

Effiziente Simulation komplexer Strömungen auf semi-strukturierten Gittern

vorgelegt von

M. Sc.

Jianping Yan

aus Zhejiang, V. R. China

Von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Berlin 2003

D83

Effiziente Simulation komplexer Strömungen auf semi-strukturierten Gittern

vorgelegt von

M. Sc.

Jianping Yan

aus Zhejiang, V. R. China

Von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. rer.nat. Dr.-Ing. habil. A. Dillmann

Berichter: Prof. Dr.-Ing. H. Eickhoff

Berichter: Prof. Dr.-Ing. F. Thiele

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 22. Januar 2003

Berlin 2003

D83

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als studentischer und wissenschaftlicher Mitarbeiter am Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik im Fachgebiet Numerische Methoden der Thermo- und Fluidodynamik (CFD) von Herrn Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele.

Für seine langjährige Unterstützung und Förderung, die diese Arbeit ermöglichte, möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Thiele herzlich danken. Besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing H. Eickhoff für die freundliche Übernahme der Begutachtung und Herrn Prof. Dr. rer.nat. Dr.-Ing. A. Dillmann für die Übernahme des Vorsitzes im Promotionsausschuss.

Weiterhin danke ich allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, im besonderen meinem Kollegen Markus Schatz für die Durchsicht der Arbeit und die wertvollen Verbesserungsvorschläge.

Für ihre Unterstützung möchte ich meiner Frau Xianghong Li herzlich danken. Meinen Töchtern Julia Ziyi und Eveline Ziling ist diese Arbeit gewidmet.

Berlin, im Januar 2003

Jianping Yan

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden Techniken zur biharmonischen Gittergenerierung und effizienten Glättung entwickelt und auf komplexe, praktisch relevante zwei- und dreidimensionale Konfigurationen angewendet. Validierungen belegen, dass die durch biharmonische Verfahren generierten Netze von hoher Qualität sind und dass Mehrgitterverfahren nicht nur eine deutliche Konvergenzbeschleunigung, sondern auch eine verbesserte Stabilität gegenüber dem Eingitterverfahren erzielen.

Zur Beschleunigung der Strömungssimulation mit dem SIMPLE-Algorithmus wird in der vorliegenden Arbeit ein modifiziertes *Full Multigrid* (FMG) Verfahren mit V-Zyklus entwickelt, bei dem die Startlösung inklusive der Turbulenzvariablen nicht vom feinen Gitter übertragen, sondern vom vorherigen Zyklus übernommen werden. Die Validierung erfolgt an ausgewählten zwei- und dreidimensionalen Testfällen.

Als wichtige technische Anwendungsfälle werden die Simulation einer Stufenkörper-Diffusionsflamme und die instationäre Umströmung eines generischen KFZ-Außenspiegels vorgestellt. Für die Simulation der Diffusionsflamme wird das Flamelet-Modell implementiert und Ergebnisse für verschiedene Turbulenzmodelle erzeugt. Beim KFZ-Außenspiegel wird der DES Ansatz im Vergleich zu einer URANS Simulation eingeführt. Bei beiden Testfällen wird deutlich, dass die Wiedergabe der physikalischen Vorgänge stark vom Turbulenzmodellierungsansatz abhängig ist.

Abstract

In this work, techniques for the biharmonic generation and efficient smoothing of grids are developed and applied to complex, practically relevant two- and three-dimensional configurations. The validation proves the grid generated by biharmonic methods to be good quality, and that the multigrid method results in not only a clear convergence acceleration, but also an improved stability compared to the single grid method.

For the acceleration of flow simulations with the SIMPLE-algorithm, a modified *Full Multigrid* (FMG)-method with V-cycle has been developed, in which the starting solution, including the turbulence quantities, is not taken from the finer grid but from the previous cycle. Some two- and three-dimensional cases are validated.

As important technical applications the simulations of a bluff-body flame and the unsteady flow around a generic car wing mirror are presented. For the diffusion flame simulation the Flamelet-model is implemented and the results for different turbulence models are obtained, while in the case of the mirror as an alternative to RANS, the DES formulation is applied. Both test cases indicate that the reproduction of the physical processes is strongly dependent on the turbulence model used.

Inhaltsverzeichnis

| | Seite |
|---|-----------|
| 1 Einleitung | 1 |
| 2 Grundlagen der Strömungssimulation | 9 |
| 2.1 Gleichungen zur Gittergenerierung | 9 |
| 2.1.1 Biharmonische Gleichungen | 9 |
| 2.1.2 Gleichungen der Gittergenerierung | 10 |
| 2.2 Strömungsmechanische Bilanzgleichungen | 12 |
| 2.3 Modellierung turbulenter Strömungen | 13 |
| 2.3.1 Lineare Wirbelzähigkeitsmodelle | 14 |
| 2.3.2 Explizite Algebraische Spannungsmodelle | 18 |
| 2.3.3 Detached Eddy Simulation | 20 |
| 2.4 Verbrennungsmodelle | 20 |
| 2.4.1 Flamelet-Modell | 22 |
| 2.4.2 Flamelet-Bibliothek und Kopplungsmodell | 24 |
| 3 Numerische Methoden | 25 |
| 3.1 Gittergenerierung | 25 |
| 3.1.1 Berechnung der Kontrollfunktionen | 25 |
| 3.1.2 Erzeugung einer vorgegebenen Gitterschicht | 27 |
| 3.1.3 Approximation der Differentialgleichungen | 28 |
| 3.1.4 Effektive Behandlung der Randbedingungen | 29 |
| 3.1.5 Globalglättung über Blockgrenzen | 30 |
| 3.1.6 Datenstruktur und Datenzugriff | 31 |
| 3.2 Strömungssimulation | 35 |
| 3.2.1 Finite Approximation der Bilanzgleichungen | 35 |
| 3.2.2 Modifizierte Behandlung der Wandrandbedingungen | 38 |
| 4 Grundlage des Mehrgitterverfahrens | 41 |
| 4.1 Grundprinzip | 41 |
| 4.2 Gittervergrößerung und Gittertransfer | 43 |
| 4.3 Mehrgitterzyklen | 44 |
| 4.4 FMG-Methode | 45 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Gittergenerierung und Glättung mit Mehrgitterverfahren | 47 |
| 5.1 | Komponenten von Mehrgitterverfahren | 47 |
| 5.2 | Rechenablauf des Mehrgitterverfahrens | 48 |
| 5.3 | Anwendung des Gitterglättungsverfahrens | 51 |
| 5.3.1 | 2D ω -Typ Geometrie | 51 |
| 5.3.2 | 2D Flügelkonfiguration | 55 |
| 5.3.3 | 3D Flügelkonfiguration | 57 |
| 5.3.4 | Flügel-Rumpf Konfiguration | 60 |
| 5.3.5 | Flügel-Rumpf-Leitwerk Konfiguration | 62 |
| 6 | Mehrgitterverfahren zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen | 65 |
| 6.1 | Komponenten von Mehrgitterverfahren | 65 |
| 6.2 | Modifizierte Full-Multigrid Methode | 66 |
| 6.3 | Grobgridgleichungen | 67 |
| 6.4 | Maßnahmen zur Turbulenzsimulation | 70 |
| 7 | Validierung des Simulationsverfahrens | 71 |
| 7.1 | 2D laminare Strömung in rechteckiger Nische | 72 |
| 7.2 | 2D laminare Strömung in verzerrter Nische | 73 |
| 7.3 | 2D laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe | 76 |
| 7.4 | 2D turbulente Strömung über ein Hügelmodell | 79 |
| 7.5 | 3D laminare Nischenströmung | 84 |
| 7.6 | 3D Strömung durch einen Rohrkrümmer | 86 |
| 8 | Simulation komplexer Strömungen | 95 |
| 8.1 | CH ₄ /H ₂ Stufenkörper-Diffusionsflamme | 95 |
| 8.2 | Generischer KFZ-Außenspiegel | 103 |
| 9 | Zusammenfassung | 109 |
| | Literaturverzeichnis | 111 |

Kapitel 1

Einleitung

Komplexe Strömungsphänomene treten in vielen ingenieurtechnischen Anwendungen auf. Zu ihrer Beschreibung werden neben den traditionellen Werkzeugen wie theoretischen Methoden und experimentellen Untersuchungen auch numerische Strömungssimulationen verwendet. Die numerische Strömungssimulation ist dabei mittlerweile als ein integraler Bestandteil sowohl von strömungsphysikalischen Grundlagenuntersuchungen, wie z.B. turbulenter Strömungen mit chemischen Reaktionen, als auch von Auslegungsprozessen für praxisrelevante Konfigurationen, wie z.B. beim Entwurf von Verkehrs- und Transportflugzeugen zu sehen. Die heutigen Berechnungsmethoden ermöglichen in der Vorentwurfsphase eine Reduzierung umfangreicher, zeitaufwendiger und kostspieliger experimenteller Untersuchungen zur gezielten Überprüfung und Verfeinerung des Entwurfs.

Ingenieurtechnische Problemstellungen sind meistens sowohl mit komplexen dreidimensionalen Geometrien als auch mit komplexen turbulenten Austauschmechanismen verbunden. Eine genaue numerische Simulation verlangt in jedem Fall den Einsatz von sehr feinen Rechengittern guter Qualität und höherwertiger Modelle zur Beschreibung der strömungsphysikalischen Transportphänomene. Dabei entstehen zwangsläufig große Systeme gekoppelter diskreter Gleichungen. Die effiziente Lösung derartiger Gleichungssysteme, die durch große Datenmengen und aufwendige Rechenoperationen gekennzeichnet ist, lässt sich nur auf Hochleistungsrechnern unter Verwendung von optimierten numerischen Algorithmen und Konvergenzbeschleunigungstechniken realisieren, wobei die numerischen Lösungsverfahren an die Rechnerarchitektur angepasst werden müssen.

Dementsprechend wird die Effizienz und Güte von numerischen Verfahren zur Strömungssimulation im wesentlichen von den Teilbereichen Gittergenerierung, numerisches Lösungsverfahren und Modellbildung beeinflusst. Diese Teilbereiche können nicht unabhängig voneinander betrachtet werden, sondern stehen in Wechselwirkung miteinander. So können Defizite z.B. in der Gittergenerierung auch durch sehr gute numerische Lösungsverfahren nicht grundlegend kompensiert werden. Genauso erfordern Turbulenzmodelle, die den wandnahen Strömungsbereich erfassen, ein entsprechend angepasstes Grenzschichtgitter. Ausschlaggebend für die Effizienz eines Verfahrens zur Strömungssimulation sind dementsprechend nicht nur die verwendeten numerischen Einzeltechniken, sondern ebenso die Berücksichtigung der Anforderungen aus der Modellierung und der Strömungskonfigura-

tion durch Gittergenerierung und Lösungsalgorithmus.

Gittergenerierung

Die numerische Lösung der Navier-Stokes Gleichungen erfordert insbesondere in der Grenzschicht eine hohe Gitterauflösung. Automatisch generierbare unstrukturierte Gitter genügen in vielerlei Hinsicht nicht den Genauigkeitsanforderungen, die von numerischen Strömungssimulationsverfahren gestellt werden. Gegen einen Einsatz von unstrukturierten Gittern spricht in erster Linie die mangelhafte Approximationsgenauigkeit der turbulenten Austauschmechanismen im körpernahen Bereich (Thompson 1996), weshalb technische Anwendungen in der Aerodynamik derzeit meist auf körperangepassten strukturierten Mehrblockgittern basieren. Zur Generierung derartiger Gitter verwendet man im wesentlichen algebraische Methoden, die im Gebietsinneren auf einer Interpolation zwischen den Randpunkten basieren und Methoden, die elliptische oder hyperbolische Differentialgleichungssysteme lösen. Die Erzeugung geeigneter strukturierter Rechenetze für komplexe Konfiguration ist somit weiterhin eine zeitaufwendige und kostspielige Aufgabe.

Aufgrund des vergleichsweise geringen Rechenaufwands eignen sich die algebraischen Methoden in besonderem Maße zur interaktiven Netzgenerierung, die bei der rechnerischen Erfassung komplexer dreidimensionaler Geometrien eine wichtige Rolle spielt. Der größte Nachteil der algebraischen Netzgenerierung liegt jedoch darin, dass ihr keine Glättungseigenschaften anhaften, denn Diskontinuitäten im Verlauf der Gitterlinien, die durch die Berandung aufgeprägt werden, pflanzen sich ungedämpft ins Gebietsinnere fort. Im Vergleich zu elliptischen erlauben hyperbolische Methoden eine bessere Steuerung der Orthogonalität und Maschenweite. Für Geometrien mit vorgegebener Form im Außenbereich sind sie dagegen aus mathematischen Gründen weniger gut geeignet (Weatherill 1990).

Die Motivation zur Benutzung elliptischer Gleichungssysteme liegt in deren Glättungseigenschaft. Viele elliptische Verfahren bauen auf den Laplace-Gleichungen auf. Der Nachteil der auf diese Weise erzeugten Gitter ist deren Tendenz, Gitterlinien über konvexen Berandungen zu konzentrieren und über konkaven Rändern auseinanderzuziehen. Daher werden Kontrollfunktionen in die Laplace-Gleichungen eingeführt und somit Poisson-Gleichungen gelöst. Hier besteht das Hauptproblem darin, auf welche Weise die Kontrollfunktionen auf dem Rand zu bestimmen sind und wie sie in das Gebietsinnere interpoliert werden können. Dazu wurden in der Vergangenheit unterschiedliche Verfahren entwickelt. Sie können beispielsweise durch Projektion aus einem algebraischen Netz bestimmt werden (Thompson 1987). Mit solchen Kontrollfunktionen ergeben sich glatte Netze, die im wesentlichen die Eigenschaften des algebraischen Netzes aufweisen. Daneben besteht eine zweite Methode darin, die Kontrollfunktionen aus der Punkteverteilung auf der Berandung zu berechnen und anschließend ins Gebietsinnere zu interpolieren (Steger und Sorenson 1979; Thomas u. a. 1980; Thompson 1987; White 1990). Die Verteilung der Kontrollfunktionen im gesamten Rechengebiet ist dabei einzig und allein durch die Punkteverteilung auf den Randflächen bestimmt. Zwar kann sie dadurch auf einfache Weise direkt ermittelt werden, jedoch hat man wenig Möglichkeiten der Einflussnahme auf das Netz bezüglich Maschenweite und Orthogonalität am Rand und im Gebietsinneren können keine glatten Kontrollfunktionen

garantiert werden, was die Lösungsstabilität stark negativ beeinflusst.

Im Vergleich zum elliptischen Verfahren scheint der biharmonische Operator $\Delta\Delta\phi = 0$ das prädestinierte Verfahren zu sein (Sparis 1985). Er kann auf einfache Weise in eine Poisson-Gleichung und eine Laplace-Gleichung zerlegt werden, auf deren Grundlage schon jeweils sehr gute Gitteroperatoren entwickelt wurden. Wegen der Differentialgleichung vierter Ordnung stehen für die Gittergenerierung nicht nur Dirichlet- sondern zusätzlich auch Neumann-Randbedingungen zur Verfügung. Durch die zweite Randbedingung gibt es mehrere Möglichkeiten, die Eigenschaften des Gitters zu steuern. Es können sowohl die Schnittwinkel der Gitterebenen mit den Rändern als auch die Maschenweiten am Rand vorgegeben werden. Besonders hervorzuheben ist, dass die Kontrollfunktionen einer Differentialgleichung genügen und sie deshalb automatisch glatt sind. Im allgemeinen ist dies eine entscheidende Voraussetzung dafür, dass numerische Verfahren auch für komplexe Konfigurationen zu robusten Algorithmen führen. Andererseits ist die Lösung empfindlich gegenüber Randbedingungen. Dies führt zu schlechter Stabilität und niedriger Konvergenzrate des Verfahrens, weshalb effektivere Verfahren benötigt werden.

Aufgrund des elliptischen Charakters liefert die Lösung der oben erwähnten Differentialgleichungssysteme zur Gitterglättung mittels eines direkten Verfahrens, z.B. der Gauß-Elimination, in einem Schritt die geschlossene Lösung für jeden Punkt. Bei großen Punktanzahlen ist diese Vorgehensweise jedoch sehr rechenzeitintensiv. Effizienter ist dagegen ein iteratives Verfahren, denn die Konvergenzgeschwindigkeit kann dabei durch Mehrgitterverfahren deutlich beschleunigt werden. Das grundlegende Prinzip des Mehrgitterverfahrens der Gittergenerierung wurde schon von Stüben und Linden (1985) vorgestellt und von Spitaleri (1990; 1991) und Yan u. a. (1998) verwendet.

Turbulenzmodellierung

Die in der industriellen Praxis vorkommenden Strömungen sind oftmals turbulent und durch instationäre, dreidimensionale und stochastische Schwankungsbewegungen gekennzeichnet. Die Beschreibung der turbulenten Phänomene kann in verschiedener Weise erfolgen. Die Direkte Numerische Simulation (DNS) löst die exakten Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls und die Energie ohne Turbulenzmodellierung. Hierbei müssen auch die kleinsten Skalen der turbulenten Schwankungsbewegung räumlich und zeitlich aufgelöst werden, während bei der Grobstruktur- oder Large Eddy Simulation (LES) in einer dreidimensionalen, instationären Rechnung nur alle über einer bestimmten Größe liegenden Wirbel direkt numerisch behandelt werden. Kleinere, dissipative Skalen, die in ihrer Struktur weniger anisotrop sind als die großen, energietragenden Wirbel, werden herausgefiltert und durch sogenannte Feinstrukturmodelle (subgrid-scale model) erfasst. Einen neueren Überblick über die LES-Verfahren ist bei Piomelli und Chasnov (1999) zu finden. Probleme bereitet die LES nicht nur wegen des großen Bedarfs an Rechenleistung, sondern auch wegen der Formulierung der zeitabhängigen Randbedingungen sowie der Behandlung des wichtigen wandnahen Bereichs, wenn die Skalen kleiner als die Filterweite werden. Da bei räumlich variabler Filterweite zusätzliche Terme in den Gleichungen entstehen, die diese verkomplizieren, wurde die LES bisher hauptsächlich in Verbindung

mit Wandfunktionen angewendet. Generell lässt sich sagen, dass DNS und LES für die meisten praktisch relevanten Problemfälle noch einen zu hohen numerischen Aufwand bedeuten.

In technischen Anwendungen sind zumeist nur die statistischen Eigenschaften einer turbulenten Strömung von Bedeutung. Numerische Verfahren zur Berechnung praxisrelevanter turbulenter Strömung basieren daher fast ausnahmslos auf einer statistischen Betrachtung der Strömung. Ausgangspunkt der Strömungssimulation mit Turbulenzmodellen bilden die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (RANS). Neben den gemittelten Geschwindigkeiten treten in diesen Gleichungen Korrelationsterme der Geschwindigkeitsschwankungen von zweiter Ordnung auf, die sogenannten Reynoldsspannungen, die mit Hilfe eines Turbulenzmodells auf gemittelte Impulsgrößen und eventuell auftretende Modellparameter zurückgeführt werden. Reynoldsspannungsmodelle (RSM) lösen für jede Komponente des Reynoldsspannungstensors eine eigene Transportgleichung und sind damit aufgrund der höheren Modellierungsebene und der besseren Beschreibung der physikalischen Vorgänge, wie beispielsweise der Turbulenzanisotropie, den nachstehend behandelten Wirbelviskositätsmodellen überlegen. Diese RSM Vorgehensweise wird aufgrund des damit verbundenen Rechenzeit- und Speicherbedarfs sowie numerischer Probleme in praxisnahen Anwendungen nur vereinzelt eingesetzt.

Lineare, isotrope Wirbelviskositätsmodelle (Eddy Viscosity Model, EVM) stützen sich auf einen nach Boussinesq (1887) benannten isotropen Zusammenhang zwischen den Reynoldsspannungen und den Scherraten. Die bekanntesten Varianten davon sind z.B. die Modelle von Baldwin und Lomax (1978) und Spalart und Allmaras (1992), das $k - \epsilon$ Modell (Jones und Launder 1972) und das $k - \omega$ Modell (Wilcox 1988). Sie bilden die Standardmodelle für derzeitige ingenieurtechnische Anwendungen. Aufgrund der beschränkten Möglichkeit, Anisotropiezustände der Reynoldsspannungen oder Stromlinienkrümmungseinfluss wiederzugeben, liefern lineare Wirbelviskositätsmodelle bei komplexer dreidimensionaler Strömung mit stark gekrümmten Stromlinien jedoch keine befriedigenden Ergebnisse.

Zur Verbesserung der strömungsphysikalischen Modellbildung werden deshalb nichtlineare Erweiterungen der Zwei-Parameter-Wirbelzähigkeitsmodelle verfolgt. Diese Ansätze stützen sich auf einen im Unterschied zu isotropen EVM nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Reynoldsspannungen und den Geschwindigkeitsgradienten. Die nichtlinearen Wirbelzähigkeitsbeziehungen können auf unterschiedliche Weise konstruiert werden. Ein solcher Ansatz wird bei der Herleitung von Expliziten Algebraischen Spannungsmodellen (EASM) verfolgt. Die Entwicklung und Analyse anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen auf der Basis expliziter algebraischer Spannungsmodelle können den Arbeiten von Rung u. a. (1999) und Rung (2000) entnommen werden.

Bei instationären Strömungen stellt sich das Problem der Trennung der zeitlich variierenden mittleren Strömung und der turbulenten Schwankungen. Trotz dieser nicht genau definierten Trennung zwischen Turbulenz und mittlerer Strömung werden Simulation auf Basis von RANS häufig mit Erfolg bei instationären Problemen in der Form von Unsteady

RANS (URANS) eingesetzt. Die LES verlangt dagegen keine Aufteilung in Mittelwert und Turbulenzanteil, sondern unterscheidet zwischen simulierten großen Schwankungen und nicht-simulierten kleinen Schwankungen. Die LES ist dadurch für instationäre Probleme besser geeignet. Da der Anteil der nicht-simulierten Schwankungsbewegungen möglichst klein gehalten werden sollte, ist allerdings der Aufwand gegenüber RANS wesentlich höher. Dies führte zur Entwicklung von kombinierten Verfahren, die die Vorteile von RANS und LES vereinen sollen. Die Detached Eddy Simulation (DES) nutzt in Wandnähe ein Turbulenzmodell zur Wiedergabe der kleinen Schwankungsbewegungen, simuliert größere dreidimensionale Schwankungen im Fernfeld aber direkt wie eine LES, so dass sich Großräumige Wirbelablösungen mit der Qualität einer LES erfassen lassen, wobei Gitteranforderungen und Rechenzeiten mit denen einer RANS vergleichbar sind. Die Theorie und Anwendungen von DES findet man in den Arbeiten von Spalart (1999; 2001), Shur u. a. (1999) und Strelets (2000).

Verbrennungsmodellierung

Der Verbrennung selbst von relativ kleinen Kohlenwasserstoffen liegen sehr umfangreiche Reaktionsmechanismen zugrunde. Zum Teil sind mehrere tausend Elementarreaktionen (z.B. bei der Selbstzündung von Cetan) am Gesamtgeschehen beteiligt. Das Wechselspiel dieser Elementarreaktionen beeinflusst den gesamten Verbrennungsvorgang. Unabhängig von den spezifischen Eigenschaften des Brennstoffes weisen alle Reaktionsmechanismen Eigenschaften auf, die für Verbrennungsprozesse charakteristisch sind. So ergibt sich z.B., dass selbst bei großen Reaktionsmechanismen nur wenige Elementarreaktionen die Gesamtgeschwindigkeit beeinflussen. Auf dieser Grundlage wird in der numerischen Verbrennungssimulation oftmals eine Vereinfachung der Reaktionsmechanismen verwendet. Dies ist von besonderem Interesse, da die Simulation von realen Systemen (dreidimensional, turbulent wie z.B. in Motoren oder Feuerungen) sonst nur mit einem nicht zu bewältigenden Rechenzeitaufwand durchgeführt werden könnten. Trotz der Vereinfachung enthalten die Reaktionsmechanismen noch zweistellige Anzahlen von Spezies, die sich oft durch die differentiellen Gleichungen lösen lassen. Außerdem besteht für die turbulente Verbrennung noch das Schließungsproblem der Reaktionsgeschwindigkeit. Die statistische Behandlung mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (PDF) bietet hier einen möglichen Ansatz. Allerdings ist die numerische Simulation der turbulenten Verbrennung mit PDF-Transportgleichungen (Pope 1981; Pope 1985) oder Conditional Moment Closure (CMC) (Bilger 1993) zu zeitaufwendig und deshalb nicht für ingenieurtechnische Probleme geeignet. Für ingenieurtechnische Anwendungen wird nicht nur Effizienz sondern auch die Fähigkeit erfordert, die Verteilung einzelner Spezies zu bestimmen. Wegen der Effizienz und Einfachheit kommt deswegen in dieser Arbeit das Flamelet-Modell zur Anwendung.

Numerische Effizienz

Mehrgitterverfahren

Die numerische Simulation von laminaren Strömungen auf Basis der Navier-Stokes Gleichungen erfordert bereits eine große Anzahl von Gitterpunkten, um komplexe Strömungsphänomene aufzulösen und eine vom Gitter unabhängige Lösung zu erhalten. Für turbulente Strömungen werden vor allem bei hoher Reynoldszahl noch feinere Gitter benötigt, um die turbulente Scherschicht aufzulösen. Die finite Diskretisierung der differentiellen Gleichungen (RANS) führt zu einem System von algebraischen Gleichungen, dessen Größe jedoch von der Anzahl der Gitterpunkte abhängt. Solche Gleichungssysteme können numerisch effizient nur mit iterativen Verfahren gelöst werden. Die am weitesten verbreitete Methode zur iterativen Lösung der Navier-Stokes Gleichungen für inkompressible Strömungen ist der SIMPLE Algorithmus (Patankar 1980). Wie bei den meisten der existierenden Lösungsalgorithmen verlangsamt sich die Konvergenzgeschwindigkeit des SIMPLE-Algorithmus mit zunehmender Gitterdichte.

Viele fortgeschrittene Löser wie z.B. die *Strongly Implicit Procedure* (Stone 1968) bieten einige Vorteile, sind aber nicht immer gleichmäßig leistungsfähig. Von den bekannten Beschleunigungstechniken haben sich in den letzten Jahren Mehrgitterverfahren als sehr effiziente und allgemein anwendbare Verfahren herauskristallisiert, die die Konvergenzgeschwindigkeit unabhängig von der Größe des zu lösenden algebraischen Systems verbessern können. Mehrgitterverfahren eignen sich deshalb besonders für komplizierte Strömungen, wo sehr feine Diskretisierungen benötigt werden.

Seit den achtziger Jahren werden Mehrgitterverfahren in vielen Simulationsprogrammen für laminare Strömungen eingesetzt und in letzter Zeit gewinnen sie auch bei der Berechnung turbulenter Strömungen immer mehr an Bedeutung. Untersuchungen haben gezeigt, dass Mehrgitterverfahren nicht nur für die Berechnung einfacher laminarer Strömungen sondern auch für Strömungen mit starker Wärmeübertragung, z.B. Auftriebsströmungen in Hohlräumen (Demirdžić u. a. 1992), Kristallwachstumsprozesse (Leister und Perić 1992) und Strömungen mit Strahlungswärmeübertragung (Demirdžić u. a. 1996) effizient sind. Bei laminaren Strömungen werden abhängig von der Problemstellung und den benutzten Gitterebenen Beschleunigungen um bis zu zwei Größenordnungen erzielt. Die Anwendung des Mehrgitterverfahrens zur Berechnung turbulenter Strömungen (Bai und Fucks 1992; Lien und Leschziner 1991; Lien u. a. 1994a; Mavripilis 1995; Zheng u. a. 1997; Huurdeman 1999) ergibt hingegen viel niedrigere Beschleunigungsfaktoren.

Mehrgitterverfahren für die Navier-Stokes Gleichungen basieren meist auf einem *Full Multigrid* (FMG)–*Full Approximation Storage* (FAS) Algorithmus, wobei die Variablen und Residuen vom feinen Gitter auf das nächste gröbere restringiert werden. Die Initialmassenflüsse über die Kontrollvolumenflächen auf dem groben Gitter ergeben sich durch Summation der entsprechenden zwei oder vier Feingittermassenflüsse. Bei dieser Technik ergibt sich das Problem, dass die Massenflüsse, die restringierten Geschwindigkeiten und die Turbulenzvariablen auf unterschiedlichen Gitterebenen nicht zusammenpassen. Um

dieses Problem zu überwinden, wird in der vorliegenden Arbeit ein modifizierter Mehrgitteralgorithmus entwickelt (Yan and Thiele 1998; Yan 1999), wobei nur die Residuen von einem feinen Gitter auf die nächst gröbere Gitterstufe transferiert werden. Auf diese Weise lässt sich das Problem vermeiden und die Mehrgitterstrategie sowie die Programmstruktur vereinfachen sich. Das Verhalten des modifizierten Algorithmus wird in Kombination mit Konvektionsschemata höherer Ordnung und auf verschiedenen Gittern untersucht.

Parallele Effizienz

Die schnelle Entwicklung der Computertechnologie äußert sich nicht nur in der Steigerung der Rechengeschwindigkeit und Speicherkapazität des einzelnen Rechners. Sie äußert sich auch in der erhöhten Datenübertragungsgeschwindigkeit und in der Verbesserung der Netzwerktopologie für Mehrprozessormaschinen. Dementsprechend haben sich mehrere Parallelisierungsstrategien in der numerischen Strömungssimulation entwickelt. Eine davon wird als raumbezogene Parallelisierung bezeichnet und stellt heutzutage die Standardtechnik der Parallelisierung dar. Hierbei wird das Rechengebiet in etwa gleichgroße zusammenhängende Gebiete unterteilt. Jeder Prozessor bearbeitet eine dieser Gruppen, womit die lösbare Problemgröße nur durch die gesamte Speicherkapazität aller beteiligten Prozessoren begrenzt ist. Die Datenmenge, die bei dieser Strategie zur Übertragung anfällt, ist proportional zur Anzahl der bei der Gebietszerlegung entstandenen Trennflächen. Bei einem dreidimensionalen Problem ist das eine relative große Datenmenge, die sich ohne deutliche Einbußen in der Gesamtleistung nur durch eine effiziente Datenkommunikationstechnik verarbeiten lässt.

Zielsetzung

Entsprechend den dargestellten Problemen sowohl bei der Gittergenerierung als auch bei der numerischen Simulation für komplexe Strömungskonfigurationen sollen das Mehrgitterverfahren und ein modifiziertes Mehrgitterverfahren zur effizienten Lösung der differentiellen bzw. Bilanzgleichungen entwickelt werden. Durch das Mehrgitterverfahren soll die biharmonische Gittergenerierung bzw. Gitterglättung beschleunigt werden, so dass Gitter für komplexe Konfigurationen mit diesem entwickelten Verfahren geglättet werden können. Zur Behandlung von Mehrblockstrukturen soll die Methode darüber hinaus auf die Glättung der Gitterlinien über Blockgrenzen erweitert werden.

Zur Simulationsbeschleunigung für die Anwendung auf komplexe Strömungskonfigurationen wird ein Standard Mehrgitterverfahren unter Verwendung eines FMG-Algorithmus weiter entwickelt. Der modifizierte Algorithmus soll durch die Simulation von laminaren und turbulenten Strömungen zunächst grundlegend untersucht und hinsichtlich der Mehrgitterbeschleunigung validiert werden.

Zum Abschluss sollen als wichtige technische Anwendungsfälle die Simulation einer Stufenkörper-Diffusionsflamme und die instationäre Umströmung eines generischen KFZ-Außenspiegels vorgestellt werden. Bei beiden Testfällen soll verdeutlicht werden, dass

die Wiedergabe der physikalischen Vorgänge stark vom Turbulenzmodellierungsansatz abhängig ist.

Gliederung

Das zweite Kapitel ist den Grundlagen und somit den Gleichungen der Gittergenerierung und der Strömungsmechanik gewidmet, wonach im Kapitel drei die numerischen Methoden zur Gittergenerierung und Strömungssimulation inklusiver der Behandlung der Ränder beschrieben werden. Dabei wird auf ein wichtiges Problem der Gittergenerierung eingegangen, nämlich die Bestimmung der Kontrollfunktionen am Rand. Hier werden die Gleichungen der Kontrollfunktionen am Rand durch Einführung der gewünschten und einer virtuellen Gitterschicht hergeleitet, mit denen die Kontrollfunktionen iterativ berechnet werden. Es wird ebenfalls das Prinzip beschrieben, wie Gitterlinien über Blockgrenzen geglättet werden können.

Ein Schwerpunkt der Arbeit ist die Entwicklung und Anwendung von Mehrgitterverfahren. Im vierten Kapitel werden deshalb die für die Entwicklung und Anwendungen relevanten Grundlagen des Mehrgitterverfahrens erörtert. Die Validierung der Gittergenerierung und Glättung bezieht sich dabei vorwiegend auf praxisbezogene Konfigurationen, welche einen vertieften Einblick in das Potential der Gittergenerierung erlauben. Die diesbezüglichen Anwendungen sind begleitend in den laufenden Text von Kapitel fünf integriert. Hierzu zählen unter anderem die Gittergenerierung und Gitterglättung von Ω -Typ Geometrien, zwei- und dreidimensionale Flügelkonfigurationen, eine Flügel-Rumpf Konfiguration sowie eine Flügel-Rumpf-Leitwerk Konfiguration.

In Kapitel sechs wird zunächst kurz das Standard FMG-FAS dargestellt und darauf aufbauend ein modifizierter FMG-Algorithmus zur Anwendung in der Strömungssimulation entwickelt. Kapitel sieben beinhaltet die Verifizierung der Leistungsfähigkeit dieses Mehrgitterverfahrens an ausgewählten akademischen Beispielen, deren Ergebnisse bekannt sind und welche einen Geschwindigkeitsvergleich erlauben. Im Mittelpunkt stehen hier die laminare Strömung in zweidimensionalen und dreidimensionalen Nischen, eine laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe, eine turbulente Strömung über ein zweidimensionales Hügelmodell, sowie Rohrkrümmerströmungen mit starkem Sekundärwirbel.

In Kapitel acht wird die Simulation zweier technische Anwendungsfälle dargestellt und im Rahmen der abschließenden Bemerkungen, Kapitel neun, werden die Schwerpunkte der Arbeit zusammengefasst.

Kapitel 2

Grundlagen der Strömungssimulation

Im diesem Kapitel werden die der Simulation zugrunde liegenden Gleichungen zur Gittergenerierung und die strömungsmechanischen Bilanzgleichungen eingeführt. Anschließend werden die verwendeten Turbulenzmodelle und das Verbrennungsmodell in seinem wesentlichen Teilen beschrieben.

2.1 Gleichungen zur Gittergenerierung

Für die numerischen Strömungssimulationen werden die Differentialgleichungen, die sowohl der Gittererzeugung als auch der Beschreibung der letztendlich zu berechnenden physikalischen Vorgänge zugrunde liegen, häufig in allgemein krummlinigen Koordinaten dargestellt. Die Bestimmung eines körperorientierten krummlinigen Koordinatensystems reduziert sich schließlich auf das Problem, Transformationsbeziehungen $x_i(\xi^j)$ zu finden, die die kartesischen Koordinaten x_i der Netzknoten im physikalischen Raum in Abhängigkeit von den krummlinigen Koordinaten ξ^j darstellen. Dazu verwendet man im wesentlichen algebraische Methoden und solche, die auf der Lösung elliptischer oder hyperbolischer Differentialgleichungen basieren. Ein Überblick zu den gebräuchlichen Verfahren findet sich bei Thompson u. a. (1985). Die Verwendung von biharmonischen Gleichungen zur Gittergenerierung wurde von Stüben u. a. (1986) vorgeschlagen und z.B. von Sparis (1985) sowie Sparis und Karkanis (1992) eingesetzt. In der vorliegenden Arbeit konzentriert sich die Gittergenerierung nur auf das biharmonische Verfahren, da es Netze mit guter Qualität erzeugen kann.

2.1.1 Biharmonische Gleichungen

Die biharmonischen Gleichungen wurden zuerst von Bell u. a. (1982) und Shubin u. a. (1982) zur Gittergenerierung vorgeschlagen, wobei sie im transformierten Bereich für die physikalischen Koordinaten gelöst wurden:

$$\Delta \Delta \underline{x} = 0 . \tag{2.1}$$

An dieser Stelle sei jedoch bemerkt, dass es kein Extremwert-Prinzip für das Gleichungssystem gibt. Infolgedessen kann die Lösung möglicherweise nicht vom transformierten zum physikalischen Bereich zurück abgebildet werden. Deshalb wird die Lösung der transformierten biharmonischen Gleichungen im physikalischen Raum durchgeführt:

$$\Delta \Delta \underline{\xi} = 0 \quad (2.2)$$

mit den zwei vorgegebenen Randbedingungen

$$\underline{\xi} = f , \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n} = g . \quad (2.4)$$

Dabei sind $\underline{\xi}$ die krummlinigen Koordinaten. Die biharmonischen Gleichungen können grundsätzlich in zwei gekoppelte Gleichungen vom Poisson-Typ aufgespalten werden:

$$\Delta \underline{\xi} = \underline{P} , \quad (2.5)$$

$$\Delta \underline{P} = 0 , \quad (2.6)$$

wobei \underline{P} die Kontrollfunktionen sind.

2.1.2 Gleichungen der Gittergenerierung

Die direkte Anwendung der Gleichungen (2.5) und (2.6) kann bei komplexen Konfigurationen große Werte der Kontrollfunktionen am Rand produzieren, die die Stabilität der numerischen Lösung ungünstig beeinflussen. Die Größe der Kontrollfunktionen lässt sich durch die folgenden Gleichungen reduzieren:

$$\Delta \xi^l = g^{ll} P_l , \quad (2.7)$$

$$\Delta P_l = 0 . \quad (2.8)$$

Die modifizierten Gleichungen können im transformierten Bereich wie folgt geschrieben werden:

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij} x_{l,ij} + \sum_{i=1}^n g^{ii} P_i x_{l,i} = 0 , \quad (2.9)$$

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij} P_{l,ij} + \sum_{i=1}^n g^{ii} P_i P_{l,i} = 0 . \quad (2.10)$$

Hierbei sind g^{ij} die kontravarianten Metrikkoeffizienten. Die Gleichungen wurden auch von Findling und Hermann (1991) benutzt, wobei zusätzliche Parameter - die sogenannten Dämpfungsfunktionen h_{ij} - eingeführt werden, so dass in den Gleichungen (2.9 - 2.10)

g^{ij} durch $\tilde{g}^{ij} = h_{ij}g^{ij}$ ersetzt wurden.

Durch die Multiplikation mit der Jacobi-Determinanten lassen sich die obigen Gleichungen (2.9 - 2.10) wie folgt umformen:

Für den zweidimensionalen Fall:

$$\alpha^{11}\underline{x}_{,\xi\xi} + 2\alpha^{12}\underline{x}_{,\xi\eta} + \alpha^{22}\underline{x}_{,\eta\eta} + \alpha^{11}P_1\underline{x}_{,\xi} + \alpha^{22}P_2\underline{x}_{,\eta} = 0 , \quad (2.11)$$

$$\alpha^{11}\underline{P}_{,\xi\xi} + 2\alpha^{12}\underline{P}_{,\xi\eta} + \alpha^{22}\underline{P}_{,\eta\eta} + \alpha^{11}P_1\underline{P}_{,\xi} + \alpha^{22}P_2\underline{P}_{,\eta} = 0 , \quad (2.12)$$

mit

$$\alpha^{11} = \underline{x}_{,\eta} \cdot \underline{x}_{,\eta} , \quad \alpha^{12} = -\underline{x}_{,\xi} \cdot \underline{x}_{,\eta} , \quad \alpha^{22} = \underline{x}_{,\xi} \cdot \underline{x}_{,\xi} . \quad (2.13)$$

Für den dreidimensionalen Fall:

$$\begin{aligned} \alpha^{11}\underline{x}_{,\xi\xi} + \alpha^{22}\underline{x}_{,\eta\eta} + \alpha^{33}\underline{x}_{,\zeta\zeta} + 2\alpha^{12}\underline{x}_{,\xi\eta} + 2\alpha^{13}\underline{x}_{,\xi\zeta} + 2\alpha^{23}\underline{x}_{,\eta\zeta} \\ + \alpha^{11}P_1\underline{x}_{,\xi} + \alpha^{22}P_2\underline{x}_{,\eta} + \alpha^{33}P_3\underline{x}_{,\zeta} = 0 , \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{11}\underline{P}_{,\xi\xi} + \alpha^{22}\underline{P}_{,\eta\eta} + \alpha^{33}\underline{P}_{,\zeta\zeta} + 2\alpha^{12}\underline{P}_{,\xi\eta} + 2\alpha^{13}\underline{P}_{,\xi\zeta} + 2\alpha^{23}\underline{P}_{,\eta\zeta} \\ + \alpha^{11}P_1\underline{P}_{,\xi} + \alpha^{22}P_2\underline{P}_{,\eta} + \alpha^{33}P_3\underline{P}_{,\zeta} = 0 , \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha^{11} &= g_{22}g_{33} - g_{23}g_{23} , & \alpha^{22} &= g_{11}g_{33} - g_{13}g_{13} , \\ \alpha^{12} &= g_{13}g_{23} - g_{12}g_{33} , & \alpha^{23} &= g_{13}g_{12} - g_{11}g_{23} , \\ \alpha^{13} &= g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22} , & \alpha^{33} &= g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die kovarianten Metrikkoeffizienten g_{ij} sind von \underline{x} abhängig und werden bestimmt durch:

$$g_{11} = \underline{x}_{,\xi} \cdot \underline{x}_{,\xi} , \quad g_{12} = \underline{x}_{,\xi} \cdot \underline{x}_{,\eta} , \quad g_{13} = \underline{x}_{,\xi} \cdot \underline{x}_{,\zeta} , \quad (2.17)$$

$$g_{22} = \underline{x}_{,\eta} \cdot \underline{x}_{,\eta} , \quad g_{23} = \underline{x}_{,\eta} \cdot \underline{x}_{,\zeta} , \quad g_{33} = \underline{x}_{,\zeta} \cdot \underline{x}_{,\zeta} .$$

Die Gleichungen (2.11) und (2.14) sind die als *Inhomogeneous Thompson-Thames-Mastin* (ITTM)-Formeln bekannt und sind in der elliptischen Gittergenerierung weit verbreitet. In der jetzigen Methode werden nicht nur die physikalischen Koordinaten \underline{x} sondern auch die Kontrollfunktionen \underline{P} durch die Differentialgleichungen (2.12) und (2.15) bestimmt.

2.2 Strömungsmechanische Bilanzgleichungen

Die Strömung eines Fluids wird mathematisch durch die differentiellen Bilanzgleichungen in Zeit t und Raum \underline{x} für Masse, Impuls und Energie beschrieben. In ihrer konservativen Form lauten sie:

Massenbilanz (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 . \quad (2.18)$$

Impulsbilanz (Navier-Stokes Gleichungen für den Geschwindigkeitsvektor \underline{u}):

$$\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \underline{u} - \underline{\pi}) = \underline{S}_u . \quad (2.19)$$

Energiebilanz (Formulierung für die Enthalpie h):

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} h + \underline{q}) = S_h . \quad (2.20)$$

Für Newtonsche Fluide lautet der Spannungstensor:

$$\underline{\pi} = -p \underline{I} + 2\mu \underline{S} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \underline{u}) \underline{I} , \quad (2.21)$$

mit dem Einheitstensor \underline{I} und dem Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\underline{S} = \frac{1}{2} [\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}] , \quad (2.22)$$

wobei p den Druck und μ die dynamische Viskosität bezeichnen. Der Term \underline{S}_u ist die Volumenkraftdichte und beinhaltet z.B. die Wirkung der Schwerkraft.

Für die Wärmestromdichte \underline{q} verwendet man den Fourierschen Ansatz:

$$\underline{q} = -\lambda \nabla T. \quad (2.23)$$

Die Wärmeleitfähigkeit λ ist eine vom thermodynamischen Zustand abhängige Stoffgröße. Für thermisch und kalorisch ideale Stoffe mit der spezifischen Gaskonstante R , dem konstanten Isentropenexponent γ und der konstanten isobaren Wärmekapazität c_p gelten dann die Zustandsgleichungen:

$$p = \rho RT \quad \text{und} \quad h = c_p T \quad \text{mit} \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} .$$

Mit der obigen Beziehung lässt sich die Wärmestromdichte durch

$$\underline{q} = -\frac{\mu}{Pr} \nabla h \quad (2.24)$$

darstellen, wobei $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ die Prandtlzahl ist.

Die dynamische Viskosität μ kann bei Gasen z.B. durch die halbempirische Formel von Sutherland (1893)

$$\mu = \mu_{ref} \frac{T_{ref} + T_s}{T + T_s} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.25)$$

dargestellt werden. Darin ist μ_{ref} die Viskosität für die Referenztemperatur T_{ref} und T_s eine stoffabhängige Konstante. Für Luft findet man (Jischa 1982):

$$T_s = 110 \text{ K}, \quad T_{ref} = 280 \text{ K}, \quad \mu_{ref} = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms} . \quad (2.26)$$

Der Quellterm S_h für die Enthalpie lautet:

$$S_h = (\underline{\pi} + p\underline{I}) \cdot \underline{S} + \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla p + w_h . \quad (2.27)$$

Hierin ist w_h die volumenspezifische Wärmequelle, z.B. durch Wärmestrahlung.

Bei genügend kleiner Machzahl ($Ma \ll 1$), dem Verhältnis der Strömungs- zur Schallgeschwindigkeit, können die Erhaltungsgleichungen für inkompressible Strömungen vereinfacht werden. Ist außerdem das Strömungsproblem von der Temperatur unabhängig, dann entfällt die Energiegleichung, und man erhält ein vereinfachtes System partieller Differentialgleichungen zur Berechnung laminarer und turbulenter Strömungen newtonscher Fluide unter der Annahme konstanter Dichte ρ und Viskosität μ .

2.3 Modellierung turbulenter Strömungen

Die meisten technisch relevanten Strömungen sind turbulent, wobei sehr hohe Reynoldszahlen auftreten können. Die Anwendung von DNS und LES, bei denen die physikalisch relevanten Skalen ausreichend aufgelöst werden müssen, beschränkt sich wegen des hohen Rechenaufwands gegenwärtig noch auf kleinere bis mittlere Reynoldszahlen und eignet sich damit nicht zur Berechnung praxisrelevanter Strömungen. Deshalb werden bei technisch relevanten Anwendungen die zufälligen turbulenten Schwankungen der verschiedenen Strömungsgrößen meist statistisch behandelt. Dazu bedient man sich der schon 1895 von Reynolds (Reynolds 1895) vorgeschlagenen Mittelungstechnik, bei der man zuerst die Momentangrößen in Mittelwert $\bar{\phi}$ und Schwankungswert ϕ' teilt:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' . \quad (2.28)$$

Bei der zeitlichen Mittelung der Bilanzgleichung verschwinden die in den Schwankungsgrößen linearen Terme. Die Anwendung dieses Prinzips auf die Impulsbilanzgleichungen (Navier-Stokes Gleichungen) führt auf die sogenannten Reynoldsschen Gleichungen, hier in ihrer inkompressiblen Form gegeben:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \bar{u} \bar{u} + \overline{\rho u' u'} - \underline{\pi} \right) = \bar{S}_u . \quad (2.29)$$

Die daraus zu berechnenden Variablen der Reynoldsschen Gleichungen sind nicht mehr die mit stochastischen Schwankungen behafteten physikalischen Geschwindigkeiten \underline{u} , sondern ihre Mittelwerte $\overline{\underline{u}}$.

