

**Experimentelle und numerische  
Untersuchungen zur  
Dekubitusproblematik am Beispiel  
des Fersen-Schaumstoff-Kontaktbereiches**

von Diplom-Ingenieur (FH)  
Michael Schrodtt  
aus Wächtersbach

von der Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften  
- Dr.-Ing. -  
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. habil. G. Brunk

Gutachter: Prof. Dr.-rer. nat. W. Müller

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. G. Silber

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 20. März 2006

Berlin 2006

D 83

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Materialwissenschaften an der Fachhochschule Frankfurt am Main.

Mein Dank gilt zuerst Herrn Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller für die spontane und kooperative Bereitschaft, als Erstgutachter meiner externen Promotion zu fungieren. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerd Brunk für die Übernahme des Vorsitzes.

Mein innigster Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerhard Silber, der mich durch seine begeisternde Art für eine Promotion an der Fachhochschule Frankfurt gewinnen konnte und mich durch Rat und Tat zu allen Tages- und Nachtzeiten hervorragend unterstützt hat.

Bei Herrn Prof. Dr. med. Thomas J. Vogl möchte ich mich für die Unterstützung im Rahmen der Kooperation mit der Universitätsklinik Frankfurt (Institut für Diagnostische und Interventionelle Radiologie) und den Messzeiten am MRT bedanken. Frau Annegret Heine danke ich für ihre kompetente Hilfe bei der Aufnahme aller MRT-Daten.

Der Firma FoamPartner, Wolfshausen (Schweiz), danke ich für die freundliche Bereitstellung der Schaumstoffproben.

Bei meinen beiden Kollegen Michael Stanull und Günter Benderoth möchte ich mich für die sehr gute Arbeitsatmosphäre und ihre Unterstützung während meiner gesamten Promotion bedanken. Allen anderen jetzigen und früheren Mitarbeitern des Instituts für Materialwissenschaften sei ebenfalls für die gute Zusammenarbeit gedankt.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Familie für ihre fortwährende Unterstützung während des Entstehens dieser Arbeit. Meiner Frau Susanne danke ich für die vielen Ermutigungen und den liebevollen Rückhalt.

Wächtersbach, im Dezember 2005

Michael Schrodt

# Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der wichtigsten Symbole und Formelzeichen	1
<b>1 Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1 Motivation und Ziel der Arbeit	4
1.2 Stand der Entwicklung	6
1.2.1 Polymere Weichschaumstoffe	6
1.2.2 Humanes Weichgewebe	8
1.3 Inhalt der Arbeit	11
<b>2 Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1 Konfiguration und Bewegung	13
2.2 Verschiebungs,- Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor	14
2.3 Deformationsgradient und polares Zerlegungstheorem	15
2.4 Verzerrungstensoren	17
2.5 Spannungsvektoren und -tensoren	19
2.6 Bilanzgleichungen	22
2.7 Materialgleichung (Materialtheorie)	27
2.7.1 Reduzierte Form einer allgemeinen Materialgleichung	28
2.7.2 GREEN- oder Hyperelastizität	29
2.7.3 Verzerrungsenergiefunktion hochkompressibler Materialien	34
2.8 Zur Idee der Finite Elemente Methode	36
2.8.1 Einleitende Bemerkungen	36
2.8.2 Schwache Formulierung des Gleichgewichts	38
2.8.3 Linearisierung und Diskretisierung	40
<b>3 Polymere Weichschaumstoffe</b>	<b>42</b>
3.1 Herstellungsprozess	42

---

3.2	Experimente, Vorversuche . . . . .	44
3.2.1	Versuchsdurchführung . . . . .	45
3.2.2	Experimentelle Befunde . . . . .	46
3.3	Experimente, Hauptversuche . . . . .	49
3.3.1	Versuchsdurchführung . . . . .	49
3.3.2	Experimentelle Befunde . . . . .	52
3.4	Materialidentifikation . . . . .	56
3.4.1	Beschreibung der ausgewählten Verfahren . . . . .	57
3.4.2	Das Gütefunktional . . . . .	60
3.4.3	Abschätzung der Materialparameter . . . . .	61
3.4.4	Identifikation der Materialparameter . . . . .	67
3.4.5	Verifikation der Materialparameter . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Humangewebe</b>	<b>73</b>
4.1	Ausgewählte Körperregion . . . . .	73
4.2	Experimente . . . . .	74
4.2.1	Grundlagen der Magnetresonanztomographie . . . . .	74
4.2.2	Versuchsdurchführung MRT-Messung . . . . .	78
4.2.3	Experimentelle Befunde der MRT-Messungen . . . . .	79
4.2.4	Versuchsdurchführung Kraft-Weg-Messungen . . . . .	80
4.2.5	Experimentelle Befunde der Kraft-Weg-Messung . . . . .	82
4.3	3D-Rekonstruktion . . . . .	83
4.4	FE-Modellierung . . . . .	88
4.4.1	Berechnungsgitter des Fersenmodells . . . . .	88
4.4.2	Randbedingungen . . . . .	89
4.4.3	Berücksichtigung des Materialverhaltens . . . . .	90
4.4.4	Berücksichtigung des Eigengewichtes der Ferse . . . . .	90
4.4.5	Kontaktdefinition . . . . .	91
4.5	Identifikation der Materialparameter . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Simulation des Gesamtsystems Ferse/Auflage</b>	<b>94</b>
5.1	FE-Modellierung des Gesamtsystems Ferse und Auflage . . . . .	96
5.2	Ergebnisse der FE-Berechnung des Gesamtmodells Ferse/Auflage . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>103</b>

---

<b>A</b>	<b>Vektor- und Tensoroperationen</b>	<b>106</b>
A.1	Produktregel . . . . .	106
A.2	GAUSSscher Integralsatz . . . . .	106
A.3	Grundinvarianten eines Tensors $\mathbf{A}$ . . . . .	107
A.4	Epsilon-Tensor . . . . .	107
A.5	CALEY-HAMILTON-Gleichung . . . . .	108
A.6	Ableitung einer skalarwertigen Tensorfunktion nach der Zeit . . . . .	109
A.7	Richtungsableitung nach dem Argumenttensor . . . . .	109
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>112</b>

# Verzeichnis der wichtigsten Symbole und Formelzeichen

## Skalare Größen

$dA, dA_0$	Flächenelement in der Momentan- bzw. in der Bezugskonfiguration
$E$	Kinetische Energie
$f(J)$	Volumendehnungsfunktion
$m$	Masse eines Körpers
$P$	äußere Leistung
$Q$	zugeführte Wärmemenge
$U$	innere Energie
$dV, dV_0$	Volumenelement in der Momentan- bzw. in der Bezugskonfiguration
$w$	Verzerrungsenergiefunktion
$X, Y$	materielle Punkte
$\Phi$	Gütefunktion
$\alpha, \beta, \mu, D$	Materialparameter der hyperelastischen Materialgleichungen
$\lambda_i$	Hauptstreckungen
$\rho$	Dichte
$\sigma_{ij}$	CAUCHYsche Spannungskordinaten

## Vektorielle Größen

$\mathbf{a}$	Beschleunigungsvektor
$\mathbf{e}_i$	kartesische Basisvektoren

$\mathbf{k}^V, \mathbf{k}_0^V$	Volumenkraftdichte in der Momentan- bzw. in der Bezugskonfiguration
$\mathbf{K}^a$	äußere Kraft
$\mathbf{K}^V$	Volumenkraft
$\mathbf{K}^a$	Oberflächenkraft
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$\mathbf{n}_i$	Eigenvektor von $\mathbf{U}$
$\mathbf{m}_i$	Eigenvektor von $\mathbf{V}$
$\mathbf{t}_i$	CAUCHYsche Spannungsvektoren
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{x}, \mathbf{X}$	Ortsvektor des materiellen Punktes in der Momentan- bzw. in der Bezugskonfiguration
$\mathbf{p}$	Impulsvektor, Parametervektor

### Tensorielle Größen

$\mathbf{A}$	ALMANSIcher Verzerrungstensor
$\mathbf{B}$	linker CAUCHY-GREENscher Verzerrungstensor
$\mathbf{C}$	rechter CAUCHY-GREENscher Verzerrungstensor
$\mathbf{D}$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
$\mathbf{G}$	GREENscher Verzerrungstensor
$\mathbf{H}_0$	materieller Verschiebungsgradient
$\mathbf{I}$	Einheitstensor
$\mathbf{L}$	Geschwindigkeitsgradient
$\mathbf{P}^I$	1. PIOLA-KIRCHHOFFscher Spannungstensor
$\mathbf{P}^{II}$	2. PIOLA-KIRCHHOFFscher Spannungstensor
$\mathbf{R}$	Drehtensor (Versor)
$\mathbf{S}$	CAUCHYscher Spannungstensor
$\mathbf{U}$	Rechtsstrecktensor

$\mathbf{V}$  Linksstrecktensor

### Operatoren

$Sp$  Spur-Operator

$\det$  Determinanten-Operator

$\nabla_0$  materieller Nabla-Operator

$\nabla(\dots) \equiv grad$  Gradient-Operator

$\nabla \cdot (\dots) \equiv div$  Divergenz-Operator

$\nabla \times (\dots) \equiv rot$  Rotor-Operator

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji} = Sp \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation und Ziel der Arbeit

Das Wundliegen (Dekubitus) von Patienten ist in der Pflegemedizin angesichts der demographischen Entwicklung in der Bevölkerung mit einer zunehmenden Anzahl pflegebedürftiger Menschen ein wachsendes Problem. Folgekosten aufgrund einer verlängerten Krankenhausverweildauer werden auf 1 bis 2 Milliarden Euro geschätzt. Nach Expertenmeinung kann mindestens die Hälfte der entstehenden Kosten durch standardisierte und wirksame Prophylaxemaßnahmen und optimierte Therapien eingespart werden Dassen (2004). Etwa 18 % der Patienten mit einem Dekubitusrisiko in Allgemeinkrankenhäusern und 9,1 % der Bewohner mit einem Dekubitusrisiko in Pflegeheimen entwickeln einen oder mehrere Dekubiti. Ein hohes Dekubitusrisiko ist für den OP-Bereich zu konstatieren, da sich bei langen chirurgischen Eingriffen häufig eine Wechsellagerung verbietet, durch Hypothermie die hämatogene Perfusion in peripheren Bereichen vermindert ist und in vielen Fällen ungeeignete OP-Auflagen benutzt werden.

Zum Schutze dekubitusgefährdeter Patienten gibt es seitens des Gesetzgebers eine eindeutige Rechtsprechung, nämlich prophylaktische Maßnahmen vorzunehmen und zu dokumentieren. Deshalb sind Gesundheitsministerien heutzutage bestrebt, Richtlinien zur Dekubitusprävention zu definieren und diese zusammen mit den Pflegeinstitutionen umzusetzen. Diesbezüglich sind etwa die Länder Japan und Singapur zu nennen, wo entsprechende Institutionen bei der Anschaffung von Antidekubitus-Matratzen finanziell unterstützt werden.

In der Prophylaxe von Druckgeschwüren werden heute geeignete Anti-Dekubitus-Lagerungssysteme eingesetzt, wobei hier unter anderem spezielle Matratzen aus Weichschaumstoffen zum Einsatz kommen. Diese Matratzen erfüllen zwar weitestgehend die gewünschten medizinischen Qualitätsansprüche, wie klimatische Eigenschaften zur Belüftung der Haut des Patienten, hohe Punktlastizität, Dauerelastizität und Formstabilität, sind aber bei weitem noch nicht hinsichtlich ihres Gewichtes und der Verteilung von Druckspitzen optimiert (gewichtsspezifische mechanische Eigenschaften). Ob solche Systeme aber die Druck- und Scherbeanspruchung von exponierten Stellen (Prädilektionsstellen) des Patienten wie Kopf, Schulter, Steißbeinregion, Ferse etc. im gewünschten Maße herabsetzen können, ist zur Zeit nur schwer einschätzbar. Bis heute fehlen immer noch objektive Beurteilungs-Kriterien biomechanischer Wirkungen von Sitz- und Liegesystemen auf den menschlichen Körper Bienstein u. Schröder (1993), Bienstein u. a. (1997). Derzeit wird die Überprüfung der mechanischen Eigenschaften auf die Durchführung einer Druckverteilungsmessung reduziert. Diese Messung ist bisher nicht standardisiert, so dass unterschiedliche Messsysteme und unterschiedliche Belastungsverfahren zum Einsatz kommen. Zusätzlich gibt es bisher keinen Nachweis, dass eine Druckverteilungsmessung eine Korrelation zu den klinisch relevanten Eigenschaften eines Antidekubitus-Systems hat. Erschwerend kommt hinzu, dass sich die erhältlichen Messsysteme hinsichtlich ihrer Messcharakteristik unterscheiden, so dass die Ergebnisse untereinander nur schwer zu vergleichen sind.

Bislang eingesetzte Messsysteme zur Erfassung der Auflagedrücke sind für die Beurteilung von Liegesystemen unzureichend, da sie ausschließlich das Druckprofil an der Hautoberfläche messen, während pathophysiologisch relevante Drücke und insbesondere Scherkräfte in tiefergelegenen Gewebeschichten eine wesentlich bedeutendere Rolle in der Entwicklung eines Dekubitus spielen. Die Analyse der Entstehung von Dekubitalgeschwüren, insbesondere Geschwüre 3. und 4. Grades, deutet darauf hin, dass sich eine Schädigung vom Knochen bis hin zur Haut ausbreitet und damit von innen nach außen wirkt. Eine Messung des Druckes an der Hautoberfläche sagt in diesem Fall vermutlich nur wenig aus. Druckspannungen und in wahrscheinlich viel größerem Maße die Scher- oder Schubspannungen sind von immenser Bedeutung. Erst wenn diese biomechanischen Verhältnisse bekannt sind, ist überhaupt eine objektive Aussage darüber möglich, wie günstig oder ungünstig eine Unterlage bzw. ein komplettes Sitz- oder Liegesystem im Pflegebereich einzustufen ist.

Da ein Dekubitus ohne äußere Druckeinwirkung niemals entstehen kann, besteht aus pathophysiologischer Sicht bei der Prophylaxe und Therapie die primäre Aufgabe in der Druckentlastung. Dieses Kriterium sollte auch gleichzeitig eine zentrale Stellung im Rahmen einer Qualitätseinschätzung eines Anti-Dekubitus-Systems einnehmen. Ziel muss es daher sein, geeignete druckreduzierende Hilfsmittel ausreichend verfügbar zu machen.

Eine diesbezügliche Untersuchung im Rahmen eines Gesamtsystems Mensch-Matratze könnte aber einerseits die Einflussparameter von Material und Querschnittsgeometrie der Matratze auf die Entstehung eines Dekubitus aufdecken und damit eine Möglichkeit eröffnen, bereits im Vorfeld einer Fertigung durch Simulation am Rechner Gestaltungsvorgaben für eine optimale Anti-Dekubitus-Matratze zu entwickeln. Andererseits könnten somit auch gewichtsoptimiertere Formen erzeugt werden, die eine verringerte Umweltbelastung und reduzierte Herstellungskosten nach sich ziehen würden.

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Entwicklung eines Verfahrens auf Basis ingenieurwissenschaftlicher und medizintechnischer Methoden, wie den CT-, MRT-, CAD- und FE-Technologien zur Simulation der Verformungen kompletter Körperregionen aus Weichgewebeverbänden, wie z. B. Haut, Fettgewebe, Muskel, Knochen sowie zur Berechnung von deren Spannungs- und Verzerrungsfeldern bei Interaktion mit einer elastischen Unterlage. Damit sollen dann insbesondere die Spannungs- und Verzerrungszustände in dekubitusgefährdeten Körperregionen (Prädilektionsstellen), wie etwa Schulter, Steiß, Becken, Ferse, abgeschätzt werden können. In Bild 1.1 ist die Situation einer auf einer elastischen Unterlage liegenden Person schematisch dargestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wird aus rechen-ökonomischen Gesichtspunkten für eine solche Prädilektionsstelle exemplarisch die Ferse ausgewählt, so dass im Folgenden (vgl. Kapitel 5) als Gesamtsystem stets die Fersenregion mit Unterlage zu verstehen ist.

## 1.2 Stand der Entwicklung

### 1.2.1 Polymere Weichschaumstoffe

Hinsichtlich einer mechanischen Beschreibung von Polymerschäumen, insbesondere von Weichschäumen, existieren wenige Publikationen. So beziehen sich die zwei

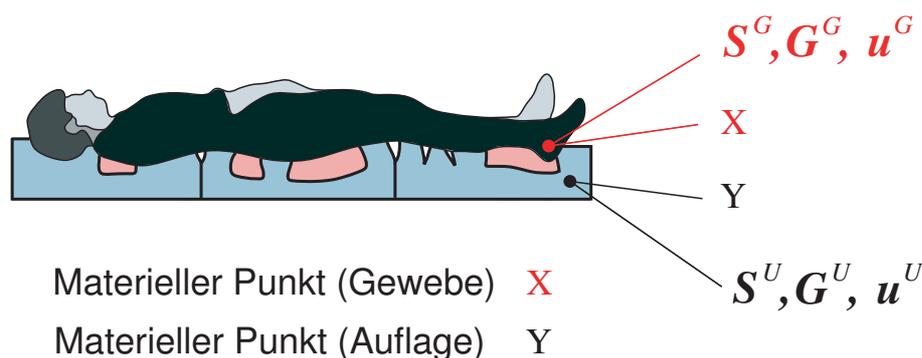


Bild 1.1: Gesamtsystem Person/Unterlage mit den Spannungs-, Verzerrungs- und Verschiebungsgrößen  $S$ ,  $G$ , und  $u$  (Unterlage Index  $U$ , Gewebe Index  $G$  in den materiellen Punkten X und Y)

Arbeiten von Renz (1977) und Renz (1978) ausschließlich auf Hartschaumstoffe. Eine weitere Untersuchung von Czysz (1986) behandelt zwar Polyurethan-Integral-Weichschaum, beschränkt sich aber im Rahmen einer Modellierung auf ein linear-elastisches Materialgesetz. Nichtlineare, auf dem klassischen Kontinuumsmodell basierende Beschreibungen polymerer Schäume konzentrieren sich derzeit auf hyperelastische Ansätze für kompressible Medien mit speziellen Verzerrungsenergiefunktionen (VEF). Dabei liegen den meisten Ansätzen die von Ogden (1972) vorgeschlagenen VEF inkompressibler Medien zugrunde, die für den kompressiblen Fall durch eine in der dritten Invarianten des Deformationsgradienten formulierte „Volumendehnungsfunktion“ erweitert wird. In diesen Theorien wird üblicherweise für den Deformationsgradienten bzw. die VEF ein multiplikativer Split in einen Volumen- und Gestaltänderungsanteil durchgeführt Simo u. Taylor (1991), der allerdings im Falle großer Verzerrungen, entsprechend der von Eipper (1998) durchgeführten Untersuchungen, auf unphysikalische Effekte führt. Des weiteren werden zwecks einer detaillierteren Beschreibung von Schaumstoffstrukturen ambitioniertere Kontinuumsmodelle vorgeschlagen. So wenden Ehlers u. Markert (2003) eine auf der Mischungstheorie mehrphasiger Materialien basierende kontinuumsmechanische Theorie poröser Medien auf polymere Weichschäume an, womit das volumengekoppelte Festkörper-Fluid-Problem erfasst wird. Von Wang u. Cuitino (2000) wird eine hyperelastische Kontinuumstheorie vorgestellt, die von der kinematischen Beschreibung einer einzelnen auf Zug/Druck und Biegung beanspruchten Zelle ausgeht und auf Schäume mit unregelmäßiger offenzelliger Struktur angewendet wird.

Eine auf der Finite Elemente Methode basierende Untersuchung offenzelliger Polyurethanschäume wird von Mills u. Gilchrist (2000) durchgeführt, wobei die im FE-Programm ABAQUS implementierte VEF für hochkompressible Schaumstoffe („Hyperfoam“) zugrunde gelegt wird. Allerdings werden dort lediglich Parameterstudien mit experimentellen Befunden verglichen und eine stringente Identifikation der Materialparameter des verwendeten Modelles fehlt. Der für die Volumendehnungsfunktion wichtige Materialparameter  $\beta$  wird a priori Null gesetzt, so dass eine Entscheidung hinsichtlich der Eignung dieses Modells für das untersuchte Material offen bleibt. Bei den zugrunde gelegten Experimenten wurde keine Separation der elastischen von den inelastischen Eigenschaften durchgeführt.

In dieser Arbeit soll eine Untersuchung von Polyurethanweichschäumen ebenfalls wie in Mills mittels der in ABAQUS angegebenen VEF durchgeführt werden Mills u. a. (2003). Die Materialidentifikation wird mit Hilfe einer numerischen Routine, welche mit dem FE-Code ABAQUS gekoppelt ist, auf der Basis eines uniaxialen Druckversuchs sowie eines (dreidimensionalen) Indenterversuchs durchgeführt. Die der Untersuchung zugrunde liegende, auf Ogden (1972) und Hill (1978) zurückgehende spezielle VEF, in ABAQUS unter dem Namen „Hyperfoam“ geführt, enthält keinen Split in einen Volumen- und Gestaltänderungsanteil und wurde von Storakers (1986) bereits auf kompressible Gummimaterialien angewandt. Dabei werden im Folgenden nur offen-zellige Schäume mit einem mittleren Porendurchmesser von etwa 0,1 mm untersucht, wobei die mesomechanische Zellstruktur mit Hilfe des klassischen Kontinuummodells als „verschmiert“ beschrieben wird.

### 1.2.2 Humanes Weichgewebe

Dreidimensionale Darstellungen von humanem Weichgewebe werden zwar im Visible Human Project basierend auf 3D-Rekonstruktionen von aus ein bis drei Millimeter dicken Scheiben menschlichen Gewebes bereitgestellt, wobei diese Scheiben jedoch aus einer zerschnittenen männlichen Leiche (*ex-vivo*) stammen und nur in einer Konfiguration vorliegen National Library of Medicine 2001. In anderer Weise werden bei den bildgebenden Verfahren, wie der Magnetresonanztomographie (MRT), der Computertomographie (CT) oder der Röntgentomographie (RT), aus virtuellen zweidimensionalen Schnitten mittels Software 3D-Rekonstruktionen erzeugt. Diese Verfahren eignen sich besonders gut zur Darstellung von Knochen im Gewebeverband und wurden von Murdoch u. a. (2002) und Sahoun u. a. (2000) zur Darstellung

von Oberarmknochen, Rückgrat und Rippe benutzt. Bei diesen Verfahren unterscheiden sich die Knochen vom Weichgewebe signifikant in ihren Grauwerten. Zur geometrischen Bestimmung unterschiedlicher Weichgewebe ist die Trennung nach Grauwerten allerdings nicht mehr eindeutig, so dass zur Unterscheidung der Gewebearten ein manuelles Nacharbeiten notwendig ist, wie dies von Maenhout u. a. (2000) für Muskelverformungen gezeigt wird. In Reger u. a. (1990) wird zur Ermittlung der mechanischen Eigenschaften unterschiedlicher Gewebearten nicht zwischen den einzelnen Gewebearten unterschieden. Andererseits erfolgt die Bestimmung mechanischer Messwerte entweder durch die Isolation einzelner Gewebe und eine direkte Bestimmung der Geometrie in der Bezugs- und Momentankonfiguration Maenhout u. a. (2000), Moes (2003) und Pini u. a. (2004), oder es wird der Gesamtverbund in der Bezugs- und Momentankonfiguration mittels eines bildgebenden Verfahrens betrachtet, wie dies von Reger u. a. (1990) publiziert wurde.

Zur mathematischen Modellierung des mechanischen Verhaltens von Geweben kommen weitestgehend kontinuumsmechanische Modelle zum Einsatz. Von Daly (2000) und Natali (2000) werden für das elastische Stoffverhalten von Gewebe hauptsächlich nicht-lineare Stoffgesetze angewandt und weiterführend in Anderson (2000) und Vana (2000) das viskoelastische Verhalten mittels linear-viskoelastischer Materialgleichungen abgebildet. In Sacks (2000) wird am Beispiel biaxialer Tests die Berechnung planarer biologischer Strukturen auf der Basis kontinuumsmechanischer Ansätze (insbesondere hyperelastischer Materialien) vorgestellt.

Bezüglich der Auswertung experimenteller Befunde menschlicher Gewebe mittels der FEM sind Publikationen in nur spärlichem Maße zu finden, wobei eine diesbezügliche Recherche im Folgenden aufgeführt sei: Hu u. Desai (2002) untersuchen die mechanischen Eigenschaften von humanem Weichgewebe in Form eines sogenannten local effective modulus (LEM) bei großen Verformungen, allerdings am Beispiel der Leber und auf Basis von *ex-vivo*-Experimenten. Moes u. Horvath (2002) geben eine FE-Modellierung für einen Oberschenkel in Sitzstellung an, wobei die Knochengometrie aus den Daten des Visible Human Project entsprechend *Visible Human Project* genommen und die Materialkennwerte mittels eines eindimensionalen NEO-HOOKE-Modelles bestimmt bzw. der Literatur entnommen wurden. Darauf basierend entwickelt Moes (2003) eine FE-Modellierung für den Bereich des Sitzbeines, basierend auf dem MOONEY-RIVLIN-Modell, jedoch ohne konkrete Identifikation der Materialkoeffizienten in Verbindung mit geeigneten experimentellen Befun-

den. Eine Analyse von Hirota u. a. (2003) beschäftigt sich lediglich mit der theoretischen FE-Modellierung des Kontaktproblem von Humangewebe (insbesondere das Bein betreffend), jedoch ohne einen Vergleich mit Messdaten. Eine weitere, ebenfalls eher theoretische Arbeit von Teran u. a. (2003) untersucht die Modellierfähigkeit des Skelett-Muskel-Systems mittels der Finite Volumen Methode (FVM) auf Basis der Hyperelastizität, jedoch ohne Verwendung konkreter Materialkoeffizienten und ohne experimentelle Abstützung. Dagegen wird von Samani u. Plewes (2004) zwar eine Methode zur Identifikation der Parameter eines hyperelastischen Materialgesetzes mittels eines FE-Solvers für Brustgewebe angegeben, allerdings wieder basierend auf *ex-vivo*-Experimenten. Von Lemos u. a. (2001) wird ein allgemeines Berechnungsmodell auf Basis einer FEM-Analyse für die Bestimmung der Deformation eines Muskel-Skelett-Verbundes während der Kontraktion vorgeschlagen, jedoch wird hierbei (mangels experimenteller Befunde bei großen Verformungen) das streng-lineare HOOKsche Materialgesetz zugrunde gelegt, so dass diese Analyse für die in dem geplanten Vorhaben zu lösenden Probleme nicht brauchbar ist.

Schließlich ist durch die ESI Group ESI (2005) eine Datenbank für 3D-Daten der unteren Extremitäten des menschlichen Skeletts entwickelt worden, die in eine anschließende FEM-Simulation eingegeben werden kann. Allerdings enthalten diese Datenbanken keine 3D-Daten für humane Weichteile und bei den Modellen handelt es sich um „Einheits-Modelle“ vom Menschen, so dass die Wiedergabe eines Individualkörpers nicht möglich ist.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass in der einschlägigen Literatur zwar Einzelaspekte bezüglich der Messung und Berechnung von Eigenschaften von Humangeewebe (Weichgewebe und Knochen) vorzufinden sind, diese aber im Hinblick auf eine Entwicklung eines Verfahrens zur numerischen Simulation der Verformungen kompletter Körperregionen aus Gewebeverbänden mittels medizintechnischer Methoden im Rahmen dieser Arbeit letztlich nur wenig beitragen können. Für Letzteres wird eine stringente Daten-Auswerte-Kette von der Erfassung relevanter Körperregionen im unbelasteten und belasteten Zustand durch die MRT bis hin zur numerischen Simulation des Gesamtsystems Mensch/Unterlage mittels FEM benötigt, woraus dann auch eine adäquate Systematik zur Beschreibung des biomechanischen Status beliebiger anderer relevanter Körperregionen während des Liegens und/oder Sitzens ableitbar ist.

