

# Erprobung experimentell basierter Evolutionsgleichungen für ein Werkstoffgesetz von Beton

vorgelegt von  
Dipl.-Ing. M.Sc. Fritz Daniel Vogdt  
geb. in Berlin

von der Fakultät VI - Planen Bauen Umwelt  
der Technische Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften  
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Frank Rackwitz

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Yuri Petryna

2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Günter Hofstetter

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 28. September 2017

Berlin 2017



# Kurzfassung

Versagenssimulationen von Betonbauteilen unter mehrdimensionalen Beanspruchungen sind bis heute eine Herausforderung. Eine Vielzahl bisheriger Materialmodelle ist aus theoretischer Sicht bereits für eine Simulation von Betonkonstruktionen bis zum Versagen geeignet. Häufig beschränkt sich ihre Anwendung aber auf die rechnerische Bestätigung bekannter Versuche, da sie einer belastungsartspezifischen Anpassung von — zum Teil auch nichtphysikalischen — Materialparametern bedürfen. Insbesondere bei dreidimensionalen Materialmodellen wird dieses Problem dadurch verursacht, dass der gegenseitige Einfluss der Belastungen und Verformungen auf die mechanischen Eigenschaften aller Richtungen zu großen Teilen vernachlässigt wird. Zwar berücksichtigen Versagensflächen Festigkeitsunterschiede für unterschiedliche Spannungszustände zuverlässig, aber die Evolution der plastischen Verzerrungen und der Schädigungen in den einzelnen Richtungen wird sehr stark vereinfacht.

In der vorliegenden Arbeit werden uni-, bi- und triaxiale Betondruckversuche mit Be- und Entlastung hinsichtlich der plastischen Verzerrungszustände und der orthotropen Schädigungszustände ausgewertet. Die daraus abgeleiteten Evolutionsgleichungen der Plastizität und der Schädigung werden ausschließlich in Abhängigkeit experimentell messbarer Zustandsvariablen formuliert. Auf diese Weise wird die Kalibrierung dieser Evolutionsgesetze an Materialversuche physikalisch nachvollziehbar. Die Evolutionsgleichungen werden als Materialroutine in ein Finite-Elemente-Programm integriert. Ihre Eignung für ein zukünftiges Materialmodell wird durch Simulation von durchgeführten Traglastversuchen verifiziert.



# Abstract

Failure simulations of concrete under multiaxial stresses are challenging till this date. In theory, existing material models are capable to simulate the failure mechanisms of concrete structures. But, their application is often limited to the computational confirmation of known experiments, because the material parameters have to be adapted to specific load cases. Particularly in three-dimensional material models, the mutual influence of stresses and strains on the mechanical properties of all directions is neglected to a large extend. While failure surfaces exist, which account for different load capacities of concrete in different load conditions, the evolution of plastic strains and the evolution of orthotropic damage is simplified to a large extend.

In the present work uni-, bi- and triaxial, cyclic concrete compression tests are evaluated with regard to the evolution of plastic strain states and orthotropic damage states. The resulting evolution laws are formulated as functions of experimentally measurable quantities exclusively. Therefore, the calibration of these laws to experimental test results is physically comprehensible. The evolution laws are integrated into a finite element program as a material routine and verified in comparison to known test results.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung . . . . .	3
1.3 Zielsetzung . . . . .	6
1.4 Struktur der Arbeit . . . . .	7
<b>2 Grundlagen der numerischen Strukturmodelle</b>	<b>9</b>
2.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen . . . . .	9
2.1.1 Kinematik . . . . .	10
2.1.2 Spannungsmaße . . . . .	14
2.1.3 Bilanzsätze . . . . .	17
2.1.4 Materialgesetze . . . . .	20
2.2 Prinzip der virtuellen Weggrößen . . . . .	21
2.2.1 Herleitung . . . . .	22
2.2.2 Linearisierung . . . . .	24
2.3 Finite-Elemente-Methode (FEM) . . . . .	27
2.3.1 Verwendetes Finites Element . . . . .	27
2.3.2 Isoparametrische Interpolation der Feldgrößen . . . . .	28
2.3.3 Formulierung und Lösung der tangentialen Steifigkeits- beziehung . . . . .	30

<b>3</b>	<b>Phänomenologie des mechanischen Verhaltens von Beton</b>	<b>35</b>
3.1	Beton unter uniaxialer Druckbelastung . . . . .	36
3.1.1	Versuche mit monotoner, weggesteuerter Belastung . . .	37
3.1.2	Zyklische Belastungsversuche . . . . .	42
3.2	Beton unter Zugbelastung . . . . .	44
3.3	Beton unter multiaxialer Druckbelastung . . . . .	47
3.3.1	Monotone Belastungsversuche . . . . .	47
3.3.2	Zyklische Belastungsversuche . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Klassische Materialtheorien</b>	<b>53</b>
4.1	Elastizitätstheorie . . . . .	53
4.1.1	Lineare Elastizitätstheorie . . . . .	55
4.1.2	Nichlineare Elastizitätstheorie . . . . .	56
4.2	Plastizitätstheorie . . . . .	56
4.2.1	Spannungsbasierte Plastizitätstheorie . . . . .	56
4.2.2	Verzerrungsbasierte Plastizitätstheorie . . . . .	60
4.3	Kontinuumsschädigungstheorie . . . . .	62
4.3.1	Spannungsbasierte Schädigungstheorie . . . . .	63
4.3.2	Verzerrungsbasierte Schädigungstheorie . . . . .	65
4.3.3	Energiebasierte Schädigungstheorie . . . . .	67
4.4	Elasto-plastische Schädigungstheorie . . . . .	70
4.4.1	Gemischte Kombination der Plastizitäts- und Schädigungstheorie . . . . .	71
4.4.2	Spannungsbasierte Kombination der Plastizitäts- und Schädigungstheorie . . . . .	73
4.4.3	Verzerrungsbasierte Kombination der Plastizitäts- und Schädigungstheorie . . . . .	75
4.5	Bewertung der Materialtheorien . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Herleitung und Umsetzung von experimentell basierten Evolutionsgleichungen</b>	<b>79</b>
5.1	Evolution der plastischen Verformungen . . . . .	81
5.1.1	Auswertung der Versuche und Aufstellen der Evolutionsgleichungen . . . . .	81
5.1.2	Algorithmische Umsetzung der Plastizitätsgesetze . . . .	86

---

5.2	Evolution der orthotropen Schädigung . . . . .	88
5.2.1	Schädigungsevolution infolge Druckbelastung . . . . .	88
5.2.2	Auswertung der Versuche . . . . .	89
5.2.3	Untersuchung der Kopplung von Schädigung und Plas- tizität . . . . .	93
5.2.4	Aufstellen der Schädigungsevolutionsgleichungen . . . . .	95
5.2.5	Algorithmische Umsetzung der orthotropen Schädigungs- gesetze . . . . .	99
5.2.6	Schädigungsevolution infolge Zugbelastung . . . . .	101
5.3	Kombination und Umsetzung der Evolutionsansätze . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Erprobung der implementierten Evolutionsgleichungen</b>	<b>109</b>
6.1	Simulation von Materialversuchen . . . . .	109
6.1.1	Uniaxialer Druckversuch aus van Mier [60] . . . . .	110
6.1.2	Uniaxialer Druckversuch aus Kupfer u. a. [48] . . . . .	112
6.1.3	Biaxialer Druckversuch aus van Mier [60] . . . . .	113
6.1.4	Äquibiaxialer Druckversuch aus Kupfer u. a. [48] . . . . .	115
6.1.5	Biaxialer Druckversuch aus Kupfer u. a. [48] . . . . .	117
6.1.6	Triaxialer Druckversuch . . . . .	119
6.1.7	Uniaxialer Zugversuch . . . . .	120
6.2	Simulation von Bauteilversuchen . . . . .	121
6.2.1	Vier-Punkt-Biegeversuch . . . . .	122
6.2.2	Schubversuch an einer Stahlbetonwand . . . . .	126
6.3	Bewertung der Ergebnisse . . . . .	134
<b>7</b>	<b>Schlussfolgerung und Ausblick</b>	<b>137</b>
7.1	Schlussfolgerung . . . . .	137
7.2	Ausblick . . . . .	139
<b>A</b>	<b>Formelsammlung zur Tensorrechnung</b>	<b>143</b>
A.1	Basissystem . . . . .	143
A.2	Darstellung von Vektoren und Tensoren . . . . .	144
A.3	Tensoroperationen . . . . .	146
A.4	Fundamentaltensoren und Permutationstensor . . . . .	148
A.5	Tensorfunktionen . . . . .	148

A.6	Ableitungsregeln für Tensoren . . . . .	151
A.7	Räumliche Ableitung von Vektor- und Tensorfeldern . . . . .	151
<b>B</b>	<b>Algorithmische Tangente</b>	<b>153</b>
B.1	Ableitung der Materialsteifigkeit . . . . .	154
B.2	Ableitung des plastischen Verzerrungszustandes . . . . .	156
<b>C</b>	<b>Tensorielle Form-Invarianz der Nachgiebigkeit <math>\mathbb{D}</math></b>	<b>159</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>161</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>166</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>169</b>

# Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

ANSYS <sup>®</sup>	Finite-Elemente-Programm ANSYS <sup>®</sup> , Academic Research, Release 16.1 [3]
FEM	Finite-Elemente-Methode
LINK180	Dreidimensionales, lineares Stabelement aus ANSYS <sup>®</sup> [3]
SOLID185	Dreidimensionales Acht-Knoten-Kontinuumselement aus ANSYS <sup>®</sup> [3]

## Lateinische Buchstaben

$dA$	Flächeninkrement in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$d\tilde{A}$	Approximiertes Flächeninkrement in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$dA_{\square}$	Flächeninkrement in der natürlichen Elementkonfiguration $\Omega_{\square}$
$da$	Flächeninkrement in der Momentankonfiguration $\Omega_t$
$\mathbf{B}$	Matrix der Verzerrungsformfunktionen
$\mathbf{B}_f$	Äußere Volumenkräfte in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$\mathbf{b}_f$	Äußere Volumenkräfte in der Momentankonfiguration $\Omega_t$

---

$\mathbb{C}$	Steifigkeitstensor des geschädigten Materials
$\mathbb{C}_0$	Steifigkeitstensor des ungeschädigten Materials
$\mathbb{C}_{da}$	Schädigungssteifigkeitstensor
$\mathbb{C}_{Tan}$	Konsistent linearisierte Materialtangente
$\mathbb{D}$	Nachgiebigkeitstensor
$\mathbb{D}_0$	Nachgiebigkeitstensor des ungeschädigten Materials
$\mathbb{D}_{da}$	Schädigungsnachgiebigkeitstensor
$d\mathbf{F}_S$	Differentielle Schnittkraft
$dm$	Differentielles Masseninkrement
$\mathbf{E}$	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
$E_c$	Elastizitätsmodul des Betons im ungeschädigten Zustand
$E_\sigma$	Spannungsraum der elastisch zulässigen Zustände
$E_\varepsilon$	Verzerrungsraum der elastisch zulässigen Zustände
$\mathbf{e}$	Basisvektor
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{F}^{\text{ext}}$	Externe, globale Knotenkräfte
$\mathbf{F}^{\text{int}}$	Interne, globale Knotenkräfte
$f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$	Fließfläche im Spannungsraum
$f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q})$	Fließfläche im Verzerrungsraum
$f_{bc}$	Äquibiaxiale Druckfestigkeit von Beton
$f_c$	Uniaxiale Druckfestigkeit von Beton
$f_{cD}$	Uniaxiale Druckfestigkeit des simulierten Betons bei maximaler Schädigung

---

$\mathbf{f}_e^{ext}$	Vektor der äußeren Elementknotenkräfte
$\mathbf{f}_e^{int}$	Vektor der internen Elementknotenkräfte
$f_t$	Zugfestigkeit von Beton
$f_{tD}$	Zugfestigkeit des simulierten Betons bei maximaler Schädigung
$\Delta f_{tD}$	Parameter der Zugentfestigungsfunktion
$\mathbb{H}$	Verfestigungsmodul
$h(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$	Richtungsfunktion der Verfestigungsregel
$\mathbf{I}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$\mathbb{I}$	Einheitstensor vierter Stufe
$\bar{\mathbb{I}}$	Transponierender Fundamentaltensor vierter Stufe
$\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$	Spurbildender Fundamentaltensor vierter Stufe
$\mathbf{J}$	Drehimpuls oder JACOBI-Matrix
$\mathbf{K}^{\text{Tan}}$	Tangentiale Systemsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{k}_e^{\text{Tan}}$	Tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{L}$	Impuls
$\mathbb{M}$	Schädigungseffektstensor
$m$	Masse
$\mathbf{N}$	Normalenvektor in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$ oder Matrix der Ansatzfunktionen
$N_k$	Ansatzfunktion für den Knoten $k$
$\mathbf{n}$	Normalenvektor in der Momentankonfiguration $\Omega_t$
$n_e$	Anzahl der Elemente
$n_k$	Anzahl der Knoten

---

$\mathbf{P}$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\mathbf{q}$	Verzerrungsäquivalente Zustandsvariable
$\mathbf{q}^c$	Verzerrungsäquivalente, tensorielle Zustandsvariable der plastischen Stauchung
$q_{(i)}^c$	Eigenwert $i$ der Zustandsvariablen $\mathbf{q}^c$
$\mathbf{q}^t$	Verzerrungsäquivalente, tensorielle Zustandsvariable der plastischen Dehnung
$q_{(i)}^t$	Eigenwert $i$ der Zustandsvariablen $\mathbf{q}^t$
$\mathbf{R}$	Orthogonaler Rotationstensor
$r(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$	Richtungsfunktion der Fließregel
$\mathbf{S}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\mathbf{T}_1$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor
$\bar{\mathbf{T}}_1$	Statische Randbedingung, ausgedrückt als 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor
$\mathbf{T}_2$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor
$t$	Zeit
$\mathbf{t}$	CAUCHY-Spannungsvektor
$\mathbf{U}$	Materieller Rechtsstrecktensor
$U$	Elastisches Potential
$\Delta \mathbf{U}$	Globale Verschiebungsinkremente
$dU$	Änderungsrate der Verzerrungsenergiedichte
$\mathbf{u}$	Verschiebungsfeld
$\bar{\mathbf{u}}$	Kinematische Verschiebungsrandbedingung
$\tilde{\mathbf{u}}$	Approximiertes Verschiebungsfeld

---

$\mathbf{u}_e$	Vektor der Elementknotenverschiebungen
$\delta \mathbf{u}_e$	Vektor der virtuellen Elementknotenverschiebungen
$\mathbf{u}_k$	Verschiebungsvektor des Knotens $k$
$\mathbf{u}^k$	Verschiebungsfeld in Iteration $k$
$\mathbf{u}^{k+1}$	Verschiebungsfeld in Iteration $k + 1$
$\Delta \mathbf{u}$	Linearisierte Inkremente des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}$
$\Delta \mathbf{u}_e$	Vektor der linearisierten Elementknotenverschiebungsinkremente
$\Delta \tilde{\mathbf{u}}$	Approximierte, linearisierte Inkremente des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}$
$\delta \mathbf{u}$	Virtuelles Verschiebungsfeld
$\delta \tilde{\mathbf{u}}$	Approximiertes, virtuelles Verschiebungsfeld
$\mathbf{V}$	Räumlicher Linkstrecktensor
$dV$	Volumeninkrement in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$d\tilde{V}$	Approximiertes Volumeninkrement in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$dV_{\square}$	Volumeninkrement in der natürlichen Elementkonfiguration $\Omega_{\square}$
$dv$	Volumeninkrement in der Momentankonfiguration $\Omega_t$
$\delta W$	Virtuelle Arbeit
$\delta W_a$	Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte
$\delta W_i$	Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte
$\mathbf{w}$	Quadratwurzel des Schädigungstensors $\Phi$
$\bar{\mathbf{w}}$	Quadratwurzel des Integritätstensors $\bar{\Phi}$

---

$\mathbf{X}$	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$\widetilde{\mathbf{X}}$	Approximierter Ortsvektor in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$\mathbf{X}_e$	Vektor der Elementknotenkoordinaten in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$\mathbf{X}_k$	Ortsvektor eines Knotens $k$ in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$d\mathbf{X}$	Linieninkrement in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$d\widetilde{\mathbf{X}}$	Approximiertes Linieninkrement in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$\mathbf{x}$	Ortsvektor in der Momentankonfiguration $\Omega_t$
$\widetilde{\mathbf{x}}$	Approximierter Ortsvektor in der Momentankonfiguration $\Omega_t$
$\mathbf{x}_e$	Vektor der Elementknotenkoordinaten in der Momentankonfiguration $\Omega_t$
$\mathbf{x}_k$	Ortsvektor eines Knotens $k$ in der Momentankonfiguration $\Omega_t$
$d\mathbf{x}$	Linieninkrement in der Momentankonfiguration $\Omega_t$

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Spannungsäquivalente Zustandsvariable
$\beta$	Kopplungsparameter, der nach Pölling [73] den Schädigungsanteil an der inelastischen Verzerrung angibt
$\gamma$	Konsistenzparameter
$\delta$	KRONECKER-Delta

---

$\varepsilon_{ijk}$	Permutationssymbol
$\varepsilon$	Linearisierter Verzerrungstensor
$\tilde{\varepsilon}$	Approximierter, linearisierter Verzerrungstensor
$\varepsilon_{0pl}$	Positive Gesamtdehnung, ab der plastische Dehnungen auftreten
$\varepsilon_c$	Uniaxiale Druckbruchstauchung von Beton
$\varepsilon^{da}$	Schädigungsverzerrungstensor oder Mikrorissdehnung
$\varepsilon^{eff}$	Effektiver Verzerrungstensor
$\varepsilon^{el}$	Elastischer Verzerrungstensor
$\varepsilon^{in}$	Inelastischer Verzerrungstensor
$\varepsilon_{(i)}$	Gesamtverzerrung in Hauptrichtung $i$
$\varepsilon_{(i)}^{el}$	Elastische Verzerrung in Hauptrichtung $i$
$\varepsilon^{pl}$	Plastischer Verzerrungstensor
$\varepsilon_{(i)}^{pl}$	Plastische Verzerrung in Hauptrichtung $i$
$\varepsilon_t$	Uniaxiale Zugrissdehnung von Beton
$\varepsilon_v$	Volumendehnung
$\delta\varepsilon$	Approximierter, virtueller Verzerrungstensor
$\tilde{\delta\varepsilon}$	Linearisierter, virtueller Verzerrungstensor
$\Delta\varepsilon$	Linearisiertes Inkrement des Verzerrungstensors
$\tilde{\Delta\varepsilon}$	Approximiertes Inkrement des Verzerrungstensors
$\kappa_c$	Parameter in der Evolutionsgleichung der plastischen Stauchung

---

$\kappa_t$	Parameter in der Evolutionsgleichung der plastischen Dehnung
$\kappa_t^D$	Rate der exponentiellen Zugentfestigungsfunktion
$\lambda$	LAMÉ-Konstante
$\mu$	LAMÉ-Konstante
$\nu_c$	POISSON- oder Querdehnzahl im ungeschädigten Zustand
$\xi$	Ortsvektor im natürlichen Koordinatensystem
$d\xi$	Linieninkrement in der natürlichen Elementkonfiguration $\Omega_\square$
$\Phi$	Schädigungstensor
$\overline{\Phi}$	Integritätstensor beziehungsweise Inverse des Schädigungstensors $\Phi$
$\Phi_{(i)}$	Hauptrichtung $i$ des Schädigungstensors $\Phi$
$\Phi_{(i)}^{max}$	Maximal zulässige Schädigung für eine gedrückte Hauptrichtung $i$
$\varphi_{(i)}^\varepsilon$	Eigenrichtung $i$ des Verzerrungszustandes $\varepsilon$
$\rho$	Dichte in der Momentankonfiguration $\Omega_t$
$\rho_0$	Dichte in der Referenzkonfiguration $\Omega_0$
$\sigma$	CAUCHY-Spannungstensor oder Spannungszustand
$\sigma^{eff}$	Effektiver Spannungstensor
$\sigma_{(i)}$	Hauptspannung in Richtung $i$
$\sigma_m$	Mittelwert der Normalspannungen eines Spannungszustandes $\sigma$
$\Delta\sigma$	Inkrement des CAUCHY-Spannungstensors

---

$\Omega_0$	Referenz- beziehungsweise Ausgangskonfiguration
$\Omega_{0\,dis}$	Diskrete Referenz- beziehungsweise Ausgangskonfiguration
$\Omega_{0\,e}$	Referenz- beziehungsweise Ausgangskonfiguration eines Finiten Elementes $e$
$\Omega_t$	Momentankonfiguration
$\Omega_{t\,dis}$	Diskrete Momentankonfiguration
$\Omega_{t\,e}$	Momentankonfiguration eines Finiten Elementes $e$
$\Omega_{\square}$	Natürliche Konfiguration eines Finiten Elementes
$\delta\Omega_0$	Rand der Referenzkonfiguration
$\delta\Omega_{0\,e}$	Rand eines Finiten Elementes $e$ in der Referenzkonfiguration
$\delta\Omega_{\square}$	Rand eines Finiten Elementes $e$ in der natürlichen Konfiguration
$\delta\Omega_t$	Rand der Momentankonfiguration



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Aus mechanischer Sicht offenbart der stark heterogene Werkstoff Beton unter Beanspruchung Merkmale, die charakteristisch sind

- für duktile Werkstoffe (Plastizität), insbesondere unter Druckbeanspruchung (Chen [15]),
- für spröde Werkstoffe (Rissbildung und Schädigung) sowohl unter Druckbeanspruchung, als auch Zugbeanspruchung (Bažant u. Planas [7]) sowie
- für beide Werkstoffkategorien im Hinblick auf die Schädigungslokalisierung in Bruchflächen (van Mier [61]).

In Abhängigkeit vom Verhältnis der Hauptspannungen sind nach Speck [82] verschiedene Versagenszustände — wie beispielsweise der Druckbruch, Spaltbruch oder Schubbruch — experimentell zu beobachten (Abbildung 1.1).

Nichtlineare Materialmodelle für Beton haben eine besondere Bedeutung für die realitätsnahe Simulation der Beanspruchungs- und Versagenszustände von tragenden Konstruktionen im Rahmen der Finiten-Elemente-Methode. Die vorhandenen numerischen Verfahren erreichten vor 10 bis 15 Jahren einen Stand, der aus theoretischer Sicht für eine Simulation von Betonkonstruktionen bis zum Versagen ausreichend ist (Mang u. a. [55]). Trotz des offensichtlichen theoretischen Fortschritts bleiben die Anwendungsfälle dieser Verfahren allerdings auf die rechnerische Bestätigung weniger bekannter Versuche beschränkt.

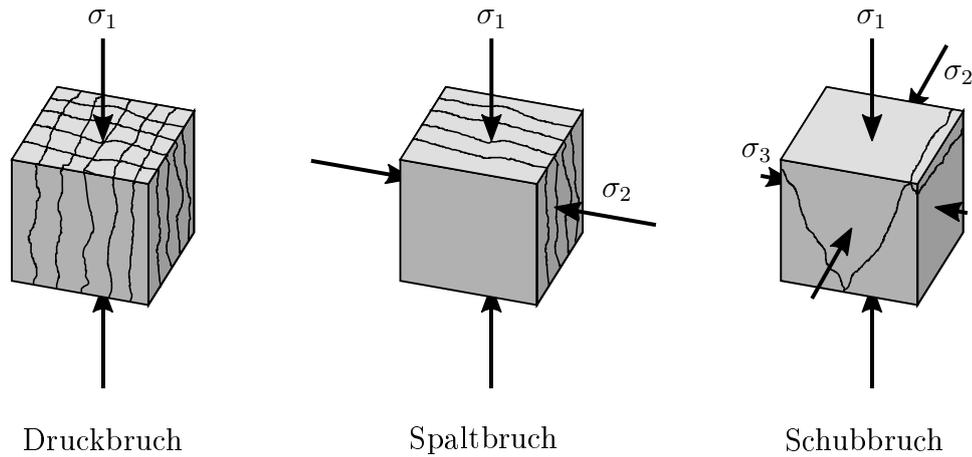


Abbildung 1.1: Auswahl verschiedener Versagenszustände von Beton in Abhängigkeit vom Verhältnis der Hauptspannungen

Einschränkungen vorhandener Materialmodelle werden schon an einem einfachen uniaxialen Würfeldruckversuch deutlich. Eine Simulation dieses Versuches liefert zwar in Belastungsrichtung ein richtiges Kraft-Verformungs-Diagramm. In die Querrichtungen aber werden Verformungen meistens durch stark vereinfachende Annahmen ermittelt, wie beispielsweise der Volumenkonstanz oder konstanter Dilatanz. In Belastungsrichtung wird der Druckbruch von Beton suggeriert, obwohl das Versagen im Experiment durch Querspannungen zustande kommt. Diese Längsrisse und ihr Einfluss auf die Festigkeit und Steifigkeit des Materials in den Querrichtungen können in der Simulation nicht zuverlässig vorhergesagt werden. Somit ist der simulierte physikalische Zustand grundsätzlich falsch, obwohl die Traglast und die Verformung in Belastungsrichtung realitätsnah abgebildet werden können. Solche Modelle sind zwar für Bauteile geeignet, in denen das uniaxiale Verhalten von Beton maßgebend ist, wie beispielsweise bei Biegung. Versagenssimulationen unter dreidimensionalen Beanspruchungen sind aber bis heute eine Herausforderung, da die gegenseitige Beeinflussung der Belastungen und Verformungen in die unterschiedlichen Richtungen unklar ist. Beispielhaft seien die Verankerungen von Seilen und Spanngliedern mittels Zahnleisten in hochfesten Betonen in Tandler [84] oder die Grout-Verbindungen bei Offshore-Windenergieanlagen in Anders [2] erwähnt (Abbildung 1.2).

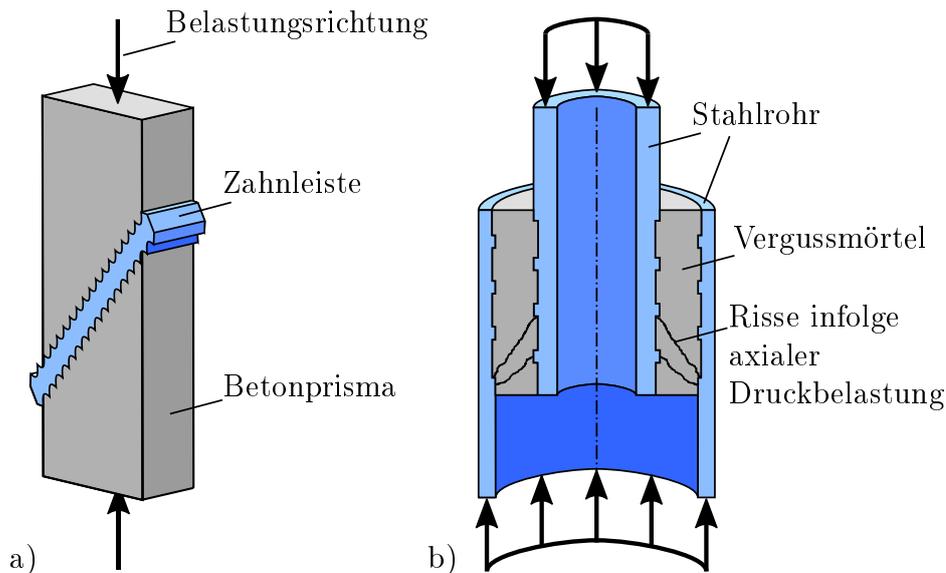


Abbildung 1.2: Prinzipielle Versuchsaufbauten: a) Betonprisma mit geneigter Zahnleiste nach Tandler [84]; b) Grout-Verbindung unter axialer Druckbelastung nach Anders [2]

## 1.2 Stand der Forschung

Die Vielfalt der Schädigungs- und Versagensphänomene führt zu einer Vielfalt von Materialmodellen für Beton, die sich nach verschiedenen Merkmalen klassifizieren lassen (De Borst [19], Hofstetter u. Mang [35], Jirásek u. Bažant [40], Mang u. a. [55]):

- Nach der Wahl der Materialtheorie:
  - Plastizitätstheorie: Chen [15], Grassl [27];
  - Schädigungstheorie: Carol u. a. [11], Kitzig u. Häußler-Combe [44] Mazars u. Pijaudier-Cabot [57], Pröchtel u. Häußler-Combe [74];
  - Kombination der Plastizitäts- und Schädigungstheorie: Bažant u. Kim [8], Cicekli u. a. [17], Grassl u. Jirásek [28], Häußler-Combe u. Hartig [32], Jason u. a. [39], Luccioni u. Rougier [53], Meschke u. a. [59], Pölling [73], Salari u. a. [77].
- Nach der Wahl der mechanischen Beschreibung:
  - Bruchmechanik: Bažant u. Planas [7];

- Kontinuumsmechanik: Hofstetter u. Mang [35].
- Nach der Art der Formulierung der Fließ- und Schädigungskriterien sowie der entsprechenden Evolutionsgleichungen:
  - Spannungsbasierte Formulierung: Etse u. Willam [22], Meschke u. a. [59], Pölling [73];
  - Dehnungsbasierte Formulierung: Häußler-Combe u. Hartig [32], Krätzig u. Pölling [47], Simo u. Ju [80];
  - Gemischte Formulierung: Cicekli u. a. [17], Grassl u. Jirásek [28], Grassl u. a. [30], Jason u. a. [39].
- Nach der Art der numerischen Abbildung der Lokalisierung von Verzerrungen und der Makrorisse:
  - Lokale oder nichtlokale Plastizität beziehungsweise Schädigung: De Borst [19], Jirásek u. Rolshoven [42], de Sciarra [78];
  - Microplane-Theorie: Bažant u. Oh [9], Carol u. a. [10];
  - Strong-Discontinuity-Ansatz: Feist u. Hofstetter [24], Mosler u. Meschke [63];
  - „*Extended Finite Element Method*“ (XFEM): Wells u. Sluys [91].

Die *Bruchmechanik* ist hauptsächlich für die Abbildung von Einzelrissen geeignet. Für die Berechnung von Gesamttragwerken bietet sich die kontinuumsmechanische Formulierung besser an, da sie mit weniger rechnerischem Aufwand verbunden ist. Sie stößt aber auf bekannte numerische Probleme bei der Abbildung lokalisierter Verzerrungen, die zur Bildung von diskreten Makrorissen führen (De Borst [19]).

Diese können durch spezielle Maßnahmen, wie beispielsweise das Konzept der *verschmierten Risse* und die *Regularisierungsverfahren* unter Beachtung der Bruchenergie (Bažant u. Planas [7]), behoben werden. Die Bestimmung der flächenbezogenen Bruchenergie ist bekanntlich mit großen Unsicherheiten behaftet und bleibt aus diesem Grund für die praktische Anwendung recht problematisch (Jirásek u. Bauer [41]).

Alternativ lassen sich numerische Schwierigkeiten durch die kinematischen Kopplungen im Rahmen der *Microplane-Theorie* (Carol u. a. [10]), die gewichtete Mittelung der Verzerrungen über ein nichtlokales Gebiet (Pijaudier-Cabot u. Bažant [72]) oder die Einführung von nichtlokalen Zustandsvariablen im Rahmen der Gradienten-Verfahren lösen (Peerlings u. a. [67]). Sowohl die Microplane-Theorie, als auch die nichtlokalen Modelle sind allerdings nach Mang u. a. [55] für die Simulation komplexer Tragwerke ungeeignet, da sie einen nicht vertretbaren numerischen Aufwand erfordern.

Mit der XFEM-Methode lässt sich die Netzabhängigkeit der Rissentstehung und des Rissfortschritts teilweise reduzieren. Durch zusätzlich eingeführte Freiheitsgrade steigt aber auch hier der numerische Aufwand deutlich. Nach Mosler u. Meschke [63] ist das Verfahren der diskontinuierlichen Modellierung daher besser geeignet.

Sowohl die reine *Plastizitätstheorie*, als auch die reine *Schädigungstheorie* sind für die Beschreibung des nichtlinearen mechanischen Verhaltens von Beton unter ausschließlich monotonen Belastungsvorgängen geeignet. Die Simulation vollständiger Bauteile aus Beton erfordert allerdings eine elasto-plastische Schädigungstheorie, da einzelne Materialpunkte bei Lastumlageungsvorgängen trotz einer monotonen, globalen Belastung zyklisch beansprucht werden können. Der Steifigkeitsverlust aus Schädigung und die bleibenden, plastischen Verformungen müssen daher realitätsnah berücksichtigt werden.

Eine *elasto-plastische Kontinuumsschädigungstheorie* erfordert mehrere Evolutionsgesetze. In der Plastizitätstheorie beschreibt die Fließregel die Entwicklung der plastischen Dehnungen. Um beispielsweise eine Volumenzunahme unter Druckbelastung zu simulieren, werden für Beton nicht-assozierte Fließregeln formuliert, wie beispielsweise in Cervenka u. Papanikolaou [14] oder Grassl u. a. [30]. Die Verfestigungsregel beschreibt die Entwicklung der internen Verbiegungs- beziehungsweise Entfestigungsvariablen, aus denen sich die Änderungen der Fließkriterien ergeben. In der Schädigungstheorie gibt es eigene Evolutionsgesetze. Ein Gesetz beschreibt die Entwicklung der Schädigungskriterien, das andere die Entwicklung der Schädigung selbst. Aus der Literatur sind zum einen Evolutionsgesetze für isotrope Schädigung im Druck- und Zugbereich mit Wichtungsfaktoren nach Mazars [58] bekannt. Zum anderen werden Evolutionsgesetze anhand einer äquivalenten (plastischen) Verzerrung verwendet, wie

beispielsweise in Kitzig u. Häußler-Combe [44], Peerlings [68] oder Simo u. Ju [80]. Die Evolutionsgleichungen werden überwiegend durch eine reine mathematische Anpassung an bekannte Versuchskurven gewonnen. Evolutionsgesetze für Zustandsvariablen, die hauptsächlich auf messtechnisch erfassbaren Parametern basieren, sind bislang nicht bekannt. Die erforderlichen mehrfachen Be- und Entlastungen sind versuchstechnisch aufwendig und bei den multiaxialen Versuchen nur in van Mier [60] für Normalbeton realisiert worden. Besonders die Dehnungen quer zur Hauptbelastungsrichtung sind für solche Versuche nicht ausreichend dokumentiert. In den spannungsbasierten Evolutionsgesetzen sind sie bisher nur durch Annahmen berücksichtigt worden. Zur Erfassung von Querszugrissen und von der gegenseitigen Beeinflussung der Belastungen und Verformungen in die unterschiedlichen Richtungen sind derartige Versuche aber unbedingt notwendig.

### 1.3 Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Ermittlung von experimentell basierten Evolutionsgleichungen für die plastischen Verzerrungen und die Schädigungszustände anhand von Druckversuchen unter verschiedenen Druckbelastungszuständen. Sie sollen ausschließlich auf experimentell nachvollziehbaren Materialkenngrößen basieren. Um die Eignung der gewonnenen Evolutionsansätze für ein zukünftiges Materialmodell zu prüfen, werden sie in einer Materialroutine für ein Finite-Elemente-Programm umgesetzt. Insbesondere das dreidimensionale, mechanische Verhalten und die Versagensmechanismen unter verschiedenen Belastungszuständen sollen realitätsnah und ohne eine Anpassung der Materialparameter beschrieben werden können. Die gegenseitige Beeinflussung der Belastungen und Verformungen in die unterschiedlichen Richtungen soll durch eine orthotrope Formulierung der Schädigungstheorie erfasst werden. Eine Vorhersage der Bildung von Querszugrissen und der zugehörige Steifigkeitsverlust der entsprechenden Richtungen soll ohne von außen anliegende Zugbeanspruchungen stattfinden.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Herleitung, der Umsetzung und der Erprobung der experimentell gewonnenen Evolutionsgleichungen. Die in Abschnitt 1.2 genannten Regularisierungsverfahren bleiben außerhalb des

Rahmens dieser Arbeit. Sie sind in einem zukünftigen Werkstoffmodell für Beton notwendig, um die lokalisierten, diskontinuierlichen Verformungen in Makrorissen zu berücksichtigen.

## 1.4 Struktur der Arbeit

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen der Kontinuumsmechanik erläutert. Materialmodelle liefern die sogenannten Werkstoffgesetze, die zu den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik gehören. Die Lösung dieser Grundgleichungen mit dem Prinzip der virtuellen Weggrößen und der Finiten-Elemente-Methode wird ebenfalls beschrieben.

Kapitel 3 beschreibt das mechanische Verhalten von Beton unter verschiedenen Belastungszuständen anhand einer Auswahl experimenteller Beobachtungen aus der Literatur.

In Kapitel 4 werden klassische Materialtheorien beschrieben. Dazu gehören die Elastizitäts-, die Plastizitäts- und die Schädigungstheorie. Die Formulierung der einzelnen Theorien sowie deren Kombinationsmöglichkeiten werden angegeben.

In Kapitel 5 werden Versuche aus van Mier [60] bezüglich dreidimensionaler Evolutionsgleichungen für die Plastizität und die Schädigung ausgewertet. Diese werden wiederum in einer elasto-plastischen Kontinuumsschädigungstheorie umgesetzt und als Materialroutine in ein Finite-Elemente-Programm integriert.

Nach der Integration der Evolutionsgleichungen in ein Finite-Elemente-Programm werden diese zur Validierung durch Simulation von Material- und Bauteilversuchen in Kapitel 6 verwendet.

Eine Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse und ein Ausblick mit möglichen Weiterentwicklungsvorschlägen wird in Kapitel 7 gegeben.



# Kapitel 2

## Grundlagen der numerischen Strukturmodelle

In diesem Kapitel werden die für die vorliegende Arbeit relevanten Grundlagen der Kontinuumsmechanik, das Prinzip der virtuellen Weggrößen und die Finite-Elemente-Methode (FEM) erläutert.

### 2.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Eigenschaften von Werkstoffen werden in drei verschiedenen Betrachtungsebenen beschrieben. Nach Holzapfel [36] besteht ein Werkstoff in der *mikroskopischen* Betrachtungsweise aus vielen Molekülen. Diese Betrachtungsweise wird herangezogen, um beispielsweise die chemischen Prozesse während der Erhärtung zu erklären.

In der *mesoskopischen* Betrachtungsweise setzt sich Beton aus einer zusammenhängenden Phase, Zementmatrix, und den darin verteilten Phasen, Zuschlag und Luftporen, zusammen. Mechanische Modelle, die die Interaktion zwischen diesen Phasen berücksichtigen, werden Mesomodelle genannt. Sie sind beispielsweise in Wriggers u. Moftah [94], Lilliu u. Mier [52] oder Unger u. Könke [87] zu finden. Mesomodelle verursachen einen sehr hohen Rechenaufwand und die Interaktionseigenschaften zwischen den Phasen sind nur schwer messbar (Kim u. Al-Rub [43]). Daher kommt ihr Einsatz ausschließlich für Detailuntersuchungen von Bauteilausschnitten in Frage. Für die Berechnung auf Bauteilebene sind sie ungeeignet.

Aus diesen Gründen bezieht sich das in Kapitel 5 vorgestellte Modell, wie die meisten mechanischen Modelle für Beton, auf die *makroskopische* Betrachtungsweise. Auf die Unterscheidung zwischen den Phasen wird verzichtet. Diese Herangehensweise bietet den Vorteil, dass ein Bauteil aus Beton als kontinuierlicher Körper aufgefasst werden kann. Dadurch kann sein mechanisches Verhalten durch die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik beschrieben werden. Diese sind

- die Beschreibung der *Kinematik*,
- die *Bilanzsätze* und
- die *Material- beziehungsweise Werkstoffgesetze*.

Ziel der Kontinuumsmechanik deformierbarer Festkörper ist die Ermittlung von *Spannungs-* und *Verzerrungszuständen*. In den folgenden Abschnitten werden die benötigten Grundgleichungen zur Herleitung der FEM in Anlehnung an die Arbeit von Pfister [71] ermittelt. Für weitere Erläuterungen wird auf die Standardwerke von Marsden u. Hughes [56], Holzapfel [36] oder Wriggers [93] verwiesen.

### 2.1.1 Kinematik

In der Kontinuumsmechanik wird durch die Kinematik der Zusammenhang zwischen *Verschiebungen*, *Deformationen* und *Verzerrungen* beschrieben. Dabei wird zwischen der LAGRANGE- und der EULER-Betrachtung unterschieden. Die EULER-Betrachtungsweise wird auch *räumliche* Betrachtung genannt. An jedem raumfesten Ort  $\boldsymbol{x}$  werden die Eigenschaften der Teilchen beobachtet, die sich zur Zeit  $t$  dort befinden. Dieses Vorgehen eignet sich hauptsächlich zur Beschreibung von Fluiden. Daher wird in dieser Arbeit die LAGRANGE-Betrachtungsweise verwendet, die vorwiegend bei der Beschreibung von Festkörpern zum Einsatz kommt. Sie wird auch *materielle* Betrachtungsweise genannt, da die Eigenschaften materieller Teilchen verfolgt werden, die sich zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t$  an unterschiedlichen Orten  $\boldsymbol{x}$  befinden können.

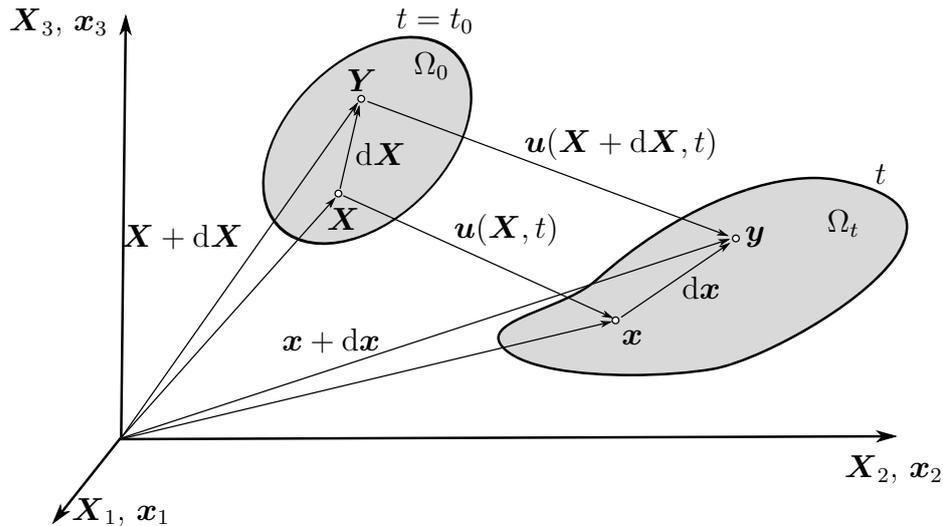


Abbildung 2.1: Kinematik eines Körpers beim Übergang von der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  in eine Momentankonfiguration  $\Omega_t$

### Konfigurationen und Verschiebungen

Bewegungen von Festkörpern werden durch sogenannte *Konfigurationen* definiert. Dabei wird in der LAGRANGE-Betrachtungsweise zwischen der *Referenzbeziehungswise Ausgangskonfiguration*  $\Omega_0$  und den *Momentankonfigurationen*  $\Omega_t$  unterschieden. Letztere beschreiben Gebiete im Raum, die von einem Körper zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t$  eingenommen werden. Die Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  ist häufig die undeformierte Ausgangslage des betrachteten Körpers zu einem Zeitpunkt  $t = t_0$ . Bei zeitinvariantem Materialverhalten wird die Zeit nur zur Unterscheidung von verschiedenen Belastungs- und Verzerrungszuständen verwendet.

Zur Unterscheidung wird der Ortsvektor eines Teilchens in  $\Omega_0$  mit  $\mathbf{X}$  bezeichnet, der Ortsvektor desselben Teilchens in den Konfigurationen  $\Omega_t$  mit  $\mathbf{x}$ . Diese beiden Ortsvektoren sind über den *Verschiebungsvektor*  $\mathbf{u}$  miteinander gekoppelt (Abbildung 2.1):

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}. \quad (2.1)$$

## Deformationen und Verzerrungen

Deformationen sind Abstands- und Richtungsänderungen eines materiellen Linieninkrements zwischen zwei benachbarten Punkten (Abbildung 2.1):

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} &= \mathbf{Y} - \mathbf{X} && \text{Linieninkrement in } \Omega_0, \\ d\mathbf{x} &= \mathbf{y} - \mathbf{x} && \text{Linieninkrement in } \Omega_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Wird das Linieninkrement  $d\mathbf{x}$  durch partielles Ableiten auf das Linieninkrement  $d\mathbf{X}$  bezogen, so ergibt sich der *Deformationsgradient*  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial(\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Dieser zweistufige Tensor bildet Linieninkremente aus der Referenzkonfiguration auf ihre entsprechenden Linieninkremente in der Momentankonfiguration ab. Im Allgemeinen nimmt er für unterschiedliche Linieninkremente unterschiedliche Werte an:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \quad (2.4)$$

Neben den spannungserzeugenden *Verzerrungen* enthält der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  *Starrkörperbewegungen*, die keine Spannungen verursachen. Um Spannungszustände zu ermitteln, müssen letztere Bewegungsanteile durch die Definition geeigneter Verzerrungsmaße abgespalten werden.

Zunächst lässt sich  $\mathbf{F}$  durch *polare Zerlegung* in einen Rotationstensor  $\mathbf{R}$  und den materiellen Rechtsstrecktensor  $\mathbf{U}$  beziehungsweise den räumlichen Linkstrecktensor  $\mathbf{V}$  zerlegen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}. \quad (2.5)$$

Für die weiteren Betrachtungen wird  $\mathbf{V}$  nicht weiter verwendet. Rotationstensoren sind orthogonale Tensoren, so dass  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$  gilt. Dadurch entfallen bei der Berechnung der quadrierten Länge des Linieninkrements  $d\mathbf{x}$  die Rotationsanteile:

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{x}\|^2 &= d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X})^T \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \\ &= d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Durch Subtraktion der quadrierten Ausgangslänge  $\|\mathrm{d}\mathbf{X}\|^2$  ergibt sich ein Maß für die Längenänderung des betrachteten Linieninkrementes:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{x}^T \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - \mathrm{d}\mathbf{X}^T \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} &= \mathrm{d}\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} - \mathrm{d}\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} \\ &= \mathrm{d}\mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} \\ &= \mathrm{d}\mathbf{X}^T \cdot 2\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Darin wird  $\mathbf{E}$  als GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor bezeichnet:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) . \quad (2.8)$$

Durch die Transposition des zweiten Ausdrucks in Gleichung (2.8) wird die Symmetrie des Tensors  $\mathbf{E}$  deutlich. Durch Einsetzen der Gleichung (2.3) wird dieser als Funktion des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u}) - \mathbf{I}] \\ &= \frac{1}{2} [\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u} \cdot \text{Grad } \mathbf{u}] . \end{aligned} \quad (2.9)$$

### Deformationen von differentiellen Volumen und Flächenvektoren

Die differentiellen Volumen  $\mathrm{d}V$  und  $\mathrm{d}v$ , die von jeweils drei differentiellen Linieninkrementen  $\mathrm{d}\mathbf{A}$ ,  $\mathrm{d}\mathbf{B}$ ,  $\mathrm{d}\mathbf{C}$  beziehungsweise  $\mathrm{d}\mathbf{a}$ ,  $\mathrm{d}\mathbf{b}$ ,  $\mathrm{d}\mathbf{c}$  aufgespannt werden, lassen sich mit Hilfe des Spatproduktes ermitteln:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= (\mathrm{d}\mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{C} = \varepsilon_{ijk} \mathrm{d}A_i \mathrm{d}B_j \mathrm{d}C_k \quad \text{in } \Omega_0 , \\ \mathrm{d}v &= (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \mathrm{d}\mathbf{b}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{c} = \varepsilon_{ijk} \mathrm{d}a_i \mathrm{d}b_j \mathrm{d}c_k \quad \text{in } \Omega_t . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mit den Gleichungen (2.4), (A.16) und (A.18) gilt für die Abbildung von differentiellen Volumeninkrementen aus  $\Omega_0$  nach  $\Omega_t$  folgender Zusammenhang :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \mathrm{d}\mathbf{b}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{c} \\ &= (\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{C} = \varepsilon_{ijk} F_{il} \mathrm{d}A_l F_{jm} \mathrm{d}B_m F_{kn} \mathrm{d}C_n \\ &= \frac{1}{6} F_{il} F_{jm} F_{kn} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{lmn} \mathrm{d}A_l \mathrm{d}B_m \mathrm{d}C_n \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\mathrm{d}v = \det(\mathbf{F}) \mathrm{d}V .$$

Die Kreuzprodukte in den Gleichungen (2.10) können als Flächenvektoren ( $\mathbf{N} \, dA$ ) beziehungsweise ( $\mathbf{n} \, da$ ) aufgefasst werden, die in Abbildung 2.2 dargestellt sind. Daher kann Gleichung (2.11) umformuliert werden:

$$\begin{aligned} dv &= (\mathbf{n} \, da) \cdot d\mathbf{c} &&= \det(\mathbf{F}) (\mathbf{N} \, dA) \cdot d\mathbf{C} \\ &= (\mathbf{n} \, da) \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{C} &&= \det(\mathbf{F}) (\mathbf{N} \, dA) \cdot d\mathbf{C} \\ &= \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{n} \, da) \cdot d\mathbf{C} &&= \det(\mathbf{F}) (\mathbf{N} \, dA) \cdot d\mathbf{C}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Da Gleichung (2.12) für alle Linieninkremente  $d\mathbf{C}$  gelten muss, ergibt sich nach Umformung eine Beziehung zur Beschreibung der Deformation von Flächenvektoren:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{n} \, da) - \det(\mathbf{F}) (\mathbf{N} \, dA)) \cdot d\mathbf{C} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mathbf{n} \, da) &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot (\mathbf{N} \, dA). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Diese Gleichung wird auch NANSON-Formel genannt (Holzapfel [36]).

### 2.1.2 Spannungsmaße

Wird ein Körper nach dem *Schnittprinzip* gedanklich aufgeschnitten, so werden an *differentiellen Schnittflächen* der beiden gegenüberliegenden Schnittufer *differentielle Schnittkräfte*  $d\mathbf{F}_S$  übertragen. In Abhängigkeit der Betrachtungskonfiguration  $\Omega_0$  oder  $\Omega_t$  werden unterschiedliche Spannungsmaße entsprechend der folgenden Abschnitte definiert.

#### CAUCHY-Spannungstensor

Der CAUCHY-Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  stellt die *wahren Spannungen* dar, weil die differentiellen Schnittkräfte  $d\mathbf{F}_S$  auf die differentiellen Schnittflächen  $da$  der Momentankonfiguration  $\Omega_t$  bezogen werden:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{F}_S}{da}. \quad (2.14)$$

Spannungsvektoren sind vom Ort  $\mathbf{x}$ , vom Belastungszustand zur Zeit  $t$  und von der Schnitttrichtung  $\mathbf{n}$  abhängig (Abbildung 2.2). Nach dem CAUCHY-Spannungstheorem existiert ein eindeutiger, zweistufiger Tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , der den

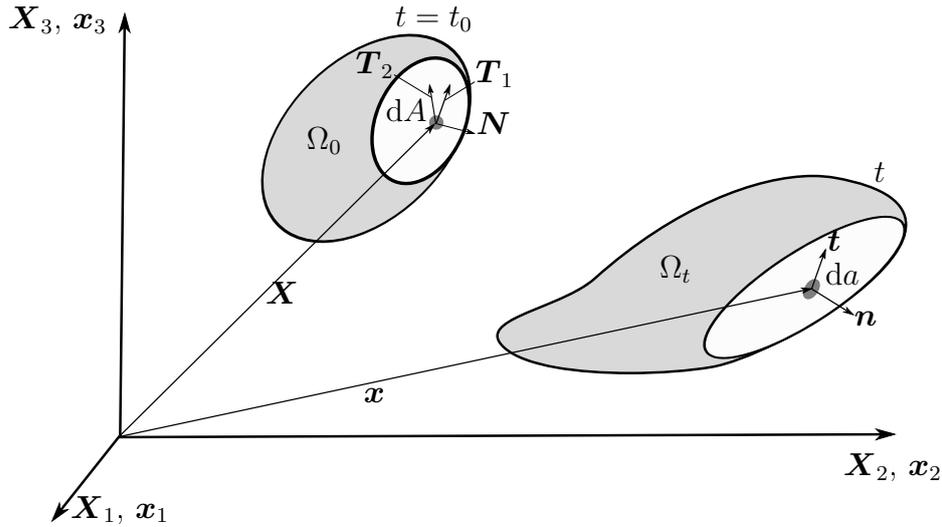


Abbildung 2.2: CAUCHY-Spannungsvektor  $\mathbf{t}$ , 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor  $\mathbf{T}_1$  und 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor  $\mathbf{T}_2$

Normalenvektor  $\mathbf{n}$  des Flächeninkrements  $da$  auf den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  abbildet:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.15)$$

Dieser Tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  ist von der Schnitttrichtung  $\mathbf{n}$  unabhängig. Er wird CAUCHY-Spannungstensor oder *wahrer Spannungstensor* genannt. In Abschnitt 2.1.3 wird gezeigt, dass der CAUCHY-Spannungstensor symmetrisch sein muss, um den Drehimpulserhaltungssatz zu erfüllen.

### 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

Da es häufig einfacher ist, Schnittflächen in der Ausgangskonfiguration zu bestimmen, wird der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor  $\mathbf{T}_1$  definiert. Dieser bezieht dieselben differentiellen Schnittkräfte  $d\mathbf{F}_S$  auf die differentiellen Schnittflächen  $dA$  der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$ :

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \frac{d\mathbf{F}_S}{dA}. \quad (2.16)$$

Die Spannungsvektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{T}_1$  zeigen in dieselbe Richtung (Abbildung 2.2). Da sie aber auf unterschiedliche Flächeninkremente bezogen sind, unterscheiden sie sich im Betrag. Analog zu Gleichung (2.15) existiert ein schnittrich-

tungsunabhängiger, zweistufiger Tensor  $\mathbf{P}$ , der die Schnittrichtung  $\mathbf{N}$  auf den Vektor  $\mathbf{T}_1$  abbildet:

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}. \quad (2.17)$$

$\mathbf{P}$  ist der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor. Er wird auch *Nennspannungstensor* genannt. Über die Gleichungen (2.14), (2.16) und die NANSON-Formel (2.13) kann  $\mathbf{P}$  mit Hilfe des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in den CAUCHY-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  überführt werden:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_S = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}dA &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}da \\ &= \det(\mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA \\ \Leftrightarrow \mathbf{P} &= \det(\mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da  $\mathbf{F}$  in der Regel nicht symmetrisch ist, ist  $\mathbf{P}$  ebenfalls nicht symmetrisch. Nach Pfister [71] ist das ein erheblicher Nachteil für die Formulierung von Materialgleichungen. Daher wird der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor definiert.

## 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor  $\mathbf{T}_2$  bezieht differentielle Schnittkräfte  $d\mathbf{F}_{S_0}$  auf die differentiellen Schnittflächen  $dA$  der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$ :

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \frac{d\mathbf{F}_{S_0}}{dA}. \quad (2.19)$$

Die Schnittkräfte  $d\mathbf{F}_{S_0}$  entstehen durch Abbildung der in den Gleichungen (2.14) beziehungsweise (2.16) verwendeten Schnittkräfte  $d\mathbf{F}_S$  in die Referenzkonfiguration  $\Omega_0$ :

$$d\mathbf{F}_{S_0} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{F}_S. \quad (2.20)$$

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  bildet die Schnittrichtung  $\mathbf{N}$  auf den Vektor  $\mathbf{T}_2$  ab:

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}. \quad (2.21)$$

Über den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  können folgende Beziehungen zwischen den Spannungstensoren aufgestellt werden:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.22)$$

Wird der letzte Ausdruck in Gleichung (2.22) transponiert, so ist mit der Symmetrie von  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  die Symmetrie von  $\mathbf{S}$  erkennbar:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T &= \det(\mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T})^T \\ &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-TT} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{F}^{-1T} \\ &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \\ \Leftrightarrow \mathbf{S}^T &= \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.1.3 Bilanzsätze

#### Massenerhaltung

Die Massenerhaltung fordert, dass der betrachtete Körper stets dieselbe Masse besitzt:

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0 \, dV = \int_{\Omega_t} \rho \, dv. \quad (2.24)$$

Diese Forderung muss für alle Volumeninkremente erfüllt sein:

$$dm = \rho_0 \, dV = \rho \, dv. \quad (2.25)$$

Mit Gleichung (2.11) sind die Dichte der Referenzkonfiguration  $\rho_0$  und die Dichte der Momentankonfiguration  $\rho$  über den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  miteinander gekoppelt:

$$\frac{dv}{dV} = \frac{\rho_0}{\rho} = \det(\mathbf{F}). \quad (2.26)$$

#### Impulserhaltung

Der Impulserhaltungssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses  $\mathbf{L}$  eines Körpers den auf ihn wirkenden Resultierenden der äußeren Volumenkraft  $\mathbf{b}_f$  und der äußeren Oberflächenkräften  $\mathbf{t}$  entsprechen muss (Wriggers [93]):

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_{\Omega_t} \mathbf{b}_f \, dv + \int_{\delta\Omega_t} \mathbf{t} \, da. \quad (2.27)$$

Dabei ist  $\delta\Omega_t$  der Rand der Momentankonfiguration  $\Omega_t$ . Das zweite Integral in Gleichung (2.27) kann durch die Gleichung (2.15) und den GAUSS-Integralsatz umgeformt werden:

$$\int_{\delta\Omega_t} \mathbf{t} \, da = \int_{\delta\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dv. \quad (2.28)$$

Für statische Probleme verschwindet die Änderung des Impulses  $\dot{\mathbf{L}}$  in (2.27):

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0} = \int_{\Omega_t} (\mathbf{b}_f + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, dv. \quad (2.29)$$

Da Gleichung (2.29) für beliebige Volumeninkremente  $dv$  erfüllt sein muss, lautet die lokale, statische *Gleichgewichtsbedingung* in der Momentankonfiguration  $\Omega_t$

$$\mathbf{0} = \mathbf{b}_f + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.30)$$

In der mit Gleichung (A.36) ausgedruckten Form werden die differentiellen Gleichgewichtsbedingungen der drei Raumrichtungen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  erkennbar:

$$\begin{aligned} 0 &= b_{f1} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}, \\ 0 &= b_{f2} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}, \\ 0 &= b_{f3} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die entsprechenden Spannungen und Volumenkräfte sind exemplarisch für die  $x_1$ -Richtung in Abbildung 2.3 dargestellt.

