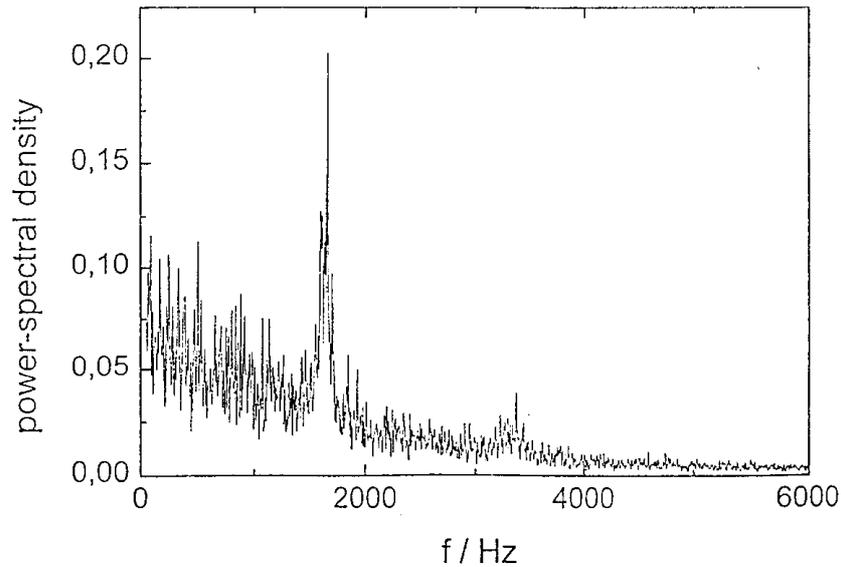


Abbildung 4.41: Energiedichtespektrum von u' ; $x = 19 \text{ mm}$; $y=12.5 \text{ mm}$; $z=0$ (aus [41])

nicht dargestellt werden. Leider lässt sich allgemein nicht angeben, ab welcher Frequenz Strömungen nicht mehr mit statistischen Turbulenzmodellen berechnet werden können. Schütz [65] löste mit statistischen Modellen eine Strömung mit einer Frequenz von knapp 3000 Hz auf. Für die Grobstruktursimulation ergibt sich obige Problematik nicht, da sie nicht auf statistischen Mittelungen basiert.

Die Berechnung erfolgte mit einem Zeitschritt von $4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, um Frequenzen von ca. 2.000 Hz mit etwa 10 Zeitschritten auflösen zu können. Zur Analyse der Frequenzen wurden die Geschwindigkeitsfelder aufeinanderfolgender Zeitschritte auf Festplatten geschrieben und mit Hilfe der 'Proper Orthogonal Decomposition'- Methode aufbereitet. Das Verfahren ist in Abschnitt 3.3.6 beschrieben.

Für die Frequenzanalyse wurden knapp 500 aufeinanderfolgende Zeitschritte ausgewertet. Die POD liefert die Energiebeiträge und Frequenzen der einzelnen Moden der Strömung. In Tab. 4.2 sind diese Werte für die ersten 15 Moden sortiert nach dem Energieanteil aufgetragen. Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß praktisch alle Moden Vielfache der Basisfrequenz von 50 Hz beinhalten und daß sich die Frequenz ausgehend von der Basisfrequenz alle zwei Moden um diesen Wert erhöht. Eine Ausnahme bilden die in der Tabelle fett gedruckten Moden fünf und sechs. Sie haben eine viel höhere Frequenz, die in der Größenordnung der experimentell gefundenen dominanten Frequenz liegt.

Der Energieanteil aller ausgewerteten Moden ist in Abb. 4.42 links dargestellt. Demnach enthalten die ersten fünf Moden bereits die Hälfte der Gesamtenergie der Strömung, 75 % der Energie werden von 15 Moden abgedeckt und ab Mode 200 ist praktisch kein meßbarer Energiebeitrag der Moden zu erkennen. In Abb. 4.42 ist das Energiedichtespektrum der ersten fünf ungeraden Moden dargestellt. Neben der Mode fünf, die die dominante Frequenz beinhaltet haben auch die anderen Moden Nebenmaxima im Bereich dieser Frequenz, die dominante Frequenz findet sich also auch in den anderen Moden wieder.

Michalke [48] hat eine ähnlich Strömung theoretisch behandelt, wobei er von mittleren Geschwindigkeitsprofilen an der ersten Meßebeine ausging. Er legt dar, daß es sich bei den

Mode	Energie	Σ Energie	Freq. [Hz]
1	16.03	16.03	50
2	11.77	27.80	50
3	11.36	39.16	50
4	7.81	46.98	100
5	4.49	51.47	1820
6	4.44	55.92	1820
7	4.04	59.96	150
8	3.47	63.43	150
9	3.08	66.50	200
10	2.70	69.20	200
11	2.01	71.22	260
12	1.90	73.12	260
13	1.64	74.76	320
14	1.46	76.22	320
15	1.39	77.61	370

Tabelle 4.2: Energieanteile der Moden des Experiments von Lehmann

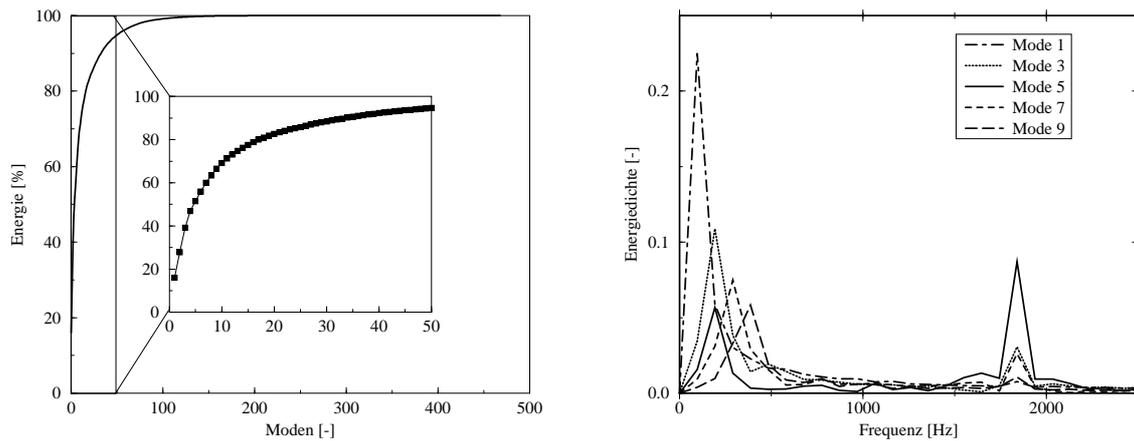


Abbildung 4.42: Energieanteil (links) und Energiedichte (rechts) der Moden

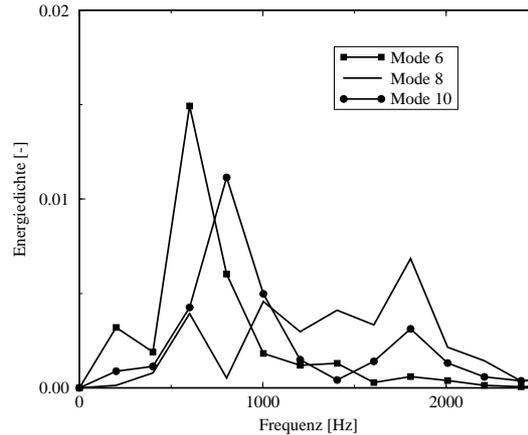


Abbildung 4.43: Energiedichtespektrum von drei ausgewählten Moden (Rechnung ohne Feingittermodell)

Instationaritäten um nicht viskose Effekte handelt und kommt mit Methoden der Stabilitätsanalyse zu ähnlichen Frequenzen wie den gemessenen bzw. den hier berechneten. Ausgehend von den Randbedingungen, die Michalke annimmt wurden auch 3D- Berechnungen mit dem oben beschriebenen Verfahren ohne Feingittermodell durchgeführt. Hier wurden wieder mit knapp 2000 Hz sehr ähnliche dominante Frequenzen gefunden, was die Aussage stützt, daß es sich bei den beobachteten Instationaritäten tatsächlich um nicht viskose Effekte handelt. Abb. 4.43 zeigt für diese Berechnung die Energiedichtespektren von drei Moden.

