Zur Parametrisierung radialsymmetrischer Dichtemodelle für die Erde

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur
Hartmut Wziontek
aus Jena

Von der Fakultät VI - Bauingenieurwesen und angewandte Geowissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing.–

genehmigte Dissertation

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann
Prof. Dr. rer. nat. Hans Burkhardt
Prof. Dr.-Ing. Erwin Groten

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 05.12.2003

Berlin 2004

D 83

Zusammenfassung

Selbst im Rahmen eines radialsymmetrischen, nichtrotierenden, linear elastischen und isotropen Modells für die Erde kann eine unabhängige Darstellung von Dichte und elastischen Parametern, wie sie in den derzeit existierenden Referenzmodellen üblich ist, keine eindeutige Lösung liefern und führt somit zu einer Überparametrisierung. Während die elastischen Parameter durch die Laufzeiten seismischer Wellen gut verifiziert werden können, bleibt die Dichte um ein Vielfaches unbestimmter.

Mit dieser Arbeit soll eine Möglichkeit zur adäquaten Beschreibung einer Normal-Dichteverteilung vorgestellt werden, die auf einer physikalisch sinnvollen, nichtempirischen Parametrisierung und einer Reduzierung auf die wesentlichen physikalischen Eigenschaften beruht. Neben dem Postulat von Homogenität der chemischen Zusammensetzung und der Phase innerhalb der einzelnen Schalen sowie adiabatischen Temperaturänderungen bildet vor allem die Annahme eines hydrostatischen Gleichgewichtszustandes, für den aus globaler Sicht kaum größere Abweichungen erwartet werden können, die Grundlage aller Betrachtungen. Unter diesen Voraussetzungen gilt die Williamson-Adams-Gleichung als fundamentaler Zusammenhang zwischen Dichte und seismischen Geschwindigkeiten. Abweichungen von den zugrundeliegenden Voraussetzungen können gegebenenfalls bei Vorliegen geeigneter Informationen *a priori* durch die Einführung des Bullen-Parameters in die Modellierung einfließen.

Allein durch den physikalischen Zusammenhang zwischen Dichte und seismischen Geschwindigkeiten ist eine Parametrisierung der radialen Dichtefunktion noch nicht gegeben. Ausgehend von dem Postulat einer Druck-Dichte-Relation in historischen Dichtegesetzen ist es jedoch möglich, eine geeignete Funktion abzuleiten. Unter Berücksichtigung der Poisson-Gleichung für das Gravitationspotential und der Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes ergibt sich damit eine Differentialgleichung, aus deren speziellen Lösungen in Übereinstimmung mit den seismischen Daten eine Parametrisierung der Dichte festgelegt werden kann. Ausführliche Untersuchungen zeigen, daß Funktionen für die Dichte mit ausschließlich geraden Potenzen des Radius eine bestmögliche und zugleich stabile Anpassung an die seismischen Daten bieten, während sich die derzeit gebräuchlichen allgemeinen Polynome zur Beschreibung der Dichte als weniger geeignet erweisen.

Für eine stabile Bestimmung der Dichte ist weiterhin eine strenge Unterscheidung des Beitrags der einzelnen Datengruppen unabdingbar. So läßt sich aus den seismischen Geschwindigkeiten lediglich auf die Form der Dichtefunktion innerhalb der einzelnen Schalen schließen, die Festlegung des Niveaus jeder einzelnen Schale ergibt sich erst unter Hinzunahme weiterer Informationen, wie der Dichte an der Kruste-Mantel-Grenze, den geodätischen Angaben zu Gesamtmasse und Trägheitsmoment sowie aus den Frequenzen der Eigenschwingungen.

Unter Berücksichtigung aller genannten Aspekte zeigt sich, daß eine eindeutige und stabile Beschreibung einer Normal-Dichteverteilung in Übereinstimmung mit seismischen und geodätischen Informationen möglich ist. Damit kann die vorgestellte Parametrisierung eine solide Grundlage für Anomaliebetrachtungen sowohl in der Geodäsie als auch in der Geophysik bilden.

Abstract

Even in the frame of a spherical symmetric, non-rotating, linear elastic and isotropic model an independent description of the Earth's density and elastic properties, as usual in most existing models, has no unique solution and thus leads to an over-parametrisation. Whereas the elastic properties can be verified well with the help of seismic traveltimes, the density remains much less determinate.

With this work, an adequate description of a normal density distribution based on a physically meaningful, non-empirical parametrisation and an abstraction to the essential physical properties will be presented. Beside the postulate on homogeneity of the chemical composition and phase inside each shell and an adiabatic gradient of temperature, the main assumption is hydrostatic equilibrium, which must be fulfilled in a global sense for the widest parts of the Earth's interior. Under these circumstances the Williamson-Adams-equation holds as a fundamental relation between density and seismic velocities. Deviations from the underlying suppositions can be described, if necessary and appropriate information exists, *a priori* by the Bullen-Parameter.

By the physical relation between density and seismic velocities alone a parametrisation is not given. With the help of a postulate on a pressure-density-relation in historical density laws it is possible to develop a suitable function. A differential equation follows from the Poisson equation for the inner gravitational potential in conjunction with that postulate and the assumption of hydrostatic equilibrium. Its special solutions lead in consistence with seismic data to a parametrisation of the density. Extensive investigations show that only functions in even powers of the radius allow a best and stable fit to the seismic data, while ordinary polynomials most common in use are less eligible for a description of the density.

Furthermore, to obtain a stable determination of the density a strict separation of the data-types is unavoidable. From the seismic velocities it is only possible to infer the shape of the density-function within the shells, additional data as the density below the crust-mantle-boundary, the geodetic values for mean mass and mean moment of inertia and the frequencies of the free oscillations are necessary to fix the absolute level in each shell.

Under consideration of the aforementioned aspects it is possible to obtain a unique and stable description of a normal density distribution in accordance with seismic and geodetic information. Thus the presented parametrisation can serve as a basis for anomaly analysis in geodesy and geophysics.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **7**

1 Grundlagen **9**
1.1 Elastomechanische Grundlagen . . . 9
1.1.1 Elastizität und Isotropie . . . 9
1.1.2 Anisotropie . . . 11
1.1.3 Seismische Raumwellen in linear elastischen Medien . . . 11
1.1.4 Eigenschwingungen eines linear elastischen, radialsymmetrischen Körpers . . . 12
1.2 Thermodynamische Beziehungen und Zustandsgleichungen . . . 15
1.3 Schwerefeld . . . 16
1.3.1 Schwerefeld eines nichtrotierenden, radialsymmetrischen Körpers . . . 17
1.3.2 Saigeys Theorem . . . 18
1.4 Radiale Schichtung der Erde . . . 18

2 Daten zur Festlegung der Dichte **20**
2.1 Primärdaten . . . 20
2.1.1 Gesamtmasse . . . 20
2.1.2 Trägheitsmoment . . . 21
2.1.3 Dichte unterhalb der Kruste . . . 23
2.2 Seismische Daten . . . 25
2.2.1 Geschwindigkeiten seismischer Raumwellen . . . 25
2.2.2 Frequenzen der Eigenschwingungen . . . 31
2.2.3 Vergleich verschiedener Geschwindigkeitsverteilungen und Fehlerschätzung . . . 33

3 Dichte und seismische Daten **38**
3.1 Dichte und seismische Geschwindigkeiten . . . 38
3.1.1 Williamson-Adams-Gleichung . . . 38
3.1.2 Berücksichtigung nichtadiabatischer Temperaturgradienten und chemischer Inhomogenitäten . . . 39
3.1.3 K–p–Hypothese . . . 42
3.1.4 Birch's Gesetz . . . 43
3.1.5 Seismische Zustandsgleichung von D. L. Anderson . . . 43
3.2 Frequenzen der Eigenschwingungen und Dichte . . . 46

4 Parametrisierung der Dichtefunktion **49**
4.1 Historische Dichtegesetze . . . 49
4.1.1 Druck-Dichte Relationen von Laplace und Roche . . . 49
4.1.2 Dichtegesetze von Darwin und Lipschitz . . . 52
4.2 Grundlage der Parametrisierung . . . 52
4.2.1 Derzeitige Parametrisierung der Referenzmodelle . . . 53
4.2.2 Der seismische Parameter als Modellierungsgrundlage . . . 56
4.2.3 Darstellung im Ursprung . . . 59
4.2.4 Trennung von V_P und V_S . . . 61

5 Algorithmen zur Modellierung der Dichte **63**
5.1 Modellbildung . . . 63
5.1.1 Funktionales Modell . . . 63
5.1.2 Nebenbedingungen . . . 65
5.1.3 Fehlerschätzungen . . . 66
5.2 Modellierung auf der Grundlage des seismischen Parameters . . . 67
5.2.1 Ausgangsnäherungen . . . 67
5.2.2 Funktionen von Roche und Lipschitz . . . 68
5.2.3 Dichtefunktionen mit geraden Potenzen des Radius . . . 71
5.2.4 Vergleich mit allgemeinen Polynomen . . . 77

5.3 Modellabstimmung auf Frequenzen der Eigenschwingungen 79
5.4 Berücksichtigung nichthydrostatischer Einflüsse 83
5.4.1 Berücksichtigung der K-p-Hypothese von Bullen 83
5.4.2 Berücksichtigung nichthydrostatischer Störungen im oberen Mantel 85
5.5 Ein generelles Konzept 88

Schlußfolgerungen und Ausblick **90**

A Koeffizientensätze **98**
A.1 Modelle nach Roche und Lipschitz 98
A.2 Modell HA2-327-A 99
A.3 Modell HA2-327-B 100
A.4 Modell HA2-327-C 101
A.5 Modell NHA2-327 102
A.6 Modell HA2-337-A 103
A.7 Modell HA2-337-B 104
A.8 Modell HA2-337-C 105
A.9 Modell NHA2-337 106

Einleitung

Ein Referenz-Dichtemodell ist sowohl für die Geodäsie als auch für viele Bereiche der Geowissenschaften von größtem Interesse, wenn z.B. die Unregelmäßigkeiten des äußeren Schwerefeldes interpretiert oder laterale Inhomogenitäten des Erdinneren (Tomographie) untersucht werden sollen.

Eine hypothesenfreie Bestimmung der Dichte allein aus Daten, die an der Oberfläche gemessen wurden, ist keine eindeutig lösbare Aufgabe. Aus diesem Grunde stellt sich an die Modellierung neben einer möglichst einfachen Parametrisierung auch die Forderung nach der Einführung physikalisch plausibler Annahmen. Bullen hebt daher in seinen „Einführenden Bemerkungen zu einem Standard-Erdmodell“ (Bullen 1974) hervor, daß prinzipiell in ein physikalisches Modell nicht mehr Parameter als unbedingt notwendig eingeführt werden sollten, um die Daten im Rahmen ihrer Genauigkeit zu repräsentieren. Er geht sogar noch einen Schritt weiter, indem er fordert, „es ist davon auszugehen, daß das gewählte Referenzmodell deutlich einfacher als ein optimales Modell sein sollte.“

Werden jedoch sowohl die Dichte als auch die elastischen Parameter[1] durch unabhängige Funktionen repräsentiert, wie das in den heute gebräuchlichen Modellen (z.B. im derzeit meistverwendeten PREM) der Fall ist, kann ein solches Modell nicht eindeutig bestimmt sein, da ein solcher Ansatz grundsätzlich eine Überparametrisierung bedeutet und somit nicht erwartet werden kann, daß damit die physikalischen Zusammenhänge der ursprünglichen Problemstellung adäquat beschrieben werden können. Vielmehr wird der üblicherweise gewählte empirische Polynomansatz maßgeblich von den numerischen Verfahren zu seiner Bestimmung abhängen. Während die resultierenden seismischen Geschwindigkeiten direkt anhand der Laufzeiten verifiziert werden können, ist der Verlauf der Dichte um ein vielfaches unbestimmter und wird offenbar von zwangsläufig einzuführenden Stabilisierungen stärker geprägt, als physikalisch zu begründen ist.

Als Alternative zu einer solchen Modellierung kann die Einführung einer plausiblen Beziehung zwischen den seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte betrachtet werden. Für die Formulierung eines solchen Zusammenhanges existieren verschiedene Möglichkeiten. Einerseits können empirische, auf Labormeßdaten gestützte Relationen angegeben werden, wie das Gesetz von Birch oder die auf thermodynamischen Betrachtungen aufbauende seismische Zustandsgleichung von D. L. Anderson. Andererseits kann die Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes zum Ausgangspunkt einer solchen Modellierung gemacht werden. Obwohl schon aufgrund der Eigenschaften des äußeren Erdschwerefeldes oder aufgrund der komplizierten Prozesse im Bereich des oberen Mantels auf Störungen geschlossen werden muß, kann aus globaler Sicht nicht erwartet werden, daß größere Abweichungen von einem solchen Gleichgewichtszustand auftreten. Für ein globales Referenzmodell sollte daher eine hydrostatische Modellierung zugrundegelegt werden. Abweichungen vom hydrostatischen Zustand können dann in Analogie zu dem in der physikalischen Geodäsie schon seit langem gebräuchlichen Konzept von Normal- und Störpotential durch die Einführung von Dichtestörungen gegenüber der (hydrostatischen) Normal-Dichteverteilung aufgefaßt werden.

In diesem Sinne soll unter Berücksichtigung der Forderungen von Bullen eine Parametrisierung vorgeschlagen werden, die entgegen den heute gebräuchlichen empirischen Polynom-Ansätzen kompromißlos auf den folgenden einfachen, physikalisch nachvollziehbaren Annahmen beruht:

- hydrostatische Druckzunahme,
- adiabatische Temperaturänderungen,
- Homogenität der chemischen Zusammensetzung und des Phasenzustandes innerhalb der einzelnen Schalen sowie
- Isotropie des Mediums.

Unter diesen Voraussetzungen gilt die Williamson-Adams-Gleichung, die eine Verknüpfung zwischen seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte ermöglicht. Damit bietet es sich an, die seismischen Daten mittels einer geeigneten Dichtefunktion darzustellen, wodurch die Anzahl der notwendigen Parameter im Vergleich zu bestehenden Modellen (z.B. PREM) drastisch reduziert werden kann.

Entscheidend ist, den Informationsgehalt der verwendeten Daten zu berücksichtigen. So läßt sich aus den seismischen Geschwindigkeiten lediglich der Gradient der Dichte innerhalb einzelner Schalen abschätzen, während die Absolutwerte, also vor allem die Dichtesprünge an den Schalenrändern, aus anderen Quellen vorgegeben oder bestimmt werden müssen. Eine entscheidende Rolle spielen dabei Gesamtmasse, Trägheitsmoment und die Annahme der Dichte unterhalb der Kruste sowie die Frequenzen der Eigenschwingungen. Eine klare Trennung zwischen dem Beitrag der einzelnen Beobachtungsgruppen ist für eine stabile Modellierung gerade im Hinblick auf ein Referenzmodell unabdingbar.

Zwecks Einbeziehung nichthydrostatischer Dichtestörungen, die insbesondere im Hinblick auf die im oberen Mantel zu erwartenden Inhomogenitäten bedeutsam sein können, ermöglicht die Erweiterung der Williamson-Adams-Gleichung durch den Inhomogenitätsparameter von Bullen eine flexible Anpassung. Dafür sind jedoch zusätzliche Informationen notwendig, die nicht aus den seismischen Daten entnommen werden können.

[1] bzw. die seismischen Geschwindigkeiten

Darüberhinaus stellt sich hinsichtlich eines möglichst einfachen Referenzmodells auch die Frage nach der Notwendigkeit der Einführung von Anisotropie zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften. Da die Differenzen zwischen den unterschiedlich polarisierten Geschwindigkeiten insgesamt gering sind, wird bereits die Ansicht vertreten, daß der Einfluß der Anisotropie klein genug ist, um für mittlere radialsymmetrische Modelle vernachlässigt werden zu können (Masters und Widmer 1995). Desweiteren stellt sich aufgrund der Unterschiedlichkeit regionaler Studien die grundsätzliche Frage, ob die Effekte durch ein mittleres Gesamtmodell überhaupt adäquat dargestellt werden können.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird methodisch ein Ansatz basierend auf der Williamson-Adams-Gleichung vorgestellt, mit dem es möglich ist, die seismischen Daten durch die Dichtefunktion auszudrücken. Werden alle notwendigen Vorinformationen explizit als Nebenbedingungen eingeführt, ergibt sich immer eine stabile Problemstellung. Unter Berücksichtigung der Frequenzen der Eigenschwingungen werden in dem vorgelegten Modell die Dichtesprünge im oberen Mantel sowie an der Diskontinuität zwischen innerem und äußerem Kern abgeleitet. Daraus ergibt sich ein simples Modell für die Dichte, das auf klar definierten Voraussetzungen beruht. Abweichungen von den idealisierten Annahmen könnten bei Vorhandensein geeigneter Informationen jederzeit berücksichtigt werden. Es zeigt sich jedoch im Vergleich mit existierenden Dichtemodellen, daß diese Unterschiede nur gering sind.

Daher kann die vorgeschlagene Modellierung als Grundlage für ein Konzept von Normaldichte und Dichtestörungen betrachtet werden: Das Normal-Dichtemodell genügt plausiblen physikalischen Voraussetzungen und zeichnet sich deshalb durch eine stabile Modellierung aus. Insbesondere liegt die Annahme eines hydrostatischen Gleichgewichtszustandes essentiell zugrunde. Abweichungen von den übrigen Voraussetzungen können darauf aufbauend durch andere Methoden modelliert werden, die sich auf linearen oder linearisierten Zusammenhängen gründen (Tomographie). Die vorgestellten Ergebnisse sollen jedoch nicht einer direkten geophysikalischen Interpretation dienen, sondern in erster Linie dem Nachweis der Anwendbarkeit der Methodik.

Kapitel 1. Grundlagen

1.1 Elastomechanische Grundlagen

1.1.1 Elastizität und Isotropie

Die einfachste elastomechanische Beschreibung eines Körpers beruht auf der Annahme von idealer Elastizität und Isotropie, d.h. es wird unterstellt, daß zwischen Spannung und Dehnung eine lineare Beziehung (Hookesches Gesetz) besteht und daß das elastische Verhalten in allen Richtungen gleich ist. Das elastische Verhalten des Mediums kann dann durch zwei Parameter vollständig beschrieben werden. Die Beziehung zwischen den Komponenten des Spannungstensors p_{ij} und den Komponenten des Verzerrungstensor e_{ij} kann unter diesen Umständen durch das verallgemeinerte Hookesche Gesetz

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{1}{E}\left[p_{ii} - \sigma(p_{jj} + p_{kk})\right] , \\ e_{ij} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} p_{ij} \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit dem Elastizitätsmodul oder Youngschen Modulus E und der Querdehnzahl oder Poisson-Zahl σ dargestellt werden (Lenk und Gellert 1989). Äquivalent dazu kann das Medium auch mit den beiden Laméschen Konstanten λ und μ oder mit Kompressionsmodul K und Schermodul μ charakterisiert werden. Ersetzt man in (1.1) die Parameter (E, σ) durch die Laméschen Konstanten (λ, μ), ergibt sich die alternative Formulierung des Hookeschen Gesetzes

$$p_{ij} = \lambda\,\Theta\,\delta_{ij} + 2\mu\,e_{ij} \tag{1.2}$$

mit der Dilatation

$$\Theta = \sum e_{ii} \tag{1.3}$$

und dem Kronecker-Symbol δ_{ij} (Bullen 1963b, Kap. 2.3.1).

Die Definition des Druckes p folgt aus der Zerlegung der Komponenten des Spannungstensors in die Normalspannungen p_{ii} und die Tangentialspannungen $P_{ij}, i \neq j$ nach

$$\begin{aligned} p_{ij} &= -p\delta_{ij} + P_{ij} , \\ p &= -\frac{1}{3}\sum p_{ii} . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Der Spannungszustand wird als hydrostatisch bezeichnet, wenn er allein vom Druck abhängig ist, also keine Tangentialspannungen P_{ij} auftreten. Unter diesen Bedingungen kann anstelle von (1.2) auch

$$-\,p\,\delta_{ij} = \lambda\,\Theta\,\delta_{ij} + 2\mu\,e_{ii} \tag{1.5}$$

geschrieben werden. Betrachtet man nun eine kleine zeitliche Änderung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$-\,dp\,\delta_{ij} = \lambda\,d\Theta\,\delta_{ij} + 2\mu\,de_{ii} \tag{1.6}$$

und berücksichtigt die Summen (1.4) und (1.3), folgt

$$-\,3dp = 3\lambda\,d\Theta + 2\mu\,d\Theta \tag{1.7}$$

und damit sogleich

$$-\,\frac{dp}{d\Theta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu = K. \tag{1.8}$$

Die Größe K gibt also das Verhältnis zwischen Druck und Kompression (negativer Dilatation) an. Unter Berücksichtigung des Massenerhaltungssatzes

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1.9}$$

- hierbei ist ρ die Dichte des Mediums, x_i und v_i sind die Komponenten von Orts- und Geschwindigkeitsvektor in kartesischen Koordinaten -, ergibt sich unter Berücksichtigung der Verknüpfung zu den Verschiebungen u_i

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = \frac{d\Theta}{dt} \tag{1.10}$$

der für die Seismologie fundamentale Zusammenhang (Bullen 1963b, Kap. 2.3.3)

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho} \tag{1.11}$$

zwischen Inkompressibilität (oder Kompressionsmodul) K, Dichte ρ und hydrostatischem Druck p. Es ist hervorzuheben, daß diesem Zusammenhang sowohl das Verschwinden der Tangentialspannungen als auch Isotropie des Stoffes zugrunde liegt.

Weiterhin gelten die folgenden Beziehungen zwischen den verschiedenen elastischen Parametern (Love 1927, Art. 70), (Bullen 1963b, Kap. 2.3.4):

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\mu\,, \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\sigma)}\,, \\ K &= \frac{E}{3(1-2\sigma)} = \frac{2(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}\mu = \lambda + \frac{2}{3}\mu\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Die Bewegungsgleichungen für Partikel eines deformierbaren, kontinuierlichen Mediums lauten in der Formulierung der Newtonschen Mechanik in kartesischen Koordianten (Bullen 1963b, Kap. 2.1.5)

$$\rho\frac{d^2u_i}{dt^2} = \sum_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \tag{1.13}$$

Hierbei sind ρ die Dichte des Mediums sowie u_i, f_i und p_{ij} die Komponenten des Verschiebungsvektors, des Vektors der angreifenden Kraft bzw. des Spannungstensors. Im Falle eines statischen Gleichgewichtes treten keine Beschleunigungen auf ($d^2u/dt^2 = 0$), woraus sich bei hydrostatischem Spannungszustand ($p_{ij} = 0, i \neq j$) unmittelbar die bekannte Beziehung

$$\rho f_i = -\frac{\partial p_{ii}}{\partial x_i} = -\mathrm{grad}\, p \tag{1.14}$$

für das hydrostatische Gleichgewicht ergibt. Existiert als einzige Kraft die Schwerkraft

$$f_i = g_i = \mathrm{grad}\, W, \tag{1.15}$$

folgt aus (1.14) die bekannte Relation für einen selbstgravitierenden Körper im hydrostatischen Gleichgewicht

$$\rho\ \mathrm{grad}\, W = \mathrm{grad}\, p \tag{1.16}$$

Bildet man die Skalarprodukte $\sum \frac{\partial W}{\partial x_i}\, dx_i = dW$ und $\sum \frac{\partial p_{ii}}{\partial x_i}\, dx_i = dp$, ergibt sich daraus

$$\rho\ dW = dp, \tag{1.17}$$

d.h. $dp = 0$ bedeutet $dW = 0$ und umgekehrt, woraus folgt, daß die Äquipotentialflächen $W = const$ gleichzeitig Flächen gleichen Druckes $p = const$ sein müssen. Weiterhin fallen wegen der Beziehung

$$\rho = \frac{dp}{dW}, \tag{1.18}$$

die Flächen konstanter Dichte mit den Äquipotentialflächen bzw. den Flächen gleichen Druckes zusammen. Da das Potential eine monotone Funktion des Abstandes vom Massenzentrum ist, muß die Dichte ebenfalls eine monotone Funktion sein, d.h. die Dichte im Inneren eines im hydrostatischen Gleichgewicht stehenden Körpers kann in Richtung des Massenzentrums nicht abnehmen (Moritz 1990, Kap. 2.5).

Im Falle radialsymmetrischer Körper hängen sowohl das Gravitationspotential W als auch der Druck p nur vom Radius r ab. Es gilt also

$$\rho\ \frac{dW}{dr} = -\rho\ g = \frac{dp}{dr}, \tag{1.19}$$

mit dem Betrag der Schwerkraft $g = |g_i|$. Da das Potential W eines kugelsymmetrischen Körpers in radialer Richtung monoton fällt, ergibt sich unmittelbar die Bedingung

$$\frac{d\rho}{dr} < 0. \tag{1.20}$$

1.1.2 Anisotropie

Für Stoffe im kristallinen Zustand gilt die Annahme, daß das elastische Verhalten des Mediums in allen Richtungen gleich ist, nicht mehr vollständig. In diesem Falle muß das Hookesche Gesetz (1.1) oder (1.2) weiter verallgemeinert werden, indem als Relation zwischen dem Spannungs- und dem Verzerrungstensor die lineare Beziehung

$$p_{ij} = A_{ijlm} e_{lm} \tag{1.21}$$

eingeführt wird (Bullen 1963b, Kap. 2.4), (Love 1927, Art. 72). Die Größe A_{ijlm} sind die Komponenten eines Tensors 4. Stufe mit den Symmetrieeigenschaften $A_{ijlm} = A_{jilm}$ wegen $p_{ij} = p_{ji}$ und $A_{ijlm} = A_{ijml}$ wegen $e_{lm} = e_{ml}$. Deshalb sowie aufgrund der Annahme reversibler thermodynamischer Zustandsänderungen und der damit verbundenen Existenz der Formänderungsenergie-Funktion sind von den 81 Komponenten dieses Tensors nur 21 voneinander unabhängig. Wenn das Material eine Symmetrieachse in der Art aufweist, daß die elastischen Eigenschaften in der senkrecht dazu stehenden Ebene in jeder Richtung gleich sind, kann das Verhalten des Mediums nach einer von Love (Love 1927, Art. 110) gebrauchten Notation durch die fünf elastischen Parameter A, C, N, L und F beschrieben werden. Ein solches Medium wird auch als transvers-isotrop bezeichnet. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen können damit in kartesischen Koordinaten folgendermaßen angegeben werden (Takeuchi und Saito 1972):

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= A(e_{xx} + e_{yy}) - 2Ne_{yy} + Fe_{zz}\,, \\
p_{yy} &= A(e_{xx} + e_{yy}) - 2Ne_{xx} + Fe_{zz}\,, \\
p_{zz} &= F(e_{xx} + e_{yy}) + Ce_{zz}, \\
p_{xy} &= Ne_{xy}\,, \\
p_{yz} &= Le_{xy}\,, \\
p_{zx} &= Le_{zx}\,.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Soll im Rahmen kugelsymmetrischer Modelle Anisotropie eingeführt werden, ist einzig eine Darstellung mit dem Radius als Symmetrieachse für sinnvoll zu erachten, weshalb für solche Modelle nur die Berücksichtigung transverser Isotropie in Betracht kommt. Der Zusammenhang für die Komponenten von Spannungs- und Dehnungstensor in Kugelkoordinaten lautet dann:

$$\begin{aligned}
p_{rr} &= Ce_{rr} + F(e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi})\,, \\
p_{\theta\theta} &= Fe_{rr} + A(e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi}) - 2Ne_{\phi\phi}\,, \\
p_{\phi\phi} &= Fe_{rr} + A(e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi}) - 2Ne_{\theta\theta}\,, \\
p_{r\theta} &= Le_{r\theta}\,, \\
p_{\theta\phi} &= Ne_{\theta\phi}\,, \\
p_{\phi r} &= Le_{\phi r}\,.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Die Formulierung (1.2) des Hookeschen Gesetzes für ein isotropes Medium ergibt sich daraus als Spezialfall unter Berücksichtigung der Identitäten

$$\begin{aligned}
A &= C = \lambda + 2\mu, \\
N &= L = \mu, \\
F &= \lambda.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Alternativ können transvers-isotrope Modelle in Ergänzung von λ und μ durch die Parameter

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{L}{N}, \\
\varphi &= \frac{C}{A}, \\
\eta &= \frac{F}{A - 2L} = \frac{F}{\lambda}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

beschrieben werden. Dabei ist η nicht mit dem Inhomogenitätsparameter aus Kapitel 3.1.2 zu verwechseln.

1.1.3 Seismische Raumwellen in linear elastischen Medien

Aus den Bewegungsgleichungen (1.13) kann die Geschwindigkeit, mit der sich eine Störung (Partikelbewegung) innerhalb des Mediums fortpflanzt, abgeleitet werden. Auf eine Wiedergabe dieser Herleitung, die z.B. in

(Bullen 1963b, Kap. 4) oder in Werken der klassischen Mechanik zu finden ist, soll an dieser Stelle verzichtet werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ergibt sich danach als Quotient zwischen den elastischen Moduli und der Dichte. Folgende Ausdrücke gelten im Falle transvers-isotroper Stoffe für Kompressions- oder longitudinale (primäre) Wellen in radialer (V_{PV}) und dazu senkrechter (V_{PH}) Richtung:

$$V_{PH} = \sqrt{\frac{A}{\rho}}, \tag{1.26}$$

$$V_{PV} = \sqrt{\frac{C}{\rho}}. \tag{1.27}$$

Für Scher- bzw. transversale (sekundäre) Wellen gilt entsprechend

$$V_{SH} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \tag{1.28}$$

$$V_{SV} = \sqrt{\frac{L}{\rho}}. \tag{1.29}$$

Zu den elastischen Parametern (1.25) besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\frac{V_{SH}}{V_{SV}}\right)^2, \\ \varphi &= \left(\frac{V_{PV}}{V_{PH}}\right)^2. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Im isotropen Fall gibt es keine Richtungsabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und aufgrund der Identitäten (1.24) gilt

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}, \tag{1.31}$$

$$V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{1.32}$$

Es ergeben sich die folgenden Verhältnisse zwischen der Dichte und den beiden elastischen Parametern

$$\frac{K}{\rho} = {V_P}^2 - \frac{4}{3}{V_S}^2 = \Phi, \tag{1.33}$$

$$\frac{\mu}{\rho} = {V_S}^2. \tag{1.34}$$

Die zuerst von Bullen (Bullen 1949) definierte Größe Φ wird auch als seismischer Parameter bezeichnet. Gäbe es eine dritte, unabhängige Größe, mit der das Verhältnis zwischen K und μ eindeutig beschrieben werden könnte, würde dies die direkte Bestimmung der Dichte aus seismischen Geschwindigkeiten erlauben.

Die Poisson-Zahl kann unter Verwendung der Beziehungen aus (1.12) allein durch die seismischen Geschwindigkeiten ausgedrückt werden

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[1 - 1/\left(\left(\frac{V_P}{V_S}\right)^2 - 1\right)\right]. \tag{1.35}$$

Damit kann ein linear elastisches, isotropes Medium auch durch den Parametersatz (Φ, σ, ρ) eindeutig beschrieben werden, eine für spätere Betrachtungen wichtige Beziehung.

1.1.4 Eigenschwingungen eines linear elastischen, radialsymmetrischen Körpers

Die mechanischen Resonanzen eines Körpers sind charakterisiert durch dessen freie Schwingungen, die durch kleine Oberflächenbewegungen in der Form

$$u(t) = \sum A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)\, e^{-\alpha_k t} \tag{1.36}$$

ausgedrückt werden können. Dabei ist ω_k die Frequenz der Mode k, die eine anfängliche Amplitude A_k und Phase φ_k aufweist. Die Dämpfung der Schwingung wird häufig anstelle des Parameters α_k durch den Qualitätsfaktor

$$Q_k = \frac{\omega_k}{2\alpha_k} \tag{1.37}$$

ausgedrückt. Die Frequenzen der Eigenschwingungen lassen sich zunächst unter Vernachlässigung der Dämpfung für ein linear elastisches Medium aus der Eigenlösung des Differentialgleichungssystems, das aus den Bewegungsgleichungen (1.13) resultiert, bestimmen. Vektoriell kann (1.13) in kartesischen Koordinaten (x, y, z) mit $\mathbf{p}_x = [p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}]$, $\mathbf{p}_y = [p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}]$ und $\mathbf{p}_z = [p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}]$ auch in der Form

$$\rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \rho\mathbf{f} + \begin{bmatrix} \operatorname{div} \mathbf{p}_x \\ \operatorname{div} \mathbf{p}_y \\ \operatorname{div} \mathbf{p}_z \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

geschrieben werden (Takeuchi und Saito 1972). Nach dem Übergang auf Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) lautet dieser Zusammenhang

$$\rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \rho\mathbf{f} + \begin{bmatrix} \operatorname{div} \mathbf{p}_r \\ \operatorname{div} \mathbf{p}_\theta \\ \operatorname{div} \mathbf{p}_\phi \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -p_{\theta\theta} - p_{\phi\phi} \\ p_{r\theta} - p_{\phi\phi} \cot\theta \\ p_{\phi r} + p_{\theta\phi} \cot\theta \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Um den anfänglichen, ungestörten Spannungszustand zu charakterisieren, wird die Annahme getroffen, daß sich die Erde im hydrostatischen Gleichgewicht (1.16)

$$\rho_0 \ \mathbf{g}_0 = \operatorname{grad} \mathbf{p}_0. \tag{1.40}$$

befindet. Schwingungen des Körpers bedeuten eine Änderung dieses Zustandes durch kleine Partikelbewegungen. Wird mit $\mathbf{u}$ der Verschiebungsvektor eines Partikels ausgehend von der Position im hydrostatischen Gleichgewicht bezeichnet, ergibt sich mit dem Ortsvektor dieses Teilchens im gestörten Zustand $\mathbf{r}$ dessen Ausgangsposition zu $\mathbf{r} - \mathbf{u}$. Die Dichte im deformierten Zustand kann somit in erster Näherung durch

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - \rho_0(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho_0 - \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}) \tag{1.41}$$

ausgedrückt werden (Takeuchi und Saito 1972). Der Term $-\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}$ repräsentiert hierbei den Effekt der geometrischen Dehnung aufgrund der Verschiebung. Im deformierten Zustand wird davon ausgegangen, daß sich die Spannung aus der Summe von Ausgangsspannung und der von der Verschiebung verursachten Spannung zusammensetzt. Die Spannung im deformierten Zustand im Punkt $\mathbf{r}$ besteht somit aus der Spannung p im Punkt $\mathbf{r} - \mathbf{u}$ des undeformierten Ausgangszustandes und der zusätzlichen Spannung p', so daß sich unter Berücksichtigung von (1.40)

$$\begin{aligned} p_{rr}(\mathbf{r}) &= -p_0(\mathbf{r} - \mathbf{u}) + p'_{rr}(\mathbf{r}) = -p_0 + \rho_0 \, \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u} + p'_{rr}(\mathbf{r}), \\ p_{r\theta}(\mathbf{r}) &= p'_{r\theta}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{1.42}$$

ergibt. Die Kraft $\mathbf{f}$ im deformierten Zustand setzt sich aus der Summe von Schwerkraft $\mathbf{g}_0$ im Anfangszustand, der von der Deformation verursachten Störung der Schwerkraft $\mathbf{g}'$ sowie externen Kräfte $\mathbf{f}'$ zusammen. Für die Störung der Schwerkraft besteht der Bezug zur Änderung des Schwerepotentials W'

$$\mathbf{g}' = \operatorname{grad} W', \tag{1.43}$$

welches die Poisson-Gleichung (1.67) unter Berücksichtigung von (1.41)

$$\nabla^2 W' = 4\,\pi\, G \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}) \tag{1.44}$$

erfüllen muß. Werden unter der Voraussetzung hydrostatischen Gleichgewichtes (1.40) die Gleichungen (1.41-1.43) in (1.39) eingesetzt, ergeben sich die Bewegungsgleichungen für eine selbstgravitierende Kugel

$$\rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \rho_0 \, \mathbf{f}' + \rho_0 \operatorname{grad} W' - \mathbf{g}_0 \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}) + \begin{bmatrix} \operatorname{div} \mathbf{p}'_r \\ \operatorname{div} \mathbf{p}'_\theta \\ \operatorname{div} \mathbf{p}'_\phi \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -p'_{\theta\theta} - p'_{\phi\phi} \\ p'_{r\theta} - p'_{\phi\phi} \cot\theta \\ p'_{\phi r} + p'_{\theta\phi} \cot\theta \end{bmatrix}, \tag{1.45}$$

die zusammen mit der Poisson-Gleichung (1.44) den fundamentalen Zusammenhang zur mathematischen Beschreibung der Eigenschwingungen der Erde darstellen.

Es wird zwischen zwei Typen von Eigenschwingungen unterschieden, den toroidalen Schwingungen, bei denen die radiale Verschiebungskomponente u_r und die Divergenz der Verschiebung verschwinden, sowie den sphäroidalen Schwingungen, bei denen das Verschiebungsfeld wirbelfrei ist. Treten nur radiale Verschiebungskomponenten auf, stellt dies einen Sonderfall der sphäroidalen Schwingungen dar. Die gesuchten Eigenfunktionen ergeben sich aus der Lösung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung (1.45) sowie aus (1.44) unter Berücksichtigung linearer Spannungs-Dehnungs-Beziehungen und den in (Alterman et al. 1959) genannten Voraussetzungen von

1. Regularität im Ursprung,
2. Verschwinden der Spannung im deformierten Zustand und
3. stetiger Fortsetzung des Gravitationsfeldes sowie der zugehörigen Gradienten an allen internen Grenzflächen und an der deformierten Erdoberfläche.

Für die toroidalen Schwingungen sind die radialen Komponenten der Bewegungsgleichungen gleich Null und infolgedessen tritt auch keine Störung des Gravitationsfeldes auf. Die Bewegung wird dann vollständig durch die elastischen Kräfte gesteuert. Da der äußere Kern die elastischen Eigenschaften einer Flüssigkeit aufweist, beschränken sich die toroidalen Schwingungen auf den festen Mantel[1]. Für die Bewegungsgleichungen kann nach (Alterman et al. 1959, Takeuchi und Saito 1972) der Ansatz

$$\begin{aligned} u_r &= 0\,, \\ u_\theta &= T_1(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_n(\theta,\phi)}{\partial\phi}\, e^{i\omega t}\,, \\ u_\phi &= -T_1(r)\frac{\partial Y_n(\theta,\phi)}{\partial\theta}\, e^{i\omega t}\,, \end{aligned} \tag{1.46}$$

mit der radialen Eigenfunktion $T_1(r)$ und den Kugelflächenfunktionen

$$Y_n(\theta,\phi) = {P_n}^m(\cos\theta)e^{im\phi}\,, \tag{1.47}$$

formuliert werden. Hierbei sind ${P_n}^m$ die zugeordneten Legendreschen Polynome und ω die Eigenfrequenz (Kreisfrequenz). Das Einsetzen in (1.45) führt auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für T_1, die sich mit den Substitutionen

$$t_1 = T_1, \qquad t_2 = L\left(\frac{dT_1}{dr} - \frac{T_1}{r}\right) \tag{1.48}$$

in ein lineares Differentialgleichungssystem umwandeln läßt (Alterman et al. 1959, Takeuchi und Saito 1972).

Für sphäroidale Schwingungen kann die Verschiebung durch

$$\begin{aligned} u_r &= S_1(r)\, Y_n(\theta,\phi)\, e^{i\omega t}\,, \\ u_\theta &= S_2(r)\,\frac{\partial Y_n(\theta,\phi)}{\partial\theta}\, e^{i\omega t}\,, \\ u_\phi &= S_2(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_n(\theta,\phi)}{\partial\phi}\, e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{1.49}$$

mit den radialen Eigenfunktionen S_1 und S_2 dargestellt werden (Alterman et al. 1959, Takeuchi und Saito 1972). Da hierbei die Verzerrungen nicht verschwinden, treten Störungen des Schwerepotentials auf, die durch die zusätzliche Gleichung

$$W' = S_3(r)\, Y_n(\theta,\phi)\, e^{i\omega t} \tag{1.50}$$

erfaßt werden. Dies führt auf ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welches wiederum durch Substitutionen (hier für den Fall transverser Isotropie (Takeuchi und Saito 1972))

$$\begin{aligned} s_1 &= S_1, & s_2 &= C\frac{dS_1}{dr} + \frac{F}{r}\,[2S_1 - n(n+1)S_2], \\ s_3 &= S_2, & s_4 &= L\left[\frac{dS_2}{dr} - \frac{1}{r}\,(S_2 - S_1)\right], \\ s_5 &= S_3, & s_6 &= \frac{dS_3}{dr} - 4\pi\, G\,\rho_0\, S_1 + \frac{n+1}{r}\, S_3 \end{aligned} \tag{1.51}$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführt werden kann.

Die Lösung dieser Systeme erfolgt dann durch numerische Integration über diskrete Punkte eines Modells für die Dichte und die elastischen Parameter; die Eigenfrequenzen ergeben sich aus den Nullstellen der charakteristischen Funktion.

[1] und davon unabhängig auf den festen inneren Kern

1.2 Thermodynamische Beziehungen und Zustandsgleichungen

Die thermodynamischen Bedingungen, unter denen die Ausbreitung seismischer Raumwellen erfolgt, werden als näherungsweise adiabatisch angenommen (Bullen 1963b, Kap. 4.6). Das kann damit begründet werden, daß die Zeit, die für einen Temperaturausgleich zwischen den durch die Welle komprimierten und gedehnten Bereichen des Stoffes benötigt wird, sehr viel größer ist als die Periode der Welle (Anderson 1989). Demnach gilt die Definition der Inkompressibilität K nach (1.11) bzw. (1.31) für adiabatische Zustandsänderungen. Zur Inkompressibilität unter isothermen Bedingungen K_T besteht der wichtige Zusammenhang

$$K_S = K_T\,(1 + \alpha\,\gamma\,T) \tag{1.52}$$

mit dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten α, dem Grüneisen-Parameter γ und der absoluten Temperatur T. Der Grüneisen-Parameter spielt in der modernen Thermodynamik eine fundamentale Rolle und ist definiert als

$$\gamma = \frac{\alpha\,K_T}{C_V\,\rho} = \frac{\alpha\,K_S}{C_P\,\rho}, \tag{1.53}$$

wobei C_V und C_P die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bzw. konstantem Druck sind (Anderson 1989).

Damit erhält die Beziehung (1.11) zusammen mit (1.33)

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K_S}{\rho} = \Phi \tag{1.54}$$

eine Bedeutung als Zustandsgleichung. Als thermodynamische Zustandsgleichung eines Stoffes wird allgemein die Beziehung

$$f(T, V, p) = 0 \tag{1.55}$$

betrachtet. Derartige Zustandsgleichungen gelten natürlich nur für ein gewisses Material und nur unter gewissen Rahmenbedingungen. Für die hier betrachteten Fälle werden Formulierungen benötigt, die für Festkörper unter hohen Drücken gültig sind. Gilvarry (Gilvarry 1957) hat 1957 die allgemeine Zustandsgleichung für isothermale Zustandsänderungen nach Mie-Born in der Form

$$p = \frac{K_{T_0}}{m-n}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^n - \left(\frac{V_0}{V}\right)^m\right] \tag{1.56}$$

angegeben. Hierin sind n und m Konstanten, die in Relation mit den Anziehungs- und Abstoßungskräften zwischen Elementarteilchen stehen, p ist der dem Volumen V entsprechende Druck und K_{T_0} die dem Volumen V_0 zugehörende isothermale Inkompressiblität bei $p = 0$. Der korrespondierende Ausdruck für den isothermalen Kompressionsmodul lautet

$$K_T = \frac{K_{T_0}}{m-n}\left[n\left(\frac{V_0}{V}\right)^n - m\left(\frac{V_0}{V}\right)^m\right]. \tag{1.57}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen dem spezifischen Volumen und der Dichte

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{1.58}$$

und partieller Ableitung nach der Dichte ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{K_{T_0}}{\rho_0}\frac{1}{(m-n)}\left[n\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1} - m\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{m-1}\right]. \tag{1.59}$$

Diese Gleichung wurde 1967 von D. L. Anderson (Anderson 1967) als Kern einer seismischen Zustandsgleichung verwendet, da sich durch (1.54) ein unmittelbarer Bezug zum seismischen Parameter Φ herstellen läßt. Wird eine Transformation zwischen isothermaler und adiabatischer Inkompressibilität eingeführt oder der Unterschied zwischen beiden Größen vernachlässigt, kann

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{(M-N)}\left[N\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{N-1} - M\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{M-1}\right] \tag{1.60}$$

als generelle Form einer Zustandsgleichung basierend auf seismischen Daten geschrieben werden. Die Konstanten M und N können mit Hilfe der Ergebnisse aus Laborexperimenten oder mittels anderer Annahmen bestimmt werden. So ergibt sich beispielsweise die Gleichung aus der Methode des *finite strain* von Birch (Birch

1952) mit den Konstanten $N = 7/3$ und $M = 5/3$ oder die aus der Quantenmechanik hergeleitete Gleichung von Bardeen mit $N = 5/3$ und $M = 4/3$.

Neben dieser allgemeinen Formulierung existieren eine Reihe spezieller Zustandsgleichungen, in denen anstelle einer funktionalen Beziehung zwischen den thermodynamischen Größen T, p, V die seismischen Geschwindigkeiten V_P und/oder V_S bzw. der seismische Parameter Φ in Relation zur Dichte ρ gesetzt werden, die dann auch als geophysikalische Zustandsgleichungen bezeichnet werden (Leliwa-Kopystyński 1984, Kap. 1.2). Diese Gesetze sind größtenteils empirischer Natur, da eine Reihe willkürlicher Annahmen notwendig sind, deren Gültigkeit nur durch Laborexperimente geprüft werden kann. Die beiden bekanntesten unter diesen Zustandsgleichungen sind das Gesetz von Birch (Kapitel 3.1.4) und die „seismische Zustandsgleichung" von Anderson (Kapitel 3.1.5).

Der Grüneisenparameter (1.53) ist nicht explizit von der Temperatur abhängig und deshalb von besonderem Interesse; seine Bestimmung stellt eines der Kernprobleme in der Hochdruckphysik dar. Unter atmosphärischen Normalbedingungen gilt $\gamma \approx 2$, und dieser Wert verringert sich nur allmählich mit steigender Temperatur, der Grenzwert für $T \to \infty$ ist $\gamma \to \frac{2}{3}$. In (Leliwa-Kopystyński 1984, Kap. 1.8) werden zahlreiche Darstellungen des Grüneisenparameters diskutiert, unter denen die von Zharkov und Kalinin (1971)

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{n}{2} - \frac{2}{3} - \frac{V}{2} - \frac{\frac{d^2}{dV^2}\,(p\,V^n)}{\frac{d}{dV}\,(p\,V^n)} + \delta \\ &= \frac{n}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1 - 2n + \frac{dK_S}{dp} + n(n-1)\frac{p}{K_S}}{2 - 2n\frac{p}{K_S}} + \delta. \end{aligned} \tag{1.61}$$

die allgemeinste Formulierung aufweist. Hierbei stellt δ ein Korrekturglied dar, mit dem die Volumenabhängigkeit der Poisson-Zahl σ berücksichtigt wird, die nach (Zharkov et al. 1978, Kap. 20) einen signifikanten Beitrag zu γ liefert. Die Konstante n wurde von den verschiedenen Autoren unterschiedlich festgelegt. Die im Jahre 1939 veröffentlichte Formel von Slater, die den ersten Vorstoß in der Bestimmung von γ darstellt, ergibt sich mit $n = 0$ und unter Vernachlässigung des Terms δ. Aus der Theorie des freien Volumens läßt sich der Zusammenhang von Vashenko und Zubarev (1963)

$$\gamma = \frac{-\frac{5}{3} + \frac{dK_S}{dp} + \frac{4}{9}\frac{p}{K_S}}{2\left(1 - \frac{4}{3}\frac{p}{K_S}\right)}, \tag{1.62}$$

herleiten, der aus (1.61) mit $n = \frac{4}{3}$ und $\delta = 0$ hervorgeht und breite Anwendung gefunden hat, z.B. (Stacey 1977b, Stacey 1977a). Ist die Dichte durch ein Modell vorgegeben, sind damit der Druck p und unter Verwendung der Beziehung (1.54) auch die Inkompressibilität K_S festgelegt. Weiterhin ist dK_S/dp durch das Dichtemodell und den seismischen Parameter Φ vollständig bestimmt, so daß aus der Beziehung (1.62) der Grüneisenparameter berechnet werden kann.

1.3 Schwerefeld

Das Gravitationspotential V eines Körpers in einem in kartesischen Koordinaten gegebenen Punkt $P(x, y, z)$ kann durch das Integral

$$V(P) = G \iiint\limits_v \frac{dm}{l} = G \iiint\limits_v \frac{\rho}{l}\, dv \tag{1.63}$$

ausgedrückt werden (Heiskanen und Moritz 1967, Kap. 1.2), wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante, v das Volumen und m die Masse des betrachteten Körpers sowie

$$\rho = \frac{dm}{dv} \tag{1.64}$$

die Dichte im Volumenelement dv ist, das im Abstand l vom Punkt P entfernt liegt. Das Gravitationspotential erfüllt für außerhalb des Körpers liegende Punkte die Laplace-Gleichung

$$\Delta V = 0, \tag{1.65}$$

wobei mit Δ der Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{1.66}$$

bezeichnet wird. Im Inneren des Körpers ist das Potential nicht harmonisch und erfüllt dort die Poisson-Gleichung

$$\Delta V = -4\pi\, G\, \rho. \tag{1.67}$$

Rotiert der Körper um eine Achse, treten zusätzlich Zentrifugalkräfte auf und es existiert ein Fliehkraftpotential

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2\, q^2. \tag{1.68}$$

Hierbei wird mit ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation bezeichnet, die als konstant angenommen wird, und mit q der Abstand von der Rotationsachse. Das Schwerepotential ist dann die Summe

$$W = V + \Phi \tag{1.69}$$

aus Gravitations- und Fliehkraftpotential. Der Schwerkraftvektor $\mathbf{g}$ ergibt sich daraus durch Gradientenbildung

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} W. \tag{1.70}$$

1.3.1 Schwerefeld eines nichtrotierenden, radialsymmetrischen Körpers

Für einen nichtrotierenden, radialsymmetrisch geschichteten Körper ist das Fliehkraftpotential (1.68) Null und somit gilt $W = V$. Im Außenraum einer solchen Kugel ist das Potential V identisch mit dem einer Punktmasse und ist daher durch die Funktion

$$V = G\frac{M}{r} \tag{1.71}$$

des (radialen) Abstandes r vom Zentrum der Masse

$$M = 4\pi\, G \int_0^R q^2 \rho(q)\, dq \tag{1.72}$$

festgelegt. Dementsprechend ist die Schwere außerhalb eines solchen Körpers durch

$$g = -\frac{\partial V}{\partial r} = G\frac{M}{r^2} \tag{1.73}$$

gegeben. Für den Innenraum muß das Potential in den Anteil der vom Radius r eingeschlossenen Massen V_1 und den Anteil der darüberliegenden Massen V_2

$$\begin{aligned} V_1 &= 4\pi\, G\frac{1}{r}\int_0^r q^2\, \rho(q)\, dq\,, \\ V_2 &= 4\pi\, G\int_r^R q\, \rho(q)\, dq \end{aligned} \tag{1.74}$$

zerlegt werden (Moritz 1990, Kap. 2.2), das Potential ergibt sich damit aus der Summe

$$V = V_1 + V_2. \tag{1.75}$$

Mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial r} &= 4\pi\, G\left(-\frac{1}{r^2}\int_0^r q^2\rho(q)\, dq - \frac{1}{r}r^2\rho(r)\right), \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} &= r\,\rho(r) \end{aligned} \tag{1.76}$$

folgt für die Schwerkraft im Inneren des Körpers

$$g = -\frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi\, G\,\frac{1}{r^2}\int_0^r q^2\rho(q)\, dq = G\frac{M(r)}{r^2}, \tag{1.77}$$

d.h. die Schwerkraft hängt nur von den innerhalb der Kugel mit dem Radius r liegenden Massen ab, da sich die Wirkung der oberhalb befindlichen Masse der Kugelschale $[r, R]$ kompensiert. Ist das Modell aus mehreren Schalen aufgebaut, an deren Grenzen Diskontinuitäten in der Dichte auftreten können, muß das Integral

$$M(r) = 4\pi\, G\int_0^r q^2\rho(q)\, dq \tag{1.78}$$

für einen innerhalb der Schale k liegenden Punkt mit dem Abstand $r \in [r_k, r_{k+1}]$ in die Summe

$$M(r) = 4\pi\, G \left(\sum_{i=1}^{k-1} \int_{r_i}^{r_i+1} q^2 \rho(q)\, dq + \int_{r_k}^{r} q^2 \rho(q)\, dq \right) = M_0 + M_k(r) \tag{1.79}$$

zerlegt werden. Damit gilt für die Schwere

$$g = \frac{G}{r^2}\left(M_0 + M_k(r)\right) = \frac{4\pi\, G}{r^2}\left(\tilde{M}_0 + \tilde{M}_k(r)\right) \tag{1.80}$$

mit

$$\tilde{M}_0 = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{r_i}^{r_i+1} q^2 \rho(q)\, dq, \qquad \tilde{M}_k(r) = \int_{r_k}^{r} q^2 \rho(q)\, dq.$$

1.3.2 Saigeys Theorem

Ausgehend von der Darstellung (1.77) beschäftigte sich Saigey Ende des 19. Jahrhunderts mit der Frage nach dem radialen Verlauf der Schwere in einem kugelsymmetrischen Modell (Tisserand 1891, Kap. 121). Aufgrund der Tatsache, daß die Masse eine mit dem Radius monoton wachsende Funktion, $1/r^2$ jedoch monoton fallend ist, schlußfolgerte Saigey auf ein Maximum der Schwerkraft im Inneren der Erde. In diesem Falle würde die Funktion

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi\, G \left(\rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \rho\, q^2\, dq \right) = 4\pi\, G \left(\rho - \frac{2}{3}\bar{\rho} \right) \tag{1.81}$$

mit der mittleren Dichte

$$\bar{\rho}(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho\, q^2\, dq \tag{1.82}$$

eine Nullstelle aufweisen. Einerseits ist die mittlere Dichte im Ursprung Null, während die Dichte selbst an dieser Stelle den größten Wert aufweist. Andererseits ist die Dichte an der Oberfläche geringer als die mittlere Dichte der Erde. Da aus diesem Grund die Vorzeichen der Funktion (1.81) an diesen beiden Stellen unterschiedlich sind, schlußfolgert Saigey auf die Existenz mindestens einer Nullstelle. Der Ausdruck

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi\, G \left(\rho - \frac{2}{3}\bar{\rho} \right)$$

ist in die Literatur als Saigeys Theorem eingegangen, siehe z.B. (Bullen 1975, Kap. 8.6). Jedoch resultiert dieser Ausdruck unmittelbar aus der Poisson-Gleichung (1.67), die für eine radialsymmetrische Dichteverteilung auch in der Form

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\, g\right\} = \frac{2\, g}{r} + \frac{dg}{dr} = 4\pi\, G\, \rho \tag{1.83}$$

geschrieben werden kann. Da die Schwere g in der Relation

$$g = \frac{4}{3}\pi\, G\, r\, \bar{\rho} \tag{1.84}$$

zur mittleren Dichte steht, folgt aus (1.83) unmittelbar

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi\, G\, \rho - \frac{2}{r}\frac{4}{3}\pi\, G\, r\, \bar{\rho} = 4\pi\, G \left(\rho - \frac{2}{3}\bar{\rho} \right). \tag{1.85}$$

Damit ist das Theorem lediglich als eine alternative Formulierung der Poisson-Gleichung in Bezug auf die mittlere Dichte zu betrachten.

