Luftdruckgesteuerte Transformation an flexibel berandeten Folienkissen

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur
Christian Hartz
aus Berlin

von der Fakultät VI - Planen Bauen Umwelt
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:
Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Volker Schmid
Gutachter: Prof. sc. techn. Mike Schlaich
Gutachterin: Prof. Dr.-Ing. Annette Bögle
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Mike Sieder

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 5. November 2013

Berlin 2014
D 83

Kurzfassung

Wandelbare Membran- und Folienbauten können sich den heutigen, vielfältigen, sich immer schneller ändernden Anforderungen an unsere Bauwerke schnell und effizient anpassen. Im weitesten Sinne geht es darum, dem gesamten Komplex der verschiedenartigen und ständig wechselnden klimatischen und gesellschaftlichen Anforderungen gerecht zu werden, das heißt unsere Bauwerke funktioneller und anpassungsfähiger zu machen. Folglich gewinnen aktive und wandelbare Konstruktionen im Rahmen der heutigen Bauaufgaben eine zunehmende Bedeutung. Geeignete aktive und wandelbare Konstruktionsprinzipien zu bestimmen, lassen sich unter anderem durch das Studium der belebten Natur ermitteln. Ein konstruktives Grundprinzip der belebten und unbelebten Natur ist das Prinzip des Pneu. Es ist eines der effektivsten technischen Konstruktionssysteme, bestehend aus den Bausteinen Hülle, Rand und Medium.

ETFE-Folienkissen sind eine technische Anwendung des pneumatischen Konstruktionsprinzips. Sie eigen sich hervorragend für die Ausbildung von Gebäudehüllen, seien es Dächer oder Fassaden. Diese Gebäudehüllen nun für eine flexiblere Nutzung wandelbar zu gestalten, führt zum Kern dieser Arbeit. Dabei galt es den Begriff der Flexibilität in einen für diese Arbeit logischen Gesamtkontext zu bringen. Es ergaben sich bei der Ausarbeitung zwei Seiten der Flexibilität, eine aktive, die Adaption und eine passive, die Transformation. Diese beiden Seiten lassen sich für technische Systeme über die Schnittstelle der Adaptierbarkeit von möglichen Transformationen verbinden.

Die Transformationen beinhalten dabei nicht nur die bereits mehrfach ausgeführte reine (Starrkörper-)Bewegung von Tragwerken, sondern zudem eine aktiv steuerbare Verformung von Teilen des Tragwerks. Um Verformungen, die so groß sind, dass sie als eine Bewegung genutzt werden können, realisieren zu können, müssen die Grenzen der Verformbarkeit insbesondere der zuvor erwähnten Bausteine Hülle und Rand ermittelt werden. Dazu erfolgten zum einen umfangreiche Untersuchungen zum elastischen, viskosen und ausgeprägten plastischen Materialverhalten von ETFE und zum anderen Verformungsuntersuchungen des meist stabförmigen Randes.

Das Prinzip Pneu basiert auf der Stabilisierung einer biegeweichen aber zugfesten Membran durch eine auf sie wirkende Druckdifferenz. Bei technischen Systemen wird diese Druckdifferenz permanent von außen durch die Steuerung des eingeschlossen Mediums gewährleistet. Diese ohnehin notwendige Steuerung des Stützmediums wird als Initiator einer Bewegung bzw. aktiv gesteuerten Verformungen verwendet. Dazu war es notwendig die mittragenden Eigenschaften des Füllmediums zu untersuchen. Der Lastabtrag konnte dabei numerisch, analytisch und versuchstechnisch untersucht werden, wobei sich für schlagartige Lasten ein wesentlich anderes Tragverhalten einstellt, als dies bei der aktuellen Bemessung allein auf permanente Lasten Berücksichtigung findet.

Auf Basis der genannten Vorüberlegungen konnten flexibel berandete Folienkissenkonstruktionen entwickelt werden, die durch ein Einblasen von Luft eine Formänderung der Hülle bewirken und den angeschlossen Rand so verformen, dass er zu einer Bewegung des Tragwerks wird. Mit Rechtecken, Rauten und Sechsecken wurden verformungsverträgliche Berandungen der Hülle entwickelt, die bei Verformung nicht zu materialunverträglichen Spannungsspitzen in der Hülle oder des Randes führen. Für die Ausgestaltung des Randes ergaben sich kinetische, biegeweiche und hybride Lösungen. Zur Bestätigung der theoretischen Überlegungen konnte in der Versuchshalle der TU-Berlin ein biegeweich berandetes rechteckiges Folienkissen realisiert werden.

Die Ergebnisse zeigen, dass das Bauen mit Luft nicht nur statisch konstruktiven Leichtbau erlaubt, sondern zudem Verformungen und daraus resultierende Bewegungen für aktive und wandelbare Konstruktionen ermöglicht.

Abstract

Convertible membrane and foil structures can adapt quickly and efficiently to today's wide, ever faster changing requirement on our buildings. In the broadest sense, it is to fulfill the entire field of diverse and ever-changing climate and social requirements to make our buildings more functional and adaptable. Active and convertible structures are becoming increasingly important in the context of today's building project. Terms, such as active and convertible, show interesting parallels to living nature. A constructive principle in living and inanimate nature is the principle of pneu. It is one of the most efficient structural systems, consisting of the components envelope, edge and medium.

ETFE foil cushions are a technical application of the pneumatic design principle. They excellently suited for the design of building envelopes, be it roofs or facades. To make now building envelopes convertible for a more flexible use gets to the core of the work. The aim was first to clarify the term flexibility. In the course of this work two sides of the flexibility arise, an active adaptation and a passive transformation. A connection for technical systems can be established through adaptability of possible transformations.

The transformations not only include the already several times realized pure movement of structures, but also an active deformation of parts of the structure. In order to realize so large deformations that they can be used as a movement, the limitation of the particular deformation must be determined. This has to be done especially for the components envelope and edge. Therefor an extensive research had to be done of the elastic, viscous and highly plastic material behavior of ETFE. On the other hand for the mostly beam-shaped edge had to take place a deformation analysis.

The principle pneu bases on the stabilization of a flexible but tensile membrane by a pressure difference. For technical systems, this pressure difference is permanently controlled from the outside. This anyway needed pressure control unit is used as the initiator of a movement or active controlled deformation. Therefor it was necessary to examine the load-bearing behavior of the filling. The load behavior could be analyzed numerical, analytical and experimental. For sudden loads the structural behavior differs totally from the current used verification method for permanent loads.

Based on these considerations a flexible design could be developed, which allows a change in shape of the edge framed foil cushion by an injection of air. Out of that change of shape the edge frame deforms so much that it causes a movement for the entire structure. Rectangles, diamonds and hexagons are possible solutions for the edge frame, to provide material compatible deformations for the enclosed envelope. For the design of the edge frame kinetic, flexible bending and hybrid solutions could be worked out. To confirm the theoretical research, a flexible bending rectangular edged foil cushions could be realized in the experimental hall of the Technical Institute of Berlin.

The results show that building with air not only support for static lightweight structures, but also allows deformations and resulting movements for active and convertible designs.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung 1

2 Flexibilität 3

2.1 Adaption 3

2.1.1 Adaptivität 4

2.1.2 Evolutionäre Anpassung 4

2.1.3 Adaptierbarkeit 5

2.1.4 Aktionsraum 6

2.2 Transformation 7

2.2.1 Kinetik starrer Körper 8

2.2.2 Statik deformierbarer Körper 10

Verzerrungen – Allgemein $\mathbb{R}\mathbf{3}$ 10

Verzerrungen – Flächen im $\mathbb{R}\mathbf{3}(\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}\mathbf{2} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{3})$ 12

Abwickelbare Flächen 14

2.3 Potential 16

2.3.1 Inneres Potential 16

2.3.2 Äußeres Potential 17

2.3.3 Potential und Verformung 18

Potential geometrisch linearer und nicht-linearer Systeme 18

Anteile der Schnittgrößen am inneren Potential $\boldsymbol{\Pi i}$ 19

2.4 Analytische Lösung zum kombinierten Balken- und Seiltragverhalten 22

2.5 Zusammenführung 25

3 Material 27

3.1 ETFE – Betrachtungen zum Baustein Hülle 27

3.1.1 ETFE - Grundlagen 27

3.1.2 ETFE - Materialverhalten 29

Makroskopische Betrachtung 29

Mikroskopische Betrachtung 31

Elastischer Bereich 37

Viskoser Bereich 39

Plastischer Bereich - Fließen 40

Relaxation 40

Kriechen 43

Pneumatisch gestützter Langzeitversuch 47

Zusammenfassung 51

3.2 Materialbehaftete Transformation – Betrachtungen zum Baustein Rand 53

3.3 Zusammenfassung 56

4 Folienkissen 57

4.1 Prinzip Pneu – Natur 57

4.2 Prinzip Pneu – Technik 59

4.3 Bausteine pneumatischer Gebilde 61

4.3.1 Hülle 62

4.3.2 Medium 65

Luft 65

Druckdifferenz 66

4.3.3 Rand 67

4.3.4	Zusammenfassung	68
4.4	Lastabtrag	69
4.4.1	Theorie des Lastabtrags	69
4.4.2	Kreisförmiges Kissen	69
	Numerische und analytische Voruntersuchungen	70
	Versuchstechnische Untersuchungen	74
	Analytische Untersuchungen	78
	Zusammenführung	81
4.4.3	Quadratisches Kissen	84
4.5	Zusammenfassung	88
5	Transformation und Adaptierbarkeit von Folienkissen	89
5.1	Bewegte Folienkissen	89
5.2	Pneumatische Formveränderung	93
5.2.1	Grundprinzip	93
5.2.2	Historische und aktuelle Projekte	93
5.3	Formverändernde Folienkissen	96
5.3.1	Grundprinzip – unendliche Röhre	96
5.3.2	Problem der endlichen Röhre	99
5.3.3	Kinetische Lösungen	100
	Rechteck mit gegensinnig verdrehtem Rand und gelenkiger Eckenausbildung	100
	Raute mit ebenem Rand und gelenkiger Eckenausbildung	104
	Sechseck mit ebenem Rand und gelenkiger Eckenausbildung	106
5.3.4	Biegeweiche Lösungen	108
	Rechteck mit biegeweichen Längsseiten	108
	Biegeweiche Linsen- und Blattfederform	114
5.3.5	Hybride Lösung	114
	Raute mit biegeweich spitzwinkligen und kinetisch stumpfwinkligen Ecken	114
5.4	Zusammenfassung	116
6	Zusammenfassung und Ausblick	117
6.1	Zusammenfassung	117
6.2	Ausblick	118
7	Literaturverzeichnis	121
8	Definitionen, Festlegungen, Einheiten und Zeichen	127
8.1	SI-Basiseinheiten	127
8.2	Weitere Einheiten	127
8.3	Zeichen	127
8.3.1	Lateinische Buchstaben	127
8.3.2	Griechische Buchstaben	129
A	Anhänge	133
A.1	Datenblätter	133
A.1.1	Drucksensor DS2-420	133
A.2	Herleitungen	134
A.2.1	Volumenformel für rechteckig berandetes Kissen	134
A.2.2	Volumenformel für gleichseitig dreieckig berandetes Kissen	135

1 Einführung

Der Mensch baut Gebäude, um einen für ihn von der Umwelt abgegrenzten Nutzraum zu schaffen. Dabei entstehen herkömmlich statische Gebäudehüllen, die den sich verändernden Umwelteinflüssen immer gleich begegnen. Moderne Konstruktionen sollten hingegen die Möglichkeit besitzen, auf die sich verändernde Umwelt bzw. Nutzung flexibel reagieren zu können. Flexibilität umfasst Begriffe wie Anpassung, Steuerbarkeit und Bewegung. Diese in konstruktive Strukturen einzubetten soll am Beispiel pneumatisch gestützten Folienkissen gezeigt werden.

Pneumatisch[1] gestützte Folienkissen sind in sich geschlossene Konstruktionselemente, die sich aus den Bausteinen Hülle, Rand und Stützmedium zusammensetzen. Wird die Hülle durch eine durch das Stützmedium, im Normalfall Luft, hervorgerufene Druckdifferenz belastet, krümmt sich diese in Richtung des weniger dichten Mediums und wird dadurch flächig stabilisiert. Es entsteht ein pneumatisches Gebilde, wobei das die Hülle spannende Stützmedium zum Konstruktionselement wird.

Die Hülle der Folienkissen wird zumeist aus ETFE gefertigt, einem hochtransparenten Copolymer. Die Möglichkeit große transparente Gebäudehülle zu schaffen, kann sonst nur in ähnlichem Maße mit Glas erreicht werden. Glaskonstruktionen haben im Sinne von Flexibilität den Nachteil recht steif ausgeführt werden zu müssen, da kleinste Verformungen der Primärkonstruktion zu einer Schädigung des Glases führen können. Daraus resultiert ein entsprechend hoher Materialaufwand für die Primärkonstruktion. Diesem Manko kann man durch das Material ETFE begegnen, da es sehr leicht und zudem durch die geringe Dicke und den kleinen E-Modul biegeweich ist, geht es folglich sehr gutmütig mit Verformungen des Primärtragwerkes um. Die Primärkonstruktion kann wesentlich filigraner und leichter ausgeführt werden. Dies führt insgesamt zu leichteren Konstruktionen.

Die Leichtigkeit eröffnet die Möglichkeit der einfachen Bewegung. Dabei ergibt sich diese Leichtigkeit sowohl aus dem Konstruktionselement Luft als auch der sehr geringen Dicke der die Luft umschließenden Hülle. Die geringe Dicke der Hülle führt zu einer geometrischen Biegeweichheit, die wiederum eine leichte Verformbarkeit ermöglicht. Die Kombination aus konstruktiver Leichtigkeit und geometrischer Biegeweichheit bietet ein hohes Maß an Flexibilität. Zusätzlich ergibt sich aus der notwendigen kontinuierlichen Anpassung pneumatischer Tragwerke an die sich ändernden Umweltbedingungen ein weiteres Merkmal der eingangs erwähnten Flexibilität, sodass diese ohnehin notwendige Steuerung des Stützmediums nun für eine gezielte Verformung der Hülle genutzt werden kann. Diese Verformung in einem weiteren Schritt auf das nächste anbindende Element pneumatischer Gebilde zu übertragen, den Rand, ist Gegenstand dieser Arbeit. Damit wird eine Formänderung des gesamten pneumatischen Gebildes möglich, die nicht durch zusätzliche Motoren, sondern von „innenheraus“ durch das Stützmedium erzeugt wird. Um dies zu erreichen, wurde in der vorliegenden Arbeit wie folgt vorgegangen.

Gliederung der Arbeit

Zunächst gilt es den Begriff Flexibilität zu definieren und die ebenfalls verwendeten Begriffe, wie Steuerbarkeit, Verformung und Bewegungen in einen Gesamtkontext einzubetten. Dies geschieht in Kapitel 2. Zudem widmet sich Kapitel 2 den notwendigen mechanischen und energetischen Grundlagen, aus denen die für diese Arbeit mögliche Bewegungen und Verformungen abgeleitet werden. Des Weiteren wird eine analytische Lösung zum kombinierten Biege- und Seiltragverhalten verwendet und umfassend ausgewertet.

Folienkissen werden fast immer aus ETFE gefertigt. Eine ausführliche Zusammenstellung der Eigenschaften des Materials ETFE erfolgt in Kapitel 3, wobei die sehr lückenhaften Angaben in der zusammengetragenen Literatur durch umfangreiche eigene Untersuchungen ergänzt werden.

[1] Pneumatisch [gr. *pneuma*: Luft, Wind, Atem] [Duden 2009]

Außerdem werden die in Kapitels 2 gelegten theoretischen mechanischen und energetischen Grundlagen so aufbereitet, dass sie im weiteren Verlauf der Arbeit auf die Bausteine Hülle und Rand pneumatischer Tragwerke angewendet werden können.

Kapitel 4 beinhaltet ein ausführliches Studium des pneumatischen Gebildes Folienkissen. Dazu wird zunächst ein kurzer Bezug zur Natur aufgebaut und dann der Transfer in die Technik unternommen. Zudem werden die drei Bausteine – Hülle, Rand und Medium – pneumatischer Gebilde getrennt betrachtet und auf ihr Potential, im Hinblick auf die titelgebende Flexibilität, hin untersucht. In einem weiteren Schritt erfolgen dann umfangreiche theoretische, versuchstechnische und numerische Untersuchungen zum komplexen Thema des Lastabtrags von Folienkissen.

In Kapitel 5 nimmt letztendlich das zuvor erarbeitete Wissen auf und bildet die Verbindung aus Bewegung, Verformung und Steuerbarkeit am Beispiel pneumatischer Folienkissen. Dies erfolgt zunächst über ein kurzes Studium der Geschichte solcher Tragwerke, um dann im nächsten Schritt die eigenen entwickelten Systeme vorzustellen und zu diskutieren. Dabei werden rein kinetische, biegeweiche und sogenannte hybride, also eine Kombination aus kinetisch und biegeweich, unterschieden.

Abschließend erfolgt in Kapitel 6 nach einer Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse ein Ausblick auf noch ausstehende weitere Forschung.

2 Flexibilität

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Steuerbarkeit von Transformationen pneumatisch gefüllter Kissen und ihrer Ränder. Es gilt eine Verbindung zwischen Transformation und Steuerbarkeit aufzubauen. Die Verbindung gelingt über den Begriff der Flexibilität[2]. Das in Bild 2.1 entwickelte Schaubild zeigt diese Verbindung. Die Flexibilität beschreibt allgemeinhin die Fähigkeit eines Systems oder Organismus, sich auf geänderte Anforderungen und Gegebenheiten seiner Umwelt einzustellen. Diese Anpassungen können aktiv und/oder passiv erfolgen.

Die Begriffe, die zur weiteren Differenzierung der Flexibilität notwendig sind, werden im Folgenden beschrieben, wie sie in dieser Arbeit und im allgemeinen Sprachgebrauch Verwendung finden. Das hier Bedarf besteht, zeigen die unzähligen Beiträge und Texte, die der Literatur entnommen werden konnten (einige Beispiele: [Neuhäuser, et al. 2012], [Haase, et al. 2011], [Weilandt 2007], [Göppert 2005], [Teuffel 2004], [Schlaich 2004], [Korvink und Schlaich 2000]). Insbesondere Wörter wie adaptiv, intelligent oder smart werden für Dinge bzw. Bauwerke verwendet, die diese genannten Eigenschaften zur heutigen Zeit nicht aufweisen. Meist werden diese Wörter als Synonym für steuer- oder regelbar verwendet. Dabei liegt der Ursprung des Wortes adaptiv in der Biologie und beinhaltet aktive Anpassung. Das berechtigte Studium natürlicher Abläufe und der Wissenstransfer in vom Menschen genutzte Systeme erlauben dennoch nicht den Worttransfer auf daraus abgeleitete technische Systeme.

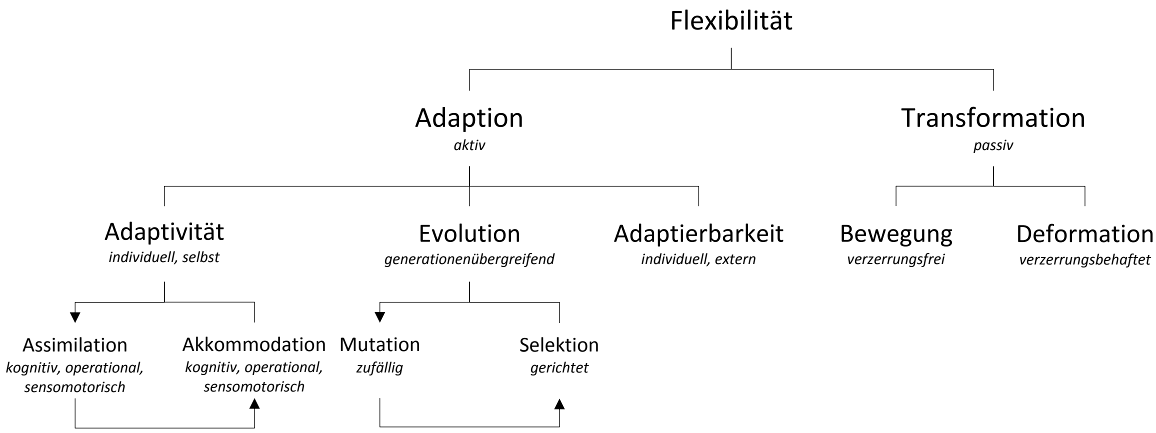


Bild 2.1: Schematische Gliederung der Flexibilität

Im Weiteren werden die in Bild 2.1 verbundenen Begriffe erläutert, wobei zunächst auf den *aktiven* Teil der Flexibilität eingegangen wird und im späteren Verlauf die Transformation als *passiver* Teil beleuchtet wird.

2.1 Adaption

Flexibilität beinhaltet nicht nur seiner lateinischen Herkunft nach das Biegen oder Beugen, sondern auch die Fähigkeit zur Anpassung. Dies wird mit dem Wort Adaption zusammengefasst und repräsentiert den *aktiv*en Teil der Flexibilität. Eine Adaption kann dabei adaptiv[3], evolutionär[4] oder adaptierbar[5] sein. Die drei Ausprägungen der Anpassung unterscheiden sich in ihrem Bezug zum eigentlichen Individuum bzw. System.

---

2 Flexibilität [lat. *flectere*: „biegen“, „beugen“] [Brockhaus 1998]

3 adaptiv [lat. adaptare: anpassen, passend herrichten] – Fähigkeit zur Selbstanpassung [Brockhaus 1998]

4 evolutionär [lat. *evolvere*: entwickeln] [Brockhaus 1998]

5 adaptierbar – Möglichkeit angepasst zu werden

2.1.1 Adaptivität

Adaptivität ist die Fähigkeit eines Systems sich *selbst* anzupassen und auf Veränderungen von innen heraus zu reagieren. Adaptivät versteht sich als die Möglichkeit des Eingehens auf Veränderungen, wobei diese jedoch durch die Grenzen der zuvor existenten z.B. genetischen Basis begrenzt ist. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, dass ein System kognitiv sein muss. Der Begriff der Kognition[6] ist eng mit dem Vorgang des Lernens verbunden. Kognition ist als die Umgestaltung von Informationen durch ein verhaltenssteuerndes System zu verstehen. Adaptivität ist ohne Lernen beziehungsweise Denken weder vorstell- noch erreichbar.

Bei der Adaptivität, also der kognitiven Anpassung, ergeben sich sowohl assimilative als auch akkommodative Prozesse. Assimilation[7] bedeutet die Einbettung neuer Erfahrungen in ein bereits vorhandenes kognitives Schema, aber auch das Schaffen neuer Schemata. Die Akkommodation[8] umfasst die Veränderung der bereits vorhandenen kognitiven Schemata an neue Erfahrungen, um die Verhaltensweisen weiter zu differenzieren. Beide dienen dazu, einen Gleichgewichtszustand zwischen dem Individuum und seiner Umwelt zu erreichen, und laufen sich gegenseitig beeinflussend und parallel ab.

> *Explizit bedeutet Assimilation so viel wie kognitive Integration von Sinneswahrnehmungen und Akkommodation die Differenzierung dieser (bereits integrierten) Sinneswahrnehmungen. [Piaget 1992]*

Die Anpassung eines Individuums kann dabei nur in den gesetzten Grenzen, die durch das Erbgut vorliegen, erfolgen. Dies nennt man Akklimatisation[9].

Beispielsweise funktioniert der angeborene Greifreflex des Kindes für feste Gegenstände, aber nicht beim Wasser. Den Greifreflex der Hand in ein Schöpfen der Hand zu verändern, liegt in der genetischen Basis des Kindes, muss aber erst erlernt werden.

2.1.2 Evolutionäre Anpassung

Die Evolution hingegen, die als generationenübergreifende Form der Anpassung eines Organismus oder besser einer Art gilt, schafft durch ungerichtete Veränderungen im Erbgut (Mutationen) eine zufällige Vielfalt. Die danach einsetzende natürliche Selektion gibt eine Richtung vor und entscheidet über den Wert der Mutation. Ein so entstandenes Merkmal wird dann zum Bestandteil der Evolution, wenn es eine genetische Grundlage hat und somit erblich ist. Ist ein entstandenes Merkmal für einen Organismus günstig, aber ursprünglich einem anderen Zweck zuzuordnen, dann spricht man von Exaptationen[10].

Jede Anpassung kann dabei immer nur an die aktuell vorhandene Umwelt geschehen. Somit kann eine sich verändernde Umwelt auch zum Verlust einer zuvor gewonnen Anpassungsfähigkeit führen, ohne dass der Organismus selbst eine Veränderung vollzogen hat. Dies nennt man Fehladaption. Da die jeweilige Umwelt dabei natürlich auch andere Lebewesen einschließt und diese sich ebenfalls anpassen können, kommt es zu Wechselbeziehungen, die als Koadaptionen bezeichnet werden. Diese Koadaption kann, wenn für beide Seiten günstig, zu Symbiose[11] führen. Als Beispiel ist hier das in Bild 2.2 dargestellte Beispiel der Imperator Garnele, die einen Schutz über die angepasste Oberflächenpigmentierung auf der spanischen Tänzerin sucht, aufgeführt.

---

6 Kognition [lat. *cognoscere*: „erkennen“, „kennen lernen“] – Sammelbegriff für alle Prozesse und Strukturen, die mit dem Wahrnehmen und Erkennen zusammenhängen (Denken, Erinnern, Vorstellen, Gedächtnis, Lernen, Planen u. a.) [Brockhaus 1998]

7 Assimilation [lat. *assimilatio*: Ähnlichmachung] [Brockhaus 1998]

8 Akkommodation [lat. *accommodatio*: das Anpassen; fr.: „Angleichung“] [Brockhaus 1998]

9 Akklimatisation – Individuelle Anpassung eines Organismus an sich verändernde Umweltbedingungen, die selbst umkehrbar ist.

10 Exaptationen – Anpassungen, die durch die natürliche Selektion zunächst wegen einer anderen Funktion bevorzugt wurden und erst in einem späteren Schritt ihre jetzige Aufgabe übernahmen [Gould und Vrba 1982]

11 Symbiose [gr. *symbioun*: „zusammenleben“] – Zusammenwirken mehreren Faktoren mit gegenseitiger Begünstigung [Brockhaus 1998]

Kommt es hingegen zu einem Eingriff in die jeweils andere Spezies nennt man dies Mutualismus[12]. Bild 2.2 zeigt die Koadaption zwischen Ameisen, die die Milch der Blattläuse trinken, und Blattläusen, die die Blattläuse vor Übergriffen der Marienkäfer schützen.

Bild 2.2: Symbiose: Imperator Garnele auf spanischer Tänzerin; Mutualismus: Ameisen und Blattläuse

Ist die Koadaption hingegen nicht vorteilhaft für beide Seiten, kann es zu einem gegenseitigen genetischen Hochrüsten kommen.

2.1.3 Adaptierbarkeit

Ein technisches System selbst unterliegt keiner Evolution. Einzig der Mensch als ihr Schöpfer ist in die Evolution eingebettet. Die mit der Evolution einhergehende ungerichtete Mutation ist technischen Systemen also nur über den Umweg über den Menschen gegeben. Die Veränderungen an technischen Systemen werden bewusst und zielgerichtet herbeigeführt, auch wenn sie einer vom Markt unterworfenen Selektion unterliegen, die natürlich wieder nur vom Menschen ausgeht. Das System als solches ist immer gebunden an den „Ideenreichtum" seines Erfinders. Er allein entscheidet über die Komplexität. Die dabei in das System integrierte mögliche spätere Einstellbarkeit ist zum Entstehungszeitpunkt einmal festgelegt, kann aber dennoch von großer Komplexität sein. Die im Entwurfsprozess somit einmal festgelegten, sich als relevant und beeinflussbar herausgestellten Parameter, lassen eine spätere Adaptierbarkeit von technischen Systemen zu. Im fertigen System können dann aber eben nur diese verändert, geregelt bzw. gesteuert werden. Eine Anpassung auf vorher nicht bedachte Einwirkungen ist dann nicht mehr möglich ohne ein nachträgliches *extern*es Verändern. Adaptierbarkeit kann in Sinne von technischen Systemen also lediglich als Einstellbarkeit verstanden werden.

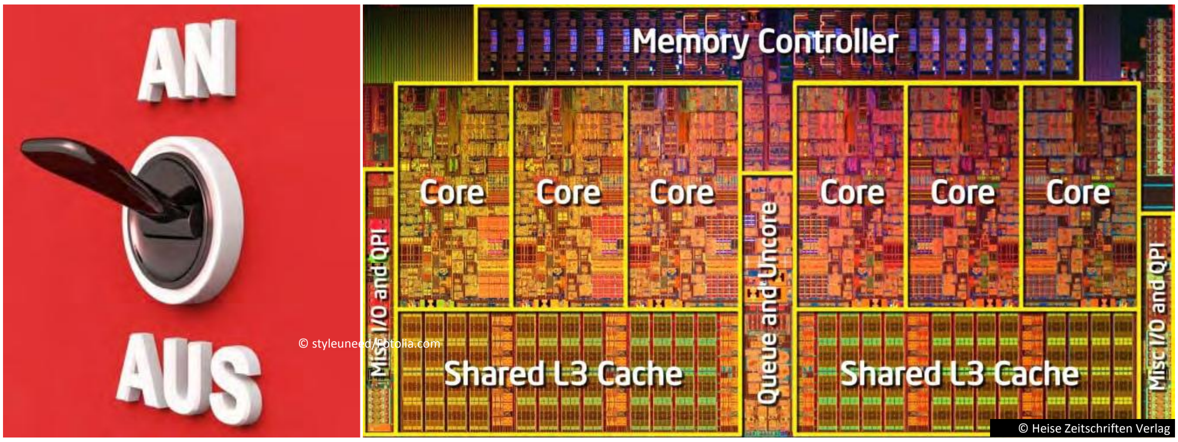


Bild 2.3: 1 Schalter und 1,17 Milliarden Transistoren des Sechskern-Prozessors Core i7-980X Extreme Edition

[12] Mutualismus [lat. *mutuus*: „gegenseitig, wechselseitig"] [Brockhaus 1998]

Die Einstellbarkeit wird letztendlich durch eine Steuerung realisiert, die vorher definierte Sollwerte mit aktuellen Istwerten vergleicht und versucht die Istwerte an die definierten Sollwerte heranzuführen. Dies geschieht über die Heranführung einer oder mehrerer Führungsgrößen an eine oder mehrere Regelgrößen über die Anpassung einer oder mehrerer Stellgrößen. Im einfachsten Fall entsteht dabei eine offene Wirkungskette, wie im Bild 2.4 dargestellt.

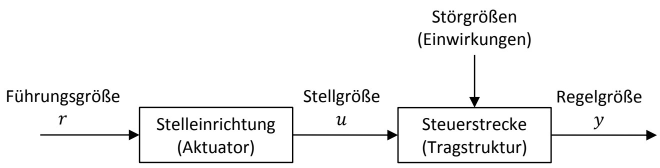


Bild 2.4: Steuerung in der offenen Wirkungskette [Lunze 2006]

Geschieht dieser Abgleich zwischen Führungs- und Regelgrößen in sehr kurzen Zeitintervallen, also beinahe kontinuierlich, stehen die Steuereinheit und das gesteuerte System in ständiger Wechselwirkung und bilden einen „Kreis“ [Lunze 2006]. Die Steuerung hat dann einen geschlossen Wirkungsablauf und wird als Regelung bezeichnet. Bei einer Regelung wird fortlaufend versucht, erfasste Istwerte (Regelgrößen) durch Aktuatoren (Stelleinrichtung) an zuvor definierte Sollwerte (Führungsgrößen) heranzuführen. Grundlegend ist der Aufbau solcher Regelungen in [DIN 19226-1 1994] beschrieben und konnte in leicht abgewandelter Form [Bleicher 2011] entnommen werden (Bild 2.5). Die Erfassung der Regelgröße geschieht dabei über Sensoren (Messeinrichtung).

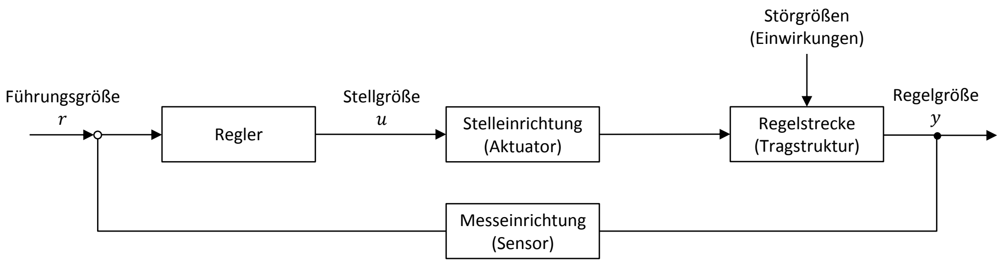


Bild 2.5: Grundstruktur eines Regelkreises [Bleicher 2011]

Die Anzahl der erfassten und angepassten Größen entscheidet dabei über die Komplexität der Regelung und des Systems. Dennoch kann solch ein System nur eben die Größen regeln/steuern, die bei der Auslegung des Systems bedacht wurden.

2.1.4 Aktionsraum

Sowohl für adaptive Organismen als auch für adaptierbare Systeme stellt die Anzahl der Anpassungsmöglichkeiten den Aktionsraum[13] dar. Je größer der Aktionsraum desto größer sind die Handlungsmöglichkeiten in einer Entscheidungssituation. Die Erweiterung des Aktionsraumes sowie die Reduzierung der benötigten Zeit einzelne Strategien und Aktionen umzusetzen und durchzuführen, stellt das Potenzial der Flexibilität dar. Auch hier kann unterschieden werden zwischen einem einmal festgelegten Aktionsraum, wie es bei Maschinen, Computern oder eben Bauwerken der Fall ist, oder einem sich evolutionär oder individuell bedingten erweiternden Aktionsraum, wie er Organismen gegeben ist. Dann ist dieser Begriffskomplex wiederum eng mit dem Begriff „Lernen“ verwandt.

Adaptierbare Systeme haben einen einmal festgelegten Aktionsraum und adaptive Systeme bzw. Individuen einen veränderbaren Aktionsraum, den sie selbständig, in den für sie definierten genetischen Grenzen, anpassen können.

[13] Aktionsraum – beeinflussbare Handlungsalternativen in einer Entscheidungssituation [Gabler Wirtschaftslexikon 2001]

2.2 Transformation

Die *passiv*e Seite der Flexibilität ist die Transformation, als Resultat einer Krafteinwirkung „actio". Wie die mögliche „reactio", also die Transformation des Systems erfolgt, wird durch die systembedingte Mechanik[14] definiert und grundlegend mit den Gesetzen der technischen Mechanik beschrieben. Die Mechanik eines Systems selbst lässt sich einmal festgelegen und ist nach dem Entstehungszeitpunkt dann nicht mehr veränderlich. So lässt sich beispielsweise für ein System der Grad der Verformung über die verwendeten Materialien „einstellen". Dies kann nur in den Grenzen der ertragbaren Deformation der Materialien (elastisch[15], plastisch[16], viskos[17]) erfolgen.

Kraftlose reine Bewegungen[18] können über die verwendete Geometrie, die sowohl die Geometrie der einzelnen Bausteine als auch deren Kopplungsbedingungen (Freiheitsgrade) untereinander mit einschließt, „eingestellt" werden.

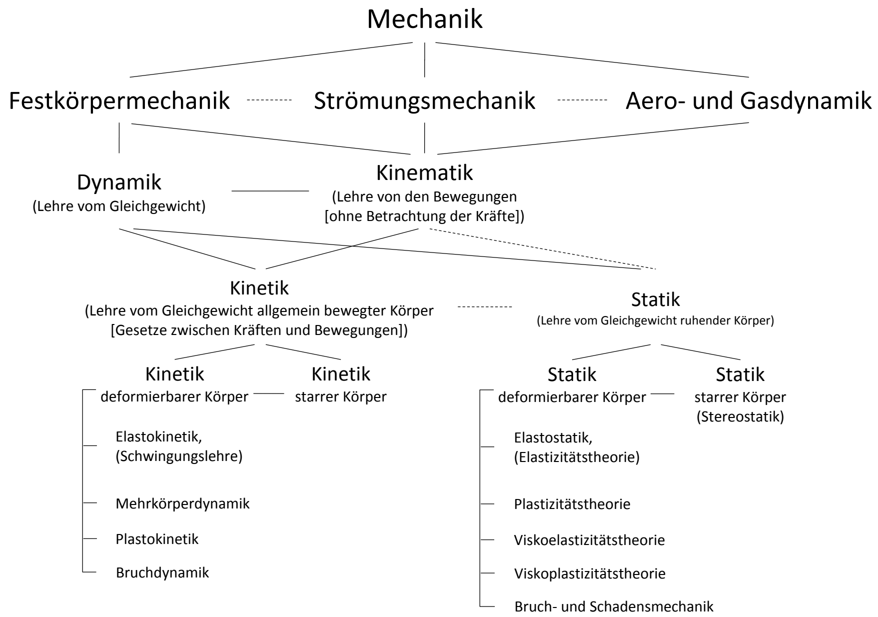


Bild 2.6: Schematische Gliederung der Mechanik [Stein 1999]

Der hier wichtige Bereich der Mechanik ergibt sich aus der Festkörpermechanik und führt letztendlich zur Kinetik[19] der starren Körper und der Statik[20] der deformierbaren Körper, da diese zu den für diese Arbeit elementaren Transformationen führen. Sowohl der Kinetik als auch der Statik ist die Suche nach Gleichgewicht gemeinsam, wobei die Kinetik dies für bewegte Körper beschreibt und die Statik sich auf ruhende Körper beschränkt. Die im Zuge dieser Arbeit untersuchten Systeme werden allgemein bezüglich ihrer Fähigkeit zur Transformation hin untersucht. Insbesondere soll die spätere Einstellbarkeit (Adaptierbarkeit) der Systeme hinsichtlich ihrer Bewegung und Deformation untersucht werden. Hierzu werden aus den mechanischen Grundlagen die möglichen Transformationen abgeleitet.

---

14 Mechanik [gr. *mēchanikḗ* (*téchnē*): „die Kunst, Maschinen zu erfinden und zu bauen"] – Lehre von den Kräften und Bewegungen [Duden 2009]

15 elastisch [gr. *elastós* (*elatós*): getrieben; dehnbar, biegbar] [Duden 2009]

16 plastisch [gr. *plássein*: bilden, formen] [Duden 2009]

17 viskos [lat. *viscōsus* (*viscum*: zäh wie Vogelleim): breiig, zähflüssig, leimartig] [Duden 2009]

18 Dem Autor ist klar, dass es solche Bewegungen nicht gibt, dennoch lassen sie sich in der Idealvorstellung abbilden und beschreiben.

19 Kinetik [gr. *kinētikós*: die Bewegung betreffend] [Duden 2009]

20 Statik [gr. *statikós*: zum Stillstehen bringend, (still)stehend] [Duden 2009]

Beschreibt man ein zu untersuchendes System, besteht dieses aus einzelnen Körpern. Diese Körper bestehen aus elementaren Bausteinen (Atome[21] oder Moleküle[22]). Die Lage dieser elementaren Bausteine zueinander wird dabei durch ihren Abstand und ihre Winkelbeziehungen, die von gedachten Verbindungsgeraden der elementaren Bausteine beschrieben werden, definiert.

2.2.1 Kinetik starrer Körper

Betrachtet man einen Körper und seine elementaren Bausteine als in sich starr, sind die Abstände und Winkelbeziehungen zwischen den elementaren Bausteinen unveränderlich.

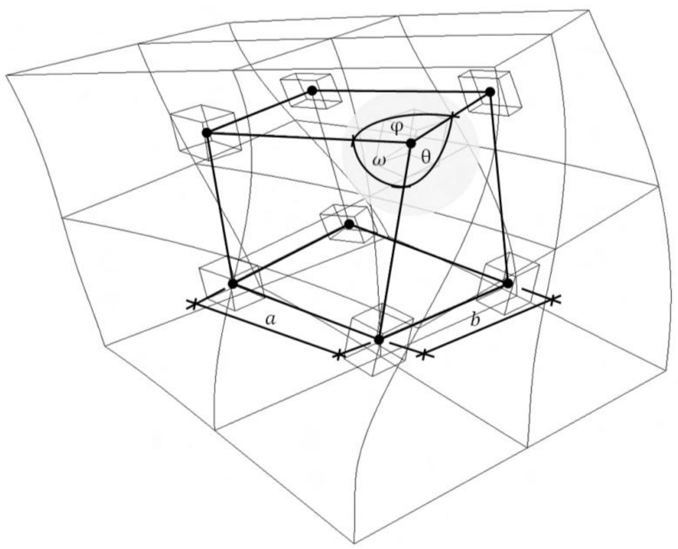


Bild 2.7: dreidimensionaler Körper mit Abstands- und Winkelbeschreibungen

Die Kinetik formuliert die Gesetzmäßigkeiten zwischen der Bewegung eines solchen starren Körpers und den dafür erforderlichen Kräften. Dies führt auf zwei Gleichungen, aus denen die beiden grundlegenden Bewegungsweisen für starre Körper ersichtlich werden (die Masse des Körpers wird als unveränderlich angenommen).

1. Grundgesetz der Kinetik starrer Körper (2. Newtonsches Axiom[23])

Kraft = Masse × Beschleunigung des Schwerpunkts

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2–1)$$

2. Grundgesetz der Kinetik starrer Körper

Moment = Kraft × Hebelarm

$$\vec{M} = \vec{F}\vec{r} = m\vec{a}\vec{r} \qquad (2–2)$$

Moment = Massenträgheit × Winkelbeschleunigung

$$\vec{M} = I\alpha = I\frac{d\dot{\varphi}}{dt} \qquad (2–3)$$

---

21 Atom [gr. *átomo*: unteilbar] – kleinster, weder mechanisch noch chemisch teilbarer Baustein der Materie

22 Molekül [lat. *molecula*: „kleine Masse“] – zwei- oder mehratomige Teilchen

23 Axiom [gr. *axíōma*: Würdigung, Würde, Ansehen] – Grundsatz, gültige Wahrheit, die keines Beweises bedarf [Duden 2009]

Wie Gl. (2–1), (2–2) bzw. (2–3) zeigen, ergeben sich für einen starren Körper zwei grundsätzliche Bewegungsarten: Dynamik[24] der fortschreitenden Bewegung (Translation[25]) und Dynamik der Drehbewegung (Rotation[26]). Für einen starren Körper lassen sich alle Bewegungen auf diese beiden Transformationen zurückführen.

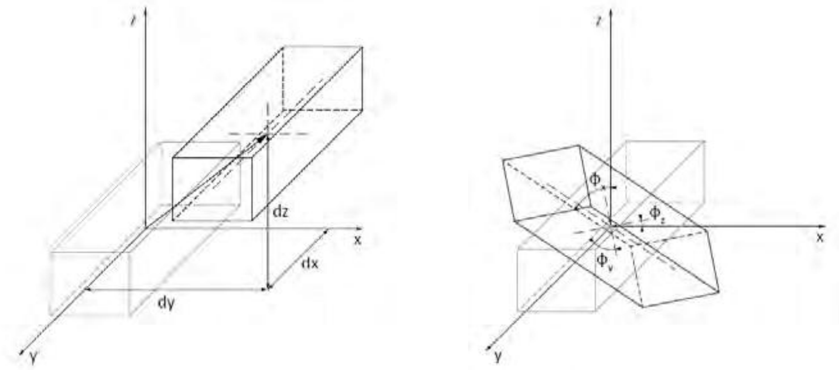


Bild 2.8: Translation und Rotation als verzerrungsfreie Transformationen eines Körpers

Die einzige Bewegung eines starren Körper ist also die Lageänderung relativ zu anderen Körpern oder relativ zu einem Bezugssystem. Mathematisch lässt sich die allgemeine Bewegung eines starren Körpers mit den im Bild 2.9 dargestellten Bezeichnungen über die Gleichungen (2–4) bis (2–6) beschreiben. In ihnen wird die gleichmäßige Translation aller Körperpunkte und die Rotation aller Körperpunkte bezüglich eines Inertialsystems[27] dargestellt.

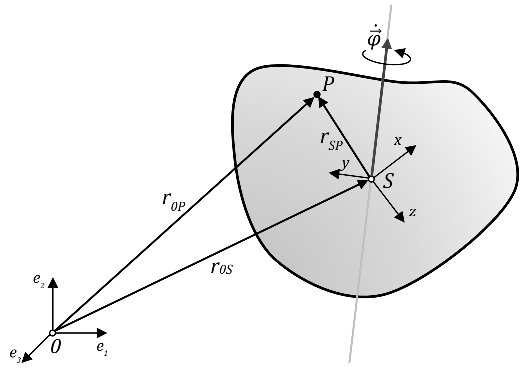


Bild 2.9: Lagebeschreibung eines Punktes P

Lage und Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbeschreibung eines Punktes P

$$r_{0P} = r_{0S} + r_{SP}$$ Ortsvektor (2–4)

$$\dot{r}_{0P} = \dot{r}_{0S} + \dot{\vec{\varphi}} \times r_{SP}$$ Geschwindigkeit (2–5)

$$\ddot{r}_{0P} = \ddot{r}_{0S} + \ddot{\vec{\varphi}} \times r_{SP}$$ Beschleunigung (2–6)

Betrachtet man diese Basistransformationen im Bauwesen und wendet sie auf die in dieser Arbeit untersuchten Konstruktionen an, ergibt sich beispielhaft die im Bild 2.10 dargestellte Möglichkeit. Das dargestellte Dach kann sowohl in Teilen drehend geöffnet werden, als auch als Ganzes verschoben werden.

---

24 Dynamik [gr. *dynamikós*: mächtig, wirksam] [Duden 2009]

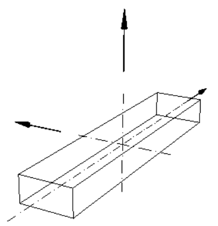
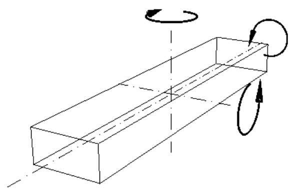
25 Translation [lat. *translatio*: das Versetzen, die Übersetzung] [Duden 2009]

26 Rotation [lat. *rotatio*: kreisförmige Umdrehung ? *rotare*: (sich) kreisförmig drehen ? *Rota* (*Rota Romana*): römisches Rad, wohl nach der kreisrunden Richterbank] [Duden 2009]

27 Inertialsystem [lat. *iners*: untätig, träge] – Koordinatensystem, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen.

Bild 2.10: Rotation und Translation: Ball Dome 50, Toyama, Japan 1991 [Ishii 1993]

Tabelle 2.1: Transformation starrer Körper

Transformation	
verzerrungsfrei	
Translation	**Rotation**
	

2.2.2 Statik deformierbarer Körper

Verlässt man die Theorie des starren Körpers und untersucht die Wirkung äußerer Kräfte auf einen festen deformierbaren Körper, wird sich dieser nicht nur bewegen, sondern innerlich verzerren, was die inneren Widerstände des Materials aktiviert, die dieser äußeren Einwirkung entgegenwirken.

Verzerrungen – Allgemein $\mathbb{R}^3$

Möchte man nun eine Aussage über die Verzerrungen treffen, können diese über die Betrachtung der unmittelbaren Umgebung eines materiellen Punktes getroffen werden. Die Bewegung eines Körpers von der Referenz- zur Momentankonfiguration (s. Bild 2.11) wird im Allgemeinen über die zeitabhängige Abbildung $\varphi(\boldsymbol{X}, t)$ aller inneren elementaren Bausteine beschrieben.

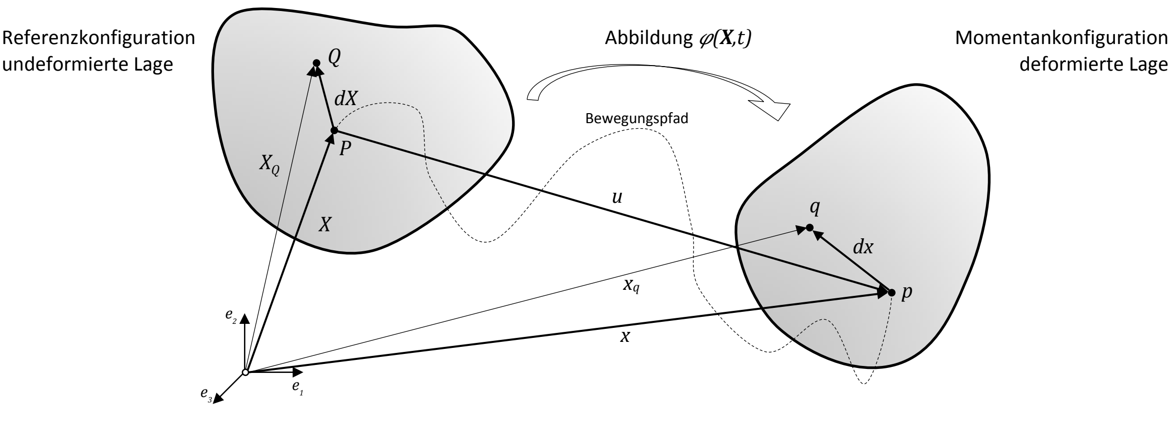


Bild 2.11: Referenz- und Momentankonfiguration eines materiellen Körpers in undeformierter und deformierter Lage [Kuhl und Meschke 2002]

Aus dieser Abbildung und der Betrachtung nur eines Punktes in der Koordinate $\boldsymbol{X}$ lässt sich der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$ aufstellen [Kuhl und Meschke 2002].

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t) = \varphi(\boldsymbol{X},t) - \varphi(\boldsymbol{X},0) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) - \boldsymbol{X} \tag{2–7}$$

Die nähere Umgebung, sowohl in der Referenz- als auch der Momentankonfiguration, wird durch ein eingeprägtes differentielles Linienelement $d\boldsymbol{X}$ bzw. $d\boldsymbol{x}$ betrachtet. Beschreibt man nun den differentiell entfernten Punkt q der deformierten Lage aus der Referenzkonfiguration, erhält man $y = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) + d\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$. Dieser Ausdruck wird zur einfacheren Lösbarkeit in eine Taylorreihe überführt.

$$y = \varphi(\boldsymbol{X},t) + \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{X},t)}{\partial\boldsymbol{X}}\left[\boldsymbol{X}_Q - \boldsymbol{X}\right] + \ldots = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) + \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{X},t)}{\partial\boldsymbol{X}}\,d\boldsymbol{X} + \ldots \tag{2–8}$$

Die dabei entstehende unendliche Reihe kann nach dem linearen Term abgebrochen werden. Nach [Kuhl und Meschke 2002] lässt sich durch weiteres Umformen und Umstellen dann die kompakte Form des GREEN LAGRANGE Verzerrungstensor $\boldsymbol{E}$[28] gewinnen.

$$\boldsymbol{E} = \nabla^{sym}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\nabla^{T}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} \qquad\qquad \nabla^{sym}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\left[\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^{T}\boldsymbol{u}\right] \tag{2–9}$$

Dieser teilt sich in einen symmetrisch linearen und einen schiefsymmetrisch nicht-linearen Anteil des Verschiebungsgradienten $\nabla\boldsymbol{u}$. Der nicht-lineare Anteil spiegelt die geometrische Nichtlinearität von Systemen wieder und beeinflusst nur dann entscheidend den Verzerrungstensor, wenn der Gradient des Verschiebungsfeldes groß ist. Den grundlegenden Unterschied zwischen linearer und nicht-linearer Analyse definiert das Maß der Steifigkeit eines Systems. Die Steifigkeit eines Systems ist von zwei Faktoren abhängig: der mechanischen Steifigkeit, die sich aus Form und Lagerung ergibt, und der Steifigkeit, die sich aus dem verwendeten Material ergibt. Kommt es bei der Belastung eines Systems zu großen Verformungen, kann sich die Ausgangsform ändern, das Material seine Eigenschaften ändern oder es kann zu einer Änderung der Teilstützung kommen. Alle drei Faktoren können zu Systemänderungen führen, die mit einer linearen Analyse nicht erfasst werden können.

Sind die Verzerrungen $\left[u_{i,j}\right]$ hingegen klein $(1/2\nabla^{T}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} \approx 0)$ kann das Verzerrungsmaß allein durch den symmetrischen Anteil beschrieben werden.

Allgemeine lineare Verzerrungsmaße für den 3D-Verschiebungszustand [Stein 1999]

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{2,1}+u_{1,2}) & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1}+u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,2}+u_{2,3}) & u_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_{1,2}-u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3}-u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{2,1}-u_{1,2}) & 0 & \frac{1}{2}(u_{2,3}-u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1}-u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,2}-u_{2,3}) & 0 \end{bmatrix} \tag{2–10}$$

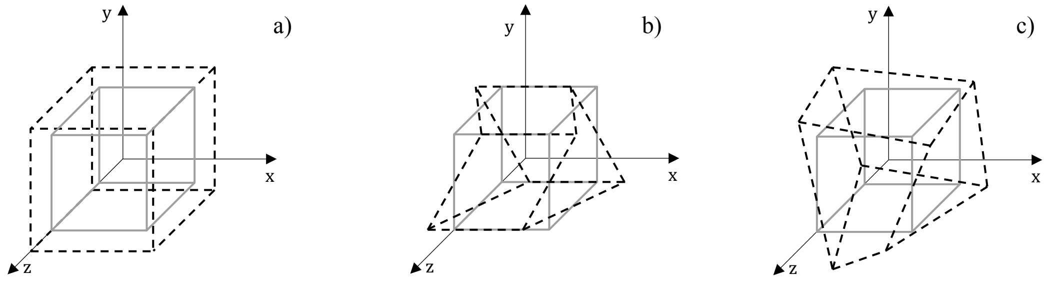
mit der Kurzschreibweise

$$\left[u_{i,j}\right] = \left[\varepsilon_{i,j}\right] + \left[\varphi_{i,j}\right] \tag{2–11}$$

In der oben gezeigten Schreibweise (2–11) sind die Verzerrungen $\left[u_{i,j}\right]$ bereits in Verschiebungen $\left[\varepsilon_{i,j}\right]$ und Verdrehungen $\left[\varphi_{i,j}\right]$ getrennt. Aus dieser getrennten Schreibweise lassen sich sofort die beiden Sonderfälle für die Verzerrungen $\left[u_{i,j}\right]$ unter den elementaren Bausteinen

[28] Der GREEN LAGRANGE Verzerrungstensor $\boldsymbol{E}$ wird in den Ingenieurwissenschaften bevorzugt, da er bei Nichtdeformation eine Null darstellt. Im Gegensatz dazu steht beispielsweise der rechte und linke Cauchy-Green Tensor, der bei Nichtdeformation als Matrix die Einheitsmatrix annimmt.

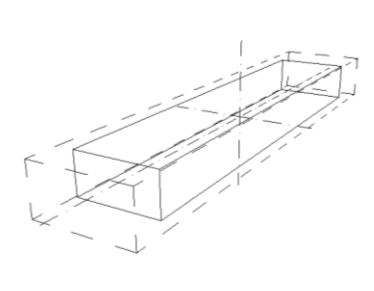
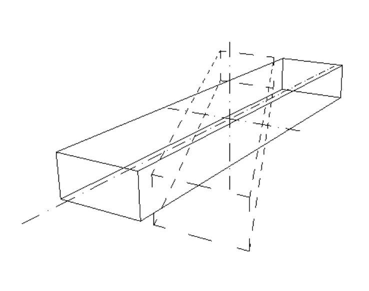
ablesen. Bleiben die Winkelbeziehungen im Kontinuum konstant und verändern sich nur die Abstände, spricht man vom Skalieren. Für den umgekehrten Fall, dem Gleichbleiben der Abstandsverhältnisse bei Verändern der eingeschlossenen Winkel, wird der Begriff der Scherung verwendet. Verändern sich sowohl die Abstände als auch die eingeschlossenen Winkel, liegt ein allgemeiner Verzerrungszustand vor, der sich, wie erwähnt, als Summe der Abstands- und Winkeländerungen darstellen lässt (Bild 2.12).



$[u_{i,j}] = [\varepsilon_{i,j}]; [\varphi_{i,j}] = 0$ $\qquad$ $[u_{i,j}] = [\varphi_{i,j}]; [\varepsilon_{i,j}] = 0$ $\qquad$ $[u_{i,j}] = [\varepsilon_{i,j}] + [\varphi_{i,j}]$

Bild 2.12: a) Skalierung, b) Scherung, c) allgemeine Verzerrung, als Summe aus Skalierung und Scherung (grundlegende dehnungsbehaftete Transformationen = Deformation)

Tabelle 2.2: Transformation deformierbarer Körper

Transformation	
verzerrungsbehaftet	
Skalieren	**Scheren**
	

Die Skalierung wird auch als Volumenänderung und die Scherung als Gestaltänderung bezeichnet.

Verzerrungen – Flächen im $\mathbb{R}^3 (\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3)$

Die obigen Erläuterungen gelten für den allgemeinen Fall eines dreidimensionalen Körpers im $\mathbb{R}^3$. Wie lassen sich nun Verzerrungen, die letztendlich Spannungen bedeuten, vermeiden? Eine Möglichkeit besteht darin einige der gemischten Terme des in Gleichung (2–10) gezeigten allgemeinen linearen Verzerrungsmaßes zu eliminieren. Dies ist über eine Reduzierung der Dimension des im $\mathbb{R}^3$ beschrieben Objektes möglich. Dazu gilt es, ein Element des $\mathbb{R}^2$ im $\mathbb{R}^3$ zu beschreiben. Dies liefert die implizit analytische Definition der Fläche, wie sie in Gleichung (2–12) dargestellt ist.

Implizite analytische Definition der Fläche

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2–12}$$

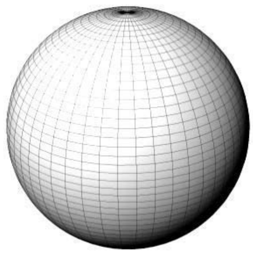
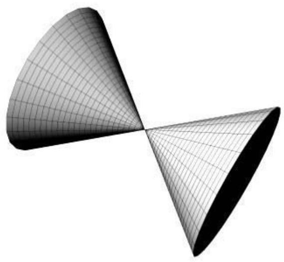
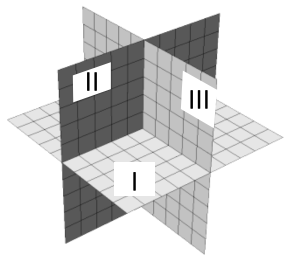
Eine weitere Möglichkeit der Beschreibung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist die parametrische Definition. Dabei werden für die drei Koordinatenrichtungen getrennte Richtungsvektoren gebildet.

Parametrische Definition einer Fläche im euklidischen Raum

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, (u,v) \in X \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{2–13}$$

In Tabelle 2.3 sind drei Beispiele von Flächen sowohl in implizit analytischer als auch in parametrischer Schreibweise dargestellt.

Tabelle 2.3: Implizit analytische und parametrische Beschreibung von Flächen

		
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$x^2 - y^2 - z^2 = 0$	$x \cdot y \cdot z = 0$
$x = r \cdot sin(u) \cdot cos(v)$ $y = r \cdot cos(u)$ $z = r \cdot sin(u) \cdot sin(v)$	$x = u$ $y = u \cdot sin(v)$ $z = u \cdot cos(v)$	*I* $x = u$, $y = v$, $z = 0$ *II* $x = u$, $y = 0$, $z = v$ *III* $x = 0$, $y = u$, $z = v$

Durch die Betrachtung der Fläche in ihrer parametrischen Definition (2–13) lässt sie sich nach [Martins 1996] zunächst in die 1. (2–14) und in einem weiteren Schritt in die 2. (2–16) Fundamentalform überführen. Der Quotient aus 2. und 1. Fundamentalform bildet eine Aussage über die Krümmung der Fläche in einem beliebigen Punkt P.

1. Fundamentalform der Fläche [Martins 1996]

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2 \tag{2–14}$$

$$E = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v}, \qquad G = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 \tag{2–15}$$

2. Fundamentalform der Fläche [Martins 1996]

$$d\overline{N} \cdot dr = L \cdot du^2 + 2 \cdot M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2 \tag{2–16}$$

$$\overline{N} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \times \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad \text{Einheitsnormalenvektor durch den Punkt } P \tag{2–17}$$

$$d\overline{N} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \overline{N}}{\partial v} \cdot dv \tag{2–18}$$

$$L = -\overline{N} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}, \qquad M = -\overline{N} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u \cdot \partial v}, \qquad N = -\overline{N} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} \tag{2–19}$$

Krümmung κ einer Fläche im Punkt P als Quotient aus 2. und 1. Fundamentalform [Martins 1996]

$$\kappa = \frac{L \cdot du^2 + 2 \cdot M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2}{E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2} \tag{2–20}$$

Gaußsche Krümmung K [Martins 1996]

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{2–21}$$

$LN - M^2 > 0$	elliptische Krümmung	synklastische Fläche	(2–22)
$LN - M^2 = 0$	parabolische Krümmung	abwickelbare Fläche	(2–23)
$LN - M^2 < 0$	hyperbolische Krümmung	antiklastische Fläche	(2–24)

Insbesondere mit der 2. Fundamentalform und der Aussage über die Krümmung lassen sich die Flächen klassifizieren (Tabelle 2.4). Über die Art der Krümmung entscheidet dabei allein die Determinante von $LN - M^2$, da die Determinante von $EG - F^2$ stets einen positiven Beitrag liefert[29].

Tabelle 2.4: Flächentypenklassifizierung

Flächenbeschreibung	Bedingungen
abwickelbare Flächen	L = N = 0, K = 0
nicht abwickelbare	N = 0, K < 0
Translationsflächen	M = 0
Rotationsflächen	F = M = 0
Ebene	L = M = N = 0

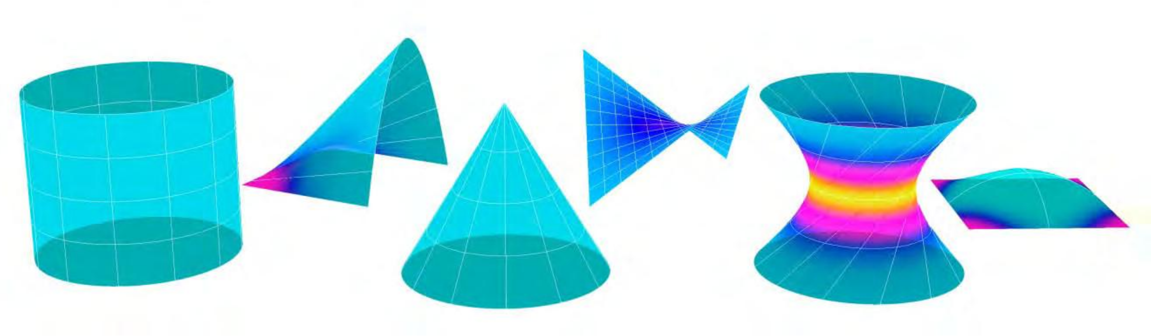


Bild 2.13: Gaußsche Krümmung von Flächen

Von Interesse in dieser Arbeit sind jene Flächen, die möglichst ohne Verzerrungen ihre Krümmung ändern können, da diese Transformationen zulassen ohne zusätzliche aus den Verzerrungen hervorgerufene Spannungen zu erzeugen. Dies betrifft allein die abwickelbaren Flächen, deren Eigenschaften weiter beleuchtet werden sollen.

Abwickelbare Flächen

Nichtebene Flächen, die sich ohne innere Verzerrungen in die euklidische Ebene[30] transformieren lassen, heißen abwickelbare Flächen. Sie bilden die Vereinigung einer einparametrigen Geradenschar und sind somit ein Sonderfall der Regelflächen[31]. Die Gaußsche Krümmung abwickelbarer Flächen ist in jedem Punkt der Fläche gleich Null. Dies ist dann der Fall, wenn beide oder eine der Hauptkrümmungen[32] κ_1, κ_2 gleich Null ist. Das gilt für alle einfach gekrümmten Flächen.

---

29 $EG - F^2$ ist die Diskriminante (Determinante der Darstellungsmatrix) der ersten Fundamentalform. Gilt $EG - F^2 > 0$, folgt daraus $E > 0$ sowie $G > 0$ und eine positiv definitere erste Fundamentalform. Dies gilt genau dann, wenn $\vec{r}_u$ und $\vec{r}_v$ linear unabhängig zueinander sind.

30 Euklidische Ebene – affine Fläche, die über die euklidischen Körper definiert wird.

31 Regelfläche – Fläche, die durch die stetige Bewegung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ entsteht, der Form $x(u, v) = p(u) + v \cdot r(u)$.

32 Hauptkrümmung – Die Hauptkrümmungen stellen die Extremalwerte der Krümmung an jedem Punkt der Fläche dar, die durch den Flächennormalenvektor und die gegebene Tangentialrichtung bestimmt wird.

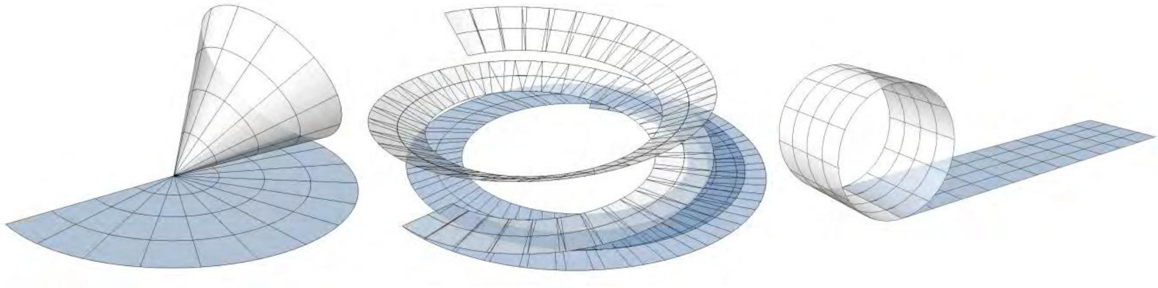
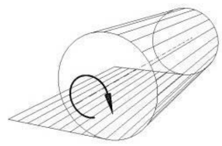
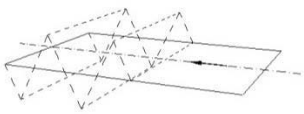
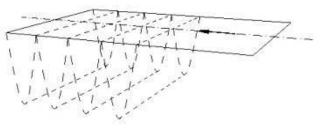
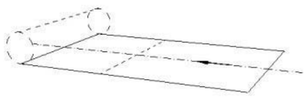


Bild 2.14: Beispiele abwickelbarer Flächen

Aus der Abwickelbarkeit lassen sich beispielsweise die bekannten Verformungen Falten, Raffen und Rollen ableiten, da sie im Sinne der Geometrie stetige Funktionen einer in der Fläche liegenden Geraden darstellen.

Tabelle 2.5: Abwicklung von Flächen und daraus ableitbare verzerrungsfreie Transformationen

Transformation - verzerrungsfrei		
Abwickeln		
		
Falten	**Raffen**	**Rollen**
		

Die von Frei Otto verfasste Zusammenstellung variiert das Thema der Abwickelbarkeit ausführlich und zeigt die Möglichkeiten für bewegliche Dachkonstruktionen, wobei der untere Zeilenblock Starrkörperverschiebungen skizziert und sich somit nicht aus der Abwickelbarkeit ergibt.

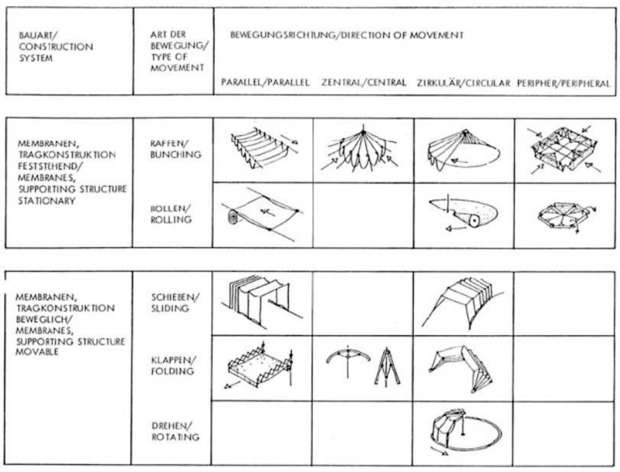


Bild 2.15: Klassifizierung beweglicher Membrankonstruktionen [Otto 1971]

2.3 Potential

Jedes System hat das Bestreben nach Gleichgewicht[33]. Damit einher geht ein Minimum an potentieller Energie. Eine energetische Betrachtung eines Systems erlaubt eine ganzheitliche Analyse des Trag- und Systemverhaltens, da sowohl die Einwirkungen als auch die Reaktionen einfließen. Bezüglich des Potentials können drei Gleichgewichtslagen eingenommen werden: ein stabiles, labiles oder indifferentes Gleichgewicht (Bild 2.16). Stellt man sich das Potential[34] als Gebirge vor, wird eine Masse, die man in dieses fallenlässt, immer in Richtung der größten Steigung abrollen, bis sie zur Ruhe kommt. Dies beruht auf der Tatsache, dass Kräfte die Ableitung der Potentiale nach dem Ort sind und diese Ableitungen in den Extremwerten zu null werden, also keine Kräfte mehr wirken. Führen kleine Auslenkungen immer wieder zu dieser Lage zurück, handelt es sich um ein stabiles Gleichgewicht – mathematisch ein Minimum. Hat das Potential ein lokales oder globales Maximum und befindet sich ein Körper eben an solch einem Ort, liegt ein labiles Gleichgewicht vor, das schon durch kleinste Auslenkung gestört werden würde. Die dritte Form des Gleichgewichts wird mit indifferent bezeichnet. Ein Körper nimmt nach einer kleinen Auslenkung eine neue Gleichgewichtslage ein, wobei sich das Potential nicht ändert. Hinsichtlich der Statik ist die Suche nach einem Minimum, also stabile Gleichgewichtlage, zielführend.

