Ein Beitrag zur Erzeugung nichtlinearer Entwurfsseegänge im numerischen Wellenkanal

Seong-Jae Jeong, M.Sc.

Der Fakultät V der Technischen Universität Berlin
– Verkehrs- und Maschinensysteme –
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Nitsche
Berichter: Prof. Dr.-Ing. Günther F. Clauss
Berichter: Prof. Dr.-Ing. Frank H. Thiele

10. Juli 2003

Technische Universität Berlin
D83

Copyright © 2003 Seong-Jae Jeong

Für meine Familie

Vorwort

An dieser Stelle bedanke ich mich besonders bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Günther F. Clauss für die wissenschaftliche und menschliche Betreuung, ohne die das Gelingen dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Weiterhin sage ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Frank H. Thiele für die Übernahme des Berichteramtes und die kritische Durchsicht meiner Arbeit herzlichen Dank. Mein Dank gilt auch dem Vorsitzenden des Promotionsausschusses Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Nitsche. Außerdem danke ich besonders Herrn Prof. Dr.-Ing. Soo-Young Kim an der Busan National University für die jahrelange Unterstützung und sein Vertrauen in mich.

Allen Mitarbeitern des Fachgebietes Meerestechnik am Institut für Land- und Seeverkehr bin ich für die Unterstützung zu Dank verpflichtet. Namentlich danke ich Frau Dipl.-Ing. Katja Stutz, Dipl.-Math.techn. Janou Hennig und Herrn Dipl.-Ing. Christian Schmittner, die sowohl beim Versuch im Wellenkanal als auch bei der Bearbeitung von Messdateien ihre kostbare Zeit für mich geopfert haben. Ich danke Herrn Dipl.-Ing. Sven Hoog und Herrn Dipl.-Ing. Wilfried Langner, die mich stets nicht nur mit dem fachlichen Wissen sondern auch mit menschlicher Wärme unterstützt haben. Herrn Dr.-Ing. Ulrich Steinhagen möchte ich für die vielen konstruktiven Anregungen und seine klärenden Hinweise danken.

Ich danke Herrn Horst Engelmann und seiner Frau Young-Ja Engelmann, die meiner Familie durch ihre elterliche Liebe immer eine gute Atmosphäre geschenkt haben. Meinem besten Freund Herrn Dipl.-Ing. Guido Harneit danke ich ganz besonders für seine unzähligen Bemühungen für das Gelingen meiner Aktivitäten einerseits und für die grenzenlose Fürsorge meiner Familie anderseits. Ich danke ebenfalls meinen Freunden in Korea, Jae-Young, Mun-Shin und Woo-Gi, die mir während der schwierigen Zeit stets Mut gegeben haben.

Ich danke meiner gesamten Familie, die mir in jeder Hinsicht und in allen Situationen motivierende Rückendeckung gegeben hat. Ich danke ganz besonders meiner Frau Sang-Deog Bae, die mir aufopfernd zur Seite gestanden hat und trotz schwieriger Situationen unseren beiden Söhnen, Jin-Su und Jin-Uk, viele Ihrer wunderbaren Charakterzüge weitergegeben hat.

Jeong, Seong-Jae — Berlin, Juli 2003

Zusammenfassung (Summary)

Eine Extremwelle ist durch hohe Nichtlinearität gekennzeichnet und tritt typischerweise als transientes Ereignis auf. Der Energietransport bei der Wellenausbreitung bestimmt die extremen Wellenereignisse sog. "Freak waves" und kann mit der linearen Wellentheorie nicht mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden. Für die Auslegung maritimer Systeme ist die genaue Kenntnis der maximal auftretenden Belastung infolge Welleneinwirkung essentiell. Hohe Bedeutung haben dabei nichtlineare Entwurfsseegänge mit definierter Oberflächenauslenkung, bei denen die gesamte Information des Wellenzuges sowohl im Orts- als auch im Zeitbereich vorgelegt wird.

In dieser Dissertation wird ein neues Verfahren zur Erzeugung deterministischer Wellenzüge mit größerer Wellenhöhe auf Basis transienter Wellengruppen vorgestellt. Das Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Erzeugung nichtlinearer Entwurfsseegänge, deren extremer Charakter und Oberflächenauslenkungen deterministisch bestimmt werden können. Als Grundgleichungen werden die Navier-Stokes-Gleichungen verwendet, wobei realitätsnahe Strömungsberechnungen mit Viskositätseffekte bei der Wellenausbreitung ermöglicht werden. Die Grundgleichungen werden durch die Finite-Volumen-Methode diskretisiert. Die Verformung der freien Wasseroberfläche wird mit Hilfe eines mitbewegten strukturierten Gitters bestimmt, das durch ein Modul auf Basis der algebraischen Methode generiert wird. Zur Berechnung eines instationären Strömungsvorgangs wird eine vollimplizite Euler-Methode verwendet. Ein zweidimensionaler, numerischer Wellenkanal wird neu entwickelt und anhand von analytischen Wellentheorien und Messungen validiert.

Eine Optimierungsroutine mit dem Genetischen Algorithmus wird zur Erzeugung eines Steuersignals mit dem numerischen Wellenkanal gekoppelt. Die Steuerung des Wellenblattes basiert auf einer neu definierten Funktion zur Amplitudenmodulation, die mit einer geringeren Anzahl von freien Variablen modifiziert wird. Die Funktion wird so definiert, dass eine konvergierende transiente Wellengruppe mit deterministischem Charakter je nach Änderung der Variablen generiert werden kann. Die Zielfunktion bei der Optimierung von Entwurfsseegängen minimiert die Abweichung zwischen der vorgegebenen Zielwelle und der im numerischen Wellenkanal registrierten Welle. Das Brechkriterium von Wasserwellen wird als Nebenbedingung des Optimierungsvorgangs mit berücksichtigt, um die qualitative Verbesserung des zu generierenden Wellenzuges zu erzielen. Die Registrierung eines realen Seegangs wird mit einem entsprechenden Maßstab als Zielwelle verwendet. Mit Hilfe der Analyse der Zeitregistrierung an einem definierten Zielort wird die Optimierung solange angewendet, bis der vorgegebene Entwurfsseegang in Bezug auf ein Abbruchkriterium gefunden wird.

Das neu entwickelte Verfahren zur Generierung deterministischer Wellenszenarien mit Extremereignissen ist ein wichtiges Werkzeug, um versuchstechnische Untersuchungen für die Belastung meerestechnischer Konstruktionen unter extremen Seegangsbedingungen zu ermöglichen. Für verschiedene Zielwellen werden Wasserspiegelauslenkungen, kinematische Größen, Geschwindigkeits- und Druckfelder numerisch berechnet und mit Messungen verglichen. Dabei zeigen sich gute Übereinstimmungen. Die New Year Wave wird durch Optimierung mit zwei unterschiedlichen Maßstäben generiert und validiert, wodurch die Leistungsfähigkeit des Verfahrens mit Berücksichtigung von Maßstabeffekten direkt geprüft wird. Dabei zeigt sich ein akzeptables Ergebnis in beiden Fällen.

Abstract

An extreme wave is characterized by high nonlinearities and appears typically as transient event. The energy transfer by the nonlinear propagation behavior of extreme water waves cannot be computed with the linear wave theory. Besides the exact knowledge of the maximally arising load due to wave effect is essential for the design of maritime systems. In this context the generation of an extreme wave is indispensable with the experimental investigation in the wave tank. A significant role plays thereby the nonlinear wave train with defined surface elevations.

In this thesis, a new numerical procedure for the generation of a nonlinear tailored group of waves is presented, whose character and surface elevation can be given deterministically. The procedure is based on the transient wave group technique. In order to integrate the nonlinearity during the wave propagation in the computational method, the Navier-Stokes equations are applied as governing equations. The governing equations are discretized by finite volume approximation. The deformation of the free water surface in each time step is pursued with a moving grid. The computational grid is generated algebraic with a grid generating procedure. A two-dimensional, numerical wave tank for the simulation of the wave propagation is developed and tested in detail. The numeric results are compared first with analytical wave theories and with measurements, in order to examine the correctness of the numerical wave tank.

An optimization routine with genetic algorithms is coupled for the selection of free variables for the production of a control signal for the motion of wave board in the numerical wave tank. An excitation function for the controlling of the wave board is formulated on basis of amplitude modulation for the generation of nonlinear wave packets. The found variables by the optimization serve for the determination of wave board motion both with the computation and with the experiment. The breaking criterion of the water waves is implemented as boundary condition for the optimization procedure. With the analysis of the time registration on the local position in the wave tank the optimization routine is accomplished until the given design wave with defined surface elevation is found.

Many different design waves and the extreme so called “New Year Wave” are generated and validated with the developed procedure. Water surface elevation and associated fields of velocity and pressure are numerically computed and compared with measurements. Very good agreements show up. The numerical generation of deterministic wave scenarios and associated extreme events is an important tool, in order to make experimental investigations possible for the load of maritime constructions and vehicles under extreme sea-state conditions. Thus, the expensive and time consuming model tests in wave tank can be reduced considerably.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort ix

Zusammenfassung xi

Abstract xiii

Abbildungsverzeichnis xviii

Tabellenverzeichnis xix

1. Einleitung 1
1.1 Übersicht 1
1.2 Stand der Forschung 3
1.2.1 Transiente Wellengruppen 3
1.2.2 Numerische Berechnung nichtlinearer Schwerewellen 4
1.3 Ziel der Arbeit 6
1.4 Gliederung der Arbeit 7

2. Wellentheorie 9
2.1 Potentialströmung 9
2.2 Lineare Wellentheorie 10
2.3 Nichtlineare Wellentheorie 12
2.4 Navier-Stokes-Gleichungen 14

3. Numerische Verfahren 17
3.1 Grundgleichungen 17
3.2 Randbedingungen 18
3.3 Rechengitter 19
3.4 Diskretisierung der Grundgleichungen 20
3.4.1 Integration über die Zeit 21
3.4.2 Diskretisierung konvektiver Flüsse 21
3.4.3 Diskretisierung diffusiver Flüsse 22
3.5 Bestimmung der Lage der freien Oberfläche 25
3.6 Lösung der algebraischen Gleichungen 26

4. Aufbau eines numerischen Wellenkanals 29
4.1 Numerischer Wellenkanal 29
4.2 Verifikation 30
4.2.1 Regulärer Wellenzug 32
4.2.2 Cnoidalwelle 35
4.3 Analyse der Wellenregistrierung 39
4.4 Brechkriterium 40

5. Optimierung und Erzeugung des Steuersignals . . . 43
5.1 Optimierungsproblem . . . 43
5.2 Genetische Algorithmen . . . 45
5.2.1 Codierung . . . 45
5.2.2 Selektion . . . 46
5.2.3 Crossover . . . 46
5.2.4 Mutation . . . 46
5.2.5 Reproduktion . . . 47
5.3 Zielfunktion und Nebenbedingung . . . 48
5.4 Erzeugung des Steuersignals . . . 48

6. Anwendung und Validierung . . . 51
6.1 Formulierung der Zielfunktion . . . 51
6.2 Ablauf der Simulation . . . 52
6.3 Numerische Erzeugung des Entwurfsseegangs . . . 54
6.3.1 Optimierung mit einer einzigen Zielwelle . . . 54
6.3.2 Optimierung mit benachbarten Wellen . . . 58
6.4 Validierung . . . 62
6.4.1 Wellenzug ohne brechende Welle . . . 62
6.4.2 Wellenzug mit brechender Welle . . . 68
6.5 Erzeugung und Validation der New Year Wave . . . 71
6.5.1 Optimierung mit einem Maßstab von 1:64 . . . 71
6.5.2 Optimierung mit einem Maßstab von 1:42 . . . 76
6.5.3 Bewertung der Optimierungsergebnisse . . . 78

7. Zusammenfassung und Ausblick . . . 79

Symbolverzeichnis . . . 81

Anhang 89

A. Entwurfswelle und Zielfunktion . . . 91
A.1 Entwurfswellen aus der Datenbank . . . 91
A.2 Zielfunktion im Simulationsprogramm . . . 92

Abbildungsverzeichnis

1.1 Extremwelle mit dem kurzkämmigen Charakter, In "*Gorm Field flare tower*" am 24. Nov 1981 (Courtesy of DHI) . . . 2
1.2 Extremwelle mit dem langkämmigen Charakter (Nickerson, 1993) . . . 3
1.3 Entwicklungskonzept eines numerischen Verfahrens zur Erzeugung von Entwurfswellen . . 6

2.1 Definition des Koordinatensystems für die fortschreitende Welle . . . 9
2.2 Gültigkeitsbereiche der unterschiedlichen Wellentheorien . . . 15

3.1 Strukturiertes Rechengitter . . . 19
3.2 Lineare Interpolation der Variablenwerte an der KV-Seite . . . 20
3.3 Ein typisches KV und die benutzten Bezeichnungen . . . 21
3.4 Volumenfluss $\delta\Omega_n$ durch die KV-Seite zwischen Zeitschritten t^n, t^{n+1} . . . 26

4.1 Schematische Darstellung eines numerischen Wellenkanals . . . 29
4.2 Bewegliche Gitter im ausgewählten Bereich im numerischen Wellenkanal . . . 30
4.3 Vergleich der Registrierung bei den systematisch verfeinerten Gittern in $x = 20\,[\mathrm{m}]$ . . . 31
4.4 Vergleich der Registrierung bei den unterschiedlichen Zeitschritten in $x = 20\,[\mathrm{m}]$ . . . 32
4.5 Instationäre Randbedingung am Einströmrand zur Simulation eines regulären Wellenzuges 33
4.6 Wasserspiegelauslenkung an der Stelle $x = 20\,[\mathrm{m}]$ mit verschiedenen Wellenhöhen . . . 34
4.7 Geschwindigkeits- und Druckverteilung eines regulären Wellenzuges zum Zeitpunkt $t = 30\,[\mathrm{s}]$ 35
4.8 Bewegung und Geschwindigkeit des Wellenblattes zur Simulation einer Cnoidalwelle . . . 36
4.9 Ausbreitung einer Cnoidalwelle im numerischen Wellenkanal (Wassertiefe $d = 4.0\,[\mathrm{m}]$) . . 37
4.10 Geschwindigkeits- und Druckverteilung einer Cnoidalwelle zum Zeitpunkt $t = 82.5\,[\mathrm{s}]$ . . . 37
4.11 Wasserspiegelauslenkung einer Cnoidalwelle an ausgewählten Stellen . . . 38
4.12 Analyseverfahren für die irreguläre Wellenregistrierung . . . 39
4.13 Analyse der Zeitregistrierung eines regulären Wellenzuges . . . 40
4.14 Verschiedene klassische Brechkriterien . . . 41

5.1 Verschiedene Suchverfahren . . . 44
5.2 Prinzip der Codierung in Genetischen Algorithmen . . . 45
5.3 Flussdiagramm für den Genetischen Algorithmus . . . 46
5.4 Prinzip des Crossovers in Genetischen Algorithmen . . . 47
5.5 Prinzip der Mutation in Genetischen Algorithmen . . . 47
5.6 Einfluss der jeweiligen Parameter $P_{1,\cdots,4}$ in Funktion für die Erzeugung des Steuersignals 50

6.1 Charakter der Zielwelle auf der Zielposition mit der Zero-down-crossing Methode . . . 52
6.2 Ablauf des Simulationsverfahrens . . . 53
6.3 Fitnessbewertung im Genetischen Algorithmus . . . 55
6.4 Ausbreitung des Wellenzuges (oben) und Wasserspiegelauslenkung $t = 39\,[\mathrm{s}]$ (unten) . . . 56
6.5 Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 39\,[\mathrm{s}]$ . . . 57
6.6 Fitnessbewertung im Genetischen Algorithmus . . . 59
6.7 Ausbreitung des Wellenzuges (oben) und Wasserspiegelauslenkung $t = 41\,[\mathrm{s}]$ (unten) . . . 60
6.8 Wellenanalyse durch Zero-up-crossing-Methode . . . 61

6.9 Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 41$ [s] 61
6.10 Wellenblattbewegung, Geschwindigkeit und Fourier-Spektrum 63
6.11 Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 20$ [m] 64
6.12 Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 30$ [m] 65
6.13 Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 40$ [m] 65
6.14 Fourier-Analyse der Wasserspiegelauslenkung in $x = 20, 30, 40$ [m] vom Wellenblatt . . . 66
6.15 Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 34$ [s] 66
6.16 Wellenblattbewegung, Geschwindigkeit und Fourier-Spektrum 69
6.17 Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 40$ [m] 70
6.18 Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 40$ [s] 70
6.19 New Year Wave am 1.1.1995 in der Nordsee (Haver und Andersen (2000)) 71
6.20 Fitnessbewertung im Genetischen Algorithmus 72
6.21 Wellenblattbewegung, Geschwindigkeit und Fourier-Spektrum 73
6.22 Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 25.0$ [m] 74
6.23 Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 40.0$ [s] . . . 75
6.24 Vergleich der Berechnungen und Messungen mit der New Year Wave (Maßstab=1:64) . . 76
6.25 Vergleich der Berechnungen und Messungen mit der New Year Wave (Maßstab=1:42) . . 77

Tabellenverzeichnis

2.1 Ergebnisse aus der linearen Wellentheorie 12
2.2 Ergebnisse aus der Stokes-Wellentheorie zweiter Ordnung 14

4.1 Wichtige Größen aus der Wellenanalyse 39

5.1 Konstante Werte für die Genetischen Algorithmen 48

6.1 Parameter und ihre Rolle im Steuersignal 51
6.2 Charakteristische Größen der Zielwelle 54
6.3 Maximum und Minimum der Parameter 55
6.4 Bestimmte Parameter aus der Optimierung 56
6.5 Detaillierte Ergebnisse aus der Analyse ($x_z = 30\,[\mathrm{m}]$) 57
6.6 Charakteristische Größen der Zielwelle 58
6.7 Bestimmte Parameter aus der Optimierung 58
6.8 Detaillierte Ergebnisse aus der Analyse ($x_z = 30\,[\mathrm{m}]$) 59
6.9 Charakteristische Größen der Zielwelle 62
6.10 Maximum und Minimum der Parameter 62
6.11 Ergebnisse aus der Optimierung 63
6.12 Detaillierte Ergebnisse der Wellenanalyse aus Berechnungen und Messungen 67
6.13 Charakteristische Größen der Zielwelle 68
6.14 Maximum und Minimum der Parameter 68
6.15 Ergebnisse aus der Optimierung 69
6.16 Detaillierte Ergebnisse der Wellenanalyse aus Berechnungen und Messungen ($x = 40\,[\mathrm{m}]$) . 71
6.17 Charakteristische Größen der Zielwelle 72
6.18 Maximum und Minimum der Parameter 72
6.19 Gesuchte Parameter durch Optimierung 73
6.20 Maximum und Minimum der Parameter 77
6.21 Gesuchte Parameter durch Optimierung 77

1. Einleitung

1.1 Übersicht

Die in der Natur vorkommenden Wellen sind irregulär, nichtlinear und breiten sich in verschiedenen Richtungen aus. Eine Extremwelle ist durch hohe Nichtlinearität gekennzeichnet und tritt typischerweise als transientes Ereignis in einem irregulären Seegang auf. Eine Extremwelle, die durch schweren Sturm entstanden ist, wird in Abb. 1.1 dargestellt. Diese Welle hat einen sogenannten kurzkämmigen Charakter. Die statistische Betrachtung des Seegangs spielt zur Analyse von dreidimensionalen Extremwellen eine große Rolle. Mit Hilfe von Seegangsspektren wird versucht, die Gesamtenergie des Seegangs für bestimmte Wetterbedingungen abzubilden (Pierson und Moskowitz, 1964; Hasselmann et al., 1973).

Für die Konstruktion meerestechnischer Systeme wie z.B. Offshore-Plattformen ist die korrekte Ermittlung des zeit- und ortsabhängigen Belastung der Struktur durch Wellen eminent wichtig. Von herausragender Bedeutung in diesem Zusammenhang sind extreme Ereignisse wie die sogenannte Hundertjahreswelle, d.h. die Welle mit einer Höhe, die nach stochastischen Aussagen nur einmal in hundert Jahren zu erwarten ist. Neue Untersuchungen (Rozario et al., 1993) zeigen, dass die Fokussierung der Wellenenergie bei einem breitbandigen Seegang, verbunden mit der Dispersionseigenschaft der überlagerten Elementarwellen, der Entstehung einer Extremwelle zugrunde liegt. Dabei entstehen die Extremereignisse mit höchster Wellenhöhe durch zufällige Überlagerung mehrerer Einzelwellen, wenn diese sich zeitlich und räumlich an einem Punkt mit gleicher Phase überlagern. In Abb. 1.2 ist eine zweidimensionale Extremwelle aus einem sog. langkämmigen Seegang dargestellt.

Die Belastung durch Wellen auf Pfahl-Strukturen ist bei den zweidimensionalen Wellen gegenüber dreidimensionalen Wellen von gleicher Wellenhöhe und Wellenlänge ca. 15% größer, während schwimmende Strukturen in zweidimensionalen Wellen kleinere Belastungen als in den dreidimensionalen Wellen erfahren (Aage et al., 1989). Versuche für zweidimensionale, regelmäßige Wellen werden häufig angefordert, weil diese Bedingungen gut mit numerischer Simulation dargestellt und verschiedene Extremwellen leicht miteinander verglichen werden können. Dabei spielt die Ausbreitungsrichtung eine untergeordnete Rolle. Bei numerischen Modellen gibt es die Tendenz, viel stärker vereinfachte Modelle einzusetzen (Aage, 2000). Insbesondere für "Freak Waves" (Faulkner, 1995; Haver und Andersen, 2000) aber auch für regelmäßige Wellen ist die Erzeugung einfachster Modelle zunehmend wichtiger.

In der Seegangsversuchstechnik können diese Extremwellen durch langwierige Simulationen von irregulärem Seegang oder unter Ausnutzung der Dispersion von Wasserwellen gezielt mit transienten Wellengruppen generiert werden. Der Einsatz von modernen Wellenkanälen und Rechnern trägt zur Entwicklung der Versuchstechnik bei. Die Simulation im numerischen Wellenkanal wurde in den letzten Jahren stark weiterentwickelt (Newman, 1989; Bertram und Jensen, 1994; Celebi et al., 1998; Kim et al., 1999). Dadurch lassen sich kostspielige Versuchszeiten erheblich verkürzen und Extrembelastungen durch Wellen gezielt simulieren.

Die numerische Berechnungsverfahren zur hydrodynamische Analyse auf Basis der Potentialtheorie können auch für die Simulation nichtlinearer Wellen eingesetzt werden. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie können mathematisch nach zwei verschiedenen Kategorien unterteilt werden; die Dirichletsche Randwertaufgaben und die Neumannsche Randwertaufgaben, die beide linear sind. Die beiden linearen Typen

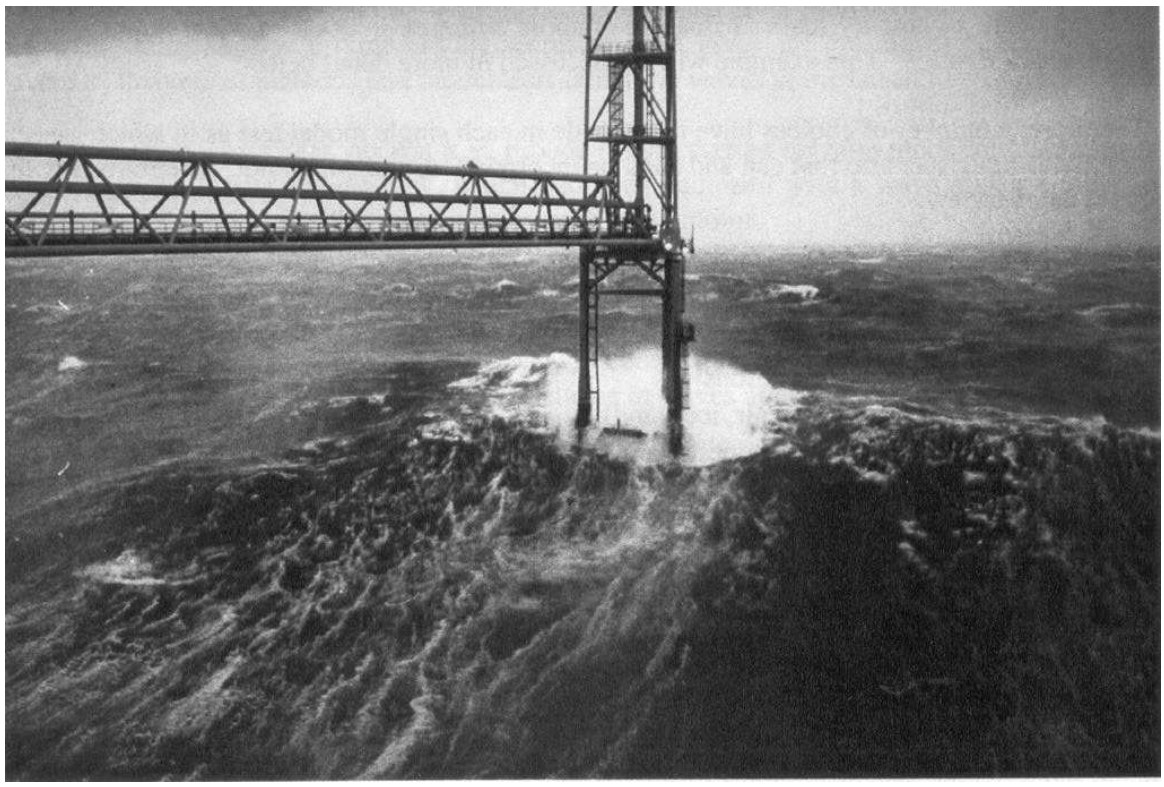

Abb. 1.1: Extremwelle mit dem kurzkämmigen Charakter, In "*Gorm Field flare tower*" am 24. Nov 1981 (Courtesy of DHI)

können auch gemischt auftreten. Um die Nichtlinearität zu berücksichtigen, entwickelt man in der Perturbationsmethodik die nichtlineare Randwertaufgaben in eine Folge von linearen Randwertaufgaben, von denen jede Ordnung der unendlichen Folge von linearen Randwertaufgaben ein eigenes Potential liefert, deren Summe bei genügend schwacher Nichtlinearität zur nichtlinearen Lösung konvergieren kann.

Eine weitere Möglichkeit für die numerische Lösung der nichtlinearen Randwertaufgaben liefert bei Verzicht auf das Potential eine Formulierung mit Navier-Stokes-Gleichungen. Die Zustandvariablen sind die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w und der Druck p. Sie liegen an jedem Punkt des Feldes, das mit einem Gitter räumlich diskretisiert wird. Die Gleichungen werden je nach Lösungsverfahren mit den verschiedenen Approximationen diskretisiert. Das numerische Verfahren mit den Navier-Stokes-Gleichungen wurde in den letzten Jahren als ein bedeutender Vertreter der numerischen Strömungsmechanik etabliert, wobei sowohl laminare als auch turbulente Strömungen in Betracht gezogen werden können. Insofern ist ein Lösungsverfahren mit den Navier-Stokes-Gleichungen in der Lage, eine numerische, diskretisierte Lösung der viskosen Strömung zu liefern.

Die bisherigen Berechnungsverfahren zur Berechnung transienter Wellengruppe beschränken sich auf Analysen nicht-viskoser Strömungen. Die Spektralanalyse basiert auch auf der Zerlegung eines Seegangs, dessen Darstellung durch lineare Zusammensetzung mehrerer Einzelwellen im Frequenzbereich ermöglicht werden soll. Daher ist es wünschenswert ein Berechnungsverfahren zu entwickeln, das die numerische Simulation einer nichtlinearen transienten Welle in den reibungsbehafteten Stömungen ermöglicht. Insbesondere die Weiterentwicklung der transienten Wellengruppen und der dazu notwendigen numerischen Simulation auf Basis von Navier-Stokes-Gleichungen erfordern weitere Forschungsaktivitäten.

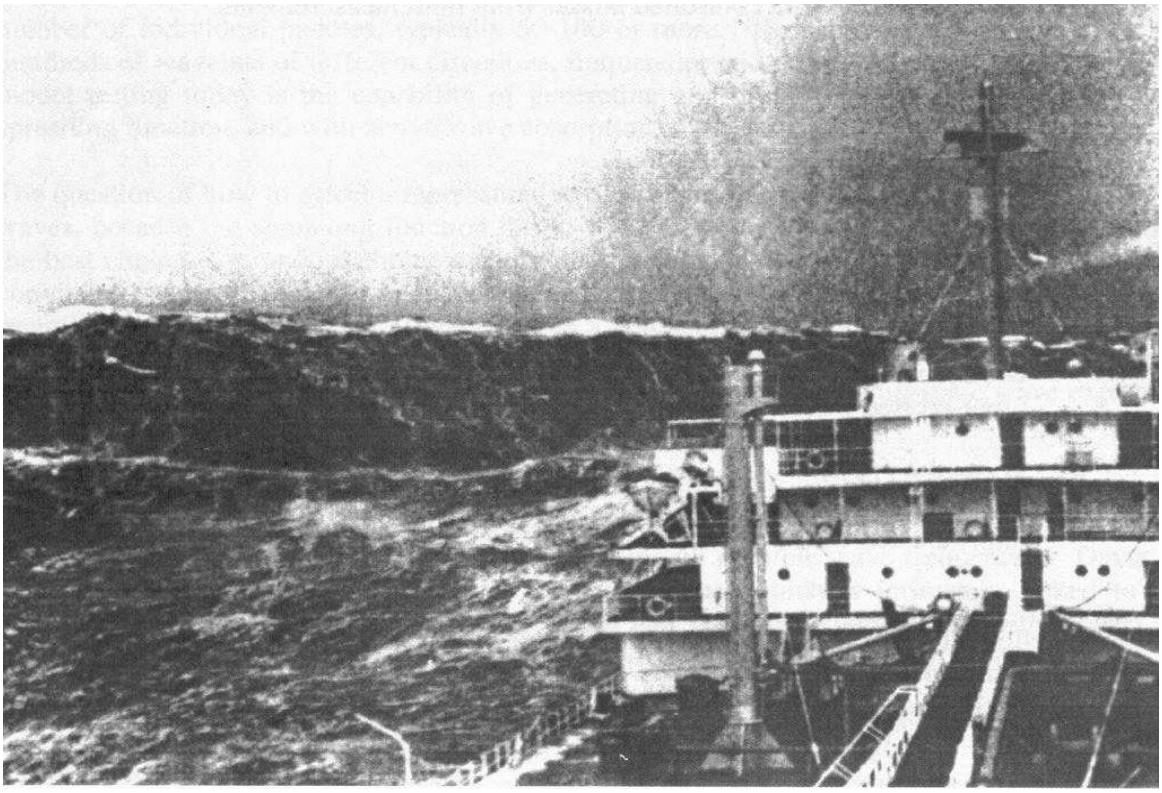

Abb. 1.2: Extremwelle mit dem langkämmigen Charakter (Nickerson, 1993)

1.2 Stand der Forschung

1.2.1 Transiente Wellengruppen

Für die Auslegung von maritimen Systemen ist die genaue Kenntnis der maximal auftretenden Belastung infolge von Welleneinwirkung essentiell. Hierzu wird bislang aus einem gegebenen Seegangsspektrum mit Hilfe der Statistik die 100-Jahreswelle ermittelt, die die Bemessungsbelastung auf die Konstruktion darstellt. Das Entwurfswellenkonzept wird generell auch dazu verwendet, um kinematische Größen einer hohen Welle zu berechnen. Die Wellen werden dabei als periodisch angesehen. Partikelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen werden mit Wellentheorien höherer Ordnung, häufig mit Stokes V, beschrieben (Fenton, 1985).

Mit einem linearen Modell für den irregulären Seegang auf Basis einer zufälligen Zeitsimulation lassen sich sowohl transiente Ereignisse als auch irreguläre Wasseroberflächen berücksichtigen (Rodenbusch, 1986). Das lineare Modell für den irregulären Seegang stößt an seine Grenzen, wenn das Verhalten der maritimen Strukturen unter Extremwellen ermittelt werden soll. Die Ungenauigkeiten bei dem linearen Modell sind auf der Extrapolation für die kinematischen Größen unter dem Wellenberg aus dem Ruhewasserspiegel zurückzuführen. Hierfür werden verschiedene “Stretching”-Methoden, z.B. “Wheeler-Stretching” (Wheeler, 1969) bzw. “Delta-Stretching” (Rodenbusch und Forristall, 1986) und empirische Korrekturen vorgeschlagen.

Zunehmend interessiert die nichtlineare Wechselwirkung zwischen Wellen, die erst von Longuet-Higgins und Stewart (1960) identifiziert und von Longuet-Higgins (1987) weiterführend beschrieben wurde. Experimentelle Untersuchungen von Baldock et al. (1996) bestätigen, dass die nichtlineare Wechselwirkung

zwischen Wellen zu hohen Extremwellen führt. Es wird dabei gezeigt, dass die maximale Wellenhöhe etwa 25-30 % höher ist als sich durch Superposition harmonischer Elementarwellen ergibt. Diese Wechselwirkung führt auf deutlich steilere Wellenberge und flachere Wellentäler. Auch der Energietransport kann mit der linearen Wellentheorie nicht berechnet werden. Um diese nichtlinearen Wechselwirkungen in den irregulären Seegang einzubeziehen, wird eine hybride Wellentheorie zweiter Ordnung von Stansberg (1993) und Ye und Zhang (1994) vorgeschlagen, die mit der numerischen Vorgehensweise nach Longuet-Higgins (1987) implementiert und mit experimentellen Ergebnissen für den Extremseegang verglichen wird. Bei diesem hybriden Wellenmodell werden die Wellenauslenkungen als Überlagerung einer Gruppe von langwelligen Komponenten sowie einer Gruppe von kurzwelligen Komponenten beschrieben. Für die Erzeugung und Analyse transienter Wellen spielen die Spektralanalyse eine große Rolle. Osborne (1997) formuliert mit den Korteweg-deVries-Gleichungen (Korteweg und deVries, 1895) ein nichtlineares Wellenmodell für das flache Wasser, in dem die "inverse scattering"-Transformation implementiert wird. Ein empirisches nichtlineares Fourier-Spektrum wird zur Analyse der Wechselwirkung zwischen einzelnen Wellenzügen vorgeschlagen. Trotz guter Übereinstimmung bei irregulären Seegängen mit dem Experiment zieht die hybride Wellentheorie die Nichtlinearitäten noch unzureichend in Betracht.

Transiente Wellengruppen mit definierter Oberflächenauslenkung bieten auch die Möglichkeit, den deterministischen extremen Wellenzug gezielt zu generieren und damit die Analyse des Seegangsverhaltens maritimer Strukturen bei vorgegebenem Spektrum zugänglich zu machen. Bereits in den 60er Jahren stellten Davis und Zarnick (1964) das grundlegende Prinzip der transienten Wellengruppen vor, das auf den Dispersionseigenschaften von Wasserwellen beruht. Lange Wellen breiten sich schneller aus als kurze, und bei geschickter Überlagerung verschieden langer Wellen konvergiert der Wellenzug im Konzentrationspunkt zu einer einzigen Wellenerhebung. Takezawa und Takekawa (1976) sowie Takezawa und Hirayama (1976) entwickelten diese Versuchstechnik weiter, in dem sie ein Fourier-Spektrum für das Wellenpaket einführten. Die Prognostizierbarkeit der Wellenzüge war jedoch mangelhaft. Erst mit Einführung von Gaußschen Wellenpaketen konnte dieses Problem behoben werden (Bergmann, 1985; Clauss und Bergmann, 1986; Chakrabarti und Libby, 1988).

Auch frei fahrende Schiffe in Wellenpaketen können versuchstechnisch analysiert werden (Clauss und Kühnlein, 1995). Clauss und Kühnlein (1997) entwickelt ein empirisches Verfahren zur nichtlinearen Beschreibung konvergierender transienter Wellenpakete weiter, mit dem die Kinematik fortschreitender Wellengruppen für größere Wellenhöhen berechnet werden kann. Zur Generierung transienter Wellengruppen im irregulären Seegang implementieren Clauss und Steinhagen (2000) eine Optimierungstechnik. Auf Basis der linearen Wellentheorie wird die zufällige Phasenverteilung für ein gegebenes TMA-Spektrum optimiert, um eine Extremwelle hoher Steilheit zu generieren. Dabei beträgt die maximale Wellenhöhe die doppelte signifikante Wellenhöhe. Transiente Wellengruppen eignen sich hervorragend zur Generierung besonders hoher Einzelwellen sowie zur Bestimmung des Seegangsverhaltens maritimer Strukturen in Form einer Übertragungsfunktion sofern die Wellenhöhen relativ gering bleiben. Ein Verfahren zur computergestützten Synthese nichtlinearer transienter Schwerewellen im stochastischen Seegang wird von Steinhagen (2001) vorgestellt. Das Verfahren basiert auf der potentialtheoretischen Beschreibung der zweidimensionalen nichtlinearen Strömung. Die hohen deterministischen Einzelwellen und Wellengruppen werden mit Hilfe der Optimierung gezielt im stochastischen Wellenfeld synthetisiert.

1.2.2 Numerische Berechnung nichtlinearer Schwerewellen

Aufbauend auf potentialtheoretischer Formulierung mit dem gemischten Euler-Lagrange-Schema von Longuet-Higgins und Cokelet (1976) werden die Verfahren zur numerischen Simulation von extremen Schwerewellen im Zeitbereich kontinuierlich weiterentwickelt. Sie verwenden eine instationäre Methode zur Berechnung steiler Wellen bis zum Brechungspunkt. Dabei wird das Geschwindigkeitspotential vollständig durch Potentialwerte auf dem Rand bestimmt. Hohe Bedeutung bei der Weiterentwicklung nichtlinearer Berechnungsverfahren auf Basis der Potentialtheorie hat der zunehmende Einsatz der Randelementmethode, kurz BEM (*Boundary Element Method*), in der sich eine Randintegralgleichung

als Lösungsansatz für die Laplace-Gleichung formulieren lässt. Neue Ergebnisse zeigen, dass die Randelementemethode auch für dreidimensionale Untersuchungen von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen sowie für Wellenwiderstandsberechnungen von Schiffen gut geeignet ist (Kim und Kim, 1997; Celebi und Beck, 1997). Da sämtliche physikalischen Größen von Interesse auf dem Rand liegen, und sich ein deutlich geringerer Diskretisierungsaufwand ergibt, wird die Randelementmethode vor allem für den numerischen Wellenkanal eingesetzt (Bertram et al., 1993; Tanizawa und Clément, 2000).

Auch die Methode der finiten Elemente (FE) eignet sich zur Modellierung des zwei- und dreidimensionalen nichtlinearen Strömungsproblems. Wu und Eatock Taylor (1994a) und Wu und Eatock Taylor (1994b) beschreiben ein geeignetes Verfahren. Die Effizienz des Verfahrens ist vergleichbar mit der Randelementmethode, obwohl das gesamte Flüssigkeitsgebiet diskretisiert wird. Der Grund liegt in der vorteilhaften Struktur der symmetrischen Systemmatrix, die positiv definiert ist und bei geeigneter Numerierung der Knoten nur ein schmales Band aufweist (Cuthill und McKee, 1969; Cuthill, 1972).

Parallel zu der potentialtheoretischen Behandlung freier Oberflächen werden auch numerische Verfahren auf Grundlage der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANSE) eingesetzt. Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen unter Berücksichtigung der freien Oberfläche ist jedoch schwierig, da die Verformung der freien Oberfläche unbekannt ist und zusätzlich berechnet werden muss. Die dynamische Randbedingung kann nur direkt in die Impulsgleichungen implementiert werden, und die kinematische Randbedingung muss benutzt werden, um die freie Oberflächenverformung zu bestimmen.

Die Verfahren zur Bestimmung der freien Oberfläche in den Navier-Stokes-Gleichungen können im wesentlichen nach zwei Kategorien klassifiziert werden: "*interface capturing*" und "*interface tracking*" (Ferziger und Perić, 1996). Eine der "*interface capturing*"-Methode ist die "Volume of Fluid (VOF)"-Methode von Hirt und Nichols (1981). Die Verfahren mit dem sogenannten "randangepassten beweglichen Gitter" gehören zur "*interface tracking*" - Methode.

Hirt und Nichols (1981) entwickeln ein instationäres VOF-Verfahren zur Lösung der laminaren Strömungsprobleme mit freier Flüssigkeitsoberfläche. Hierfür wird ein kartesisches versetztes Berechnungsnetz zur Diskretisierung für das Berechnungsgebiet verwendet. Diese versetzte Anordnung der Variablen hilft einige Konvergenzprobleme und Oszillationen im Druck- und Geschwindigkeitsfeld zu vermeiden. Schumann (1998) implementiert dieses Verfahren zur Berechnung des Schwappens von Flüssigkeiten in Tanks mit Einführung der Interpolationstechnik von Rhie und Chow (1983) weiter. Die Flüssigkeit wird dabei reibungsfrei angenommen, und die mathematische Formulierung erfolgt mit Euler-Gleichungen. Das Lösungsgebiet ist in eine endliche Zahl kleiner, nichtüberlappender Kontrollvolumina unterteilt und diskretisiert. Das VOF-Verfahren kann auch bei der Wellenwiderstandsberechnung von Schiffen erfolgreich eingesetzt werden (Schumann, 1999). Da die Kontinuitätsgleichung nur in dem mit Flüssigkeit gefüllten Bereich erfüllt wird, muss eine Funktion zur Bestimmung der Grenze zwischen Luft und Wasser eingeführt werden. Der Rechenaufwand diese Vorgehensweise erweist sich als enorm.

Bei den Verfahren mit beweglichem Gitter wird dagegen nur der Bereich unter der Wasseroberfläche in Betracht gezogen. Dabei lassen sich die randangepassten Gitter bewegen ohne eine zusätzliche Variable einzuführen. Die Bewegung der Gitter wird mit Hilfe der Raumerhaltungsgleichung und der kinematischen Randbedingung bestimmt. Die mathematische Formulierung ist wegen der Raumerhaltungsgleichung recht kompliziert, weil sie diskretisiert und mit der Impuls- und Kontinuitätsgleichung kombiniert werden muss. Die Behandlung der brechenden Welle ist mit dem randangepassten Gitter nicht möglich. Die Massenerhaltung im Berechungsgebiet wird dagegen dank ihrer mathematisch konservativen Formulierung gut gewährleistet. Lilek (1996) untersucht eine 3-dimensionale Strömung um das Wigley-Schiff. Die freie Wasseroberfläche wird mit dem beweglichen Gitter verfolgt. Dabei werden gute Ergebnisse im Vergleich mit Messungen erzielt. Yoo (1999) implementiert dieses Verfahren für das Schwappen und die Untersuchung der Oberflächenverformung eines getauchten NACA-Profils. Das Ergebnis wird auch mit der potentialtheoretischen Methode verglichen.

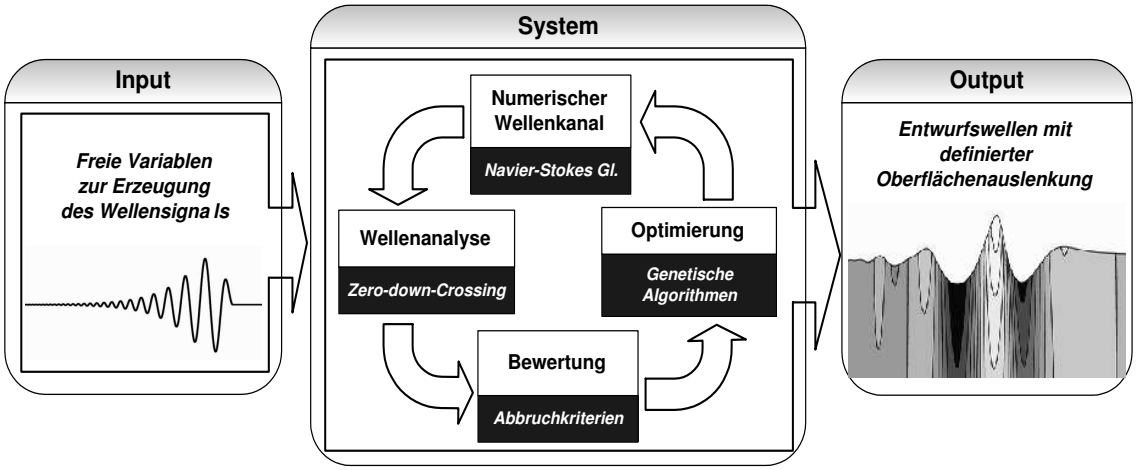

Abb. 1.3: Entwicklungskonzept eines numerischen Verfahrens zur Erzeugung von Entwurfswellen

1.3 Ziel der Arbeit

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Erzeugung nichtlinearer Entwurfsseegänge, deren Charakter und Oberflächenauslenkung deterministisch bestimmt werden können. In Abb. 1.3 wird das schematische Konzept dargestellt.