1.4 Radiale Schichtung der Erde

Vor den ersten Beobachtungen seismischer Wellen gab es keine konkreten Vorstellungen über den inneren Aufbau der Erde. Lediglich aufgrund der Gesamtmasse, der Dichte an der Oberfläche sowie erster Abschätzungen

des mittleren Trägheitsmomentes konnte versucht werden, den Verlauf der Dichte im Erdinneren zu rekonstruieren. Es gab keinerlei Anlass zur Annahme von Diskontinuitäten, weshalb versucht wurde, das Anwachsen der Dichte mit der Tiefe durch stetige Funktionen zu modellieren (Kapitel 4.1). Erst Wiechert stellte 1897 in (Wiechert 1897) eine stetige Zunahme der Dichte nur allein aufgrund der Wirkung des steigenden Druckes in Frage, da das Material unrealistisch stark komprimiert werden müßte, um den hohen Wert für die mittlere Dichte der Erde von $\bar{\rho} = 5.5\, g/cm^3$ erreichen zu können. Er stellte statt dessen die Hypothese auf, daß die Erde im Wesentlichen aus zwei Schalen, einem Mantel und einem Eisenkern mit jeweils nahezu konstanter Dichte aufgebaut ist. Diese Vermutung wurde erst im Jahre 1923 durch die Abschätzung der radialen Dichteänderungen durch Williamson und Adams auf der Grundlage seismischer Geschwindigkeiten (Kapitel 3.1.1) bestätigt, da der sich hieraus ergebende Anstieg der Dichte nicht ausreichend war, um die mittlere Dichte ohne sprunghafte Dichteänderungen zu klären. Seitdem ist die Einteilung der Erde in die drei hauptsächlichen Schalen, Kruste, Mantel und Kern, üblich.

Diese Zonen werden heute aufgrund unterschiedlicher Eigenschaften der seismischen Wellen (Reflexionen) sowie aufgrund der Eigenschwingungen in oberen und unteren Mantel, inneren und äußeren Kern sowie Übergangszonen (Tabelle 1.1) weiter unterteilt (Bullen 1940, Bullen 1975, Dziewonski und Anderson 1981, Anderson 1989). Frühe Interpretationen seismischer Wellen schienen die Einführung einer Übergangszone zwischen innerem und äußeren Kern (F) zu rechtfertigen, jedoch wurden später (Bullen und Haddon 1973, Hales et al. 1974, Bolt und Uhrhammar 1981) einfachere Erklärungen dafür gefunden, weshalb diese Zone in den heutigen Modellen nicht mehr gesondert berücksichtigt wird. Während die Einteilung im unteren Mantel und Kern damit heute unbestritten ist, existieren hinsichtlich der Festlegung der Diskontinuitäten im oberen Mantel unterschiedliche Auffassungen. Insbesondere ein Sprung in $220\, km$ Tiefe (Lehmann-Diskontinuität) wird heute als ein lokales Phänomen betrachtet (Revenaugh und Jordan 1991, Nolet et al. 1994, Masters und Shearer 1995, Shearer 1996). Weiterhin wird festgestellt, daß es im Bereich zwischen 600 und 700 km Tiefe auch mehr als eine Diskontinuität geben kann, wobei nicht alle zuverlässig nachgewiesen werden können (Dziewonski et al. 1975, Masters und Shearer 1995), und es stellt sich die Frage, inwieweit zwischen Unstetigkeiten und sehr schnellen stetigen Änderungen der Parameter unterschieden werden kann (Masters und Shearer 1995). Desweiteren gibt es Argumente für eine zusätzliche Diskontinuität in 520 km Tiefe (Shearer 1996, Shearer und Flanagan 1999).

Tabelle 1.1: Einteilung der Erde in Schalen, Radien aus PREM (Dziewonski und Anderson 1981).

Region	Tiefe $[km]$	Radius $[km]$	Bezeichnung
A	24	6346	Kruste
B	80	6291	
B	220	6151	
B	400	5971	oberer Mantel
C	600	5771	
C	670	5701	
D'	771	5600	Übergangszone
D	2741	3630	unterer Mantel
D"	2891	3480	Übergangszone
E	5149	1221	äußerer Kern
G	6371	0	innerer Kern

Neben der Feststellung des Auftretens von unstetigen Parameteränderungen an sich, spielt die Bestimmung von deren Lage eine entscheidende Rolle für die Modellierung. So haben beispielsweise die Untersuchungen von Bullen und Haddon (Bullen und Haddon 1967, Haddon und Bullen 1969) gezeigt, daß anstelle substantieller Änderungen der Dichte, wie in (Landisman et al. 1965) vorgeschlagen, nur eine geringe Modifizierung des Radius an der Kern-Mantel-Grenze für eine gleichwertige Anpassung an die Frequenzen der Eigenschwingungen notwendig ist. Weiterhin wurde die Lage der Diskontinuität zwischen oberem und unterem Mantel in den letzten Jahrzehnten mehrfach revidiert. Die Angaben schwanken in einem Intervall zwischen 670 bis 650 km Tiefe (Dziewonski et al. 1975, Dziewonski und Anderson 1981, Revenaugh und Jordan 1991, Dziewonski 2001). Grundsätzlich können die Radien der Unstetigkeitsstellen als zusätzliche Unbekannte in die Inversion der seismischen Daten mit eingebracht werden, wobei in der Literatur nur selten Angaben zur Zuverlässigkeit derartig bestimmter Parameter gemacht werden. Insbesondere im oberen Mantel erfordert deren Festlegung jedoch gesonderte Untersuchungen, die meist auf der Analyse reflektierter seismischer Wellen beruhen.

Kapitel 2. Daten zur Festlegung der Dichte

Grundsätzlich ist die Bestimmung der Dichteverteilung im Inneren der Erde allein aufgrund einer endlichen Anzahl von Beobachtungen an der Oberfläche kein eindeutig lösbares Problem. Um dennoch eine genäherte Beschreibung der Dichteverteilung vornehmen zu können, bedarf es einer Reihe von Vereinfachungen, idealisierter Annahmen sowie einer physikalisch sinnvollen Parametrisierung. Nur so kann gewährleistet werden, daß die Beobachtungen adäquat mit der gesuchten Dichtefunktion in Zusammenhang gebracht werden können.

Sowohl die Rotation als auch laterale Inhomogenitäten sollen im Rahmen aller folgenden Betrachtungen vernachlässigt werden und die Erde somit genügend genau als eine Kugel mit dem Radius R approximiert werden.Weiterhin wird unterstellt, daß die Erde als ideal elastisches, isotropes Medium aufgefaßt werden kann, welches sich im hydrostatischen Gleichgewicht befindet. Derartige Modelle werden auch als SNREI (**s**pherically symmtric, **n**on**r**otating, linearly **e**lastic, **i**sotropic) bezeichnet (Dahlen 1968, Dahlen und Tromp 1998).

Die Dichteverteilung reduziert sich unter diesen Annahmen auf eine Funktion $\rho(r), r \in [0, R]$ mit nur einer Veränderlichen, dem Radius r. Der äußere Radius R des sphärischen Modells ist der Radius der zum Referenzellipsoid volumengleichen Kugel. Mit den Dimensionen des Geodetic Referenz System 1980 (GRS 1980, (Moritz 1988)) ergibt sich $R = 6371\ km$.

2.1 Primärdaten

Generell gilt, daß jede denkbare Dichteverteilung $\rho(r)$ die folgenden Bedingungen erfüllen muß ((Gutenberg 1959, Kap. 7.2), (Bullen 1974), (Khan 1983a), (Moritz 1990, Kap. 1.5)):

1. Die Dichteverteilung muß den bekannten Wert für die Gesamtmasse

$$M = 4\,\pi\,G \int_0^R \rho(r) r^2 dr \tag{2.1}$$

   oder äquivalent die mittlere Dichte an der Oberfläche

$$\bar{\rho} = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho(r) r^2 dr \tag{2.2}$$

   ergeben.
2. Die Dichteverteilung muß dem mittleren Trägheitsmoment

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r) r^4 dr \tag{2.3}$$

   entsprechen.
3. Es müssen die bekannten Werte der mittleren Dichte in der Kruste ρ_L und an der oberen Grenze des Mantels (Mohorovičić Diskontinuität) ρ_M enthalten sein.

Neben diesen Primärdaten, von denen 1. und 2. auch als geodätische Daten bezeichnet werden können, sollte als wichtige Bedingung (1.20)

$$\frac{d\rho}{dr} < 0.$$

berücksichtigt werden, nach der die mechanische Stabilität eines selbstgravitierenden Körpers nur dann gewährleistet ist, wenn die Dichte mit der Tiefe zunimmt (Gutenberg 1959, Kap. 7.2), (Melchior 1982).

Diese Bedingung ist nicht in allen existierenden Modellen streng realisiert, meist treten Abweichungen nur in den Schalen des oberen Mantels auf (z.B. in PREM, (Dziewonski und Anderson 1981)).

2.1.1 Gesamtmasse

Der Wert für die Gesamtmasse ist weniger gut bestimmt als die aus Satellitenbeobachtungen sehr genau bekannte geozentrische Gravitationskonstante GM, da die Newtonsche Gravitationskonstante G bestenfalls auf vier signifkante Stellen angegeben werden kann und gerade in den letzten Jahren eine Reihe von z.T. weit

streuenden Bestimmungen durchgeführt worden ist (Mohr und Taylor 2000). Der von CODATA (Committee on Data for Science and Technology) 1998 empfohlene Wert wurde deshalb mit einer verschlechterten relativen Genauigkeit von nur 1.3×10^{-3} mit

$$G = 6.673 \times 10^{-8}\ cm^3/(g\,s^2) \tag{2.4}$$

angegeben. Aus der Festlegung des GRS 80 für die geozentrische Gravitationskonstante von

$$GM = 3.986005 \times 10^{17}\ cm^3/s^2 \tag{2.5}$$

resultiert

$$M = 5.9733 \times 10^{27}\ g, \tag{2.6}$$

die geringfügige Abweichung gegenüber dem in (Khan 1983a) empfohlenen Standardwert liegt innerhalb der Genauigkeit. Die mittlere Dichte ergibt sich damit unmittelbar zu

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 5.514\ g/cm^3. \tag{2.7}$$

2.1.2 Trägheitsmoment

Zur Festlegung des mittleren Trägheitsmomentes bzw. des anstelle von (2.3) gebräuchlichen dimensionslosen Trägheitskoeffizienten

$$y = \frac{I}{MR^2} \tag{2.8}$$

soll hier der kritischen Überlegung von Denis (Denis et al. 1991, Denis et al. 1997, Denis et al. 1998) gefolgt werden.

Zur Berechnung der hydrostatischen Abplattung wird in der Regel der Trägheitskoeffizient y als invariante Größe in die Theorie hydrostatischer Gleichgewichtskörper eingeführt (siehe z.B. (Jeffreys 1963), (Nakiboglu 1979)). Die Berechnung basiert auf der vornehmlich durch die Präzessionskonstante festgelegten dynamischen Elliptizität

$$H = \frac{C - A}{C} \tag{2.9}$$

und dem aus der Satellitengeodäsie inzwischen sehr genau bestimmten Kugelfunktionskoeffizienten C_2^0 (dynamischer Formfaktor)

$$\tilde{J}_2 = \frac{C - A}{Ma^2}, \tag{2.10}$$

wobei C das polare und A das mittlere äquatoriale Trägheitsmoment ist. Der Trägheitskoeffizient y der volumengleichen Kugel mit dem Radius R folgt dann aus dem Verhältnis

$$y = \frac{I}{MR^2} = \frac{C}{Ma^2}\left(1 + \frac{2}{3}(f - H)\right) = \frac{\tilde{J}_2}{H}\left(1 + \frac{2}{3}(f - H)\right), \tag{2.11}$$

wobei f die Abplattung ist, siehe z.B. (Jeffreys 1963). Der Fehler durch die Vernachlässigung des Terms $(1+\frac{2}{3}(f-H))$ ist 2. Ordnung und liegt in der Größenordnung 10^{-4} (Denis et al. 1991), so daß näherungsweise

$$\tilde{y} \simeq \frac{\tilde{J}_2}{H} = \frac{C}{Ma^2} \tag{2.12}$$

gilt. Eine solche Definition des Trägheitskoeffizienten resultiert also hauptsächlich aus der Definition der beiden Gößen $\tilde{J}_2$ und H und gilt demzufolge unabhängig von der Annahme hydrostatischen Gleichgewichts. Mit $\tilde{J}_2 = 108263 \times 10^{-8}$ aus GRS 80 und dem Wert $H = 3273.662 \times 10^{-6}$ aus (Khan 1983b) ergibt sich damit

$$\tilde{y} = 0.3307. \tag{2.13}$$

Dieser Wert wird auch durch die von Marchenko und Schwintzer durchgeführte ausführliche Analyse von Polbewegung und Schwerefeldkoeffizienten zweiten Grades bestätigt (Marchenko und Schwintzer 2003). Ein solcher nichthydrostatischer Wert $\tilde{y}$ diente bei der Inversion aller modernen Modelle (z.B. 1066A/B (Gilbert und Dziewonski 1975), PEM (Dziewonski et al. 1975), PREM (Dziewonski und Anderson 1981), CORE11 (Widmer 1991)) als Bedingung, obwohl diesen Modellen entweder implizit (Startmodelle) oder explizit (Berechnung der Frequenzen der Eigenschwingungen) die Annahme hydrostatischen Gleichgewichts zugrunde liegt. Da es nicht im Sinne einer konsistenten Modellbildung sein kann, ein hydrostatisches Modell mit einem nichthydrostatischen Wert für den Trägheitskoeffizienten zu versehen, hat Denis in (Denis et al.

1991) und (Denis et al. 1997) angeregt, den beobachteten Wert $\tilde{J}_2$ als invariante Größe in die hydrostatische Theorie einzubringen und auf dieser Grundlage den Trägheitskoeffizienten aus der hydrostatischen Abplattung zu berechnen. Äquivalent zur Definition des GRS 80, bei der der beobachtete Wert $\tilde{J}_2$ zur Festlegung des Niveauellipsoides herangezogen wird, kann anstelle des Quotienten J_2/H auch die Größe J_2 direkt als Invariante eingeführt werden, da in Approximation erster Ordnung der einfache Zusammenhang (Moritz 1990, Kap. 2.1)

$$f = \frac{1}{2}(m + 3J_2) \tag{2.14}$$

mit einem Fehler in der Größenordnung $O(m^2)$ gilt. Die geodynamische Konstante

$$m = \frac{\omega^2 R^3}{GM}, \tag{2.15}$$

das Verhältnis von Zentrifugal- und Schwerkraft, ist durch die mittlere Winkelgeschwindigkeit ω, den Radius und die geozentrische Gravitationskonstante (2.5) des GRS 80 eindeutig definiert. Interessanterweise berechnet sich daraus ein Wert für die hydrostatische Abplattung von

$$f = 298.61, \tag{2.16}$$

der in sehr viel besserer Übereinstimmung mit der geometrischen Abplattung des Referenzellipsoides $f^\star = 298.25$ steht als der bisher übliche Wert für die hydrostatische Abplattung $\tilde{f} = 299.98$, welcher mit der Identität $y = \tilde{y}$ aus der Clairautschen Theorie nach

$$f^{-1} = \frac{2}{5m}\left[\left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}y\right)^2 + 1\right] \tag{2.17}$$

folgt. Effekte zweiter Ordnung beeinflussen diese Berechnung nicht signifikant (Denis et al. 1998). Stellt man nun (2.17) nach y um, so erhält man eine Gleichung, aus der sich bei bekannter Abplattung f ein hydrostatischer Trägheitskoeffizient nach

$$y = \frac{2}{3} - \frac{4}{15}\sqrt{\frac{5m}{2f} - 1} \tag{2.18}$$

berechnen lässt. Der daraus resultierende Wert

$$y = 0.3320 \tag{2.19}$$

unterscheidet sich nur relativ wenig von dem Wert (2.13), zeigt aber, daß die Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht durch die Wahl einer nichtadäquaten invarianten Größe bei der Berechnung der hydrostatischen Abplattung überschätzt werden können. Anstelle von 1.5×10^{-5} ergibt sich nur noch eine Differenz von 4.0×10^{-6} zwischen hydrostatischer und geometrischer Abplattung. Vergleichbares gilt für die dynamische Elliptizität H (Denis et al. 1997, Denis et al. 1998).

Die besondere Bedeutung liegt aus geodätischer Sicht darin, daß nur ein mit dem Trägheitskoeffizienten nach (2.14) und (2.18) berechnetes Dichtemodell vollständig kompatibel zum geodätischen Referenzsystem sein kann, da nur in diesem Falle das Potential des Normalschwerefeldes mit dem des Dichtemodells im Außenraum identisch ist[1] und sich somit zur Fortsetzung des Normalpotentials nach innen eignet. Ein Gleichsetzen von hydrostatischer und geometrischer Abplattung f und $f^\star$ erscheint sowohl aus dieser Sicht als auch im Hinblick auf die Abweichungen des realen Schwerefeldes von dem einer hydrostatischen Gleichgewichtsfigur weniger sinnvoll.

Im übrigen verdeutlichen die Betrachtungen, daß es keine einheitliche Vorgehensweise bei der Bestimmung einer hydrostatischen Gleichgewichtsfigur für die Erde geben kann, da zur Anwendung der hydrostatischen Theorie durch die Übernahme einer invarianten Größe, die aus Messungen in der Realität bestimmt wird, immer ein Kompromiß eingegangen werden muß. Dieser Kompromiß sollte dann aber die plausibelste Interpretation beinhalten, in diesem Falle eine möglichst kleine Abweichung vom hydrostatischen Gleichgewicht.

Denis et al. ziehen in (Denis et al. 1991), (Denis et al. 1997) und (Denis et al. 1998) aus der Änderung des Trägheitskoeffizienten ausgehend von PREM (Dziewonski und Anderson 1981) Rückschlüsse auf eine Änderung der Dichte im Erdkern, allerdings unter Beibehaltung der Dichteverteilung im oberen Mantel. Daß sich diese Schlußfolgerungen nicht erhalten lassen, wenn die Dichte insgesamt mit dem geänderten Wert (2.19) neu bestimmt wird, soll in Abschnitt 5.3 gezeigt werden.

[1] unter der Voraussetzung, daß auch die geometrischen Abmessungen und die Masse gleich sind

2.1.3 Dichte unterhalb der Kruste

Ein weiteres wichtiges Problem ist die Festlegung der Dichte unterhalb der Kruste im Zusammenhang mit der Anforderung 3. Wie aus Tabelle 2.1 ersichtlich wird, ist einerseits eine Streuung zwischen den Annahmen einzelner Autoren – insbesondere in jüngeren Veröffentlichungen –, andererseits eine generelle Diskrepanz zwischen den Annahmen in der Isostasie und der Geophysik festzustellen. Da die Kruste nur einen geringen Beitrag zu Gesamtmasse und Trägheitsmoment leistet, kommt der Festlegung der Dichte in diesem Bereich global gesehen keine besondere Bedeutung zu. Weiterhin kann ein globaler Mittelwert durch die großen Unterschiede zwischen kontinentaler und ozeanischer Kruste nicht ohne Kompromisse gebildet werden, womit sich die Differenzen in Tabelle 2.1 hauptsächlich erklären lassen.

Tabelle 2.1: Unterschiedliche Annahmen über die Dichte in der Kruste und unterhalb der Mohorovičić-Diskontinuität, Angaben in $[g/cm^3]$.

Quelle	Kruste		Mantel (Moho)	
	ρ_{L1}	ρ_{L2}	ρ_M	
(Williamson und Adams 1923)			$3.25 < \rho_M < 3.45$	
(Bullen 1936)	2.65	2.87	3.32	Model A
(Bullen 1949)	2.65	2.87	3.32	Model B
(Bullen 1963b, Kap. 12.7)	2.65	2.87	3.32	
(Bullen 1975, Kap. 10.4)	2.65	2.87	$3.3 < \rho_M < 3.4$	
(Birch 1939)	2.65	2.87	3.28	
(Birch 1961)			$3.1 < \rho_M < 3.7$	
(Birch 1964)	2.79		3.43	Solution I
	2.79		3.32	Solution II
(Bullard 1954)	2.8		3.3	Model II-IV
(Bullard 1957)			3.32	
(Haalck 1959)	2.7 . . . 3.1		$3.2 < \rho_M < 3.6$	
(Gutenberg 1959)	2.8		3.3	
(Clark und Ringwood 1964)			3.31	Model “pyrolite”
			3.55	Model “eclogite”
(Press 1970)			$3.5 < \rho_M < 3.6$	
(Jordan und Anderson 1974)			3.33	
(Gilbert und Dziewonski 1975)	2.18		3.34	1066A
	2.80		3.29	1066B
(Dziewonski et al. 1975)	2.80		3.31	PEMA
(Bolt und Uhrhammer 1975)	2.16		3.27	CAL5
(Zharkov et al. 1978)			3.32	Earth-1. . . 6
(Dziewonski und Anderson 1981)	2.6	2.9	3.38	PREM
(Widmer 1991)	2.6	2.9	3.40	CORE11
(Montagner und Kennett 1996)	2.72	2.92	3.32	AK135
(Heiskanen und Vening Meinesz 1958)	2.67	3.00	3.27	
(Demenitskaja 1975)			$0.18 < \Delta\rho_M < 0.35$	
(Lyustikh 1960)	2.7		3.2	
(Vening Meinesz 1964)			3.27	
(Heiskanen und Moritz 1967)	2.67		3.27	
(Woollard 1970)	2.87. . . 2.89		$3.24 < \rho_M < 3.32$	
(Moritz 1990)			3.27 (3.2-3.3)	

Dem Wert für die Dichte unterhalb der Mohorovičić-Diskontinuität ist hingegen eine größere Wichtigkeit für globale Dichtemodelle zuzuschreiben, da dieser Wert das Niveau der absoluten Dichte für das gesamte Modell, insbesondere den oberen Mantel, maßgeblich beeinflußt. Eine direkte Festlegung der absoluten Dichte unter Verwendung seismischer Daten ist nicht (Geschwindigkeit von Raumwellen) oder nur relativ unsicher (Frequenz der Eigenschwingungen) möglich. Daher muß dieser Parameter aus anderen Informationen abgeleitet werden. Die Festlegung der Dichte ρ_M stützt sich hauptsächlich auf den sprunghaften Anstieg der

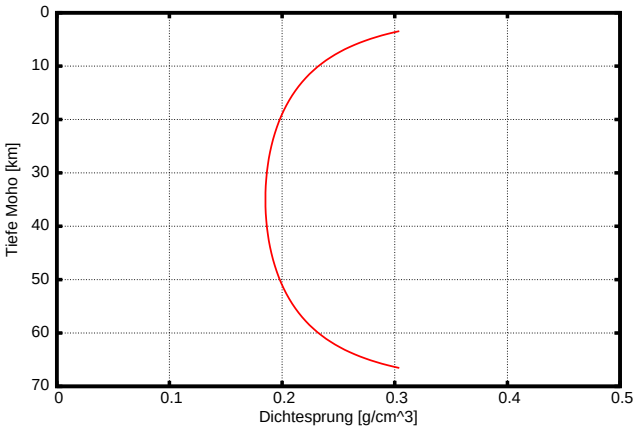

Abbildung 2.1: Dichtesprung aus Bouguer-Anomalien bei verschiedener Tiefe der Moho (nach (Demenitskaja 1975)).

seismischen Geschwindigkeiten auf Werte, die nur für eine enge Auswahl von Gesteinen mit experimentellen Daten vergleichbar sind. Aus der Annahme ultrabasischer Gesteine (Dunit, Olivin) ergibt sich damit eine Dichte von $3.3 < \rho_M < 3.4\,g/cm^3$ (Bullen 1975, Kap. 10.4) mit $\rho_M = 3.32\,g/cm^3$ als wahrscheinlichster Wert (Bullen 1963b, Kap. 12.7), (Zharkov et al. 1978).

Clark und Ringwood geben in (Clark und Ringwood 1964) auf der Grundlage ausführlicher petrologischer Betrachtungen zwei grundsätzlich verschiedene Modelle an. Der Annahme, daß im oberen Mantel leichtes Gestein (Pyrolit) mit einer Dichte von $\rho_M = 3.31\,g/cm^3$ dominiert, wird zum Vergleich eine Phasenänderung von Gabbro zu Eklogit unterhalb der Moho gegenübergestellt, aus der sich eine Dichte von $\rho_M = 3.55\,g/cm^3$ ergibt. Ringwood argumentiert in späteren Veröffentlichungen ((Ringwood 1970), (Ringwood 1975, Kap. 2.4.)) gegen eine solche Phasenumwandlung und plädiert für das Pyrolit-Modell. Interessant ist in diesem Zusammengang die Feststellung von Press (Press 1970), der mittels heuristischer Methoden die Bestimmung von Dichtemodellen durchgeführt hat, daß Modelle mit einer Anfangsdichte unter $3.5\,g/cm^3$ die Daten[2] nicht mit der geforderten Genauigkeit reproduzieren konnten, was im Gegensatz zu der Annahme von Ringwood steht.

Birch legte den beiden 1964 veröffentlichten Modellen (Birch 1964) ebenfalls unterschiedliche Annahmen über die Anfangsdichte zugrunde. Neben dem als Konvention betrachteten Wert $\rho_M = 3.32\,g/cm^3$ findet der Wert $\rho_M = 3.43\,g/cm^3$ Verwendung, der sich aus einer linearen Beziehung zwischen der Geschwindigkeit V_P und der Dichte (Birch's Law, Abschnitt 3.1.4) unter Verwendung einer aus Laborexperimenten abgeleiteten mittleren Atom-Masse ergibt. Die obere Grenze für ρ_M kann abgeschätzt werden, indem unter der Annahme eines chemisch einheitlichen Mantels die Bedingung aufgestellt wird, daß der mittlere Trägheitskoeffizient im Kern den Wert $y = 2/5$ für eine homogene Kugel nicht überschreiten darf (Birch 1954, Zharkov et al. 1978), woraus sich mit den heute gebräuchlichen Daten der Grenzwert $\hat{\rho}_M = 3.6\,g/cm^3$ ergibt.

Mit Einführung linearer Inversionstechniken und der Berechnung der Dichte auch aus den Frequenzen der Eigenschwingungen wurde die Streuung der Dichtewerte unterhalb der Moho keinesfalls geringer; die Werte reichen von $3.27 g/cm^3$ in CAL 5 (Bolt und Uhrhammer 1975) bis $3.40 g/cm^3$ in CORE11 (Widmer 1991), so daß daraus geschlossen werden muß, daß auch unter Verwendung dieser Daten keine eindeutige Bestimmung der Anfangsdichte möglich ist. Dziewonski et. al. bemerken in (Dziewonski et al. 1975) dazu, daß eine genauere Bestimmung der Dichte aus Eigenschwingungsdaten im oberen Mantel nur im Zusammenhang mit gesicherten Annahmen über die seismischen Geschwindigkeiten, die als Zwangsbedingungen eingeführt werden, möglich wird und verweisen auf die etwa gleichgute Repräsentation der Daten durch Modelle 1066A und 1066B, die sich jedoch in der Struktur des oberen Mantels substantiell unterscheiden.

In der Isostasie ist indessen der Wert $\rho_M = 3.27 g/cm^3$ gebräuchlich. In älteren Veröffentlichungen steht dieser meist in Zusammenhang mit der Annahme einer mittleren Dichte in der Kruste von $\rho_L = 2.67 g/cm^3$ und einem Dichtesprung von $\Delta\rho_M = 0.6\,g/cm^3$. Der Wert für ρ_L wird heutzutage als zu klein und als nicht repräsentativ für die gesamte Kruste betrachtet. Aus Vergleichen von Laborexperimenten mit seismischen Geschwindigkeiten hat sich heute die Einteilung der Kruste in zwei Schichten mit ca. 15 km und ca. 18 km Mächtigkeit und zugehörigen mittleren Dichten von $2.67 g/cm^3$ und $2.87 g/cm^3$ etabliert. Hinsichtlich

[2] hauptsächlich Frequenzen der Eigenschwingungen

des Dichtesprungs an der Moho ist aus einigen neueren regionalen isostatischen Untersuchungen, wie z.B. für Gebiete in Südosteuropa (Petrović und Čolić 1994) oder für die zentralen Alpen (Abd-Elmotaal 1991), zu entnehmen, daß der Dichtesprung $\Delta\rho_M$ deutlich kleiner als $0.4\,g/cm^3$ ist. Werte um $0.2\,g/cm^3$ erscheinen zumindest für Europa realistischer. Deminitskaja schlußfolgert in (Demenitskaja 1975) aus einer global gültigen, empirischen Relation zwischen Bouguer-Anomalien und Moho-Tiefe, daß der Dichtesprung, in Abhängigkeit von der Tiefe, Werte im Intervall $0.18 \leq \Delta\rho_M \leq 0.35\,g/cm^3$ annimmt (siehe Abbildung 2.1). Aus diesen isostatisch begründeten Dichtesprüngen ergibt sich zusammen mit der Dichte der unteren Kruste von $2.87\,g/cm^3$ ein Wert von $\rho_M \approx 3.20 g/cm^3$.

Zu ähnlichen Resultaten kommt auch Woollard in (Woollard 1970), der aus isostatischen Überlegungen einen allerdings etwas größeren Dichtesprung im Intervall $0.38 \leq \Delta\rho_M \leq 0.42\,g/cm^3$ angibt und dementsprechend $3.24 \leq \rho_M \leq 3.32\,g/cm^3$ erhält. Damit wird das Pyrolit-Modell von Clark und Ringwood durch die Isostasie bestätigt, während hingegen das Eklogit-Modell mit seiner wesentlich höheren Dichte mit den isostatisch bestimmten Dichtesprüngen nicht kompatibel ist. Selbst wenn man in Betracht zieht, daß der Effekt der Kompression in einer Tiefe von 35 km nicht mehr vernachlässigbar ist, so erscheint nach diesen Überlegungen ein Wert im Intervall $3.2 \leq \rho_M \leq 3.3\ g/cm^3$ wahrscheinlicher als die z.T. deutlich größeren Werte in aktuellen Modellen.

Zusammenfassend ergibt sich, daß unter Berücksichtigung sowohl der Vielfalt als auch der Zuverlässigkeit aller zur Verfügung stehenden Informationen die Festlegung eines einheitlichen Wertes nicht sinnvoll vorgenommen werden kann. Deshalb sollen den Berechnungen zwei Werte zugrunde gelegt werden: Der Wert $\rho_{M1} = 3.27\ g/cm^3$ aus der Isostasie sowie der Wert $\rho_{M2} = 3.37\ g/cm^3$ unter Berücksichtigung des Pyrolit-Modells von Clark und Ringwood sowie der beiden aktuellen Modelle CORE11 und PREM.

2.2 Seismische Daten

Neben den primären Daten Gesamtmasse, Trägheitsmoment und Dichte unterhalb der Kruste sind die seismischen Daten, die Laufzeiten der höherfrequenten Raumwellen und die Frequenzen von Eigenschwingungen die wichtigsten Informationsträger für die Bestimmung der radialen Änderung der Dichte und der elastischen Parameter.

2.2.1 Geschwindigkeiten seismischer Raumwellen

Die ursprüngliche in den Seismometerablesungen enthaltene Information ist der Zeitpunkt des Eintreffens seismischer Wellen. Kann der Erdbebenherd lokalisiert sowie der Entstehungszeitpunkt der Welle festgestellt werden, so stellt die Laufzeit der Welle zwischen Quelle und Empfänger die originäre Information dar. Sowohl der Weg der Welle durch das Erdinnere als auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit sind dabei unbekannt. Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit dennoch bestimmen zu können, werden eine Reihe von Vereinfachungen eingeführt. Dem Fermat'schen Prinzip entsprechend, das in seiner mechanischen Analogie auch für seismische Wellen gilt, ist die Laufzeit entlang der Bahnkurve extremal.

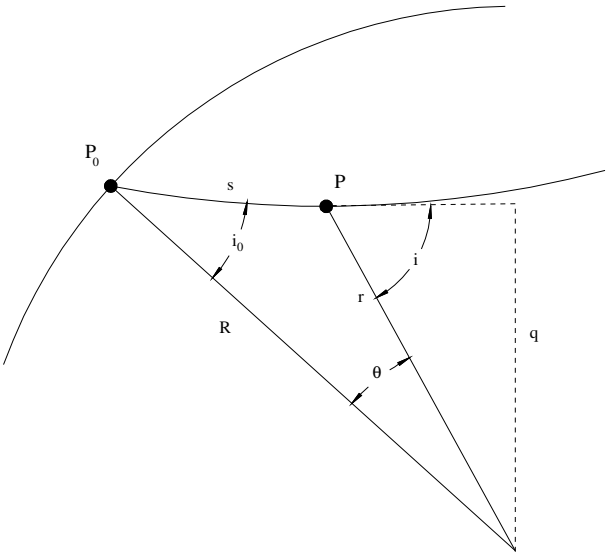

Abbildung 2.2: Zur Ausbreitung seismischer Raumwellen.

In einem radialsymmetrischen Modell gilt mit dem Linienelement in Kugelkoordinaten (r, θ)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] d\theta^2 \tag{2.20}$$

für die Laufzeit

$$T = \int \frac{ds}{V} = \int F(\theta, r, r')\, d\theta. \tag{2.21}$$

Die Funktion $F(\theta, r, r')$ ist hierbei durch die Geschwindigkeit V entlang der Bahnkurve und der Abkürzung $r' = dr/d\theta$ als

$$F(\theta, r, r') = \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{V} \tag{2.22}$$

definiert. Aus der Variationsrechnung ist bekannt, daß T dann stationär wird, wenn die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial r'}\right) = 0$$

erfüllt ist. Da die Variable θ in diesem Ausdruck nicht explizit vorkommt, kann dieser in der Form

$$\frac{d}{d\theta}\left[F - \frac{\partial F}{\partial r'} r'\right] = 0$$

geschrieben werden. Ein Zwischenintegral ist dann

$$F - \frac{\partial F}{\partial r'} r' = p,$$

mit $p = const.$ Wird nun die Funktion (2.22) eingesetzt, ergibt sich daraus mit

$$\frac{\partial F}{\partial r'} r' = \frac{r'^2}{V\sqrt{r'^2 + r^2}}$$

die Konstante p zu

$$p = \frac{r^2}{V\sqrt{r'^2 + r^2}} = \frac{r^2}{V}\frac{d\theta}{ds}. \tag{2.23}$$

Wird mit i der Winkel zwischen Radius und Ausbreitungsrichtung der Welle (Abbildung 2.2) bezeichnet, folgt daraus unter Berücksichtigung der Beziehung $\sin i = r'/ds = r/\sqrt{r'^2 + r^2}$

$$p = \frac{r \sin i}{V}. \tag{2.24}$$

Die Konstante p charakterisiert demnach die Ausbreitungsrichtung der Welle eindeutig. Eine Interpretation von p kann aufgrund der idealisierten Annahme einer radialsymmetrischen Schichtung der Erde in differentiell kleine, homogene und isotrope Schalen vorgenommen werden. Die Wellenausbreitung erfolgt danach innerhalb einer Schale geradlinig mit der Geschwindigkeit V, und die Strahlen werden an den Grenzflächen nach dem Gesetz von Snellius, das prinzipiell für alle Typen von Wellen gilt, gebrochen.

Aus dem Brechungsgesetz und Abbildung 2.3 folgt in Übereinstimmung mit (2.24)

$$\frac{O\,P' \sin i'}{V'} = \frac{O\,P' \sin j'}{V''} = \frac{O\,P'' \sin i''}{V''} = p. \tag{2.25}$$

Die Konstante p wird dementsprechend auch als Strahlparameter bezeichnet. Ebenfalls aus geometrischen Betrachtungen kann die wichtige Beziehung

$$p = \frac{dT}{d\Delta} \tag{2.26}$$

hergeleitet werden (Bullen 1963b, Kap. 7.2.1). Hierbei ist T die Laufzeit der Welle und Δ der Zentriwinkel zwischen Erdbebenherd und Empfänger, wobei vorausgesetzt wird, daß die Bahnkurve symmetrisch zum Ursprung ist, was nur dann gewährleistet ist, wenn die Geschwindigkeit in radialer Richtung abnimmt und Anfangs- und Endpunkt auf der gleichen Kugelschale liegen. Der Strahlparameter p, dessen reziproker Wert auch als scheinbare oder Oberflächengeschwindigkeit bezeichnet wird, ist aus den Laufzeitkurven, die aus der Gesamtheit aller Beobachtungen eines Wellentypes aufgestellt werden können, durch (numerisches) Differenzieren bestimmbar.

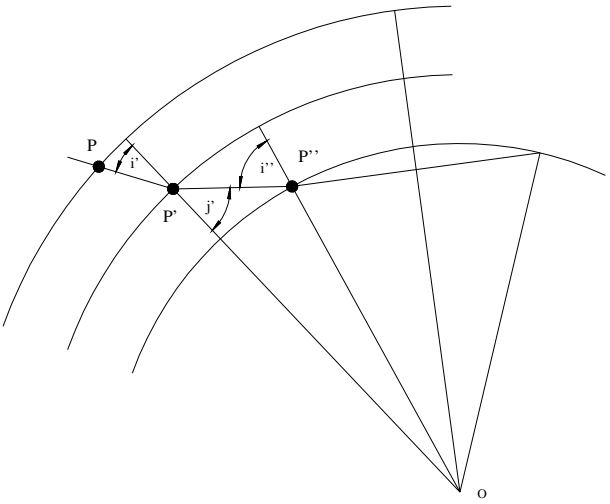

Abbildung 2.3: Zur Brechung seismischer Raumwellen.

Weiterhin folgt aus Gleichung (2.23) und dem Linienelement (2.20) die Beziehung

$$d\theta = \pm \frac{p}{r} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - p^2}}\, dr \tag{2.27}$$

mit der Abkürzung $\xi = r/V$. Durch Integration von (2.27) zwischen dem Punkt P_0 und der Stelle des tiefsten Eindringens des Strahles (Scheitelpunkt) findet man die Integralgleichung

$$\frac{\Delta}{2\,p} = \int_{\xi_P}^{\xi_0} \frac{d\,\ln\,r}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - p^2}}\, d\xi, \tag{2.28}$$

die eine spezielle Form der Abel'schen Integralgleichung ist. Eine Lösung für ξ wurde erstmals von Herglotz (Herglotz 1907) und Wiechert (Wiechert und Geiger 1910) angegeben. Dabei ist wichtig festzuhalten, welche Voraussetzungen für diese Lösung gelten. Herglotz selbst gibt als Bedingung

$$\frac{d^2T}{d\Delta^2} > 0 \tag{2.29}$$

an, was gleichbedeutend mit einer konkaven Krümmung der T-Δ-Kurve gegen die Δ-Achse ist.

Desweiteren ist die Existenz des Scheitelpunktes nur dann gewährleistet, wenn die Geschwindigkeit eine stetige Funktion des Radius mit einer stetigen, positiven zweiten Ableitung (Krümmung) ist, welche die Bedingung

$$\frac{dV}{dr} < \frac{V}{r} \tag{2.30}$$

erfüllt (Witte 1932), (Bullen 1963b, Kap. 7.2.3).

Es existiert eine Reihe von Fällen, in denen die genannten Voraussetzungen nicht oder nur teilweise erfüllt sind und eine Anwendung der Wiechert-Herglotz-Methode zunächst ausgeschlossen ist. Unter diesen ist eine unstetige Änderung der Geschwindigkeit (an den Schalengrenzen) am einfachsten zu berücksichtigen, indem die Integration nur bis zur Diskontinuität durchgeführt und das Modell anschließend um diese Schale reduziert wird. Dann kann das Verfahren für die verbleibende Kugel mit entsprechend angepaßten Laufzeitkurven wieder angewendet werden. In vielen anderen Sonderfällen, wie Sprünge, Knicke oder Mehrdeutigkeiten in der T-Δ-Relation, die aufgrund anormaler Geschwindigkeitsgradienten auftreten, kann die Methode unter praktischen Gesichtspunkten ungeachtet der Anforderungen an die T-Δ-Kurve trotzdem angewendet werden, solange die Bedingung (2.30) gilt (Bullen 1963b, Kap. 7.4). In Regionen, in denen die Geschwindigkeit mit der Tiefe abnimmt (*low velocity zones*), ist die Anwendung generell nicht möglich.

Die ersten umfangreichen Bestimmungen seismischer Geschwindigkeiten auf der Grundlage des Wiechert-Herglotz-Verfahrens wurden 1939/40 von Jeffreys (Jeffreys 1939) und Bullen und unabhängig davon in den fünfziger Jahren von Gutenberg (Gutenberg 1951, Gutenberg 1958) vorgenommen. Beide Verteilungen (Abbildung 2.4) zeigen nur geringfügig unterschiedliche Verläufe, deren Differenz als Maß für die Unsicherheit der Bestimmung angesehen wurde.

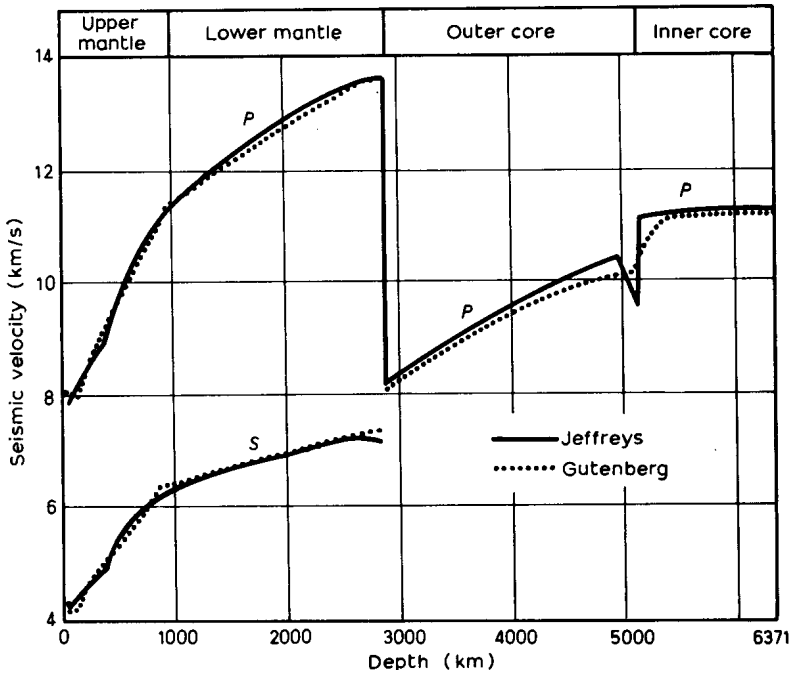

Abbildung 2.4: Geschwindigkeiten von Jeffreys/Bullen und Gutenberg (aus (Bullen 1975)).

Beide Verteilungen dienten jahrzehntelang als Referenz und wurden in späteren Modellen keiner grundsätzlichen Revision unterzogen. Die Einführung von Diskontinutäten im oberen Mantel, die Abschaffung der Übergangszone zwischen äußerem und innerem Kern sowie der Nachweis von S-Wellen im inneren Kern stellen die hauptsächlichen Änderungen der folgenden Jahrzehnte dar.

Ein der Wiechert-Herglotz-Methode ähnliches Verfahren, das aber nicht auf einer Beziehung zwischen den direkt zu beobachtenden Größen Laufzeit und Entfernung beruht, sondern anstelle dessen auf der Differenz

$$\tau = T - p\,\Delta, \tag{2.31}$$

wurde Ende der sechziger Jahre von Gerver und Markushevich eingeführt und als τ-Methode bezeichnet (Bullen und Bolt 1985, Kap. 7.4.5). Eliminiert man in Gleichung (2.23) mittels (2.20) $d\theta$, so ergibt sich daraus

$$ds = \pm\frac{r}{V}\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - p^2}}dr. \tag{2.32}$$

Damit kann die Laufzeit gemäß (2.21) zu

$$T = 2\int_{r_p}^{R}\frac{\xi^2}{r}\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - p^2}}dr \tag{2.33}$$

angegeben werden, woraus unter Verwendung von (2.28)

$$T = p\,\Delta + 2\int_{r_p}^{R}\frac{1}{r\sqrt{\xi^2 - p^2}}dr \tag{2.34}$$

folgt (Bullen 1963b, Kap. 7.2.2). Ausgehend von diesem Ausdruck kann nun der Parameter

$$\tau = T - p\,\Delta = 2\int_{r_p}^{R}\frac{1}{r\sqrt{\xi^2 - p^2}}dr \tag{2.35}$$

definiert werden, der auch als Verzögerungszeit bezeichnet wird. Als Vorteil dieser Größe wird angegeben, daß es in der Beziehung zum Strahlparameter nur noch an Stellen, an denen die Geschwindigkeit mit der Tiefe

fällt, zu Sprüngen kommen kann, in allen anderen Fällen handelt es sich um eine mit dem Strahlparameter monoton fallende Funktion. Der Sprung bei Auftreten eines anomalen Geschwindigkeitsgradienten wird dann durch die Erweiterung

$$\tau = T - p\,\Delta - \sum \sigma_i \tag{2.36}$$

berücksichtigt, wobei σ_i den Beitrag einer einzelnen solchen Schale repräsentiert und nach Überführung in ein planares Problem bestimmt werden kann (Bullen und Bolt 1985, Kap. 7.4.4). Die praktische Anwendung der Methode stößt offenbar auf numerische Instabilitäten, so daß die Ergebnisse leicht von der Wahl zusätzlicher Bedingungen zur Stabilisierung abhängig werden können (Jarosch 1980).

Die Geschwindigkeitsverteilungen aktueller Modelle werden durch Modifikationen bestehender Modellierungen entweder wie in (Johnson und Gilbert 1972) nur durch Anpassung an die aktualisierten und um eine Ausgangsnäherung T_0 reduzierten Laufzeitdaten $\delta T = T - T_0$

$$\delta T_i + v_i = \int_0^R K_i(r)\,\delta V(r)\,r^2\,dr \tag{2.37}$$

oder durch die simultane Anpassung an Laufzeiten der Raumwellen und Perioden der Eigenschwingungen unter Berücksichtigung einer Dichteverteilung vorgenommen (Dziewonski et al. 1975, Dziewonski und Anderson 1981). Dabei wird mit $K_i(r)$ der linearisierte Zusammenhang (Fréchet-Kernel) zwischen der Geschwindigkeitsänderung und der um die Ausgangsnäherung reduzierten Laufzeit repräsentiert.

Weiterhin wird heute zwischen Modellen, die hauptsächlich zur Repräsentation der seismischen Geschwindigkeiten entweder als mittleres globales Modell (Morelli und Dziewonski 1993) oder zur Lokalisierung von Erdbeben und Bereitstellung synthetischer Seismogramme (Kennett und Engdahl 1991, Kennett et al. 1995) dienen sollen, Modellen, die auf einer gemeinsamen Darstellung sowohl von Laufzeiten als auch Eigenfrequenzen beruhen und einer allgemeinen Anwendung in geophysikalischen Problemen dienen (Dziewonski et al. 1975, Dziewonski und Anderson 1981), sowie Modellen, die in bestmöglicher Übereinstimmung mit den Frequenzen der Eigenschwingungen stehen (Widmer et al. 1991, Widmer 1991) unterschieden, wobei die Geschwindigkeitsverteilungen dieser Modelle nicht vollständig miteinander kompatibel sind. So ist beispielsweise die Vorhersage von Laufzeiten durch Modelle, die nur aufgrund von Eigenschwingungsdaten berechnet wurden, als unzureichend einzuschätzen (Montagner und Kennett 1996), und die geringe Auflösung in großer Tiefe läßt eine sichere Bestimmung der Geschwindigkeiten vor allem im Kern kaum zu (Kennett et al. 1995). Andererseits wird festgestellt, daß der Einfluß der mittleren Laufzeiten auf die Geschwindigkeitsverteilung im oberen Mantel relativ gering ist (Kennett und Engdahl 1991), ein Defizit, welches sich in der großen Streuung zwischen den Modellen gerade in diesem Bereich ausdrückt (Abbildung 2.5) und durch die Hinzunahme von Eigenschwingungsdaten reduziert werden kann.

Die Bestimmung der Geschwindigkeiten hängt also von der Wahl der Beobachtungstypen ab und ist auch in diesem Sinne nicht eindeutig. Unabhängig von den verwendeten Daten ist allen Modellierungen gemeinsam, daß die Formulierung des inversen Problems in der Form (2.37)[3] unterbestimmt und damit instabil ist, wodurch die Einführung zusätzlicher Bedingungen unumgänglich wird.[4] Durch die Anwendung von Regularisierungstechniken wird anstelle einer Beseitigung der Singularität des Problems eine Stabilisierung dadurch erreicht, daß entweder direkt durch die Vorgabe von Kovarianzen, z.B. aus petrologischen Betrachtungen (Montagner und Anderson 1989b) bzw. rein empirisch (Tarantola und Valette 1982, Montagner und Kennett 1996), oder indirekt durch die Einführung mathematischer Kriterien (Stetigkeits- und/oder Krümmungsbedingungen) sowie zusätzlich durch die Minimierung der Abweichungen von den Ausgangsnäherungen (Tarantola und Valette 1982) immer gewisse Vorgaben für die Lösung eingeführt werden. Infolge dessen ist eine bestmögliche Anpassung an die Daten oft nicht mehr zu erzielen. Um einen Kompromiß zwischen dem Einfluß der Stabilitätsbedingungen und der Größe der Residuen v finden zu können, wird die mittlere Quadratsumme normierter Verbesserungen

$$\hat{N} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{v_i}{\sigma_i}\right)^2} = \frac{1}{n}\chi^2 \tag{2.38}$$

häufig als (willkürliches) Entscheidungkriterium verwendet (Gilbert et al. 1973, Montagner und Anderson 1989a, Kennett et al. 1995, Montagner und Kennett 1996), wobei als Bedingung für eine noch

[3] Diese muß bei der Berücksichtigung der Eigenschwingungen um weiterere Terme zur Modellierung von Dichteänderungen sowie ggf. zusätzliche Unbekannte (Anelastizität, Anisotropie) im Integranden ergänzt werden.