Die Gleichungen (2.29) gelten in der Form nur für inkompressible Strömungen, aber eine formal identische Darstellung kann man mit der dichtegewichteten Mittelung (Favre 1965)

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \quad (2.30)$$

für kompressible Strömungen gewinnen. Dazu werden in die Reynoldsschen Gleichungen anstelle der Ensemble-gemittelten Geschwindigkeiten $\overline{\underline{u}}$ die dichtegewichteten Geschwindigkeiten $\tilde{\underline{u}}$ eingesetzt, und die Dichte ρ wird durch ihren Ensemble-Mittelwert $\bar{\rho}$ ersetzt. Hierbei ändert sich auch die Definition der Schwankungsgeschwindigkeiten

$$\underline{u}' = \underline{u} - \tilde{\underline{u}} . \quad (2.31)$$

Wegen der Nichtlinearität der Navier-Stokes Gleichungen treten bei der Mittelung zusätzliche Unbekannte in Form des Reynoldsspannungstensors $\overline{\underline{u}'\underline{u}'}$ auf. Es handelt sich hier um einen symmetrischen Tensor mit sechs Unbekannten, die durch Schließungsannahmen im Rahmen der Turbulenzmodellierung auf die gemittelten Größen zurückgeführt werden. Bis heute ist eine große Anzahl von Turbulenzmodellen unterschiedlicher Komplexität und für verschiedene Anwendungsbereiche entwickelt worden. Abgesehen von den Reynoldsspannungsmodellen, bei denen die Komponenten des Reynoldsspannungstensors mit Hilfe von Transportgleichungen gelöst werden, wird üblicherweise der Ansatz von Boussinesq (1877) angewandt, wie im folgenden Kapitel dargestellt. Eine Zusammenfassung über gebräuchliche Turbulenzmodelle findet sich z.B. bei Wilcox (1993), im Rahmen dieser Arbeit erfolgt lediglich eine kurze Zusammenstellung der verwendeten Turbulenzmodellierungsansätze, wobei zwischen linearen Wirbelzähigkeitsmodellen, Expliziten Algebraischen Spannungsmodellen (EASM) und der Detached Eddy Simulation (DES) unterschieden wird.

2.3.1 Lineare Wirbelzähigkeitsmodelle

Analog zur mittleren freien Weglänge in einem Gas wird bei der Boussinesq Approximation eine mittlere Mischungslänge l_m und eine charakteristische Geschwindigkeit der turbulenten Fluktuationsbewegung ν_m eingeführt, um die Wirbelviskosität μ_t zu bestimmen:

$$\mu_t \propto \rho\nu_m l_m . \quad (2.32)$$

Der Reynoldsspannungstensor lässt sich somit durch

$$\underline{\underline{\tau}}_t = -\overline{\rho\underline{u}'\underline{u}'} = -\frac{2}{3}\rho k \underline{\underline{I}} + 2\mu_t \underline{\underline{S}} - \frac{2}{3}\mu_t (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} \quad (2.33)$$

approximieren, wobei sich die turbulente kinetische Energie

$$k = \frac{1}{2} \overline{\underline{u}' \cdot \underline{u}'} \quad (2.34)$$

proportional zum Quadrat der charakteristischen Fluktuationsgeschwindigkeit $k \propto \nu_m^2$ verhält. Die Modellierung reduziert sich demnach auf die Bestimmung der Größen l_m und ν_m , was z.B. in Form von ein oder zwei zusätzlichen Transportgleichungen vorgenommen werden kann.

SALSA-Modell

Bekannte Vertreter des Konzepts von Eingleichungs-Modellen sind die Ansätze basierend auf einer Transportgleichung für die turbulente Viskosität oder eine vergleichbaren Größe. Hier müssen geeignete Annahmen für die Bestimmung der Mischungslänge gefunden werden. Zu erwähnen sind die Modelle von Baldwin und Lomax (1978) und von Spalart und Allmaras (1992). Die hier durchgeführten Simulationen verwenden eine Weiterentwicklung in Form des *Strain Adaptive Linear Spalart-Allmaras* (SALSA) Modells nach Rung u. a. (2003). Ausgangspunkt ist das Modell von Spalart und Allmaras (1992) in der von Edwards (1996) angegebenen Modifikation der Wanddämpfungsterme. Die wesentlichen Bestandteile dieses Turbulenzmodells sind zum einen das Wirbelzähigkeitsprinzip für inkompressible Medien

$$\rho \overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - 2\mu_t S_{ij} \quad \text{mit} \quad \mu_t = f_\nu \rho \nu_t, \quad (2.35)$$

sowie zum anderen eine semi-empirische Transportgleichung zur Bestimmung der Wirbelzähigkeit ν_t :

$$\frac{\partial \rho \nu_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \nu_t) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_{\nu_t}} \right) \nabla \nu_t \right] + P_\nu + D_\nu - Y_\nu. \quad (2.36)$$

Hierin bezeichnen P_ν den Produktionsterm, D_ν den nicht-konservativen Diffusionsterm und Y_ν den Vernichtungsterm. D_ν und Y_ν werden wie folgt definiert:

$$D_\nu = \rho \nabla \nu_t \cdot \nabla \nu_t \frac{C_{b2}}{Pr_{\nu_t}}, \quad Y_\nu = \rho f_w \left[\frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{Pr_{\nu_t}} \right] \frac{\nu_t^2}{l_n^2}. \quad (2.37)$$

Die Darstellung des Produktionsterms lautet:

$$\begin{aligned} P_\nu &= \rho C_{b1} \nu_t S, \\ C_{b1} &= 0.1355 \sqrt{\tau}, \quad \tau = \min(1.25, \max(\gamma, 0.75)), \quad \gamma = \max(\alpha_1, \alpha_2), \\ \alpha_1 &= \max \left[0, 1 - \tanh \left(\frac{\nu_t}{68} \right) \right]^{0.65}, \quad \alpha_2 = \left(1.01 \frac{\nu_t}{\kappa^2 l_n^2 S} \right)^{0.65}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Hierin kennzeichnet κ die von-Kármán-Konstante, l_n den Wandnormalenabstand und S die Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors $\underline{\underline{S}}$:

$$S = \sqrt{2 \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}}}.$$

Die angeführten Dämpfungsfunktionen ergeben sich aus

$$f_\nu = \frac{\nu_t^3}{C_{\nu 1}^3 + \nu_t^3}, \quad f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6},$$

$$\nu_t^+ = \frac{\nu_t}{\nu}, \quad g = r [1 + C_{w2}(r^5 - 1)], \quad r = 1.313 \tanh \left(\frac{\nu_t}{S \kappa^2 l_n^2} \right). \quad (2.39)$$

Die verwendeten Konstanten lauten:

$$C_{b2} = 0.622, \quad C_{\nu 1} = 7.1, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2.0, \quad \kappa = 0.41, \quad Pr_{\nu_t} = \frac{2}{3}. \quad (2.40)$$

$k - \epsilon$ Modell

Den größten Anteil an Untersuchungen und Entwicklungen in der Turbulenzmodellierung erfuhren in der Vergangenheit die Zweigleichungs-Turbulenzmodelle. Diese Modelle basieren nicht nur auf der Berechnung der turbulenten kinetischen Energie k , sondern zusätzlich auf der Berechnung eines turbulenten Längenmaßes oder einer davon abgeleiteten Größe. Da nach der Boussinesq-Approximation die turbulenten Austauschmechanismen von zwei Größen (ν_m und l_m) abhängen, bildet ein Zweigleichungsmodell das einfachste Komplettsystem, um diesen Vorgang zu erfassen.

Für die Gleichung zur Bestimmung der turbulenten Längen- Skala gibt es mehrere Ansätze. Abgesehen von Modellen für die Dissipationsrate ϵ (Jones und Launder 1972) oder die spezifische Dissipationsrate ω (Wilcox 1988) gibt es noch Modelle, die auf der turbulenten Längenskala l_m oder der turbulenten Dissipationszeit τ basieren.

Die bekanntesten Vertreter der Zweigleichungsmodelle sind die sogenannten $k - \epsilon$ und $k - \omega$ Modelle, die jeweils aus zwei Transportgleichungen und einer Gleichung für die turbulente Viskosität μ_t bestehen. In der vorliegenden Arbeit wird das $k - \epsilon$ Modell untersucht. Dies kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \rho \epsilon, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \epsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (2.42)$$

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (2.43)$$

Die verwendeten Modellkoeffizienten lassen sich aus theoretischen Überlegungen und experimentellen Ergebnissen gewinnen. Launder und Spalding (1974) geben für das $k - \epsilon$ Modell folgende Konstanten an:

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_\mu = 0.09, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92. \quad (2.44)$$

LL $k - \epsilon$ Modell

Da das $k - \epsilon$ Modell in seiner Originalform für hohe Reynoldszahlen eine unrealistisch hohe Turbulenzproduktion in der viskosen Unterschicht und den sich daran anschließend Übergangsbereich bewirkt, wird das Modellverhalten mit Hilfe von geeigneten Dämpfungsfunktionen in diesem Bereich verbessert. Dazu wurden verschiedene Modelle entwickelt wie z.B. Launder und Sharma (1974), Lam und Bremhost (1981), Chien (1982) sowie Yang und Shih (1993). Als Variablen zur Steuerung der Dämpfungsfunktionen, die hier mit f_μ , $f_{\epsilon 1}$ und $f_{\epsilon 2}$ bezeichnet sind, werden die beiden turbulenten Reynoldszahlen R_t und R_k oder der normierte Wandabstand Y^+

$$R_t = \frac{k^2}{\epsilon \nu}, \quad R_k = \frac{\sqrt{k} l_n}{\nu}, \quad Y^+ = \frac{l_n \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu} \quad (2.45)$$

verwendet. Der Einfluss der Dämpfungsfunktionen und ihre physikalische Bedeutung findet sich in den Arbeiten von Patel u. a. (1985), Rodi und Mansour (1993) sowie Rousseau u. a. (1997).

Das von Lien und Leschziner (1993) entwickelte $k - \epsilon$ Modell empfiehlt sich aufgrund seiner hohen numerischen Stabilität und seiner günstigen wandnahen Längenmaßeigenschaften. Das Modell verfolgt eine ähnliche Philosophie wie die sogenannten Zweischichtenmodelle (Rodi 1991), ohne jedoch explizit zwischen zwei verschiedenen Bereichen mit unterschiedlichen Modellierungstechniken zu differenzieren. Die Transportgleichungen für k und ϵ lauten in allgemeiner Form:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \rho \epsilon, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \epsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + f_{\epsilon 1} C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - f_{\epsilon 2} C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (2.47)$$

$$\mu_t = f_\mu C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (2.48)$$

Die Koeffizienten und Dämpfungsfunktionen sind wie folgt definiert:

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09, \\ f_{\epsilon 1} = 1 + \frac{P^*}{P_k}, \quad f_{\epsilon 2} = 1 - 0.3e^{-R_t^2}, \quad f_\mu = \frac{1 - e^{-\alpha_\mu R_k}}{1 - e^{-\alpha_\epsilon R_k}}, \quad (2.49)$$

$$P^* = \frac{\rho f_{\epsilon 2} C_{\epsilon 2} k^{3/2}}{C_{\epsilon 1} l_\epsilon} e^{-\alpha_d R_k^2}, \quad l_\epsilon = \kappa C_\mu^{-3/4} l_n (1 - e^{-\alpha_\epsilon R_k}).$$

$$\alpha_d = 0.00222, \quad \alpha_\epsilon = 0.263, \quad \alpha_\mu = 0.016.$$

Im Vergleich zu den algebraischen Turbulenzmodellen und den Eingleichungs-Turbulenzmodellen ist der Anwendungsbereich der Zweigleichungsmodelle als deutlich größer anzusehen.

LEA $k - \epsilon$ Modell

Das zuvor beschriebene $k - \epsilon$ Modell hat einen konstanten Anisotropieparameter $C_\mu = 0.09$, der aus einer einschränkenden Annahme folgt. Im folgenden Kapitel 2.3.2 wird kurz auf die Expliziten Algebraische Spannungsmodelle eingegangen, die auf Grund ihrer allgemeingültigeren Herleitung einen variablen Anisotropieparameter anwenden. Beim EASM wird der Reynoldsspannungstensor durch Gleichung (2.50) gegeben, und zur Berechnung der Wirbelviskosität μ_t wird C_μ durch Gleichung (2.52) bestimmt. Verwendet man dieses Berechnungsvorschrift ebenfalls für das C_μ des $k - \epsilon$ Modells, so beschränkt man sich nur auf den linearen Term des Zusammenhanges zwischen Spannungen und Scherraten des EASM. Es ergibt sich ein Modellierungsansatz, der als Lineares Explizites Algebraisches (LEA) $k - \epsilon$ Modell bezeichnet wird, der ähnliche Eigenschaften wie das EASM besitzt, wie in Kapitel 8.1 gezeigt wird.

2.3.2 Explizite Algebraische Spannungsmodelle

Da alle bisher beschriebenen Modelle auf der Boussinesq Approximation basieren, unterliegt dabei die Reynoldsspannung einer linearen Proportionalität zum Deformationsgeschwindigkeitstensor $\underline{\underline{S}}$:

$$-\overline{\rho \underline{\underline{u}}' \underline{\underline{u}}'} = 2\mu_t \underline{\underline{S}} - \frac{2}{3}(\rho k + \mu_t \nabla \cdot \underline{\underline{u}}) \underline{\underline{I}}.$$

Diese lineare Beziehung zwischen den Reynoldsspannungen und den Scherraten ist aber nicht allgemeingültig. Sie ist zum Beispiel für Strömungen, in denen extreme Änderungen des Hauptspannungstensors $\underline{\underline{S}}$ auftreten, oder bei starker Stromlinienkrümmung nicht mehr erfüllt und führt zu ungleichen Reynolds-Normalspannungen $\overline{u'_i u'_i}$. Beispiele hierzu sind drallbehaftete und dreidimensionale Strömungen. Komplexe dreidimensionale Strömungen sind durch stark anisotrope Spannungszustände gekennzeichnet. Sowohl für $k - \epsilon$ als auch für $k - \omega$ Modelle gibt es viele Korrekturterme, die für einen oder mehrere dieser Strömungstypen verbesserte Simulationsergebnisse ermöglichen.

Eine allgemeinere Bestimmung des Reynoldsspannungstensors besteht in Reynoldsspannungsmodellen (Launder u. a. 1975), die die Anisotropie des Spannungstensors oder Krümmungseffekte ohne Korrektur wiedergeben können, da für jede Komponente eine Transportgleichung gelöst wird. Eine im Vergleich zu den Zweigleichungsmodellen noch größere Zahl an Modellfunktionen und -konstanten erfordert jedoch noch intensive Untersuchungen, um in Richtung eines "universellen" Reynoldsspannungsmodells zu gelangen. Einen guten Überblick über die physikalischen Aspekte der einzelnen Terme findet man in der Arbeit von Launder und Shima (1989) und Beispiele für Anwendungen und Modellentwicklungen in den Arbeiten von Gibson und Younis (1986), Lai (1995), Launder und Shima (1989) sowie Obi u. a. (1991).

Aus den impliziten Transportgleichungen der Reynoldsspannungen kann unter der Annahme homogener Turbulenzstruktur, also bei Vernachlässigung der substantiellen Ableitung

der Reynoldsspannungen durch darstellungstheoretische Überlegungen ein explizites algebraisches Spannungsmodell in Gestalt eines nichtlinearen EVM formuliert werden. Dieses kann zwar ebenfalls keine Krümmungseffekte wiedergeben, vermag aber Anisotropieeffekte besser darzustellen. Der große Rechenaufwand impliziter RSM lässt sich somit durch die Verwendung vom EASM erheblich reduzieren, wobei die Güte der Modellierung weitgehend erhalten bleibt. In dieser Arbeit wird exemplarisch das "Realizable Quadratic Eddy Viscosity Model" (Rung u. a. 1999) verwendet, das ein EASM darstellt, welches zusätzlich noch die Realizability-Bedingungen zu Gewährleistung physikalischer Plausibilität erfüllt. Zur linearen Abhängigkeit der Reynoldsspannungen von $\underline{\underline{S}}$ kommen hier noch Terme höherer Ordnung hinzu:

$$-\overline{\rho \underline{\underline{u}}' \underline{\underline{u}}'} = 2\mu_t \underline{\underline{S}} - \frac{2}{3}(\rho k + \mu_t \nabla \cdot \underline{\underline{u}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu_t \underline{\underline{B}}, \quad (2.50)$$

mit

$$\underline{\underline{B}} = \beta_2 \frac{k}{\epsilon} \underline{\underline{T2}} - \beta_3 \frac{k}{\epsilon} \underline{\underline{T3}},$$

wobei $\underline{\underline{T2}}$ und $\underline{\underline{T3}}$ quadratische Terme des Deformationsgeschwindigkeitstensors $\underline{\underline{S}}$ und des Drehtensors $\underline{\underline{\Omega}}$ sind:

$$\underline{\underline{T2}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{S}}, \quad \underline{\underline{T3}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}} - \frac{1}{3}(\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{I}}. \quad (2.51)$$

Der Anisotropieparameter C_μ wird nicht konstant gehalten sondern in Abhängigkeit von Geschwindigkeitsgradienten bestimmt:

$$C_\mu = \frac{3\beta_1}{3 - 2\eta^2 + 6\xi^2}, \quad (2.52)$$

mit

$$\eta^2 = (\beta_3 S)^2 / 8, \quad \xi^2 = (\beta_2 \Omega)^2 / 2.$$

Dabei werden die Modellkoeffizienten wie folgt angegeben:

$$\beta_1 = (2/3 - C_2/2)/g, \quad \beta_2 = (1 - C_4/2)/g, \quad \beta_3 = (2 - C_3)/g, \quad g = C_1 + C_5 - 1, \\ C_1 = 2.6, \quad C_2 = 0.45, \quad C_3 = 0.37, \quad C_4 = 0.5, \quad C_5 = 1.98.$$

Die quadratische Abhängigkeit der Reynoldsspannungen von den Scherraten ist in Verbindung mit dem $k - \epsilon$ Modell implementiert, wobei hierzu der Koeffizient $C_{\epsilon_2} = 1.83$ statt $C_{\epsilon_2} = 1.92$ eingesetzt wird.

Der bei der numerischen Umsetzung anders als die linearen Anteile explizit zu behandelnde, nichtlineare Anteil der Reynoldsspannungen wird im folgenden mit

$$\underline{\underline{\tau}}_{tn} = 2\mu_t \underline{\underline{B}}$$

bezeichnet.

2.3.3 Detached Eddy Simulation

DES stellt in gewisser Weise einen Mittelweg zwischen LES und RANS dar. Die großskaligen Turbulenzstrukturen, deren Längenmaß größer als das gewählte numerische Gitter ist, wird mit den Gitterweiten wie bei der LES berechnet, und die kleinskaligen Strukturen, für die das Gitter zu grob ist, werden durch RANS simuliert.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendete DES basiert auf dem SALSA Modell, wobei das Längenmaß auf den Wandnormalenabstand l_n zurückgeführt wird. Die DES-Formulierung erfordert im Wesentlichen das Ersetzen von l_n durch einen neu definierten Abstand l_{DES} , der wie folgt berechnet wird (Spalart 1999):

$$l_{DES} = \min(l_n, C_{DES}\Delta) , \quad \Delta = \max(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z) , \quad (2.53)$$

wobei ΔX , ΔY und ΔZ die Gitterweiten darstellen und die empirische Konstante C_{DES} zu 0.65 gesetzt ist. Für kleine Wandabstände, $l_n < C_{DES}\Delta$ (in der Grenzschicht), wird das ursprüngliche SALSA Modell verwendet. In der freien Strömung ($l_n > C_{DES}\Delta$) nähert sich l_{DES} der lokalen Gitterweite Δ an. Damit funktioniert das SALSA Modell in dem Bereich wie ein Feinstrukturmodell mit einer Mischungslänge, die gleich der Gitterweite ist. Die Konstante ist dabei auf $C_{DES} = 0.65$ gesetzt.

2.4 Verbrennungsmodelle

Turbulente Strömungen in Kombination mit chemischen Reaktionen spielen eine wichtige Rolle bei vielen technischen Verbrennungsprozessen. Bei der numerischen Simulation reagierender Strömungen werden zusätzlich zu den Navier-Stokes Gleichungen die Gleichungen der Massenbrüche Y_i der einzelnen Spezies i und oft der Temperatur T gelöst:

$$\frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} Y_i) = \nabla \cdot (\rho D_i \nabla Y_i) + \dot{w}_i , \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} T) = \nabla \cdot (\rho D_T \nabla T) \\ + \frac{1}{c_p} \left(\sum_{i=1}^N c_{p_i} D_i \nabla Y_i \cdot \nabla T - \sum_{i=1}^N h_i \dot{w}_i + \frac{\partial p}{\partial t} + \dot{q}_R \right) . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dabei ist N die Gesamtzahl aller auftretenden chemischen Komponenten, \dot{w}_i ist die Massenproduktion jeder einzelnen Komponente infolge chemischer Reaktionen und h_i ist ihre Enthalpie. c_p bezeichnet die spezifische Wärmekapazität der Gasmischung bei konstantem Druck und \dot{q}_R den Strahlungsverlust.

In der Theorie der Diffusionsflammen lässt sich mit Hilfe der Elementmassenbrüche Z_i ein Mischungsbruch Z durch $Z = (Z_i - Z_{i2}) / (Z_{i1} - Z_{i2})$ definieren (die Indizes 1 und 2 bezeichnen den Strom von Brennstoff bzw. Oxidationsmittel). In dieser Arbeit werden gleiche Diffusionskoeffizienten D für alle chemischen Komponenten angenommen. Setzt man zusätzlich

die Gleichheit von Stoff- und Wärmediffusion voraus, wird das Diffusionsverhalten aller chemischer Komponenten durch nur einen einzigen universalen Diffusionskoeffizienten D beschrieben

$$D = D_i = D_T = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{\mu}{S_C}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.56)$$

und so sind die Lewiszahlen Le_i für alle chemischen Komponenten identisch eins:

$$Le_i = Le = \frac{\lambda}{C_p \rho D} = 1, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.57)$$

Mit diesem Ansatz gilt das folgende Erhaltungsgesetz:

$$\frac{\partial \rho Z}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} Z) = \nabla \cdot (\rho D \nabla Z), \quad (2.58)$$

mit den Randbedingungen $Z=0$ im Oxidationsmittel und $Z=1$ im Brennstoffstrom.

Die Favre-gemittelten Gleichungen für turbulente reagierende Strömungen lauten:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \underline{\tilde{u}} \tilde{Y}_i) = \nabla \cdot (\bar{\rho} D \nabla \tilde{Y}_i) - \nabla \cdot (\bar{\rho} \underline{\tilde{u}}'' \tilde{Y}_i'') + \tilde{w}_i, \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \underline{\tilde{u}} \tilde{T}) &= \nabla \cdot (\bar{\rho} D \nabla \tilde{T}) - \nabla \cdot (\bar{\rho} \underline{\tilde{u}}'' \tilde{T}'') \\ &+ \frac{1}{c_p} \left(\sum_{i=1}^n c_{p_i} D \nabla \tilde{Y}_i \cdot \nabla \tilde{T} - \sum_{i=1}^N h_i \tilde{w}_i + \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \dot{q}_R \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Hier beschreiben die Terme $\underline{\tilde{u}}'' \tilde{Y}_i''$ und $\underline{\tilde{u}}'' \tilde{T}''$ den turbulenten Transport. Sie sind unbekannt und müssen ähnlich wie die Geschwindigkeitskorrektur in den Reynoldsgleichungen modelliert werden. Dazu wird oft der Gradientenansatz verwendet:

$$-\bar{\rho} \underline{\tilde{u}}'' \tilde{Y}_i'' = \frac{\mu_t}{S_{c_t}} \frac{\partial \tilde{Y}_i}{\partial x_j}, \quad -\bar{\rho} \underline{\tilde{u}}'' \tilde{T}'' = \frac{\mu_t}{S_{c_t}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (2.61)$$

wobei S_{c_t} die turbulente Schmidtzahl ist.

Einer Lösung der gemittelten Erhaltungsgleichungen steht jetzt nur noch die Bestimmung der mittleren Massenproduktion \dot{w}_i im Wege. Diese ist eine hoch nichtlineare Funktion der Massenbrüche und der Temperatur. Durch die Nichtlinearität der zugrunde liegenden physikalisch-chemischen Prozesse ist die Bestimmung von \tilde{w}_i schwierig. Die statistische Behandlung mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (PDF) bietet hier einen möglichen Ansatz.

Aus Sicherheitsgründen werden bei der industriellen Feuerung und in Brennern überwiegend Diffusionsflammen eingesetzt. Für die numerische Simulation von Verbrennungsprozessen mit diesem Flammentyp sind zur Zeit das Verfahren der PDF-Transportgleichung (Pope 1981; Pope 1985; Pope 1990) und das Flamelet-Modell (Peters 2000; Warnatz 1993) weit verbreitet. Letzteres wird in dieser Arbeit verwendet.

2.4.1 Flamelet-Modell

Das Flamelet-Konzept basiert auf der Annahme, dass eine turbulente Flamme aus vielen gewinkelten laminaren Flämmchen besteht. Deshalb müssen die chemischen Zeit- und Längenskalen nicht vom Strömungslöser aufgelöst werden (Peters 2000). Wegen seiner Einfachheit ist dieses Konzept weit verbreitet und wird in Verbindung mit hochentwickelten Turbulenzmodellen in den vorliegenden Untersuchungen verwendet.

Die Verwendung des Flamelet-Modells basiert auf der Annahme einer β -förmigen PDF, deren Form durch den Favre-gemittelten Mischungsbruch \tilde{Z} und seine Varianz $\widetilde{Z''^2}$ wie folgt bestimmt wird:

$$\tilde{P}(Z) = Z^{\alpha-1}(1-Z)^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}. \quad (2.62)$$

Dabei sind α , β und γ

$$\alpha = \tilde{Z}\gamma, \quad \beta = (1-\tilde{Z})\gamma, \quad \gamma = \frac{\tilde{Z}(1-\tilde{Z})}{\widetilde{Z''^2}}, \quad (2.63)$$

und die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (2.64)$$

Für diese zwei Variablen \tilde{Z} und $\widetilde{Z''^2}$ werden folgende Transportgleichungen gelöst:

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{Z}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{Z}) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \nabla \tilde{Z}, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \widetilde{Z''^2}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{u} \widetilde{Z''^2}) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \nabla \widetilde{Z''^2} + 2 \frac{\mu_t}{Sc_t} (\nabla \tilde{Z})^2 - \tilde{\rho} \tilde{\chi}, \quad (2.66)$$

mit

$$\tilde{\chi} = c_\chi \frac{\epsilon}{k} \widetilde{Z''^2}. \quad (2.67)$$

Dabei werden die Schmidtzahl Sc und die turbulente Schmidtzahl Sc_t zu 0.7 bzw. 1.0 gesetzt. Der Modellparameter c_χ wird zu 2.0 gesetzt (Peters 2000).

Die Flamelet-Gleichungen können nach (Peters 2000) durch die Annahme der Existenz einer dünnen, von der Turbulenz ungestörten Reaktionszone mit einer Crocco-Transformation in ein lokales, auf das Diffusionsflamelet bezogenes Koordinatensystem abgeleitet werden. Für den Massenbruch Y_i und die Temperatur T lauten sie wie folgt:

$$\rho \frac{\partial Y_i}{\partial t} - \rho \frac{\chi}{2} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial Z^2} - \dot{w}_i = 0, \quad (2.68)$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \rho \frac{\chi}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - \rho \frac{\chi}{2c_p} \left(\sum_{i=1}^N c_{p_i} \frac{\partial Y_i}{\partial Z} + \frac{\partial c_p}{\partial Z} \right) \frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{1}{c_p} \left(\sum_{i=1}^N h_i \dot{w}_i - \dot{q}_R \right) = 0 . \quad (2.69)$$

Weil die Lewiszahlen identisch Eins sind, treten sie hier in diesen Gleichungen nicht auf. Diese Gleichungen sind eindimensional und scheinbar außer in der Zeit t nur noch in einer einzigen weiteren unabhängigen Variablen, dem Massenbruch Z , formuliert. Aber wegen der Zustandgleichung $p = \rho RT$ ist der Druck p auch eine zusätzliche Variable für die Flamelet-Gleichungen. Die verwendete Modellierung von \dot{q}_R für Wasserstoffflammen in der dünnen Reaktionszone wird von Pitsch u. a. (2000) gegeben:

$$\dot{q}_R = 2\sigma(T^4 - T_u^4)(p_{CO_2}\alpha_{p,CO_2} + p_{H_2O}\alpha_{p,H_2O}) . \quad (2.70)$$

Dabei bezeichnet σ die Stefan-Boltzmannkonstante, T_u die umgebende Temperatur, p_i den Partialdruck und $\alpha_{p,i}$ den Plankschen Absorptionskoeffizient der Spezies i .

In den Flamelet-Gleichungen wird die skalare Dissipationsrate χ durch folgenden Gradienten-Diffusion-Ansatz definiert:

$$\chi = 2D(\nabla Z)^2 . \quad (2.71)$$

Sie stellt den Einfluss des Mischungsfeldes und somit der turbulenten Strömung auf die laminare Flammenstruktur dar. Sie hat die Einheit s^{-1} und kann als Inverse einer charakteristischen Diffusionszeit interpretiert werden.

Die Abhängigkeit der zur Lösung der Flamelet-Gleichungen benötigten skalaren Dissipationsrate vom Mischungsbruch wird modelliert als (Peters 2000)

$$\chi = \chi_{st} \frac{f(Z)}{f(Z_{st})} \quad (st : \text{ am stöchiometrischen Mischungsbruch } Z_{st}) , \quad (2.72)$$

mit

$$f(Z) = e^{-2[erfc^{-1}(2Z)]^2} . \quad (2.73)$$

Dabei ist $erfc^{-1}$ die Inverse der komplementären Fehlerfunktion. Gleichung (2.72) zeigt, dass χ nur vom Mischungsbruch Z sowie dem Wert am stöchiometrischen Punkt χ_{st} abhängig ist. Da die beiden Größen χ_{st} und Z statistisch unabhängig sind, kann die turbulente Mittelung der skalaren Dissipationsrate wie folgt geschrieben werden:

$$\tilde{\chi} = \int_{\chi_{st}} \chi_{st} \tilde{P}(\chi_{st}) d\chi_{st} \int_Z \frac{f(Z)}{f(Z_{st})} \tilde{P}(Z) dZ . \quad (2.74)$$

Dabei bezeichnet \tilde{P} die Favre-gemittelte PDF. In dieser Gleichung definiert die erste Integration die gemittelte skalare Dissipationsrate am stöchiometrischen Punkt als

$$\langle \chi_{st} \rangle = \int_{\chi_{st}} \chi_{st} \tilde{P}(\chi_{st}) d\chi_{st} . \quad (2.75)$$

Unter Verwendung von Gleichung (2.67) lautet die am stöchiometrischen Mischungsbruch gemittelte skalare Dissipationsrate:

$$\langle \chi_{st} \rangle = \frac{c_{\chi k} \bar{\tilde{Z}}''^2 f(Z_{st})}{\int_0^1 f(Z) \tilde{P}(Z) dZ} . \quad (2.76)$$

Mit Annahme von $\chi_{st} = \langle \chi_{st} \rangle$ kann das zur Lösung der Flamelet-Gleichungen benötigte χ wie folgt ermittelt werden:

$$\tilde{\chi}_Z = \chi = \frac{c_{\chi k} \bar{\tilde{Z}}''^2 f(Z)}{\int_0^1 f(Z) \tilde{P}(Z) dZ} = \frac{\tilde{\chi} f(Z)}{\int_0^1 f(Z) \tilde{P}(Z) dZ} . \quad (2.77)$$

Dann erhält man für die turbulente reagierende Strömung:

$$\rho \frac{\partial Y_i}{\partial t} - \rho \frac{\tilde{\chi}_Z}{2} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial Z^2} - \dot{w}_i = 0 , \quad (2.78)$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \rho \frac{\tilde{\chi}_Z}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - \rho \frac{\tilde{\chi}_Z}{2c_p} \left(\sum_{i=1}^N c_{pi} \frac{\partial Y_i}{\partial Z} + \frac{\partial c_p}{\partial Z} \right) \frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{1}{c_p} \left(\sum_{i=1}^N h_i \dot{w}_i - \dot{q}_R \right) = 0 , \quad (2.79)$$

mit der bedingt gemittelten skalaren Dissipationsrate $\tilde{\chi}_Z$.

Es sollte beachtet werden, dass zur Schließung der Flamelet-Gleichungen die Annahme der bedingt gemittelten skalaren Dissipationsrate benutzt wird. Daraus folgt, dass es sich auch bei der Lösung um bedingt gemittelte Größen handelt.

2.4.2 Flamelet-Bibliothek und Kopplungsmodell

Die Flamelet-Gleichungen besitzen die zwei Parameter $\tilde{\chi}_Z$ und \bar{p} . Durch die Lösung der Gleichungen mit unterschiedlichen Werten wird eine sogenannte Flamelet-Bibliothek erzeugt. Darin werden zu jedem Parameterpaar $\tilde{\chi}_{ZBIB}$ und \bar{p}_{BIB} die Massenbruchverteilung $Y_i(Z)$ und die Temperaturverteilung $T(Z)$ gespeichert. Für die numerische Simulation einer turbulenten reagierenden Strömung genügt es nun, aus den bekannten Feldern k , ϵ , \tilde{Z} und \tilde{Z}''^2 die Parameter $\tilde{\chi}_Z$ und \bar{p} zu bestimmen. Mit zwei ermittelten Variablen $\tilde{\chi}_Z$ und \bar{p} kann aus der Flamelet-Bibliothek die entsprechende Massenbruch- und Temperaturverteilung im Mischungsbruchraum Z (0 – 1) ausgelesen werden.

Liegt die Massenbruchverteilung $Y_i(Z)$ der chemischen Komponente i und die Temperaturverteilung $T(Z)$ im Mischungsbruchraum Z als Ergebnis der Flamelet-Gleichungen vor, so erhält man die Werte $\bar{\rho}$, \tilde{Y}_i und \tilde{T} im physikalischen Raum durch Integration mit der PDF über den Mischungsbruch:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \int_0^1 \frac{\tilde{P}(Z)}{\rho(Z)} dZ \quad \text{mit} \quad \rho(Z) = \frac{\bar{p}}{RT(Z) \sum_{i=1}^N \frac{Y_i(Z)}{M_i}} ,$$

$$\tilde{Y}_i = \int_0^1 Y_i(Z) \tilde{P}(Z) dZ , \quad \tilde{T} = \int_0^1 T(Z) \tilde{P}(Z) dZ . \quad (2.80)$$

Dabei bezeichnet R die allgemeine Gaskonstante ($R=8,314$ J/mol K) und M_i die molare Masse des Stoffes i .

Kapitel 3

Numerische Methoden

Dieses Kapitel befasst sich mit den numerischen Methoden zur Gittergenerierung und zur Strömungssimulation. Das Verfahren zur Gittergenerierung wird in seinen wesentlichen Komponenten beschrieben, wobei speziell auf die Weiterentwicklung hinsichtlich der Berechnung der Kontrollfunktion eingegangen wird. Während das numerische Verfahren zur Strömungssimulation auf der Grundlage der Bilanzgleichungen nur in einer Übersicht dargestellt ist, wird die Implementierung von Wandrandbedingungen für stark schiefwinklige Gitterlinien weiterentwickelt.

3.1 Gittergenerierung

In diesem Abschnitt wird zuerst die Berechnung der Kontrollfunktionen am Rand beschrieben und danach die Diskretisierung der Differentialgleichungen vorgestellt. Das hier verwendete Verfahren von Linden (1984) zeichnet sich durch eine erhöhte Lösungsstabilität hinsichtlich der Randbedingungen sowie durch eine erhöhte Konvergenzgeschwindigkeit aus. Anschließend wird die Glättung über Blockgrenzen beschrieben.

3.1.1 Berechnung der Kontrollfunktionen

Die biharmonischen Gleichungen zeichnen sich durch zwei Randbedingungen aus. Die erste Randbedingung bezieht sich auf die Gitterpunktverteilung am Rand. Als zweite Randbedingungen können die ersten Ableitungen $\underline{x}_{,\xi}$, $\underline{x}_{,\eta}$ und $\underline{x}_{,\zeta}$ am Rand vorgegeben werden, d.h. die Schnittwinkel und Maschenweiten. Während sich die Randbedingung für die Gleichungen (2.11) und (2.15) direkt aus den Koordinaten der Randgitterschicht ergibt, kann die Randbedingung für die Gleichungen (2.12) und (2.16) mit der oben genannten zweiten Randbedingung gewonnen werden. Um die Kontrollfunktionen \underline{P} am Rand herzuleiten, werden hier, wie in Abbildung 3.1 gezeigt, drei Gitterschichten \underline{X}^{B+1} , \underline{X}^B und \underline{X}^{B-1} eingeführt. Davon ist \underline{X}^B die Randgitterschicht, \underline{X}^{B-1} ist eine virtuelle Gitterschicht außerhalb des Rechengebiets und \underline{X}^{B+1} ist die gewünschte erste Gitterschicht. Bei vorgegebener erster Ableitung am Rand hat die virtuelle Gitterschicht immer den gleichen Abstand δx zwischen den realen Punkten \underline{x}^{B+1} und den gewünschten Punkten \underline{X}^{B+1} . Die Schnittwinkel zum Rand werden bei der elliptischen Glättung deshalb weitgehend festgehalten. Diese Vorgehensweise lässt sich am Beispiel der Berechnung der Kontrollfunktionen für

den zweidimensionalen Fall demonstrieren.

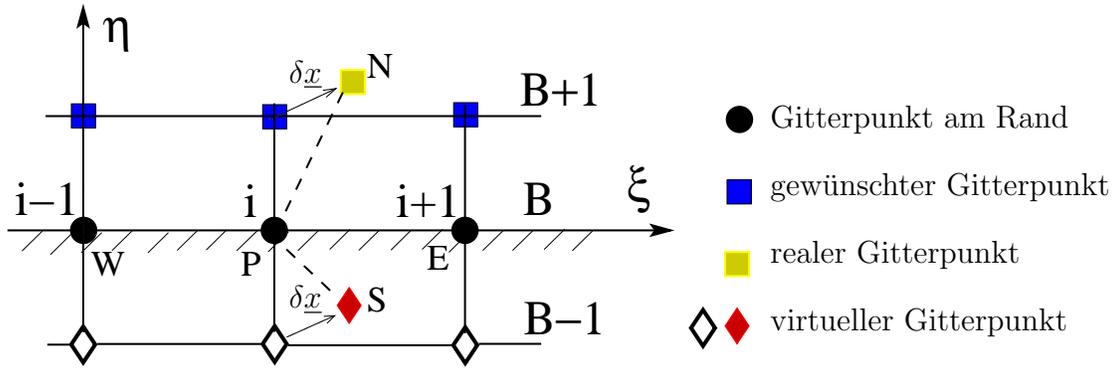


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Behandlung der Randbedingung im zweidimensionalen Fall

Mit den Beziehungen

$$\underline{x} = \underline{x}^{B+1} - \underline{X}^{B+1}, \quad \underline{x}^{B-1} = \underline{X}^{B-1} + \delta \underline{x} \quad (3.1)$$

werden die Ableitungen der Koordinaten am Rand mit zentralen Differenzenschemata berechnet:

$$\underline{x}_{,\xi}^P = \frac{(x^E - x^W)}{2h} = \underline{X}_{,\xi}^P, \quad \underline{x}_{,\eta}^P = \frac{(x^N - x^S)}{2h} = \underline{X}_{,\eta}^P. \quad (3.2)$$

Die Maschenweite h der kontravarianten Koordinaten wird üblicherweise zu eins gesetzt. Zur vereinfachten Darstellung wird im folgenden der Hochindex P weggelassen. Nach Gleichung (3.2) ändert sich die Metrikkoeffizienten

$$\alpha^{11} = \underline{X}_{,\eta} \cdot \underline{X}_{,\eta}, \quad \alpha^{12} = -\underline{X}_{,\xi} \cdot \underline{X}_{,\eta}, \quad \alpha^{22} = \underline{X}_{,\xi} \cdot \underline{X}_{,\xi} \quad (3.3)$$

nicht. Die zweiten Ableitungen $\underline{x}_{,\xi\xi}$ und $\underline{x}_{,\xi\eta}$ bleiben ebenfalls konstant:

$$\underline{x}_{,\xi\xi} = \underline{X}_{,\xi\xi}, \quad \underline{x}_{,\xi\eta} = \underline{X}_{,\xi\eta}. \quad (3.4)$$

Nur $\underline{x}_{,\eta\eta}$ erfährt eine Änderung infolge der Abweichung $\delta \underline{x}$ der randnächsten Gitterschicht:

$$\underline{x}_{,\eta\eta} = \underline{X}_{,\eta\eta} + 2 \frac{\delta \underline{x}}{h^2}. \quad (3.5)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (2.11) die folgende Beziehung:

$$\alpha^{11} \underline{X}_{,\xi\xi} + 2\alpha^{12} \underline{X}_{,\xi\eta} + \alpha^{22} \underline{X}_{,\eta\eta} + 2\alpha^{22} \frac{\delta \underline{x}}{h^2} + \alpha^{11} P_1^B \underline{X}_{,\xi} + \alpha^{22} P_2^B \underline{X}_{,\eta} = 0. \quad (3.6)$$

Weil die Metrikkoeffizienten jedoch bekannt sind, hängen die Kontrollfunktionen dann nur von $\delta \underline{x}$ ab und können am Rand iterativ bestimmt werden.

Für den dreidimensionalen Fall kann die Randbehandlung in analoger Weise für jede Fläche fortgesetzt werden. Es ergibt sich eine ähnliche Beziehung für die Kontrollfunktionen am Rand.

3.1.2 Erzeugung einer vorgegebenen Gitterschicht

Eine vorgegebene Gitterschicht dient zur Berechnung der Kontrollfunktion am Rand, wobei in der Praxis eine sinnvolle Wandabstandsverteilung der randnächsten Gitterlinie über alle Wände vorzugeben ist. In vielen Fällen erfüllt die einfache Vorgabe eines Abstands nicht die Anforderungen, da die Simulation turbulenter Strömungen angepasste Wandabstände benötigt. Unter der Voraussetzung, dass die Abstandsverteilung eines algebraischen Netzes bereits gut ist, kann diese aus dem Startgitter berechnet werden. Das Verfahren ist für den dreidimensionalen Fall in Abbildung 3.2 skizziert, wobei B, W, E, S, N die Gitterpunkte auf der Wand sind und P der wandnächste Gitterpunkt ist, während \underline{X}^{B+1} den gewünschten Gitterpunkt kennzeichnet.

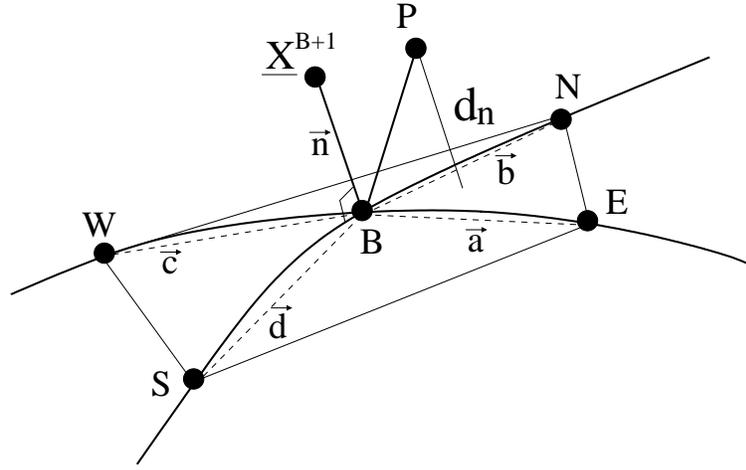


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Erzeugung einer vorgegebenen Gitterschicht mit dem orthogonalen Wandabstand des Ausgangsgitters

Ausgehend von den vier Abständen d_1 , d_2 , d_3 und d_4 des Punktes P auf den vier Ebenen BSE, BEN, BNW, BWS kann der kleinste Wert davon als der gesuchte Abstand definiert werden, d.h. $d_n = \min(d_1, d_2, d_3, d_4)$. Alternativ lässt sich auch der Mittelwert der vier Abstände $d_n = (d_1 + d_2 + d_3 + d_4)/4$ verwenden. Zur Berechnung des Normalenvektors \vec{n} wird das Kreuzprodukt benutzt:

$$\vec{n}_1 = \vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{n}_2 = \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{n}_3 = \vec{c} \times \vec{d}, \quad \vec{n}_4 = \vec{d} \times \vec{a}, \quad \vec{n} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \frac{\vec{n}_i}{|\vec{n}_i|}.$$

Mit dem Abstand d_n und dem berechneten Normalenvektor \vec{n} ergibt sich der gewünschte Gitterpunkt \underline{X}^{B+1} zu:

$$\underline{X}^{B+1} = \underline{X}^B + d_n \vec{n}. \quad (3.7)$$

3.1.3 Approximation der Differentialgleichungen

Die Gleichungen (2.11-2.12) und (2.13-2.14) werden üblicherweise nach dem Finite-Differenzenschema approximiert und mit dem iterativ arbeitenden SOR-Verfahren (Successive-Over-Relaxation) gelöst. Die Konvergenz wird maßgeblich von der Struktur der zugeordneten Koeffizientenmatrix und damit sowohl von den Koeffizienten der Differentialgleichung als auch von der Form der Differenzenapproximation beeinflusst. Neben der Benutzung zentraler Differenzenquotienten für die ersten partiellen Ableitungen werden alternativ auch "Upwind"-Approximationen verwendet, wodurch sich Konvergenzverhalten und Lösungsqualität beeinflussen lassen.

Die zentrale Differenzenformel hat folgende Form:

$$\phi_{,\xi} = \frac{(\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k})}{2h} . \quad (3.8)$$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der Kontrollfunktion P_i mit positiven α^{ii} lautet die vor- oder rückwärtige Upwind-Approximation:

$$\begin{aligned} \phi_{,\xi} &= \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{h} && \text{wenn } P_i < 0 ; \\ \phi_{,\xi} &= \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{h} && \text{wenn } P_i > 0 . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Auf der feinsten Gitterebene ist die Maschenweite h gleich eins und wird beim Übergang zur nächst feineren Gitterebene mit zwei multipliziert.