Um eine Entwurfswelle (Output) zu erzeugen, wird ein Signal für die Wellenmaschine (versuchstechnisch) oder für den Einströmrand (numerisch) benötigt. Für das Signal wird eine geeignete Funktion mit freien Variablen formuliert (Input). Die Funktion wird so definiert, dass eine konvergierende transiente Wellengruppe mit deterministischem Charakter je nach Änderung der Variablen generiert werden kann. Die Variablen sind unbekannt und müssen mit Hilfe von mehreren Modulen (System) gesucht werden, so dass die Entwurfswelle die gegebenen Anforderungen erfüllt. Das aus vier Modulen bestehende System kann als eine Blackbox interpretiert werden.

Zunächst wird ein Signal mit den Anfangsvariablen berechnet (Numerischer Wellenkanal). Dabei wird der Pegel auf der bestimmten Stelle im Wellenkanal gemessen, um ihn zu analysieren (Wellenanalyse). Es wird geprüft, ob die Messwerte die vorgegebenen Anforderungen der Entwurfswelle erfüllen (Bewertung). Solange das Abbruchkriterium nicht erreicht ist, läuft ein Suchverfahren für die freien Variablen weiter (Optimierung). Gesucht wird eine Entwurfswelle mit gegebener Wellenhöhe (H_{ziel}) und Wellenperiode (T_{ziel}) zum gegebenen Zeitpunkt (t_{ziel}).

Die Teilziele dieser Arbeit sind

- Vorstellung analytischer Wellentheorien und deren Grenzen.
- Aufbau eines numerischen Wellenkanals auf Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen
  - Gittergenerierung mit dem randangepassten beweglichen Gitter
  - Entwicklung eines Rechenprogramms zur Simulation der Wellenausbreitung im zweidimensionalen numerischen Wellenkanal
  - Überprüfung der Genauigkeit und Robustheit des numerischen Rechenverfahrens durch Vergleichsberechnung mit den analytischen Wellentheorien
- Aufbau eines Moduls zur Analyse der Wellenausbreitung mit Hilfe der "*Zero-down-crossing*" oder "*Zero-up-crossing*"-Methode

- Auswahl eines Verfahrens zur multimodalen Optimierung der Steuersignale
  - Formulierung einer Funktion zur Steuerung des Wellenblattes
  - Definition der Zielfunktion und Randbedingung für das Optimierungsverfahren sowie Kopplung mit dem numerischen Wellenkanal
- Erzeugung verschiedener Entwurfswellen
- Durchführung von Versuchen im Wellenkanal und Validierung des Verfahrens

Die Grundlage des numerischen Simulationsverfahrens bilden die Navier-Stokes-Gleichungen. Die numerische Lösung von Navier-Stokes-Gleichungen ist bei der Berechnung von Strömungen ohne freie Oberfläche gängige Technik. Zur Bestimmung der freien Oberflächenverformung wird das randangepasste Gitter verwendet. Die Diskretisierung der Grundgleichungen erfolgt mit der Finite-Volumen-Approximation. Um die numerische Stabilität längerer Simulationen zu erhöhen, wird die vollimplizite Euler-Methode für die Zeitdiskretisierung eingesetzt. Zur Kopplung der Impulsgleichung mit der Kontinuitätsgleichung wird der SIMPLE-Algorithmus verwendet, und die Lösungen werden iterativ bestimmt. Genetische Algorithmen werden als Suchverfahren für die optimale Wellenblattbewegung eingesetzt.

Als Ergebnis der vorliegenden Arbeit wird ein numerisches Verfahren zur Erzeugung nichtlinearer transienter Entwurfsseegänge mit definierter Wellenhöhe und Periode vorgestellt. Die Simulation der Extremwellen im numerischen Wellenkanal ermöglicht es, deterministische Wellenszenarien gezielt zu generieren und dabei die Anzahl der kostspieligen und aufwendigen Modellversuche drastisch zu reduzieren.

1.4 Gliederung der Arbeit

Die klassische lineare und nichtlineare Wellentheorie wird im Kapital 2 vorgestellt. Im Kapital 3 werden die Grundgleichungen und die Diskretisierungsmethode für den numerischen Wellenkanal beschrieben. Die Formulierung der randangepassten beweglichen Gitter wird detailliert erwähnt. Der Aufbau eines numerischen Wellenkanals wird im Kapital 4 dargelegt. Anschließend wird ein Vergleich mit Theorien, numerischen Berechnungen und Versuchen durch einen regulären Wellenzug durchgeführt, um die Richtigkeit des Verfahrens zu bestätigen. Bei der Simulation wird sowohl die reibungsfreie als auch die reibungsbehaftete Strömung berücksichtigt. Die Messungen erfolgen im Wellenkanal des Instituts für Wasserbau der TU-Berlin. Im Kapital 5 wird eine Optimierungsstrategie zur Erzeugung einer Entwurfswelle dargestellt, die auf einem Genetische Algorithmus basiert. Zur Generierung von Steuersignalen wird eine geeignete Funktion definiert. Die numerische Erzeugung verschiedener Entwurfswellen mit Hilfe des neu entwickelten Verfahren wird im Kapital 6 präsentiert. Zur Validierung werden die numerischen Ergebnisse mit Messungen verglichen, und die Fehlermargen bewertet. Im Kapital 7 werden Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick gegeben.

2. Wellentheorie

2.1 Potentialströmung

Die in der Natur vorkommenden Wellen können näherungsweise durch Überlagerung von Elementarwellen dargestellt werden. Zur Darstellung wird ein Koordinatensystem in Abb. 2.1 benutzt. Der Koordinatenursprung liegt im Ruhewasserspiegel, und die z-Achse ist entgegen der Erdbeschleunigung g gerichtet. Die x-Achse zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Wellen. L und T bezeichnen jeweils die Wellenlänge und die Periode und H die Wellenhöhe. ζ_a bezeichnet die Wellenamplitude und d die Wassertiefe.

Das Wasser bewegt sich unterhalb der Oberfläche. Dabei ist die Welle ein Strömungsvorgang, der folgende Bedingung für die Rotationsfreiheit erfüllen muss:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0 \tag{2.1}$$

wobei $\mathbf{v}$ den Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit bezeichnet, abhängig von x, z und t. Die Rotation eines Flüssigkeitsteilchens verändert sich nur durch zähigkeitsbedingte Schubspannungen. Da die Schubspannungen klein sind und ihre Vorzeichen während einer Periode wechseln, kann sich innerhalb einer halben Periode keine wesentliche Rotation ausbilden. Wenn das Wasser vor Eintreffen der Welle in Ruhe war, bleibt nach Eintreffen der Welle die Rotation nahezu Null, d.h. die Strömung kann als eine Potentialströmung betrachtet werden (Truckenbrodt, 1989).

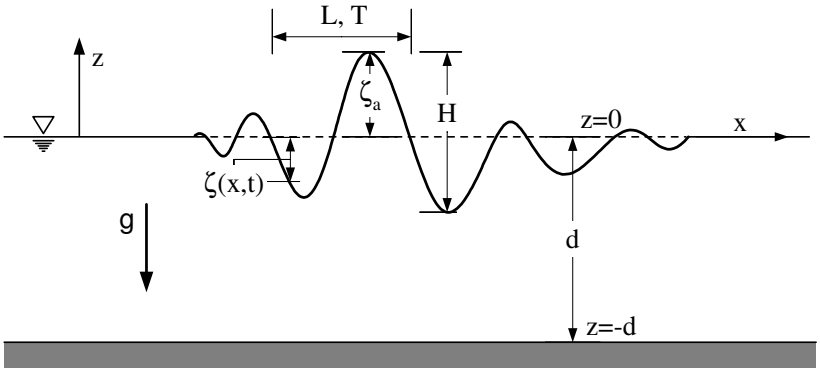

Abb. 2.1: Definition des Koordinatensystems für die fortschreitende Welle

Die Potentialströmung lässt sich durch eine skalare Potentialfunktion ϕ beschreiben. Die Geschwindigkeit hat folgenden Zusammenhang mit dem Potential:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{2.2}$$

Das Wasser wird als inkompressibel angenommen. Daher ist das in einen Flüssigkeitsraum eintretende Volumen pro Zeit gleich dem austretenden. Daraus folgt die Laplace-Gleichung als Kontinuitätsgleichung

im gesamten Flüssigkeitsraum in kartesischer Form:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.3}$$

Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung werden Randbedingungen benötigt:

- **Bodenrandbedingung**

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{für } z = -d \tag{2.4}$$

  wobei d die Wassertiefe unter der mittleren Oberfläche bezeichnet. Die vertikale Geschwindigkeit ist am Boden gleich 0, da sonst Wasser durch den Boden durchträte.

- **Kinematische Oberflächenbedingung**
  Die vertikale Geschwindigkeit $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ von Wasserteilchen an der Wasseroberfläche ist gleich der substantiellen Ableitung der Wasserspiegelhöhe nach der Zeit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{D\zeta(x,t)}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \qquad \text{für } z = \zeta(x,t) \tag{2.5}$$

  wobei der Term $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ in Gl. (2.5) für ein Wasserteilchen $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ beschrieben werden kann.

- **Dynamische Oberflächenbedingung**
  Der Druck an der Wasseroberfläche ist gleich dem Luftdruck p_0. Aus der instationären Bernoulligleichung folgt:

$$p_0 = p + \varrho g z + \frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] + \varrho \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2.6}$$

  wobei ϱ die Wasserdichte bezeichnet. An der Flüssigkeitsoberfläche soll der zeit- und ortsunabhängige konstante Atmosphärendruck $p_0 = p$ herrschen, d.h. aus Gl. (2.6) folgt:

$$\varrho g \zeta + \frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] + \varrho \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{für } z = \zeta(x,t) \tag{2.7}$$

2.2 Lineare Wellentheorie

Die klassische lineare Wellentheorie wird von Airy und Laplace entwickelt (Airy, 1845). Die Oberflächenrandbedingungen in Gl. (2.5) und Gl. (2.7) an der freien Wasseroberfläche, die quadratische Ausdrücke enthalten und an der zunächst unbekannten Oberfläche $z = \zeta(x,t)$ zu erfüllen sind, erschweren die Lösung erheblich. Deshalb wird hier die Wellenamplitude ζ_a als vernachlässigbar klein gegenüber der Wellenlänge L und der Wassertiefe d angenommen. Die Oberflächenrandbedingungen werden näherungsweise am Ruhewasserspiegel $z = \zeta(x,t)$ erfüllt. Die Wellenkontur sei in y-Richtung unverändert, so dass alle abgeleiteten Größen nur Funktionen von x und z sind. Gesucht wird eine Lösung für den Grenzfall kleine Wellenhöhe. Dabei werden alle Terme, die linear von der Wellenhöhe abhängen, berücksichtigt. Die Terme, die quadratisch oder mit höherer Potenz von der Wellenhöhe abhängen, werden vernachlässigt, weil diese gegenüber den linearen Termen bei verschwindender Wellenhöhe relativ klein werden.

Dann werden linearisierte kinematische und dynamische Randbedingung:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \qquad \text{für } z = \zeta(x,t) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta = 0 \qquad \text{für } z = \zeta(x,t) \tag{2.9}$$

Wir machen eine Taylorentwicklung[1] über der z-Koordinate mit $z_0 = 0$ und $z = \zeta$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi(x,\zeta,t)}{\partial z} &= \frac{\partial\phi(x,0,t)}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi(x,0,t)}{\partial z^2}\cdot\zeta + \cdots \\ \frac{\partial\phi(x,\zeta,t)}{\partial t} &= \frac{\partial\phi(x,0,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2\phi(x,0,t)}{\partial z\partial t}\cdot\zeta + \cdots \end{aligned} \tag{2.10}$$

Bis auf das erste Glied auf der rechten Seite können die Reihenglieder wieder vernachlässigt werden, da sie quadratisch oder in höherer Potenz von der Wellenhöhe abhängen. Man erhält daher:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \qquad \text{für } z = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\zeta = 0 \qquad \text{für } z = 0 \tag{2.12}$$

Durch Ableiten von Gl. (2.12) nach der Zeit und Einsetzen in Gl. (2.11) lässt sich ζ eliminieren:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{für } z = 0 \tag{2.13}$$

Zur Lösung wollen wir das Potential als Produkt von drei Funktionen darstellen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen, d.h.

$$\phi(x,z,t) = \Xi(x)\cdot Z(z)\cdot\Pi(t) \tag{2.14}$$

Verwenden wir diesen Ansatz in der Laplace-Gleichung Gl. (2.3), so ergeben sich unter Berücksichtigung der Bodenrandbedingung Gl. (2.4) und Oberflächenbedingung Gl. (2.13) für das Geschwindigkeitspotential Lösungen, die bezüglich der Variablen x und t harmonisch sind:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\zeta_a\omega}{k}\,\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\sin(kx-\omega t) \\ &= \frac{\zeta_a g}{\omega}\,\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\sin(kx-\omega t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{kg\tanh kd} \tag{2.16}$$

und der Wellenzahl

$$k = \frac{2\pi}{L} \tag{2.17}$$

Als Kontur der freien Wasseroberfläche ergibt sich aus dem Potential Gl. (2.15) mit der linearisierten Oberflächenbedingung Gl. (2.13) die Wellenform:

$$\zeta = \zeta_a\cos(kx-\omega t) = \zeta_a\cos\theta \tag{2.18}$$

Für einen mitbewegten Beobachter ändert sich diese Wellenform nicht, sofern die Geschwindigkeit so gewählt wird, dass die Phase $\theta = kx - \omega t$ konstant bleibt. Mit $d\theta = k\mathrm{d}x - \omega\mathrm{d}t = 0$ folgt die sogenannte Phasengeschwindigkeit c :

$$c = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} \tag{2.19}$$

[1] Die Taylorentwicklung der Funktion f um einen Punkt z_0 lautet:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\partial^n f(z_0)}{\partial z^k}(z-z_0)^k + R_n(z)$$

R_n heißt Lagranges Restglied und ist klein von n-ter Ordnung.

Tab. 2.1: Ergebnisse aus der linearen Wellentheorie

Geschwindigkeitspotential	ϕ	$=$	$\frac{\zeta_a\, g}{\omega}\, \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\, \sin(kx-\omega t)$
Wasserspiegelauslenkung	ζ	$=$	$\zeta_a \cos(kx-\omega t)$
Horizontale Geschwindigkeit	$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$	$=$	$\zeta_a\, \omega\, \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\, \cos(kx-\omega t)$
Vertikale Geschwindigkeit	$w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$=$	$\zeta_a\, \omega\, \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd}\, \sin(kx-\omega t)$
Horizontale Beschleunigung	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$=$	$\zeta_a\, \omega^2\, \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\, \sin(kx-\omega t)$
Vertikale Beschleunigung	$\frac{\partial w}{\partial t}$	$=$	$-\zeta_a\, \omega^2\, \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd}\, \cos(kx-\omega t)$
Dynamischer Druck	$p_d = -\varrho \frac{\partial \phi}{\partial t}$	$=$	$-\varrho g \zeta_a\, \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\, \cos(kx-\omega t)$
Druck	p	$=$	$p_d - \varrho g z$

Mit Gl. (2.16) ergibt sich:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kd} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}} \tag{2.20}$$

Die Phasengeschwindigkeit hängt von der Wellenzahl k und der Wassertiefe d ab. Lange Wasserwellen breiten sich schneller aus als kurze. Das wird **Dispersion** genannt. Die wichtigsten Ergebnisse aus der linearen Wellentheorie werden in Tabelle 2.1 zusammengefasst (Clauss et al., 1988).

2.3 Nichtlineare Wellentheorie

Die lineare Wellentheorie gilt nur für Wellen, deren Amplitude vernachlässigbar klein gegenüber der Wellenlänge L und der Wassertiefe d ist. Bei steilen Wellen wie Meereswellen sind die Orbitalbahnen nicht geschlossen; es findet ein Wassertransport im Bereich der Wasseroberfläche in Wellenlaufrichtung statt. Daher ist die lineare Wellentheorie nicht mehr gültig. Um die nichtlinearen Effekte in die Wellentheorie einbeziehen zu können, werden die quadratischen oder höheren Potenzen in den Oberflächenrandbedingungen mitberücksichtigt.

Aus der Gl. (2.7) ergibt sich die Wellenerhebung:

$$\zeta = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] \qquad \text{für } z = \zeta(x,t) \tag{2.21}$$

Wenn der Druck auf der freien Wasseroberfläche konstant ist, kann die kinematische Randbedingung Gl. (2.5) mit Hilfe des totalen Differentials[2] $\frac{Dp}{Dt}$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}\right) p = 0 \tag{2.22}$$

[2] Das totale Differential: $\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z}$

wobei die Terme $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ in Gl. (2.22) für ein Wasserteilchen $\frac{\partial\phi}{\partial x} = u$ und $\frac{\partial\phi}{\partial z} = w$ beschrieben werden können.

Aus der Bernoulligleichung in Gl. (2.6) folgt der zeit- und ortsabhängige Druck:

$$p - p_0 = -\varrho g z - \frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] - \varrho\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{2.23}$$

Unter der Annahme, dass der Atmosphärendruck $p_0 = 0$ ist, kann der Druck in die Gl. (2.22) eingesetzt werden. Mit der kinematischen Randbedingung in Gl. (2.5) ergibt sich die exakte Oberflächenbedingung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &+ g\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \qquad \text{für } z = \zeta(x,t)\end{aligned} \tag{2.24}$$

Als Näherung für die Funktionen ϕ und ζ werden Potenzreihenentwicklungen nach einem kleinen Parameter $\varepsilon = k\zeta_a$ gebildet (Perturbationsmethode):

$$\begin{aligned}\phi(x,z,t,\varepsilon) &= \sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\phi^{(l)}(x,z,t) = \underbrace{\phi^{(0)}(x,z,t)}_{=0} + \varepsilon^1\phi^{(1)}(x,z,t) + \varepsilon^2\phi^{(2)}(x,z,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ \zeta(x,t,\varepsilon) &= \sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\zeta^{(l)}(x,t) = \underbrace{\zeta^{(0)}(x,t)}_{=0} + \varepsilon^1\zeta^{(1)}(x,t) + \varepsilon^2\zeta^{(2)}(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{2.25}$$

wobei $\phi^{(l)}$ die Potentiale und $\zeta^{(l)}$ die Wellenerhebung l-ter Ordnung bezeichnet. $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ bezeichnet einen Fehler in der Größenordnung ε^3. Die Lösung 0-ter Ordnung soll der Glattwasserfall sein. Es muss $\phi^{(0)}(x,z,t) = 0$ und $\zeta^{(0)}(x,t) = 0$ sein. Die Reihenentwicklungen nach ε führen zu Wellentheorien höherer Ordnung, die als Stokes-Theorien bezeichnet werden (Stokes, 1847, 1880). Wenn man die Reihe bereits nach dem ersten Glied abbricht, erhält man die Wellentheorie erster Ordnung (lineare Wellentheorie). An der freien Wasseroberfläche wird das Potential in eine Taylorentwicklung wie in Gl. (2.10) angewendet. Wird die Taylorentwicklung bei Gliedern zweiter Ordnung abgebrochen, so ergibt sich aus der exakten Oberflächenbedingung (2.24) eine Bestimmungsgleichung für das Potential 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial t^2} &+ \zeta^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial t^2} + g\left(\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial z} + \zeta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z^2}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right] = 0\end{aligned} \tag{2.26}$$

Die Wellenerhebung 2. Ordnung folgt aus Gl. (2.26) nach (2.21):

$$\zeta^{(2)} = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^{(2)} + \zeta^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right] \tag{2.27}$$

Die Ergebnisse aus der Stokes-Wellentheorie 2. Ordnung werden in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

Die Abbildung 2.2 zeigt im einzelnen die Gültigkeitsbereiche der unterschiedlichen Wellentheorien. Die x-Achse zeigt die relative Wassertiefe $\frac{d}{gT^2}$, und die y-Achse stellt die relative Wellenhöhe $\frac{H}{gT^2}$ dar. Wie man sieht, ist die lineare Wellentheorie (Airy-Theorie) auf flachem Wasser nur für sehr geringere Steilheiten

Tab. 2.2: Ergebnisse aus der Stokes-Wellentheorie zweiter Ordnung

Geschwindigkeitspotential	$\frac{k^2}{\omega}\phi$	$=$	$(k\zeta_a)\,\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\,\sin\theta + \frac{3}{8}(k\zeta_a)^2\,\frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^4 kd}\,\sin 2\theta$
Wasserspiegelauslenkung	$k\zeta$	$=$	$(k\zeta_a)\cos\theta + \frac{1}{4}(k\zeta_a)^2\,\frac{\cosh kd}{\sinh^3 kd}\,(2+\cosh 2kd)\,\cos 2\theta$
Horizontale Geschwindigkeit	$\frac{u}{c}$	$=$	$(k\zeta_a)\,\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\,\cos\theta + \frac{3}{4}(k\zeta_a)^2\,\frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^4 kd}\cos 2\theta$
Vertikale Geschwindigkeit	$\frac{w}{c}$	$=$	$(k\zeta_a)\,\frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd}\,\sin\theta + \frac{3}{4}(k\zeta_a)^2\,\frac{\sinh 2k(z+d)}{\sinh^4 kd}\sin 2\theta$
Horizontale Beschleunigung	$\frac{\dot{u}}{\omega c}$	$=$	$(k\zeta_a)\,\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\,\sin\theta + \frac{3}{2}(k\zeta_a)^2\,\frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^4 kd}\sin 2\theta$
Vertikale Beschleunigung	$\frac{\dot{w}}{\omega c}$	$=$	$-(k\zeta_a)^2\,\frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd}\,\cos\theta - \frac{3}{2}(k\zeta_a)^2\,\frac{\sinh 2k(z+d)}{\sinh^4 kd}\cos 2\theta$
Druck	$\frac{k}{\varrho g}\,p$	$=$	$-kz + (k\zeta_a)\,\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\,\cos\theta$ $+\frac{(k\zeta_a)^2}{2\sinh 2kd}\left(\frac{3\cosh 2k(z+d)}{\sinh^2 kd}-1\right)\cos 2\theta$ $+(k\zeta_a)^2\,\frac{1-\cosh 2k(z+d)}{2\sinh 2kd}$
Phasengeschwindigkeit	c	$=$	$\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd}$

Phase $\theta = kx - \omega t$

genau. Die Stokes-Theorien sind dagegen für die relative hohe Wellensteilheit gültig. Die *Ursell*-Zahl (Ursell, 1953) wird als Abgrenzungskriterium verwendet und wie folgt definiert:

$$U_r = \frac{(H/d)^3}{(H/L)^2} = \frac{HL^2}{d^3} \tag{2.28}$$

Die Kurven mit konstanter *Ursell*-Zahl $U_r = 26$ und 500 in Abb. 2.2 kennzeichnen die Bereichsgrenzen der Cnoidalwellentheorie und der Einzelwellentheorie. Die Cnoidalwellentheorie dient zur Berechnung für die periodischen Flachwasserwellen (Korteweg und deVries, 1895). Mit der Einzelwellentheorie lassen sich die Erdbeben- und Flutwellen analysieren (Boussinesq, 1872; Munk, 1949).

2.4 Navier-Stokes-Gleichungen

Wie im Abschnitt 2.3 gezeigt wird, können die nichtlinearen Wellentheorien durch Perturbationsmethodik dargestellt werden. Die nichtlinearen Randwertaufgaben werden in einer Folge von linearen Randwertaufgaben berücksichtigt, von denen jede Ordnung der unendlichen Folge von linearen Randwertaufgaben ein eigenes Potential liefert, deren Summe bei genügend schwacher Nichtlinearität zur nichtlinearen Lösung konvergieren kann.

Für die numerische Lösung der nichtlinearen Randwertaufgaben in dieser Arbeit wird auf das Potential verzichtet. Die Navier-Stokes-Gleichungen werden als Grundgleichungen formuliert. Unter der Voraussetzung, dass das Lösungsgebiet genügend fein diskretisiert wird, kann eine Lösung der viskosen Strömung

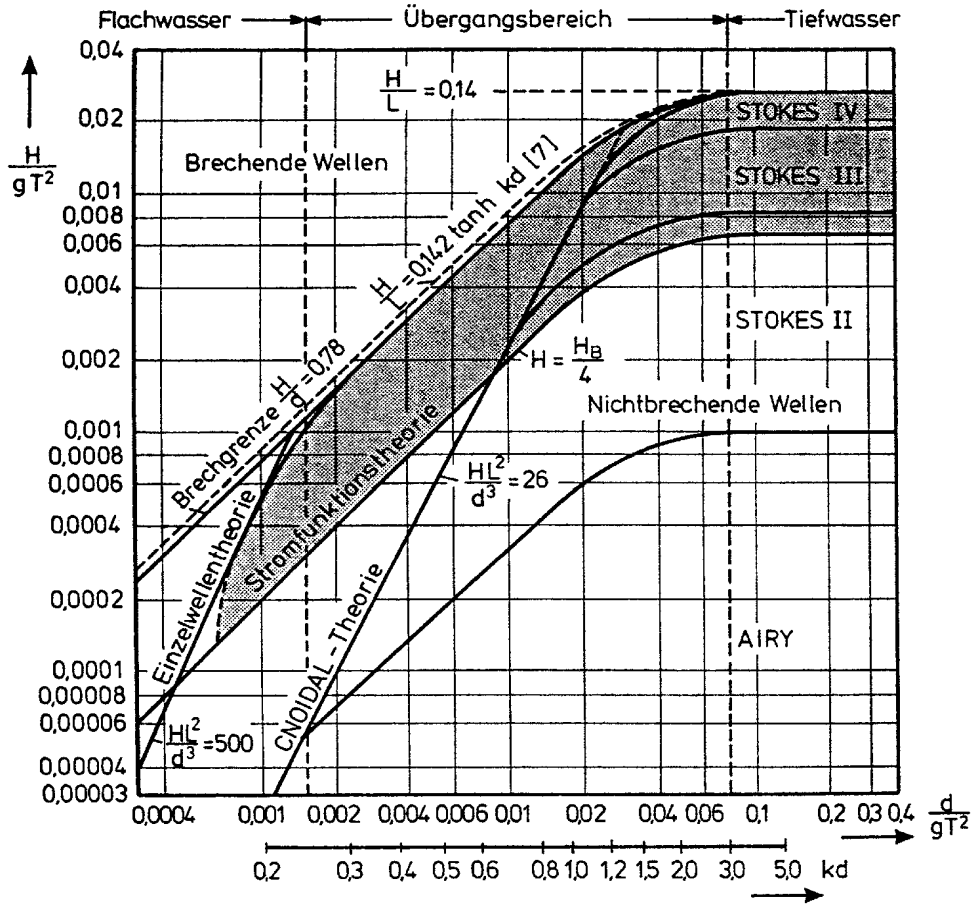

Abb. 2.2: Gültigkeitsbereiche der unterschiedlichen Wellentheorien

berechnet werden (Anderson et al., 1984; Wendt, 1996). Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung lauten die Navier-Stokes-Gleichungen in Vektorform (Newman, 1977):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} \tag{2.30}$$

wobei $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ die kinematische Viskosität darstellt. $\mathbf{v}$ bezeichnet den Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit und $\mathbf{f}$ äußere Kräfte. Für die dreidimensionale kartesische Form lauten die Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u + \frac{1}{\varrho}f_x \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v + \frac{1}{\varrho}f_y \\
\frac{\partial w}{\partial t} + \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w + \frac{1}{\varrho}f_z
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Die Gl. (2.29) und Gl. (2.30) stellen ein nichtlineares System partieller Differentialgleichungen in den drei Geschwindigkeitskomponenten und dem Druck dar. Um die Navier-Stokes-Gleichungen lösen zu können, müssen bestimmte Annahmen getroffen werden. Eine der wichtigsten Annahmen ist, dass das Fluid dem Newtonschen Gesetz unterliegt, wonach die Spannungen durch Geschwindigkeitsgradienten und die Viskosität ausgedrückt werden können. Außerdem wird die Schwerkraft als einzige Volumenkraft betrachtet, die durch die Erdbeschleunigung g definiert wird. Bei der numerischen Lösungsmethode liegen die Zustandvariablen u, v, w und p in Gl. (2.31) an jedem Punkt des Berechnungsgebiets, das mit Hilfe des numerischen Gitters diskretisiert wird.

Im folgenden Kapital wird die numerische Lösungsmethode auf Basis von Navier-Stokes-Gleichungen ausführlich beschrieben.

3. Numerische Verfahren

3.1 Grundgleichungen

Die Bewegung eines Newtonschen Fluids wird durch die Erhaltungsgleichungen für die Masse und den Impuls beschrieben. Die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung stellen ein nichtlineares System partieller Differentialgleichungen in den drei Geschwindigkeitskomponenten und dem Druck dar. Eine weitere Erhaltungsgleichung für den Raum soll berücksichtigt werden, um die Bewegung der freien Wasseroberfläche zu bestimmen (Demirdžić und Perić, 1988). Für die meisten Anwendungen ist dieses Gleichungssystem analytisch nicht lösbar. Es besteht aber die Möglichkeit einer numerischen Lösung, wobei keine analytischen Ausdrücke für die Unbekannten gesucht werden, sondern ihre Werte an endlich vielen Stellen im Strömungsgebiet bestimmt werden. Hierfür werden sowohl das Strömungsgebiet als auch die Differentialgleichungen diskretisiert. Die Erhaltungsgleichungen werden in einem kartesischen, ortsfesten x-y-Koordinatensystem formuliert. Im folgenden werden die Erhaltungsgleichungen in Integralform ausgedrückt. Sie beziehen sich auf ein endliches, bewegtes Kontrollvolumen (KV).

Die Erhaltungsgleichungen für den Raum, die Masse und den Impuls eines bewegten und vollständig mit Flüssigkeit gefüllten KV lauten (Slattery, 1972):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \; - \; \int\limits_{S} \mathbf{v}_\mathrm{s}\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S \;=\; 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} \varrho\;\mathrm{d}\Omega \;+\; \int\limits_{S} \varrho\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\mathrm{s})\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S \;=\; 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} \varrho\,\mathbf{v}\;\mathrm{d}\Omega \;+\; \int\limits_{S} \varrho\,\mathbf{v}(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\mathrm{s})\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S \;=\; \int\limits_{S} \overrightarrow{\overrightarrow{T}}\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S \;+\; \int\limits_{\Omega} \varrho\,g\;\mathrm{d}\Omega \tag{3.3}$$

Ω bezeichnet das gesamte erfasste Flüssigkeitsgebiet, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, S die Oberfläche des Kontrollvolumens, $\mathbf{n}$ Normalenvektor, $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit, $\mathbf{v_s}$ die Geschwindigkeit der Oberfläche des Kontrollvolumens, $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ den Spannungstensor und g die Erdbeschleunigung. Der Spannungstensor kann für Newtonsche Fluide wie folgt dargestellt werden:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \; -\left(p+\frac{2}{3}\,\mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right)\,\overrightarrow{\overrightarrow{I}} \;+2\mu\,\overrightarrow{\overrightarrow{D}} \tag{3.4}$$

wobei μ die dynamische Viskosität darstellt, $\overrightarrow{\overrightarrow{I}}$ der Einheitstensor, p der statische Druck und $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$ der Deformationstensor:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D}} = \; \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\,\mathbf{v} \;+\; (\mathrm{grad}\,\mathbf{v})^T\right] \tag{3.5}$$

In kartesischen Koordinaten und Indexschreibweise lauten der Spannungstensor und der Deformationstensor:

$$T_{ij} \;\;=\;\; -\left(p+\frac{2}{3}\,\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\delta_{ij} \;+\; 2\mu D_{ij} \tag{3.6}$$

$$D_{ij} \;\;=\;\; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.7}$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$, sonst $\delta_{ij} = 0$). Der viskose Teil des Spannungstensors wird als τ_{ij} bezeichnet:

$$\tau_{ij} = 2\,\mu D_{ij} \; - \; \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{3.8}$$

Die Impulserhaltungsgleichung für die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten u_i lautet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} \varrho u_i \;\mathrm{d}\Omega \; + \; \int\limits_{S} \varrho u_i(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\mathrm{s})\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S \; = \; \int\limits_{S} \mathbf{t}_i\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S \; + \; \int\limits_{\Omega} \varrho g_i\;\mathrm{d}\Omega \tag{3.9}$$

Der Vektor $\mathbf{t}_i$ kann in inkompressiblen Strömungen wie folgt ausgedrückt werden ($\frac{2}{3}\,\mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$):

$$\mathbf{t}_i = \tau_{ij}\,\mathbf{i}_j \; - \; p\,\mathbf{i}_i = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,\mathbf{i}_j \; - \; p\,\mathbf{i}_i \tag{3.10}$$

Hier ist $\mathbf{i}_i$ der Einheitsvektor in Richtung der kartesischen Koordinate x_i.

Die Turbulenz spielt bei der nichtbrechenden Welle keine große Rolle. Die Modellierung der Turbulenz ist bei der Wechselwirkung zwischen Wellen und schwimmenden Körpern oder an der Berandung wichtig. Die Implementierung des Turbulenzmodells, das auf einem Wirbelviskositätsansatz basiert, in die Impulsgleichungen ist sehr einfach. Man ersetzt nur μ mit $\mu + \mu_t$, wobei μ_t die Wirbelviskosität ist, welche von der Strömung abhängig ist. Die Wirbelviskosität kann im Lösungsgebiet um mehrere Größenordnung variieren.

3.2 Randbedingungen

Für die Lösung von Strömungsproblemen mit freier Oberfläche werden zusätzliche Gleichungen benötigt; diese werden durch die Vorgabe der Randbedingungen an der freien Wasseroberfläche bereitgestellt. In den meisten Fällen handelt es sich bei einer freien Oberfläche um die Grenze zwischen Wasser und Luft. An der freien Oberfläche gelten kinematische und dynamische Randbedingungen:

- **Kinematische Randbedingung**
  Die kinematische Randbedingung besagt, dass der Massenfluss durch die freie Oberfläche gleich Null ist, d.h. dass die freie Oberfläche nicht durchströmt wird. Zur Erfüllung der kinematischen Randbedingung werden die Raumerhaltungsgleichung (Gl. (3.1)) und die Kontinuitätsgleichung (Gl. (3.2)) implementiert.
  $$\int\limits_{S_\mathrm{fo}} \varrho(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\mathrm{s})\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S = 0 \tag{3.11}$$

- **Dynamische Randbedingung**
  Die normalen und tangentialen Kräfte an der Oberfläche sind im Gleichgewicht. d.h. die Kräfte von beiden Seiten haben den gleichen Betrag und die entgegengesetzte Richtung der Normalen:
  $$p - 2\mu\left(\frac{\partial v_n}{\partial n}\right)\Big|_{Flüssigkeit} \quad = \quad p\,\Big|_{Luft} \tag{3.12}$$
  $$\mu\left(\frac{\partial v_t}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial t}\right)\Big|_{Flüssigkeit} \quad = \quad 0 \tag{3.13}$$
  wobei v_n und v_t die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht und parallel zur freien Oberfläche sind. μ bezeichnet die dynamische Viskosität.

Folgende Randbedingungen werden für die numerische Strömungssimulation benötigt:

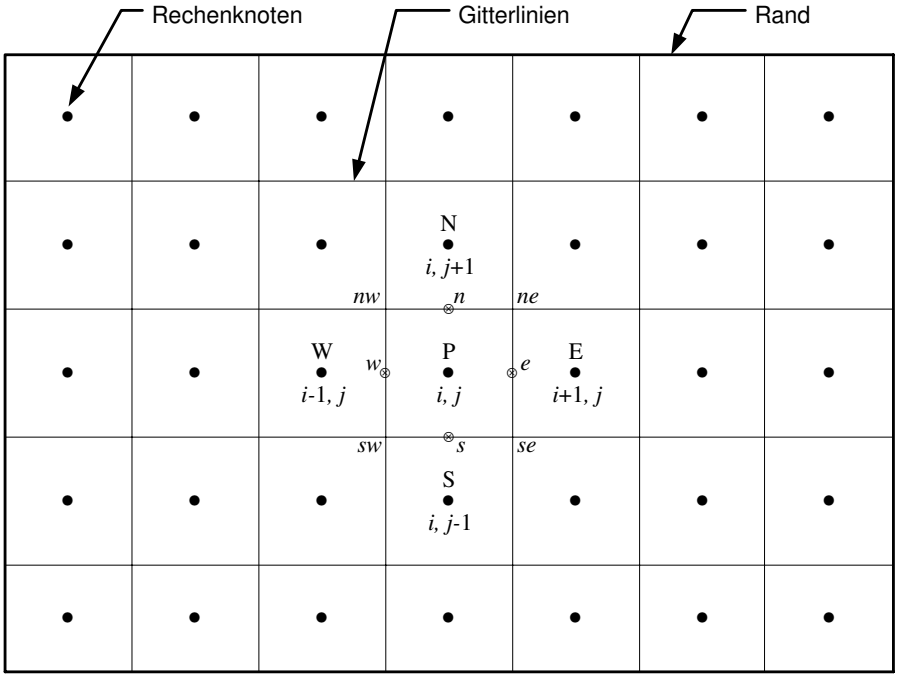

Abb. 3.1: Strukturiertes Rechengitter

- **Einströmrand**
  Die Variablenwerte werden am Einströmrand vorgegeben. Wenn die Geschwindigkeiten dort bekannt sind, können die Massenflüsse berechnet werden. Dies entspricht den Dirichlet-Randbedingungen bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen.

- **Ausströmrand**
  Am Ausströmrand wird die Geschwindigkeit aus dem Inneren extrapoliert und dann so korrigiert, dass die globale Massenerhaltung gewährleistet ist. Diese Bedingung sollte ebenfalls direkt in die Kontinuitätsgleichung bei der Herleitung der Druckkorrekturgleichung eingesetzt werden. Sie wirkt sich als eine Neumann-Randbedingung für die Druckkorrektur aus, d.h. die Randgeschwindigkeiten werden als vorgegeben betrachtet.

- **Wand**
  An einer Wand gilt die Haftbedingung, d.h. die Geschwindigkeit des Fluids ist gleich der Geschwindigkeit der Wand (meistens Null). Bei nicht-viskosen Fluiden wird an Stelle der Haftbedingung nur verlangt, dass die Wand nicht durchströmt wird.

3.3 Rechengitter

Um eine diskretisierte Lösung auf dem Lösungsgebiet mittels numerischer Verfahren zu erhalten, soll zunächst ein numerisches Gitter erzeugt werden. Hier wird ein strukturiertes, nichtorthogonales Gitter mit dem algebraischen Verfahren erzeugt und verwendet (Demirdžić, 1982; Perić, 1985). Ein typisches strukturiertes Gitter und die Bezeichnungen sind in Abb. 3.1 dargestellt. Dieses Gitter hat eine reguläre Beziehung zwischen den Gitterpunkten; d.h. bei jedem Gitterpunkt (Rechenknoten) sind die Nachbarpunkte eindeutig definiert. Wenn ein betrachteter Punkt durch die Indizes i, j definiert ist, dann besitzen seine Nachbarn die Indizes $(i-1,\, j)$, $(i+1,\, j)$, $(i,\, j+1)$ und $(i,\, j-1)$. Die Anzahl der KV der jeweiligen

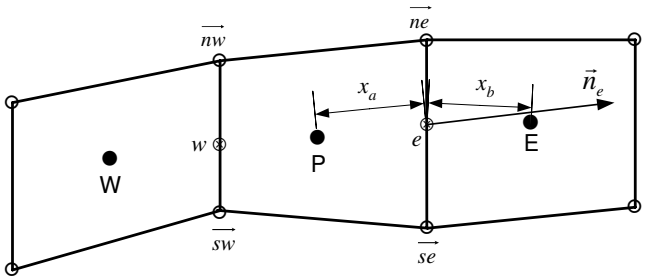

Abb. 3.2: Lineare Interpolation der Variablenwerte an der KV-Seite

Gitterlinie (x, y) bleibt immer gleich. Für die einfache Geometrie beim numerischen Wellenkanal ist ein strukturiertes Gitter gut geeignet, solange die Gitterverzerrung auf Grund der Geometrie keine große Rolle spielt. Obwohl das strukturierte Gitter sowohl numerisch als auch geometrisch vorteilhaft ist, ist es nicht immer einfach, ein effektives Gitter bezogen auf die Genauigkeit der Lösung und die Konvergenzrate zu erzeugen (Thompson, 1984; Thompson et al., 1985).

Die Variablen sind beim numerischen Verfahren auf dem Mittelpunkt eines Kontrollvolumens gespeichert, und die benötigen Variablenwerte an der KV-Seite des Kontrollvolumens werden durch die lineare Interpolation berechnet. In Abb 3.2 wird die Interpolation für die Zellen P und E dargestellt. Ein Variablenwert auf der Mitte der gemeinsamen KV-Seite e soll gesucht werden. Der gesuchte Wert ϕ_e wird aus den benachbarten Mittelpunkten P und E, wo die Werten gespeichert sind, wie folgt linear interpoliert:

$$\phi_e \;=\; \phi_{\mathsf{P}} \frac{x_b}{x_a + x_b} \;+\; \phi_{\mathsf{E}} \frac{x_a}{x_a + x_b} \tag{3.14}$$

Der Diskretisierungsfehler 2. Ordnung kann aus dieser Interpolationstechnik erreicht werden, wenn die Gitterlinien gerade verlaufen.

3.4 Diskretisierung der Grundgleichungen

Die Erhaltungsgleichungen werden nach der Finite-Volumen-Methode (FVM) diskretisiert (Tzabiras, 1993; Cura Hochbaum, 1994). Zur Erläuterung der Diskretisierung wird die Impulserhaltungsgleichung (3.9) noch einmal unter Verwendung des viskosen Teils des Spannungstensors τ_{ij} und des Drucks p geschrieben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{\Omega} \varrho u_i \,\mathrm{d}\Omega \;+\; \int\limits_{S} \varrho u_i (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\mathrm{s}) \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S \;=\; \int\limits_{S} (\tau_{ij}\, \mathbf{i}_j - p\, \mathbf{i}_i) \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S \;+\; \int\limits_{\Omega} \varrho g_i \,\mathrm{d}\Omega \tag{3.15}$$

Eine allgemeine Transportgleichung mit einer skalaren Größe ϕ wird zur Erläuterung der Diskretisierung verwendet. Dabei werden alle vier Terme in der Erhaltungsgleichung bezeichnet, nämlich als Zeit-, Konvektions-, Diffusions- und Quellterm, welche auch in Gl. (3.3) angegeben wurden.

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \varrho\phi \;\mathrm{d}\Omega}_{\text{Zeitterm}} \;+\; \underbrace{\int_{S} \varrho\phi\, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\mathrm{s}) \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S}_{\text{Konvektionsterm}} \;=\; \underbrace{\int_{S} \Gamma \,\mathrm{grad}\,\phi \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S}_{\text{Diffusionsterm}} \;+\; \underbrace{\int_{\Omega} q_\phi \,\mathrm{d}\Omega}_{\text{Quellterm}} \tag{3.16}$$

In Abb. 3.3 wird ein typisches nichtorthogonales KV dargestellt.