[4] Morelli und Dziewonski schreiben in (Morelli und Dziewonski 1993) dazu: „Die Bestimmung eines Modells aus einem Satz beobachteter, zusammengefaßter Laufzeitkurven ist generell ein unterbestimmtes Problem und einige Bedingungen müssen eingeführt werden," und wenden Standard-Dämpfungstechniken in Verbindung mit einer L_2-Ausgleichung an, wobei die Bestimmung der Dämpfungsparameter durch Ausprobieren erfolgt.

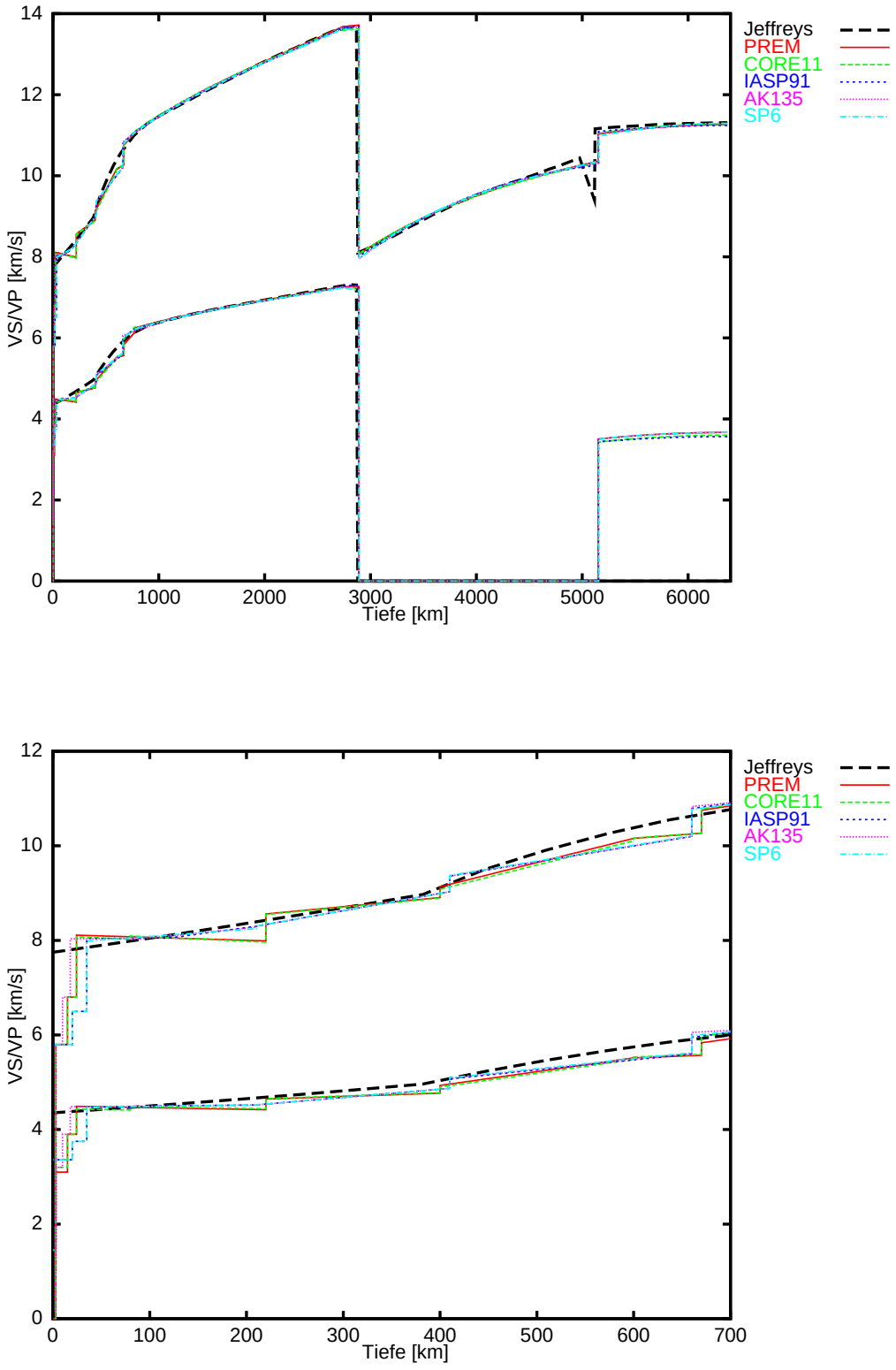

Abbildung 2.5: Seismische Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Tiefe aus verschiedenen aktuellen Modellen im Vergleich zu Jeffreys (1940).

akzeptable Repräsentation der Daten

$$\hat{N} \leq 1$$

bzw. in (GILBERT et al. 1973) die Zielgröße

$$C = e^{-\frac{1}{2}\hat{N}} \rightarrow 1$$

eingeführt wird. Dabei wird versucht, die Varianzen σ aufgrund der *a priori* geschätzten Genauigkeit der Daten festzulegen, d.h. daß die Residuen im Mittel innerhalb der Grenzen des einfachen mittleren Fehlers liegen dürfen. Damit zeigt sich, daß die heute gebräuchlichen Methoden zur linearen bzw. linearisierten Inversion in einem hohen Maße von der Wahl der Regularisierungstechniken und/oder des Startmodelles abhängig sind, ganz abgesehen von den Problemen, die durch die Linearisierung des ursprünglich nichtlinearen Zusammenhanges zusätzlich auftreten können. Da die Startmodelle aber hauptsächlich unter Anwendung der Wiechert-Herglotz-Methode berechnet wurden, können derartige Anpassungen letztendlich keine grundsätzlich neuen, unabhängigen Geschwindigkeitsverteilungen zum Ergebnis haben.

Weiterhin wird deutlich, daß die Bestimmung der Geschwindigkeiten seismischer Raumwellen generell nicht ohne zusätzliche Annahmen möglich ist, die im Falle des Wiechert-Herglotz-Verfahrens in der Voraussetzung einer gewissen Zunahme der Geschwindigkeit mit der Tiefe und im Falle der modernen Inversionstechniken in der Einbeziehung regularisierender Bedingungen bestehen. Da die Ergebnisse der Wiechert-Herglotz-Methode auch die heutigen Geschwindigkeitsverteilungen dominieren (Abbildung 2.5), ist grundsätzlich auch die Voraussetzung über die Geschwindigkeitszunahme mit der Tiefe (2.30) noch immer in den Modellen erhalten geblieben, von Details in den Schalen des oberen Mantel abgesehen. Insbesondere unter Berücksichtigung des von Birch in Laborexperimenten bestätigten näherungsweise linearen Zusammenhanges zwischen Dichte und seismischen Geschwindigkeiten (Abschnitt 3.1.4) impliziert diese Voraussetzung bereits indirekte Annahmen über die radiale Änderung der Dichte.

2.2.2 Frequenzen der Eigenschwingungen

Neben den Laufzeiten seismischer Raumwellen werden die Eigenschwingungen heute als der wichtigster Informationsträger für die elastischen (und anelastischen) Eigenschaften und die Dichte der Erde betrachtet. Eigenschwingungen der Erde werden nur bei besonders schweren Erdbeben angeregt. Die Bestimmung sowohl der Frequenzen ω der Eigenschwingungen als auch der Dämpfungswerte Q erfolgt gemeinhin aus den Fourier-Spektren von Seismogrammen (Abbildungen 2.6 und 2.7) mit unterschiedlichen Methoden (MASTERS und WIDMER 1995, WIDMER 1991). Darunter ist das Heraussuchen der Maxima die simpelste Möglichkeit, die insbesondere dann zu systematischen Fehlern führt, wenn die Frequenzen zu dicht beieinander liegen und daher im Fourier-Spektrum nicht mehr ausreichend genau aufgelöst werden können. Die Dämpfung kann aus den Amplituden der Spektren unterschiedlicher Zeitfenster des Seismogramms direkt aus deren Abschwächung oder aus der Weite des gesamten Spektrums um den jeweiligen Maximalwert abgeleitet werden. Andere Methoden bestehen darin, iterativ eine bestangepaßte Resonanzfunktion um das Frequenzmaximum einer bestimmten Schwingungsmode zu finden.

Es wird zwischen den Fundamentalmoden und deren Obertönen sowie dem Grad n und der Ordnung m der Frequenzen unterschieden. Alle Moden gleicher Ordnung (*singlets*) in den Gleichungen (1.46) bzw. (1.49) werden als *multiplet* bezeichnet. Für einen nichtrotierenden, kugelförmigen Körper wären die Einzelfrequenzen eines solchen *multiplets* gleich (Entartung der Moden) und werden deshalb für ein radialsymmetrisches Modell zusammengefaßt. Da die Erde sowohl in der äußeren Gestalt als auch in der inneren Schichtung geringe Abweichungen von der Radialsymmetrie aufweist, ergeben sich zusätzliche Schwierigkeiten in der Identifizierung der Frequenzen, da grundsätzlich eine Trennung aller Frequenzen eines *multiplet* erforderlich ist (*multiplet splitting*). Die Frequenzen eines *multiplet* liegen jedoch in vielen Fällen sehr dicht beieinander, weshalb eine Trennung praktisch aufwendig oder oft unmöglich ist. Es wird daher zwischen auflösbaren und nicht-auflösbaren *multiplets* unterschieden, im letztgenannten Falle kann eine Separation der Einzelfrequenzen nicht vorgenommen werden, obwohl eine systematische Frequenzverschiebung zwischen den Spektren aus Seismogrammen verschiedener Stationen auftritt. Zur simultanen Bestimmung der Frequenzen mehrerer nahezu entarteter Moden aus den Fourier-Spektren verschiedener Seismogramme existieren unterschiedliche Methoden, die bekanntesten sind *multiplet-stacking* und *multiplet-stripping* (GILBERT und DZIEWONSKI 1975, WIDMER 1991). Im letztgenannten Verfahren wird innerhalb eines schmalen Frequenzbandes das Spektrum mit Resonanzfunktionen rekonstruiert, aus denen Amplitude und Frequenzen verschiedener Moden bestimmt werden können.

Weiterhin treten Kopplungseffekte aufgrund der Erdrotation und aspherischer Strukturen zwischen den Frequenzen unterschiedlicher Moden auf, die als systematische Frequenzverschiebung in Erscheinung treten. Der deutlichste Einfluß ist die Kopplung von toroidalen und spheroidalen Moden im Frequenzband von $1.8 - 3.3\,mHz$ durch die Coriolis-Kraft (MASTERS und WIDMER 1995).

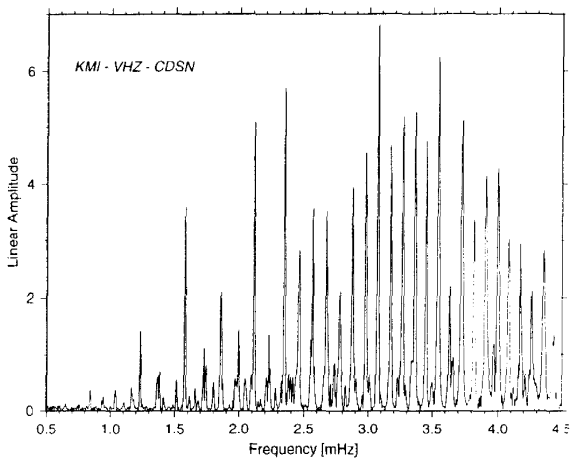

Abbildung 2.6: Fourier-Amplituden-Spektrum eines 60-stündigen Seismogramms. Die dominierenden Maxima sind fast gleichabständig mit einem Frequenzabstand von $0.1\,mHz$ verteilt und den sphäroidalen Fundamentalmoden zuzuordnen (aus (Masters und Widmer 1995)).

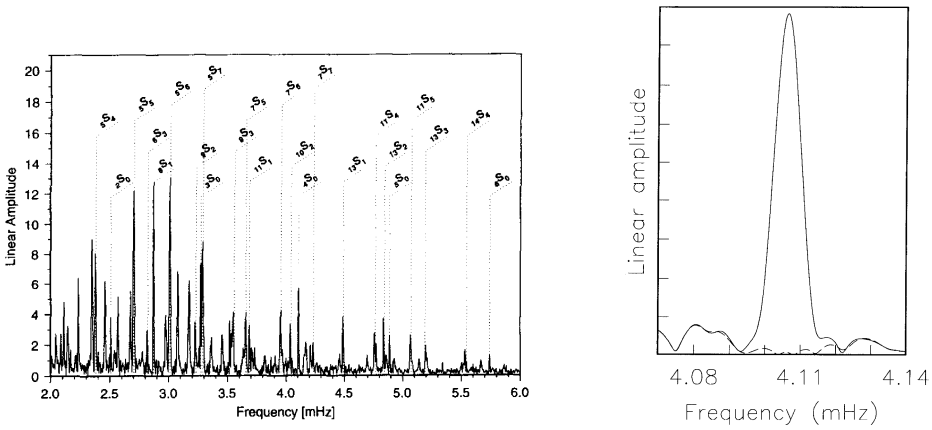

Abbildung 2.7: Fourier-Amplituden-Spektrum eines 67-stündigen Seismogramms des starken Columbianischen Erdbebens von 1970. Wegen der Tiefe des Bebens sind die Frequenzmaxima fast ausschließlich den Obertönen (sphäroidaler) Schwingungen zuzuordnen. Der vorangestellte Index gibt hierbei die Höhe des Obertons, der nachgestellte Index den Grad der Schwingungsmode an. Rechts ein Ausschnitt des Spektrums für die Mode ${}_4S_0$ mit bestangepaßter Resonanzfunktion (aus (Masters und Widmer 1995)).

Hauptsächlich basieren die etablierten Methoden zur Bestimmung der Eigenfrequenzen auf einer Fourier-Transformation der Daten. Hierbei besteht das Problem darin, daß die Frequenzen, für die aus der Transformation eine Amplitude bestimmt werden soll, *a priori* festgelegt werden müssen. Sind die Frequenzen, die im Datenmaterial erwartet werden, vorab nicht oder nur ungenau bekannt, kann eine unpassende Wahl der Diskretisierung des Frequenzbandes dazu führen, daß bestimmte Frequenzen entweder mit einer zu kleinen Amplitude oder mit einem zu breiten Maximum auftauchen. In beiden Fällen ist eine sichere Bestimmung der Frequenzen nicht oder nur ungenau möglich. Wird die Diskretisierung des Spektrums zu fein angelegt, führt dies zwangsläufig zu Instabilitäten (Nyquist-Theorem). Sicherlich können heute aus den vorhandenen Modellen recht genaue Vorhersagen der zu erwartenden Eigenfrequenzen getroffen werden. Trotzdem gibt es eine große Zahl von Frequenzen, die bisher nicht zuverlässig nachgewiesen werden konnten, wie die Aufstellung in (Masters und Widmer 1995) und Abbildung 2.8 zeigen.

Daher erscheint für die Bestimmung der Eigenschwingungen, möglicherweise auch für die Trennung von *multiplets* anstelle der Analyse des Fourier-Spektrums eine heuristische Suche von Einzelfrequenzen, wie sie von Mautz in (Mautz 2000) vorgeschlagen und auf andere Problemstellungen erfolgreich angewendet werden konnte, einer genaueren Untersuchung wert.

Da die Eigenschwingungen sowohl von den elastischen Eigenschaften des Mediums als auch von der Dichte bestimmt werden, kann aus diesen Daten keine isolierte Aussage über nur eine dieser Größen abgeleitet werden,

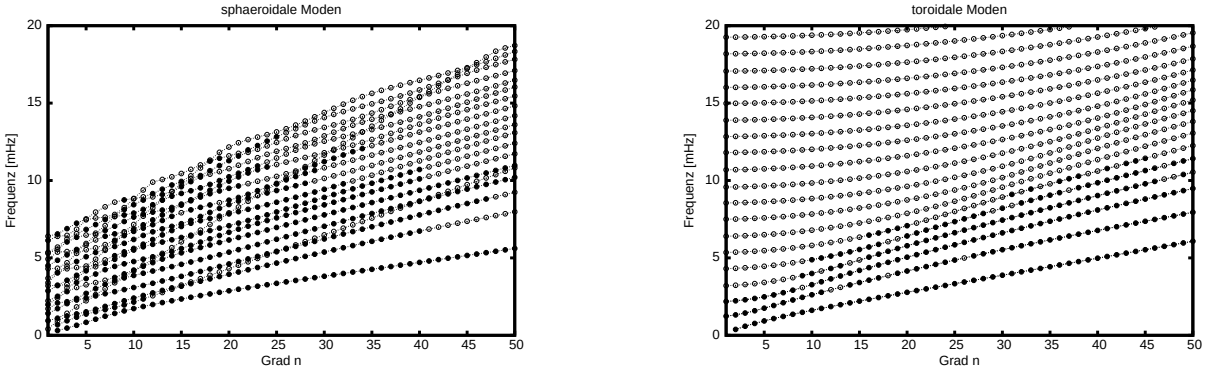

Abbildung 2.8: Theoretische (leere Kreise) und in Seismogrammen nachgewiesene (gefüllte Kreise) Eigenfrequenzen für sphäroidale (links) und toroidale (rechts) Schwingungen. Die Linien verbinden Frequenzen gleicher Obertöne.

obwohl festzustellen ist, daß die Abhängigkeit vom Schermodulus μ und damit von den Geschwindigkeiten V_S am größten ist, während die Dichte weniger stark und die Kompressibilität K bzw. die Geschwindigkeiten V_P kaum eingeschränkt werden (Pekeris 1966, Bullen 1969, Haddon und Bullen 1969, Kennett 1998). Insbesondere im inneren Kern und im oberen Mantel wird das Auflösungvermögen als nicht zufriedenstellend eingeschätzt (Dziewonski et al. 1975, Masters 1979, Montagner und Anderson 1989a). Da die torsionalen Schwingungen keine radiale Bewegungskomponente aufweisen, ist ein Rückschluß auf die Geschwindigkeiten der Kompressionswellen bzw. die Inkompressibilität nicht und auf die Dichte nur in geringem Maße möglich. Die gleichzeitige Bestimmung von Dichte und Geschwindigkeiten aus einer endlichen Zahl von Eigenfrequenzen ist jedoch kein eindeutig lösbares Problem, wie von Backus und Gilbert (Backus und Gilbert 1967, Backus und Gilbert 1970) aufgezeigt wurde. Die aus den Frequenzen der Eigenschwingungen auf der Grundlage einer linearen Formulierung in der Form (2.37) bestimmten seismischen Geschwindigkeiten ermöglichen keine zufriedenstellende Prädiktion der Laufzeiten (Dziewonski und Anderson 1981, Montagner und Kennett 1996) und zeigen systematische Niveauverschiebungen[5]. Die Rückführung auf ein einheitliches Niveau kann entweder direkt durch Korrekturterme (*baseline-corrections*) (Dziewonski et al. 1975, Dziewonski und Anderson 1981) oder durch die zusätzliche Modellierung der Dämpfungsparameter der Eigenschwingungen (Montagner und Kennett 1996) erfolgen, womit der Berücksichtigung anelastischen Verhaltens bei der Inversion von Eigenschwingungsdaten gewisse Bedeutung zukommt. Neben der Bestimmung der Q-Werte direkt aus den Spektren der Seismogramme werden diese Größen inzwischen in die Inversion der Eigenfrequenzen als zusätzliche Unbekannte eingebracht, allerdings wiederum unter der Voraussetzung, daß die seismischen Geschwindigkeiten[6] (Montagner und Kennett 1996) sowie die Dichte (Widmer et al. 1991, Widmer 1991) in gewissem Sinne als Vorinformationen betrachtet werden können[7].

Die einzelnen Moden der Eigenschwingungen zeigen unterschiedliche Empfindlichkeiten auf gewisse Regionen der Erde. Generell besteht die Tendenz, daß die Empfindlichkeit auf Strukturen in geringer Tiefe mit der Frequenz ansteigt, aber der Informationsgehalt über die Absolutbeträge der Größen nachläßt. So stellt Nolet in (Nolet 1976) fest, daß aus den höherfrequenten Moden im oberen Mantel nur noch die Form der Dichtestrukturen, nicht aber deren Absolutbeträge abgeleitet werden können. Auch Kennett verwendet in (Kennett 1998) in einer heuristischen Bestimmung der Dichte nur Eigenfrequenzen mit einer Frequenz unter $5\,mHz$.

2.2.3 Vergleich verschiedener Geschwindigkeitsverteilungen und Fehlerschätzung

Genauigkeitsangaben zu den seismischen Geschwindigkeiten sind in der Literatur nur selten zu finden. Da im Rahmen dieser Arbeit der seismische Parameter Φ, der sich unmittelbar aus den beiden Geschwindigkeiten nach Gleichung (1.33) ergibt, die wichtigste Rolle spielt, sollen sich auch die nachfolgenden Betrachtungen zur Genauigkeit nur auf diese Größe beziehen. Jeffreys wird von Birch 1939 in (Birch 1939) mit der Behauptung zitiert, daß das Verhältnis K/ρ (also der Parameter Φ) nur „unwahrscheinlich um mehr als 0.5% falsch sein

[5] Diese werden der geographisch ungleichen Verteilung der Stationen zugeschrieben, und es wird davon ausgegangen, daß die Auswirkung auf die Laufzeiten größer als auf die Eigenschwingungen ist (Dziewonski et al. 1975).

[6] und damit die elastischen Parameter

[7] In (Widmer et al. 1991) werden die seismischen Geschwindigkeiten und die Dichte nur sehr geringfügig gegenüber dem Ausgangsmodell geändert.

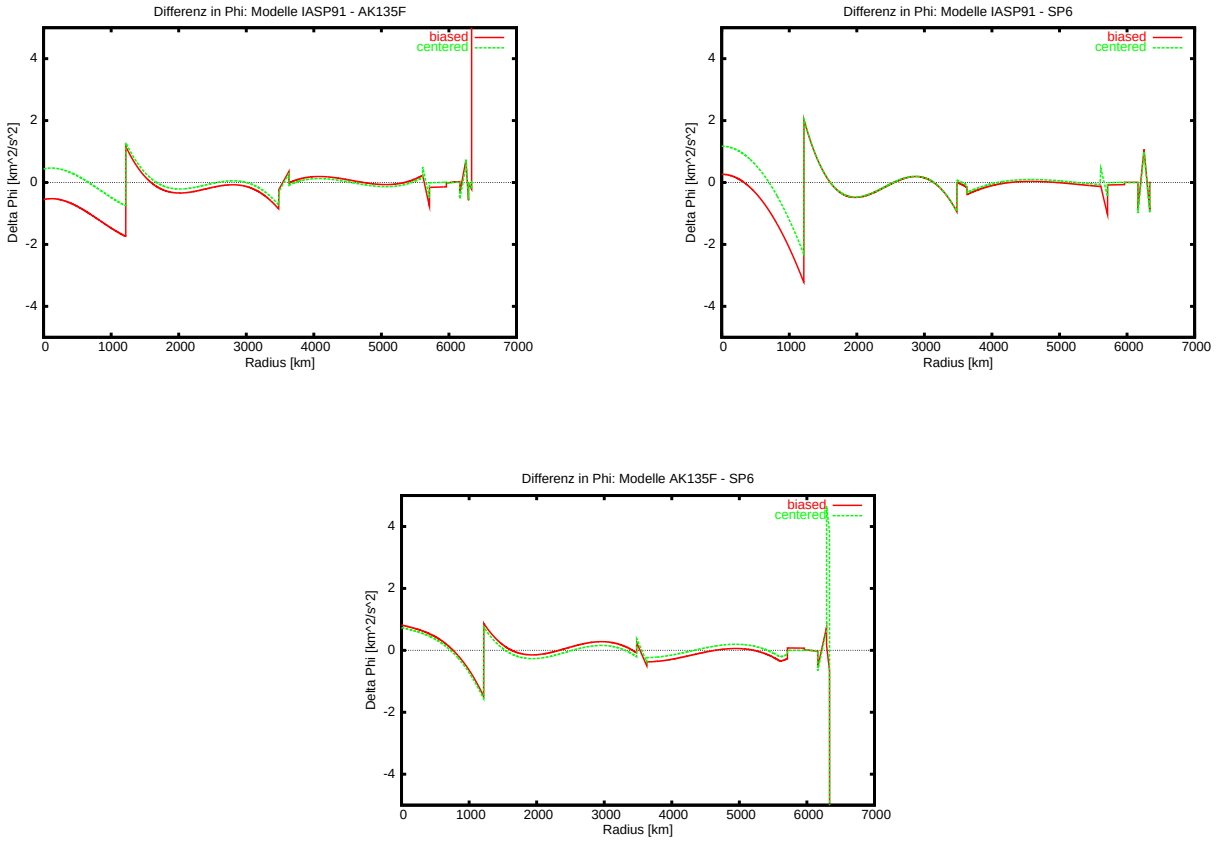

Abbildung 2.9: Differenzen im seismischen Parameter Φ zwischen den Modellen IASP91, SP6 und AK135.

kann“. Schon zu dieser Zeit äußerte Birch Zweifel an dieser Aussage in Hinblick auf die deutlich größeren Differenzen in der Größenordnung von 2 bis 3% in V_P und V_S zwischen den Geschwindigkeitsverteilungen verschiedener Autoren.

Eine Untersuchung der Unterschiede der seismischen Geschwindigkeiten bietet sich auch für aktuelle Modelle an, um deren Zuverlässigkeit und Genauigkeit abschätzen zu können. Da für die Festlegung einer geeigneten Parametrisierung nicht ein besonderer Anwendungszweck im Vordergrund steht, soll im folgenden ein Vergleich zwischen PREM (Laufzeiten und Eigenschwingungen) (Dziewonski und Anderson 1981), CORE11 (nur Eigenschwingungsdaten) (Widmer 1991) sowie den drei Modellen IASP91 (Kennett und Engdahl 1991), SP6 (Morelli und Dziewonski 1993) und AK135 (Kennett et al. 1995) zur bestmöglichen Darstellung der Laufzeiten von Raumwellen vorgenommen werden. Ohnehin erscheint es im Hinblick auf die Bestimmung der Dichte aus seismischen Geschwindigkeiten wenig sinnvoll, eine Unterscheidung zwischen Modellen aufrechtzuerhalten, die physikalisch die gleiche Größe beschreiben.

Da für einen Vergleich kein absolutes Kriterium zur Verfügung steht[8], sollen die Differenzen zwischen den einzelnen Modellen zur Beurteilung herangezogen werden. Die Angabe von relativen Fehlern erscheint nicht sinnvoll, da die Größenordnung der Fehler weniger vom Absolutbetrag des seismischen Parameters als von der Region abhängig ist. Strenggenommen kann aus diesem Grund auch kein einheitliches Maß für die Abweichung zweier Modelle angegeben werden, da es zu den größten Unterschieden im inneren Kern und im oberen Mantel kommt, während im unteren Mantel die Differenzen kleiner sind. Für eine Abschätzung der Größenordnung erscheint vor dem Hintergrund, daß die Schalen mit den größten Änderungen sich nur über relativ kleine Bereiche erstrecken, ein globales Kriterium dennoch anwendbar. Weiterhin ist zu berücksichtigen, daß die Differenzen zwischen den Modellen meist einen konstanten Anteil enthalten, der einer Änderung der Beträge der Sprünge an den Diskontinuitäten entspricht. Um einen Vergleich zwischen den Formen der Modelle besser durchführen zu können, soll deshalb eine Niveauanpassung innerhalb der Intervalle durchgeführt werden. Für die Beurteilung der Zuverlässigkeit insgesamt sind die konstanten Unterschiede aber mit zu berücksichtigen,

[8]Die Berechnung einer mittleren Geschwindigkeitsverteilung aus den verschiedenartigen Modellen wird keine gute Näherung für den Erwartungswert ergeben.

so daß die mittlere quadratische Differenz sowohl vor

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum {d_i}^2}{n}} \tag{2.39}$$

als auch nach der Zentrierung

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n}} \tag{2.40}$$

als Maß für die Abweichung zweier Modelle angegeben werden soll.

Die drei auf Laufzeiten seismischer Raumwellen abgestimmten Modelle[9] zeigen nach beiden Kriterien vor allem im inneren Kern, im Übergang zwischen innerem und äußerem Kern, an der Kern-Mantel-Grenze (Zone D") sowie im oberen Mantel deutliche Unterschiede, während im unteren Mantel und in weiten Teilen des äußeren Kerns alle drei Modelle fast identisch sind (Abbildung 2.9). Vor allem wegen der unterschiedlichen Größe der Sprünge an der Grenze zwischen innerem und äußerem Kern unterscheiden sich die beiden Kriterien δ und σ für die Differenzen zum Modell IASP91. Dies gilt besonders für die Differenzen zwischen den Modellen IASP91 und AK135, die ansonsten die größte Übereinstimmung zeigen. Läßt man die verschiedenen Niveaus im inneren Kern außer Betracht, liegt die mittlere Differenz zwischen 0.30 und 0.75 km^2/s^2 (Tabelle 2.2).

Tabelle 2.2: Mittlere Differenzen im seismischen Parameter Φ zwischen den Modellen IASP91, SP6 und AK135.

	AK135		SP6	
	$\delta\,[km^2/s^2]$	$\sigma[km^2/s^2]$	$\delta\,[km^2/s^2]$	$\sigma[km^2/s^2]$
IASP91	0.89	0.28	0.70	0.57
AK135	-	-	0.88	0.75

Die drei Modelle sind jedoch keineswegs unabhängig voneinander, so liegt SP6 als Startmodell IASP91 zugrunde und AK135 wurde aus beiden anderen Modellen unter Berücksichtigung moderater Änderungen unter dem Aspekt einer verbesserten Darstellung aller Phasen seismischer Wellen zusammengestellt. Dazu wurde die Komponente der Kompressionswellen, die den seismischen Parameter dominiert, zu weiten Teilen aus IASP91 entnommen, die Struktur des Kerns aus SP6. Die Unterschiede zwischen den Modellen können daher strenggenommen nicht als repräsentativ für die Zuverlässigkeit heutiger Laufzeitdaten sowie der Modellbildung betrachtet werden. Da aber unabhängige Bestimmungen der Geschwindigkeiten aus aktuellen Beobachtungen nicht vorliegen, wurde der Vergleich dennoch vorgenommen. Die maximale Unsicherheit kann jedoch aus den Intervallgrenzen einer heuristischen Überprüfung von AK135 (Kennett et al. 1995) abgeschätzt werden, die bis 2500 km Tiefe mit $\delta V_o = \pm 0.02\,km/s$ und mit $\delta V_u = \pm 0.04\,km/s$ für den Kern und kernnahe Bereiche für beide Geschwindigkeiten festgelegt wurden. Das Modell mit den kleinsten Residuen lag dabei in weiten Bereichen sehr nahe zu AK135. Betrachtet man das größere Intervall als obere Grenze für den absoluten Fehler, so ergibt sich daraus[10] der Wert $\delta_{max} = \pm 1.3\,km^2/s^2$, der von allen Werten der Tabelle 2.2 deutlich unterschritten wird.

Tabelle 2.3: Mittlere Differenzen im seismischen Parameter Φ zwischen den Modellen PREM, CORE11 und AK135.

	AK135		CORE11	
	$\delta\,[km^2/s^2]$	$\sigma[km^2/s^2]$	$\delta\,[km^2/s^2]$	$\sigma[km^2/s^2]$
PREM	0.67	0.51	0.65	0.20
CORE11	0.82	0.55	-	-

Wird das Modell AK135 stellvertretend für die den seismischen Laufzeiten bestangepaßten Modelle betrachtet, kann damit der weitere Vergleich zu den beiden anderen Modelltypen vorgenommen werden.

Zunächst fällt die einfache Struktur des Residuenbildes zwischen den Modellen PREM und CORE11 auf (Abbildung 2.10), die im inneren Kern, der Zone D" sowie in fast allen Schalen des oberen Mantels nahezu

[9] Alle drei Modelle enthalten entweder direkt oder indirekt PEM als Startmodell, ein sowohl aus Eigenschwingungen als auch Laufzeitdaten berechnetes Modell.

[10] unter der Annahme mittlerer Geschwindigkeiten für V_P und V_S von 10 bzw. $5\,km/s$

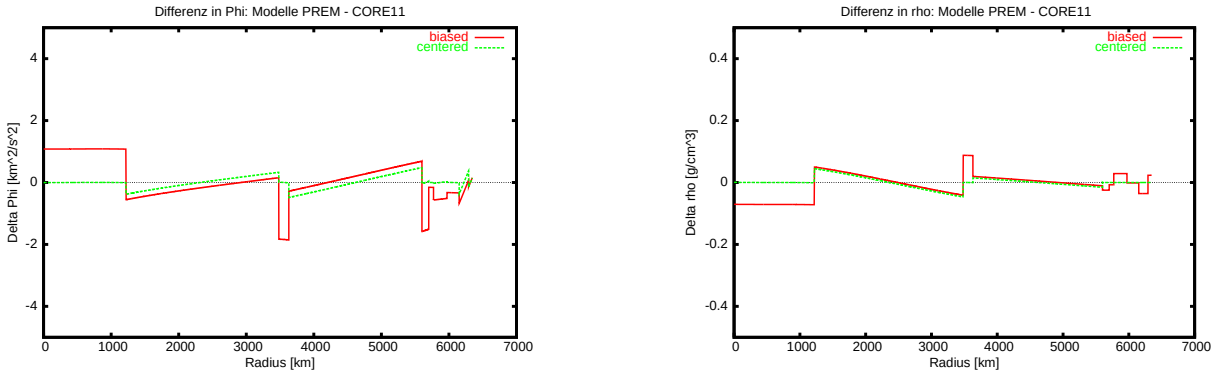

Abbildung 2.10: Differenzen im seismischen Parameter Φ und der Dichte zwischen den Modellen PREM und CORE11.

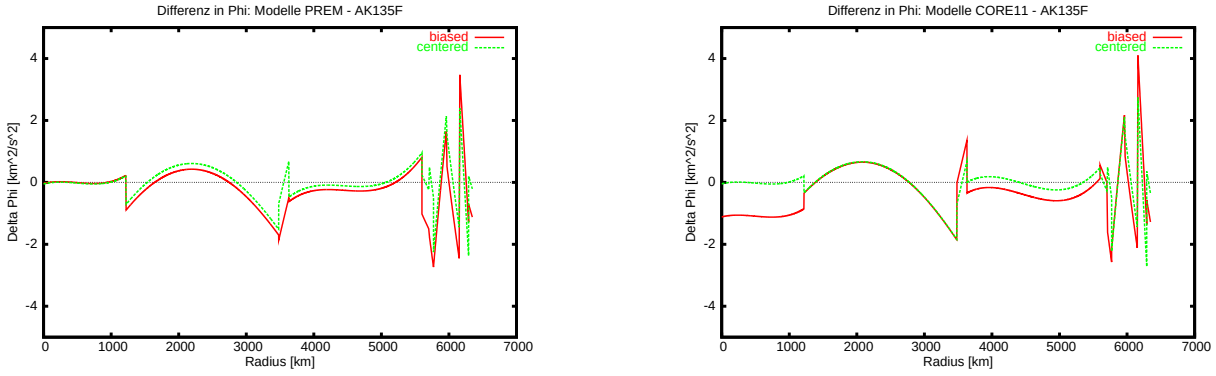

Abbildung 2.11: Differenzen im seismischen Parameter Φ des Modells AK135 zu PREM und CORE11.

konstant, in den übrigen Schalen im wesentlichen linear ist. Zu erklären ist dieser Effekt damit, daß zur Berechnung von CORE11 als Startmodell PREM diente und daß die verbesserte Anpassung an die Frequenzen der Eigenschwingungen hauptsächlich durch die Bestimmung des Anelastizitäts- bzw. Qualitätsparameters Q und die formale Einführung von Anisotropie in allen Schalen[11] als zusätzliche Unbekannte erreicht wurde. Dementsprechend stark mußten offenbar die Änderungen der seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte eingeschränkt werden, um eine stabile Lösung zu erhalten, weshalb sich ein derartig systematisches Differenzenbild ergibt. Damit erklärt sich auch der große Unterschied zwischen den Größen δ und σ von $0.45\,km^2/s^2$ (Tabelle 2.3). Somit liegt die Vermutung nahe, daß allein aufgrund der Eigenschwingungsdaten über die radiale Änderung der seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte keine detaillierten Aussagen möglich sind, dafür aber über die (mittleren) Absolutbeträge, also über die Größe der Sprünge an den Diskontinuitäten - ein nicht unwichtiger Fakt für spätere Berechnungen. Beide Modelle unterscheiden sich im Hinblick auf die Struktur der seismischen Geschwindigkeiten nur relativ wenig ($\sigma = 0.20\,km^2/s^2$), unter Berücksichtigung der systematischen Komponenten beträgt der Unterschied allerdings $0.65\,km^2/s^2$.

Am deutlichsten zeigt sich die Zuverlässigkeit der seismischen Geschwindigkeiten im Vergleich zwischen PREM und AK135 bzw. CORE11 und AK135 (Abbildung 2.11). Insbesondere im oberen Mantel, aber auch im tieferen Bereich des unteren Mantels sowie im äußeren Kern unterscheiden sich die Modelle signifikant. Die Diskrepanz zwischen Modellen auf der Basis von Eigenschwingungsdaten und denjenigen auf der Grundlage der Laufzeiten seismischer Raumwellen zeigt sich besonders im Vergleich zu CORE11, das ungefähr die gleiche Aktualität der Daten aufweist. Wegen des nahezu konstanten Unterschiedes im inneren Kern zwischen CORE11 und AK135 ist die mittlere Abweichung zwischen diesen beiden Modellen 0.82 bzw. $0.55\,km^2/s^2$, während im Vergleich mit PREM die konstanten Anteile in allen Schalen nur sehr gering sind, womit sich sowohl für δ als auch σ der Wert $0.6\,km^2/s^2$ festlegen läßt.

[11] auch im äußeren Kern, dem in allen Modellen die elastischen Eigenschaften einer Flüssigkeit zugeordnet werden, weshalb eine Richtungsabhängigkeit physikalisch kaum vorstellbar ist, wie der Autor selbst feststellt (Widmer 1991, Kap. 2.3)

Um beide Datentypen in einem gemeinsamen Modell integrieren zu können, schlagen Montagner und Kennett in (Montagner und Kennett 1996) vor, die seismischen Geschwindigkeiten nicht aus den Eigenschwingungen, sondern allein aus den Laufzeiten der Raumwellen zu bestimmen und als Zwangsbedingung in die Bestimmung von Dichte, Anelastizität und Anisotropie aus den Frequenzen der Eigenschwingungen einzuführen. In diesem Falle würden die Widersprüche zwischen den unterschiedlichen Modellierungen hinsichtlich der seismischen Geschwindigkeiten durch die Hinzunahme weiterer Parameter ausgeräumt. Allerdings zeigt sich an dem zuerst angeführten Vergleich, daß die Unterschiede zwischen den Geschwindigkeitsmodellen aus Laufzeitdaten bei Hinzunahme neuer Beobachtungen in einer ähnlichen Größenordnung liegen. Daher kann zusammenfassend aus den Betrachtungen geschlossen werden, daß die Genauigkeit der Bestimmung des seismischen Paramters global gesehen mit $\sigma = \pm 0.6\, km^2/s^2$ angegeben werden kann.

Kapitel 3. Dichte und seismische Daten

3.1 Dichte und seismische Geschwindigkeiten

Die Dichte im Erdinneren hängt grundsätzlich vom Spannungszustand, von der Temperatur sowie von der chemischen Zusammensetzung und dem Phasenzustand ab. Der Spannungszustand soll den Annahmen in Abschnitt 1.1.1 entsprechend durch den hydrostatischen Druck p charakterisiert sein. Weiterhin soll zunächst angenommen werden, daß Temperaturänderungen nur unter adiabatischen Bedingungen stattfinden und Abweichungen davon durch Änderungen der Entropie S beschrieben werden können. Chemische Zusammensetzung und Phasenzustand sollen durch einen unbeschränkten Satz Parameter c_i bzw. φ_i darstellbar sein. Unter der Annahme, daß sich diese Parameter[1] in einer gewissen Region der Erde durch eine differenzierbare, nur vom Radius abhängige Funktion genügend genau darstellen lassen, kann für die radiale Ableitung der Dichte das Differential

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{dp}{dr} + \frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{dS}{dr} + \sum \frac{\partial\rho}{\partial c_i}\frac{dc_i}{dr} + \sum \frac{\partial\rho}{\partial\varphi_i}\frac{d\varphi_i}{dr} \tag{3.1}$$

geschrieben werden (Birch 1952), (Bullen 1954), (Anderson 1989). Wird davon ausgegangen, daß innerhalb einer Region (Kugelschale) das Material homogen ist und daß keine Änderungen des Phasenzustandes stattfinden, gilt

$$\frac{dc_i}{dr} = \frac{d\varphi_i}{dr} = 0,$$

und Gleichung (3.1) vereinfacht sich zu

$$\frac{d\rho}{dr} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dr} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dr}. \tag{3.2}$$

Insbesondere in den Schalen des oberen Mantels, in denen neben nichtadiabatischen Temperaturänderungen auch ausgeprägte Änderungen sowohl der chemischen Zusammensetzung als auch der Phase vermutet werden, ist eine solche Vereinfachung grundsätzlich nicht zulässig. Da aber eine direkte Bestimmung der Koeffizienten c_i und φ_i ebenfalls undurchführbar ist, kann Gleichung (3.1) in solchen Regionen nicht unmittelbar angewendet werden. Aus diesem Grunde wurde versucht, aus empirischen und thermodynamischen Überlegungen heraus Alternativen zu finden. Diese beinhalten meist einen direkten funktionalen Zusammenhang zwischen seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte. Die Vielzahl solcher Beziehungen kann in zwei Gruppen eingeordnet werden: lineare Funktionen und Potenzfunktionen (Anderson 1973). Die lineare Beziehung wird auch als das Gesetz von Birch (Abschnitt 3.1.4) bezeichnet, und stellvertretend für Potenzfunktionen soll in Abschnitt 3.1.5 die seismische Zustandsgleichung von D. L. Anderson angeführt werden.

Weiterhin muß betont werden, daß die Festlegung der absoluten Dichte allein auf der Grundlage seismischer Geschwindigkeiten prinzipiell nicht möglich ist. Sollen Diskontinuitäten 1. Ordnung eingeführt werden, so ist es erforderlich, den zugehörigen Dichtesprung an diesen Stellen durch andere Beobachtungen festzulegen. Das kann durch die zusätzlichen Bedingungen, die sich aus der Gesamtmasse und dem mittleren Trägheitsmoment ergeben, vorgenommen werden, mit Hilfe der Frequenzen der Eigenschwingungen[2] oder aufgrund petrologischer Überlegungen.

3.1.1 Williamson-Adams-Gleichung

Für isotrope Stoffe ist unter der Annahme idealer Elastizität gemäß (1.54)

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S = \frac{\rho}{K_S} = \frac{1}{\Phi}$$

durch die Geschwindigkeiten V_P und V_S im Rahmen der Zuverlässigkeit und Genauigkeit dieser Größen aus den seismischen Daten bestimmt. Unter der Annahme reversibler adiabatischer Prozesse tritt keine Änderung der Entropie S auf, und es gilt

$$\frac{dS}{dr} = 0.$$

[1] und damit die Dichte selbst auch

[2] unter der Voraussetzung, daß die seismischen Geschwindigkeiten bekannt sind und ein genügend genaues Startmodell für die Dichte bereits vorliegt

Wird weiter angenommen, daß hydrostatisches Gleichgewicht herrscht, ergibt sich mit Gleichung (1.19)

$$\frac{dp}{dr} = -g\,\rho$$

die radiale Änderung der Dichte zu

$$\frac{d\rho}{dr} = -g\,\rho\,\frac{\rho}{K_S} = -\frac{g\,\rho}{\Phi}, \tag{3.3}$$

bzw. zu

$$\frac{d\,ln\,\rho}{dr} = -\frac{g}{\Phi}. \tag{3.4}$$

Da der Betrag der Schwerkraft (1.77)

$$g = G\,\frac{M(r)}{r^2} = \frac{4\pi\,G}{r^2}\int_0^r \rho\,q^2\,dq$$

nur eine Funktion der Dichte ist, kann die Differentialgleichung (3.3) iterativ durch numerische Integration von

$$\ln\,\rho = -\int_{r_0}^{0}\frac{g}{\Phi}dr + \ln\,\rho_0 \tag{3.5}$$

gelöst werden, wenn ein Randwert (Integrationskonstante) ρ_0 für die Dichte in jeder Region (Schale) vorgegeben wird. Dieser Anfangswert läßt sich nicht aus den seismischen Geschwindigkeiten bestimmen und muß getrennt modelliert werden. Die Primärdaten aus Abschnitt 2.1 spielen dabei eine besondere Rolle. Die Dichte ρ_M unterhalb der Mohorovičić Diskontinuität legt die Dichte für die erste Schale fest, aus Trägheitsmoment und Gesamtmasse kann jeweils ein Dichtesprung an Diskontinuitäten, vorzugsweise an der Kern-Mantel-Grenze sowie an der Grenze zum oberen Mantel in 670 km Tiefe, bestimmt werden. Weitere Dichtesprünge erfordern zusätzliche Daten. So wäre es vorstellbar, daß aus petrologischer Sicht, insbesondere im oberen Mantel, gewisse Dichtesprünge zu postulieren sind, oder daß aus bestimmten Moden der Eigenfrequenzen Informationen über die absolute Dichte gewonnen werden können.

Die Vorgehensweise wurde zuerst im Jahre 1923 von Williamson und Adams zur Abschätzung der radialen Dichteänderung aufgrund seismischer Daten genutzt (Williamson und Adams 1923). Seither fand dieser Zusammenhang, teilweise mit Erweiterungen, als Willliamson-Adams-Gleichung breite Anwendung. Das erste auf diesem Zusammenhang beruhende vollständige Dichtemodell ist das Modell A von Bullen (Bullen 1936, Bullen 1940), das unter Verwendung eines deutlich erweiterten und zuverlässigeren Satzes seismischer Geschwindigkeiten berechnet wurde. Bis zur Verwendung der Eigenfrequenzen als wesentliche zusätzliche Daten und der Anwendung linearer Inversionstechniken war diese Methode wichtige Grundlage zur Bestimmung der Dichte im unteren Mantel und im Kern.

3.1.2 Berücksichtigung nichtadiabatischer Temperaturgradienten und chemischer Inhomogenitäten

Birch erweiterte den Zusammenhang (3.3), indem er für Abweichungen von adiabatischen Temperaturänderungen einen Korrekturterm einführte (Birch 1939, Birch 1952). Für den Temperaturgradienten kann allgemein

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dr} - \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dr} \tag{3.6}$$

geschrieben werden, wobei der erste Summand alle adiabatischen Temperaturänderungen umfaßt. Die Differenz zwischen dem tatsächlichen Temperaturgradienten und dem adiabatischen Anteil

$$\tau = -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dr} = \frac{dT}{dr} - \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dr} \tag{3.7}$$

ist der superadiabatische Temperaturgradient[3]. Unter Berücksichtigung der Beziehung $V = 1/\rho$ zwischen spezifischem Volumen V und Dichte ergibt sich mit der Definition des thermischen Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

[3] bei negativem Vorzeichen subadiabatisch

der zweite Summand in Gleichung (3.2) zu

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dr} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dr} = \rho\,\alpha\,\tau \tag{3.8}$$

und damit die Erweiterung der Gleichung (3.3) (Birch 1952, Bullen 1954)

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{g\,\rho}{\Phi} + \rho\,\alpha\,\tau = -\frac{g\,\rho}{\Phi}\left(1 - \frac{\alpha\,\tau\,\Phi}{g}\right). \tag{3.9}$$

Unter Benutzung von Gleichung (1.53) kann auch eine Beziehung zum Grüneisenparameter γ hergestellt und die Abkürzung

$$\delta = \frac{\alpha\,\tau\,\Phi}{g} = \frac{\gamma\,C_P\,\tau}{g} \tag{3.10}$$

als Maß für nichtadiabatische Temperatureffekte definiert und somit die Williamson-Adams-Gleichung (3.9) auch in der erweiterten Form

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{g\,\rho}{\Phi}(1-\delta) \tag{3.11}$$

geschrieben werden.

Allen bisherigen Betrachtungen liegt die Annahme zugrunde, daß weder Änderungen des Materials noch der Phase auftreten. Ausgehend von der Beziehung (1.33)[4]

$$K = \Phi\,\rho$$

ergibt sich formal durch Differenzieren der Ausdruck

$$\frac{dK}{dp}\frac{dp}{dr} = \rho\frac{d\Phi}{dr} + \Phi\frac{d\rho}{dr},$$

woraus unter Annahme hydrostatischen Gleichgewichts (1.19)

$$\frac{dp}{dr} = -g\,\rho$$

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{g\,\rho}{\Phi}\frac{dK}{dp} - \frac{\rho}{\Phi}\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{g\,\rho}{\Phi}\left(\frac{dK}{dp} + \frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dr}\right) \tag{3.12}$$

folgt. Bullen definiert nun in (Bullen 1963a) den Parameter

$$\eta = \frac{dK}{dp} + \frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dr} \tag{3.13}$$

und kommt so zu der Beziehung

$$\frac{d\rho}{dr} = -\eta\frac{g\,\rho}{\Phi}, \tag{3.14}$$

aus der sich mit $\eta = 1$ die Williamson-Adams-Gleichung (3.3) ergibt. Da den obenstehenden Überlegungen mit Beziehung (1.33) implizit adiabatische Zustandsänderungen und damit auch adiabatische Temperaturänderungen zugrundegelegt wurden, interpretiert Bullen diesen Parameter zunächst als Index für chemische Inhomogenitäten. Anstelle der Parametersätze c_i und φ_i in Gleichung (3.1) kann der durch Materialänderungen und/oder Änderungen der Phase resultierende Einfluß auf die radiale Dichteänderung durch die Abweichung $1-\eta$ dargestellt werden[5]. Damit geht Gleichung (3.11) in die allgemeine Form

$$\frac{d\rho}{dr} = -\eta\,\frac{g\,\rho}{\Phi}(1-\delta) \tag{3.15}$$

über. Eine Festlegung der beiden Parameter ist nur unter Verwendung zusätzlicher Daten oder Hypothesen möglich, nicht aber direkt aufgrund seismischer Geschwindigkeiten. Eine Trennung von η und δ in Gleichung (3.15) ist ebenfalls nicht möglich. Wird δ vernachlässigt, so beinhaltet der Parameter η auch mögliche Temperatureinflüsse (Bullen 1967). Daher wird meist nur der Bullen-Parameter η modelliert, da eine Unterscheidung zwischen den Einflüssen chemischer Inhomogenitäten und nichtadiabatischen Temperaturen aufgrund der wenigen zur Verfügung stehenden Informationen oft nicht möglich ist.

[4] mit K wird im folgenden die adiabatische Inkompressibilität K_S bezeichnet.

[5] Eine Differenzierung zwischen Änderungen des Materials und Änderungen der Phase ist damit nicht möglich, so daß der Parameter die Summe beider Effekte enthält.

Die physikalische Bedeutung des Parameters η kann durch einen Bezug zur Brunt-Väisälä Frequenz untersetzt werden (Masters 1979, Melchior 1982). Ausgehend vom hydostatischen Gleichgewicht bewirkt eine kleine Verschiebung in radialer Richtung u_r

$$dp = -g\,\rho\,u_r$$

nach Gleichung (1.54) eine adiabatische Kompression der Dichte innerhalb eines Elementes I die Änderung der Dichte

$$(d\rho)_I = dp\frac{\rho}{K_S} = -g\frac{\rho^2}{K_S}u_r. \tag{3.16}$$

Die Dichte der außerhalb liegenden Materie ändert sich jedoch um den Betrag

$$(d\rho)_A = \frac{d\rho}{dr}u_r.$$

Daher wirkt auf das Element die Rückstellkraft

$$g\left[(d\rho)_A - (d\rho)_I\right] = u_r g\left[\frac{d\rho}{dr} + g\frac{\rho^2}{K_S}\right]. \tag{3.17}$$

Wird nun die Funktion

$$N^2(r) = -\frac{g(r)}{\rho(r)}\left[\frac{d\rho(r)}{dr} + \frac{g(r)\,\rho^2(r)}{K(r)}\right] \tag{3.18}$$

definiert, die als lokale Brunt-Väisälä Frequenz bezeichnet wird, ergibt sich

$$g\left[(d\rho)_A - (d\rho)_I\right] = -\rho u_r N^2. \tag{3.19}$$

Setzt man diesen Zusammenhang in die Bewegungsgleichung (1.13) ein, erhält man

$$\rho\frac{d^2u_r}{dt^2} + N^2u_r = 0. \tag{3.20}$$

Daraus kann abgelesen werden, daß die Schichtung für

- $N^2 > 0$ stabil, da die Rückstellkräfte die Partikelbewegung umkehren,
- $N^2 < 0$ instabil, da die Partikelbewegung (Konvektion) nicht kompensiert wird,
- $N^2 = 0$ neutral ist, da Gleichgewicht herrscht. In diesem Falle ergibt sich aus (3.18) die Williamson-Adams-Gleichung (3.3).