Für die in den Differentialgleichungen für \underline{x} und \underline{P} vorkommenden zweiten sowie gemischten Ableitungen werden zentrale Differenzenquotienten verwendet, z.B.:

$$\phi_{,\xi\xi} = \frac{(\phi_{i+1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i-1,j,k})}{h^2} , \quad (3.10)$$

$$\phi_{,\xi\eta} = \frac{(\phi_{i+1,j+1,k} - \phi_{i+1,j-1,k} - \phi_{i-1,j+1,k} + \phi_{i-1,j-1,k})}{4h^2} . \quad (3.11)$$

Die so entstandenen Differenzgleichungen lassen sich in der folgenden allgemeinen Form darstellen:

$$-a_p\phi_p + \sum_{nb} a_{nb}\phi_{nb} + S_\phi = 0 . \quad (3.12)$$

Hierbei steht ϕ für eine der Variablen \underline{x} bzw. \underline{P} . Der Index nb läuft über alle Nachbarpunkte und a_p und a_{nb} sind die Koeffizienten. Der Term S_ϕ beinhaltet die diskrete Form der gemischten Ableitung. Alle Koeffizienten sind abhängig von den Metrikkoeffizienten und damit indirekt auch von der Lösung selbst. Für den zweidimensionalen Fall lautet die Gleichung (3.12):

$$-a_p\phi_{i,j} + a_e\phi_{i+1,j} + a_w\phi_{i-1,j} + a_n\phi_{i,j+1} + a_s\phi_{i,j-1} + S_\phi = 0 . \quad (3.13)$$

Hierbei bezeichnen die Indizes w, s, e und n die West-, Süd-, Ost- und Nordseite des Punktes P . Die Koeffizienten a_p, a_e, a_w, a_s und a_n bzw. der Term der gemischten Ableitungen S_ϕ werden wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned}
a_e &= \alpha^{11} + 0.5\alpha^{11}h [(1 - C_{upw})P_1 + C_{upw}(P_1 + |P_1|)] , \\
a_w &= \alpha^{11} - 0.5\alpha^{11}h [(1 - C_{upw})P_1 + C_{upw}(P_1 - |P_1|)] , \\
a_n &= \alpha^{22} + 0.5\alpha^{22}h [(1 - C_{upw})P_2 + C_{upw}(P_2 + |P_2|)] , \\
a_s &= \alpha^{22} - 0.5\alpha^{22}h [(1 - C_{upw})P_2 + C_{upw}(P_2 - |P_2|)] , \\
a_p &= a_e + a_w + a_n + a_s , \\
S_\phi &= -.5\alpha^{12}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}) .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Bei der finiten Approximation wird die ursprüngliche Approximationsgleichung mit h^2 multipliziert. P_1 und P_2 sind die Kontrollfunktionen des Gitterpunktes P . Der Koeffizient für das Approximationsschema C_{upw} kann einen beliebigen Wert zwischen 0 und 1 annehmen. Setzt man $C_{upw} = 1$, wird die UPWIND-Approximation verwendet, mit $C_{upw} = 0$ wird die zentrale Differenzenformel benutzt. Für $0 < C_{upw} < 1$ ergibt sich ein gemischtes Schema.

Gleichung (3.12) lässt sich für alle Punkte des Rechengebietes angeben, wobei das resultierende Gleichungssystem in Matrixschreibweise $AX = B$ lautet. Hier bezeichnet A die zugeordnete Koeffizientenmatrix und B die rechte Seite. X ist der Lösungsvektor, der die gesuchten kartesischen Koordinaten bzw. Kontrollfunktionen enthält. Das algebraische Gleichungssystem wird üblicherweise iterativ gelöst. Dazu wird hier das SOR-Verfahren betrachtet, das durch folgenden Algorithmus beschrieben wird:

$$a_p\phi_p^{n+1} = \omega \left(\sum_{nb=1}^q a_{nb}\phi_{nb}^{n+1} + \sum_{nb=q+1}^N a_{nb}\phi_{nb}^n + S(\phi) \right) + (1 - \omega)a_p\phi_p^n , \tag{3.15}$$

wobei das Superskript n die Iterationsstufe des SOR-Verfahrens bezeichnet und ω der Relaxationsfaktor ist. Für $\omega = 1$ erhält man das Gauß-Seidel-Verfahren.

3.1.4 Effektive Behandlung der Randbedingungen

Die Lösung der biharmonischen Gleichungen ist empfindlich gegenüber den verwendeten Randbedingungen, was zu einer schlechten Stabilität und langsamen Konvergenz führen kann. Deswegen wurden spezielle Verfahren mit der Intention entwickelt, die aus den Randbedingungen resultierenden Einschränkungen zu überwinden. So haben Brandt und Dym (1994) z.B. vorgeschlagen, einige zusätzliche Iterationen im randnahen Bereich hinzuzufügen. Bei dem Verfahren von Linden (1984) wird eine gleichzeitige Relaxation für die Randbedingung mit einem benachbarten inneren Punkt verlangt. Beide Verfahren haben sich als effektive Techniken zur Behandlung der Randbedingung erwiesen.

Im Verfahren von Linden werden die Kontrollfunktionen \underline{P} der Randgitterschicht mit den Koordinaten \underline{x} und den Kontrollfunktionen \underline{P} der randnächsten Gitterpunkte zu einem algebraischen Gleichungssystem zusammengefasst, das im zweidimensionalen Fall wie folgt lautet:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & a_{46} \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{B+1} \\ x_2^{B+1} \\ P_1^{B+1} \\ P_2^{B+1} \\ P_1^B \\ P_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Dabei werden nur P_i^B , x_i^{B+1} und P_i^{B+1} als Unbekannte betrachtet, während die übrigen Abhängigkeiten von \underline{x} und \underline{P} auf die rechte Seite geschrieben und explizit behandelt werden. Wird das Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens gelöst, muss wegen der starken Änderung des Wertes bei den ersten Iterationen unterrelaxiert werden:

$$\underline{x} = \underline{x}^{old} + \omega_1(\underline{x}^* - \underline{x}^{old}), \quad \underline{P} = \underline{P}^{old} + \omega_2(\underline{P}^* - \underline{P}^{old}).$$

Die Ermittlung der Koordinaten \underline{x} erfolgt schließlich in einem iterativen Prozess:

- (1) Startnetz aus algebraischem Verfahren;
- (2) Start-Kontrollfunktionen aus algebraischem Netz;
- (3) Berechnung der Kontrollfunktionen P_i^B am Rand mit Kontrollfunktionen P_i und Koordinaten x_i der ersten randnächsten Gitterpunkte mit dem Verfahren von Linden;
- (4) Glättung des inneren Gebiets nach Gleichung (3.15);
- (5) Iteration von (3) bis (4) bis zur Konvergenz.

Prinzipiell kann ein Netz mit dem in den vorigen Abschnitten beschriebenen Verfahren blockweise erzeugt und geglättet werden. Im allgemeinen ist die Glättung sehr zeitaufwendig, besonders für komplexe dreidimensionale Konfigurationen mit großer Gitterpunktzahl. Die Konvergenzgeschwindigkeit kann jedoch durch ein Mehrgitterverfahren erhöht werden, das im Kapitel 4 dargestellt ist.

3.1.5 Globalglättung über Blockgrenzen

Um komplexe Körper wie z.B. komplette Flugzeuge mit einem strukturierten Gitter vernetzen zu können, benötigt man eine Aufteilung der Körperoberfläche und des umgebenden Raumes in Blöcke, die untereinander auch unstrukturiert angeordnet werden können. Im Inneren jedes einzelnen Blockes wird ein strukturiertes Netz erzeugt, wobei die meisten Gittergeneratoren algebraische Verfahren verwenden. Zur Strömungssimulation ist es vorteilhaft, diese algebraischen Netze im Hinblick auf eine optimale Lösungsqualität zu glätten. Im allgemeinen ist der Übergang der Gitterlinien über Blockgrenzen nicht glatt. Die Gitterpunkte auf den Blockgrenzflächen zwischen benachbarten Blöcken sollen daher mit den Gitterpunkten im Blockinneren zusammen geglättet werden. Dazu muss der Glättungsalgorithmus entsprechend erweitert werden, wobei die Indizes der benachbarten Gitterpunkte in den angrenzenden Blöcken benötigt werden.

3.1.6 Datenstruktur und Datenzugriff

Die Gitterpunkte sind innerhalb der einzelnen Gitterblöcke strukturiert angeordnet. Für die unstrukturierte Blockverbindung ist jedoch eine über die strukturierte Speicherung hinausgehende Datenstruktur und ein auf Indexzeigern basierender Datenzugriff erforderlich. Der strukturierte Anteil der Daten wird nach Rechenkoordinaten (I, J, K) für jeden Gitterblock M auf einer Gitterstufe L strukturiert gespeichert. Die Indizierung eines Gitterpunktes ist in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

| Laufindex | Bedeutung | Obergrenze | |
|-----------|------------------|------------|-------------------------|
| L | Gitterstufe | NG | Anzahl der Gitterstufen |
| M | Gitterblock | NB | Anzahl der Gitterblöcke |
| I | Rechenkoordinate | NI | Dimension in I-Richtung |
| J | Rechenkoordinate | NJ | Dimension in J-Richtung |
| K | Rechenkoordinate | NK | Dimension in K-Richtung |

Tabelle 3.1: Indizierung des strukturierten Anteils des Datenfeldes im Gittergenerator

Die fünfdimensionale Indizierung (I, J, K, L, M) wird entsprechend der Speicheradresse im Gitterprogramm einem eindimensionalen Laufindex IJK zugeordnet. Die Gitterpunkte auf den Blockgrenzflächen, die dieselben Koordinaten aber unterschiedliche Indizes aufweisen, werden als *Gitterpunkt-paar* definiert. Als Beispiel ist eine K-Fläche im zweidimensionalen Fall mit spezieller Orientierung in Abbildung (3.3) dargestellt. Der Gitterpunkt F mit den Indizes (I1, J1, K1, N1, M1) und der Gitterpunkt G mit den Indizes (I2, J2, K2, N2, M2) bilden dabei ein Gitterpunkt-paar.

Wenn man die Gitterpunkte F und G wie die Gitterpunkte A, E, I im Gebietsinneren glätten möchte, benötigt man die Indizes der umgebenden Punkte A, B, C, D, E, H, I, J, K, L. Sofern sie bekannt sind, können die ersten, zweiten und die gemischten Ableitungen berechnet werden. Setzt man die Abteilungen, die Koordinaten und Kontrollfunktionen der umgebenden Gitterpunkte mit bekannten Indizes in die Gleichungen (2.11-2.12) ein, erhält man Gleichung (3.12). Mit Glättung nach (3.15) ergeben sich neue Koordinaten \underline{x}_F . Da die Gitterpunkte G und F dieselbe Position haben, setzt man $\underline{x}_G = \underline{x}_F$.

Zur Identifikation der Gitterpunkte auf den benachbarten Blockgrenzflächen wird ein fünfdimensionales Feld *Paarindex*(2, I1, I2, N, M) eingeführt. Hierin ist N die Nummer der Seite im Block M. I1 und I2 sind die lokalen Koordinaten auf der Blockfläche. Die Bedeutung der Seitennummer N sowie die Definition der lokalen Koordinaten I1 und I2 sind in der folgenden Tabelle 3.2 dargestellt.

Der Index (I1, I2, N, M) bezeichnet den Gitterpunkt mit den lokalen Koordinaten I1 und I2 auf der Blockfläche N von Block M (z.B. Gitterpunkt F in Abbildung 3.3). Im *Paarindex*(1, I1, I2, N, M) wird dann der Index des Gitterpunkts G auf der benachbarten Blockfläche gespeichert, während im *Paarindex*(2, I1, I2, N, M) der Index des Gitter-

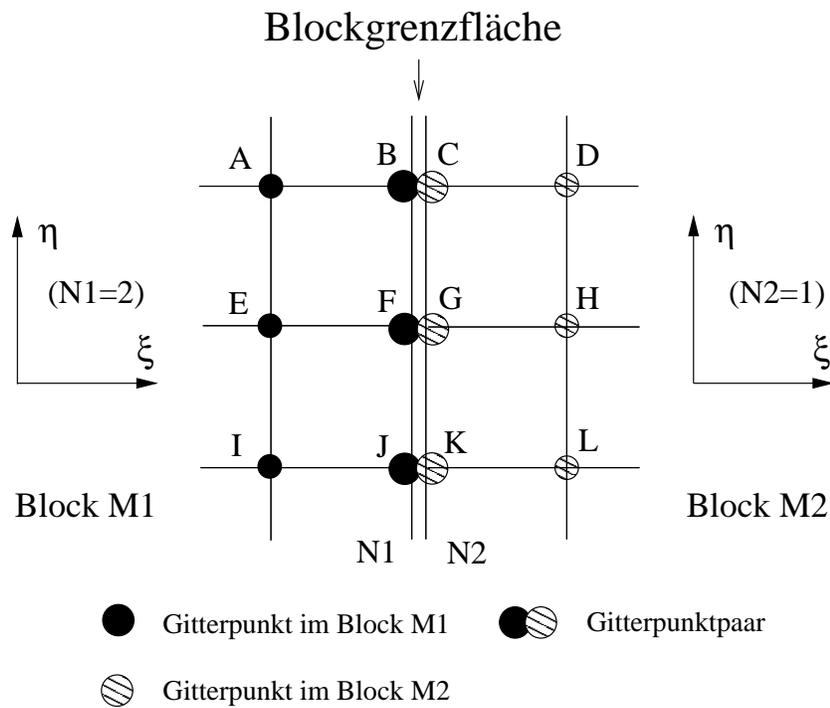


Abbildung 3.3: Gitterpunkte auf den benachbarten Blockgrenzflächen

| N | I1 | I2 | Dimension von I1 | Dimension von I2 |
|---|----|----|------------------|------------------|
| 1 | J | K | $NJ(NG, M)$ | $NK(NG, M)$ |
| 2 | J | K | $NJ(NG, M)$ | $NK(NG, M)$ |
| 3 | K | I | $NK(NG, M)$ | $NI(NG, M)$ |
| 4 | K | I | $NK(NG, M)$ | $NI(NG, M)$ |
| 5 | I | J | $NI(NG, M)$ | $NJ(NG, M)$ |
| 6 | I | J | $NI(NG, M)$ | $NJ(NG, M)$ |

Tabelle 3.2: Abhängigkeit der lokalen Koordinaten I1 und I2 von Fläche N

punkts H, also des zu G benachbarten Gitterpunkts, gespeichert ist.

Aus Abbildung (3.3) geht die Berechnung der Indizes hervor. Die Orientierung der Laufindizes IJKF und IJKG für die Gitterpunkte F und G können aus den jeweiligen Indizes berechnet werden. Dann wird der Laufindex IJKH des umgebenen Gitterpunktes H wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
N2 = 1 & \rightarrow IJKH = IJKG + 1 \\
N2 = 2 & \rightarrow IJKH = IJKG - 1 \\
N2 = 3 & \rightarrow IJKH = IJKG + NI(NG, M2) \\
N2 = 4 & \rightarrow IJKH = IJKG - NI(NG, M2) \\
N2 = 5 & \rightarrow IJKH = IJKG + NI(NG, M2)*NJ(NG, M2) \\
N2 = 6 & \rightarrow IJKH = IJKG - NI(NG, M2)*NJ(NG, M2)
\end{aligned}$$

Sofern IJKG und IJKH bekannt sind, werden sie im Datenfeld *Paarindex* gespeichert:

$$Paarindex(1, I1, I2, N1, M1) = IJKG, \quad Paarindex(2, I1, I2, N1, M1) = IJKH.$$

Hierbei sind I1 und I2 bezüglich N1 des Blocks M1 bekannt. Der Gitterpunkt F bildet ein Gitterpunktpaar mit G. Gitterpunkt E ist der benachbarte Gitterpunkt von G, dessen Index durch

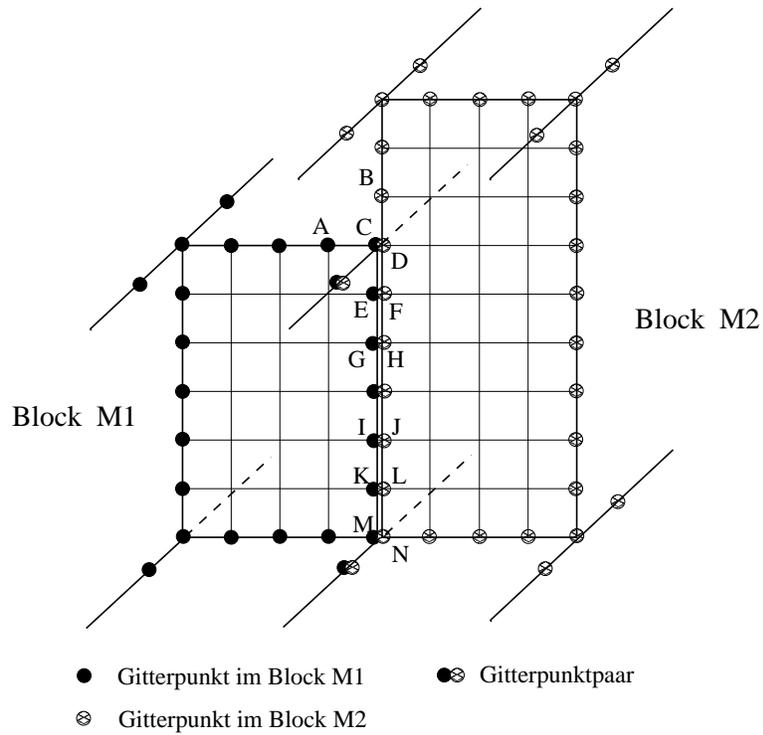
$$\begin{aligned}
N1 = 1 & \rightarrow IJKE = IJKF + 1 \\
N1 = 2 & \rightarrow IJKE = IJKF - 1 \\
N1 = 3 & \rightarrow IJKE = IJKF + NI(NG, M1) \\
N1 = 4 & \rightarrow IJKE = IJKF - NI(NG, M1) \\
N1 = 5 & \rightarrow IJKE = IJKF + NI(NG, M1)*NJ(NG, M1) \\
N1 = 6 & \rightarrow IJKE = IJKF - NI(NG, M1)*NJ(NG, M1)
\end{aligned}$$

bestimmt wird. Die beiden Laufindizes IJKF und IJKE werden auch im Datenfeld *Paarindex* gespeichert:

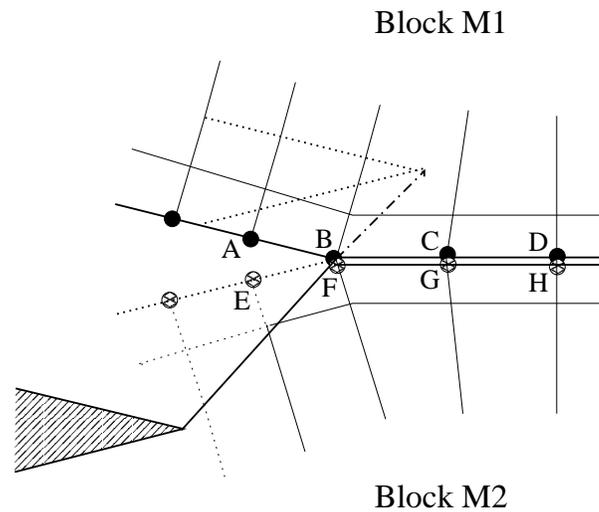
$$Paarindex(1, I1, I2, N2, M2) = IJKF, \quad Paarindex(2, I1, I2, N2, M2) = IJKE .$$

Nicht alle Gitterpunktpaare gehören zu Gitterpunkten auf den Blockgrenzflächen, die mit benachbarten Gitterpunkten zusammen geglättet werden sollen. Wie in Abbildung (3.4) zu sehen ist, sind C und D in Abbildung (3.4a) bzw. B und F in Abbildung (3.4b) zwar Gitterpunktpaare, ihre Position ist aber festgelegt.

Die Glättung über Blockgrenzen wird nur auf dem feinsten Gitter durchgeführt. Weil für jede Blockfläche (N, M) die zur Glättung über Blockgrenzen benötigten Indizes der benachbarten Gitterpunkte schon bekannt sind, kann die Glättung auf den Blockgrenzen wie im Inneren behandelt werden. Sofern sich \underline{x} und \underline{P} an einem Punkt ändern, müssen sie dem anderen Punkt des Gitterpunktpaars übergeben werden. Damit ist sichergestellt, dass beide Gitterpunkte dieselben Koordinaten besitzen.



(a)



(b)

Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der Gitterpunktpaare

3.2 Strömungssimulation

Zur Strömungssimulation werden die von Rung u. a. (1999) und Xue (1998) entwickelten zweidimensionalen und dreidimensionalen Finite-Volumen Navier-Stokes Verfahren eingesetzt. Beide benutzen einen Algorithmus, der auf der streng konservativen Formulierung der Grundgleichungen für primitive Variablen in Bezug auf allgemein-krummlinige Koordinaten basiert. Zur effizienten Erfassung komplexer Geometrien wird das Integrationsgebiet durch ein blockstrukturiertes Rechengitter diskretisiert, dessen Verbindungsflächen unstrukturiert sein können.

Die in den Integro-Differentialgleichungen auftretenden Integrale werden durch die von zweiter Ordnung genaue Mittelpunkregel angenähert. Zur Approximation konvektiver Terme werden die Variablenwerte in den Flächenschwerpunkten durch stromauf gerichtete, monotone TVD-Ansätze (Harten 1983) interpoliert. Diese sind von maximal dritter Genauigkeitsordnung und ermöglichen eine oszillationsfreie Darstellung der für hohe Reynoldszahlen dominanten konvektiven Prozesse bei gleichzeitiger Beachtung ihrer physikalischen Orientierung. Aus Stabilitätsgründen stützt sich die Implementierung der TVD-Approximation auf die *deferred-correction* Technik (Lien und Leschziner 1994c). Die Untersuchungen von Lilek und Perić (1995) belegen, dass die hybride Approximationstechnik einen optimalen Kompromiss zwischen Effizienz und Genauigkeit darstellt.

Das Verfahren benutzt eine voll implizite zeitliche Integration zweiter Ordnung. Die Bestimmung eines Druckfeldes, das verträglich mit der Kontinuitätsgleichung ist, basiert auf einem kompressiblen Druckkorrekturalgorithmus (Demirdžić u. a. 1993). Alle Strömungsgrößen sind in den Zellzentren gespeichert. Die enge Kopplung von Druck, Geschwindigkeit und Reynoldsspannungen wird durch eine verallgemeinerte Rhie & Chow Interpolation (Rhie und Chow 1983) auf Grundlage des *apparent-pressure / apparent-viscosity* Prinzips (Obi u. a. 1991) sichergestellt.

Die Flamelet-Bibliotheken werden durch die in dem CFD-Code implementierte modifizierte Version des Programms RIF (Representative Interactive Flamelets) bestimmt, das vom Institut für Technische Mechanik, RWTH Aachen zur Verfügung gestellt wurde (Peters 2000).

3.2.1 Finite Approximation der Bilanzgleichungen

Die Finite-Volumen-Approximation wird anhand einer allgemeinen Bilanzgleichung für eine generische Größe ϕ durchgeführt:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \phi) - \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) = S_\phi. \quad (3.17)$$

Hierin kennzeichnet Γ_ϕ den Diffusionskoeffizienten für die Größe ϕ . Die Quellterme und diejenigen Terme der Bilanzgleichung, die nicht durch den Gradientenfluß $-\nabla \cdot \Gamma_\phi \nabla \phi$ dargestellt werden können, sind in S_ϕ zusammengefasst.

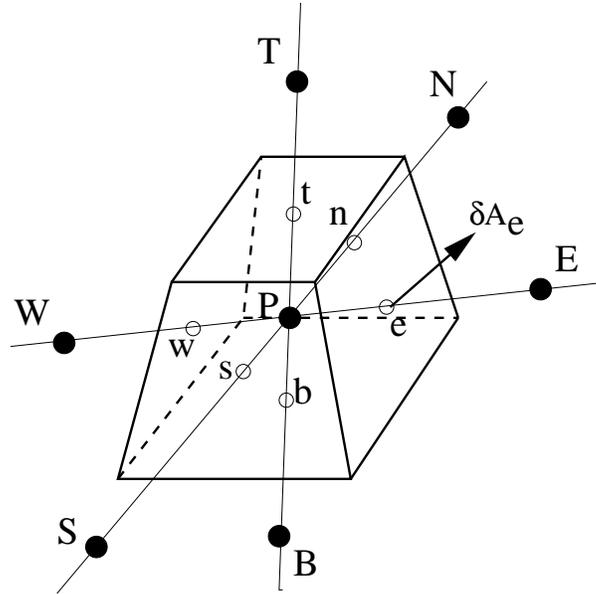


Abbildung 3.5: Bilanzvolumen und Kontrollvolumenflächen eines strukturierten Gitters, w: west; e: east; s: south; n: north, b: bottom, t: top

Für ein Kontrollvolumen, wie in Abbildung 3.5 skizziert, führt die numerische Approximation auf ein algebraisches Gleichungssystem für die Variable ϕ^P :

$$A_P^P \phi^P - \sum_f A_{Nf} \phi^{Nf} = S^P. \quad (3.18)$$

Hierin bezeichnen hochgestellte Indizes den Ort, an dem die Größe ausgewertet werden soll und der untere Index der Koeffizienten markiert die Fläche, an der die Bilanz ausgeführt werden soll. Die Koeffizientenmatrix enthält die Hauptdiagonale A_P und die Nebendiagonalen $-A_{Nf}$. Da die Variablen nur an den Volumenzentren vorhanden sind, muss das Diskretisierungsschema die Werte auf den Flächen der Kontrollvolumen mit den Werten in den Volumenzentren in Verbindung setzen. In S_ϕ^P sind neben dem ursprünglichen Quellterm alle Anteile aus Diffusion und Konvektion enthalten, die explizit behandelt werden.

Auf das Diskretisierungsschema wird nachfolgend genauer eingegangen, so dass hier der Index Nf , siehe Tabelle 3.3, die Beziehung zwischen dem Wert auf der Oberfläche und dem benachbarten Volumenzentrum veranschaulicht.

| | | | | | | |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| f | w | e | s | n | b | t |
| Nf | W | E | S | N | B | T |

Tabelle 3.3: Zuordnung der Flächenwerte zu Volumenzentren

Die Berechnung der Koeffizienten ergibt sich aus der Integration der Transportgleichung (3.17) unter Berücksichtigung des Integralsatzes von Gauß:

$$\int_{\delta V} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \int_{\delta A} (\rho \underline{u} \phi - \Gamma \nabla \phi) \cdot d\underline{A} = S_\phi, \quad (3.19)$$

wobei δA die Oberfläche des Volumens bezeichnet und $d\underline{A}$ das aus dem Volumen herauszeigende Flächenelement der Oberfläche ist. Führt man die Integration für ein Kontrollvolumen mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus, wird nur ein Punkt im Volumen bzw. auf den Flächen benötigt:

$$\left(\delta V \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)^P + \sum_f \underline{\delta A}^f \cdot (\rho \underline{u} \phi - \Gamma \nabla \phi)^f = S_\phi^P. \quad (3.20)$$

Die Summation muss über alle Teiloberflächen des Kontrollvolumens um P erfolgen. δV gibt den Volumeninhalt des Kontrollvolumens an und $\underline{\delta A}$ ist der nach außen gerichtete Flächenvektor der Teiloberfläche f . Mit der diskreten Form der Massenbilanz, d.h. $\phi = 1$, $q = 0$ und $\Gamma = 0$:

$$\left(\delta V \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^P + \sum_f F_m^f = 0, \quad (3.21)$$

in der der Massenfluß durch $F_m = \underline{\delta A} \cdot \rho \underline{u}$ definiert ist, lautet die diskrete Transportgleichung ϕ wie folgt:

$$\left(\delta V \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^P + \sum_f F^f \phi^P + \sum_f F^f \phi^f - \sum_f [\underline{\delta A} \cdot (\Gamma \nabla \phi)]^f = S_\phi^P. \quad (3.22)$$

Der in der Impulsbilanz enthaltene Reynoldssche Spannungsterm hängt in starkem Maße von den Geschwindigkeitsgradienten ab. Die lineare Abhängigkeit zwischen Reynoldsspannungen und Geschwindigkeitsgradienten werden nach der Mischungsweghypothese mit dem molekularen Spannungsterm zusammengefasst:

$$\underline{\underline{\pi}}_g = -p_g \underline{\underline{I}} + \mu_g \underline{\underline{S}} - \frac{2}{3} \mu_g (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}_{tn}, \quad \mu_g = \mu + \mu_t, \quad p_g = p + \frac{2}{3} \rho k,$$

wobei $\underline{\underline{\tau}}_{tn}$ den nichtlinearen Anteil der Reynoldsspannungen aus dem EASM bezeichnet. Bei der Umsetzung der Reynoldsschen Gleichungen wird der Term $\mu_g \nabla \underline{u}$ implizit behandelt. Alle anderen Terme werden explizit bestimmt und kommen auf die rechte Seite der Gleichung. Bei der Bilanzierung eines Kontrollvolumens lautet der explizite Teil:

$$-\underline{\delta A} \left[p_g + \frac{2}{3} \mu_g (\nabla \cdot \underline{u}) \right]^f - \underline{\delta A} \cdot \left(\mu \nabla^T \underline{u} + \underline{\underline{\tau}}_{tn} \right)^f.$$

Für die zu lösenden strömungsmechanischen Bilanzgleichungen müssen auf den Berandungen des Rechengebiets Randbedingungen vorgegeben werden. Da es sich bei dem Finite-Volumen-Verfahren um die Lösung von Integro-Differentialgleichungen handelt, wird die Flächenintegration dieser Gleichungen an Randflächen durchgeführt und an den randnächsten Bilanzvolumen teils implizit, teils explizit berücksichtigt.

3.2.2 Modifizierte Behandlung der Wandrandbedingungen

Bei stark schiefwinkligem Gitterlinienverlauf kann die Implementierung der Wandrandbedingungen die Lösungsqualität des Gesamtverfahrens erheblich beeinflussen. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb ein Konzept weiter entwickelt, das bei stark schiefwinkligem Gitterlinienverlauf verwendet werden kann.

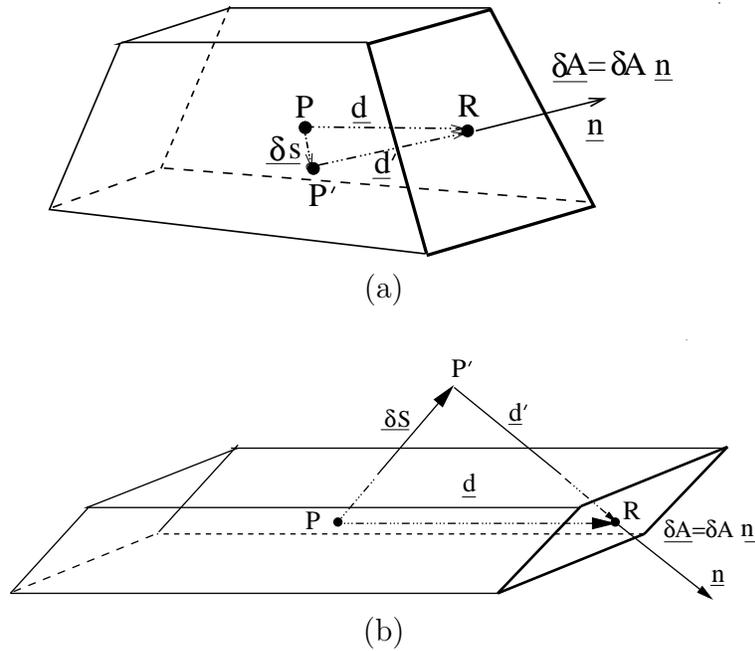


Abbildung 3.6: Veranschaulichung eines Kontrollvolumens mit physikalischer Rändfläche R

Um eine genaue Approximation an der Wand zu erreichen, wird zunächst die Geschwindigkeit an einem Punkt P' berechnet, der sich im Abstand l_n senkrecht über dem Zentrum der Rändfläche R befindet, wie Abbildung 3.6a zeigt. Der Abstandsvektor \underline{d}' ist die Projektion des Abstandsvektor \underline{d} in Flächennormalenrichtung:

$$\underline{d}' = l_n \underline{n}, \quad l_n = \underline{d} \cdot \underline{n}.$$

Der Abstandsvektor vom Finite-Volumen-Zentrum zum Punkt P' wird mit $\underline{\delta s}$ bezeichnet und ist Null bei rechtwinkligen Gittern:

$$\underline{\delta s} = \underline{d} - \underline{d}'.$$

Die Geschwindigkeit am Punkt P' wird mit explizit berechneten Geschwindigkeitsgradienten bestimmt:

$$\underline{u}^{P'} = \underline{u}^P + \underline{\delta s} \cdot (\nabla \underline{u})^P. \quad (3.23)$$

An der Wand gilt als physikalische Randbedingung der Impulsgleichungen die Wandhaftbedingung $\underline{u} = 0$. Damit lässt sich die von der Wand auf das Finite-Volumen wirkende Flächenkraft durch

$$\underline{\delta A} \cdot \underline{\tau}_g = -p \underline{\delta A} + \mu_g \delta A \frac{\partial \underline{u}_s}{\partial n} \approx -p^R \underline{\delta A} - \frac{\mu_g \delta A}{l_n} \underline{u}_s^{P'} \quad (3.24)$$

berechnen. Mit \underline{u}_s wird die Komponente des Geschwindigkeitsvektors parallel zur Wand bezeichnet.

Diese Behandlung ergibt einen relativ großen Fehler bei stark schiefwinkligem Gitterlinienverlauf an der Wand. Wie in Abbildung 3.6b zu erkennen ist, kann der Punkt P' weit außerhalb des Volumens liegen. Günstig ist es, hier im Rahmen eines Kompromisses zwischen Genauigkeit und Stabilität eine modifizierte Variante zu nutzen. Bei solch stark schiefwinkligem Gitterlinienverlauf an der Wand wird die Flächenkraft direkt mit der Geschwindigkeit des FV-Zentrums durch

$$\underline{\delta A} \cdot \underline{\tau}_g = -p \underline{\delta A} + \mu_g \delta A \frac{\partial \underline{u}_s}{\partial n} \approx -p^R \underline{\delta A} - \frac{\mu_g \delta A}{l_n} \underline{u}_s^P \quad (3.25)$$

gebildet. Er ergibt sich aus der Differenz zwischen der Gesamtgeschwindigkeit \underline{u} und dem zur Wand senkrecht stehenden Teil des Geschwindigkeitsvektors \underline{u}_n :

$$\underline{u}_n = u_n \underline{n} = (\underline{u} \cdot \underline{n}) \underline{n} . \quad (3.26)$$

Der wandparallele Anteil der Geschwindigkeit am Punkt P ist:

$$\underline{u}_s^P = \underline{u}^P - (\underline{u}^P \cdot \underline{n}) \underline{n} . \quad (3.27)$$

Die Flächenkraftkomponente der Impulsgleichung für die Geschwindigkeitskomponente u_α ist dann mit $C_w = \delta A \mu_g / l_n$ gegeben:

$$-p^R \delta A_\alpha - \underbrace{C_w (1 - n_\alpha^2) u_\alpha^P}_{Term1} - \underbrace{p^R \delta A_\alpha + C_w n_\alpha (b_\beta u_\beta^P + n_\gamma u_\gamma^P)}_{Term2} . \quad (3.28)$$

Für die zyklisch laufenden Indizes α , β und γ gilt keine Summationskonvention. *Term1* mit u_α^P wird implizit und *Term2* explizit behandelt. Bei einer laminaren Strömung ist die Gesamtviskosität μ_g gleich der dynamischen Viskosität μ des Fluids, während bei turbulenter Strömung folgende Fallunterscheidung gilt:

- (a) Das wandnächste Finite-Volumen-Zentrum P befindet sich außerhalb der zähen Unterschicht. Hier wird das logarithmische Wandgesetz (High-Re Hypothese)

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log_e Y^+ + B , \quad Y^+ = \frac{l_n u_\tau}{\mu} , \quad \kappa = 0.41 , \quad B = 5.0 , \quad (3.29)$$

herangezogen und daraus eine Beziehung zwischen der Gesamtviskosität μ_g und der turbulenten kinetischen Energie k hergeleitet:

$$\mu_g = \frac{k \rho l_n \mu_\tau}{\log_e(\beta Y^+)} \quad \text{mit} \quad u_\tau = C_\mu^{1/4} \sqrt{k} , \quad \beta = \exp(\kappa B) . \quad (3.30)$$

Diese Beziehung gilt für $Y^+ > 11$.

- (b) Das wandnächste Finite-Volumen-Zentrum P befindet sich in der zähen Unterschicht mit $Y^+ < 11$:

$$\mu_g = \mu . \quad (3.31)$$

An der Wand sind die turbulente kinetische Energie k und ihr Gradient senkrecht zur Wand Null, so dass die Konvektion und die Flächenintegration über den Diffusionsterm keinen Beitrag liefern. Bei der turbulenten Dissipationsrate ϵ bzw. der spezifischen Dissipationsrate ω wird für das wandnächste (wn) Finite-Volumen keine Bilanzgleichung gelöst. Vielmehr werden dort die Werte von ϵ_{wn} in Abhängigkeit vom Wandnormallenabstand l_n und der lokalen turbulenten kinetischen Energie k_{wn} im Finiten-Volumen direkt vorgegeben:

$$\epsilon_{wn} = \frac{k_{wn}^{3/2}}{\kappa C_\mu^{-3/4} l_n} . \quad (3.32)$$

Diese Werte lassen sich durch

$$\epsilon_{wn} = \frac{2\nu k_{wn}}{l_n^2} \quad (3.33)$$

bestimmen, wenn sich die wandnächste Gitterzelle innerhalb der zähen Unterschicht befindet.

Beide o.a. Randbedingungstechniken sind nicht universell einsetzbar, weil sie bestimmte Strömungsverhältnisse in den wandnahen Gitterschichten voraussetzen. Insbesondere muss bei der Gittergenerierung die Dicke der sich ausbildenden semi-viskosen Strömungsbereiche betrachtet werden, worin der entscheidende Nachteil beider Methoden besteht. Die Ausdehnung der Wandturbulenz hängt nicht nur von dem zu simulierenden Strömungsfeld ab, sondern variiert erfahrungsgemäß auch stark entlang von Körperkonturen. Nahezu diskontinuierliche Variationen können z.B. durch Stoß/Grenzschicht Wechselwirkungen auftreten. Eine lokale Verletzung des Gültigkeitsbereichs der verwendeten Randbedingung kann mit erheblichen globalen Nachteilen für die Stabilität und Qualität der Simulation verbunden sein. Ferner ist mit starken Einschränkungen bei der Verwendung von Mehrgittertechniken, deren Gitter teilweise stark unterschiedliche Auflösungsvermögen besitzen, zu rechnen. Eine adaptive Randbedingung für die gemeinsame Behandlung von Low- und High-Re Bereichen wurde von Rung (1999) entwickelt und wird hier bei der Strömungssimulation verwendet.

Kapitel 4

Grundlage des Mehrgitterverfahrens

Als eine allgemeine Methode für die Beschleunigung iterativer Lösungsverfahren wurden Mehrgitterverfahren schon auf eine ganze Reihe praktisch relevanter Probleme angewandt, so etwa die elliptische Gittergenerierung sowie die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen oder der Euler Gleichungen. In Rahmen dieser Arbeit konzentriert sich die Darstellung der Methode auf die Anwendung in der Gittergenerierung und Strömungssimulation. Das Prinzip des Mehrgitterverfahrens wird grob skizziert. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf Hackbusch (1985) und Wesseling (1992) verwiesen. Die Mehrgitterkomponenten werden in den folgenden Kapiteln beschrieben.

4.1 Grundprinzip

Die finite Approximation einer beliebigen linearen oder nichtlinearen Differentialgleichung auf einem Gitter, gekennzeichnet mit dem hochgestellten Index h , führt zu einem Gleichungssystem vom Typ

$$L(\phi^h) = f^h , \tag{4.1}$$

wobei L einen Operator darstellt, der alle funktionalen Zusammenhänge der Unbekannten ϕ^h repräsentiert, und f^h ist die von ϕ^h unabhängige rechte Seite des Gleichungssystems. Bei einem nichtlinearen Verfahren ist L von ϕ abhängig. Dieses System wird normalerweise iterativ gelöst. Ausgehend von einer Startschätzung erhält man nach einigen Iteration mit einem Iterationsverfahren eine Näherungslösung $\tilde{\phi}^h$, die das Gleichungssystem (4.1) bis auf ein Residuum R^h erfüllt:

$$L(\tilde{\phi}^h) = f^h + R^h . \tag{4.2}$$

Bezüglich der exakten Lösung ϕ^h ist die Näherungslösung $\tilde{\phi}^h$ mit einem Fehler $\delta\phi^h$ behaftet, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$L(\tilde{\phi}^h + \delta\phi^h) = f^h . \tag{4.3}$$

Subtraktion dieser Gleichung von Gleichung (4.2) liefert die Feingitterfehlergleichung:

$$L(\tilde{\phi}^h + \delta\phi^h) = L(\tilde{\phi}^h) - R^h . \tag{4.4}$$

Wenn L ein linearer Operator ist, vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für $\delta\phi^h$:

$$L(\delta\phi^h) = -R^h . \quad (4.5)$$

Es kann nun festgestellt werden, dass die meisten iterativen Lösungsverfahren in der Lage sind, hochfrequente Fehler, d.h. eine Verteilung des Residuums im Gitter, die sich von einer Gitterzelle zur nächsten stark ändert, sehr schnell zu reduzieren. Es stellt sich dann eine relativ glatte niederfrequente Fehlerverteilung ein, die von den gebräuchlichen iterativen Lösern während des Iterationsprozesses nur langsam reduziert wird. Man spricht deshalb auch von den Glättungseigenschaften eines iterativen Lösern bzw. eines Glätters.

Die Mehrgittermethode macht sich diese Eigenschaft iterativer Löser zunutze. Bei ihr werden Lösungen des Gleichungssystems auf unterschiedlich feinen Gittern bestimmt. Man berechnet zunächst eine Näherung der Lösung auf dem feinsten Gitter. Es stellt sich schnell eine glatte Fehlerverteilung ein. Auf einem gröberen Gitter wird dann die Fehlerverteilung dieser Lösung berechnet. Dies ist aus zweierlei Gründen auf dem groben Gitter einfacher. Zum einen hat eine niederfrequente Fehlerverteilung auf einem feinen Gitter in einem groben Gitter bereits eine höhere Fehlerverteilungsfrequenz. Zum anderen bestehen die korrespondierenden Gleichungssysteme auf dem gröberen Gitter aus sehr viel weniger Unbekannten als auf dem feinen Gitter.

Der Mehrgitter-Berechnungsalgorithmus setzt sich aus folgenden Schritten zusammen:

- (1) Vorglättung: Auf dem Feingitter wird eine Näherungslösung $\tilde{\phi}^h$ durch ν_1 Iterationen erzeugt. Sie hat bezüglich der exakten Lösung ϕ^h des Gleichungssystems einen Fehler:

$$\delta\phi^h = \phi^h - \tilde{\phi}^h . \quad (4.6)$$

Diese Fehlerverteilung kann auf dem Grobgitter, das mit dem hochgestellten Index H gekennzeichnet ist, berechnet werden. Dazu wird das lokale Residuum benötigt, das folgendermaßen definiert ist:

$$R^h = L^h(\tilde{\phi}^h) - f^h . \quad (4.7)$$

- (2) Berechnung der Grobgitterfehlerverteilung: Es gibt zwei Standardverfahren: **FAS** und **CS** (Correction Scheme). Beim nichtlinearen FAS-Verfahren werden die Näherungslösung $\tilde{\phi}^h$ und das Residuum R^h des Feingitters auf das Grobgitter H restringiert. Im folgenden bezeichnet $[I_h^H]$ den Restriktionsoperator für die Gittervariablen, $[\hat{I}_h^H]$ bezeichnet den Restriktionsoperator für das Residuum:

$$\bar{\phi}^H = [I_h^H]\tilde{\phi}^h , \quad R^H = [\hat{I}_h^H]R^h . \quad (4.8)$$

Die Grobgitterlösung $\tilde{\phi}^H$ wird durch

$$L^H(\tilde{\phi}^H) = L^H(\bar{\phi}^H) - [\hat{I}_h^H]R^h \quad (4.9)$$

berechnet, wobei $\bar{\phi}^H$ und $\tilde{\phi}^H$ die Startlösung bzw. die Nährlösung auf dem Grobgitter sind. Daraus wird der Grobgitterfehler bestimmt:

$$\delta\phi^H = \tilde{\phi}^H - \bar{\phi}^H . \quad (4.10)$$

Beim linearen CS-Verfahren kann der Grobgitterfehler direkt berechnet werden durch:

$$L^H(\delta\phi^H) = -[\hat{I}_h^H]R^h . \quad (4.11)$$

- (3) Prolongation der Fehlerverteilung: Nachdem die Fehlerverteilung auf dem Grobgitter bestimmt wurde, kann sie auf das feine Gitter transferiert und damit die Feingitterlösung korrigiert werden:

$$\bar{\phi}^h = \tilde{\phi}^h + [I_H^h]\delta\phi^H . \quad (4.12)$$

Hier bezeichnet $[I_H^h]$ den Prolongationsoperator vom groben auf das feine Gitter.

- (4) Nachglättung: Die so korrigierte Lösung $\bar{\phi}^h$ auf dem feinen Gitter erfüllt im allgemeinen das Gleichungssystem noch nicht, da durch die Prolongation neue Fehler eingebracht werden. Das Residuum ist allerdings hochfrequent und kann daher leicht durch einige zusätzliche Iterationszyklen reduziert werden.

Es sollte erwähnt werden, dass der **Fehler** auch oft als **Korrektur** bezeichnet wird. Im folgenden wird deshalb ebenfalls der Begriff **Korrektur** verwendet.

4.2 Gittervergrößerung und Gittertransfer

In dem hier vorgestellten Ansatz benötigt man ein Verfahren zur Gittervergrößerung, das für die Gitterglättung und die Strömungssimulation in unterschiedlicher Weise gebildet wird. Die bisherigen Betrachtungen sind auch weitgehend unabhängig von der verwendeten Diskretisierungsmethode. Mehrgitterverfahren lassen sich für Finite-Differenzen, Finite-Volumen und Finite-Elemente-Verfahren in nahezu analoger Weise definieren, wobei jedoch insbesondere bei der Interpolation und Restriktion auf die jeweilige Besonderheit der Diskretisierung Rücksicht genommen werden muss. Das Verfahren zur Gittervergrößerung und die Gittertransferoperationen werden im folgenden beispielhaft für die Gittergenerierung und die Strömungssimulation basierend auf Differenzen bzw. Finite-Volumen beschrieben.

4.3 Mehrgitterzyklen

Da die Lösung auf dem Grobgitter normalerweise ebenfalls iterativ bestimmt werden muss, wird das oben beschriebene Verfahren rekursiv angewendet, d.h. die Lösung auf dem Grobgitter kann berechnet werden, indem zunächst eine Näherungslösung bestimmt und diese nach dem gleichen Verfahren mit dem Fehler eines noch größeren Gitters verbessert wird. Wenn auf jeder Gitterebene das Zweigitterverfahren nur einmal angewendet wird, erzeugt es einen sogenannten V-Zyklus. Bei zweimaliger rekursiver Anwendung des Zweigitterverfahrens wird das entstandene Mehrgitterverfahren W-Zyklus genannt. In Abbildung 4.1 sind V- und W-Zyklus schematisch für ein Mehrgitterverfahren mit drei Gitterebenen dargestellt. Im allgemeinen werden jedoch V-Zyklen verwendet, da sie bezüglich der Stabilität ausreichend sind.

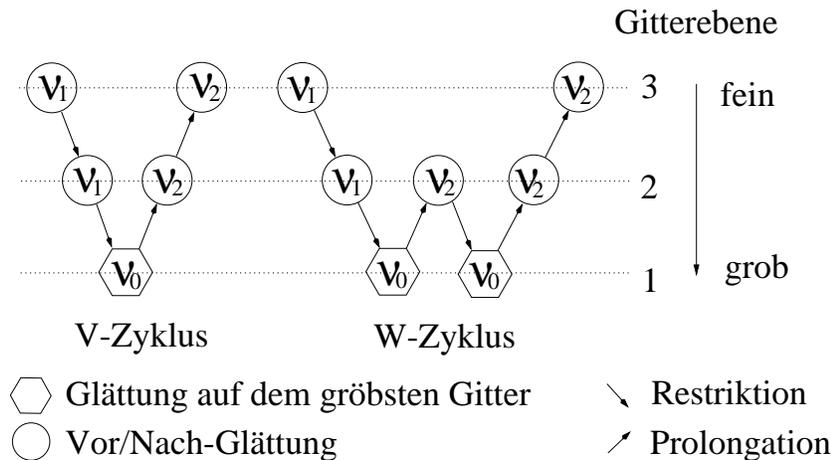


Abbildung 4.1: Schematischer Ablauf eines V-Zyklus und W-Zyklus

In Abbildung 4.1 symbolisiert ein abwärts gerichteter Pfeil den Übergang vom Fein- zum Grobgitter und beinhaltet die Berechnung der Residuen R^h auf dem Feingitter, die Restriktionen und die Berechnung der rechten Seite f^H der Grobgittergleichung. Das Symbol \nearrow verkörpert den Übergang vom Grob- zum Feingitter und beinhaltet die Berechnung des Fehlers auf dem Grobgitter, seine Prolongation und die Lösungskorrektur auf dem Feingitter.