## 1.3 Inhalt der Arbeit

Im Anschluss an die Einleitung werden in Kapitel 2 dieser Arbeit zunächst die Grundlagen der Kontinuumsmechanik aufbereitet. Insbesondere werden einige wichtige Begriffe und Definitionen sowie die wichtigsten Verzerrungs- und Spannungsmaße eingeführt. Im Hinblick auf die nachfolgenden Kapitel werden vor allem auch Bilanzgleichungen sowie basierend auf den Prinzipien der Rationalen Mechanik (Determinismus, Objektivität, lokale Nachbarschaft) die reduzierten Formen für Materialgleichungen angegeben. Aus letzteren werden schließlich gängige Formen der Materialgleichung hyperelastischer kompressibler Medien konkretisiert. Weiterhin wird die Idee der Finiten Elemente Methode kurz skizziert, wobei insbesondere auf Basis der (lokalen) Impulsbilanz die schwache Formulierung des Gleichgewichtes erzeugt wird. Darauf aufbauend wird das weitere Vorgehen wie die Linearisierung der Variationsformulierung und deren Diskretisierung im Hinblick auf die Anwendung eines Algorithmus zur Lösung nicht-linearer Gleichungssysteme angerissen.

Die zentralen Kapitel 3 bis 5 beinhalten dann die Beschreibung der kompletten „Auswertekette“ vom (im Falle der Ferse) bildgebenden Verfahren (Magnetresonanztomographie) bis hin zur Simulation des Gesamtsystems Ferse/Unterlage mittels der FEM. So beschäftigt sich Kapitel 3 eingehend mit der Materialidentifikation polymerer Weichschaumstoffe auf Basis eigener Experimente (uniaxialer Druckversuch, Indenterversuch) sowie geeigneter Optimierungsroutinen zur numerischen Bestimmung der in dem hyperelastischen Materialgesetz OGDEN-HILL für kompressible Stoffe auftretenden Materialparameter bei großen Verformungen. Dabei werden zwei unterschiedliche offenzellige Polyurethan-Schaumstoffe, die bereits für gängige, auf dem Markt befindliche Produkte verwendet werden, zugrunde gelegt. Das mit Hilfe des uniaxialen Druckversuchs determinierte hyperelastische Materialgesetz wird anhand eines (inhomogenen) Indenterversuchs für beide Schaumstofftypen verifiziert.

Im vierten Kapitel wird die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von humanem Weichgewebe (Ferse) durchgeführt. Da die Aussagen für „lebendes“ Humangewebe gelten sollen, wird hierfür ein *in-vivo*-Versuch generiert, mittels dessen dann die Materialidentifikation des in der betrachteten Fersenregion hauptsächlich vorhandenen Fettgewebes durchgeführt wird. Die Erzeugung der Geometriedaten der unbelasteten und belasteten Ferse wird mit der MRT und deren weitere Auswertung mit Hilfe einer 3D-Rekonstruktionssoftware bewerkstelligt. Das mit diesen Daten generierte

---

FE-Fersen-Modell dient dann zusammen mit den gemessenen Kraft-Weg-Daten einer anschließenden Identifikation der biomechanischen Materialparameter des zugrunde gelegten Materialgesetzes für schwach-kompressible Materialien.

In Kapitel 5 wird dann auf Basis der in den beiden Kapiteln 3 und 4 aufbereiteten FE-Modelle inklusive der determinierten Materialgesetze für die beiden polymeren Weichschäume und das Fettgewebe der Ferse die Berechnung und Simulation des Gesamtsystems Ferse/Unterlage vollzogen. Hierbei werden insbesondere die infolge der mechanischen Interaktion sowohl in der Kontaktfläche zwischen Ferse und Unterlage als auch im Humangewebe entstehenden Spannungen analysiert.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf eine mögliche Verbesserung der Modelle gegeben. Die Arbeit wird durch einen Anhang „Vektor- und Tensoroperationen“ abgerundet, worin für die Arbeit wichtige Regeln der Tensoralgebra und -analysis angegeben werden.

# Kapitel 2

## Kontinuumsmechanische Grundlagen

Zum besseren Verständnis dieser Arbeit werden im Folgenden die wichtigsten Begriffe und Relationen aus der Kontinuumsmechanik zusammengestellt, wobei infolge des zu behandelnden Problems aus dem Bereich der Festkörpermechanik mit einzelnen Ausnahmen auf die LAGRANGESche Betrachtungsweise eingeschränkt wird. Die folgende Zusammenstellung lehnt sich im Wesentlichen an die Ausführungen in Silber u. Steinwender (2005), Altenbach u. Altenbach (1994), Holzapfel (2000) an, ist aber auch in anderen Standardwerken zu finden.

### 2.1 Konfiguration und Bewegung

In der Kinematik werden zwei unterschiedliche Lagen bzw. Konfigurationen eines Körpers betrachtet: Die Bezugs- oder Referenzkonfiguration (BKFG), die der Körper in seiner unverformten Ausgangslage zu einer Referenzzeit  $t = t_0$  einnehmen soll, sowie die Momentankonfiguration (MKFG), welche den Körper in seiner verformten Momentanlage zu einer beliebigen Zeit  $t$  repräsentiert (vgl. Bild 2.1). Dabei nimmt der Körper  $K$  zur Zeit  $t_0$  den Raumbereich  $\Omega_0$  und zur Zeit  $t$  den Raumbereich  $\Omega$  ein. Bezeichnet man mit  $\kappa_0$  die Bezugskonfiguration, so wird gemäß  $\mathbf{X} = \kappa_0(\mathbf{X}, t_0)$  jedem materiellen Punkt  $\mathbf{X} \in K$  zur Zeit  $t_0$  durch  $\kappa_0$  seine Lage  $\mathbf{X}$  in der BKFG zugeordnet. Damit ist das Teilchen  $\mathbf{X}$  in der BKFG eindeutig identifiziert. Analog wird mit der Konfiguration  $\kappa$  über  $\mathbf{x} = \kappa(\mathbf{X}, t)$  jedem materiellen Punkt  $\mathbf{X} \in K$  in der MKFG seine räumliche Lage  $\mathbf{x}$  zu einer beliebigen Zeit  $t$  zugeordnet. Dabei gibt der Vektor  $\mathbf{x}$

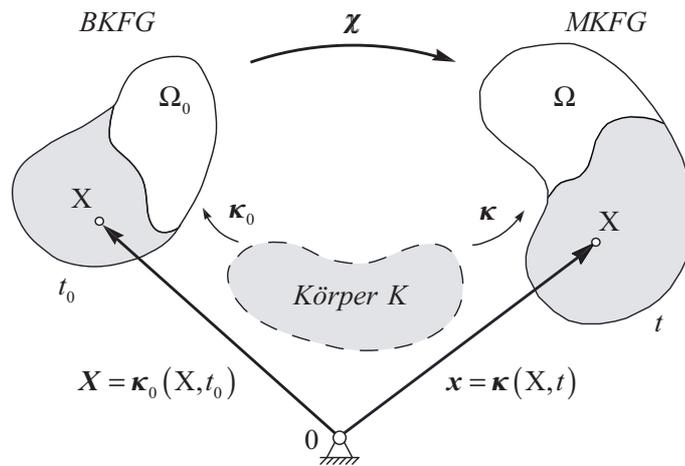


Bild 2.1: Kinematik eines Körpers

die „räumlichen“ Koordinaten von  $X$  in der MKFG an. Setzt man voraus, dass  $\boldsymbol{\kappa}_0$  invertierbar ist – also  $\boldsymbol{\kappa}^{-1}$  existiert – so liegt eine ein-eindeutige Abbildung vor, die eine Invertierung nach dem materiellen Punkt mit  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t_0)$  erlaubt. Mit der Abkürzung  $\boldsymbol{\chi}[\boldsymbol{\kappa}_0^{-1}(\mathbf{X}, t_0), t] = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$  lässt sich schließlich der funktionelle Zusammenhang zwischen den beiden Ortsvektoren in der MKFG und der BKFG  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{X}$  wie folgt angeben:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

Die vektorielle Funktion  $\boldsymbol{\chi}$  in (2.1) vermittelt eine Abbildung des in der BKFG durch die materielle Lage  $\mathbf{X}$  zur Zeit  $t_0$  gekennzeichneten materiellen Punktes  $X$  in die räumliche Lage  $\mathbf{x}$  desselben materiellen Punktes zur Zeit  $t$  in der MKFG (vgl. Bild 2.1). Man bezeichnet  $\boldsymbol{\chi}$  auch als die auf die Referenzkonfiguration  $\boldsymbol{\kappa}_0$  bezogene Momentankonfiguration.

## 2.2 Verschiebungsvektor, Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor

Beim Übergang von der BKFG in die MKFG erfährt jeder materielle Punkt  $X$  eines Körpers eine Verschiebung, die durch den Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  repräsentiert wird. Entsprechend Bild 2.2 lässt sich dieser grundsätzlich aus der Differenz der beiden Ortsvektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{X}$  des Teilchens  $X$  in der BKFG und der MKFG wie folgt

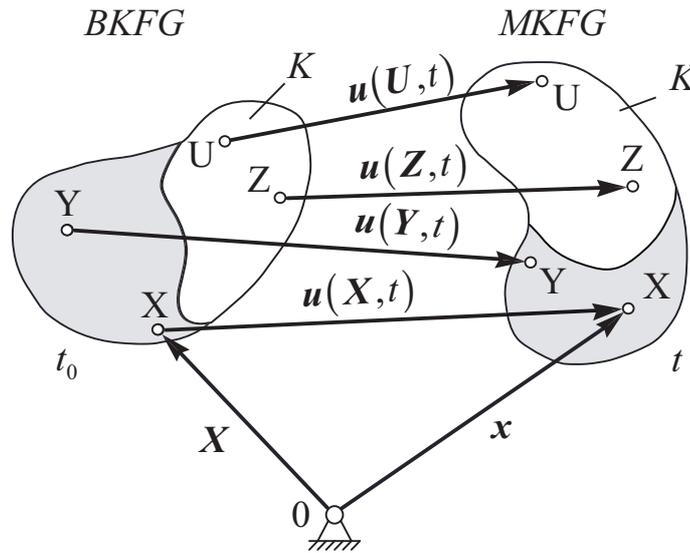


Bild 2.2: Verschiebungsvektoren materieller Punkte (Verschiebungsfeld)

berechnen:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

Der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  eines Teilchens  $\mathbf{X}$  zur Zeit  $t$  ist generell mit  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  durch die Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  (MKFG) nach der Zeit definiert, wobei diese Ableitungsvorschrift auch als materielle oder substantielle Zeitableitung bezeichnet wird. Mit (2.1) und (2.2) gilt dann

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

Der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  eines materiellen Punktes  $\mathbf{X}$  zur Zeit  $t$  ist durch die zeitliche Differentiation des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$  definiert, so dass mit (2.3) gilt

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

## 2.3 Deformations- und Verschiebungsgradient, polares Zerlegungstheorem

Eine zentrale Rolle in der Kontinuumsmechanik spielt die Ableitung der Bewegung  $\boldsymbol{\chi}$  nach dem Lagevektor  $\mathbf{X}$  (in der BKFG), welche als Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  be-

zeichnet wird. Mit dem materiellen NABLA-Operator  $\nabla_0$  lässt sich dann auch die folgende Alternativdarstellung angeben

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} = \mathbf{x} \nabla_0 \quad (2.5)$$

Infolge der Ableitung des (Orts-)Vektors  $\mathbf{x}$  nach dem (Lage-)Vektor  $\mathbf{X}$  entsteht ein Tensor zweiter Stufe. Mittels des Deformationsgradienten kann noch wie folgt die Transformation von Linielementen erzeugt werden: Ist  $d\mathbf{x}$  ein gerichtetes Linielement in der MKFG, so erhält man durch Bildung des totalen Differentials der Bewegung entsprechend (2.1) für einen festen Zeitpunkt  $t$  (Transformation von Linielementen)  $d\mathbf{x} = d[\chi(\mathbf{X}, t)] = (\partial\chi/\partial\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X}$ , woraus sich mit der Definition des Deformationsgradienten entsprechend (2.5) schreiben lässt

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \equiv (\mathbf{x} \nabla_0) \cdot d\mathbf{X} \quad (2.6)$$

Im Zusammenhang mit der Linearisierung von Verzerrungstensoren ist noch die Verknüpfung des Deformationsgradienten mit dem Verschiebungsfeld wichtig, wozu zweckmäßigerweise der materielle Verschiebungsgradient  $\mathbf{H}_0$  entsprechend

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{u} \nabla_0 \quad (2.7)$$

definiert wird. Dabei wird der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  in materieller Darstellung entsprechend (2.2) mittels des materiellen NABLA-Operators  $\nabla_0$  nach den materiellen Koordinaten differenziert

$$\mathbf{u} \nabla_0 = (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \nabla_0 = \underbrace{\mathbf{x} \nabla_0}_{\mathbf{F}} - \mathbf{X} \nabla_0 = \mathbf{F} - \mathbf{X} \nabla_0 \quad (2.8)$$

Mit  $\mathbf{X} \nabla_0 = (X_i \mathbf{e}_i) (\partial/\partial X_j \mathbf{e}_j) = \partial X_i \partial X_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{I}$  sowie Einsetzen in (2.7) führt dann auf den Zusammenhang

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \mathbf{u} \nabla_0 \quad (2.9)$$

Der entsprechend (2.5) definierte Deformationsgradient enthält Verzerrungen, sowie rotatorische Anteile, was anhand der polaren Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.10)$$

deutlich wird. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  ist invertierbar und kann auf zweierlei Art eindeutig multiplikativ zerlegt werden, und zwar in einen rechten bzw. linken

Streckungstensor  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  und einen Drehtensor oder Versor  $\mathbf{R}$ . Die Streckungstensoren  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  sind symmetrische und positiv definite Tensoren und beschreiben die Konfigurationsänderung von Linien-, Flächen-, Volumenelementen etc. bei unverdrehten Hauptrichtungen, d.h. Linienelemente, die in Richtung der lokalen Hauptachsen orientiert sind, werden nur gestreckt bzw. gestaucht. Der Drehtensor  $\mathbf{R}$  ist ein eigentlich orthogonaler Tensor mit  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$  bzw.  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$  und  $\det \mathbf{R} = +1$ . Durch  $\mathbf{R}$  wird die Starrkörperdrehung der lokalen Hauptrichtungen (Hauptachsendreibein) angegeben.

## 2.4 Verzerrungstensoren

Bei der Transformation eines materiellen Linien-, Flächen- oder Volumenelementes von der BKFG in die MKFG durch den Deformationsgradienten sind entsprechend dem polaren Zerlegungstheorems (2.10) noch eventuelle Starrkörperrotationen vorhanden, die aber bei einer Betrachtung der reinen Deformation eines Körpers keinen Einfluss auf die Spannungen haben. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig, Verzerrungsmaße zu definieren, die keine Drehanteile mehr enthalten. In der Kontinuumsmechanik gibt es eine Vielzahl von möglichen Verzerrungsmaßen, von denen im Rahmen dieser Arbeit lediglich vier der wichtigsten angegeben werden.

**Rechter CAUCHYscher Verzerrungstensor:** Für die Festlegung von Verzerrungsmaßen ist es zweckmäßig, von den Transformationen der Quadrate der Linienelemente auszugehen. Wird mit  $d\mathbf{x}$  das Linienelement in der MKFG bezeichnet, ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.6) und der Tatsache, dass ein Vektor gleich seinem Transponierten ist, also  $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x}^T = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X})^T = d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{F}^T = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T$  der folgende Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes

$$(d\mathbf{x})^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot \underbrace{(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})}_{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.11)$$

worin

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C}^T \quad (2.12)$$

als rechter CAUCHYscher oder CAUCHY-GREENScher Verzerrungstensor bezeichnet wird.

**Linker CAUCHYscher Verzerrungstensor:** Wird das Quadrat des Linienelementes  $d\mathbf{X}$  in der BKFG gebildet, so folgt unter Beachtung der Invertierung von

(2.6) der Ausdruck,

$$(d\mathbf{X})^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \underbrace{\left( \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \right)}_{\mathbf{B}}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.13)$$

worin

$$\mathbf{B} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{B}^T \quad (2.14)$$

als linker CAUCHYscher oder CAUCHY-GREENScher Verzerrungstensor bezeichnet wird.

**Rechter GREENScher Verzerrungstensor:** Der Fall  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  ist dadurch ausgezeichnet, dass keine Deformation, sondern allenfalls eine reine Starrkörpertranslationsbewegung stattfindet. Für diesen Fall gehen die beiden Verzerrungstensoren (2.12) und (2.14) ebenfalls jeweils in den Einheitstensor über. Erst bei von einer Starrkörperbewegung abweichenden Bewegung bzw. Deformation werden durch diese Verzerrungstensoren Verformungen wiedergegeben. Insbesondere im Rahmen der Entwicklung von Materialgesetzen werden jedoch solche Verzerrungsmaße bevorzugt, die für Starrkörperbewegungen nicht den Wert „Eins“, sondern „Null“ annehmen und damit dann auch die Spannungen erwartungsgemäß Null werden. Zu diesem Zweck wird gewöhnlich die Differenz aus den Quadraten der Linienelemente in der MKFG und der BKFG gebildet. Unter Beachtung von (2.12) und (2.14) ergibt sich folgende Rechnung (man beachte, dass für beliebige Vektoren  $\mathbf{v}$  die Identität  $\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}$  gilt):

$$\begin{aligned} (d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{X} = \\ &= d\mathbf{X} \cdot \underbrace{(\mathbf{C} - \mathbf{I})}_{2\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{X} \end{aligned}$$

worin

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{G}^T \quad (2.15)$$

als der rechte GREENSche oder GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor bezeichnet wird.

**ALMANSIcher Verzerrungstensor:** Bildet man analog zu (2.15) die Differenz der Quadrate der Linienelemente unter Ausnutzung der inversen Darstellung von

(2.6), so erhält man

$$\begin{aligned} (d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \\ &= d\mathbf{x} \cdot \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})}_{2\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

worin

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{A}^T \quad (2.16)$$

als ALMANSIcher Verzerrungstensor bezeichnet wird. Unter Beachtung von (2.15) gelten noch die folgenden Umrechnungen zwischen dem rechten GREENschen und ALMANSIchen Verzerrungstensor:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.17)$$

Die oben definierten Verzerrungstensoren lassen sich noch als Funktion des Verschiebungsgradienten darstellen, wobei im Folgenden lediglich auf den rechten CAUCHYschen bzw. rechten GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensor eingeschränkt werden soll. Einsetzen von (2.9) in (2.12) führt nach Ausmultiplizieren wie folgt auf den rechten CAUCHYschen Verzerrungstensor als Funktion des materiellen Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_0^T + \mathbf{H}_0^T \cdot \mathbf{H}_0 = \mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla_0 + \nabla_0\mathbf{u} + (\nabla_0\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}\nabla_0) \quad (2.18)$$

Weiteres Einsetzen von (2.18) in (2.15) liefert den rechten GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensor als Funktion des materiellen Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_0^T + \mathbf{H}_0^T \cdot \mathbf{H}_0) = \frac{1}{2} [\mathbf{u}\nabla_0 + \nabla_0\mathbf{u} + (\nabla_0\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}\nabla_0)] \quad (2.19)$$

wobei diese Formen auch als Verschiebungs-Verzerrungs-Gleichungen bezeichnet werden. In (2.18) und (2.19) ist zu erkennen, dass die Tensoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{G}$  infolge der Produkte  $(\nabla_0\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}\nabla_0)$  bzw.  $(\mathbf{u}\nabla_0) \cdot (\nabla_0\mathbf{u})$  jeweils nicht-lineare Funktionen des materiellen Verschiebungsgradienten sind.

## 2.5 Spannungsvektoren und –tensoren

**Spannungsvektoren:** Jedem aktuellen Flächenelement  $dA$  im materiellen Punkt  $X$  der Schnittfläche  $A$  wird genau ein Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  zugeordnet. Dieser gibt eine in der MKFG pro Flächenelement  $dA$  übertragene Kraft an, die durch Integration

über die gesamte Schnittfläche auf die resultierende, aktuelle Schnittlast  $\mathbf{K}_S$  führt. Formal lässt sich auch ein Spannungsvektor  $\mathbf{t}_0$  definieren, der auf ein Flächenelement  $dA_0$  in der BKFG bezogen wird und dieselbe aktuelle Kraft  $\mathbf{K}_S$  erzeugt, so dass gilt

$$\mathbf{K}_S = \int_{A_0} \mathbf{t}_0 dA_0 = \int_A \mathbf{t} dA \quad (2.20)$$

Damit ergeben sich zwei wichtige Spannungsdefinitionen: Bei den Nominal-, Nenn- oder Ersten PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungen  $\mathbf{t}_0$  wird die aktuelle (in der MKFG wirkende) Kraft  $\mathbf{K}_S$  auf das Schnittflächenelement  $dA_0$  der BKFG bezogen. Bei den Wahren oder CAUCHYschen Spannungen  $\mathbf{t}$  wird die aktuelle Kraft  $\mathbf{K}_S$  auf das aktuelle Schnittflächenelement  $dA$  der MKFG bezogen. Entsprechend Bild 2.3 können die Spannungsvektoren  $\mathbf{t}_i$  bezüglich einer orthonormierten Basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  in jeweils drei Komponenten mit den jeweiligen Koordinaten  $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}$  und  $\sigma_{i3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) zerlegt werden, so dass gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 = \sigma_{1j}\mathbf{e}_j \\ \mathbf{t}_2 &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 = \sigma_{2j}\mathbf{e}_j \\ \mathbf{t}_3 &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 = \sigma_{3j}\mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (2.21)$$

oder kürzer

$$\mathbf{t}_i = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.22)$$

Unter der Verwendung der EINSTEINSchen Summationskonvention, nach der über zwei gleiche Indizes zu summieren ist, entstehen neun doppelt-indizierte Koordinaten  $\sigma_{ij}$ , wobei der erste Index die Richtung des Normalenvektors des jeweiligen Flächenelementes und der zweite Index die Richtung der Spannungs-Koordinate angibt. Die Spannungskoordinaten mit gleichem Index heißen Normalspannungen ( $\sigma_{ii}$  für  $i = 1, 2, 3$ ), da diese in Richtung des jeweiligen Normalenvektors der Schnittfläche zeigen. Die Koordinaten mit gemischten Indizes werden als Tangential-, Schub- oder Scherspannungen  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) bezeichnet, da diese in der jeweiligen Schnittfläche liegen. Entsprechend (2.21) bzw. (2.22) werden die drei Spannungsvektoren durch neun Spannungskoordinaten  $\sigma_{ij}$  aufgebaut. Somit wird der Spannungszustand in einem materiellen Punkt (Volumenelement) vollständig durch neun Größen beschrieben, die sich zum CAUCHSchen Spannungstensor zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sigma_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sigma_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\ &\quad + \sigma_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ &\quad + \sigma_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

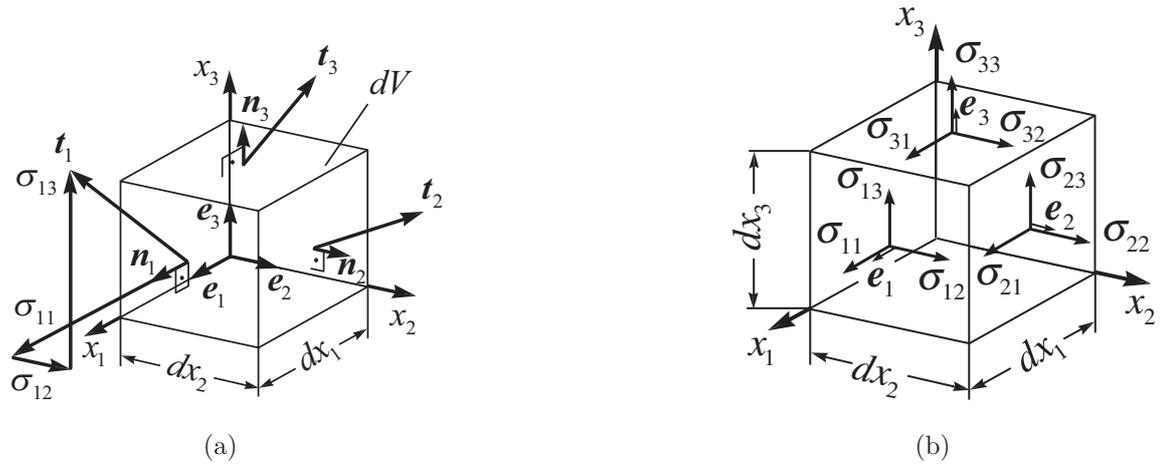


Bild 2.3: Spannungsvektoren an einem Volumenelement  $dV$ : (a) Zerlegung der Spannungsvektoren, (b) CAUCHYsche Spannungen

In tensorieller Notation wird er durch neun Basisdyaden  $e_i e_j$  aufgebaut. Als Ergebnis des Drallsatzes in Abschnitt 2.6 ist der CAUCHYsche Spannungstensor symmetrisch (BOLTZMANN-Axiom), so dass gilt

$$\mathbf{S} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma_{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{S}^T \quad (2.24)$$

Demnach reduzieren sich die neun Spannungskoordinaten auf insgesamt *sechs* voneinander unabhängige Koordinaten.