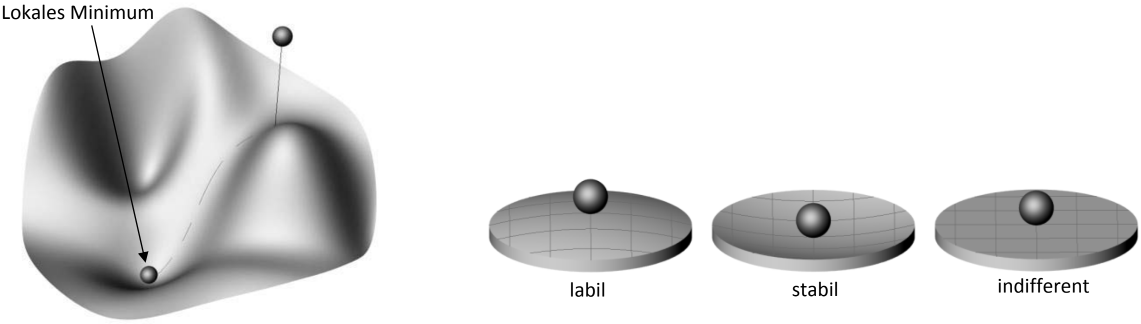


Bild 2.16: Fallenlassen einer Masse im Potentialgebirge mit letztendlicher Ruhelage in einem lokalen Minimum; labiles, stabiles und indifferentes Gleichgewicht

Betrachtet man nun eine Struktur über das Potential, setzt sich dieses aus zwei Beiträgen zusammen. Das Potential bildet die Summe aus innerem Potential Π_i und äußerem Potential Π_a.

Potential

Potential = inneres Potential + äußeres Potential

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a \qquad (2–25)$$

Um eine Aussage über das energetische Niveau eines Systems zu treffen, müssen in die Beschreibung des Gleichgewichts sowohl die äußeren Einwirkungen als auch die inneren Reaktionen einfließen.

2.3.1 Inneres Potential

Das innere Potential beschreibt für eine Struktur die Formänderungsenergie und entspricht dem Betrag der verrichteten inneren mechanischen Arbeit. Dazu muss zunächst der Begriff der Arbeit geklärt werden.

[33] Die Ausgewogenheit aller Potentiale und Flüsse eines gegebenen Systems einschließlich möglicher Zu- oder Abflüsse eines offenen Systems wird als Gleichgewicht bezeichnet.

[34] Potential [lat. *potentialis*: nach Vermögen, tätig wirkend] [Duden 2009]

Arbeit

Arbeit = Kraft × Weg

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} \qquad (2\text{–}26)$$

Ausgehend vom zuvor erwähnten konservativen Kraftfeld, ist die mechanische Arbeit W nur vom Abstand zwischen Start- s_1 und Endpunkt s_2 abhängig, nicht aber vom dazwischen zurückgelegten Weg. Somit muss für ein System nur die Ausgangs- und Endlage bekannt sein.

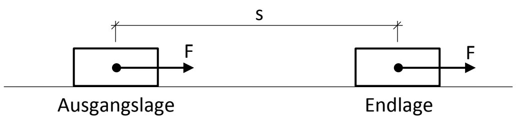


Bild 2.17: Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg

Sind nach einer Belastungssituation die inneren Reaktionen, die Spannungen, bekannt, sind daraus die für die Ermittlung der inneren Arbeit notwendigen Schnittgrößen Normalkraft N, Querkraft Q und Moment M ermittelbar. Für ein statisches System ergibt sich das innere Potential Π_i in allgemeiner Form nach Gleichung (2–27). Für ein Stabtragwerk lässt sich dies mit Gleichung (2–28) konkretisieren.

Inneres Potential

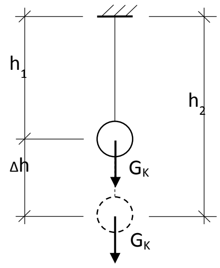
Inneres Potential = - innere Arbeit = äußere Arbeit

$$\Pi_i = -W_i = \int dW_i \, dx \qquad (2\text{–}27)$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{Stäbe} \frac{(N(x))^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_{Stäbe} \frac{(M(x))^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_{Stäbe} \frac{(Q(x))^2}{GA_Q} dx \qquad (2\text{–}28)$$

2.3.2 Äußeres Potential

Belastet man ein System mit äußeren Kräften, wird sich dieses verformen und eine neue verformte Ruhelage (Gleichgewicht) einnehmen. Von Außen betrachtet ist die neue Lage energetisch ein Zustand niederer potentieller Energie. Dieser Potentialverlust (wegunabhängiger Energieverlust) bildet den Beitrag des äußeren Potentials und entspricht der Energiedifferenz zwischen Ausgangs- und Endlage.



$$T_{pot,1} = G_K \cdot h_1$$
$$T_{pot,2} = G_K \cdot h_2$$
$$\Delta T_{pot} = T_{pot,1} - T_{pot,2} = G_K \cdot \Delta h$$

Bild 2.18: Differenz der potentiellen Energie bei Höhenlageverschiebung

Betrachtet man nicht nur einen Kraftangriffspunkt und seine Verschiebung, sondern eine Vielzahl von Kraftangriffspunkten $q(x)$ und deren Verschiebungen $w(x)$ ergibt sich Gleichung (2–29) für eine beliebige äußere Belastung auf ein stabartiges Tragwerk[35].

$$\Delta T_{ges} = \int \Delta T_{pot} dx = \int q(x) \cdot w(x) dx \qquad (2–29)$$

Das äußere Potential Π_a entspricht nun eben der negativen[36] Gesamtenergiedifferenz ΔT_{ges} eines Systems. Damit gilt entsprechend Gleichung(2–29):

Äußeres Potential

$$\Pi_a = -\Delta T_{ges} = -\int_L q(x) \cdot w(x) dx \qquad \textit{L- Lastangriffspunkte} \qquad (2–30)$$

2.3.3 Potential und Verformung

Das Verformungsverhalten eines Systems energetisch zu beurteilen, ermöglicht nicht nur einen Vergleich unterschiedlicher Systeme, sondern zudem eine Aussage über die energetische Speicherfähigkeit. Hierzu konnte [Bögle 2005] bereits für das einfach hängende Seil in ihrer Promotion erste Ausarbeitungen präsentieren. Im gleichen Stil werden nun zudem biegebehaftete Systeme betrachtet. Die Theorie und eine erste Ausarbeitung konnte bereits in [Bögle, Hartz und Schlaich 2012] veröffentlicht werden.

Potential geometrisch linearer und nicht-linearer Systeme

Der Zusammenhang zwischen innerem und äußerem Potential hängt von der Größe der Verschiebungen ab und ist nach Gleichung (2–31) mit der Krümmung κ und der Kenntnis der Biegelinie $w(x)$ gegeben.

Allgemeine Beziehung zwischen Biegelinie $w(x)$ und Krümmung $\kappa(x)$ eines Stabes

$$\kappa(x) = \frac{-w''(x)}{(1 + [w'(x)]^2)^{3/2}} \qquad (2–31)$$

Für eine kleine Verschiebung ergibt sich für die 1. Ableitung der Biegelinie, dass $w'(x) \ll 1$ gilt, was dazu führt, dass das Quadrat $[w'(x)]^2$ annähernd zu Null wird und die einfache Beziehung nach Gleichung (2–32) entsteht.

Krümmung $\kappa(x)$ eines Stabes für kleine Verformungen

$$\kappa(x) = -w''(x) \qquad (2–32)$$

Trägt man beide Funktionen, Polynom 1. (linear) $\Pi_{i,linear}$ und 3. (nicht-linear) $\Pi_{i,nicht-linear}$ Grades in ein Last-Verformungs-Diagramm ein, wird der Anteil des inneren Potentials Π_i am äußeren Potential Π_a erkennbar.

---

[35] Es wird nur eine Dimension betrachtet und über die Variable x beschrieben.

[36] Die Gesamtenergiedifferenz wird negativ dargestellt, da es sich um einen Verlust an Energie gegenüber dem Ausgangszustand handelt.

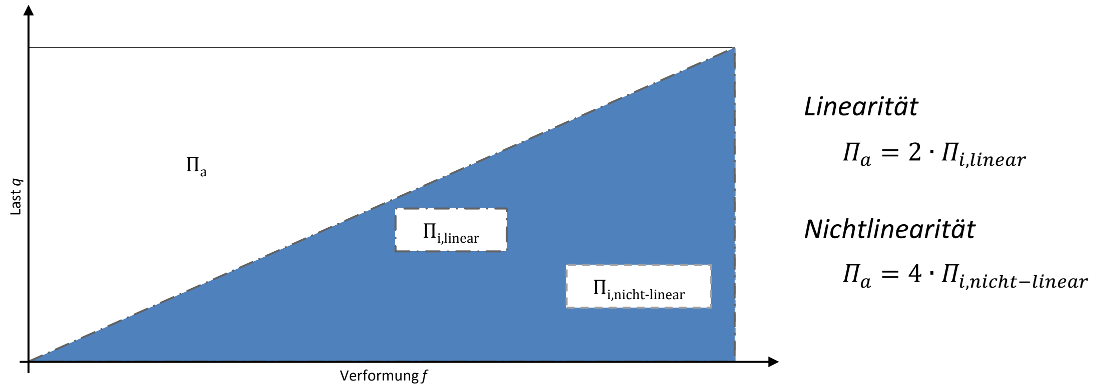


Bild 2.19: Anteil inneres am äußeren Potential bei linearem und nicht-linearem Tragverhalten

Bei nicht-linearem Tragverhalten ist der Anteil der im System elastisch gespeicherten Energie geringer als bei linearem Tragverhalten. Dies resultiert aus der Tatsache, dass den relativ großen Verformungen kleine innere Dehnungen gegenüberstehen, die wiederum für die Verzerrungen und somit den Spannungen im Material, aus denen sich die Kräfte ergeben, verantwortlich sind.

Anteile der Schnittgrößen am inneren Potential Π_i

Das innere Potential Π_i ergibt sich aus den Schnittgrößen, die sich aus den Spannungen im Material ergeben. Betrachtet man nun ein System und sein Verformungsverhalten über das Potential, kann man das Tragverhalten über die Anteile der Schnittgrößen am inneren Potential bewerten. Dies wird am Beispiel des einfach statisch unbestimmten Balkens durch Variation der Dicke d für unterschiedliche E-Moduln E gezeigt.

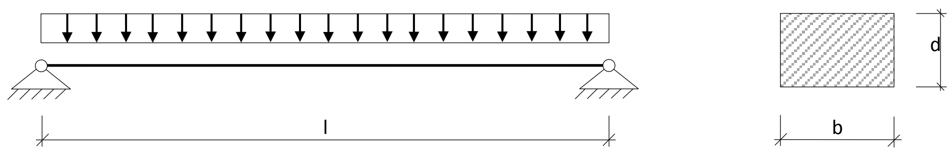


Bild 2.20: Statisches Grundsystem – 1-fach statisch unbestimmter Balken

Dazu wird die Länge l des Systems auf 10 Meter festgesetzt und numerisch die Dicke d in einem Bereich von $0 < d \leq 0{,}2\ m$ variiert. Der Verlauf der Schnittgrößen und Verformungen wird über 11 Stützwerte approximiert. Durch Integration der approximierten Verläufe und unter der Kenntnis der äußeren Lasten sind sowohl das äußere Potential Π_a als auch das innere Potential Π_i bestimmbar. Für das innere Potential Π_i können die Anteile aus Normalkraft, Querkraft[37] und Moment einzeln bestimmt werden. In Bild 2.21 sind die Verhältnisse der Anteile der Normalkraft am inneren Potential $\Pi_{i,N}/\Pi_i$ und des Moments am inneren Potential $\Pi_{i,M}/\Pi_i$ aufgetragen (vgl. Gleichung (2–28)). Das äußere Potential Π_a wurde für diese Betrachtungen konstant gehalten, d.h. die Summe der Produkte aus Verschiebung und Kraft für jede Variation der Dicke d unter gegebenen E-Modul E ist konstant.

[37] Der Anteil der Querkraft wird aufgrund des sehr kleinen Beitrages nicht betrachtet.

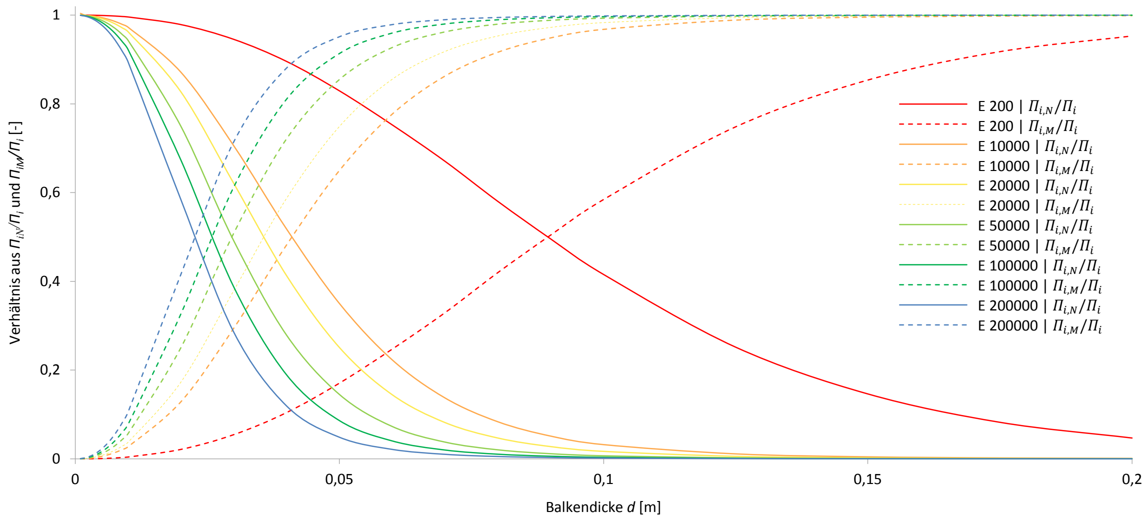


Bild 2.21: Variation der Dicke d am 1-fach statisch unbestimmten Balken zur Bewertung der Anteile der Normalkraft bzw. des Moments am inneren Potential Π_i für verschiedene E-Moduln

Wie zu erkennen ist, erfährt das Tragwerk eine Umlagerung der Schnittgrößen und somit eine Änderung vom Biegetragverhalten (Balkentheorie – geometrisch linear) zum Normalkraftabtrag (Seiltheorie – geometrisch nicht-linear), was ja auch zu erwarten war. Um eine Aussage über diesen Wechsel im Tragverhalten zu geben, wird der Schnittpunkt der Verhältnislinien der Potentiale aus $\Pi_{i,N}/\Pi_i$ und $\Pi_{i,M}/\Pi_i$ nun für die einzelnen E-Moduln E über die Dicke d aufgetragen.

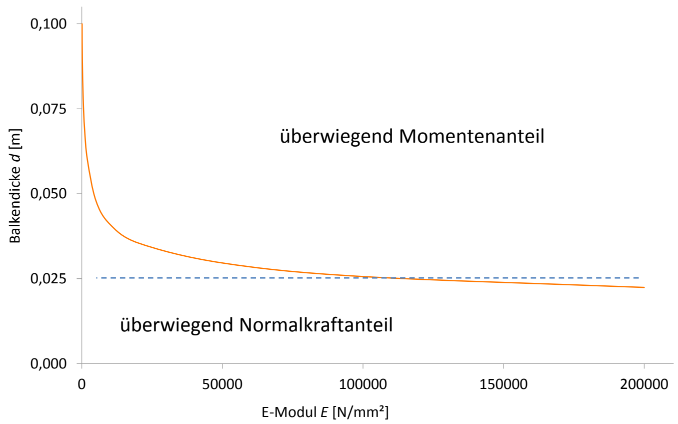


Bild 2.22: Auftragen des Kreuzungspunktes zwischen $\Pi_{i,N}/\Pi_i$ und $\Pi_{i,M}/\Pi_i$ aus Bild 2.21 zur Verdeutlichung des Einflusses der Dicke d bzw. des E-Modul E des Wechsels von Biege- zu Seiltragverhalten

Die Konvergenz, die sich hier zeigt, lässt für die im Bauwesen verwendeten Materialen nur ein Einstellen der Dicke d zu, da der E-Modul E nur für sehr kleine Werte einen Einfluss hat. Der Wert für die Dicke liegt im Mittel (70.000 – 210.000 N/mm^2) bei etwa 25 mm. Der Einfluss der Länge l des Systems wurde hier nicht dargestellt.

Der Einfluss des E-Moduls E auf das berechnete Tragverhalten kann durch eine getrennte Betrachtung des gleichen Systems (Bild 2.20) nach Theorie I. Ordnung und III. Ordnung veranschaulicht werden. Dabei wurde zur besseren Vergleichbarkeit das äußere Potential Π_a, also das Produkt der Summen der äußeren Lasten und deren Verschiebungen, wiederum konstant gehalten.

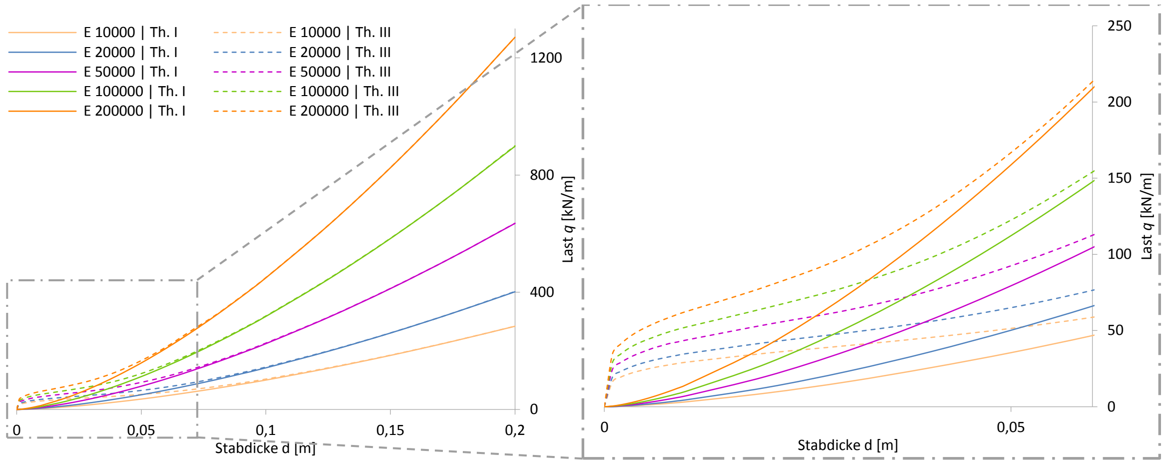


Bild 2.23: Einfluss des E-Moduls E und der Dicke d auf den maximalen Lastabtrag am 1-fach statisch unbestimmten Balken für Systemberechnung nach Theorie I. und III. Ordnung bei konstantem äußeren Potential Π_a

Zunächst ist die unabhängig vom gewählten E-Modul E signifikant höhere Belastbarkeit des Systems bei Balkendicken d kleiner 0,05 m zu erkennen. Dies ergibt sich aus dem viel effizienteren Seiltragverhalten, das bei einer Berechnung nach Theorie III. Ordnung berücksichtigt wird und natürlich für kleinere Dicken d weit größeren Einfluss hat, der sich durch einen größeren E-Modul E noch verstärkt[38].

Insgesamt ist für steigende E-Moduln E ein Anstieg der maximal möglichen Last zu verzeichnen. Für höhere E-Moduln E ist das energetische Speichervermögen des Systems höher (s. Kap. 2.3.3), da der Einfluss des Seiltragverhaltens mit steigender Dicke d kontinuierlich abnimmt. So erfolgt die Systemantwort letztendlich nur noch über Biegung, was einem Übergang von nicht-linearem zu linearem Tragverhalten gleichkommt (s. Bild 2.19). Ein höherer E-Modul E bringt bei gleicher Last kleinere Verformungen. Da aber das Produkt aus Summe der Verformungen und Lastangriffspunkten hier konstant gehalten wurde, folgt bei abnehmenden Verformungen eine Steigerung der äußeren Lasten. Für den Bereich linearen Tragverhaltens kann für das Verhältnis der Last q zum E-Modul E der in Gleichung (2–33) gezeigte Zusammenhang aufgestellt werden.

$$q_1 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \cdot q_2 \tag{2–33}$$

Eine Verdopplung des E-Moduls E bringt nur eine $\sqrt{2}$-fache mögliche Steigerung der äußeren Last im linearen Traglastbereich.

Als Erkenntnis dieses Kapitels ist festzuhalten, dass im Sinne biegeweicher Systeme ein Einstellen der Dicke d zielführend ist, da der E-Modul E natürlich zu einfacherem Biegeverhalten unter energetischer Betrachtung führt, aber dafür die maximal ertragbare Last für solch ein System reduziert wird. Für die im späteren Verlauf der Arbeit entwickelten biegeweichen Systeme wird diese Erkenntnis über die Dicke d speziell auf die Berandungen der Kissen angewendet.

[38] Dies ergibt sich aus der linearen Zunahme der Dehnsteifigkeit EA, die allein die Größe der elastischen Dehnungen und somit Verformungen für Seiltragwerke beeinflusst.

2.4 Analytische Lösung zum kombinierten Balken- und Seiltragverhalten

Der im vorangegangenen Abschnitt 2.3.3 beschriebene mögliche Übergang vom Biege- zum Seiltragverhalten wird in diesem Kapitel analytisch untersucht. Als Grundlage wird dazu die von [Bauer 1972] erstellte Zusammenführung der Differentialgleichungen der Biegelinie des Balkens mit der des flachen Seiles verwendet (Gl. (2–34)).

$$EI(y-y_0)^{IV} - Hy'' - q = 0 \tag{2–34}$$

In Bild 2.24 ist das Grundsystem, das betrachtet werden soll, dargestellt. Es ist wieder der statisch unbestimmt gelagerte einfeldrige Stab, der über die mittig startende Laufvariable x beschrieben wird.

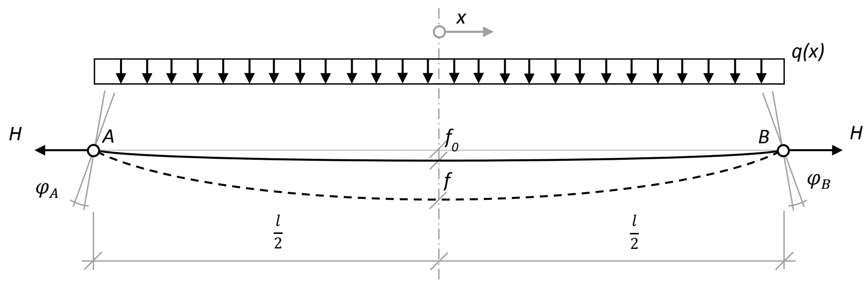


Bild 2.24: Grundsystem der Verformungsbetrachtung am flachen biegesteifen Seil [Bauer 1972]

[Bauer 1972] setzt für seinen Ansatz eine Seillinie $y_0(x)$ als Parabel 2. Ordnung voraus. Diese hat die Form:

$$y_0 = f_0\left[1-\left(\frac{2x}{l}\right)^2\right] \tag{2–35}$$

mit den Ableitungen:

$$y_0' = -\frac{8f_0}{l^2}x;\; y_0'' = -\frac{8f_0}{l^2};\; y_0^{III} = 0;\; y_0^{IV} = 0. \tag{2–36}$$

[Bauer 1972] überführt diesen Ansatz in eine kombinierte Differentialgleichung, wobei er die vom Balken bekannte und somit ebenfalls für flache Seile gültige Näherung nutzt, dass die 2. Ableitung der Ansatzfunktion dem Kehrwert der Krümmung entspricht. In Gleichung (2–37) ist bereits die unter Verwendung von $y_0^{IV} = 0$ umgestellte Differentialgleichung dargestellt.

$${y_0}^{IV} - \frac{H}{EI}y'' - \frac{q}{EI} = 0 \tag{2–37}$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ergibt sich für $q(x)$ konstant, unter der zusätzlichen Abbildung einer an den Widerlagern wirkenden elastischen Einspannung ε, die dem Drehwinkel $\varphi_A = \varphi_B = \varphi$ infolge eines Moments $M = 1$ entspricht, zu:

$$y(x) = -\frac{\left(1+\frac{2EI\varepsilon}{l}\right)\left(\frac{ql}{2H}-\frac{4f_0}{l}\right)}{H\varepsilon\cdot cosh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}\right)+\sqrt{\frac{H}{EI}}\cdot sinh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}\right)}\left[cosh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}\right)-cosh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}x\right)\right]+ \frac{ql^2}{8H}\left[1-\left(\frac{2x}{l}\right)^2\right] \quad [39](2–38)$$

Aus der Kenntnis der Biegelinie lässt sich über die Beziehung:

$$M = -EI(y - y'') \quad (2–39)$$

eine Funktion für die Momentenlinie $M(x)$ allgemein ableiten.

$$M(x) = -EI\left[\frac{H}{EI}\frac{\left(1+\frac{2EI\varepsilon}{l}\right)\left(\frac{ql}{2H}-\frac{4f_0}{l}\right)}{H\varepsilon\cdot cosh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}\right)+\sqrt{\frac{H}{EI}}\cdot sinh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}\right)}cosh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}x\right)-\frac{q}{H}+\frac{8f_0}{l^2}\right] \quad (2–40)$$

Für die Mitte des Systems bei $x = 0$ ergibt sich das Moment M_0 unter Vernachlässigung der elastischen Einspannung ($\varepsilon = \infty$) an der Widerlagern zu:

$$M_0 = EI\left(\frac{q}{H}+\frac{8f_0}{l^2}\right)\cdot\frac{cosh\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}-1}{cosh\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}} \quad (2–41)$$

Mit dem in Gleichung (2–41) erhaltenen Ausdruck lässt sich der Einfluss der Dicke d als Basisgröße des Trägheitsmomentes I auf das mittige Moment M_0 des Balkens zeigen. Dazu werden die konstanten Eingangsgrößen für Gleichung (2–41) wie in Tabelle 2.6 gewählt.

Tabelle 2.6: Gewählte Eingangsgrößen für Gleichung (2–41) und Bild 2.25

Eingangsgröße	**Wert 1**	**Wert 2**
Balkenlänge l [m]	1,00	10,00
Streckenlast q [kN/m]	1,00	1,00
Initialstich f_0 [m]	0,001	0,01

Für die Gleichung (2–41) ist ebenfalls die Horizontalkraft H notwendig. Diese ist sowohl vom aktuellen Stich f, der Systemlänge l, der Streckenlast q als auch der Dehnsteifigkeit EA abhängig. Sie muss mit den bekannten Gleichungen[40] (2–42)-(2–44) für jede Kombination der beiden variablen Eingangsgrößen, E-Modul E und Stabdicke d, bestimmt werden.

---

[39] Die Funktion für die Biegelinie wurde [Bauer 1972] entnommen, wobei die Einzellast *P*, die in der Originalquelle noch Beachtung findet, nicht mit einbezogen wurde. Somit vereinfacht sich die Funktion durch den Verlust der Anteile, die die Intergrationskonstanten *B* und *C* noch beigetragen hätten.

[40] [Schlaich, Bögle und Bleicher 2009]

$$H_i = \frac{ql^2}{8f_i} \tag{2–42}$$

$$\Delta s_{el,i} = \frac{H_i \cdot l}{EA}\left[1 + \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{f_i}{l}\right)^2\right] \tag{2–43}$$

$$f_{i+1} = \sqrt{\frac{3 \cdot l}{8} \cdot \Delta s_{el,i} + f_i^{\,2}} \tag{2–44}$$

Diese drei Gleichungen werden in der dargestellten Reihenfolge iterativ durchlaufen, bis sich eine Konvergenz für die Horizontalkraft H zu einem konstanten Wert einstellt. Unter Kenntnis aller Werte lassen sich nun mit Gleichung (2–41) die in Bild 2.25 beispielhaft dargestellten Diagramme erstellen.

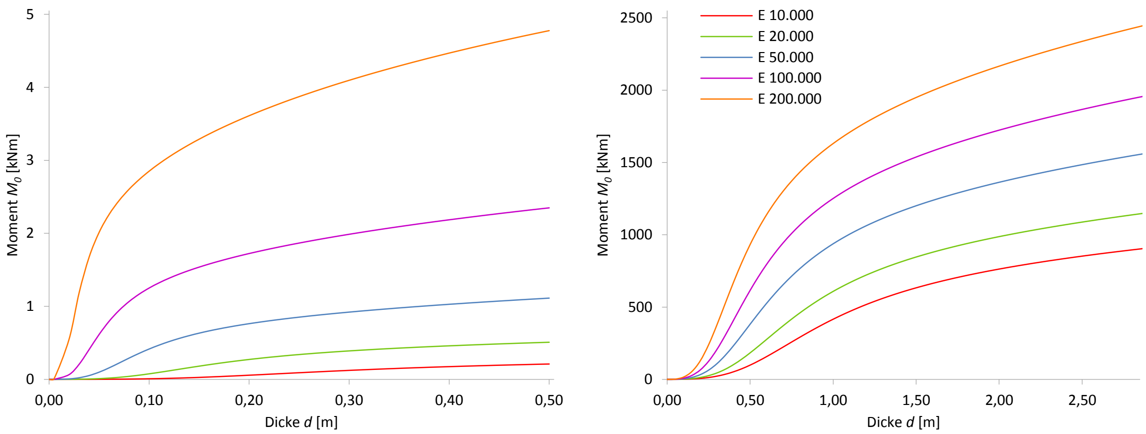


Bild 2.25: Moment M_0 in Stabmitte für Systemlängen l von 1 und 10 m in Abhängigkeit von der Stabdicke d[41] für unterschiedliche E-Moduln E von 10.000 bis 200.000 kN/m² ohne Berücksichtigung des Eigengewichts unter einer konstanten Streckenlast q von 1 kN/m

Zu erkennen ist, dass die Form der Kurven beider Diagramme gleich ist. Der Einfluss der E-Moduln E auf das mittige Feldmoment ist sehr gut über die Abhängigkeit der Stabdicke d beschrieben. Der Bereich kleiner Stabdicken d kennzeichnet zunächst ausschließlich den nicht-linearen Lastabtrag über Seiltragverhalten, das für kleine E-Moduln E (rote Linie) auch für große Dicken d anhält. Erst für die im Bauwesen üblichen E-Moduln E größer 10.000 kN/m² ist ein Wechsel ins Biegetragverhalten erkennbar. Der Einfluss des Seiltragverhaltens nimmt beständig ab, was zu einer dann abflachenden Momentenzunahme führt.

Möchte man die Momente M_0 klein halten, lassen sich diese, wie auch schon bei der Betrachtung des gleichen Systems über das Potential (Abs. 2.3), entweder über die Dicke d oder die E-Moduln E beeinflussen. Der E-Modul E ist sowohl Bestandteil der Biegesteifigkeit EI als auch der Dehnsteifigkeit EA. Die Dehnsteifigkeit EA ist allein verantwortlich für die elastischen Dehnungen und somit Stablängenänderungen und beeinflusst für seilartige Tragwerke die sich daraus ergebenden Verformungen. Dieser Zusammenhang ist in Bild 2.26 beispielhaft für eine Stablänge $l = 10\ m$ und eine konstante Streckenlast $q = 1\ kN/m$ dargestellt. Der Einfluss des Ausgangsstiches f_0 auf den Kurvenverlauf zeigte erst für sehr große Stiche einen darstellbaren Unterschied und wurde daher nicht abgebildet.

41 Die maximal angegebene Stabdicke wurde über die Beschränkung des Verhältnisses $d/l \geq 2$ für den Übergang von Balken zum wandartigen Träger gesetzt.

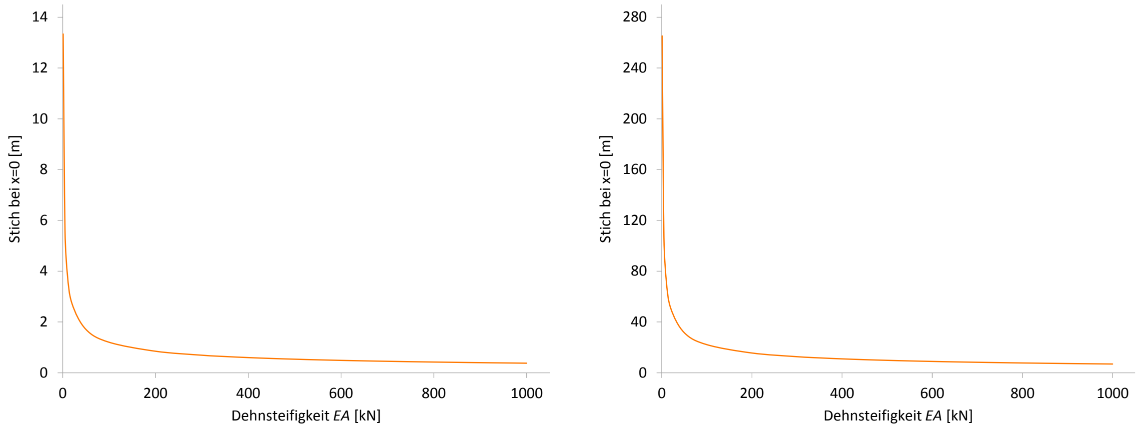


Bild 2.26: Einfluss der Dehnsteifigkeit EA auf die maximale Verformung f in Stabmitte für seilartige Tragwerke mit den Stablängen l von 1 und 10 m und einer linearen Belastung q von 1 kN/m

Über die Stabdicke d lässt sich die Größe der Momente M_0 einstellen und somit eine gesteuerte Biegung des Stabes ermöglichen. Die Stabdicke d kann mit Gleichung (2–41) so bestimmt werden, dass das aus der Belastung resultierende Moment M_0 entsprechend den geometrischen Vorgaben eingestellt werden kann.

2.5 Zusammenführung

Der Begriff der Flexibilität spannt das gesamte Kapitel auf und gliedert es in eine aktive Anpassung- und passive Transformationsfähigkeit. Die Flexibilität beschreibt die Grundlage der mit dieser Arbeit vorgelegten Untersuchungen. Die Adaptions- als auch Transformationsfähigkeit geben für sich und in Kombination die Möglichkeiten, dem Bestreben nach Gleichgewicht eines Systems bzw. Individuums mit seiner Umwelt nachzukommen, vor. Die Konzentration in dieser Arbeit liegt dabei ausschließlich auf technischen Systemen und deren Möglichkeiten flexibel auf äußere Veränderungen reagieren zu können.

Das Streben nach stabilem Gleichgewicht eines technischen Systems lässt sich mathematisch als Zustand minimaler potentieller Energie beschreiben. Dieses kann nicht nur passiv über die beschriebenen Transformationen erfolgen, sondern aktiv durch eine gegebene Anpassungsfähigkeit. Aufgrund der fehlenden Kognition technischer Systeme kommt als einzige aktive Schnittstelle die Adaptierbarkeit in Frage. Diese Schnittstelle zwischen Adaptierbarkeit und Transformation soll im Zuge dieser Arbeit beleuchtet und ausgearbeitet werden.

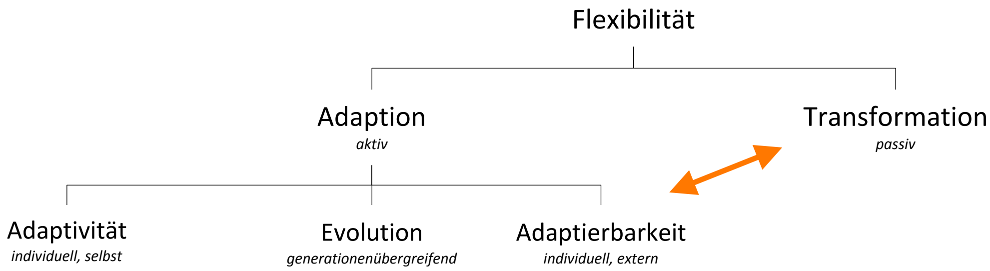


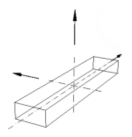
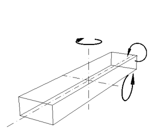
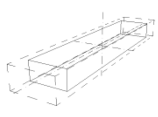
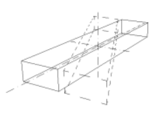
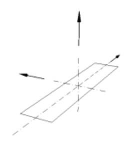
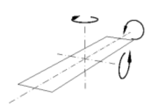
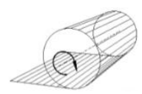
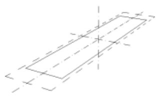
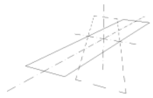
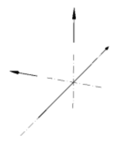
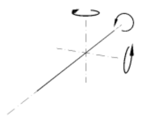
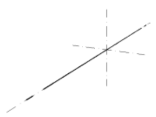
Bild 2.27: Schematische Gliederung der Flexibilität (s.a. Bild 2.1)

Um mögliche Steuerbarkeiten der Transformationen zu erhalten, galt es die Transformationen weiter zu differenzieren. Durch die Betrachtungen der Kinetik der starren Körper und der Statik der deformierbaren Körper konnten die möglichen Transformationen in die beiden Grundformen - Bewegung und Deformation - unterteilt werden.

Durch die Betrachtung niederdimensionaler Objekte im $\mathbb{R}^3$ lassen sich Transformationen ableiten, die durch die Vernachlässigung einer Dimension verzerrungsfreie Transformationen zulassen. So existieren Objekte des $\mathbb{R}^2$ mit solchen Eigenschaften, dass sie sich im $\mathbb{R}^3$ verzerrungsfrei verformen lassen. Dies konnte in Abschnitt 2.2.2 allein für abwickelbare Flächen gezeigt werden.

Geht man hier noch einen Schritt weiter, so lassen sich natürlich auch Objekte des $\mathbb{R}^1$ im $\mathbb{R}^3$ beschreiben und hinsichtlich ihrer Transformierbarkeit in das gewählte Schema integrieren. Für die Deformation entfällt dann die Scherung, da eine Linie nur längs ihrer Achse verformt werden kann.

Tabelle 2.7: Zusammenstellung – Transformationen

	Transformation				
	verzerrungsfrei			**verzerrungsbehaftet**	
	Translation	**Rotation**	**Abwickeln**	**Skalieren**	**Scheren**
$\mathbb{R}^3$					
$\mathbb{R}^3(f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3)$					
$\mathbb{R}^3(f\colon \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3)$					

Alle in Tabelle 2.7 zusammengestellten Transformationen können alleine oder kombiniert auf Tragwerke angewendet werden. Wie diese für die hier behandelten Folienkissenkonstruktionen aussehen können, zeigen die nachfolgenden Kapitel.

Insbesondere die Steuerung der verzerrungsbehafteten Transformationen für linienartige Tragelemente ist Gegenstand der vorangegangenen und weiteren Untersuchungen. Es konnte sowohl der Einfluss der Dicke d und als auch des E-Moduls E auf das Biege- und theoretische Verformungsverhalten gezeigt werden, wobei Betrachtungen zum Potential und die erarbeitete kombinierte Differentialgleichung des Balkens und des Seiles genutzt wurden. Die Verträglichkeit der dargestellten Aussagen mit den noch zu klärenden Materialeigenschaften wird im nächsten Kapitel erfolgen.

3 Material

Die Hülle luftgefüllter Folienkissen besteht zumeist aus ETFE (Ethylen-Tetrafluorethylen). Die Eigenschaften dieses Material werden in diesem Kapitel zusammengestellt. Die wenigen vorhandenen Quellen zum Materialverhalten und -aufbau werden durch eigene Untersuchungen ergänzt. So konnte das theoretisch bekannte Versagensverhalten durch eine mikroskopische Betrachtung während eines Zugversuches bestätigt werden. Ein weiterer Schwerpunkt der eigenen Untersuchungen ist das Langzeitverhalten von ETFE, das im Abschnitt 0 behandelt wird.

In Abschnitt 2.2 wurden die mathematisch mechanischen Grundlagen möglicher Transformationsformen für Tragwerke entwickelt (Tabelle 2.7). In diesem Kapitel werden nun in Abschnitt 3.2 in einem weiteren Schritt die Transformationen bezüglich ihrer Materialverträglichkeit untersucht.

3.1 ETFE – Betrachtungen zum Baustein Hülle

3.1.1 ETFE - Grundlagen

ETFE ist ein PTFE[42]-Derivat und somit ebenfalls ein Copolymer[43], bestehend aus den Monomeren[44] Tetrafluorethylen und Ethylen. Es gehört zur Gruppe der teilkristallinen Thermoplaste[45], da es sowohl Bereiche amorpher[46] als auch kristalliner[47] Struktur zeigt.

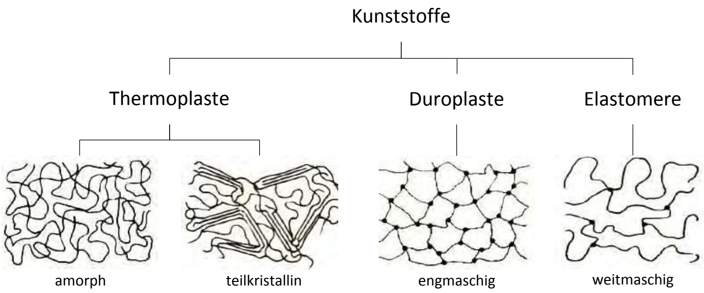


Bild 3.1: Kunststoffgruppen und Aufbau der Molekülketten

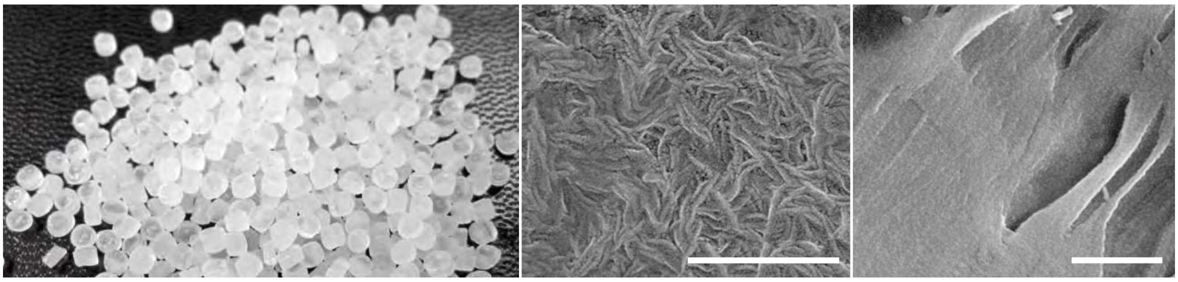


Bild 3.2: ETFE Pellets (Rohmaterial), ETFE und PTFE Struktur Skala = 300 nm [Kemell, et al. 2008]

Die Molekülketten setzen sich aus Kohlenstoff-, Fluor- und Wasserstoffatomen zusammen. Die innere Kette bilden endliche Kohlenstoffstränge, in die doppelpaarweise Fluor- und Wasserstoffatome angelagert sind, im Gegensatz zum PTFE, das die innere Kohlenstoffkette allein mit Fluoratomen besetzt (Bild 3.3).

42 PTFE – Polytetrafluorethylen

43 Copolymer – Polymer, dass aus zwei oder mehr verschiedenartigen Monomereinheiten zusammengesetzt ist.

44 Monomer [gr. *monos*: ein, einzel; meros: Teil, Anteil; gr. *meros*: Teil, Anteil] – einfachste Einheit eines Polymers [Duden 2009]

45 Thermoplaste [gr. *thermós*: warm, heiß; gr. *plássein*: bilden, formen] – Kunststoffe, die sich reversibel und wiederholbar in bestimmten Temperaturbereichen verformen lassen. Ein Alleinstellungsmerkmal ist die Schweißbarkeit.

46 amorph [gr. *a*: nicht, un; gr. *morphḗ*: Gestalt, Form] – ohne Gestalt – Material, das über unregelmäßige Muster verfügt. [Duden 2009]

47 kristallin – Materialbeschreibung fester Materie im Zustand höchster Ordnung

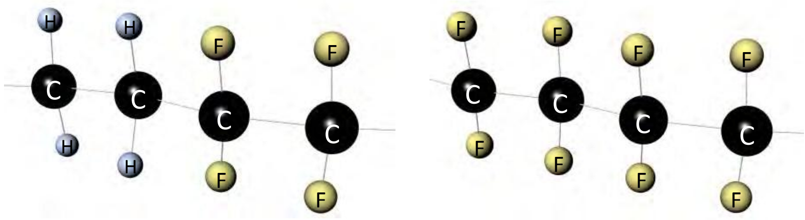


Bild 3.3: Räumlich schematische Darstellung eines ETFE und PTFE Moleküls

Das Werkstoffverhalten von ETFE ist eng verbunden mit den inneren Bindungskräften, die sich in Haupt[48]- und Nebenvalenzbindungen[49] unterscheiden lassen. Die Hauptvalenzbindungen beschreiben die chemischen, also starken, und die Nebenvalenzbindungen die physikalischen oder mechanischen Bindungen, somit schwachen Bindungen (Tabelle 3.1).

Tabelle 3.1: ETFE – Bindungsenergien von Atomen (Hauptvalenz) und Molekülen (Nebenvalenz)

Bindungspartner		Bindungsenergie [J/mol]
Hauptvalenz	$C-C$	347
	$C=C$	614
	$C-H$	414
	$C-F$	439
Nebenvalenz		2 – 20

Die schwachen Nebenvalenzbindungen führen zu einer leichten Verschiebbarkeit der Molekülketten im Kunststoff und sind zudem sehr stark von Temperatur (Bild 3.4) und Einwirkungen durch Fremdmoleküle (z. B. Wassereinlagerung) abhängig. Sie bestimmen letztendlich das Materialverhalten und die damit einhergehenden Materialkennwerte.

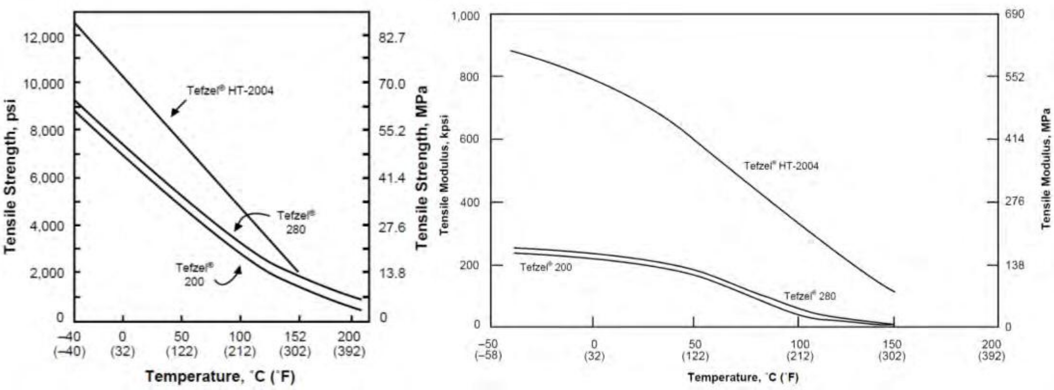


Bild 3.4: Temperaturabhängige Zugfestigkeit und -steifigkeit von ETFE (Injection Molded Bar) [DuPont 2012][50]

Die Temperaturabhängigkeit zeigt [Saxe 2012] für biaxial belastete ETFE-Folien, wobei das Spannungsverhältnis zwischen den beiden Richtungen 3/1 betrug, startend bei 10,0/3,2 N/mm^2 und einer schrittweisen Erhöhung um 1,2/0,4 N/mm^2 bis auf eine Beanspruchung von 18,0/6,0 N/mm^2. In Bild 3.5 sind die temperaturabhängige Quantifizierung sowohl der elastischen als auch plastischen Verformungen der aus den Biaxialversuchen gewonnenen Verformungen dargestellt. Dabei zeigen sich nicht nur große Unterschiede bei den elastischen Verformungen, sondern zudem das wesentlich früher einsetzende plastische Fließen bei höheren Temperaturen (s. Abs. 0).

48 Hauptvalenzbindung – Chemische Bindungen, die den Aufbau des Moleküls bestimmen und den festen Zusammenhalt der Atome bewirken.
49 Nebenvalenzbindung – Innermolekulare Bindungen (elektrostatisch), die zwischen den Molekülketten wirken.
50 Tefzel 200/280 sind die für die Folienherstellung verwendeten Materialien.

Wichtig in diesem Zusammenhang ist die Bemerkung [Saxe 2012], dass es durchaus Sinn macht, zwischen einer Schneebelastung und einer sommerlichen Windbelastung zu unterscheiden.

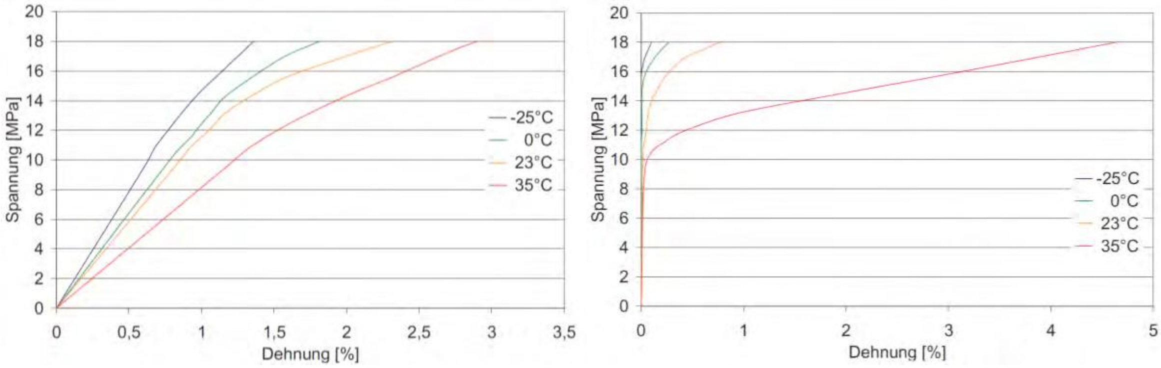


Bild 3.5: Temperaturabhängige Quantifizierung der elastische und plastische Verformungen aus biaxial belasteten ETFE-Folien im Spannungsverhältnis 3/1 [Saxe 2012]

3.1.2 ETFE - Materialverhalten

Die in der Statik der deformierbaren Körper beschriebenen Verzerrungen (Dehnungen ε) werden mit den Spannungen σ über die Materialkennwerte verknüpft. Die Art und Weise, wie sich die Spannungen gegenüber den Verzerrungen auf- und abbauen, wird mit elastisch oder plastisch beschrieben. Ist die Verformungshöhe außerdem von der Zeit abhängig, wird von viskosem Verhalten gesprochen. Dies kann sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich auftreten.

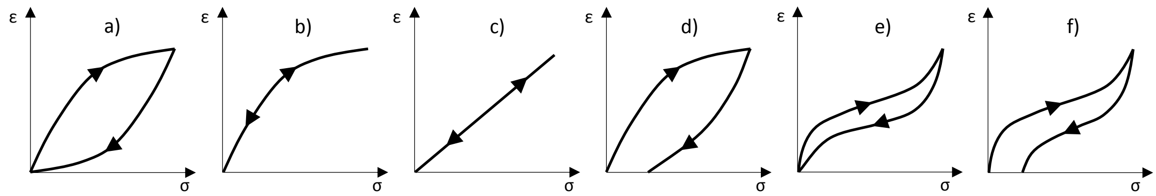


Bild 3.6: Schematische Darstellung von: a) elastischem b) ideal elastischem c) ideal linear elastischem d) plastischem e) viskoelastischem f) viskoplastischem Materialverhalten

Der wesentliche Unterschied zwischen elastischem (Bild 3.6 a-c, d) und plastischem (Bild 3.6 d, f) Verhalten liegt in der Reversibilität der inneren Verzerrungen. Die lokalen Kopplungen der elementaren Bausteine eines Materials werden durch ihre gegenseitigen Bindekräfte aufrechterhalten. Werden diese Bindungen lokal nicht verletzt, verformt sich das Material elastisch. Wird eine der Bindekräfte lokal durch die äußeren Einwirkungen überschritten, kommt es zu einer Neuordnung der elementaren Bausteine und ihrer gegenseitigen Bindekräfte. Können die elementaren Bausteine neue Bindungen eingehen, verformt sich das Material plastisch und bleibt als Kontinuum weiter bestehen. Finden die elementaren Bausteine hingegen keinen neuen Bindungspartner, kommt es zum Bruch des Materials.

Die elastischen, viskosen und plastischen Eigenschaften des Materials ETFE werden im Folgenden sowohl in einem makroskopischen als auch mikroskopischen Zugversuch dargestellt. Dabei wird insbesondere auf das Versagen des Materials im Bruchzustand eingegangen.

Makroskopische Betrachtung

Das Material ETFE zeigt jedes der in Bild 3.6 dargestellten Materialverhalten bei einem nach [DIN EN ISO 527-2 1996] durchgeführten Zugversuch (Bild 3.7). Die Zugversuche wurden an einer Universalprüfmaschine der Firma Zwick/Roell mit einer maximalen zulässigen Zugkraft von 20 kN durchgeführt. Für die Kraftmessung wurde eine Kraftmessdose mit einem Messbereich von 0-200 N verwendet. Die Prüfmaschine verfügt zudem über ein optisches Wegaufnehmersystem, das die Messung des Dehnweges direkt auf der Probe erlaubt. Die Versuche wurden weggesteuert

(Traversenweg) gefahren und dabei die Kraft in der Probe und der Weg zwischen den von den optischen Wegmesssensoren erfassten Reflexionspunkten gemessen.

Es wurden mehrere Versuche mit unterschiedlichen Traversengeschwindigkeiten gefahren, da Kunststoffe in ihren Eigenschaften bezüglich der Belastungsgeschwindigkeit variieren. Der Verlauf solch einer Spannungs-Dehnungs-Linie kann in vier wesentliche Bereiche [Ehrenstein 2011] unterteilt werden:

I	(linear)-elastisch	(s. Abs. 0)
II	viskoelastisch → viskoplastisch	(s. Abs. 0)
III	Einschnürungsbereich Fließen	
IV	plastisch	(s. Abs. 0)

Die einzelnen Bereiche werden in den folgenden Abschnitten näher erläutert, dennoch kann schon jetzt betont werden, dass für reale Tragwerke natürlich nur der annähernd elastische Bereich genutzt werden kann.

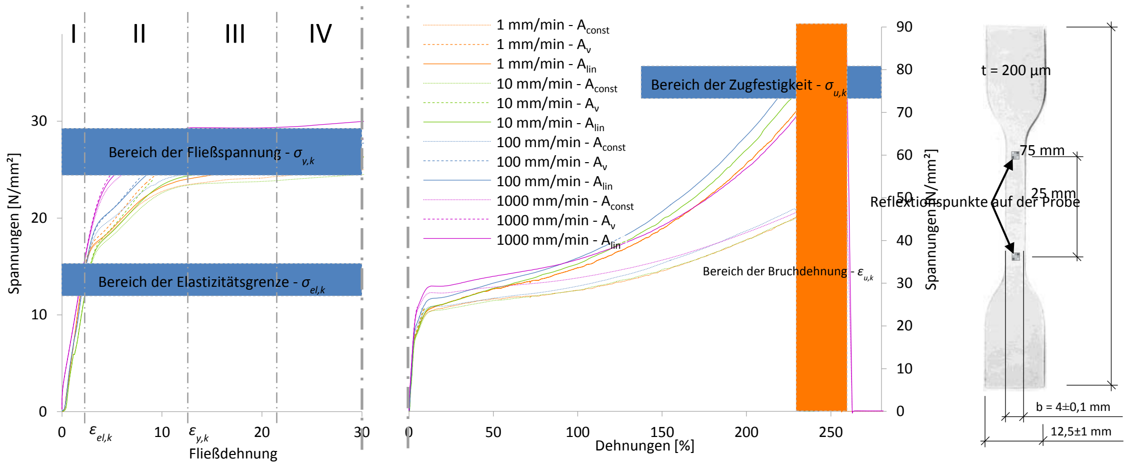


Bild 3.7: Nominelles und wahres Spannungs-Dehnungs-Diagramm einer monoaxialen Zugproben (ETFE 200 µm Nowoflon ET6235, DIN 527 Typ 5A) mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und wirklicher Querschnittsfläche

Dem gezeigten Spannungs-Dehnungs-Diagramm lag die im Messbereich tatsächlich vorhandene Querschnittsfläche zugrunde. Für den elastischen Bereich konnte die Reduktion der Querschnittfläche über die Querkontraktion ermittelt werden (s. Bild 3.7 – gestrichelte Linien A_ν). Dabei kommt es im linear elastischen Bereich zu fast keiner Abweichung, da die Einschnürung des Querschnittes sehr gering ist. Die Querkontraktionszahl ν für ETFE liegt bei 0,45 und wurde für eine Abnahme sowohl in Dicken t- als auch Breitenrichtung b angesetzt. Daraus ergab sich die für die Berechnung der tatsächlichen Spannung im elastischen Bereich notwendige Querschnittsfläche A_ν nach Gleichung (3–3).

Querkontraktion – elastischer Bereich

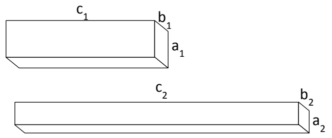
$$\frac{\Delta t}{t} = -\nu \frac{\Delta l}{l} \tag{3–1}$$

$$\Delta t = -\nu \frac{\Delta l}{l} \cdot t \qquad \Delta b = -\nu \frac{\Delta l}{l} \cdot b \tag{3–2}$$

$$A_\nu = (b - \Delta b) \cdot (t - \Delta t) \tag{3–3}$$

Im plastischen Bereich gilt das vereinfachte Hookesche Gesetz natürlich nicht. Um dennoch eine realistische Aussage über die tatsächlichen Spannungen im Material treffen zu können, wurde die Abnahme sowohl in Dicken- als auch Breitenrichtung im Laufe der Zugversuche gemessen und in den Zwischenbereichen linear interpoliert. Die sich aus der linear interpolierten Querschnittsfläche A_{lin} ergebenden wirklichen Spannungen im Material und der maximalen Spannung beim Bruch weichen von den allgemein üblichen Angaben [Moritz 2007] stark ab. Unter der Annahme einer Halbierung der Querschnittsfläche (die Messungen bestätigen diese Annahme) entsprechen die Angaben der Zugfestigkeit in Tabelle 3.4 (Abs. 0) jedoch durchaus der im Versuch ermittelten Zugfestigkeit.

Leider kann nicht von einer volumenkonstanten Verformung (s. Bild 3.8) im plastischen Bereich ausgegangen werden, auch wenn eine Querkontraktionszahl ν von 0,45 dies annähernd vermuten lässt. Die Querkontraktionszahl ν nimmt nur im elastischen Bereich den Wert 0,45 an.



$V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$ *und* $A_1 = a_1 \cdot b_1$

$V_2 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$ *und* $A_2 = a_2 \cdot b_2$

mit $c_2 = 2 \cdot c_1$ *und* $V_1 = V_2$ *gilt:*

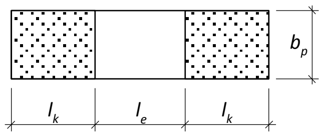
$A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_1$

Bild 3.8: Querschnittsminderung bei Längsdehnung eines volumenkonstanten Quaders ($\mu = 0{,}5$)

Die Messungen der Quereinschnürung während und nach dem Zugversuch ergaben beispielsweise im Moment des Bruches (ca. 250 % Dehnung) annähernd eine Querschnittshalbierung. Auf Basis dieser Messung wurden die Spannungen im Diagramm (Bild 3.7) ermittelt[51].

Mikroskopische Betrachtung

Am Zelmi[52] der TU-Berlin konnte in einem hochauflösenden Rasterelektronenmikroskopie[53] (HR-SEM) ein Zugversuch durchgeführt werden. In der Kammer des HR-SEM wurde dazu ein Zugmodul der Firma Kammrath & Weiss[54] eingebaut, das mit einer Kraftmessdose von 500 N ausgestattet ist und normalerweise für Zug- und Druckversuche von Stahlproben verwendet wird. Die Zugprobe wurde aus 200 µm dickem ETFE gefertigt und besaß eine Probenbreite b_p von 9 mm. Die beidseitige Klemmlänge l_k ist mit 11 mm ebenfalls durch die Geometrie der Klemmbacken vorgegeben. Die sichtbare Probenlänge l_e wurde auf 12 mm festsetzt, da ein ungestörter Blick auf die Probe mit dem Kathodenstrahl möglich sein sollte[55].



l_k = 11 mm

l_e = 12 mm

b_p = 9 mm

Bild 3.9: Probengeometrie für monoaxialen mikroskopischen Zugversuch im HR-SEM

Um statische Aufladungsphänomene, die die Bildqualität beeinträchtigen würden, zu vermeiden, werden nichtleitende Proben mit einer dünnen leitenden Schicht versehen. Dazu kann, wie in diesem Falle auch, Gold, aber auch beispielsweise Kohlenstoff verwendet werden. Um diese leitende Schicht aufzubringen, werden die Proben in einen Sputter Coater eingebaut. Der Arbeitsraum wird unter Vakuum gesetzt und mit energiereichen Ionen (meist Edelgasionen hier Argon) eine darüber befindliche Goldplatte beschossen, wodurch Goldatome herausgelöst werden und in die Gasphase übergehen. Dieses Gold setzt sich dann auf der Probe ab. Die Schichtdicke wird mit einem ebenfalls im Vakuum befindlichen schwingenden Quarz geprüft, der im Zuge des Prozesses

[51] Die letztendliche Zugfestigkeit des Materials spielt für die Bemessung von Tragwerken mit ETFE meist keine Rolle, da diese im Normalfall weit über der eingestellten Spannung liegt. Im elastischen Bereich des Materials (< 15 N/mm^2) sind die Spannungen unter Verwendung von A_{const}, A_v und A_{lin} annähernd gleich.

[52] Zentraleinrichtung Elektronenmikroskopie - http://www.zelmi.tu-berlin.de

[53] http://www.zelmi.tu-berlin.de/v-menue/geraete_und_analysemethoden/hr-sem/

[54] http://www.kammrath-weiss.com/de/produkte/material/zug-druck-modul.html

[55] Zu dichte Klemmbacken erhöhen die Gefahr einer Schluchtenbildung, in der Elektronen dann nicht mehr ungehindert von der Probe zum Elektronendetektor gelangen können.

ebenfalls mit Gold bedeckt wird und durch die Massenzunahme seine Frequenz verändert. Durch diese allmähliche Frequenzänderung lässt sich die Schichtdicke, die aufgebracht wurde, ermitteln. In diesem Fall wurde eine Schichtdicke von 15 nm gewählt.

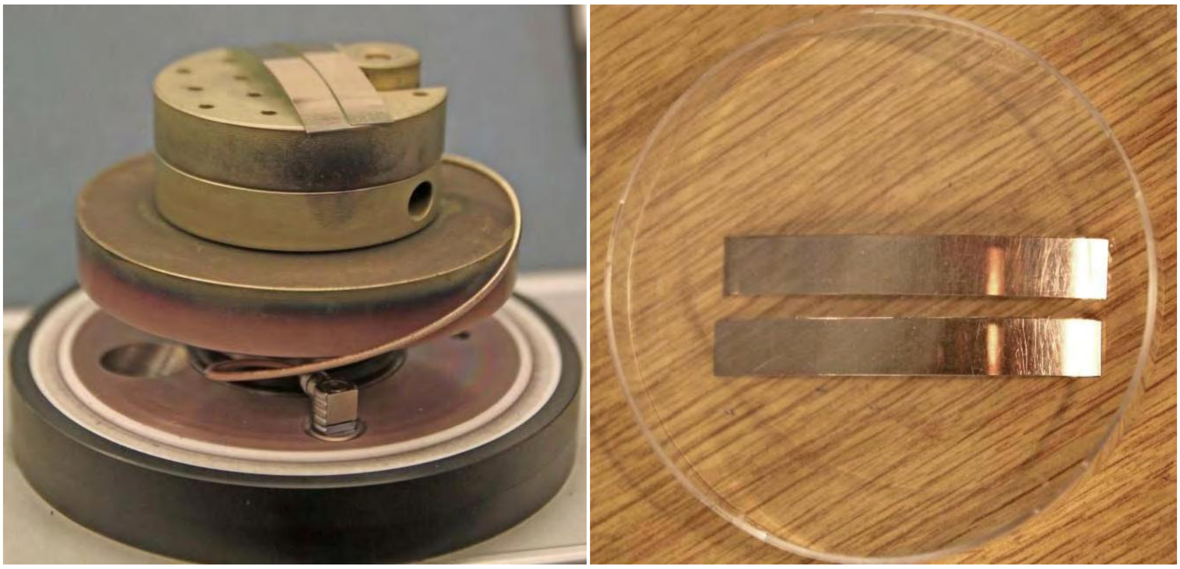


Bild 3.10: Splutteranlage und goldbeschichtete ETFE Probekörper

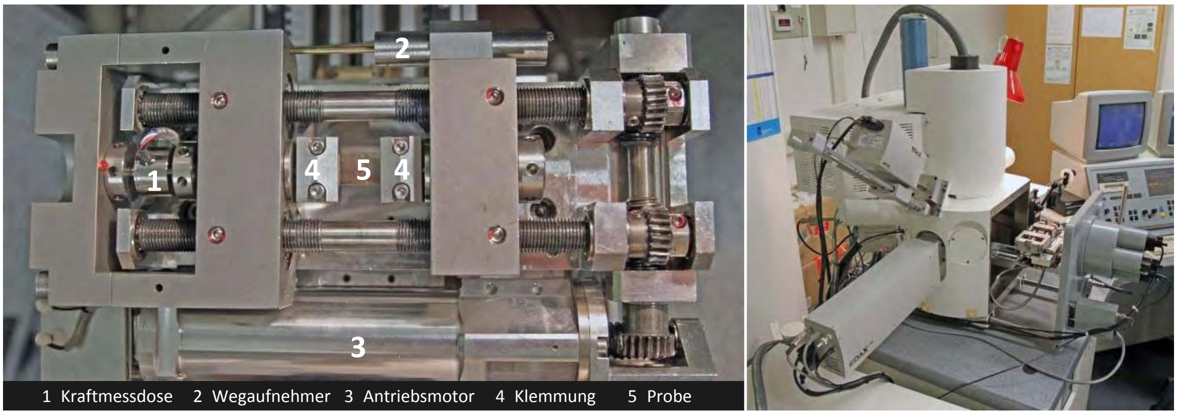


Bild 3.11: Zug-Druck-Modul der Firma Kammrath & Weiss mit eingebauter Probe; Zeiss DSM 982 GEMINI mit eingebautem Zug-Druck-Modul

Die präparierten Proben konnten jetzt in das Zug-Druck-Modul eingebaut werden. Dazu wurden die Proben auf die in Bild 3.9 dargestellte Probenlänge gekürzt und im Modul befestigt. Bild 3.11 zeigt die eingebaute Probe im Zug-Druck-Modul. Nach Einbau der Probe konnte das Mikroskop geschlossen und der Beobachtungsraum unter Vakuum gesetzt werden.

Das Zug-Druck-Modul kann nur weggesteuert gefahren werden. Die Verfahrgeschwindigkeit wurde im Laufe des Versuches zwischen 1 und 10 µm/s gewählt[56]. Im Gegensatz zu im Bauwesen üblichen Prüfmaschinen werden beide Klemmseiten, über das eingebaute Getriebe synchronisiert, verfahren. Damit erfährt die Probenmitte theoretisch keine Verschiebung und ist für die Rasteraufnahmen besonders geeignet.

Angefahren werden sollten die aus dem makroskopischen Zugversuch bekannten signifikanten Stellen, wie untere und obere Elastizitätsgrenze, Bereich der Streckspannungen und zuletzt, unter Ausnutzung des maximal möglichen Verfahrweges, ein möglichst großer plastischer Bereich. Der Wegsensor konnte auf einen maximalen Messbereich von -6.000 µm bis 6.000 µm eingestellt wer-

[56] Eine Änderung der Geschwindigkeit war notwendig, da das Material bei steigender Beanspruchung zu immer größerem Fließen neigt und somit die gewünschten Kräfte nicht mehr erreichbar waren.

den. Die maximale Dehnung der Probe ergibt sich somit aus der Einspannlänge l_e und dem absoluten Verfahrweg von 12.000 µm. Theoretisch wären bei diesen Einstellungen 100 % Dehnung möglich, es wurden 81 % erreicht, da bis zum ersten Ansprechen der Probe bereits ca. 2.350 µm gefahren werden mussten. Beobachtet wurde eine möglichst signifikante Stelle, die sich jederzeit wiederfinden lassen sollte. Als Standardvergrößerungen wurden 3.000-, 10.000- und 50.000-fach gewählt. Für eine erste Orientierung sind im Bild 3.12 eine 36-, 2.000- und 10.000-fache Vergrößerung derselben Stelle auf der Probe dargestellt.