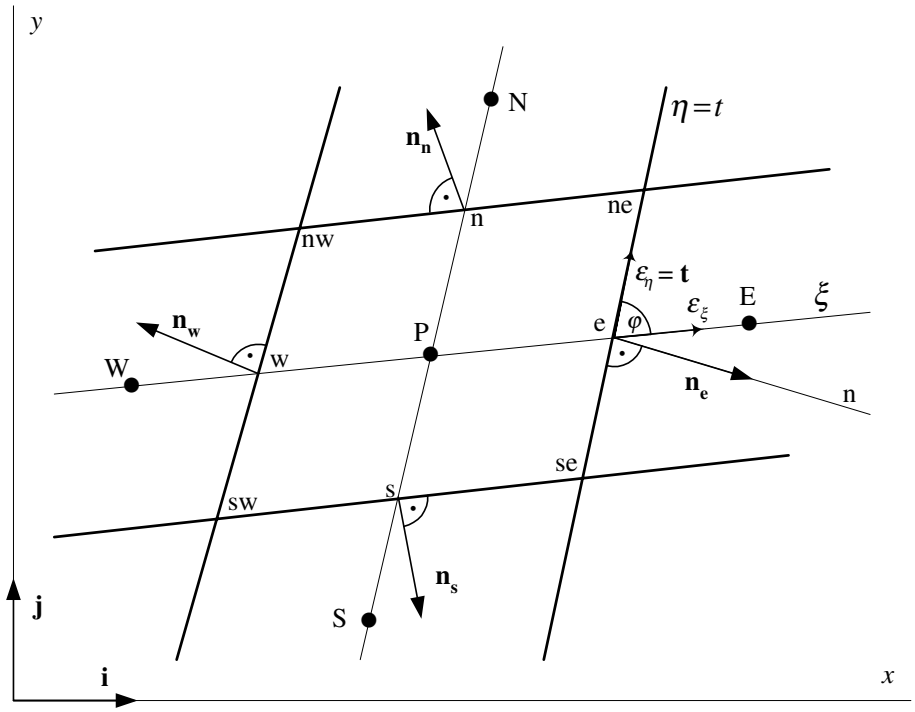

Abb. 3.3: Ein typisches KV und die benutzten Bezeichnungen

3.4.1 Integration über die Zeit

Bei der instationären Strömung müssen sowohl die Zeit als auch der Raum diskretisiert werden. Gesucht wird eine Methode, die die Lösung zur Zeit Δt, $\phi(\Delta t)$ liefert, wobei Δt ein kurzes Zeitintervall ist. Danach kann die Lösung bei $t = \Delta t$ als neue Anfangsbedingung gesehen werden. Zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen sind die Methoden als Zwei-Ebenen-Methoden bekannt, da sie nur die Werte der Unbekannten zu zwei Zeiten benötigen. Alle Methoden liefern gute Ergebnisse, sofern das Zeitintervall Δt klein genug ist. In dieser Arbeit wird die vollimplizite Euler-Methode für die Zeitintegration verwendet. Der zeitabhängige Term wird wie folgt approximiert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} \varrho\phi \; \mathrm{d}\Omega \;\approx\; \frac{(\varrho\;\phi\;\Delta\Omega)^{\mathrm{n}+1} \;-\; (\varrho\;\phi\;\Delta\Omega)^{\mathrm{n}}}{\Delta \mathrm{t}} \;=\; \frac{\varrho(\Delta\Omega)^{\mathrm{n}+1}}{\Delta \mathrm{t}}\;\phi^{\mathrm{n}+1} \;-\; \frac{\varrho(\Delta\Omega)^{\mathrm{n}}}{\Delta \mathrm{t}}\;\phi^{\mathrm{n}} \tag{3.17}$$

wobei der Index $n + 1$ die neue Zeitebene und n die alte Zeitebene bezeichnet. In Gl. (3.17) bildet der Koeffizient des ersten Terms einen Beitrag zum zentralen Koeffizenten in der Koeffizientenmatrix und der zweite Term wird dem Quellterm zugefügt. Alle übrigen Terme werden auf der neuen Zeitebene berechnet. Dies ist eine Approximation des Zeitintegrals erster Ordnung, d.h. der Fehler ist proportional der Zeitschrittweite. Sie verlangt kleinere Zeitschritte als die Methoden höherer Ordnung. Sie bietet aber uneingeschränkte Stabilität und wird hier der Einfachheit halber verwendet. Die Methode kann aber ohne große Schwierigkeiten auch auf eine Methode 2. Ordnung, wie z.B. Crank-Nicolson-Methode erweitert werden.

3.4.2 Diskretisierung konvektiver Flüsse

Der Transport von Wasserteilchen durch eine strömende Flüssigkeit wird als Konvektion bezeichnet. Die Flächenintegrale werden nach der Mittelpunktregel approximiert. Das Integral wird durch das Produkt

aus dem Wert des Integranden in der Mitte des Integrationsgebiets und der Größe des Integrationsgebietes ersetzt. Diese Approximation besitzt einen Abbruchfehler zweiter Ordnung, was den besten Kompromiss zwischen der Genauigkeit und der Einfachheit darstellt.

Der konvektive Fluss für die skalare Variable ϕ wird durch die k-te KV-Seite (*east, west, north, south*) wie folgt berechnet:

$$F_k \;=\; \int_S \varrho\phi\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\mathrm{s})\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S \;\approx\; \dot{m}_k\,\phi_k, \qquad k \,=\, e,\,w,\,n,\,s \tag{3.18}$$

wobei $\dot{m}_k$ den Massenfluss durch die k-te KV-Seite darstellt:

$$\dot{m}_k \;=\; \int_S \varrho(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\mathrm{s})\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}S \;\approx\; \varrho_k\,(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{n}\,S_k \;-\; \delta\Omega_k) \tag{3.19}$$

S_k bezeichnet die Fläche der k-ten KV-Seite und $\delta\Omega_k$ den Volumenfluss infolge der Gitterbewegung. Der Einheitsvektor in Richtung der Normalen zur KV-Seite "e" wird z.B. wie folgt definiert:

$$\mathbf{n}_e\,S_e = (y_{ne}-y_{se})\,\mathbf{i} - (x_{ne}-x_{se})\,\mathbf{j} \tag{3.20}$$

wobei sich die Fläche der KV-Seite, S_e, errechnet als:

$$S_e = \sqrt{(S_e^x)^2+(S_e^y)^2} \tag{3.21}$$

Mit diesen Definitionen kann der Massenfluss durch die Gitterkoordinaten und Geschwindigkeitskomponenten wie folgt ausgedrückt werden:

$$\dot{m}_e = \varrho_e\;\left(S^x u_x - S^y u_y\right)_e \tag{3.22}$$

Der Mittelwert an der KV-Seite, ϕ_k, wird durch die Interpolationsmethode entlang der Linien ξ bzw. η, die die KV-Zentren verbinden, angewandt und mit UDS (*Upwind Differencing Scheme*) oder CDS (*Central Differencing Scheme*) berechnet. Dabei wird der Konvektionsfluss durch eine gegebene KV-Seite folgendermaßen zusammengesetzt:

$$\phi_k \;=\; {\phi_k}^{UDS} \;+\; \gamma\;\left[{\phi_k}^{CDS} \;-\; {\phi_k}^{UDS}\right] \tag{3.23}$$

${\phi_k}^{UDS}$ und ${\phi_k}^{CDS}$ stehen für die Konvektionsflüsse nach dem UDS bzw. CDS. γ ist ein Mischungsfaktor, dessen Wert zwischen 0 und 1 zu wählen ist. Bei groben Gittern muss unter Umständen $\gamma < 1$ gewählt werden, sonst ist $\gamma = 1$ zu bevorzugen, da CDS als eine Nährung zweiter Ordnung bei ausreichende feinen Gittern deutlich genauere Lösungen als UDS (Nährung erster Ordnung) liefert.

3.4.3 Diskretisierung diffusiver Flüsse

Diffusion ist immer vorhanden, auch in ruhenden Fluiden und wird durch die Gradienten-Approximation beschrieben. Der diffusive Fluss wird nach dem Mittelwertansatz folgendermaßen approximiert:

$$F_k \;=\; \int_{S_k} \Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \;\approx\; \Gamma\,(\mathrm{grad}\,\phi)_k\cdot\mathbf{n}\,S_k, \qquad k \,=\, e,\,w,\,n,\,s \tag{3.24}$$

wobei Γ den Diffusionskoeffizient darstellt. Γ ist eine von der Temperatur und vom Druck abhängige Stoffgröße.

Der Gradient von ϕ an der Stelle "e" kann durch Ableitung nach kartesischen oder anderen orthogonalen Koordinaten wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathrm{grad}\,\phi \;=\; \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathbf{j} \;=\; \frac{\partial\phi}{\partial n}\,\mathbf{n} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\mathbf{t} \tag{3.25}$$

wobei die Koordinate n senkrecht zur Fläche steht, und die Koordinate t in der Fläche liegt.

Um den Gradienten an der KV-Seite zu bestimmen, wird die zweite Definition des Gradienten in Gl. (3.25) benutzt; in diesem Fall wird nur die Ableitung in Richtung der Normalen n gebraucht:

$$F_e \approx \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_e S_e \tag{3.26}$$

Für die Approximation der Ableitung entlang der Koordinate n wird die Ableitung nach n in eine Kombination der Ableitungen nach ξ und η transformiert. Die Transformation aus dem Koordinatensystem (n, t) in das Koordinatensystem (ξ, η) ergibt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right) \tag{3.27}$$

wobei J die jakobische Determinante der Transformation darstellt:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial n}{\partial \xi} & \frac{\partial n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial t}{\partial \xi} & \frac{\partial t}{\partial \eta} \end{vmatrix} \tag{3.28}$$

In Abb. 3.3 ist leicht zu erkennen, dass die Ableitungen von n und t nach ξ und η als Funktion des Winkels φ zwischen den lokalen Koordinaten ξ und η an der Stelle "e" ausgedrückt werden können, wenn ξ und η geradlinig sind:

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} = \sin\varphi; \quad \frac{\partial n}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = \cos\varphi; \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = 1$$

Damit sind die Ableitung in Richtung der Normale und der diffusive Fluss mit folgenden Ausdrücken gegeben:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \cos\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right) \tag{3.29}$$

$$F_e \approx \frac{\Gamma_e S_e}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e + \underline{\frac{\Gamma_e S_e \cos\varphi}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)_e} \tag{3.30}$$

Der Sinus und Cosinus des Winkels φ können durch die Skalarprodukte der Einheitsvektoren $\mathbf{n}$, ε_ξ und ε_η berechnet werden:

$$\cos\varphi = \varepsilon_\xi \cdot \varepsilon_\eta \; ; \qquad \sin\varphi = \mathbf{n} \cdot \varepsilon_\xi \tag{3.31}$$

Außerdem gelten folgende Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{\sqrt{(x_E - x_P)^2 + (y_E - y_P)^2}}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)_e \approx \frac{\phi_{ne} - \phi_{se}}{\sqrt{(x_{ne} - x_{se})^2 + (y_{ne} - y_{se})^2}}$$

Der in Gl. (3.30) unterstrichene Teil wird gleich Null, wenn das Gitter orthogonal ist, da dann $\cos\varphi = 0$. Wenn das Gitter nicht zu stark nichtorthogonal oder gestreckt ist, ist dieser Teil kleiner als der nicht unterstrichene Teil und wird deswegen explizit behandelt. Die Gl. (3.30) kann schließlich durch Koordinaten der Gitterpunkte und Variablenwerte wie folgt geschrieben werden:

$$F_e = D_e(\phi_E - \phi_P) + Q_e \tag{3.32}$$

wobei

$$D_e \;=\; \frac{\Gamma_e[(y_{ne}-y_{se})^2+(x_{ne}-x_{se})^2]}{(y_{ne}-y_{se})(x_E-x_P)-(x_{ne}-x_{se})(y_E-y_P)} \tag{3.33}$$

$$Q_e \;=\; -\,\frac{\Gamma_e[(y_{ne}-y_{se})(y_E-y_P)+(x_{ne}-x_{se})(x_E-x_P)]}{(y_{ne}-y_{se})(x_E-x_P)-(x_{ne}-x_{se})(y_E-y_P)}\;(\phi_{ne}-\phi_{se}) \tag{3.34}$$

Der Wert von Γ_e wird mittels linearer Interpolation zwischen den Werten in den Knoten P und E berechnet. Die Werte ϕ_{ne} und ϕ_{se} werden durch bilineare Interpolation aus den vier benachbarten Knotenwerten berechnet.

Wenn es sich um Impulsgleichungen handelt, hat der diffusive Fluss einige Terme mehr, da dort nicht nur der Gradient der Hauptkomponente, sondern auch die Ableitungen anderer Geschwindigkeitskomponenten vorkommen. Die Berechnung der diffusiven Flüsse erfordert die Auswertung der Spannungen τ_{xx} und τ_{yx} an der KV-Seite "e". In der Gleichung für die Komponente u_x rechnet sich der diffusive Fluss als:

$$F_e \;=\; \int_{S_e} (\tau_{xx}\,\mathbf{i}+\tau_{yx}\,\mathbf{j})\cdot\mathbf{n}\;dS \tag{3.35}$$

wobei folgende Approximationen für ein kartesisches Gitter verwendet werden:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} \;\approx\; 2\mu\frac{u_{x,E}-u_{x,P}}{x_E-x_P} \\ \tau_{yx} \;=\; \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \;\approx\; \mu\frac{u_{x,ne}-u_{x,se}}{y_{ne}-y_{se}} \;+\; \mu\frac{u_{y,E}-u_{y,P}}{x_E-x_P} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Die Ableitungen nach x und y können in die Ableitungen nach ξ und η nach dem gleichen Prinzip transformiert werden, wie die Ableitung nach n in diese Ableitungen transformiert wurde. Man muss nur im Jakobian, Gl. (3.28), n und t durch x und y ersetzen, und die Ableitungen wie in Gl. (3.27) transformieren. Wenn der Diffusionskoeffizient Γ_e durch die Viskosität μ_e ersetzt wird, resultiert der Ausdruck wie in Gl. (3.32). Der Quellterm Q_e wird zu:

$$\begin{aligned} Q_e \;=\; & \frac{\mu_e}{(y_{ne}-y_{se})(x_E-x_P)-(x_{ne}-x_{se})(y_E-y_P)}\{(y_{ne}-y_{se})^2(u_{x,E}-u_{x,P}) \\ & -\;(u_{x,ne}-u_{x,se})[2(y_E-y_P)(y_{ne}-y_{se})+(x_E-x_P)(x_{ne}-x_{se})] \\ & -\;(x_{ne}-x_{se})[(u_{y,E}-u_{y,P})(y_{ne}-y_{se})-(u_{y,ne}-u_{y,se})(y_E-y_P)]\} \end{aligned} \tag{3.37}$$

In der Gleichung für u_y ist der diffusive Fluss:

$$F_e \;=\; \int_{S_e} (\tau_{xy}\,\mathbf{i}+\tau_{yy}\,\mathbf{j})\cdot\mathbf{n}\;dS \tag{3.38}$$

wobei folgende Approximationen für ein kartesisches Gitter verwendet werden:

$$\begin{aligned} \tau_{yy} &= 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} \;\approx\; 2\mu\frac{u_{y,E}-u_{y,P}}{y_E-y_P} \\ \tau_{xy} \;=\; \tau_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \;\approx\; \mu\frac{u_{x,ne}-u_{x,se}}{y_{ne}-y_{se}} \;+\; \mu\frac{u_{y,E}-u_{y,P}}{x_E-x_P} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Die Transformation der Ableitungen an der Stelle "e" führt wieder zum Ausdruck wie (3.32), wobei der Diffusionskoeffizient Γ_e durch die Viskosität μ_e ersetzt wird, und der Quellterm Q_e wird zu:

$$\begin{aligned} Q_e &= \frac{\mu_e}{(y_{ne}-y_{se})(x_E-x_P)-(x_{ne}-x_{se})(y_E-y_P)}\{(x_{ne}-x_{se})^2(u_{y,E}-u_{y,P}) \\ &- (u_{y,ne}-u_{y,se})[2(x_E-x_P)(x_{ne}-x_{se})+(y_E-y_P)(y_{ne}-y_{se})]- \\ &- (y_{ne}-y_{se})[(u_{x,E}-u_{x,P})(x_{ne}-x_{se})-(u_{x,ne}-u_{x,se})(x_E-x_P)]\} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Quellterm

Der Quellterm beschreibt die Druck- und Reibungskräfte. Mit dem Mittelwertansatz zweiter Ordnung kann der Quellterm wie folgt diskretisiert werden:

$$\int_\Omega q_\phi \,\mathrm{d}\Omega \;\approx\; q_{\phi,P}\Delta\Omega \tag{3.41}$$

Das Volumen eines zweidimensionalen viereckigen KV wird als die Hälfte des Vektorproduktes zweier Diagonalen berechnet:

$$\Delta\Omega \;=\; \frac{1}{2}[(x_{ne}-x_{sw})(y_{nw}-y_{se})-(y_{ne}-y_{sw})(x_{nw}-x_{se})] \tag{3.42}$$

Der Druckquellterm in den Impulsgleichungen kann auf zwei Wegen approximiert werden: als konservative Druckkraft auf die Oberfläche des KV oder als nichtkonservativer Quellterm in Form der Volumenkraft.

Im ersten Fall gilt in der Gleichung für u_x:

$$Q_P^p \;=\; -\int_S p\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \approx -p_e(y_{ne}-y_{se})+p_w(y_{nw}-y_{sw})+p_n(y_{ne}-y_{nw})-p_s(y_{se}-y_{sw}) \tag{3.43}$$

Im zweiten Fall ergibt sich:

$$Q_P^p \;=\; -\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}\Omega \;\approx\; -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_P \Delta\Omega \;=\; -(p_e-p_w)(y_n-y_s)+(p_n-p_s)(y_e-y_w) \tag{3.44}$$

Der Gradient in x-Richtung wird lokal im KV-Zentrum transformiert und durch Gradienten in ξ- und η-Richtungen ausgedrückt. Wenn die Gitterlinien parallel sind, sind die Ausdrücke Gl. (3.43) und Gl. (3.44) äquivalent. In dieser Arbeit wird der Ausdruck Gl. (3.44) verwendet, da die Ableitung der Druckkorrekturgleichung einfacher ist.

3.5 Bestimmung der Lage der freien Oberfläche

Eine "*interface tracking*"-Methode wird in dieser Arbeit implementiert, wobei das Gitter der Lage der freien Oberfläche angepasst werden soll. Zur Bestimmung der Lage der freien Oberfläche werden die Impulsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung gelöst, wobei die Lage der freien Oberfläche und der Druck als bekannt betrachtet werden. Zunächst werden die linearisierten Impulsgleichungen gelöst. Die berechneten Geschwindigkeiten erfüllen jedoch nicht die Kontinuitätsgleichung. Die Massenerhaltung wird dadurch erzwungen, dass die Geschwindigkeiten mit einer Korrektur beaufschlagt werden, welche gemäß den Verhältnissen in den Impulsgleichungen dem Gradienten der Druckkorrektur proportional sein muss. Somit gelangt man zu einer Druckkorrekturgleichung (Muzaferija et al., 1998). Die dynamische Randbedingung an der freien Oberfläche wird in den Impulsgleichungen durch den geschätzten Druck implementiert. Durch die Implementierung der dynamischen Randbedingung an der freien Oberfläche wird die kinematische Randbedingung nicht erfüllt, da die Geschwindigkeit an der freien Oberfläche zur Druckstörung führt. Die kinematische Randbedingung wird iterativ angepasst, wobei die freie Oberfläche verschoben wird, um die Druckstörung zu verhindern. Die freie Oberfläche wird soweit bewegt, dass die Änderung des

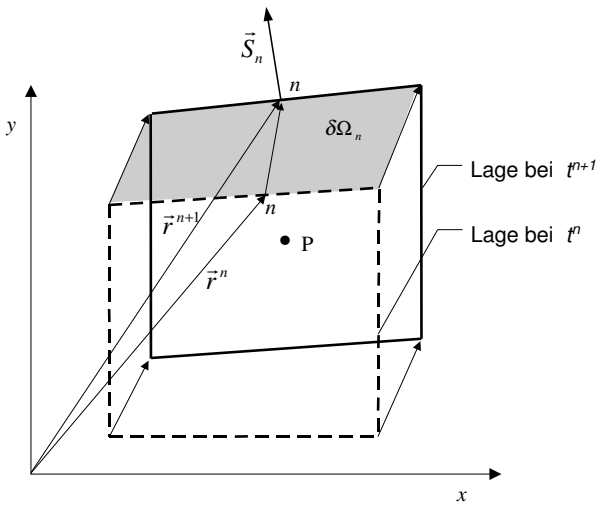

Abb. 3.4: Volumenfluss $\delta\Omega_n$ durch die KV-Seite zwischen Zeitschritten t^n, t^{n+1}

Volumens dem berechneten Massenfluss entspricht. In Abb. 3.4 ist der Volumenfluss infolge der Gitterbewegung durch die "n" KV-Seite zwischen den Zeitschritten t^n und t^{n+1} schematisch dargestellt.

Die kinematische Randbedingung wird folgendermaßen diskretisiert:

$$\begin{aligned} \int_{S_{\mathrm{fo}}} \varrho(\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\mathrm{s}})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S &= \int_{S_{\mathrm{fo}}} \varrho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{fo}}} \varrho(\mathbf{v}_{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S \\ &\approx \varrho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})_{\mathrm{fo}}\; S_{\mathrm{fo}} - \varrho\frac{\delta\Omega_{\mathrm{fo}}}{\Delta t} \stackrel{!}{=} 0\,,\; \Rightarrow\; (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})_{\mathrm{fo}}\; S_{\mathrm{fo}}\,\Delta t = \delta\Omega_{\mathrm{fo}} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Die Volumenflüsse durch eine KV-Seite setzen sich aus einem Anteil der Geschwindigkeit und einem Anteil der Gitterbewegung zusammen. Um den numerischen Fehler bei der Bestimmung der Flüsse infolge von der Gitterbewegung klein zu halten, sollte die zeitliche Volumenänderung des KV genau der Summe der Flüsse auf Grund der Gitterbewegung entsprechen. Diese geometrische Beziehung (siehe in Gl. (3.1)) wird in Demirdžić und Perić (1988, 1990) als "Raumerhaltungsgesetz (*space conservation law*)" bezeichnet und wie folgt diskretisiert:

$$\frac{(\Delta\Omega)^{n+1}-(\Delta\Omega)^n}{\Delta t} = \frac{\sum_k \delta\Omega_k}{\Delta t} \;=\; \sum_k \int_{S_k} \mathbf{v}_{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \;\Rightarrow\; \int_{S_{\mathrm{fo}}} \mathbf{v}_{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \;=\; \frac{\delta\Omega_{\mathrm{fo}}}{\Delta t} \tag{3.46}$$

wobei k die KV-Seiten (e, w, n und s) bezeichnet. Die KV-Seite muss so bewegt werden, dass das entstandene Volumen $\delta\Omega_{\mathrm{fo}}$ dem Term $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})_{\mathrm{fo}}\, S_{\mathrm{fo}}\,\Delta t$ entspricht. Wenn die neue und die alte Lage des KV bekannt sind, können die Volumenflüsse anhand der Gl. (3.46) berechnet werden. Hier wird die neue Lage so bestimmt, dass die Gleichung (3.45) erfüllt wird.

3.6 Lösung der algebraischen Gleichungen

Wenn die Approximationen für die einzelnen Terme in die Erhaltungsgleichungen eingesetzt werden, folgt für jedes KV eine algebraische Gleichung folgender Form:

$$A_P\phi_P \;=\; \sum_{nb} A_{nb}\phi_{nb} \;+\; Q_P, \qquad\qquad nb \;=\; e,w,n,s \tag{3.47}$$

Die Koeffizienten A_{nb} in Gl. (3.47) stellen die Beiträge aus der Approximation der konvektiven und der diffusiven Flüsse dar. In A_P sind der Beitrag des instationären Terms und alle anderen implizit behandelten nichtkonservativen Terme enthalten, die aus der Linearisierung des Quellterms stammen. Im Quellterm Q_P sind alle explizit behandelten Anteile der konservativen und diffusiven Flüsse, der Druckterm, die alten Werte der Zeitdiskretisierung sowie andere volumetrische Quellen zusammengefasst.

Für das gesamte Lösungsgebiet lässt sich das Gleichungssystem als Matrixgleichung folgender Form schreiben:

$$[A]\{\phi\} \;=\; \{Q\} \tag{3.48}$$

Hier ist ϕ die Vektormatrix, die die Unbekannten enthält. Die Matrix A ist die Koeffizientenmatrix. Q ist die Vektormatrix der Quellterme.

Dieses Gleichungssystem wird mit Hilfe einer iterativen Lösungsmethode (*Strongly Implicit Procedure: SIP*) nach Stone (1968) gelöst. Der SIMPLE-Algorithmus (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation*) wird zur Kopplung der Impulsgleichung mit der Kontinuitätsgleichung verwendet (Patankar, 1980): Beginnend mit einer Näherungslösung für den Druck werden die Impulsgleichungen linearisiert und näherungsweise gelöst. Die berechneten Geschwindigkeiten erfüllen vorerst nicht die Kontinuitätsgleichung. Aus der Lösung einer sog. Druckkorrekturgleichung folgen Korrekturen des Drucks und der Geschwindigkeiten, so dass die Kontinuitätsgleichung besser erfüllt wird und die Impulsgleichungen nicht verletzt werden. Diese beiden Schritte werden solange wiederholt, bis die Gleichungen mit einer gewünschten Genauigkeit erfüllt sind. Dieser Vorgang wird auch als äußere Iteration bezeichnet, im Gegensatz zur inneren Iteration, mit der die linearisierten Impulsgleichungen und die Druckkorrekturgleichung iterativ gelöst werden. Innerhalb der äußeren Iteration wird die dynamische Randbedingung an der Flüssigkeitsoberfläche ebenfalls iterativ erfüllt.

Die Koeffizientenmatrix und der Quellvektor auf der rechten Seite in Gl. (3.48) müssen nach jeder äußeren Iteration neu berechnet werden, um der Nichtlinearität und der Kopplung der Gleichungen Rechnung zu tragen. Daher wird die lineare Gleichung in der inneren Iteration im Allgemeinen nicht genau gelöst werden. In dieser Arbeit werden eine innere Iteration für die $u-$ und $v-$ Geschwindigkeitskomponenten und 10 Iterationen für die Druckkorrekturgleichung gegeben. Das Abbruchkriterium für die äußere Iteration wird $\epsilon = 0.001$ gesetzt, und die maximale Anzahl der Iterationen in einem Zeitschritt wird auf 50 beschränkt.

4. Aufbau eines numerischen Wellenkanals

4.1 Numerischer Wellenkanal

Ein numerischer Wellenkanal dient der Analyse komplexer nichtlinearer Wellensysteme. Die Abbildung 4.1 zeigt einen numerischen Wellenkanal, der dem Wellenkanal des Instituts für Wasserbau entspricht. Randbedingungen, Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten werden in Abb. 4.1 gemeinsam mit einer fortschreitenden Wellen dargestellt. Für den Aufbau des numerischen Wellenkanals werden die Grundgleichungen und die Diskretisierungsmethode im Kapital 3 implementiert.

Die Wellenblattbewegung im numerischen Wellenkanal wird als bewegliche Wand implementiert; die horizontale Geschwindigkeitskomponente des Wellenblattes wird dort vorgegeben (Dirichlet-Randbedingung). Zur Vereinfachung der Eingabe von Geschwindigkeitskomponenten am Einströmrand wird nur die horizontale Richtung berücksichtigt (Dirichlet-Randbedingungen), da der Anteil der Vertikalbewegung des Wellenblattes bei kleinen Winkeln vernachlässigt werden kann. Bei dem Ausströmrand wird eine weit nach hinten gezogene Wand aufgebaut. Daher bleiben die Wassermassen im Wellenkanal unverändert.

Für die Generierung des numerischen Gitters wird ein algebraisches Verfahren wie im Abschnitt 3.3 verwendet. Der mit Flüssigkeit gefüllte Bereich im Lösungsgebiet wird lückenlos in x und z-Richtung in Kontrollvolumina unterteilt. In Bereichen, etwa am Wellenblatt und bis 40 [m] vom Wellenblatt, wo kritische Beurteilungen nötig sind, werden feiner Gitter erzeugt. Außerhalb der interessierenden Lösungsgebiete werden grobe Gitter eingesetzt, um unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden. Ein typische bewegliche Gitter für die reguläre Welle am Wellenblatt wird in Abb. 4.2 dargestellt. Allein für die Gittererzeugung sind viele Erfahrungen mit dem numerischen Lösungsverfahren nötig, da die Effektivität des Gitters mitberücksichtigt werden muss. Vielmehr ist das Verhältnis zwischen der Genauigkeit und der Berechnungsdauer wichtig. Man muss versuchen, eine ausreichend genaue Lösung mit möglichst geringem Rechenaufwand zu erzielen. Damit soll ein optimaler Kompromiss gefunden werden, wie fein das Gitter sein muss.

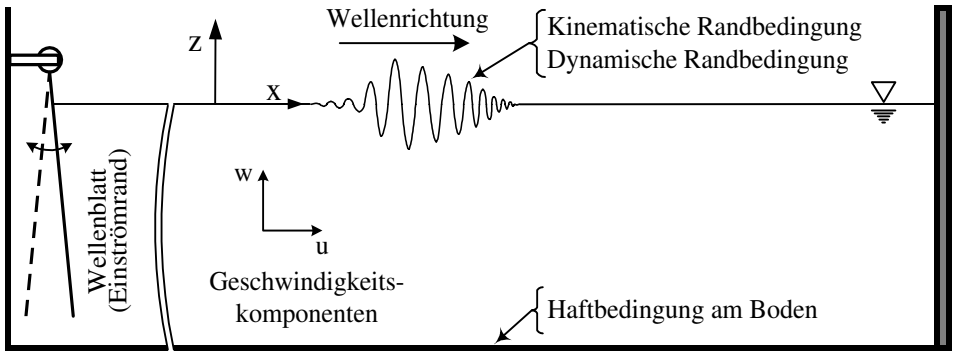

Abb. 4.1: Schematische Darstellung eines numerischen Wellenkanals

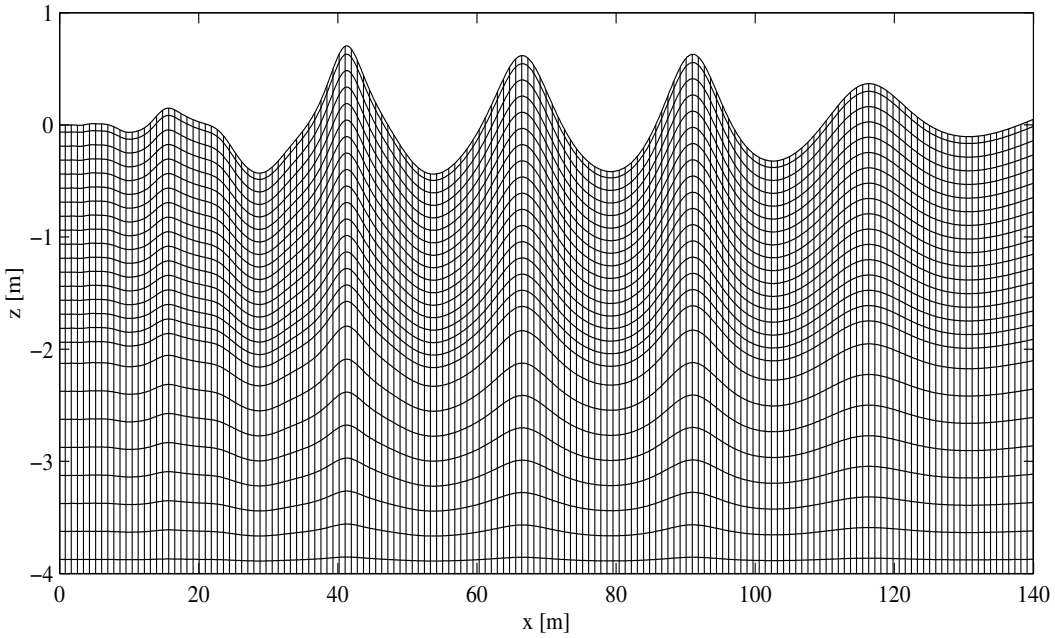

Abb. 4.2: Bewegliche Gitter im ausgewählten Bereich im numerischen Wellenkanal

Zur Bestimmung des optimalen Verhältnisses wird die Courant-Zahl berücksichtigt, diese lautet:

$$C = \frac{u\,\Delta t}{\Delta x} \tag{4.1}$$

Die Courant-Zahl stellt das Verhältnis des Zeitintervalls Δt zur Konvektionszeit $\Delta x/u$ dar, die benötigt wird, um eine Störung über die Distanz Δx durch Konvektion zu transportieren. Zur Erfüllung der Stabilitätsanforderung wird das folgende Kriterium benutzt.

$$C < 1 \quad \text{oder} \quad \Delta t < \frac{\Delta x}{u} \tag{4.2}$$

Die Beschränkung der Courant-Zahl kann so interpretiert werden, dass ein Fluidpartikel nicht mehr als eine Gitterlänge pro Zeitintervall fortschreiten kann. Detaillierte Angaben über die Gitter werden bei der Verifikation im Abschnitt 4.2 gemacht.

4.2 Verifikation

Bevor das numerische Verfahren eingesetzt wird, müssen die Richtigkeit und Genauigkeit geprüft werden. Dabei wird untersucht, ob die Lösungsverfahren vernünftige Ergebnisse liefern und die iterativen Schritte mit akzeptablem Zeitaufwand konvergieren. Die Stabilität und die Fehlermargen des numerischen Verfahrens müssen auch festgestellt werden.

Um eine Fehlerabschätzung zu ermöglichen, werden Gitter und Zeitschritte systematisch variiert und durch einen regulären Wellenzug simuliert. Zunächst wird das Gitter bei gleichbleibendem Zeitschritt verfeinert, um die räumlichen Diskretisierungsfehler abzuschätzen. Das erste Gitter hat 900 Zellen in x-Richtung und 10 Zellen in z-Richtung. Beim zweiten Gitter wird die doppelte Anzahl in jeder Richtung erzeugt, d.h. 1800 Zellen in x-Richtung und 20 Zellen in z-Richtung. Das dritte Gitter hat 3600 Zellen in x-Richtung und 40 Zellen in z-Richtung. Als Testrechnung wird ein regulärer Wellenzug ($H = 0.12\,[\mathrm{m}]$,

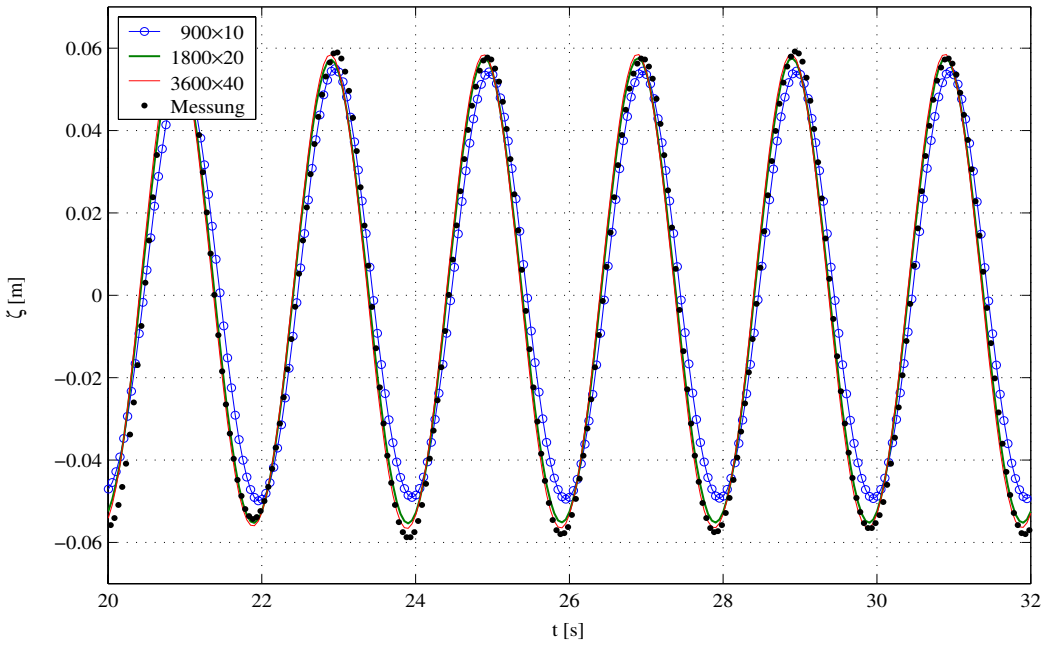

Abb. 4.3: Vergleich der Registrierung bei den systematisch verfeinerten Gittern in $x = 20\,[\mathrm{m}]$

$T = 2.0\,[\mathrm{s}]$) genommen und mit den beiden Gittern simuliert. Die Registrierung auf der Stelle $x = 20\,[\mathrm{m}]$ im Wellenkanal wird mit den Messungen verglichen. Wie in Abb. 4.3 gezeigt wird, verringert sich die Differenz zwischen den Lösungen beider Gitter etwa um Faktor 4. Dies ist eine Bestätigung, dass das feinere Gitter eine bessere Übereinstimmung mit den Messungen liefert und dass sich die räumliche Diskretisierung in zweiter Ordnung tatsächlich auf die Genauigkeit auswirkt. Die berechneten Perioden zeigen bei beiden Gittern fast keinen Unterschied, aber die Wellenhöhen sind deutlich von der Verfeinerung des Gitters abhängig.

In Abb. 4.4 zeigt sich der Einfluss der Zeitschritte in der Berechnung. Hier wird eine implizierte Euler-Methode erster Ordnung als Zeitdiskretisierung eingesetzt. Drei Zeitschritte $\Delta t = 0.01\,[\mathrm{s}]$, $\Delta t = 0.005\,[\mathrm{s}]$ und $\Delta t = 0.0025\,[\mathrm{s}]$ werden auf dem Gitter (1800×20) mit dem Berechnungsverfahren simuliert. Die Abweichung zwischen beiden Zeitschritten ist wegen der Diskretierung erster Ordnung deutlich zu sehen. Der zeitliche Diskretisierungsfehler wirkt sich auch nur auf die Wellenhöhe aus. Die numerische Simulation zeigt, dass die zeitliche Diskretisierung stärker die Lösung beeinträchtigt als die räumliche Diskretisierung. Durch die systematische Verfeinerung sowohl mit dem Gitter- als auch mit dem Zeitschritt wird festgestellt, dass die Lösung auf dem feineren Gitter und mit dem kleineren Zeitschritt näher an die Messdaten kommt. Der Unterschied zwischen zwei Simulationen ist kleiner, als der Unterschied zwischen der Simulation und dem Experiment. Mit den gewählten Gitter- und Zeitschritten liegt der numerische Fehler für die weiteren Anwendungen im abgeschätzten Bereich.

Der Versuch wird im Wellenkanal des Instituts für Wasserbau der TU-Berlin durchgeführt ($L \times B \times d = 80 \times 4 \times 1.5\,[\mathrm{m}]$). Das Wellenblatt wird von einem Hydraulikzylinder angetrieben und Pendelrahmen aufgehängt. Die maximale Auslenkung des Wellenblattes beträgt $+/- 0.4\,[\mathrm{m}]$. Damit ist die Erzeugung der Welle im Bereich von $T = 0.6$ bis $5.0\,[\mathrm{s}]$ mit maximalen Wellenhöhen bis zu $H_{max} = 0.6\,[\mathrm{m}]$ möglich. Ein Messrechner steuert die Bewegung des Wellenblattes und registriert die angeschlossenen Messkomponenten. Bei der numerischen Simulation wird der Wellenkanal dagegen mit der Länge $L = 150\,[\mathrm{m}]$ und der Tiefe $d = 1.5\,[\mathrm{m}]$ eingesetzt.

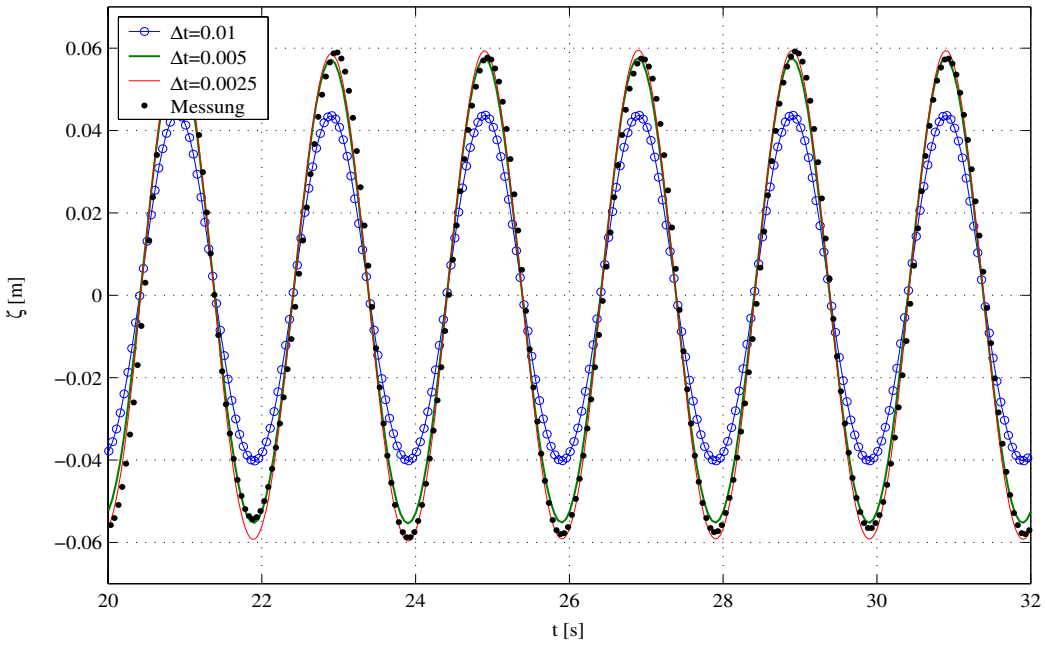

Abb. 4.4: Vergleich der Registrierung bei den unterschiedlichen Zeitschritten in $x = 20\,[\mathrm{m}]$

4.2.1 Regulärer Wellenzug

Ein zeitlich begrenzter regulärer Wellenzug wird zunächst mit dem numerischen Wellenkanal simuliert. Die Berechnungen werden auf einer Workstation IBM RS/6000 im Rechenzentrum (ZRZ) der TU-Berlin durchgeführt. Der Wellenkanal ist $L = 150\,[\mathrm{m}]$ lang und $d = 1.5\,[\mathrm{m}]$ tief. Die dynamische Viskosität von Wasser $\mu = 1.0\,\mathrm{E}\text{-}3\,[\mathrm{Ns/m^2}]$ und die Dichte $\varrho = 1000\,[\mathrm{kg/m^3}]$ werden in der Berechnung berücksichtigt. Zur Diskretisierung des Wellenkanals werden 1800 Zellen in x-Richtung und 20 Zellen in z-Richtung verwendet. Der Gitterabstand beträgt $\Delta x = 0.05 \sim 0.5\,[\mathrm{m}]$ und $\Delta z = 0.0375 \sim 0.05\,[\mathrm{m}]$. Der Zeitschritt der impliziten Euler-Methode beträgt $\Delta t = 0.005\,[\mathrm{s}]$. In Abb. 4.5 sind die Wellenblattbewegung, die Geschwindigkeit des Wellenblattes und das dazugehörige Fourier-Spektrum dargestellt. Die Geschwindigkeitswerte der Wellenblattbewegung werden wie in Abb. 4.5 als Dirichlet-Randbedingung am Einströmrand vorgegeben. Für die Ermittlung dieser Geschwindigkeitsverteilung sind verschiedene Ansätze möglich. Sie kann beispielsweise aus linearer bzw. höherer Wellentheorie vorausberechnet werden. Ein Steuersignal wird mit Hilfe der linearer Wellentheorie erzeugt. Eine andere versuchstechnische Möglichkeit ist auch, die Geschwindigkeitsverteilung aus der Klappenbewegung des Wellenblattes direkt zu ermitteln. Diese Vorgehensweise hat sich insbesondere in Zusammenhang mit Validationsrechnungen bewährt (Habel, 2001) und wird für Testrechnungen beim Cnoidalwellenzug angewendet.