Die Konvergenz des Verfahrens wird verbessert, indem man mehrere Zyklen hintereinander durchführt, d.h. der Zyklus aus Berechnung der Feingitterlösung (Vorglättung), Restriktion, Berechnung der Grobgitterkorrektur, Prolongation und Nachglättung wird mehrfach wiederholt, bis das Residuum auf dem feinsten Gitter eine vorgegebene Grenze unterschreitet.

4.4 FMG-Methode

Zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen wird oft die sogenannte FMG-Methode verwendet. Hier wird bei der Rechnung nicht vom feinsten Gitter ausgegangen und dann auf das Grobgitter restringiert, sondern die Lösung wird zuerst auf dem größten Gitter ermittelt. Durch Prolongation der Grobgitterlösung ergibt sich dann eine möglichst gute Startlösung für das nächst feinere Gitter. Dort bestimmt man eine Näherungslösung und überträgt diese gemeinsam mit dem Residuum zurück auf das grobe Gitter. Das Ergebnis einer Grobgitterkorrektur wird nun auf das feine Gitter prolongiert, um die Feingitterlösung zu korrigieren. Dieser Algorithmus ist rekursiv. Man beginnt auf dem größten Gitter und berechnet dann sukzessive mit FAS oder CS die Lösung auf mehreren Gitterebenen bis die Lösung auf dem feinsten Gitter gefunden wird. Für ein FMG-Verfahren mit vier Gitterebenen und V-Zyklen ergibt sich das in Abbildung 4.2 gezeigte Flussdiagramm. Da die FMG-Methode algorithmisch leicht implementiert werden kann, wird sie häufig eingesetzt.

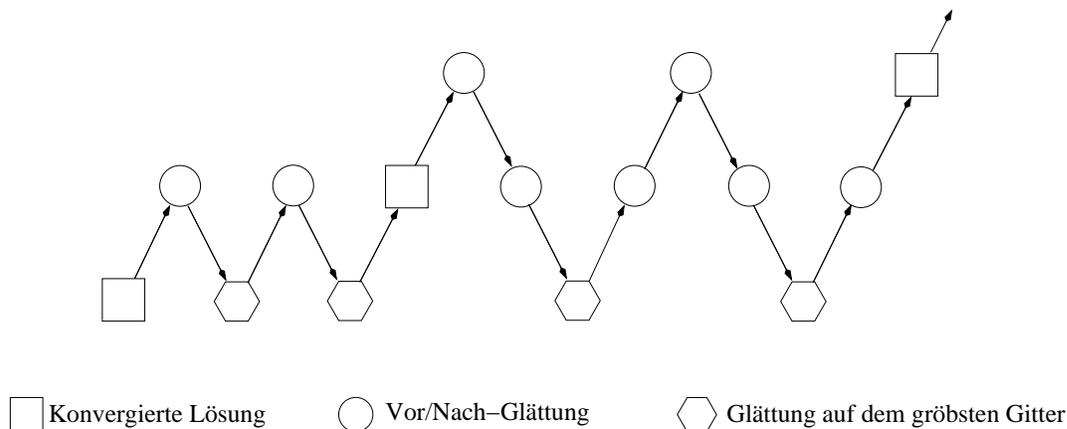


Abbildung 4.2: Schematischer Ablauf eines Full Multigrid-Verfahrens

Bei der Zyklenwahl muss noch festgelegt werden, wie viel Vor- und Nachglättungen durchgeführt werden sollen.

Startlösung

Beim FAS-Algorithmus wird die Restriktion der Näherungslösung $\tilde{\phi}^h$ auf dem feinen Gitter als Startlösung $\bar{\phi}^H$ auf dem groben Gitter benutzt. Im Prinzip gibt es mehrere Möglichkeiten, die Startlösung $\bar{\phi}^H$ zu wählen. Als eine Alternative kann z.B. die Näherungslösung des letzten Zyklus auf dem Grobgitter als Startlösung $\bar{\phi}^H$ verwendet und der rechteitige Term $L(\bar{\phi}^H)$ in Gleichung (4.9) daraus berechnet werden. Dieses Konzept führt zu einem modifizierten Mehrgitterverfahren für die Navier-Stokes Gleichungen, welches im Kapitel 6 näher beschrieben wird.

Kapitel 5

Gittergenerierung und Glättung mit Mehrgitterverfahren

Dieses Kapitel befasst sich mit der Gittergenerierung und der Glättung mit dem Mehrgitterverfahren. Das Prinzip des Mehrgitterverfahrens in der Gittergenerierung wurden schon von Stüben und Linden (1984) angegeben. Obwohl in der Vergangenheit Mehrgitterverfahren erfolgreich zur Lösung elliptischer Gleichungen angewendet wurden, sind nur wenige Anwendungen in der Gitterglättung zu finden. Diese betreffen meistens einfache Konfigurationen (Jain 1986; Spitaleri 1990; Spitaleri 1991). Hier wurde nur der nicht-lineare FAS-Algorithmus verwendet, für den linearen CS-Algorithmus findet man keine Anwendung. Im Rahmen einer Fortführung des aktuellen Kenntnisstandes wird in dieser Arbeit nicht nur FAS sondern auch CS zur Gitterglättung verwendet. Die Glättung basiert auf dem Verfahren mittels biharmonischen Gleichungen, das hier entwickelt wurde. Das Verhalten der beiden Algorithmen wird mit V- und W-Zyklus untersucht.

In diesem Kapitel werden zunächst die Komponenten des Mehrgitterverfahrens in der Gittergenerierung vorgestellt und dann der Rechenablauf im Detail beschrieben. Zur Validierung werden einige komplexe zwei- und dreidimensionale Konfigurationen ausgewählt. Damit wird in dieser Arbeit erstmals ein Konzept zur differentiellen Glättung für praktisch relevanten Konfigurationen angewendet.

5.1 Komponenten von Mehrgitterverfahren

Wie in Abbildung 4.1 gezeigt ist, bestehen beim Einsatz von Mehrgitterverfahren eine Reihe von Möglichkeiten: es muss festgelegt werden, welches Glättungsverfahren und welche Interpolationen und Restriktionen verwendet werden. Desweiteren muss die Art der Gittervergrößerung gewählt werden und die Anzahl der Vor- und Nachglättungen ist zu bestimmen. Weiterhin muss entschieden werden, wann die Gittervariablen auf das nächst gröbere oder nächst feinere Gitter interpoliert werden. Wie in Kapitel 4 vorgestellt wurde, wird das in der Gittergenerierung üblicherweise verwendete SOR-Verfahren als das Glättungsverfahren benutzt.

Gittervergrößerung: Weil die Differentialgleichungen im krummlinigen Koordinatensystem diskretisiert werden, kann die gleichförmige Gittervergrößerung mit einer Verdopplung der Gittermaschenweite, d.h. $H = 2h$, durchgeführt werden. Hierbei ist h die Maschenweite des nächst feineren Gitters und es gilt $h = 1$ auf dem feinsten Gitter. Die Grobgitterpunkte fallen mit den Feingitterpunkten zusammen.

Restriktion: Bei der Restriktion werden die Residuen und beim FAS-Verfahren auch die Feingitterlösung (Koordinaten und Kontrollfunktionen) von dem Fein- auf das Grobgitter mit Hilfe des Operators $[I_h^H]$ übergeben. Die einfachste Form der Restriktion ist die sogenannte *Injektion*, wobei sowohl das Residuum als auch die Lösung direkt vom korrespondierenden Feingitterpunkt übernommen werden. Restriktionsvorschriften höherer Ordnung beziehen weitere Umgebungspunkte dieser Feingitterpunkte mit ein. In der vorliegenden Arbeit wird das *Full-Weighting* Schema verwendet, da diese Vorgehensweise von der Stabilität her gesehen als die sicherste gilt. Das Schema wird im zweidimensionalen Fall wie folgt definiert:

$$[\hat{I}_h^H] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Prolongation: Die Prolongation dient zum Transfer der berechneten Korrektur von dem Grobgitter auf das Feingitter. Die bilineare Interpolationsformel gilt für zweidimensionale, die trilineare Interpolationsformel für dreidimensionale Fälle. Im zweidimensionalen Fall berechnet sich für den Feingitterpunkt der interpolierte Wert auf den Grobgitterpunkt nach:

$$\delta\phi_{2i+l,2j+m}^h = \frac{1}{4}(\delta\phi_{i,j}^H + \delta\phi_{i+l,j}^H + \delta\phi_{i,j+m}^H + \delta\phi_{i+l,j+m}^H) , \quad (5.1)$$

mit $l = 0, 1$ und $m = 0, 1$.

5.2 Rechenablauf des Mehrgitterverfahrens

Das Mehrgitterverfahren wird nur zur Berechnung der Koordinaten verwendet. In der vorliegenden Arbeit werden das CS- und das FAS-Verfahren untersucht. Der prinzipielle Ablauf des Mehrgitterverfahrens wurde bereits in Kapitel 4 dargestellt. Als Beispiel werden hier das verwendete Glättungsverfahren, der Übergang vom Fein- zum Grobgitter und vom Grob- zum Feingitter zusammenfassend beschrieben.

Das diskretisierte linearisierte Gleichungssystem auf einer Gitterebene mit Maschenweite h kann wie folgt geschrieben werden:

$$-a_p^h \phi_p^h + \sum_{nb} a_{nb}^h \phi_{nb}^h + S_\phi^h = f^h . \quad (5.2)$$

Hierbei stellt ϕ eine der Variablen \underline{x} oder \underline{P} auf dem feinsten Gitter, die Variable \underline{x} beim FAS-Verfahren oder die Gitterkorrektur $\delta\underline{x}$ beim CS-Verfahren auf dem Grobgitter,

dar. Die rechte Seite f_ϕ ist auf dem feinsten Gitter Null und auf dem groben Gitter von Null verschieden. Auf dem groben Gitter bleibt sie konstant für die Grobgitterkorrekturrechnung. Sie wird später genau angegeben. Zur Lösung der Gleichung (5.2) wird das SOR-Verfahren verwendet:

$$a_p^n \phi_p^{n+1} = (1 - \omega) a_p^n \phi_p^n + \omega \left(\sum_{nb=1}^q a_{nb} \phi_{nb}^{n+1} + \sum_{nb=q+1}^N a_{nb} \phi_{nb}^n + S_\phi^h - f^h \right). \quad (5.3)$$

Auf dem feinsten Gitter wird zuerst die im Kapitel 4 beschriebene Behandlung der Randbedingungen für alle Randgitterpunkte und ihre randnächsten Nachbarn angewendet und danach die Glättung für die inneren Gitterpunkte durchgeführt. Die Metrikkoeffizienten, die Koeffizienten a_{nb}^h und S_ϕ^h in Gleichung (5.2) werden nach jeder Iteration aktualisiert.

Auf dem Grobgitter ist die Glättung nur im Gebietsinneren durchzuführen. Zuerst werden die Koordinaten und Kontrollfunktionen auf dem groben Gitter vom feinen Gitter restringiert. Weil das Mehrgitterverfahren nur zur Berechnungen der Koordinaten verwendet wird, bleiben die Kontrollfunktionen auf allen Grobgittern konstant. Hier wird das **DCA**-Verfahren (Discretization Coarse Grid Approximation) (Hackbusch 1985) verwendet, d.h. die Metrikkoeffizienten, die Koeffizienten a_p und a_{nb} in Gleichung (5.2) auf dem Grobgitter werden direkt aus den restringierten Koordinaten und den Kontrollfunktionen berechnet. Beim FAS-Verfahren sind die in den Koeffizienten a_p , a_{nb} bzw. S_ϕ vorkommenden Metrikkoeffizienten von der Lösung abhängig und werden deswegen aktualisiert, sobald die neuen Koordinaten berechnet werden. Beim CS-Verfahren werden sie für einen V- oder W-Zyklus festgehalten. Das heißt, dass die Metrikkoeffizienten immer dann geändert werden, wenn ein neuer Zyklus beginnt.

Beim Übergang vom Feingitter mit der Maschenweite h zum Grobgitter mit der Maschenweite H sind folgende Rechenschritte durchzuführen:

- Berechnung der Residuen R^h auf dem Feingitter h : Durch ν_1 -malige Vorglättung wird eine Näherungslösung $\tilde{\phi}$ ermittelt, die die Approximationsgleichung bis auf das Residuum R_ϕ^h erfüllt,

$$R_\phi^h = -a_p \tilde{\phi}_p^h + \sum_{nb} a_{nb} \tilde{\phi}_{nb}^h + S_\phi^h - f_\phi^h. \quad (5.4)$$

Hierin sind die Koeffizienten a_p^h , a_{nb}^h und S_ϕ^h aus den Näherungslösungen \underline{x}^h und den Kontrollfunktionen \underline{P}^h berechnet.

- Restriktion der Koordinaten und der Kontrollfunktionen durch

$$\underline{\bar{x}}^H = [I_h^H] \underline{\tilde{x}}^h, \quad \underline{\bar{P}}^H = [I_h^H] \underline{P}^h \quad (5.5)$$

und der Residuen \bar{R}^h durch

$$\bar{R}_\phi^H = [\hat{I}_h^H]^* R_\phi^h. \quad (5.6)$$

mit $[\hat{I}_h^H]^* = (H/h)^2[\hat{I}_h^H] = 4[\hat{I}_h^H]$.

Die Koordinaten $\underline{\tilde{x}}^h$ und die Kontrollfunktionen \underline{P}^h werden auf das Grobgitter H interpoliert. Die Modifikation des Restriktionsoperators ist deshalb notwendig, dass bei der finiten Approximation die ursprünglichen Gleichungen mit h^2 und der Jacobi-Determinante multipliziert werden. Während die Jacobi-Determinante auf Grob- und Feingitter etwa gleich bleibt, vergrößert sich h beim Übergang vom Fein- zum Grobgitter immer um den Faktor 2.

$\underline{\tilde{x}}^H$ und $\underline{\overline{P}}^H$ werden beim CS-Verfahren nur zur Berechnung der Metrikoeffizienten und der Koeffizienten a_{nb} verwendet. Beim FAS-Verfahren wird $\underline{\tilde{x}}^H$ als die Startlösung der Koordinaten auf dem Grobgitter benutzt. Beim CS-Verfahren wird die Startlösung zu Null gesetzt.

- Berechnung der rechten Seite der Grobgittergleichungen f^H : Vor der Glättung auf dem Grobgitter wird zuerst die rechte Seite f^H berechnet. Beim **FAS**-Verfahren ist f^H wie folgt bestimmt:

$$f_\phi^H = -\bar{a}_p \bar{\phi}_p^H + \sum_{nb} \bar{a}_{nb} \bar{\phi}_{nb}^H + \bar{S}_\phi^H - \bar{R}_\phi^H . \quad (5.7)$$

Hierin werden die Koeffizienten \bar{a}_p , \bar{a}_{nb} und \bar{S}_ϕ^H aus der Startlösung $\underline{\tilde{x}}^H$ und $\underline{\overline{P}}^H$ berechnet. Beim **CS**-Verfahren wird sie durch

$$f_\phi^H = -\bar{R}_\phi^H . \quad (5.8)$$

ersetzt. Für die Berechnung der Grobgitterkorrektur bleibt sie konstant.

Der Übergang vom Grobgitter H zum Feingitter h ist wie folgt durchzuführen:

- Berechnung der Grobgitterkorrektur $\delta\phi^H$: Nach ν_2 -maliger Iteration auf dem Grobgitter H wird eine Näherungslösung $\tilde{\phi}^H$ ermittelt. Die Korrektur wird beim **FAS**-Verfahren durch

$$\delta\phi^H = \tilde{\phi}^H - \bar{\phi}^H \quad (5.9)$$

und beim **CS**-Verfahren durch

$$\delta\phi^H = \tilde{\phi}^H \quad (5.10)$$

berechnet.

- Prolongation der Korrektur und Korrektur der Feingitterlösung: Nach der Berechnung der Grobgitterkorrektur wird sie auf das Feingitter interpoliert, um die Näherungslösung des Feingitters zu korrigieren:

$$\delta\phi^h = [I_H^h]\delta\phi^H, \quad \bar{\phi}^h = \tilde{\phi}^h + \lambda\delta\phi^h. \quad (5.11)$$

Um den Mangel an Glättung des Grobgitterfehlers auszugleichen wird hier zur Stabilisierung ein Unterrelaxationsfaktor λ ($0 < \lambda \leq 1$) für den Fehler verwendet. Die verbesserte Lösung wird als neue Startlösung zur Nachglättung auf dem Feingitter benutzt.

5.3 Anwendung des Gitterglättungsverfahrens

In diesem Abschnitt werden die Anwendungen des oben beschriebenen Verfahren zur Gittergenerierung mit dem Mehrgitterverfahren und der effektiven Behandlung der Randbedingungen demonstriert. Die mittels transfiniter Interpolation generierten Gitter dienen als Startlösung. Die zweidimensionalen Testfälle wurden auf einem Rechner vom Typ SiliconGraphics Indy mit einem 100 MHz IP22 Prozessor durchgeführt. Für die dreidimensionalen Testfälle wurde ein Rechner vom Typ SiliconGraphics mit einem 175 MHz IP28 Prozessor benutzt. Die CPU-Zeit wird in [sec] berechnet.

5.3.1 2D ω -Typ Geometrie

Die Geometrie des ersten zweidimensionalen Testfalls ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Wegen der Spitzkehren am unteren Rand ist es schwierig, mit einem Standardverfahren ein günstiges Gitter zu erzeugen. Wenn man die Geometrie in angemessene Blöcke aufteilt, kann man sicherlich ein gutes Netz erzeugen. In den meisten Fällen möchte man jedoch Gitter mit einfacher Topologie erzeugen, d.h. mit einem Block die ganze Geometrie erfassen. Abbildung 5.1a zeigt ein algebraisch generiertes Netz. Es ist zu erkennen, dass die Gitterlinien sich überschneiden. Dieses Netz wird als Startlösung verwendet.

Beim Mehrgitterverfahren werden drei Gitterebenen mit 73×41 , 37×21 und 19×11 Gitterpunkten verwendet. Die Vorglättungs- und Nachglättungszahl werden auf 2 bzw. 1 fixiert. Abbildung 5.1 (b) und (c) zeigt das geglättete Gitter und ein Detail in der Nähe der Spitzkehren.

In den Tabellen 5.1 - 5.2 werden für die Glättung mit den Unterrelaxationsfaktoren ω für das SOR-Verfahren und λ für die Korrektur sowie dem Zyklustyp die Rechenzeit beim Eingitter (EG)- und Mehrgitterverfahren gegenübergestellt. Mit Hilfe des Mehrgitterverfahrens lässt sich eine über 10-fache Beschleunigung gegenüber dem Eingitterverfahren erreichen. Die Anwendung des Unterrelaxationsfaktors λ ist wichtig, um die Stabilität zu verbessern und eine konvergente Lösung zu erhalten.

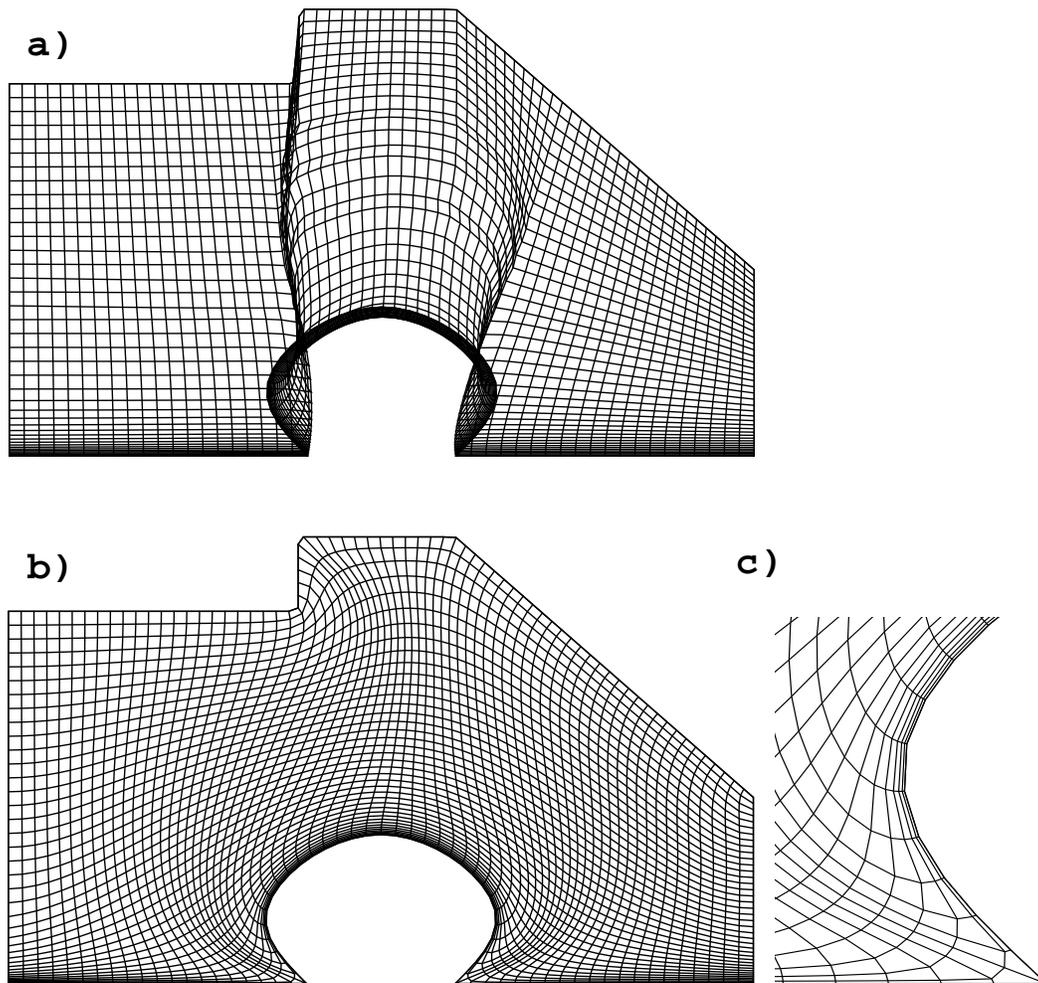


Abbildung 5.1: Gitterdarstellung für 2D ω -Typ Geometrie: 1. a) Startlösung; b) Globale Darstellung nach der Glättung; c) Detail in der Nähe der Spitzkehren

| Gitterebenen | $73 \times 41, \quad 37 \times 21, \quad 19 \times 11$ | | | | | |
|-------------------------|--|--------|--------|-------------------------------|--------|--------|
| Relaxationsfaktoren | $\omega = 0.6, \lambda = 0.7$ | | | $\omega = 0.8, \lambda = 0.6$ | | |
| Zyklus-Typ | EG | V | W | EG | V | W |
| CPU-Zeit | 32.435 | 2.315 | 2.633 | 22.803 | 1.944 | 2.203 |
| Beschleunigungsfaktoren | - | 14.011 | 12.319 | - | 11.730 | 10.351 |

Tabelle 5.1: Mehrgitterparameter und Beschleunigungsfaktoren des CS-Verfahrens für 2D ω -Typ Geometrie

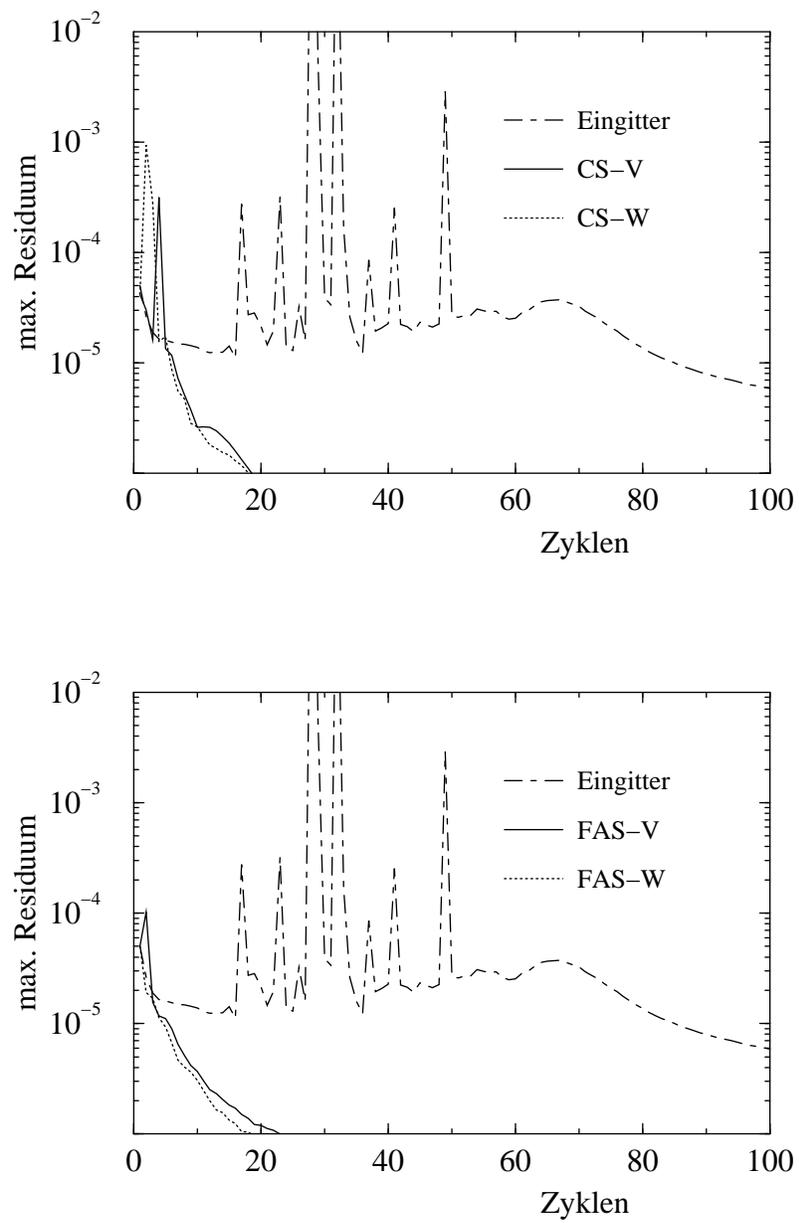
| Gitterebenen | $73 \times 41, \quad 37 \times 21, \quad 19 \times 11$ | | | | | |
|-------------------------|--|--------|--------|-------------------------------|--------|--------|
| Relaxationsfaktoren | $\omega = 0.6, \lambda = 0.7$ | | | $\omega = 0.8, \lambda = 0.6$ | | |
| Zyklus-Typ | EG | V | W | EG | V | W |
| CPU-Zeit | 32.435 | 2.688 | 2.616 | 22.803 | 2.211 | 2.061 |
| Beschleunigungsfaktoren | - | 12.067 | 12.399 | - | 10.313 | 11.064 |

Tabelle 5.2: Mehrgitterparameter und Beschleunigungsfaktoren des FAS-Verfahrens für 2D ω -Typ Geometrie

Tabelle 5.1 zeigt den Leistungsvergleich des CS-Verfahrens. Wie aus dieser Tabelle hervorgeht, ist die Rechenzeit bei der Nutzung des Eingitterverfahrens und des Mehrgitterverfahrens mit $\omega = 0.8$ deutlich geringer als mit $\omega = 0.6$. Mit $\omega = 0.6$ und $\lambda = 0.7$ erhält man jedoch höhere Beschleunigungsfaktoren, wobei ein Beschleunigungsfaktor von 14 beim V-Zyklus gegenüber 12 beim W-Zyklus vorliegt. Mit $\omega = 0.8$ und $\lambda = 0.6$ lässt sich ein Beschleunigungsfaktor von 11.7 beim V-Zyklus gegenüber 10.4 beim W-Zyklus erreichen. Beim CS-Verfahren bringt ein W-Zyklus keine Konvergenzbeschleunigung gegenüber dem V-Zyklus.

Tabelle 5.2 stellt das Leistungsverhalten des FAS-Verfahrens dar. Beim FAS-Verfahren zeigt der W-Zyklus ein besseres Konvergenzverhalten mit Beschleunigungsfaktoren von 12.4 bei $\omega = 0.6, \lambda = 0.7$ und von 11.0 bei $\omega = 0.8, \lambda = 0.6$ gegenüber dem V-Zyklus mit Beschleunigungsfaktoren von 12.0 bei $\omega = 0.6, \lambda = 0.7$ und von 10.3 bei $\omega = 0.8, \lambda = 0.6$. Es ist interessant, dass in diesem Testfall das CS-Verfahren mit V-Zyklus effektiver arbeitet als mit W-Zyklus, während das FAS-Verfahren besser mit W-Zyklus zu benutzen ist.

Abbildung 5.2 zeigt den Residuenverlauf über der Zyklenanzahl für das CS- bzw. FAS-Verfahren. Wie hier zu sehen ist, bringt das Mehrgitterverfahren nicht nur Konvergenzbeschleunigung sondern auch größere Stabilität gegenüber dem Eingitterverfahren. Bis zu 100 Zyklen schwankt das lokale maximale Residuum sehr stark und sinkt danach sehr langsam beim Eingitterverfahren, während es beim Mehrgitterverfahren mit linearer Geschwindigkeit abnimmt.

Abbildung 5.2: Residuenverläufe über der Zyklenanzahl für 2D ω -Typ Geometrie

5.3.2 2D Flügelkonfiguration

Abbildung 5.3a zeigt ein Gitter für eine zweidimensionale Flügelkonfiguration, die eine typische Geometrie in der Aerodynamik repräsentiert. Dieses Gitter kann erfolgreich durch verschiedene Verfahren wie z.B. algebraische oder elliptische Verfahren erzeugt werden.

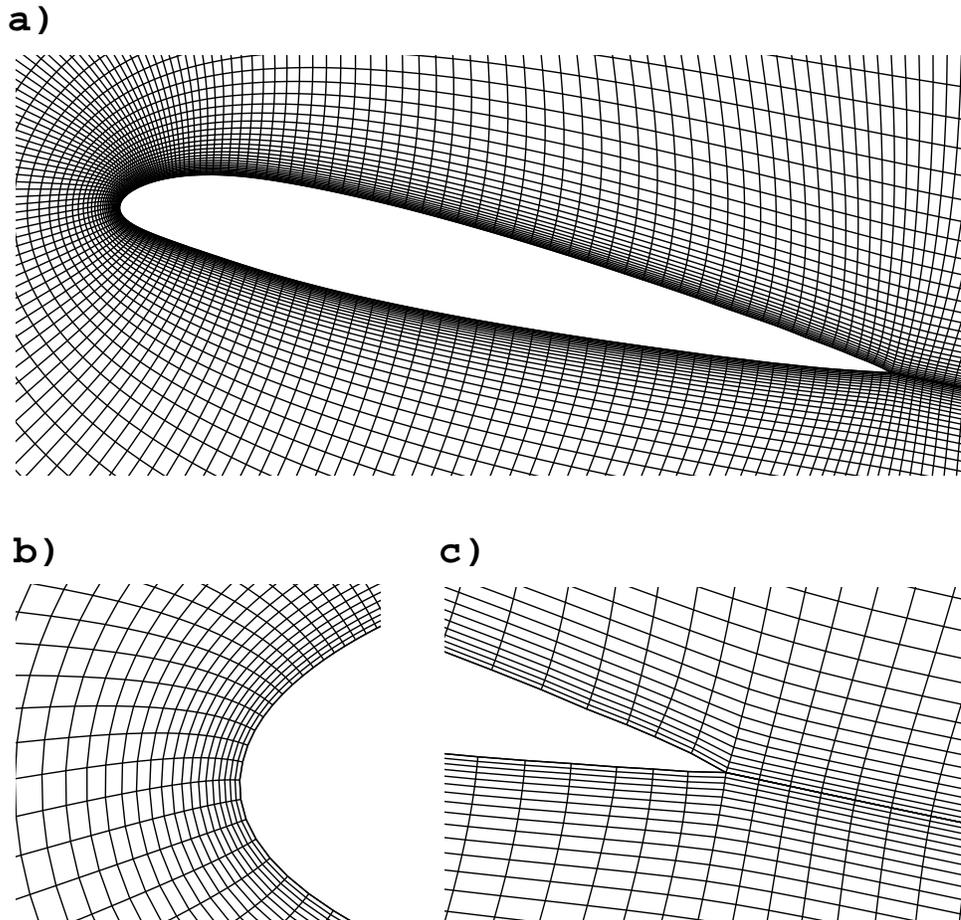


Abbildung 5.3: Gitterdarstellung um eine 2D Flügelkonfiguration: a) Globale Darstellung nach der Glättung; b), c) Detail in der Nähe der Nase und der Hinterkante

Die CS- und FAS-Verfahren werden jeweils mit V- und W-Zyklus untersucht. Beim Mehrgitterverfahren werden vier Gitterebenen mit 321×65 , 161×33 , 81×17 und 41×9 Gitterpunkten verwendet. Die globale Darstellung des generierten Netzes und Details in der Nähe der Nase und der Hinterkante werden in Abbildung 5.3 dargestellt. Das Gitter weist gute Orthogonalität und den gewünschten Wandabstand in der ersten Zelle auf.

In Tabelle 5.3 werden die Mehrgitterparameter, CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktoren gegenübergestellt. Beim Eingitterverfahren werden für die Glättung über $1000s$ benötigt,

| | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------------------|--------|--------|-------------------------------|--------|--------|
| Gitterebenen | 321 × 65, 161 × 33, 81 × 17, 41 × 9 | | | | | |
| Relaxationsfaktoren | $\omega = 0.6, \lambda = 1.0$ | | | $\omega = 0.8, \lambda = 0.8$ | | |
| Zyklus-Typ | EG | V | W | EG | V | W |
| CPU-Zeit | 1695.611 | 46.927 | 50.079 | 1070.104 | 55.826 | 48.545 |
| Beschleunigungsfaktoren | - | 36.133 | 33.858 | - | 19.169 | 22.044 |

Tabelle 5.3: Mehrgitterparameter und Beschleunigungsfaktoren des CS-Verfahrens für eine 2D Flügelkonfiguration

während beim Mehrgitterverfahren weniger als 60s erforderlich sind, bis das maximale Residuum auf dem feinsten Gitter unter ein vorgegebenes Konvergenzkriterium von 10^{-5} gefallen ist. In Abhängigkeit von den Relaxationsfaktoren und dem Zyklus-Typ werden Beschleunigungsfaktoren von 19.2 bis 36.1 beim CS-Verfahren erreicht.

Wie in Tabelle 5.4 zu sehen, ist die Leistungsfähigkeit des FAS-Verfahrens etwas niedriger als die des CS-Verfahrens. Es werden nur Beschleunigungsfaktoren von 18.6 bis 28.4 erreicht.

| | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------------------|--------|--------|-------------------------------|--------|--------|
| Gitterebenen | 321 × 65, 161 × 33, 81 × 17, 41 × 9 | | | | | |
| Relaxationsfaktoren | $\omega = 0.6, \lambda = 1.0$ | | | $\omega = 0.8, \lambda = 0.9$ | | |
| Zyklus-Typ | EG | V | W | EG | V | W |
| CPU-Zeit | 1661.802 | 65.292 | 59.780 | 1069.481 | 55.747 | 57.561 |
| Beschleunigungsfaktoren | - | 25.970 | 28.364 | - | 19.196 | 18.591 |

Tabelle 5.4: Mehrgitterparameter und Beschleunigungsfaktoren des FAS-Verfahrens für eine 2D Flügelkonfiguration

Abbildung 5.4 zeigt die Residuenverläufe über der Zyklenanzahl für CS- bzw. FAS-Verfahren mit $\omega = 0.8$. Es ist zu erkennen, dass das Eingitterverfahren stabil ist, aber das maximale Residuum sehr langsam sinkt. Beim Mehrgitterverfahren nimmt hingegen das maximale Residuum mit einer fast linearen Geschwindigkeit ab.

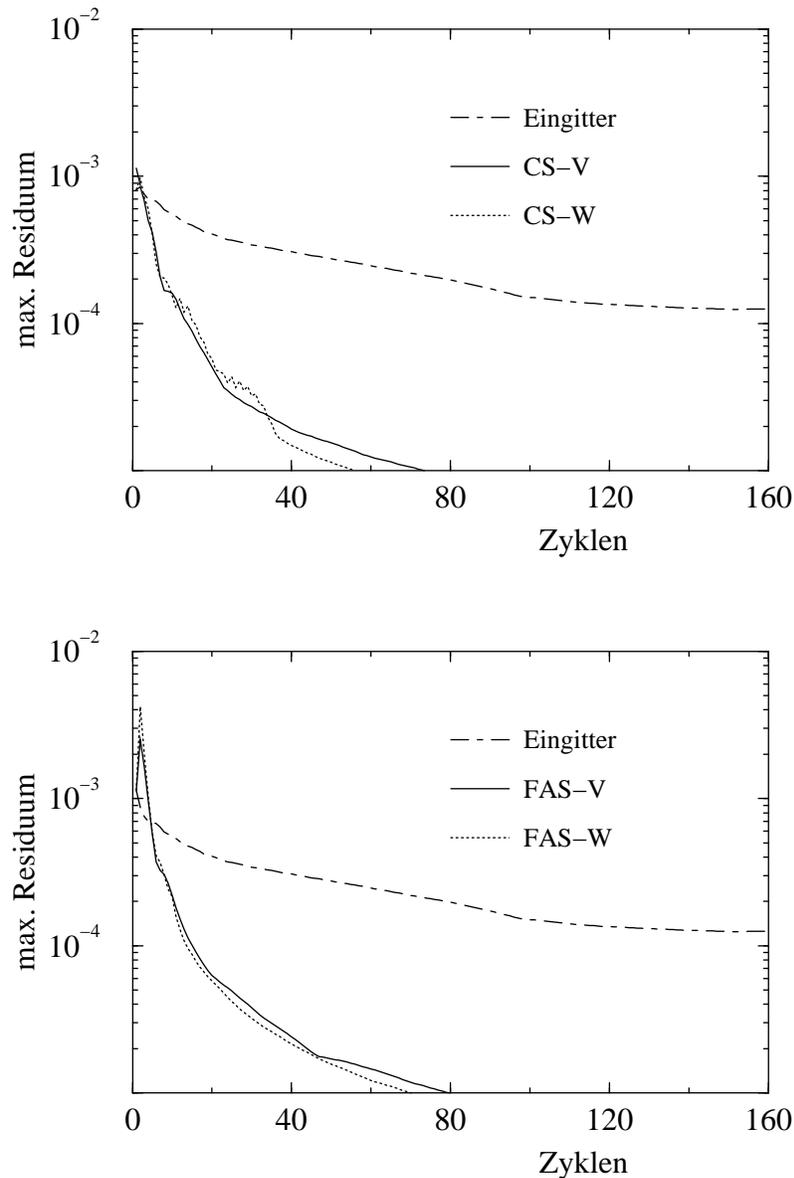


Abbildung 5.4: Residuenverläufe über der Zyklenanzahl für eine 2D Flügelkonfiguration

5.3.3 3D Flügelkonfiguration

Der numerischen Simulation in der industriellen Konfigurationsaerodynamik sind heute noch enge Grenzen gesetzt. Eines der größten Probleme stellt die Erzeugung geeigneter Rechnetze für komplexe Konfigurationen dar, da Ergebnisse der Strömungssimulation wesentlich von der Gitterqualität abhängen. Durch hochentwickelte elliptische Gittergenerierungsverfahren wie z.B. das biharmonische Verfahren kann die Gitterqualität deutlich verbessert werden.

Das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte biharmonische Verfahren zur Gittergenerierung verspricht deshalb die Anwendungsmöglichkeit von Simulation zu erweitern. Besondere Herausforderung bei der Generierung solcher Gitter sind die Erzeugungen wandorthogonaler Gitterlinien und die Glättung des inneren Gebiets.

Zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit des Mehrgitterverfahrens für dreidimensionale Flügelkonfigurationen wird ein Testfall mit einem Netz für die Simulation mit Euler-Gleichungen verwendet. Beim Mehrgitterverfahren werden drei Gitterebenen jeweils mit $121 \times 25 \times 65$, $61 \times 13 \times 33$ und $31 \times 7 \times 17$ Gitterpunkten gebildet. Das geglättete Netz ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Orthogonalität in Wandnähe und der Wandabstand sind wie gewünscht.

In Tabelle 5.5 werden wiederum die Mehrgitterparameter, CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktoren gegenübergestellt. Bei der Glättung mit dem Mehrgitterverfahren wird $\lambda = 1.0$ gesetzt. Bei diesem Testfall ist das FAS effizienter als das CS-Verfahren. Es wird ein Beschleunigungsfaktor von 13.0 beim FAS-Verfahren mit dem W-Zyklus erreicht, gegenüber 11.1 beim CS-Verfahren mit dem V-Zyklus. Die Residuenverläufe in Abbildung 5.6 zeigen, dass das FAS-Verfahren stabiler als das CS-Verfahren ist und das maximale Residuum beim FAS-Verfahren schneller als beim CS-Verfahren sinkt.

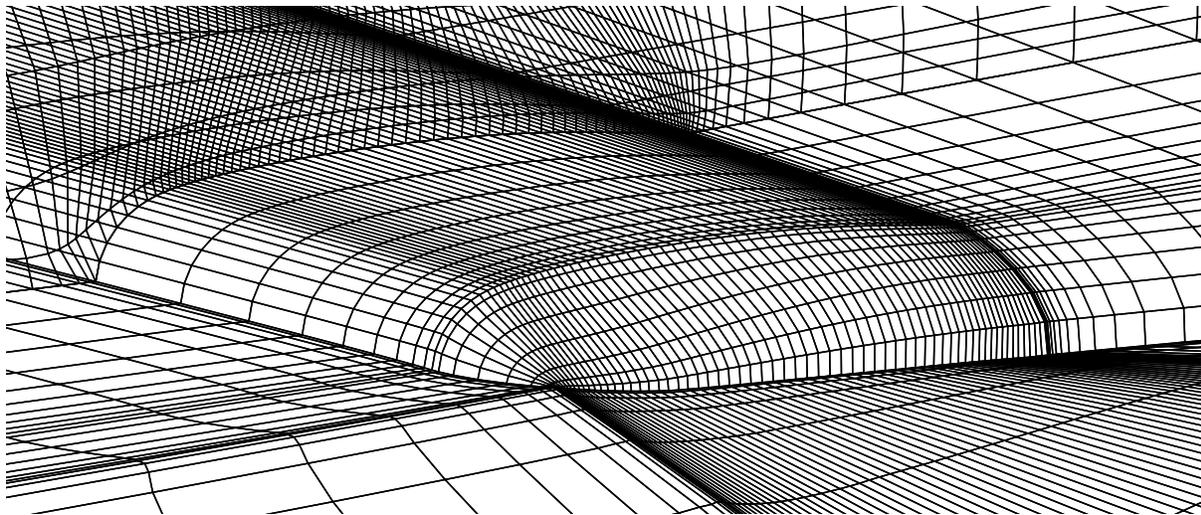


Abbildung 5.5: Gitterdarstellung einer 3D Flügelkonfiguration

| | | | | | |
|-------------------------|--|-------|-------|-------|-------|
| Gitterebenen | 121 × 25 × 65, 61 × 13 × 33, 31 × 7 × 17 | | | | |
| | EG | CS | | FAS | |
| Zyklus-Typ | | V | W | V | W |
| CPU-Zeit | 15781 | 1427 | 1500 | 1222 | 1214 |
| Beschleunigungsfaktoren | - | 11.10 | 10.52 | 12.91 | 13.00 |

Tabelle 5.5: Mehrgitterparameter und Beschleunigungsfaktoren des Mehrgitterverfahrens mit $\omega = 0.8$ und $\lambda = 1.0$ für eine 3D Flügelkonfiguration

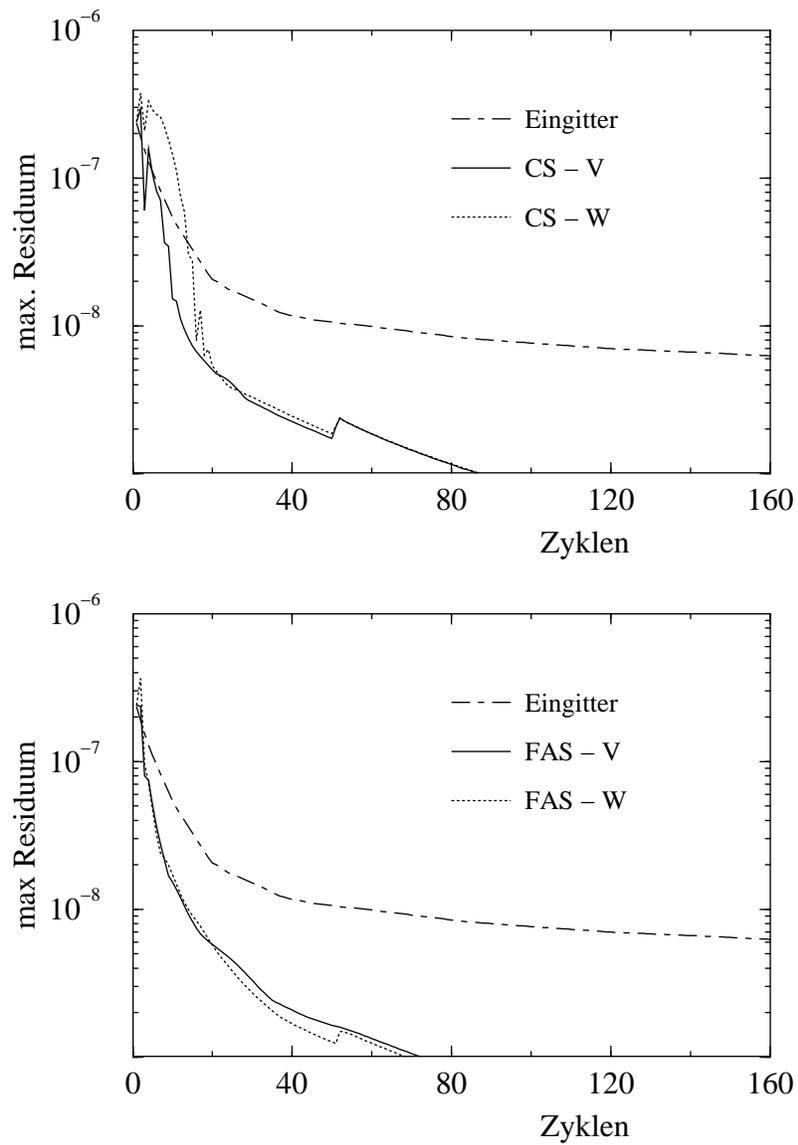


Abbildung 5.6: Residuenverläufe über der Zyklanzahl für eine 3D Flügelkonfiguration

5.3.4 Flügel-Rumpf Konfiguration

Abbildung 5.7 zeigt einen Block mit $161 \times 17 \times 65$ Gitterpunkten von einem geglätteten Netz um eine Flügel-Rumpf-Konfiguration. Dieses Gitter ist für Navier-Stokes Rechnung geeignet. Das generierte Netz ist im ganzen Gebiet glatt und an allen Wände orthogonal.