4.3.5.2 Asymmetrien und helikale Strukturen

Obwohl die gemittelten Profile der Geschwindigkeitsfelder symmetrisch sind, weist die Strömung deutliche Asymmetrien auf. Abb. 4.44 zeigt zwei Stromlinien in der Nähe der Symmetrieachse. Zur besseren Orientierung sind in der Abbildung die Drallerzeuger und die Düse grau dargestellt, die Brennkammer und die Symmetrieachse sind durch Konturlinien angedeutet. Die Stromlinien in der Abbildung folgen etwa dem Zentrum des Wirbels zu diesem Zeitpunkt. Es ist sehr gut zu erkennen, daß das Wirbelzentrum spiralförmig um die Symmetrieachse der Brennkammer verläuft und nicht mit ihr zusammenfällt. Das Zentrum des Wirbels rotiert um die Symmetrieachse, erst durch die Mittelung vieler Zeitschritte fallen Wirbelzentrum und Symmetrieachse der Kammer zusammen.

Einen weiteren von den Experimentatoren beschriebenen Effekt ist auf Abb. 4.45 zu sehen. Die Stromlinie zeigt neben der großräumigen Drallbewegung eine zweite Rotation in der Nähe der Brennkammerwand. Diese helikalen Strukturen wandern und stellen ebenfalls eine Asymmetrie der Strömung dar.

4.3.5.3 Mittlere Felder

Die mittleren Geschwindigkeitsfelder wurden aus mehr als 2.000 Zeitschritten erzeugt, nach etwa 800 Zeitschritten waren praktisch keine signifikanten Änderungen des Strömungsfeldes erkennbar. Abb.4.46 stellt Isolinien der mittleren Geschwindigkeiten für die Achsial-

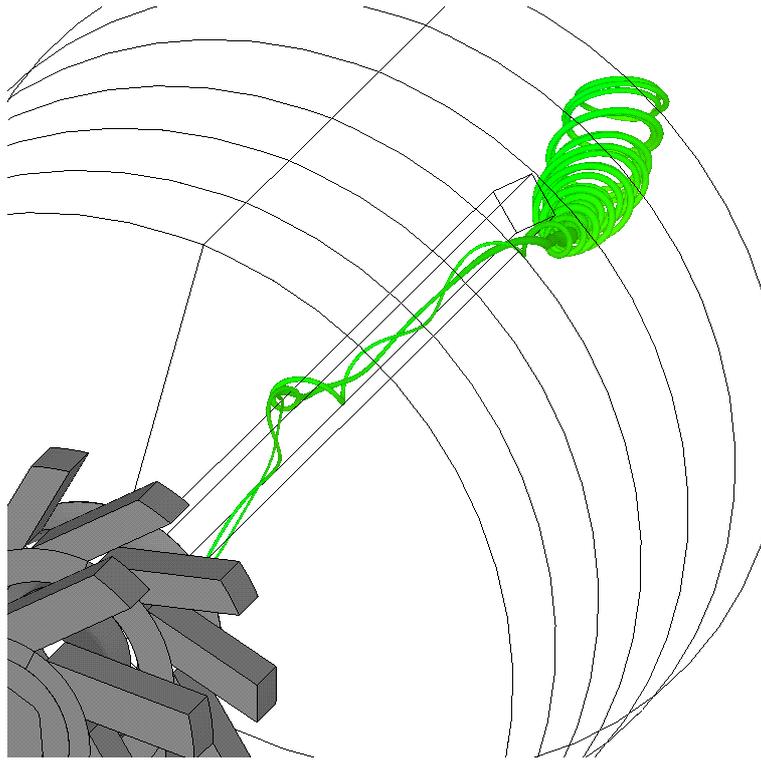


Abbildung 4.44: Stromlinien in der Nähe der Symmetrieachse (Experiment von Lehmann)

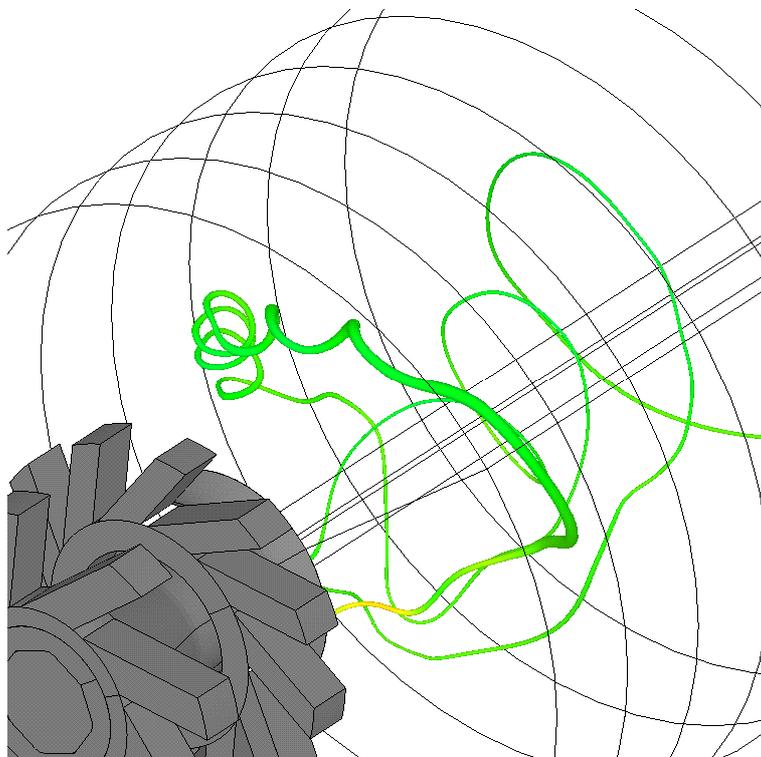


Abbildung 4.45: Stromlinie mit Helix in der Nähe der Brennkammerwand (Experiment von Lehmann)