Ein regulärer Wellenzug mit zwei verschiedenen Steuersignalen wird im numerischen Wellenkanal simuliert. Das Steuersignal wird mit Hilfe der Wellenkontur aus der linearen Wellentheorie $\zeta = \zeta_a \cos(kx - \omega t)$ erzeugt. Die Amplitude des Steuersignals ist jeweils $\zeta_a = 0.15$ und $0.2\,[\mathrm{m}]$. Die Periode des Steuersignals wird dagegen einheitlich für alle Wellenzüge mit $T = 2.5\,[\mathrm{s}]$ vorgegeben. Bei den Navier-Stokes-Lösungen wird die dynamische Viskosität von Wasser mit $\mu = 1.0\,\mathrm{E}\text{-}3\,[\mathrm{Ns/m^2}]$ angenommen. Bei den Euler-Lösungen wird $\mu = 0$ vorgegeben. Die Registrierungen der Wellenerhebung werden an der ausgewählten Stelle ($x = 20.0\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt) im Wellenkanal gemessen. Da der simulierte Wellenzug einer regulären Welle entspricht, kann er mit der analytischen Lösung verglichen werden. Zum Vergleich der Wellenhöhe werden die analytische Lösung der linearen Airy-Theorie und der nichtlinearen Stokes-Theorie zweiter Ordnung als Referenzwellen verwendet. Die Wellenblattbewegung in Abb. 4.5 stellt ein Steuersignal als

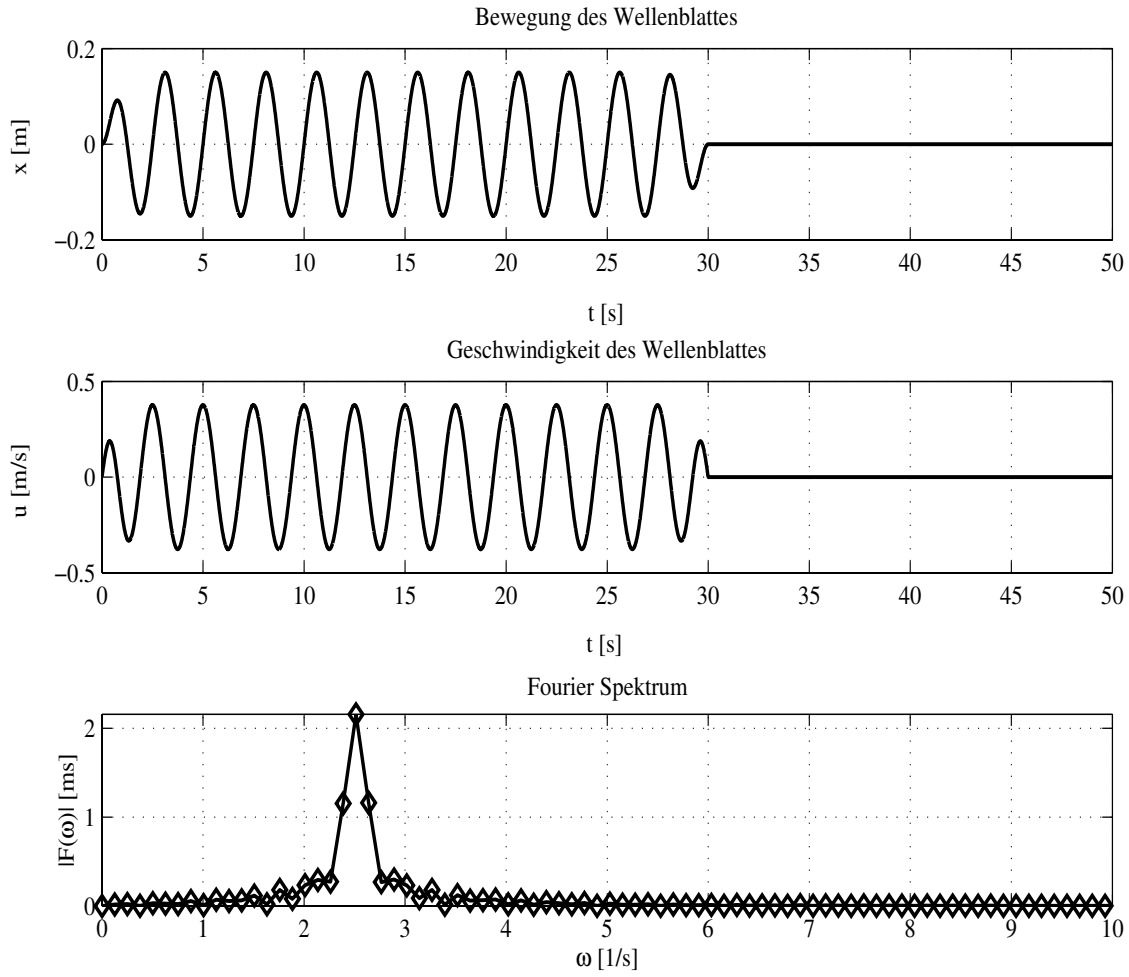

Abb. 4.5: Instationäre Randbedingung am Einströmrand zur Simulation eines regulären Wellenzuges

Eingabedatei zum Versuch mit einer Amplitude $\zeta_a = 0.15$[m] dar. Die Geschwindigkeit des Wellenblattes dient lediglich als Eingabedatei für die numerische Simulation.

In Abb. 4.6 ist die Wasserspiegelerhebung aus Berechnungen an der ausgewählten Stelle $x = 20\,$[m] im Vergleich mit der Referenzwelle und mit Messungen in einem Zeitfenster von $t = 20 \sim 30\,$[s] dargestellt. Die Initialwellenzüge für $H = 0.25\,$[m], $T = 2.5\,$[s] und $H = 0.32\,$[m], $T = 2.5\,$[s] werden in Abb. 4.6 dargestellt. Anhand der Darstellung in Abb. 4.6 erkennt man die Tatsache, dass die Euler-Gleichungen leicht höhere Wellen liefern als die Messungen. Erwartungsgemäß stimmen die Navier-Stokes-Lösungen aus dem numerischen Verfahren sowohl mit den Messungen als auch mit den Lösungen nichtlinearer Stokes II Wellen gut überein. Die nichtlineare Eigenschaft des Wellenzuges, dass die Wellenberge steiler als die Wellentäler sind, wird gut wiedergegeben. Die Abbildung 4.7 zeigt die Geschwindigkeits- und Druckverteilung des regulären Wellenzuges zum Zeitpunkt $t = 30\,$[s], wobei die Ermittlung solcher Größen für die versuchstechnischen Untersuchungen meerestechnischer Konstruktionen sehr bedeutend ist. Die Berechnung dauert etwa 7 CPU-Stunden auf der genannten Workstation. Es tritt keine Konvergenzschwierigkeit auf. Dabei wird das Abbruchkriterium $\epsilon = 0.001$ für die äußere Iteration im Berechnungsverfahren vorgegeben.

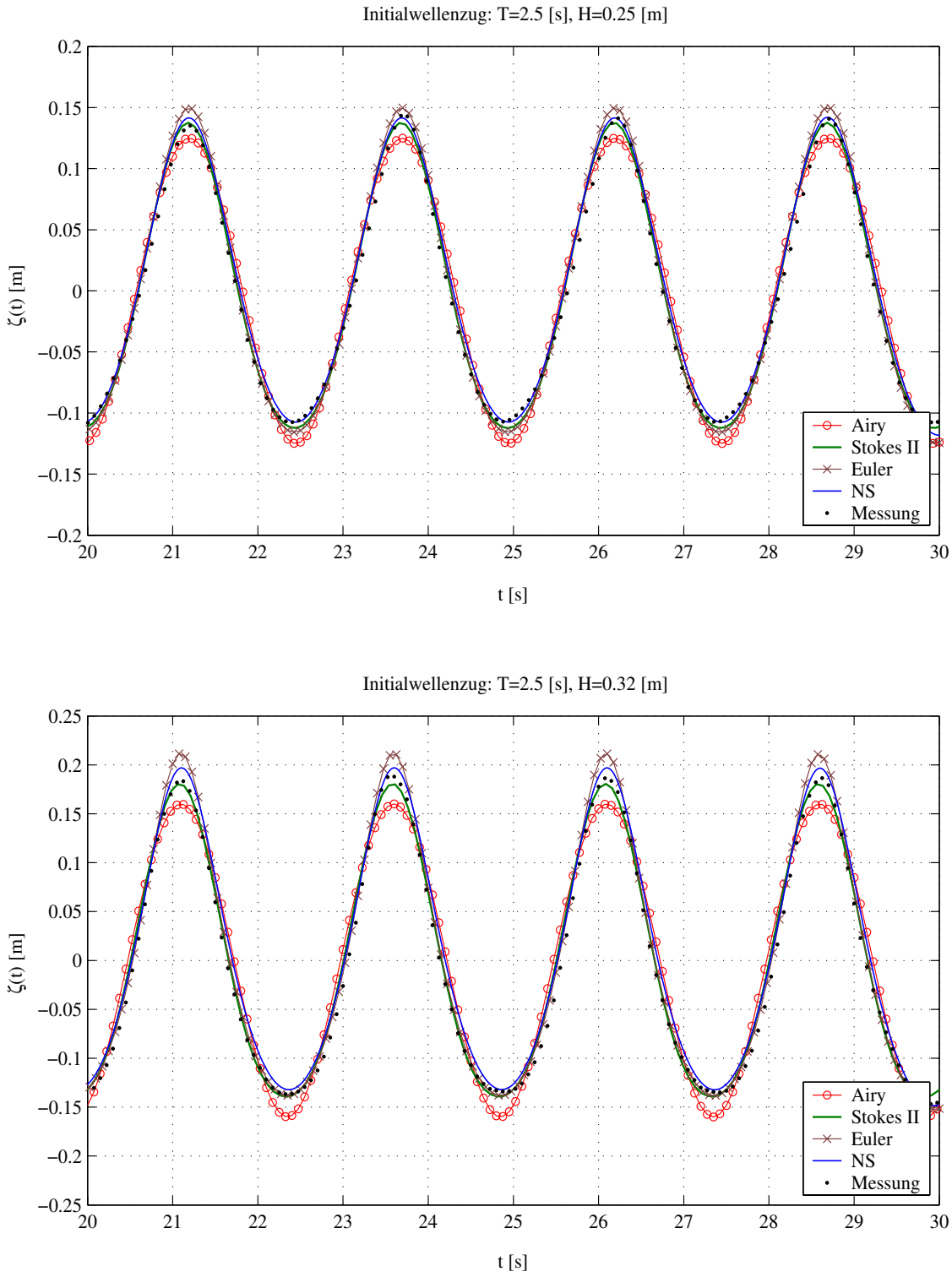

Abb. 4.6: Wasserspiegelauslenkung an der Stelle $x = 20\,[\mathrm{m}]$ mit verschiedenen Wellenhöhen

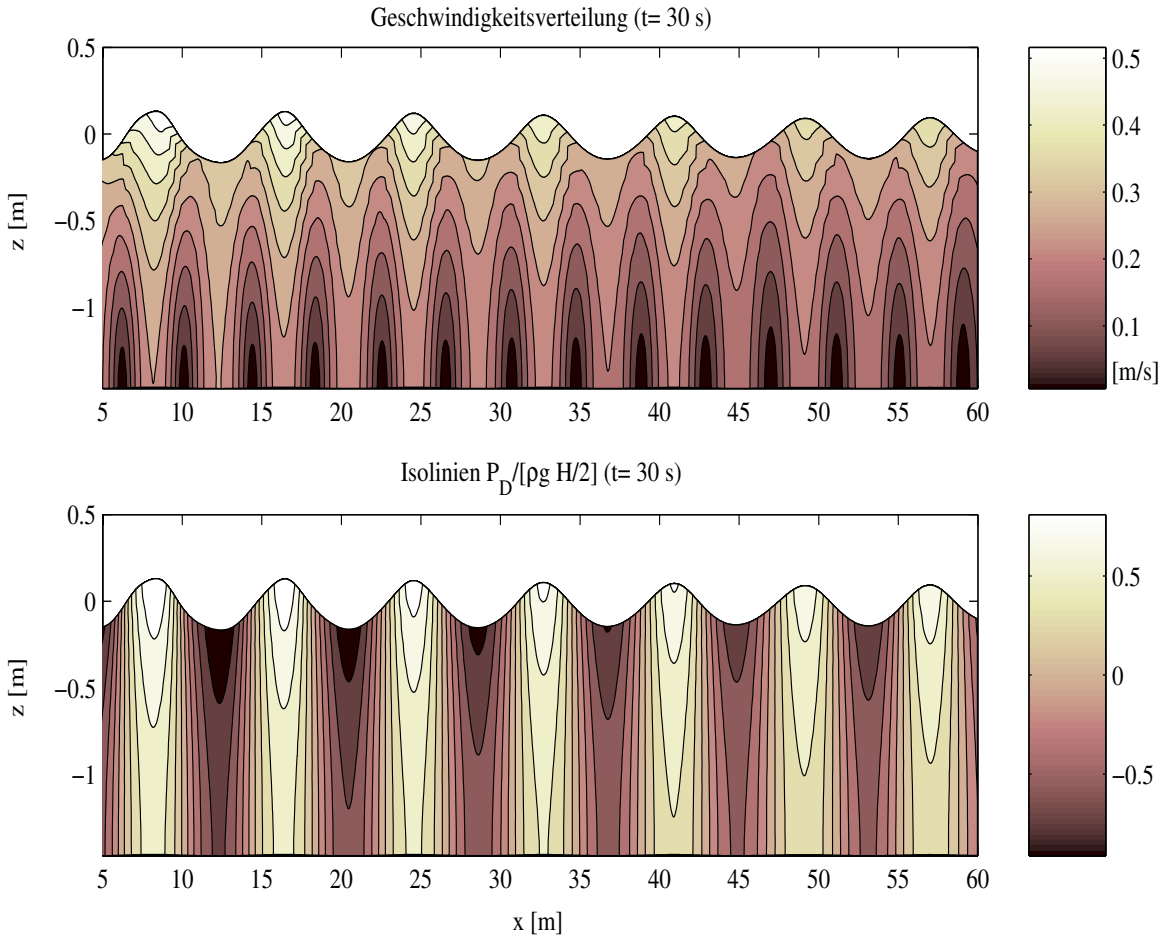

Abb. 4.7: Geschwindigkeits- und Druckverteilung eines regulären Wellenzuges zum Zeitpunkt $t = 30\,[\mathrm{s}]$

4.2.2 Cnoidalwelle

Die Cnoidalwelle ist ein gutes Beispiel, um die Leistungsfähigkeit des numerischen Wellenkanals zu prüfen. Zum Vergleich mit dem Rechenergebnis stehen zahlreiche Messdateien aus dem GWK (Großer Wellenkanal in Hannover) zur Verfügung (Clauss et al., 1999; Clauss und Steinhagen, 1999). Die Generierung der Cnoidalwelle im numerischen Wellenkanal erfolgt mit Hilfe des Steuersignals der Wellenblattbewegung. Aus vorhandenen Messungen lässt sich die Geschwindigkeit der Wellenblattbewegung in x-Richtung leicht berechnen und für den kleinen Zeitschritt (um Faktor 10 kleiner als Messdatei) interpolieren. Diese geglätteten Geschwindigkeitswerte in Abb. 4.8 werden als Randbedingung für die Wellenblattbewegung vorgegeben.

Der numerische Wellenkanal ist $L = 200\,[\mathrm{m}]$ lang und $d = 4.0\,[\mathrm{m}]$ tief. Der Gitterabstand beträgt $\Delta x = 0.125 \sim 0.5\,[\mathrm{m}]$ und $\Delta z = 0.075 \sim 0.125\,[\mathrm{m}]$. Der Zeitschritt der impliziten Euler-Methode beträgt $\Delta t = 0.005\,[\mathrm{s}]$. Die Anzahl der Kontrollvolumen im numerischen Wellenkanal ist 1360 Zellen in x-Richtung und 24 Zellen in z-Richtung. Die Rechenzeit beträgt etwa eine halbe Minute pro Zeitschritt auf der genannten Workstation. Die Berechnung wird bis zum Zeitpunkt $120\,[\mathrm{s}]$ durchgeführt.

Die Abbildung 4.9 zeigt die räumliche Ausbreitung der Cnoidalwelle im numerischen Wellenkanal. Die

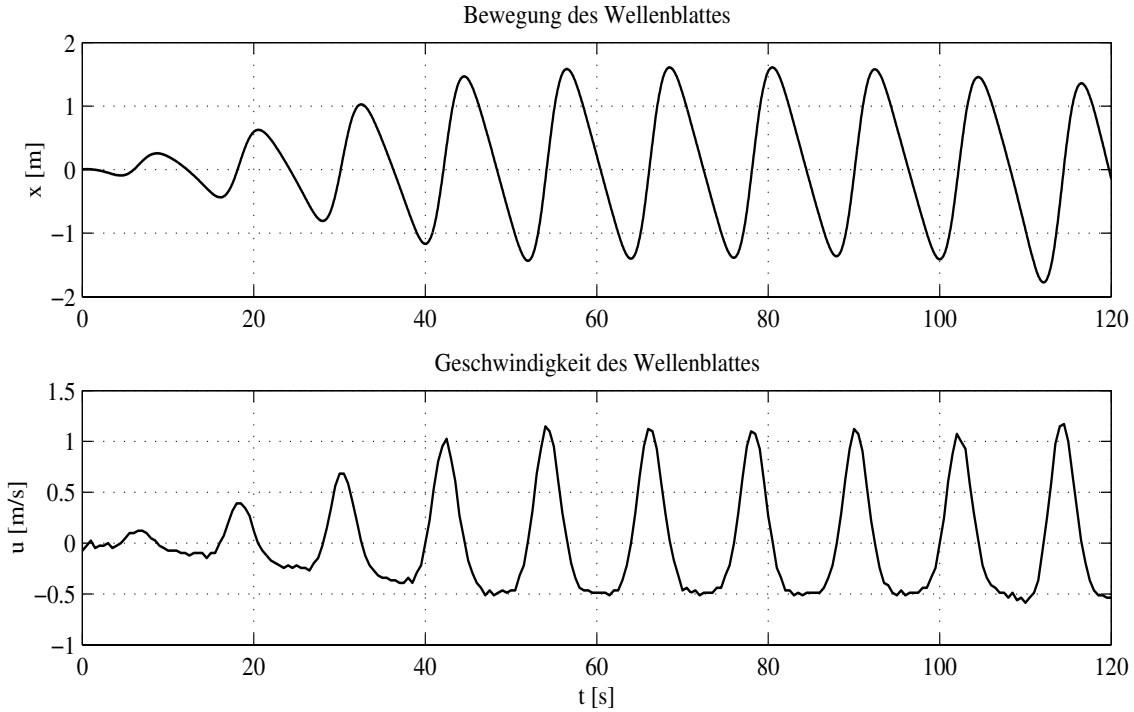

Abb. 4.8: Bewegung und Geschwindigkeit des Wellenblattes zur Simulation einer Cnoidalwelle

Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 82.5\,[\mathrm{s}]$ sind in Abb. 4.10 dargestellt. Dabei beträgt die maximale Amplitude $(\sqrt{u^2+v^2})_{max} = 1.649\,[\mathrm{m/s}]$. In Abb. 4.11 werden den Rechenergebnissen die Messergebnisse gegenübergestellt. Aufgetragen über die Entfernung von der Wellenmaschine ist die Wasserspiegelauslenkung. Die Berechnungsergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messwerten bis zum Zeitpunkt 110.0 [s]. Danach treten sowohl in den Messwerten als auch in den numerischen Ergebnissen Störungen auf, die auf reflektierte Wellen zurückzuführen sind.

Mit dem numerischen Wellenkanal lassen sich Strömungen mit nichtlinearen Wellengruppen in akzeptabler Zeit berechnen. Dabei wird ein Verfahren auf Basis von Navier-Stokes-Gleichungen für die numerische Simulation extremer Entwurfsseegänge bereitgestellt. Das randangepasste Berechnungsgitter wird algebraisch erzeugt. Numerische Berechnungen für den regulären Wellenzug und die Cnoidalwelle werden durchgeführt. Wasserspiegelauslenkungen, kinematische Größen, wie Geschwindigkeits- und Druckfelder können numerisch berechnet werden. Numerische Ergebnisse werden mit nichtlinearen Stokes-Wellentheorien sowie mit Messungen verglichen. Insbesondere wird die Berechnung für die Ausbreitung des Wellenzuges mit Viskositätseffekt durchgeführt und mit den Messungen verglichen. Dabei stimmen die Berechnungsergebnisse mit den Messungen gut überein, während die nichtviskose Berechnung gute Übereinstimmung mit den analytischen Lösungen von Wellentheorien liefert.

Um auch deterministischen Entwurfsseegänge im numerischen Wellenkanal einzubeziehen, wird eine Optimierungsstrategie eingeführt, die im folgenden Kapital beschrieben wird.

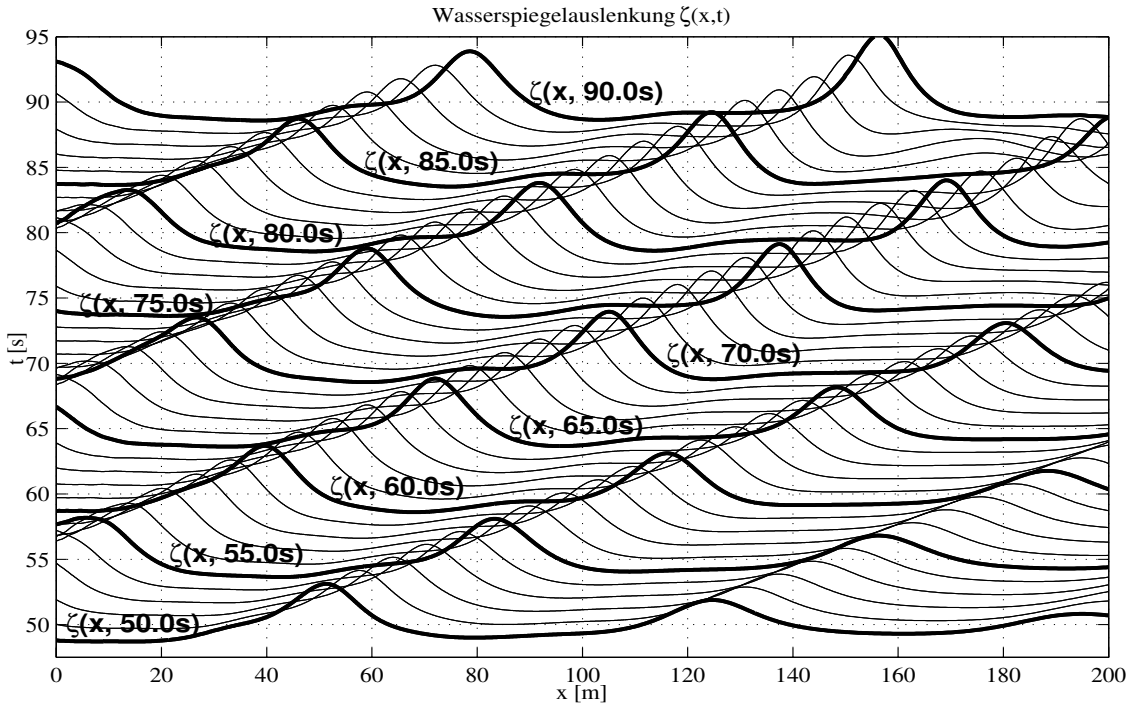

Abb. 4.9: Ausbreitung einer Cnoidalwelle im numerischen Wellenkanal (Wassertiefe $d = 4.0\,[\mathrm{m}]$)

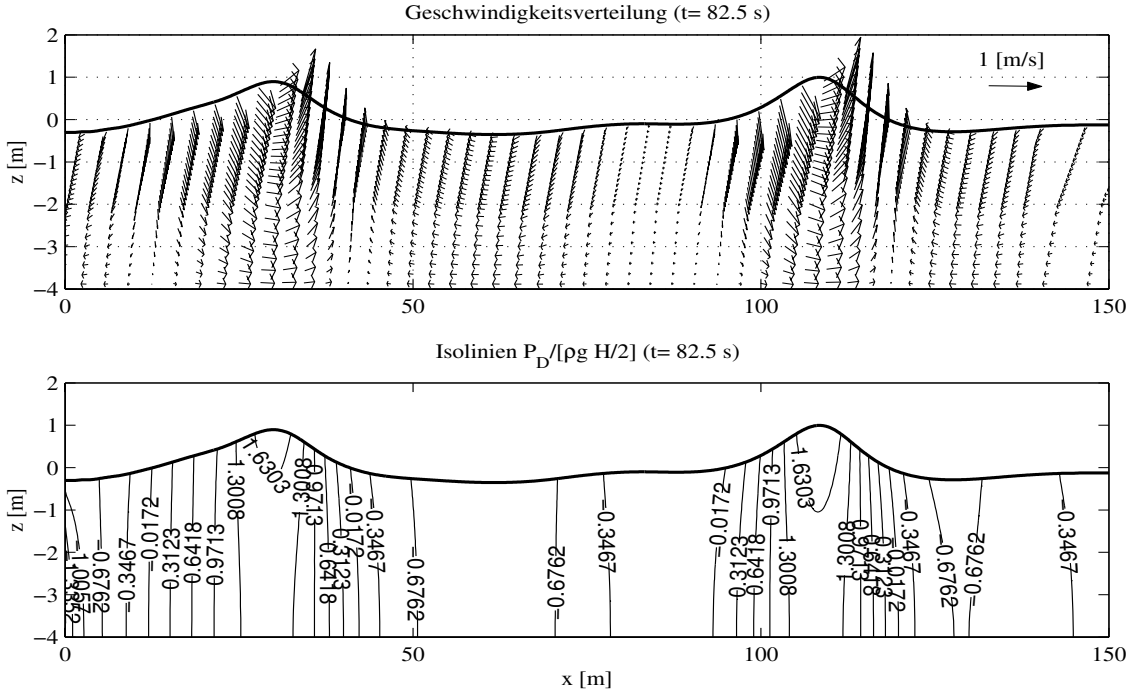

Abb. 4.10: Geschwindigkeits- und Druckverteilung einer Cnoidalwelle zum Zeitpunkt $t = 82.5\,[\mathrm{s}]$

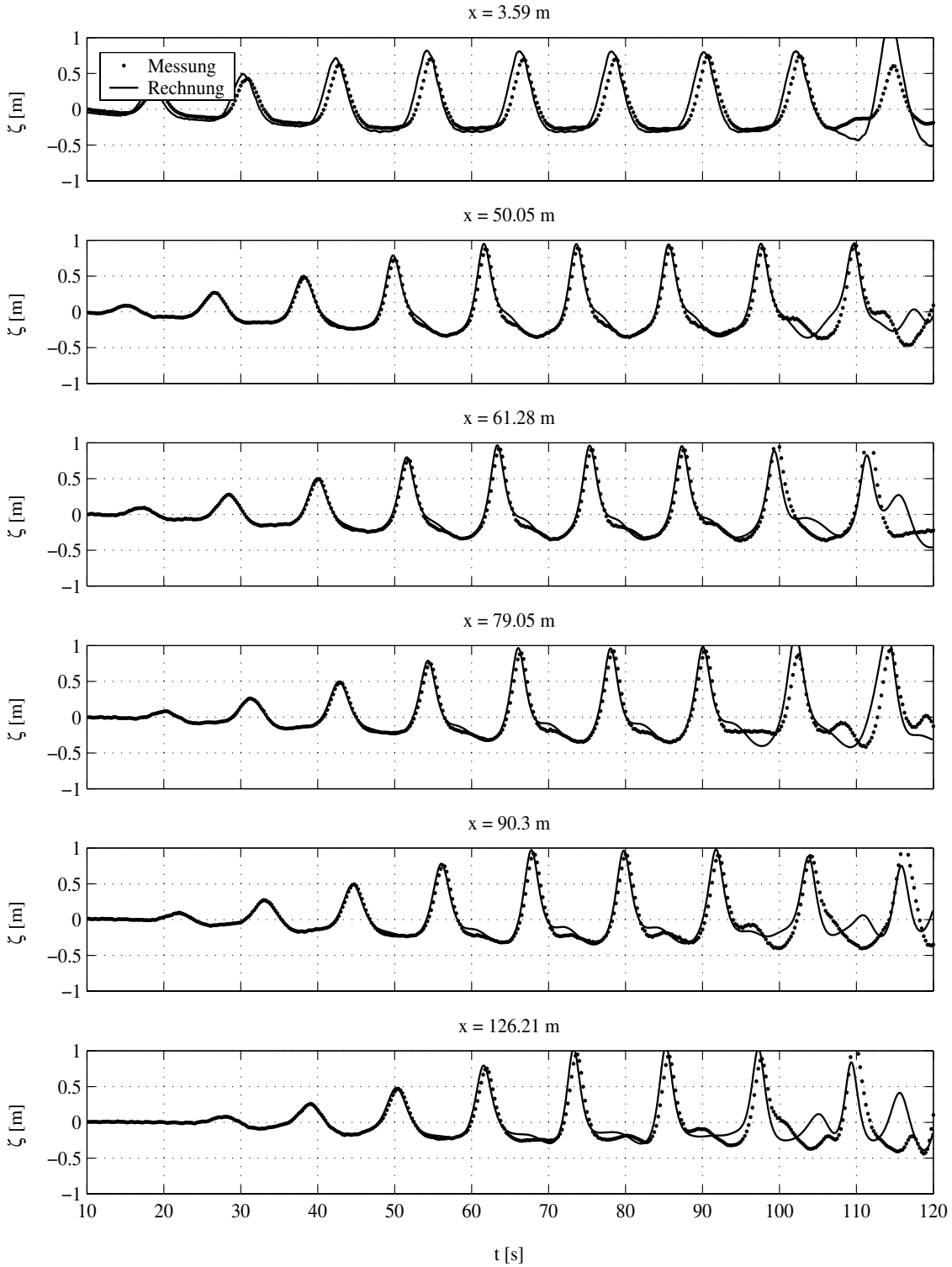

Abb. 4.11: Wasserspiegelauslenkung einer Cnoidalwelle an ausgewählten Stellen

4.3 Analyse der Wellenregistrierung

Die berechnete Registrierung unterschiedlicher Positionen im numerischen Wellenkanal wird in jedem Zeitschritt gespeichert, z.B. 0.005 [s]. In Abb. 4.12 werden die Zero-down-crossing sowie Zero-up-crossing Analyseverfahren der Registrierung einer unregelmäßigen Wellenform dargestellt. Wie in Abbildung 4.12 deutlich zu sehen ist, ergeben sich je nach Verfahren unterschiedliche H und T Werte. Im numerischen Wellenkanal sowie bei der zeitabhängigen Analyse von Messungen aus dem Versuch im Wellenkanal wird, wenn nicht anders erwähnt, die Zero-down-crossing-Methode benutzt. Durch zeitabhängige Analyse können die höchste aufgetretene Welle H_{max} und ihre Periode T auf einer Position im Wellenkanal gewonnen werden, die als wichtiger Bestandteil für die Zielfunktion in der Optimierung dienen.

Die wichtigen Größen, die aus zeitabhängigen Analysen im irregulären Seegang durch Zero-down-crossing oder Zero-up-crossing-Methode gewonnen werden, sind in Tabelle 4.1 dargestellt. Sie gelten jeweils für die ausgewertete Zeitreihe. Die sogenannte signifikante Wellenhöhe H_s ist identisch mit dem Wert $H_{1/3}$.

Tab. 4.1: Wichtige Größen aus der Wellenanalyse

H_{max}	=	höchste aufgetretene Welle
$H_{1/100}$	=	Mittelwert der 1% höchsten Wellen
$H_{1/10}$	=	Mittelwert der 10% höchsten Wellen
$H_{1/3}$	=	Mittelwert der 33% höchsten Wellen
H_m	=	Mittelwert aller Wellen
H_s	=	signifikante Wellenhöhe

In Abb. 4.13 werden Ergebnisse der Zero-down-crossing Analyse einer Zeitregistrierung aus dem numerischen Wellenkanal und aus den Messungen gegenübergestellt. Der reguläre Wellenzug wird für die Wellenhöhe $H = 0.2$ [m] und eine Periode $T = 3.0$ [s] erzeugt. Gemessen wird $x = 40$ [m] vom Wellenblatt im Wellenkanal. Die durchgezogene Linie stellt Berechnungsergebnisse mit Viskosität (NS-Rechnung) dar, während die mit den Punkten markierte Linie gemessene Werte zeigt.

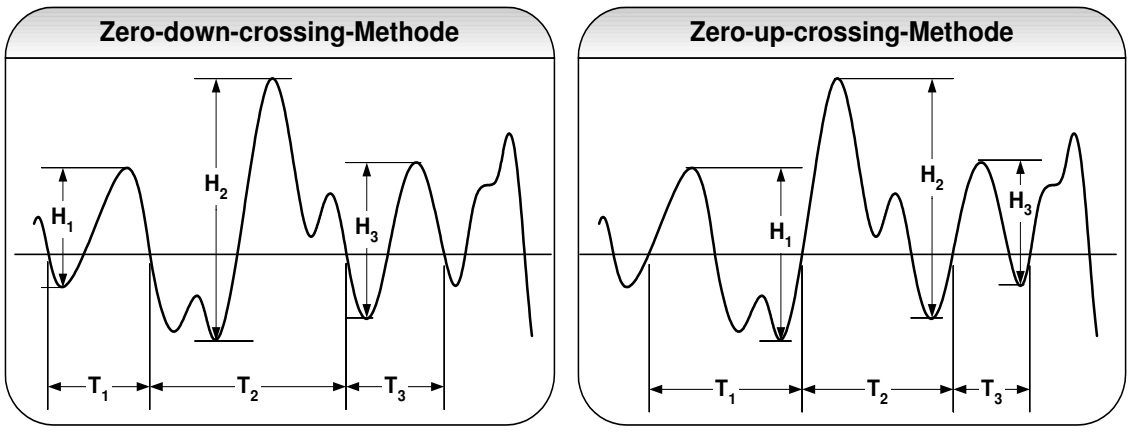

Abb. 4.12: Analyseverfahren für die irreguläre Wellenregistrierung

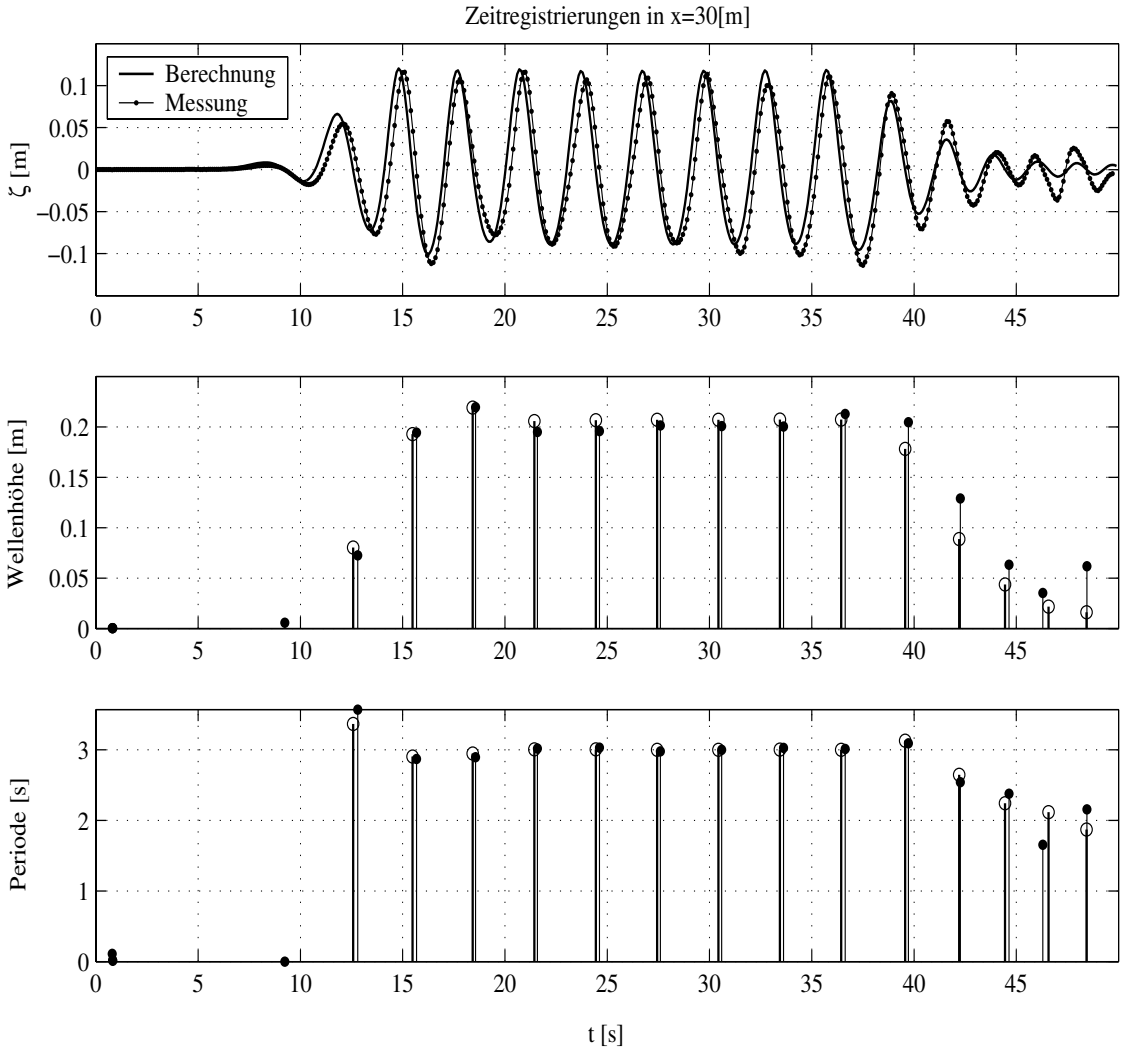

Abb. 4.13: Analyse der Zeitregistrierung eines regulären Wellenzuges

4.4 Brechkriterium

Um die Wellenanalyse aus der Zeitregistrierung in die Optimierungsroutine einzubeziehen, wird ein Brechkriterium bei den Randbedingungen in Zielfunktion der Optimierung formuliert. Neben dem historischen Brechkriterium von Stokes (1847) werden verschiedene Kriterien aus Beobachtungen bei Wellenkanalversuchen oder aus Berechnungen auf Basis asymptotischer Analysen vorgeschlagen (Michell, 1893; Longuet-Higgins, 1969, 1985; Van Dorn und Pazan, 1975; Ochi und Tsai, 1983; Ramberg und Griffin, 1987; Bonmarin, 1989; Kjeldsen und Myrhaug, 1980; Kjeldsen, 1981; Tulin und Li, 1992). In Abb. 4.14 werden verschiedene Brechkriterien sowie ihre geometrische Definition dargestellt.

Das Brechkriterium aus dem Experiment im Wellenkanal lautet:

$$\frac{H}{g\,T^2} = 0.021 \tag{4.3}$$

wobei g die Erdbeschleunigung $9.81\,[\mathrm{m/s^2}]$ darstellt. Dieses Brechkriterium eignet sich hervorragend

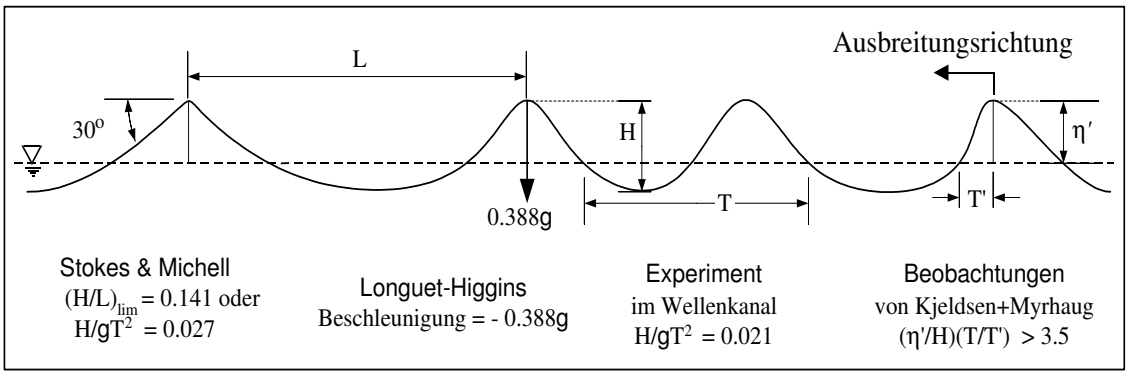

Abb. 4.14: Verschiedene klassische Brechkriterien

zur Analyse der Brechungsgrenze von fortschreitenden regulären Wellenzügen sowie transienten Wellengruppen. Die Ermittlung der Größen, wie der Wellenhöhe H und der Wellenperiode T, erfolgt durch Analyse der Wellenregistrierung. Die Wellenhöhe wird durch die maximale und minimale Wasserspiegelauslenkung innerhalb einer Periode definiert. Die Periode wird mit Hilfe des Ruhewasserspiegels berechnet. Die charakteristischen Größen H und T werden unter Berücksichtigung der Erdbeschleunigung g nach der numerischen Simulation ausgewertet, und es wird geprüft, ob die Brechungsgrenze überschritten wurde. Da dieses Brechkriterium auf den Versuchen basiert, lässt es sich leicht mit Messungen vergleichen. Ein weiteres Brechkriterium von Stokes und Michell kann ebenfalls in dem Berechnungsverfahren integriert werden. Dafür wird nur der konstante Wert 0.021 in Gl. (4.3) durch 0.027 ersetzt.

5. Optimierung und Erzeugung des Steuersignals

Zur Erzeugung eines Entwurfsseegangs mit vorgegebener Wellenhöhe und Periode ist eine optimale Kombination der freien Variablen notwendig, welche in einer Funktion für das Steuersignal als konstant eingesetzt werden müssen. Dafür werden die Variablen durch Optimierung gezielt variiert, so dass die Auswahl der verschiedenen Variablen mit Hilfe des numerischen Wellenkanals durchsucht werden kann. Bei den Suchverfahren sollten zwei wichtige Faktoren in Betracht gezogen werden:

- Ob das Verfahren den ganzen Suchraum abdeckt und mit hoher Wahrscheinlichkeit eine globale Lösung gefunden wird (Multimodalität)
- Ob das Verfahren in akzeptabler Zeit eine vernünftige und brauchbare Lösung liefert (Effektivität)

Die beiden Anforderungen gleichzeitig zu erfüllen ist meistens schwierig, und deshalb soll ein zweckmäßiger Kompromiss gefunden werden. In dieser Arbeit dreht es sich um die Bestimmung der Variablen, die verschiedene Maxima und Minima haben und weiträumig durchmustert werden müssen. Zudem ist der Rechenaufwand des numerischen Wellenkanals um Faktor 10^3 höher als der der Optimierungsroutine. Aus diesem Grund ist die Effektivität der Optimierung auch dann nicht vernachlässigbar, wenn eine schnellere Lösung erzielt werden soll. Wegen der hohen Bedeutung der Optimierung werden die verschiedenen Suchverfahren im Allgemeinen recherchiert und ein geeignetes Verfahren eingeführt. Anschließend wird eine Funktion zur Erzeugung des Steuersignals gemäß der Aufgabenstellung formuliert.