Eine skalare Multiplikation von (2.24) mit dem Basisvektor  $\mathbf{e}_i$  von links führt auf

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_i \cdot \sigma_{kj} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = \sigma_{kj} \delta_{ik} \mathbf{e}_j = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (2.25)$$

und damit auf den  $k$ -ten Spannungsvektor  $\mathbf{t}_k$  entsprechend (2.22). Für beliebige Schnittrichtungen  $\mathbf{n}$  lässt sich beispielsweise an einem Tetraeder die allgemeinere Beziehung

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \quad (2.26)$$

herleiten Kühhorn u. Silber (2000), wonach der CAUCHYsche Spannungstensor  $\mathbf{S}$  dem Flächenelement  $d\mathbf{A}$  mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  den Spannungsvektor  $\mathbf{t}_n$  zuordnet. Nach (2.26) ist der Spannungsvektor  $\mathbf{t}_n$  eine lineare Funktion des Richtungsvektors  $\mathbf{n}$ , wohingegen aber  $\mathbf{S}$  von  $\mathbf{n}$  unabhängig ist. Bezieht man alle Größen auf die BKFG, ergibt sich entsprechend

$$\mathbf{t}_{0n}(\mathbf{X}, \mathbf{n}_0, t) = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P}^I(\mathbf{X}, t) \quad (2.27)$$

worin mit  $\mathbf{P}^I$  der dem Spannungsvektor  $\mathbf{t}_{0n}$  zugeordnete erste PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor bezeichnet wird. Die Verknüpfung zwischen  $\mathbf{P}^I$  und  $\mathbf{S}$  lässt sich wie folgt erzeugen: Einsetzen von (2.26) und (2.27) in (2.20) (dabei sind jeweils  $\mathbf{t}$  durch  $\mathbf{t}_n$  und  $\mathbf{t}_0$  durch  $\mathbf{t}_{0n}$  zu ersetzen) führt unter Beachtung von  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{a}$  (für beliebige Vektoren  $\mathbf{a}$  und Tensoren  $\mathbf{T}$ ) auf:

$$\begin{aligned} \int_{A_0} \mathbf{t}_{0n} dA &= \int_{A_0} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P}^I dA = \int_{A_0} \mathbf{P}^{IT} \cdot \underbrace{\mathbf{n}_0}_{d\mathbf{A}} dA = \int_{A_0} \underline{\mathbf{P}^{IT} \cdot d\mathbf{A}} = \int_a \mathbf{t}_n da = \\ &= \int_a \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} da = \int_a \mathbf{S}^T \cdot \underbrace{\mathbf{n}}_{da} da = \int_a \mathbf{S}^T \cdot d\mathbf{a} = \int_{A_0} J \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ein Vergleich der beiden unterstrichenen Integranden in (2.28) und anschließender Transposition beider Gleichungsteile liefert für beliebige gerichtete Flächenelemente  $d\mathbf{A}$  den folgenden Zusammenhang zwischen dem ersten PIOLA-KIRCHHOFFschen und dem CAUCHYschen Spannungstensor

$$\mathbf{P}^I = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^I \quad (2.29)$$

Der erste PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor ist im Allgemeinen nicht symmetrisch. Eine Symmetrisierung vom  $\mathbf{P}^I$  führt auf den zweiten PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor, der besonders gerne bei Deformationsprozessbeschreibungen mit großen Drehungen, aber moderaten Verzerrungen („Schalentheorie“) Verwendung findet:

$$\mathbf{P}^{II} = \mathbf{P}^I \cdot \mathbf{F}^{-T} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.30)$$

## 2.6 Bilanzgleichungen

**Massebilanz:** Im Sinne der Kontinuumsmechanik besitzt jeder materielle Körper (Kontinuum) von vornherein Masse, die immer aus den gleichen Partikeln besteht und daher zeitlich unverändert bleibt (Masseerhaltung). Bezeichnet man die Dichte und das Volumen in der MKFG mit  $\rho$  und  $V$ , so gilt für die (Gesamt-)Masse  $m$  eines Körpers

$$m = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.31)$$

Mit der Forderung nach Masseerhaltung ist die substantielle Zeitableitung von (2.31) null, so dass unter Beachtung der Transformationsregel  $dV = J dV_0$  sowie der Zeit-

ableitung der JACOBI-Determinante  $\dot{J} = J \nabla \cdot \mathbf{v}$  mit  $J = \det \mathbf{F}$  folgt

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_{V_0} (\dot{\rho} J + \rho \dot{J}) dV_0 = \int_{V_0} (\dot{\rho} J + \rho J \nabla \cdot \mathbf{v}) dV_0 = 0 \quad (2.32)$$

Da  $V_0$  beliebig gewählt werden kann, muss der Integrand verschwinden was auf die lokale Massebilanz oder Kontinuitätsgleichung in lokaler Form führt:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.33)$$

**Impulsbilanz:** Nach dem Impulssatz der Mechanik ist die Summe der an einem Körper angreifenden äußeren Kräfte  $\mathbf{K}^a$  gleich der zeitlichen Änderung des Impulsvektors  $\mathbf{p}$ , so dass

$$\mathbf{K}^a = \dot{\mathbf{p}} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.34)$$

gilt. Die äußeren Kräfte in (2.34) setzen sich additiv aus dem Vektor der Volumenkraft  $\mathbf{K}^V$  und dem Vektor der Oberflächenkräfte  $\mathbf{K}^O$  zusammen

$$\mathbf{K}^a = \mathbf{K}^V + \mathbf{K}^O \quad (2.35)$$

Im Einzelnen gelten hierbei

$$\mathbf{K}^V = \int_V \mathbf{k}^V dV, \quad \mathbf{K}^A = \int_A \mathbf{t}_n dA, \quad \mathbf{p} = \int_m \mathbf{v} dm = \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (2.36)$$

Einsetzen von (2.35) und (2.36) in (2.34) führt unter Beachtung von (2.27) und dem GAUSSschen Satz (A.3) auf

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{k}^V - \rho \dot{\mathbf{v}}) dV = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

Da das Integral (2.37) für beliebige Volumina  $V$  verschwinden muss, muss der Integrand selbst wieder Null sein. Daraus folgt die lokale Impulsbilanz in räumlicher Darstellung (auch CAUCHY I genannt)

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{k}^V = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (2.38)$$

**Drehimpulsbilanz:** Das zweite Grundgesetz der Mechanik ist der Drallsatz und lautet

$$\mathbf{M}_0^a = \dot{\mathbf{d}}_0 \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{d}}_0 = \frac{d\mathbf{d}_0}{dt} \quad (2.39)$$

Hierbei ist die Summe der an einem Körper angreifenden äußeren Momente  $\mathbf{M}_0^a$  bezüglich eines raumfesten Punktes 0 gleich der zeitlichen Änderung des Drallvektors  $\mathbf{d}_0$  bezüglich desselben Punktes. Dabei setzt sich der resultierende Momentenvektor  $\mathbf{M}_0^a$  additiv aus dem Vektor der Volumenmomente  $\mathbf{M}_0^V$  und dem Vektor der Oberflächenmomente  $\mathbf{M}_0^O$  zusammen:

$$\mathbf{M}_0^a = \mathbf{M}_0^V + \mathbf{M}_0^O \quad (2.40)$$

Für den Vektor der Volumenmomente und der Oberflächenmomente sowie den Drallvektor gelten die folgenden Darstellungen in der MKFG

$$\mathbf{M}_0^V = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{k}^V dV, \quad \mathbf{M}_0^O = \int_A \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dA, \quad \mathbf{d}_0 = \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV \quad (2.41)$$

Einsetzen von (2.40) und (2.41) in (2.39) liefert

$$\int_V \mathbf{x} \times \mathbf{k}^V dV + \int_A \mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) dA = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV \quad (2.42)$$

Wie bei der Impulsbilanz wird das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral durch den GAUSSschen Integralsatz (A.3) unter Beachtung von  $\mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) \times \mathbf{x} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{x})$  umgeformt. Mit der Impulsbilanz (2.38) und unter Beachtung der Produktregel (A.1) ergibt sich zunächst

$$\int_V \left[ \mathbf{x} \times \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{k}^V - \rho \dot{\mathbf{v}})}_0 - \overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{S} \right] dV = - \int_V \overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{S} dV = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

Das verbleibende Integral in (2.43) muss wieder für beliebige Volumina  $V$  verschwinden, was nur dann erfüllbar ist, wenn der Integrand selbst Null ist. Daraus folgt

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

Der Ausdruck (2.44) stellt das Doppeltskalarprodukt des (dreistufigen) antimetrischen Epsilon-Tensors  $\overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$  mit dem CAUCHYschen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  dar, wobei dieses Produkt (aufgrund der Antisymmetrie von  $\overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ) nur dann Null sein kann, wenn  $\mathbf{S}$  symmetrisch ist. Daraus folgt die lokale Drehimpulsbilanz in Form der Symmetrie des CAUCHYschen Spannungstensors, auch CAUCHY II genannt:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.45)$$

**Erster Hauptsatz der Thermodynamik (Energiebilanz):** Zur Lösung thermomechanischer Probleme ist stets der Erste Hauptsatz der Thermodynamik heranzuziehen, der im Rahmen der Physik eine außerordentlich zentrale Rolle spielt. Nach dem Ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist die Summe aus der zeitlichen Änderung der inneren Energie  $U$  und der kinetischen Energie  $E$  gleich der Summe aus Leistung  $P$  der äußeren Kräfte und der zeitlichen Änderung der zugeführten Wärmemenge  $Q$  des gesamten Körpers, also

$$\dot{E} + \dot{U} = P + \dot{Q} \quad (2.46)$$

Bezieht man die kinetische und innere Energie auf die massenspezifischen Größen  $e$  und  $u$ , so lauten die gesamte kinetische und innere Energie  $E$  und  $U$  des Körpers in räumlicher Darstellung

$$E = \int_m e \, dm = \int_V \rho e \, dV \quad \text{mit} \quad e = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} v^2 \quad (2.47)$$

und

$$U = \int_m u \, dm = \int_V \rho u \, dV \quad (2.48)$$

Die äußere Leistung setzt sich additiv aus der Leistung der Volumenkräfte und der Oberflächenkräfte zusammen, so dass

$$P = \int_V \mathbf{k}^V \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_A \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} \, dA \quad (2.49)$$

worin  $\mathbf{k}^V$  die Volumenkraftdichte und  $\mathbf{t}_n$  den entsprechend (2.26) definierten Spannungsvektor am OBERFLÄCHENELEMENT  $dA$  bedeuten. Die zeitliche Änderung der Wärmezufuhr setzt sich additiv aus der Wärmezufuhr über die Oberfläche  $A$  infolge des Wärmeflußvektors  $\mathbf{q}$  und einer Wärmezufuhr im Volumen  $V$  infolge der Strahlungswärme  $r$  zusammen:

$$\dot{Q} = - \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \, dA + \int_V \rho r \, dV \quad (2.50)$$

Die in (2.46) erforderlichen Zeitableitungen erhält man mit (2.47) und (2.48) zu

$$\dot{E} = \int_V \rho \dot{e} \, dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_V \rho \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) dV = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dV \quad (2.51)$$

$$\dot{U} = \int_V \rho \dot{u} dV \quad \text{mit} \quad \rho = \text{const.} \quad (2.52)$$

Einsetzen von (2.49) bis (2.52), in (2.46) führt zunächst auf den ersten Hauptsatz der Thermodynamik in globaler Form

$$\int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \rho \dot{u} dV = \int_V \mathbf{k}^V \cdot \mathbf{v} dV + \underbrace{\int_A \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} dA}_{I_1} - \underbrace{\int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dA}_{I_2} + \int_V \rho r dV \quad (2.53)$$

Zum Erzeugen der lokalen Form ist es notwendig, die beiden Oberflächenintegrale  $I_1$  und  $I_2$  in (2.53) mit Hilfe des GAUSSschen Integralsatzes (A.3) in Volumenintegrale unter Beachtung von (2.26) zu überführen:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_A \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} dA = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} dA = \int_V \underline{\nabla \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v})} dV \\ I_2 &= \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \end{aligned} \quad (2.54)$$

Der in (2.54) unterstrichene Integrand lässt sich mit der Produktregel (A.2) und dem räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L} := \mathbf{v} \nabla$  wie folgt ausdrücken

$$\nabla \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{L} \quad (2.55)$$

Einsetzen von (2.54) in (2.53) mit (2.55) liefert

$$\begin{aligned} &\int_V \left[ \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{L} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r - \rho \dot{u} + \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{k}^V - \rho \dot{\mathbf{v}})}_0 \cdot \mathbf{v} \right] dV \equiv \\ &\equiv \int_V (\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{L} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r - \rho \dot{u}) dV = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dabei wurde das Verschwinden des letzten Terms entsprechend der Impulsbilanz (2.37) bewerkstelligt.

Da das Integral (2.56) wieder für beliebige Volumina  $V$  verschwinden muss, muss wieder der Integrand selbst Null sein:

$$\rho \dot{u} = \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{L} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (2.57)$$

Mit der Definition des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \equiv \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) = \mathbf{D}^T \quad (2.58)$$

lässt sich (2.59) unter Beachtung von  $\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{L} = \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D}$  in die übliche lokale Form des Ersten Hauptsatzes der Thermodynamik bezüglich der MKFG überführen:

$$\rho \dot{u} = \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (2.59)$$

Der Term  $\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D}$  wird als auf die Volumeneinheit bezogene spezifische Spannungsleistung bezeichnet.

Mechanische Prozesse werden häufig als adiabatisch (isentrop) betrachtet mit  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  und  $r = 0$ , oder bzw. als isotherm. Daraus folgt aus (2.59) der lokale Leistungssatz der Mechanik (mechanische Bilanzgleichung) in der Form

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\psi} = \frac{1}{\rho} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} \quad (2.60)$$

wonach die auf die Masseneinheit bezogene Rate der inneren Energie mit der spezifischen freien Energie  $\psi = u - T s$  ( $T$  absolute Temperatur,  $s$  spezifische Entropie) gleich der spezifischen Spannungsleistung ist. Aus (2.60) lässt sich noch die folgende, in der Kontinuumsmechanik wichtige Beziehung für die Zuordnung dualer oder zueinander konjugierter Spannungs- und Verzerrungsgrößen ableiten

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P}^{IT} \cdot \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P}^{II} \cdot \cdot \dot{\mathbf{G}} \quad (2.61)$$

## 2.7 Materialgleichung (Materialtheorie)

Eine vollständige Beschreibung und damit auch die Lösung eines kontinuumsmechanischen Problems (etwa Festigkeitsanalyse eines Bauteiles) kann erst dann erfolgen, wenn neben den Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen, der Kontinuitätsgleichung, der Impuls- und Drallbilanz (CAUCHY I und CAUCHYII) sechs weitere skalarwertige Gleichungen in Form einer Materialgleichung zur Verfügung stehen. Materialgleichungen sind grundsätzlich Verknüpfungen zwischen kinematischen Größen (Verzerrungsmaße) und dynamischen Größen (Spannungsmaße). Für eine systematische Erzeugung von Materialgleichungen wurden in den 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts Konstruktionskriterien entwickelt, die heute als „Prinzip der Rationalen Mechanik“ bezeichnet werden und von einer Materialgleichung stets zu erfüllen sind. Diese quasi ein „Naturphilosophisches Konzept“ darstellenden Prinzipien sind im Wesentlichen:

- Kausalität

- Äquipräsenz
- Determinismus
- Materielle Objektivität (Beobachterinvarianz, Rahmeninvarianz)
- Lokale Wirkung (Nachbarschaft)
- Physikalische Konsistenz

Die Konstruktion von Stoffgleichungen auf Basis der genannten Prinzipie kann grundsätzlich auf drei verschiedene Arten erfolgen: Über den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik bzw. über den Leistungssatz der Mechanik (Energiefunktionale), über Funktionaldarstellungen von Spannungs-Verzerrungs-Relationen oder über rheologische Modelle. Im Folgenden wird der Weg über Funktionaldarstellungen skizziert.

### 2.7.1 Reduzierte Form einer allgemeinen Materialgleichung

Nach dem Prinzip der Kausalität ist zunächst die Auswahl der abhängigen und unabhängigen Variablen bei der Bildung der Stoffgleichungen festzulegen. Für rein mechanische Prozesse ist der CAUCHYsche Spannungstensor  $\mathbf{S}$  mit der Bewegung  $\chi$  zu verknüpfen, wobei als abhängige Variable  $\mathbf{S}$  und als unabhängige Variable  $\chi$  festgelegt werden. Das Prinzip des Determinismus besagt, dass der aktuelle Zustand an einem materiellen Punkt des Kontinuums durch die aktuelle Bewegung und die gesamte Bewegungsgeschichte aller anderen materiellen Punkte des Kontinuums bestimmt ist. Der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  am materiellen Punkt  $X$  zur Zeit  $t$  wird somit festgelegt durch die Konfigurationsgeschichte  $\kappa$  aller materiellen Punkte  $Y$  des Körpers  $K$ , und zwar von der entferntesten Vergangenheit bis zur Gegenwart,  $\tau \in [-\infty, t]$ . Damit nimmt die allgemeinste Materialgleichung eines mechanischen Prozesses für homogene, nicht alternde Materialien folgende Form an:

$$\mathbf{S}(X, t) = \underset{\substack{\tau = -\infty \\ X, Y \in K}}{\mathbf{f}} \langle \chi(\mathbf{Y}, \tau) \rangle \quad (2.62)$$

Nach dem Prinzip der materiellen Objektivität darf eine Materialgleichung nicht von der Wahl des Bezugssystems bzw. von der Wahl des Beobachters abhängen. Das bedeutet, dass die Spannungen  $\mathbf{S}$  für zwei zueinander bewegte Beobachter gleich sein müssen. Dabei verfolgen die beiden Beobachter die Bewegungsgeschichte eines materiellen Punktes  $X$  von zwei verschiedenen Bezugspunkten  $O$  bzw.  $O^*$  aus. Die

Auswertung dieses Prinzips hat zur Folge, dass nicht die Bewegungsgeschichte  $\chi$  selbst, sondern deren Differenz (Bewegungs-Differenz-Geschichte) in das Funktional des Spannungstensors eingeht, so dass

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \int_{\substack{\tau=-\infty \\ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K}}^t \langle \chi(\mathbf{Y}, \tau) - \chi(\mathbf{X}, \tau) \rangle \quad (2.63)$$

gilt. Beschränkt man sich auf „einfache Stoffe“, so schreibt das Prinzip der lokalen Nachbarschaft vor, dass der Zustand am materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  nur noch durch seine unmittelbare (infinitesimale) Umgebung beeinflusst werden kann. Unter Ausnutzung einer TAYLOR-Reihenentwicklung der Bewegungs-Differenz-Geschichte geht (2.63) über in

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \langle \mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau) \rangle \quad (2.64)$$

Das Funktional (2.64) hat dabei die Objektivitätsbedingung

$$\mathbf{Q}(t) \cdot \left\{ \int_{\tau=-\infty}^t \langle \mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau) \rangle \right\} \cdot \mathbf{Q}^T(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \langle \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau) \rangle \quad (2.65)$$

zu erfüllen, worin  $\mathbf{Q}(t)$  ein eigentlich orthogonaler Drehtensor ist, für den gilt

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad \text{sowie} \quad \det \mathbf{Q} = +1 \quad (2.66)$$

Durch eine weitere Ausformung des Funktionales (2.64) können nun Materialgleichungen für materialspezifische Aspekte wie Viskoelastizität, Plastizität etc. entwickelt werden, die dann stets die Prinzipie der Rationalen Mechanik erfüllen.

### 2.7.2 GREEN- oder Hyperelastizität

Wird zunächst weiter auf rein elastisches Materialverhalten eingeschränkt, so ist in der Materialgleichung für die Spannungen  $\mathbf{S}$  nicht mehr die Bewegungsgeschichte, sondern lediglich deren aktueller Wert zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  zu berücksichtigen, so dass die Funktionalform (2.64) übergeht in eine tensorwertige Funktion  $\mathbf{f}$  des momentanen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ :

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] \quad (2.67)$$

Die Form (2.67) wird auch als Materialgleichungsform der CAUCHY-Elastizität bezeichnet. Berücksichtigt man im Sinne des Prinzips der physikalischen Konsistenz

die Gesetze der Thermodynamik, so zeigt es sich aufgrund der lokalen mechanische Bilanzgleichung (2.60), das elastische Stoffe zugleich hyperelastisch sind, d.h. die Spannungsarbeit wird als Formänderungsenergie gespeichert aus welcher sich die Spannungen durch Ableitungsoperationen nach den Verzerrungen erzeugen lassen

$$\dot{w} = J\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} \quad (2.68)$$

wobei in den zuvor genannten Grenzfällen  $w = \rho_0 u$  bzw.  $w = \rho_0 \psi$  zu setzen ist. Die Verzerrungsenergiefunktion  $w$  in (2.68) stellt das elastische Potential in Form einer Materialgleichung dar und muss selbst wieder die Prinzipie der Rationalen Mechanik erfüllen. In diesem Sinne muss gelten

$$w = w(\mathbf{F}) = \begin{cases} > 0, & \text{für } \mathbf{F} \neq \mathbf{I} \\ = 0, & \text{für } \mathbf{F} = \mathbf{I} \end{cases} \quad (2.69)$$

wonach  $w$  im Sinne des Prinzipes der Äquipräsenz als eine skalarwertige Funktion des momentanen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  angesetzt wird. Da die Formulierung (2.69) bereits die Prinzipie der Kausalität, des Determinismus und der lokalen Nachbarschaft enthält, ist zur weiteren Reduktion von  $w(\mathbf{F})$  noch das Prinzip der materiellen Objektivität heranzuziehen, wonach  $w$  nur noch vom rechten Streckungstensor  $\mathbf{U}$  abhängen kann, so dass gilt

$$w = w(\mathbf{F}) = w(\mathbf{U}) \quad (2.70)$$

Unter Beachtung des polaren Zerlegungstheorems (2.10) gilt mit (2.12)  $\mathbf{C} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^T \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2$  wonach sich (2.70) wie folgt schreiben lässt

$$w = w(\mathbf{F}) = w(\mathbf{U}) = w(\mathbf{C}) \quad (2.71)$$

Zeitliche Differentiation von (2.71) führt auf

$$\dot{w} = \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \left( \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{C}} \quad (2.72)$$

Eingesetzt in (2.68) erhält man den Zusammenhang

$$\left( \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{C}} = J\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} \quad (2.73)$$

Zur Erzeugung einer Rechenvorschrift für den Spannungstensor  $\mathbf{S}$  ist es erforderlich, (2.73) nach  $\mathbf{S}$  aufzulösen. Da es sich um eine Tensorgleichung handelt, ist eine

Division nicht möglich und es muss ein Vergleich in den Verzerrungsmaßen durchgeführt werden. Dies ist jedoch noch nicht direkt möglich, da (2.73) zwei verschiedene Verzerrungsmaße enthält, von denen eines eliminiert werden muss. Die zeitliche Differentiation des rechten CAUCHYschen Verzerrungstensors (2.12) führt auf

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad (2.74)$$

Der Vergleich von (2.74) mit dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{D}$ , entsprechend (2.58), führt unter Beachtung von  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$  auf den Zusammenhang

$$\dot{\mathbf{C}} = 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.75)$$

Einsetzen von (2.75) in die linke Seite von (2.73) führt unter Beachtung von  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$  auf

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} &= 2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \cdot \mathbf{F}^T \right] \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} = \\ &= 2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \cdot \mathbf{F}^T \right]^T \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{F})^T = \\ &= 2\mathbf{F} \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} = \underline{2\mathbf{F} \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D}} = \underline{J\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Koeffizientenvergleich in  $\mathbf{D}$  des unterstrichenen Teils der Gleichung (2.76) ergibt schließlich die folgende Vorschrift für die Materialgleichungsstruktur des CAUCHYschen Spannungstensors nicht-linearer hyperelastischer anisotroper Materialien:

$$\mathbf{S} = 2J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial w(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.77)$$

Mit Hilfe von (2.29) bzw. (2.30) erhält man aus (2.77) den Ersten bzw. Zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor wie folgt:

$$\mathbf{P}^I = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S} = 2 \frac{\partial w(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{P}^{II} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{-T} = 2 \frac{\partial w(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.78)$$

Eine weitere Einschränkung auf isotrope hyperelastische Materialien verlangt für die Verzerrungsenergiefunktion  $w$  die Erfüllung der skalarwertigen Isotropiebedingung

$$w(\mathbf{C}) = w(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (2.79)$$

Mit Hilfe der Darstellungssätze von Gurtin u. Francis (1981), Rivlin (1948), Trostel (1999) sowie Truesdell u. Noll (1992) lässt sich zeigen, dass dann mit

$$w(\mathbf{C}) = w(C_I, C_{II}, C_{III}) \quad (2.80)$$

die Verzerrungsenergiefunktion  $w$  nur noch eine skalarwertige Funktion der drei Grundinvarianten  $C_i$  des rechten CAUCHYschen Verzerrungstensors entsprechend

$$C_I = \text{Sp } \mathbf{C} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{C}, \quad C_{II} = \frac{1}{2} (C_I^2 - \text{Sp } \mathbf{C}^2), \quad C_{III} = \det \mathbf{C} \quad (2.81)$$

ist. Bildet man jetzt die in (2.77) erforderliche partielle Ableitung  $\partial w / \partial \mathbf{C}$ , so ergibt sich unter Beachtung der Kettenregel

$$\frac{\partial w(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = C_{III} \frac{\partial w}{\partial C_{III}} \mathbf{C}^{-1} + \left( \frac{\partial w}{\partial C_I} + C_I \frac{\partial w}{\partial C_{II}} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial w}{\partial C_{II}} \mathbf{C} \quad (2.82)$$

Einsetzen von (2.82) in (2.77) führt schließlich unter Beachtung der Gleichheit der Invarianten von  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{B}$ , nämlich  $C_i = B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) auf die Materialgleichungen des CAUCHYschen Spannungstensors für isotrope, nicht-lineare, hyperelastische Materialien

$$\mathbf{S} = \mathbf{g}(\mathbf{B}) = 2J^{-1} \left[ B_{III} \frac{\partial w}{\partial B_{III}} \mathbf{I} + \left( \frac{\partial w}{\partial B_I} + B_I \frac{\partial w}{\partial B_{II}} \right) \mathbf{B} - \frac{\partial w}{\partial B_{II}} \mathbf{B}^2 \right] \quad (2.83)$$

Unter Ausnutzung des CAYLEY-HAMILTON-Theorems (A.4) findet man alternativ

$$\mathbf{S} = \mathbf{h}(\mathbf{B}) = 2J^{-1} \left[ -B_{III} \frac{\partial w}{\partial B_{II}} \mathbf{B}^{-1} + \left( B_{II} \frac{\partial w}{\partial B_{II}} + B_{III} \frac{\partial w}{\partial B_{III}} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial w}{\partial B_I} \mathbf{B} \right] \quad (2.84)$$

Entsprechend ergibt sich für den zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor (2.78)

$$\mathbf{P}^{II} = \mathbf{f}(\mathbf{C}) = 2 \left[ C_{III} \frac{\partial w}{\partial C_{III}} \mathbf{C}^{-1} + \left( \frac{\partial w}{\partial C_I} + C_I \frac{\partial w}{\partial C_{II}} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial w}{\partial C_{II}} \mathbf{C} \right] \quad (2.85)$$

Um die Materialgleichungen für nicht-lineare hyperelastische isotrope Stoffe (2.83) bis (2.85) verwenden zu können, muss lediglich noch eine spezielle Verzerrungsenergiefunktion  $w$  gewählt werden. Im Rahmen der FE-Rechnungen in dieser Arbeit wird das FE-Programm ABAQUS verwendet, in welchem die Verzerrungsenergiefunktionen  $w$  und die daraus abgeleiteten Materialgleichungen in Abhängigkeit der Hauptstreckungen des rechten Streckungstensors  $\mathbf{U}$  angegeben sind. Die sich hieraus ergebende Spektraldarstellung der Materialgleichung wird im Folgenden kurz skizziert.