In (Masters 1979, Melchior 1982) wird weiterhin auf den (dazu äquivalenten) Parameter

$$\beta = -\frac{K}{\rho\,g^2}N^2 \tag{3.21}$$

zur Einschätzung der mechanischen Stabilität hingewiesen. Beide Größen stehen durch

$$N^2 = (\eta - 1)\frac{g^2\,\rho}{K} = -\beta\,\frac{g^2\,\rho}{K} \tag{3.22}$$

sowie

$$\beta = 1 - \eta \tag{3.23}$$

in unmittelbarer Beziehung zum Bullen-Parameter η. Somit können die Interpretationen hinsichtlich der mechanischen Stabilität einer Region, die für die Brunt-Väisälä Frequenz bzw. den Parameter β gelten, sofort auf η übertragen werden (siehe Tabelle 3.1).

Masters (Masters 1979) weist darauf hin, daß die Interpretation der Größe N streng nur für Flüssigkeiten gilt. Unter Berücksichtigung von Viskosität, Rotation und magnetischen Effekten folgt, daß N wesentlich kleiner als 0 sein muß, bevor Konvektion eintritt. Folglich wird für den Parameter η in Abhängigkeit der Viskosität des Mediums

$$0.4 < \eta_C < 0.999994$$

als Grenzwert angegeben, wobei angenommen werden kann, daß Temperatureffekte die untere Grenze anheben, so daß auch für diesen Fall $\eta_C \to 1$ gilt. Signifikant kleinere Werte als 1 für η treten in fast allen modernen Modellen in den Schalen des oberen Mantels auf, woraus auf mechanische Instabilitäten der radialen Schichtung geschlossen werden muß. Die Berechnung von η nach Gleichung (3.13) hängt im Mantel maßgeblich von dem Gradienten der seismischen Geschwindigkeiten ab, da sowohl die Schwere g als auch dK/dp nahezu konstante Größen sind. Es muß daher die Frage gestellt werden, ob die Zuverlässigkeit dieser Gradienten eine sichere Berechnung von η aus einem gegebenen Modell überhaupt zulassen.

Tabelle 3.1: Stabilitätskriterien einer radialen Schichtung.

	neutral	stabil	instabil
N	0	> 0	< 0
β	0	> 0	< 0
η	1	> 1	< 1

3.1.3 K–p–Hypothese

Bullen machte 1949 (Bullen 1949) auf der Grundlage seines Modells A, das unter Anwendung der Williamson-Adams-Gleichung (3.3) und eines empirischen Dichteverlaufs in Schale C (400 bis 1000 km Tiefe) berechnet wurde, zwei Feststellungen. Während insbesondere die Dichte ρ, aber auch der Schermodul[6] μ an der Kern-Mantel-Grenze einer großen sprunghaften Änderung unterliegen, nimmt die Inkompressibilität K nur um ca. 5% zu. Unter Berücksichtigung aller Unsicherheiten der Modellierung käme auch ein stetiger Verlauf der Kompression an der Kern-Mantel Grenze in Betracht. Weiterhin ergab die Berechnung von

$$\frac{dK}{dp} = 1 - \frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dr} \tag{3.24}$$

sowohl im unteren Mantel als auch im äußeren Kern – unter der Annahme von Homogenität der chemischen Zusammensetzung und Phase[7] – nahezu gleiche Werte im Bereich $dK/dp \approx 3$ auf beiden Seiten der Kern-Mantel-Grenze. Hierbei ließ Bullen die Übergangszone D" unberücksichtigt, da die starke Änderung in $d\Phi/dr$ Anlaß zur Annahme chemischer Inhomogenitäten bot, wodurch die Anwendung von (3.24) unzulässig wird. Im Ergebnis beider Beobachtungen stellte Bullen die Hypothese auf, daß unter hohem Druck die Inkompressiblität nicht mehr eine Funktion der chemischen Zusammensetzung, sondern in erster Linie des Druckes selbst ist. Gestützt wurde diese Vermutung durch Berechnungen aus dieser Zeit, aus denen sich nur eine geringe, aber signifikante Abhängigkeit zwischen K und der mittleren Atommasse[8] ergeben hat. Infolgedessen definierte Bullen die Inkompressibilität K sowie die Ableitung dK/dp ab einer Tiefe von 1000 km als nahezu stetige Funktionen des Druckes (Bullen 1949) und legte für dK/dp eine stetige, lineare Änderung mit dem Druck zugrunde (Bullen 1963b, Kap. 13.6.1). Der maximale Sprung an der Kern-Mantel-Grenze wird in (Bullen 1972) mit $\Delta K/K = \pm 0.02$ angegeben. Weiterhin gibt er die empirische Relation

$$K = 2.34 + 3.00\,p + 0.10\,p^2 \tag{3.25}$$

an und bemerkt, daß dieser Zusammenhang auch als Zustandsgleichung interpretiert werden kann, weist aber ausdrücklich auf den Definitionsbereich von $p > 3.0 \times 10^6\ hPa$ hin und kritisiert die unsachgemäße Anwendung der Beziehung unter den Bedingungen im oberen Mantel.

Auf der Grundlage der K-p-Hypothese kann nun versucht werden, den Inhomogenitätsparameter η zu bestimmen. Wird an den Schalengrenzen Stetigkeit von dK/dp postuliert, so ermöglicht dies unter Verwendung von (3.13) die unmittelbare Festlegung von η unter der Voraussetzung, daß die jeweiligen Gradienten der Geschwindigkeiten ausreichend zuverlässig sind. In der Übergangszone D" zwischen Kern und Mantel ergibt sich mit dem in diesem Bereich auch in aktuellen Modellen nahezu konstanten seismischen Parameter Φ der anormale Gradient $d\Phi/dr \approx 0$ und somit unmittelbar $\eta \approx dK/dp \approx 3$, also eine signifikante Abweichung von chemischer Homogenität, die in Anbetracht des Überganges zwischen dem festen unteren Mantel und dem flüssigen äußeren Kern durchaus plausibel erscheint.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die vorhandenen seismischen Informationen nicht zur eindeutigen Bestimmung eines Modells der Erde ausreichen, betont Bullen in (Bullen 1972) die Wichtigkeit der Einführung zusätzlicher physikalischer Annahmen anstelle formaler mathematischer Kriterien zur Einschränkung des Lösungsraumes und weist unter diesem Aspekt der K-p-Hypothese eine Schlüsselrolle zu.

Da bis heute keine grundsätzlich neuen (seismischen) Informationen hinzugekommen sind, statt dessen aber eine enorme Weiterentwicklung der Rechentechnik stattgefunden hat und dadurch bedingt physikalische Überlegungen zugunsten numerisch-mathematischer Methoden in den Hintergrund getreten zu sein scheinen, hat diese inzwischen 30 Jahre alte Aussage keineswegs an Aktualität verloren.

[6] bedingt dadurch, daß der äußere Kern als flüssig angenommen wird und somit $\mu = 0$ gilt
[7] also unter der Annahme $\eta = 1$ in Gleichung (3.14)
[8] als Maß für die chemische Zusammensetzung

3.1.4 Birch's Gesetz

Birch schlußfolgerte in (Birch 1961) aus den Ergebnissen von Laboruntersuchungen verschiedener Gesteinsmaterialien unter hohen Drücken, daß die Dichte zur seismischen Geschwindigkeit V_P für Materialien mit gleicher mittlerer Atommasse in einer linearen Relation

$$V_P = a + b\ \rho \tag{3.26}$$

steht. Allgemein wird der Koeffizient b mit $b \approx 3$ (Ringwood 1975, Kap. 9.4) angenommen, Birch gibt in (Birch 1961) b fest mit $b = 3.31$ für ρ in $[g/cm^3]$ und V_P in $[km/s]$ sowie a in Abhängigkeit der mittleren Atommasse $\bar{M}$ (Tabelle 3.2) an. Birch vergleicht diese Koeffizienten mit einer Reihe damals aktueller

Tabelle 3.2: Koeffizienten der Birch-Relation in Abhängigkeit der mittleren Atommasse (aus (Birch 1961)).

$\bar{M}$ $[g/mol]$	a $[km/s]$
21	-2.55
25	-5.7
30	-8.6

Dichtemodelle und stellt fest, daß Modelle, bei denen die Dichte auch im oberen Mantel allein durch Selbstkompression unter der Voraussetzung chemischer Homogenität des Materials und der Phase (Abschnitt 3.1.1) sowie unter Einführung von Diskontinuitäten festgelegt wird, dieser Beziehung nicht gerecht werden, während Modelle mit ebenfalls empirischer Dichteänderung im oberen Mantel der linearen Beziehung besser entsprechen. Aufgrund seiner Einfachheit wird die allgemeine lineare Beziehung (3.26) bei der Modellierung des oberen Mantels sowie in der Tomographie[9] häufig angewendet, oft ohne auf die Frage nach der physikalischen Interpretierbarkeit der Koeffizienten einzugehen. Analog wurde die Darstellung (3.26) von anderen Autoren auch auf die Geschwindigkeiten der Scherwellen V_S sowie auf die hydrodynamische Schallgeschwindigkeit[10] $\sqrt{\Phi}$ übertragen. Unter der Annahme, daß das Verhältnis V_P/V_S zwischen den Geschwindigkeiten der Kompressions- und Scherwellen konstant ist (siehe Abschnitt 4.2.4), ergibt sich aus (1.33)

$$V_P \propto \sqrt{\frac{K_S}{\rho}}, \tag{3.27}$$

woraus mit (3.26) unmittelbar die Proportionalität

$$K_S \propto \rho^3 \tag{3.28}$$

folgt (Ringwood 1975, Kap. 9.4). Das empirische Gesetz von Birch impliziert somit eine Proportionalität zwischen Inkompressibilität und der Dichte in dritter Potenz.

3.1.5 Seismische Zustandsgleichung von D. L. Anderson

Die *seismic equation of state* von D. L. Anderson (Anderson 1967) stützt sich auf die allgemeine Zustandsgleichung (1.60). Unter Berücksichtigung einer Reihe von Vereinfachungen, insbesondere im Hinblick auf die Unterschiede zwischen isothermaler und adiabatischer Inkompressibilität sowie der Einführung der mittleren Atommasse $\bar{M}$ als Maß für die chemische Zusammensetzung[11], wird

$$\frac{\rho}{\bar{M}} = c\ \Phi^n \tag{3.29}$$

mit dem Exponenten

$$n = \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \ln \rho} = N + M - 1 = \gamma - \frac{1}{3} \tag{3.30}$$

als eine allgemeine Zustandsgleichung basierend auf dem seismischen Parameter Φ angegeben. Die beiden Parameter N und M entsprechen der Anziehungs- bzw. Abstoßungskraft zwischen den Elementarteilchen, und γ ist der mittlere Grüneisenparameter. Dieser Ansatz wurde mit einer großen Zahl an Laborexperimenten überprüft, aus denen sich konsistente Angaben für den Exponenten n und den Koeffizienten c ergeben haben (Tabelle 3.3).

[9] zur generellen Skalierung zwischen seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte

[10] Die hydrodynamische Schallgeschwindigkeit im hier betrachteten Zusammenhang ist äquivalent zur Wurzel des seismischen Parameters Φ.

[11] unter Berufung auf die empirischen Untersuchungen von Birch

Tabelle 3.3: Koeffizienten der seismischen Zustandsgleichung von Anderson (aus (Anderson 1967)).

c	n	$\bar{M}$
0.056	0.281	[18.5, 90.0]
0.048	0.323	[18.5, 33.1]
0.064	0.240	[18.5, 90.0]
0.059	0.274	[18.5, 88.0]
0.048	0.335	MgO
0.052	0.318	Al_2O_3

Der überwiegende Teil dieser Experimente wurde unter normalen atmosphärischen Bedingungen durchgeführt, wobei der Parameter n im Ergebnis aller Untersuchungen zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ liegt. Anderson schließt in Übereinstimmung mit weiteren Experimenten (Anderson 1969), daß der modifizierte Ansatz mit festem Exponenten n

$$\frac{\rho}{\bar{M}'} = c' \; \Phi^{1/3} \tag{3.31}$$

für die Modellierung der Dichte im Mantel geeigneter ist, da die Minerale aufgrund des dort herrschenden hohen Druckes stärker gepackt sind. Daraus resultierende Differenzen in der mittleren Atommasse liegen innerhalb der Unsicherheit der Untersuchungen (Anderson und Jordan 1970). Da die tatsächliche Atommasse der Materialien im Mantel unbekannt ist, muß unter diesen Voraussetzungen ein Parameter $A = c\,\bar{M}$ in Übereinstimmung mit anderen Informationen[12] bestimmt werden, um die Dichteverteilung im Mantel festlegen zu können. Berücksichtigt man die Beziehung (1.54), ergibt sich

$$\tilde{A}\;\rho^4 = K_S \tag{3.32}$$

bzw.

$$K_S \propto \rho^4. \tag{3.33}$$

Der Zustandsgleichung nach Anderson liegt also eine Proportionalität zwischen Inkompressibilität und der vierten Potenz der Dichte zugrunde.

Eine Entscheidung, welcher der beiden Ansätze, also welche Hypothese zur Proportionalität zwischen Dichte und Inkompressibilität die Realität besser widerspiegelt und damit geeigneter für die Modellierung der Dichte im Mantel ist, kann nur schwer anhand der z.T. stark streuenden oder nur bedingt zuverlässigen experimentellen Daten getroffen werden. Beide Annahmen bieten unter gewissen Gesichtspunkten Vor- und Nachteile (Ringwood 1975, Kap. 9.4). Generell muß berücksichtigt werden, daß insbesondere die Relation von Birch rein empirischen Ursprungs ist und daß auch die Zustandsgleichung von Anderson nur mit Hilfe einer ganzen Reihe von Vereinfachungen begründet werden kann und daß eine Rechtfertigung nur allein aufgrund einer geeigneten Interpretation[13] von Labordaten, die ihrer Natur gemäß sowohl mit zufälligen Meßfehlern als auch mit groben Fehlern behaftet sind, möglich ist, nicht aber aufgrund deterministischer Überlegungen. Letztendlich zeigt auch der von Macdonalds (Macdonald und Powell 1971) gezogene Vergleich zwischen verschiedenen Zustandsgleichungen, daß selbst unter Verwendung synthetischer Daten eine Unterscheidung zwischen den einzelnen Ansätzen nur schwer vorzunehmen ist.

Interessant ist der Vergleich beider Ansätze anhand eines Modells. In PREM wurde im oberen Mantel zur Berechnung des Startmodelles explizit die Relation von Birch angegeben (Dziewonski und Anderson 1981). Sowohl die seismischen Geschwindigkeiten als auch die Dichte wurden in den Schalen bis zu einer Tiefe von 670 km durch lineare Funktionen des Radius repräsentiert, deren Koeffizienten anhand der Laufzeiten der Raumwellen und der Perioden der Eigenschwingungen angepaßt wurden. Die Übertragungsfunktion zwischen Dichte und seismischen Geschwindigkeiten ist demnach allgemein eine quadratische Funktion. Offenbar wurde aber die lineare Beziehung nahezu beibehalten, wie Abbildung 3.1 zeigt, da selbst die Differenzen in der Region zwischen 400 und 600 km Tiefe das Intervall $\delta V_o = \pm 0.02\,km/s$ (Abschnitt 2.2.3) nur geringfügig überschreiten und damit wohl kaum als signifikant bezeichnet werden können.

Eine Anpassung der Werte für Φ aus PREM an die seismische Zustandsgleichung mit dem Exponenten $n = 1/3$ ergibt deutlich geringere Residuen, wie Abbildung 3.2 zeigt. Die größten Differenzen treten wiederum in

[12] z.B. den Frequenzen der Eigenschwingungen oder nichtseismischen Daten, wie Gesamtmasse, Trägheitsmoment, Dichtesprünge an Schalengrenzen

[13] Die Festlegung einer geeigneten Interpolationsfunktion durch eine Reihe von Punkten ist grundsätzlich keine eindeutig lösbare Aufgabe.

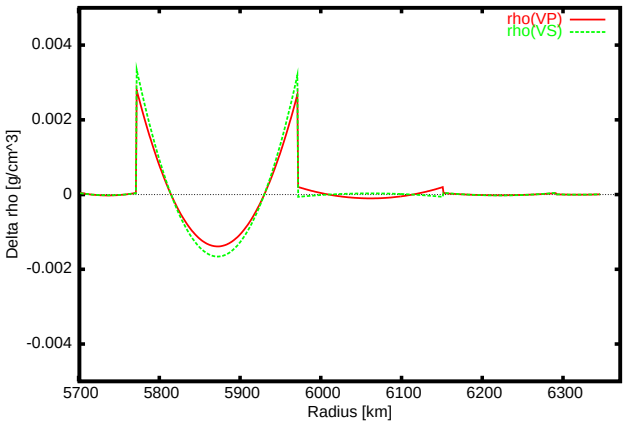

Abbildung 3.1: Residuen zur Dichte im oberen Mantel aus linearer Beziehung (Birch's Gesetz) zu den seismischen Geschwindigkeiten aus PREM.

der Übergangszone zwischen oberem und unterem Mantel in 400 und 600 km Tiefe auf, liegen aber deutlich unterhalb der in Abschnitt 2.2.3 festgestellten Zuverlässigkeit von $\sigma = \pm 0.6\, km^2/s^2$.

Wenn auch eine qualitative Unterscheidung anhand dieser Betrachtungen kaum möglich ist, so ist doch zu vermuten, daß die geringen Residuen, die selbst im Falle von Birch's Gesetz 0.03 % nicht übersteigen, kaum aus einer freien Anpassung an die Daten stammen können, sondern daß eine derartige Beziehung als Nebenbedingung in die Inversion von PREM eingegangen sein muß. Das wiederum würde zeigen, daß eine Bestimmung der Dichte im oberen Mantel aus seismischen Daten selbst unter Verwendung der Frequenzen der Eigenschwingungen nicht ohne zusätzliche Bedingungen möglich ist.

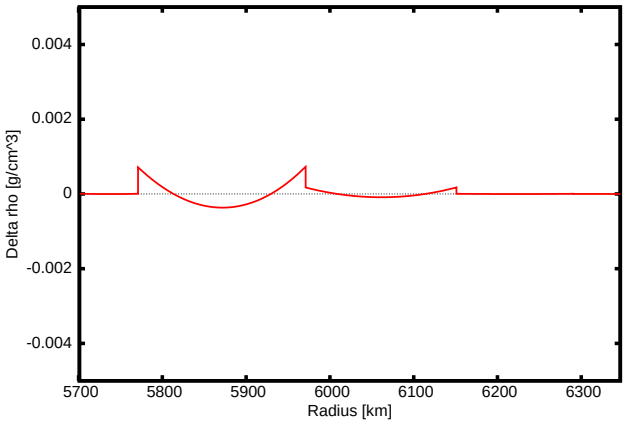

Abbildung 3.2: Residuen in der Dichte im oberen Mantel aus der Zustandsgleichung von Anderson und dem seismischen Parameter aus PREM.

Abschließend muß hervorgehoben werden, daß beiden Ansätzen[14] die fundamentale Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes nicht zugrunde liegt. Der ursprünglich zur Charakterisierung von Inhomogenitäten in der chemischen Zusammensetzung und Phase unter hydrostatisch-adiabatischen Bedingungen eingeführte Parameter η kann unabhängig davon entsprechend der Definition (3.13)

$$\eta = \frac{dK}{dp} + \frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dr}$$

[14] wie auch allen anderen existierenden empirischen Geschwindigkeits-Dichte Relationen

angegeben werden, wobei die Berechnung von

$$\frac{dK}{dp} = \frac{dK}{dr} \Big/ \frac{dp}{dr} \tag{3.34}$$

einerseits mit

$$\frac{dK}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\Phi\,\rho\right)$$

aus der nichthydrostatischen Dichte und den Daten, andererseits für dp/dr unter Anwendung der hydrostatischen Beziehung (1.19) erfolgt. Da weiterhin eine exakte Annahme über die Temperaturänderungen[15] in den empirischen Zusammenhängen fehlt, erhält der Parameter η eine verallgemeinerte Bedeutung als Summe aller Abweichungen gegenüber den Voraussetzungen der Williamson-Adams-Gleichung, einschließlich der Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewichtszustand. Dementsprechend vielfältig sind auch die Interpretationen, siehe z.B. (Nakada 1999, Matyska und Yuen 2000), bei denen zumeist die Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht mit nichtadiabatischen Temperaturänderungen gleichgesetzt werden, ohne daß auf ebenfalls mögliche chemische Inhomogenitäten eingegangen wird. Anstelle dessen scheint die Interpretation als Stabilitätsparameter gemäß Abschnitt 3.1.2 besser zuzutreffen, da hierfür keine Differenzierung zwischen verschiedenen, unbekannten Einflüssen vorgenommen werden muß, sondern nur die Auswirkungen charakterisiert werden.

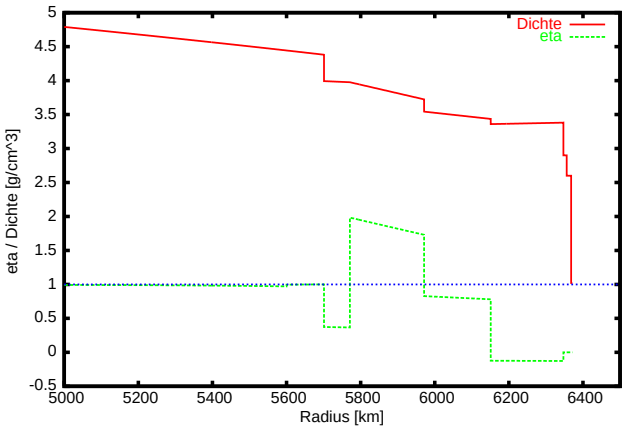

Abbildung 3.3: Dichte und der dimensionslose Parameter η im oberen Mantel aus PREM.

Berechnet man den Parameter η für eine Dichteverteilung, die sich aus einer empirischen oder empirisch bestätigten Geschwindigkeits-Dichte Beziehung ergibt (Abbildung 3.3), so ist festzustellen, daß sehr große Abweichungen vom Wert 1 auftreten, darunter auch Werte, die signifikant kleiner als 1 sind und damit nach den Kriterien der Tabelle 3.1 mechanisch instabile Schichten anzeigen, deren Ursache in zeitlich veränderlichen Auflasteffekten gesehen werden kann (Wolf 1991, Plag und Jüttner 1995). Durch die direkte Kopplung zwischen Geschwindigkeit und Dichte ergeben sich in Schalen, in denen die Geschwindigkeit mit der Tiefe abnimmt (*low-velocity-zones*) zwangsläufig positive Gradienten in der Dichte[16] und damit $\eta < 0$, ein Effekt, der grundsätzlich der Bedingung mechanischer Stabilität eines selbstgravitierenden Körpers (1.20) widerspricht.

3.2 Frequenzen der Eigenschwingungen und Dichte

Wie bereits in Kapitel 2.2.2 erwähnt wurde, ist eine Bestimmung der Dichte aus den Frequenzen der Eigenschwingungen nur möglich, wenn das elastische Verhalten des Mediums bekannt ist oder mitbestimmt wird. Unter Anwendung von Variationsprinzipien können Änderungen der elastischen Parameter und der Dichte aus den Unterschieden in den Eigenfrequenzen gegenüber einem Startmodell bestimmt werden. Ausgangspunkt

[15] In der Relation von Birch gibt es dazu keinerlei Annahmen; in der seismischen Zustandsgleichung werden ursprünglich isotherme Zustandsänderungen vorausgesetzt, die dann auf adiabatische erweitert werden.

[16] z.B. in PREM (Dziewonski und Anderson 1981) zwischen 24 und 220 km Tiefe

ist dabei das von Rayleigh 1877 angegebene Prinzip, nach dem die kinetische Energie I_1

$$\omega^2 I_1 = \omega^2 \int\limits_V \rho\, \mathbf{u}^2\, dv \tag{3.35}$$

der potentiellen Energie I_2 der durch die Oszillation hervorgerufenen Verschiebung $\mathbf{u}$ und Potentialänderung W' gleichgesetzt wird (Backus und Gilbert 1967, Takeuchi und Saito 1972). Die potentielle Energie umfaßt dabei die elastische Energie, die Arbeit, die dem hydrostatischen Druck entgegengesetzt werden muß, die Gravitationsenergie und die Eigenenergie der Potentialänderung W' (Gleichung (1.44)) und kann für einen radialsymmetrischen, isotropen Körper vereinfacht in der Form

$$I_2 = \int\limits_0^R \left(M_K K + M_\mu \mu + M_\rho \rho\right) r^2 dr \tag{3.36}$$

geschrieben werden, wobei M_K, M_μ und M_ρ Funktionale der Eigenfunktionen sind. Wenn die Eigenfunktionen eines Körpers bekannt sind, können nach Rayleigh kleine Änderungen in der Frequenz ω und den Eigenfunktionen durch kleine Störungen erster Ordnung δK, $\delta\mu$ und $\delta\rho$ gegenüber dem ursprünglichen Zustand dargestellt werden. Aus dem Erhaltungssatz

$$\omega^2 I_1 = I_2 \tag{3.37}$$

kann

$$2\omega\delta\omega I_1 = -\omega^2 \int\limits_0^R \left(M_K \delta K + M_\mu \delta\mu + M_\rho \delta\rho\right) r^2\, dr \tag{3.38}$$

hergeleitet werden (Backus und Gilbert 1967). Die Änderungen der Eigenfunktionen ergeben sich dabei zu Null, womit die Störungen der Modellparameter aus den Eigenfunktionen des ursprünglichen Modells berechnet werden können (Takeuchi und Saito 1972). Die Gleichung (3.38) kann auch in der Form

$$\delta\omega = \int\limits_0^R \left(\tilde{M}_K \delta K + \tilde{M}_\mu \delta\mu + \tilde{M}_\rho \delta\rho\right) r^2\, dr \tag{3.39}$$

geschrieben werden, wobei sowohl das Integral I_1 als auch die Frequenz ω Bestandteil der Funktionale $\tilde{M}$ werden. Weiterhin wird häufig die Normierung

$$\omega^2 I_1 = \omega^2 \int\limits_0^R \rho\, \mathbf{u}^2\, r^2\, dr = 1 \tag{3.40}$$

eingeführt, die die praktischen Berechnungen erheblich vereinfacht.

Die Funktionale $\tilde{M}_K$, $\tilde{M}_\mu$ und $\tilde{M}_\rho$ werden von verschiedenen Autoren angegeben, z.B. von Backus und Gilbert (Backus und Gilbert 1967) oder Takeuchi und Saito (Takeuchi und Saito 1972), von Letztgenannten für den erweiterten Fall transverser Isotropie. Backus und Gilbert behaupten, daß auch die Änderungen in δK, $\delta\mu$ und $\delta\rho$ lediglich Funktionen des Radius sind und geben anstelle der Funktionale $\tilde{M}$ die vereinfachten Zusammenhänge $\bar{M}$ an. Für die Dichteänderungen $\delta\rho$ folgt aus (Backus und Gilbert 1967, Gl. (48)) und den Eigenfunktionen aus (1.46) bzw. (1.49) für toroidale Schwingungen[17]

$$\bar{M}_\rho^T = -\omega_0^2\, {T_1}^2 \tag{3.41}$$

und für sphäroidale Schwingungen

$$\begin{aligned} \bar{M}_\rho^S \;=\; & -\omega_0^2({S_1}^2 + n(n+1){S_2}^2) + \\ & 2S_1\left(-\frac{dS_3}{dr} + 4\,\rho_0\, S_1 - \frac{h_1}{r}\, g_0\right) - \\ & \frac{2}{r} n(n+1) S_2\, S_3 - 2\, h_2 \end{aligned} \tag{3.42}$$

mit

$$h_1 = 2S_1 - n(n+1)S_2, \quad h_2 = 4\pi\, G \int_r^R \frac{\rho_0\, S_1}{r} h_1\, dr, \tag{3.43}$$

[17] nach Anpassung an die von Takeuchi und Saito verwendete Normierung und des Vorzeichens für g

sowie der Schwerkraft g_0, der Eigenfrequenz ω_0 und der Dichte ρ_0 des Ausgangsmodells.

Von Takeuchi und Saito werden Angaben zu $\tilde{M}$ gemacht, ohne die Beziehungen zwischen den elastischen Parametern und der Dichte zu vernachlässigen. Aus den Darstellungen für den transvers-isotropen Fall (Takeuchi und Saito 1972, S. 272) ergibt sich unter Berücksichtigung von (1.24) für toroidale Moden

$$\tilde{M}_\rho^T = -{\omega_0}^2 {T_1}^2 + \frac{\mu_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{dT_1}{dr} - \frac{1}{r}T_1\right)^2 + \frac{1}{r^2}(n-1)(n+2)\,{T_1}^2\right] \tag{3.44}$$

und für sphäroidale Moden

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_\rho^S \;=\;& -{\omega_0}^2\left({S_1}^2 + n\,(n+1)\,{S_2}^2\right) + \\
& 2\,S_1\left(4\,S_1\,\rho_0 - \frac{dS_3}{dr}\right) - 2\,h_2 + \\
& \frac{2}{r}\left[h_1\left(\frac{\lambda_0}{\rho_0}\frac{dS_1}{dr} - g_0\,S_1\right) - n\,(n+1)\,S_2\,S_3\right] + \\
& \frac{1}{\rho_0}\left[(2\,\mu_0+\lambda_0)\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + n^2(n+1)\left(\frac{dS_2}{dr}\right)^2\right] + \\
& \frac{2}{r\,\rho_0}\left[n^2(n+1)\,(S_1-S_2)\,\frac{dS_2}{dr}\right] + \\
& \frac{1}{r^2\,\rho_0}\left[{h_1}^2\,(\mu_0+\lambda_0) + n\,(n-1)(n+1)(n+2){S_2}^2\,\mu_0 + n^2\,(n+1)\,(S_1-S_2)^2\right],
\end{aligned} \tag{3.45}$$

wobei λ_0 und μ_0 die elastischen Parameter des Ausgangsmodells sind.

Offensichtlich blieben bei Backus und Gilbert nicht nur die Abhängigkeiten von den elastischen Parametern unberücksichtigt, sondern darüberhinaus auch die radialen Ableitungen der Eigenfunktionen sowie sämtliche Terme der Ordnung $1/r^2$. In beiden Fällen handelt es sich um völlig willkürliche Vereinfachungen[18].

Können die Geschwindigkeiten der Raumwellen und damit die elastischen Parameter als bekannt vorausgesetzt werden, folgt mit $\delta K = 0$ und $\delta\mu = 0$ aus (3.38) der vereinfachte Zusammenhang

$$\delta\omega = \int_0^R \tilde{M}_\rho \delta\rho\, r^2\, dr \tag{3.46}$$

zwischen Änderungen der Dichte aufgrund geänderter Eigenfrequenzen. Unter Berücksichtigung der Beziehungen (1.31) und (1.32) können in (3.44) und (3.45) die elastischen Parameter durch die Geschwindigkeiten V_{P0} und V_{S0} des Startmodells ersetzt werden:

$$\tilde{M}_\rho^T = -{\omega_0}^2 {T_1}^2 + V_{S0}^2\left[\left(\frac{dT_1}{dr} - \frac{1}{r}T_1\right)^2 + \frac{1}{r^2}(n-1)(n+2)\,{T_1}^2\right] \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_\rho^S \;=\;& -{\omega_0}^2\left({S_1}^2 + n\,(n+1)\,{S_2}^2\right) + \\
& 2\,S_1\left(4\,S_1\,\rho_0 - \frac{dS_3}{dr}\right) - 2\,h_2 + \\
& \frac{2}{r}\left[h_1\left(\left({V_{P0}}^2 - 2\,{V_{S0}}^2\right)\frac{dS_1}{dr} - g_0\,S_1\right) - n\,(n+1)\,S_2\,S_3\right] + \\
& {V_{P0}}^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{\rho_0}\left[n^2(n+1)\left(\frac{dS_2}{dr}\right)^2\right] + \\
& \frac{2}{r\,\rho_0}\left[n^2(n+1)\,(S_1-S_2)\,\frac{dS_2}{dr}\right] + \\
& \frac{1}{r^2}\left[\left({V_{P0}}^2 - {V_{S0}}^2\right)\,{h_1}^2 + {V_{S0}}^2\,n\,(n-1)(n+1)(n+2){S_2}^2 + \frac{n^2\,(n+1)}{\rho_0}\,(S_1-S_2)^2\right].
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Aus dieser Darstellung wird deutlich, daß hauptsächlich die sphäroidalen Schwingungen zur Dichtebestimmung geeignet sind, insbesondere im Falle vorgegebener Geschwindigkeitsverteilungen.

[18] Dziewonski und Anderson bemerken in (Dziewonski und Anderson 1981) dazu, die Ausdrücke von Takeuchi und Saito seien zu „unbequem“.

Kapitel 4. Parametrisierung der Dichtefunktion

4.1 Historische Dichtegesetze

Vor der Einteilung des Erdinneren in Schalen unterschiedlicher Charakteristik, der Annahme von Diskontinuitäten an deren Grenzen und der Bestimmung der radialen Änderungen der physikalischen Parameter aus seismischen Informationen, wurde im 19. Jahrhundert von einer Reihe von Autoren versucht, allein aufgrund der bekannten Daten zu Gesamtmasse, Trägheitsmoment und Dichte der Kruste unter Berücksichtigung einfacher Zusammenhänge, Funktionen für die Zunahme der Dichte mit der Tiefe anzugeben. Diese auch als globale Dichtegesetze bezeichneten Modelle hatten eine der Anzahl der Daten entsprechende Zahl freier Parameter. Einige dieser Dichtegesetze tragen rein empirischen Charakter, einigen liegen aber physikalische Überlegungen zugrunde, die heute für die Modellierung der Dichte aufgrund seismischer Daten durchaus Bedeutung besitzen.

4.1.1 Druck-Dichte Relationen von Laplace und Roche

Neben dem Bestreben, eine Funktion für die Dichte aus der hydrostatischen Theorie von Clairaut herzuleiten, dienten bereits frühzeitig Annahmen über das Verhältnis von Druck und Dichte zur Festlegung von Funktionen für die radiale Änderung der Dichte. Ausgehend von einer empirischen Zustandsgleichung der Form

$$dp = \Psi(\rho)\, d\rho \tag{4.1}$$

ergibt sich unter der Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes und unter Verwendung der daraus resultierenden Beziehung (1.17)

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{dr}\frac{dr}{d\rho} = -\frac{g\,\rho}{\frac{d\rho}{dr}} = \Psi(\rho). \tag{4.2}$$

Diese Gleichung kann in Analogie zu Abschnitt 1.2 als mechanische oder hydrostatische Zustandsgleichung aufgefaßt werden, da durch die Funktion $\Psi(\rho)$ die Relation zwischen Druck und Dichte[1] festgelegt ist, allerdings bei beliebigen Temperaturänderungen.

Wird für die Schwerkraft (1.77)

$$g = G\,\frac{M(r)}{r^2} = \frac{4\pi\, G}{r^2}\int_0^r \rho\, q^2\, dq$$

eingesetzt und die Gleichung nach r differenziert, erhält man daraus mit der Abkürzung $\rho' = d\rho/dr$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{\rho'}{\rho}\Psi(\rho)\right\} = -4\pi\, G\, r^2\, \rho \tag{4.3}$$

für die unbekannte Funktion $\rho(r)$.

Interessant für die heutige Zeit ist, daß unter den Annahmen aus Abschnitt 1.1 für die Relation $dp/d\rho$ der Zusammenhang (1.54) zum seismischen Parameter Φ bzw. zu den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V_P und V_S seismischer Wellen

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K_S}{\rho} = \Phi = V_P^2 - \frac{4}{3}V_S^2$$

besteht, wodurch sich der unmittelbare Bezug

$$\Psi = \frac{K_S}{\rho} = \Phi \tag{4.4}$$

zwischen der Hypothese Ψ und den seismischen Daten bzw. Dichte und Inkompressiblität ergibt. Dadurch sind diese Ansätze in gewisser Hinsicht mit den empirischen Zustandsgleichungen (Abschnitt 3.1.4 oder 3.1.5) vergleichbar, obgleich auch ohne jeden experimentellen Beweis. Wenn aber versucht werden soll, eine physikalisch sinnvolle Parametrisierung zur Beschreibung der Dichte unter Verwendung seismischer Daten zu finden, sollten diese Ansätze keinesfalls außer acht gelassen werden.

[1] bzw. spezifischem Volumen

4.1.1.1 Annahmen von Legendre und Laplace

Ausgehend von der Gleichung von Clairaut

$$\frac{d^2q}{dr^2} = \left(\frac{6}{r^2} + \frac{3}{\bar{\rho}\,r}\frac{d\rho}{dr}\right) q, \tag{4.5}$$

mit der Abkürzung $q = f\,\bar{\rho}\,r^3$, der hydrostatischen Abplattung f und der mittleren Dichte $\bar{\rho} = \frac{3}{r^3}\int_0^r \rho q^2 dq$, gab Legendre im Jahre 1793 ein Gesetz für die radiale Verteilung der Dichte unter der (scheinbar willkürlichen) Annahme

$$\frac{3}{\bar{\rho}\,r}\frac{d\rho}{dr} + A^2 = 0 \tag{4.6}$$

an (Tisserand 1891, Kap. 15), (Bullen 1975, Kap. 6.3.). Mit Einsetzen von $\bar{\rho}$ und Differenzieren nach r folgt für die Funktion $\rho(r)$ die Differentialgleichung

$$r^2\frac{d^2\rho}{dr^2} + 2r\frac{d\rho}{dr} + A^2\rho r^2 = 0$$

bzw.

$$\frac{d^2(r\,\rho)}{dr^2} + A^2\,r\,\rho = 0 \tag{4.7}$$

für $r\,\rho(r)$. Die Lösung

$$r\,\rho = G\,\sin(A\,r) + H\,\cos(A\,r) \tag{4.8}$$

ist im Ursprung $r = 0$ nur für $H = 0$ endlich. Somit ergibt sich als Funktion für die Dichte

$$\rho(r) = \rho_0\frac{\sin(A\,r)}{A\,r}. \tag{4.9}$$

Erst Laplace gab 1825 diesem Dichtegesetz eine physikalische Interpretation, indem er voraussetzte, es wäre „natürlich zu vermuten, daß eine Flüssigkeit der Kompression um so stärker widersteht, je mehr sie komprimiert wird“, und so anstelle der Clairaut'schen Theorie die Zustandsgleichung (4.1) gemeinsam mit der einfachen Beziehung

$$\Psi(\rho) = C\,\rho \tag{4.10}$$

mit $C = const$ zugrunde legte (Tisserand 1891). Daraus folgt unter Berücksichtigung der Beziehung (4.4) die Proportionalität

$$K_S \propto \rho^2 \tag{4.11}$$

zwischen Dichte und Inkompressibilität.

Nach Gleichung (4.2) führt die Hypothese (4.10) auf

$$C\rho' = -g\,\rho = -\frac{4}{3}\pi\,G\,r\bar{\rho}\,\rho \tag{4.12}$$

und nach wenigen Umformungen zu

$$\frac{3\,\rho'}{r\,\bar{\rho}} + \frac{4\pi\,G}{C} = 0. \tag{4.13}$$

Mit $A^2 = 4\pi\,G/C$ folgt sofort die Annahme (4.6) von Legendre, womit bewiesen ist, daß beide Ansätze identisch sind. Die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$C\frac{d}{dr}\left\{r^2\rho'\right\} = -4\,\pi\,G\,r^2\,\rho, \tag{4.14}$$

die man aus (4.3) erhält, muß demnach ebenfalls die Funktionen (4.8) bzw. (4.9) als Lösung haben. Da zur damaligen Zeit die praktische Anwendung der transzendenten Funktion (4.9) zu unbequem war[2], wurde statt dessen häufig die Reihenentwicklung

$$\rho(r) = \rho_0\frac{\sin(A\,r)}{A\,r} \doteq \rho_0\left(1 - \frac{A^2}{3!}r^2 + \frac{A^4}{5!}r^4 - \ldots\right) \tag{4.15}$$

verwendet (Wiechert und Zoeppritz 1907).

[2]Auch heute werden diese wie viele andere Funktionen zur numerischen Auswertung im Rahmen der Rechengenauigkeit durch eine Reihenentwicklung repräsentiert, jedoch ist dieser Umstand dem Anwender nur selten bewußt.

4.1.1.2 Eine neue Lösung für den Ansatz von Laplace

Die Funktion (4.9) ist jedoch nicht die einzige Funktion, welche die Hypothese (4.10) von Laplace im Zusammenhang mit der Poisson-Gleichung erfüllt. So stellt die Funktion

$$r\,\rho(r) = \tilde{G}\,\sinh(A\,r) + \tilde{H}\,\cosh(A\,r) \tag{4.16}$$

ebenfalls eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (4.14) dar. Wie schon für (4.8) gilt auch hier, daß nur mit $\tilde{H} = 0$ eine Singularität im Ursprung vermieden werden kann. Eine weitere Dichtefunktion, die der von Laplace formulierten Zustandsgleichung gerecht wird, ist somit

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{\sinh(Ar)}{A\,r} \doteq \rho_0 \left(1 + \frac{A^2}{3!}r^2 + \frac{A^4}{5!}r^4 + \ldots\right). \tag{4.17}$$

Die Reihenentwicklung unterscheidet sich gegenüber der für die Funktion von Legendre/Laplace (4.15) lediglich im Vorzeichen der einzelnen Glieder. Basierend auf der Definition

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

kann weiterhin die verallgemeinerte Dichtefunktion

$$\rho(r) = \frac{\tilde{\rho}_0}{r}\left(A_1 e^{\beta r} - A_2 e^{-\beta r}\right), \tag{4.18}$$

geschrieben werden, die ebenfalls der Hypothese von Laplace entspricht, aber ebenso wie (4.17) in der Literatur bisher nicht dokumentiert ist.

4.1.1.3 Ansatz von Roche

Roche erweiterte 1848 (Roche 1848b), (Roche 1848a) den empirischen Ansatz von Laplace, indem er die Hypothese

$$\Psi(\rho) = C_1\,\rho + C_2\,\rho^2 \tag{4.19}$$

zum Ausgangspunkt seiner Überlegungen machte, wobei C_1 und C_2 wiederum Konstanten sind. Mit dieser Annahme kann unter Verwendung von (4.4) die Relation zwischen Dichte und Inkompressibilität

$$K_S = (C_1 + C_2\,\rho)\,\rho^2 \tag{4.20}$$

angegeben werden. Aus (4.3) ergibt sich aus diesem Ansatz die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\rho'\,(C_1 + C_2\,\rho)\right\} = -4\,\pi\,G\,r^2\,\rho \tag{4.21}$$

mit der wesentlich einfacheren Funktion

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - k\,r^2\right) \tag{4.22}$$

als (spezielle) Lösung. Roche bestimmte die beiden Parameter aus Gesamtmasse und der damals bereits aus Beobachtungen der Mondbahn bekannten Präzessionskonstanten. Der Wert für die Dichte an der Oberfläche ging darin nicht ein und konnte so zur Prüfung des Ansatzes dienen. Weiterhin schätzte er die obere und untere Grenze für den Parameter k durch Vergleich mit den Koeffizienten a_1 einer abgebrochenen allgemeinen Reihenentwicklung nach geraden Potenzen

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 + a_1\,r^2 + a_2\,r^4 + \ldots\right) \tag{4.23}$$

unter der Annahme zweier extremer Werte für die Dichte an der Oberfläche von 2.0 und $2.75\,g/cm^3$ ab. Die beiden Koeffizienten a_1 und a_2 ergeben sich damit aus Gesamtmasse und Trägheitsmoment. Die Wahl der Reihe nach geraden Potenzen orientierte sich offensichtlich an der Entwicklung (4.15), wie später in (Roche 1853) auch explizit angegeben wurde.

4.1.2 Dichtegesetze von Darwin und Lipschitz

Neben der Annahme einer Druck-Dichte Relation unter der Bedingung hydrostatischen Gleichgewichtes gab es eine Reihe weiterer Lösungsansätze, um ein physikalisches „Gesetz“ für den Zuwachs der Dichte mit der Tiefe zu formulieren. Die Gesetze von Darwin und Lipschitz sollen nachfolgend kurz dargestellt werden.

Während dem Gesetz von Legendre/Laplace mit der Annahme (4.10) implizit eine Änderung der Inkompressibilität mit dem Quadrat der Dichte zugrundegelegt wurde, geht Darwin in (Darwin 1884) davon aus, daß das Verhältnis zwischen Dichte und mittlerer Dichte in jedem Punkt des Erdinneren eine Konstante ist, und formuliert als Dichtegesetz

$$\rho(r) = A\, r^{-n}. \tag{4.24}$$

Darwin schränkt den Parameter n auf das Intervall $(0, 3)$ ein, da für $n = 0$ die Dichte konstant sein, für $n < 0$ die Dichte mit der Tiefe abnehmen und für $n \geq 3$ die Masse Null oder negativ werden würde, und er hält nur den Bereich $[1, 3)$ für physikalisch relevant. Unter der Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes ergibt sich daraus

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho} = \frac{4\pi\, G\, A}{n(3-n)} \rho^{\left(2\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{4\pi\, G\, A^2}{n(3-n)}\, r^{(2(1-n))}. \tag{4.25}$$

Berücksichtigt man, daß $n \in [1, 3)$ gelten soll, kann auf die Proportionalität

$$K \propto \rho^m, \quad m \in \left[0, \tfrac{4}{3}\right) \tag{4.26}$$

geschlossen werden.

Bullen kritisiert in (Bullen 1975, Kap. 6.5.2) diesen Ansatz, da unter Berücksichtigung des Inhomogenitätsparameters η (Abschnitt 3.1.2) nach Gleichung (1.54)

$$\frac{dp}{d\rho} = \eta \frac{K}{\rho}$$

und damit unter der Voraussetzung $\eta = const$ der Ausdruck

$$\frac{dK}{dp} = 2\eta \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{4.27}$$

gilt, woraus für $n \in [1, 3)$

$$\frac{dK}{dp} < \frac{4}{3}\eta$$

folgt. Aus den seismischen Geschwindigkeiten ergeben sich nach (3.24) in den tieferen Regionen der Erde typische Werte für dK/dp im Bereich zwischen 3 und 4 (Bullen 1975, Kap. 11.2), s.a. Abschnitt 5.4.1. Daraus würde $\eta \in [2, 3)$ resultieren, womit die Annahme signifikanter chemischer Inhomogenitäten verbunden wäre, für die aber in dieser generellen Form keinerlei anderweitiger Grund besteht. Weiterhin weist das Dichtegesetz (4.24) formell eine Singularität im Ursprung auf, die aber durch Einführung eines radiusabhängigen Exponenten $n = n(r)$ beseitigt werden kann (generalisiertes Darwinsches Gesetz, (Lelgemann und Marchenko 2001)).

Allen bisher erwähnten Bestrebungen, eine Funktion für die Dichte anzugeben, liegen mehr oder weniger gut begründbare physikalische Hypothesen zugrunde. Lipschitz wählt hingegen in (Lipschitz 1863) völlig willkürlich das Gesetz

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - k\, r^{\lambda}\right), \tag{4.28}$$

indem er zur Begründung anführt „Wenn wir aber überhaupt nicht im Stande sind, die Form des Gesetzes der Dichtigkeit *a priori* anzugeben, so scheint es nicht ungerechtfertigt, eine Form, die die genügende Zahl [...] Constanten enthält, frei anzunehmen.“. Dieses Gesetz entspricht mit $\lambda = 2$ dem Gesetz von Roche, jedoch wird dieser Umstand von Lipschitz nicht erwähnt. Durch die Einführung des variablen Exponenten stellt es in gewissem Sinne eine Erweiterung dar, mit der es möglich wurde, die Dichtefunktion an alle drei damals bekannten Größen, mittlere Dichte, mittleres Trägheitsmoment und Dichte der Kruste anzupassen.

4.2 Grundlage der Parametrisierung

Grundsätzlich ist es unmöglich, einen Zusammenhang zwischen Beobachtungen und gesuchten Größen vollständig mathematisch zu erfassen; die aufgestellten Modelle bleiben immer unvollständig. Durch eine möglichst zutreffende Wahl der Parametrisierung zwischen Daten und gesuchten Größen kann jedoch versucht werden, die Fehler aus der unvollständigen Realisierung der funktionalen Abhängigkeit zu reduzieren und gleichzeitig eine möglichst stabile Lösung zu erreichen. Die Bestimmung der Dichte aus seismischen Daten

weist dahingehend zwei Probleme auf: Zum einen konnte die Form der Funktion für die Dichte bisher auf physikalischem Wege nicht festgelegt werden, zum anderen wäre eine eindeutige Lösung allein aufgrund der zur Verfügung stehenden Daten generell auch dann nicht möglich, wenn die Parametrisierung der Funktion bekannt wäre. Deshalb ist zunächst nach einer geeigneten Funktion für die Dichte zu suchen, die fundamentalen, möglicherweise auch stark vereinfachten Annahmen gerecht wird, bevor im zweiten Schritt versucht wird, den Informationsgehalt der Daten zu analysieren und durch geeignete zusätzliche Bedingungen so zu ergänzen, daß sich ein stabiles Problem ergibt. Die Betrachtungen beziehen sich auf den einfachsten Fall, den eines radialsymmetrischen, ideal elastischen und isotropen Körpers (SNREI, Abschnitt 3.1) im hydrostatischen Gleichgewicht, so daß die Änderungen der Dichte und der elastischen Größen nur von einer Veränderlichen, dem Radius, abhängig sind. Im folgenden soll dafür eine Parametrisierung angegeben werden, die grundsätzlichen physikalischen Belangen gerecht wird.

Historisch gesehen hatte die Angabe von „Gesetzen“ für die radiale Änderung der Dichte eine andere Bedeutung als heute, da nur drei gesicherte Informationen zur Verfügung standen: Dichte an der Oberfläche, Gesamtmasse und Trägheitsmoment. Die Wahl der Funktion brauchte sich grundsätzlich nur an der Zahl freier Parameter zu orientieren, um alle drei Beobachtungen zu repräsentieren. Dennoch waren stets Bestrebungen vorhanden, die Modellierung durch physikalische Grundkonzepte zu rechtfertigen, beispielsweise in dem Bemühen, die Clairaut'sche Differentialgleichung aus der Theorie hydrostatischer Gleichgewichtsfiguren zu lösen (Legendre) oder mit Hilfe von Postulaten über die Relation zwischen hydrostatischem Druck und Dichte (Laplace, Roche). Natürlich waren auch diese zusätzlichen Annahmen nicht exakt begründbar, sondern motivierten sich lediglich aus einer gewissen Plausibilität heraus und können in diesem Sinne als willkürlich bezeichnet werden. Eine Rechtfertigung der gewählten Funktion ist in solchen Fällen jedoch eher möglich als bei einer völlig freien Annahme (wie z.B. bei Lipschitz). Mit der Einteilung der Erde in eine Anzahl von Schalen mit unstetigen Dichteänderungen wurde allerdings die ursprüngliche Bedeutung der Dichtefunktionen als vermeintliche „Naturgesetze“ herabgestuft, wie es Wiechert bereits 1907 in seiner Abhandlung zur Begründung eines zweischaligen Erdmodells (Wiechert und Zoeppritz 1907) ausgedrückt hat: „Die Grundformel [...] sänke dann zu einer Interpolationsformel. Die Formel [...] stellte kein fundamentales physikalisches Gesetz dar, sondern wäre nichts als ein überraschendes Spiel des Zufalls.“. Gerade aber die Wahl einer geeigneten Interpolationsfunktion ist heute von ausschlaggebender Bedeutung, wenn der radiale Verlauf der Dichte modelliert werden soll. Aus diesem Grunde haben diejenigen historischen Dichtefunktionen, die auf einer physikalisch plausiblen Hypothese beruhen, heute eine neue Aktualität erlangt.

4.2.1 Derzeitige Parametrisierung der Referenzmodelle

Eine vollständige analytische Beschreibung sowohl der Dichte als auch der seismischen Geschwindigkeiten wird seit dem Modell PEM (Dziewonski et al. 1975) auf der Grundlage von Polynomen niedriger Ordnung oder kubischer Splines realisiert. Zuvor wurden die Modelle lediglich als Reihe diskreter Werte angegeben, wenn auch teilweise analytische Beziehungen zu Hilfe genommen wurden[3]. Die Ursache für die verhältnismäßig späte Einführung einer Parametrisierung ist sicherlich in dem rechnerischen Aufwand zu suchen, der selbst bei einer nur punktweisen Realisierung des Modells für die damalige Zeit hoch war. Begründet wird die Wahl einer getrennten Modellierung der seismischen Geschwindigkeiten V_P und V_S sowie der Dichte ρ mit Polynomen in (Hales et al. 1974) allein damit, daß es zuvor möglich war, die seismischen Geschwindigkeiten V_P im Rahmen der Unsicherheit der Laufzeiten empirisch durch Polynome bis zum Grade Drei zu approximieren und daß eine solche Darstellung für die anderen Größen übernommen werden könne. Weiterhin würde die Repräsentation durch Polynome der Forderung des Standard Earth Committee der IUGG unter Vorsitz von K. E. Bullen nach Einfachheit der Parametrisierung gerecht. Bullen schlägt zwar in (Bullen 1974) im Hinblick auf die Berücksichtigung der Daten aus den Eigenschwingungen der Erde eine getrennten Modellierung von ρ, K und μ vor, fordert aber eine Reduzierung der Anzahl der Parameter auf ein Minimum. Da die seismischen Geschwindigkeiten über die Dichte mit den beiden elastischen Konstanten verknüpft sind, kann die Einführung von drei unabhängigen Polynomen für ρ, V_P und V_S in einem gewissen Sinne als Konsequenz dieser Forderungen betrachtet werden.

