

Norbert Schönwald

**Effiziente Simulation der Schallausbreitung
in anwendungsnahen
Triebwerkskonfigurationen**

Universitätsverlag der TU Berlin

ISBN 978-3-7983-2246-2 (Druckausgabe)
ISBN 978-3-7983-2245-5 (Online-Version)

∞ *Gedruckt auf säurefreiem alterungsbeständigen Papier*

**Druck/
Printing:** Endformat Gesellschaft für gute Druckerzeugnisse mbH
Köpenicker Str. 187-188, D-10997 Berlin

**Vertrieb/
Publisher:** Universitätsverlag der TU Berlin
Universitätsbibliothek
Fasanenstr. 88 (im VOLKSWAGEN-Haus), D-10623 Berlin
Tel.: (030) 314-76131; Fax.: (030) 314-76133
E-Mail: publikationen@ub.tu-berlin.de
<http://www.univerlag.tu-berlin.de>

Effiziente Simulation der Schallausbreitung in anwendungsnahen Triebwerkskonfigurationen

vorgelegt von

Diplom-Ingenieur
Norbert Schönwald

von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. Heinz Lehr
Berichter: Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele
Dr. habil. Marc C. Jacob

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 25. Februar 2010

Berlin 2010
D 83

Vorwort

Diese Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Numerische Methoden der Thermofluidodynamik am Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik der Technischen Universität Berlin.

Meinem Betreuer, Professor Frank Thiele, möchte ich an dieser Stelle für seine Förderung und Unterstützung, seine Geduld und vor allem für die vielfältigen Entfaltungsmöglichkeiten danken, die mir das Arbeiten in einer stets kollegialen Atmosphäre mit immer neuen Herausforderungen und in verschiedenen nationalen und internationalen Kooperationen ermöglichte. Dank gilt auch Herrn Dr. Marc Jacob für die freundliche Übernahme der Begutachtung und Herrn Professor Heinz Lehr für die Übernahme des Vorsitzes im Promotionsausschuss.

Weiterhin möchte ich all denjenigen danken, die durch ihre vielfältige direkte und indirekte Unterstützung diese Arbeit erst möglich gemacht haben. Ulf Michel stand mit seinem Fachwissen und seiner großen Erfahrung immer gern für Fragen und Diskussionen bereit, was von unschätzbarem Wert war. Die Zusammenarbeit mit Xiaodong Li bildete die Grundlage für die Entwicklung des in dieser Arbeit eingesetzten CAA-Verfahrens, an dessen Weiterentwicklung später Christoph Richter, Łukas Panek, Verina Krause und Junis Abdel Hay beteiligt waren. Maßgeblichen Anteil an der Implementierung des FWH-Verfahrens hatte Dandy Eschricht.

Abschließend möchte ich noch allen Kollegen des Fachgebiets für die gute Zusammenarbeit und hilfreiche Unterstützung danken, dabei sind insbesondere Christoph Richter für seine kritischen Korrekturen und wertvollen Kommentare sowie Lars Oergel für die Durchsicht der Reinschrift hervorzuheben.

Berlin, im März 2010

Norbert Schönwald

Zusammenfassung

Beim Entwurf von Flugtriebwerken gewinnen neben den aerodynamischen und wirtschaftlichen Anforderungen durch die Notwendigkeit zur Reduktion der Lärmemission aeroakustische Fragestellungen immer mehr an Bedeutung. Für die aerodynamische Auslegung im industriellen Umfeld haben sich Simulationsverfahren der Numerischen Strömungsmechanik (CFD) bereits als robustes und zuverlässiges Werkzeug etabliert. Die Simulation strömungsakustischer Prozesse mit CFD-Verfahren ist aber aufgrund der Eigenschaften des Schalls extrem aufwändig und daher für eine industrielle Anwendung ungeeignet. Im akademischen Umfeld existieren jedoch eine Vielzahl von Verfahren der Numerischen Strömungsakustik (CAA), die speziell für die Simulation akustischer Vorgänge mit akzeptablen Ressourcenaufwand optimiert sind. Der Einsatz der einzelnen Verfahren ist allerdings auf bestimmte Anwendungsbereiche unter spezifischen Rahmenbedingungen beschränkt. In dieser Arbeit werden daher verschiedene bewährte Verfahren und Techniken aus der CAA zu einem hybriden, zonalen Gesamtverfahren kombiniert, welches eine effiziente Simulation der Schallausbreitung und -abstrahlung unter Strömungseinfluss in komplexen anwendungsnahen Konfigurationen im industriellen Umfeld ermöglicht.

Als eine Komponente des hybriden CAA-Verfahrens kommt ein etabliertes, optimiertes Finite-Differenzenverfahren höherer Ordnung zum Einsatz, welches qualitativ hochwertige Rechenetze erfordert. Deren Erzeugung wird mit steigender geometrischer Komplexität der Konfigurationen immer anspruchsvoller und stößt bei alleiniger Verwendung klassischer Techniken zur Blockstrukturierung an Grenzen. Um dennoch Untersuchungen komplexer dreidimensionaler Konfigurationen zu ermöglichen, wird eine aus der CFD bekannte Methode zur Gittereinbettung, die sogenannte Overset-Gitter-Technik, an die Anforderungen des CAA-Verfahrens adaptiert und in dieses implementiert.

Anhand von diversen, in ihrer Komplexität zunehmenden Konfigurationen wird das hybride Simulationsverfahren hinsichtlich seiner Genauigkeit und Einsatzgrenzen validiert. Zur Demonstration und Bewertung der Einsetzbarkeit des Verfahrens für die Vorhersage von tonalem Triebwerkslärm in anwendungsnahen Konfigurationen unter praxisrelevanten Bedingungen wird die Schallausbreitung durch verschiedene angeschrägte Triebwerkseinläufe mit variierender Anströmung sowie durch Nebenstromkanäle mit unterschiedlichen Einbauten simuliert. Die eingesetzten generischen Konfigurationen sind dabei so gewählt, dass sie die Anforderungen bei der Simulation von realen Triebwerken widerspiegeln.

Abstract

Due to the need to reduce noise emissions, aeroacoustic issues are becoming increasingly important alongside aerodynamic and economic requirements in the design of aircraft engines. In the context of industrial aerodynamic design, computational fluid dynamics (CFD) is already established as a robust and reliable tool. The simulation of aeroacoustic processes with such CFD methods is however extremely expensive due to the inherent properties of sound waves and therefore unsuitable for industrial application. A variety of specialised computational aeroacoustics (CAA) methods exist in the academic environment, which are specifically optimized for the simulation of acoustic processes with an acceptable computational expense. However, the applicability of each such approach is limited to very specific configurations and conditions. In this work therefore, a selection of different CAA strategies are combined to form a hybrid zonal approach, which offers an efficient simulation methodology for sound propagation and radiation including mean flow effects in complex industrial applications.

An optimized high-order finite difference method is applied as a component of the hybrid CAA approach, which requires high-quality computational meshes. The generation of these becomes more and more challenging as the geometric complexity increases, eventually encountering the well-known limitations of pure block-structured grid strategies. In order to overcome this problem and to enable the generation of high-quality grids for complex, three-dimensional configurations, the overset grid technique is adopted. This is an established technique in CFD, which is adapted to the requirements of CAA approaches and implemented in the employed methodology.

Using various configurations of increasing complexity, the hybrid simulation procedure is validated and its accuracy and limitations are assessed. The feasibility of the procedure for the prediction of tonal engine noise in practical application configurations is then demonstrated and evaluated. For this purpose, simulations of the sound propagation through a selection of scarfed engine intakes with varying incident flow as well as through bypass ducts with different installed components are conducted. The generic configurations employed are chosen to reflect the requirements of real engine simulations.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Numerische Strömungsakustik (CAA)	2
1.1.1	Verfahren höherer Ordnung	5
1.1.2	Overset-Gitter-Ansatz für komplexe Geometrien	7
1.1.3	Zonale Zerlegung	8
1.2	Zielsetzung	11
2	Modellierung der Schallausbreitung	15
2.1	Strömungsmechanische Bilanzgleichungen	16
2.2	Strömungsakustische Modellgleichungen	17
2.2.1	Nichtlineare Eulersche Störungsgleichungen	19
2.2.2	Linearisierte Eulergleichungen	20
2.3	Konvektive akustische Wellengleichung	21
2.4	Schallfeld in Rohrumbegungen	22
2.5	Akustische Analogien	26
3	Numerische Verfahren	31
3.1	Diskretisierungsschemata für CAA	31
3.1.1	Räumliche Diskretisierung	32
3.1.2	Zeitliche Diskretisierung	36
3.1.3	Filterung	42
3.2	Gitter	45
3.2.1	Krummlinige Koordinaten	45
3.2.2	Blockstrukturierung und Parallelisierung	47
3.2.3	Gittergenerierung und -aufbereitung	49
3.3	Grundströmung	50
3.4	Randbedingungen	51
3.4.1	Wandrandbedingung	51
3.4.2	Reflexionsarme Randbedingungen	52
3.4.3	Quellrandbedingungen	56
3.5	Modalanalyse	60
3.6	Fernfeldvorhersage	62
4	Overset-Gitter-Methode	65
4.1	Probleme blockstrukturierter CAA-Gitter	65
4.2	Gittereinbettung	68

4.3	Interpolation	70
4.4	Austauschtopologie	73
4.4.1	Punkt-Such-Algorithmus	73
4.4.2	Identifikation von Zielknoten und Interpolationssternen	75
4.5	Voraussetzungen für den Einsatz	80
4.6	Implementierung im CAA-Verfahren	80
5	Validierung des Simulationsverfahrens	83
5.1	CAA-Verfahren	83
5.1.1	Bewertungskriterien für die Lösungsqualität	85
5.1.2	Randbedingungen	87
5.1.3	Gitterauflösung	92
5.1.4	Grundströmung	97
5.2	CAA-Verfahren mit Overset-Gitter-Technik	100
5.2.1	Einfluss der Gitterauflösungen im Overset-Gitter	103
5.2.2	Einfluss der Interpolationssterngröße	105
5.3	Hybrides CAA-FWH-Verfahren	108
6	Technische Anwendungsfälle	113
6.1	Angeschrägter Triebwerkseinlauf (<i>scarfed intake</i>)	114
6.1.1	Einfluss des Anströmungswinkels	122
6.1.2	Einfluss der Grundströmung	123
6.2	Nebenstromkanal eines Triebwerks	128
6.2.1	Einfluss des Profils der Gabelung	139
6.2.2	Einfluss der Verstrebungen	141
6.2.3	Einfluss der Kanalkrümmung	143
7	Zusammenfassung und Ausblick	149
	Literaturverzeichnis	153
A	Koeffizientensätze für das numerische Verfahren	165
A.1	Räumliche Diskretisierung	165
A.2	Zeitliche Diskretisierung	167
A.3	Filterung	168
B	Detaillierte Ergebnisse der Nebenstromkanalsimulationen	171
B.1	Modenfelder im geraden Kanal	171
B.2	Modenfelder im gekrümmten Kanal	174
B.3	Vergleich der Modenfelder bei verschiedenen Gabelungen	177
B.4	Vergleich der Modenfelder mit und ohne Verstrebungen	178
B.5	Vergleich der Modenfelder im geraden und gekrümmten Kanal	180

Nomenklatur

Dieses Verzeichnis erklärt wichtige in der Arbeit auftretende Symbole und Abkürzungen. Abweichende Definitionen und weitere Symbole sind direkt an entsprechender im Text beschrieben. Über doppelt auftretende lateinische Indizes wird entsprechend der Einsteinsche Summenkonvention summiert.

Lateinische Bezeichnungen

A	Fläche bzw. Oberfläche	
A_{mn}	Amplitude einer Mode	
$H(\cdot)$	Heaviside-Funktion	
I_a	akustische Intensität	(5.4), S. 85
J	Jacobi-Determinante	$J = \det(\partial x_i / \partial \xi^k)$
$J_m(\cdot)$	Besselfunktion m -ter Ordnung	
L_p	Schalldruckpegel	(5.2), S. 85
N	Gitterauflösung	$N_x = \lambda_x / \Delta x$
N_{mn}	Anteil der Neumannfunktion	(2.33), (2.35), S. 25
M	Machzahl	$M_i = u_i / c$
P_a	akustische Leistung	(5.3), S. 85
T	Temperatur	
\underline{T}, T_{ij}	Lighthillscher Spannungstensor	(2.38), S. 26
V	Volumen	
$Y_m(\cdot)$	Neumannfunktion m -ter Ordnung	
c	Schallgeschwindigkeit	$c = \sqrt{\kappa p / \rho}$
c_p	spez. Wärmekapazität bei konst. Druck	
c_V	spez. Wärmekapazität bei konst. Volumen	
d	Durchmesser	
f	Frequenz	
\underline{f}, f_i	Volumenkraftdichte	
k, k_{mn}	Wellenzahl, axiale Wellenzahl einer Mode	
\dot{m}	Massenstrom	
m	azimutale Modenordnung	

n	radiale Modenordnung	
\underline{n}	Normalenvektor	
p	Druck	
\underline{q}	Vektor der Zustandsgrößen	$\underline{q} = (q, \underline{u}, p)^T$
$\underline{\dot{q}}, \dot{q}_i$	Wärmestromdichte	
r	Radius	
t	Zeit	
Δt	Zeitschrittweite	
\underline{u}, u_i	Geschwindigkeitsvektor	
v_{gr}	Gruppengeschwindigkeit	$v_{gr} = \partial\omega / \partial k$
\underline{x}, x_i	kartesische Koordinaten	
Δx	Ortsschrittweite	
w	Wärmequellendichte	

Griechische Bezeichnungen

α	Anstellwinkel	
γ	Gehäuseanschrägung	
δ	Phasenfehler	
$\delta(\cdot)$	Dirac-Delta-Funktion	
δ_{ij}	Kronecker-Symbol	
ϑ	Umfangskoordinate	
\varkappa	Isentropenexponent	$\varkappa = c_p / c_V$
λ	Wellenlänge	
μ_{mn}	Eigenwert der Besselfunktion	
ξ	Cut-Off-Verhältnis	(2.28), S. 24
$\underline{\xi}, \xi^k$	allgemeine (krummlinige) Koordinaten	
ρ	Dissipationsfehler	
ϱ	Dichte	
$\sigma, \sigma(\cdot)$	Gewichtungsfaktor, Gewichtungsfunktion	
$\underline{\tau}, \tau_{ij}$	Zähigkeitsspannungstensor	
ϕ	allgemeine skalare Größe	
φ	Phase	
$\Psi(\cdot)$	Filter-Transferfunktion	(3.30), S. 44
ω	Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi f$
ω_{co}	Cut-Off-Frequenz	(2.27), S. 24

Symbole und Operatoren

i	imaginäre Einheit
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Fouriertransformation
$\mathcal{L}\{\cdot\}$	Laplacetransformation
$\mathcal{O}(\cdot)$	Ordnung der Fehlerterme
$\Re\{\cdot\}$	Realteil einer komplexen Größe
$\Im\{\cdot\}$	Imaginärteil einer komplexen Größe
$ \underline{(\cdot)} , (\cdot)_i $	Betrag einer vektoriellen Größe

Indizes und Kennzeichen

$\bar{(\cdot)}$	Mittelwert einer fluktuierenden Größe
$(\cdot)'$	Schwankungsanteil einer fluktuierenden Größe
$\hat{(\cdot)}$	gefilterte Größe
$\tilde{(\cdot)}$	fourier- bzw. laplacetransformierte Größe
$\dot{(\cdot)}$	partielle Zeitableitung einer Größe
$(\cdot)^{(n)}$	im Zeitschritt n
$(\cdot)^*$	numerische Approximation bzw. interpolierte Größe
$(\cdot)^+$	positive Laufrichtung
$(\cdot)^-$	negative Laufrichtung
$(\cdot)^T$	Transponierte einer vektoriellen bzw. Tensoriellen Größe
$(\cdot)_Q$	Quellanteil einer Größe
$(\cdot)_\infty$	Anströmgrößen
$(\cdot)_n$	wandnormale Komponente der Größe
$(\cdot)_x$	axiale Komponente der Größe
$(\cdot)_r$	radiale Komponente der Größe
$(\cdot)_\theta$	azimutale Komponente der Größe
$(\cdot)_{mn}$	Komponente einer Mode
$(\cdot)_{i,j,k}$	Größe an diskreter Gitterposition i, j, k
$\overline{(\cdot)}$	Konjugiert komplexe Größe
$\underline{(\cdot)}$	Vektor (symbolisch)
$\underline{\underline{(\cdot)}}$	Tensor 2. Stufe (symbolisch)

Abkürzungen

2D/3D	zweidimensional/dreidimensional
APE	Acoustic Perturbation Equations
BEM	Boundary Element Method
CAA	Computational Aeroacoustics
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
CPU	Central Processing Unit
DRP	Dispersion-Relation-Preserving Scheme
ESM	Equivalent Source Method
FWH	Ffowcs Williams & Hawkins
DES	Detached-Eddy Simulation
DG	Discontinuous Galerkin
DNS	Direct Numerical Simulation
DRP	Dispersion Relation Preserving Scheme
HPSC	High Performance Scientific Computing
LDDRK	Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Scheme
LEE	Linearized Euler Equations
LES	Large-Eddy Simulation
MPI	Message Passing Interface
NC/F	Newton Cooling/Friction (Randbedingung)
PENNE	Perturbed Nonlinear Nonconservative Euler Equations
PML	Perfectly Matched Layer
PPW	Punkte pro Wellenlänge
RAD	Radiation Boundary Condition
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes (Simulation)
SAD	Selective Artificial Damping
URANS	Unsteady RANS

1 Einleitung

Die durch den Flugverkehr entstehende Lärmbelästigung ist von großem öffentlichen Interesse. Besonders in den letzten Jahren ist bedingt durch die stärkere Auslastung der Flughäfen Lärm zum zentralen Problem der zivilen Luftfahrt geworden. Der gesellschaftliche Druck ist so stark, dass ohne weitere Reduktion des Fluglärms ein weiterer Anstieg des Luftverkehrsaufkommens oder Flughafenerweiterungen undenkbar sind. Die zulässige Lärmentwicklung eines Flugzeuges wird durch die von der ICAO (International Civil Aviation Organisation) entwickelten Richtlinien im Abkommen über die internationale Zivilluftfahrt (Anhang 16) festgelegt. Innerhalb der ICAO wurde ein Komitee zu Belangen des Umweltschutzes im zivilen Luftverkehr einberufen, welches mit der Planung neuer verschärfter Grenzwerte befasst ist und die Mitgliedsländer zur Entwicklung geräuscharmer Techniken aufgefordert hat. Zusätzlich zu diesem internationalen Vorgehen haben viele Flughäfen eigene Grenzwerte verabschiedet, die meist strenger sind als die internationalen Vorgaben. So werden von lauten Flugzeugen höhere Gebühren gefordert oder die möglichen An- und Abflugzeiten eingeschränkt. Diese Regulierungen spiegeln die gewachsenen Umweltschutzaufgaben an die Flughafenbetreiber wider. Somit ist schon heutzutage die Lärmentwicklung eines Flugzeuges von wirtschaftlicher Bedeutung und entscheidend für die zukünftige Entwicklung des Luftverkehrs. Dies wird auch durch Untersuchungen der Europäischen Union zur europäischen Transportpolitik [32] belegt. Daraus resultierende Anforderungen für die Reduktion des Fluglärms sind beispielsweise vom ACARE (Advisory Council for Aeronautics Research in Europe) in dessen „Vision 2020“ [5] dargelegt und definieren die Ziele europäischer wie nationaler Forschungsaktivitäten in diesem Gebiet.

Ein Hauptverursacher des Fluglärms sind die Triebwerke, wobei die dominierende Lärmkomponente der Strahlärm ist. In den 1970er Jahren wurden erstmals Mantel- oder Nebenstromtriebwerke eingesetzt, die neben dem Abgasstrahl einen weiteren Strahl mit kleinerer Geschwindigkeit erzeugen. Diese Triebwerke waren dadurch mehr als 50% leiser als ihre Vorgänger. In den folgenden 20 Jahren konnten mit dieser Technik jedoch nur noch eine geringe weitere Absenkung der Lärmemission erreicht werden, da weitere Vergrößerungen des Nebenstromverhältnisses zu Einbauproblemen, höherem Gewicht und Luftwiderstand führen. Die in den letzten Jahrzehnten durchgeführten Verbesserungen und Optimierungen hatten eine Beseitigung stark dominierender Lärmquellen zur Folge, so dass alle Komponenten des Triebwerks in nahezu gleichem Maß zur Geräuscentwicklung beitragen. Um den emittierten Lärm des Triebwerks weiter zu senken, müssen daher an allen Komponenten gleichzeitig Lärminderungsmaßnahmen erfolgen. Die unterschiedlichen

Mechanismen von Verdichter-, Strahl- und Brennkammerlärm erzwingen somit flexibel einsetzbare Vorhersageverfahren, die alle möglichen Lärmquellen berücksichtigen. Als besonders störend werden dabei tonale Anteile etwa des Rotor- bzw. Rotor-Stator-Interaktionslärms empfunden, die sich durch den Triebwerkseinlauf und den Nebenstromkanal ausbreiten und dann ins Fernfeld abgestrahlt werden.

Lärminderungsmaßnahmen stehen oft im Widerspruch zu aerodynamischen Anforderungen. Daher ist es wünschenswert, schon während der Entwurfsphase sowohl aerodynamische Eigenschaften als auch die Lärmemission vorherzusagen und so eine geeignete Lösung als Kompromiss zwischen aerodynamischen und aeroakustischen Anforderungen zu finden. Solche Optimierungen sind allein mit experimentellen Untersuchungen nicht mehr zu leisten. In den letzten Jahrzehnten konnten durch die kontinuierliche Entwicklung und Verbesserung von numerischen Verfahren große Fortschritte und Erfolge bei der Simulation von Strömungen erzielt werden, so dass sich numerische Berechnungsverfahren inzwischen als robustes, zuverlässiges und effizientes Werkzeug zur aerodynamischen Auslegung etabliert haben. Die Anforderungen der Strömungsakustik übersteigen aber aufgrund des Wellencharakters und der kleinen Amplituden der akustischen Größen die Leistungsfähigkeit der gebräuchlichen Methoden zur Strömungssimulation. Seit den frühen 1990er Jahren sind daher eine Vielzahl von speziell für die Strömungsakustik optimierten numerischen Verfahren entwickelt worden. Diese wurden stetig verfeinert und sind inzwischen für die Untersuchung akustischer Phänomene in vereinfachten und oftmals akademischen Konfigurationen etabliert, beispielsweise für zweidimensionale oder axialsymmetrische Fragestellungen. Die Herausforderung besteht jetzt darin, diese Methoden der numerischen Strömungsakustik für komplexe industrielle Anwendungen nutzbar zu machen, was robuste und effiziente Verfahren erfordert, die geringe Anforderungen hinsichtlich Rechenzeit und Arbeitszeit für Pre- und Postprocessing stellen.

1.1 Numerische Strömungsakustik (CAA)

Das Fachgebiet der *Strömungsakustik* beschäftigt sich mit der Beschreibung von Entstehung und Ausbreitung von strömungsinduzierten Geräuschen in Fluiden. Für die technische Anwendung ist dabei die Minderung dieser Geräusche ein wesentliches Ziel. Untersuchungen in Hinblick auf die Lärmbelastung in der menschlichen Umwelt erfolgen meist mit Luft als Fluid. Das entsprechende strömungsakustische Teilgebiet wird daher als *Aeroakustik* bezeichnet, wobei im Ingenieurbereich Aeroakustik und Strömungsakustik häufig synonym verwendet werden.

Strömungsakustische Vorgänge lassen sich zum einen experimentell untersuchen und zum anderen auch mathematisch modellieren. Letzteres ermöglicht dabei sowohl eine theoretische als auch eine numerische Betrachtung und Analyse der strömungsakustischer Phänomene. Die Formulierung der „Akustischen Analogie“

durch Sir James Lighthill [58] im Jahre 1952 lieferte ein solches mathematisches Modell zur theoretische Beschreibung von strömungsinduziertem Lärm, das Abschätzungen und für einige Spezialfälle auch die Formulierung von analytischen Lösungen zur Schallentstehung durch Strömungen ermöglicht. Im Allgemeinen sind die mathematischen Modellgleichungen jedoch nicht analytisch lösbar, so dass nur ein numerische Zugang als Mittel der Wahl verbleibt.

Von besonderer Bedeutung für die praktische Einsatzfähigkeit numerischer Lösungsverfahren sind der benötigte Aufwand an Rechenzeit, die Grenzen des Verfahrens durch die Modellansätze und numerisch bedingte Anforderungen. Die Entwicklung und Verbesserung von numerischen Verfahren zur Approximation strömungsakustischer Modellgleichungen hat sich als ein eigenständiges Fachgebiet, der **Numerischen Strömungsakustik** (engl. *Computational Aeroacoustics, CAA*) etabliert und konnte im Zusammenhang mit der sich fortentwickelnden Computertechnik in den letzten Jahrzehnten große Erfolge bei der Beschreibung und Analyse von strömungsakustischen Vorgängen erzielen. Der Begriff selbst wurde in den frühen 1980er Jahren durch die Veröffentlichung von Hardin und Lemkin [42] geprägt. Da strömungsakustische Phänomene spezielle strömungsmechanische Vorgänge sind, lassen sich diese auch über die strömungsmechanischen Bilanzgleichungen modellieren. Diesem Ansatz folgten Hardin und Lemkin bei ihren damaligen Untersuchungen und verwendeten zur Lösung der entsprechenden Modellgleichungen klassische, nicht speziell optimierte Verfahren der Numerischen Strömungsmechanik (engl. *Computational Fluid Dynamics, CFD*). Dieser Ansatz hat jedoch einen sehr großen Ressourcenbedarf. Daher wurden von der Forschungsgemeinschaft Verfahren entwickelt oder adaptiert, die speziell für eine Simulation aeroakustischer Vorgänge ausgelegt sind.

Reduktion des numerischen Aufwands durch CAA-Verfahren Die folgende Betrachtung soll das Potential optimierter Verfahren, wie sie beispielsweise von Lele [55] oder Tam und Webb [98] entwickelt wurden, gegenüber den Standardverfahren im Hinblick auf den Ressourcenbedarf verdeutlichen.

Die diskrete Approximation von physikalischen Modellgleichungen in numerischen Verfahren führt zu verschiedenen Fehlern, deren Art und Größe darüber entscheiden, ob ein physikalischer Vorgang in der Simulation hinreichend gut wiedergegeben wird. Einen großen Einfluss auf den Fehler hat dabei die Auflösungsfähigkeit des für die Approximation eingesetzten Gitternetzes. Im Allgemeinen sinkt mit steigender Auflösung der Diskretisierungsfehler, wobei jedoch im Gegenzug der numerische Aufwand für die Simulation steigt. Bei der Wiedergabe von Schallwellen ist daher von maßgeblicher Bedeutung, mit wie vielen Punkten pro Wellenlänge (PPW) diese auf dem Gitter aufgelöst werden können. Als Maßstab für die Bewertung der Wiedergabequalität des Wellencharakters durch ein numerisches Verfahren eignet sich das Verhältnis von numerischer und physikalischer Gruppengeschwindigkeit, welches für eine fehlerfreie Approximation gleich eins sein sollte.

In Abbildung 1.1 ist für unterschiedliche Verfahren dieses Verhältnis in Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Punkte pro Wellenlänge dargestellt.

Standard-CFD-Verfahren sind meist von zweiter Ordnung und benötigen daher für eine hinreichend genaue Wiedergabe der Schallcharakteristika eine Auflösung von etwa 50 PPW. Selbst mit einem nicht optimierten Verfahren vierter Ordnung sind noch ca. 20 PPW erforderlich, während speziell für die Schallausbreitung optimierte Verfahren ebenfalls vierter Ordnung mit nur 7 PPW auskommen. Neben der räumlichen spielt auch die zeitliche Auflösung für die Simulation der Schallausbreitung eine wesentliche Rolle. Zeit- und Ortsschrittweite sind über die CFL-Bedingung miteinander verknüpft. Für akustische Simulationen mit expliziten Finiten-Differenzen-Verfahren sind für die Verfahrensstabilität CFL-Zahlen von eins typisch, so dass die notwendige Zeitschrittweite direkt proportional zur erforderlichen Ortsschrittweite ist. Der Einsatz optimierter CAA-Verfahren höherer Ordnung ermöglicht für dreidimensionale Konfigurationen somit eine Reduktion des numerischen Aufwands um das bis zu 2400fache gegenüber nicht optimierten CFD-Verfahren zweiter Ordnung.

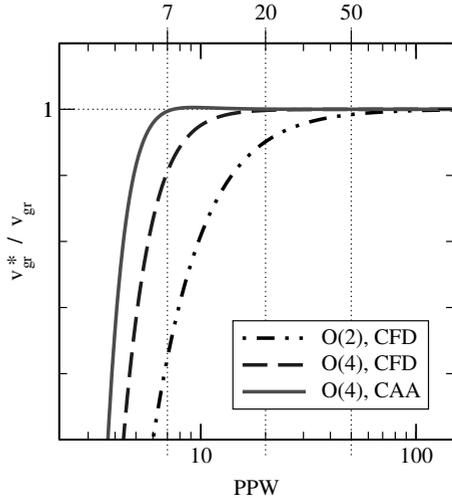


Abbildung 1.1: Numerische Gruppengeschwindigkeiten verschiedener Verfahren

Klassifizierung von CAA-Verfahren Das Spektrum aeroakustischer Lösungsverfahren, die sich unter dem Sammelbegriff CAA-Verfahren zusammenfassen lassen, ist sehr breit. Es beinhaltet die schon angesprochenen hochauflösenden CFD-Verfahren sowie die im folgenden Abschnitt diskutierten akustisch optimierten Verfahren höherer Ordnung zur Lösung der strömungsmechanischen bzw. -akustischen Bilanzgleichungen. Eine weitere Möglichkeit zur Modellierung bilden Wellengleichungsansätze und akustische Analogien, zu deren Lösung Integralverfahren und Randelementemethoden zum Einsatz kommen. Entsprechende Ansätze und Verfahren werden in Kapitel 2.5 näher diskutiert. Zur Lösung des Gesamtproblems kommen oft auch hybride Ansätze zum Einsatz, die eine Kombination verschiedener Verfahren in sich vereinen. Eine klare Klassifizierung der Verfahren ist daher sehr schwierig. So sind Differenzierungen etwa nach den zugrundeliegenden Modellansätzen oder auch den numerischen Approximationstechniken möglich.

In dieser Arbeit beschränkt sich die Verwendung des Begriffs „CAA-Verfahren“ auf akustisch optimierte Verfahren höherer Ordnung. Für weitere Verfahren der numerischen Strömungsakustik werden jeweils deren spezifische Bezeichnungen verwendet.

1.1.1 Verfahren höherer Ordnung

Es existiert eine Vielzahl von Verfahren, die speziell für die Simulation der Schallausbreitung ausgelegt sind und entweder im Frequenzbereich oder im Zeitbereich arbeiten. Die Spanne einsetzbarer Verfahren reicht von Discontinuous-Galerkin-Methoden [7, 8, 24] über Spektral-Element-Methoden [71], Finite-Element-Methoden [6, 41, 79], der „Green’s Function Discretization“ [21] bis hin zu Finiten-Differenzen-Methoden. Letztere sind aufgrund ihrer relativ einfachen Optimierbarkeit sehr weit verbreitet. Die bekanntesten Finiten-Differenzen-Ansätze sind die „Compact Schemes“ von Lele [55] und das „Dispersion-Relation-Preserving Scheme“ (DRP) von Tam und Webb [98], welches auch für die CAA-Simulationen in dieser Arbeit eingesetzt wird. Für die im Zeitbereich formulierten Discontinuous-Galerkin- und Finiten-Differenzen-Methoden existieren eine Reihe unterschiedlicher Verfahren zur ebenfalls notwendigen hochauflösenden Zeitintegration. Im Zusammenhang mit der Entwicklung des DRP-Schemas wurde von Tam und Webb [98] ein optimiertes Adams-Bashford-Mehrschrittverfahren vorgestellt, das aber aufgrund seines sehr hohen Speicherbedarfs kaum noch Anwendung findet. Weit verbreitet sind optimierte Runge-Kutta-Verfahren, wie beispielsweise das „Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Scheme“ (LDDRK) von Hu et al. [48], dessen Speicherbedarf durch die „2N-Storage“ Formulierung von Stanescu und Habashi [93] noch weiter reduziert werden konnte.

Der Einsatz solcher Verfahren reduziert einerseits wie im vorherigen Abschnitt ausgeführt signifikant den numerischen Aufwand, andererseits bedingt die hohe Ordnung zusätzliche Anforderungen, die im Folgenden kurz erläutert werden.

Stabilität Da die diskrete Approximation der kontinuierlichen Modellgleichungen in den Finiten-Differenzen-Verfahren nur die korrekte Wiedergabe eines beschränkten Wellenlängenbereichs erlaubt, entstehen durch nicht vollständig aufgelöste Wellen sogenannte Gitterschwingungen, die durch eine breitbandige Anregung oder durch numerische Fehler unkontrolliert angefacht werden. Zur Eliminierung dieser kurzwelligen Anteile und der damit einhergehenden Instabilität des numerischen Verfahrens stehen verschiedene Methoden zur Verfügung. Tam und Dong [97] haben mit ihrer „Selective Artificial Damping“ (SAD) dazu das selektive Einbringen künstlicher Dissipation in die diskrete Formulierung der Modellgleichungen vorgeschlagen. Für viele praktische Anwendungsfälle arbeitet dieses Verfahren aber nicht selektiv genug, wodurch die Lösung insgesamt zu stark gedämpft wird.

Der Ansatz des „Upwind DRP Scheme“ [111, 112] optimiert die dissipativen Eigenschaften asymmetrischer DRP-Schemata so, dass nur kurzweilige Anteile der Lösung gedämpft werden. Als sehr effiziente Möglichkeit zur Eliminierung der Gitterschwingungen bei gleichzeitig nur geringer Dämpfung der aufgelösten Anteile hat sich eine Tiefpass-Filterung hoher Ordnung der Lösung erwiesen [18, 68, 76, 110], wie sie auch in dieser Arbeit verwendet wird.

Reflexionsfreie Randbedingungen Im Gegensatz zu analytischen Betrachtungen sind numerische Simulationen auf ein endliches Rechengebiet beschränkt, was die Formulierung von Randbedingungen an den Gebietsgrenzen erforderlich macht. Für Anwendungsfälle, bei denen der Schall in den freien Raum austritt oder bei nicht physikalisch berandeten Konfigurationen sind daher Randbedingungen notwendig, die ein ungehindertes Passieren der Gebietsgrenze ermöglichen, ohne dabei unphysikalische Reflexionen zurück ins Rechengebiet zu erzeugen. Die Entwicklung reflexionsfreier Randbedingungen hat sich als eine der Hauptschwierigkeiten der CAA herausgestellt. Im Laufe der Jahre ist eine Vielzahl solcher Randbedingungen für diverse Anwendungsszenarien erarbeitet worden. Ein guter Überblick dazu ist beispielsweise bei Tam [94] zu finden. Die verschiedenen Ansätze für reflexionsfreie Randbedingungen lassen sich im Wesentlichen in zwei Klassen einteilen:

Charakteristische Randbedingungen basieren auf der asymptotischen Lösung für eine kompakte Schallquelle, wobei ausgehend von dieser Lösung die Modellgleichungen am Gebietsrand derart modifiziert werden, dass nur aus dem Rechengebiet herausgerichtete Störungen beschrieben werden. Vertreter dieser Klasse sind die Randbedingungen von Giles [38], Thompson [101, 102], Tam und Webb [98] sowie Bogy und Bailly [17].

Absorbierende Randbedingungen hingegen folgen dem Ansatz, alle Fluktuationen innerhalb einer Randzone soweit zu dämpfen, dass diese den Rechengebietsrand nicht mehr erreichen und somit nicht reflektiert werden können. Dies wird durch zusätzliche Dissipationsterme im Modellgleichungssystem realisiert. Eine einfache, für CAA-Simulationen einsetzbare Randbedingung ist die von Israeli und Orszag [50] vorgestellte Absorptionszone (engl. *sponge layer*), deren Wirksamkeit aber von der jeweiligen Konfiguration abhängt. Speziell für Wellenausbreitungsprobleme ausgelegt ist die PML-Randbedingung (engl. *perfectly matched layer*), wobei Formulierungen für verschiedene CAA-Verfahren (Finite-Differenzen, Finite-Elemente, Discontinuous-Galerkin) entwickelt wurden bzw. für diese anwendbar sind [1, 2, 16, 44, 47, 48].

Obwohl die verschiedenen Autoren die Wirksamkeit ihrer reflexionsfreien Randbedingungen anhand von meist akademischen Testkonfigurationen belegt haben, ist keine von ihnen universell für alle Anwendungsfälle geeignet. Eine besondere Schwierigkeit stellt der Rechengebietsabschluss innerhalb von Rohrumgebungen

dar. Da diese aber bei der Untersuchung von Triebwerkslärm eine wichtige Rolle spielen, werden in dieser Arbeit verschiedene reflexionsfreie Randbedingungen auf ihre Eignung untersucht.

1.1.2 Overset-Gitter-Ansatz für komplexe Geometrien

Eine der wesentlichen Herausforderungen beim Einsatz von Finiten-Differenzen-Verfahren höherer Ordnung für anwendungsnahe Konfigurationen mit komplexer Geometrie ist die effiziente Generierung von qualitativ hochwertigen Rechnernetzen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Güte der Netze einen maßgeblichen Einfluss auf die Lösungsqualität der Simulationen besitzt. Für CAA-Techniken auf Basis von Finiten-Differenzen-Verfahren höherer Ordnung ist eine hohe Netzgüte gleichbedeutend mit der Forderung nach Gittern eines geringen Verzerrungsgrades, einer möglichst äquidistanter Knotenverteilung und einem hohen Grad an lokaler Orthogonalität.

Der klassische Ansatz zur Vernetzung komplexer Geometrien sind krummlinige körperangepasste Gitter, die diese Forderungen aber oft nicht erfüllen können. Eine Verbesserungsmöglichkeit bietet die aus der CFD bekannte *Gitterzerlegung*, bei der statt der Überdeckung des Rechengebiets mit einem einzelnen Gitter eine Unterteilung in Blöcke erfolgt, die separat vernetzt werden. Solch eine Gitterzerlegung führt bei CAA-Verfahren höherer Ordnung aber zu neuen Schwierigkeiten. Bei einer den Anforderungen der CAA genügenden Zerlegung entstehen schnell sehr komplexe Topologien mit einer großen Anzahl von Blöcken, die eine Generierung der Netze sehr anspruchsvoll und zeitaufwändig macht. Des Weiteren können bedingt durch die hohe Ordnung der CAA-Verfahren beim Datenaustausch an den Blockschnittstellen Inkonsistenzen in der Approximation von Ableitungen aus den Modellgleichungen entstehen. Während sich diese Schwierigkeiten bei einfachen akademischen Testkonfigurationen meist vermeiden lassen, stellen sie für komplexe anwendungsnahe Konfigurationen ein ernsthaftes Problem dar. Dies spiegelt sich oft in einem großen Arbeitsaufwand für die Gittergenerierung oder alternativ in einer relativ schlechten Netzgüte wider.

Mit der *Gittereinbettung* ist neben der Gitterzerlegung eine weitere Technik aus der CFD zur effizienten Vernetzung komplexer Geometrien bekannt, die oft auch als Overset-Gitter-Methode oder Chimera-Technik bezeichnet wird. Nach einigen speziellen Entwicklungen [9, 43, 100] in den frühen 1980er Jahren wurde erstmals von Benek et al. [14] ein generalisiertes 2D-Verfahren zum Einsatz in verschiedenen strömungsmechanischen Anwendungen vorgestellt. Dessen Grundidee besteht in der separaten Vernetzung einzelner Komponenten einer komplexen Konfiguration mit in Topologie und Auflösung geeigneten Gittern, die dann über ein die gesamte Konfiguration umfassendes Wirtsgitter gesetzt werden. Dabei ist auch eine unterschiedliche Modellierung (Navier-Stokes, Euler, etc.) mit entsprechender

numerischer Behandlung in den einzelnen Gittern möglich. Der zum Erhalt einer zusammenhängenden Lösung notwendige Datenaustausch zwischen Komponenten- und Wirtsgitter erfolgt über eine Interpolation der Feldgrößen zwischen den Gittern im Randbereich der Einbettungen. Ausgehend vom zunächst zweidimensionalen Ansatz erfolgten später umfangreiche Erweiterungen und Verbesserungen für dreidimensionale Konfigurationen [15], bewegte Komponenten oder auch CFD-Verfahren höherer Ordnung [54, 61, 91].

Verglichen mit den Einbettungstechniken für die CFD werden an eine Chimera-Technik in der numerischen Strömungsakustik höhere Anforderungen in Bezug auf das zu verwendende Interpolationsverfahren und die Bestimmung der auszutauschenden Gitterknoten gestellt. Adäquate Ansätze dazu sind etwa bei Delfs [25] und Tam et. al [99] dargestellt.

Unter den Aspekten Vereinfachung der Gittergenerierung und Erhöhung der Gitterqualität ist die prinzipielle Eignung des Ansatzes beispielsweise für die Simulation des Hinterkantenlärms eines Tragflügels in 2D von Yin und Delfs [109] oder für die Triebwerkslärm-Tragflügel-Interaktion in 3D von Redonnet et al. [74] gezeigt worden.

1.1.3 Zonale Zerlegung

Die direkte numerische Simulation strömungsakustischer Vorgänge mit klassischen CFD-Verfahren ermöglicht die Erfassung aller Mechanismen zur Schallentstehung und erlaubt eine Beschreibung der Schallausbreitung. Dieser Ansatz ist wie oben beschrieben aber extrem ressourcenintensiv, d.h. für technisch relevante Konfigurationen können leicht Fallgrößen von einigen 100 Millionen Gitterpunkten notwendig sein, wodurch solche Simulationen selbst auf modernen Supercomputern kaum mehr realisierbar sind. Durch den Einsatz von optimierten CAA-Verfahren höherer Ordnung ist eine signifikante Reduktion dieses Aufwands möglich. Die den CAA-Verfahren zugrundeliegenden Modellansätze erlauben aber meist keine Simulation der Schallentstehungsprozesse. Weiterhin ist der numerische Aufwand für die Vorhersage des Schalls an weit entfernten Beobachterpositionen trotz der erzielten starken Kostenreduktion durch Verfahren höherer Ordnung noch enorm groß, so dass sich die CAA-Verfahren nicht für die Fernfeldvorhersage eignen.

Eine Ansatzmöglichkeit zur Reduktion des numerischen Aufwands auf ein für die industrielle Anwendung praktikables Maß bei einer gleichzeitigen Erfassung der relevanten physikalischen Mechanismen bildet die zonale Zerlegung des Untersuchungsgebiets. Die Grundidee der zonalen Zerlegung ist eine Aufteilung des Rechengebiets in Zonen, in denen aufgrund unterschiedlicher physikalischer Gegebenheiten verschiedene mathematische Modellansätze verwendet werden, so dass jeweils ein geeignetes effizientes numerisches Verfahren zur Simulation eingesetzt werden kann.

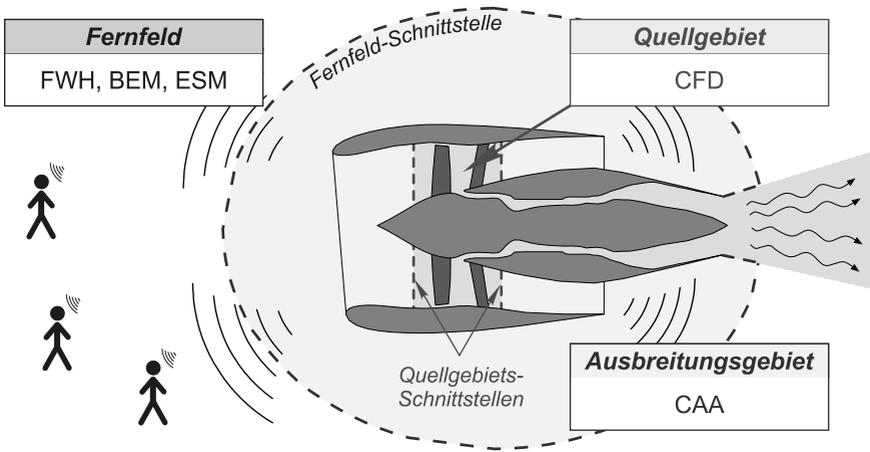


Abbildung 1.2: Zonale Zerlegung am Beispiel eines Flugtriebwerks

Für ein Turbofantriebwerk ist eine solche Zerlegung in Abbildung 1.2 veranschaulicht. Entsprechend der physikalischen Anforderungen an eine mathematische Modellierung wird zwischen drei Zonen unterschieden, dem Quellgebiet, dem Ausbreitungsgebiet und dem Fernfeld.

Quellgebiet Das Quellgebiet ist durch eine instationäre Umströmung von Hauptrotor (engl. *fan*) und Stator (engl. *outlet guide vanes*, OGV) gekennzeichnet, diese ruft beispielsweise Rotorgeräusche und Rotor-Stator-Interaktionslärm hervor. Bei der Modellierung der strömungsinduzierten Schallentstehung sowie der Schallausbreitung in einer stark instationären Strömung sind keine Vereinfachungen an den strömungsmechanischen Modellgleichungen aufgrund spezieller Eigenschaften des Schalls möglich. Im Quellgebiet werden die akustischen Phänomene als Teil der Strömung modelliert, typischerweise mit den Navier-Stokes-Gleichungen. Zur numerischen Lösung kommen etablierte CFD-Verfahren zum Einsatz. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass aufgrund der großen Disparität der Skalen zwischen turbulenten Strömungsgrößen und den akustischen Größen, Simulationen mit sehr hoher Auflösung erforderlich sind. Für die praktische Anwendung sollte daher die Größe des Quellgebietes so klein wie möglich gehalten werden, um so auch den numerischen Aufwand zu minimieren. Die hochauflösenden CFD-Simulationen können je nach Anwendungsfall mit unterschiedlichen Methoden erfolgen, beispielsweise mit URANS, LES, DES oder DNS. Zur Berechnung des Rotor- bzw. Rotor-Stator-Interaktionslärms sind in der Literatur verschiedene Ansätze zu finden, z.B. bei Schnell [85] und Gerolymos et al. [37]. Neben den sehr aufwändigen instationären

Methoden gibt es auch Ansätze, die auf stationären Strömungssimulationen, wie etwa RANS, aufbauen. Zur Beschreibung der Schallquellen aus stationären Strömungsdaten ist dann ein zusätzliches Quellmodell erforderlich, wie beispielsweise das ursprünglich für Strahlärmprognosen entwickelte SNGR-Modell von Bechara et al. [12]. Solche statistischen Modelle sind aber auf spezielle Anwendungsfälle beschränkt, wie etwa auf den Hinterkantenlärm von Tragflügeln.

Ausbreitungsgebiet Das Ausbreitungsgebiet ist im Gegensatz zum Quellgebiet frei von Schallquellen. Die Ausbreitung von Schallwellen wird aber durch verschiedene Faktoren beeinflusst. So treten durch Gehäusewände und Störkörper Reflexionen auf. Auch Geschwindigkeits- und Dichtegradienten im Strömungsfeld verändern das Ausbreitungsverhalten des Schalls. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften des Schalls lassen sich diese Phänomene mit akustischen Modellgleichungen erfassen, die gegenüber den strömungsmechanischen Grundgleichungen vereinfacht sind, wie etwa den linearisierten Eulergleichungen (LEE) oder den „Acoustic Perturbation Equations“ (APE) [33]. Zur Lösung dieser akustischen Grundgleichungen stehen eine Vielzahl von optimierten numerischen Verfahren zur Verfügung. Die Optimierung zielt dabei auf eine genauere Wiedergabe akustisch relevanter Faktoren bei der numerischen Approximation der Differenzialgleichung, um so die benötigte Auflösung für die Simulation und damit den numerischen Aufwand zu reduzieren. Beispiele für solche optimierten Verfahren sind das DRP-Schema von Tam und Webb [98] oder die kompakten Schemata von Lele [55]. Verglichen mit den Standard-CFD-Verfahren ermöglichen diese Methoden eine deutliche Ressourcenreduktion, so dass numerischen Simulationen für Ausbreitungsgebiete mit einer für technische Anwendungen typischen Größe praktikabel werden, was schon im Abschnitt 1.1.1 genauer diskutiert wurde.

Fernfeld Sowohl die CFD-Verfahren als auch die optimierten CAA-Verfahren für die Simulationen im Quell- bzw. Ausbreitungsgebiet basieren auf kontinuierlichen differenziellen Modellansätzen. Die Lösung muss daher im gesamten Volumen des Rechengebiets berechnet werden, wodurch sich diese Ansätze nicht bzw. nur begrenzt für die Vorhersage des an entfernten Beobachterpositionen wahrnehmbaren Schalls eignen. Trotz der Optimierungen bei den CAA-Verfahren wächst der numerische Aufwand mit zunehmendem Abstand von Quelle und Beobachter und überschreitet sehr schnell die Leistungsfähigkeit selbst moderner Supercomputer. Da das Fernfeld im Allgemeinen frei von Störkörpern ist und durch eine konstante mittlere Grundströmung gekennzeichnet ist, bieten sich für dessen Modellierung Ansätze an, die auf einer Wellengleichung basieren. Beispiele für solche Ansätze sind die Ersatzstrahlermethode (engl. *equivalent source method*, ESM), Randelementeverfahren (engl. *boundary element methods*, BEM) auf Basis von Kirchoff-Integralen und Integralverfahren zur Lösung von akustischen Analogien. Allen Verfahren ist gemein, dass sie die Berechnung der Lösung in beliebigem Abstand zur Quelle mit

dem gleichen numerischen Aufwand erlauben. Es existiert eine Vielzahl akustischer Analogien, die aufgrund ihrer Modellannahmen verschiedene Einsatzgebiete oder Einschränkungen haben. Typische Vertreter sind die Lighthill-Analogie [58] oder die Analogie von Ffowcs Williams & Hawkins [36]. Durch den jeweiligen zur Lösung notwendigen numerischen Aufwand eignen sie sich dabei unterschiedlich gut für eine Vorhersage des Schalls im Fernfeld. Die Berechnung des Fernfeldschalls an einer Beobachterposition mittels eines Integralverfahrens ist deutlich aufwändiger als die Berechnung eines Gitterpunktes mit einem CFD- oder CAA-Verfahren. Da aber meist nur eine beschränkte Anzahl von Fernfeldbeobachtern benötigt wird, um etwa Richtcharakteristiken zu bestimmen, und der Aufwand unabhängig vom Abstand der Quelle zum Beobachter ist, führt dieses Vorgehen trotzdem zu einer signifikanten Reduktion bei der Berechnung des Fernfeldschalls.

Mit der hier dargestellten zonalen Zerlegung wird eine Simulation der Ausbreitung von tonalem Fanlärm eines Turboantriebes mit für den industriellen Einsatz akzeptablem Ressourcenaufwand möglich. Dieser Ansatz eignet sich gleichermaßen für die Berechnung der Schallausbreitung durch den Triebwerkeinlauf wie durch den Nebenstromkanal. Eine solche Zerlegung ist aber auch mit Problemen verbunden, so können etwa Rückkopplungen aus Zonen mit einfacherer Modellierung auf Zonen mit umfassenderen Modellansätzen nicht berücksichtigt werden. Insgesamt betrachtet stellt dieses Vorgehen aber einen guten Kompromiss zwischen Vorhersagequalität und dem dafür notwendigen numerischen Aufwand dar.

1.2 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung, Validierung und Anwendung eines hybriden, numerischen Gesamtverfahrens für die Simulation der Ausbreitung von tonalem Schall unter Strömungseinfluss in komplexen dreidimensionalen Flugtriebwerkskonfigurationen und dessen Abstrahlung ins Fernfeld. Das Hauptaugenmerk liegt dabei in der Effizienz des Verfahrens, so dass der für die Simulation notwendige numerische Aufwand und die Arbeitszeit für Pre- und Postprocessing, etwa für die Gittergenerierung, in einer Größenordnung liegt, die für einen industriellen Einsatz praktikabel ist. Dazu werden verschiedene bekannte Simulationsverfahren und Analysemethoden weiterentwickelt, erweitert und miteinander kombiniert.

Abbildung 1.3 zeigt schematisch den Aufbau des hybriden Verfahrens, welches auf der im vorherigen Abschnitt vorgestellten zonalen Zerlegung beruht. Die Bestimmung der Schallquellen selbst ist kein Bestandteil des hier umgesetzten Konzepts. Die Quellinformationen werden vielmehr über Randbedingungen in das im Ausbreitungsgebiet eingesetzte CAA-Verfahren eingebracht. Dazu sind verschiedene Vorgehensweisen möglich. Zum einen kann aus in Experimenten gemessenen oder aus mit hochauflösenden CFD-Simulationen berechneten instationären Quelldaten mittels eines Modalanalyseverfahrens das Modenfeld der Schallquelle bestimmt

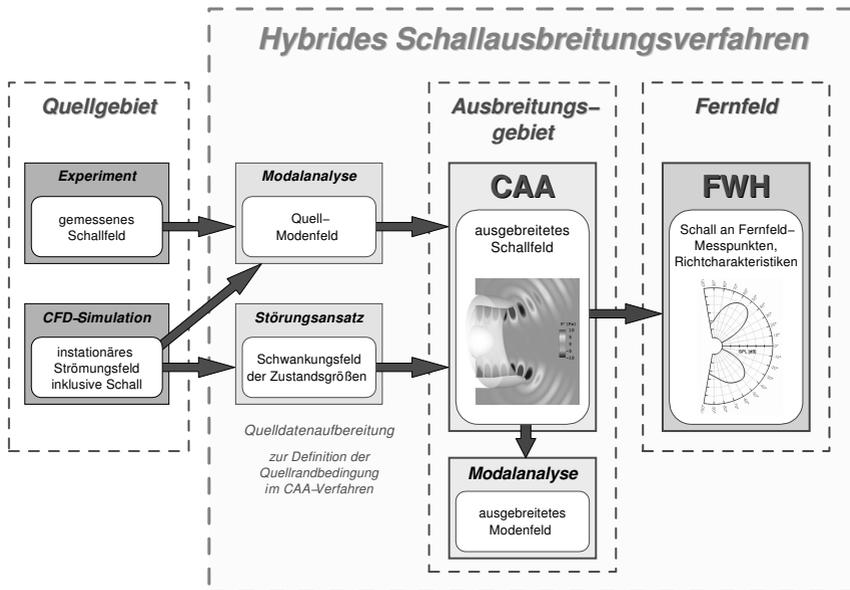


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung des hybriden Verfahrens

werden. Die so gewonnene Modenverteilung mit Amplituden und Phasenlagen der einzelnen Moden ermöglicht dann eine sehr effiziente analytische Quellebeschreibung im CAA-Löser. Einen weiteren Ansatz bietet die Extraktion der Schwankungsgrößen aus instationären CFD-Lösungen mittels eines Störungsansatzes, welche dann direkt als Quellrandbedingung im CAA-Verfahren eingesetzt werden können. Dieses Vorgehen eignet sich besonders für solche Fälle, bei denen das Quellfeld eine sehr große Anzahl von Moden enthält oder bei denen sich die modale Struktur zeitlich ändert. Die Berechnung der Schallausbreitung innerhalb des Triebwerks und in dessen Nahfeld erfolgt mit einem optimierten CAA-Verfahren höherer Ordnung. Das so bestimmte Schallfeld kann je nach Anwendung für Detailuntersuchungen modal zerlegt werden oder mittels der FWH-Integralmethode bis ins Fernfeld ausgebreitet werden, um etwa Richtcharakteristiken oder die Lärmbelastung an Zertifizierungspunkten zu bestimmen.

Der CAA-Code TUBA *axi* für axialsymmetrische Konfigurationen, welcher am ISTA entwickelt wurde [68, 84, 86] und sich schon langjährig erfolgreich in der praktischen Anwendung befindet [19, 56, 64, 87–89], bildet die Grundlage für die in Kooperation erfolgte Weiterentwicklung und Erweiterung des Verfahrens für dreidimensionale Anwendungen. Einen Schwerpunkt dieser Arbeit bildet dabei die Entwicklung einer effizienten Overset-Gitter-Methode für das CAA-Verfahren

und dessen Implementierung in TUBA 3D, welche die Simulation komplexer anwendungsnaher Konfigurationen ermöglicht. Weiterhin erfolgt die Validierung des CAA-Codes im Hinblick auf die angestrebten Untersuchungen der Schallausbreitung in Flugtriebwerken. Bei der Validierung wird besonderes Augenmerk auf die Bestimmung einer probaten Gitterauflösung und für Rohrumgebungen geeigneter reflexionsarmer Randbedingungen gerichtet.

Zur Erprobung des Zusammenwirkens aller Komponenten des hybriden CAA-FWH-Verfahrens und der zur Verfügung gestellten Werkzeuge für Preprocessing und Ergebnisanalyse erfolgen abschließend Untersuchungen an generischen Triebwerkskonfigurationen. Die vereinfachten Konfigurationen sind dabei so gewählt, dass sie alle relevanten Anforderungen und prinzipiellen Schwierigkeiten äquivalent wiedergeben.

Gliederung

In *Kapitel 2* werden für die eingesetzten CAA-, FWH- und Modalanalyseverfahren zunächst die mathematischen Grundlagen in Form unterschiedlicher Ansätze zur Modellierung der Schallausbreitung dargestellt und ihre durch die jeweils vorgenommenen Vereinfachungen bedingten Grenzen und Beschränkungen erläutert.

Kapitel 3 beschreibt detailliert die einzelnen numerischen Verfahren. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem CAA-Verfahren mit seinen optimierten räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsschemata, den entsprechenden Gitteranforderungen, der Berücksichtigung des Grundströmungseinflusses und den verschiedenen Randbedingungen für Quellen, Wände sowie dem reflexionsfreien Rechengebietsabschluss. Weiterhin wird das FWH-Verfahren zur Fernfeldvorhersage und das Modalanalyseverfahren näher geschildert.

Zur effizienten Behandlung komplexer Geometrien wird in *Kapitel 4* eine für das CAA-Verfahren geeignete Overset-Gitter-Methode vorgestellt, die auf eine Minimierung des numerischen Mehraufwands während der Simulation ausgelegt ist. Zunächst werden die Probleme diskutiert, die durch den Einsatz klassischer Ansätze zur Gitterzerlegung im Zusammenhang mit CAA-Verfahren höherer Ordnung auftreten können. Anschließend wird eine für Verfahren höherer Ordnung adaptierte Overset-Gitter-Methode mit deren verschiedenen Komponenten detailliert beschrieben und deren Grenzen diskutiert.

Die Validierung des dreidimensionalen CAA-Verfahrens selbst und des hybriden CAA-FWH-Ansatzes erfolgt in *Kapitel 5*. Anhand von Ringkanalkonfigurationen, für die analytische Lösungen angegeben werden können und die der Geometrie in einem Flugtriebwerk nahe kommen, wird zuerst der Einfluss von Gitterauflösung und Randbedingungen auf die Lösungsqualität evaluiert, was die Festlegung von Mindestauflösungen und die Auswahl von geeigneten reflexionsarmen Randbedingungen

für Rohrumgebungen ermöglicht. Weiterhin wird untersucht, welchen Einfluss der Einsatz der Overset-Gitter-Technik im CAA-Verfahren auf die Güte der Lösung hat. Abschließend wird das Zusammenwirken von CAA- und FWH-Verfahren im hybriden Ansatz anhand des experimentell und numerisch gut untersuchten JT15D-Testfalls validiert.

Zum Nachweis der Eignung des hybriden CAA-FWH-Verfahrens für praxisnahe Simulationen werden in *Kapitel 6* typische technische Anwendungsfälle untersucht. Die eingesetzten Testkonfigurationen sind generisch und gegenüber realen Konfigurationen vereinfacht. Sie wurden aber so gewählt, dass sie die wesentlichen Merkmale realer Anwendungsfälle widerspiegeln und so die gleichen Anforderungen an eine Simulation stellen. Da der Schwerpunkt für den Einsatz bei der Vorhersage des Ausbreitungsverhaltens und der Abstrahlung von tonalem Triebwerkslärm liegen soll, wird die Schallausbreitung durch den Einlauf sowie den Nebenstromkanal eines Triebwerks simuliert. Die Untersuchung des Einlaufs erfolgt dabei für angeschrägte Gehäuse (engl. *scarfed intakes*), wobei sowohl in der Praxis übliche, positive Ansträngungswinkel als auch die Lärmemission in Bodenrichtung mindernde, negative Ansträngungen Anwendung finden. Neben der Gehäuseform werden auch Strömungseinflüsse wie Anstellwinkel und Strömungsgeschwindigkeit auf den abgestrahlten Schall betrachtet. Bei den Nebenstromkanalsimulationen liegt der Schwerpunkt in der Untersuchung des Einflusses von Einbauten auf die Schallausbreitung. Verstrebungen und Gabelungen innerhalb des Nebenstromkanals führen zu einer Modenstreuung. Die Simulationen im Nebenstromkanal sind daher numerisch anspruchsvoller als die Untersuchungen im Triebwerkseinlauf, so dass für diese zunächst auf eine Grundströmung verzichtet wird.

2 Modellierung der Schallausbreitung

Als Schall werden kleine Druck-, Dichte- und Geschwindigkeitsschwankungen bezeichnet, welche sich in einem ruhenden Medium mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten. Druck und Dichte gehorchen dabei einer adiabaten Beziehung [28]. Diese Schwankungen breiten sich in einem Fluid in Form von longitudinalen Wellen aus, wobei die Schallwellen das Fluid um einen mittleren Strömungszustand bewegen [83]. Die Amplituden der Druckschwankungen erstrecken sich dabei zwischen der Hörschwelle und der Schmerzgrenze des menschlichen Gehörs über sechs Größenordnungen. Selbst an der Schmerzgrenze sind die Schwankungen damit noch um mehrere Größenordnungen kleiner als die mittleren Zustandsgrößen.

Diese Eigenschaften des Schalls eröffnen verschiedene Möglichkeiten zu dessen Modellierung in strömenden Fluiden. Zum einen lässt sich die Schallausbreitung prinzipiell als rein strömungsmechanischer Vorgang auffassen, der sich mit Hilfe von strömungsmechanischen Grundgleichungen, etwa den Navier-Stokes-Gleichungen (Abschnitt 2.1), mathematisch beschreiben lässt. Da eine zur Lösung dieser Modellgleichungen notwendige direkte numerische Simulation sehr aufwändig ist, hat sich als Möglichkeit zur Effizienzsteigerung die separate Behandlung von Akustik und Strömung etabliert. Zur Realisierung dieses Ansatzes werden zunächst die Strömungsbilanzgleichungen unter Berücksichtigung der Schalleigenschaften vereinfacht und anschließend in einen, die Strömung repräsentierenden, mittleren Gleichanteil und einen, auch den Schall enthaltenden, Schwankungsanteil zerlegt. Der signifikante Größenunterschied zwischen den akustischen Schwankungen und der mittlerer Strömung erlaubt als weitere sinnvolle Vereinfachung die Linearisierung der Modellgleichungen. Die so gewonnenen strömungsakustischen Modellgleichungen (Abschnitt 2.2) bilden die mathematische Basis für das in dieser Arbeit eingesetzte CAA-Verfahren.

Weitere Modellannahmen und Vereinfachungen erlauben daraus die Formulierung der akustischen Wellengleichung (Abschnitt 2.3). Auf deren Grundlage ist dann beispielsweise eine Beschreibung und Analyse des Schallfeldes in Rohrumbgebungen möglich, was bei der Untersuchung von tonalem Triebwerkslärm Anwendung findet (Abschnitt 2.4).

Für die Vorhersage des Fernfeldschalls bieten sich akustische Analogien an, die ebenfalls auf Wellengleichungsformulierungen für spezielle Strömungszustände und Randbedingungen basieren. Die Auswertung der akustischen Analogie im Fernfeld erfordert die Berechnung von Oberflächenintegralen, was sehr effizient möglich ist (Abschnitt 2.5).

2.1 Strömungsmechanische Bilanzgleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die Eigenschaften eines Fluids als Kontinuum durch den Erhalt von Masse, Impuls und Energie in einem materiellen Volumen und sind in der Lage, alle auftretenden Strömungsphänomene einschließlich der Schallausbreitung wiederzugeben.