Mit Hilfe des entsprechenden Eigenwertproblems für den rechten Streckungstensor  $\mathbf{U}$ , lässt sich dieser grundsätzlich in die folgende Spektraldarstellung bringen

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i \quad (2.86)$$

worin  $\lambda_i$  die Eigenwerte oder Hauptstreckungen und  $\mathbf{m}_i$  die Eigenvektoren oder Hauptrichtungen von  $\mathbf{U}$  bedeuten. Unter Beachtung des polaren Zerlegungssatzes (2.10) und (2.12) ergibt sich dann die entsprechende Spektraldarstellung für den rechten CAUCHYschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \sum_{i=1}^3 \kappa_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i \quad \text{mit} \quad \kappa_i = \lambda_i^2 \quad (2.87)$$

wobei die drei Eigenvektoren  $\mathbf{m}_i$  und Eigenwerte  $\kappa_i$  von  $\mathbf{C}$  mit Hilfe des Eigenwertproblems  $(\mathbf{C} - \kappa_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{m}_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) zu ermitteln sind. Damit können die drei Grundinvarianten von  $\mathbf{C}$  wie folgt als Funktionen der drei Hauptstreckungen angegeben werden:

$$\begin{aligned} C_I &= \text{Sp } \mathbf{C} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, & C_{II} &= \frac{1}{2} (C_I^2 - \text{Sp } \mathbf{C}^2) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ C_{III} &= \det \mathbf{C} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (2.88)$$

Eingesetzt in (2.80) lässt sich die Verzerrungsenergiefunktion  $w$  auch als Funktion der drei Hauptstreckungen angeben

$$w(\mathbf{C}) = w[C_I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), C_{II}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), C_{III}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] = w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.89)$$

Die in (2.77) benötigten partiellen Ableitungen ergeben sich mit (2.89) zu

$$\frac{\partial w(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial w}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial w}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial w}{\partial \lambda_3} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial w}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.90)$$

Die in (2.90) auftretenden partiellen Ableitungen  $\partial \lambda_i / \partial \mathbf{C}$  können durch folgende Umrechnung erzeugt werden:

$$\frac{\partial \lambda_i^2(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2\lambda_i(\mathbf{C}) \frac{\partial \lambda_i(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \lambda_i(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2\lambda_i(\mathbf{C})} \frac{\partial \lambda_i^2(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.91)$$

Unter Beachtung der entsprechenden spektralartigen Darstellung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \mathbf{m}_i \quad (2.92)$$

worin  $\mathbf{n}_i$  die Eigenrichtungen des linken Streckungstensors  $\mathbf{V}$  bedeuten (für die Darstellung (2.92) ist das entsprechende Eigenwertproblem zu lösen), erhält man schließlich gemäß (2.77) und (2.78) den CAUCHYschen sowie die beiden PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensoren wie folgt:

$$\mathbf{S} = J^{-1} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial w}{\partial \lambda_i} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \quad \text{mit} \quad J = \det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.93)$$

$$\mathbf{P}^I = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial w}{\partial \lambda_i} \mathbf{m}_i \mathbf{n}_i \quad \mathbf{P}^{II} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial w}{\partial \lambda_i} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i \quad (2.94)$$

### 2.7.3 Verzerrungsenergiefunktion hochkompressibler Materialien

In diesem Abschnitt werden die zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Schaumstoffen und humaner Weichgewebe herangezogenen Materialmodelle näher erläutert. Nach ABA (2000) wird für hochkompressible Polymere Schäume die auf Hill (1978) bzw. Ogden (1972) zurückgehende folgende Form der Verzerrungsenergiefunktion (Hyperfoam) angegeben:

$$w = \sum_{k=1}^N 2 \frac{\mu_k}{\alpha_k^2} [\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3 + f(J)] \quad (2.95)$$

Dabei sind  $N$ ,  $\mu_k$  und  $\alpha_k$  Materialparameter sowie  $f(J)$  eine noch näher zu konstruierende „Volumendehnungsfunktion“. Für zunächst noch beliebiges  $f(J)$  ergibt sich mit (2.95) die in (2.93) auftretende partielle Ableitung  $\partial w / \partial \lambda_i$  zu

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left\{ \sum_{k=1}^N 2 \frac{\mu_k}{\alpha_k^2} [\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3 + f(J)] \right\} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} \left[ \lambda_i^{\alpha_k - 1} + \frac{1}{\alpha_k} \frac{\partial f(J)}{\partial \lambda_i} \right] \quad (2.96)$$

und weiterhin unter Berücksichtigung von (2.93)<sub>2</sub> für die in (2.96) auftretende Ableitung  $\partial f / \partial \lambda_i$

$$\frac{\partial f(J)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial f(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial f}{\partial J} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = \frac{J}{\lambda_i} \frac{\partial f}{\partial J} \equiv \lambda_i^{-1} J \frac{\partial f}{\partial J} \quad (2.97)$$

Einsetzen von (2.96) und (2.97) in (2.93) liefert das folgende tensorielle Materialgesetz für noch beliebige Funktionen  $f(J)$ :

$$\mathbf{S} = 2J^{-1} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\mu_k}{\alpha_k} \left[ \lambda_i^{\alpha_k} + \frac{J}{\alpha_k} \frac{\partial f(J)}{\partial J} \right] \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \right\} \quad (2.98)$$

Im Rahmen dieser Untersuchung wird für die Funktion  $f(J)$  die in Storakers (1986) vorgeschlagene Form für hochkompressible hyperelastische Materialien

$$f(J) = \frac{1}{\beta_k} (J^{-\alpha_k \beta_k} - 1) \quad (2.99)$$

und damit weiter

$$\frac{J}{\alpha_k} \frac{\partial f(J)}{\partial J} = -J^{-\alpha_k \beta_k} \quad (2.100)$$

herangezogen. Mit  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  und  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) treten dann im Spannungstensor insgesamt  $3N$  Materialkoeffizienten auf, die über geeignete Versuche zu bestimmen sind.

In ABAQUS werden dabei noch der Anfangs-Schermodul sowie der Anfangs-Kompressionsmodul über

$$\mu_0 := \sum_{i=1}^N \mu_i \quad \text{und} \quad \kappa_0 := \sum_{i=1}^N 2 \left( \frac{1}{3} + \beta_i \right) \mu_i \quad (2.101)$$

definiert. Ferner gelten nach ABAQUS noch die folgenden Zusammenhänge mit den Querkontraktionszahlen  $\nu_i$  und den Parametern  $\beta_i$

$$\nu_i = \frac{\beta_i}{1 + 2\beta_i} \quad \text{und} \quad \beta_i = \frac{\nu_i}{1 - 2\nu_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.102)$$

Für den Fall, dass sämtliche Materialparameter  $\beta_i$  gleich sind ( $\beta_i =: \beta = \text{const.}$ ), ist  $\nu_i = \nu$  die klassische Querkontraktionszahl.

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von humanen Weichgeweben wird in einer ersten Näherung von einem inkompressiblen bzw. schwach-kompressiblen hyperelastischen Materialverhalten ausgegangen. Bei dieser Art von Materialmodellen ist es üblich, den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  multiplikativ in einen Gestaltänderungs- und einen Volumenänderungsanteil  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $J^{1/3} \mathbf{I}$  zu zerlegen

$$\mathbf{F} = \left( J^{1/3} \mathbf{I} \right) \cdot \bar{\mathbf{F}} \equiv J^{1/3} \bar{\mathbf{F}} \quad (2.103)$$

Daraus ergeben sich die modifizierten Hauptstreckungen  $\bar{\lambda}_i$  des Deformationsgradienten zu

$$\bar{\lambda}_i := J^{-1/3} \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{mit} \quad \bar{J} := \det \bar{\mathbf{F}} = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 = 1 \quad (2.104)$$

Für schwach-kompressible Materialien wird die in ABAQUS implementierte VEF nach Ogden (1972)

$$w = \sum_{k=1}^N 2 \frac{\mu_k}{\alpha_k^2} \left( \bar{\lambda}_1^{\alpha_k} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_k} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_k} - 3 \right) + f(J) \quad (2.105)$$

herangezogen. Darin sind  $\mu_k$  und  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) Materialparameter sowie  $f(J)$  eine die Volumendehnung beschreibende Funktion mit der Restriktion  $f(1) = 0$ . Mit (2.105) ergibt sich nach (2.93)

$$\mathbf{S} = J^{-1} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{4}{3} \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} \bar{\lambda}_i^{\alpha_k} + J \frac{\partial f(J)}{\partial J} \right] \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \quad J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.106)$$

In ABAQUS ist die volumetrische Funktion

$$f(J) := \sum_{k=1}^N \frac{1}{D_k} (J - 1)^{2k} \quad (2.107)$$

für schwach-kompressible Materialien implementiert, worin  $D_k$  weitere Materialparameter bedeuten. Mit (2.107) ergibt sich schließlich aus (2.106) die folgende Materialgleichung für hyperelastische, schwach-kompressible Materialien:

$$\mathbf{S} = 2J^{-1} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N \left[ \frac{2}{3} \frac{\mu_k}{\alpha_k} \bar{\lambda}_i^{\alpha_k} + \frac{k}{D_k} J (J - 1)^{2k-1} \right] \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \quad (2.108)$$

## 2.8 Zur Idee der Finite Elemente Methode

### 2.8.1 Einleitende Bemerkungen

Eines der am häufigsten eingesetzten numerischen Verfahren zur Berechnung einer Vielzahl von technischen und physikalischen Problemstellungen ist die Finite Elemente Methode (FEM). Klassische Anwendungen dieser Methode finden sich in der Berechnung von Verformungen von Bauteilen unter Belastung, der Untersuchung von Schwingungen von Strukturen, der Darstellung der Wärmeleitung in festen Körpern oder in der Strömungsmechanik. In letzter Zeit bieten in zunehmendem Maße aus der Medizintechnik kommende innovative Fragestellungen, bei welchen sehr komplexe anatomische Strukturen zu berechnen sind, ein breites Anwendungsfeld für diese numerischen Näherungsverfahren. Diese Näherungsverfahren sind stets dann unumgänglich, wenn eine geschlossene Lösung aufgrund der hohen Komplexität der

im Allgemeinen nicht-linearen partiellen Differentialgleichungssysteme (Bilanz- und Materialgleichungen) nicht mehr gefunden werden kann. Dabei werden für endliche große Bereiche, die so genannten finiten Elemente, Ansatzfunktionen und Randbedingungen aufgestellt. In einem ersten Schritt einer FE-Analyse ist die Unterteilung einer zur untersuchenden realen Struktur in diskrete Elemente (finite Elemente) durchzuführen. Dabei werden stückweise beliebig geartete Flächen in Drei- oder Viereckselemente sowie Körper in Tetraeder- oder Hexaederelemente zerlegt. Dieser Prozess wird als Diskretisierung bezeichnet. Die so eingeführten Elemente sind durch Knoten kontinuierlich mit ihren Nachbarelementen verbunden. Zur Abbildung von Strukturen können je nachdem, um welche Struktur es sich handelt, die folgenden Elemente verwendet werden (vgl. Bild 2.4):

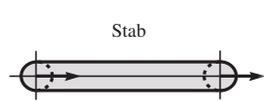
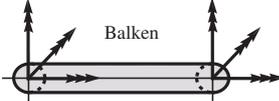
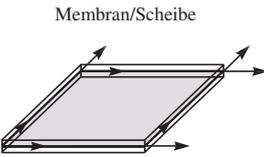
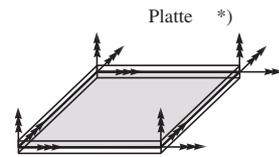
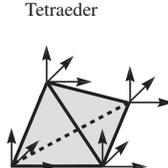
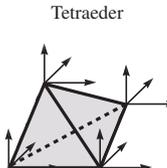
Kontinuumelemente	Strukturelemente	
 <p>max. drei Translationsfreiheitsgrade pro Knoten</p>	 <p>max. drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgrade pro Knoten</p>	Idealisierung
 <p>Translationskörper</p>	 <p>Translations- und Rotationskörper</p>	Punktmasse (Punktelement)
 <p>Stab</p>	 <p>Balken</p>	Linielement (1D-Element)
 <p>Membran/Scheibe</p>	 <p>Platte *)</p> <p>*) Plattentheorie 5 DOF</p>	Flächenelement (2D-Element)
 <p>Tetraeder</p>	 <p>Tetraeder</p>	Volumenelement (3D-Element)

Bild 2.4: Elementierung bezüglich der Knotenfreiheitsgrade (DOF) und geometrische Idealisierung aus *Silber Steinwender (2005)*

- Punktelement (z.B. Masse)
- 1D- oder Linienelement für Stab oder Balken
- 2D- oder Flächenelement für Scheibe oder Schale sowie
- 3D- oder Volumenelemente für Tetraeder

Im Rahmen einer Berechnung nicht-linearen Strukturverhaltens mittels der Finite Elemente Methode lassen sich grundsätzlich drei Arten von Nichtlinearitäten unterscheiden:

- Geometrische Nichtlinearitäten
- Physikalische Nichtlinearitäten
- Kontaktprobleme

Bei großen Verformungen können durch geometrische Nichtlinearitäten entscheidende Veränderungen in der Geometrie bezogen auf die räumliche Orientierung hervorgerufen werden. Ist dies der Fall, so müssen sowohl die Lastrichtungsänderung als auch die geometrischen Maße, etwa Länge, Fläche, Volumen oder Dicke berücksichtigt werden.

Physikalische Nichtlinearitäten treten beispielsweise in Form von Materialfunktionen innerhalb tensorlinearer Spannungs-Verzerrungs-Relationen auf, mittels derer das jeweilige Materialverhalten beschrieben wird. Dieses kann nicht-linear-elastisch, hyperelastisch, viskoelastisch, plastisch, oder temperaturabhängig sein.

Neben den oben aufgeführten Arten nicht-linearen Verhaltens können weiterhin Nichtlinearitäten durch spezielle Randbedingungen hervorgerufen werden, die sich während der Deformation, beispielsweise bei Laststeigerung, etwa im Rahmen von Kontaktproblemen, ausbilden können. Hier verändern sich im Laufe der Deformation die Berühr- oder Kontaktzone zweier Körper, wobei ein Eindringen eines Körpers in den anderen ausgeschlossen wird.

### 2.8.2 Schwache Formulierung des Gleichgewichts

Grundsätzlich lassen sich Randwertprobleme kontinuumsmechanisch mittels des Feldgleichungssets, bestehend aus den Verschiebungs-Verzerrungs-Gleichungen (2.18),

der Impulsbilanz (2.38), der Drehimpulsbilanz (2.45) (Symmetrie des Spannungstensors) und einer das jeweilige Materialverhalten beschreibenden Materialgleichung zuzüglich geeigneter Randbedingungen beschreiben. Eine exakte Lösung dieses im Allgemeinen vektorwertigen partiellen Differentialgleichungssystems gelingt jedoch nur für einige Spezialfälle. Deshalb müssen zur Berechnung komplexerer Aufgabenstellungen Variationsverfahren zur Erzeugung von Näherungslösungen herangezogen werden. Diesen liegen Arbeits- und Energieprinzipien zugrunde, wobei im Folgenden auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen eingeschränkt werden soll. Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird üblicherweise die Impulsbilanz in materieller Form durch entsprechende Transformation der räumlichen Form (2.36) unter Beachtung von  $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}}$  erzeugt

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{k}^V = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.109)$$

und mit einer beliebig wählbaren Vektorfunktion  $\boldsymbol{\xi}$  skalar multipliziert, so dass der folgende Ausdruck entsteht:

$$(\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \rho (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{k}^V) \cdot \boldsymbol{\xi} \quad (2.110)$$

Mit (A.2) gilt die identische Umformung

$$(\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \nabla \cdot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{S} \cdot \cdot (\boldsymbol{\xi} \nabla) \quad (2.111)$$

Einsetzen von (2.111) in (2.110) liefert

$$\nabla \cdot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{S} \cdot \cdot (\boldsymbol{\xi} \nabla) = \rho (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{k}^V) \cdot \boldsymbol{\xi} \quad (2.112)$$

Sortieren und anschließende Integration über das Volumen  $V$  des betrachteten Körpers führt weiter auf

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\xi}) dV = \int_V \mathbf{S} \cdot \cdot \boldsymbol{\xi} \nabla dV + \int_V [\rho (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{k}^V) \cdot \boldsymbol{\xi}] dV \quad (2.113)$$

Anwendung des GAUSSschen Satzes (A.3) auf den Divergenzterm im ersten Volumenintegral von (2.113) führt schließlich auf die kanonische Form der GALERKIN-Gleichung bezüglich der Momentankonfiguration

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\xi}) dA + \int_V [\rho (\mathbf{k}^V - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\xi}] dV = \int_V \mathbf{S} \cdot \cdot (\boldsymbol{\xi} \nabla) dV \quad (2.114)$$

Mit Hilfe des Lemma von CAUCHY (2.24) lässt sich noch der Integrand des linken Integrales in (2.114) durch den Spannungsvektor  $\mathbf{t}_0$  ausdrücken, so dass sich schließlich, nachdem noch alles auf eine Seite gebracht wird und noch die Vektorfunktion  $\boldsymbol{\xi}$  durch das virtuelle Verschiebungsfeld  $\delta \mathbf{u}$  ersetzt wird, der folgende Ausdruck ergibt:

$$g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) := \int_V \{\mathbf{S} \cdot \cdot [(\delta \mathbf{u}) \nabla]\} dV - \int_A \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_V [\rho (\mathbf{k}^V - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u}] dV = 0 \quad (2.115)$$

Im Gegensatz zur so genannten strengen Erfüllung der (lokalen) Bilanzgleichung (2.38) in jedem materiellen Punkt des betrachteten Körpers, wird durch (2.115) das Gleichgewicht nur noch im integralen Sinn erfüllt. Man spricht dann auch von der schwachen Erfüllung der Bilanzgleichung oder einfach von der schwachen Form Parisch (2003), Wriggers (2001).

### 2.8.3 Linearisierung und Diskretisierung

Um die nicht-lineare Gleichung (2.115) einer numerischen Lösungsprozedur, wie etwa dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren unterziehen zu können, ist im nächsten Schritt eine Linearisierung von (2.115) durchzuführen. Diese wird prinzipiell durch eine Reihenentwicklung an einer Stelle  $\bar{\mathbf{u}}$  und Abbruch dieser Reihe nach dem linearen Glied erreicht. Wird mit  $\delta_G$  die Richtungsableitung (GATEAUX-Ableitung (A.18)) bezeichnet, so lässt sich unter Beachtung von  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}$  schließlich für (2.115) die folgende linearisierte Form angeben Parisch (2003), Wriggers (2001), Reese (1994):

$$g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \cong g(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) + \delta_G g(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.116)$$

mit

$$\delta_G g(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} := \int_V \left[ (\text{grad } \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}) \cdot \cdot (\text{grad } \delta \mathbf{u}) + \nabla(\delta \mathbf{u}) \cdot \cdot \overset{(4)}{\mathbf{C}} \cdot \cdot \nabla \Delta \mathbf{u} \right] dV \quad (2.117)$$

Hierin bedeutet  $\overset{(4)}{\mathbf{C}}$  den Elastizitätstensor vierter Stufe (Materialtetrade), der sich im Falle hyperelastischer Medien durch zweifach partielle Differentiation nach dem Verzerrungstensor ergibt (man beachte die Identität  $\nabla(\bullet) \equiv \text{grad}$  die verwendet wurde um die Symbolik nicht zu überladen). Für die numerische Lösung des Problems ist weiterhin eine Diskretisierung sowohl der Geometrie des Körpers, als auch des kontinuierlichen Verschiebungsfeldes notwendig. Eine konsequente Diskretisierung von

(2.117) führt schließlich auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \int_V \left[ (\text{grad } \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}) \cdot (\text{grad } \delta \mathbf{u}) + \nabla (\delta \mathbf{u}) \cdot \overset{(4)}{\mathbf{C}} \cdot \nabla \Delta \mathbf{u} \right] dV = \\ = \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \boldsymbol{\xi}_I^T \mathbf{K}_{TIK} \Delta \mathbf{u}_K \end{aligned} \quad (2.118)$$

In (2.118) wird der Operator  $\bigcup$  anstelle eines einfachen Summenzeichens verwendet, um den Assemblierungsprozeß aller Elemente zu einem globalen algebraischen nicht-linearen Gleichungssystem für eine definierte Problemstellung anzudeuten (Wriggers (2001)). Weiterhin bedeutet  $\mathbf{K}_{TIK}$  die auf die Momentankonfiguration bezogene Tangentenmatrix oder differentielle Steifigkeitsmatrix für die Knotenkombination  $I, K$  innerhalb eines finiten Elementes. Auf Basis von Strukturen der Form (2.118) lassen sich dann die erzeugten Systeme nicht-linearer algebraischer Gleichungen mittels gängiger Algorithmen, wie etwa dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren, lösen. Im weiteren Verlauf einer FE-Rechnung wird im allgemeinen nicht-linearen Fall die dem Materialgesetz entsprechende Routine aufgerufen, die aus den übergebenen Deformationsgrößen die dem Inkrement entsprechenden Spannungen berechnet. Somit muss bei nichtlinearen Materialgesetzen für die iterative Berechnung in jedem Iterationsschritt die entsprechende Spannungsordinate in den Integrationspunkten zur Verfügung gestellt werden. Dies geschieht in der Regel durch Aufruf einer gesonderten Routine zur Berechnung der jeweiligen Spannungen.

# Kapitel 3

## Polymere Weichschaumstoffe

Polymere Weichschäume stellen in zunehmendem Maße ein wichtiges Material im Rahmen neuer Sitz- und Liegesysteme (Pflegebereich, Fahrzeug- und Flugzeugbranche) dar. In der vorliegenden Arbeit soll die Interaktion zwischen humanen Weichgeweben und Weichschaumunterlagen numerisch untersucht werden. Dabei ist von großen Verformungen und Volumenänderungen der verschiedenen Schaumstoffarten und Dehnungen von etwa 30 bis 65 % auszugehen. Zur Beschreibung dieser Schaumstoffklassen wird das in das Finite Elemente Programm ABAQUS implementierte Materialgesetz für hochkompressible Schäume „Hyperfoam“ verwendet.

Zunächst wird nachfolgend ein kurzer Überblick über die Herstellung der in dieser Arbeit verwendeten Polyurethan-Schaumstoffe gegeben. In den anschließenden Abschnitten werden dann die jeweiligen Experimente vorgestellt, die zur Bestimmung der Materialparameter  $\mu$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  der Materialgleichung (2.96) herangezogen werden.

### 3.1 Herstellungsprozess

Polyurethan-Schaumstoffe entstehen in einer Zweikomponenten-Reaktion zwischen Polyol und Polyisocyanat und werden allgemein als Isocyanat bezeichnet. Vermischt man die beiden Komponenten, so beginnt eine chemische Reaktion zwischen den zwei Flüssigkeiten, wobei sich die Moleküle zu Molekülketten verbinden. Die dabei entstehenden Gase verleihen dem PU-Reaktionsgemisch den zellulären Aufbau und blähen die Schaummasse innerhalb von Sekunden auf. Durch eine Mischdüse werden die einzelnen Komponenten zusammengemischt und auf ein Förderband aufgetragen

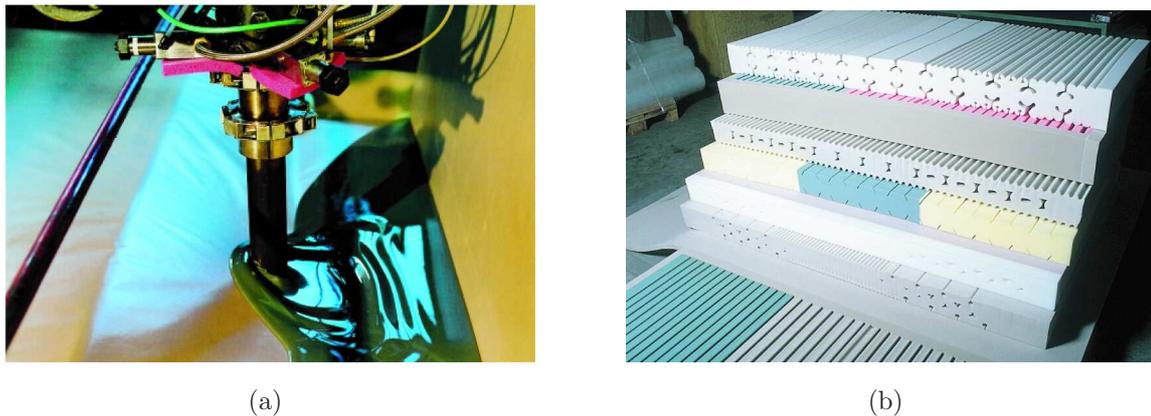


Bild 3.1: Herstellungsprozess von Schaumstoffauflagen: (a) Aufbringen des flüssigen Isozyanats auf ein Förderband, (b) verschiedene ausgehärtete Schaumstoffkerne

(vgl. Bild 3.1a). Nach dem Herstellungsprozess müssen alle Schaumstoffblöcke 24 Stunden lagern, um vollständig auszuhärten, bevor diese weiter zu Halbzeugen oder Fertigprodukten verarbeitet werden können. In Bild 3.1b sind einige ausgehärtete Schaumstoffkerne mit unterschiedlichen geometrischen Strukturen dargestellt.

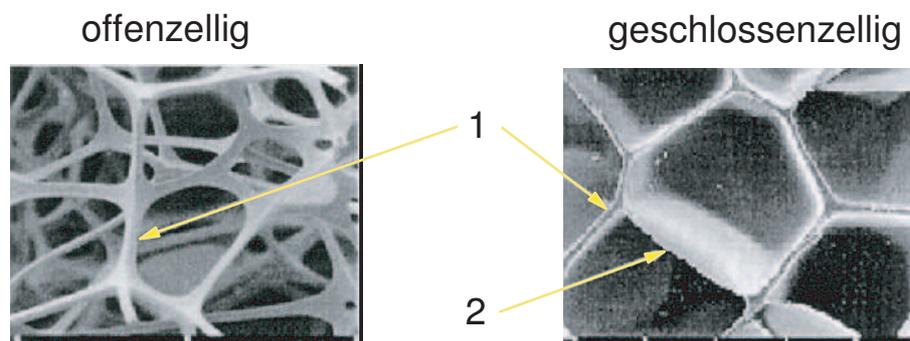


Bild 3.2: Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme eines offenzelligen und eines geschlossenzelligen Polymerschaumes nach Lenz (1999): 1 Zellstege, 2 Zellwände

Die verschiedenen Eigenschaften der Schaumstoffe wie z.B. Stauchhärte, Viskoelastizität und Morphologie (offenzellig oder geschlossenzellig) werden durch Zugabe von sogenannten Additiven wie

- Katalysatoren (Amine) als Reaktionsbeschleuniger,
- Emulgatoren (Seifen) als Vermischungshilfen,
- Stabilisatoren (Silikone) zur Vergleichmässigung der Zellstruktur,

- Antioxidantien / UV-Stabilisatoren und
- Farbstoffen

erzielt (vgl. Bild 3.2). Eine Einteilung der verschiedenen Polyurethan-Schaumstoffe wird durch die DIN-Norm 7726 (Schaumstoffe - Begriffe, Einteilung) vorgenommen, wobei die Kriterien Rohdichte und Verformungseigenschaften (Härte) wesentlich sind (vgl. Bild 3.3). In dieser Arbeit werden Schaumstofftypen mit einer Dichte von weniger als  $250 \text{ kg/m}^3$  und einer Stauchhärte kleiner  $15 \text{ kPa}$  untersucht. Zu Ihnen zählen z.B. Filterschäume, Dichtschäume und viskoelastische Schäume.