Andererseits muß berücksichtigt werden, daß die Festlegung aller drei Größen aus den vorhandenen Daten generell nicht eindeutig möglich ist[4], woraus sofort deutlich wird, daß die Bestimmung dreier voneinander unabhängiger Polynome ein „ill-posed problem“ darstellt. Nur mit einer möglichst einfachen, aber physikalisch sinnvollen Parametrisierung und der Einführung zusätzlicher Annahmen kann sich eine stabile Lösung ergeben. Die wichtigsten darunter sind, neben dem Postulat einer hydrostatischen Druckzunahme, die -vorläufigen-

[3] Z.B. benutzte Bullen in Regionen, in denen die Williamson-Adams-Gleichung nicht anwendbar schien, Polynome niedriger Ordnung, jedoch nicht in der Absicht, damit eine Parametrisierung einzuführen, sondern um die Dichteverteilung in diesen kritischen Schalen zu überbrücken.

[4] Bullen schreibt dazu in (Bullen 1974): „Abgesehen von den Fehlern in den Beobachtungen ist es absolut unwahrscheinlich, daß die Gesamtheit der zur Zeit vorliegenden Daten so etwas wie ein eindeutiges Erdmodell liefern könnte.“

Annahmen von Homogenität in der chemischen Zusammensetzung und Phase sowie von adiabatischen Temperaturänderungen, so daß die Williamson-Adams-Gleichung (3.3)

$$\Phi = \frac{K}{\rho} = -\frac{g}{d\rho/dr}\,\rho \tag{4.29}$$

als fundamentaler Zusammenhang zwischen seismischen Geschwindigkeiten und radialer Änderung der Dichte[5] gilt. Abweichungen von den beiden letztgenannten Annahmen können durch die Einführung des Inhomogenitätsparameters η und des Parameters δ zur Berücksichtigung nichtadiabatischer Temperaturänderungen (Abschnitt 3.1) vorgenommen werden, sobald weitere, unabhängige Daten oder Hypothesen zur Verfügung stehen. Allgemein kann damit nach Gleichung (3.15)

$$\Phi = -\eta\,\frac{g}{d\rho/dr}\,\rho\,(1-\delta). \tag{4.30}$$

geschrieben werden. Zwecks Festlegung einer geeigneten Parametrisierung stellt sich zuerst die Frage, welche Funktionen sich für den idealisierten Zusammenhang (4.29), der zumindest im unteren Mantel und äußeren Kern ohne nennenswerte Einschränkungen in dieser Form gültig ist, eignen. Wird, wie heute allgemein üblich (z.B. PEM (Dziewonski et al. 1975), CAL5 (Bolt und Uhrhammer 1975), PREM (Dziewonski und Anderson 1981), CORE11 (Widmer 1991)), eine getrennte Modellierung von V_P und V_S sowie ρ durch Polynome[6] bis zum Grade Drei

$$\begin{aligned} V_P &= P_3(r) = a_0 + a_1\,r + a_2\,r^2 + a_3\,r^3 \\ V_S &= Q_3(r) = b_0 + b_1\,r + b_2\,r^2 + b_3\,r^3 \\ \rho &= R_3(r) = c_0 + c_1\,r + c_2\,r^2 + c_3\,r^3 \end{aligned} \tag{4.31}$$

vorgenommen, ergibt sich zunächst unter Berücksichtigung von (1.33)

$$\Phi = {V_P}^2 - \frac{4}{3}{V_S}^2$$

ein Polynom sechsten Grades

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \;& \tilde{P}_6(r) - \tfrac{4}{3}\tilde{Q}_6(r) \\ = \;& {a_0}^2 - \tfrac{4\,{b_0}^2}{3} + \\ & 2\left(a_0\,a_1 - \tfrac{4}{3}b_0\,b_1\right)\,r + \\ & 2\left(a_0\,a_2 + {a_1}^2 - \tfrac{4}{3}(b_0\,b_2 + {b_1}^2)\right)\,r^2 + \\ & 2\left(a_0\,a_3 + a_1\,a_2 - \tfrac{4}{3}(b_0\,b_3 - b_1\,b_2)\right)\,r^3 + \\ & \left(2\,(a_1\,a_3 - \tfrac{4}{3}b_1\,b_3) + {a_2}^2 - \tfrac{4\,{b_2}^2}{3}\right)\,r^4 + \\ & 2\left(a_2\,a_3 - \tfrac{8}{3}b_2\,b_3\right)\,r^5 + \\ & \left({a_3}^2 - \tfrac{4}{3}\,{b_3}^2\right)\,r^6 \end{aligned} \tag{4.32}$$

für den seismischen Parameter. Aus (4.29) folgt ebenfalls ein Ausdruck für Φ, der allein auf dem Polynom R_3 aufbaut. Für die Schwere in einem schalenweisen Modell gilt nach (1.80)

$$g = 4\,\pi\,G\left(\frac{M_0}{r^2} + \tilde{R}_4\right),$$

wobei $\tilde{R}_4$ ein Polynom vierten Grades ist, das sich aus dem Integral für den Massenanteil innerhalb der Schale k

$$\tilde{R}_4 + \frac{C}{r^2} = \frac{\int_{r_k}^{r} R_3(q)\,q^2\,dq}{r^2} \tag{4.33}$$

[5] Mit K wird in diesem Abschnitt die adiabatische Inkompressibilität K_S bezeichnet, da eine Verwechslung mit anderen Definitionen für K nicht zu befürchten ist.

[6] Die zusätzlichen Krümmungsbedingungen für kubische Splines berühren die Betrachtungen hier nicht.

ergibt, während $4\,\pi\,M_0 = 4\,\pi(M(r_k) - C)$ die Masse aller vom Radius r_k vollständig umschlossenen Schalen abzüglich einer Integrationskonstanten C ist. Es gilt also

$$\tilde{R}_4(r) = \frac{c_0}{3}r + \frac{c_1}{4}r^2 + \frac{c_2}{5}r^3 + \frac{c_3}{6}r^4. \tag{4.34}$$

Weiterhin gilt für die radiale Ableitung der Dichte

$$\tilde{R}_2(r) = c_1 + 2\,c_2\,r + 3\,c_3\,r^2 \tag{4.35}$$

und damit

$$\Phi_2 = -4\,\pi\,G\frac{\left(M_0 + r^2\,\tilde{R}_4(r)\right)R_3(r)}{r^2\,\tilde{R}_2(r)}. \tag{4.36}$$

Da der Ausdruck für Φ_1 ein Polynom ist, sollte dies im Sinne einer konsistenten Modellbildung auch für die gebrochene rationale Funktion Φ_2 gelten. Das ist aber nur dann der Fall, wenn das Restpolynom

$$\begin{aligned}\Phi_{2R} = \quad & M_0\,c_0 + \\ & M_0\,c_1\,r + \\ & \left(M_0\,c_2 + \frac{\left(128\,{c_1}\,{c_2}^5 - 6075\,c_0\,{c_1}^2\,{c_3}^3 - 996\,{c_1}^2\,{c_2}^3\,c_3 + 1863\,{c_1}^3\,c_2\,{c_3}^2 + 1944\,c_0\,c_1\,{c_2}^2\,{c_3}^2\right)}{43740\,{c_3}^4}\right)r^2 + \\ & \left(M_0\,c_3 + \frac{c_0^2}{3} + \frac{\left(225\,{c_1}^2\,{c_2}^2\,c_3 - 486\,c_0\,c_1\,c_2\,{c_3}^2 - 315\,{c_1}^3\,{c_3}^2 - 32\,c_1\,{c_2}^4\right)}{7290\,{c_3}^3} + \right. \\ & \left.\frac{\left(128\,{c_2}^6 - 996\,c_1\,{c_2}^4\,c_3 - 6075\,c_0\,c_1\,c_2\,{c_3}^3 + 1944\,c_0\,{c_2}^3\,{c_3}^2 + 1863\,{c_1}^2\,{c_2}^2\,{c_3}^2\right)}{21870\,{c_3}^4}\right)r^3\end{aligned} \tag{4.37}$$

verschwindet. Darüber hinaus kann eine Identität zwischen Φ_1 und Φ_2 nur dann hergestellt werden, wenn auch der Grad beider Polynome gleich ist, also die Koeffizienten von $P_3(r)$ und $Q_3(r)$ die Bedingung

$${a_3}^2 - \frac{4}{3}{b_3}^2 = 0$$

erfüllen, woraus folgt, daß V_P und V_S nicht mehr unabhängig voneinander sind. Zumindest für Schalen, in denen $\eta = const$ und $\delta = const$ angenommen werden kann, wird deutlich, daß eine konsistente analytische Darstellung für den seismischen Parameter Φ auf der Basis von drei Polynomen nur unter großen Einschränkungen möglich ist. Insbesondere sind die Koeffizienten c_i der Dichtefunktion nicht voneinander unabhängig. Natürlich ist es vorstellbar, durch eine entsprechende Festlegung von Funktionen für η und δ beide Ausdrücke aneinander anzupassen. Dann würden aber a priori chemische Inhomogenitäten und nichtadiabatische Temperaturänderungen fester Bestandteil der Modellierung, wofür es in den tieferen Schichten der Erde kaum Anhaltspunkte gibt.

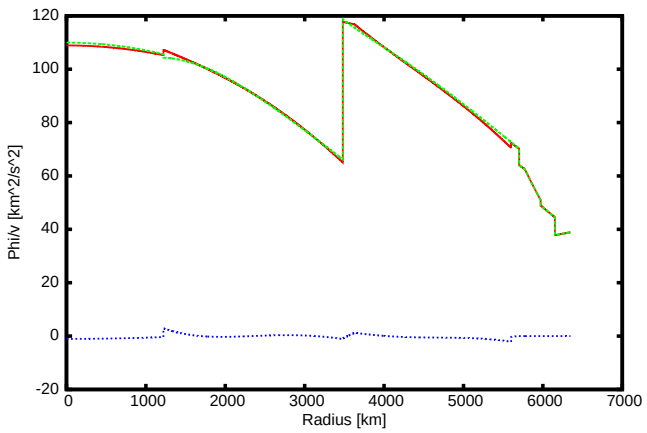

Abbildung 4.1: Φ_1 und Φ_2 und deren Differenz für PREM.

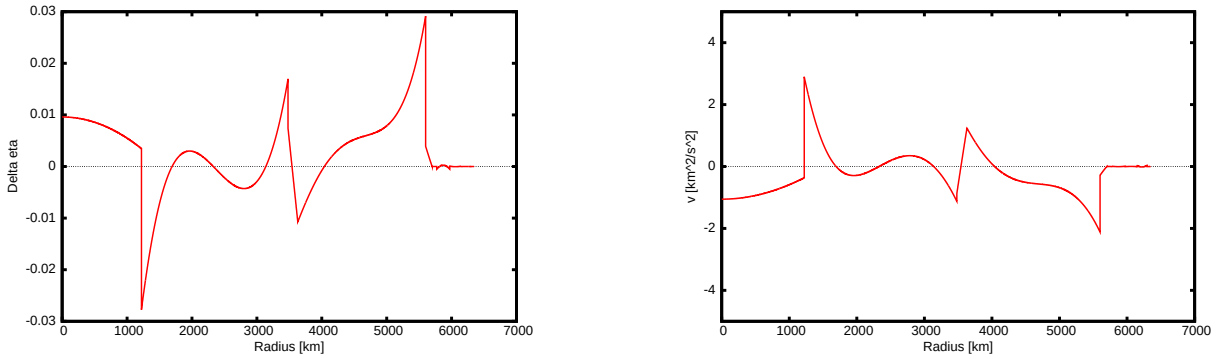

Abbildung 4.2: Abweichungen $\Delta\eta$ und daraus resultierende Differenzen in Φ für PREM.

Daß eine konsistente Modellierung mit einem derartigen Polynomansatz nicht möglich ist, zeigt schon ein Vergleich beider Darstellungen für PREM (Abbildung 4.1). Im unteren Mantel und Kern treten in PREM geringfügige Abweichungen von $\eta = 1$ auf, die physikalisch bedeutungslos sind[7], da deren Ursache eher in der Inkompatibilität von Φ_1 und Φ_2 zu suchen ist, als in einer unabhängigen Bestimmung des Bullen-Parameters η [8]. Werden die Abweichungen von $\Delta\eta = 1 - \eta$, deren maximaler Betrag $\Delta\eta_{max} = 0.03$ nicht übersteigt (Abbildung 4.2), als nicht signifikant betrachtet und wird demzufolge im gesamten Kern und unteren Mantel $\eta = 1$ gesetzt, sowie η im oberen Mantel durch eine lineare Funktion approximiert, ergeben sich Residuen in Φ, die mit $v_{max} = Max|\Phi_1 - \Phi_2| = 2.9km^2/s^2$ und einem quadratischen Mittelwert von $\sigma_v = \pm 0.7km^2/s^2$ gegenüber der in Abschnitt 2.2.3 ermittelten Fehlerschätzung von $\sigma = \pm 0.6\, km^2/s^2$ durchaus als bedeutsam betrachtet werden können. Damit zeigt sich, daß die Übereinstimmung von Φ_1 und Φ_2 in PREM nur durch Einführung nichtsignifikanter Abweichungen $\Delta\eta$ erreicht werden konnte, die aber eine adäquate Berechnung des seismischen Parameters aus der Williamson-Adams-Gleichung ausschließen.

4.2.2 Der seismische Parameter als Modellierungsgrundlage

Anstelle der getrennten Modellierung von V_P, V_S und ρ nach (4.31) bietet es sich an, den seismischen Parameter Φ gemeinsam mit der Dichte auf der Grundlage der Williamson-Adams-Gleichung (4.29) bzw. der erweiterten Form (4.30) darzustellen. Auf der Basis hydrostatischen Gleichgewichtes besteht so ein formaler Zusammenhang zwischen beiden Größen in Form einer Differentialgleichung. Solange jedoch keine Vorstellungen über die funktionale Beschreibung von Φ vorliegen, ist es nicht möglich, daraus eine Parametrisierung für die Dichte abzuleiten. Eine funktionale Beschreibung des seismischen Parameters bedeutet aber unter Berücksichtigung der Beziehung (1.54) die Festlegung einer Zustandsgleichung der Form (4.1)

$$\Psi(\rho) = \frac{dp}{d\rho}.$$

Eine Basis für einen solchen Zusammenhang kann aus der Zustandsgleichung von Gilvarry (1.56) durch Differentiation nach der Dichte (1.59)

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{K_{T_0}}{\rho_0} \frac{1}{(m-n)} \left[n \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} - m \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{m-1} \right]$$

gewonnen werden, die in der vereinfachten Form

$$\Psi = C_1 \rho^\alpha + C_2 \rho^\beta \tag{4.38}$$

eine allgemeine Formulierung einer Druck-Dichte-Relation mit Bezug zum seismischen Parameter Φ bietet. D. L. Anderson leitet aus einer derartigen Beziehung (siehe Abschnitt 3.1.5) die seismische Zustandsgleichung (3.31) her, indem er die Festlegung der Exponenten aufgrund der Ergebnisse von Laboruntersuchungen

[7] aber in der Literatur häufig als Beweis für Homogenität und adiabatische Verhältnisse angeführt werden, siehe z.B. (Jackson 1998, Kap. 4.4), (Davies und Dziewonski 1975)

[8] Dziewonski und Anderson schreiben dazu: „Für den größten Teil im Kern und unteren Mantel ist η sehr nahe zu Eins. Kleine Abweichungen sind, in einigen Fällen, ein Artefakt der Polynom-Repräsentation." (Dziewonski und Anderson 1981)

vornimmt sowie eine Interpretation für die Koeffizienten C_i angibt, jedoch ohne die Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes zu berücksichtigen.

Im hydrostatischen Gleichgewicht gilt (1.19)

$$\frac{dp}{dr} = -\rho\, g$$

und es kann mit dem Ausdruck für $dp/d\rho$ die Schwere in der Form

$$g = \frac{\rho'}{\rho}\Psi \tag{4.39}$$

ausgedrückt werden. Aus der Poisson-Gleichung (1.83)

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\, g\right\} = 4\pi\, G\, \rho,$$

die für jeden Punkt im Inneren des Körpers erfüllt sein muß, folgt dann unmittelbar die bereits in Abschnitt 4.1.1 hergeleitete Differentialgleichung (4.3)

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2 \frac{\rho'}{\rho}\Psi\right\} = -4\pi\, G\, r^2\, \rho,$$

die nach dem Einsetzen der allgemeinen Hypothese (4.38) die Gestalt

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2 \rho' \left(C_1 \rho^{\alpha-1} + C_2 \rho^{\beta-1}\right)\right\} = -4\pi\, G\, r^2\, \rho \tag{4.40}$$

annimmt und als Grundlage einer Modellbildung angesehen werden kann. Diese Differentialgleichung ist jedoch nur unter der Bedingung $\alpha = \beta$ homogen und für allgemeine Exponenten α und β nach den bekannten Verfahren nicht lösbar. Die allgemeine Annahme (4.38) ist kompatibel mit den Hypothesen, die den Dichtegesetzen von Laplace und Roche (Abschnitt 4.1.1) zugrunde liegen. Offensichtlich stellen die Ansätze von Laplace mit $\alpha = 1$ und von Roche mit $\alpha = 1, \beta = 2$ Sonderfälle dar, in denen eine Lösung angegeben werden kann. Ob sich diese Annahmen auch zur gemeinsamen Modellierung von Dichte und seismischem Parameter eignen, kann eingeschätzt werden, indem das Verhältnis zwischen Dichte und seismischem Parameter

$$\Phi = -\frac{g}{\rho'}\,\rho = C(r)\,\rho \tag{4.41}$$

für beide Annahmen anhand der im allgemeinen radiusabhängigen Funktion

$$C(r) = -\frac{g}{\rho'} \tag{4.42}$$

abgeschätzt wird. Aus bestehenden Modellen ist zu entnehmen, daß die Schwerkraft g im Mantel nahezu konstant ist und im Kern fast linear mit dem Radius ansteigt. Wird als einfachste Entsprechung der Bedingung (1.20) eine lineare Änderung der Dichte mit dem Radius, also

$$\frac{d\rho}{dr} = -A = const$$

angenommen, würde sich im Mantel $C = const$ und damit die direkte Proportionalität

$$\Psi_L = C_L\,\rho$$

zwischen seismischem Parameter und der Dichte ergeben. Das ist aber genau die Annahme (4.10), die dem Dichtegesetz von Legendre/Laplace zugrunde liegt. Für den Kern hingegen wäre $C(r)$ unter diesen Umständen[9] näherungsweise eine lineare Funktion des Radius, womit die erweiterte, dem Dichtegesetz von Roche zugrundeliegende Beziehung

$$\Psi_R = (C_{R1} + C_{R2}\,\rho)\,\rho$$

zutreffend wäre. Daß unter hydrostatischer Zunahme des Druckes selbst unter den einfachen Annahmen Ψ_L und Ψ_R eine simple lineare Dichteänderung bestenfalls als erste Abschätzung betrachtet werden darf, zeigen schon die Funktionen, die sich als Lösung der Differentialgleichung (4.40) in diesen Fällen ergeben (Tabelle 4.1). Weiterhin ist davon auszugehen, daß die zugrundeliegenden, vereinfachten Hypothesen für reale Daten nicht

[9] Es wird weiterhin von der provisorischen Annahme einer linearen Änderung der Dichte mit dem Radius ausgegangen.

Tabelle 4.1: Verschiedene Druck-Dichte-Hypothesen Ψ, zugehörige Beziehungen zwischen Inkompressiblität K und Dichte ρ sowie korrespondierende radiale Dichtefunktionen.

	Ψ	K	ρ
Laplace	$C_L\,\rho$	$C_L\,\rho^2$	$\rho_0\,\dfrac{\sin(A\,r)}{A\,r}$
Roche	$(C_{R1}+C_{R2}\,\rho)\,\rho$	$(C_{R1}+C_{R2}\,\rho)\,\rho^2$	$\rho_0\,(1-k\,r^2)$
Birch	$C_B\,\rho^2$	$C_B\,\rho^3$	$k\,r^2$
Anderson	$C_A\,\rho^3$	$C_A\,\rho^4$	—

exakt zutreffen. Auch enthalten beide Funktionen nur zwei freie Parameter, die sicherlich in den großen Schalen für eine gute Anpassung an die seismischen Daten nicht ausreichend sein werden und letztendlich erscheint die Darstellung der Dichte durch eine transzendente Funktion im Gesetz von Legendre/Laplace formal ungünstig. Daher sollen im folgenden zwei mögliche Modifikationen an beiden Dichtefunktionen[10] angegeben werden.

Anstelle von (4.9) kann auch die Reihenentwicklung (4.15) nach geraden Potenzen

$$\rho_L(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{A^2}{3!}r^2 + \frac{A^4}{5!}r^4 - \ldots\right)$$

verwendet werden. Das Gesetz von Roche ergibt sich daraus durch Abschneiden der Reihe nach dem zweiten Glied. Eine mögliche Erweiterung bestünde darin, die einzelnen Glieder der Reihe als unabhängig zu betrachten, also die Dichtefunktion als eine allgemeine Reihe in geraden Potenzen des Radius

$$\rho_{V1}(r) = \sum_{i=0}^{N} d_{2i}\,r^{2i} \tag{4.43}$$

anstelle eines allgemeinen Polynoms (4.31) aufzufassen. Das würde einerseits einer Verallgemeinerung des Gesetzes von Legendre/Laplace entsprechen, andererseits einer Erweiterung des Gesetzes von Roche durch weitere Terme mit geraden Potenzen, wie sie z.B. von Roche selbst (Roche 1848b, Roche 1853) und von Bullard in (Bullard 1954) bis zur vierten Potenz bereits angegeben worden sind. Eine andere Möglichkeit zur empirischen Erweiterung der Roche'schen Funktion stellt der Ansatz von Lipschitz (4.28)

$$\rho_{V2}(r) = \rho_0\left(1 - k\,r^{\lambda}\right)$$

dar, in dem der Exponent λ als zusätzlicher Parameter eingeführt wird. Auch eine Kombination der beiden Varianten ist vorstellbar, also eine Potenzreihe mit geraden Exponenten, die durch ein Glied mit variablem, möglicherweise negativem, Exponenten ergänzt wird:

$$\rho_{V3}(r) = \sum_{i=0}^{N}\left(d_i\,r^{2i}\right) + e\,r^{-\lambda}. \tag{4.44}$$

Diese Ergänzung kann auch als Hinzunahme eines additiven Terms nach Darwin interpretiert werden.

Zur Darstellung der seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte durch unabhängige, allgemeine Polynome nach (4.31) existieren damit drei Alternativen (Tabelle 4.2), wenn eine Modellierung von Dichte und seismischem Parameter auf der Basis der Williamson-Adams-Gleichung eingeführt werden soll.

Die empirische Relation von Birch sowie die Seismische Zustandsgleichung von D. L. Anderson implizieren eine Proportionalität zwischen Inkompressibilität und Dichte in dritter bzw. vierter Potenz, wie in den Abschnitten 3.1.4 und 3.1.5 festgestellt wurde, d.h. aus (4.38) ergibt sich mit $\alpha = 2$ und $\beta = 0$

$$\Psi_B = C_B\,\rho^2 \tag{4.45}$$

[10] und damit verbunden Modifikationen an der zugrundeliegenden Hypothese, nicht aber an der Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes

Tabelle 4.2: Funktionen zur Modellierung der Dichte.

Modell	ρ
Roche	$\rho_0 \left(1 - k\, r^2\right)$
V1	$\sum_{i=0}^{N} d_{2i}\, r^{2i}$
V2 (Lipschitz)	$\rho_0 \left(1 - k\, r^{\lambda}\right)$
V3	$\sum_{i=0}^{N} \left(d_i\, r^{2i}\right) + e\, r^{-\lambda}$

im Falle des Gesetzes von Birch und mit $\alpha = 3$ und $\beta = 0$

$$\Psi_A = C_A\, \rho^3 \tag{4.46}$$

im Falle der Gleichung von Anderson als Hypothese für $dp/d\rho$. Die Definition Ψ_B stellt eine Vereinfachung der Annahme (4.19) von Roche dar; folgerichtig resultiert die simple Funktion

$$\rho(r) = k\, r^2 \tag{4.47}$$

als eine Lösung von (4.40), die als Spezialfall der Funktion von Roche aufgefaßt werden kann und mit nur einem Parameter zur Repräsentation der seismischen Daten kaum geeignet sein wird. Für Ψ_A hingegen verkompliziert sich die Differentialgleichung nicht unbedeutend gegenüber den anderen Ansätzen, weshalb an dieser Stelle eine Lösung nicht angegeben werden kann. So soll zunächst versucht werden, den seismischen Parameter Φ unter Verwendung der in Tabelle 4.2 angegebenen Dichtefunktionen auf der Grundlage des Zusammenhanges (4.30) darzustellen.

4.2.3 Darstellung im Ursprung

Da im Ursprung die Schwerkraft Null ist, während sowohl der seismische Parameter als auch die Dichte von Null verschiedene Werte aufweisen, folgt aus der Williamson-Adams-Gleichung (3.3)

$$\frac{d\rho}{dr} = -g\, \frac{\rho}{\Phi}$$

zunächst die Forderung

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_0 = 0. \tag{4.48}$$

Daraus allein kann jedoch noch nicht auf einen endlichen Wert für Φ im Ursprung geschlossen werden, da sich aus

$$\Phi_0 = \Phi(r = 0) = -\frac{g_0}{\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_0}\, \rho_0 \tag{4.49}$$

ein zunächst unbestimmter Ausdruck ergibt.

Wird für die Dichte ein allgemeines Polynom[11]

$$\rho(r) = \sum_{i=0}^{N} c_i\, r^i$$

angesetzt, folgt aus

$$\frac{d\rho}{dr} = \sum_{i=1}^{N} i\, c_i\, r^{i-1} \tag{4.50}$$

[11] worin die Darstellung in geraden Potenzen des Radius natürlich enthalten ist

unmittelbar die Forderung

$$c_1 = 0\,,$$

d.h. die Dichtefunktion darf keinen linearen Term enthalten.

Für die Schwerkraft in einem schalenweisen Modell gilt nach (1.80)

$$g = \frac{4\,\pi\,G}{r^2}\,(M_0 + M_k)\,,$$

wobei in der innersten Schale $\tilde{M_0} = 0$ und $\tilde{M_k} = \int_0^r \rho\, q^2\, dq$ sind. Mit $\xi = 4\,\pi\,G$ und

$$\int_0^r \rho\, q^2\, dq = \sum_{i=0}^{N} \frac{c_i}{i+3}\, r^{i+3}$$

ergibt sich

$$g = \xi r \sum_{i=0}^{N} \frac{c_i}{i+3}\, r^i. \tag{4.51}$$

Da für die Dichte im Ursprung $\rho(0) = c_0 > 0$ gilt, kann für (4.49)

$$\Phi_0 = -c_0\, \frac{g_0}{\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_0} \tag{4.52}$$

geschrieben werden, woraus mit (4.50) und (4.51)

$$\Phi_0 = -\xi\, c_0 \left[\frac{\sum_{i=0}^{N} \frac{c_i}{i+3}\, r^i}{\sum_{i=1}^{N} i\, c_i\, r^{i-2}}\right] = -\xi \frac{{c_0}^2}{6c_2} \tag{4.53}$$

folgt. Damit Φ_0 definiert ist, muß demzufolge

$$c_2 \neq 0$$

gelten. Das einfachste, nichtkonstante Polynom, das diese Forderung erfüllt, ist damit die Funktion von Roche (4.22)

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - k\, r^2\right) = c_0 + c_2\, r^2\,.$$

Eine Funktion mit variablem Exponenten, wie die Funktion von Lipschitz (4.28)

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - k\, r^\lambda\right)$$

wird mit

$$\frac{d\rho}{dr} = -k\,\rho_0\,\lambda\, r^{\lambda-1}$$

der Forderung (4.48) für eine nichtkonstante Dichtefunktion ($k \neq 0, \lambda \neq 0$) nur unter der Bedingung

$$\lambda > 1$$

gerecht. Nach einigen Umformungen ergibt sich für Φ

$$\Phi = \xi\,\rho^2\left[r^2\left(\frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{(3\lambda+\lambda^2)}\right) + \frac{k r^\lambda}{(3\lambda+\lambda^2)} + \frac{r^{2-\lambda}}{3k\lambda}\right]. \tag{4.54}$$

Im Ursprung gilt dann

$$\Phi_0 = \Phi(r=0) = \xi\,{\rho_0}^2 \frac{r^{2-\lambda}}{3k\lambda}, \tag{4.55}$$

woraus als weitere Einschränkung

$$\lambda \leq 2$$

folgt, damit Φ_0 einen endlichen Wert annimmt. Ein von Null verschiedener Wert ergibt sich nur für den Fall

$$\lambda = 2$$

zu

$$\Phi_0 = -\eta\,\xi\,\frac{{\rho_0}^2}{6k}.$$

Folglich eignet sich für die Modellierung des seismischen Parameters im Rahmen der in Betracht gezogenen Dichtefunktionen nur solche auf der Basis der Funktion von Roche, die jedoch um beliebige Terme $c_i\, x^i$, $i \in \mathrm{N}$, $i > 2$ erweitert werden können.

4.2.4 Trennung von V_P und V_S

Die bisherigen Überlegungen bezogen sich auf eine übereinstimmende Darstellung zwischen dem seismischen Parameter und der Dichte unter Berücksichtigung hydrostatischen Gleichgewichtes. In der Seismologie tragen jedoch die Laufzeiten von Kompressions- und Scherwellen neben den Perioden der Eigenschwingungen die ursprünglichen Informationen. Aus den Laufzeiten der Raumwellen können unter den in Abschnitt 2.2.1 angeführten Voraussetzungen die Geschwindigkeiten V_P und V_S abgeleitet werden, die bei bekannter Dichte über die Relationen (1.31) und (1.32) unmittelbare Aussagen über die elastischen Parameter erlauben. Der Parameter Φ aus Gleichung (1.33) enthält jedoch beide Anteile, zu deren Trennung eine zusätzliche Größe benötigt wird.

Durch Umformung von (1.33) kann der seismische Parameter auch in der Darstellung

$$\Phi = V_P^2 \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{V_S}{V_P}\right)^2\right] = V_P^2 \left[1 - \frac{4}{3}s^2\right] \tag{4.56}$$

geschrieben werden (Lelgemann und Marchenko 2001). Die Größe $s = V_S/V_P$ ist in allen Schalen eine nahezu konstante Funktion, die im äußeren Kern exakt Null ist und in den übrigen Regionen einen nur geringfügigen, fast linearen Trend aufweist (Abbildung 4.3).

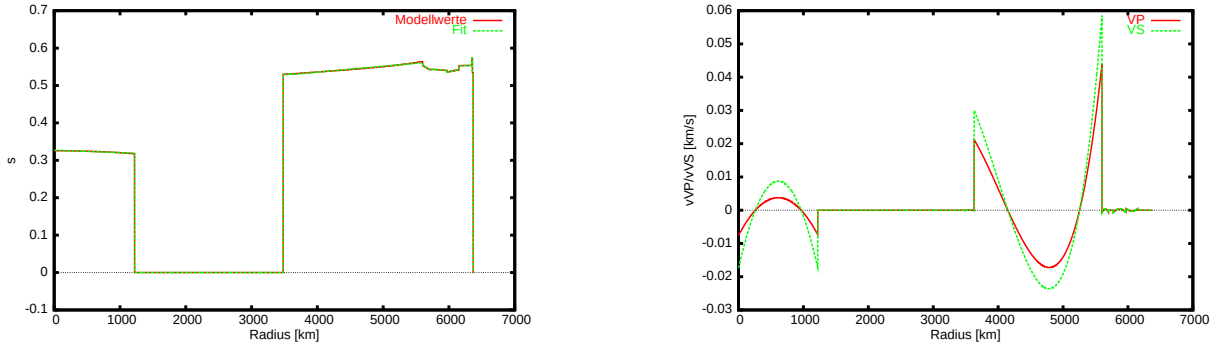

Abbildung 4.3: Quotient s zwischen Kompressions- und Scherwellen (links) und Residuen bzgl. der Geschwindigkeiten nach einer Modellierung von s durch eine lineare Funktion (rechts), Daten aus PREM.

Ein einfacher empirischer Ansatz mit einer linearen Funktion erscheint zur Darstellung der seismischen Geschwindigkeiten nicht ungeeignet, wie die Residuen rechts in Abbildung 4.3 zeigen. Die größten Differenzen von maximal $0.06\,km/s$ treten an den Grenzen des oberen Mantels auf und können durch Verwendung einer quadratischen Funktion auf ein Viertel reduziert werden. Dann kommen nennenswerte Residuen nur noch im unteren Mantel vor, die mit $\Delta V_{max} = \pm 0.015\,km/s$ innerhalb des Intervalls möglicher Modelle liegen, das in (Kennett et al. 1995) für heuristische Untersuchungen angenommen wurde. Weiterhin kann davon ausgegangen werden, daß unter Verwendung dieser alternativen Form zur Modellierung der ursprünglichen Laufzeitdaten die Diskrepanzen weiter reduziert werden können.

Der Quotient s, obwohl grundsätzlich zur Modellierung geeignet, hat den Nachteil, daß er keine unmittelbare physikalische Interpretation ermöglicht. Aus der Beziehung (1.35)

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[1 - 1/\left(\left(\frac{V_P}{V_S}\right)^2 - 1\right)\right]$$

ergibt sich jedoch der einfache Zusammenhang zur Poisson-Zahl σ

$$\sigma = \frac{2s^2 - 1}{2s^2 - 2} \quad \text{bzw.} \quad s = \sqrt{\frac{2\sigma - 1}{2\sigma - 2}}, \tag{4.57}$$

da immer $s \geq 0$ gilt. Die Poisson-Zahl besitzt physikalische Bedeutung als elastischer Parameter (zusammen mit dem Youngschen Modulus oder E-Modul). Da s in den einzelnen Schalen eine nahezu konstante Funktion ist, gilt gleiches auch für σ. Für Flüssigkeiten (äußerer Kern) hat σ den festen Wert 0.5, und die geringfügigen, fast linearen radialen Änderungen (Abbildung 4.4) lassen sich ebenso wie für s durch eine lineare oder

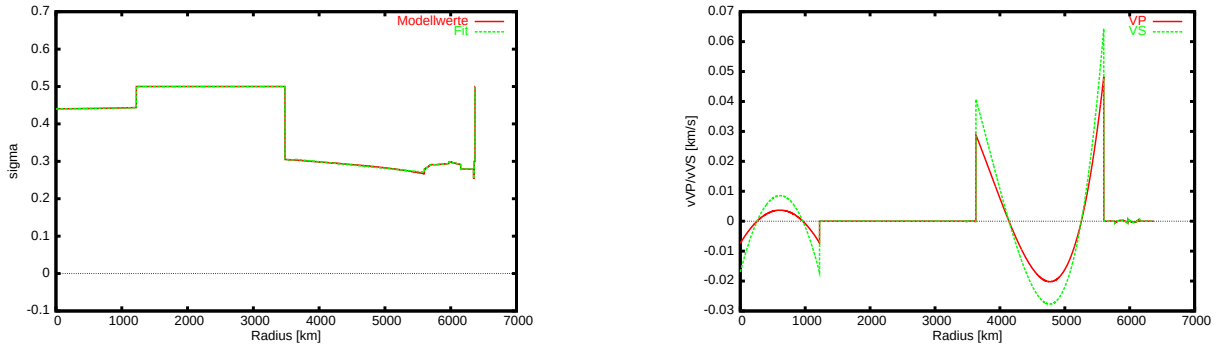

Abbildung 4.4: Poisson-Zahl σ und Residuen für die Geschwindigkeiten aus Modellierung durch eine lineare Funktion in Abhängigkeit des Radius für PREM.

quadratische Funktion approximieren, wie aus dem Residuenbild (Abbildung 4.4, rechts) zu entnehmen ist. Die Differenzen liegen in der gleichen Größenordnung wie bei der Modellierung durch den Quotienten s, und ebenso wie für s gilt auch hier, daß diese um den Faktor Vier verringert werden können, wenn anstelle einer linearen eine quadratische Funktion angesetzt wird. Somit eignet sich die Poisson-Zahl ebenso wie der Quotient s zur Berechnung der beiden Geschwindigkeiten aus dem seismischen Parameter, die sich dann aus den Gleichungen

$$V_P = \sqrt{3\,\Phi\frac{1-\sigma}{1+\sigma}} \tag{4.58}$$

$$V_S = \sqrt{\frac{3}{2}\,\Phi\frac{1-2\sigma}{1+\sigma}} \tag{4.59}$$

ergeben.

Wie bereits in Abschnitt 1.1.1 erwähnt, gibt es unterschiedliche Parametersätze zur Beschreibung der Eigenschaften eines linear elastischen und isotropen Mediums. Am gebräuchlichsten ist es in der Seismologie, die Inkompressibilität K und die Steifheit μ anzugeben. Das ist auf die einfachen Relationen (1.31) und (1.32) zurückzuführen, mit denen die seismischen Geschwindigkeiten durch die Quotienten K/ρ und μ/ρ ausgedrückt werden können. Grundsätzlich gibt es aus physikalischer Sicht aber keinen Grund für die Bevorzugung einer Gruppe dieser Parameter. Da sich in Abschnitt 4.2.2 gezeigt hat, daß sich auf der Basis einer entsprechenden Dichtefunktion sowie der Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes der seismische Parameter Φ unmittelbar darstellen läßt, erscheint die Wahl der Poisson-Zahl als zweite Größe hier am geeignetsten. Somit gründet sich die in dieser Arbeit vorgeschlagene Modellierung auf die drei Größen Φ, ρ und σ anstelle der üblichen Darstellung durch V_P, V_S und ρ, wobei sich der seismische Parameter unmittelbar aus der Dichte ergibt. Dadurch wird es möglich, die Anzahl an Funktionen und Parametern gegenüber der Parametrisierung durch Polynome (4.31) drastisch zu reduzieren: Es werden lediglich zwei Funktionen benötigt, wobei die Funktion für σ eine sehr einfache Struktur aufweist und schon mit zwei Parametern (lineare Funktion) adäquat dargestellt werden kann. Welche der in Tabelle 4.2 aufgeführten Funktionen für ρ zur Modellierung von Φ verwendbar sind und die damit verbundene Feststellung der Anzahl notwendiger Parameter, soll Gegenstand der Untersuchungen des nächsten Kapitels sein.

Kapitel 5. Algorithmen zur Modellierung der Dichte

Nachdem in Abschnitt 4.2 Möglichkeiten einer Parametrisierung der Dichtefunktion im Rahmen radialsymmetrischer Modelle angegeben wurden, soll nun überprüft werden, inwiefern sich die Ansätze für synthetische Daten[1] eignen. Dazu soll davon ausgegangen werden, daß die seismischen Geschwindigkeiten in Form der Größe Φ als Beobachtungen vorliegen. Wenn die Geschwindigkeiten allein aus den Laufzeiten seismischer Raumwellen bestimmt werden, wie von Montagner und Kennett in (Montagner und Kennett 1996) vorgeschlagen, erscheint das auch zulässig, da in diesem Falle zur Berechnung der Geschwindigkeiten keine expliziten Annahmen über die Dichte notwendig sind (Abschnitt 2.2.1). Sollen auch Eigenschwingungsdaten in die Berechnung der Geschwindigkeiten einbezogen werden, so kann dieser Ansatz zumindest die Grundlage für eine erweiterte Vorgehensweise bilden. Das Ziel ist es, ein rein hydrostatisches Modell auf der Basis der Williamson-Adams-Gleichung zu berechnen. In Regionen, in denen die Voraussetzungen dafür nicht vollständig erfüllt sind, kann der Bullen-Parameter η eingeführt werden, um Störungen aufgrund chemischer Inhomogenitäten und nichtadiabatischer Temperaturen zu berücksichtigen. Die Festlegung von η kann jedoch nur *a priori* aufgrund zusätzlicher Daten oder Hypothesen[2] erfolgen. Daher wird in den folgenden Untersuchungen zunächst auf die Berücksichtigung derartiger Abweichungen verzichtet. Die Einbeziehung bei Vorliegen entsprechender Daten ist jedoch jederzeit möglich, ohne daß grundsätzliche Änderungen an Modellbildung oder Parametrisierung notwendig werden. Somit erfolgt die gesamte Modellierung einschließlich des oberen Mantels auf der selben Grundlage. Auf eine alternative Darstellung im oberen Mantel wird wegen des Umstandes verzichtet, daß die dafür in Frage kommenden empirischen Ansätze (Birchs Law, seismische Zustandsgleichungen) nicht auf der Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes basieren oder als Ausgangspunkt einer hydrostatischen Modellbildung ungeeignet sind (Abschnitt 4.2.2). Auf die Modellierung der Kruste wird im Rahmen dieser Betrachtungen nicht eingegangen. Der Anteil der Kruste wird vom Gesamtmodell abgezogen, so daß sämtliche Berechnungen nur bis zur Mohorovičić-Diskontinuität mit entsprechend reduzierten Werten für Gesamtmasse und Trägheitmoment durchgeführt werden.

5.1 Modellbildung

5.1.1 Funktionales Modell

Es wird vorausgesetzt, daß die Beschreibung sämtlicher Größen im Rahmen eines radialsymmetrischen Modells erfolgen kann und daß die Daten für den seismischen Parameter Φ als diskrete Werte in Abhängigkeit vom Radius zur Verfügung stehen. Das kugelförmige Modell mit dem äußeren Radius R soll aus n Schalen bestehen und in jeder Schale k wird die Dichte durch eine unabhängige Funktion $\rho_k(x; u_j^k)$ mit dem üblicherweise auf das Intervall $[0, 1]$ normierten Radius $x = r/R$ als Veränderlicher sowie m unbekannten Parametern u_j dargestellt. Der funktionale Zusammenhang zwischen dem seismischen Parameter Φ und den unbekannten Parametern der Dichtefunktion lautet dann allgemein

$$\Phi = F(x; u_j). \tag{5.1}$$

Die Aufgabenstellung besteht nun darin, die Parameter u_j so festzulegen, daß die diskreten Beobachtungen l für Φ bestmöglich unter Berücksichtigung des funktionalen Zusammenhanges $F(\rho)$ dargestellt werden können. Die Funktion F kann in diesem Sinne als alleinige Funktion der Unbekannten u_j aufgefaßt werden und ist durch die erweiterte Williamson-Adams-Gleichung (4.30) in jeder Schale k mit

$$-\eta\, F(u_j) = -\eta\, R\, \frac{g_k}{\rho_k'}\, \rho_k \tag{5.2}$$

festgelegt, wobei der Inhomogenitätsparameter η nicht Bestandteil der Funktion sein soll und sich der Faktor R aus der Normierung des Radius ergibt. Die Schwerkraft g_k in der Schale k berechnet sich nach (1.80)

$$g_k = \frac{4\,\pi\, G}{x^2} \left(\tilde{M}_0 + \tilde{M}_k \right)$$

aus dem Masseanteil der aktuellen Schale

$$\tilde{M}_k = \int_{x_k}^{x} \rho_k(q)\, q^2\, dq$$

[1] Als synthetische Daten werden hier die Geschwindigkeitsverteilungen aus bestehenden Modellen aufgefaßt.
[2] z.B. der K-p-Hypothese von Bullen

sowie aus der Summe der Massen aller vom Radius x_k eingeschlossenen Schalen

$$\tilde{M}_0 = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i(q)\, q^2\, dq.$$

Daraus wird sofort ersichtlich, daß eine unabhängige Bestimmung der Unbekannten für jede einzelne Schale nicht möglich ist, da über M_0 ein rekursiver Zusammenhang zwischen den Parametern der Dichtefunktionen aller Schalen $i \leq k$ vorliegt. Dementsprechend ist eine Bestimmung der Unbekannten nur im Rahmen einer gemeinsamen Berechnung über alle Schalen möglich, und F ist immer eine Funktion aller Unbekannten u_j^i, $i \leq k$.

Sind innerhalb des Definitionsbereiches von F_k mehr Beobachtungen als Unbekannte vorhanden, ist eine eindeutige Bestimmung der Unbekannten u_j entweder aufgrund von zufälligen, groben oder systematischen Fehlern in den Daten oder aufgrund von Inkompatibilitäten zwischen den Daten und der Funktion F_k (Unvollständigkeit des Modells) nicht mehr möglich. Üblicherweise werden in diesen Fällen kleine Zuschläge v für die Beobachtungen l eingeführt, so daß

$$l + v = F_k(u_j) \tag{5.3}$$

als Grundlage der Modellbildung betrachtet werden kann. Die Festlegung der v_i kann nur aufgrund einer zusätzlichen Bedingung erfolgen, für die in der Regel die Minimierung der L_2-Norm

$$S = \sum_i {v_i}^2 \rightarrow Min \tag{5.4}$$

oder, unter Berücksichtigung einer Gewichtung zwischen den einzelnen Beobachtungen,

$$S = \sum_i p_i\, {v_i}^2 \rightarrow Min \tag{5.5}$$

gewählt wird. Unter diesen Voraussetzungen können die bekannten Algorithmen der Ausgleichungsrechnung, siehe z.B. (Reissmann 1980), zur Bestimmung der Unbekannten angewendet werden. Da die Funktion F_k nichtlinear ist, ergibt sich aus (5.4) bzw. (5.5) auch ein nichtlineares Normalgleichungssystem, dessen Lösung entweder größere Schwierigkeiten bereitet oder oft garnicht angegeben werden kann. Aus diesem Grund soll hier davon ausgegangen werden, daß die Funktion F durch die Linearisierung

$$F = F_0 + \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial u_j}\right)_0 \Delta u_j + R(\Delta u_j) \tag{5.6}$$

in einer Umgebung Δu_j des Lösungspunktes u_j^0 unter Vernachlässigung des Restgliedes R genügend genau repräsentiert werden kann ($R(\Delta u_j)) = O(\Delta u_j)$, Fréchet-Differential). Führt man zur Vereinfachung eine Darstellung in Matrizenschreibweise ein, ergibt sich mit der Matrix der partiellen Ableitungen $\mathbf{A}$ (Jakobi-Matrix), dem Vektor der um die Ausgangsnäherung F_0 reduzierten Beobachtungen $\tilde{\mathbf{l}}$, dem Residuenvektor $\mathbf{v}$ sowie dem Vektor der Zuschläge für die Unbekannten $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$ die Formulierung

$$\tilde{\mathbf{l}} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}. \tag{5.7}$$

Für den allgemeineren Fall (5.5) kann die Minimum-Bedingung auch in der Form

$$S = \mathbf{v^T P v} \rightarrow Min \tag{5.8}$$

ausgedrückt werden, wobei die Matrix $\mathbf{P}$ eine Gewichtsmatrix ist. Soll die Gewichtung aus den stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen bestimmt werden, ergeben sich die Elemente aus deren Kovarianzmatrix C_{ll} nach

$$\mathbf{P} = {m_0}^2\, \mathbf{C_{ll}^{-1}}, \tag{5.9}$$

wobei m_0 der *a priori* festzulegende mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist. Sind die Beobachtungen voneinander unabhängig, ist $\mathbf{P}$ eine Diagonalmatrix mit den Elementen

$$p_{ii} = \frac{{m_0}^2}{{m_i}^2}. \tag{5.10}$$

Die Lösung des überbestimmten linearen Gleichungssystems (5.7) unter Berücksichtigung der minimalen Norm (5.8) ergibt sich aus dem Normalgleichungssystem (siehe z.B. (Reissmann 1980))

$$\mathbf{N}\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{5.11}$$

mit der Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N} = \mathbf{A^T P A}$ und der rechten Seite $\mathbf{f} = \mathbf{A^T P \tilde{l}}$. Die unbekannten Parameter lassen sich dann durch eine iterative Verbesserung der Ausgangsnäherungen $\mathbf{u_0^{i+1}} = \mathbf{u_0^i} + \mathbf{\Delta u}$ bestimmen. Dabei ist zu beachten, daß sich der Entwicklungspunkt der Linearisierung (5.6) in jedem Iterationsschritt ändert, weshalb auch eine Neuberechnung der partiellen Ableitungen erforderlich wird. Das Problem ist, ein geeignetes Abbruchkriterium für die Iteration zu finden. Wird von einem normalen Konvergenzverhalten ausgegangen, d.h. nimmt der Betrag der Zuschläge in jedem Iterationsschritt kontinuierlich ab, kann als Abbruchkriterium

$$Max\left(|\mathbf{\Delta u}|\right) < \epsilon \tag{5.12}$$

eingeführt werden. Auf die zusätzliche, regularisierende Bedingung in Form einer minimalen Abweichung von den Ausgangsnäherungen, wie sie z.B. in (Tarantola und Valette 1982) angegeben wird, kann und soll im Rahmen dieser Arbeit genauso verzichtet werden wie auf andere Maßnahmen zur Stabilisierung, wie z.B. der impliziten Festlegung der Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N}$ aufgrund empirischer oder sonstig bestimmter Kovarianzen der Unbekannten. Werden statt dessen alle zusätzlich notwendigen Informationen als Nebenbedingungen eingeführt, ergibt sich in dem hier betrachteten Fall immer ein stabiles System, ohne daß Regularisierungen erforderlich werden. Die Einführung von zusätzlichen Entscheidungskriterien zur Beurteilung der Anpassung des funktionalen Zusammenhanges an die Daten wie z.B. (2.38) ist dann gegenstandslos, da die Anpassung im Sinne von (5.4) immer bestmöglich erfolgt. Davon unabhängig können numerische Instabilitäten oder Konvergenzprobleme aufgrund der Linearisierung jederzeit auftreten, sind aber nicht mit dem Problem einer unvollständigen oder ungeeigneten Modellbildung zu verwechseln. In solchen Fällen kann eine Dämpfung der Zuschläge $\mathbf{\Delta u}$ notwendig werden (siehe z.B. (Schwetlick 1979, Kap. 10.2)), wodurch die Lösbarkeit an sich gewährleistet wird, ohne daß die Lösung selbst beeinflußt werden sollte.

5.1.2 Nebenbedingungen

Wie bereits in Kapitel 3.1 erläutert, läßt sich auf der Basis der Williamson-Adams-Gleichung (4.29) bzw. der erweiterten Form (4.30) nur die radiale Änderung, nicht aber die Dichte selbst berechnen. Für die Festlegung der Absolutbeträge müssen also zusätzlich Vorinformationen an allen Stellen eingeführt werden, an denen eine Änderung der Dichte stattfindet, die nicht durch stetig zunehmenden hydrostatischen Druck bestimmt wird. Da prinzipiell an jedem Schalenübergang eine derartige (sprunghafte) Änderung der Dichte auftreten kann, muß für jede Schale ein Absolutwert durch eine zusätzliche Bedingung festgelegt werden. Eine solche Bedingung muß auf einer unabhängigen Information beruhen, die unmittelbar Einfluß auf die Dichte hat, entweder direkt durch die Vorgabe der Dichte oder der Dichteänderung an den Diskontinutitäten oder durch andere Größen, die explizit von der Dichte abhängen, wie z.B. Gesamtmasse, Trägheitsmoment oder auch gewisse Moden der Eigenschwingungen[3]. Sollen die Frequenzen der Eigenschwingungen nicht direkt in die Berechnung einfließen, ergeben sich folgende Nebenbedingungen:

1. Direkte Vorgabe der Dichte ρ_M unterhalb der Grenze zwischen Kruste und oberem Mantel (Mohorovičić-Diskontinuität) entsprechend Abschnitt 2.1.3.
2. Einführung von Gesamtmasse M_M und Trägheitsmoment y_M nach Abschnitt 2.1.1 und 2.1.2 zur Festlegung der Dichtesprünge an der 670 km-Diskontinuität und der Kern-Mantel-Grenze.
3. Explizite Festlegung der übrigen $(n-2)$ Dichtesprünge $\Delta\rho_k$ entsprechend der Einteilung der Schalen in Abschnitt 1.4. Liegen Informationen vor, z.B. im oberen Mantel aufgrund petrologischer Modelle oder aufgrund einer (unabhängigen) Modellabstimmung auf die Frequenzen der Eigenschwingungen, können diese unmittelbar eingeführt werden. Solange kein Widerspruch zu anderen Vermutungen besteht, wird in den übrigen Fällen eine kontinuierliche Dichteänderung an den Schalengrenzen postuliert ($\Delta\rho_k = 0$). Da aufgrund petrologischer Betrachtungen mit einer sprunghaften Dichteänderung wegen Änderungen des Phasezustandes in einer Tiefe von 400 km gerechnet wird, ohne daß gesicherte Angaben über die Größe des Sprunges gemacht werden können, erfolgt die Einführung der provisorischen Bedingung, daß die Beträge der Sprünge in 670 und 400 km Tiefe gleichgroß sein sollen.