Der zweite Ausdruck in Gleichung (2.28) entspricht der differentiellen Schnittkraft  $d\mathbf{F}_S$  aus den Gleichungen (2.14) und (2.16). Daher lässt sich der Impulserhaltungssatz (2.27) mit Gleichung (2.11) ebenfalls in der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  formulieren:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_f \det(\mathbf{F}) \, dV + \int_{\delta\Omega_0} \mathbf{T}_1 \, dA \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_f \, dV + \int_{\delta\Omega_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \, dA. \end{aligned} \quad (2.32)$$

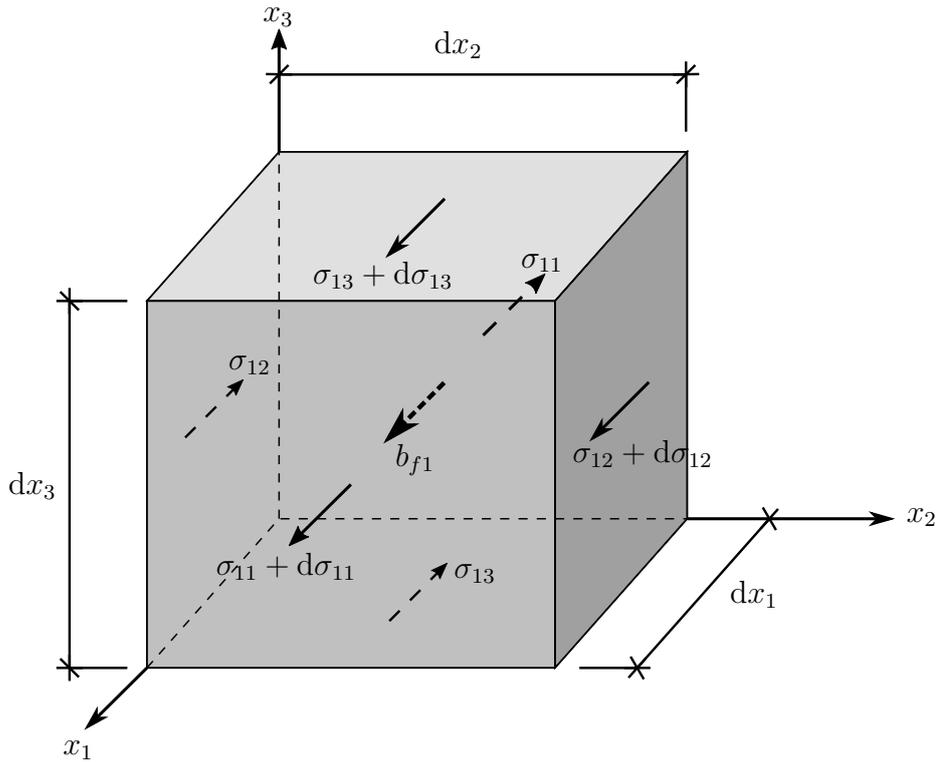


Abbildung 2.3: Spannungen und Volumenkräfte in Richtung  $x_1$  an einem differentiellen Volumen mit den Kantenlängen  $dx_1$ ,  $dx_2$  und  $dx_3$

Dabei wurde von einer Proportionalität zwischen der Massendichte  $\rho$  und den Volumenkräften  $\mathbf{b}_f$  in der Momentankonfiguration  $\Omega_t$  ausgegangen, so dass nach Gleichung (2.26) für die Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_f = \mathbf{b}_f \det(\mathbf{F})$  gilt. Analog zu den Gleichungen (2.29) und (2.30) ergibt sich das statische, lokale Gleichgewicht bezüglich der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$ :

$$\mathbf{0} = \mathbf{B}_f + \text{Div}(\mathbf{P}). \quad (2.33)$$

### Drehimpulserhaltung

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\mathbf{J}$  bezüglich eines Koordinatenursprunges entspricht dem resultierenden Moment der äußeren Volumenkräfte  $\mathbf{b}_f$  und der äußeren Oberflächenkräfte  $\mathbf{t}$  (Wriggers [93]):

$$\dot{\mathbf{J}} = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{b}_f \, dv + \int_{\delta\Omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, da. \quad (2.34)$$

Mit Gleichung (2.15) und dem GAUSS-Integralsatz kann das zweite Integral in Gleichung (2.34) umformuliert werden:

$$\begin{aligned}
\int_{\delta\Omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, da &= \int_{\delta\Omega_t} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Omega_t} \nabla \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}) \, dv \\
&= \int_{\delta\Omega_t} \varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{jl} n_l \, da = \int_{\Omega_t} (\varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{jl})_{,l} \, dv \\
&= \int_{\Omega_t} (\varepsilon_{ijk} \delta_{il} \sigma_{jl} + \varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{j,l}) \, dv \\
&= \int_{\Omega_t} (\varepsilon_{ijk} \sigma_{ji} + \varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{j,l}) \, dv .
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Unter der Annahme, dass der CAUCHY-Spannungstensor symmetrisch ist ( $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ ), entfällt der erste Summand des letzten Ausdrucks in Gleichung (2.35):

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{ji} = 0, \quad \text{wenn } \sigma_{ji} = \sigma_{ij}, \quad \text{da } \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} . \tag{2.36}$$

Der zweite Summand in Gleichung (2.35) ist das Kreuzprodukt des räumlichen Ortsvektors  $\mathbf{x}$  mit der Divergenz des CAUCHY-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$ . Für statische Probleme verschwindet wiederum die Änderung des Drehimpulses  $\dot{\mathbf{J}}$ :

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{0} = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\mathbf{b}_f + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, dv . \tag{2.37}$$

Der Ausdruck in Klammern entspricht der statischen Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (2.30). Damit ist die Drehimpulserhaltung unter der Annahme symmetrischer CAUCHY-Spannungstensoren  $\boldsymbol{\sigma}$  erfüllt. Nicht symmetrische  $\boldsymbol{\sigma}$  würden den Drehimpulssatz automatisch verletzen. Daher wird durch die Drehimpulserhaltung die Symmetrie von  $\boldsymbol{\sigma}$  gefordert.

#### 2.1.4 Materialgesetze

Die Gleichungen der vorangegangenen Abschnitte zur Beschreibung der Kinetik und der Erhaltungssätze behalten für alle statischen Probleme der Kontinuumsmechanik ihre Gültigkeit. Sie unterscheiden jedoch noch nicht zwischen unterschiedlichen Materialien (Holzapfel [36]).

Des Weiteren reicht im Fall der Statik deformierbarer Körper die Anzahl der genannten Gleichungen nicht aus, um alle gesuchten Feldgrößen zu ermitteln. Die 15 gesuchten Feldgrößen an jedem Materialpunkt sind

- 3 Verschiebungen  $u_i$  des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$ ,
- 6 Verzerrungen  $E_{ij}$  des symmetrischen GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  und
- 6 Spannungen  $S_{ij}$  des symmetrischen 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\mathbf{S}$ .

Die vorangegangenen Abschnitte 2.1.1 bis 2.1.3 liefern lediglich 9 der 15 benötigten Gleichungen, nämlich

- 3 Gleichgewichtsbedingungen aus Gleichung (2.33) und
- 6 kinematische Beziehungen aus Gleichung (2.9).

Die Massenerhaltung (2.24) liefert keine Information bezüglich der genannten Unbekannten. Die Drehimpulserhaltung (2.37) wurde bereits genutzt, um die Anzahl der unbekannt Spannungen zu reduzieren.

Die 6 fehlenden Gleichungen müssen durch die Materialgesetze bereitgestellt werden. Sie beschreiben in Abhängigkeit vom Material den Zusammenhang zwischen dem Spannungszustand und dem Verzerrungszustand. Die Herleitung der Materialgesetze ist den Kapiteln 4 und 5 zu entnehmen.

## 2.2 Prinzip der virtuellen Weggrößen

Das partielle Differentialgleichungssystem (2.33) bildet zusammen mit den Randbedingungen die *starke Form des Gleichgewichts*. Es wird zwischen kinematischen Randbedingungen und statischen Randbedingungen unterschieden. Der Teil der Randoberfläche, auf denen die kinematischen Verschiebungsrandbedingungen  $\bar{\mathbf{u}}$  vorgeschrieben werden, wird mit  $\delta_u \Omega_0$  bezeichnet:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \delta_u \Omega_0. \quad (2.38)$$

Auf dem übrigen Teil der Randoberfläche  $\delta_\sigma\Omega_0$  werden die statischen Randbedingungen  $\overline{\mathbf{T}}_1$  vorgegeben:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \overline{\mathbf{T}}_1 \quad \text{auf } \delta_\sigma\Omega_0. \quad (2.39)$$

Die starke Form des Gleichgewichts ist nur für sehr wenige, einfache Fälle analytisch lösbar. Daher wird die *schwache Form des Gleichgewichts* mit dem *Prinzip der virtuellen Weggrößen* formuliert. Darin wird das Gleichgewicht lediglich im gewichteten Mittel gefordert.

### 2.2.1 Herleitung

Das *Prinzip der virtuellen Weggrößen* besagt, dass die *virtuelle Arbeit*  $\delta W$  der inneren und äußeren Kräfte auf beliebigen, kinematisch zulässigen, virtuellen Verschiebungsfeldern verschwinden muss, wenn sich ein Körper im Gleichgewicht befindet:

$$\delta W = \delta W_a + \delta W_i = 0. \quad (2.40)$$

Die inneren und äußeren Kräfte ergeben sich aus den Volumenkräften (2.33) multipliziert mit differentiellen Volumeninkrementen  $dV$  beziehungsweise aus den Oberflächenkräften (2.39) multipliziert mit Randflächeninkrementen  $dA$ :

$$df_V = (-\text{Div}(\mathbf{P}) - \mathbf{B}_f) dV, \quad (2.41)$$

$$df_A = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - \overline{\mathbf{T}}_1) dA. \quad (2.42)$$

Die Vorzeichen der beiden Ausdrücke (2.41) und (2.42) wurden so gewählt, dass die äußeren Arbeiten aus  $\mathbf{B}_f$  und  $\overline{\mathbf{T}}_1$  negativ in die Arbeitsbilanz (2.40) beziehungsweise (2.46) eingehen.

Das virtuelle Verschiebungsfeld  $\delta \mathbf{u}$  ergibt sich aus der Variationsrechnung. Holzapfel [36] definiert die Variation mit Hilfe einer Funktion  $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ , die von einem Vektorfeld — hier dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  — abhängt. Danach ist die Variation  $\delta \mathcal{F}$  die Richtungs- oder CÂTEAUX-Ableitung der Funktion  $\mathcal{F}(\mathbf{u})$  in die Richtung einer virtuellen Verschiebung  $\delta \mathbf{u}$ . Das entspricht der gewöhnlichen Ableitung der Funktion  $\mathcal{F}(\mathbf{u} + \eta \delta \mathbf{u})$  nach dem skalaren Parameter  $\eta$  ausgewertet für  $\eta = 0$ :

$$\delta \mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = \frac{d}{d\eta} \mathcal{F}(\mathbf{u} + \eta \delta \mathbf{u})|_{\eta=0}. \quad (2.43)$$

Das virtuelle Verschiebungsfeld  $\delta \mathbf{u}$  ergibt sich aus der Variation des Verschiebungsfeldes selbst:

$$\delta \mathbf{u} = \frac{d}{d\eta} (\mathbf{u} + \eta \delta \mathbf{u})|_{\eta=0}. \quad (2.44)$$

Es ist kinematisch zulässig, wenn es auf dem Rand  $\delta_u \Omega_0$  keine virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  liefert:

$$\delta \mathbf{u} = \{ \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} = 0 \text{ auf } \delta_u \Omega_0 \}. \quad (2.45)$$

Die skalare Multiplikation des Ausdruckes (2.44) mit dem Ausdruck (2.41) sowie (2.42) ergibt differentielle, virtuelle Arbeiten. Diese werden über den Körper  $\Omega_0$  beziehungsweise über seine Randoberfläche  $\delta_\sigma \Omega_0$  integriert, um die gesamte virtuelle Arbeit  $\delta W$  zu ermitteln:

$$\delta W = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot (-\text{Div}(\mathbf{P}) - \mathbf{B}_f) dV + \int_{\delta_\sigma \Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - \bar{\mathbf{T}}_1) dA = 0. \quad (2.46)$$

Diese Gleichung wird in eine üblichere Form umgeformt. Zunächst wird die Produktregel auf die Divergenz im ersten Integral der Gleichung (2.46) angewendet:

$$\begin{aligned} \text{Div}(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) &= \text{Grad } \delta \mathbf{u} : \mathbf{P} + \delta \mathbf{u} \cdot \text{Div}(\mathbf{P}) \\ \Leftrightarrow \delta \mathbf{u} \cdot \text{Div}(\mathbf{P}) &= \text{Div}(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) - \text{Grad } \delta \mathbf{u} : \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Der Ausdruck  $\text{Grad } \delta \mathbf{u}$  in Gleichung (2.47) kann durch die Variation des Deformationsgradienten ersetzt werden, indem Gleichung (2.43) auf (2.3) angewendet wird:

$$\delta \mathbf{F} = \frac{d}{d\eta} (\mathbf{I} + \text{Grad}(\mathbf{u} + \eta \delta \mathbf{u}))|_{\eta=0} = \frac{d}{d\eta} (\eta \text{Grad}(\delta \mathbf{u})) = \text{Grad } \delta \mathbf{u}. \quad (2.48)$$

Einsetzen von den Gleichungen (2.47) und (2.48) in die Gleichung (2.46) liefert

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{F} : \mathbf{P} dV - \int_{\Omega_0} \text{Div}(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) dV - \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_f dV \\ &\quad + \int_{\delta_\sigma \Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - \bar{\mathbf{T}}_1) dA = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Mit dem GAUSS-Integralsatz kann das zweite Integral der Gleichung (2.46) ebenso umgeformt werden:

$$\int_{\Omega_0} \text{Div}(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) \, dV = \int_{\delta_\sigma \Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \, dA. \quad (2.50)$$

Der Ausdruck (2.50) hebt das letzte Integral in Gleichung (2.49) teilweise auf:

$$\delta W = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{F} : \mathbf{P} \, dV - \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_f \, dV - \int_{\delta_\sigma \Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1 \, dA = 0. \quad (2.51)$$

Zuletzt wird  $\mathbf{P}$  mit Gleichung (2.22) durch den symmetrischen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  ersetzt:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F} : \mathbf{P} &= \delta \mathbf{F} : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) = \delta F_{ij} F_{ik} S_{kj} = F_{ik} \delta F_{ij} S_{kj} \\ &= (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Wegen der Symmetrie von  $\mathbf{S}$  bleibt nach dem letzten Schritt lediglich der symmetrische Anteil des Tensors  $(\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F})$  erhalten. Mit der Variation des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors aus Gleichung (2.8)

$$\delta \mathbf{E} = \delta \left( \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \right) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) \quad (2.53)$$

ergibt sich die schwache Form des Gleichgewichts aus Gleichung (2.51) zu

$$\delta W = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV - \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_f \, dV - \int_{\delta_\sigma \Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1 \, dA = 0. \quad (2.54)$$

### 2.2.2 Linearisierung

Die schwache Form des Gleichgewichts (2.54) ist in der Regel ein nichtlineares Funktional, das von dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  und dem virtuellen Verschiebungsfeld  $\delta \mathbf{u}$  abhängt:

$$\delta W = \delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}). \quad (2.55)$$

Da sich nach Petryna [70] auch für diesen Ausdruck nur in wenigen Sonderfällen eine analytische Lösung finden lässt, werden numerische, inkrementell, iterative Lösungsverfahren verwendet. Als Beispiel sei hier das NEWTON-RAPHSON-Verfahren erwähnt, das unter anderem in Wriggers [93] erläutert

wird. Dieses setzt eine linearisierte Form der zu lösenden, nichtlinearen Gleichung  $\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0$  voraus. Diese Form ergibt sich aus einer TAYLOR-Reihenentwicklung an einer bereits bekannten Stelle  $\mathbf{u}^k$  mit Abbruch nach dem ersten Reihenglied:

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}^{k+1}, \delta \mathbf{u}) &\approx \delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u}) + \frac{\partial \delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u} \\ &= \delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u}) + \Delta \delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Bei dem linearisierten Inkrement der virtuellen Arbeit  $\Delta \delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u})$  handelt es sich um eine Richtungsableitung in Richtung  $\Delta \mathbf{u}$  nach Gleichung (2.43).

$$\begin{aligned} \Delta \delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) &= \frac{\partial \delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u} \\ &= \frac{d}{d\eta} \delta W(\mathbf{u}^k + \eta \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \Big|_{\eta=0}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Unter der Annahme konservativer, äußerer Lasten muss lediglich das erste Integral in Gleichung (2.54) linearisiert werden, da die übrigen Integrale vom Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  unabhängig sind:

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}^{k+1}, \delta \mathbf{u}) &= \overbrace{\int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV - \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_f \, dV - \int_{\delta_\sigma \Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1 \, dA}^{\delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u})} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega_0} \Delta \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV + \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \Delta \mathbf{S} \, dV}_{\Delta \delta W(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})} = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Wie in Abschnitt 2.3.3 zu entnehmen ist, wird im Rahmen der FEM aus der Differenz der drei ersten Integrale in Gleichung (2.58) ein Maß für das Ungleichgewicht. In den beiden letzten Integralen der Gleichung (2.58) ist die tangentielle Steifigkeitsmatrix enthalten. Sie setzt sich aus einem geometrischen und einem materiellen Steifigkeitsanteil zusammen.

Unter Verwendung der konsistent linearisierten Materialtangente  $\mathbb{C}_{Tan}$  lassen sich die linearisierten Inkremente des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\Delta \mathbf{S}$  durch Inkremente des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  ausdrücken:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbb{C}_{Tan} : \Delta \mathbf{E}. \quad (2.59)$$

Das linearisierte Inkrement  $\Delta \mathbf{E}$  in Gleichung (2.59) ermittelt sich analog zu Gleichung (2.57) durch die Richtungsableitung des Ausdrucks (2.9) in Richtung  $\Delta \mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &= \frac{d}{d\eta} \mathbf{E}(\mathbf{u}^k + \eta \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\eta=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial \mathbf{X}} \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die Richtungsableitung in Gleichung (2.60) entspricht dem Gradienten von  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{d}{d\eta} \text{Grad}(\mathbf{u}^k + \eta \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial^2(\mathbf{u}^k + \eta \Delta \mathbf{u})}{\partial \eta \partial \mathbf{X}} \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.61)$$

Unter der Annahme kleiner Deformationen und kleiner Rotationen werden die beiden letzten Summanden der Gleichung (2.60) vernachlässigbar klein. Es ergibt sich der linearisierte Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} [\text{Grad} \mathbf{u}^k + \text{Grad}^T \mathbf{u}^k + \text{Grad} \Delta \mathbf{u} + \text{Grad}^T \Delta \mathbf{u}] \\ &= \frac{1}{2} [\text{Grad} \mathbf{u}^{k+1} + \text{Grad}^T \mathbf{u}^{k+1}]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird ausschließlich der linearisierte Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  verwendet. Zwar verliert dieser seine Gültigkeit, sobald Deformationen nicht mehr als klein aufgefasst werden dürfen, aber im Allgemeinen ist dieses erst mit der gleichzeitigen Bildung von *Makrorissen* im Beton verbunden. Die kontinuumsmechanische Betrachtungsweise verliert dann ebenso ihre Gültigkeit. Die Fehler aus der Verwendung des linearisierten Verzerrungsmaßes  $\boldsymbol{\varepsilon}$  werden demgegenüber als gering eingestuft.

Unter Verwendung des linearisierten Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  entfällt die Unterscheidung zwischen den Spannungsmaßen aus Abschnitt 2.1.2. Weiterhin werden in dieser Arbeit geometrische Nichtlinearitäten nicht betrachtet. Daher entfällt das vorletzte Integral in der linearisierten Form des schwachen Gleichgewichts (Gleichung (2.58)):

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}^{k+1}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_f \, dV - \int_{\delta_\sigma \Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1 \, dA \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{Tan} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

## 2.3 Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die linearisierte Form des schwachen Gleichgewichts (2.63) wird in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe der FEM gelöst. Dafür werden die Konfigurationen  $\Omega_0$  und  $\Omega_t$ , die ein kontinuierliche Körper einnimmt, durch diskrete, abzählbare Konfigurationen  $\Omega_{0\,dis}$  und  $\Omega_{t\,dis}$  approximiert (Abbildung 2.4). Diese setzen sich aus  $n_e$  Teilgebieten  $\Omega_{0e}$  beziehungsweise  $\Omega_{te}$ , den *Finiten Elementen*, zusammen:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &\approx \Omega_{0\,dis} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_{0e}, \\ \Omega_t &\approx \Omega_{t\,dis} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_{te}.\end{aligned}\tag{2.64}$$

Auf diese Weise lassen sich die in den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2 definierten Feldgrößen ebenfalls in diskreter Form approximieren. Die Art der Diskretisierung hängt von den verwendeten Finiten Elementen ab.

### 2.3.1 Verwendetes Finites Element

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Auswertung von Versuchen bezüglich dreidimensionaler Evolutionsgleichungen eines zukünftigen Materialmodells für Beton, die den Einfluss dreidimensionaler Belastungszustände auf die mechanischen Eigenschaften des Betonkörpers in allen Raumrichtungen erfassen. Daher werden sie für das dreidimensionale, *isoparametrische* Element SOLID185 [3] des Finite-Elemente-Programms ANSYS<sup>®</sup> umgesetzt. Sowohl die Geometrie der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}$ , die Geometrie der Momentanconfiguration  $\mathbf{x}$ , als auch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  werden jeweils durch die gleichen linearen Ansatzfunktionen angenähert. Die Integration des Prinzips der virtuellen Wege (2.63) erfolgt durch die *volle* GAUSS-Integration. Für eine Beschreibung weiterer Elementtypen und deren Formulierungen wird auf die Standardwerke von Bathe [5], Knothe u. Wessels [45], Krätzig u. Basar [46], Wriggers [93] oder Zienkiewicz u. Taylor [98] verwiesen.

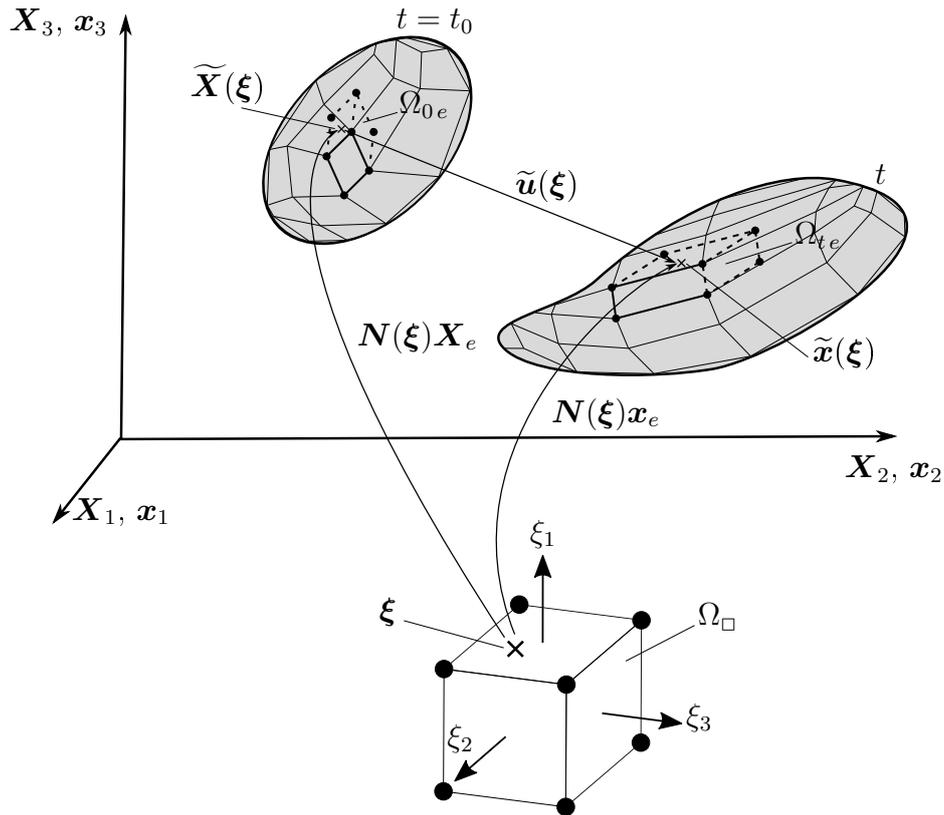


Abbildung 2.4: Isoparametrische Approximation der Feldgrößen  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$

### 2.3.2 Isoparametrische Interpolation der Feldgrößen

In Abbildung 2.4 ist die isoparametrische Approximation der Feldgrößen  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  dargestellt. Diese kontinuierlichen Felder werden dabei durch eine diskrete Anzahl  $n_k$  von Knoten  $k$  beschrieben. Bei Verwendung eines dreidimensionalen Acht-Knoten-Elementes entsprechen sie den Eckpunkten der Elemente. Die Knoten besitzen in der Ausgangskonfiguration die Ortsvektoren  $\mathbf{X}_k$ , in der Momentankonfiguration die Ortsvektoren  $\mathbf{x}_k$  und sie erfahren die Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}_k$ .

Über die *Inzidenzen* können die acht Knoten eines einzelnen Finiten Elementes identifiziert werden. Zwischen diesen Elementknoten werden die Feldgrößen durch geeignete Ansatzfunktionen  $N_k(\boldsymbol{\xi})$  interpoliert:

$$\mathbf{X} \approx \widetilde{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^8 N_k(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_k = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}_e, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{x} \approx \tilde{\mathbf{x}}(\xi) = \sum_{k=1}^8 N_k(\xi) \mathbf{x}_k = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{x}_e, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{u} \approx \tilde{\mathbf{u}}(\xi) = \sum_{k=1}^8 N_k(\xi) \mathbf{u}_k = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{u}_e. \quad (2.67)$$

In den Vektoren  $\mathbf{X}_e$ ,  $\mathbf{x}_e$  und  $\mathbf{u}_e$  sind die Orts- beziehungsweise Verschiebungsvektoren aller acht Elementknoten zusammengefasst.  $\mathbf{N}(\xi)$  ist die Matrix der Ansatzfunktionen  $N_k(\xi)$ . Diese sind auf einer natürlichen Elementkonfiguration  $\Omega_\square$  für normierte, natürliche Koordinaten  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  definiert:

$$N_k(\xi) = \frac{1}{8} (1 + \xi_{1k} \xi_1) (1 + \xi_{2k} \xi_2) (1 + \xi_{3k} \xi_3), \quad k = 1; \dots; 8. \quad (2.68)$$

Die acht Funktionen  $N_k$  des Acht-Knoten-Elementes liefern am jeweiligen Knoten  $k$  mit den natürlichen Koordinaten  $\xi = (\xi_1 = \xi_{1k}, \xi_2 = \xi_{2k}, \xi_3 = \xi_{3k})$  den Wert *Eins*, an den übrigen sieben Knoten den Wert *Null*.

Partielles Ableiten des Ausdruckes (2.65) nach den natürlichen Koordinaten  $\xi$  liefert die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}$ . Analog zum Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  bildet sie die Linieninkremente  $d\xi$  aus der natürlichen Elementkonfiguration  $\Omega_\square$  auf die approximierten Linieninkremente  $d\tilde{\mathbf{X}}$  der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  ab:

$$d\tilde{\mathbf{X}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}}{\partial \xi} \cdot d\xi = \mathbf{J} \cdot d\xi. \quad (2.69)$$

Mit Hilfe der Determinante der JACOBI-Matrix lassen sich ebenfalls die Abbildungsvorschriften für inkrementelle Volumen und Oberflächeninhalte finden, die für die Integration der Ausdrücke in Gleichung (2.63) benötigt werden:

$$d\tilde{V} = \det(\mathbf{J}) dV_\square, \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{A} &= \left\| d\tilde{\mathbf{X}}_i \times d\tilde{\mathbf{X}}_j \right\| = \left\| (\mathbf{J}_i d\xi_i) \times (\mathbf{J}_j d\xi_j) \right\| \\ &= \left\| \mathbf{J}_i \times \mathbf{J}_j \right\| d\xi_i d\xi_j = \left\| \mathbf{J}_i \times \mathbf{J}_j \right\| dA_\square. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dabei bezeichnen die Symbole  $\mathbf{J}_i$  beziehungsweise  $\mathbf{J}_j$  die Spaltenvektoren  $i$  beziehungsweise  $j$  der JACOBI-Matrix. Die Symbole  $d\xi_i$  und  $d\xi_j$  sind die Längen inkrementeller Linienelemente, die ein Oberflächeninkrement mit Flächeninhalt  $dA_\square$  in der natürlichen Elementkonfiguration aufspannen.

Die Interpolation der Verzerrungen  $\tilde{\varepsilon}$  ist mit Gleichung (2.62) durch den Gradienten des approximierten Verschiebungsfeldes  $\tilde{\mathbf{u}}$  gegeben. Daher werden

die Ableitungen der Ansatzfunktionen  $N_k(\boldsymbol{\xi})$  nach den materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  benötigt. Diese Ableitungen können mit Hilfe der Kettenregel und der Inversen der JACOBI-Matrix gefunden werden:

$$\text{Grad } N_k(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial N_k(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial N_k(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial N_k(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{J}^{-1}. \quad (2.72)$$

Die Ableitungen in Gleichung (2.72) werden in die sogenannte Matrix der Verzerrungsformfunktionen  $\mathbf{B}$  einsortiert, so dass für ein betrachtetes Element  $e$  folgender Zusammenhang gilt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{u}_e. \quad (2.73)$$

Die Variation und die linearen Inkremente des Verschiebungs- und Verzerrungsfeldes werden analog zu den Gleichungen (2.67) und (2.73) interpoliert:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &\approx \delta \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta \mathbf{u}_e, \\ \Delta \mathbf{u} &\approx \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \mathbf{u}_e, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &\approx \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta \mathbf{u}_e, \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &\approx \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \mathbf{u}_e. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Abschließend werden die Volumenkräfte  $\mathbf{B}_f$  und die Oberflächenlasten  $\bar{\mathbf{T}}_1$  approximiert, die auf ein Element  $e$  einwirken.

$$\mathbf{B}_f \approx \tilde{\mathbf{B}}_f(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{B}_{f_e}, \quad (2.76)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_1 \approx \tilde{\bar{\mathbf{T}}}_1(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1e}. \quad (2.77)$$

### 2.3.3 Formulierung und Lösung der tangentialen Steifigkeitsbeziehung

Die Interpolationsansätze des vorangegangenen Abschnittes 2.3.2 sind lediglich für Teilgebiete  $\Omega_{0e}$  einzelner Finiten Elemente  $e$  definiert. Daher wird die linearisierte Form des schwachen Gleichgewichts nach Gleichung (2.63) zunächst

für einzelne Elemente formuliert. Mit Gleichung (2.64) werden die Arbeitsausdrücke für den gesamten Körper  $\Omega_0$  zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\bullet) dV &\approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_{0e}} (\bullet) d\tilde{V} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_{\square}} (\bullet) \det(\mathbf{J}) dV_{\square}, \\ \int_{\delta\Omega_0} (\bullet) dA &\approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\delta\Omega_{0e}} (\bullet) d\tilde{A} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\delta\Omega_{\square}} (\bullet) \|\mathbf{J}_i \times \mathbf{J}_j\| dA_{\square}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Mit den interpolierten Größen des Abschnittes 2.3.2 lautet die schwache Form des Gleichgewichts in Gleichung (2.63) für ein einzelnes Finites Element

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}^{k+1}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega_{\square}} \delta \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{B}^T : \boldsymbol{\sigma} \det(\mathbf{J}) dV_{\square} \\ &\quad - \int_{\Omega_{\square}} \delta \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{B}_f \det(\mathbf{J}) dV_{\square} \\ &\quad - \int_{\delta\Omega_{\square}} \delta \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{N}^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_1 \|\mathbf{J}_i \times \mathbf{J}_j\| dA_{\square} \\ &\quad + \int_{\Omega_{\square}} \delta \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{B}^T : \mathbb{C}_{Tan} : \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{u}_e \det(\mathbf{J}) dV_{\square} = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Da das Prinzip der virtuellen Weggrößen für beliebige, zulässige virtuelle Verschiebungsfelder  $\delta \mathbf{u}$  gelten muss, kann der Vektor  $\delta \mathbf{u}_e$  entfallen. Mit den Vektoren der *inneren Elementknotenkräfte*  $\mathbf{f}_e^{int}$  und der *äußeren Elementknotenkräfte*  $\mathbf{f}_e^{ext}$  sowie der *tangentialen Elementsteifigkeitsmatrix*  $\mathbf{k}_e^{Tan}$ ,

$$\mathbf{f}_e^{int} = \int_{\Omega_{\square}} \mathbf{B}^T : \boldsymbol{\sigma} \det(\mathbf{J}) dV_{\square}, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{f}_e^{ext} = \int_{\Omega_{\square}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{B}_f \det(\mathbf{J}) dV_{\square} + \int_{\delta\Omega_{\square}} \mathbf{N}^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_1 \|\mathbf{J}_i \times \mathbf{J}_j\| dA_{\square}, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{k}_e^{Tan} = \int_{\Omega_{\square}} \mathbf{B}^T : \mathbb{C}_{Tan} : \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) dV_{\square}, \quad (2.82)$$

lässt sich Gleichung (2.79) zur *tangentialen Elementsteifigkeitsbeziehung* zusammenfassen:

$$\mathbf{k}_e^{Tan} \cdot \Delta \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e^{ext} - \mathbf{f}_e^{int}. \quad (2.83)$$

Die Auswertung der Integrale (2.80), (2.81) und (2.82) erfolgt durch die volle GAUSS-Integration. Die Ausdrücke unter den jeweiligen Integralen werden an bestimmten Stützstellen ausgewertet und die entsprechenden Werte gewichtet miteinander addiert. Die Stützstellen sind die sogenannten GAUSS- oder *Integrationspunkte*.

Die Elementsteifigkeitsbeziehungen der einzelnen Elemente werden gemäß Gleichung (2.78) zur tangentialen *Gesamt- oder Systemsteifigkeitsbeziehung* assembliert:

$$\mathbf{K}^{\text{Tan}} \cdot \Delta \mathbf{U} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}} . \quad (2.84)$$

Gleichung (2.84) wird durch inkrementell, iterative Lösungsverfahren, wie zum Beispiel dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren, gelöst. In Abbildung 2.5 ist der iterative Ablauf zur Lösung der globalen Steifigkeitsbeziehung für ein Belastungsincrement  $n + 1$  dargestellt.

Wie in Abschnitt 2.1.4 bereits beschrieben, fehlt zur Lösung des kontinuumsmechanischen Problems ein letzter Baustein — das Materialgesetz. Darin wird für die interpolierten Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}$  aus dem aktuellen Inkrement der dazugehörige Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$  ermittelt. Bei physikalisch nichtlinearen Materialgesetzen werden neben den Verzerrungszuständen die in Abbildung 2.5 exemplarisch dargestellten Zustandsgrößen  $q_{ij}$  und  $\Phi_{ij}$  zur Beschreibung des Materialzustandes benötigt. Eine weitere Funktion des Materialgesetzes ist die Ermittlung des tangentialen Steifigkeitstensors  $\mathbb{C}_{\text{Tan}}$ .

Erläuterungen zu Materialgesetzen und die Beschreibung ihrer Eingangs- und Ausgangsgrößen sind in den Kapiteln 4 und 5 gegeben.

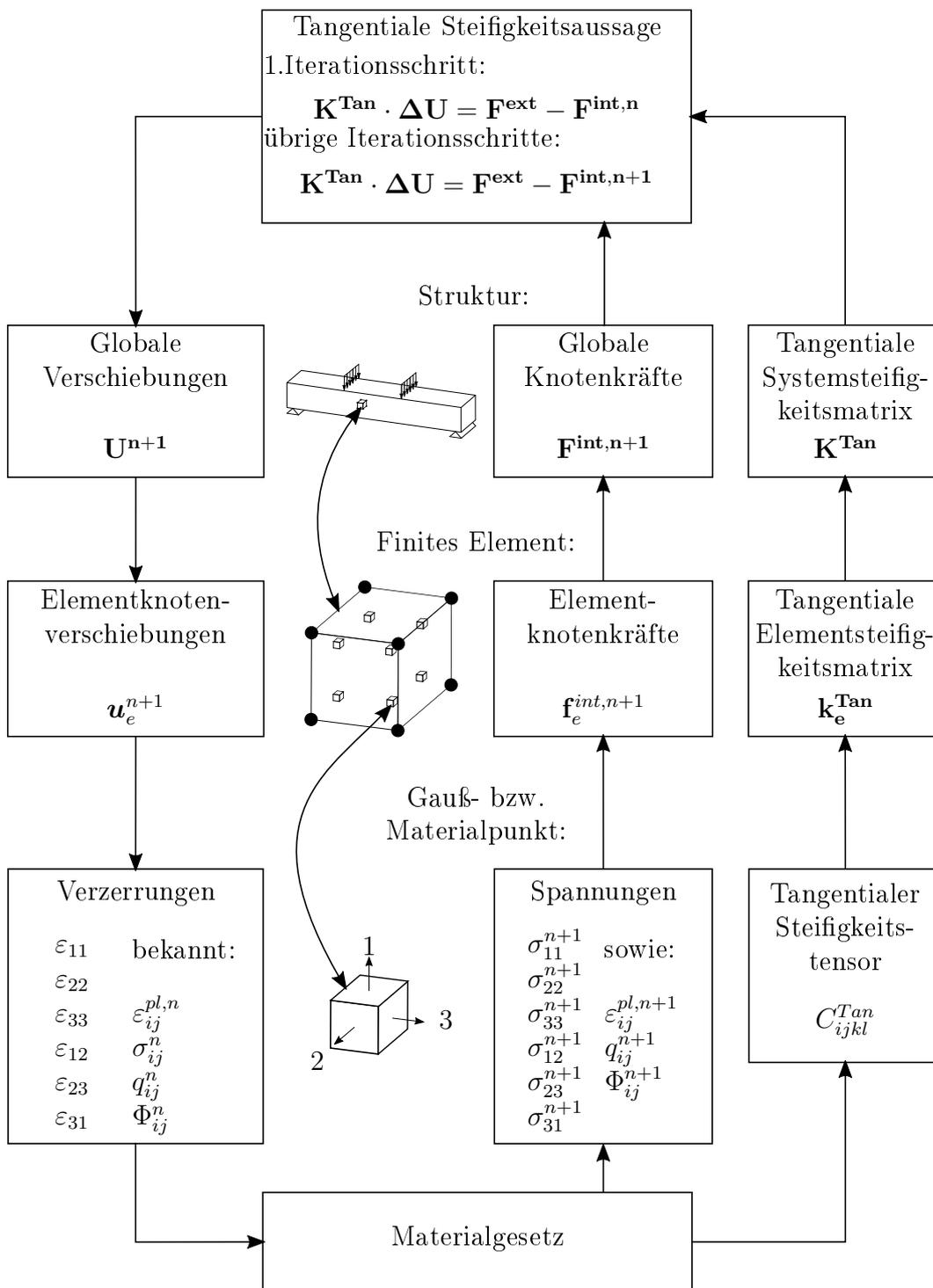


Abbildung 2.5: Strukturschema der nichtlinearen FEM in Anlehnung an Pöling [73]



# Kapitel 3

## Phänomenologie des mechanischen Verhaltens von Beton

Materialmodelle für Beton geben den nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Verzerrungszuständen  $\varepsilon$  und den Spannungszuständen  $\sigma$  wieder (Abschnitt 2.1.4). Bevor die entsprechend Kapitel 2 noch fehlenden Materialgesetze in den Kapiteln 4 und 5 erläutert werden, wird in diesem Kapitel die Phänomenologie des mechanischen Verhaltens von Beton anhand einer Auswahl von experimentell gewonnenen Spannungs-Verzerrungskurven dargestellt. Übersichten dafür notwendiger Belastungsversuche an Beton sind beispielsweise in Bažant u. Planas [7], Hofstetter u. Mang [35], van Mier [61], Pölling [73], Speck [82] und Torrenti u. a. [86] gegeben. Die daraus gewonnenen Materialparameter, Spannungs-Verzerrungsbeziehungen und Festigkeitskurven bilden die Grundlage für die späteren Modellierungsansätze.

Zeitabhängige Phänomene wie Ermüdung, Kriechen, Relaxation oder Dynamik sind nicht Bestandteil der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit. Sie bleiben in den Materialmodellen aus Kapitel 4 und in den Evolutionsgleichungen aus Kapitel 5 unberücksichtigt. Daher werden in den folgenden Abschnitten ausschließlich *quasi-statische* Versuche unter Kurzzeitbelastung ausgewertet. Zu diesen zählen monotone und zyklische Belastungsversuche mit geringer Zyklanzahl und hoher Belastungsamplitude.

Obwohl die mikro- und mesoskopischen experimentellen Beobachtungen nicht in die Formulierung der Materialgesetze eingehen, werden sie dennoch herangezogen, um die makroskopischen Beobachtungen und daraus gegebenenfalls

resultierende Erkenntnisse für die Materialmodelle zu begründen. Das nichtlineare, mechanische Verhalten von Beton unter Kurzzeitbelastung wird nämlich insbesondere durch das Risswachstum von *Mikrorissen* zu *Meso-* und *Makrorissen* beeinflusst (Bažant u. Planas [7]).

Die Mikrorisse sind bereits im unbelasteten Zustand vorhanden. Ihre Ursache ist auf den Erhärtungsprozess des Betons zurückzuführen. Zement und Wasser bilden den Zementleim, der die Zuschlagskörner vollständig umschließt. Durch Hydratation kommt es zur Festigkeitsbildung des Zementleims bei gleichzeitiger Volumenverringerng. Die dadurch entstehenden inneren Spannungen führen zu den Mikrorissen in den Kontaktflächen zwischen der *Zementsteinmatrix* und den *Zuschlägen* sowie in der Zementmatrix selbst.

Bei sich anschließenden unterschiedlichen Belastungszuständen durch

- uniaxiale Druckbelastung,
- Zugbelastung oder
- multiaxiale Druckbelastung

weichen die jeweiligen Rissentwicklungen stark voneinander ab. Das führt ebenfalls zu starken Abweichungen des makromechanischen Verhaltens von Beton. Außerdem werden innerhalb eines Versuches die mechanischen Eigenschaften in den unterschiedlichen Raumrichtungen des Betonmaterials unterschiedlich beeinflusst. Die Untersuchung dieses Einflusses ist neben der Ermittlung der Materialgesetzmäßigkeiten der Schwerpunkt der folgenden Beobachtungen.

### 3.1 Beton unter uniaxialer Druckbelastung

Das mechanische Verhalten von Beton unter uniaxialer Druckbelastung wird exemplarisch anhand des Würfeldruckversuches 2B2-4 aus van Mier [60] erläutert. Die Kantenlänge des Würfels betrug 100 mm. Die entsprechende Spannungs-Verzerrungskurve ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Die Lastaufbringung erfolgte weggesteuert, mit einer Belastungsgeschwindigkeit von  $\dot{\varepsilon}_1 = 5 \times 10^{-6}/\text{s}$ . Durch eine Lasteinleitung über Stahlbürsten wurde eine Querdehnungsbehinderung weitestgehend vermieden, die im Bereich der Lasteinleitung einen mehrachsigen Spannungszustand verursacht hätte. Für eine genaue Beschreibung

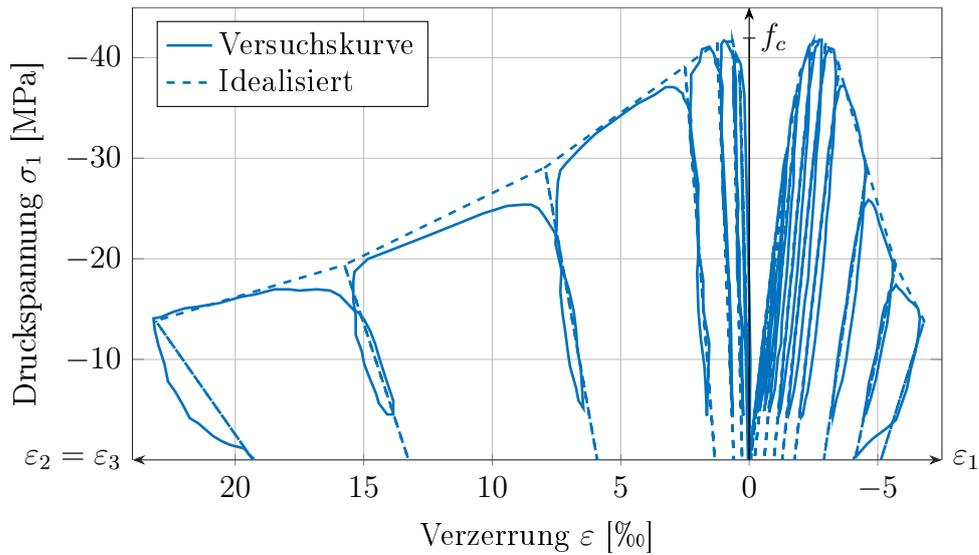


Abbildung 3.1: Spannungs-Verzerrungskurve des uniaxialen Druckversuches 2B2-4 nach van Mier [60].

der Versuchseinrichtung und alternativer Lasteinleitungen wird auf van Mier [61] verwiesen.

### 3.1.1 Versuche mit monotoner, weggesteuerter Belastung

Der am häufigsten bestimmte Materialparameter für Beton ist die uniaxiale Druckfestigkeit  $f_c$ . Im Rahmen dieser Arbeit wird die Druckfestigkeit  $f_c$  einheitlich durch negative Werte angegeben. Sie wird in der Regel in Belastungsversuchen an Würfeln oder Zylindern mit monotoner Belastung ermittelt. Bei dem gegebenen Versuch handelt es sich zwar um einen zyklischen Belastungsversuch, nach Spooner u. a. [83] beziehungsweise Thiele [85] kommt es aber bei der Ent- und Wiederbelastung durch die geringe Zyklenzahl zu keinem messbaren Risswachstum. Die Umhüllende der Spannungs-Verzerrungskurve (Abbildung 3.2, links) wird daher im Folgenden als Belastungskurve unter einer monotonen, weggesteuerten Lastaufbringung aufgefasst.

Das Betonverhalten während einer monotonen Belastung lässt sich in vier Phasen einteilen (Mazars [58], Smadi u. Slate [81]). Diese sind in Tabelle 3.1 für Normalbeton aufgelistet. Darin sind  $\sigma_1$  beziehungsweise  $\varepsilon_1$  die aktuelle Spannung beziehungsweise die aktuelle Stauchung in Belastungsrichtung (1) und  $\varepsilon_c$  die Stauchung der Probe beim Erreichen der Druckfestigkeit.

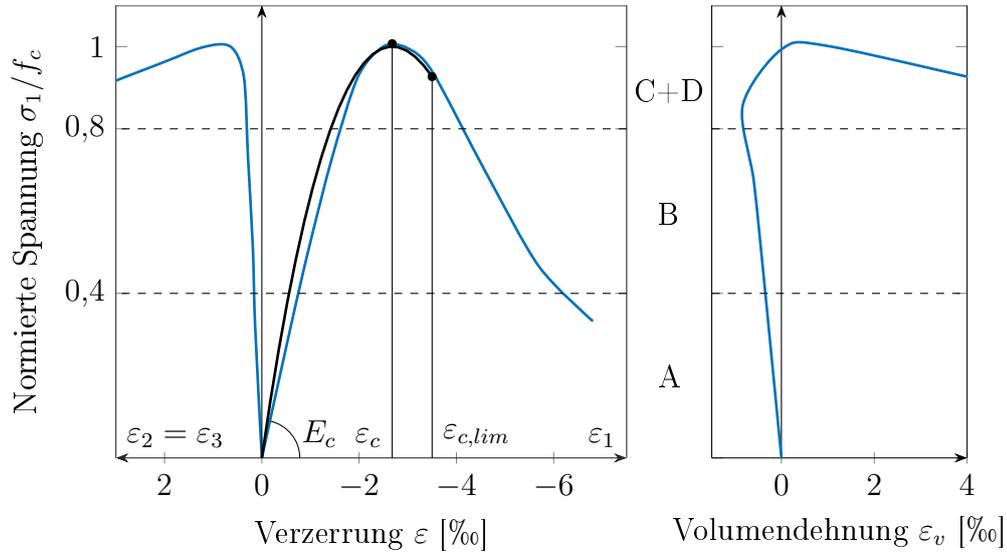


Abbildung 3.2: Umhüllende Spannungs-Verzerrungskurve und Entwicklung der Volumendehnung  $\varepsilon_v$  des uniaxialen Druckversuches 2B2-4 (—) aus Abbildung 3.1 und Vergleich mit Gleichung (3.3) (---).

Die Rissbilder in den einzelnen Phasen sind in Abbildung 3.3 nach Hofstetter u. Mang [35] dargestellt. Zusätzlich sind angenommene, innere Spannungen veranschaulicht. Im Fall von Normalbeton sind die Zuschlagkörner deutlich steifer als die Zementsteinmatrix. Daher wird die äußere Druckbelastung hauptsächlich vom Korngerüst aufgenommen. Die unterschiedlichen Orientierungen dieser Druckspannungen verursachen Umlenk- beziehungsweise *Querspannungen*, obwohl in Querrichtung keine äußeren Spannungen angreifen. Diese sind die Hauptursache für die Rissentwicklung und für das Versagen der Betonprobe.

In Phase A wird das Materialverhalten von Beton als linear elastisch angenommen. Aus der  $\sigma_1$ - $\varepsilon_1$ -Beziehung wird der Elastizitätsmodul  $E_c$  bestimmt. Werden neben den Verzerrungen in Belastungsrichtung auch Verzerrungen in Querrichtung erfasst, so kann unter der Annahme *isotropen* Materialverhaltens ebenfalls die POISSON- oder Querdehnzahl  $\nu_c$  experimentell ermittelt werden. Typische Werte für Normalbeton können beispielsweise CEB-FIP [13] oder FIB [25] entnommen werden:

$$E_c = 21\,500 \left( \frac{|f_c|}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.1)$$

$$\nu_c = 0,14 \dots 0,26. \quad (3.2)$$

Tabelle 3.1: Einteilung der monotonen Betondruckkurve in vier Phasen nach Mazars [58]

#	Lastniveau	Makromechanisches Verhalten	Rissentwicklung
A	$0 < \frac{\sigma_1}{f_c} \leq 0,4$	Linear elastisches Verhalten	Mikrorisse in Kontaktzone zwischen Zementmatrix und Zuschlägen; kein messbares Risswachstum
B	$0,4 < \frac{\sigma_1}{f_c} \leq 0,8$	Annähernd linear elastisches Verhalten	Anwachsen der Mikrorisse entlang der Kontaktzone
C	$0,8 < \frac{\sigma_1}{f_c} \leq 1,0$	Nichtlineare Verfestigung im Vorbruchbereich	Anwachsen der Mikrorisse in die Zementmatrix, vorwiegend parallel zur Lastrichtung
D	$ \varepsilon_1  >  \varepsilon_c $	Entfestigung im Nachbruchbereich	Bildung von Bruchflächen parallel zur Lastrichtung

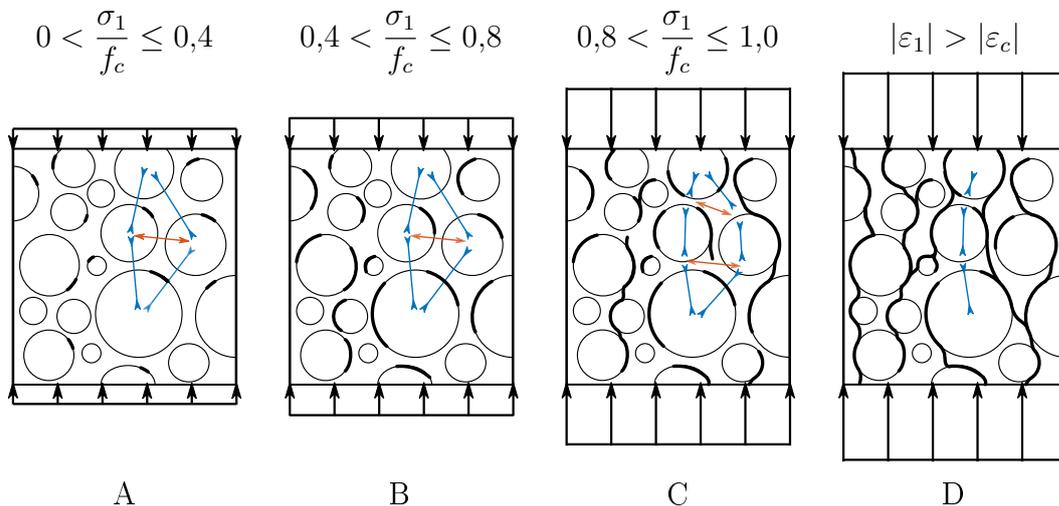


Abbildung 3.3: Rissbilder in den vier Belastungsphasen nach Hofstetter u. Mang [35] sowie theoretisch abgeleitete, innere Druckspannungen (blau) und Querzugspannungen (rot)

Die POISSON-Zahl  $\nu_c < 0,5$  spiegelt die Volumenabnahme der Betonprobe in Phase A unter einer Druckbelastung wider (Abbildung 3.2, rechts).

In Phase B kommt es zu einem stabilen Risswachstum der Mikrorisse entlang der Kontaktzone zwischen den Zuschlagkörnern und der Zementmatrix. Die Spannungen in der Probe wachsen mit zunehmender Stauchung an. Der Zuwachs der Spannungen beziehungsweise die tangentielle Steifigkeit der Probe nehmen aber im Vergleich zum linear elastischen Bereich allmählich ab.

In Phase C wird die Zugfestigkeit der Zementsteinmatrix durch die Querspannungen an einzelnen Stellen überschritten. Das Probenvolumen nimmt einen Minimalwert an. Es bilden sich Matrixrisse, die sich vorwiegend quer zur Belastungsrichtung öffnen. Dadurch treten erhöhte Verformungen in der unbelasteten Richtung auf. Es kommt zum Wechsel von der Volumenabnahme in Phase A und B zu einer Volumenzunahme oder Dilatanz der Betonprobe in Phase C. Durch eine Lastumlagerung der inneren Spannungen in die ungerissenen Bereiche der Probe kann die äußere Last weiter gesteigert werden.

In Phase D, beim Erreichen der Druckfestigkeit  $f_c$  und beim Überschreiten der Bruchstauchung  $\varepsilon_c$ , vereinigen sich die Risse zu Bruchflächen. Die Verformungen in Querrichtungen nehmen erneut deutlich zu. Senkrecht zu den Bruchflächen können keine Querspannungen übertragen werden. Daher kommt es zu einem Ausfall von Anteilen des Probenquerschnitts mit resultierender Entfestigung.

Im uniaxialen Betondruckversuch versagt eine Probe daher nicht auf Druck, sondern auf Querspannung.