Für die Herleitung numerischer Verfahren werden diese Bilanzgleichungen meist auf der Basis raumfester Eulerscher-Koordinaten betrachtet. Die Bilanzgleichungen für raumfeste Volumina lassen sich wie folgt formulieren [81][83]:

Massenbilanz Die Kontinuitätsgleichung repräsentiert den Erhalt der Masse des Fluids, d.h. die zeitliche Änderung der Masse in einem raumfesten Volumen entspricht dem Zu- bzw. Abstrom von Masse über die Oberfläche des Volumens:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_A \rho \underline{u} \cdot d\underline{A}. \quad (2.1)$$

In differenzieller Form gilt entsprechend:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{ div } \underline{u} = 0. \quad (2.2)$$

Impulsbilanz Die zeitliche Änderung des Impulses entspricht der Summe der äußeren Kräfte, die auf das Fluid im raumfesten Volumen wirken:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{u} dV = - \oint_A \rho \underline{u} \underline{u} \cdot d\underline{A} - \oint_A p d\underline{A} - \oint_A \underline{\tau} \cdot d\underline{A} + \int_V \underline{f} dV. \quad (2.3)$$

Hierbei bezeichnen p den statischen Druck, $\underline{\tau}$ den Zähigkeitsspannungstensor und \underline{f} die Volumenkräftdichte. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes lassen sich die Oberflächenintegrale in Volumenintegrale umwandeln, was zur differenziellen Form des Impulssatzes führt:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \text{grad } \underline{u} \right) = -\text{grad } p + \text{div } \underline{\tau} + \underline{f}. \quad (2.4)$$

Energiebilanz Als weitere Bilanz steht noch die Erhaltung der Energie zur Verfügung. Die Zunahme an innerer und kinetischer Energie setzt sich aus der Leistung

der äußeren Kräfte am Volumen und der Wärmezufuhr in das Volumen zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{u}^2 \right) dV = & - \oint_A \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{u}^2 \right) \underline{u} \cdot d\underline{A} - \oint_A p \underline{u} \cdot d\underline{A} - \oint_A \underline{u} \cdot \underline{\tau} \cdot d\underline{A} \\ & + \int_V \underline{u} \cdot \underline{f} dV - \oint_A \dot{q} \cdot d\underline{A} + \int_V w dV, \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei e die innere Energie, \dot{q} die Wärmestromdichte und w die Wärmequellendichte bezeichnen. Die entsprechende differenzielle Form lautet:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{1}{2} \underline{u}^2 \right) + \operatorname{div} \left[\left(e + \frac{1}{2} \underline{u}^2 \right) \underline{u} \right] \right) = & - \operatorname{div} (p \underline{u}) - \operatorname{div} (\underline{u} \cdot \underline{\tau}) - \underline{f} \cdot \underline{u} \\ & - \operatorname{div} \dot{q} + w. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Auf Basis dieser Grundgleichungen könnte die Ausbreitung von Schall als instationäres Strömungsproblem aufgefasst und mit etablierten Verfahren der numerischen Strömungsmechanik (CFD) simuliert werden. Die auf Robustheit und Stabilität ausgelegten Standard-CFD-Verfahren besitzen meist nur eine kleine Fehlerordnung, so dass hinreichend aufgelöste Simulationen bezüglich Speicherbedarf und Rechenzeit sehr aufwändig sind.

Da keine vereinfachenden Annahmen getroffen wurden, modellieren diese Bilanzgleichungen nicht nur die Schallausbreitung in einem strömenden Medium sondern erfassen auch sämtliche strömungsinduzierten Lärmerzeugungsmechanismen. Daher sind Simulationen auf deren Basis trotz des enormen Aufwands immer dann notwendig und sinnvoll, wenn neben der reinen Schallausbreitung auch die Entstehung von Schall simuliert werden soll.

2.2 Strömungsakustische Modellgleichungen

Zwischen den hydromechanischen und akustischen Anteilen des durch die Bilanzgleichungen aus Abschnitt 2.1 beschriebenen instationären Strömungsfeldes besteht eine große Disparität bezüglich der charakteristischen Skalen. Während für die Strömung kleine Längenskalen und großen Energien charakteristisch sind, kennzeichnen den Schall verglichen damit große Längenskalen und kleine Energien. Daher hat sich eine getrennte Behandlung von Strömung und Schall etabliert, die den Einsatz von unterschiedlichen numerischen Verfahren erlaubt, welche zur Wiedergabe der jeweiligen Skalen geeignet sind. Zur Realisierung dieser Separation ist es zunächst sinnvoll die Strömungsbilanzgleichungen unter Berücksichtigung der besonderen Eigenschaften des Schalls zu vereinfachen. Das so erhaltene Gleichungssystem lässt sich anschließend über einen Störungsansatz in zwei Systeme zerlegen, die zum einen die stationäre mittlere Strömung beschreiben und zum anderen die Ausbreitung von Fluktuationen, zu denen auch der Schall gehört, wiedergeben.

Schalleigenschaften berücksichtigende Vereinfachungen

Soll nur die Ausbreitung des Schalls in einem strömenden Fluid beschrieben werden, können vereinfachende Modifikationen an den strömungsmechanischen Bilanzgleichungen aus Abschnitt (2.1) vorgenommen werden, welche vor allem die Charakteristika des Schalls berücksichtigen. So kann folgendes vereinfachtes Modellgleichungssystem gewonnen werden:

Kontinuitätsgleichung Da an der Massenbilanz aus (2.2) keine Vereinfachungen vorgenommen werden können, gilt die Kontinuitätsgleichung unverändert:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.7)$$

Bewegungsgleichung Da die Schallausbreitung meist als reibungsfrei betrachtet werden kann, entfällt die Divergenz des Spannungstensors $\text{div } \underline{\tau}$. Als Volumenkraft käme nur die Gravitation in Betracht, die für die Berechnung der Schallausbreitung aber vernachlässigt werden kann [28]. Somit vereinfacht sich die Impulsbilanz (2.4) zu

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (2.8)$$

der sogenannten Eulerschen Bewegungsgleichung [83].

Druckgleichung Aus der Energiebilanz (2.6) kann unter Annahme eines idealen Gases als Medium, eine Bilanzgleichung für den Druck p hergeleitet werden [80]. In differenzieller Form lässt sich diese als

$$\rho T \frac{c_V}{p} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{c_p}{c_V} p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] = w - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

schreiben. Eine detaillierte Herleitung dazu ist z.B. in [68] zu finden.

Werden wie bei der Bewegungsgleichung (2.8) die Dissipation und zusätzlich sowohl Wärmequellen als auch die Wärmeleitung vernachlässigt, so ergibt sich aus (2.9) mit $\varkappa = c_p/c_V$ die Druckgleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \varkappa p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.10)$$

Für die schnellen Zustandsänderungen der Akustik sind die oben gemachten Annahmen sicher gerechtfertigt. Treten aber z.B. Entropieschwankungen auf, wie sie bei Verbrennungsprozessen entstehen, stellt etwa die unberücksichtigte Wärmeleitung eine starke Vereinfachung dar. Für solche Konfigurationen sind dann entsprechend andere Druckgleichungen zu verwenden.

Störungsansatz

Zur Separation von akustischen und Strömungsanteilen in den Modellgleichungen (2.7–2.10) wird folgender, dem der Reynoldsmittelung in der Strömungsmechanik vergleichbarer, Störungsansatz für die Zustandsgrößen Druck, Dichte und Geschwindigkeit verwendet:

$$\varrho(\underline{x}, t) = \bar{\varrho}(\underline{x}) + \varrho'(\underline{x}, t) \quad (2.11a)$$

$$u_i(\underline{x}, t) = \bar{u}_i(\underline{x}) + u'_i(\underline{x}, t) \quad (2.11b)$$

$$p(\underline{x}, t) = \bar{p}(\underline{x}) + p'(\underline{x}, t). \quad (2.11c)$$

Dabei bezeichnen $\bar{\varrho}$, \bar{p} und \bar{u} die zeitlich konstanten, örtlich jedoch veränderlichen, mittleren Strömungsgrößen. Die zeitlich und örtlich veränderlichen ϱ' , p' und \underline{u}' kennzeichnen die Schwankungsgrößen, die auch den Schall enthalten.

2.2.1 Nichtlineare Eulersche Störungsgleichungen

Aus (2.7), (2.8) und (2.10) ergeben sich durch Anwendung von (2.11) unter der Voraussetzung, dass diese auch für die mittleren Strömungsgrößen $\bar{\varrho}$, \bar{p} und \bar{u} identisch erfüllt sind, die folgenden Störungsgleichungen:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varrho'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \varrho'}{\partial x_i} + \bar{\varrho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \varrho' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \varrho' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.12)$$

Bewegungsgleichung

$$(\bar{\varrho} + \varrho') \left[\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0, \quad (2.13)$$

Druckgleichung

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \varkappa \bar{p} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \varkappa p' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \varkappa p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.14)$$

Diese nichtlinearen Modellgleichungen werden nach Long [60] auch als *Perturbed-Nonlinear-Nonconservative-Euler-Equations* (PENNE) bezeichnet. Wenn die im folgenden Abschnitt vorgestellte lineare Theorie aufgrund ihrer Modellannahmen keine Gültigkeit besitzt, ist die Anwendung der PENNE-Formulierung als Grundgleichungen des CAA-Verfahrens angebracht. Dies trifft etwa auf die Ausbreitung von Schallwellen mit sehr großen Amplituden zu oder auf Fälle, bei denen Wirbel oder instationäre Temperaturschwankungen in Wechselwirkung mit dem Schallfeld

treten. Diese Gleichungen sind daher im CAA-Verfahren implementiert, finden bei den Untersuchungen in dieser Arbeit aber keine Anwendung.

In die Störungsgleichungen fließen die mittleren Strömungsgrößen $\bar{\rho}$, \bar{p} und \bar{u} als Bekannte ein, d.h. zur Lösung der Störungsgleichungen muss eine stationäre Strömungslösung bereitgestellt werden. Diese kann durch CFD-Simulationen, analytische Modellannahmen oder Messungen vorgegeben werden.

2.2.2 Linearisierte Eulergleichungen

Bewegt sich der Schallpegel in für die menschliche Wahrnehmung typischen Bereichen, sind die Druck- und Dichtefluktuationen der Schallwellen, wie eingangs beschrieben, sehr viel kleiner als die Umgebungswerte. Es gilt also

$$|p'| \ll \bar{p} \quad \text{und} \quad |q'| \ll \bar{q}. \quad (2.15)$$

Daher können nichtlineare Terme, in denen die Schwankungsgrößen mindestens in quadratischer Form auftreten, in den Gleichungen (2.12–2.14) vernachlässigt werden, was zu einer weiteren deutlichen Vereinfachung führt. Die Gültigkeit dieser Linearisierung wird in [28] ausführlich diskutiert. Das resultierende linearisierte Gleichungssystem nimmt damit die folgende Gestalt an:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial q'} x_i + u'_i \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_i} + \bar{q} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + q' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.16)$$

Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{q'}{\bar{q}} \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\bar{q}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0, \quad (2.17)$$

Druckgleichung

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \kappa \bar{p} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \kappa p' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.18)$$

Die Schallausbreitung kann für viele Anwendungsfälle als isentrop betrachtet werden. Dies ermöglicht es, Gleichung (2.18) durch die linearisierte Druck-Dichte-Beziehung

$$p' = \kappa \frac{\bar{p}}{\bar{q}} q' = c^2 q' \quad (2.19)$$

zu ersetzen, die die Druck- und Dichteschwankungen algebraisch miteinander verknüpft. Für die numerische Simulation entfällt dadurch die Lösung einer der fünf Differenzialgleichungen, d.h. 20% des Rechenaufwands.

Die als linearisierte Eulergleichungen (LEE) bezeichneten Gleichungen (2.16–2.18) bilden die Grundgleichungen für die in dieser Arbeit durchgeführten CAA-Simulationen. Für ihre Anwendung ist zu beachten, dass durch sie die Schallentstehung im Allgemeinen nicht erfasst werden kann und je nach physikalischen Gegebenheiten zu prüfen ist, ob die bei diesem Modell gemachten Vereinfachungen noch ihre Gültigkeit besitzen.

2.3 Konvektive akustische Wellengleichung

Aus dem System von partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung aus Abschnitt 2.2.2 zur Beschreibung der Schallausbreitung kann unter weiteren Einschränkungen eine einzelne partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung hergeleitet werden, die als Wellengleichung bezeichnet wird. Diese eignet sich insbesondere zur Interpretation akustischer Vorgänge oft besser als etwa die linearisierten Eulergleichungen, da sich in vielen Fällen ihre Lösungen analytisch angeben lassen.

Die homogene Wellengleichung für Dichteschwankungen kann, wie etwa bei Ehrenfried [28] gezeigt, durch geeignete Umformungen der Kontinuitätsgleichung (2.16) und der Impulsgleichung (2.17) gewonnen werden. Über die Druck-Dichte-Beziehung (2.19) lässt sich diese in die bekannte homogene Wellengleichung für Druckfluktuationen überführen:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0. \quad (2.20)$$

Diese Form der Wellengleichung ist aber nur für ein ruhendes Fluid gültig. Wird die partielle Zeitableitung in (2.20) durch die konvektive Zeitableitung

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.21)$$

ersetzt, ist auch die Berücksichtigung einer gleichförmigen, d.h. zeitlich und räumlich konstanten Grundströmung möglich.

Die daraus resultierende Wellengleichung

$$\frac{D^2 p'}{Dt^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2.22)$$

wird als konvektive Wellengleichung bezeichnet. Abhängig von Randbedingungen können einfache analytische Lösungen dieser Gleichung gefunden werden, mit denen eine Analyse und Interpretation akustischer Prozesse ermöglicht oder erleichtert wird.

2.4 Schallfeld in Rohrungen

Für die Untersuchung der Schallausbreitung etwa in Einläufen oder Nebenstromkanälen von Flugtriebwerken ist eine Betrachtung der Wellenausbreitung in Rohrungen sinnvoll. Die im Freifeld geltende Wellengleichung (2.22) wird dazu zunächst in die für die Formulierung der Randbedingungen geeigneteren Zylinderkoordinaten überführt. Als weitere sinnvolle Einschränkung für eine Rohrung wird angenommen, dass die Grundströmung nur eine konstante axiale Komponente besitzt. Dadurch vereinfacht sich (2.21) zu

$$\frac{D_x}{D_x t} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.23)$$

Die konvektive Wellengleichung (2.22) lässt sich damit für Rohrungen als

$$\frac{1}{c^2} \frac{D_x^2 p'}{D_x t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.24)$$

schreiben. Ein harmonischer Ansatz für die Druckschwankungen p' überführt (2.24) in eine Besselsche Differenzialgleichung [28], deren analytische Lösung bekannt ist. So ist das akustische Druckfeld in einer Rohrung nach [80] durch die unendliche Folge

$$p'(x, r, \theta, t) = \Re \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{mn}^+ e^{-ik_{mn}^+ x} + A_{mn}^- e^{-ik_{mn}^- x} \right) U_{mn}(r) e^{-im\theta} e^{i\omega t} \right\} \quad (2.25a)$$

mit

$$U_{mn}(r) = J_m(\mu_{mn} r) + N_{mn} Y_m(\mu_{mn} r) \quad (2.25b)$$

darstellbar, die sich aus Eigenformen, sogenannten Moden, zusammensetzt. Die Moden werden über ihre azimutale und radiale Ordnung m bzw. n unterschieden. Die Ordnungszahlen geben dabei die Anzahl der Vorzeichenwechsel in azimutaler bzw. radialer Richtung in der Druckverteilung der Mode an, was in Abbildung 2.1 veranschaulicht wird.

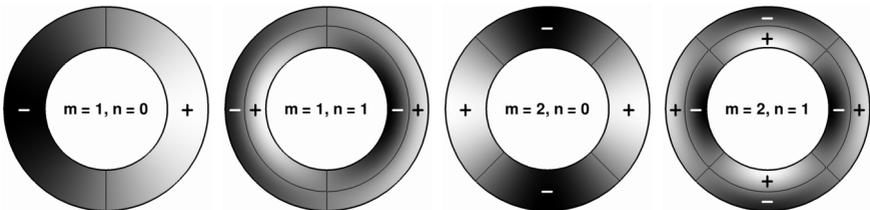


Abbildung 2.1: Druckverteilung verschiedener Moden im Querschnitt eines Ringkanals

Wie die Fläche konstanter Phasenlage des Drucks in Abbildung 2.2 verdeutlicht, ist die dreidimensionale Struktur einer Rohrmode helikal. Der azimutale Verlauf folgt dabei einer harmonischen Funktion, die nur von m abhängt, während die radiale Form $U_{mn}(r)$ durch die Bessel- und Neumann-Funktionen J_m bzw. Y_m in (2.25b) beschrieben wird. Deren Verläufe sind durch die Modenordnungen m und n über den Eigenwert μ_{mn} bestimmt. In axialer Richtung ist die Wellenform, genau wie in Umfangsrichtung, harmonisch. Durch (2.25) werden jeweils zwei Moden mit entgegengesetzter axialer Ausbreitungsrichtung beschrieben.

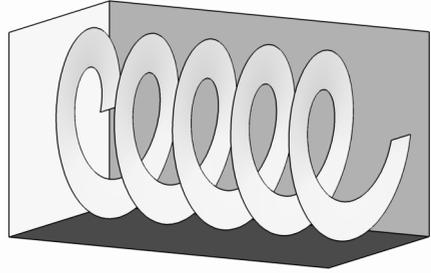


Abbildung 2.2: Helikale Struktur einer Rohrmode als Isofläche der Phasenlage des Drucks

Anders als bei der Wellenausbreitung im Freifeld ist das Ausbreitungsverhalten der Rohrmoden dispersiv, d.h. die axiale Wellenzahl hängt nichtlinear von der Frequenz ab. So sind die axialen Wellenzahlen der Moden mit positiver bzw. negativer Ausbreitungsrichtung, die durch

$$k_{mn}^{\pm} = \frac{-\left(\frac{\omega}{c}\right) M \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (1 - M^2) \mu_{mn}^2}}{1 - M^2} \quad (2.26)$$

gegeben sind, nicht nur von der Frequenz ω und der axialen Machzahl $M = \bar{u}/c$ abhängig, sondern auch vom Eigenwert μ_{mn} . A_{mn}^+ und A_{mn}^- bezeichnen die komplexe Amplituden dieser Wellen, in denen Schwingungsamplitude und Phasenlage der jeweiligen Mode kombiniert sind. Wird wie in dieser Arbeit zwischen positiven und negativen Azimutalmoden unterschieden, ergibt sich ein mit der Zeit um die Rohrachse rotierendes Feld von Störungen. Daher werden diese Moden in der Literatur oft auch als *Spinning Modes* bezeichnet.

Bei einer genaueren Betrachtung von (2.26) wird deutlich, dass der Wurzelausdruck in Abhängigkeit des Eigenwertes μ_{mn} , der Strömungsgeschwindigkeit M und der Frequenz ω auch negativ werden kann. Daraus resultiert eine komplexe Wellenzahl k_{mn} , was zur Folge hat, dass keine harmonische Wellenausbreitung stattfindet, sondern dass die Lösung wie in Abbildung 2.3(a) dargestellt exponentiell abklingt. Die Ausbreitungsfähigkeit einer Mode ist über eine Grenzfrequenz

$$\omega_{co} = \sqrt{1 - M^2} \mu_{mn} c \quad (2.27)$$

bestimmt, die als „Cut-Off-Frequenz“ bezeichnet wird. Für technische Anwendungen ist dies von Bedeutung, da nicht ausbreitungsfähige Moden meist keinen Anteil an der Lärmemission haben und gegebenenfalls von vornherein in Simulationen der Schallausbreitung vernachlässigt werden können.

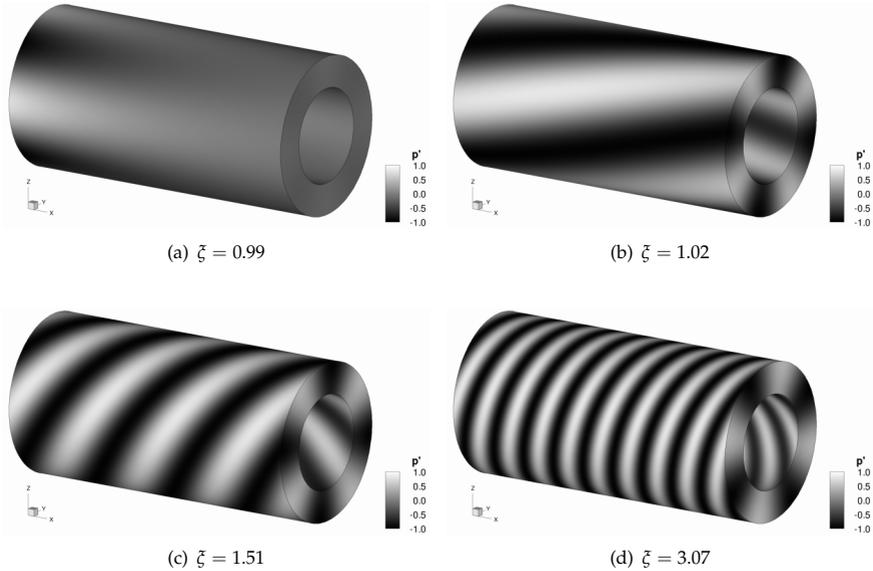


Abbildung 2.3: Druckverteilung einer $(4,0)$ -Mode bei $M = 0$ für verschiedene ζ

Das Verhältnis aus Frequenz und Cut-Off-Frequenz

$$\zeta = \frac{\omega}{\omega_{\text{co}}} \quad (2.28)$$

wird analog als „Cut-Off-Verhältnis“ bezeichnet. Es wird oft als Kennzahl bei Vergleichen verschiedener Moden eingesetzt, da es bestimmte Eigenschaften der Moden maßgeblich beschreibt. So ist etwa die Gruppengeschwindigkeit der Moden

$$v_{\text{gr}}^{\pm} = \left(\frac{dk_{mn}^{\pm}}{d\omega} \right)^{-1} = \pm (1 - M^2) \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta \mp M\sqrt{\zeta^2 - 1}} c, \quad (2.29)$$

die deren Informations- und Energiefluss wiedergibt, nur von ζ und der Strömungsgeschwindigkeit abhängig.

Nähert sich das Cut-Off-Verhältnis der Ausbreitungsfähigkeitsgrenze $\zeta \rightarrow 1$, geht die Gruppengeschwindigkeit der Mode gegen null. Für Moden mit kleinem Cut-Off-Verhältnis bedeutet dies, dass nur ein sehr langsamer Energiefluss in axialer Richtung erfolgt, während sie eine relativ große Umlaufgeschwindigkeit besitzen. Mit wachsendem ζ nähert sie sich die Gruppengeschwindigkeit asymptotisch der

Schallgeschwindigkeit in Bezug zum bewegten Medium an, welche das betragsmäßige Maximum darstellt:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} v_{\text{gr}}^{\pm} = (M \pm 1) c. \quad (2.30)$$

Auch die axiale Wellenzahl aus (2.26) lässt sich in Abhängigkeit des Cut-Off-Verhältnisses als

$$k_{mn}^{\pm} = \frac{-\xi M \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \mu_{mn}}{\sqrt{1 - M^2}} \quad (2.31)$$

formulieren. Daraus ist ersichtlich, dass der Betrag der Wellenzahlen $|k|$ mit steigendem ξ anwächst, wodurch sich der Anstieg der Helix vergrößert. Abbildung 2.3 zeigt dies für verschiedene Cut-Off-Verhältnisse.

Die Berechnung der Eigenwerte μ_{mn} erfolgt über Bestimmungsgleichungen, die aus Randbedingungen an den Rohrwänden folgen, wobei zwischen Kreiskanälen ohne Zentralkörper und Ringkanälen mit Zentralkörper unterschieden werden muss. Bei schallharten Wänden gilt dann:

Kreiskanal

$$J'_m(\mu_{mn} r_a) = 0 \quad (2.32)$$

$$N_{mn} = 0 \quad (2.33)$$

Ringkanal

$$J'_m(\mu_{mn} r_a) Y'_m(\mu_{mn} r_i) - J'_m(\mu_{mn} r_i) Y'_m(\mu_{mn} r_a) = 0 \quad (2.34)$$

$$N_{mn} = -\frac{J'_m(\mu_{mn} r_i)}{Y'_m(\mu_{mn} r_i)} = -\frac{J'_m(\mu_{mn} r_a)}{Y'_m(\mu_{mn} r_a)} \quad (2.35)$$

Wobei N_{mn} das Verhältnis der Anteile von Bessel- und Neumannfunktionen an der Lösung in (2.25b) bezeichnet und durch r_a und r_i die Radien des Rohrs bzw. des gegebenenfalls vorhandenen Zentralkörpers angeben sind.

Einen Grenzfall der Lösung stellt die *ebene Welle* mit $(m, n) = (0, 0)$ und $\mu_{00} = 0$ dar. Sie ist bei jeder Frequenz ausbreitungsfähig ($\omega_{\text{co}} = 0$), und ihre axiale Wellenzahl ist gegeben durch

$$k_{00}^{\pm} = -\frac{1}{M \mp 1} \frac{\omega}{c}. \quad (2.36)$$

Die Ausbreitung erfolgt also, wie im Freifeld, nicht dispers und quasi eindimensional in axialer Richtung, d.h. über einen Rohrquerschnitt sind Druck- und axiale Schnelleschwankungen konstant, während die radialen und azimuthalen Schnellekomponenten verschwinden.

Die Lösung der konvektiven Wellengleichung in Rohrumbungen findet in dieser Arbeit mehrfach Anwendung. So ermöglicht sie u.a die Formulierung von Quellrandbedingungen oder auch die modale Analyse des Schallfeldes in einem Kanal.

2.5 Akustische Analogien

CAA- und CFD-Verfahren, die auf kontinuierlichen differenziellen Modellansätzen basieren, wie die aus den Abschnitten 2.1 und 2.2, eignen sich nicht bzw. nur begrenzt für die Vorhersage des an entfernten Beobachterpositionen wahrnehmbaren Schalls. Da mit diesen Verfahren eine Lösung im gesamten Volumen des Rechengebiets von der Quelle bis hin zum Beobachter berechnet werden muss, wächst der numerische Aufwand mit zunehmenden Abstand von Quelle und Beobachter und überschreitet sehr schnell die Leistungsfähigkeit selbst moderner Supercomputer.

Alternativ dazu bietet sich eine Vorgehensweise an, bei der das zu lösende Problem über eine Analogiebetrachtung in ein physikalisch äquivalentes oder zumindest ähnliches Problem überführt wird. Wobei die Analogie einem mathematischen Modellansatz folgen sollte, dessen Lösungsverfahren keine solch großen Rechengebiete erfordert. In der Akustik basieren diese Analogieansätze meist auf einer Wellengleichung, deren allgemeine Lösung in beliebigem Abstand zur Quelle etwa durch Integralverfahren berechnet werden kann. In der Vergangenheit wurden eine Vielzahl solcher akustischer Analogien entwickelt, die aufgrund ihrer Modellannahmen verschiedene Einsatzgebiete oder Einschränkungen haben. Durch den jeweiligen zur Lösung notwendigen numerischen Aufwand eignen sie sich dabei unterschiedlich gut für eine Vorhersage des Schalls im Fernfeld.

Lighthill-Analogy

Durch Umformung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.2) und (2.4) in einen Wellenoperator für Dichteschwankungen auf der linken Seite und den dazugehörigen Quelltermen, die den Strömungslärm kennzeichnen, auf der rechten Seite, lässt sich eine inhomogene Wellengleichung formulieren.

Diese von Lighthill [58] hergeleitete akustische Analogie

$$\frac{\partial^2 q'}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 q'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.37)$$

wird als Lighthill-Analogie bezeichnet. Die Quellterme sind über eine zweifache räumliche Ableitung des Tensors

$$T_{ij} = \rho u_i u_j - \tau_{ij} + (p' - c^2 q') \delta_{ij} \quad (2.38)$$

gegeben, der als Lighthillscher Spannungstensor bezeichnet wird. Über die Druck-Dichte-Beziehung $p' = c^2 q'$ lässt sich die Lighthill-Analogie für Druckschwankungen umformulieren, wobei zu beachten ist, dass sich dabei auch die Quellterme ändern.

Für die Herleitung der Analogie wurden keine Vereinfachungen wie in die lineare Theorie gemacht, so dass sich im Allgemeinen keine analytischen Lösungen angeben lassen. Die Lösung der Gleichung kann jedoch numerisch an beliebigen Positionen über die Berechnung von Volumenintegralen bestimmt werden.

Der Wellenoperator in der Lighthill-Analogie beschränkt deren Anwendung auf Konfigurationen mit konstantem Strömungszustand, Variationen der Dichte, der Schallgeschwindigkeit und der Machzahl sind nicht zulässig. Zur Berücksichtigung der Schall-Strömungsinteraktionen und anderer Effekte sind verschiedenste auf der Lighthill-Analogie basierende Modifikationen vorgeschlagen worden. Diese Erweiterungen umfassen andere Wellenoperatoren und andere Größen innerhalb des Wellenoperators, wodurch veränderte Quellterme entstehen, die in bestimmten Fällen ein besseres Verständnis der wirklichen Quellmechanismen erlauben. Einige Beispiele für solche akustischen Analogien sind die von Lilley [59], Howe [46], Möhring [65] und Pierce [73]. Allen gemein ist eine Volumenintegration über den Quellterm, was eine numerische Lösung sehr aufwändig machen kann.

Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich jedoch Verfahren ableiten, die von der bekannten Lösung der Wellengleichung im Freifeld Gebrauch machen und ohne die aufwändige Berechnung von Volumenintegralen auskommen. Diese werden im Folgenden vorgestellt.

Analogien aus der linearen Akustik

Lösungen der Wellengleichung der linearen akustischen Theorie aus Abschnitt 2.3 können auch durch ein Kirchhoff-Helmholtz-Integral angegeben werden. Dabei ist es möglich, akustische Quellen in einem Gebiet äquivalent durch die Überlagerung von Monopol- und Dipolquellen auf einer das Quellgebiet umschließenden Oberfläche wiederzugeben. Die Quellstärke dieser Elementarquellen kann aus der Kenntnis von Normalengeschwindigkeit und Druck auf dieser Oberfläche berechnet werden, die als Kirchhoff-Fläche bezeichnet wird. Die benötigten Drücke und Geschwindigkeiten auf der Kirchhoff-Fläche werden beispielsweise mittels CFD- oder CAA-Simulationen im Quellgebiet bestimmt. Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral ist im Frequenzbereich formuliert, kann aber über eine Transformation in den Zeitbereich überführt werden und ist dort als Kirchhoff-Integral darstellbar. Über dessen Berechnung lassen sich so auch zeitabhängige Lösungen bestimmen. Die *Kirchhoff-Integral-Methode* findet oft in Randelementeverfahren (engl. *boundary element method*, BEM) Anwendung. Sie eignet sich gut für die angestrebte Vorhersage des Schalls an entfernten Fernfeldpositionen. Da der Ansatz aber nur eine gleichförmige Durchströmung der Kirchhoff-Fläche zulässt, muss das eingeschlossene Quellgebiet so weit ausgedehnt werden, bis sich diese Forderung hinreichend gut erfüllen lässt, was einen höheren numerischen Aufwand bei der Berechnung des Quellgebietes mittels CFD oder CAA nach sich ziehen kann.

Eine weitere Berechnungsmöglichkeit bietet die sogenannte Ersatzquellenmethode (engl. *equivalent source method*, ESM), bei der das Schallfeld nicht wie beim Kirchhoff-Helmholtz-Integral über die Quellverteilung auf einer Oberfläche, sondern über eine Superposition von Elementarquellen in einem Punkt dargestellt wird. Bei komplexen Körpergeometrien kann auch eine modifizierte ESM-Methode verwendet werden, bei der die Ersatzquellen auf mehrere Punkte innerhalb des Körpers verteilt sein können.

Eine detailliertere Beschreibung solcher Methoden ist in der Literatur an verschiedenen Stellen zu finden, etwa bei Ehrenfried [28].

Ffowcs Williams & Hawkings - Gleichung

Eine verallgemeinerte Form der Lighthill-Analogie ist von Ffowcs Williams und Hawkings [36] vorgestellt worden. Sie erlaubt im Gegensatz zur Lighthill-Analogie auch Berandungen im Strömungsfeld, an denen Randbedingungen erfüllt werden können, was beispielsweise durch die Präsenz fester Körper notwendig wird. Dabei können die Berandungen je nach geplanter Anwendung analog zur Kirchhoff-Integral-Methode direkt mit den Körperoberflächen zusammenfallen oder so gewählt sein, dass sie alle Schallquellen und Körper einschließen. Im Unterschied zum Kirchhoff-Integral werden bei der Herleitung dieses Ansatzes jedoch keine einschränkenden Vereinfachungen vorgenommen.

Die Berandung muss eine geschlossene Oberfläche bilden, die FWH-Fläche genannt wird. Diese kann sowohl raumfest als auch bewegt sein. Mathematisch lässt sich solch eine Oberfläche durch eine Hilfsfunktion $f(\underline{x}, t) = 0$ beschreiben, wobei $\text{grad } f = \underline{n}$ gilt. Der Oberflächennormalenvektor \underline{n} ist nach außen gerichtet, so dass der Bereich innerhalb der Oberfläche durch $f(\underline{x}, t) < 0$ gekennzeichnet ist, während im Außenbereich $f(\underline{x}, t) > 0$ gilt.

Damit lässt sich die Ffowcs Williams & Hawkings (FWH) - Gleichung nach [34] als

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial t} [\bar{q} v_n \delta(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [p' n_i \delta(f)] + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [H(f) T_{ij}] \quad (2.39)$$

schreiben, wobei der Einfluss von Scherspannungen außerhalb der Berandung vernachlässigt wurde. In (2.39) bezeichnen v_n die lokale Normalengeschwindigkeit der Oberfläche, p' den Druck auf der Oberfläche und T_{ij} den Lighthillschen Spannungstensor aus (2.38). Weiterhin sind $\delta(\cdot)$ und $H(\cdot)$ die Dirac-Delta-Funktion bzw. die Heaviside-Funktion.

Durch eine geeignete Wahl der FWH-Fläche können die Quadrupol-Quellterme außerhalb der Berandung vernachlässigt werden. Die eingeschlossenen Quellen werden so nur durch Druck- und Schnelleschwankungen auf der Berandung äquivalent ersetzt. Für die Lösung der FWH-Gleichung an vorgegebenen Beobachterpositionen

sind dadurch nur Oberflächenintegrale über die Berandung zu berechnen, während die aufwändige Berechnung von Volumenintegralen entfällt. Das Verfahren ähnelt daher sehr der oben vorgestellten Kirchhoff-Integral-Methode. Es lässt sich sogar zeigen, dass die Integrale in der Lösung der FWH-Gleichung durch die Vereinfachungen der linearen Akustik in das Kirchhoff-Integral übergehen [28].

Da die Berechnung der Oberflächendaten in der Regel durch hochaufgelöste CFD- bzw. CAA-Simulationen erfolgt, ist es wünschenswert, die FWH-Fläche und damit das von ihr eingeschlossene Quellvolumen möglichst klein zu halten, um den numerischen Aufwand der entsprechenden Simulationen zu senken. Um dies zu erreichen kann eine ebenfalls von Ffowcs Williams vorgeschlagene Formulierung mit durchlässiger FWH-Oberfläche verwendet werden, die Nichtlinearitäten in unmittelbarer Nähe der bewegten Oberfläche berücksichtigt. Mit \underline{u} als Strömungsgeschwindigkeit des Fluids und \underline{v} als Geschwindigkeit der bewegten FWH-Fläche lässt sich die FWH-Gleichung für durchlässige Oberflächen nach [35] als

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial t} [\bar{q} U_n \delta(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(f)] + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [H(f) T_{ij}] \quad (2.40)$$

mit

$$U_n = \left(1 - \frac{q}{\bar{q}}\right) v_i n_i + \frac{q}{\bar{q}} u_i n_i \quad L_i = [p \delta_{ij} + q u_i (u_j - v_j)] n_j$$

schreiben.

Lösungen dieser Gleichung sind für verschiedenste Anwendungen angegeben worden. In Hinblick auf die angestrebte Fernfeldvorhersage unter Nutzung des durch das CAA-Verfahren berechneten Schalls im Nahfeld lässt sich, basierend auf der von Farassat [35] vorgeschlagenen Formulierung 1A, folgende im Nah- und Fernfeld gültige Lösung von (2.40) angeben:

$$\begin{aligned} 4\pi p'(\underline{x}, t) = & \int_{f=0} \left[\frac{\dot{L}_r}{c r (1 - M_r)^2} \right]_{\text{ret}} dS \\ & + \int_{f=0} \left[\frac{c (L_r - L_n) + m (1 - M_r) L_r}{c r^2 (1 - M_r)^2} \right]_{\text{ret}} dS \\ & + \int_{f=0} \left[\frac{\bar{q} \dot{U}_n}{r (1 - M_r)^2} + \frac{m \bar{q} U_n}{r^2 (1 - M_r)^3} \right]_{\text{ret}} dS \end{aligned} \quad (2.41)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{x} - \underline{y} & r &= |\underline{r}| & U_n &= [(1 - q/\bar{q})v_i + (q/\bar{q})u_i] n_i \\ \underline{M} &= \underline{v} / c & M &= |\underline{M}| & M_r &= M_i r_i / r & \mathbf{m} &= r \dot{M}_r + c M_r - c M^2 \\ L_i &= [p \delta_{ij} + q u_i (u_j - v_j)] n_j & L_r &= L_i r_i / r \end{aligned}$$

Darin bezeichnen \underline{u} die Strömungsgeschwindigkeit des Mediums, \underline{v} die Geschwindigkeit der FWH-Fläche S , r und \underline{r} / r den Abstand und die Abstrahlrichtung von einem Quellpunkt \underline{y} zum Beobachter \underline{x} im Bezugssystem des ungestörten Mediums mit der Dichte $\bar{\rho}$ und der Schallgeschwindigkeit c . Für die Herleitung wurde jeglicher Scherspannungseinfluss vernachlässigt. Weiterhin wurde die FWH-Fläche als starr angenommen, wodurch die zeitlichen Ableitungen ihres Normalenvektors \underline{n} verschwinden und in (2.41) nicht mehr enthalten sind. Die Berechnung der Integrale erfolgt zur retardierten Zeit, also der Zeit, zu der ein Signal von \underline{y} ausgesendet wird, so dass es zur Zeit t beim Beobachter \underline{x} ankommt.

Diese Formulierung erlaubt eine ungleichförmige Durchströmung der als Schnittstelle zum CAA-Rechengebiet genutzten FWH-Fläche. Dadurch wird es möglich, die Schnittstelle dichter am Quellgebiet zu platzieren und somit, die Größe des CAA-Rechengebiet deutlich kleiner zu halten als dies etwa beim Einsatz von Kirchhoff-Integralen für die Fernfeldberechnung möglich ist. Der Ansatz wird daher für die Berechnung des Fernfeldschalls in dieser Arbeit verwendet.

3 Numerische Verfahren

Differenziell formulierte Modellansätze zur Beschreibung der Schallausbreitung wie etwa die Grundgleichungen aus Kapitel 2.2 sind nur in wenigen Spezialfällen analytisch lösbar. Durch den Einsatz von numerischen Simulationsverfahren sind aber Lösungen berechenbar. In dieser Arbeit wird dazu ein optimiertes CAA-Verfahren höherer Ordnung eingesetzt, das den zur Lösung notwendigen numerischen Aufwand reduziert. Die im Verfahren eingesetzten Techniken zur Diskretisierung und Vernetzung sowie die Formulierung von Randbedingungen werden in den Abschnitten 3.1 bis 3.4 näher beschrieben und diskutiert.

Ein Modalanalyseverfahren, das zur modalen Zerlegung von Schallfeldern und zur Separation von akustischen und hydrodynamischen Strömungsanteilen in Rohrumgebungen einsetzbar ist, wird in Abschnitt 3.5 vorgestellt. Anwendungsfelder des Verfahrens finden sich bei der Analyse und Beurteilung der Simulationsergebnisse sowie bei der Formulierung von Quellrandbedingungen für das CAA-Verfahren.

Für eine effiziente Vorhersage des Fernfeldschalls sind, wie in Kapitel 2.5 dargestellt, akustische Analogien geeignet. In dieser Arbeit wird dazu die Analogie von Ffowcs Williams und Hawkings verwendet, deren Lösungen sich mittels des in Abschnitt 3.6 beschriebenen Integralverfahrens aus Ergebnissen von CAA-Simulationen berechnen lassen.

3.1 Diskretisierungsschemata für CAA

Um kontinuierlich formulierte Probleme numerisch handhaben zu können, müssen diese erst in eine diskrete Form überführt werden. Für diese Diskretisierung wird das Differenzialgleichungssystem in ein System von algebraischen Gleichungen überführt, dessen Lösung an den Knoten eines das Lösungsgebiet überdeckenden Gitternetzes erfolgt.

Bei dieser Approximation ist es wichtig, dass die physikalischen Charakteristika der ursprünglichen Differenzialgleichungen erhalten bleiben. Speziell für die Schallausbreitung bedeutet dies einerseits, dass der Wellencharakter erhalten bleiben muss. Dafür maßgeblich ist der Erhalt der Dispersionsbeziehung, wozu eine korrekte numerische Wiedergabe der Wellenzahl für jede Frequenz erforderlich ist. Durch die Approximation entsteht aber ein Dispersionsfehler, der abhängig von der räumlichen und zeitlichen Auflösung der Diskretisierung ist. Das andere wesentliche Charakteristikum der Schallausbreitung ist deren weitgehende Reibungsfreiheit.

Diese sollte sich in einem nicht dissipativen oder zumindest dissipationsarmen numerischen Schema widerspiegeln.

Neben diesen mathematisch-physikalischen Anforderungen muss das Verfahren aber auch numerischen und praktischen Belangen genügen. So sind die zur Verfügung stehenden Ressourcen an Speicherkapazität und Rechenzeit begrenzt. Schallausbreitungsprobleme können aber ein breites Spektrum an Frequenzen bzw. Wellenlängen umfassen, wodurch besonders bei hohen Frequenzen sehr viele Gitterpunkte benötigt werden, um im gesamten Rechengebiet die erforderliche Auflösung zur Verfügung zu stellen. Schemata, die nur eine geringe Auflösung benötigen, sind deshalb sehr vorteilhaft.

3.1.1 Räumliche Diskretisierung

Eine gebräuchliche Methode zur Approximation von Differenzialgleichungen sind finite Differenzenverfahren, die auf Taylor-Reihenentwicklungen beruhen, welche bei Erreichen einer geforderten Fehlerordnung abgebrochen werden. Dieser Ansatz begrenzt zwar den Fehler der zu berechnenden Größe auf die angesetzte Ordnung, berücksichtigt aber nicht die möglichen Auswirkungen auf die Dispersionsbeziehung, weil alle zur Ableitung des Verfahrens nötigen Schritte im Orts-Zeit-Raum und nicht im Wellenlängen-Frequenz-Raum erfolgen.

Von Tam und Webb [98] ist mit dem Dispersion-Relation-Perserving Scheme (DRP) ein Schema vorgestellt worden, das dieses Defizit ausgleicht. Dabei ist die Grundidee dieses Verfahrens, den Fehler zwischen den Wellenzahlen k und k^* , die aus den Differenzialgleichungen bzw. aus deren Diskretisierung folgen, zu minimieren.

Allgemein lässt sich mit einem finiten Differenzenschema die Ableitung einer als kontinuierlich vorausgesetzten Funktion f an einem Knoten l auf äquidistanten Gittern in folgender Form approximieren:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_l = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_l} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M a_j f(x_l + j\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M a_j f_{l+j}. \quad (3.1)$$

Dabei werden am Knoten l die Funktionswerte von N linken und M rechten Nachbarknoten verwendet. Abbildung 3.1 veranschaulicht dies für $N = M = 3$.

Die Koeffizienten a_j der Standardschemata werden aus Taylor-Reihenentwicklungen um die Stelle x_l als

$$f_{l+j} = f(x_l + j\Delta x) = \sum_{k=0}^P \frac{(j\Delta x)^k}{k!} \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|_{x_l} + \mathcal{O}(P+1) \quad \text{für } (j = -N, \dots, M) \quad (3.2)$$

mit Vielfachen der Schrittweite Δx bestimmt, die nach dem P ten Glied abgebrochen werden, so dass für die erste Ableitung höchstens ein Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(P)$

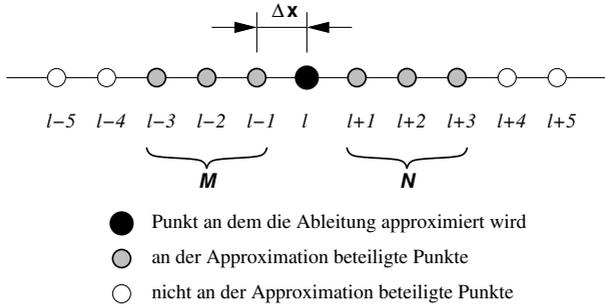


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der Approximation durch finite Differenzen

entsteht. Daraus folgen direkt die Ordnungsreaktionen:

$$\varphi_k = \sum_{j=-N}^M a_j j^k - \delta_{1k} = 0 \quad \text{für } (k = 0, \dots, P) \quad (3.3)$$

Gilt $P = M + N$, stellt (3.3) ein eindeutig bestimmtes lineares Gleichungssystem dar, dessen Lösung die gesuchten Koeffizienten a_j sind.

Um untersuchen zu können, wie sich eine Diskretisierung der Form (3.1) auf die Dispersionsbeziehung auswirkt, wird mit Hilfe der Fouriertransformation

$$\tilde{f}(k_x) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx \quad (3.4)$$

vom Ortsraum in den Wellenlängenraum übergegangen. Deren Anwendung auf beide Seiten von (3.1) liefert

$$ik_x \tilde{f}(k_x) \approx i \left(\frac{-i}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M a_j e^{ijk_x \Delta x} \right) \tilde{f}(k_x), \quad (3.5)$$

woraus folgt, dass in diskreter Form die tatsächliche Wellenzahl k_x durch die numerische Wellenzahl

$$k_x^* = \frac{-i}{\Delta x} \sum_{j=-N}^M a_j e^{ijk_x \Delta x} \quad (3.6)$$

wiedergegeben wird.

Für eine gute diskrete Approximation der Schallausbreitung muss der Dispersionsfehler, der durch die Wiedergabe der Wellenzahl k_x als k_x^* in diskreter Form entsteht,

möglichst klein gehalten werden. Eine Steigerung der Fehlerordnung des Diskretisierungsverfahrens senkt zwar den Diskretisierungsfehler, führt aber gleichzeitig zu einer Steigerung des numerischen Aufwands bei Approximation der Ableitungen an jedem Knoten.

Die Grundidee des DRP-Ansatzes ist es, neben den Ordnungsbedingungen (3.3) weitere Bedingungen an das Diskretisierungsschema zu stellen, die speziell auf eine Minimierung des Dispersionsfehlers ausgerichtet sind, um so bei gleichem numerischen Aufwand eine bessere Wiedergabe der physikalischen Wellenzahl zu erreichen. Solche Bedingungen lassen sich über den Minimierungsansatz

$$E = \int_{-\eta}^{\eta} |k_x \Delta x - \bar{k}_x \Delta x|^2 d(k_x \Delta x) \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (3.7)$$

gewinnen, wobei als Integrationsgrenze $\eta = \pi/2$ verwendet wird. Diese ergibt sich aus der Überlegung, dass zur diskreten Darstellung harmonischer Wellen mindestens eine Auflösung N von vier Punkten pro Wellenlänge (PPW) notwendig ist, um sowohl deren Amplitude als auch ihre Wellenlänge λ aus den Stützstellen bestimmen zu können:

$$N = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{2\pi}{k_x \Delta x} \geq 4 \quad \iff \quad k_x \Delta x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.8)$$

Das Minimierungsproblem (3.7) führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0 \quad \text{für } (k = -N, \dots, M) \quad (3.9)$$

zur Bestimmung der Koeffizienten a_j . Diese minimieren so zwar den Fehler der Wellenzahlen, berücksichtigen aber nicht mehr die Fehlerordnung des Verfahrens. Durch die Kombination der Minimierungsforderung aus (3.7) mit den Ordnungsrelationen aus (3.3) zum Minimierungsproblem mit Nebenbedingungen

$$L = E + \sum_{n=0}^P \beta_n \varphi_n \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (3.10)$$

kann dies vermieden werden. Dabei muss $P < M + N$ gewählt werden, um Freiheitsgrade für die Optimierung zu haben. Die gesuchten optimierten Koeffizienten a_j ergeben sich damit aus

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_m} = 0 \quad \text{für } (k = -N, \dots, M), (m = 0, \dots, P) \quad (3.11)$$

als die Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\eta a_k + \left(\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq k}}^M a_j \frac{\sin([j-k]\eta)}{j-k} \right) - \frac{\sin(k\eta)}{k^2} + \frac{\eta \cos(k\eta)}{k} + \sum_{n=0}^P \beta_n k^n = 0 \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=-N}^M a_j j^m - \delta_{1m} = 0$$

für $(k = -N, \dots, M)$ und $(m = 0, \dots, P)$.

Für die Koeffizienten eines zentralen Differenzenschemas ($M = N$) ist aus (3.12) ablesbar, dass $a_j = -a_{-j}$ gilt. Somit folgt aus (3.6), dass die numerische Wellenzahl k_x^* wie die analytische Wellenzahl k_x rein reell ist. Bei nicht symmetrischen Schemata wird k_x^* komplex. Der unphysikalische Imaginärteil führt in diesem Fall zu einem Anwachsen der Lösung und schließlich zur Instabilität. Deshalb sollte der Einsatz unsymmetrischer Schemata auf Gebiete beschränkt werden, wo zentrale Schemata nicht anwendbar sind wie etwa in den Randbereichen des Rechnetzes.

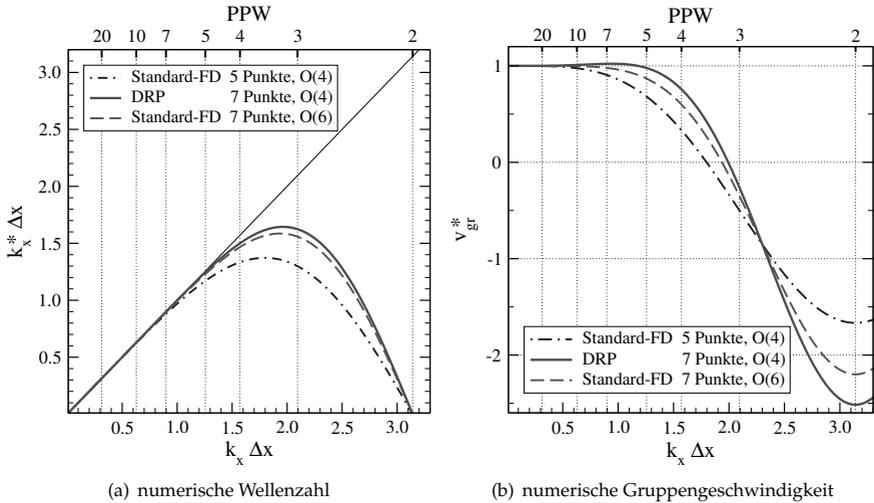


Abbildung 3.2: Vergleich der Dispersionsfehler verschiedener Verfahren

Abbildung 3.2(a) zeigt das Verhalten $k_x^*(k_x)$ für verschiedene Diskretisierungsschemata. Es ist zu erkennen, dass bis zu einem durch das Schema bestimmten Grenzwert k_{grenz} die Wellenzahl k_x durch die numerische Wellenzahl k_x^* gut approximiert

Schema			$k_{\text{grenz}}\Delta x$	N_{min} in PPW
Standard	5 Punkte	4. Ordnung	0.70	9.0
Standard	7 Punkte	6. Ordnung	1.00	6.0
DRP	7 Punkte	4. Ordnung	1.16	5.4
DRP	9 Punkte	6. Ordnung	1.31	4.8

Tabelle 3.1: Grenzwellenlängen und Auflösungen verschiedener Diskretisierungsschemata

wird. Für Wellenzahlen, die über dieser Grenzwellenzahl k_{grenz} liegen, tritt numerische Dispersion auf. Da aus dieser Darstellung die Grenzwellenzahl nur schwer abzulesen ist, kann als weiteres Kriterium die in Abbildung 3.2(b) dargestellte numerische Gruppengeschwindigkeit $v_{\text{gr}}^* = dk^*/dk$ herangezogen werden. Diese sollte bei einer dispersionsfreien Diskretisierung konstant eins sein.

Die Auflösung N_{min} , die mindestens erforderlich ist, um eine Welle hinreichend dispersionsarm zu diskretisieren, ist über die Grenzwellenzahl als

$$N_{\text{min}} = \frac{2\pi}{k_{\text{grenz}}\Delta x} \tag{3.13}$$

bestimmt. In Tabelle 3.1 sind die Grenzwellenlängen und die daraus resultierenden benötigten minimalen Auflösungen für verschiedene Diskretisierungsschemata dargestellt. Es ist erkennbar, dass mit zunehmender Punktzahl des Schemas die benötigte Auflösung abnimmt, was größere Gitterschrittweiten Δx erlaubt und damit die Knotenanzahl reduziert. Dies ist aber mit einem erhöhten Rechenaufwand zur Approximation der Ableitung an den einzelnen Knoten verbunden. Für ein Sieben-Punkte DRP-Schema ist die benötigte Auflösung verglichen mit einem Sieben-Punkte Standardschema bei gleichem Rechenaufwand etwa 10% geringer.

Die Koeffizienten der in dieser Arbeit verwendeten zentralen, vor- bzw. rückwärtigen DRP-Schemata sind im Anhang A.1 zu finden.

3.1.2 Zeitliche Diskretisierung

Für die zeitliche Diskretisierung haben Tam und Webb [98] ursprünglich ein optimiertes Adams-Bashford-Mehrschrittverfahren mit vier Schritten vorgeschlagen, dessen Vorteil in einer leichten Optimierbarkeit liegt. Aus der Notwendigkeit zur Speicherung mehrerer Zeitschritte resultiert aber ein hoher Speicherplatzbedarf für die Methode. Daher findet diese Diskretisierung kaum noch Anwendung.

In der CFD werden zur Zeitdiskretisierung auf Grund ihres geringen Speicherbedarfs und ihrer relativ hohen Stabilität häufig Runge-Kutta-Verfahren verwendet. Hu et al. [48] haben mit dem Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta

Scheme (LDDRK) ein optimiertes Runge-Kutta-Verfahren vorgestellt, das die speziellen Forderungen der CAA, die Erhaltung der Dispersionsbeziehung und eine geringe Dissipativität, berücksichtigen.

Das zeitlich zu diskretisierende Problem lässt sich allgemein in der Form

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = F(t, \underline{q}(t)) \quad \underline{q}(t_0) = \underline{q}_0 \quad (3.14)$$

schreiben, wobei der Vektor \underline{q} die Lösungen an den Gitterknoten und der vektorwertige Operator F die räumliche Diskretisierung repräsentiert.

Runge-Kutta-Verfahren sind explizite Einschrittverfahren. Mit ihnen wird direkt aus der Lösung zur Zeit t_n die Lösung zur Zeit $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ nach dem Schema

$$\underline{q}^{(n+1)} = \underline{q}^{(n)} + h \sum_{i=1}^s b_i \underline{k}_i \quad (3.15)$$

mit $\underline{k}_i = F \left(t^n + h c_i, \underline{q}^{(n)} + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \underline{k}_j \right)$

berechnet, wobei s die Stufenzahl, $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$, $i = 1 \dots s$ und h die Schrittweite sind.

Die Koeffizienten in (3.15) sind über die Ordnungsrelationen

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) : \sum b_i &= 1, & \mathcal{O}(4) : \sum b_i c_i^3 &= \frac{1}{4}, \\ \mathcal{O}(2) : \sum b_i c_i &= \frac{1}{2}, & \mathcal{O}(4) : \sum b_i c_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{8}, \\ \mathcal{O}(3) : \sum b_i c_i^2 &= \frac{1}{3}, & \mathcal{O}(4) : \sum b_i a_{ij} c_j^2 &= \frac{1}{12}, \\ \mathcal{O}(3) : \sum b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{6}, & \mathcal{O}(4) : \sum b_i a_{ij} a_{jk} c_k &= \frac{1}{24} \end{aligned} \quad (3.16)$$

bestimmt [93], die sich aus einer Taylor-Reihenentwicklung gewinnen lassen. Die Summen in (3.16) laufen jeweils von eins bis zur Stufenzahl s .

Analog zur Vorgehensweise bei der Optimierung der räumlichen Diskretisierungsschemata wird mittels der Laplace-Transformation

$$\underline{\tilde{q}}(\omega) = \mathcal{L}\{\underline{q}(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \underline{q}(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.17)$$

vom Zeitbereich in den Frequenzbereich übergegangen, um die Auswirkungen der Diskretisierung auf das Dispersions- und Dissipationsverhalten zu untersuchen.

Dazu wird zunächst die rekursive Darstellung aus (3.15) in die explizite Darstellung

$$\underline{q}(t_n + \Delta t) = \underline{q}(t_n) + \sum_{k=1}^S c_k (\Delta t)^k \left. \frac{\partial^k \underline{q}}{\partial t^k} \right|_{t_n} \quad (3.18)$$

überführt. Die Laplace-Transformation von (3.18) liefert für die linke Seite

$$\mathcal{L} \left\{ \underline{q}(t_n + \Delta t) \right\} = \underline{\tilde{q}}^{(n+1)} = e^{-i\omega \Delta t} \underline{\tilde{q}}^{(n)} \quad (3.19a)$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \underline{q}(t_n) + \sum_{k=1}^S c_k (\Delta t)^k \left. \frac{\partial^k \underline{q}}{\partial t^k} \right|_{t_n} \right\} &= \left[1 + \sum_{k=1}^p c_k (-i\omega \Delta t)^k \right] \underline{\tilde{q}}^{(n)} \\ &= e^{-i\omega^* \Delta t} \underline{\tilde{q}}^{(n)} \end{aligned} \quad (3.19b)$$

Als Maß für die Veränderung der Lösung zwischen zwei Zeitschritten wird der Verstärkungsfaktor $r = \underline{\tilde{q}}^{(n+1)} / \underline{\tilde{q}}^{(n)}$ definiert. Aus (3.19) lassen sich mit r_e bzw. r_d der exakte und der durch die Diskretisierung erhaltene Verstärkungsfaktor als

$$r_e = e^{-i\omega \Delta t} \quad \text{und} \quad r_d = e^{-i\omega^* \Delta t} = 1 + \sum_{k=1}^S c_k (-i\omega \Delta t)^k \quad (3.20)$$

ableiten. An deren Verhältnis

$$\frac{r_d}{r_e} = \rho e^{-i\delta} \quad (3.21)$$

können die Auswirkungen der Diskretisierung untersucht werden. Der Betrag ρ beschreibt das Dissipationsverhalten des Verfahrens. Weicht er von eins ab, tritt numerische Dissipation auf. Das Dispersionsverhalten wird durch den Phasenwinkel δ wiedergegeben und sollte null sein, um die Dispersionsbeziehung richtig wiederzugeben.

In Abbildung 3.3 sind das Dissipationsverhalten und der Phasenfehler in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω für das vierstufige Standard-Runge-Kutta-Verfahren dargestellt. Liegt $\omega \Delta t$ unter dem Grenzwert L , bleiben die numerische Dissipation und der Phasenfehler sehr klein, weshalb L auch als Genauigkeitsgrenze bezeichnet wird. Steigt $\omega \Delta t$ über diese Grenze an, nimmt die numerische Dissipation zu. Die Abweichungen in ρ bleiben aber bis zu einem Grenzwert R beschränkt und wachsen ab dort unbeschränkt weiter, so dass die numerische Lösung instabil wird. R stellt daher die sogenannte Stabilitätsgrenze dar.

Der numerische Aufwand bemisst sich an der maximal möglichen Zeitschrittweite. Da die Frequenz nur vom physikalischen Problem und nicht von der Diskretisierung abhängt, ist die Effizienz des Verfahrens durch seine Genauigkeitsgrenze L bestimmt, wobei der Aufwand mit steigendem L sinkt.

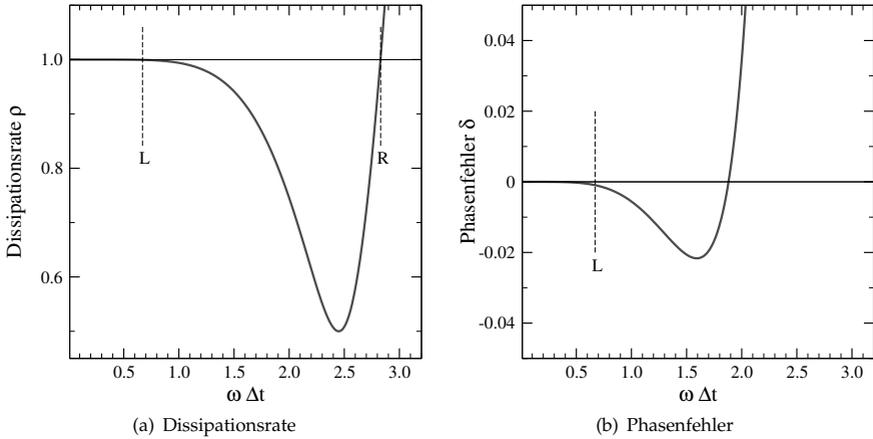


Abbildung 3.3: Dissipationsrate und Phasenfehler des vierstufigen Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung mit Genauigkeits- und Stabilitätsgrenzen

Analog zum DRP-Ansatz werden die Koeffizienten der LDDRK-Schemata so optimiert, dass der Fehler zwischen dem numerischen und exakten Verstärkungsfaktor minimiert wird, um so eine höhere Genauigkeitsgrenze L zu erreichen. Mathematisch lässt sich dies durch

$$E = \int_0^{\Gamma} \left| 1 + \sum_{k=1}^S c_k (-i\omega\Delta t)^k - e^{-i\omega\Delta t} \right|^2 d(\omega\Delta t) \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (3.22)$$

ausdrücken. Die optimierten Koeffizienten ergeben sich daher als Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems

$$\frac{\partial E}{\partial c_n} = 0 \quad \text{für } (n = P + 1, \dots, S), \quad (3.23)$$

wobei zum Erreichen einer vorgegebenen Fehlerordnung P wie bei der räumlichen Diskretisierung nicht alle Koeffizienten frei wählbar sind. Durch die Ordnungsrelationen (3.16) entfallen die Koeffizienten c_1 bis c_P für den Optimierungsprozess, was (3.23) schon berücksichtigt.

Tabelle 3.2 zeigt, dass bei gleicher Stufenzahl S die Genauigkeits- und Stabilitätsgrenzen mit steigender Ordnung sinken, da die jeweilige Anzahl zu optimierender Koeffizienten abnimmt. Um sowohl eine hohe Fehlerordnung als auch große Genauigkeitsgrenzen zu erreichen, sind deshalb Verfahren mit hoher Stufenzahl notwendig, die aber zu einer Steigerung des Rechenaufwands führen.

Stufenzahl	Fehlerordnung	Genauigkeitsgrenze	Stabilitätsgrenze
S	P	L	R
4	2	0.85	2.85
4	4	0.67	2.83
5	2	1.35	3.54
5	4	1.13	3.47
6	4	1.75	1.75

Tabelle 3.2: Genauigkeits- und Stabilitätsgrenzen von LDDRK-Verfahren unterschiedlicher Stufenzahl und Fehlerordnung

Alternierende Verfahren

Zur Reduktion des Rechenaufwands bei Verfahren hoher Stufenzahl haben Hu et al. [48] die Verwendung von alternierenden Verfahren vorgeschlagen. Dabei werden zwei Verfahren gleicher Fehlerordnung, aber verschiedener Stufenzahl und damit unterschiedlichem Optimierungsgrad, abwechselnd verwendet. Der Rechenaufwand sinkt dadurch auf das Mittel des Aufwands der einzelnen Verfahren.

Für die diskreten Verstärkungsfaktoren der einzelnen Verfahren gilt analog (3.20)

$$\begin{aligned}
 r_{d,1} &= 1 + \sum_{k=1}^{S_1} a_k (-i\omega\Delta t)^k \\
 r_{d,2} &= 1 + \sum_{k=1}^{S_2} b_k (-i\omega\Delta t)^k,
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

wobei S_1 und S_2 die Stufenzahlen des ersten bzw. zweiten Verfahrens bezeichnen. Die exakten und diskreten Verstärkungsfaktoren des alternierenden Gesamtverfahrens ergeben sich als Produkt der Faktoren der Einzelverfahren zu

$$r_{e,1-2} = r_e^2 \quad \text{und} \quad r_{d,1-2} = r_{d,1} r_{d,2}.
 \tag{3.25}$$

Um den Fehler des Gesamtverfahrens zu minimieren, muss $|r_{d,1-2} - r_{e,1-2}|$ minimal werden, was analog zu (3.22) auf das Optimierungskriterium

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^\Gamma \left| \left(1 + \sum_{k=1}^{S_1} a_k (-i\sigma)^k \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{S_2} b_k (-i\sigma)^k \right) - e^{-i\sigma} \right|^2 d\sigma \\
 &\stackrel{!}{=} \text{Minimum}
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

führt.