5.1 Optimierungsproblem

Die Optimierungsmethode ist in vielen Bereichen gefragt. Man sucht eine optimale Lösung, die mit Beschränkungen oder Nebenbedingungen verbunden ist. Bei der Optimierung im Ingenieurbereich wird die Frage nach dem "möglichst gut" gestellt. Ein Optimierungsproblem wird von Adby und Dempster (1974) wie folgt definiert:

- Minimiere den Skalarwert E einer Funktion f mit n Systemparametern $(x_1, \cdots, x_n)$. Die Variablen müssen angepasst werden, um
$$E = f(x_1, \cdots, x_n) \rightarrow \text{Min} \tag{5.1}$$
zu erreichen.
- Für ein Minimum einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x^* gilt: $f(x^*) < f(x)$ in der Umgebung von x^* und $f(x^*) = f(x)$ für $x = x^*$, wobei man $f(x)$ als Zielfunktion bezeichnet. Die letzte Einschränkung macht das Minimum eindeutig.

Für die Optimierung müssen die gestellten Probleme in Form einer mathematischen Funktion modelliert werden. Die Komplexität der Funktion (linear, polynomial, nichtlinear) spielt beim Suchverfahren für das Optimum eine große Rolle. Wenn mehrere Optima in einem Suchbereich vorkommen, wird das Optimierungsproblem recht komplexer. Ein Minimum x heißt globales Minimum, wenn der Funktionswert $f(x)$ den kleinsten aller möglichen Funktionswerte besitzt, und dagegen ist x ein lokales Minimum, wenn in der Umgebung von x alle Funktionswerte größer sind als $f(x)$. Ein lokales Minimum in einem multimodalen Problem zu finden ist relativ einfach. Ein globales Minimum zu bestimmen ist allerdings schwierig und wird als Problem der globalen Optimierung bezeichnet.

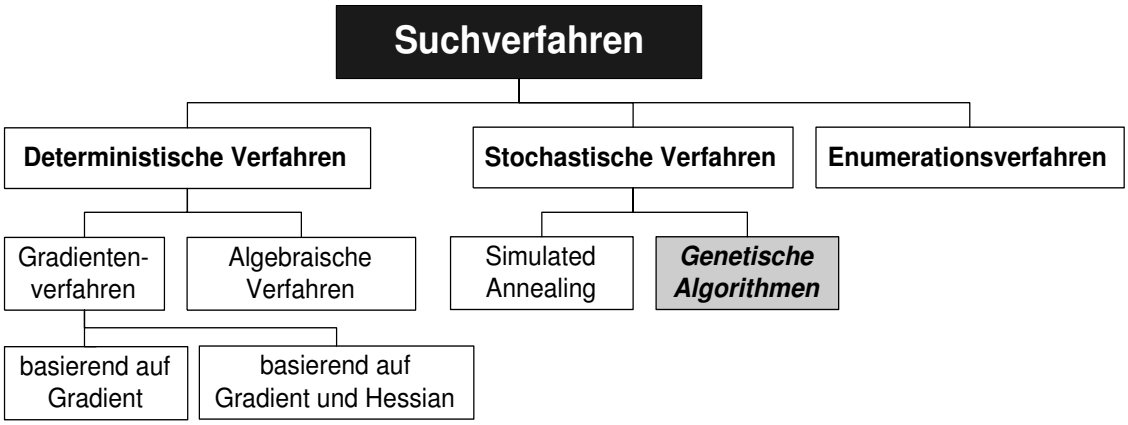

Abb. 5.1: Verschiedene Suchverfahren

Die klassischen Suchverfahren können wie in Abb. 5.1 kategorisiert werden. Die meisten verwendeten Gradientenverfahren in deterministischen Verfahren finden die nächstgelegenen lokalen Optima einer differenzierbaren Zielfunktion ohne Restriktionen. Sie verwenden die lokalen Gradienten, um ihre weitere Suchrichtung festzulegen. Dabei besteht auch die Gefahr, dass das gefundene Optimum auf einem lokalen Optimum gelandet ist.

Stochastische Verfahren unterscheiden sich von deterministischen Methoden dadurch, dass sie das Moment des Zufalls einbringen. Deswegen wird ein globales Optimum nicht immer, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit statistisch gefunden. Das Simulated-Annealing-Verfahren basiert darauf, dass neue Lösungen anhand bisherigen Lösungen generiert werden. Die Systemparameter werden in einen String abgebildet, auf dem das Verfahren arbeitet. Verbesserungen werden immer akzeptiert und als Ausgangspunkt für neue Kandidaten genutzt. Verschlechterungen werden nur mit einer dem Grad der Verschlechterung abhängigen Wahrscheinlichkeit akzeptiert, die meist mit einer exponentiellen Funktion modelliert wird. Die Enumerationsverfahren beruhen darauf, dass das Problem sich auf einem Suchbaum darstellen lässt. Wenn der Suchraum damit vollständig durchgemustert wird, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass das globale Optimum immer gefunden wird. Nachteilig ist der begrenzte Konfigurationsraum, so dass das Enumerationsverfahren in dem unendlich größeren Suchraum nicht anwendbar ist.

Die Literaturrecherche über die Suchverfahren macht deutlich, dass die deterministischen Verfahren oft lokale Optima als Lösungen liefern. Daher wird ein stochastisches Verfahren ausgewählt und mit dem numerischen Wellenkanal gekoppelt. Der Hauptvorteil von Genetischen Algorithmen sind die Modelle, die nicht mit anderen Lösungsmethoden ohne irgendeine Form des Näherungswerts entwickelt werden können. Das Modell wird allein durch die Vorgabe des Suchraumes behandelt. Die Größe des Modells, d.h. die Zahl von Wahrscheinlichkeitsvariablen, hat einen bedeutenden Einfluss auf die Geschwindigkeit der Lösungsalgorithmen. Als Nachteile von Genetischen Algorithmen sind die längere Berechnungsdauer und die leichte Schwankung der Lösungen zu nennen, aber die Lösungen liefern mit höchster Wahrscheinlichkeit globale Maxima. Bei direkten Verfahren erhält man die Lösungen schneller und exakt, jedoch besteht die Möglichkeit, dass nur ein lokales Optimum gefunden wird.

Die Rechenzeit der Optimierung im numerischen Simulationsverfahren spielt eine untergeordnete Rolle bei der Erzeugung der Wellensignale. Die Wellenausbreitung und die Beurteilung des Wellenzuges werden durch den numerischen Wellenkanal berechnet. Deshalb ist es wünschenswert, dass verschiedene brauchbare Kombinationen der Parameter in kurzer Zeit ermittelt werden können. In diesem Zusammenhang hat der Genetische Algorithmus Vorteile gegenüber direkten Suchverfahren, da die durch die Anfangspopulation erzeugten Variablen den möglichst breiten Suchraum abdecken. Testrechnungen zufolge liefert der

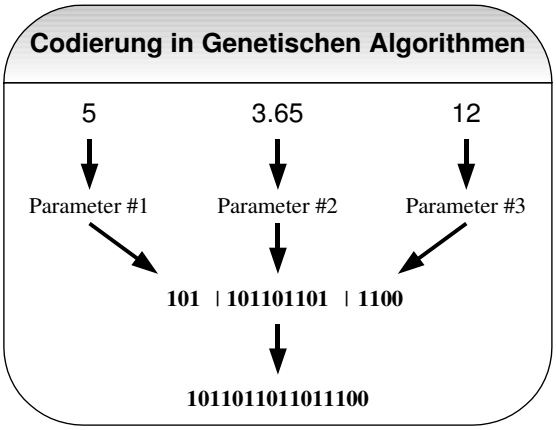

Abb. 5.2: Prinzip der Codierung in Genetischen Algorithmen

Genetische Algorithmus bereits durch wenige Iterationen eine brauchbare Lösung, während die direkten Verfahren wesentlich längere Zeiten benötigen. Lee et al. (1994) entwickeln ein hybrides Suchverfahren durch Kopplung eines direkten Verfahrens (Hooke & Jeeves; Parsons (1975)) mit dem Genetischen Algorithmus. Die Genauigkeit und die Effektivität werden sowohl mit dem hybriden Verfahren als auch mit dem einzelnen Verfahren ausführlich durch verschiedene Optimierungsprobleme untersucht, wobei die Vor- und Nachteile der Suchverfahren verdeutlicht werden. Es wird im Rahmen dieser Arbeit der oben genannte Genetische Algorithmus verwendet und weiterentwickelt, der sich von Anfang an durch gute Stabilität und schnelle Rechenroutinen herauskristallisiert hat. Um mögliche lokale Optima bei den Genetischen Algorithmen zu vermeiden, wird zusätzlich noch eine Micro-GA von Carroll (1997) implementiert.

Wir beschränken uns deshalb auf die Genetischen Algorithmen als Suchverfahren. Die Grundlage des Genetischen Algorithmus wird im folgenden Abschnitt kurz zusammengefasst.

5.2 Genetische Algorithmen

Der Genetische Algorithmus basiert auf der Evolution der Natur und wurde als Ansatz für die ingenieurstechnische Optimierung von Goldberg (1989) populär. Grundsätzlich ist der Ansatz auf binäre Chromosomen statt reellwertiger Darstellungen beschränkt. Die Systemvariablen werden in den binären String oder in das Chromosom übersetzt. Dieser Schritt wird als Codierung bezeichnet. Der Wert der Zielfunktion, wie er sich dann für das Chromosom ergibt, wird als Fitness bezeichnet. Im Genetischen Algorithmus befinden sich drei wichtige Rechenschritte, nämlich Selektion, Crossover und Mutation, die im folgenden Abschnitt kurz erläutert werden. Auf die umfassenden Erklärungen über Genetische Algorithmen wird in dieser Arbeit verzichtet. Weitere Einzelheiten des Genetischen Algorithmus können aus Goldberg (1989), Schöneburg et al. (1994) und Hesser (1996) entnommen werden.

5.2.1 Codierung

Für den Einsatz des Genetischen Algorithmus sollte das gestellte Problem zunächst gut analysiert werden. Eventuell kann es vereinfacht werden oder Teile des Problems können durch klassische Verfahren gelöst werden. Ein weiterer Punkt der Repräsentation des Problems ist die Wahl der Codierung. Bei der Codierung werden die Variablen als binäre Chromosomen dargestellt. Wie in Abb. 5.2 dargestellt, werden reelle Variablen (z.B. 3.65) mit dem entsprechenden Vergrößerungsfaktor multipliziert um ein ganzzahliges Chromosom zu bilden. Die drei Chromosomen aus Variablen werden als ein vollständiges Chromosom zusammengesetzt, das als Individuum bezeichnet wird. Wenn die Probleme und Randbedingungen bekannt

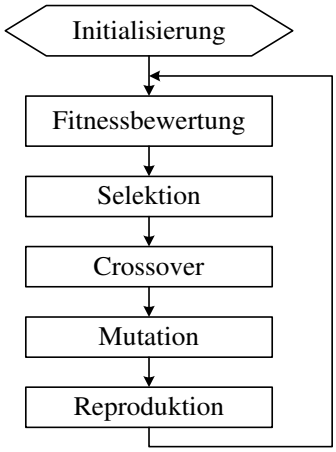

Abb. 5.3: Flussdiagramm für den Genetischen Algorithmus

sind, kann die Anfangspopulation, die aus mehreren Individuen nach dem Zufallsprinzip besteht, generiert werden. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, wird die Population so generiert, dass keine Duplikate auftreten. Nach der Festlegung einer Initialpopulation wird iterativ der Algorithmus wie in Abb. 5.3 durchgeführt. Der Algorithmus beginnt mit der Fitnessbewertung, die der Zielfunktion entspricht. Der Fitnessbestimmung folgt die Selektion, der Crossover, die Mutation und die Reproduktion.

5.2.2 Selektion

Die Aufgabe der Selektion ist es, die Häufigkeit der besseren Individuen in der Population zu erhöhen und die schlechteren Individuen zu verringern. Hierbei wird eine proportionale Selektion eingesetzt. Die proportionale Selektion ist so gewählt, dass auch schlechtere Individuen überleben können. Dabei ist die Häufigkeit h, mit der ein Individuum I nach der Selektion in der Population vorkommt proportional zu seiner Fitness $f(I)$ im Verhältnis zur mittleren Fitness in der Population $h(I) = \frac{f(I)}{<f>}$, wobei $h(I)$ die Häufigkeit des Individuums I nach der Selektion widerspiegelt, $f(I)$ die Fitness des Individuums I und $< f >$ den Populationsmittelwert der Fitness darstellt. Negative Fitnesswerte werden dabei zu 0 gesetzt. Mit der proportionalen Selektion behandelt man normalerweise nur Maximierungsprobleme. Dabei dürfen negative Fitnesswerte hier nicht vorkommen.

5.2.3 Crossover

Der Crossover auf einem binären Chromosom findet wie in der Natur statt. Das Prinzip des Crossovers wird in Abb. 5.4 dargestellt. Beim Crossover wird bei zwei Chromosomen eine Schnittstelle gewählt, die bei beiden Individuen an der gleichen Stelle ist. Danach werden die hinteren Segmente zwischen den beiden Chromosomen ausgetauscht. Die Schnittstelle beim Crossover wird nach dem Zufallsprinzip gewählt. Ob ein Crossover durchgeführt wird oder nicht, wird durch einen Zufallsprozess mit dem vorgegebenen Wert P_C bestimmt. Die Häufigkeit des Crossovers wird ebenso mit einem vorgegebenen konstanten Wert gesteuert.

5.2.4 Mutation

Ein Chromosom $\mathbf{x}$ ist ein Binärvektor mit l Komponenten: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_l)$. Jede dieser Komponenten kann nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Bei der Mutation wird dabei jeder der Einträge mit einer festen Mutationswahrscheinlichkeit P_M ausgetauscht, d.h. aus 0 wird 1 und umgekehrt. Die Mutationswahrscheinlichkeit ist im Allgemeinen für alle Koordinaten und für alle Individuen gleich. Bei der Mutation

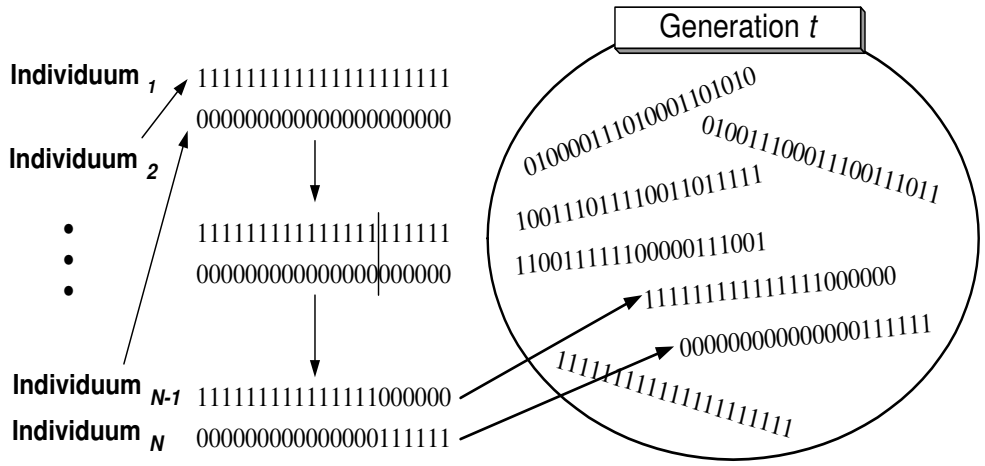

Abb. 5.4: Prinzip des Crossovers in Genetischen Algorithmen

kann eine unerwünschte Wirkung wegen der Bitposition vorkommen. Der Grund dafür ist, dass reellwertige Probleme binär codiert sind. Jedes Bit hat eine verschiedene Auswirkung auf das Individuum. Die höchstwertigen Bits können die Position des Individuums im Konfigurationsraum sehr stark verschieben, während die niedrigstwertigen Bits kaum Änderungen hervorrufen. Daher werden die höherwertigen Bits mit einer entsprechend kleineren Wahrscheinlichkeit geändert.

5.2.5 Reproduktion

Wenn die oben genannten Schritte abgeschlossen sind, werden neue Individuen im Populationspool wieder gespeichert. Die schlechtesten Individuen werden durch bessere ersetzt. Die neue Population dient als Grundlage für die Fitnessbewertung nächster Iteration im Genetischen Algorithmus, solange das Abbruchkriterium nicht erreicht ist.

Die konstanten Werte zur Eingabe für die Genetischen Algorithmen werden in Tab. 5.1 zusammengefasst.

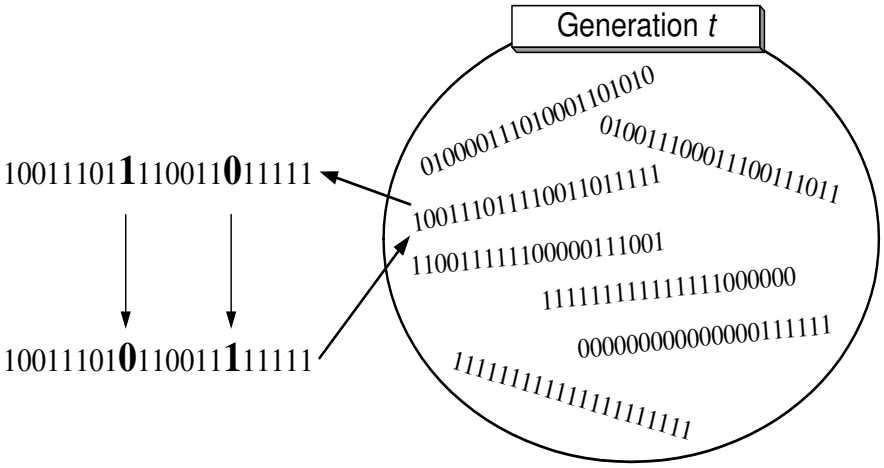

Abb. 5.5: Prinzip der Mutation in Genetischen Algorithmen

Tab. 5.1: Konstante Werte für die Genetischen Algorithmen

Größe der Population		5
Anzahl der Generation		100
Wahrscheinlichkeit der Selektion	h	0.5
Wahrscheinlichkeit der Crossover	P_C	0.5
Wahrscheinlichkeit der Mutation	P_M	0.2

5.3 Zielfunktion und Nebenbedingung

Ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen ist allgemein beschrieben durch eine Zielfunktion in einem Konfigurationsraum $\Re$ mit dem beliebig wählbaren Systemparameter $\mathbf{s} = (\mathrm{s}_1, \cdots, \mathrm{s}_n)$:

$$\underset{\mathbf{s} \to \Re}{\text{Minimiere}} \quad f(\mathbf{s}) \tag{5.2}$$

und den Nebenbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) = 0,$$

wobei $\mathbf{g}(\mathbf{s}) = (\mathrm{g}_1(\mathrm{s}), \cdots, \mathrm{g}_n(\mathrm{s}))$ eine Vektorfunktion darstellt. Die Nebenbedingungen **g(s)** können die Gleichheitsrestriktionen oder die Ungleichheitsrestriktionen sein. Der maximale und minimale Wert des Systemparameters kann auch als Nebenbedingung betrachtet werden.

5.4 Erzeugung des Steuersignals

Die Fitnessbewertung erfolgt durch die Zielfunktion im Genetischen Algorithmus. Nun soll eine effektive Zielfunktion zur Erzeugung des Steuersignals definiert werden, mit der der gewünschte Seegang erzeugt werden kann. Wie in Abb. 1.3 im Abschnitt 1.3 dargestellt ist, wird ein Steuersignal für das Wellenblatt durch freie Variable formuliert. Eine solche Funktion wird von Boyd und Chen (2000) als initiale Amplitudenmodulation zur Erzeugung nichtlinearer Wellenpakete eingeführt:

$$\zeta(x, 0) \;=\; 6\mu \operatorname{sech}(\lambda x) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tag{5.3}$$

wobei der nichtlineare Parameter $\mu = 1/10$ und der Dispersionsparameter $\lambda = 1/10$ gesetzt werden. Der Term (ohne λ) $\operatorname{sech} x$ lässt sich als $1/\cosh x$ beschreiben. $\cosh x$ wird wie folgt definiert:

$$\cosh x \;=\; \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{5.4}$$

Die Gl. (5.3) ist für die Steuerung des Wellenblattes ungeeignet, da die Ein- und Ausschwingung des Wellenblattes sowohl in der numerischen Rechnung als auch bei Messungen berücksichtigt werden müssen. Aus diesem Grund wird die Cosinusfunktion in Gl. (5.3) durch Sinusfunktion ersetzt. Die lokale Variable x wird als t im Zeitbereich umgeschrieben:

$$\mathcal{X}(t) \;=\; P_1 \cdot \operatorname{sech}(P_2 \cdot t) \cdot \sin(P_3 \cdot t) \tag{5.5}$$

wobei die Parameter $P_{i,\, i=1,2,3}$ die konstanten Werte darstellen. P_3 in Gl. (5.5) kann als Frequenz verstanden werden. Um den Frequenzbereich des Steuersignals nach dem Dispersionsprinzip zu gestalten, wird ein zeitabhängiger Term $\mathsf{cosh}(P_4 \cdot t)$ in den letzten Term in Gl. (5.5) multipliziert. Die Ausschwingung des Wellenblattes wird durch einen zusätzlichen Term $\mathsf{tanh}(P_5)$ berücksichtigt.

Die Funktion für die Erzeugung des Steuersignals kann wie folgt formuliert werden:

$$\mathcal{X}(t) \;=\; P_1 \cdot \operatorname{sech}\left(P_2 \;\cdot t\right) \cdot \sin\left\{P_3 \cdot \cosh(P_4 \cdot t) \cdot t\right\} \cdot \tanh\left(P_5\right) \tag{5.6}$$

wobei der zeitunabhängige Term P_1 als maximale Auslenkung des Wellenblattes betrachtet werden kann. Der Einfluss der jeweiligen Parameter wird in Abb. 5.6 dargestellt, wobei die Unterschiede leicht erkennbar sind. Die Kurven in Abb. 5.6 werden durch Gl. (5.6) erzeugt, in der ein einzelner Parameter gezielt variiert wird, während die weiteren Parameter als konstant angenommen werden. Die gegebenen Parameter sind auf der entsprechenden Abbildung zu sehen. Wie bereits oben erwähnt, ist der Parameter P_1 für die Amplitude der Bewegung des Wellenblattes verantwortlich. Der Parameter P_2 stellt die Länge der Amplitudenmodulation dar, wobei die Dauer des Signals bestimmt wird. Die Frequenz der Wellenblattbewegung wird mit dem Parameter P_3 bestimmt. Der Parameter P_4 beeinflusst die zeitliche Änderung der Frequenz innerhalb des Signals.

Die Zeit t in Gl. (5.6) wird theoretisch im Bereich $0 \sim \infty$ liegen, wenn ein unendliches Steuersignal erzeugt werden muss. Das Steuersignal durch Gl. (5.6) wird maximal bis zu 30 Sekunden erzeugt, um eine akzeptable Simulationszeit im Berechnungsverfahren zu gewährleisten. Dadurch kann auch die Genauigkeit der Messung erhöht werden, da die Störung durch die reflektierte Welle im Wellenkanal vermieden werden kann. Die Zeitvariable in Gl. (5.6) wird deshalb im Bereich $t = -30.0 \sim 0.0$ gegeben und anschließend so transformiert, dass -30.0 zum Anfangswert $0.0\,[\mathrm{s}]$ wird. Die transformierte Variable kann dann in die numerische Berechnung eingegeben werden und für Messungen verwendet werden (siehe in Abb. 4.5). Bei Optimierungsschritten im Genetischen Algorithmus werden nur die freien Variablen $P_{i,\,i=1,\cdots,4}$ gesucht, während die Variable $\mathsf{tanh}\,(P_5)$ vorgegeben wird.

Die Formulierung der Zielfunktion für die Erzeugung nichtlinearer transienter Wellengruppen werden zusammen mit der Gleichung (5.6) für das Steuersignal des Wellenblattes im folgenden Kapital beschrieben.

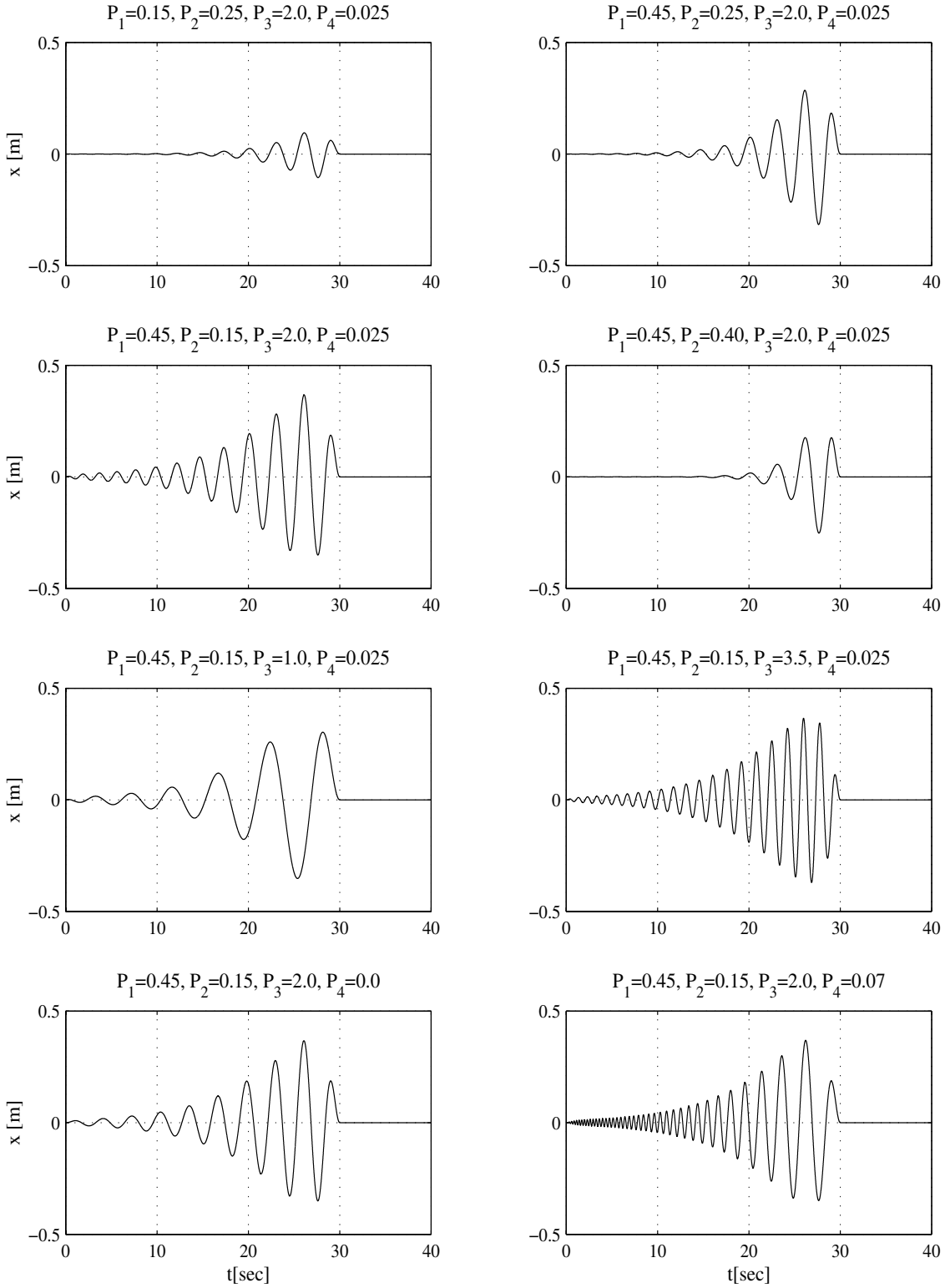

Abb. 5.6: Einfluss der jeweiligen Parameter $P_{1,\cdots,4}$ in Funktion für die Erzeugung des Steuersignals

6. Anwendung und Validierung

6.1 Formulierung der Zielfunktion

Für die numerische Simulation zur Erzeugung nichtlinearer Entwurfsseegänge sollte eine Zielfunktion in der Optimierungsroutine definiert werden. Die Gleichungen (5.2) und (5.6) werden mit der höchsten aufgetretenen Welle H_{max} aus dem Analyseverfahren der Registrierung für die Zielfunktion formuliert.

Zunächst wird eine Position im numerischen Wellenkanal gewählt, wo die Wasserspiegelauslenkung gemessen werden soll. Die Zeitregistrierung der Position wird nach jeder Simulation für die Erzeugung transienter Wellengruppen analysiert, wobei die höchste aufgetretene Welle H_{max} in der ausgewählten Position bei einer Simulationsdauer ermittelt wird. Gleichzeitig werden dazugehörige Wellenperioden T_{max} nach der Zero-down-crossing-Methode berechnet. Wenn die gesamten Wellenperioden aus der Registrierung von Beginn der Simulation an addiert werden, kann der Zeitpunkt t_{max} bestimmt werden, in dem die höchste Welle nach Beginn der numerischen Simulation aufgetreten ist. Mit den drei Größen, nämlich H_{max}, T_{max} und t_{max}, kann die Zielfunktion formuliert werden, wobei die Gleichung (5.6) mit dem freien Systemparameter $\mathbf{s} = (P_1, \cdots, P_4)$ zur Erzeugung des Signals für die Wellenblattbewegung dient. In der Tabelle 6.1 wird die Systemparameter und ihre Rolle in Gl. (5.6) zusammengefasst.

Das Ziel der Optimierung ist die Erzeugung eines Entwurfsseeganges mit der gegebenen Wellenhöhe(H_z), der Wellenperiode(T_z) und Auftrittzeit(t_z) nach Beginn der Simulation. Daher wird die Zielfunktion folgendermaßen definiert:

$$\underset{\mathbf{s} \to \Re}{\text{Minimiere}} \quad f(\mathbf{s}) = \left(\frac{H_{max} - H_z}{H_z}\right)^2 + \left(\frac{T_{max} - T_z}{T_z}\right)^2 + \left(\frac{t_{max} - t_z}{t_z}\right)^2 \tag{6.1}$$

mit den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_1 &= \frac{H_{max}}{g\,T_{max}^2} - \mathrm{K}_B \leq 0 \\ \mathrm{g}_{n,n=2,\cdots,5} &= P_{n,min} \leq P_n \leq P_{n,max} \end{aligned}$$

wobei H_z, T_z und t_z die Zielwerte darstellen. K_B bezeichnet die Konstante des Brechkriteriums. $P_{n,min}$ und $P_{n,max}$ stellen die minimale und maximale Werte von Systemvariablen dar. In Abb. 6.1 werden die charakteristischen Merkmale der Zielwelle auf dem Zeitbereich dargestellt.

Tab. 6.1: Parameter und ihre Rolle im Steuersignal

P_1	maximale Auslenkung des Wellenblattes
P_2	Dauer des Steuersignals
P_3	Frequenz der Wellenblattbewegung
P_4	zeitliche Änderung der Frequenz im Steuersignal

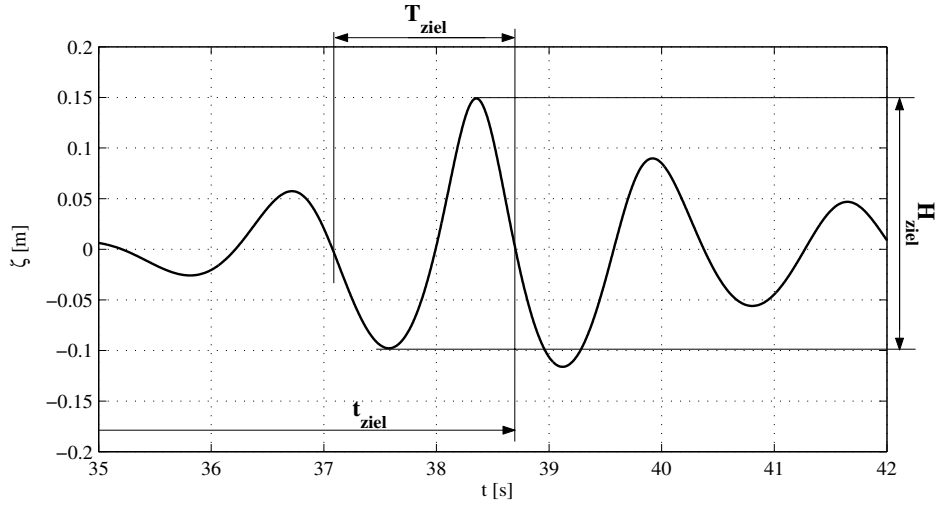

Abb. 6.1: Charakter der Zielwelle auf der Zielposition mit der Zero-down-crossing Methode

6.2 Ablauf der Simulation

Der Ablauf der Simulationsverfahren ist in Abb. 6.2 dargestellt. Beginnend mit der Erzeugung der Zufallspopulation in Genetischen Algorithmen werden die freien Variablen P_n mit Hilfe von Nebenbedingungen bereitgestellt. Die freien Variablen werden in einer binären Form codiert. Dabei wird beachtet, dass eine gute Anfangspopulation durch Parameter aus der Datenbank generiert wird und dass keine Duplikate vorkommen sollen. Eventuell kann eine Vorselektion in Bezug auf die Datenbank durchgeführt werden.

Die erste Iteration wird mit den Variablen P_n durchgeführt. Die Variablen werden in die Gleichung (5.6) eingesetzt, um ein Steuersignal für die Wellenblattbewegung zu berechnen. Für die Eingabe im numerischen Wellenkanal wird die Geschwindigkeit der Wellenblattbewegung zusätzlich berechnet. Dabei sollte die Randbedingung für den Einströmrand der instationären Berechnungsverfahren gegeben werden. Wenn ein Zeitschritt im Berechnungsverfahren z.B. mit dem 0.005 [s] berechnet werden soll, wird die Geschwindigkeit mit dem Abstand 0.005 Sekunden bereitgestellt. Da die Funktion zur Generierung der Wellenblattbewegung nur 30 Sekunden der gesamten Simulationsdauer abdecken kann, wird die weitere verbleibende Eingabedatei zur Wellenblattbewegung zu 0 gesetzt, damit die Ausbreitung der Wellengruppe im numerischen Wellenkanal vollständig simuliert werden kann. Bei der Berechnung wird die Simulation 50 Sekunden lang durchgeführt.

Die Zeitregistrierung erfolgt durch den Gitterpunkt der vorgegebenen Position im numerischen Wellenkanal. Das bewegliche Gitter hat dabei einen Vorteil: die Bewegung der Gitterpunkte ist nur in der vertikalen Richtung zugelassen, während die Gitterpunkte in der horizontalen Richtung im Wellenkanal festgehalten sind. Die Messposition beliebiger Punkte kann vor Beginn der Berechnung ausgewählt werden. Die gemessene Wasserspiegelauslenkung wird in jedem Zeitschritt gespeichert, um die Wellenanalyse zu ermöglichen. Die Zero-down-crossing-Methode wird als Wellenanalyseverfahren eingesetzt. Wahlweise kann auch die Zero-up-crossing-Methode durch eine kleine Modifizierung des Quellprogrammes eingesetzt werden, um die Flexibilität der Wellenanalyse im numerischen Verfahren zu erhöhen. Bei der Fitnessbewertung der numerischen Simulationsergebnisse wird geprüft, ob der erzeugte Wellenzug mit der maximalen Zielwellenhöhe und der Zielperiode an der vorgegeben Stelle im Wellenkanal übereinstimmt. Als Abbruchkriterium der Iteration wird die Abweichung zwischen dem vorgegebenen Zielwert und dem gemessenen Wert berechnet. Wenn die Abweichung von Fitnesswerten für die 3 hintereinander folgenden Iterationen unter 5% liegt, wird die Iteration abgebrochen und keine weitere Iteration des Genetischen Algorithmus durchgeführt.

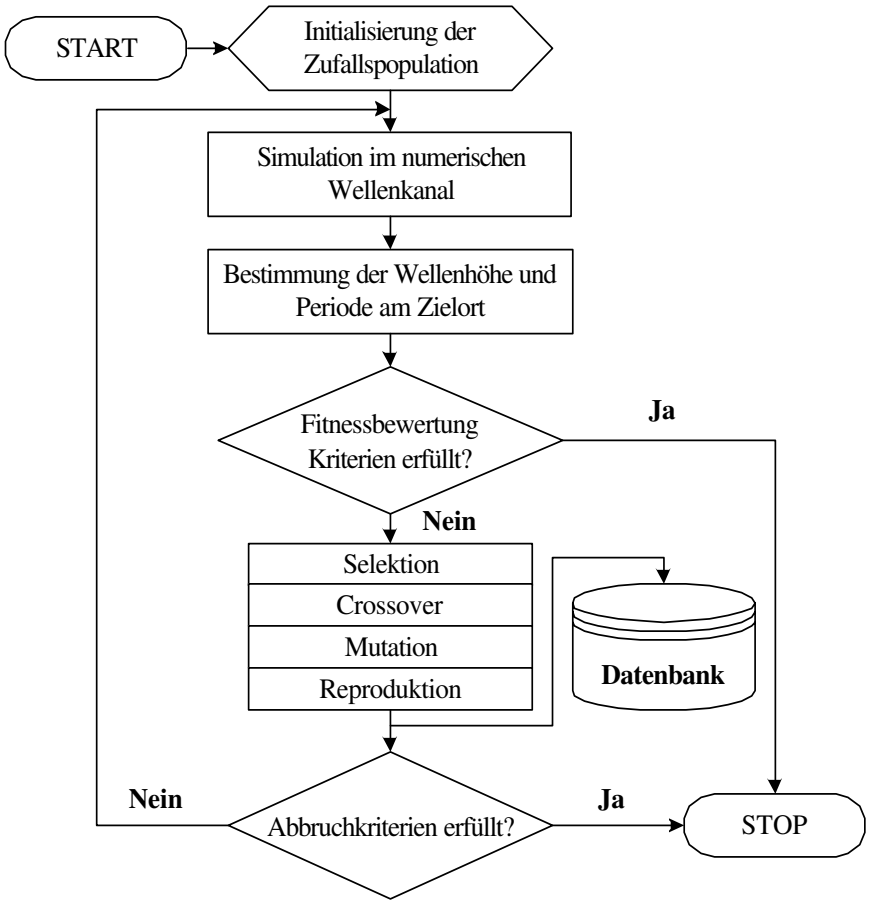

Abb. 6.2: Ablauf des Simulationsverfahrens

Wenn der erzeugte Wellenzug das Abbruchkriterium nicht erfüllt, werden die weiteren Berechnungsschritte durchgeführt. Nun werden die eingesetzten Variablen durch Selektion, Crossover und Mutation im Genetischen Algorithmus variiert. Mit der Reproduktion werden die neuen Variablen für die nächste Iteration im Genetischen Algorithmus bereitgestellt. Unabhängig davon, ob die erzeugten Wellen das Abbruchkriterium erfüllen oder nicht, werden die Variablen, deren Fitnesswerte und die Auswertungsergebnisse in einer Datenbank gespeichert. Mit Hilfe der Datenbank werden die Anfangswerte und die Nebenbedingungen der Parameter für die spätere Simulation ausgewählt, so dass der Zeitaufwand für die Optimierung erheblich reduziert werden kann. Wenn eine neue Simulation mit einem unbekannten Parameterbereich angefangen werden soll, wird die Datenbank erst vom Benutzer durchsucht und ein guter Anfangswert kommt zum Einsatz.

Nach erfolgreichem Abschluss einer Optimierung steht in der Datenbank eine Reihe von Informationen zur Verfügung, die aus dem breiten Parameterbereich gefunden und mit dem numerischen Wellenkanal ausgewertet wurde. Mit Hilfe der berechneten Parameter in der Datenbank kann eine Simulation ohne langwierigen Optimierungsprozess durch die Änderung eines bestimmten Parameter durchgeführt werden, da sich jeder Parameter in der Funktion für die Erzeugung des Steuersignals unabhängig von anderen Parametern auswirkt. Die Datenbank dient deshalb sowohl zur Auswahl guter Anfangswerte für die Optimierung als auch zur gezielten Erzeugung einer Extremwelle im numerischen Wellenkanal.

Abschließend wird das Abbruchkriterium des Genetischen Algorithmus geprüft. Hierbei ist die maximale Anzahl der Generationen gegeben. Eine typische Kombination der Population und Generation ist jeweils 5 und 200, was sich in mehreren Testrechnungen bewährt hat. Wenn die maximale Anzahl der Generationen nicht erreicht ist, wird die Iteration mit den reproduzierten Variablen weiter durchgeführt.

6.3 Numerische Erzeugung des Entwurfsseegangs

6.3.1 Optimierung mit einer einzigen Zielwelle

Ein Entwurfsseegang mit definiertem Charakter wird mit dem numerischen Verfahren simuliert. Die Zielfunktion wird so definiert, dass eine Welle mit der maximalen Wellenhöhe $H_z = 0.55\,[\mathrm{m}]$ und dazugehöriger Periode $T_z = 2.0\,[\mathrm{s}]$ auf der Stelle $x_z = 30\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt $t_z = 40$ Sekunden nach Beginn der Simulation erzeugt wird. Zur Auswahl der charakteristischen Größen der Zielwelle sind verschiedene Ansätze möglich. Sie kann beispielsweise aus dem Seegangsspektrum ausgewählt werden, was häufig bei der Untersuchungen mit irregulärem Seegang gemacht wird (Clauss und Steinhagen, 2000). Eine andere Möglichkeit ist auch, dass die Registrierung in der Meereswelle mit einem entsprechenden Maßstab als Zielwelle verwendet wird (Haver und Andersen, 2000; Mori et al., 2000; Sand et al., 1990; Clauss, 2002). Diese Vorgehensweise hat bei der Erzeugung einer Welle mit deterministischem Charakter den Vorteil, dass sie wesentlich weniger Arbeitsaufwand erfordert als die Methode mit dem Seegangsspektrum. Wenn eine Zielfunktion mit zusätzlichen Termen für die benachbarten Welle definiert wird, werden drei nebeneinander liegende Wellen in Betracht gezogen, d.h. die maximale Anzahl der Welle für die Zielfunktion ist auf 3 beschränkt. In dieser Arbeit wird die zweite Variante genommen, und die Größen der Zielwelle werden durch verschiedene Registrierungen ermittelt. Dabei werden die Gültigkeitsbereiche der unterschiedlichen Wellentheorien in Abb. 2.2 berücksichtigt und es wird kontrolliert, ob sich die Zielgrößen im unrealistischen Bereich befinden. Die charakteristischen Größen der zu erzeugenden Welle sind in der Tabelle 6.2 dargestellt. Die ausgewählten Größen entsprechen einer Stokes III Welle ($H/gT^2 = 0.0140$, $d/gT^2 = 0.0382$).

Tab. 6.2: Charakteristische Größen der Zielwelle

Zeitbereich		
H_z	=	0.55 [m]
T_z	=	2.0 [s]
t_z	=	40.0 [s]
Ortsbereich		
$x_z = 30.0\,[\mathrm{m}]$		vom Wellenblatt

Die entsprechende Zielfunktion wird in Gl. (6.2) formuliert.

$$\underset{\mathbf{s}\to\Re}{\text{Minimiere}} \quad f(\mathbf{s}) = \left(\frac{H_{max} - H_z}{H_z}\right)^2 + \left(\frac{T_{max} - T_z}{T_z}\right)^2 + \left(\frac{t_{max} - t_z}{t_z}\right)^2 \tag{6.2}$$

wobei die Parameter $P_{1,\cdots,4}$ zusammen mit folgender Nebenbedingung gefunden werden müssen:

$$\mathrm{g}_1 \quad = \quad \frac{H_{max}}{g\,T_{max}^2} - \mathrm{K}_B \;\leq\; 0 \tag{6.3}$$

Für das Brechkriterium in der Nebenbedingung Gl. (6.3) wird der Wert $\mathrm{K}_B = 0.021$ gesetzt. Die Nebenbedingung fordert, dass die höchste Welle aus der Registrierung auf der Stelle $x_z = 30\,[\mathrm{m}]$ nicht brechen soll. Maximum und Minimum der Parameter für das Steuersignal werden wie in Tabelle 6.3 gegeben. Der

Tab. 6.3: Maximum und Minimum der Parameter

0.15	$\leq$	P_1	$\leq$	0.45
0.15	$\leq$	P_2	$\leq$	0.4
1.0	$\leq$	P_3	$\leq$	3.5
0.0	$\leq$	P_4	$\leq$	0.05

numerische Wellenkanal ist $L = 150\,[\mathrm{m}]$ lang und $d = 1.5\,[\mathrm{m}]$ tief. Die dynamische Viskosität bei den Navier-Stokes-Gleichungen $\mu = 1.0\,\mathrm{E}\text{-}3\,[\mathrm{Ns/m^2}]$ und die Dichte $\varrho = 1000\,[\mathrm{kg/m^3}]$ werden in der Simulation berücksichtigt. Zur Diskretisierung des Wellenkanals werden 1800 Zellen in x-Richtung und 20 Zellen in z-Richtung verwendet. Der Gitterabstand beträgt $\Delta x = 0.05 \sim 0.5\,[\mathrm{m}]$ und $\Delta z = 0.0375 \sim 0.05\,[\mathrm{m}]$. Der Zeitschritt der impliziten Euler-Methode beträgt $\Delta t = 0.005\,[\mathrm{s}]$.