Tabelle 5.6 zeigt die Leistungsfähigkeit des Mehrgitterverfahrens mit drei Gitterebenen ($161 \times 17 \times 65$, $81 \times 9 \times 33$ und $41 \times 5 \times 17$ Gitterpunkte). In diesem Testfall erreicht das Mehrgitterverfahren nur etwa fünf fache Beschleunigung gegenüber dem Eingitterverfahren. Die Leistungsfähigkeit ist relativ gering im Vergleich zu zweidimensionalen Testfällen. Der Grund dafür ist die geringe Gitterausdehnung in j-Richtung von 17 Punkten im feinsten und nur 5 Punkten im größten Gitter, durch die keine vollständige Erfassung der Komplexität möglich ist. Abbildung 5.8 zeigt die Residuenverläufe über der Zyklusanzahl. Die Anwendung des W-Zyklus benötigt nur wenige Iterationen auf dem feinsten Gitter, dafür jedoch mehr CPU-Zeit.

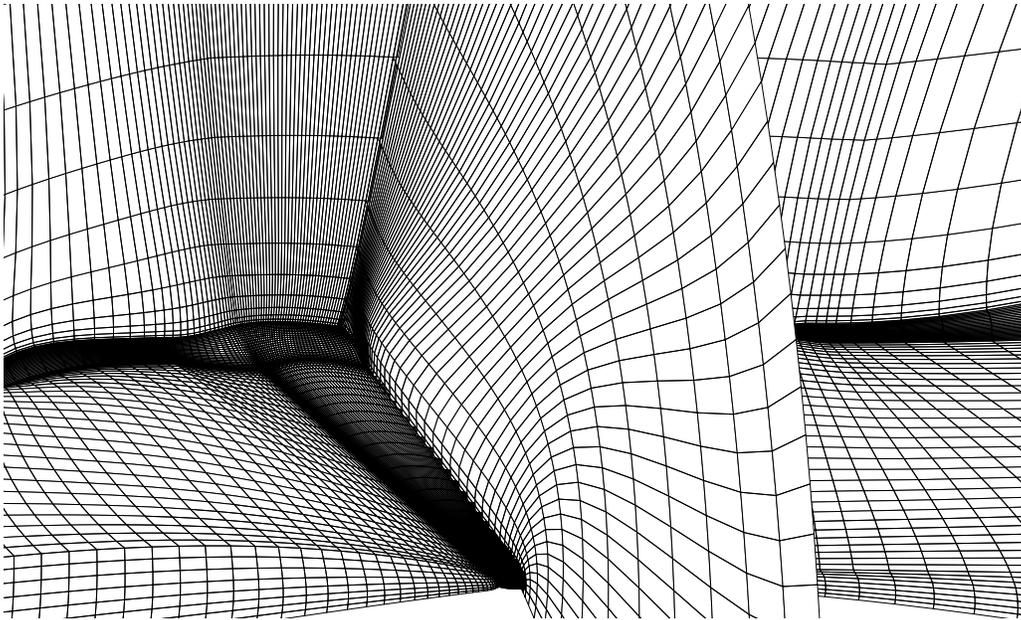


Abbildung 5.7: Gitterdarstellung einer Flügel-Rumpf-Konfiguration

| | | | | | |
|-------------------------|---|------|------|------|------|
| Gitterebenen | 161 × 17 × 65, 161 × 17 × 65, 161 × 17 × 65 | | | | |
| | EG | CS | | FAS | |
| Zyklus-Typ | | V | W | V | W |
| CPU-Zeit | 16122 | 3053 | 4010 | 5234 | 5374 |
| Beschleunigungsfaktoren | - | 5.28 | 4.02 | 3.08 | 3.20 |

Tabelle 5.6: Mehrgitterparameter und Beschleunigungsfaktoren des Mehrgitterverfahrens mit $\omega = 0.6$ und $\lambda = 0.6$ für eine Flügel-Rumpf Konfiguration

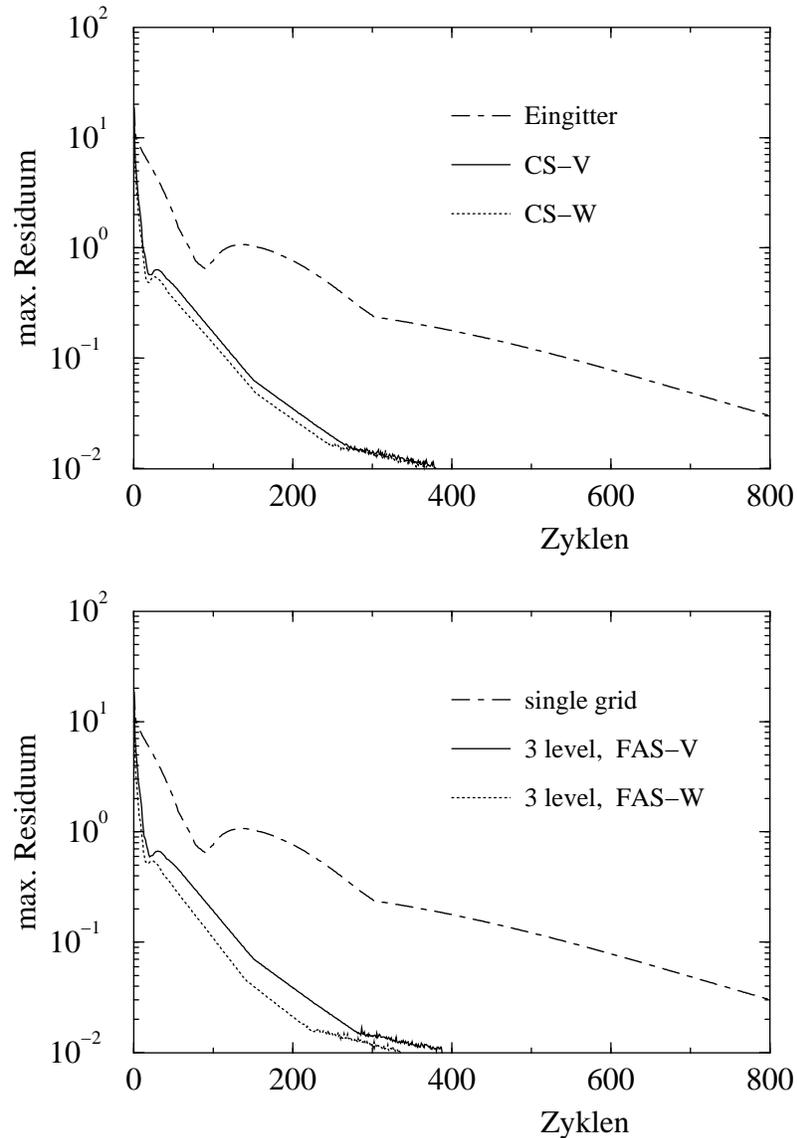


Abbildung 5.8: Residuenverläufe über der Zyklenanzahl für eine Flügel-Rumpf Konfiguration

5.3.5 Flügel-Rumpf-Leitwerk Konfiguration

In einem letzten Testfall wird eine generische Flügel-Rumpf-Leitwerk Konfiguration (H8Y) behandelt. Abbildung 5.9 zeigt die Gitterdarstellung der Flügel-Rumpf-Leitwerk Konfiguration mit $289 \times 89 \times 89$ Gitterpunkten nach der Glättung. Zur Glättung wird nur das CS-Verfahren mit vier Gitterebenen verwendet. Hier gibt es keinen Vergleich der Leistungsfähigkeit des Mehrgitterverfahrens gegenüber dem Eingitterverfahren.

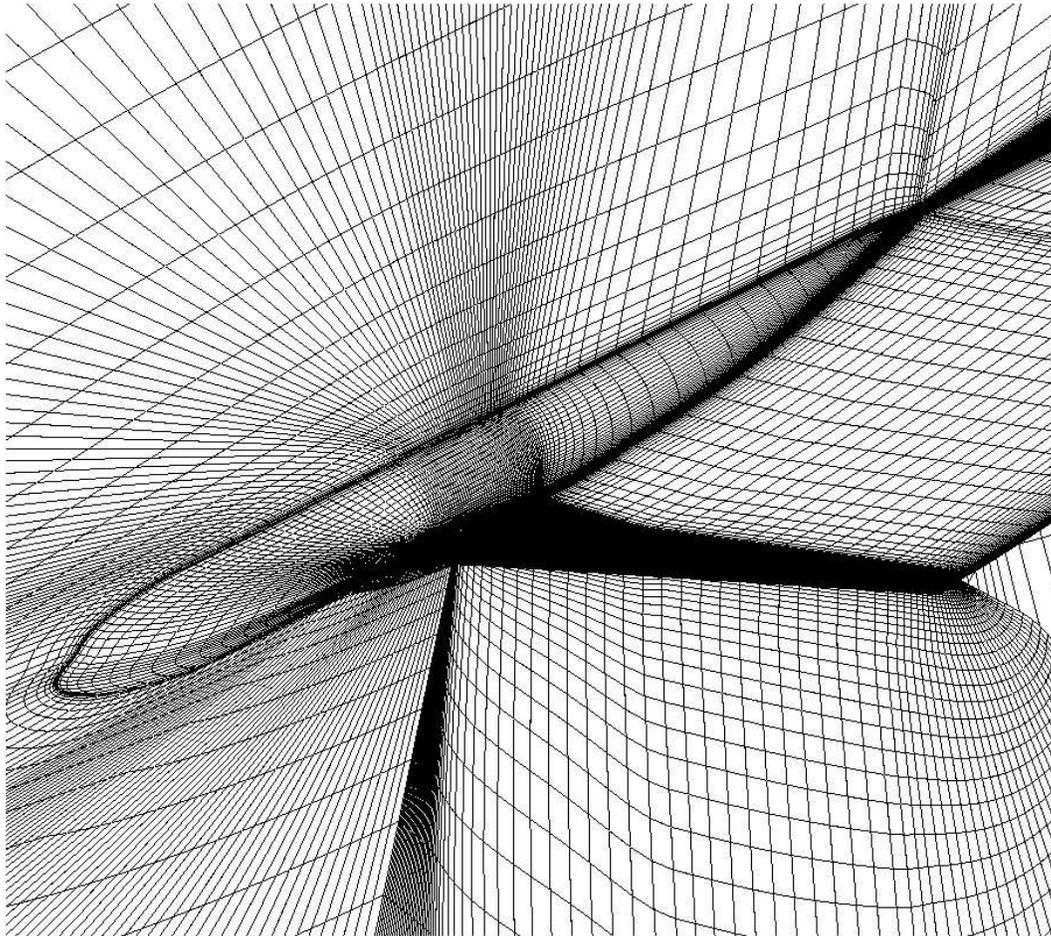


Abbildung 5.9: Gitterdarstellung einer generischen Flügel-Rumpf-Leitwerk Konfiguration

Abbildung 5.10 zeigt einen körpernahen Schnitt des Gitters vor der Glättung, sowie nach der Glättung. Wie in Abbildung 5.10(a) zu erkennen ist, sind die Gitterlinien vor der Gitterglättung stark verschert, dies kann zu erhöhter numerischer Diffusion in die Simulation führen. Abbildung 5.10(b) zeigt den selben Schnitt des Gitters nach der Glättung. Die Verschierung der Gitterlinien hat deutlich abgenommen.

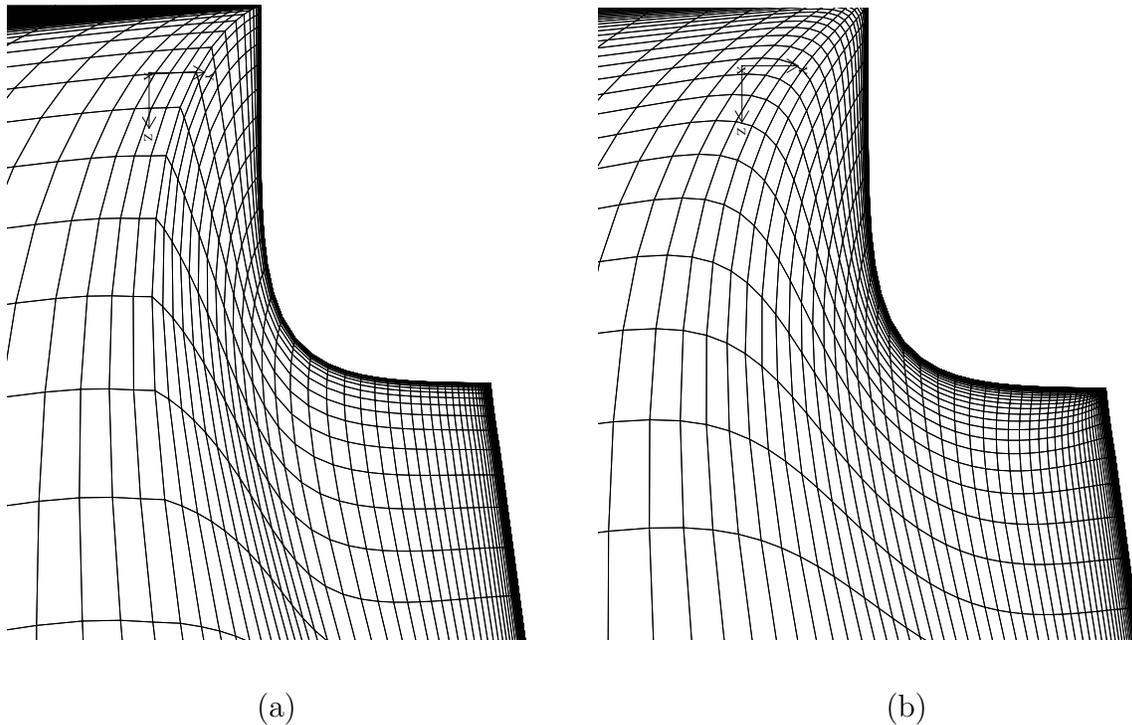


Abbildung 5.10: Gitterdetail einer Flügel-Rumpf-Leitwerk Konfiguration: (a) vor der Glättung; (b) nach der Glättung

Die oben dargestellten Ergebnisse zeigen, dass das jetzige Verfahren eine effektive Gestaltung des Gitters im wandnahen Bereich ermöglicht. Sowohl der Schnittwinkel zu den Rändern als auch die Maschenweite an den Rändern können festgelegt werden. Weil die Kontrollfunktionen im Gebietsinneren durch die elliptische differentielle Beziehung bestimmt werden, haben sie im gesamten Gitterbereich einen glatten Verlauf. Das Mehrgitterverfahren kann die Konvergenzgeschwindigkeit deutlich beschleunigen.

Das Mehrgitterverfahren wird nur für die Berechnung der Koordinaten eingesetzt. Eine gleichzeitige Anwendung für die Kontrollfunktionen kann der Erfahrung nach die Konvergenzbeschleunigung nicht verbessern und beim FAS-Verfahren wird manchmal überhaupt keine Konvergenz erzielt.

Bemerkung

Für die praktische Gitterglättung gibt es kein allgemeingültiges Kriterium zur Konvergenzbeurteilung. Das Gitter wird meist einige Glättungszyklen unterworfen und dann

manuell bezüglich seiner Qualität bewertet. Bei unzulänglicher Güte wird die Glättung entsprechend fortgeführt. Dieses Vorgehen macht die Vorgabe eines Konvergenzkriteriums unnötig. Wegen des akademischen Ansatzes dieser Arbeit wurde hier aber ein Konvergenzkriterium vorgegeben.

Kapitel 6

Mehrgitterverfahren zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen

Zur Beschleunigung der numerischen Lösung der Navier-Stokes Gleichungen eignen sich besonders Mehrgitterverfahren, wobei meist FMG-FAS Anwendung findet. Bei bisheriger Umsetzung des Verfahrens ergibt sich das Problem, dass die Massenflüsse, restringierten Geschwindigkeiten und die Turbulenzvariablen auf unterschiedlichen Gitterebenen nicht zusammenpassen. Um dieses Problem zu überwinden, wird hier ein modifizierter Mehrgitteralgorithmus entwickelt, der auf einem FMG-Algorithmus mit V-Zyklus ohne Restriktionsprozedur für die Gittervariablen mit Ausnahme der Residuen basiert. Diese Eigenschaft führt sowohl zur Vereinfachung der Mehrgitterstrategie als auch der Programmstruktur.

Im folgenden wird zunächst eine Einführung in die Komponenten von Mehrgitterverfahren zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen gegeben, und dann werden der FMG-FAS sowie der modifizierter FMG-Algorithmus vorgestellt. Anschließend werden die Grobgittergleichungen für die Navier-Stokes Gleichungen und die Behandlung der Druckkorrektur mit dem modifizierten Algorithmus im Detail beschrieben. Die Unterschiede dieses modifizierten Algorithmus zum Standardverfahren liegen sowohl in der Behandlung der Druckkorrektur auf dem Grobgitter als auch in der Behandlung anderer Variablen, wie z.B. der Geschwindigkeitskomponenten.

6.1 Komponenten von Mehrgitterverfahren

Gittervergrößerung: Zur Generierung von Gittern verschiedener Ebenen wird folgende Vorgehensweise praktiziert: Ausgehend von dem der Geometrie und den Strömungsverhältnissen angepassten feinsten Gitter werden rekursiv gröbere Gitter gebildet, wobei nur jede zweite Gitterlinie in jeder Richtung des Feingitters zur Bildung des nächst größeren Gitters verwendet wird. Ein Grobgitterbilanzvolumen umfasst damit jeweils vier Feingitterbilanzvolumen in zweidimensionalen Fällen und acht Feingitterbilanzvolumen in dreidimensionalen Fällen. Eine Konsequenz davon ist, dass die Residuen auf dem feinen Gitter in einfacher Weise auf das Grobgitter restringiert werden können.

Restriktion: Beim FV-Verfahren wird die Restriktion wie folgt berechnet: Das Residuum einer Grobgitterzelle wird durch Summierung der Residuen der Feingitterzellen, die dem fusionierten Grobgittervolumen entsprechen, bestimmt. Werden Größen, die zu einer Grobgitterzelle gehörenden Feingitterzellen mit h gekennzeichnet, dann lautet die Restriktion des Residuums:

$$R^H = \sum R^h . \quad (6.1)$$

Die für das FAS notwendigen Variablenwerte auf dem Grobgitter werden durch die volumengewichtete Mittelung aus den Werten von der zu einem Grobgitter gehörenden Feingitterzellen berechnet:

$$\bar{\phi}^H = [I_h^H] \bar{\phi}^h = \frac{\sum \delta V^h \bar{\phi}^h}{\sum \delta V^h} \quad (6.2)$$

Beim Standardverfahren ist nicht nur die Startlösung auf dem Grobgitter erforderlich, sondern es ist ebenfalls notwendig, die Massenflüsse an den Kontrollvolumenflächen zu bestimmen. Dabei ist es besonders wichtig, den konservativen Charakter des FV-Verfahrens auch auf dem Grobgitter zu erhalten. Dies erreicht man dadurch, dass der Massenfluß an einer Kontrollvolumenfläche auf dem Grobgitter als Summe der Massenflüsse an den entsprechenden Kontrollvolumenflächen auf dem nächste feineren Gitter gebildet wird:

$$\dot{m}^H = \sum \dot{m}^h . \quad (6.3)$$

Prolongation: Die Prolongation dient der Übertragung der Grobgitterkorrekturen auf das Feingitter. Beim FV-Verfahren auf strukturierten Gittern werden üblicherweise die Korrekturen für Feingitterstützstellen aus den Werten der umliegenden Grobgitterstützstellen linear interpoliert. Die Prolongation der Grobgitterkorrektur auf das feine Gitter erfolgt hier bei zweidimensionalen Gittern mit einer bilinearen Interpolation und bei dreidimensionalen Gittern mit einem auf Gradienten der Variablen basierten Verfahren. Diese Vorgehensweise wurde von Xue (1998) beschrieben.

6.2 Modifizierte Full-Multigrid Methode

Die FMG-Methode wird oft zur Berechnung der Navier-Stokes Gleichung benutzt. Abbildung 4.2 zeigt ein Flussdiagramm mit drei Gitterebenen. Dabei ist die Startlösung des Grobgitters vom nächst feineren Gitter restringiert. Alternativ dazu können auch Startwerte $\bar{\phi}^H$ vom vorherigen Zyklus übernommen werden. Nur die Residuen auf dem feinsten Gitter werden auf das Grobgitter übertragen. Dies führt zu einer modifizierten FMG-Methode mit V-Zyklus, wie in Abbildung 6.1 dargestellt. ν_1 und ν_2 bezeichnen die Vorglättungs- bzw. Nachglättungszahl und ν_0 die Zahl der Relaxationsiteration auf dem größten Gitter.

Im modifizierten FMG-Algorithmus wird die Grobgittergleichung ganz genau wie Gleichung (4.9) konstruiert. Sobald die Näherungslösung berechnet ist, wird die Grobgitterkorrektur durch Gleichung (4.10) bestimmt. Wenn die Residuen auf dem feinen Gitter

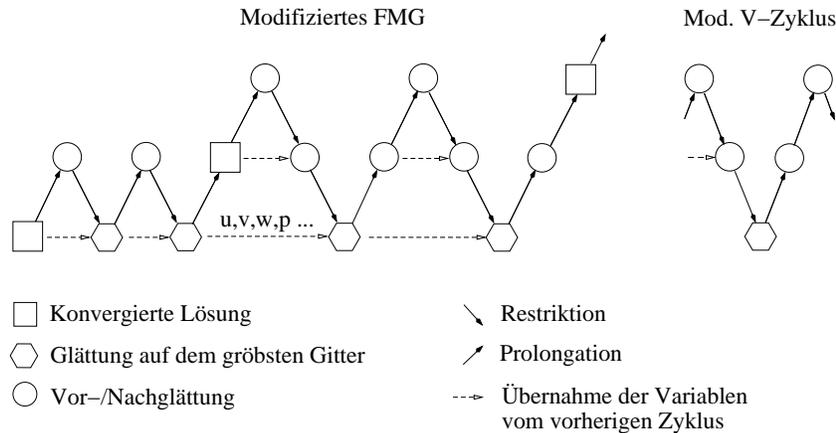


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des modifizierten Full Multigrid-Verfahrens

verschwinden, ist Gleichung (4.9) identisch erfüllt und es wird keine Korrektur zur Feingitterlösung produziert, da $\tilde{\phi}^H$ durch $\bar{\phi}^H$ initialisiert wird. Zuerst wird die Lösung auf dem grössten Gitter erreicht. Da die Lösung auf dem Grobgitter nur wenige Kontrollvolumen benötigt, sind sowohl die Zahl der erforderlichen Iterationen als auch die Rechenzeit klein. Die konvergierte Lösung wird dann zum nächst feineren Gitter extrapoliert und dient als Startlösung für den Zweigitteralgorithmus. Nachdem die Lösung auf diesem Gitter erreicht ist, wird sie entsprechend auf das folgende feinere Gitter übertragen. Dies wird solange fortgesetzt, bis das feinste Gitter erreicht ist.

In Abbildung 6.1 symbolisiert der Pfeil \searrow die Residuenübertragung vom feinen Gitter auf das folgende gröbere Gitter. Der Pfeil \nearrow entspricht den Prozessen beim Übergang vom groben Gitter zum folgenden feineren Gitter, die die Korrekturberechnung auf dem groben Gitter, die Prolongation der Grobgitterkorrektur und die Korrektur der vorhergehenden Näherungslösung auf dem feinen Gitter umfassen. Durch den gestrichelten Pfeil werden die Prozesse gekennzeichnet, bei denen Variablen vom vorhergehenden Zyklus direkt übernommen werden.

Der einzige Unterschied zwischen dem Standard-FMG und dem modifizierten FMG-Algorithmus besteht in der verwendeten Startlösung. Im modifizierten FMG-Algorithmus wird kein Restriktionsoperator I_h^H für die Gittervariable benötigt. Die Restriktion des Residuums kann einfach durch Summierung der entsprechenden Residuen auf dem feinen Gitter bestimmt werden.

6.3 Grobgittergleichungen

Bei der Lösung der Navier-Stokes Gleichungen ist zu beachten, dass der konvektive Term in der Impulsgleichung nichtlinear von der Geschwindigkeit abhängig ist, der Druckgradient hingegen linear vom Druck. Zur übersichtlicheren Darstellung der Diskretisierung

werden die Impulsgleichung (3.18) für die Geschwindigkeitskomponente u_i wie folgt umgeschrieben:

$$L\{u_i\} + D_i(p) + S\{u_i\} = f\{u_i\} , \quad (6.4)$$

hierin repräsentiert $L\{u_i\}$ den impliziten Anteil der Impulsbilanz, $D_i(p)$ die Abhängigkeit vom Druck und $S\{u_i\}$ den expliziten Anteil in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Die rechte Seite $f\{u_i\}$ stellt den von den Lösungsvariablen unabhängigen Anteil dar, der auf dem feinsten Gitter Null und auf dem Grobgitter von Null verschieden wird.

Nach der Durchführung einiger SIMPLE-Iterationszyklen auf dem feinen Gitter wird eine Näherungslösung der Geschwindigkeit und des Druckes ermittelt, die die Impulsgleichung bis auf ein Residuum $\tilde{R}^h\{\tilde{u}_i^h\}$ erfüllt,

$$\tilde{L}^h\{\tilde{u}_i^h\} + \tilde{D}_i^h(\tilde{p}^h) + \tilde{S}^h\{\tilde{u}_i^h\} = f^h\{u_i\} + \tilde{R}^h\{\tilde{u}_i^h\} . \quad (6.5)$$

Hierbei bezeichnet \tilde{u}_i^h die Näherungslösung der Geschwindigkeit und \tilde{p}^h die des Druckes.

Während der Iteration werden Korrekturen der Geschwindigkeiten und des Druckes eingeführt,

$$u_i^h = \tilde{u}_i^h + \delta u_i^h , \quad p^h = \tilde{p}^h + \delta p^h , \quad (6.6)$$

um das Residuum $\tilde{R}^h\{u_i\}$ verschwinden zu lassen,

$$L^h\{u_i^h\} + D_i^h(p^h) + S^h\{u_i^h\} = f^h\{u_i\} . \quad (6.7)$$

Subtraktion der Gleichung (6.5) von Gleichung (6.7) liefert eine Beziehung, die als Basis für die Mehrgitterkopplung dient:

$$L^h\{u_i^h\} + D_i^h(p^h) + S^h\{u_i^h\} = \underbrace{\tilde{L}^h\{\tilde{u}_i^h\} + \tilde{S}^h\{\tilde{u}_i^h\} + \tilde{D}_i^h\{\tilde{p}^h\} - \tilde{R}^h\{\tilde{u}_i^h\}}_{\text{konstant}} . \quad (6.8)$$

Für eine skalare Variable ϕ , wie z.B. die turbulente kinetische Energie k oder die turbulente Dissipation ϵ erhält man folgende ähnliche Gleichung:

$$L^h\{\phi^h\} + S\{\phi^h\} = \underbrace{\tilde{L}^h\{\tilde{\phi}^h\} + \tilde{S}\{\tilde{\phi}^h\} - \tilde{R}^h\{\tilde{\phi}^h\}}_{\text{konstant}} . \quad (6.9)$$

Durch Verwendung dieser Kopplungsgleichungen können die Korrekturen auf dem Grobgitter berechnet werden. Dafür können FAS- oder CS-Verfahren verwendet werden. Der FMG-FAS Verfahren und der modifizierte Mehrgitteralgorithmus werden hier verwendet.

Auf dem Grobgitter mit dem Index H lautet die Gleichung der Geschwindigkeit u_i :

$$\begin{aligned} & \tilde{L}^H\{\tilde{u}_i^H\} + \tilde{D}_i^H(\tilde{p}^H) + \tilde{S}^H\{\tilde{u}_i^H\} = f^H\{u_i\} \\ & = \underbrace{\bar{L}^H\{\bar{u}_i^H\} + \bar{D}_i^H\{\bar{p}^H\} + \bar{S}^H\{\bar{u}_i^H\} - [I_h^H]\tilde{R}^h\{\tilde{u}_i^h\}}_{\text{konstant}} , \end{aligned} \quad (6.10)$$

und die für skalare Variablen ϕ :

$$\tilde{L}^H \{\tilde{\phi}^H\} + \tilde{S}^H \{\tilde{\phi}^H\} = f^H \{\phi\} = \underbrace{\overline{L}^H \{\overline{\phi}^H\} + \overline{S}^H \{\overline{\phi}^H\} - [I_h^H] \tilde{R}^h \{\tilde{\phi}^h\}}_{\text{konstant}} . \quad (6.11)$$

In diesen Gleichungen sind die Variablen \overline{u}_i^H , \overline{p}^H und $\overline{\phi}^H$ die Startwerte der Geschwindigkeitskomponente, des Druckes und der Skalare, während die \tilde{u}_i^H , \tilde{p}^H und $\tilde{\phi}^H$ die Näherungslösung auf dem Grobgitter bezeichnen. Im modifizierten Algorithmus werden \overline{u}_i^H , \overline{p}^H und $\overline{\phi}^H$ direkt vom letzten Zyklus übernommen. Auf der rechten Seite stehen die Terme $[I_h^H] \tilde{R}^h \{\tilde{u}_i^h\}$ und $[I_h^H] \tilde{R}^h \{\tilde{\phi}^h\}$ die restringierten Residuen, die auf dem feinen Gitter berechnet werden. Die andere Terme werden basierend auf der Startlösung für das Grobgitter berechnet. Die gesamte rechte Seite ist konstant auf dem Grobgitter H .

Zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung wird neben den Impulsgleichungen auch eine Druckkorrekturgleichung auf dem Grobgitter gelöst. Die Behandlung der Druckkorrekturgleichung benötigt besondere Aufmerksamkeit innerhalb des Mehrgitteralgorithmus. Die Gleichung für die Druckkorrektur im SIMPLE-Algorithmus kann in einer allgemeinen Form folgendermaßen

$$Q_m = L\{p'\} + Q_m^* = f\{p'\} , \quad (6.12)$$

geschrieben werden. Hierbei ist die rechte Seite $f\{p'\}$ auf dem feinsten Gitter Null und auf dem Grobgitter von Null verschieden. Q_m^* und Q_m sind die Massenflussdefekte, die sich aus den Massenflüssen vor (\dot{m}^*) und nach (\dot{m}) der Verbesserung durch die Druckkorrektur ergeben:

$$Q_m^* = \dot{m}_e^* + \dot{m}_w^* + \dot{m}_n^* + \dot{m}_s^* , \quad Q_m = \dot{m}_e + \dot{m}_w + \dot{m}_n + \dot{m}_s . \quad (6.13)$$

Nach der Durchführung von einigen SIMPLE-Iterationszyklen auf dem feinen Gitter ist die Lösung noch nicht konvergiert, Gleichung (6.12) führt zum Residuum $R^h\{p'\}$

$$R^h\{p'\} = Q_m^h - f^h\{p'\} . \quad (6.14)$$

Die Gleichung für die Druckkorrektur auf dem Grobgitter lautet wie folgt

$$Q_m^H = L\{p'^H\} + Q_m^{*H} = f^H\{p'\} = \underbrace{\overline{Q}_m^H - [I_h^H] R^h\{p'^h\}}_{\text{konstant}} . \quad (6.15)$$

Hierbei sind \overline{Q}_m^H die initialen Massenflussdefekte, die vom letzten Zyklus übernommen werden. Weil Gleichung (6.15) mit einer von Null verschiedenen rechten Seite $f^H\{p'\}$ auf dem Grobgitter gelöst wird, soll der globale Massenflussdefekt durch die Summe von $f^H\{p'\}$ auf dem ganzen Gebiet $\sum f^H\{p'\}$ korrigiert werden.

Mit den Initialwerten \overline{u}_i^H , \overline{p}^H und $\overline{\phi}^H$ werden ν_1 SIMPLE-Relaxationszyklen durchgeführt. Als Ergebnis ergibt sich die Grobgitterlösung inklusive dem Grobgitterdruck. Aus dieser können die Korrekturen

$$\delta u_i^H = \tilde{u}_i^H - \overline{u}_i^H , \quad \delta p^H = \tilde{p}^H - \overline{p}^H , \quad \delta \phi^H = \tilde{\phi}^H - \overline{\phi}^H \quad (6.16)$$

bestimmt, auf das feine Gitter prolongiert

$$\delta u_i^h = [I_H^h] \delta u_i^H, \quad \delta p^h = [I_H^h] \delta p^H, \quad \delta \phi^h = [I_H^h] \delta \phi^H. \quad (6.17)$$

und dort zur Näherungslösung addiert werden

$$\bar{u}_i^h = \tilde{u}_i^h + \lambda_u \delta u_i^h, \quad \bar{p}^h = \tilde{p}^h + \lambda_p \delta p^h, \quad \bar{\phi}^h = \tilde{\phi}^h + \lambda_\phi \delta \phi^h. \quad (6.18)$$

Um den Mangel an Glättung der Grobgitterkorrektur auszugleichen wird hier zur Stabilisierung ein Unterrelaxationsfaktor für die Korrektur von λ ($0 < \lambda \leq 1$) verwendet. Die verbesserte Lösung wird als Startlösung auf dem feinen Gitter h für die Nachglättung oder für den nächsten Zyklus weiter benutzt.

Die Grobgitterkorrektur des Druckes δp^H wird direkt durch Gleichung (6.16) bestimmt. Diese Vorgehensweise unterscheidet sich vom Verfahren aus der Arbeit (Lien und Leschziner 1994a, Orth 1991), wobei die sogenannte Korrektur der Druckkorrektur berechnet wird. Zudem wird die Massenflusskorrektur aus der Geschwindigkeitskorrektur δu_i^h berechnet und zum vorher bestimmten Massenfluß addiert.

6.4 Maßnahmen zur Turbulenzsimulation

Aufgrund des hochgradig nichtlinearen Charakters der Transportgleichungen ist eine gesonderte Behandlung der turbulenten Scheinzähigkeit und der Quellterme bei der Anwendung vom Mehrgitterverfahren erforderlich. In der Arbeit von Yan (1999) ist eine Vorgehensweise, die am Beispiel von zwei- und dreidimensionalen turbulenten Strömungen beschrieben wird, angegeben. Sie weist folgende charakteristische Eigenschaften auf:

- Festhalten der turbulenten Scheinzähigkeit auf dem Grobgitter: Nachdem die konvergierte Lösung bekommen wird, bleibt die dazu entsprechende turbulente Scheinzähigkeit auf dem Grobgitter bei weiterer Mehrgitterprozedur unverändert.
- Die rechte Seite $f^H\{\phi\}$ der Grobgittergleichung (6.11) wird wie folgt behandelt: Wenn $f^H\{\phi\} > 0$, wird sie auf der rechten Seite berücksichtigt, ansonsten wird sie als "Pseudodissipation" zur Stärkung der Diagonaldominanz in der Form $\frac{f^H\{\phi\}}{\phi^H}$ zum zentralen Koeffizienten geschlagen.
- Um zu vermeiden, dass die Turbulenzgrößen k und ϵ nach der Prolongation negativ werden, wird für sie folgende Formulierung verwendet:

$$\bar{\phi}^h = |\tilde{\phi}^h + \lambda_\phi [I_H^h] \delta \phi^H|.$$

Nach den bisher gemachten Erfahrungen bringt diese Behandlung eine gute Stabilität.

Die Randbedingungen werden auf allen Gitterstufen genauso wie in jedem einzelnen Gitteralgorithmus behandelt. Die Neumannbedingung, die für die Druckkorrektur an allen Rändern auf dem feinsten Gitter verwendet werden, sind auch auf die Druckkorrektur auf dem größeren Gitter anwendbar.

Kapitel 7

Validierung des Simulationsverfahrens

Das oben beschriebene Mehrgitterverfahren sowie die modifizierte Variante für die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen wird nun zur Simulation von Strömung und Wärmeübergang in komplexen Konfigurationen verwendet. Zur zuverlässigen Bewertung des Algorithmus wird dieser im Zusammenhang mit Konvektionsschemata höherer Ordnung, QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convection Kinematics) (Leonard 1979) und TVD-typ MUSCL (Monotonic Upstream-centred Scheme for Conservation Laws) (Van Leer 1977) getestet. Der Gittereinfluss wird durch die Verwendung mehrerer exemplarischer Gitter mit sehr speziellen Eigenschaften geprüft. Verwendet werden kartesische, ungleichmäßige, stark verzerrte und nicht-orthogonale Gittervarianten. Schließlich wird das Mehrgitterverfahren in Kombination mit zwei verschiedenen Turbulenzmodellen eingesetzt, dem $k - \epsilon$ Modell mit Wandfunktionen sowie dem LL $k - \epsilon$ Modell von Lien und Leschziner (1993). Untersucht werden: eine zweidimensionale Nischenströmung, die Strömung über eine rückwärtsgerichtete Stufe, bzw. einen zweidimensionalen Modellhügel und ferner eine dreidimensionale Rohrkrümmerströmung mit starkem Sekundärwirbel.

Bei allen Simulationen wird die Lösung als konvergiert betrachtet, wenn die Summe der absoluten Residuen von Impuls-, Kontinuitäts- und Turbulenztransportgleichung bezogen auf dem Gesamtmassenfluss auf dem feinsten Gitter unter ein Konvergenzkriterium von 10^{-3} gefallen ist. Im Fall der Nischenströmung ergibt sich der Gesamtmassenfluss dabei aus dem Produkt von Geschwindigkeit und Breite der bewegten Wand.

Zur Verbesserung der Lösungsstabilität werden alle Gleichungen relaxiert. Der Unterrelaxationsfaktor beträgt 0.7 für die Geschwindigkeit, 0.3 für den Druck und 0.7 für die Turbulenzvariablen. Innerhalb des Mehrgitteralgorithmus wird der Unterrelaxationsfaktor der Grobgitterkorrektur λ für alle Gittervariablen im zweidimensionalen Fall auf 1.0 und im dreidimensionalen Fall auf 0.7 gesetzt.

Alle zweidimensionalen Simulationen werden auf einer Silicon Graphics Workstation durchgeführt, die dreidimensionalen auf einer Cray-T3E. Die Rechengeschwindigkeit wird anhand der benötigten CPU-Zeit [sec] angegeben. Als Referenz dient eine Simulation auf

Basis des Eingitterverfahrens, auf die alle weiteren Rechnungen bezogen werden.

In diesem Kapitel sollen die numerischen Eigenschaften und die Leistungsfähigkeit des Mehrgitterverfahrens untersucht werden. Deshalb werden nicht die Strömungsphänomene im Detail analysiert, sondern die Auswertung konzentriert sich vielmehr auf den Residuenverlauf und die erforderlichen Rechenzeiten.

7.1 2D laminare Strömung in rechteckiger Nische

Der erste Testfall zur Bewertung der Mehrgittermethode ist die durch eine bewegte Wand getriebene Nischenströmung mit quadratischem Querschnitt. Die Leistung des Standardverfahrens und der modifizierten Methode können daran verglichen werden. Die Simulation wird für verschiedene Reynoldszahlen von 100 bis 1000, gebildet mit der Geschwindigkeit der bewegten Wand und der Nischenbreite, sowie mit den Konvektionsschemata MUSCL und QUICK durchgeführt. Es kommen Gitter mit bis zu fünf Gitterebenen von 16×16 bis 256×256 Gitterzellen und ungleichmäßiger Gitterverteilung zum Einsatz. Die Vorglättungszahl ν_1 und die Nachglättungszahl ν_2 sind auf 3 bzw. 2 fixiert, die Relaxationszahl auf dem größten Gitter ν_0 beträgt 8.

In Tabelle 7.1 ist die benötigte CPU-Zeit bei Verwendung des Eingitterverfahrens dargestellt. Es zeigt sich, dass beim QUICK-Schema weniger CPU-Zeit benötigt wird als bei MUSCL, um eine konvergierte Lösung zu erhalten. Für die Simulation des Eingitterverfahrens bei $Re=100$ benötigt das QUICK-Schema ungefähr 10% weniger CPU-Zeit als das MUSCL-Schema. Bei höherer Reynoldszahl und auf feineren Gittern fällt dieser Unterschied unter 5%. In den folgenden Simulationen werden deshalb beide Schemata verwendet.

Wie weiterhin zu erkennen ist, benötigt das Eingitterverfahren auf groben Gittern mit Zunahme der Reynoldszahl mehr CPU-Zeit während auf feineren Gittern die gegenteilige Tendenz beobachtet wird. Dieses Verhalten ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Orth (1991), Lien und Leschziner (1994a) sowie Lilik u. a. (1997).

Die in den Tabellen 7.2-7.5 dargestellten Ergebnisse der Anwendung der FMG-Methode zeigen ein erhebliches Anwachsen des Beschleunigungsfaktors mit wachsender Gitterpunktzahl. Im Allgemeinen vermindert sich die Effektivität, wenn die Reynoldszahl erhöht wird. Dieses Phänomen ist in Einklang mit den Beobachtungen von Vanka (1986b) sowie Lien und Leschziner (1994a). Dabei ist darauf hinzuweisen, dass der modifizierte FMG-Algorithmus ein hohes Potential für feine Gitter mit 128×128 und 256×256 Gitterzellen besitzt. Der Beschleunigungsfaktor ist ungefähr 40 % höher als beim Standard FMG, das in der Arbeit von Lien und Leschziner (1994a) auch eine ähnliche Beschleunigung erreicht. Die Gründe für die hier höhere Effektivität liegen möglicherweise in der unterschiedlichen Programmstruktur. Zu einem ähnlichen Schluss kann man auf Grund der Ergebnisse auf dem feinsten Gitter von 256×256 Gitterzellen und drei Gitterstufen kommen. Die Anwendung des Mehrgitteralgorithmus mit vier oder fünf Gitterebenen ergibt einen sehr hohen

| Gitter | MUSCL | | | QUICK | | |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | Re=100 | Re=400 | Re=1000 | Re=100 | Re=400 | Re=1000 |
| 16 × 16 | 0.118 | 0.169 | 0.195 | 0.107 | 0.159 | 0.179 |
| 32 × 32 | 1.241 | 1.396 | 1.437 | 1.077 | 1.196 | 1.348 |
| 64 × 64 | 21.928 | 20.708 | 19.723 | 19.856 | 18.718 | 18.264 |
| 128 × 128 | 598.289 | 520.074 | 468.733 | 567.453 | 492.232 | 444.678 |
| 256 × 256 | 10994.886 | 8454.691 | 7581.088 | 9689.093 | 8204.583 | 7573.642 |

Tabelle 7.1: Benötigte CPU-Zeit des Eingitterverfahrens in Abhängigkeit von Konvektionsschema und Reynoldszahl auf verschiedenen Gittern für die rechteckige Nischenströmung

Beschleunigungsfaktor. Abbildung 7.1 zeigt Gitter und Stromlinien für die laminare Nischenströmung bei $Re = 400$.

| Gitter | Re | mod. FMG | | | FMG-FAS | | |
|-----------|-----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | 100 | 400 | 1000 | 100 | 400 | 1000 |
| 16 × 16 | CPU-Zeit | 0.118 | 0.169 | 0.195 | 0.107 | 0.159 | 0.179 |
| | Be. Fakt. | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 32 × 32 | CPU-Zeit | 0.367 | 0.540 | 0.733 | 0.381 | 0.562 | 0.842 |
| | Be. Fakt. | 2.934 | 2.215 | 1.839 | 2.826 | 2.128 | 1.601 |
| 64 × 64 | CPU-Zeit | 1.626 | 1.698 | 1.957 | 1.774 | 2.083 | 2.766 |
| | Be. Fakt. | 12.212 | 11.024 | 9.333 | 11.192 | 8.986 | 6.603 |
| 128 × 128 | CPU-Zeit | 9.333 | 7.480 | 7.423 | 11.539 | 9.922 | 10.848 |
| | Be. Fakt. | 60.801 | 65.806 | 59.905 | 49.177 | 49.610 | 40.992 |
| 256 × 256 | CPU-Zeit | 42.375 | 30.480 | 26.710 | 53.804 | 43.778 | 44.792 |
| | Be. Fakt. | 228.651 | 288.864 | 283.551 | 180.081 | 187.400 | 169.085 |

Tabelle 7.2: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor in Abhängigkeit von Mehrgitteralgorithmen und Gitterebenen mit QUICK Schema für die rechteckige Nischenströmung, größtes Gitter 16 × 16

In Tabelle 7.6 ist zu erkennen, dass sich die durch MUSCL und QUICK ermittelten Geschwindigkeiten an der vertikalen Mittelachse in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Vanka (1986b) befinden, die mit einem HYBRID Schema berechnet wurden. Es wird deutlich, dass die mit Hilfe Konvektionsschemata höherer Ordnung errechneten Daten bereits für weniger Gitterzellen eine gitterunabhängige Lösung liefern.

7.2 2D laminare Strömung in verzerrierter Nische

Viele technische Anwendungen erfordern stark verzerrte Gitter, durch die die Effizienz der Lösungsprozedur beeinflusst wird. Deshalb wird der Effekt eines schrägen Gitters auf den

| Gitter | Re | mod. FMG | | | FMG-FAS | | |
|-----------|-----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | 100 | 400 | 1000 | 100 | 400 | 1000 |
| 32 × 32 | CPU-Zeit | 1.077 | 1.196 | 1.348 | 1.077 | 1.196 | 1.348 |
| | Be. Fakt. | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 64 × 64 | CPU-Zeit | 2.675 | 2.627 | 3.204 | 3.350 | 2.909 | 3.323 |
| | Be. Fakt. | 7.422 | 7.125 | 5.700 | 5.927 | 6.435 | 5.496 |
| 128 × 128 | CPU-Zeit | 10.538 | 9.031 | 8.150 | 12.834 | 11.739 | 10.338 |
| | Be. Fakt. | 53.615 | 54.505 | 54.562 | 44.024 | 41.931 | 43.014 |
| 256 × 256 | CPU-Zeit | 52.657 | 41.035 | 33.371 | 62.891 | 58.344 | 47.435 |
| | Be. Fakt. | 184.004 | 214.563 | 226.953 | 154.062 | 140.624 | 159.664 |

Tabelle 7.3: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor in Abhängigkeit von Mehrgitteralgorithmen und Gitterebenen mit QUICK Schema für die rechteckige Nischenströmung, größtes Gitter 32 × 32

| Gitter | Re | mod. FMG | | | FMG-FAS | | |
|-----------|-----------|----------|---------|---------|---------|---------|--------|
| | | 100 | 400 | 1000 | 100 | 400 | 1000 |
| 64 × 64 | CPU-Zeit | 19.856 | 18.718 | 18.264 | 19.856 | 18.718 | 18.264 |
| | Be. Fakt. | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 128 × 128 | CPU-Zeit | 37.843 | 31.827 | 29.811 | 41.563 | 32.683 | 30.892 |
| | Be. Fakt. | 14.930 | 15.466 | 14.917 | 13.594 | 15.060 | 14.395 |
| 256 × 256 | CPU-Zeit | 83.477 | 67.190 | 58.692 | 117.661 | 106.853 | 82.871 |
| | Be. Fakt. | 116.069 | 131.040 | 129.040 | 82.348 | 76.786 | 91.215 |

Tabelle 7.4: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor in Abhängigkeit von Mehrgitteralgorithmen und Gitterebenen mit QUICK Schema für die rechteckige Nischenströmung, größtes Gitter 64 × 64

modifizierten Mehrgitteralgorithmus anhand einer um 27° verscherten Nische untersucht. In Abbildung 7.2a sind die verwendeten vier Mehrgitterstufen von 16 × 16 bis 128 × 128 dargestellt. Die Berechnung für Re=1000 wird anstelle von QUICK und MUSCL mit Hilfe des *flux-blending* Schema mit einem Faktor von 0.5 durchgeführt.