Daraus resultiert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_n} &= 0 \quad \text{für } (n = P + 1, \dots, S_1) \\ \frac{\partial E}{\partial b_m} &= 0 \quad \text{für } (m = P + 1, \dots, S_2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

zur Bestimmung der optimierten Koeffizienten a_k und b_k .

Abbildung 3.4 zeigt numerische Dissipation und Phasenfehler für verschiedene LDDRK-Verfahren mit den entsprechenden Genauigkeits- und Stabilitätsgrenzen.

Für das LDDRK 4-6 Verfahren vierter Ordnung mit $S_1 = 4$, $S_2 = 6$ und $P = 4$ wird eine Genauigkeitsgrenze von $L = 1.64$ und eine Stabilitätsgrenze von $R = 2.52$ erreicht. Der Vergleich dieser Werte mit Tabelle 3.2 zeigt, dass dieses Verfahren bei gleichem Rechenaufwand eine 30% höhere Genauigkeitsgrenze als ein fünfstufiges LDDRK-Verfahren vierter Ordnung besitzt und selbst gegenüber dem fünfstufigen LDDRK-Verfahren von nur zweiter Ordnung noch 20% bessere Ergebnisse erzielt.

Mit alternierenden LDDRK-Verfahren wird also bei gleichem Rechenaufwand eine signifikant höhere Genauigkeitsgrenze erreicht als bei einfachen LDDRK-Verfahren, weshalb sich deren Einsatz empfiehlt.

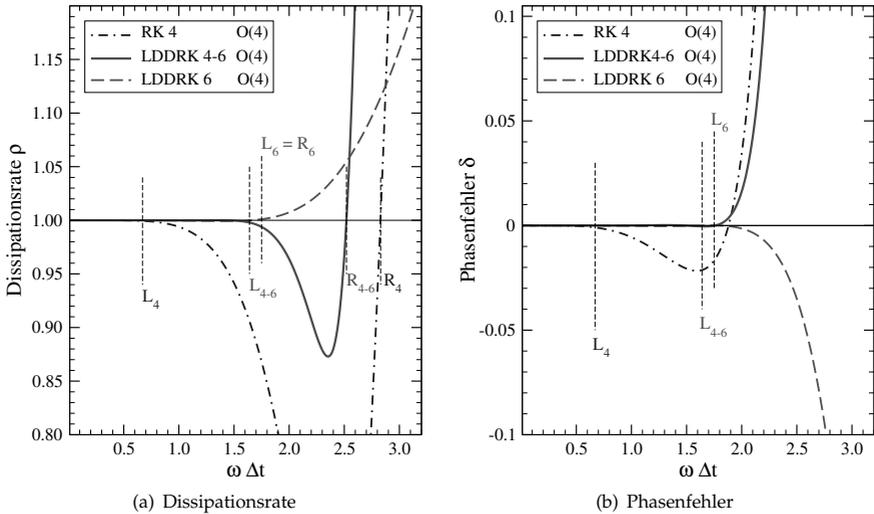


Abbildung 3.4: Dissipationsraten und Phasenfehler verschiedener LDDRK-Schemata

2N-Storage-Form

Von Williamson [106] und Stanescu et al. [93] ist zur Reduktion des Speicherbedarfs für Runge-Kutta-Verfahren eine 2N-Storage-Formulierung vorgeschlagen worden. Diese Implementierung kommt mit nur 2N Speicherplätzen aus, wobei N die Anzahl der Freiheitsgrade (Anzahl der Variablen \times Anzahl der Gitterpunkte) bezeichnet. Das Prinzip dieser speichereffizienten Implementierung basiert darauf, dass Informationen aus vorigen Zeitschritten nicht überschrieben sondern in der Berechnung weiter verwendet werden. Die Gleichung (3.15) nimmt so die Form

$$\begin{aligned} w_i &= \alpha_i w_{i-1} + h F(t_{i-1}, u_{i-1}) & \text{für } (i = 1, \dots, s) \\ u_i &= u_{i-1} + \beta_i w_i \end{aligned} \quad (3.28)$$

an. Die Koeffizienten α_i und β_i werden aus Beziehungen zwischen a_{ij} und b_i gewonnen. Da es sich bei der 2N-Storage-Form lediglich um eine Neuordnung des Rechenalgorithmus handelt, werden die grundlegenden Eigenschaften des Runge-Kutta-Verfahrens nicht verändert. Wie Williamson [106] gezeigt hat, lassen sich nicht alle Verfahren in eine 2N-Storage-Form überführen, für die oben beschriebenen und hier eingesetzten LDDRK-Verfahren ist dies aber möglich. Eine entsprechende Implementierung ist detailliert von Stanescu und Habashi [93] beschrieben.

In dieser Arbeit findet ein alternierendes LDDRK-Schema mit fünf und sechs Stufen Anwendung, deren Koeffizientensätze im Anhang A.2 zu finden sind.

3.1.3 Filterung

Die im Abschnitt 3.1.1 beschriebene diskrete Approximation der kontinuierlichen Differentialgleichungen erlaubt nur die physikalisch korrekte Wiedergabe eines beschränkten Wellenlängenbereichs. Nicht vollständig aufgelöste Wellen im hohen Wellenzahlbereich führen zu sogenannten Gitterschwingungen, die durch eine breitbandige Anregung oder durch numerische Fehler unkontrolliert entstehen können.

Von Tam und Dong [97] wurden diese kurzwelligen Lösungen entsprechend ihrer Gruppengeschwindigkeit weiter unterschieden und als dispersive bzw. parasitäre Wellen klassifiziert. Um die drei zu unterscheidenden Wellenzahlbereiche zu veranschaulichen, ist die numerische Gruppengeschwindigkeit des zentralen DRP-Schemas in Abbildung 3.5 mit der rechten Ordinate aufgetragen. Der physikalisch sinnvolle langwellige Bereich ist auf Auflösungen von mehr als sechs PPW beschränkt. Dispersive Wellen, deren Gruppengeschwindigkeit unterschätzt wird, sind im Bereich von sechs PPW bis drei PPW zu finden. Bei Auflösungen unter drei PPW entstehen parasitäre Wellen, deren Gruppengeschwindigkeit negativ ist. Diese Wellen haben aber einen großen Betrag, so dass sie sich mit mehrfacher Schallgeschwindigkeit ausbreiten. Wie am Dissipationsverhalten in Abbildung 3.4 erkennbar

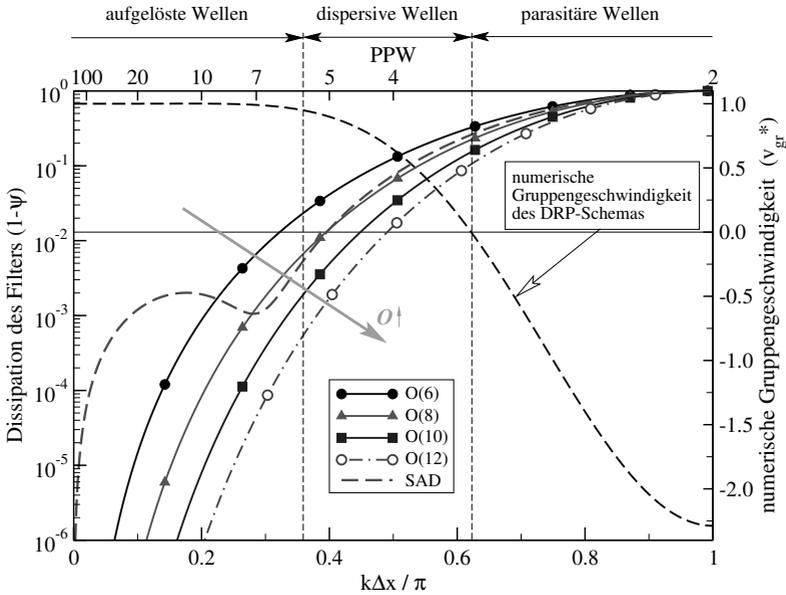


Abbildung 3.5: Vergleich der Filterdissipation verschiedener Filter (aus [113])

ist, wächst als Folge davon die Lösung sehr schnell an und führt so zur Instabilität des Verfahrens.

Tam und Dong [97] führen zur Unterdrückung der kurzwelligen unphysikalischen Lösungsanteile ein „Selective Artificial Damping“ (SAD) genanntes Verfahren ein. Für viele praktische Anwendungsfälle hat sich dieses Verfahren aber als ungeeignet herausgestellt, da es nicht selektiv genug im Bereich der aufgelösten langen Wellenlängen arbeitet und somit die gesamte Lösung zu stark dämpft.

Ein geeigneterer Weg zur Unterdrückung der unphysikalischen Wellenanteile ist die Verwendung eines räumlichen Tiefpassfilters, der unabhängig von der Implementierung der Zeitdiskretisierung wirkt. Als Filter wird dazu eine Approximation \hat{q}'_l einer Feldvariable q' an einem Punkt l verwendet, die auf den Werten der benachbarten Punkte $-N$ bis M basiert. Die Filterkoeffizienten w_j werden durch

$$\hat{q}'_l = q'_l - \sum_{j=-N}^M w_j q'_{l+j} \quad (3.29)$$

definiert. Eine solche Filterung erhöht natürlich den numerischen Aufwand. Die Erfahrung zeigt aber, dass zum Erhalten einer stabilen Lösung nicht in jedem Zeit-

schritt gefiltert werden muss. Der Zuwachs an Rechenzeit lässt sich so je nach Anwendungsfall deutlich reduzieren.

Ausgehend von der Filterdefinition (3.29) lässt sich die Transferfunktion des Filters im Wellenzahlraum als Antwort auf räumliche harmonische Funktionen mit der relativen Wellenzahl $k \Delta x$ als

$$\Psi = 1 - \sum_{j=-N}^N w_j e^{i j k \Delta x} \quad (3.30)$$

schreiben. Daraus ist ersichtlich, dass sich Phasenfehler, die durch einen Imaginärteil entstehen würden, bei Wahl eines symmetrischen Filters mit $M = N$ und $w_j = -w_j$ vermeiden lassen. Die Filterkoeffizienten selbst können über eine Taylor-Reihenentwicklung der Filterdefinition aus [113] abgeleitet werden und sind in Anhang A.3 aufgeführt.

Der Filterstern als Summe der Produkte von Filterkoeffizienten und Funktionswert kann als Korrektur des Ausgangswertes durch den Filter betrachtet werden. Dies ermöglicht eine Modifikation des Filters, durch die, analog zum von Tam und Dong [97] vorgeschlagenen SAD-Verfahren, mittels eines Gewichtungsfaktors σ_{filter} die Wirkung des Filters reduziert werden kann:

$$\hat{q}'_l = q'_l - \sigma_{\text{filter}} \sum_{j=-N}^N w_j \hat{q}'_{l+j}. \quad (3.31)$$

Das Filtergewicht σ_{filter} wird dabei zwischen 0 und 1 gewählt und ermöglicht dadurch eine Steuerung der Dämpfung. Eine solche Reduktion ist beispielsweise beim Einsatz einfacher eindimensionaler Filter in mehreren Raumrichtungen als 2D- und 3D-Filter notwendig.

Die Dissipation solcher Filter, die sich als $|1 - \Psi|$ definieren lässt, ist für Filter verschiedener Ordnung und für das SAD-Verfahren in Abbildung 3.5 dargestellt. Es ist erkennbar, dass weder das SAD-Verfahren noch ein nicht optimierter Sieben-Punkte-Filter sechster Ordnung in der Lage sind, die gewünschten Eigenschaften in Form eines scharfen Abschneidens des kurzwelligen Bereichs und geringer Dissipation im Durchlassbereich bereitzustellen. Untersuchungen von Richter et al. [76] und Panek [68], bei denen verschiedene optimierte und nicht optimierte Filter bis zu 12. Ordnung betrachtet wurden, zeigen, dass ein Elf-Punkte-Filter zehnter Ordnung bis zu einer Auflösung von sieben PPW am besten geeignet ist, um kurzwellige Anteile abzuschneiden ohne dabei langwellige Anteile zu stark zu dämpfen. Aber weder dieser Filter 12. Ordnung noch ein für niedrige Dissipation optimierter Elf-Punkte-Filter von Bogey und Bailly [18] waren in allen wichtigen Fällen in der Lage, die kurzwelligen Anteile und die daraus resultierenden Instabilitäten vollständig zu unterdrücken.

An den Grenzen des Rechengebiets kann der zentrale Elf-Punkte-Filter nicht mehr angewendet werden. Es hat sich aber herausgestellt, dass eine dieses Problem lösende Filterung mit kleineren Filtersternen an Gebietsgrenzen und an Wänden sich auch günstig auf die Stabilität auswirkt. Zur Vermeidung von zu starker Dämpfung durch die kleineren Filter wird das Filtergewicht σ_{filter} mit fallender Filterordnung reduziert. Dadurch wird zwar nicht die gleiche Filterleistung wie beim Filter zehnter Ordnung erreicht, kurzwellige Anteile dicht an der Wand werden aber hinreichend unterdrückt, während die Dissipation im langwelligen Bereich auf einem akzeptablem Niveau bleibt.

3.2 Gitter

Die Anwendung der eindimensional formulierten Diskretisierungsschemata aus Abschnitt 3.1.1 zur quasi-dreidimensionalen Approximation der Grundgleichungen erfordert prinzipiell zunächst ein orthogonales vernetztes Rechengebiet. Des Weiteren setzt das DRP-Schema eine konstante Schrittweite voraus. Mit äquidistanten orthogonalen Gittern, die diese Anforderungen erfüllen, lassen sich aber, abgesehen von rein akademischen Testfällen, kaum sinnvoll relevante Konfigurationen vernetzen. Üblicherweise werden daher wie auch in der CFD für nicht kartesische Geometrien block-strukturierte körperangepasste Gitter in krummlinigen Koordinaten verwendet, deren Erzeugung und Anwendung für CAA-Verfahren hier nachfolgend erläutert wird.

Bei komplexeren Konfigurationen führt diese Vorgehensweise durch die hohe Verfahrensordnung aber oft zu Schwierigkeiten. Diese werden zusammen mit ihren Ursachen in Kapitel 4 ausführlich beschrieben und diskutiert. Dort wird auch eine für CAA-Verfahren angepasste Gittereinbettungstechnik vorgestellt, die eine Vermeidung dieser Probleme erlaubt und allgemein die Vernetzung sehr komplexer anwendungsnaher Konfigurationen ermöglicht bzw. erheblich erleichtert.

3.2.1 Krummlinige Koordinaten

Durch eine Transformation lassen sich die Koordinaten der Knotenpunkte eines krummlinigen körperangepassten Gitters x_i aus dem geometrischen Raum (engl. *physical domain*) in die kartesischen Koordinaten ζ^k des orthogonalen äquidistanten Indexraums des Rechengebiets (engl. *computational domain*) überführen. Diese wird durch die Transformationsvorschrift

$$x_i = x_i(\zeta^k) \quad (3.32)$$

beschrieben [82]. Wird dabei im Rechengebiet eine Gitterweite von eins gewählt, entsprechen die Koordinaten ζ^k genau den Knotenindizes, was in Abbildung 3.6 veranschaulicht wird.

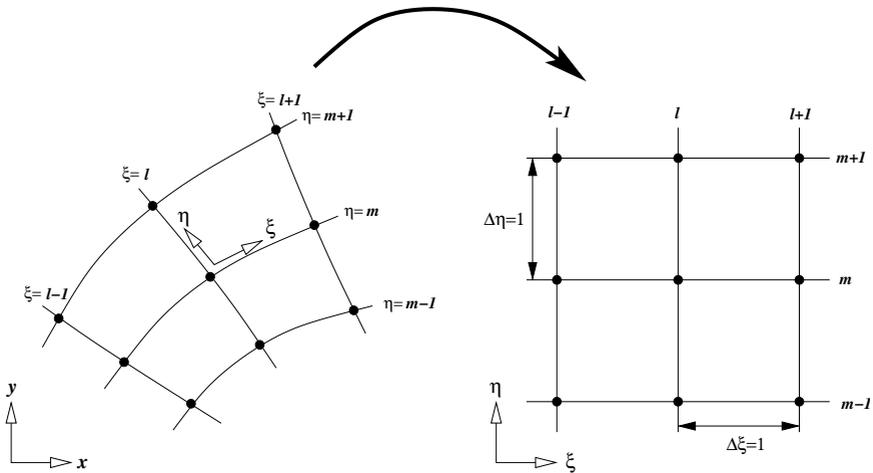


Abbildung 3.6: Abbildung aus dem geometrischen Raum in den Indexraum des Rechengebiets unter Verwendung von krummlinigen Koordinaten

Die räumlichen partiellen Ableitungen einer Feldgröße ϕ nach physikalischen Koordinaten können mit Hilfe der Kettenregel durch Ableitungen nach den Koordinaten des Rechengebiets ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^k} \frac{\partial \zeta^k}{\partial x_i} = g_i^k \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^k}, \quad (3.33)$$

wobei zur Berechnung der Ableitungen im orthogonalen äquidistanten Rechengebiet $\partial/\partial \zeta^k$ die oben eingeführten optimierten finiten Differenzenverfahren verwendet werden. Neben diesen Ableitungen werden in (3.33) noch die sogenannten Metrikkoeffizienten g_i^k benötigt. Diese können nicht direkt berechnet werden, da im Allgemeinen der funktionale Zusammenhang $\zeta^k = \zeta^k(x_i)$ nicht bekannt ist. Aufgrund der Orthogonalitätsrelation zwischen den ko- und kontravarianten Basisvektoren des krummlinigen Koordinatensystems lässt sich die Metrik aber indirekt durch Invertieren von $\partial x_i / \partial \zeta^k$ als

$$g_i^k := \frac{\partial \zeta^k}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \zeta^k} \right)^{-1} \quad (3.34)$$

bestimmen, wobei die Ableitungen $\partial x_i / \partial \zeta^k$ mit den schon implementierten optimierten Diskretisierungsschemata oder alternativ auch mit einem Standardschema höherer Ordnung [113] berechnet werden können. Die Metrikkoeffizienten lassen

sich somit für jeden Gitterknoten aus den Ableitungen seiner Koordinaten und der Jacobi-Determinante $J = \det(\partial x_i / \partial \xi^k)$ wie folgt explizit angeben:

$$g_i^k = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Um den Fehler klein zu halten, der durch die numerische Approximation der Transformationskoeffizienten aus (3.35) entsteht, sind qualitativ hochwertige Gitter erforderlich. Verzerrungen und sehr starke Größenvariationen sollten ebenso vermieden werden wie sprunghafte Änderungen in der Krümmung der Gitterlinien. Eine sehr hohe Güte wird durch lokal orthogonale Gitter erreicht.

3.2.2 Blockstrukturierung und Parallelisierung

Für kompliziertere Geometrien ist eine strukturierte Vernetzung mit nur einem zusammenhängenden Gitter hoher Güte, das keine starken Verzerrungen oder Krümmungsänderungen aufweist, nicht oder nur sehr schwer realisierbar. Abhilfe dafür schafft die in der CFD schon lange etablierte Gitterzerlegung. Dabei wird das Rechengebiet in Teilgebiete, sogenannte Blöcke, aufgeteilt, die separat vernetzt werden. Entsprechend der geometrischen Gegebenheiten können für die einzelnen Blöcke Gitter vom H-, O- oder C-Typ eingesetzt werden. Aus strömungsphysikalischer Sicht ist die Aufteilung in Blöcke völlig willkürlich. Die in den einzelnen Blöcken separat berechneten Lösungen sind daher nicht unabhängig voneinander. Um eine zusammenhängende Gesamtlösung zu erhalten, ist daher ein Datenaustausch zwischen den Blöcken notwendig.

Randaustausch Für die diskrete Berechnung der partiellen Ableitung an einem Gitterknoten mit den oben beschriebenen räumlichen Diskretisierungsschemata werden nur die Feldgrößen am jeweiligen Knoten selbst und an Knoten in seiner unmittelbaren Umgebung benötigt. Durch die Zerlegung des Rechengebiets in Blöcke entstehen aber an den Nahtstellen zwischen den Blöcken künstliche Ränder. Für Knoten die an diesen Blockgrenzen oder, je nach Größe des Diskretisierungsterns, in deren Nähe liegen, fehlen für die Approximation Werte von Knoten, die nun im Nachbarblock liegen.

Konkret werden bei einem Sieben-Punkte-Differenzenstern für den Randknoten eines Blocks Werte an drei benachbarten Knoten des angrenzenden Blocks benötigt, die entsprechend zur Verfügung gestellt werden müssen. Soll die Lösung innerhalb eines Blocks während eines Zeitschritts unabhängig berechnet werden, lassen sich

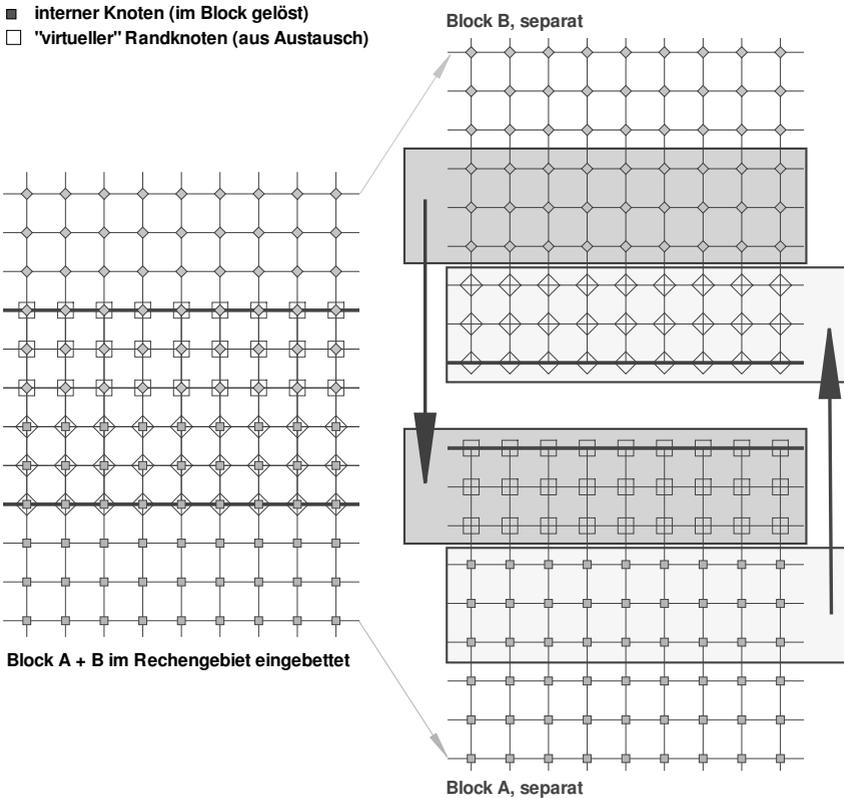


Abbildung 3.7: Schematische Darstellung des Randaustauschs an einer Blockgrenze

die benötigten Daten auf drei zusätzlich hinzugefügten Gitterebenen speichern. Während auf diesen Gitterebenen selbst keine Lösung berechnet wird, müssen dort vor jedem neuen Zeitschritt die Daten der korrespondierenden Knoten aus dem Nachbarblock abgelegt werden. Die Übertragung der Daten zwischen den Blöcken wird Randaustausch genannt und ist in Abbildung 3.7 veranschaulicht. Die Zuordnung der auszutauschenden Knoten erfolgt über eine im Preprocessing erstellte Austauschtable, die im CAA-Löser dann entsprechend ausgewertet wird. Da der Datenaustausch auf die Nahtstellen der Blöcke beschränkt ist, bleibt das zu übertragende Datenvolumen relativ klein und verursacht nur kleine Leistungsverluste.

Anders als bei CFD-Verfahren niedriger Ordnung, wo im Allgemeinen jeweils nur ein Nachbarknoten benötigt wird, entsteht beim CAA-Verfahren unter Einbezie-

hung der künstlichen Gitterebenen ein sechs Knoten breiter Überlappungsbereich, in dem eine eindeutige Zuordnung zwischen den Knoten notwendig ist. Die geforderte eindeutige Abbildung im Austauschbereich kann bei komplexeren Gittertopologien, bei denen viele Blöcke in einem Punkt zusammentreffen können, nicht immer sichergestellt werden, was insbesondere in Hinblick auf die Stabilität des CAA-Verfahrens problematisch sein kann. In Kapitel 4 wird diese Problematik ausführlich diskutiert und eine ebenfalls aus der CFD bekannte und für CAA-Verfahren adaptierte Gitter-Einbettungstechnik vorgestellt. Deren Einsatz vermeidet solche Probleme und vereinfacht zusätzlich die Vernetzung sehr komplexer Konfigurationen erheblich.

Parallelisierung Gitter für praxisrelevante Anwendungsfälle können insbesondere bei dreidimensionalen Konfigurationen leicht mehrere Millionen Gitterknoten besitzen. Die Lösung solch einer Konfiguration ist sowohl aus Sicht des Speicherbedarfs als auch in Hinblick auf die benötigte Rechenleistung meist nicht mehr auf einem einzelnen Prozessor möglich. Der oben beschriebene Gitter-Zerlegungsansatz ermöglicht aber nicht nur eine qualitativ hochwertige Vernetzung sondern erlaubt auch eine einfach zu implementierende Parallelisierung des Problems.

Die einzelnen Blöcke werden dazu auf verschiedene Prozessoren verteilt und dort gelöst, wobei der Randaustausch nicht mehr prozessorintern sondern prozessorübergreifend erfolgt. Zur Implementierung empfiehlt sich der Einsatz einer standardisierten, von der Rechnerarchitektur unabhängigen Kommunikationsbibliothek, die eine leichte Portierbarkeit darauf aufbauender Programme ermöglicht. In den letzten Jahren hat sich das *Message-Passing-Interface* (MPI) [26] als Quasistandard im wissenschaftlichen Hochleistungsrechnen (engl. *High-Performance Scientific Computing*, HPSC) etabliert und wird deshalb auch im hier verwendeten CAA-Code benutzt. Für nahezu alle Parallelrechnerarchitekturen stehen optimierte MPI-Bibliotheken zur Verfügung, so dass der Code, je nach Problemgröße, vom heute üblichen Arbeitsplatz-PC mit Mehr-Kern-Prozessor bis hin zu Supercomputern effizient einsetzbar ist.

3.2.3 Gittergenerierung und -aufbereitung

Die Generierung der Rechnetze für komplexere Geometrien erfolgt meist mit kommerziellen Werkzeugen, wobei überwiegend ANSYS® ICEM-CFD eingesetzt wird. Die kommerziellen Vernetzungswerkzeuge sind dabei für die Erzeugung von Gittern für CFD-Simulationen ausgelegt. Da an Gitter für CAA-Simulationen aber andere Anforderungen als an CFD-Gitter gestellt werden, ist eine entsprechende Aufbereitung der so erzeugten Gitter notwendig. In zweidimensionalen Konfigurationen war das Hinzufügen zusätzlicher Gitterlinien und das Erstellen der den Randaustausch beschreibenden Austausch Tabellen noch manuell möglich. Bei drei-

dimensionalen Konfigurationen ist solch ein Vorgehen nur sehr schwer möglich und in hohem Maße ineffektiv. Daher kommt hier der institutsintern entwickelte Präprozessor `cgns2caa` [3] zum Einsatz, der CFD-Gitter im CGNS-Format, welches sich als Standardaustauschformat im CFD-Bereich etabliert hat, in für das CAA-Verfahren geeignete Gitter umwandelt.

Zur Verbesserung der Gitterqualität bietet sich weiterhin deren Glättung an. Die oben erwähnten kommerziellen Gittergeneratoren bieten dazu Glättungsalgorithmen an. Diese genügen meist den Anforderungen der im CFD-Bereich vorwiegend eingesetzten Finiten-Volumen-Verfahren. Die Qualität so geglätteter Gitter ist für CAA-Verfahren höherer Ordnung aber häufig nicht ausreichend. Bessere Ergebnisse können durch den Einsatz biharmonischer Glättungsverfahren, wie den von Yan et al [107, 108] vorgestellten, erzielt werden.

3.3 Grundströmung

Die verwendeten Grundgleichungen aus Kapitel 2.2 enthalten für die Beschreibung der Schallausbreitung in einem strömenden Medium das mittlere stationäre Strömungsfeld als Konstante. Dieses kann durch CFD-Simulationen berechnet oder analytisch beschrieben werden. Um die Schallausbreitung realistisch zu simulieren, sollte die eingesetzte Grundströmung physikalisch sinnvoll sein. Für die Schallausbreitung wenig relevante Strömungseigenschaften können aber vernachlässigt werden. Oft brauchen Grenzschichtinflüsse nicht berücksichtigt werden, so dass auch Strömungsfelder, die die Wandhaftbedingung nicht erfüllen als Grundströmung verwendet werden, wie beispielsweise Euler-Lösungen oder konstant angenommene Strömungen.

Für komplexere Konfigurationen ist eine analytische Strömungsbeschreibung im Allgemeinen nicht möglich, so dass die Grundströmung mit klassischen CFD-Lösern berechnet werden muss. Als mittlere Strömung eignen sich sowohl stationäre Euler- und RANS-Lösungen als auch zeitlich gemittelte Lösungen aus instationären Simulationen mit URANS-, LES- oder DES-Verfahren. Wird eine Strömungssimulation in der zu untersuchenden Konfiguration einzig zur Grundströmungsvorgabe im CAA-Verfahren durchgeführt, sollten weniger aufwändige stationäre CFD-Simulationen genutzt werden. Da oft aber auch für aerodynamische Untersuchungen Strömungssimulationen an einer Konfiguration erfolgen, können natürlich deren Ergebnisse dann auch als mittlere Strömung eingesetzt werden, so dass kein zusätzlicher Rechenaufwand entsteht.

Im Allgemeinen sind für CFD- und CAA-Simulationen unterschiedliche Rechenetze notwendig, da die jeweiligen Lösungsverfahren verschiedene Anforderung hinsichtlich der Auflösung und Struktur der Gitter haben. Um die CFD-Lösung als Grundströmung zu verwenden, ist daher eine Interpolation der Strömungsdaten vom CFD-Gitter auf das CAA-Gitter notwendig. Bedingt durch die prinzipiell

erforderliche Interpolation zwischen den Gittern gibt es keine Einschränkungen hinsichtlich des eingesetzten CFD-Verfahrens. Es können sowohl strukturiert als auch unstrukturiert arbeitende Löser eingesetzt werden.

3.4 Randbedingungen

Da die dem CAA-Verfahren zugrundeliegenden Gleichungen aus Kapitel 2.2 im Allgemeinen von hyperbolischem Typ sind, müssen zu deren Lösung an allen Rändern des Rechengebiets Randbedingungen definiert werden.

Randbedingungen können beispielsweise durch Körperoberflächen physikalisch bedingt sein, wie eine Wandrandbedingung, aber auch numerisch motiviert sein, wie z.B. reflexionsfreie Randbedingungen an den Rechengebietsgrenzen. Weiterhin werden im hier genutzten CAA-Verfahren die Schallquellen über Quellrandbedingungen vorgegeben. Die in dieser Arbeit Anwendung findenden Randbedingungen werden im Folgenden näher beschrieben.

3.4.1 Wandrandbedingung

Physikalisch können Wände über eine Bedingung an die Zeitableitung der Schallschnelle normal zur Wand $\partial u'_n / \partial t$ definiert werden. Für schallharte Wände wird eine Nichtdurchströmung der Wand, also $\partial u'_n / \partial t = 0$ gefordert. Über die Bewegungsgleichung (2.4) lässt sich durch skalare Multiplikation mit dem Wandnormalenvektor \underline{n} eine Bedingung für den Druck ableiten:

$$\frac{\partial u'_n}{\partial t} = -R_n(\bar{q}, \underline{l}, q', \underline{u}') - \frac{1}{\bar{q}} \underline{n} \cdot \text{grad } p', \quad (3.36)$$

wobei R_n die Normalenanteile nicht vom Druck abhängiger Terme repräsentiert.

Die Implementierung basiert auf einer von Tam und Dong [96] vorgestellten Methode, bei der durch einen zusätzlich hinter der Wand eingeführten Gitterpunkt (engl. *ghost point*) ein weiterer Freiheitsgrad gewonnen wird. Dies ermöglicht das Einbringen der Druckbedingung (3.36) in das numerische Verfahren. Über eine Korrektur des Flussterms kann der unbekannte Druck p_{ghost} am Ghost-Point berechnet werden. In den diskreten Druckableitungen werden die asymmetrischen Differenzensterne an der Wand und in unmittelbarer Wandnähe um jeweils einen Punkt in Wandnormalenrichtung verschoben und berücksichtigen so p_{ghost} .

Da p_{ghost} unabhängig für jede Gitterlinie berechnet werden kann und er nach der Korrektur der Drucknormalenableitung nicht weiter benötigt wird, ist es nicht notwendig, die zusätzlichen Gitterpunkte physisch im Gitter vorzuhalten. Dies spart Speicherplatz und erleichtert die Gittergenerierung mit kommerziellen Programmen, die solche Punkte nicht vorsehen.

3.4.2 Reflexionsarme Randbedingungen

Zur Berechnung der Schallabstrahlung in Anwendungsfällen mit einem Schallaustritt in den freien Raum oder bei nicht physikalisch berandeten Konfigurationen sind zur Beschränkung des Rechengebiets auf eine endliche Größe Austrittsrandbedingungen erforderlich. Die maßgebliche Forderung an solche Randbedingungen ist, dass sie den Schall ungehindert aus dem Rechengebiet austreten lassen ohne dabei unphysikalische Reflexionen zurück ins Rechengebiet zu erzeugen, die die Lösung verfälschen. Im Laufe der Jahre wurden von der Forschergemeinschaft eine ganze Reihe solcher reflexionsfreien Randbedingungen entwickelt. Keine von ihnen ist aber universell einsetzbar, da sie abhängig vom Einsatzgebiet unterschiedlich gut und nicht immer hinreichend unphysikalische Reflexionen unterdrücken. Deshalb ist es treffender, von *reflexionsarmen* statt von *reflexionsfreien* Randbedingungen zu sprechen. Basierend auf den zur Formulierung verwendeten Ansätzen ist eine Klassifizierung der Randbedingungen möglich. In dieser Arbeit finden als reflexionsarme Randbedingungen so etwa charakteristische und absorbierende Austrittsbedingungen Anwendung, die im Folgenden vorgestellt werden.

Charakteristische Randbedingungen

Ausgehend von der asymptotischen Lösung einer kompakten Quelle, die jegliche Art von Störungen abstrahlt, können reflexionsarme Randbedingungen formuliert werden. Dazu werden die Grundgleichungen derart angepasst, dass nur aus dem Rechengebiet herausgerichtete Störungen beschrieben werden. Da keine ins Rechengebiet zurücklaufenden Anteile mehr im modifizierten Differenzialgleichungssystem enthalten sind, sollten auch keine Reflexionen mehr auftreten.

Eine Analyse der Gleichungen des Störungsansatzes aus Kapitel 2.2 zeigt, dass sich die Schwankungen in Entropie-, Wirbel- und akustische Komponenten zerlegen lassen, wobei die Wechselwirkung zwischen diesen Komponenten Chu und Kovásznyai [22] zur Folge ein Effekt zweiter Ordnung ist, der vernachlässigt werden kann. Die akustischen Komponenten breiten sich im mit der Strömung mitbewegten System mit Schallgeschwindigkeit vor- bzw. rückwärts aus. Entropie- und Wirbelkomponenten werden konvektiv mit der Strömung mitbewegt. Genauere Untersuchungen dazu sind bei Pierce [72] zu finden.

Die Forderungen an die hydromechanischen und akustischen Komponenten der Störungen unterscheiden sich an Ein- und Ausströmrandern, so dass eine entsprechend unterschiedliche Behandlung notwendig ist. An Einström- und nicht durchströmten Rändern treten keine hydrodynamischen Störungen auf, wodurch dort die Formulierung einer akustischen Abstrahlrandbedingung ausreichend ist, welche nur die aus dem Rechengebiet hinauslaufenden Schallwellen beschreibt. Dies ist an einem Ausströmrand hingegen nicht ausreichend, da dort auch noch der ungestörte

Austritt der Entropie- und Wirbelkomponenten sichergestellt werden muss, wozu eine Ausströmrandbedingung notwendig ist.

Abstrahlrandbedingung (engl. *radiation boundary condition*) Eine allgemeingültige Aufspaltung der verwendeten Grundgleichungen in Komponenten mit Bezug zur Ausbreitungsrichtung ist nur schwer realisierbar. Wird für die Entstehung der Schallwellen eine kompakte Quelle angenommen, kann aber eine Abstrahlbedingung auf Grundlage einer Wellengleichung formuliert werden, diese lässt sich nach Bogey und Bailly [17] mit $q' = (\varrho', \underline{u}', p')^T$ als

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{q}' + v_{\text{gr}} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \underline{q}' = 0 \quad (3.37)$$

schreiben, wobei von einer sphärischen Abstrahlung ausgegangen wird. Die in der Formulierung enthaltene Gruppengeschwindigkeit ist als

$$v_{\text{gr}} = \bar{\underline{u}} \cdot \underline{e}_r + c \quad (3.38)$$

definiert. Zur Implementierung der Bedingung im numerischen Algorithmus werden im Randbereich die ursprünglichen Grundgleichungen durch die diskretisierte Form von (3.37) ersetzt.

Diese Randbedingung zeigt für eine Vielzahl von Anwendungsbereichen gute Ergebnisse hinsichtlich der Reflexionsarmut. Ihre Wirksamkeit ist aber dadurch bestimmt, wie gut die Annahme der Kompaktheit der Schallquelle für die jeweilige Konfiguration erfüllt wird. So versagt diese Bedingung beispielsweise in Rohrumgebungen schnell, wenn für höhere Moden die in der Bedingung verwendete Gruppengeschwindigkeit stark von der tatsächlich vorherrschenden abweicht.

Ausströmrandbedingung (engl. *outflow boundary condition*) Die Ausströmrandbedingung stellt eine Erweiterung der Abstrahlrandbedingung dar, bei der zusätzlich auch der Transport der Entropie- und Wirbelkomponenten der Störungen berücksichtigt wird. Nach Bogey und Bailly [17] hat das im Randbereich zu lösende Gleichungssystem folgende Gestalt:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \bar{\underline{u}} \cdot \text{grad } \varrho' = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\underline{u}} \cdot \text{grad } p' \right] \quad (3.39a)$$

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \bar{\underline{u}} \cdot \text{grad } \underline{u}' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \text{grad } p \quad (3.39b)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + v_{\text{gr}} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] p' = 0. \quad (3.39c)$$

Die in (3.39a) auftretende Zeitableitung der Druckschwankung $\partial p' / \partial t$ kann durch Substitution mit (3.39c) in räumliche Ableitungen umgewandelt werden, so dass die Diskretisierung wie gehabt erfolgen kann.

Obwohl für die Herleitung der Bedingung eine gleichförmige Grundströmung angenommen wurde, lässt sie sich auch für Konfigurationen mit ungleichförmiger Strömung einsetzen, solange sich die Strömung nur langsam ändert.

Ferner ist zu berücksichtigen, dass diese Randbedingung nur für Ränder geeignet ist, über die tatsächlich ein Ausfluss erfolgt, da sonst das Gleichungssystem (3.39a–3.39c) aufgrund der fehlenden Entropie- und Wirbelkomponenten schlecht konditioniert ist. Ob tatsächlich ein Ausfluss über den Rand erfolgt, kann lokal für jeden Randpunkt über den Betrag der Wandnormalenkomponente der Geschwindigkeitsfluktuationen bestimmt werden. Dies erlaubt ein automatisches Umschalten zwischen Abstrahl- und Ausströmrandbedingung.

Neben den hier dargestellten Abstrahl- und Ausströmrandbedingungen sind noch weitere charakteristische Randbedingungen, etwa von Thompson [101, 102] und Giles [38], formuliert worden. In einigen Anwendungsfällen arbeiten diese manchmal besser, sind aber erfahrungsgemäß nicht prinzipiell wirkungsvoller als andere reflexionsarme Randbedingungen.

Absorbierende Randbedingungen

Eine weitere Möglichkeit zum reflexionsarmen Abschluss des Rechengebiets bilden absorbierende Randbedingungen. Bei diesen Ansatz wird am entsprechenden Gebietsrand eine zusätzliche Zone angefügt, in der zur Lösung künstliche Dissipation hinzugefügt wird. Die Fluktuationen werden dadurch beim Durchqueren dieser Zone absorbiert, so dass keine Reflexionen von Rand mehr möglich sein sollten.

NC/F-Absorptionszone (engl. *sponge layer*) Von Israeli und Orszag [50] wurden verschiedene Absorptionsmechanismen klassifiziert und untersucht. Bei der hier verwendeten Methode wird innerhalb der Absorptionszone ein zusätzlicher Dämpfungsterm vom sogenannten „Newton Cooling/Friction“-Typ (NC/F) zum Grundgleichungssystem hinzugefügt.

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + F(t, q') + \underbrace{\sigma_d(\underline{x}) (q' - q'_Q)}_{\text{NC/F-Dämpfungsterm}} = 0 \quad (3.40)$$

Darin spezifiziert q'_Q den Zielwert der Dämpfung. Für $q'_Q = 0$ arbeitet diese Methode als eine Art reflexionsarme Randbedingung, die die Fluktuationen vollständig

absorbieren soll. Wird ein von null verschiedener Zielwert gesetzt, kann das Verfahren zur Implementierung einer Quellrandbedingung verwendet werden.

Die Dicke der Absorptionszone sowie der räumliche Verlauf der Dämpfungsfunktion $\sigma_d(\underline{x})$ bestimmen maßgeblich das Verhalten der Randbedingung und damit deren Effektivität. Als Dämpfungsfunktionen innerhalb der Absorptionszone eignen sich z.B. Gaußverteilungen, die am Anfang der Zone null sind und an deren Ende ihr Maximum erreichen, wie etwa

$$\sigma_d(\underline{x}) = \exp\left(-\frac{1}{2} n_P \frac{d_{\text{RB}}^2}{\Delta x_{\text{NC/F}}^2}\right), \quad (3.41)$$

wobei d_{RB} den Abstand eines Punktes vom Rand und $\Delta x_{\text{NC/F}}$ die Dicke der Zone bezeichnen. Im normalen Rechengebiet außerhalb der Randzone wird $\sigma_x = 0$ gesetzt.

Das Einbringen der zusätzlichen Dämpfung in der Absorptionszone stellt sich für den Schall als ein Wechsel des Ausbreitungsmediums dar. Abhängig vom Schallfeld und der Dämpfungsfunktion können so im Übergangsbereich von Rechengebiet und Dämpfungszone sehr starke Reflexionen auftreten, wodurch diese Randbedingung für manche Konfigurationen nur bedingt einsetzbar ist. Nichtsdestotrotz liefert sie bei geeigneter Abstimmung von Zonengröße und Dämpfungsverteilung auf den jeweiligen Anwendungsfall gute Resultate.

Perfectly-Matched-Layer Die PML-Randbedingung ist wie die NC/F-Zone auch eine absorbierende Randbedingung. Sie wurde ursprünglich von Berenger [16] für die Elektrodynamik entwickelt. Ihr Ansatz beruht auf einer Aufspaltung der Flüsse in Komponenten für jede Raumrichtung, wobei Komponenten, die das Rechengebiet verlassen gedämpft werden. Wie oben schon beschrieben, stellt sich das Hinzufügen von künstlicher Dissipation für Schallwellen wie ein Medienübergang dar, der Reflexionen hervorrufen kann. Nach Hesthaven [44] wird durch Einführen eines imaginären Anteils in die Dispersionsbeziehung eine Gitterstreckung bewirkt, die die Dispersionsbeziehung aber nicht beeinflusst, da der Realteil unverändert bleibt. Dies ermöglicht die Formulierung eines Gleichungssystems für die Dämpfungszone, welches dort eine Dämpfung der Lösung erlaubt, ohne die Ausbreitungscharakteristik des Schalls zu stören. Die Dämpfungszone ist dadurch bezüglich der Schallausbreitung optimal auf das Rechengebiet abgestimmt, so dass Reflexionen am Übergang vermieden oder wenigstens reduziert werden. Diese Eigenschaft der Methode soll durch die Bezeichnung „Perfectly-Matched“ ausgedrückt werden.

Die große Ähnlichkeit der elektrodynamischen und akustischen Grundgleichungen ermöglichte Hu et al. [48] eine Adaption der PML für CAA-Simulationen. Deren Formulierung basierte wie auch der Ansatz von Berenger [16] auf einem unphysikalischen Aufspalten der Variablen in ihre Ableitungsrichtungen und wird daher auch

als „Split-PML“ bezeichnet. Sie lässt sich nur ineffizient und kompliziert implementieren, da ihre Gleichungen nicht mehr der ursprünglichen Gleichungsstruktur des CAA-Verfahrens entsprechen. Von Abarbanel et al. [2] konnte später eine Formulierung abgeleitet werden, die diese Aufspaltung nicht erfordert. Diese wurde aber von Tam et al. [95] als instabil identifiziert. Hu [47] formulierte durch die Einführung einer Prandtl-Glauert-Transformation aber eine neue, stabile PML-Variante, die hier Anwendung findet.

Untersuchungen von Schemel [84] in modal axialsymmetrischen Konfigurationen zeigen, dass die PML besonders als Ausströmrandbedingung für Rohrumgebungen geeignet und dort den anderen hier beschriebenen Randbedingungen überlegen ist. Für Rohrumgebungen genügt die Formulierung einer nur in axialer Richtung absorbierenden PML. Diese lässt sich in Matrix-Vektor-Form der Grundgleichungen mit $\partial q'_1 / \partial t = \underline{q}'$ als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{q}'}{\partial t} = & -\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{q}'}{\partial x} - \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}'}{\partial r} - \frac{1}{r} \underline{C} \cdot \underline{q}' - \underline{D} \cdot \underline{q}' \\ & - \sigma_x \underline{q}' - \sigma_x \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{q}'_1}{\partial r} - \sigma_x \frac{1}{r} \underline{C} \cdot \underline{q}'_1 - \sigma_x \frac{M_x}{1 - M_x^2} \underline{A} \cdot \underline{q}' \end{aligned} \quad (3.42)$$

schreiben. Für die räumliche Verteilung des Dämpfungskoeffizienten σ_x wird wie bei der NC/F-Absorptionszone eine inverse Gaußverteilung mit variabler Skalierung verwendet.

3.4.3 Quellrandbedingungen

Schallquellen können je nach Lösungsverfahren über Quellterme oder Quellrandbedingungen beschrieben werden. Auf einem Wellengleichungsansatz beruhende Verfahren nutzen Quelltermformulierungen, während für Bilanzgleichungsansätze, wie dem hier verwendeten CAA-Verfahren, Quellrandbedingungen eingesetzt werden. Das Quellfeld bzw. dessen Ableitungen werden dazu im Randbereich des Rechengebiets räumlich und zeitlich vorgegeben. Zur Implementierung bieten sich mehrere Vorgehensweisen an, die hier näher erläutert werden.

NC/F-Absorptionszone als Quelle Wie schon in Abschnitt 3.4.2 beschrieben, kann die NC/F-Absorptionszone durch das Setzen eines von null verschiedenen Zielwertes q'_Q im Randgebiet als Quellrandbedingung eingesetzt werden. Als Quellfelder können dabei sowohl reine Schallfelder als auch akustische Anteile enthaltende Strömungsfelder spezifiziert werden, solange diese hinreichend räumlich und zeitlich aufgelöst sind. So ist beispielsweise die direkte Eingabe von instationären Strömungsdaten aus hochauflösenden CFD-Simulationen möglich.

Modifizierte Abstrahlrandbedingung als Quelle Durch eine auf Tam [94] zurückgehende Modifikationen der in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen Abstrahl- und Ausströmrandbedingungen ist es möglich, auch Quellrandbedingungen zu formulieren. Die Grundidee des Ansatzes ist es, die Fluktuationen im Randbereich als Überlagerung von einem abgestrahlten bzw. ausfließenden Anteil q'_{aus} und einem einzubringenden Quellanteil q'_Q zu betrachten, also als

$$\underline{q}' = q'_{\text{aus}} + q'_Q. \quad (3.43)$$

Die in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen Anpassungen für die Gleichungssysteme im Randbereich werden so nur auf den abgestrahlten bzw. ausfließenden Anteil q'_{aus} angewandt.

Für eine Quelle auf einem Abstrahlrand ergibt sich somit aus (3.37) mit (3.43) folgende modifizierte Abstrahlrandbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial t} (q' - q'_Q) + v_{\text{gr}} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] (q' - q'_Q) = 0. \quad (3.44)$$

Modifizierte Ausströmrandbedingung als Quelle Analog zur modifizierten Abstrahlrandbedingung ändert sich für eine Quelle auf einen Ausströmrand das Gleichungssystem aus (3.39a–3.39c) mit (3.43) zur modifizierten Ausströmrandbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (q' - q'_Q) + \underline{u} \cdot \text{grad} (q' - q'_Q) = \\ \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (p' - p'_Q) + \underline{u} \cdot \text{grad} (p' - p'_Q) \right] \end{aligned} \quad (3.45a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{u}' - \underline{u}'_Q) + \underline{u} \cdot \text{grad} (\underline{u}' - \underline{u}'_Q) = -\frac{1}{\bar{q}} \text{grad} (p' - p'_Q) \quad (3.45b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (p' - p'_Q) + v_{\text{gr}} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] (p' - p'_Q) = 0. \quad (3.45c)$$

Diese modifizierten Abstrahl- und Ausflussrandbedingungen erlauben das Einbringen einer Schallquelle in das Rechengebiet über die räumlichen und zeitlichen Ableitungen von q'_Q . Für das Quellfeld gilt gleiches wie bei der NC/F-Absorptionszone als Randbedingung.

Direkte Quellenbeschreibung Die instationären Simulationsergebnissen hochauflösender CFD-Rechnungen können direkt zur Beschreibung der Quellen in den Quellrandbedingungen verwenden werden. Die benötigten \underline{q}'_Q lassen sich aus den CFD-Daten durch den Separationsansatz (2.11) als

$$\underline{q}'_Q(\underline{x}_{\text{Rand}}, t) = \underline{q}(\underline{x}_{\text{Rand}}, t) - \bar{q}(\underline{x}_{\text{Rand}}) \quad (3.46)$$

bestimmen. Dazu wird an der Schnittstelle zwischen CFD- und CAA-Rechengebiet, also am Quellrand der CAA-Simulation, auf drei Gitterebenen $\underline{x}_{\text{Rand}}$ das zeitlich gemittelte Strömungsfeld $\bar{q}(\underline{x})$ vom instationären Strömungsfeld $\underline{q}(\underline{x}, t)$ abgezogen.

Da im Allgemeinen die Zeitschrittweiten in CFD- und CAA-Simulation nicht übereinstimmen, wird das so gewonnene Quellfeld durch Interpolation zwischen den Zeitschritten der Schrittweite in der CAA-Simulation angepasst. Ist das Fluktuationfeld \underline{q}'_Q in seinen akustischen Anteilen nicht periodisch, ist ein permanentes Nachladen von instationären Strömungsdaten während der gesamten Schallausbreitungssimulation erforderlich. Verglichen mit einer analytischen Quellenbeschreibung führt diese Methode zu einer Reduktion der Berechnungsgeschwindigkeit im CAA-Löser und erfordert das Vorhalten großer Datenmengen.

Analytisches Quellmodell für Rohrumgebungen In Rohrumgebungen, wie z.B. Einläufen oder Nebenstromkanälen von Triebwerken, lassen sich beliebige Schallfelder, wie in Kapitel 2.4 gezeigt, analytisch durch eine unendliche Folge von Moden beschreiben. Diese Lösung ist zunächst wegen der nicht endlichen Anzahl von Folgengliedern für den Einsatz in einem numerischen Verfahren unpraktikabel. In technisch relevanten Konfigurationen tritt aber aufgrund der Schallentstehungsmechanismen meist nur eine begrenzte Anzahl von Moden auf, so dass sich eine analytische Lösung $\underline{q}'_Q = [q', u'_x, u'_r, u'_\theta, p']^T_Q$ durch die endliche Folge

$$\underline{q}'_Q(x, r, \vartheta, t) = \Re \left\{ \sum_{(m,n) \in \mathcal{M}_{\text{an}}} A_{mn} \underline{Q}_{mn}(r) e^{i(\omega t - m\vartheta - k_{mn} x)} \right\} \quad (3.47)$$

mit

$$\underline{Q}_{mn}(r) = \left[\frac{1}{c^2}, \frac{k_{mn}}{\bar{\rho}(\omega - \bar{u}k_{mn})}, \frac{i}{\bar{\rho}(\omega - \bar{u}k_{mn})} \frac{d}{dr}, -\frac{m}{r\bar{\rho}(\omega - \bar{u}k_{mn})}, 1 \right]^T U_{mn}(r)$$

und

$$U_{mn}(r) = J_m(\mu_{mn} r) + N_{mn} Y_m(\mu_{mn} r)$$

von Moden (m, n) aus der Menge \mathcal{M}_{an} der angeregten Moden angeben lässt.

Neben der Restriktion auf tatsächlich angeregte Moden entfällt in (3.47) gegenüber (2.25) aus Kapitel 2.4 eine axiale Ausbreitungsrichtung. Da (3.47) am Rand des Rechengebiets angesetzt wird, muss nur die Ausbreitungsrichtung berücksichtigt werden, die durch das Rechengebiet führt. Für eine Quellrandbedingung am Rohranfang (x_{\min}) ist dies die positive und am Rohrende (x_{\max}) entsprechend die negative Ausbreitungsrichtung.

Die zur Randbedingungsbeschreibung benötigten Dichte- und Schnelleschwankungen lassen sich aus der Lösung für die Druckschwankungen über die Grundgleichungen (2.16–2.19) aus Kapitel 2.2 ableiten.

Der Eigenwert μ_{mn} und das Verhältnis N der Beiträge von Bessel- bzw. Neumannfunktionen an der Lösung sind durch Randbedingungen am Rohr- bzw. Zentralkörperradius bestimmt.

Kreiskanal Für Kanäle mit kreisförmigem Querschnitt ohne Zentralkörper liefert die Neumann-Funktion keinen Anteil, so dass $N_{mn} = 0$ gesetzt wird. Über die Nichtdurchströmbedingung an der Rohrwand

$$u'_r(r_a) = J'_m(\mu_{mn} r_a) = 0 \quad (3.48)$$

sind die Eigenwerte μ_{mn} gegeben.

Ringkanal Für einen Ringkanal mit Zentralkörper lässt sich entsprechend aus den Nichtdurchströmbedingungen an Rohr- und Zentralkörperwand

$$u'_r(r_a) = u'_r(r_i) = 0 \quad (3.49)$$

die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte μ_{mn}

$$J'_m(\mu_{mn} r_a) Y'_m(\mu_{mn} r_i) - J'_m(\mu_{mn} r_i) Y'_m(\mu_{mn} r_a) = 0 \quad (3.50)$$

ableiten und der Anteil der Neumannfunktion

$$N_{mn} = -\frac{J'_m(\mu_{mn} r_i)}{Y'_m(\mu_{mn} r_i)} = -\frac{J'_m(\mu_{mn} r_a)}{Y'_m(\mu_{mn} r_a)}. \quad (3.51)$$

an der Lösung bestimmen.

Die axiale Wellenzahl in (3.47) ist über die Dispersionsbeziehung der konvektiven Wellengleichung als

$$k_{mn}^{\pm} = \frac{-\left(\frac{\omega}{c}\right) M_x \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (1 - M_x^2) \mu_{mn}^2}}{1 - M_x^2} \quad (3.52)$$

definiert.

Sind die angeregten Moden und ihre komplexen Amplituden A_{mn} bekannt, lassen sich mit den Gleichungen (3.47–3.52) Schallfelder, die durch die Lösung der konvektiven Wellengleichung in Rohrumgebungen analytisch repräsentiert sind, als Quellrandbedingung an das CAA-Verfahren vorgeben. Da die Eigenwerte μ_{mn} und die Verhältnisse N_{mn} zwischen Bessel- und Neumannfunktionen für die jeweiligen Mode im CAA-Löser selbst bestimmt werden, müssen dazu nur die azimutalen und radialen Modenordnungen m bzw. n und die dazugehörige komplexe Amplitude A_{mn} für das zu untersuchende Modenfeld spezifiziert werden.

Entsprechende Quellmodenfelder können aus theoretischen Überlegungen heraus vorgegeben oder aus CFD-Simulationen gewonnen werden. Für letztere können die im Strömungsfeld enthaltenden Moden und deren komplexen Amplituden A_{mn} aus Schallpegel und Phasenlage durch eine Modalanalyse (siehe Abschnitt 3.5) aus den Simulationsdaten gewonnen werden. Dies ist analog auch für gemessene Schallfelder möglich, so dass neben CFD-Simulationen auch experimentell ermittelte Daten in die Schallausbreitungssimulation einfließen können.

3.5 Modalanalyse

Das Schallfeld in Rohrumgebungen wie Einläufen und Nebenstromkanälen von Triebwerken kann durch eine Superposition von Eigenformen, sogenannten Moden, beschrieben werden. Diese Moden sind von Kanalgeometrie, Strömungszustand und Frequenz bestimmt. Eine Zerlegung des Schallfeldes in azimutale und radiale Moden ermöglicht oft ein besseres Verständnis der Entstehungsprozesse und des Ausbreitungsverhaltens des Schalls, was wiederum die Grundlage der Entwicklung von Lärminderungsstrategien bildet.

Die modale Zerlegung erfolgt meist durch eine Anpassung gemessener oder berechneter Daten an die bekannte analytische Lösung der konvektiven Wellengleichung (2.25) in Rohren und Ringkanälen. Sie ist in ihrer Anwendung nicht auf reine Schallfelder beschränkt, sondern kann auch für Strömungsfelder, die durch CFD-Simulationen gewonnen werden, benutzt werden. Dabei findet quasi eine Separation von hydromechanischen und akustischen Anteilen des Strömungsfeldes statt, bei der die akustischen Komponenten identifiziert und extrahiert werden.

Das Resultat der Zerlegung ist ein Modenfeld, das durch die komplexen Amplituden A_{mn}^{\pm} der einzelnen Moden (m, n) mit positiver bzw. negativer axialer Ausbreitungsrichtung bei der jeweils untersuchten Frequenz ω bestimmt wird. Abbildung 3.8 zeigt beispielhaft die Amplitudenverteilung eines Modenfeldes aus einer Schallausbreitungssimulation in einem Nebenstromkanal mit Einbauten.

Wie in Abschnitt 3.4.3 beschrieben, eignet sich ein solches Modenfeld auch zur Vorgabe einer Quellrandbedingung an das CAA-Verfahren. Dadurch ist es möglich, neben der ebenfalls vorgestellten direkten Quellvorgabe aus CFD-Daten, auch gemessene Schallfelder als Quelle für das CAA-Verfahren einzusetzen.

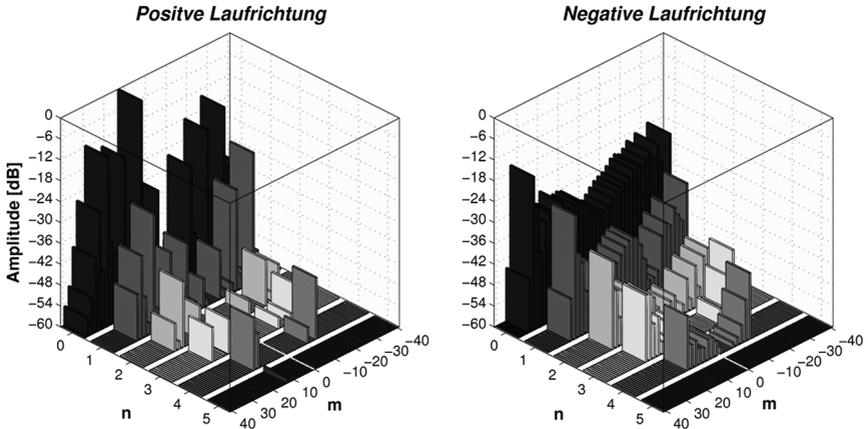


Abbildung 3.8: Modenfeld in einem Nebenstromkanal mit Einbauten

Für die Analyse experimentell bestimmter Schallfelder wurden verschiedene Verfahren entwickelt, etwa von Holste und Neise [45] oder Enghardt et al. [29, 30]. Dabei sind diese Verfahren darauf ausgelegt, Störungen des Schallfeldes durch die Messsonden zu vermeiden. Sie eignen sich aber auch für die modale Zerlegung von Simulationsdaten, da alle messbaren Größen auch aus der Simulation bekannt bzw. berechenbar sind.

Speziell zur Implementierung einer Schnittstelle zwischen CFD- und CAA-Verfahren für die Simulation der Schallausbreitung ist von Ovenden und Rinestra [67] das sogenannte „Triple-Plane-Mode-Matching“ entwickelt worden, das in dieser Arbeit Anwendung findet. Die Methode eignet sich dabei sowohl zur Extraktion der akustischen Anteile aus berechneten Strömungsfeldern für die CAA-Quellenbeschreibung als auch zur Analyse des durch die CAA-Simulation berechneten ausgebreiteten Schallfeldes.

Für die Methode wird die radiale Verteilung von Amplitude und Phasenlage der Strömungsgrößen als komplexes

$$\underline{\tilde{q}}_m(x, r) = (\tilde{q}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_r, \tilde{u}_\vartheta, \tilde{p}, \tilde{T})_m^T(x, r)$$

auf drei axialen Querschnittsflächen $x = x_1, x_2, x_3$ für eine feste Frequenz ω und eine azimutale Modenordnung m benötigt. Daraus können mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Amplituden A_{mn}^\pm für die verschiedenen Moden in positiver und negativer Laufrichtung so bestimmt werden, dass eine energetische Übereinstimmung mit der analytischen Lösung erzielt wird.

Die benötigte komplexe radiale Verteilung der Strömungsgrößen $\underline{\tilde{q}}_m(x, r)$ kann für jede zu untersuchende Frequenz ω und azimutale Modenordnung m durch eine zeitliche, gefolgt von einer azimutalen Fourier-Reihenentwicklung in Form von

$$\underline{\tilde{q}}_m(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \underline{q}(x, r, \vartheta, t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{-im\vartheta} d\vartheta \quad (m > 0) \quad (3.53)$$

bestimmt werden. Die Verteilung für die Moden mit negativer Drehrichtung ist durch die konjugiert komplexe Verteilung der entsprechenden Mode mit positivem Drehsinn als $\underline{\tilde{q}}_{-m} = \overline{\underline{\tilde{q}}_m}$ gegeben.

Bei der Modalanalyse von CFD-Daten ist das instationäre Strömungsfeld

$$\underline{q}(x, r, \vartheta, t) = (\varrho, u_x, u_r, u_\vartheta, p, T)^T(x, r, \vartheta, t)$$

direkt aus der Simulation bekannt, während es für die Analyse eines mit dem CAA-Verfahren berechneten Schallfeldes zuerst aus den instationären Schwankungsgrößen und der stationären Grundströmung entsprechend

$$\begin{aligned} \underline{q}(x, r, \vartheta, t) = & (\varrho', u'_x, u'_r, u'_\vartheta, p', 0)^T(x, r, \vartheta, t) \\ & + (\bar{\varrho}, \bar{u}_x, \bar{u}_r, \bar{u}_\vartheta, \bar{p}, \bar{T})^T(x, r, \vartheta) \end{aligned}$$

zusammengesetzt werden muss.

Im CAA-Löser ist eine speicherplatzsparende Schnittstelle zur Modalanalyse implementiert, wobei an zuvor definierten axialen Positionen die benötigten Zeitreihen der Schwankungsgrößen sowie die dort vorherrschende Grundströmung herausgeschrieben wird. Diese Daten werden im Postprocessing fouriertransformiert und zur Verwendung in der Modalanalyse weiter aufbereitet.

3.6 Fernfeldvorhersage

Zur Vorhersage des Schalls an entfernten Beobachterpositionen ist das in den Abschnitten 3.1 bis 3.4 vorgestellte CAA-Verfahren nicht oder nur sehr begrenzt geeignet. Für eine entsprechende Berechnung müsste die Lösung in einem Rechengebiet bestimmt werden, das den gesamten Raum zwischen Quelle und Beobachter umfasst. Bei großen Entfernungen der Beobachter von der Quelle sind dazu enorme Computerkapazitäten erforderlich.