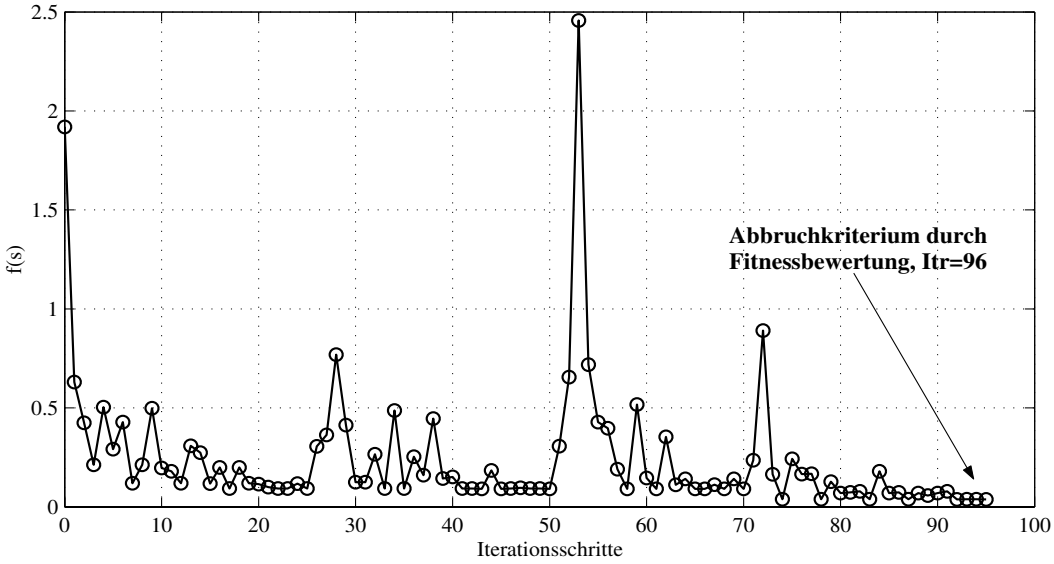

Abb. 6.3: Fitnessbewertung im Genetischen Algorithmus

Die Simulation wird nach 96 Iterationen durch die Fitnessbewertung erfolgreich beendet. Der Ablauf der Fitnesswerte im Optimierungsverfahren wird in Abb. 6.3 dargestellt. Wie bereits erwähnt, wird die Optimierung dann abgebrochen, wenn der Fitnesswert 3 Iterationen hintereinander unter 0.05 (5%) liegen. Ansonsten läuft der Optimierungsvorgang weiter bis zum Abbruchkriterium mit der Anzahl der Generationen. Die errechneten Parameter zur Erzeugung des Wellensignals sind in Tabelle 6.4 dargestellt. Der Parameter P_5 wird als Konstante behandelt, da dieser Parameter nur für die Ausschwingung des Wellensignals von Bedeutung ist. Die räumliche Ausbreitung des Wellenzuges im numerischen Wellenkanal und die Oberflächenverformung im Zeitpunkt $t = 39\,[\mathrm{s}]$ aus dem numerischen Verfahren wird in Abb. 6.4 dargestellt.

Die Darstellung der räumlichen Ausbreitung des Wellenzuges macht es deutlich, dass die Konzentration der Wellen nicht im berechneten Zeitpunkt $t = 39\,[\mathrm{s}]$ auftritt. Tatsächlich liegt der Konzentrationspunkt den Berechnungen nach etwa bei $t = 45\,[\mathrm{s}]$. Wegen der Zielfunktion, die eine definierte Welle an einer bestimmten Position im numerischen Wellenkanal verlangt, liefert der Optimierungsvorgang eine Lösung, die unabhängig vom Konzentrationspunkt des fortschreitenden Wellenzuges ist.

Tab. 6.4: Bestimmte Parameter aus der Optimierung

Parameter	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5(konstant)
Ergebnis	0.4229	0.1624	2.9298	0.0393	0.5

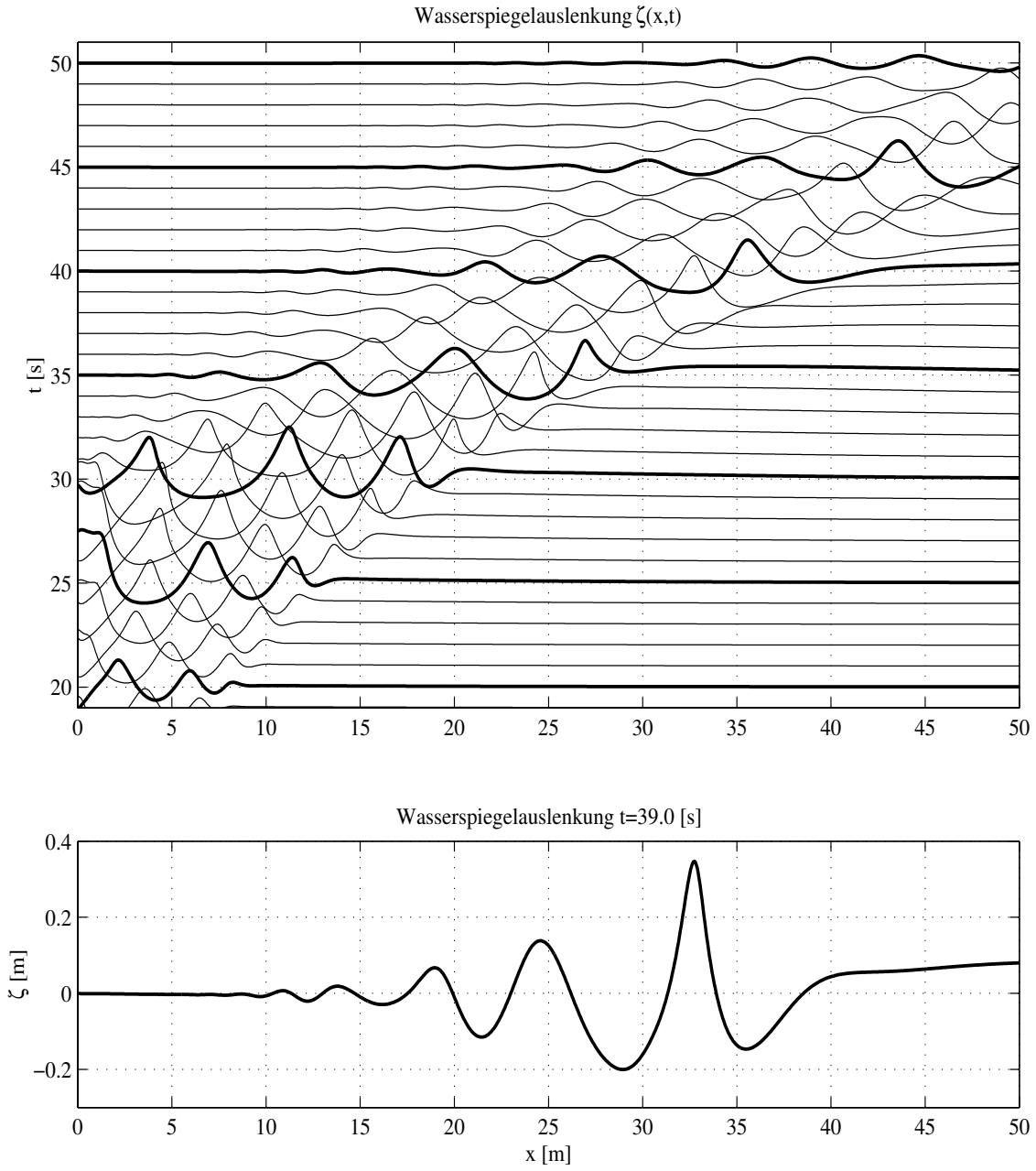

Abb. 6.4: Ausbreitung des Wellenzuges (oben) und Wasserspiegelauslenkung $t = 39\,[\mathrm{s}]$ (unten)

Die detaillierten Ergebnisse aus der Wellenanalyse sind in Tabelle 6.5 dargestellt. Die Fehlermargen zwischen Zielwerten und Berechnungsergebnissen werden berechnet und dargestellt. Die Geschwindigkeits- und Druckverteilung des fortschreitenden Wellenzuges im Zeitpunkt $t = 39.0\,[\mathrm{s}]$ wird in Abb. 6.5 dargestellt. Die maximale Amplitude der Geschwindigkeit beträgt $(\sqrt{u^2 + v^2})_{max} = 1.3434\,[\mathrm{m/s}]$ auf dem höchsten Wellenberg.

Die relative Wellenhöhe und Wassertiefe aus den Berechnungsergebnissen werden ermittelt und mit den Bereichsgrenzen der unterschiedlichen Wellentheorien verglichen. Die relative Wellenhöhe aus der Registrierung beträgt $H/gT^2 = 0.0123$, und sie entspricht der Stokes III Welle. Die relative Wassertiefe beträgt $d/gT^2 = 0.0328$, wobei keine Tiefwasserwelle aufgrund der geringeren Wassertiefe ($d = 1.5\,[\mathrm{m}]$) angenommen werden kann. Einige Entwurfswellen sind als Beispiel im Anhang A.1 dargestellt.

Tab. 6.5: Detaillierte Ergebnisse aus der Analyse ($x_z = 30\,[\mathrm{m}]$)

	Wellenhöhe [m]	Periode [s]	Zeitpunkt [s]
Zielwerte	0.55	2.0	40.0
Berechnungsergebnis	0.5651	2.1604	38.6
Abweichung	+2.75 %	+8.02 %	−3.5 %

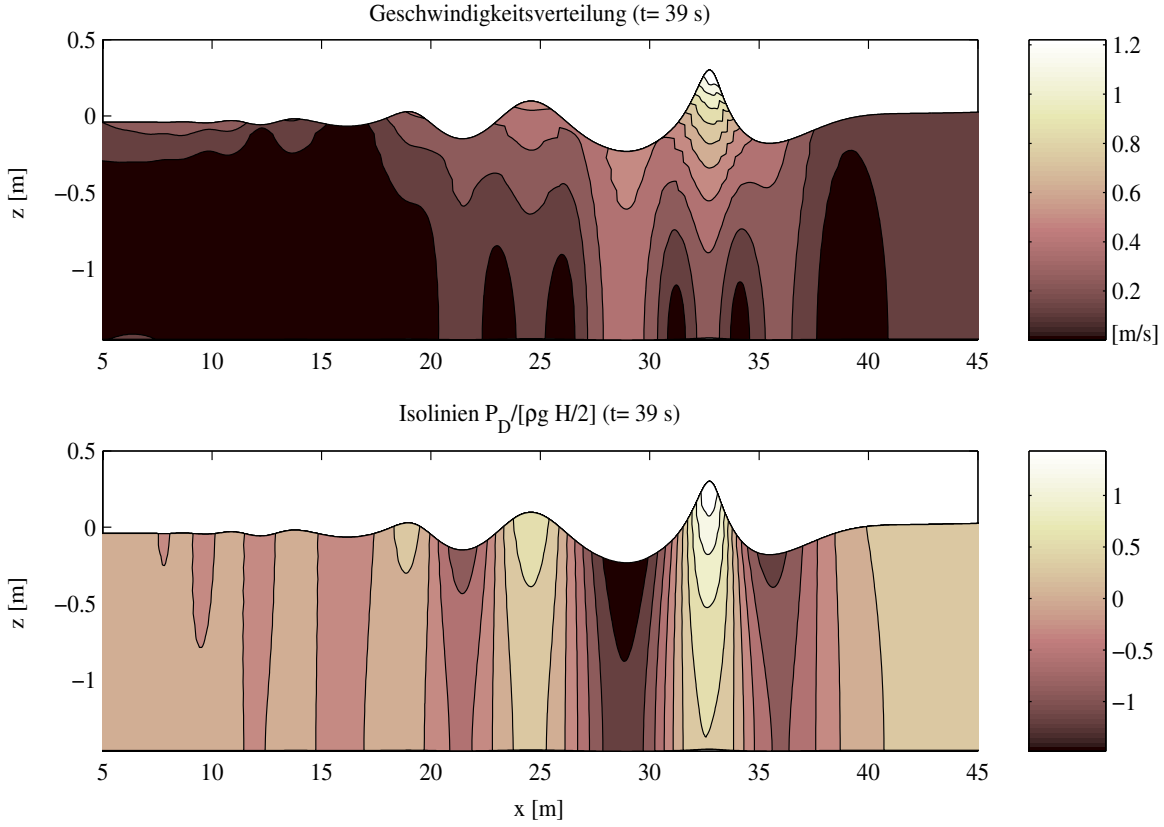

Abb. 6.5: Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 39\,[\mathrm{s}]$

6.3.2 Optimierung mit benachbarten Wellen

Eine Entwurfswelle mit anders formulierter Zielfunktion wird simuliert. Die Analyse der Registrierung erfolgt mit der Zero-up-crossing-Methode. Die zu erzeugende Welle sollte auf der lokalen Zielstelle so registriert werden, dass die höchste Welle und die benachbarten Wellen gewünschte Höhen und Perioden erreichen. Dafür werden zwei zusätzliche Terme in die Zielfunktion implementiert:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{s}\to\Re}{\text{Minimiere}} \quad f(\mathbf{s}) &= \left(\frac{H_i - H_z}{H_z}\right)^2 + \left(\frac{T_i - T_z}{T_z}\right)^2 + \left(\frac{t_i - t_z}{t_z}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{H_{i-1} - H_{z,i-1}}{H_{z,i-1}}\right)^2 + \left(\frac{H_{i+1} - H_{z,i+1}}{H_{z,i+1}}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

wobei der Index $i-1,\ i+1$ jeweils die relativen Maxima vor und nach dem absoluten Maximum i der Wellenregistrierung darstellen. Die Nebenbedingung für die nichtbrechende Welle lautet:

$$\mathrm{g}_1 = \frac{H_{max}}{g\,T_{max}^2} - \mathrm{K}_B \leq 0 \tag{6.5}$$

Die Konstante K_B wird wieder 0.021 gesetzt. Die zu erzeugende Welle haben die charakteristischen Größen in Tabelle 6.6.

Tab. 6.6: Charakteristische Größen der Zielwelle

Zeitbereich		
H_z	=	0.5 [m]
T_z	=	2.0 [s]
t_z	=	40.0 [s]
$H_{z,i-1}$	=	0.2 [m]
$H_{z,i+1}$	=	0.2 [m]
Ortsbereich		
x_z = 30.0 [m]		vom Wellenblatt

Die Zielfunktion Gl. (6.4) besagt, dass die maximale Wellenhöhe auf der Stelle $x = 30\,[\mathrm{m}]$ zwischen zwei kleinen Wellen mit bestimmter Wellenhöhe erzeugt werden soll. Für die beiden kleinen Wellen werden keine Perioden in der Zielfunktion vorgegeben. Die maximale und minimale Grenze der Parameter werden wie in Tabelle 6.3 angenommen. Die Berechnung wird unter den gleichen Bedingungen wie die vorherige Simulation durchgeführt. Der Verlauf der Fitnessbewertung im Optimierungsvorgang wird in Abb. 6.6 dargestellt.

Tab. 6.7: Bestimmte Parameter aus der Optimierung

Parameter	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5(konstant)
Ergebnis	0.3996	0.2359	3.4813	0.0259	0.5

Die gesuchten Parameter werden nach 60 Iterationen im Optimierungsvorgang erfolgreich berechnet. Die Tabelle 6.7 zeigen die gesuchten Parameter aus der Simulation. Die Analyse der Zeitregistrierung auf der Stelle $x = 30\,[\mathrm{m}]$ des fortschreitenden Wellenzuges erfolgt mit der Zero-up-crossing-Methode. Die

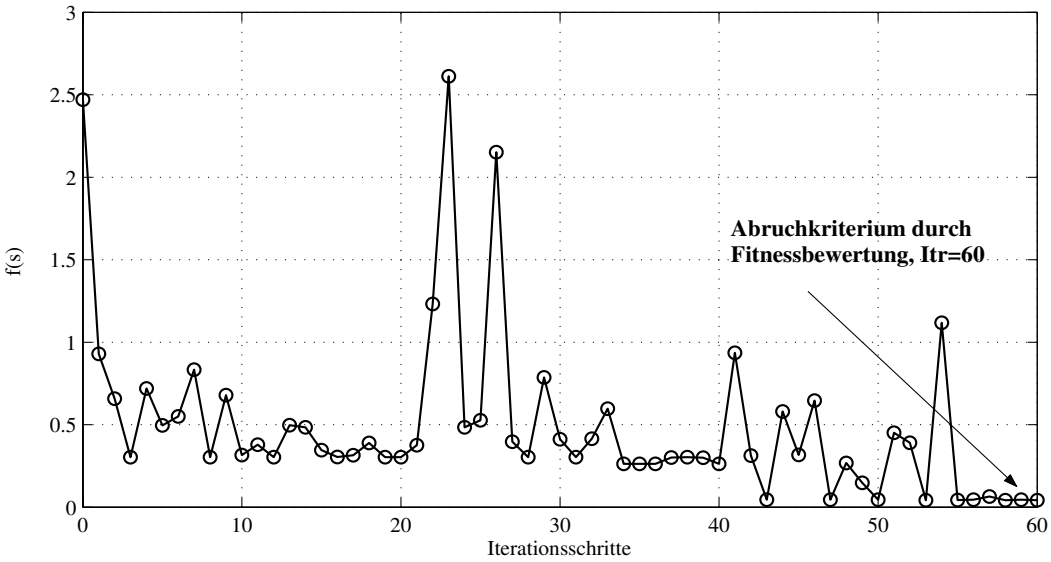

Abb. 6.6: Fitnessbewertung im Genetischen Algorithmus

räumliche Ausbreitung des Wellenzuges im numerischen Wellenkanal und die Oberflächenverformung im Zeitpunkt $t = 41$ [s] aus dem numerischen Verfahren wird in Abb. 6.7 dargestellt. Die Abbildung 6.8 zeigt die Analyse durch die Zero-up-crossing-Methode. Die detaillierten Ergebnisse aus der Wellenanalyse werden in Tabelle 6.8 dargestellt. Die Geschwindigkeits- und Druckverteilung der fortschreitenden Wellen im Zeitpunkt $t = 41.0$ [s] wird in Abb. 6.9 dargestellt. Die maximale Amplitude der Geschwindigkeit beträgt $(\sqrt{u^2 + v^2})_{max} = 1.0763$ [m/s] auf dem höchsten Wellenberg.

Tab. 6.8: Detaillierte Ergebnisse aus der Analyse ($x_z = 30$ [m])

$\mathbf{H_{ziel}}$	**0.2**	**0.5**	**0.2**
Wellenhöhe [m]	0.2234	0.4575	0.1914
Abweichung	+11.7 %	−8.5 %	+4.3
$\mathbf{T_{ziel}}$		**2.0**	
Periode [s]	2.4401	1.8608	2.0452
Abweichung		−6.9 %	
$\mathbf{t_{ziel}}$		**40.0**	
Zeitpunkt [s]	40.955	42.835	44.825
Abweichung		+7.1 %	

Als höchste Wellenhöhe wurden 0.4575 [m] und nicht 0.5 [m] erreicht, da die benachbarten Wellen ständig in ihrer Höhe durch die Zielfunktion gehalten werden müssen. Die relative Wellenhöhe aus der Registrierung beträgt $H/gT^2 = 0.013$, und sie entspricht der Stokes III Welle. Die relative Wassertiefe beträgt $d/gT^2 = 0.0442$.

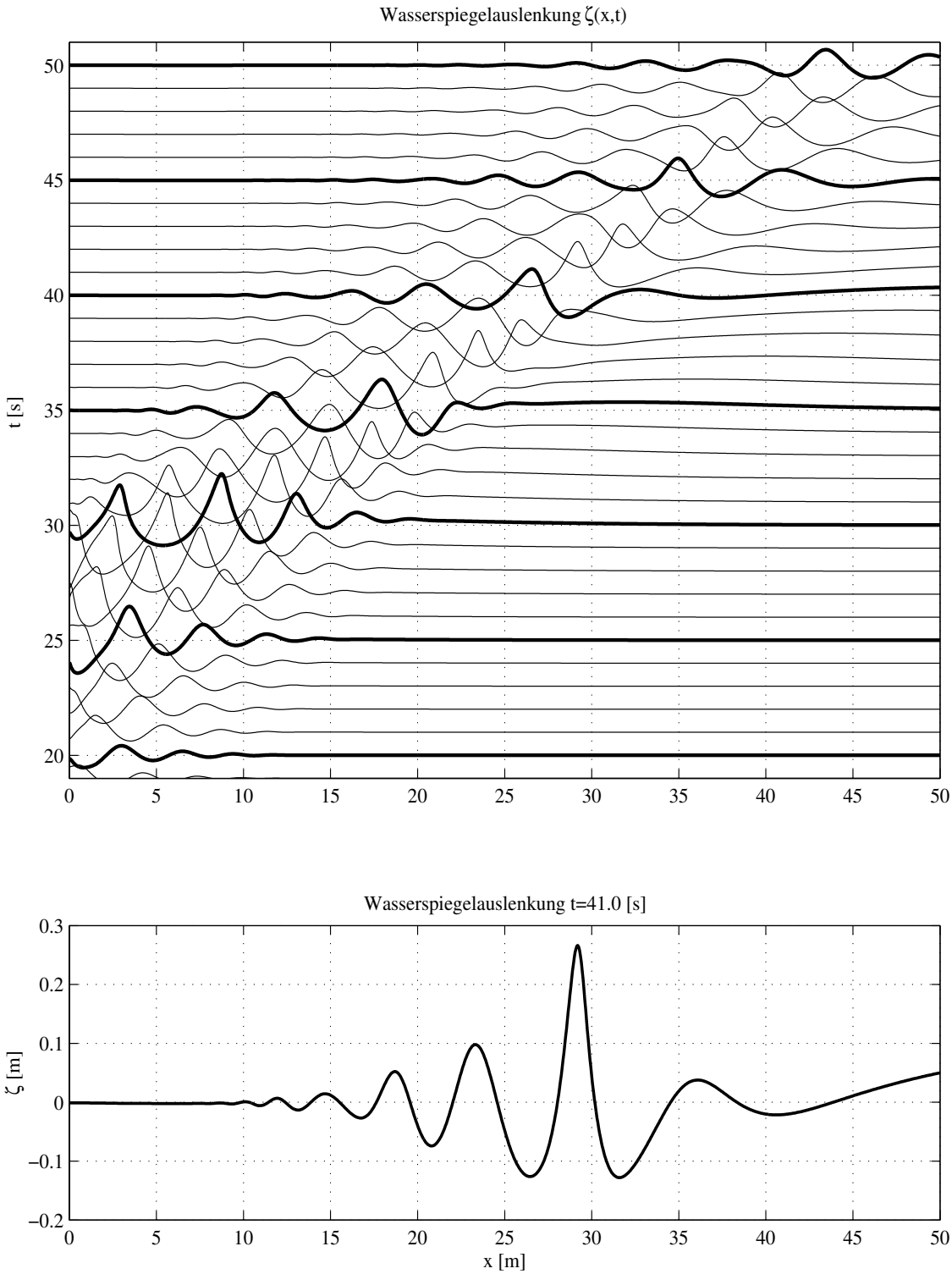

Abb. 6.7: Ausbreitung des Wellenzuges (oben) und Wasserspiegelauslenkung $t = 41$ [s] (unten)

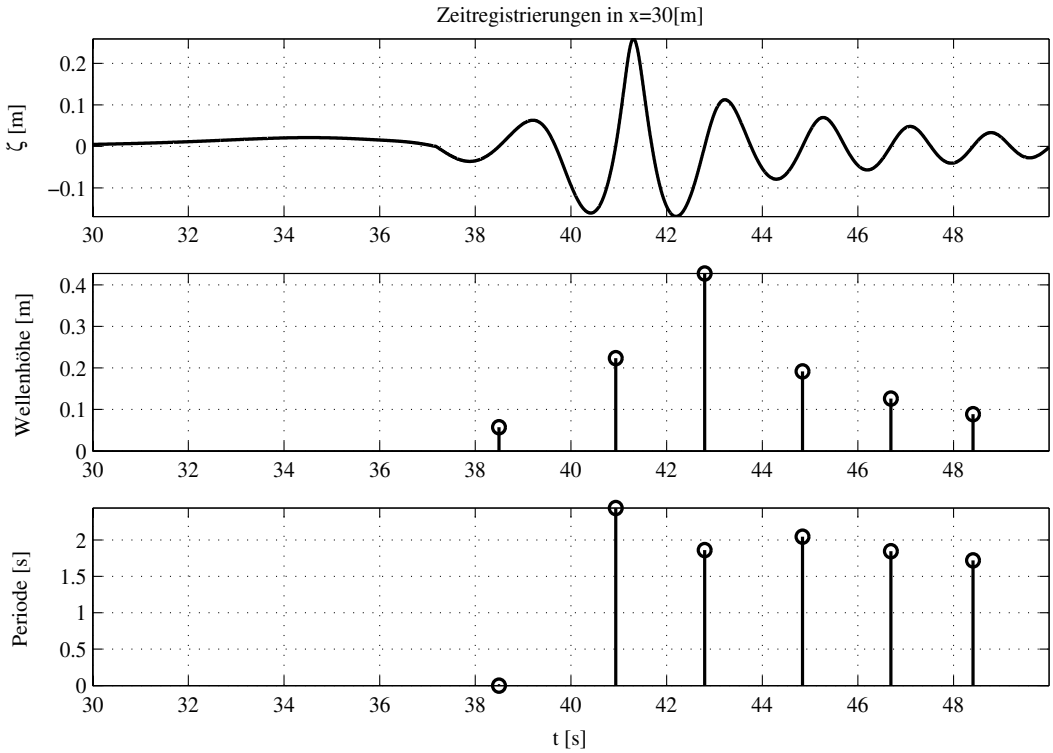

Abb. 6.8: Wellenanalyse durch Zero-up-crossing-Methode

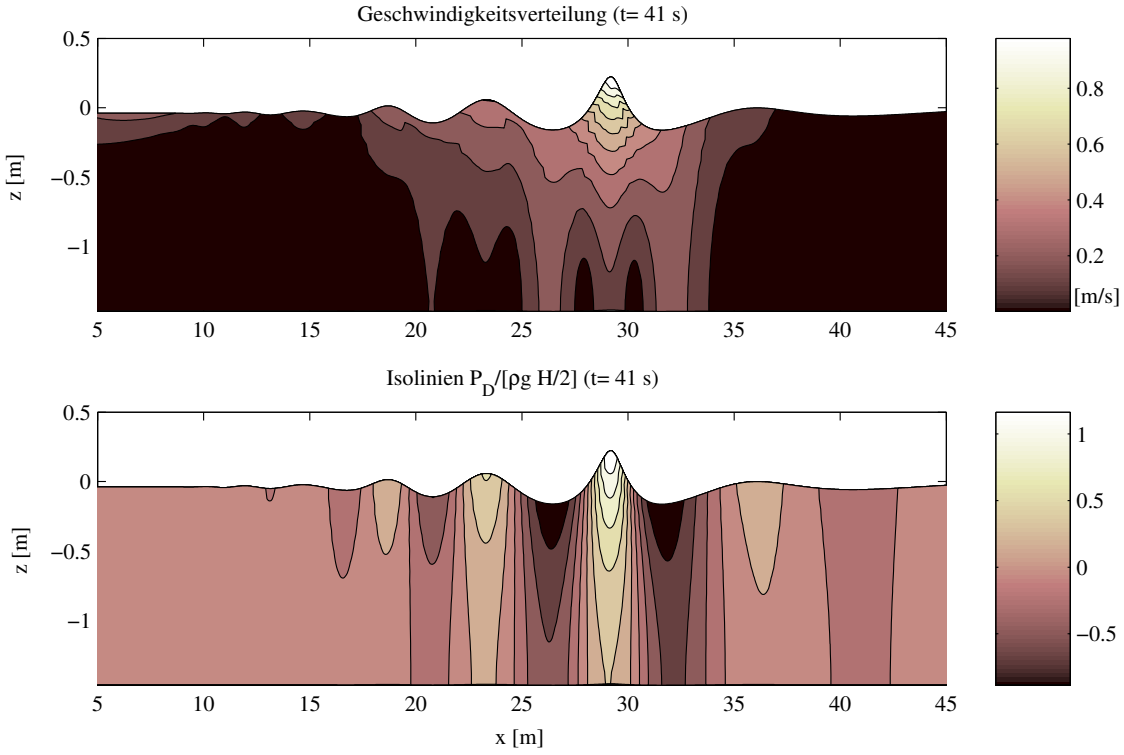

Abb. 6.9: Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 41$ [s]

6.4 Validierung

Bislang sind zwei Varianten der Zielfunktion zur Erzeugung deterministischer Entwurfswellen vorgestellt und numerisch simuliert. Nun werden die Ergebnisse aus dem numerischen Verfahren mit dem Versuch verglichen. Der Versuch wird im Wellenkanal des Instituts für Wasserbau der TU-Berlin durchgeführt.

6.4.1 Wellenzug ohne brechende Welle

Zunächst wird ein Wellenzug ohne brechende Welle erzeugt. Wegen der Formulierung mit dem beweglichen Gitter kann während der Berechnung nicht überprüft werden, ob die Wellen brechen oder nicht. Wenn eine brechende Welle während der Berechnung vorkommt, wird die Energiedissipation dermaßen größer, dass der fortschreitende Wellenzug seine Energie innerhalb der Berechnung langsam verliert, was zur Verletzung der Kontinuitätsgleichung führt. Eine "plunging-Brechung" wird unter dem beweglichen Gitter ausgeschlossen, da dieses Brechungsphänomen damit nicht erfasst bzw. berechnet werden kann. Deshalb wird angenommen, dass die Brechung einen Energieverlust bewirkt. Lediglich gilt die Nebenbedingung auf genau der Stelle, wo die höchste Welle auftritt, d.h. eine brechende Welle kann vor oder hinter dieser Stelle auftreten. Das kann durch einen Versuch festgestellt werden.

Eine Entwurfswelle mit der maximalen Wellenhöhe 0.6 [m] und dazugehöriger Periode 2.0 [s] auf der Stelle $x_z = 20.0\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt 35.0 [s] nach Beginn der Simulation wird mit dem numerischen Verfahren erzeugt. Dieser Wellenzug breitet sich beim Versuch ohne Brechung aus. Die charakteristischen Größen der zu erzeugenden Welle sind in Tabelle 6.9 dargestellt.

Tab. 6.9: Charakteristische Größen der Zielwelle

Zeitbereich		
H_z	=	0.6 [m]
T_z	=	2.0 [s]
t_z	=	35.0 [s]
Ortsbereich		
$x_z = 20.0\,[\mathrm{m}]$		vom Wellenblatt

Die Zielfunktion und die Nebenbedingung werden ebenfalls wie in Gl. (6.2) und (6.3) definiert. Die maximalen und minimalen Parameter für das Steuersignal werden wie in Tabelle 6.10 gegeben. Die maximalen Werte der Parameter können wegen der Leistungseinschränkung des Wellenblattes sowie Wellenkanals nicht beliebig erweitert werden. Insbesondere ist der Parameter P_1 von der maximalen Auslenkung des Wellenblattes abhängig. Der maximale Wert $P_1 = 0.5$ entspricht der maximalen Auslenkung $+/-\,0.4\,[\mathrm{m}]$ des Wellenblattes. Die Initialpopulation für jeden Parameter im Genetischen Algorithmus werden aus dem Bereich in Tabelle 6.10 ausgewählt. Die Simulation wird nach 73 Iterationen durch die Fitnessbewertung

Tab. 6.10: Maximum und Minimum der Parameter

0.1	$\leq$	P_1	$\leq$	0.5
0.12	$\leq$	P_2	$\leq$	0.4
1.0	$\leq$	P_3	$\leq$	5.0
0.0	$\leq$	P_4	$\leq$	0.08

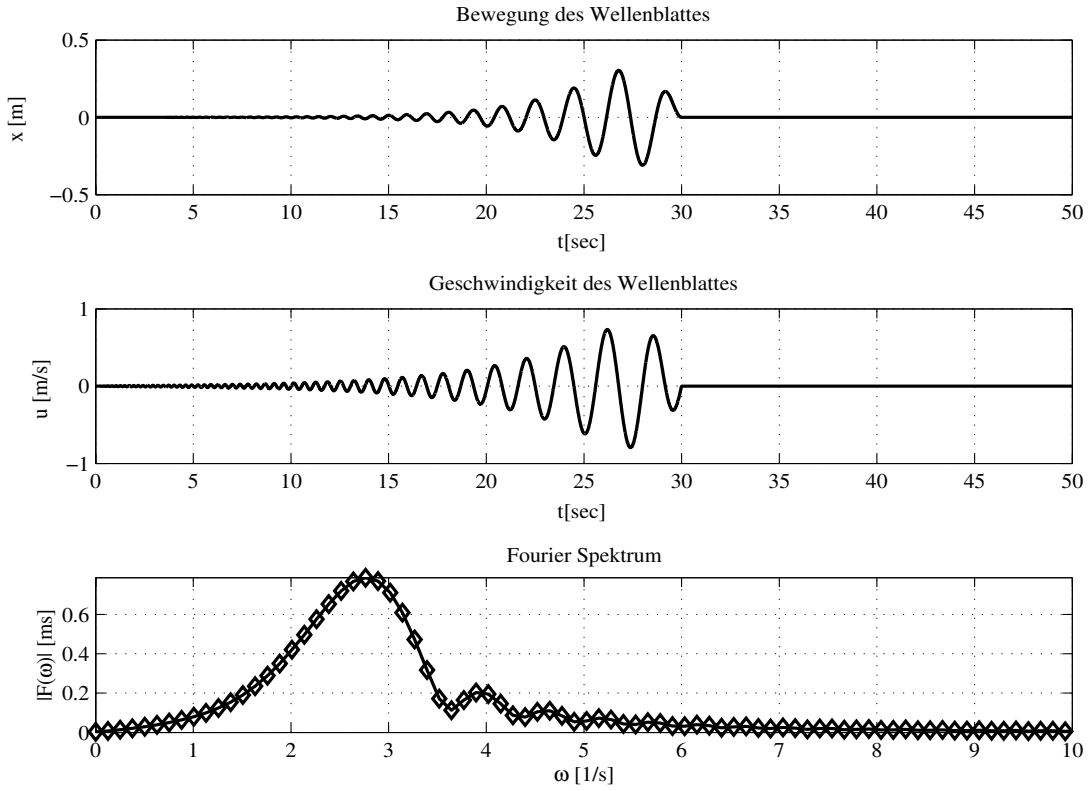

Abb. 6.10: Wellenblattbewegung, Geschwindigkeit und Fourier-Spektrum

erfolgreich beendet. Die Berechnung erfolgt auf dem genannten Rechner, und die Berechnungszeit beträgt etwa 6 CPU-Stunden pro Iteration des Genetischen Algorithmus. Nach jeder Iteration stehen Ergebnisse der Wellenanalyse durch die Zero-down-crossing-Methode als Datei zur Verfügung, um den schnellen Zugriff bei Divergenz im numerischen Wellenkanal zu gewährleisten. Die durch das numerische Verfahren berechneten Parameter werden in Tabelle 6.11 dargestellt. Um diese Ergebnisse mit der Messung zu vergleichen, werden die Wellenblattbewegung, deren Geschwindigkeit und das dazugehörige Fourier-Spektrum in Abb. 6.10 für den Versuch dargestellt.

Tab. 6.11: Ergebnisse aus der Optimierung

Parameter	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5(konstant)
Ergebnis	0.4746	0.2818	2.3616	0.0721	0.5

Die Bewegung des Wellenblattes wird als Eingabedatei zur Steuerung der Wellenmaschine verwendet. Die Wasserspiegelauslenkung im Wellenkanal wird auf drei verschiedenen Stellen gemessen und mit den Berechnungen verglichen. In Abb. 6.11 wird die Wasserspiegelauslenkung auf der Stelle $x = 20\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt dargestellt. Die gemessene Wellenhöhe beträgt $0.5965\,[\mathrm{m}]$, und die berechnete Wellenhöhe ist $0.6149\,[\mathrm{m}]$. Die Abweichung der maximalen Wellenhöhen beträgt etwa $3\,\%$, wie es sich aus dem Abbruchkriterium in der Fitnessbewertung ergab. Die weiteren Berechnungsergebnisse auf der Stelle $x = 30,$ und $x = 40\,[\mathrm{m}]$ sind jeweils in Abb. 6.12 und in Abb. 6.13 dargestellt. Die Abbildung 6.14 zeigt die Fourier-Analyse der Zeitregistrierung an den Stellen $x = 20,\ 30,\ 40\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt. Die kurzen Wellen mit höheren Frequenzen werden bei den numerischen Lösungen mit der Entfernung vom Wel-

lenblatt schneller gedämpft als im Versuch, wobei der geringere Anteil der kurzen Wellen auf der Stelle $x = 40\,[\mathrm{m}]$ als Auswirkung der stärkeren Energiedissipation bei der Berechnung interpretiert werden kann. Die Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 34\,[\mathrm{s}]$ wird in Abb. 6.15 dargestellt. In Tabelle 6.12 sind die detaillierten Ergebnisse aus der Berechnung und den Messungen gegenübergestellt.

Die Berechnungsergebnisse für $x = 20\,[\mathrm{m}]$ und $x = 30\,[\mathrm{m}]$ stimmen mit den Messungen gut überein, während die Abweichung in $x = 40\,[\mathrm{m}]$ deutlich bemerkbar ist. Die größere Abweichung von den Ergebnissen mit steigender Entfernung vom Wellenblatt kann man auf die Energiedissipation der Zeitsimulation zurückzuführen. Die Erhaltungsgleichungen verlangen, dass die Energie im fortschreitenden Wellenzug beibehalten werden muss. Wegen der iterativen Lösungsverfahren im numerischen Wellenkanal wird die Wellenenergie mit erhöhter Entfernung mehr als im Versuch verloren gehen. Trotz der Abweichung der Wellenhöhen stimmt die Wellenform aus den Berechnungen mit den Messungen gut überein. Die erzeugte Entwurfswelle auf der an gezielten Position aus dem numerischen Verfahren ist hervorragend gegenüber den Messungen wiedergegeben. Die Aussagekraft und die Genauigkeit der numerischen Verfahren ist damit bestätigt, solange der Wellenzug während seiner Ausbreitung nicht bricht.