Die obengenannten notwendigen Nebenbedingungen lauten

$$\begin{aligned}
C_1 = \ \rho_M \ &= \rho_n(x_M) \\
C_2 = M_M &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \rho(q) q^2 \, dq \\
C_3 = \ y_M \ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \rho(q) q^4 \, dq \\
C_j = \Delta\rho_k &= \rho_{k+1}(x_{k+1}) - \rho_k(x_{k+1}).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

[3] unter der Annahme, daß die elastischen (Geschwindigkeitsverteilung) und anelastischen Parameter (Q-Werte) bekannt sind

Entscheidend für die nachfolgenden Betrachtungen ist weniger die physikalische Relevanz der numerischen Festlegung der Konstanten C_l, sondern generell der Umstand, daß derartige Bedingungen für eine stabile Lösung erforderlich sind, während eine quantitative Anpassung jederzeit realisierbar ist.

Durch die exakt zu erfüllenden Bedingungsgleichungen der Form

$$C_l = G_l(u_j) \tag{5.14}$$

sind die Unbekannten nicht mehr voneinander unabhängig. Diesem Umstand kann auf zweierlei Art und Weise Rechnung getragen werden. Die erste und naheliegendere Möglichkeit ist die Elimination der überzähligen Unbekannten durch Einsetzen der Bedingungsgleichungen in die Funktion F. Dieses Vorgehen ist aber für nichtlineare Zusammenhänge praktisch sehr aufwendig, wenn nicht gar undurchführbar. Daher soll im folgenden die zweite Möglichkeit, die der Minimierung der Quadratsumme (5.4) unter expliziter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (5.14), angewendet werden. Nach der Multiplikatorenmethode von Lagrange wird dazu für jede der n_b Bedingungsgleichungen eine zusätzliche Unbekannte λ_l eingeführt und dann das Minimum der Funktion

$$\Omega = \sum_i v_i^2 - \sum_l 2\,\lambda_l\,(G_l(u_j) - C_l) \rightarrow Min \tag{5.15}$$

bestimmt. Wird wiederum davon ausgegangen, daß die Bedingungsgleichungen (5.14) entweder linear sind oder durch eine Linearisierung bei Vorliegen geeigneter Näherungswerte ersetzt werden können, kann (5.14) vektoriell in der Form

$$\mathbf{B}\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{c}} \tag{5.16}$$

mit den um den Wert der Ausgangsnäherungen reduzierten Konstanten $\tilde{c}_l = c_l - G_l(u_{0j})$ geschrieben werden. Die Zuschläge für die Unbekannten ergeben sich damit nach (Reissmann 1980, Kap. 5.5.1) aus der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \tilde{\mathbf{c}} \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

Bedingungen, die einen Rangabfall in den Normalgleichungen $\mathbf{N}$ kompensieren, also das System erst lösbar machen[4], sind notwendige Vorinformationen, die sich nicht auf die Größe der Residuen auswirken und das System nicht unter zusätzlichen Zwang setzen. Im Falle einer vollständigen Modellbildung würde für derartige Bedingungen $\lambda_l = 0$ gelten. Treten Nebenbedingungen auf, die redundant gegenüber anderen Gleichungen des Systems sind, also zusätzliche Vorinformationen darstellen, aber nicht vollständig kompatibel mit den übrigen Beobachtungen sind, üben diese zusätzlichen Zwang auf das gesamte System aus. In diesem Falle ergeben sich entsprechend große Beträge für die Multiplikatoren, und es vergrößert sich die Quadratsumme (5.4). Unter gewissen Umständen ist es sogar möglich, inkonsistente Nebenbedingungen anhand der Größe der Multiplikatoren zu detektieren (Wziontek und Wienholz 2001, Wienholz 2002). Hauptsächlich dienen die hier betrachteten Nebenbedingungen nur dazu, fehlende Informationen (z.B. über die Größe der Dichtesprünge) zu ergänzen, sind also notwendige Vorinformationen, und somit sollten die Beträge der Multiplikatoren im Rahmen der Rechengenauigkeit im Lösungspunkt Null ergeben.

5.1.3 Fehlerschätzungen

Die Angabe von Fehlerschätzungen sowohl für die Unbekannten als auch für die ausgeglichenen Beobachtungen sind in der Literatur zur Inversion seismischer Daten nur selten zu finden, obwohl deren Bestimmung unmittelbar aus den Ergebnissen einer Ausgleichung möglich ist. Statt dessen wird oft versucht, ein relatives Kriterium zur Einschätzung der Repräsentation der Daten durch das Modell in Form einer mittleren normierten Verbesserung (2.38) zu berechnen, wobei die mittleren Fehler der Beobachtungen *a priori* festgelegt werden und das Kriterium somit unmittelbar von der Zuverlässigkeit einer solchen Abschätzung abhängig ist. Angaben zur Zuverlässigkeit und Genauigkeit der gesuchten Parameter findet man hingegen äußerst selten.

Zur Berechnung einer exakten Fehlerschätzung muß zunächst der mittlere Fehler der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung aus der (gewichteten) Quadratsumme der Residuen

$$m_0 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} \tag{5.18}$$

berechnet werden. Hierbei ist r die Redundanz des Problems, die sich formal aus der Differenz zwischen der Anzahl von Informationen und der Anzahl Unbekannter

$$r = (n_l + n_b) - n\,m \tag{5.19}$$

[4] wenn von der Berechnung einer Pseudo-Inversen abgesehen wird

berechnen läßt, wobei n_l die Anzahl der Beobachtungen, n_b die Anzahl der Bedingungsgleichungen, n die Anzahl unbekannter Parameter in jeder Schale und m die Anzahl der Schalen ist.

Die Kofaktorenmatrix der Unbekannten $\mathbf{Q}_{uu}$ ergibt sich unmittelbar aus der inversen Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{Q}_{uu} = \mathbf{N}^{-1} \tag{5.20}$$

oder für den Fall, daß noch Nebenbedingungen auftreten, aus der inversen Blockmatrix (Reissmann 1980, Kap. 5.5.2)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{uu} & \mathbf{Q}_{uk} \\ \mathbf{Q}_{ku} & \mathbf{Q}_{kk} \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

Die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{uu}$ berechnet sich damit nach

$$\mathbf{C}_{uu} = m_0 \mathbf{Q}_{uu}. \tag{5.22}$$

Die Fehlerschätzungen für die ausgeglichenen Beobachtungen können nun nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt werden. Da die partiellen Ableitungen der Funktion F ohnehin schon aus der Linearisierung in Form der Matrix $\mathbf{A}$ bekannt sind, berechnet sich die zugehörige Kovarianzmatrix nach

$$\mathbf{C}_{ll} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{uu}\mathbf{A}^T. \tag{5.23}$$

Für die folgenden Untersuchungenen sind hauptsächlich die mittleren Fehler (Varianzen) der Unbekannten von Interesse, um deren Signifikanz einschätzen zu können. Da mit synthetischen Daten aus vorhandenen Modellen gerechnet werden soll, sind die Fehlerschätzungen für die ausgeglichenen Beobachtungen hier nicht von Belang. Das würde sich aber sofort ändern, wenn mit realen Daten gearbeitet wird, die naturgemäß fehlerbehaftet sind.

5.2 Modellierung auf der Grundlage des seismischen Parameters

Alle nachfolgenden Untersuchungen sollen in erster Linie zur Beurteilung verschiedener Modellansätze für die Relation zwischen Dichte und seismischem Parameter dienen. Zu diesem Zwecke werden die Geschwindigkeitsverteilungen aus verschiedenen bestehenden Modellen, hauptsächlich aus PREM, entnommen und als synthetische Beobachtungen aufgefaßt, auch wenn prinzipiell davon ausgegangen werden muß, daß diese Werte maßgeblich von der Parametrisierung des jeweiligen Modells geprägt sein können. Die auftretenden Residuen werden dennoch ausschließlich als Maß für Modelldefizite der untersuchten Alternative betrachtet. Es besteht nicht die Absicht, ein Modell zur geophysikalischen Interpretation zu erstellen, sondern lediglich verschiedene Modellansätze mit dem Ziel zu vergleichen, für zukünftige Berechnungen eine geeignete Parametrisierung vorzuschlagen. Aus diesem Grund werden auch die Radien der Diskontinuitäten unverändert aus den jeweiligen Modellen übernommen, auch wenn inzwischen Modifikationen bekannt sind.

5.2.1 Ausgangsnäherungen

Aufgrund der Tatsache, daß der in Kapitel 5.1 angegebene Lösungsweg auf einer Linearisierung beruht, besteht die Notwendigkeit, eine Ausgangnäherung für die Dichtefunktion festzulegen. Dies kann unabhängig von jeglicher Parametrisierung allein auf dem Zusammenhang (3.5) basierend mit einer Diskretisierung der Werte für Φ und ρ vorgenommen werden. Dabei sind die Nebenbedingungen, die aus Gesamtmasse, Trägheitsmoment sowie der Annahme für die Dichte unterhalb der Kruste resultieren, zu berücksichtigen. Die Berechnung des Dichtegradienten innerhalb einer Schale kann dann durch iterative numerische Auswertung des Integrals (3.5)

$$\ln \rho = -\int_{r_0}^{0} \frac{g}{\Phi} dr + \ln \rho_0,$$

unter Verwendung einer (fast) beliebigen anfänglichen Dichteverteilung, analog zur ursprünglichen Vorgehensweise von Williamson und Adams (Williamson und Adams 1923) durchgeführt werden. Die Konvergenz erfolgt rasch innerhalb weniger Schritte, so wie von den beiden Autoren erwähnt. Um alle drei Nebenbedingungen erfüllen zu können, müssen zwei Dichtesprünge eingeführt werden. Es wurden Diskontinuitäten an der Kern-Mantel-Grenze sowie im Übergangsbereich zwischen oberem und unterem Mantel in $670\,km$ Tiefe festgelegt. Im Hinblick auf die Dichte im oberen Mantel stellt die Berücksichtigung nur einer Diskontinuitiät

in diesem Bereich eine starke Vereinfachung dar, die aber für den hier verfolgten Zweck als vollkommen ausreichend betrachtet werden kann. Für die anfängliche Dichteverteilung wurde das schon von Williamson und Adams verwendete Dichtegesetz von Laplace (4.9)

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{\sin(A\,r)}{A\,r}$$

mit den Koeffizienten

$$\rho_0 = 10.25\,g\,cm^{-3}, \quad A = 3.726 \times 10^{-4}\,km^{-1}$$

verwendet. Mit den seismischen Geschwindigkeiten aus PREM kann auf diese Weise, ausgehend von einem globalen historischen Dichtegesetz und völlig unabhängig von aktuellen Modellen, eine rein hydrostatische Dichteverteilung eindeutig bestimmt werden (Abbildung 5.1), die exakt die seismischen Daten reproduziert.

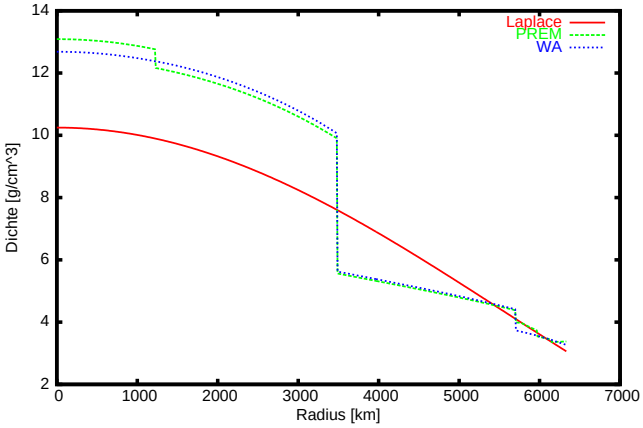

Abbildung 5.1: Radiale Dichteänderung nach dem Gesetz von Laplace, PREM und der Williamson-Adams-Gleichung.

Die Unterschiede zwischen PREM und der Lösung aus der Williamson-Adams-Gleichung resultieren hauptsächlich aus der einfachen Struktur dieser Modellierung im oberen Mantel, dessen Massenanteil aufgrund des großen Sprunges in 670 km Tiefe deutlich geringer ist als in PREM, und dem fehlenden Dichtesprung im Kern. Während die Dichte im unteren Mantel nahezu identisch mit PREM ist, fällt, bedingt durch die Anpassung an das Trägheitsmoment, der Dichtesprung an der Kern-Mantel-Grenze und damit der Massenanteil des Kerns höher aus als in PREM.

Werden die so berechneten diskreten Werte für die Dichte in jeder Schale direkt an die Funktion von Roche angepaßt, können die so ermittelten Koeffizienten als Ausgangsnäherungen in den weiteren Berechnungen dienen.

5.2.2 Funktionen von Roche und Lipschitz

Zielsetzung ist es, eine möglichst einfache Modellierung zwischen Dichte und seismischem Parameter zu finden. Die Funktion von Roche (4.22)

$$\rho(x) = \rho_0 \left(1 - k\,x^2\right) = d_0 + d_2\,x^2 \tag{5.24}$$

weist unter allen Dichtefunktionen die einfachste Struktur auf, obwohl die zugrundeliegende physikalische Hypothese (4.19) gegenüber anderen Annahmen komplexer ist und deshalb eine gewisse Flexibliltät in der Anpassung an die seismischen Daten verspricht. Für die radiale Ableitung der Dichte ergibt sich

$$\frac{d\rho}{dx} = 2\,d_2\,x,$$

und mit dem Masseanteil der Schale k

$$M_k = \frac{d_0}{3}(x^3 - {x_k}^3) + \frac{d_2}{5}(x^5 - {x_k}^5)$$

gilt für die Schwerkraft

$$g_k = \frac{4\,\pi\,G}{x^2}\,(M_0 + M_k) = \frac{4\,\pi\,G}{x^2}\left(M_0 + \frac{d_0}{3}(x^3 - {x_k}^3) + \frac{d_2}{5}(x^5 - {x_k}^5)\right),$$

wobei

$$M_0 = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_0}{3}({x_{i+1}}^3 - {x_i}^3) + \frac{d_2}{5}({x_{i+1}}^5 - {x_i}^5)$$

der Anteil der Massen aller vom Radius x_k eingeschlossenen Schalen ist. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{M_0}{2x} \\ v_1 &= \frac{M_0}{2x^3} \\ u_0 &= \frac{1}{10}\left(x^4 - \frac{{x_k}^5}{x}\right) \\ u_1 &= \left(\frac{4x^2}{15} - \frac{{x_k}^3}{6x} - \frac{{x_k}^5}{10x^3}\right) \\ u_2 &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{{x_k}^3}{x^3}\right) \end{aligned} \tag{5.25}$$

(5.26)

ist die Funktion (5.2) als

$$F_R = \xi\left\{v_0 + \frac{d_0}{d_2}\,v_1 + d_2\,u0 + d_0\,u_1 + \frac{{d_0}^2}{d_2}\,u_2\right\} \tag{5.27}$$

definiert, die Konstante ξ mit $\xi = 4\,\pi\,G\,R$. Dieser nichtlineare Zusammenhang soll zur Bestimmung der unbekannten Parameter d_i linearisiert werden, um das in Kapitel 5.1 geschilderte Ausgleichungsverfahren durchführen zu können. Es hat sich herausgestellt, daß das lineare Ersatzproblem nach Einführung der Substitution $d_0 = C\,d_2$ weniger empfindlich auf die Qualität der Näherungswerte ist, da die Unbekannten dann nicht mehr in Brüchen auftreten. Mit der Umbenennung $B = d_2$ folgt für ρ

$$\rho(x) = B\left(C + x^2\right) \tag{5.28}$$

und damit für F

$$F_R = \xi\left\{v_0 + v_1\,C + B\left(u_0 + u_1\,C + u_2\,C^2\right)\right\}. \tag{5.29}$$

Unter Berücksichtigung der in Kapitel 5.1.2 genannten Nebenbedingungen ist mit dieser Funktion eine akzeptable Anpassung an die seismischen Daten jedoch nicht zu erzielen.

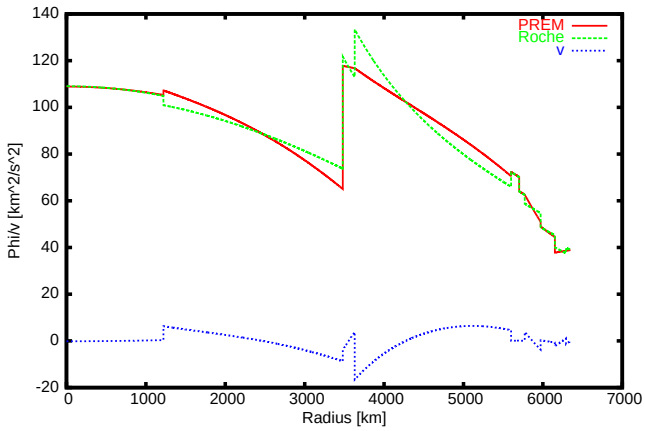

Abbildung 5.2: Anpassung von Φ aus PREM durch Funktion von Roche.

Die Residuen zeigen große systematische Abweichungen, besonders im äußeren Kern und im unteren Mantel, wie aus Abbildung 5.2 ersichtlich wird. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit liegt mit $m_{0apost} = \pm 4.4\ km^2/s^2$ weit außerhalb der Genauigkeit, mit der Φ bekannt ist. Die Funktion von Roche ist demzufolge zur Modellierung der bestehenden Geschwindigkeitsverteilungen in seiner ursprünglichen Form nicht geeignet.

Offenbar besteht die Notwendigkeit, den Ansatz für ρ durch eine veränderte Struktur und/oder die Einführung zusätzlicher Parameter zu erweitern, um eine Funktion F zu erhalten, die flexibler den seismischen Daten angepaßt werden kann. In Kapitel 4.2.2 wurden dazu zwei Möglichkeiten angegeben, die in der Einführung eines variablen Exponenten oder in der Hinzunahme weiterer Terme mit geraden Potenzen bestehen können. Zunächst soll in den Schalen mit den größten Residuen die Erweiterung durch Einführung eines variablen Exponenten entsprechend der Funktion von Lipschitz (4.28)

$$\rho_{V2}(x) = d_0 + d_2\, x^{\lambda}$$

geprüft werden. Auch hier hat sich herausgestellt, daß die Substitution $d_0 = C\, d_2$ eine günstigere Linearisierung und damit eine stabilere Ausgleichung ermöglicht. Aus praktischen Gründen werden darüber hinaus für den Exponent $\beta = \lambda + 3$ und die Umbenennung $B = d_2$ eingeführt. Für die Dichtefunktion kann damit

$$\rho(x) = B\left(3C + \beta x^{(\beta-3)}\right) \tag{5.30}$$

geschrieben werden, womit nach (5.2) mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{x^{\beta} - {x_k}^{\beta}}{x^3} \\ u_1 &= 1 - \left(\frac{x_k}{x}\right)^3 + \frac{3}{\beta}\left(1 - \left(\frac{x_k}{x}\right)^{\beta}\right) \\ u_2 &= \frac{\beta\left(x^3 - {x_i}^3\right)}{3x^{\beta}} \\ v_0 &= \frac{M_0}{x} \\ v_1 &= \frac{3M_0}{\beta x^{\beta}} \end{aligned} \tag{5.31}$$

der Ausdruck

$$F_L = \xi\frac{x^2}{\beta - 3}\left[v_0 + v_1 C + B\left(u_0 + u_1 C + u_2 C^2\right)\right] \tag{5.32}$$

für die Funktion F gilt. Wenn auch mit dieser Modifikation die Anpassung an die seismischen Daten spürbar verbessert werden konnte (Abbildung 5.3), ist die Repräsentation der Beobachtungen dennoch nicht zufriedenstellend. Mit $m_{0apost} = \pm 1.5\ km^2/s^2$ liegt die Genauigkeit immer noch weit unter der in Kapitel 2.2.3 ermittelten Fehlerschätzung von $\sigma = \pm 0.6\, km^2/s^2$.

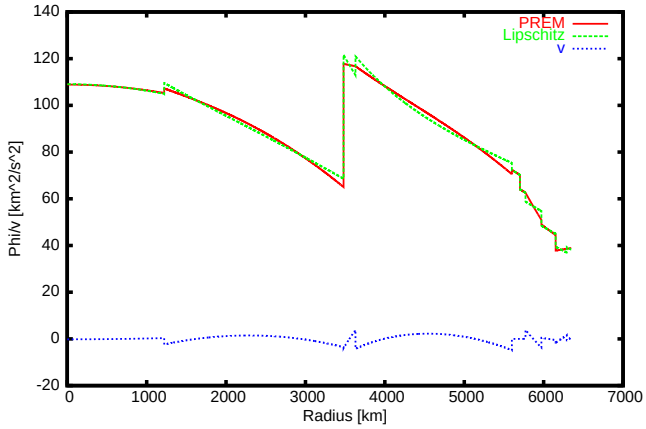

Abbildung 5.3: Anpassung von Φ aus PREM durch die Funktion von Lipschitz.

5.2.3 Dichtefunktionen mit geraden Potenzen des Radius

Da eine zufriedenstellende Darstellung der seismischen Geschwindigkeiten auf der Grundlage der Dichtefunktionen von Roche und Lipschitz nicht möglich ist, soll die Alternative einer Erweiterung durch Terme mit geraden Potenzen des Radius untersucht werden. Die Funktion für die Dichte (4.43) lautet

$$\rho_{V1}(x) = \sum_{i=0}^{m} d_{2i}\, x^{2i},$$

die Anzahl der Koeffizienten m ist abhängig von der radialen Ausdehnung der Schalen zu wählen. So ist zu erwarten, daß im unteren Mantel und im äußeren Kern eine größere Anzahl an Koeffizienten benötigt wird als in den Schalen des oberen Mantels. Die Bestimmung der notwendigen Anzahl an Parametern erfolgte durch Testrechnungen, deren Ergebnisse nach Kriterien sowohl für die Genauigkeit als auch für die Stabilität der Lösung eingeschätzt wurden. Als Maß für die Genauigkeit, also für den Grad der Anpassung an die Daten, eignet sich einerseits die mittlere quadratische Abweichung

$$s_0 = \sqrt{\frac{S}{n}} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}},$$

und andererseits der mittlere Fehler der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung (5.18)

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{r}}.$$

Letztgenannte Größe wird mit dem von der Redundanz r (Gleichung (5.19) abhängigen Faktor $\sqrt{n/r}$ skaliert, weshalb eine Verringerung der Residuenquadratsumme allein aufgrund der Einführung einer entsprechend großen Zahl zusätzlicher Parameter realistischer eingeschätzt werden kann. Weiterhin ist eine Gegenüberstellung mit einer Fehlerschätzung für die Ausgangsdaten möglich. Im Falle einer großen Überbestimmung weisen beide Größen die gleiche Tendenz auf, und m_0 unterscheidet sich praktisch nicht mehr von der mittleren quadratischen Abweichung, weshalb im folgenden auf die Angabe beider Größen verzichtet wird.

Die Stablilität der Lösung soll durch zwei weitere Kriterien beurteilt werden. Zum einen kann das Quadrat der L_2-Norm

$$E = \sum {d_i}^2 \tag{5.33}$$

als Maß für die Energie der Koeffizienten d_i aufgefaßt werden. Wird eine gute Anpassung an die Daten (kleine mittlere Abweichung s_0) aufgrund von Koeffizienten mit großen Beträgen aber alternierenden Vorzeichen erreicht, ist die Lösung als instabil zu betrachten, da eine gegenseitige Auslöschung der Summanden auftritt, was in den Zwischenpunkten zu starken Oszillationen führen kann. Ein solcher Fall wird durch einen gegenüber anderen Lösungen auffällig großen Wert für E angezeigt.

Zum anderen stellt sich die Frage nach der Genauigkeit bzw. der Signifikanz der Parameter. Aus den mittleren Fehlern der Koeffizienten kann die Größe

$$D = \sqrt{\sum {m_{d_i}}^2} \tag{5.34}$$

berechnet werden, welche ein mittleres Genauigkeitsmaß für die Koeffizienten einer Schale darstellt.

Zusätzlich kann auch das Verhältnis zwischen Parametern und zugehörigen mittleren Fehlern betrachtet werden. Übersteigt der mittlere Fehler wesentlich den Betrag der Unbekannten, so kann daraus geschlossen werden, daß diese im Rahmen der festgestellten Genauigkeit mit dem Wert Null bestimmt wurde. Im Falle eines Polynomkoeffizienten sollte dann überprüft werden, ob die Unbekannte überhaupt berücksichtigt werden muß. Insbesondere dann, wenn deren Gesamteinfluß auf das Modell groß ist ($x \to 1$), muß zwischen dem Anteil der Unbekannten selbst und der Auswirkung der Unsicherheit ihrer Bestimmung abgewogen werden. Ein erster Hinweis darauf kann die Einschätzung des Quotienten $m_{d_i}/|d_i|$ für jeden einzelnen Parameter erbringen. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß bei einer L_2-Ausgleichung eine unzutreffende Parametrisierung keinen isolierten Einfluß auf eine einzelne Unbekannte hat, kann als mittleres Maß innerhalb einer Schale der durchschnittliche normierte mittlere Fehler

$$N = \frac{1}{n} \sum \frac{m_{d_i}}{|d_i|} \tag{5.35}$$

eingeführt werden. Als Grenzwert für nachfolgende Betrachtungen kann z.B. $N = 1$ gewählt werden. Daneben kann auch die maximale Abweichung

$$\Delta N = Max \left(\left| N - \frac{m_{d_i}}{|d_i|} \right| \right) \tag{5.36}$$

als Indikator für das Auftreten von nichtsignifikant von Null verschiedenen Unbekannten angegeben werden. Beide Kriterien können nur als Hinweis auf die Notwendigkeit einer eingehenderen Untersuchung verstanden werden, da eine Beurteilung der Parametrisierung letztendlich nur im Einzelfall unter Berücksichtigung weiterer Kriterien vorgenommen werden kann.

Tabelle 5.1: Genauigkeit der Anpassung an die seismischen Daten (PREM) durch Modelle mit geraden Potenzen des Radius bei unterschiedlichem Entwicklungsgrad. Die auftretenden Potenzen im Radius sind für die jeweiligen Regionen in geschweiften Klammern angegeben.

Modell	Potenzen in x					s_0
	IC	OC	D2	LM	UM	$[km^2/s^2]$
G1	$\{0,2\}$	$\{0,2,4,6,8\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6,8\}$	$\{0,2,4\}$	0.10
G2	$\{0,2\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6,8\}$	$\{0,2,4\}$	0.14
G3	$\{0,2\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2,4\}$	0.23
G4	$\{0,2\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6,8\}$	$\{0,2,4\}$	0.30
G5	$\{0,2\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2,4\}$	0.35
G6	$\{0,2\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6,8\}$	$\{0,2\}$	0.44
G7	$\{0,2\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2\}$	0.48
G8	$\{0,2\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2\}$	0.55
G9	$\{0,2\}$	$\{0,2\}$	$\{0,2\}$	$\{0,2\}$	$\{0,2\}$	4.49

Die Untersuchungen sollen in zwei Schritten durchgeführt werden. Zuerst wird die Güte der Anpassung an die Daten eingeschätzt und daran anschließend die Stabilität bzw. Zuverlässigkeit der Parametrisierung anhand der Kriterien (5.33-5.35). Um einen Gesamteindruck zu erhalten, werden für jedes Modell die Größen in den einzelnen Schalen durch deren Summen $\bar{E}$ und $\bar{D}$, den Mittelwert $\bar{N}$ sowie den Maximalwert von ΔN zusammengefaßt.

Anhand der Residuenbilder wurde festgestellt, daß im unteren Mantel Koeffizienten bis zur achten Potenz im Radius für eine adäquate Darstellung des seismischen Parameters notwendig sind. Im inneren Kern erscheint hingegen die Funktion von Roche zur Modellierung in allen Fällen ausreichend, und in den kleinen Schalen des oberen Mantels ist eine zufriedenstellende Darstellung unter Berücksichtigung gerader Potenzen bis zum Grade Vier möglich. In Tabelle 5.1 sind die einzelnen Modellansätze nach den Genauigkeitskriterien aufsteigend sortiert angegeben. Folgende Abkürzungen wurden eingeführt: IC – innerer Kern, OC – äußerer Kern, D2 – Übergangszone Kern-Mantel, LM – unterer Mantel, UM – oberer Mantel.

Tabelle 5.2: Stabilitätskriterien für die Modelle mit geraden Potenzen des Radius.

Modell	$\bar{E}$	$\bar{D}$	$\bar{N}$	$\overline{\Delta N}$	s_0 $[km^2/s^2]$
G9	800	0.08	0.00	0.00	4.49
G8	860	0.09	0.00	0.01	0.55
G7	860	0.11	0.00	0.01	0.48
G6	910	0.15	0.00	0.02	0.44
G5	1030	0.85	0.17	1.94	0.35
G3	1040	0.56	0.11	1.28	0.23
G4	1080	0.72	0.14	1.65	0.30
G2	1080	0.33	0.06	0.75	0.14
G1	1250	0.29	0.05	0.53	0.10

Zunächst ist ersichtlich, daß, abgesehen vom Modell $G9$ (Funktion von Roche), alle Modelle die seismischen Daten innerhalb der Grenzen der in Abschnitt 2.2.3 ermittelten Fehlerschätzung für Φ von $\sigma = \pm 0.6\, km^2/s^2$ repräsentieren können. Durch die Steigerung der Entwicklung im unteren Mantel und im äußeren Kern bis zum achten Grade konnte eine deutliche Verbesserung der Anpassung auf $s_0 = \pm 0.1\, km^2/s^2$ erreicht werden.

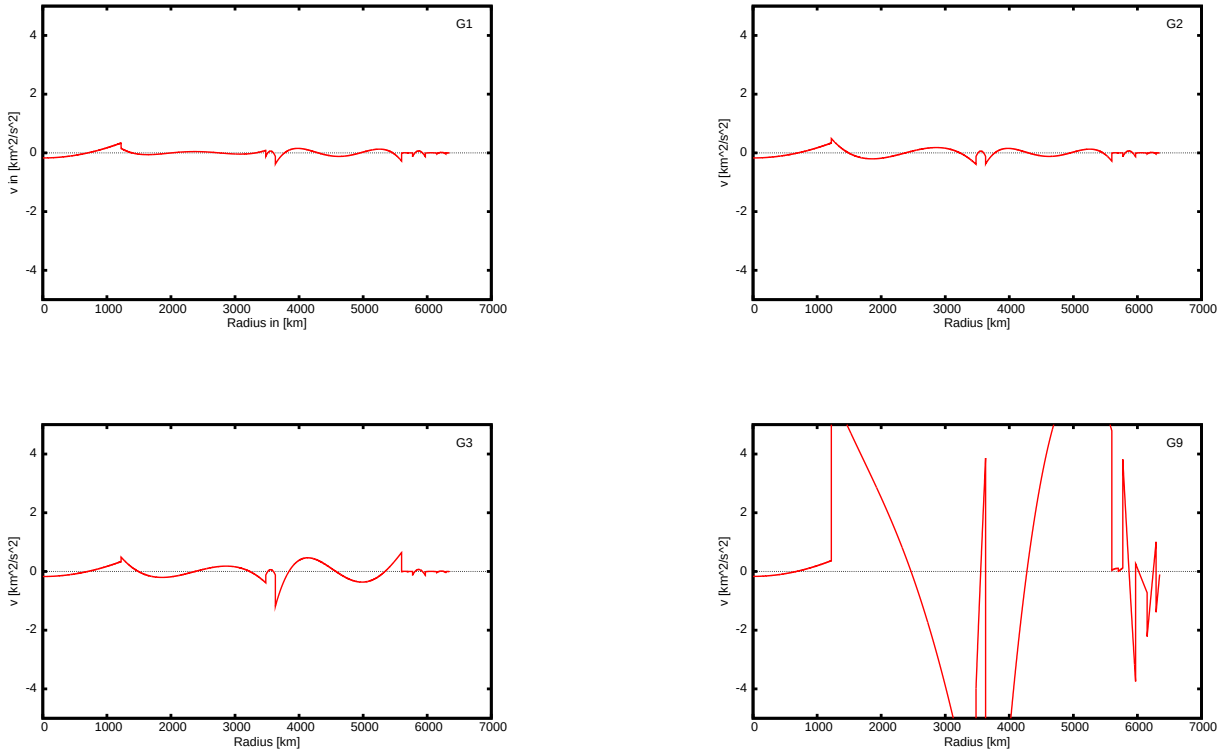

Abbildung 5.4: Residuenbilder für die Modelle $G1$, $G2$, $G3$ und $G9$. Der Maßstab ist für Modell $G9$ aus Gründen der Vergleichbarkeit nicht angepaßt worden; für eine übersichtlichere Darstellung sei auf Abbildung 5.2 verwiesen.

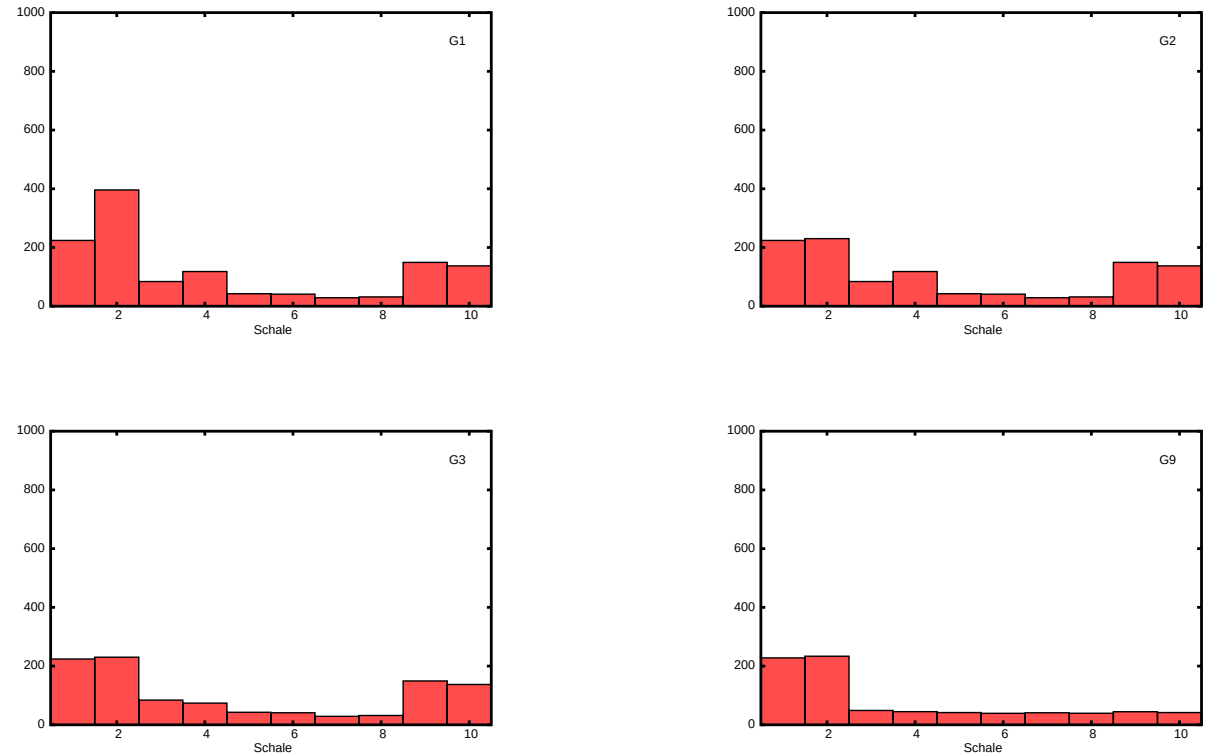

Abbildung 5.5: Gesamtenergie $\bar{E}$ der Koeffizienten für die Modelle $G1$, $G2$, $G3$ und $G9$.

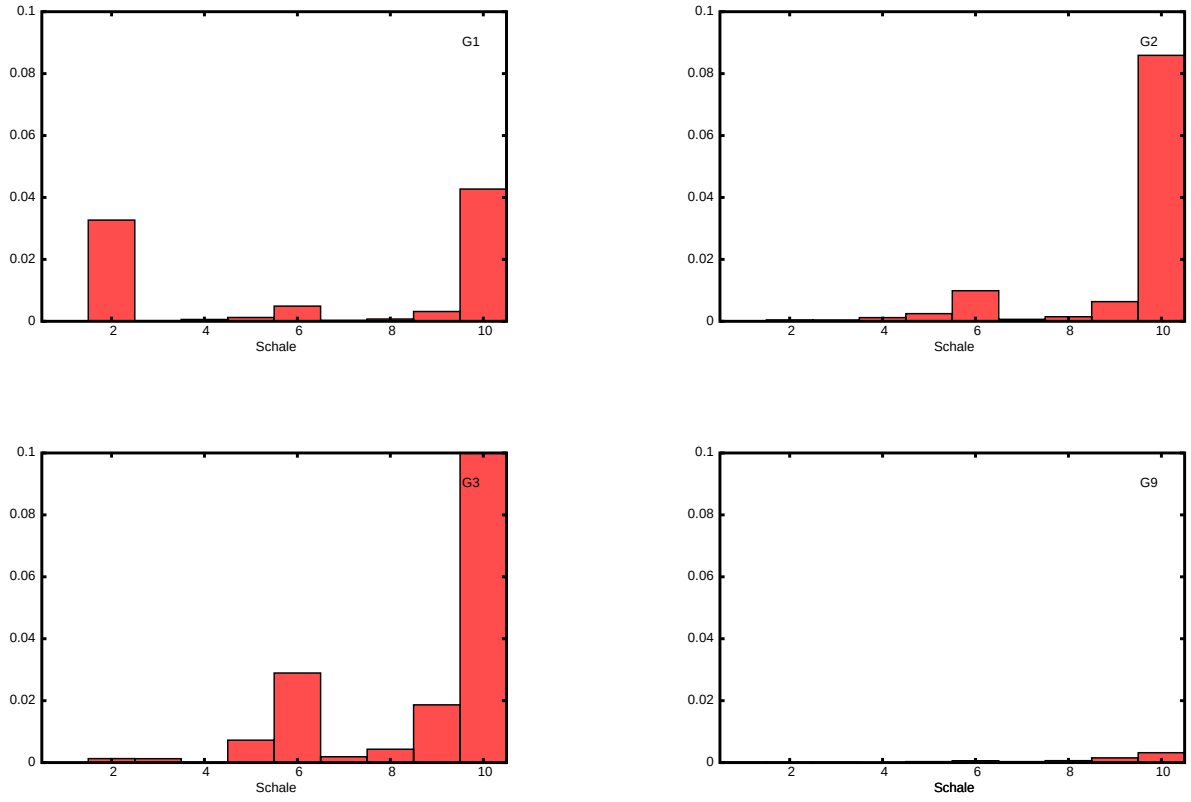

Abbildung 5.6: Durchschnittlicher mittlerer Fehler der Koeffizienten $\bar{N}$ der Modelle $G1$, $G2$, $G3$ und $G9$.

Aus den Residuenbildern (Abbildung 5.4) und aus s_0 in Tabelle 5.1 ist zu entnehmen, daß das Modell $G1$ gegenüber $G2$ nur eine vergleichsweise geringe Verbesserung der Anpassung mit sich bringt. Betrachtet man hingegen das Stabilitätskriterium (5.33), so ist zu erkennen, daß sich die Energie der Koeffizienten von Lösung $G1$ gegenüber $G2$ in Schale 2 nach Einführung des Koeffizienten vom Grade 8 fast verdoppelt hat (Abbildung 5.5). Gleiches gilt auch für den mittleren Fehler D der Modellparameter in der betreffenden Schale (Abbildung 5.6). Daraus ist ersichtlich, daß die Einführung eines Terms in achter Potenz des Radius im äußeren Kern nicht gerechtfertigt werden kann und eine Überparametrisierung darstellen würde. Dies gilt nicht für den Koeffizienten d_8 im unteren Mantel, der im Vergleich der Modelle $G2$ und $G3$ eine maßgebliche Genauigkeitssteigerung erbringt, ohne daß die Größen E und D bemerkenswerte Unterschiede zeigen.

Ebenso ist bei der Einführung des Terms in vierter Potenz für die Modellierung des oberen Mantels eine signifikante Reduzierung der Residuen erkennbar[5], ohne daß aus der Gesamtenergie oder aus den mittleren Fehlern der Unbekannten auf eine Überparametrisierung zu schließen wäre. Hinsichtlich der Gesamtenergie $\bar{E}$ (Tabelle 5.2) lassen sich aufgrund der unterschiedlichen Anzahl von Parametern im oberen Mantel die Modelle $G2$ bis $G8$ in zwei Gruppen mit fast gleichem $\bar{E}$ einteilen. Die Lösung $G1$ hebt sich davon mit einem um ca. 20% größeren Wert ab. Die normierten mittleren Fehler weisen für alle Modelle keine Besonderheiten auf, lediglich in den Lösungen $G3$ bis $G5$ treten in einzelnen Schalen des oberen Mantels sehr kleine Koeffizienten für die Terme in vierter Potenz auf, die ursächlich für die auffälligen $\overline{\Delta N}$ sind. Der Umstand, daß der Ansatz nach Roche ($G9$) an der Spitze der Tabelle 5.2 steht, aber am Ende der Tabelle 5.1, verdeutlicht den grundsätzlichen Widerspruch zwischen der Anzahl der Parameter und der Qualität der Anpassung an die Daten. Weiterhin wird aus einem Vergleich zwischen den Residuen (Abbildung 5.4) und den mittleren Fehlern der Unbekannten (Abbildung 5.6) für Modell $G9$ sofort deutlich, daß die sichere Bestimmung der Parameter allein kein Kriterium für die Qualität der Anpassung an die Daten sein kann.

Favorisiert wird die Modellierung $G2$, weil damit der beste Kompromiß zwischen der Anzahl der Parameter und der Darstellung der seismischen Geschwindigkeiten erzielt werden kann. Um sicherzustellen, daß die Qualität der Parametrisierung unabhängig von den jeweiligen Datensätzen ist, wurden die Berechnungen mit den Geschwindigkeitsverteilungen von AK135F, CORE11, IASP91 und SP6 wiederholt. Dabei haben sich

[5] Für einen Vergleich kann das Residuenbild für die Funktion von Roche im oberen Mantel den übrigen drei Ansätzen gegenübergestellt werden.

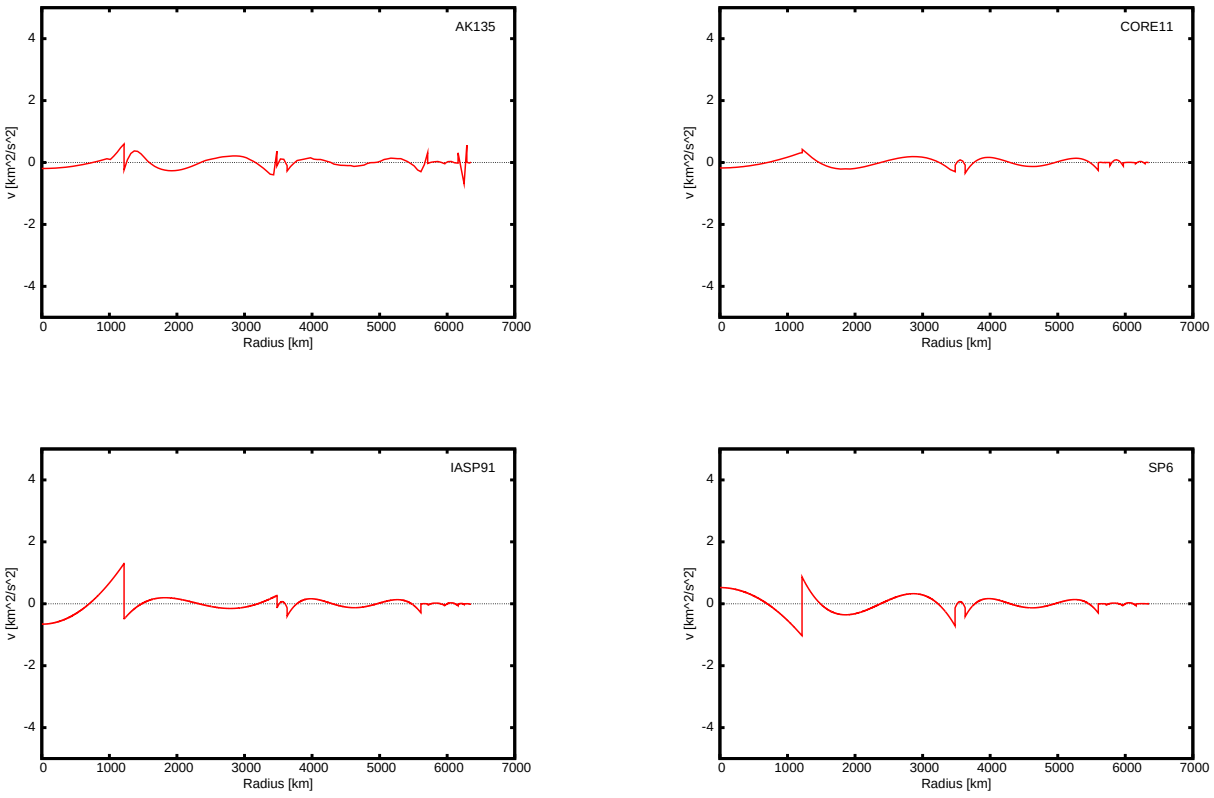

Abbildung 5.7: Residuenbilder für die Anpassung der Parametrisierung $G2$ an unterschiedliche Geschwindigkeitsverteilungen (v.l.n.r. AK135, CORE11, IASP91, SP6).

kaum Unterschiede in der Güte der Anpassung gezeigt (Abbildung 5.7). Lediglich im Bereich des inneren Kern treten etwas deutlichere Differenzen auf. Dort liegen aber auch die größten Unsicherheiten in den Daten (vergl. Abschnitt 2.2.3), weshalb diesen Abweichungen keine zu große Bedeutung zukommt. Für den Fall, daß die Residuen aufgrund der Genauigkeit der Daten als signifikant eingeschätzt werden müssen, kann eine Erweiterung der Parametrisierung im Kern durch zusätzliche Terme in geraden Potenzen in Erwägung gezogen werden.

Auf der Parametrisierung $G2$ basierend wurden abschließend mit den seismischen Daten aus PREM zwei Modelle HA2-327-A (Anhang A.2) und HA2-337-A (Anhang A.6) mit den Werten $\rho_{M1} = 3.27\,g/cm^3$ und

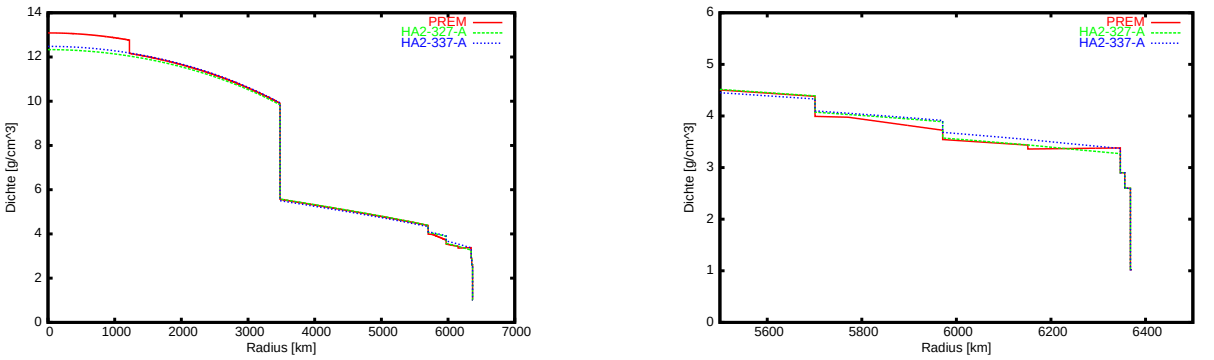

Abbildung 5.8: Dichte aus den Modellen HA2-327-A und HA2-337-A sowie aus PREM, rechts ein Ausschnitt für den oberen Mantel.

$\rho_{M2} = 3.37\,g/cm^3$ für die Dichte unterhalb der Mohorovičić-Diskontinuität berechnet. Beide Modelle weisen Dichtesprünge nur an der Kern-Mantel-Grenze sowie an den Diskontinuitäten in 400 und 670 km Tiefe auf. Als Nebenbedingungen wurden die Gesamtmasse (2.5), das Trägheitsmoment (2.19) sowie die Bedingung, daß die Größe der Dichtesprünge in 400 und 670 km Tiefe gleiche Beträge aufweisen sollen, eingeführt. Auch wurden keinerlei Abweichungen von der Annahme von Homogenität der chemischen Zusammensetzung und des Phasezustandes sowie von adiabatischen Temperaturänderungen berücksichtigt, d.h. der Bullen-Parameter wurde für das gesamte Modell mit $\eta = 1$ festgelegt. Die Modellierung der Kruste wurde unverändert aus dem Referenzmodell entnommen und damit Gesamtmasse und Trägheitsmoment auf die obere Grenze des Mantels reduziert ($y' = 0.3329$, $M' = 5.943 \times 10^{27}\,g$). Nach der Berechnung wurde die Kruste aus dem gleichen Modell wieder hinzugefügt.

Tabelle 5.3: Dichtesprünge für die Modelle HA2-327-A und HA2-337-A.

Radius $[km]$	HA2-327-A $\Delta\rho$ $[g/cm^3]$	HA2-337-A $\Delta\rho$ $[g/cm^3]$
1221.5	0.00	0.00
3480.0	4.26	4.43
3630.0	0.00	0.00
5600.0	0.00	0.00
5701.0	0.32	0.23
5771.0	0.00	0.00
5971.0	0.32	0.23
6151.0	0.00	0.00
6291.0	0.00	0.00
6346.6	0.37	0.47
6356.0	0.30	0.30
6368.0	1.58	1.58

Die größten Abweichungen gegenüber PREM treten aufgrund des fehlenden Dichtesprunges im inneren Kern auf (Abbildung 5.8). Da der Anteil des inneren Kerns am Gesamtvolumen nur ca. 1% beträgt, wirkt sich dieser Unterschied jedoch auf die übrigen Abschnitte des Modells kaum aus. Weiterhin sind geringe Niveau-Unterschiede im äußeren Kern und im unteren Mantel festzustellen, die allein aus der unterschiedlichen Wahl der Dichte an der oberen Grenze des Mantel resultieren. Die Größe der Dichtesprünge (Tabelle 5.3) im oberen Mantel von $0.32\,g/cm^3$ bzw. $0.23\,g/cm^3$ wird ebenfalls unmittelbar durch die Wahl von ρ_M beeinflußt und liegt mit 8% bzw. 6% innerhalb der Größenordnung, die aufgrund petrologischer Betrachtungen erwartet werden kann.

Die Residuenbilder beider Lösungen sind fast identisch (Abbildung 5.9) und zeigen eine Systematik in Form eines leicht oszillierenden Verlaufes. Die größten Differenzen treten an den Schalengrenzen des äußeren

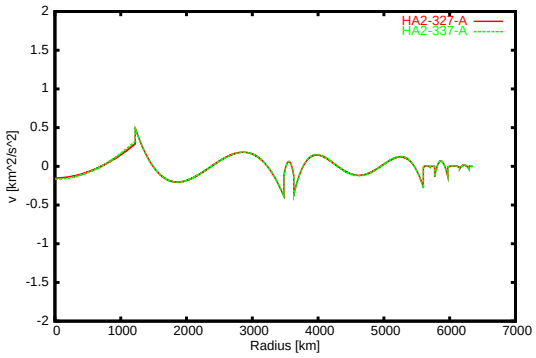

Abbildung 5.9: Residuen in Φ für Modelle HA2-327-A und HA2-337-A.