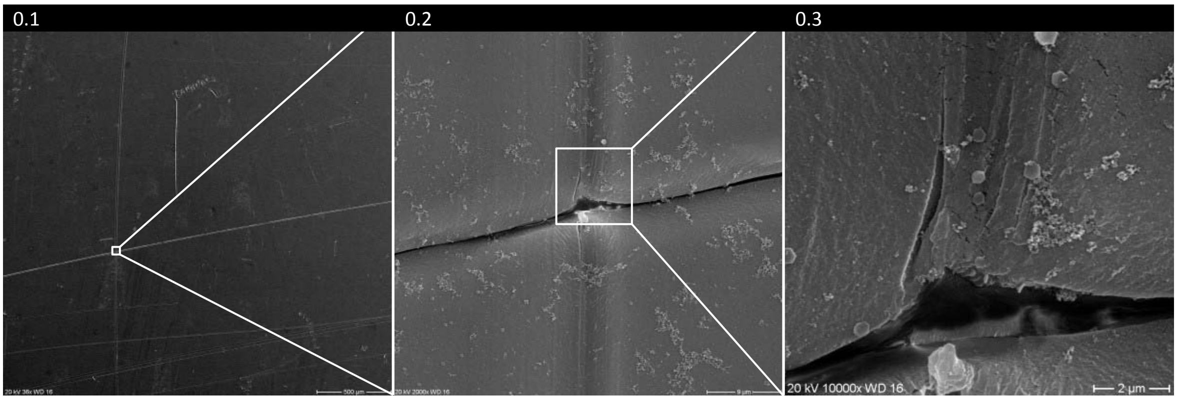


Bild 3.12: 36-, 2.000- und 10.000- fache Vergrößerung einer signifikanten Stelle auf der ETFE-Probe (Vergrößerungsmarkierungen maßstäblich)

Zu bemerken ist, dass ein Rasterelektronenmikroskop bei nichtleitenden Materialien nie das Material selbst zeigt, sondern nur die Struktur des Materials, das in diesem Fall mit einem 15 nm feinen Goldfilm versehen ist. In der 10.000-fachen Vergrößerung kann man allerdings in einen Bereich der Probe blicken, der nicht mit Gold beschichtet wurde. Auch aus dem Material ETFE, bestehend aus Kohlenstoff, Fluor und Wasserstoff, werden natürlich Elektronen durch den Elektronenstrahl herausgelöst, nur kommt es nicht zu einer solch gleichmäßigen Ablösung wie beim Gold. Dies führt dann zu eher unscharfen und schlecht erkennbaren Bereichen.

Der Zugversuch, dessen Kennlinie in Bild 3.13 dargestellt ist, wurde mit einer Geschwindigkeit von 1 µm/s gestartet. Die Haltepunkte und die dabei gemessenen (Kraft und Weg) und ermittelten (Spannungen und Dehnungen) Werte sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt und die jeweiligen Haltepunkte in den Verlauf des Diagramms in Bild 3.13 eingetragen. Die Nummerierung der Haltepunkte wurde ebenfalls für die folgenden Bilder verwendet.

Tabelle 3.2: Haltepunkte, Mess- und Rechenwerte des monoaxialen Zugversuches unter mikroskopischer Beobachtung

Haltepunkt	**Kraft-Anfang** [N]	**Kraft-Ende** [N]	**Spannung-Anfang**[57] [N/mm²]	**Spannung-Ende**[57] [N/mm²]	**Weg** [µm]	**Dehnung** [%]
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	12,00	11,56	6,67	6,42	119	0,99
2	15,50	14,62	8,61	8,12	163	1,36
3	20,50	17,50	11,39	9,72	339	2,83
4	25,50	19,47	14,17	10,82	414	3,45
5	30,50	27,24	16,94	15,13	1161	9,68
6	35,50	28,40	19,72	15,78	1395	11,63
7	40,50	32,28	22,50	17,93	2115	17,63
8	45,50	36,24	25,28	20,13	4301	35,84
9	46,60	32,63	26,67	21,11	6027	50,23
10	48,94	34,22	26,67	18,89	9751	81,26

[57] Die Spannung wurden mit konstantem Querschnitt ermittelt, der sich aus der Materialdicke t_p von 0,2 mm und der Probenbreite b_p von 9 mm ergibt (Bild 3.9).

An den Haltepunkten blieb der jeweilige Verfahrweg unverändert. Der an jedem Haltepunkt auftretende Kraftabfall ist durch das starke Relaxationsverhalten (Abs. 0) des Materials zu erklären, das natürlich mit steigender Kraft zunimmt. Die Kraftplateaus, beispielsweise zwischen den Punkten 6/7 und folgenden, sind der Absicht geschuldet, die Verfahrgeschwindigkeit der Relaxationsgeschwindigkeit anzupassen und somit die Kraft in der Probe konstant zu halten. Die Schwingungen und Verzerrungen durch den laufenden Betrieb des Zug-Druck-Moduls ließen allerdings keine brauchbaren Bilder zu, da das Bild punktweise aufgebaut wird und dies zu einer Aufnahmezeit für die dargestellten Bilder von etwa eineinhalb Minuten pro Bild führte. Daher wurde für die Bildaufnahme das Zug-Druck-Modul gestoppt, was leider zum Zeitpunkt der Bildaufnahme eine geringe Kraftabnahme in der Probe mit sich brachte.

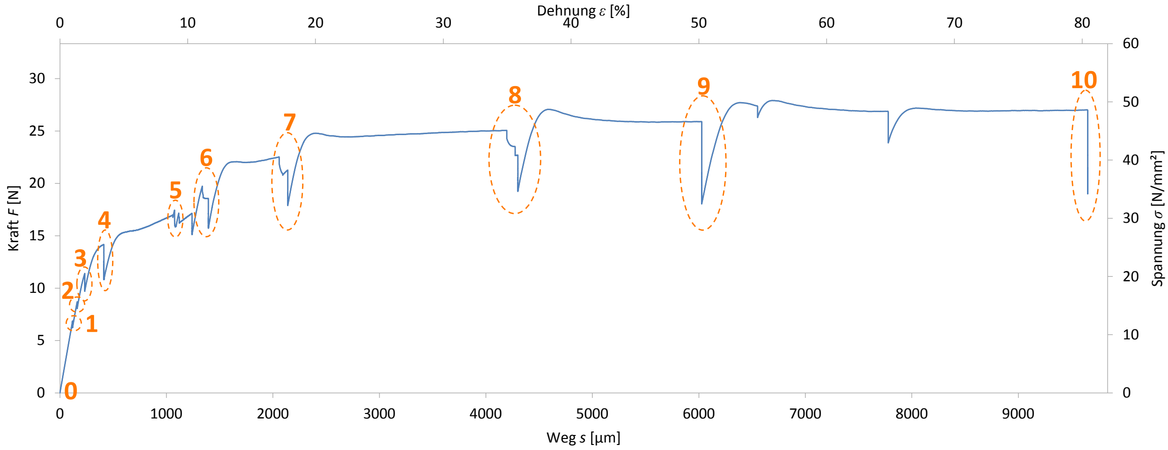


Bild 3.13: Kraft-Weg/Spannungs-Dehnungs-Diagramm des mikroskopischen monoaxialen Zugversuches mit eingetragenen Haltepunkten (orange Zahlen)

Im Bereich der elastischen Verformung erfährt die Struktur in keiner Vergrößerungsstufe eine wesentliche Veränderung. Die einzig sichtbare Veränderung ist das marginale Aufklaffen der schon vorhandenen Kerbe im Material (Bild 3.14|1.1 und 4.1 orange Markierung). Die Beobachtung mit 50.000-facher Vergrößerung wurde nach dem 4. Haltepunkt eingestellt, da zunehmend unscharfe und wenig aussagekräftige Bilder entstanden, und die Bilder mit 3.000- und 10.000-facher Vergrößerung wesentlich klarere Aussagen erlaubten.

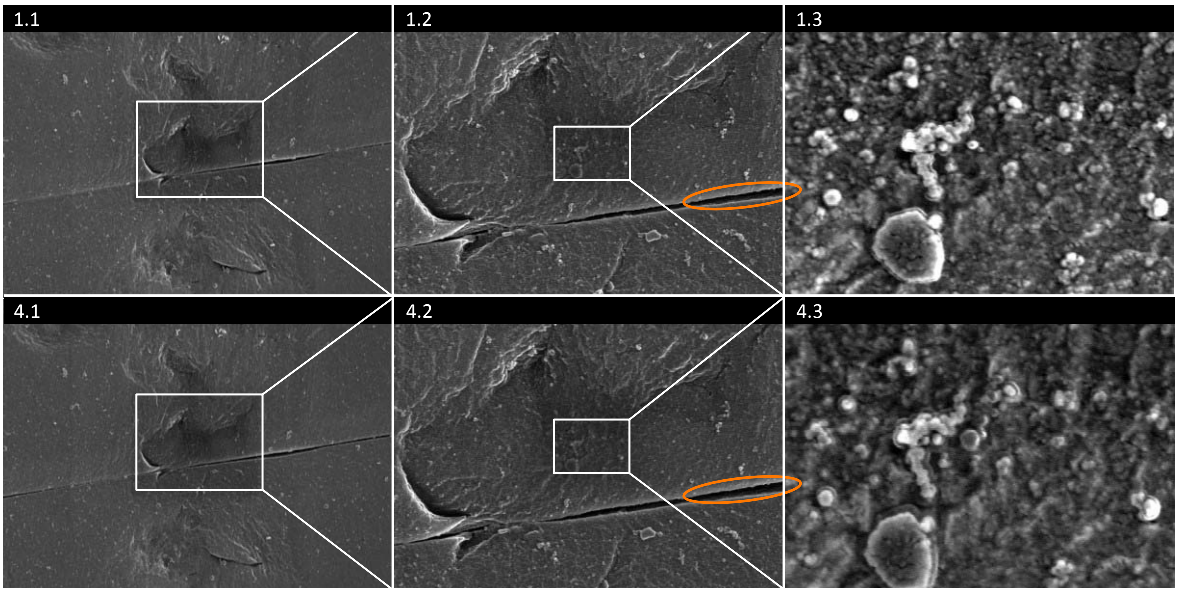


Bild 3.14: 3.000-, 10.000- und 50.000-fache Vergrößerung der Probe im elastischen Bereich bei 1 bzw. 3,45 % Dehnung (1. und 4. Markierung im Kraft-Weg-Diagramm im Bild 3.13) – Zugrichtung vertikal

Zum Vergleich der Verformungen zwischen Beginn und dem Verfahrweg am Haltepunkt 9 sind in Bild 3.15 die 3.000- und 10.000-fache Vergrößerungen der Haltestufen 1 und 9 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die Aufweitung der Kerbe, um etwa 50 %, wie es die aus dem Verfahrweg des Zug-Druck-Moduls ermittelten Dehnungen erwarten lassen.

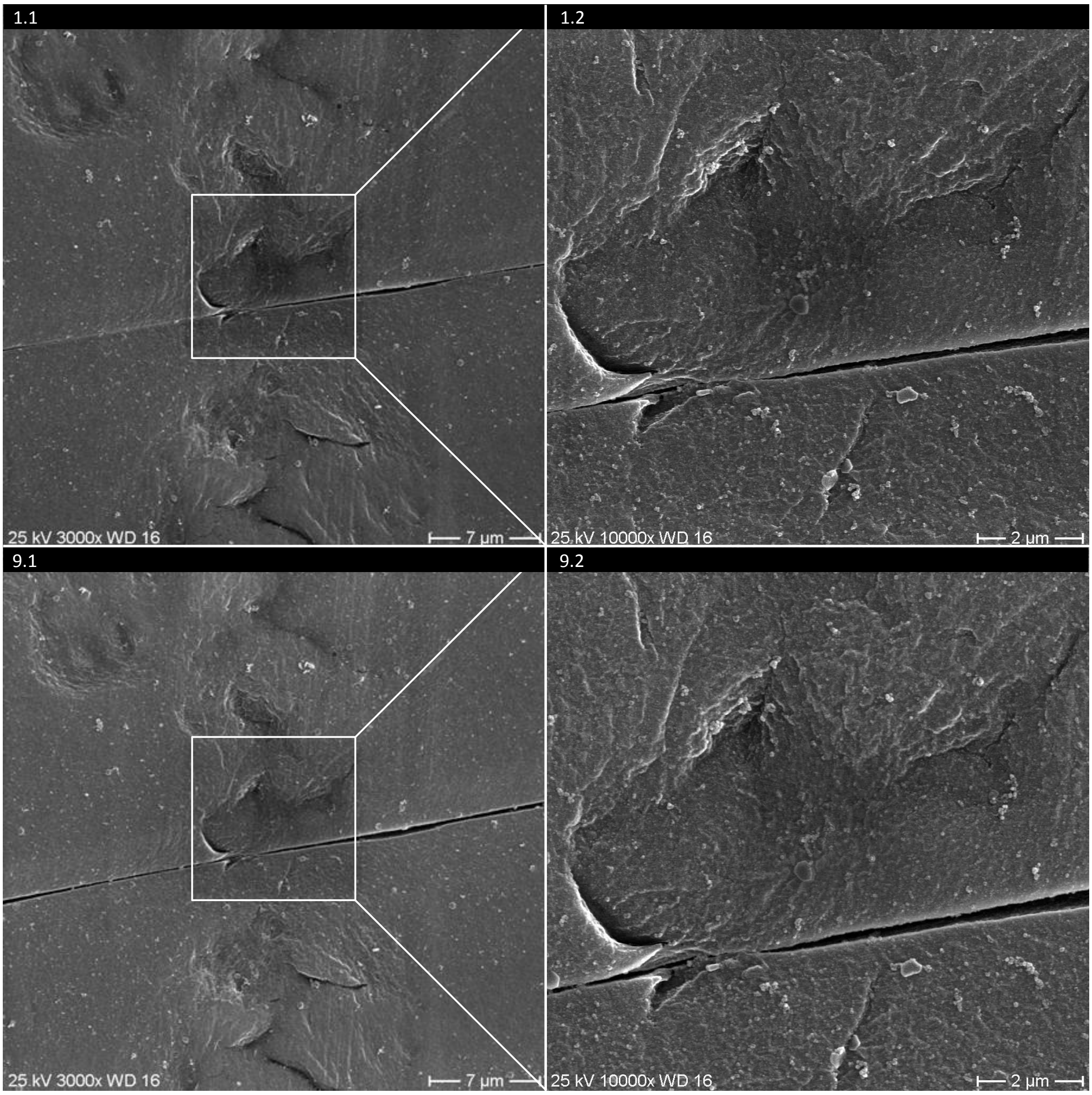


Bild 3.15: 3.000-, 10.000-fache Vergrößerung an den Haltepunkten 1 und 9

Nach Erreichen des maximalen Verfahrweges und den doch sehr geringen Aussagen, die den Bildern entnommen werden konnten, erfolgte nach dem Haltepunkt 9 eine Suche auf der Probe mit geringerer Vergrößerung, um eventuell Bereiche zu finden, die größere Veränderungen aufzeigten. Kurz über der betrachteten Stelle konnte bei 36-facher Vergrößerung eine Stelle ausgemacht werden, die einen Mikroriss zeigte. Im Beobachtungsbereich traten zunächst zwei solche, mit bloßem Auge nicht erkennbarer Risse auf.

Die Mikrorisse, die auch für das einsetzende Versagen bei Fließprozessen verantwortlich sind (s. Abs. 0), haben bei Erstauftritt eine annähernd konstante Breite von ca. 14 µm. Bild 3.16|10.2 zeigt den Zustand kurz nach dem Einreißen des Materials ohne den Einfluss des sofort einsetzenden Fließprozesses. Das Fließen des Materials führt dann zu zwiebelturmartigen Spitzen (Bild 3.16|9.2), die sich langsam weiten, ohne dass es einer äußeren Laststeigerung bedarf (Bild

3.17|9.1-9.4). Die Breite des Risses bleibt dabei annähernd konstant[58]. Erst bei signifikanter äußerer Dehnungszunahme kommt es zu einer Rissbreitenzunahme (Vergleich Bild 3.16|9.2 und 10.2), bei der die zwiebelturmartigen Spitzen sich weiter verzweigen.

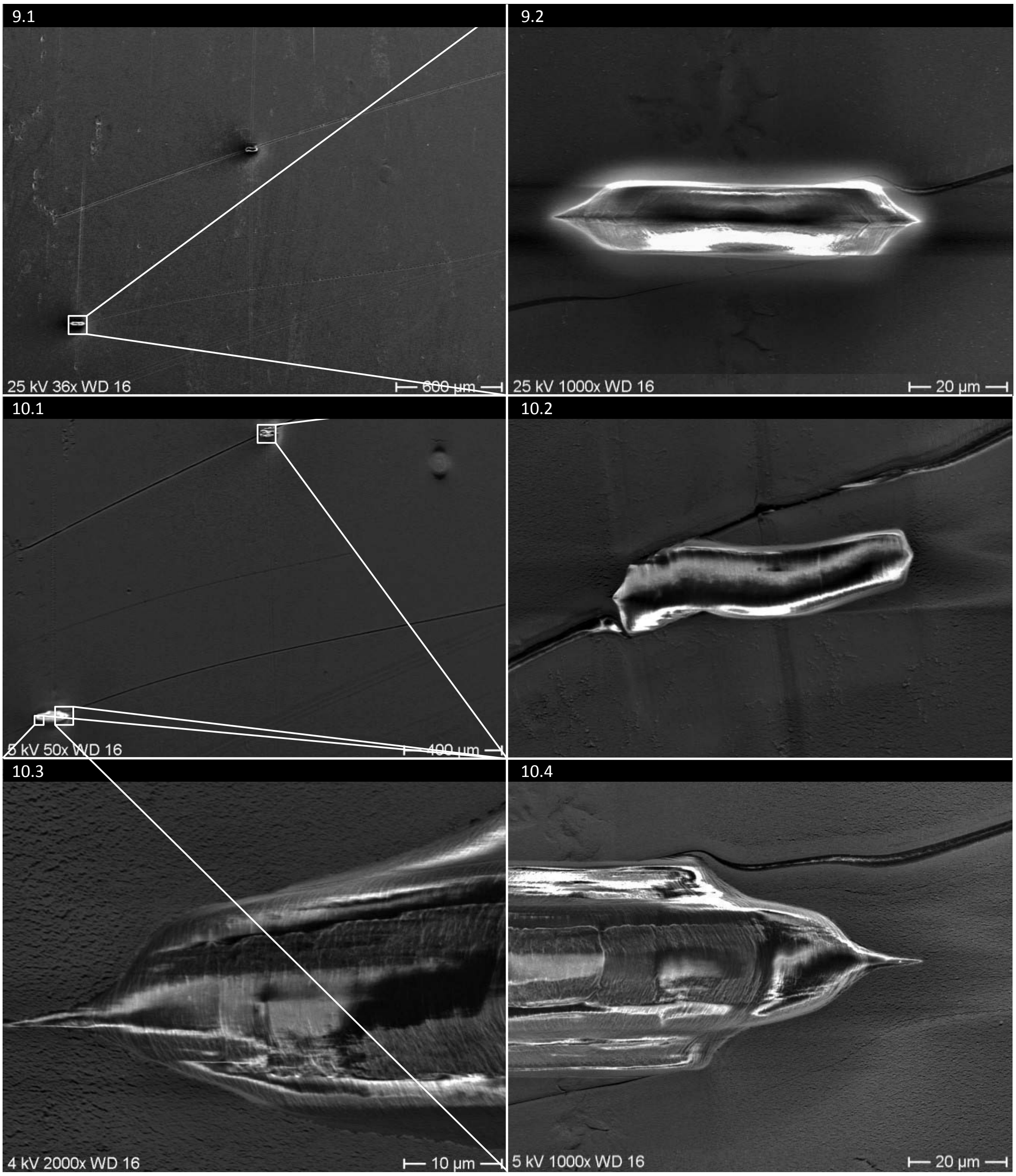


Bild 3.16: 36 -, 1.000 und 2.000-fache Vergrößerung an den Haltepunkten 9 und 10 mit Darstellung der Mikrorisse in Phase 1 und 2

Da in Haltepunkte 10 der maximal mögliche Verfahrweg erreicht wurde, konnte die weitere Rissausbreitung nicht mehr beobachtet werden.

58 Durch die Beobachtung einer Stelle auf der Probe mit dem Rasterelektronenmikroskop wird diese Stelle vermehrt mit Elektronen beschossen, was zu einem thermischen Energieeintrag in das Material führt. Da ETFE sehr temperaturanfällig ist, ist ein Teil der Risslängenzunahme diesem Effekt zuzuschreiben.

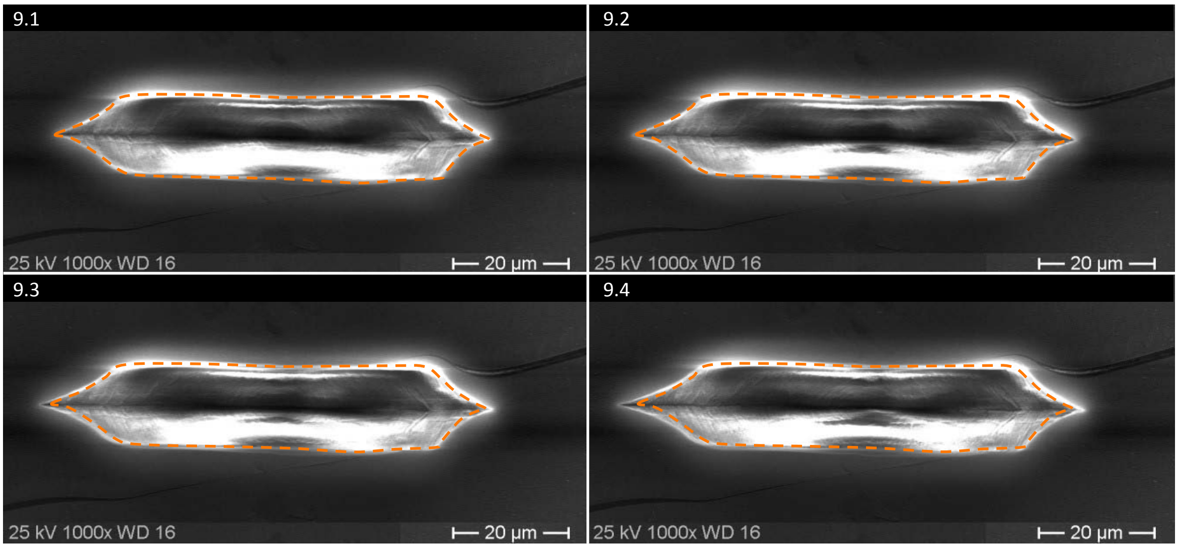


Bild 3.17: 1.000-fache Vergrößerung am Haltepunkt 9 mit Darstellung eines Mikrorisse und langsamer Vergrößerung des Risses ohne äußere Kraftzunahme, illustriert durch Übernahme der 1. Rissgröße in gestrichelter Darstellung in die darauffolgenden Aufnahmen

Die Beobachtung von ETFE in einem hochauflösenden Rasterelektronenmikroskop bei gleichzeitiger Durchführung eines Zugversuches bestätigte die theoretisch bekannte Art des Versagens. Unter Einwirkung einer äußeren Last entstehen in der Materialoberfläche Mikrorisse, die sich durch das ausgeprägte Fließverhalten des Materials langsam quer zur Zugrichtung ausbilden. Die Mikrorisse treten bei steigender Last immer häufiger auf, was zusätzlich zu einer Spannungszunahme im noch ungerissenen Restmaterial führt. Dies wirkt fördernd auf die Entstehung weiterer Mikrorisse, die letztendlich durch eine Aneinanderreihung von mehreren Mikrorissen in ihrer Summe zum endgültigen Versagen des gesamten Querschnittes führen.

Elastischer Bereich

Die weiteren Betrachtungen zum Material ETFE erfolgen nun wieder aus makroskopischer Sicht. Dazu wird zunächst das Materialverhalten im elastischen Bereich betrachtet. Die selbst ermittelten Werte werden den in der Literatur veröffentlichten Werten gegenübergestellt und fließen in eine Zusammenstellung der für die weitere Bearbeitung notwendigen Werte ein. Der Bereich, in dem das Material ETFE rein elastisch (linear bzw. viskos) auf äußere Einwirkungen reagiert, muss dazu bestimmt werden. Dies erfolgte durch zyklische Zugversuche in unterschiedlichen Kraftbereichen und jeweils zwei Prüfgeschwindigkeit von 0,5 und 5 mm/min Verfahrweg in der Traverse der Prüfmaschine (Bild 3.18 und Bild 3.19). Der Probekörper (DIN 527 Typ 5A) wies eine Dicke vom 200 μm auf und war im gemessenen Bereich 4 mm breit. Daraus lassen sich die Spannungen im elastischen Bereich im Material ableiten, wie bereits in Bild 3.7 gezeigt.

Zu erkennen ist in beiden folgenden Diagrammen (Bild 3.18 und Bild 3.19), dass in keinem Kraftbereich ideal linear-elastisches Materialverhalten vorliegt, sondern immer zeitabhängige (viskos) und plastische Anteile existieren. Die Zeitabhängigkeit zeigt sich durch die unterschiedlichen Prüfgeschwindigkeiten von 0,5 und 5,0 mm/min. Bei 0,5 mm/min ist zunächst eine deutlich größere Aufweitung zwischen den Zweigen der Hysterese[59] zu erkennen als bei 5 mm/min. Die Aufweitung ist unterhalb von 10,0 N (entspricht 12,5 N/mm^2) sehr gering (Bild 3.18). Der Dehnungsbereich liegt in etwa in der gleichen Größenordnung und die maximale Dehnung liegt bei beiden Geschwindigkeiten unter 1 %.

[59] Hysterese [gr. *hýsteron*: hinterher, später] –Das Fortdauern eines Zustandes auch nach Entfernen der Anregung.

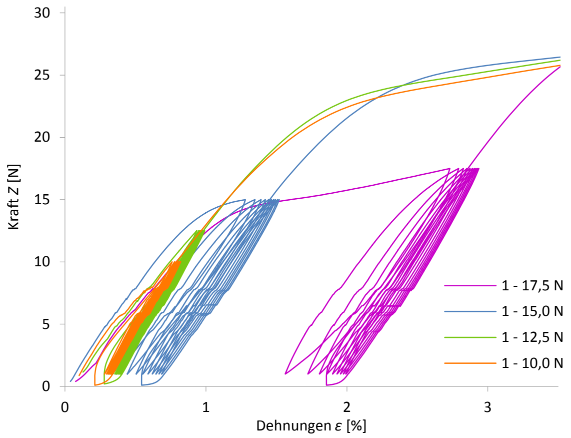


Bild 3.18: Kraft-Dehnungs-Diagramm einer monoaxialen zyklischen Prüfung (ETFE 200 μm Nowoflon ET6235, DIN 527 Typ 5A) mit 0,5 mm/min Prüfgeschwindigkeit – 10 Zyklen

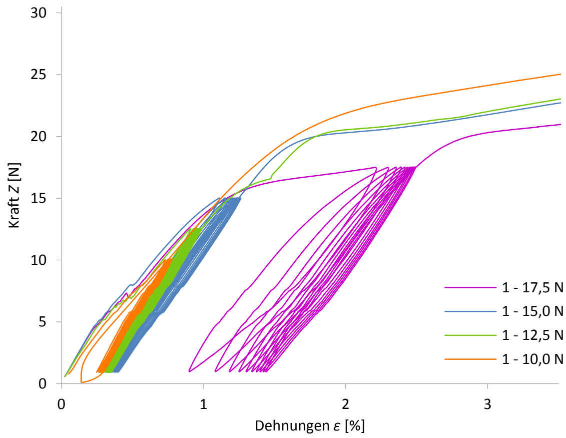


Bild 3.19: Kraft-Dehnungs-Diagramm einer monoaxialen zyklischen Prüfung (ETFE 200 μm Nowoflon ET6235, DIN 527 Typ 5A) mit 5,0 mm/min Prüfgeschwindigkeit – 10 Zyklen

Daher wird diese Spannungshöhe als maximal zulässige Spannung für das Gebrauchslastniveau des Materials festgelegt (annähernd rein elastischer Bereich). Der Übergang von viskoelastischem zu viskoplastischem Verhalten zeichnet sich der Bereich oberhalb von 12,5 N/mm^2 ab, während oberhalb von 15,0 N/mm^2 der viskoplastische Anteil sehr stark zunimmt. Um für kurzzeitige Lasten nicht in den viskoplastischen Bereich zu geraten und die Verformungen, die zwar viskose Anteile haben, dennoch elastisch zu halten, wird für die Traglast eine maximale Spannung von 15 N/mm^2 gewählt. Die gewählten Größen sind so oder in ähnlicher Höhe auch in der Literatur (Tabelle 3.3) zu finden.

*Tabelle 3.3: ETFE – charakteristische Materialkennwerte (*angenommene Werte)*

Quelle	**Testart**	**Elastizitäts-grenze** [N/mm^2]	**Streck-spannung** [N/mm^2]	**Zug-festigkeit** [N/mm^2]	**Bruch-dehnung** [%]	**E-Modul** [N/mm^2]	**Quer-dehnzahl** [-]
[DuPont 2012]				40-47	150-300		
[Saxe 2012]	biaxial						
[Galliot und Luchsinger 2011]	biaxial	~12				1140	0,43
	monoaxial	14-20				1000-1200	
	berst	~15				1110	0,43*
[Schiemann 2009]	monoaxial	15-17	24-25	40-60		700-750	
	biaxial	15-17					
	berst						
[Lippke 2009]	monoaxial	16-17	22-24	40-58	220-350		
	biaxial					900-1000	0,33
[Schöne 2007]	monoaxial			52,5	600	300-750	
[Wagner, Karwath und Kröplin 2007]	biaxial					450-1200	
[MSAJ 2006]	monoaxial	14-16	22-24	40-60	400-450	600-700	0,40-0,45
[Lehnert und Schween 2006]	monoaxial			50	>350	700	
[Hodann 2006]				>40	>300		
[Barthel, Burger und Saxe 2003]	biaxial	13,3	17,8			650-700	0,45
	monoaxial			~40	340	-	
eigene	monoaxial	12-15	24-29	40-60[60]	230-260	700-1000	

[60] siehe Bild 3.7

[Barthel, Burger und Saxe 2003] erwähnen, dass der E-Modul E und die Querkontraktion ν des Materials zutreffend nur über einen biaxialen Versuch zu ermitteln sind. Leider geben sie nur einen Bereich für die Größe des E-Modul an. Der E-Modul ist allerdings spannungsabhängig und nicht allein durch einen Bereich definiert. Die Spannungsabhängigkeit des E-Moduls konnte [Wagner, Karwath und Kröplin 2007] entnommen werden. Für die zuvor erwähnten Spannungen zum Nachweis der Gebrauchstauglich- bzw. Tragfähigkeit werden dem Diagramm in Bild 3.20 die entsprechenden E-Moduln zugeordnet.

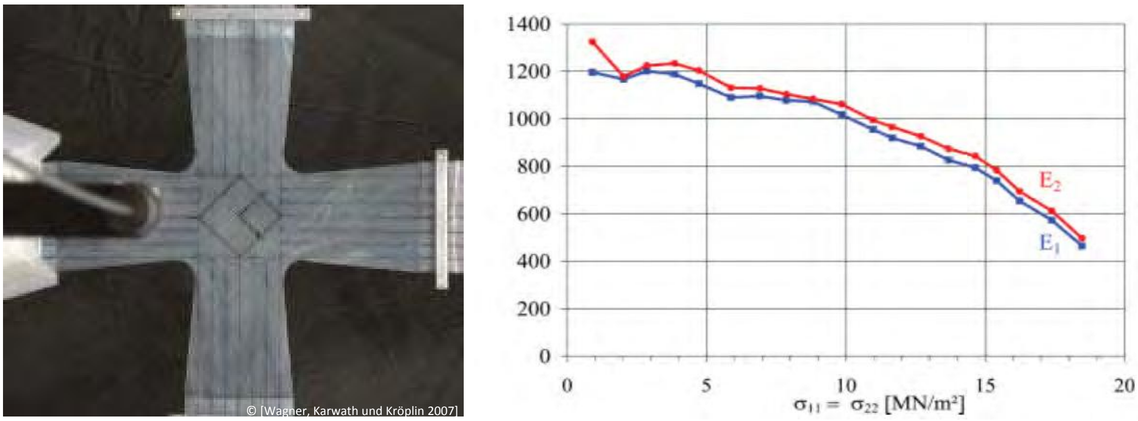


Bild 3.20: Biaxialer Zugversuch aus [Wagner, Karwath und Kröplin 2007] mit Darstellung des richtungs- und spannungsabhängigen E-Moduls E von ETFE Folie

Ein weiterer wichtiger Wert für die Bemessung von Tragwerken mit ETFE ist die Querkontraktion. Hier werden Werte zwischen 0,43 und 0,45 angegeben, außer von [Lippke 2009] mit 0,33. Für die numerischen Simulationen wird ein Wert von 0,45 verwendet. Eine Zusammenstellung der Werte, die im Zuge dieser Arbeit Verwendung finden werden, sind in Tabelle 3.4 zusammengestellt. Dabei werden in Berücksichtigung der immer noch üblichen Bemessungsmethode der maximal zulässigen Spannungen und dem zuvor erläuterten Materialverhalten maximal zulässige Spannungen sowohl für Langzeit- als auch Kurzzeiteinwirkungen unterschieden.

Tabelle 3.4: ETFE – Materialkennwerte als Grundlage für die numerischen Simulationen

Kennwert	Nowoflon ET 6235
Dicken t [µm]	100-300
Dichte ρ [g/cm^3]	1,75
zulässige Spannung – Langzeiteinwirkung $f_{y,k,l}$ [N/mm^2]	12,5
zulässige Spannung – Kurzzeiteinwirkungen $f_{y,k,s}$ [N/mm^2]	15,0
Zugfestigkeit $f_{u,k}$ [N/mm^2]	40-60
E-Modul E [N/mm^2]	800-1200
Querkontraktionszahl ν [-]	0,45

Viskoser Bereich

Die Viskosität ist ein Maß für die Zähigkeit eines Materials. Ein ausgeprägtes viskoses Verhalten zeigen Flüssigkeiten und Kunststoffe. Die Viskosität kristalliner Festkörper ist hingegen theoretisch unendlich groß. Da im Abschnitt 4.4 auf den Lastabtrag von Folienkissen eingegangen werden wird, und diese zumeist aus ETFE gefertigt werden, sollen die theoretischen Grundlagen kurz erläutert werden. Die ideale Viskosität nach Newton ist definiert durch:

Schubspannung = Dynamische Viskosität × Schergeschwindigkeit

$$\tau = \eta\dot{\gamma} \tag{3–4}$$

Kunststoffe bestehen chemisch gesehen aus endlichen Molekülketten, die produktions- und materialbedingt unterschiedliche Längen und Verzweigungsstrukturen aufweisen. Erfährt ein Kunststoff nun eine äußere Belastung, zeigt sich ein nichtlineares viskoses Materialverhalten. Dabei bedeutet viskos, dass das Werkstoffverhalten bei äußerer Belastung eine Funktion der Zeit ist. Für eine konstante Last nehmen die Verformungen mit der Zeit zu und für eine konstante Verformung nehmen die Spannungen mit der Zeit ab [Michaeli 2006] (Bild 3.21).

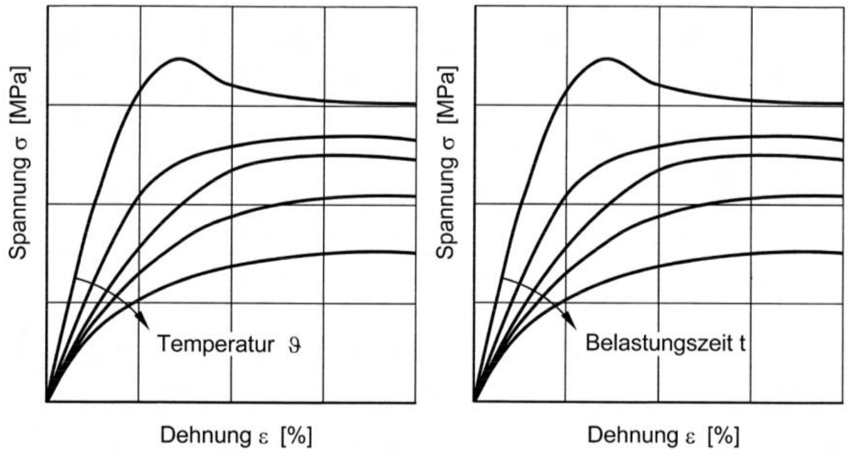


Bild 3.21: Einfluss von Temperatur und Zeit auf das Verformungsverhalten von Kunststoffen [Michaeli 2006]

Um das Maß der Viskosität von ETFE und den Übergang von viskoelastischem zu plastischem Verhalten zu bestimmen, wurden eigene Be- und Entlastungsversuche wiederum an der Zwick Z20 durchgeführt (Bild 3.18 und Bild 3.19). Wie oben schon erläutert, kann im Bereich bis 12,5 N/mm^2 kaum eine Öffnung der Hysterese beobachtet werden. Auch für Spannungen bis 15,0 N/mm^2 bleibt der Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit kaum erkennbar. Ab dem Bereich von Dehnungen größer 1 % ist sowohl das Öffnen der Hysteresen als auch der Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit erkennbar. Das viskose Materialverhalten von ETFE ist zwar anfänglich noch viskoelastischer Natur, geht dann aber fließend in viskoplastisches Verhalten über.

Plastischer Bereich - Fließen

Wie eingangs angedeutet, kommt es im Bereich plastischer Verformungen zu einer Neuordnung der Nebenvalenzbindungen. ETFE zeigt ein sehr ausgeprägtes plastisches Verhalten, das mit großen Dehnungen und gleichzeitig mit einer Verfestigung des Materials einhergeht (s. Bild 3.7). Die bei höheren Spannungen auftretenden zeitunabhängigen plastischen Verformungen spielen für die Bemessung von Tragwerken meist keine Rolle, sind aber im Sinne von Duktilität und Versagensankündigung sehr positiv zu bewerten. Kritischer ist jedoch das zeitabhängige plastische Verformungsverhalten, das Fließen. Dieses beschreibt die zunehmende dauerhafte Deformation unter einem konstanten äußeren Zwang. Es kommt zu Umlagerungen im Material, die auch nach Wegnahme des äußeren Zwanges eine dauerhafte Verformung mit sich bringt. Unterschieden werden die beiden Spezialfälle Kriechen, also kraftkonstanter Zwang, und Relaxation, also wegkonstanter Zwang.

Relaxation

Angaben zum reinen Relaxationsverhalten von ETFE konnten [Lippke 2009] entnommen werden. Er führte 7 Versuche mit unterschiedlichen Initialspannungen durch und spricht von einer Konvergenz nach 500 Stunden zu einer Spannung von 7 N/mm^2, die sich unabhängig vom initialen

Spannungsniveau einstellen. Diesen Wert schlägt er dann auch als Bemessungsgrenze für mechanisch vorgespannte Folienkonstruktionen vor, woraus sich zwei grundlegende Formeln für die Ermittlung der sich einstellenden Spannung nach unendlicher Zeit ergeben.

$$\sigma_\infty(\varepsilon < 1\%) = \varepsilon_0[\%] \cdot 7{,}00 \frac{N}{mm^2} \tag{3–5}$$

$$\sigma_\infty(\varepsilon > 1\%) = 7{,}00 \frac{N}{mm^2} \tag{3–6}$$

Er bediente sich einer aus [Schwarzl 1990] entnommenen Formel zur Bestimmung der sich nach unendlicher Zeit einstellenden Spannung in einem Material unter Kenntnis der Ausgangsdehnung ε_0 und des Relaxationsmoduls $G(t)$, was allerdings nur im Bereich kleiner Dehnungen ($\varepsilon < 1\%$) zulässig ist. Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Bild 3.7) von ETFE zeigt bei einer Dehnung von 1% exakt eine Spannung von 7 N/mm^2.

[Saxe 2012] führte biaxiale Relaxationsversuche mit unterschiedlichen Spannungsniveaus und Spannungsverhältnissen durch. Dabei zeigte er nicht nur den Effekt des langsamen Spannungsabbaus in der Folie, sondern gleichzeitig die Temperaturabhängigkeit. So wurden für die Spannungspaare 4/4, 8/4 und 12/4 N/mm^2 die Temperatur von -25 °C über 0 °C und 23 °C auf schließlich 35 °C gesteigert. Die Ergebnisse sind in Bild 3.22 dargestellt. Interessant ist zum einen die etwaige Halbierung der initialen Spannungen infolge dieser Belastungshistorie und zum anderen die minimale Rückstellung des Materials durch erneutes Heruntersetzen der Temperatur auf Ausgangsniveau. [Saxe 2012] weist ebenfalls darauf hin, dass für geringere Grundspannungen anscheinend größere Rückstellungen im Material erfolgen. Bezüglich der zeitlichen Spannungskonvergenz in den einzelnen Temperaturbereichen zeigt sich im Gegensatz zu [Lippke 2009] eine noch schnellere Konvergenz bereits nach ca. 200-400 Stunden. Die aus der biaxialen Belastung hervorgehende Versteifung des Materials sollte hierfür der Grund sein.

Die Zeitintervalle bis zum Erreichen einer Spannungskonvergenz sind allerdings kritisch zu hinterfragen. Allein der Vergleich der Zeitintervalle nach 0 °C und 23 °C wirft die Frage auf, warum bei 23 °C das Material schneller konvergieren sollte als bei 0 °C und bei 35 °C dann wieder mehr Zeit bis zum Erreichen der Konvergenz verstreicht.

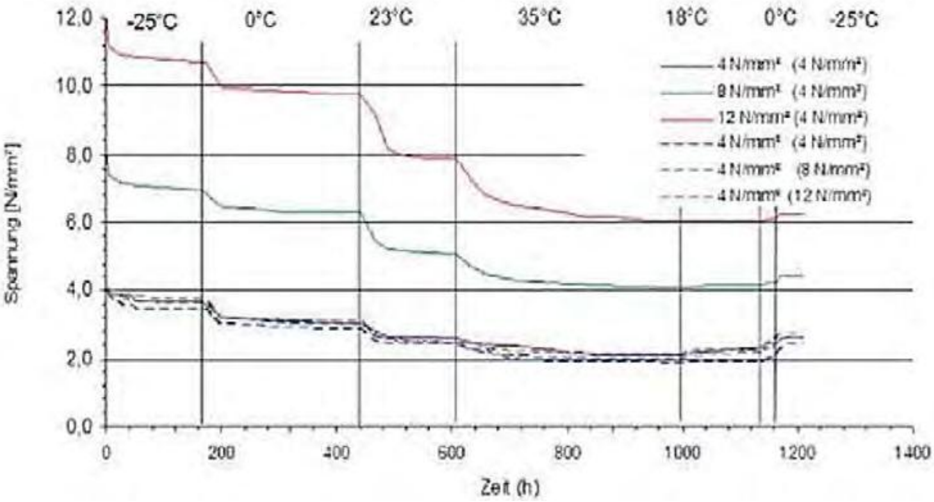


Bild 3.22: Biaxialer Relaxationsversuch unterschiedlicher Spannungsverhältnisse und stufenweisen Temperaturbereichen [Saxe 2012]

Die unterschiedlichen Aussagen bezüglich der Konvergenz bei Relaxationsprozessen seitens [Lippke 2009] und [Saxe 2012] sollten durch eigene Relaxationsversuche untersucht werden. Diese konnten nur monoaxial erfolgen, was allerdings nur zu quantitativen und nicht zu qualitativen Unterschieden führen sollte. Der Versuchsaufbau (Bild 3.23) sah dafür eine beidseitige Klemmung der Probe vor, wobei eine Seite verschieblich gehalten wurde. An der verschieblichen Seite wurde sowohl die initiale Kraft eingeprägt als auch die zeitliche Abnahme der Kraft gemessen. Dies geschah über eine Kraftmessdose der Firma Burster, die einen Kraftbereich von 0-50 N abdeckt. Diese ist mit einem Innengewinde versehen und wird zentral über eine Gewindestange mit der verschieblichen Probenklemmung verbunden. Die initiale Kraft wurde über Drehen der Gewindestange in der Kraftmessdose eingeprägt. Es wurde eine Kraft F_R von 12 N eingestellt, was bei gegebener Probengeometrie, die Querschnittsfläche beträgt in der Mitte 0,8 mm^2, einer Folienspannung σ_R von 15 N/mm^2 entspricht.

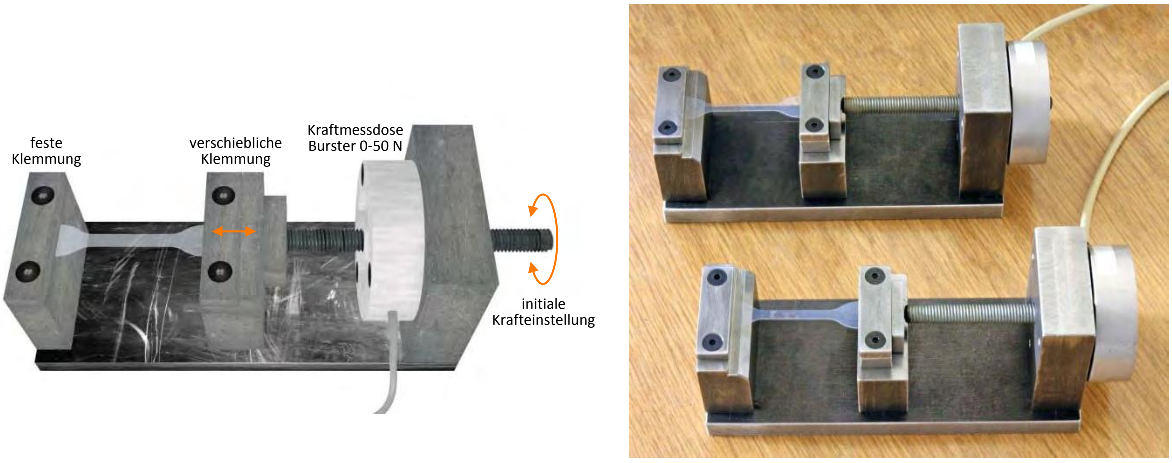


Bild 3.23: Versuchsaufbau schematisch und fotografisch

Der reine Relaxationsversuch wurde über einen Zeitraum t_R von 1000 Stunden gefahren. Es war zu beobachten, dass sich im Anfangsbereich eine sehr schnelle Kraftabnahme F_R einstellt, die dann langsam abklang (Bild 3.24). Die von [Lippke 2009] erwähnten 7 N/mm^2 stellten sich auch bei diesen Versuchen ein. Die Konvergenzzeit lag ebenfalls bei den von ihm erwähnten 500-600 Stunden. Somit kann die Forderung [Lippke 2009], die maximal zulässige Spannung für wegkonstante, also mechanisch gespannte, Folien auf 7 N/mm^2 zu begrenzen, voll unterstützt werden. Die von [Saxe 2012] zusätzlich noch gezeigte sehr starke Temperaturabhängigkeit dieser sich einstellenden Spannung konnte leider nicht untersucht werden.

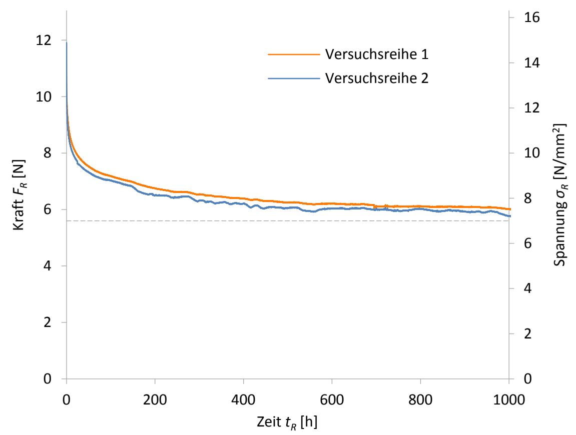


Bild 3.24: Kraft- und Spannungsverlauf über 1000 h für monoaxiale Relaxationsversuche bei 12 N initialer Kraft

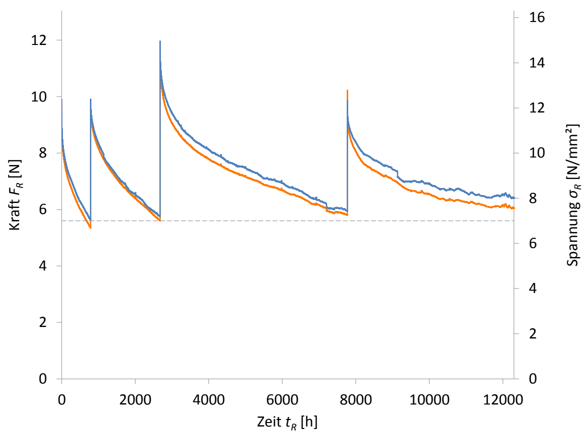


Bild 3.25: Kraft- und Spannungsverlauf für monoaxiale Relaxationsversuche mit initialer Kraft von 10 N und Krafterhöhung auf 10 bzw. 12 N nach Abfall auf 7 N/mm^2

In Kenntnis dieser Sachlage werden konstruktiv Möglichkeiten für ein Nachspannen der mechanisch vorgespannten Folien angeboten. Die Lösungen reichen von federgelagerten Klemmschienen bis zu bereits vorgesehenen zweiten Klemmreihen auf der Folie. Solch ein Vorgehen macht aber nur Sinn, wenn dadurch ein dauerhaft höheres Spannungsniveau in der Folie erreicht werden kann. Um dies zu simulieren, wurde ein Versuch gefahren, der jeweils nach Abfallen der Spannung auf 7 N/mm², die Kraft in der Probe auf Ausgangsniveau hochstellt. Dazu wurde der gleiche Versuchsaufbau wie in Bild 3.23 verwendet. Im Sinne der in Tabelle 3.4 festgehaltenen Spannung für den Gebrauchszustand von 12,5 N/mm² wurde dieser Versuch mit eben dieser Spannungshöhe angesetzt. Dies entspricht einer initialen Kraft von 10 N in der Probe, da die Querschnittsfläche wiederum 0,8 mm² beträgt. In Bild 3.25 sind sowohl der Kraft- als auch der Spannungsverlauf dieses Versuches dargestellt. Es wurde nach Erreichen der Spannung von 7 N/mm² wieder auf die initiale Kraft von zunächst 10 N (12,5 N/mm²) zurückgestellt. Zu beobachten ist ein erneutes Annähern an die Grenze von 7 N/mm², allein das Zeitintervall stellt sich größer dar. Danach wurde die Kraft auf 12 N erhöht, um die Relaxationskonvergenz auch von einem höheren Lastniveau aus zu überprüfen. Auch hier zeigt sich wieder ein Abfallen der Kraft hin zum bekannten Niveau von 7 N/mm² bei einer weiteren Vergrößerung des Zeitintervalls.

Der Versuch lässt vermuten, dass ein Nachspannen von mechanisch gespannten Folientragwerken nicht von Erfolg gekrönt sein dürfte. Hier müssten sehr große Dehnungen aufgebracht werden, die das Material nachhaltig plastisch verformen und ähnlich der vom PTFE bekannten Variante ePTFE[61] verfährt. Dabei werden die Molekülfasern während des Herstellungsprozesses expandiert, wodurch im Material verbesserte Festigkeits- und Kaltfließeigenschaften erreicht werden. Allerdings geht dabei die Transparenz des Materials verloren.

Kriechen

Im Gegensatz zur Relaxation beschreibt das Kriechen die zeitliche Dehnungszunahme unter einer konstanten äußeren Last. Generell lässt sich für die Lebensdauer eines Materials das Kriechverhalten in drei Abschnitte unterteilen. In Bild 3.26 ist dies schematisch für Kunststoffe gezeigt.

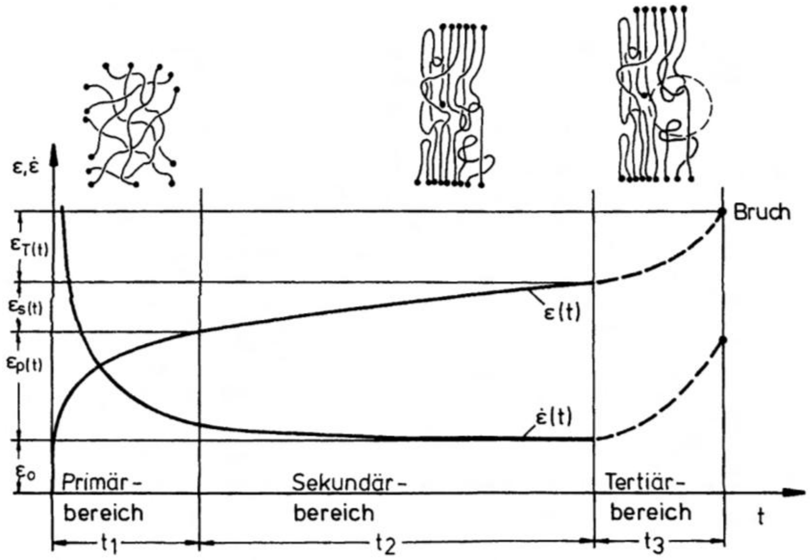


Bild 3.26: 3 Abschnitte der Kriechverformung $\varepsilon(t)$ und Kriechgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}(t)$ für Kunststoffe [Sarabi 1984]

Im Primärbereich fällt die Deformationsgeschwindigkeit nach der spontanen Anfangsdeformation ε_0 zunächst langsam ab, bis diese eine fast konstante Geschwindigkeit annimmt. Danach haben die Moleküle Zeit, sich gegeneinander zu verschieben und somit die innere Struktur zu stabilisieren (Sekundärbereich). Durch langsames Auftreten von Mikrorissen (vgl. Abs. 3.1.1)

61 ePTFE: expandiertes PTFE

kommt es nach und nach zu lokalen Schädigungen des Materials und zum letztendlichen Bruch (Tertiärbereich).

Die gesamte Kriechverformung $\varepsilon(t)$ ergibt sich aus der Summe der Initialdehnungen ε_0, des Primärkriechens $\varepsilon_P(t)$, des Sekundärkriechens $\varepsilon_S(t)$ und Tertiärkriechens $\varepsilon_T(t)$.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_K(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_P(t) + \varepsilon_S(t) + \varepsilon_T(t) \qquad (3–7)$$

In [Moritz 2007] sind die Untersuchungen zum Kriechverhalten von ETFE erstmalig zusammengefasst und werden durch aktuellere eigene Untersuchungen [Winkler 2009] ergänzt (Tabelle 3.5). Unterscheiden lassen sich die Versuche wiederum in monoaxial [Saxe 2002], [Ansell 1985] und biaxial [Winkler 2009] und [Saxe 2012]. In Bild 3.27 sind die Versuchsaufbauten von [Winkler 2009] und [Saxe 2012] vergleichend dargestellt.

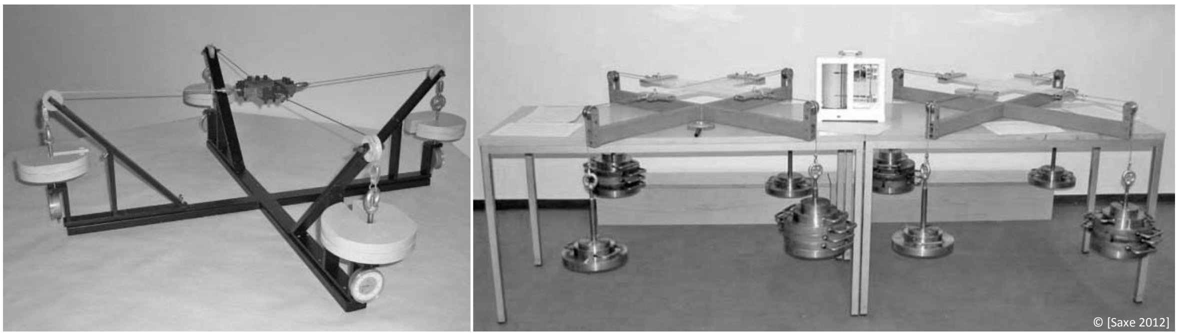


Bild 3.27: Kriechversuchsaufbauten für ETFE von [Winkler 2009] und [Saxe 2012]

Der grundsätzliche Aufbau unterscheidet sich dabei kaum, nur die Testkörper selbst sind unterschiedlich. [Saxe 2012] verwendet die aus den biaxialen Zugversuchen bekannten Zuschnitte (Bild 3.28), verkürzt aber die für die Klemmung notwendigen monoaxialen Arme von 20 cm Breite gegenüber einer biaxialen Zugprüfung. Die Messung der Dehnungen erfolgt wie bei der Zugprüfung direkt im biaxialen Bereich, wobei die vier Messpunkte jeweils einen Abstand von 10 cm haben.

Indem er die Probe fast ohne Arme klemmt, umgeht [Winkler 2009] die schwierige Messerfassung der Dehnungen auf der Probe. Die Streckung des Materials wird hier mit Messuhren unter den Gewichten, die die konstante Kraft in die Probe einprägen, erfasst. Der biaxiale Bereich hatte eine Größe von 5 x 5 cm und die Probendicke t_F betrug 200 µm.

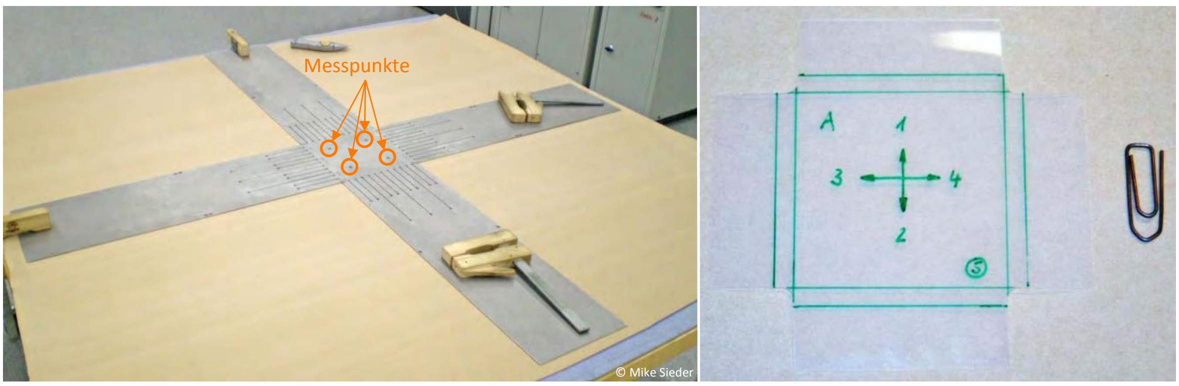


Bild 3.28: Zuschnittsgeometrie der Probekörper von [Saxe 2012][62] und [Winkler 2009] für biaxiale Kriechuntersuchungen an ETFE

[62] Das hier gezeigt Material ist nicht ETFE, dennoch wird die gleiche Schablone für den Zuschnitt verwendet.

Die sich aus den Messungen ergebenen Werte von [Winkler 2009] und [Saxe 2012] sind neben anderen aus der Literatur entnommenen Werten in Tabelle 3.5 eingetragen.

Tabelle 3.5: monoaxiale und biaxiale Gesamtkriechdehnungen $\varepsilon(t)$ für ETFE

Quelle	Testart	Dicke	Temperatur	Grundspannung	Richtung	Dauer	Dehnung
		[µm]	[°C]	[N/mm²]	[-]	[h]	[%]
[63] *[Saxe 2012]*				6,0 (4,0)			0,8 (0,4)
	biaxial		23	9,5 (4,0)		2000	1,2 (0,0)
				13,0 (4,0)			2,4 (-0,5)
[64] *[Schöne und Arndt 2012]*	monoaxial Hysterese		23	15,0			0,20
				20,0			0,50
[DuPont 2012]	monoaxial		23	6,9		24	0,20-0,30
	injection moulded bar	3175	23	6,9		1000	~1,70
				13,8		1000	~3,00
[Charbonneau 2011]		50			längs		0,02/0,25/1,81/3,69
					quer		0,03/0,24/2,07/4,37
		150			längs	24	0,01/0,20/1,42/4,17
	monoaxial		23	2/8/12/14	quer		0,02/0,24/1,40/4,64
		300			längs		0,02/0,28/2,12/5,52
					quer		0,03/0,30/2,53/6,44
		150			längs	168	-/0,95/5,65/-
[Winkler 2009]	biaxial	200	23	4/8/14		1000	0,3/1,0/3,7
[65] *[WU, MU und LIU 2008]*			25	3/6/9			0,14/0,39/1,45
	monoaxial		40	3/6/9		24	0,59/1,80/5,65
			60	3/6/9			1,83/4,80/7,45
[Schöne 2007]			23	6,0			min. 1,00
[66] *[MSAJ 2006]*	monoaxial		20	6/12			0,87/7,25
			40	6/12		24	2,87/8,61
			60	6/12			6,00/27,6
[Barthel, Burger und Saxe 2003]	monoaxial			5,3/8/10,7		1000	0,20/0,60/2,15[67]
[Ansell 1985]		100	40	5,0	längs		0,60
					quer		2,80
	monoaxial					1104	
		300	40	5,0	längs		1,80
					quer		2,60

Für die Bestimmung der Kriechwerte von ETFE sind wie bei der Bestimmung der sonstigen mechanischen Eigenschaften (s. Tabelle 3.3) letztendlich nur biaxiale Versuche zulässig. Somit können nur die Werte von [Winkler 2009] und [Saxe 2012] als mögliche Grundlage benutzt werden. Allerdings haben beide für ihre Versuchsreihen unterschiedliche Spannungspaarungen gewählt und können daher nur sehr schwer verglichen werden. Die Versuche von [Winkler 2009] zeigen nach 1000 Stunden noch keine erkennbare Konvergenz, die [Saxe 2012] allerdings nach 1000 Stunden erkennt und nach 2000 Stunden bestätigt sieht. Legt man die diese Aussage den Versuchen von [Winkler 2009] zugrunde, können die Werte nach 1000 Stunden denen nach 2000 Stunden gleichgesetzt werden. Unsere Aussage [Winkler 2009] bezüglich einer Hochrech-

63 Die Versuche hatten alle eine Grundspannung σ_i von 4 N/mm² in der Querrichtung. Die Dehnungen für die Querrichtung sind in Klammern angegeben.

64 Die in den Diagrammen der Originalquelle dargestellten Hysterese zeigt nicht das Kriechverhalten des Werkstoffes, sondern den Anteil der viskoelastischen bzw. -plastischen Verformungen, die ab ca. 14,7 N/mm² beständig zunehmen. Wie hierbei auf ein aussagekräftiges Kriechverhalten geschlossen werden kann, wird in genanntem Artikel nicht näher erläutert.

65 Die Kriechdehnungen wurden gegenüber der Quelle getrennt angegeben, d.h. die Initialdehnungen ε_0 wurden nicht berücksichtigt.

66 Besonders die Werte für 12 N/mm² sind sehr kritisch zu hinterfragen.

67 Mittelwerte der beiden Versuchsreihen

nung, über eine an die Versuchswerte angepasste e-Funktion, der gemessenen Werte auf 25 Jahre muss daher angezweifelt werden.

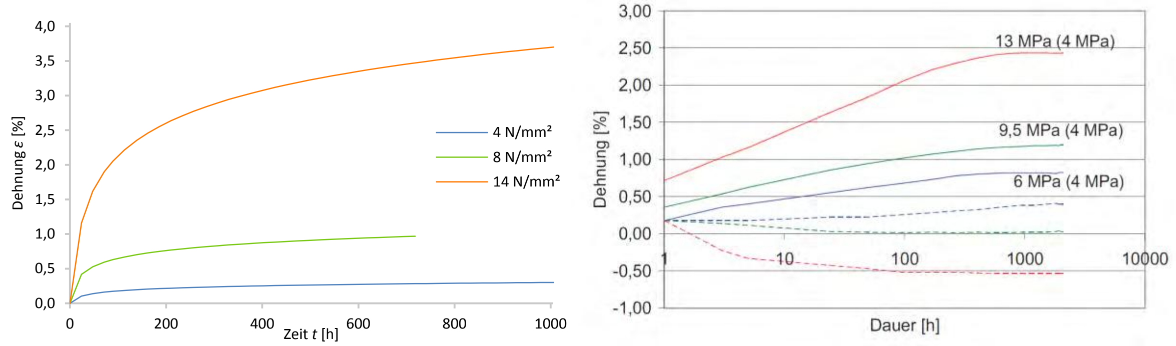


Bild 3.29: Dehnungs-Zeit-Diagramme von biaxialen Kriechversuchen von [Winkler 2009] und [Saxe 2012]

Für biaxiale Beanspruchungen können die Spannungspaarungen aus [Winkler 2009] und [Saxe 2012] als erste Eckdaten in Tabelle 3.6 bzw. Bild 2.1 zusammengeführt werden. Bild 3.30 zeigt, wie sich sowohl die Werte von [Winkler 2009] als auch von [Saxe 2012] in einen Gesamtkontext einbetten lassen.

Tabelle 3.6: Biaxiale Gesamtkriechdehnungen $\varepsilon(t)$ [%] inter- und extrapoliert aus [Winkler 2009], [Saxe 2012] nach 1000 Stunden

Spannung σ_2 [N/mm²]	Spannung σ_1 [N/mm²]																				
	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0
4.0	0.30	0.37	0.40	0.41	0.40	0.36	0.31	0.24	0.18	0.12	0.06	0.00	-0.07	-0.14	-0.21	-0.28	-0.35	-0.42	-0.50	-0.58	-0.65
4.5	0.49	0.35	0.37	0.41	0.42	0.41	0.38	0.33	0.29	0.24	0.20	0.15	0.09	0.03	-0.03	-0.09	-0.15	-0.21	-0.28	-0.34	-0.41
5.0	0.62	0.48	0.41	0.42	0.44	0.44	0.43	0.41	0.38	0.35	0.32	0.28	0.24	0.20	0.15	0.10	0.05	0.00	-0.06	-0.12	-0.18
5.5	0.73	0.61	0.51	0.47	0.47	0.48	0.49	0.48	0.47	0.46	0.44	0.41	0.39	0.35	0.32	0.28	0.24	0.20	0.15	0.10	0.05
6.0	0.80	0.71	0.62	0.56	0.55	0.55	0.55	0.56	0.56	0.56	0.55	0.54	0.53	0.51	0.48	0.46	0.43	0.40	0.36	0.32	0.27
6.5	0.85	0.78	0.71	0.66	0.63	0.63	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	0.67	0.67	0.66	0.65	0.63	0.61	0.59	0.56	0.53	0.49
7.0	0.90	0.84	0.79	0.75	0.72	0.71	0.72	0.74	0.76	0.78	0.79	0.80	0.81	0.81	0.81	0.80	0.79	0.78	0.76	0.74	0.70
7.5	0.94	0.90	0.86	0.83	0.82	0.82	0.83	0.85	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.97	0.97	0.97	0.96	0.94	0.91
8.0	0.98	0.95	0.93	0.92	0.92	0.93	0.94	0.97	1.00	1.03	1.05	1.08	1.10	1.12	1.13	1.14	1.15	1.15	1.15	1.14	1.12
8.5	1.03	1.02	1.01	1.02	1.03	1.05	1.07	1.10	1.13	1.17	1.20	1.22	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33	1.34	1.34	1.34	1.33
9.0	1.10	1.10	1.11	1.13	1.15	1.18	1.21	1.24	1.28	1.31	1.35	1.38	1.41	1.44	1.47	1.49	1.51	1.53	1.54	1.54	1.54
9.5	1.20	1.21	1.23	1.26	1.29	1.32	1.36	1.39	1.43	1.47	1.50	1.54	1.58	1.61	1.64	1.67	1.70	1.72	1.74	1.75	1.75
10.0	1.34	1.35	1.37	1.41	1.44	1.48	1.51	1.55	1.60	1.63	1.67	1.71	1.75	1.79	1.82	1.86	1.89	1.91	1.94	1.95	1.96
10.5	1.51	1.52	1.54	1.57	1.61	1.65	1.69	1.73	1.77	1.81	1.85	1.89	1.93	1.97	2.01	2.04	2.08	2.11	2.14	2.16	2.17
11.0	1.68	1.70	1.72	1.75	1.79	1.83	1.87	1.91	1.95	2.00	2.04	2.08	2.12	2.16	2.20	2.24	2.28	2.31	2.34	2.37	2.38
11.5	1.87	1.89	1.91	1.94	1.97	2.01	2.06	2.10	2.14	2.19	2.23	2.28	2.32	2.36	2.40	2.44	2.48	2.52	2.55	2.58	2.60
12.0	2.05	2.07	2.10	2.13	2.17	2.21	2.25	2.30	2.34	2.39	2.43	2.48	2.52	2.57	2.61	2.65	2.69	2.73	2.76	2.80	2.82
12.5	2.23	2.26	2.29	2.32	2.36	2.40	2.45	2.50	2.54	2.59	2.64	2.69	2.73	2.78	2.82	2.86	2.90	2.94	2.98	3.02	3.04
13.0	2.40	2.44	2.48	2.52	2.56	2.60	2.65	2.70	2.75	2.80	2.85	2.90	2.95	2.99	3.04	3.08	3.12	3.16	3.21	3.24	3.26
13.5	2.58	2.62	2.66	2.71	2.76	2.80	2.85	2.91	2.96	3.01	3.06	3.11	3.16	3.21	3.25	3.30	3.35	3.39	3.43	3.46	3.49
14.0	2.76	2.81	2.85	2.90	2.95	3.01	3.06	3.11	3.16	3.22	3.27	3.32	3.37	3.42	3.47	3.52	3.56	3.61	3.65	3.68	3.70

Dabei wurden die in Orange gekennzeichneten Werte, die den wirklichen Messwerten von [Winkler 2009] und [Saxe 2012] entsprechen, als Berechnungsgrundlage verwendet. Mit diesen Messwerten wurde eine lineare Splineinterpolationen (Matlab interp1(...,'cubic')) der beiden Ränder und der Diagonale (schwarz) für eine größere Datenbasis durchgeführt. Im nächsten Schritt wurden die gemessenen und generierten Wertepaarungen mit Matlab und der Funktion [x,y,z]=griddata(X,Y,Z,Xi,Yi,'v4') zu einer Fläche generiert. Grundlage für die Interpolation ist ein stetiger und „gutmütiger" Funktionsverlauf. Dennoch ist aufgrund der geringen Datenbasis von einer sehr starken Näherung auszugehen, insbesondere der lineare Verlauf entlang der Ränder bei jeweils 14 N/mm² ist sicher unbegründet, kann jedoch gegenüber der geringen gewellten anderen zwei Ränder akzeptiert werden.