### Uniaxiale Spannungs-Verzerrungsbeziehung

Eine mögliche, mathematische Beschreibung der nichtlinearen, monotonen Spannungs-Verzerrungsbeziehung  $\sigma_1(\varepsilon_1)$  kann beispielsweise aus FIB [25] entnommen werden. Der Verlauf der entsprechenden Gleichung (3.3) ist in Abbildung 3.2 für die Parameter  $f_c = -42$  MPa,  $\varepsilon_c = -2,68$  ‰ und  $E_c = 34\,689$  MPa dargestellt:

$$\frac{\sigma_1(\varepsilon_1)}{f_c} = \frac{E_c \frac{\varepsilon_1}{f_c} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_c}\right)^2}{1 + \left(E_c \frac{\varepsilon_c}{f_c} - 2\right) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_c}} \quad (3.3)$$

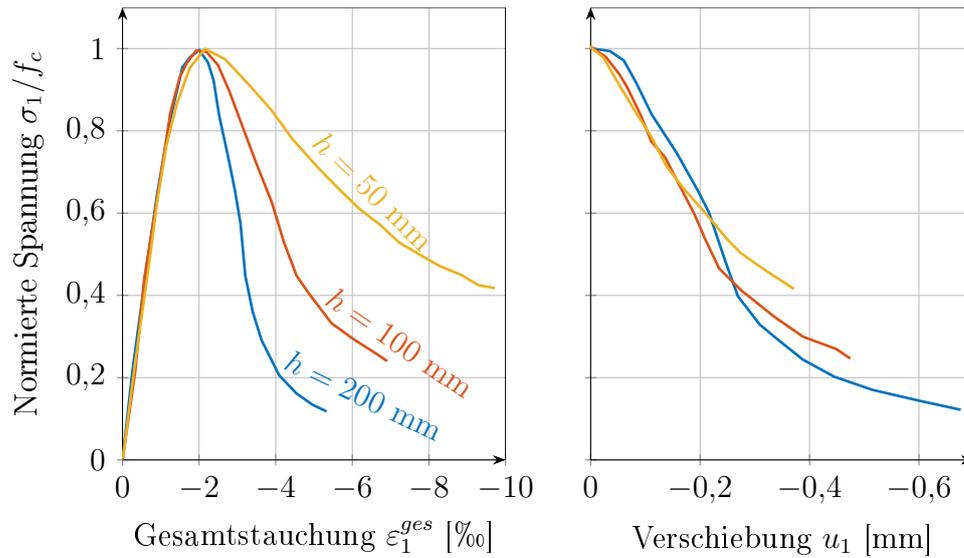


Abbildung 3.4: Abhängigkeit des Entfestigungsverhaltens im Nachbruchbereich von der Probenhöhe  $h$  nach van Mier [60]

### Lokalisierung

Bis zu einer Stauchung von  $\varepsilon_{c,lim} = -3,5 \text{ ‰}$  bildet Gleichung (3.3) die Spannungs-Verzerrungsbeziehung für Normalbeton sehr gut ab. Das Entfestigungsverhalten im Nachbruchbereich ist jedoch nicht allein durch Spannungs-Verzerrungsbeziehungen  $\sigma_1(\varepsilon_1)$  beschreibbar. Diese zeigen nämlich in Versuchen aus van Mier [60] eine starke Abhängigkeit des Nachbruchbereichs von der Probenhöhe  $h$  (Abbildung 3.4, links). Dagegen sind Spannungs-Verschiebungsbeziehungen  $\sigma_1(u_1)$  im Nachbruchbereich wiederum nahezu unabhängig von der Probenhöhe  $h$  (Abbildung 3.4, rechts).

Diese Beobachtungen führten zu den Annahmen der *Rissbandtheorie* nach Hillerborg u. a. [34]. Danach kommt es zu einer *Lokalisierung* der Entfestigung in einem Rissband mit begrenzter Breite. Innerhalb des Rissbandes konzentrieren sich die Verformungen, während außerhalb dieses Bandes das Probenmaterial entlastet wird. Da die  $\sigma_1(u_1)$ -Kurven in Abbildung 3.4, rechts, annähernd identisch sind, wird die Rissbandbreite als Materialkonstante aufgefasst. Bei kleinen Verhältnissen dieser Konstante zur Probenhöhe werden die über die Probe gemittelten Stauchungen daher kleiner (Abbildung 3.4, links).

Die Formulierung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen für die kontinuumsmechanischen Materialgesetze ist daher erschwert. Die lokalisierten Effekte

müssen ebenfalls im Mittel mit Hilfe des *Konzeptes der verschmierten Risse* erfasst werden. Die *Regularisierung* der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen erfolgt beispielsweise in Bažant u. Planas [7] unter Beachtung einer Bruchenergie. Nach Jirásek u. Bauer [41] ist die Bestimmung der flächenbezogenen Bruchenergie allerdings mit großen Unsicherheiten behaftet und bleibt aus diesem Grund für die praktische Anwendung problematisch. Geeignete Regularisierungsverfahren sind für die Simulation von Bauteilversuchen zwingend erforderlich, wie Abschnitt 6.2 zeigt. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit aber auf der Herleitung von Evolutionsgleichungen liegt, beinhaltet der Materialmodellansatz aus Kapitel 5 zunächst keine Regularisierungsverfahren.

### 3.1.2 Zyklische Belastungsversuche

Die bestimmenden Größen der Materialmodelle aus Kapitel 4 und 5 zur Abbildung des nichtlinearen Materialverhaltens von Beton sind die bleibenden Verformungen, die *plastischen Verzerrungen*  $\epsilon^{pl}$ , und die Abnahme der Materialsteifigkeit oder die Zunahme der Nachgiebigkeit infolge *Schädigung*. In Belastungsversuchen ohne Entlastung sind diese nicht identifizierbar. In zyklischen Versuchen hingegen können plastische Verzerrungen  $\epsilon^{pl}$  anhand der entlasteten Zustände und die reduzierten Steifigkeiten anhand der Wiederbelastungspfade identifiziert werden.

In Abbildung 3.1 ist neben der Versuchskurve ebenfalls die idealisierte Kurve zur Auswertung dieser Größen dargestellt. Die Hysteresenschleifen der Ent- und Wiederbelastungspfade werden nach Spooner u. a. [83] auf eine rein viskose Dämpfungskapazität des Materials zurückgeführt. Nach Thiele [85] ist die Entwicklung der viskosen Verzerrungsanteile ausschließlich in Ermüdungsversuchen mit hoher Zyklenzahl relevant. In dieser Arbeit werden diese Verzerrungsanteile daher vernachlässigt und die Ent- und Wiederbelastungspfade als lineare Geraden idealisiert. Anfahreffekte wie die Schließung von Mikrorissen in der Verbundzone zwischen Zuschlagkörnern und Zementmatrix bei Druckbelastung und ihre Öffnung bei der Entlastung bleiben deshalb ebenfalls unberücksichtigt.

Abbildung 3.5 zeigt die Entwicklung der plastischen Verzerrungen (links) und der Nachgiebigkeit des geschädigten Materials (rechts). Letztere ergibt sich aus der *orthotropen* Nachgiebigkeitsbeziehung, die exemplarisch aus Le-

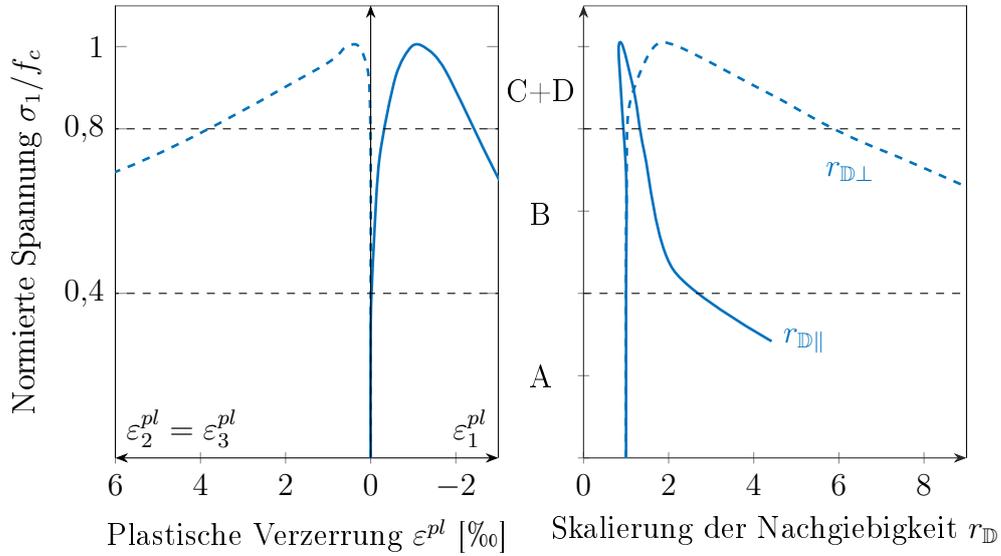


Abbildung 3.5: Entwicklungen der plastischen Verzerrungen und der Skalierungen der Nachgiebigkeiten  $r_{\mathbb{D}\parallel}$  und  $r_{\mathbb{D}\perp}$  nach Gleichung (3.5) in Belastungsrichtung (—) und Querrichtung (---) im uniaxialen Druckversuch 2B2-4 aus Abbildung 3.1.

maitre u. Chaboche [51] entnommen ist. Im Gleichungssystem (3.4) ist  $\mathbb{D}$  die gesuchte Nachgiebigkeitsmatrix im aktuellen, geschädigten Zustand. Sie bildet die messbaren Hauptspannungsänderungen  $\Delta\sigma$  auf die messbaren Hauptverzerrungsänderungen  $\Delta\epsilon$  in den einzelnen Ent- und Wiederbelastungspfaden ab:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_1 \\ \Delta\epsilon_2 \\ \Delta\epsilon_3 \end{Bmatrix}}_{\Delta\epsilon} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix}}_{\mathbb{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 = 0 \\ \Delta\sigma_3 = 0 \end{Bmatrix}}_{\Delta\sigma}. \quad (3.4)$$

Zwar besteht das Gleichungssystem (3.4) nur aus drei Gleichungen bei neun unbekanntem Nachgiebigkeitskomponenten, aber in uniaxialen Versuchen können der Elastizitätsmodul der Belastungsrichtung  $E_1$  und die Nachgiebigkeit der Querrichtungen  $-\nu_{21}/E_2$  beziehungsweise  $-\nu_{31}/E_3$  trotzdem ermittelt werden. Die übrigen, unbekanntem Koeffizienten der zwei verbleibenden Spalten der Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$  entfallen durch die Multiplikation mit  $\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$ . Eine getrennte Ermittlung der POISSON-Zahlen und Elastizitätsmodule der Querrichtungen ist allerdings mit den Informationen aus uniaxialen Versuchen

nicht möglich.

In Abbildung 3.5, rechts, ist das Verhältnis  $r_{\mathbb{D}}$  der aktuellen Nachgiebigkeiten bezüglich der Ausgangsnachgiebigkeiten dargestellt:

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{D}\parallel} &= \frac{1/E_1}{1/E_c} && \text{für die Belastungsrichtung (1),} \\ r_{\mathbb{D}\perp} &= \frac{\nu_{21}/E_2}{\nu_c/E_c} \text{ bzw. } \frac{\nu_{31}/E_3}{\nu_c/E_c} && \text{für die Querrichtungen (2) bzw. (3).} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Phänomene der einzelnen Phasen aus Abschnitt 3.1.1 sind in zyklischen Versuchen identisch. In der linear elastischen Phase A treten erwartungsgemäß weder plastische Verzerrungen, noch ein Schädigungszuwachs auf.

In Phase B kommt es zu kleinen plastischen Stauchungen in Belastungsrichtung. Eine Schädigung ist noch nicht erkennbar. Die Materialsteifigkeit kann als isotrop angesehen werden.

In Phase C erfährt die Betonprobe durch die Bildung der Matrixrisse eine Schädigungszunahme in den Querrichtungen. Kurz vor dem Erreichen der Druckfestigkeit kommt es ebenfalls zu plastischen Querdehnungen. Der Verlauf der Kurve  $r_{\mathbb{D}\parallel}$  in Abbildung 3.5 (rechts) zeigt, dass die Probe bis zum Erreichen der Druckfestigkeit  $f_c$  in Belastungsrichtung als ungeschädigt angesehen werden kann. Die Materialsteifigkeit wird zunehmend orthotroper.

In Phase D wachsen sowohl die plastischen Verzerrungen, als auch die Schädigung aller Richtungen an. Der Zuwachs beider Größen ist in den Querrichtungen besonders stark.

Wie schon in Abschnitt 3.1.1 erwähnt, versagt eine Betonprobe unter uniaxialen Druck auf Querkzug. Dieser Zusammenhang ist auch an der Entwicklung der Nachgiebigkeit der Querrichtung in den Phasen C und D erkennbar. Die Schädigung der Querrichtung setzt früher ein und ist im Nachbruchbereich stärker ausgeprägt als die der belasteten Richtung. Dieses Phänomen spielt eine wesentliche Rolle bei Lastumlagerungsvorgängen in Bauteilversuchen. Die richtige Erfassung der Entwicklung der mechanischen Eigenschaften in den Querrichtungen ist daher von besonderem Interesse.

## 3.2 Beton unter Zugbelastung

In Abbildung 3.6 sind typische Spannungs-Verschiebungskurven für monotone, uniaxiale Betonzugversuche aus Rammel [76] dargestellt. Unter Zugbelastung

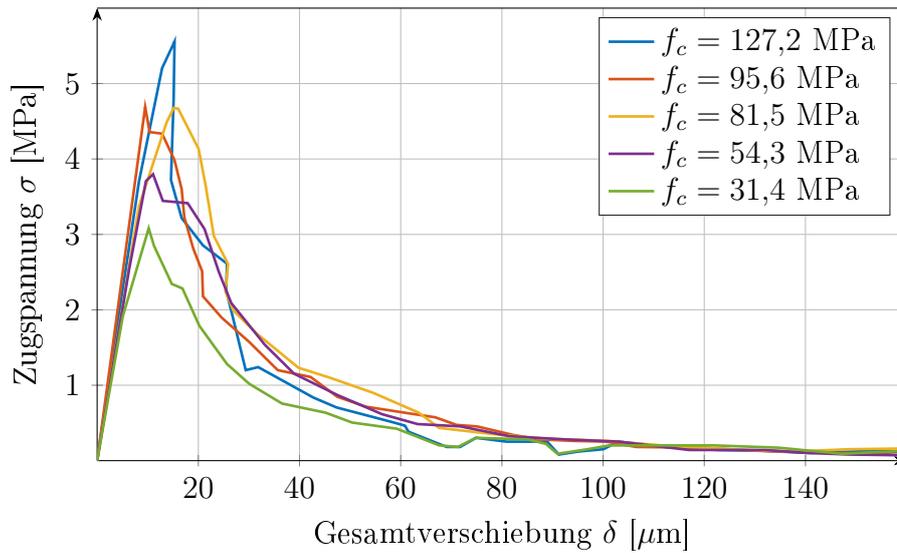


Abbildung 3.6: Spannungs-Verschiebungskurven für Beton unter uniaxialer Zugbeanspruchung an gekerbten Proben mit Länge  $l = 110\text{mm}$  nach Remmel [76]

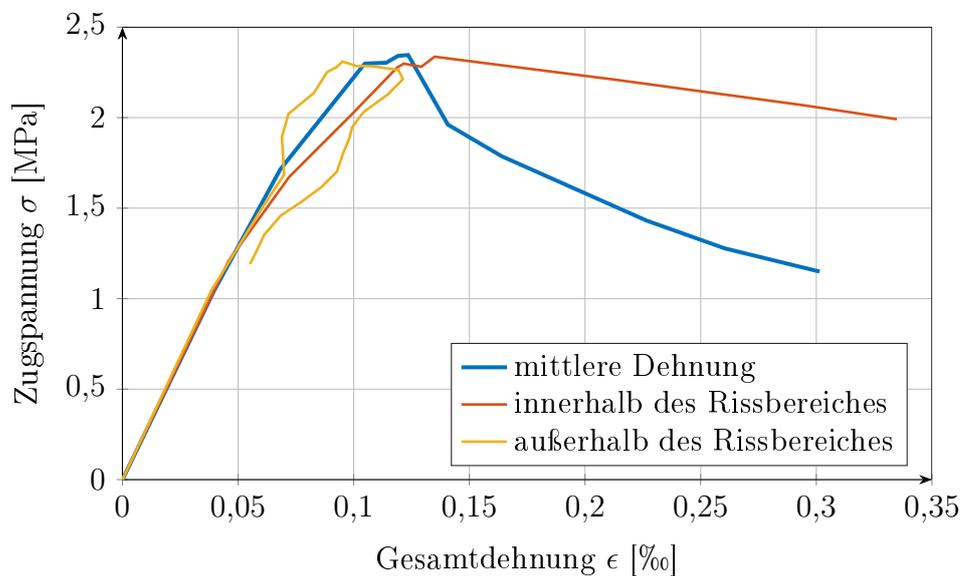


Abbildung 3.7: Spannungs-Dehnungskurve inner- und außerhalb des Rissbandes nach Heilmann u. a. [33]

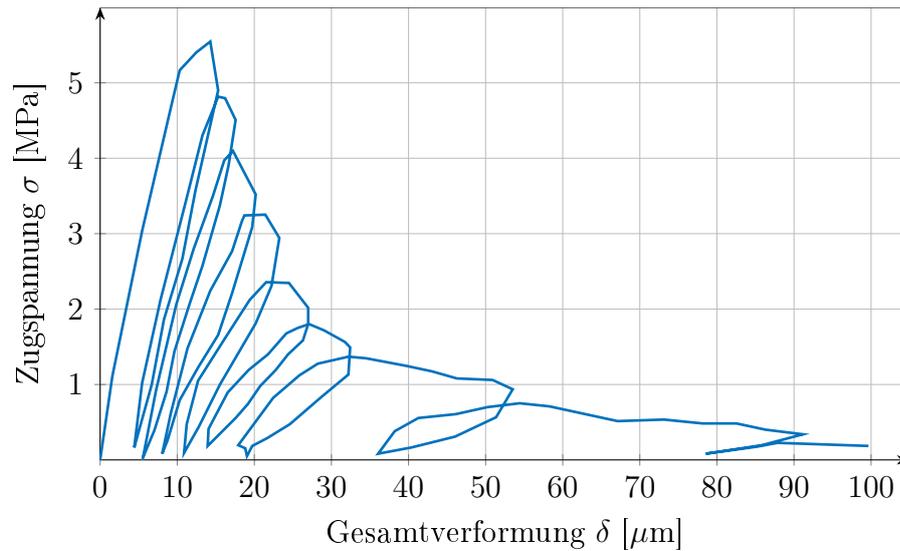


Abbildung 3.8: Spannungs-Verschiebungskurve eines zyklischen Zugversuches nach Remmel [76]

verhält sich Beton bis zum Erreichen seiner Zugfestigkeit  $f_t$  annähernd linear elastisch. In einem weggesteuerten Zugversuch bildet sich beim Erreichen der Zugfestigkeit quer zur Belastungsrichtung ein Matrixriss. Da der Querschnitt der Probe kleiner wird, kommt es zu einer scheinbaren Entfestigung.

Wie im uniaxialen Druckversuch bilden sich die Risse bei einem Zugversuch in einem stark lokalisierten Rissband. Das führt zu einer Lokalisierung der Entfestigung und der Verformungen. Mit der daraus resultierenden Abnahme der Gesamtlast werden die ungerissenen Bereiche der Betonprobe entlastet (Abbildung 3.7). Wie zuvor kann eine eindeutige Spannungs-Dehnungsbeziehung daher lediglich bis zum Erreichen der Zugfestigkeit angegeben werden.

In zyklischen Zugversuchen konnten Yankelevsky u. Reinhardt [95] zeigen, dass die Umhüllende der Spannungs-Verschiebungskurven wie bei Druckbelastung der Kurve eines monotonen Zugversuches folgt. Anhand der Ent- und Wiederbelastungen sind ebenfalls plastische Verformungen und eine Schädigungszunahme feststellbar (Abbildung 3.8 aus Remmel [76]).

Nach Pölling [73] darf angenommen werden, dass sich bei mehrachsigen Zugbelastungen Risse ausschließlich in Richtung der größten Hauptspannung öffnen. Die mechanischen Eigenschaften der Querrichtungen werden dadurch kaum beeinflusst.

Bei mehrachsigen Zug-Druck-Belastungen hingegen überlagern sich die inneren Querkzugspannungen aus äußerem Druck (Abbildung 3.3) mit den äußeren Zugspannungen. Daher setzt das Risswachstum früher ein.

## 3.3 Beton unter multiaxialer Druckbelastung

### 3.3.1 Monotone Belastungsversuche

Mehrachsige Betondruckversuche liegen hauptsächlich in der Form von monotonen Belastungsversuchen vor. Wird eine Probe quer zu einer Druckbelastungsrichtung durch weitere äußere Druckspannungen belastet, so werden die inneren Querkzugspannungen (Abbildung 3.3) reduziert. Die Rissöffnung in Querrichtung wird daher verzögert oder sogar unterbunden. Es kommt zu einer Festigkeitssteigerung im Vergleich zum uniaxialen Druckversuch.

Entsprechende Versuchsergebnisse sind in Abbildung 3.9 für unterschiedliche Hauptspannungsverhältnisse  $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3$  dargestellt. Sie sind aus Kupfer u. Gerstle [49] und van Mier [60] entnommen. Eine Übersicht weiterer Versuchsergebnisse ist zum Beispiel in Speck [82] enthalten.

Aus diesen Versuchsergebnissen wurden *Versagensflächen*, auch *Bruch-* oder *Festigkeitsflächen* genannt, abgeleitet, die den Versagenszustand von Betonproben für verschiedene dreidimensionale Spannungszustände wiedergeben. Eine Zusammenstellung von unterschiedlichen Versagensflächen für Beton ist beispielsweise in Chen u. Han [16] enthalten. Beispiele sind die Versagensflächen nach Drucker u. Prager [21], Ottosen [66] oder Hsieh u. a. [37]. Die Bruchfläche nach Willam u. Warnke [92] lässt sich besonders gut an die Versuchsergebnisse dreiachsiger Druckversuche anpassen (Abbildung 3.9). Sie wird in HAIGH-WESTERGAARD-Koordinaten  $(\xi, \rho, \theta)$  nach den Gleichungen (A.28) und (A.29) formuliert und über die parabelförmigen Abstände  $r_t$  beziehungsweise  $r_c$  des Zug- beziehungsweise Druckmeridians zur hydrostatischen Achse  $\xi = \sigma_m \sqrt{3}$  definiert (Abbildung 3.10, Meridianebene):

$$\sigma_m = \begin{cases} a_0 + a_1 r_t + a_2 r_t^2 & \text{für den Zugmeridian,} \\ b_0 + b_1 r_c + b_2 r_c^2 & \text{für den Druckmeridian.} \end{cases} \quad (3.6)$$

In den Deviatorebenen, bei  $\sigma_m = \textit{konstant}$ , werden die Abstände  $\rho(\sigma_m, \theta)$  zwischen einem Zug- und einem Druckmeridian in Abhängigkeit von dem Lo-

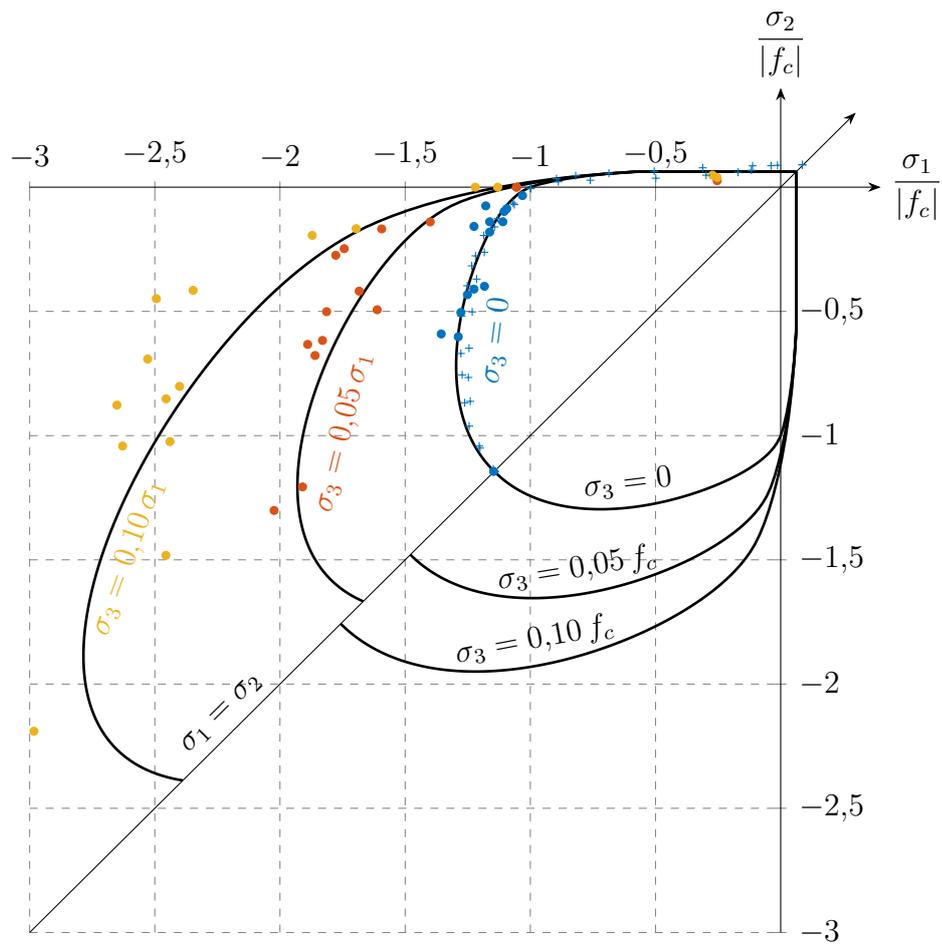


Abbildung 3.9: Vergleich von Versuchen nach Kupfer u. Gerstle [49] (+) und van Mier [60] (•••) mit der Versagensfläche nach Willam u. Warnke [92]

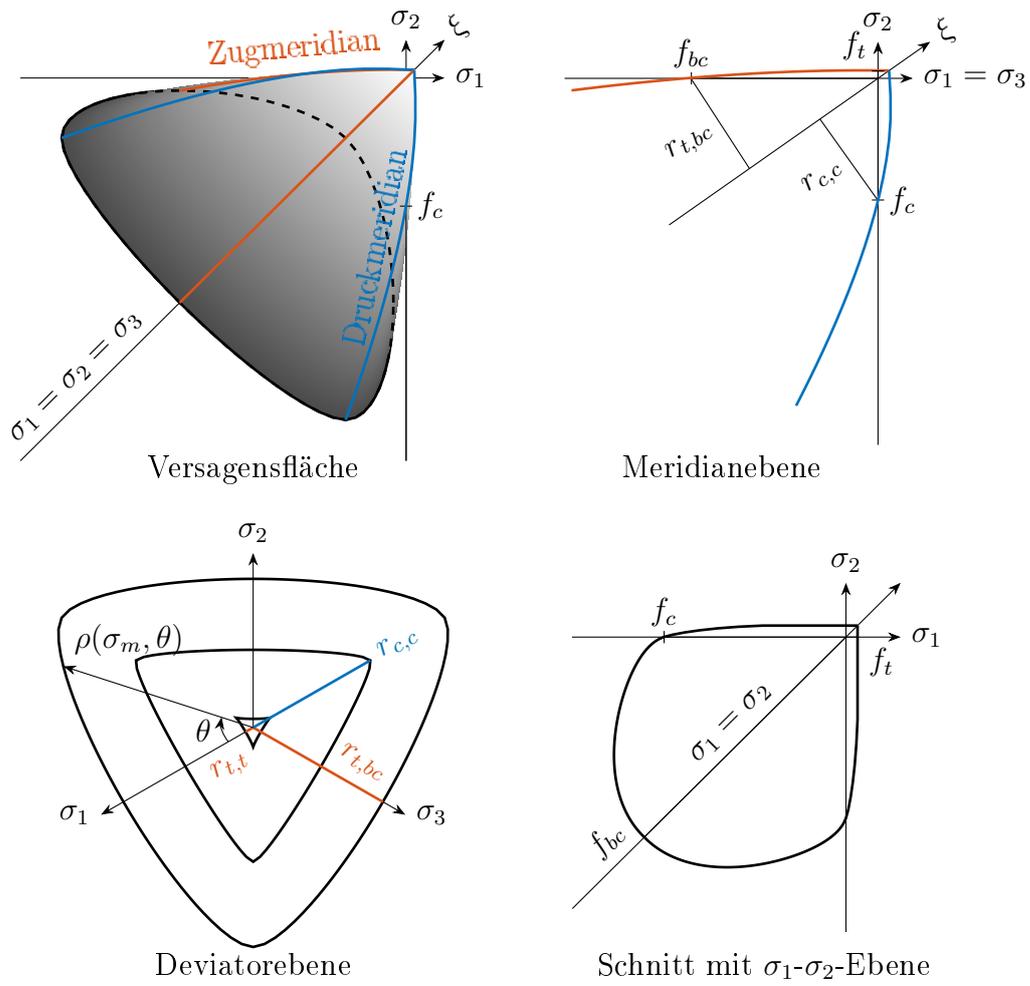


Abbildung 3.10: Versagensfläche nach Willam u. Warnke [92]

dewinkel  $\theta$  durch eine elliptische Kurve interpoliert (Abbildung 3.10, Deviator ebene). Die entsprechende Gleichung und weitere Erläuterungen können Willam u. Warnke [92] oder Chen u. Han [16] entnommen werden:

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_m, \theta) &= \frac{s+t}{u} \quad \text{mit} \\ s &= 2r_c(r_c^2 - r_t^2) \cos(\theta), \\ t &= r_c(2r_t - r_c) \sqrt{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2(\theta) + 5r_t^2 - 4r_t r_c}, \\ u &= 4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2(\theta) + (r_c - 2r_t)^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Koeffizienten  $a_i$  aus Gleichung (3.6) werden durch drei Versagenszustände auf dem Zugmeridian bestimmt. Da die Schnittpunkte beider Meridiane mit der hydrostatischen Achse zusammenfallen müssen, gilt  $b_0 = a_0$ . Daher reichen zwei weitere Versagenszustände auf dem Druckmeridian, um auch die übrigen Koeffizienten  $b_1$  und  $b_2$  in Gleichung (3.6) zu ermitteln. In Tabelle 3.2 sind fünf Versagenszustände aus entsprechenden Versuchen aus van Mier [60] angegeben. Die uniaxiale Druckfestigkeit  $f_c = -45,76$  MPa und die uniaxiale Zugfestigkeit  $f_t = 2,95$  MPa entsprechen darin den jeweiligen Mittelwerten der verwendeten Probenchargen. Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (3.6) ergibt für diese Versuchsreihen die Koeffizienten (3.8):

Tabelle 3.2: Fünf Versagenszustände aus van Mier [60] zur Ermittlung der Versagensfläche nach Willam u. Warnke [92]

Versuch ( <b>Zug- /Druckmeridian</b> )	Spannungsverhältnis $\left( \frac{\sigma_1}{ f_c } / \frac{\sigma_2}{ f_c } / \frac{\sigma_3}{ f_c } \right)$	$\frac{\sigma_m}{ f_c }$	$\frac{r_t}{ f_c }$ bzw. $\frac{r_c}{ f_c }$
Uniaxialer Zugversuch (Z)	0,06 / 0 / 0	0,02	0,05
Uniaxialer Druckversuch (D)	-1,0 / 0 / 0	-0,33	0,82
Äquibiaxialer Druckversuch (Z)	-1,15 / -1,15 / 0	-0,76	0,94
8B1-2 (D)	-1,68 / -0,17 / -0,17	-0,67	1,23
4B2-5 (Z)	-2,55 / -2,55 / -0,28	-1,79	1,85

$$\begin{aligned} a_0 = b_0 &= 0,0620, \\ a_1 &= -0,7636, \\ a_2 &= -0,1275, \\ b_1 &= -0,2640, \\ b_2 &= -0,2697. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die entsprechende Versagensfläche und verschiedene Schnitte sind in den Abbildungen 3.9 und 3.10 dargestellt.

### 3.3.2 Zyklische Belastungsversuche

Wie schon bei den uniaxialen Druckbelastungen liefern die zyklischen Versuche zusätzliche Informationen zur Entwicklung der plastischen Verzerrungen und der Entwicklung der Nachgiebigkeit. Zyklische, multiaxiale Versuche sind allerdings selten und häufig werden in der Fachliteratur ausschließlich die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen in den belasteten Richtungen dokumentiert. Dabei kann durch den in Abschnitt 3.1.1 dargestellten Mechanismus der Entstehung von Querspannungen davon ausgegangen werden, dass sich die mechanischen Eigenschaften der unbelasteten oder weniger belasteten Querrichtungen verstärkt ändern. Versuche, in denen die Spannungszustände und Verzerrungszustände vollständig erfasst werden, sind in van Mier [60] gegeben. Exemplarisch ist in Abbildung 3.11 der zyklische, mehrachsige Druckversuch 9B1-3 daraus dargestellt. Die Lastaufbringung in der hauptsächlich belasteten Richtung erfolgt wie im uniaxialen Versuch (Abbildung 3.1) weggesteuert. Die Belastungen der übrigen Richtungen wird spannungsgesteuert nachgeregelt, um ein gewünschtes Spannungsverhältnis  $\sigma_2/\sigma_1$  beziehungsweise  $\sigma_3/\sigma_1$  einzustellen.

Anhand der entlasteten Zustände ist eine Entwicklung der plastischen Verzerrungen ablesbar. Im Vergleich zu Abschnitt 3.1.2 ist die Ermittlung der Nachgiebigkeitsentwicklung mit Hilfe der Wiederbelastungspfade allerdings erschwert. Die drei Hauptverzerrungen werden hier von Spannungen aus mehr als einer Belastungsrichtung beeinflusst. Daher entfallen keine unbekanntenen Koeffizienten der Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$ . Diese können aus dem Gleichungssystem (3.9)

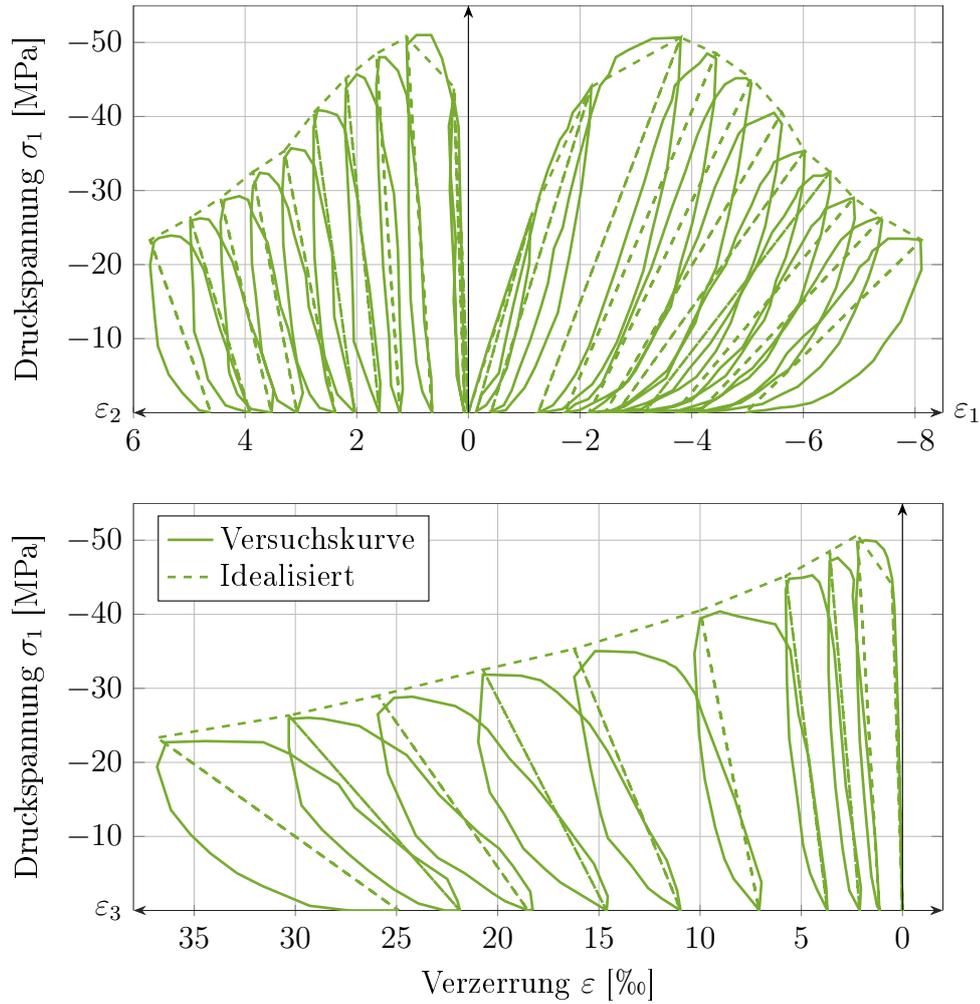


Abbildung 3.11: Spannungs-Verzerrungskurve des Druckversuches 9B1-3 nach van Mier [60].

nicht eindeutig gelöst werden:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_1 \\ \Delta \varepsilon_2 \\ \Delta \varepsilon_3 \end{Bmatrix}}_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \frac{E_1}{E_1} & -\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\ \nu_{21} & 1 & \nu_{23} \\ -\frac{E_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ \nu_{31} & -\nu_{32} & 1 \\ -\frac{E_3}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix}}_{\mathbb{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_2 \\ \Delta \sigma_3 \end{Bmatrix}}_{\Delta \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.9)$$

Aus diesem Grund sind vereinfachende Annahmen zur experimentellen Ermittlung der orthotropen Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$  des geschädigten Betons erforderlich. Diese werden in Abschnitt 5.2.1 vorgestellt. Wie schon in Abschnitt 3.1.2 erwähnt, ist die richtige Beschreibung der mechanischen Eigenschaften der weniger belasteten Querrichtungen von besonderem Interesse.

# Kapitel 4

## Klassische Materialtheorien

In diesem Kapitel werden grundlegende Materialtheorien erläutert, aus deren Kombination bisher übliche Materialmodelle für Beton aufgestellt werden. Dabei handelt es sich um die *Elastizitätstheorie*, die *Plastizitätstheorie* und die *Schädigungstheorie*. Im Anschluss werden Kombinationen dieser Theorien für die Werkstoffmodellierung von Beton vorgestellt und bewertet.

In den Materialgesetzen werden für vorgegebene Verzerrungszustände  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die zugehörigen Spannungszustände  $\boldsymbol{\sigma}$ , die tangentielle Steifigkeit  $\mathbb{C}_{Tan}$  und die erforderlichen Zustandsgrößen ermittelt. Diese werden in die Gleichungen (2.80) bis (2.82) eingesetzt, um das Prinzip der virtuellen Wege mit Hilfe der FEM zu lösen (Abschnitt 2.3.3).

### 4.1 Elastizitätstheorie

Elastisches Material besitzt die Eigenschaft bei Entlastung in seine Ursprungsform zurückzukehren. Es verhält sich *reversibel*. In der CAUCHY-Elastizitätstheorie hängt daher der Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$  ausschließlich vom aktuellen Verzerrungszustand  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ab:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (4.1)$$

In der Hyperelastizitäts- oder GREEN-Elastizitätstheorie wird zusätzlich gefordert, dass durch Ent- und Wiederbelastungsvorgänge keine Energie erzeugt wird. Das bedeutet, dass die gesamte mechanische Arbeit der äußeren Belastungen im verformten Körper als *Formänderungsenergie* gespeichert wird, die

bei Entlastung vollständig zurückgewonnen wird. Diese Forderung wird durch die Einhaltung des Prinzips der virtuellen Wege (Gleichung (2.54)) gewährleistet, da es als Gleichgewicht der Änderungsraten der äußeren Arbeit  $dW_a$  und der inneren Verzerrungsenergie  $dW_i$  in einem Körper aufgefasst werden kann. Mit dem linearisierten Verzerrungstensor aus Gleichung (2.62) in Abschnitt 2.2.2 ist die Verzerrungsenergie  $dW_i$  bestimmbar:

$$\int_{\Omega_0} dW_i dV = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (4.2)$$

Der Ausdruck  $dW_i$  wird in diesem Ansatz *Änderungsrate der Verzerrungsenergie* genant. Gross u. a. [31] nennen ihn auch Rate der *spezifischen Formänderungsarbeit* oder des *spezifischen elastischen Potentials*  $dU$ . Gleichung (4.2) muss für beliebige Volumeninkremente gelten:

$$dU = dW_i = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.3)$$

Da die Verzerrungsenergie  $U$  nach Definition ausschließlich von Verzerrungszuständen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  abhängt, kann ihre Änderungsrate  $dU$  nach Chen [15] umgeschrieben werden:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : d\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.4)$$

Mit den Gleichungen (4.3) und (4.4) ist der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  bestimmbar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.5)$$

Die zweite Ableitung der Verzerrungsenergie  $U$  nach dem Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  liefert den tangentialen Steifigkeitstensor  $\mathbb{C}_{Tan}$ . Die Reihenfolge der Differentiationen ist vertauschbar. Daher besitzt der Steifigkeitstensor  $\mathbb{C}_{Tan}$  die sogenannte *große Symmetrie*:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{Tan} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}^T \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}^T. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wegen der Symmetrie des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  und des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  besitzt der Steifigkeitstensor  $\mathbb{C}_{Tan}$  zusätzlich die sogenannte *kleine Symmetrie*.

$$C_{ijkl}^T = C_{jikl}^T = C_{ijlk}^T = C_{jilk}^T. \quad (4.7)$$

Die Ausdrücke für  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbb{C}_{Tan}$  sind die gesuchten Größen für die Gleichungen (2.80) bis (2.82).

### 4.1.1 Lineare Elastizitätstheorie

In dieser Arbeit wird die Elastizitätstheorie lediglich herangezogen, um linear elastisches Materialverhalten zu modellieren. Darin ändert sich die Materialtangente  $\mathbb{C}_{Tan} = \mathbb{C}_0 = \textit{konstant}$  nicht. In der linearen Elastizitätstheorie ist die Verzerrungsenergiedichte  $U$  eine quadratische Funktion des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.8)$$

Gleichung (4.5) liefert die *Materialsteifigkeitsbeziehung* oder das HOOKE'sche Gesetz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.9)$$

Mit dem zum Steifigkeitstensor inversen Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}_0 = \mathbb{C}_0^{-1}$  ergibt sich daraus die Nachgiebigkeitsbeziehung:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{D}_0 : \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.10)$$

In dieser Arbeit werden ausschließlich die isotrope und die orthotrope Elastizitätstheorie verwendet. Die orthotrope Nachgiebigkeitsbeziehung ist beispielsweise in Lemaitre u. Chaboche [51] angegeben:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\}. \quad (4.11)$$

Dabei ist in Gleichung (4.11) der vierstufige Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}_0$  in der VOIGT-Notation als [6x6]-Matrix dargestellt.

Bei Isotropie entfällt die Unterscheidung zwischen den richtungsabhängigen Elastizitätsmoduln  $E_i$ , den POISSON-Zahlen  $\nu_{ij}$  und den Schubmoduln  $G_{ij}$ . In Gross u. a. [31] wird der entsprechende Steifigkeitstensor allein in Abhängigkeit der zwei LAMÉ-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  angegeben:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.12)$$

### 4.1.2 Nichtlineare Elastizitätstheorie

Beispiele für die nichtlineare, elastische Beschreibung der Spannung-Verzerrungsbeziehung von Beton sind in Chen [15], Hofstetter u. Mang [35] oder Ottosen [66] aufgeführt. Die konstanten Steifigkeitstensoren werden dabei durch variable Sekantensteifigkeiten  $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon})$  ersetzt, die vom aktuellen Verzerrungszustand abhängen. Auf diese Weise ergibt sich die reversible Spannungs-Verzerrungsbeziehung mit dazugehöriger, tangentialer Steifigkeit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \mathbb{C}_{Tan} &= \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\partial \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Die Ermittlung der Funktion  $\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon})$  erfolgt in der Regel rein mathematisch durch Anpassungen an eine Beschreibung der uniaxialen, monotonen Spannungs-Verzerrungsbeziehung  $\sigma_1(\varepsilon_1)$ , wie beispielsweise Gleichung (3.3).

Um mehrachsige Spannungs-Verzerrungsbeziehungen zu modellieren, werden mit Hilfe von den Versagensflächen aus Abschnitt 3.3.1 sogenannte *äquivalent-uniaxiale* Spannungszustände ermittelt. Das uniaxiale Materialverhalten wird somit auf mehrachsige Belastungsvorgänge projiziert.

## 4.2 Plastizitätstheorie

In der Plastizitätstheorie bleibt die Materialsteifigkeit  $\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 = \textit{konstant}$ , analog zur linearen Elastizitätstheorie. Auftretende Nichtlinearitäten im Materialverhalten werden in der *spannungsbasierten* Plastizität auf plastische Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  zurückgeführt. In der *verzerrungsbasierten* Plastizität werden sie durch plastische Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^{pl}$  verursacht. Die folgenden Erläuterungen basieren auf den Beschreibungen von Hofstetter u. Mang [35] sowie Simo u. Hughes [79].

### 4.2.1 Spannungsbasierte Plastizitätstheorie

Die Grundannahme der klassischen, spannungsbasierten Plastizitätstheorie liegt in der Annahme, dass sich der linearisierte Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  nach Gleichung

(2.62) additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen lässt (Abbildung 4.1):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}. \quad (4.14)$$

Das HOOKE'sche Gesetz (4.9) wird mit Gleichung (4.14) angepasst:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \mathbb{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}). \quad (4.15)$$

Die differentielle Änderung zwischen benachbarten Belastungszuständen wird durch die zeitliche Ableitung des HOOKE'schen Gesetzes (4.15) wiedergegeben:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}. \quad (4.16)$$

Analog zu Abschnitt 2.1.1 besitzt die Zeit in quasi-statischen Versuchen keine weitere physikalische Bedeutung.

In der spannungsbasierten Plastizitätstheorie trennen *Fließflächen*  $f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$  den dreidimensionalen Spannungsraum in elastisch zulässige und unzulässige Spannungszustände auf. Die Menge der zulässigen Spannungszustände ist durch den *elastischen Bereich*  $E_\sigma$  definiert:

$$E_\sigma := \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \mid f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0\}. \quad (4.17)$$

In Gleichung (4.17) sind die Größen  $\boldsymbol{\alpha}$  die *spannungsäquivalenten Verfestigungsvariablen*. Sie beschreiben im aktuellen Zustand eine bereits erfolgte Verfestigung des Materials. In der Regel werden die Fließflächen für Beton aus den in Abschnitt 3.3.1 genannten Versagensflächen hergeleitet.

Die plastische Verzerrungsentwicklung geht aus der sogenannten *Fließregel* hervor:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.18)$$

Die Änderung der Verfestigung wird aus der *Verfestigungsregel* bestimmt:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.19)$$

Die Gleichungen (4.18) und (4.19) werden auch *nicht-assoziierte* Fließ- beziehungsweise Verfestigungsregel genannt. Die Vektorfunktionen  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$  beziehungsweise  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$  geben jeweils die Richtung der plastischen Verzerrungsentwicklung beziehungsweise der Verfestigung an. Wenn sich die Richtungsfunktionen aus dem Gradienten der Fließfläche  $f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$  ergeben, werden die

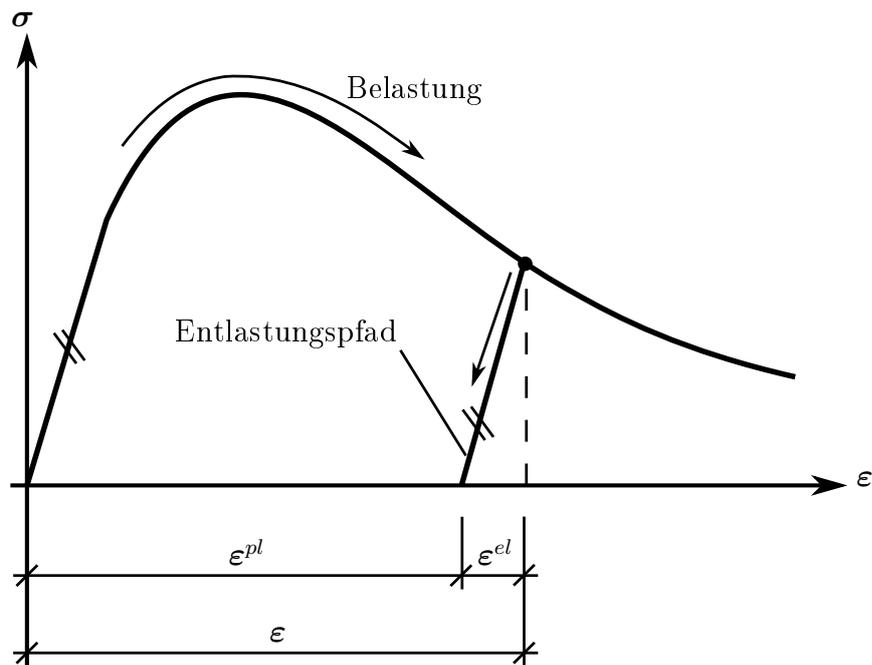


Abbildung 4.1: Additive Zerlegung der Verzerrungen in der spannungsbasierten Plastizitätstheorie

Gleichungen (4.18) und (4.19) *assoziierte* Fließ- beziehungsweise Verfestigungsregel genannt:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}^{pl} &= \gamma \frac{\partial f_{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= -\gamma \mathbb{H} \frac{\partial f_{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Der *Konsistenzparameter*  $\gamma$  liefert jeweils den Betrag der plastischen Verzerrungsänderung  $\dot{\epsilon}^{pl}$  beziehungsweise der Verfestigungsänderung  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ . Er muss so bestimmt werden, dass die sogenannten KUHN-TUCKER-Bedingungen, auch die *plastischen Belastungsbedingungen* genannt,

$$\begin{aligned}\gamma &\geq 0, \\ f_{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) &\leq 0, \\ \gamma f_{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) &= 0\end{aligned}\tag{4.21}$$

sowie die *Konsistenzbedingung*

$$\gamma \dot{f}_{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0\tag{4.22}$$

erfüllt werden. Bezüglich der Bedingungen (4.21) und (4.22) werden nach Simo u. Hughes [79] die folgenden vier Belastungsfälle unterschieden:

$$\begin{aligned}
 f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \quad \text{elastische Be-/Entlastung,} \\
 f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \dot{f}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \Rightarrow \gamma = 0 & \text{elastische Entlastung,} \\ \dot{f}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \text{ und } \gamma = 0 & \text{neutrale Belastung,} \\ \dot{f}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \text{ und } \gamma > 0 & \text{plastische Belastung.} \end{cases} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Im Fall einer plastischen Belastung wird der Konsistenzparameter  $\gamma > 0$  aus der Konsistenzbedingung (4.22) bestimmt:

$$\dot{f}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0. \quad (4.24)$$

Nach Einsetzen der Gleichung (4.16), der Fließregel (4.18) und der Verfestigungsregel (4.19) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : (\mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{C}_0 : \gamma \mathbf{r}) - \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \gamma \mathbf{h} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \gamma &= \frac{\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_0 : \mathbf{r} - \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{h}}. \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

Mit Gleichung (4.25) kann die zeitliche Ableitung des HOOKE'schen Gesetzes (4.16) als tangentielle Steifigkeitsbeziehung umgeschrieben werden:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \mathbb{C}_0 - \frac{\mathbb{C}_0 : \mathbf{r} \otimes \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_0}{\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_0 : \mathbf{r} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{h}} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.26)$$

Gleichung (4.15) und die eckige Klammer in Gleichung (4.26) liefern die gesuchten Ausdrücke für  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbb{C}_{Tan}$  für die Gleichungen (2.80) bis (2.82).

Im Fall der assoziierten Fließ- beziehungsweise Verfestigungsregel nach Gleichung (4.20) ist die tangentielle Steifigkeit  $\mathbb{C}_{Tan}$  symmetrisch. Um allerdings das richtige dilatante Verzerrungsverhalten von Beton abzubilden (Abbildung 3.2, rechts), sind nicht-assozierte Fließregeln erforderlich. Grassl [27] und Carrazedo u. a. [12] formulieren auf diese Weise Modelle, die dreidimensionale Spannungs- und Verzerrungszustände für monotone Druckbelastungsvorgänge wiedergeben können.

### 4.2.2 Verzerrungsbasierte Plastizitätstheorie

Nach Mizuno u. Hatanaka [62], Farahat u. a. [23] und Lan u. a. [50] ist es in der spannungsbasierten Plastizität schwierig, zwischen elastischen Entlastungsvorgängen und plastischen Entfestigungsvorgängen zu unterscheiden. Daher formulieren sie verzerrungsbasierte Plastizitätstheorien für Beton, in denen der Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$  anstelle des Verzerrungszustandes  $\boldsymbol{\varepsilon}$  additiv zerlegt wird (Abbildung 4.2):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{el} + \boldsymbol{\sigma}^{pl} . \quad (4.27)$$

Das HOOKE'sche Gesetz (4.9) beziehungsweise seine Ratenform werden mit Gleichung (4.27) entsprechend angepasst:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^{pl} \quad \text{bzw.} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{pl} . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Definition des elastischen Bereichs erfolgt im Verzerrungsraum mit Fließflächen  $f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q})$ . Darin sind die Größen  $\mathbf{q}$  *verzerrungsäquivalente Verfestigungsvariablen*:

$$E_\varepsilon := \{(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) \mid f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) \leq 0\} . \quad (4.29)$$

Analog zu den Gleichungen (4.18) und (4.19) werden die differentiellen Änderungen des plastischen Spannungsanteils und der Zustandsvariablen über eine Fließregel und eine Verfestigungsregel vorgegeben:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{pl} &= \gamma \bar{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) , \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\gamma \bar{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die entsprechenden Richtungsfunktionen  $\bar{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q})$  und  $\bar{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q})$  sind im Verzerrungsraum definiert.

Die KUHN-TUCKER-Bedingungen und die Konsistenzbedingung ergeben sich nach Pölling [73] analog zu den Gleichungen (4.21) und (4.22):

$$\begin{aligned} \gamma &\geq 0 , \\ f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) &\leq 0 , \\ \gamma f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) &= 0 , \\ \gamma \dot{f}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.31)$$

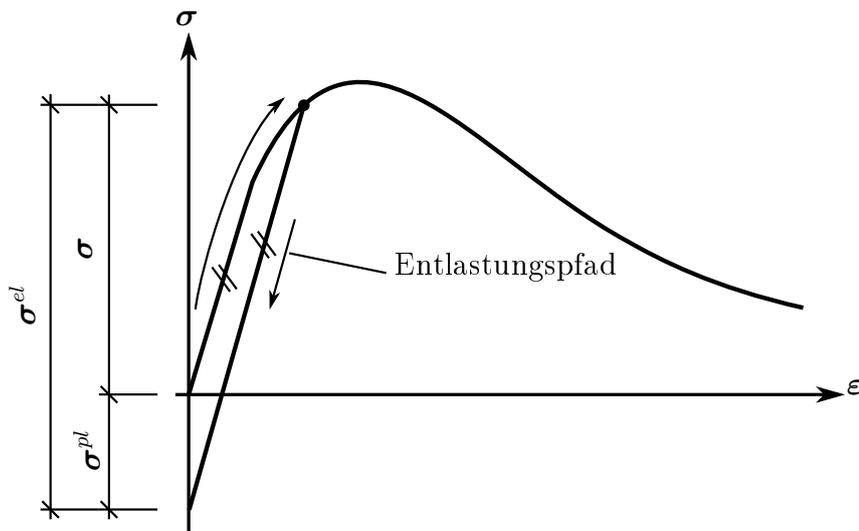


Abbildung 4.2: Additive Zerlegung der Spannungen in der verformungs-basierten Plastizitätstheorie

In Simo u. Hughes [79] wird nach Naghdi u. Trapp [64] und Yoder [97] analog zu den Gleichungen (4.23) nach vier Belastungsfällen unterschieden:

$$\begin{aligned}
 f_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q}) < 0 & \quad \text{elastische Be-/Entlastung,} \\
 f_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q}) = 0 & \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} < 0 & \text{elastische Entlastung,} \\ \frac{\partial f_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0 & \text{neutrale Belastung,} \\ \frac{\partial f_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 & \text{plastische Belastung.} \end{cases} \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Im Fall der plastischen Belastung wird wiederum der Konsistenzparameter  $\gamma > 0$  aus der Konsistenzbedingung gelöst:

$$\begin{aligned}
 \dot{f}_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q}) &= \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \mathbf{q}} \gamma \bar{\mathbf{h}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \gamma = \frac{\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \mathbf{q}} \bar{\mathbf{h}}}. \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Die Ratenform des HOOKE'schen Gesetzes (4.28) liefert wiederum mit der Fließregel (4.30) und dem Konsistenzparameter  $\gamma$  die tangentielle Steifigkeits-

beziehung:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \mathbb{C}_0 - \frac{\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \bar{\mathbf{r}}}{\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \mathbf{q}} \bar{\mathbf{h}}} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.34)$$

Materialmodelle, die auf der verzerrungsbasierten Plastizitätstheorie basieren, sind nach Chen u. Han [16] in der Lage, monotone Belastungsvorgänge bis weit in den Entfestigungsbereich zu simulieren.

### 4.3 Kontinuumsschädigungstheorie

Wie in Kapitel 3 beschrieben, wird das nichtlineare Materialverhalten des Werkstoffes Beton durch das Anwachsen und die Vereinigung von Mikrorissen verursacht (Bažant u. Planas [7]). In der verzerrungsbasierten Mikrorisstheorie nach Dougill [20] führt dieses Verhalten zu einem Steifigkeitsverlust des Materials. Die entstandenen Risse werden bei vollständiger Entlastung geschlossen, so dass keine plastischen Verzerrungen im spannungsfreien Zustand entstehen (Abbildung 4.3).