Bislang wird die Optimierung zur Erzeugung von Entwurfsseegängen ohne brechende Wellen angewandt. Wenn eine Tiefwasserwelle durch Wechselwirkung mehrerer Wellen miteinander und durch Strömung immer steiler wird, entsteht die "*Plunging*"-Brechung. Dieses Phänomen kann auch unter Einhaltung besonderer Bedingung wie natürlicher Seegang im Versuch generiert werden (Tulin und Waseda, 1999). Die "*Plunging*"-Brechung lässt sich bei der Bestimmung freier Oberflächen mit dem bewegten Gitter nicht berechnen. Deshalb beschränken wir uns auf eine Simulation der Wellenentwicklung ohne "*Plunging*"-Brechung im numerischen Wellenkanal. Unter dieser Annahme wird die Optimierung eines Wellenzuges mit der brechenden Welle durchgeführt, und die Berechnungs- und Messergebnisse werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

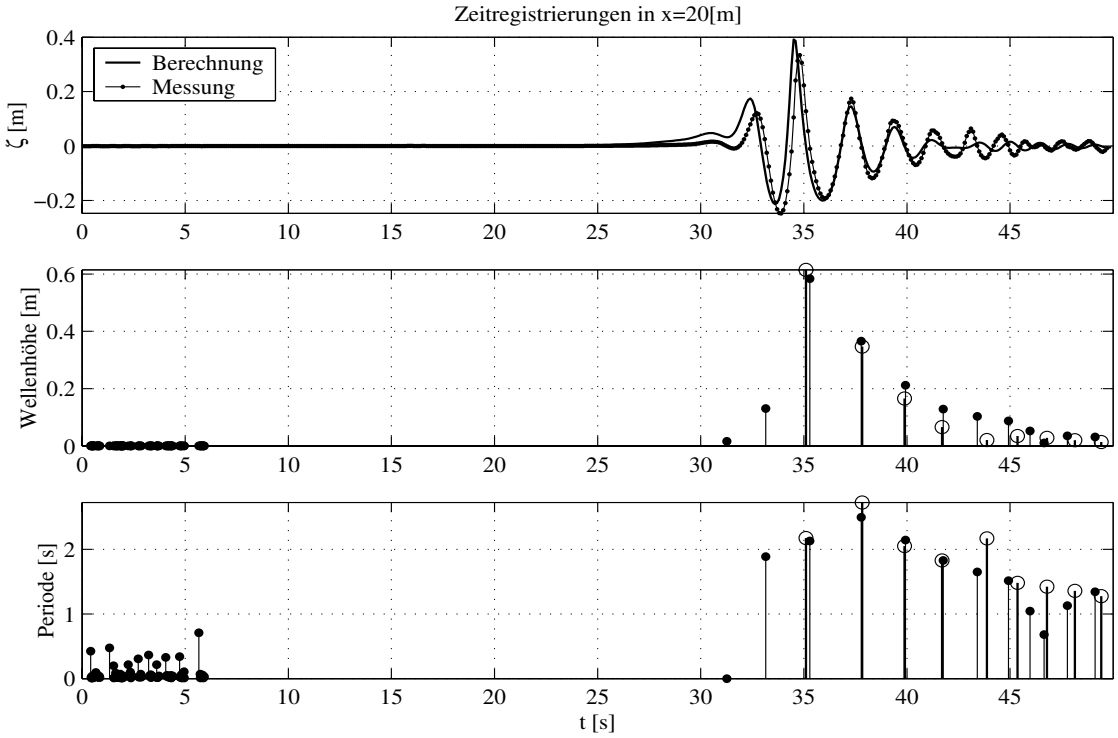

Abb. 6.11: Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 20\,[\mathrm{m}]$

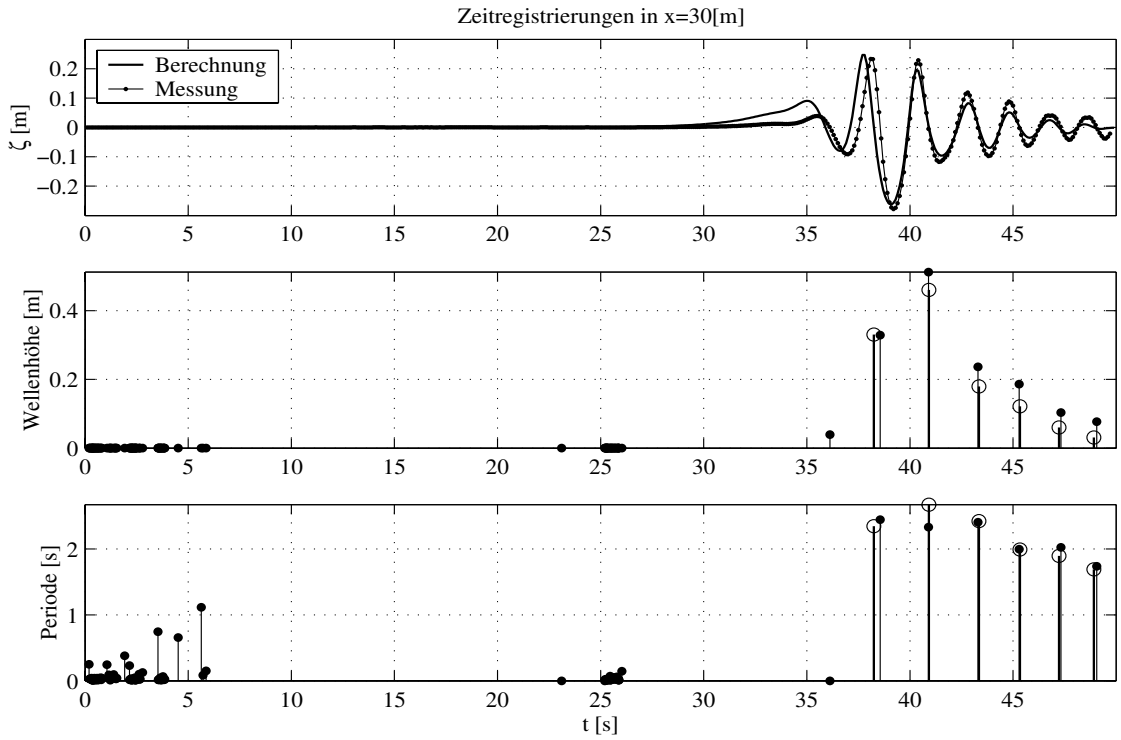

Abb. 6.12: Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 30\,[\mathrm{m}]$

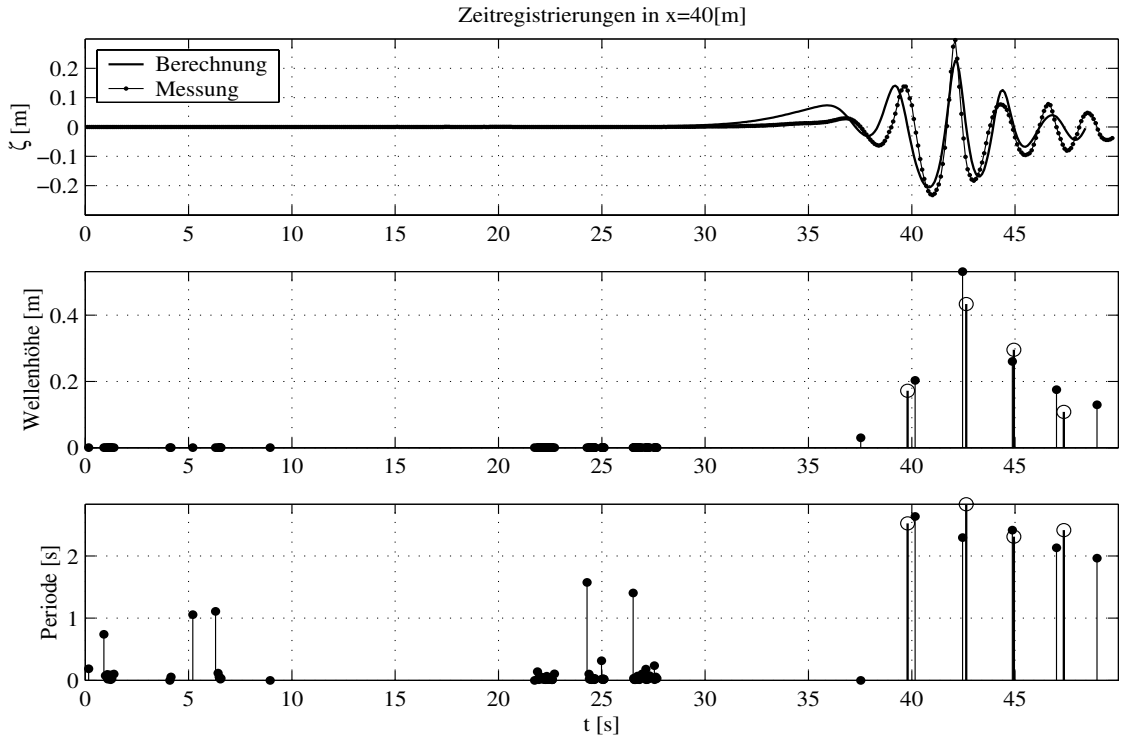

Abb. 6.13: Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 40\,[\mathrm{m}]$

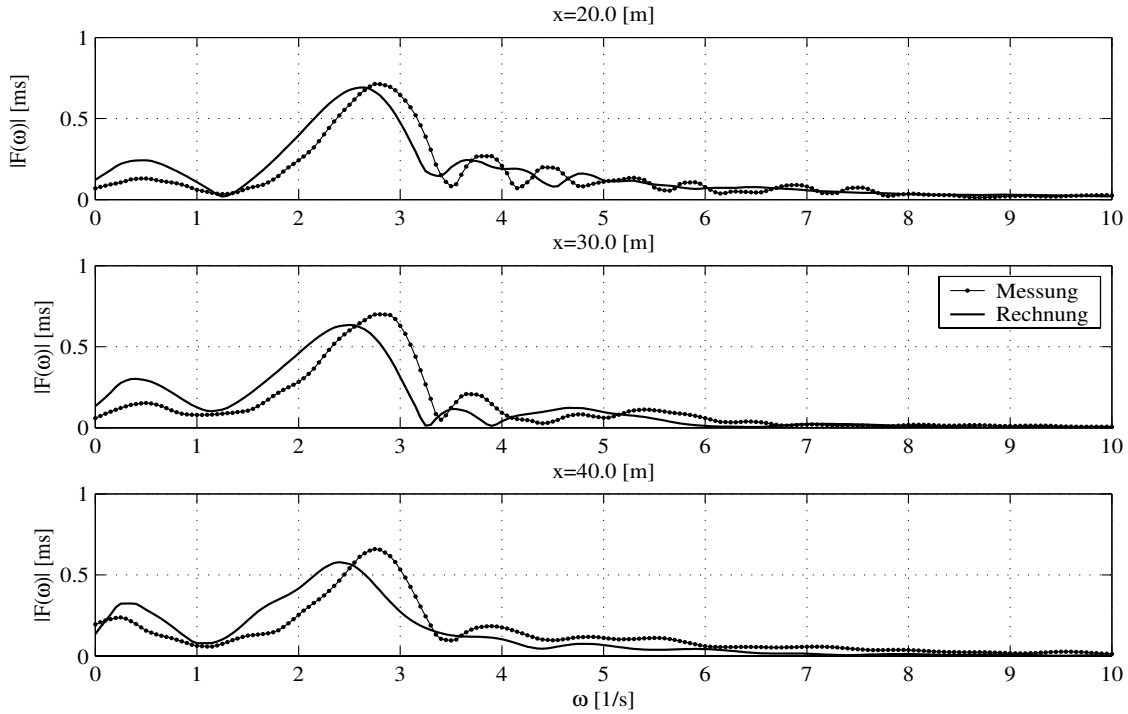

Abb. 6.14: Fourier-Analyse der Wasserspiegelauslenkung in $x = 20,\ 30,\ 40\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt

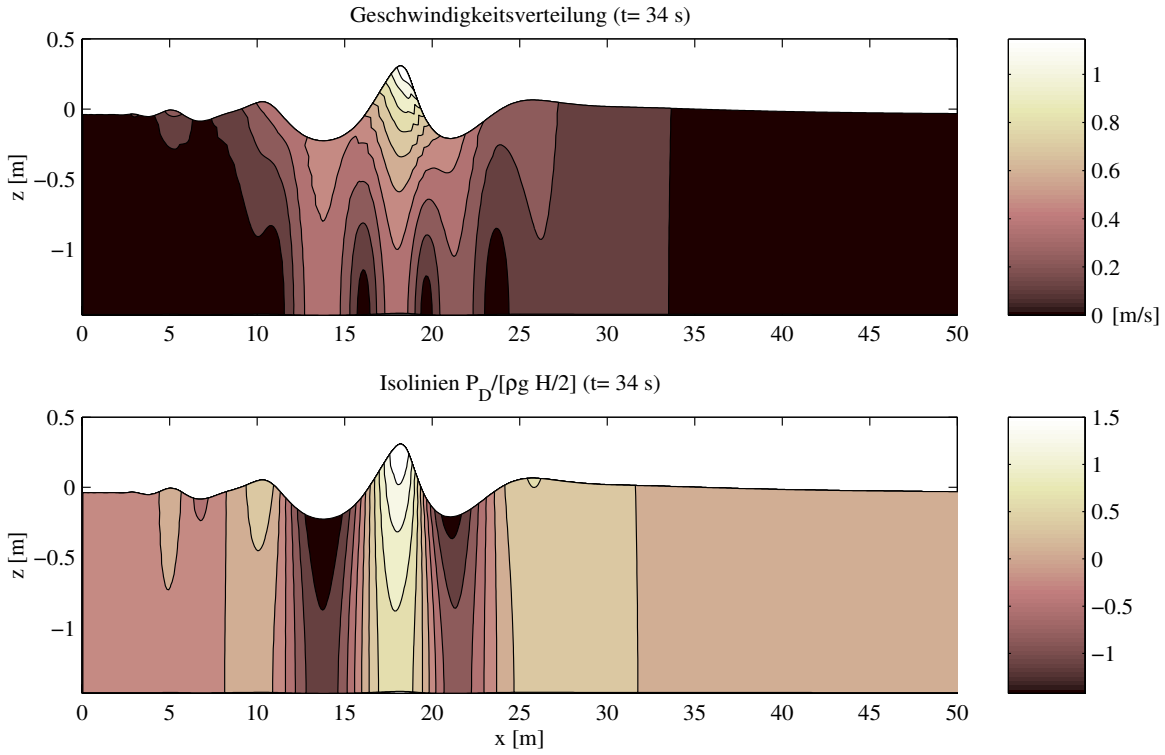

Abb. 6.15: Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 34\,[\mathrm{s}]$

Tab. 6.12: Detaillierte Ergebnisse der Wellenanalyse aus Berechnungen und Messungen

Wellenhöhe in x = 20 [m]	$\mathbf{H_z = 0.6}$					
Berechnung [m]	0.6149	0.3470	0.1655	0.0656	0.0204	0.0343
Messung [m]	0.5965	0.3555	0.2064	0.1321	0.1084	0.0889
Abweichung	3 %					
Periode in x = 20 [m]	$\mathbf{T_z = 0.2}$					
Berechnung [s]	2.1749	2.7274	2.0514	1.8291	2.1714	1.4835
Messung [s]	2.1382	2.4867	2.1417	1.8485	1.6533	1.5025
Abweichung	1.7 %					
Wellenhöhe in x = 30 [m]		$\mathbf{H_{max}}$				
Berechnung [m]	0.3307	0.4605	0.1798	0.1218	0.0602	0.0310
Messung [m]	0.3321	0.5002	0.2366	0.1902	0.1043	0.0821
Abweichung		7.9 %				
Periode in x = 30 [m]		$\mathbf{T_{max}}$				
Berechnung [s]	2.3454	2.6715	2.4202	1.9896	1.8950	1.6896
Messung [s]	2.4076	2.3721	2.4007	1.9891	2.0344	1.6800
Abweichung		12.6 %				
Wellenhöhe in x = 40 [m]		$\mathbf{H_{max}}$				
Berechnung [m]	0.1717	0.4335	0.2956	0.1079		
Messung [m]	0.1663	0.4994	0.4412	0.1687		
Abweichung		13.2 %				
Periode in x = 40 [m]		$\mathbf{T_{max}}$				
Berechnung [s]	2.5244	2.8332	2.3109	2.4158		
Messung [s]	2.7758	2.4884	2.1645	2.4181		
Abweichung		13.9 %				

6.4.2 Wellenzug mit brechender Welle

Da die beweglichen Gitter für die Simulation mit einer sog. "*Plunging*"-Brechung in einem Wellenzug ausgeschlossen sind, wird es angenommen, dass nur eine "*Spilling*"-Brechung auftreten kann. Ein solches Brechungsphänomen kann im Modellversuch so erzeugt werden, dass eine Welle zwischen konvergenten Wänden läuft und dadurch immer steiler wird. Das numerische Verfahren garantiert, dass die Berechnung trotz der brechenden Welle eine brauchbare Lösung liefert. Die Verfahren auf Basis der Potentialtheorie versagen, wenn die brechende Welle auftritt. Die Optimierung erzeugt bei der Berechnung gezielt ein Signal, das die Zielwelle nur auf der gegebenen Stelle generiert. Das führt zu ungenauen Lösungen vor und hinter der Zielposition.

Die Nebenbedingung für das Brechkriterium wird bei dem Optimierungsvorgang nicht in Betracht gezogen. Die höchste Welle $H_z = 0.55\,[\mathrm{m}]$ mit der Periode $T_z = 3.0\,[\mathrm{s}]$ sollte $t_z = 40\,[\mathrm{s}]$ nach Beginn der Simulation auf der Stelle $x_z = 40\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt entstehen. In Tabelle 6.13 werden die Zielgrößen zur Simulation zusammengefasst. Die Zielposition wird relativ weit vom Wellenblatt entfernt gegeben, damit der Wellenzug während der Ausbreitung brechen kann. Die Zielfunktion zum Optimierungsprozess kann wie folgt geschrieben werden:

$$\underset{\mathbf{s}\to\Re}{\text{Minimiere}} \quad f(\mathbf{s}) = \left(\frac{H_{max} - H_z}{H_z}\right)^2 + \left(\frac{T_{max} - T_z}{T_z}\right)^2 + \left(\frac{t_{max} - t_z}{t_z}\right)^2 \tag{6.6}$$

Die maximalen und minimalen Parameter für das Steuersignal werden als Nebenbedingungen in Tabelle 6.14 gegeben. Die Simulation wird nach 84 Iterationen beendet. Die Berechnung erfolgt auf dem genannten Rechner, und die Berechnungszeit beträgt etwa 6 CPU-Stunden pro Iteration des Genetischen Algorithmus. Die Parameter aus dem Optimierungsvorgang werden in Tabelle 6.15 dargestellt. Mit dem Parameter wird ein Steuersignal für die Wellenblattbewegung wie in Abb. 6.16 berechnet. Die Geschwindigkeit des Wellenblattes in Abb. 6.16 dient lediglich als Eingabedatei zur Berechnung. Die anderen Bedingungen sind mit den vorherigen Simulationen identisch.

Tab. 6.13: Charakteristische Größen der Zielwelle

Zeitbereich		
H_z	=	0.55 [m]
T_z	=	3.0 [s]
t_z	=	40.0 [s]
Ortsbereich		
$x_z = 40.0\,[\mathrm{m}]$		vom Wellenblatt

Tab. 6.14: Maximum und Minimum der Parameter

0.7	$\leq$	P_1	$\leq$	1.2
0.18	$\leq$	P_2	$\leq$	0.3
1.8	$\leq$	P_3	$\leq$	2.1
0.0	$\leq$	P_4	$\leq$	0.08
P_5 (konstant)		=		0.15

Tab. 6.15: Ergebnisse aus der Optimierung

Parameter	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5(konstant)
Ergebnis	1.0959	0.2569	1.8979	0.0749	0.15

Die Analyse durch die Zero-down-crossing-Methode auf der Zielstelle $x_z = 40\,[\mathrm{m}]$ wird mit der Wellenhöhe und der Periode in Abb. 6.17 dargestellt. Der erzeugte Wellenzug bricht gemäß Beobachtung beim Versuch sowohl auf der Stelle $x = 15\,[\mathrm{m}]$ als auch $x = 25\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt. Die Übereinstimmung zwischen beiden Ergebnissen auf der Registrierungsposition im Wellenkanal scheint auf den ersten Blick nicht besonders gut. Wenn die Registrierung auf der Zielposition $x = 40\,[\mathrm{m}]$ wie in Tabelle 6.16 analysiert wird, zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnungen und Messungen. Das liegt daran, dass die Zielfunktion für die erzielten charakteristischen Größen ($H_z,\ T_z,\ t_z$) auf der vorgegebenen Stelle gültig ist.

Die Wellenverformung bei den anderen Stellen im numerischen Wellenkanal ist im Laufe des Optimierungsvorgangs nicht berücksichtigt, wobei die Erstellung einer Zielfunktion eine große Rolle für das Ausbreitungsverhalten des Wellenzuges spielt. Die Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 40\,[\mathrm{s}]$ sind in Abb. 6.18 dargestellt. Die räumliche Ausbreitung zum Zeitpunkt $t = 40\,[\mathrm{s}]$ fällt genau auf den Konzentrationspunkt des fortschreitenden Wellenzuges. Keine anderen Zeitpunkte bei der Berechnung liefern die höchsten Welle im numerischen Wellenkanal.

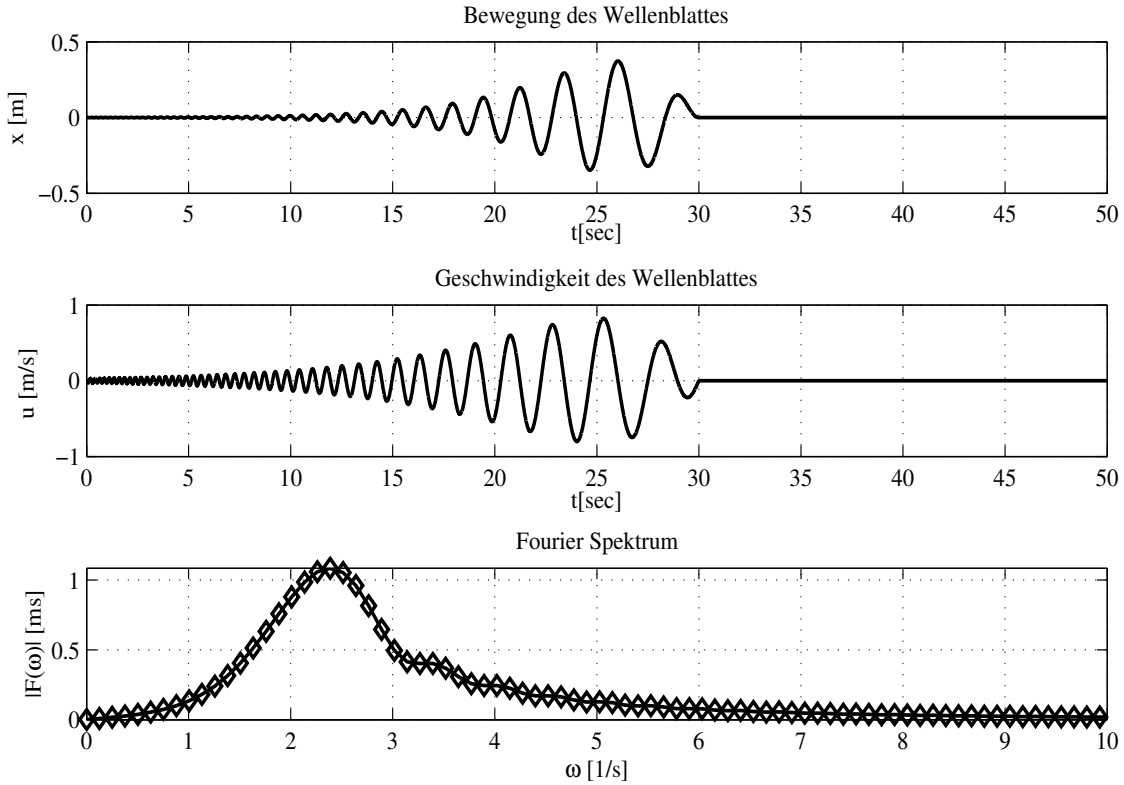

Abb. 6.16: Wellenblattbewegung, Geschwindigkeit und Fourier-Spektrum

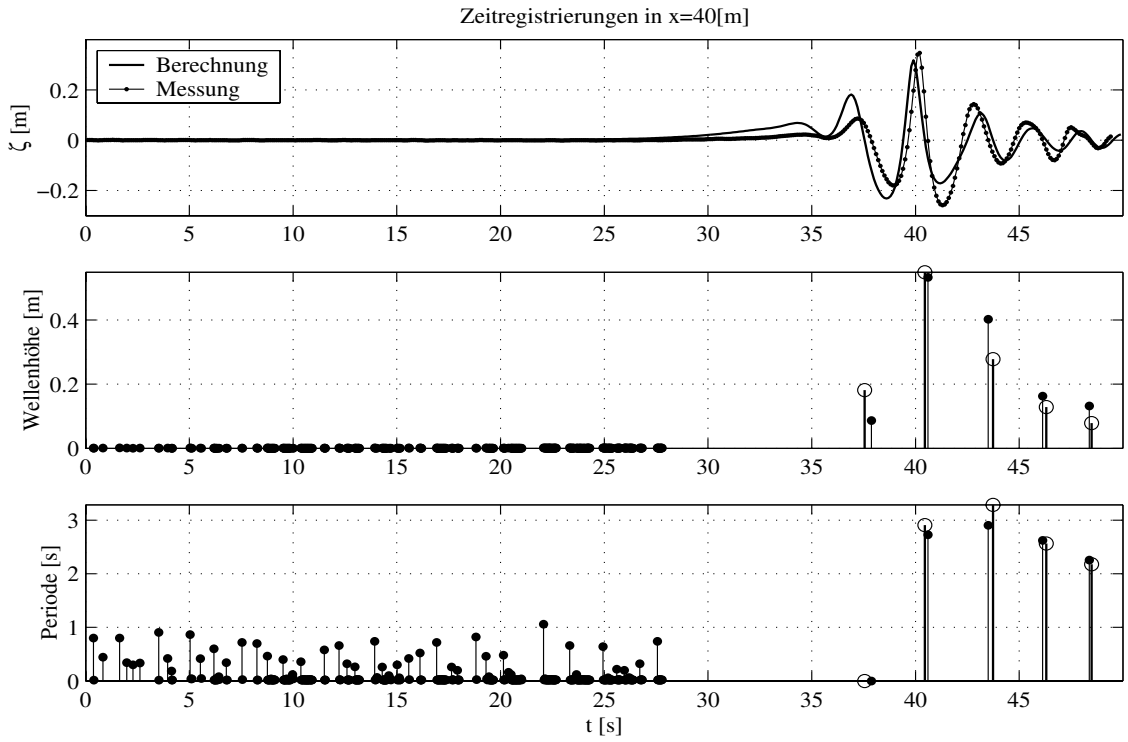

Abb. 6.17: Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 40\,[\mathrm{m}]$

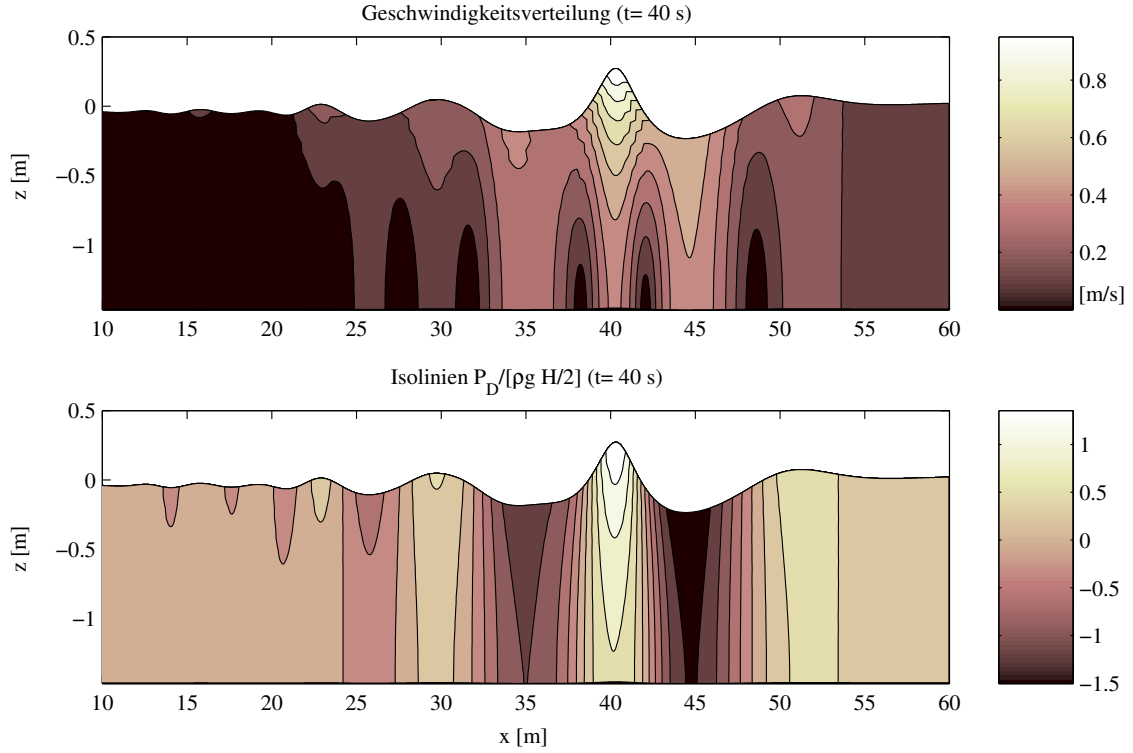

Abb. 6.18: Geschwindigkeits- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 40\,[\mathrm{s}]$

Tab. 6.16: Detaillierte Ergebnisse der Wellenanalyse aus Berechnungen und Messungen ($x = 40\,[\mathrm{m}]$)

	Wellenhöhe [m]	Periode [s]	Zeitpunkt [s]
Zielwerte	0.55	3.0	40.0
Berechnungsergebnis	0.5493	2.9069	40.4550
Messung	0.5330	2.7282	41.1000
Abweichung (Ziel/Berech.)	-2.9 %	-6.1 %	+1.5 %

6.5 Erzeugung und Validation der New Year Wave

6.5.1 Optimierung mit einem Maßstab von 1:64

Haver und Andersen (2000) berichten schwere Schäden von der Jacket-Plattform "Draupner" durch gigantische Welle. Diese Welle hat eine maximale Wellenhöhe $H_{max} = 25.63\,[\mathrm{m}]$ (davon $\zeta_c = 18.5\,[\mathrm{m}]$) und eine Periode von $T_{max} = 13.3295\,[\mathrm{s}]$ in der Wassertiefe von $d = 70\,[\mathrm{m}]$. Die Wellenregistrierung auf dem Zeitbereich wird in Abb. 6.19 dargestellt. Um diese Welle numerisch zu erzeugen und einen Versuch durchführen zu können, wird ein Maßstab von 1:64 genommen. Dabei werden die maximale Wellenhöhe $H_z = 0.4\,[\mathrm{m}]$ und die entsprechende Periode von $T_z = 1.67\,[\mathrm{s}]$ für die Zielfunktion eingesetzt. Als lokale Zielstelle wird der Pegel im numerischen Wellenkanal 25.0 [m] vom Wellenblatt gemessen. Die Welle soll $t_z = 42\,[\mathrm{s}]$ nach Beginn der Simulation erzeugt werden. Die Zielfunktion wird folgendermaßen formuliert.

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{s}\to\Re}{\text{Minimiere}} \quad f(\mathbf{s}) &= \left(\frac{H_i - H_z}{H_z}\right)^2 + \left(\frac{T_i - T_z}{T_z}\right)^2 + \left(\frac{t_i - t_z}{t_z}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{H_{i-1} - H_{z,i-1}}{H_{z,i-1}}\right)^2 + \left(\frac{H_{i+1} - H_{z,i+1}}{H_{z,i+1}}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.7}$$

wobei der Index $i-1,\ i+1$ jeweils die relativen Maxima vor und hinter dem absoluten Maximum i der Wellenregistrierung darstellen.

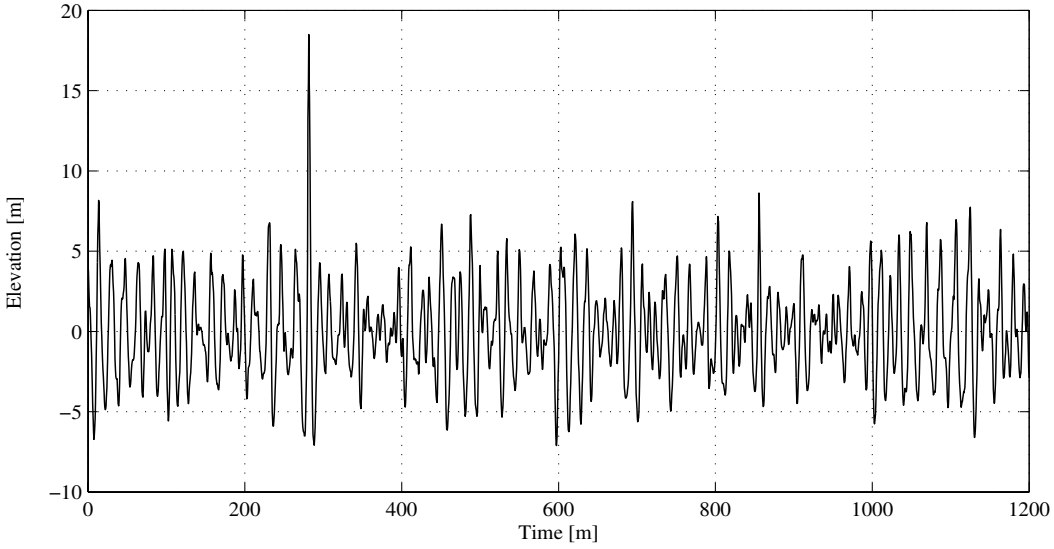

Abb. 6.19: New Year Wave am 1.1.1995 in der Nordsee (Haver und Andersen (2000))

Tab. 6.17: Charakteristische Größen der Zielwelle

Zeitbereich		
H_z	=	0.4 [m]
T_z	=	1.67 [s]
t_z	=	42.0 [s]
$H_{z,i-1}$	=	0.5 H_z [m]
$H_{z,i+1}$	=	0.5 H_z [m]
Ortsbereich		
x_z = 25.0 [m]		vom Wellenblatt

Die zu erzeugende Welle hat die charakteristischen Größen aus Tabelle 6.17. Maximum und Minimum der Parameter für das Steuersignal werden wie in Tabelle 6.18 gegeben. Keine weiteren Nebenbedingungen werden beim Optimierungsvorgang berücksichtigt. Die Simulation wird nach 50 Iterationen durch die Fitnessbewertung mit einem Fitnesswert von 0.02342 beendet. wird in Abb. 6.20 dargestellt. Die

Tab. 6.18: Maximum und Minimum der Parameter

0.2	$\leq$	P_1	$\leq$	0.5
0.05	$\leq$	P_2	$\leq$	0.4
1.5	$\leq$	P_3	$\leq$	4.0
0.0	$\leq$	P_4	$\leq$	0.07
		P_5 (konstant)	=	0.15

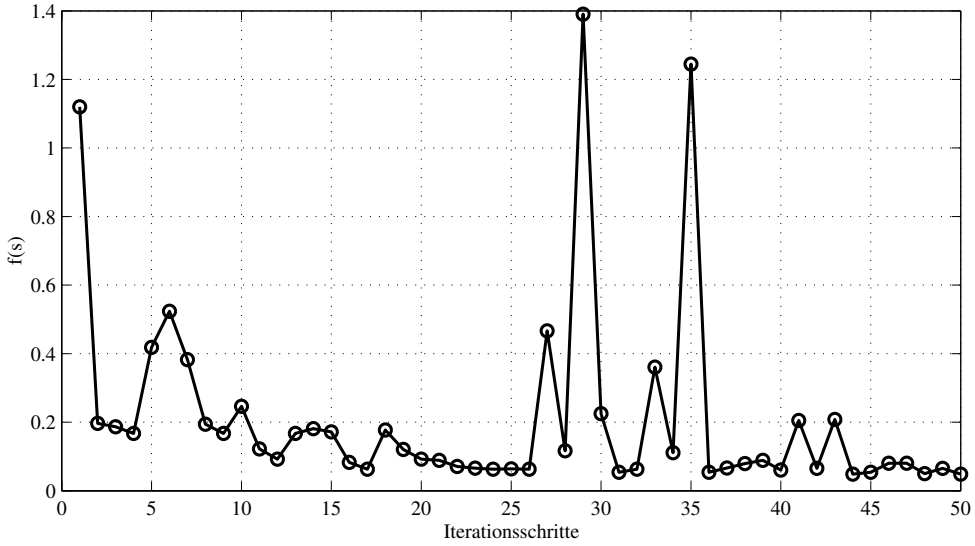

Abb. 6.20: Fitnessbewertung im Genetischen Algorithmus

Tab. 6.19: Gesuchte Parameter durch Optimierung

Parameter	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5(konstant)
Ergebnis	0.25503	0.27512	3.50042	0.05250	0.15

errechneten Parameter zur Erzeugung des Wellensignals sind in Tabelle 6.19 dargestellt.

Um die numerischen Ergebnisse mit der Messung zu vergleichen, werden die Wellenblattbewegung, deren Geschwindigkeit und das dazugehörige Fourier-Spektrum in Abb. 6.21 für den Versuch mit Hilfe der berechneten Parameter $P_{1,\cdots,4}$ berechnet. Die Bewegung des Wellenblattes wird als Eingabedatei zur Steuerung der Wellenmaschine verwendet. Die Wasserspiegelauslenkung im Wellenkanal wird auf der Stelle $x = 25.0\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt gemessen und mit den Berechnungen verglichen. Die Registrierung auf der genannten Stelle wird zusätzlich durch die "Zero-up-crossing"-Methode im Detail analysiert. In Abb. 6.22 wird die Wasserspiegelauslenkung auf der Stelle $x = 25.0\,[\mathrm{m}]$ vom Wellenblatt dargestellt.

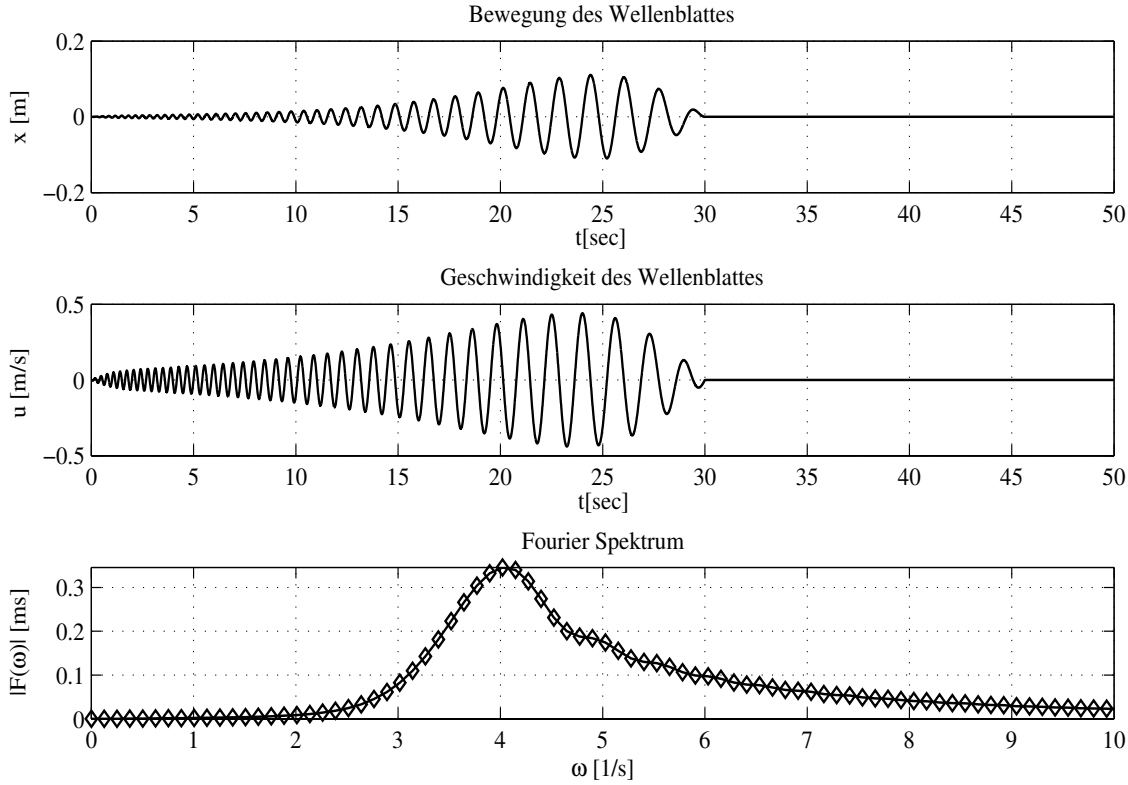

Abb. 6.21: Wellenblattbewegung, Geschwindigkeit und Fourier-Spektrum

Die gemessene Wellenhöhe auf der lokalen Zielposition ($x = 25\,[\mathrm{m}]$) in Abb. 6.22 beträgt $H = 0.4015\,[\mathrm{m}]$, und die berechnete Wellenhöhe ist $H = 0.3645\,[\mathrm{m}]$. Die gemessene Periode beträgt jeweils $T = 1.5561\,[\mathrm{s}]$ (Messung) und $T = 1.6257\,[\mathrm{s}]$ (Berechnung). Die Abweichung der maximalen Wellenhöhen auf der Zielstelle beträgt etwa 9.2 %, während die Abweichung der Periode etwa bei 4 % bleibt. In Abbildung 6.24 wird ein Vergleich zwischen der Berechnung und der New Year Wave dargestellt. Der gemessene Wert auf der Stelle $x = 25.0\,[\mathrm{m}]$ im numerischen Wellenkanal wird mit einem entsprechenden Maßstab 1:64

angewendet. Die Höhe der berechneten Welle beträgt $H = 24.328\,[\mathrm{m}]$ (davon $\zeta_c = 15.332\,[\mathrm{m}]$), und diese Welle hat eine Periode $T = 13.0\,[\mathrm{s}]$.

Bei hydrodynamischen Untersuchungen spielen die Geschwindigkeit und Beschleunigung unter Wasseroberflächen genauso eine wichtige Rolle wie der höchste Wellenberg. In Abb. 6.23 wird die Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 40.0\,[\mathrm{s}]$ dargestellt. Die maximale Geschwindigkeit liegt an der Wellenfront des höchsten Wellenberges und beträgt $|\vec{v}|$=0.9084 [m/s]. Die höchste Beschleunigung ist direkt unter dem höchsten Wellenberg und hat den Wert $|\vec{a}|$=3.7820 [m/s^2]. Die Beschleunigung wird aus zwei Zeitschritten zwischen $t = 39.75\,[\mathrm{s}]$ und $t = 40.0\,[\mathrm{s}]$ berechnet. Die Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung stehen in jedem Zeitschritt im numerischen Verfahren zur Verfügung, womit die gewünschten Größen wie die Beschleunigung und der Druck im Zeitbereich problemlos berechnet werden können.

Aus der Abbildung 6.24 ist leicht zu erkennen, dass die Höhe des Wellenberges niedriger ist als die der New Year Wave, aber die berechnete Welle hat die tieferen Wellentäler. Die größeren Abweichungen bei den nachfolgenden Wellenhöhen sind auf die brechenden Wellen zurückzuführen. Beim Versuch wird die erste Welle im Wellenpacket bereits kurz vor der ersten Messposition ($x = 25.0\,[\mathrm{m}]$) wegen der großen Wellenhöhe zur brechenden Welle umgewandelt. Trotz der Abweichung der Wellenhöhen stimmt die Wellenform aus den Berechnungen mit den Messungen gut überein.