Die angegebenen Werte beziehen sich lediglich auf die in den Versuchen zugrunde gelegte Versuchsdauer von 1000 Stunden. Aussagen zu wirklichen Endkriechzahlen sind aus den Versuchen nicht benennbar. Aufgrund der Verläufe der Kurven in Bild 3.29 sollten sich diese aber auf annähernd gleicher Höhe befinden. Somit lassen die in Tabelle 3.6 angegebenen

Gesamtkriechdehnungen $\varepsilon(t)$ (s. Gl. (3–7)) eine Angabe der erwarteten Dehnungen nach $t = \infty$ für die angegebenen Spannungsverhältnisse zu.

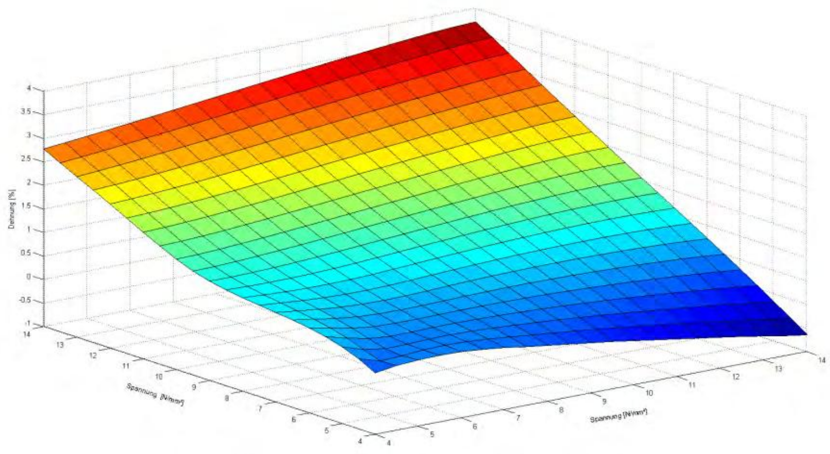


Bild 3.30: Biaxiale Kriechdehnungen interpoliert aus [Winkler 2009] und [Saxe 2012]

Die in Tabelle 3.6 ermittelten Werte werden im Weiteren durch einen realen Kriechversuch an einem 2-lagigen Kissen verifiziert.

Pneumatisch gestützter Langzeitversuch

Die versuchstechnisch gesammelten Daten wurden in einem Langzeitversuch an einem real luftgefüllten Folienkissen durchgeführt. Zur Erfassung der Dehnungen und Kräfte können im Gegensatz zu üblichen Versuchen mit Holz-, Beton- oder Stahlbauteilen keine Dehnmessstreifen oder Kraftmessdosen verwendet werden. Die Dicke der Folien t_F von 0,2 mm verbietet ein Aufkleben von Dehnmessstreifen, da diese zu einer lokalen Materialversteifung führen und so die Messwerte stark verfälschen würden. Die Verformungen können nur optisch erfasst werden, wozu ein Bild-Korrelations-System der Firma GOM verwendet wurde. Zum Einsatz kam das System ARAMIS 4M, das eine Kissenseite komplett über einen Zeitraum von 1.000 Stunden erfasste. Das ARAMIS 4M arbeitet mit zwei 4-Megapixel Kameras, die die Bilder in Graustufen aufnehmen. Die Erfassung der Verschiebung auf der Oberfläche erfolgt dabei über das Tracking von auf der Oberfläche aufgebrachten Punkten. Für eine möglichst genaue Erfassung der Verschiebungen wurde die Oberfläche zunächst weiß grundiert[68] und dann schwarz[69] gepunktet (maximaler Kontrast). Die Größe und der Abstand der Punkte musste der Auflösung der Kameras, dem Messabstand und der Größe des Messvolumes[70] angepasst werden.

Das Kissen hatte einen Durchmesser d_K von 1 m. Für den Einbau wurde der in Bild 3.31 dargestellte Zuschnitt gewählt. Dieser gewährleistet einen bereits geometrisch leicht verlängerten Einbau der Folie. Somit ergab sich kein aus der Ebene gedehntes Folienkissen beim initialen Druckaufbau des Kissens. Dies führte zu den in den Bildern 3.34 und 3.35 dargestellten initialen Geometrien.

---

68 Hierfür wurde keine Farbe, die einer Beschichtung gleich käme, verwendet, sondern ein weißes Pulver (Helling Deformationsspray Pulver weiß Entwickler – Medium Nr. 3) auf die Folie aufgesprüht. Das Pulver baut keinerlei Widerstände bei Dehnungen in der Folie auf und führt so zu keiner Verfälschung der Messergebnisse.

69 Die Punkte wurden aufgetupft und dazu Graphit 33 Kontakt Chemie der Firma CRC Industries Deutschland GmbH verwendet. Auch hierbei handelt es sich um keine Farbe, sondern um ein Pulver mit hohem Graphitanteil.

70 Es wird hier von einem Messvolumen gesprochen, da die von den beiden Kameras beobachtete Fläche zudem noch eine „Tiefenschärfe" besitzt. In diesem aufgespannten Volumen können Messungen erfolgen.

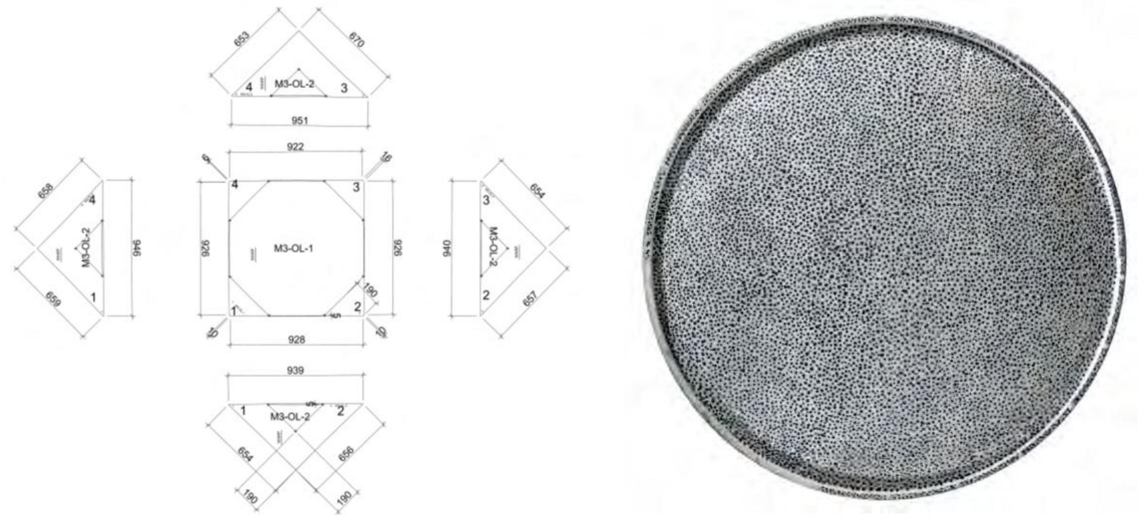


Bild 3.31: Zuschnitt und fertig eingebautes Kissen mit schwarz-weiß Muster zur optischen Erfassung

Das Kissen wurde nicht luftdicht abgeschweißt, sondern durch zwei getrennte Folienlagen realisiert. Außerdem waren die Folienlagen nicht wie üblich mit einem Keder versehen, sondern wurden beidseitig über zwei umlaufende Aluminiumprofile auf eine Holzplatte verschraubt. Die Luftzufuhr und der notwendige Zugang für die Luftdruckkontrolle wurden seitlich durch die Holzplatte in das Kissen eingeführt. Um den Einfluss des Eigengewichts der Folie möglichst symmetrisch zu halten, erfolgte die Messung von unterhalb des Kissens (Bild 3.32 rechts).

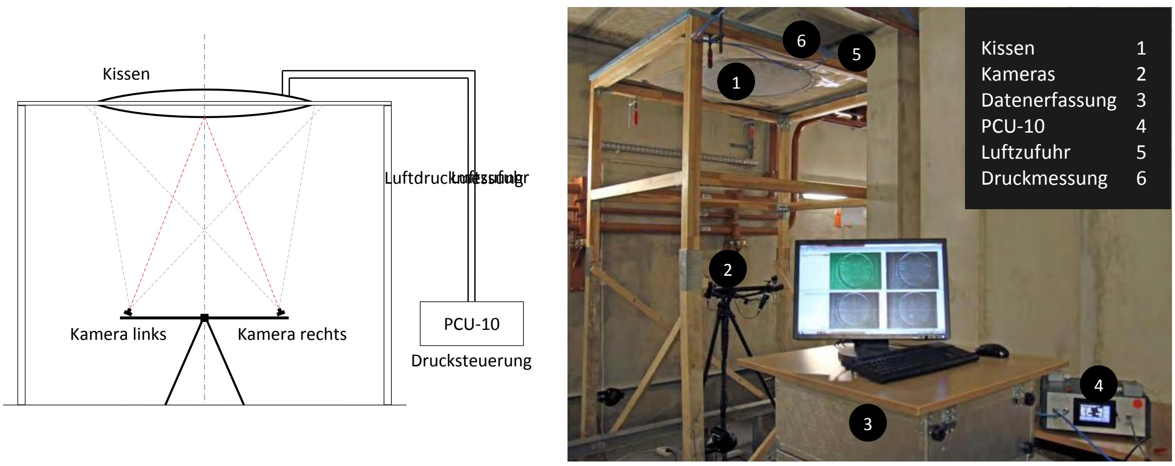
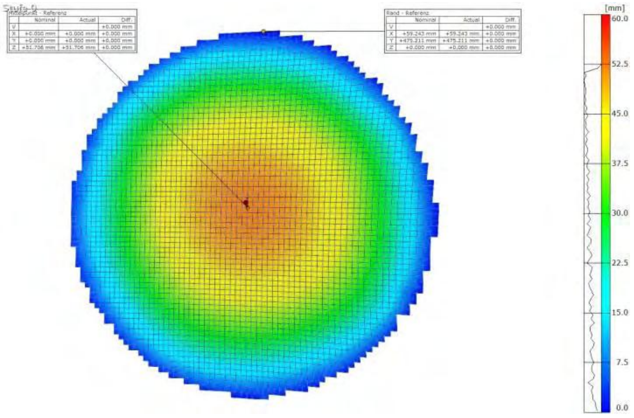


Bild 3.32: Versuchsaufbau mit ARAMIS 4M, Kissen, Fluss- und Drucksteuerung (PCU-10) schematisch und bildlich

Fotooptische Messmethoden brauchen gleichbleibende Lichtverhältnisse, da die Belichtungszeit der Kameras nur initial einmalig eingestellt werden kann. Für eine Langzeitmessung sind Tag-/Nachwechsel nicht tragbar, daher erfolgte der Versuch unter Ausschluss von Tageslicht. Über die künstlichen Lichtverhältnisse konnte eine zeitlich annähert gleichmäßige Ausleuchtung gewährleistet werden. In Bild 3.32 ist der schematische und realisierte Versuchsaufbau dargestellt. Die Kontrolle der Luftzufuhr und die Messung des Innendrucks wurden über ein kombiniertes druck- und flussmessendes Gerät der Firma HTK realisiert.

Bild 3.33: PCU-10 kombiniertes Druck-Fluss-Messgerät für Drücke von 0-500mbar der Firma HTK

Mit diesem Gerät lassen sich sowohl Sollwerte für den Gasfluss als auch für den Gasdruck vorgeben, das dann vom PCU-10 durch den jeweils anderen Wert automatisch geregelt wird (Bild 3.32 Nr. 4). Das Kissen wurde mit einem konstanten Innendruck p_i von 10 mbar (1 kN/m^2) vorbelastet. Unter dieser Belastung stellte sich das in Bild 3.34 darstellte Grundsystem ein. Der gemessene initiale Stich f_i, der sich aus dem gewählten Zuschnitt und die durch den initialen Innendruck hervorgerufenen elastischen Dehnungen ergibt, beträgt ca. 61,7 mm. Daraus lassen sich die Spannungen im Kissen rechnerisch ermitteln[71].



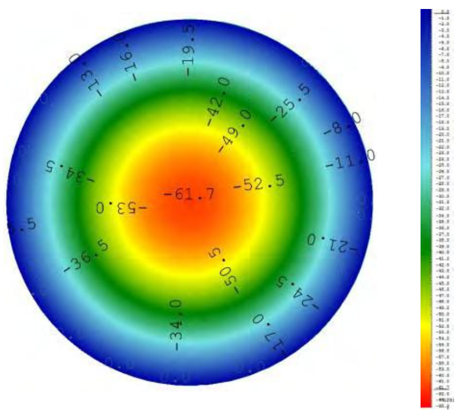


Bild 3.34: Darstellung der initialen z-Koordinaten vermessen mit Aramis 4M System

Bild 3.35: Numerisches Höhenlinienmodell für initiale homogene Spannungsverteilung σ_i von 5,18 N/mm^2

Für die Dauer des Versuches, letztendlich konnte über einen Zeitraum von 1290 Stunden aufgezeichnet werden, wurde ein Aufnahmeintervall von einer Stunde gewählt. In Bild 3.36 sind der Ausgangszustand (0 h) und der Endzustand (1290 h) dargestellt. Insgesamt erfährt das Kissen am Mittelpunkt in diesem Zeitraum eine Verschiebung aufgrund der plastischen Verformung von ca. 4,55 mm.

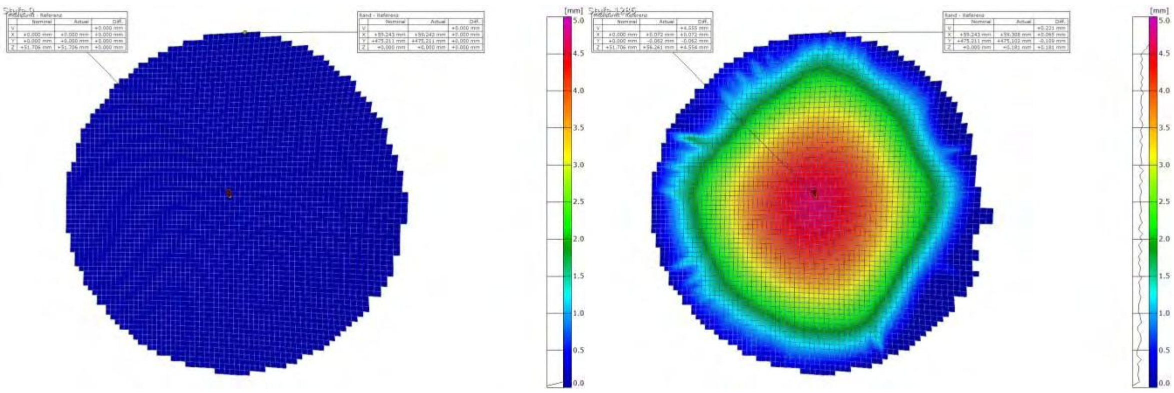


Bild 3.36: Darstellung der Verschiebung in mm der z-Richtung für den Ausgangs- und Endzustand

[71] Es wird von einem homogenen initialen Spannungszustand ausgegangen.

Die Verschiebung des Mittelpunktes über den Zeitraum von 1290 Stunden ist in Bild 3.37 dargestellt. Man erkennt die minimalen Verschiebungen in x- und y- Richtung und die auf dem Fließen der Folie begründete Zunahme in z-Richtung. Trotz des sehr geringen Spannungsniveaus σ_i von 5,18 N/mm^2 (Bild 3.39 links) in der Folie zeigt sich eine stetige Zunahme des Stiches im Kissen, die im Beobachtungszeitraum auch keine erkennbare Konvergenz zeigt.

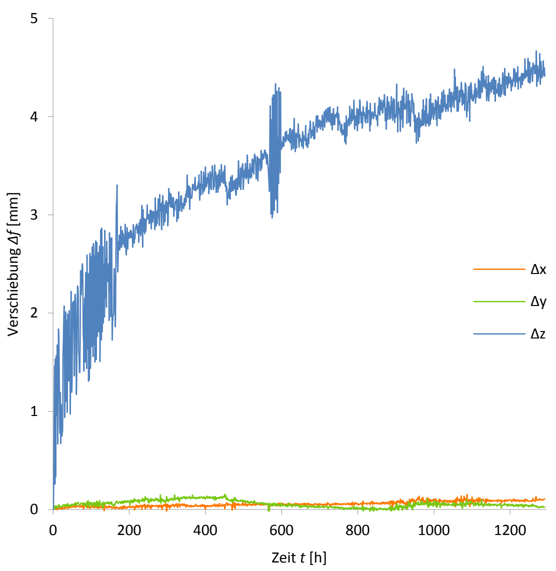


Bild 3.37: Messwerte der Verschiebung Δf des Mittelpunktes in x-, y- und z-Richtung über den Zeitraum von 1290 Stunden

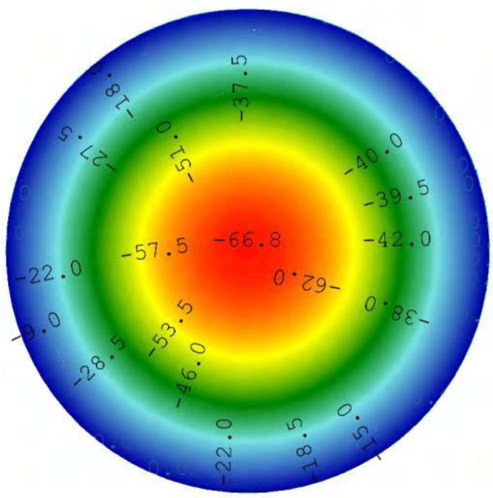


Bild 3.38: Numerische Simulation der Verschiebung Δf als Vergleich zu Bild 3.36 rechts

Mit einer numerischen Vergleichsrechnung mit dem Finite Element Programm Sofistik konnte, unter Verwendung der Kriechdehnungswerte $\varepsilon(t)$ aus Tabelle 3.6 (5,18 N/mm^2 ~ 0,432 % = 4,32 ‰[72]) annähernd die gleiche Stichänderung Δf im Kissen ermittelt werden. Dazu musste die elastische Dehnung ε_0 aus dem Wert herausgerechnet werden. Die elastischen Dehnungen ε_0 für eine biaxiale Beanspruchung lassen sich über die in [Wagner, Karwath und Kröplin 2007] angegebenen Formeln (3–8) und (3–9) bestimmen.

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{22} \tag{3–8}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} \tag{3–9}$$

Für das gegebene Spannungsniveau σ_{11}/σ_{22} von 5,18/5,18 N/mm^2, einem aus diesem Spannungsniveau resultierenden E-Modul E_{11}/E_{22} (Bild 3.20) von 1200/1200 N/mm^2 und einer Querdehnzahl ν_{12}/ν_{21} von 0,45/0,45 ergeben sich die Dehnungen $\varepsilon_{11}/\varepsilon_{22}$ zu 2,37/2,37 ‰. Aus der Differenz von Gesamtdehnung $\varepsilon(t)$ von 4,32 ‰ und elastischer Dehnung ε_0 von 2,37 ‰ ergibt sich eine reine Kriechdehnung ε_K von 1,95 ‰.

Wendet man diese Dehnung auf das numerische Grundmodell (Bild 3.35) an, folgt das in Bild 3.38 dargestellte Verschiebungsbild. Numerisch ergibt sich eine Stichänderung Δf von initial 61,7 mm (Bild 3.35) auf 66,8 mm (Bild 3.38). Dies entspricht einer Änderung von 5,08 mm. Die in Tabelle 3.6 zusammengestellten Kriechdehnungen für unterschiedliche Spannungsverhältnisse gelten für eine Messdauer von 1000 Stunden. Betrachtet man die in Bild 3.37 dargestellte Messkurve, ergibt

---

72 Dieser Wert wurde auf Basis der Messungen von [Winkler 2009] und [Saxe, Zur Berechnung und Bemessung von ETFE-Folientragwerken 2012] durch doppelte Interpolation gewonnen.

sich für 1000 Stunden[73] eine Stichänderung Δf von 4,08 mm. Die Abweichung zwischen der numerischen und gemessenen Stichänderung beträgt 1,00 mm, was einem Fehler von ca. 20,0 % entspricht. Dieser noch tolerierbare Fehler lässt vermuten, dass die inter- und extrapolierten Gesamtkriechdehnungen $\varepsilon(t)$ auf Basis von [Winkler 2009] und [Saxe 2012] als Grundlage einer numerischen Simulation verwendet werden können.

Am gleichen numerischen Modell konnten zudem die Veränderungen der Spannungsauslastung simuliert werden. Das initiale Spannungsniveau des Kissens wurde über den gesetzten Innendruck p_i von 1,0 kN/m^2 (10 mbar) und den gemessenen initialen Stich f_0 des Kissens von 61,7 mm eingestellt. Dabei ergab sich für das Kissen eine gleichmäßige Spannung σ_i von 5,18 N/mm^2 (Bild 3.39 links). Das Spannungsbild (Bild 3.39 rechts), das sich aus den plastischen Verformungen ergibt, zeigt die Behinderung der plastischen Dehnung im Randbereich und die daraus folgende Spannungsreduktion. Analog zu Bild 3.36 rechts lassen sich Bereiche ausmachen, die die Faltenbildung in der Folie aufgrund der plastischen Verformung erkennen lässt. Im Zentrum des Kissens, wo die Randstörung keinen Einfluss mehr hat, bleibt das Spannungsniveau nahezu unverändert.

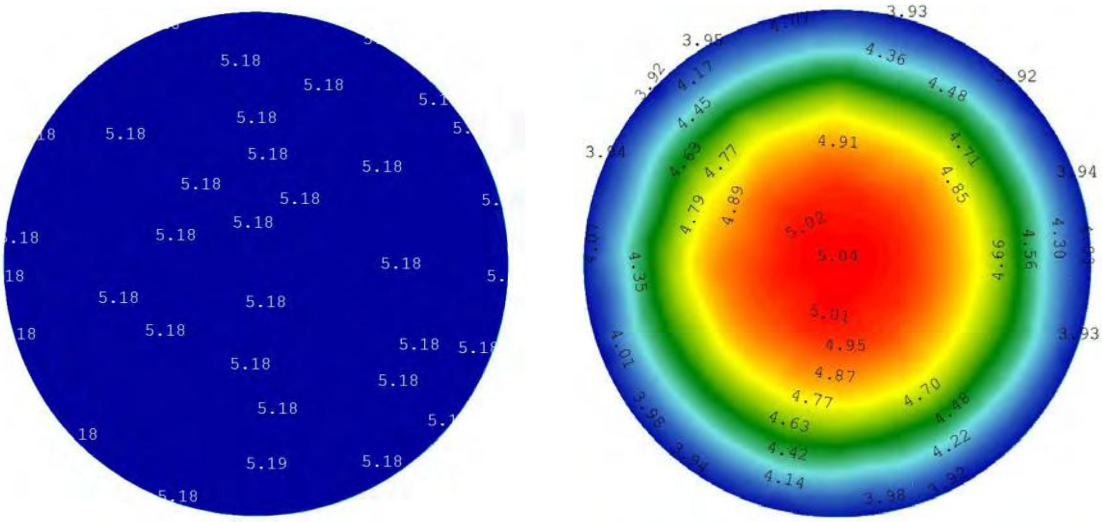


Bild 3.39: Numerisch simulierte Vergleichsspannungen des initialen und plastisch kriechverformten Kissens

Ein Vergleich der Farbverläufe in Bild 3.36 rechts und Bild 3.39 rechts auch unter dem Wissen, dass zum einen Verschiebungen und zum anderen Spannungen abgebildet sind, lassen die langsam eintretende Faltenbildung durch die nicht membrangerechte feste Klemmung erkennen.

Zusammenfassung

ETFE zeigt ein ausgeprägtes Fließverhalten, das in die Bemessung der Tragwerke mit einfließen sollte. Diesem wird aktuell durch eine Begrenzung der Spannungen unter Gebrauchslasten Rechnung getragen, was allerdings nicht ausreichend ist. Für pneumatisch gestützte ETFE-Folien stellt das Fließen lediglich ein Gebrauchstauglichkeitsproblem dar, da die plastisch verformte Hülle nur einen größeren Stich einnimmt und weiterhin von der anliegenden Druckdifferenz gestützt wird. Allerdings können die plastischen Verformungen so groß werden, dass auch die Tragfähigkeit beeinträchtigt werden kann. Dies kann am Beispiel des in Holzkirchen befindlichen Fluglabors der Fraunhofer Gesellschaft gezeigt werden. Das Dach ist aus gekrümmten Leimbindern mit dreilagigen ETFE Kissen gefertigt. Die plastischen Verformungen der Kissen sind mittlerweile so groß, dass sie die aussteifenden Stahlrohre und tragenden Holzstützen berühren.

[73] Aufgrund des starken Flatterns der Messwerte, wurde ein Mittelwert aus 11 Werten bei 1000 Stunden ± 5 Stunden gebildet.

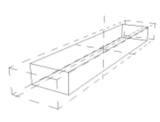
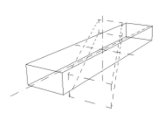
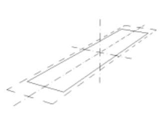
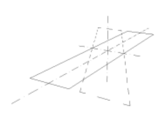
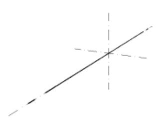
Bild 3.40: SCENE Fluglabor der Fraunhofer Gesellschaft in Holzkirchen mit dreilagigen Folienkissen

Mechanisch gespannte Folien hingegen verlieren mit der Zeit ihre Spannkraft, was zu einem Tragfähigkeitsproblem führt. Die Höhe der initial eingeprägten Vorspannung wurde so gewählt, dass es durch die äußeren Lasten zu keinem Druckausfall der Folien kommt. Fällt das Spannungsniveaus durch die Relaxation der Folie, kann dies nicht mehr gewährleistet sein. Als Grenze für die maximal zulässige dauerhafte Spannung in der Folie konnte, durch mehrere Versuche und Quellen aus der Literatur bestätigt, 7 N/mm^2 gelten. Die inneren Bindungskräfte scheinen diesem Spannungsniveau dauerhaft Stand zu halten.

3.2 Materialbehaftete Transformation – Betrachtungen zum Baustein Rand

Das Kapitel 2 „Flexibilität“ dieser Arbeit stellt die Grundlagen zur Beschreibung der regel- bzw. steuerbaren Transformationen zusammen. Tabelle 2.7 zeigt allgemein die sich daraus ergebenen Transformationen. Diese wurden zunächst rein mathematisch materialunabhängig betrachtet. Bereits eingegangen wurde auf die Aufteilung der Transformation in Bewegung und Deformation. Die Bewegung wurde aus der Kinetik der starren Körper entwickelt und betrachtet per Definition keine inneren Reaktionen. Anders gestaltet sich dies bei den Deformationen. Hier werden die inneren Reaktionen über die Verzerrungen beschrieben. Führt man jetzt Material und Transformationen zusammen, müssen allein die Grenzen der Materialien für die verzerrungsbehafteten Transformationen ermittelt werden.

Tabelle 3.7: Verzerrungsbehaftete Transformationen für Objekte des $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ im $\mathbb{R}^3$

	Transformation	
	verzerrungsbehaftet	
	Skalieren	Scheren
$\mathbb{R}^3$		
$\mathbb{R}^3(f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$		
$\mathbb{R}^3(f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3)$		

Die verzerrungsbehafteten Transformationen sind nochmals in Tabelle 3.7 dargestellt und werden in dieser Arbeit auf den für pneumatische Tragwerke notwendigen Rand angewendet. Somit gilt es, die schon in Kapitel 2 aufgestellten Zusammenhänge zwischen Verformbarkeit und Geometrie um die Materialeigenschaften zu erweitern. Dazu wird das gleiche Grundsystem wie in Kapitel 2 verwendet, der einfach unbestimmt gelagerte Balken.

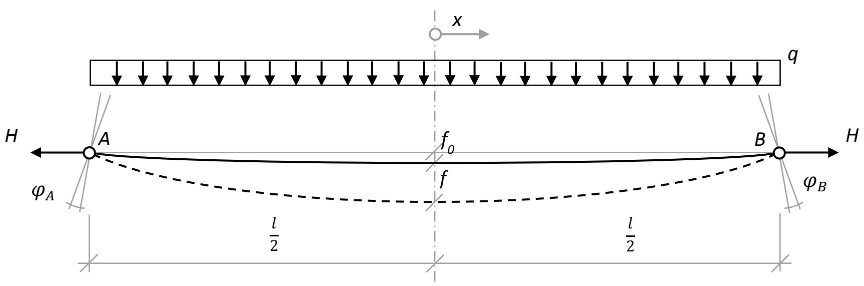


Bild 3.41: Grundsystem der Verformungsbetrachtung am flachen biegesteifen Seil [Bauer 1972]

Nimmt man die aus dem analytischen Ansatz entwickelte Lösung für die Momente M_0 Gleichung (2–41) und kombiniert diese mit einem Spannungsnachweis (3–10) über das ermittelte Moment M_0 und die wirkende Horizontalkraft H, kann eine Aussage über die entstehenden Spannungen in Stabmitte getroffen werden.

$$\sigma_{1,2} = \frac{H}{A} \mp \frac{M_0}{W} \tag{3–10}$$

In Bild 3.42 sind die Spannungslinien für verschiedene E-Moduln E[74] und zwei Stützweiten l von 1 und 10 m dargestellt. Die Diagramme sind in Anlehnung an Bild 2.25 mit den Werten aus Tabelle 2.6 erzeugt worden. Wiederum lassen sich Definitions- und Wertebereich so einstellen, dass die Funktionsverläufe annähernd bildlich identisch ausfallen.

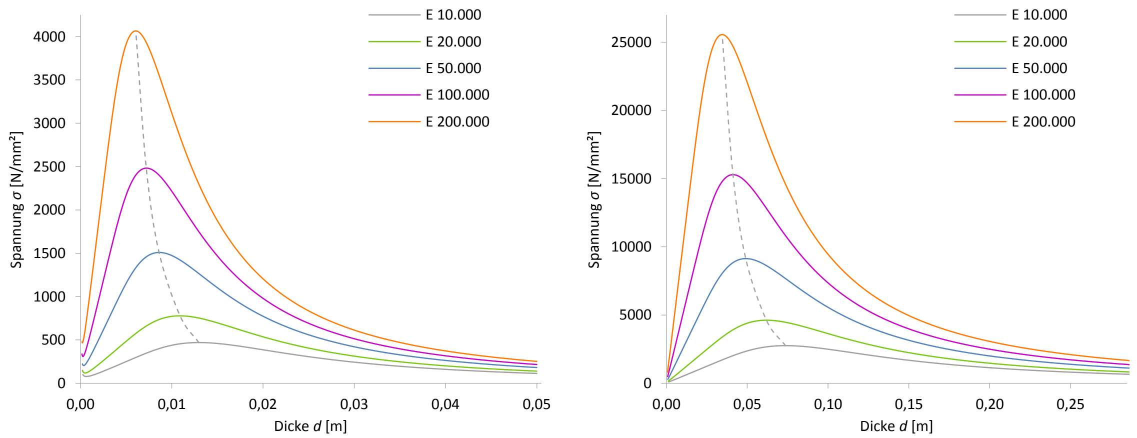


Bild 3.42: Spannung σ in Stabmitte für Systemlängen l von 1 und 10 m in Abhängigkeit von der Stabdicke d für unterschiedliche E-Moduln E von 10.000 bis 200.000 N/mm² ohne Berücksichtigung des Eigengewichts unter einer konstanten Streckenlast q von 1 kN/m

Zu erkennen ist die sich ausprägende Spannungsspitze, die durch die graugestrichelte Linie in den Diagrammen gekennzeichnet ist und deren absolutes Niveau über die Belastung q gesteuert werden kann. Solch ein System lässt sich demnach sowohl links als auch rechts von der Spannungsspitze einstellen. Dabei ergeben sich links die Lösungen mit annähernd reinem biegefreiem Lastabtrag über Normalkräfte und rechts der Bereich mit kombiniertem Normal- und Biegetragverhalten. Der annähernd biegefreie Lastabtrag auf der linken Seite beruht dabei allein auf der geringen Materialdicke d.

Betrachtet man nun gleichzeitig das Verformungsverhalten dieses Systems und verwendet wiederum den analytischen Ansatz für das flache biegesteife Seil über Gleichung (3–11), erhält man die in Bild 3.43 dargestellten Funktionsverläufe.

$$y_0 = -\frac{\left(\frac{ql}{2H} - \frac{4f_0}{l}\right)}{\sqrt{\frac{H}{EI}} \cdot sinh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}\right)}\left[cosh\left(\sqrt{\frac{H}{EI}}\frac{l}{2}\right) - 1\right] + \frac{ql^2}{8H} \tag{3–11}$$

Für die Verwendung von Gleichung (3–11) müssen zunächst die geometrisch nicht-linear mit einander verbundenen Werte für die Horizontalkraft H und den Stich f bestimmt werden. Dies geschieht wieder über eine Iteration mit den Gleichungen (2–42)-(2–44). Mit den ermittelten Werten kann dann die Stichänderung Δf mit Biegeanteil analytisch bestimmt werden.

[74] Die Werte für die E-Moduln E wurden denen der Betrachtung desselben Systems über das Potential angepasst.

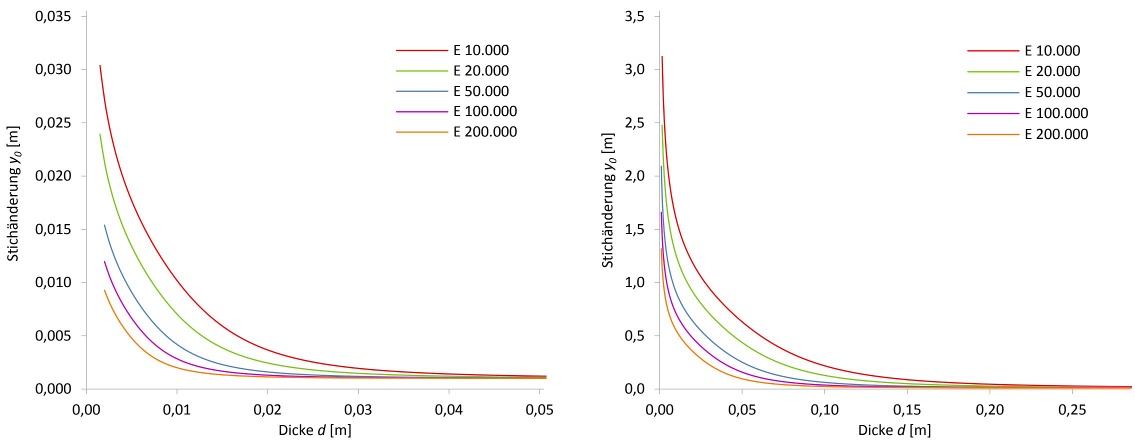


Bild 3.43: Stichänderung Δf in Stabmitte für Systemlängen l von 1 und 10 m in Abhängigkeit von der Stabdicke d für E-Moduln E von 10.000 bis 200.000 N/mm^2 ohne Berücksichtigung des Eigengewichts unter einer konstanten Streckenlast q von 1 kN/m

Passt man den Definitionsbereich den Diagrammen aus Bild 3.42 an, ergeben sich die oben dargestellten Funktionsverläufe. Wie zu erwarten, ergeben sich für kleine E-Moduln E größere Verformungen. Der Einfluss der Dicke d nimmt mit größer werdenden Werten ab.

Mit einer Betrachtung der im Bauwesen üblicherweise eingesetzten Materialien lassen sich die Grenzen der Verformbarkeit für das im Bild 3.41 dargestellte System aufzeigen. Dazu werden allein die Zugfestigkeiten f_k, als maximal zulässige Spannung, und die E-Moduln E in Tabelle 3.8 aufgelistet.

Tabelle 3.8: Zugfestigkeit f_k und E-Moduln E üblicher Materialien im Bauwesen

Material	Bezeichnung	Zugfestigkeit f_k	E-Modul E	f_k/E
		[N/mm^2]	[N/mm^2]	[10^{-4}]
ETFE		60-80	800-1.000	600-800
Beton	C 40/50	3,5	35.000	1,0
Holz	C 24	8,62	11.000	7,8
Aluminium	Al 99,8 (A)	60	70.000	8,6
	AlZn8MgCu	620	70.000	88,6
Stahl	S 235	235	210.000	11,2
	S 460	460	210.000	21,9
	S 960	960	210.000	45,7
GFK		240	44.500	53,9
CFK	HT	3.400	156.000	217,9
	UMS	2.400	700.000	34,3

Die letzte Spalte der Tabelle 3.8 zeigt den Quotienten aus Zugfestigkeit f_k und E-Modul E. Das dimensionslose Verhältnis kann als ein Index der „Verformungsfreudigkeit“ bzw. als Potential der Verformbarkeit eines Materials verstanden werden. Je größer dieser Wert, desto größer ist die mögliche relative elastische Verformbarkeit. Kunststoffe zeigen für dieses Verhältnis herausragende Werte, allerdings sind die absoluten Werte für die Zugfestigkeit f_k und den E-Modul E von bescheidenem Niveau. Die durch den Lastabtrag provozierten inneren Verzerrungen könnten aufgrund der geringen Spannungsaufnahme nur über eine adäquate Querschnittsfläche aufgenommen werden, die hinsichtlich der Dicke d wiederum kontraproduktiv im Sinne einfacher Verformbarkeit wäre.

Für reale Tragwerke ergeben sich gute Werte bei hochwertigen Stählen und den faserverstärkten Werkstoffen. Für biegeweiche Tragelemente sind solche Materialien daher besonders geeignet. In Bild 3.44 sind die Biegeformen von 10 m langen Stäben mit einer Dicke d von 25 mm, in

Anlehnung an Abschnitt 2.3.3 und Bild 2.22, dargestellt. Zum einen wurde bei allen Stäben das rechte Auflager so lange bewegt, bis eine Spannungsausnutzung von 100 % in den Stäben erreicht wurde. Zum anderen erfolgte eine Belastung mit einer gleichmäßigen Streckenlast bis ebenfalls eine 100 %ige Auslastung des Querschnitts erreicht wurde. Beide Lastfälle wurden wieder am in Bild 3.41 dargestellten Grundsystem durchgeführt, wobei für die Streckenlast ein Auflager in Stabachse verschieblich gehalten wurde.

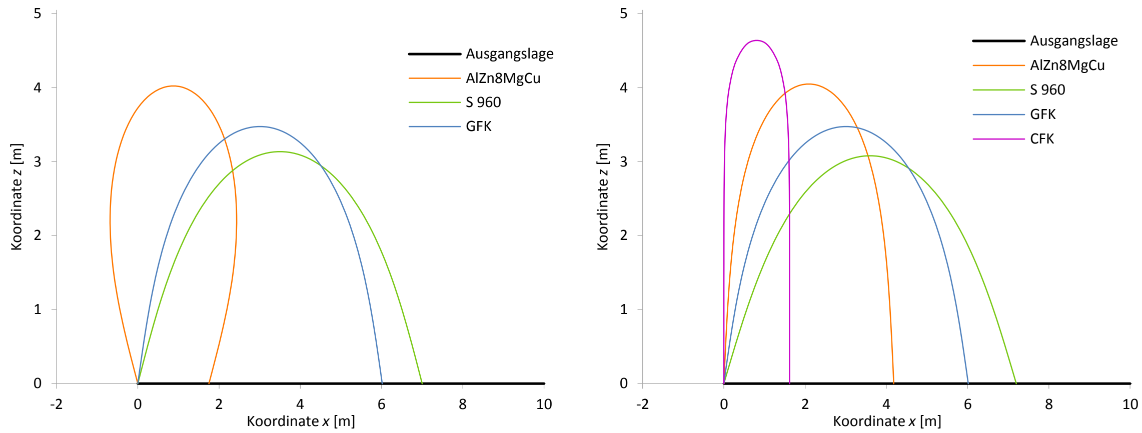


Bild 3.44: Numerisch ermittelte Biegelinien 10 m langer und 25 mm dicker Stäbe aus 4 verschiedenen Materialien (Tabelle 3.8 orange markierte Materialien) bei 100 %iger Spannungsausnutzung unter Lastfall: a) Auflagerverschiebung[75], b) Streckenlast

Gut zu erkennen ist, wie sich der Quotient aus Zugfestigkeiten f_k und E-Modul E in den Biegelinien widerspiegelt. Je höher der Wert des Quotienten, desto weiter lassen sich die Stäbe verbiegen (Bild 3.41 links). Für Streckenlasten lassen sich dabei natürlich nur Biegeformen erzielen, bei denen die Auflager der Stäbe keine Überkreuzung beschreiben. Für den Lastfall Auflagerverschiebung ist dies zumindest für das Material CFK HT in dieser geometrischen Zusammensetzung möglich, konnte allerdings numerisch nicht simuliert werden.

3.3 Zusammenfassung

Dieses Kapitel stellt den aktuellen Wissensstand zum Material ETFE zusammen und erweitert durch eigene Untersuchungen die noch sehr geringen Kenntnisse, die zum Langzeitverhalten des Materials existieren. Die für diese Arbeit im Weiteren notwendigen Materialkennwerte konnten so zusammengestellt werden. Das theoretisch bekannte Versagensverhalten von ETFE unter großen plastischen Dehnungen konnte durch einen mikroskopisch beobachteten Zugversuch bestätigt werden. Gleiches Versagensverhalten ist auch bei allen Fließprozessen zu beobachteten.

Die im Kapitel 2 „Flexibilität" energetisch und analytisch untersuchten Deformationsgrenzen von Festkörpern wurden hinsichtlich der Materialeigenschaften erweitert. Dieses Wissen über die geometrisch bedingten Grenzen elastischer Deformation wird im Zuge dieser Arbeit auf den für pneumatische Gebilde notwendigen Rand angewendet.

[75] Für CFK HT konnte keine numerische Simulation erstellt werden, da es hierbei zur einer Überkreuzung der Lager kommen würde und das FEM Programm Sofistik dies nicht erlaubt.

4 Folienkissen

Folienkissen sind pneumatische gefüllte Tragstrukturen, die schon seit Jahrhunderten technische Anwendungen finden. Dieses Kapitel zeigt zunächst die natürlichen Vorbilder und leitet dann auf technische Systeme über. Danach werden zunächst die Bausteine pneumatischer Gebilde beleuchtet, insbesondere im Hinblick auf die zuvor ausgearbeiteten Transformationsmöglichkeiten und deren Steuerbarkeit, um im weiteren Verlauf wieder als Einheit bezüglich des im Bauwesen wichtigen Lastabtrags untersucht zu werden.

4.1 Prinzip Pneu – Natur

„Überdruck“ ist eines der grundlegenden Prinzipien in der belebten Natur. Alle belebten Zellen werden nach diesem Prinzip stabilisiert. Dabei wird eine formbare, biegeweiche aber zugfeste Hülle durch eine Druckdifferenz in Form gebracht und gehalten. Die Druckdifferenz kann durch ein Gas, eine Flüssigkeit oder eine granulatartige Füllung erfolgen, ist aber in der belebten Natur meist durch eine Flüssigkeit gegeben.

Bild 4.1: Natürliche Vorbilder: Dinoflagellaten; Zieralge Micrasterias rotata; Baby 4. Monat in Gebärmutter

Ein Druckunterschied auf eine einzellig geschlossene dehnsteifigkeitskonstante biegeweiche Membran lässt eine Oberfläche konstanter Krümmu ng entstehen, was geometrisch nur zu einer Kugel führen kann (Bild 4.2 links). Treffen zwei oder mehrere solcher Kugeln aufeinander, egalisiert sich der Druckunterschied an den Trennwänden und die jeweilige Krümmung geht in diesen Bereichen verloren (Bild 4.2 rechts).

Bild 4.2: Einzelliges und mehrzelliges Seifenhautmodell

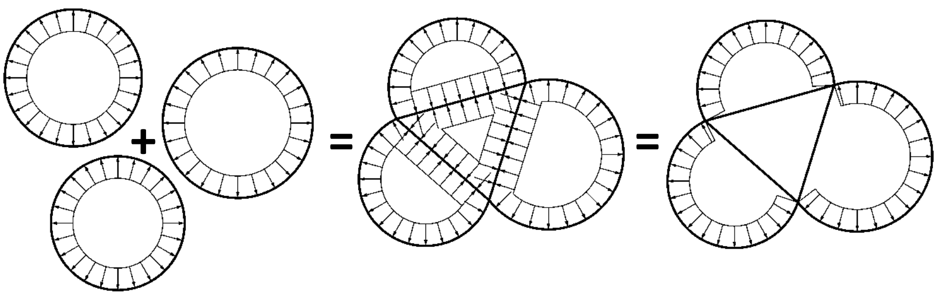


Bild 4.3: Druckverteilung für einzellige und mehrzellige Gebilde

Die zuvor angesprochenen belebten Zellen erfahren natürlich die gleiche Art der Verformung bei gegenseitiger Verbindung. Hier ergibt sich zusätzlich ein Zusammenspiel aus unterschiedlicher Größe, wechselndem Innendruck und zwar meist materialkonstantem, aber dickenvariiertem Material. Dies führt zu sehr unterschiedlichen Formen der einzelnen Zellen, die allerdings bei perfekter Isotropie und konstanter Druckdifferenz ein gleichmäßiges Wabenmuster einnehmen würden.

Bild 4.4: Gewöhnliches Igelhaubenmoos 250-fache Vergrößerung; Schnittes durch Pinienholz per Dunkelfeldmikroskopie

Das pneumatische Prinzip wird in der Natur aber nicht nur für die stationäre Stabilisierung von Zellen verwendet, sondern kann gleichfalls die Grundlage einer Bewegung sein. Das Prinzip einer unter Überdruck stehenden Zelle oder eines Zellstranges kann bei knochenlosen Lebewesen beobachtet werden. Beispielsweise besitzen Spinnen für die Bewegung der Beine keine Strecker- sondern lediglich Beugemuskulatur. Die notwendige Gegenkraft für das Strecken der Beine wird über einen in den Beinen erzeugten flüssigkeitsgesteuerten Überdruck bereitgestellt, ähnlich einem Wasserschlauch, der sich streckt, wenn er einen Wasserdruck erfährt [Parry und Brown 1959].

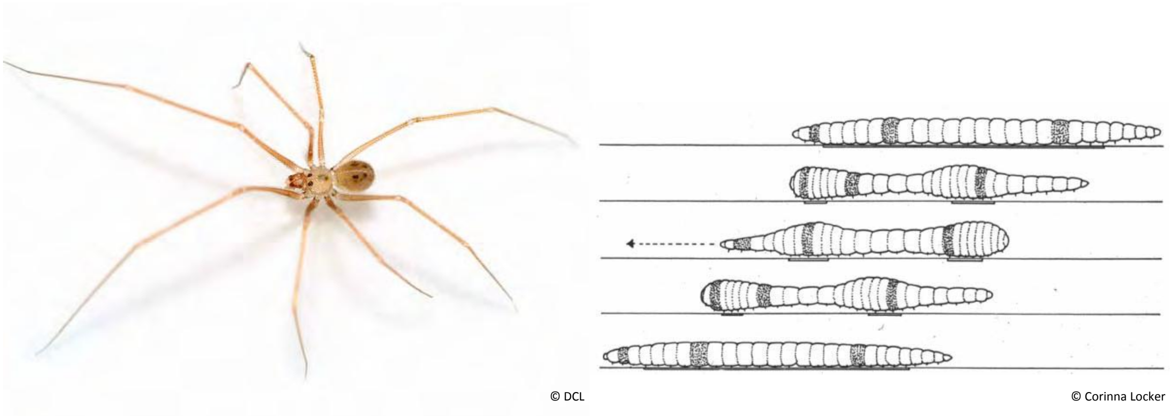


Bild 4.5: Große Zitterspinne; Regenwurm Fortbewegung schematisch

Das gleiche Prinzip des muskulären Entgegenarbeitens gegen einen permanenten Überdruck verwendet der Regenwurm. Er verfügt über eine Längs- und Ringmuskulatur, die im Druck der Leibeshöhlenflüssigkeit ihren Gegenpart findet. Die Vorwärtsbewegung erfolgt dann über ein lokales Zusammenziehen und wieder Strecken der einzelnen Ring- und Längsmuskeln (Bild 4.5 rechts).

4.2 Prinzip Pneu – Technik

Das aus der Natur übernommene Prinzip der Stabilisierung einer biegeweichen, aber zugfesten Membran durch einen auf die Membran wirkenden Druckunterschied wurde schon frühzeitig für technische Anwendungen genutzt.

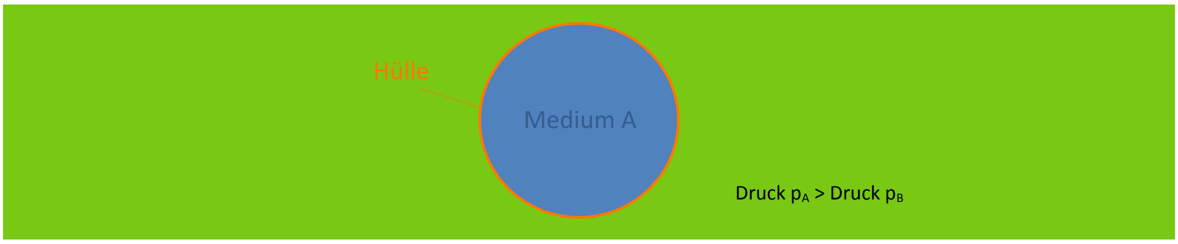


Bild 4.6: Grundprinzip aller pneumatischen Gebilde

Das Prinzip kommt dabei nicht nur für Gebäude zum Einsatz. Eine erste Nutzung waren mit Sicherheit Segel (Bild 4.7), die für ein Beispiel offener pneumatischer Systeme stehen. Der Druckunterschied baut sich an einer in eine konstante Strömung versetzten Membran auf. Die Verringerung der Strömungsgeschwindigkeit durch die Membran lässt einen Druckunterschied entstehen, der als flächige Belastung auf die Membran wirkt, mit der dann Arbeit verrichtet werden kann.

Im Gegensatz hierzu stehen geschlossene Systeme, die über einen abgeschlossenen Raum verfügen, indem die Druckdifferenz gespeichert werden kann (Bild 4.7 – mittig und rechts). Für die im Bauwesen meist gestellte Aufgabe, einen von der Umwelt getrennten Raum zu schaffen, sind geschlossene Systeme hauptsächlich geeignet.

Bild 4.7: Technische und spielerische Nutzung des pneumatischen Prinzips beim: Segelschiff, Luftballonauto und Traglufthalle

Für geschlossene Systeme werden zwei grundlegende Bauweisen unterschieden. Für die Abgrenzung eines Raumes von der jeweiligen Umgebung wird ein Nutzraum geschaffen, der dem Schutz von Menschen, Tieren oder Sachen dient. Pneumatische Tragwerke werden dahingehend unterschieden, ob dieser Nutzraum nun der zur Umwelt notwendigen Druckdifferenz ausgesetzt ist oder nicht (luftgestützt, luftgefüllt - Bild 4.8).

Als weitere Unterscheidung hat sich die Art der Druckdifferenz gegenüber dem atmosphärischen Druck durchgesetzt. Hier werden Über- und Unterdrucksysteme unterschieden, wobei Überdrucksysteme die weit größere Anzahl stellen.

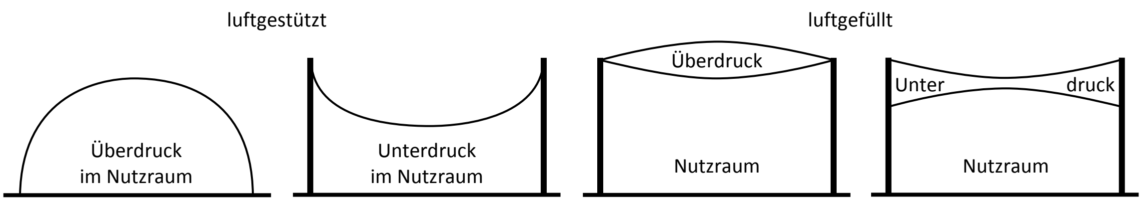


Bild 4.8: Luftgestütztes bzw. luftgefülltes Über- bzw. Unterdrucksystem - schematisch

Welche Formenvielfalt hierbei entstehen kann, zeigt Tabelle 4.1, die [Herzog 1976] entnommen wurde. Es werden offene und geschlossene Objekte, sowohl der Membran selbst als auch des Gebildes als solches, unterschieden. Pneumatische Gebilde können natürlich Objekte erster, zweiter und dritter Dimension beschreiben. Die auf die Membran wirkende Druckdifferenz führt zu einer Krümmung der Membran. Die Arten der Oberflächenkrümmung (Abs. 2.2.2) werden ebenfalls in der Aufstellung von [Herzog 1976] beschrieben. Mathematisch wurde die Krümmung bereits in Abschnitt 2.2.2 vorgestellt. Wie diese gezielt für pneumatische Gebilde eingestellt bzw. variiert werden kann, wird nochmals genauer in Abschnitt 4.3 erläutert. In welcher Weise die grundlegenden Formen aneinandergefügt werden können, stellt [Herzog 1976] in der letzten Zeile rudimentär zusammen.

Tabelle 4.1: Morphologische Klassifikation von pneumatischen Objekten [Herzog 1976]

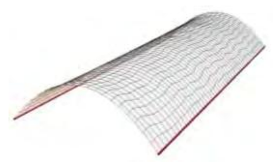
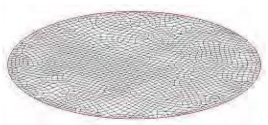
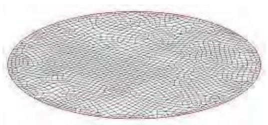
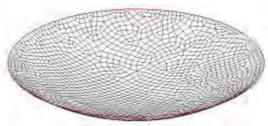
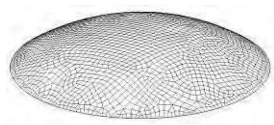
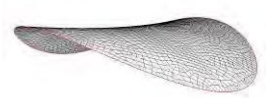
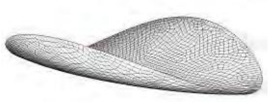
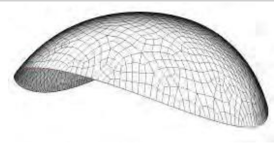
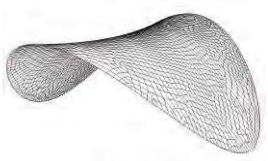
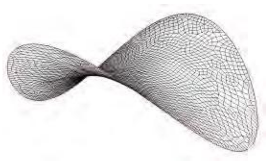
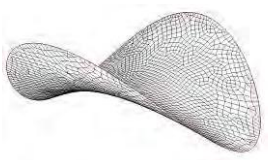
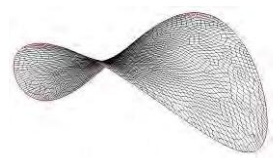
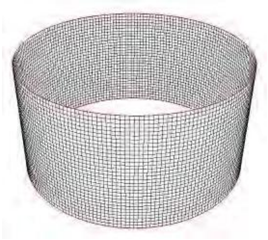
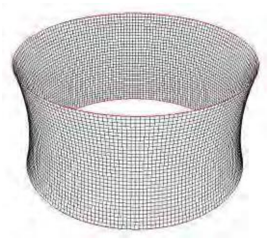
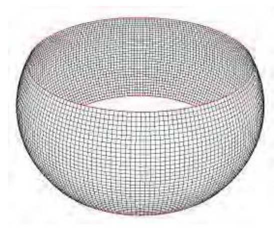
Merkmale	**Alternativen**			**Mögliche Mischformen**			
Art der Membrane, Art des Gebildes 6 Alternativen	offen, offen	geschlossen, geschlossen	offen, geschlossen	offen und geschlossen, geschlossen	offen, offen und geschlossen	offen und geschlossen, offen und geschlossen	
Proportion des Gebildes 7 Alternativen	1 Dimension dominant	2 Dimensionen dominant	3 Dimensionen etwa gleich groß	1 Dimension dominant und 2 Dimensionen dominant	1 Dimension dominant und 3 Dimensionen etwa gleich groß	2 Dimensionen dominant und 3 Dimensionen etwa gleich groß	1 Dimension dominant und 2 Dimensionen dominant und 3 Dimensionen etwa gleich groß
Art der Oberflächenkrümmung 7 Alternativen	einfach gekrümmt	gleichsinnig doppelt gekrümmt	gegensinnig doppelt gekrümmt	einfach gekrümmt und gleichsinnig doppelt gekrümmt	einfach gekrümmt und gegensinnig doppelt gekrümmt	gleichsinnig doppelt gekrümmt und gegensinnig doppelt gekrümmt	einfach gekrümmt und gleichsinnig doppelt gekrümmt und gegensinnig doppelt gekrümmt
Art der Verbindung 7 Alternativen	Keine Verbindung	Addition Gleiche Gebilde	Verschiedene Gebilde	Kombination Gleiche Gebilde	Verschiedene Gebilde	Addition und Kombination Gleiche Gebilde	Verschiedene Gebilde

In Bild 4.1 ist schematisch das Grundprinzip druckdifferenzstabilisierter Gebilde gezeigt. Solch ein Gebilde braucht für sich allein lediglich zwei grundlegende Bausteine. Das sind die Hülle und die durch das Stützmedium bereitgestellte Druckdifferenz. Für die technische Nutzbarkeit ist im Bauwesen noch ein weiterer Baustein erforderlich, der Rand, der den Übergang bzw. die Einbettung solch eines Gebildes in seine Umwelt oder Kontext erlaubt. Der nächste Abschnitt wird sich mit dem Einfluss dieser drei Bausteine auf die Gestalt und deren Flexibilität pneumatischer Gebilde beschäftigen.

4.3 Bausteine pneumatischer Gebilde

Die durch den Druckunterschied gekrümmte Hülle kann unterschiedliche Formen annehmen (2–22)-(2–24). Nicht allein die Druckdifferenz entscheidet über die Art und den Grad der Krümmung der Hülle, sondern ebenfalls der Rand, der den Übergang vom pneumatischen Gebilde zum übrigen Tragwerk bildet. Dieser kann gerade, eben oder gekrümmt sein und schon ohne Druckdifferenz oder Vorspannung eine Initialkrümmungen der Hülle bewirken. In Tabelle 4.2 sind einige im Bauwesen übliche Randausbildungen und daraus sich ergebende Initialkrümmungen abgebildet. Werden solche Gebilde zusätzlich einer Druckdifferenz an der Membran ausgesetzt, ergeben sich die ebenfalls dargestellten Krümmungen.

Tabelle 4.2: Krümmungen der Hülle initial, unter Vorspannung, Unter- bzw. Überdruck bei unterschiedlichen Randausbildungen

Initialkrümmung	**Vorspannung - Minimalfläche**	**Vorspannung + Unterdruck**	**Vorspannung + Überdruck**
doppelter gerader ebener Rand			
 keine	 keine	 parabolisch	 parabolisch
einfacher gekrümmter ebener Rand			
 keine	 keine	 elliptisch	 elliptisch
einfacher gekrümmter schwach unebener Rand			
 einfach	 hyperbolisch	 elliptisch	 elliptisch
einfacher gekrümmter stark unebener Rand			
 einfach	 hyperbolisch	 hyperbolisch	 hyperbolisch
doppelter gekrümmter ebener Rand			
 einfach	 hyperbolisch	 hyperbolisch	 elliptisch

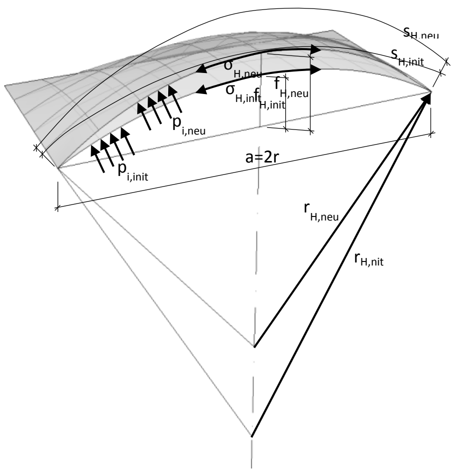
Um das Zusammenspiel der drei Bausteine und deren Einfluss auf die Form des pneumatischen Gebildes zu zeigen, werden in den nächsten Abschnitten zunächst die mechanischen und materiellen Grenzen der einzelnen Bausteine aufgezeigt.

4.3.1 Hülle

Die Hülle eines pneumatischen Gebildes muss zunächst nur die Eigenschaft aufweisen, dicht gegenüber dem Stützmedium zu sein. Die Verformungen der Hülle infolge der Druckdifferenz sind dabei natürlich von der Art des eingesetzten Materials abhängig (Bild 3.6). In Bild 4.9 sind beispielhaft und in Anlehnung an technische Nutzungen eine nicht wahrnehmbare, plastische und elastische Verformung dargestellt. Für die in dieser Arbeit untersuchten wiederholbaren Bewegungen kommen nur Hüllen mit elastischen Verformungen in Frage.

Bild 4.9: Keine Verformung - Gasflasche; plastische Verformung – Versuche [Greiner 1983]; elastische Verformung - Luftballon

Für die sich verformende Hülle stehen der Differenzdruck Δp, im weiteren als Innendruck p_i bezeichnet, der Krümmungsradius r_H, auch über den Stich f_H definierbar, und die Spannung σ_H in der Hülle in nicht-linearem Zusammenhang. Dieser Zusammenhang lässt sich aber beispielsweise unter Berücksichtigung der elastischen und plastischen Dehnungen der Hülle für ein Kugelsegment einfach aufstellen.



$$\sigma_{H,init} = \frac{p_{i,init} \cdot r_{H,init}}{2} \qquad \sigma_{H,neu} = \frac{p_{i,neu} \cdot r_{H,neu}}{2} \tag{4–1}$$

$$p_{i,init} \stackrel{!}{=} p_{i,neu} \tag{4–2}$$

$$\frac{\sigma_{H,init}}{r_{i,init}} = \frac{\sigma_{H,neu}}{r_{i,neu}} \tag{4–3}$$

$$s_{H,init} < s_{H,neu} = s_{H,init} + \varepsilon_{H,el} + \varepsilon_{H,pl} \tag{4–4}$$

$$r_{H,init} > r_{H,neu} \tag{4–5}$$

$$\frac{r^2 + f_{H,init}^2}{2 \cdot f_{H,init}} > \frac{r^2 + f_{H,neu}^2}{2 \cdot f_{H,neu}} \tag{4–6}$$

$$I \quad \sigma_{H,init} > \sigma_{H,neu} \tag{4–7}$$

$$II \quad \kappa_{H,init} < \kappa_{H,neu} \tag{4–8}$$

Bild 4.10: Zusammenhang zwischen Stich f_H, Radius r_H und Spannung σ_H in der Hülle unter konstantem Innendruck p_i für elastische $\varepsilon_{H,el}$ bzw. plastische $\varepsilon_{H,pl}$ Hüllendehnungen bezogen auf den Schnitt in Kissenmitte

Um einen auch unter großen Verformungen noch gültigen Ansatz für die Abbildung des Innendrucks p_i zu ermitteln, werden für das in Bild 4.10 im Schnitt dargestellte quadratische Kissen die Gleichungen für den Innendruck p_i unter Einfluss der Dehnsteifigkeit EA für verschiedene theoretische Ansätze der Lastrichtung des Innendruckes verglichen. Dazu werden die beiden Ansätze, den Innendruck über eine radial ausgerichtete Last bzw. eine global ausgerichtet Gleichlast abzubilden, aufgestellt (Gl. (4–9) und (4–12)). Dies geschieht für eine in der Kissenhülle initial eingeprägte Vorspannung σ_V von 8 N/mm^2 mit Einfluss der gegebenen Dehnsteifigkeit EA. Weiterhin sind für eine bessere Orientierung für das Stich/Spannweitenverhältnis $f_H/a = 0{,}1$ eine numerische Vergleichsrechnung und zusätzlich die einfachere Lösung über die Kesselformel, die die Dehnsteifigkeit nicht berücksichtigt, mit in die Diagramme im Bild 4.11 eingezeichnet. Die Gleichungen sind (4–9) und (4–12) zu entnehmen, wobei H_v die horizontale Haltekraft ist.

Innendruck als Gleichlast

$$p_i = \sqrt{\frac{24 \cdot s_H \cdot \left[H_v{}^3 + H_v{}^2 \cdot EA \cdot \left(1 - \frac{l}{s_H}\right)\right]}{EA \cdot l^3}} \tag{4–9}$$

Innendruck als Radiallast

$$p_i = \frac{2 \cdot arcsin\left(\frac{l}{2r}\right) \cdot r - s_H}{r \cdot s_H} \cdot EA \tag{4–10}$$

mit:

$$r = \frac{f_H}{2} + \frac{l^2}{8f_H} \tag{4–11}$$

$$p_i = \frac{2 \cdot arcsin\left(\frac{4f_H l}{4f_H^2 + l^2}\right) \cdot \left(\frac{f_H}{2} + \frac{l^2}{8f_H}\right) - s_H}{\left(\frac{f_H}{2} + \frac{l^2}{8f_H}\right) \cdot s_H} \cdot EA \tag{4–12}$$

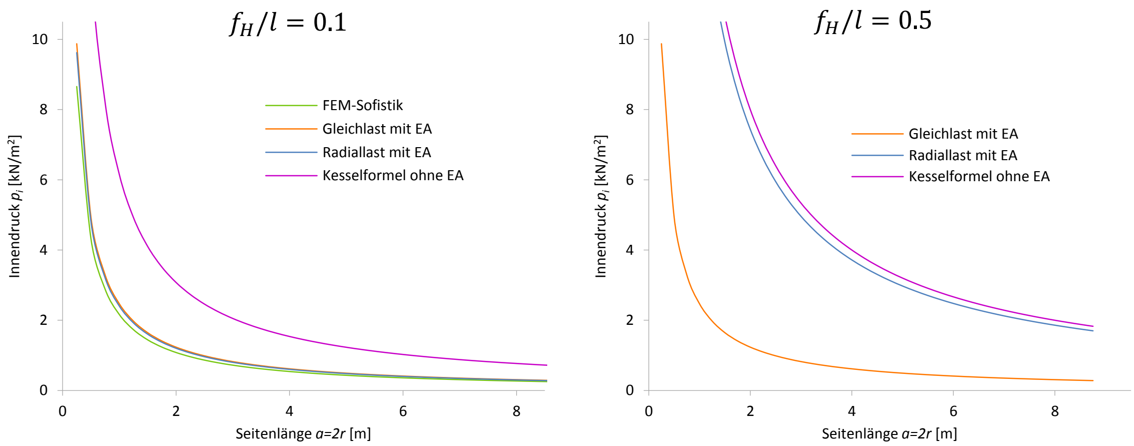


Bild 4.11: Zusammenhang zwischen Größe a und Innendruck p_i bei quadratischen Kissenkonstruktionen für $f_H/l = 0{,}1$ und $f_H/l = 0{,}5$ bei $\sigma_V = 8{,}0\ N/mm^2$ unter theoretischem Ansatz des Innendruckes p_i als Gleich- bzw. Radiallast im Vergleich zur Näherung mit der Kesselformel

Das linke Diagramm in Bild 4.11 zeigt die sehr gute Übereinstimmung beider Ansätze mit der numerischen Lösung bei einem Stich/Spannweitenverhältnis f_H/l von 0,1. Für kleine Stich-/Spannweitenverhältnisse f_H/l ist der Einfluss der Dehnsteifigkeit EA wesentlich größer als bei Verhältnissen f_H/l von beispielsweise 0,5, wie im rechten Diagramm in Bild 4.11 dargestellt. Daher liegt die Näherung mit der Kesselformel bei $f_H/l = 0{,}1$ weit oberhalb der anderen drei Diagrammlinien. Beim Verhältnis f_H/l von 0,5 beschreibt die Hülle in der Kissenmitte einen Halbkreis, was einen Ansatz des Innendruckes p_i über eine Gleichlast nicht mehr erlaubt. Hier liegen die Kesselformel und der radiale Ansatz in einer ähnlichen Größenordnung. Entscheidend für die weiteren Betrachtungen ist, dass die Näherung über die Kesselformel ohne Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit EA für flache Kissen nicht zulässig ist, es dort theoretisch aber keine Rolle spielt, ob der Innendruck p_i als lokal-orthogonal oder global-orthogonal angesetzt wird.