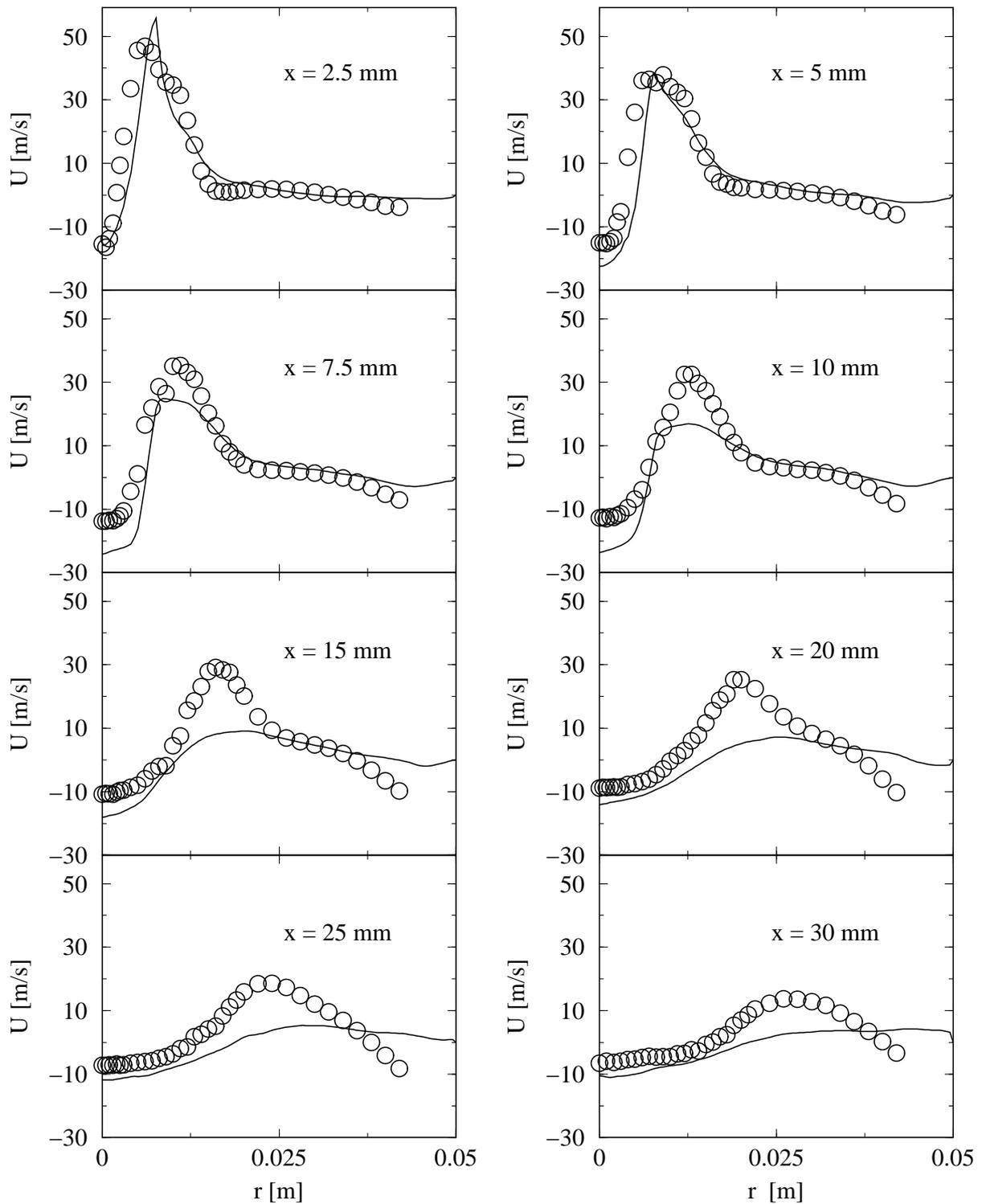


Abbildung 4.47: Mittlere Profile der Achsialgeschwindigkeit (Experiment von Lehmann)

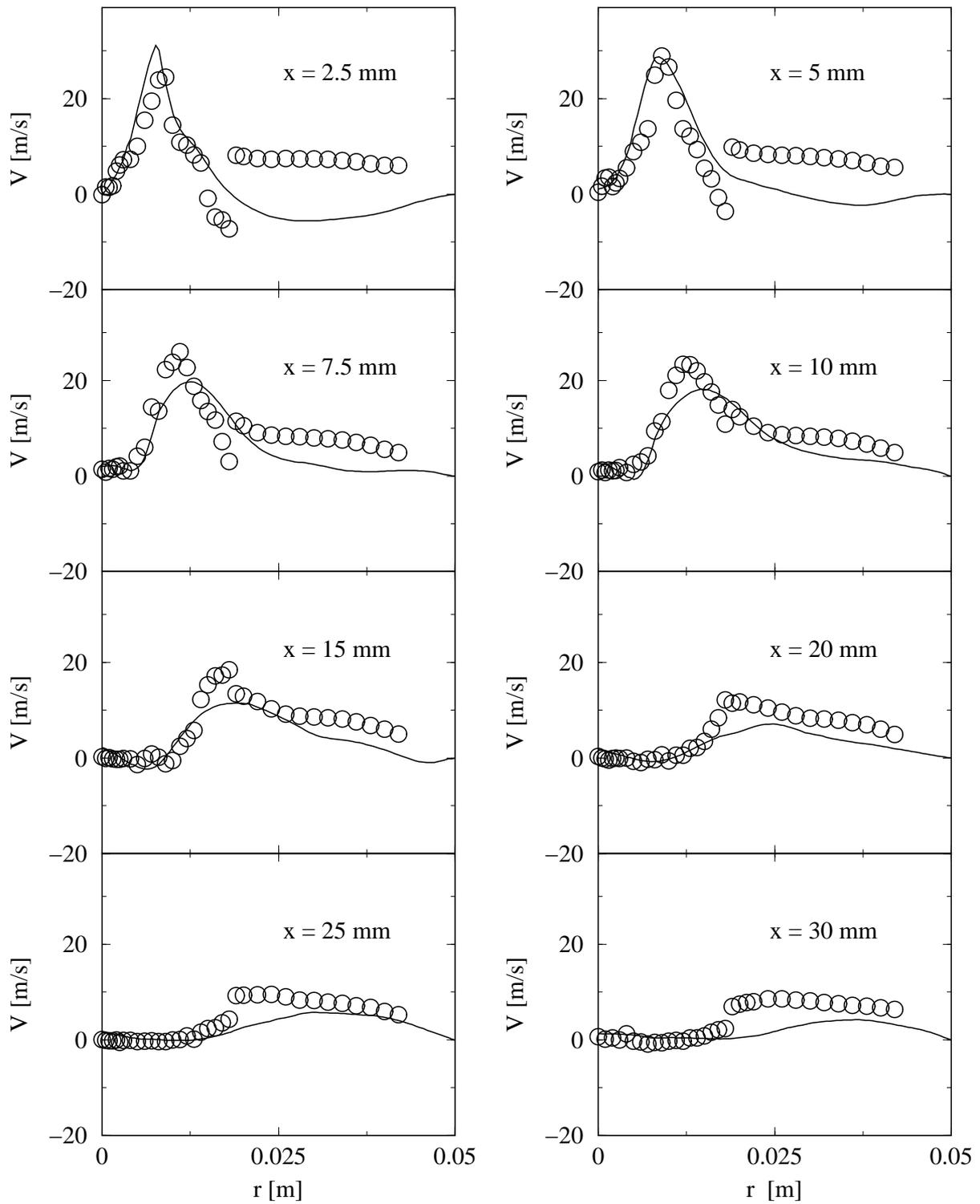


Abbildung 4.48: Mittlere Profile der Radialgeschwindigkeit (Experiment von Lehmann)