In der Kontinuumsschädigungsmechanik kommt es ebenfalls zu einem Steifigkeitsverlust. Dabei beziehen die Zustandsvariablen gedachte, äquivalente, ungeschädigte Zustände  $(\boldsymbol{\sigma}^{eff}, \boldsymbol{\varepsilon}^{eff})$  auf die tatsächlichen Zustände  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ . Letztere sind nach Carol u. a. [11] messbar und erfüllen die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen. Die *effektive Spannung*  $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$  und die *effektive Verzerrung*  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  werden so definiert, dass die Steifigkeits- beziehungsweise Nachgiebigkeitsbeziehung des ungeschädigten Materials gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{eff} &= \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{eff}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{eff} &= \mathbb{D}_0 : \boldsymbol{\sigma}^{eff}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Verknüpfung der tatsächlichen und der effektiven Zustände erfolgt in der Fachliteratur nach drei unterschiedlichen Prinzipien. Nach Simo u. Ju [80] führt das *Prinzip der äquivalenten Spannungen* zur *spannungsbasierten Kontinuumsschädigungstheorie*. Das *Prinzip der äquivalenten Verzerrungen* führt zur *verzerrungsbasierten Kontinuumsschädigungstheorie*. Aus dem *Prinzip der äquivalenten Energie* folgt eine energiebasierte Formulierung der Kontinuumsschädigungstheorie.

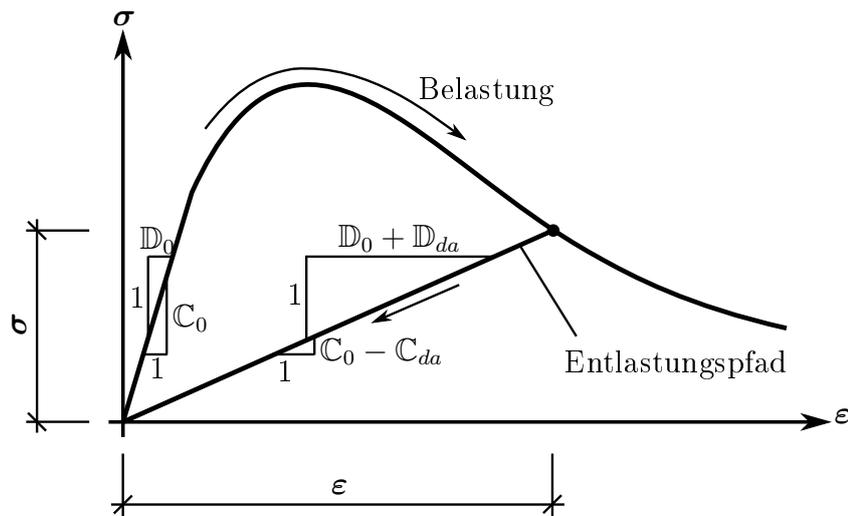


Abbildung 4.3: Nachgiebigkeitszuwachs und Steifigkeitsverlust in der Schädigungstheorie

Am Beispiel isotroper Schädigung zeigen Krätzig u. Pölling [47], dass die spannungs- und verzerrungsbasierte Kontinuumschädigungstheorie in die Mikrorisstheorie überführt werden kann, wenn als interne Schädigungsvariable der Steifigkeitstensor  $\mathbb{C}$  beziehungsweise der Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}$  gewählt wird.

### 4.3.1 Spannungsbasierte Schädigungstheorie

Im Prinzip der äquivalenten Spannungen wird vorausgesetzt, dass die effektiven Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$  den tatsächlichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  entsprechen. Daher weichen die effektiven Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}^{eff}$  von den tatsächlichen Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  ab. Es wird angenommen, dass die Abbildung der tatsächlichen Größen auf die effektiven Größen durch eine lineare Abbildung erfolgen kann. Diese Abbildung lässt sich durch einen Tensor vierter Stufe, durch den *Schädigungseffektstensor*  $\mathbb{M}$ , beschreiben:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{eff} &= \boldsymbol{\sigma}, \\ \boldsymbol{\epsilon}^{eff} &= \mathbb{M} : \boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

In Pölling [73] wird beispielsweise der Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}$  additiv in einen Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}_0$  des ungeschädigten Materials und einen Schädigungs-

nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}_{da}$  aufgeteilt:

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_{da} . \quad (4.37)$$

Die effektive Nachgiebigkeitsbeziehung (4.35) und die tatsächliche Nachgiebigkeitsbeziehung (4.10) werden mit Gleichung (4.37) entsprechend angepasst:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{eff} &= \mathbb{D}_0 : \boldsymbol{\sigma} , \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_{da}] : \boldsymbol{\sigma} . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.38) kann der sogenannte *Schädigungseffektensor*  $\mathbb{M}$  bestimmt werden:

$$\mathbb{M} = \mathbb{D}_0 : [\mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_{da}]^{-1} . \quad (4.39)$$

Durch Inversion der zweiten Gleichung in (4.38) ergibt sich das HOOKE'sche Gesetz (4.40):

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_{da}]^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (4.40)$$

In der Ratenform der Nachgiebigkeitsbeziehung (4.41) ist zu erkennen, dass sich die Änderung der tatsächlichen Verzerrung aus einem elastischen Anteil und einem Schädigungsanteil zusammensetzt (Pfister [71]):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{[\mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_{da}] : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}} + \underbrace{\mathbb{D}^{da} : \boldsymbol{\sigma}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{da}} . \quad (4.41)$$

Durch einen Vergleich von Gleichung (4.41) mit der zeitlichen Ableitung von Gleichung (4.14) wird die Analogie zur spannungsbasierten Plastizitätstheorie deutlich. Daher können die Ausdrücke des elastischen Bereichs (4.17), der Verfestigungsregel (4.19), der Belastungsbedingungen (4.21) und der Konsistenzbedingung (4.24) an dieser Stelle übernommen werden. Die Fließflächen werden in der Schädigungstheorie *Schädigungsflächen* genannt. Die plastischen Belastungsbedingungen sind hier die *schädigenden Belastungsbedingungen*. Die *Schädigungsregel* lautet analog zur Fließregel (4.18)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{da} = \mathbb{D}^{da} : \boldsymbol{\sigma} = \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) . \quad (4.42)$$

Die Ermittlung des Konsistenzparameters  $\gamma$  und die tangentielle Steifigkeitsbeziehung entsprechen ebenfalls den jeweiligen Ausdrücken der spannungsba-  
sierten Plastizitätstheorie (4.25) und (4.26):

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{r} - \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{h}}, \quad (4.43)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \begin{array}{c} \mathbb{D}^{-1} - \frac{\mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{r} \otimes \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1}}{\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{r} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{h}} \\ \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{r} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{h} \end{array} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.44)$$

Da in beiden Gleichungen (4.43) und (4.44) der Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}$  des geschädigten Materials enthalten ist, reicht es nicht, allein die Evolution der Schädigungsverzerrung  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{da}$  zu beschreiben. Nach Pölling [73] muss die Nachgiebigkeitsevolution des Tensors  $\mathbb{D}_{da}$  nachträglich durch einen Komponentenvergleich in Gleichung (4.42) bestimmt werden. Vergleichbar mit Abschnitt 3.1.2 und 3.3.2 sind die 6 Gleichungen in (4.42) nicht ausreichend, um im Fall der anisotropen Schädigungsentwicklung die 21 Komponenten beziehungsweise im Fall der orthotropen Schädigungsentwicklung die 12 Komponenten von  $\mathbb{D}_{da}$  zu bestimmen. Daher sind vereinfachende Annahmen erforderlich, wie beispielsweise die isotrope Schädigungsevolution in Grassl u. Jirásek [29] oder die Kopplung der Entwicklungen von Komponenten der Nachgiebigkeit in Carol u. a. [11].

### 4.3.2 Verzerrungsbasierte Schädigungstheorie

In dem Prinzip der äquivalenten Verzerrungen wird gefordert, dass die effektiven Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  den tatsächlichen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  entsprechen. Daher weichen in der verzerrungsbasierten Schädigungstheorie die effektiven Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$  von den tatsächlichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  ab. Die Abbildung der tatsächlichen Größen auf die effektiven Größen erfolgt wiederum über einen Schädigungseffektstensor vierter Stufe  $\mathbb{M}$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{eff} &= \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{eff} &= \mathbb{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

In Pölling [73] wird in der verzerrungsbasierten Schädigungstheorie die additive Zerlegung des Steifigkeitstensors  $\mathbb{C}$  in einen Tensor  $\mathbb{C}_0$  des ungeschädigten Materials und einen Schädigungssteifigkeitstensor  $\mathbb{C}_{da}$  vorgeschlagen:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}. \quad (4.46)$$

Mit Gleichung (4.46) werden die effektive und tatsächliche Steifigkeitsbeziehung (4.35) beziehungsweise (4.9) angepasst:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{eff} &= \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}] : \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Mit Hilfe der Gleichung (4.47) wird die Inverse des Schädigungseffektstensors  $\mathbb{M}^{-1}$  bestimmt:

$$\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{C}_0 : [\mathbb{C}_0 + \mathbb{C}_{da}]^{-1}. \quad (4.48)$$

In der Ratenform der tatsächlichen Steifigkeitsbeziehung kann nach Pfister [71] die Spannungsänderung in einen elastischen und einen schädigenden Anteil aufgeteilt werden:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{[\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{el}} - \underbrace{\dot{\mathbb{C}}^{da} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{da}}. \quad (4.49)$$

Der Vergleich mit der Ratenform von Gleichung (4.28) zeigt wiederum die Analogie zur verzerrungsbasierten Plastizitätstheorie. Daher können der elastische Bereich (4.29), die Verfestigungsregel (4.30), die Belastungsbedingungen (4.31) und die Konsistenzbedingung (4.33) auch an dieser Stelle übernommen werden. Die Schädigungsregel wird wiederum analog zur Fließregel (4.30) aufgestellt:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{da} = \dot{\mathbb{C}}^{da} : \boldsymbol{\varepsilon} = \gamma \bar{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}). \quad (4.50)$$

Die Ermittlung des Konsistenzparameters  $\gamma$  und die tangentialen Steifigkeitsbeziehung entsprechen ebenfalls den jeweiligen Ausdrücken der verzerrungsbasierten Plastizitätstheorie (4.33) und (4.34):

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f_{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f_{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h}}, \quad (4.51)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ (\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}) - \frac{\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \bar{\mathbf{r}}}{\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \mathbf{q}} \bar{\mathbf{h}}} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.52)$$

Wie in der spannungsbasierten Schädigungstheorie muss auch in den Gleichungen (4.51) und (4.52) die Evolution des Schädigungssteifigkeitstensors  $\mathbb{C}_{da}$  durch einen Komponentenvergleich in Gleichung (4.50) bestimmt werden.

### 4.3.3 Energiebasierte Schädigungstheorie

In dem Prinzip der äquivalenten Energie entsprechen weder die effektiven Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  den tatsächlichen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , noch die effektiven Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$  den tatsächlichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$ . Stattdessen wird vorausgesetzt, dass die elastisch gespeicherte Energie  $U$  der effektiven Größen derselben Energie der tatsächlichen Größen entspricht:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{eff} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{eff} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \\ U &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{eff} : \mathbb{D}_0 : \boldsymbol{\sigma}^{eff} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Die Abbildung zwischen effektiven und tatsächlichen Größen erfolgt wieder über einen Schädigungseffekttensor vierter Stufe  $\mathbb{M}$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{eff} &= \mathbb{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad \text{bzw.} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{eff} &= \mathbb{M} : \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Aus den Gleichungen (4.35) folgen die tatsächlichen Steifigkeiten  $\mathbb{C}$  beziehungsweise Nachgiebigkeiten  $\mathbb{D}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \mathbb{M} : \mathbb{C}_0 : \mathbb{M} \quad \text{bzw.} \\ \mathbb{D} &= \mathbb{M}^{-1} : \mathbb{D}_0 : \mathbb{M}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

In Carol u. a. [11] werden Tensoren zweiter Stufe als einfachste Lösung vorgestellt, um orthotrope Schädigungsvorgänge zu beschreiben. Sie definieren den *Integritäts- oder Unversehrtheitstensor*  $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ , seine Quadratwurzel  $\bar{\boldsymbol{w}}$  und die jeweiligen Inversen  $\boldsymbol{\Phi}$  und  $\boldsymbol{w}$ . Diese Tensoren sind alle symmetrisch, so dass die

Beziehungen in den Gleichungen (4.56) gelten:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi} &= \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}, & \bar{\Phi}_{ij} &= \bar{w}_{ik} \bar{w}_{kj}, \\
\Phi &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}, & \Phi_{ij} &= w_{ik} w_{kj}, \\
\bar{\Phi} \cdot \Phi &= \Phi \cdot \bar{\Phi} = \delta, & \bar{\Phi}_{ik} \Phi_{kj} &= \Phi_{ik} \bar{\Phi}_{kj} = \delta_{ij}, \\
\bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{w}} = \delta, & \bar{w}_{ik} w_{kj} &= w_{ik} \bar{w}_{kj} = \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Um die Symmetrie der Steifigkeit  $\mathbb{C}$  des geschädigten Materials zu erhalten, werden die tatsächlichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  mit den effektiven Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$  nach einem Ansatz aus Cordebois u. Sidoroff [18] verknüpft:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{w}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{eff} \cdot \bar{\mathbf{w}}, \\
\sigma_{ij} &= \bar{w}_{ik} \sigma_{kl}^{eff} \bar{w}_{lj}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Mit Gleichung (4.57) und der ersten Gleichung aus (4.54) wird der Schädigungseffektentensor  $\mathbb{M}$  ermittelt:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= M_{ijkl} \sigma_{kl}^{eff} \\
M_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\bar{w}_{ik} \bar{w}_{jl} + \bar{w}_{il} \bar{w}_{jk}).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

In Gleichung (4.58) wird laut Carol u. a. [11] die Symmetrie von  $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$  und  $\bar{\mathbf{w}}$  genutzt, um den Tensor  $\mathbb{M}$  sowohl mit kleiner, als auch großer Symmetrie aufzustellen. Mit der zweiten Gleichung aus (4.54) ergeben sich die effektiven Verzerrungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}^{eff} &= \bar{\mathbf{w}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{\mathbf{w}}, \\
\varepsilon_{ij}^{eff} &= \bar{w}_{ik} \varepsilon_{kl} \bar{w}_{lj}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Einsetzen der Gleichungen (4.57) und (4.59) in die erste Gleichung von (4.35) liefert einen Ausdruck für die tatsächliche Steifigkeit  $\mathbb{C}$  des geschädigten Materials:

$$\sigma_{ij} = \bar{w}_{ip} \underbrace{C_{pqrs}^0 \underbrace{\bar{w}_{rk} \varepsilon_{kl} \bar{w}_{ls}}_{\varepsilon_{rs}^{eff}} \bar{w}_{qj}}_{\sigma_{pq}^{eff}} = \underbrace{\bar{w}_{ip} \bar{w}_{jq} \bar{w}_{kr} \bar{w}_{ls} C_{pqrs}^0}_{C_{ijkl}} \varepsilon_{kl}. \tag{4.60}$$

Unter der Annahme, dass sich das ungeschädigte Material isotrop verhält, kann der Steifigkeitstensor  $\mathbb{C}_0$  mit Gleichung (4.12) ausgedrückt werden. Nach der

Überschiebung mit dem KRONECKER-Delta ergibt sich die Steifigkeit  $\mathbb{C}$  des geschädigten Materials unter Anwendung der ersten Gleichung aus (4.56):

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \bar{w}_{ip} \bar{w}_{jq} \bar{w}_{kr} \bar{w}_{ls} \lambda \delta_{pq} \delta_{rs} + \bar{w}_{ip} \bar{w}_{jq} \bar{w}_{kr} \bar{w}_{ls} \mu (\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr}) \\ &= \bar{w}_{ip} \bar{w}_{jp} \bar{w}_{kr} \bar{w}_{lr} \lambda + \bar{w}_{ip} \bar{w}_{jq} \bar{w}_{kp} \bar{w}_{lq} \mu + \bar{w}_{ip} \bar{w}_{jq} \bar{w}_{kq} \bar{w}_{lp} \mu \\ &= \lambda \bar{\Phi}_{ij} \bar{\Phi}_{kl} + \mu (\bar{\Phi}_{ik} \bar{\Phi}_{jl} + \bar{\Phi}_{il} \bar{\Phi}_{jk}) . \end{aligned} \quad (4.61)$$

In analoger Vorgehensweise zu den Gleichungen (4.57) bis (4.61) kann die Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$  des geschädigten Materials ebenfalls gefunden werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= w_{ik} \varepsilon_{kl}^{eff} w_{lj} , \\ \sigma_{ij}^{eff} &= w_{ik} \sigma_{kl} w_{lj} , \\ D_{ijkl} &= -\frac{\nu_c}{E_c} \Phi_{ij} \Phi_{kl} + \frac{1 + \nu_c}{2 E_c} (\Phi_{ik} \Phi_{jl} + \Phi_{il} \Phi_{jk}) . \end{aligned} \quad (4.62)$$

Nach Bažant [4] kommt es in Materialmodellen mit orthotroper Schädigung häufig zu einem Verlust der *tensoriellen Form-Invarianz* des Nachgiebigkeitstensors beziehungsweise des Steifigkeitstensors. Das heißt, die Materialnachgiebigkeit und die -steifigkeit eines geschädigten Körpers hängen von der Wahl des Referenzkoordinatensystems ab. Diese Abhängigkeit ist bei mathematischen Beschreibungen physikalischer Probleme unbedingt zu vermeiden. In Anhang C wird daher nachgewiesen, dass die Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$  in Gleichung (4.62) die tensorielle Form-Invarianz-Bedingung erfüllt.

Für die Eigenrichtungen der Schädigung ergibt sich in VOIGT-Notation die folgende [6x6]-Matrix für  $\mathbb{D}$ :

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \Phi_{(1)}^2 \frac{1}{E_c} & \Phi_{(1)} \Phi_{(2)} \frac{-\nu_c}{E_c} & \Phi_{(1)} \Phi_{(3)} \frac{-\nu_c}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{(2)} \Phi_{(1)} \frac{-\nu_c}{E_c} & \Phi_{(2)}^2 \frac{1}{E_c} & \Phi_{(2)} \Phi_{(3)} \frac{-\nu_c}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{(3)} \Phi_{(1)} \frac{-\nu_c}{E_c} & \Phi_{(3)} \Phi_{(2)} \frac{-\nu_c}{E_c} & \Phi_{(3)}^2 \frac{1}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

mit

$$\frac{1}{2G_{ij}} = \Phi_{(i)} \Phi_{(j)} \frac{2(1 + \nu_c)}{E_c} .$$

Der Vergleich der infolge Schädigung erhöhten Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$  mit der Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}_0$  in Gleichung (4.11) liefert die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{E_c}{\Phi_{(1)}^2}, & E_2 &= \frac{E_c}{\Phi_{(2)}^2}, & E_3 &= \frac{E_c}{\Phi_{(3)}^2}, \\
 \nu_{12} &= \frac{\Phi_{(2)}}{\Phi_{(1)}} \nu_c, & \nu_{13} &= \frac{\Phi_{(3)}}{\Phi_{(1)}} \nu_c, & \nu_{23} &= \frac{\Phi_{(3)}}{\Phi_{(2)}} \nu_c, \\
 \nu_{21} &= \frac{\Phi_{(1)}}{\Phi_{(2)}} \nu_c, & \nu_{31} &= \frac{\Phi_{(1)}}{\Phi_{(3)}} \nu_c, & \nu_{32} &= \frac{\Phi_{(2)}}{\Phi_{(3)}} \nu_c.
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Der initiale Elastizitätsmodul  $E_c$  und die initiale POISSON-Zahl  $\nu_c$  werden als bekannt vorausgesetzt. Während in Gleichung (4.11) noch 12 Unbekannte enthalten sind, verbleiben in Gleichung (4.63) lediglich die drei unbekanntenen Eigenwerte  $\Phi_{(1)}$ ,  $\Phi_{(2)}$  und  $\Phi_{(3)}$  des Schädigungstensors  $\Phi$ , um einen orthotropen Schädigungszustand des Materialmodells zu beschreiben.

Die Schädigungsflächen, Schädigungsregeln und Verfestigungsregeln müssen unter Verwendung des Prinzips der äquivalenten Energie im Energieraum definiert werden. Für entsprechende Formulierungen dieser Gesetzmäßigkeiten wird auf die Ausführungen von Carol u. a. [11], Kitzig u. Häußler-Combe [44] oder Pröchtel [75] verwiesen. Diese Modelle werden erfolgreich zur Analyse von Benchmark-Tests in Materialsimulationen eingesetzt, in denen ein Zugversagen maßgebend ist.

Die Reduktion der Unbekannten auf die drei Eigenwerte  $\Phi_{(i)}$  des Schädigungstensors  $\Phi$  ermöglicht eine experimentelle Ermittlung orthotroper Schädigungszustände von Betonproben. Diese Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}$  können anhand von ein- und mehrachsigen, zyklischen Würfeldruckversuchen aus den Abschnitten 3.1.2 und 3.3.2 für einzelne Belastungszyklen experimentell ermittelt werden. Daher wird in der vorliegenden Arbeit der Ausdruck für den Materialsteifigkeitstensor  $\mathbb{C}$  aus Gleichung (4.61) übernommen. Die entsprechende Auswertung der Würfeldruckversuche wird im Abschnitt 5.2.1 beschrieben.

## 4.4 Elasto-plastische Schädigungstheorie

Die Beschreibung des nichtlinearen mechanischen Verhaltens von ganzen Bauteilen aus Beton erfordert eine elasto-plastische Schädigungstheorie. Dabei

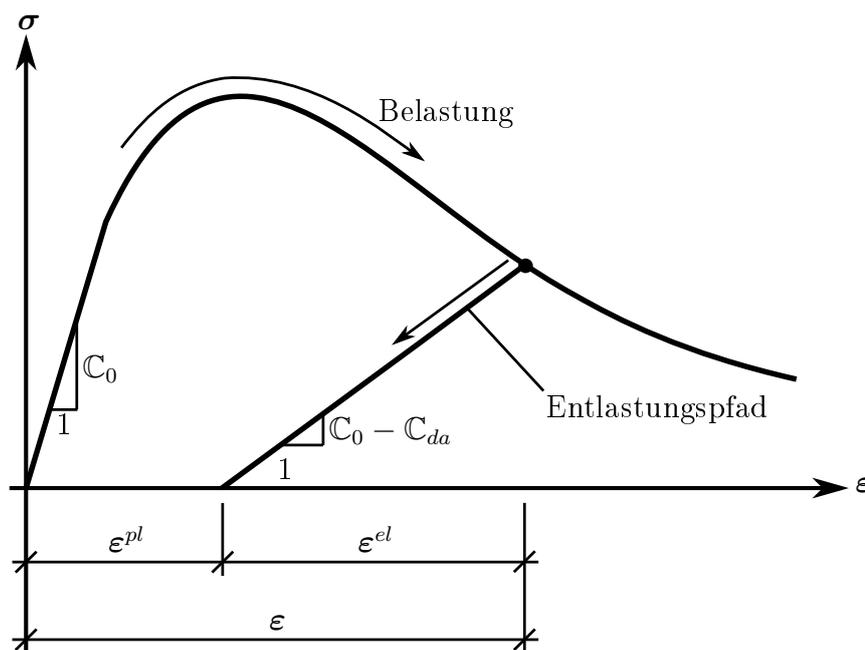


Abbildung 4.4: Steifigkeitsverlust und bleibende Verzerrungen in der kombinierten elasto-plastischen Schädigungstheorie

müssen sowohl der Steifigkeitsverlust aus der Schädigung, als auch die bleibenden Verformungen aus der Plastizität berücksichtigt werden, um bei Lastumlagerungsvorgängen das richtige Werkstoffverhalten zu simulieren (Abbildung 4.4). Pölling [73] vergleicht aus der Literatur bekannte Kombinationsmöglichkeiten der Plastizitäts- und der Schädigungstheorie. Darin werden die Algorithmen, Evolutionsgleichungen und inneren Variablen der rein spannungsbasierten, der rein verzerrungsbasierten sowie der gemischten Kombinationen prinzipiell formuliert.

#### 4.4.1 Gemischte Kombination der Plastizitäts- und Schädigungstheorie

Eine erste Kombination aus der verzerrungsbasierten Mikrorisstheorie nach Dougill [20] und einer klassischen, spannungsbasierten Plastizitätstheorie wurde von Bažant u. Kim [8] entwickelt. Aktuellere Kombinationen aus spannungsbasierter Plastizitätstheorie mit verzerrungsbasierter Schädigungstheorie sind unter anderem in Al-Rub u. Kim [1], Cicekli u. a. [17], Grassl u. Jirásek [28],

Grassl u. a. [30], Jason u. a. [39], Salari u. a. [77], Valentini [88], Voyiadjis u. a. [89] oder Voyiadjis u. a. [90] gegeben. Laut Pölling [73] und aktuellen Recherchen ist eine Kombination aus verzerrungsbasierter Plastizität und spannungsbasierter Schädigung in der Literatur nicht anzutreffen. Kombinationen der energiebasierten Schädigungstheorie mit einer der beiden vorgestellten Plastizitätstheorien sind nicht bekannt.

Durch die additiven Zerlegungen des Steifigkeitstensors (4.46) und des Verzerrungstensors (4.14) ergibt sich die folgende Spannungs-Verzerrungsbeziehung und ihre Ratenform:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}] : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) , \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= [\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - [\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - \underbrace{\dot{\mathbb{C}}_{da} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl})}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{da} = \dot{\mathbb{C}}_{da} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} .\end{aligned}\quad (4.65)$$

In der gemischten Kombination sind die Fließflächen im Spannungsraum und die Schädigungsflächen im Verzerrungsraum definiert. Daher sind getrennte elastische Bereiche notwendig:

$$\begin{aligned}E_{\boldsymbol{\sigma}} &:= \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}^{pl}) \mid f_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}^{pl}) \leq 0\} , \\ E_{\boldsymbol{\varepsilon}} &:= \{(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{q}^{da}) \mid f_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{q}^{da}) \leq 0\} .\end{aligned}\quad (4.66)$$

Die Fließ- beziehungsweise Schädigungsregel ergeben sich analog zu den vorangegangenen Abschnitten 4.2.1 und 4.3.2:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} &= \gamma^{pl} \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}^{pl}) , \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{da} &= \dot{\mathbb{C}}^{da} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \gamma^{da} \bar{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{q}^{da}) .\end{aligned}\quad (4.67)$$

In Gleichung (4.67) müssen der Konsistenzparameter der Plastizität  $\gamma^{pl}$  und derjenige der Schädigung  $\gamma^{da}$  getrennt voneinander ermittelt werden. Die Verfestigungsregeln müssen sowohl für die Plastizität, als auch für die Schädigung formuliert werden:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{pl} &= -\gamma^{pl} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}^{pl}) , \\ \dot{\mathbf{q}}^{da} &= -\gamma^{da} \bar{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{q}^{da}) .\end{aligned}\quad (4.68)$$

Die plastischen und schädigenden Belastungsbedingungen und die Konsistenzbedingungen ergeben sich ebenfalls analog zu den Ausdrücken der vorangegangenen Abschnitte 4.2.1 und 4.3.2:

$$\begin{aligned} \gamma^{pl} &\geq 0, & f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}^{pl}) &\leq 0, & \gamma^{pl} f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}^{pl}) &= 0, \\ \gamma^{pl} \dot{f}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}^{pl}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} \gamma^{da} &\geq 0, & f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{q}^{da}) &\leq 0, & \gamma^{da} f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{q}^{da}) &= 0, \\ \gamma^{da} \dot{f}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{q}^{da}) &= 0. \end{aligned}$$

Bei schädigender Belastung wird mit der Konsistenzbedingung analog zu Gleichung (4.33)  $\gamma^{da}$  bestimmt:

$$\dot{f}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{q}^{da}) = \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \mathbf{q}^{da}} \dot{\mathbf{q}}^{da} = 0. \tag{4.70}$$

Aus den Gleichungen (4.67) und (4.70) ergibt sich  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{da}$ . Einsetzen in Gleichung (4.65) liefert  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ , so dass mit der zweiten Konsistenzbedingung (4.24) auch der plastische Konsistenzparameter  $\gamma^{pl}$  bestimmt werden kann:

$$\dot{f}_\sigma = \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{pl}} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{pl} = 0. \tag{4.71}$$

Auf die Darstellung der sich ergebenden tangentialen Steifigkeitsbeziehung wird an dieser Stelle verzichtet und auf die Literatur der genannten Modelle verwiesen.

#### 4.4.2 Spannungsbasierte Kombination der Plastizitäts- und Schädigungstheorie

Wie die gemischten Kombinationen lassen sich auch rein spannungsbasierte, elasto-plastische Schädigungstheorien mit getrennten Grenzzustandsflächen für Schädigung und Plastizität formulieren. Beispiele für diese Vorgehensweise sind unter anderem in Luccioni u. Rougier [53], Ortiz [65], Simo u. Ju [80] oder Yazdani u. Schreyer [96] gegeben.

Die rein spannungsbasierte Kombination erlaubt außerdem die Definition einer gemeinsamen *Fließ-/Schädigungsbedingung* und die Kopplung der Evolutionsgleichungen für die Plastizität und die Schädigung. Auf diese Weise

kann die Anzahl von benötigten Materialparametern erheblich reduziert werden. Diese Art von Modellen ist beispielsweise in Meschke u. a. [59] und Pölling [73] umgesetzt.

Bei der gekoppelten, spannungsbasierten Kombination ergibt sich die Spannungs-Verzerrungsbeziehung nach additiver Zerlegung des Nachgiebigkeitstensors (4.37) und des Verzerrungstensors (4.14):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [\mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_{da}]^{-1} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad \text{bzw.} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_{da}] : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}.\end{aligned}\tag{4.72}$$

In der Ratenform der Nachgiebigkeitsbeziehung setzt sich die Änderung der Verzerrung aus einem elastischen Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ , einem schädigenden Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}^{da}$  und einem plastischen Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  zusammen. Die beiden letzteren Anteile werden zu einer inelastischen Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}^{in}$  zusammengefasst:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{[\mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_{da}] : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}} + \underbrace{\mathbb{D}^{da} : \boldsymbol{\sigma}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{da}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}.\tag{4.73}$$

Der elastische Bereich wird durch gemeinsame Fließ-/Schädigungsflächen definiert:

$$E_\sigma := \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \mid f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0\}.\tag{4.74}$$

Die Ausdrücke der Verfestigungsregel (4.19), der Belastungsbedingungen (4.21) und der Konsistenzbedingung (4.24) können wiederum vollständig übernommen werden. Die *Fließ-/Schädigungsregel* wird analog zur Fließregel (4.18) aufgestellt:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}).\tag{4.75}$$

Die Ermittlung des Konsistenzparameters  $\gamma$  und der tangentialen Steifigkeitsbeziehung erfolgt wiederum analog zu der spannungsbasierten Schädigungstheorie nach den Gleichungen (4.43) und (4.44):

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1} : \mathbf{r} - \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{h}},\tag{4.76}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \mathbb{D}^{-1} - \frac{\mathbb{D}^{-1} : \mathbf{r} \otimes \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1}}{\frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{D}^{-1} : \mathbf{r} + \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{h}} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.77)$$

Zusätzlich müssen die Entwicklungen der plastischen Verzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  und der Schädigungsverzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{da}$  über Kopplungsannahmen ermittelt werden. In Meschke u. a. [59] und Pölling [73] wird die inelastische Verzerrungsänderung  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in}$  über einen skalaren Aufteilungsfaktor  $\beta$  vorgenommen:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{da} = \mathbb{D}^{da} : \boldsymbol{\sigma} &= \beta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} &= \gamma \beta \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}), \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} &= (1 - \beta) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} &= \gamma (1 - \beta) \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}). \end{aligned} \quad (4.78)$$

### 4.4.3 Verzerrungsbasierte Kombination der Plastizitäts- und Schädigungstheorie

In Krätzig u. Pölling [47] wird die vollständig gekoppelte Kombination einer verzerrungsbasierten Schädigungstheorie mit einer verzerrungsbasierten Plastizitätstheorie beschrieben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}] : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^{pl}, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \underbrace{[\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{da}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{el}} - \underbrace{(\underbrace{\mathbb{C}^{da} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{da}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{pl})}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{in}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Die gleichartige Kombination ermöglicht, wie im vorangegangenen Abschnitt 4.4.2, die Definition einer gemeinsamen Fließ-/Schädigungsfläche im Verzerrungsraum:

$$E_{\varepsilon} := \{(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) \mid f_{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) \leq 0\}. \quad (4.80)$$

Die Kopplung der Evolutionsgesetze von Plastizität und Schädigung erfolgt wiederum über einen Aufteilungsfaktor  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{da} = \mathbb{C}^{da} : \boldsymbol{\varepsilon} &= \beta \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{in} &= \gamma \beta \bar{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}), \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{pl} &= (1 - \beta) \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{in} &= \gamma (1 - \beta) \bar{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Alle weiteren Schritte erfolgen analog zum vorangegangenen Abschnitt 4.4.2. Die notwendigen Ausdrücke können aus den Abschnitten zur verzerrungsbasierten Plastizität und Schädigung entnommen werden.

Häußler-Combe u. Hartig [32] formulieren eine rein verzerrungsbasierte Kombination mit getrennten Grenzzustandsflächen für Plastizität und Schädigung. Dafür wird die spannungsbasierte Versagensfläche nach Hsieh u. a. [37] in den Verzerrungsraum transformiert, um ein Schädigungskriterium zu erhalten. Für die Plastizität wird eine dem MISES-Kriterium ähnliche Fließbedingung im Verzerrungsraum definiert.

## 4.5 Bewertung der Materialtheorien

Monotone Belastungsvorgänge können mit der nichtlinearen Elastizitätstheorie, der reinen Plastizitätstheorie oder der reinen Schädigungstheorie theoretisch gut abgebildet werden. Bauteilversuche, in denen es durch eine Reduktion der äußeren Last oder durch Lastumlagerungsvorgänge zu lokalen Entlastungen kommt, können hingegen nicht hinreichend genau nachvollzogen werden. Daher werden im Folgenden ausschließlich die vorgestellten Kombinationen der Plastizitätstheorie und der Schädigungstheorie behandelt.

Die Suche nach geeigneten Fließ- beziehungsweise Schädigungskriterien  $f_\sigma$  oder  $f_\varepsilon$ , nach Fließ- beziehungsweise Schädigungsregeln  $\mathbf{r}$  und nach Verfestigungsregeln  $\mathbf{h}$  ist die Hauptaufgabe der Materialmodellierung.

Nach Pölling [73] sind Werkstoffmodelle mit getrennten Grenzflächen unpraktikabel, weil sie eine hohe Anzahl von Materialparametern zur Definition der Grenzzustandsflächen erfordern. Die Koeffizienten der Versagensfläche nach Willam u. Warnke [92] in Gleichung (3.8) zeigen einerseits, dass diese sich einer direkten ingenieuranschaulichen Deutung entziehen. Andererseits liegen die erforderlichen Materialversuche aus Tabelle 3.2 oft nicht vor. Daher geht der Genauigkeitszuwachs durch die getrennte Betrachtung der Plastizität und der Schädigung durch die fehlende Kenntnis über die benötigten Materialparameter verloren.

In rein spannungsbasierten Kombinationen ist es möglich, die Anzahl der benötigten Modellparameter zu reduzieren. Dazu werden die Entwicklungen der plastischen Verformungen und der Schädigung miteinander gekoppelt, wie in Meschke u. a. [59] oder Pölling [73].

Die gemeinsamen Fließ-, Schädigungs- und Verfestigungsregeln werden an uniaxiale, monotone Materialversuchskurven angepasst, da diese häufig die

einzigsten experimentellen Versuchsdaten sind, die zur Verfügung stehen. Solche Modelle werden mit großem Erfolg verwendet, um das nichtlineare Tragverhalten von Balken- und Plattentragwerken zu simulieren, die primär durch uniaxiale Spannungszustände maßgeblich beansprucht werden.

Unter der Annahme, dass das mehrachsige Materialverhalten dem uniaxialen ähnlich ist, wird das uniaxiale Materialverhalten über äquivalente, uniaxiale Spannungszustände künstlich auf das mehrachsige Verhalten projiziert. In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass im Spannungsraum Versagensflächen existieren, die experimentelle, dreidimensionale Versagenszustände sehr gut wiedergeben. Daher wird die Traglast auch für dreidimensionale Belastungszustände in spannungsbasierten Modellen in der Regel gut abgeschätzt.

Allerdings stellen Simo u. Ju [80] bereits fest, dass rein spannungsbasierte Formulierungen nicht in der Lage sind, die Rissbildung vorherzusagen, solange diese nicht durch äußere Zugspannungen verursacht werden. Während bei Biegeproblemen Zugrisse beim Überschreiten einer kritischen Zugspannung im Modell richtig erfasst werden, liegen bei reinen Druckspannungszuständen keine äußeren Zugspannungen als Ursache für Querszugrisse vor. Daher werden schon bei der Simulation von uniaxialen Druckbelastungsversuchen die erhöhte Schädigung durch innere Querszugkräfte häufig vernachlässigt, die im Versuch beobachtet wird (Abbildung 3.5). Dieser Umstand führt oft zu einer falschen Abschätzung des gegenseitigen Einflusses der einzelnen Richtungen hinsichtlich ihres Verformungsverhaltens und ihrer mechanischen Eigenschaften. Insbesondere unter triaxialen Belastungszuständen kann die Schädigungsentwicklung der unterschiedlichen Richtungen durch die angenommene Projektion des uniaxialen Materialverhaltens auf mehrachsige Zustände nicht mehr korrekt wiedergegeben werden.

In der Regel wird dieses Problem über eine Anpassung der Materialparameter an die jeweiligen Belastungszustände gelöst. Für die Bemessung komplexer Bauteile ist dieses Vorgehen aber unpraktikabel. In Tandler [84] führt dieser Zusammenhang bei der Simulation der Schubübertragung zwischen Stahlprofilen und Beton zu großen Schwierigkeiten. In seinen Versuchen beeinflussen die Querszugrisse in den Druckstreben das globale Tragverhalten maßgebend.

Simo u. Ju [80] schlagen daher vor, diese Querszugrisse in der verzerrungsbasierten Schädigungstheorie anhand von kritischen Querdehnungen zu iden-

tifizieren. Allerdings sind die benötigten Fließ-/Schädigungsflächen  $f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q})$ , die Richtungsfunktionen der Fließ- und Schädigungsregel  $\bar{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q})$  und der Verfestigungsregel  $\bar{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q})$  im Verzerrungsraum kaum bekannt. In Modellen aus Farahat u. a. [23], Häußler-Combe u. Hartig [32], Lan u. a. [50] oder Mizuno u. Hatanaka [62] werden die verzerrungsbasierten Fließflächen gewonnen, indem spannungsbasierte Versagensflächen mathematisch in den Verzerrungsraum transformiert werden. Eine experimentelle Validierung dieser Versagens- und Fließflächen sowie der Fließ- und Schädigungsregeln fehlt bislang, da die notwendigen, mehrachsigen Materialversuche mit Ent- und Wiederbelastung kaum vorhanden sind.

In sämtlichen vorgestellten Kombinationen aus Plastizität und Schädigung ist ein Abgleich der Evolutionsgesetze an die seltenen, experimentellen Daten aus Versuchen mit Ent- und Wiederbelastung nicht vorgesehen und oft nicht möglich. In diesem Umstand wird der Hauptgrund für die notwendige Anpassung der Modellparameter an unterschiedliche Belastungszustände vermutet. Daher werden im folgenden Kapitel 5 experimentell basierte Evolutionsgleichungen anhand von Materialversuchen mit Ent- und Wiederbelastung aufgestellt und ihre Eignung für ein zukünftiges Materialmodell in Kapitel 6 geprüft.

# Kapitel 5

## Herleitung und Umsetzung von experimentell basierten Evolutionsgleichungen

In Kapitel 3 wurde das mechanische Verhalten von Beton anhand typischer Beobachtungen von Materialversuchen beschrieben. Diese bilden die Grundlage für die Beurteilung der Eignung der Materialtheorien in Kapitel 4. In diesem Kapitel werden die Materialversuche hinsichtlich einer neuen Formulierung experimentell basierter Evolutionsgleichungen für ein Werkstoffgesetz ausgewertet. Die daraus gewonnenen Gesetzmäßigkeiten werden in einer Materialroutine für das Finite-Elemente-Programm ANSYS® [3] umgesetzt.

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist die realitätskonforme Beschreibung der mechanischen Eigenschaften von Beton in allen Raumrichtungen unter verschiedenen Druckspannungszuständen. Wie bereits beschrieben, ist in Betondruckversuchen die Änderung der mechanischen Eigenschaften der weniger belasteten Richtungen oder der unbelasteten Richtungen durch die Bildung von Quersugrissen im Vergleich zu den der hauptsächlich belasteten Richtung verstärkt. Da die Quersugrisse oft nicht durch äußere Zugspannungen verursacht werden, ist ihre Vorhersage anhand von spannungsbasierten Grenzzustandskriterien erschwert. Hingegen wird vermutet, dass die Vorhersage von Quersugrissen anhand von kritischen Verzerrungen vereinfacht wird. Daher wird in diesem Kapitel eine verzerrungsbasierte Kombination aus Plastizität und Schädigung angestrebt.

Im Abschnitt 5.1 werden zunächst Gesetzmäßigkeiten für die verwendete Plastizitätstheorie aufgestellt. In Abschnitt 5.2 folgen die Gesetzmäßigkeiten der orthotropen Schädigungstheorie.

Wie in Kapitel 3 beschrieben, sind zyklische Belastungsversuche erforderlich, um die Entwicklung der Plastizität und der Schädigung experimentell zu ermitteln. Zyklische Versuche, in denen die Spannungs- und Verzerrungszustände aller Raumrichtungen vollständig erfasst werden, sind allerdings sehr selten. Daher muss sich die folgende Auswertung auf Versuche von van Mier [60] mit  $f_c \approx -42$  MPa und Versuche von Petryna u. Curbach [69] mit  $f_c \approx -90$  MPa beschränken. Letztere wurden im Rahmen der Vorbereitung eines eigenen DFG-Forschungsprojektes durchgeführt. Die ausgewerteten Versuche sind in Tabelle 5.1 aufgelistet.

Tabelle 5.1: Legende zu den Abbildungen der Materialversuche in den Kapiteln 5 und 6

Farbe	Versuch	Druckfestigkeit $f_c$	Spannungsverhältnis			
			$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	
—	2B 2 - 2	-42 MPa van Mier [60]	-1	0	0	
	2B 2 - 4		-1	0	0	
—	7A 2 - 4		-1	-1 MPa	-1 MPa	
—	8B 1 - 2		-1	-0,1	-0,1	
—	9B 1 - 2		-1	-0,1	-0,05	
—	9B 1 - 3		-1	-0,05	0	
—	000 - 1		-90 MPa Petryna u. Curbach [69]	-1	0	0
	000 - 2			-1	0	0
	000 - 3			-1	0	0
—	018 - 1			-1	-0,18	0
—	100 - 1	-1		-1	0	

Die Versuche aus van Mier [60] liegen nur in Form von Versuchskurven vor, von denen die in Tabelle 5.1 angegebenen Kurven digitalisierbar sind. Nach der Digitalisierung der Kurven wurden diese idealisiert, wie beispielsweise in den Abbildungen 3.1 und 3.11 dargestellt. Die idealisierten Kurven bilden die Grundlage für die Evolutionsgleichungen dieses Kapitels.

Aufgrund der geringen Anzahl von geeigneten Versuchen sind die Entwicklungsgleichungen der Abschnitte 5.1 und 5.2 zunächst mit höheren Unsicher-

heiten behaftet. Weitere zyklische Versuche sind unbedingt anzuraten, um die abgeleiteten Entwicklungsgleichungen statistisch abzusichern.

Darüber hinaus werden in allen Versuchen aus van Mier [60] nach Tabelle 5.1 die Probekörper ausschließlich in der Richtung (1) durch eine weggesteuerte Belastung gestaucht. Lediglich ein äquibiaxialer Druckversuch mit Ent- und Wiederbelastung, in dem der Probekörper durch höhere Querdruckbelastungen in mehr als einer Richtung gestaucht wird, steht für die Auswertung zur Verfügung. Die Versuche mit höherem Querdruck aus den Abschnitten 6.1.4 und 6.1.5 sind nicht geeignet, um experimentell basierte Evolutionsgesetze für die Plastizität und die Schädigung aufzustellen, da sie keine Ent- und Wiederbelastungen enthalten.

## 5.1 Evolution der plastischen Verformungen

Versagens- oder Fließflächen im Verzerrungsraum sind in der Fachliteratur kaum verfügbar. Darüber hinaus soll die in Abschnitt 4.5 erwähnte Problematik der rein mathematischen Transformation der bekannten spannungsbasierten Versagensflächen in den Verzerrungsraum vermieden werden. Stattdessen ist es das Ziel, anhand der genannten Versuche Fließkriterien und Evolutionsgleichungen im Verzerrungsraum durch die Auswertung der Würfeldruckversuche aus Tabelle 5.1 direkt zu ermitteln.

### 5.1.1 Auswertung der Versuche und Aufstellen der Evolutionsgleichungen

Die Versuche aus Tabelle 5.1 wurden zunächst hinsichtlich der plastischen Verzerrungsentwicklung  $\varepsilon^{pl}$  in den einzelnen Belastungszyklen ausgewertet. In idealen Würfeldruckversuchen treten nur Hauptverzerrungen  $\varepsilon_{(i)}$  auf, deren Richtungen konstant bleiben. In den Abbildungen 5.1 und 5.2 sind die entsprechenden plastischen Verzerrungen  $\varepsilon_{(i)}^{pl}$  der Hauptrichtungen ( $i$ ) in Abhängigkeit verzerrungsäquivalenter Verfestigungsvariablen  $q_{(i)}^c$  beziehungsweise  $q_{(i)}^t$  dargestellt. Die Variable  $q_{(i)}^c$  gibt die maximalen Stauchungen und  $q_{(i)}^t$  die maximalen Dehnungen des Gesamtverzerrungszustandes  $\varepsilon$  in seinen jeweiligen Hauptrichtungen ( $i$ ) wieder, die bis zu einem aktuell betrachteten Zustand zum

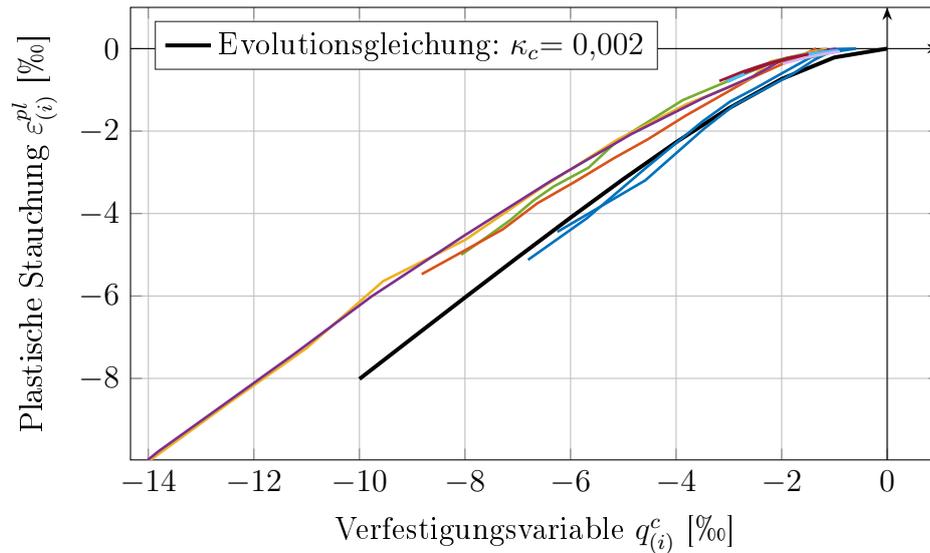


Abbildung 5.1: Entwicklung der plastischen Stauchung  $\varepsilon_{(i)}^{pl}$  in den Versuchen aus Tabelle 5.1 und Vergleich mit der Evolutionsgleichung (5.2)

Zeitpunkt  $t_k$  aufgetreten sind:

$$\begin{aligned} q_{(i)}^c(t_k) &= \min_{t=0}^{t_k} \varepsilon_{(i)}(t), \\ q_{(i)}^t(t_k) &= \max_{t=0}^{t_k} \varepsilon_{(i)}(t). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Im Hauptverzerrungsraum sind die Gleichungen (5.1) die Verfestigungsregeln. Sowohl die plastische Verzerrung  $\varepsilon_{(i)}^{pl}$ , als auch die Verfestigungsvariablen  $q_{(i)}^c$  und  $q_{(i)}^t$  sind experimentell messbare Größen.

Obwohl es sich um unterschiedliche uniaxiale, biaxiale und triaxiale Würfel- druckversuche handelt, ergeben sich bei allen Versuchen sehr ähnliche Evolu- tionen der plastischen Verzerrungszustände. Dieser Zusammenhang gilt sowohl für die normalfesten Betone aus van Mier [60], als auch für die hochfesten Be- tone von Petryna u. Curbach [69].

Wegen unterschiedlicher Versuchsabläufe weichen die Evolutionskurven der Versuche 2B2-2 und 2B2-4 von den Evolutionskurven der verbleibenden Ver- suche ab (Abbildung 5.1). Die Betonproben 2B2-2 und 2B2-4 wurden in den Versuchen zwischen den Belastungszyklen auf ein Lastniveau von  $-5$  MPa ent- lastet. Die Ent- und Wiederbelastungspfade der Spannungs-Verzerrungskurven in Abbildung 3.1 verlaufen oberhalb dieses Lastniveaus näherungsweise line- ar. Die plastischen Verzerrungszustände werden daher in den einzelnen Belas- tungszyklen durch lineare Extrapolation der Ent- und Wiederbelastungspfade

bestimmt. Die entsprechenden idealisierten Spannungs-Verzerrungskurven sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Die übrigen Betonproben wurden zwischen den Belastungszyklen vollständig entlastet. Exemplarisch sind in Abbildung 3.11 die Spannungs-Verzerrungskurven des Versuches 9B1-3 dargestellt. Darin verlaufen die Ent- und Wiederbelastungspfade unterhalb des Lastniveaus von  $-5$  MPa nichtlinear. Der nichtlineare Verlauf wird durch die in Abschnitt 3.1.2 beschriebenen Anfahreffekte verursacht. Die plastischen Verzerrungszustände werden in den einzelnen Belastungszyklen bei vollständiger Entlastung experimentell gemessen. Die resultierenden, idealisierten Spannungs-Verzerrungskurven sind in Abbildung 3.11 dargestellt. Die gemessenen plastischen Stauchungen in den Versuchen mit vollständiger Entlastung sind betragsmäßig kleiner als in den Versuchen 2B2-2 und 2B2-4 (Abbildung 5.1). Dennoch folgen die Evolutions der plastischen Stauchungen aller Versuchsproben einem exponentiellen Verlauf.

Da sich die Versuchsproben zunächst annähernd elastisch verhalten, verschwinden die entsprechende Funktion (5.2) und ihre Ableitung (5.3) an der Stelle  $q_{(i)}^c = 0$ . Für große Stauchungen wird gefordert, dass der Zuwachs der plastischen Stauchungen  $\varepsilon_{(i)}^{pl}$  dem Zuwachs der Verfestigungsvariable  $q_{(i)}^c$  entspricht. Diese Forderung wird von der Funktion (5.2) und ihrer Ableitung (5.3) erfüllt:

$$\varepsilon_{(i)}^{pl}(q_{(i)}^c) = q_{(i)}^c + \kappa_c \left[ 1 - \exp\left(\frac{1}{\kappa_c} q_{(i)}^c\right) \right], \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{(i)}^{pl}}{\partial q_{(i)}^c}(q_{(i)}^c) = 1 - \exp\left(\frac{1}{\kappa_c} q_{(i)}^c\right). \quad (5.3)$$

Die Funktion (5.2) beschreibt die Fließregel des Materialgesetzes. Sie ist in Abbildung 5.1 im Vergleich zu den Versuchskurven dargestellt. Der Parameter  $\kappa_c = 0,002$  wird in Abschnitt 6.1.1 durch eine Anpassung der Evolutionsgleichung an den Versuch 2B2-4 ermittelt. Die erwähnten Anfahreffekte bleiben bewusst unberücksichtigt.

Im Vergleich zu den Stauchungen ergeben sich für die Entwicklung der plastischen Querdehnungen in den gegebenen Versuchen stärkere Streuungen. Der genaue Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Belastungszuständen und diesen Streuungen konnte aufgrund der geringen Versuchsanzahl nicht

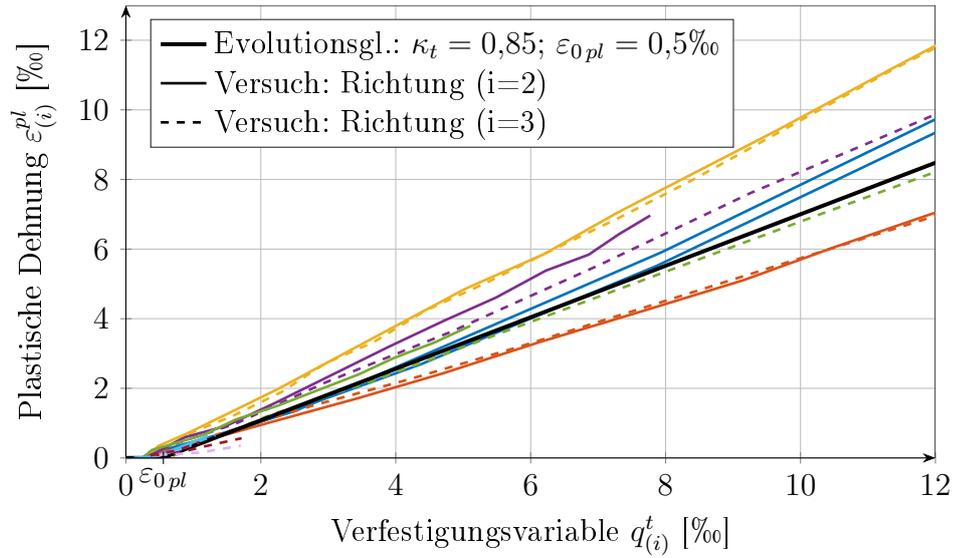


Abbildung 5.2: Entwicklung der plastischen Dehnung  $\varepsilon_{(i)}^{pl}$  in den Versuchen aus Tabelle 5.1 und Vergleich mit der Evolutionsgleichung (5.4)

weiter untersucht werden. Vereinfachend wurde eine lineare Evolutionsfunktion an die plastischen Dehnungsentwicklungen der unbelasteten Richtungen der Materialversuche 2B2-2, 2B2-4 und 9B1-3 angepasst, um eine Fließregel für positive, plastische Verzerrungen zu formulieren:

$$\varepsilon_{(i)}^{pl}(q_{(i)}^t) = \kappa_t \left( q_{(i)}^t - \varepsilon_{0pl} \right) \geq 0. \quad (5.4)$$

Die Fließregel (5.4) ist in Abbildung 5.2 für die Parameter  $\kappa_t = 0,85$  und  $\varepsilon_{0pl} = 0,5\%$  dargestellt. Letzterer entspricht einem Grenzwert der positiven Gesamtdehnung. Sobald der Grenzwert  $\varepsilon_{0pl}$  überschritten wird, treten positive, plastische Dehnungen auf.

Mit der Fließregel (5.4) werden plastische Querdehnungen direkt aus den Gesamtdehnungen der Querrichtung ermittelt. Eine Anpassung der verzerungsbasierten Fließregeln (5.2) und (5.4) an die Versuchsdaten ist auf einfache Weise möglich. Die plastischen Querdehnungen werden direkt anhand von kritischen Querdehnungen identifiziert. Hingegen wäre die entsprechende Anpassung der Vektorfunktion  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$  aus der Fließregel (4.18) einer spannungsbasierten Plastizitätstheorie mit deutlich höherem Aufwand verbunden.

Die Evolutionsgleichung für positive, plastische Querdehnungen unter Druckbelastung wird ebenfalls für die Entwicklung der plastischen Längsdehnungen

unter Zugbelastung angenommen. Auf diese Weise wird eine getrennte Formulierung der Plastizitätsgesetze unter Zugbelastung vermieden. Eine experimentelle Bestätigung dieser Annahme ist durch zukünftige Versuche erforderlich.

Der elastische Bereich wird durch Fließflächen im Verzerrungsraum beschrieben:

$$E_\varepsilon := \{(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}^c, \mathbf{q}^t) \mid f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}^c, \mathbf{q}^t) \leq 0\} . \quad (5.5)$$

Die Fließflächen werden für jede Hauptrichtung ( $i$ ) definiert, wobei zwischen Stauchungen und Dehnungen unterschieden wird:

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}^c, \mathbf{q}^t) = \begin{cases} q_{(i)}^c - \varepsilon_{(i)} & \text{für } \varepsilon_{(i)} < 0, \\ \varepsilon_{(i)} - q_{(i)}^t & \text{für } \varepsilon_{(i)} > 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

In den Abschnitten 4.2 beziehungsweise 4.4 wurden ratenbasierte Fließtheorien der Plastizität vorgestellt, in denen aus der Fließfläche, der Fließregel und der Verfestigungsregel inkrementelle Änderungen der plastischen Zustandsvariablen ermittelt werden. Die hier vorgestellte Ermittlung der plastischen Verzerrungen ähnelt hingegen der *Deformationstheorie der Plastizität*, die auch HENCKY-Plastizität genannt wird. Darin wird eine totale Beziehung zwischen den plastischen Verzerrungszuständen und den Spannungszuständen angenommen. Nach Hofstetter u. Mang [35] verliert diese Theorie ihre Gültigkeit, wenn Lastpfade simuliert werden, die vor und nach einer Entlastung Spannungszustände enthalten, die jeweils auf derselben Fließfläche liegen, sich aber voneinander unterscheiden. Die Deformationstheorie der Plastizität ist daher auf proportionale Lastpfade beschränkt.