Die Gestalt der Hülle ist nicht nur von der Form des Randes, wie in Tabelle 4.2 gezeigt, und der Höhe des Innendruckes p_i abhängig, sondern kann zusätzlich über den gewählten Zuschnitt, also die Festlegung der Materialverteilung im gegebenen Rand beeinflusst werden. Durch die Wahl des Zuschnitts kommt es zur Festlegung der jeweiligen Krümmung und somit im Zusammenspiel mit der vorhandenen Druckdifferenz zur Ausbildung der lokalen Steifigkeiten.

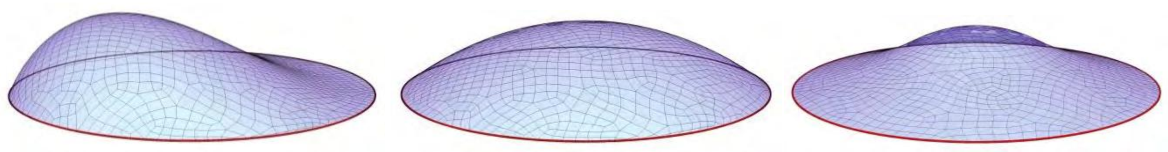


Bild 4.12: Unterschiedliche Hüllenform bei gleicher Druckdifferenz und gleicher Randausbildung, aber variierendem Zuschnitt (s. Bild 4.14)

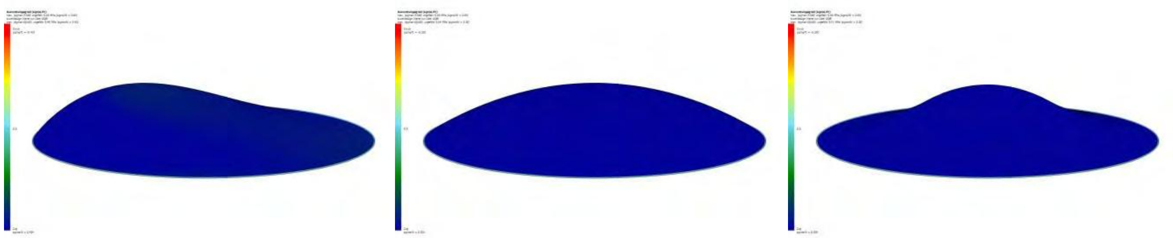


Bild 4.13: Homogene Spannungsbilder der generierten Formen

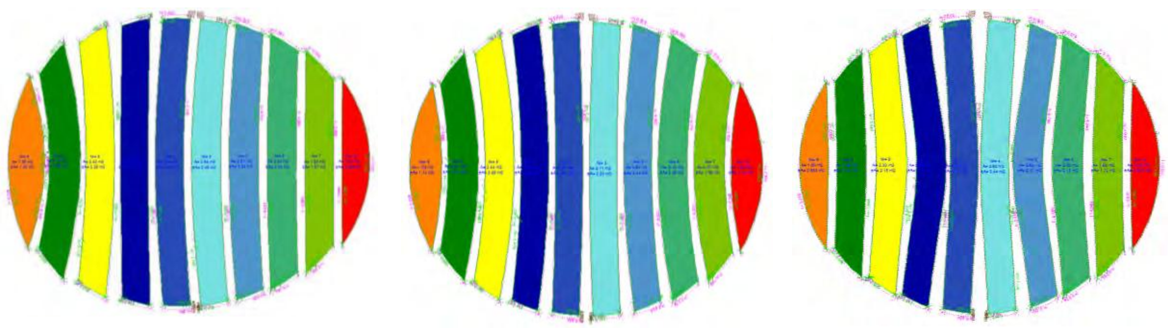


Bild 4.14: Mögliche Zuschnitte für die in Bild 4.12 dargestellten pneumatisch gestützten Hüllen

Alle drei beispielhaften Formen haben ein nahezu homogenes Spannungsbild, variieren aber dennoch in ihrer Form, resultierend allein aus dem initialen Zuschnitt.

Die Gestalt der Hülle kann über eine Vielzahl von Parametern beeinflusst werden und unterliegt nicht nur der gern verwendeten Formfindung[76] über die Begründung einer Minimalfläche, sondern kann bewusst auch über Formgebung[77] definiert werden.

[76] Formfindung: Im Membranbau wird der Begriff der Formfindung meist mit der Seifenhautanalogie verknüpft. Dabei ist die Gestalt der Membran an sich nicht definierbar, kann aber über Randbedingungen beeinflusst werden und sich in diesen dann entwickeln.

[77] Formgebung: Im Zuge eines gestalterischen Prozesses wird dem zu gestaltenden Objekt eine Form verliehen.

4.3.2 Medium

Das Stützmedium hat die alleinige Aufgabe, die Hülle in ihrer Form zu stabilisieren und die durch die äußeren Belastungen hervorgerufenen Verformungen der Hülle mitzugehen. Dies kann mit festen (Granulat), flüssigen oder gasförmigen Materialien erreicht werden. Der Fokus in dieser Arbeit liegt auf gasförmigen Füllungen, insbesondere Luft.

Luft

Luft kann im Sinne der Physik mit den Gesetzen idealer Gase beschrieben werden. Somit gilt die allgemeine Gasgleichung.

$$p \cdot V = m \cdot R_S \cdot T \tag{4–13}$$

Dabei werden die Zustandsgrößen Druck p, Volumen V über die spezifische Gaskonstante R_S mit der Masse m und der Temperatur T verküpft. Die spezifische Gaskonstante R_S ergibt sich aus dem Quotienten der allgemeinen Gaskonstante R_M und der molaren Masse des jeweiligen Gases. Für trockene Luft ergibt sich die spezifische Gaskonstante $R_{S,Luft}$ zu 287,058 J/(kg K).

Für ein abgeschlossenes System kann sich die im Inneren eingeschlossene Gasmasse m nicht ändern. Bringt man alle veränderlichen Größen auf eine Seite, ergibt sich:

$$\frac{p \cdot V}{T} = m \cdot R_S = konstant \tag{4–14}$$

Aus diesem Zusammenhang lassen sich die drei wesentlichen Zustandsänderungen von Systemen ableiten. Hält man eine der drei Zustandsgrößen ebenfalls konstant, ergeben sich isochore[78], isobare[79] und isotherme[80] Zustandsänderungen (Bild 4.15).

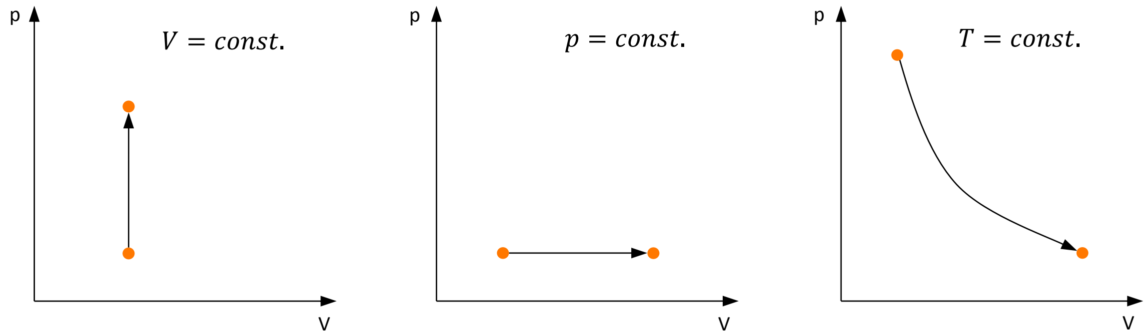


Bild 4.15: isochore, isobare und isotherme Zustandsänderung im p-V-Diagramm

Interessant für das System Pneu hinsichtlich des Lastabtrages sind die isotherme, also temperaturkonstante Betrachtung für kurzzeitige Lasten, und die isobare, also druckkonstante Betrachtung für permanente Lasten. Auf die Zustandsgröße Temperatur T kann nur schwer Einfluss genommen werden. Für die späteren numerischen und physikalischen Untersuchungen von pneumatischen Tragwerken sind in Tabelle 4.3 die wichtigsten Kenndaten des Mediums Luft zusammengetragen.

---

78 isochor [gr. *isōs*: gleich, *chōros*: Raum, Platz] [Duden 2009]

79 isobar [gr. *isōs*: gleich, *báros*: Gewicht] [Duden 2009]

80 isotherm [gr. *isōs*: gleich, *thérmē*: Wärme] [Duden 2009]

Tabelle 4.3: Luft – Materialkennwerte als Grundlage für die numerischen Simulationen bei 20 °C

Kennwert	Luft
Gaskonstante R_S [J/(kg·K)]	287,058
Dichte ρ [g/m^3]	1,293[81]
Molare Masse M [g/mol]	28,949[82]
Wärmeausdehnungskoeffizient γ [K^{-1}]	1/293,15
Isentropenexponent κ [N/mm^2]	1,402
Kompressionsmodul (isotherm) κ_T [Pa]	$1{,}01 \cdot 10^5$
Kompressionsmodul (adiabatisch) κ_S [Pa]	$1{,}42 \cdot 10^5$
Elastizitätsmodul E [kPa]	0,000608
Schubmodul G [kPa]	0,000203
Querkontraktionszahl ν [-]	0,499999

Druckdifferenz

Das Medium Luft wird bei fast allen im Bauwesen realisierten pneumatischen Tragwerken für die Erzeugung der Druckdifferenz verwendet. Dabei wird der notwendige Druckunterschied über Kompressoren geliefert, die mit dem(n) Kissen verbunden ist(sind).

Bild 4.16: Dach der römischen Arena Nîmes mit zugehörigem Druckluftaggregat

Die Kontrolle der Druckdifferenz geschieht dabei permanent, wobei hier schon die Reaktionszeiten und Förderleistungen der Aggregate eine Rolle spielen. Interessant sind die Untersuchungen von [Wagner und Raible 2000], die sich mit den äußeren klimatischen Einflüssen auf pneumatische Tragwerke beschäftigt haben.

In Bild 4.17 sind Aufzeichnungen eines Tages der Umgebungsbedingungen Sonneneinstrahlung, Windgeschwindigkeit, Regenmenge und Umgebungstemperatur sowie des Innendrucks dargestellt. Festgehalten wurden die Folgen eines typischen Mai-Gewitters mit relativ hohen Temperaturen um die Mittagszeit und dem folgenden Gewitter am späten Nachmittag. Interessant an den Messdaten ist die direkte Abhängigkeit zwischen Innendruck und Sonneneinstrahlung sowie die daraus folgende Tatsache, dass der Innendruck genau zu dem Zeitpunkt am geringsten ist, wenn der Regen einsetzt und die Windgeschwindigkeit ihr Maximum erreicht. Die Drucksteuerung konnte nicht auf diesen Druckabfall im notwendigen Maß reagieren. Die Folge ist eine geringe Membranspannung bei den maximalen Lasten.

[81] Normbedingungen

[82] trockene Luft

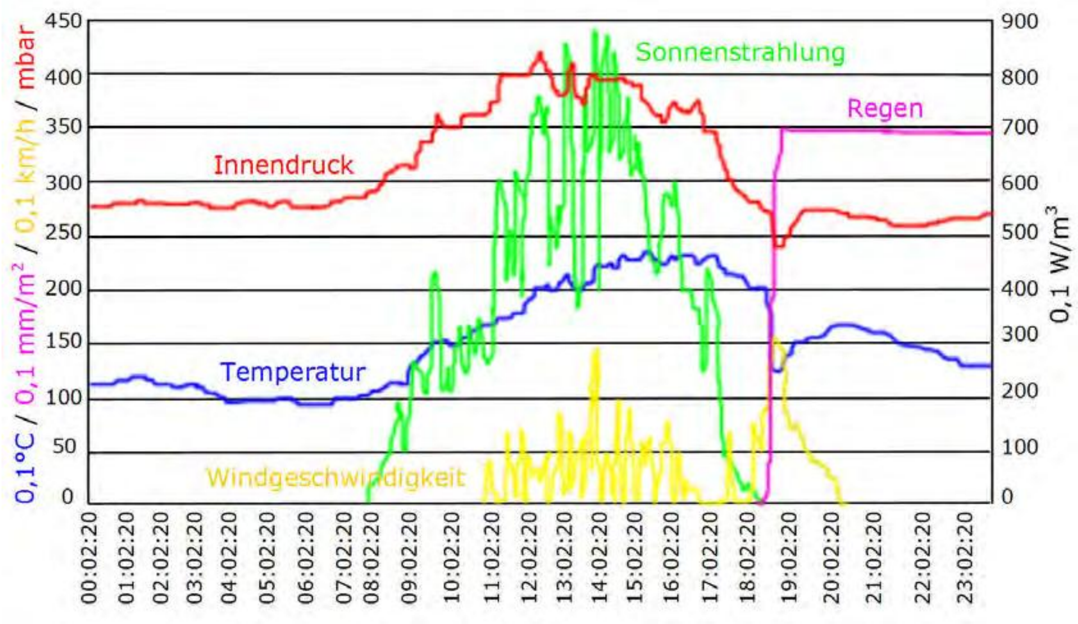


Bild 4-17: Abhängigkeiten der Druckdifferenz eines pneumatischen Tragwerks von den Umgebungsbedingungen [Wagner und Raible 2000]

Ein weiterer Grund für die Notwendigkeit einer permanenten Drucksteuerung ist die Durchlässigkeit der Hülle selbst und die Undichtigkeiten an den Rändern der Hülle.

Die Nutzung dieser permanent notwendigen Drucksteuerung für eine aus dem pneumatischen Tragwerk initiierte Bewegung stellt eine wesentliche Motivation dieser Arbeit dar und wird ab dem Kapitel 5 weiter verfolgt.

4.3.3 Rand

Statisch stellt der Rand einer pneumatischen Konstruktion zum einen die Verbindung zum übrigen Tragwerk dar, zum anderen muss er die Zugkräfte der Hülle aufnehmen können. Der Rand ist dabei ebenfalls formgebend für die Gestalt des pneumatischen Tragwerks, wie in Tabelle 4.2 gezeigt. Technisch ausgeführt wird der Rand über Kederprofile, die im Laufe der Zeit eine weitreichende technische Entwicklung erfahren haben. Wurden in den 70-er Jahren des letzten Jahrhunderts einfachste Alu- und Kunststoffprofile verwendet, geht die Entwicklung über modular aufgebaute Systeme hin zu bauphysikalisch nachhaltigeren Lösungen.

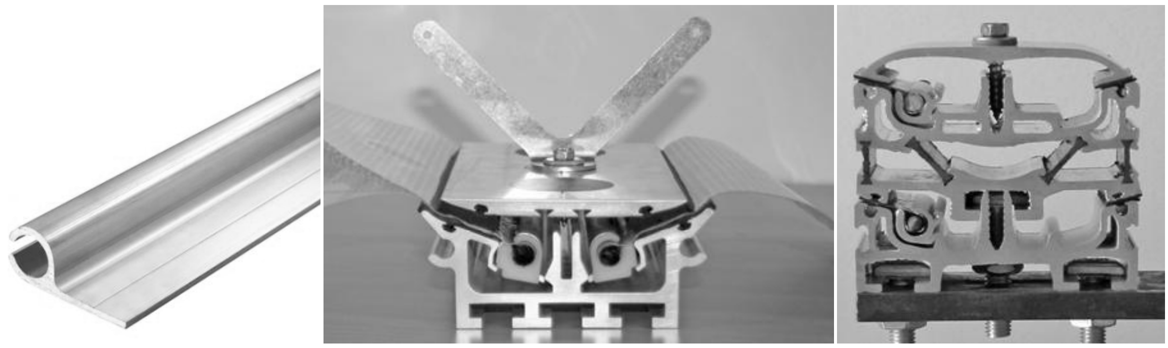


Bild 4-18: Klemmprofile: einfach, modular, modular thermisch entkoppelt

Die Randausführungen sind im Verhältnis zur Steifigkeit der Membran als starr anzusehen. Dies ist für mechanisch gespannte Tragwerke notwendig, muss aber nicht für pneumatisch gespannte Hüllen gelten. Welche Möglichkeit sich hier ergeben, wird mit den Erkenntnissen aus den Abschnitten 2.2, 2.3 und 3.2 in Kapitel 5 weiter ausgearbeitet.

4.3.4 Zusammenfassung

Die Bausteine Hülle, Medium und Rand haben alle gestalterischen und statischen Einfluss auf die Ausführung eines pneumatischen Tragwerks und bedingen einander. Während in der Regel der Rand als annähernd unverformtes Bauteil ausgeführt wird, sollen in dieser Arbeit neue Möglichkeiten vorgestellt werden. Zu zeigen, wie die Steuerung des permanent notwendigen Druckunterschieds nicht nur zur statischen Stabilisierung der Hülle verwendet werden kann, sondern eine mögliche nutzbare Bewegung unter Einbeziehung des Randes erzeugt, ist zentrales Anliegen dieser Arbeit.

4.4 Lastabtrag

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem komplexen Lastabtragsverhalten von Folienkissen. Insbesondere werden die elastischen Kopplungseigenschaften der Luft zwischen den einzelnen Folienlagen sowohl numerisch, analytisch als auch versuchstechnisch untersucht und der gängigen Vorgehensweise der alleinigen Erfassung des Innendrucks p_i über eine lokal orthogonal ausgerichtete Flächenlast gegenübergestellt.

4.4.1 Theorie des Lastabtrags

Pneumatische Tragwerke können nur die Last tragen, die sie als Druckdifferenz vorhalten. Ist die Last größer, „versagt“ die tragende Wirkung der Luft und die Hülle muss die Last allein aufnehmen. Das heißt, dass es nicht sofort zum Totalversagen des Tragwerkes kommt, sondern die Hülle(n) ohne die Luft tragfähig bleiben. Für die Hülle spielt es letztendlich keine Rolle, ob sich die sie belastende Zugkraft aus der Druckdifferenz ergibt oder aus der äußeren Belastung.

Ein ähnliches Tragverhalten zeigt ein Seilbinder. Kommt es zum Verlust der Vorspannung im Spannseil, trägt das Tragseil die Lasten allein und die Verformungen nehmen in Höhe des Verlustes an Steifigkeit zu.

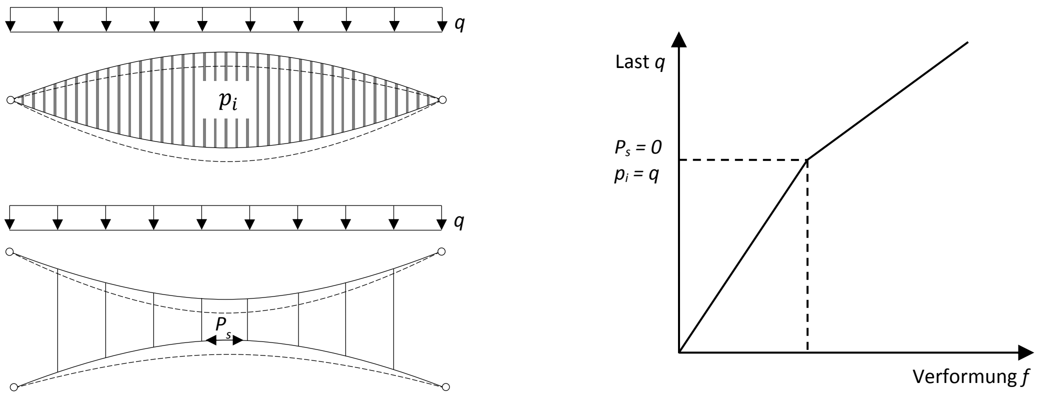


Bild 4.19: Pneu und Seilbinder als Analogie zum Lastabtrag pneumatischer Tragwerke und Last-Verformungs-Kurve vor und nach dem Überschreiten des Innendrucks bzw. dem Verlust der Vorspannung im Spannseil

Die Verbindung des Trag- und des Spannseiles erfolgt über die parallel angeordneten Seile. Diese bilden die elastische Kopplung des Systems. Sie entsprechen der Luftschicht bei einem luftgestützten Tragwerk. Die Kopplung der unteren und oberen Membranlage über die Luftschicht wird in der Bemessung von pneumatischen Tragwerken meist nicht berücksichtigt. Der Unterschied im Lastabtrag mit und ohne Berücksichtigung der Luftschicht wird im folgenden Abschnitt untersucht.

4.4.2 Kreisförmiges Kissen

Die Untersuchungen werden numerisch, analytisch und versuchstechnisch geführt und sowohl der Lastabtrag an zwei- als auch an vierlagigen Folienkissen betrachtet[83]. Für das Material der Folienlagen wurde ETFE mit den Eigenschaft nach Tabelle 3.4 gewählt. Für ein pneumatisch gestütztes Kissen ergibt sich das in Bild 4.20 gezeigte innere Belastungsbild. Die aufgebaute Druckdifferenz bewirkt eine auf die Membran- bzw. Folienlage radial ausgerichtete Last, wobei die einzelnen Lagen zudem über die Luft miteinander gekoppelt sind.

83 Hierzu erfolgte bereits ein Konferenzbeitrag zur IASS 2012 in Seoul [Hartz, Bögle und Schlaich 2012]

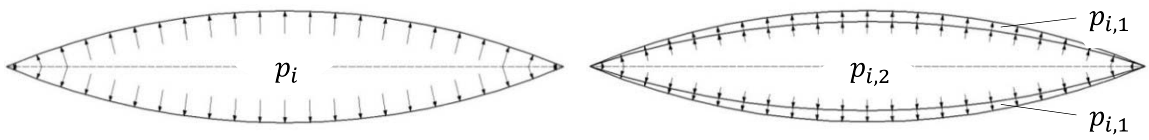


Bild 4.20: Zwei- und vierlagiges Folienkissen mit radial wirkendem Innendruck p_i

Numerische und analytische Voruntersuchungen

Das Tragverhalten eines pneumatisch gestützten Kissens wurde an zwei Modellen untersucht. Zum einen wird der existierende Innendruck p_i als eine auf die Membran- bzw. Folienlagen lokal orthogonal wirkende Last angesetzt (Modell A - Bild 4.21). Dabei wird die eigentlich vorhandene elastische Kopplung der Folienlagen durch die eingeschlossene Luft nicht berücksichtigt. Dies entspricht allerdings der gängigen aktuellen Bemessungspraxis. Das zweite Modell (Modell B) berücksichtigt nun diese Kopplung über Volumenelemente mit den Eigenschaften der Luft.

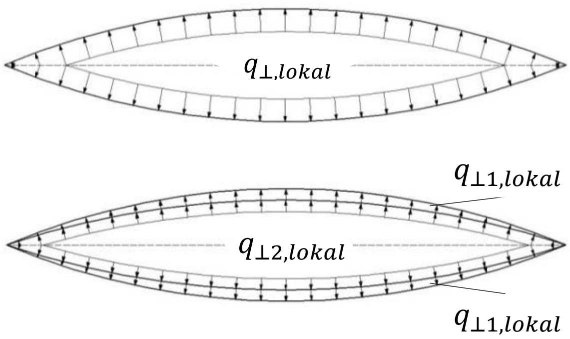


Bild 4.21: Übertragung des Innendrucks p_i als lokal ausgerichtete Last ohne Berücksichtigung der Kopplung durch die Luftschicht – Modell A

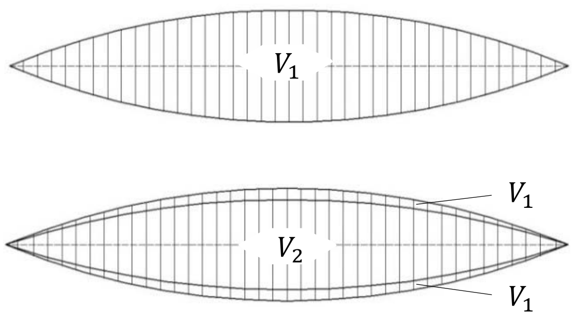


Bild 4.22: Implementierung des Innendrucks p_i über Volumenelemente mit Kopplungseigenschaften unter den einzelnen Lagen – Modell B

Für die Simulation wurde das FE-Programm Sofistik verwendet. Die Implementierung der Luft bei Modell B erfolgt mit dem Befehl *volu* und ist schematisch in Bild 4.23 dargestellt. Alle implementierten Schalenelemente werden mit einem gleichmäßig verteilten Luftdruck versehen, wobei numerisch eine Steifigkeitsmatrix generiert wird, die die Kompressibilität der Luft abbildet (Steifigkeitsblase) [Bellmann 2011].

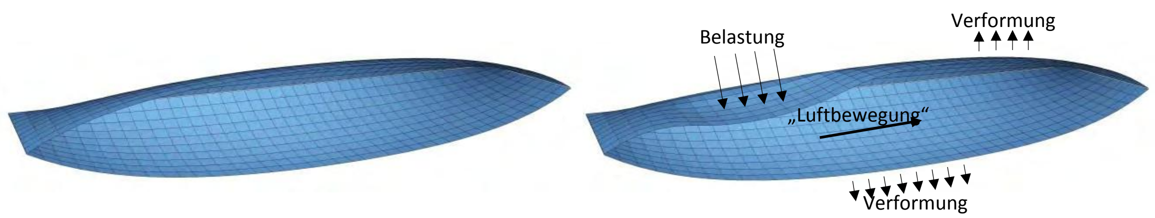


Bild 4.23: Ausgangssystem und deformiertes System eines Kissen mit Luftsimulation [Bellmann 2011]

In Bild 4.23 ist dieses Verhalten abgebildet. Aufgrund der Belastung auf der linken Seite kommt es sowohl zu Verformungen in der unteren Folie in Lastrichtung als auch zu Verformung auf der oberen Folie entgegen der Lastrichtung.

```
QUAD-Volumen Ergebnisse (VOLU)
Lastfall       11    Wind gust on upper folio
   Nr          V0      V-PLF      V-now     P-PLF  P-Start     P-now area-PLF area-now
              [m3]      [m3]       [m3]   [kN/m2]  [kN/m2]   [kN/m2]     [m2]     [m2]
    1        0.320    11.077 -> 11.063       0.20     0.20 ->   0.32   33.850   34.009
    2        0.320    11.071 -> 11.058       0.20     0.20 ->   0.32   33.848   34.005
    P: positive Werte = Druck
    P-Start = P-PLF + k*DP/V-PLF + k*DT*alphaT   mit k=Kompressionsmodul
```

Bild 4.24: Auszug aus dem Berechnungsprotokoll des in Bild 4.23 dargestellten Systems

Durch die in Bild 4.23 dargestellte Belastung kommt es zu einer minimalen Volumenabnahme (Bild 4.24), die sich aus der Kompressibilität der Luft ergibt. Der Luftdruck steigt hingegen signifikant, so wie in einem realen Kissen. Einzig die Temperatur im Kissen erfährt keine Änderung. Physikalisch handelt es sich daher um eine isotherme Zustandsänderung, die als Grundlage für die später folgende analytische Betrachtung dienen wird.

Die numerischen Grundlagen werden nun auf die in den Bildern 4.21 und 4.22 dargestellten Systeme übertragen. Die Folienlagen (Bild 4.25) wurden von unten nach oben nummeriert, wobei beim zweilagigen Kissen Lagen 2 und 3 entfallen.

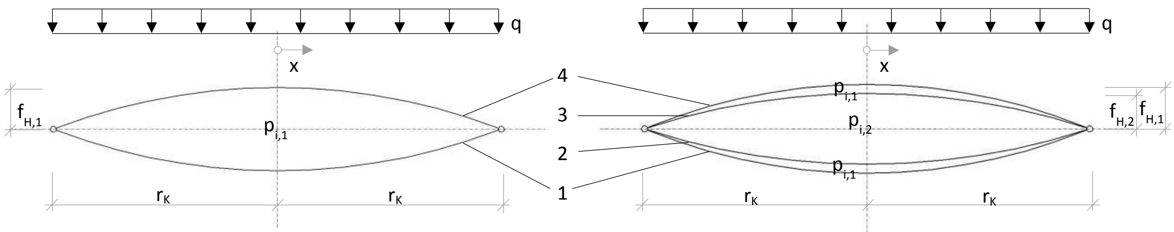


Bild 4.25: Belastung, Nummerierung und Bemaßung des zwei- und vierlagigen Kissens

In Bild 4.25 sind ebenfalls die Werte für die Abmessung des Kissens eingetragen. Die Spannweite l wurde für die Berechnungen mit $l = 2 \cdot r_K = 1{,}0\ m$[84] festgesetzt. Die initialen Stiche $f_{H,1}$ und $f_{H,2}$ der Systeme sind entsprechend (4–15) gewählt worden.

$$f_{H,1} = \frac{l}{10}\ und\ f_{H,2} = f_{H,1} - 0.05\ m \tag{4–15}$$

Als äußere Belastung wurde eine konstante Streckenlast q in der Höhe des halben Innendruckes p_i angesetzt, um für das Modell A nicht in den Bereich des Druckausfalls der oberen Folienlage zu geraten. Die initiale Spannung σ_V in der Folie ist nach (4–1) direkt vom Innendruck p_i und dem Radius r_H abhängig. Der Hüllenradius r_H ist wiederum eine Funktion der Spannweite l und des Stiches f_H.

$$r_{H,1}\left(f_{H,1} = 0{,}1\ m\right) = 1{,}300\ m \tag{4–16}$$

$$r_{H,2}\left(f_{H,2} = 0{,}05\ m\right) = 2{,}525\ m \tag{4–17}$$

In Tabelle 4.4 sind die sich theoretisch ergebenden ($p_{i,theo}$) und letztendlich für die numerischen ($p_{i,num}$) Berechnungen verwendeten Innendrücke zusammengestellt.

[84] Dies ergibt sich aus dem später beschriebenen realen Testaufbau (Abs. Versuchstechnische Untersuchungen – S. 83).

Tabelle 4.4: Theoretischer nach Gl. (4–12) und numerisch ermittelter Zusammenhang zwischen Folienspannung σ_V, Folienstich f_H und Innendruck p_i

σ_V [N/mm^2]	$p_{i,theo}(f_{H,1} = 0{,}1)$ [kN/m^2]	$p_{i,theo}(f_{H,2} = 0{,}05)$ [kN/m^2]	$p_{i,num}(f_{H,1} = 0{,}1)$ [kN/m^2]	$p_{i,num}(f_{H,2} = 0{,}05)$ [kN/m^2]
0	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,615	0,317	0,640	0,320
4	1,231	0,634	1,280	0,635
6	1,846	0,950	1,910	0,950
8	2,462	1,267	2,490	1,270

Mit diesen Werten wurden die vier numerischen Modelle, wie sie in den Bildern 4.26 und 4.27 dargestellt sind, erstellt.

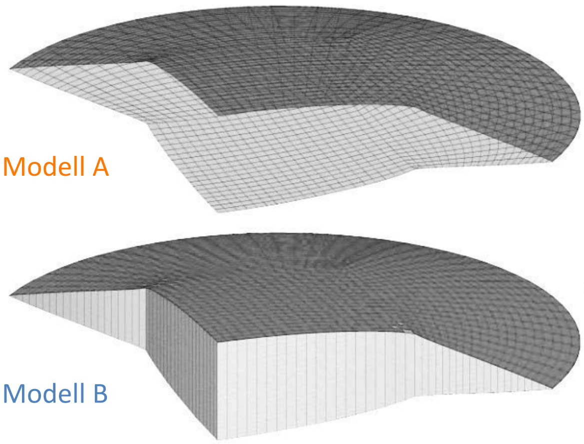


Bild 4.26: Numerisches Modell des 2-lagigen Kissens mit und ohne Implementierung der Luft

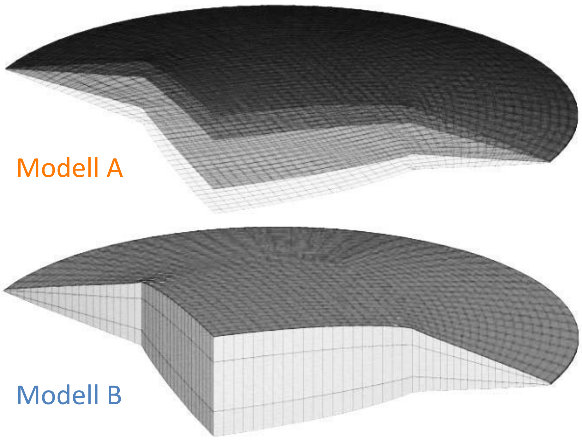


Bild 4.27: Numerisches Modell des 4-lagigen Kissens mit und ohne Implementierung der Luft

Die Systeme wurden mit einer Traglastiteration langsam bis auf $q = p_i/2$ belastet und jeweils die Verschiebungen Δf_H der Mittelpunkte und die Spannungsänderungen $\Delta\sigma$ am Mittelelement ausgewertet. Trägt man die Verschiebung Δf_H der Mittelknoten aller Folienlagen in ein Diagramm über die initiale Folienspannung σ_V der Folien auf (siehe Tabelle 4.4 als Vergleich für die äquivalenten Innendrücke p_i), erhält man die Verläufe in Bild 4.28.

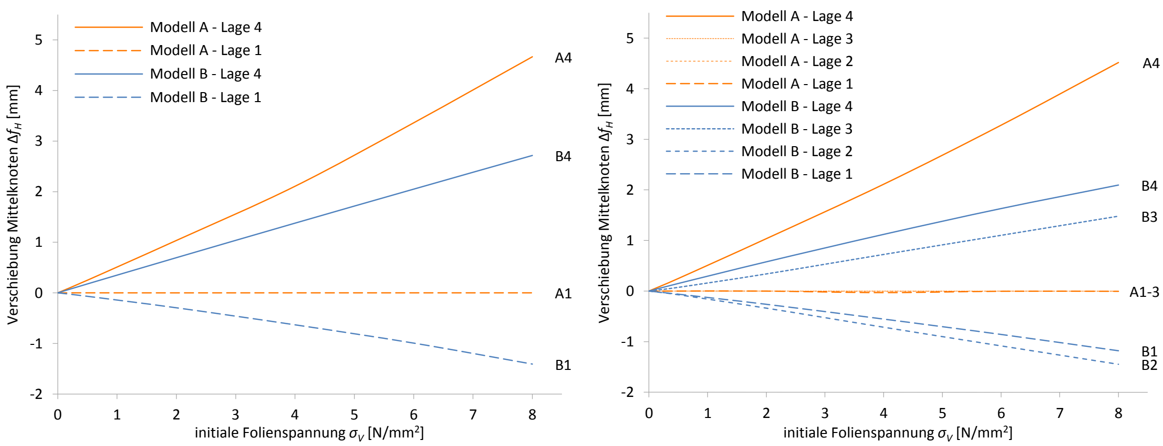


Bild 4.28: Verschiebung Δf_H der Mittelknoten des 2- und 4-lagigen Folienkissens für Modell A und Modell B

Für Modell A ergeben sich aufgrund der Nichtberücksichtigung der realen Kopplung nur Verformungen Δf_H für die obere Folienlage. Zudem fallen die Verformungen Δf_H im Vergleich zum Modell B weitaus höher aus, da die obere Folienlage die Last allein abtragen muss. Im Modell B hingegen wird die Last von allen Folienlagen getragen und daher verteilen sich die Verschiebungen Δf_H auf alle Lagen mit einer von den Werten her absoluten Abnahme von oben nach unten. In Tabelle 4.5 sind beispielsweise die Verschiebungen Δf_H der einzelnen Lagen für eine initiale Folienspannung σ_V von 8,0 N/mm^2 und unter Verwendung der Werte aus Tabelle 4.4 zusammengestellt.

Tabelle 4.5: Verschiebungen Δf_H bei initialer Folienspannung σ_V von 8,0 N/mm^2 für Modell A und Modell B des 2- und 4-lagigen Folienkissens

	Verschiebung Δf_H [mm]			
	Modell A		Modell B	
Lage	**2-lagig**	**4-lagig**	**2-lagig**	**4-lagig**
4	4,67	4,52	2,72	2,10
3	-	0,00	-	1,48
2	-	0,00	-	-1,45
1	0,00	0,00	-1,41	-1,18

Wie zu erkennen ist, ergeben sich für Modell B für die oberen Lagen annähernd halb so große Verschiebungen Δf_H wie für Modell A. Diese Verschiebungen Δf_H gehen natürlich einher mit einer Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ in den einzelnen Lagen. Wertet man für die gleiche Belastung die Spannungsänderungen $\Delta\sigma_H$ für die Kissenmitte aus, erhält man die in Bild 4.29 gezeigten Diagramme.

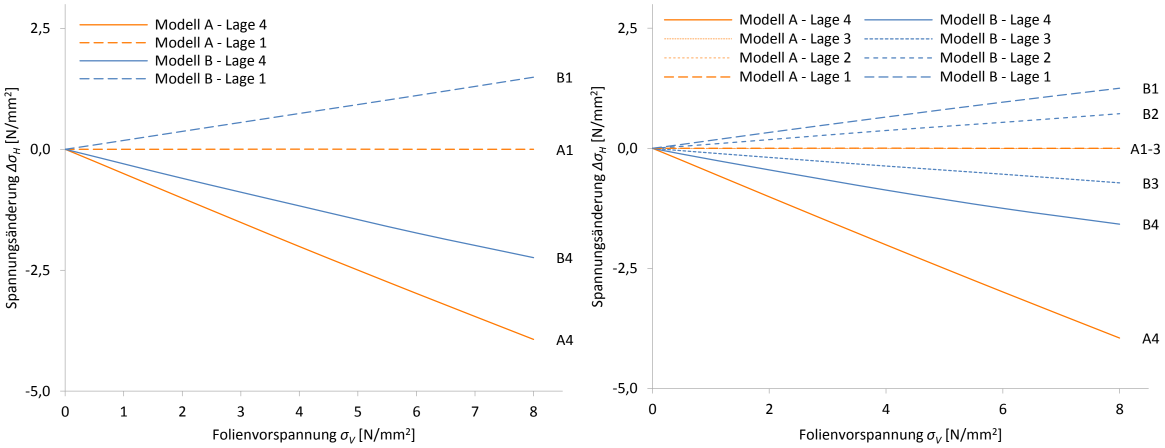


Bild 4.29: Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ der Mittelelemente des 2- und 4-lagigen Folienkissens für Modell A und Modell B

Auch hier ergibt sich natürlich kein Unterschied für das Modell A zwischen dem 2- und 4-lagigen Kissen. Wiederum erfährt nur die obere Folie eine Belastung und den sich daraus ergebenden Spannungsabbau. Für das Modell B kommt es in den oberen Folienlagen ebenfalls zu einem Spannungsabbau. Die unteren Lagen erfahren durch die Verschiebung nach unten eine Stichvergrößerung mit entsprechender Spannungszunahme. Die Spannungsänderungen sind in Tabelle 4.6 sowohl für das Modell A als auch Modell B wieder beispielhaft für die initiale Folienspannung σ_V von 8,0 N/mm^2 zusammengestellt.

Tabelle 4.6: Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ bei initialer Folienspannung σ_V von 8,0 N/mm²
für Modell A und Modell B des 2- und 4-lagigen Folienkissens

	Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ [N/mm²]			
	Modell A		Modell B	
Lage	**2-lagig**	**4-lagig**	**2-lagig**	**4-lagig**
4	-3,93	-3,95	-2,24	-1,58
3	-	0,00	-	-0,73
2	-	0,00	-	0,73
1	0,00	0,00	1,49	1,25

Betrachtet man Modell B in der 2-lagigen Ausführung, erfährt die obere Folienlage eine Spannungsabnahme $\Delta\sigma_H$ von -2,24 N/mm² und die untere eine Spannungszunahme $\Delta\sigma_H$ von 1,49 N/mm². Bei einer initialen Folienspannung σ_V von 8 N/mm² entspricht dies bei einer Auflast q mit der halben Höhe des Innendrucks p_i einer relativen Spannungszunahme von 19 %.

Versuchstechnische Untersuchungen

Die oben beschriebenen numerischen Untersuchungen wurden mit dem in Bild 3.32 bereits dargestellten und nun leicht modifizierten (Bild 4.30) Aufbau versuchstechnisch nachgefahren. Leider konnte nur das 2-lagige Kissen untersucht werden[85]. Die Belastung des Kissens erfolgte über eine auf der Ober-bzw. Unterseite luftdicht angebrachte Kammer, die einen von außen steuerbaren Gegendruck auf das Kissen aufbrachte. Für die Beobachtung des Kissens bei unterseitiger Anbringung der Kammer war es notwendig den Kammerdeckel aus Glas auszuführen. Die Wahl fiel auf 8 mm dickes Einscheibensicherheitsglas, um Polarisationen seitens eingelegter Folien beim Verbundsicherheits- oder Plexiglas zu vermeiden.

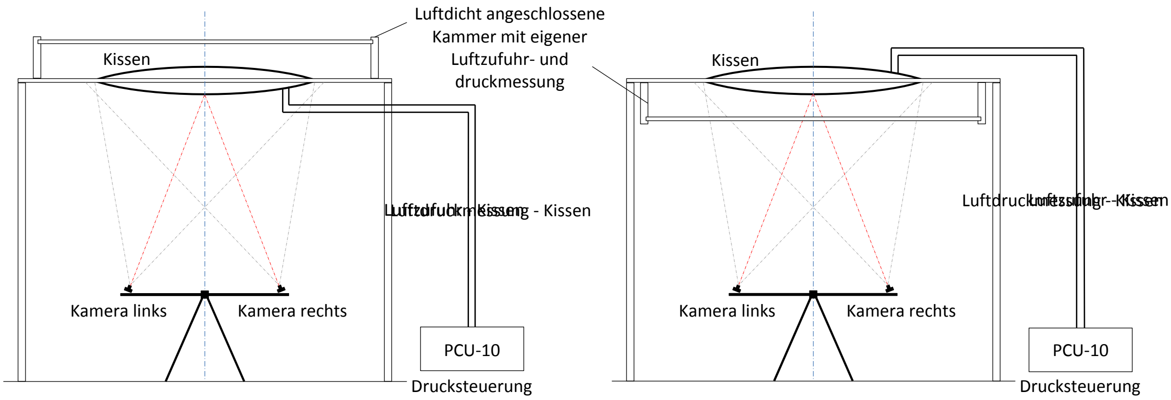


Bild 4.30: Schematischer Versuchsaufbau mit ober- und unterhalb angebrachter Gegendruckkammer

Zusätzlich zum PCU-10 (s. Bild 3.33) wurden Drucksensoren vom Typ DS2-420 (s. Abs. A.1.1) für die Messungen der Gegendruckkammer verwendet. Die verwendeten Drucksensoren haben einen Messbereich von 0-50 mbar mit einem linear korrespondierendem Signal von 4-20 mA.

Mit dem System ARAMIS 4M konnte immer nur eine Seite beobachtet werden, was die Auswertung und den Datenabgleich für eine Belastungssituation erschwerte. Der initiale Innendruck p_i wurde mit 10 mbar (1 kN/m²) angesetzt. Mit dem in Bild 3.31 abgebildeten Zuschnitt ergab sich die in Bild 4.32 dargestellte initiale Geometrie.

[85] Mit den System Aramis 4M wurden testvorbereitend einige Versuchsmessungen durchgeführt und unter anderem die Beobachtung durch eine ETFE Folie hindurch getestet. Dabei kam es zu solch schlechten Aufnahmen, dass die Vermessung der inneren Folien eines vierlagigen Kissens ausgeschlossen wurden.

Bild 4.31: Versuchsaufbau mit obenliegender Gegendruckkammer und angedeuteten Luft- und Druckmessanschlüssen (s. Bild 3.32)

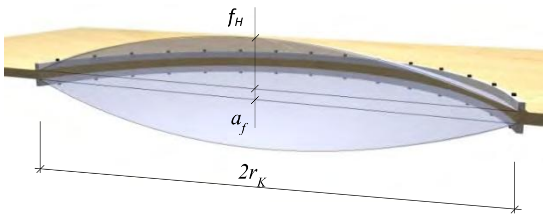


Bild 4.32: Initialer Geometrieschnitt des eingebauten Kissens

Die mit dem System ARAMIS 4M erfassten Geometrien der belasteten (Druckkammer unten) bzw. unbelasteten (Druckkammer oben) Seite sind in den Bildern 4.33 und 4.34 dargestellt. Die Messungen erfolgten immer von unten (s. Bild 4.30). In Bild 4.33 ist der nicht ganz saubere Rand (dunkelblaue Elemente) zu erkennen, was sich durch die Aufnahme durch die Glasscheibe hindurch erklären lässt. Das ohnehin schon schwierige schattenfreie und reflexionsarme Ausleuchten der Kissenoberflächen konnte durch die Glasscheibe hindurch für den kompletten Rand nicht mehr gewährleistet werden.

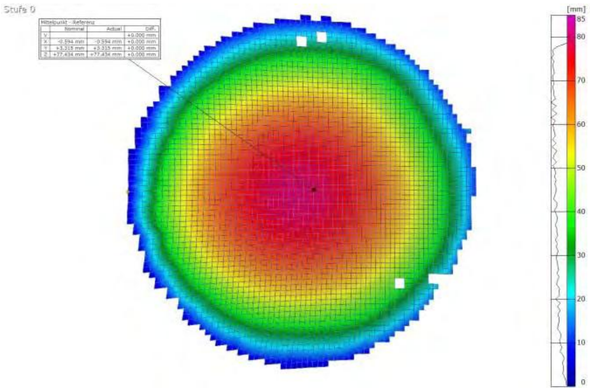


Bild 4.33: Abbildung der initiale Geometrie der globalen z-Koordinate der belasteten Seite

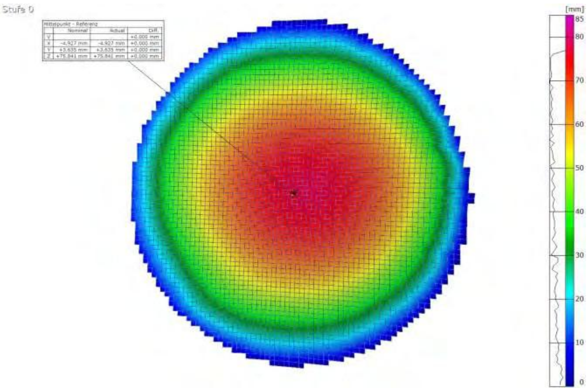


Bild 4.34: Abbildung der initialen Geometrie der globalen z-Koordinate der unbelasteten Seite

Die initialen gemessenen Stiche f_H in Kissenmitte und die nach Gleichung (4–1) und numerisch ermittelten initialen Folienspannungen σ_V sind in Tabelle 4.7 zusammengestellt. Wie zu erkennen ist, konnte für die obere und untere Lage beim Einbau nicht der gleiche Stich gewährleistet werden. Durch den Innendruck p_i von 1 kN/m^2 ergaben sich die in Tabelle 4.7 angegebenen Folienspannungen.

Tabelle 4.7: Initialer Stich f_H beider Folienlagen und abgeleitete Spannung σ_V bei initialem Innendruck p_i von 1 kN/m² (10 mbar)

	f_H [mm]	$\sigma_{V,anal}$[86] [N/mm²]
belastet	75,8	4,03
unbelastet	77,4	3,94

Beide Seiten wurden in unterschiedlichen Messreihen durch einen Aufbau des Gegendruckes p_a in der Gegendruckkammer belastet. Dabei wurde die Einströmgeschwindigkeit der Luft variiert.

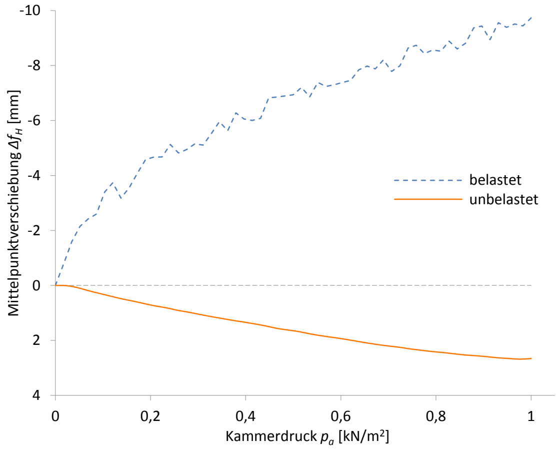


Bild 4.35: Stichänderungen Δf_H der belasteten und unbelasteten Folienlage bei langsamem Aufbau des Gegendruckes p_a

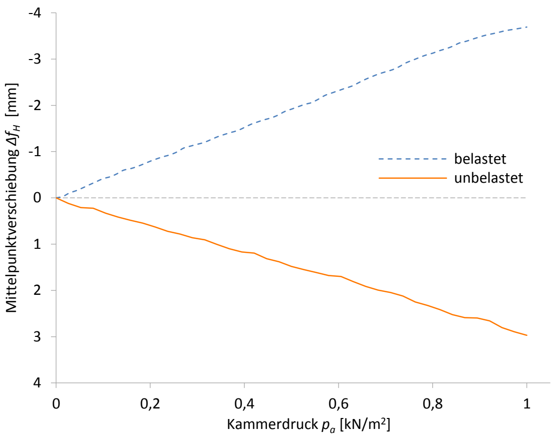


Bild 4.36: Stichänderungen Δf_H der belasteten und unbelasteten Folienlage bei schlagartigem Aufbau des Gegendruckes p_a

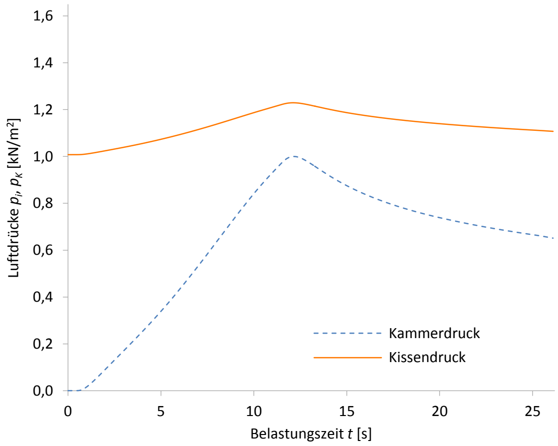


Bild 4.37: Verläufe für Kissendruck p_i und Kammerdruck p_a für langsame Belastung (vgl. Bild 4.35)

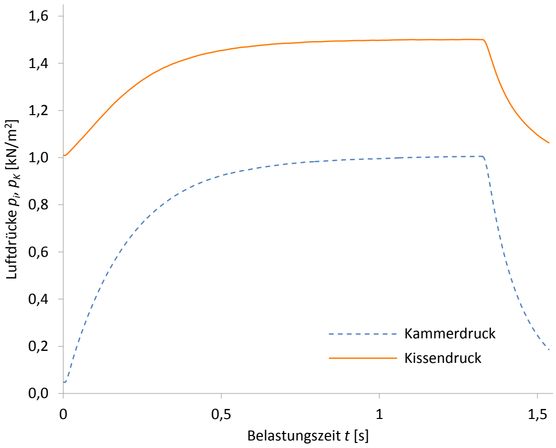


Bild 4.38: Verläufe für Kissendruck p_i und Kammerdruck p_a für schlagartige Belastung (vgl. Bild 4.36)

In Bild 4.35 wird die Luft langsam in die Gegendruckkammer eingelassen, was ein Reagieren der Luftdrucksteuerung des Kisseninnendruckes p_i erlaubt, indem der durch die Auflast erhöhte Innendruck wieder abgebaut wird. Die unbelastete Folienlage erfährt weitaus weniger Verformung als die Belastete. Dies ähnelt mehr dem Modell A mit alleinigem Abtragen der äußeren Belastung über die obere Folie. Modell B stellt sich ein, wenn die Belastungen wirklich schlagartig[87] auftreten, wie es beispielsweise bei Windböen der Fall ist. Dazu sind in den Bildern

86 Die theoretischen Spannungen in den Folien wurden über die Formeln (4–1) ff. ermittelt.

87 Hier wurde die maximal mögliche Einströmgeschwindigkeit verwendet, was etwa einer Belastungszeit *t* von 0,5 s bis Erreichen des Lastniveaus entspricht.

4.37 und 4.38 die Druckverläufe für den langsamen und schlagartigen Versuch gegenübergestellt. Sie zeigen das unterschiedlich hohe Druckniveau im Kisseninneren p_i bei gleicher Steigerung des Gegendrucks p_a auf jeweils 1 kN/m² (10 mbar). Der gekoppelte Lastabtrag bei annähernd gleicher Verformung der belasteten und unbelasteten Folienlagen konnte mit dem schlagartigen Belastungsversuch so durch die Messungen, wie in Bild 4.36 dargestellt, bestätigt werden. Der Innendruck p_i bei schlagartiger Belastung steigt im Kissen auf 1,50 kN/m² an.

In den Bildern 4.39 und 4.40 sind die kompletten gemessenen Verformungen der belasteten und unbelasteten Folienlage für den in Bild 4.36 dargestellten schlagartigen Belastungsfall abgebildet. Wiederum (vgl. Bild 3.39 rechts) kommt es durch die nicht membrangerechte Lagerung an den Rändern zu Faltenbildung.

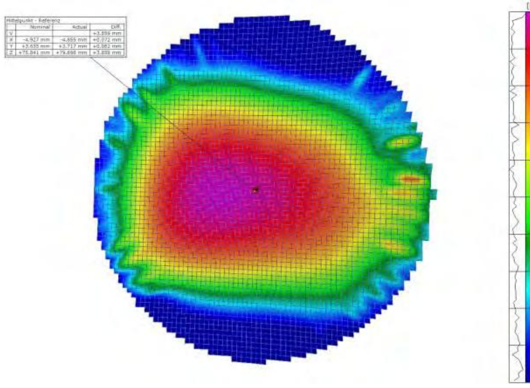


Bild 4.39: Verschiebungen $u_{z,gem}$ der belasteten Seite

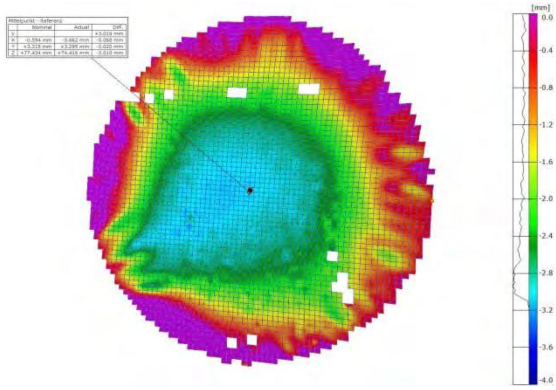


Bild 4.40: Verschiebungen $u_{z,gem}$ der unbelasteten Seite

Führt man dies auf eine Betrachtung der Spannungen in den Folienlagen zurück und setzt man als initiale Folienspannung $\sigma_{V,num}$ die in Tabelle 4.7 angegebene Spannung von 4,19 N/mm² an, ergeben sich nach der Belastung mit p_a die numerisch ermittelten Spannungen nach den Bildern 4.41 und 4.42. Als Vergleich zu den Messwerten der Bilder 4.39 und 4.40 sind zudem die numerisch simulierten Verformungen in den Bildern 4.43 und 4.44 dargestellt.

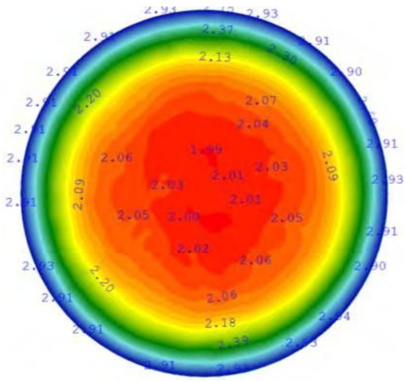


Bild 4.41: Spannungsverlauf σ_H bei Auflast in Höhe des Innendruckes p_i von 1 kN/m² der belasteten Seite [N/mm²]

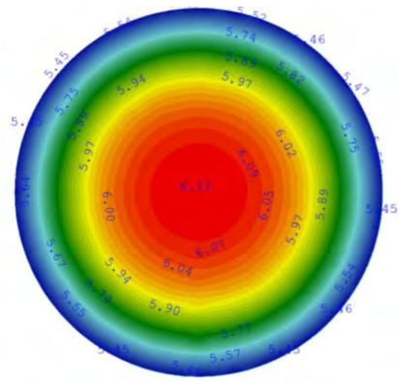


Bild 4.42: Spannungsverlauf σ_H bei Auflast in Höhe des Innendruckes p_i von 1 kN/m² der unbelasteten Seite [N/mm²]

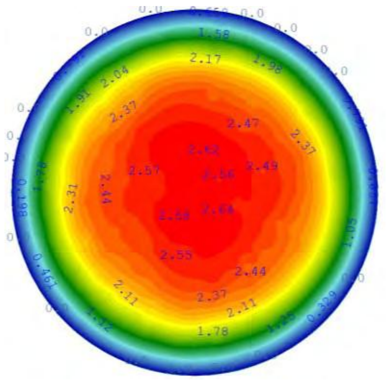


Bild 4.43: Verschiebungen $u_{z,num}$ bei Auflast in Höhe des Innendruckes p_i von 1 kN/m^2 der belasteten Seite [mm]

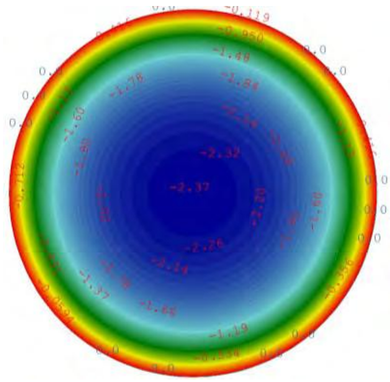


Bild 4.44: Verschiebungen $u_{z,num}$ bei Auflast in Höhe des Innendruckes p_i von 1 kN/m^2 der unbelasteten Seite [mm]

Die numerische Simulation ergibt einen Anstieg des Innendruckes p_i auf 1,47 kN/m^2. Dieser Wert ist mit dem gemessenen nahezu identisch.

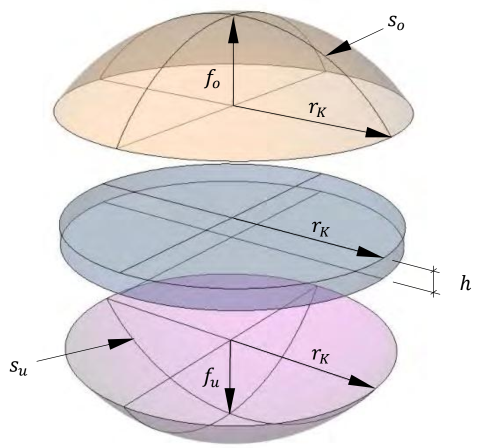
```
QUAD-Volumen Ergebnisse (VOLU)
Lastfall      3   belastung
   Nr       V0    V-PLF     V-now    P-PLF  P-Start     P-now area-PLF area-now
          [m3]     [m3]      [m3]  [kN/m2]  [kN/m2]   [kN/m2]     [m2]     [m2]
    1    0.005    0.067  →  0.067     1.00     1.00  →   1.47    1.607    1.607
    P: positive Werte = Druck
    P-Start = P-PLF + k*DP/V-PLF + k*DT*alphaT   mit k=Kompressionsmodul
```

Bild 4.45: Auszug aus dem Berechnungsprotokoll für die numerisch simulierte einseitige Belastung des in Bild 4.32 dargestellten Kissens

Analytische Untersuchungen

Für eine beliebige Kissengeometrie führt eine analytische Untersuchung auf eine finite Elementuntersuchung, wie sie beispielsweise von [Bonet, et al. 2000] vorgenommen wurde. Allerdings lässt sich das obige sehr spezielle Problem komplett geometrisch unter Verwendung der physikalischen Zusammenhänge lösen.

Eine Seite des runden Kissens entspricht einer Kugelkalotte, deren Volumen sich nach Formel (4–18) ergibt. Haben beide Kissenseiten zudem noch einen Abstand h, ergibt sich zusätzlich noch ein Zylinder (4–19) für die Beschreibung des Kissenvolumens.



$$V_{K,o/u} = \frac{f_{o/u} \cdot \pi}{3}(3r_K - f_{o/u}) \tag{4–18}$$

$$V_Z = \pi r_K^2 \cdot h \tag{4–19}$$

Bild 4.46: Schichtmodell und Volumengleichungen eines doppelseitig mit h beabstandeten kugelschalenförmigen Kissens

Das gesamte Kissen hat dann das Volumen V_{kK} der beiden Kugelkalotten zuzüglich des Zylindervolumens V_Z.

$$V_{kK} = \frac{\pi}{3}[f_o \cdot (3r_K - f_o) + f_u \cdot (3r_K - f_u) + 3r_K^2 \cdot h] \tag{4–20}$$

für $f_o = f_u = f_{o/u}$ und $h = 0$

$$V_{kK} = \frac{2\pi}{3} \cdot f_{o/u} \cdot \left(3r_K - f_{o/u}\right) \tag{4–21}$$

Der Versuchsaufbau lässt sich auf das in Bild 4.47 dargestellte System zurückführen. Dabei bezeichnet i den jeweiligen Zustand vor (0) und nach (1) der Belastung durch p_a.

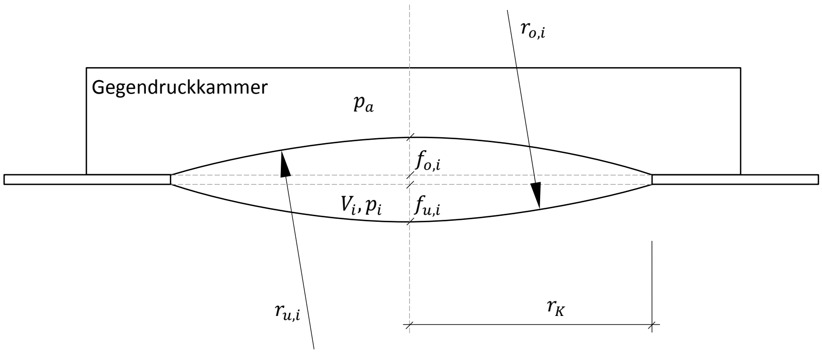


Bild 4.47: Schematische Vereinfachung des in Bild 4.31 dargestellten Versuchsaufbaus

Ist noch kein Druck p_a in der Gegendruckkammer aufgebaut, gelten zunächst die ab Gleichung (4–22) zusammengestellten Formeln.

für $p_a = 0$ gilt:

$$\sigma_{o,0} = \frac{p_0 \cdot r_{o,0}}{2}; \;\; \sigma_{u,0} = \frac{p_0 \cdot r_{u,0}}{2} \tag{4–22}$$

$$\sigma_{o,0} = \sigma_{u,0} \tag{4–23}$$

für $p_a \neq 0$ gilt:

$$\sigma_{o,1} = \frac{(p_1 - p_a) \cdot r_{o,1}}{2}; \;\; \sigma_{u,1} = \frac{p_1 \cdot r_{u,1}}{2} \tag{4–24}$$

für die Radien $r_{o,i}$ und $r_{u,i}$ der Hülle gilt:

$$r_{o,i} = \frac{r_K^2 - f_{o,i}^2}{2f_{o,i}}; \;\; r_{u,i} = \frac{r_K^2 - f_{u,i}^2}{2f_{u,i}} \tag{4–25}$$

Unter Hinzunahme der Gleichung (4–20) zur Bestimmung des Kissenvolumens V_{kK} ist der Zusammenhang zwischen oberem $f_{o,i}$ und unterem $f_{u,i}$ Stich gegeben.

$$V_i = \frac{\pi}{3}\left[f_{o,i}\left(3r_K - f_{o,i}\right) + f_{u,i}\left(3r_K - f_{u,i}\right) + 3r_K^2 \cdot h\right] \tag{4–26}$$

Die physikalisch vorhandene Kopplung der oberen und unteren Lage über die Luft ergibt sich über den Kompressibilitätskoeffizient κ_T (s. Tabelle 4.3).

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} \tag{4–27}$$

Für das Kissen selbst bleiben die Luftmasse m im Inneren und die Temperatur T im Versuchszeitraum konstant. Somit kann das Innere des Kissens mit einer isothermen Zustandsänderung beschrieben werden.

$$p_0 \cdot V_0 = p_1 \cdot V_1 \tag{4–28}$$

Um eine Verbindung des Kisseninneren mit der äußeren Belastung herzustellen, werden sowohl die Gleichungen zur Beschreibung der Geometrie der Hülle als auch der in der Hülle wirkenden Spannung gebraucht (Gl. (4–24)).

Die Mittellinie der gedehnten Ausgangslänge $s_{0,el}$ der Hülle ist bekannt über die Gleichung (4–29).

$$s_{o/u,0,el} = 2r_K + \frac{4 \cdot f_{o/u,0}^2}{3 \cdot r_K}$$ [88](4–29)

Die ungedehnte Länge kann über Gleichung (3–8) ermittelt werden, wobei sich diese aufgrund der Spannungsgleichheit auf Gleichung (4–30) reduzieren lässt.

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11} \cdot \frac{1 - \nu_{12}}{E_1} \tag{4–30}$$

Führt man jetzt die Gleichungen (4–24), (4–25) und (4–30) zusammen, lassen sich die Dehnungen $\varepsilon_{o/u,0}$ der Startgeometrie mit Gleichung (4–31) beschreiben.

$$\varepsilon_{o/u,0} = \frac{p_0}{2} \cdot \frac{r_K^2 - f_{o/u,0}^2}{E_1} \cdot \frac{1 - \nu_{12}}{E_1} \tag{4–31}$$

Hiermit sind die ungedehnten Längen $s_{o/u}$ der Ausgangssituation bestimmbar.

$$s_o = s_{o,0,el} \cdot (1 - \varepsilon_{o,0}) = \left(2r_K + \frac{4 \cdot f_{o,0}^2}{3 \cdot r_K}\right) \cdot \left(1 - \frac{p_0}{2} \cdot \frac{r_K^2 - f_{o,0}^2}{E_1} \cdot \frac{1 - \nu_{12}}{E_1}\right) \tag{4–32}$$

$$s_u = s_{u,0,el} \cdot (1 - \varepsilon_{u,0}) = \left(2r_K + \frac{4 \cdot f_{u,0}^2}{3 \cdot r_K}\right) \cdot \left(1 - \frac{p_0}{2} \cdot \frac{r_K^2 - f_{u,0}^2}{E_1} \cdot \frac{1 - \nu_{12}}{E_1}\right) \tag{4–33}$$

Für das belastete und verformte System muss nun mit diesen Gleichungen zurückgerechnet werden. Da hier allerdings nach den Stichen $f_{o,1}$ und $f_{u,1}$ aufgelöst werden muss, ist dies nicht über ein einfaches Umstellen der Gleichungen, sondern nur iterativ möglich. Es ergeben sich jeweils die Bestimmungsgleichungen für $s_{o,1,el}$ (4–34) und $s_{o,1,el}$ (4–35) mit den jeweiligen Abhängigkeiten wie in Tabelle 4.8 dargestellt.

$$s_{o,1,el} = s_o \cdot \left(1 + \frac{p_1 - p_a}{2} \cdot \frac{r_K^2 - f_{o,1}^2}{2f_{o,1}} \cdot \frac{1 - \nu_{12}}{E_1}\right) = 2r_K + \frac{4 \cdot f_{o,1}^2}{3 \cdot r_K} \tag{4–34}$$

$$s_{u,1,el} = s_u \cdot \left(1 + \frac{p_1}{2} \cdot \frac{r_K^2 - f_{u,1}^2}{2f_{u,1}} \cdot \frac{1 - \nu_{12}}{E_1}\right) = 2r_K + \frac{4 \cdot f_{u,1}^2}{3 \cdot r_K} \tag{4–35}$$

In Gleichung (4–34) fließt die Abhängigkeit der geometrischen Hüllenlänge $s_{o,1,el}$ der oberen Lage von der äußeren Belastung p_a ein. Für die untere Lage $s_{u,1,el}$ ergibt sich für die geometrischen Änderungen nur eine Abhängigkeit vom sich verändernden Innendruck p_i.

[88] Diese Gleichung beschreibt allein die geometrische Linie und basiert auf der Annahme eines parabelförmigen Verlaufs. Diese Annahme ist nach den Betrachtungen auf Seite 63 und Bild 4.11 für kleine Stich-/Spannweitenverhältnisse zulässig.