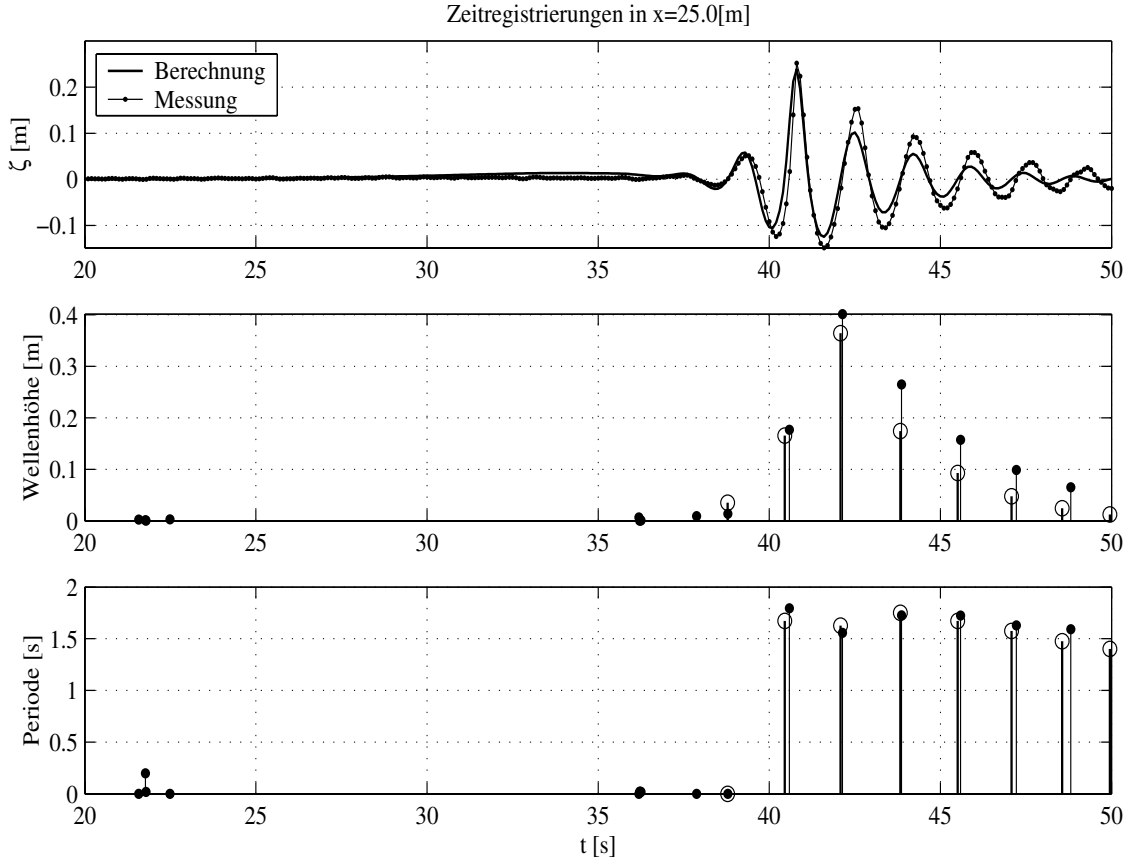

Abb. 6.22: Vergleich der Registrierung zwischen Berechnungen und Messungen in $x = 25.0\,[\mathrm{m}]$

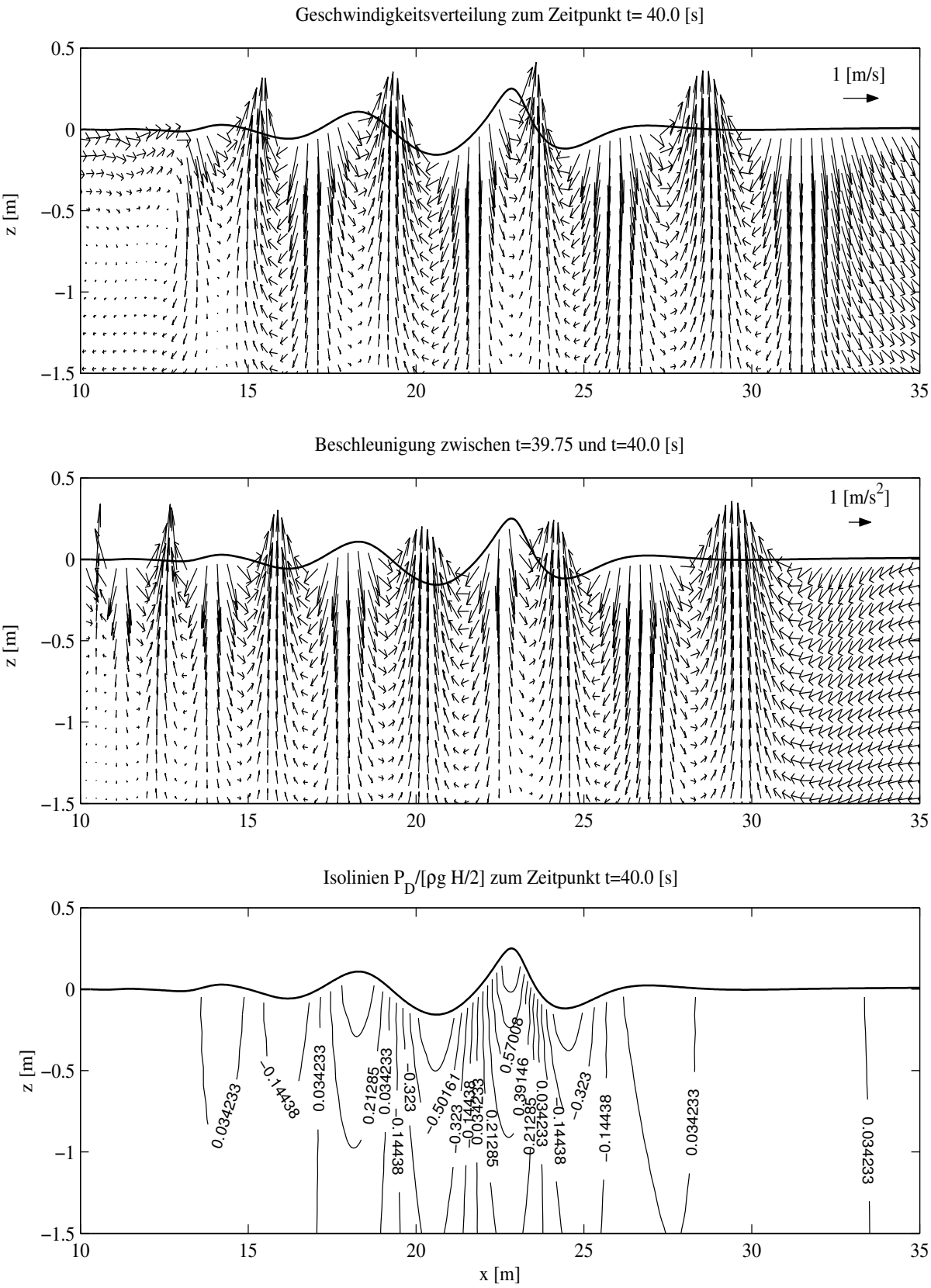

Abb. 6.23: Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Druckverteilung zum Zeitpunkt $t = 40.0\,[\mathrm{s}]$

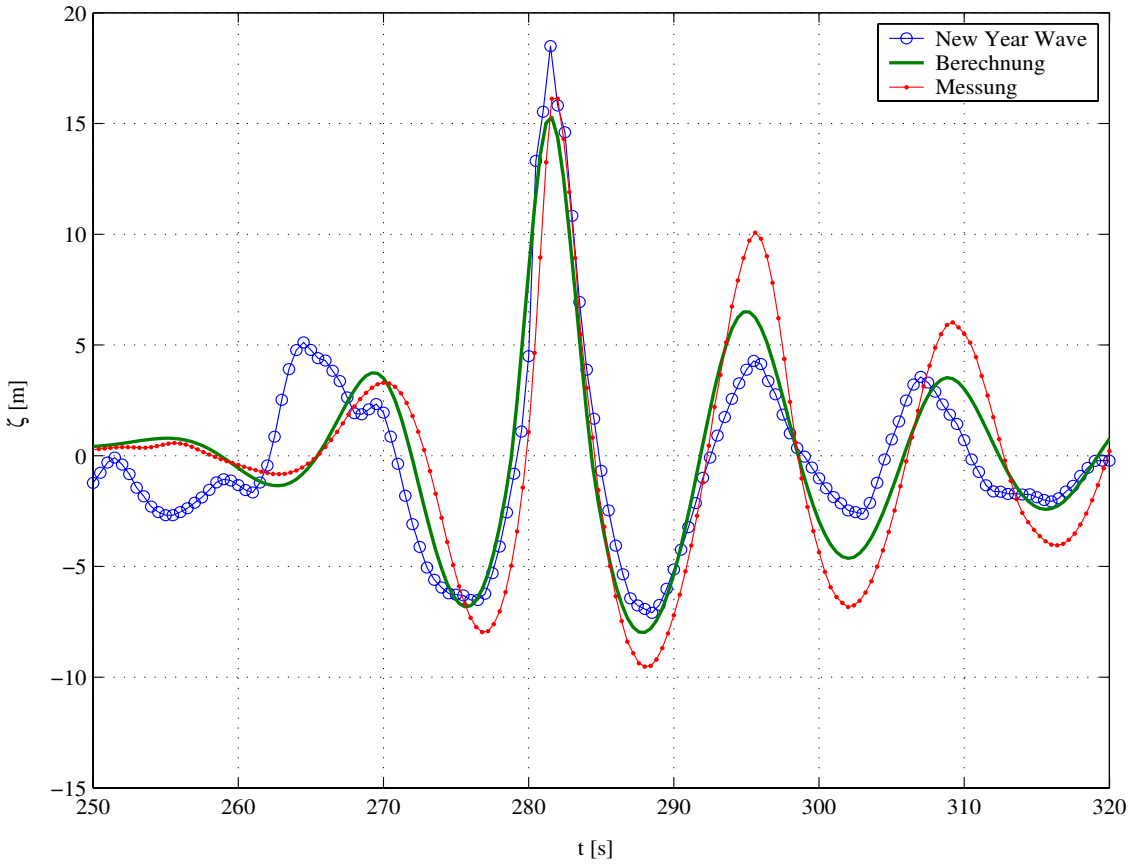

Abb. 6.24: Vergleich der Berechnungen und Messungen mit der New Year Wave (Maßstab=1:64)

6.5.2 Optimierung mit einem Maßstab von 1:42

Eine weitere Simulation wird mit einem Maßstab von 1:42 durchgeführt. Dabei werden die maximale Wellenhöhe $H_z = 0.61$ [m] und die entsprechende Periode von $T_z = 0.2$ [s] für die Zielfunktion eingesetzt. Um die brechende Welle auf der lokalen Zielposition $x = 20$ [m] zu vermeiden, wird die Nebenbedingung zum Brechkriterium auf der Stelle $x = 20$ [m] gegeben. Als lokale Zielstelle wird der Pegel im numerischen Wellenkanal $x = 20$ [m] vom Wellenblatt gemessen. Die Zielfunktion zum Optimierungsprozess kann wie folgt geschrieben werden:

$$\underset{\mathbf{s} \to \Re}{\text{Minimiere}} \quad f(\mathbf{s}) = \left(\frac{H_{max} - H_z}{H_z}\right)^2 + \left(\frac{T_{max} - T_z}{T_z}\right)^2 + \left(\frac{t_{max} - t_z}{t_z}\right)^2 \tag{6.8}$$

Mit der Nebenbedingung auf der Stelle $x = 20$ [m]

$$\mathrm{g}_1 \quad = \quad \frac{H_{x=20}}{g\,T^2_{x=20}} - \mathrm{K}_B \;\leq\; 0 \tag{6.9}$$

wird der oben genannte Wellenzug definiert, wobei die Konstante $\mathrm{K}_B = 0.021$ gesetzt wird. Die maximalen und minimalen Parameter für das Steuersignal werden in Tabelle 6.20 gegeben. Die Simulation wird nach 76 Iterationen beendet. Die Berechnungszeit beträgt etwa 6 CPU-Stunden pro Iteration. Der Ablauf der Fitnesswerte im Optimierungsverfahren Die Parameter aus dem Optimierungsvorgang werden in Tabelle 6.21 dargestellt, wobei $P_5 = 0.5$ als konstanter Wert vorgegeben wird.

Tab. 6.20: Maximum und Minimum der Parameter

0.1	$\leq$	P_1	$\leq$	0.4
0.15	$\leq$	P_2	$\leq$	0.4
1.0	$\leq$	P_3	$\leq$	3.0
0.0	$\leq$	P_4	$\leq$	0.05
P_5 (konstant)		$=$		0.5

In Abbildung 6.25 wird ein Vergleich zwischen der Berechnung und der New Year Wave dargestellt. Der gemessene Wert auf der Stelle $x = 20.0\,[\mathrm{m}]$ im numerischen Wellenkanal wird mit einem entsprechenden Maßstab 1:42 angewendet. Die Höhe der berechneten Welle beträgt $H = 25.8\,[\mathrm{m}]$, und diese Welle hat eine Periode $T = 13.6\,[\mathrm{s}]$.

Tab. 6.21: Gesuchte Parameter durch Optimierung

Parameter	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5(konstant)
Ergebnis	0.3684	0.2911	2.8999	0.0484	0.5

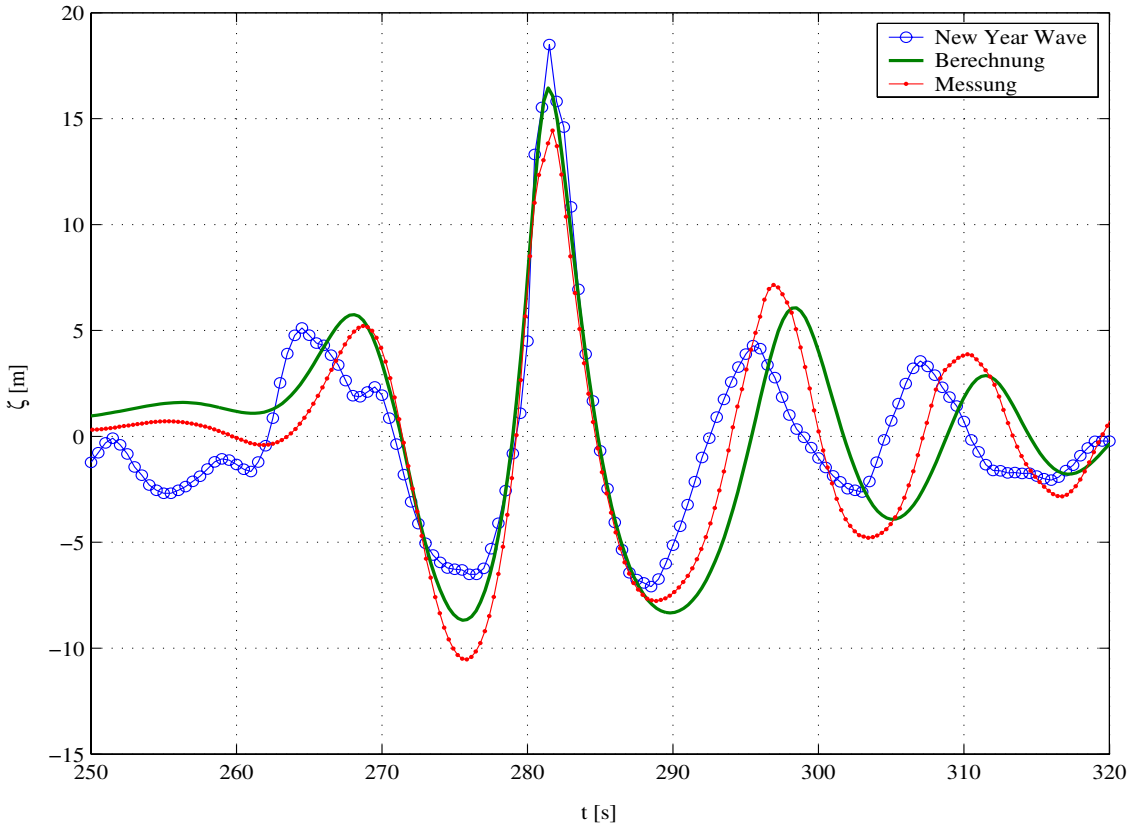

Abb. 6.25: Vergleich der Berechnungen und Messungen mit der New Year Wave (Maßstab=1:42)

6.5.3 Bewertung der Optimierungsergebnisse

Die Optimierung der New Year Wave wird mit zwei verschiedenen Maßstäben durchgeführt. Bei dem Maßstab 1:42 zeigt die optimierte Welle bessere Übereinstimmung zwischen Berechnung und Versuch als mit dem Maßstab 1:64. Das kann man damit erklären, dass der Maßstab 1:42 höhere Wellen erzeugt und dass die Tendenz der Maßstabeffekte bestätigt wird, wobei der größere Maßstab bessere Ergebnisse liefert.

Die eingesetzte Zielfunktion ist zur Erzeugung der New Year Wave mit mehreren aufeinander folgenden Wellen nicht gut geeignet. Die Beschreibung des gesamten Wellenzuges der New Year Wave erfordert die Einführung einer präzisen Zielfunktion, die durch erweiterte Parameter zur Generierung des irregulären Seegangs geeignet ist. Eine andere Möglichkeit ist die Erweiterung der Zielfunktion, wobei mehrere aufeinander folgende Wellen sowohl mit ihren Wellenhöhen, als auch mit ihren Perioden als Zielwerte gegeben und optimiert werden. Dadurch kann auch die Phasenverschiebung der zu generierenden Wellen reduziert und die Genauigkeit der Lösung erhöht werden. Insgesamt zeigen die Optimierungsergebnisse sehr gute Übereinstimmungen mit der Messung und der New Year Wave.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Eine Extremwelle ist durch hohe Nichtlinearität gekennzeichnet und tritt typischerweise als transientes Ereignis auf. Der Energietransport bei der Wellenausbreitung bestimmt die extremen Wellenereignisse und kann mit der linearen Wellentheorie nicht mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden. Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Erzeugung nichtlinearer Entwurfsseegänge, deren extreme Charakter und Oberflächenauslenkungen deterministisch bestimmt werden können. Die numerische Strömungsberechnung und die transiente Wellengruppentechnik ermöglichen die Generierung eines definierten Wellenzuges mit größerer Wellenhöhe im numerischen Wellenkanal. Neu entwickelt wird ein Programmsystem, in dem die Optimierung für Entwurfsseegänge erfolgt.

Die Navier-Stokes-Gleichungen werden als Grundgleichungen verwendet, wobei realitätsnahe Untersuchungen mit Viskositätseffekten ermöglicht werden. Die Grundgleichungen werden durch die Finite-Volumen-Methode diskretisiert. Die Verformung der freien Wasseroberfläche wird mit Hilfe eines mitbewegten strukturierten Gitters bestimmt, das durch ein Modul auf Basis der algebraischen Methode generiert wird. Zur Berechnung eines instationären Strömungsvorgangs wird eine vollimplizite Euler-Methode implementiert. Ein zweidimensionaler, numerischer Wellenkanal wird neu entwickelt und anhand von analytischen Wellentheorien und Messungen validiert.

Die Optimierung mit Genetischen Algorithmen wird für die Auswahl freier Variablen zur Erzeugung eines Steuersignals mit dem numerischen Wellenkanal gekoppelt. Die Steuerung des Wellenblattes basiert auf einer neu definierten Funktion zur Amplitudenmodulation, die mit einer geringeren Anzahl von freien Variablen modifiziert wird. Die Funktion wird so definiert, dass eine konvergierende transiente Wellengruppe mit deterministischem Charakter je nach Änderung der Variablen generiert werden kann. Um eine qualitative Verbesserung des zu generierenden Wellenzuges zu erzielen, wird das Brechkriterium von Wasserwellen als Nebenbedingung des Optimierungsvorgangs mitberücksichtigt.

Die Zielfunktion bei Optimierung von Entwurfsseegängen minimiert die Abweichung zwischen der vorgegebenen Zielwelle und der im numerischen Wellenkanal registrierten Welle, die durch das Steuersignal mit neu definierter Funktion generiert wird. Die Registrierung eines realen Seegangs wird mit einem entsprechenden Maßstab als Zielwelle verwendet. Bei der Optimierung wird die Zeitregistrierung auf den verschiedenen Stellen im numerischen Wellenkanal gemessen und analysiert. Die Optimierungsroutine wird solange durchgeführt, bis der vorgegebene Entwurfsseegang in Bezug auf ein Abbruchkriterium gefunden wird.

Mit den entwickelten Verfahren werden verschiedene Entwurfswellen numerisch erzeugt. Die Optimierung wird sowohl für eine einzelne Extremwelle als auch für eine Extremwelle mit Schwesterwellen durchgeführt. Die Qualität der Optimierung wird durch Berücksichtigung des Fitnesswertes entschieden, der beim Optimierungsvorgang 3 Iterationen hintereinander unter dem gegebenen Abbruchkriterien liegen soll. Die numerische Stabilität und die Fehlermargen der Optimierung werden durch die variierten Abbruchkriterien geprüft, wobei eine brauchbare Lösung mit akzeptablem Zeitaufwand geliefert wird.

Umfangreiche Versuche im Wellenkanal des Instituts für Wasserbau der TU-Berlin bestätigen die Gültigkeit des vorgestellten Programmsystems. Die Berechnungsergebnisse zeigen gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Die Berechnung mit einer brechenden Welle liefert bei Verzicht auf

das Brechkriterium bessere Ergebnisse, wobei die Abweichung vor und hinter der Messposition deutlich reduziert wird. Zur Optimierung der New Year Wave wird die Berechnung mit zwei unterschiedlichen Maßstäben durchgeführt, wodurch die Leistungsfähigkeit des Verfahrens mit Berücksichtigung von Maßstabeffekten direkt geprüft wird. Dabei zeigt sich ein akzeptables Ergebnis in beiden Fällen.

Die Generierung deterministischer Wellenszenarien und damit verbundener Extremereignisse ist ein wichtiges Werkzeug, um realitätsnahe Untersuchungen für die Belastung meerestechnischer Konstruktionen unter extremen Seegangsbedingungen zu ermöglichen. Mit dem neu entwickelten Verfahren lassen sich die nichtlinearen Entwurfsseegänge mit Extremereignissen numerisch erzeugen. Wasserspiegelauslenkungen, kinematische Größen, Geschwindigkeits- und Druckfelder werden berechnet und mit Messungen verglichen. Dabei zeigen sich gute Übereinstimmungen. Für die Simulation brechender Wellengruppen ist das Ergebnis noch nicht zufrieden stellend. Ein weiterer Ansatz ist dafür erforderlich. Weitere Berechnungen mit brechenden Wellen und deterministische Untersuchungen irregulärer Entwurfsseegänge für vorgegebene Seegangsspektren sind vorgesehen.

Symbolverzeichnis

γ		Mischungsfaktor in der Interpolationsmethode
δ_{ij}		Kronecker-Delta Symbol
ϵ		Abbruchkriterium für die äußere Iteration im Berechnungsverfahren
ζ_a	m	Wellenamplitude
ϱ	kg/m^3	Wasserdichte
ω	rad/s	Kreisfrequenz
θ		Phase $\theta = (kx - \omega t)$
μ	Ns/m^2	dynamische Viskosität
ν	m^2/s	kinematische Viskosität
ξ		lokale Koordinate in Richtung der Normalen
η		lokale Koordinate in Richtung der Tangente
τ_{ij}	N/m^2	viskoser Teil des Spannungstensors
ϕ	m^2/s	skalare Potentialfunktion
φ	rad	Winkel zwischen den lokalen Koordinaten
Ω		gesamtes Flüssigkeitsgebiet
Γ		Diffusionskoeffizient
∇		Nabla-Operator $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$
$\Re$		Konfigurationsraum bei Optimierungen
$\mathcal{X}(t)$		Funktion für die Erzeugung des Steuersignals
Δt	s	Zeitschritte für die Zeitintegration
Δx	m	Gitterabstand in x-Richtung
Δz	m	Gitterabstand in z-Richtung
$\delta\Omega_k$	m^3/s	Volumenfluss infolge der Gitterbewegung
ε		Einheitsvektor in lokalen Koordinaten
$\vec{r}$		Positionsvektor
$\overrightarrow{\overrightarrow{I}}$		Einheitstensor
$\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$		Deformationstensor
$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$		Spannungstensor
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
d	m	Wassertiefe
u	m/s	Geschwindigkeit in x-Richtung
w	m/s	Geschwindigkeit in z-Richtung
p	N/m^2	Druck
k	rad/m	Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{L}$

c	m/s	Phasengeschwindigkeit
A		Koeffizientenmatrix im algebraischen Gleichungssystem
C		Courant-Zahl
J		Jakobian der Transformation
L	m	Wellenlänge
T	s	Wellenperiode
H	m	Wellenhöhe
S		Oberfläche des Kontrollvolumens
$\mathbf{f}$	N	äußere Kräfte
$\mathbf{v}$	m/s	Geschwindigkeitvektor der Flüssigkeit
$\mathbf{v_s}$		Geschwindigkeitvektor der Oberfläche des Kontrollvolumens
$\mathbf{n}$		Normalenvektor
$\mathbf{x}$		Chromosomvektor
$\mathbf{g}$		Randbedingung bei der Optimierungsroutine
$\mathbf{s}$		Systemparameter bei der Optimierungsroutine
$\mathbf{t}_i$	N/m^2	Spannungstensor in kartesischen Koordinaten
$\mathbf{i}_i$		Einheitsvektor
p_0	N/m^2	Atmosphärendruck
q_ϕ		Quellterm
u_i	m/s	kartesische Geschwindigkeitskomponenten
v_n	m/s	Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur freien Oberfläche
v_t	m/s	Geschwindigkeitskomponente parallel zur freien Oberfläche
$\dot{m}_k$	kg/s	Massenfluss durch die k-te KV-Seite
K_B		Konstante des Brechkriteriums
S_k		Fläche der k-ten KV-Seite
$P_{1,\cdots,5}$		Parameter in der Funktion für die Erzeugung des Steuersignals
Q_P^p		Druckquellterm
H_{max}	m	höchste aufgetretene Wellenhöhe
T_{max}	s	Periode der höchsten aufgetretenen Welle
t_{max}	s	Zeitpunkt der höchsten aufgetretenen Welle
H_z	m	Zielwellenhöhe der zu erzeugenden Entwurfsseegänge
T_z	s	Zielperiode der zu erzeugenden Entwurfsseegänge
t_z	s	Zielzeitpunkt der zu erzeugenden Entwurfsseegänge
U_r		Ursell-Zahl
$P_{n,min}$		minimale Werte von Systemvariablen
$P_{n,max}$		maximale Werte von Systemvariablen

Literaturverzeichnis

Aage, C. (2000). Model Testing-Bringing the Ocean into the Laboratory. In *Keynote Lecture, Proceedings of the* 2^{nd} *HYDRALAB Workshop on Problems and Challenges in Experimental Research, DHI-Water & Environment*, S. 11–30, Hørsholm, Denmark.

Aage, C.; Jørgensen, P.; Andersen, L. W.; Dahl, C. und Klinting, P. (1989). Wave Loads in 2-D and 3-D Deep Water Waves. In *Proceedings of the* 8^{nd} *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, volume II, S. 175–181, The Hague. OMAE.

Adby, P. R. und Dempster, M. U. (1974). *Introduction to Optimization Methods*. Chapman and Hall, London.

Airy, G. B. (1845). Tide and waves. *Encyclopaedia Metropolitania art*, 192: S. 241–396.

Anderson, D. A.; Tannehill, J. C. und Pletcher, R. H. (1984). *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Hemisphere, New York.

Baldock, T. E.; Swan, C. und Taylor, P. H. (1996). A laboratory study of non-linear surface waves on water. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, 354: S. 649–676.

Bergmann, J. (1985). *Gaußsche Wellenpakete - Ein Verfahren zur Analyse des Seegangsverhaltens meerestechnischer Konstruktionen*. Dissertation, Technische Universität Berlin (D 83).

Bertram, V. und Jensen, G. (1994). Recent applications of computational fluid dynamics. *Ship Technology Research*, 44: S. 131–134.

Bertram, V.; Jensen, G. und Laudan, J. (1993). Ergänzung und Erweiterung der Schiffbau- Versuchstechnik durch numerische Methoden der Hydrodynamik. *Jahrbuch der Schiffbautecnischen Gesellschaft*, 86: S. 353–365.

Bonmarin, P. (1989). Geometric Properties of Deep-Water Breaking Waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 209: S. 405–433.

Boussinesq, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures Appl.*, 17: S. 55–108.

Boyd, J. P. und Chen, G.-Y. (2000). Weakly Nonlinear Wavepackets in the Korteweg-deVries Equation: The KdV/NLS Connection. *Math. Comput. Simulation*, S. in Press.

Carroll, D. L. (1997). Fortran GA - Genetic Algorithm Driver V1.6.4. *Users Guide*.

Celebi, M.; Kim, M. und Beck, R. (1998). Fully Nonlinear 3D Numerical Wave Tank Simulations. *Journal of Ship Research*, 42(1): S. 33–45.

Celebi, M. S. und Beck, R. F. (1997). Geometric Modeling for Fully Nonlinear Ship-Wave Interactions. *Journal of Ship Research*, 41(1): S. 17–25.

Chakrabarti, S. K. und Libby, A. R. (1988). Further verification of gaussian wave packets. *Applied Ocean Research*, 10(2).

Clauss, G. F. (2002). Genesis of Design Wave Groups in extreme Seas for the Evaluation of Wave/Structure Interaction. In *Proceedings of the 24th Symposium on Naval Hydrodynamics*, Fukuoka, Japan.

Clauss, G. F. und Bergmann, J. (1986). Gaussian wave packets – A new approach to seakeeping tests of ocean structures. *Applied Ocean Research*, Vol.8(No.4).

Clauss, G. F.; Kuhlmann, G. und Kühnlein, W. (1999). Hydrodynamic Evaluation of Multi-Layer Wave Filters and Absorbers. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 121: S. 22–31.

Clauss, G. F. und Kühnlein, W. L. (1995). Transient wave packets – An efficient technique for seakeeping tests of self-propelled models in oblique waves. In *Third International Conference on Fast Sea Transportation*, S. 1193–1204, Vol. 2, Lübeck-Travemünde, Germany.

Clauss, G. F. und Kühnlein, W. L. (1997). Simulation of design storm wave conditions with tailored wave groups. In *Proceedings of the 7th Int. Offshore and Polar Engineering Conference*, S. 228–237, Honolulu, Hawaii, USA. ISOPE.

Clauss, G. F.; Lehmann, E. und Östergaard, C. (1988). *Meerestechnische Konstruktionen*. Springer Verlag London.

Clauss, G. F. und Steinhagen, U. (1999). Numerical Simulation of Nonlinear Transient Waves and its Validation by Laboratory Data. In *Proceedings of the 9th Int. Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*, volume III, S. 368–375, Le Quartz,Brest,France.

Clauss, G. F. und Steinhagen, U. (2000). Optimization of Transient Design Waves in Random Sea. In *Proceedings of the 10th Int. Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*, volume III, S. 229–236, Seattle,USA.

Cura Hochbaum, A. (1994). *Ein Finite-Volumen Verfahren zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen*. Bericht nr. 540, Instituts für Schiffbau der Universität Hamburg.

Cuthill, E. (1972). Several strategies for reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In *Sparse matrices and their applications,* Rose, D. and Willoughby, R., Editoren, New York.

Cuthill, E. und McKee, J. (1969). Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In *ACM Nat. Conf.*, S. 157–172, New York.

Davis, M. C. und Zarnick, E. E. (1964). Testing ship models in transient waves. In *5th Symposium on Naval Hydrodynamics*.

Demirdžić, I. (1982). *A Finite Volume Method for Computation of Fluid in Complex Geometries*. Dissertation, University of London.

Demirdžić, I. und Perić, M. (1988). Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.8: S. 1037–1050.

Demirdžić, I. und Perić, M. (1990). Finite volume method for prediction of fluid flow in arbitrary shaped domains with moving boundary. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.10: S. 771–790.

Faulkner, D. (1995). Design for abnormal ocean waves. In *Annex to Lord Donaldsonś Assessment (DERBYSHIRE), Cm 3128: HMSO*, London.

Fenton, J. D. (1985). A fifth order Stokes' theory for steady waves. *J. Waverways, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 111: S. 216–234.

Ferziger, J. H. und Perić, M. (1996). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer.

Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms*. Addison-Wesley, Cambridge.

Habel, R. (2001). *"Künstliche Riffe" zur Wellendämpfung*. D 83, Instituts für Schiffs- und Meerestechnik der Technische Universität Berlin.

Hasselmann, K.; Barnett, T.; Bouws, E.; Carlson, H.; Cartwright, D.; Enke, K.; Ewing, J.; Gienapp, H.; Hasselmann, D.; Kruseman, P.; Meerburg, A.; Müller, P.; Olbers, D.; Richter, K. und Sell, W. (1973). Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift*, A8(12).

Haver, S. und Andersen, O. J. (2000). Freak Waves : Rare Realizations of a Typical Population or Typical Realizations of a Rare Population? In *Proceedings of the 10^{th} Int. Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*, volume III, S. 123–130, Seattle, USA.

Hesser, J. (1996). *Vorlesung Evolutionäre Algorithmen* : Vorlesungsmanuscript. Universität Mannheim.

Hirt, C. W. und Nichols, B. D. (1981). Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39: S. 210–225.

Kim, C. H.; Clément, A. H. und Tanizawa, K. (1999). Recent research and development of numerical wave tanks - a review. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 9(4): S. 241–256.

Kim, D. J. und Kim, M. H. (1997). Wave-Current Interaction with a Large Three-Dimensional Body by THOBEM. *Journal of Ship Research*, 41(4): S. 273–285.

Kjeldsen, S. P. (1981). Shock Pressure from Deep-Water Breaking Waves. In *Int. Symp. on Hydrodyn. in Ocean Eng.*, NIT, Trondheim.

Kjeldsen, S. P. und Myrhaug, D. (1980). Wave-Wave Interactions Current-Wave Interactions and Resulting Extreme Waves and Breaking Waves. In *Proc of the 17^{th} Coastal Eng Conf*, S. 2227–2303.

Korteweg, D. J. und deVries, G. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.*, 5(39): S. 422–443.

Lee, D. K.; Jeong, S. J. und Kim, S. Y. (1994). A Study on the Efficient Optimization Method by Coupling Genetic Algorithm and Direct Search Method. *Transactions of the Society of Naval Architects of Korea*, 31(3).

Lilek, Z. (1996). *Ein Finite-Volumen-Verfahren zur Berechnung von inkompressiblen und kompressiblen Strömungen in komplexen Geometrien mit beweglichen Rändern und freien Oberflächen*. Bericht nr. 563, Instituts für Schiffbau der Universität Hamburg.

Longuet-Higgins, M. S. (1969). On Wave Breaking and the Equilibrium Spectrum of Wind Generated Waves. *Proc. R. Soc. London*, 310-A: S. 151–159.

Longuet-Higgins, M. S. (1985). Acceleration in Steep Gravity Waves. *J. of Phys. Oceanogra. R. Soc. London*, 15: S. 1570–1579.

Longuet-Higgins, M. S. (1987). The propagation of short surface waves on longer gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 177: S. 293–306.

Longuet-Higgins, M. S. und Cokelet, E. D. (1976). The deformation of deep surface waves on water. I. A numerical method of computation. In *Royal Society of London*, volume 350, S. 1–25.

Longuet-Higgins, M. S. und Stewart, R. W. (1960). Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 8: S. 565–583.

Michell, J. H. (1893). The Highest Waves in Water. *Phil. Mag.*, 36: S. 430–437.

Mori, N.; Yasuda, T. und Nakayama, S. (2000). Statistical Properties of Freak Waves Observed in the Sea of Japan. In *Proceedings of the 10th Int. Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*, Seattle, USA.

Munk, W. H. (1949). The Solitary Wave Theory and Its Applications to Surf Problems. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 51: S. 376–424.

Muzaferija, S.; Perić, M.; Seidel, P. und Yoo, S.-D. (1998). Entwicklung und Anwendung eines Finite-Volumen-Verfahrens für die Berechnung viskoser Schiffsumströmung mit freier Oberfläche. Bericht Nr. 594, Arbeitsbereiche Schiffbau, Technische Universität Hamburg-Harburg.

Newman, J. N. (1977). *Marine Hydrodynamics*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Newman, J. N. (1989). The Numerical Towing Tank — Fact or Fiction? *Schiffstechnik*, Bd. 36: S. 153–169.

Nickerson, J. (1993). Freak waves! *Mariners Weather Log*, 37-14: S. 19.

Ochi, M. K. und Tsai, C. H. (1983). Prediction of occurrence of Breaking Waves in Deep Water. *J. Phys. Oceanogr.*, 13: S. 2009–2019.

Osborne, A. R. (1997). Approximate asymptotic integration of a higher order water-wave equation using the inverse scattering transform. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 4: S. 29–53.

Parsons, M. G. (1975). Optimization Method for use in Computer-Aided Ship Design. STAR Symposium, SNAME.

Patankar, S. V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flows*. Heimsphere Publ., Cambridge, Mass.

Perić, M. (1985). *A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts*. Dissertation, University of London.

Pierson, W. J. und Moskowitz, L. (1964). A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii.˙ *J. Geophys. Res.*, 69: S. 181–190.

Ramberg, S. E. und Griffin, O. M. (1987). Laboratory Studies of Steep and Breaking Deep Water Waves. *J. Waterway. Port, Coastal Ocean Eng.*, 113: S. 493–506.

Rhie, C. M. und Chow, W. L. (1983). Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation. *AIAA Journal*, 21(11).

Rodenbusch, G. (1986). Random directional wave forces on termplate offshore platforms. In *Offshore Technology Conference (OTC), Houston, Texas*.

Rodenbusch, G. und Forristall, G. Z. (1986). An Empirical Model for Random Directional Wave Kinematics Near the Free Surface. In *Offshore Technology Conference (OTC), Houston, Texas*, S. 137–146.

Rozario, J. B.; Tromans, P. S.; Taylor, P. H. und Efthymiou, M. (1993). Comparison of loads predicted using 'NEWWAVE' and other wave models with measurements on the Tern structure. In *Wave Kinematics and Environmental Forces*, volume 29, S. 143–159, Society for Underwater Technology. Printed in the Netherlands.

Sand, S. C.; Ottesen, H. N. E.; Klinting, P.; Gustamestad, O. T. und Sterndorff, M. J. (1990). *Freak Wave Kinematics*. NATO ASI Series, ISBN 0-7923-0638-4, S. 535-549. Kluwer Academic Publisher.

Schöneburg, E.; Heinzmann, F. und Feddersen, S. (1994). *Genetische Algorithmen und Evolutionsstrategien*. Addison&Wesley, Bonn.

Schumann, C. (1998). Calculation of the Motion of Liquid in a Cargo Tank. *Ship Technology Research*, 45: S. 39–46.

Schumann, C. (1999). *Berechnung von reibungsfreien Schiffsumströmungen unter Verwendung einer "Volume of Fluid"-Methode zur Berechnung der freien Wasseroberfläche*. Bericht Nr. 600, Arbeitsbereiche Schiffbau, Technische Universität Hamburg-Harburg.

Slattery, J. C. (1972). *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*. McGrow-Hill, New York.

Stansberg, C. T. (1993). Second-order numerical reconstruction of laboratory generated random waves. In *Proceedings of the 12th Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE)*, Florence, Italy.

Steinhagen, U. (2001). *Synthesizing Nonlinear Transient Gravity Waves in Random Seas*. Dissertation, Technische Universität Berlin (D 83).

Stokes, G. G. (1847). On the theory of oscillatory waves. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 8.

Stokes, G. G. (1880). Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves. In *Mathematical and Physical Papers, Cambridge Uni. Press*, volume I, S. 83–94.

Takezawa, S. und Hirayama, T. (1976). Advanced experimental techniques for testing ship models in transient water waves. Part II The controlled transient water waves for using in ship motion tests. In *11thSymposium on Naval Hydrodynamics*, S. 23–35. In Bishop, R., Parkinson, A., und Price, W., Editoren, Department of Mechanical Engineering, University College London.

Takezawa, S. und Takekawa, M. (1976). Advanced experimental techniques for testing ship models in transient water waves. Part I The transient test technique on ship motions in waves. In *11thSymposium on Naval Hydrodynamics*, S. 23–35. In Bishop, R., Parkinson, A., und Price, W., Editoren, Department of Mechanical Engineering, University College London.

Tanizawa, K. und Clément, A. H. (2000). Report of the 2nd Workshop of ISOPE Numerical Wave Tank Group: Benchmark Test Cases of Radiation Problem, (Brest, May 1999). In *Proceedings of the 10th Int. Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*, volume III, S. 175–184, Seattle,USA.

Thompson, M. C. (1984). Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics. *AIAA Journal*, 22-11.

Thompson, M. C.; Warsi, Z. U. A. und Mastin, C. W. (1985). *Numerical grid generation - foundations and applications*. Elsevier, New York.

Truckenbrodt, E. (1989). *Fluidmechanik*, volume Band 1: Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, dritte Auflage Ausgabe.

Tulin, M. P. und Li, J. J. (1992). On the Breaking of Energetic Waves. In *Offshore and Polar Engineering (ISOPE)*, volume II(1), S. 46–53.

Tulin, M. P. und Waseda, T. (1999). Laboratory observations of wave group evolution including breaking effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 378: S. 197–232.

Tzabiras, G. D. (1993). Resistance and Self-Propulsion Numerical Experiments on Two Tankers at Model and Full Scale. *Ship Technology Research*, 40.

Ursell, F. (1953). The Long-Wave Paradox in the Theory of Gravity Waves. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 49: S. 685–694.

Van Dorn, W. G. und Pazan, S. E. (1975). Laboratory Investigation of Wave Breaking. part 2. Deep Water Waves. *Advanced Ocean Eng. Lab. Rept.*, 71.

Wendt, F. E. (1996). *Computational Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2nd Ausgabe.

Wheeler, J. D. (1969). Method for calculating forces produced by irregular waves. In *Offshore Technology Conference (OTC), Houston, Texas*.

Wu, G.-X. und Eatock Taylor, R. (1994a). Finite element analysis of two-dimensional non-linear transient water waves. *Applied Ocean Research*, 16: S. 363–372.

Wu, G.-X. und Eatock Taylor, R. (1994b). Time stepping solutions of two-dimensional non-linear wave radiation problem. *Ocean Engineering*, 16.

Ye, M. und Zhang, J. (1994). Predictions of unidirectional irregular wave kinematics and evolution. In *Offshore Technology Conference (OTC), Houston, Texas*.

Yoo, S.-D. (1999). *Numerische Berechnung von Strömungen mit freien Oberflächen auf randangepaßten beweglichen Gittern*. Bericht Nr. 592, Arbeitsbereiche Schiffbau, Technische Universität Hamburg-Harburg.

Anhang

A. Entwurfswelle und Zielfunktion

A.1 Entwurfswellen aus der Datenbank

Die folgende Tabelle stellt einige Entwurfswellen aus der Datenbank nach der Simulation dar. Die "Anzahl" bezeichnet die Anzahl der gesamten Wellen aus dem Wellenzug, der durch die Zero-down-crossing-Methode analysiert wurde. Die Zielfunktion zur Generierung folgender Entwurfswellen wird im Anhang A.2 dargestellt.

Nr.	Variable 1	Variable 2	Variable 3	Variable 4	Anzahl	t_{max}	H_{max}	T_{max}
1	.353775	.292453	2.770074	.018482	15	41.379997	.327732	2.492508
2	.420730	.325275	2.750465	.045100	9	41.320000	.397737	2.422382
3	.427761	.388227	3.413785	.045051	7	43.969997	.253693	1.998386
4	.420739	.294040	2.750084	.048225	7	41.274998	.428911	2.401669
5	.383018	.179122	3.226478	.025390	6	39.195000	.428361	1.878929
6	.308016	.178878	3.226478	.026897	6	41.629997	.406605	2.103527
7	.380674	.158515	3.215949	.040031	6	41.399998	.400981	2.259869
8	.378257	.178878	3.443770	.028480	6	41.579998	.436465	2.004807
9	.383018	.178878	3.226478	.025382	7	39.189999	.429334	1.878891
10	.354782	.193237	1.359813	.047331	9	36.739998	.270872	4.113907
11	.248202	.375341	2.835154	.035949	8	41.584999	.200629	2.355869
12	.244732	.181114	3.216254	.028417	9	41.790001	.348590	1.997528
13	.422900	.162360	2.929838	.039280	6	38.599998	.537450	2.135880
14	.422900	.162787	2.292611	.037718	8	35.134998	.496443	2.016998
15	.379365	.332340	3.251884	.019514	7	41.799999	.299473	2.187668
16	.424071	.162787	3.235023	.037715	7	38.974998	.396247	2.088730
17	.426250	.379453	3.135380	.039389	8	43.750000	.297482	2.025063
18	.423138	.177543	2.292688	.026145	15	38.000000	.455143	2.837334
19	.419073	.377439	2.451842	.033973	7	41.174999	.299660	2.744617
20	.418450	.259760	2.446654	.032414	7	38.299999	.384060	2.495689
21	.424071	.190101	3.235023	.037706	6	41.395000	.425457	2.240879
22	.385398	.193977	3.235023	.037706	8	41.469997	.443452	2.124184
23	.385398	.190101	3.235023	.013095	7	39.230000	.408985	1.989273
24	.426415	.350514	2.606342	.038182	6	41.250000	.345128	2.616505
25	.348630	.330525	2.923810	.019477	6	41.540001	.306673	2.378471
...	...	...	...	...	...	...	...	...

A.2 Zielfunktion im Simulationsprogramm

```
      subroutine func(j,funcval)
c
      parameter (indmax=200,nchrmax=60,nparmax=4)
      parameter (neta=10000,deltat=0.005,numu=10000,nowa=100)
      common /wanal/ Eta(neta),wtime(neta),H0(nowa),T0(nowa),Tkla(nowa),nuwave
      common /hang/ finlet(neta),Feta(neta)
      common /ga2/ nparam,nchrome
      common /ga3/ parent,iparent
c
      dimension parent(nparmax,indmax)
      dimension iparent(nchrmax,indmax)
      dimension gradi(neta),xlocal(neta),wict(neta),fnorma(neta)
c
      fmin=-1.0
      small=1.0e-20
c
      do i=1,nparmax
      write(6,405) i,j,parent(i,j)
      end do
c
      do i=1,nowa
      H0(i)=0.0
      T0(i)=0.0
      Tkla(i)=0.0
      end do
c
c     Initialwert für deltat=0.005
      mneta=neta-4000
      c=-1.0*mneta*deltat
      rc=0.0
c
      do i=1,mneta
      gradi(i)=c
      c=c+deltat
      xlocal(i)=0.0
      end do
c
c     Für die Normierung
      do i=1,mneta
      fnorma(i)=rc
      rc=rc+deltat
      end do
c
c     Für die Erzeugung des Steuersignals
      do i=1,mneta
      xlocal(i)= parent(1,j)*1./cosh(parent(2,j)*gradi(i))
     &  *sin(parent(3,j)*cosh(parent(4,j)*gradi(i))
     &  *gradi(i))*tanh(0.5*gradi(i))
      end do
```

```
c        Langsame Einschwingung und Stützstelle t=0.0
         do i=1,mneta
         xlocal(i)=xlocal(i)*tanh(fnorma(i))
         end do
c        Für 30-50 sec
         mnetap1=mneta+1
c
         do i=mnetap1,neta
         xlocal(i)=0.0
         end do
c
         do i=1,neta-1
         finlet(i)=(xlocal(i+1)-xlocal(i))/deltat
         end do
         finlet(neta)=0.0
c
         call wave(wict)
         depth=1.5
c
         do i=1,neta
         Eta(i)=wict(i)-depth
         end do
c
         call wanaly
         hmax=small
c
         do i=1,nuwave
         if(H0(i) .ge. hmax) then
         hmax=H0(i)
         imax=i
         end if
         end do
c
         write(6,407)imax,Tkla(imax),H0(imax),T0(imax)
         iminus=imax-1
         iplus=imax+1
c
c        Zielfunktion
         funcval=fmin*(((H0(imax)-0.55)/0.55)**2
     &   +((T0(imax)-2.0)/2.0)**2+((Tkla(imax)-35.0)/35.0)**2)
c
         fminfunc=fmin*funcval
         write(6,402)j,fminfunc
402      format(1x,'*** J, Funcvalue: ',i3,f14.6,/)
405      format(1x,'Parameter(',i3,i3,')=',f12.6)
407      format('Maximal wave height: Time, H0, T0(',i2,'):',3f12.6)
         return
         end
```