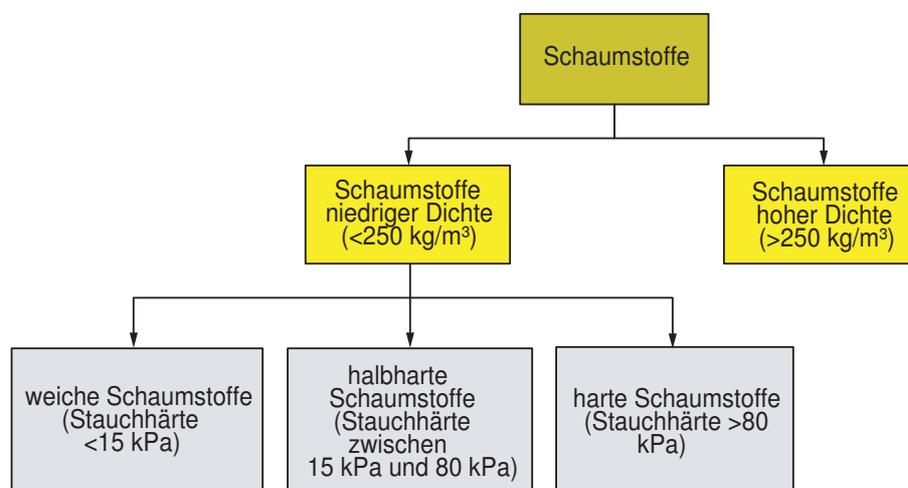


Bild 3.3: Einteilung der Schaumstoffklassen nach DIN-Norm 7726

## 3.2 Experimente, Vorversuche

Polyurethan-Schaumstoffe verändern ihre Stauchhärte durch Aufnahme von Feuchte sowie durch Änderung der Temperatur. Zur Ermittlung dieser beiden Abhängigkeiten des mechanischen Verhaltens der Schaumstoffe SUPRA und SAF werden Stauchungsversuche bei unterschiedlichen Temperaturen und Feuchtgraden in einem Klimaschrank durchgeführt. Des weiteren werden Versuche durchgeführt, die eine Aussage über eine mögliche Ortsabhängigkeit der Stauchhärten und das räumliche Materialverhalten der Schaumstoffproben liefern.

### 3.2.1 Versuchsdurchführung

Für alle Vorversuche werden Schaumstoffproben mit einer Kantenlänge von 100 x 100 x 100 mm aus Schaumstoffrohlingen der Materialien SUPRA und SAF ausgeschnitten und mit einer Universal-Zug-Druck-Prüfmaschine ZWICKi Z01 in uniaxialen Druckversuchen (vgl. Bild 3.4) analysiert. Hierzu werden die Probekörper in die Prüfmaschine eingelegt und je nach Versuchsaufbau die umgebende Temperatur bzw. die Feuchte des Klimaschranks bei unterschiedlichen Stauchungen von 30 - 60% variiert.



Bild 3.4: Universal-Zug-Druck-Prüfmaschine ZWICKi Z01

Für die Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Schaumstoffproben SUPRA und SAF werden diese im Klimaschrank bei 20°C bzw. 60°C Umgebungstemperatur und einer konstanten Feuchte von 50% analysiert. Die daraus resultierenden Kraft-Weg-Daten aller untersuchten Stauchungen beider Proben werden als Kraft über Temperatur-Kurven aufgetragen.

Die Analyse der Feuchteabhängigkeit der Proben SUPRA und SAF wird bei einer konstanten Umgebungstemperatur von 20°C und einer Luftfeuchtigkeit von 20% bzw. 90% im Klimaschrank durchgeführt. Die hieraus gemessenen Kraft-Weg-Daten der

verschiedenen Stauchungen beider Proben werden als Kraft über Feucht-Kurven dargestellt.

Zur Untersuchung einer möglichen Ortsabhängigkeit der elastischen Eigenschaften der Schaumstoffe werden Proben (100 x 100 x 100 mm) aus einer vertikalen Scheibe aus der Mitte eines Schaumstoffrohrlings (2000 x 1000 mm) von SUPRA und SAF ausgeschnitten und entsprechend ihrer Entnahmepositionen gekennzeichnet. Die verschiedenen Probekörper werden bei konstanten Bedingungen von 20°C und 50% Luftfeuchtigkeit im Klimaschrank bei einer Stauchung von 60% untersucht. Die Daten werden in Kraft-Weg-Kurven ausgewertet.

Um das räumliche Materialverhalten der Schaumstoffproben zu untersuchen, werden diese in einer weiteren Messreihe analog der obenstehenden Testprozedur mit um 90° um die Z-Achse gedrehten Probekörpern unterzogen. Diese Daten werden ebenfalls in Kraft-Weg-Kurven dargestellt und den verschiedenen Entnahmepositionen zugeordnet und verglichen.

### 3.2.2 Experimentelle Befunde

Die gemessenen Daten der Untersuchungen der Temperatur- und Feuchteabhängigkeit des Schaumstoffmaterials SUPRA und SAF sind in den Bildern 3.5 und 3.6 dargestellt. Hierbei repräsentieren die verschieden abgebildeten Ebenen die Ergebnisse bei unterschiedlichen Stauchungen. Die experimentell bestimmten Kraftdaten für das Material SAF zeigen eine Abhängigkeit der Kraft mit zunehmender Temperatur. Das Material reagiert bei höherer Temperatur elastischer. Der Einfluss der Luftfeuchtigkeit auf den Schaumstoff SAF hingegen ist im Vergleich zur Temperaturabhängigkeit geringer. Es konnten nur geringfügige Kraftunterschiede bei unterschiedlicher Luftfeuchtigkeit ermittelt werden.

Die gemessenen Kraftdaten der Temperatur- und Feuchteabhängigkeit für das zweite untersuchte Schaumstoffmaterial SUPRA lieferten dagegen andere Ergebnisse. Während der Einfluss der Temperatur und der Feuchte bei einer Stauchung von 30 bzw. 60% scheinbar nicht sehr groß ist, zeigten die Analysen der Stauchungen von 40 und 50% einen Anstieg der Kraft mit zunehmender Temperatur, wogegen durch eine Variation der Feuchte kaum Unterschiede erkennbar waren. Im Vergleich zu dem Material SAF ließen sich somit unterschiedliche Ergebnisse ermitteln. Des Weiteren zeigte sich bei der Durchführung der uniaxialen Druckversuche bei der Pro-

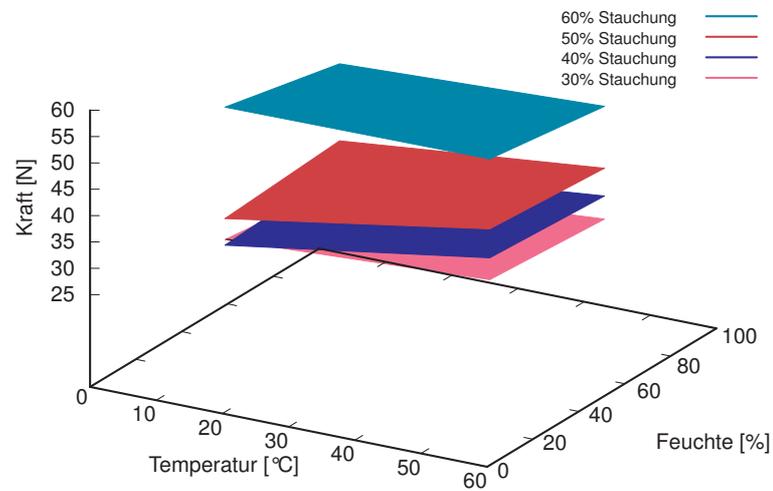


Bild 3.5: Temperatur-Feuchte-Abhängigkeit bei verschiedenen Stauchungen, 30 – 60%, für SUPRA

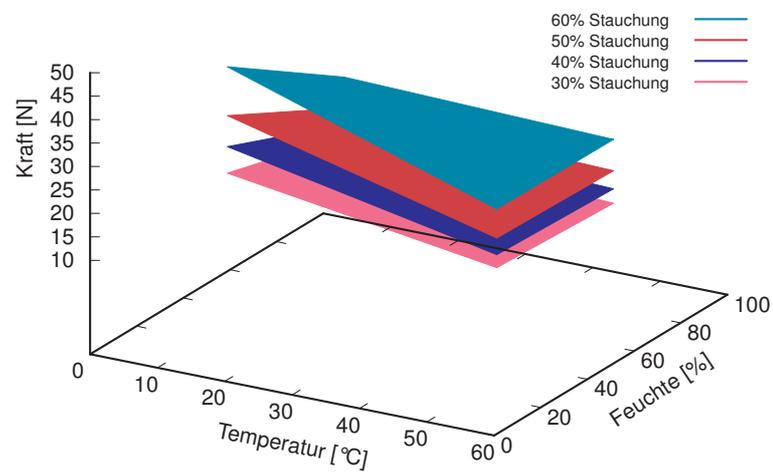


Bild 3.6: Temperatur-Feuchte-Abhängigkeit bei verschiedenen Stauchungen, 30 – 60%, für SAF

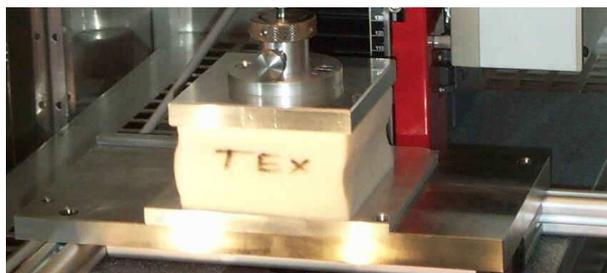


Bild 3.7: Ausknicken einer Probe im uniaxialen Druckversuch

bengeometrie von 100 x 100 x 100 mm ein Knicken der beiden Proben für SUPRA und SAF (vgl. Bild 3.7). Aufgrund des Knickens der Schaumstoffe und somit einer eventuellen Beeinflussung der Messungen werden die Proben auf eine Größe von 200 x 50 x 200 mm festgelegt. Weiterhin werden aufgrund der unterschiedlichen Ergebnisse für SUPRA und SAF bezüglich ihrer Temperatur- und Feuchteabhängigkeit für alle weiteren Hauptuntersuchungen konstante Versuchsbedingungen von 20°C Umgebungstemperatur bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 50% festgesetzt. Die Kraft-Weg-Kurven der Untersuchung einer möglichen Ortsabhängigkeit der elastischen Eigenschaften von SUPRA sind in Bild 3.8b dargestellt.

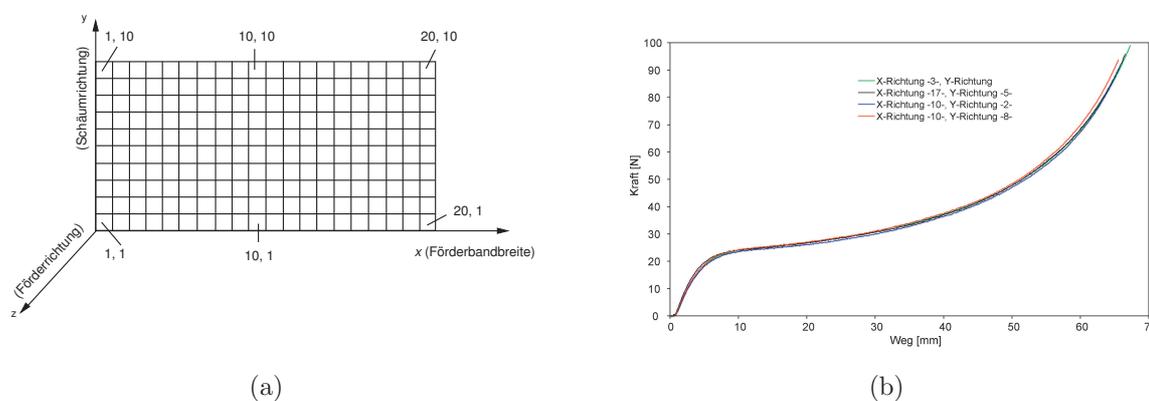


Bild 3.8: Ortsabhängigkeit: (a) Einteilung des Schaumstoffblocks in 20 x 20 Probekörper, (b) Kraft-Weg-Kurven für verschiedene Probekörper

Unabhängig von der Entnahmeposition (vgl. Bild 3.8a) der Probekörper für den Schaumstoff SUPRA zeigten alle aufgenommenen Kraft-Weg-Kurven nahezu einheitliches Verhalten. Somit ist keine Ortsabhängigkeit gegeben. Im Folgenden wird das räumliche Materialverhalten durch Drehung der Proben um 90° um die Z-Achse

unter identischen Versuchsbedingungen untersucht. Dabei ergaben sich nur sehr geringfügige Unterschiede in den Kraft-Weg-Kurven, so dass von einem isotropen Materialverhalten der Schaumstoffproben ausgegangen werden kann. Die Experimente für das Material SAF lieferten identische Ergebnisse.

### 3.3 Experimente, Hauptversuche

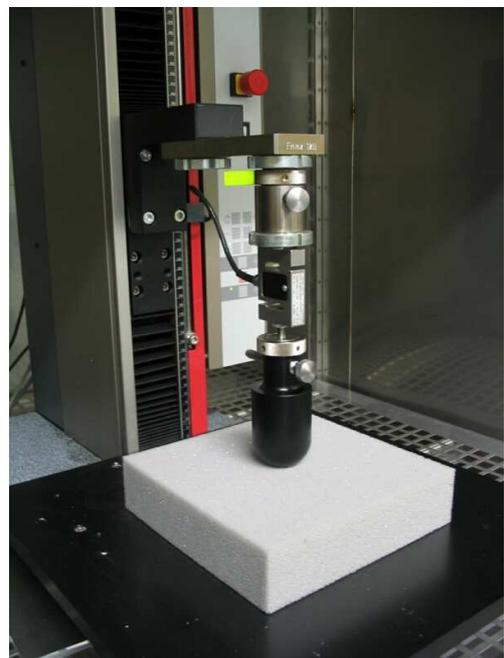
Zur Beschreibung der Materialien SUPRA und SAF werden in diesem Abschnitt uniaxiale Druck- und Indenterversuche vorgestellt, die als Grundlage für eine spätere Bestimmung der Materialparameter der Materialgleichung (2.98) und (2.99) dienen.

#### 3.3.1 Versuchsdurchführung

Die uniaxialen Druck- und Indenterversuche, deren Ergebnisse für die spätere Materialidentifikation herangezogen werden, wurden jeweils mit einer Universal-Zug-Druck-Prüfmaschine ZWICKi Z01 im Labor für Materialwissenschaften (ifm) an der Fachhochschule Frankfurt am Main durchgeführt (vgl. Bild 3.9a und Bild 3.9b).



(a)



(b)

Bild 3.9: Versuchsstände für (a) uniaxialen Druckversuch, (b) für Indenterversuch

Für die uniaxialen Druckversuche (vgl. Bild 3.9a) wurden die Schaumstoffproben zwischen die beiden Halteplatten der Prüfmaschine gelegt und die Kraft-Weg-Daten bei einer konstanten Temperatur von 20°C und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 50% im Klimaschrank gemessen. Im Falle der uniaxialen Stauchung stellte sich eine Elimination der Scherspannungen zwischen unterer und oberer Halteplatte und der jeweiligen berührenden Probendeckfläche (etwa durch geeignete glatte Flächen und Schmierung) zur Erzeugung eines homogenen Verformungsfeldes über der Höhe der Proben als äußerst problematisch heraus. Nach initialen Experimenten werden zur Verbesserung der Versuchsbedingungen die Schaumstoffproben jeweils an der unteren und oberen Halteplatte durch Aufkleben von Schmirgelpapier fixiert, um so definierte Randbedingungen zu erhalten. Im Falle der Indenterversuche wird zur Erzeugung eines definierten räumlichen Verzerrungsfeldes jeweils ein zylinderförmiger starrer Stempel mit halbkugelförmigem Kopf (Durchmesser 50 mm) in die Probe hineingedrückt (vgl. 3.9b) und jeweils die Eindringtiefe sowie die zugeordnete Normal(-Druck-)Kraft gemessen.

Zur Separierung der elastischen von den inelastischen Eigenschaften der viskoelastischen PU-Schaumstoffe werden sämtliche Proben den folgenden - in Anlehnung an die von James u. Green (1975) und Van den Bogert u. de Borst (1994) für Gummimaterialien vorgeschlagenen und von Lion (1996) und Hartmann u. a. (2003) ebenfalls auf Gummimaterialien angewandten - Prozeduren unterzogen: Zwecks einer Eliminierung des Mullins-Effektes Mullins (1969) werden die Proben vor den eigentlichen Versuchen einem speziellen Training ausgesetzt. Dieses ist durch ein zyklisches Deformationsprogramm gekennzeichnet, wobei die Proben jeweils in 16 Zyklen mit einer Dehnrates von  $2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  verschiebungskontrolliert bis zur maximalen Kompression von 65 % belastet und anschließend wieder entlastet werden (vgl. Bild 3.10). Erst nach einer sich an die 16 Zyklen anschließenden Ruhephase von 16 Stunden wurden die eigentlichen Versuche mit Haltezeiten in Anlehnung an Ehlers u. Markert (2003) durchgeführt.

In weiteren Versuchen werden nach Durchführung des „Probentrainings“ die Proben mit konstanten Dehnrates von  $\Delta u/h_0 \cdot 2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  in 16 Stufen bei einer jeweiligen Haltezeit von 180 min bis zu einer maximalen Kompression von 64 % belastet und anschließend nach der gleichen Vorschrift wieder entlastet (siehe Bild 3.11). Die Datenaufnahme erfolgt hierbei in Intervallen von 0,1 N Kraftveränderung oder 0,01 mm Wegveränderung.

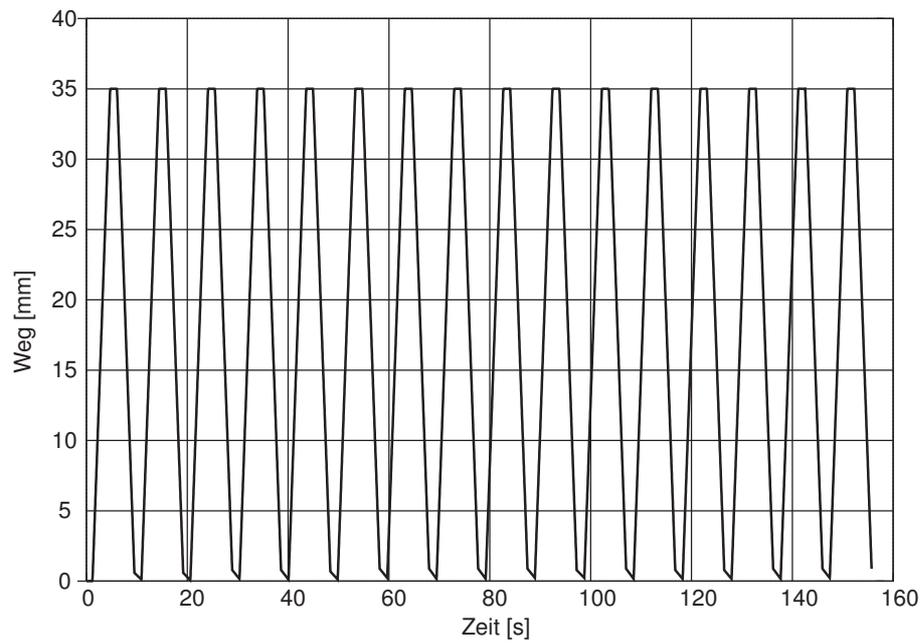


Bild 3.10: Proben training: Deformationszyklen mit einer Dehnrates von  $2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

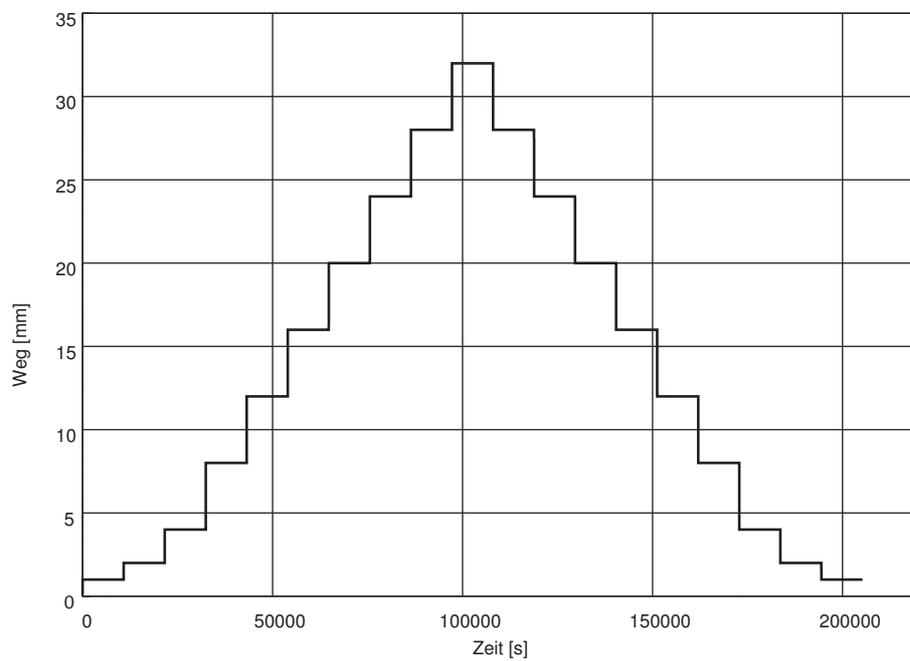


Bild 3.11: Verformungsprogramm für das Material SUPRA und SAF für den uniaxialen Druckversuch und den Indenterversuch

### 3.3.2 Experimentelle Befunde

Das dem eigentlichen Versuch vorgeschaltete Probentraining diente zur Eliminierung des Mullins-Effekts. Der Mullins-Effekt wird dadurch erklärt, dass einerseits maximal verstreckte Polymerketten bei der ersten Beanspruchung brechen und sich im Werkstoffgefüge neu orientieren. Weiterhin gleiten Kontakte zwischen Polymerketten und Füllstoffoberflächen vollständig ab und es findet ein sukzessiver Bruch des Füllstoffnetzwerks statt Kaliske u. Heinrich (2000), Klüppel u. Schramm (1998). In Abhängigkeit von Polymer und Füllstoff ergibt sich eine unterschiedliche Zyklenanzahl, nach der sich ein konstantes Werkstoffverhalten einstellt. Ist dieser Zustand erreicht, wird der Werkstoff als „vorkonditioniert“ bezeichnet Medaila (1978). In den Bildern 3.12 und 3.13 ist der Mullins-Effekt für das Material SUPRA deutlich zu erkennen. Die Kraft-Antwort im ersten Belastungszyklus ist erheblich höher als bei den nachfolgenden Belastungszyklen. Nach etwa 2 - 4 Deformationszyklen ergibt sich ein annähernd konstantes Kraft-Weg-Verhalten, alle Kraft-Weg-Kurven liegen nahezu übereinander. Dieses Werkstoff-Verhalten kann auch bei dem Material SAF beobachtet werden (hier nicht dargestellt).

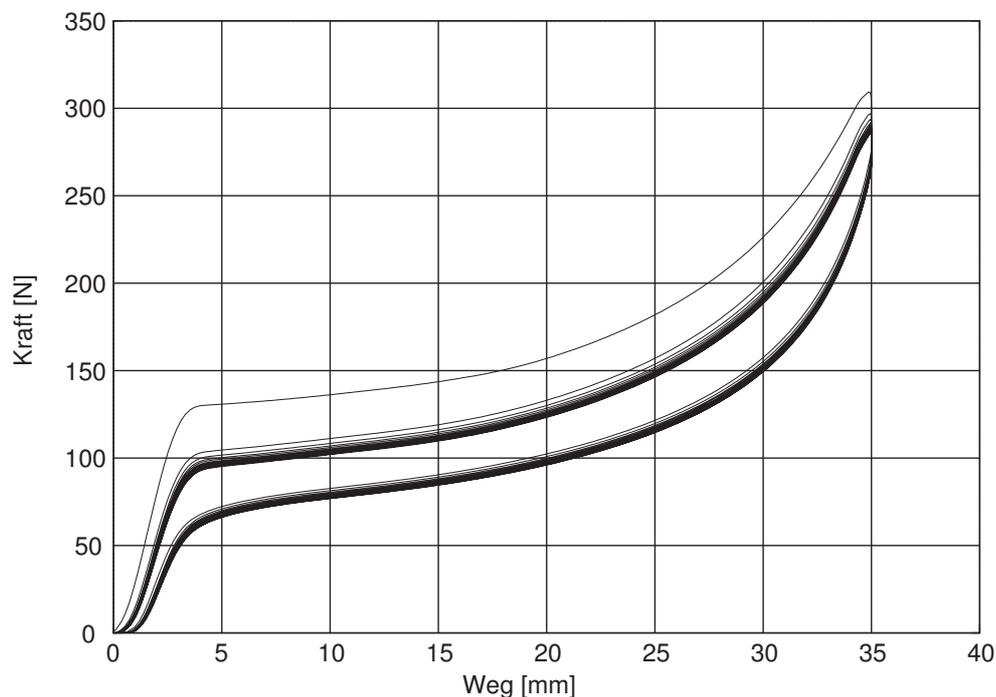


Bild 3.12: Probentraining Kraft-Weg-Antwort zur Darstellung des Mullins-Effekts für das Schaumstoffmaterial SUPRA

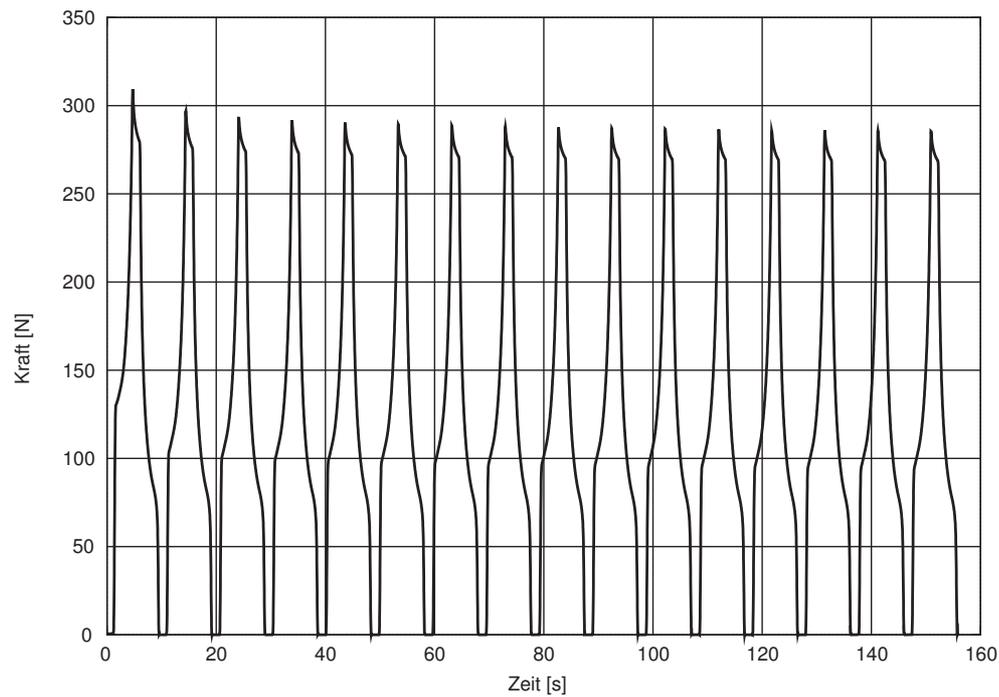


Bild 3.13: Proben training Kraft-Zeit-Antwort zur Darstellung des Mullins-Effekts für das Schaumstoffmaterial SUPRA

Bei den Versuchen mit Haltezeiten reagiert die Probe mit einer Relaxation, deren Endwert als Relaxationsabbruchpunkt bezeichnet wird. Nach Erreichen eines Relaxationspunktes ist die zeitliche Änderung der Normalkraft (Druckkraft) etwa Null. Die Relaxationsabbruchpunkte geben dann die Gleichgewichts-Spannungs-Dehnungs-Kurve wieder. Die jeweilige Differenz aus der Gesamtspannung und dem Relaxationsendwert wird als Overstress bezeichnet. In den Bildern 3.14 - 3.17 sind die experimentell ermittelten Relaxationsabbruchpunkte für den uniaxialen Druckversuch und den Indenterversuch der beiden Schaumstofftypen SUPRA und SAF für den jeweiligen Belastungs- und Entlastungszyklus dargestellt. Dabei stellen die gestrichelte Linien die Kraftantworten während des gesamten Belastungszyklus und die durch einen Kreis gekennzeichneten Punkte die jeweiligen Relaxationsabbruchpunkte dar.