Tabelle 4.8: Beispielhafte Zusammenstellung für p_i von 1,0 kN/m² und p_a von 1,0 kN/m² mit eingetragenen Abhängigkeiten der jeweiligen Werte für die Ausgangs- und verformte Geometrie am geschlossenen Volumen

Eingangsparameter								
$f_{o,0}$ [m]	0.0770	$r_{o,0}(f_{o,0},r_K)$ [m]	1.585	p_{atm} [kN/m²]	101.325			
$f_{u,0}$ [m]	0.0770	$r_{u,0}(f_{u,0},r_K)$ [m]	1.585	E_{11} [N/mm²]	1000			
r_K [m]	0.5000	t [mm]	0.200	E_{11} [kN/m²]	1000000			
p_i [kN/m²]	1.0000	h [m]	0.022	ν_{12} [-]	0.45			
p_a [kN/m²]	1.0000							
Ausgangsgeometrie – Zustand 0								
$V_0(f_{o/u,0},r_K,h)$ [m³]	0.246764							
$\sigma_{o,0}(r_{o,0},p_0,t)$ [N/mm²]	3.96	$\varepsilon_{o,0}(\sigma_{o,0},E_{11},\nu_{12})$ [‰]	0.002179	$s_{o,0,el}(f_{o,0},r_K)$ [m]	1.0158		$s_{o,0}(\varepsilon_{o,0},s_{o,0,el})$ [m]	1.0136
$\sigma_{u,0}(r_{u,0},p_0,t)$ [N/mm²]	3.96	$\varepsilon_{u,0}(\sigma_{u,0},E_{11},\nu_{12})$ [‰]	0.002179	$s_{u,0,el}(f_{u,0},r_K)$ [m]	1.0158		$s_{u,0}(\varepsilon_{u,0},s_{u,0,el})$ [m]	1.0136
Verformte Geometrie – Zustand 1								
Δf_o [mm]	2.816 ←	zu kalibrierende Werte						
Δf_u [mm]	2.246 ←							
$f_{o,1}(f_{o,0},\Delta f_{o,1})$ [m]	0.0742	$r_{o,1}(f_{o,1},r_K)$ [m]	1.648					
$f_{u,1}(f_{u,0},\Delta f_{u,1})$ [m]	0.0792	$r_{u,1}(f_{u,1},r_K)$ [m]	1.538					
$\sigma_{o,1}(r_{o,1},p_1,p_a,t)$ [N/mm²]	1.9349			$s_{o,1,el}(s_{o,0},f_{o,1},r_K,p_1,p_a,E_{11},\nu_{12})$ [m]	1.01468	=	$s_{o,1,el}(f_{o,1},r_K)$ [m]	1.01468
$\sigma_{u,1}(r_{u,1},p_1,t)$ [N/mm²]	5.6499			$s_{u,1,el}(s_{u,0},f_{u,1},r_K,p_1,E_{11},\nu_{12})$ [m]	1.01675	=	$s_{u,1,el}(f_{u,1},r_K)$ [m]	1.01675
$p_1(p_0,\Delta p_i)$ [kN/m²]	1.4697			κ_S [kN/m²]	1.4			
$V_1(f_{o/u,1},r_K,h)$ [m³]	0.245947	ΔV [m³]	0.000817	$\Delta p_i(V_0,V_1,p_{atm},\kappa_S)$ [kN/m²]	0.4697			

Die Verläufe für Δf_o, Δf_u, σ_o, σ_u, Δp_i und ΔV in Abhängigkeit von der äußeren Belastung p_a sind in den Diagrammen Bild 4.48 dargestellt. Dabei wurde der Bereich der Höhe der äußeren Belastung p_a so gewählt, dass die obere bzw. untere Folie einen kompletten Abbau der initialen Folienspannung $\sigma_{o/u}$ aufweist. Für die Spannungs- $\sigma_{o/u}$ und Stichänderungsverläufe $f_{o/u}$ ergeben sich in Abhängigkeit von der äußeren Belastung p_a scheinbar lineare Verläufe, die sich aber nur durch die sehr geringe geometrische Systemänderung so darstellen. Beim Innendruck p_i und dem Kissenvolumen V_{kK} wird in den gleichen Schranken das nicht-lineare Verhalten sichtbar.

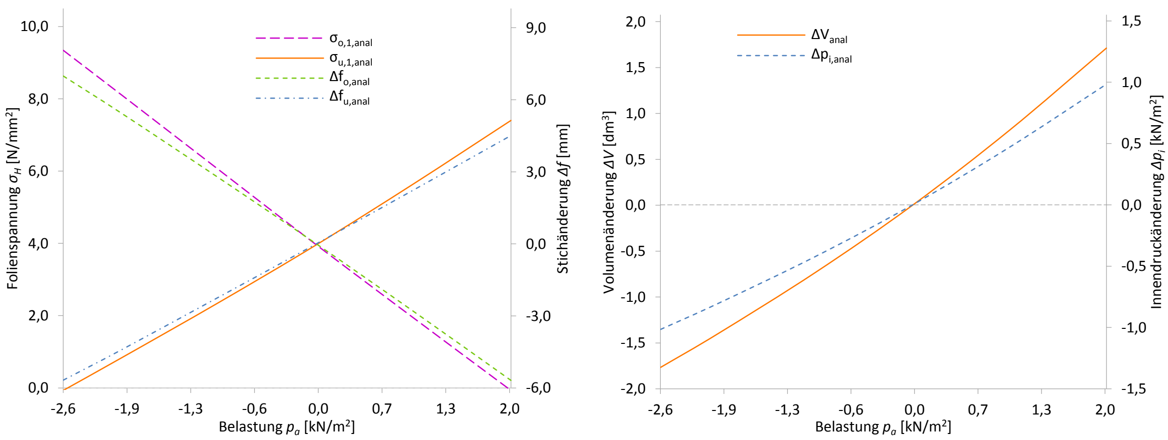


Bild 4.48: Verläufe für Δf_o, Δf_u, σ_o, σ_u, Δp_i und ΔV in Abhängigkeit von der äußeren Belastung p_a - analytisch

Zusammenführung

Vergleicht man die Ergebnisse der drei zuvor beschriebenen Untersuchungen hinsichtlich der Werte, ergibt sich die Zusammenstellung in Tabelle 4.9. Die analytisch und numerisch ermittelten Stichänderungen Δf zeigen annähernd gleiche Werte. Die gemessene Stichänderung weicht hingegen stärker ab, was zum einen mit dem nicht perfekt symmetrischen Versuchsaufbau und den daraus resultierenden dehnungslosen Verformungen und zum anderen mit der Klemmung am Rand, die kein ideal perfektes Festhalten der Folie gewährleisten konnte, erklärt werden kann.

Tabelle 4.9: Gemessene, numerisch simulierte und analytisch hergeleitete Stichänderung Δf der belasteten und unbelasteten Folienlagen bei initialem Innendruck p_i von 1 kN/m² (10 mbar) und einem Belastungsniveau $p_a = p_i$

	gemessen	numerisch	analytisch
Δf_o [mm]	3,9	2,6	2,8
Δf_u [mm]	3,0	2,4	2,3

Die Druckänderungen Δp_i im Innern des Kissens zeigen hingegen annähernd gleiches Niveau. Der Innendruck p_i erhöht sich um etwa 50 %.

Tabelle 4.10: Gemessene und numerisch simulierte Druckänderung Δp_i

	gemessen	numerisch	analytisch
Δp_i [kN/m²]	1,50	1,47	1,47

Eine Gegenüberstellung der numerischen und analytischen kissenrelevanten geometrischen und mechanischen Werte findet sich in den Diagrammen in Bild 4.49, das die Diagramme des Bild 4.48 mit numerischen Vergleichswerten ergänzt.

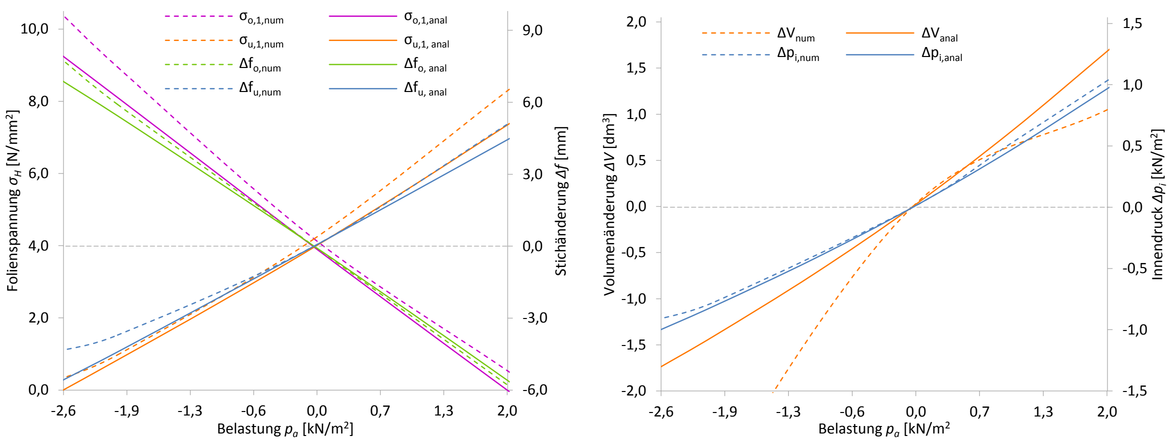


Bild 4.49: Verläufe für Δf_o, Δf_u, σ_o, σ_u, Δp_i und ΔV in Abhängigkeit der äußeren Belastung p_a für initialen Innendruck p_i von 1 kN/m² – analytisch und numerisch

Der Lastabtrag für kurzzeitige Belastungen unterscheidet sich gravierend vom Lastabtrag permanenter oder langanhaltender Belastungen. Die Drucksteuerung des Kissens ist für schlagartige Veränderungen sowohl bezüglich der Lasten (Windböen) als auch thermodynamisch (Temperaturstürze - Bild 4.17) nicht ausgelegt.

Kommt es zu schlagartigen Lastveränderungen, reagiert das Kissen als geschlossenes Volumen. Für eine Auflast q (Winddruck), die eine Druckerhöhung (Δp_i^+) bewirkt, lässt sich das Kissen bis zum Druckausfall der belasteten Lage etwa mit doppelter Höhe des vorgehaltenen Innendruckes p_i belasten. Für eine Auflast p_a (Windsog), die eine Druckminderung (Δp_i^-) bewirkt, kann sogar eine etwa 2,6-fache Last gegenüber dem vorgehaltenen Innendruck p_i bis zum Druckausfall der abgewandten Lage aufgenommen werden. Der Druckausfall einer Lage ist eher als unkritisch zu betrachten. Setzt man allerdings das Belastungsniveau p_a auf Höhe des gewählten Innendrucks, kommt es zu einem Spannungsanstieg, der 50-60 % der Ausgangsspannung erreichen kann. Liegt das Ausgangsspannungsniveau σ_V schon dicht an der Elastizitätsgrenze[89], wird die äußere Belastung plastische Verformungen hervorrufen. Somit gilt es, diese Belastungsspitzen bei der Bemessung von pneumatischen Tragwerken unbedingt zu berücksichtigen.

[89] ETFE-Folienkissen werden üblicherweise für eine initiale Spannung von 8-12 N/mm² bemessen. Eine Spannungserhöhung um 50-60% übersteigt die elastische Grenze (s. Tabelle 3.3) von 15 N/mm².

Die obigen Untersuchungen gelten für ein Kissen mit relativ kleinem Luftvolumen. Der in Bild 4.50 dargestellte Zusammenhang zeigt den Einfluss der Kissengröße auf die in der oberen und unteren Folienlage eintretende Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$[90]. Wie zu erkennen ist, nimmt die prozentuale Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ der unbelasteten Folienlage mit steigendem Volumen langsam ab, wobei die obere belastete Folienlage eine wesentlich signifikantere Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ erfährt bis es zu einem kompletten Druckausfall der Folie bei gegebenem Innendruck p_i von 1 kN/m² und einer Auflast p_a auf Innendruckniveau bei einem Kissenradius von etwa 30 m kommt.

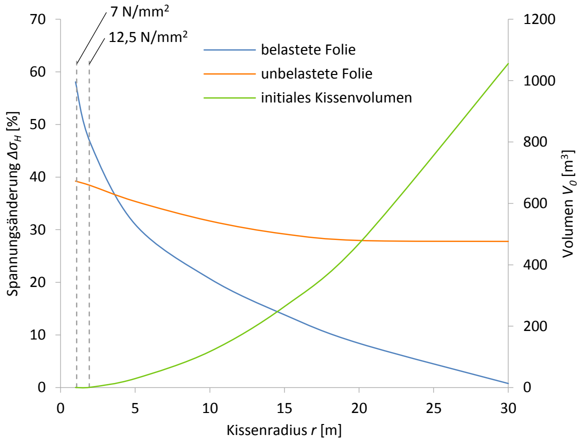


Bild 4.50: Einfluss der Kissengröße auf die Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ in oberer und unterer Folie eines 2-lagigen kreisförmigen Kissens bei einem Stich-/Spannweitenverhältnis 1/10 unter initialem Innendruck p_i von 1 kN/m² und einer Auflast $p_a = p_i$ und Darstellung des initialen Kissenvolumens V_0

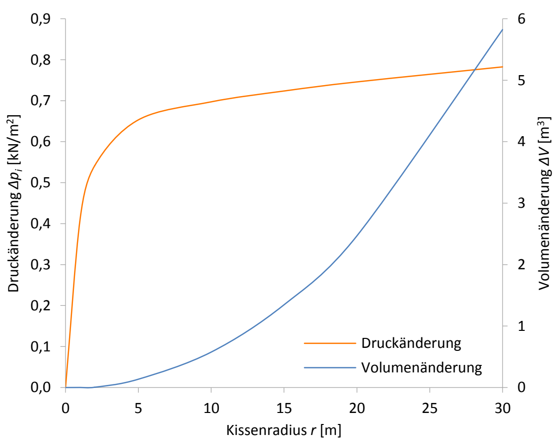


Bild 4.51: Einfluss der Kissengröße auf die Druck Δp_i- und Volumenänderung ΔV eines 2-lagigen kreisförmigen Kissens bei einem Stich-/Spannweitenverhältnis 1/10 unter initialem Innendruck p_i von 1 kN/m² und einer Auflast $p_a = p_i$

Ebenfalls dargestellt sind im Diagramm in Bild 4.51 die Änderung des Innendrucks Δp_i und die Volumenänderung ΔV des gleichen kreisförmigen Kissens. Hier ist ersichtlich, warum die Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ der unteren Lage eine Konvergenz aufzeigt. Ab einem Kissenradius r von ca. 5 m kommt es lediglich zu einer leichten linear verlaufenden Druckänderung Δp_i. Da der veränderte Innendruck p_i die alleinige Belastung der unbelasteten Folienlage darstellt, erfährt diese eine kaum noch wahrnehmbare Laststeigerung. Die Spannungsänderung $\Delta\sigma_H$ der unbelasteten Folienlage bis zum annähernden Druckausfall der belasteten Folienlage unter den hier gegebenen Geometrie- und Materialvorgaben liegt bei etwa 27,5 %. Die mittragende Wirkung der unbelasteten Folienlage nimmt zwar mit steigender Kissengröße (Volumenzunahme) ab, kann aber auch bei der Bemessung von großen Kissen nicht komplett ignoriert. Dies gilt für den hier untersuchten Fall einer konstanten ganzseitigen Flächenauflast.

In Bild 4.50 sind zudem die für die Bemessung von Kissen relevanten Spannungen σ_H von 7 N/mm² und 12,5 N/mm² eingetragen, wie sie sich für die vorgegebene Geometrie des hier untersuchten Kissens ergeben. Somit ergibt sich für ein kreisförmig berandetes Kissen mit einer Folienspannung σ_H von 7 N/mm² und einer Stich-/Spannweitenverhältnis f_H/l von 1/10 ein maximaler Kissenradius r von 1,08 m. Lässt man eine Folienspannung σ_H von 12,5 N/mm² zu, ergibt sich unter gleichen geometrischen Randbedingungen ein Kissenradius r von 1,92 m. Möchte man größere Spannweiten realisieren und die maximal zulässigen Spannungen dennoch auf genanntem Niveau halten, lässt sich dies nur durch ein größeres Stich-/Spannweitenverhältnis f_H/l oder einen kleineren Innendruck p_i realisieren.

[90] Hierfür wurden die in Tabelle 4.8 zusammengestellten Gleichungen verwendet.

4.4.3 Quadratisches Kissen

Parallel zum ausführlich numerisch, analytisch und versuchstechnisch betrachteten kreisförmigen Kissen wurde ebenfalls ein quadratisches Kissen untersucht. Für die Versuche wurde der gleiche Versuchsaufbau verwendet wie in Bild 4.30 dargestellt. Die Kantenlängen und der initiale Zuschnitt des Quadrates wurde so festgelegt, dass sich numerisch unter gleichem Innendruck p_i und gleicher initialer Folienspannung σ_V der selbe initiale Stich f_H wie beim kreisförmigen Kissen einstellt (s. Abs. 4.4.2).

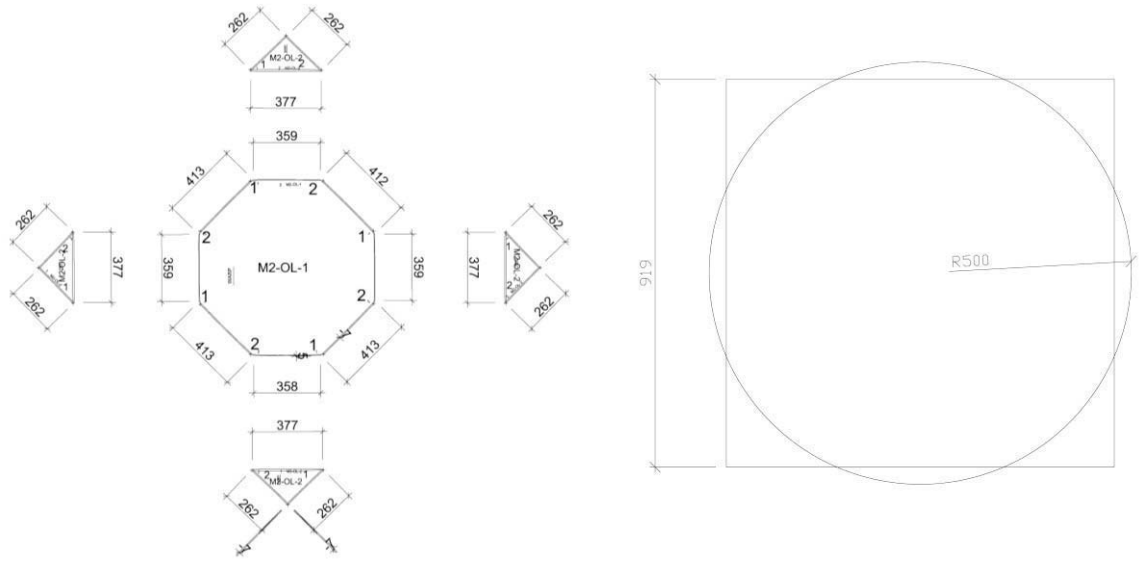


Bild 4.52: Quadratisches Kissen - Zuschnitt und Größenvergleich mit dem zuvor untersuchten kreisförmigen Kissen [mm]

Der für die Herstellung der Kissen notwendige Zuschnitt erfolgte wie in Bild 4.52 links dargestellt. Um ein möglichst gleichmäßiges Verformungsverhalten zu gewährleisten, wurde dieser doppelt-symmetrisch gewählt. Der initiale Innendruck p_i wurde wiederum mit 1 kN/m^2 (10 mbar) eingestellt. Die Darstellung der z-Koordinaten der Ausgangslagen sind den Bildern 4.53 und 4.54 zu entnehmen. Leider konnte wiederum nicht exakt der gleiche Stich f_H beim Einbau der Folien erreicht werden, was dann zu unterschiedlichen initialen Spannungsniveaus σ_V in den jeweiligen Lagen führte.

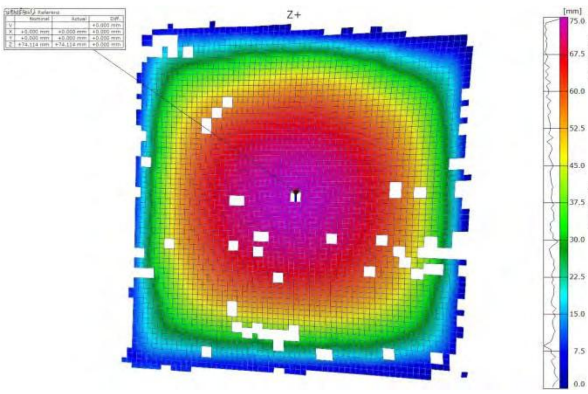


Bild 4.53: Darstellung der initialen z-Koordinate der später belasteten Seite [mm]

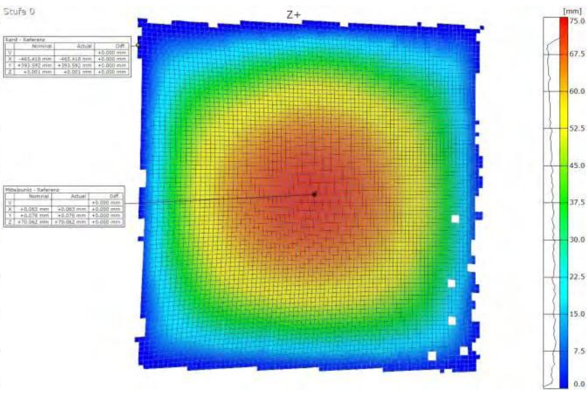


Bild 4.54: Darstellung der initialen z-Koordinate der später unbelasteten Seite [mm]

Die initiale Vorspannung σ_V ergibt sich nach Gleichung (4–1)[91] aus dem Innendruck p_i und dem gemessenen Stich f_H beider Seiten (s. Tabelle 4.11).

[91] Der notwendige Radius r des äquivalenten Kreises kann über den Größenvergleich Bild 4.52 rechts ermittelt werden und dann mit Gleichung (4–1) die theoretische Vorspannung σ_V genähert werden.

Tabelle 4.11: Initialer Stich f_H beider Folienlagen und abgeleitete theoretische und numerisch simulierte Vorspannung σ_V bei initialem Innendruck p_i von 1 kN/m² (10 mbar)

	f_H [mm]	$\sigma_{V,anal}$ [92] [N/mm²]	$\sigma_{V,num}$ [93] [N/mm²]
belastet	74,1	4,31	4,42
unbelastet	70,1	4,55	4,42

Wie nah diese theoretische Näherung der dann ebenfalls numerisch simulierten Vorspannung σ_V kommt, ist aus Tabelle 4.11 ersichtlich.

Mit diesen initialen Systemen (versuchstechnisch und numerisch) wurde der Lastabtrag des Kissens untersucht, ähnlich wie zuvor beim kreisförmigen Kissen. Der wesentliche Unterschied zum zuvor untersuchten kreisförmigen Kissen liegt in der Belastungshöhe des in der Druckkammer erzeugten Gegendrucks p_a. Hier sollte sowohl numerisch als auch versuchstechnisch der Druckausfall der oberen Folie erreicht werden, indem die Laststeigerung auf die zuvor theoretisch ermittelte Verdoppelung (Abschnitt 4.4.2 → Zusammenführung) gegenüber dem vorgehaltenen Innendruck p_i von 1,0 kN/m² erfolgte.

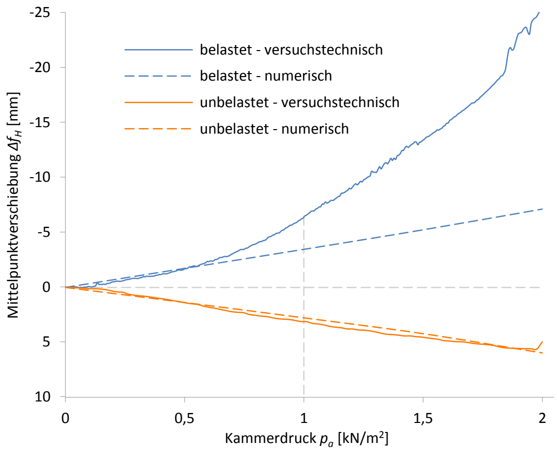


Bild 4.55: Verschiebung Δf_H [mm] der Mittelpunkte der belasteten und unbelasteten Folienlage bis zu einer Verdopplung der Auflast p_a gegenüber des initial vorgehaltenen Innendruckes p_i – versuchstechnisch und numerisch

Vergleicht man die Verschiebungen Δf_H der einzelnen Lagen an den signifikanten Stellen $p_a = 1{,}0\ kN/m^2$ und $p_a = 2{,}0\ kN/m^2$ ergibt sich die Zusammenstellung in Tabelle 4.12. Dabei ist der annähernd gemeinsame Lastabtrag bis zum Niveau $p_a = p_i$ zu erkennen mit dem gleichen Verhalten, wie es in Bild 4.36 für das kreisförmige Kissen bereits dargestellt ist. Kommt es zu einer weiteren äußeren Laststeigerung, erfährt die obere belastete Lage gegenüber der unbelasteten unteren Lage eine überproportional größere Verformung. Dies ist ausschließlich mit der Undichtigkeit[94] des Kissens zu begründen, was allerdings nur Einfluss auf die Verformungen der belasteten Seite hat.

---

[92] Die theoretischen Spannungen in den Folien wurden über die Formeln (4–1) ff. ermittelt.

[93] Zum Einstellen des numerischen Systems wurden die gemessenen Stiche f_H auf 72,1 mm gemittelt und die Vorspannung σ_V entsprechend angepasst.

[94] Die Undichtigkeit des Kissens lag um einiges höher als beim kreisförmigen Kissen.

Tabelle 4.12: Stichänderung Δf_H beider Folienlagen des versuchstechnischen und numerischen Modells bei Gegendruck von $p_a = p_i$ und $p_a = 2p_i$

		$f_{H,gem}$ [mm]	$f_{H,num}$ [mm]
belastet	$p_a = p_i$	6,50	3,47
	$p_a = 2p_i$	25,17	7,14
unbelastet	$p_a = p_i$	3,11	2,77
	$p_a = 2p_i$	5,63	5,97

Die unbelastete Seite verhält sich annähernd linear, wie dies die Auswertung am kreisförmigen Kissen und der begleitenden numerischen Simulation am quadratischen Kissen ebenfalls zeigen. Somit muss der Innendruck p_i in gleicher Weise zunehmen, wie dies für die Verformung der unteren Lage notwendig ist. Laut numerischer Simulation verdoppelt sich der Innendruck p_i bei $p_a = 2p_i$ (s. Bild 4.56).

```
QUAD-Volumen Ergebnisse  (VOLU)
Lastfall        3    belastung
   Nr          V0     V-PLF      V-now     P-PLF   P-Start      P-now  area-PLF  area-now
             [m3]      [m3]       [m3]   [kN/m2]   [kN/m2]    [kN/m2]     [m2]      [m2]
    1       0.019     0.077  →   0.076      1.00      1.00  →    2.06     1.722     1.722
        P: positive Werte = Druck
        P-Start = P-PLF + k*DP/V-PLF + k*DT*alphaT    mit k=Kompressionsmodul
```

Bild 4.56: Auszug aus dem Berechnungsprotokoll und Darstellung der Druck- bzw. Volumenänderung für die numerisch simulierte einseitige Belastung des quadratischen Kissens

Die zugehörigen gemessenen und numerisch ermittelten Verformungen u_z des gesamten Kissens für den Zustand $p_a = 2p_i$ der belasteten und unbelasteten Lage sind in den Bildern 4.57 bis 4.60 dargestellt.

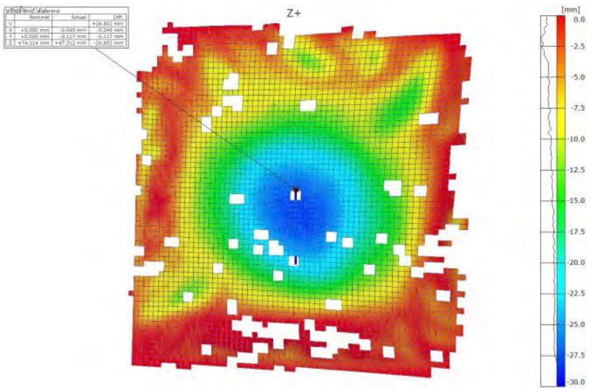


Bild 4.57: Verschiebungen $u_{z,gem}$ der belasteten Lage bei $p_a = 2p_i$ - versuchstechnisch

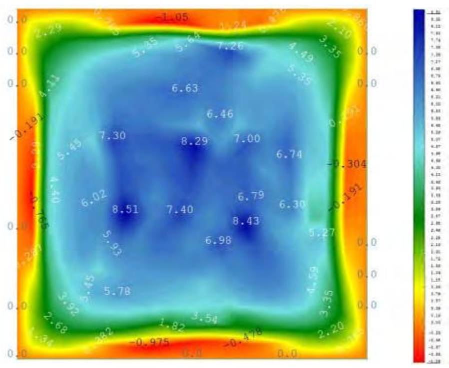


Bild 4.58: Verschiebungen $u_{z,num}$ der belasteten Lage bei $p_a = 2p_i$ - numerisch

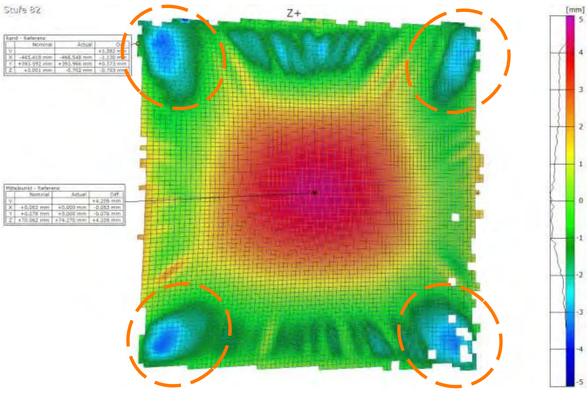


Bild 4.59: Verschiebungen $u_{z,gem}$ der unbelasteten Lage bei $p_a = 2p_i$ - versuchstechnisch

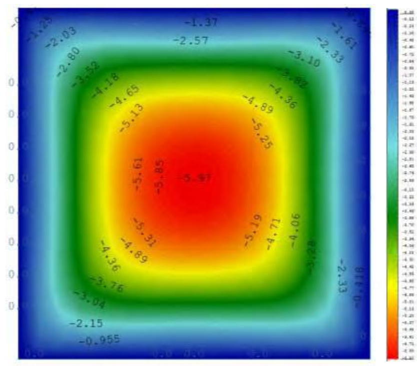


Bild 4.60: Verschiebungen $u_{z,num}$ der unbelasteten Lage bei $p_a = 2p_i$ - numerisch

Das numerische Modell kann bei weitem nicht die Faltenbildung am Rand und das sich ausbildende Plateau in Kissenmitte simulieren. Insbesondere das Einbrechen (s. Bild 4.59 – orange gestrichelte Linie) an den Ecken der sich verformenden unbelasteten Seite des Kissens, mit einer der Gesamtverformung entgegengesetzten negativen Richtung, ist überhaupt nicht numerisch erfasst. Die Faltenbildung der belasteten Seite ist in Bild 4.62[95] gegenüber Bild 4.61[96] sehr gut zu erkennen.

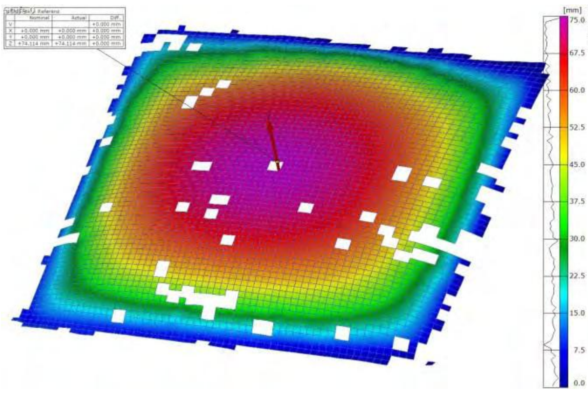


Bild 4.61: Perspektivische Darstellung der globalen z-Koordinate der initialen belasteten Folienlage - versuchstechnisch

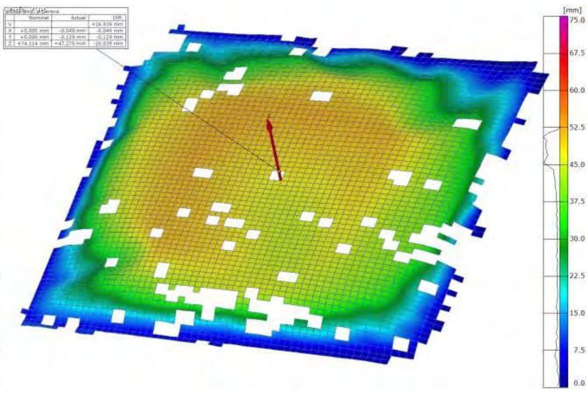
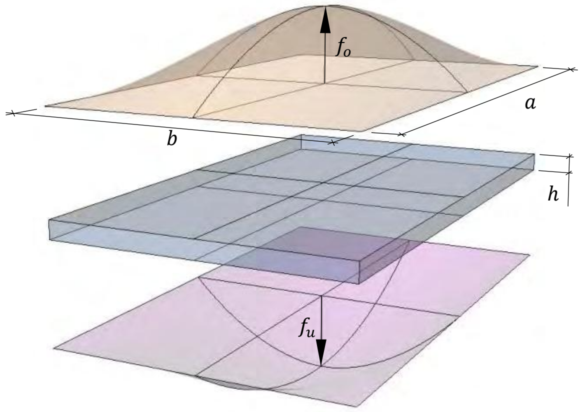


Bild 4.62: Perspektivische Darstellung der globalen z-Koordinate der verformten belasteten Folienlage - versuchstechnisch

Insgesamt können mit den Versuchen und Berechnungen am quadratischen Kissen die Aussagen in Abschnitt 4.4.2 bestätigt werden. Daher wird auf eine ausführliche analytische Untersuchung verzichtet, die Volumengleichung (4–38) der Vollständigkeit halber dennoch mit angegeben. Damit lassen sich, in gleicher Weise wie in Tabelle 4.8 gezeigt, der gekoppelte Lastabtrag und die gesuchten geometrischen Änderungen ermitteln.

95 Darstellung der globalen z-Koordinate der belasteten Seite bei $p_a = 2p_i = 2\ kN/m^2$

96 Darstellung der globalen z-Koordinate der später belasteten Seite bei $p_a = 0\ kN/m^2$



$$V_{r,o/u} = \frac{4}{9} ab f_{o/u} \tag{4–36}$$ [97]

$$V_Q = abh \tag{4–37}$$

$$V_{rK} = ab \cdot \left[\frac{4}{9}(f_o + f_u) + h\right] \tag{4–38}$$

Bild 4.63: Schichtmodell und Volumengleichungen eines beidseitig mit h beabstandeten rechteckig berandeten Kissens

4.5 Zusammenfassung

Die drei Bausteine pneumatischer Konstruktionen sind Hülle, Medium und Rand. Bezüglich der Hülle wurden in diesem Kapitel die prinzipiell notwendigen Eigenschaften und die Möglichkeiten der Formgebung im Zusammenspiel mit dem Rand, dem gewählten Stützmedium und dem initialen Zuschnitt ausgearbeitet. Der Rand selbst, der für das Funktionieren des Pneus zunächst nicht notwendig ist, wurde bereits in Kapiteln 3 behandelt.

Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt in der Beschreibung des grundsätzlichen Prinzips und des prinzipiellen Lastabtrags. Dabei wurde der wesentliche Unterschied bezüglich des Lastabtrages für kurzzeitige und permanente Belastungen deutlich. Dabei ergibt sich für kurzzeitige Belastungen ein völlig anderes Traglastverhalten als dies gegenwärtig Beachtung findet. Welche systemgegebenen Laststeigerungen auftreten und wie sich die Belastungen der Hülle im Zusammenspiel mit dem Stützmedium ergeben, konnte sowohl numerisch, analytisch als auch versuchstechnisch ausgearbeitet werden. Dabei zeigte sich im Wesentlichen, dass das Verformungsverhalten sowohl numerisch als auch analytisch zu ermitteln ist und diese Werte auch im Bereich der Messergebnisse liegen, aber dennoch die versuchstechnisch gewonnenen Verformungsbilder eine weitaus größere Aussagekraft besitzen.

[97] Herleitung der Formel im Anhang Kap. A.2

5 Transformation und Adaptierbarkeit von Folienkissen

Transformation unterteilt sich in Bewegung und Deformation (Bild 2.1). In dieser Begrifflichkeit verbleibend sollen auch bewegte und deformierbare[98] bzw. formverändernde Folienkissen unterschieden werden. Daher erfolgt eine kurze Zusammenstellung aktueller und historischer Projekte, bei denen die Bewegung und auch Formveränderung von Tragwerksteilen realisiert wurden.

Schwerpunkt aber ist die Steuerung der Formveränderung des Elements Pneu mit seinen drei Bausteinen Rand, Hülle und Medium. Das Medium Luft bildet das Steuerelement, wobei es gilt den formgebenden Baustein Rand so zu auszugestalten, dass er für die daran angeschlossene Hülle materialkonforme Bewegungen vorgibt. Dazu werden sowohl kinetische, biegeweiche und daraus abgeleitete hybride Systeme vorgestellt und diskutiert.

5.1 Bewegte Folienkissen

Dass pneumatische Gebilde dazu prädestiniert sind, bewegt zu werden, liegt an der konstruktionsbedingten unschlagbaren Leichtigkeit. Daher ist es eigentlich verwunderlich, dass diese bisher nur in wenigen Bauvorhaben realisiert wurden. Projekte, in denen bewegte Folienkissen realisiert wurden, gehen dabei allerdings nur soweit, dass sie die Kissen als Starrkörper verschieben oder rotieren. Lediglich einige wenige Projekte konnten realisiert werden. Tabelle 5.1 zeigt fünf solcher Projekte, wobei vier davon vom Büro schlaich bergermann und partner und eines als Versuchsbau der Universität Stuttgart am Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen unter damaliger Leitung von Prof. Dr. Bernd Kröplin. In chronologischer Reihenfolge sind diese in den Bildern 5.1 bis 5.5 in der Tabelle 5.1 mit einer kurzen Beschreibung der wesentlichen Eigenschaften zusammengestellt. Bei allen realisierten Projekten handelt es sich ausschließlich um Dachtragwerke.

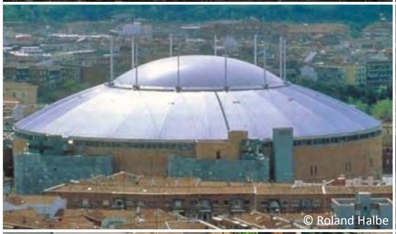
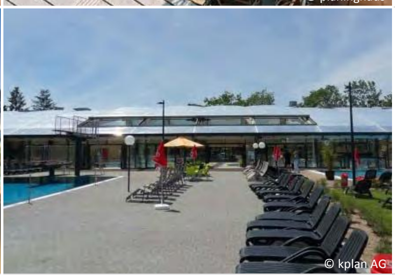
Das mit Abstand leichteste Tragwerk stellt das in Bild 5.1 dargestellte Helion dar. Es musste am Boden befestigt werden, damit es nicht wegschwebt, da es mit Helium gefüllt war. Es diente als Hangar für das ebenfalls mit Helium gefüllte Luftschiff „Lotte“. Zum Schließen und Öffnen des Daches stellen sich 12x2 ebenfalls mit Helium gefüllte Kegel wie Tortenstücke auf und werden zum Schließen wieder nach unten gezogen. Dabei werden die bewegten Teile nicht verformt, sondern lediglich um die Basis des sich im Aufriss ergebenen gleichschenkligen Dreiecks rotiert.

Alle weiteren realisierten beweglichen pneumatischen Tragwerke sind Projekte, bei denen die Bewegungen der Bauwerksteile rein translatorisch sind. Lediglich die Bewegungsrichtung unterscheidet sich hinsichtlich der Erdanziehungsrichtung.

Die Beispiele zeigen das Potential pneumatischer Gebilde nur in Hinsicht der Leichtigkeit, nutzen aber nicht, wie dies bereits bei anderen Leichtbaukonstruktionen geschieht, die Möglichkeiten der Formänderung.

[98] Der Begriff der Deformation ist in den Augen des Autors zu passiv und nicht im Sinne der Motivation dieser Arbeit eine aktiv eingeleitete Verformung einzuprägen.

Tabelle 5.1: Chronologische Zusammenstellung realisierter Bauvorhaben mit bewegten pneumatisch gestützten Tragwerksteilen

Dach geschlossen	Dach geöffnet	Beschreibung
		Bild 5.1: Helion Ort: Stuttgart, Deutschland Jahr: 1993 Größe[99]: ~700 m^2 MP[100]: 12 Quelle: [Kröplin 2007]
		Bild 5.2: Gerry-Weber-Stadion Ort: Halle, Deutschland Jahr: 1994 Größe[99]: 1400 m^2 MP[100]: 2 Quelle: [Göppert 2005]
		Bild 5.3: Centro Integrado de Vista Alegre Ort: Madrid, Spanien Jahr: 2000 Größe[99]: 1960 m^2 MP[100]: 1 Quelle: [Schlaich 2000]
		Bild 5.4: Dach Gießhalle Ort: Duisburg, Deutschland Jahr: 2003 Größe[99]: 580 m^2 MP[100]: 9 Quelle: [sbp 2013]
		Bild 5.5: Sport- und Wellnessbad Ort: Kelsterbach, Deutschland Jahr: 2010 Größe[99]: 504 m^2 MP[100]: 1 Quelle: [sbp 2013]

Die Möglichkeit der Formänderung versteht sich dabei nicht als eine ungewollte Deformation, sondern folgt den in Tabelle 2.5 bereits zusammengestellten Verformungen, insbesondere den dehnungslosen Verformungen von abwickelbaren Objekten des $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Die Analogie der bewegten Massepunkte kann aber auch hier herhalten, wobei nicht mehr für jeden Punkt zu jeder Zeit während der Bewegung eine genaue Lage vorherbestimmt werden kann und es sich im Gegensatz zu den Projekten in den Bildern 5.1 bis 5.5 um unzählige Massepunkte (MP) handelt. Sehr gut lässt sich dies beispielsweise am verfahrbaren Dach der Commerzbank-Arena in Frankfurt erläutern. Eine exakte Vorhersage des beschriebenen Verfahrweges lässt sich nur noch

[99] Hier wird nur die Größe des bewegten Teiles des Daches angegeben.

[100] MP: Massepunkt(e)

für die Zwangspunkte der Membran an der Verfahrschiene erstellen. Wie sich der Rest der Membran verhalten wird, ist zwar im Groben verhersagbar (numerische Simulation - Bild 5.6 links, Faltmodell - Bild 5.6 rechts), aber letztlich nur über Versuche an Prototypen verifizierbar.

Bild 5.6: Numerische Simulation der Faltung und reales Faltenbild des inneren verfahrbaren Membrandaches der Commerzbank-Arena in Frankfurt [Göppert 2007]

Hier kann bereits eine Überleitung auf ein aktuelles Projekt erfolgen Für das neu zu errichtende Stadion[101] in Vancouver konnte ein verfahrbares, aus aufblasbaren Kissen bestehendes inneres Membrandach realisiert werden. Dabei wird der für die Stabilisierung der Kissen bei geschlossenem Dach notwendige Überdruck für das Öffnen des Daches abgelassen. Die dann schlaffe Hülle wird wiederum, wie beim Stadion in Frankfurt, an Seilen verfahren und im Dachzentrum verstaut (s. Bild 5.8).

Bild 5.7: Stadion BC Place, Vancouver, Canada – verfahrbares pneumatisches Innendach 8500 m^2

Neben den für den Lastabtrag notwendigen Berechnungen wurde ein sehr aufwendiger Mock-up für die Tests der faltbaren Kissenkonstruktion erstellt. Das Material Tenara[102], das diese Faltung zum Zentrum zulässt und zudem die Luftdichtheit gewährleistet, konnte von der Firma Sefar zur Verfügung gestellt werden.

---

101 Das alte BC Place in Vancouver war ebenfalls ein pneumatisches Tragwerk, war aber als Traglufthalle mit Seilnetzunterstützung konzipiert. Im Jahre 2007 kam es zu einer Beschädigung der Membran aufgrund von großen Massen an Nassschnee auf dem Dach. Das Dach konnte im selben Jahr repariert werden, wurde dann allerdings zwischen 2009 und 2011 erneut umgebaut.

102 Tenara – ePTFE Gewebe mit PTFE Beschichtung

Bild 5.8: BC Place Stadium - Faltung der Membran des pneumatischen Innendaches zum Zentrum

Bild 5.9: BC Place Stadium – Dachaufsicht des pneumatisch gestützten Innendachringes

Ein weiteres Beispiel eines pneumatisch gestützten Dachtragwerks, das zum Verfahren den Überdruck aus den Kissen nimmt, befindet sich in Toyota Stadt, Japan. Hier wird allerdings die Hülle der Kissen nicht gefaltet verstaut, sondern die Kissen werden „platt" in ihrer vollen Länge zusammengeschoben und am Dachende geparkt.

Bild 5.10: Toyota Stadium, Toyota, Japan - verfahrbares pneumatisches Innendach 17420+5730 m^2 [Masubuchi 2013]

Ein wesentlicher Vorteil dieser beiden Varianten besteht darin, dass keine für das Dach notwendige Parkposition geschaffen werden muss, wie beispielsweise beim Dach des Sport- und Wellnessbades Kelsterbach (s. Bild 5.5), sondern die Dachhaut ihre Oberfläche „verkleinert" und damit eine Öffnung freigibt. Der Nachteil, der sich insbesondere beim Dachtragwerk in Vancouver darstellt, ist, dass während des Verfahrens das Dach extrem anfällig gegenüber äußeren Lasten wie Wind oder Regen ist. Das Innendach des BC Place in Vancouver beispielsweise kann während eines Regens oder heftiger Winde nicht geöffnet oder geschlossen werden, da dies zu einer Zerstörung des verfahrbaren Daches führen würde. Die Zeit für das Öffnen oder Schließen des Daches liegt bei ca. 20 Minuten. Ein spontanes Reagieren auf sich verändernde Wetterverhältnisse ist so kaum möglich. Genau hier setzen die im folgenden Abschnitt erläuterten Lösungen an.

5.2 Pneumatische Formveränderung

5.2.1 Grundprinzip

Ausgehend von den drei Bausteinen pneumatischer Gebilde und den in den Kapiteln 2 bis 4 zusammengetragenen Erkenntnissen werden im Folgenden Möglichkeiten für Transformationen ausgearbeitet. Jede Transformation, ob Bewegung oder Verformung, braucht eine sie hervorrufende Kraft. Um diese Kraft zu erzeugen, bedarf es eines Bewegers. Solche Beweger sind klassisch Motoren, die durch die Gruppe der Aktoren ergänzt werden. Motoren wandeln thermische, chemische oder elektrische Energie in Bewegungsenergie um und verrichten somit mechanische Arbeit. Aktoren hingegen erzeugen eine mechanische Bewegung oder physikalische Größenänderung aufgrund eines elektrischen Signals, vollführen also eine Zustandsänderung, benötigen aber einen vorgehaltenen Energieträger. Zu ihnen gehören auch die hydraulischen und pneumatischen Aktoren.

Pneumatische Aktoren sind in der Lage, eine Kraft zu erzeugen, indem sie eine Bewegung über die Änderung der thermodynamisch verbundenen physikalischen Größen Druck p und Volumen V ermöglichen. Ein Beispiel für solch einen pneumatischen Aktor sind die von der Firma Festo hergestellten pneumatischen Muskeln bzw. Balgzylinder (Bild 5.11).

Bild 5.11: Pneumatischer Muskel und Balgzylinder der Firma Festo

Über eine Druckerhöhung kommt es zu einer Volumenverringerung (s. Gl. (4–14)). Da die Oberfläche des sich kontrahierenden Schlauches ebenfalls konstant ist (die elastischen Dehnungen werden zunächst nicht betrachtet), liegt hier die bekannte Extremwertaufgabe des kleinstmöglichen Volumens bei konstanter Oberfläche vor. Mathematisch ergibt sich dabei eine Kugel. Behindert man die Verformung allerdings so, dass es zu Versteifungen in definierten Richtungen der Oberfläche kommt, sind anderweitige Formen definierbar und damit auch die Richtung der gewollten Verkürzung bzw. Ausdehnung. Wichtig ist außerdem der exakte Zusammenhang zwischen der Form des Muskels und des innen vorhandenen Überdrucks. Im Umkehrschluss führt dies dazu, dass jede eingenommen Form sich über den Innendruck „einstellen“ lässt.

5.2.2 Historische und aktuelle Projekte

Dieses Grundprinzip wurde schon für einfache Konstruktionen im Niederdruckbereich angewendet. Die Weltausstellung 1970 in Osaka, Japan, stellte einen Höhepunkt pneumatischer Konstruktionen dar. Die Mehrzahl der ausgestellten Pavillons bediente sich des pneumatischen Prinzips. Darunter waren auch Sonnenschirme, bei denen im geöffneten Zustand die Membran per Überdruck stabilisiert wurde und im geschlossenen Zustand sich zentral nach oben am Mast zusammenfand. Das Öffnen und Schließen geschah dabei über die Seile, die die einzelnen Kissen am der Mastspitze zusammenführten.

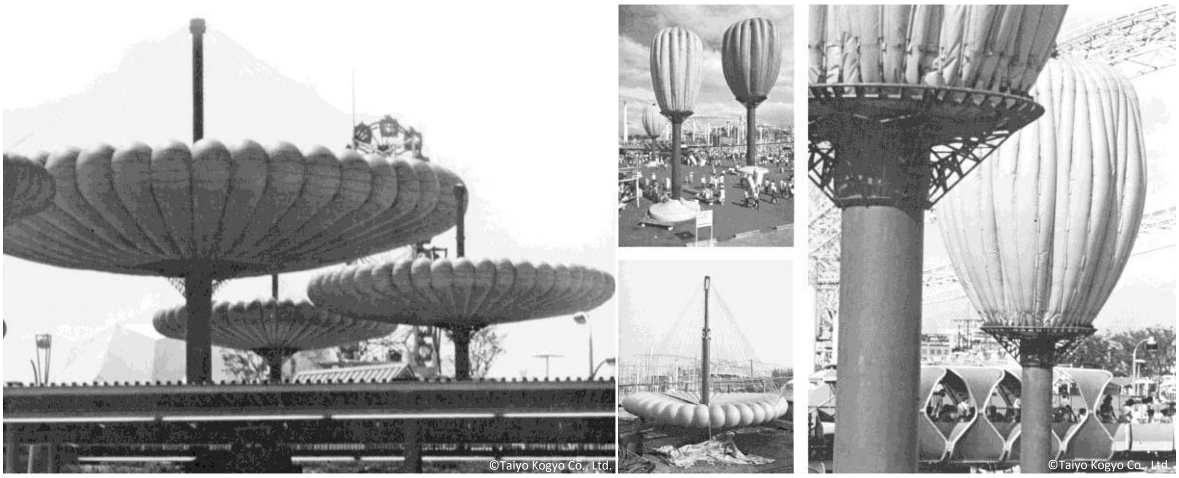


Bild 5.12: Pneumatisch gestützte Sonnenschirme der EXPO‘70 in Osaka, Japan [Herzog 1976]

Ein ähnliches Prinzip kommt in den bei Kindern beliebten Luftrüsseln vor (s. Bild 5.13 links). Frei Otto übernahm dieses Prinzip und skizzierte es als wandelbare Konstruktionen eines auskragenden Daches (s. Bild 5.13 rechts).

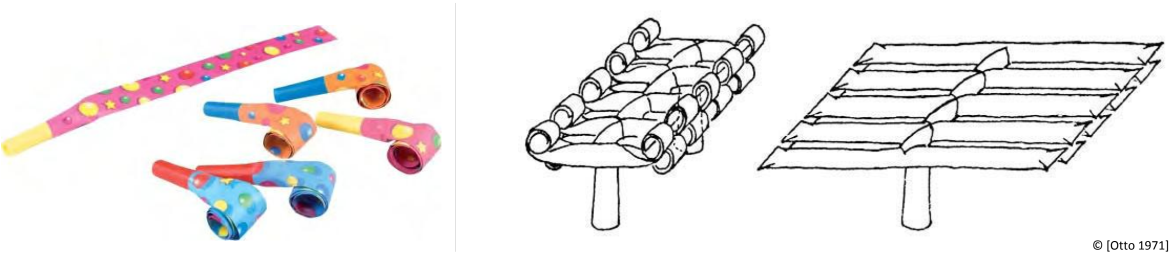


Bild 5.13: Luftrüssel mit integriertem Federdraht und skizzenhafte Übertragung des Prinzips auf ein wandelbares Dach [Otto, IL5 Wandelbare Dächer 1971]

Eine Bewegung über die Verformung des pneumatischen Tragwerks zu bewirken, konnte in zwei weiteren Projekten realisiert werden. Zum einen bei dem in Rülzheim im Jahre 1974 von der Firma Krupp aus Essen realisierten Freizeithaus „Dampfnudel“[103], das eine Luftkissenüberdachung mit einem Außendurchmesser von 36 Metern besaß, die sich beim Einblasen von Luft nach oben abhob und somit einen zusätzlichen Zugang der sich in der zweiten Etage befindlichen Galerie freigab. Nachdem 1983 die Membran durch einen Blitzeinschlag und 1993 durch einen Sturm zerstört wurde, erfolgte eine komplette Neukonstruktion auf altem Grundriss, allerdings mit einer starren Dacheindeckung aus Blechen.

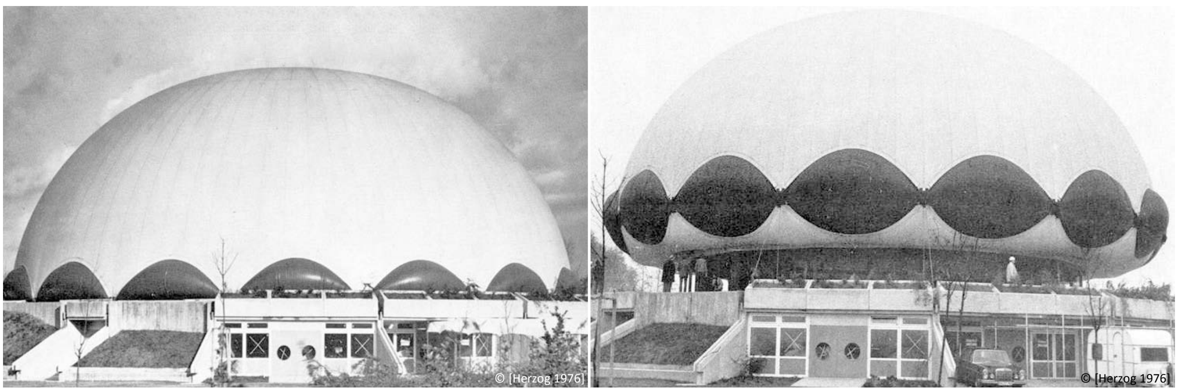


Bild 5.14: Freizeithaus "Dampfnudel" in Rülzheim, Deutschland mit Luftkissenüberdachung der Firma Krupp aus Essen

[103] Der Ausdruck Dampfnudel steht in diesem Fall nicht für einen kulinarischen Leckerbissen, wie er in der Pfalz verbreitet ist, sondern ist die volkstümliche Bezeichnung des Austragungsortes vieler kultureller Veranstaltungen in Rülzheim. [Rülzheim 2013]

Die Firma Airlight Ltd. realisierte in Zusammenarbeit mit der Firma Canobbio spa. auf Teneriffa ein aktuelles Projekt zur Überdachung eines Observatoriums, wobei allein über die Steuerung des Luftdruckes (ca. 100 mbar Überdruck) und das Eigengewicht der berandenden Stahlkonstruktion eine Öffnung freigegeben wird.

Bild 5.15: Observatorium in Teneriffa, Spanien, mit 14 gekrümmten Tensairity®[104], die mit 100 mbar Überdruck geschlossen und durch Eigengewicht geöffnet werden

Dabei werden 14 gekrümmte Tensairity® als Halbkugel angeordnet und gemeinsam auf der Achse des Durchmessers der Halbkugelschale bewegt. Zum Einsatz kam eine Polyester/PVC Membran.

Allen diesen Projekten ist gemeinsam, dass die sichtbare Bewegung aus einer Veränderung des Innendruckes p_i erfolgt. Der Energieträger Druckluft aber, wie eingangs erläutert, muss erst von einem Kompressor (Motor) erzeugt werden. Somit gehören die luftdruckgesteuerten Kissen zur Gruppe der Aktoren und nicht zu den Motoren.

[104] Tensairity® ist ein eingetragenes Markenzeichen der Firma Airlight Ltd.. Der wesentliche Aufbau ist durch ein im Obergurt der Luftröhre befindlicher Druckstab und zwei gegensinnig spiralförmig umlaufende Seile, die in Balkenmitte am Ort des maximalen Moments den Untergurt bilden, beschrieben.

5.3 Formverändernde Folienkissen

Dieses Prinzip soll nun auf moderne Folienkissenkonstruktionen angewendet werden. Zunächst gilt es das Grundprinzip am Querschnitt der theoretisch unendlich langen Röhre zu erläutern[105]. Die Behinderung der Bewegung durch die allseitige Berandung und die entwickelten Lösungen zum Umgehen dieses Problems werden in späteren Abschnitten erläutert[106].

5.3.1 Grundprinzip – unendliche Röhre

Der Querschnitt eines Kissens (Bild 5.16) zeigt mindestens zwei, bei flachen Stichen, fast parallele Folienlagen. Diese geben den Umfang U_H des Hüllenquerschnittes vor und beschreiben in der bekannten Form eines Kissens einen flachen linsenförmigen Querschnitt. Der Umfang U_H kann maximal die Größe $2b$ annehmen (s. Bild 5.16 rechts).

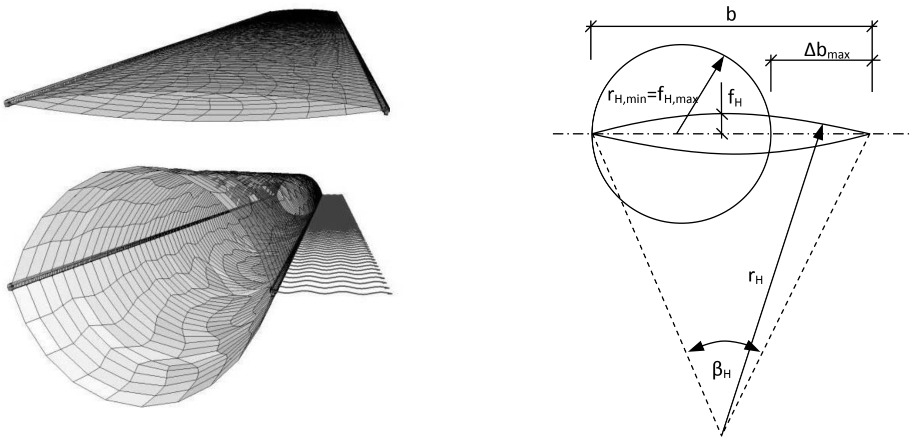


Bild 5.16: Grundprinzip der Formänderung vom linsenförmigen zum kreisrunden Kissenquerschnitt mit Bezeichnung der relevanten Größen

Der einfache geometrische Zusammenhang zwischen Linse L und Kreis K ist in den Formeln (5–1) bis (5–5) dargestellt.

$$U_{L,max} = 2 \cdot b \tag{5–1}$$

$$U_K = 2 \cdot r_{min} \cdot \pi \tag{5–2}$$

$$U_L = U_K \tag{5–3}$$

$$2 \cdot b = 2 \cdot r_{min} \cdot \pi \tag{5–4}$$

$$\Delta b_{max} = b - \frac{2}{\pi} \approx 36\% \tag{5–5}$$

Die maximale Bewegung, also auch potentielle Öffnung, für ein zweilagiges Kissen beträgt ca. 36 %. In Bild 5.17 sind die Zusammenhänge zwischen der Stichänderung und dem Flächeninhalt A_L, der sich nach Gleichung (5–6) ergibt, und der vom Kissen erzeugten Horizontalkraft H, die sich nach Gleichung (5–7) berechnet, dargestellt. Die einzige Konstante bei dieser Verformung ist der Umfang U_L des Querschnittes. Alle anderen Größen müssen aus diesem abgeleitet werden.

---

105 Die Hülle der unendlich langen Röhre ist nur einachsig gekrümmt und gehört damit zu den abwickelbaren Flächen.

106 Die allseitige Berandung führt zu Bereichen doppelter Krümmung, die nicht mehr abwickelbar sind.

$$A_L = 2 \cdot \left[r_H^2 \cdot arccos\left(1 - \frac{f_H}{r_H}\right) - \sqrt{2r_H f_H - f_H^2} \cdot (r_H - f_H) \right] \tag{5–6}$$

$$H = p_i \cdot r_H \cdot cos\left(\frac{\beta_H}{2}\right) \tag{5–7}$$

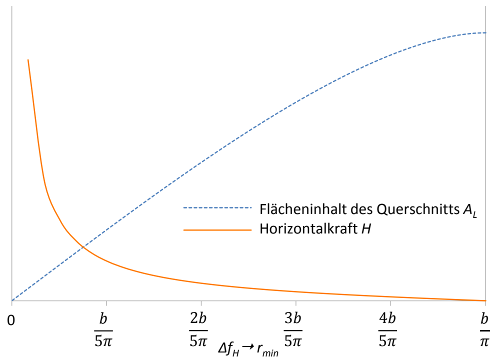


Bild 5.17: Zusammenhang zwischen Stichänderung Δf_H und Flächeninhalt A_L des Querschnitts bzw. Horizontalkraft H des zweilagigen Kissens

Sowohl die Änderung der Querschnittfläche A_L als auch der Horizontalkraft H beschreiben einen nicht-linearen Zusammenhang zur Änderung des Stiches f_H. Die Horizontalkraft H bricht dabei bereits im ersten Fünftel des Verlaufes ein und konvergiert dann im Zuge der Annäherung an den Vollkreis auf null.

Um das geringe Maß der Verformung zu erhöhen, kann eine geometrische Steigerung erreicht werden, in dem Kissen mit mehr als zwei Lagen verwendet werden. Ohnehin sind bei aktuellen Konstruktionen drei- bzw. vierlagige Kissen[107] üblich. Allerdings gilt es die einzelnen Lagen dabei derart zu verbinden, dass es zusätzlich zur geometrischen Veränderung des gesamten Kissens zusätzlich zu einer Verkürzung des Umfangs kommt. Theoretisch sind endlos viele Lagen hinzufügbar, aber sowohl mathematisch (s. Gl. (5–8)) als auch baupraktisch sind der Theorie durch geometrische Konvergenz und praxistauglichen Zusammenbau Grenzen gesetzt.

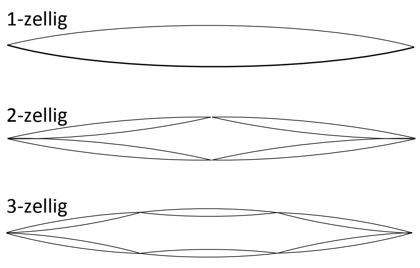


Bild 5.18: Anordnung der Kissenunterteilung in Reihe

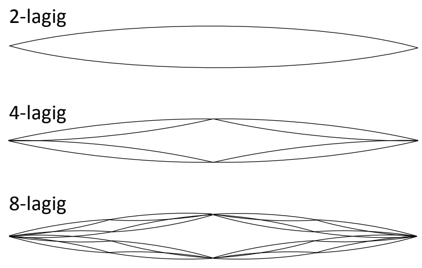


Bild 5.19: Anordnung der Kissenunterteilung parallel

Der Zusammenhang zwischen Anzahl n der Lagen und der maximalen Verformung bzw. Öffnung Δb_{max} ist im Diagramm im Bild 5.20 dargestellt. Dabei ergibt sich für die parallele Anordnung (s. Bild 5.19) der in Gleichung (5–8) gezeigte Zusammenhang[108].

---

[107] Alle bauphysikalisch relevanten Konstruktionen werden aktuell mit vierlagigen Kissen ausgeführt (z.B. Projekt Kelsterbach - [sbp 2013]).

[108] Dieser Zusammenhang ist rein theoretisch und berücksichtigt nicht die tatsächlichen geometrischen Überschneidungen der einzelnen Lagen.

$$\Delta b_{max} = b - \left(\sqrt[n]{2}\right)^2 \cdot \frac{b}{\pi} \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta b_{max} = b - \frac{b}{\pi} \quad \rightarrow \quad \approx 68\ \% \tag{5–8}$$

Für ein 4-lagiges Kissen ist eine maximale Öffnung von ca. 55 % möglich. Eine weitere Verdoppelung der Anzahl der Lagen steht dann in keinem Verhältnis mehr zur Erhöhung der maximal möglichen Öffnung, zumal jede Kammer separat mit Druckluft gefüllt werden müsste und diese sich zudem noch in der Druckhöhe unterscheiden müssen.

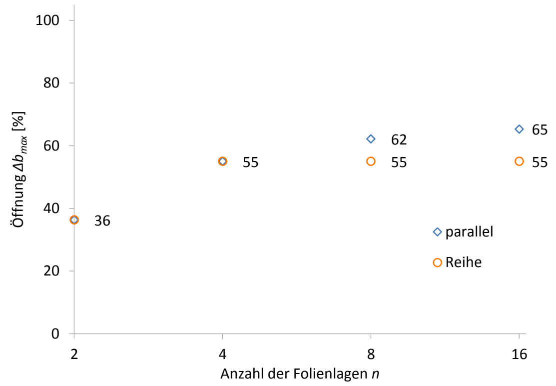


Bild 5.20: Vergleich der maximalen Kissenöffnung Δb_{max} für Anordnung in Reihe bzw. parallel

Um hier einen geometrischen Vergleich anstellen zu können, sind in den Bildern 5.21 bis 5.24 die Ausgangs- und Verformungsbilder für ein mit Anordnung in Reihe 8-zelliges bzw. parallel 8-lagiges Kissen dargestellt.

Bild 5.21: Startgeometrie eines achtzelligen in Reihe angeordneten Kissens

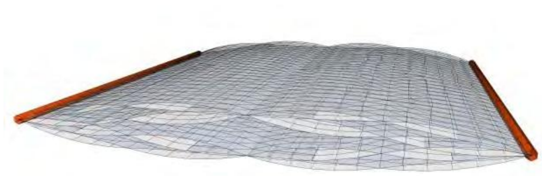


Bild 5.22: Startgeometrie eines achtlagigen parallel angeordneten Kissens

Bild 5.23: Verformungsbild eines 8-zelligen in Reihe angeordneten Kissens

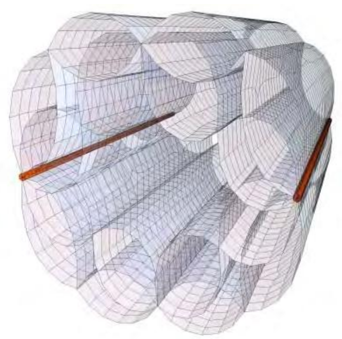


Bild 5.24: Verformungsbild eines 8-lagigen parallel angeordneten Kissens

Der Gewinn an Öffnung bei paralleler Anordnung beträgt ca. 7 %, ist aber mit einem erheblichen Mehraufwand bezüglich Lagenverbindungen und Luftzufuhr zu den einzelnen Kammern verbunden. Wie sich die Innendrücke der einzelnen Lagen unterscheiden müssen, damit es zu einer maximalen Verformung kommt, wird am Beispiel des vierlagigen Kissens demonstriert. Dazu wurde ein Schnittmodell eines 4-lagigen Kissens numerisch mit dem Programm Sofistik simuliert.

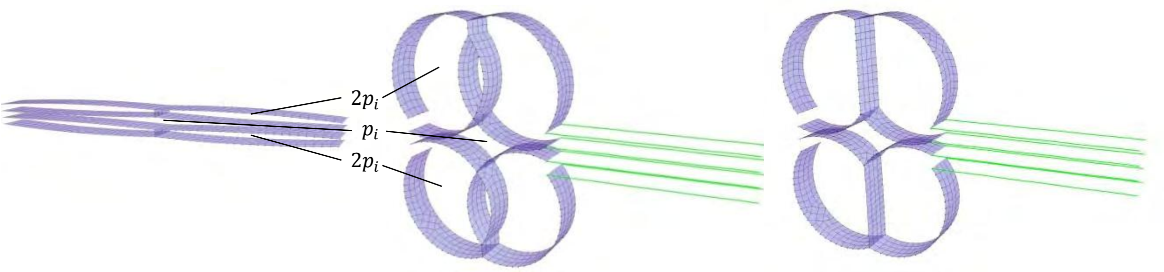


Bild 5.25: Vierlagiges Folienkissen in Ausgangs-, numerischer und wirklicher Verformungsgeometrie mit Angabe der in den Kammern herrschenden relativen Innendrücke p_i und Kennzeichung des Verformungsweges

Grün gekennzeichnet sind der Verformungsweg von ca. 55 % des 4-lagigen Kissens und die in den Kammern eingebrachten Druckunterschiede. Bei der numerischen Simulation kommt es zu nicht realistischen Überschneidungen der inneren Folienlagen. Diese Folien würden sich in Wirklichkeit aneinanderlegen. Dies wurde im rechten Bild korrigiert. Somit ergeben sich Bereiche ohne Krümmung, die aber im Inneren des Kissens liegen und somit keinerlei Einfluss aus äußerer Belastung erfahren.

5.3.2 Problem der endlichen Röhre

Im vorangegangenen Abschnitt wurde das Grundprinzip der Formveränderung für die theoretisch unendlich lange Röhre vorgestellt. Dies ist möglich, da die Hülle der unendlichen Röhre lediglich einfach gekrümmt ist. Führt man jetzt eine allseitige Berandung ein, entstehen Bereiche doppelter Krümmung.