Die Beurteilung der Schallemission im Fernfeld erfolgt meist anhand von Richtcharakteristiken, zu deren Erstellung nur eine sehr begrenzte Anzahl von oft weit entfernten Beobachterpositionen benötigt wird. Dafür bietet sich wie in Kapitel 2.5 beschrieben der Einsatz von akustischen Analogien an. Deren Lösung erfolgt über Integralverfahren, wobei der Berechnungsaufwand für eine Beobachterposition

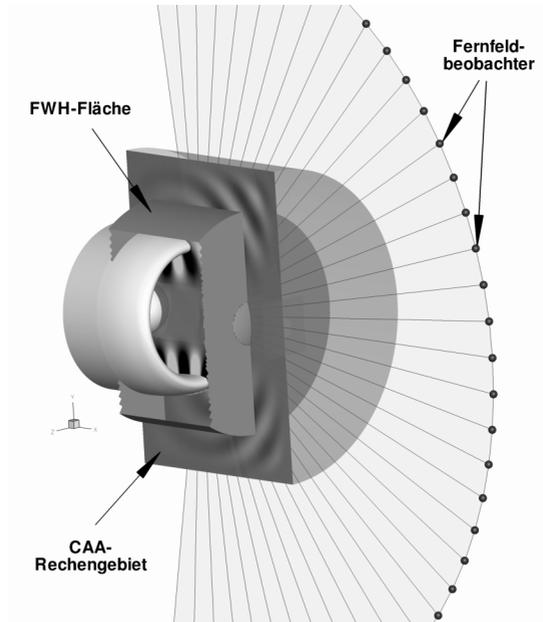


Abbildung 3.9: Lage von CAA-Rechengebiet, FWH-Fläche und Fernfeldbeobachtern für einen Triebwerkseinlauf

unabhängig von deren Abstand zur Quelle ist. Die Berechnung der Integrale ist zwar relativ aufwändig, dies wird durch die geringe Beobachteranzahl mehr als kompensiert, was den numerischen Aufwand im Vergleich zum CAA-Verfahren sehr deutlich reduziert.

In dieser Arbeit erfolgt die Fernfeldvorhersage basierend auf der akustischen Analogie von Ffowcs Williams & Hawkings für durchlässige Oberflächen aus Kapitel 2.5. Zur Berechnung ihrer Lösung müssen die Integrale in (2.41) zur retardierten Zeit ausgewertet werden. Dazu wird der institutsintern entwickelte FWH-Löser `c3noise` [31] verwendet. In diesem sind ein Retardierter-Zeit- und ein Quellzeit-Dominanter-Algorithmus, wie sie von Brentner [20] vorgeschlagen wurden, implementiert. Die für beide Algorithmen notwendigen zeitlichen Interpolationen und Ableitungen erfolgen über Schemata zweiter Ordnung.

Zur theoriekonformen Anwendung der FWH-Methode muss das gesamte Strömungsfeld aus Grundströmung und akustischen Fluktuationen auf einer geschlossenen Oberfläche (FWH-Fläche) um das Quellgebiet herum bekannt sein. Die Strömung im Fernfeld wird als gleichförmig angenommen, was etwa für eine Reiseflugkonfiguration adäquat ist.

Die Lage der FWH-Fläche innerhalb des CAA-Rechengebiets sowie die Positionen der Fernfeldbeobachter für die Simulation der Schallausbreitung durch einen Triebwerkseinlauf wird in Abbildung 3.9 veranschaulicht.

Die FWH-Fläche dient als Schnittstelle zur CAA-Simulation, aus der die entsprechenden Quelldaten stammen. Die Fläche kann unstrukturiert sein, sich also aus Dreiecks- und Viereckselementen zusammensetzen. Sie wird geeignet aus Knoten des CAA-Gitters definiert, an denen in einem einstellbaren Zeitintervall der CAA-Simulation die benötigten Zeitreihen der Fluktuationen herausgeschrieben werden. Sowohl Beobachter als auch FWH-Flächen können bewegt sein, wobei die FWH-Fläche als starr vorausgesetzt wird. Die unabhängig voneinander spezifizierbaren Geschwindigkeiten von FWH-Fläche und Beobachter erlauben die Berechnung von Richtcharakteristiken für verschiedene Anwendungsszenarien, wie etwa Prüfstandskonfigurationen, Flugkonfigurationen mit mitbewegten Beobachtern oder Überflugkonfigurationen mit festen Beobachtern.

Werden nur Teilaspekte der Schallabstrahlung von Triebwerken untersucht, beispielsweise nur die Emission durch den Triebwerkseinlauf bzw. den Nebenstromkanal, lässt sich die Forderung nach einer geschlossenen FWH-Fläche um das Quellgebiet herum oft nicht erfüllen. Ob eine nicht geschlossene Oberfläche hinreichend und geeignet für die Fernfeldvorhersage mittels FWH ist, kann wie in [87] gezeigt, leicht anhand eines Vergleichs von FWH- und CAA-Lösung an Referenzpunkten des CAA-Gebiets geprüft werden.

4 Overset-Gitter-Methode

Die effiziente Generierung von Rechengittern für komplexe Geometrien ist eine der wesentlichen Herausforderungen für den Einsatz von CAA-Verfahren höherer Ordnung in anwendungsnahen Konfigurationen. In diesem Kapitel werden daher zunächst die auftretenden Probleme bei der Generierung „klassischer“ Rechengitter für CAA-Verfahren beschrieben und diskutiert. Anschließend wird mit der Overset-Gitter-Methode eine aus der CFD bekannte Gittereinbettungstechnik für den Einsatz in CFD-Verfahren adaptiert, die einerseits solche Probleme vermeiden hilft und andererseits ganz allgemein die Gittergenerierung für komplexe Konfigurationen vereinfacht und effizienter gestaltet.

4.1 Probleme blockstrukturierter CAA-Gitter

In Kapitel 3.2 wurde dargestellt, dass der Einsatz von finiten Differenzenverfahren höherer Ordnung, wie dem hier eingesetzten CAA-Verfahren, besondere Anforderungen an das einzusetzende Rechengitter stellt. So sind qualitativ hochwertige Netze erforderlich, die starke Verzerrungen der Gitterzellen, sehr starke Größenvariationen dieser, sowie sprunghafte Änderungen in der Krümmung der Gitterlinien möglichst vermeiden. Ein nach diesen Anforderungen optimales Gitter wäre lokal orthogonal und äquidistant.

Für technisch relevante Anwendungsfälle mit komplexerer Geometrie ist die Generierung eines solchen für CAA-Verfahren geeigneten Rechengitters mit einigen Schwierigkeiten verbunden die im folgenden näher erläutert werden.

Komplexe Gittertopologie Der klassische, gut geeignete Ansatz zur Erzeugung qualitativ hochwertiger Rechenetze für komplexe Geometrien ist eine Gitterzerlegung. Das gesamte Rechengebiet wird dazu, wie in Abschnitt 3.2.2 detailliert beschrieben, in Teilgebiete, sogenannte Blöcke, zerlegt, die separat vernetzt werden. Durch eine geeignete Aufteilung in Blöcke passenden Typs können so starke Verzerrungen der Zellen vermieden werden. Dies wird durch eine komplexe Topologie erkauft, wie sie in Abbildung 4.1 für die Vernetzung eines Zylinders in einem rechteckigen Rechengebiet gezeigt ist. Schon für diese einfache Konfiguration sind zwölf Blöcke notwendig, um eine hinreichend gute Gitterqualität zu erreichen.

Übertragen auf technisch relevante Anwendungsfälle, führt dies leicht zu Gittertopologien mit mehreren Hundert Blöcken, wodurch sich die Gittergenerierung sehr anspruchsvoll und aufwändig gestaltet. Da sich eine strukturierte Vernetzung

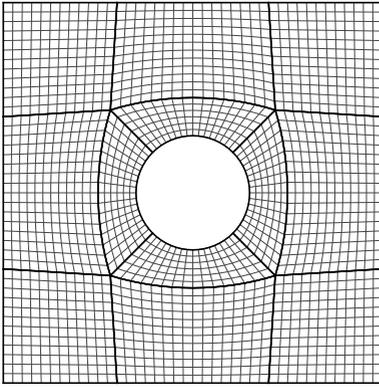


Abbildung 4.1: Klassische blockstrukturierte Vernetzung eines Zylinders

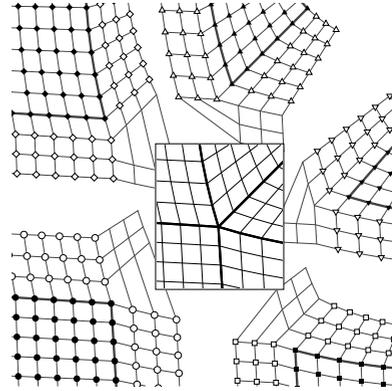


Abbildung 4.2: Blockschnittstelle mit fünf Gitterblöcken

kaum automatisieren lässt, ist ein hoher Einsatz an Arbeitszeit für die Generierung notwendig.

Ein weiterer Nachteil komplexer Gittertopologien kann bei der Parallelisierung der Simulation entstehen. Zur Parallelisierung ist zwar auch eine Zerlegung des Rechengebiets notwendig, die sich aber an einer optimalen Lastverteilung orientieren sollte. Eine nicht gleichmäßige Verteilung von Gitterknoten auf die einzelnen Prozessoren führt zu Wartezeiten auf den weniger belasteten Prozessoren, so dass der Parallelrechner nicht optimal ausgelastet ist und die Effizienz der Berechnung sinkt. Im Allgemeinen decken sich die Anforderungen an eine Zerlegung, die durch die Geometrie bedingt ist, nicht mit denen, die eine optimale Parallelisierung ermöglichen, wobei jede nicht von der Parallelisierung motivierte Zerlegung Leistungsverluste mit sich bringen kann. Der notwendige Datenaustausch an den Blockgrenzen macht eine Überlappung der Blöcke notwendig. Verglichen mit einem CFD-Verfahren von typischerweise zweiter Ordnung, wo von jeder Seite der Blockgrenze nur eine Gitterebene ausgetauscht werden muss, ist für das hier eingesetzte DRP-Verfahren mit sieben Punkten schon ein sechs Punkte breiter Austauschbereich notwendig. Jeder Datenaustausch führt aber zu einem Mehraufwand, der sich insbesondere bei Parallelrechnungen, wo dieser über ein Kommunikationsnetzwerk begrenzter Leistungsfähigkeit abgewickelt werden muss, negativ auf die Rechengeschwindigkeit des Verfahrens auswirkt.

Neben diesen Nachteilen komplexer Gittertopologien kann an Blockschnittstellen an denen mehr als zwei von Blöcke aufeinander treffen, wie in Abbildung 4.2 für fünf Blöcke gezeigt, ein weiteres Problem auftreten, welches im Folgenden näher erläutert wird.

Inkonsistenzen Wie in Kapitel 3.2.2 dargestellt wurde, ist im Überlappungsbereich eine eindeutige Abbildung zwischen den Knoten im Kernbereich eines Blocks und den Randknoten des Nachbarblocks notwendig. Überlappen sich mehr als zwei Blöcke, sind einige Gitterknoten auch in mehr als zwei Blöcken vertreten. Um die Konsistenz der auf diesen Knoten basierenden Approximation von räumlichen Ableitungen sicherzustellen, sollten in einem Block benachbarte Knoten auch in einem anderen Block benachbart sein. An Schnittstellen mit ungerader Blockanzahl kann dies nicht immer gewährleistet werden.

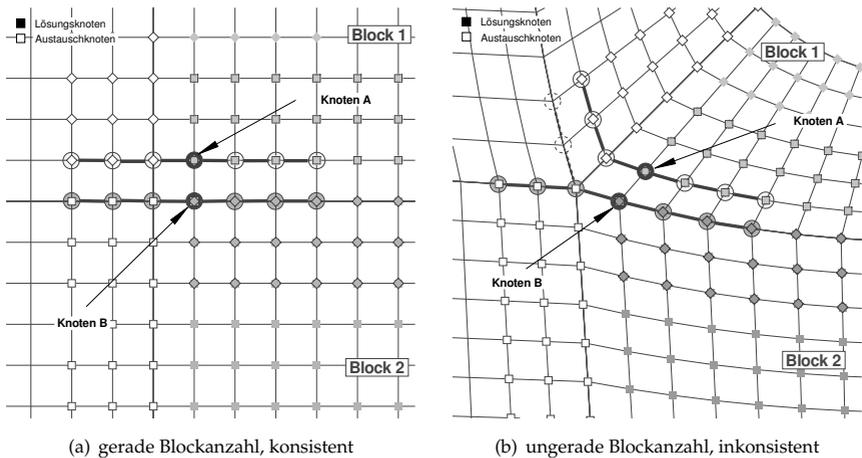


Abbildung 4.3: Differenzensterne in ζ -Richtung an benachbarten Knoten A und B bei unterschiedlichen Blocktopologien

Abbildung 4.3(a) zeigt, dass im konsistenten Fall für die Approximation der Ableitungen zweier benachbarter Knoten A und B auch die Knoten der Differenzensterne benachbart sind. Im inkonsistenten Fall aus Abbildung 4.3(b) ist dies nicht immer möglich. Eine Approximation am Knoten B, die der am Knoten A ähnlich wäre, müsste statt der durchgezogenen die gestrichelt dargestellten Knoten im Differenzestern enthalten. Wird dies realisiert, verschiebt sich das Problem jedoch nur zu einem anderen Knoten im Überlappungsgebiet.

Treten an solchen Stellen starke Gradienten einer Feldgröße auf, können wegen der Inkonsistenz der Ableitungsapproximation Störungen in der Lösung entstehen, die sich im Rechengebiet ausbreiten. Durch den hyperbolischen Charakter der Differenzialgleichungen verstärken diese sich mit der Zeit, wodurch das Verfahren sehr schnell instabil wird. Sind die dort auftretenden Gradienten klein, bleibt das

Verfahren in den meisten Fällen zwar stabil, die Lösung wird in diesem Bereich aber leicht verfälscht.

Ein klassischer Ansatz zur Unterdrückung entstehender Störungen ist deren lokale Dämpfung. Diese stellt sich für den Schall aber wie ein örtlich begrenzter Medienwechsel dar. Dadurch kommt es zu Beugungseffekten, die die Lösung maßgeblich verfälschen können. Auf solche Ansätze sollte daher verzichtet werden. Auch eine stärkere Filterung unterdrückt die durch die Inkonsistenz entstehenden Störungen. Allerdings wird dadurch die Dissipativität des numerischen Verfahrens erhöht, was zu einem stärkeren Amplitudenverlust in der Gesamtlösung führt.

4.2 Gittereinbettung

Wie im vorigen Abschnitt dargelegt, kann der Einsatz einer aus der CFD adaptierten Gitterzerlegung bedingt durch die hohe Ordnung der CAA-Verfahren zu Problemen führen. Weiterhin ist die strukturierte Vernetzung von komplexen Konfigurationen im Allgemeinen sowohl im CFD- als auch im CAA-Bereich sehr aufwändig. Neben der Gitterzerlegung sind mit der Gitteradaption und der Gittereinbettung noch weitere Techniken zur Vernetzung solcher Konfigurationen aus der CFD bekannt.

Die *Gitteradaption*, bei der das Rechengitter entsprechend der auftretenden Gradienten in der Lösung automatisch lokal in seiner Auflösung angepasst wird, eignet sich besonders für unstrukturiert arbeitende Lösungsverfahren. Da das in dieser Arbeit verwendete CAA-Verfahren strukturiert arbeitet, wird dieser Ansatz hier nicht weiter betrachtet.

Die Entwicklung von Techniken zur *Gittereinbettung* für Strömungssimulationen, die auch Overset-Gitter-Methoden genannt werden, begann in den frühen 1980er Jahren [9, 43, 100]. Von Benek et al. [14] wurde später ein generalisiertes, flexibles 2D-Verfahren zum Einsatz in verschiedenen strömungsmechanischen Anwendungen vorgestellt. Dessen Grundidee besteht in der separaten Vernetzung einzelner Komponenten einer komplexen Konfiguration mit in Topologie und Auflösung geeigneten Gittern, die dann über ein die gesamte Konfiguration umfassendes Wirtsgitter gesetzt werden. Dabei ist auch eine unterschiedliche Modellierung (Navier-Stokes, Euler, etc.) mit entsprechender numerischer Behandlung in den einzelnen Gittern möglich. Der zum Erhalt einer zusammenhängenden Lösung notwendige Datenaustausch zwischen Komponenten- und Wirtsgitter erfolgt über eine Interpolation der Feldgrößen zwischen den Gittern im Randbereich der Einbettungen. Auf Benek et al. [14] geht auch die oft anzutreffende Bezeichnung als Chimera-Methode zurück. Sie wurde in Anlehnung an das Fabelwesen „Chimäre“ aus der griechischen Mythologie gewählt, welches aus unpassenden Teilen verschiedener Tiere zusammengesetzt ist. Ausgehend vom zunächst zweidimensionalen Ansatz erfolgten später umfangreiche Erweiterungen und Verbesserungen für dreidimensionale Konfigurationen [15], bewegte Komponenten oder auch CFD-Verfahren höherer Ordnung [54, 61, 91].

Adaption der Chimera-Technik für die CAA Die Chimera-Technik eignet sich nicht nur zur Vereinfachung der Gittergenerierung und Reduktion des Ressourcenbedarfs in der CFD, sie lässt sich auch für die CAA adaptieren. Allerdings werden andere Anforderungen an die Implementierung gestellt.

So lassen sich mit dem Overset-Gitter-Ansatz, beispielsweise die in Abschnitt 4.1 erläuterten Schwierigkeiten der Gitterzerlegung bei CAA-Verfahren vermeiden. Die Vernetzung eines Zylinders kann mittels der Chimera-Technik deutlich einfacher erfolgen, so dass statt der komplexen Gittertopologie aus Abbildung 4.1 die deutlich einfachere Topologie aus Abbildung 4.4 möglich wird. Diese besteht nur noch aus einem kartesischen Wirtgitter (Host-Gitter) und einem eingebetteten Overset-Gitter vom O-Typ um den Zylinder. Die Forderung von lokaler Orthogonalität und Verzerrungsarmut werden bei dieser Form der Vernetzung optimal erfüllt. Weiterhin eignet sich die Methode auch, um eine Gitterzerlegung mit einer Änderung der Gitterschrittweite an der Schnittstelle zu realisieren, wie sie Abbildung 4.5 zeigt. Anders als bei den in der CFD üblichen „hängenden“ Knoten auf einer Blockschnittstelle, erfordert eine solche Schrittweitenänderung beim CAA-Verfahren eine Interpolation im Überlappungsbereich der Blöcke. Da ein solches Interpolationsverfahren dem bei der Gittereinbettung ähnlich wäre, erübrigt sich durch die Nutzung der Chimera-Technik dessen zusätzliche Implementierung.

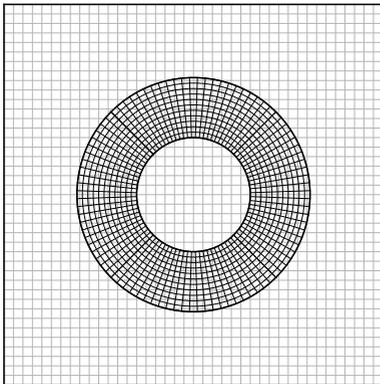


Abbildung 4.4: Gitternetz um einen Zylinder mittels Chimera-Technik

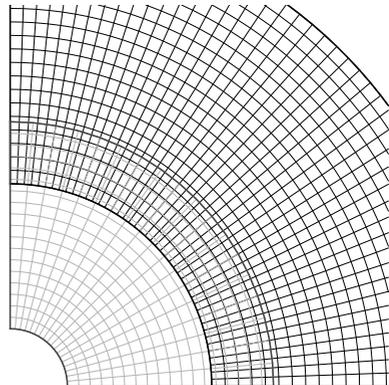


Abbildung 4.5: Änderung der Gitterschrittweite mittels Chimera-Technik

Verglichen mit den Einbettungstechniken für CFD-Verfahren werden an eine Chimera-Technik für CAA höhere Anforderungen in Bezug auf das zu verwendende Interpolationsverfahren und die Bestimmung der auszutauschenden Gitterknoten gestellt. Geeignete Ansätze dazu sind etwa bei Delfs [25] und Tam et. al [99] dargestellt. Die Einsetzbarkeit des Ansatzes mit dem Ziel vereinfachter Gittergenerierung

und erhöhter Gitterqualität ist z.B. für die Simulation von Hinterkantenlärm eines Tragflügels von Yin und Delfs [109] in 2D oder bei einer Triebwerkslärm-Tragflügel-Interaktion von Redonnet et al. [74] in 3D gezeigt worden.

Die im Folgenden dargestellten Verfahren zum Auffinden der zwischen den Gittern zu interpolierenden Knoten sowie für eine Interpolation höherer Ordnung sind so gestaltet, um mit statisch in ein Host-Gitter eingebetteten Overset-Gittern qualitativ hochwertige Rechenetze zu ermöglichen. Diese sollen sich einfach erzeugen lassen und dabei den numerischen Mehraufwand im CAA-Lösungsverfahren möglichst klein halten. Auf einen prinzipiell möglichen Einsatz für bewegte Gitter, wie z.B. bei Tam und Hu [99] gezeigt, wird daher verzichtet.

4.3 Interpolation

Da im Allgemeinen die Gitterpunkte im Host-Gitter und in den Overset-Gittern nicht deckungsgleich sind, ist zur Realisierung des Datenaustauschs zwischen den Gittern eine Interpolation der Felddaten von einem Quell- zum jeweiligen Zielgitter notwendig. Um dadurch keine Genauigkeitsverluste in der numerischen Simulation hervorzurufen, ist es wichtig, die durch die Interpolation entstehenden Fehler möglichst klein zu halten. Für Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung bedeutet dies, dass die Interpolation mindestens die gleiche Ordnung wie die eingesetzte Diskretisierung aufweisen sollte.

Genauere Untersuchung zur Eignung von Interpolationsverfahren für Verfahren höherer Ordnung sind u.a. von Sherer und Scott [90] sowie Tam und Hu [99] durchgeführt worden, wobei letztere sich insbesondere auf Schallausbreitungssimulationen mittels DRP konzentrierten. Mit einem der Herleitung des optimierten DRP-Schemas ähnlichen Ansatz entwickelten Tam und Hu [99] dabei ein für die Schallausbreitung optimiertes Interpolationsverfahren. Bei dessen Validierung wurde aber u.a. festgestellt, dass eine Lagrange-Polynom-Interpolation vierter Ordnung nahezu die gleiche Qualität wie die optimierte Interpolation gleicher Ordnung aufweist. Da eine Lagrange-Interpolation weniger aufwändig zu implementieren ist, findet sie in dieser Arbeit Anwendung.

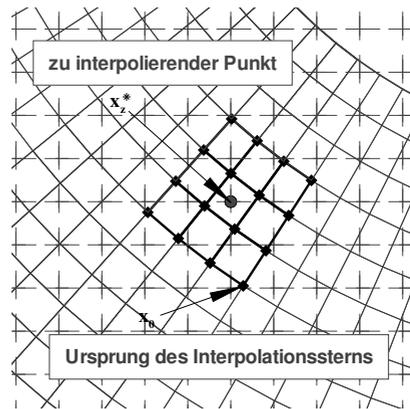


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung eines Interpolationssterns

Wird das Quellgitter mit einer kontinuierlichen Koordinatenfunktion

$$\underline{x} = \underline{x}(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.1)$$

parametrisiert, lassen sich die Koordinaten eines Gitterpunktes in diesem Gitter als

$$\underline{x}_{i,j,k} = \underline{x}(\xi = i, \eta = j, \zeta = k) \quad (4.2)$$

schreiben, wobei die Parameter ξ , η und ζ ganzzahlig sind und die Indizes des Punktes im Rechengitter repräsentieren. Ein zu interpolierender Punkt des Zielgitters \underline{x}_z^* hat dann im Quellgitter die Koordinaten

$$\underline{x}_z^* = \underline{x}(\xi_z, \eta_z, \zeta_z), \quad (4.3)$$

wobei die Parameter ξ_z , η_z und ζ_z im Allgemeinen nicht mehr ganzzahlig sondern reell sind.

Die Angabe einer globalen Funktion $\underline{x}(\xi, \eta, \zeta)$ für die (4.2) im ganzen Rechengebiet gilt, ist mit einem Polynomansatz nicht sinnvoll möglich, da der Polynomverlauf mit steigendem Polynomgrad zwischen den vorgegebenen Stützstellen zu starken Überschwingungen neigt. Durch die Verwendung eines lokalen Polynomansatzes mit beschränktem Grad kann dies vermieden werden, wobei ein in jede Raumrichtung N Punkte umfassender Teilbereich des Gitters, ausgehend von einem Ursprungspunkt $\underline{x}_0 = \underline{x}_{i_0, j_0, k_0}$ für die Parametrisierung in (4.1) verwendet wird. Der Ursprungspunkt \underline{x}_0 wird dabei so gewählt, dass der Zielpunkt \underline{x}^* innerhalb dieses als Interpolationsstern bezeichneten Gitterteilbereichs liegt. Abbildung 4.6 veranschaulicht dies im Zweidimensionalen für $N = 4$.

Der Parametrisierungsansatz (4.1) lässt sich für einen solchen Interpolationsstern als

$$\underline{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{x}_{i_0+i, j_0+j, k_0+k} C_{ijk}(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.4)$$

schreiben. Die als Interpolationskoeffizienten bezeichneten C_{ijk} geben dabei die Gewichtung der Anteile der einzelnen Knotenpunkte an. Für eine Lagrange-Interpolation sind diese als

$$C_{ijk}(\xi, \eta, \zeta) = L_i(\xi) L_j(\eta) L_k(\zeta) \quad (4.5)$$

definiert, wobei $L_n(x)$ die Lagrange-Polynome

$$L_n(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{N-1} \frac{x - i}{n - i} \quad (4.6)$$

vom Grad N bezeichnet.

Für einen Punkt des Zielgitters \underline{x}_z^* ist durch Einsetzen des Parametrisierungsansatzes (4.1) in (4.3) die Bestimmungsgleichung

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{x}_{i_0+i, j_0+j, k_0+k} C_{ijk}(\xi_z, \eta_z, \zeta_z) - \underline{x}_z^* = 0 \quad (4.7)$$

für die Parameter ξ_z , η_z und ζ_z gegeben.

Die Lösung von (4.7) erfolgt iterativ mit der Steffensen-Methode [66], einem effizienten Sekantenverfahren für nichtlineare Gleichungen mehrerer Variablen. Da bei Sekanten- und Tangentenverfahren nicht klar ist, welche Nullstelle von einem gegebenen Startpunkt des Iterationszyklus gefunden wird, können auch Nullstellen außerhalb des lokalen Parametrisierungsansatzes mit

$$\begin{aligned} 0 < \xi < N - 1, \\ 0 < \eta < N - 1 \quad \text{und} \\ 0 < \zeta < N - 1 \end{aligned}$$

gefunden werden, die eine Extrapolation statt der gewünschten Interpolation zur Folge hätten. Tritt dies ein, wird durch eine Variation des Startpunktes versucht, einen interpolierenden Parametersatz zu finden. Beim Zusammentreffen von Host- und Overset-Gittern an einem gekrümmten Rand des globalen Rechengebiets ist dies nicht immer möglich, so dass dort eine Extrapolation vorgenommen werden muss. Ist außerhalb des Randbereichs nur ein extrapolierender Parametersatz zu finden, wurde der Interpolationsstern falsch gewählt. Durch eine Verschiebung des Ursprungspunktes x_0 des Sterns lässt sich dies aber korrigieren, wobei aus dem gefundenen extrapolierenden Parametersatz Richtung und Größe der notwendigen Verschiebung ablesbar sind.

Zur Parametrisierung einer Feldgröße ϕ wird der gleiche Ansatz wie für die Koordinaten in (4.4) verwendet und es ergibt sich entsprechend

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{i_0+i, j_0+j, k_0+k} C_{ijk}(\xi, \eta, \zeta). \quad (4.8)$$

Die interpolierte Feldgröße ϕ_z^* am Zielpunkt \underline{x}_z^* berechnet sich aus den Feldgrößen im Quellgitter und den Interpolationskoeffizienten aus (4.7) als

$$\phi_z^* = \phi(\xi_z, \eta_z, \zeta_z) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{i_0+i, j_0+j, k_0+k} C_{ijk}(\xi_z, \eta_z, \zeta_z). \quad (4.9)$$

4.4 Austauschtopologie

Zur Realisierung des Datenaustauschs zwischen Host- und Overset-Gittern mittels Interpolation muss die Austauschtopologie bestimmt werden. Dazu gehört zunächst die Identifikation der zu interpolierenden Knoten und der dazugehörigen Interpolationssterne. Weiterhin entstehen im Host-Gitter durch die Überdeckung des Overset-Gitters Bereiche, die nicht gelöst werden sollen. Um diese im CAA-Löser speziell behandeln zu können, ist auch deren Erfassung notwendig.

4.4.1 Punkt-Such-Algorithmus

Die Basis für die Identifikation von zu interpolierenden Knoten und ihrem entsprechenden Interpolationsstern bildet hier ein Punkt-Such-Algorithmus. Dessen Aufgabe ist es, in einem Gitter die Lage eines beliebigen Punktes zu bestimmen, also die Zelle zu finden, in welcher der Punkt liegt. Da praxisorientierte 3D-Konfigurationen meist mehrere Millionen Gitterpunkte haben, so dass beim Einsatz der Chimera-Technik leicht mehrere Hunderttausend Punkt-Suchen erfolgen müssen, sollte ein entsprechender Suchalgorithmus sehr effizient arbeiten.

Im Prinzip ist das Auffinden eines Punktes in einem Gitter gleichbedeutend mit einem Abstandsvergleich des gesuchten Punktes mit jedem Gitterpunkt. Ein besonders effizienter Algorithmus für solche Abstandsvergleiche in einem strukturierem Rechengitter ist der R-Tree-Algorithmus von Guttman [39]. Eine verbesserte Form dieses Algorithmus stellt der R*-Algorithmus von Beckmann et al. [13] dar, vom dem eine Implementierung in Form der quelloffenen Programmbibliothek `SpatialIndex` von Hadjieleftheriou [40] vorliegt, welche sich leicht in eigenen Programmcode einbinden lässt und daher in dieser Arbeit Anwendung findet.

Der R*-Tree-Algorithmus basiert auf der Speicherung des die jeweilige Gitterzelle begrenzenden Quaders (engl. *bounding box*) zusammen mit einer Kennung in einer Baumstruktur. Die Bounding-Boxen werden aus den kartesischen Koordinatenflächen an den jeweiligen minimalen und maximalen Koordinaten aller Zelleckpunkte aufgespannt. Als Kennzeichnung wird der Ursprungs Eckpunkt mit den kleinsten in der Zelle vorkommenden Indizes verwendet. Diese Speicherung in einer Baumstruktur ermöglicht sehr effiziente Abstandsvergleiche und damit ein sehr schnelles Auffinden gesuchter Punkte.

Da die Gitterzellen im Allgemeinen unregelmäßig geformt sind und die Lage ihrer Seitenflächen nicht mit den kartesischen Koordinatenflächen übereinstimmt, kann ein gesuchter Punkt in mehr als einer der Bounding-Boxen des Gitters zu finden sein. So liegt der gesuchte Punkt in Abbildung 4.7 in der Gitterzelle A und somit auch in deren Bounding-Box, zusätzlich ist er aber auch in der Bounding-Box der Nachbarzelle B zu finden. Durch die R-Tree basierte Suche werden also sehr effizient alle Gitterzellen gefunden, innerhalb derer Bounding-Boxen ein gesuchter Punkt

liegt. Die Suche identifiziert aber nicht eindeutig eine den Punkt umschließende Gitterzelle sondern beschränkt eine genauere Lageüberprüfung auf nur sehr wenige Gitterzellen.

Für die Überprüfung, ob ein Punkt y tatsächlich innerhalb einer Gitterzelle liegt, gibt es verschiedene Ansätze. Einfache Verfahren wie die Abstandsberechnung des Punktes zu den Seitenflächen versagen manchmal, da die Seitenflächen nicht zwangsläufig eben sein müssen. Beim Test verschiedener Methoden hat sich das Raumwinkelintegral als sehr zuverlässig und robust herauskristallisiert. Es beschreibt das Verhältnis der von y aus auf eine Kugel um y projizierten Zelloberfläche zur Oberfläche dieser Kugel. Der Raumwinkel berechnet sich als

$$\Omega = \oint_A \frac{(\underline{x} - \underline{y}) \cdot d\underline{A}}{|\underline{x} - \underline{y}|^3}, \quad (4.10)$$

wobei A die Oberfläche der Zelle und \underline{x} die Ortsvektoren der Zelloberfläche bezeichnen. Liegt der Punkt y innerhalb der geschlossenen Oberfläche der Zelle, umfasst die Projektion die vollständige Kugel. Für Punkte außerhalb der Zelle kompensieren sich alle Anteile. Es gilt also:

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{wenn } \underline{y} \text{ innerhalb der Zelle bzw.} \\ 0, & \text{wenn } \underline{y} \text{ außerhalb der Zelle liegt.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Bei der numerischen Berechnung des Raumwinkelintegrals werden diese analytischen Werte oft nicht erreicht, insbesondere wenn der gesuchte Punkt sehr nah an einer Seitenfläche bzw. einem Eckpunkt der Zelle liegt. Untersuchungen auch mit stark verzerrten Gitterzellen haben gezeigt, dass $\Omega > 3\pi$ ein hinreichendes Kriterium dafür ist, dass ein Punkt y innerhalb der Gitterzelle liegt.

Für die Berechnung des Raumwinkels eines Dreiecksoberelementes haben van Oosterom und Strackee [104] einen effizienten Algorithmus vorgestellt:

$$\Omega_{123} = 2 \arctan \frac{r_1 \cdot (r_2 \times r_3)}{r_1 r_2 r_3 + r_1 (r_2 \cdot r_3) + r_2 (r_1 \cdot r_3) + r_3 (r_1 \cdot r_2)}. \quad (4.12)$$

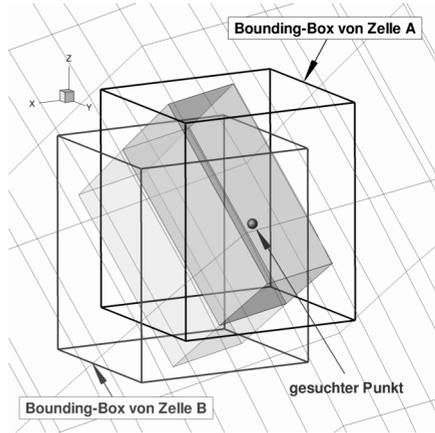


Abbildung 4.7: Bounding-Boxen für Gitterzellen in einem strukturierten Netz

Wie in Abbildung 4.8 dargestellt, bezeichnen in Gleichung (4.12)

$$\underline{r}_i = \underline{x}_i - \underline{y}$$

die Vektoren vom gesuchten Punkt y zu den Eckpunkten \underline{x}_i des Dreiecks und die

$$r_i = |\underline{r}_i|$$

deren Länge.

Die Oberfläche jeder Hexaederzelle des Gitters lässt sich mittels Triangulation in zwölf Dreiecke zerlegen, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Normalenvektoren der einzelnen Dreiecksoberelemente aus der Gitterzelle herauszeigen. Die Raumwinkel der einzelnen Dreiecksoberelemente können mittels (4.12) berechnet werden und bilden dann in ihrer Summe den Raumwinkel der gesamten Gitterzelle.

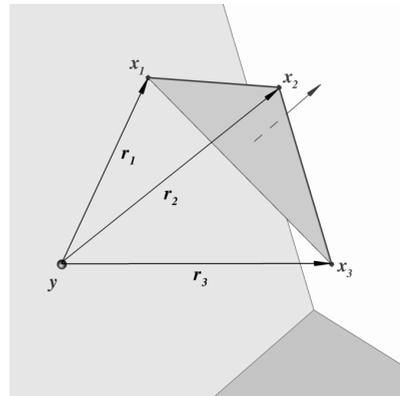


Abbildung 4.8: Raumwinkelberechnung für ein Dreieckselement

Die Kombination von R*-Tree-Suche und der beschriebenen Detailprüfung bildet einen effizienten Punkt-Such-Algorithmus für eine auf statisch eingebettete Overset-Gitter ausgelegte Chimera-Technik.

Durch die Bestimmung der Bounding-Boxen und deren Einsortierung in die Baumstruktur entsteht verglichen mit anderen Suchstrategien zunächst ein Mehraufwand, der sich aber mit zunehmender Anzahl von benötigten Punktsuchen amortisiert. Für eine Chimera-Technik, die bewegte Overset-Gitter ermöglicht, eignet sich dieser Suchalgorithmus potentiell weniger, weil bei dieser in jedem Zeitschritt ein neuer Suchbaum der bewegten Overset-Gitter erzeugt werden müsste, was starke Leistungsverluste im CAA-Löser bedingen kann.

Auch für eine Interpolation des mittleren Strömungsfeldes von einem strukturiertem CFD-Gitter auf das CAA-Gitter eignen sich die hier vorgestellten Verfahren, da der Suchalgorithmus durch die große Anzahl von Punktsuchen bei der Interpolation ganzer Gitter erst seine volle Leistungsfähigkeit entfalten kann. Die bereits für die Chimera-Technik implementierten Routinen für Punktsuche und Interpolation können zu diesem Zweck unverändert wiederverwendet werden.

4.4.2 Identifikation von Zielknoten und Interpolationssternen

Die zweite Hauptaufgabe der Chimera-Technik ist neben der eigentlichen Interpolation die Identifikation von zu interpolierenden Knoten und den dazugehörigen

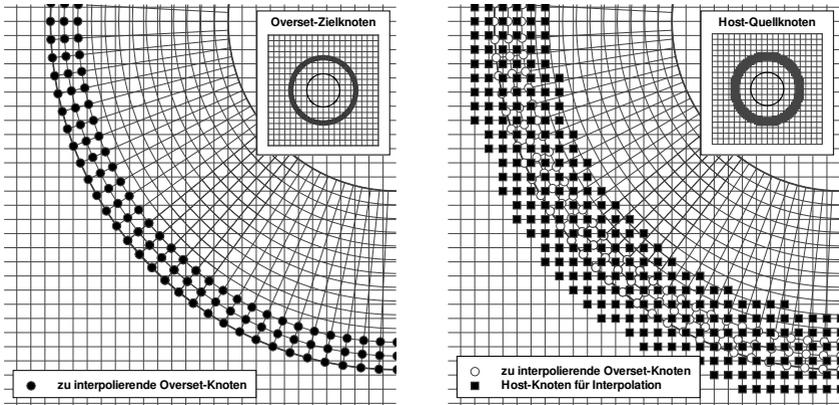
Interpolationssternen. Dies schließt auch das Auffinden der Bereiche des Host-Gitters ein, die durch die Overset-Gitter überblendet werden. Diese als „Löcher“ bezeichneten Bereiche liefern keinen sinnvollen Beitrag zur Gesamtlösung und sollten daher im CAA-Lösungsalgorithmus speziell behandelt werden.

Dabei ist es von Bedeutung ob die Chimera-Technik nur für statische oder auch für bewegte Overset-Gitter eingesetzt werden soll. Bewegte Gitter erfordern besonders effektive Identifikationsstrategien, da diese in jedem Zeitschritt des CAA-Verfahrens angewendet werden müssen. Sie können dann aber beispielsweise ausgehend von einer initialen Identifikation und Informationen über das Bewegungsverhalten der Overset-Gitter Verfolgungsansätze zur schnellen Suche implementieren. Für statische Gitterkonfigurationen, wie sie in dieser Arbeit untersucht werden, ist die Effizienz nicht von so entscheidender Bedeutung, da die Zielknoten- und Interpolationsstern-Identifikation nur einmal im Vorfeld oder zu Beginn des Rechenprozesses durchgeführt werden muss. Unabhängig davon muss das Identifikationsverfahren aber robust und zuverlässig arbeiten. Dies ist insbesondere für 3D-Verfahren Voraussetzung, weil nicht oder fehlerhaft berücksichtigte Austausch-knoten dort nicht mehr so leicht wie in 2D-Gittern identifiziert werden können.

Im folgenden wird ein einfacher Algorithmus beschrieben, der Knoten über Markierungen gewisse Eigenschaften zuweist, mit denen über Nachbarschaftsrelationen die gesuchten Knoten bestimmt werden können. Die Identifikation in den Host- und Overset-Gittern ist dabei unterschiedlich komplex.

Zielknoten in den Overset-Gittern Die Ränder der Overset-Gitter können einerseits Wände repräsentieren oder mit einem Rand des Gesamtrechengebiets zusammenfallen. In diesem Fall werden dort die entsprechenden Wand- bzw. reflexionsarmen Randbedingungen aus Kapitel 3.4 formuliert. Alle anderen Ränder bilden andererseits eine Schnittstelle zum Host-Gitter. Dort werden für eine Diskretisierungssterngröße von sieben Punkten drei Schichten von Knoten als Overset-Zielknoten markiert, die aus dem Host-Gitter zu interpolieren sind. Dies ist in Abbildung 4.9(a) veranschaulicht. Das Markieren verhindert, dass Knoten, die zu mehreren Randbereichen gehören, in der folgenden Interpolationssternsuche mehrfach berücksichtigt werden.

Zur Bestimmung der Interpolationssterne für diese Zielpunkte wird mit der in Abschnitt 4.4.1 vorgestellten Punktssuche die Gitterzelle im Host-Gitter identifiziert in welcher der gesuchte Punkt liegt. In Abhängigkeit der Größe des Interpolationssterns wird durch eine Indexverschiebung dessen Ursprung festgelegt. Die Verschiebung wird dabei so gewählt, dass der zu interpolierende Punkt möglichst zentral im Interpolationsstern liegt. Die Knoten des Interpolationssterns werden dann, wie in Abbildung 4.9(b) dargestellt, als Host-Quellknoten markiert. Der so markierte Bereich umschließt den vom Overset-Gitter überdeckten Teil des Host-Gitters vollständig.



(a) Zielknoten im Overset-Gitter

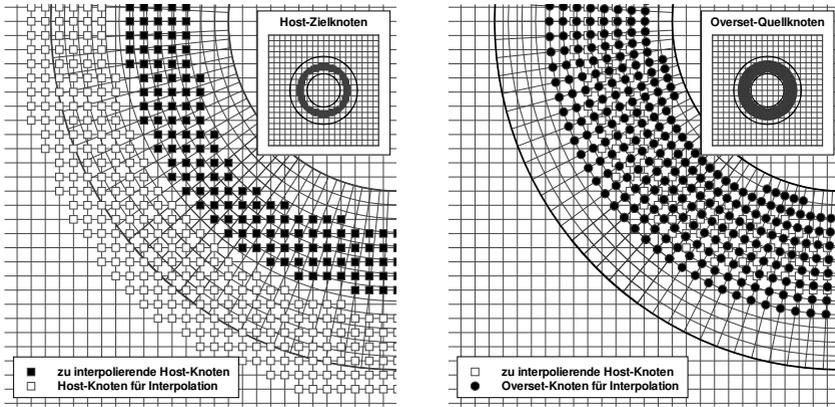
(b) Quellknoten in Host-Gitter

Abbildung 4.9: Zielpunkt- und Interpolationssternsuche in den Overset-Gittern

Die identifizierten Overset-Zielknoten werden zusammen mit den Ursprungspunkten ihrer Interpolationssterne in einer Liste gespeichert, um im Anschluss an den Identifikationsprozess die entsprechenden Interpolationskoeffizienten berechnen zu können.

Zielknoten in Host-Gittern Während die Overset-Zielknoten immer im Randbereich der Overset-Gitter liegen, befinden sich die Host-Zielknoten mitten im Host-Gitter und folgen im Allgemeinen nicht der Indexstruktur des Rechengebiets. Die Host-Zielknoten lassen sich aber als, innerhalb des vom Overset-Gitter überdeckten Bereichs liegende, Nachbarknoten der schon markierten Host-Quellknoten identifizieren. Daher werden zuerst alle Knoten des Host-Gitters als überdeckt markiert, die innerhalb einer Zelle des Overset-Gitters liegen. Zielknoten sind dann diejenigen Knoten, die als überdeckt markiert sind und in einer beliebigen Indexrichtung in einem bestimmten Abstand einen Quellknoten als Nachbarn haben, was in Abbildung 4.10(a) veranschaulicht ist. Der Abstandsbereich ist durch die Größe des Differenzsterns bzw. Filtersterns bestimmt, so ist dieser Bereich etwa beim Einsatz eines Elf-Punkte-Filters ein bis fünf Punkte breit.

Die Interpolationssterne für die Host-Zielpunkte werden analog der Vorgehensweise bei den Overset-Zielpunkten im Overset-Gitter gesucht und markiert, wie Abbildung 4.10(b) zeigt. Die gefundenen Zielpunkt-Ursprungs-Paare werden entsprechend in der Interpolationsknoten-Liste gespeichert.



(a) Zielknoten im Host-Gitter

(b) Quellknoten im Overset-Gitter

Abbildung 4.10: Zielpunkt- und Interpolationssternsuche im Host-Gitter

Wie in Abbildung 4.11 verdeutlicht, kann es vorkommen, dass im Overset-Gitter Quellknoten gleichzeitig auch Zielknoten sind. Dies bedeutet, dass für die Interpolation von Knoten im Host-Gitter Knoten verwendet werden, die selbst schon durch Interpolation aus dem Host-Gitter berechnet wurden, wodurch die Genauigkeit der Interpolation gemindert wird.

Meist tritt dies dann ein, wenn das Host-Gitter feiner aufgelöst ist als das Overset-Gitter. Zur Vermeidung dieses unerwünschten Effekts wird daher zunächst ein Abstandsbereich in Nachbarschaft zu den Host-Quellpunkten markiert und im Anschluss daran wie oben beschrieben die Host-Zielpunkte.

Durch den zusätzlichen Abstand werden die Host-Zielpunkte und damit auch die Overset-Quellpunkte weiter in den von Overset-Gitter überdeckten Bereich hinein verschoben. Die Größe der Lücke ist von den Gitterauflösungen bestimmt und kann entsprechend festgelegt werden.

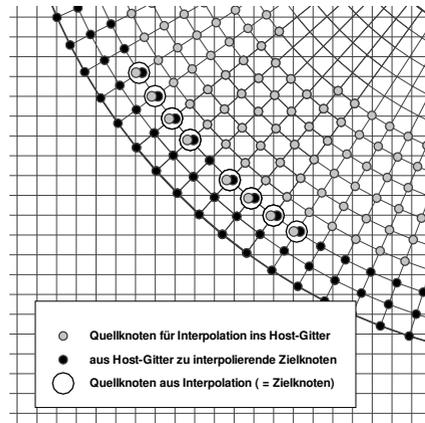


Abbildung 4.11: Überlagerung von Quell- und Zielpunkten im Overset-Gitter

Löcher im Host-Gitter Durch das Überschreiben der Host-Zielpunkte mit interpolierten Lösungen aus dem Overset-Gitter werden die physikalischen Vorgänge, die im Overset-Bereich ablaufen mit denen im Host-Gitter gekoppelt. Dabei wird im Host-Gitter der von den Host-Zielpunkten umschlossene Bereich ausgeblendet. In diesem Bereich existiert dann keine sinnvolle Lösung, so dass im physikalischen Sinne ein virtuelles „Loch“ im Gitter entsteht.

Werden diese Löcher im CAA-Lösungsverfahren nicht speziell behandelt, dringen zwar keine Informationen aus ihnen heraus, es findet aber in umgekehrter Richtung kein Informationsfluss in diese Bereiche hinein statt. Dadurch können sich innerhalb der Löcher unphysikalische Störungen entwickeln, durch die dann das CAA-Verfahren instabil werden kann. Weiterhin können die Löcher große Teile des Host-Gitters ausmachen, so dass deren unnötige Lösung zu einer Verschwendung von Rechenzeit führt.

Die nicht zu lösenden Bereiche des Host-Gitters umfassen dabei, wie in Abbildung 4.12 dargestellt, sowohl die Host-Zielknoten als auch alle von ihnen eingeschlossenen Knoten.

Die Identifikation der eingeschlossenen Knoten erfolgt ähnlich der Identifikation der Host-Zielknoten. Über entsprechende Nachbarschaftsrelationen zu den Host-Zielknoten bzw. zu schon als nicht zu lösen identifizierten Knoten erfolgt eine Markierung dieser Bereiche. Um alle relevanten Knoten zu erfassen, muss diese Überprüfung in jeder Indexrichtung jeweils einmal vor- und rückwärts durchgeführt werden. So werden auch alle Knoten aufgefunden, die vom Overset-Gitter selbst nur umschlossen werden. Dabei handelt es sich z.B. um feste Körper im Rechengebiet, die nicht im als von Overset-Gitter als überdeckt markierten Bereich liegen. Die so identifizierten Knoten innerhalb der Löcher des Host-Gitters werden in einer separaten Liste gespeichert, um später an den CAA-Löser übergeben zu werden.

Sind mehrere Overset-Gitter in ein Host-Gitter eingebettet, werden nach der Suche für ein Overset-Gitter die jeweils aktuellen Markierungen gelöscht und mit dem nächsten Overset-Gitter ein neuer Durchlauf zur Zielknoten-Identifikation gestartet, wobei die Listen mit schon gefundenen Zielknoten und Knoten in den nicht zu lösenden Bereichen unangetastet bleiben.

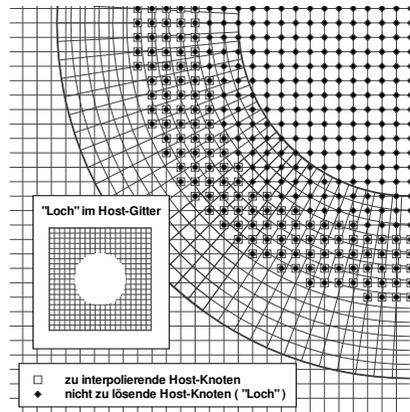


Abbildung 4.12: Veranschaulichung nicht zu lösender Bereiche im Host-Gitter

4.5 Voraussetzungen für den Einsatz

Bedingt durch die Austausch-Topologie und das Interpolationsverfahren höherer Ordnung ergeben sich für den Einsatz der Chimera-Technik einige Mindestanforderungen und Einschränkungen in Hinblick auf das Rechengitter.

Mindestgröße der Overset-Gitter Um die Interpolation höherer Ordnung zwischen den Gittern in beide Richtungen durchführen zu können, ist eine Mindestgröße des Overset-Gitters erforderlich. So muss an jedem Austauschrand normal zu diesen eine hinreichende Anzahl von Host-Knoten überdeckt werden. Diese Anzahl ist von der Größe der Differenzen- und Filtersterne im CAA-Verfahren und der Breite der Lücke zwischen Quell- und Zielknoten im Host-Gitter abhängig. Für einen Sieben-Punkte-Differenzenstern und einen Elf-Punkte-Filterstern sind so vom Overset-Gitter zehn Host-Knoten zu überdecken. Sind Host- und Overset-Gitter etwa gleich fein aufgelöst, entspricht dies der Mindestgröße des Overset-Gitters normal zum Austauschrand, wobei diese je nach Krümmungs- und Verzerrungsgrad beider Gitter zur Sicherheit etwas größer gewählt werden sollte.

Überlappung von Overset-Gittern Werden mehrere Overset-Gitter in das selbe Host-Gitter eingebettet, dürfen sich diese nur begrenzt gegenseitig überlappen. Eine Überlappung ist immer dann zulässig, wenn sich die Host-Zielknoten der verschiedenen Austausch-Topologien nicht überschneiden oder wenn Host-Zielknoten nur innerhalb eines, durch ein anderes Overset-Gitter bedingten Lochs liegen. Auch eine hierarchische Einbettung ist möglich. Liegt ein Overset-Gitter vollständig innerhalb eines anderen Overset-Gitters, kann dieses als Host-Gitter für ersteres fungieren. Es ist dann selbst wieder in das darunter liegende Host-Gitter eingebettet.

Diese Anforderungen und Einschränkungen machen deutlich, dass auch beim Einsatz der Chimera-Technik nicht beliebig komplexe Konfiguration mit einer geringen Gitterauflösung realisierbar sind. Sehr filigrane Komponenten oder eine sehr große Packungsdichte von Komponenten benötigen, aufgrund rein geometrischer Anforderungen, feinere Rechengitter als numerisch eigentlich notwendig wären, was zu höheren Rechenzeiten und größerem Speicherbedarf führt.

4.6 Implementierung im CAA-Verfahren

Die Prämisse bei der hier vorgestellten Erweiterung des CAA-Verfahrens um eine Chimera-Technik war die Ermöglichung der Simulation anwendungsnaher komplexer Konfigurationen. Dabei stand im Vordergrund, den Leistungsverlust des numerischen Verfahrens, der durch den Einsatz der Technik entsteht, möglichst klein

zu halten. Weiterhin soll die Implementierung optional zuschaltbar, transparent und mit minimalen Eingriff in das CAA-Verfahren selbst erfolgen. Die vorhandenen Funktionalitäten wie Mehrblockfähigkeit, Parallelisierung, etc. sollten unverändert erhalten bleiben.

Zur Minimierung des Leistungsverlusts erfolgt im CAA-Löser selbst ausschließlich die nur dort mögliche Berechnung der interpolierten Feldvariablen gemäß (4.9) als

$$\phi^* = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{i_0+i, j_0+j, k_0+k} C_{ijk}.$$

Das Auffinden der zu interpolierenden Knoten und der für die Interpolation notwendigen Ursprungsknoten (i_0, j_0, k_0) der Interpolationssterne sowie die Berechnung der Interpolationskoeffizienten C_{ijk} wird in das Preprocessing ausgelagert. Die Effizienz der auf diese Art vorgelagerten Such- und Berechnungsalgorithmen spielt daher nur eine untergeordnete Rolle, da sie nur einmal ausgeführt werden müssen und die Leistung des CAA-Lösers nicht beeinflussen.

Während des Preprocessing werden wie in Abschnitt 4.4 beschrieben Listen der Zielknoten (Index und Blocknummer), der dazugehörigen Ursprungsknoten (Index und Blocknummer) sowie der Interpolationskoeffizienten erzeugt. Diese werden dann im Initialisierungsprozess der CAA-Rechnung eingelesen.

Um die Mehrblockfähigkeit und Parallelisierbarkeit zu erhalten, erfolgt die Identifikation der Interpolationssterne dabei so, dass zur Interpolation immer nur Knoten eines Blocks verwendet werden. Die Berechnung der interpolierten Feldgrößen kann dann ausschließlich im Prozess des Quellblocks erfolgen, von dem aus das Interpolationsergebnis an den Zielblock gesendet wird. Dort wird nur noch die angestrebte Stelle im Lösungsfeld mit dem interpolierten Wert überschrieben. Dieser Vorgang stellt eine modifizierte Form des normalen Blockrandaustausches dar und kann optional nach diesem zugeschaltet werden. Für den eigentlichen Lösungsprozess ändert sich dadurch im Vergleich zu einer Rechnung ohne Chimera-Technik nichts, so dass im eigentlichen Löser auch keine Änderungen notwendig sind. Es findet ebenfalls keine Unterscheidung zwischen Host- und Overset-Gitter mehr statt.

Zum Ausschluss der Löcher von der Lösung bieten sich verschiedene Ansätze an. Eine häufig durchzuführende Fallunterscheidung führt bei modernen Prozessoren zu deutlichen Leistungsverlusten. Das explizite zu null setzen der Lösung in diesen Bereichen in jedem Zeitschritt ist auch mit einem Mehraufwand verbunden. Daher wird eine andere Strategie gewählt. Bei der Flussberechnung im Löser erfolgt eine Multiplikation mit den Metrikoeffizienten, die für jeden Knoten individuell gespeichert sind. Werden diese an nicht zu lösenden Knoten zu null gesetzt, bleibt die Lösung dort auch unverändert. Wird wie im CAA-Löser die Multiplikation an den Beginn der Berechnung gesetzt, brechen moderne Prozessoren den Rechenprozess ab, da sich dessen Ergebnis nicht mehr ändern kann. Dadurch bleibt nicht nur die

Lösung an diesen Knoten unverändert, sondern es erfolgt auch ein impliziter Ausschluss dieser von der Berechnung. Durch diesen Ansatz wird auch nur minimal in den Lösungscode eingegriffen, da nur während der Initialisierung Metrikkoeffizienten der im Preprocessing als nicht zu lösen identifizierten Knoten modifiziert werden müssen.

Fazit Mit der hier vorgestellten Chimera-Technik steht somit ein effizientes Verfahren zur Behandlung komplexer Konfigurationen mit dem CAA-Verfahren höherer Ordnung zur Verfügung, wobei diese den Kern des Lösungsalgorithmus nicht beeinflusst und den durch die Interpolation bedingten numerischen Mehraufwand minimiert.

5 Validierung des Simulationsverfahrens

Das in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellte hybride CAA-FWH-Verfahren zur Simulation der Schallausbreitung in komplexen anwendungsnahen Konfigurationen soll in diesem Kapitel in seiner Gültigkeit überprüft, seine Genauigkeit untersucht und seine Grenzen aufgezeigt werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem CAA-Teil des Verfahrens.

Zunächst erfolgt in Abschnitt 5.1 eine detaillierte Untersuchung des 3D-CAA-Verfahrens in Rohrumgebungen, da diese Art der Konfiguration bei der Vorhersage von Triebwerkslärm dominierend ist und das Verfahren vorwiegend in diesem Anwendungsbereich eingesetzt werden soll. Dabei wird zum Vergleich auf die bekannte analytische Lösung für einen Ringkanal aus Kapitel 2.4 zurückgegriffen.

Der Einsatz der Overset-Gitter-Technik aus Kapitel 4 im CAA-Verfahren wird anschließend in Abschnitt 5.2 untersucht. Eine Analyse der Auswirkungen der Technik in Hinblick auf die Genauigkeit und die Leistung des CAA-Verfahrens steht dabei im Vordergrund, wobei als Testumgebung ein Ringkanal in entsprechend modifizierter Form Verwendung findet.

Die Qualität des gesamten hybriden Verfahrens als Kombination von CAA-Verfahren mit Overset-Gitter-Technik und der FWH-Fernfeldintegration wird in Abschnitt 5.3 eruiert. Dazu wird die Schallausbreitung durch einen Triebwerkeinlauf ins Fernfeld simuliert und das Ergebnis mit experimentellen Daten verglichen.

5.1 CAA-Verfahren

Die in den Kapiteln 3.1 und 3.4 vorgestellten Diskretisierungsschemata und Randbedingungen bilden die Kernkomponenten des CAA-Verfahrens. Aussagen zur Genauigkeit bzw. Wirksamkeit der jeweiligen Techniken wurden dabei auf theoretischer Basis getroffen und meist anhand einfacher akademischer Testfälle überprüft. Für die Herleitung der Verfahren wurden aber meist sinnvolle oder plausible vereinfachende Annahmen getroffen. Diese lassen sich aber für komplexere Anwendungen nicht immer hinreichend gut erfüllen. Außerdem beschränken sich die Tests oft nur auf den entwickelten Teilaspekt selbst. Um die Qualität eines Simulationsverfahrens tatsächlich beurteilen zu können, ist daher eine Validierung unter Anwendungs- oder zumindest anwendungsnahen Bedingungen beim Zusammenwirken aller Verfahrenskomponenten notwendig.

In Hinblick auf den angestrebten Einsatz als Vorhersagewerkzeug für tonalen Triebwerkslärm bieten sich zur Validierung Rohre mit Kreis- und Ringquerschnitt an. Für

diese sind analytische Lösungen bekannt, so dass eine von anderen Effekten freie Bewertung des Verfahrens erfolgen kann. Rohrumgebungen eignen sich weiterhin gut für Evaluierung der Verfahrensgrenzen, da sie besondere Anforderungen an das eingesetzte Verfahren stellen. So ist insbesondere die Implementierung reflexionsfreier Randbedingungen anders als der bei Schallausbreitung im offenen Raum, wo z.B. die Abstrahlrandbedingung aus Kapitel 3.4.2 sehr wirkungsvoll arbeitet, sehr anspruchsvoll.

Als Testkonfiguration dient ein gerader Ringkanal, wie er in Abbildung 5.1 dargestellt ist. Dieser hat bei einem Außendurchmesser von $d_a = 1D$ und einem Durchmesser des Zentralkörpers von $d_i = 0.6D$ eine Länge von $L = 2D$. Die Gitterschrittweiten der Basiskonfiguration betragen in axialer und radialer Richtung $\Delta x = \Delta r = 0.01D$ bei 92 Punkten in Umfangsrichtung. Am Einströmrand $x = 0$ wer-

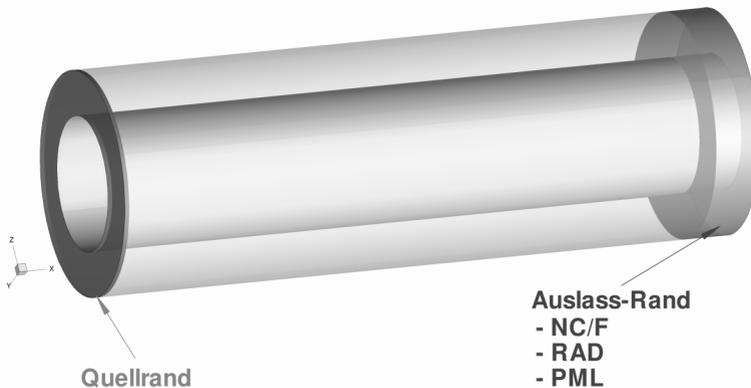


Abbildung 5.1: Validierungskonfiguration — Ringkanal mit verschiedenen Randbedingungen

den Einzelmoden, deren Modenordnung und Frequenz je nach Untersuchungsziel variieren über die NC/F-Quellrandbedingung aus Kapitel 3.4.3 als Quelle vorgegeben. Zum Abschluss des Rechengebiets am Ausströmrand $x = L$ finden die drei in Kapitel 3.4.2 vorgestellten reflexionsarmen Randbedingungen Anwendung. Für die Kanalwände am Außen- und Innenradius r_a bzw. r_i wird die Wandrandbedingung aus Kapitel 3.4.1 verwendet.

Die Evaluierung des Einflusses von Randbedingungen (Abschnitt 5.1.2) und der Gitterauflösung (Abschnitt 5.1.3) auf die Lösungsqualität erfolgt ohne Grundströmung. Für die Untersuchung des Strömungseinflusses (Abschnitt 5.1.4) wird analytisch eine gleichförmige Grundströmung verwendet, die nur eine axiale Geschwindigkeitskomponente \bar{u}_x besitzt.

5.1.1 Bewertungskriterien für die Lösungsqualität

Die Bewertung des Gesamtverfahrens erfolgt anhand der für die Schallausbreitung wesentlichen Kriterien Dissipativität, Erhaltung der Dispersionsbeziehung und Reflexionsarmut der Randbedingungen an freien Gebietsgrenzen. Die zur Quantifizierung dieser Kriterien eingesetzten Größen und Methoden werden im folgenden näher erläutert.

Dissipativität Die Schallausbreitung erfolgt gemäß der akustischen Theorie reibungsfrei, daher wurden die eingesetzten Diskretisierungsschemata u.a. auf geringe Dissipativität hin optimiert. Durch numerische Fehler, die beispielsweise von der Auflösung und Verzerrung der Gitter abhängen, und die aus Stabilitätsgründen eingesetzte Filterung tritt aber numerische Dissipation auf. Als Maß dafür kann für einzelne Kanalmoden der auftretende *Amplitudenverlust*

$$\Delta L_p = L_{p,\text{aus}} - L_{p,\text{ein}} \quad (5.1)$$

als Differenz der Schalldruckpegel L_p zwischen Ein- und Austritt des Kanals herangezogen werden. Die entsprechenden Pegel werden mit Hilfe des Modalanalyseverfahrens aus Kapitel 3.5 für die in positiver axialer Richtung laufenden Moden als

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{|A_{mn}^+|}{10^{-5} \text{ Pa}} \quad (5.2)$$

bestimmt. Um Einflüsse auszuschließen, die durch die Implementierung der Randbedingungen hervorgerufen werden können, erfolgt die Modalanalyse nicht direkt am Ein- und Auslass des Kanals, sondern bei ca. $x_1 = 1/8 L$ und $x_2 = 7/8 L$.