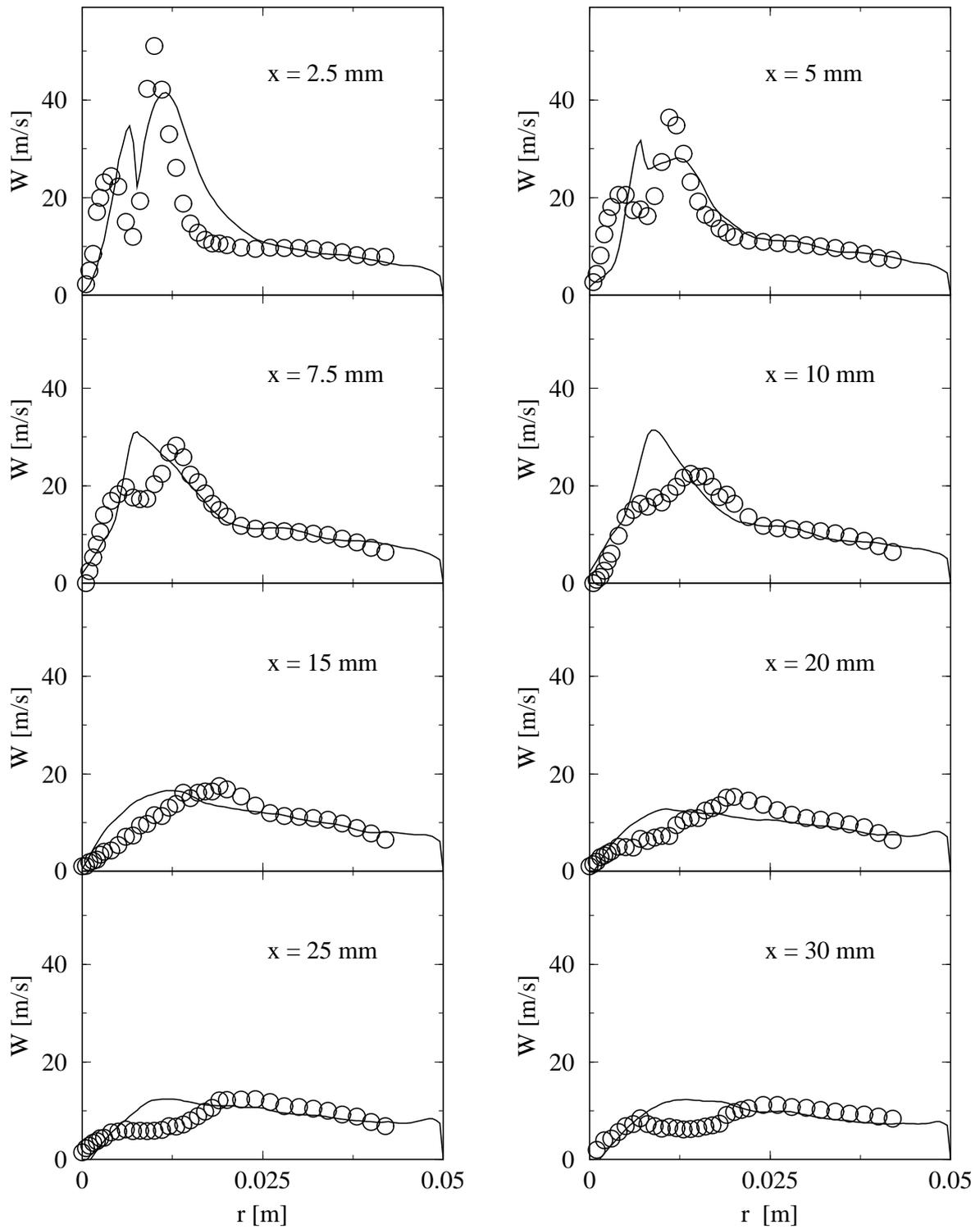


Abbildung 4.49: Mittlere Profile der Umfangsgeschwindigkeit (Experiment von Lehmann)

Strahl wird von der Rechnung ebenfalls vorhergesagt, wobei sich dieser stärker abbaut als bei der Messung. Bei einer weiteren Messung stellte sich heraus, daß die Strömung eine zweite stabile Lösung für die Achsialkomponente aufweist, die einen wesentlich stärkeren Abbau der Achsialkomponente ähnlich zu den LES-Ergebnissen beschreiben.

Die Radialkomponente, in Abb. 4.48 dargestellt, weist im Strahlbereich eine sehr große Aufwärtskomponente auf, die sich bis $x = 30$ mm weitgehend abbaut. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist für diese Komponente sehr gut. Sowohl die radiale Lage als auch der Betrag des Maximums werden von der LES analog zu den Messungen reproduziert. Der Versatz der Messungen an den ersten drei Meßebenen bei $r \approx 18$ mm wird von der LES nicht nachvollzogen und beruht vermutlich auf Meßproblemen.

Die Umfangskomponente W (Abb. 4.49) stimmt an der ersten Meßebene sehr gut mit den Messungen überein. Wie die Messung weist die Rechnung zwischen den beiden Düsen ein Minimum auf. Der Abbau der unterschiedlichen Geschwindigkeiten wird allerdings von der Rechnung etwas anders vorhergesagt als die Messungen es zeigen. Bei der Rechnung hält sich das innere Maximum, während sich das äußere Maximum schnell abbaut. Aus den Messungen zeigt sich ein Abbau des Minimums und ein Zusammenwachsen der beiden Drallkomponenten. Ab $x \approx 20$ mm sind die Gradienten im wesentlichen abgebaut und es stellt sich eine relativ gleichförmige Drallverteilung über den Radius ein, die betragsmäßig bei etwa 25 % der Maximalgeschwindigkeit des Dralls liegt. Der starke Abbau der Drallkomponente wird von der LES richtig wiedergegeben.

Spannungen Die Profile der Normalspannungen für v'^2 und w'^2 an der ersten Meßebene werden von der LES qualitativ und quantitativ richtig wiedergegeben. Das Niveau von u'^2 (Abb. 4.50) wird von der LES an den ersten drei Stationen zu groß berechnet. Den qualitativen Anstieg dieser Komponente kann die Rechnung auch reproduzieren. Der Maximalwert der Spannung ($\approx 900 \text{ m}^2/\text{s}^2$) bei $x = 7.5$ mm fällt bis $x = 30$ mm um den Faktor sechs. Der starke Abfall³ wird auch von der LES nachvollzogen, wobei diese ab $x = 15$ mm kleinere Maxima vorhersagt als die Messung.

Die Schubspannungskomponente $u'v'$ (Abb. 4.51) zeigt Abweichungen zwischen Messung und Rechnung, wobei sich quantitative Unterschiede vor allem bis $x=20$ mm ergeben. Im Bereich zwischen $x = 7.5$ mm und $x = 20$ mm berechnet die LES ein lokales Minimum, das von den Messungen nicht gezeigt wird. Der starke Abbau dieser Komponente wird von der LES auch wieder analog zur Messung gezeigt. In Abb. 4.52 ist das Profil von $u'v'$ für $x = 30$ mm noch einmal mit anderem Maßstab dargestellt. Hier ist sowohl die qualitative als auch die quantitative Übereinstimmung als gut zu bezeichnen.

Zusammenfassung Die LES-Berechnung der von Lehmann vermessenen Gasfilmdüse brachte sehr interessante Resultate. Die im Experiment gefundenen dominierenden Frequenzen konnten mit der LES nachvollzogen werden. Diese Frequenz konnte auch mit den Randbedingungen von Michalke's Stabilitätsanalyse und ohne Verwendung eines Feingittermodells numerisch nachgewiesen werden, was die Aussage von Michalke bestätigt, daß es sich bei dieser Frequenz um einen nicht viskosen Effekt handelt.

Für die Modellierung der Einströmung wurde ein sehr hoher Aufwand getrieben. Die gute Übereinstimmung der berechneten Profile mit den gemessenen Werten unmittelbar

³beim Experiment von Holzäpfel (starker Drall) erfolgte der Abbau um denselben Faktor über die sechsfache Länge