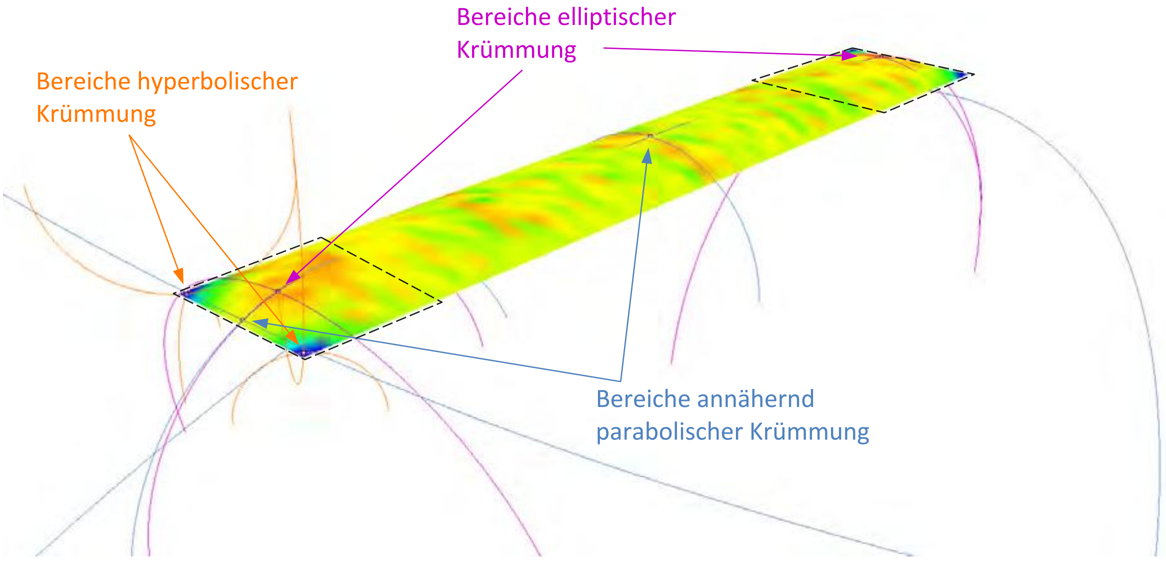


Bild 5.26: Rechteckig berandetes Folienkissen mit Darstellung der Gaußschen Krümmung K und den elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Bereichen [109]

Für das rechteckig berandete Folienkissen ergeben sich sowohl Bereiche elliptischer, hyperbolischer und als auch annähernd parabolischer Krümmung. Die parabolische Krümmung erstreckt sich dabei über den „ungestörten“ Bereich des Kissens. Dieser Bereich kann die zuvor beschriebene Verformung (Abschnitt 5.3.1) dehnungslos mitgehen. Im „gestörten“ Bereich (Bild 5.26 – gestrichelter Bereich), der in etwa eine Abklinglänge in Höhe der Breite des Kissen besitzt, herrscht im wesentlichen elliptische Krümmung, nur in den Ecken treten Bereiche hyperbolischer Krümmung auf. Dieser gesamte Bereich ist nach Abschnitt 2.2.2 - Tabelle 2.4 nicht abwickelbar

[109] Die gezeigte Oberfläche wurde mit Sofistik modelliert und anschließend in Rhino3D importiert und dort ausgewertet.

und kann somit nicht dehnungslos verformt werden. Es gilt daher die Verformungen des Kissens über den Rand so zu beeinflussen, dass die doppeltgekrümmten Bereiche kaum Verformung[110] erfahren.

Die im vorherigen Absatz skizzierten Probleme betreffen ausschließlich Bereiche doppelter Krümmung in der Hülle. Diese werden durch die Zwängungen des Randes erzeugt. Um die Hülle nun materialgerecht zu verformen, gilt es Veränderungen im normalerweise starren Rand vorzunehmen. Hierbei sollen zwei Vorgehensweisen unterschieden werden, die sich aus der Gliederung in Bild 2.6 ergeben. Es werden thematisch bezüglich der Kinetik der starren Körper und der Statik der deformierbaren Körper des Randes getrennte Untersuchungen und Lösungsvorschläge in den folgenden Abschnitten erarbeitet.

5.3.3 Kinetische Lösungen

Kinetische Lösungen rufen aufgrund der Bewegung keinerlei Deformationen des Randes, sondern lediglich in der Hülle hervor. Somit gilt es geometrisch verträgliche Bewegungen des Randes für die Hülle zu finden. Dazu sollen hier drei Beispiele für kinetische Möglichkeiten in und aus der durch das Kissen aufgespannten Ebene vorgestellt werden. Die Beispiele werden am 2-lagigen Kissen skizziert, sind natürlich auch für mehrlagige Kissen und die damit einhergehenden größeren Verformungen geometrisch verträglich.

Rechteck mit gegensinnig verdrehtem Rand und gelenkiger Eckenausbildung

Eine Möglichkeit, den Rand eines rechteckig berandeten Kissen so zu verformen, dass es zu einer für die Hülle geometrisch verträglichen Verformung kommt, konnte durch die Verdrehung des Randes, wie es in Bild 5.27 dargestellt ist, erreicht werden[111]. Dabei werden sowohl die lange als auch die kurze Achse um ihre Schwerpunkte gedreht, so dass theoretisch keinerlei mechanische Arbeit bezüglich des Randes während der Bewegung geleistet wird.

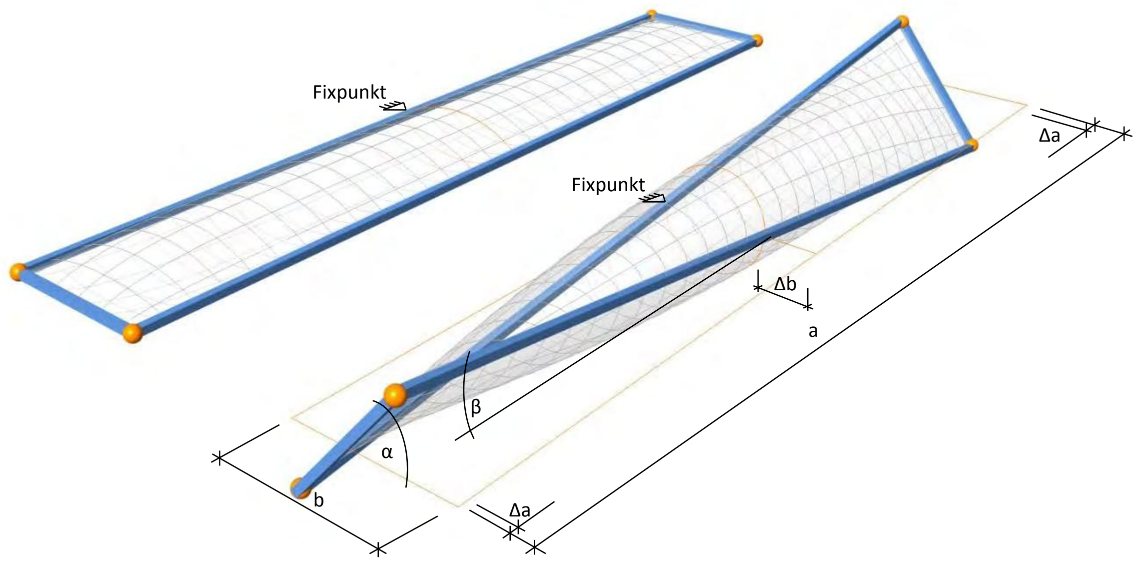


Bild 5.27: Rechteckig berandetes Folienkissen mit gelenkiger Eckenausbildung im unverformten und verformten Zustand mit Kennzeichnung der relevanten veränderlichen Geometriewerte

Die Bewegung des Randes ist sehr gut in einer Bilderreihe eines sehr einfachen Modells zu erkennen. Die Ecken des Rahmens sind zweiachsig gelenkig ausgeführt und lassen ein Verdrehen der kurzen Seite gegenüber der langen zu.

110 Diese Bereiche dürfen natürlich Verformungen erfahren. Die Dehnungsänderungen sollten allerdings im elastischen Bereich des Hüllenmaterials liegen.

111 Das Grundprinzip wurde auf der IASS 2009 in Valencia, Spanien, vorgestellt [Bögle, Schlaich und Hartz 2009]

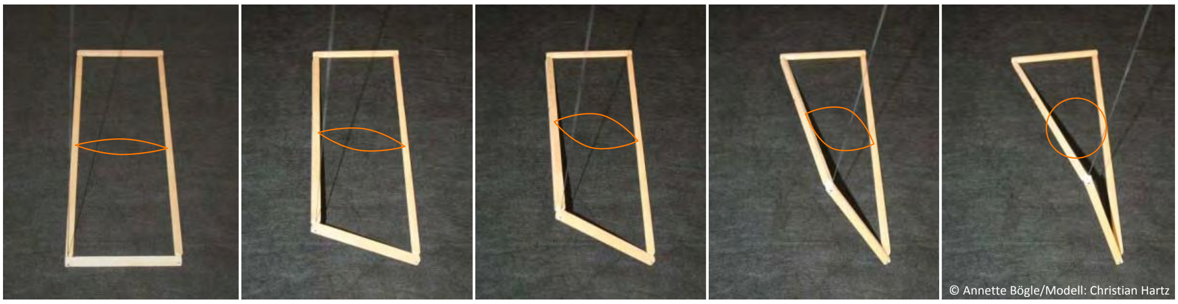


Bild 5.28: Bewegungsreihe des kinetischen Modells des rechteckigen Rahmens mit gelenkiger Eckenausbildung

Der maximale Drehwinkel α der kurzen Seite ergibt sich aus der Länge b der kurzen Kante und dem maximalen Bewegungsweg Δb_{max} nach Gleichung (5–8). Für ein Kissen ergibt sich der Drehwinkel α allgemein nach Gleichung (5–9) und nach Gleichung (5–10) im speziellen Fall für ein 2-lagiges Kissen zu ca. 50,5 °.

$$cos\,\alpha = \frac{b - \Delta b_{max}}{b} = \frac{b - \left(b - \left(\sqrt[n]{2}\right)^2 \cdot \frac{b}{\pi}\right)}{a} = \frac{\left(\sqrt[n]{2}\right)^2}{\pi} \qquad (5\text{–}9)$$

$$cos\,\alpha = \frac{2}{\pi} \qquad \rightarrow \qquad \alpha \approx 50{,}5\,° \qquad (5\text{–}10)$$

Durch die Drehung der kurzen Seite b kommt es ebenfalls zu einer Verdrehung der langen Seite a. Der Drehwinkel β ist dabei eine Funktion von b und a und ergibt sich nach Gleichung (5–11) im Allgemeinen und nach Gleichung (5–12) für das 2-lagige Kissen.

$$sin\,\beta = \frac{b \cdot sin\,\alpha}{a} = \frac{b}{a} \cdot sin\left[arccos\left(\frac{\left(\sqrt[n]{2}\right)^2}{\pi}\right)\right] = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\left(\sqrt[n]{2}\right)^2}{\pi}\right]^2} \qquad (5\text{–}11)$$

$$sin\,\beta = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \qquad (5\text{–}12)$$

An Gleichung (5–12) lässt sich bereits erkennen, dass für kleine Werte von b und große von a der Winkel β klein wird. Das Diagramm in Bild 5.29 verdeutlicht dies eindrücklich. Ein Kissen mit den Proportionen 1/20 erfährt bei voller Verformung lediglich eine Verdrehung von ca. 2,2 ° auf der langen Seite.

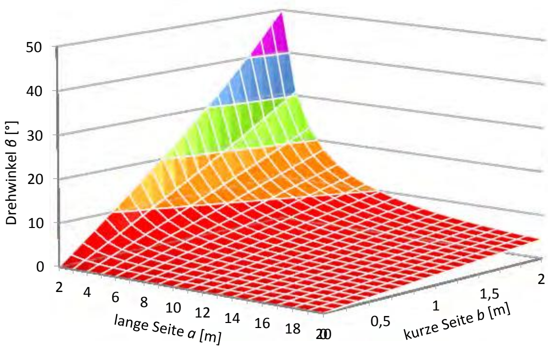


Bild 5.29: Abhängigkeit des Winkels β vom Längen/Breitenverhältnis a/b für das maximal verformte 2-lagige Kissen

Da die lange Seite a ebenfalls eine Drehung erfährt, kommt es in der Draufsicht zu einer Verkürzung der Seite a um zweimal Δa (s. Bild 5.27). Diese Verkürzung muss durch die Lagerung des gesamten Kissens zugelassen werden, da sonst den relativ kleinen Bewegungskräften große Zwängungen entgegenstehen (Hebelgesetz). Auch hier gilt, je kleiner der Winkel β ist, desto kleiner fallen Δa (s. Gl. (5–13)) und somit die relative Bewegung der Lagerungspunkte quer zu seiner Verfahrrichtung (siehe auch Bild 5.31) aus.

$$\Delta a = \frac{a}{2} - \cos\beta \cdot \frac{a}{2} \qquad \lim_{\beta \to 0} \frac{a}{2} - \cos\beta \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta a = 0 \tag{5–13}$$

Simuliert man solch ein Kissen beispielsweise wiederum mit dem FE Programm Sofistik, erhält man das im Bild 5.30 dargestellte Verformungsbild. Dabei wurden zwei Längen/Breitenverhältnisse a/b berechnet, um den zuvor beschriebenen Einfluss der Verdrehung der langen Seite zu veranschaulichen. Das Faltenbild fällt bei der Proportion 1/2 (Bild 5.30 rechts) wesentlich stärker aus als beim Verhältnis 1/10 (Bild 5.30 links).

Bild 5.30: 2-lagig rechteckig berandetes Kissen in den Proportionen b/a von 1/10 und 1/2 im Zustand maximaler Verdrehung und Kennzeichnung der Diagonalen auf der Hüllenoberfläche

Entscheidend für die geometrische Verträglichkeit der Hülle bezüglich der Bewegung des Randes ist die Längenänderung der Diagonale auf der Hüllenoberfläche. Liegt die Dehnung beispielsweise für ETFE unter dem in Abschnitt 0 erwähnten Wert von 1 %, kann das Material die Verformung im elastischen Bereich ertragen. In Bild 5.32 sind dazu die Dehnungen der Hüllendiagonalen für verschiedene Längen/Breitenverhältnisse a/b aufgetragen[112].

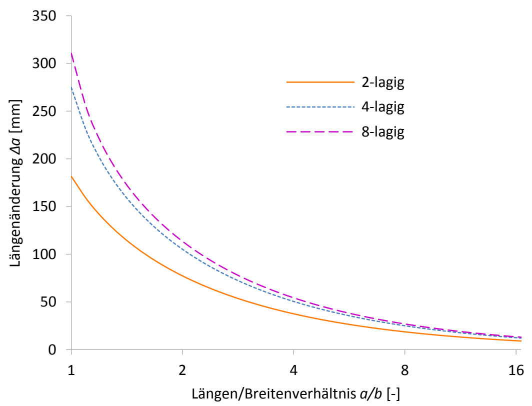


Bild 5.31: Längenänderung Δa für verschiedene Längen/Breitenverhältnis a/b eines rechteckig berandeten Folienkissens mit gelenkiger Eckausbildung für 2, 4 und 8-lagig parallele Ausführung

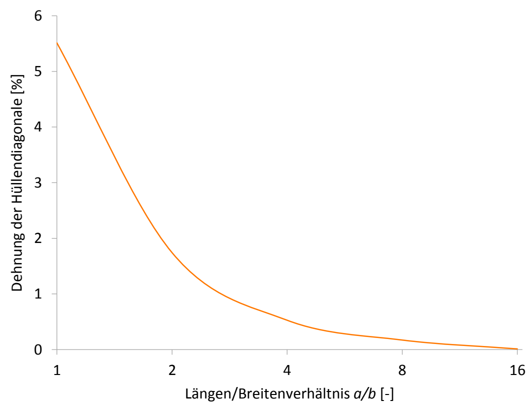


Bild 5.32: Geometrische Dehnung der Diagonalen auf der Hüllenoberfläche für verschiedene Längen/Breitenverhältnisse a/b des rechteckig berandeten 2-lagigen Kissens

112 Als Ausgangslänge ist die Diagonale der ebenen Hülle gewählt worden, da die Bewegung maximal wird für möglichst kleine initiale Stiche.

Theoretisch liegen schon ab einem Verhältnis b/a von 1/3 die Dehnungen unter 1 %, allerdings müssen die initialen Dehnungen des Materials berücksichtigt werden, was den Bewegungsspielraum erheblich einschränkt. Daher sind Verhältnisse a/b größer 8 realistisch und realisierbar.

Möchte man eine komplette Dach- oder Fassadenfläche mit dieser Verformungsmethode erstellen und dieses dann verfahren, sollten die einzelnen Felder verdreht zueinander in Reihe angeordnet werden. Damit wird die Verdrehung des ersten Feldes automatisch zur Verdrehung des zweiten usw. (Bild 5.33). Die Gesamtverkürzung für 2-lagige Kissen liegt auch durch die Zusammenlegung weiterhin bei ca. 36 %.

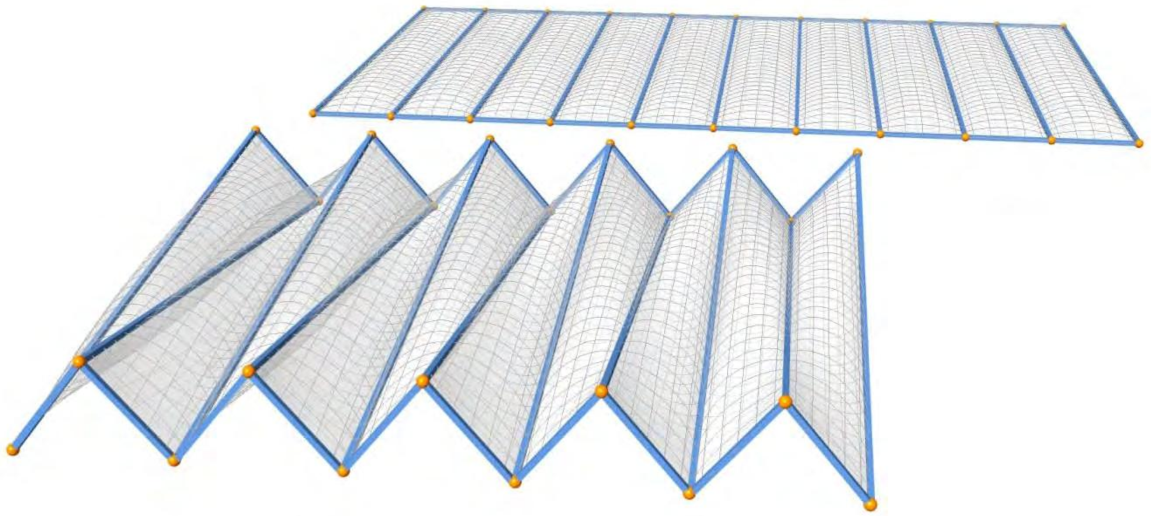


Bild 5.33: Rendering des gelenkig verdrehbaren in Reihe geschalteten rechteckig berandeten 2-lagigen Kissens in Ausgangs- und Verformungslage

Um die numerischen Simulationen zu überprüfen, wurde ein dreifeldriges Modell angefertigt, das allein durch Einblasen von Luft die gewünschte Verformung zeigt (Bild 5.34). Die Felder haben ein Breiten-/Längenverhältnis von 1/6. Die einzelnen Felder sind auf der Mittellinie der Längsachse gelagert. Die „Torsionsfalten“, die auch schon in der numerischen Simulation gezeigt werden konnten (Bild 5.30 rechts), stellen sich auch hier ein[113]. Diese lassen sich sowohl durch eine initiale Vorspannung als auch durch das in Bild 5.30 gezeigte kleinere Breiten-/Längenverhältnis verringern, da die in Bild 5.26 gekennzeichneten kritischen Bereiche nahe der kurzen Kante dann eine weitaus geringere Verformung erfahren.

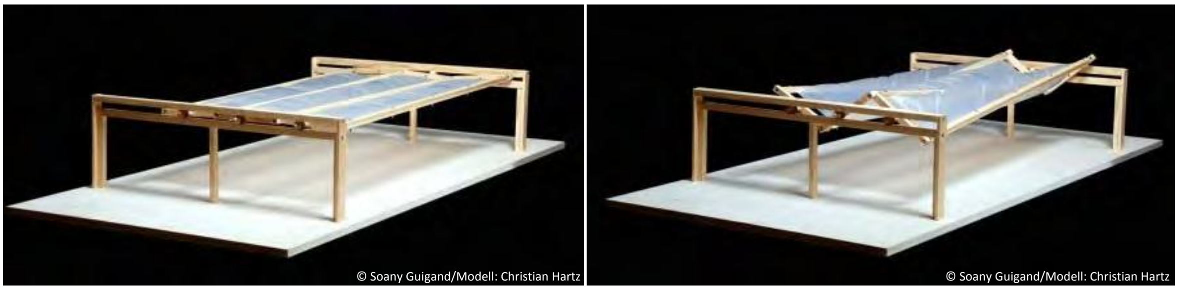


Bild 5.34: Modell des gelenkig verdrehbaren Rahmens mit Kissen in Ausgangs- und Verformungslage

Die Verdrehung des rechteckigen Randes erlaubt eine Aneinanderreihung der einzelnen Felder und lässt eine geschlossene Dach- oder Fassadenfläche entstehen. Kritisch sind der schwierige Anschluss an der kurzen Seite und die Führung der zentrisch gelagerten Kissen zu sehen. Eine mögliche Lösung, sowohl zur Ausgestaltung des Dachanschlusses als auch des Fassaden-

[113] Die Folie wurde schlaff eingebaut und hatte somit initial keinerlei Vorspannung. Die Faltenbildung würde geringer ausfallen, wenn die Hülle initial hätte vorgespannt werden können.

anschlusses, ist in Bild 5.35 skizziert. Eine detaillierte Ausarbeitung des Anschlusses des Längs- zum Querträger ist in Bild 5.36 dargestellt.

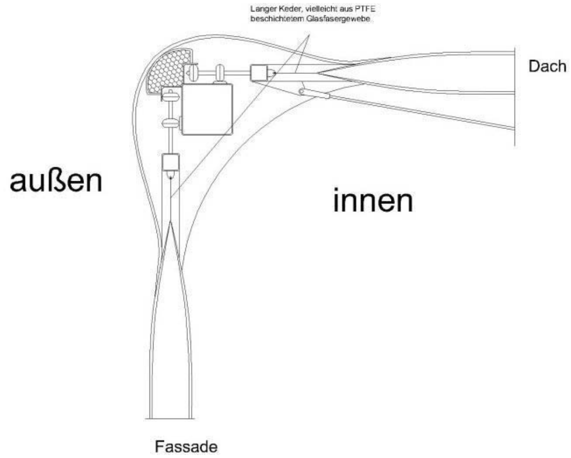


Bild 5.35: Mögliche Eckausbildung für den Übergang Dach zu Fassade mit Rollenführung und Anschlussdetails

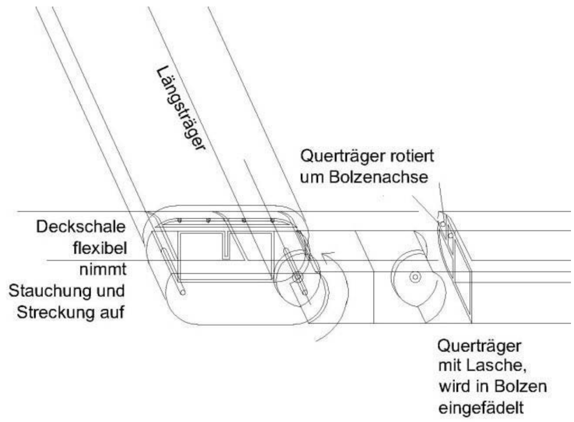


Bild 5.36: Möglicher Anschluss Längs-/Querträger mit Rotation in den Achsen der Kissenkeder

Raute mit ebenem Rand und gelenkiger Eckenausbildung

Eine andere Variante einer kinetischen für die Hülle geometrisch verträglichen Berandung bildet eine gelenkig ausgeführte Raute. Dabei erfolgt die Bewegung des Randes im Gegensatz zum rechteckigen Kissen in der durch den Rahmen aufgespannten Ebene.

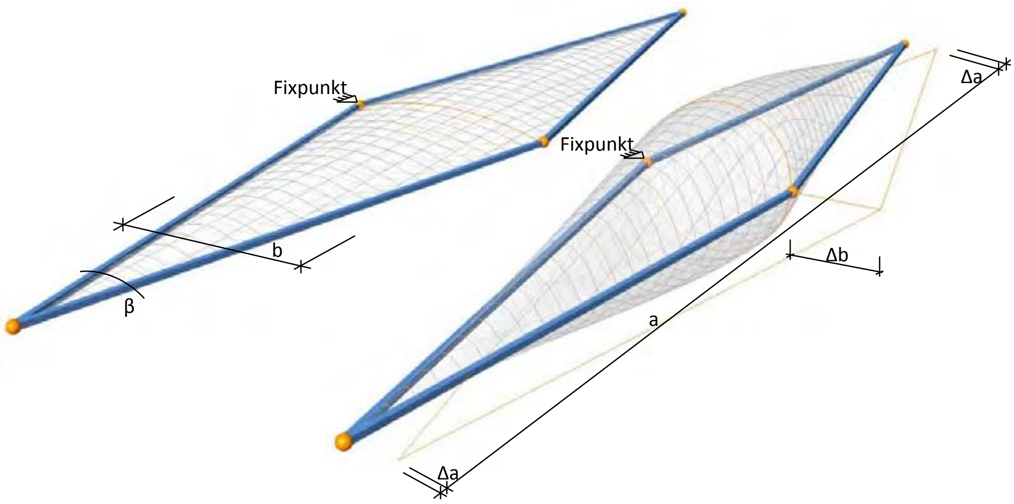


Bild 5.37: Rautenförmig berandetes Folienkissen mit gelenkiger Eckenausbildung im unverformten und verformten Zustand mit Kennzeichnung der relevanten veränderlichen Geometriewerte

Die geometrischen Zusammenhänge sind in den Gleichungen (5–14) und (5–15) zusammengefasst.

$$tan\frac{\beta}{2} = \frac{b}{a} \tag{5–14}$$

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b \cdot \Delta b}{2} - \left(\frac{\Delta b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} \tag{5–15}$$

Trägt man Δa über verschiedene Längen/Breitenverhältnisse a/b auf, erhält man die in Bild 5.38 dargestellten Kurven, jeweils für die 2, 4 und 8-lagige Ausführung. Wie auch schon beim rechteckig berandeten Kissen zeigt sich auch hier, dass Δa für große Verhältnisse a/b wesentlich kleiner ausfällt. Auch hier nähert man sich durch große Verhältnisse a/b der theoretisch unendlichen Röhre an, sodass der Einfluss der Randbereiche zusehends verschwindet.

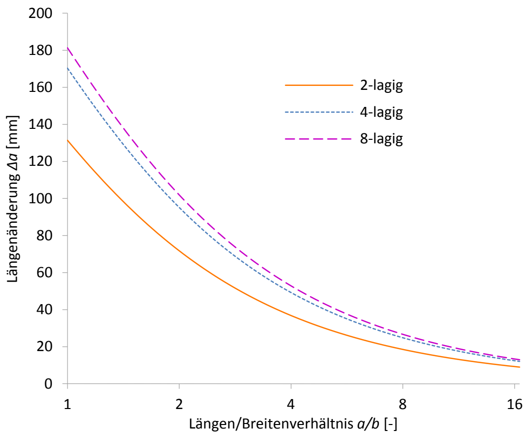


Bild 5.38: Längenänderung Δa für verschiedene Längen/Breitenverhältnis a/b eines rautenförmig berandetes Folienkissen mit gelenkiger Eckenausbildung für 2, 4 und 8-lagig parallele Ausführung

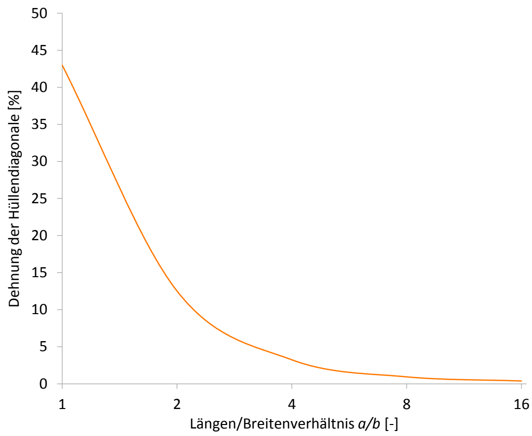


Bild 5.39: Geometrische Dehnung der Diagonalen auf der Hüllenoberfläche für verschiedene Längen/Breitenverhältnisse a/b des rautenförmig 2-lagigen Kissens

In Bild 5.39 ist die Dehnung der auf der Oberfläche liegenden Diagonalen in Abhängigkeit vom Längen/Breitenverhältnis a/b für das 2-lagige Kissen dargestellt. Es zeigt sich das gleiche Bild wie auch schon beim rechteckig berandeten Kissen, auch wenn die Dehnungen insgesamt weitaus höher ausfallen. Allerdings ist die geometriegegebene Konvergenz weitaus höher, sodass schon ab einem Längen/Breitenverhältnisse a/b größer 8 die Dehnungen unter 1 % fallen.

In Bild 5.40 ist die numerische Simulation eines solchen Kissens in 2-lagiger Ausführung mit einem Längen/Breitenverhältnisse a/b von 10 zu sehen. Kritisch sind die sehr spitzen Winkel und die damit einhergehende geringe Elementdichte zu sehen, die nicht nur numerische Schwierigkeiten bedeuten, sondern auch im späteren Fertigungsprozess schwer zu realisieren sind.

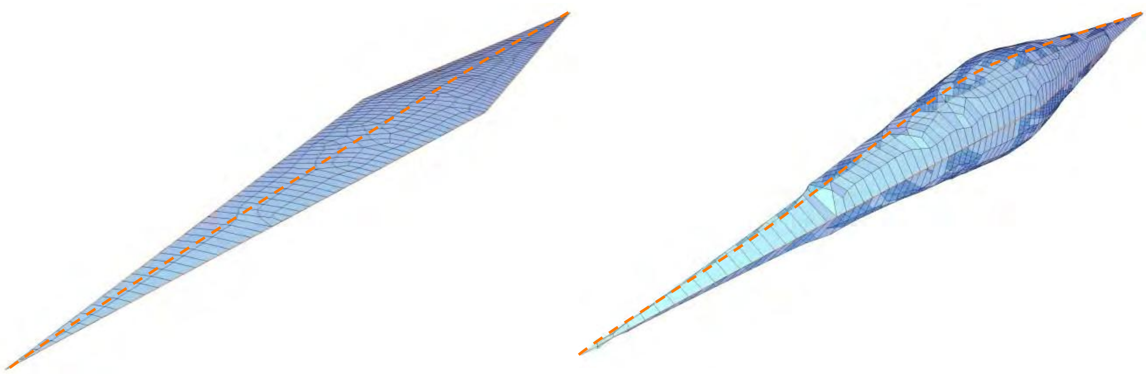


Bild 5.40: Numerische Simulation der Verformung des rautenförmig berandeten 2-lagigen Kissens und Kennzeichnung der betrachteten Diagonale

Eine bessere Ausgestaltung der spitzen Ecken konnte durch eine geringe Ausrundung erreicht werden. Dieses Detail ist so auch schon bei der Fassade der Allianz-Arena in München ausgeführt worden, auch wenn diese Fassade nicht beweglich ist (siehe Bild 5.41). Dadurch lassen sich die Zwängungen in diesem kritischen Bereich begrenzen und minimale Dehnungen realisieren.

Bild 5.41: Allianz-Arena München mit rautenförmigen Kissen und Ausrundung der spitzen Ecken

Um wiederum eine komplette Dach- oder Fassadenfläche zu erhalten, ergeben sich zwei Möglichkeiten der Addierung. Zum einen können die Felder einfach in Reihe verlegt werden (Bild 5.42 links), zum anderen kann die gleiche Geometrie wie bei der Allianz-Arena gewählt werden (Bild 5.42 Mitte). Beide Methoden erzeugen Flächen, die mit ihrer Geometrie eine rechteckige Berandung nicht zulassen. Anders gestaltet sich dies, wenn man die Berandung der Gesamtfläche der Geometrie ihrer kleinsten Einheit anpasst (Bild 5.42 rechts).

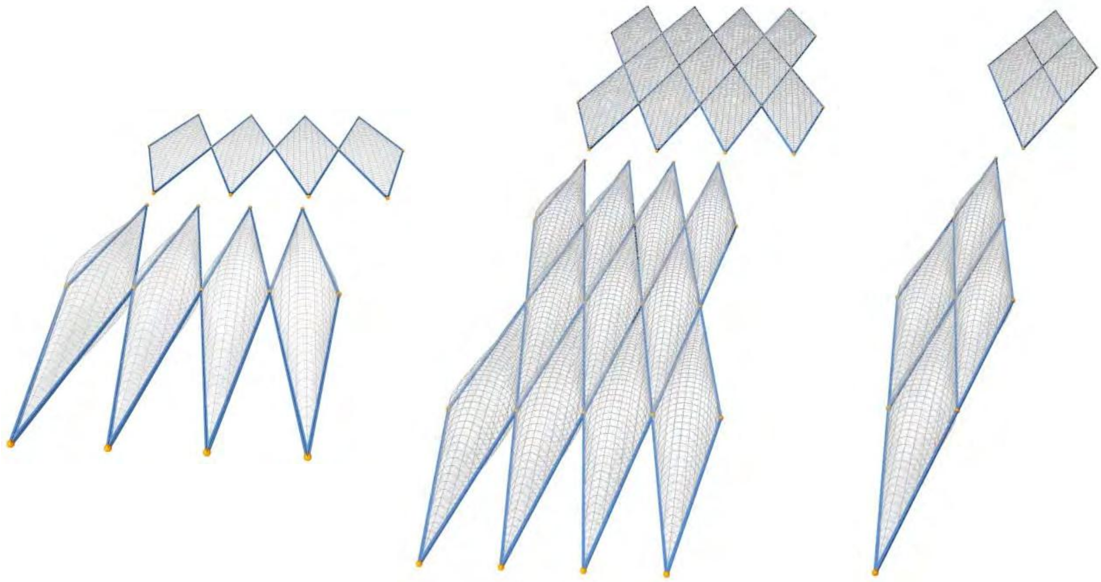


Bild 5.42: Rautenförmig berandetes Kissen in Reihe, verschachtelt und verschachtelt rautenförmig

Auch bei diesem System ergeben sich keine Änderungen bezüglich des maximalen Verformungsweges. Dieser folgt dem in Gleichung (5–8) angegebenen geometrischen Zusammenhang.

Sechseck mit ebenem Rand und gelenkiger Eckenausbildung

Eine Kombination des Rechtecks und der Raute stellt die Berandung über ein kinetisches Sechseck dar und soll nur kurz umrissen werden. Sechsecke eignen sich hervorragend zur Überdachung doppeltgekrümmter Kugelkalotten (s. Bild 5.43)[114].

[114] Natürlich sind hier auch Fünfecke notwendig.

Bild 5.43: Eden Project, Cornwall, England mit sechs- und fünfeckig modularer Überdachung aus 2-lagigen ETFE Kissen

Das allgemeine Grundsystem eines solchen sechseckigen Kissens zeigt Bild 5.44. Wählt man den Ausstellwinkel β_A der langen Seite so, dass er dem späteren Einfallwinkel β_E entspricht, erfährt die kurze Seite zwar während der Bewegung eine zur Verformungsrichtung orthogonal nach außen gerichtete Bewegung, in den beiden Endpositionen kommen die Eckpunkte allerdings am selben Ort zum Liegen (Δa ist in der Ausgangs- und Endlage Null).

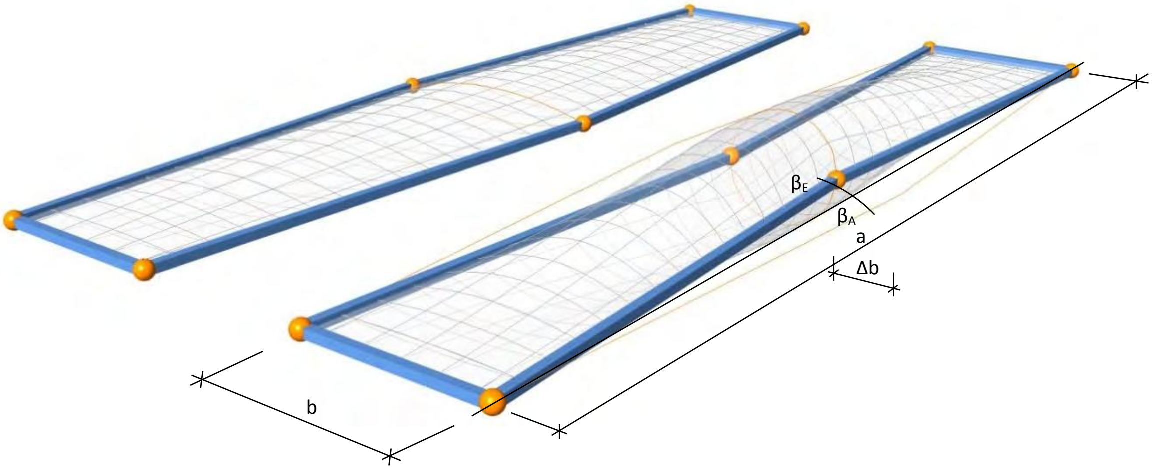


Bild 5.44: Sechseckig berandetes Folienkissen mit gelenkiger Eckenausbildung im unverformten und verformten Zustand mit Kennzeichnung der relevanten veränderlichen Geometriewerte

$$tan\,\beta_A = tan\,\beta_E = \frac{\Delta b_{max}}{a} \tag{5–16}$$

Eine Aneinanderreihung der einzelnen Felder kann auf zweierlei Art erfolgen (Bild 5.45). Entweder man stellt oder legt die einzelnen Felder in Reihe oder verschachtelt sie, wie schon bei der Raute gezeigt.

Bild 5.45: Sechseckig berandetes Folienkissen in Reihe und verschachtelt angeordnet

Allerdings verringert sich hierbei der maximale Verfahrweg um weitere 50 %, da nur jedes zweite Feld einen für die Gesamtbewegung messbaren Beitrag liefert. Interessant scheint für diese Berandungsart eher das Verlegen in Reihe zu sein, da hiermit beispielsweise für Klimahüllen eine in der Dach- oder Fassadenfläche liegende Be- und Entlüftung integriert werden könnte (siehe auch Bild 5.43 Dachbereich → Lüftungsöffnungen).

5.3.4 Biegeweiche Lösungen

Biegeweiche Lösungen für den Rand erfahren im Gegensatz zu den kinetischen Lösungen innere Verzerrungen und somit Deformationen, die als Verformungsenergie im System gespeichert wird. Den Rand so auszuführen, dass er für die Hülle verträgliche Verformungen zulässt, wird in diesem Abschnitt beispielhaft gezeigt. Dazu werden drei Systeme vorgestellt, die auf den Untersuchungen in Kapitel 2 bezüglich der Möglichkeit der elastischen Verformung von Festkörpern und insbesondere den um Bild 2.22 erläuterten Zusammenhängen bezüglich Materialdicke d und E-Modul E aufbauen.

Rechteck mit biegeweichen Längsseiten

Die gebräuchlichste Form einer Berandung für ein pneumatisch gestütztes Kissen ist wiederum das Rechteck. Hier bietet es sich an, die Biegeweichheit des Randes so auszuführen, dass die in Bild 5.26 gestrichelt gekennzeichneten doppeltgekrümmten Bereiche des Kissens keinerlei Verformung erfahren. Dies ist durch die in Bild 5.46 dargestellte biegeweiche, in den Ecken biegesteife Ausführung des Randes gewährleistet, die als biegeweiche Ausführung des kinetischen Sechsecks gesehen werden kann.

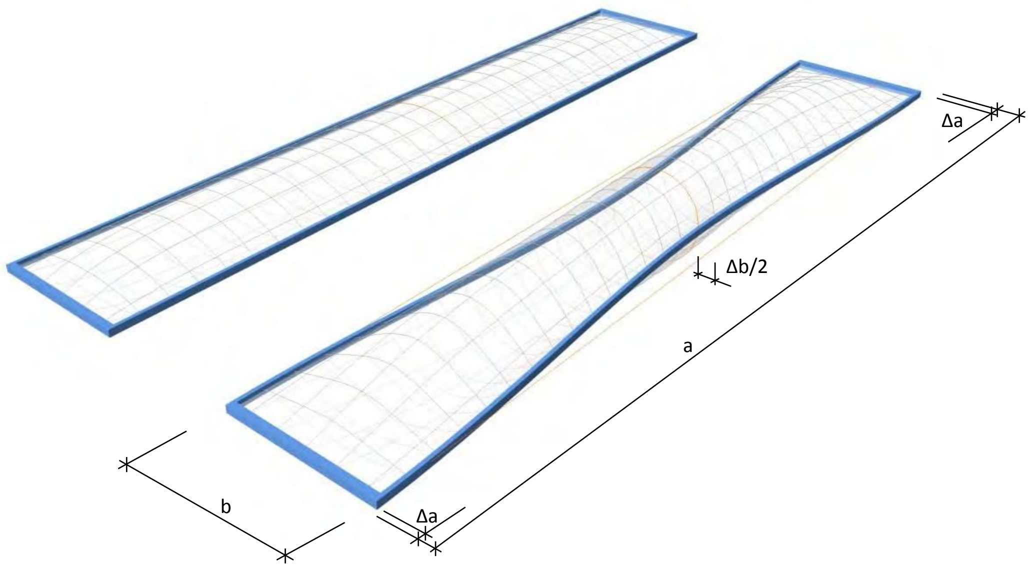
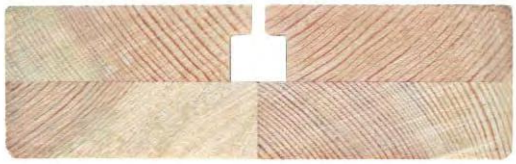


Bild 5.46: Rechteckig biegeweich berandetes 2-lagiges Folienkissen mit biegesteifer Eckenausbildung im unverformten und verformten Zustand mit Kennzeichnung der relevanten veränderlichen Geometriewerte

In der Versuchshalle der TU-Berlin konnte ein Prototyp gebaut werden, der mit einem 2-lagigen Kissen versehen wurde. In Bild 5.49 ist dieser in Ausgangs- und den weiteren Verformungszuständen abgebildet. Das Längen-/Breitenverhältnis des Prototypen beträgt ca. 6/1 mit den Abmaßen 5,644 x 0,847 m in der Achse der Kederlinie. Die biegeweichen Flanken des Rahmens wurden aus Kiefernholz gefertigt, das einen E-Modul von 11.000 N/mm^2 aufweist [DIN 68364 2003]. Für diesen Wert lassen sich nach dem in Bild 2.22 ausgearbeiteten Diagramm[115], Dicken bis ca. 40 mm biegeweich verformen. Die Flanken wurden entsprechend Bild 5.47 hergestellt und direkt mit einer Aufnahme für die Kissenkeder versehen[116].



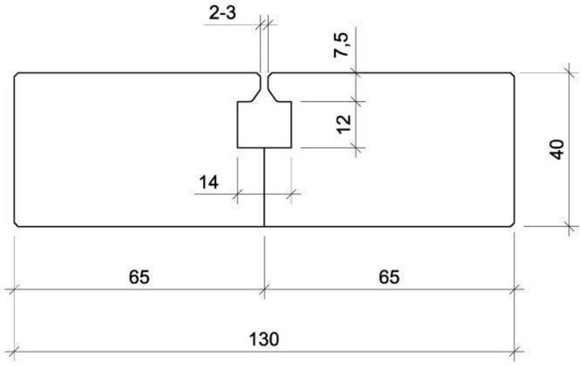


Bild 5.47: Querschnitt der biegeweichen Flanken am Prototyp fotografisch und zeichnerisch

Gehalten wurden die biegeweichen Flanken mit einer biegesteifen Klemmung (Bild 5.48) über eine Stahlkonstruktion, die zusätzlich das Kederprofil für die kurzen Seiten aufnahm. Die Einsteckstellen für die Flanken waren zudem mit einer Verschraubung versehen, um die Klemmung zu schließen.

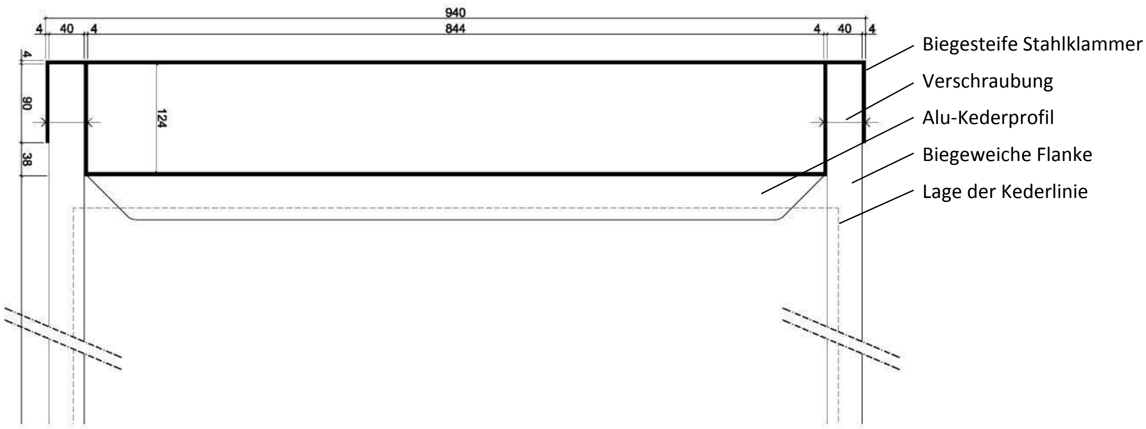


Bild 5.48: Detail der oberen und unteren Klemmung der biegeweichen Flanken

Der Prototyp diente nicht nur der Demonstration der möglichen über Luftdruck gesteuerten Bewegung des Rahmens, sondern wurde zusätzlich mit Dehnmessstreifen in Flankenmitte und Einspannung versehen. Damit ließen sich das Einspannmoment $M(x = \pm a/2)$ und das Feldmoment $M(x = 0)$ ermitteln und den numerischen Werten gegenüberstellen.

---

115 Dieses Diagramm wurde mit einer Systemlänge von 10 m erstellt und zeigt nur den theoretischen Zusammenhang zwischen Dicke d und E-Modul E. Daher wurde der ermittelte Wert lediglich als Richtwert verwendet.

116 Theoretisch hätte durchaus ein noch dünneres Profil für die Ausführung der Flanken verwendet werden können, allerdings galt es die Verankerung des Kissens zu gewährleisten.

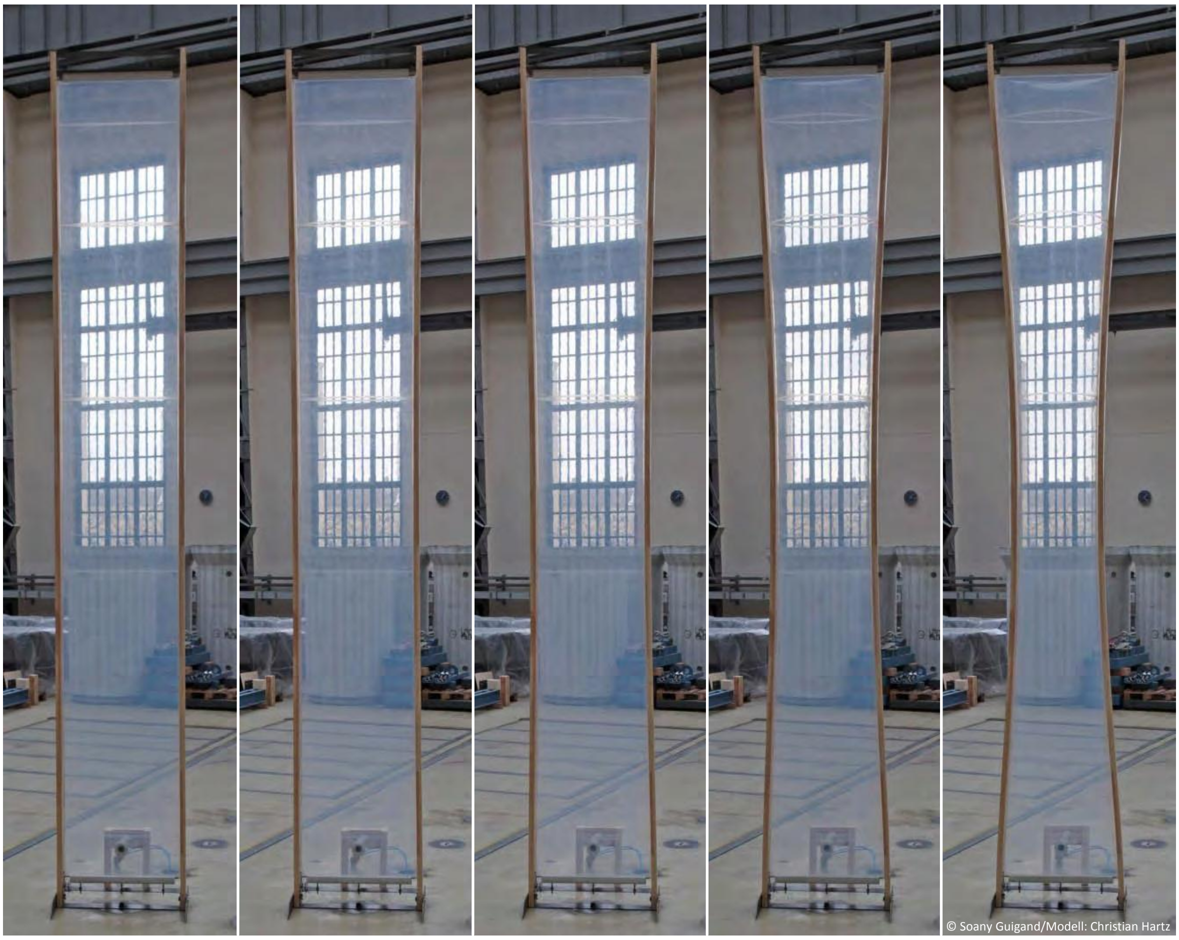


Bild 5.49: Verformungssequenz am Prototyp des rechteckig biegeweich berandeten 2-lagigen Folienkissens

Grundlage der Messungen und Berechnungen war eine Druckzunahme im Inneren des Kissen von $\Delta p_i = 1\ kN/m^2$. Dabei ergaben sich die in Tabelle 5.2 zusammengestellten Werte für die Lage der maximalen Verformung Δb_{max}. In Bild 5.50 sind die Verläufe sowohl der numerischen als auch versuchstechnisch ermittelten Momente an der Einspannung sowie in Feldmitte in Abhängigkeit vom Innendruck p_i dargestellt.

Tabelle 5.2: Numerische und gemessene Verschiebungen bzw. Momente an der Einspannung und in Feldmitte bei maximaler Verformung $\Delta b_{max}/2$ infolge einer Druckzunahme von $\Delta p_i = 1\ kN/m^2$

	$\Delta b_{max}/2$ [mm]	$M(x = \pm a/2)$ [kNm]	$M(x = 0)$ [kNm]
numerisch	0,161	0,880	0,369
analytisch	0,154	-	-
gemessen	0,158	0,844	0,365

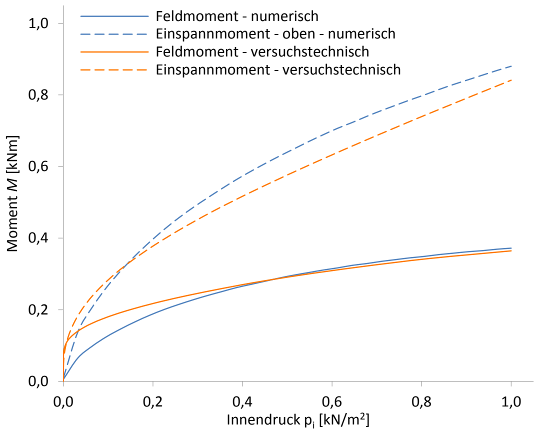


Bild 5.50: Numerischer und gemessener Verlauf des Einspann- und Feldmomentes des rechteckig biegeweich berandeten 2-lagigen Folienkissens

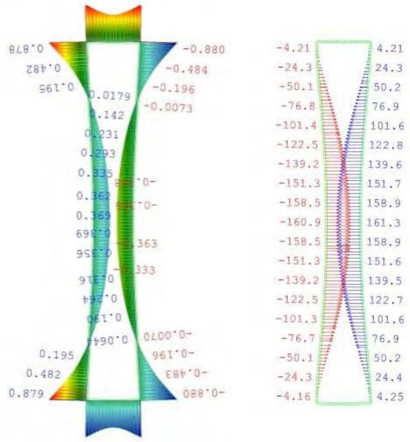


Bild 5.51: Momentbild [kNm] und Vorformungsbild [mm] des maximal verformten Rahmens des 2-lagigen Folienkissens

Eine analytische Lösung bezüglich des Momentes ist hier nicht sinnvoll, da sowohl das statische Grundsystem nicht mit der in Gleichung (4–10) angegebenen Lösung übereinstimmt und zudem die Belastung sich im Zuge der Verformung des Systems für den biegeweichen Rand wie in Bild 5.52 verändert und nur über die numerisch ermittelten Spannungen und Verschiebungen genähert werden kann. Daher wird als Referenz nur die maximale theoretische Verformung $\Delta b_{max}/2$ angegeben.

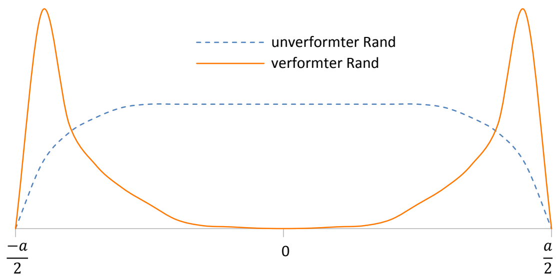


Bild 5.52: Form der Belastungsfunktion $q(x)$ im unverformten und verformten Zustand des biegeweichen Randes

Vergleicht man die numerische, analytische und versuchstechnisch ermittelte maximale Verformung in Feldmitte (s. Tabelle 5.2, Spalte 1), fallen zunächst die geringen Unterschiede auf. Allerdings liegt sowohl die numerische aus auch die gemessene Verformung höher als die theoretisch maximal mögliche. Dies lässt sich ebenfalls mit der sich für den Rand verändernden Belastung erklären. Durch das Wandern des Maximalwertes der die Flanken belastenden Streckenlast zu den kurzen Seiten des Rechtecks, ist es zwar immer noch die Mitte, die die maximale Verformung erfährt, aber diese wird durch die jeweils darüber liegenden Bereiche verstärkt. Alle Bereiche der Oberfläche des Kissens streben den für sie energetisch minimalen Kreisquerschnitt an, nicht nur die Mitte. Somit findet auf der Länge des Kissens eine Suche nach einem energetischen Gleichgewicht statt, das nicht dem Erreichen der theoretisch möglichen Verformung der Mitte entspricht. Es kommt zu einem „Überdrücken" der Mitte durch die jeweils darüber und darunterliegenden Bereiche.

Dies lässt sich auch durch die in Bild 5.53 dargestellten Spannungsbilder zeigen. Der Bereich der maximalen Folienspannungen σ_H wandert von der Kissenmitte zu den kurzen Seiten. Gleichzeitig nimmt die Krümmung κ_H der Hülle zu den kurzen Seiten ab. Im Umkehrschluss bedeutet dies einen sich vergrößernden Hüllenradius r_H, der im Produkt mit der in der Hülle herrschenden

Spannung σ_H die Belastung für den Rand ergibt. Bereiche, in denen sich bereits ein Vollkreis im Querschnitt des Kissens ergeben hat, liefern für den Rand keinerlei Belastungsanteile mehr, da die resultierende Horizontalkraft zu Null wird[117] (s. vgl. Bild 5.52 und Bild 5.17).

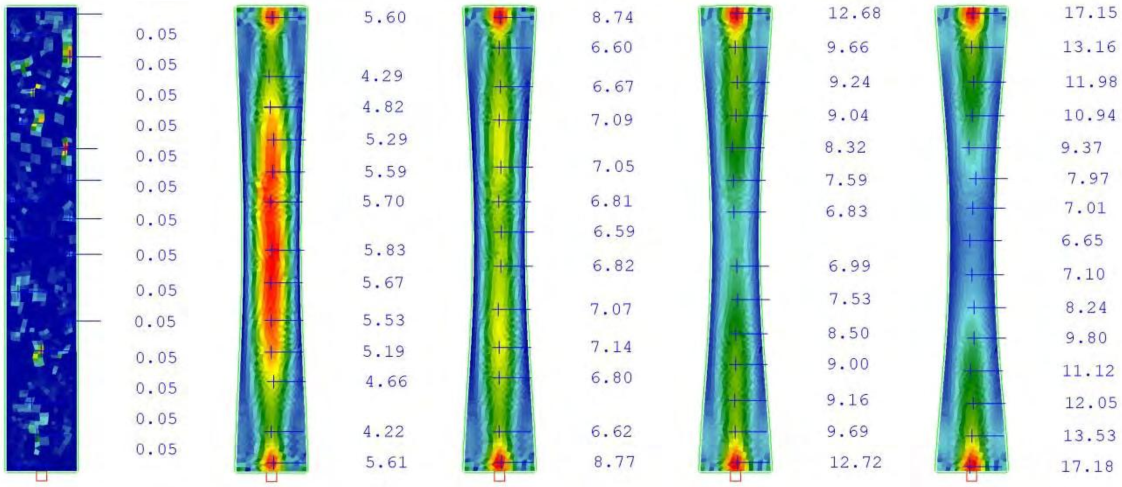


Bild 5.53: Verformung und Vergleichsspannungsverlauf σ_H des 2-lagig rechteckig berandeten Folienkissens für eine Innendruckdifferenz $\Delta p_i = 1\ kN/m^2$ in 4 Schritten

Bei der numerischen Simulation eines vierlagigen Kissens (s. Bild 5.18 und Bild 5.19) ergibt sich eine leicht höhere mittlere Verformung für den Rand und die in Bild 5.54 dargestellten Spannungsbilder.

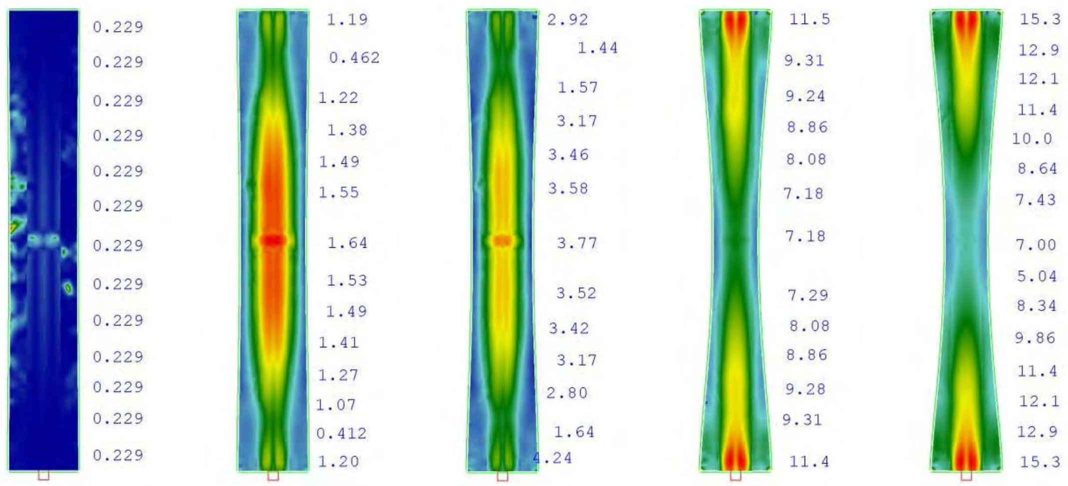


Bild 5.54: Verformung und Vergleichsspannungsverlauf σ_H des 4-lagig rechteckig berandeten Folienkissens für eine Innendruckdifferenz $\Delta p_{i,1}$ von 1 kN/m^2 und $\Delta p_{i,2}$ von 5 kN/m^2[118] in 4 Schritten

Es zeigt sich das gleiche grundsätzliche Verhalten, wie in Bild 5.53. Durch die Veränderung des Innendruckes p_i wandert die maximale Folienspannung σ_H zu den kurzen Seiten. Insgesamt ergibt sich allerdings ein weitaus homogeneres Spannungsbild, als bei der zweilagigen Folie. Die maximale Spannung an den kurzen Seiten fällt leicht geringer aus, obwohl die absolute Verformung des Kissens um ca. 19 % ansteigt. Die eigentlich bauphysikalischen Gründe der vierlagigen Ausführung haben also nicht nur Vorteile bezüglich der Verformung, sondern auch der Dauerhaftigkeit aufgrund des geringeren Spannungsniveaus.

Unterschiedliche Verhältnisse der Druckverteilung für das vierlagige Kissen sind in Bild 5.55 dargestellt. Erst ab einem Verhältnis $p_{i,1}/p_{i,2}$ von 1/5 erhält man den gewünschten Querschnitt

[117] Die Zugspannung σ_H der Hülle schließt sich beim Vollkreis kurz und hat keine horizontalen Anteile.

[118] Hierbei handelt sich nicht nur um ein vierlagiges Kissen, sondern zudem sind die oberen und unteren beiden Folienschichten in vier Kammern unterteilt.

und die damit einhergehende maximale Verformung des Randes. Durch die starke Krümmung der äußeren Röhren ergeben sich die Spannungen in der Hülle ähnlich wie beim 2-lagigen Kissen unter geringerem Innendruck. Dies zeigen auch die Vergleichsspannungsverläufe in Bild 5.54.

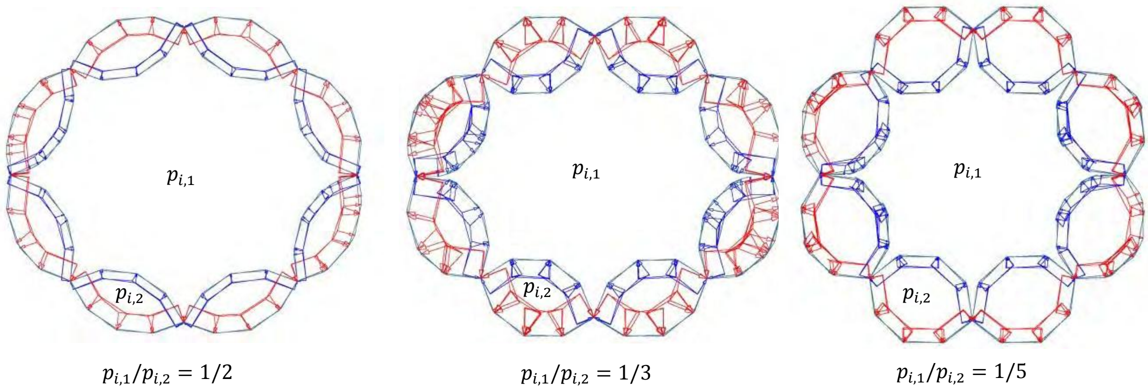


Bild 5.55: Verformungsunterschiede bei unterschiedlichen Innendruckverteilungen des 4-lagig vollverformten Folienkissens

Eine Aneinanderreihung der einzelnen Kissenrechtecke gestaltet sich wie beim bereits vorgestellten Sechseck, wobei die Ästhetik des Verformungsbildes eine andere ist. In Bild 5.56 ist ein Modell mit zweilagiger Folienausführung zu sehen, welches den verformten und unverformten Zustand zeigt.

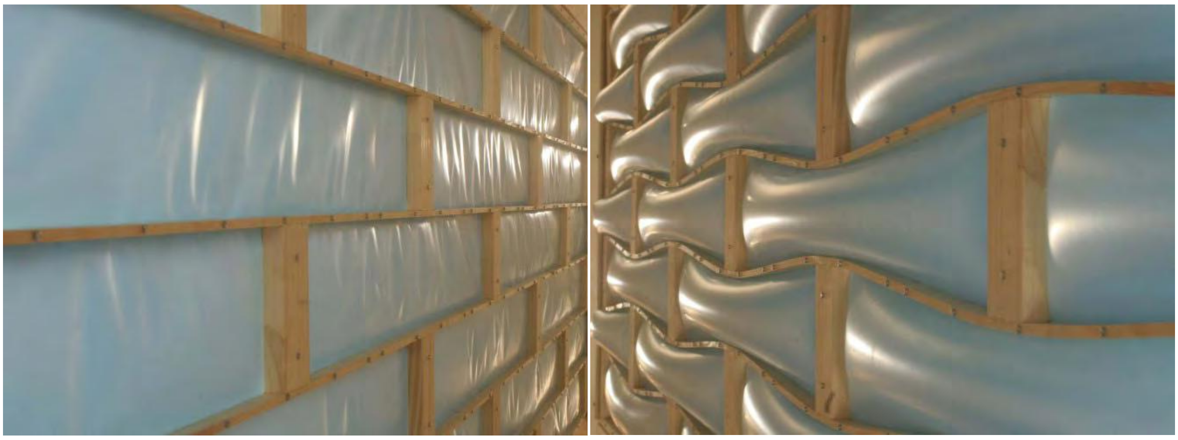


Bild 5.56: Verformungsmodell des biegeweich rechteckig berandeten 2-lagigen Folienkissens

Durch den Wechsel zwischen formbarem und unverformbarem Bereich eines Kissens kommt es wie beim kinetisch berandeten Sechseck lediglich zu einer Gesamtverformung von $0{,}5 \cdot \Delta b_{max}$. Für ein 4-lagiges Kissen ergibt sich eine Verkürzung der Gesamtstruktur von $0{,}5 \cdot 55\% = 27{,}5\%$.

Bild 5.57: Unverformte und verformte rechteckig biegeweich berandete 2-lagige Folienkissen mit angedeuteter Unterspannung als Dachtragwerk

Auch wenn die meisten Öffnungen in Dächern oder Fassaden nicht über die gesamte Fläche geöffnet werden, ist das Verformungsmaß dieses Systems zu gering. Die gesamte Dach- oder

Fassadenfläche muss beweglich ausgeführt werden, um dann nur knappe 30 % geöffnet werden zu können.

Biegeweiche Linsen- und Blattfederform

Dem Manko des Verlustes von 50 % an Verformungsweg der rechteckig biegeweich berandeten Kissen bei ihrer versetzten Anordnung zum Bilden größerer Gesamtstrukturen wird durch die Anordnung und Ausformung der Kissen, wie in Bild 5.58 dargestellt, begegnet. Hierbei werden die dazwischenliegenden unverformbaren Bereiche eliminiert und die relative Gesamtverformung entspricht der Verformung des einzelnen Kissens. Bei der linsenförmigen Ausformung ergeben sich leider kleine Bereiche in der Gesamtfläche, die nicht geschlossen werden können. Dies kann dann durch die in Bild 5.58 rechts dargestellte „Blattfederform" erreicht werden. Allerdings entstehen bei beiden Anordnungen in den Spitzen große schwer auszubildende Bereiche, wie sie schon bei der Raute mit ebenem gefaltetem Rand angesprochen worden sind.

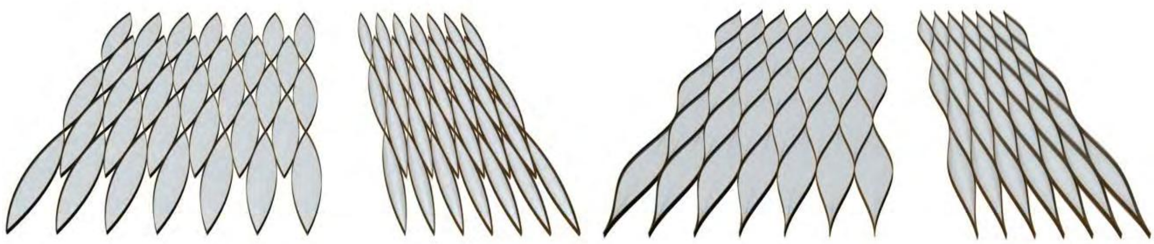


Bild 5.58: Ausgangs- und Verformungsvisualisierung für Linsen und Blattfederausformung des Randes

Für diese spitz zulaufenden Bereiche sind schon in Bild 5.41 Lösungen aufgezeigt. Diese gilt es in die bereits vorgestellten Systeme zu integrieren.

5.3.5 Hybride Lösung

Raute mit biegeweich spitzwinkligen und kinetisch stumpfwinkligen Ecken

Eine Kombination aus kinetischer und biegeweicher Berandung versucht sich in der Maximierung der möglichen Gesamtbewegung und der Minimierung der systembedingten Schwachstellen. Dies führt zu einer hybriden Lösung aus der in Bild 5.37 dargestellten rautenförmigen Kissengeometrie, den in den Bildern 5.42 und 5.58 dargestellten Anordnungen und der in Bild 5.41 gezeigten Ausformung der benannten geometriebedingten Schwachstellen.