Die Amplitude einer Kanalmode bleibt aber nur unverändert, wenn im Kanal keine Quellen oder Senken vorhanden sind und keine Energie, verursacht durch Einbauten oder Querschnittsänderungen, in andere Moden übergeht. In Hinblick auf die spätere Anwendung, etwa im Nebenstromkanal mit Einbauten, bietet sich daher entsprechend [75] die Betrachtung des gesamten akustischen Energieflusses, repräsentiert über die akustische Leistung

$$P_a(x) = \int_{A(x)} \underline{I}_a \cdot d\underline{A} \quad (5.3)$$

auf Kanalquerschnitten an verschiedenen axialen Positionen x an. Dazu wird die akustische Intensität \underline{I}_a entsprechend der Definition von Morfey [63]

$$\underline{I}_a = (p' + \bar{q} \underline{\bar{u}} \cdot \underline{u}'_a) \left(\underline{u}'_a + \frac{p'}{\rho \bar{c}} \underline{\bar{u}} \right) \quad (5.4)$$

während der Simulation berechnet und über eine Periodenlänge gemittelt. Im Anschluss an die Simulation wird die so berechnete Intensität über ausgewählten

Querschnittsflächen aufintegriert, um den mittleren akustischen Energiefluss zu bestimmen.

Die Dissipativität in einem Kanal ohne Quellen und Absorber lässt sich damit als relativer *Schalleistungsverlust*

$$\frac{\Delta P_a}{P_{a,\text{ein}}} = \frac{P_{a,\text{aus}} - P_{a,\text{ein}}}{P_{a,\text{ein}}} \quad (5.5)$$

quantifizieren, wobei die Einschränkung auf einzelne Moden entfällt, so dass u.a. auch die oben erwähnte Modenstreuung berücksichtigt werden kann.

Zur besseren Vergleichbarkeit verschiedener Moden wird sowohl der Amplitudenverlust ΔL_p als auch der relative Schalleistungsverlust $\Delta P_a / P_{a,\text{ein}}$ auf die axiale Wellenlänge $\lambda_x = 2\pi / k_x$ der entsprechenden Mode bezogen.

Phasenfehler Ein weiteres Bewertungskriterium für die Qualität von akustischen Simulationsverfahren ist der Phasenfehler. Er repräsentiert, wie gut die Dispersionsbeziehung $\underline{k}(\omega)$ numerisch wiedergegeben wird. Dies ist gerade für die dispersive Schallausbreitung in Rohrumgebungen von besonderer Bedeutung, wo bedingt durch die Randbedingungen an den Rohrwänden die Wellenzahl k und damit die Wellenform stark nichtlinear von der Frequenz ω abhängt. Vor allem bei der Simulation ganzer Modenfelder führen Fehler in der Phasenlage zu einer fehlerhaften Überlagerung der einzelnen Moden und so zu einem unphysikalischen Gesamtschallfeld.

Der Phasenfehler wird analog zum Amplitudenfehler über das Modalanalyseverfahren aus Kapitel 3.5 bestimmt. Dazu wird die Differenz der Phasen der in positiver axialer Richtung laufenden Moden zwischen zwei Querschnitten bei $x_1 = 1/8 L$ und $x_2 = 7/8 L$ bestimmt:

$$\Delta\varphi_{\text{num}} = \arg\left(A_{mn,2}^+\right) - \arg\left(A_{mn,1}^+\right). \quad (5.6)$$

Aus dieser Differenz und der Phasendifferenz der analytischen Lösung zwischen den Querschnitten

$$\Delta\varphi_{\text{ana}} = \arg\left(e^{-ik_{mn}^+x_2} - e^{-ik_{mn}^+x_1}\right) \quad (5.7)$$

ergibt sich der *Phasenfehler* als

$$\Delta\varphi = |\Delta\varphi_{\text{num}} - \Delta\varphi_{\text{ana}}|. \quad (5.8)$$

Auch beim Phasenfehler ist es zur besseren Vergleichbarkeit verschiedener Moden sinnvoll, diesen auf die axiale Wellenlänge λ_x der jeweiligen Mode zu beziehen.

Reflexionen An Rändern des Rechengebiets, wo dieses nicht durch Wände abgeschlossen wird, sind Randbedingungen notwendig, die den Schall ungehindert passieren lassen. Wird dies nicht bzw. nur unvollständig ermöglicht, treten unphysikalische Reflexionen auf. Durch diese numerisch bedingten Reflexionen kommt es zu Interferenzen in der Lösung, die diese verfälschen. Die Lösungsqualität der Simulation ist daher auch von der Reflexionsarmut dieser Randbedingungen bestimmt. Als Maß dafür wird das Verhältnis zwischen reflektierter und transmittierter Druckamplitude

$$R = \frac{\hat{p}_{\text{refl}}}{\hat{p}_{\text{trans}}} = \frac{|A_{mn}^-|}{|A_{mn}^+|} \quad (5.9)$$

an einem Querschnitt bei $7/8$ der Kanallänge verwendet. Die Amplituden werden dabei mit dem Modalanalyseverfahren aus Kapitel 3.5 für die Moden mit positiver und negativer axialer Laufrichtung als \hat{p}_{trans} bzw. \hat{p}_{refl} bestimmt.

5.1.2 Randbedingungen

Wie eingangs schon angedeutet, ist eines der Kernprobleme von CAA-Verfahren auf Basis von finiten Differenzenverfahren höherer Ordnung die Formulierung von wirksamen reflexionsarmen Randbedingungen in Kanalumgebungen. Dies ist schon früh von Tam [94] beschrieben worden und konnte auch bei Verwendung eines axialsymmetrischen Ansatzes [56, 84, 87] beobachtet werden. Wie in Kapitel 3.4.2 dargestellt, wurden daher von der Forschergemeinschaft eine ganze Reihe von reflexionsarmen Randbedingungen entwickelt, von denen einige im hier verwendeten CAA-Verfahren implementiert sind. Deren Wirksamkeit und Beschränkungen werden im Folgenden näher beschrieben.

Schon die qualitative Betrachtung der Simulationsergebnisse für verschiedene reflexionsarme Randbedingungen in Abbildung 5.2 zeigt deutliche Unterschiede in deren Wirksamkeit, wobei diese stark von der Modenform abhängig ist. Für ein größeres Cut-Off-Verhältnis $\xi = 1.93$ zeigen weder die Absorptionszone (NC/F), die Abstrahlrandbedingung (RAD) noch der Perfectly-Matched-Layer (PML) sichtbare Reflexionen (Abbildung 5.2 b,d,f). Bei einem Cut-Off-Verhältnis nahe der Ausbreitungsfähigkeitsgrenze von $\xi = 1.06$ sind aber deutliche Unterschiede zwischen den drei Randbedingungen erkennbar (Abbildung 5.2 a,c,e). Während mit der PML eine nur leicht gestörte Lösung entsteht, geben die Simulationen mit RAD- und NC/F-Randbedingung die Physik nicht einmal näherungsweise korrekt wieder.

Da eine qualitative Betrachtung auf eine starke Abhängigkeit des Reflexionsverhaltens der einzelnen Randbedingungen vom Cut-Off-Verhältnis hindeutet, wird die quantitative Untersuchung anhand von Einzelmoden bei verschiedenen Frequenzen durchgeführt, da die Frequenz maßgeblich das Cut-Off-Verhältnis ξ bestimmt. Weil ξ daneben auch vom Eigenwert der jeweiligen Mode abhängt, wird zusätzlich die Modenordnung variiert.

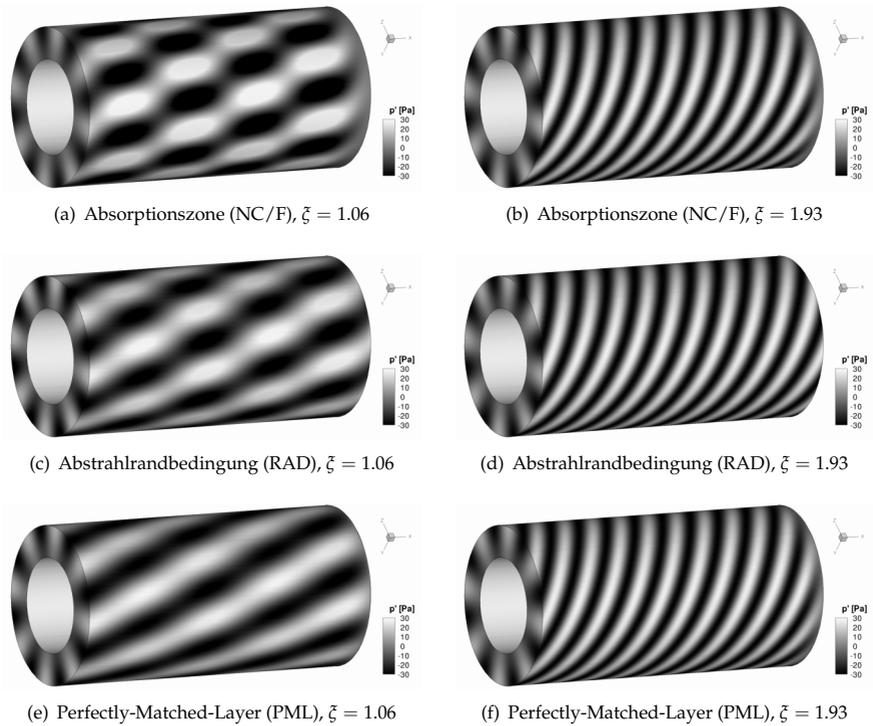


Abbildung 5.2: Momentaufnahmen des Schalldrucks aus der Simulation der Mode (8,0) für verschiedene reflexionsarme Randbedingungen bei unterschiedlichen Cut-Off-Verhältnissen

In Tabelle 5.1 sind die Frequenzen f mit den dazugehörigen Cut-Off-Verhältnissen ξ für die verwendeten Testfälle aufgeführt, wobei die Moden (4,0) und (8,0) zum Einsatz kommen.

Die aus den Simulationsergebnissen der einzelnen Testfälle nach der Definition aus Abschnitt 5.1.1 bestimmten Reflexionsfaktoren sind in Abbildung 5.3 dargestellt.

Als generelle Tendenz ist zu erkennen, dass die Reflexionen mit steigendem ξ rapide abnehmen. Der Abfall wird aber beim Unterschreiten einer Mindestauflösung N_x des Rechengitters für die entsprechende Mode und Frequenz gestoppt und kehrt sich schließlich um, was für die Mode (8,0) deutlich zu erkennen ist. Die deutlichsten Unterschiede zwischen den verschiedenen Randbedingungen treten für kleine ξ im Bereich zwischen eins und zwei hervor. Dort ist eindeutig die PML den anderen Randbedingungen überlegen. Selbst bei $\xi = 1.06$ beträgt mit der

Mode (4, 0)							
f [kHz]	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.25	1.50
ζ	1.12	1.30	1.49	1.67	1.86	2.32	2.79
f [kHz]	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50
ζ	3.25	3.72	4.65	5.58	6.51	7.44	8.37

Mode (8, 0)						
f [kHz]	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.75
ζ	1.06	1.16	1.26	1.35	1.45	1.69
f [kHz]	2.00	2.50	3.50	4.50	5.50	
ζ	1.93	2.41	3.38	4.35	5.31	

Tabelle 5.1: Frequenzen und dazugehörige Cut-Off-Verhältnisse der Testfälle

PML die Reflexion nur etwa 10%, was in der qualitativen Darstellung schon als Fehler wahrnehmbar ist. Mit Reflexionsraten von 30% bis 50% versagen die RAD- und NC/F-Randbedingungen hingegen deutlich. Für die Abstrahlrandbedingung (RAD) ist dies auch einsichtig, da die in Gleichung (3.37) angenommene Gruppengeschwindigkeit im Freifeld deutlich von der Gruppengeschwindigkeit einer gerade ausbreitungsfähigen Kanalmode abweicht. Bei der NC/F-Absorptionszone ist das Reflexionsverhalten nicht nur vom Cut-Off-Verhältnis bestimmt, sondern es ist auch von der Abstimmung zwischen Länge der Dämpfungszone bzw. der Größe des Dämpfungsfaktors und der Eigenform der Mode abhängig.

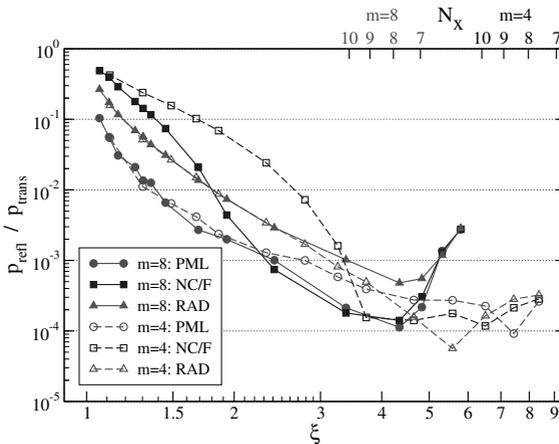


Abbildung 5.3: Reflexionsverhalten bei verschiedenen reflexionsarmen Randbedingungen

Für beide untersuchten Moden zeigt sich in Abbildung 5.3 ein deutlich unterschiedliches Verhalten im Bereich von $1.2 < \zeta < 4$, obwohl die gleichen Zonenparameter verwendet wurden. Durch die für geringe Reflexionen individuell notwendigen Anpassungen auch jenseits der kritischen Bereiche von ζ eignet sich die NC/F-Randbedingung nicht für Kanalumgebungen. Dies gilt insbesondere für die Simulation von Modenfeldern.

In den Abbildungen 5.4 und 5.5 ist das Dissipationsverhalten der verschiedenen Randbedingungen anhand des Schalleistungs- bzw. Schallpegelverlusts dargestellt. Die Verluststraten sind in Abhängigkeit der axialen Gitterauflösung N_x dargestellt, die auf der unteren Abszisse aufgetragen ist. Zusätzlich ist auf der oberen Abszisse jeweils das Cut-Off-Verhältnis angegeben, dass nichtlinear vom der Auflösung abhängt. Dadurch ist es besser möglich, gleichzeitig die Einflüsse von Gitterauflösung und Reflexionsverhalten auf die Lösung zu untersuchen.

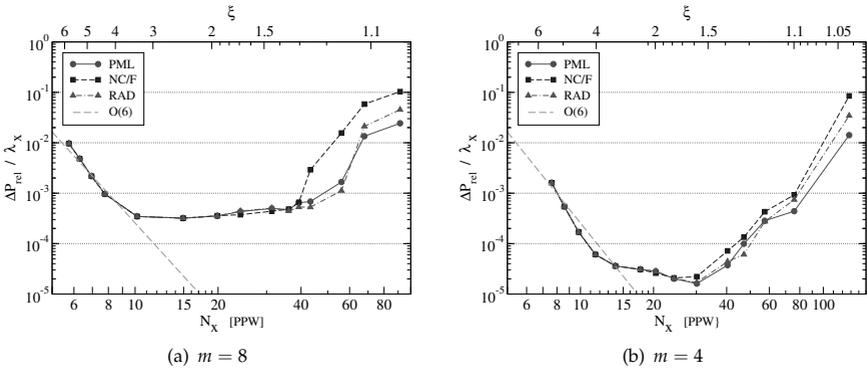


Abbildung 5.4: Leistungsverlust bei verschiedenen reflexionsarmen Randbedingungen

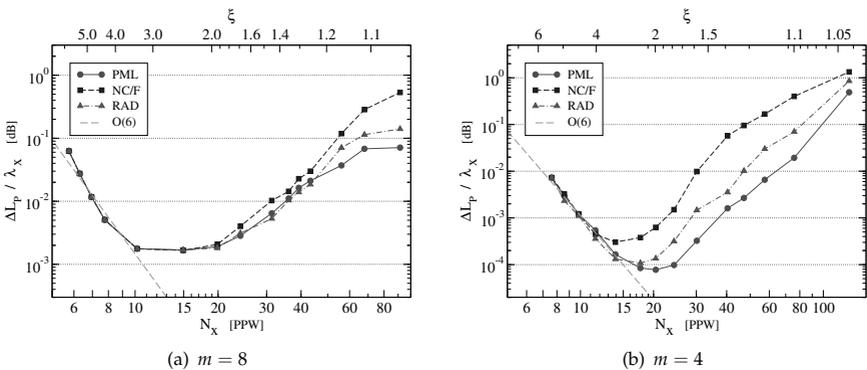


Abbildung 5.5: Schallpegelverlust bei verschiedenen reflexionsarmen Randbedingungen

Bei geringer Reflexion wird sowohl der Schallleistungsverlust ΔP als auch der Schallpegelverlust ΔL_p nur von der Gitterauflösung beeinflusst. Beide Fehler fallen mit steigendem N_x bevor sie in eine Art „Sättigungsbereich“ übergehen, in dem die Dissipation nahezu konstant bleibt. Der Abfall spiegelt die Fehlerordnung des CAA-Verfahrens in Hinblick auf die Dissipativität wieder. Die sehr geringe konstante Dissipation von unter 0.1% in der Schallleistung bzw. unter 0.01 dB pro Wellenlänge beim Schallpegel im „Sättigungsbereich“ deutet darauf hin, dass der Fehler dort nicht durch die Diskretisierungsschemata dominiert wird, sondern auf andere numerische Effekte zurückzuführen ist. Dieses Verhalten wird im folgenden Abschnitt 5.1.3 ausführlicher diskutiert. Wird das Cut-Off-Verhältnis kleiner als 1.5, beginnen die Reflexionen den Fehler zu dominieren. Bis etwa $\xi = 1.1$ bleibt der Fehler aber zumindest bei der PML-Randbedingung im noch vertretbaren Bereich von ca. 1% Leistungsverlust pro Wellenlänge. Treten in Simulationen Moden mit kleinerem Cut-Off-Verhältnis auf, muss hinterfragt werden, inwieweit die Lösung noch physikalisch sinnvoll ist.

Ein weiterer wesentlicher Aspekt bei der Beurteilung der reflexionsarmen Randbedingungen ist der numerische Aufwand. In Tabelle 5.2 sind die Rechenzeiten der Simulationen mit den verschiedenen Randbedingungen als Summe aller Testfälle für die jeweilige Mode aufgeführt. Es ist ersichtlich, dass sich Abstrahlrandbedingung und NC/F-Absorptionszone nicht wesentlich in ihrem Aufwand unterscheiden, während für die PML ein Anstieg von 20% – 25% zu beobachten ist.

Mode (4,0)		
Randbedingung	$\sum t$ [CPU h]	$\sum \Delta t$
RAD	137	—
NC/F	143	+4%
PML	165	+20%

Mode (8,0)		
Randbedingung	$\sum t$ [CPU h]	$\sum \Delta t$
RAD	93	—
NC/F	93	$\pm 0\%$
PML	116	+25%

Tabelle 5.2: Rechenzeiten beim Einsatz verschiedener Randbedingungen

Trotz des erheblichen numerischen Mehraufwandes beim Einsatz der PML als reflexionsarme Randbedingung in Kanalumgebungen ist diese den anderen vorgestellten Randbedingungen vorzuziehen, da sie insbesondere bei Cut-Off-Verhältnissen nahe eins deutlich wirkungsvoller Reflexionen unterdrückt. Daher wird für die weitere Validierung und für die technischen Anwendungsfälle in Kapitel 6 nur noch die PML zum reflexionsarmen Rechengebietsabschluss eingesetzt.

5.1.3 Gitterauflösung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde bereits die Gitterauflösung als wesentlicher Einflussfaktor identifiziert. Dieser Einfluss soll hier näher untersucht werden. Prinzipiell sinken die Diskretisierungsfehler mit steigender Auflösung, was aber einen Anstieg des numerischen Aufwands zur Folge hat. Das Ziel beim Einsatz für die Schallausbreitung optimierter Diskretisierungsschemata war deshalb, die benötigte Gitterauflösung so weit wie möglich zu reduzieren. Die Mindestanforderung an die Auflösung des Rechengitters in axialer, radialer und azimuthaler Richtung wird in den folgenden Abschnitten für die anwendungsbezogene Ringkanalgeometrie systematisch untersucht. Dazu wird die Gitterschrittweite in der jeweiligen Koordinatenrichtung variiert und entsprechend Abschnitt 5.1.1 Dissipations- und Dispersionsfehler sowie die Stärke der auftretenden Reflexionen bestimmt.

Axiale Auflösung

Die Untersuchung der Abhängigkeit zwischen den Diskretisierungsfehlern und axialer Gitterauflösung N_x erfolgt anhand von Einzelmoden-Simulationen mit verschiedenen axialen Schrittweiten Δx bei konstanter Frequenz f . Durch die Festlegung von Mode und Frequenz bleibt die axiale Wellenzahl k_x , die entsprechend (2.26) berechnet werden kann, konstant und für die axiale Gitterauflösung gilt: $N_x = 2\pi/k_x\Delta x$.

Um zwischen den Einflüssen, die aus der Auflösung und denen, die aus der durch k_x repräsentierten Modenform resultieren, unterscheiden zu können, wurden Simulationen mit den Moden (8, 0) und (13, 0) durchgeführt. Die verwendeten Schrittweiten mit ihren dazugehörigen Auflösungen sind in Tabelle 5.3 aufgeführt.

Mode	Δx [D]	0.010	0.012	0.017	0.023	0.028	0.033	0.038
(8, 0)	N_x [PPW]	19.9	16.6	11.7	8.7	7.2	6.0	5.2
(13, 0)	N_x [PPW]	28.8	24.0	17.0	12.6	10.4	8.7	7.6

Tabelle 5.3: Axiale Gitterschrittweiten und -auflösungen der untersuchten Moden

In den Abbildungen 5.6 und 5.7 ist das Dissipationsverhalten in Abhängigkeit der Gitterauflösung dargestellt. Es ist erkennbar, dass der Dissipationsfehler bis zu einer Auflösung von etwa 15 PPW annähernd mit sechster Ordnung abfällt bevor er dann auf sehr niedrigem Niveau konstant bleibt.

Da der Abfall unabhängig von der untersuchten Mode zu beobachten ist und dabei einen qualitativ ähnlichen Verlauf zeigt, ist dieses Verhalten auf das zeitliche Diskretisierungsschema zurückzuführen, das das Dissipationsverhalten bestimmt. Der Dissipationsfehler sinkt dabei mit der theoretischen Ordnung des alternierend fünf-/sechsstufigen LDDRK-Verfahrens.

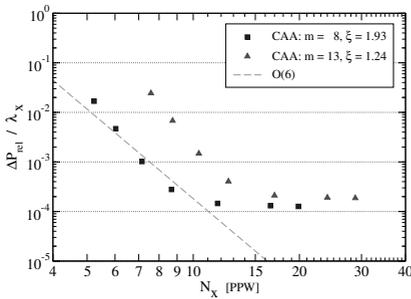


Abbildung 5.6: Leistungsverlust in Abhängigkeit der axialen Gitterauflösung

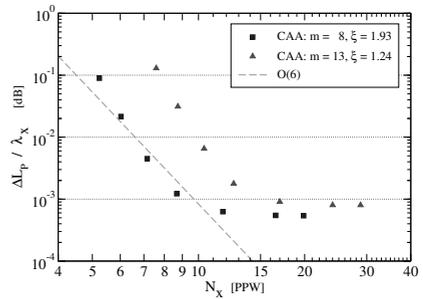


Abbildung 5.7: Schalldruckverlust in Abhängigkeit der axialen Gitterauflösung

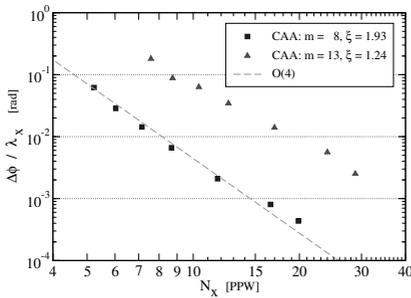


Abbildung 5.8: Phasenfehler in Abhängigkeit der axialen Gitterauflösung

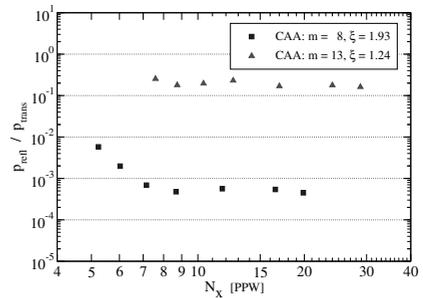


Abbildung 5.9: Reflexionsverhalten in Abhängigkeit der axialen Gitterauflösung

Es ist wahrscheinlich, dass der durch die Diskretisierung hervorgerufene Dissipationsfehler auch für Auflösungen größer als 15 PPW noch weiter fällt. Dieser Diskretisierungsfehler ist dann aber kleiner als andere dissipative Effekte, die nicht von der Auflösung bestimmt sind. Daher bleibt der Gesamtfehler ab einer bestimmten Auflösung konstant. Welche Verfahrenskomponente diesen Effekt bewirkt, ist aus diesen Testfallserien nicht klar zu bestimmen, in Frage kommt beispielsweise die Filterung, auszuschließen sind aber Reflexionen. Wie Abbildung 5.9 zeigt, führten die unterschiedlich starken Reflexionen, die durch die verschiedenen Cut-Off-Verhältnisse der Moden bedingt sind, nur zu einem konstant nach oben verschobenen Verlauf der Fehler. Dies ist auch in den Abbildungen 5.6 und 5.7 zu beobachten, wo auch ersichtlich ist, dass der minimale Dissipationsfehler davon unbeeinflusst bleibt.

Für den in Abbildung 5.8 dargestellten Dispersionsfehler, der ausschließlich durch die Diskretisierungsschemata bestimmt wird, ist ein Abfall von vierter Ordnung in Abhängigkeit der Auflösung zu erkennen. Dies entspricht genau der Fehlerordnung

des DRP-Verfahrens. Dass der Fehler auch für größere Auflösung weiter sinkt, bestätigt die Vermutung über ein weiteres Abfallen auch des diskretisierungsbedingten Dissipationsfehlers.

In der praktischen Anwendung ist die Untergrenze des Dissipationsfehlers unproblematisch, da diese auf einem sehr geringen Niveau von ca. 0.02% Energieverlust bzw. 0.001 dB Schallpegelverlust pro Wellenlänge liegt. Die Untergrenze legt aber eine maximale sinnvolle Gitterauflösung von 15 PPW fest. Feinere Gitter führen dann nicht mehr zu einer Verbesserung der Lösungsqualität, sondern erhöhen nur noch den numerischen Aufwand. Für eine hinreichend gute Lösungsqualität ist meist schon eine Auflösung von sieben Punkten pro Wellenlänge ausreichend.

Radiale Auflösung

Analog zur Untersuchung zur axialen Auflösung erfolgt die Evaluation der Verfahrensfehler in Abhängigkeit der radialen Auflösung durch eine Variation der radialen Gitterschrittweite. Die Definition einer radialen Wellenlänge und damit einer radialen Auflösung ist schwierig, da die radiale Form der Rohrmoden nicht harmonisch, sondern durch die Bessel- und Neumann-Funktionen in (2.25) geprägt ist. Als radiale Wellenlänge wird daher der Abstand der Nullstellen in Gleichung (2.25b) verwendet. Die radialen Gitterschrittweiten und die so definierten dazugehörigen Auflösungen sind in Tabelle 5.4 aufgelistet, wobei die Moden (8,0) und (8,1) zur Untersuchung herangezogen werden.

Mode	Δr [D]	0.007	0.010	0.015	0.020	0.025	0.033
(8,0)	N_r [PPW]	47.6	34.5	23.0	18.0	14.8	11.5
(8,1)	N_r [PPW]	33.7	24.4	16.3	12.8	10.5	8.1

Tabelle 5.4: Radiale Gitterschrittweiten und -auflösungen für die untersuchten Moden

Aus den Abbildungen 5.10 und 5.11 ist ersichtlich, dass der Dissipationsfehler im Unterschied zur axialen Auflösung nur mit dritter Ordnung abfällt. Eine Mindestdissipativität ist ebenfalls nicht erkennbar, was aber darin begründet sein kann, dass der Dissipationsfehler bei den hier untersuchten Fällen etwa eine Größenordnung über dem bei den Untersuchungen zur axialen Auflösung liegt.

Weder beim Phasenfehler in Abbildung 5.12 noch beim Reflexionsverhalten in Abbildung 5.13 ist eine Abhängigkeit von der radialen Auflösung erkennbar. Die Stärke der Reflexionen ist wieder durch das Cut-Off-Verhältnis bestimmt und sinkt mit steigendem ζ .

Als Richtwert für die Wahl der radialen Schrittweite Δr kann die axiale Schrittweite Δx herangezogen werden, da dann die Fehler im für das CAA-Verfahren sinnvollen Bereich von $7 < N_x < 15$ in etwa in der gleichen Größenordnung liegen.

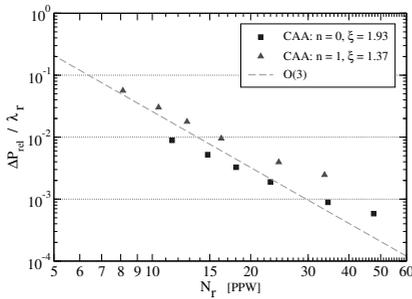


Abbildung 5.10: Leistungsverlust in Abhängigkeit der radialen Gitterauflösung

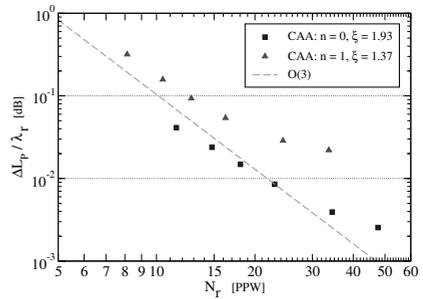


Abbildung 5.11: Schalldruckverlust in Abhängigkeit der radialen Gitterauflösung

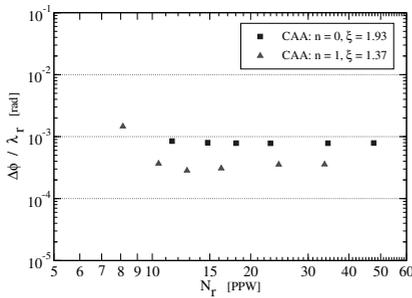


Abbildung 5.12: Phasenfehler in Abhängigkeit der radialen Gitterauflösung

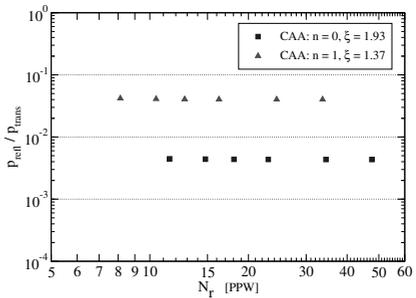


Abbildung 5.13: Reflexionsverhalten in Abhängigkeit der radialen Gitterauflösung

Azimutale Auflösung

Die Untersuchung der Verfahrensfehler in Abhängigkeit von der azimutalen Auflösung erfolgt durch eine Veränderung der Punktzahl des Gitters in Umfangsrichtung. Die verwendeten Punktzahlen und die daraus resultierenden azimutalen Auflösungen sind in Tabelle 5.5 aufgeführt, wobei analog zur Untersuchung der radialen Auflösung die Moden (8,0) und (8,1) eingesetzt werden.

Punkte im Umfang	32	40	52	60	72	80	92	100
N_ϕ [PPW]	4.0	5.0	6.5	7.5	9.0	10.0	11.5	12.5

Tabelle 5.5: Azimutale Punktzahl und Gitterauflösung für die untersuchten Moden

Wie die Abbildungen 5.14 und 5.15 zeigen, verhält sich der Dissipationsfehler in Abhängigkeit der azimutalen Auflösung ähnlich wie für die axiale Auflösung und fällt mit sechster Ordnung ab. Die für die Mode (8, 1) zu beobachtende „Sättigung“ bei Auflösungen größer als 10 PPW ist hier aber eindeutig auf die radiale Auflösung zurückzuführen. Auch der Dispersionsfehler in Abbildung 5.16 und die Reflexionen in Abbildung 5.17 verhalten sich analog zu den axialen Untersuchungen. Hier tritt aber deutlicher hervor, dass die Fehler für Auflösungen unter sechs bis sieben PPW deutlich größer werden und nicht mehr zur Ordnung des Verfahrens passen. Dies bestätigt die oben aufgestellte Forderung nach einer Mindestauflösung für das CAA-Verfahren von sieben Punkten pro Wellenlänge.

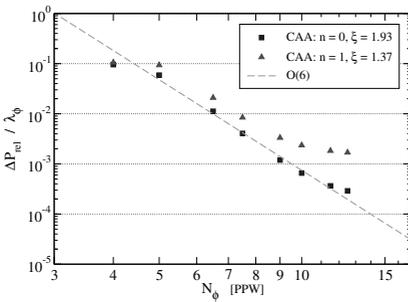


Abbildung 5.14: Leistungsverlust in Abhängigkeit der azimutalen Gitterauflösung

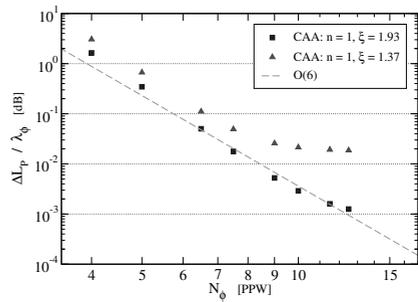


Abbildung 5.15: Schalldruckverlust in Abhängigkeit der azimutalen Gitterauflösung

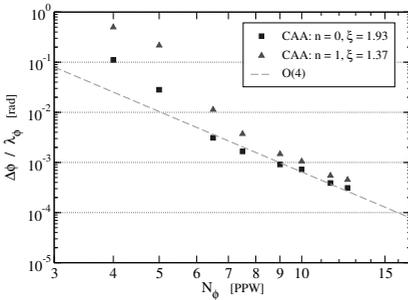


Abbildung 5.16: Phasenfehler in Abhängigkeit der azimutalen Gitterauflösung

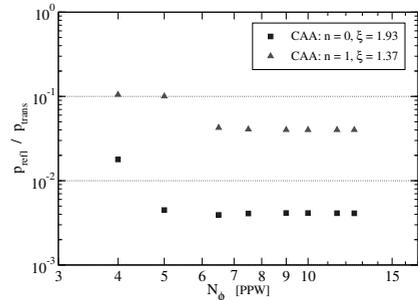


Abbildung 5.17: Reflexionsverhalten in Abhängigkeit der azimutalen Gitterauflösung

5.1.4 Grundströmung

In technisch relevanten Anwendungsfällen erfolgt die Schallausbreitung meist unter Strömungseinfluss. Daher ist für die Validierung des Verfahrens die Untersuchung der Lösungsqualität in Abhängigkeit der Grundströmung wichtig. Um zur Bewertung auf die analytische Lösung für das Schallfeld in Rohrumbungen aus Kapitel 2.4 zurückgreifen zu können, kann für die Evaluation nur eine konstante Grundströmung eingesetzt werden. Die Untersuchungen beschränken sich hier daher auf eine Variation der Strömungsgeschwindigkeit in axialer Richtung, die durch die Machzahl $M = \bar{u}_x/c$ festgelegt wird.

Aus Gleichung (2.26) bzw. (2.31) ist ersichtlich, dass die axiale Wellenzahl k_x neben der Frequenz ω und dem Eigenwert μ_{mn} stark nichtlinear von der Machzahl M abhängt. Sind die Modenordnung und die Frequenz und dadurch auch der Eigenwert fix, ändert sich die Modenform in Abhängigkeit der Machzahl trotzdem erheblich, wie Abbildung 5.18 deutlich veranschaulicht. Die Variation der Strömungsgeschwindigkeit geht also auch immer mit einer Änderung der axialen Gitterauflösung N_x einher.

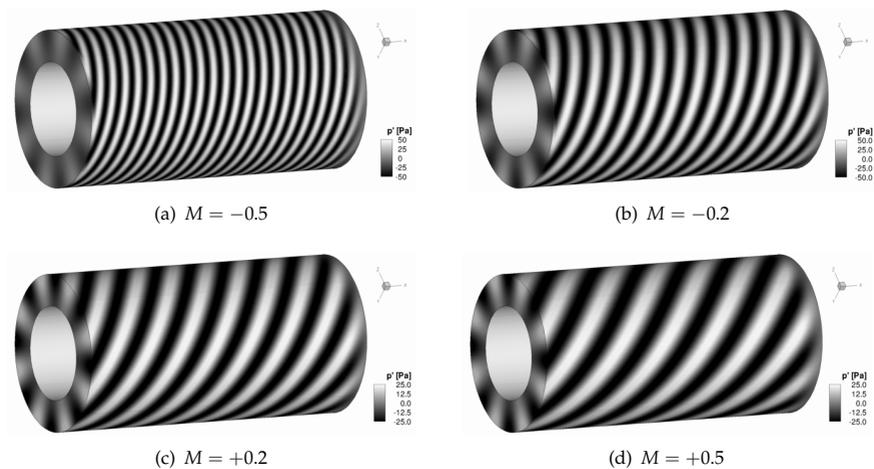


Abbildung 5.18: Momentaufnahmen des Schalldrucks der Mode (8,0) bei 2 kHz für verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten

Wie aus den Gleichungen (2.27) und (2.29) ersichtlich ist, hängen neben der axialen Wellenzahl auch die Cut-Off-Frequenz ω_{co} und damit das Cut-Off-Verhältnis ξ sowie die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} nichtlinear von der Machzahl ab. Dadurch wird durch die Strömung nicht nur die Gitterauflösung, sondern auch die Wirksamkeit der reflexionsarmen Randbedingungen beeinflusst.

Die quantitativen Untersuchungen zum Grundströmungseinfluss erfolgen durch die Variation der Machzahl für verschiedene radiale und azimutale Modenordnungen bei einer festen Frequenz von $f = 2$ kHz. Dabei erfolgt die Schallausbreitung sowohl entgegen der Strömungsrichtung als auch in Strömungsrichtung, was durch negative bzw. positive Machzahlen ausgedrückt wird. Die für die Moden (8,0), (8,1) und (13,0) untersuchten Strömungszustände mit ihren Cut-Off-Verhältnissen ξ und ihrer jeweiligen axialen Gitterauflösung N_x sind in Tabelle 5.6 aufgeführt. Für die Modenausbreitung gegen die Strömung wurden nur Untersuchungen bis $M = -0.7$ durchgeführt, da schon bei dieser Strömungsgeschwindigkeit die axiale Gitterauflösung nicht mehr ausreichend ist.

Mode (8,0)										
M	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
ξ	1.93	1.94	1.97	2.03	2.11	2.23	2.41	2.71	3.22	4.43
N_x	19.9	22.2	24.7	27.2	29.7	32.4	35.1	37.8	40.7	43.5
M		-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9
ξ		1.94	1.97	2.03	2.11	2.23	2.41	2.71	—	—
N_x		17.6	15.4	13.2	11.2	9.2	7.2	5.3	—	—
Mode (8,1)										
M	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
ξ	1.37	1.37	1.39	1.43	1.49	1.58	1.71	1.91	2.28	3.13
N_x	25.0	28.8	32.8	37.2	41.8	46.6	51.7	56.9	62.2	67.7
M		-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9
ξ		1.37	1.39	1.43	1.49	1.58	1.71	1.91	—	—
N_x		21.4	18.2	15.2	12.5	10.0	7.7	5.6	—	—
Mode (13,0)										
M	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
ξ	1.24	1.24	1.26	1.30	1.35	1.43	1.55	1.73	2.06	2.84
N_x	28.8	34.0	39.6	45.8	52.4	59.3	66.6	74.1	81.8	89.7
M		-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9
ξ		1.24	1.26	1.30	1.35	1.43	1.55	1.73	—	—
N_x		24.2	20.1	16.5	13.3	10.5	8.0	5.7	—	—

Tabelle 5.6: Untersuchte Machzahlen mit dazugehörigen Cut-Off-Verhältnissen und axialen Auflösungen für die verschiedene Moden

Das Dissipationsverhalten des CAA-Verfahrens in Abhängigkeit der Machzahl der Grundströmung ist den Abbildungen 5.19 und 5.20 dargestellt. Es ist erkennbar, dass für axiale Auflösungen von mehr als sieben Punkten pro Wellenlänge der Dissipationsfehler nahezu unabhängig von der Machzahl ist. Auffällig ist aber, dass der

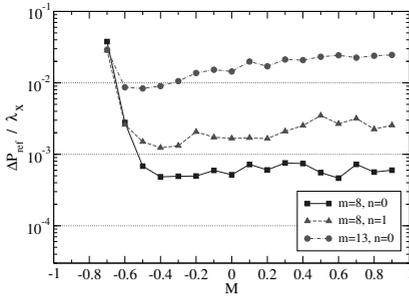


Abbildung 5.19: Leistungsverlust in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit

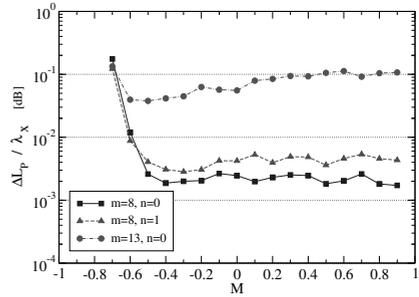


Abbildung 5.20: Schalldruckverlust in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit

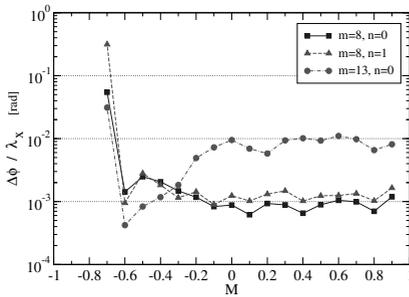


Abbildung 5.21: Phasenfehler in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit

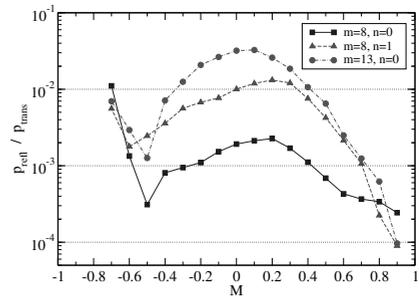


Abbildung 5.22: Reflexionsverhalten in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit

Leistungs- bzw. Schallpegelverlust für die (13,0)-Mode fast eine Größenordnung über den Verlusten der anderen Mode liegt. Dies ist wahrscheinlich auf eine zu geringe azimutale Gitterauflösung zurückzuführen. Auch der Dispersionsfehler in Abbildung 5.21 zeigt keine Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit, solange die axiale Gitterauflösung hinreichend fein ist. Im Gegensatz zum Dissipations- und Dispersionsfehler ist im Reflexionsverhalten eine Abhängigkeit von der Machzahl gegeben, wie in Abbildung 5.22 erkennbar ist. Diese spiegelt in etwa die $\sqrt{1 - M^2}$ Abhängigkeit des Cut-Off-Verhältnisses ζ von der Machzahl wider, wodurch für betragsmäßig steigende Strömungsgeschwindigkeiten die ungewollten Reflexionen an den Rändern reduziert werden.

Zum Einfluss der Grundströmung lässt sich somit feststellen, dass die Lösungsqualität des CAA-Verfahrens durch eine Variation der Grundströmungsgeschwindigkeit nicht maßgeblich beeinflusst wird, solange die axiale Gitterauflösung, welche aber selbst auch von der Geschwindigkeit abhängt, größer als sieben PPW bleibt.

Fazit

Aus den oben durchgeführten Untersuchungen zur Gültigkeit des hier eingesetzten CAA-Verfahrens kann zusammenfassend folgendes geschlossen werden. Ab einer Gitterauflösung von sieben Punkten pro Wellenlänge in jede Raumrichtung bleiben die auftretenden Dissipations- und Dispersionsfehler für den Einsatz in technischen Anwendungen hinreichend klein. Die Fehlerordnungen stimmen mit den theoretisch zu erwartenden überein, wobei der Dissipationsfehler aber ab einer Auflösung von 15 bis 20 PPW nicht mehr durch den Diskretisierungsfehler dominiert wird und sich auf einem konstant niedrigen Wert einpendelt. Noch feinere Rechengitter reduzieren so den Fehler nicht weiter und führen nur noch zu einer Steigerung des numerischen Aufwands. Die Grundströmung hat keinen wesentlichen Einfluss auf die Lösungsqualität, es ist nur zu beachten, dass sich die Strömungsgeschwindigkeit auf die effektive Gitterauflösung auswirkt.

Einen sehr starken Einfluss auf die Lösungsqualität haben die reflexionsarmen Randbedingungen. Die untersuchten Randbedingungen arbeiten in Abhängigkeit vom Cut-Off-Verhältnis der jeweiligen Kanalmode unterschiedlich gut. Während für große Cut-Off-Verhältnisse alle Randbedingungen die unerwünschten Reflexionen ausreichend gut unterbinden, ist ihre Wirkung nahe der Ausbreitungsfähigkeitsgrenze nur unzureichend. Die besten Ergebnisse werden mit dem Perfectly-Matched-Layer erzielt, weshalb sich dessen Einsatz empfiehlt. Bei der Auswertung und Beurteilung der CAA-Simulationen ist in jedem Fall die mangelhafte Reflexionsunterdrückung bei kleinen Cut-Off-Verhältnissen zu berücksichtigen.

5.2 CAA-Verfahren mit Overset-Gitter-Technik

Beim Einsatz der in Kapitel 4 vorgestellten Overset-Gitter-Technik im CAA-Verfahren entstehen, bedingt durch die notwendige Interpolation, zusätzliche numerische Fehler. Inwieweit sich diese auf die Lösungsqualität auswirken, soll im Folgenden untersucht werden. Dazu wird die Konfiguration aus Abschnitt 5.1 dahingehend modifiziert, dass, wie in Abbildung 5.23 dargestellt, ein ringförmiges Overset-Gitter in das Gitter des Ringkanals eingebettet wird.

Das Host-Gitter wird dadurch in zwei Teile getrennt, die durch das Overset-Gitter wieder miteinander verbunden sind. Die Gitter haben dabei, wie Abbildung 5.24 zeigt, abweichende Knotenanzahlen in den entsprechenden Koordinatenrichtungen und sind leicht gegeneinander verschoben bzw. verdreht. Dadurch ist sichergestellt, dass die Austauschknoten tatsächlich interpoliert werden müssen.

Der Ringkanal hat analog zur Validierung des CAA-Verfahrens einen Außendurchmesser von $d_a = 1 D$ und einen Innendurchmesser von $d_i = 0.6 D$ bei einer Länge von $L_{\text{host}} = 3 D$. Mit 92 Punkten in Umfangsrichtung und axialen und radialen Gitterweiten von $\Delta x_{\text{host}} = \Delta r_{\text{host}} = 0.01 D$ hat das Host-Gitter 770.000 Knoten.

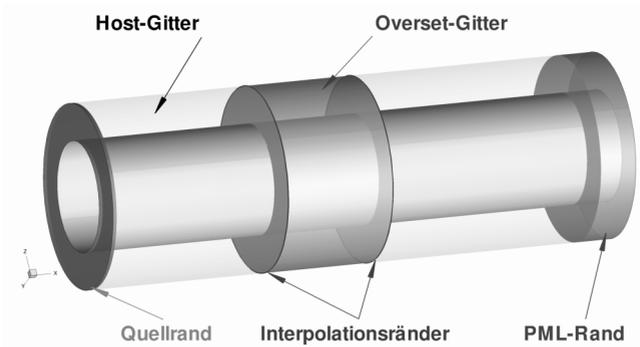


Abbildung 5.23: Validierungskonfiguration: Ringkanal mit eingebettetem Overset-Gitter

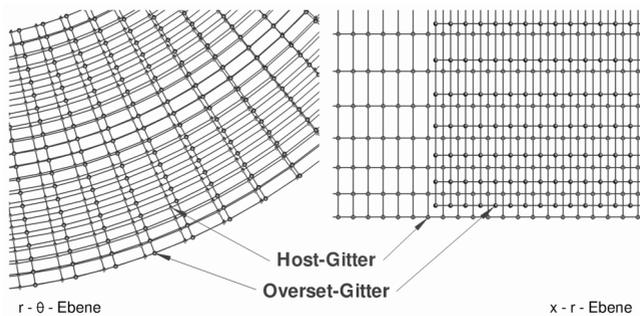


Abbildung 5.24: Ausschnitt von Host- und Overset-Gitter der Validierungskonfiguration

Zur Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher Auflösungen von Host- und Overset-Gittern werden die axialen und radialen Gitterweiten Δx_{over} bzw. Δr_{over} zwischen $0.005 D$ und $0.02 D$ variiert. Mit 96 Punkten in Umfangsrichtung bei einer Länge von $L_{\text{over}} = 0.6 D$ schwankt die Knotenanzahl in den Overset-Gittern zwischen 75.000 und 300.000 Knoten, was in etwa 10% bis 40% der Knotenanzahl des Host-Gitters entspricht. Dabei entsteht im Host-Gitter ein ca. 100.000 Knoten umfassendes Loch.

Als Quelle wird die $(8,0)$ -Mode bei einer Frequenz $f = 2.5 \text{ kHz}$ verwendet, wodurch sich ein Cut-Off-Verhältnis $\xi = 2.4$ ergibt. Bei einem solchen Verhältnis arbeitet die PML-Randbedingung hinreichend gut, wodurch in der Validierung Fehler durch unphysikalische Reflexionen vermieden werden.

Die axiale Gitterauflösung beträgt beim Host-Gitter $N_x = 15$ und variiert bei den Overset-Gittern zwischen 7.5 und 30, so dass die betrachtete Mode entsprechend der Erkenntnisse aus dem vorherigen Abschnitt immer ausreichend aufgelöst ist. Dadurch sollten bei den folgenden Untersuchungen die numerischen Fehler des CAA-Verfahrens keine große Rolle bei der Beurteilung der Ergebnisse spielen.

Die oben angesprochenen Untersuchungen zum Einfluss der Gitterauflösung von Host- und Overset-Gittern werden in Abschnitt 5.2.1 dargelegt. Weiterhin erfolgt in Abschnitt 5.2.2 eine Analyse zu den Auswirkungen der Interpolationssterngröße auf die Lösungsqualität, wobei auch der numerische Aufwand zur Simulation betrachtet wird. Vor diesen quantitativen Analysen erfolgt zunächst eine qualitative Beurteilung der Lösungsqualität.

Qualitative Beurteilung der Lösung

Die qualitative Betrachtung der ausgebreiteten Mode bei etwa gleicher Gitterauflösung von Host- und Overset-Gitter in Abbildung 5.25 zeigt, dass rein visuell der Übergang zwischen den Gittern nicht wahrnehmbar ist. Selbst bei einer genaueren Betrachtung der Druckisolinien in der Ausschnittsvergrößerung an einem Interpolationsrand ist ein stetiger Übergang zwischen Host- und Overset-Gitter zu beobachten.

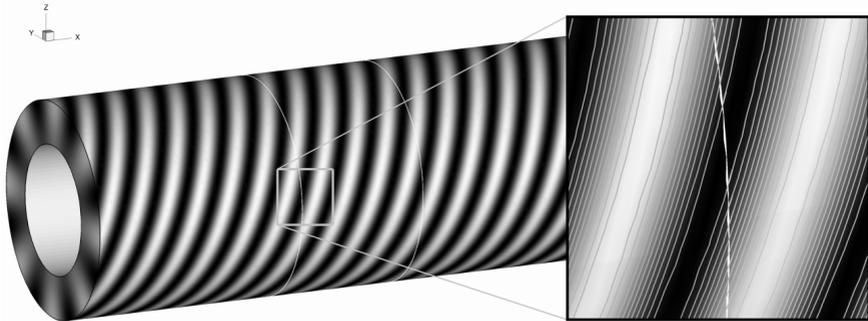


Abbildung 5.25: Momentaufnahme des Druckfeldes mit Druckisolinien im Host- und Overset-Gitter am Gitterübergang bei einer Interpolationssterngröße von $4 \times 4 \times 4$

Dies zeigt, dass die Chimera-Technik prinzipiell zum Einsatz im CAA-Verfahren geeignet ist. Da in den Druckkonturen keine sichtbaren Abweichungen zu erkennen sind, liegen die durch die Interpolation entstehenden Fehler erfahrungsgemäß unter 5%. Genauere Untersuchungen zur Quantifizierung der Fehler erfolgen in den folgenden Abschnitten.

5.2.1 Einfluss der Gitterauflösungen im Overset-Gitter

Zur Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher Gitterauflösungen in Host- und Overset-Gitter wird die Gitterschrittweite jeweils separat in axialer und radialer Richtung variiert.

Die Bewertung der Lösung erfolgt anhand der Dissipations- und Dispersionskriterien aus Abschnitt 5.1.1, wobei der Dissipationsfehler wiedergegeben durch den Leistungsverlust über die gesamte Kanallänge aufgetragen wird. Dadurch kann das Verhalten der Lösung sowohl beim Übergang zwischen den Gittern als auch in den einzelnen Gittern selbst analysiert werden. Der Dispersionsfehler wird als Differenz zwischen numerisch berechneter und analytisch exakter Phasenlage zwischen Kanalansatz und -ende bestimmt. Als Referenz für die Vergleiche dient eine „klassische“ Simulation auf dem Host-Gitter ohne eingebettete Overset-Gitter.

Axiale Auflösung Für die Untersuchung des axialen Auflösungseinflusses auf die Lösungsqualität werden Overset-Gitter mit gleicher, halber sowie doppelter Gitterschrittweite des Host-Gitters verwendet. Der Verlauf des Energieflusses im Kanal ist anhand der akustischen Leistung in Abbildung 5.26 aufgetragen, wobei deren Berechnung im Host- und Overset-Gitter separat erfolgte, so dass im Lochbereich des Host-Gitters die Leistung auf null abfällt.

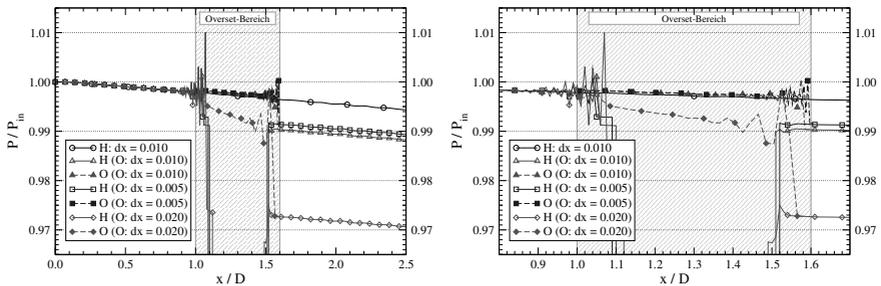


Abbildung 5.26: Energiefluss für verschiedene axiale Auflösungen des Overset-Gitters

Es ist ablesbar, dass unabhängig von der Wahl der Schrittweite im Overset-Gitter die Dissipation durch den Einsatz der Chimera-Technik anwächst. Der Anstieg ist aber stark von der Art des Schrittweitenänderung abhängig. Während bei gleicher oder feinerer Auflösung im Overset-Gitter der Dissipationszuwachs mit 0.5% relativ klein bleibt, ist bei einem größeren Overset-Gitter ein Anstieg von 2.5% zu beobachten. Ein Teil davon geht auf die höhere Dissipativität bedingt durch den größeren Diskretisierungsfehler zurück. Den größten Anteil bildet aber der Interpolationsfehler beim Übergang am Ende des Overset-Gitters zum Host-Gitter. Die Ungenauigkeiten bei der Interpolation äußern sich als Schwingungen in der akustischen Leistung im

Axiale Auflösung $\Delta x_{\text{Over}} / \Delta x_{\text{Host}}$	Amplitudenverlust ΔL_p [dB]	Phasenverschiebung $\Delta \varphi$ [rad]
—	0.015395	—
0.5	0.037431	-0.000385
1.0	0.042087	-0.000091
2.0	0.120203	-0.000158

Tabelle 5.7: Dissipations- und Dispersionsfehler bei Variation der axialen Auflösung des Overset-Gitters

Übergangsbereich zwischen den Gittern. Im Unterschied zur akustischen Intensität sind diese Schwankungsbewegungen bei der einzelnen Betrachtung von Druck oder Schnelle aber nicht wahrnehmbar. Bei der Betrachtung des Dissipationsfehlers über die gesamte Kanallänge anhand des Schalldruckpegelverlusts in Tabelle 5.7 wird klar, dass sich der Fehler auf sehr niedrigem Niveau bewegt.

In Tabelle 5.7 ist durch die Phasenverschiebung auch der Dispersionsfehler ablesbar. Dieser ist bei gleicher Auflösung in beiden Gittern am kleinsten und wächst sowohl bei einer Verfeinerung als auch bei einer Vergrößerung des Overset-Gitters.

Radiale Auflösung Analog zu den Untersuchungen zur axialen Auflösung werden zur Bestimmung des Einflusses der radialen Gitterauflösung auf die Lösungsqualität Overset-Gitter mit gleicher, halber sowie doppelter radialer Gitterschrittweite des Host-Gitters verwendet. Wie aus Abbildung 5.27 zu entnehmen ist, zeigt der Dissipationsfehler ein ähnliches Verhalten wie bei der Variation der axialen Schrittweite. Der Einfluss der Schrittweitenänderung ist aber kleiner, was in den viel kleineren Gradienten der Fluktuationen in radialer Richtung im Vergleich zur axialen Richtung begründet liegt.

Aus Tabelle 5.8 ist ersichtlich, dass auch hier der Amplitudenverlust über die Kanallänge mit unter 0.05 dB sehr klein ist.

Radiale Auflösung $\Delta r_{\text{Over}} / \Delta r_{\text{Host}}$	Amplitudenverlust ΔL_p [dB]	Phasenverschiebung $\Delta \varphi$ [rad]
—	0.015395	—
0.5	0.038644	-0.000086
1.0	0.042087	-0.000091
2.0	0.052045	-0.000090

Tabelle 5.8: Dissipations- und Dispersionsfehler bei Variation der radialen Auflösung des Overset-Gitters

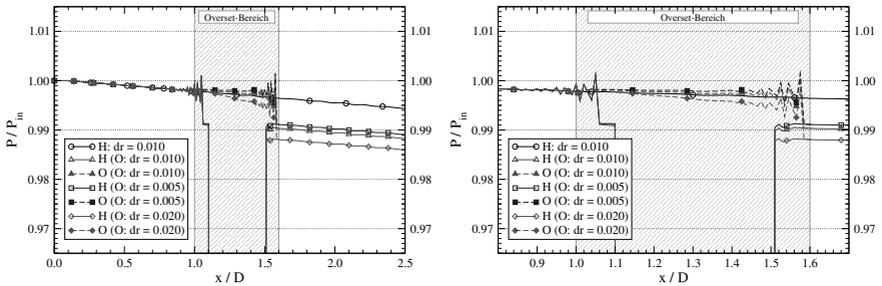


Abbildung 5.27: Energiefluss für verschiedene radiale Auflösungen des Overset-Gitters

Auf den Dispersionsfehler hat die Änderung der radialen Gitterschrittweite des Overset-Gitters nur einen vernachlässigbaren Einfluss, wie ebenfalls aus Tabelle 5.8 abzulesen ist.

5.2.2 Einfluss der Interpolationssterngröße

Ausgehend von der Maßgabe, dass der Interpolationsalgorithmus innerhalb eines CAA-Verfahrens mit Chimera-Technik mindestens die gleiche Fehlerordnung besitzen muss wie das Verfahren selbst, wurden für die bisherigen Untersuchungen Interpolationssterne mit vier Punkten in jede Raumrichtung verwendet. Dieser 64-Punkt-Interpolationsalgorithmus hat wie das DRP-Verfahren eine Fehlerordnung von vier.

Die Größe der Interpolationssterne bestimmt aber maßgeblich den numerischen Aufwand, der durch den Einsatz der Chimera-Technik im CAA-Verfahren zusätzlich entsteht. Im Folgenden wird daher untersucht, inwieweit sich kleine bzw. größere Interpolationssterne sowohl auf die Lösungsqualität als auch auf die Rechenzeit auswirken. Dazu wird die Konfiguration mit gleicher Gitterschrittweite in Host- und Overset-Gitter aus dem vorherigen Abschnitt eingesetzt. Für die Interpolation werden Sterne mit jeweils drei, vier bzw. fünf Punkten in jede Raumrichtung verwendet. Als Vergleich dient wieder die Basiskonfiguration ohne eingebettete Overset-Gitter.

Abbildung 5.28 zeigt das Dissipationsverhalten bei den unterschiedlichen Interpolationssterngrößen. Für den 27-Punkte- und den 64-Punkte-Interpolationsstern nimmt der Leistungsverlust um den Faktor 2 bzw. 2.7 zu, während für den 125-Punkte-Stern fast überhaupt keine zusätzliche Dissipation auftritt. Dies spiegelt sich auch im in Tabelle 5.9 gezeigten Schallpegelverlust wieder, wo der zusätzliche Fehler beim $5 \times 5 \times 5$ -Stern mehr als eine Größenordnung kleiner ist als bei den anderen Sternen.

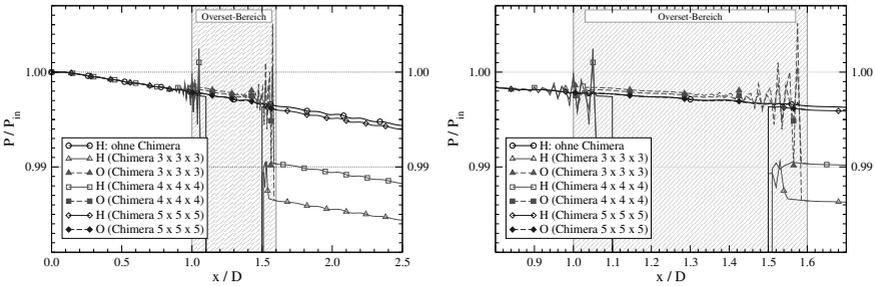


Abbildung 5.28: Energiefluss im Ringkanal für verschieden große Interpolationssterne

Der Dispersionsfehler verdreifacht sich näherungsweise für jeden Reduktionsschritt in der Interpolationsordnung. Durch den Einsatz des 125-Punkte Interpolationssterns tritt also keine außergewöhnlich große Reduktion des Dispersionsfehlers auf. Dies deutet darauf hin, dass der $4 \times 4 \times 4$ -Interpolationsstern vierter Ordnung zwar bezüglich der Dispersion, welche durch das DRP-Schema vierter Ordnung festgelegt wird, hinreichend genau ist, für die, durch das LDDRK-Schema sechster Ordnung bestimmte, Dissipation aber nicht groß genug ist. Der mit dem 64-Punkte-Stern verursachte zusätzliche Interpolationsfehler ist aber immer noch sehr klein.

Interpolationssterngröße	Amplitudenverlust ΔL_p [dB]	Phasenverschiebung $\Delta \varphi$ [rad]
—	0.015395	—
$3 \times 3 \times 3$	0.059247	-0.000312
$4 \times 4 \times 4$	0.042087	-0.000091
$5 \times 5 \times 5$	0.017189	-0.000030

Tabelle 5.9: Dissipations- und Dispersionsfehler bei Variation der Interpolationssterngröße

Neben der Interpolationsgenauigkeit ist auch der durch die Chimera-Technik verursachte numerische Mehraufwand zur Beurteilung eines solchen CAA-Verfahrens von Bedeutung. Wie sich die unterschiedlichen Interpolationssterngrößen in den Rechenzeiten der Simulationen niederschlagen, zeigt Tabelle 5.10. Der zusätzliche Rechenaufwand bemisst sich für jede Konfiguration am Verhältnis der Gesamtknotenanzahl zur Anzahl der zu interpolierenden Knoten. Für die hier untersuchte Konfiguration beträgt der Anteil der Austauschknotten, die zu interpolierenden sind etwa 4%, was relativ wenig ist. Die Erhöhung der Interpolationsordnung um eins geht in etwa mit einer Verdopplung der Punkte im Interpolationsstern einher, wodurch sich sowohl der numerische Mehraufwand als auch der zusätzliche Speicherplatzbedarf annähernd verdoppeln, wie aus Tabelle 5.10 abzulesen ist. Für

Interpolationssterngröße	Rechenzeit [CPU h]	Mehraufwand	Mehraufwand pro Prozent Interpolationspunkte
—	8.84	—	—
$3 \times 3 \times 3$	9.07	2.6%	0.6%
$4 \times 4 \times 4$	9.38	6.1%	1.5%
$5 \times 5 \times 5$	9.91	12.1%	2.9%

Tabelle 5.10: Rechenzeitunterschiede bei Variation der Interpolationssterngröße

komplexere Konfigurationen, bei denen leicht 10% – 20% der Gitterknoten zu interpolieren sind, kann eine solche Verdopplung der Rechenzeit schon mehrere Stunden ausmachen, was nicht mehr unerheblich ist.

Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass für größere Interpolationssterne hinreichend viele Punkte im Overset-Gitter zur Verfügung stehen müssen. Im Allgemeinen erfordern größere Interpolationssterne also größere Overset-Gitter. Dies kann insbesondere bei vielen eng beieinander liegenden Einbauten zu Problemen führen, da es, wie in Kapitel 4.5 dargestellt, Restriktionen beim Einsatz der Chimera-Technik gibt. Diese lassen sich zwar durch eine Verfeinerung des gesamten Rechnernetzes, also des Host-Gitters und aller Overset-Gitter, umgehen, wodurch aber die Knotenanzahl und damit der Rechenaufwand sehr stark anwächst.

Es ist im Einzelfall also abzuwägen, ob mehr Wert auf eine höhere Genauigkeit oder auf einen geringeren Mehraufwand gelegt wird und ob aufgrund der Geometrie der jeweiligen Konfiguration größere Interpolationssterne überhaupt angemessen einsetzbar sind.

Fazit

Insgesamt kann festgestellt werden, dass durch den Einsatz der Chimera-Technik zusätzlich zu den Diskretisierungsfehlern des CAA-Verfahrens Interpolationsfehler entstehen. Für Overset-Gitter, deren Auflösung gleich oder höher ist als die des Host-Gitters, bewegen sich diese Fehler aber in der gleichen Größenordnung wie die Diskretisierungsfehler, so dass der Einsatz der Chimera-Methode zulässig ist.

Bezüglich der Größe des einzusetzenden Interpolationssterns und der dadurch bedingten Interpolationsordnung empfiehlt sich ein $4 \times 4 \times 4$ -Interpolationsstern als guter Kompromiss zwischen Genauigkeit, zusätzlichem Rechenzeit- und Speicherbedarf und notwendiger Overset-Gittergröße.

5.3 Hybrides CAA-FWH-Verfahren

Das gesamte hybride Verfahren zur Simulation der Schallausbreitung und -abstrahlung besteht aus dem CAA-Verfahren mit Overset-Gitter-Fähigkeit, welches in den Abschnitten 5.1 und 5.2 untersucht wurde und der FWH-Fernfeldintegration aus Kapitel 3.6. Zur Bewertung des Gesamtverfahrens wird im Folgenden die Schallausbreitung durch den Einlauf eines Flugtriebwerks bis ins Fernfeld simuliert, wobei alle Komponenten des hybriden CAA-FWH-Verfahrens zum Einsatz kommen.

Testkonfiguration Als Testkonfiguration wurde das JT15D-Triebwerk ausgewählt, welches von Baumeister und Horowitz [11] sowohl experimentell als auch numerisch untersucht wurde.

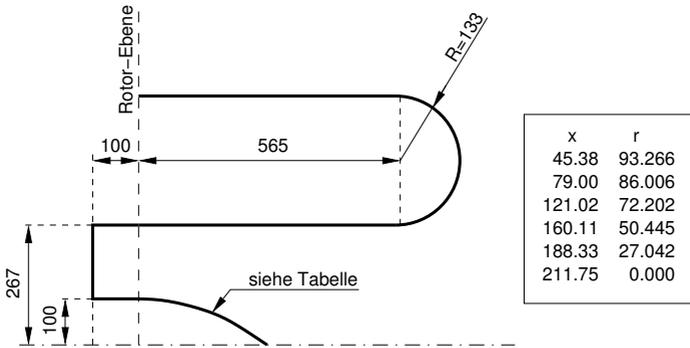


Abbildung 5.29: Geometrie der JT15D-Konfiguration

Die JT15D-Konfiguration ist eine Prüfstandkonfiguration mit einem symmetrischen Gehäuse, das verglichen mit Flugzeugkonfigurationen sehr dick ist. Strömungsmechanisch motiviert befindet sich ein konischer *Spinner* genannter Zentralkörper vor dem Hauptrotor, so dass die Umgebung um den Rotor einen Ringkanal mit variablen Querschnitt bildet. Die genaue Geometrie einschließlich ihrer Abmaße ist in Abbildung 5.29 dargestellt.

Dieser Testfall zeichnet sich dadurch aus, dass das Schallfeld im Triebwerkseinlauf durch eine einzelne Mode dominiert wird. Deren Amplitude wurde in der Nähe des Hauptrotors vermessen. Dadurch ist es möglich, die Schallquelle über das analytische Quellmodell aus Kapitel 3.4.3 als Quellrandbedingung des CAA-Verfahrens zu formulieren. Für andere in der Literatur zu findende Konfigurationen sind zwar auch Fernfeldcharakteristiken vorhanden, als Quelldaten stehen aber meist nur mit Einzelmikrofonen gemessene Schallpegel im Triebwerk zur Verfügung. Da bei

diesen Konfigurationen die modalen Informationen fehlen, können solche Daten nicht direkt in das hier verwendete CAA-Verfahren eingegeben werden. Bedingt durch die genau festgelegte Schallquelle beim JT15D-Triebwerk, wird dieser Testfall auch von anderen Autoren für die Validierung numerischer Verfahren eingesetzt [4, 52, 53, 92].

CAA-Rechengitter Zur Vernetzung der Konfiguration für CAA-Simulationen der Schallausbreitung von der Rotorebene durch den Triebwerkeinlauf bis ins geometrische Nahfeld außerhalb des Triebwerks wird auf die Chimera-Technik zurückgegriffen. Abbildung 5.30(a) zeigt die Gittertopologie dieses Rechengitters, welches aus dem Host-Gitter (b) und den Overset-Gittern für das Gehäuse (c) und den Kern (d) zusammengesetzt ist. Das Host-Gitter ist von O-Typ und spart einen Bereich um die Achse aus, der vom Kern-Gitter überdeckt wird. Die Gehäuseform selbst wird mittels eines weiteren Overset-Gitters modelliert. Das Host- und die Overset-Gitter sind dabei so ausgelegt, dass eine Auflösung von mindestens zehn Punkten pro Wellenlänge sichergestellt ist. Das resultierende Gesamtgitter besitzt so ca. 1.6 Millionen Knoten, wobei für etwa 10% davon bedingt durch die Chimera-Technik eine Interpolation erforderlich ist.

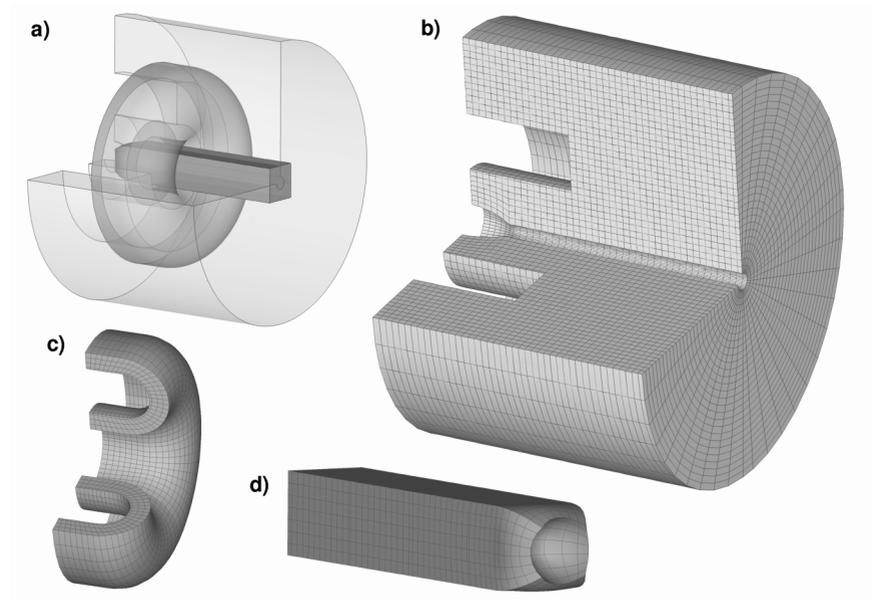


Abbildung 5.30: CAA-Gitter der JT15D-Konfiguration

Grundströmung Da das Triebwerk in einem Prüfstand montiert ist, befindet es sich selbst in Ruhe, saugt aber aus der Umgebung Luft an. Diese Ansaugströmung bildet die Grundströmung für die CAA-Simulation. Über eine CFD-Simulation mit dem kommerziellen Strömungslöser *STAR-CD*[®] auf dem in Abbildung 5.31 dargestellten unstrukturierten Gitter wurde diese als Euler-Strömung berechnet. Der Volumenstrom durch das Triebwerk wurde dabei variiert, bis sich die gemessene mittlere Strömungsgeschwindigkeit von $M = -0.147$ in der Rotorebene einstellte. Für die Umgebungswerte wurden die atmosphärischen Standardbedingungen angenommen. Die Machzahlkonturen und Stromlinien in Abbildung 5.32 veranschaulichen die so berechnete Ansaugströmung. Zur Vorgabe der Grundströmung in der CAA-Simulation erfolgte eine Interpolation der Druck-, Dichte- und Geschwindigkeitsgrößen vom unstrukturierten CFD- auf das strukturierte CAA-Gitter.

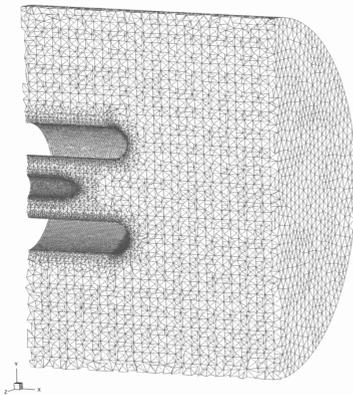


Abbildung 5.31: Unstrukturiertes Rechengitter für die Grundströmungsberechnung

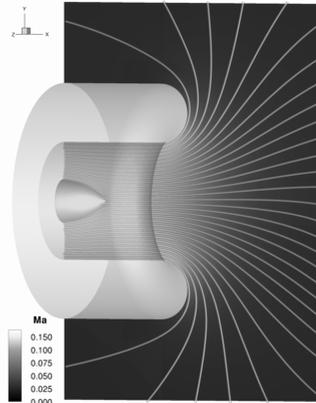


Abbildung 5.32: Machzahlkonturen und Stromlinien der Grundströmung

CAA-Simulation und Fernfeldberechnung Die Ausbreitung der dominanten Mode $(13,0)$ wurde anschließend für die Blattfolgefrequenz von 3150 Hz mit dem CAA-Verfahren durch den Triebwerkseinlauf simuliert. Abbildung 5.33 zeigt eine Momentaufnahme des so berechneten Druckfeldes.

Für die Bestimmung der Richtcharakteristik mittels des FWH-Integralverfahrens sind Zeitreihen von Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen auf einer FWH-Oberfläche notwendig. Diese liegt innerhalb des CAA-Rechengebiets und bildet die Schnittstelle zum FWH-Verfahren. Die entsprechenden Daten werden während der CAA-Simulation herausgeschrieben. Die Richtcharakteristik wird auf einem Kreisbogen mit Radius 24.38 m um den Mittelpunkt des Eintrittsquerschnitts des

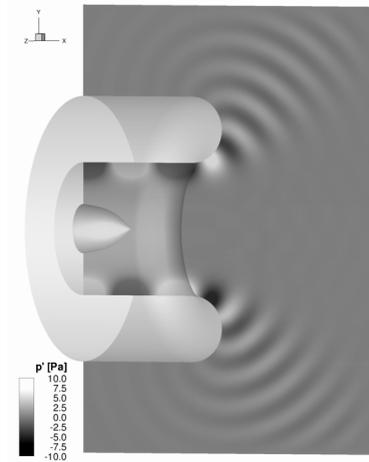


Abbildung 5.33: Momentaufnahme des Druckfeldes der $(13,0)$ -Mode bei 3150 Hz

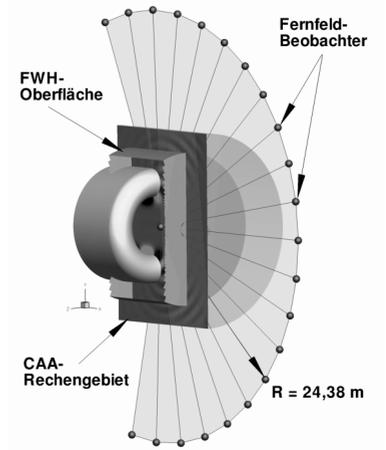


Abbildung 5.34: FWH-Oberfläche und Fernfeldbeobachterpositionen

Triebwerks berechnet, auf dem auch die Mikrofonpositionen im Vergleichsexperiment liegen. Abbildung 5.34 veranschaulicht die Lage der FWH-Oberfläche und der Fernfeldbeobachter für das FWH-Verfahren in Bezug zum Triebwerk und zum CAA-Rechengebiet.

Vergleich zwischen Simulation und Experiment

Die Richtcharakteristiken aus Simulation und Experiment sind in Abbildung 5.35 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass das Simulationsergebnis zwar nicht die Mittelwerte der Messreihen trifft, sich aber innerhalb der Schwankungsbreite der experimentellen Ergebnisse bewegt. Wird berücksichtigt, dass vom Experiment nicht alle Rahmenbedingungen im Detail bekannt sind, besteht eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment. Von der Ansaugströmung ist etwa nur die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Rotorebene bekannt, so dass beispielsweise für den Umgebungsdruck und die Umgebungstemperatur die

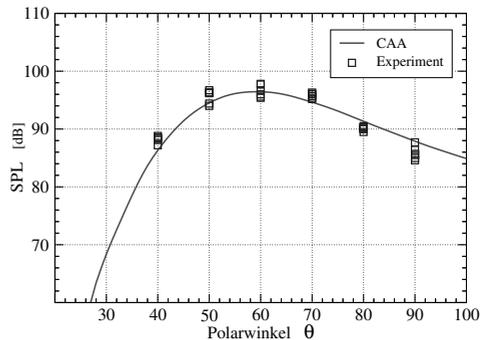


Abbildung 5.35: Fernfeldcharakteristiken von Simulation und Experiment

Werte unter Standardbedingungen angenommen wurden. Validierungen anderer numerischer Verfahren [4, 53, 92] zeigen dabei ein ähnliches Verhalten wie das hier untersuchte CAA-FWH-Verfahren.

Fazit

Anhand des JT15D-Testfalls wurde die Schallausbreitung von der Quelle durch einen Triebwerkseinlauf bis ins Fernfeld untersucht. Dabei kamen alle Komponenten des hybriden CAA-FWH-Verfahrens in Kombination zum Einsatz. Der Testfall berücksichtigt dabei viele Anforderungen, die für eine anwendungsnahe Simulation erforderlich sind. So ist die Geometrie für Schallausbreitungssimulationen relativ komplex und es wird eine nicht konstante Grundströmung in die Berechnung einbezogen.

Der Vergleich zwischen Simulation und Experiment zeigt eine gute Übereinstimmung, was belegt, dass Kopplung von CAA- und FWH-Verfahren auch für komplexe Anwendungsfälle funktional und gültig ist.

6 Technische Anwendungsfälle

Die Entwicklung des hybriden CAA-FWH-Verfahrens aus Kapitel 3 und dessen Erweiterung auf komplexe Geometrien durch die Overset-Gitter-Methode aus Kapitel 4 erfolgte vor dem Hintergrund, die Schallausbreitung in anwendungsnahen Konfigurationen simulieren zu können. In Kapitel 5 erfolgte die Validierung dieses hybriden Verfahrens anhand von einfachen akademischen Testfällen bzw. der komplexeren Konfiguration eines Triebwerkseinlaufs mit vereinfachten axialsymmetrischen Rahmenbedingungen. Im folgenden werden einige der Möglichkeiten zur Nutzung des Verfahrens für die Simulation der Schallausbreitung in anwendungsnahen Konfigurationen dargestellt. Die Konfigurationen sind dabei so gewählt, dass sie typischen industriellen Anwendungsfällen nahe kommen.

Da der Schwerpunkt für den Einsatz bei der Vorhersage des Ausbreitungsverhaltens und der Abstrahlung von tonalem Triebwerkslärm liegen soll, wird die Schallausbreitung sowohl durch den Einlauf- als auch den Nebenstromkanal eines Triebwerks simuliert.

Die Untersuchung des Triebwerkseinlaufs in Abschnitt 6.1 erfolgt dabei für angeschrägte Einläufe (engl. *scarfed intakes*), wobei in der Praxis übliche, positive Anströmungswinkel und auch negative Anströmungen Anwendung finden. Durch letztere bieten sich dabei Möglichkeiten zur Lärmreduktion. Neben der Gehäuseform werden auch Strömungseinflüsse wie Anstellwinkel und Strömungsgeschwindigkeit auf den abgestrahlten Schall betrachtet.

Bei den Nebenstromkanalsimulationen in Abschnitt 6.2 liegt der Schwerpunkt in der Untersuchung des Einflusses von Einbauten auf die Schallausbreitung. Verstreubungen und Gabelungen innerhalb des Nebenstromkanals führen zu einer Modenstreuung. Die Simulationen im Nebenstromkanal sind daher numerisch anspruchsvoller als die Untersuchungen im Triebwerkseinlauf, so dass für diese zunächst auf eine Grundströmung verzichtet wird.

Die eingesetzten Testkonfigurationen sind generisch und gegenüber realen Konfigurationen vereinfacht. Sie stellen aber die gleichen Anforderungen an eine Simulation wie reale Anwendungsfälle, da sie die wesentlichen Merkmale dieser widerspiegeln. Das Hauptaugenmerk der hier durchgeführten Simulationen und entsprechenden Analysen liegt im Aufzeigen der Möglichkeiten der Simulations- und Analyseverfahren, so dass die Ergebnisse vorwiegend bezüglich ihrer Plausibilität diskutiert werden und keine detaillierten physikalischen Untersuchungen und Bewertungen erfolgen.

6.1 Angeschrägter Triebwerkseinlauf (*scarfed intake*)

Der Hauptrotor (engl. *fan*) eines modernen Turbofantriebwerks mit großem Nebenstromverhältnis ist eine signifikante Quelle von Fluglärm. Dies gilt insbesondere für den Landeanflug, da in diesem Betriebszustand durch die reduzierte Triebwerksleistung der Anteil des Strahl­lärms an der Gesamtschallemission nicht mehr dominierend ist. Wesentliche Komponenten des Fan­lärms wie beispielsweise der Rotor-Stator-Interaktions­lärm enthalten starke, oft dominierende, tonale Anteile. Für die numerische Simulation dieses tonalen Schalls ist das hier vorgestellte CAA-Verfahren prädestiniert.

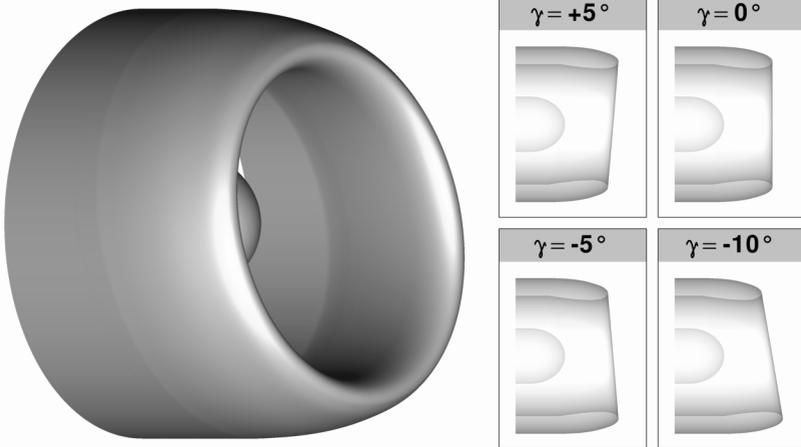


Abbildung 6.1: Triebwerkseinlauf mit verschiedenen Ansträngewinkeln des Gehäuses

Neben dem Auskleiden des Einlaufs und des Nebenstromkanals mit schallabsorbierenden Materialien, dem sogenannten *Lining*, stellen negativ angeschrägte Triebwerkseinläufe eine alternative Technologie zur Lärmreduktion von Turbofantriebwerken dar. Die Grundidee der negativen Ansträngung ist eine himmelwärts gerichtete Ablenkung des Triebwerks­lärms, die zu einer Reduktion des am Boden wahrnehmbaren Schalls führt. Die Effektivität dieses Konzepts wurde theoretisch von Keith und Peake [51], experimentell, z.B. von Baker und Bewick [10], Clark et al. [23], Weir et al. [105] und auch numerisch, etwa von Hamilton und Astley [41], Li et al. [57], Montetagaud und Montoux [62], untersucht. Für die numerischen Untersuchungen wurden dabei meist vereinfachte Methoden und Konzepte verwendet,

die aufgrund von Beschränkungen der numerischen Verfahren nicht in der Lage waren, beispielsweise die Effekte einer ungleichförmigen Strömung zu berücksichtigen. Solchen Beschränkungen unterliegt das in dieser Arbeit vorgestellte hybride CAA-FWH-Verfahren nicht.

Testkonfigurationen

Abbildung 6.1 gibt einen Überblick über die Geometrien der hier untersuchten angeschrägten Triebwerkseinläufe (engl. *scarfed intakes*). Da aus aerodynamischen Gründen reale Triebwerke eine positive Anschrägung besitzen, erfolgen die Untersuchungen zum Einfluss des Anschrägungswinkels γ auf die Schallabstrahlung neben den negativen Winkeln $\gamma = -5^\circ$ bzw. -10° zur Lärminderung und dem symmetrischen Vergleichsfall $\gamma = 0^\circ$ auch für eine positive Anschrägung von $\gamma = +5^\circ$. Des Weiteren wird der Einfluss des Anstellwinkels der Anströmung sowie der Durchströmgeschwindigkeit des Triebwerkseinlaufs untersucht.

Geometrie Die eingesetzte generische Basisgeometrie ist in ihrer Form und ihren Größenverhältnissen einem realen Triebwerk nachempfunden. In Abbildung 6.2 sind die genauen Abmaße von Gehäuse und Spinner für die symmetrische Konfiguration abzulesen.

Die unterschiedlichen Anschrägungen werden über eine Verformung der symmetrischen Gehäusegeometrie realisiert und sind ebenfalls in Abbildung 6.2 veranschaulicht. Die axialen Koordinaten der angeschrägten Konfiguration berechnen sich dabei nach der Deformationsvorschrift

$$x_{\text{scarf}} = x + r_i \tan \gamma \cos \theta, \quad (6.1)$$

wobei r_i den Gehäuseinnenradius in der Rotorebene, γ den Anschrägungswinkel und θ die azimutale Koordinate in der symmetrischen Ausgangskonfiguration bezeichnen. Die jeweiligen radialen und azimutalen Koordinaten bleiben bei der Deformation unverändert.

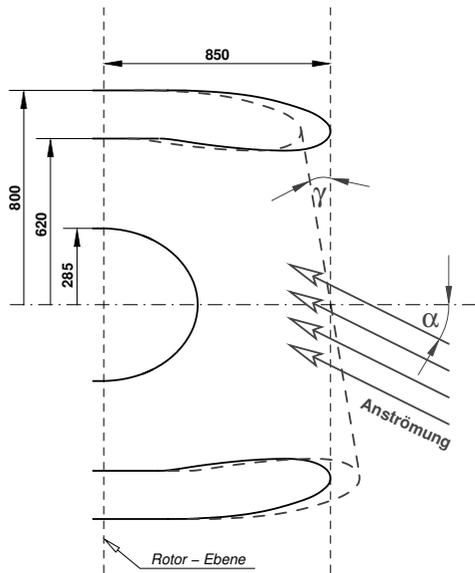


Abbildung 6.2: Geometrie des angeschrägten Triebwerkseinlaufs

CAA-Rechengitter Zur Erzeugung der Rechnetze für die CAA-Simulationen wird auf die Chimera-Technik aus Kapitel 4 zurückgegriffen. Abbildung 6.3 zeigt das Rechengitter, welches sich aus dem Host-Gitter und zwei Overset-Gittern zusammensetzt. Das Host-Gitter ist der Triebwerksgeometrie entsprechend vom O-Typ, spart aber einen zylindrischen Kernbereich aus, in dem bei dieser Gittertopologie die Gitterzellen sehr klein werden bzw. an der Achse eine Singularität in r -Richtung auftreten würde. Dieser Kernbereich wird durch ein Overset-Gitter mit quadratischem Querschnitt überdeckt. Dieses Kerngitter ist singularitätsfrei und bietet nahezu konstante Gitterschrittweiten. Auf ein klassisches O-Gitter mit Zentralblock, wie es in der CFD für solche Konfigurationen üblich ist, wird wegen der in Kapitel 4.1 dargestellten Probleme bezüglich der Konsistenz verzichtet. Stattdessen wird die oben dargestellte Chimera-Lösung eingesetzt.

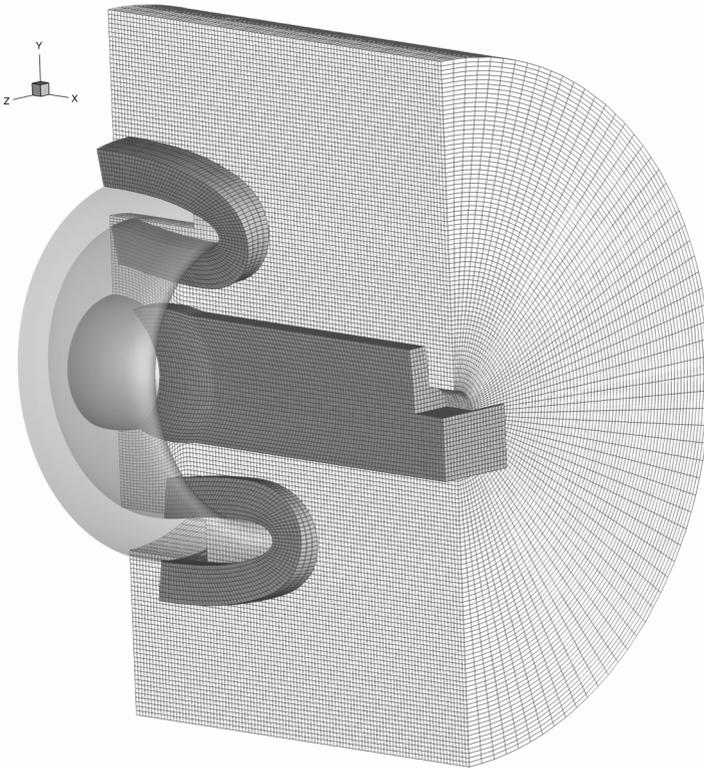


Abbildung 6.3: Host-Gitter mit eingebetteten Overset-Gittern für das Gehäuse und den Achsenbereich

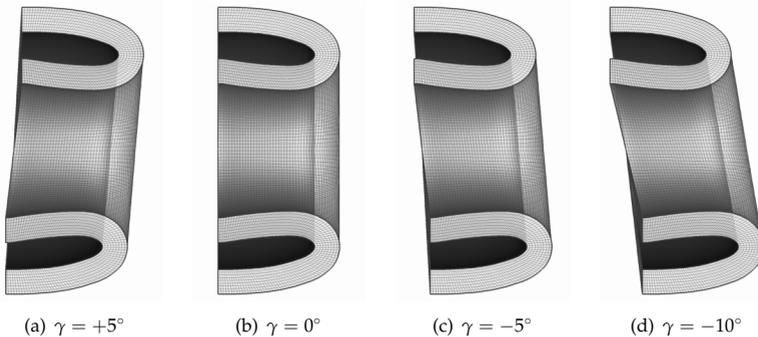


Abbildung 6.4: Overset-Gitter für verschiedene Ansträgungswinkel des Gehäuses

Die Gehäuseform des Triebwerks wird über ein zweites Overset-Gitter vom H-Typ nachgebildet. Dadurch lassen sich sehr leicht die gewünschten Geometrievariationen für die verschiedenen Ansträgungswinkel realisieren. Für jeden zu untersuchenden Ansträgungswinkel γ wird dazu das symmetrische Basisgitter des Gehäuses aus Abbildung 6.4(b) mittels der Vorschrift aus Gleichung (6.1) in die Overset-Gitter für angeschrägte Triebwerke in Abbildung 6.4(a,c+d) überführt. Dieses Vorgehen vereinfacht die Gittergenerierung erheblich, da die meisten Teile des Gesamtgitters unverändert bleiben und die Deformation des Gehäusegitters automatisiert ohne manuelles Eingreifen erfolgt kann.

Die resultierenden Gesamtgitter sind für die Simulation von Azimutalmoden bis zu einer Ordnung von 13 bei bis zu 2 kHz mit einer Mindestauflösung von 10 PPW ausgelegt. Die Gitter haben eine Größe von etwa 1.6 Millionen Gitterpunkten, wobei etwa 10% Prozent der Knoten interpoliert werden müssen, so dass der Mehraufwand durch den Einsatz der Chimera-Technik relativ klein bleibt.

Grundströmung Die Grundströmung für die Untersuchungen ist so gewählt, dass sie den Bedingungen im Landeanflug nahekommt. Für die Bewegung des Triebwerks wird eine Machzahl von $M_\infty = -0.2$ angesetzt, wobei verschiedene Anstellwinkel von $\alpha = 0^\circ, 3^\circ$ und 6° betrachtet werden. Zur Evaluation der Auswirkungen des Strömungszustandes innerhalb des Triebwerks wird die Ansauggeschwindigkeit über den Massenstroms durch die Rotorebene variiert. Dazu werden zwei Testszenarien verwendet. Im „langsamen“ Szenario beträgt der Massenstrom durch den Rotorquerschnitt des Triebwerks $\dot{m} = 130 \text{ kg s}^{-1}$, wodurch sich eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit von $M_{\text{Fan}} = -0.3$ in der Rotorebene ergibt. Beim „schnellen“ Szenario mit einem Massenstrom von $\dot{m} = 185 \text{ kg s}^{-1}$ ergibt sich eine mittlere Machzahl von $M_{\text{Fan}} = -0.5$.

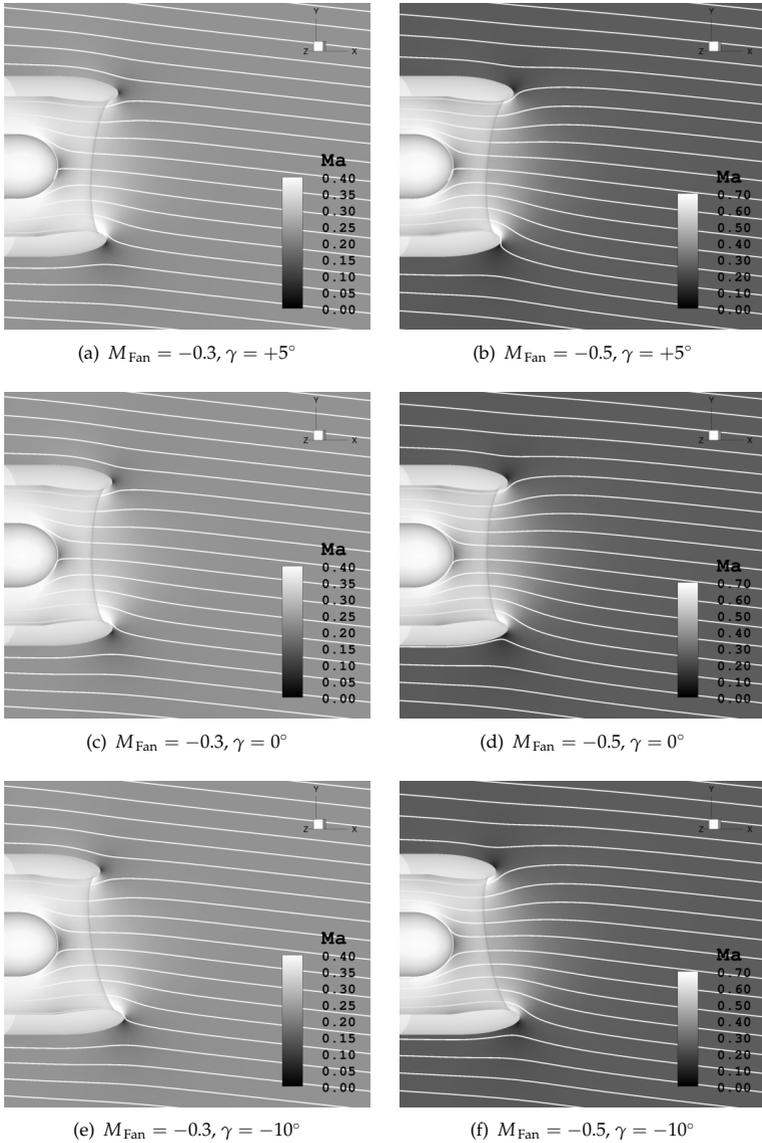


Abbildung 6.5: Grundströmung für verschiedene Ansträngungswinkel γ und Ansauggeschwindigkeiten M_{Fan} bei $M_\infty = -0.2$ mit $\alpha = 6^\circ$

Für die CFD-Simulationen zur Bestimmung der verschiedenen Grundströmungen wird der kommerzielle Strömungslöser STAR-CD[®] eingesetzt. Die Grundströmungen werden dabei als kompressible Euler-Strömung berechnet. Als Randbedingungen werden zum einen innerhalb des Triebwerks der Massenstrom \dot{m} durch den Rotorquerschnitt und zum anderen auf den freien Rändern außerhalb des Triebwerks die Geschwindigkeit über die Flugmachzahl M_∞ vorgegeben. Für die Umgebungswerte von Druck, Dichte und Temperatur finden die atmosphärischen Standardbedingungen Anwendung.

Die Simulationen erfolgen dabei auf unstrukturierten Gittern. Die Generierung des unstrukturierten Basisnetzes für die symmetrische Konfiguration ist zwar schneller realisierbar als die Erzeugung eines strukturierten Gitters, sie lässt sich aber nicht vollautomatisch durchführen. Vielmehr ist dazu ein manueller Eingriff zur geeigneten Festlegung der Knotendichten notwendig, so dass eine gute Balance zwischen hinreichender Auflösung von Gebieten mit starken Gradienten und der Gesamtknotenanzahl in Hinblick auf den numerischen Aufwand gefunden werden kann. Zur Realisierung verschiedener Ansträngungswinkel wird daher nicht für jede Konfiguration ein komplett neues unstrukturiertes Gitter erzeugt, sondern es erfolgt analog zum Overset-Gitter für die CAA über die Verzerrungsvorschrift aus (6.1) eine Deformation des symmetrischen Basisgitters. Dabei wird über eine Fensterfunktion nur der für die Ansträngung relevante Teil des Gitters verzerrt. Da die Verzerrung nur die Koordinaten und nicht die Topologie des Gitters ändert, kann die konvergente Lösung der symmetrischen Basiskonfiguration als Startlösung für die Berechnung des Strömungsfeldes der angeschrägten Einläufe verwendet werden. Für diese Fälle reduziert sich dadurch die zur Konvergenz notwendige Simulationszeit deutlich. Ein analoges Vorgehen erfolgt auch bei der Berechnung der Grundströmung für die verschiedenen Anstellwinkel. Eine Auswahl der so berechneten Grundströmungsfelder ist in Abbildung 6.5 durch Machzahlkonturen und Stromlinien veranschaulicht.

Zur Eingabe der verschiedenen Grundströmungen in die CAA-Simulationen werden die benötigten Druck-, Dichte- und Geschwindigkeitsgrößen von den unstrukturierten CFD-Gittern auf das jeweilige strukturierte CAA-Gitter interpoliert.

Schallquelle und Testfallmatrix Als Schallquelle für die CAA-Simulationen wird die $(7, 0)$ -Mode bei einer Frequenz von 1 kHz verwendet, die über die modifizierte NC/F-Quellrandbedingung aus Kapitel 3.4.3 vorgegeben wird. Die Untersuchungen zum Einfluss der Ansträngung des Einlaufs und der Grundströmungseffekte erfolgen anhand von Parameterstudien, bei denen der Winkel der Ansträngung, der Anstellwinkel des Triebwerks gegenüber der Anströmung sowie die Ansauggeschwindigkeit variiert werden.

Die entsprechenden Parameterkombinationen der einzelnen Testfälle zeigt die Testfallmatrix in Tabelle 6.1. Neben den Testfällen für die oben dargestellten verschiede-

Grundströmung			Winkel der Anschrägung γ			
M_{Fan}	M_{∞}	α	$+5^{\circ}$	0°	-5°	-10°
0	0	—	✓	✓	✓	✓
-0.3	-0.2	0°	✓	✓	✓	✓
-0.3	-0.2	3°		✓		
-0.3	-0.2	6°	✓	✓	✓	✓
-0.5	-0.2	0°		✓		
-0.5	-0.2	3°		✓		
-0.5	-0.2	6°	✓	✓	✓	✓

Tabelle 6.1: Testfallmatrix für die Parameterstudien zum angeschrägten Triebwerkseinlauf

nen Strömungskonfigurationen wird für Vergleichszwecke auch eine Fallserie für ein ruhendes Triebwerk ohne Ansaugströmung ($M_{\infty} = M_{\text{Fan}} = 0$) betrachtet.

Ergebnisse

Die CAA-Simulationen der verschiedenen Testfälle liefern als Ergebnis das Schallfeld innerhalb des Einlaufs und im geometrischen Nahfeld des Triebwerks. Anhand von Momentaufnahmen der Druckfluktuationen in Abbildung 6.6 sind die so berechneten Schallfelder für einige ausgewählte Testkonfigurationen veranschaulicht. Die Abbildungen 6.6(a-c) zeigen die Druckkonturen bei einer Variation der Ansauggeschwindigkeit für die symmetrische Gehäusegeometrie, und analog dazu sind in den Abbildungen 6.6(d-f) die Druckkonturen für den mit $\gamma = -10^{\circ}$ negativ angeschrägten Einlauf dargestellt. Aus diesen Abbildungen lassen sich qualitativ einige Effekte und Merkmale ablesen. So ist z.B. deutlich die konvektionsbedingte Änderung der Wellenlänge in Abhängigkeit der Ansauggeschwindigkeit erkennbar. Weiterhin verändert sich die Abstrahlrichtung des aus dem Triebwerk austretenden Schalls durch die Gehäuseanschrägung. Erwartungsgemäß führt eine negative Anschrägung zu einer Verminderung der Schalls in Bodenrichtung, während die Emission in Richtung Himmel zunimmt.

Zur Quantifizierung der Geometrie- und Strömungseffekte auf die Schallausbreitung werden mittels der FWH-Integralmethode aus Kapitel 3.6 Fernfeldcharakteristiken für die jeweiligen Testfälle bestimmt. Während der Simulation werden dazu die Druck- und Geschwindigkeitsfluktuationen auf einer innerhalb des CAA-Rechengebiets gelegenen FWH-Oberfläche herausgeschrieben und anschließend mit dem FWH-Verfahren zu den Beobachtern im Fernfeld ausgebreitet. Die Positionen von FWH-Oberfläche und Beobachtern relativ zum Triebwerk und zum CAA-Rechengebiet ist in Abbildung 6.7(a) dargestellt. Zur Berechnung der Richtcharakteristiken sind die Beobachter auf einem Kreisbogen um den Mittelpunkt des Einströmquerschnitts angeordnet, der auf der senkrechten x - y -Ebene liegt.

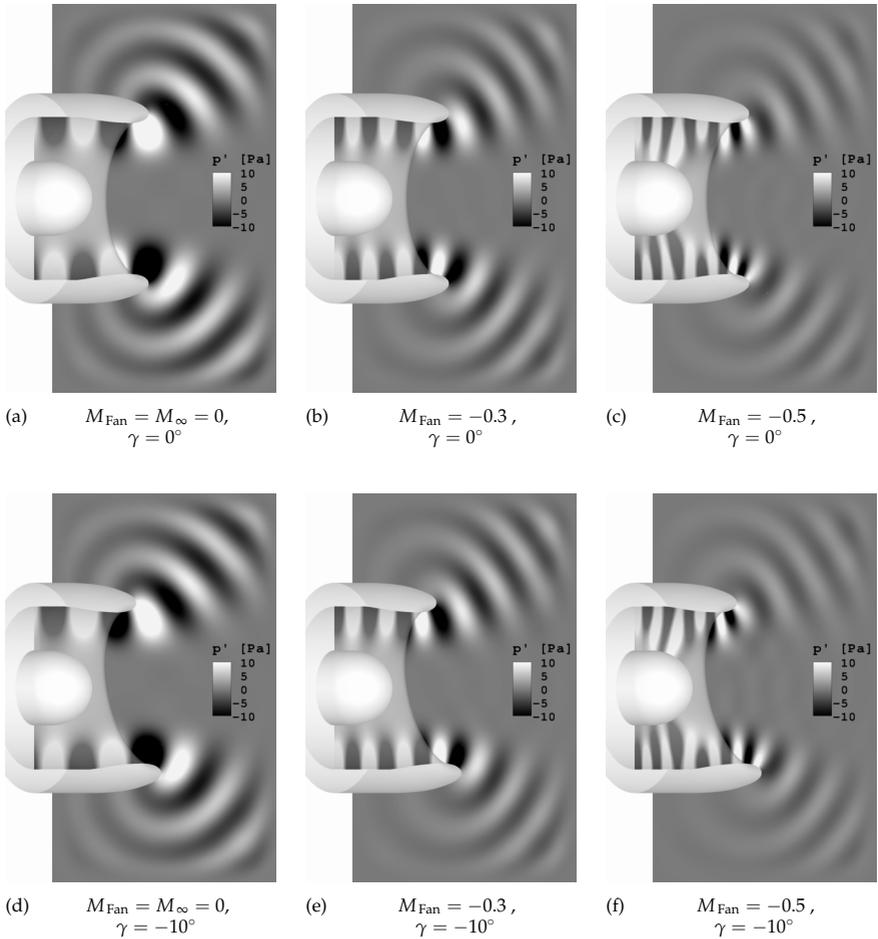


Abbildung 6.6: Momentanes Druckfeld für verschiedene Anströmungswinkel γ und Ansauggeschwindigkeiten bei Fluggeschwindigkeit $M_{\infty} = -0.2$ mit einem Anstellwinkel von $\alpha = 6^\circ$

Um dreidimensionale Effekte bei der Schallausbreitung und -abstrahlung erfassen zu können, werden zusätzlich zu den klassischen zweidimensionalen auch dreidimensionale Richtcharakteristiken berechnet. Wie in Abbildung 6.7(b) dargestellt, werden dazu Beobachter auf einer Halbkugel um den Triebwerkseinlauf herum positioniert, an denen dann der Fernfeldschall berechnet wird.

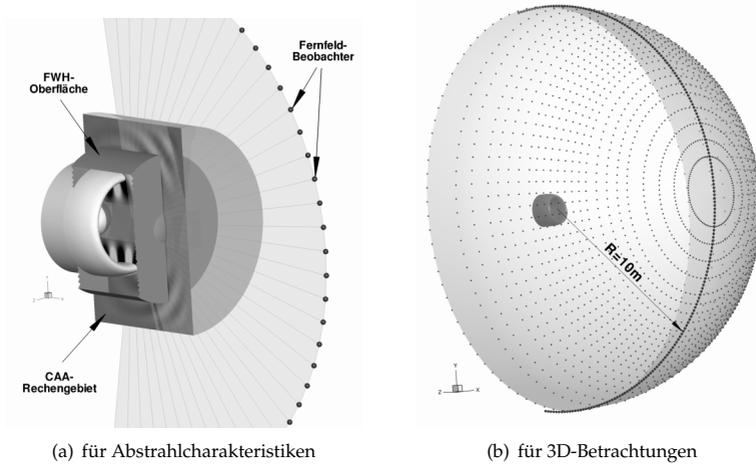


Abbildung 6.7: Lage von FWH-Oberfläche und Fernfeldbeobachtern in Bezug zum Triebwerkseinlauf und zum CAA-Rechengebiet

6.1.1 Einfluss des Ansträgungswinkels

Zur Bestimmung des Einflusses des Winkels γ der Gehäuseanschrägung auf die Schallabstrahlung sind in Abbildung 6.8 die Richtcharakteristiken für Testfälle ohne Grundströmung und für die Ansaugströmung ohne Anstellwinkel ($\alpha = 0^\circ$) mit $M_{Fan} = -0.3$ dargestellt.

In der Richtcharakteristik für den Fall ohne Grundströmung in Abbildung 6.8(a) sind zwei Keulen erkennbar, die die Hauptausbreitungsrichtungen kennzeichnen. Die obere Keule repräsentiert dabei den himmelwärts emittierten Schall, während die untere Keule die Abstrahlung in Richtung Boden kennzeichnet, welche besonders in Hinblick auf die Quantifizierung der Lärmbelästigung von Interesse ist.

Prinzipiell ist zu beobachten, dass die positive Ansträgung zu einer stärkeren Abstrahlung in Richtung Boden führt, während erwartungsgemäß durch negative Ansträgungen eine Reduktion des am Boden wahrnehmbaren Schalls erreicht wird. Mit steigender negativer Ansträgung wird dieser Effekt verstärkt. Verglichen mit dem symmetrischen Fall bei $\gamma = 0^\circ$ führt eine Ansträgung mit $+5^\circ$ zu einer Erhöhung der bodenwärts gerichteten Abstrahlung um ca. 1 dB. Dazu analog verringert sich die Abstrahlung bei einer negativen Ansträgung von -5° um ca. 1 dB. Bei einer Ansträgung von $\gamma = -10^\circ$ ergibt sich eine Reduktion von 2.5 dB. Die erzielte Lärminderung am Boden für die verschiedenen Ansträgungswinkel deckt sich größenordnungsmäßig mit den Ergebnissen in der Literatur [10, 23, 105].

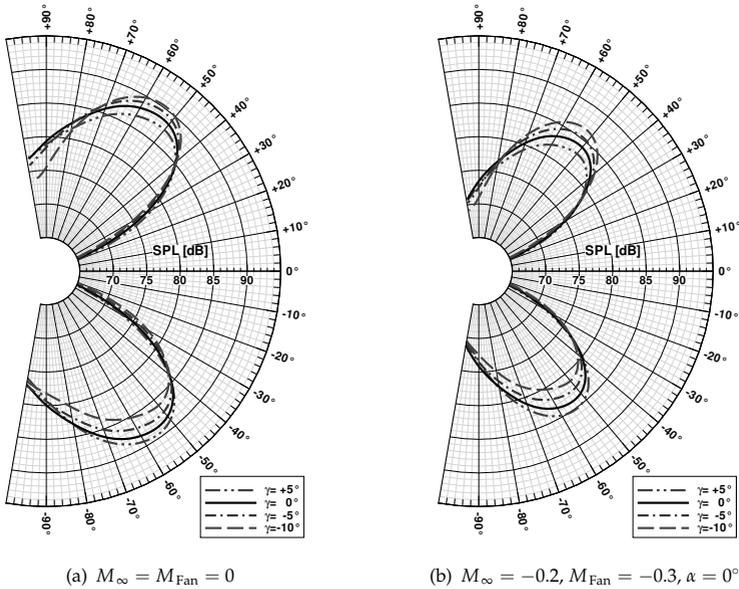


Abbildung 6.8: Richtcharakteristiken in Abhängigkeit des Ansträngewinkels γ

Neben der Änderung der Amplituden tritt auch eine Verschiebung in den Hauptabstrahlrichtungen auf. Beide Keulen werden dabei mit fallendem Ansträngungswinkel nach oben gebeugt. Wie aus Abbildung 6.8(b) ersichtlich ist, zeigen auch die Fälle mit Grundströmung bezüglich des Einflusses der Ansträgung ein ähnliches Verhalten wie die Konfigurationen ohne Strömung.

6.1.2 Einfluss der Grundströmung

Zur Differenzierung der verschiedenen Einflüsse der Strömung auf die Schallausbreitung werden die Auswirkungen von unterschiedlichen Anstellwinkeln und Ansauggeschwindigkeiten im Folgenden zunächst separat betrachtet. Dazu wird auf Richtcharakteristiken in der senkrechten Ebene zurückgegriffen, für deren Bestimmung die in Abbildung 6.7(a) dargestellten Beobachter Anwendung finden. Abschließend wird anhand von Richtcharakteristiken auf der Halbkugel aus Abbildung 6.7(b) untersucht, welche dreidimensionalen Effekte durch die Grundströmung im abgestrahlten Schallfeld zu beobachten sind.

Anstellwinkel Die Auswirkungen des Anstellwinkels α des Triebwerks in Bezug zur Anströmung zeigen die Richtcharakteristiken in Abbildung 6.9 für die symmetrische Konfiguration mit $\gamma = 0^\circ$ bei einer Fluggeschwindigkeit von $M_\infty = -0.2$ und einer

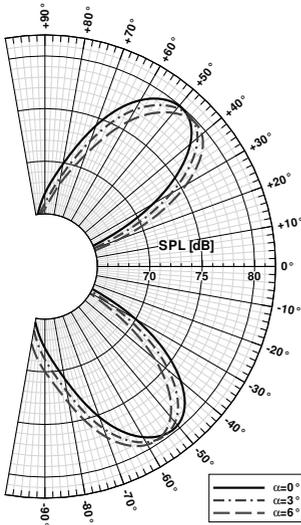


Abbildung 6.9: Richtcharakteristiken in Abhängigkeit des Anstellwinkels α

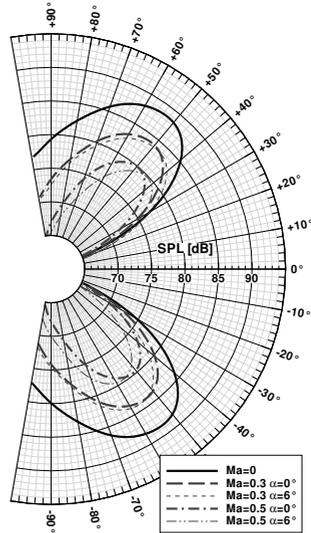


Abbildung 6.10: Richtcharakteristiken in Abhängigkeit der Ansauggeschwindigkeit M_{Fan}

Ansauggeschwindigkeit von $M_{Fan} = -0.5$. Es ist zu erkennen, dass moderate Variationen des Anstellwinkels zwischen 0° und 6° im Schalldruckpegel nur kleine, vernachlässigbare Änderungen der Amplituden des abgestrahlten Schalls zur Folge haben. Der Einfluss des Anstellwinkels spiegelt sich aber in einer Änderung der Hauptabstrahlrichtungen wieder. Sowohl die himmelwärts als auch die bodenwärts gerichtete Keule wird mit steigendem Anstellwinkel in Richtung Boden gebeugt, also gerade der Anströmung entgegen.

Ansauggeschwindigkeit Der Vergleich der Richtcharakteristiken in Abbildung 6.10 zeigt, dass das Strömungsfeld innerhalb des Triebwerkeinlaufs einen starken Einfluss auf den Schalldruckpegel des abgestrahlten Schalls hat. Mit steigender Ansauggeschwindigkeit verringert sich dabei der Pegel. Zwischen dem Fall ohne Grundströmung und dem mit Ansauggeschwindigkeit $M_{Fan} = -0.3$ bei $\alpha = 0^\circ$ beträgt die Reduktion etwa 4.5 dB. Die Steigerung der Geschwindigkeit auf $M_{Fan} = -0.5$ führt zu einer weiteren Reduktion um ca. 4 dB. Wie schon in der vorherigen Studie festgestellt wurde, hat der Anstellwinkel nahezu keinen Einfluss auf die Amplituden des abgestrahlten Schalls. Es ist aber wieder eine Änderung der Hauptausbreitungsrichtungen zu beobachten. Diese Stärke der Beugung ist dabei von der Ansauggeschwindigkeit abhängig. Verglichen mit der Konfiguration ohne Strömung beträgt die Verschiebung im Polarwinkel für $M_{Fan} = -0.3$ etwa 3° und für $M_{Fan} = -0.5$ etwa 7° .

Dreidimensionale Effekte Wird der Fernfeldschall nicht nur anhand von Richtcharakteristiken in der vertikalen Azimutalrichtung betrachtet, sondern auf einer Halbkugel um den Triebwerkseinlauf herum, sind dreidimensionale Effekte im Abstrahlverhalten zu erkennen. Abbildung 6.11 zeigt das dreidimensionale Schallfeld in einem Abstand von 10 m vom Triebwerkseinlauf anhand von Isolinien des Schalldruckpegels.

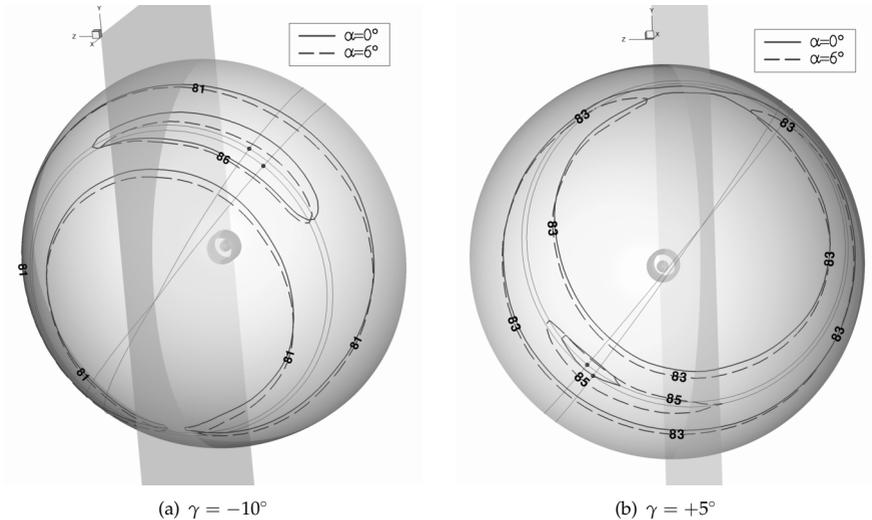


Abbildung 6.11: Isolinien und Maxima des Schalldruckpegels im Fernfeld für verschiedene Anstellwinkel α bei $M_{\text{Fan}} = -0.3$ und $M_{\infty} = -0.2$

Für den mit -10° negativ angeschrägten Einlauf in Abbildung 6.11(a) ist dabei zu beobachten, dass der maximale Schallpegel nicht in der vertikalen Azimutalebene auftritt, sondern zu dieser in Umfangsrichtung verschoben zu finden ist. Bei der Betrachtung der Maxima im Schallpegel für verschiedene Anstellwinkel α der Grundströmung ist erkennbar, dass dadurch neben der schon bekannten Verschiebung der Hauptabstrahlrichtung in polarer Richtung ebenfalls eine Verschiebung in azimuthaler Richtung auftritt. Diese azimuthale Verschiebung ist der Drehrichtung der ausgebreiteten Mode entgegengesetzt und mit etwa 8° deutlich größer als die Verschiebung um 2° in polarer Richtung.

Aus Abbildung 6.11(b) ist ersichtlich, dass dieses Verhalten auch bei einer positiven Gehäuseanschraegung von $\gamma = +5^\circ$ anzutreffen ist. Durch den betragsmäßig kleineren Anschraegungswinkel sind die Verschiebungen aber sowohl in polarer als auch in azimuthaler Richtung kleiner.

Eine Erklärung für diesen dreidimensionalen Effekt liefert die Betrachtung der Stromlinien der akustischen Intensität in Abbildung 6.12 für die Konfiguration mit 10° negativer Ansträgung bei einem Anstellwinkel von 6° .

Die Stromlinien veranschaulichen den Fluss der akustischen Energie durch den Triebwerkseinlauf ins Fernfeld. So ist innerhalb des Triebwerks gut die helikale Ausbreitung der $(7,0)$ -Mode erkennbar. An der gerundeten Gehäuselippe erfolgt dann eine Beugung des Schalls nach außen, was sich in den Keulen der Richtcharakteristiken widerspiegelt. Außerhalb des Triebwerks ist der Stromlinienverlauf dann geradlinig, folgt aber nicht der radialen Koordinatenrichtung. Dadurch finden sich dann auch die Pegelmaxima, die durch die oben bzw. unten vorstehende Gehäusekante hervorgerufen werden, nicht in der senkrechten Azimutalebene wieder, sondern zu ihr in Umfangsrichtung versetzt.

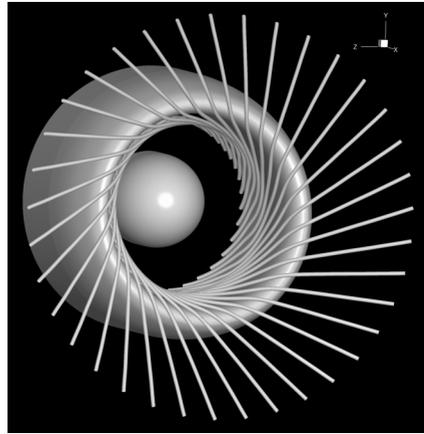


Abbildung 6.12: Stromlinien der akustischen Intensität

Praktische Einsetzbarkeit

Zur Beurteilung der Einsetzbarkeit des hier benutzten hybriden CAA-FWH-Verfahrens für die industrielle Anwendung spielen mehrere Faktoren eine Rolle. Dies sind zum einen die notwendigen Computerressourcen und die benötigte Rechenzeit für die jeweiligen CAA-Simulationen und Fernfeldberechnungen. Zum anderen ist aber auch die erforderliche Arbeitszeit für die Generierung der Rechnetze von Bedeutung.

Gittergenerierung Der Einsatz der Chimera-Technik ermöglicht eine relativ einfache Handhabung von komplexen Geometrien. So ist die Erstellung von CAA-Rechnetzen bei Vorliegen von grundlegenden Kenntnissen im Bereich der Generierung von strukturierten Rechnetzen innerhalb weniger Arbeitstage möglich. Werden immer ähnliche Konfigurationen bearbeitet wie z.B. nur Triebwerke kann sich diese Zeit auch auf einen einzelnen Arbeitstag verkürzen. Für geometrische Parameterstudien wie der hier durchgeführten Variation der Gehäuseansträgung ermöglicht der Overset-Gitter-Ansatz, fallspezifische Rechnetze ausgehend von einem Basisgitter im Bereich von Stunden zu erzeugen, wobei sich dieser Prozess sogar teilweise automatisieren lässt.

Rechenzeitbedarf Die hier durchgeführten Simulationen für eine Triebwerkseinlaufkonfiguration mit ca. 1.6 Millionen Gitterpunkten lassen sich auf einem heute üblichen Arbeitsplatzrechner mit Mehrkern-Prozessor ausführen.

Die CAA-Simulationen benötigten auf einer Vierkern-CPU eine Rechenzeit von ca. 3.5 h pro Fall. Die Fernfeldvorhersage mit dem FWH-Verfahren erfordert etwa 25 s pro Beobachter und lässt sich dabei sehr gut parallelisieren. Durch diese relativ geringen Anforderungen ist das hybride Verfahren schon im Entwurfsprozess einsetzbar, beispielsweise für eine Formoptimierung. Simulationen von Konfigurationen mit einer größeren Gitterpunktanzahl, die z.B. durch höhere zu untersuchende Frequenzen notwendig sind, können auf kleinen Rechenclustern durchgeführt werden, so dass der Einsatz moderner Höchstleistungsrechner für diese Aufgabenstellungen nicht erforderlich ist.

Fazit

Es konnte gezeigt werden, dass das Konzept der negativen Ansträgung von Triebwerkseinläufen zur Reduktion der Lärmbelästigung am Boden geeignet ist. Die gewünschte Lärminderung kann dabei nicht nur für Konfigurationen ohne Strömung erreicht werden, für welche sich die Wirksamkeit schon theoretisch voraussagen lässt, sondern ist auch unter Strömungseinfluss nachweisbar. Die verschiedenen Strömungseigenschaften beeinflussen dabei die Schallausbreitung und -abstrahlung unterschiedlich stark. So werden die Abstrahlrichtungen durch moderate Anstellwinkel leicht verändert, während die Schallpegel dadurch nur marginal beeinflusst werden. Die Ansauggeschwindigkeit hingegen hat starke Auswirkungen auf den Schalldruckpegel des abgestrahlten Schalls.

Als weiteres wesentliches Ergebnis der Untersuchungen dieses Anwendungsfalls konnte gezeigt werden, dass das hybride CAA-FWH-Verfahren geeignet ist, die Ausbreitung von modalen Schallfeldern durch einen Triebwerkseinlauf und deren Abstrahlung ins Fernfeld effektiv zu simulieren. Durch den Einsatz der Overset-Gitter-Technik im CAA-Verfahren vereinfacht sich die Generierung der notwendigen strukturierten Rechengitter erheblich. Insbesondere für Parameterstudien mit variierender Geometrie kann durch den Chimera-Ansatz eine deutliche Reduktion der zur Gittergenerierung notwendigen Arbeitszeit erreicht werden. Die CAA-Simulationen können für diese Art von Anwendungsfällen auf modernen Arbeitsplatzrechnern oder kleinen Rechenclustern in wenigen Stunden durchgeführt werden, wodurch eine industrielle Anwendung des Verfahrens möglich wird.

6.2 Nebenstromkanal eines Triebwerks

Tonaler Lärm, der beispielsweise durch Rotor-Stator-Interaktionen entsteht, breitet sich nicht nur durch den Einlauf, sondern auch durch den Nebenstromkanal (engl. *bypass duct*) eines Turbofantriebwerks aus, bevor er ins Fernfeld abgestrahlt wird. Durch die Befestigung des Triebwerks am Flügel bzw. Rumpf des Flugzeuges über einen Pylon kommt es zu einer Gabelung (engl. *bifurcation*) des Nebenstromkanals. Aus strukturellen Gründen verlaufen zusätzlich zu den Gabelungen auch noch Verstrebungen (engl. *struts*) durch den Kanal. Die Schallausbreitung wird durch diese Einbauten maßgeblich beeinflusst. Durch Reflexionen der in den Kanal eintretenden Moden an den Gabelungen und Verstrebungen wird so eine Modenstreuung hervorgerufen. Dies unterscheidet die Schallausbreitung im Nebenstromkanal von der im Einströmkanal, in dem die Modenstruktur unverändert bleibt und die Ausbreitung im wesentlichen nur durch Konvektions- und Beugungseffekte beeinflusst wird. Für Simulationen im Nebenstromkanal mit Einbauten wachsen auch die numerischen Anforderungen, da durch die Streuung eine Vielzahl von Moden aus dem gesamten Spektrum ausbreitungsfähiger Moden entsteht, die sich in positiver und negativer axialer Richtung im Kanal ausbreiten. Da die einzelnen angeregten Moden unterschiedlich gut von den zur Lärmreduktion im Kanal installierten absorbierenden Auskleidungen (engl. *linern*) gedämpft werden, ist es für die industrielle Anwendung von Bedeutung, die durch die Einbauten verursachten Änderungen im Modenfeld vorhersagen zu können.

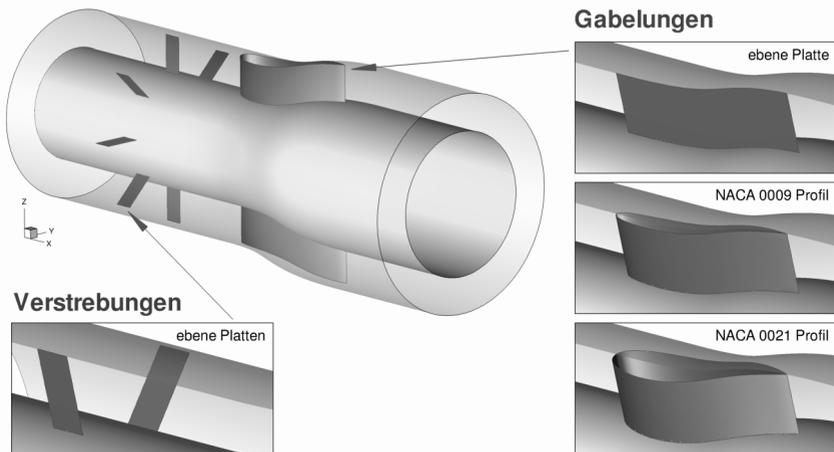


Abbildung 6.13: Nebenstromkanal mit verschiedenen Einbauten

Testkonfigurationen

Um die Anwendbarkeit des CAA-Verfahrens und der vorhandenen Analysemethoden für Untersuchungen im Nebenstromkanal zu beurteilen, werden verschiedene Testfallkonfigurationen betrachtet. Abbildung 6.13 gibt einen Überblick über diese Konfigurationen. So werden die Auswirkungen der verschiedenen Einbauten sowohl durch jeweils separate Simulationen für Gabelungen und Verstrebungen als auch durch Simulationen der Kombination beider Typen untersucht. Weiterhin wird evaluiert, welchen Einfluss die Form der Gabelung auf die Schallausbreitung im Kanal hat. Dazu werden als Gabelung eine ebene Platte sowie verschiedene Tragflügelprofile verwendet. Abschließend wird untersucht, wie sich die Kanalform auf das Modenfeld und dessen Ausbreitung auswirkt. Dies geschieht durch den Vergleich zwischen einem geraden und einem gekrümmten Kanalverlauf, wie ihn Abbildung 6.13 zeigt.

Um die Auswirkungen der verschiedenen Einbauten und Kanalformen besser differenzieren zu können, wird für die hier durchgeführten Untersuchungen auf eine Grundströmung als weiteren Einflussfaktor verzichtet.