Die hier formulierten Evolutionsgleichungen der Plastizität basieren ebenfalls auf einer totalen Beziehung. Allerdings werden die plastischen Verzerrungen  $\varepsilon_{(i)}^{pl}$  nicht in Abhängigkeit des Spannungszustandes, sondern in Abhängigkeit der maximal aufgetretenen Gesamtverzerrungen  $\mathbf{q}^c$  beziehungsweise  $\mathbf{q}^t$  direkt ermittelt. Die experimentell gewonnenen Evolutionskurven in den Abbildungen 5.1 und 5.2 bestätigen diesen direkten Zusammenhang. Unabhängig von den Spannungszuständen in den Versuchen aus Tabelle 5.1 stellt sich näherungsweise dieselbe totale Beziehung zwischen den Gesamtverzerrungen und den plastischen Verzerrungen in den einzelnen Richtungen ein. Eine Abhängigkeit der plastischen Verzerrungen in einer Richtung von den Verzerrungen

in den anderen Richtungen ist nicht erkennbar, solange diese Hauptverzerrungsrichtungen nicht rotieren. Für Versuche, in denen es zu einer Rotation der Hauptverzerrungszustände kommt, ist eine ratenbasierte Fließtheorie erforderlich. Daher wird die Anwendung der vorgestellten Evolutionsansätze im Rahmen dieser Arbeit auf Versuche ohne Rotation der Hauptverzerrungszustände beschränkt.

### 5.1.2 Algorithmische Umsetzung der Plastizitätsgesetze

In Abbildung 2.5 sind die Eingangsgrößen für das Materialgesetz dargestellt. Aus dem vorangegangenen Zeitschritt  $n$  sind der plastische Verzerrungszustand  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl,n}$  und die Zustandstensoren  $\boldsymbol{q}^{c,n}$  und  $\boldsymbol{q}^{t,n}$  bereits bekannt. Der Gesamtverzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  wird mit Gleichung (2.73) für den aktuellen Zeitschritt  $n + 1$  vorgeschätzt.

Die Fließkriterien und Evolutionsgleichungen aus Abschnitt 5.1.1 sind im Hauptverzerrungsraum definiert. Daher muss der allgemeine Verzerrungszustand  $\boldsymbol{\varepsilon}$  zunächst in seine Eigenwerte  $\varepsilon_{(i)}$  und seine orthonormierten Eigenrichtungen  $\boldsymbol{\varphi}_{(i)}^\varepsilon$  zerlegt werden. Die Hauptverzerrungen  $\varepsilon_{(i)}$  ergeben sich aus dem zweistufigen Tensor  $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon$ , in dem spaltenweise die Eigenrichtungen  $\boldsymbol{\varphi}_{(i)}^\varepsilon$  des Verzerrungstensors enthalten sind:

$$\varepsilon_{(i)} = \varphi_{k(i)}^\varepsilon \varepsilon_{kl} \varphi_{l(i)}^\varepsilon. \quad (5.7)$$

In diesem Kapitel wird nur dann über die Hauptrichtungen  $(i)$  summiert, wenn das Summenzeichen explizit angegeben ist. Bei Belastungsvorgängen, die zu einer Rotation der Hauptverzerrungsrichtungen  $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon$  führen, wird der plastische Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl,n}$  nicht rotiert. Die plastischen Verzerrungen  $\varepsilon_{(i)}^{pl,n}$  in den Hauptverzerrungsrichtungen  $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon$  ergeben sich durch die Projektion des plastischen Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl,n}$  in den Hauptverzerrungsraum:

$$\varepsilon_{(i)}^{pl,n} = \varphi_{k(i)}^\varepsilon \varepsilon_{kl}^{pl,n} \varphi_{l(i)}^\varepsilon. \quad (5.8)$$

Die Verfestigungsvariablen  $\boldsymbol{q}^{c,n}$  beziehungsweise  $\boldsymbol{q}^{t,n}$  sind als tensorielle Größen definiert. Die Zustandsgrößen  $q_{(i)}^{c,n}$  beziehungsweise  $q_{(i)}^{t,n}$  ergeben sich ebenfalls

durch eine Projektion der Verfestigungstensoren  $\mathbf{q}^{c,n}$  beziehungsweise  $\mathbf{q}^{t,n}$  auf die Hauptverzerrungsrichtungen  $\varphi_{(i)}^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} q_{(i)}^{c,n} &= \varphi_{k(i)}^\varepsilon q_{kl}^{c,n} \varphi_{l(i)}^\varepsilon, \\ q_{(i)}^{t,n} &= \varphi_{k(i)}^\varepsilon q_k^{t,n} \varphi_{l(i)}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Anhand von Gleichung (5.6) wird zwischen einem elastischen und einem plastischen Inkrement unterschieden. Im elastischen Schritt ändern sich die plastischen Verzerrungszustände und Verfestigungstensoren nicht. Im plastischen Schritt werden die Zustandsgrößen  $q_{(i)}^{c,n+1}$  beziehungsweise  $q_{(i)}^{t,n+1}$  nach der Verfestigungsregel (5.1) bestimmt:

$$\begin{aligned} q_{(i)}^{c,n+1} &= \min \left( q_{(i)}^{c,n}; \varepsilon_{(i)} \right), \\ q_{(i)}^{t,n+1} &= \max \left( q_{(i)}^{t,n}; \varepsilon_{(i)} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die inkrementellen Änderungen der Verfestigungsgrößen ergeben sich aus der Differenz der Ausdrücke (5.10) und (5.9):

$$\begin{aligned} \Delta q_{(i)}^c &= q_{(i)}^{c,n+1} - q_{(i)}^{c,n}, \\ \Delta q_{(i)}^t &= q_{(i)}^{t,n+1} - q_{(i)}^{t,n}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Einsetzen der neuen Verfestigungsvariablen  $q_{(i)}^{c,n+1}$  und  $q_{(i)}^{t,n+1}$  in die Beziehungen (5.2) und (5.4) liefert direkt die entsprechenden plastischen Verzerrungen  $\varepsilon_{(i)}^{pl,n+1}$  in den Hauptverzerrungsrichtungen  $\varphi_{(i)}^\varepsilon$ . Ein iteratives Lösungsverfahren ist nicht erforderlich. Die inkrementelle Änderung der plastischen Verzerrung ist

$$\Delta \varepsilon_{(i)}^{pl} = \varepsilon_{(i)}^{pl,n+1} - \varepsilon_{(i)}^{pl,n}. \quad (5.12)$$

Die inkrementellen Änderungen  $\Delta \varepsilon_{(i)}^{pl}$  besitzen dieselbe Ausrichtung wie die Hauptverzerrungsrichtungen  $\varphi_{(i)}^\varepsilon$ . Sie werden in die ursprünglichen Koordinaten zurücktransformiert:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{kl}^{pl} &= \sum_{(i)=1}^3 \varphi_{k(i)}^\varepsilon \Delta \varepsilon_{(i)}^{pl} \varphi_{l(i)}^\varepsilon, \\ \Delta q_{kl}^c &= \sum_{(i)=1}^3 \varphi_{k(i)}^\varepsilon \Delta q_{(i)}^c \varphi_{l(i)}^\varepsilon, \\ \Delta q_{kl}^t &= \sum_{(i)=1}^3 \varphi_{k(i)}^\varepsilon \Delta q_{(i)}^t \varphi_{l(i)}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die tensoriellen Inkremente werden auf die Größen des vorangegangenen Schrittes addiert:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{pl,n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{pl,n} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, \\ \boldsymbol{q}^{c,n+1} &= \boldsymbol{q}^{c,n} + \Delta\boldsymbol{q}^c, \\ \boldsymbol{q}^{t,n+1} &= \boldsymbol{q}^{t,n} + \Delta\boldsymbol{q}^t.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Wie in der spannungsbasierten Plastizitätstheorie nach Gleichung (4.14) basiert der plastische Anteil des Materialgesetzes auf der additiven Zerlegung des Verzerrungstensors:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el,n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl,n+1}.\tag{5.15}$$

Daher lautet die Spannungs-Verzerrungsbeziehung analog zu Gleichung (4.15)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el,n+1} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl,n+1}).\tag{5.16}$$

Allerdings wird in Gleichung (5.16) die konstante Materialsteifigkeit  $\mathbb{C}_0$  der reinen Plastizitätstheorie aus Gleichung (4.15) durch eine variable Materialsteifigkeit  $\mathbb{C}$  ersetzt. Die Entwicklung dieser Materialsteifigkeit  $\mathbb{C}$  infolge Schädigung wird im nächsten Abschnitt 5.2 dargestellt.

## 5.2 Evolution der orthotropen Schädigung

Bei der Formulierung der Plastizitätstheorie im Abschnitt 5.1 wurde auf eine Unterscheidung zwischen Druck- und Zugbelastung verzichtet. Die Formulierung der Schädigungstheorie hingegen erfolgt getrennt für Druckbelastungen in Abschnitt 5.2.1 und für Zugbelastungen in Abschnitt 5.2.6.

### 5.2.1 Schädigungsevolution infolge Druckbelastung

Bereits um nur den uniaxialen Würfeldruckversuch aus Abbildung 3.5 nachzubilden zu können, ist eine orthotrope Nachgiebigkeitsentwicklung durch Schädigung erforderlich. Wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, können allerdings die neun unbekannteten Elastizitätskonstanten aus den drei Gleichungen (3.4) beziehungsweise (3.9) der gegebenen Versuche nicht eindeutig bestimmt werden.

Daher werden die Entwicklungen einzelner Komponenten der Steifigkeit  $\mathbb{C}$  vereinfachend nach einem Ansatz aus Carol u. a. [11] gekoppelt. Dieser Ansatz ist in Abschnitt 4.3.3 erläutert.

Die Beschreibung der gekoppelten Schädigung erfolgt über den Integritätstensor  $\overline{\Phi}$  beziehungsweise über den Schädigungstensor  $\Phi = \overline{\Phi}^{-1}$ . Auf diese Weise gelingt es, die Anzahl der Unbekannten der schädigungsinduzierten Orthotropie auf die drei Eigenwerte  $\Phi_{(1)}$ ,  $\Phi_{(2)}$  und  $\Phi_{(3)}$  des Schädigungstensors zu reduzieren. Daher ist es möglich, die in Tabelle 5.1 aufgeführten Würfel-druckversuche bezüglich der Entwicklung der Nachgiebigkeiten auszuwerten.

### 5.2.2 Auswertung der Versuche

Die Proben der in Tabelle 5.1 gegebenen Würfel-druckversuche werden ausschließlich in den Richtungen der Hauptspannungs- beziehungsweise Hauptverzerrungszustände belastet. Daher kann die orthotrope Nachgiebigkeitsbeziehung (4.11) für die Auswertung der Versuche vereinfacht werden. Unter Verwendung des Ausdruckes (4.63) für die Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$  nach Carol u. a. [11], ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{(1)}^{el} \\ \varepsilon_{(2)}^{el} \\ \varepsilon_{(3)}^{el} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{(1)}^2 \frac{1}{E_c} & \Phi_{(1)}\Phi_{(2)} \frac{-\nu_c}{E_c} & \Phi_{(1)}\Phi_{(3)} \frac{-\nu_c}{E_c} \\ \Phi_{(2)}\Phi_{(1)} \frac{-\nu_c}{E_c} & \Phi_{(2)}^2 \frac{1}{E_c} & \Phi_{(2)}\Phi_{(3)} \frac{-\nu_c}{E_c} \\ \Phi_{(3)}\Phi_{(1)} \frac{-\nu_c}{E_c} & \Phi_{(3)}\Phi_{(2)} \frac{-\nu_c}{E_c} & \Phi_{(3)}^2 \frac{1}{E_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{(1)} \\ \sigma_{(2)} \\ \sigma_{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (5.17)$$

Die Spannungen  $\sigma_{(i)}$  in Gleichung (5.17) werden in den einzelnen belasteten Zuständen experimentell ermittelt. Die elastischen Verzerrungsanteile  $\varepsilon_{(i)}^{el}$  entsprechen den gemessenen Verzerrungsänderungen der einzelnen Ent- und Wiederbelastungspfade. Der initiale Elastizitätsmodul  $E_c$  und die initiale POISSON-Zahl  $\nu_c$  werden entweder aus dem ersten Belastungszyklus oder mit den Gleichungen (3.1) und (3.2) bestimmt.

Die drei gesuchten Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}$  können für uniaxiale Druckversuche in jedem Ent- und Wiederbelastungszyklus analytisch bestimmt werden. In Abbildung 5.3 sind die entsprechenden Wiederbelastungspfade den Ent- und Wiederbelastungspfaden der Versuchskurve 2B2-4 und ihrer idealisierten Versuchskurve gegenübergestellt. Die verwendete Anpassung der Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$

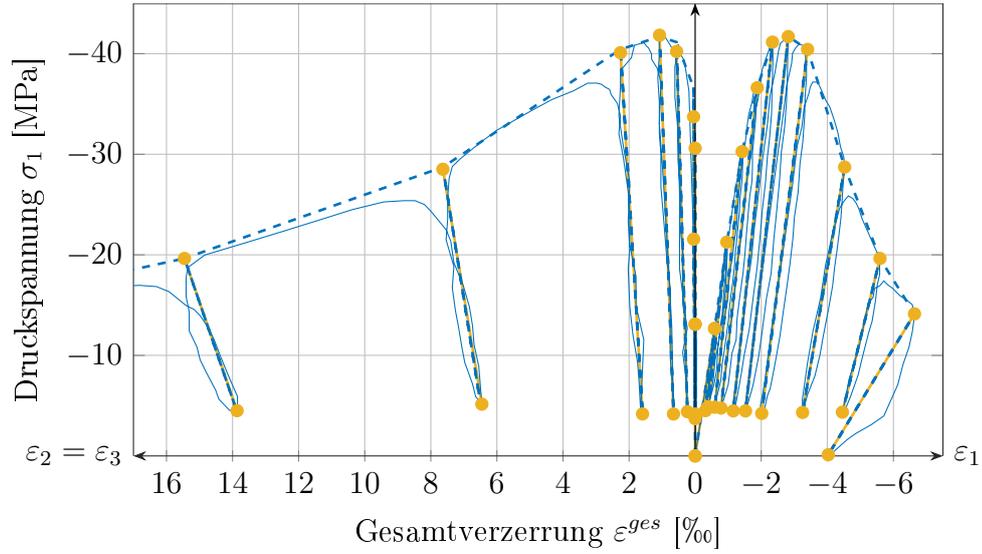


Abbildung 5.3: Wiederbelastungspfade (—●—) nach Gleichung (5.17) im Vergleich mit der Versuchskurve 2B2-4 (—) nach van Mier [60] und ihrer idealisierten Kurve (---)

mit den Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}$  ist für den uniaxialen Belastungsfall sehr gut geeignet.

Für multiaxiale Druckversuche werden die Schädigungsvariablen in jedem Zyklus numerisch ermittelt, da sie nichtlinear in das Gleichungssystem (5.17) eingehen. Außerdem können sie nicht so bestimmt werden, dass das Gleichungssystem (5.17) exakt erfüllt wird. Daher wird es lediglich als Minimierungsproblem eines Residuenvektors  $\mathbf{R}(\Phi_{(i)})$  formuliert:

$$[\mathbb{D}(\Phi_{(i)})] \cdot \{\sigma_{(i)}\} - \{\varepsilon_{(i)}^{el}\} = \{\mathbf{R}(\Phi_{(i)})\} \rightarrow \min. \quad (5.18)$$

Der zu minimierende Fehler ist die quadrierte Vektornorm  $\|\{\mathbf{R}(\Phi_{(i)}^k)\}\|^2$ . Mit der partiellen Ableitung dieses Ausdruckes nach den Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}$  wird ein nebenbedingungsfreies Nullstellenproblem aufgestellt:

$$\{\rho(\Phi_{(i)})\} = \left\{ \frac{\partial \|\{\mathbf{R}(\Phi_{(i)})\}\|^2}{\partial \Phi_{(i)}} \right\} = \{0\}. \quad (5.19)$$

Dieses Nullstellenproblem (5.19) wird inkrementell, iterativ mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren gelöst. Daher ist analog zu Gleichung (2.56) eine Linearisierung des Ausdruckes  $\rho$  erforderlich:

$$\{\rho(\Phi_{(i)}^{k+1})\} \approx \{\rho(\Phi_{(i)}^k)\} + \left[ \frac{\partial \rho(\Phi_{(i)}^k)}{\partial \Phi_{(i)}} \right] \cdot \{\Delta \Phi_{(i)}\} = \{0\}. \quad (5.20)$$

Aus Gleichung (5.20) ergeben sich die inkrementellen Änderungen  $\Delta\Phi_{(i)}$  und die neuen Werte der Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}^{k+1}$ :

$$\{\Delta\Phi_{(i)}\} = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\Phi_{(i)}^k)}{\partial \Phi_{(i)}} \right]^{-1} \cdot \{\boldsymbol{\rho}(\Phi_{(i)}^k)\}, \quad (5.21)$$

$$\{\Phi_{(i)}^{k+1}\} = \{\Phi_{(i)}^k\} + \{\Delta\Phi_{(i)}\}. \quad (5.22)$$

Eventuell erforderliche neue Iterationen starten bei Gleichung (5.18). Als Startwerte der Iterationen werden jeweils die Schädigungsvariablen des vorangegangenen Ent- und Wiederbelastungszyklusses gewählt. Im ersten Zyklus wird von einem ungeschädigten Zustand ( $\Phi_{(i)}^k = 1$ ) ausgegangen. Die Iteration wird abgebrochen, sobald die quadrierte Vektornorm des Schädigungsinkrementes den Wert  $\|\{\Delta\Phi_{(i)}\}\|^2 \leq 10^{-5}$  unterschreitet.

In Abbildung 5.4 werden die nach Gleichung (5.18) ermittelten Wiederbelastungspfade exemplarisch der idealisierten Spannungs-Verzerrungskurve des Versuches 9B1-3 gegenübergestellt. Die folgenden zwei Beobachtungen lassen sich auf sämtliche Versuche in Tabelle 5.1 übertragen:

1. Die Materialsteifigkeit in den Wiederbelastungspfaden der hauptsächlich belasteten Richtung (1) und der unbelasteten Richtung (3) werden sehr gut bestimmt.
2. In Richtungen, die neben der Richtung (1) durch geringere Druckspannungen beansprucht werden, passen die Verzerrungsänderungen der Wiederbelastungspfade zunächst ebenfalls sehr gut zu den experimentell ermittelten Verzerrungen. Nur im Nachbruchbereich werden sie durch eine zu geringe Schädigung der Richtung (2) unterschätzt.

Die unterschätzte Schädigung  $\Phi_{(2)}$  wird auf den Informationsverlust zurückgeführt, der durch die Kopplung der Elastizitätskonstanten des geschädigten Materials  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  und  $\nu_{21}$  durch die Schädigungsvariablen  $\Phi_{(1)}$  und  $\Phi_{(2)}$  entsteht. Da durch diese Kopplung aber eine Versuchsauswertung erst möglich wird, muss dieser Fehler zunächst im Rahmen dieser Arbeit in Kauf genommen werden.

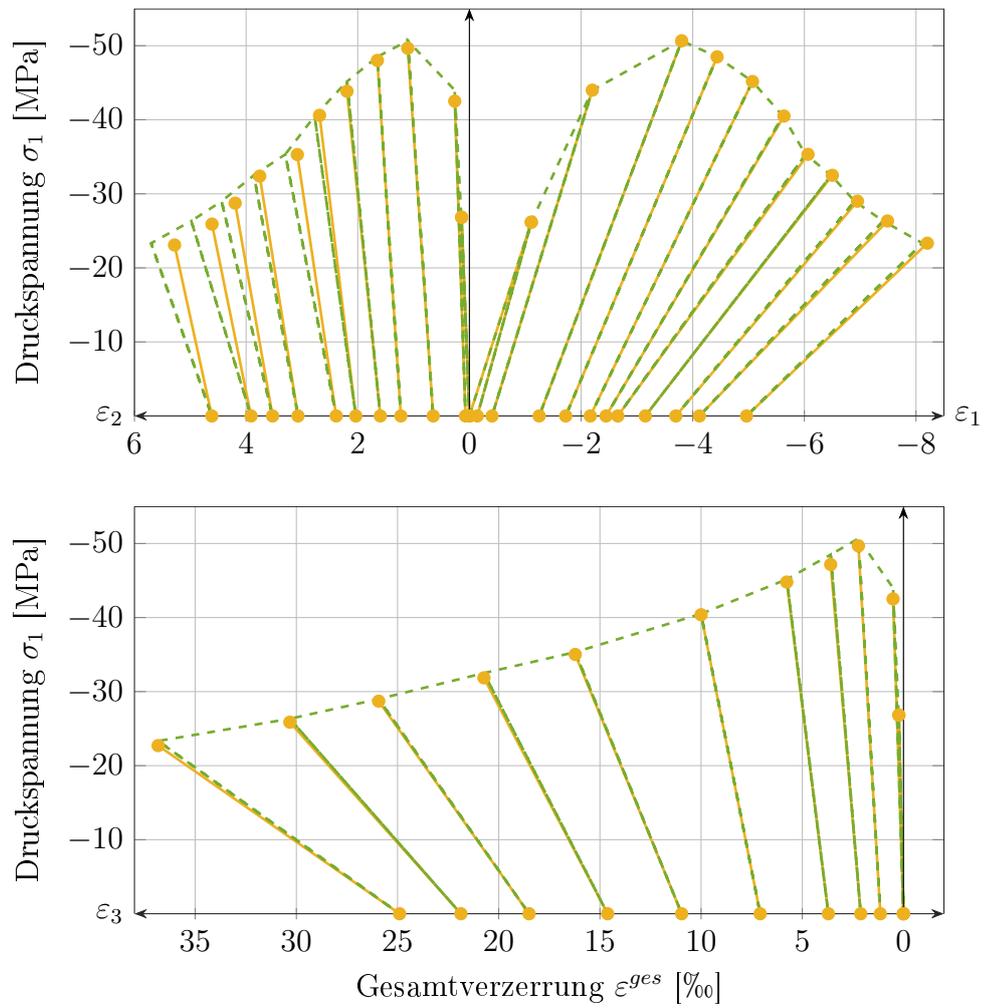


Abbildung 5.4: Wiederbelastungspfade (—●—) nach Gleichung (5.18) im Vergleich mit der idealisierten Versuchskurve 9B1-3 (---) nach van Mier [60]

### 5.2.3 Untersuchung der Kopplung von Schädigung und Plastizität

Durch die geringe Menge an Versuchsdaten und die im Abschnitt 5.2.2 erwähnten Schwierigkeiten bei deren Auswertung bezüglich der Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}$  ist eine Formulierung von Schädigungskriterien und -regeln nur mit hohen Unsicherheiten möglich. Daher wird der Ansatz separater Evolutionsgleichungen für die Plastizität und die Schädigung in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. Stattdessen wird die Möglichkeit der Kopplung von plastischer Verzerrung und Schädigungsverzerrung anhand der uniaxialen Würfeldruckversuche aus Tabelle 5.1 untersucht. Diese Kopplung soll durch einen Kopplungsparameter  $\beta$  erfolgen, der auch in Gleichung (4.78) nach Meschke u. a. [59] und Pölling [73] verwendet wird.

In Abbildung 5.5 ist die Spannungs-Verzerrungskurve eines uniaxialen Druckversuches für die belastete Hauptrichtung (1) schematisch dargestellt. In jedem Ent- und Wiederbelastungszyklus werden die Gesamtverzerrung  $\varepsilon_{(1)}$ , die Druckspannung  $\sigma_{(1)}$ , die plastische Verzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{pl}$  und die elastische Verzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{el}$  abgelesen. Der Wert des elastischen Verzerrungsanteils  $\varepsilon_{(1)}^{el0}$  des theoretisch ungeschädigten Materials ergibt sich jeweils zu

$$\varepsilon_{(1)}^{el0} = \frac{\sigma_{(1)}}{E_c}. \quad (5.23)$$

Der Kopplungsparameter  $\beta$  wird als Verhältnis der Schädigungsverzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{da}$  zu der nichtlinearen Verzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{in}$  definiert:

$$\beta = \frac{\varepsilon_{(1)}^{da}}{\varepsilon_{(1)}^{in}} = \frac{\varepsilon_{(1)}^{el} - \frac{\sigma_{(1)}}{E_c}}{\varepsilon_{(1)} - \frac{\sigma_{(1)}}{E_c}}. \quad (5.24)$$

Die entsprechenden Verläufe des Kopplungsparameters  $\beta$  in den uniaxialen Druckversuchen sind in Abbildung 5.6 in Abhängigkeit der Gesamtverzerrung  $\varepsilon_{(1)}$  dargestellt.

Die Betonproben 000-1 bis 000-3 mit einer Druckfestigkeit von  $f_c = -90$  MPa widersprechen der Annahme eines konstanten Kopplungsparameters  $\beta$  nach Meschke u. a. [59] oder Pölling [73]. Der Wert des Kopplungsparameters ist in den ersten Belastungszyklen  $\beta = 0$ . Er wächst mit zunehmender Stauchung

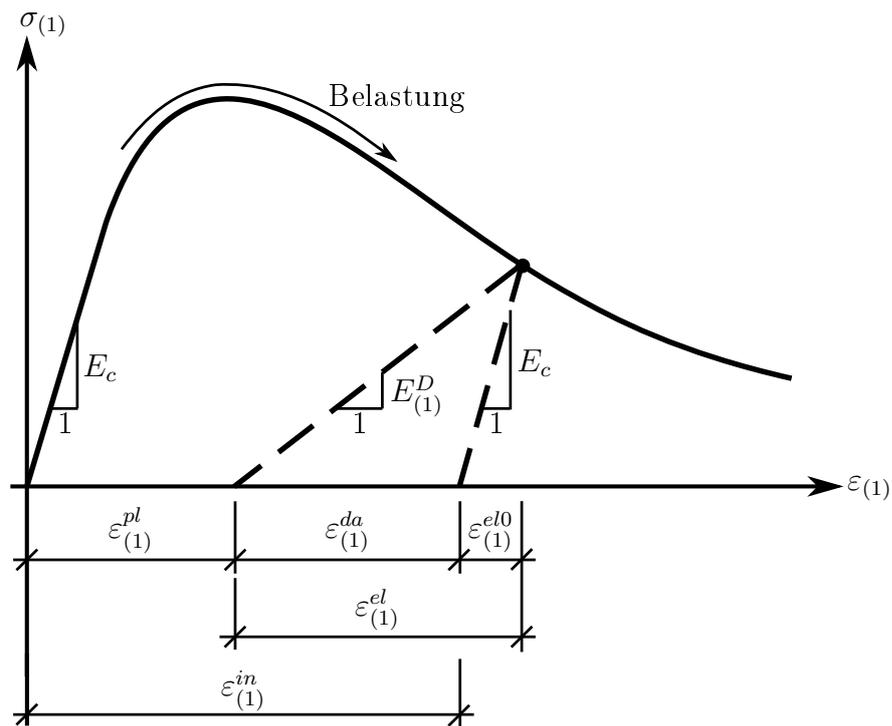


Abbildung 5.5: Gesamtverzerrung  $\varepsilon_{(1)}$ ; elastische Verzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{el}$ ; plastische Verzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{pl}$ ; Schädigungsverzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{da}$ ; elastischer Verzerrungsanteil des theoretisch ungeschädigten Materials  $\varepsilon_{(1)}^{el0}$  und inelastische Verzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{in}$

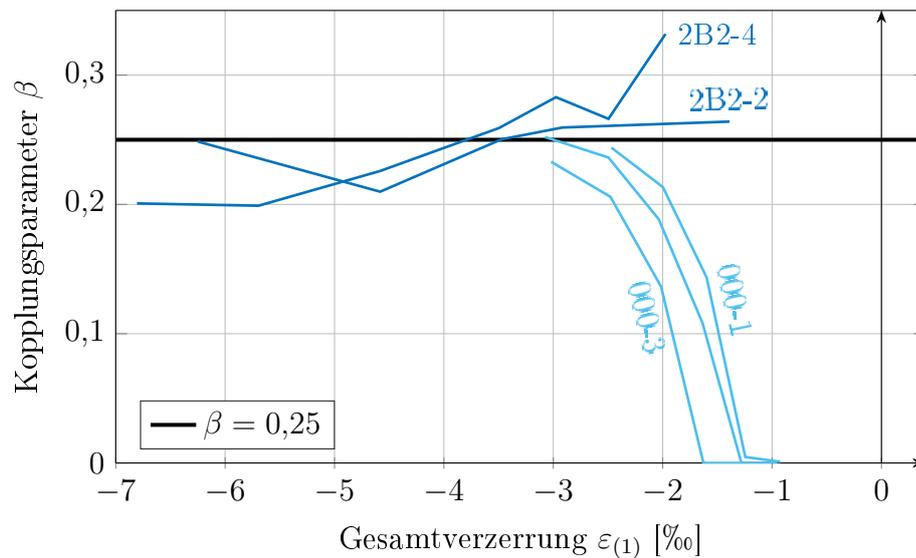


Abbildung 5.6: Kopplungsparameter  $\beta$  in Abhängigkeit der Gesamtverzerrung  $\varepsilon_{(1)}$  für die uniaxialen Versuche aus Tabelle 5.1

an und scheint sich asymptotisch einem Wert von  $\beta = 0,25$  im Nachbruchbereich zu nähern. Letztere Annahme ist in zukünftigen Versuchen mit Ent- und Wiederbelastungen im Nachbruchbereich noch experimentell zu bestätigen.

Es wird vermutet, dass der Kopplungsparameter  $\beta$  auch in den Versuchen an den Betonproben 2B2-2 und 2B2-4 mit einer Druckfestigkeit von  $f_c = -42$  MPa zunächst anwächst und sich asymptotisch einem Wert von  $\beta = 0,25$  nähert. Aus den vorliegenden experimentellen Daten geht dieses Wachstum allerdings nicht hervor, da der Kopplungsparameter bereits nach dem ersten Belastungszyklus einen Wert von ungefähr  $\beta = 0,25$  erreicht, der in den weiteren Belastungszyklen näherungsweise konstant bleibt.

Die Annahme eines konstanten Kopplungsparameters  $\beta$  führt in Kapitel 6 bei der Simulation von Betonproben mit Druckfestigkeiten unter  $f_c = -42$  MPa zu hinreichend genauen Ergebnissen.

Für Betone höherer Druckfestigkeitsklassen muss die Abhängigkeit des Verlaufes des Kopplungsparameters  $\beta$  von verschiedenen Druckfestigkeiten  $f_c$  noch experimentell geklärt werden.

### 5.2.4 Aufstellen der Schädigungsevolutionsgleichungen

Im Schema der uniaxialen Spannungs-Verzerrungsbeziehung in Abbildung 5.5 ist das Verhältnis zwischen dem Elastizitätsmodul  $E_c$  des ungeschädigten Materials und dem Elastizitätsmodul  $E_{(1)}^D$  des geschädigten Materials erkennbar:

$$E_{(1)}^D = \frac{\sigma_{(1)}}{\varepsilon_{(1)}^{el}} = \frac{(\varepsilon_{(1)}^{el} - \varepsilon_{(1)}^{da}) E_c}{\varepsilon_{(1)}^{el}}. \quad (5.25)$$

Der Vergleich mit Gleichung (5.17) liefert für uniaxiale Belastungszustände einen Ausdruck für die Schädigungsvariable  $\Phi_{(1)}$ :

$$E_{(1)}^D = \frac{E_c}{\Phi_{(1)}^2} \Leftrightarrow \Phi_{(1)}^2 = \frac{\varepsilon_{(1)}^{el}}{(\varepsilon_{(1)}^{el} - \varepsilon_{(1)}^{da})}. \quad (5.26)$$

Die Schädigungsverzerrung  $\varepsilon_{(1)}^{da}$  kann durch die Kopplung der Schädigungsevolution an die plastischen Verzerrungen  $\varepsilon_{(1)}^{pl}$  nach Gleichung (4.78) ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_{(1)}^{da} = \beta \varepsilon_{(1)}^{in} = \frac{\beta}{1 - \beta} \varepsilon_{(1)}^{pl}. \quad (5.27)$$

In den belasteten Zuständen der jeweiligen Wiederbelastungszyklen wird der elastische Dehnungsanteil  $\varepsilon_{(1)}^{el}$  mit Hilfe von Gleichung (5.1) bestimmt:

$$\varepsilon_{(1)}^{el} = q_{(1)}^c - \varepsilon_{(1)}^{pl}. \quad (5.28)$$

Durch Einsetzen der Evolutionsgleichung der plastischen Verzerrung (5.2) wird die Schädigungsregel in Gleichung (5.26) in Abhängigkeit der Verfestigungsvariable  $q_{(1)}^c$  ausgedrückt:

$$\Phi_{(i)}(q_{(i)}^c) = \sqrt{\frac{\kappa_c \left[ 1 - \exp\left(\frac{1}{\kappa_c} q_{(i)}^c\right) \right] (1 - \beta)}{\kappa_c \left[ 1 - \exp\left(\frac{1}{\kappa_c} q_{(i)}^c\right) \right] + \beta q_{(i)}^c}}. \quad (5.29)$$

Es wird angenommen, dass diese Schädigungsregel für alle Richtungen ( $i$ ) gilt, in denen das Material gestaucht wird. Wie bereits erwähnt, liegen bisher keine Versuchsdaten zu Druckversuchen vor, in denen Stauchungen in mehr als einer Richtung auftreten, um diese Annahme experimentell zu stützen. Um numerische Schwierigkeiten zu vermeiden, wird die Schädigungsvariable  $\Phi_{(i)}$  auf einen Maximalwert  $\Phi_{(i)}^{max}$  begrenzt. Dieser wird so gewählt, dass bei uniaxialem Druck der Betrag der Festigkeit  $|f_{cD}|$  des geschädigten Materialmodells nicht unter einen Wert von  $\frac{1}{5} |f_c|$  fällt:

$$-f_{cD} = -\frac{E_c}{\Phi_{(i)}^2} \varepsilon_{(i)}^{el} \geq -\frac{1}{5} f_c. \quad (5.30)$$

Für große Gesamtstauchungen  $\varepsilon_{(i)}$  vereinfacht sich der elastische Dehnungsanteil  $\varepsilon_{(i)}^{el}$  mit den Gleichungen (5.1) und (5.2) zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(i)}^{el} &= \lim_{\varepsilon_{(i)} \rightarrow \infty} \varepsilon_{(i)} - \varepsilon_{(i)}^{pl} \\ &= \lim_{\varepsilon_{(i)} \rightarrow \infty} \varepsilon_{(i)} - \varepsilon_{(i)} - \kappa_c \left[ 1 - \exp\left(\frac{1}{\kappa_c} \varepsilon_{(i)}\right) \right] = -\kappa_c. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Einsetzen von Gleichung (5.31) in (5.30) liefert den Maximalwert der Schädigungsvariable  $\Phi_{(i)}^{max}$ :

$$\Phi_{(i)}^{max} \leq \sqrt{\frac{-5 E_c}{f_c} \kappa_c}. \quad (5.32)$$

In Abbildung 5.7 sind die Schädigungsvariablen aus den Versuchen nach Gleichung (5.18) der Evolutionsgleichung der Schädigungsvariable  $\Phi_{(1)}$  nach Gleichung (5.29) in der hauptsächlich belasteten Stauchungsrichtung (1) gegenübergestellt. Die Schädigungsevolution aus den Versuchen mit mindestens einer unbelasteten Richtung (2B2-2, 2B2-4 und 9B1-3) werden gut erfasst.

Bei dreiachsigen Druckversuchen ist die Schädigungsentwicklung gegenüber einachsigen und zweiachsigen Druckversuchen verzögert. Da nur die zwei Versuchsproben 8B1-2 und 9B1-2 der vorliegenden Versuche (Tabelle 5.1) dreiaxial belastet wurden, konnte die Abhängigkeit unterschiedlicher Belastungszustände auf die Schädigungsentwicklung nicht hinreichend genau geklärt werden. Deshalb wurde die vereinfachende Annahme getroffen, dass die Schädigungsrate in triaxialen Druckversuchen der Hälfte der Rate in uniaxialen Versuchen entspricht.

Die entsprechende Schädigungsregel ist ebenfalls in Abbildung 5.7 dargestellt. Wegen der Kopplung der Schädigung an die Plastizität folgt die Schädigungsevolution einem exponentiellen Verlauf. Bis zu einer maximal aufgetretenen Gesamtstauchung von  $\varepsilon_{(1)} = q_{(1)}^c = -8\%$  stimmt diese mit der Schädigungsevolution des Versuches 9B1-2 sehr gut überein. Bei einer weiteren Zunahme der Stauchung wird der Schädigungszustand im Evolutionsansatz im Vergleich zum Versuch überschätzt. Für die vorliegenden, dreiachsigen Versuche ist die Schädigungsrate zu hoch angesetzt.

Die Verzögerung der Schädigungsentwicklung wird aber als ausreichend angesehen, um in der Simulation von Bauteilen den vorzeitigen, rechnerischen Ausfall dreiaxial gedrückter Bereiche zu verhindern. Die Abhängigkeit der tatsächlichen Verzögerung der Schädigungsentwicklung von den Querbelastungen muss durch weitere Versuche noch bestätigt werden. Durch eine Entkopplung der Schädigung von der Plastizität könnte die Schädigungsentwicklung flexibler an Versuchsdaten angepasst werden. Dieses Vorgehen erfordert jedoch ebenfalls weitere experimentelle Erkenntnisse.

Die Entwicklung der Schädigungsvariablen  $\Phi_{(j \neq i)}$  für Hauptverzerrungsrichtungen ( $j$ ), die in Querrichtung zu der Richtung ( $i$ ) gedehnt werden, ist in Abbildung 5.8 dargestellt. In den gegebenen uniaxialen und biaxialen Versuchen ist die Richtung (3) unbelastet. Der entsprechende Schädigungszuwachs ist gegenüber der Hauptbelastungsrichtung deutlich erhöht. Er spiegelt die Riss-

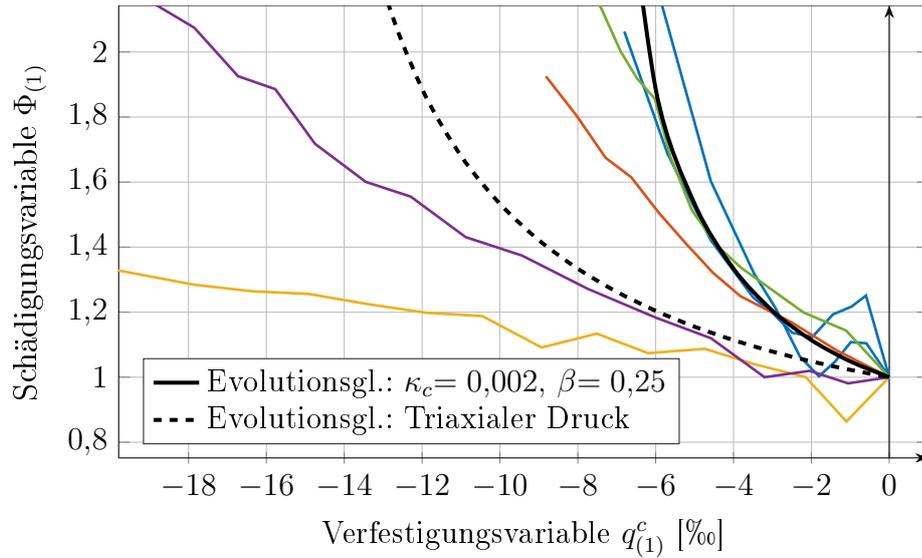


Abbildung 5.7: Entwicklung der Schädigungsvariable  $\Phi_{(1)}$  der Hauptbelastungsrichtung (1) in den Versuchen aus Tabelle 5.1 und Vergleich mit der Evolutionsgleichung (5.29)

öffnung quer zur Hauptbelastungsrichtung wieder. Die angenommene Evolutionsgleichung ist ebenfalls dargestellt (Abbildung 5.8, unbelastet). Dabei handelt es sich um ein HERMITE-Polynom, das an die experimentell ermittelten Schädigungen der unbelasteten Richtungen angepasst wird:

$$\Phi_{(j \neq i)} = 1 + \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left( \frac{\Phi_{(i)} - \Phi_{(i)}^\mu}{\Phi_{(i)}^\mu - 1} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{\Phi_{(i)} - \Phi_{(i)}^\mu}{\Phi_{(i)}^\mu - 1} \right)^3 \right] (\Phi_{(j)}^{max} - 1) . \quad (5.33)$$

Die Parameter  $\Phi_{(i)}^{max}$  und  $\Phi_{(j)}^{max}$  sind die maximalen Werte der Schädigungsvariablen, die aus den Versuchen für eine Hauptbelastungsrichtung ( $i$ ) beziehungsweise eine unbelastete Querrichtung ( $j$ ) ermittelt werden.  $\Phi_{(i)}^\mu$  ist der Mittelwert aus den Werten 1 und  $\Phi_{(i)}^{max}$ . Durch den kontinuierlichen Verlauf des HERMITE-Polynoms werden plötzliche Änderungen der Schädigungsvariablen und damit verbundene numerische Schwierigkeiten vermieden. Die Verläufe der Schädigungsentwicklung im Materialmodell und im Versuch stimmen für unbelastete Richtungen sehr gut überein.

Wie in Abbildung 5.4 bereits gezeigt wurde, wird die Schädigung durch die Schädigungsvariablen  $\Phi_{(j)}$  nach Gleichung (5.17) für Richtungen unterschätzt, in denen die Proben trotz äußerer Druckbelastung durch die Druckspannungen in den Querrichtungen und dem damit verbundenen POISSON-Ef-

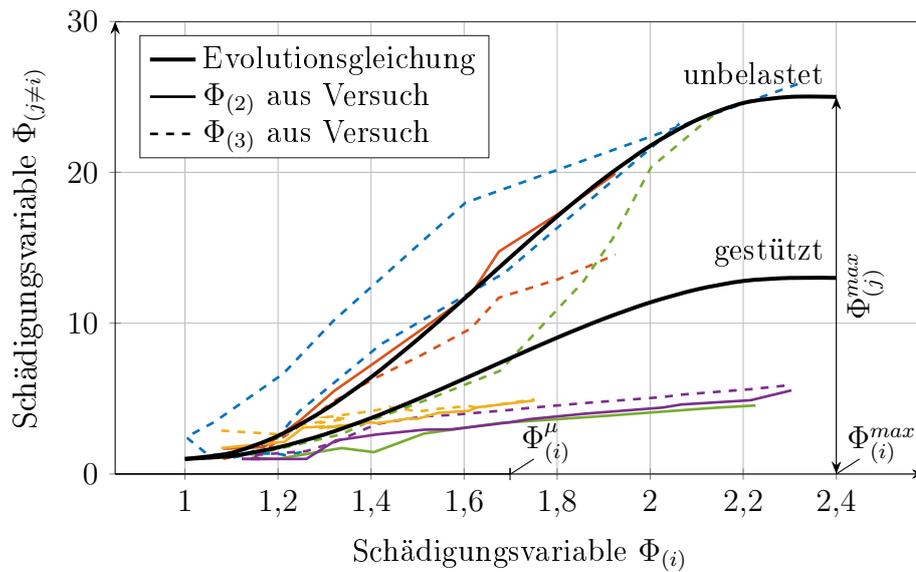


Abbildung 5.8: Schädigungsentwicklung  $\Phi_{(j \neq i)}$  gedehnter Richtungen, quer zur Hauptbelastungsrichtung  $(i)$ , in Abhängigkeit der Schädigungsvariable  $\Phi_{(i)}$

fekt gedehnt werden. Die entsprechenden Schädigungsentwicklungen aus den Versuchen werden durch die flacheren Kurven in Abbildung 5.8 wiedergegeben. In der Evolutionsgleichung werden daher erhöhte Schädigungen angenommen. Vereinfachend wird der Wert der Schädigung aus Gleichung (5.33) in Richtungen, in denen das Material gestützt wird, halbiert (Abbildung 5.8, gestützte Richtung).

Die verwendete Schädigungsentwicklung in Hauptdehnungsrichtungen  $(j)$  ist mit Gleichung (5.33) vollständig an den Schädigungszustand in Stauchungsrichtungen  $(i)$  gekoppelt.

### 5.2.5 Algorithmische Umsetzung der orthotropen Schädigungsgesetze

Wegen der Kopplung der Plastizitäts- und Schädigungstheorie erfolgt die Bestimmung der jeweiligen Zustandsgrößen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  und  $\Phi$  gleichzeitig. Die Evolutionsgleichungen der vorangegangenen Abschnitte beziehen sich, wie im Fall der Plastizität, auf die Hauptverzerrungen  $\varepsilon_{(i)}$  der Würfeldruckversuche. Daher werden zunächst die Eigenwerte  $\Phi_{(i)}^n$  analog zu Gleichung (5.8) aus der

tensoriellen Schädigungsvariable  $\Phi^n$  des letzten Inkrementes  $n$  ermittelt:

$$\Phi_{(i)}^n = \varphi_{k(i)}^\varepsilon \Phi_{kl}^n \varphi_{l(i)}^\varepsilon. \quad (5.34)$$

Bei Belastungsvorgängen mit rotierenden Hauptverzerrungsrichtungen  $\varphi^\varepsilon$  kann die anteilige Projektion einer vorangegangenen hohen Schädigung aus Querszug auf eine Richtung  $(i)$ , in der das Material im aktuellen Zustand gestaucht wird, zu einer deutlichen Überschätzung der Schädigung  $\Phi_{(i)}$  führen. Da die Berücksichtigung von Rissschließungen in den Ansätzen dieser Arbeit nicht berücksichtigt wird, beschränkt sich ihre Anwendbarkeit auf Belastungsvorgänge ohne Rotation.

Die Verfestigungsvariablen  $\mathbf{q}^{e,n+1}$  des aktuellen Inkrementes  $n + 1$  sind aus Gleichung (5.1) bereits bekannt. Die Werte der Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}^{n+1}$  können daher direkt aus den Schädigungsregeln bestimmt werden. Dabei wird zwischen den drei Fällen in Tabelle 5.2 unterschieden.

Tabelle 5.2: Fallunterscheidung bei der Ermittlung der Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}^{n+1}$  unter Druckbelastung

Fall	Verzerrungszustand	Verwendete Schädigungsregeln
1	1 Stauchung 2 Dehnungen	Die Schädigung $\Phi_{(i=1)}^{n+1}$ der Stauchungsrichtung (1) ergibt sich aus Gleichung (5.29). Die Schädigung $\Phi_{(j=2,3)}^{n+1}$ der Querrichtungen 2 und 3 wird nach Gleichung (5.33) bestimmt.
2	2 Stauchungen 1 Dehnung	Die Schädigungen $\Phi_{(i=1,2)}^{n+1}$ der Stauchungsrichtungen (1) und (2) ergeben sich aus Gleichung (5.29). Die Schädigung $\Phi_{(j=3)}^{n+1}$ ist der Maximalwert, der sich nach Gleichung (5.33) entweder aus $\Phi_{(i=1)}^{n+1}$ oder aus $\Phi_{(i=2)}^{n+1}$ ergibt.
3	3 Stauchungen	Die Schädigungen $\Phi_{(i=1-3)}^{n+1}$ aller Richtungen 1 bis 3 ergeben sich ausschließlich aus Gleichung (5.29)

Analog zu Gleichung (5.12) wird die inkrementelle Änderung der Schädigungsvariablen in den Hauptverzerrungsrichtungen  $(i)$  bestimmt:

$$\Delta\Phi_{(i)} = \Phi_{(i)}^{n+1} - \Phi_{(i)}^n. \quad (5.35)$$

Diese wird wiederum analog zu den Gleichungen (5.13) in die ursprünglichen Koordinaten zurücktransformiert:

$$\Delta\Phi_{kl} = \sum_{(i)=1}^3 \varphi_{k(i)}^\varepsilon \Delta\Phi_{(i)} \varphi_{l(i)}^\varepsilon. \quad (5.36)$$

Analog zu den Gleichungen (5.14) werden die tensoriellen Inkremente auf die Größen des vorangegangenen Inkrementes addiert:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi. \quad (5.37)$$

Der Integritätstensor  $\bar{\Phi}^{n+1}$  ist nach der dritten Gleichung in (4.56) die Inverse zum Schädigungstensor  $\Phi^{n+1}$ . Einsetzen in Gleichung (4.61) liefert den Steifigkeitstensor  $\mathbb{C}$  des geschädigten Materials, so dass die Spannungs-Verzerrungsbeziehung mit Gleichung (5.16) vollständig definiert ist.

### 5.2.6 Schädigungsevolution infolge Zugbelastung

Obwohl die Schädigung infolge äußerer Zugbelastung nicht im Fokus dieser Arbeit steht, wird ein stark vereinfachendes Zugschädigungsgesetz implementiert, um Bauteilversuche simulieren zu können, in denen Bereiche durch Zugspannungen beansprucht werden. Regularisierungsverfahren zur Berücksichtigung lokalisierter Verzerrungen sind im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgesehen.

Die Zustandsvariablen der Plastizität und der Schädigung infolge Druckbelastung werden bei jedem Aufruf des Materialgesetzes zuerst bestimmt. Im Anschluss wird geprüft, ob die einzelnen Hauptverzerrungsrichtungen ( $i$ ) durch eventuell vorhandene, äußere Zugbelastungen eine weitere Schädigung erfahren.

Obwohl der Nachbruchbereich durch die Lokalisierung der Entfestigung nicht eindeutig durch Spannungs-Verzerrungsbeziehungen beschrieben werden kann (Abbildung 3.7), wird die Schädigungsentwicklung dennoch an eine uniaxiale Spannungs-Verzerrungsbeziehung angepasst. Diese ist in Abbildung 5.9 qualitativ dargestellt. Entsprechend der Spannungs-Verformungslinien in Abbildung 3.6 ist sie bis zum Erreichen einer Zugrissdehnung  $\varepsilon_t = f_t/E_c$  linear. Die Entfestigung im Nachbruchbereich folgt einem exponentiellen Verlauf in Abhängigkeit der maximal beobachteten Gesamtdehnung  $q_{(i)}^t$ . Zur Vermeidung

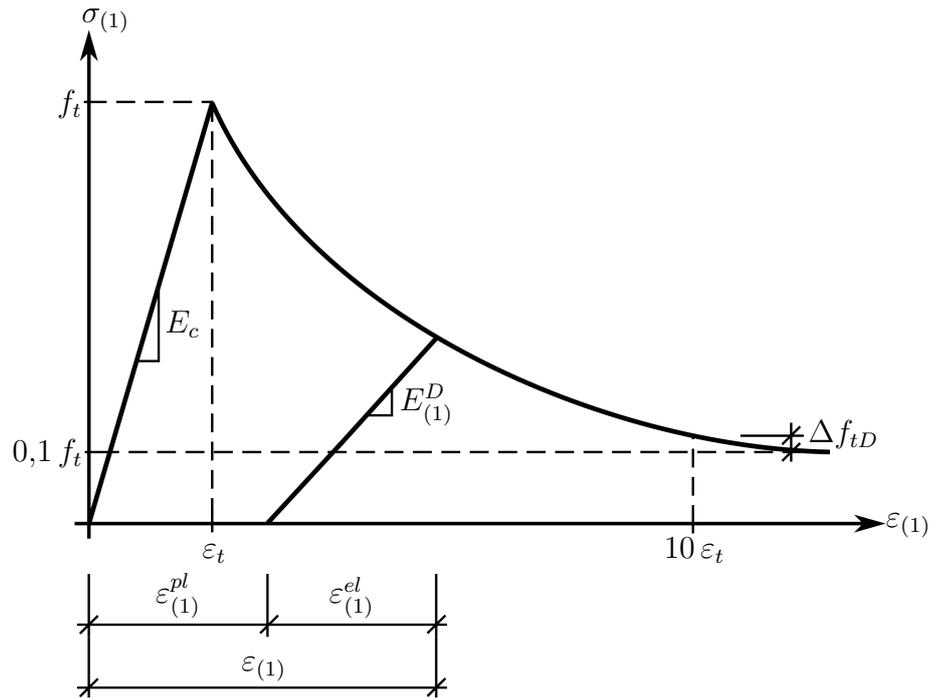


Abbildung 5.9: Zugspannungs-Dehnungsbeziehung mit exponentieller Zugfestigung im Nachbruchbereich

von numerischen Schwierigkeiten soll die Zugfestigkeit  $f_{tD}$  des geschädigten Materials niemals einen Minimalwert von  $\frac{1}{10} f_t$  unterschreiten:

$$f_{tD}(q_{(i)}^t) = f_t \left\{ \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \exp \left[ - \left( q_{(i)}^t - \varepsilon_t \right) \kappa_t^D \right] \right\} \geq \frac{1}{10} f_t. \quad (5.38)$$

Die Rate der exponentiellen Zugfestigungsfunktion  $\kappa_t^D$  wird über einen Parameter  $\Delta f_{tD}$  gesteuert. Er ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Er ergibt sich aus der Differenz der Festigkeit  $f_{tD}$  des geschädigten Materials bei einer Gesamtdehnung von  $q_{(i)}^t = 10 \varepsilon_t$  und der definierten minimalen Zugfestigkeit in Gleichung (5.38):

$$\Delta f_{tD} = f_{tD}(q_{(i)}^t = 10 \varepsilon_t) - \frac{1}{10} f_t. \quad (5.39)$$

Einsetzen der Gleichung (5.38) in (5.39) liefert die Größe  $\kappa_t^D$ :

$$\begin{aligned} \Delta f_{tD} &= \frac{9 f_t}{10} \exp \left[ - (9 \varepsilon_t) \kappa_t^D \right] \\ \Leftrightarrow \kappa_t^D &= - \frac{\log \left( \frac{10}{9 f_t} \Delta f_{tD} \right)}{9 \varepsilon_t}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Die Zugfestigungsfunktion  $f_{tD}(q_{(i)}^t)$  ist durch Gleichung (5.38) vollständig definiert. Sie wird ausschließlich für Richtungen  $(i)$  angewendet, in denen das Material durch eine äußere Zugbelastung beansprucht wird. Die Evolution der Schädigungsvariable  $\Phi_{(i)}$  wird mit der Nachgiebigkeitsbeziehung (5.17) für den uniaxialen Zugversuch bestimmt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(i)}^{el} = q_{(i)}^t - \varepsilon_{(i)}^{pl} &= \frac{\Phi_{(i)}^2}{E_c} f_{tD}(q_{(i)}^t) \\ \Leftrightarrow \Phi_{(i)}(q_{(i)}^t) &= \sqrt{\frac{E_c \left( q_{(i)}^t - \varepsilon_{(i)}^{pl} \right)}{f_{tD}(q_{(i)}^t)}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

In Gleichung (5.41) werden die plastischen Dehnungen  $\varepsilon_{(i)}^{pl,n+1}$  und die Verfestigungsvariablen  $q_{(i)}^{t,n+1}$  eingesetzt, die bereits aus der schon angewendeten Fließregel (5.4) und der Verfestigungsregel (5.10) bekannt sind. Ergeben sich aufgrund der Zugschädigung nach Gleichung (5.41) größere Schädigungsvariablen  $\Phi_{(i)}^{n+1}$  als aus der Druckschädigung nach Gleichung (5.29) beziehungsweise (5.33) für die jeweiligen Richtungen  $(i)$ , so wird  $\Phi_{(i)}^{n+1}$  in Gleichung (5.35) ersetzt.

### 5.3 Kombination und Umsetzung der Evolutionsansätze

Das Ablaufdiagramm in Abbildung 5.10 zeigt den Algorithmus der implementierten Materialroutine zur Bestimmung des Spannungszustandes  $\boldsymbol{\sigma}$  und der Zustandsvariablen für gegebene Verzerrungszustände  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Die darin enthaltenen Gleichungen sind direkt lösbar. Daher entfallen jegliche iterative Lösungsverfahren auf Materialpunktebene. Lediglich auf Systemebene, außerhalb des Materialgesetzes, wird die tangentialsteifigkeitsbeziehung (2.84) iterativ gelöst.