In Tabelle 7.7 wird die CPU-Zeit des Eingitterverfahrens aufgelistet. Für diesen Testfall benötigt das QUICK-Schema wieder ungefähr 10% weniger CPU-Zeit als das MUSCL-Schema. Tabelle 7.8 zeigt CPU-Zeit und den Beschleunigungsfaktor des Mehrgitterverfahrens in Abhängigkeit von Reynoldszahl, Konvektionsschema und Mehrgitteralgorithmus. Zum Vergleich ist der von Lien und Leschziner (1994a) für dieselbe Strömung ermittelte Beschleunigungsfaktor angegeben. Auf den groben Gittern von 32 × 32 sowie 64 × 64 benötigen beide FMG-Methoden ungefähr gleiche CPU-Zeit. Auf dem feinen Gitter von 128 × 128 ist das modifizierte FMG deutlich effizienter (ungefähr 40%) als das Standard FMG-FAS. Die Resultate zeigen, dass das modifizierte FMG ein hohes Potential auf dem

| Re Gitter | mod. FMG | | | FMG-FAS | | | Lien (1994a) | | |
|------------------|----------|--------|--------|---------|--------|--------|--------------|------|------|
| | 100 | 400 | 1000 | 100 | 400 | 1000 | 100 | 400 | 1000 |
| 16×16 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.0 | 0.9 | 0.8 |
| 32×32 | 2.934 | 2.215 | 1.839 | 2.826 | 2.128 | 1.601 | 3.9 | 2.5 | 1.8 |
| 64×64 | 12.212 | 11.024 | 9.333 | 11.192 | 8.986 | 6.603 | 19.9 | 10.6 | 6.2 |
| 128×128 | 60.801 | 65.806 | 59.905 | 49.177 | 49.610 | 40.992 | 43.7 | 26.5 | 16.8 |

Tabelle 7.5: Beschleunigungsfaktor in Abhängigkeit von Mehrgitteralgorithmen und Gitterebenen mit QUICK Schema für die rechteckige Nischenströmung

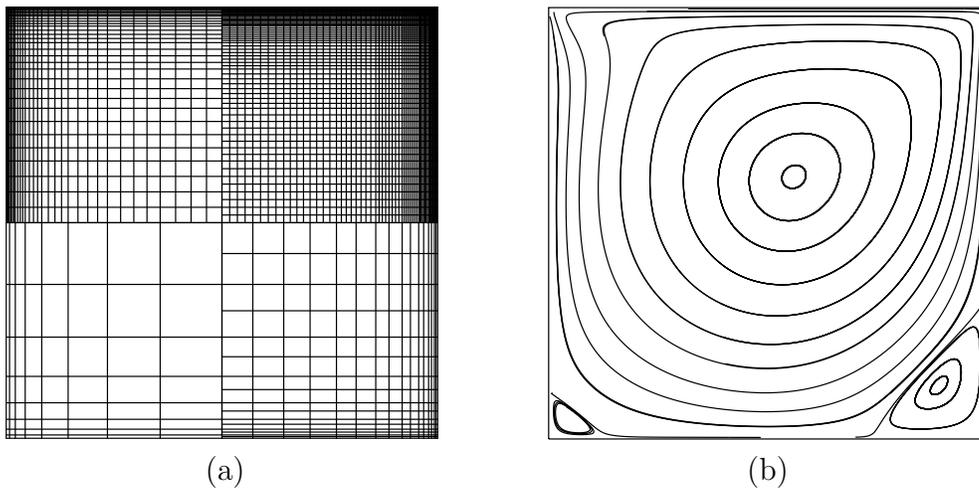


Abbildung 7.1: (a) Geometrie und vier Gitterebenen; (b) Stromlinien für die rechteckige Nischenströmung bei $Re=400$

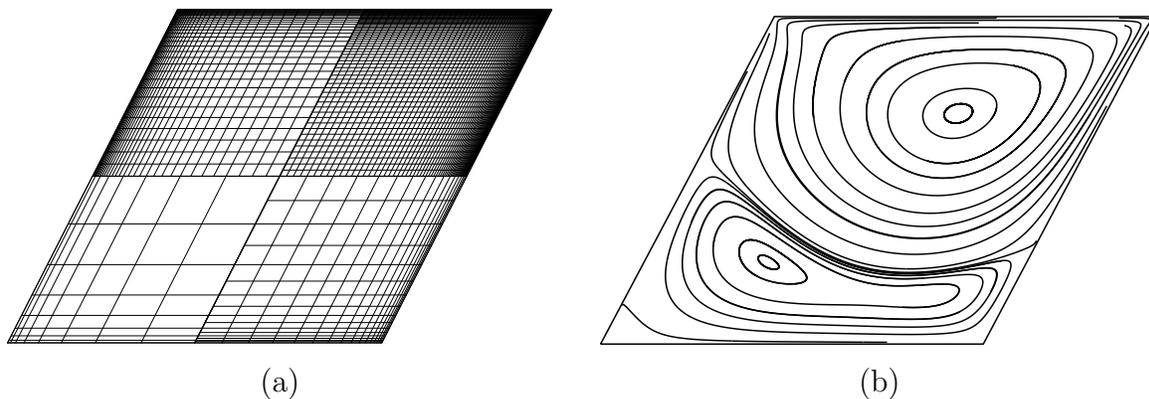


Abbildung 7.2: (a) Geometrie und vier Mehrgitterebenen; (b) Stromlinien für die Strömung in einer verzerrten Nische bei $Re=400$

feinen Gitter besitzt. Dieses Verhalten entspricht dem für die quadratische Nische und orthogonalem Gitter ermittelten. Die Gitterschräge hat offenbar keinen großen Einfluss

| Gitter | mod. FMG (MUSCL) | | mod. FMG (QUICK) | | HYBRID | | |
|-----------|------------------|---------|------------------|---------|-----------|--------|---------|
| | Re=100 | Re=1000 | Re=100 | Re=1000 | Gitter | Re=100 | Re=1000 |
| 16 × 16 | -0.193 | -0.250 | -0.191 | -0.260 | 40 × 40 | -0.202 | -0.258 |
| 32 × 32 | -0.206 | -0.322 | -0.206 | -0.321 | 80 × 80 | -0.209 | -0.338 |
| 64 × 64 | -0.211 | -0.363 | -0.211 | -0.367 | 160 × 160 | -0.212 | -0.381 |
| 128 × 128 | -0.212 | -0.381 | -0.212 | -0.379 | 320 × 320 | -0.213 | -0.387 |
| 256 × 256 | -0.213 | -0.382 | -0.213 | -0.380 | 320 × 320 | -0.213 | -0.387 |

Tabelle 7.6: Vergleich der maximal auftretenden Rückströmungsgeschwindigkeit auf der vertikalen Nischenmittelachse für unterschiedliche Schemata

| Gitter | MUSCL | | QUICK | | FLUX-B. |
|-----------|------------|------------|---------|---------|---------|
| | $Re = 100$ | $Re = 400$ | Re=100 | Re=400 | Re=1000 |
| 16 × 16 | 0.130 | 0.249 | 0.117 | 0.234 | 0.177 |
| 32 × 32 | 1.429 | 2.104 | 1.325 | 1.864 | 1.677 |
| 64 × 64 | 26.793 | 32.463 | 24.719 | 29.733 | 31.212 |
| 128 × 128 | 794.761 | 880.566 | 761.931 | 846.387 | 949.273 |

Tabelle 7.7: Eingitterverfahren: CPU-Zeit in Abhängigkeit von Reynoldszahl und Konvektionsschema für die Strömung in einer verzerrten Nische

auf die Effizienz des modifizierten Mehrgitteralgorithmus.

Im Vergleich zur Untersuchung von Lien und Leschziner (1994a) ist der Beschleunigungsfaktor des jetzigen FMG-FAS für das vierstufige Gitter bis zu 60% höher. Auf dem groben Gitter ist er hingegen geringer. Abbildung 7.2b zeigt Stromlinien für $Re=400$, die mit MUSCL berechnet wurden.

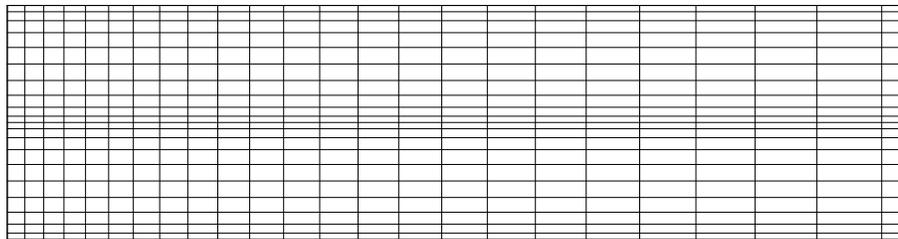
7.3 2D laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe

Die Strömung über eine zurückspringende Stufe ist schematisch in Abbildung 7.3 dargestellt. Hinter der Stufe bildet sich eine große Rezirkulationszone aus. In der gewählten Konfiguration beträgt die Stufenhöhe H gerade die Hälfte der Kanalhöhe. Das Rechengebiet hat eine Länge von 10 Stufenhöhen, um am Ausgang eine Neumannsbedingung verwenden zu können. Am Eintritt wird ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil vorgegeben. Die Reynoldszahl, gebildet mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit und der Eingangshöhe, beträgt $Re = 100$. Um Vergleichbarkeit mit der Untersuchung von Orth (1991) sicherzustellen, werden dieselben Relaxationsfaktoren, nämlich 0.7 für die Geschwindigkeit und 0.2 für die Druckkorrektur benutzt.

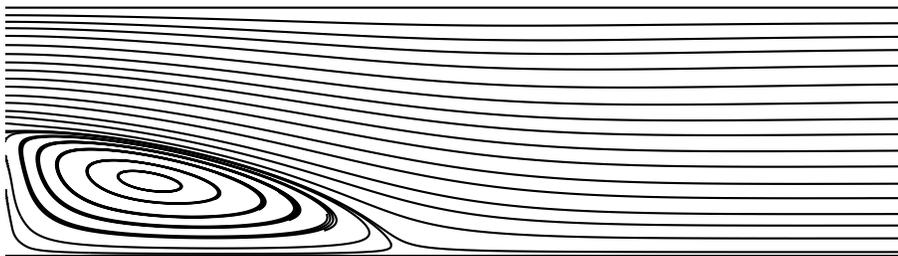
Tabelle 7.9 zeigt das Verhalten des Mehrgitterverfahrens auf dem größten Gitter von

| | | mod. FMG (QUICK) | | | FMG-FAS | | | Lien (1994a) | |
|-----------|-----------|------------------|--------|---------|---------|--------|---------|--------------|------|
| | | QUICK | | Flux-B. | QUICK | | Flux-B. | | |
| Gitter | Re | 100 | 400 | 1000 | 100 | 400 | 1000 | 100 | 400 |
| 16 × 16 | CPU-Zeit | 0.130 | 0.249 | 0.177 | 0.117 | 0.234 | 0.177 | – | – |
| | Be. Fakt. | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | – | – |
| 32 × 32 | CPU-Zeit | 0.404 | 0.851 | 0.547 | 0.445 | 0.908 | 0.571 | – | – |
| | Be. Fakt. | 3.280 | 2.190 | 3.066 | 2.978 | 2.053 | 2.937 | 3.3 | 2.1 |
| 64 × 64 | CPU-Zeit | 1.827 | 2.639 | 1.888 | 2.102 | 3.398 | 2.766 | – | – |
| | Be. Fakt. | 13.530 | 11.267 | 16.532 | 11.760 | 8.750 | 11,284 | 15.5 | 11.7 |
| 128 × 128 | CPU-Zeit | 12.425 | 12.000 | 15.886 | 15.436 | 16.804 | 23.358 | – | – |
| | Be. Fakt. | 61.322 | 70.532 | 59.755 | 49.361 | 50.368 | 40.640 | 27.2 | 31.3 |

Tabelle 7.8: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor für die Simulation einer verzerrten Nischenströmung mit verschiedenen Mehrgitterprozeduren, Gitterebenen und Konvektionsschemata, größtes Gitter 16×16



(a)



(b)

Abbildung 7.3: (a) Gitterverteilung auf dem größten Gitter; (b) Stromlinien für die laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe bei $Re=100$

40×20 Zellen. Die Simulation mit dem QUICK-Schema bestätigt die Ergebnisse der Nischenströmungen. Dargestellt ist der Beschleunigungsfaktor des modifizierten FMG, der bis zu 80% höher ist als der des FMG-FAS auf dem 160×80 Gitter. Für das feinste Gitter lassen sich mit dem modifizierten FMG und vier Gitterebenen ein Beschleunigungsfaktor von 167 und eine CPU-Zeit von 41 Sekunden erzielen.

| Gitter | CPU-Zeit | | | Beschleunigungsfaktor | | |
|------------------|----------|--------|---------|-----------------------|---------|-------------|
| | EG | m. FMG | FMG-FAS | m. FMG | FMG-FAS | Orth (1991) |
| 40×20 | 0.900 | 0.900 | 0.900 | 1.000 | 1.000 | — |
| 80×40 | 12.863 | 2.541 | 4.052 | 5.062 | 3.174 | — |
| 160×80 | 360.272 | 9.201 | 19.715 | 38.923 | 18.274 | 9.850 |
| 320×160 | 6840.364 | 40.793 | — | 167.684 | — | — |

Tabelle 7.9: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor in Abhängigkeit von Mehrgitterprozedur und Konvektionsschema für die Strömung über eine zurückspringende Stufe bei $Re=100$, größtes Gitter 40×20

Hier sollte erwähnt werden, dass sich mit dem FMG-FAS und vier Gitterebenen keine konvergente Lösung erzielen lässt. Ein Grund dafür liegt darin, dass die vom feineren Gitter restringierte Geschwindigkeit nicht zum parabolischen Profil am Eintritt passt. Dies beeinträchtigt möglicherweise die Stabilität der Standardprozedur des FMG-FAS. Außerdem gibt es einen großen Unterschied zwischen dem Beschleunigungsfaktor des FMG-FAS und dem von Orth (1991). Die Gründe liegen möglicherweise in der Programmstruktur.

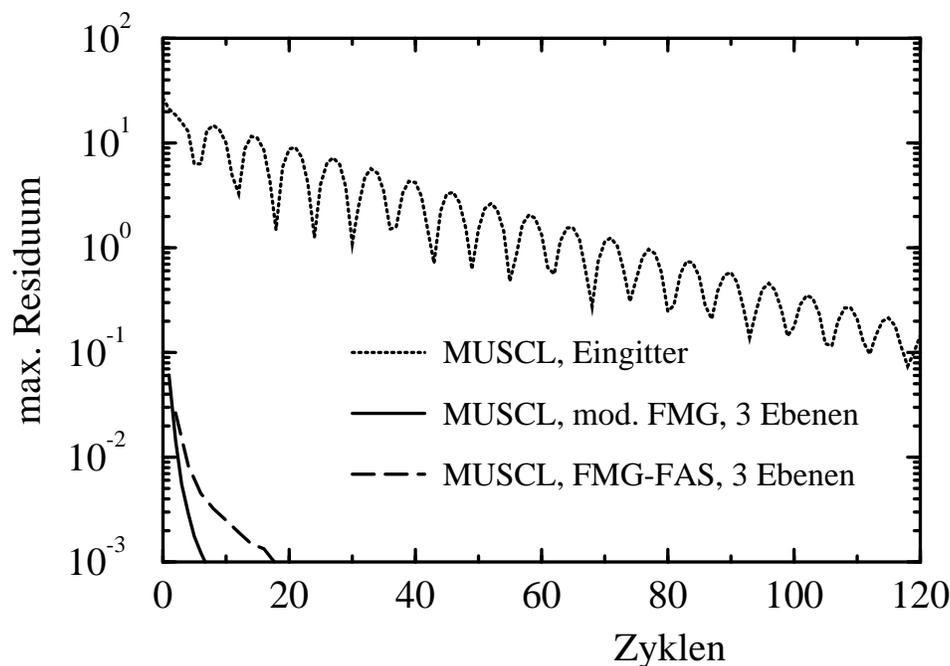


Abbildung 7.4: Residuenverlauf über der Zyklanzahl für die Strömung über eine zurückspringende Stufe mit 160×80 Gitterzellen bei $Re=100$

Tabelle 7.10 zeigt das Verhalten des modifizierten FMG auf dem größten Gitter mit

| | MUSCL | | | QUICK | | |
|------------------|----------|----------|-----------|----------|----------|-----------|
| | CPU-Zeit | | | CPU-Zeit | | |
| Gitter | SG | mod. FMG | Be. Fakt. | SG | mod. FMG | Be. Fakt. |
| 80×40 | 14.620 | 14.620 | 1.000 | 12.683 | 12.683 | 1.000 |
| 160×80 | 368.645 | 35.857 | 10.281 | 360.272 | 34.533 | 10.433 |
| 320×160 | 7102.170 | 71.409 | 99.457 | 6840.364 | 71.242 | 96.016 |

Tabelle 7.10: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor in Abhängigkeit von Mehrgitterprozedur für die Strömung über eine zurückspringende Stufe bei $Re=100$, größtes Gitter 80×40

80×40 Zellen. Die Rechnung wurde mit MUSCL bzw. QUICK durchgeführt. Es gibt leichte Unterschiede zwischen den Beschleunigungsfaktoren. Das QUICK-Schema benötigt ein bisschen weniger Rechenzeit, während MUSCL einen höheren Beschleunigungsfaktor erreicht. Der in Abbildung 7.4 dargestellte Konvergenzablauf unterstützt die Beobachtung, dass die modifizierte FMG-Prozedur ohne Restriktion der Geschwindigkeit eine stabile und effiziente Konvergenz zeigt.

7.4 2D turbulente Strömung über ein Hügelmodell

Das hier gewählte Beispiel einer inkompressiblen, zweidimensionalen, turbulenten Innenströmung über ein Hügelmodell wird vielfach zur Bewertung von Turbulenzmodellen verwendet und soll hier Bewertung des Mehrgitterverfahrens verwendet werden. Die untersuchte Konfiguration ist der experimentellen Studie von Almeida u.a. (1993) entnommen. Die mit der Hügelhöhe und der mittleren Einströmgeschwindigkeit gebildete Reynoldszahl beträgt $Re=6000$. Als Einströmbedingung wird eine voll entwickelte turbulente Kanalströmung angenommen. Die Strömung löst im Bereich der Hügelspitze ab und es bildet sich stromabwärts eine Rezirkulationszone aus, die sich im Experiment bis $x = 135$ mm erstreckt.

Für diese Konfiguration werden numerische Simulationen auf unterschiedlichen Gittern unter Verwendung des $k - \epsilon$ Modells mit Wandfunktion sowie dem LL $k - \epsilon$ Modell durchgeführt. Das Mehrgitterverfahren basiert auf fünf Stufen, von 25×10 bis 400×160 Gitterzellen ungleichmäßiger Verteilung. Für die beiden Turbulenzmodelle werden zwei unterschiedliche Gittersysteme verwendet. Die Parameter des Mehrgitterverfahrens werden wie folgt eingestellt: Vorglättungszahl $\nu_1 = 4$, Nachglättungszahl= 2, Iterationszahl für das größte Gitter $\nu_0 = 8$. Die Anwendung von FMG-FAS in Kombination mit dem Standard $k - \epsilon$ Modell liefert keine konvergente Lösung, wenn das größte Gitter nur 25×10 Gitterzellen besitzt. Der dennoch ausgewertete Beschleunigungsfaktor für den modifizierten FMG-Algorithmus beträgt 36, wie aus Tabelle 7.11 zu entnehmen ist.

Die Tabellen 7.12–7.14 zeigen das Verhalten des modifizierten FMG bzw. des Standard

| Gitter | SG | mod. FMG | Be. Faktor |
|------------------|-----------|----------|------------|
| 25×10 | 0.377 | 0.377 | 1.000 |
| 50×20 | 3.171 | 2.273 | 1.395 |
| 100×40 | 30.563 | 13.610 | 2.246 |
| 200×80 | 772.776 | 72.007 | 10.732 |
| 400×160 | 12468.871 | 328.169 | 36.067 |

Tabelle 7.11: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor des modifizierten FMG für die turbulente Strömung über ein 2D Hügelmodell mit dem $k - \epsilon$ Modell, größtes Gitter 25×10

FMG-FAS mit dem $k - \epsilon$ Modell auf verschiedenen Gitterebenen. Das modifizierte FMG erreicht auf vier Gitterebenen einen Beschleunigungsfaktor von 38.4, während dieser beim Standard FMG-FAS 12.1 beträgt.

| Gitter | CPU-Zeit | | | Be. Fakt. | |
|------------------|-----------|----------|----------|-----------|---------|
| | SG | mod. FMG | FMG-FAS | mod. FMG | FMG-FAS |
| 50×20 | 3.171 | 3.171 | 3.171 | 1.000 | 1.000 |
| 100×40 | 30.563 | 15.145 | 23.648 | 1.939 | 1.292 |
| 200×80 | 772.776 | 78.272 | 164.372 | 9.873 | 4.704 |
| 400×160 | 12468.871 | 324.583 | 1029.491 | 38.415 | 12.112 |

Tabelle 7.12: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor verschiedenstufiger Mehrgitterprozeduren für die Strömung über ein Hügelmodell mit dem $k - \epsilon$ Modell, größtes Gitter 50×20

| Gitter | CPU-Zeit | | | Be. Fakt. | |
|------------------|-----------|----------|----------|-----------|---------|
| | SG | mod. FMG | FMG-FAS | mod. FMG | FMG-FAS |
| 100×40 | 30.563 | 30.563 | 30.563 | 1.000 | 1.000 |
| 200×80 | 772.718 | 157.580 | 278.800 | 4.904 | 2.772 |
| 400×160 | 12468.871 | 599.381 | 1580.110 | 20.803 | 7.891 |

Tabelle 7.13: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor verschiedenstufiger Mehrgitterprozeduren für die Strömung über ein Hügelmodell mit dem $k - \epsilon$ Modell, größtes Gitter 100×40

| Gitter | CPU-Zeit | | | Be. Fakt. | |
|-----------|-----------|----------|----------|-----------|---------|
| | SG | mod. FMG | FMG-FAS | mod. FMG | FMG-FAS |
| 200 × 80 | 772.718 | 772.718 | 772.718 | 1.000 | 1.000 |
| 400 × 160 | 12468.871 | 2233.317 | 3656.589 | 5.573 | 3.410 |

Tabelle 7.14: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor zweistufiger Mehrgitterprozeduren für die Strömung über ein Hügelmodell mit dem $k - \epsilon$ Modell

Die Tabellen 7.15–7.17 zeigen die Rechenzeiten der beiden Mehrgitterverfahren im Vergleich in Kombination mit dem dem LL $k - \epsilon$ Modell. Wie aus den Ergebnissen zu erkennen ist, hat der modifizierte Algorithmus ein besseres Verhalten als das Standardverfahren, allerdings ist die Konvergenzrate nicht gleichbleibend wie bei den laminaren Fällen.

| Gitter | CPU-Zeit | | | Be. Fakt. | |
|-----------|-----------|----------|---------|-----------|---------|
| | SG | mod. FMG | FAS-FMG | mod. FMG | FAS-FMG |
| 50 × 20 | 4.525 | 4.525 | 4.525 | 1.000 | 1.000 |
| 100 × 40 | 47.462 | 14.893 | 19.646 | 3.186 | 2.415 |
| 200 × 80 | 923.487 | 85.894 | 110.457 | 10.751 | 8.361 |
| 400 × 160 | 14361.002 | 396.117 | 774.637 | 36.254 | 18.539 |

Tabelle 7.15: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor verschiedenstufiger Mehrgitterprozeduren für die Strömung über ein Hügelmodell mit dem LL $k - \epsilon$ Modell, größtes Gitter 50 × 20

| Gitter | CPU-Zeit | | | Be. Fakt. | |
|-----------|-----------|----------|----------|-----------|---------|
| | SG | mod. FMG | FAS-FMG | mod. FMG | FAS-FMG |
| 100 × 40 | 44.590 | 44.590 | 44.590 | 1.000 | 1.000 |
| 200 × 80 | 923.487 | 158.329 | 280.230 | 5.833 | 3.295 |
| 400 × 160 | 14361.022 | 992.602 | 1255.192 | 14.468 | 11.441 |

Tabelle 7.16: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor verschiedenstufiger Mehrgitterprozeduren für die Strömung über ein Hügelmodell mit dem LL $k - \epsilon$ Modell, größtes Gitter 100 × 40

| Gitter | CPU-Zeit | | | Be. Fakt. | |
|------------------|-----------|----------|----------|-----------|---------|
| | SG | mod. FMG | FAS-FMG | mod. FMG | FAS-FMG |
| 200×80 | 923.487 | 923.487 | 923.487 | 1.000 | 1.000 |
| 400×160 | 14361.022 | 2459.859 | 4014.104 | 5.838 | 3.578 |

Tabelle 7.17: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor zweistufiger Mehrgitterprozeduren für die Strömung über ein Hügelmodell mit dem LL $k - \epsilon$ Modell

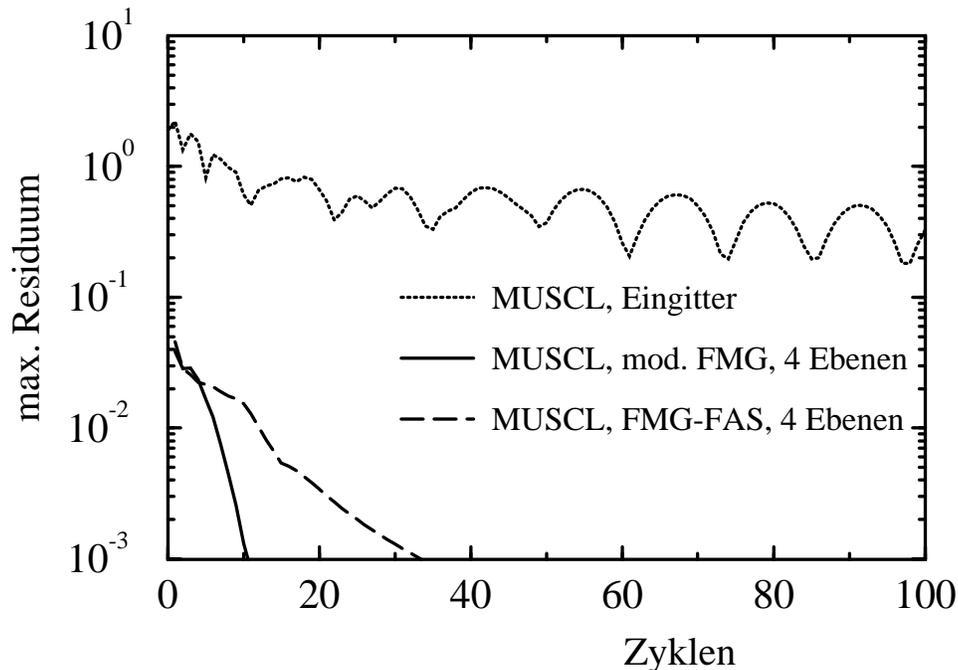


Abbildung 7.5: Residuenverlauf über der Zyklenzahl für die Strömung über ein Hügelmodell mit dem LL $k - \epsilon$ Modell

Abbildung 7.5 zeigt den Konvergenzablauf der Rechnung mit dem LL $k - \epsilon$ Modell für Eingitterverfahren bzw. Mehrgitterverfahren. Es wird deutlich, dass das Maximalresiduum bei der modifizierten Methode schneller reduziert wird. Dieses wird möglicherweise dadurch verursacht, dass das Flussfeld in diesem Fall nicht zu den restringierten Turbulenzgrößen auf dem groben Gitter passt. Die turbulente Viskosität $\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \epsilon$ auf dem groben Gitter passt ebenfalls nicht zur restringierten turbulenten Energie k^H bzw. der Dissipationsrate ϵ^H .

Stromlinien für die Simulation mit dem $k - \epsilon$ Modell sowie die horizontale Strömungsgeschwindigkeit an einem Schnitt von $x=0$ mm im Vergleich zu den experimentellen Daten werden in Abbildung 7.6 dargestellt.

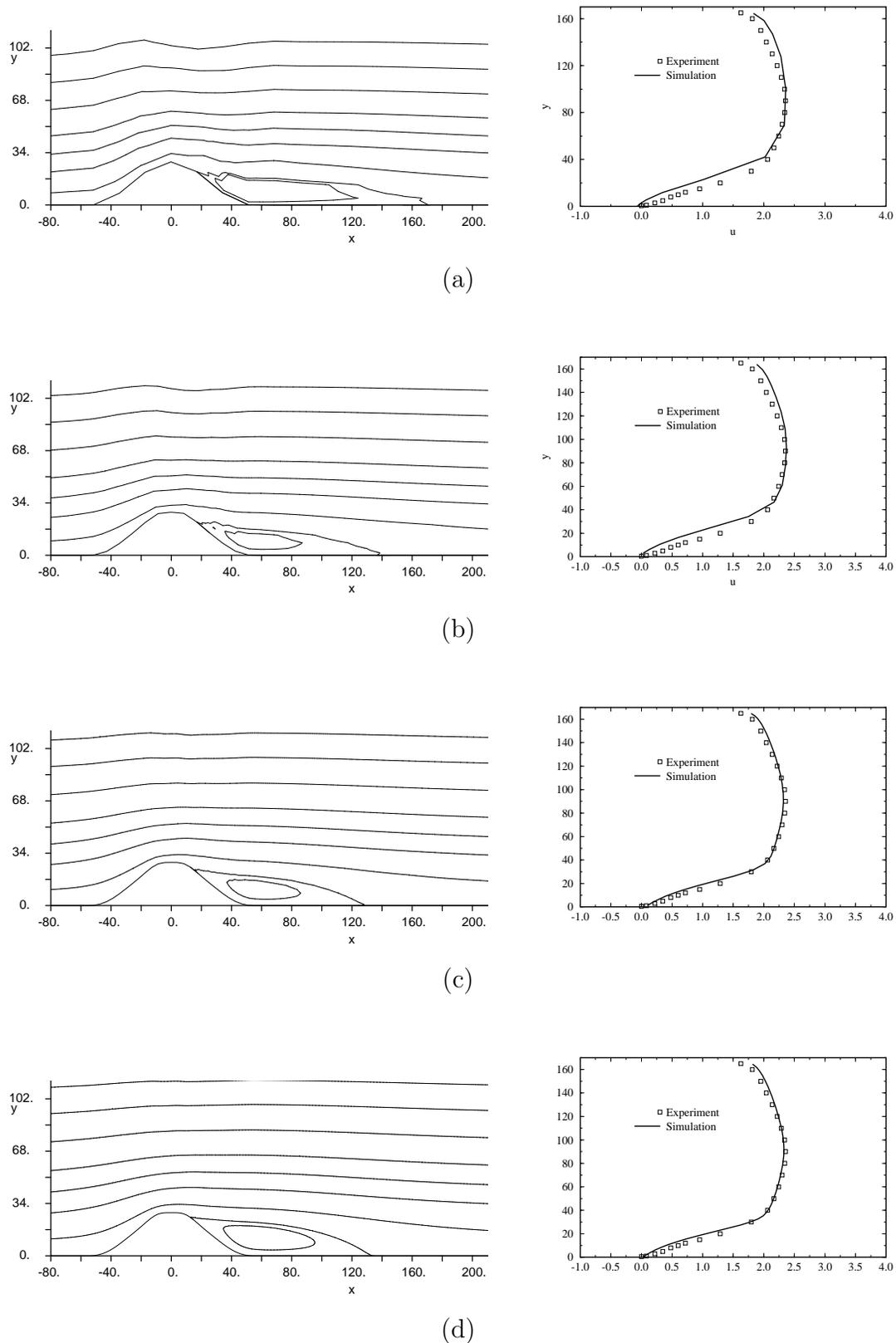


Abbildung 7.6: Stromlinien für die Strömung über einen Hügel, als Ergebnisse von Simulationen auf verschiedenen Gittern mit: (a) 25×10 ; (b) 50×20 ; (c) 100×40 ; (d) 200×80 Gitterzellen

7.5 3D laminare Nischenströmung

Um die modifizierte Mehrgittermethode für dreidimensionale Simulationen bewerten zu können, wird im folgenden die Strömung in einem würfelförmigen Hohlraum (siehe Abbildung 7.7a) untersucht. Für diese Konfiguration sind umfangreiche numerische Vergleichsuntersuchungen, wie z.B. von Vanka (1986a), Orth (1991), Lien und Leschziner (1994a) sowie Lilek u. a. (1997) verfügbar. Für die Simulation der Strömung bei drei betrachteten Reynoldszahlen ($Re=100, 400, 1000$, gebildet mit der Geschwindigkeit der oberen Wand und der Würfelkantenlänge) werden zwei verschiedene vierstufige, kartesische Gittersysteme mit $32^3, 16^3, 8^3, 4^3$ sowie $40^3, 20^3, 10^3$ und 5^3 Gitterzellen verwendet. Zur Wand hin sind alle Gitter verdichtet. Konvektive Flüsse werden mit Hilfe des QUICK-Schemas erfasst.

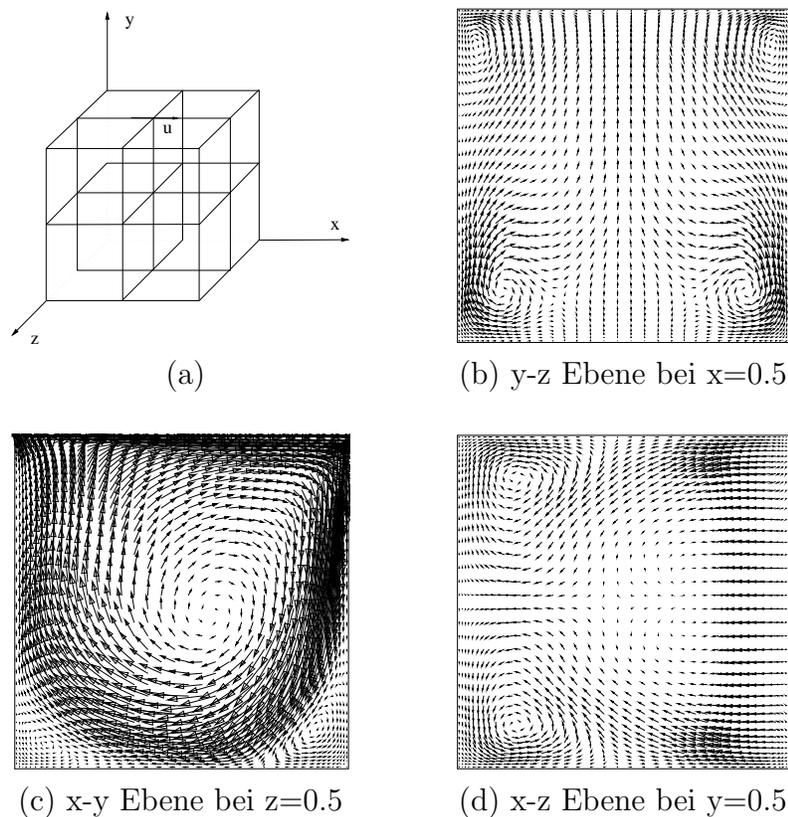


Abbildung 7.7: (a) Geometrie; (b)-(d) Strömungsvektoren an unterschiedlichen Schnittebenen für 3D laminare Nischenströmung

Abbildung 7.8 zeigt den logarithmisch aufgetragenen Residuenverlauf für die Ein- und Mehrgitterberechnung mit 40^3 Volumenzellen bei $Re=400$. Bei der Eingitterberechnung wird das Residuum zu Beginn des Iterationsablaufs relativ schnell reduziert, danach sinkt die Konvergenzgeschwindigkeit jedoch deutlich. Insgesamt werden 83 Zyklen benötigt, um das festgeschriebene Konvergenzkriterium ($\epsilon < 10^{-3}$) zu erreichen. Im Fall der Mehrgitterberechnung bleibt die Konvergenzgeschwindigkeit konstant hoch.

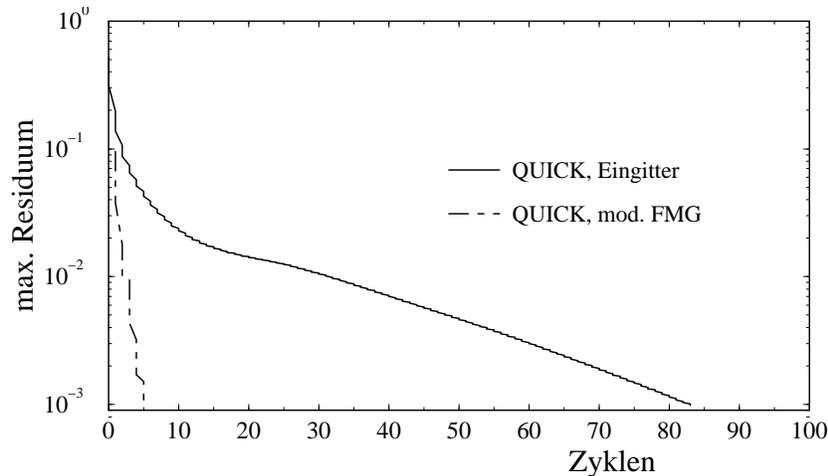


Abbildung 7.8: Residuenverlauf über der Zyklenzahl für 3D laminare Nischenströmung

Rechenzeit und Beschleunigungsfaktoren des modifizierten FMG sowie der Untersuchungen von Lien und Leschziner (1994a) bzw. Lilek u. a. (1997) sind in den Tabellen 7.18 – 7.19 dargestellt. Für $Re=100$ lässt sich mit dem modifizierten FMG ein Beschleunigungsfaktor von 13.05 für Gitter mit 32^3 Volumenzellen bzw. von 20.595 für Gitter mit 40^3 Volumenzellen erreichen. Diese liegen deutlich über den Vergleichswerte in den Arbeiten von Lien und Leschziner (1994a) und Lilek u. a. (1997).

| Gitter | SG | | | mod. FMG | | |
|--------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|
| | Re=100 | Re=400 | Re=1000 | Re=100 | Re=400 | Re=1000 |
| 32^3 | 1217.889 | 1080.142 | 990.745 | 93.322 | 95.450 | 113.866 |
| 40^3 | 3847.424 | 3335.171 | 2903.639 | 186.813 | 190.468 | 190.213 |

Tabelle 7.18: Erforderliche CPU-Zeit für Eingitterverfahren und modifiziertes FMG auf vier Gitterebenen für 3D laminare Nischenströmung

| Gitter | mod. FMG | | | Lien (1994a) | Lilek (1997) | |
|--------|----------|--------|---------|--------------|--------------|---------|
| | Re=100 | Re=400 | Re=1000 | Re=100 | Re=100 | Re=1000 |
| 32^3 | 13.050 | 11.316 | 8.701 | 6.36 | 6.67 | 2.55 |
| 40^3 | 20.595 | 17.510 | 15.265 | 10.08 | – | – |

Tabelle 7.19: Vergleich der Beschleunigungsfaktoren für 3D laminare Nischenströmung

Abbildungen 7.7a, b, c zeigen Strömungsvektoren bei $Re=1000$ in drei ausgesuchten Schnittebenen. In der Symmetrieebene ($y=0.5$) wird die Struktur durch einen großen Wirbel in der Mitte und kleinere Wirbel in den unteren Ecken charakterisiert. Das komplexe sekundäre Wirbelsystem ist an der Zirkulationszone in den Schnittebenen $x=0.5$ und $z=0.5$ deutlich zu erkennen.

7.6 3D Strömung durch einen Rohrkrümmer

In diesem Abschnitt soll das modifizierte FMG Verfahren am Beispiel der Strömung durch einen dreidimensionalen Rohrkrümmer mit starkem Sekundärwirbel untersucht werden. Für diese Strömungskonfiguration existieren experimentelle Ergebnisse als Validierungsbasis sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen. Hiermit wird die Leistung des Mehrgitterverfahrens in dreidimensionalen Strömungen mit starkem Sekundärwirbel demonstriert. Abbildung 7.9 zeigt die Rohrgeometrie des Experiments von Taylor u. a. (1982). Um einen 90-Grad-Krümmter mit einem Mittelradius von 92 mm gruppieren sich die aufwärts und abwärts gerichteten Tangenten mit 0.3 m bzw. 2.0 m Länge. Die Dimension des Querschnitts im Krümmer ($40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$) entspricht dem der Tangenten. Die Volumengeschwindigkeit U_b beträgt 1.98 cm/s für die laminare bzw. 1.00 m/s für die turbulente Strömung, entsprechend einer Reynoldszahl von 790 bzw. 40000 , gebildet mit Einströmgeschwindigkeit U_b und den hydraulischen Durchmesser D . Das Geschwindigkeitsprofil am Rohreingang wird entsprechend dem Experiment als Blockprofil angenommen.

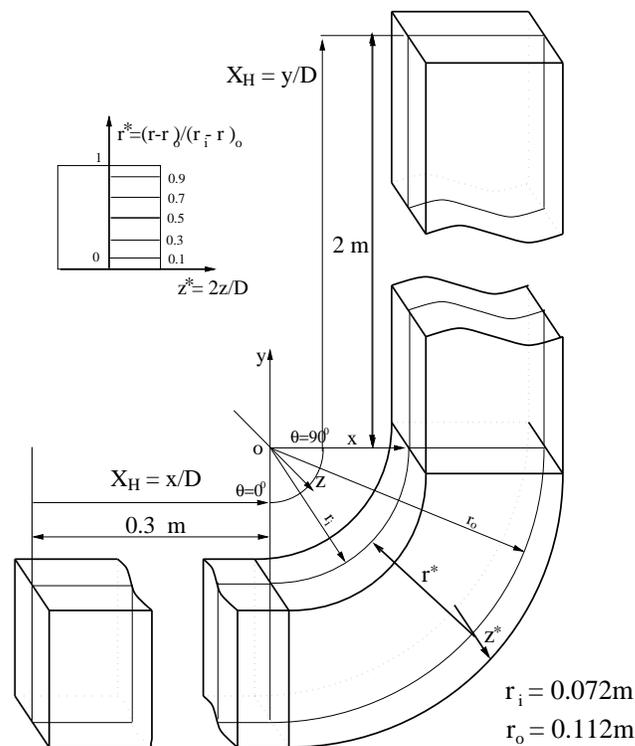


Abbildung 7.9: Geometrie des quadratischen Rohrkrümmers, Taylor u. a. (1982)

Das Gitter mit $128 \times 32 \times 32$ Zellen wird in axialer Richtung im Bereich der Krümmung verdichtet. Der Zulauf und der senkrecht stehende Ausfluss sind in Hauptströmungsrichtung relativ grob aufgelöst. In axialer Richtung ist es in 8 Blöcke eingeteilt, woraus drei Gitterebenen mit $16 \times 32 \times 32$, $8 \times 16 \times 16$ und $4 \times 8 \times 8$ Zellen gebildet werden.

Laminare Strömung

Zunächst werden Simulationen einer laminaren Durchströmung des Rohrkrümmers bei $Re=790$ durchgeführt, wobei zum Vergleich ein Eingitterverfahren sowie das modifizierte FMG zum Einsatz kommen. Die Behandlung der Konvektion erfolgt mit einem TVD-MUSCL Schema. Tabelle 7.20 zeigt das Verhalten des Mehrgitterverfahrens mit drei Gitterebenen.

| Gitter | CPU-Zeit | | Be. Fakt. |
|---------------------------|----------|----------|-----------|
| | SG | mod. FMG | mod. FMG |
| $128 \times 32 \times 32$ | 10972.07 | 2100.07 | 5.22 |

Tabelle 7.20: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor für die Berechnung der laminaren Rohrkrümmerströmung bei $Re=790$

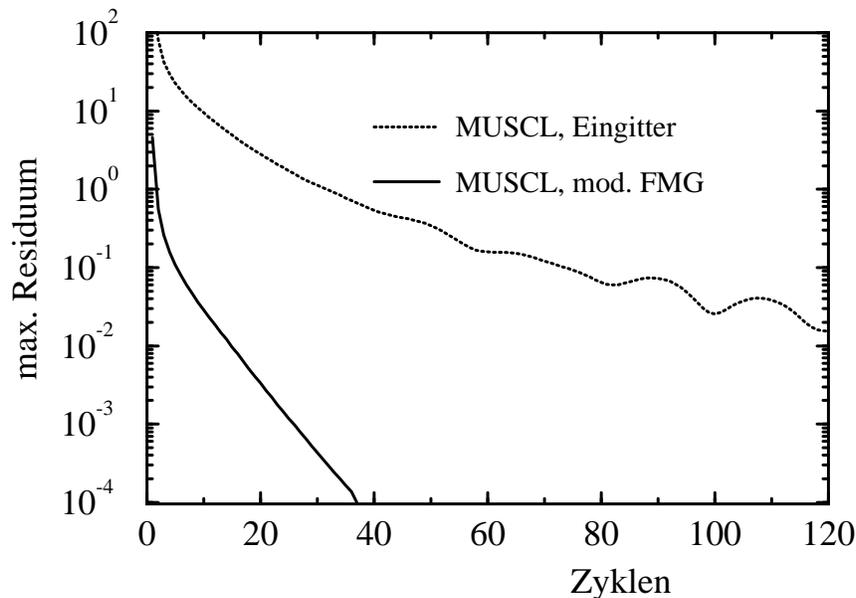


Abbildung 7.10: Residuenverlauf über der Zyklenzahl für laminare Rohrkrümmerströmung bei $Re=790$

Abbildung 7.10 zeigt den logarithmisch aufgetragenen Residuenverlauf für die Ein- und Mehrgitterberechnungen. Beim Mehrgitterverfahren wird das Residuum zu Beginn sehr schnell reduziert, danach sinkt die Konvergenzgeschwindigkeit und das Residuum fällt linear. Trotzdem wird eine Leistungssteigerung um den Faktor 5.22 erreicht.

In Abbildungen 7.11–7.12 sind die auf dem feinsten Gitter ermittelten axialen Geschwindigkeitsprofile im Vergleich zu den Messungen dargestellt. Die numerischen Ergebnisse stimmen sehr gut mit den experimentellen überein.

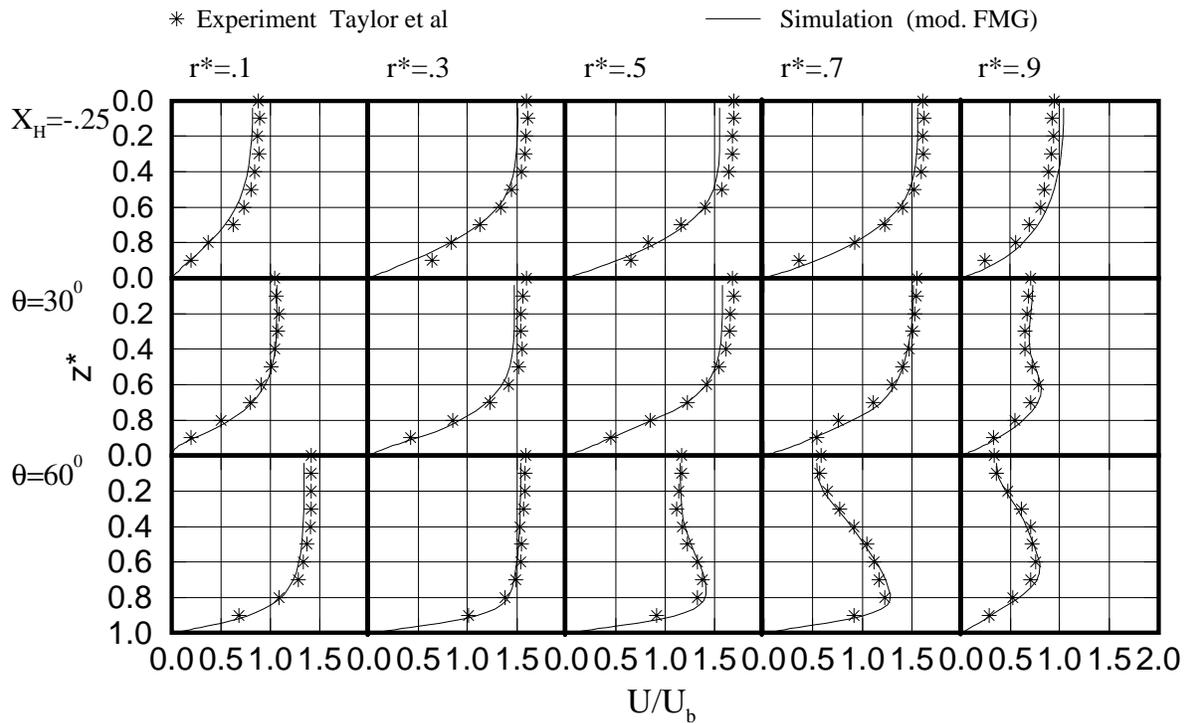


Abbildung 7.11: Axiale Geschwindigkeitsprofile U/U_b an den Rohrquerschnitten $X_H = -0.25$, $\theta = 30^\circ$ und $\theta = 60^\circ$ für laminare Rohrkrümmungsströmung bei $Re=790$

Abbildung 7.13 zeigt die Sekundärströmung in verschiedenen Rohrquerschnitten. Deutlich ist zu erkennen, dass in der am Anfang weitgehend zweidimensionalen Strömung durch die Rohrkrümmung starke axiale Wirbel erzeugt werden. Das Maximum der Axialgeschwindigkeit wandert sehr schnell von der Rohrmitte zur Außenseite des Krümmers. Die Sekundärströmung dagegen bewegt sich entlang der Rohrseitenwände in Richtung der Innenwand und entlang der Symmetrieebene wieder zurück zur Außenwand. Diese großräumige axiale Wirbelstruktur teilt sich im hinteren Teil des Krümmers in zwei Wirbel und setzt sich in den senkrecht stehenden Rohrteil hinein fort.