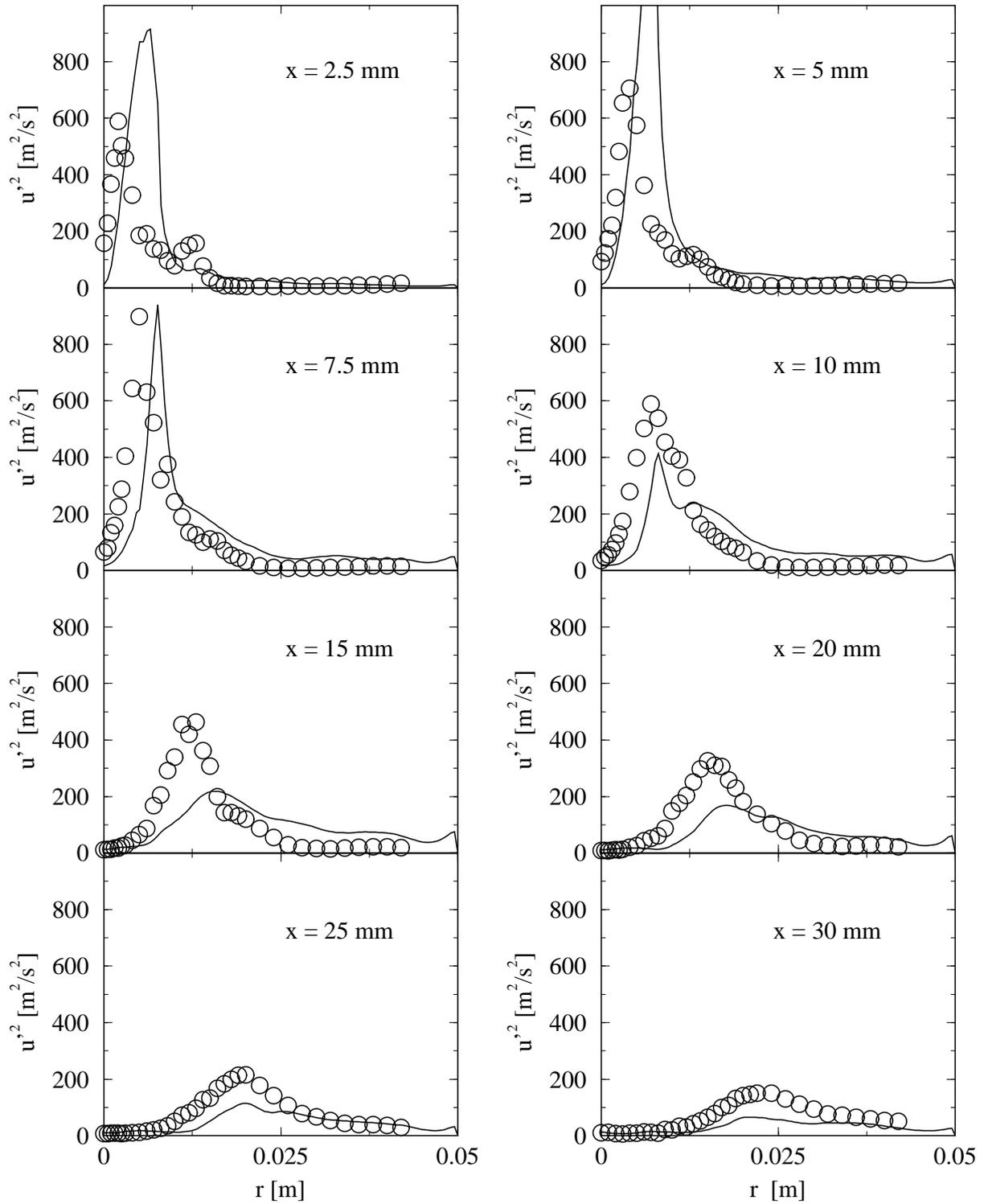


Abbildung 4.50: Mittlere Profile der Normalspannungskomponente u'^2 (Experiment von Lehmann)

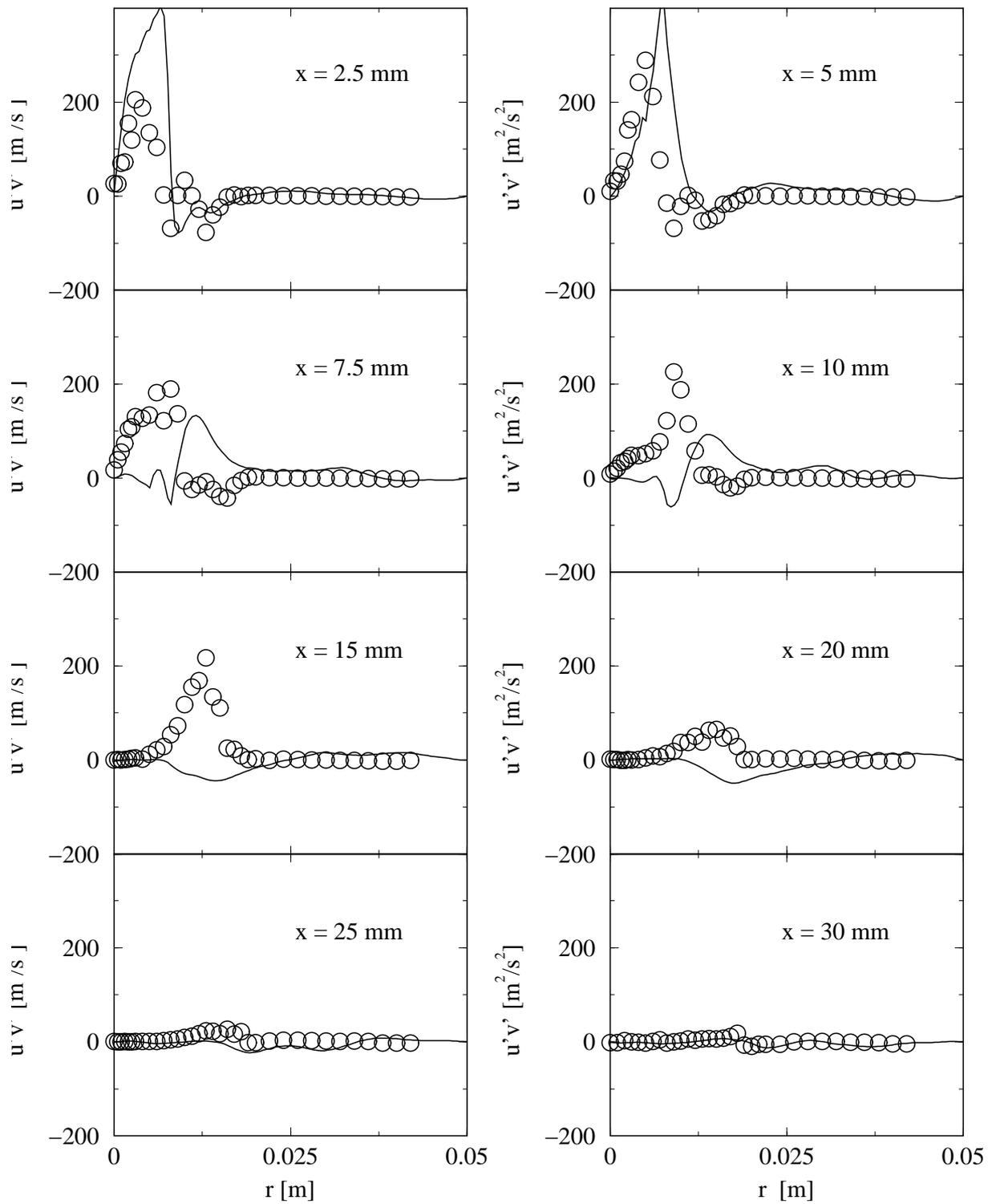


Abbildung 4.51: Mittlere Profile der Schubspannungskomponente $u'v'$ (Experiment von Lehmann)

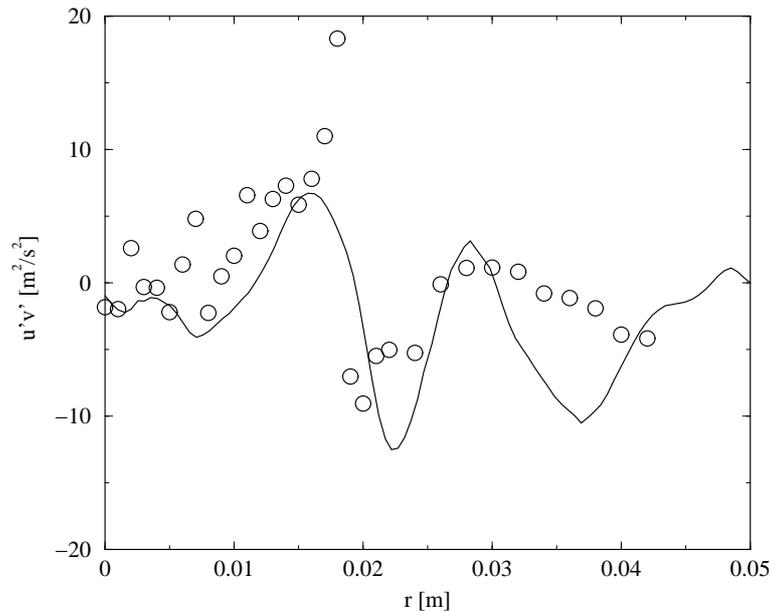


Abbildung 4.52: Mittlere Profile der Schubspannungskomponente $u'v'$ an der Stelle $x = 30$ mm (Experiment von Lehmann)

nach der Düse rechtfertigen allerdings diesen Aufwand. Die Vorgabe konstanter Geschwindigkeiten in den Eintrittsquerschnitten der Drallerzeuger stellen eine Vereinfachung der wirklichen Verhältnisse dar. Der Einfluß der Turbulenz in den Zuströmungen ist aber angesichts der komplexen Geometrie der Drallerzeuger und der Düse sowie des hohen Turbulenzgrades am Düsenausgang als sehr klein einzuschätzen.