Die Evolutionsgleichungen der Plastizität werden durch die Auswertung experimenteller Beobachtungen in den vorliegenden Würfeldruckversuchen gewonnen. Die Verfestigungsregeln (5.10) hängen ausschließlich von den Gesamtverzerrungen  $\varepsilon_{(i)}$  der einzelnen Hauptverzerrungsrichtungen  $\varphi_{(i)}^\varepsilon$  ab. Sie definieren die verzerrungsäquivalenten Verfestigungsvariablen  $q^c$  und  $q^t$ , die in die Fließregeln (5.2) und (5.4) eingehen. Diese liefern die plastischen Verzerrungsanteile  $\varepsilon_{(i)}^{pl}$  aller drei Hauptverzerrungsrichtungen  $\varphi_{(i)}^\varepsilon$ . Die plastischen

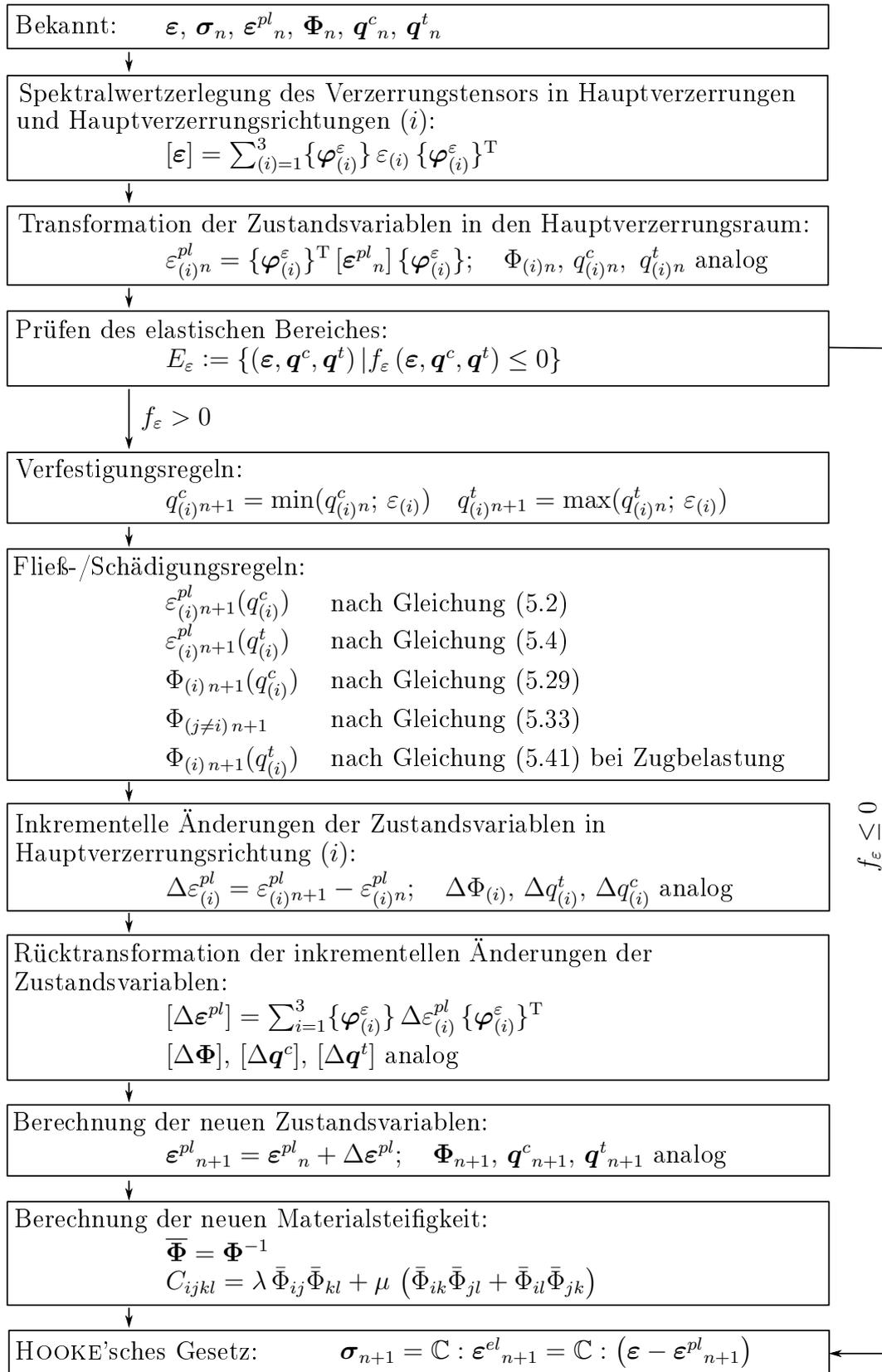


Abbildung 5.10: Schematischer Ablauf der Materialroutine

Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  sind somit ausschließlich von den Gesamtverzerrungszuständen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  abhängig. Diese Abhängigkeit lässt sich auf einfache Weise experimentell nachvollziehen und Ungenauigkeiten lassen sich minimieren, wie beispielsweise in den Abbildungen 5.1 und 5.2 erkennbar ist. Dahingegen sind beispielsweise in der spannungsbasierten Plastizitätstheorie Anpassungen der Vektorfunktion  $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$  aus der Fließregel (4.18) an experimentell gemessene Entwicklungen der plastischen Verzerrungen erschwert.

Die Schädigungsregeln (5.29), (5.33) und (5.41) sind über den Kopplungsparameter  $\beta$  an die Verfestigungsparameter  $\boldsymbol{q}^c$  und  $\boldsymbol{q}^t$  und somit an die Fließregeln der Plastizitätstheorie gekoppelt. Daher hängen die Zustandsgrößen der Schädigungstheorie ebenfalls direkt von den Gesamtdehnungen ab. Durch die tensorielle Schädigungsvariable  $\Phi$  aus Carol u. a. [11] ist die Formulierung eines orthotropen Schädigungsgesetzes umgesetzt worden. Die Schädigungsevolution des Materialmodells stimmt sehr gut mit den experimentell beobachteten Schädigungsentwicklungen der vorliegenden uniaxialen und biaxialen Druckversuche überein.

In triaxialen Druckversuchen führt die Kopplung der Schädigung an die Plastizität zu einer Überschätzung der Schädigungsentwicklung (Abbildung 5.7). Daher wird im Fall dreiachsiger Spannungszustände die Schädigungsevolution des Materialmodells derzeit noch numerisch verzögert. Die genaue Abhängigkeit dieser Verzögerung von unterschiedlich hohen Querdruckbelastungen muss durch weitere Versuche experimentell ermittelt werden. Eventuell wird eine getrennte Formulierung der Schädigungsevolution erforderlich sein, die von der Plastizität entkoppelt ist. Für eine genauere Identifikation der Schädigungszustände sind Versuche notwendig, die zwischen den Belastungszyklen uniaxial in sämtliche Hauptverzerrungsrichtungen zusätzlich belastet werden. Dadurch wird die experimentelle Erfassung orthotroper Schädigungszustände ohne eine Reduktion auf die drei Schädigungsvariablen  $\Phi_{(1)}$ ,  $\Phi_{(2)}$  und  $\Phi_{(3)}$  ermöglicht. Für eine genauere Beschreibung dieser Versuche wird auf Abschnitt 7.2 verwiesen.

Unter äußerer Zugbelastung wird die Schädigungsentwicklung von Dehnungsrichtungen in Abhängigkeit der zugehörigen Verfestigungsvariable  $q_{(i)}^t$  formuliert. Die resultierenden Risse werden auf einfache Weise anhand von Zugdehnungen erkannt.

Die Materialparameter zur Definition der in diesem Kapitel definierten Evolutionsgleichungen sind in Tabelle 5.3 zusammengefasst.

Tabelle 5.3: Parameter des vorgestellten Materialmodells

Materialparameter	Formelzeichen
Elastizitätsmodul	$E_c$
POISSON-Zahl	$\nu_c$
Uniaxiale Druckfestigkeit	$f_c$
Kopplungsparameter	$\beta$
Positive, plastische Dehnungsrate	$\kappa_t$
Positive, plastische Dehnungsgrenze	$\varepsilon_{0pl}$
Zugfestigkeit	$f_t$
Zugentfestigungsparameter	$\Delta f_{tD}$

Der in Tabelle 5.3 für die Fließregel (5.2) fehlende Parameter der Rate der negativen, plastischen Verzerrungen  $\kappa_c$  ist mit der uniaxialen Druckfestigkeit  $f_c$  und dem Kopplungsparameter  $\beta$  bestimmbar. Dazu wird das HOOKE'sche Gesetz (5.16) für uniaxiale Druckzustände aufgestellt:

$$\sigma_{(1)} = \frac{E_c}{\Phi_{(1)}^2} : \left( \varepsilon_{(1)} - \varepsilon_{(1)}^{pl} \right). \quad (5.42)$$

Einsetzen der Fließregel (5.2) und der Schädigungsregel (5.29) im Zustand des Erreichens der uniaxialen Betondruckfestigkeit  $f_c$  liefert

$$\sigma_{(1)} = f_c = \frac{E_c \left[ \kappa_c - \kappa_c \exp\left(\frac{\varepsilon_{(1)}}{\kappa_c}\right) + \beta \varepsilon_{(1)} \right]}{\beta - 1}, \quad (5.43)$$

wobei beim Erreichen der Druckfestigkeit die Gesamtstauchung dem Druckverfestigungsparameter  $\varepsilon_{(1)} = q_{(1)}^c$  entspricht. Die Ableitung der Spannungs-Verzerrungsbeziehung (5.43) muss beim Erreichen der Druckfestigkeit verschwinden:

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial \varepsilon_{(1)}} = \frac{E_c \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon_{(1)}}{\kappa_c}\right) - \beta \right]}{1 - \beta} = 0. \quad (5.44)$$

Auflösen der Gleichung (5.44) nach  $\varepsilon_{(1)}$  ergibt die Bruchstauchung  $\varepsilon_c$ , die in Abbildung 3.2, links dargestellt ist:

$$\varepsilon_c = \log(\beta) \kappa_c. \quad (5.45)$$

Mit Hilfe der Gleichung (5.45) kann wiederum Gleichung (5.43) nach  $\kappa_c$  aufgelöst werden:

$$\kappa_c = \frac{f_c (\beta - 1)}{E_c (1 - \beta + \beta \log(\beta))}. \quad (5.46)$$

Die Herleitung der algorithmischen Tangente  $\mathbb{C}_{Tan}$ , die in Gleichung (2.82) benötigt wird, ist Anhang B zu entnehmen.

Obwohl die Formulierung der Schädigungsgesetze stark vereinfacht ist, werden die gegenüber einer *Schädigung durch Stauchung* verstärkten *Schädigungen durch Querkzug* unter Druckbelastung erfasst. Ein Hauptziel der vorliegenden Arbeit, die Abbildung von Querkzugrissen, ist daher erreicht. Folgende Einschränkungen sind allerdings bei der Anwendung der vorgestellten Evolutionsansätze zu berücksichtigen:

- Die Anwendung der Evolutionsansätze ist auf die Simulation von Beanspruchungen beschränkt, in denen das Druckversagen maßgebend ist. Das Zugschädigungsgesetz beinhaltet ausschließlich die qualitative Entfestigung nach Überschreiten einer Zugfestigkeit. Eine Regularisierung der Spannungs-Dehnungsbeziehung ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.
- Die Kopplung der Schädigungsevolution an die Plastizität führt zu einer Überschätzung der Schädigung bei triaxialen Druckversuchen.
- Bei der Projektion des orthotropen Schädigungstensors  $\Phi$  auf die Hauptverzerrungsrichtungen  $\varphi^e$  nach Gleichung (5.34) wird eine eventuelle Risschließung vernachlässigt. Aus diesem Grund sind die Evolutionsansätze auf Belastungsvorgänge beschränkt, die keine Rotation der Hauptverzerrungsrichtungen verursachen. Diese Beschränkung muss ebenfalls eingehalten werden, da die Evolution der plastischen Verzerrungen nicht in Ratenform formuliert ist.
- Die Spannungszustände in den Versuchen aus Tabelle 5.1 weichen nur geringfügig vom uniaxialen Druckversuch ab. Evolutionsansätze für weitere Spannungsverhältnisse konnten mangels vorhandener Versuchsdaten nicht aufgestellt werden. In den Abschnitten 6.1.4 und 6.1.5 wird die Eignung der vorgestellten Evolutionsgleichungen für weitere Spannungsverhältnisse anhand von biaxialen Versuchen ohne Ent- und Wiederbelastung geprüft.



# Kapitel 6

## Erprobung der implementierten Evolutionsgleichungen

In Kapitel 5 wurde aus den Messdaten der Würfeldruckversuche aus van Mier [60] Evolutionsansätze der plastischen Verzerrung und der Schädigung für Normalbeton abgeleitet. Diese wurden in einer Materialroutine umgesetzt, um sie anhand von Simulationen zu prüfen. In diesem Kapitel werden zunächst *Materialversuche* mit entsprechenden Simulationen verglichen. Anschließend werden die Evolutionsansätze auf zwei *Bauteilversuche* aus der Literatur angewendet.

### 6.1 Simulation von Materialversuchen

In den folgenden Abschnitten werden die Simulationen mittels der vorgestellten Evolutionsansätze einer Auswahl der Druckversuche aus Tabelle 5.1 von van Mier [60], Druckversuchen aus Kupfer u. a. [48] und einem Zugversuch aus Abbildung 3.6 von Remmel [76] gegenübergestellt.

In Abschnitt 6.1.1 wird ein Materialparametersatz anhand des uniaxialen Würfeldruckversuches 2B2-4 aus van Mier [60] identifiziert. Die resultierende, simulierte Spannungs-Verzerrungsbeziehung wird mit der Versuchskurve verglichen.

Eine Anpassung der Modellparameter an unterschiedliche Belastungszustände soll weitestgehend vermieden werden. Daher wird der Parametersatz aus Abschnitt 6.1.1 für alle weiteren Materialversuche größtenteils übernom-

men. Lediglich die uniaxiale Druckfestigkeit  $f_c$  und der Elastizitätsmodul  $E_c$  werden durch die Werte ersetzt, die in van Mier [60] beziehungsweise in Kupfer u. a. [48] für die jeweiligen Proben angegeben sind. Die übrigen Modellparameter bleiben unverändert.

Die Parametersätze für die Materialversuche nach van Mier [60] sind in Tabelle 6.1 zusammengestellt. Die Modellparameter zur Definition des mechanischen Zugverhaltens beeinflussen die Simulation der reinen Druckbelastungsversuche nicht. Sie werden anhand eines Zugversuchs aus Remmel [76] in Abschnitt 6.1.7 bestimmt und sind der Vollständigkeit halber in Tabelle 6.1 angegeben.

Tabelle 6.1: Verwendete Modellparameter für die Würfeldruckversuche aus van Mier [60]

Modellparameter		2B2-4	9B1-3	8B1-2
Elastizitätsmodul	$E_c$		35 000 MPa	
POISSON-Zahl	$\nu_c$		0,2	
Uniaxiale Druckfestigkeit	$f_c$	-42 MPa	-48 MPa	-46 MPa
Kopplungsparameter	$\beta$		0,25	
Positive, plastische Dehnungsrate	$\kappa_t$		0,85	
Positive, plastische Dehnungsgrenze	$\varepsilon_{0pl}$		0,5 ‰	
Zugfestigkeit	$f_t$		4,0 MPa	
Zugentfestigungsparameter	$\Delta f_{tD}$		0,01 MPa	

Alle Simulationen erfolgen an einem Modell mit einem einzigen SOLID185 Element aus ANSYS® [3]. Dabei wurde aufgrund der Symmetrie in allen drei Richtungen nur ein Achtel der Würfelproben modelliert.

### 6.1.1 Uniaxialer Druckversuch aus van Mier [60]

Vor der Simulation werden die Modellparameter in Tabelle 6.1 für den Versuch 2B2-4 folgendermaßen bestimmt:

- Die uniaxiale Betondruckfestigkeit  $f_c = -42$  MPa wird der Spannungs-Verzerrungskurve in Abbildung 3.2 entnommen.
- Der Elastizitätsmodul  $E_c = 35\,000$  MPa wird mit Gleichung (3.1) abgeschätzt.

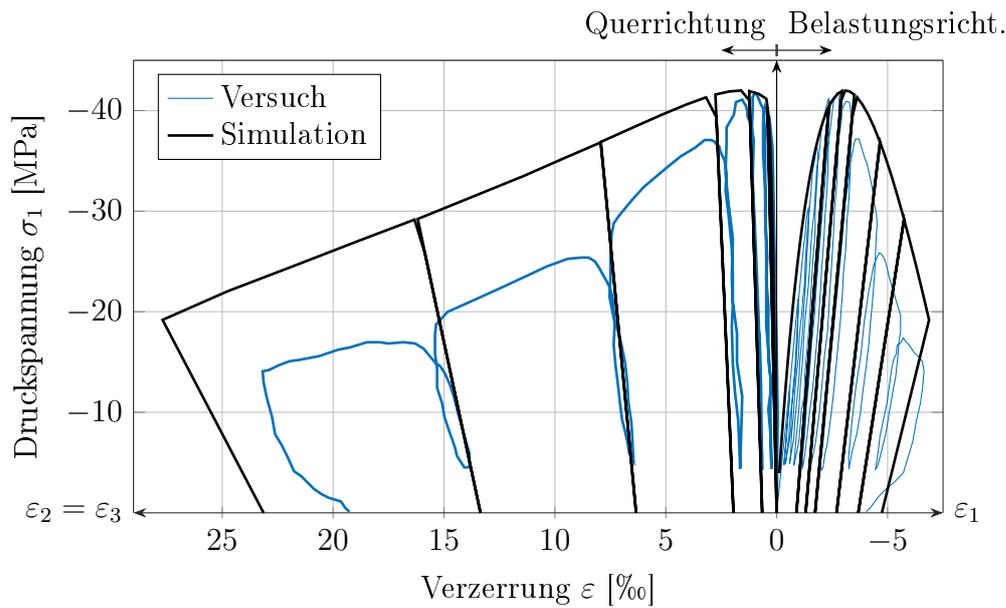


Abbildung 6.1: Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des uniaxialen Druckversuches 2B2-4 aus van Mier [60] mit den Simulationskurven

- Die POISSON-Zahl  $\nu_c$  wird zu 0,2 angenommen.
- Für die einzelnen Wiederbelastungen werden jeweils Kopplungsparameter  $\beta$  mit Gleichung (5.24) bestimmt. Die Einzelwerte ergeben im Mittel annähernd  $\beta = 0,25$  (Abbildung 5.6). Aus den Gleichungen (5.45) und (5.46) ergibt sich der Parameter  $\kappa_c \approx 0,002$ . Der entsprechende Verlauf der plastischen Evolution ist in Abbildung 5.1 dargestellt.
- Die Evolutionsparameter für positive, plastische Dehnungen werden Abbildung 5.2 entnommen.

Die Lastaufbringung in der Simulation erfolgt analog zum Versuch 2B2-4 aus van Mier [60] weggesteuert (Abschnitt 3.1). In Abbildung 6.1 werden die Spannungs-Verzerrungskurven des Versuches und seiner Simulation verglichen. Im Vorbruchbereich sind die Simulations- und die Versuchskurve annähernd identisch. Die Entwicklung sowohl der Neigungen der Wiederbelastungspfade, als auch der plastischen Verzerrungen werden im gesamten Versuch in der Belastungsrichtung und in den Querrichtungen sehr gut abgebildet. Eine geringfügige Unterschätzung der plastischen Stauchungen in Belastungsrichtung (1) führt zu einer Überschätzung der Druckspannungen im Nachbruchbereich. Die

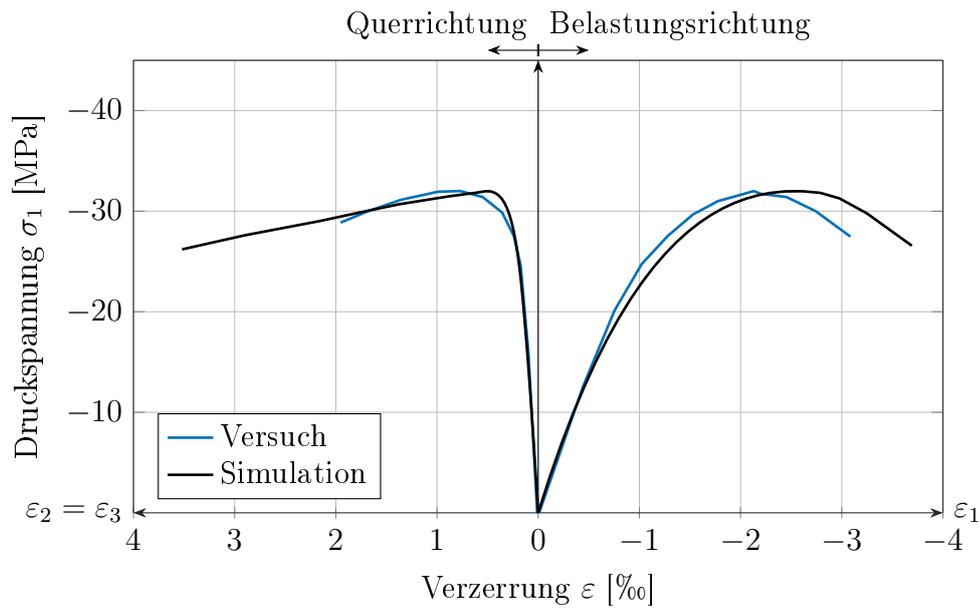


Abbildung 6.2: Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des uniaxialen Druckversuches aus Kupfer u. a. [48] mit den Simulationskurven

großen Dehnungen durch Rissöffnungen in den Querrichtungen werden durch das orthotrope Schädigungsgesetz sehr gut abgebildet.

### 6.1.2 Uniaxialer Druckversuch aus Kupfer u. a. [48]

Für die Simulation des uniaxialen Druckversuches ohne Ent- und Wiederbelastung aus Kupfer u. a. [48] werden die Parameter aus Tabelle 6.1 weitestgehend übernommen. Ausschließlich die Werte der uniaxialen Druckfestigkeit  $f_c = -32$  MPa und des Elastizitätsmoduls  $E_c = 32\,500$  MPa sind aus Kupfer u. a. [48] entnommen. Die Lastaufbringung erfolgt wie im vorangegangenen Versuch aus Abschnitt 6.1.1 weggesteuert. Die resultierende Simulationskurve ist in Abbildung 6.2 der Versuchskurve gegenübergestellt. Wie in Abschnitt 6.1.1 werden die Spannungs-Verzerrungsverläufe aller Probenrichtungen sehr gut abgebildet. Die Druckspannungen  $\sigma_1$  im Nachbruchbereich werden geringfügig überschätzt (Abbildung 6.2). Da der Versuch ohne Ent- und Wiederbelastungen keine Informationen zu den Evolutionen der plastischen Verzerrungen und der Schädigung enthält, kann die Ursache dieser Überschätzung nicht eindeutig identifiziert werden.

### 6.1.3 Biaxialer Druckversuch aus van Mier [60]

In Abbildung 6.3 ist der Vergleich der Simulation mit dem Versuch 9B1-3 aus van Mier [60] dargestellt. Diese Versuchsprobe hat eine uniaxiale Druckfestigkeit von  $f_c = -48$  MPa. Der entsprechende Modellparameter wurde angepasst. Alle übrigen Parameter wurden aus Tabelle 6.1 übernommen.

Wie in Abschnitt 3.3.2 erwähnt, erfolgt in diesem Versuch die Lastaufbringung in der Hauptbelastungsrichtung weggesteuert. Die Querbelastungen werden spannungsgesteuert nachgeregelt, so dass das gewünschte Spannungsverhältnis  $\sigma_2 = 0,05 \sigma_1$  gemäß Tabelle 5.1 erreicht wird. Richtung (3) bleibt unbelastet.

Da eine solche Lastaufbringung im Modell nur mit großem Aufwand möglich ist, werden hier alle Richtungen weggesteuert belastet. Die entsprechenden Verschiebungsgrößen werden dafür aus den Versuchsdaten abgelesen. Daher stimmen in Abbildung 6.3, oben, die Verzerrungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  des Modells in den belasteten Zuständen automatisch mit denen des Versuches überein.

Die Entlastung erfolgt durch das Entfernen der eingepprägten Wegrandbedingungen. Die Neigung der linearen Ent- und Wiederbelastungspfade der  $\sigma_1$ - $\varepsilon_1$ - und  $\sigma_1$ - $\varepsilon_2$ -Kurve im Modell schmiegen sich sehr gut an die linearen Abschnitte der Wiederbelastungspfade des Versuches an. In diesen Richtungen werden die bleibenden plastischen Verzerrungen in den entlasteten Zuständen leicht überschätzt. Die Anpassung der Evolutionsgleichung der plastischen Verzerrungen erfolgte im letzten Abschnitt anhand des Versuches 2B2-4. Daher sind diese Abweichungen auf die Vernachlässigung der Anfahreffekte zurückzuführen, da diese in dem Versuch 2B2-4 nicht enthalten sind. Dieser Zusammenhang ist in Abschnitt 5.1.1 ausführlich beschrieben und in Abbildung 5.1 erkennbar.

Der Verlauf der resultierenden Druckspannung  $\sigma_1$  im Modell stimmt sehr gut mit dem Verlauf im Versuch überein. Abbildung 6.3, unten, zeigt den Soll-Ist-Vergleich der Umhüllenden der Spannungen  $\sigma_2$ . In der Simulation werden diese kurz vor dem Erreichen der maximalen Belastung und im Nachbruchbereich unterschätzt. Da die Dehnungen  $\varepsilon_2$  in den ent- und belasteten Zuständen sehr gut abgebildet werden (Abbildung 6.3, oben), ist dieser Fehler auf eine Überschätzung der Schädigung in Richtung (2) zurückzuführen.

Die Umhüllende der  $\sigma_1$ - $\varepsilon_3$ -Kurve in Abbildung 6.3, Mitte, stimmt mit der entsprechenden Versuchskurve gut überein. Allerdings weichen die Neigungen

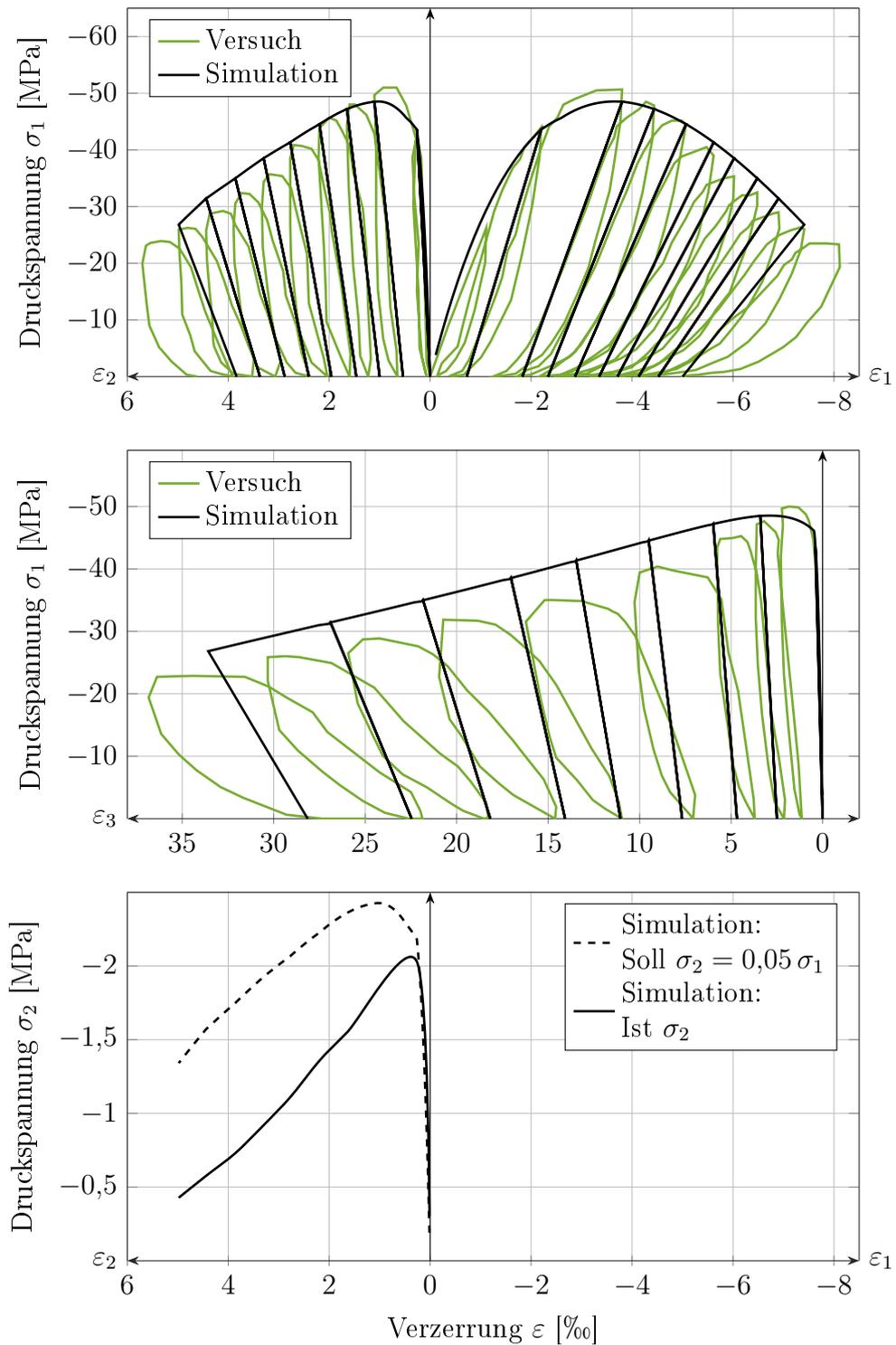


Abbildung 6.3: Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des biaxialen Druckversuches 9B1-3 aus van Mier [60] mit den Simulationskurven (oberes und mittleres Bild); Vergleich der Soll-Ist-Druckspannungen in Querrichtung (2) (unteres Bild)

der Wiederbelastungspfade der Simulation und die des Versuches voneinander ab. Dieser Fehler ist nicht allein auf das angenommene Schädigungsevolutionsgesetz der unbelasteten Richtung zurückzuführen. Auch die Abweichung in der simulierten Spannung  $\sigma_2$  (Abbildung 6.3, unten) beeinflusst durch den POISSON-Effekt die Dehnungen der Richtung (3).

Trotz der beobachteten Abweichungen wird die Rissöffnung und die Entwicklung der Nachgiebigkeit in der unbelasteten Richtung (3) qualitativ gut abgebildet.

#### 6.1.4 Äquibiaxialer Druckversuch aus Kupfer u. a. [48]

Die in Kapitel 5 vorgestellten Evolutionsansätze basieren auf Versuchen, in denen die Probekörper nur in einer Richtung gestaucht werden. Anhand von einem äquibiaxialen Versuch aus Kupfer u. a. [48] soll die Eignung der Evolutionsansätze für Versuche geprüft werden, in denen Stauchungen in mehr als einer Richtung durch höheren Querdruck auftreten. Zur Aufstellung von Evolutionsgleichungen konnte dieser Versuch nicht herangezogen werden, da er keine Ent- und Wiederbelastungen enthält und somit keine eindeutigen Informationen zur Entwicklung der plastischen Verzerrungen und der Schädigung liefert.

In Abbildung 6.4 ist die Spannungs-Verzerrungskurve aus der Simulation der Versuchskurve des äquibiaxialen Druckversuches aus Kupfer u. a. [48] gegenübergestellt. Die uniaxiale Festigkeit  $f_c = -32$  MPa und der Elastizitätsmodul  $E_c = 32\,500$  MPa werden analog zu Abschnitt 6.1.2 aus Kupfer u. a. [48] entnommen. Die übrigen Parameter aus Tabelle 6.1 bleiben unverändert.

Die Lastaufbringung erfolgt weggesteuert in Richtung (1) und Richtung (2). Der simulierte Verzerrungsverlauf  $\varepsilon_3$  der freien Richtung (3) stimmt gut mit der entsprechenden Versuchskurve überein.

Die maximale Druckspannung  $\sigma_1 = \sigma_2 \approx -39$  MPa in der Simulation wird gegenüber der erreichten Spannung  $\sigma_1 = \sigma_2 \approx -37$  MPa im Versuch überschätzt. Während das Verhältnis zwischen der biaxialen Druckfestigkeit  $f_{bc}$  zu der uniaxialen Druckfestigkeit  $f_c$  im Versuch einem Wert von 1,16 entspricht, wird in der Simulation ein Wert von 1,22 ermittelt.

Diese Abweichung ist auf die Annahme zurückzuführen, dass die Schädigungsentwicklungen einer Probe in ihren Stauchungsrichtungen unabhängig

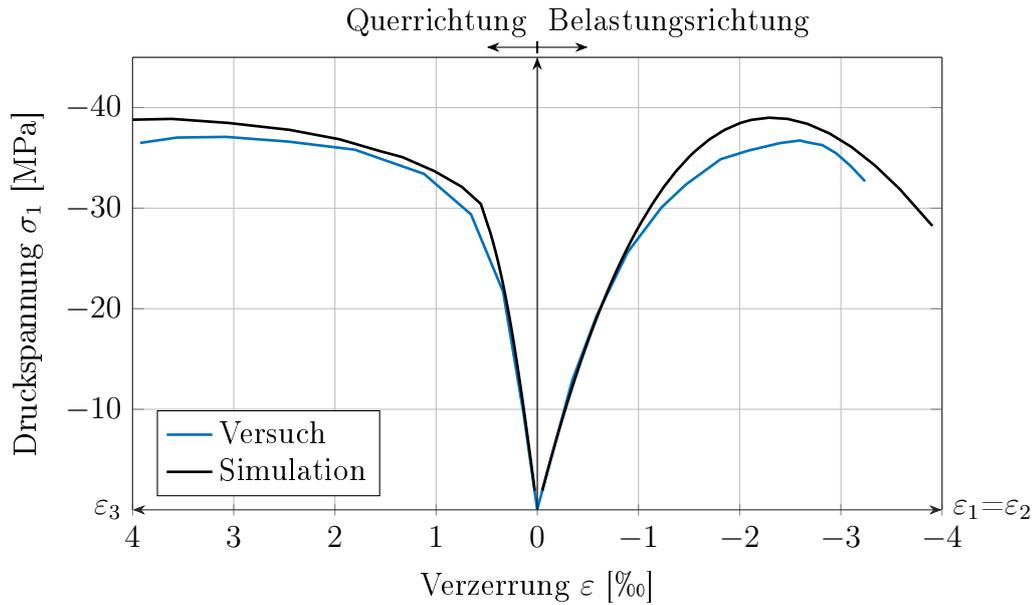


Abbildung 6.4: Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des äquibiaxialen Druckversuches ( $\sigma_2 = \sigma_1$ ) aus Kupfer u. a. [48] mit den Simulationskurven

vom vorliegenden biaxialen oder uniaxialen Belastungszustand derselben Evolutionsgleichung folgen (Tabelle 5.2). Die maximale Druckspannung  $f_{bc}$  wird in der Simulation des biaxialen Versuchs bei Stauchungen  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \approx \varepsilon_c$  erreicht. Daher sind die plastischen Verzerrungszustände und die Schädigungszustände der beiden Stauchungsrichtungen (1) und (2) im biaxialen Druckversuch mit den entsprechenden Zuständen der einzelnen Stauchungsrichtung (1) im uniaxialen Druckversuch näherungsweise identisch. Aus diesem Grund ist die biaxiale Druckfestigkeit  $f_{bc}$  in der Simulation nur von der uniaxialen Druckfestigkeit  $f_c$  und der POISSON-Zahl  $\nu_c$  abhängig. Aus den ersten beiden Zeilen des Gleichungssystems (5.17) ergibt sich mit  $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = f_{bc}$ ,  $\Phi_{(1)} = \Phi_{(2)}$  und dem Parameter  $\nu_c = 0,2$  das Verhältnis  $f_{bc} = 1,25 f_c \approx 1,22 f_c$ :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(1)}^{el} &= \Phi_{(1)}^2 \frac{1}{E_c} f_{bc} - \Phi_{(1)}^2 \frac{\nu_c}{E_c} f_{bc} \\
 \Leftrightarrow f_{bc} &= \frac{E_c \varepsilon_{(1)}^{el}}{\Phi_{(1)}^2 (1 - \nu_c)} = 1,22 f_c \quad (6.1) \\
 &\approx \frac{E_c \varepsilon_c}{\Phi_{(1)}^2 (1 - \nu_c)} \approx \frac{f_c}{1 - \nu_c} = 1,25 f_c.
 \end{aligned}$$

Aufgrund der guten Übereinstimmung der Simulations- und Versuchskurven in Abbildung 6.4 und fehlender Versuchsdaten über die tatsächliche Entwicklung

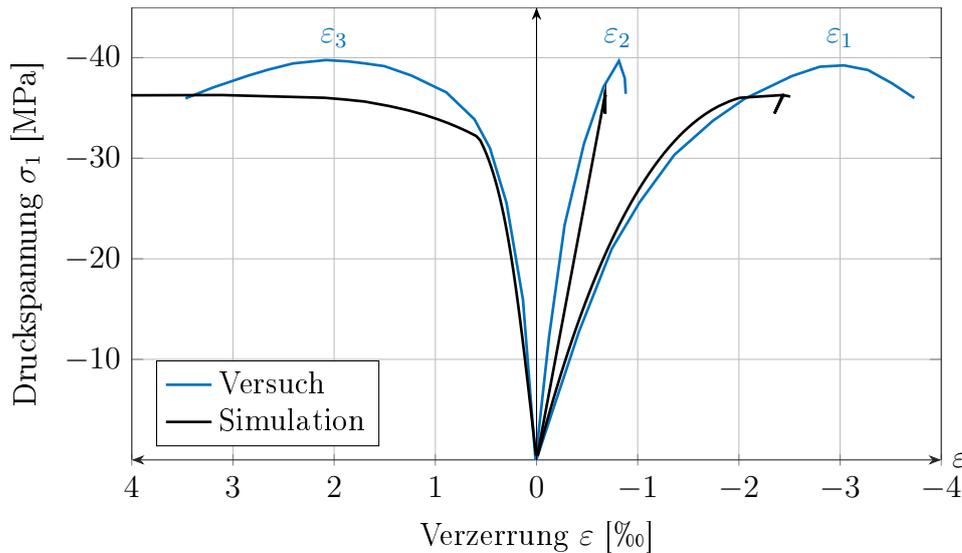


Abbildung 6.5: Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des biaxialen Druckversuches ( $\sigma_2 = 0,52 \sigma_1$ ) aus Kupfer u. a. [48] mit den Simulationskurven

der plastischen Verzerrungen und der Schädigung, wird angenommen, dass der vorgestellte Evolutionsansatz für äquibiaxiale Versuche geeignet ist. Die angenommenen Evolutionsansätze sind in äquibiaxialen Druckversuchen mit Ent- und Wiederbelastung unbedingt zu validieren.

### 6.1.5 Biaxialer Druckversuch aus Kupfer u. a. [48]

In Abbildung 6.5 ist die Spannungs-Verzerrungskurve aus einer Simulation einer Versuchskurve eines weiteren biaxialen Versuches aus Kupfer u. a. [48] gegenübergestellt. Im Gegensatz zu dem Versuch in Abschnitt 6.1.4 wird die Versuchsprobe durch Druckspannungen mit dem Verhältnis  $\sigma_2 = 0,52 \sigma_1$  belastet. Unter diesem Belastungszustand wird der Probekörper wiederum in den Richtungen (1) und (2) gestaucht.

Wie im vorangegangenen Abschnitt 6.1.4 werden die uniaxiale Festigkeit  $f_c = -32$  MPa und der Elastizitätsmodul  $E_c = 32\,500$  MPa analog zu Abschnitt 6.1.2 aus Kupfer u. a. [48] entnommen. Die übrigen Parameter aus Tabelle 6.1 bleiben wie zuvor unverändert.

Die Lastaufbringung in der Simulation erfolgt sowohl in Richtung (1), als auch in Richtung (2) kraftgesteuert, um das genannte Spannungsverhältnis einzuhalten. Aus diesem Grund bricht die Simulation beim Erreichen der ma-

ximalen Druckspannung ab.

Für den vorliegenden Versuch werden die Verzerrungsverläufe in den einzelnen Probenrichtungen qualitativ gut abgeschätzt. Im Vergleich der Simulation mit dem Versuch beträgt die Abweichung der maximal erreichten Spannungen nur 11 %. Problematischer ist der direkte Vergleich zu dem äquibiaxialen Druckversuch in Abschnitt 6.1.4. Während im Versuch das Spannungsverhältnis  $\sigma_2 = 0,52 \sigma_1$  zu höheren, zulässigen Spannung  $\sigma_1 = -40 \text{ MPa} = 1,25 f_c$  führt, kommt es in der Simulation zu einer Reduktion der zulässigen Spannung  $\sigma_1 = -36 \text{ MPa} = 1,13 f_c$ .

Dieser qualitative Fehler ist wiederum auf die angenommene Schädigungsevolution für die Stauchungsrichtungen zurückzuführen, die bei dem vorgestellten Evolutionsansatz unabhängig vom biaxialen Belastungszustand ist. Ähnlich zu Abschnitt 6.1.4 ist die erreichbare Druckspannung  $\sigma_1$  hauptsächlich von der uniaxialen Druckfestigkeit  $f_c$  und der POISSON-Zahl  $\nu_c$  abhängig. Aufgrund des kleineren Druckspannungsverhältnisses  $\sigma_2 = 0,52 \sigma_1$  im Vergleich zum äquibiaxialen Druckversuch wird nur eine geringere maximale Druckspannung  $\sigma_1$  erreicht. Dieser Zusammenhang lässt sich wie im vorangegangenen Abschnitt gut mit der ersten Zeile des Gleichungssystems (5.17) abschätzen. Mit  $\sigma_{(2)} = 0,52 \sigma_{(1)}$ , der Annahme, dass der Probekörper in Richtung (2) ungeschädigt ist ( $\Phi_{(2)} = 1,0$ ) und dem Parameter  $\nu_c = 0,2$  ergibt sich das Verhältnis  $\sigma_1 = 1,12 f_c \approx 1,13 f_c$  in Gleichung (6.2):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(1)}^{el} &= \Phi_{(1)}^2 \frac{1}{E_c} \sigma_1 - \Phi_{(1)} \frac{\nu_c}{E_c} 0,52 \sigma_1 \\
 \Leftrightarrow \sigma_1 &= \frac{E_c \varepsilon_{(1)}^{el}}{\Phi_{(1)}^2 \left(1 - \frac{0,52}{\Phi_{(1)}} \nu_c\right)} = 1,13 f_c \\
 &\approx \frac{E_c \varepsilon_c}{\Phi_{(1)}^2 \left(1 - \frac{0,52}{\Phi_{(1)}} \nu_c\right)} \approx \frac{f_c}{1 - 0,52 \nu_c} = 1,12 f_c.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Da der Versuch keine Ent- und Wiederbelastungen enthält, kann nicht eindeutig geklärt werden, ob allein die angenommene Schädigungsevolution die Ursache für diese Abweichung ist. Entsprechende Versuche mit Ent- und Wiederbelastung sind erforderlich, um experimentell basierte Evolutionsgleichungen für ähnliche Spannungsverhältnisse aufzustellen.

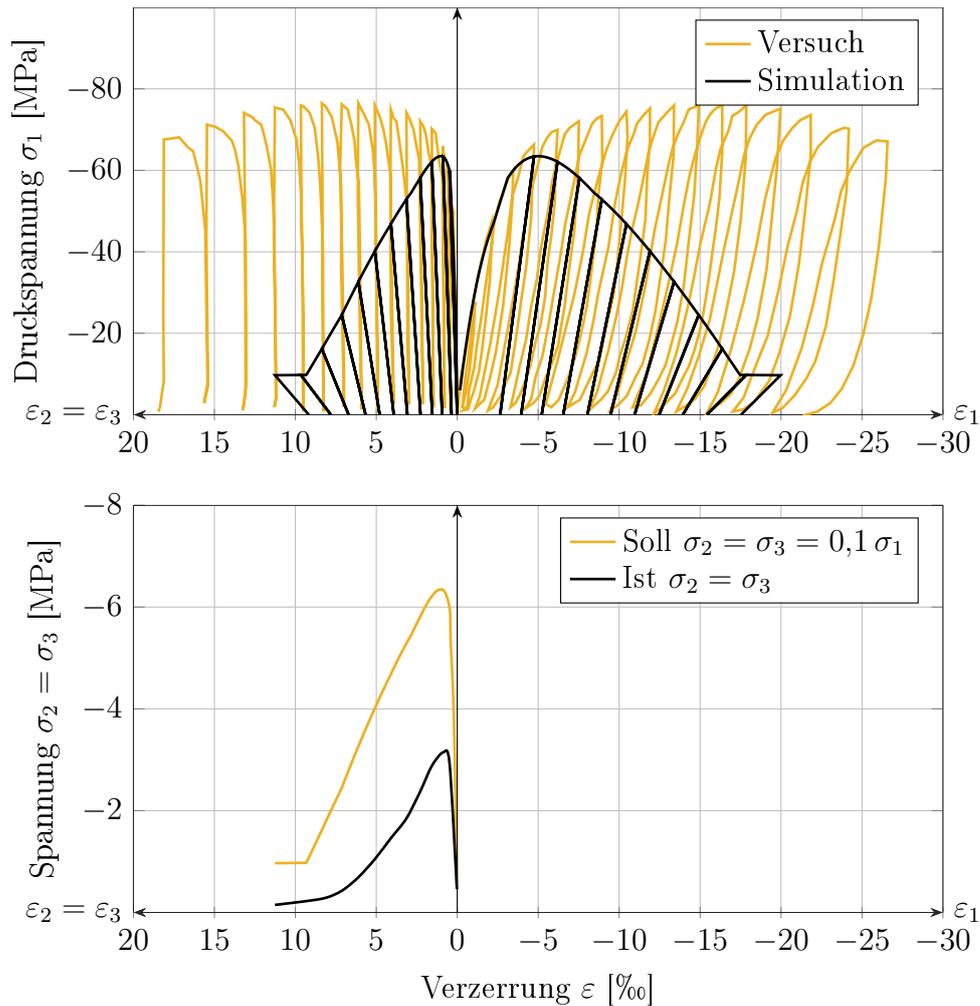


Abbildung 6.6: Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des triaxialen Druckversuches 8B1-2 aus van Mier [60] mit den Simulationskurven (oberes Bild); Vergleich der Soll-Ist-Druckspannungen in den Querrichtungen (2) und (3) (unteres Bild)

### 6.1.6 Triaxialer Druckversuch

Abbildung 6.6 zeigt den Vergleich der Simulation mit dem Versuch 8B1-2 aus van Mier [60]. Die uniaxiale Druckfestigkeit dieser Probe beträgt  $f_c = -46$  MPa. Analog zum Abschnitt 6.1.3 wurden die weiteren Modellparameter aus Tabelle 6.1 übernommen.

Die Lastaufbringung in der hauptsächlich belasteten Richtung erfolgt im Versuch weggesteuert. Beide Querbelastungen werden spannungsgesteuert nachgeregelt, um das Spannungsverhältnis  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0,1 \sigma_1$  zu erreichen (Tabelle 5.1). Die Lastaufbringung im Modell erfolgt analog zum Abschnitt 6.1.3 in alle

Richtungen weggesteuert. Daher sind in den belasteten Zuständen die richtigen Verzerrungszustände aus dem Versuch vorgegeben.

Qualitativ richtig ist, dass die maximal erreichte Druckspannung durch den triaxialen Druckzustand gegenüber der uniaxialen Festigkeit  $f_c$  erhöht ist. Ebenso ist das duktilere Verhalten der Probe in der hauptsächlich belasteten Richtung qualitativ richtig. Die plastischen Verzerrungszustände werden wegen der verwendeten Evolutionsgleichung analog zum Abschnitt 6.1.3 nur geringfügig überschätzt. Dieser Zusammenhang ist wiederum in Abbildung 5.1 erkennbar.

Trotzdem müssen die Evolutionsansätze für dreidimensionale Lastfälle als noch nicht vollständig geeignet bewertet werden. Die Schädigungsentwicklung in der hauptsächlich belasteten Richtung (1) ist zu hoch, obwohl sie für triaxial gedrückte Versuche gemäß Abschnitt 5.2.4 verzögert wird (Abbildung 5.7). Dieser Fehler führt zu deutlichen Abweichungen zwischen Versuch und Simulation. Da die Schädigungen in den Richtungen (2) und (3) von der nicht ausreichend genau ermittelten Schädigung der Richtung (1) direkt abhängen, können auch die Druckspannungen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  nicht richtig ermittelt werden (Abbildung 6.6, unten).

An dieser Stelle wird auf die in Abschnitt 5.2.4 vorgeschlagenen Lösungsansätze zur Verzögerung der Schädigungsentwicklung unter triaxialen Spannungszuständen beziehungsweise zur Entkopplung der Schädigung von der Plastizität hingewiesen.

### 6.1.7 Uniaxialer Zugversuch

Wie in Abschnitt 5.2.6 erwähnt, wurde in dieser Arbeit ein sehr vereinfachtes Zugschädigungsgesetz umgesetzt. Es soll ausschließlich eine qualitative Entfestigung des Probematerials bei der Simulation von Bauteilversuchen berücksichtigen, sobald die Zugfestigkeit überschritten wird. Eine Regularisierung der Spannungs-Dehnungsbeziehung wurde hier nicht umgesetzt. Daher beschränkt sich die Anwendung der Evolutionsansätze auf Bauteilversuche, in denen das Zugversagen nicht maßgebend ist.

In diesem Abschnitt werden lediglich die Parameter für die Definition des Zugspannungs-Dehnungsverhaltens bestimmt. Mit den in Tabelle 6.1 angegebenen Modellparametern  $f_t = 4,0$  MPa und  $\Delta f_{tD} = 0,01$  MPa ergibt sich die

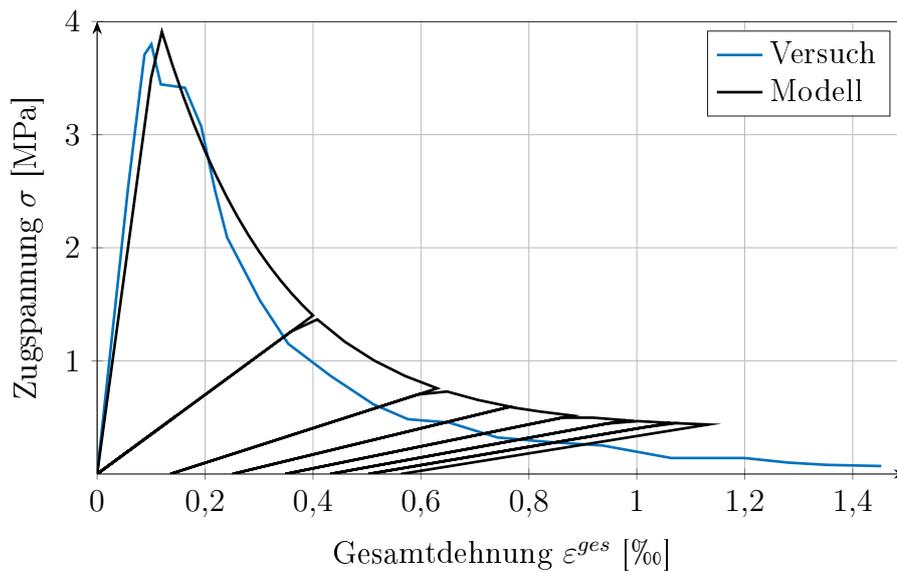


Abbildung 6.7: Vergleich der Spannungs-Dehnungskurven eines uniaxialen Zugversuches aus Remmel [76] mit der Kurve seiner Simulation

Simulationskurve in Abbildung 6.7. Sie ist einer Versuchskurve aus Remmel [76] für einen Beton mit Druckfestigkeit  $f_c = -54,3$  MPa gegenübergestellt.

Der exponentielle Entfestigungsverlauf der simulierten Spannungs-Verzerrungskurve passt sehr gut zu der Spannungs-Verzerrungskurve des Versuches. Zur Vermeidung numerischer Schwierigkeiten wurde in Abschnitt 5.2.6 eine künstliche Resttragfähigkeit von  $f_{tD} \geq \frac{1}{10} f_t$  im Materialmodell eingeführt. Damit wird eine vollständigen Entfestigung des Materialmodells bewusst vermieden.

Die Entwicklung der plastischen Dehnungen unter Zugbelastung ist zukünftig experimentell zu bestätigen.

## 6.2 Simulation von Bauteilversuchen

In diesem Abschnitt werden die Evolutionsansätze für die Simulation von Bauteilversuchen angewendet. Der erste Versuch ist der Vier-Punkt-Biegeversuch eines Stahlbetonbalkens B1.4.0 aus der Dissertation von Bausch [6]. Der zweite Versuch ist der Schubversuch S4 an einer Stahlbetonwand aus Maier u. Thürlimann [54]. Diese Versuche wurden ausgewählt, da sie die in Abschnitt 5.3 erwähnten Einschränkungen erfüllen. In beiden Versuchen ist das Betondruck-

versagen maßgebend, die vorliegenden Belastungen verursachen hauptsächlich biaxiale Spannungszustände und eine Rotation der Hauptverzerrungszustände wird nicht erwartet.

### 6.2.1 Vier-Punkt-Biegeversuch

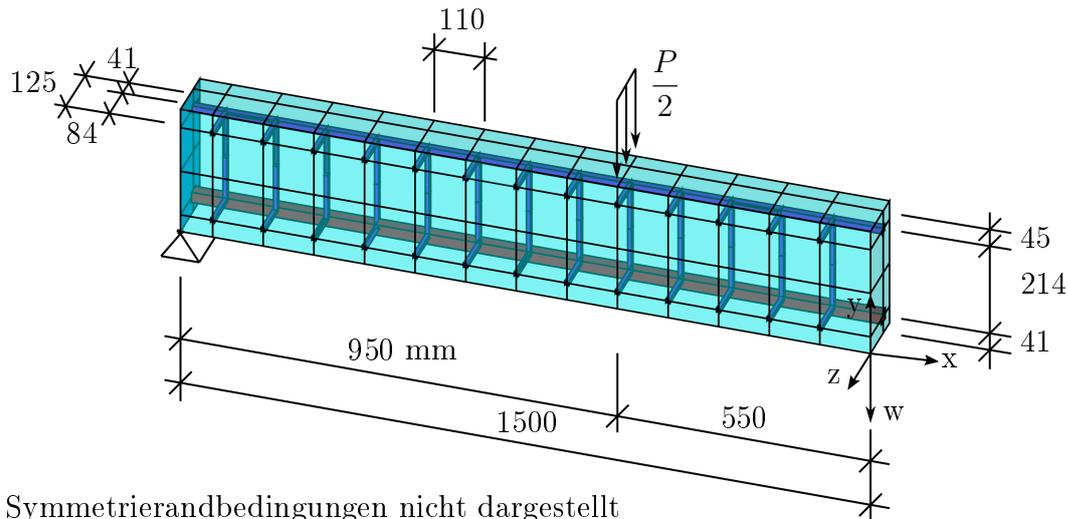
In Abbildung 6.8 ist eine Diskretisierung des Vier-Punkt-Biegebalkens B 1.4.0 nach Bausch [6] dargestellt. Längen- und Querschnittsabmessungen sowie die Bewehrungslagen sind der Abbildung 6.8 zu entnehmen. Unter Ausnutzung der doppelten Symmetrie wird lediglich ein Viertel des Balkens diskretisiert. Die Symmetrieebenen liegen bei den Koordinaten  $x = 0$  und  $z = 0$ . Senkrecht zu diesen Ebenen werden alle Knotenfreiheitsgrade gesperrt.

Für die Diskretisierung des Betons wird das Element SOLID185 aus ANSYS® [3] verwendet. Die experimentell ermittelten Materialeigenschaften des Betons und die verwendeten Modellparameter sind in Tabelle 6.2 aufgelistet. Da keine Materialversuche mit Ent- und Wiederbelastung vorliegen, müssen die Parameter zur Beschreibung der Fließ- und Schädigungsregel formal angenommen werden. Daher werden sie aus Abschnitt 6.1 übernommen.

Durch die Anpassung des Parameters  $\kappa_c$  an die uniaxiale Betondruckfestigkeit  $f_c$  nach Gleichung (5.46) weicht der Modellwert der Bruchstauchung  $\varepsilon_c$  nach Gleichung (5.45) von dem experimentell ermittelten Wert ab.

Tabelle 6.2: Experimentell ermittelte Materialeigenschaften nach Bausch [6] und verwendete Modellparameter für das Materialmodell aus Kapitel 5

Materialeigenschaft bzw. Modellparameter		Bausch [6]	Modell
Elastizitätsmodul	$E_c$	22 100 MPa	
POISSON-Zahl	$\nu_c$	0,2	
Uniaxiale Druckfestigkeit	$f_c$	-27,85 MPa	
Kopplungsparameter	$\beta$		0,25
Positive, plastische Dehnungsrate	$\kappa_t$		0,85
Positive, plastische Dehnungsgrenze	$\varepsilon_{0pl}$		0,5 ‰
Zugfestigkeit	$f_t$	2,8 MPa	
Zugentfestigungsparameter	$\Delta f_{tD}$		0,01 MPa
Bruchstauchung	$\varepsilon_c$	2,2 ‰	2,8 ‰



Symmetrierandbedingungen nicht dargestellt

Abbildung 6.8: Elementnetz der Simulation A, Längen- und Querschnittsabmessungen sowie Bewehrungslage des Vier-Punkt-Biegeversuchs B 1.4.0 nach Bausch [6]

Die Druck-, Zug- und Bügelbewehrung wird durch diskrete Stabelemente LINK180 aus ANSYS® [3] diskretisiert. In Tabelle 6.3 sind die Eigenschaften der Bewehrung zusammengestellt. Ihre nichtlinearen Materialeigenschaften werden durch reine Plastizitätsgesetze mit multi-linearer, isotroper Verfestigung beschrieben. Für die Bügelbewehrung werden die Materialeigenschaften der Druckbewehrung angenommen. Der Durchmesser der Bügelbewehrung beträgt 10 mm.