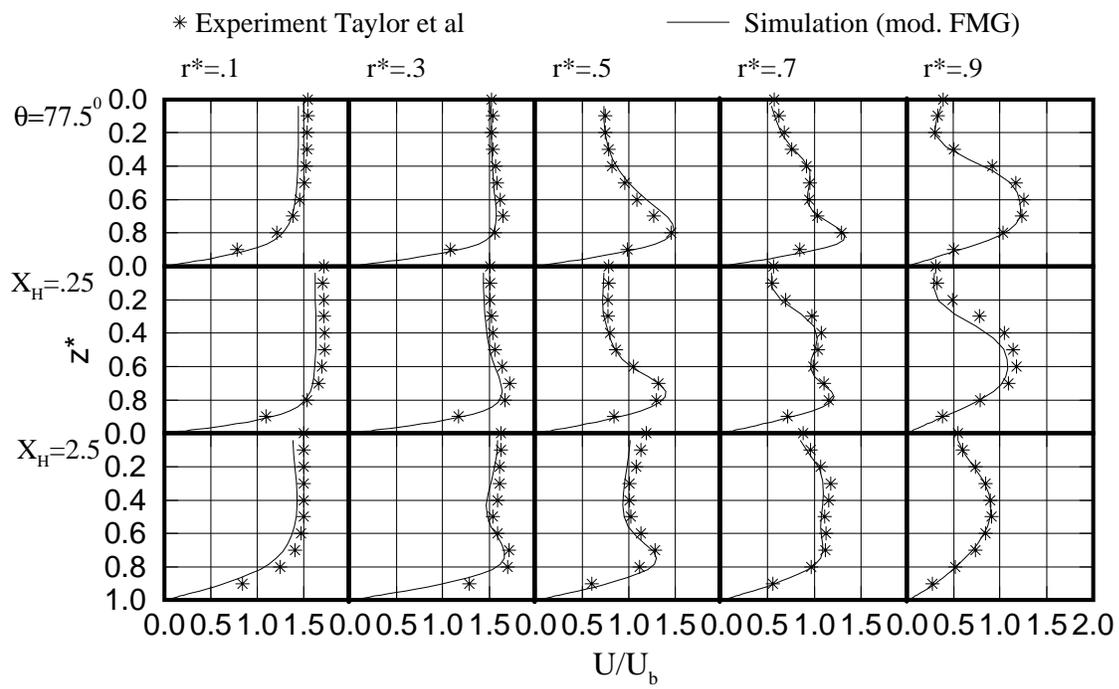


Abbildung 7.12: Axiale Geschwindigkeitsprofile U/U_b an den Rohrquerschnitten $\theta = 77.5^\circ$, $X_H = 0.25$ und $X_H = 2.5$ für laminare Rohrkrümmerströmung bei $Re=790$

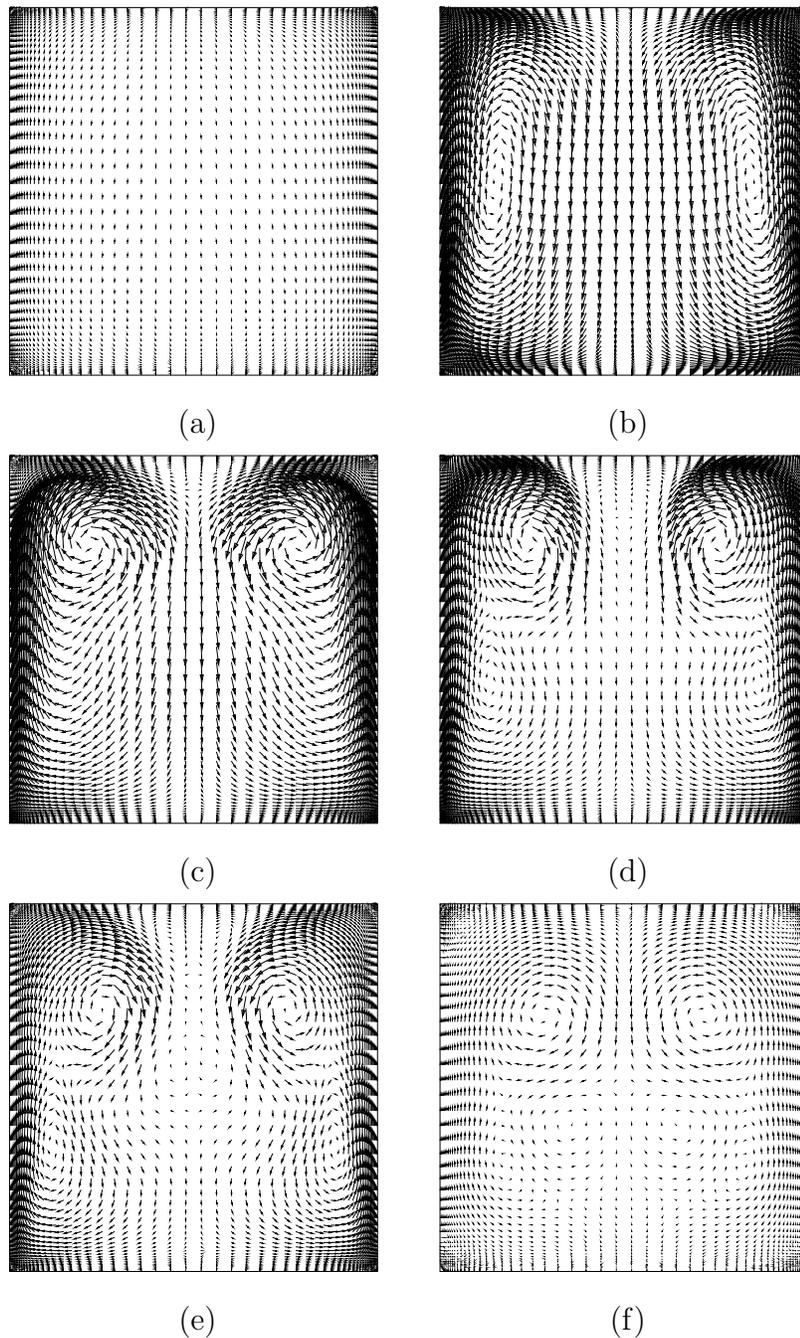


Abbildung 7.13: Richtungsvektoren der Sekundärströmung in den Rohrquerschnitten (a) $X_H = -0.25$, (b) $\theta = 30^\circ$, (c) $\theta = 60^\circ$, (d) $\theta = 77.5^\circ$, (e) $X_H = 0.25$ und (f) $X_H = 2.5$ für laminare Rohrkrümmungsströmung

Turbulente Strömung

Die turbulente Strömung durch den oben beschriebenen Rohrkrümmer bei einer Reynoldszahl von $Re=40000$ wird mit dem LL $k - \epsilon$ Modell berechnet. Die Vorglättungszahl ν_1 beträgt 2 und die Nachglättungszahl ν_2 wird auf 1 gesetzt. Auf dem größten Gitter ist die Glättungszahl $\nu_0 = 8$. Tabelle 7.21 zeigt CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor für eine Simulation auf drei Gitterebenen und einem Konvergenzkriterium von 10^{-5} . Bei dieser komplizierten turbulenten Strömung lässt sich ein Beschleunigungsfaktor von 6.6 erreichen.

| Gitter | CPU-Zeit | | Be. Fakt. |
|---------------------------|----------|----------|-----------|
| | SG | mod. FMG | mod. FMG |
| $128 \times 32 \times 32$ | 24444.58 | 3690.31 | 6.62 |

Tabelle 7.21: CPU-Zeit und Beschleunigungsfaktor für die Simulation einer turbulenten Rohrkrümmerströmung mit dem LL $k - \epsilon$ Modell bei $Re=40000$

Abbildung 7.14 zeigt den Residuenverlauf für die Berechnung der turbulenten Strömung bei $Re=40000$ mit dem LL $k - \epsilon$ Modell und TVD-MUSCL Schema. Wie in Abbildungen 7.15 – 7.16 zu erkennen ist die Übereinstimmung der Geschwindigkeitsprofile zwischen Rechnung und den Messungen sehr gut.

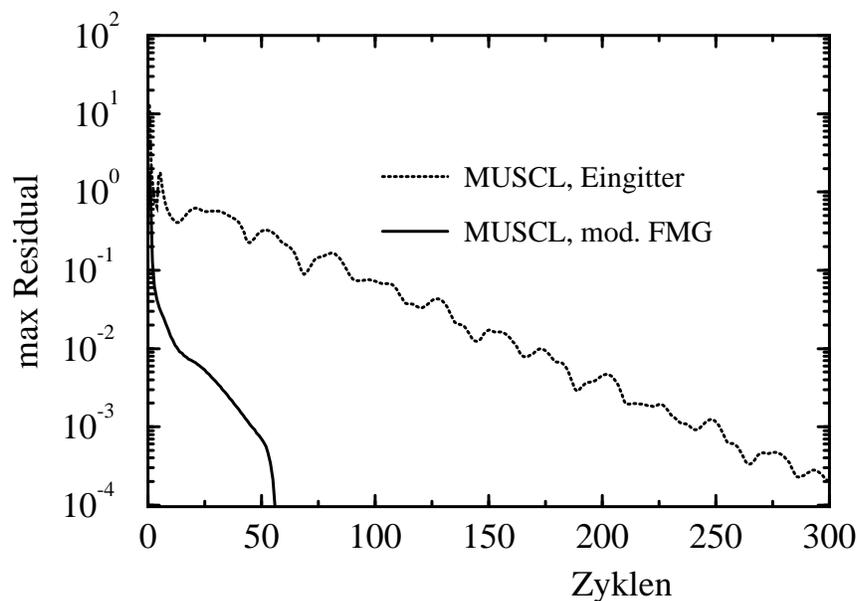


Abbildung 7.14: Residuenverlauf über der Zyklenzahl für turbulente Rohrkrümmerströmung mit dem LL $k - \epsilon$ Modell und MUSCL bei $Re=40000$

In Abbildung 7.17 sind Richtungsvektoren der Sekundärströmung in verschiedenen Rohrquerschnitten dargestellt. Die Sekundärströmung ist etwas weniger stark ausgeprägt als

bei der laminaren Strömung. Die Position der maximalen Axialgeschwindigkeit liegt am Anfang des Krümmers nahe der Innenwand. Sie wandert innerhalb des Krümmungsbereichs langsam nach außen. Am Ausgang des Krümmungsteils liegt sie etwa in der Mitte des Rohres.

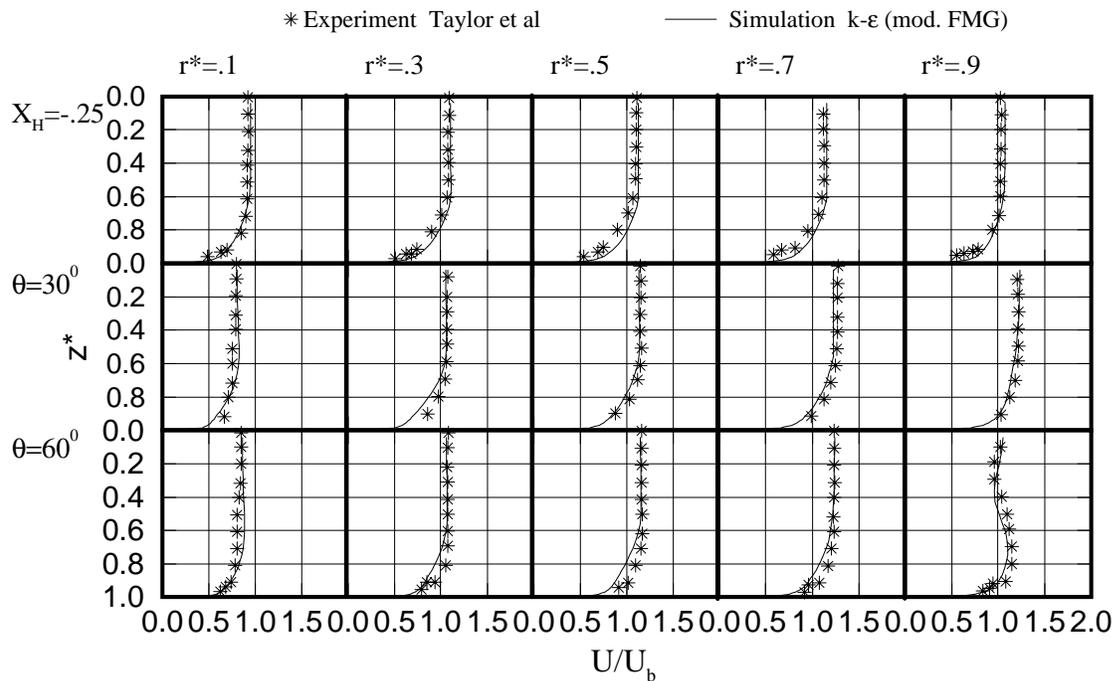


Abbildung 7.15: Axiale Geschwindigkeitsprofile U/U_b an den Rohrquerschnitten $X_H = -0.25$, $\theta = 30^\circ$ und $\theta = 60^\circ$ für die turbulente Rohrkrümmerströmung bei $Re=40000$

Das Wachstum der turbulenten Grenzschicht in dem Zulauf ist langsamer als bei laminarer Strömung. Deshalb ist bei $X_H = -0.25$ die Grenzschicht dünner, wobei sich die Kernströmung im Vergleich zum laminaren Fall weiter in Richtung zur inneren Wandoberfläche bewegt. Sie bleibt an dieser Stelle, ohne Einfluss auf die Strömung geringen Impulses die sich bis $\theta = 60^\circ$ auf dieser Seite akkumuliert. Danach ist die schnelle Ausbildung einer Region niedriger Hauptströmungskomponente an der inneren Wand bis zum Ausgang zu beobachten. Dies korrespondiert mit einer Verlagerung der Kernströmung zur äußeren Wand.

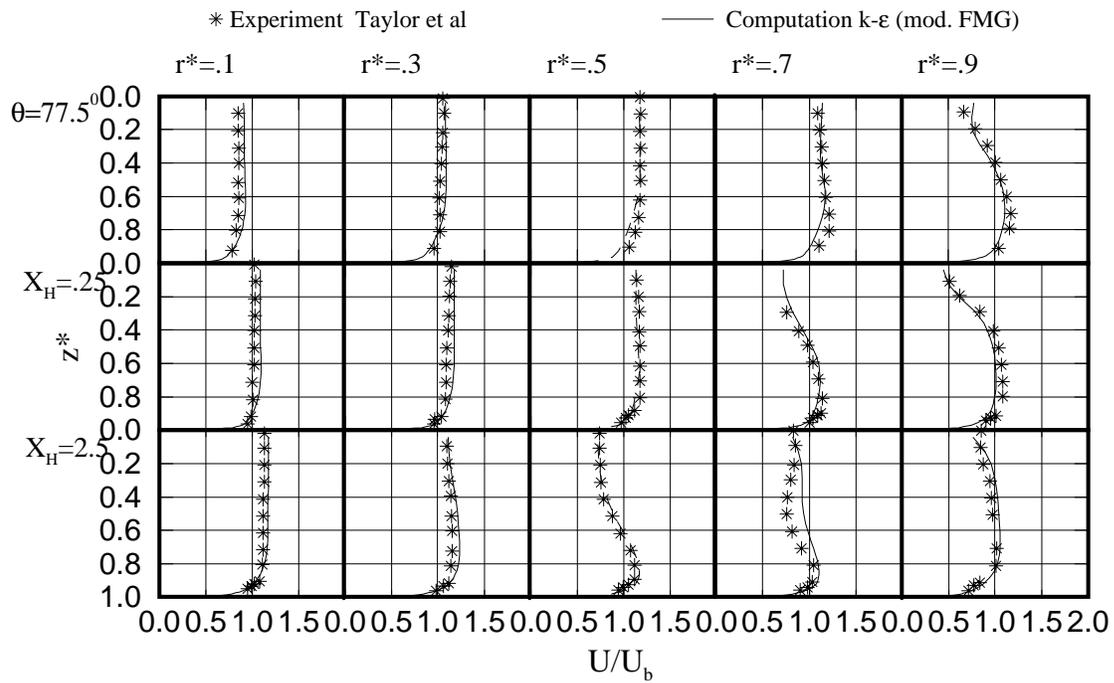


Abbildung 7.16: Axiale Geschwindigkeitsprofile U/U_b in den Rohrquerschnitten $\theta = 77.5^\circ$, $X_H = 0.25$ und $X_H = 2.5$ für die turbulente Rohrkrümmerströmung bei $Re = 40000$

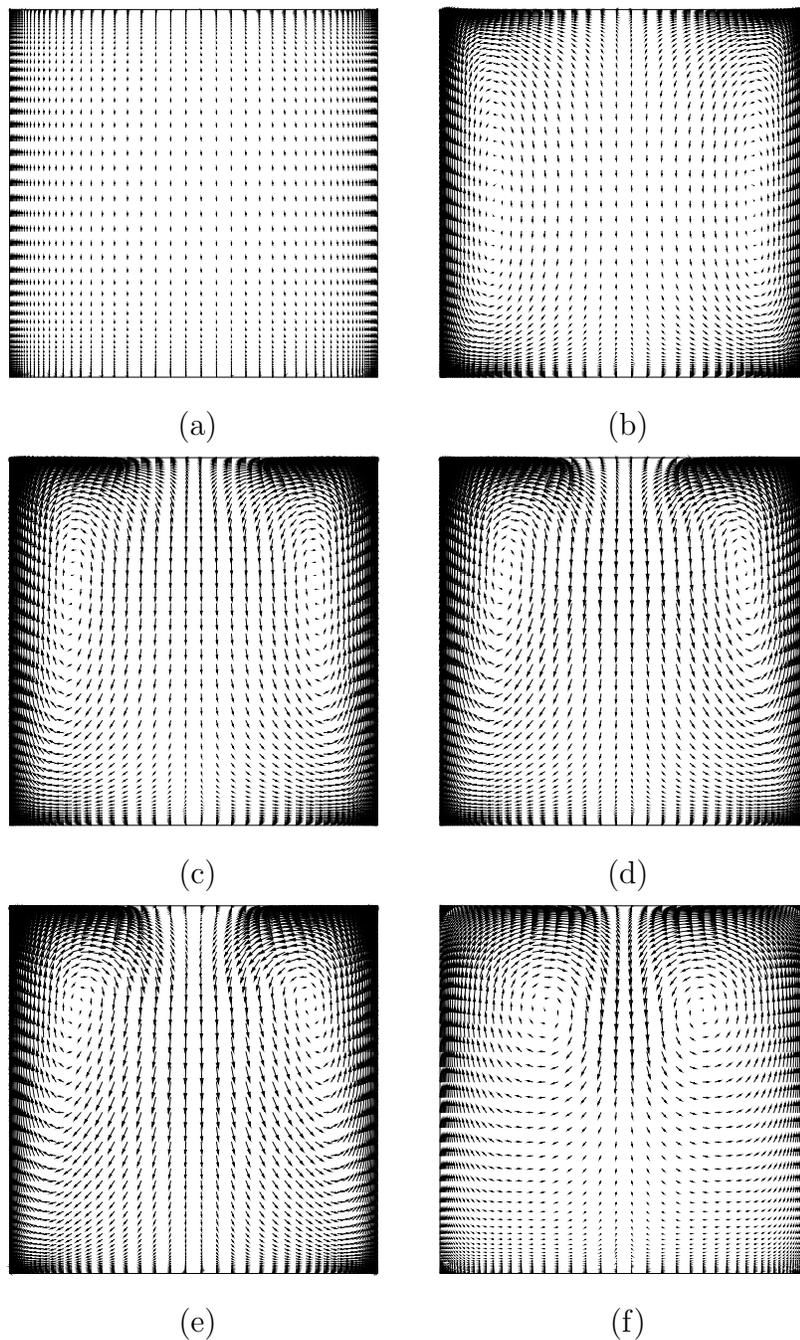


Abbildung 7.17: Richtungsvektoren der Sekundärströmung an den Rohrquerschnitten (a) $X_H = -0.25$, (b) $\theta = 30^\circ$, (c) $\theta = 60^\circ$, (d) $\theta = 77.5^\circ$, (e) $X_H = 0.25$ und (f) $X_H = 2.5$ für die turbulente Rohrkrümmerströmung bei $Re=40000$

Kapitel 8

Simulation komplexer Strömungen

In diesem Kapitel wird das Simulationsverfahren beispielhaft auf zwei industriell relevante Anwendungsfälle angewendet, wobei zunächst Ergebnisse für eine Stufenkörperflamme unter Verwendung des Flamelet-Modells mit verschiedenen Turbulenzmodellen gezeigt werden. Weiterhin wird die Simulation der instationären Umströmung eines generischen KFZ-Außenspiegels mit einem Eingleichungsmodell bzw. einer DES durchgeführt.

8.1 CH₄/H₂ Stufenkörper-Diffusionsflamme

Modelliert wird ein generischer Stufenkörper-Brenner, der große Ähnlichkeit zu praktischen Brennkammern hat, wie sie in vielen industriellen Bereichen verwendet werden. Der Brenner wird in einem Koaxialstrom zentriert und besteht im allgemeinen aus einem kreisförmigen Stufenkörper mit einer Düse für den Brennstoff in der Mitte. Ein kompliziertes Strömungssystem entsteht hinter dem Körper, wobei sich eine bzw. zwei Rückströmungszonen ausbilden. Diese müssen genügend heiße Gase zur Flammenstabilisierung produzieren. Die Konfiguration dient oft als Modellproblem, weil sie viele Eigenschaften mit praktischen Brennkammern gemeinsam hat und dabei verhältnismäßig einfache und gut definierte Randbedingungen aufweist. Sie eignet sich besonders gut für die Studie von turbulent-chemischen Interaktion und ist dem *international Workshop on Measurement and Computation of Turbulent Nonpremixed Flames* (TNF Workshop, www.ca.sandia.gov/tdf/Workshop.html) entnommen. Experimentelle Untersuchung wurde an der Universität Sydney/Sandia durchgeführt.

Abbildung 8.1 gibt Auskunft über die Simulationsparameter. Die Anordnung besteht aus einem Brennstoffstrahl mit einem Durchmesser von 3.6 mm, der von einem Zylinder mit einem Durchmesser von $D=50$ mm umgeben ist. Außen strömt Koaxialluft um den Zylinder. Die Messwerte für Vergleich sind unter der Adresse <http://www.mech.eng.usyd.edu.au/research/energy> zum Download verfügbar. Die für den Vergleich herangezogenen experimentellen Daten stammen vom Fall *B₄F₃A*. In diesem Fall besteht der Brennstoff volumetrisch aus 50% CH₄ und 50% H₂. Der stöchiometrische Mischungsbruch ist $Z_{st} = 0.050$. Die mittlere axiale Geschwindigkeit des Brennstoffstrahls beträgt 118 m/s und die mittlere axiale Geschwindigkeit der Koaxialluft ist 40 m/s.

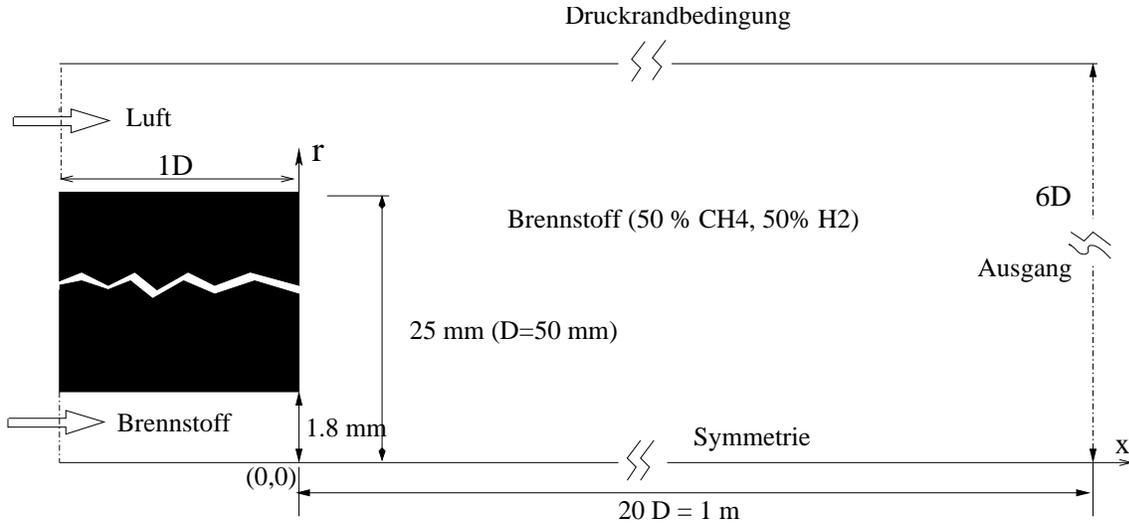


Abbildung 8.1: Brennerkonfiguration und numerische Randbedingungen für Simulation der Stufenkörper-Diffusionsflamme

Die Flamelet-Bibliothek hängt nun nicht nur von den bedingt gemittelten skalaren Dissipationsraten $\tilde{\chi}_Z$ sondern auch vom Druck ab. Mit der Betrachtung des Strahlungsverlusts werden die Flamelet-Gleichungen in $\tilde{\chi}_Z$ -Raum (0.01 – 60.0) und in Druckraum (0.995 – 1.015 bar) gelöst. Die turbulente kinetische Energie k und ihre Dissipationsrate ϵ am Einströmrand werden über konstante Verteilungen spezifiziert, die einer Intensität von $T_u = 3\%$ und $\nu_t = 10\nu$ entsprechen.

Abbildung 8.2(a) zeigt das mit dem EASM ermittelte Strömungsfeld der axialsymmetrischen Konfiguration. Hinter dem Stufenkörper gibt es eine Rückströmungszone. Dies produziert genügend heiße Gase, um die Flamme zum Brenner hin zu stabilisieren. In Abbildung 8.2 (b) sind die Messpositionen skizziert, entlang derer die numerischen Resultate mit den experimentellen Daten verglichen werden.

Zuerst wird der Einfluss des Turbulenzmodells, bzw. Anisotropieparameters untersucht. Dazu werden die numerisch ermittelten Profile der axialen Geschwindigkeit, der Temperatur, der Massenbrüche der Hauptprodukte H_2O und CO_2 mit den experimentellen Daten an der Position $x/D=1.3$ in Abbildung 8.3 verglichen. Hier bezeichnen die durchgezogenen Linien Ergebnisse des Standard $k - \epsilon$ Modells, die gestrichelten Linien Ergebnisse des LEA $k - \epsilon$ Modells, und die Punkt-gestrichelten Linien Resultate des EASMs. Im allgemeinen ergeben das EASM und das LEA $k - \epsilon$ Modell ähnliche Ergebnisse. An der Innenseite für $r/R < 0.15$ ergibt das LEA $k - \epsilon$ Modell sogar bessere Geschwindigkeitsverteilungen als das EASM. Im Gebiet von $0.45 < r/R < 0.9$ kann eine deutliche Abweichung beim Standard $k - \epsilon$ Modell von den ermittelten Ergebnissen des LEA $k - \epsilon$ Modells und des EASMs sowie von den experimentellen Daten beobachtet werden. Die Temperaturverteilung bleibt im Fall des Standard $k - \epsilon$ Modells weit unter den experimentellen Daten zurück. Auch alle anderen Modelle können den experimentellen Maximalwert der Tempe-

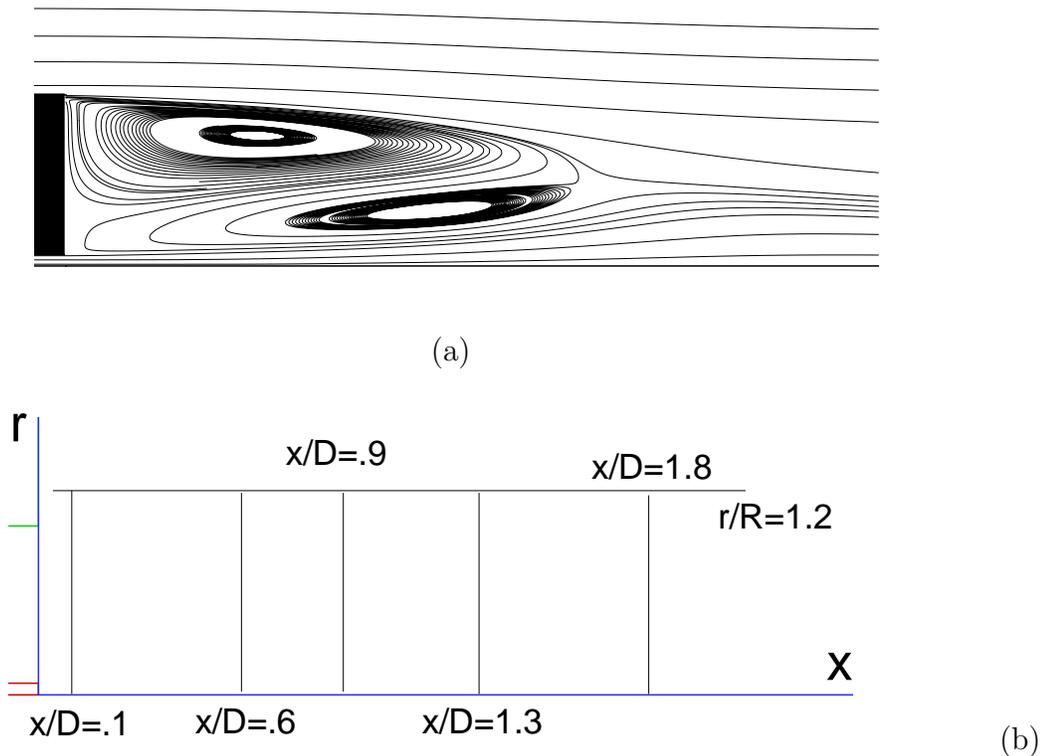


Abbildung 8.2: (a) Stromlinien hinter dem Stufenkörper, Ergebnis einer Simulation mit EASM; (b) Messpositionen für die Stufenkörper-Diffusionsflamme (Sydney/Sandia)

ratur von $T \approx 1800\text{K}$ nicht richtig reproduzieren. Die Position des Maximums wird jedoch durch das EASM bzw. das LEA $k - \epsilon$ Modell richtig vorhergesagt, während die durch das $k - \epsilon$ Modell ermittelte Position des Maximums (ca. $r/R=0.5$) deutlich von der experimentellen Position (ca. $r/R=0.7$) abweicht. Die Massenbrüche von H₂O werden durch das LEA $k - \epsilon$ Modell und das EASM befriedigend erfasst. Es gibt wieder eine relativ große Abweichung beim $k - \epsilon$ Modell. Die Übereinstimmung der ermittelten Massenbrüche von CO₂ mit den experimentellen Daten ist unbefriedigend. Eine große Abweichung tritt nicht nur beim Maximum, sondern auch in der Nähe der Achse auf. Es wird offensichtlich, dass das Turbulenzmodell einen dominanten Einfluss hat, und dass, wenn die Vorhersage der Strömungsgeschwindigkeit bereits defizitär ist, auch die Ergebnisse für die Temperatur und die Massenbrüche nicht mit den experimentellen Daten übereinstimmen.

Das Phänomen, dass es kaum Unterschiede zwischen den Lösungen des LEA $k - \epsilon$ Modells und des EASMs gibt, kann durch theoretische Analyse begründet werden. Da die Strömung nicht verdrallt ist, lautet die U-Impulsgleichung in Zylinderkoordinaten wie

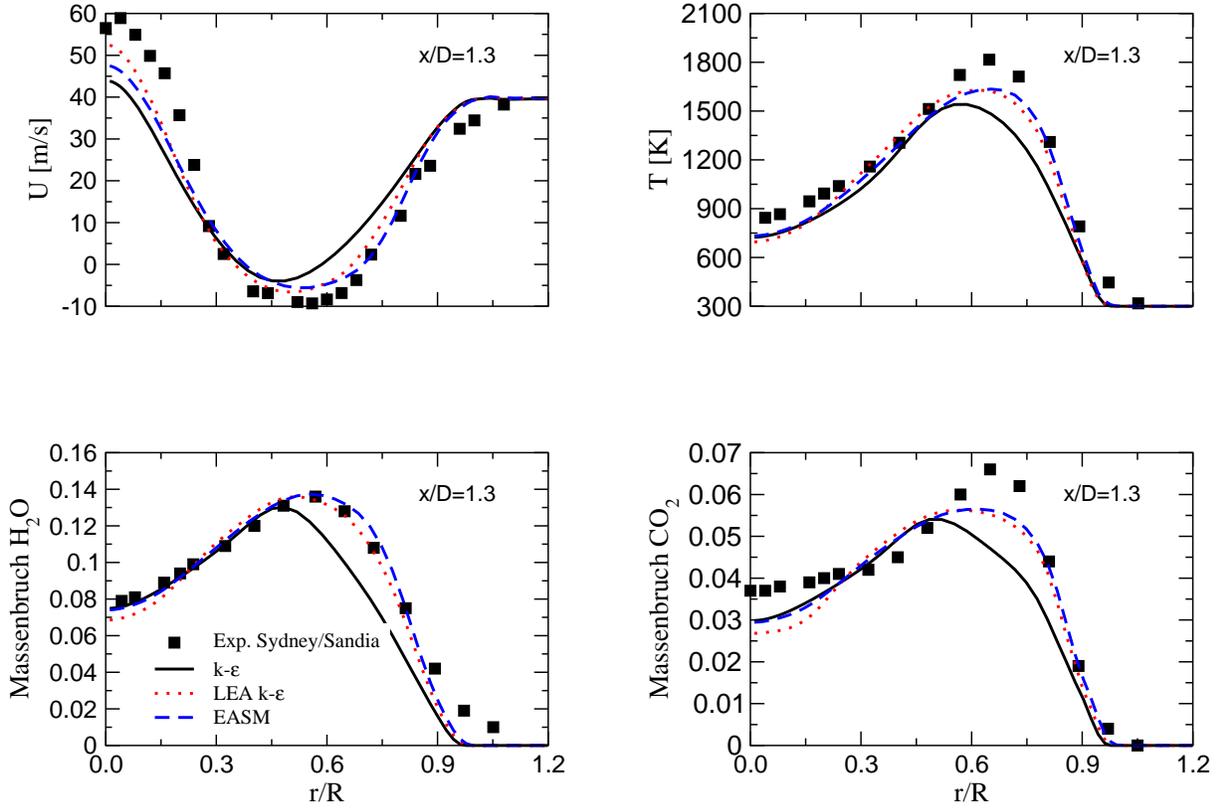


Abbildung 8.3: Einfluss des Anisotropieparameters bei den $k - \epsilon$ Modellen: Ermittelte Geschwindigkeit, Temperatur, Massenbrüche von H_2O und CO_2 sowie experimentelle Daten für die Stufenkörper-Diffusionsflamme

folgt:

$$\frac{\partial(r\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(r\bar{\rho}\tilde{v})}{\partial r} = \frac{\partial(r\bar{p})}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(r\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial r \overline{\rho u' u'}}{\partial x} - \frac{\partial (r \overline{\rho u' v'})}{\partial r}$$

In diesem Fall dominiert die Scherung, die für großen radialen Gradient der Axialgeschwindigkeit, d.h. $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \gg \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}$, im Folgenden abgeschätzt werden soll. Die Komponenten des Deformationsgeschwindigkeitstensors bzw. des Drehtensors ergeben sich näherungsweise wie folgt:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & 0 \\ -W_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

wobei

$$S_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}, \quad W_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}.$$

Daraus können kann B_{ij} wie folgt berechnet werden:

$$B_{ij} = \frac{k}{\epsilon} [\beta_2 (S_{ik} W_{kj} + S_{jk} W_{ki}) - \beta_3 (S_{ik} S_{kj} - S_{lk} S_{kl} \delta_{ij})],$$

und dann kann die Scherspannung wie folgt bestimmt werden:

$$-\overline{\rho u'v'} \sim \underbrace{2\mu_t S_{12}}_{LTerm} + \underbrace{2\mu_t B_{12}}_{NLTerm}.$$

Durch theoretische Analyse lässt sich zeigen, dass im Vergleich zum linearen Term (*LTerm*) der nichtlinearen Term (*NLTerm*) viel kleiner ist, d.h. die Spannung wird sehr stark mit dem linearen Term gekoppelt:

$$-\overline{\rho u'v'} \sim 2\mu_t S_{12} \sim 2\mu_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}.$$

Weil der Term $\frac{\partial(r\rho u'v')}{\partial x}$ viel kleiner als $\frac{\partial(r\rho u'v')}{\partial r}$ ist, wird der Einfluss der Turbulenz auf die Geschwindigkeit stark durch den linearen Term bestimmt. Beim Flamelet-Modell werden die Temperatur und Massenbrüche durch die bedingt gemittelte skalare Dissipationsrate $\tilde{\chi}_Z$ und die β -förmige PDF bestimmt, die durch die Turbulenzgröße k und ϵ sowie den Mischungsbruch \tilde{Z} und seine Varianz \tilde{Z}''^2 definiert werden, welche wiederum durch die Transportgleichungen gelöst werden. Deshalb sind die Resultate für Geschwindigkeit, Temperatur und Massenbrüche für das LEA $k - \epsilon$ Modell und das EASM ähnlich. Die Abweichung zwischen den Ergebnissen der $k - \epsilon$ und LEA $k - \epsilon$ Modelle wird durch die verschiedenen Werte des Anisotropieparameters C_μ verursacht. Der variable Anisotropieparameter des LEA $k - \epsilon$ Modells bzw. des EASMs wird durch eine Funktion der Geschwindigkeitsgradienten berechnet. Es besitzt entscheidenden Einfluss bei der Simulation scherdominierter Strömungen.

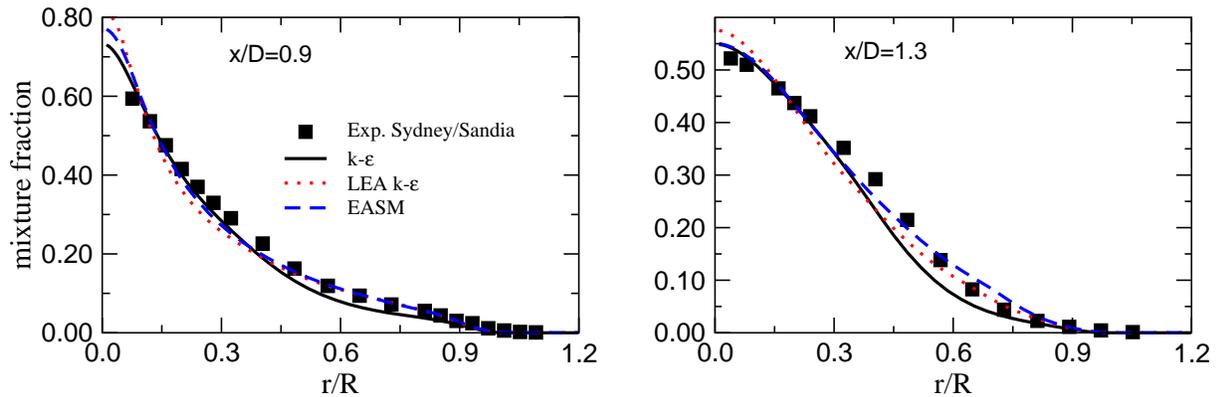


Abbildung 8.4: Ermittelte Mischungsrückstände und experimentelle Daten an den axialen Positionen $x/D=0.9$ und 1.3 für Stufenkörper-Diffusionsflamme

Im Folgenden werden die Mischungsrückstände, die axialen Geschwindigkeiten, die Temperaturen und die Massenbrüche von H₂O, CO₂ sowie H₂ mit den experimentellen Daten an zwei unterschiedlichen, ausgewählten axialen Positionen verglichen. Werden Vergleiche an anderen Positionen durchgeführt, so bestätigen sie lediglich die im Folgenden beschriebenen Beobachtungen. Auf der Symmetrieachse gibt es keinen Vergleich, da dort keine

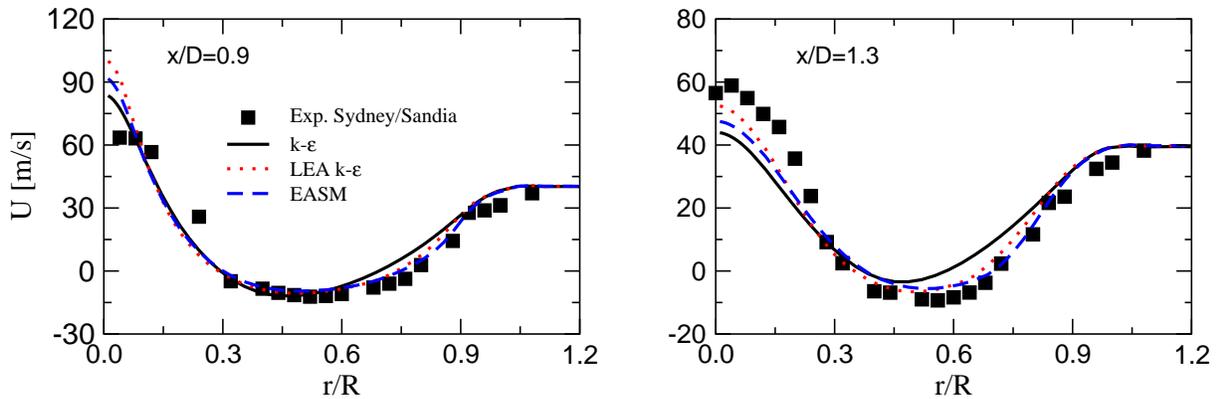


Abbildung 8.5: Ermittelte Geschwindigkeiten und experimentelle Daten an den axialen Positionen $x/D=0.9$ und 1.3 für Stufenkörper-Diffusionsflamme

experimentellen Daten vorhanden sind.

Abbildung 8.4 zeigt die ermittelten Profile der Mischungsbrüche an den axialen Positionen $x/D=0.9$ und 1.3 . Nah dem Strahlausgang für $x/D \leq 0.9$ sind die numerischen Resultate aller Turbulenzmodelle relativ ähnlich und die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten ist gut. Stromabwärts für $x/D > 0.9$ wird ein stärkerer Einfluss der Turbulenzmodelle beobachtet. An der Außenseite $r/R > 0.8$ ergeben alle Turbulenzmodelle eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten, da in diesem Gebiet die Luftströmung dominierend ist und keine Verbrennung stattfindet.

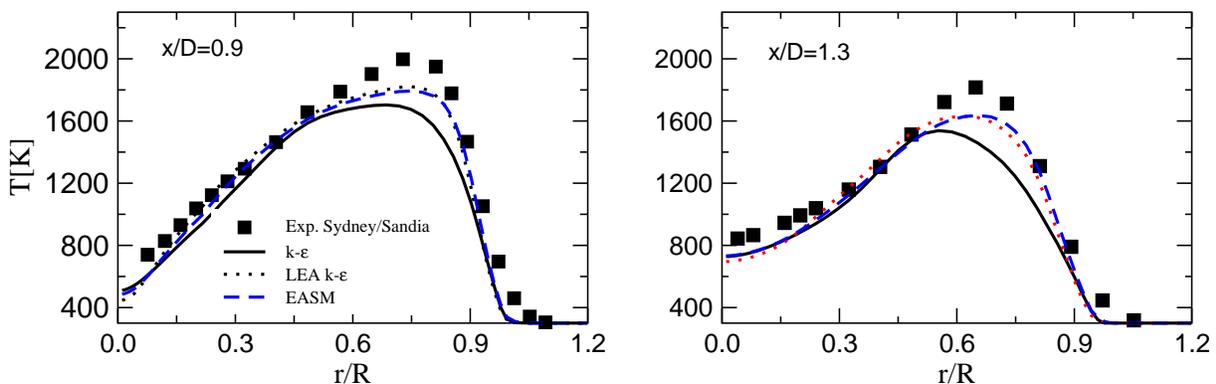


Abbildung 8.6: Ermittelte Temperatur und experimentelle Daten an den axialen Positionen $x/D=0.9$ und 1.3 für Stufenkörper-Diffusionsflamme

Abbildung 8.5 zeigt den Vergleich der ermittelten axialen Geschwindigkeitsprofile mit den Messwerten. Auf der Achse wird die Geschwindigkeitsverteilung mit allen Turbulenzmodellen gut wiedergegeben. Bei $x/D=0.9$ sind die numerischen Ergebnisse nahezu gleich und stimmen gut mit den experimentellen Profilen überein. Auf der Achse liefern alle Turbu-

lenzmodelle besonders das LEA $k-\epsilon$ Modell höhere Geschwindigkeiten als die Messungen. Stromabwärts für $x/D=1.3$ reproduzieren das LEA $k-\epsilon$ Modell und das EASM mit den Messwerten vergleichbare Geschwindigkeitsprofile, während es im Gebiet von $0.45 < r/R < 0.8$ eine deutliche Abweichung für das $k-\epsilon$ Modell gibt.