Mit etwa 600.000 Punkten ist die LES dieser Strömung sicher sehr grob. Trotz des groben Gitters betrug die Rechenzeit auf dem PC Cluster mehrere Wochen. Hauptursache für diese lange Rechenzeit ist der erforderliche kleine Zeitschritt. Trotz des groben Gitters und der sicher nicht ausreichenden Diskretisierung der Wände wurden die wesentlichen Eigenschaften der Strömung auch in den mittleren Profilen durch die LES richtig wiedergegeben, der instationäre Charakter wurde sehr gut reproduziert.

Abweichungen in den mittleren Profilen können ihre Ursache entweder in einem nicht ausreichend feinen Gitter oder in der Strömung haben. Die Experimentatoren haben je nach 'Anfahren' der Düse unterschiedliche stabile Strömungszustände gefunden. Unter 'Anfahren' ist hier das Einstellen der einzelnen Volumenströme gemeint. Zunächst wird der durch die beiden Drallerzeuger fließende Luftstrom auf den entsprechenden Wert eingestellt. Anschließend wird der Gasstrom, wobei bei den kalten Messungen hier Luft verwendet wird, eingestellt. Wird der Durchsatz des Gasstromes von 'Null' auf den gewünschten Wert eingestellt, ergeben sich die in den Abbildungen 4.47-4.51 gezeigten Profile. Wird der gewünschte Wert ausgehend von einem großen Volumenstrom eingestellt, sind die Profile der Achsialgeschwindigkeit wesentlich flacher, das heißt der Strahl wird ähnlich wie bei der LES wesentlich stärker abgebaut. Die experimentellen Untersuchungen dauern derzeit noch an.

Es ist offensichtlich, daß diese erste LES einige Defizite bezüglich des groben Gitters und des einfachen Feingittermodells aufzuweisen hat. Dennoch haben die Ergebnisse gezeigt, daß mit Verfahren der Grobstruktursimulation ein wesentlicher Beitrag zur Be-

rechnung von Instabilitäten in Brennkammern geleistet werden kann.

5 Zusammenfassung

Die Zielsetzung der vorliegenden beinhaltet mehrere Aspekte. Der erste Punkt betraf die Validierung diverser aus der Literatur bekannter Reynoldsspannungsmodelle bezüglich ihrer Leistungsfähigkeit zur Berechnung verdrallter rotationssymmetrischer Innenströmungen. Hauptunterscheidungsmerkmal der einzelnen Modelle ist die Formulierung des Druck-Scher-Korrelationsterms. Eine Analyse des ursprünglich von Launder, Reece und Rodi [38] gemachten Ansatzes zeigt, daß die weit verbreiteten IP-Modelle die ursprünglich vier Terme des Modells zu zwei Termen reduzieren. Die Reduktion der Konstanten ergab, daß sowohl der Wirbelstärken-, als auch der Scherraten-Tensor - beide spielen bei der Modellierung eine wichtige Rolle - mit dem gleichen Faktor gewichtet werden. Untersuchungen an Modellströmungen zeigen, daß die Wichtung beider Terme jedoch verschieden sein sollte. Da die IP Modelle eine unterschiedliche Wichtung nicht mehr vornehmen können, kann die Konstante entweder für Scherströmungen (GL Modell), oder für Strömungen bei denen die Wirbelstärke dominiert (GY Modell) optimal eingestellt werden. Der lineare Teil des quadratischen Modells verwendet die Originalformulierung von Launder, Reece und Rodi und kann daher mit mehreren Konstanten beide Strömungstypen richtig wichten.

Diese aus den Gleichungen abgeleitete Eigenschaft der Modelle wurde in der vorliegenden Arbeit an diversen Strömungen mit unterschiedlichen Drallzahlen bestätigt.

Während das GY Modell bei Strömungen mit schwächerem Drall dem GL Modell überlegen ist, verhält es sich bei keinem bzw. bei starkem Drall umgekehrt. Die Qualität des quadratischen Modells ist in allen Strömungen mit der des jeweils besseren linearen Modells vergleichbar. Dies liegt nach eigener Einschätzung jedoch nicht an den quadratischen Gliedern des Modells, sondern vielmehr an der Formulierung des linearen Teils.

Als Ergebnis der Validierungen kann das quadratische Modell aufgrund seiner überlegenen Formulierung der linearen Terme zur Berechnung von Drallströmungen als geeignet empfohlen werden. Die linearen Modelle sind zwar bei richtiger Wahl des Modells kaum schlechter, sie erfordern aber eine Auswahl und sind somit weniger universell einsetzbar als das quadratische Modell. Einfache Wirbelviskositätsmodelle sind den Reynoldsspannungen deutlich unterlegen und sollten daher nicht zur Berechnung von Drallströmungen verwendet werden.

Der zweite Punkt der Zielsetzung betraf die Berechnung verdrallter, dreidimensionaler Innenströmungen, welche von hohen Frequenzen dominiert werden. Nachdem klar war, daß sich diese Strömungen nicht mit Reynolds-gemittelten Gleichungen berechnen lassen, wurde ein einfaches Feingittermodell in ein bestehendes 3D Verfahren integriert.

Da an der ersten Meßebene, die üblicherweise als Einströmrandbedingung verwendet wird, keine Meßwerte des instationären Geschwindigkeitsfeldes verfügbar waren, wurde die relativ komplexe Geometrie der Drallerzeuger als 3D Rechengitter diskretisiert. Die Annahme konstanter Geschwindigkeiten in den Einläufen der Drallerzeuger konnte durch die gute Übereinstimmung der mittleren Geschwindigkeiten und teilweise auch der Span-

nungen mit den gemessenen Profilen an der ersten Meßebeue gerechtfertigt werden.

Während die experimentell beobachteten Instationaritäten mit der Grobstruktursimulation sehr gut wiedergegeben werden konnten, ergaben sich bei den mittleren Profilen geringfügige Abweichungen von den Messungen. Diese können durch das relativ grobe Gitter, das einfache Feingittermodell oder durch die Strömung selbst entstehen (für die untersuchte Strömung existieren mehrere stabile Lösungen). Trotz obiger Defizite konnte die Grobstruktursimulation mit dieser ersten Berechnung ihr Potential zur Vorhersage von Instabilitäten in Brennkammern unter Beweis stellen.

Eng mit der Grobstruktursimulation verknüpft ist die Portierung des für massiv parallele Systeme entwickelte 3D Verfahrens auf ein PC Cluster. Als Hauptproblem hierbei hat sich die hohe Latenzzeit der zur Kommunikation verwendeten Fast Ethernet Karten herauskristallisiert. Unter diesem Aspekt wurde die gesamte Kommunikation des Programms auf mögliches Optimierungspotential hin untersucht. Durch das Verfahren der zeitparallelen Kommunikation und Berechnung konnte das Programm deutlich verbessert werden. Der Einsatz einer anderen Kommunikationsbibliothek brachte zusätzliche Leistungssteigerungen, sodaß PC Cluster zumindest bei mittleren Problemen bis ca. 50 PCs eine sinnvolle Alternative zu herkömmlichen Parallelrechnern darstellen.