Tabelle 6.3: Eigenschaften der Zug- und Druckbewehrung nach Bausch [6]

Eigenschaft		Zugbewehrung	Druckbewehrung
Elastizitätsmodul	$E_s$	205 000 MPa	205 000 MPa
POISSON-Zahl	$\nu_S$	0,3	0,3
Streckgrenze	$f_y$	450 MPa	505 MPa
Bruchgrenze	$f_u$	610 MPa	750 MPa
Bruchdehnung	$\varepsilon_u$	120 ‰	60 ‰
Dehnung bei Verfestigungsbeginn	$\varepsilon_{sh}$	8 ‰	14 ‰
Durchmesser	$\varnothing$	28 mm	16 mm

Insgesamt werden drei Simulationen A bis C mit unterschiedlich feinen Elementnetzen durchgeführt. In Abbildung 6.8 sind die Elementgrößen der Simulation A im Verhältnis zu den Abmessungen des Bewehrungskorbes dargestellt.

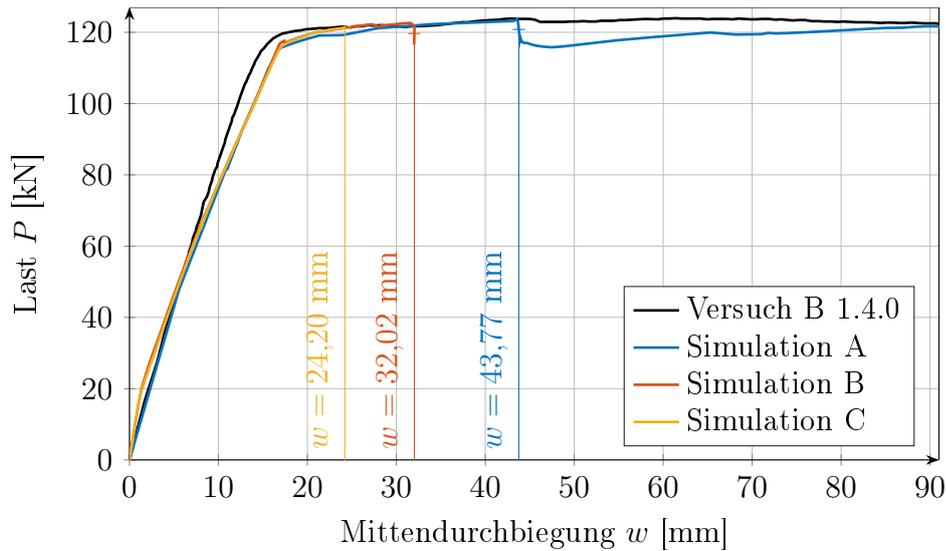


Abbildung 6.9: Netzabhängigkeit des hier vorgestellten Materialmodells im Vergleich mit der experimentellen Versuchskurve aus Bausch [6]

In Simulation B und C wird das Netz jeweils verfeinert. In Abbildung 6.10 sind die entsprechenden Elementnetze erkennbar.

In Abbildung 6.9 sind die drei Last-Verschiebungskurven aus Simulationen der Versuchskurve gegenübergestellt. Nach der in Bausch [6] enthaltenen Versuchsbeschreibung verhält sich der Stahlbetonbalken bis zum Fließen der Zugbewehrung näherungsweise linear elastisch. Mit Einsetzen des Fließens wird die maximale Traglast annähernd erreicht. Dieser Belastungszustand tritt bei einer Mittendurchbiegung  $w$  von ungefähr  $w = 17$  mm auf. Bei weiterer Verformungszunahme  $w$  kommt es lediglich zu einer geringen Laststeigerung der Last  $P$  und einem Versagen der Betondruckzone.

Alle Simulationen A bis C geben dieses globale Last-Verformungsverhalten richtig wieder. Daher stimmen die Simulationskurven mit der Versuchskurve in Abbildung 6.9 gut überein. Die maximale Traglast des Balkens wird richtig vorhergesagt. Bevor die Verzerrung des Verfestigungsbeginns  $\varepsilon_{sh}$  in der Zugbewehrung erreicht wird, versagt der Beton in der Druckzone, wie im Versuch beobachtet. Dieses Versagen ist in Abbildung 6.10 an den Längsstauchungen  $\varepsilon_x > \varepsilon_c$  gut erkennbar.

In Abhängigkeit vom Netzfeinheitsgrad tritt dieser Zustand zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf. Dieser Umstand wird auf die fehlenden Regularisierungsmethoden zur Erfassung der lokalisierten Entfestigung zurückgeführt, die

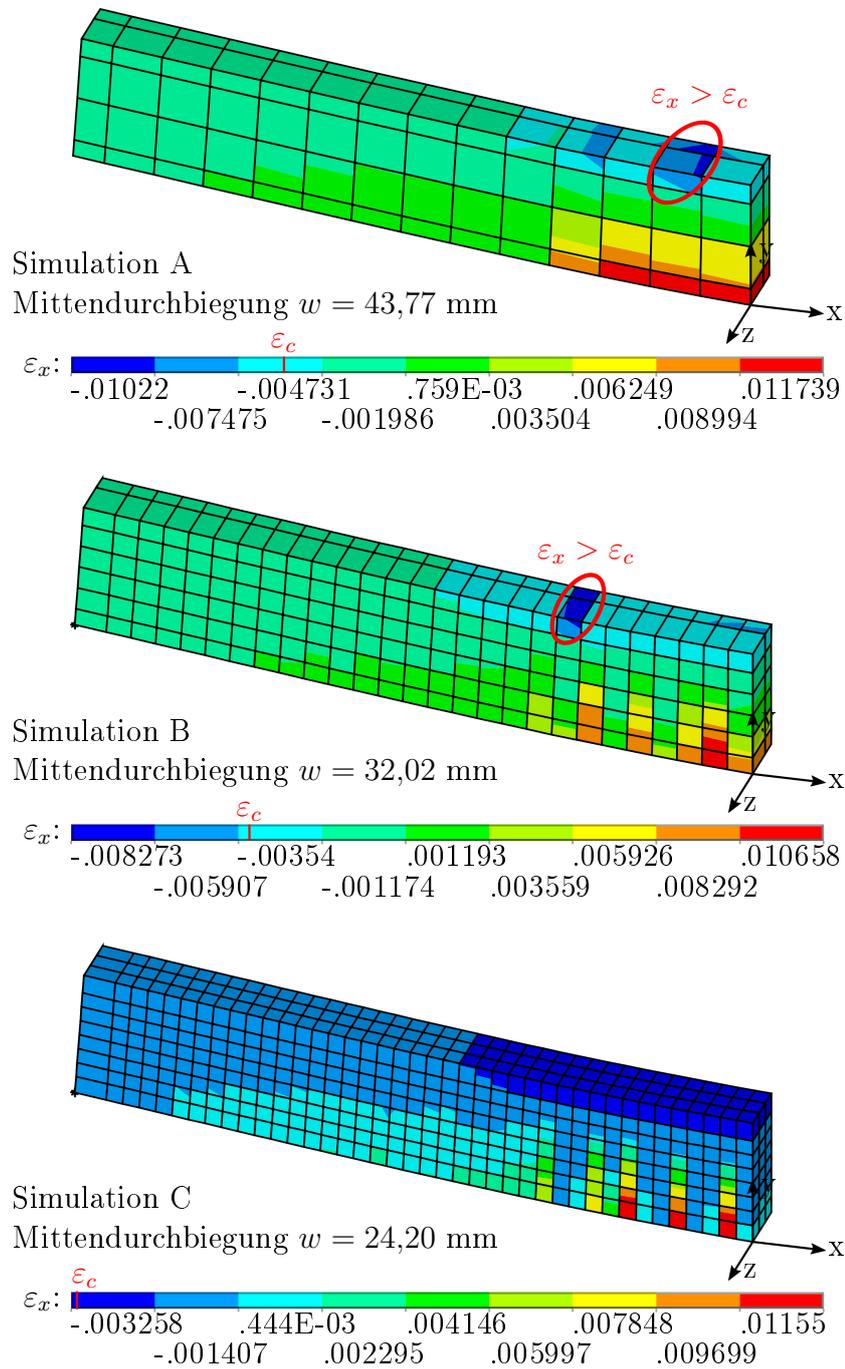


Abbildung 6.10: Verzerrungsverteilungen der in Abbildung 6.9 hervorgehobenen Belastungszustände

in Abschnitt 3.1.1 beschrieben wurde. Resultierende große Verzerrungsgradienten werden über Elementbereiche *verschmiert* ermittelt. Die Verzerrungen werden daher in großen Elementen (Simulation A) im Mittel stärker reduziert und die Bruchstauchung  $\varepsilon_c$  wird später überschritten, also bei größeren Mittendurchbiegungen  $w$ . Bei feinen Elementnetzen kommt es zusätzlich zu einem Konvergenzverlust der Iteration.

Das Biegeversagen im gegebenen Versuch wird fast ausschließlich durch das uniaxiale Druck- und Zugverhalten beeinflusst. Diese wurden bereits in den Abschnitten 6.1.1 und 6.1.7 durch die gegebenen Evolutionsansätze sehr gut abgebildet.

### 6.2.2 Schubversuch an einer Stahlbetonwand

Als Beispiel eines Bauteilversuches mit mehrachsigen Belastungszuständen wird der Schubversuch an einer Stahlbetonscheibe S4 aus Maier u. Thürlimann [54] herangezogen. Dieser ist in Abbildung 6.11 dargestellt. Durch eine vertikale Druckbelastung  $F_v$  und eine horizontale Schubbelastung  $F_h$  werden in der Scheibendruckzone, unten links, biaxiale Druckspannungszustände verursacht.

Abbildung 6.11 zeigt ebenfalls die Abmessungen, die Bewehrungslage und die verwendete Diskretisierung. Die untere Versuchskörperplatte wird als feste Einspannung aufgefasst. Die Belastung erfolgt über eine starre Lasteinleitungsplatte an der Oberseite der Wand. Die zulässigen Starrkörperbewegungen sind translatorische Verschiebungen in der  $x$ - $y$ -Ebene und eine Rotation um die  $z$ -Achse. Die Schubwand wird ausschließlich zwischen der festen Einspannung und der Lasteinleitungsplatte diskretisiert, wobei die Symmetrie zur Ebene  $z = 0$  genutzt wird.

Wie im vorangegangenen Beispiel in Abschnitt 6.2.1 wird für die Diskretisierung des Betons das Element SOLID185 aus ANSYS® [3] verwendet. Die experimentell von Maier u. Thürlimann [54] ermittelten Materialeigenschaften des Betons und die angesetzten Modellparameter sind in Tabelle 6.4 zusammengestellt.

Für die Bewehrungsstäbe werden Stabelemente LINK180 aus ANSYS® [3] verwendet. Tabelle 6.5 enthält die Eigenschaften der Bewehrungsstäbe. Wie zuvor werden diese durch ein reines Plastizitätsgesetz mit isotroper Verfestigung beschrieben.

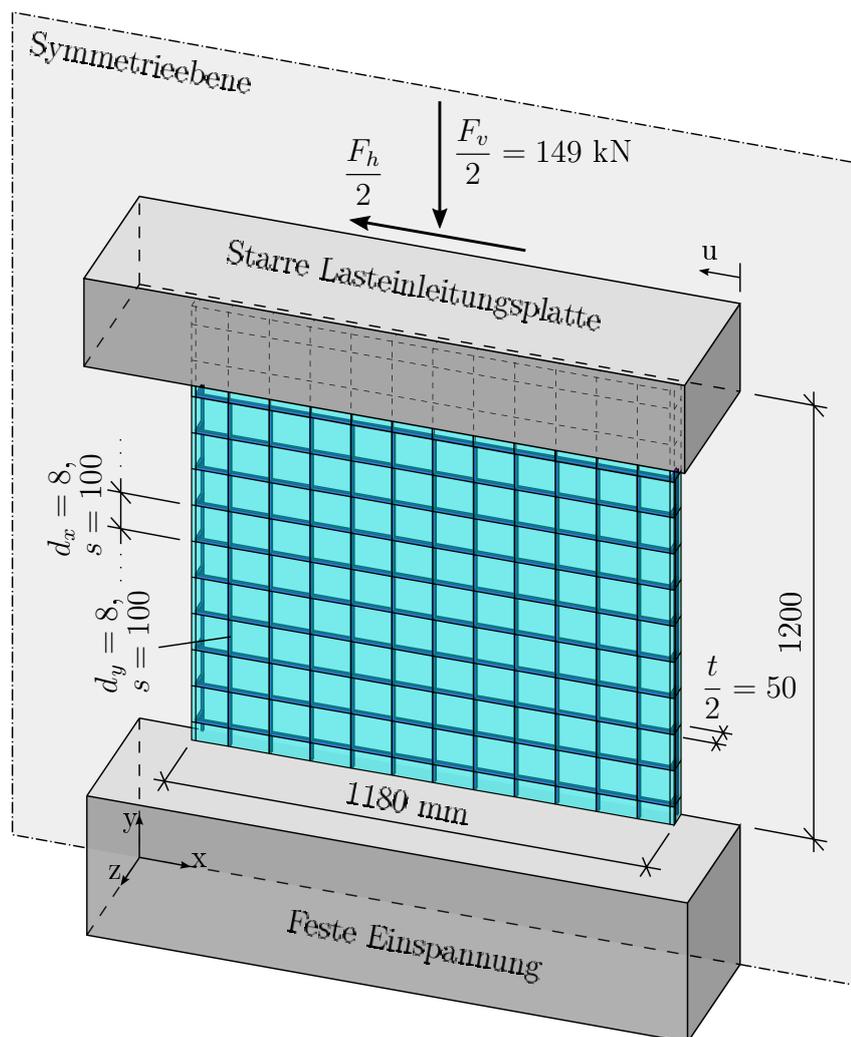


Abbildung 6.11: Abmessungen und Bewehrung des Versuchskörpers S4 aus Maier u. Thürlimann [54] und verwendete Diskretisierung

Tabelle 6.4: Betoneigenschaften im Versuch S4 aus Maier u. Thürlimann [54] und verwendete Modellparameter

Materialeigenschaft bzw. Modellparameter	Maier u. Thürlimann [54]	
Elastizitätsmodul	$E_c$	31 600 MPa
POISSON-Zahl	$\nu_c$	0,2
Uniaxiale Druckfestigkeit	$f_c$	-41,7 MPa
Kopplungsparameter	$\beta$	0,25
Positive, plastische Dehnungsrate	$\kappa_t$	0,85
Positive, plastische Dehnungsgrenze	$\varepsilon_{0pl}$	0,5 ‰
Zugfestigkeit	$f_t$	3,44 MPa
Zugentfestigungsparameter	$\Delta f_{tD}$	0,01 MPa

Tabelle 6.5: Materialeigenschaften der Bewehrungsstäbe im Versuch S4 aus Maier u. Thürlimann [54]

Eigenschaft	Maier u. Thürlimann [54]	
Elastizitätsmodul	$E_s$	198 000 MPa
POISSON-Zahl	$\nu_s$	0,3
Streckgrenze	$f_y$	574 MPa
Zugfestigkeit	$f_u$	764 MPa
Gleichmaßdehnung	$\varepsilon_u$	116 ‰
Dehnung bei Verfestigungsbeginn	$\varepsilon_{sh}$	24,6 ‰
Durchmesser	$\varnothing$	8 mm

Nach Maier u. Thürlimann [54] wirkt das Eigengewicht des Versuchsrahmens, der Pressen und der oberen Versuchskörperplatte mit 36 kN auf die Stahlbetonscheibe. Zusätzlich wird die Wand kraftgesteuert durch eine Vertikalkraft von 262 kN belastet. Die resultierende Vertikalkraft  $F_v = 298$  kN wird während des Versuches konstant gehalten. Im Modell der halben Schubwand wird die entsprechende Last  $F_v/2$  ebenfalls kraftgesteuert aufgebracht.

Die horizontale Belastung erfolgt sowohl im Versuch, als auch im Modell weggesteuert durch eine Verschiebung  $u$  der starren Lasteinleitungsplatte. Die dafür erforderliche, horizontale Zwangskraft  $F_h$  beziehungsweise  $F_h/2$  wird gemessen.

In Abbildung 6.12 ist die resultierende Last-Verschiebungskurve aus dem Versuch der entsprechenden Simulationskurve gegenübergestellt. Die Rissentwicklung während des Versuches ist in Maier u. Thürlimann [54] für einzelne Laststufen dokumentiert. Sie sind in den Abbildungen 6.13 und 6.14 dargestellt. Zum Vergleich sind die simulierten, plastischen Verzerrungsfelder der größten Hauptverzerrungen  $\varepsilon_{(1)}^{pl}$  ebenfalls abgebildet. Positive, plastische Dehnungen entsprechen der simulierten Rissentwicklung im Modell. Die Laststufen sind in Tabelle 6.6 aufgelistet und in Abbildung 6.12 markiert.

Zu Beginn der Simulation verhält sich die Schubwand im Vergleich zum Versuch zu steif. Mit zunehmender Verschiebung  $u$  wächst die Zwangskraft  $F_h$  zu stark an.

In Laststufe A sind sowohl im Versuch, als auch im Materialmodell Zugrisse am unteren Zugrand (rechter Rand) erkennbar. Die tangentielle Steifigkeit beider Last-Verschiebungskurven nimmt durch die resultierende Entfestigung

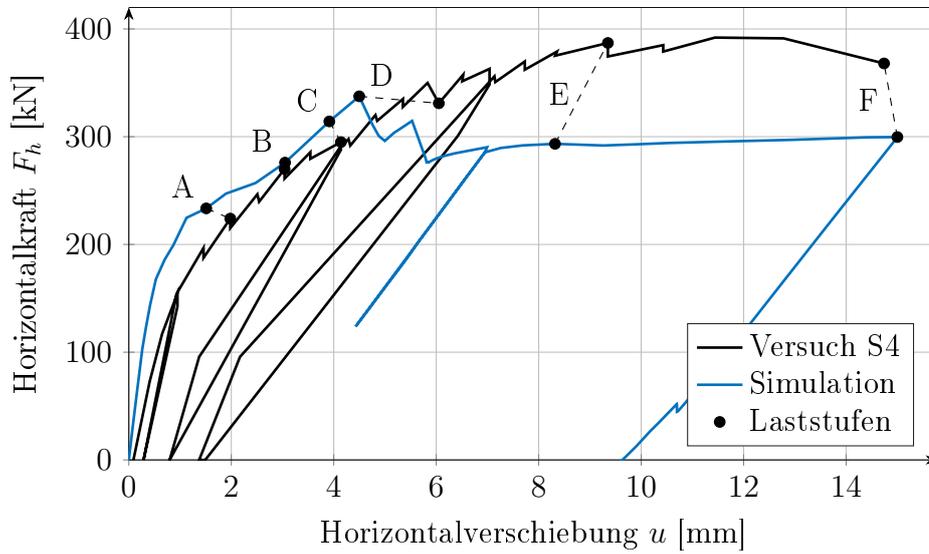


Abbildung 6.12: Vergleich der Last-Verschiebungskurve des Versuches S4 aus Maier u. Thürlimann [54] mit der simulierten Kurve und Laststufen aus Tabelle 6.6

Tabelle 6.6: In den Abbildungen 6.12, 6.13 und 6.14 gegenübergestellte Laststufen

Laststufe	Maier u. Thürlimann [54]		Simulation		
	$u$ [mm]	$F_h$ [kN]	$u$ [mm]	$F_h$ [kN]	
A	13	1,98	224	1,15	233
B	15	3,04	270	3,04	276
C	17	4,14	295	3,91	314
D	30	6,05	331	4,50	338
E	46	9,35	387	8,32	293
F	Bruch	14,74	368	15,00	300

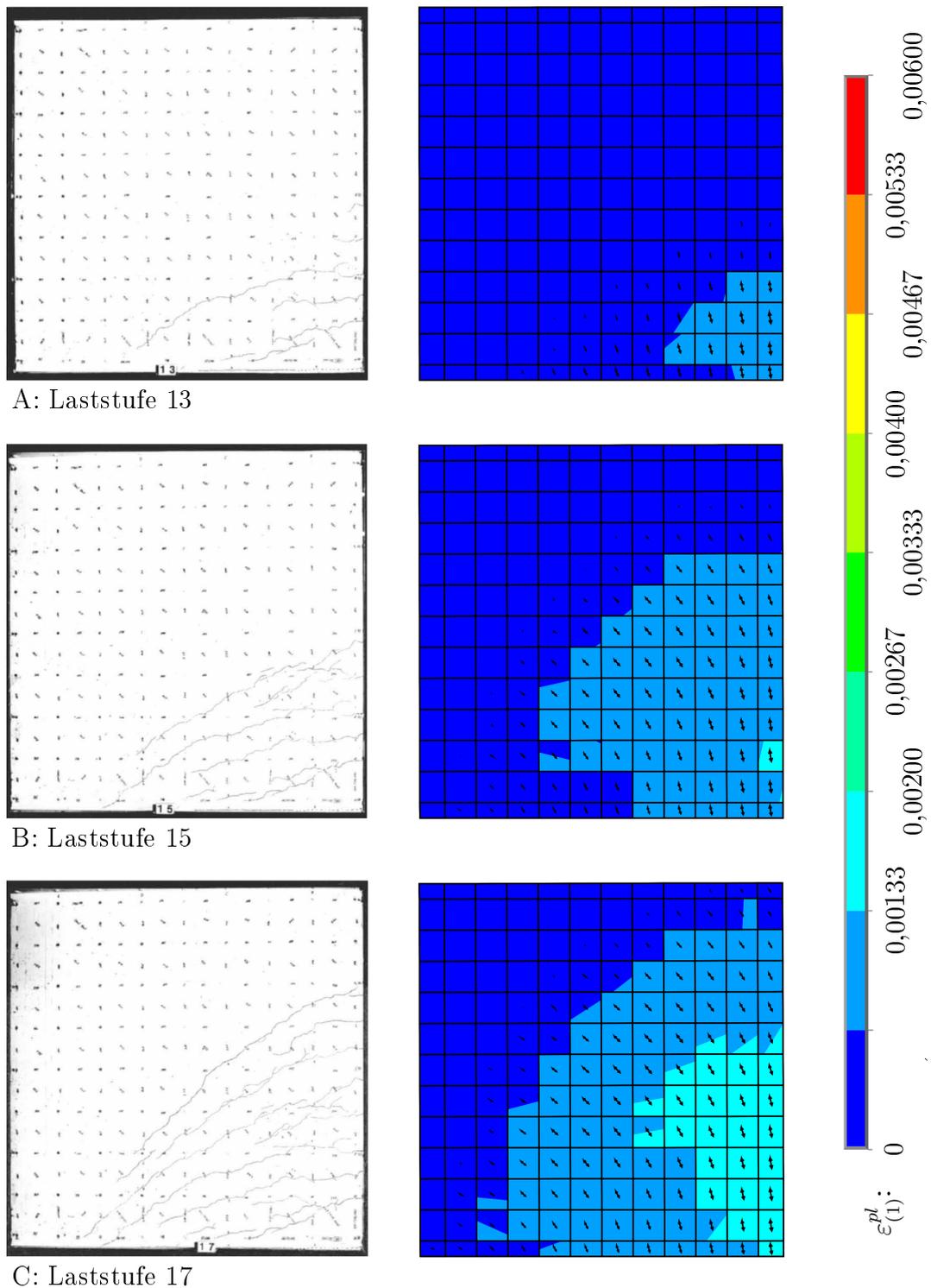


Abbildung 6.13: Vergleich der Rissbilder des Versuches S4 aus Maier u. Thürlimann [54] mit den plastischen Hauptverzerrungen  $\varepsilon_{(1)}^{pl}$  und ihren Neigungen in der Simulation (Laststufen 13, 15 und 17)

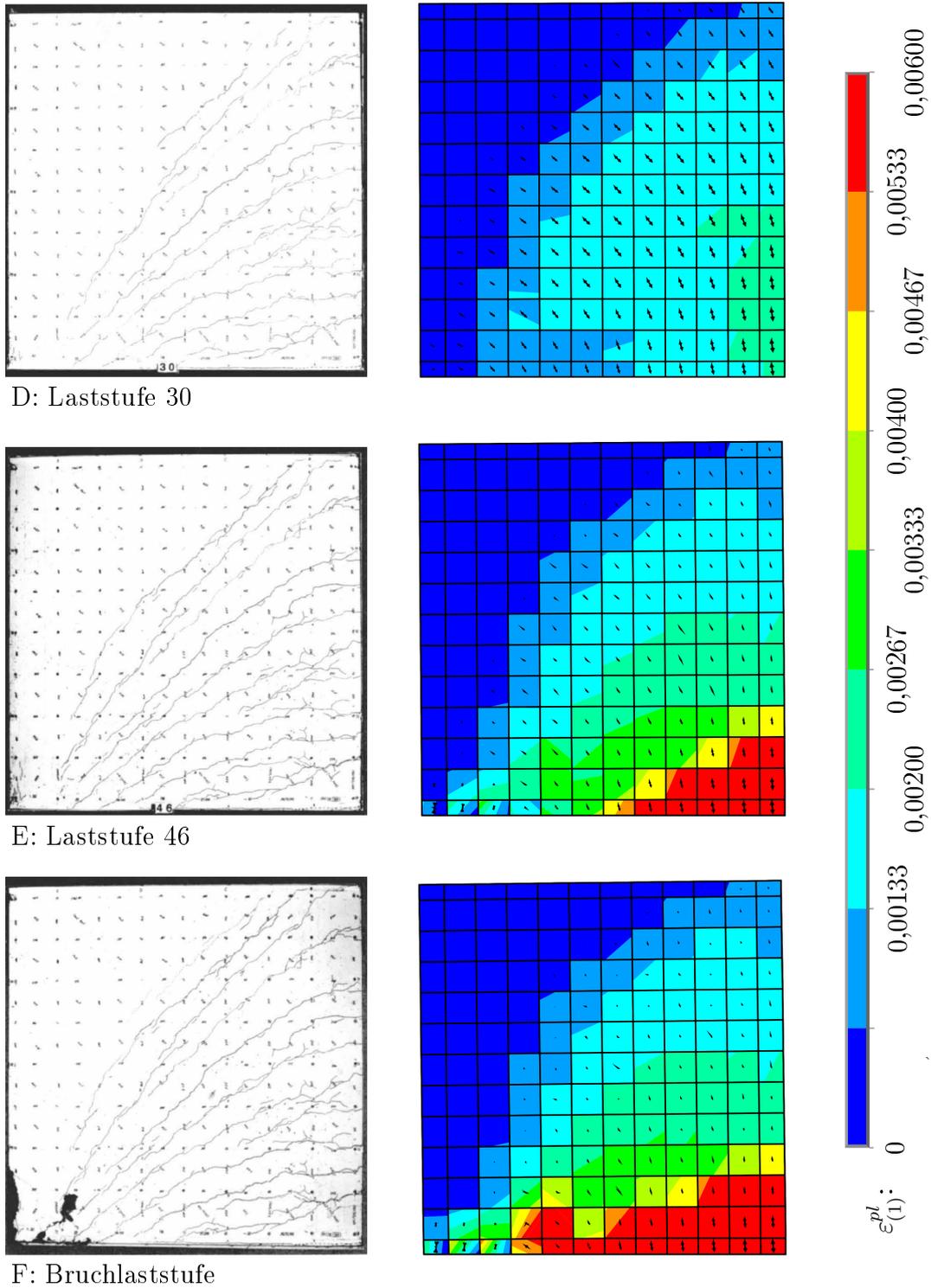


Abbildung 6.14: Vergleich der Rissbilder des Versuches S4 aus Maier u. Thürlimann [54] mit den plastischen Hauptverzerrungen  $\epsilon_{(1)}^{pl}$  und ihren Neigungen in der Simulation (Laststufen 30, 46 und Bruchlaststufe)

ab.

Bis zur Laststufe D wächst der gerissene Bereich in horizontale und vertikale Richtung an. Die Risse zeigen einen gekrümmten Verlauf. Am Zugrand ist dieser annähernd horizontal. In der Scheibendruckzone (unten links) nimmt die Neigung nach Maier u. Thürlimann [54] von  $10^\circ$  des untersten bis zu  $60^\circ$  des obersten Risses kontinuierlich zu. Qualitativ ist dieses Risswachstum sowie der gekrümmte Verlauf und die Neigung der Risse auch im Modell erkennbar. Allerdings wird die Laststufe D bereits bei einer zu geringen horizontalen Verschiebung  $u$  erreicht.

Beim Überschreiten der Laststufe D bilden sich in der Scheibendruckzone vertikale Risse. Die horizontale Kraft  $F_h$  steigt mit zunehmender Verformung  $u$  bis zur Laststufe E im Versuch weiter an. Laut Maier u. Thürlimann [54] kommt es beim Bruch zu einem Druckversagen in einem etwa  $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$  großen Bereich am unteren Druckrand.

In der Simulation bilden sich beim Überschreiten der Laststufe D bis zum Erreichen der Stufe E in der Scheibendruckzone (unten, links) ebenfalls vertikale Risse. Allerdings beschränkt sich dieser Bereich auf die unterste Elementreihe im Modell, die eine Höhe von lediglich  $5\text{ cm}$  aufweist. Durch diese sehr lokale Zerstauchung kommt es zur Abnahme der Kraft  $F_h$ . Mit zunehmender Verformung  $u$  konzentrieren sich die plastischen Verzerrungen in der gesamten, unteren Elementreihe. Die plastischen Verzerrungen der übrigen Elemente bleiben annähernd konstant.

Abbildung 6.15 zeigt, dass die untere, versagende Elementreihe durch reine Druckzustände beansprucht werden. Somit ist die Einschränkung eingehalten, die vorgestellten Evolutionsansätze nicht für die Simulation von Bauteilversuche zu verwenden, in denen das Zugversagen maßgebend ist. Trotz horizontaler Druckspannungen kommt es zu einem qualitativ richtigen Zuwachs der positiven, plastischen Verzerrungen in der horizontalen Richtung.

Bis zum Erreichen der maximalen Traglast in der Simulation wird das Verhalten der Schubwand qualitativ gut abgebildet. Das Risswachstum und die Rissorientierungen stimmen ebenso gut überein. Der Versagensmechanismus auf Druck wird ebenfalls richtig vorhergesagt. Der annähernd parallele Verlauf der Entlastungsgeraden nach einer horizontalen Verschiebung von  $u = 7\text{ mm}$  in Abbildung 6.12 zeigt die Übereinstimmung der Steifigkeit der geschädigten

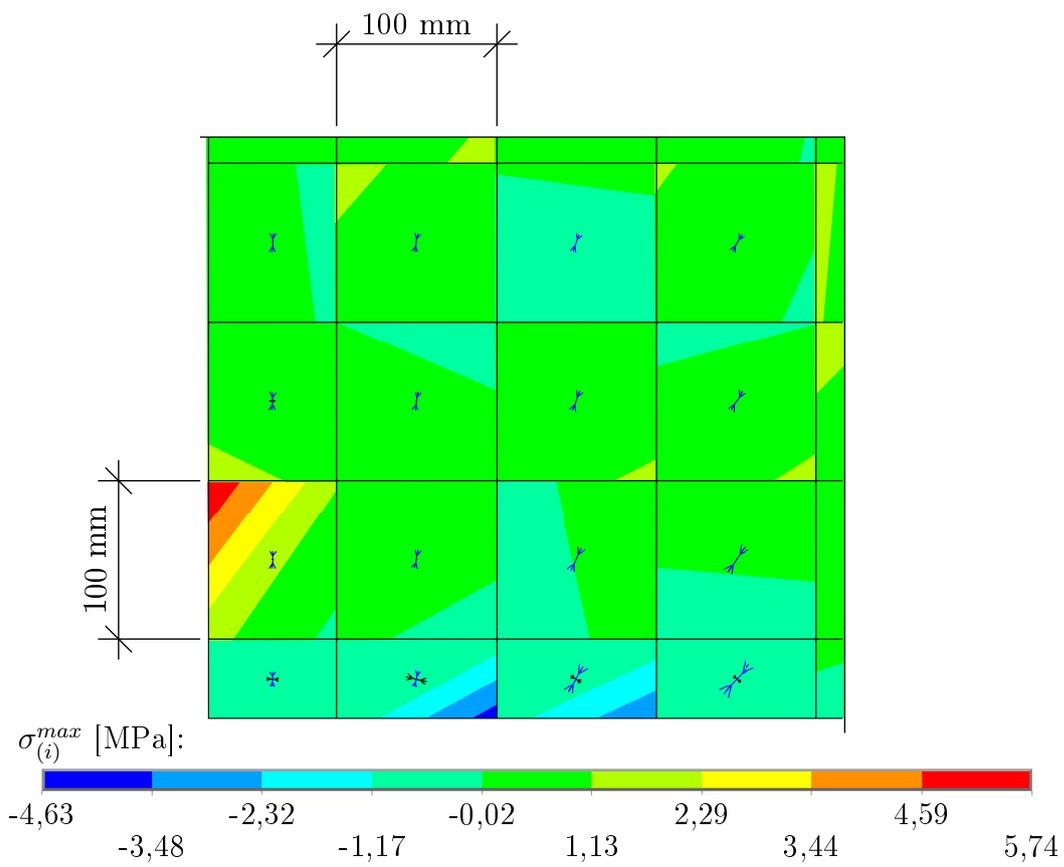


Abbildung 6.15: Druckspannungszustände in der x-y-Ebene der Scheibendruckzone nach Überschreitung der Laststufe D

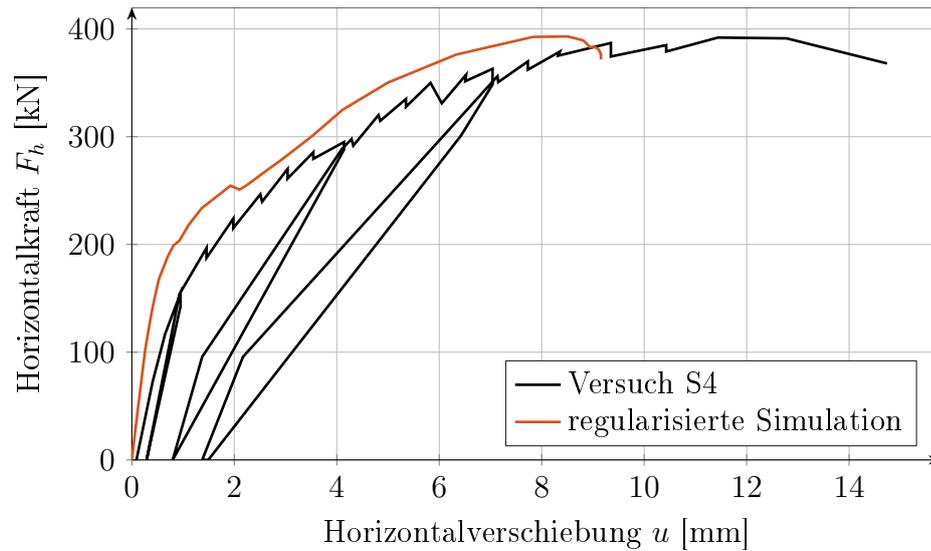


Abbildung 6.16: Vergleich der Lastverschiebungskurve des Versuches S4 aus Maier u. Thürlimann [54] mit einer künstlich regularisierten Modellkurve

Schubwand im Versuch und in der Simulation.

Wie schon im vorangegangenen Beispiel des Vier-Punkt-Biegeversuches in Abschnitt 6.2.1 fehlt eine geeignete Regularisierung, um die falsche Lokalisierung der Entfestigung in der untersten Elementreihe zu verhindern. In einer weiteren Simulation wird nachgewiesen, dass das Materialmodell mit einer entsprechenden Regularisierungsmethode in der Lage wäre, den gegebenen Versuch richtig abzubilden. Dabei wird die lokalisierte Druckentfestigung verhindert, indem die Druckfestigkeit des unteren, linken Elementes künstlich auf  $f_c = -50$  MPa angehoben wird. Die entsprechende Simulationskurve ist in Abbildung 6.16 der Versuchskurve gegenübergestellt. Der Verlauf der Kurve und die vorhergesagte Traglast stimmen gut überein. Das lokalisierte Druckversagen wird durch die genannte Maßnahme aber lediglich verzögert. Mit Einsetzen der Druckentfestigung kommt es zudem zu einem vorzeitigen Konvergenzverlust in der Berechnung.

### 6.3 Bewertung der Ergebnisse

Mit Ausnahme des Materialversuches unter triaxialem Druck aus Abschnitt 6.1.6 und unter biaxialem Druck aus Abschnitt 6.1.5 wurden mit den vorgestellten Evolutionsansätzen für Beton qualitativ gute Ergebnisse erzielt. Her-

vorzuheben ist, dass sich die Parameteranpassung auf ingenieuranschaulich nachvollziehbare Materialeigenschaften beschränkt. Nur der Elastizitätsmodul  $E_c$  oder die Druckfestigkeit  $f_c$  wurden mit den Angaben der einzelnen Versuche abgeglichen. Eine Kalibrierung der numerischen Modellparameter erfolgte ausschließlich anhand des uniaxialen Druck- und des uniaxialen Zugversuches. Eine weitergehende Anpassung dieser Parameter an die übrigen Versuche war nicht notwendig.



# Kapitel 7

## Schlussfolgerung und Ausblick

### 7.1 Schlussfolgerung

Anhand von uniaxialen, biaxialen und triaxialen Betondruckversuchen mit Ent- und Wiederbelastung wurden Evolutionsgleichungen für die plastische Verzerrung formuliert. Sie geben die plastischen Verzerrungsevolutionen unabhängig vom Spannungszustand der vorliegenden Druckversuche sehr gut wieder.

Die Beschreibung der orthotropen Steifigkeit des geschädigten Materials konnte auf drei Zustandsvariablen  $\Phi_{(i)}$  begrenzt werden. Dadurch wurde eine Auswertung triaxialer Würfeldruckversuche mit Ent- und Wiederbelastung hinsichtlich einer orthotropen Schädigungsentwicklung möglich. Aufgrund der fehlenden, statistischen Absicherung durch die geringe Versuchsanzahl war eine Definition getrennter Evolutionsgleichungen für die Schädigung nicht zielführend. Daher wurde die Schädigungsentwicklung an die Evolution der plastischen Verzerrung über einen Kopplungsparameter  $\beta$  gekoppelt. Durch diese Kopplung werden gleichzeitig weniger Modellparameter benötigt. Für Beton mit einer Druckfestigkeit  $f_c \approx -42$  MPa wurde die Eignung dieser Kopplung nachgewiesen.

Damit hängen alle Zustandsvariablen der vorgestellten Materialroutine allein von den Gesamtverzerrungszuständen des Elementes ab und sind direkt, ohne Iteration auf Materialpunktebene lösbar. Iterationen sind ausschließlich auf Systemebene erforderlich. Der numerische Aufwand zur Auswertung der Materialroutine ist sehr gering.

In Simulationen von uni- und biaxialen Druckversuchen stimmen sowohl die plastischen Verzerrungszustände, als auch die orthotropen Schädigungszustände sehr gut mit den experimentell ermittelten Größen überein. Der stärkere Schädigungszuwachs gedehnter Querrichtungen durch Querschnittsverluste kann nachvollzogen werden. Das mechanische Verhalten aller Raumrichtungen wird somit für diese Belastungszustände richtig wiedergegeben.

Die zur Verfügung stehenden Versuchsdaten beinhalten keine biaxialen Druckversuche, in denen die Proben in mehr als zwei Richtungen gestaucht wurden. Die Anwendung der Evolutionsansätze auf entsprechende Versuche ohne Ent- und Wiederbelastung zeigte Abweichungen der simulierten Traglast von 11 % im Vergleich zu der Traglast im Versuch.

Bei der Simulation von triaxialen Druckversuchen führt die Kopplung der Schädigung an die Plastizität noch zu einer Überschätzung des Schädigungszuwachses.

Anhand eines Vier-Punkt-Biegeversuches und eines Schubversuches an einer Stahlbetonscheibe wurde die Eignung der Evolutionsansätze für Bauteilversuche bestätigt, in denen die folgenden Einschränkungen berücksichtigt werden. Ein Druckversagen muss maßgebend sein, es dürfen keine triaxialen Spannungszustände auftreten und die Hauptverzerrungsrichtungen dürfen nur geringfügig rotieren. Sowohl die Traglasten, als auch die Versagensmechanismen beider Versuche wurden richtig simuliert. Unsicherheiten treten nur aufgrund der Regularisierungsverfahren bezüglich der lokalisierten Entfestigung auf, die im Rahmen dieser Arbeit noch nicht vorgesehen sind.

Sämtliche Simulationen im Kapitel 6 wurden mit einem allgemeingültigen Satz numerischer Parameter durchgeführt. Nach der Kalibrierung dieser Parameter an einen uniaxialen Druckversuch wurden ausschließlich die ingenieuranschaulich nachvollziehbaren Materialeigenschaften, wie der Elastizitätsmodul  $E_c$  oder die Druckfestigkeit  $f_c$ , mit den Angaben zu den einzelnen Versuchen abgeglichen. Daher ist die Unabhängigkeit des Materialmodells von unterschiedlichen uni- und biaxialen Belastungszuständen gegeben. Nach einer Beseitigung der Unsicherheiten in der Schädigungsevolution durch Versuchsdaten für weitere Druckspannungszustände scheint die Formulierung allgemeingültiger Evolutionsgleichungen für die Plastizität und die Schädigung möglich.

## 7.2 Ausblick

Für die Simulation weiterer Belastungszustände sowohl an normal-, als auch an hochfestem Beton sind die vorgestellten Evolutionsansätze weiterzuentwickeln. Dafür sind zunächst weitere experimentelle Untersuchungen erforderlich, die im Rahmen dieser Arbeit noch fehlten, um Unsicherheiten hinsichtlich der orthotropen Schädigungsentwicklung zu reduzieren.

Basierend auf den Erkenntnissen der vorliegenden Arbeit soll im Rahmen eines eigens initiierten DFG-Forschungsprojektes eine systematische, experimentelle Ermittlung orthotroper Schädigungsvorgänge für verschiedene Spannungsverhältnisse durchgeführt werden. Der Einfluss der Beanspruchung auf die mechanischen Eigenschaften aller Raumrichtungen wird an uniaxialen, biaxialen und triaxialen Druckversuchen untersucht. Die Experimente beinhalten mehrere Ent- und Wiederbelastungen vor dem Versagen, um die Evolution der inelastischen Verzerrungszustände zu beobachten. Vor jeder Wiederbelastung werden die Probekörper zusätzlich in alle Raumrichtungen durch uniaxialen Druck belastet, um alle Elastizitätskonstanten der orthotropen Steifigkeit des geschädigten Materials zu bestimmen. Die Auswertung der Versuche kann daher ohne die Reduktion auf drei Schädigungszustandsvariablen  $\Phi_{(i)}$  aus Abschnitt 5.2.2 erfolgen.

Vergleichbare Versuche mit Rotation der Belastungsrichtung wurden bereits in van Mier [60] durchgeführt (Abbildung 7.1). Durch diese wenigen Einzelversuche werden allerdings nur einzelne Schädigungszustände vollständig wiedergegeben. Für die Herleitung der gesamten Schädigungsevolution reichen diese nicht aus. Sie zeigen aber, dass die Durchführung solcher Versuchsabläufe grundsätzlich möglich ist.

Mit den neuen, genaueren Versuchsdaten kann die Abhängigkeit der Schädigungsentwicklung von verschiedenen Spannungszuständen untersucht werden. Eine Erweiterung des vorhandenen Schädigungsevolutionsgesetzes durch die gefundene Abhängigkeit wird auch die Berechnung von triaxialen Belastungsversuchen ermöglichen.

Zusätzliche Erkenntnisse über die Risschließung der Querschlüsse bei rotierender Druckbelastung werden mit dieser Art von Versuchen ebenfalls gewonnen. Diese sind unbedingt erforderlich, um die Einschränkung eines zukünfti-

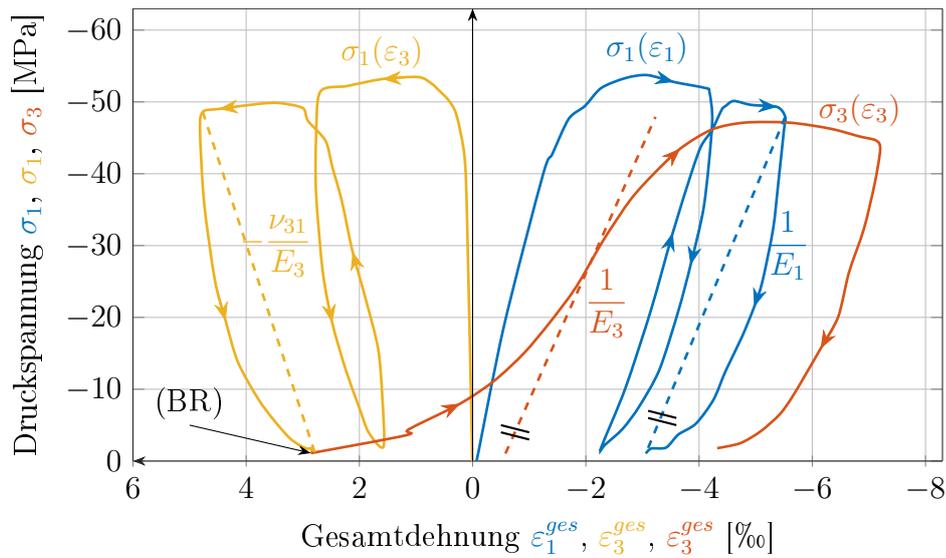


Abbildung 7.1: Uniaxialer Druckversuch 7A1-4 nach van Mier [60] mit Rotation der Belastungsrichtung (BR) und bestimmbare Elastizitätskonstanten des geschädigten Probekörpers

gen Materialmodells auf Bauteilversuche ohne Rotation der Hauptverzerrungszustände zu beseitigen.

Der annähernd parallele Verlauf der idealisierten Entlastung der Richtung (1) (---) und der maximalen Tangente bei der Belastung der Richtung (3) (---) in Abbildung 7.1 lässt die Vermutung zu, dass die oft angenommene, isotrope Schädigungsentwicklung vieler Materialmodelle für Beton experimentell bestätigt werden kann. Zwar ist der Probekörper durch Quersugrisse zunächst orthotrop und stärker in Richtung (3) geschädigt, bei der Druckbelastung in Richtung (3) werden die Quersugrisse aber geschlossen und die Steifigkeit der Probe nimmt wieder zu.

In Abbildung 7.2 wird die Möglichkeit einer Erweiterung der in dieser Arbeit vorgestellten, orthotropen Schädigungsevolution zur Berücksichtigung der Risschließung geprüft. Bis zur Belastungsrotation (BR) folgt die Schädigungsevolution den in dieser Arbeit vorgestellten Evolutionsansätzen. Nach der Belastungsrotation wird die stärkere Schädigung  $\Phi_{(3)} > \Phi_{(1)}$  der Probe in der gedehnten Richtung (3) beibehalten. Sobald die Probe durch die Druckbelastung in Richtung (3) gestaucht wird, wird die Schädigungsvariable  $\Phi_{(3)}$  mit der Schädigung  $\Phi_{(1)}$  der Richtung (1) gleichgesetzt.

Qualitativ werden die Spannungs-Verzerrungskurven des Versuches durch

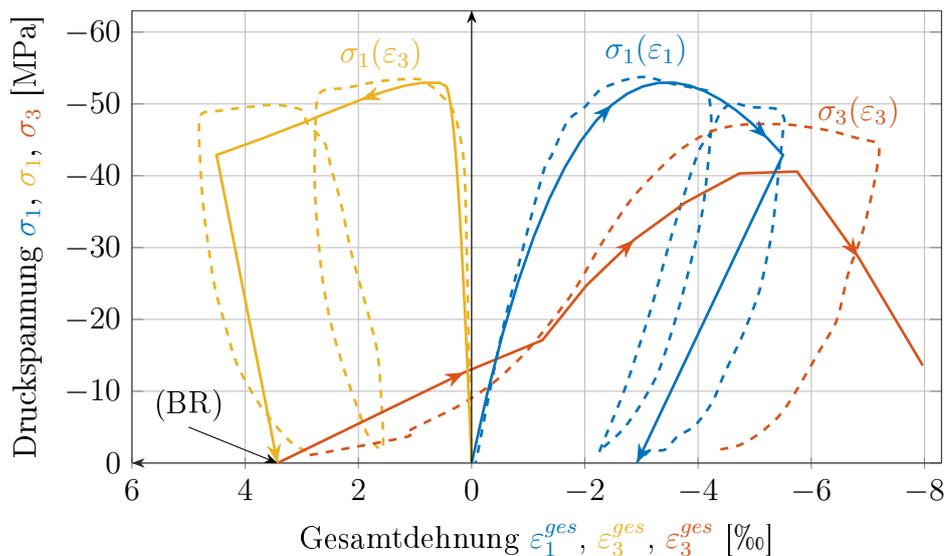


Abbildung 7.2: Vergleich des uniaxialen Druckversuches 7A1-4 (---) nach van Mier [60] mit einer Simulation (—) unter Berücksichtigung der Risschließung nach Belastungsrotation (BR)

die Kurven der Simulation sehr gut wiedergegeben. Die nach Abschnitt 5.2.2 experimentell basierten, orthotropen Schädigungsevolutionen beschreiben die Steifigkeit der Probenrichtungen mit offenen, *aktiven Rissen*. Die Steifigkeit der Probenrichtungen mit geschlossenen, *passiven Rissen* wird durch die Schädigung gut abgebildet, die sich aus der Evolution für gestauchte Richtungen ergibt. In einem zukünftigen Materialmodell für Beton könnte ein isotropes Schädigungsgesetz zielführend sein, das um die orthotropen Schädigungszustände erweitert wird, die in dieser Arbeit experimentell ermittelt wurden. Auf diese Weise können aktive Risse berücksichtigt werden.

Ein zukünftiges Materialmodell sollte des Weiteren um geeignete Regularisierungsmethoden zur Berücksichtigung des lokalisierten Entfestigungsverhaltens erweitert werden. Auf diese Weise kann die in Abschnitt 6.2.1 gezeigte Netzabhängigkeit vermieden werden. Es ist allerdings noch zu klären, inwieweit die in Abschnitt 1.2 genannten, klassischen Regularisierungsverfahren auf die in dieser Arbeit formulierten Evolutionsgesetze übertragbar sind.



# Anhang A

## Formelsammlung zur Tensorrechnung

Die verwendete Tensoralgebra und Tensoranalysis basiert auf den Beschreibungen von Chen u. Han [16] und Itskov [38]. Die Darstellung von Tensoren und Tensoroperationen sind überwiegend aus der Arbeit von Flatten [26] entnommen. Eine Auswahl der benötigten Rechenregeln werden in diesem Abschnitt zusammengefasst.

### A.1 Basissystem

In dieser Arbeit wird die Lage eines Teilchens ausschließlich in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten beschrieben. Die Basisvektoren kartesischer Koordinatensysteme  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  sind orthonormiert. Daher gilt nach Definition

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $\delta_{ij}$ , das sogenannte KRONECKER Delta oder KRONECKER Symbol, folgendermaßen definiert ist:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Nach Itskov [38] sind wegen der Definition (A.1) orthonormierte Basen zu sich selbst dual oder reziprok. Daher entfällt der Unterschied zwischen ko- und

kontravarianten Basissystemen und für die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{e}^i$  gilt

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.3})$$

Daher werden in dieser Arbeit nur die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  verwendet.

## A.2 Darstellung von Vektoren und Tensoren

Vektoren und Tensoren werden in vier verschiedenen Darstellungsweisen dargestellt. In der *symbolischen Schreibweise* werden sie durch fett gedruckte Buchstaben repräsentiert, in der *Basisdarstellung* durch die Koeffizienten ihrer Komponenten mit dazugehörigen Basisvektoren, in der *Indexschreibweise* lediglich durch die Koeffizienten der Komponenten und in Form von *Spaltenmatrizen* bzw. quadratischen Matrizen. Die hier verwendete Indexschreibweise ist in Chen u. Han [16] beschrieben. Für Vektoren und Tensoren erster Stufe ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\underbrace{\mathbf{a}}_{\text{Symbolische Schreibweise}} = \underbrace{a_i \mathbf{e}_i}_{\text{Basisdarstellung}} = \underbrace{a_i}_{\text{Indexschreibweise}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}}_{\text{Spaltenmatrix}}. \quad (\text{A.4})$$

Die Indexschreibweise ist lediglich eine Abkürzung der Basisdarstellung. Der Index  $i$  wird *freier Index* genannt. Er gibt eindeutig die Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  vor, die dem Koeffizienten  $a_i$  zugeordnet sind. Die Angabe der Richtungen  $\mathbf{e}_i$  der einzelnen Komponenten kann daher entfallen.

Für Tensoren zweiter und vierter Stufe ergeben sich analog die folgenden Schreibweisen:

$$\mathbf{a} = a_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbb{A} = A_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = A_{ijkl}. \quad (\text{A.6})$$

In der Indexschreibweise sind die Stufe und die zugehörige Tensorbasis an der Anzahl der freien Indizes erkennbar.

Um in der Indexschreibweise vorkommende Ausdrücke noch weiter zu verkürzen, wird die EINSTEIN'sche *Summenkonvention* verwendet. Sie ist ebenfalls in Chen u. Han [16] beschrieben. Wenn in einem Term ein Index genau zweimal auftaucht, wird über diesen summiert. Das folgende lineare Gleichungssystem lässt sich auf diese Weise verkürzen:

$$\begin{aligned}b_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j = a_{1j}x_j, \\b_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j = a_{2j}x_j, \\b_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j = a_{3j}x_j.\end{aligned}$$

Der doppelte Index  $j$  wird *stummer Index* oder auch *Summenindex* genannt. Er muss in keinem weiteren Term einer Gleichung auftauchen. Durch einen freien Index  $i$  lassen sich die drei Gleichungen weiter zusammenfassen:

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = a_{ij}x_j.$$

Freie Indizes müssen genau einmal in jedem Term einer Gleichung auftreten. In der Matrix- bzw. Vektorschreibweise gilt die EINSTEIN'sche Summenkonvention nicht.

Für ein besseres Verständnis der Tensorrechenregeln bietet sich die Verwendung der Basisdarstellung an. Sie wird in den folgenden Abschnitten A.3 und A.4 verwendet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden in den verbleibenden Abschnitten der vorliegenden Arbeit die symbolische Schreibweise und die Indexschreibweise bevorzugt genutzt.

### A.3 Tensoroperationen

In diesem Abschnitt werden zunächst die wichtigsten Operationen der Tensorrechnung zusammengefasst.

#### Addition:

Zwei Tensoren mit gleicher Stufe und gleicher Tensorbasis werden addiert, indem die Koeffizienten ihrer Komponenten addiert werden. Am Beispiel der Addition von Tensoren zweiter Stufe ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= a_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) + b_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (a_{ij} + b_{ij})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= c_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Alle vorkommenden Indizes  $i$  und  $j$  sind freie Indizes, die in jedem Term der Gleichung genau einmal vorkommen. Die Stufe des resultierenden Tensors ist identisch mit den Stufen der Ausgangstensoren.

#### Dyadisches Produkt:

Die Koeffizienten aller Komponenten zweier Ausgangstensoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  werden multipliziert. Die Tensorbasen der Ausgangstensoren spannen einen Tensorproduktraum auf, der sich aus dem dyadischen Produkt der Ausgangsbasen ergibt. Im folgenden Beispiel liefert das Produkt eines Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{a}$  mit einem Tensor erster Stufe  $\mathbf{b}$  einen Tensor dritter Stufe  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= a_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes b_k \mathbf{e}_k = a_{ij} b_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \\ &= C_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Alle vorkommenden Indizes sind freie Indizes. Die Stufe des resultierenden Tensors entspricht der Summe der Stufen der beiden Ausgangstensoren.

**Einfache Überschiebung:**

Bei der einfachen Überschiebung von zwei Tensoren wird die letzte Basis des ersten Tensors mit der ersten Basis des zweiten Tensors skalar multipliziert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot b_{lm}(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \\
 &= a_{ijk}b_{lm}(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m) \\
 &= a_{ijk}b_{lm}\delta_{kl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m) \\
 &= a_{ijk}b_{km}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m) = C_{ijm}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m) = \mathbb{C}. \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Wegen (A.2) wird der Index  $l$  gleich  $k$  gesetzt, da alle übrigen  $\delta_{lk}$  entfallen. Der Index  $k$  wird dadurch zu einem Summenindex. Alle verbleibenden Indizes sind freie Indizes. Die Stufe des resultierenden Tensors entspricht der Summe der Stufen der Ausgangstensoren minus zwei (vgl. Pfister [71]).