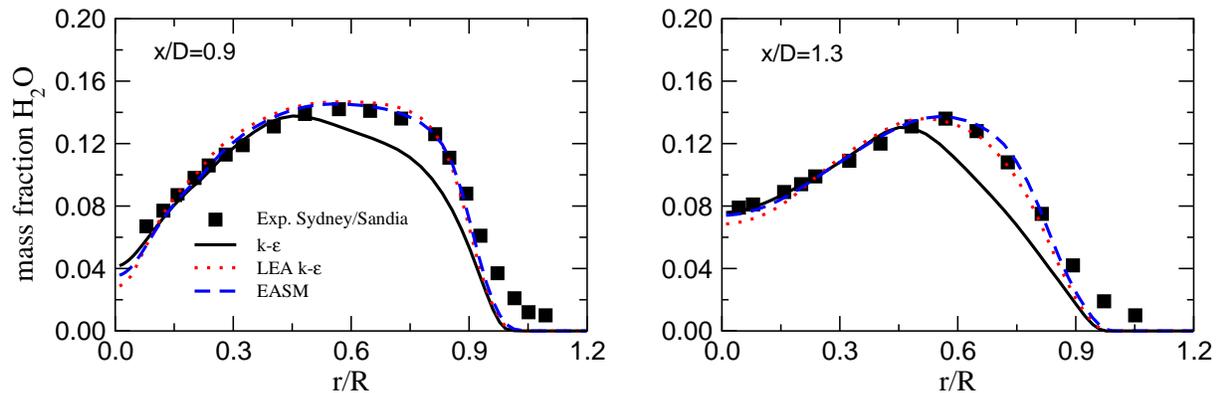


Abbildung 8.7: Ermittelte Massenbrüche von H₂O und experimentelle Daten an den axialen Positionen $x/D=0.9$ und 1.3 für Stufenkörper-Diffusionsflamme

Die Temperaturprofile werden in Abbildung 8.6 dargestellt. Im allgemeinen stimmen die Temperaturprofile für das LEA $k-\epsilon$ Modell und das EASM mit den Messwerten überein, während das $k-\epsilon$ Modell relativ große Abweichungen im Gebiet von $0.45 < r/R < 0.8$ ergibt. Stromabwärts ist die Maximaltemperatur für die Profile bei $x/D=0.9$ und 1.3 kleiner als die experimentellen Daten, liegen aber für das LEA $k-\epsilon$ Modell und das EASM an den richtigen Stellen. Die Positionen des Temperaturmaximums (ca. $r/R = 0.75$) werden noch nicht richtig durch das $k-\epsilon$ Modell repräsentiert. In den numerischen Simulationen ergeben alle Turbulenzmodelle niedrigere Höchstwerte. Möglicherweise ist die Ungenauigkeit des verwendeten Strahlungsmodells eine Ursache dafür, weil der Strahlungsverlust hier wahrscheinlich zu hoch ist.

Abbildung 8.7 zeigt die ermittelten radialen Massenbruchprofile des Hauptprodukts H₂O und die experimentellen Daten. Das LEA $k-\epsilon$ Modell und das EASM ergeben eine hinreichende Übereinstimmung mit den Messwerten, während sich beim $k-\epsilon$ Modell relative große Abweichungen von den Messwerten im Gebiet von $0.45 < r/R < 0.8$ ergeben. Bei $x/D=0.9$ sind die numerischen Ergebnisse des LEA $k-\epsilon$ Modells und des EASMs etwas höher als die Messwerte, dagegen sind die Resultate des $k-\epsilon$ Modells etwas niedriger als die experimentellen Daten. An der Außenseite $r/R > 1.0$ werden die Massenbrüche durch alle Turbulenzmodelle unterschätzt. Im allgemeinen können jedoch gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten durch das LEA $k-\epsilon$ Modell und das EASM erzielt werden.

In Abbildung 8.8 werden die Massenbruchprofile des Hauptprodukts CO₂ dargestellt. Die CO₂-Verteilung ist nicht so gut wie die bei H₂O, denn die Massenbrüche von CO₂ werden deutlich unterschätzt. An der Außenseite für $r/R > 0.8$ werden die Profile gut reproduziert, während sie an der Innenseite $r/R < 0.4$ deutlich unter den experimentellen Daten

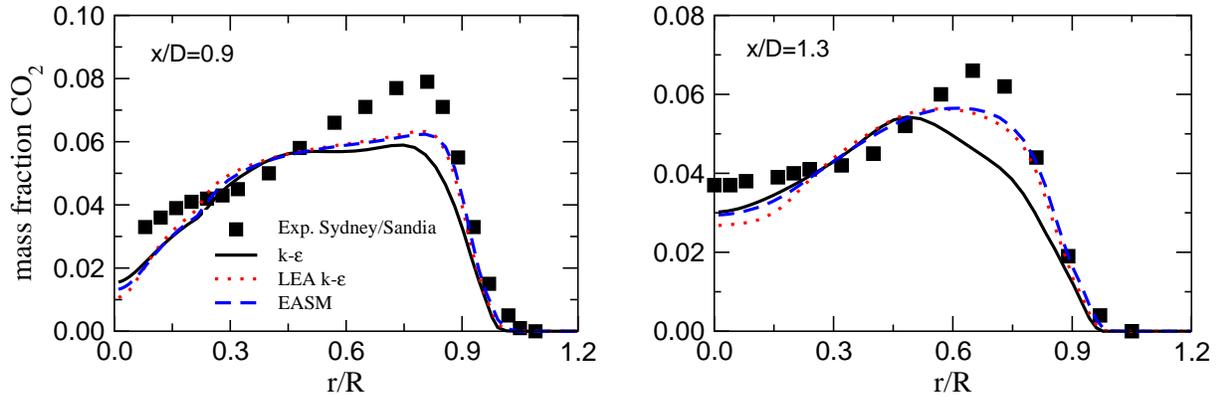


Abbildung 8.8: Ermittelte Massenbrüche von CO_2 und experimentelle Daten an den axialen Positionen $x/D=0.9$ und 1.3 für Stufenkörper-Diffusionsflamme

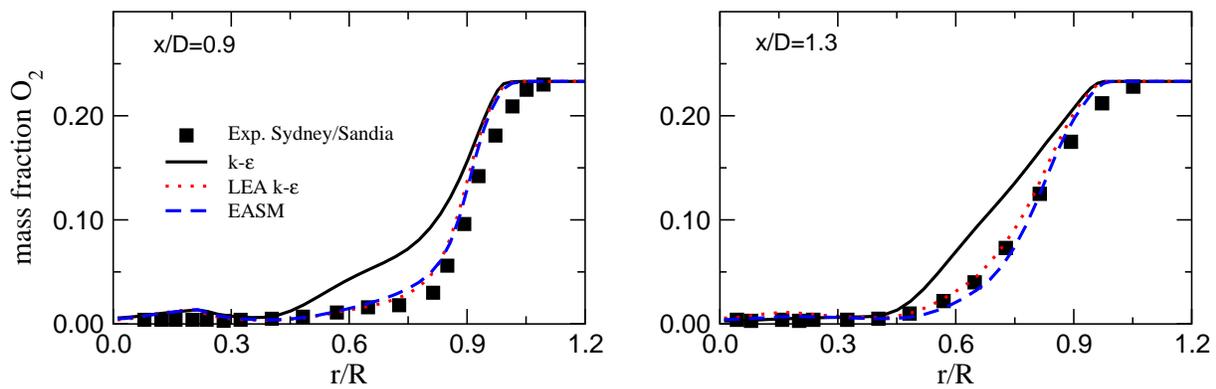


Abbildung 8.9: Ermittelte Massenbrüche von O_2 und experimentelle Daten an den axialen Positionen $x/D=0.9$ und 1.3 für Stufenkörper-Diffusionsflamme

liegen.

Der Vergleich der Massenbruchprofile von O_2 mit den experimentellen Daten ist in Abbildung 8.9 gezeigt. Auf der Mittellinie ist die Strahlströmung dominierend und es gibt keinen Sauerstoff. Alle Modelle liefern dort eine richtige Verteilung. An der Außenseite für $r/R > 1.0$ ist die Luftströmung dominierend und es wird ein Massenbruch wie in Luft erzielt. Im Bereich von $0.3 < r/R < 0.8$ dagegen spielen die Turbulenzmodelle eine große Rolle. Große Abweichungen können für das $k - \epsilon$ Modell beobachtet werden, während durch das LEA $k - \epsilon$ Modell und das EASM gute Übereinstimmungen mit den Messdaten erzielt werden.

Abschließend erfolgt der Vergleich der Massenbruchprofile einer Komponente vom Brennstoff H_2 mit den Messwerten in Abbildung 8.10. An allen Positionen sind die Massenbrüche H_2 an der Innenseite $r/R = 0.3$ überschätzt. Bei $x/D=0.9$ ergeben alle Modelle sehr ähnliche Profile, während bei $x/D=1.3$ ein Einfluss des Turbulenzmodells erkennbar ist. Das

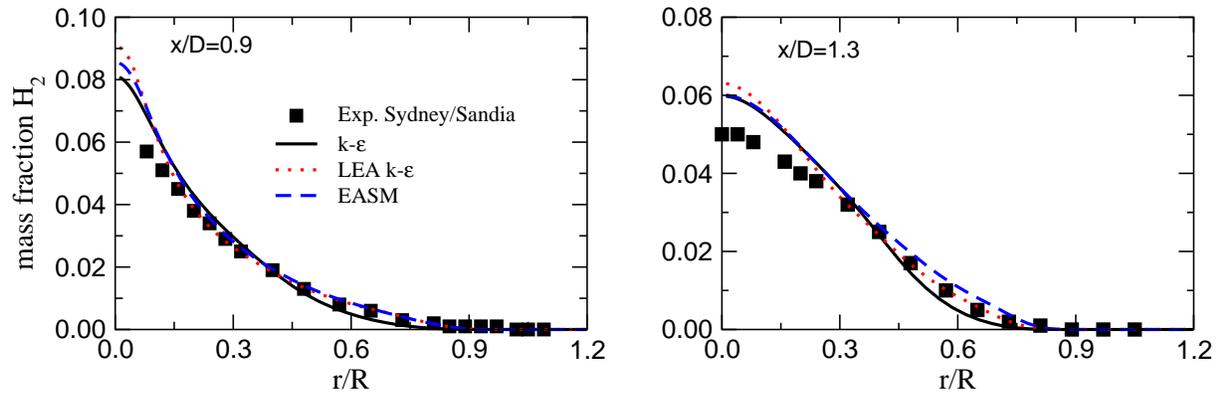


Abbildung 8.10: Ermittelte Massenbrüche von H_2 und experimentelle Daten an den axialen Positionen $x/D=0.9$ und 1.3 für Stufenkörperflamme

LEA $k - \epsilon$ Modell und das EASM ergeben abermals ähnliche Lösungen, während beim $k - \epsilon$ Modell die Abweichung zum Experiment größer ist.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das implementierte Flamelet-Modell zufriedenstellende Ergebnisse liefert, aber unter der Voraussetzung, dass das verwendete Turbulenzmodell die Strömung mit einer ausreichenden Qualität vorhersagt.

8.2 Generischer KFZ-Außenspiegel

Aufgrund der in den letzten Jahren erzielten Fortschritte bei der Reduzierung von Motor- und Reifengeräusch sind Windgeräusche im Fahrzeug heutzutage bereits ab 100 km/h eine wesentliche Lärmquelle. Dabei steht neben der Absenkung des Gesamtpegels vor allem die Beeinflussung des subjektiven Geräuschcharakters im Vordergrund. Aus dem Spektrum herausragende Anteile, wie sie beispielsweise infolge von Strömungsablösungen bei der Umströmung des Außenspiegels entstehen, werden von den Fahrzeuginsassen als besonders störend empfunden. Für die Vorhersage des aerodynamisch induzierten Lärms wird vom Simulationsverfahren die Erfassung der Schallquelle und Schallausbreitung verlangt. Wegen des erheblichen numerischen Aufwands der gleichzeitigen Berücksichtigung von Schallentstehung und Schallausbreitung werden gegenwärtig oft entkoppelte Berechnungen durchgeführt, in denen zuerst das Strömungsfeld simuliert und daran anschließend das Schallfeld mit Hilfe akustischer Analogien (Ffowcs Williams und Hawkins 1969) berechnet wird. An das simulierte Strömungsfeld wird dabei die Bedingung gestellt, die für die Schallentstehung wesentlichen Mechanismen, insbesondere die Druckschwankungen wiederzugeben. An Hand erster Ergebnisse für das Simulationsverfahren soll diese Eigenschaft gezeigt werden.

Abbildung 8.11 stellt die vereinfachte Modellgeometrie eines Außenspiegels. Messungen hierzu wurden im Aeroakustik-Fahrzeugwindkanal am FKFS an der Universität Stuttgart durchgeführt. Eine Beschreibung dieser Messungen findet man in den Arbeiten von Sie-

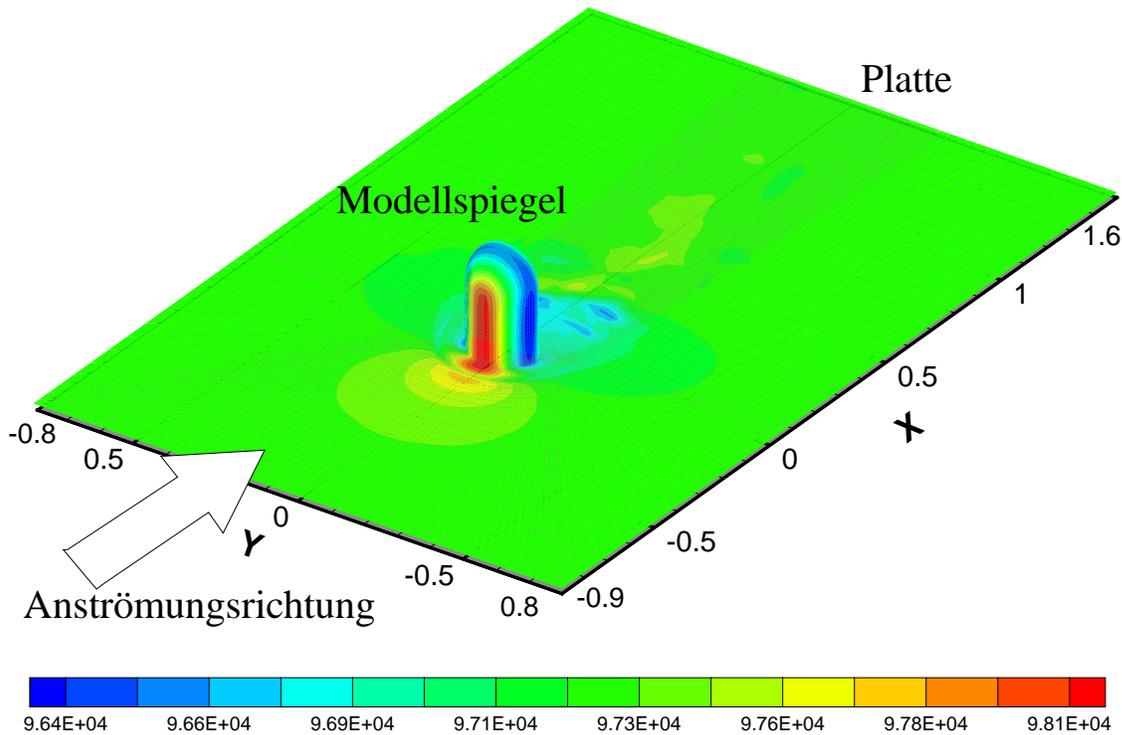


Abbildung 8.11: Prinzipskizze des Außenspiegelmodells, farblich ist die numerisch ermittelte Druckverteilung auf Platte und Spiegel dargestellt

gert u. a. (1999) und Höld u. a. (1999). Ziel des ausgewählten Falls ist die Untersuchung unterschiedlicher Turbulenzmodellierungsansätze im Hinblick auf eine nachfolgende Berechnung des abgestrahlten Lärms. Dazu werden eine URANS mit dem SALSA Modell und eine DES auf Basis des SALSA Modells untersucht. Alle Simulationen nutzten das gleiche Gitter und die gleiche Zeitschrittweite, wodurch der Aufwand nahezu identisch ist und der Einfluss des Ansatzes isoliert werden kann. Als Randbedingung wird der Einströmrand 1.2 m vor dem Beginn der Platte definiert, und die seitliche Begrenzung des Gitters ragt auf jeder Seite um 0.7 m über die Grundplatte hinaus. Der Ausflussrand befindet sich 0.6 m hinter dem Plattenende. Die Unterseite ohne Grundplatte, die obere Seite des Rechengebiets und die seitlichen Ränder werden als Symmetrieebenen definiert. Das von ADtrans zur Verfügung gestellte Gitter wurde auch in den Simulation von DaimlerChrysler mit NSFLEX verwendet (Höld u. a. 1999). Es besteht aus ca. $1.2 \cdot 10^6$ Punkten und ist in 39 Blöcken unterteilt (siehe Abbildung 8.12), die dann von mehreren Prozessoren bearbeitet werden. Die Simulation werden auf 28 Knoten des institusteigenen PC Clusters durchgeführt. Die daraus resultierenden Oberflächendruckverteilungen dienen als Basis für die Berechnung des abgestrahlten Geräusches.

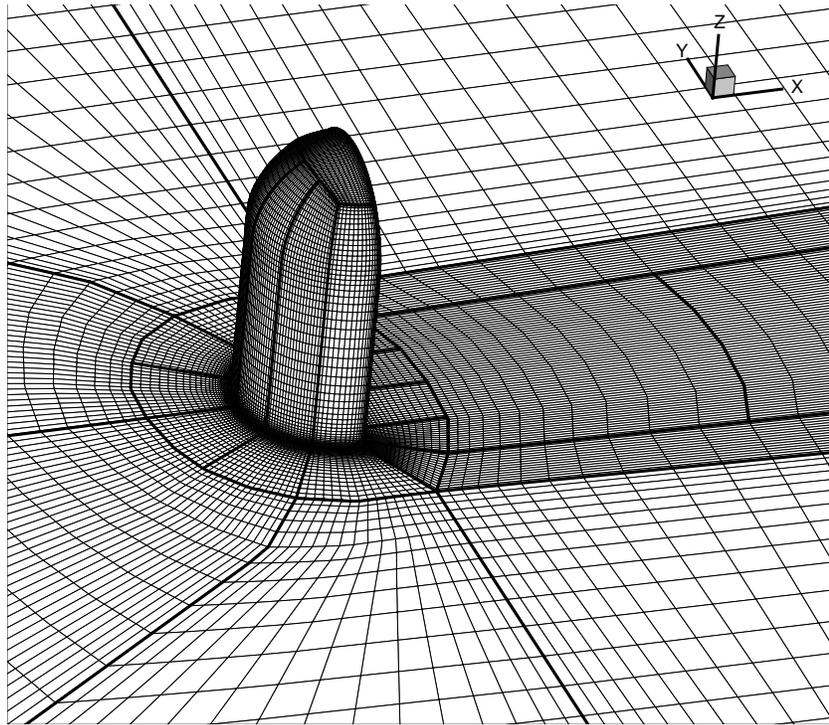


Abbildung 8.12: Ausschnitt des Gitters von DaimlerChrysler

Alle Simulationen werden mit einer Zeitschrittweite von $10^{-4}s$ durchgeführt. Der Einströmrand wird mit einem konstanten Blockprofil mit $u = 38.9$ m/s (=140 km/h) und $\nu_t = 1.44 \cdot 10^{-4}m^2/s$ belegt.

Eine detaillierte Beurteilung des instationären Druckfelds erlauben Zeitschriebe an einzelnen Messpunkten. In Abbildungen 8.14 und 8.15 sind die Simulationsergebnisse für die Positionen 121 und 123 (siehe Abbildung 8.13) aufgetragen. Deutlich sind die Unterschiede zwischen den Modellen zu erkennen. Das SALSA Modell ergibt ein wesentlich regelmäßigeres und schwächeres Drucksignal, während die DES ein stochastisches Signal liefert, das dem Experiment eher gleicht. Im Hinblick auf eine nachfolgende Berechnung der Schallabstrahlung des Spiegels sind die in den Drucksignalen enthaltenen Frequenzanteile von Interesse, weshalb eine *Discrete Fourier Transform* (DFT) Analyse der Zeitschriebe vorzunehmen ist. An der Position 121 zeigt die DES deutlich größere Amplituden über den gesamten Frequenzbereich, Abbildung 8.16. Die Übereinstimmung für Frequenzen unterhalb 100 Hz ist gut, danach fallen alle Ergebnisse leicht ab. Die RANS ergibt wesentlich kleinere Amplituden, die über den gesamten Frequenzbereich nicht mit dem Experiment übereinstimmen. An der Position 123 folgen beide Modelle dem Experiment über den gesamten Frequenzbereich. Bei 2 kHz ist die größte Abweichung ca. 6 dB.

Die beiden Messpunkte 121 und 123 repräsentieren unterschiedliche Strömungszustände.

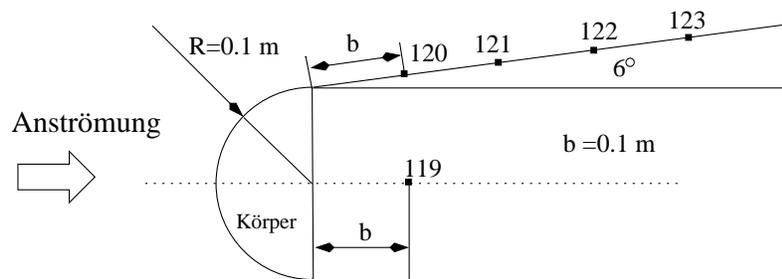


Abbildung 8.13: Messpositionen auf der Grundplatte

Während der Punkt 121 im Ablösungsgebiet liegt, befindet sich der Punkt 123 außerhalb oder am Rand des Ablösungsgebiets. Dies begründet das unterschiedliche Verhalten der beiden Ansätze zur Behandlung der Turbulenz an den unterschiedlichen Punkten, denn die DES entfaltet ihre Stärken erst in Gebieten massiver Ablösung, so dass die Vorhersagen der DES im Punkt 121 deutlich näher am Experiment sind. Das kann den Abbildungen 8.16 und 8.17 entnommen werden. Da der Rechenaufwand auf identischen Gittern nahezu unverändert bleibt, besitzt die DES somit ein hohes Anwendungspotential zur Simulation der Schallquellen in komplexen Geometrien.

Anzumerken ist, dass die DFT Analyse der Drucksignale sehr stark vom Simulationsverlauf abhängt. Durch die im Experiment beobachtete Variation des dominanten Hiebtone im Bereich von 20 - 40 Hz wird dem Signal eine Schwebung überlagert, die eine lange Simulationsdauer erforderlich macht. Die DFT Analyse selbst reagiert stark auf unvollständige Perioden im Zeitschrieb. Bei der Überlagerung verschiedener Frequenzen im Drucksignal kann aber nicht ausgeschlossen werden, dass Perioden einzelner Anteile unvollständig sind. Daher kann durch eine Auswahl der Eingangslänge des Signals ein gänzlich anderes Ergebnis erzielt werden. Während der Simulation wurde fortlaufend das Druckspektrum betrachtet und festgestellt, dass es innerhalb der Simulation stark variiert.

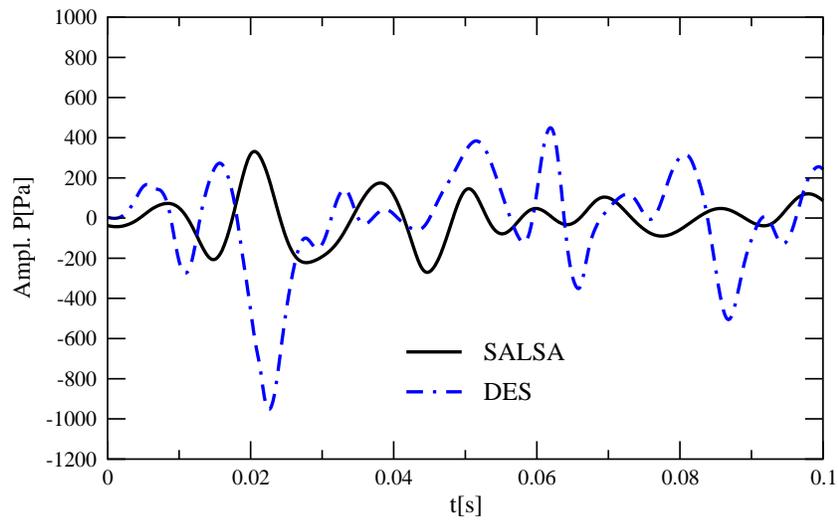


Abbildung 8.14: Druckverlauf an der Position 121

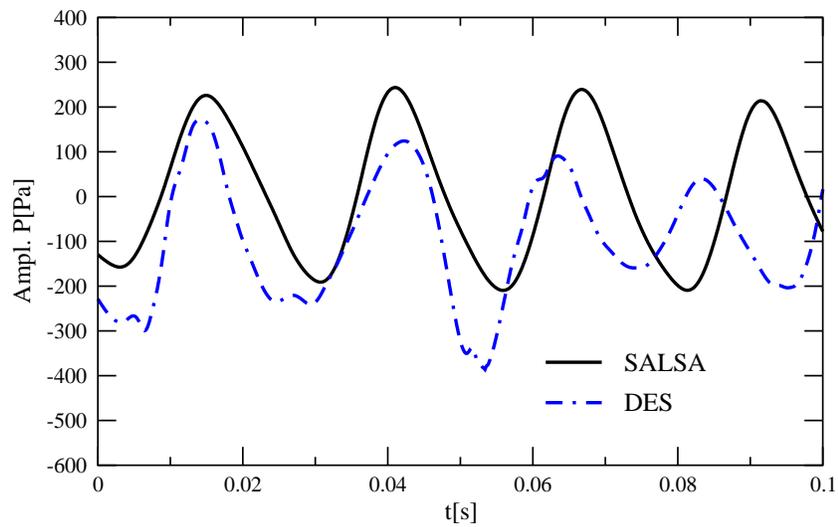


Abbildung 8.15: Druckverlauf an der Position 123

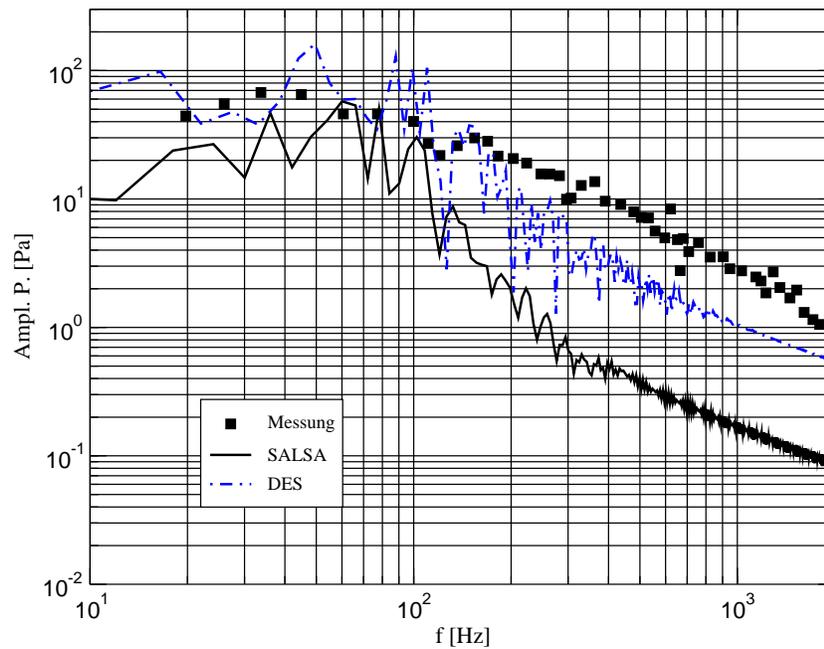


Abbildung 8.16: Vergleich der Spektren zwischen Rechnung und Messung im Punkt 121

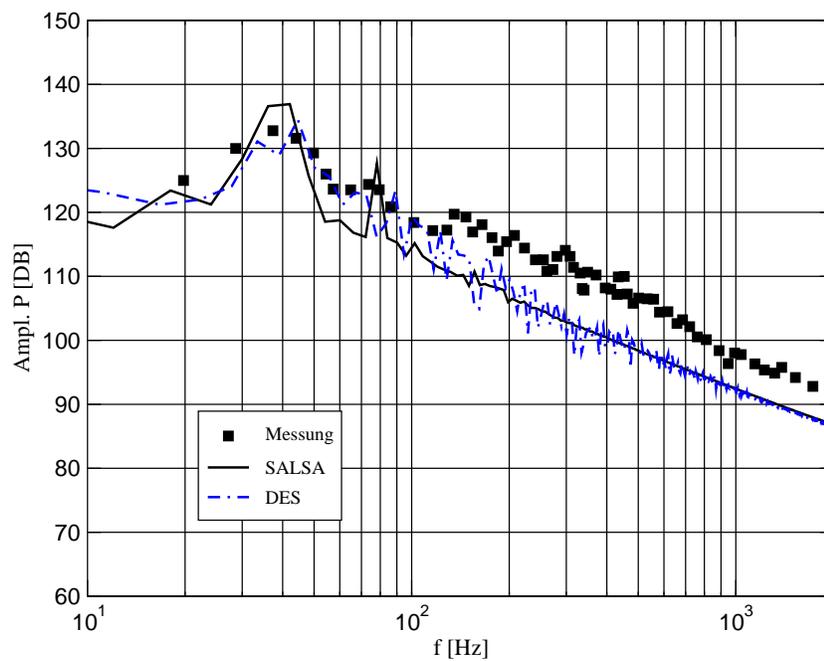


Abbildung 8.17: Vergleich der Spektren zwischen Rechnung und Messung im Punkt 123

Kapitel 9

Zusammenfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit der Entwicklung der biharmonischen Gittergenerierung mit Beschleunigung durch Mehrgitterverfahren, sowie der Entwicklung eines Mehrgitterverfahrens zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen.

Bei der Gittergenerierung wird in der vorliegenden Arbeit die biharmonische Gleichung zur Glättung verwendet, wobei die Kontrollfunktionen mittels der zweiten Randbedingung der Differentialgleichungen vierter Ordnung bestimmt werden, die durch die Einführung einer virtuellen Gitterschicht iterativ bestimmt werden. Zur Validierung werden einige zweidimensionale bzw. dreidimensionale praxisrelevante Rechengitter gewählt, an denen gezeigt wird, dass die Gitterqualität durch das entwickelte Verfahren im Vergleich zu herkömmlichen Methoden deutlich verbessert wird. Das Verfahren besitzt folglich großes Anwendungspotential in der strukturierten Gittergenerierung. Die Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit werden durch die effektive Behandlung der Randbedingungen und das Mehrgitterverfahren verbessert. Das Verhalten des Mehrgitterverfahrens auf Basis von CS/FAS-Verfahren ist jeweils mit dem V- bzw. W-Zyklus untersucht worden.

Zur Beschleunigung der Lösung der Navier-Stokes Gleichungen wird das Mehrgitterverfahren in Kombination mit dem SIMPLE-Algorithmus verwendet. Dazu wird ein FMG-FAS Verfahren benutzt, bei dem die Startlösung inklusive Massenfluss des Grobgitters vom feinen Gitter restringiert wird. Dies führt zu dem Problem, dass Geschwindigkeiten und Massenflüsse nicht zueinander passen. Bei der Simulation turbulenter Strömungen werden zusätzlich die Turbulenzvariablen vom feinen Gitter restringiert, wodurch ebenfalls die Beziehungen zwischen der Wirbelviskosität und der turbulenten Energie bzw. ihrer Dissipationsrate nicht mehr richtig erfüllt werden. In dieser Arbeit wurde dafür ein modifiziertes FMG Verfahren mit V-Zyklus entwickelt, bei dem die Startlösung inklusive der Turbulenzvariablen nicht vom feinen Gitter übertragen, sondern vom vorherigen Zyklus übernommen wird. Der modifizierte Algorithmus hat gegenüber dem Standard FMG-FAS den Vorteil, dass er numerisch stabil ist und einfach implementiert werden kann. Er wurde anhand einer Reihe von zwei- und dreidimensionalen Testfällen validiert, wobei für laminare Strömungen Effizienzsteigerungen des Gesamtverfahrens um Faktoren von 6 bis 180 erreichbar sind. Besonders für feine Gitter ist der entwickelte Algorithmus deutlich effizienter als das Standard FMG-FAS. Für turbulente Strömungen werden ebenfalls sehr

bemerkenswerte Beschleunigungsfaktoren von 6 bis 36 erreicht.

Als Anwendungsfälle werden eine Stufenkörper-Diffusionsflamme und die instationäre Umströmung eines generischen KFZ-Außenspiegels simuliert, die neben den schon gezeigten Einflüssen von Numerik und Gitterauflösung noch den Einfluss der Turbulenzmodellierung dokumentiert.

Literaturverzeichnis

- [1] Almeida, G.P., Durao, D.F.G. und Heitor, M.V. (1993). Wakes flow behind two-dimensional model hills. *Experimental Thermal and Fluid Science*, **7**, 87-101.
- [2] Bai, X.S. und Fucks, L. (1992). Fast multigrid method for 3-D turbulent incompressible flows. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, **2**, 127-137.
- [3] Baldwin, B.S. und Lomax, H. (1978). Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA paper 78-0257*.
- [4] Bell, J.B., Shubin, G.R. und Stephen, A.B. (1982). A segmentation approach to grid generation using Biharmonics. *J. Comp. Phys.* **47**, 463-472.
- [5] Bilger, R.W. (1993). Conditional moment closure for turbulent reacting flows. *Phys. Fluids* **A5**, 436-444.
- [6] Boussinesq, J. (1877). Théorie de l'Écoulement tourbillant. *Présentés par Divers Savantes Acad. Sci. Inst. Fr.* **23**, 46-50.
- [7] Brandt, A. und Dym, J. (1994). Effective boundary treatment for the biharmonic dirichlet problem. *Proc. Seventh Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*.
- [8] Chien, K.Y. (1982). Predictions of channel and boundary-layer flows with a Low-Reynolds-Number turbulence model. *AIAA J.* **20**, 33-38.
- [9] Demirdžić, I., Lilek, Ž. und Perić, M. (1992). Fluid flow and heat transfer tests problems for non-orthogonal grids: bench-mark solutions. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **15**, 329-354.
- [10] Demirdžić, I., Lilek, Ž. und Perić, M. (1993). A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **16**, 1029-1050.
- [11] Demirdžić, I. und Perić, M. (1996). Numerical study of grey-body surface radiation coupled with fluid flow for general geometries using a finite volume multigrid solver. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **6**, 3-18.
- [12] Edwards, J.R. (1996). Comparison of eddy viscosity-transport turbulence models for three dimensional, shock-separated flow fields. *AIAA J.* **34**, 756-763.

- [13] Favré, A. (1965). Equations des gaz turbulents compressibles. *Journal de Méchanique*, **4**, 361-390.
- [14] Findling, A. und Hermann, U. (1991). Development of an efficient and robust solver for elliptic grid Generation, In *Numerical grid generation in computational fields simulation and related fields*, (Eds. Arcilla, A.S., Häuser, J., Eisemann P.R. and Thompson J.F.), pp. 781-792, Proceedings of the 3rd International Grid Conference, Barcelona, June.
- [15] Gibson M.M. und Younis, B.A. (1986). Calculation of swirling jets with a Reynolds stress closure. *Phys. Fluids*, **29**, 38-48.
- [16] Hackbusch, W. (1985). *Multigrid methods and applications*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.
- [17] Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperlic conservation laws. *J. Comp. Phys.* **49**, 357-393.
- [18] Höld, R., Brenneis, A., Eberle, A., Schwarz, V. und Siegert, R. (1999). Numerical simulation of aeroacoustic sound generated by generic bodies placed on a plate: Part I - Prediction of aeroacoustic sources. *AIAA paper 99-1896*.
- [19] Huurdeman, R. (1999). Numerische Simulation inkompressibler turbulenter Strömungen mit Mehrgitterverfahren auf unstrukturierten Gittern. Dissertation, Universität Stuttgart, Germany.
- [20] Jain, R.K. (1986). Generation of body-fitted grids around airfoils using multi-grid method. In *Numerical grid generation in computaional fluid dynamics* (Eds. Häuser, J. and Taylor, C.).
- [21] Jischa, M. (1982). Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch. In *Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- [22] Jones, W.P. und Launder, B.E. (1972). Prediction of laminarization with a two-equation turbulence model. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **15**, 301-314.
- [23] Lai, Y.G. (1995). Computational method of second-mpment turbulence closures in complex geometries. *AIAA J.* **33**, 1425-1432.
- [24] Lam, C.K.G. und Bremhorst, K. (1981). A modified form of the $k - \epsilon$ model for predicting wall turbulence. *J. Fluids Engineering*, **103**, 456-460.
- [25] Launder, B.E. und Spalding, D.B. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **3**, 29-289.
- [26] Launder, B.E. und Sharma, B.I. (1974). Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, **1**, 131-138.

- [27] Launder, B.E., Reece, G. und Rodi, W. (1975). Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.* **68**, 537-566.
- [28] Launder, B.E. und Shima, N. (1989). Second-moment closure for the near-wall sublayer: Development and application. *AIAA J.* **27**, 1319-1325.
- [29] Leister, H.J. und Perić, M. (1992). Numerical simulation of a 3D Czochralski melt flow by a finite volume multigrid algorithm. *J. Crystal Growth*, **123**, 567-574.
- [30] Leonard, B.P. (1979). A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Meth. Appl. Eng.* **19**, 59-98.
- [31] Lien, F.S. und Leschziner, M.A. (1991). Multigrid convergence acceleration for complex flow including turbulence. *Int. Series of Numerical Mathematics*, **98**, 277-288.
- [32] Lien, F.S. und Leschziner, M.A. (1993). Computational modelling of 3D turbulent flow in S-diffuser and transition ducts. In *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2*, pp. 217-228, Elsevier, Amsterdam.
- [33] Lien, F.S. und Leschziner, M.A. (1994a). Multigrid acceleration for recirculating laminar and turbulent flows computed with a non-orthogonal col-located finite-volume scheme. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **118**, 351-371.
- [34] Lien, F.S. und Leschziner, M.A. (1994b). Assessment of turbulence-transport models including non-linear RNG eddy-viscosity formulation and second-moment closure for flow over a backward-facing step. *Compt. Fluids*, **23**, 983-1004.
- [35] Lien, F.S. und Leschziner, M.A. (1994c). A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulent-transport closure. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **114**, 123-167.
- [36] Lilek, Ž. und Perić, M. (1995). A fourth-order finite-volume method with collocated variable arrangement. *Comput. Fluids*, **24**, 239-252.
- [37] Lilek, Ž. Muzaferija, S. und Perić, M. (1997). Efficiency and accuracy aspects of a full-multigrid SIMPLE algorithmus for three-dimensional flows. *Numerical Heat Transfer, Part B*, **31**, 23-42.
- [38] Linden, J. (1984). A multigrid method for solving the biharmonic equation on rectangular domains. In *Advanced in Multigrid Methods*, pp. 64-76, Proceedings of the Conference held in Oberwolfach, Dec. 8-13. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden.
- [39] Mavriplis, D.J. (1995). Three-dimensional multigrid Reynold-averaged Navier-Stokes solver for unstructured meshes, *AIAA J.* **33**, 445-453.
- [40] Obi, S., Perić, M. und Scheuerer, G. (1991). Second-moment calculation procedure for turbulent flows with collocated variable arrangement. *AIAA J.* **29**, 585-590.

- [41] Orth, A. (1991). Mehrgittermethod zur Berechnung inkompressibler, stationärer Strömungen mit krummlinigen Berandungen. Dissertation, Karlsruhe, Germany.
- [42] Patankar, S.V. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere, Washington D. C.
- [43] Patel, V.C., Rodi, W. und Scheuerer, G. (1985). Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review. *AIAA J.* **23**, 1308-1319.
- [44] Peters, N. (2000). *Turbulent Combustion*. Cambridge University Press.
- [45] Pitsch, H., Riesmeier, E. und Peters, N. (2000). Unsteady flamelet modelling of soot formation in turbulent diffusion flames. *Combust. Sci. and Tech.* **158**, 389-406.
- [46] Piomelli, U. und Chasnov, J.R. (1996). Large-eddy simulation, theory and applications. In *Turbulence and Transition Modelling* (Eds. Hallböck, M. et al.), pp. 269-336. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht Boston London.
- [47] Pope, S.B. (1981). A Monte Carlo method for the PDF equations of turbulent reactive flow' *Combust. Sci. and Tech.* **25**, 159-174.
- [48] Pope, S.B. (1985). PDF Methods for turbulent reactive flows. *Prog. Energy Combust. Sci.* **11**, 119-192.
- [49] Pope, S.B. (1990). Computations of turbulent combustion: Progress and Challenges. In *Twenty-Third Symposium (International) on Combustion*, pp. 591-612. The Combustion Institute, Pittsburgh.
- [50] Rhie, C.M. und Chow, W.L. (1983). Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation. *AIAA J.* **21**, 1325-1332.
- [51] Rodi, W. (1991). Two-layer models of turbulence. *AIAA Paper* 91-0216.
- [52] Rodi, W. und Mansour, N.N. (1993). Low-Reynolds number $k - \epsilon$ modelling with the aid of direct numerical simulation data. *J. Fluid Mech.* **250**, 509-524.
- [53] Rung, T., Thiele, F. und Fu, S. (1999). On the realizability of nonlinear stress-strain relationships for Reynolds stress closures. *Flow, Turbulence and Combustion*, **60**, 333-359.
- [54] Rung, T. (1999). Formulierung universeller wandrandbedingung für transportgleichungsturbulenzmodelle. Institutsbericht, 2-99, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, Technische Universität Berlin, Germany.
- [55] Rung, T. (2000). Entwicklung anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehung mit Hilfe von Projektionstechniken. Dissertation, Technische Universität Berlin, Germany.
- [56] Rung, T., Bunge, U., Schatz, M. und Thiele, F. (2003). Restatement of the Spalart-Allmaras Eddy-Viscosity Model in a Strain-Adaptive Formulation. To be published in *AIAA J.*

- [57] Rousseau, A.N., Albright, L.D. und Torrance, K.E. (1997). A short comparison of damping functions of standard low-Reynolds-number $k - \epsilon$ models. *J. Fluids Engineering*, **119**, 460-463.
- [58] Shur, M., Spalart, P.R., Strelets, M. und Travin, A. (1999). Detached-Eddy Simulation of an airfoil at high angle of attack. In *Turbulent Shear Flows* (Eds. Rodi, W. and Laurence, D.) pp. 669-678. Elsevier Science Ltd.
- [59] Siegert, R., Schwarz, V. und Reichenberger, J. (1999). Numerical simulation of aeroacoustic sound generated by generic bodies placed on a plate: Part II – Prediction of radiated sound pressure. *AIAA paper* 99-1895.
- [60] Steger, J.L. und Sorenson, I.N. (1979). Automatic mesh point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equations. *J. Comp. Phys.* **33**, 405-410.
- [61] Spalart, P.R. und Allmaras, S.R. (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper* 92-439.
- [62] Spalart, P.R. (1999). Strategies for turbulence modelling and simulation. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments* **4**, 3-17, Elsevier, Amsterdam.
- [63] Spalart, P.R. (2001). Young-person's guid to Detached-Eddy Simulation grids. *NASA/CR-2001-211032*.
- [64] Sparis, P.D. (1985). A method for generating boundary-orthogonal curvilinear coordinate systems using the biharmonic equation. *J. Comp. Phys.* **61**, 445-462.
- [65] Sparis, P.D. und Karkanis, A. (1992). Bounday-orthogonal biharmonic grids via preconditioned gradient methods. *AIAA J.* **30**, 671-678.
- [66] Spitaleri, R.M. (1990). A multigrid method for grid generation with line-spacing control. *Applied Mathematics and Computation*, **40**, 125-134.
- [67] Spitaleri, R.M. (1991). Multigrid grid generation in scalar and parallel environments. In *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields* (ed. Hauser, A.S, Eisemann P.R. und Thompson, J.F.), pp. 805- . Proceedings of the 3rd International Grid Conference, Barcelona, June.
- [68] Stone, H.L. (1968). Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **5**, 530-558.
- [69] Strelets, M., Travin, A., Shur, M. und Spalart, P.R. (2000). Detched-eddy simulations past a circular cylinder. *Flow, Turbulence and Combustion*, **63**, 293-313.
- [70] Stüben, K. und Linden, J. (1986). Multigrid methods: an overview with emphasis on grid generation processes. In *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics* (Eds. Häuser, J. and Taylor, C.), pp. 483-509. Proceeding of the International Conference, Landshut, West Germany, July 14-19.

- [71] Shubin, G.R., Stephen, A.B. und Bell, J.B. (1982). Three dimensional grid generation using biharmonic. In *Numerical Grid Generation*, pp. 761-774. Elsevier Sc.
- [72] Sutherland, D.M. (1893). The viscosity of gases and molecular forces. *Phil. Mag. Ser.* **36**(5), 507-530.
- [73] Taylor, A.M., Whitelaw J.H. und Yianneskis, M. (1982). Curved Ducts With Strong Secondary Motion: Velocity Measurements of Developing Laminar and Turbulent Flow. *J. Fluids Engineering*, **104**, 350-359.
- [74] Thomas, P.D. und Middlecoef, J.F. (1980). Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations. *AIAA J.* **18**, 652-656.
- [75] Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. und Mastin, C.W. (1985). *Numerical grid generation: foundations and applications*. North-Holland, New York · Amsterdam · Oxford.
- [76] Thompson, J.F. (1987). A General Three-Dimensional Elliptic Grid Generation System on A Composite Block Structure. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **64**, 377-411.
- [77] Thompson, J.F. (1996). A reflection on grid generation in the 90s: trends, needs, and influences. *Proc. of 5th Int. Grid Conference: Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*, pp. 1029-1110.
- [78] Vanka, S.P. (1986a). A calculation procedure for three-dimensional steady recirculating flows using multigrid methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **55**, 321-338.
- [79] Vanka, S.P. (1986b). Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables. *J. Comput. Phys.* **65**, 138-158.
- [80] Warnatz, J. und Mass, U. (1993). *Technische Verbrennung*. Springer-Verlag, 1993.
- [81] Weatherill, N.P. (1990). Numerical grid generation. Lecture series 1990-06, Von Karman institut for fluid dynamics.
- [82] White, J.A. (1990). Elliptic Grid Generation with Orthogonality and Spacing Control On An Arbitrary Number of Boundaries. *AIAA paper* 90-1568
- [83] Ffowcs Williams, J.E. und Hawkings, D.L. (1969). Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transaction of the Royal Societym.* **264**, 321-342.
- [84] Wesseling, P. (1992). *An introduction to multigrid methods*. John Wiley & Sons, Chichester · New York · Brisbane · Toronto · Singapore.
- [85] Wilcox, D.C. (1988). Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J.* **26**, 1299-1310.

- [86] Wilcox, D.C. (1993). *Turbulence modelling for CFD*. DCW Industries, Inc., La Canada, CA.
- [87] Xue, L. (1998). Entwicklung eines effizienten parallelen Lösungsalgorithmus zur dreidimensionalen Simulation komplexer turbulenter Strömungen. Dissertation, Technische Universität Berlin, Germany.
- [88] Yang, Z. und Shih, T.H. (1993). New time scale based $k - \epsilon$ model for near-wall turbulence. *AIAA J.* **31**, 1191-1198.
- [89] Yan, J., Xue, L. und Thiele, F. (1998). Performance of multigrid method in bi-harmonic grid generation. In *Numerical Grid Generation in Computational Fields Simulation and Related Fields* (ed. Cross, M., Soni, B.K., Thompson, J.F., Hauser, J. und Eiseman, P.R.), pp. 303-312. Proceedings of the 6th International Grid Conference, University of Greenwich, July.
- [90] Yan, J. und Thiele, F. (1998). Performance and accuracy of a modified full multigrid algorithm for fluid flow and heat transfer. *Numerical Heat Transfer, Part B*, **34**, 323-338.
- [91] Yan, J. (1999). A modified full multigrid algorithm for the Navier-Stokes equations. Institusbericht, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, Technische Universität Berlin, Germany.
- [92] Zheng, X., Liao, C., Liu, C., Sung C.H. und Huang, T.T. (1997a). Multigrid computation of incompressible flows using two-equation turbulence models: part I – numerical method. *J. Fluids Engineering*, **119**, 893-899.
- [93] Zheng, X., Liao, C., Liu, C., Sung, C.H. und Huang, T.T. (1997b). Multigrid computation of incompressible flows using two-equation turbulence models: part II – applications. *J. Fluids Engineering*, **119**, 900-905.