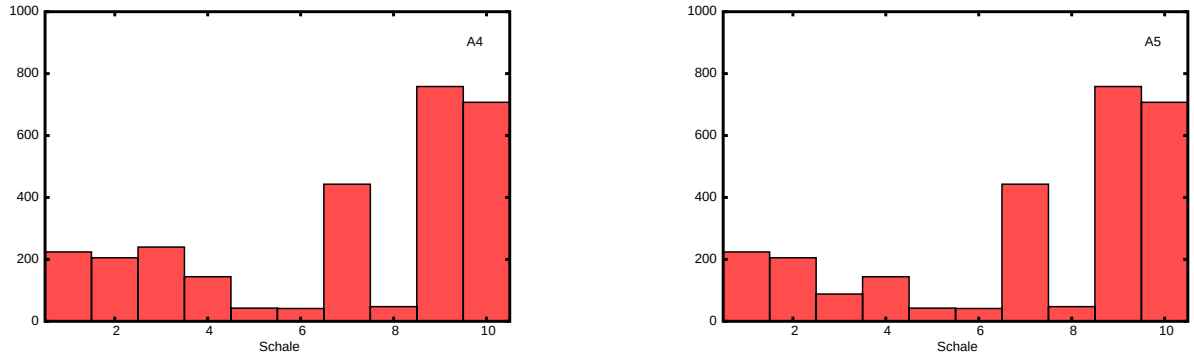

Abbildung 5.10: Gesamtenergie $\bar{E}$ der Koeffizienten für die Modelle A4 und A5.

Kerns auf, liegen aber mit $v_{max} = 0.5\,km^2/s^2$ deutlich unterhalb der Genauigkeit, mit der die Daten bekannt sind.

Die größten strukturellen Unterschiede in der Dichteverteilung bestehen im oberen Mantel, deren Ursache in nichtadiabatischen Temperaturänderungen und chemischen Inhomogenitäten zu suchen wäre. Allerdings stellt sich die Frage nach der Zuverlässigkeit der Annahmen, die einer Modellierung dieser Abweichungen zugrundezulegen wären. Eine empirische Geschwindigkeits-Dichte-Relation, die in einem weiten Bereich (in PREM bis 200 km Tiefe) einen negativen Dichtegradienten erfordert, steht im Widerspruch zur Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes und zur Grundforderung nach mechanischer Stabilität. Um so erstaunlicher ist die gute mittlere Repräsentation der Dichte aus PREM im oberen Mantel durch das Modell mit $\rho_M = 3.27\,g/cm^3$.

5.2.4 Vergleich mit allgemeinen Polynomen

Um der Frage nachzugehen, ob eine ebenso gute oder sogar bessere Anpassung mit allgemeinen Polynomen möglich ist, sollen im folgenden einige empirische Ansätze dem Modell $G2$ gegenübergestellt werden (Tabelle 5.4). Zunächst werden, abgesehen vom inneren Kern, vollständige Polynome bis zum dritten Grade eingeführt. Das entspricht im wesentlichen der heute üblichen Darstellung, wie in Kapitel 4.2.1 erläutert wurde.

Tabelle 5.4: Genauigkeit der Anpassung an die seismischen Daten (PREM) durch Modelle basierend auf allgemeinen Polynomen. Die auftretenden Potenzen im Radius sind für die jeweiligen Regionen in geschweiften Klammern angegeben.

Modell	Potenzen in x					s_0
	IC	OC	TZ	LM	UM	$[km^2/s^2]$
G2	$\{0,2\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4,6,8\}$	$\{0,2,4\}$	0.14
A1	$\{0,2\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2,3,4\}$	0.18
A2	$\{0,2\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2,3\}$	0.18
A3	$\{0,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	0.32
A4	$\{0,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2\}$	0.32
A5	$\{0,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2\}$	0.32
A6	$\{0,2\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2\}$	0.46
A7	$\{0,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2\}$	0.53
A8	$\{0,2\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2\}$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,2\}$	0.58
A9	$\{0,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1\}$	0.62
PREM	$\{0,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$		$\{0,1\}$	0.74
A10	$\{0,2\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	1.52

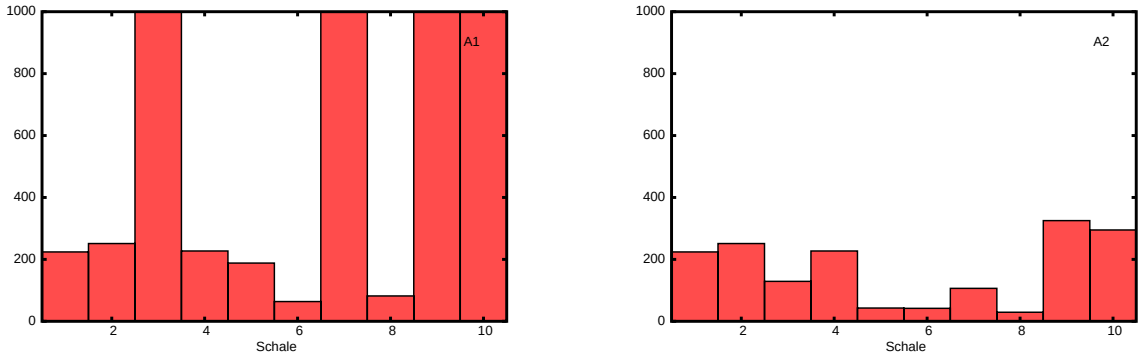

Abbildung 5.11: Gesamtenergie $\bar{E}$ der Koeffizienten für die Modelle A1 und A2.

In den Schalen des oberen Mantels muß der Polynomgrad reduziert werden, um eine zu große Zahl von Unbekannten[6] zu vermeiden, die aus den Daten nicht sicher bestimmbar sind und die sogar zu Instabilitäten führt (Modell $A3$). Das äußert sich sowohl in der Gesamtenergie der (alternierenden) Koeffizienten als auch in großen mittleren Fehlern, die um ein Vielfaches den Betrag der Koeffizienten übersteigen. Eine Reduzierung des Polynomgrades im oberen Mantel wirkt sich nur geringfügig auf die Genauigkeit aus, stabilisiert aber die Lösung deutlich (Modell $A4$, Abbildung 5.10).

Weiterhin zeigt sich, daß die Koeffizienten in der Übergangszone zwischen Kern und Mantel (Schale 3) nur sehr ungenau bestimmbar sind. Eine Reduzierung des Polynomgrades auch in diesem Bereich (Modell $A5$) führt zu einer kaum schlechteren Anpassung an die Daten, dafür aber zu einer spürbaren Verringerung der mittleren Fehler der Koeffizienten. Der Übergang auf lineare Funktionen in diesen Bereichen (Modell $A9$) ergab jedoch einen Einbruch in der Qualität der Anpassung, die damit in der Größenordnung lag, die sich unter Verwendung der Dichtefunktion aus PREM ergibt[7]. Die Einführung eines linearen Terms in der Dichtefunktion kommt somit für die Modellbildung nicht in Betracht, da einerseits eine lineare Funktion keine gute Anpassung ermöglicht und bei einer Erweiterung mit höheren Potenzen Probleme mit der Stabilität der Lösung auftreten, wie aus den überdurchschnittlich großen Werten für $\bar{E}$ und $\bar{D}$ (Tabelle 5.5) hervorgeht.

Tabelle 5.5: Stabilitätskriterien für die Modelle mit allgemeinen Polynomen.

Modell	$\bar{E}$	$\bar{D}$	$\bar{N}$	$\overline{\Delta N}$	s_0 $[km^2/s^2]$
A8	1000	0.11	0.00	0.02	0.57
A7	1060	20.19	0.13	1.13	0.53
G2	1080	0.33	0.06	0.75	**0.14**
A9	1170	0.09	0.00	0.01	0.62
PREM	1190	—	—	—	0.74
A10	1460	7.47	0.75	8.23	1.52
A2	1670	0.89	0.09	1.00	0.18
A6	1980	20.47	0.05	0.45	0.46
A5	2700	3.06	0.17	1.79	0.32
A4	2850	12.71	0.25	1.79	0.32
A1	11440	503.52	3.82	22.29	0.18
A3	16740	1518.64	24.10	196.96	0.32

Eine andere Möglichkeit, einen Polynomansatz zu formulieren, besteht in der Erweiterung der Funktion

[6] dies kann in gewissem Sinne auch als eine Überparametrisierung aufgefaßt werden

[7] Unter Berücksichtigung der nichtsignifikanten Abweichungen von $\eta = 1$ ist die Darstellung aus PREM im unteren Mantel und im Kern um ein Vielfaches besser, siehe Kapitel 4.2.1.

von Roche sowohl durch gerade als auch ungerade Terme höheren Grades. Nur allein ein zusätzlicher Term dritter Potenz (Modell $A10$) ergibt im unteren Mantel und äußeren Kern keine ausreichend gute Darstellung der seismischen Geschwindigkeiten. Wird jedoch ein Term vierten Grades hinzugefügt, verringert sich die Residuenquadratsumme deutlich (Modelle $A1$, $A2$). Jedoch gilt auch hier wieder, daß in den Schalen der Übergangszone und des oberen Mantels dadurch eine Überparametrisierung auftritt, was sich in einem starken Ansteigen von Energie und mittleren Fehlern bemerkbar macht, während eine nur unwesentlich bessere Anpassung erreicht wird (Modell $A1$, Abbildung 5.11).

Als einzige Alternative zur Darstellung der seismischen Geschwindigkeiten durch die Parametrisierung $G2$ kann somit nur das Modell $A2$ betrachtet werden. Allerdings ist die Repräsentation der seismischen Daten mit diesem Ansatz deutlich schlechter, und die Quadratsumme der Residuen dieser Lösung fast doppelt so groß. Weiterhin ist festzustellen, daß die Energie der Koeffizienten der Lösung $G2$ insbesondere in der problematischen Schale des unteren Mantels sowie in einigen Schalen des oberen Mantels deutlich geringer ausfällt, der Wert $\bar{E}$ für das Modell $A2$ ist demzufolge deutlich größer. Sowohl vom physikalischen als auch vom praktischen Standpunkt aus stellte sich somit die Parametrisierung der Dichte durch eine Funktion nur mit geraden Potenzen des Radius als die zweckmäßigste Variante heraus.

5.3 Modellabstimmung auf Frequenzen der Eigenschwingungen

Die bisherige Modellierung basiert ausschließlich auf den Geschwindigkeiten der seismischen Raumwellen in Form des seismischen Parameters Φ unter Verwendung der Williamson-Adams-Gleichung (4.29) und unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen zur Festlegung der Absolutwerte der Dichte. Im folgenden sollen die Differenzen zu den bekannten Frequenzen der Eigenschwingungen untersucht werden und ggf. eine Modellabstimmung erfolgen.

Die Berechnung der Eigenfrequenzen eines gegebenen Modells für die Dichte, die elastischen Parameter sowie für die Dämpfungswerte Q erfolgt durch die numerische Lösung des Eigendifferentialgleichungssystems (1.46) bzw. (1.49) für eine Reihe diskreter Werte. Für die numerisch aufwendigen Berechnungen wurde auf das Programm MINOS von F. Gilbert und G. Masters (Laske et al. 2003) zurückgegriffen, das über das Internet frei zugänglich ist.

Die Rechnungen wurden für die Modelle HA2-327-A und HA2-337-A durchgeführt, nachdem eine Trennung der seismischen Geschwindigkeiten nach der in Abschnitt 4.2.4 vorgestellten Vorgehensweise auf der Grundlage der Poisson-Zahl vorgenommen wurde. Beide Modelle wurden zum Zwecke der Berechnung der Eigenfunktionen und Eigenfrequenzen durch 228 Werte diskretisiert. Weiterhin wurden dem Modell die Dämpfungswerte (Q-Werte) aus PREM zugeordnet. Der Vergleich der auf diese Weise berechneten Eigenfrequenzen wurde mit synthetischen Eigenfrequenzen aus PREM durchgeführt. Dies erschien im Hinblick darauf, daß die vorangegangenen Rechnungen ebenfalls mit synthetischen Daten durchgeführt wurden, am konsequentesten, auch wenn inzwischen zuverlässigere Eigenschwingungsdaten zur Verfügung stehen (Masters und Widmer 1995, Laske et al. 2003), da nur so die resultierenden Änderungen in der Dichte unmittelbar mit der Dichteverteilung aus PREM vergleichbar bleiben. Es ergeben sich erwartungsgemäß nur geringfügige Differenzen in den toroidalen Moden. Das ist damit zu begründen, daß diese Schwingungen hauptsächlich auf die Geschwindigkeiten V_S empfindlich sind und diese im Zuge der Modellierung gegenüber dem Ausgangsmodell nicht geändert wurden[8]. Bei den sphäroidalen Frequenzen konnten hingegen systematische Abweichungen festgestellt werden, wie aus Abbildung 5.12 hervorgeht. Daraus ist zu schlußfolgern, daß die Dichteverteilung nicht ausreichend mit den Eigenschwingungsdaten konform ist und angepaßt werden sollte.

Sind Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen für ein Modell bekannt und liegen Daten für die Eigenfrequenzen vor, können nach (3.39)

$$\delta\omega = \int_0^R \left(\tilde{M}_K \delta K + \tilde{M}_\mu \delta\mu + \tilde{M}_\rho \delta\rho \right) r^2 \, dr$$

die Änderungen δK, $\delta\mu$ und $\delta\rho$ aus den Differenzen der Eigenfrequenzen $\delta\omega$ berechnet werden. Die Kernfunktionen werden punktweise auf der Grundlage der diskreten Werte für die Eigenfunktionen berechnet; die Integration erfolgt numerisch. Die Bestimmung der Änderungen in den Parametern des Modells kann durch die Einführung einer Korrekturfunktion erfolgen, für die meist ein Polynom verwendet wird (Dziewonski und Anderson 1981, Montagner und Anderson 1989a, Montagner und Kennett 1996), da das Modell selbst in den allermeisten Fällen ohnehin auf einer Polynomdarstellung basiert. Wird eine von allgemeinen Polynomen abweichende Darstellung gewählt, sollten auch andere Ansätze in Betracht gezogen werden. Weiterhin soll davon ausgegangen werden, daß nur die Dichtefunktion an die Eigenfrequenzen angepaßt werden soll. Das ist im Rahmen der Untersuchungen konsistent, da lediglich die Dichte gegenüber dem

[8] Von den geringen Residuen innerhalb der Genauigkeit, verursacht durch die gemeinsame Modellierung von Dichte und seismischem Parameter sowie bei der Trennung von V_P und V_S, kann abgesehen werden.

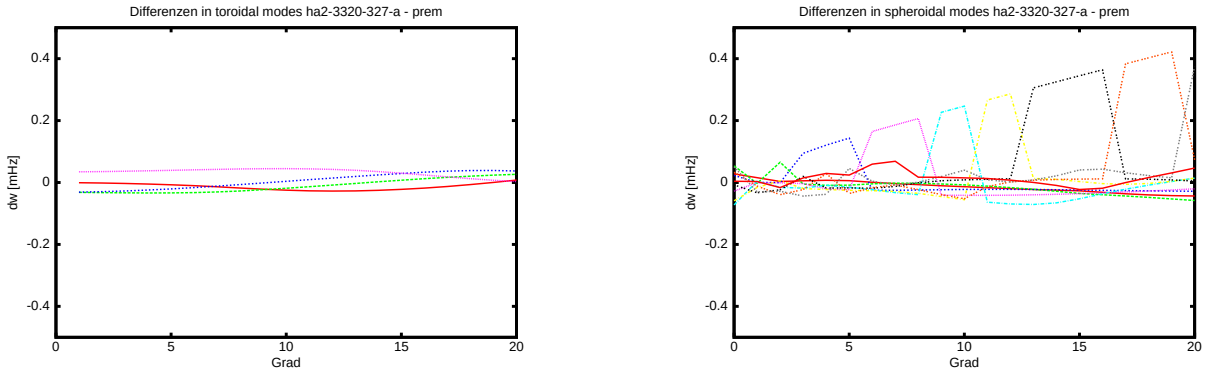

Abbildung 5.12: Residuen der Eigenfrequenzen für toroidale (links) und sphärodiale Moden aus Modell HA2-327-A. Die Linien stellen den Bezug zwischen Frequenzen gleicher Obertöne her.

Ausgangsmodell variiert wurde. Damit gilt der Zusammenhang (3.46)

$$\delta\omega = \int_0^R \tilde{M}_\rho \delta\rho \, r^2 \, dr$$

zwischen den Differenzen in den Eigenfrequenzen und den Änderungen der Dichte. Wird nun für ein schalenweises Modell innerhalb jeder Schale k für $\delta\rho$ eine radiale Korrekturfunktion $H_k(r; z_j)$ mit den unbekannten Parametern z_j definiert, so folgt aus (3.46)

$$\delta\omega = \sum_k \int_{r_k}^{r_{k+1}} \tilde{M}_\rho H_k(r; z_j^k) \, r^2 \, dr. \tag{5.37}$$

Für die weiteren Betrachtungen soll H_k als ein allgemeines Polynom

$$H_k = \sum_j z_j^k \, r^j \tag{5.38}$$

dargestellt werden; die vorgeschlagene Parametrisierung durch eine Funktion in geraden Potenzen des Radius ist darin enthalten. Da die Koeffizienten innerhalb einer Schale nicht vom Radius abhängen, kann (5.37) in der Form

$$\delta\omega = \sum_k \sum_j z_j^k \int_{r_k}^{r_{k+1}} \tilde{M}_\rho \, r^{j+2} \, dr = \sum_k \sum_j z_j^k \, I_j^k \tag{5.39}$$

geschrieben werden. Das Integral I_j^k kann mit der Dichte und den elastischen Parametern sowie den Eigenfunktionen des Ausgangsmodells numerisch berechnet werden, womit der beschriebene Zusammenhang linear bezüglich der Unbekannten z_j^k wird. Damit sind unmittelbar die Voraussetzungen für die Anwendung der in Abschnitt 5.1 angegebenen Ausgleichungsalgorithmen zur Bestimmung der Parameter z_j^k gegeben. Es muß darauf hingewiesen werden, daß der Ausdruck (5.37) bereits eine Linearisierung darstellt. Ein iteratives Vorgehen einschließlich der Neuberechnung von Eigenfunktionen und Kernfunktionen ist daher unumgänglich. Eine Berücksichtigung von Nebenbedingungen ist ebenfalls erforderlich. So sollen sich Gesamtmasse und Trägheitsmoment durch die Korrekturfunktion nicht verändern, beides Bedingungen, die analog zu (5.39) aufgestellt werden können. Darüber hinaus kann es erwünscht sein, an gewissen Diskontinuitäten Stetigkeit vorzuschreiben, also das Auftreten von Dichtesprüngen zu vermeiden. Weiterhin werden in der Literatur regularisierende Bedingungen vorgeschlagen, so z.B. in (Montagner und Kennett 1996) die Vorgabe einer aus petrologischen Untersuchungen ermittelten Normalgleichungsmatrix oder minimale Entfernung von den Ausgangsnäherungen. Im Rahmen der Untersuchungen wurde festgestellt, daß selbst für den Fall, daß die Dichte als einzige unbekannte Funktion eingeführt wird, ohne zusätzliche Bedingungen zur Stabilisierung nur eine konstante Funktion für H eine sinnvolle Lösung erbringt. Das gilt insbesondere für den oberen Mantel, wo sich ohne Regularisierungen sehr unwahrscheinliche Gradienten für die Dichte ergeben. Auch hier wurde

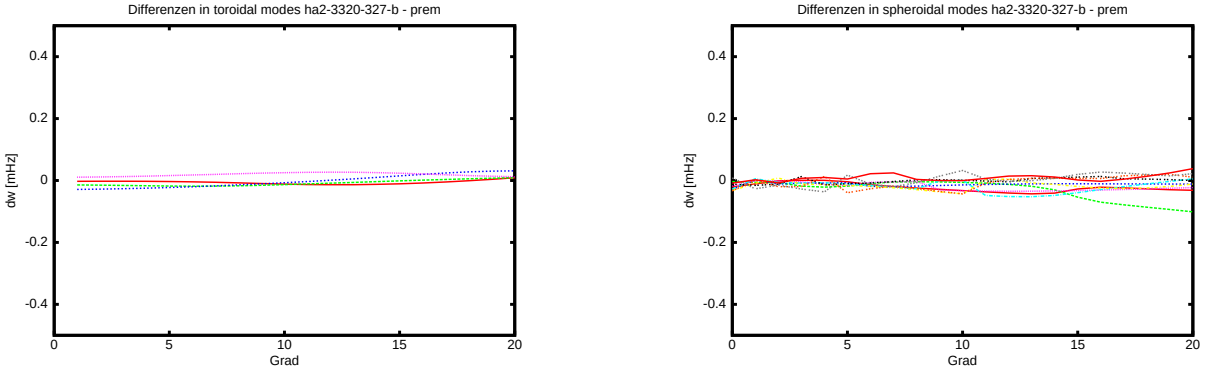

Abbildung 5.13: Residuen der Eigenfrequenzen für toroidale (links) und sphärodiale Moden nach der Ausgleichung (Modell HA2-327-B). Die Linien stellen den Bezug zwischen Frequenzen gleicher Obertöne her.

eine Abhängigkeit von der Parametrisierung ermittelt, so erwies sich die Funktion von Roche als wesentlich stabiler als eine lineare Korrekturfunktion. Da das Hauptproblem bei der Anwendung der Williamson-Adams-Gleichung die Bestimmung von Absolutwerten für die Dichte ist, wurden letztendlich nur konstante Änderungen der Dichte berücksichtigt, die allein für eine deutlich verbesserte Anpassung schon ausreichend waren (Abbildung 5.13). Es traten kleine Änderungen an den Beträgen der Dichtesprünge im oberen Mantel auf; entscheidend ist aber, daß der Dichtesprung an der Grenze zwischen innerem und äußerem Kern dadurch nachvollzogen werden konnte (Tabelle 5.6).

Tabelle 5.6: Dichtesprünge $\Delta\rho$ und deren Änderungen $D\Delta\rho$ nach der Anpassung an die Eigenschwingungen für die Modelle HA2-327-B und HA2-337-B

	HA2-327-B		HA2-337-B	
Radius	$\Delta\rho$	$D\Delta\rho$	$\Delta\rho$	$D\Delta\rho$
$[km]$	$[g/cm^3]$	$[g/cm^3]$	$[g/cm^3]$	$[g/cm^3]$
1221.5	0.66	0.66	0.68	0.68
3480.0	4.18	-0.08	4.32	-0.11
3630.0	0.00	0.00	0.00	0.00
5600.0	0.00	0.00	0.00	0.00
5701.0	0.38	0.06	0.35	0.12
5771.0	0.00	0.00	0.00	0.00
5971.0	0.27	-0.04	0.15	-0.08
6151.0	0.00	0.00	0.00	0.00
6291.0	0.00	0.00	0.00	0.00
6346.6	0.37	0.00	0.47	0.00
6356.0	0.30	0.00	0.30	0.00
6368.0	1.58	0.00	1.58	0.00

Mit den neu bestimmten Dichtesprüngen am inneren Kern und in 400 km Tiefe erfolgte anschließend eine Neuberechnung des gesamten Modells. Das Ergebnis sind die Modelle HA2-327-B und HA2-337-B (Anhang A.3 / A.7). Durch die geänderten Absolutwerte für die Dichte ändert sich jedoch geringfügig auch dessen Gradient, weshalb zwei Sprünge zur Anpassung an Gesamtmasse und Trägheitsmoment frei bleiben müssen. Daher wäre eine iterative Vorgehensweise grundsätzlich erforderlich. Wie aber aus Abbildung 5.13 ersichtlich wird, sind die Residuen zu den Eigenfrequenzen schon nach der ersten Iteration sehr gering, weshalb nur noch eine marginale Änderung der absoluten Dichtewerte in einem zweiten Schritt zu erwarten wäre. Auffällig ist jedoch der etwas veränderte Residuenverlauf (Abbildung 5.14) im äußeren Kern nach der Einführung des Dichtesprungs zwischen innerem und äußerem Kern im Vergleich zur vorangegangenen Lösung (Abbildung 5.9). Da aber die Abweichung kaum die Genauigkeit der seismischen Daten übersteigt und möglicherweise durch die Polynomdarstellung des Ausgangsmodells mitverursacht wird (s.a. Abbildung 4.2), sollte dem zunächst

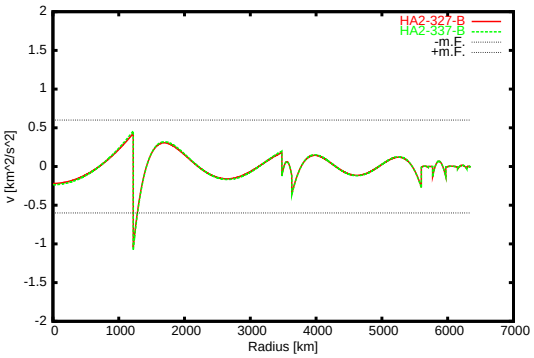

Abbildung 5.14: Residuen in Φ für Modelle HA2-327-B und HA2-337-B.

keine wesentliche Bedeutung beigemessen werden.

Im Ergebnis stimmen beide Modelle, sowohl das mit der Anfangsdichte $\rho_{M1} = 3.27\ g/cm^3$ als auch das mit $\rho_{M2} = 3.37\ g/cm^3$ ab einer Tiefe von $400\,km$ nahezu überein (Abbildung 5.15). Die Dichtesprünge dort haben sich etwas verringert, während sich die Sprünge in 670 km Tiefe für beide Modelle auf einen Wert nahe bei 0.35 g/cm^3 festgelegt haben (Tabelle 5.6). Damit ist die Dichte im unteren Mantel und im Kern für beide Modelle fast identisch mit PREM. Die aus den unterschiedlichen Annahmen zur Dichte unterhalb der Kruste resultierenden Massenunterschiede machen sich dann vor allem durch einen geänderten Sprung an der Kern-Mantel-Grenze bemerkbar.

Überraschend sind die nur geringen Unterschiede zu PREM im oberen Mantel (Abbildung 5.15, rechts), da in diesem Bereich nicht davon ausgegangen werden kann, daß die Voraussetzungen für diese einfache Form der Modellierung erfüllt sind. Aufgrund der nur kleinen Abweichungen zeigt sich, daß die vorgeschlagene Modellbildung für ein Referenzmodell grundsätzlich geeignet ist. Weiterhin ist festzustellen, daß die Modellierung unter Verwendung des in der Isostasie gebräuchlichen Wertes für die Dichte unterhalb der Mohorovičić-Diskontinuität von $\rho_{M1} = 3.27\ g/cm^3$ im Mittel besser mit der Dichteverteilung aus PREM übereinstimmt.

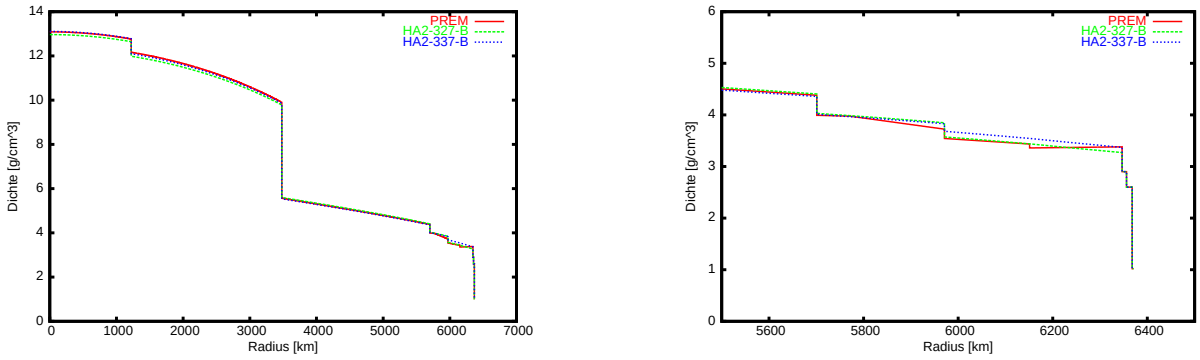

Abbildung 5.15: Dichte für Modelle HA2-327-B und HA2-337-B.

Durch die Untersuchungen konnte die Behauptung von Denis (Denis et al. 1998) nicht nachvollzogen werden, daß durch die Berücksichtigung des hydrostatischen Wertes (2.19) für den Trägheitskoeffizienten von $y = 0.3320$ der Sprung an der Diskontinuität zwischen innerem und äußerem Kern in Frage gestellt werden muß. Im Rahmen der Untersuchungen wurde das gesamte Dichtemodell neu berechnet, während bei Denis die Struktur des oberen Mantels aus vorhandenen, nichthydrostatischen Modellen übernommen worden ist. Es hat sich gezeigt, daß eine stabile Rekonstruktion der absoluten Dichte im unteren Mantel und Kern aufgrund einer Anpassung an die Frequenzen der Eigenschwingungen trotz unterschiedlicher Anfangsdichten unterhalb der Kruste möglich ist. Insbesondere der Sprung an der Grenze zwischen innerem und äußerem Kern resultiert zweifelsfrei aus einer solchen Anpassung, siehe auch (Masters 1979, Masters und Shearer 1995). Aller-

dings muß bei einer solchen Überlegung in Betracht gezogen werden, daß die Festlegung der radialen Lage der Diskontinuitäten maßgeblichen Einfluß auf die aus den Eigenschwingungsdaten bestimmte Dichte haben kann, wie die Untersuchungen von Bullen und Haddon (Bullen und Haddon 1967, Haddon und Bullen 1969) gezeigt haben. Da die Lage der Schalengrenzen vorwiegend aus dem Verhalten seismischer Raumwellen rekonstruiert wird, muß bei einer Beurteilung des Dichtesprungs im Kern sicherlich die Zuverlässigkeit dieser Festlegung mit in Betracht gezogen werden. Den hier getroffenen Aussagen zur Bestimmung der Dichtesprünge aus den Eigenschwingungsdaten liegt eine unveränderte Übernahme aus den jeweiligen Geschwindigkeitsmodellen zugrunde.

5.4 Möglichkeiten zur Berücksichtigung nichthydrostatischer Einflüsse

Die Berücksichtigung nichthydrostatischer Einflüsse in einem Dichtemodell kann auf zweierlei Weise erfolgen. Entweder wird eine grundsätzlich nichthydrostatische Relation zwischen Dichte und seismischen Geschwindigkeiten, z.B. das Gesetz von Birch (Abschnitt 3.1.4) oder die Zustandsgleichung von Anderson (Abschnitt 3.1.5 eingeführt, oder es müssen *a priori* Informationen über die Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes festgelegt werden. Letzteres kann nur basierend auf zusätzlichen Meßdaten oder aufgrund der Formulierung geeigneter Hypothesen erfolgen. Obwohl die Zielsetzung grundsätzlich in der Formulierung eines hydrostatischen Normal-Dichtemodells besteht, soll nachfolgend gezeigt werden, wie zusätzliche Informationen über mögliche Störungen berücksichtigt werden können.

5.4.1 Berücksichtigung der K-p-Hypothese von Bullen

Die Forderung von Bullen nach einer allmählichen Änderung der Inkompressibilität K mit steigendem Druck (K-p-Hypothese, Abschnitt 3.1.3) stellt eine plausible Hypothese zur Abschätzung von nichthydrostatischen Störungen in den tiefen Regionen der Erde dar. Die Hypothese ist aber aufgrund der Druckverhältnisse im oberen Mantel nicht anwendbar. Abbildung 5.16 zeigt die Relation zwischen K und p für das Modell HA2-3320-327-B, aus der klar erkennbar ist, daß die Änderung der Inkompressibilität mit dem Druck in weiten Bereichen eine fast stetige, lineare Funktion darstellt. Dementsprechend ist auch die radialen Änderung von dK/dp fast konstant. Sprunghafte Änderungen treten vor allem im oberen Mantel auf, da wegen des geringeren Druckes sowohl Veränderungen der Materialeigenschaften als auch Temperatureffekte großen Einfluß auf die Inkompressibilität haben.

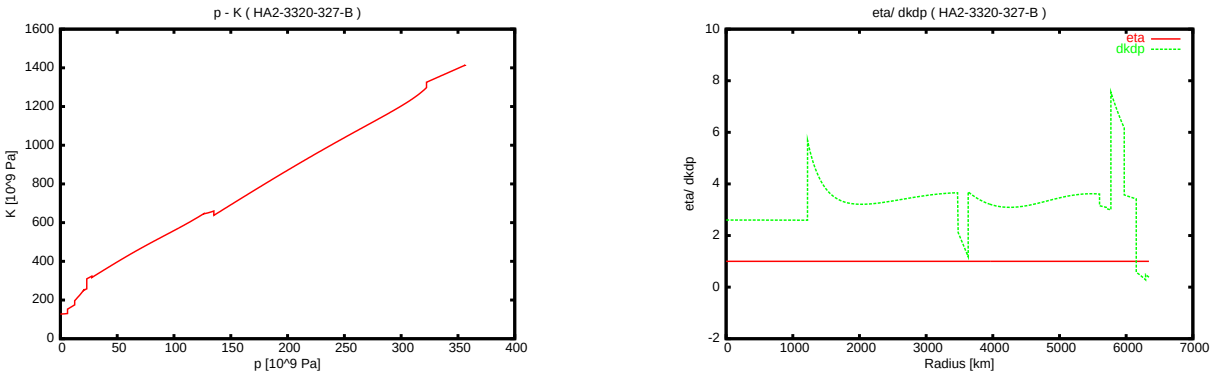

Abbildung 5.16: Änderung der Inkompressibilität K mit dem Druck p für das Modell HA2-3320-327-B.

Ausgehend von einem hydrostatischen Dichtemodell ($\eta = 1$) kann zusammen mit den seismischen Geschwindigkeiten aus der Beziehung (3.24)

$$\frac{dK}{dp} = 1 - \frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dr}$$

die Änderung der Inkompressibilität mit dem Druck berechnet werden. Da die Änderung der Schwere eine glatte und stetige Funktion des Radius ist, wird sofort ersichtlich, daß die Struktur von dK/dp unmittelbar vom Gradienten der seismischen Geschwindigkeiten und damit von der Zuverlässigkeit dieser Informationen abhängt. Insbesondere im Bereich der Kern-Mantel-Grenze (Zone D") stellt sich die Frage, ob die drastische Änderung des Gradienten, welche inzwischen ein Merkmal fast aller aktueller Geschwindigkeitsverteilungen ist, überhaupt signifikant aus den Daten rekonstruiert werden kann (Cleary 1974, Young und Lay 1987).

Schwierigkeiten in der Interpretation der Laufzeitkurven sowie die bewegte Topographie der Kern-Mantel-Grenze, die ausgeprägte, ungleichmäßige Abweichungen von der Kugelsymmetrie aufweist, führen zu großen Unsicherheiten bei der Bestimmung einer mittlerer globaler Geschwindigkeitsverteilung in dieser Region.

Aus Abbildung 5.16, rechts wird deutlich, daß der Wechsel des Geschwindigkeitsgradienten zu einem sprunghaften Verlauf von dK/dp in diesem Bereich führt. Sowohl oberhalb als auch unterhalb dieses Bereiches weist dK/dp fast gleichgroße Werte auf. Können Unsicherheiten der Geschwindigkeiten als maßgebliches Kriterium ausgeschlossen werden, kann diese sprunghafte Änderung auf chemische Inhomogenitäten bzw. nichtadiabatische Temperaturen zurückgeführt werden. Unter der Voraussetzung, daß die Inkompressibilität unter den dort herrschenden Druckverhältnissen nur noch unmaßgeblich von der chemischen Zusammensetzung und den Temperaturverhältnissen abhängt, postulierte Bullen eine stetige Fortsetzung zwischen beiden Schalengrenzen. Mit dieser Annahme kann aus (3.13)

$$\eta = \frac{dK}{dp} + \frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dr}$$

der Inhomogenitätsparameter η ermittelt werden, s. z.B. (Cleary 1974).

Im Rahmen der vorgestellten Parametrisierung ist es möglich, eine Stetigkeitsbedingung an den Schalengrenzen beruhend auf dem Ausdruck

$$\frac{dK}{dp} = \eta - \frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dr} \tag{5.40}$$

unmittelbar in die Modellierung als Nebenbedingung

$$\left(\frac{dK}{dp}\right)_k = \left(\frac{dK}{dp}\right)_{k+1} \tag{5.41}$$

für ausgewählte Schalenübergänge $k, k+1$ einzuführen. Aus den daraus resultierenden systematischen Residuen

$$v = v_L + \delta v = (a_v + b_v\, r) + \delta v, \tag{5.42}$$

die näherungsweise in einen linearen Hauptanteil $v_L = a_v + b_v\, r$ und den verbleibenden Rest δv zerlegt werden können, ist es möglich, auf die Änderung $\Delta\eta$ zu schließen, die notwendig ist, um die Systematik in der Residuen zu beseitigen. Kann δv im Rahmen der Genauigkeit vernachlässigt werden, gilt für die systematisch verfälschten Beobachtungen

$$\bar{\Phi} = \Phi + v_L$$

und damit auch

$$\frac{d}{dr}\bar{\Phi} = \frac{d}{dr}\Phi + \frac{d}{dr}v_L = \frac{d}{dr}\Phi + b_v\,.$$

Unter Verwendung der Beziehung (3.13) folgt daraus

$$\bar{\eta} = \frac{dK}{dp} + \frac{1}{g}\left(\frac{d\Phi}{dr} + b_v\right)$$

bzw.

$$\Delta\eta = \eta - \bar{\eta} = -\frac{1}{g}\, b_v\,. \tag{5.43}$$

Da die Schwerkraft in diesem Bereich eine fast konstante Funktion des Radius ist, ergibt sich ein nahezu linearer Verlauf für $\Delta\eta$, so daß auch $\bar{\eta}$ als lineare Funktion des Radius dargestellt werden kann.

Da die Schwerkraft g an den Schalengrenzen immer stetig sein muß und somit $g_k = g_{k+1}$ gilt, bedeutet die Einführung des Kriteriums (5.41) für ein hydrostatisches Modell ($\eta = 1$) implizit die Stetigkeit der Gradienten von Φ

$$\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_k = \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{k+1}$$

an diesen Übergängen. Das hat unmittelbar Einfluß auf die Funktion, mit der die seismischen Daten dargestellt werden. So hat sich gezeigt, daß die Dichtefunktion mit geraden Potenzen des Radius nicht die notwendige Flexibilität aufweist, um eine Anpassung an Φ unter Berücksichtigung einer derartigen Zwangsbedingung zu ermöglichen. Jedoch erweist sich die Einführung der Dichtefunktion entsprechend (4.44), (siehe auch Tabelle 4.2)

$$\rho = d_0 + d_2\, r^2 + e\, r^{-\lambda}$$

mit einem Term mit variablem Exponenten (Darwin-Term) als eine zu diesem Zwecke geeignete Darstellung innerhalb der Schale D". Die Bestimmung des Exponenten λ stellt ein hochgradig nichtlineares Problem dar

und kann nicht unter Verwendung einer Linearisierung durchgeführt werden. Deshalb wurde nach eingehenden Untersuchungen die Festlegung $\lambda = 1$ getroffen.

Weiterhin ist bereits aus dem Verlauf von dK/dp in Abbildung 5.17 erkennbar, daß im unteren Bereich des äußeren Kerns eine steile Änderung auftritt, die offenbar im Zusammenhang mit der gewählten Parametrisierung steht, da an gleicher Stelle etwas auffälligere Residuen (Abbildung 5.14) bereits festgestellt wurden. Damit wird deutlich, wie groß die Wechselbeziehung zwischen der Forderung aus der K-p-Hypothese und der Parametrisierung ist. Durch Residuen, die kaum die Zuverlässigkeit der Daten übersteigen, können - bedingt durch die starken Auswirkungen auf den Gradienten - Widersprüche gegenüber einem plausiblen Verlauf von dK/dp verursacht werden. Im Hinblick auf die K-p-Hypothese sollte also eine geringfügige Modifikation der Parametrisierung vorgenommen werden. Auch in diesem Falle hat sich die Hinzunahme eines kleinen Korrekturtermes $e\,r^{-\lambda}$ als günstig erwiesen, woraus die Modelle HA2-3320-327-C bzw. HA2-3320-337-C (Anhang A.4 / A.8) hervorgegangen sind. Das Ergebnis der Bestimmung von η mit dieser Parametrisierung zeigt Abbildung 5.17. Bedingt durch den großen Wert für η ist vor allem die deutlich stärkere Dichtezunahme oberhalb der Kern-Mantel-Grenze gegenüber der Dichteverteilung aus PREM auffällig.

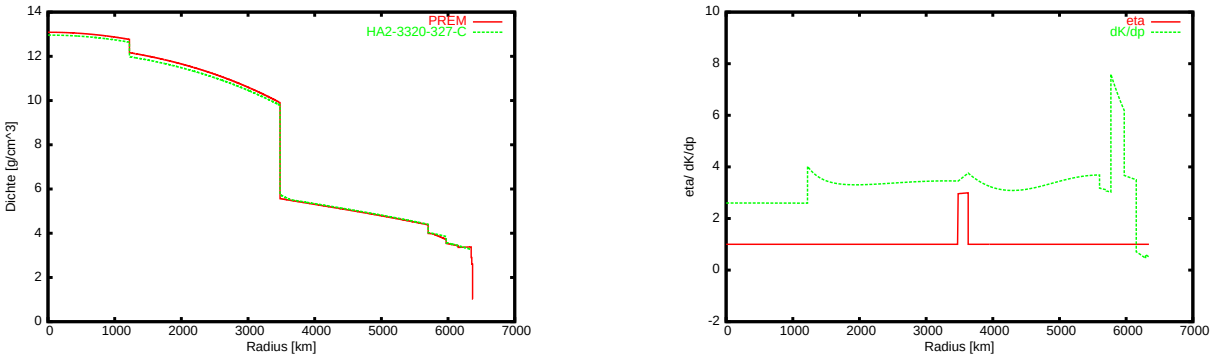

Abbildung 5.17: Dichte im Vergleich zu PREM sowie dK/dp für das Modell HA2-3320-327-C unter Berücksichtigung von η aus der K-p-Hypothese.

Die Anwendung der K-p-Hypothese läßt also grundsätzlich die Bestimmung von η in den tiefen Regionen der Erde zu. Allerdings muß vorausgesetzt werden können, daß einerseits die seismischen Geschwindigkeiten eine ausreichende Zuverlässigkeit aufweisen, andererseits der Einfluß der Parametrisierung die Berechnung von dK/dp nicht dominiert.

5.4.2 Berücksichtigung nichthydrostatischer Störungen im oberen Mantel

In Abschnitt 3.1.5 konnte gezeigt werden, daß die Modellierung des oberen Mantels in PREM in weitgehender Übereinstimmung mit der seismischen Zustandsgleichung von Anderson steht.

Aus dem Zusammenhang (4.30)

$$\Phi = -\eta \,\frac{g}{d\rho/dr}\,\rho\,(1-\delta)$$

können unter Vernachlässigung einer Unterscheidung zwischen dem Einfluß von chemischen Inhomogenitäten η und nichtadiabatischen Temperaturen δ die Abweichungen von einer hydrostatischen Modellierung insgesamt mit der Beziehung

$$\eta = \frac{\Phi}{g\,\rho}\,\frac{d\rho}{dr} \tag{5.44}$$

allein durch den Parameter η beschrieben werden. Aus den seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte kann auf diese Weise der Inhomogenitätsparameter bestimmt werden; dK/dp ergibt sich dann aus (5.40).

Hinsichtlich PREM wird damit zum einen deutlich, daß die K-p-Hypothese von Bullen unberücksichtigt geblieben ist (Abbildung 5.18). Zum anderen gibt es große Schwankungen für η im oberen Mantel, die aus den Eigenschaften der Dichteverteilung resultieren. Insbesondere werden die negativen Werte bis zu einer Tiefe von 220 km durch den positiven Gradienten der Dichte in diesem Bereich verursacht. Nach den Kriterien aus Tabelle 3.1 (Abschnitt 3.1.2) würde dies mechanische Instabilitäten vor allem in diesem Bereich bedeuten. Inwiefern die Werte für η überhaupt physikalisch plausibel begründet werden können, bleibt an dieser Stelle offen.

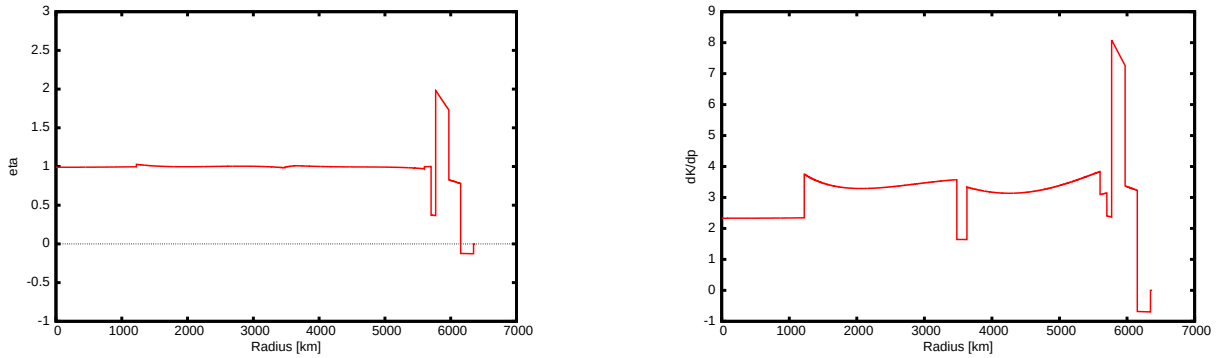

Abbildung 5.18: Bullen-Parameter η und dK/dp für PREM.

Exemplarisch kann jedoch gezeigt werden, daß im Rahmen der vorgeschlagenen Parametrisierung durchaus auch solche Störungen berücksichtigt werden können. Im Unterschied zu den empirischen Relationen müssen diese jedoch klar definiert werden, wie das z.B. durch die Einführung des Bullen-Parameters im Zusammenspiel mit zusätzlichen Informationen möglich ist.

Auf diese Weise wurden in Erweiterung der Festlegung von η aus Abschnitt 5.4.1 die Werte aus PREM im oberen Mantel nach einer Anpassung an eine lineare Funktion zur Modellierung der Dichte verwendet. Das Ergebnis der Anpassung an den seismischen Parameter und die Frequenzen der Eigenschwingungen sind die Modelle NHA2-3320-327 bzw. NHA2-3320-337 (Abbildung 5.19 und Anhang A.5/A.9). Beide Modelle unterscheiden sich gegenüber PREM im wesentlichen nur in der Anfangsdichte unterhalb der Kruste und dem sich daraus ergebenden Niveau im Bereich bis 400 km Tiefe sowie in dem stärkeren Dichtegradienten in der Region D".

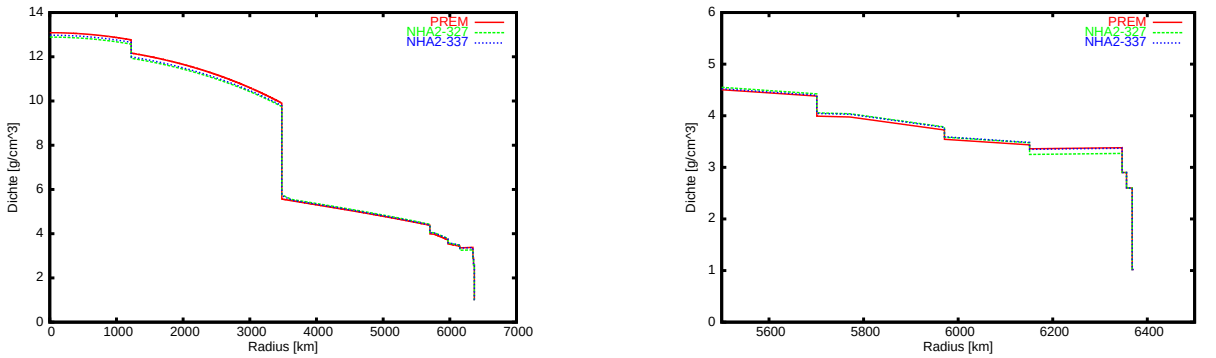

Abbildung 5.19: Dichte für Modelle NHA2-327 und NHA2-337 unter Berücksichtigung nichthydrostatischer Störungen.

Die Residuen weisen nur minimale Beträge auf (Abbildung 5.20), und sowohl im unteren Mantel als auch im äußeren Kern zeigt dK/dp einen durchgängig fast konstanten Verlauf. Die geringfügigen systematischen Abweichungen können auch hier wieder als Einfluß der gewählten Funktion auf die Berechnung von dK/dp verstanden werden, wie durch einen Vergleich mit dem Residuenbild erkennbar wird. Es zeigt sich also, daß die Bestimmung von dK/dp sehr stark von der radialen Ableitung des seismischen Parameters geprägt und demzufolge auch von kleinen, systematischen Resteffekten aus der Parametrisierung beeinflußt wird.

Eine Gegenüberstellung von hydrostatischer und nichthydrostatischer Modellierung im oberen Mantel kann vorgenommen werden, wenn basierend auf der seismischen Zustandsgleichung von Anderson (3.29)

$$\frac{\rho}{\bar{M}} = c\ \Phi^n$$

ein Vergleich der mittleren Atommasse

$$\bar{M} = \frac{\rho}{c\ \Phi^n} \tag{5.45}$$

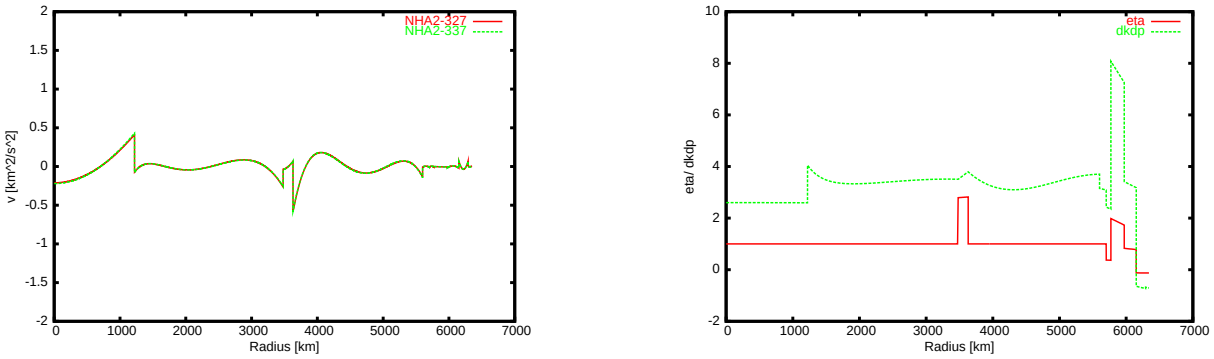

Abbildung 5.20: Residuen in Φ und dK/dp für das Modell NHA2-3320-327 unter Berücksichtigung von η aus PREM und der K-p-Hypothese.

zwischen beiden Varianten durchgeführt wird. Der Koeffizient c wurde in verschiedenen Laboruntersuchungen bestimmt (siehe Tabelle 3.3) und der Exponent n wurde von Anderson für den Mantel mit $n = 1/3$ angegeben (siehe Abschnitt 3.1.5). Damit ist es möglich, die mittlere Atommasse für die unterschiedlichen Dichteverteilungen zu berechnen (Abbildung 5.21).

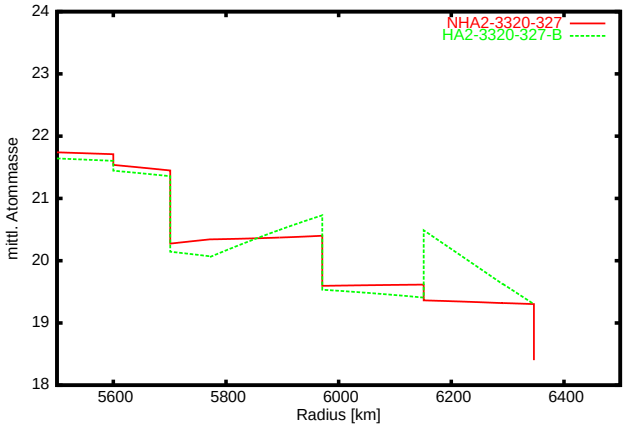

Abbildung 5.21: Mittlere Atommasse im oberen Mantel aus der Zustandsgleichung von Anderson für das hydrostatische Modell HA2-3320-327-B und das nichthydrostatische Modell NHA2-3320-327.

Während für das nichthydrostatische Modell in den jeweiligen Schalen die mittlere Atommasse nahezu konstant bleibt, ist für den Fall einer hydrostatischen Berechnung (Modell HA2-3320-327-B) im Bereich bis zu einer Tiefe von 220 km ein starkes Ansteigen festzustellen, während sich zwischen 400 und 600 km Tiefe die Atommasse wieder verringert. Im Hinblick auf die zu vermutenden Änderungen von Material und Phasenzustand erscheint jedoch eine konstante Atommasse in den einzelnen Schalen ebenso unwahrscheinlich zu sein. Andererseits sind gerade in den oberen Schichten nichtadiabatische Temperaturänderungen zu erwarten, die auch in der Relation von Anderson unberücksichtigt bleiben. Eine abschließende Beurteilung muß an dieser Stelle offen bleiben, aber es kann festgestellt werden, daß im Falle fehlender oder nur unsicherer Informationen über Dichtestörungen die Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes eine zwar vereinfachte, dafür aber plausible Möglichkeit einer stabilen Bestimmung der Dichte aus seismischen Daten darstellt.