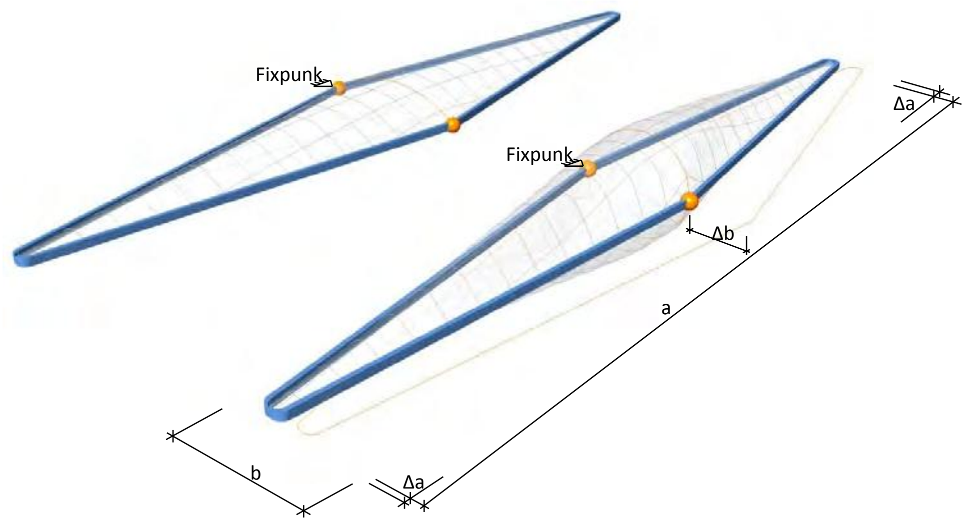


Bild 5.59: Rautenförmig berandetes Folienkissen mit gelenkiger und biegesteifer Eckenausbildung im un- und verformten Zustand mit Kennzeichnung der relevanten veränderlichen Geometriewerte

Die Geometrieveränderungen ergeben sich wie bei der Raute mit ebenem gefaltetem Rand (Gl. (5–14) und (5–15)). Die Längenänderung Δa nimmt natürlich auch den gleichen Verlauf wie bereits in Bild 5.38. Gleiches gilt für die Dehnung der Diagonale, wie in Bild 5.39 dargestellt. Der wesentliche Unterscheid liegt in den nun nicht mehr spitz zulaufenden Ecken, das das Spannungsbild Bild 5.60 der eingerahmten Hülle wesentlich entspannt.

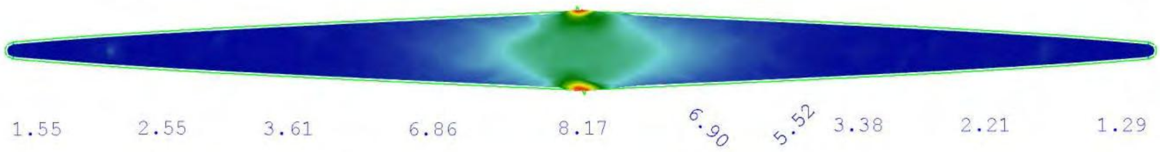


Bild 5.60: Vergleichsspannungsverlauf des vollverformten rautenförmig berandeten 2-lagigen Folienkissens mit hybrider Eckenausbildung mit einem Seitenverhältnis a/b von 10/1 und einem Innendruck p_i von 1 KN/m^2

Reiht man mehrere dieser Elemente aneinander, ergibt sich beispielsweise das in Bild 5.61 dargestellte Bild für eine rechtwinklige Begrenzungsfläche. Dabei entstehen durch die versetzte Anordnung an den Rändern Dreiecksflächen, die mit diesem System nicht mit abgedeckt werden können.

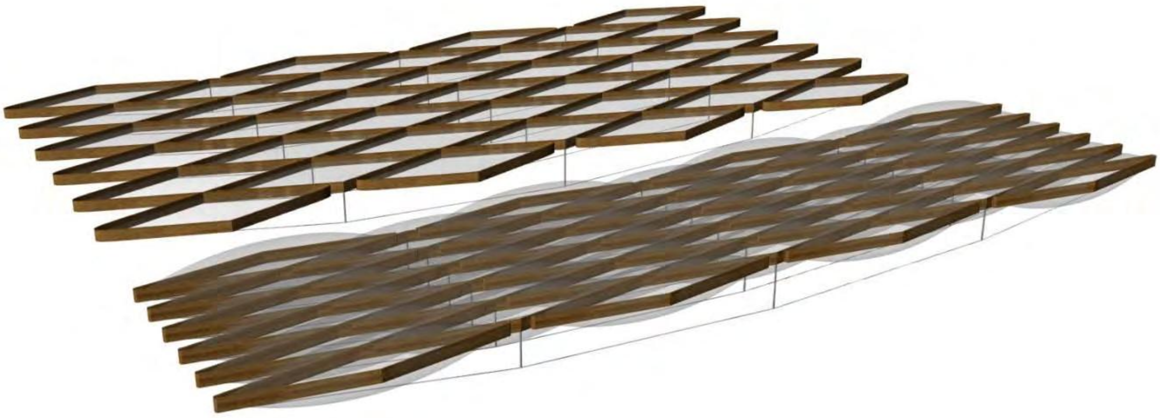


Bild 5.61: Großstruktur des rautenförmig hybrid berandeten 4-lagigen Kissens mit 55 % Öffnung

Entspricht die Geometrie der Großstruktur der Geometrie ihrer kleinesten Zelle, lassen sich gradlinige Berandungen definieren. In Bild 5.62 ist solch ein System abgebildet, wobei zusätzlich die Ränder der von der Großstruktur eingenommenen Fläche im unverformten und verformten Zustand markiert sind. Die spitzwinkligen Ecken der Raute der Großstruktur bewegen sich nicht nur mit nach hinten, sondern beschreiben Gleichung (5–15) folgend den mit Δa bekannten Weg nach außen.

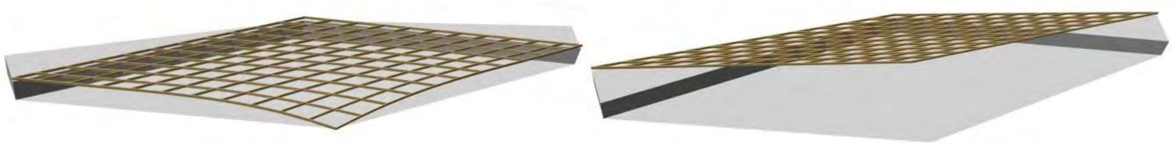


Bild 5.62: Großstruktur des rautenförmig hybrid berandeten 4-lagigen Kissens mit 55 % Öffnung und Kennzeichnung der Verformungsgrenzen – schematisch

5.4 Zusammenfassung

In den vorherigen Abschnitten konnten einige Lösungen für die Ausführung des Randes für formverändernde Folienkissen vorgestellt werden. Alle basieren auf dem in Abschnitt 5.2.1 vorgestellten Grundprinzip der Querschnittsveränderung durch Einblasen von Luft. Die Formänderungen des Randes müssen dabei hüllenkonforme Bewegungen bzw. Verformungen vorgeben. Dies wurde zunächst über rein kinetische Ränder erreicht. Der Vorteil der kinetischen Ränder ist, dass aufgrund der Bewegung keinerlei Verzerrungen im Rand auftreten und somit auch keine das Material belastenden Spannungen. Zusätzlich zu der durch Einblasen von Luft initiierten Bewegung ist es mit diesen Systemen möglich durch komplettes Entlüften der Kissen den kinetischen Rand komplett zusammenzufahren, ähnlich des in Bild 5.10 gezeigten Daches des Toyota Stadium. Dabei gilt es dennoch die Dehnungen der Hülle zu beachten und die elastischen Grenzen des Hüllenmaterials einzuhalten. Nachteilig zeigen sich durch die sehr lokale Vorgabe des Ortes der Bewegung, der Gelenke, die damit einhergehenden lokalen Verzerrungseinprägungen für die Hülle.

Die biegeweichen Lösungen orientieren sich ebenfalls an den Geometrien der zuvor beschriebenen Systeme. Da die biegeweichen Ränder hingegen die Bewegung nicht dediziert an einem vorher bestimmten Ort ausführen, kommt es für die Hülle zu materialgerechteren Verformungsvorgaben. Zudem stellt die integrale Ausführung des Randes eine wesentlich robustere und wartungsfreiere Konstruktion als die bei kinetischen Systemen notwendige Integration von Gelenken. Dieses System konnte am Beispiel einer rechteckigen Berandung sowohl numerisch als auch versuchstechnisch ausführlich getestet werden. Dabei zeigten sowohl die Verformungs- als auch Dehnungsmessungen gegenüber den numerischen Simulationen eine sehr gute Übereinstimmung.

Der Versuch die Berandung mit den Vorteilen der kinetischen und rein biegeweichen Lösungen auszuführen und die geometrischen Nachteile zu eliminieren führte zu einer hybriden Lösung. Hier konnte ein materialkonformes annähernd homogenes Spannungsbild für die Hülle erreicht werden. Zudem lässt sich die dort verwendete Rautenform sehr gut zu einer Großstruktur zusammensetzen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit konnten zum ersten Mal pneumatische Konstruktionen entwickelt werden, die über eine Steuerung des inneren Luftdrucks eine Formänderung sowohl der Hülle als auch des angeschlossenen Randes erlauben. Vorteilhaft hierfür sind die konstruktionsbedingte Leichtigkeit und die materialbedingte Biegeweichheit des allgemein für pneumatische Kissenkonstruktionen verwendeten Folienmaterials ETFE. Die Biegeweichheit der Hülle für eine gezielte Verformbarkeit zu nutzen und die daraus entstehende Bewegung auf den Rand zu übertragen, ist das Hauptthema dieser Arbeit. Neben den Untersuchungen zur Hülle war es notwendig sowohl bewegungs- als auch verformungskonforme Geometrien des Randes zu entwickelt.

Zunächst galt es das Material ETFE in seinen mechanischen Eigenschaften zu spezifizieren, wofür umfangreiche Versuche, sowohl zum elastischen als auch plastischen Verhalten durchgeführt wurden. Der Fokus zur Untersuchung des Materialverhaltens lag dabei auf dem plastischen Eigenschaften. Dazu wurden an Materialproben Kriech- und Relaxationsversuche durchgeführt. Dies war notwendig, da es keine ausreichenden Quellen zum plastischen Langzeitverhalten von ETFE gab. Aus den Kriechversuchen konnte eine Datenbasis erstellt werden, die die üblichen biaxialen Spannungspaarungen von Tragwerken aus ETFE abdeckt. Zudem wurde das plastische Langzeitverhalten des Materials an einem realen luftgefüllten Folienkissen verifiziert. Die optisch gewonnenen Messdaten am realen Folienkissen zeigten eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messwerten aus den reinen biaxialen Kriechversuchen. Die Versuche zum Relaxationsverhalten waren notwendig, um die maximal erreichbare Spannung zu ermitteln, die für eine dauerhafte Beanspruchung bemessungsrelevant ist. Die wenigen Literaturquellen konnten mit den eigenen Untersuchen bestätigt werden, die zeigen, dass das Material Spannungen oberhalb von 7 N/mm^2 kaum zulässt und nur mit großen plastischen Dehnungen einhergehen.

Um eine Aussage über das Bruchverhaltens zu erhalten, konnte mit einem Zugversuch unter elektronenmikroskopischen Bedingungen das theoretische Versagensmodell der Mikrorissbildung bestätigt werden. Auf stark vergrößerten Bildern der Oberfläche sind die unter steigender Zugbeanspruchung entstehenden Mikrorisse, die letztendlich für das Versagen des Materials verantwortlich sind, gut sichtbar und bestätigen das theoretische Modell.

Ein weiterer Baustein pneumatischer Konstruktionen ist der Rand, der als stabförmiges Tragelement zunächst auf sein Potential der Transformierbarkeit hin untersucht wurde. Der Begriff Transformation umfasst sowohl Starrkörperbewegung als auch verzerrungsbehaftete Verformung. Der Grad der Bewegungen bzw. Verformungen des Randes bewegt sich allerdings in Größenordnungen weit oberhalb der üblichen im Bauwesen betrachteten Grenzen. Deshalb mussten auch hierzu zunächst die mechanischen Grundlagen und die daraus abgeleiteten materialtechnischen Möglichkeiten erarbeitet werden. Es erfolgten sowohl analytische als auch numerische Betrachtungen, die insbesondere die materiellen Grenzen der Verformbarkeit, von für den Rand relevanten Materialien, ausarbeiteten. Dabei bildet der Quotient aus Festigkeit f_k Elastizitätsmodul E einen idealen Index der Verformbarkeit. Ein weiterer wesentlicher Einflussfaktor ist die Dicke d, die sowohl theoretisch als auch numerisch mit dem zuvor definierten Index f_k/E (Tabelle 3.8) verbunden werden konnte.

Für ein genaueres Verständnis des pneumatischen Gebildes Folienkissen galt es den für das Bauwesen wesentlichen Lastabtrag zu untersuchen, insbesondere die elastischen Kopplungseigenschaften des Stützmediums Luft, die bei der Bemessung aktuell noch keine Beachtung finden. Hierzu erfolgten Versuche in bauwesenrelevanten Dimensionen jeweils eines runden und eines quadratischen 2-lagigen Folienkissens, das wiederum mit dem optischen Dualkamerasystem 4M vermessen werden konnte. Die aufgezeichneten Daten konnten in einem weiteren Schritt mit einem numerischen Modell und einer analytischen Vergleichsrechnung verifiziert werden, die beide jeweils die Kopplung und die physikalischen Eigenschaften der Luft abbilden können. Die Versuche, das numerische Model und die analytische Vergleichsrechnung zeigen, dass für kurzzeitige bzw. schlagartige Lasten das System Folienkissen völlig anders reagiert, als dies in der derzeitigen Bemessung für ständige bzw. quasi-ständige Lasten Beachtung findet. Für schlagartige Belastungen, wie Windböen, reagiert das Folienkissen wie ein abgeschlossenes System, wobei die durch die Belastung erzeugte geringe Volumenänderung große Druckveränderungen hervorruft. Diese bedeuten signifikante Spannungsänderungen in der Hülle der Folienkissen, die schlimmstenfalls den elastischen Bereich des Materials ETFE überschreiten. Die Ergebnisse legen für die Bemessung von Folienkissen nahe, nicht nur zwischen ständigen und veränderlichen Lasten zu unterscheiden, sondern zusätzlich zwischen langsam und kurzzeitig veränderlichen Lasten.

Diese intensive Auseinandersetzung mit den drei Bausteinen pneumatischer Gebilde bildet die Grundlage für den Entwurf und die Detaillierung kinetischer, biegeweicher und hybrider pneumatischer Systeme, die durch Luftdruckänderung eine Formänderung erfahren. Dabei konnte dem Grundprinzip, der Steuerung der Verformung durch die ohnehin vorhandene Luftdruckkontrolle, folgend, mehrere Systeme entwickelt werden, die in den mechanischen Grenzen der Materialien hüllen- und randkonforme Verformungen und Bewegungen zulassen und ausführen. Dies wurde nicht nur numerisch, theoretisch und modellhaft gezeigt, sondern insbesondere an einem Großversuch demonstriert. Alle entwickelten Grundsysteme sind zudem addierbar und können so große Flächen wie Dächer oder Fassaden für Gebäude bilden. Wesentlich ist auch, dass die entwickelten Systeme zu jeder Zeit der Bewegung bzw. Verformung einen funktionierenden Lastabtrag aufweisen. Somit können Dach- oder Fassadenöffnungen wesentlich flexibler eingestellt werden.

Wie die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, lassen sich durch die Kombination aus ultraleichtem luftgefüllten Membranbau, beweglichen bzw. verformbaren Rändern und der Steuerung der Gesamtverformung des Systems Luftkissen über eine Veränderung des stützenden Innendrucks, integrale hoch anpassungsfähige Konstruktionen definieren, die eine weitere Möglichkeit wandelbarer Tragwerke aufzeigen.

6.2 Ausblick

Formverändernde Konstruktionen im Bauwesen, als Teil der wandelbaren Konstruktionen, sind bis heute absolute Exoten. Sie begegnen einer äußeren Belastung nicht durch Steifigkeit und bauen innere Spannungen auf, sondern geben der Belastung nach und verformen sich. Dazu finden sich einige Beispiele in der näheren Vergangenheit (Expo Osaka 70). Zukünftig lassen sich aber durch die numerisch und theoretisch weiter fortschreitenden Berechnungsmethoden weitaus komplexere Konstruktionen realisieren, die dann den traditionellen Ansatz der statischen Konstruktion, Verformungen möglichst klein zu halten, verändern werden. Ein aktuelles Projekt, das ein Vertreter biegeweicher Konstruktionen ist, ist der an der Universität Stuttgart entwickelte flectofin®. Hierbei wird ein im Bauwesen eigentlich durch Nachweise zu verhinderndes Verhalten verwendet, das Biegedrillknicken, das wiederum lediglich ein Nachweis für Stabilität und kleiner Verformungen darstellt.

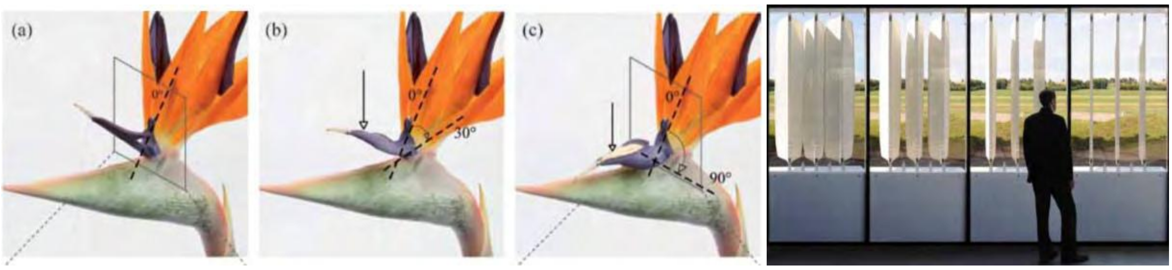


Bild 6.1: Natürliche Inspirationsquelle und daraus abgeleitete technische Anwendung - flectofin® [Lienhard, et al. 2011]

Es zeigt sich, dass biegeweiche Lösungen und die damit einhergehende Formänderung, wie sie auch in dieser Arbeit Verwendung finden, neue Konstruktionsprinzipien ermöglichen, die es genauestens zu studieren und zu erforschen gilt. So stellte an der TU Berlin ein auf ein natürlichem Vorbild basierendes Artefakt, der Fin Ray Effect®, ebenfalls die Grundlage eines vom BMBF geförderten Forschungsvorhabens. Dieses Forschungsvorhaben erlaubte eine umgehende Analyse der Struktur Fin Ray. Dabei zeigte sich, dass durch eine geschickte Dimensionierung eines an sich isotropen Materials Bereiche großer und kleiner Verformungen definiert werden können. Dies ist ein grundlegendes Prinzip der Natur und ermöglicht integrale Bauweisen, die wesentlich robuster und somit langlebiger ausfallen können.

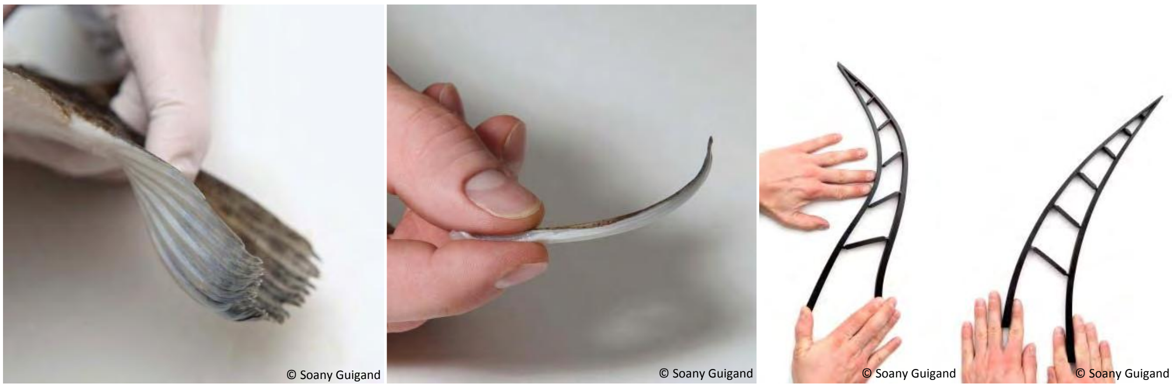


Bild 6.2: Natürliche Vorbild und daraus abgeleitetes technisches Modell – Fin Ray Effect® [Bögle, Hartz und Schlaich 2012]

Ein weiterer wesentlicher Schwerpunkt dieser Arbeit konnte durch das intensive Studium der Materialeigenschaften ETFE gesetzt werden. Die vorgenommenen versuchstechnischen Untersuchungen können allerdings nur ein weiterer Schritt für eine ganzheitliche Erfassung des Materialverhaltens sein, die es durch weitere Langzeittests und die kritische Studie bereits erfolgter Bauvorhaben zu erweitern gilt. Soll sich ETFE als wirklicher und ernstzunehmender Konkurrent zu Glas für transparente Fassaden- und Dachkonstruktionen etablieren, sind hier noch umfangreiche Forschungs- und Entwicklungstätigkeiten notwendig. Insbesondere das ausgeprägte Fließverhalten des Materials erfordert weitere umfassende Studien, da alle hier verwendeten Quellen und die selbst erfolgten Versuche lediglich einen Beobachtungszeitraum von 1000 bzw. maximal 2000 Stunden hatten, aber keine Daten über die üblicherweise realisierten Standzeiten von 25-30 Jahren existieren.

Eine Möglichkeit das Fließverhalten zu kontrollieren, ergibt sich durch eine geringe Spannungsauslastung. Mit der aus den Relaxationsversuchen ermittelten geringen Spannung lassen sich keine großen transparenten, ästhetisch anspruchsvollen Gebäudehüllen realisierbar. Eine Möglichkeit die Spannweite zu erhöhen, konnte bereits beim in Bild 5.3 gezeigten Bauvorhaben umgesetzt werden. Das Kissen der Stierkampfarena in Madrid des Centro Integrado de Vista Alegre, deren untere Hülle aus ETFE gefertigt ist, wird durch ein Seilnetz mit einer Maschenweite von 1,5/1,5 m unterstützt. Dadurch konnte ein 50 m weit spannendes pneumatisch gefülltes, in der unteren Lage aus ETFE bestehendes, Kissen realisiert werden. Diesen Ansatz verfolgend konnte an der TU Berlin eine Diplomarbeit mit dem Titel „Numerische Analyse gitternetzverstärkter ETFE-Folien“ bearbeitet werden [Moreno 2010]. Dabei wird das Seilnetz soweit verfeinert, dass es zu einem engmaschigen Gitternetz wird, das in die Folien bereits integriert oder in einer Extralage aufgelegt wird. Eine damit verbundene wesentliche Steigerung bezüglich des Lastabtrages ließe weitaus größere Spannweiten zu. Hier ergeben sich erheblicher Entwicklungsbedarf seitens der Folienhersteller und damit einhergehend Forschungs- und Entwicklungsarbeit zur Anschluss- und Fügbarkeit des möglicherweise entstehenden Verbundmaterials.

Die umfassenden Untersuchungen zum Lastabtrag von Folienkissen zeigen für kurzzeitige Lasten ein wesentlich anderes physikalisches Verhalten, als dies bei der Bemessung aktuell berücksichtigt wird. Die Bemessungsrichtlinien sollten daher angepasst werden. Hier haben weitere Versuche zur Dauerhaftigkeit und Robustheit des konstruktiven Systems Luftkissen, insbesondere mit dem Material ETFE zu erfolgen. Das transparente System Luftkissen mit ETFE als Hüllenmaterial hat gegenüber den mit Glas verwirklichten Dach- oder Fassadensystemen einen erheblichen Entwicklungsvorsprung aufzuholen. Dabei gilt es nicht nur das Tragfähigkeits- und Dauerhaftigkeitsverhalten zu verbessern, sondern die durch die Energiepreise und begrenzten Ressourcen begründete sehr wichtige Diskussion um Nachhaltigkeit zu führen. Da das hier bearbeitete System Luftkissen für die äußere Hülle von Gebäuden verwendet wird, spielen hierbei nicht nur Optimierungen von Fertigungsprozessen eine Rolle, sondern insbesondere die bauphysikalischen Eigenschaften des Gesamtsystems. Die Entwicklung konkurrenzfähiger Systeme, zu den aktuell im Fassaden- und Fensterbau verwendeten Glaskonstruktionen, stellt weiterhin einen erheblichen Forschung- und Entwicklungsrahmen.

Das Potential pneumatischer Konstruktionen insbesondere für wandelbare Systeme liegt dabei in der systemgegebenen Leichtigkeit und in der biegeweichen Verträglichkeit sowohl der Hülle als auch wie gezeigt in der adäquaten Randausgestaltung. Die vorgestellten Systeme sind dabei eine erste Richtung und zeigen wandelbare Tragsysteme für transparente Gebäudehüllen, die in den Grenzen der Elastizität verformt werden. Sowohl das Prinzip Pneu und als auch der Ansatz der integralen biegeweichen Bauweise werden hier verwendet und zeigen eindrücklich die konstruktiven Möglichkeiten, die sich hieraus ergeben.

7 Literaturverzeichnis

[Airlight 2011] Airlight. 2011. http://www.airlight.biz/ [05.2011].

[Ansell 1985] Ansell, Martin Philip: „Acceptability of ET HOSTAFLON Film for Use in Buildings“ Report, Bath: School of Material Science, University of Bath, 1985.

[Bach, Burkhardt und Otto 1988] Bach, Klaus, Berthold Burkhardt und Frei Otto: „IL18 Seifenblasen“ Stuttgart: Karl Krämer Verlag Stuttgart, 1988.

[Barthel, Burger und Saxe 2003] Barthel, Rainer, Norbert Burger und Klaus Saxe: „Dachkonstruktionen mit ETFE-Folie“ *Deutsche Bauzeitschrift*, Apr. 2003: 518-521.

[Bauer 1972] Bauer, Fritz: „Das flache biegesteife Seil mit elastischer Einspannung an den Enden“ *Der Bauingenieur*, Nov. 1972: 387-393.

[Bellmann 2011] Bellmann, Jürgen: „Air volume elements for distribution of pressure in air cushion membranes.“ *Membranes 2011.* Barcelona, 2011.

[Bleicher 2011] Bleicher, Achim: „Aktive Schwingungskontrolle einer Spannbandbrücke mit pneumatischen Aktuatoren“ Dissertation, Entwerfen und Konstruieren - Massivbau, TU Berlin, 2011.

[Bögle 2005] Bögle, Annette: „Zur Morphologie komplexer Formen im Bauwesen“ Dissertation, Stuttgart: Institut für Leichtbau, Entwerfen und Konstruieren, 2005.

[Bögle, Hartz und Schlaich 2012] Bögle, Annette, Christian Hartz und Mike Schlaich: „Flexible Structures - A Parametrical Analysis of the Fin Ray“ Seoul, Korea: IASS Proceedings, 2012. FF-313.

[Bögle, Schlaich und Hartz 2009] Bögle, Annette, Mike Schlaich und Christian Hartz: „Pneumatic structures in motion“ *IASS Symposium 2009.* Valencia, Spanien: IASS, 2009.

[Bonet, et al. 2000] Bonet, J., R.D. Wood, J. Mahaney, und P. Heywood: „Finite element analysis of air supported membrane structures“ *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2000: 579-595.

[Brockhaus 1998] Brockhaus. Bd. 8. Gütersloh: Bertelsmann, 1998.

[Charbonneau 2011] Charbonneau, Linda: „Time-Dependent Tensile Properties of ETFE Foils“ Master Thesis, Waterloo, Ontario, Canada, 2011.

[De Vries 2003] De Vries, Joos W. J: „Tensile Foil – ETFE-Foil as Membrane Construction Material“ Masters Project, Delft University of Technology, Civil Engineering and Geosciences, Structural and Building Engineering, 2003.

[DIN 19226-1 1994] DIN 19226-1: „Regelungstechnik und Steuerungstechnik – Allgemeine Grundbegriffe“ Berlin: Beuth Verlag, 1994.

[DIN 68364 2003] DIN 68364: „Kennwerte von Holzarten - Rohdichte, Elastizitätsmodul und Festigkeiten“ Berlin: Beuth Verlag, 2003.

[DIN EN ISO 527-2 1996] DIN EN ISO 527-2: „Prüfbedingungen für Form- und Extrusionsmassen“ Berlin: Beuth Verlag, 1996.

[Drobny 2006] Drobny, Jiri George: „Fluoroplastics: Rapra Review Report 184“ Shawbury: Smithers Rapra, 2006.

[Duden 2009] Duden: „Die deutsche Rechtschreibung“ Bd. 1. 12 Bde. Mannheim·Wien·Zürich: Bibliographisches Institut AG, 2009.

[DuPont 2012] DuPont: „DuPont Tefzel Properties Handbook“ Handbook, Smithers Rapra: DuPont, 2012.

[Ehrenstein 2011] Ehrenstein, Gottfried W.: „Polymer-Werkstoffe: Struktur - Eigenschaften – Anwendung“ München, Wien: Carl Hanser Verlag GmbH & CO. KG, 2011.

[Engel 1997] Engel, Heino: „Tragsysteme“ Ostfildern: Hatje Cantz Verlag, 1997.

[Gabler Wirtschaftslexikon 2001] Gabler Wirtschaftslexikon. 8 Bde. Wiesbaden: Gabler Verlag, 2001.

[Galliot und Luchsinger 2011] Galliot, Cédric und Rolf H. Luchsinger: „Uniaxial and biaxial mechanical properties of ETFE foils“ Testreport, Duebendorf, Schweiz: EMPA - Swiss Federal Laboratories for Materials Science and Technology, Center for Synergetic Structures, 2011.

[Girkmann 1963] Girkmann, Karl: „Flächentragwerke - Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke“ Wien: Spinger-Verlag, 1963.

[Göppert 2005] Göppert, Knut: „Adaptive Tragwerke - Wandelbare Dachkonstruktionen für Sportbauten“ *Bautechnik*, Mär. 2005: 157-161.

[Göppert 2007] Göppert, Knut: „Structures for Stadium Projects“ Zürich, 2007.

[Gould und Vrba 1982] Gould, Stephen Jay und Elisabeth S. Vrba: „Exaptation - a missing term in the science of form“ *Paleobiology*, Jan. 1982: 4-15.

[Greiner 1983] Greiner, Switbert: „Membrantragwerke aus dünnem Blech“ Dissertation, Düsseldorf: Werner Verlag, 1983.

[Haase, et al. 2011] Haase, Walter, et al: „Adaptive textile und folienbasierte Gebäudehüllen“ *Bautechnik*, 2011.

[Harbrecht 2011] Harbrecht, Helmut: „Nichtlineare Optimierung.“ Skript zur Vorlesung im Frühjahrsemester 2011, Stuttgart, 2011.

[Hartz, Bögle und Schlaich 2012] Hartz, Christian, Annette Bögle und Mike Schlaich: „ETFE foil cushions - modeling the air for load carrying“ *IASS Symposium 2012.* Seoul, Korea: IASS, 2012. FF-446.

[Herzog 1976] Herzog, Thomas: „Pneumatische Konstruktionen. Bauten aus Membranen und Luft“ Stuttgart: Hatje Verlag, 1976.

[Hildebrandt und Tromba 1996] Hildebrandt, Stefan und Anthony Tromba: „Kugel, Kreis und Seifenblasen - Optimale Formen in Geometrie und Natur“ Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1996.

[Hodann 2006] Hodann, Robert: „Fluorpolymer Films for Architectural Structures“ Vortragabdruck, Fachsysmposiums “Fluoroplast 2006“, Zürich: NOWOFOL GmbH & Co KG, 2006.

[Ishii 1993] Ishii, Kazuo: „Membrane Structures in Japan“ Tokio: SPS Publishing Company, 1993.

[Kemell, et al. 2008] Kemell, Marianna, Elina Färm, Mikko Ritala und Markku Leskelä: „Surface modification of thermoplastics by atomic layer deposition of Al_2O_3 and TiO_2 thin films“ *European Polymer Journal*, Sep. 2008: 3564-3570.

[Kong 2003] Kong, Xufeng: „Zum Tragverhalten von Pneukissen“ Diplomarbeit, Stuttgart: Universität Stuttgart, Institut für Leichtbau und Konstruktion, 2003.

[Korvink und Schlaich 2000] Korvink, Jan G. und Mike Schlaich: „Autonome Brücken - ein Blick in die ferne Zukunft des Brückenbaus“ *Bauingenieur*, 01 2000: 29-34.

[Kröplin 2007] Kröplin, Bernd: „Neue Wege im Leichtbau“ Themenheft Forschung - Leichtbau, Stuttgart, 2007.

[Kuhl und Meschke 2002] Kuhl, D. und G. Meschke: „Finite Elemente Methoden I & II – Vorlesungsskript“ Bochum: Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, 2002.

[LeCuyer 2008] LeCuyer, Annette: „ETFE. Technologie und Entwurf“ Birkhäuser Verlag, 2008.

[Lehnert und Schween 2006] Lehnert, Stefan und Tobias Schween: „Bauen mit Folienkissen“ *Der Bauingenieur*, 2006: 285-288.

[Lienhard, et al. 2011] Lienhard, J., et al: „Flectofin: a hinge-less flapping mechanism inspired by nature“ Paper, Bioinspir. Biomim. 6, 045001, 2011.

[Lippke 2009] Lippke, Roland: „Folien als transparente Elemente in der Fassade (mechanische und bauphysikalische Eigenschaften)“ Dissertation, Planen Bauen Umwelt - Technische Universität Berlin, 2009.

[Lunze 2006] Lunze, Jan: „Regelungstechnik 1“ Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2006.

[Martins 1996] Martins, Luis Câncio: „Morphologie der gekrümmten Flächentragwerke“ Zürich: Institut für Baustatik und Konstruktion - Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1996.

[Masubuchi 2013] Masubuchi, Motoi: „Conceptual and structural design of adadtive membrane structures with spoked wheel principle - folding to the perimeter“ Dissertation, Entwerfen und Konstruieren – Massivbau, TU-Berlin, 2013.

[Michaeli 2006] Michaeli, Walter: „Einführung in die Kunststoffverarbeitung“ München: Carl Hanser Verlag GmbH & CO. KG, 2006.

[Moreno 2010] Moreno, Javier Seguí: „Numerische Analyse gitternetzverstärkter ETFE-Folien“ Diplomarbeit, Berlin: TU-Berlin, 2010.

[Moritz 2007] Moritz, Karsten: „ETFE-Folien als Tragelement“ Dissertation, München, 2007.

[MSAJ 2006] MSAJ: „ETFE Film Panels design and construction guide“ Vorabdruck, Tokio, Japan: Membrane structures association of Japan, 2006.

[Nentwig 1994] Nentwig, Joachim: „Kunststoff-Folien“ München, Wien: Carl Hanser Verlag, 1994.

[Neuhäuser, et al. 2012] Neuhäuser, Stefan, Martin Weickgenannt, Christoph Witte, Oliver Sawodny Walter Haase und Werner Sobek: „Stuttgart SmartShell – A Full Scale Prototype of an Adaptive Shell Structure“ *IASS Proceeedings.* Korea: IASS, 2012.

[Otto 1995] Otto, Frei: „IL35 Pneu und Knochen“ Stuttgart: Krämer, 1995.

[Otto 1971] Otto, Frei: „IL5 Wandelbare Dächer“ New York: Wittenborn and Company, 1971.

[Otto, Drüsedau, et al. 1982] Otto, Frei, et al: „IL15 Lufthallenhandbuch Teil I-IV“ Stuttgart: ILEK Universität Stuttgart, 1982.

[Parry und Brown 1959] Parry, D.A. und R.H.J. Brown: „The hydraulic mechanism of the spider leg“ 1959: 423-433.

[Pflüger 1980] Pflüger, Alf: „Elementare Schalenstatik“ Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1980.

[Piaget 1992] Piaget, Jean: „Das Weltbild des Kindes“ Übersetzung: Luc Bernard. München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 1992.

[Polthier 2012] Polthier, Konrad: *Java View.* 2012. http://www.javaview.de/ [Zugriff am Dez. 2012].

[Rülzheim 2013] Rülzheim, Karnevalsgesellschaft. *Die Dampfnudel.* 2013. http://www.karneval-ruelzheim.de/default.php?page=dampfnudel_chronik&menu=dampfnudel [Zugriff am Mär. 2013].

[Sarabi 1984] Sarabi, Bahman: „Das Anstrengungsverhalten von Polymerwerkstoffen infolge ein- und zweiachsigen Kriechens“ Kassel: Institut für Werkstofftechnik, 1984.

[Saxe 2002] Saxe, Klaus: „Zum Einsatz von ETFE-Folien für einlagige Membrankonstruktionen am Beispiel des Konferenzzentrums der DBU in Osnarbrück“ Tagungsband zum Symposium Transparenz und Leichtigkeit, Essen, 2002.

[Saxe 2012] Saxe, Klaus: „Zur Berechnung und Bemessung von ETFE-Folientragwerken“ Tagungsband zum essener membranbau symposium 2012, Essen, 2012.

[sbp 2013] sbp. *http://www.sbp.de.* 06 2013. http://www.sbp.de/de#build/show/1108-Dach_Gießhalle_im_Landschaftspark_Duisburg-Nord [Zugriff am 06.2013].

[Schiemann 2009] Schiemann, Lars: „Tragverhalten von ETFE-Folien unter biaxialer Beanspruchung“ Dissertation, München, 2009.

[Schlaich 2000] Schlaich, Mike: „Kuppel und Kissen - Stierkampf-Arena in Madrid“ *db Deutsche Bauzeitung*, Sep. 2000: 59-69.

[Schlaich 2004] Schlaich, Mike: „Aktive und wandelbare Ingenieurbauten“ *Bautechnik*, Dez. 2004: 1001-1009.

[Schlaich, Bögle und Bleicher 2009] Schlaich, Mike, Annette Bögle und Achim Bleicher: „Vorlesungsskript Brückenbau II - Seile“ Entwerfen und Konstruieren - Massivbau, TU Berlin, 2009.

[Schöne 2007] Schöne, Lutz: „Bauen mit ETFE-Folien – Ein Praxisbericht“ *Stahlbau*, Mai 2007: 305-313.

[Schöne und Arndt 2012] Schöne, Lutz und Jochen Arndt: „Das blaue Stadion“ *Bautechnnik*, Okt. 2012: 686-693.

[Schwarzl 1990] Schwarzl, Friedrich Rudolf: „Polymermechanik : Struktur und mechnaisches Verhalten von Polymeren“ Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1990.

[Seidel 2008] Seidel, Michael: „Textile Hüllen - Bauen mit biegeweichen Tragelementen“ Berlin: Ernst und Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, 2008.

[Stein 1999] Stein, Erwin: „Der Ingenieurbau – Grundwissen“ Herausgeber: Gerhard Mehlhorn. Berlin: Ernst & Sohn - Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH, 1999.

[Teuffel 2004] Teuffel, Patrick: „Entwerfen adaptiver Strukturen“ Stuttgart, 2004.

[Wagner, Karwath und Kröplin 2007] Wagner, Rosemarie, Michael Karwath und Bernd Kröplin: „Ein orthotropes Werkstoffgesetz für Folien“ *Stahlbau*, Mai 2007: 297-304.

[Wagner und Raible 2000] Wagner, Rosemarie und Tilmann Raible: „Wann trägt Luft wirklich?“ *Bauen mit Textilien*, Sep. 2000: 4-15.

[Weilandt 2007] Weilandt, Agnes: „Adaptivität bei Flächentragwerken“ Dissertation, Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren Stuttgart, 2007.

[Winkler 2009] Winkler, Jan: „Kriechverhalten von ETFE-Folien im konstruktiven Ingenieurbau“ Diplomarbeit, Berlin, 2009.

[WU, MU und LIU 2008] WU, Ming-er, Tong MU und Jian-ming LIU: „Cycle Loading and Creep Tests of ETFE Foil“ *Journal of Building Materials*, 2008: 690-694.

8 Definitionen, Festlegungen, Einheiten und Zeichen

8.1 SI-Basiseinheiten

Dimensions-name	Dimensions-symbol	Einheiten-name	Einheiten-zeichen	Einheiten-symbol
Länge	L	Meter	m	l
Masse	M	Kilogramm	kg	m
Zeit	T	Sekunde	s	t
Stromstärke	I	Ampere	A	I
Temperatur	Θ	Kelvin	K	T
Stoffmenge	N	Mol	mol	n
Lichtstärke	J	Candela	cd	I_v

8.2 Weitere Einheiten

Einheiten-name	zeichen	symbol	dimension
Geschwindigkeit	$m \cdot s^{-1}$	v	$L \cdot T^{-1}$
Beschleunigung	$m \cdot s^{-2}$	a	$L \cdot T^{-2}$
Winkel	$rad = m \cdot m^{-1}$	φ	$L \cdot L^{-1}$
Winkelgeschwindigkeit	$rad \cdot s^{-1}$	$\dot{\varphi}$	T^{-1}
Winkelbeschleunigung	$rad \cdot s^{-2}$	$\ddot{\varphi}$	T^{-2}
Kraft	$N = J/m = kg \cdot m \cdot s^{-2}$	F	$M \cdot L \cdot T^{-2}$
Energie	$J = N \cdot m = W \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	T	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
Arbeit	$J = N \cdot m = W \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	W	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
Leistung	$W = J \cdot s^{-1}$	P	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$
Druck	$Pa = N \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$; bar 1 bar = 100 000 Pa 10 mbar = 1 kN/m^2	p	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$
Frequenz	$Hz = s^{-1}$	f	T^{-1}

8.3 Zeichen

8.3.1 Lateinische Buchstaben

Symbol	Beschreibung	Dimension	Einheit
a	Kissenlänge	L	m
A_L	Fläche des linsenförmigen Kissenquerschnitts	L^2	m^2
A_v	querkontraktionskorrigierte Querschnittsfläche	L^2	m^2
b	Bauteilbreite	L	m
d	Bauteildicke	L	m

Δd	Bauteildickenänderung	L	m
E	Elastizitätsmodul	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
$\boldsymbol{E}$	GREEN LAGRANGE Verzerrungstensor	$L \cdot L^{-1}$	-
E_{ij}	Elastizitätsmodul in i-Richtung durch j-Wirkung	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
EA	Dehnsteifigkeit	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
EI	Biegesteifigkeit	$M \cdot L^3 \cdot T^{-2}$	Nmm^2
f	Stich der Hülle	L	m
f_H	initialer Stich der Hülle	L	m
f_0	Ausgangsstich	L	m
Δf_H	Stichänderung der Hülle	L	m
f_k	charakteristische Festigkeit	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
$f_{y,k,l}$	zulässige charakteristische Spannung für Langzeiteinwirkungen	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
$f_{y,k,s}$	zulässige charakteristische Spannung für Kurzzeiteinwirkungen	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
F_R	Relaxationskraft	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
$\vec{F}$	Kraftvektor	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
G	Schubmodul	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
GA	Schubsteifigkeit	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
G_K	Gewichtskraft	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
h	Höhe	L	m
Δh	Höhendifferenz	L	m
H	Horizontalkraft	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
l	Auflagerabstand	L	m
l_K	Klemmlänge	L	m
l_e	Einspannlänge	L	m
Δl	Längenänderung	L	m
m	Masse	M	kg
M	Moment	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	Nm
M_m	molare Masse	$M \cdot N^{-1}$	kg/mol
N	Normalkraft	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
p_K	Druck der Gegendruckkammer	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	kN/m^2
p_i	Innendruck des Kissens	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	kN/m^2
$p_{i,init}$	initialer Innendruck des Kissens	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	kN/m^2
$p_{i,theo}$	theoretisch ermittelter Innendruck	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	kN/m^2
$p_{i,num}$	Numerisch gesteuerter Innendruck	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	kN/m^2
P_S	Vorspannkraft des Spannseiles	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
q	global ausgerichtete Auflast	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	kN/m^2
$q_\perp$	orthogonal lokal ausgerichtete Auflast	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	kN/m^2
Q	Querkraft	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	N
r	Radius	L	m

$\vec{r}(u,v)$	Parametrische Definition einer Fläche	L	m
r_H	Krümmungsradius der Hülle	L	m
$r_{H,init}$	initialer Krümmungsradius der Hülle	L	m
r_K	Kissenradius	L	m
R_s	Spezifische Gaskonstante	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot M^{-1} \cdot \Theta^{-1}$	J/(kg·K)
R_m	Universelle Gaskonstante	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot N^{-1} \cdot \Theta^{-1}$	J/(mol·K)
$\mathbb{R}^3$	dreidimensionaler Raum		
$\mathbb{R}^2$	zweidimensionaler Raum		
$\mathbb{R}^1$	eindimensionaler Raum		
s	Weg	L	m
$s_{H,init}$	initiale Länge der Hülle	L	m
Δs_{el}	elastische Seillängenänderung	L	m
t	Foliendicke	L	m
t_R	Relaxationszeitraum	T	s
T	Energie	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	J
$u(\boldsymbol{X},t)$	Verschiebungsvektor der elementaren Bausteine	L	m
∇u	Verschiebungsgradient	$L \cdot L^{-1}$	m/m
u_z	Verschiebung in globaler z-Richtung	L	m
U_H	Umfang der Hülle	L	m
U_K	Umfang des kreisförmigen Querschnitts	L	m
U_L	Umfang des linsenförmigen Querschnitts	L	m
V	Volumen	L^3	m^3
V_K	Volumen der Kugelkalotte	L^3	m^3
V_Z	Volumen des Zylinders	L^3	m^3
V_{kK}	Volumen des kreisförmig berandeten Kissens	L^3	m^3
V_{rK}	Volumen des rechteckig berandeten Kissens	L^3	m^3
$w(x)$	Funktion der Biegelinie	L	m
W	Arbeit	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	J
W_i	innere Arbeit	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	J
$\boldsymbol{X}$	Koordinatenvektor	L	m
$y_0(x)$	Funktion der Seillinie	L	m
$y_0'(x)$	1. Ableitung der Funktion der Seillinie	$L \cdot L^{-1}$	m/m
$y_0''(x)$	2. Ableitung der Funktion der Seillinie	$L \cdot L^{-2}$	m/m^2
$y_0^{IV}(x)$	4. Ableitung der Funktion der Seillinie	$L \cdot L^{-4}$	m/m^4

8.3.2 Griechische Buchstaben

Symbol	**Beschreibung**	**Dimension**	**Einheit**
α	Drehwinkel der Kissenlänge	$L \cdot L^{-1}$	rad; °
β	Drehwinkel der Kissenbreite	$L \cdot L^{-1}$	rad; °

β_A	Ausstellwinkel	$L \cdot L^{-1}$	rad; °
β_E	Einstellwinkel	$L \cdot L^{-1}$	rad; °
γ	thermischer Raumausdehnungskoeffizienten	Θ^{-1}	1/K
$\dot{\gamma}$	Schergeschwindigkeit	T^{-1}	1/s
ε	Dehnung	$L \cdot L^{-1}$	-
ε_0	Ausgangsdehnung	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon(t)$	Dehnung als Funktion der Zeit	$L \cdot L^{-1}$	-
$\dot{\varepsilon}(t)$	Dehnungsgeschwindigkeit als Funktion der Zeit	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon_{H,init}$	Ausgangsdehnung der Hülle	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon_{H,el}$	Elastische Dehnung der Hülle	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon_{H,pl}$	Plastische Dehnung der Hülle	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon_K(t)$	Kriechdehnung als Funktion der Zeit	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon_P(t)$	Primärkriechdehnung als Funktion der Zeit	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon_S(t)$	Sekundärkriechdehnung als Funktion der Zeit	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon_T(t)$	Tertiärkriechdehnung als Funktion der Zeit	$L \cdot L^{-1}$	-
$\varepsilon[i,j]$	Verschiebungsmatrix	$L \cdot L^{-1}$	-
η	dynamische Viskosität	$L^2 \cdot T^{-1}$	m^2/s
κ	Krümmung	L^{-1}	1/m
$\kappa(x)$	Funktion der Krümmung	L^{-1}	1/m
κ_H	Krümmung der Hülle	L^{-1}	1/m
$\kappa_{H,init}$	initiale Krümmung der Hülle	L^{-1}	1/m
κ_T	Isentropenexponent	-	-
ν	Querkontraktionszahl	$L \cdot L^{-1}$	m/m
ν_{ij}	Querkontraktionszahl in i-Richtung und j-Wirkung	$L \cdot L^{-1}$	m/m
Π	Gesamtpotential	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	J
Π_a	äußeres Potential	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	J
Π_i	inneres Potential	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	J
$\Pi_{i,M}$	Momentenanteil am inneren Potential	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	J
$\Pi_{i,N}$	Normalkraftanteil am inneren Potential	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	J
ρ	Dichte	$M \cdot L^{-3}$	kg/m^3
σ_∞	Spannung bei $t = \infty$	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
σ_H	Spannung der Hülle	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
$\sigma_{H,init}$	initiale Spannung der Hülle	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
σ_V	initiale Vorspannung der Hülle	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
$\sigma_{V,anal}$	analytisch ermittelte Vorspannung der Hülle	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
$\Delta\sigma_H$	Spannungsänderung in der Hülle	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
σ_{ij}	Spannung in i-Richtung und j-Wirkung	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
τ	Schubspannung	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	N/mm^2
$\varphi(\boldsymbol{X},t)$	Zeitabhängige Abbildung aller inneren elementaren Bausteine	L	m

$\varphi[i,j]$	Verdrehungsmatrix	$L \cdot L^{-1}$	rad; °
φ_A	Auflagerverdrehung am Punkt A	$L \cdot L^{-1}$	rad; °
φ_B	Auflagerverdrehung am Punkt B	$L \cdot L^{-1}$	rad; °

A Anhänge

A.1 Datenblätter

A.1.1 Drucksensor DS2-420

Betriebstemperaturbereich: -20 bis +50 °C

Hysterese: 0.1%

Medium: Luft, alle nicht aggressiven Gase

Ausgangssignale und Versorgungsspannungen:

DS 2-010:	0-10 V	R_L >= 2 kΩ	24 VDC/AC +/-10%
DS 2-420:	4-20 mA	R_B <= 400 Ω	15-30 VDC

Anschlüsse:
Elektrisch: Schraubklemmen für 0.14-1.5 mm^2
Pneumatisch: 2 Anschlüsse für Schlauch mit 6 mm oder 4 mm Innendurchmesser
Kabelverschraubung: PG7

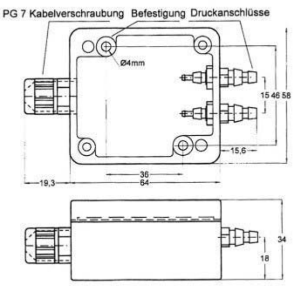
Anschlussbelegung DS 2-010: Printklemme:
1 : + 24 VDC/AC
2 : Output 0 - 10 V
3 : GND

Anschlussbelegung DS 2- 420: Printklemme:
1 : + 24 VDC *
2 : output 4-20 mA *

* Durch eine spezielle Zusatzschaltung kann es nicht zur Beschädigung des Sensors durch falsche Anschlussbelegung kommen. Die beiden Anschlüsse sind daher vertauschbar. Zwischen Anschluss 2 und dem Masseanschluss der Spannungsversorgung muss bei einer Spannung von + 24 V DC ein Bürdenwiderstand R_B <= 400 Ω geschaltet werden.

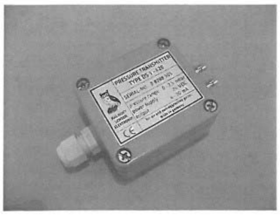
Gewicht: ca. 170 g

Schutzart: IP65



Rev.01-09

Beschreibung:
Die Baureihe DS2 wird für Anwendungen mit Druckbereichen zwischen 2,5 mbar und 1 bar angeboten. Die Drucksensoren der Reihe DS2 messen Differenz-, Über- und Unterdruck oder Volumenstrom in Luft und nicht aggressiven Gasen. Die Messwerte werden als 0-10 V oder 4-20 mA-Signal ausgegeben. Piezoresistive Messelemente sichern eine hohe Zuverlässigkeit und Genauigkeit. Das robuste Aluminium-Druckgussgehäuse garantiert eine hohe mechanische Stabilität und gute EMV-Eigenschaften.



Anwendung:

- Ansteuerung von Gebläsen
- Überwachung von Luftfiltern
- Maschinen- und Anlagenbau
- Umwelttechnik
- Niveauüberwachung von Flüssigkeiten
- Überwachung von Luftströmungen

Bestellschlüssel:

- DS2-010 0-10 V-Ausgang
- DS2-420 4-20 mA-Ausgang

Technische Daten für Typ DS 2-010 und DS 2-420 (Differenzdruck):

Druck-bereich [mbar]	Druck-bereich [kPa]	Über-last-barkeit [mbar]	Lineari-tätsfehler max. [± % v. EW]	Temperatur-fehler max. [± % v. EW] 0-50 °C	Langzeit-stabilität [% v. EW /Jahr]	Wiederhol-genauigkeit [% v. EW]	Ansprech-zeit [ms] ohne Dämpfung
0 - 2.5	0 - 0.25	350	1.0	3.5	2	0.3	50
0 - 5	0 - 0.5	350	1.0	2.5	2	0.3	50
0 - 10	0 - 1	350	1.0	1	0.5	0.2	50
0 - 25	0 - 2.5	350	0.8	1	0.5	0.1	50
0 - 50	0 - 5	350	0.8	1	0.5	0.1	50
0 - 100	0 - 10	350	0.8	1	0.5	0.1	50
0 - 250	0 - 25	4-fach	0.5	1	0.1	0.1	50
0 - 500	0 - 50	4-fach	0.5	1	0.1	0.1	50
0 - 1000	0 - 100	2-fach	0.5	1	0.1	0.1	50

Technische Daten DS 2 mit elektron. Korrektur des Linearitätsfehlers (Differenzdruck):

0 - 100	0 - 10	350	0.2	1	0.1	0.1	50
0 - 250	0 - 25	4-fach	0.2	1	0.1	0.1	50
0 - 500	0 - 50	4-fach	0.2	1	0.1	0.1	50
0 - 1000	0 - 100	2-fach	0.2	1	0.1	0.1	50

Für Sonderbereiche erbitten wir Ihre Anfrage

Rev.01-09

A.2 Herleitungen

A.2.1 Volumenformel für rechteckig berandetes Kissen

Zur Volumenbeschreibung des rechteckig berandeten Kissens, werden sowohl in x- als auch y-Richtung parabelförmige Ansätze gewählt (s. Gl. (A–1) und (A–2)). Betrachtet man nur eine Schnittrichtung würde die pneumatisch gestützte Hülle unter dem radial wirkenden Innendruck p_i die Form eines Kreisausschnittes einnehmen. Unter dem gegebenen Rand lässt sich die Oberfläche aber nicht geometrisch in beiden Richtungen mit Kreisbögen beschreiben.

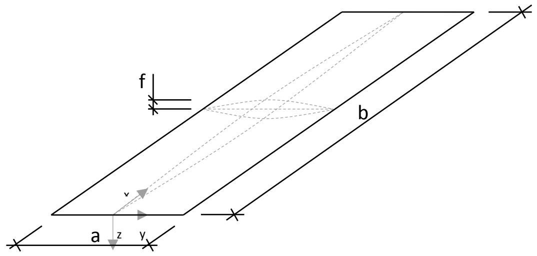


Bild A.1: Lage des Koordinatensystems und Bezeichnungen für die ab Gl. (A–1) gezeigte Volumenherleitung für das rechteckig berandete Kissen

Die in Gleichung (A–9) ermittelte Formel gilt für eine Seite des Kissens.

$$F(x) = \frac{-4f}{b^2}x^2 + \frac{4f}{b}x \tag{A–1}$$

$$Z(y;F(x)) = \frac{-4F(x)}{b^2}y^2 + F(x) \tag{A–2}$$

$$V = 2 \cdot \int_0^b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} Z\big(y;F(x)\big)dydx \tag{A–3}$$

$$V = 2 \cdot \int_0^b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4F(x)}{a^2} \cdot y^2 + F(x)\right)dydx \tag{A–4}$$

$$V = 2 \cdot \int_0^b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4F(x)}{a^2} \cdot y^2 + F(x)\right)dydx \tag{A–5}$$

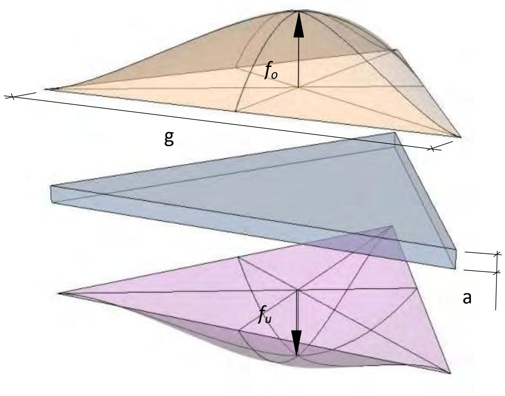
$$V = 2 \cdot \int_0^b \left(\frac{a}{3} \cdot F(x)\right)dx \tag{A–6}$$

$$V = \frac{2a}{3} \cdot \int_0^b \left(-\frac{4f}{b^2}x^2 + \frac{4f}{b}x\right)dx \tag{A–7}$$

$$V = \frac{2a}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot f \cdot b \tag{A–8}$$

$$V = \frac{4}{9} \cdot a \cdot b \cdot f \tag{A–9}$$

A.2.2 Volumenformel für gleichseitig dreieckig berandetes Kissen



$$V_{d,o/u} \approx 1{,}4805 \cdot f_{o/u} \cdot g^2 \qquad [119]\text{(A–10)}$$

$$V_Q = \frac{g^2\sqrt{3}}{4} \cdot a \qquad \text{(A–11)}$$

$$V_{dK} \approx g^2 \left[1{,}4805 \cdot f_{o/u} \cdot + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a\right] \qquad \text{(A–12)}$$

Bild A.2: Schichtmodell und Volumengleichungen eines doppelseitig mit h beabstandeten gleichseitig dreieckig berandeten Kissens

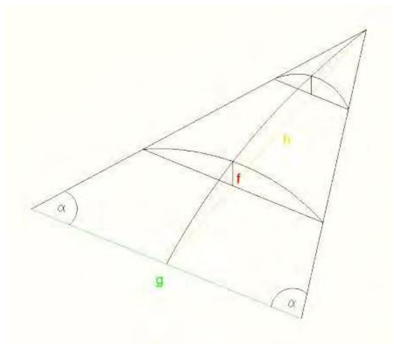


Bild A.3: Lage des Koordinatensystems und Bezeichnungen für die ab Gl. (A–1) gezeigte Volumenherleitung für das gleichseitig dreieckig berandete Kissen

Volumen im gleichseitigen Dreieckskissen:

- y-Richtung entlang der Höhe
- x-Richtung parallel zur Grundseite
- Formelherleitung für eine Kissenhälfte
- $f = f_{max}$

Höhe in Abhängigkeit der Länge der Grundseite:

$$h = tan(\alpha) \cdot \frac{g}{2}$$

Stichänderung entlang der Höhe:

Randbedingungen:

$$f(0) = f(h) = 0; \quad f\left(\frac{h}{3}\right) = f_{max}; \quad f'\left(\frac{h}{3}\right) = 0$$

Polynomansatz:

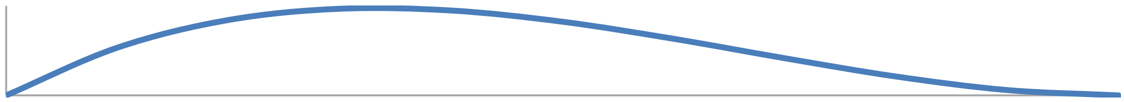
[119] Herleitung der Formel im Anhang Kap. A.2.2.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} l^3 & l^2 & l & 0 \\ \frac{l^3}{27} & \frac{l^2}{9} & \frac{l}{3} & f \\ \frac{l^2}{3} & \frac{2l}{3} & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Durch Lösen der Matrix ergibt sich folgende Formel:

$$f(x) = \frac{27f}{4l^3} \cdot x^3 - \frac{27f}{2l^2} \cdot x^2 + \frac{27f}{4l} \cdot x$$



Breitenänderung des Kissens parallel zur Grundseite:

$$g(y) = g - \frac{g}{h} \cdot y$$

Kissenverlauf parallel zur Grundseite:

$$v(x) = f(y) \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot x}{g(y)}\right)$$

$$v(x) = \left[\frac{27f}{4l^3} \cdot x^3 - \frac{27f}{2l^2} \cdot x^2 + \frac{27f}{4l} \cdot x\right] \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot x}{g - \frac{g}{h} \cdot y}\right)$$

Volumen des Kissens:

$$V(x,y) = \int_0^h \int_{-\frac{g(y)}{2}}^{\frac{g(y)}{2}} \left[\frac{27f}{4l^3} \cdot x^3 - \frac{27f}{2l^2} \cdot x^2 + \frac{27f}{4l} \cdot x\right] \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot x}{g - \frac{g}{h} \cdot y}\right) dxdy$$

Vereinfachtes Integrieren durch das Annähern der Kosinus- und Sinusfunktionen mit der Taylorreihe, da sie sich bei der partiellen Integration nicht eliminieren lassen.

Für das Integrieren nach x:

$$f(x) = cos(dx) = ax^2 + bx + c$$
$$f(0) \rightarrow cos(0) = 1 = c$$
$$f'(x) = -d \cdot sin(dx) = 2ax + b$$
$$f'(0) \rightarrow -d \cdot sin(0) = 0 = b$$
$$f''(x) = -d^2 \cdot cos(dx) = 2a$$
$$f''(0) \rightarrow -d^2 = 2a \rightarrow a = -\frac{d^2}{2}$$
$$f^*(x) = \frac{-d^2}{2} \cdot x^2 + 1$$

Für die Integration nach x gilt:

$$V(x,y) = \int_0^h \int_{-\frac{g(y)}{2}}^{\frac{g(y)}{2}} \left[\bar{a} \cdot x^3 - \bar{b} \cdot x^2 + \bar{c} \cdot x\right] \cdot \left[\frac{-\bar{d}^2}{2} \cdot x^2 + 1\right] dxdy$$

$$\bar{a} = \frac{27f}{4l^3}; \bar{b} = \frac{27f}{2l^2}; \bar{c} = \frac{27f}{4l}; \bar{d} = \frac{\pi}{g - \frac{g}{h} \cdot y}; \bar{d}' = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{g - \frac{g}{h} \cdot y}\right)^2$$

$$V(x,y) = \int_{-\frac{g(y)}{2}}^{\frac{g(y)}{2}} [\bar{a}\cdot x^3 - \bar{b}\cdot x^2 + \bar{c}\cdot x]\cdot[\bar{d}'\cdot x^2 + 1]dx$$
$$= \int_{-\frac{g(y)}{2}}^{\frac{g(y)}{2}} \bar{a}\cdot x^3 - \bar{b}\cdot x^2 + \bar{c}\cdot x + \bar{a}\bar{d}'\cdot x^5 - \bar{b}\bar{d}'\cdot x^4 + \bar{c}\bar{d}'\cdot x^3\, dx$$
$$= \left[\frac{\bar{a}}{4}\cdot x^4 - \frac{\bar{b}}{3}\cdot x^3 + \frac{\bar{c}}{2}\cdot x^2 + \frac{\bar{a}\bar{d}'}{6}\cdot x^6 - \frac{\bar{b}\bar{d}'}{5}\cdot x^5 + \frac{\bar{c}\bar{d}'}{4}\cdot x^4\right]_{\frac{-g(y)}{2}}^{\frac{g(y)}{2}}$$
$$= \frac{\bar{a}\bar{d}'}{6}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^6 - \frac{\bar{b}\bar{d}'}{5}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^5 + \left(\frac{\bar{c}\bar{d}'}{4}+\frac{\bar{a}}{4}\right)\left(g-\frac{gy}{h}\right)^4 - \frac{\bar{b}}{3}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^3 + \frac{\bar{c}}{2}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^2$$
$$= \int_0^h \frac{\bar{a}\bar{d}'}{6}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^6 - \frac{\bar{b}\bar{d}'}{5}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^5 + \left(\frac{\bar{c}\bar{d}'}{4}+\frac{\bar{a}}{4}\right)\left(g-\frac{gy}{h}\right)^4 - \frac{\bar{b}}{3}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^3$$
$$+ \frac{\bar{c}}{2}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^2 dy$$

Rücksubstitution von y:

$$\bar{d}' = -\frac{1}{2}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^2$$
$$V(x,y) = \frac{\bar{a}\pi^2}{12}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^4 + \frac{\bar{b}\pi^2}{10}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^3 + \frac{\bar{a}}{4}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^4 - \frac{\bar{c}\pi^2}{8}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^2 - \frac{\bar{b}}{3}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^3 + \frac{\bar{c}}{2}\left(g-\frac{gy}{h}\right)^2$$
$$V(x,y) = \left(\frac{\bar{a}\pi^2}{12}+\frac{\bar{a}}{4}\right)\left(g-\frac{gy}{h}\right)^4 + \left(\frac{\bar{b}\pi^2}{10}-\frac{\bar{b}}{3}\right)\left(g-\frac{gy}{h}\right)^3 + \left(\frac{\bar{c}}{2}-\frac{\bar{c}\pi^2}{8}\right)\left(g-\frac{gy}{h}\right)^2$$

Integrieren mithilfe von Substitution

$$-\frac{g}{h} = \frac{dz}{dy} \Rightarrow dy = -\frac{h}{g}\, dz$$

$$V(x,y) = \left(\frac{\bar{a}\pi^2}{12}+\frac{\bar{a}}{4}\right)\cdot z^4 + \left(\frac{\bar{b}\pi^2}{10}-\frac{\bar{b}}{3}\right)\cdot z^3 + \left(\frac{\bar{c}}{2}-\frac{\bar{c}\pi^2}{8}\right)\cdot z^2$$
$$= -\frac{h}{g}\int\left[\left(\frac{\bar{a}\pi^2}{12}+\frac{\bar{a}}{4}\right)\cdot z^4 + \left(\frac{\bar{b}\pi^2}{10}-\frac{\bar{b}}{3}\right)\cdot z^3 + \left(\frac{\bar{c}}{2}-\frac{\bar{c}\pi^2}{8}\right)\cdot z^2\right]dz$$
$$= -\frac{h}{g}\left[\left(\frac{\bar{a}\pi^2}{12}+\frac{\bar{a}}{4}\right)\cdot\frac{z^5}{5} + \left(\frac{\bar{b}\pi^2}{10}-\frac{\bar{b}}{3}\right)\cdot\frac{z^4}{4} + \left(\frac{\bar{c}}{2}-\frac{\bar{c}\pi^2}{8}\right)\cdot\frac{z^3}{3} + c\right]$$

Rücksubstitution:

$$V(x,y) = -\frac{h}{g}\left[\left(\frac{\bar{a}\pi^2}{12}+\frac{\bar{a}}{4}\right)\cdot\frac{\left(g-\frac{gy}{h}\right)^5}{5} + \left(\frac{\bar{b}\pi^2}{10}-\frac{\bar{b}}{3}\right)\cdot\frac{\left(g-\frac{gy}{h}\right)^4}{4} + \left(\frac{\bar{c}}{2}-\frac{\bar{c}\pi^2}{8}\right)\cdot\frac{\left(g-\frac{gy}{h}\right)^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{h}{g}\left[\left(\frac{\bar{a}\pi^2}{12}+\frac{\bar{a}}{4}\right)\cdot\frac{g^5}{5} + \left(\frac{\bar{b}\pi^2}{10}-\frac{\bar{b}}{3}\right)\cdot\frac{g^4}{4} + \left(\frac{\bar{c}}{2}-\frac{\bar{c}\pi^2}{8}\right)\cdot\frac{g^3}{3}\right]$$
$$= h\left[\frac{\bar{a}g^4}{5}\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4}\right) + \frac{\bar{b}g^3}{4}\left(\frac{\pi^2}{10}-\frac{1}{3}\right) + \frac{\bar{c}g^2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{8}\right)\right]$$

Einsetzen der Variablen $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\bar{c}$:

$$\bar{a} = \frac{27f}{4l^3}; \bar{b} = \frac{27f}{2l^2}; \bar{c} = \frac{27f}{4l}$$

$$
\begin{aligned}
V &= h\,\left[\frac{27fg^4}{20l^3}\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4}\right)+\frac{27fg^3}{8l^2}\left(\frac{\pi^2}{10}-\frac{1}{3}\right)+\frac{9fg^2}{4l}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{8}\right)\right]\\
&= h\,\left[\frac{27fg^4}{20l^3}\left(\frac{3+\pi^2}{12}\right)+\frac{27fg^3}{8l^2}\left(\frac{3\pi^2-10}{30}\right)+\frac{9fg^2}{4l}\left(\frac{4-\pi^2}{8}\right)\right]\\
V &= \frac{fg^2}{16}\left[\frac{9g^2}{5h^2}(3+\pi^2)+\frac{9g}{5h}(3\pi^2-10)+\frac{9}{2}(4-\pi^2)\right]
\end{aligned}
$$

Ersetzt man die Höhe h des Dreiecks mit:

$$h = \frac{g\sqrt{5}}{2}$$

Ergibt *sich:*

$$V = \frac{fg^2}{16}\left[\frac{36}{25}(3+\pi^2)+\frac{18}{5\sqrt{5}}(3\pi^2-10)+\frac{9}{2}(4-\pi^2)\right]$$

$$V \approx 1{,}4805 \cdot fg^2$$