Geometrie Die Untersuchungen erfolgen anhand einer generischen Prüfstandsgeometrie, d.h. die Schallausbreitung wird nur innerhalb des Nebenstromkanals betrachtet, während das Abstrahlverhalten unberücksichtigt bleibt. Die genauen Abmaße für den geraden und den gekrümmten Nebenstromkanal sowie die Lage der Verstrebungen und Gabelungen sind in Abbildung 6.14 dargestellt.

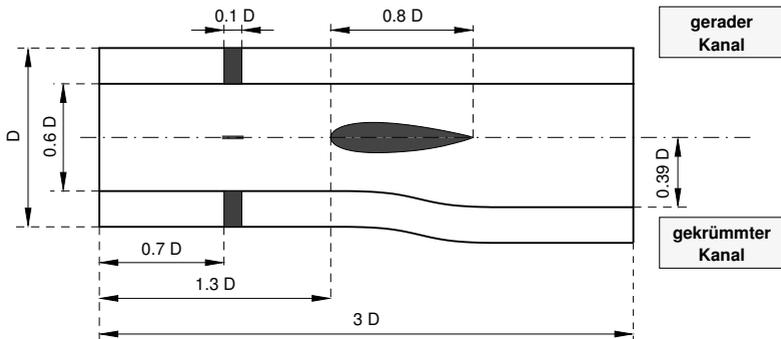


Abbildung 6.14: Nebenstromkanalgeometrie

Als Modell für die Verstrebungen kommen acht unendlich dünne ebene Platten der Länge $0,1 D$ zum Einsatz, die in Umfangsrichtung äquidistant angeordnet sind. Wie schon in der Übersichtsabbildung 6.13 gezeigt, finden drei verschiedene Gabelungsgeometrien Anwendung, angefangen mit einer unendlich dünnen ebenen

Platte der Länge $0.8 D$, über ein symmetrisches NACA 0009 Tragflügelprofil der gleichen Sehnenlänge wie die ebene Platte bis hin zu einem relativ dicken NACA 0021 Profil. Gegenüber realen Einbauten sind die so definierten Einbauten vereinfacht, da z.T. die endliche Ausdehnung der Bauteile nicht berücksichtigt wird und etwa fertigungs- bzw. strömungstechnisch sinnvolle Radien beim Übergang zwischen Gabelungsprofil und Kanalwand fehlen. Diese Vereinfachungen sollten aber keine gravierenden Auswirkungen auf die Schallausbreitung haben.

Die in Abbildung 6.14 dargestellte Aufweitung des gekrümmten Kanals wird durch eine Deformation des geraden Kanals entsprechend folgender Vorschrift erreicht:

$$r_{\text{crv}} = \begin{cases} 0 < x \leq x_1 & r \\ x_1 < x < x_2 & r + \left[\tanh \left(\frac{x - (x_1 + x_2)/2}{2(x_2 - x_1)/l} \right) / \tanh(l) + 1 \right] / (2\Delta r) \\ x_2 < x < L & r + \Delta r \end{cases} \quad (6.2)$$

mit $x_1 = 1.4 D$, $x_2 = 2.2 D$, $l = 2$, $\Delta r = 0.3 r_i$.

Diese bewirkt ab der axiale Position x_1 eine Aufweitung des Ringkanals um 30% des Innenradius r_i , wobei die Spaltbreite ($r_a - r_i$) konstant bleibt.

Rechengitter Die Vernetzung der verschiedenen Testkonfigurationen erfolgt unter Einsatz der Overset-Gitter-Technik aus Kapitel 4. Dies führt insbesondere in Hinblick auf die Variation der Einbauten zu einer deutlichen Reduktion des Generierungsaufwands verglichen mit herkömmlichen Vernetzungstechniken. Abbildung 6.15 zeigt die Lage und Anordnung der ins Host-Gitter eingebetteten Overset-Gitter für die einzelnen Einbauten.

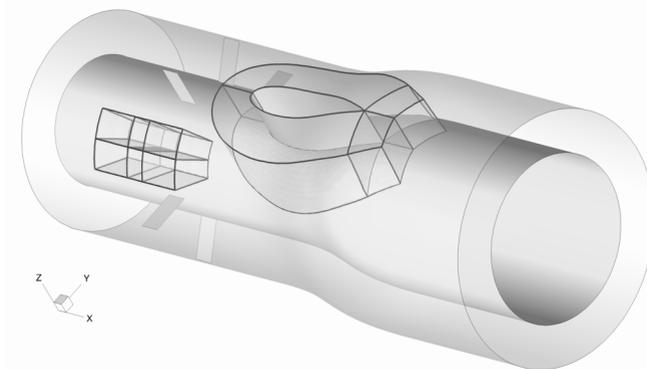


Abbildung 6.15: Lage der Overset-Gitter im Host-Gitter

Das Host-Gitter vom O-Typ vernetzt den gesamten zu simulierenden Abschnitt des Nebenstromkanals und ist in Abbildung 6.16 dargestellt. An das eigentliche Rechengebiet schließt sich eine separate Absorptionszone an, die es ermöglicht, die durch die dort formulierte PML-Randbedingung unphysikalisch gedämpfte Lösung in der Ergebnisbetrachtung auszublenden.

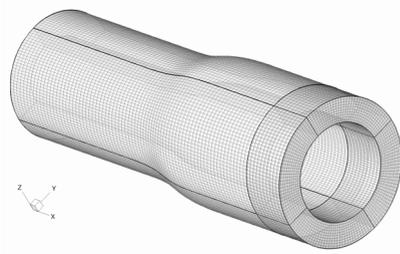


Abbildung 6.16: Host-Gitter mit separater Absorptionszone

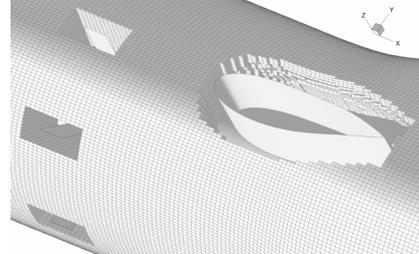
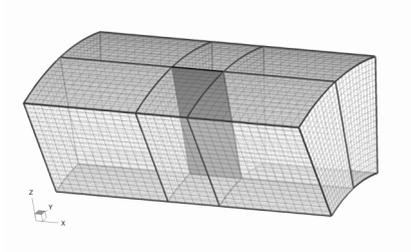
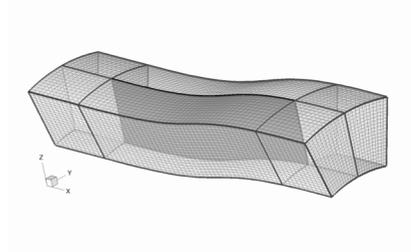


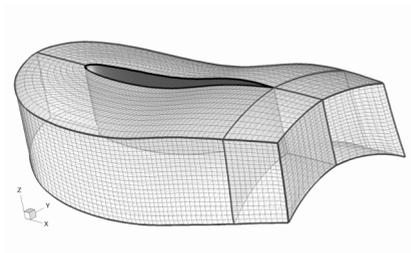
Abbildung 6.17: Host-Gitter ohne nicht zu lösende Bereiche



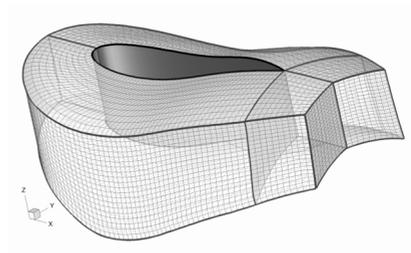
(a) Verstrebung



(b) Platten – Gabelung



(c) NACA 0009 – Gabelung



(d) NACA 0021 – Gabelung

Abbildung 6.18: Overset-Gitter der Einbauten für den gekrümmten Nebenstromkanal

Die Vernetzung der verschiedenen Einbauten mit entsprechenden Overset-Gittern zeigt Abbildung 6.18. Für die Verstreibungen und die Platten-Gabelung kommen Gitter vom H-Typ zum Einsatz, die sich aus jeweils sechs Blöcken zusammensetzen, so dass sich die unendlich dünnen Platten durch die Definition zweier Blockgrenzen als Wände realisieren lassen. Die NACA-Profil-Gabelungen werden mit körperangepassten Gittern von C-Typ vernetzt.

Die Generierung des Host-Gitters und der verschiedenen Overset-Gitter erfolgt zunächst für den geraden Kanal. Diese Gitter werden mittels der Transformationsgleichung (6.2) deformiert, um so die entsprechenden Gitter für den gekrümmten Kanal zu erhalten.

Je nach gewünschter Konfiguration werden dann die einzelnen Komponentengitter mittels des Chimera-Preprocessing-Werkzeugs zu Gesamtgittern zusammengeführt und die zur Interpolation notwendigen Koeffizienten berechnet.

Abhängig von den Einbauten in der jeweiligen Konfiguration haben die resultierenden Gesamtgitter eine Größe von 2.1 bis 2.4 Millionen Gitterpunkten, wobei davon je nach Fall 4% – 12% der Knoten durch den Einsatz der Chimera-Technik interpoliert werden müssen.

Schallquelle und Testfallmatrix Zur besseren Unterscheidung zwischen Ursache und Wirkung bei der Analyse des ausgebreiteten Schallfeldes im Nebenstromkanal ist es sinnvoll, als Schallquelle eine einzelne Rohrmode zu verwenden. Daher wird die (13,0)-Mode bei einer Frequenz von 4 kHz über die NC/F-Quellrandbedingung aus Kapitel 3.4.3 am Kanalanschluss bei $x = 0$ als Quelle vorgegeben.

Eine Aufstellung der verschiedenen Testfälle zur Untersuchung der Einflüsse der einzelnen Einbauten sowie Kombination aus diesen ist in Tabelle 6.2 zu finden.

Kanalform	Verstr.	Gabelung	Kanalform	Verstr.	Gabelung
gerade	—	—	gekrümmt	—	—
gerade	✓	—	gekrümmt	✓	—
gerade	—	Platte	gekrümmt	—	Platte
gerade	—	NACA 0009	gekrümmt	—	NACA 0009
gerade	—	NACA 0021	gekrümmt	—	NACA 0021
gerade	✓	Platte	gekrümmt	✓	Platte
gerade	✓	NACA 0009	gekrümmt	✓	NACA 0009
gerade	✓	NACA 0021	gekrümmt	✓	NACA 0021

Tabelle 6.2: Testfallmatrix für die Nebenstromkanal Konfigurationen

Ergebnisse

Ziel der Untersuchungen ist zum einen, den Einfluss des Profils der Gabelungen, den Effekt der Verstrebungen und die Auswirkungen der Kanalkrümmung zu bestimmen. Zum anderen soll evaluiert und bewertet werden, inwieweit sich das CAA-Verfahren und die Analysewerkzeuge für diesen Konfigurationstyp einsetzen lassen und wo Probleme auftreten bzw. Grenzen erreicht werden.

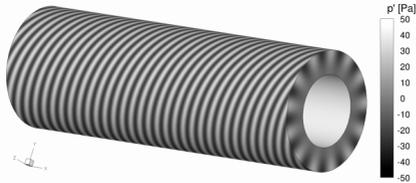
Die Simulationsergebnisse für die verschiedenen Einbautenkombinationen sind anhand von Momentaufnahmen des Schalldrucks in den Abbildungen 6.19 und 6.20 veranschaulicht. Dabei sind die Lösungen für den geraden und den gekrümmten Kanal jeweils gegenübergestellt. Abbildung 6.19 zeigt das ungestörte Schallfeld (a+b) und die Auswirkungen der verschiedenen Gabelungen (c–h) jeweils ohne Verstrebungen, während in Abbildung 6.20 die äquivalenten Lösungen für die Konfigurationen mit Verstrebungen dargestellt sind.

Bezüglich der Gabelungen ist festzustellen, dass diese die helikale Modenausbreitung stören. Auf der in helikaler Ausbreitungsrichtung der Mode entgegenstehenden Seite der Gabelung wird die einfallende Welle reflektiert, so dass sich stromab ein Interferenzmuster aus der Überlagerung der ursprünglichen Welle und der reflektierten Welle ausbildet. Die Ausbreitungsrichtungen stromab und stromauf kennzeichnen die positive bzw. negative axiale Richtung, was bei einer vorhandenen Grundströmung deren natürlicher Strömungsrichtung im Nebenstromkanal entsprechen würde. Hinter der Gabelungsrückseite bildet sich stromab ein akustisch abgeschatteter Bereich heraus, dessen Größe mit wachsender Entfernung von der Gabelung abnimmt. Genauere Untersuchungen zum Einfluss der Gabelungen folgen in Abschnitt 6.2.1.

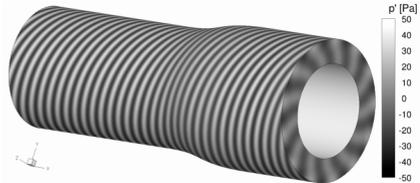
Die Verstrebungen haben qualitativ einen ähnlichen Effekt wie die Gabelungen. Bedingt durch die kürzere Länge und die größere Anzahl der Verstrebungen sind die Wirkungen bezüglich Reflexionen und Abschattung geringer. Stromab der Verstrebungen bildet sich so ein relativ komplexes Schallfeld aus. Bei der Kombination von Verstrebungen und Gabelungen kommt es zu einer Überlagerung beider Störungseffekte, die später in Abschnitt 6.2.2 genauer betrachtet werden.

Beim qualitativen Vergleich zwischen geradem und gekrümmtem Kanal sind in den Momentaufnahmen des Schalldrucks zunächst keine signifikanten Unterschiede zu erkennen. Die Auswirkungen der Kanalkrümmung werden daher in Abschnitt 6.2.3 anhand der Ergebnisse der Modalanalyse der ausgebreiteten Schallfelder qualitativ und quantitativ näher beleuchtet.

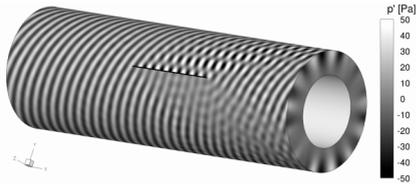
Als weitere qualitative Analysemöglichkeit können Stromliniendarstellungen der akustischen Intensität herangezogen werden, wie sie in Abbildung 6.21 für verschiedene Gabelungen gezeigt sind. Diese veranschaulichen den zeitlich gemittelten Fluss der akustischen Energie durch den Kanal. Es ist erkennbar, dass sich ähnlich zu den Momentaufnahmen des Schalldrucks hinter den Gabelungen ein abgeschatteter



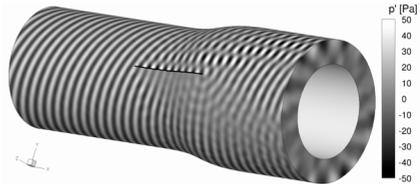
(a) ohne Einbauten, gerader Kanal



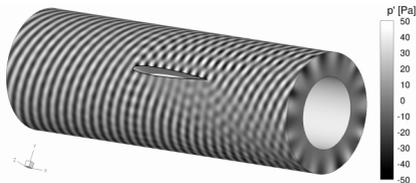
(b) ohne Einbauten, gekrümmter Kanal



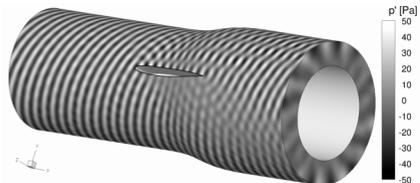
(c) Platten – Gabelung, gerader Kanal



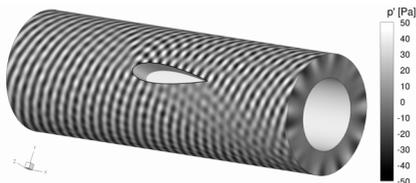
(d) Platten – Gabelung, gekrümmter Kanal



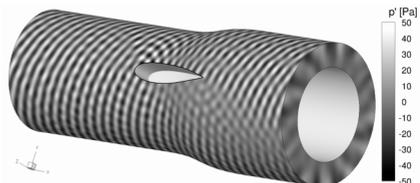
(e) NACA 0009 – Gabelung, gerader Kanal



(f) NACA 0009 – Gabelung, gekrümmter Kanal

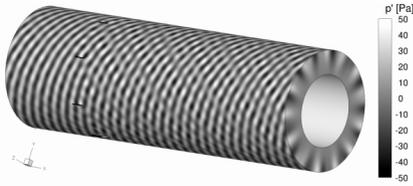


(g) NACA 0012 – Gabelung, gerader Kanal

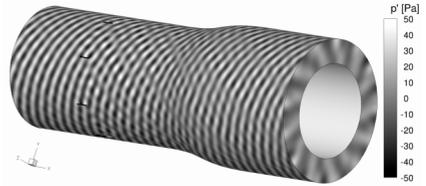


(h) NACA 0012 – Gabelung, gekrümmter Kanal

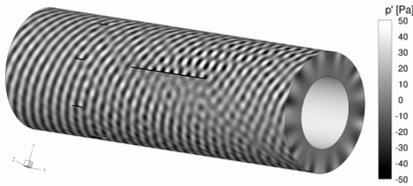
Abbildung 6.19: Momentaufnahmen des Schalldrucks bei ungestörter und durch verschiedene Gabelungen gestörter Wellenausbreitung



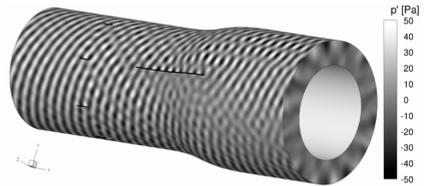
(a) ohne Gabelung, gerader Kanal



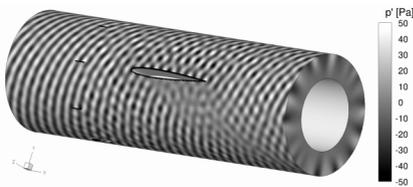
(b) ohne Gabelung, gekrümmter Kanal



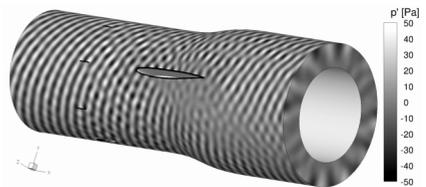
(c) Platten – Gabelung, gerader Kanal



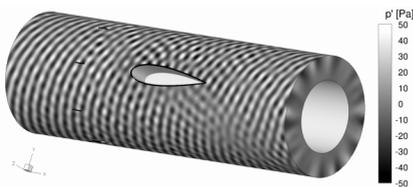
(d) Platten – Gabelung, gekrümmter Kanal



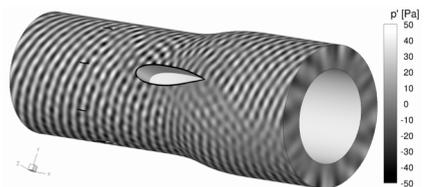
(e) NACA 0009 – Gabelung, gerader Kanal



(f) NACA 0009 – Gabelung, gekrümmter Kanal



(g) NACA 0012 – Gabelung, gerader Kanal



(h) NACA 0012 – Gabelung, gekrümmter Kanal

Abbildung 6.20: Momentaufnahmen des Schalldrucks im Kanal mit Verstrebungen und verschiedenen Gabelungen

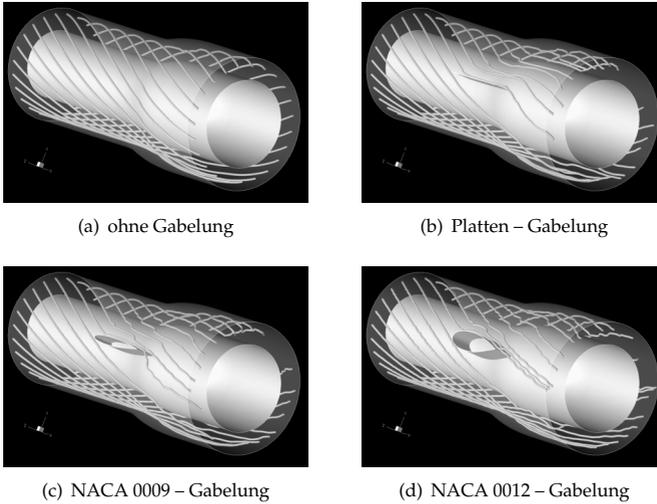


Abbildung 6.21: Stromlinien der akustischen Intensität

Bereich ausbildet. Stromab der Gabelungen bildet sich aber relativ schnell wieder das ursprünglich helikale Ausbreitungsmuster aus. Dies deutet darauf hin, dass trotz der Störungen der Wellenausbreitung durch die Einbauten die eingesetzte Quellmode dominant bezüglich der enthaltenen Energie bleibt.

Modalanalyse Zur genaueren Analyse des durch die Streuungseffekte der Einbauten hervorgerufenen Modenfeldes und zu dessen Quantifizierung wird das in Kapitel 3.5 vorgestellte Modalanalyseverfahren verwendet.

Dazu wird das berechnete Schallfeld sowohl vor den Einbauten als auch dahinter in Moden zerlegt und deren jeweilige Amplitude bestimmt. Die Analysepositionen sind in Abbildung 6.22 dargestellt.

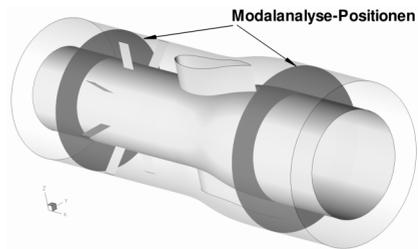


Abbildung 6.22: Modalanalyse-Positionen

Die Analyse schließt alle ausbreitungsfähigen Moden ein. Bei einer Frequenz von 4 kHz umfasst das zu untersuchende Modenspektrum für die hier verwendete Kanalgeometrie den Bereich von $-34 \leq m \leq 34$.

Die Simulationsdauer wird so gewählt, dass auch die nur knapp ausbreitungsfähigen Moden mit einer sehr geringen axialen Ausbreitungsgeschwindigkeit mindestens zwei mal die Länge des Kanals durchlaufen können.

Die detaillierten Modenspektren aus den Simulationen bei verschiedenen Kombinationen von Einbauten und Kanalformen sind im Anhang B.1 und B.2 zu finden.

Beurteilung der Lösungsqualität Bevor die Einflüsse der verschiedenen Einbauten und der Kanalkrümmung eingehender untersucht werden, ist zunächst eine Betrachtung der Lösungsqualität sinnvoll. Zur Beurteilung der Dissipativität wird der Schalleistungsverlust entsprechend Kapitel 5.1.1 über die Länge des Kanals berechnet. Der Verlauf der relativen Schalleistung auf axialen Querschnitten bezogen auf die Quellleistung ist in Abbildung 6.23 aufgetragen. Die Berechnung der Leistung erfolgt mit den Daten im Host-Gitter, daher sind Bereiche, die von einem Overset-Gitter überdeckt sind ausgeblendet. Der Vergleich der Simulation mit und ohne Einbauten zeigt, dass neben der allgemeinen Dissipation des CAA-Verfahrens selbst durch die Interpolation beim Einsatz der Chimera-Technik ein zusätzlicher Leistungsverlust auftritt. Dies deckt sich mit den Erkenntnissen aus der Validierung in Kapitel 5.2. Über die gesamte Lauflänge des Kanals entsteht so für die Verstrebungen ein zusätzlicher Energieverlust von ca. 7%, während dieser für die verschiedenen Gabelungen zwischen 3% und 6% liegt.

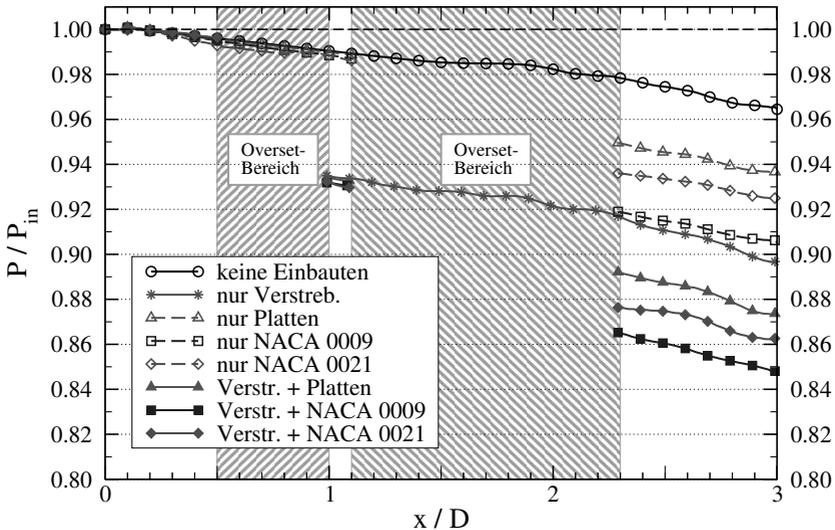


Abbildung 6.23: Axialer Verlauf der relativen Schalleistung auf Kanalquerschnitten bezogen auf die Quellleistung

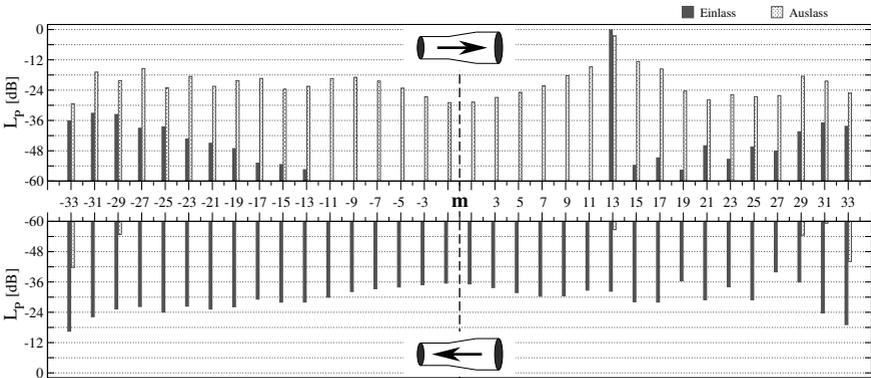


Abbildung 6.24: Verteilung der Azimutalmoden mit radialer Ordnung $n = 0$ im geraden Kanal mit NACA 0021 – Gabelung und Verstrebungen

Die Unterschiede erklären sich im Wesentlichen über die unterschiedliche Anzahl der zu interpolierenden Gitterpunkte und dem Verzerrungsgrad der Overset-Gitter selbst. Bei den Kombinationen von Verstrebungen und Gabelungen summieren sich die Fehler der Einzelkomponenten. Der resultierende Gesamtfehler einschließlich der verfahrensinherenten Dissipation liegt bei maximal 15% Verlust an Schalleitung, was im Schalldruckpegel in etwa 0.7 dB entspricht. Unter Berücksichtigung der im Vergleich zur Wellenlänge der Quellmode schon relativ großen Kanallänge ist ein solcher Fehler in Hinblick auf industrielle Anforderungen als hinreichend klein anzusehen.

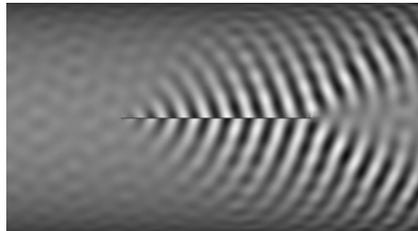
Ein weiterer wesentlicher Aspekt bei der Analyse der Simulationsergebnisse ist die Problematik der nur unzureichenden Reflexionsarmut von Quell- und Austrittsrandbedingungen bei Moden mit kleinem Cut-Off-Verhältnis. Für Nebenstromkanäle ist dies von besonderer Bedeutung, da durch die Einbauten physikalisch bedingte Reflexionen hervorgerufen werden. Bei der Ergebnisdiskussion muss daher berücksichtigt werden, dass im berechneten Modenfeld neben physikalisch sinnvollen Moden auch unphysikalische Reflexionen enthalten sind.

Bei den hier untersuchten Konfigurationen ist am Kanalansatz und -ende eine Unterscheidung zwischen realen Moden und numerischen Artefakten möglich. Abbildung 6.24 zeigt das Modenfeld am Ein- und Auslass des Kanals getrennt nach stromab und stromauf laufenden Moden. Am Einlass können neben der stromab laufenden Quellmode nur stromauf laufende Moden, die durch Reflexionen an den Einbauten entstehen, physikalisch sinnvoll sein. Analog dazu dürften am Auslass nur stromab laufende Moden auftreten. In Abbildung 6.24 sind aber am Auslass für Azimutalmoden hoher Modenordnung m stromauf laufende Moden erkennbar, die auf die unzureichende Wirksamkeit der PML-Randbedingung bei sehr kleinen

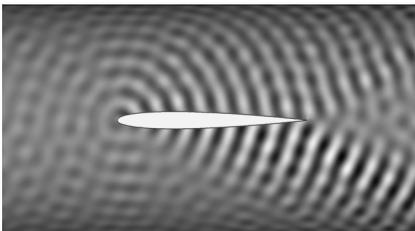
Cut-Off-Verhältnissen zurückzuführen sind. Die am Einlass stromab laufenden Moden entstehen durch Reflexion der stromauf laufenden Moden am Quellrand. Die Amplituden der unphysikalisch reflektierten Moden liegen aber mindestens 12 dB unter ihren jeweiligen Quellmoden und sind verglichen mit der Amplitude der dominierenden ursprünglich eingegebenen Mode mehr als 30 dB kleiner. Daher sollten die Auswirkungen durch die Wechselwirkung dieser Moden mit den relevanten physikalischen Moden vernachlässigbar sein. In den folgenden Betrachtungen werden aus diesem Grund am Kanaleinlass nur die stromauf laufenden Moden und am Kanalaustritt nur die stromab laufenden Moden betrachtet.

6.2.1 Einfluss des Profils der Gabelung

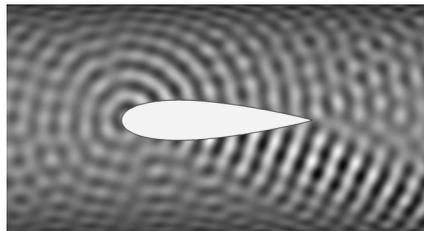
Die Untersuchung der Auswirkungen der Form der Gabelungen erfolgt anhand von symmetrischen Tragflügelprofilen unterschiedlicher Profildicke bei gleicher Sehnenlänge. Einen Spezialfall stellt die unendlich dünne ebene Platte dar, die einem Profil der Dicke null entspricht. Weiterhin werden Gabelungen mit einem schlanken NACA 0009 und einem relativ dicken NACA 0021 – Profil untersucht.



(a) Platten – Gabelung



(b) NACA 0009 – Gabelung



(c) NACA 0021 – Gabelung

Abbildung 6.25: Isolierter Effekt der Gabelungen als Differenz des Schalldrucks von gestörter und ungestörter Wellenausbreitung

Für eine detailliertere qualitative Beurteilung des Streueffekts der Gabelungsprofile sind in Abbildung 6.25 der Vorgehensweise von Panek et al. [69] folgend die Differenzen zwischen den gestörten Druckfeldern aus den Abbildungen 6.19(c,e+g) und dem ungestörten Feld aus Abbildung 6.19(a) dargestellt. In Rotationsrichtung der Mode hinter der jeweiligen Gabelung ist ein Wellenmuster zu erkennen, dass um 90° phasenverschoben gegenüber der ungestörten Welle ist. Dadurch kommt es in der Summe zu einer Auslöschung der einfallenden Mode, was zu einem abgeschatteten Bereich führt. Die Wellenmuster auf der der einfallenden Mode zugewandten Seite der Gabelung sind gleichphasig mit dieser und verdeutlichen die Reflexionen. Für den Einfluss der Profildicke auf die Modenstreuung ist aus Abbildung 6.25 qualitativ ablesbar, dass für die ebene Platte stromauf nahezu keine reflektierten Wellen auftreten. Mit zunehmender Profildicke steigt aber der Anteil des stromauf in Richtung Quelle reflektierten Schalls, während stromab eine Reduktion zu beobachten ist.

Detailliertere Aussagen dazu können anhand des in Abbildung 6.26 dargestellten Modenfeldes getroffen werden. Es zeigt den Vergleich der stromab laufenden Moden am Auslass und der stromauf laufenden Moden am Einlass des geraden Kanals für die Konfiguration ohne Einbauten im Vergleich zu den drei verschiedenen Gabelungen.

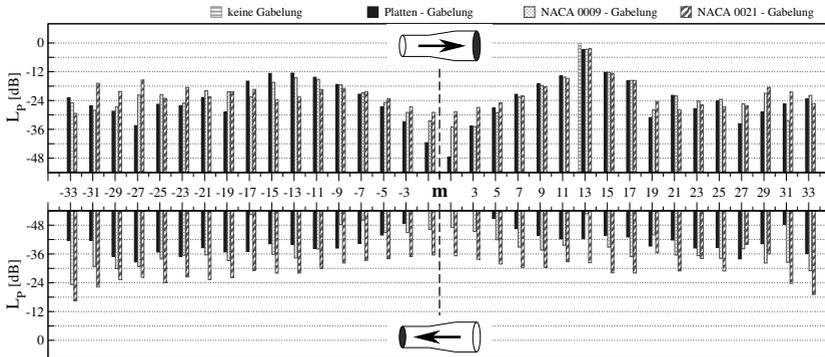


Abbildung 6.26: Vergleich verschiedener Gabelungen anhand der Verteilung der Azimutalmoden im geraden Kanal

Die Gabelungen rufen durch die zweifache Kanalteilung eine Streuung in jede zweite ausbreitungsfähige Azimutalmode relativ zur Quellmode hervor, was den Erwartungen aus der Theorie von Tyler und Sofrin [103] entspricht. Besonders stark sind dabei die Moden vertreten, deren azimutale Modenordnung betragsmäßig nahe der Ordnung der Quellmode liegt, in diesem Fall also z.B. die Moden mit $m = \pm 11, \pm 13$ und ± 15 . Die Amplituden der gestreuten Moden liegen dabei aber mindestens 12 dB unter der der eingebrachten Quellmode.

Der Vergleich der Modenfelder für Konfigurationen mit und ohne Gabelungen zeigt, dass die Einbauten zu einer Reduktion der Amplitude der dominanten Quellmode (13,0) um ca. 2.5 dB führen, was sich durch die Verteilung der akustischen Energie auf die gestreuten Moden erklärt.

Für die Quellmode sind nur marginale Unterschiede zwischen den verschiedenen Gabelungen zu beobachten. Wie schon bei der qualitativen Beurteilung vermutet wurde, sind die Amplituden der stromab laufenden Moden, die an der ebenen Platte reflektiert werden, höher als bei den NACA-Profil-Gabelungen. Mit steigender Profildicke sinken die Amplituden dieser Moden. Zwischen ebener Platte und NACA 0021 Profil treten Unterschiede von bis zu 12 dB auf. Bei den stromauf laufenden Moden ist der umgekehrte Effekt zu beobachten, der zu einem Anstieg der Amplitude mit wachsender Profildicke führt. Auffällig dabei ist, dass die Streuung vorwiegend in Moden mit hoher azimuthaler Modenordnung erfolgt.

Der Vergleich der Modenfelder von geradem und gekrümmtem Nebenstromkanal in Anhang B.3 zeigt, dass auch im gekrümmten Kanal ähnliche Einflüsse durch die Gabelungen hervorgerufen werden.

6.2.2 Einfluss der Verstrebungen

Als vereinfachtes Modell für die in Triebwerken üblichen Verstrebungen werden acht äquidistant um den Umfang verteilte unendlich dünne ebene Platten eingesetzt. Zur näheren Untersuchung der Auswirkungen der Verstrebungen auf die Schallausbreitung im Kanal wird zunächst deren isolierter Effekt auf das Druckfeld betrachtet. Dies geschieht analog zur Vorgehensweise bei den Gabelungen, indem zum gleichen Zeitpunkt die Differenz zwischen den Druckfeldern mit Verstrebungen aus Abbildung 6.20(a) und ohne Einbauten aus Abbildung 6.19(a) gebildet

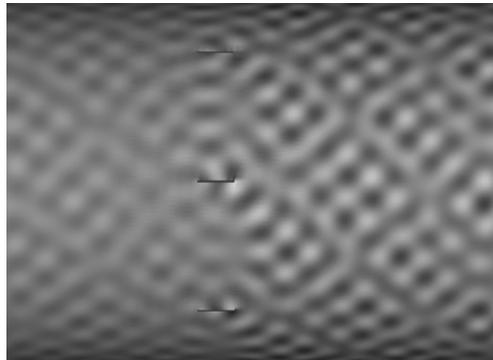


Abbildung 6.27: Isolierter Effekt der Verstrebungen auf die Wellenausbreitung

wird, die in Abbildung 6.27 gezeigt ist. Qualitativ ist erkennbar, dass sich ein strukturiertes Muster im Druckfeld ausbildet, welches stromab hinter den Verstrebungen stärker ausgeprägt ist als stromauf. Anhand dieser Darstellung sind aber keine so klaren Aussagen über die Einflüsse auf das Ausbreitungsverhalten zu treffen, wie für die Gabelungen im vorangegangenen Abschnitt.

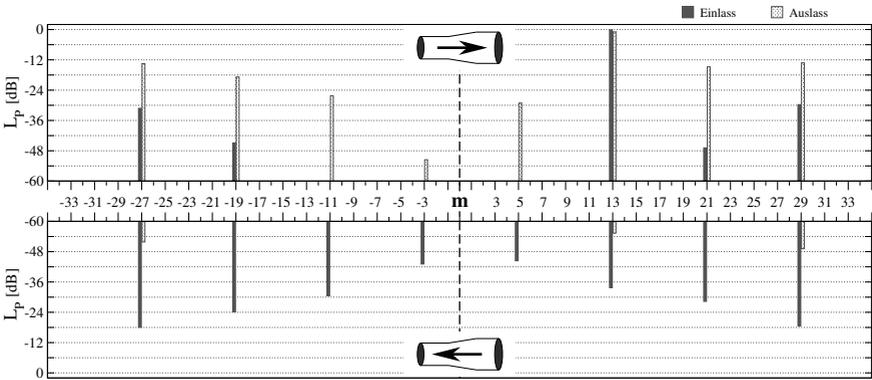


Abbildung 6.28: Verteilung der Azimutalmoden im geraden Kanal mit Verstrebungen

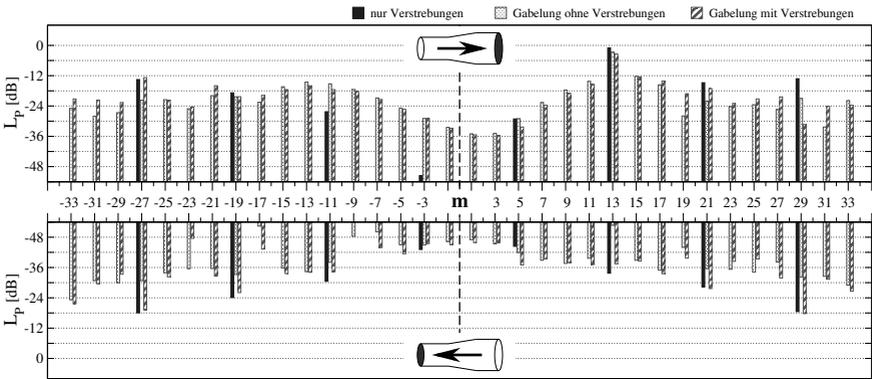


Abbildung 6.29: Verteilung der Azimutalmoden mit NACA 0009 – Gabelung mit und ohne Verstrebungen

Die Betrachtung des modal zerlegten Schallfeldes in Abbildung 6.28 ermöglicht aber detailliertere qualitative und quantitative Analysen, wobei die Verteilung der stromab und stromauf laufenden Azimutalmoden sowohl vor als auch hinter den Einbauten gezeigt ist. Verglichen mit den Gabelungen hat das gestreute Modenfeld eine andere Struktur. Die Verstrebungen stellen acht Störkörper innerhalb des Kanals dar, wodurch eine Streuung in Moden mit einer azimuthalen Ordnung von Vielfachen von acht relativ zur Ursprungsmode stattfindet. Dieses Verhalten ist entsprechend der Theorie von Tyler und Sofrin [103] zu erwarten und bestätigt damit zumindest qualitativ die Gültigkeit des CAA-Verfahrens für die Vorhersage der Schallausbreitung in solchen Konfigurationen.

Die Amplitude der Quellmode (13,0) verringert sich zwischen Einlass und Auslass um weniger als 1 dB. Die Reduktion fällt damit deutlich geringer aus als für die Gabelungen. Dies lässt sich damit erklären, dass hier die Anzahl der gestreuten Moden nur etwa 25% der Anzahl derer bei den Gabelungen beträgt und so weniger Energie von der Quellmode in andere Moden übergeht. Die Amplituden der gestreuten Moden sind vergleichbar mit denen der Gabelungskonfigurationen und liegen mindestens 12 dB unter dem Schallpegel an der Quelle. Im Vergleich zu den stromab laufenden gestreuten Moden haben die stromauf laufenden Moden eine etwa 6 dB geringere Amplitude, was sich auch mit den qualitativen Betrachtungen zu Abbildung 6.27 deckt.

Wie schon bei den Betrachtungen zur Lösungsqualität anhand von Abbildung 6.24 zeigen sich auch in Abbildung 6.28 unphysikalische Moden, die aus Reflexionen am Eintritt und Austritt des Kanals resultieren. Aufgrund der mangelnden Reflexionsarmut der Quell- bzw. PML-Randbedingung für kleine Cut-Off-Verhältnisse sind diese Reflexionen besonders für betragsmäßig hohe azimutale Modenordnungen zu beobachten. Die Amplituden dieser unphysikalischen Moden sind aber mindestens 16 dB kleiner als die der physikalischen Moden und sogar 30 dB geringer als die Quellamplitude. Daher sollten die Auswirkungen auf die technisch relevanten Moden relativ klein und damit vernachlässigbar sein.

Zur Untersuchung der Auswirkungen der Verstrebungen in Kombination mit Gabelungen im Nebenstromkanal ist exemplarisch in Abbildung 6.29 der Vergleich der Modenfelder im geraden Kanal mit und ohne Verstrebungen dargestellt. Dabei sind zwei Tendenzen feststellbar. Zum einen summieren sich die Amplitudenreduktionen durch Verstrebungen und Gabelungen für die dominanten Quellmode und zum anderen wachsen die Amplituden der durch die Gabelung gestreuten Moden, die auch durch die Verstrebungen angeregt werden an. Eine vollständige Übersicht der Vergleiche für die verschiedenen Gabelungen im geraden und gekrümmten Kanal ist im Anhang B.4 zu finden.

6.2.3 Einfluss der Kanalkrümmung

Beim Vergleich zwischen geradem und gekrümmtem Kanal anhand von Momentaufnahmen des Drucks, wie sie in den Abbildungen 6.19 und 6.20 gezeigt sind, ist qualitativ kein wesentlicher Unterschied zu erkennen. Zur detaillierteren Untersuchung der Auswirkungen der Kanalkrümmung auf das Ausbreitungsverhalten werden daher wieder die mittels Modalanalyse zerlegten Schallfelder betrachtet. Bei den Untersuchungen zum Einfluss von Gabelungen und Verstrebungen ist zu beobachten, dass die Amplituden der Mehrzahl der Moden im gekrümmten Kanal geringer sind als die der entsprechenden Moden im geraden Kanal. Bei diesen Analysen werden aber jeweils nur die ersten Radialmoden ($n = 0$) betrachtet, da diese Moden dort signifikant größere Amplituden aufwiesen als die höherer Radialmoden.

Der Energieverlust der meisten Azimutalmoden bei der radialen Modenordnung $n = 0$ lässt sich daher nur plausibel durch eine Streuung der Quellmode in höhere Radialmoden erklären. Deshalb ist in Abbildung 6.30 das Modenfeld der ersten, zweiten und dritten Radialmode für die stromab laufende Quellmode (13, 0) am Ausgang des Kanals dargestellt. Es ist erkennbar, dass am Ende des gekrümmten Kanals die Amplitude der ersten Radialmode verglichen mit dem geraden Kanal um ca. 3 dB sinkt. Weiterhin tritt im gekrümmten Kanal die zweite Radialmode (13, 1) mit einer relativ starken Amplitude auf, die etwa 6 dB geringer ist als die der (13, 0)–Mode. Die dritte Radialmode ($n = 2$) liegt 24 dB unter der Grundmode und hat daher praktisch keine Relevanz mehr.

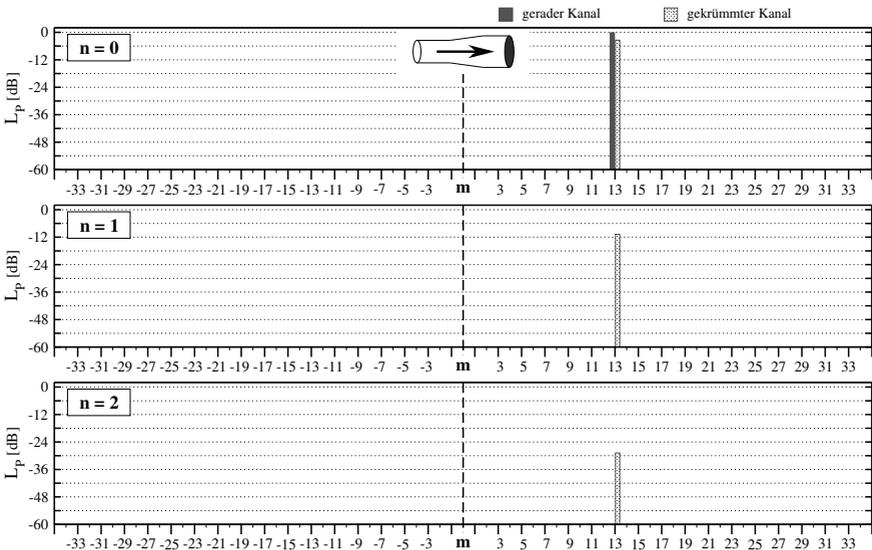


Abbildung 6.30: Krümmungseinfluss auf die Azimutalmoden im Kanal ohne Einbauten

Der Vergleich der gestreuten Modenfelder bei den Konfigurationen mit Verstrebungen in Abbildung 6.31 zeigt ein ähnliches Verhalten hinsichtlich der höheren Radialmoden. Der Effekt beschränkt sich aber auf die Mode (13, 1), während für die anderen gestreuten Moden mit der radialen Ordnung $n = 1$ nahezu keine Unterschiede zwischen geradem und gekrümmtem Kanal festzustellen sind. Für die zweiten radialen Moden ist zwar eine stärkere Anregung durch die Kanalkrümmung zu beobachten, die Amplituden bleiben aber wieder weit unterhalb des technisch relevanten Niveaus.

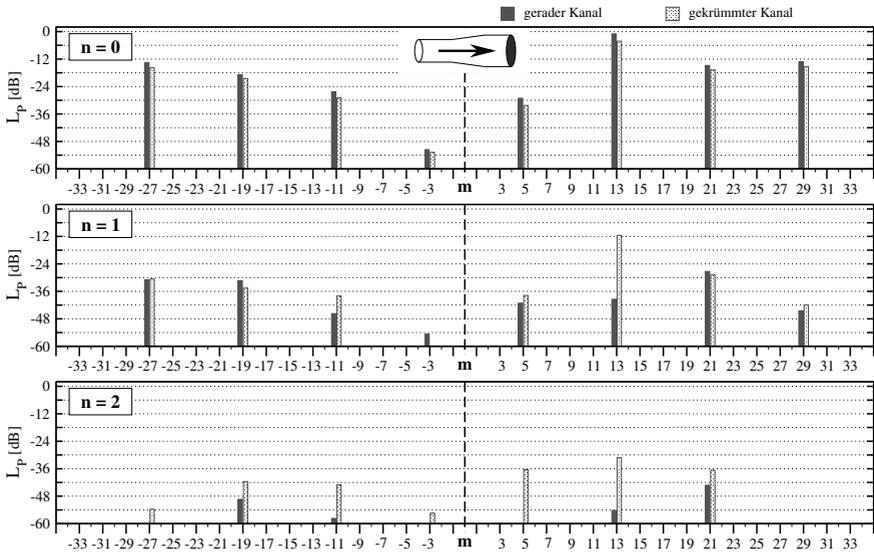


Abbildung 6.31: Krümmungseinfluss auf die Azimutalmoden im Kanal mit Verstrebungen

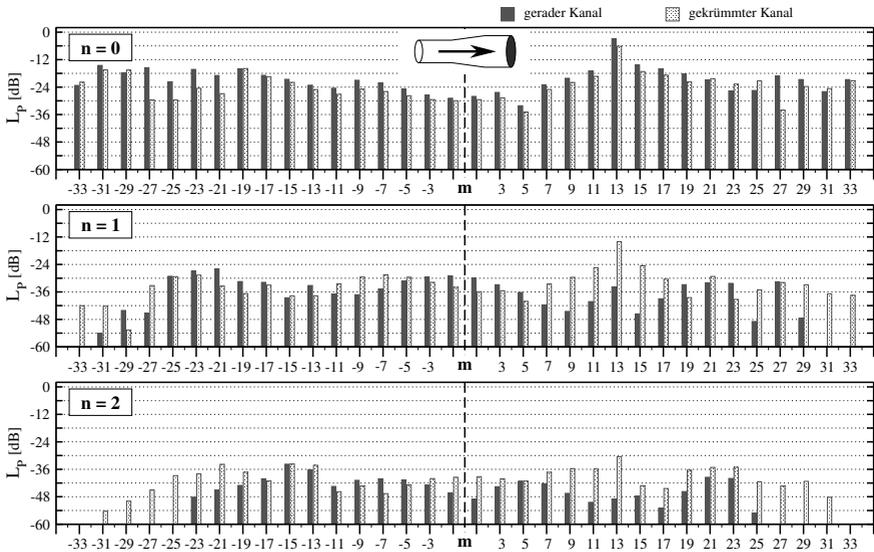


Abbildung 6.32: Krümmungseinfluss auf die Azimutalmoden im Kanal mit NACA 0021 – Gabelung und Verstrebungen

In Abbildung 6.32 ist exemplarisch für die verschiedenen Kombinationen aus Verstreungen und Gabelungen der Vergleich der Modenfelder von geradem und gekrümmtem Kanal mit NACA 0021 – Gabelung und Verstreungen gezeigt. Die weiteren vergleichenden Diagramme dazu sind im Anhang B.5 zu finden. Auch für die Kombination der verschiedenen Einbauten ist wieder eine starke Streuung in die $(13, 1)$ -Mode zu beobachten. Die benachbarten Moden, wie z.B. die $(11, 1)$ - oder die $(15, 1)$ -Mode, werden im gekrümmten Kanal stärker angeregt als im geraden Kanal, wobei ihre Amplituden aber etwa 10 dB unterhalb der $(13, 1)$ -Mode liegen. Weiterhin ist zu beobachten, dass für $n = 1$ und 2 im gekrümmten Kanal betragsmäßig höhere Azimutalmoden entstehen. Dies erklärt sich durch die Kanalaufweitung, die zum Absinken der Cut-Off-Frequenz führt, so dass im gekrümmten Kanal höhere Azimutalmoden ausbreitungsfähig sind als im geraden Kanal.

Für die hier untersuchten Konfigurationen liegt der Haupteffekt durch die Kanalkrümmung in der Streuung der Quellmode $(13, 0)$ in höhere Radialmoden. Der Energietransfer von der $(13, 0)$ - zur $(13, 1)$ -Mode hat zur Folge, dass die Amplitude der dominanten Quellmode verglichen mit dem geraden Kanal am Austritt um etwa 3 dB bis 4 dB sinkt, während die Amplitude der $(13, 1)$ -Mode stark anwächst.

Praktische Einsetzbarkeit

Wie schon beim Triebwerkseinlauf diskutiert, spielen bei der Beurteilung der Einsetzbarkeit des CAA-Verfahrens sowohl die benötigten Computerressourcen für die Simulation und Analyse als auch die Arbeitszeit für die Gittergenerierung eine entscheidende Rolle.

Gittergenerierung Durch den Einsatz des Chimera-Technik wird auch für die hier untersuchten komplexen Konfigurationen eine relativ einfache Generierung der Rechnetze ermöglicht. Die Erzeugung des Host-Gitters für den Kanal ohne Einbauten ist trivial. Der Aufwand zur Generierung der Overset-Gitter für die Einbauten variiert mit den zu berücksichtigenden Details, wie etwa Radien beim Übergang zwischen der eingebauten Komponente in die Kanalwand oder auch der Packungsdichte der Komponenten. Für die hier eingesetzten einfachen generischen Einbauten sind die Gitter aber sehr einfach und schnell zu erzeugen, so dass die Gittergenerierung pro Testfall innerhalb weniger Stunden erfolgen kann. Mit der Komplexität der Einbauten steigt der Arbeitsaufwand an, bleibt aber im Bereich von Tagen.

Rechenzeitbedarf Die hier durchgeführten Simulationen für eine Triebwerkseinlaufkonfiguration mit ca. 2.4 Millionen Gitterpunkten lassen sich auf einem heute üblichen Arbeitsplatzrechner mit einem Vierkern-Prozessor ausführen und benötigen dazu eine Rechenzeit von etwa 25 h pro Fall. Die zur Auswertung eingesetzte Modalanalyse erfordert nur wenige Minuten.

Für die Vernetzung detaillierter Einbauten sind feine Rechenetze notwendig. Für in der Praxis anzutreffende höhere Modenordnungen und Frequenzen steigt die benötigte Gitterpunktanzahl sehr schnell an. Die Simulationen solcher Konfigurationen machen dann den Einsatz von Rechenclustern notwendig. Je nach eingesetzter Prozessoranzahl lassen sich die Simulationen aber noch innerhalb weniger Tage realisieren.

Fazit

Anhand eines vereinfachten generischen Modells des Nebenstromkanals eines Turbofantriebwerks wurde untersucht, welchen Einfluss verschiedene Einbauten und Kanalformen auf die Schallausbreitung haben. Dabei konnte festgestellt werden, dass die als Quelle eingebrachte einzelne Rohrmode in ein komplexes Modenfeld gestreut wird. Durch die von den Einbauten verursachten Teilungen des Kanals in Umfangsrichtung entstehen Azimutalmoden im Abstand von Vielfachen der Teilungsanzahl relativ zur Ordnung der Eingangsmode. Die größten Amplituden werden bei Moden mit azimutalen Ordnungen erzielt, die betragsmäßig nahe der Quellmode liegen. Die eingebrachte Mode bleibt dabei dominant, ihre Amplitude verringert sich aber, da Energie durch die Streuung in andere Moden übergeht. Durch die Krümmung des Kanals werden höhere Radialmoden erzeugt, die ebenfalls eine Reduktion der Amplitude der Quellmode zur Folge haben. Die Streuung in höhere Azimutal- und Radialmoden kann positive Auswirkungen auf die Wirksamkeit von Lärminderungsmaßnahmen durch schallabsorbierende Materialien, sogenannten *Linern*, haben, da diese Moden eine geringere axiale Ausbreitungsgeschwindigkeit haben und daher länger mit den Linern in Kontakt sind. Genauere Aussagen sind aber nur durch Simulationen mit einer Impedanzrandbedingung möglich, die solche absorbierenden Materialien berücksichtigen. Ein weiterer interessanter Aspekt für zukünftige Untersuchungen ist der Einfluss der Grundströmung auf die entstehenden Schallfelder.

In Hinblick auf die praktische Anwendbarkeit in anwendungsnahen Konfigurationen konnte zum einen gezeigt werden, dass durch den Einsatz des CAA-Verfahrens mit Overset-Gitter-Technik sehr einfach und effizient numerische Untersuchungen der Schallausbreitung von Nebenstromkanälen mit verschiedenen Einbauten möglich sind. Zum anderen stehen mit der Modal- und Intensitätsanalyse geeignete Verfahren zur Auswertung und Beurteilung der Simulationsergebnisse zur Verfügung. Bei der Bewertung der Lösungen ist aber das Auftreten von unphysikalischen Moden zu berücksichtigen, die durch die unzureichende Wirksamkeit der reflexionsfreien Randbedingungen bei kleinen Cut-Off-Verhältnissen entstehen. Die Arbeitszeit zur Gittergenerierung und die für die Simulationen notwendigen Rechenzeiten bewegen sich in einem Bereich, der einen industriellen Einsatz des Verfahrens, beispielsweise bei der Entwurfsvalidierung, erlaubt.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die Simulation der Ausbreitung von tonalem Schall ausgehend vom Quellgebiet durch den Ein- bzw. Nebenstromkanal eines anwendungsnahen Flugtriebwerks und dessen Abstrahlung ins Fernfeld stellt besondere Anforderungen an das eingesetzte numerische Verfahren. Es konnte gezeigt werden, dass ein hybrider Ansatz, der auf einer zonalen Zerlegung des Untersuchungsgebiets hinsichtlich der physikalischen Anforderungen an die Modellierung der akustischen Vorgänge beruht, für die jeweilige Zone den Einsatz eines effizienten numerischen Verfahrens ermöglicht. Dadurch wird eine Simulation der Schallausbreitung von der Quelle bis ins Fernfeld mit einem für die industrielle Anwendung geeigneten Aufwand ermöglicht.

Zur Modellierung der akustischen Vorgänge in den verschiedenen Zonen des Untersuchungsgebiets wurden unterschiedliche Grundgleichungen vorgestellt, etwa die isentropen linearisierten Eulergleichungen für die Ausbreitzzone innerhalb des Triebwerks oder die akustische Analogie von Ffowcs Williams & Hawkins als Wellengleichungsformulierung für die Fernfeldvorhersage. Die verschiedenen Modellgleichungen können dabei unter Berücksichtigung der physikalischen Eigenschaften des Schalls durch Vereinfachung oder Umformung der strömungsmechanischen Bilanzgleichungen hergeleitet werden. Für die Simulation der Schallausbreitung wird ein optimiertes CAA-Verfahren mit einer räumlichen DRP-Diskretisierung vierter Ordnung und einer zeitlichen LDDRK-Diskretisierung sechster Ordnung eingesetzt. Die durchgeführte Verfahrensvalidierung konnte die theoretisch vorhergesagten Ordnungen im Dissipations- und Dispersionsfehler bestätigen. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass mit einer Gitterauflösung von sieben Punkten pro Wellenlänge im CAA-Verfahren dessen Dissipations- und Dispersionsfehler hinreichend klein für den Einsatz in technischen Anwendungen bleiben.

Als kritischer Aspekt beim Einsatz des CAA-Verfahrens in Rohrumbgebungen, wie sie für Flugtriebwerke typisch sind, hat sich die Formulierung wirksamer reflexionsarmer Randbedingungen zum Rechengebietsabschluss innerhalb des Rohres herauskristallisiert. Die besten Ergebnisse konnten mittels der Perfectly-Matched-Layer-Randbedingung erzielt werden. Trotz des nicht unerheblichen numerischen Mehraufwands beim Einsatz der PML gegenüber den anderen untersuchten Randbedingungen ist sie diesen vorzuziehen, da sie insbesondere bei kleinen Cut-Off-Verhältnissen unphysikalische Reflexionen deutlich wirkungsvoller unterdrückt.

Die Hauptschwierigkeit beim Einsatz von CAA-Verfahren höherer Ordnung bildet die effiziente Vernetzung komplexer Geometrien. Durch den Einsatz der in dieser Arbeit adaptierten und in das CAA-Verfahren implementierten Overset-Gitter-Methode können zum einen die aus der hohen Verfahrensordnung resultierenden

Probleme vermieden und zum anderen der Arbeitsaufwand zur Gittergenerierung deutlich reduziert werden. Bei der Validierung des CAA-Verfahrens unter Einbeziehung der Overset-Gitter-Methode zeigte sich, dass sich die zusätzlich zu den Diskretisierungsfehlern entstehenden Interpolationsfehler in der gleichen Größenordnung bewegen, so dass der Einsatz der Methode in der gegebenen Form zulässig ist. Neben der Verbesserung der Gitterqualität gegenüber einer klassischen blockstrukturierten Vernetzung offenbart die Technik ihre größten Stärken bei der effizienten Generierung von Rechengittern für geometrischen Parameterstudien, wie sie bei den Untersuchungen von Triebwerkseinläufen mit unterschiedlichen Gehäuseanschragungen und von Nebenstromkanälen mit verschiedenen Einbauten durchgeführt wurden. Dabei kann die Gittergenerierung partiell automatisiert werden, was zu einer weiteren Reduktion der notwendigen Arbeitszeit führt.

Anhand des JT15D-Testfalls wurde die Schallausbreitung von der Quelle durch einen Triebwerkseinlauf bis ins Fernfeld untersucht. Dabei kamen alle Komponenten des hybriden CAA-FWH-Verfahrens in Kombination zum Einsatz. Der Vergleich zwischen Simulation und Experiment zeigt eine gute Übereinstimmung, was belegt, dass die Kopplung von CAA- und FWH-Verfahren auch für komplexe Anwendungsfälle funktional und gültig ist.

Zur Darstellung der Möglichkeiten bei der Nutzung des Verfahrens für die Simulation der Schallausbreitung in technisch relevanten Anwendungen wurde die Schallausbreitung durch Triebwerkseinläufe mit unterschiedlicher Gehäuseanschragung und durch Nebenstromkanäle mit verschiedenen Kombinationen von Einbauten untersucht. Die Konfigurationen wurden dabei so gewählt, dass sie typischen Turbofantriebwerken nahe kommen. Dabei konnte gezeigt werden, dass das Konzept der negativen Ansträgung von Triebwerkseinläufen zur Reduktion der Lärmelast am Boden geeignet ist. Die gewünschte Lärmreduzierung kann dabei nicht nur für Konfigurationen ohne Strömung erreicht werden, für welche sich die Wirksamkeit schon theoretisch voraussagen lässt, sondern ist auch unter Strömungseinfluss nachweisbar. Anhand eines vereinfachten, generischen Modells des Nebenstromkanals wurde der Einfluss verschiedener Einbauten und Kanalformen auf die Schallausbreitung untersucht. Es konnte festgestellt werden, dass eine als Quelle eingebrachte einzelne Rohrmode in ein komplexes Modenfeld gestreut wird. Die eingebrachte Mode bleibt dabei dominant, ihre Amplitude verringert sich aber, da Energie durch die Streuung in andere Moden übergeht. Durch eine Krümmung des Kanals werden höhere Radialmoden erzeugt, die ebenfalls eine Reduktion der Amplitude der Quellmode zur Folge haben. Bei der Bewertung der numerischen Lösungen ist aber das Auftreten von unphysikalischen Moden zu berücksichtigen, die durch die unzureichende Wirksamkeit der reflexionsfreien Randbedingungen bei kleinen Cut-Off-Verhältnissen entstehen. Die Streuung in höhere Azimutal- und Radialmoden kann positive Auswirkungen auf die Wirksamkeit von Lärmreduzierungsmaßnahmen durch Auskleidungen mit schallabsorbierenden Materialien (Linern) haben, da diese Moden eine geringere axiale Ausbreitungsgeschwindigkeit

haben und daher länger mit den Linern in Kontakt sind. Genauere Aussagen sind aber nur durch Simulationen mit einer Impedanzrandbedingung möglich, die solche absorbierenden Materialien berücksichtigt.

In Hinblick auf die praktische Anwendbarkeit in anwendungsnahen Konfigurationen konnte zum einen gezeigt werden, dass durch den Einsatz des CAA-Verfahrens mit Overset-Gitter-Technik sehr einfach und effizient numerische Untersuchungen der Schallausbreitung in Flugtriebwerken möglich sind. Weiterhin steht mit dem optional einsetzbaren FWH-Integralverfahren zusätzlich ein effizientes Werkzeug für die Vorhersage des abgestrahlten Fernfeldschalls zur Verfügung. Die Verfahren zur Modal- und Intensitätsanalyse bieten weitere Möglichkeiten zur Auswertung und Beurteilung der Simulationsergebnisse. Die Arbeitszeit zur Gittergenerierung und die für die Simulationen notwendigen Rechenzeiten bewegen sich dabei in einem Bereich, der einen industriellen Einsatz des Verfahrens, beispielsweise bei der Entwurfsvalidierung, erlaubt.

Ausblick Das in dieser Arbeit vorgestellte hybride CAA-FWH-Verfahren mit integrierter Overset-Gitter-Technik ermöglicht die effiziente Simulation der Schallausbreitung von Anwendungsfällen mit komplexer Geometrie unter Strömungseinfluss im Zeitbereich. In der vorliegenden Form beschränkt es sich aber auf schallharte Körperoberflächen. Zur Reduktion der Lärmemission werden in realen Triebwerken sowohl im Einlauf als auch im Nebenstromkanal Auskleidungen mit schallabsorbierenden Materialien, sogenannte Liner, verwendet. Eine entsprechende Formulierung und Implementierung von Linern im Zeitbereich unter Strömungseinfluss für CAA-Verfahren höherer Ordnung ist von Richter et al. [77, 78] vorgestellt und beispielsweise von Panek et al. [70] in einer dreidimensionalen Triebwerkskonfiguration erprobt worden. Vor diesem Hintergrund ist eine Kombination des hier vorgestellten CAA-Verfahrens für komplexe Geometrien mit dem Wandimpedanzmodell zur Berücksichtigung von schallabsorbierenden Auskleidungen sinnvoll und in Umsetzung begriffen. Ein entsprechendes Forschungsvorhaben in Kooperation mit Industriepartnern, welches Untersuchungen von Linern in realitätsnahen Triebwerkskonfigurationen beinhaltet und auch eine Validierung anhand von experimentellen Ergebnissen vorsieht, befindet sich momentan in der Durchführung.