5.5 Ein generelles Konzept

Die derzeitigen Referenzmodelle basieren auf der Bestimmung von drei unabhängigen Funktionen für die seismischen Geschwindigkeiten und die Dichte, für die in der Regel ein empirischer Polynomansatz eingeführt werden. Eine eindeutige Festlegung der Koeffizienten dieser Polynome kann nicht vorgenommen werden, ohne daß zusätzliche Kriterien eingeführt werden. In PEM (Dziewonski et al. 1975) sind das Krümmungsbedingungen bezüglich der seismischen Geschwindigkeiten; so wird ein glattes, monotones Fallen der Absolutbeträge der ersten Ableitungen mit zunehmender Tiefe als ein allgemeines Kriterium angegeben. Hinsichtlich der Auswahl der Bedingungen schreiben (Dziewonski et al. 1975): „wir nehmen eine gewisse Hypothese in Bezug auf die Glattheit der Verteilung der seismischen Parameter an; die beobachteten Daten werden mit allen Freiheitsgraden invertiert, die diese Hypothese erlaubt; nach der Inversion werden die Residuen untersucht - wenn diese akzeptabel sind, wird die Hypothese als plausibel betrachtet - wenn diese die erlaubte Grenze überschreitet, muß die Hypothese verworfen werden.“. Hinsichtlich der Bestimmung der Dichte wird die optionale Einführung der Williamson-Adams-Gleichung als „zusätzliche Möglichkeit“ mit der Begründung genannt, daß die meisten Modelle nur eine geringe Abweichung davon erkennen lassen.

Eine andere Möglichkeit, die Lösung zu stabilisieren, besteht in der Forderung nach einer minimalen Änderung der Ausgangsnäherungen. Betrachtet man die Gegenüberstellung für PREM (Dziewonski und Anderson 1981) zwischen den *a priori* angenommenen Werten für die Dichte und den Resultaten der Inversion in Tabelle 5.7, wird sofort erkennbar, daß die eingeführten Ausgangsnäherungen im Zuge der Ausgleichung nur minimal geändert wurden.

Tabelle 5.7: Festlegungen für das Startmodell von PREM und zugehörige Werte nach der Inversion.

		a priori $[g/cm^3]$	*a posteriori* $[g/cm^3]$	Differenz $[g/cm^3]$
Dichtesprung am inneren Kern	$\Delta\rho_{ICB}$	-0.50	-0.60	-0.10
Dichte an Kern-Mantel-Grenze	ρ_{CMB}	5.55	5.57	0.02
Dichte unterhalb der Kruste	ρ_M	3.32	3.38	0.06
Dichte im Ursprung	ρ_0	12.97	13.09	0.12
Dichtesprung in 670km Tiefe	$\Delta\rho_{670}$	-0.35	-0.39	0.04

In Abschnitt 2.2.3, siehe auch Abbildung 2.10, wurde ebenfalls festgestellt, daß die Änderungen sowohl der Dichte als auch des seismischen Parameters in CORE11 gegenüber dem Ausgangsmodell PREM minimal und systematisch sind, weshalb auch hier keinesfalls von einer unabhängigen Bestimmung der Dichte im Rahmen der Modellierung gesprochen werden kann. Zieht man in Betracht, daß für die Konstruktion der Startmodelle oftmals fragwürdige Annahmen getroffen werden, mit denen mitunter kaum die Bedingungen für Gesamtmasse und Trägheitsmoment zu erfüllen sind (Montagner und Anderson 1989a), erscheint die Vorgabe einer minimalen Änderung gegenüber den Ausgangsmodellen nicht haltbar.

Darüber hinaus wurde bereits in Abschnitt 3.1 auf die überraschend gute Übereinstimmung der Dichteverteilung aus PREM mit den Gesetzen von Birch und Anderson im oberen Mantel hingewiesen, woraus geschlossen werden kann, daß in diesem Bereich eine unabhängige Bestimmung der Dichte nur unter Berücksichtigung einer direkten Beziehung zu den seismischen Geschwindigkeiten möglich war.

Weitere Fragen ergeben sich bezüglich der Parametrisierung dieser Modelle. Abgesehen von der Überparametrisierung durch die Einführung von drei unabhängigen Funktionen entbehrt der empirische Polynomansatz jeglicher physikalischer Begründung. Auch die Entscheidung über den Grad der Polynome wird offenbar wesentlich von Stabilität der Lösung abhängig gemacht[9].

Da aus diesen Gründen die existierenden Modellierungen für die Festlegung eines Normal-Dichtemodells für ungeeignet gehalten werden, soll abschließend eine Möglichkeiten skizziert werden, wie sich die hier vorgestellte Modellierung in ein Gesamtkonzept eingliedern läßt.

Der Modellierung liegt grundsätzlich der Zusammenhang zwischen dem seismischen Parameter und der Dichte auf der Basis der Williamson-Adams-Gleichung zugrunde. Durch die Wahl einer geeigneten Dichtefunktion können so Dichte *und* seismischer Parameter adäquat und eindeutig beschrieben werden. Damit bilden die Größen Φ und ρ den Kern der Modellierung. Um auch die Laufzeiten seismischer Wellen darstellen

[9]Dziewonski und Anderson schreiben dazu: „Der Grad der Polynome, der benötigt wird, um die Daten zu erfüllen, wurde durch ausprobieren festgelegt“ (Dziewonski und Anderson 1981); Montagner und Anderson geben an, daß ggf. „der Parameter-Raum ein wenig vergrößert werden muß“, um den Beobachtungen gerecht zu werden (Montagner und Anderson 1989a).

zu können, wurde in Kapitel 4.2.4 mit den Gleichungen (4.58)

$$\begin{aligned} V_P &= \sqrt{3\,\Phi\frac{1-\sigma}{1+\sigma}} \\ V_S &= \sqrt{\frac{3}{2}\,\Phi\frac{1-2\sigma}{1+\sigma}} \end{aligned}$$

ein Zusammenhang zu den seismischen Geschwindigkeiten V_P und V_S aufgezeigt. Auf der Grundlage dieses Zusammenhanges können allein durch Einführung einer zweiten Funktion, der radialen Änderung der Poisson-Zahl σ, beide Geschwindigkeiten beschrieben werden. Da die Poisson-Zahl eine nahezu konstante Größe innerhalb der einzelnen Schalen ist, reicht ein simpler empirischer Ansatz auf der Grundlage einer linearen oder quadratischen Funktion für eine adäquate Darstellung vollkommen aus. Ein Zusammenhang zu den Laufzeiten seismischer Raumwellen kann damit unter Verwendung der bekannten Beziehungen zwischen Geschwindigkeiten und Laufzeiten hergestellt werden, womit eine Bestimmung der Parameter für die Dichtefunktion (resp. der Funktion des seismische Parameters) und der Poisson-Zahl direkt anhand der Laufzeiten seismischer Wellen möglich sein sollte.

Da in neueren Veröffentlichungen, z.B. (Montagner und Kennett 1996), die Ansicht vertreten wird, daß aus den Frequenzen der Eigenschwingungen nicht auf die seismischen Geschwindigkeiten geschlossen werden sollte, um Inkompatibilitäten mit den Laufzeiten seismischer Raumwellen zu vermeiden, und aus anderen Arbeiten entnommen werden kann, daß die Bestimmung von Dämpfungswerten und Anisotropie aus diesen Daten im Vordergrund steht (Widmer et al. 1991, Widmer 1991), erscheint es sinnvoll, eine Trennung der Beiträge von seismischen Geschwindigkeiten und Eigenfrequenzen auch hinsichtlich der Dichte einzuführen. Mit dem seismischen Parameter kann die Form der Dichtefunktion innerhalb einzelner Schalen unter plausiblen physikalischen Annahmen beschrieben werden, während die Absolutbeträge aus den Eigenschwingungsdaten rekonstruierbar sind.

Das Konzept besteht dann darin, die Parameter der Dichtefunktion sowie der Funktion für die Poisson-Zahl in einem ersten Schritt direkt aufgrund der seismischen Laufzeiten zu ermitteln. In einem zweiten Schritt kann dann eine verbesserte Anpassung an die Eigenschwingungsdaten durch die Bestimmung von Dichtesprüngen an den Schalengrenzen sowie der Dämpfungswerte erfolgen[10]. Wie sich in Abschnitt 5.3 gezeigt, führt die Einführung einer konstanten Änderung der Dichte auf ein stabiles Ausgleichungsproblem, dessen Lösung zu einer signifikanten Reduzierung der Residuen für die Eigenfrequenzen führt. Möglicherweise erlaubt diese Vorgehensweise auch die gleichzeitige Bestimmung einer einfachen (konstanten) Funktion für die Q-Werte.

Ein neuer Aspekt hinsichtlich der Dichtebestimmung aus Eigenschwingungsdaten kann in dem Nachweis der Aufspaltung niederfrequenter Moden aufgrund der Erdrotation aus den Meßdaten hochempfindlicher supraleitender Gravimeter gesehen werden (Zürn et al. 2000). Aus dem daraus bestimmbaren Zeeman-Parameter ergibt sich ein unmittelbarer Zusammenhang zur Dichte, der im Rahmen weiterführender Betrachtungen berücksichtigt werden sollte (Widmer-Schnidrig 2002).

Die so gewonnenen Angaben zum absoluten Verhalten der Dichte an den Schalengrenzen kann nun als Nebenbedingung in die abschließende Neuberechnung des seismischen Parameters Φ (sowie der Poisson-Zahl σ) aus den Laufzeiten eingeführt werden. Wie sich gezeigt hat, ändert sich dadurch die Anpassung an die Eigenfrequenzen nur noch unwesentlich, weshalb eine weitere iterative Fortführung nicht notwendig sein wird.

Der Vorteil einer solchen Vorgehensweise liegt auf der Hand: Durch die Einführung einer gemeinsamen Darstellung von Dichte und seismischem Parameter durch eine Funktion ist nur noch eine zweite Größe (Poisson-Zahl) zur Trennung der beiden Geschwindigkeiten zu berücksichtigen. Damit sind im Gegensatz zu derzeitigen Modellen lediglich zwei Funktionen zur Darstellung aller drei Größen (ρ, Φ, σ) bzw. (ρ, V_P, V_S) notwendig, wodurch eine Überparametrisierung ausgeschlossen und die Lösung eindeutig ist. Wird weiterhin auf die strenge Unterscheidung des Beitrages der einzelnen Beobachtungen geachtet, ist zu erwarten, daß sich eine stabile Lösung aus den vorhandenen Daten ergibt.

[10] in der Annahme, daß auf die Einführung von Anisotropie im Rahmen eines globalen Referenzmodells verzichtet werden kann

Schlußfolgerungen und Ausblick

Aus globaler Sicht betrachtet kann kaum erwartet werden, daß im Inneren der Erde größere Abweichungen von einem hydrostatischen Gleichgewichtszustand auftreten. Auch existieren nur wenige gesicherte Informationen zur quantitativen Beschreibung derartiger Abweichungen. Zu diesen gehören einerseits laterale Anomalien, die durch das Störpotential des äußeren Erdschwerefeldes sowie durch isostatische Effekte nachgewiesen werden können. Andererseits zählen dazu radiale Abweichungen, die aufgrund des Unterschiedes zwischen dem aus der Präzessionskonstanten und dem aus der hydrostatischen Theorie abgeleiteten Trägheitsmoment nachweisbar sind und insbesondere im oberen Mantel vermutet werden. Darüber hinaus zeigen sich für die bestehenden Geschwindigkeitsverteilungen Widersprüche zwischen empirischen Relationen zur Dichte (Gesetz von Birch, Zustandsgleichung von Anderson) und einer hydrostatischen Modellierung. Diese sind aber unmittelbar von der Zuverlässigkeit der empirischen Relationen abhängig, die sich vielfach auf Meßergebnisse unter Laborbedingungen gründen.

Die Modellierung einer Normal-Dichteverteilung unter der Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes erscheint gerechtfertigt, solange keine maßgeblichen Abweichungen *a priori* vorgegeben werden können. Nachweisbare Abweichungen können als Störungen betrachtet werden und sollten erst dann in die Modellierung einfließen, wenn unabhängige, gesicherte Informationen dies tatsächlich erforderlich machen.

Mit der Einführung der Williamson-Adams-Gleichung (Abschnitt 3.1.1) als Grundlage einer hydrostatischen Modellierung besteht ein unmittelbarer Bezug zwischen dem seismischen Parameter Φ und der Dichte ρ. Unter Verwendung dieser Beziehung ist die vollständige Beschreibung der elastischen Eigenschaften eines isotropen Mediums allein durch die Hinzunahme einer weiteren Funktion möglich. Wird für die zweite Funktion die Poisson-Zahl σ eingeführt, ergeben sich die Geschwindigkeiten von Scher- und Kompressionswellen damit unmittelbar aus dem seismischen Parameter. Da die Poisson-Zahl innerhalb der einzelnen Schalen nahezu konstant ist, reicht eine Darstellung durch eine lineare oder quadratische Funktion des Radius aus (Abschnitt 4.2.4). Somit kann ein isotropes Medium durch die drei Größen Φ, σ und ρ und nur zwei voneinander unabhängige Funktionen eindeutig beschrieben werden.

Eine adäquate Darstellung des seismischen Parameters durch die Dichte setzt jedoch voraus, daß eine geeignete Parametrisierung für die Funktion der Dichte verwendet wird. Allein aus einer Beziehung zwischen Dichte und seismischen Geschwindigkeiten ist die Ableitung einer solchen Parametrisierung nicht möglich, solange eine Funktion für die Änderung der seismischen Geschwindigkeiten mit dem Radius bzw. eine Druck-Dichte-Relation nicht vorliegt. Ausgehend von einer allgemeinen Hypothese für eine Druck-Dichte-Relation hat sich gezeigt, daß es unter Berücksichtigung der Poisson-Gleichung möglich ist, eine Differentialgleichung für die Dichte als Funktion des Radius für den Fall hydrostatischen Gleichgewichtes zu formulieren. Für einige historische Dichtegesetze existieren Lösungen dieser Differentialgleichung (Abschnitt 4.1.1), die dann als Grundlage einer Parametrisierung betrachtet werden können (Abschnitt 4.2.2). Durch die Erweiterung bzw. Verallgemeinerung dieser Funktionen wurde die direkte Beschreibung des seismischen Parameters Φ durch die Funktion der Dichte auf der Basis der Williamson-Adams-Gleichung (Abschnitt 4.2.2) möglich. Die dafür geeigneten Parametrisierungen unterscheiden sich von allgemeinen Polynomen hauptsächlich dadurch, daß nur Terme in geraden Potenzen des Radius auftreten (Abschnitt 5.2.3). Allgemeine Polynome, wie sie derzeit zur Parametrisierung von Referenzmodellen verwendet werden, sind für die Darstellung weniger gut geeignet (Abschnitt 5.2.4).

Eine getrennte Modellierung der beiden Geschwindigkeiten und der Dichte durch drei unabhängige Funktionen, wie in heute gebräuchlichen Modellen, z.B. in PREM, stellt generell eine Überparametrisierung dar, wodurch unweigerlich mehr Unbekannte als erforderlich eingeführt werden. Dementsprechend unsicher ist auch die Bestimmung der Dichte in solchen Modellen, die in hohem Maße von den zusätzlichen Bedingungen zur Stabilisierung geprägt sind. Wird anstelle dessen eine hydrostatische Modellierung eingeführt, für die die einfachen und plausiblen Annahmen von chemischer Homogenität und konstantem Phasenzustand innerhalb der einzelnen Schalen sowie adiabatischen Temperaturänderungen zugrundegelegt werden müssen, ergibt sich die Möglichkeit einer stabilen Bestimmung der Dichte aufgrund seismischer Daten. Abweichungen von den genannten Voraussetzungen, für die es nur in gewissen Regionen (oberer Mantel, Zone D") Anzeichen gibt, können durch eine Störgröße modelliert werden. Eine Möglichkeit dafür bietet die Einführung des von Bullen definierten Inhomogenitätsparameters η (Abschnitt 3.1.2) und die Modellierung der Abweichungen $\Delta\eta = 1-\eta$ aufgrund unabhängiger Informationen oder Hypothesen (Abschnitt 5.4) Alternativ dazu - vorausgesetzt, daß ausreichend gesicherte Anhaltspunkte existieren - ist in gewissen Regionen eine grundsätzlich nichthydrostatische Modellierung vorstellbar, wie z.B. durch eine direkte Geschwindigkeits-Dichte-Relation. Die auf diese Weise implizit eingeführten Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht können jedoch prinzipiell auch durch den Inhomogenitätsparameter η dargestellt werden, mit dem Vorteil, daß die Größe der Störungen, nicht zuletzt auch im Hinblick auf die mechanische Stabilität der Schichtung, besser beurteilt werden kann.

Unabhängig von der Modellierung muß die Bestimmung der Dichte unter Verwendung seismischer Geschwindigkeiten immer in zwei voneinander unabhängige Problemstellungen zerlegt werden. Diese sind zum

einen die Modellierung der Änderung der Dichte innerhalb der einzelnen Schalen und zum anderen die Festlegung des Verhaltens an den Schalengrenzen. Zu Letzterem kann eine Aussage aus den seismischen Geschwindigkeiten allein nicht abgeleitet werden. Aus diesem Grunde sind zur Festlegung der Beträge unstetiger Dichteänderungen an den Diskontinuitäten Zusatzinformationen erforderlich. Im wesentlichen sind das die Angaben zur Gesamtmasse und zu einem (hydrostatischen) Trägheitsmoment, die Annahme der Dichte unterhalb der Kruste sowie die Frequenzen der Eigenschwingungen; aber auch Ergebnisse petrologischer Betrachtungen könnten zu diesem Zwecke einbezogen werden.

Die vorgestellte Parametrisierung ermöglicht somit auf der Basis der plausiblen Annahme von hydrostatischem Gleichgewicht eine stabile Beschreibung einer Normal-Dichteverteilung in Übereinstimmung mit den Geschwindigkeiten seismischer Wellen sowie notwendigen Zusatzinformationen. Mit der Einführung des Inhomogenitätsparameters bietet diese Modellierung auch die notwendige Flexibilität zur Berücksichtigung maßgeblicher Abweichungen von den zugrundeliegenden Annahmen. Damit ist eine Beschreibung der Dichteverteilung im Erdinneren durch eine Differenzierung zwischen Normal- und Störanteilen möglich, wobei die Festlegung des Normalanteils aufgrund der vorliegenden Daten eindeutig gewährleistet ist. Abweichungen davon, in lateraler wie auch in radialer Richtung, können nun durch die Modellierung von Dichtestörungen vorgenommen werden.

Sowohl in dieser Hinsicht als auch im Hinblick auf die Interpretation der Anomalien des äußeren Erdschwerefeldes stellt der Übergang vom radialsymmetrischen auf ein rotationssymmetrisches, ellipsoidisches Normal-Dichtemodell eine wichtige Modellerweiterung dar, die Aufgabe weiterführender Untersuchungen sein sollte.

Literaturverzeichnis

[1] Abd-Elmotaal, H. (1991). *Gravity Anomalies Based on the Vening Meinesz Isostatic Model and their Statistical Behaviour*. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz. Technische Universität Graz, Graz.

[2] Alterman, Z., H. Jarosch und C. L. Pekeris (1959). *Oscillations of the earth*. Proceedings of the Royal Society London, Series A, 252:80–95.

[3] Anderson, D. L. (1967). *A Seismic Equation of State*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13:9–30.

[4] Anderson, D. L. (1969). *Bulk Modulus-Density Systematics*. Journal of Geophysical Research, 74(15):3857–3864.

[5] Anderson, D. L. (1989). *Theory of the Earth*. Blackwell Scientific Publications, Boston.

[6] Anderson, D. L. und T. Jordan (1970). *The Composition of the Lower Mantle*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 3:23–35.

[7] Anderson, O. L. (1973). *Comments on the power law represantation of Birch's law*. Journal of Geophysical Research, 78(23):4901–4914.

[8] Backus, G. E. und J. F. Gilbert (1967). *Numercial Applications of a Formalism for Geophysical Inverse Problems*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13:247–276.

[9] Backus, G. E. und J. F. Gilbert (1970). *Uniqueness in the Inversion of Inaccurate Gross Earth Data*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 266:125–192.

[10] Birch, F. (1939). *The Variation of Seismic Velocities within a simplified Earth Model, in Accordance with the Theory of Finite Strain*. Bulletin of the Seismological Society of America, 29:463–479.

[11] Birch, F. (1952). *Elasticity and Constitution of the Earth's Interior*. Journal of Geophysical Research, 57(2):227–286.

[12] Birch, F. (1954). *The Earth's Mantle: Elasiticity and Constitution*. Transactions of the Amercian Geophysical Union, 35(1):79–85.

[13] Birch, F. (1961). *Composition of the Earth's Mantel*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 4:295–311.

[14] Birch, F. (1964). *Density and Composition of Mantle and Core*. Journal of Geophysical Research, 69(20):4377–4388.

[15] Bolt, B. A. und R. A. Uhrhammar (1981). *The structure, density and homogeneity of the Earth's core*. In: O'Connell, R. J. und W. S. Fyfe, Hrsg.: *Evolution of the earth*, Nr. 5 in *Geodynamics*, S. 28–37. American Geophysical Union, Washington, D.C.

[16] Bolt, B. A. und R. A. Uhrhammer (1975). *Resolution Techniques for Density and Heterogeneity in the Earth*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 42:419–435.

[17] Bullard, E. (1954). *The Interior of the Earth*. In: Kuiper, G. P., Hrsg.: *The Earth as a Planet*, S. 57–137. University of Chicago Press, Chicago and London.

[18] Bullard, E. C. (1957). *The Density within the Earth*. Verhandelingen van het Koninklijk Nederlands Geologisch Mijnbouwkundig Genootschap, Geologische Ser, 18:23–41.

[19] Bullen, K. E. (1936). *The Variation of Density and the Ellipticities of Strata of equal Density within the Earth*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement, 3:395–401.

[20] Bullen, K. E. (1940). *The Problem of the Earth's Density Variation*. Bulletin of the Seismological Society of America, 30(3):235–250.

[21] Bullen, K. E. (1949). *Compressibility-Pressure Hypothesis and the Earth's Interior*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement, 5(9):355–368.

[22] Bullen, K. E. (1954). *On the Homogeneity, or otherwise, of the Earth's Upper Mantle*. Transactions of the American Geophysical Union, 35(5):838–841.

[23] Bullen, K. E. (1963a). *An Index of Degree of Chemical Inhomogeneity in the Earth*. The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 8:584–592.

[24] Bullen, K. E. (1963b). *An Introduction to the Theory of Seismology*. Cambridge University Press, Cambridge, 3. Aufl.

[25] Bullen, K. E. (1967). *Note on the Coefficient η*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13:459.

[26] Bullen, K. E. (1969). *Compressibilty-Pressure Gradient and the Constitution of the Earth's Outer Core*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 18:73–79.

[27] Bullen, K. E. (1972). *Compressibility and Planetary Interiors*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 6:131–135.

[28] Bullen, K. E. (1974). *Introductory Remarks on Standard Earth Model*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 9:1–3.

[29] Bullen, K. E. (1975). *The Earth's Density*. Chapman and Hall, London.

[30] Bullen, K. E. und B. A. Bolt (1985). *An Introduction to the Theory of Seismology*. Cambridge University Press, Cambridge, 4. Aufl.

[31] Bullen, K. E. und R. A. W. Haddon (1967). *Derivation of an Earth Model from Free Oscillation Data*. Geophysics, 58:846–852.

[32] Bullen, K. E. und R. A. W. Haddon (1973). *Some Recent Work on Earth Models, with Special Reference to Core Structure*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 33:31–38.

[33] Clark, S. P. und A. E. Ringwood (1964). *Density Distribution and Constitution of the Mantle*. Reviews of Geophysics, 2(1):35–88.

[34] Cleary, J. R. (1974). *The D" Region*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 9:13–27.

[35] Dahlen, F. A. (1968). *The Normal Modes of a Rotating, Elliptical Earth*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 16:329–367.

[36] Dahlen, F. A. und J. Tromp (1998). *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[37] Darwin, G. H. (1884). *On the Figure of Equilibrium of a Planet of Heterogneous Density*. Proceedings of the Royal Society London, XXXVI:158–166.

[38] Davies, G. F. und A. M. Dziewonski (1975). *Homogeneity and Constitution of the Earth's Lower Mantler and Outer Core*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 10:336–343.

[39] Demenitskaja, R. M. (1975). *Kruste und Mantel der Erde*. Nedra, Moskau, 2. Aufl. (in russ.).

[40] Denis, C., M. Amalvict, Y. Rogister und S. Tomecka-Suchon (1998). *Methods for computing internal flattening, with applications to the Earth's structure and geodynamics*. Geophysical Journal International, 132:603–642.

[41] Denis, C., A. I. Denis-Karafistan und C. Delire (1991). *Sur un modèle de référence terrestre commun à la géodésie et à la géophysique*. In: Capitaine, N., Hrsg.: *Actes des Journées 1991 "Systèmes de référence spatio-temporels"*, S. 116–121. Observatoire de Paris, Paris.

[42] Denis, C., Y. Rogister, M. Amalvict, C. Delire, A. Ibramhim Denis und G. Munhoven (1997). *Hydrostatic flattening, core structure, and translational mode of the inner core*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 99:195–206.

[43] Dziewonski, A. M. (2001). *persönliche Mitteilung*.

[44] Dziewonski, A. M. und D. L. Anderson (1981). *Preliminary reference Earth model*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 25:297–356.

[45] Dziewonski, A. M., A. L. Hales und E. R. Lapwood (1975). *Parametrically simple Earth Models consistent with Geophysical Data*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 10:12–48.

[46] Gilbert, F., A. Dziewonski und J. Brune (1973). *An Informative Solution to a Seismological Inverse Problem*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 70(5):1410–1413.

[47] Gilbert, F. und A. M. Dziewonski (1975). *An Application of Normal Mode Theory to the Retrival of Structural Parameters and Source Mechanisms from Seismic Spectra*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 278:187–269.

[48] Gilvarry, J. J. (1957). *Temperature-Dependent Equations of State of Solids*. Journal of applied physics, 28(11):1253–1261.

[49] Gutenberg, B. (1951). *PKKP, P'P', and the Earth's Core*. Transactions of the American Geophysical Union, 32(3):373–390.

[50] Gutenberg, B. (1958). *Velocity of Seismic Waves in the Earth's Mantle*. Transactions of the American Geophysical Union, 39(3):486–489.

[51] Gutenberg, B. (1959). *Physics of the Earth's Interior*. Academic Press, New York and London.

[52] Haalck, H. (1959). *Physik des Erdinnern*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig.

[53] Haddon, R. A. W. und K. E. Bullen (1969). *An Earth Model incorporating Free Earth Oscillation Data*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 2:35–49.

[54] Hales, A. L., E. R. Lapwood und A. M. Dziewonski (1974). *Parametrization of a Spherically Symmetrical Earth Model with Special References to the Upper Mantle*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 9:9–12.

[55] Heiskanen, W. A. und H. Moritz (1967). *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco.

[Heiskanen und Vening Meinesz 1958] Heiskanen, W. A. und F. A. Vening Meinesz (1958). *The Earth and Its Gravity Field*. McGraw-Hill, New York.

[56] Herglotz, G. (1907). *Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen*. Physikalische Zeitschrift, 8(5):145–147.

[57] Jackson, Ian (1998). *Elasticity, composition and temperature of the Earth's lower mantle: a reappraisal*. Geophysical Journal International, 134(1):291–291.

[58] Jarosch, H. S. (1980). *Yet another Approach to the Travel-Time Inversion Problem*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 21:97–108.

[59] Jeffreys, H. (1939). *The Times of P, S, and SKS, and the Velocities fo P and S*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement, 4:498–533.

[60] Jeffreys, H. (1963). *On the Hydrostatic Theory of the Figure of the Earth*. The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 8:196–202.

[61] Johnson, L. E. und F. Gilbert (1972). *A New Datum for use in the Body Wave Travel Time Inverse Problem*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 30:373–380.

[62] Jordan, T. H. und D. L. Anderson (1974). *Earth Structure from Free Oscillations and Travel Times*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 36:411–459.

[63] Kennett, B. L. N. (1998). *On the density distribution within the Earth*. Geophysical Journal International, 132:374–382.

[64] Kennett, B. L. N. und E. R. Engdahl (1991). *Traveltimes for global earthquake location and phase identification*. Geophysical Journal International, 105:429–465.

[65] Kennett, B. L. N., E. R. Engdahl und R. Buland (1995). *Constraints on seismic velocities in the Earth from traveltimes*. Geophysical Journal International, 122:108–124.

[66] Khan, M. A. (1983a). *Primary geodynamical parameters for the Standard Earth Model*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 72:333–336.

[67] Khan, M. A. (1983b). *Revised value of the dynamical ellipticity of the Earth*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 72:327–331.

[68] Landisman, M., Y. Satô und J. Nafe (1965). *Free Vibrations of the Earth and the Properties of its Deep Interior Regions, Part 1: Density*. The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 9:439–502.

[69] Laske, G., A. M. Dziewonski und G. Masters (2003). *Reference Earth Model (REM) Web Page*. http://mahi.ucsd.edu/Gabi/rem.html.

[70] Lelgemann, D. und A. N. Marchenko (2001). *On concepts for modeling the Earth's gravity field*. Nr. 117 in *Reihe A*. Deutsche Geodätische Kommission, München 2001.

[71] Leliwa-Kopystyński, J. (1984). *Equations of State and Geophysical Equations of State*. In: Leliwa-Kopystyński, J. und R. Teisseyre, Hrsg.: *Constitution of the Earth's Interior*, Nr. 1 in *Physics and Evolution of the Earth's Interior*, S. 3–65. Elsevier, Amsterdam.

[72] Lenk, R. und W. Gellert, Hrsg. (1989). *Physik*. VEB F.A. Brockhaus, Leipzig, 2., verbesserte Aufl.

[73] Lipschitz, R. (1863). *Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen*. Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, 62(1):1–35.

[74] Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New York, 4. Aufl. reprint.

[75] Lyustikh, E. N. (1960). *Isostasy and Isostatic Hypotheses*. American Geophysical Union, New York.

[76] Macdonald, J. R. und D. R. Powell (1971). *Discrimination between equations of state*. Journal of research of the National Bureau of Standards / A, 75:441–453.

[77] Marchenko, A. N. und P. Schwintzer (2003). *Estimation of the Earth's tensor of inertia from recent global gravity field solutions*. Journal of Geodesy, 76:495–509.

[78] Masters, G. (1979). *Observational constraints on the chemical and thermal strucuture of the Earth's deep interior*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 57:507–534.

[79] Masters, T. G. und P. M. Shearer (1995). *Seismic Models of the Earth: Elastic and Anelastic*. In: Ahrens, T. J., Hrsg.: *Global earth physics: a handbook of physical constants*, S. 88–103. American Geophysical Union, Washington.

[80] Masters, T. G. und R. Widmer (1995). *Free Oscillations: Frequencies and Attenuations*. In: Ahrens, T. J., Hrsg.: *Global earth physics: a handbook of physical constants*, S. 104–125. American Geophysical Union, Washington.

[81] Matyska, C und D. A. Yuen (2000). *Profiles of the Bullen parameter from mantle convection modelling*. Earth and Planetary Science Letters, 178:39–46.

[82] Mautz, R. (2000). *Zur Lösung nichtlinearer Ausgleichungsprobleme bei der Bestimmung von Frequenzen in Zeitreihen*. Nr. 532 in *Reihe C*. Deutsche Geodätische Kommission, München.

[83] Melchior, P. (1982). *Physics of the Earth's Interior*. In: Moritz, H. und H. Sünkel, Hrsg.: *Geodesy and Global Geodynamics*, Nr. 41 in *Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz*. Technische Universität Graz, Graz.

[84] Mohr, P. J. und B. N. Taylor (2000). *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998*. Reviews of Modern Physics, 72(2):351–495.

[85] Montagner, J.-P. und D. L. Anderson (1989a). *Constrained reference mantle model*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 58:205–227.

[86] Montagner, J.-P. und D. L. Anderson (1989b). *Petrological Constraints on seismic anisotropy*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 54:82–105.

[87] Montagner, J.-P. und B. L. N. Kennett (1996). *How to reconcile body-wave and normal-mode reference earth models*. Geophysical Journal International, 125:229–248.

[88] Morelli, A. und A. M. Dziewonski (1993). *Body wave traveltimes and a spherically symmetric P- and S-wave velocity model*. Geophysical Journal International, 112:178–194.

[89] Moritz, H. (1988). *The Geodetic Reference System 1980*. Bulletin Geodesique, 62(3).

[90] Moritz, H. (1990). *The Figure of the Earth*. Wichmann, Karlsruhe.

[91] Nakada, M. (1999). *Implications of a non-adiabatic density gradient for the Earth's viscoelastic response to surface loading*. Geophysical Journal International, 137:663–674.

[92] Nakiboglu, S. M. (1979). *Hydrostatic figure and related properties of the Earth*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 57:639–648.

[93] Nolet, G. (1976). *Higher Modes and the Determination of Upper Mantle Structure*. Doktorarbeit, State University of Utrecht, The Netherlands, Utrecht.

[94] Nolet, G., S. P. Grand und B. L. N. Kennett (1994). *Seismic heterogeneity in the upper mantle*. Journal of Geophysical Research, 99(B12):23753–23766.

[95] Pekeris, C. L. (1966). *The Internal Constitution of the Earth*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 11:85–132.

[Petrović und Čolić 1994] Petrović, S. und K. Čolić (1994). *Estimating the density jump at the Mohorovicic discontinuity from the correlation with the geoid*. manuscripta geodaetica, 20:46–51.

[96] Plag, H.-P. und H.-U. Jüttner (1995). *Rayleigh-Taylor instabilities of a self-gravitating earth*. Journal of Geodynamics, 20(3):267–288.

[97] Press, F. (1970). *Earth Models consistent with Geophysical Data*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 3:3–22.

[98] Reissmann (1980). *Die Ausgleichungsrechnung*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 5. Aufl.

[99] Revenaugh, J. und T. H. Jordan (1991). *Mantle Layering from ScS Reverbations: 3. The Upper Mantle*. Journal of Geophysical Research, 96(B12):19781–19810.

[100] Ringwood, A. E. (1970). *Phase Transformations and the Constitution of the Mantle*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 3:109–155.

[101] Ringwood, A. E. (1975). *Composition and Petrology of the Earth's Mantle*. McGraw-Hill, New York.

[102] Roche, É (1848a). *Académie des Sciences de Montpellier, Séance du 20 mars 1848*. L' Institut, 16(754):185–186.

[103] Roche, É. (1848b). *Mémoire sur la loi de la densité a l'intérieur de la Terre*. In: *Mémoires sur divers points d'Astronomie, lus a l'Académie des Sciences de Montpellier*, S. 5–16. Boehm, Montpellier.

[104] Roche, É. (1853). *Note sur la variation de la pesanteur a l'intérieur de la Terre*. Académie des Sciences et Lettres de Montpellier, Mémoires de la Section des Sciences, 3:107–124.

[105] Schwetlick, H. (1979). *Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1. Aufl.

[106] Shearer, P. M. (1996). *Transition zone velocity gradients and the 520-km discontinuity*. Journal of Geophysical Research, 101(B2):3053–3066.

[107] Shearer, P. M. und M. P. Flanagan (1999). *Seismic Velocity and Density Jumps Across the 410- and 660 Kilometer Discontinuities*. Science, 285:1545–1548.

[108] Stacey, F. D. (1977a). *Application of Thermodynamics to fundamential Earth Physics*. Geophysical Surveys, 3:175–204.

[109] Stacey, F. D. (1977b). *A thermal model of the Earth*. Physics of the Earth an Planetary Interiors, 15:341–348.

[110] Takeuchi, H. und M. Saito (1972). *Seismic Surface Waves*. Methods in Computational Physics, 11:217–295.

[111] Tarantola, A. und B. Valette (1982). *Generalized Nonlinear Inverse Problems Solved Using the Least Squares Criterion*. Reviews of Geophysics and Space Physics, 20(2):219–232.

[112] Tisserand, F. (1891). *Traité de Mécanique Céleste*, Bd. II. Gauthiers-Villars et fils, Paris.

[113] Vening Meinesz, F. A. (1964). *The Earth's Crust and Mantle*. Elsevier, Amsterdam.

[114] Widmer, R. (1991). *The Large-Scale Structure of the Deep Earth as Constrained by Free Oscillation Observations*. Doktorarbeit, University of California, San Diego.

[115] Widmer, R., G. Masters und F. Gilbert (1991). *Spherically symmetric attenuation within the Earth from normal mode date*. Geophysical Journal International, 104:541–553.

[116] Widmer-Schnidrig (2002). *What can Superconducting Gravimeters contribute to normal mode seismology?*. Bulletin d'Information des Marées Terrestres.

[117] Wiechert, E. (1897). *Ueber die Massenvertheilung im Innern der Erde*. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, S. 221–243.

[118] Wiechert, E. und L. Geiger (1910). *Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern*. Physikalische Zeitschrift, 11:294–311.

[119] Wiechert, E. und K. Zoeppritz (1907). *Über Erdbebenwellen*. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse:415–549.

[120] Wienholz, K. (2002). *Zur Bestimmung der GPS-Phasenmehrdeutigkeiten in großräumigen Netzen*. Doktorarbeit, TU Berlin.

[121] Williamson, E. D. und L. Adams (1923). *Density distribution in the Earth*. Journal of the Washington Academy of Sciences, 13(19):413–430.

[122] Witte, H. (1932). *Beiträge zur Berechnung der Geschwindigkeit der Raumwellen im Erdinnern*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse.

[123] Wolf, D. (1991). *Viscoelastodynamics of a stratified, compressible planet: incremental field equations and short- and long-time asymptotes*. Geophysical Journal International, 104:401–417.

[124] Woollard, G. P. (1970). *Evaluation of the isostatic mechanism and role of mineralogic transformations from seismic and gravity data*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 3:484–498.

[125] Wziontek, H. und K. Wienholz (2001). *On the Interpretation of Lagranges Multipliers as a Measure of Constraint in Adjustment Problems*. In: Altan, O. M. und L. Gründig, Hrsg.: *Fourth International Symposium "Turkish-German Joint Geodetic Days"*, S. 777–783, Berlin. Technische Universität Berlin.

[126] Young, C. J. und T. Lay (1987). *The Core-Mantle Boundary*. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 15:25–46.

[127] Zharkov, V. N., V. P. Trubitsyn und W. B. Hubbard (1978). *Physics of Planetary Interiors*. Nr. 6 in *Astronomy and Astrophysics*. Pachart, Tucson.

[128] Zürn, W., G. Laske, R. Widmer-Schnidrig und F. Gilbert (2000). *Observations of Coriolis coupled modes below 1 mHz*. Geophysical Journal International, 143:113–118.

Anhang A. Koeffizientensätze

A.1 Modelle nach Roche und Lipschitz

Modelle für den seismischen Parameter aus PREM nach Roche und Lipschitz.

Radius	Roche		Lipschitz		
	d_0	d_2	d_0	d_2	λ
1221.5	12.515	-8.148	12.539	-8.178	2.0
$\pm$	0.002	0.010	0.009	0.012	0.0
3480.0	12.527	-8.470	12.507	-9.262	2.144
$\pm$	0.002	0.010	0.009	0.007	0.001
3630.0	6.399	-2.848	6.390	-2.848	2.0
$\pm$	0.003	0.009	0.002	0.004	0.0
5600.0	6.257	-2.411	6.631	-2.680	1.481
$\pm$	0.002	0.003	0.004	0.004	0.003
5701.0	6.095	-2.201	6.123	-2.209	2.0
$\pm$	0.011	0.013	0.004	0.005	0.0
5771.0	5.843	-2.249	5.860	-2.253	2.0
$\pm$	0.015	0.019	0.005	0.006	0.0
5971.0	5.960	-2.391	5.980	-2.399	2.0
$\pm$	0.011	0.013	0.004	0.005	0.0
6151.0	5.753	-2.486	5.769	-2.499	2.0
$\pm$	0.017	0.018	0.006	0.006	0.0
6291.0	6.056	-2.810	6.099	-2.854	2.0
$\pm$	0.027	0.027	0.009	0.010	0.0
6346.6	5.892	-2.642	5.940	-2.690	2.0
$\pm$	0.039	0.039	0.014	0.014	0.0

A.2 Modell HA2-327-A

Modell für den seismischen Parameter aus PREM,
mit Dichte unterhalb der Moho $\rho_M = 3.27\, g/cm^3$,
und $\eta = 1$ vor der Anpassung an die Eigenschwingungen.

Radius	d_0	d_2	d_4	d_6	d_8
1221.5	12.334	-7.914	—	—	—
±	0.000	0.000	—	—	—
3480.0	12.327	-7.668	-1.392	-2.912	—
±	0.000	0.001	0.008	0.018	—
3630.0	6.761	-5.000	3.486	—	—
±	0.002	0.010	0.017	—	—
5600.0	6.681	-4.869	5.070	-4.171	1.209
±	0.001	0.006	0.019	0.024	0.011
5701.0	6.176	-2.237	0.008	—	—
±	0.015	0.039	0.025	—	—
5771.0	5.943	-2.405	0.088	—	—
±	0.031	0.077	0.048	—	—
5971.0	3.999	2.328	-2.793	—	—
±	0.008	0.020	0.012	—	—
6151.0	5.362	-1.598	-0.498	—	—
±	0.014	0.030	0.017	—	—
6291.0	8.636	-8.178	2.792	—	—
±	0.030	0.063	0.033	—	—
6346.6	8.421	-7.736	2.564	—	—
±	0.113	0.231	0.117	—	—

A.3 Modell HA2-327-B

Modell für den seismischen Parameter aus PREM,
mit Dichte unterhalb der Moho $\rho_M = 3.27\, g/cm^3$
und $\eta = 1$ nach der Anpassung an die Eigenschwingungen aus PREM.

Radius	d_0	d_2	d_4	d_6	d_8
1221.5	12.965	-8.739	—	—	—
±	0.000	0.000	—	—	—
3480.0	12.281	-8.062	0.942	-6.656	—
±	0.000	0.001	0.010	0.023	—
3630.0	6.779	-4.988	3.464	—	—
±	0.002	0.013	0.021	—	—
5600.0	6.698	-4.849	5.015	-4.120	1.189
±	0.001	0.008	0.024	0.031	0.014
5701.0	6.198	-2.242	0.004	—	—
±	0.020	0.050	0.032	—	—
5771.0	5.891	-2.408	0.104	—	—
±	0.040	0.098	0.060	—	—
5971.0	3.967	2.277	-2.748	—	—
±	0.011	0.025	0.015	—	—
6151.0	5.362	-1.598	-0.498	—	—
±	0.017	0.038	0.021	—	—
6291.0	8.636	-8.178	2.792	—	—
±	0.038	0.080	0.042	—	—
6346.6	8.422	-7.738	2.565	—	—
±	0.149	0.302	0.154	—	—

A.4 Modell HA2-327-C

Modell für den seismischen Parameter aus PREM,
mit Dichte unterhalb der Moho $\rho_M = 3.27\,g/cm^3$,
η unter Berücksichtigung der K-p-Hypothese als lineare Funktion $\eta = A_\eta + B_\eta x$,
sowie Anpassung an die Eigenschwingungen aus PREM.

Radius	d_0	d_2	d_4	d_6	d_8	e	λ	A_η	B_η
1221.5	12.959	-8.731	—	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.000	0.001	—	—	—	—	—	—	—
3480.0	12.245	-7.740	-0.673	-3.713	—	0.00395	1.000	1.000	0.000
±	0.001	0.006	0.030	0.052	—	0.00008	0.000	—	—
3630.0	3.424	-3.203	—	—	—	1.78655	1.000	2.158	1.470
±	0.004	0.003	—	—	—	0.00157	0.000	—	—
5600.0	6.679	-4.733	4.679	-3.692	0.994	—	—	1.000	0.000
±	0.001	0.007	0.021	0.028	0.014	—	—	—	—
5701.0	6.185	-2.221	-0.005	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.029	0.074	0.047	—	—	—	—	—	—
5771.0	5.880	-2.375	0.086	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.059	0.146	0.090	—	—	—	—	—	—
5971.0	3.961	2.297	-2.758	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.016	0.037	0.022	—	—	—	—	—	—
6151.0	5.298	-1.456	-0.577	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.026	0.057	0.032	—	—	—	—	—	—
6291.0	8.508	-7.893	2.635	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.058	0.121	0.063	—	—	—	—	—	—
6346.6	8.352	-7.571	2.468	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.220	0.448	0.228	—	—	—	—	—	—

A.5 Modell NHA2-327

Modell für den seismischen Parameter aus PREM,
mit Dichte unterhalb der Moho $\rho_M = 3.27\,g/cm^3$,
η aus PREM und unter Berücksichtigung der K-p-Hypothese als lineare Funktion $\eta = A_\eta + B_\eta x$,
sowie Anpassung an die Eigenschwingungen aus PREM.

Radius	d_0	d_2	d_4	d_6	d_8	e	λ	A_η	B_η
1221.5	12.889	-8.637	—	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.000	0.000	—	—	—	—	—	—	—
3480.0	12.194	-7.680	-0.617	-4.053	—	0.00375	1.000	1.000	0.000
±	0.000	0.003	0.014	0.024	—	0.00004	0.000	—	—
3630.0	3.742	-3.316	—	—	—	1.64239	1.000	2.135	1.202
±	0.002	0.002	—	—	—	0.00074	0.000	—	—
5600.0	6.700	-4.669	4.493	-3.493	0.911	—	—	1.000	0.000
±	0.000	0.003	0.010	0.013	0.006	—	—	—	—
5701.0	6.224	-2.248	0.001	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.014	0.034	0.022	—	—	—	—	—	—
5771.0	4.890	-1.243	0.250	—	—	—	—	0.890	-0.578
±	0.004	0.009	0.006	—	—	—	—	—	—
5971.0	8.593	-6.597	1.276	—	—	—	—	9.277	-8.053
±	0.025	0.060	0.035	—	—	—	—	—	—
6151.0	5.816	-3.024	0.551	—	—	—	—	2.385	-1.662
±	0.008	0.017	0.010	—	—	—	—	—	—
6291.0	2.843	0.525	-0.095	—	—	—	—	-0.009	-0.119
±	0.000	0.001	0.000	—	—	—	—	—	—
6346.6	2.847	0.517	-0.091	—	—	—	—	-0.013	-0.114
±	0.002	0.003	0.002	—	—	—	—	—	—

A.6 Modell HA2-337-A

Modell für den seismischen Parameter aus PREM,
mit Dichte unterhalb der Moho $\rho_M = 3.37\, g/cm^3$
und $\eta = 1$ vor der Anpassung an die Eigenschwingungen.

Radius	d_0	d_2	d_4	d_6	d_8
1221.5	12.480	-8.101	—	—	—
±	0.000	0.000	—	—	—
3480.0	12.473	-7.850	-1.384	-2.938	—
±	0.000	0.001	0.009	0.019	—
3630.0	6.688	-5.034	3.561	—	—
±	0.002	0.011	0.017	—	—
5600.0	6.611	-4.934	5.264	-4.350	1.277
±	0.001	0.007	0.019	0.025	0.011
5701.0	6.090	-2.215	0.019	—	—
±	0.015	0.039	0.025	—	—
5771.0	5.959	-2.382	0.071	—	—
±	0.032	0.080	0.049	—	—
5971.0	4.011	2.361	-2.816	—	—
±	0.009	0.020	0.012	—	—
6151.0	5.484	-1.562	-0.557	—	—
±	0.014	0.032	0.018	—	—
6291.0	8.853	-8.334	2.830	—	—
±	0.032	0.067	0.035	—	—
6346.6	8.640	-7.894	2.603	—	—
±	0.120	0.245	0.124	—	—

A.7 Modell HA2-337-B

Modell für den seismischen Parameter aus PREM,
mit Dichte unterhalb der Moho $\rho_M = 3.37\, g/cm^3$
und $\eta = 1$ nach der Anpassung an die Eigenschwingungen aus PREM.

Radius	d_0	d_2	d_4	d_6	d_8
1221.5	13.108	-8.931	—	—	—
±	0.000	0.000	—	—	—
3480.0	12.399	-8.229	1.051	-6.842	—
±	0.000	0.001	0.011	0.025	—
3630.0	6.722	-5.018	3.526	—	—
±	0.002	0.014	0.022	—	—
5600.0	6.643	-4.904	5.174	-4.267	1.245
±	0.001	0.009	0.025	0.032	0.015
5701.0	6.130	-2.225	0.014	—	—
±	0.020	0.051	0.033	—	—
5771.0	5.855	-2.387	0.103	—	—
±	0.041	0.102	0.063	—	—
5971.0	3.947	2.259	-2.726	—	—
±	0.011	0.026	0.015	—	—
6151.0	5.484	-1.562	-0.557	—	—
±	0.019	0.042	0.023	—	—
6291.0	8.853	-8.334	2.830	—	—
±	0.041	0.087	0.045	—	—
6346.6	8.641	-7.896	2.604	—	—
±	0.161	0.327	0.166	—	—

A.8 Modell HA2-337-C

Modell für den seismischen Parameter aus PREM,
mit Dichte unterhalb der Moho $\rho_M = 3.37\,g/cm^3$,
η unter Berücksichtigung der K-p-Hypothese als lineare Funktion $\eta = A_\eta + B_\eta x$,
sowie Anpassung an die Eigenschwingungen aus PREM.

Radius	d_0	d_2	d_4	d_6	d_8	e	λ	A_η	B_η
1221.5	13.100	-8.921	—	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.000	0.000	—	—	—	—	—	—	—
3480.0	12.361	-7.893	-0.589	-4.109	—	0.00416	1.000	1.000	0.000
±	0.000	0.003	0.015	0.027	—	0.00004	0.000	—	—
3630.0	3.278	-3.204	—	—	—	1.83764	1.000	2.096	1.568
±	0.002	0.002	—	—	—	0.00093	0.000	—	—
5600.0	6.623	-4.753	4.735	-3.719	0.998	—	—	1.000	0.000
±	0.000	0.003	0.010	0.014	0.007	—	—	—	—
5701.0	6.128	-2.225	0.015	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.014	0.036	0.023	—	—	—	—	—	—
5771.0	5.859	-2.388	0.102	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.029	0.072	0.044	—	—	—	—	—	—
5971.0	3.950	2.261	-2.728	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.008	0.018	0.011	—	—	—	—	—	—
6151.0	5.484	-1.564	-0.555	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.013	0.029	0.016	—	—	—	—	—	—
6291.0	8.854	-8.335	2.830	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.029	0.061	0.032	—	—	—	—	—	—
6346.6	8.642	-7.899	2.606	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.113	0.230	0.117	—	—	—	—	—	—

A.9 Modell NHA2-337

Modell für den seismischen Parameter aus PREM,
mit Dichte unterhalb der Moho $\rho_M = 3.37\,g/cm^3$,
η aus PREM und unter Berücksichtigung der K-p-Hypothese als lineare Funktion $\eta = A_\eta + B_\eta x$,
sowie Anpassung an die Eigenschwingungen aus PREM.

Radius	d_0	d_2	d_4	d_6	d_8	e	λ	A_η	B_η
1221.5	12.975	-8.752	—	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.000	0.000	—	—	—	—	—	—	—
3480.0	12.262	-7.769	-0.592	-4.102	—	0.00389	1.000	1.000	0.000
±	0.000	0.003	0.015	0.025	—	0.00004	0.000	—	—
3630.0	3.735	-3.314	—	—	—	1.62684	1.000	2.064	1.309
±	0.002	0.002	—	—	—	0.00075	0.000	—	—
5600.0	6.670	-4.711	4.614	-3.613	0.959	—	—	1.000	0.000
±	0.000	0.003	0.010	0.013	0.006	—	—	—	—
5701.0	6.186	-2.239	0.006	—	—	—	—	1.000	0.000
±	0.014	0.035	0.022	—	—	—	—	—	—
5771.0	4.876	-1.238	0.250	—	—	—	—	0.890	-0.578
±	0.004	0.009	0.006	—	—	—	—	—	—
5971.0	8.559	-6.561	1.267	—	—	—	—	9.277	-8.053
±	0.026	0.060	0.036	—	—	—	—	—	—
6151.0	5.820	-3.016	0.546	—	—	—	—	2.385	-1.662
±	0.008	0.018	0.010	—	—	—	—	—	—
6291.0	2.935	0.531	-0.093	—	—	—	—	-0.009	-0.119
±	0.000	0.001	0.000	—	—	—	—	—	—
6346.6	2.939	0.523	-0.089	—	—	—	—	-0.013	-0.114
±	0.002	0.003	0.002	—	—	—	—	—	—

Danksagung

Für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Lelgemann mein ganz besonderer Dank.
Weiterhin möchte ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. H. Burkhardt und Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Groten für ihre gutachterliche Tätigkeit danken.
Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Dr. techn. S. Petrović für die zahlreichen Diskussionen zu Themen im weiteren und engeren Zusammenhang mit dieser Arbeit.
Schließlich gilt mein Dank der Hegemann-Stiftung an der TU Berlin, die den Abschluß der Arbeiten gefördert hat.