Literaturverzeichnis

- [1] ABID, R. und C. G. SPEZIALE: *Predicting equilibrium states with Reynolds stress closures in a channel flow and homogeneous shear flow*. Physics of Fluids A, 5:1776–1782, 1993.
- [2] ABUJELALA, M.T. und D.G. LILLEY: *Limitations and Empirical Extensions of the $k - \epsilon$ -Model as Applied to Turbulent Confined Swirling Flows*. Chemical Engineering Communications, 31:223–236, 1984.
- [3] AHMED, S. A. und A. S. NEJAD: *Velocity Measurements in a Research Combustor Part 1: Isothermal Swirling Flow*. Journal of Experimental Thermal and Fluid Science, 5:162–174, 1992.
- [4] AKSELVOLL, K. und P. MOIN: *Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets*. Journal of Fluid Mechanics, 315:387–411, 1996.
- [5] ARMPFIELD, S. W., N. H. CHO und C. A. J. FLETCHER: *Prediction of Turbulent Quantities in Conical Diffusers*. AIAA Journal, 28:453–460, 1990.
- [6] BARDINA, J., J. H. FERZIGER und R. S. ROGALLO: *Effect of rotation on isotropic turbulence: computation and modelling*. Journal of Fluid Mechanics, 154:321–336, 1985.
- [7] BENJAMIN, T. B.: *Theory of the vortex breakdown phenomenon*. Journal of Fluid Mechanics, 14:593–629, 1962.
- [8] BEUTNER, J.: *FSP-Fluidsystemtechnik; Modulares CFD-System*. Erster Zwischenbericht, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, 1999.
- [9] BOUSSINESQ, J.: *Théorie de l'écoulement tourbillant*. Mem. Acad. Sci., 23:46, 1877.
- [10] BRADSHAW, P. und D. H. FERRIS: *The Turbulence in a Noise Producing Region of a Circular Jet*. Journal of Fluid Mechanics, 19:591–600, 1964.
- [11] CLAUSEN, P. D., S. G. KOH und D. H. WOOD: *Measurements of a swirling turbulent boundary layer developing in a conical diffuser*. Experimental Thermal and Fluid Science, 6:39–48, 1993.
- [12] CRAFT, T. J. und LAUNDER B. E.: *New Wall-Reflection Model Applied to the Turbulent Impinging Jet*. AIAA Journal, 30(12):2970–2972, 1992.
- [13] CROW, S. C.: *The Viscoelastic Properties of Fine-Grained Incompressible Turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 33:1, 1968.

- [14] DAERDORFF, J. W.: *A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers*. Journal of Fluid Mechanics, 41:453–480, 1970.
- [15] DALY, B. J. und F. H. HARLOW: *Transport equations of turbulence*. Phys. Fluids, 13:2634–2649, 1970.
- [16] DELLENBACK, P. A., D. E. METZGER und G. P. NEITZEL: *Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt axisymmetric expansion*. AIAA Journal, 26(6):669–681, 1988.
- [17] DEMIRDZIC, I., Z. LILEK und M. PERIĆ: *A colocated finite volume method for predicting flows at all speeds*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 16:1029, 1993.
- [18] FERZIGER, J. H. und M. PERIĆ: *Computational methods for fluid dynamics*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996.
- [19] FU, S., B. E. LAUNDER und D. P. TSELEPIDAKIS: *Accommodating the Effects of High Strain Rates in Modeling the Pressure-Strain Correlation*. Technical Report TFD 5, UMIST, 1987.
- [20] GATSKI, T. B. und C. G. SPEZIALE: *On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows*. Journal of Fluid Mechanics, 254:59–78, 1993.
- [21] GEIST, A., A. BEGUELIN, J. DONGARRA, W. JIANG, R. MANCHEK und V. SUNDERAM: *PVM: Parallel Virtual Machine A Users' Guide and Tutorial for Networked Parallel Computing*. M.I.T. Press, 1994.
- [22] GERMANO, M., U. PIOMELLI, P. MOIN und W. H. CABOT: *A dynamic subgrid scale eddy viscosity model*. In: *Proc. Summer Workshop*, Stanford CA, 1990. Center for Turbulence Research.
- [23] GIBSON, M. M. und B. E. LAUNDER: *Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer*. Journal of Fluid Mechanics, 86:491, 1978.
- [24] GIBSON, M. M. und B. A. YOUNIS: *Calculation of swirling jets with a Reynolds stress closure*. Physic of Fluids, 29(1):38–48, 1986.
- [25] GRÖTZBACH, W. und M. WÖRNER: *Direct numerical and large eddy simulations in nuclear applications*. Int. J. Heat and Fluid Flow, 20:222–240, 1999.
- [26] HANJALIC, K. und B. E. LAUNDER: *A Reynolds Stress Model of Turbulence and its Application to thin Shear Flows*. Journal of Fluid Mechanics, 52:609–638, 1972.
- [27] HIRAI, S., T. TAKAGI und T. HIGASHIYA: *Numerical prediction of the flow characteristics and retardation of mixing in a turbulent swirling flow*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 32(1):121–130, 1989.
- [28] HIRSCH, C.: *Ein Beitrag zur Wechselwirkung von Turbulenz und Drall*. Doktorarbeit, Fakultät für Chemieingenieurwesen der Universität Fridericina Karlsruhe, 1996.

- [29] HOFFMEISTER, M., K. HERTWIG, K.-J. KREUL, KRETSCHMAR H. und ERLER K.: *Modellierung von turbulenten Drallstrahlen für Brennkammern von Flugtriebwerken*. VDI Verlag, 1996.
- [30] HOGG, S. und M. A. LESCHZNER: *Computation of Highly Swirling Confined Flow with a Reynolds Stress Turbulence Model*. AIAA Journal, 27(1):57–63, 1989.
- [31] HOLZÄPFEL, F.: *Zur Turbulenzstruktur freier und eingeschlossener Drehströmungen*. Doktorarbeit, Fakultät für Chemieingenieurwesen der Universität Fridericiana Karlsruhe, 1996.
- [32] HSU, C.-F.: *A Curvilinear-Coordinate Method for Momentum, Heat and Mass Transfer in Domains of Irregular Geometry*. Doktorarbeit, University of Minnesota, 1981.
- [33] HWANG, C. C., G. ZHU, M. MASSOUDI und J. M. EKMANN: *A Comparison of the Linear and Nonlinear $k - \epsilon$ Turbulence Models in Combustors*. Journal of Fluids Engineering, 115:93–102, 1993.
- [34] IRWIN, H. P. A. und A. SMITH: *Prediction of the effect of streamline curvature on turbulence*. The Physics of Fluids, 17(6):624–630, 1975.
- [35] JONES, W. P. und PASCAU A.: *Calculation of Confined Swirling Flows With a Second Moment Closure*. Journal of Fluid Engineering, 111(9):248–254, 1989.
- [36] KHODADADI, J. M. und N. S. VLACHOS: *Effects of Turbulence Model Constants on Computation of Confined Swirling Flows*. AIAA Journal, 28(4):750–752, 1990.
- [37] LAM, TEAM: *LAM / MPI Parallel Computing*. <http://www.mpi.nd.edu/lam/>, 2000.
- [38] LAUNDER, B. E., REECE G. J. und RODI W.: *Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure*. Journal of Fluid Mechanics, 68:537–566, 1975.
- [39] LAUNDER, B. E. und A. P. MORSE: *Numerical Prediction of Axisymmetric Free Shear Flows with a Reynolds Stress Closure*. In: DURST, F., B. E. LAUNDER, F. W. SCHMIDT und J. H. WHITE-LAW (Herausgeber): *First Symposium on Turbulent Shear Flows*, Band 1, Seiten 279–294. Springer Verlag Berlin, 1979.
- [40] LAUNDER, B. E. und D. B. SPALDING: *The Numerical Computation of Turbulent Flow*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 3:269–289, 1974.
- [41] LEHMANN, B., C. HASSA und J. HELBIG: *Three-Component Laser-Doppler measurements of the Confined Model Flow behind a Swirl Nozzle*. In: ADRIAN, R. J., D. F. G. DURAO, F. DURST, M. V. HEITOR, M. MAEDA und J. H. WHITE-LAW (Herausgeber): *Developments in Laser Techniques and Fluid Mechanics*, Seiten 383–398, Berlin Heidelberg, 1997. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [42] LEONARD, A.: *Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows*. Adv. Geophys., 18A(237), 1974.
- [43] LEUCKEL, W.: *Swirl intensities, swirl types and energy losses of different swirl generating devices*. IFRF Doc. No. G02/a/16, Ijmuiden, 1967.