Weiterhin besteht auch Bedarf bei der Verbesserung von reflexionsarmen Randbedingungen für Rohrumgebungen. Dies gilt insbesondere für die Simulation in Nebenstromkanälen, in denen durch die Einbauten bedingte stromauflaufende Wellen am Quellrand unphysikalisch zurück ins Rechengebiet reflektiert werden. Eine Ansatzmöglichkeit zur Lösung dieses Problems bietet die Formulierung einer Quellrandbedingung auf Basis der PML. Mit den Randbedingungsformulierungen von Ehrenfried [27] sowie Hu et al. [49] existieren weitere Ansätze für einen reflexionsarmen Rechengebietsabschluss, die im hier vorgestellten Verfahren bisher noch nicht erprobt wurden.

Literaturverzeichnis

- [1] ABARBANEL, S.; GOTTLIEB, D.: A Mathematical Analysis of the PML Method. *Journal of Computational Physics*, **134**(2), 357–363, 1997.
- [2] ABARBANEL, S.; GOTTLIEB, D.; HESTHAVEN, J. S.: Well-posed Perfectly Matched Layers for Advective Acoustics. *Journal of Computational Physics*, **154**(2), 266–283, 1997.
- [3] ABDEL HAY, J.: CGNS2CAA. Technische Universität Berlin, 2008, Handbuch.
- [4] ABDELHAMID, Y. A.: Acoustic Propagation and Radiation of Fan Noise Sources in Treated Ducts. *AIAA paper 2005–3021*, 2005.
- [5] ACARE GROUP OF PERSONALITIES: European Aeronautics: A Vision for 2020. Bericht, Advisory Council for Aeronautics Research in Europe, 2001, URL <http://www.acare4europe.org/html/documentation.asp>.
- [6] ASTLEY, R. J.; EVERSMAN, W.: Acoustic transmission in non-uniform ducts with mean flow, part II: The finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, **74**(1), 103–121, 1981.
- [7] ATKINS, H. L.: Continued Development of Discontinuous Galerkin Method for Computational Aeroacoustic Applications. Techn. Ber. NASA-AIAA-97-1581, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, USA, 1997.
- [8] ATKINS, H. L.; SHU, C-W.: Quadrature-Free Implementation of the Discontinuous Galerkin Method for Hyperbolic Equations. Techn. Ber. NASA-AIAA-96-1683, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, USA, 1996.
- [9] ATTA, E. H.; VADYAK, T.: A Grid Interfacing Zonal Algorithm for Three Dimensional Transonic Flows About Aircraft Configurations. *AIAA paper 82–1017*, 1982.
- [10] BAKER, N.; BEWICK, C: Noise Test of a Negatively Scafed Inlet Flare. *AIAA paper 2001–2139*, 2001.
- [11] BAUMEISTER, K. J.; HOROWITZ, S. J.: Finite Element–Integral Acoustic Simulation of JT15D Turbofan Engine. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **106**, 405–413, 1984.

- [12] BECHARA, W.; BAILLY, C.; LAFON, P.; CANDEL, M.: Stochastic Approach to Noise Modelling for Free Turbulent Flows. *AIAA Journal*, **32**(3), 455–463, 1994.
- [13] BECKMANN, N.; KRIEGEL, H.-P.; SCHNEIDER, R.; SEEGER, B.: The R*-tree: an efficient and robust access method for points and rectangles. *SIGMOD '90: Proc. of the 1990 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*, 322–331, Atlantic City, NJ, USA, 1990.
- [14] BENEK, J. A.; BUNING, P. G.; STEGER, J. L.: A 3-D Chimera Grid Embedding Technique. *AIAA paper 83-1944*, 1983.
- [15] BENEK, J. A.; STEGER, J. L.; DOUGHERTY, F. C.: A Flexible Grid Embedding Technique with Application to the Euler Equations. *AIAA paper 85-1523*, 1985.
- [16] BERENGER, J.-P.: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, **114**(2), 185–200, 1994.
- [17] BOGEY, C.; BAILLY, C.: Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: Far field formulation and validation test cases. *Acta Acustica united with Acoustica*, **88**(4), 462–471, 2002.
- [18] BOGEY, C.; BAILLY, C.: A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *Journal of Computational Physics*, **194**(1), 194–214, 2004.
- [19] BOLTALOVA, N.; SCHEMEL, C.; THIELE, F.; MICHEL, U.: Propagation of Acoustical Waves in an Axisymmetrical Duct With Swirling Mean Flow. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **3**(1), 2003.
- [20] BRENTNER, K.: Numerical Algorithms for Acoustic Integrals - the Devil is in the Details. *AIAA Paper 96-1706*, 1996.
- [21] CASALINO, D.; ROGER, M.; JACOB, M. C.: Prediction of sound propagation in ducted potential flows using green's function discretization. *AIAA Journal*, **42**(2), 736–744, 2004.
- [22] CHU, B.-T.; KOVÁSZNAY, L. S. G.: Non-linear Interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, **3**(2), 494–514, 1958.
- [23] CLARK, L. R.; THOMAS, R. H.; DOUGHERTY, R. P.; FARASSAT, F.; GERHOLD, C. H.: Inlet Shape Effects on the Far- Field Sound of a Model Fan. *AIAA Paper 1997-1589*, 1997.
- [24] COCKBURN, B.; KARNIAKAKIS, G. E.; SHU, C-W. (Hg.): *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Applications, Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Bd. 11. Springer, Berlin, 2000.

-
- [25] DELFS, J. W.: An Overlapped Grid Technique for High Resolution CAA Schemes for Complex Geometries. *AIAA Paper 2001–2199*, 2001.
- [26] DONGARRA, J.; OTTO, S.; SNIR, M.; WALKER, D.: An Introduction to the MPI Standard. Techn. Ber. CS-95-274, University of Tennessee, 1995.
- [27] EHRENFRIED, K.: Absorbing Boundary Conditions for a Linear Hyperbolic System with Uniformly Characteristic Boundary. *AIAA Paper 2004–2968*, 2004.
- [28] EHRENFRIED, K.: *Strömungsakustik*. Mensch & Buch Verlag, Berlin, 2004.
- [29] ENGHARDT, L.; TAPKEN, U.; KORNOW, O.; KENNEPOHL, F.: Acoustic Mode Decomposition of Compressor Noise under Consideration of Radial Flow Profiles. *AIAA Paper 2005–2830*, 2005.
- [30] ENGHARDT, L.; ZHANG, Y.; NEISE, W.: Experimental verification of a radial mode analysis technique using wall-flush mounted sensors. *Journal of the Acoustical Society of America*, **105**(2), 1186–1186, 1999.
- [31] ESCHRICHT, D.: *C3NOISE – An Aero–Acoustic Analogy Tool*. Technische Universität Berlin, 2008, Handbuch.
- [32] EUROPÄISCHE KOMMISSION: White Paper - ‘European Transport Policy for 2010: time to decide’. Statusbericht, Europäische Kommission, 2001, URL http://ec.europa.eu/transport/white_paper/documents/doc/lb_com_2001_0370_en.pdf.
- [33] EWERT, R.; SCHRÖDER, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *Journal of Computational Physics*, **188**, 365–398, 2003.
- [34] FARASSAT, F.: Theory of Noise Generation From Moving Bodies With an Application to Helicopter. Techn. Ber. NASA R-451, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, USA, 1975.
- [35] FARASSAT, F.: Linear Acoustic Formulas for the Calculation of Rotating Blade Noise. *AIAA Journal*, **19**(9), 1122–1130, 1981.
- [36] FLOWCS WILLIAMS, J. E.; HAWKINGS, D. L.: Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **A264**(1151), 321–342, 1969.
- [37] GEROLYMOS, G. A.; MICHON, G. J.; NEUBAUER, J.: Analysis and Application of Chorochronic Periodicity in Turbomachinery Rotor/Stator Interaction Computations. *Journal of Propulsion and Power*, **18**(6), 1139–1152, 2002.

- [38] GILES, M. B.: Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equations Calculations. *AIAA Journal*, **28**(12), 2050–2058, 1990.
- [39] GUTTMAN, A.: R-trees: a dynamic index structure for spatial searching. *SIGMOD Records*, **14**(2), 47–57, 1984.
- [40] HADJIELEFATHERIOU, M.: Spatial Index Library, 2008, quelloffene Softwarebibliothek (LGPL), verfügbar unter <http://research.att.com/~mariah/spatialindex/>.
- [41] HAMILTON, J. A.; ASTLEY, R. J.: Acoustic Propagation on Irrotational Mean Flows Using Time-domain Finite and Infinite Elements. *AIAA Paper 2003–3208*, 2003.
- [42] HARDIN, J. C.; LEMKIN, S. L.: Aeroacoustic Computation of Cylinder Wake Flow. *AIAA Journal*, **22**(1), 51–57, 1984.
- [43] HEDMAN, S. C.: An Application of the Embedded Grid Technique to the Calculation of Transsonic Flow Past Wings. Techn. Ber. AU-1600, The Aeronautical Research Institute of Sweden, 1980.
- [44] HESTHAVEN, J. S.: On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations. *Journal of Computational Physics*, **142**(1), 129–147, 1998.
- [45] HOLSTE, F.; NEISE, W.: Noise Source Identification in a Propfan Model by Means of Acoustical Near Field Measurements. *Journal of Sound and Vibration*, **203**(4), 641–665, 1997.
- [46] HOWE, M. S.: Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluid Mechanics*, **71**(4), 625–673, 1975.
- [47] HU, F. Q.: A Stable Perfectly Matched Layer For Linearized Euler Equations In Unsplit Physical Variables. *Journal of Computational Physics*, **173**(2), 455–480, 2001.
- [48] HU, F. Q.; HUSSAINI, M. Y.; MANTHEY, J. L.: Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics. *Journal of Computational Physics*, **124**(52), 177–191, 1996.
- [49] HU, F. Q.; LI, X. D.; LIN, D. K.: PML absorbing boundary condition for non-linear aeroacoustics problems. *AIAA Paper 2006–2521*, 2006.
- [50] ISRAELI, M.; ORSZAG, S. A.: Approximation of radiation boundary condition. *Journal of Computational Physics*, **41**(1), 115–135, 1981.

-
- [51] KEITH, G. M.; PEAKE, N.: High-Wavenumber Acoustic Radiation from a Thin-Walled Scarfed Cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, **255**(1), 147–160, 2002.
- [52] LAN, J. H.; BREARD, C.: Validation of 3D Acoustic Propagation Code with Analytical and Experimental Results. *AIAA paper 2005–2901*, 2005.
- [53] LAN, J. H.; GUO, Y. P.; BREARD, C.: Validation of 3D Acoustic Propagation Code with JT15D Static and Flight Test Data. *AIAA paper 2004–2986*, 2004.
- [54] LEE, Y.; BAEDER, J. D.: High-Order Overset Method for Blade Vortex Interaction. *AIAA Paper 2002–0559*, 2002.
- [55] LELE, S. K.: Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution. *Journal of Computational Physics*, **103**(1), 16–42, 1992.
- [56] LI, X. D.; SCHEMEL, C.; MICHEL, U.; THIELE, F.: Azimuthal Sound Mode Propagation in Axisymmetric Flow Ducts. *AIAA Journal*, **42**(10), 2019–2027, 2003.
- [57] LI, X. D.; SCHÖNWALD, N.; YAN, J. P.; THIELE, F.: A Numerical Study on the Acoustic Radiation from a Scarfed Intake. *AIAA Paper 2003–3245*, 2003.
- [58] LIGHTHILL, M. J.: On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory. *Proc. of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **211**(1107), 564–587, 1952.
- [59] LILLEY, G. M.: On the Noise from Air Jets. Techn. Ber. ARC-20376, Aeronautical Research Council, 1958.
- [60] LONG, L. N.: A Nonconservative Nonlinear Flowfield Splitting Method for 3-D Unsteady Fluid Dynamics. *AIAA Paper 2000–1998*, 2000.
- [61] MARSDEN, O.; BOGEY, C.; BAILLY, C.: High-order curvilinear simulations of flows around non-Cartesian bodies. *AIAA Paper 2004–2813*, 2004.
- [62] MONTETAGAUD, F.; MONToux, S.: Negatively Scarfed Intake: Design and Acoustic Performance. *AIAA Paper 2005–2944*, 2005.
- [63] MORFEY, C. L.: Acoustic Energy in Non-Uniform Flows. *Journal of Sound and Vibration*, **14**(2), 159–170, 1971.
- [64] MORGENWECK, D.; SCHEMEL, C.; THIELE, F.: Comparison of computational aeroacoustics with theory using the benchmark case of sound waves excited from a semi infinite duct. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **4**(1), 2004.

- [65] MÖHRING, W.: On vortex sound at low Mach number. *Journal of Fluid Mechanics*, **85**(4), 685–691, 1978.
- [66] ORTEGA, J. M.; RHEINBOLDT, W. C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York–London, 1970.
- [67] OVENDEN, N. C.; RINESTRA, S. W.: Mode matching strategies in slowly varying engine ducts. *AIAA Journal*, **42**(9), 1832–1840, 2004.
- [68] PANEK, Ł.: Numerische Simulation der Störungsausbreitung in Düsenströmungen unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2004.
- [69] PANEK, Ł.; SCHÖNWALD, N.; RICHTER, C.; ABDELHAY, J.; THIELE, F.: Numerical Investigation of Sound Propagation in Annular Ducts with Installation Parts. *Proc. of the 16th International Congress on Sound and Vibration*, Krakau, Polen, 2009.
- [70] PANEK, Ł.; SCHÖNWALD, N.; RICHTER, C.; THIELE, F.: Simulation of the Rearward Propagation of Fan Noise through a Long Cowl Aero-engine. *AIAA Paper 2008–2820*, 2008.
- [71] PATERA, A. T.: A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, **54**(3), 468–488, 1984.
- [72] PIERCE, A. D.: *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. McGraw-Hill, New York, 1981.
- [73] PIERCE, A. D.: Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, **87**(6), 2292–2299, 1990.
- [74] REDONNET, S.; DESQUESNES, G.; MANOHA, E.: Numerical Study of Acoustic Installation Effects Through a Chimera CAA Method. *AIAA Paper 2007–3501*, 2007.
- [75] RICHTER, C.; EHRENFRIED, K.; SCHÖNWALD, N.; STEGER, M.; THIELE, F.: Acoustic inensity based data analysis and assessment in computational aeroacoustics. *Journal of Sound and Vibration*, **327**(3–5), 490–506, 2009.
- [76] RICHTER, C.; PANEK, Ł.; THIELE, F.: On the Application of CAA-Methods for the Simulation of Indirect Combustion Noise. *AIAA Paper 2005–2919*, 2005.
- [77] RICHTER, C.; THIELE, F.; BUSSE, S.; HEUWINKEL, C.; RÖHLE, I.; ENGHARDT, L.; MICHEL, U.: Impedance eduction from energy dissipation measurements with flow. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **9**(1), 2009.

- [78] RICHTER, C.; THIELE, F.; LI, X. D.; ZHUANG, M.: Comparison of Time-Domain Impedance Boundary Conditions for Lined Duct Flows. *AIAA Journal*, **45**(6), 1333–1345, 2007.
- [79] RIENSTRA, S. W.; EVERSMAAN, W.: A numerical comparison between the multiple-scales and finite-element solution for sound propagation in lined flow ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, **437**(1), 367–384, 2001.
- [80] RIENSTRA, S. W.; HIRSCHBERG, A.: *An Introduction to Acoustics*. Eindhoven University of Technology, 2008, URL <http://www.win.tue.nl/~sjoerdr/papers/boek.pdf>.
- [81] SCHADE, H.: *Kontinuumsphysik*. Technische Universität Berlin, 1997, Vorlesungsskript.
- [82] SCHADE, H.: *Tensoranalysis*. de Gruyter, Berlin–New York, 1997.
- [83] SCHADE, H.; KUNZ, E.: *Strömungslehre*. de Gruyter, Berlin–New York, 1989.
- [84] SCHEMEL, C.: Modellierung und numerische Simulation der Entstehung und Ausbreitung von Schall durch Entropiewellen in beschleunigten Rohrströmungen. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2003.
- [85] SCHNELL, R.: Numerische Simulation des akustischen Nahfeldes einer Triebwerksgebläsestufe. Dissertation, Technische Universität Berlin, 2004, URL <http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2004/835/>.
- [86] SCHÖNWALD, N.: Entwicklung und Validierung eines parallelen CAA-Verfahrens zur Untersuchung der zweidimensionalen Schallausbreitung. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2000.
- [87] SCHÖNWALD, N.; SCHEMEL, C.; ESCHRICHT, D.; MICHEL, U.; THIELE, F.: Investigation on the Sound Propagation and Radiation from Aero-Engine Intakes. *Proc. of the Fourth Aeroacoustics Workshop, SWING+*, Aachen, 2004.
- [88] SCHÖNWALD, N.; SCHEMEL, C.; ESCHRICHT, D.; THIELE, F.; MICHEL, U.: Numerische Simulation der Schallabstrahlung vom Einlauf eines Flugtriebwerks. *Fortschritte der Akustik - DAGA*, Aachen, 2003.
- [89] SCHÖNWALD, N.; SCHEMEL, C.; THIELE, F.; MICHEL, U.: Numerische Simulation der Ausbreitung von Umfangsmoden in axialsymmetrischen Rohren. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **2**(1), 2002.
- [90] SHERER, S. E.; SCOTT, J. N.: Comparison of Highly-Accurate Interpolation Methods. *AIAA Paper 2001-0282*, 2001.

- [91] SHERER, S. E.; SCOTT, J. N.: Development and Validation of a High-Order Overset Grid Flow Solver. *AIAA Paper 2002-2733*, 2002.
- [92] STANESCU, D.; AIT-ALI-YAHIA, D.; HABASHI, W. G.; ROBICHAUD, M. P.: Spectral Element Method for Linear Fan Tone Noise Radiation. *AIAA Journal*, **42**(4), 696–705, 2004.
- [93] STANESCU, D.; HABASHI, W. G.: 2N-Storage Low Dissipation and Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics. *Journal of Computational Physics*, **143**(2), 674–681, 1998.
- [94] TAM, C. K. W.: Advances in Numerical Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics. *Journal of Computational Acoustics*, **6**(4), 377–402, 1998.
- [95] TAM, C. K. W.; AURIAULT, L.; CAMBULI, F.: Perfectly Matched Layer as an Absorbing Boundary Condition for the Linearized Euler Equations in Open and Ducted Domains. *Journal of Computational Physics*, **144**(1), 213–234, 1998.
- [96] TAM, C. K. W.; DONG, T. Z.: Wall Boundary Conditions for High-Order Finite Difference Schemes in Computational Aeroacoustics. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **6**(6), 303–322, 1994.
- [97] TAM, C. K. W.; DONG, Z.: A Study of the Short Wave Components in Computational Acoustics. *Journal of Computational Acoustics*, **1**(1), 1–30, 1993.
- [98] TAM, C. K. W.; WEBB, J. C.: Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics. *Journal of Computational Physics*, **107**(2), 262–281, 1993.
- [99] TAM, C.K.W.; HU, F.Q.: An Optimized Multi-Dimensional Interpolation Scheme for Computational Aeroacoustics Applications Using Overset Grids. *AIAA Paper 2004-2812*, 2004.
- [100] THOMPSON, D. S.: A Mesh Embedding Approach for Prediction of Transonic Wing/Body/Store Flow Fields. Techn. Ber. NASA-CP 2201, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA, USA, 1981.
- [101] THOMPSON, K. W.: Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, **68**(1), 1–24, 1987.
- [102] THOMPSON, K. W.: Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II. *Journal of Computational Physics*, **89**(2), 439–461, 1990.
- [103] TYLER, J. M.; SOFRIN, T. G.: Axial Flow Compressor Noise Studies. *SAE Transactions*, **70**, 309–332, 1962.

-
- [104] VAN OOSTEROM, A.; STRACKEE, J.: The Solid Angle of a Plane Triangle. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **BME-30**(2), 125–126, 1983.
- [105] WEIR, S. D.; BOULDIN, B.; MENDOZA, J. M.: Static and Flight Aeroacoustic Evaluations of a Scarfed inlet. *AIAA Paper 2006–2462*, 2006.
- [106] WILLIAMSON, J. H.: Low-storage Runge-Kutta schemes. *Journal of Computational Physics*, **35**(1), 48–56, 1980.
- [107] YAN, J. P.; XUE, L. P.; THIELE, F.: Biharmonic grid generation using a multi-grid method. ZHUANG, F. G. (Hg.) *Proc. of the 7th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, 384–389, Peking, V.R. China, 1997.
- [108] YAN, J.P.: Effiziente Simulation komplexer Strömungen auf semi-strukturierten Gittern. Dissertation, Technische Universität Berlin, Mensch und Buch Verlag, 2003.
- [109] YIN, J.; DELFS, J.: Sound Generation from Gust-Airfoil Interaction Using CAA-Chimera Method. *AIAA Paper 2001–2136*, 2001.
- [110] ZHANG, X.; CHEN, X. X.; MORFEY, C. L.; NELSON, P. A.: Computation of Spinning Modal Radiation from an Unflanged Duct. *AIAA Journal*, **42**(9), 1795–1801, 2004, originally published as AIAA Paper 2002–2475.
- [111] ZHENG, S.; ZHUANG, M.: Application and verification of time domain impedance boundary conditions in multi-dimensional acoustic problems. *AIAA Paper 2002–2593*, 2002.
- [112] ZHUANG, M.; CHEN, R. F.: Optimized Upwind Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Scheme for Computational Aeroacoustics. *AIAA Journal*, **36**(11), 2146–2148, 1998.
- [113] ZHUANG, M.; RICHTER, C.: *Computational Aeroacoustics and its applications*. Technische Universität Berlin, 2008, URL http://www.cfd.tu-berlin.de/Lehre/CAA/script/CAA_2008.pdf, Vorlesungsskript zu 'Numerische Methoden der Strömungsaustik'.

Anhang

A Koeffizientensätze für das numerische Verfahren

Im folgenden sind die in der Arbeit verwendeten Koeffizientensätze des CAA-Verfahrens aus Kapitel 3 für die räumliche und zeitliche Diskretisierung sowie die räumliche Filterung aufgeführt.

A.1 Räumliche Diskretisierung

Für die räumliche Diskretisierung findet das in Abschnitt 3.1.1 dargestellte DRP-Schema Anwendung. Dabei werden die räumlichen Ableitungen mittels des finiten Differenzenansatzes

$$\frac{\partial}{\partial f} \xi = \sum_{j=-N}^M a_j^{NM} f_{l+j}$$

entsprechend (3.1) approximiert. Die entsprechenden Koeffizienten a_j^{NM} zur Approximation der Ableitung an der Stelle l können durch Lösung des linearen Gleichungssystems (3.12) bestimmt werden und sind nachfolgend aufgeführt.

Zentrales DRP-Schema

Im Allgemeinen findet das zentrale DRP-Schema vierter Ordnung mit 7 Punkten Anwendung, wenn die gesuchte Stelle mindestens drei Punkte von jeweiligem Rand des Rechengebiets entfernt ist.

$$N = M = 3$$

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & -a_{-1} = 0.76371144926872137410435294191247532632895 \\ a_2 & = & -a_{-2} = -0.16096915941497709928348235352998026106316 \\ a_3 & = & -a_{-3} = 0.01940895652041094148753725504916173193246 \end{array}$$

Vorwärtige bzw. Rückwärtige DRP-Schemata

In Randnähe des Rechengebiets werden je nach noch zur Verfügung stehenden Punktzahl bis zum Rand entsprechende vor- bzw. rückwärtige Differenzensterne verwendet.

$N = 0, M = 6$ bzw. $N = 6, M = 0$

$$\begin{aligned}
 a_0^{06} &= -a_6^{60} = -2.2219902954809613859765704546589404 \\
 a_1^{06} &= -a_5^{60} = 4.7937139708231946144678659038618207 \\
 a_2^{06} &= -a_4^{60} = -4.8887154219014803402387769892811775 \\
 a_3^{06} &= -a_3^{60} = 3.7241945556599418409859936218708754 \\
 a_4^{06} &= -a_2^{60} = -1.9475764115885354499368986580520868 \\
 a_5^{06} &= -a_1^{60} = 0.640802762572842965482777994796634 \\
 a_6^{06} &= -a_0^{60} = -0.1004291600850457655269565293565393
 \end{aligned}$$

$N = 1, M = 5$ bzw. $N = 5, M = 1$

$$\begin{aligned}
 a_{-1}^{15} &= -a_5^{51} = -0.1927539339711401567001303192228079 \\
 a_0^{15} &= -a_4^{51} = -1.1617462897578052505309642583597451 \\
 a_1^{15} &= -a_3^{51} = 2.2833737916894651931443149806000292 \\
 a_2^{15} &= -a_2^{51} = -1.4942869230903372823604513541795313 \\
 a_3^{15} &= -a_1^{51} = 0.7913899262793702149565433501265943 \\
 a_4^{15} &= -a_0^{51} = -0.2681591974297292679807469539809972 \\
 a_5^{15} &= -a_{-1}^{51} = 0.0421826262801742180030828421877231
 \end{aligned}$$

$N = 2, M = 4$ bzw. $N = 4, M = 2$

$$\begin{aligned}
 a_{-2}^{24} &= a_4^{42} = 0.0439617923189236092795795229903888 \\
 a_{-1}^{24} &= a_3^{42} = -0.4466564397166674638128824881277978 \\
 a_0^{24} &= a_2^{42} = -0.5094780195338408645966410404071212 \\
 a_1^{24} &= a_1^{42} = 1.2919072955902599630917393369600177 \\
 a_2^{24} &= a_0^{42} = -0.5117162571848687946385325631126761 \\
 a_3^{24} &= a_{-1}^{42} = 0.1551341504041561236704183102119714 \\
 a_4^{24} &= a_{-2}^{42} = -0.0231525218779498054288978892145678
 \end{aligned}$$

A.2 Zeitliche Diskretisierung

Für die zeitliche Diskretisierung findet das in Abschnitt 3.1.2 dargestellte LDDRK-Schema mit alternierend 5 und 6 Stufen Anwendung. Die Koeffizientensätze für die implementierte 2N-Storage-Form sind von Stanescu und Habashi [93] wie folgt angegeben:

5-stufiges Schema	6-stufiges Schema
$a_1 = 0$	$a_1 = 0$
$a_2 = -0.6051226$	$a_2 = -0.4412737$
$a_3 = -2.0437564$	$a_3 = -1.0739820$
$a_4 = -0.7406999$	$a_4 = -1.7063570$
$a_5 = -4.4231765$	$a_5 = -2.7979293$
	$a_6 = -4.0913537$
$b_1 = 0.2687454$	$b_1 = 0.1158488$
$b_2 = 0.8014706$	$b_2 = 0.3728769$
$b_3 = 0.5051570$	$b_3 = 0.7379536$
$b_4 = 0.5623568$	$b_4 = 0.5798110$
$b_5 = 0.0590065$	$b_5 = 1.0312849$
	$b_6 = 0.15$
$c_1 = 0$	$c_1 = 0$
$c_2 = 0.2687454$	$c_2 = 0.1158485$
$c_3 = 0.5852280$	$c_3 = 0.3241850$
$c_4 = 0.6827066$	$c_4 = 0.6193208$
$c_5 = 1.1646854$	$c_5 = 0.8034472$
	$c_6 = 0.9184166$

A.3 Filterung

Für die Filterung werden wie in Abschnitt 3.1.3 dargestellt, symmetrische Filterschemata entsprechend (3.31) eingesetzt.

$$\hat{q}'_l = q'_l - \sigma_{\text{filter}} \sum_{j=-N}^N w_j q'_{l+j}.$$

Die entsprechenden Koeffizienten für die Filter verschiedener Ordnung, die je nach Anwenderauswahl und der durch den Randabstand der Filterstelle l zur Verfügung stehenden Anzahl von Nachbarpunkten bestimmt wird, sind nachfolgend angegeben.

$$\begin{array}{llll} \mathcal{O}(0), & N=0, & 1 \text{ Punkte} & \\ & & & \\ & & w_0 & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathcal{O}(2), & N=1, & 3 \text{ Punkte} & \\ & & w_{-1} & = w_{-1} = -1/4 \\ & & w_0 & = 1/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathcal{O}(4), & N=2, & 5 \text{ Punkte} & \\ & & w_{-2} & = w_2 = 1/16 \\ & & w_{-1} & = w_1 = -1/4 \\ & & w_0 & = 3/8 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathcal{O}(6), & N=3, & 7 \text{ Punkte} & \\ & & w_{-3} & = w_3 = -1/64 \\ & & w_{-2} & = w_2 = 3/32 \\ & & w_{-1} & = w_1 = -15/64 \\ & & w_0 & = 5/16 \end{array}$$

$\mathcal{O}(8), \quad N=4, \quad 9 \text{ Punkte}$

$$\begin{aligned}w_{-4} &= w_4 &= & 1/256 \\w_{-3} &= w_3 &= & -1/32 \\w_{-2} &= w_2 &= & 7/64 \\w_{-1} &= w_1 &= & -7/32 \\w_0 &&= & 35/128\end{aligned}$$

 $\mathcal{O}(10), \quad N=5, \quad 11 \text{ Punkte}$

$$\begin{aligned}w_{-5} &= w_5 &= & -1/1024 \\w_{-4} &= w_4 &= & 5/512 \\w_{-3} &= w_3 &= & -45/1024 \\w_{-2} &= w_2 &= & 15/128 \\w_{-1} &= w_1 &= & -105/512 \\w_0 &&= & 63/256\end{aligned}$$

 $\mathcal{O}(12), \quad N=4, \quad 13 \text{ Punkte}$

$$\begin{aligned}w_{-6} &= w_6 &= & 1/4096 \\w_{-5} &= w_5 &= & -3/1024 \\w_{-4} &= w_4 &= & 33/2048 \\w_{-3} &= w_3 &= & -55/1024 \\w_{-2} &= w_2 &= & 495/4096 \\w_{-1} &= w_1 &= & -99/512 \\w_0 &&= & 231/1024\end{aligned}$$

B Detaillierte Ergebnisse der Nebenstromkanalsimulationen

Zur Vervollständigung der Analysen in Kapitel 6.2 sind im Folgenden alle durch die Simulationen der verschiedenen Nebenstromkanalkonfigurationen berechneten einzelnen Modenfelder sowie Vergleiche über die Einflüsse der einzelnen Einbauten dargestellt, die bei der Ergebnisdiskussion nicht im Detail berücksichtigt werden konnten.

B.1 Modenfelder im geraden Kanal

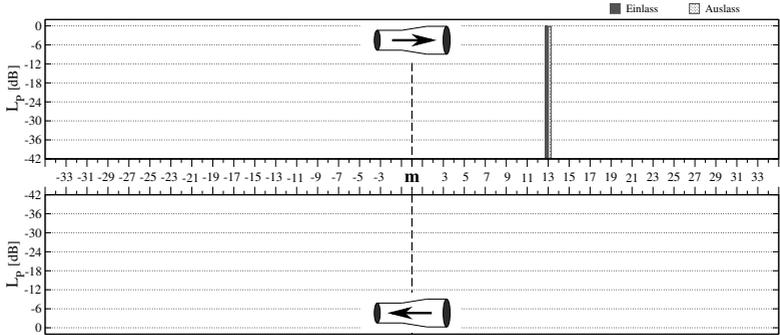


Abbildung B.1: gerader Kanal ohne Einbauten

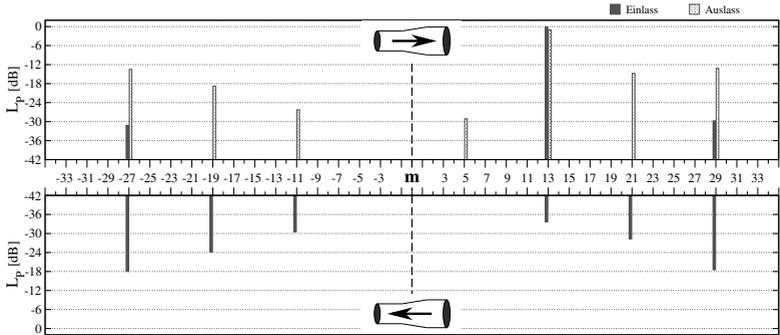


Abbildung B.2: gerader Kanal mit Verstrebungen

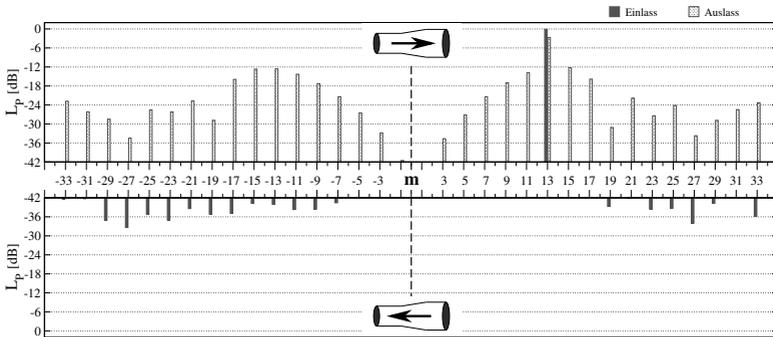


Abbildung B.3: gerader Kanal mit Platten – Gabelung

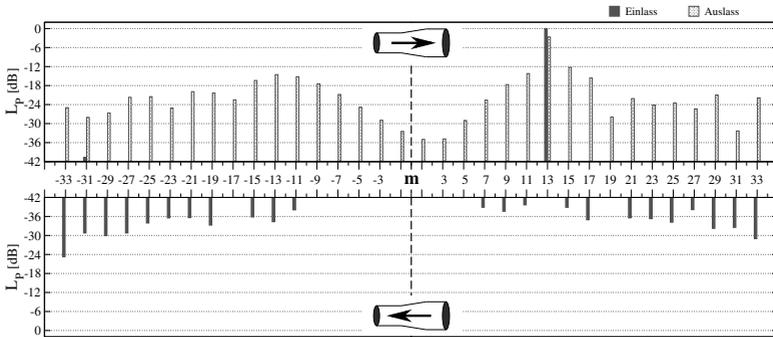


Abbildung B.4: gerader Kanal mit NACA 0009 – Gabelung

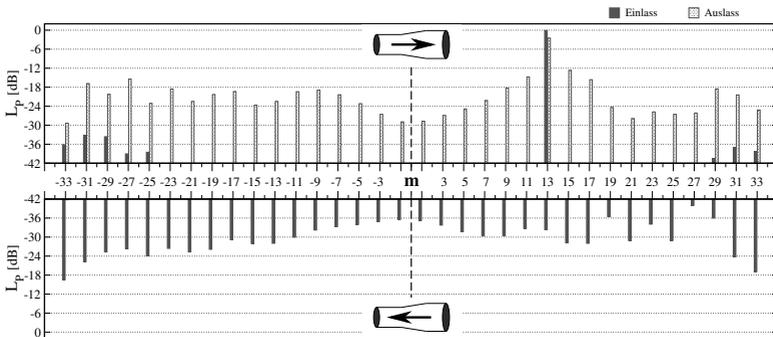


Abbildung B.5: gerader Kanal mit NACA0021 – Gabelung

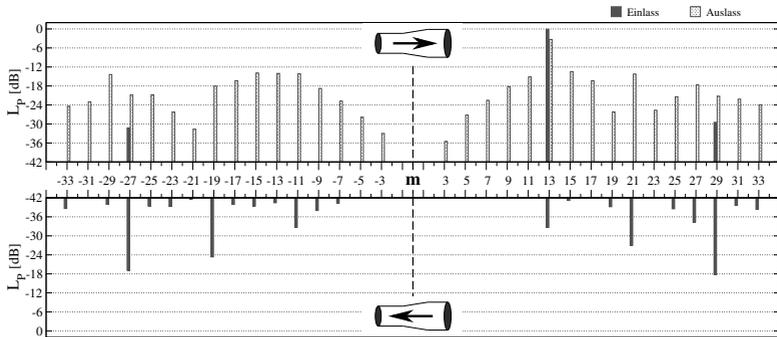


Abbildung B.6: gerader Kanal mit Platten – Gabelung und Verstrebungen

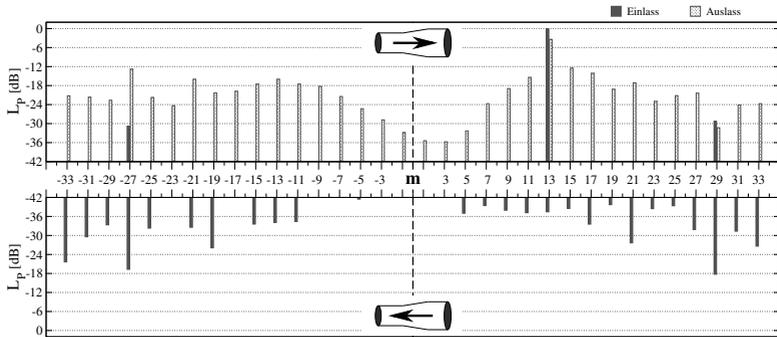


Abbildung B.7: gerader Kanal mit NACA 0009 – Gabelung und Verstrebungen

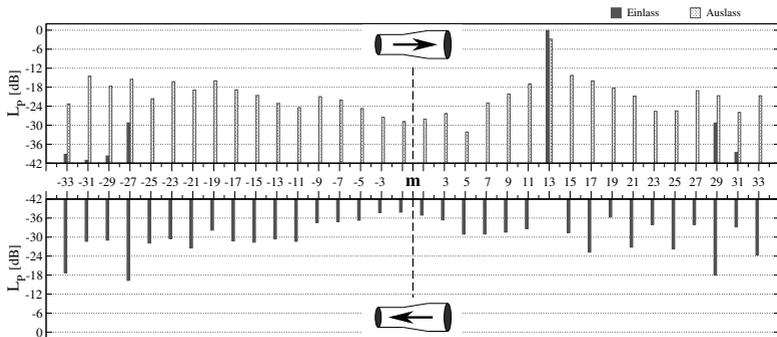


Abbildung B.8: gerader Kanal mit NACA 0021 – Gabelung und Verstrebungen

B.2 Modenfelder im gekrümmten Kanal

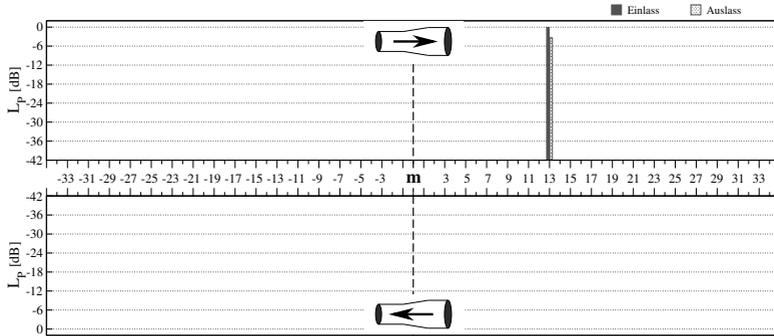


Abbildung B.9: gekrümmter Kanal ohne Einbauten

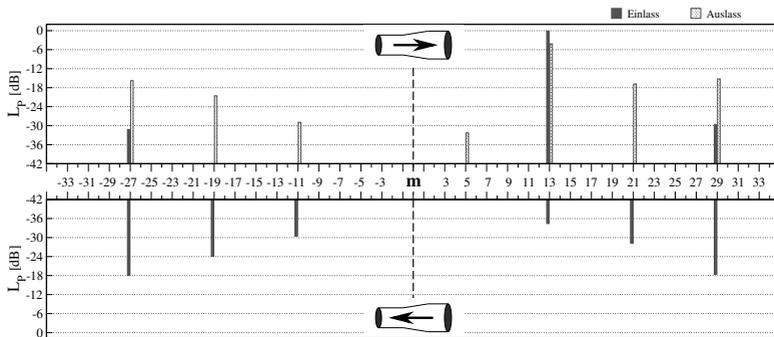


Abbildung B.10: gekrümmter Kanal mit Verstrebungen

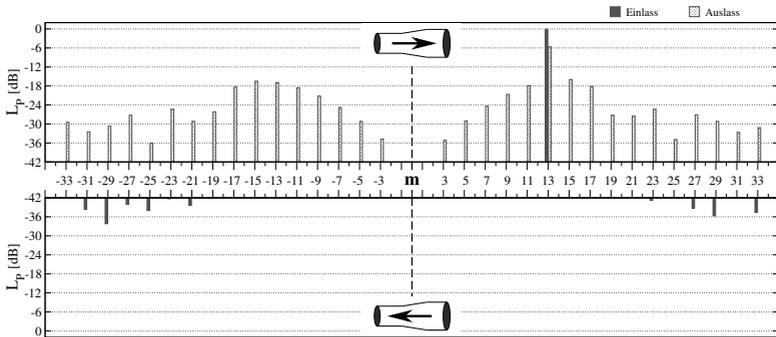


Abbildung B.11: gekrümmter Kanal mit Platten – Gabelung

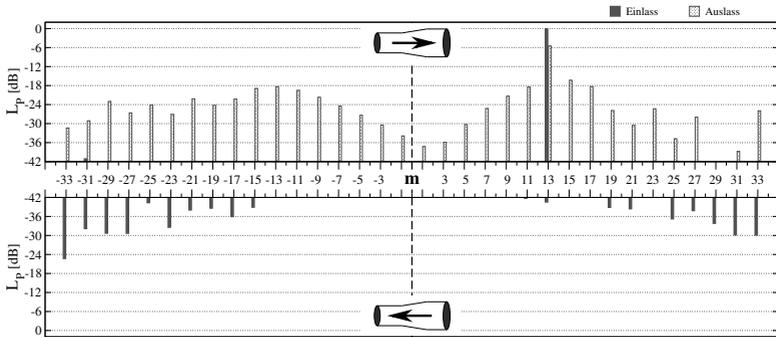


Abbildung B.12: gekrümmter Kanal mit NACA 0009 – Gabelung

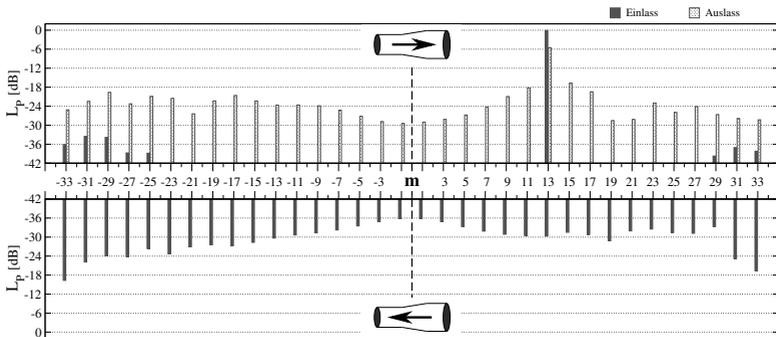


Abbildung B.13: gekrümmter Kanal mit NACA 0021 – Gabelung

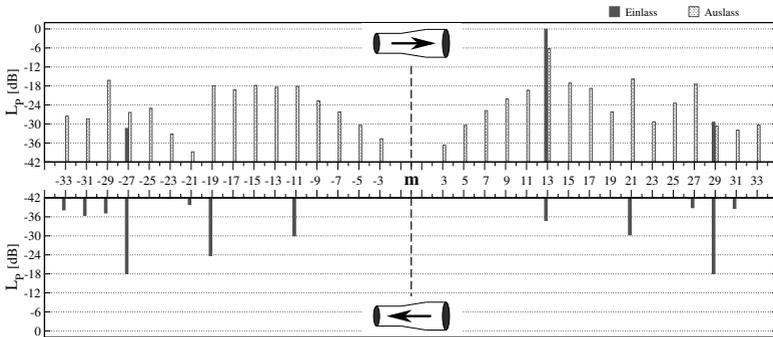


Abbildung B.14: gekrümmter Kanal mit Platten – Gabelung und Verstrebungen

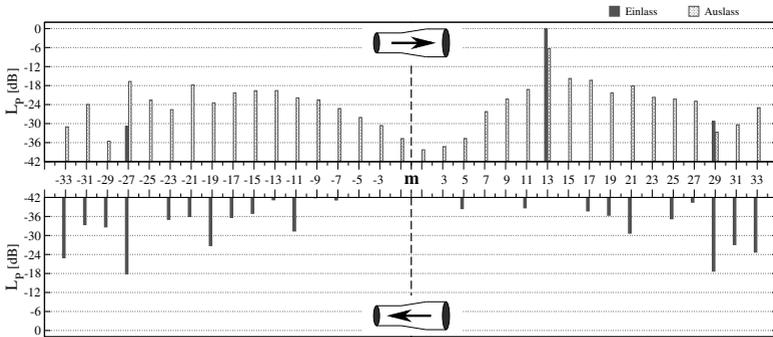


Abbildung B.15: gekrümmter Kanal mit NACA 0009 – Gabelung und Verstrebungen

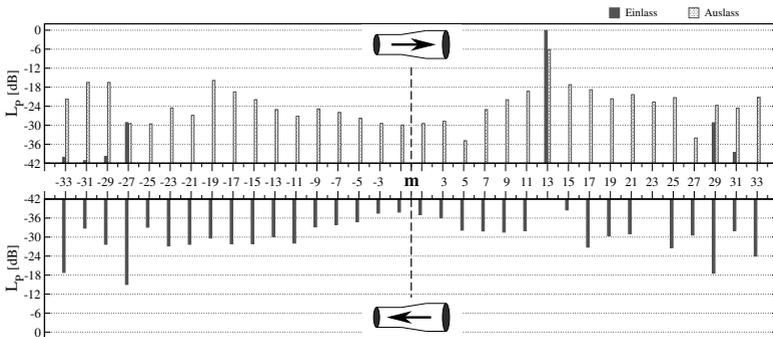


Abbildung B.16: gekrümmter Kanal mit NACA 0021 – Gabelung und Verstrebungen

B.3 Vergleich der Modenfelder bei verschiedenen Gabelungen

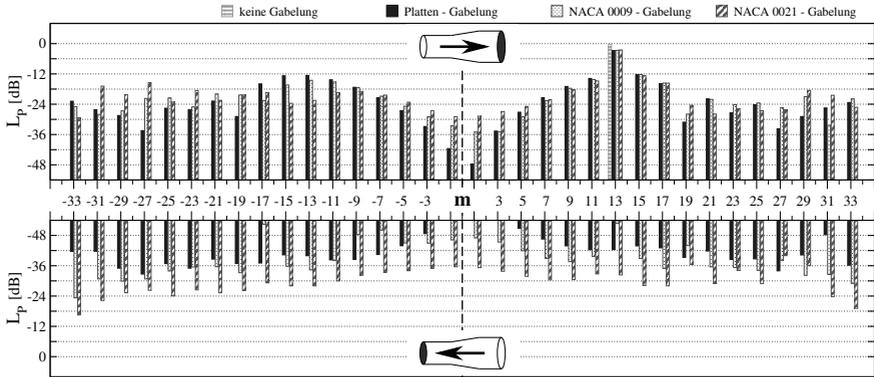


Abbildung B.17: Einfluss der Gabelungen im geraden Kanal

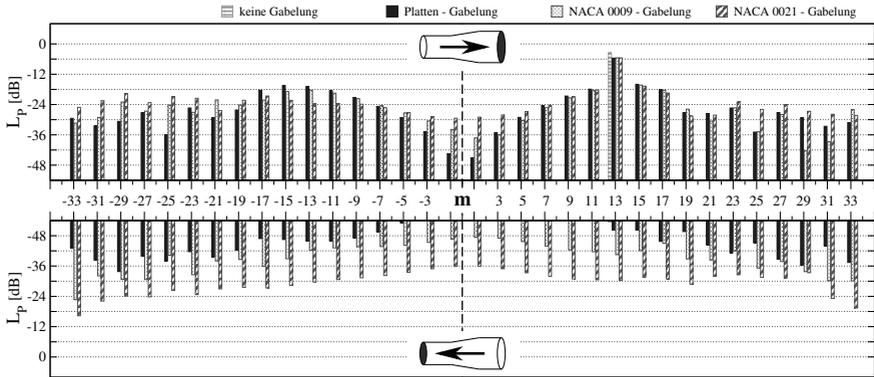
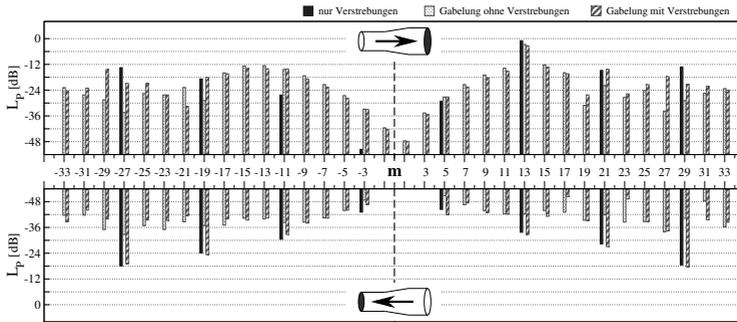
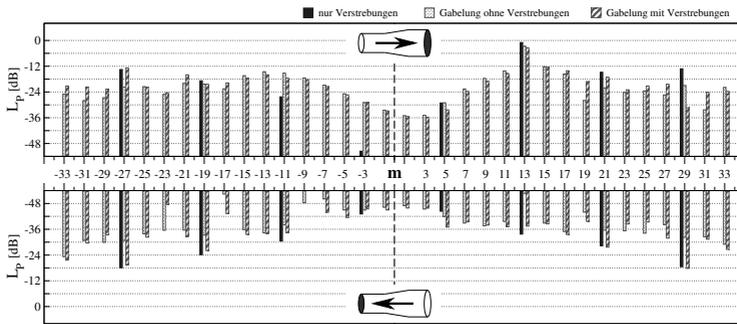


Abbildung B.18: Einfluss Gabelungen im gekrümmten Kanal

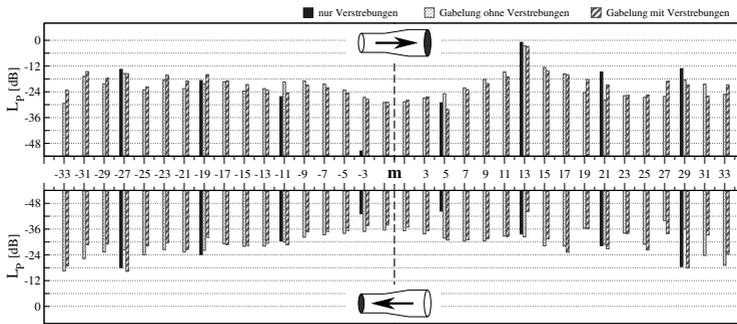
B.4 Vergleich der Modenfelder mit und ohne Verstrebungen



(a) Platten-Gabelung

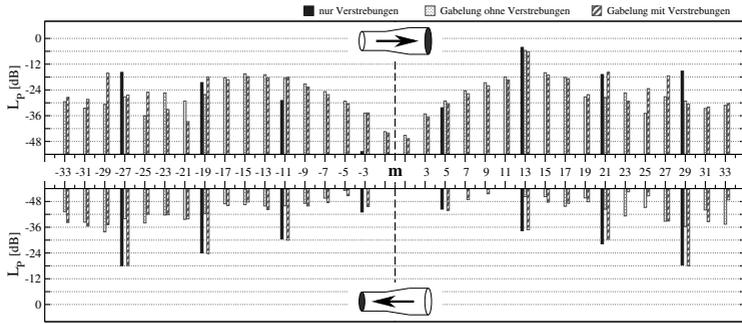


(b) NACA0009-Gabelung

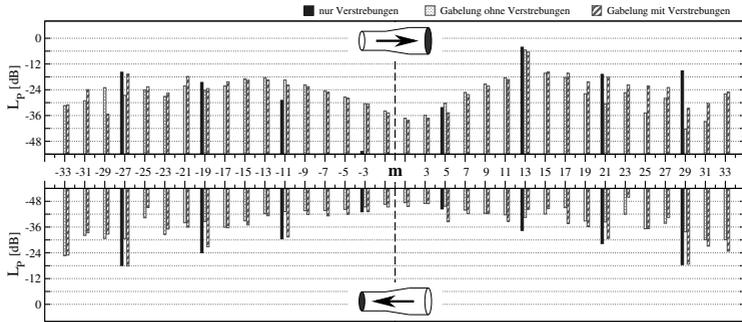


(c) NACA0021-Gabelung

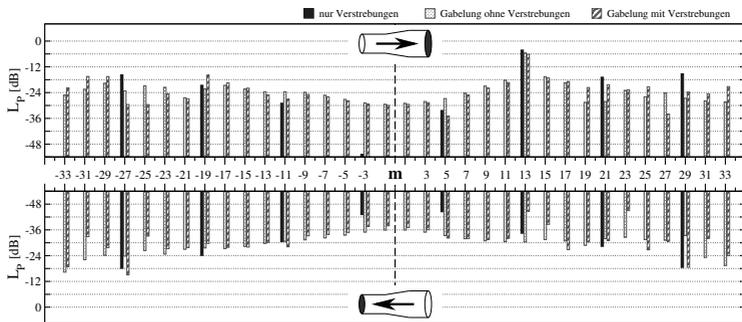
Abbildung B.19: Einfluss der Verstrebungen im geraden Kanal



(a) Platten-Gabelung



(b) NACA0009-Gabelung



(c) NACA0021-Gabelung

Abbildung B.20: Einfluss der Verstrebungen im gekrümmten Kanal

B.5 Vergleich der Modenfelder im geraden und gekrümmten Kanal

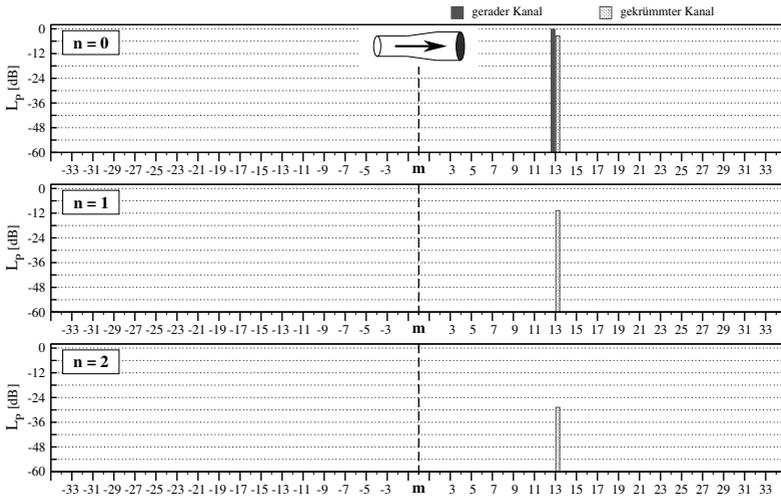


Abbildung B.21: Krümmungseinfluss ohne Einbauten

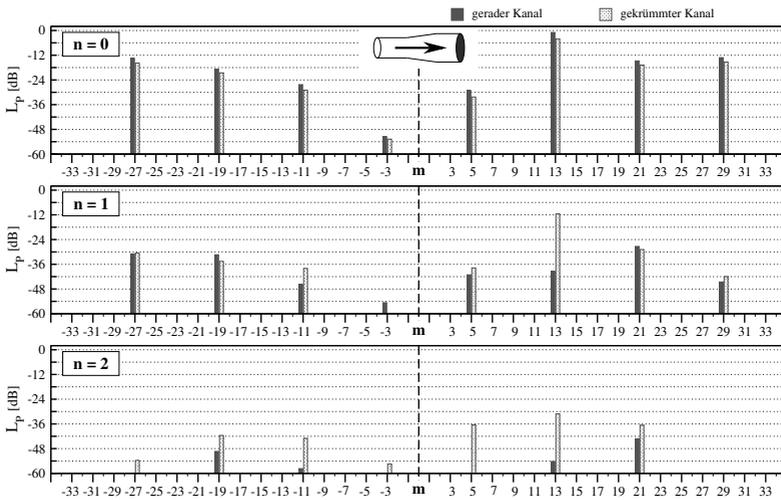


Abbildung B.22: Krümmungseinfluss mit Verstrebungen

B.5 Vergleich der Modenfelder im geraden und gekrümmten Kanal

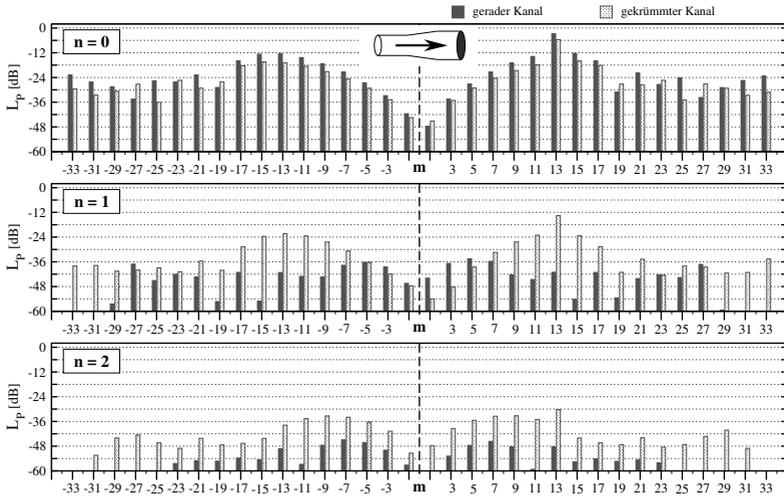


Abbildung B.23: Krümmungseinfluss mit Platten – Gabelung ohne Verstrebungen

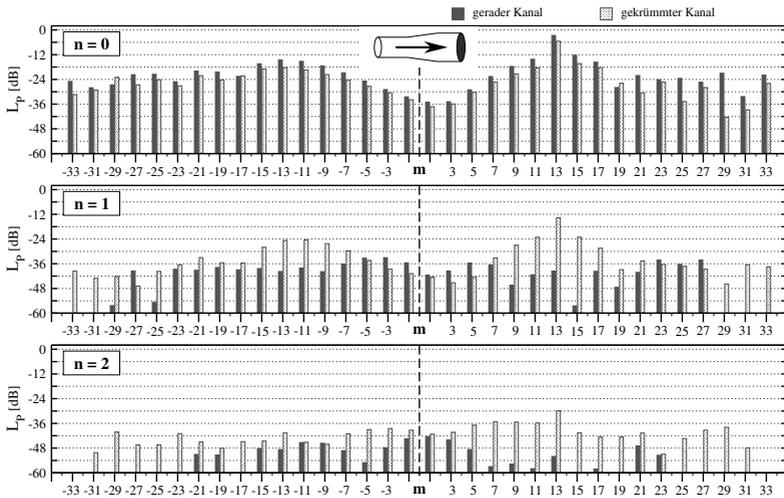


Abbildung B.24: Krümmungseinfluss mit NACA 0009 – Gabelung ohne Verstrebungen

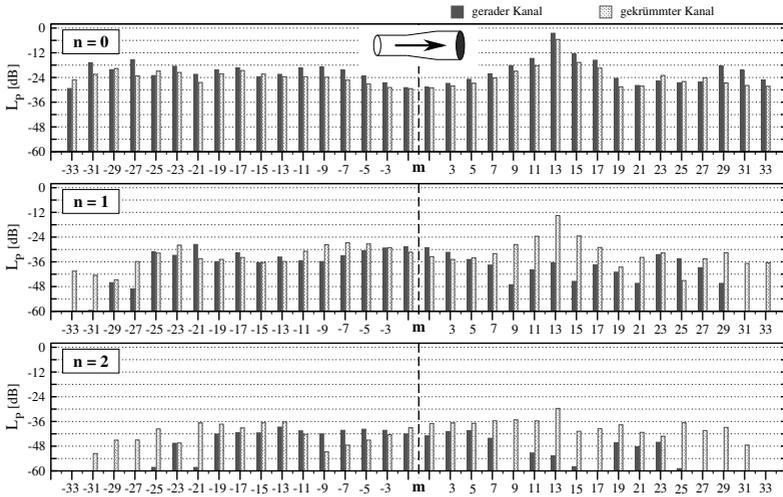


Abbildung B.25: Krümmungseinfluss mit NACA 0021 – Gabelung ohne Verstrebungen

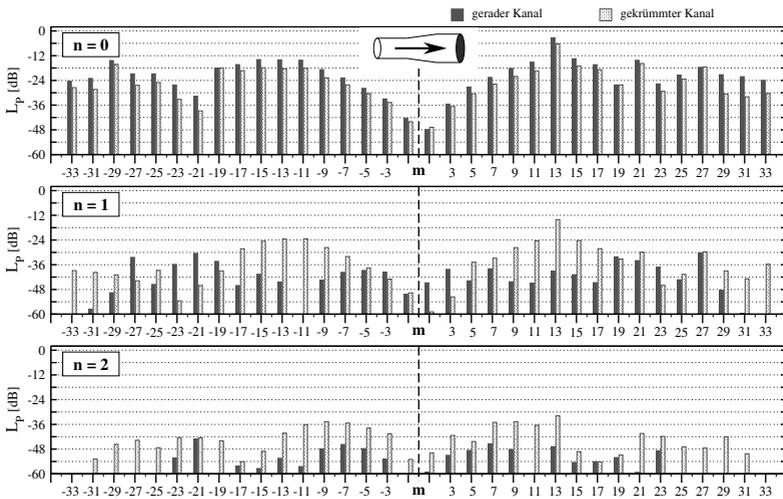


Abbildung B.26: Krümmungseinfluss mit Platten – Gabelung mit Verstrebungen

B.5 Vergleich der Modenfelder im geraden und gekrümmten Kanal

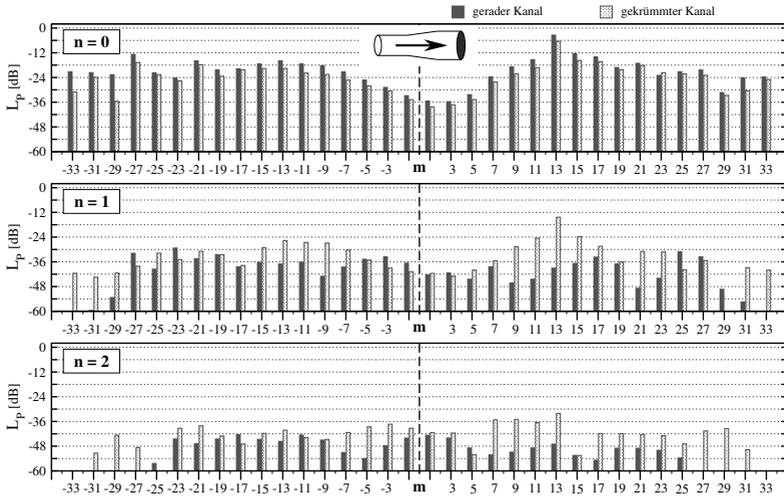


Abbildung B.27: Krümmungseinfluss mit NACA 0009 – Gabelung mit Verstrebungen

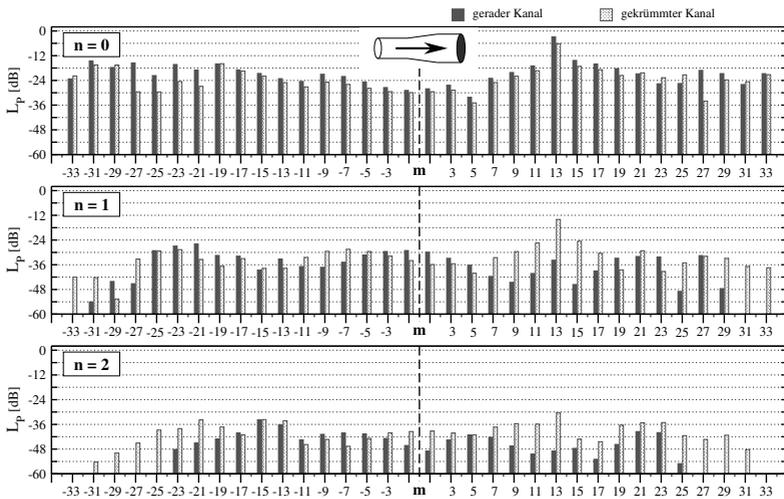


Abbildung B.28: Krümmungseinfluss mit NACA 0021 – Gabelung mit Verstrebungen