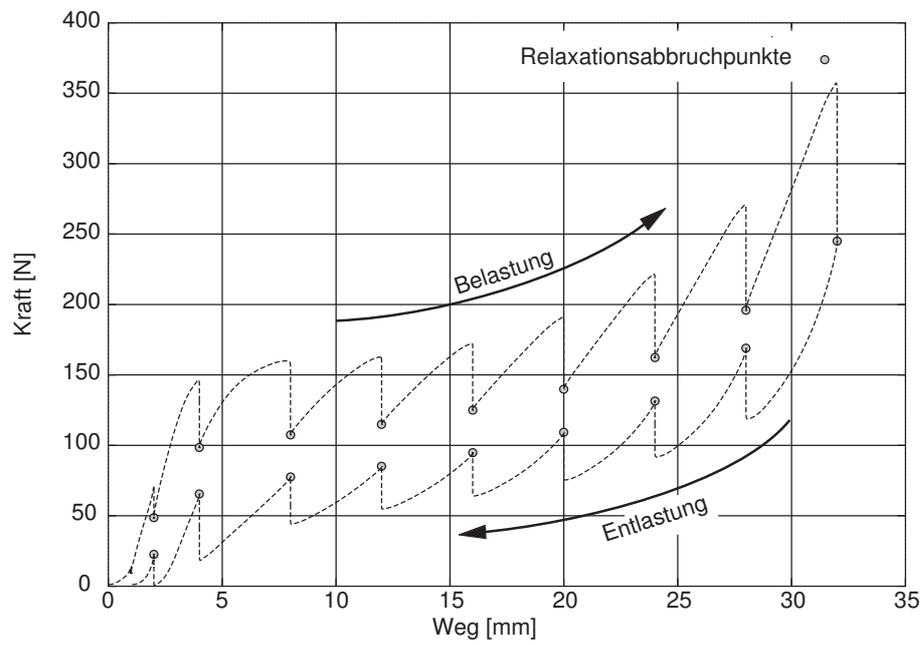


Bild 3.14: Uniaxialer Druckversuch mit Haltezeiten: Kraft-Weg-Antwort entsprechend dem Belastungsprogramm (vgl. Bild 3.11) für SUPRA

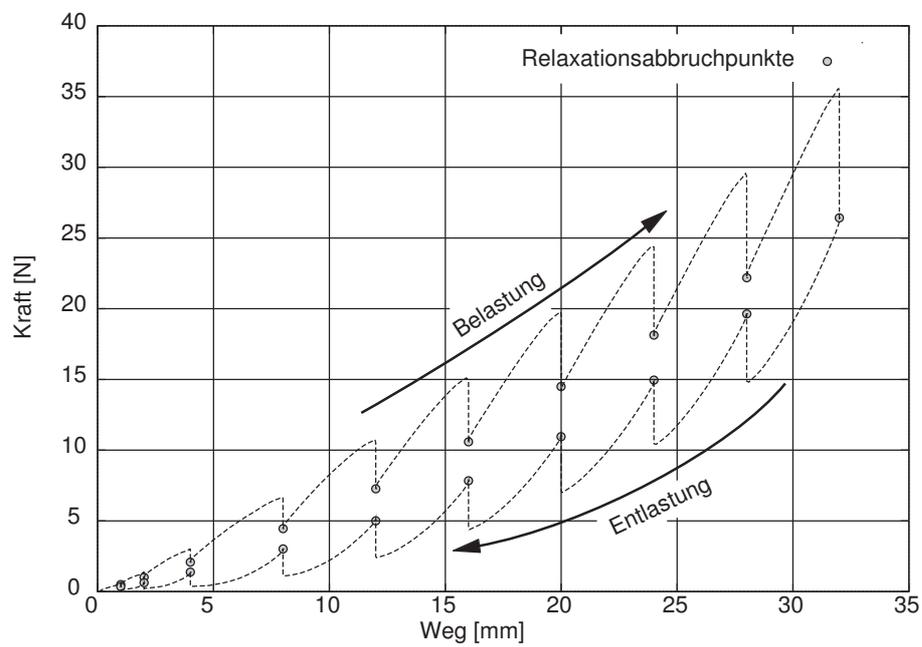


Bild 3.15: Indenterversuch mit Haltezeiten: Kraft-Weg-Antwort entsprechend dem Belastungsprogramm (vgl. Bild 3.11) für SUPRA

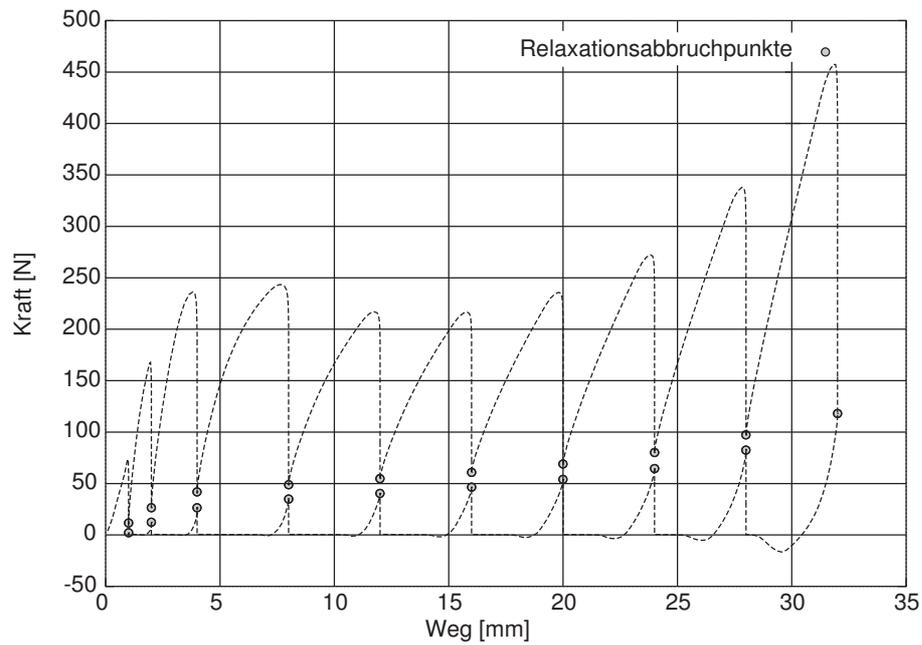


Bild 3.16: Uniaxialer Druckversuch mit Haltezeiten: Kraft-Weg-Antwort entsprechend dem Belastungsprogramm (vgl. Bild 3.11) für SAF

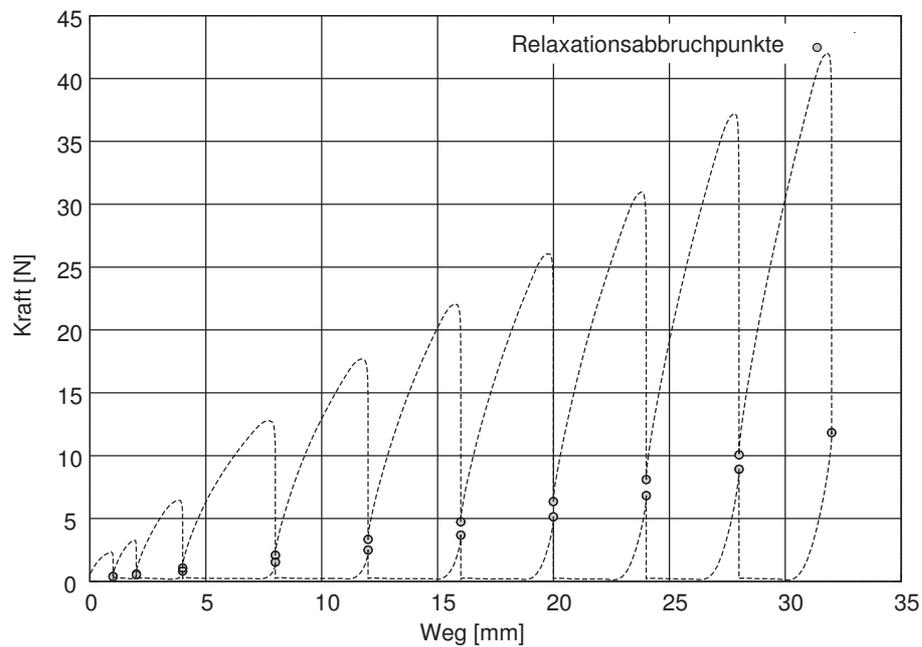


Bild 3.17: Indenterversuch mit Haltezeiten: Kraft-Weg-Antwort entsprechend dem Belastungsprogramm (vgl. Bild 3.11) für SAF

## 3.4 Materialidentifikation

Generell sind zu einer Materialidentifikation geeignete, möglichst einfache Standardversuche heranzuziehen. Im vorliegenden Fall würde sich als einfachste Variante eines solchen Versuchs der uniaxiale homogene Druckversuch anbieten. Bei Voruntersuchungen hat sich gezeigt, dass sich im Rahmen eines uniaxialen Druckversuchs durch Zugrundelegung einer Probengeometrie mit ausreichender Höhe zwar eine gewisse Zone homogener Verformungen realisieren ließ, jedoch in einigen Fällen ein Knicken der Probe auftrat (vgl. Abschnitt 3.2.2). Um das Knickproblem umgehen zu können, musste die Probenhöhe im Verhältnis zur Grundfläche entsprechend verkleinert werden. Damit konnte dann allerdings eine Zone homogener Verformung nicht mehr exakt erzeugt werden, womit eine, wenn auch nicht sehr stark ausgeprägte Ausbauchung verbunden war. Diese Tatsache wurde zusätzlich noch durch definiert aufzubringende Randbedingungen insofern verschärft, als dass eine Eliminierung der Scherspannungen in den Kontaktflächen Probe/Platte nicht möglich war. Aus diesem Grund muss von einem mehrachsigen Spannungs- und Verzerrungszustand ausgegangen werden. Eine Beschreibung dieses Versuchs bzw. die damit einhergehende Identifikation der Materialparameter kann deshalb prinzipiell nicht mehr analytisch, sondern nur noch numerisch unter Zuhilfenahme des verwendeten FE-Solvers erfolgen. In dieser Arbeit wird als Optimierungsroutine zur numerischen Bestimmung der Materialparameter eine deterministische Optimierungsstrategie (SIMPLEX-Strategie von NELDER und MEAD) verwendet, wofür allerdings geeignete Startparameter erforderlich sind. Dadurch, dass die Gütefunktion der Optimierungsroutine mittels des FE-Solvers ABAQUS berechnet wird, benötigt jede Berechnung dieser Funktion einen kompletten FE-Lauf, womit sehr hohe Rechenzeiten verbunden sind.

Um dieses Problem abzumindern, wird der tatsächlich inhomogene Druckversuch infolge der sehr schwachen Ausbauchung zunächst als homogen betrachtet. Damit lässt sich die dreiaxiale Materialgleichung drastisch vereinfachen (spezielle einfache Form des Deformationsgradienten), so dass schließlich nur noch eine Koordinatengleichung hinsichtlich der darin auftretenden Parameter zu optimieren ist. Hiermit ist weiterhin eine drastische Reduktion der Rechenzeit verbunden. Als Optimierungsroutine wird ein stochastisches Verfahren (Simulated Annealing) gewählt, um möglichst ein globales Minimum erhalten zu können. Mit diesem Vorgehen kann im Sinne einer ersten sinnvollen Abschätzung ein näherungsweise optimaler Parametervektor bestimmt werden (vgl. Abschnitt 3.4.3). Dieser Parametervektor wird dann anschlie-

ßend als Startvektor zur Bestimmung der eigentlichen Materialidentifikation mittels der Simplexstrategie und des FE-Solvers für das Gütefunktional verwendet (vgl. Abschnitt 3.4.4).

### 3.4.1 Beschreibung der ausgewählten Verfahren

Eine Identifikation der Materialparameter kann grundsätzlich durch stochastische oder deterministische Optimierungsverfahren erfolgen. Stochastische Optimierungsverfahren basieren im Wesentlichen auf dem „Monte Carlo“ Algorithmus. Dieser Algorithmus erzeugt zufällige Parametervektoren mittels einer gleichmäßigen 0 – 1 verteilten Zufallsverteilung innerhalb eines vorgegebenen Parameterintervalls. Für jeden dieser erzeugten Zufallsvektoren wird ein Wert für eine gegebene Gütefunktion berechnet. Entsprechend dem Optimierungsziel werden die erzeugten Parametervektoren nach der Gütefunktion geordnet. Derjenige Parametervektor, der dem Optimum am nächsten kommt, steht an erster Stelle. Aufbauend auf diesem Verfahren gibt es entsprechende Abwandlungen des Basisalgorithmus:

- Simulated Annealing
- Evolutions Strategien
- Genetische Algorithmen

Alternativ zu den stochastischen Verfahren gibt es deterministische Optimierungsverfahren, bei denen zielgerichtet durch Auswerten einer Gütefunktion und eventuell deren Ableitung Suchentscheidungen getroffen werden. Diese definieren somit einen Pfad, auf dem ausgehend von einem Startparametersatz das Optimum erreicht werden kann. Diese Verfahren streben mehr oder weniger schnell auf ein lokales Optimum zu, wobei das gefundene Optimum unter Umständen von dem Startpunkt der Suche abhängt. Zu den deterministischen Verfahren zählen:

- Simplexstrategie von NELDER und MEAD
- Sequenzielle quadratische Programmierung (SQP)
- Sequenzielle lineare Programmierung (SLP)
- Sequenzielle konvexe Programmierung (SCP)

Vorteil der deterministischen Verfahren ist, dass deren Konvergenzverhalten bestimmbar ist und dass die meisten Verfahren mit relativ geringem Aufwand (Berechnung der Gütefunktion) das Optimum erreichen. Dieses Optimum ist in der Regel aber ein lokales Optimum. Im Gegensatz dazu ist das Konvergenzverhalten von stochastischen Verfahren schwerer zu bestimmen und der Berechnungsaufwand höher. Diese Verfahren sind aber in der Lage, neben lokalen Optima auch das globale Optimum zu finden. Im Rahmen der in dieser Arbeit durchgeführten Parameteridentifikation werden beide Verfahrenstypen eingesetzt, um deren jeweilige Vorteile nutzen zu können. Nachfolgend werden das Simulated Annealing Verfahren und die Simplex Methode von NELDER und MEAD näher erläutert.

Das Simulated Annealing Verfahren (simuliertes Auskühlen) lässt sich vergleichen mit einem Prozess der Werkstoffphysik: Beim Erstarren eines Metalls, das aus der Schmelze genommen wird, also beim Übergang vom flüssigen in den festen Zustand, bilden die Atome Kristalle. Beim vollkommenen Kristall sind die Atome mit geringster Energie angeordnet. Kühlt ein Metall zu schnell ab, so erreichen die Kristalle nicht die energieärmste Konfiguration. Es bilden sich viele Kristallisationskerne, von denen die Aushärtung ausgeht. An den Grenzen der verschiedenen Kristallisationsbereiche bilden sich Unregelmäßigkeiten. Kühlt das Metall bei gleichzeitiger Wärmezufuhr schrittweise langsam ab, so erhalten die Kristalle genügend Bewegungsenergie, um eine schlechte Position zu verlassen und eine günstigere Stelle einzunehmen. Dieses Verfahren lässt sich übertragen, um das Optimum von Funktionen mit mehreren Variablen zu finden. Dieses Verfahren schränkt, im Gegensatz zum „Monte Carlo“ Verfahren, das Suchintervall ein. Hierbei werden zum Start des Algorithmus zwei zufällig ausgewählte Parametersätze verglichen. Das Suchintervall wird eingeschränkt, indem es um denjenigen Parametervektor neu zentriert wird, der im Vergleich die bessere Güte aufweist. Dieser Prozess wird im eingeschränkten Intervall wiederholt, was zur weiteren Verkleinerung des Suchintervalls und damit auf ein mögliches lokales Optimum führt. Damit die Suche nach einem globalen Optimum wahrscheinlicher wird, wird durch eine Abkühlungsfunktion zugelassen, dass der Algorithmus Intervalle um vergleichsweise schlechtere Punkte annimmt und damit in neue Suchrichtungen vorstoßen kann. Die Wahrscheinlichkeit der Annahme von schlechteren Varianten nimmt mit zunehmender Iteration entsprechend der Abkühlungsfunktion ab. In Schwefel (1995) wird als Beispiel für eine Abkühlungsfunktion der folgende Ausdruck angegeben

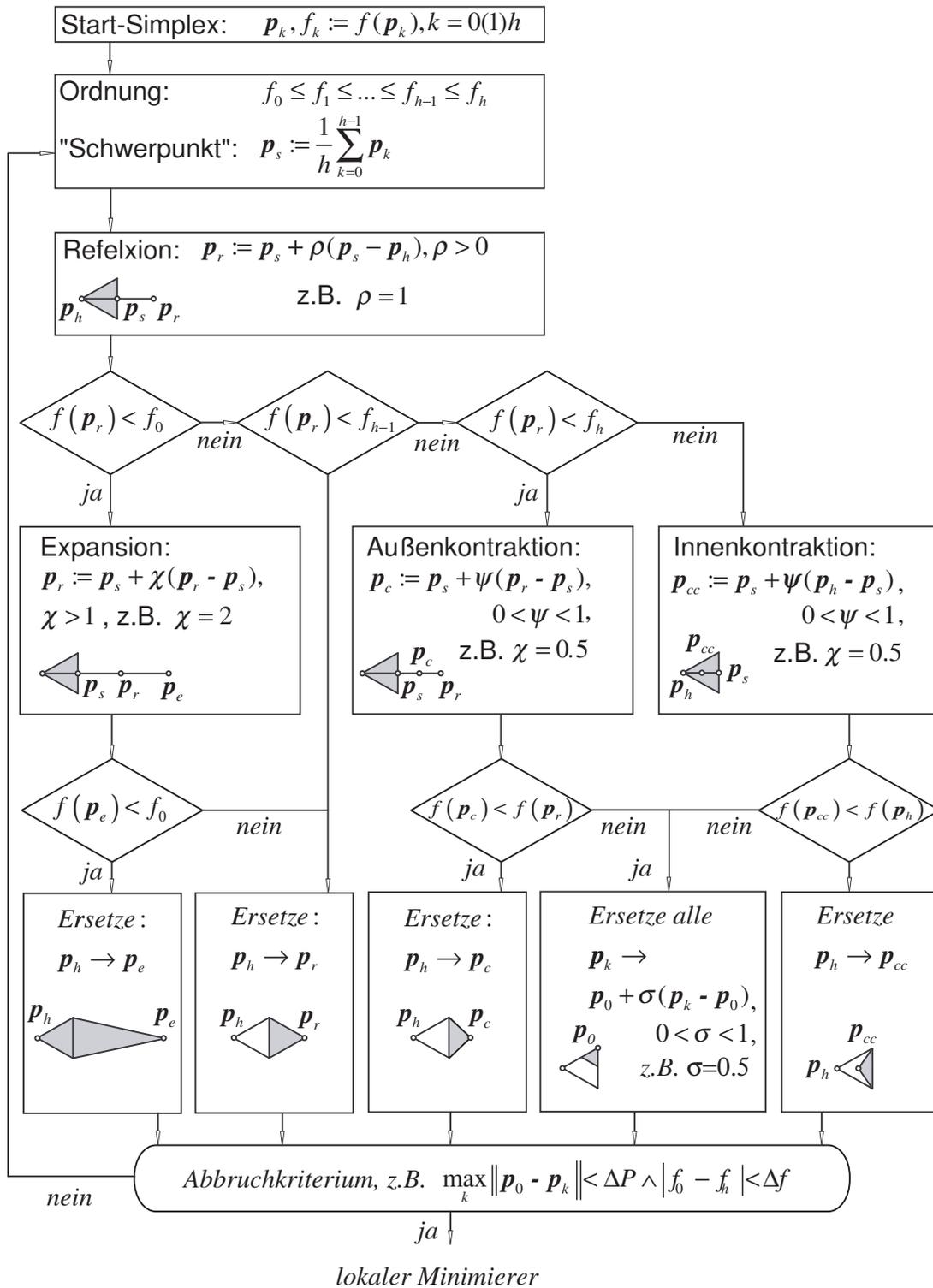


Bild 3.18: Simplexmethode von Nelder und Mead aus Bestle (1994)

$$w = \frac{1}{c} \exp\left(\frac{E_{\text{alt}} - E_{\text{neu}}}{K T}\right) \quad (3.1)$$

mit  $w$  Wahrscheinlichkeit,  $E_{\text{alt}}$  und  $E_{\text{neu}}$  Energiezustände (Gütefunktion),  $K$  Boltzmannkonstante und  $T$  Abkühlungstemperatur (Anzahl der Iterationen).

Ausgangspunkt des zweiten Verfahrens, der Simplex Methode von Nelder u. Mead (1965), ist ein beliebiges Startsimplex im  $h$ -dimensionalen Entwurfs- bzw. Parameterraum (Polyeder), in dessen Eckpunkten die jeweiligen Funktionswerte  $f_k = f(\mathbf{p}_k)$  berechnet werden. In jedem neuen Iterationsschritt werden ein oder mehrere Entwurfspunkte (Eckpunkte) generiert und die zugehörigen Gütefunktionswerte berechnet. In Abhängigkeit dieser Ergebnisse werden im Laufe der weiteren Iterationen verschiedene geometrische Konstruktionen des Simplexes ausgeführt (vgl. Bild 3.18). Die wichtigsten werden Expansion, Reflexion und Kontraktion genannt. Bei der Expansion wird das neue Simplex größer, was einer längeren Schrittweite entspricht. Die Reflexion entspricht einer Umkehrung der Suchrichtung und lässt die Größe des Simplex unverändert. Schließlich verkleinert die Kontraktion die Größe des Simplex. Das Simplex bewegt sich durch diese Operationen durch den Parameterraum. Ist das Simplex auf eine vorgegebene Größe geschrumpft und liegen die zugehörigen Gütefunktionswerte innerhalb einer definierten Toleranz, so wird die Iteration beendet.

### 3.4.2 Das Gütefunktional

Das Gütefunktional ist von zentraler Bedeutung für die Evolution der Optimierungsalgorithmen. Allgemein stellt das Gütefunktional

$$\Phi := \sqrt[m]{\sum_{i=1}^n [f(h_i; \mathbf{p}) - f_i]^m} \stackrel{!}{=} \min \quad (3.2)$$

eine Norm dar, worin  $m, n \in \mathbb{N}^+$  mit  $n$  Anzahl der Meßwerte,  $f(h, \mathbf{p})$  die Modellfunktion,  $f_i$  Messwerte,  $h_i$  die unabhängige Variable und  $\mathbf{p}$  den Parametervektor des Modells bedeuten. Im vorliegenden Fall stellen  $f_i$  Kraftwerte und  $h_i$  Verschiebungen dar. Im Rahmen dieser Parameteridentifikation wird  $m = 2$  gewählt, was den GAUSSschen Fehlerquadratsummen entspricht. Um das Gütefunktional auswerten zu können, werden neben der Modellfunktion auch die experimentellen Daten benötigt. Hierfür wird jeweils der durch die Relaxationsabbruchpunkte erzeugte „Korridor“ (vgl. etwa Bild 3.14) des uniaxialen Druckversuchs zugrunde gelegt. Das

heißt, die mittels der optimierten Parameter erzeugte Kurve soll möglichst innerhalb dieses Korridors liegen.

### 3.4.3 Abschätzung der Materialparameter

Wie bereits einleitend bemerkt, wird im Folgenden die Vorgehensweise zur Erzeugung einer Abschätzung der Materialparameter (Startwerte) beschrieben.

In dieser Arbeit soll ausschließlich auf das elastische Verhalten polymerer Weichschäume eingeschränkt werden, wobei die elastischen von den inelastischen Eigenschaften der viskoelastischen Proben durch eine geeignete Versuchsstrategie separiert und der Mullins-Effekt durch ein spezielles Proben training eliminiert wurde (vgl. Abschnitt 3.3.2). Aus den experimentellen Befunden geht hervor, dass es sich bei den zu untersuchenden polymeren Weichschäumen jeweils um ein isotropes und kompressibles viskoelastisches Material handelt, für dessen vollständige mathematische Beschreibung zunächst eine viskoelastische Materialgleichung heranzuziehen wäre. Grundsätzlich lässt sich bei viskoelastischen Modellierungen der Gesamtspannungstensor  $\mathbf{S}$  additiv in einen Teilspannungstensors  $\mathbf{S}_G$ , der die (elastischen) Gleichgewichtsspannungen repräsentiert und in einen Teilspannungstensor  $\mathbf{S}_{ov}$ , durch welchen die Überspannungen der Gedächtniseigenschaften (Overstress) wiedergegeben werden, zerlegen, so dass  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_G + \mathbf{S}_{ov}$  gilt. Bei einer Beschränkung auf die Untersuchung ausschließlich der elastischen Eigenschaften sind die experimentell ermittelten Gleichgewichts-Spannungs-Dehnungs-Verläufe, die durch die Relaxationsabbruchpunkte (nach vollständiger Relaxation der Überspannungen während der Haltezeiten) charakterisiert werden, abzubilden. Für deren Beschreibung sind dann Stoffgesetze der Hyperelastizität zulässig Hartmann u. a. (2001). Aus Gründen der Einfachheit wird im Folgenden bei dem verwendeten Stoffgesetz fortan der Index „G“ fortgelassen. Wie zuvor bereits erwähnt, wird für die spätere Materialidentifikation der verwendeten Schaumstoffe die in ABAQUS implementierte FEV „Hyperfoam“ zugrunde gelegt.