- [44] LIEN, F. S.: *Computational Modelling of 3D Flow in Complex Ducts and Passages*. Doktorarbeit, University of Manchester, 1992.
- [45] LIEN, F. S. und LESCHZINER M. A.: *Upstream Monotonic Interpolation for scalar Transport with Application to complex turbulent flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 19:527–548, 1994.
- [46] LILLEY, D. G.: *Investigations of Flow Fields Found in Typical Combustor Geometries*. Contractor Report 3869, NASA, 1985.
- [47] MESSAGE, PASSING INTERFACE FORUM: *MPI-2: Extensions to the Message-Passing Interface*. <http://www.mpi-forum.org/docs/mpi-2.ps>, 1997.
- [48] MICHALKE, A.: *Absolute inviscid instability of a ring jet with back-flow and swirl*. Eur. J. Mech. B/Fluids, 18(18):3–12, 1999.
- [49] MORSE, A. P.: *Axisymmetric Turbulent Shear Flows With and Without Swirl*. Doktorarbeit, University of London, 1984.
- [50] NIKJOOY, M., H. C. MONGIA, G. S. SAMULSEN und V. G. MCDONNELL: *A Numerical and Experimental Study of Confined Swirling Jets*. In: *AIAA/ASME/SAE/ASEE 25th Joint Propulsion Conference*, Seiten 1 – 13, Monterey, CA, July 10-12 1989.
- [51] NIKJOOY, M. und R. M. C. SO: *On the Modelling of Non-Reactive and Reactive Turbulent Combustor Flows*. Contractor Report 4041, NASA, 1987.
- [52] OBI, S., M. PERIĆ und SCHEUERER G.: *Second-Moment Calculation Procedure for Turbulent Flows with Collocated Variable Arrangement*. AIAA Journal, 29(4):585–590, 1991.
- [53] PATANKAR, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [54] POPE, S. B.: *A more general effective viscosity hypothesis*. Journal of Fluid Mechanics, 72:331–340, 1975.
- [55] PRAKASH, C.: *A Finite-Element Method for Predicting Flow through Ducts with Arbitrary Cross Sections*. Doktorarbeit, University of Minnesota, 1981.
- [56] REYNOLDS, O.: *On the Dynamical Theorie of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of its Criterion*. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 186(1):123–164, 1894.
- [57] RHI, C. M.: *A Numerical Study of the Flow past an Isolated Airfoil with Separation Sections*. Doktorarbeit, University of Illinois, 1981.
- [58] RHODE, D. L., D. G. LILLEY und D. K. MCCLAUGHLIN: *Mean Flowfield in Axisymmetric Combustor Geometries with Swirl*. AIAA Journal, 21(4):593–600, 1983.
- [59] RHODE, D. L. und S. T. STOWERS: *Predictive Capability for Counter-Swirling Concentric Jets*. In: GUPTA, G. (Herausgeber): *Computers in Engineering Conference*, United Engineering Center, New York, 1986. The American Society of Mechanical Engineering.

- [60] RHODE, D. L. und S. T. STOWERS: *Combustor Air Flow Prediction Capability Comparing Several Turbulence Models*. J. Propulsion, 5(2):242–248, 1989.
- [61] ROBACK, R. und B. V. JOHNSON: *Mass and Momentum of Turbulent Transport Experiments with Confined Swirling Coaxial Jets*. Contractor Report 168252, NASA, 1983.
- [62] ROTTA, J. C.: *Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz*. Z. Phys., 129:547–, 1951.
- [63] RUNG, T., F. THIELE und S. FU: *On the realizability of non-linear stress-strain relationships for Reynolds-stress closures*. Flow, Turbulence and Combustion, 60:333–359, 1999.
- [64] SCHATZ, M.: *Einsatz von Differenzenschemata höherer Ordnung in der Numerischen Thermo- und Fluidodynamik*. Hermann Föttinger Institut, interner Bericht, 1996.
- [65] SCHÜTZ, H., B. NOLL, B. LEHMANN und M. AIGNER: *Numerical simulation of vortex shedding at the exit of an air/fuel-nozzle*. In: *Proceedings of the ECOS 2000*, University of Twente Enschede, The Netherlands, July 5-7 2000.
- [66] SMAGORINSKY, J.: *General calculation experiments with the primitive equations, part I: the basic experiment*. Monthly Weather Rev., 91:99–164, 1963.
- [67] SO, R. M. C., S. A. AHMED und H. C. MONIGA: *An experimental investigation of gas jets in confined swirling air flow*. Contractor Report 3832, NASA, 1984.
- [68] SPEZIALE, C. G.: *On nonlinear $K-l$ and $K-\epsilon$ models of turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 178:459–475, 1978.
- [69] SPEZIALE, C. G., R. ABID und G. A. BLAISDELL: *On the consistency of Reynolds stress turbulence closure with hydrodynamic stability theory*. Phys. Fluids, 8:781–788, 1996.
- [70] SPEZIALE, C. G. und N. MAC GIOLLA MHUIRIS: *Scaling laws for homogeneous turbulent shear flows in a rotating frame*. Phys. Fluids A, 1:294–301, 1989.
- [71] SPEZIALE, C. G., S. SAKAR und T. B. GATSKI: *Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical system approach*. Journal of Fluid Mechanics, 227:245–272, 1991.
- [72] STONE, H. L.: *Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations*. SIAM J. Num. Anal., 5:530–558, 1968.
- [73] TRUCKENBRODT, E.: *Fluidmechanik Bd. 1&2*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [74] VU, B. T. und F. C. GOULDIN: *Flow Measurements in a Model Swirl Combustor*. AIAA Journal, 20(5):642–651, 1982.
- [75] WENNERBERG, D.: *Entwicklung eines vorhersagefähigen Berechnungsmodells für stark verdrallte Strömungen mit Verbrennung*. Doktorarbeit, Technische Fakultät der Universität Erlangen- Nürnberg, 1995.

- [76] WENNERBERG, D. und S. OBI: *Prediction of Strongly Swirling Flows in Quarl Expansions with a Non-Orthogonal Finite-Volume Method and a Second Moment Turbulence Closure*. Engineering Turbulence Modeling and Experiment, 2:197–206, 1993.
- [77] WILCOX, D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., 1994.
- [78] WILHELMI, S.: *Axisymmetric swirl stabilized combustion*. Doktorarbeit, University of London, 1984.
- [79] XUE, L.: *Entwicklung eines effizienten parallelen Lösungsalgorithmus zur dreidimensionalen Simulation komplexer turbulenter Strömungen*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 1998.
- [80] YAMADA, M.: *The studie of mixing and combustion in swirling flows*. Diplomarbeit, Osaka University, 1982.
- [81] YOUNIS, B. A.: *On Modelling the Effects of Streamline Curvature on Turbulent Shear Flows*. Doktorarbeit, University of London, 1984.
- [82] YOUNIS, B. A., T. B. GATSKI und C. G. SPEZIALE: *Assessment of the SSG pressure-strain model in free turbulent jets with and without swirl*. ASME - Journal of FLuids Engineering, 118(4):800–809, 1996.