**Doppelte Überschiebung:**

Im Vergleich zur einfachen Überschiebung werden bei der doppelten Überschiebung zwei Basen skalar multipliziert. Die Stufe des resultierenden Tensors entspricht daher der Summe der Stufen der Ausgangstensoren minus vier:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} : \mathbf{b} &= a_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : b_{kl}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = a_{ij}b_{kl}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) \\
 &= a_{ij}b_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} = a_{ij}b_{ij} = c. \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

Im hier dargestellten Spezialfall der doppelten Überschiebung von Tensoren zweiter Stufe sind beide verbleibenden Indizes  $i$  und  $j$  stumme Indizes. Daher ist das Ergebnis  $c$  ein Skalar. Eine Unterscheidung zwischen der *inneren* und *äußeren* doppelten Überschiebung findet in dieser Arbeit nicht statt.

## A.4 Fundamentaltensoren und Permutationstensor

Der Einheitstensor zweiter Stufe wird mit Hilfe des KRONECKER Deltas folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{I} = \delta_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (\text{A.11})$$

Er entspricht in der Matrixalgebra der Einheitsmatrix. Daneben werden in der vorliegenden Arbeit drei verschiedene Fundamentaltensoren vierter Stufe definiert, der Einheitstensor  $\mathbb{I}$ , der transponierende Fundamentaltensor  $\bar{\mathbb{I}}$  und der spurbildende Fundamentaltensor  $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ :

$$\mathbb{I} = \delta_{ik}\delta_{jl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l), \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{\mathbb{I}} = \delta_{il}\delta_{jk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l), \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \delta_{ij}\delta_{kl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l). \quad (\text{A.14})$$

Um unter anderem die Determinante eines Tensors zweiter Stufe in der Indexschreibweise auszudrücken, wird der Permutationstensor  $\varepsilon_{ijk}$  definiert:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } (i, j, k) = (1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2), \\ -1 & \text{wenn } (i, j, k) = (2, 1, 3); (1, 3, 2); (3, 2, 1), \\ 0 & \text{bei wiederholten Indizes.} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Durch eine dreifache Überschiebung des Permutationstensors mit sich selbst erhält man die folgende Beziehung:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 21 \cdot 0 = 6. \quad (\text{A.16})$$

Analog zu der doppelten Überschiebung (A.10) sind die drei Indizes  $i$ ,  $j$  und  $k$  stumme Indizes.

## A.5 Tensorfunktionen

Nach der Definition der Tensoroperationen und Einheitstensoren in den vorangegangenen Abschnitten A.3 und A.4 können die folgenden Tensorfunktionen definiert werden. Anstelle der Basisdarstellung wird hier die kürzere Indexschreibweise verwendet.

**Spur eines Tensors:**

Die Spur eines Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{a}$  wird durch eine doppelte Überschiebung mit dem Einheitstensor  $\mathbf{I}$  oder durch die Summe aller Hauptdiagonalelemente  $a_{ii}$  berechnet:

$$\text{tr}(\mathbf{a}) = \mathbf{I} : \mathbf{a} = \delta_{ij} a_{ij} = a_{ii}. \quad (\text{A.17})$$

**Determinante eines Tensors:**

Die Determinante eines Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{a}$  wird mit Hilfe des Permutationstensors in der Indexschreibweise darstellbar:

$$\det(\mathbf{a}) = \frac{1}{6} a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn}. \quad (\text{A.18})$$

**Deviator:**

Der Deviator  $\mathbf{a}'$  eines Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{a}$  wird berechnet, indem der Mittelwert der Hauptdiagonalelemente von jedem Hauptdiagonalelement abgezogen wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{a} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{a}) \mathbf{I} \\ &= a_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) - \frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (a_{ij} - \frac{a_{kk}}{3} \delta_{ij}) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

**Invarianten eines Tensors und seines Deviators:**

Die folgenden Definitionen sind aus Gross u. a. [31] entnommen. Darin lautet die *charakteristische Gleichung* zur Ermittlung der Eigenwerte  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  eines Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{a}$

$$a^3 - I_1 a^2 - I_2 a - I_3 = 0. \quad (\text{A.20})$$

Die drei Invarianten  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  sind folgendermaßen definiert:

$$I_1(\mathbf{a}) = \text{tr}(\mathbf{a}) = \mathbf{I} : \mathbf{a} = \delta_{ij} a_{ij} = a_{ii} = a_1 + a_2 + a_3, \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{a}) &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{a} : \mathbf{a} - (\text{tr}(\mathbf{a}))^2 \right] = \frac{1}{2} [a_{kl} a_{kl} - a_{ii} a_{jj}] \\ &= -(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$I_3(\mathbf{a}) = \det(\mathbf{a}) = a_1 a_2 a_3. \quad (\text{A.23})$$

Die Invarianten können für den Deviator  $\mathbf{a}'$  eines Tensors zweiter Stufe genauso formuliert werden:

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{a}') &= \text{tr}(\mathbf{a}') = \mathbf{I} : \mathbf{a}' \\ &= \delta_{ij} (a_{ij} - \frac{a_{kk}}{3} \delta_{ij}) = a_{ii} - \frac{a_{kk}}{3} \delta_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{kk}}{3} 3 = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} J_2(\mathbf{a}') &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{a}' : \mathbf{a}' - (\text{tr}(\mathbf{a}'))^2 \right] = \frac{1}{2} [a'_{ij} a'_{ij}] \\ &= \frac{1}{6} [(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2], \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$J_3(\mathbf{a}') = \det(\mathbf{a}'). \quad (\text{A.26})$$

### HAIGH-WESTERGAARD Koordinaten:

Hauptspannungszustände  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  können durch die sogenannten HAIGH-WESTERGAARD Koordinaten,  $(\xi, \rho, \theta)$  ausgedrückt werden (Chen u. Han [16]). Dabei handelt es sich um Zylinderkoordinaten, dessen Geometrie entlang der hydrostatischen Achse  $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$  ausgerichtet ist:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{Bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Die Koordinate  $\xi$  beschreibt die Lage auf der hydrostatischen Achse, die Koordinate  $\rho$  den Abstand des Spannungszustandes zur hydrostatischen Achse und die Koordinate  $\theta$  den sogenannten *Lodewinkel* (3.10). Sie lassen sich in Abhängigkeit der Hauptspannungszustände und mit Hilfe der zuvor genannten

Invarianten ermitteln:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} = \frac{I_1(\boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{3}} = \sigma_m \sqrt{3}, \\ \rho &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2} = \sqrt{2 J_2(\boldsymbol{\sigma}')}, \\ \cos(3\theta) &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3(\boldsymbol{\sigma}')}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma}')^3}}.\end{aligned}\quad (\text{A.28})$$

Darin ist  $\sigma_m$  der Mittelwert der Normalspannungen des betrachteten Spannungszustandes

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1(\boldsymbol{\sigma})}{3}.\quad (\text{A.29})$$

## A.6 Ableitungsregeln für Tensoren

Ein Überblick der wichtigsten Ableitungsregeln von Tensoren und Tensorfunktionen wird in diesem Abschnitt zusammengefasst. Sie werden unter anderem für die Herleitung der algorithmischen Tangente  $\mathbb{C}_{Tan}$  benötigt:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{kl}} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, j) = (k, l) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \delta_{ik} \delta_{jl} = \mathbb{I},\quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial(\text{tr}(\mathbf{a})\mathbf{I})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial(a_{ii}\delta_{kl})}{\partial a_{mn}} = \frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{mn}} \delta_{kl} + a_{ii} \underbrace{\frac{\partial \delta_{kl}}{\partial a_{mn}}}_{=0} = \delta_{mn} \delta_{kl} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},\quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left( \mathbf{a} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{a})\mathbf{I} \right) = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},\quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathbf{a}' : \mathbf{a}')}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \mathbf{a}} : \mathbf{a}' + \mathbf{a}' : \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \mathbf{a}} = 2 \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \mathbf{a}} : \mathbf{a}' \\ &= 2 \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \mathbf{a}' = 2 \mathbb{I} : \mathbf{a}' - \underbrace{\frac{2}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \mathbf{a}'}_{=0} = 2 \mathbf{a}'.\end{aligned}\quad (\text{A.33})$$

## A.7 Räumliche Ableitung von Vektor- und Tensorfeldern

In Kapitel 2 werden bei der Beschreibung der kontinuumsmechanischen Grundlagen die folgenden räumlichen Ableitungen benötigt. Diese werden jeweils für die Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  und die Momentankonfiguration  $\Omega_t$  definiert.

**Gradient eines Vektorfeldes**

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{a} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (a_i \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = (a_i)_{,j} && \text{bezüglich } \Omega_t \\ \text{Grad } \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial X_j} (A_i \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j = \frac{\partial A_i}{\partial X_j} = (A_i)_{,j} && \text{bezüglich } \Omega_0\end{aligned}\tag{A.34}$$

**Divergenz eines Vektorfeldes**

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (a_i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = (a_i)_{,i} && \text{bezüglich } \Omega_t \\ \text{Div } \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial X_j} (A_i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial A_i}{\partial X_j} \delta_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial X_i} = (A_i)_{,i} && \text{bezüglich } \Omega_0\end{aligned}\tag{A.35}$$

**Divergenz eines Tensorfeldes**

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \delta_{jk} \mathbf{e}_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} = (a_{ij})_{,j} \\ \text{Div } \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial X_k} (A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial A_{ij}}{\partial X_k} \delta_{jk} \mathbf{e}_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial X_j} = (A_{ij})_{,j}\end{aligned}\tag{A.36}$$

# Anhang B

## Algorithmische Tangente

Für die Lösung der tangentialen Systemsteifigkeitsbeziehung (2.84) wird in Gleichung (2.82) die algorithmische Tangente  $\mathbb{C}_{Tan}$  benötigt. Sie ist durch die Ableitung der Spannungs-Verzerrungsbeziehung (5.16) nach dem Gesamtverzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  definiert:

$$\mathbb{C}_{Tan} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial [\mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl, n+1})]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{B.1})$$

In diesem Abschnitt werden ausschließlich Zustandsgrößen verwendet, die in den Abschnitten 5.1.2, 5.2.1 und 5.2.6 für das aktuelle Inkrement  $n + 1$  bestimmt wurden. Daher wird in den folgenden Gleichungen auf die Angabe des Index  $n + 1$  verzichtet. In Indexschreibweise lautet Gleichung (B.1) mit Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{Tan} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial [C_{ijmn} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^{pl})]}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial \varepsilon_{kl}} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^{pl}) + C_{ijmn} \left( \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} - \frac{\partial \varepsilon_{mn}^{pl}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Im Fall eines elastischen Inkrementes gibt es weder eine Änderung der Materialsteifigkeit  $\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ , noch eine Änderung der plastischen Verzerrungen  $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ . Daher vereinfacht sich Gleichung (B.2) mit (A.30) so, dass die algorithmische Tangente  $\mathbb{C}_{Tan}$  der Materialsteifigkeit  $\mathbb{C}$  entspricht:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{Tan} &= C_{ijmn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijmn} \delta_{mk} \delta_{nl} = C_{ijkl} \\ \Leftrightarrow \mathbb{C}_{Tan} &= \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Für den Fall eines inelastischen Inkrementes werden die *Ableitungen der Materialsteifigkeit*  $\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  und *des plastischen Verzerrungszustandes*  $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  im Folgenden aufgestellt.

## B.1 Ableitung der Materialsteifigkeit

Die verwendete Materialsteifigkeit  $\mathbb{C}$  nach Gleichung (4.61) hängt vom Integritätstensor ab. Daher wird die Ableitung der Materialsteifigkeit  $\mathbb{C}$  nach dem Gesamtverzerrungstensor in Gleichung (B.2) über die Kettenregel gebildet:

$$\frac{\partial C_{ijmn}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial \bar{\Phi}_{op}} \frac{\partial \bar{\Phi}_{op}}{\partial \varepsilon_{kl}}. \quad (\text{B.4})$$

Die Evolutionsgesetze der Schädigung (5.29), (5.33) und (5.41) sind in den Hauptrichtungen des Verzerrungszustandes formuliert. Daher wird die Ableitung des Integritätstensors  $\bar{\Phi}$  nach dem Gesamtverzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ebenfalls über die Kettenregel bestimmt:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_{op}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{(r)=1}^3 \sum_{(s)=1}^3 \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_{op}}{\partial \bar{\Phi}_{(r)}} \frac{\partial \bar{\Phi}_{(r)}}{\partial q_{(s)}} \frac{\partial q_{(s)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right). \quad (\text{B.5})$$

Die Indizes  $(r)$  und  $(s)$  beziehen sich auf die Hauptrichtungen des Gesamtverzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Für die Variable  $q_{(s)}$  ist je nach Belastungsfall entweder der Verfestigungsparameter gestauchter  $q_{(s)}^c$  oder gestreckter  $q_{(s)}^t$  Hauptdehnungsrichtungen einzusetzen. Im inelastischen Fall sind der Zuwachs der Verfestigungsparameter  $q_{(s)}$  und der Hauptdehnungen  $\varepsilon_{(s)}$  nach Gleichung (5.10) identisch. Damit ergibt sich mit Gleichung (5.7) für die letzte Ableitung der Verfestigungsparameter  $q_{(s)}$  nach dem Gesamtverzerrungszustand  $\boldsymbol{\varepsilon}$  in Gleichung (B.5) zu

$$\frac{\partial q_{(s)}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{(s)}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \left( \varphi_{u(s)}^\varepsilon \varepsilon_{uv} \varphi_{v(s)}^\varepsilon \right)}{\partial \varepsilon_{kl}} = \varphi_{u(s)}^\varepsilon \delta_{uk} \delta_{vl} \varphi_{v(s)}^\varepsilon = \varphi_{k(s)}^\varepsilon \varphi_{l(s)}^\varepsilon. \quad (\text{B.6})$$

Die Ableitungen der Integritätsvariablen  $\bar{\Phi}_{(r)} = \frac{1}{\Phi_{(r)}}$  können durch die Schädigungsvariable  $\Phi_{(r)}$  folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_{(r)}}{\partial q_{(s)}} = -\frac{1}{(\Phi_{(r)})^2} \frac{\partial \Phi_{(r)}}{\partial q_{(s)}}. \quad (\text{B.7})$$

Dabei werden die folgenden drei Fälle unterschieden:

- Für gestauchte Haupdehnungsrichtungen ( $r$ ) wird die Schädigungsregel (5.29) nach den Verfestigungsvariablen  $q_{(s=r)}^c$  abgeleitet:

$$\frac{\partial \Phi_{(r)}}{\partial q_{(r)}^c} = \frac{1}{2 \Phi_{(r)}} \frac{(1 - \beta) \beta \left( - \exp \left( \frac{1}{\kappa_c} q_{(r)}^c \right) q_{(r)}^c - \kappa_c \left[ 1 - \exp \left( \frac{1}{\kappa_c} q_{(r)}^c \right) \right] \right)}{\left( \kappa_c \left[ 1 - \exp \left( \frac{1}{\kappa_c} q_{(r)}^c \right) \right] + \beta q_{(r)}^c \right)^2}. \quad (\text{B.8})$$

- Für positiv gedehnte Haupdehnungsrichtungen ( $r$ ), deren Schädigung aufgrund einer Stauchung der Querrichtung ( $s \neq r$ ) nach Gleichung (5.33) anwächst, wird die Ableitung unter Anwendung der Kettenregel folgendermaßen gebildet:

$$\frac{\partial \Phi_{(r)}}{\partial q_{(s)}^c} = \frac{\partial \Phi_{(r)}}{\partial \Phi_{(s)}} \frac{\partial \Phi_{(s)}}{\partial q_{(s)}^c}. \quad (\text{B.9})$$

Die letzte Ableitung dieses Ausdrucks ist durch Gleichung (B.7) gegeben.

Die erste Ableitung ergibt sich aus Gleichung (5.33):

$$\frac{\partial \Phi_{(r)}}{\partial \Phi_{(s)}} = \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{1}{\Phi_{(s)}^\mu - 1} \right) - \frac{3}{4} \frac{\left( \Phi_{(s)} - \Phi_{(s)}^\mu \right)^2}{\left( \Phi_{(s)}^\mu - 1 \right)^3} \right] \left( \Phi_{(r)}^{max} - 1 \right). \quad (\text{B.10})$$

- Bei Schädigungen infolge von äußeren Zugbelastungen in Haupdehnungsrichtungen ( $r$ ) wird die Schädigungsregel (5.41) abgeleitet. Mit den Gleichungen (5.4) und (5.38) ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi_{(r)}}{\partial q_{(r)}^t} = \frac{1}{2 \Phi_{(r)}} \left[ \frac{E_c (1 - \kappa_t)}{f_{tD}} - \frac{E_c \left( q_{(r)}^t - \varepsilon_{(r)}^{pl} \right) \frac{\partial f_{tD}}{\partial q_{(r)}^t}}{f_{tD}^2} \right]. \quad (\text{B.11})$$

Dabei ist die Ableitung der Zugentfestigungsfunktion (5.38)

$$\frac{\partial f_{tD}}{\partial q_{(r)}^t} = -f_t \frac{9}{10} \kappa_t^D \exp \left[ - \left( q_{(r)}^t - \varepsilon_t \right) \kappa_t^D \right]. \quad (\text{B.12})$$

Die Ableitung des Integritätstensors  $\bar{\Phi}$  nach den Integritätsvariablen  $\bar{\Phi}_{(r)}$  in Gleichung (B.5) ist durch die Richtungsvektoren der Hauptdehnungen  $\varphi_{k(s)}^\varepsilon$  gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}_{op}}{\partial \bar{\Phi}_{(r)}} &= \frac{\partial \left( \sum_{(t)=1}^3 \bar{\Phi}_{(t)} \varphi_{o(t)}^\varepsilon \varphi_{p(t)}^\varepsilon \right)}{\partial \bar{\Phi}_{(r)}} \\ &= \sum_{(t)=1}^3 \left( \delta_{(t)(r)} \varphi_{o(t)}^\varepsilon \varphi_{p(t)}^\varepsilon \right) = \varphi_{o(r)}^\varepsilon \varphi_{p(r)}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Die noch verbleibende Ableitung in Gleichung (B.4) der Materialsteifigkeit  $\mathbb{C}$  aus Gleichung (4.61) nach dem Integritätstensor  $\bar{\Phi}$  ist mit Gleichung (A.30) gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial \bar{\Phi}_{op}} &= \frac{\partial (\lambda \bar{\Phi}_{ij} \bar{\Phi}_{mn})}{\partial \bar{\Phi}_{op}} + \frac{\partial (\mu \bar{\Phi}_{im} \bar{\Phi}_{jn})}{\partial \bar{\Phi}_{op}} + \frac{\partial (\mu \bar{\Phi}_{in} \bar{\Phi}_{jm})}{\partial \bar{\Phi}_{op}} \\ &= \lambda (\delta_{io} \delta_{jp} \bar{\Phi}_{mn} + \delta_{mo} \delta_{np} \bar{\Phi}_{ij}) \\ &\quad + \mu (\delta_{io} \delta_{mp} \bar{\Phi}_{jn} + \delta_{jo} \delta_{np} \bar{\Phi}_{im}) \\ &\quad + \mu (\delta_{io} \delta_{np} \bar{\Phi}_{jm} + \delta_{jo} \delta_{mp} \bar{\Phi}_{in}). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

## B.2 Ableitung des plastischen Verzerrungszustandes

Die Ableitung des plastischen Verzerrungszustandes  $\varepsilon^{pl} = \varepsilon_{mn}^{pl}$  nach der Änderung des Gesamtverzerrungszustandes  $\varepsilon = \varepsilon_{kl}$  wird analog zu Gleichung (B.5) mit der Kettenregel gebildet:

$$\frac{\partial \varepsilon_{mn}^{pl}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{(r)=1}^3 \left( \frac{\partial \varepsilon_{mn}^{pl}}{\partial \varepsilon_{(r)}} \frac{\partial \varepsilon_{(r)}}{\partial q_{(r)}} \frac{\partial q_{(r)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right). \quad (\text{B.15})$$

Analog zu Gleichung (B.6) ist die Ableitung der Verfestigungsparameter  $q_{(r)}$  nach dem Gesamtverzerrungstensor  $\varepsilon$

$$\frac{\partial q_{(r)}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{(r)}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \varphi_{k(r)}^\varepsilon \varphi_{l(r)}^\varepsilon. \quad (\text{B.16})$$

Bei den Ableitungen der Fließregel wird zwischen gestauchten und gestreckten Richtungen unterschieden. Die Änderung der plastischen Verzerrungen  $\varepsilon_{(r)}^{pl}$  mit den Änderungen des Verfestigungsparameters  $q_{(r)}^c$  gestauchter Richtungen

wurde bereits bei der Definition der Fließregel (5.2) gemäß Gleichung (5.3) angegeben:

$$\frac{\partial \varepsilon_{(r)}^{pl}}{\partial q_{(r)}^c} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\kappa_c} q_{(r)}^c\right). \quad (\text{B.17})$$

Die entsprechende Ableitung für gestreckte Richtungen ergibt sich aus der Fließregel (5.4):

$$\frac{\partial \varepsilon_{(r)}^{pl}}{\partial q_{(r)}^t} = \begin{cases} 0 & \text{für } \varepsilon_{(r)} \leq \varepsilon_{0pl}, \\ \kappa_t & \text{für } \varepsilon_{(r)} > \varepsilon_{0pl}. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Analog zu Gleichung (B.13) ist die Ableitung des plastischen Verzerrungszustandes  $\varepsilon^{pl}$  nach den plastischen Verzerrungen in der Hauptdehnungsrichtung  $\varepsilon_{(r)}^{pl}$  in Gleichung (B.15)

$$\frac{\partial \varepsilon_{mn}^{pl}}{\partial \varepsilon_{(r)}^{pl}} = \varphi_{m(r)}^\varepsilon \varphi_{n(r)}^\varepsilon. \quad (\text{B.19})$$

Einsetzen der Gleichungen (B.16), (B.17) oder (B.18) sowie Gleichung (B.19) in Gleichung (B.15) ergibt

$$\frac{\partial \varepsilon_{mn}^{pl}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{(r)=1}^3 \left( \varphi_{m(r)}^\varepsilon \varphi_{n(r)}^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{(r)}^{pl}}{\partial q_{(r)}} \varphi_{k(r)}^\varepsilon \varphi_{l(r)}^\varepsilon \right). \quad (\text{B.20})$$



# Anhang C

## Tensorielle Form-Invarianz der Nachgiebigkeit $\mathbb{D}$

In diesem Abschnitt wird die tensorielle Form-Invarianz-Bedingung der Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$  gegenüber einer Koordinatentransformation geprüft (Bažant [4]). Neben dem ursprünglichen, kartesischen Koordinatensystem mit Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  und Koordinaten  $x_i$  wird ein weiteres, beliebig rotiertes, kartesisches Koordinatensystem  $\mathbf{e}'_i$  mit Koordinaten  $x'_i$  definiert. Die Koordinatentransformation ist in Gleichung (C.1) gegeben:

$$\begin{aligned}x'_j &= c_{ij} x_i \\ c_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Die Gleichungen (C.2) und (C.3) sind die entsprechenden Transformationsvorschriften des Schädigungstensors  $\Phi$  und der Nachgiebigkeit  $\mathbb{D}$ :

$$\Phi'_{km} = c_{ik} c_{jm} \Phi_{ij},\tag{C.2}$$

$$D'_{pqrs} = c_{ip} c_{jq} c_{kr} c_{ms} D_{ijklm}.\tag{C.3}$$

Analog zu Bažant [4] wird durch die tensorielle Form-Invarianz-Bedingung gefordert, dass der Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{D}(\Phi')$ , der sich aus dem transformierten Schädigungstensor  $\Phi'$  ergibt, der Transformation des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{D}(\Phi)$  entspricht, der mit dem Schädigungstensor  $\Phi$  im ursprünglichen Koordinatensystem gebildet wird:

$$D_{pqrs}(\Phi') = D'_{pqrs} = c_{ip} c_{jq} c_{kr} c_{ms} D_{ijklm}(\Phi).\tag{C.4}$$

Nach dem Einsetzen des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{D}(\Phi)$  aus Gleichung (4.62) wird der letzte Ausdruck in Gleichung (C.4) unter Anwendung der Transformationvorschrift (C.2) in den ersten Ausdruck der Gleichung (C.4) umgeformt:

$$\begin{aligned}
& c_{ip} c_{jq} c_{kr} c_{ms} D_{ijkm}(\Phi) \\
&= c_{ip} c_{jq} c_{kr} c_{ms} \left[ -\frac{\nu_c}{E_c} \Phi_{ij} \Phi_{km} + \frac{1 + \nu_c}{2 E_c} (\Phi_{ik} \Phi_{jm} + \Phi_{im} \Phi_{jk}) \right] \\
&= -\frac{\nu_c}{E_c} c_{ip} c_{jq} \Phi_{ij} c_{kr} c_{ms} \Phi_{km} \\
&\quad + \frac{1 + \nu_c}{2 E_c} (c_{ip} c_{kr} \Phi_{ik} c_{jq} c_{ms} \Phi_{jm} + c_{ip} c_{ms} \Phi_{im} c_{jq} c_{kr} \Phi_{jk}) \\
&= -\frac{\nu_c}{E_c} \Phi'_{pq} \Phi'_{rs} + \frac{1 + \nu_c}{2 E_c} (\Phi'_{pr} \Phi'_{qs} + \Phi'_{ps} \Phi'_{qr}) \\
&= D_{pqrs}(\Phi').
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Die tensorielle Form-Invarianz des Nachgiebigkeitstensors aus Gleichung (4.62) und seines inversen Steifigkeitstensors aus Gleichung (4.61) ist daher erfüllt.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Auswahl verschiedener Versagenszustände von Beton in Abhängigkeit vom Verhältnis der Hauptspannungen . . . . .	2
1.2	Prinzipelle Versuchsaufbauten: a) Betonprisma mit geneigter Zahnleiste nach Tandler [84]; b) Grout-Verbindung unter axialer Druckbelastung nach Anders [2] . . . . .	3
2.1	Kinematik eines Körpers beim Übergang von der Referenzkonfiguration $\Omega_0$ in eine Momentankonfiguration $\Omega_t$ . . . . .	11
2.2	CAUCHY-Spannungsvektor $\mathbf{t}$ , 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor $\mathbf{T}_1$ und 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor $\mathbf{T}_2$ . . .	15
2.3	Spannungen und Volumenkräfte in Richtung $x_1$ an einem differentiellen Volumen mit den Kantenlängen $dx_1$ , $dx_2$ und $dx_3$ . . .	19
2.4	Isoparametrische Approximation der Feldgrößen $\mathbf{X}$ , $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ . .	28
2.5	Strukturschema der nichtlinearen FEM in Anlehnung an Pölling [73] . . . . .	33
3.1	Spannungs-Verzerrungskurve des uniaxialen Druckversuches 2B2-4 nach van Mier [60]. . . . .	37
3.2	Umhüllende Spannungs-Verzerrungskurve und Entwicklung der Volumendehnung $\varepsilon_v$ des uniaxialen Druckversuches 2B2-4 (—) aus Abbildung 3.1 und Vergleich mit Gleichung (3.3) (—). . . .	38
3.3	Rissbilder in den vier Belastungsphasen nach Hofstetter u. Mang [35] sowie theoretisch abgeleitete, innere Druckspannungen (blau) und Querkzugspannungen (rot) . . . . .	39
3.4	Abhängigkeit des Entfestigungsverhaltens im Nachbruchbereich von der Probenhöhe $h$ nach van Mier [60] . . . . .	41

3.5	Entwicklungen der plastischen Verzerrungen und der Skalierungen der Nachgiebigkeiten $r_{\mathbb{D}\parallel}$ und $r_{\mathbb{D}\perp}$ nach Gleichung (3.5) in Belastungsrichtung (—) und Querrichtung (---) im uniaxialen Druckversuch 2B2-4 aus Abbildung 3.1. . . . .	43
3.6	Spannungs-Verschiebungskurven für Beton unter uniaxialer Zugbeanspruchung an gekerbten Proben mit Länge $l = 110mm$ nach Remmel [76] . . . . .	45
3.7	Spannungs-Dehnungskurve inner- und außerhalb des Rissbandes nach Heilmann u. a. [33] . . . . .	45
3.8	Spannungs-Verschiebungskurve eines zyklischen Zugversuches nach Remmel [76] . . . . .	46
3.9	Vergleich von Versuchen nach Kupfer u. Gerstle [49] (+) und van Mier [60] (•••) mit der Versagensfläche nach Willam u. Warnke [92] . . . . .	48
3.10	Versagensfläche nach Willam u. Warnke [92] . . . . .	49
3.11	Spannungs-Verzerrungskurve des Druckversuches 9B1-3 nach van Mier [60]. . . . .	52
4.1	Additive Zerlegung der Verzerrungen in der spannungsbasierten Plastizitätstheorie . . . . .	58
4.2	Additive Zerlegung der Spannungen in der verzerrungsbasierten Plastizitätstheorie . . . . .	61
4.3	Nachgiebigkeitszuwachs und Steifigkeitsverlust in der Schädigungstheorie . . . . .	63
4.4	Steifigkeitsverlust und bleibende Verzerrungen in der kombinierten elasto-plastischen Schädigungstheorie . . . . .	71
5.1	Entwicklung der plastischen Stauchung $\varepsilon_{(i)}^{pl}$ in den Versuchen aus Tabelle 5.1 und Vergleich mit der Evolutionsgleichung (5.2) . . . . .	82
5.2	Entwicklung der plastischen Dehnung $\varepsilon_{(i)}^{pl}$ in den Versuchen aus Tabelle 5.1 und Vergleich mit der Evolutionsgleichung (5.4) . . . . .	84
5.3	Wiederbelastungspfade (—●—) nach Gleichung (5.17) im Vergleich mit der Versuchskurve 2B2-4 (—) nach van Mier [60] und ihrer idealisierten Kurve (---) . . . . .	90

5.4	Wiederbelastungspfade (—●—) nach Gleichung (5.18) im Vergleich mit der idealisierten Versuchskurve 9B1-3 (---) nach van Mier [60] . . . . .	92
5.5	Gesamtverzerrung $\varepsilon_{(1)}$ ; elastische Verzerrung $\varepsilon_{(1)}^{el}$ ; plastische Verzerrung $\varepsilon_{(1)}^{pl}$ ; Schädigungsverzerrung $\varepsilon_{(1)}^{da}$ ; elastischer Verzerrungsanteil des theoretisch ungeschädigten Materials $\varepsilon_{(1)}^{el0}$ und inelastische Verzerrung $\varepsilon_{(1)}^{in}$ . . . . .	94
5.6	Kopplungsparameter $\beta$ in Abhängigkeit der Gesamtverzerrung $\varepsilon_{(1)}$ für die uniaxialen Versuche aus Tabelle 5.1 . . . . .	94
5.7	Entwicklung der Schädigungsvariable $\Phi_{(1)}$ der Hauptbelastungsrichtung (1) in den Versuchen aus Tabelle 5.1 und Vergleich mit der Evolutionsgleichung (5.29) . . . . .	98
5.8	Schädigungsentwicklung $\Phi_{(j \neq i)}$ gedehnter Richtungen, quer zur Hauptbelastungsrichtung ( $i$ ), in Abhängigkeit der Schädigungsvariable $\Phi_{(i)}$ . . . . .	99
5.9	Zugspannungs-Dehnungsbeziehung mit exponentieller Zugentfestigung im Nachbruchbereich . . . . .	102
5.10	Schematischer Ablauf der Materialroutine . . . . .	104
6.1	Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des uniaxialen Druckversuches 2B2-4 aus van Mier [60] mit den Simulationskurven . . . . .	111
6.2	Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des uniaxialen Druckversuches aus Kupfer u. a. [48] mit den Simulationskurven . . . . .	112
6.3	Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des biaxialen Druckversuches 9B1-3 aus van Mier [60] mit den Simulationskurven (oberes und mittleres Bild); Vergleich der Soll-Ist-Druckspannungen in Querrichtung (2) (unteres Bild) . . . . .	114
6.4	Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des äquibiaxialen Druckversuches ( $\sigma_2 = \sigma_1$ ) aus Kupfer u. a. [48] mit den Simulationskurven . . . . .	116
6.5	Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des biaxialen Druckversuches ( $\sigma_2 = 0,52 \sigma_1$ ) aus Kupfer u. a. [48] mit den Simulationskurven . . . . .	117

6.6	Vergleich der Spannungs-Verzerrungskurven des triaxialen Druckversuches 8B1-2 aus van Mier [60] mit den Simulationskurven (oberes Bild); Vergleich der Soll-Ist-Druckspannungen in den Querrichtungen (2) und (3) (unteres Bild) . . . . .	119
6.7	Vergleich der Spannungs-Dehnungskurven eines uniaxialen Zugversuches aus Remmel [76] mit der Kurve seiner Simulation . . .	121
6.8	Elementnetz der Simulation A, Längen- und Querschnittsabmessungen sowie Bewehrungslage des Vier-Punkt-Biegeversuchs B 1.4.0 nach Bausch [6] . . . . .	123
6.9	Netzabhängigkeit des hier vorgestellten Materialmodells im Vergleich mit der experimentellen Versuchskurve aus Bausch [6] . .	124
6.10	Verzerrungsverteilungen der in Abbildung 6.9 hervorgehobenen Belastungszustände . . . . .	125
6.11	Abmessungen und Bewehrung des Versuchskörpers S4 aus Maier u. Thürlimann [54] und verwendete Diskretisierung . . . . .	127
6.12	Vergleich der Last-Verschiebungskurve des Versuches S4 aus Maier u. Thürlimann [54] mit der simulierten Kurve und Laststufen aus Tabelle 6.6 . . . . .	129
6.13	Vergleich der Rissbilder des Versuches S4 aus Maier u. Thürlimann [54] mit den plastischen Hauptverzerrungen $\varepsilon_{(1)}^{pl}$ und ihren Neigungen in der Simulation (Laststufen 13, 15 und 17) . . . . .	130
6.14	Vergleich der Rissbilder des Versuches S4 aus Maier u. Thürlimann [54] mit den plastischen Hauptverzerrungen $\varepsilon_{(1)}^{pl}$ und ihren Neigungen in der Simulation (Laststufen 30, 46 und Bruchlaststufe) . . . . .	131
6.15	Druckspannungszustände in der x-y-Ebene der Scheibendruckzone nach Überschreitung der Laststufe D . . . . .	133
6.16	Vergleich der Lastverschiebungskurve des Versuches S4 aus Maier u. Thürlimann [54] mit einer künstlich regularisierten Modellkurve . . . . .	134
7.1	Uniaxialer Druckversuch 7A1-4 nach van Mier [60] mit Rotation der Belastungsrichtung (BR) und bestimmbare Elastizitätskonstanten des geschädigten Probekörpers . . . . .	140

---

7.2	Vergleich des uniaxialen Druckversuches 7A1-4 (---) nach van Mier [60] mit einer Simulation (—) unter Berücksichtigung der Rissschließung nach Belastungsrotation (BR) . . . . .	141
-----	--	-----



# Tabellenverzeichnis

3.1	Einteilung der monotonen Betondruckkurve in vier Phasen nach Mazars [58] . . . . .	39
3.2	Fünf Versagenszustände aus van Mier [60] zur Ermittlung der Versagensfläche nach Willam u. Warnke [92] . . . . .	50
5.1	Legende zu den Abbildungen der Materialversuche in den Kapiteln 5 und 6 . . . . .	80
5.2	Fallunterscheidung bei der Ermittlung der Schädigungsvariablen $\Phi_{(i)}^{n+1}$ unter Druckbelastung . . . . .	100
5.3	Parameter des vorgestellten Materialmodells . . . . .	106
6.1	Verwendete Modellparameter für die Würfeldruckversuche aus van Mier [60] . . . . .	110
6.2	Experimentell ermittelte Materialeigenschaften nach Bausch [6] und verwendete Modellparameter für das Materialmodell aus Kapitel 5 . . . . .	122
6.3	Eigenschaften der Zug- und Druckbewehrung nach Bausch [6] . . . . .	123
6.4	Betoneigenschaften im Versuch S4 aus Maier u. Thürlimann [54] und verwendete Modellparameter . . . . .	127
6.5	Materialeigenschaften der Bewehrungsstäbe im Versuch S4 aus Maier u. Thürlimann [54] . . . . .	128
6.6	In den Abbildungen 6.12, 6.13 und 6.14 gegenübergestellte Laststufen . . . . .	129



# Literaturverzeichnis

- [1] AL-RUB, Rashid K A. ; KIM, Sun-Myung: Computational applications of a coupled plasticity-damage constitutive model for simulating plain concrete fracture. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), Nr. 10, S. 1577–1603
- [2] ANDERS, S.: *Betontechnologische Einflüsse auf das Tragverhalten von grouted joints*, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Dissertation, 2007
- [3] ANSYS, Inc.: *ANSYS® Academic Research, Release 16.1, Help System, Mechanical APDL*, 2015
- [4] BAŽANT, Zdeněk P.: Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials. In: *Journal of Engineering Mechanics* 109 (1983), Nr. 3, 849-865. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1983\)109:3\(849\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:3(849)). – DOI 10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:3(849)
- [5] BATHE, K.J.: *Finite element procedures*. Bd. 2. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1996
- [6] BAUSCH, S.: *Experimentelle und rechnerische Untersuchungen zur Grenzverformungsfähigkeit von Stahlbetonbalken*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 1984
- [7] BAŽANT, Z.P. ; PLANAS, J.: *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. Taylor & Francis, 1997 (New Directions in Civil Engineering). <https://books.google.de/books?id=1W3-pIdsI5EC>. – ISBN 9780849382840

- [8] BAŽANT, Zdenek P. ; KIM, Sang-Sik: Plastic-Fracturing Theory for Concrete. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 105 (1979), May/June, Nr. 3, S. 407–428
- [9] BAŽANT, Zdeněk P ; OH, Byung H.: Microplane model for fracture analysis of concrete structures / DTIC Document. 1983. – Forschungsbericht
- [10] CAROL, Ignacio ; PRAT, Pere C. ; BAŽANT, Zdeněk P: New explicit microplane model for concrete: theoretical aspects and numerical implementation. In: *International Journal of Solids and Structures* 29 (1992), Nr. 9, S. 1173–1191
- [11] CAROL, Ignacio ; RIZZI, Egidio ; WILLAM, Kaspar: On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 4, 491 - 518. [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00030-5](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00030-5). – DOI [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00030-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00030-5). – ISSN 0020–7683
- [12] CARRAZEDO, Ricardo ; MIRMIRAN, Amir ; HANAI, João B.: Plasticity based stress–strain model for concrete confinement. In: *Engineering Structures* 48 (2013), Nr. 0, 645 - 657. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.014>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.014>. – ISSN 0141–0296
- [13] CEB-FIP: *CEB-FIP Model Code 1990: Design Code*. 1991
- [14] CERVENKA, Jan ; PAPANIKOLAOU, Vassilis K.: Three dimensional combined fracture–plastic material model for concrete. In: *International Journal of Plasticity* 12 (2008), 12, Nr. 24, S. 2192–2220
- [15] CHEN, W.F.: *Plasticity in Reinforced Concrete*. New York : McGraw-Hill, 1982
- [16] CHEN, W.F. ; HAN, D.J.: *Plasticity for Structural Engineers*. New York : Springer, 1988. – ISBN 9781461283805

- [17] CICEKLI, Umit ; VOYIADJIS, George Z. ; ABU AL-RUB, Rashid K.: A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete. In: *International Journal of Plasticity* 23 (2007), Nr. 10, S. 1874–1900
- [18] CORDEBOIS, J. P. ; SIDOROFF, F.: Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. In: *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée. Special issue* (1982), S. 45–60
- [19] DE BORST, R: Smearred cracking, plasticity, creep, and thermal loading—A unified approach. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 62 (1987), Nr. 1, S. 89–110
- [20] DOUGILL, John W.: On stable progressively fracturing solids. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 27 (1976), Nr. 4, S. 423–437
- [21] DRUCKER, D. C. ; PRAGER, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design. In: *Quart. Appl. Math.* 10 (1952), S. 157–164
- [22] ETSE, G. ; WILLAM, K.: Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete. In: *Journal of Engineering Mechanics* 120 (1994), Nr. 9, S. 1983–2011
- [23] FARAHAT, Ahmed M. ; KAWAKAMI, Masashi ; OHTSU, Masayasu: Strain-space plasticity model for the compressive hardening-softening behaviour of concrete. In: *Construction and Building Materials* 9 (1995), Nr. 1, 45–59. [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0950-0618\(95\)92860-J](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0950-0618(95)92860-J). — DOI [http://dx.doi.org/10.1016/0950-0618\(95\)92860-J](http://dx.doi.org/10.1016/0950-0618(95)92860-J). — ISSN 0950–0618
- [24] FEIST, C ; HOFSTETTER, G: An embedded strong discontinuity model for cracking of plain concrete. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), Nr. 52, S. 7115–7138
- [25] FIB: *Model Code 2010: First complete draft: Volume 1*. March 2010
- [26] FLATTEN, Arnd: *Lokale und nicht-lokale Modellierung und Simulation thermomechanischer Lokalisierung mit Schädigung für metalli-*

- sche Werkstoffe unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen*, Universität Dortmund, Diss., 2008
- [27] GRASSL, Peter: Modelling of dilation of concrete and its effect in triaxial compression. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (2004), Nr. 9–10, 1021 - 1033. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2003.04.002>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2003.04.002>. – ISSN 0168–874X
- [28] GRASSL, Peter ; JIRÁSEK, Milan: Damage-plastic model for concrete failure. In: *International journal of solids and structures* 43 (2006), Nr. 22, S. 7166–7196
- [29] GRASSL, Peter ; JIRÁSEK, Milan: Plastic model with non-local damage applied to concrete. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 30 (2006), Nr. 1, 71–90. <http://dx.doi.org/10.1002/nag.479>. – DOI 10.1002/nag.479. – ISSN 1096–9853
- [30] GRASSL, Peter ; XENOS, Dimitrios ; NYSTRÖM, Ulrika ; REMPLING, Rasmus ; GYLLTOFT, Kent: CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), Nr. 24, 3805 - 3816. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.008>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.008>. – ISSN 0020–7683
- [31] GROSS, Dietmar ; HAUGER, W. ; SCHNELL, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik : Band 4 : Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, numerische Methoden*. 5. Springer, 2004
- [32] HÄUSSLER-COMBE, Ulrich ; HARTIG, Jens: Formulation and numerical implementation of a constitutive law for concrete with strain-based damage and plasticity. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43 (2008), Nr. 5, S. 399–415
- [33] HEILMANN, Hans G. ; HILSDORF, Hubert K. ; FINSTERWALDER, Klemens ; ERNST UND SOHN (Hrsg.): *Festigkeit und Verformung von Beton unter Zugspannungen*. Bd. Heft 203. DfStb, 1969

- [34] HILLERBORG, Arne ; MODÉER, Mats ; PETERSSON, P-E: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. In: *Cement and concrete research* 6 (1976), Nr. 6, S. 773–781
- [35] HOFSTETTER, G. ; MANG, H.A.: *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures (Grundlagen und Fortschritte der Ingenieurwissenschaften)*. Braunschweig : Vieweg & Sohn, 1995
- [36] HOLZAPFEL, Gerhard A.: *Nonlinear solid mechanics*. Wiley Chichester, 2000. – ISBN 978-0-471-82319-3
- [37] HSIEH, S.S. ; TING, E.C. ; CHEN, W.F.: A plastic-fracture model for concrete. In: *International Journal of Solids and Structures* 18 (1982), Nr. 3, 181 - 197. [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(82\)90001-4](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(82)90001-4). – DOI [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(82\)90001-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(82)90001-4). – ISSN 0020–7683
- [38] ITSKOV, M.: *Tensor algebra and tensor analysis for engineers: with applications to continuum mechanics*. Springer, 2007
- [39] JASON, Ludovic ; HUERTA, Antonio ; PIJAUDIER-CABOT, Gilles ; GHAVAMIAN, Shahrokh: An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195 (2006), Nr. 52, S. 7077–7092
- [40] JIRÁSEK, M. ; BAŽANT, Z.P.: *Inelastic Analysis of Structures*. John Wiley & Sons, 2002. – ISBN 9780471987161
- [41] JIRÁSEK, Milan ; BAUER, Marco: Numerical aspects of the crack band approach. In: *Computers & Structures* 110–111 (2012), 60 - 78. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.06.006>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.06.006>. – ISSN 0045–7949
- [42] JIRÁSEK, Milan ; ROLSHOVEN, Simon: Comparison of integral-type non-local plasticity models for strain-softening materials. In: *International*

- Journal of Engineering Science* 41 (2003), Nr. 13–14, 1553 - 1602. [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00027-2](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00027-2). – DOI [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00027-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00027-2). – ISSN 0020-7225. – Damage and failure analysis of materials
- [43] KIM, Sun-Myung ; AL-RUB, Rashid K. A.: Meso-scale computational modeling of the plastic-damage response of cementitious composites. In: *Cement and Concrete Research* 41 (2011), Nr. 3, 339 - 358. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2010.12.002>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2010.12.002>. – ISSN 0008-8846
- [44] KITZIG, Mirko ; HÄUSSLER-COMBE, Ulrich: Modeling of plain concrete structures based on an anisotropic damage formulation. In: *Materials and structures* 44 (2011), Nr. 10, S. 1837–1853
- [45] KNOTHE, K. ; WESSELS, H.: *Finite Elemente: Eine Einführung für Ingenieure*. Springer Berlin Heidelberg, 2013 <https://books.google.de/books?id=F0LvBgAAQBAJ>. – ISBN 9783662072356
- [46] KRÄTZIG, W.B. ; BASAR, Y.: *Tragwerke 3: Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. Springer Berlin Heidelberg, 2013 (Springer-Lehrbuch). <https://books.google.de/books?id=iYDSBgAAQBAJ>. – ISBN 9783642591747
- [47] KRÄTZIG, Wilfried B. ; PÖLLING, Rainer: Elasto-plastic damage-theories and elasto-plastic fracturing-theories–A comparison. In: *Computational materials science* 13 (1998), Nr. 1, S. 117–131
- [48] KUPFER, Helmut ; HILSDORF, Hubert K. ; RUSCH, Hubert: Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses. In: *ACI Journal* 66 (1969), August, S. 656–666
- [49] KUPFER, Helmut B. ; GERSTLE, Kurt H.: Behavior of concrete under biaxial stresses. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 99 (1973), Nr. 4, S. 853–866
- [50] LAN, Yi-Ming ; SOTELINO, Elisa D. ; CHEN, Wai-Fah: The strain-space consistent tangent operator and return mapping algorithm for constitu-

- tive modeling of confined concrete. In: *International Journal of Applied Science and Engineering* 1 (2003), Nr. 1, S. 17–29
- [51] LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J.L.: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1994 <https://books.google.co.in/books?id=YfHTNHfjqXoC>. – ISBN 9780521477581
- [52] LILLIU, G. ; MIER, J. G.M. v.: On the relative use of micro-mechanical lattice analysis of 3-phase particle composites. In: *Engineering fracture mechanics* 74 (2007), Nr. 7, S. 1174–1189. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.12.018>. – DOI 10.1016/j.engfracmech.2006.12.018
- [53] LUCCIONI, BM ; ROUGIER, VC: A plastic damage approach for confined concrete. In: *Computers & structures* 83 (2005), Nr. 27, S. 2238–2256
- [54] MAIER, Johannes ; THÜRLIMANN, Bruno: Bruchversuche an Stahlbetonscheiben. (1985)
- [55] MANG, H.A. ; LACKNER, R. ; MESCHKE, G. ; MOSLER, J.: 3.10 - Computational Modeling of Concrete Structures. Version:2003. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/B0-08-043749-4/03009-3>. In: KARIHALOO, I. (Hrsg.) ; MILNE, R.O. (Hrsg.) ; RITCHIE, B. (Hrsg.): *Comprehensive Structural Integrity*. Oxford : Pergamon, 2003. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/B0-08-043749-4/03009-3>. – ISBN 978-0-08-043749-1, 541 - 606
- [56] MARSDEN, Jerrold E. ; HUGHES, Thomas J.: *Mathematical foundations of elasticity*. Courier Dover Publications, 1994
- [57] MAZARS, J. ; PIJAUDIER-CABOT, G.: Continuum Damage Theory-Application to Concrete. In: *Journal of Engineering Mechanics* 115 (1989), Nr. 2, 345-365. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1989\)115:2\(345\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345)). – DOI 10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345)
- [58] MAZARS, Jacky: *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Paris, Université de soutenance, Diss., 1984

- [59] MESCHKE, G ; LACKNER, R ; MANG, HA: An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 42 (1998), Nr. 4, S. 703–727
- [60] MIER, Jan G.: *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*, Technische Hogeschool Eindhoven, Diss., 1984. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.6100/IR145193>. – DOI <http://dx.doi.org/10.6100/IR145193>
- [61] MIER, Jan G.: *Fracture processes of concrete*. Bd. 12. CRC Press, 1997
- [62] MIZUNO, Eiji ; HATANAKA, Shigemitsu: Compressive softening model for concrete. In: *Journal of engineering mechanics* 118 (1992), Nr. 8, S. 1546–1563
- [63] MOSLER, J ; MESCHKE, G: Embedded crack vs. smeared crack models: a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 30, S. 3351–3375
- [64] NAGHDI, Paul M. ; TRAPP, JA: The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space. In: *International Journal of Engineering Science* 13 (1975), Nr. 9, S. 785–797
- [65] ORTIZ, Michael: A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. In: *Mechanics of materials* 4 (1985), Nr. 1, S. 67–93
- [66] OTTOSEN, N.S.: *Nonlinear finite element analysis of concrete structures*. RISØ National Laboratory, 1980
- [67] PEERLINGS, R. H. J. ; BORST, R. D. ; BREKELMANS, W. A. M. ; VREE, J. H. P. D.: Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. In: *International Journal for numerical methods in engineering* 39 (1996), S. 3391–3403
- [68] PEERLINGS, Ronnie Henricus J.: *Enhanced Damage Modelling for Fracture and Fatigue*, Technische Universiteit Eindhoven, Diss., 1999

- [69] PETRYNA, Y. ; CURBACH, M.: *Experimentell gestützte Modellierung von Versagensmechanismen hochfester Betone unter multiaxialer Beanspruchung – MABET*. 2016. – Unveröffentlichter DFG-Forschungsprojekttantrag unter Mitarbeit von Vogdt, F.D. u. Speck, K.
- [70] PETRYNA, Yuri: *Schädigung, Versagen und Zuverlässigkeit von Tragwerken des Konstruktiven Ingenieurbaus*, Ruhr-Universität Bochum, Habilitationsschrift, 2004
- [71] PFISTER, Tobias R.: *Ein Ermüdungsschädigungsmodell für Zuverlässigkeitsanalysen von Stahlbetontragwerken*, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2008
- [72] PIJAUDIER-CABOT, Gilles ; BAŽANT, Zdeněk P: Dynamic stability analysis with nonlocal damage. In: *Computers & structures* 29 (1988), Nr. 3, S. 503–507
- [73] PÖLLING, R: *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2000
- [74] PRÖCHTEL, P ; HÄUSSLER-COMBE, U: Anisotropic damage of concrete: A three-dimensional approach with energy-based loading surfaces and a new evolution law. In: CARPINTERI, A. (Hrsg.) ; GAMBAROVA, P.G. (Hrsg.) ; FERRO, G. (Hrsg.) ; PLIZZARI, G.A. (Hrsg.): *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures (FraMCoS-6) - New Trends in Fracture Mechanics of Concrete*. London : Taylor & Francis, 2007, S. 393–402
- [75] PRÖCHTEL, Patrick: *Anisotrope Schädigungsmodellierung von Beton mit adaptiver bruchenergetischer Regularisierung*, Technische Universität Dresden, Diss., 2008. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-ds-1224751435667-29771>
- [76] REMMEL, Gerd: Zum Zug-und Schubtragverhalten von Bauteilen aus hochfestem Beton. In: *Deutscher Ausschuß für Stahlbeton* (1995), Nr. 444
- [77] SALARI, M.R ; SAEB, S ; WILLAM, K.J ; PATCHET, S.J ; CARRASCO, R.C: A coupled elastoplastic damage model for geomaterials. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 27–29, 2625 -

2643. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2003.11.013>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2003.11.013>. – ISSN 0045–7825. – Computational Failure Mechanics for Geomaterials
- [78] SCIARRA, Francesco M.: Hardening plasticity with nonlocal strain damage. In: *International Journal of Plasticity* 34 (2012), Nr. 0, 114 - 138. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.01.009>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.01.009>. – ISSN 0749–6419
- [79] SIMO, J.C. ; HUGHES, T.J.R.: *Computational Inelasticity*. Springer, 1998 (Interdisciplinary applied mathematics: Mechanics and materials). – ISBN 9780387975207
- [80] SIMO, J.C. ; JU, J.W.: Strain- and stress-based continuum damage models—I. Formulation. In: *International Journal of Solids and Structures* 23 (1987), Nr. 7, 821 - 840. [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(87\)90083-7](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(87)90083-7). – DOI [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(87\)90083-7](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(87)90083-7). – ISSN 0020–7683
- [81] SMADI, Mohammed M. ; SLATE, Floyd O.: Microcracking of High and Normal Strength Concretes Under Short and Long-Term Loadings. In: *Materials Journal* 86 (1989), Nr. 2, S. 117–127
- [82] SPECK, Kerstin: *Beton unter mehraxialer Beanspruchung: Ein Materialgesetz für Hochleistungsbetone unter Kurzzeitbelastung*, Technische Universität Dresden, Diss., 2007. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-ds-1216628091575-43714>. – – S.
- [83] SPOONER, D. C. ; YOUNG, A. G. ; DOUGILL, John: A Quantitative Assessment of Damage Sustained in Concrete During Compressive Loading. In: *Magazine of Concrete Research* 28 (1976), January, Nr. 96, S. 168–169. <http://dx.doi.org/DOI:10.1680/mac.1976.28.96.168>. – DOI DOI: 10.1680/mac.1976.28.96.168
- [84] TANDLER, J.: *Experimentelle und numerische Untersuchungen an Hochleistungsverbindungen mit Zahnleisten*, Technische Universität Berlin, Diss., 2013

- [85] THIELE, Marc: *Experimentelle Untersuchung und Analyse der Schädigungsevolution in Beton unter hochzyklischen Ermüdungsbeanspruchungen*, Technischen Universität Berlin, Diss., 2015
- [86] TORRENTI, Jean-Michel ; REYNOUARD, Jean-Marie ; PIJAUDIER-CABOT, Gilles: *Mechanical behavior of concrete*. John Wiley & Sons, Inc., 2010
- [87] UNGER, Jörg F. ; KÖNKE, Carsten: Neural networks as material models within a multiscale approach. In: *Computers & Structures* 87 (2009), Nr. 19–20, 1177 - 1186. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.12.003>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.12.003>. – ISSN 0045–7949. – Civil-Comp Special Issue
- [88] VALENTINI, B.: *A three-dimensional constitutive model for concrete and its application to large scale finite element analyses*, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, Diss., 2011
- [89] VOYIADJIS, George Z. ; TAQIEDDIN, Ziad N. ; KATTAN, Peter I.: Anisotropic damage–plasticity model for concrete. In: *International Journal of Plasticity* 24 (2008), Nr. 10, S. 1946–1965
- [90] VOYIADJIS, George Z. ; TAQIEDDIN, Ziad N. ; KATTAN, Peter I.: Theoretical Formulation of a Coupled Elastic-Plastic Anisotropic Damage Model for Concrete using the Strain Energy Equivalence Concept. In: *International Journal of Damage Mechanics* (2008). <http://dx.doi.org/10.1177/1056789508092399>. – DOI 10.1177/1056789508092399
- [91] WELLS, GN ; SLUYS, LJ: Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 5, S. 897–913
- [92] WILLAM, K.J. ; WARNKE, E.P.: Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. In: *IABSE reports of the working commissions* (1974)
- [93] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Berlin Heidelberg, 2001 [https://books.google.de/books?id=A6BBg\\_27aJEC](https://books.google.de/books?id=A6BBg_27aJEC). – ISBN 9783540677475

- [94] WRIGGERS, P. ; MOFTAH, S.O.: Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behaviour. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 42 (2006), Nr. 7, 623 - 636. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2005.11.008>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2005.11.008>. – ISSN 0168–874X. – The Seventeenth Annual Robert J. Melosh CompetitionThe Seventeenth Annual Robert J. Melosh Competition
- [95] YANKELEVSKY, D. ; REINHARDT, H.: Uniaxial Behavior of Concrete in Cyclic Tension. In: *Journal of Structural Engineering* 115 (1989), Nr. 1, 166-182. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1989\)115:1\(166\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1989)115:1(166)). – DOI 10.1061/(ASCE)0733–9445(1989)115:1(166)
- [96] YAZDANI, S. ; SCHREYER, H.: Combined Plasticity and Damage Mechanics Model for Plain Concrete. In: *Journal of Engineering Mechanics* 116 (1990), Nr. 7, 1435-1450. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1990\)116:7\(1435\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:7(1435)). – DOI 10.1061/(ASCE)0733–9399(1990)116:7(1435)
- [97] YODER, Paul J.: A strain-space plasticity theory and numerical implementation. (1980)
- [98] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method: Solid mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000 (Referex collection.Mecánica y materiales). <https://books.google.de/books?id=MhgBfMWFVHUC>. – ISBN 9780750650557