Zur Erzeugung der analytischen Kraft-Stauchungs-Relation aus dem hyperelastischen Materialgesetz „Hyperfoam“ (2.98), wird von einem quadratischen Probenquerschnitt mit einer Kantenlänge  $a_0$  bzw.  $a(t)$  und einer Probenhöhe  $h_0$  bzw.  $h(t)$  im jeweils unbelasteten bzw. belasteten Zustand ausgegangen (Bild 3.19). Für diesen Fall, lautet der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  unter der Annahme eines homogenen

Verformungszustandes

$$\mathbf{F}(t) = \lambda_1(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3(t) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.3)$$

mit den Streckungen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a(t)}{a_0}, \quad \lambda_3 = \frac{h(t)}{h_0}, \quad \det \mathbf{F} = \lambda_1^2 \lambda_3 = \left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^2 \frac{h(t)}{h_0} \quad (3.4)$$

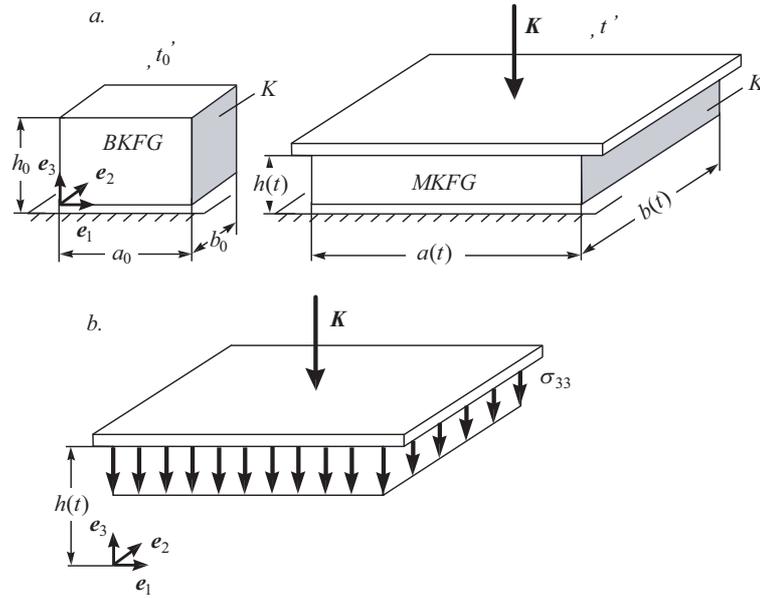


Bild 3.19: Zum uniaxialen homogenen Druckversuch einer quaderförmigen Probe mit quadratischem Querschnitt

Unter der Voraussetzung von Reibungsfreiheit zwischen Platte und Probe, wird die Probe in 3-Richtung belastet. Damit sind die Spannungen in 1- und 2-Richtung am jeweiligen Rand und wegen der homogenen Deformation auch überall im Feld Null, so dass sich nach (2.98) unter Beachtung von (2.99) und (3.4) der folgende Spannungszustand ergibt:

$$\sigma_{33}(\lambda_1, \lambda_3) = 2(\lambda_1^2 \lambda_3)^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} \left[ \lambda_3^{\alpha_k} - (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha_k \beta_k} \right] \quad (3.5)$$

$$0 = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} \left[ \lambda_1^{\alpha_k} - (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha_k \beta_k} \right] \quad (3.6)$$

Durch Belastung der Probe in 3-Richtung durch eine Einzelkraft  $K$  und unter Erfüllung des Kräfte-Gleichgewichts für einen quasistationären Prozess erhält man für die CAUCHYSche (Druck-)Spannung  $\sigma_{33} = -K/a^2$ . Damit geht Gleichung (3.5) in die folgende Kraft-Stauchungs-Relation für den Fall der uniaxialen Stauchung über

$$K(\lambda_1, \lambda_3) = -2a^2 (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-1} \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} \left[ \lambda_3^{\alpha_k} - (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha_k \beta_k} \right] \quad (3.7)$$

Gleichung (3.7) stellt einen impliziten Zusammenhang zwischen den beiden Streckungen in Längs- und Querrichtung,  $\lambda_3$  und  $\lambda_1$ , her.

Fall  $N = 1$ :

Für den Fall  $N = 1$  vereinfacht sich (3.6) unter Beachtung von  $\alpha_1 := \alpha$ ,  $\beta_1 := \beta$ ,  $\mu_1 := \mu$  zu

$$\frac{\mu}{\alpha} \left[ \lambda_1^\alpha - (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha \beta} \right] = 0 \quad (3.8)$$

oder

$$\lambda_1^\alpha = (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha \beta} \quad (3.9)$$

Abschließende Division mit  $\lambda_1^{-\alpha \beta}$  und Potenzieren mit  $1/\alpha(1 + \beta)$  von (3.9) führt schließlich auf die folgende Beziehung von  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$

$$\lambda_1 = f(\lambda_3) = \lambda_3^{-\frac{\beta}{1+2\beta}} \quad \text{und damit} \quad \lambda_1^2 \lambda_3 = \lambda_3^{-\frac{1}{1+2\beta}} \quad (3.10)$$

Durch Einsetzen von (3.10) in (3.7) lässt sich die Querstreckung  $\lambda_1$  eliminieren und unter Berücksichtigung von (3.4) erhält man schließlich die folgende Kraft-Stauchungs-Relation eines durch uniaxiale Stauchung belasteten quaderförmigen Probekörpers:

$$K(h) = 2 \frac{\mu}{\alpha} a_0^2 \left[ \left( \frac{h}{h_0} \right)^{-\alpha \frac{1+3\beta}{1+2\beta}} - 1 \right] \left( \frac{h}{h_0} \right)^{\alpha-1} \quad (3.11)$$

In Bild 3.20 ist der Zusammenhang (3.10) für verschiedene  $\beta$ -Parameter dargestellt, wobei der Wert  $\beta = 0,763 \times 10^{-2}$  der nachfolgend durchgeführten Materialidentifikation entspricht. Für  $\beta \rightarrow \infty$  bzw.  $\nu = 1/2$  ergibt sich  $\lambda_1 = 1/\sqrt{\lambda_3}$  und damit der inkompressible Fall, für den aus (3.4)<sub>3</sub> die Determinante  $J = 1$  folgt. Für  $\beta = 0$  und damit  $\nu = 0$  findet man  $\lambda_1 = 1$  für beliebige Streckungen  $\lambda_3$

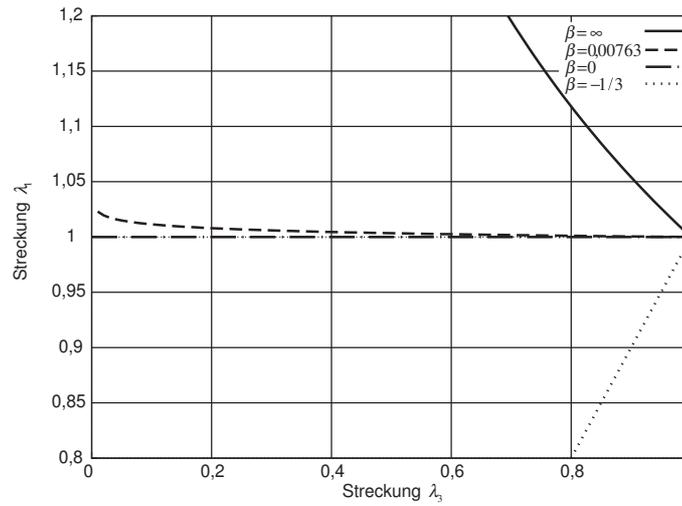


Bild 3.20: Graphische Darstellung der Beziehung (3.10) bei Variation des Parameters  $\beta$

Fall  $N=2$ :

Für den Fall  $N = 2$  ergibt sich mit (3.7)

$$K(\lambda_1, \lambda_3) = -2a^2 (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-1} \left\{ \frac{\mu_1}{\alpha_1} \left[ \lambda_3^{\alpha_1} - (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha_1 \beta_1} \right] + \frac{\mu_2}{\alpha_2} \left[ \lambda_3^{\alpha_2} - (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha_2 \beta_2} \right] \right\} \quad (3.12)$$

und (3.6)

$$\frac{\mu_1}{\alpha_1} \left[ \lambda_1^{\alpha_1} - (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha_1 \beta_1} \right] = -\frac{\mu_2}{\alpha_2} \left[ \lambda_1^{\alpha_2} - (\lambda_1^2 \lambda_3)^{-\alpha_2 \beta_2} \right] \quad (3.13)$$

wobei sich in diesem Falle aus (3.13) keine explizite Abhängigkeit zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$  angeben lässt.

Die Berechnung des Gütefunktional (3.2) erfolgt durch die analytisch ermittelte Kraft-Stauchungs-Relation. Dabei entsprechen in (3.2)  $f(h, \mathbf{p})$  die Kraft-Stauchungs-Relation für  $N = 1$  und  $N = 2$  sowie  $f_i$  den gemessenen Relaxationsabbruchpunkten aus dem uniaxialen Druckversuch der Schaumstoffproben SUPRA und SAF. Die Relaxationsabbruchpunkte bilden einen „Optimierungskorridor“.

Die mit (3.11) bzw. (3.12) auf Basis des Optimierungsalgorithmus Simulated Annealing identifizierten Parametersätze  $\alpha, \mu, \beta$  für  $N = 1$  und  $\alpha_1, \mu_1, \beta_1, \alpha_2, \mu_2, \beta_2$  für  $N = 2$  für das Material SUPRA und SAF sind in den Tabellen 3.1 und 3.2 nachfolgend aufgeführt. Die jeweiligen Kraft-Weg-Verläufe der beiden Materialien sind in den Bildern 3.21 und 3.22 dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass sämtliche

mittels der optimierten Parameter erzeugten Kurvenverläufe, abgesehen im Bereich sehr kleiner Verformungen, stets innerhalb des durch die Relaxationsabbruchpunkte gebildeten Korridors liegen und so gut wie kein Unterschied zwischen den Kraft-Weg-Verläufen für eine Anpassung mit  $N = 1$  und  $N = 2$  sichtbar ist. Dies trifft sowohl für das Material SUPRA als auch für das Material SAF zu.

Tabelle 3.1: Identifizierte Materialparameter auf Basis der analytischen berechneten Kraft-Stauchungs-Relation für  $N = 1$  und  $N = 2$  für das Material SUPRA

SUPRA	N=1	N=2
$\alpha_1$	$0,194 \cdot 10^2$	$0,202 \cdot 10^2$
$\beta_1$	$0,763 \cdot 10^{-2}$	$0,151 \cdot 10^{-1}$
$\mu_1$ [MPa]	$0,175 \cdot 10^{-1}$	$0,265 \cdot 10^{-2}$
$\alpha_2$		$0,194 \cdot 10^2$
$\beta_2$		$0,615 \cdot 10^{-2}$
$\mu_2$ [MPa]		$0,149 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 3.2: Identifizierte Materialparameter auf Basis der analytischen berechneten Kraft-Stauchungs-Relation für  $N = 1$  und  $N = 2$  für das Material SAF

SAF	N=1	N=2
$\alpha_1$	$0,198 \cdot 10^2$	$0,204 \cdot 10^2$
$\beta_1$	$0,109 \cdot 10^{-1}$	$0,817 \cdot 10^{-2}$
$\mu_1$ [MPa]	$0,831 \cdot 10^{-2}$	$0,723 \cdot 10^{-2}$
$\alpha_2$		$0,174 \cdot 10^2$
$\beta_2$		$0,189 \cdot 10^{-1}$
$\mu_2$ [MPa]		$0,122 \cdot 10^{-2}$

Infolge der sehr geringen Unterschiede in den Kraft-Weg-Verläufen im Falle von  $N = 1$  und  $N = 2$ , werden die folgenden Auswertungen nur noch für den einfacheren Fall  $N = 1$  durchgeführt.

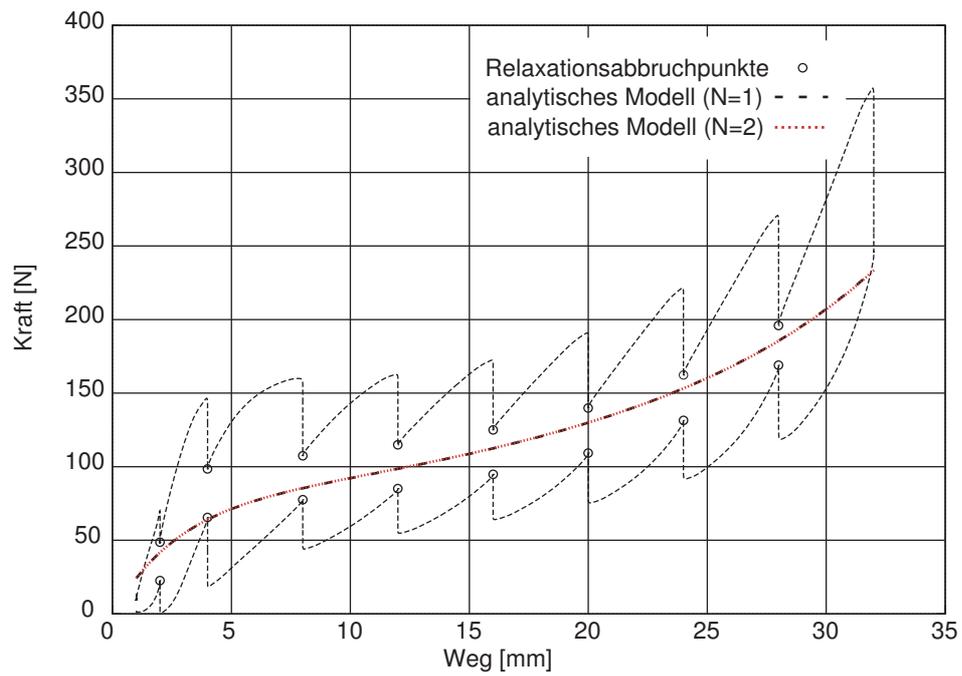


Bild 3.21: Kraft-Weg-Verläufe auf Basis der Abschätzung der Materialparameter für SU-PRA

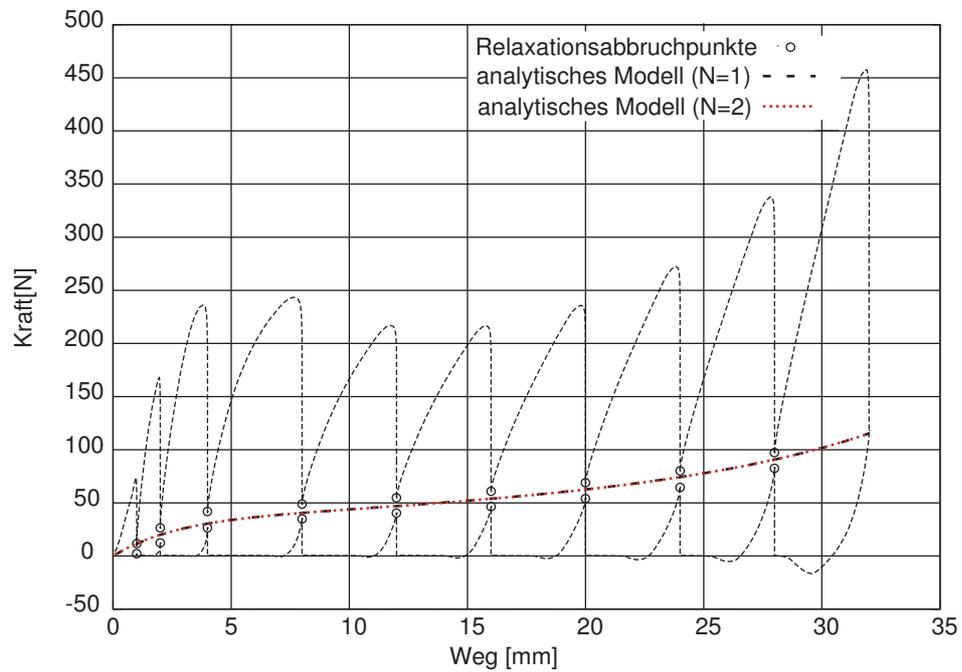


Bild 3.22: Kraft-Weg-Verläufe auf Basis der Abschätzung der Materialparameter für SAF

### 3.4.4 Identifikation der Materialparameter

Im Folgenden wird das Verfahren zur eigentlichen Identifikation der Materialparameter für den Fall des inhomogenen Druckversuchs beschrieben. Dabei wird zur numerischen Beschreibung des uniaxialen Druckversuchs mittels ABAQUS ein 3D-Modell der Schaumstoffprobe generiert. Die Diskretisierung der Schaumstoffprobe erfolgt mit  $20 \times 20 \times 5$  Acht-Knoten-Kontinuums-Elementen (C3D8). Die Druckplatte wird als starrer Körper (Analytical Rigid Body) modelliert. Die Festlegung der Freiheitsgrade der Druckplatte erfolgt durch Einspannung des zugehörigen Referenzknotens in 1- und 3-Richtung. In 2-Richtung wird die Belastung in Form einer Verschiebung von 32 mm aufgebracht (Bild 3.23). Die Umsetzung der Probenaufgabe erfolgt durch Einspannung aller translatorischen Knotenfreiheitsgrade an der Unterseite des Schaumstoffkörpers. Der Kontakt zwischen der Druckplatte und der Probe wird als Oberflächenkontakt modelliert. Dabei wird in ABAQUS bei den Knoten innerhalb des Kontaktbereiches zwischen Master- und Slave-Knoten unterschieden. Die Knoten auf der Slave-Oberfläche können die Master-Oberfläche nicht durchdringen, wohingegen die Knoten auf der Master-Oberfläche die Slave-Oberfläche durchdringen. Die Kontaktbedingung zwischen der Druckplatte und der Schaumstoffprobe wird derart gewählt, dass eine relative Bewegung der Knoten der Probe während der Simulation ausgeschlossen wird.

Für die Berechnung des Gütefunctionals (3.2) wird die Reaktionskraft bezogen auf den Referenzknoten in Belastungsrichtung (2-Richtung) und die zugehörigen Verschiebungen herangezogen. Dabei entsprechen in (3.2)  $f(h, \mathbf{p})$  den mittels ABAQUS auf Basis des „Hyperfoam“ Materialgesetzes (2.98) und (2.99) berechneten resultierenden Kraftwerten und  $f_i$  analog den für die Parameterabschätzung verwendeten Relaxationsabbruchpunkten aus dem uniaxialen Druckversuch. Bei der numerischen Rechnung mit Hilfe des FE-Solvers werden als Ergebnis diskrete Kraft und Verschiebungswerte ausgegeben. Die Abstände der einzelnen Verschiebungen richten sich dabei nach der Integrationsschrittweite des numerischen Lösungsverfahrens, womit diese im Allgemeinen nicht identisch mit den Messwerten des uniaxialen Versuchs sind.

Um eine Identität zwischen jeweiligem Messwert und dem entsprechend numerisch ermittelten Wert herzustellen, muss zwischen diesen beiden Werten interpoliert werden. Hierbei werden aufgrund der größeren Anzahl von Integrationsstützstellen der

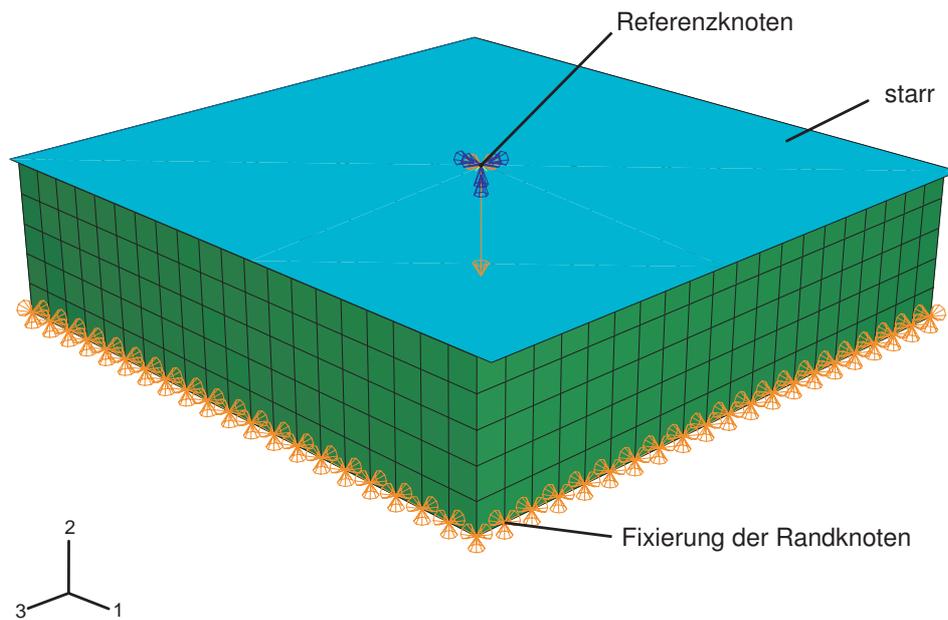


Bild 3.23: FE-Modell des uniaxialen Druckversuchs mit Darstellung der Randbedingungen

numerischen Lösung im Vergleich zur Anzahl der Messpunkte die numerisch ermittelten Verschiebungen als Stützstellen für die Interpolation herangezogen. Im Sinne einer ersten Approximation wird für die Interpolation der Ergebnisse ein linearer Ansatz gewählt.

Die Ergebnisse der Optimierung mittels der Simplexmethode von NELDER und MEAD und dem in ABAQUS implementierten FE-Modell „Hyperfoam“ bezüglich der experimentellen Daten des uniaxialen Druckversuchs sind in den Bildern 3.24 und 3.25 und der Tabelle 3.3 dargestellt. Dabei wurden die in Abschnitt 3.4.3 ermittelten Parameter (Abschätzung) für  $N = 1$  als Startwerte benutzt. Wie aus den Bildern zu erkennen ist, ist der Unterschied zwischen den beiden Anpassungen (Abschätzung aus homogen angenommenem Versuch und inhomogen gerechnetem Versuch) vernachlässigbar klein. Dies deutet darauf hin, dass die durch die Einspannbedingungen verursachten Randstörungen im uniaxialen Druckversuch keinen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis der Parameteroptimierung und die Wiedergabe der Versuchsdaten haben. Da aber davon auszugehen ist, dass die in diesem Abschnitt optimierten Parameter des inhomogenen Druckversuchs die Realität zutreffender abbilden, sollen diese auch bei den folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt werden.

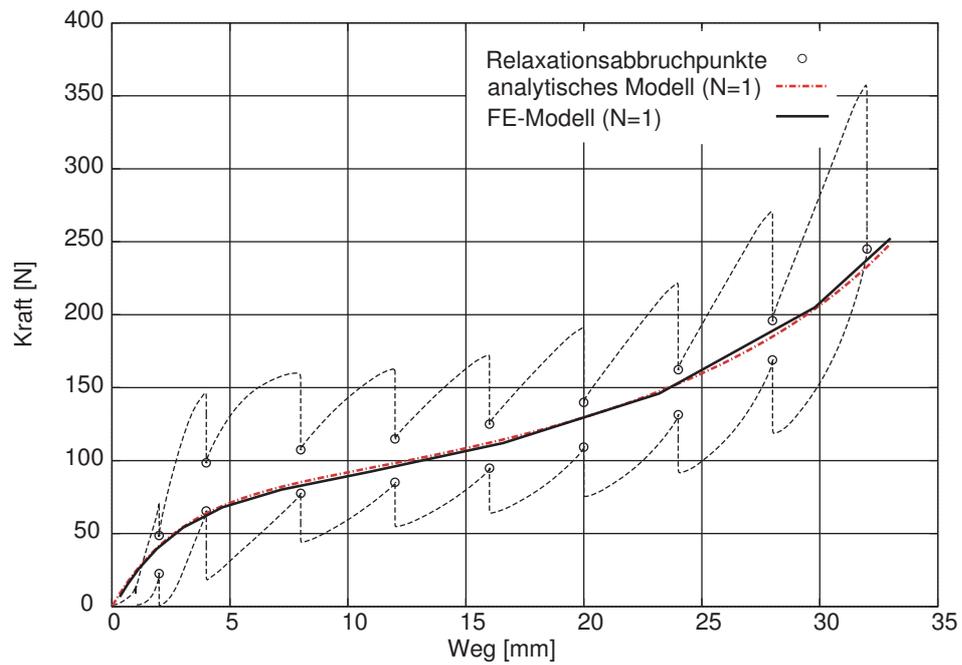


Bild 3.24: Vergleich der Ergebnisse der beiden Optimierungstrategien des uniaxialen Druckversuchs für SUPRA

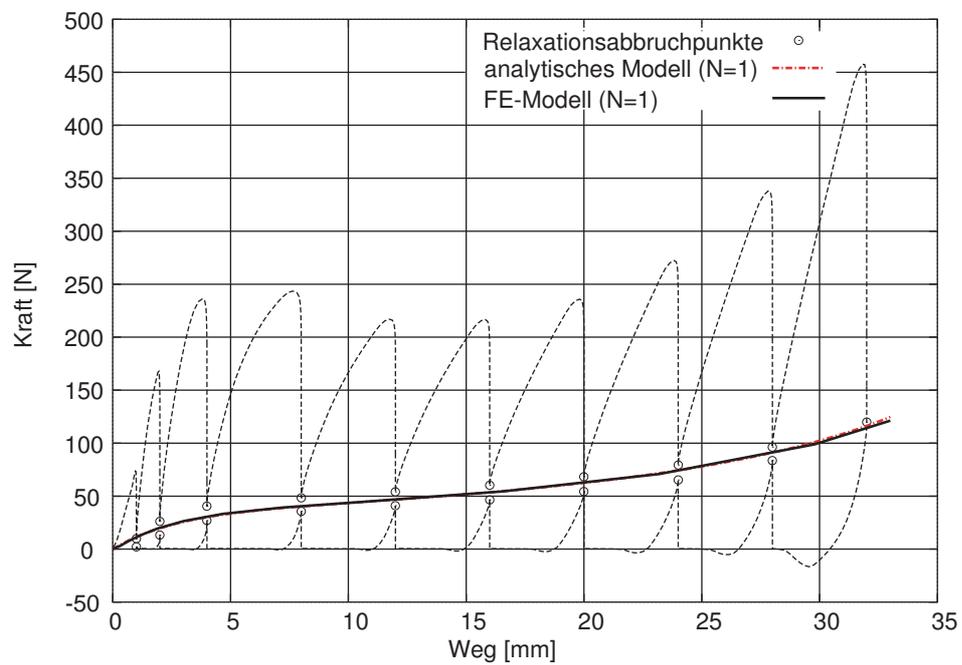


Bild 3.25: Vergleich der Ergebnisse der beiden Optimierungstrategien des uniaxialen Druckversuchs für SAF

Tabelle 3.3: Materialparameter Optimierung auf Basis der Finiten Elemente Methode für die beiden Materialien SUPRA 5035 und SAF 6060

	SUPRA 5035		SAF 6060	
	analytisches Modell	FE-Modell	analytisches Modell	FE-Modell
$\alpha$	$0,194 \cdot 10^2$	$0,2143 \cdot 10^2$	$0,198 \cdot 10^2$	$0,213 \cdot 10^2$
$\beta$	$0,763 \cdot 10^{-2}$	$0,953 \cdot 10^{-2}$	$0,109 \cdot 10^{-1}$	$0,907 \cdot 10^{-2}$
$\mu$ [MPa]	$0,175 \cdot 10^{-1}$	$0,185 \cdot 10^{-1}$	$0,831 \cdot 10^{-2}$	$0,864 \cdot 10^{-2}$

### 3.4.5 Verifikation der Materialparameter

Zur Verifikation der im vorigen Abschnitt ermittelten Materialparameter aus dem uniaxialen (inhomogenen) Druckversuch wird der im Abschnitt 3.3.1 beschriebene Indenterversuch zugrunde gelegt und mittels der Finiten Elemente Methode und den gewonnenen Parametern aus der Anpassung des uniaxialen Versuchs verglichen.

Der Indenterversuch wird mit  $40 \times 12 \times 40$  Acht-Knoten-Kontinuumselementen (C3D8) diskretisiert. Der zylinderförmige starre Stempel mit halbkugelförmigem Kopf wird als Rigid Body definiert. Die Einspannbedingungen des Indenters und der Schaumstoffprobe werden analog dem uniaxialen Druckversuch gewählt. Zur Darstellung der Ergebnisse werden die Reaktionskraft in Belastungsrichtung (2-Richtung) und die dazugehörige Verschiebung ausgewertet. In Bild 3.26 ist die FE-Simulation des Indenterversuchs für das Material SUPRA dargestellt.

Nachfolgend sind in den Bildern 3.27 und 3.28 die Ergebnisse der FE-Berechnung des Indenterversuchs auf Basis der ermittelten Materialparameter aus dem uniaxialen Druckversuch dargestellt. Wie deutlich zu erkennen ist, liegt die mittels des FE-Modells berechnete Kraft-Weg- Kurve innerhalb des experimentell erzeugten Korridors (Relaxationsabbruchpunkte). Somit kann der aus dem uniaxialen Druckversuch gewonnene Parametervektor auch zur Darstellung von komplexeren Lastfällen verwendet werden.

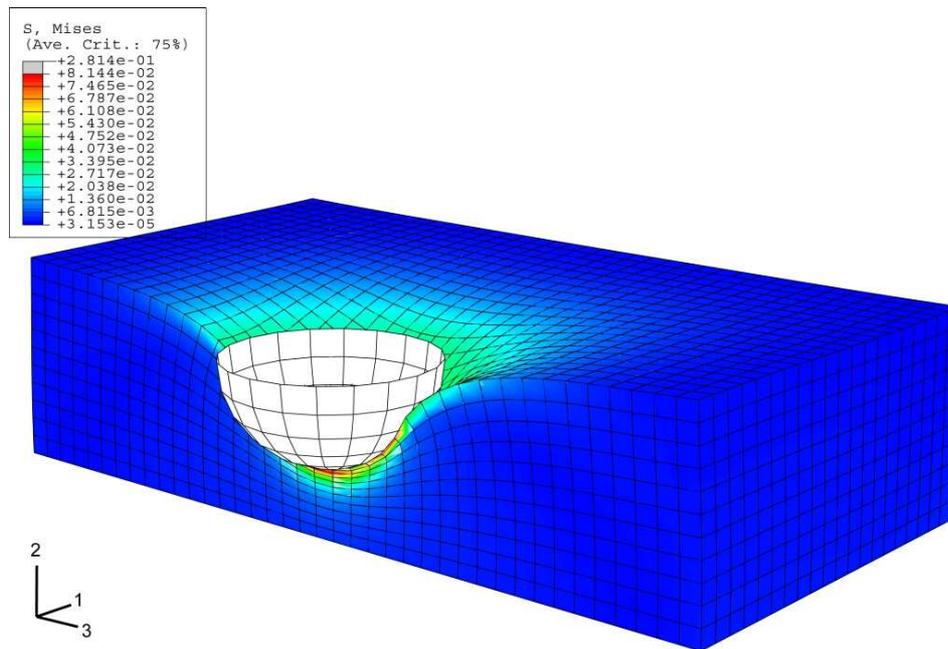


Bild 3.26: FE-Simulation des Indenterversuchs (Halbschnitt durch das FE-Modell)

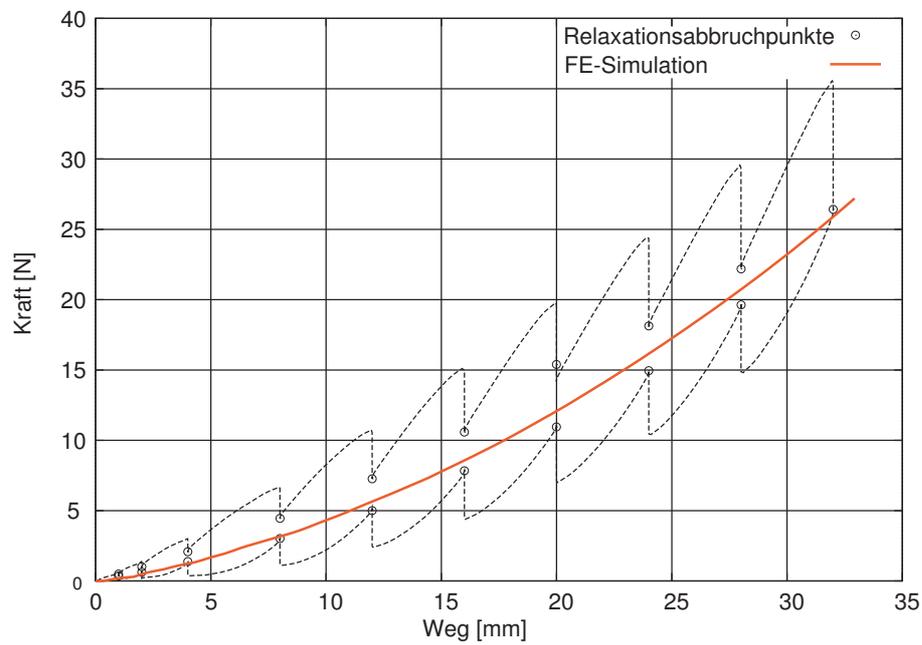


Bild 3.27: Vergleich der experimentell ermittelten Daten des Indenterversuchs mit der FE-Simulation für SUPRA

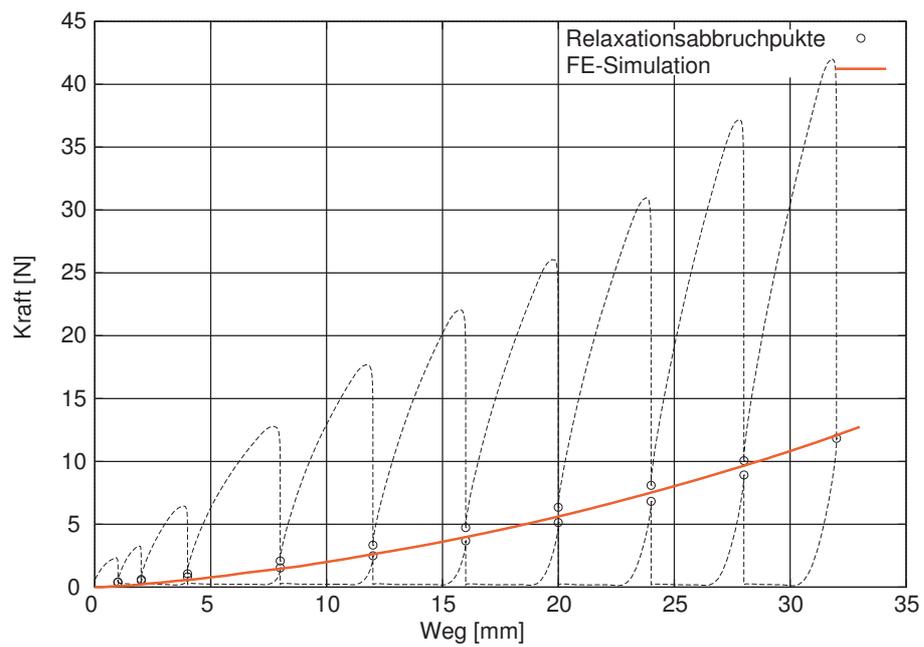


Bild 3.28: Vergleich der experimentell ermittelten Daten des Indenterversuchs mit der FE-Simulation für SAF

# Kapitel 4

## Humangewebe

Wegen des komplexen mechanischen Verhaltens humaner Gewebe sind für dessen mechanische Beschreibungen dreidimensionale Darstellungen entsprechender Gewebeverbände notwendig. Um auf deren Materialeigenschaften unter normalen Lebensbedingungen schließen zu können, sind darüber hinaus *in-vivo* Verformungsmessungen unabdingbar. Eine entsprechende Auswertung solcher Daten kann nur noch mit Hilfe der Finiten Elemente Methode (FEM) bewerkstelligt werden.

### 4.1 Ausgewählte Körperregion

Zur Festlegung eines adäquaten Stoffgesetzes für humanes Weichgewebe ist es erforderlich, entsprechende Messdaten zu generieren, die möglichst in Form von Kraft-Verformungs-Daten anfallen sollten. Als eine erste repräsentative Prädilektionsstelle wird hierfür die Fersenregion aus daten-ökonomischen Gründen (Rechenzeit) ausgewählt. Diese Region setzt sich im Wesentlichen aus humanen Weichgeweben, wie etwa Hautschichten und Fettgewebe sowie Knochen, Sehnen und Bänder zusammen. In Bild 4.1 ist der Aufbau des menschlichen Fußes im Querschnitt (Sagittalschnitt) dargestellt.

Sehr deutlich zu erkennen ist das Fersenpolster unterhalb des Fersenbeins (Calcaneus). Dieses Fersenpolster dient in erster Linie zur Übertragung hoher Druckkräfte, die insbesondere beim Stehen und Gehen entstehen. Um diese lokal hohen Druckkräfte gleichmäßig auf eine größere Kontaktfläche zu verteilen, ist das bis zu 2 cm dicke subkutane Bindegewebe der Fußsohle wie eine Druckkammer aufgebaut und stellt somit eine funktionelle Anpassung an diese Anforderung dar.

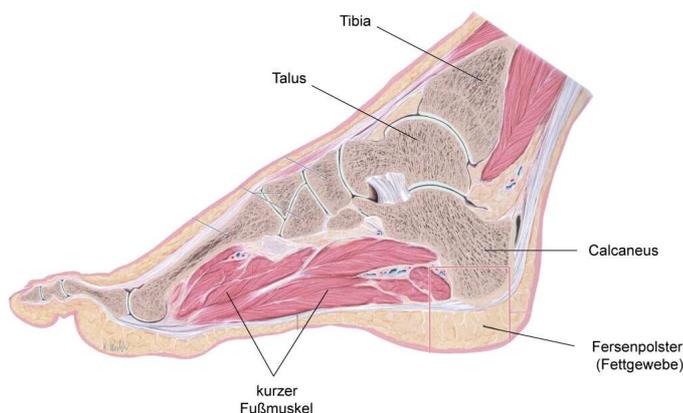


Bild 4.1: Sagittalschnitt eines rechten Fußes aus Schünke u. a. (2005)

## 4.2 Experimente

Humangewebe besteht in mechanischer Hinsicht aus einer viskoelastischen Füllung, die durch eine Membran aus verwobenen Proteinfasern umschlossen wird und einen Austausch von Wasser ermöglicht. Wie man in Bild 4.2 schematisiert erkennen kann, ist der Füllungszustand von zentraler Bedeutung für das Verformungsverhalten infolge einer von außen aufgetragenen Belastung.

Nur der lebende Organismus garantiert einen stationären Füllungszustand (Homeostase) durch die Interaktion osmotisch aktiver Eiweiße im Blut, durch den hydrostatischen Druck durch die Pumpleistung des Herzens und der Ausscheidung von überflüssigem Wasser durch die Niere. Aus diesen Gründen ist eine Beschreibung eines Stoffgesetzes für humanes Weichgewebe nur durch einen *in-vivo* Versuch sinnvoll. Für die vergleichende FE-Modellierung müssen die 3D-Geometrien der unterschiedlichen Gewebearten erzeugt werden. Zu diesem Zweck werden Messungen in einem Magnetresonanztomographen durchgeführt.

### 4.2.1 Grundlagen der Magnetresonanztomographie

Der Vorteil der Magnetresonanztomographie (MRT) gegenüber anderen bildgebenden Verfahren, wie z.B. der Computertomographie (CT), besteht darin, dass Schnittbilder ohne den Einsatz von ionisierender Strahlung erzeugt werden. Im Gegensatz zu allen anderen bildgebenden Verfahren können mit Hilfe der MRT verschiedene

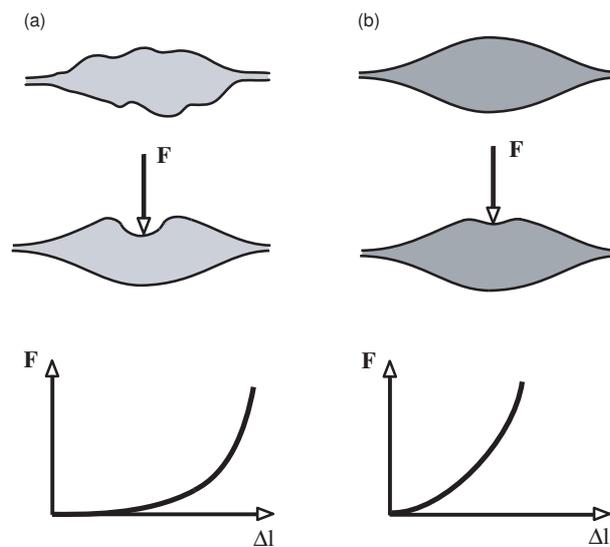


Bild 4.2: Schematische Darstellung des Hülle-Füllungs-Problems: (a) Kraftantwort eines unterfüllten Systems, (b) Kraftantwort eines intakten Systems

gewebespezifische Parameter verschieden gewichtet und damit vollkommen unterschiedliche Bilder erzeugt werden. Dadurch lassen sich pathologische Veränderungen wie Entzündungen, Ödeme, Knorpelschäden, Primärtumore und Metastasen (Knochen) viel sensitiver nachweisen, als dies mit anderen Verfahren möglich ist. Die MRT-Technik benutzt statt Röntgenstrahlen Magnetfelder und spezielle Radiowellen, die mit den Atomen der Körperzellen in Wechselwirkung treten. Somit entsteht für den Patienten keinerlei Strahlenbelastung. Ein Nachteil der MRT-Technik sind die sehr hohen Kosten. Ferner kann die Methode bei Vorhandensein von Metall im Körper (Schrittmacher, Splitter) nicht angewandt werden.

Die Untersuchungsmethode basiert auf dem physikalischen Prinzip, dass Atomkerne mit ungerader Protonen- oder Neutronenzahl über einen Eigendrehimpuls, den sogenannten Spin verfügen. Der für die Messung geeignetste Atomkern ist das Wasserstoffatom, weshalb das MRT-Verfahren vor allem von wasserhaltigen Geweben sehr genaue und differenzierte Darstellungen liefert. Im Normalzustand sind die Spins ungeordnet. Wird jedoch ein starkes Magnetfeld angelegt, richten sich die Atomkerne wie Kompassnadeln parallel oder antiparallel zur Feldrichtung aus und vollführen eine Kreisbewegung um die Feldlinien des äußeren Magnetfeldes. Die Ausrichtung der Kernspins allein würde noch kein Bild erzeugen. Aus diesem Grund wird senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes ein kurzer Hochfrequenzimpuls eingestrahlt. Dies

hat ein „Umklappen“ der ausgerichteten Kernspins zur Folge und die Kreiselbewegung aller Atome wird kurzzeitig synchronisiert. Dadurch entsteht eine senkrecht zu den Feldlinien des äußeren Magnetfeldes verlaufende Transversalmagnetisierung. Nach Abschalten des Impulses richten sich die Kernspins wieder entlang des äußeren Magnetfeldes aus und geben dabei Energie in Form von Wärme an die Umgebung ab. Dieser Prozess der Wiederausrichtung, genauer gesagt des Wiederaufbaus der Längsmagnetisierung, bezeichnet man als T1-Relaxation. Er hängt wesentlich von der Wärmeleitfähigkeit des Gewebes ab. Gewebe mit schnellem Wärmetransfer (z.B. Fettgewebe) stellen sich in T1-gewichteten Bildern hell dar, Gewebe mit langsamem Wärmetransfer dagegen dunkel.

Es kann jedoch noch ein weiterer Aspekt gemessen werden. Mit dem Ausschalten des Hochfrequenzimpulses verlieren die Atomkerne auch ihre phasensynchrone Kreiselbewegung. Der damit verbundene Rückgang der Transversalmagnetisierung wird als T2-Relaxation bezeichnet. Gewebe, die eine Transversalmagnetisierung relativ lange aufrechterhalten können, stellen sich in T2-gewichteten Bildern hell dar (z.B. Wasser).

Maßgeblich für die Auflösung eines MRT ist die von ihm erzeugte Feldstärke in Tesla. Ein Tesla entspricht etwa der 20.000-fachen Stärke des Erdmagnetfeldes. Durch Veränderung der Geräteparameter, z.B. der Pulswiederholzeit (TR) oder der Echozeit (TE) können am MRT unterschiedliche Wichtungen wie z.B. T1-gewichtete oder T2-gewichtete Bildsequenzen (vgl. Tabelle 4.1) eingestellt werden Stichnoth (1994).

Tabelle 4.1: Signalintensität einiger Substanzen (T1 und T2) Stichnoth (1994)

Substanz	T1	T2
Wasser	dunkel	hell
Fett	hell	mittel bis hell
Knochen	dunkel	dunkel
Fibröses Gewebe	dunkel	dunkel

Zum besseren Verständnis und Orientierung der in dieser Arbeit abgebildeten MRT-Schnittbilder der Ferse zeigt Bild 4.3 eine kurze Zusammenstellung der in der Medizin verwendeten Bezeichnungen der Schnittebenen am menschlichen Körper.

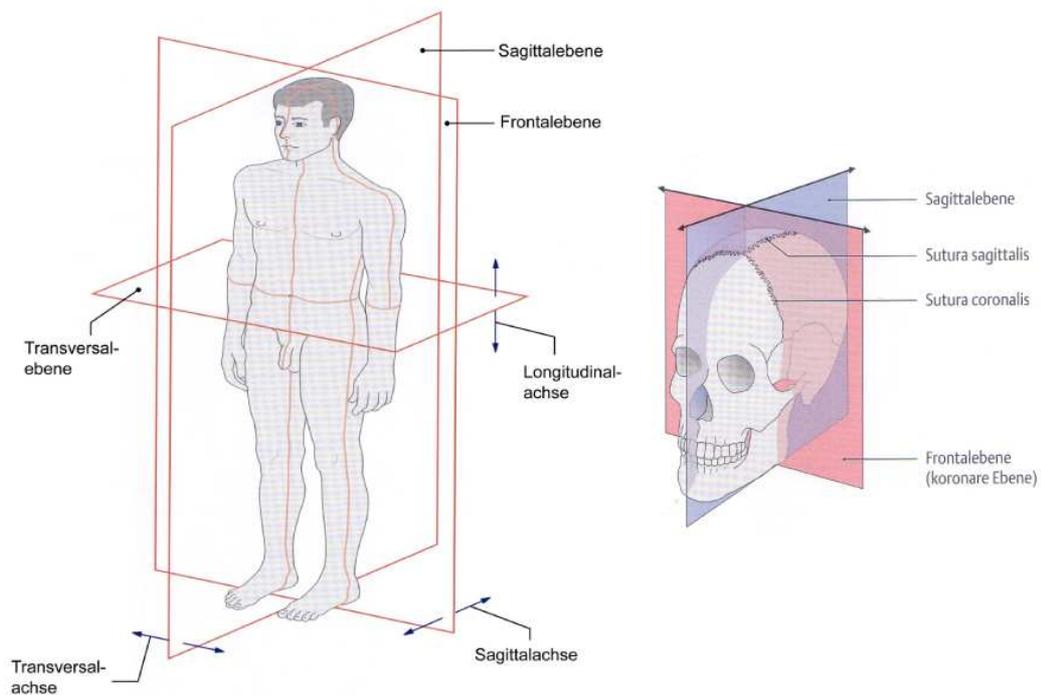


Bild 4.3: Hauptebenen und Hauptachsen am Körper des Menschen Sobotta (1993)

Die Bezeichnungen der verschiedenen Ebenen sind wie folgt:

- **Sagittalebene:** Alle vertikalen Ebenen, die parallel zur Sutura sagittalis (Pfeilnaht) des Schädels ausgerichtet sind.
- **Frontalebene (=koronare Ebene):** Alle parallel zur Frons bzw. zur Sutura coronalis (Kranznaht) des Schädels ausgerichteten Ebenen, die im Stand vertikal von einer zur anderen Körperseite verlaufen
- **Transversalebene:** Alle auf den Stand bezogenen, horizontal verlaufenden Querschnittsebenen. Sie laufen senkrecht zur Körperlängsachse

### 4.2.2 Versuchsdurchführung MRT-Messung

Zur Generierung der 3D-Geometrie der Fersenregion war es erforderlich, eine Vorrichtung zu entwickeln, die es ermöglicht, sowohl einen unbelasteten Zustand (Bezugs- oder Referenzkonfiguration) als auch einen belasteten Zustand (Momentankonfiguration) der Ferse definiert und reproduzierbar zu erzeugen (vgl. Bild 4.4). Die Positionierung des Fußes in der Vorrichtung erfolgt zum einen über Klemmbacken (Pos. 7), die oberhalb der Fersenknöchel das Bein fixieren, und zum anderen über eine Halterung, die am Oberkasten der Kniespule befestigt wird (Pos. 6). Die zu erzeugende Messkraft, die zur lokalen Verformung der Ferse benötigt wird, wird über eine starre Platte (Pos. 5) aufgebracht, die durch ein Kegelradgetriebe (Pos. 4) bewegt wird. Um Schnittbilder mit hoher Signalstärke bzw. besseren Weichteildifferenzierung erzielen zu können, wird die gesamte Vorrichtung in eine Kniespule implementiert (Bild 4.4 Pos. 1 und Pos. 2).

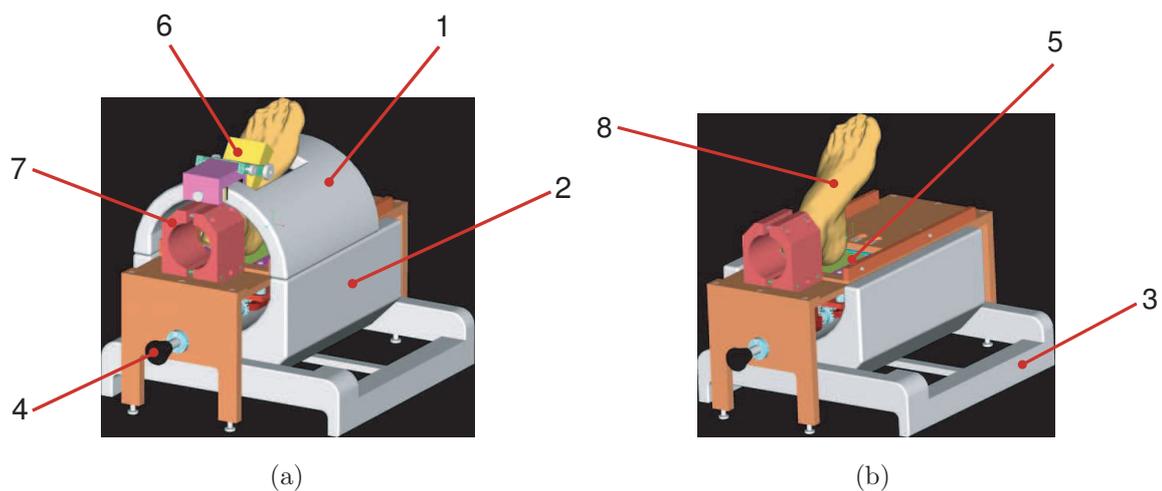


Bild 4.4: CAD Modell des in die Kniespule implementierten Versuchsaufbaus: (a) Vorrichtung mit Kniespulenoberteil, (b) ohne Kniespulenoberteil

Die Kernspintomographien werden auf einem Siemens Magnetom Sonata mit 1,5 Tesla Feldstärke durchgeführt. Die verwendete Aufnahmesequenz liefert T1-gewichtete Bilder mit einer Bildmatrix von 1024 x 512 Pixeln und einer Auflösung von 0,25 x 0,25 mm. Aufgrund dieser hohen Auflösung und der geringen Schichtdicken ergibt sich eine sehr hohe Messzeit (> 45 min), weshalb nicht die komplette Ferse aufgenommen wird, sondern nur derjenige Bereich, der unmittelbar in dem belasteten Gebiet der Ferse angesiedelt ist. Dies senkt die Aufnahmezeit um etwa 20 – 25 min. Eine

Sequenz besteht aus 144 sagittalen Schichten mit Schichtdicken von 0,5 mm bei einer Aufnahmezeit von 25 min.

### 4.2.3 Experimentelle Befunde der MRT-Messungen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Messungen der Ferse im MRT dargestellt. Bild 4.5 zeigt einen transversalen Schnitt durch die unbelastete (b) und belastete (c) Ferse. Die Lage des Schnittes ist in Teilabbildung (a) aufgezeigt.

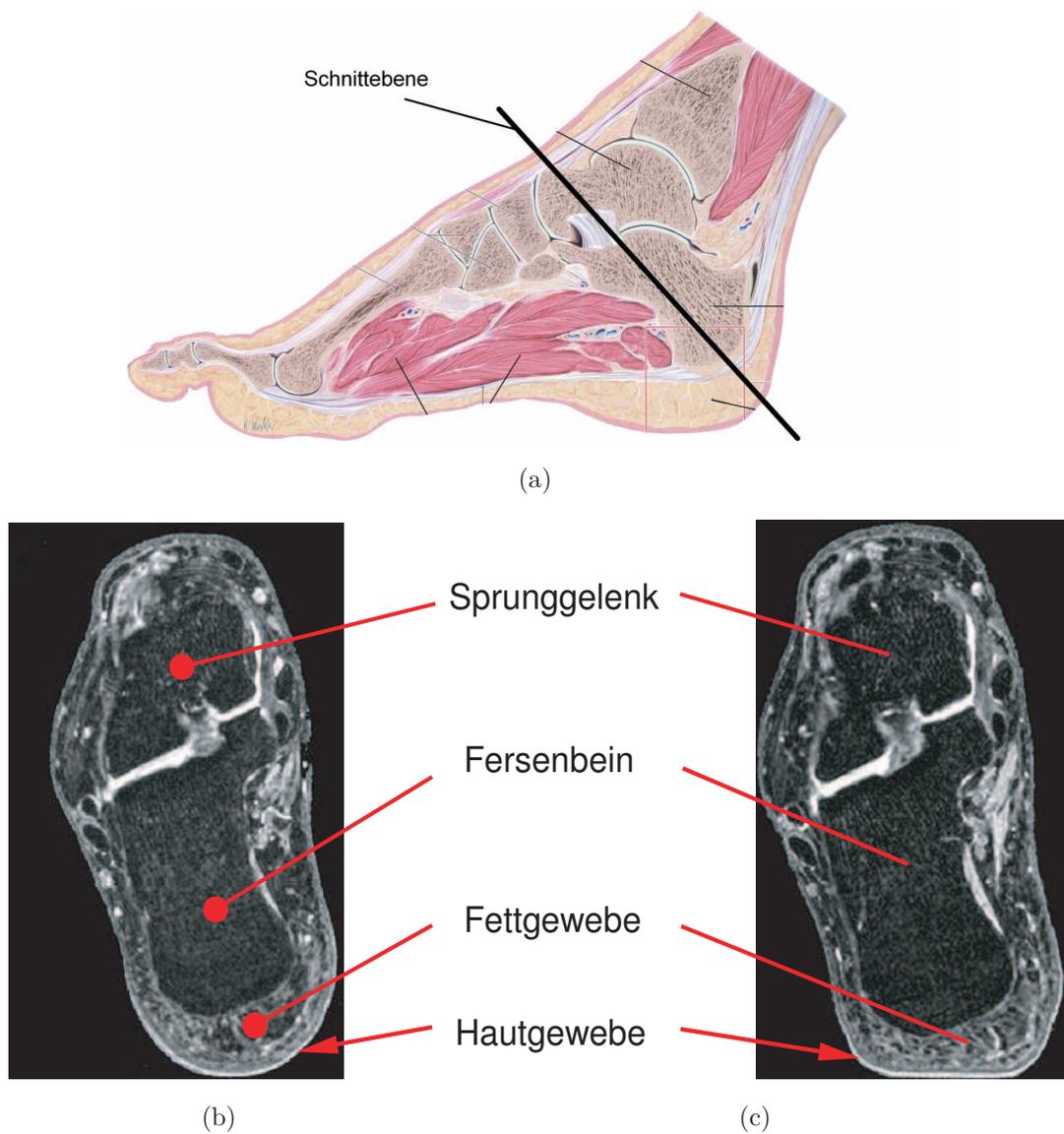


Bild 4.5: MRT-Schnittbilder der Ferse: (a) Lage der transversalen Schnittebene, (b) unbelastete Ferse und (c) durch Druckplatte belastete Ferse

Die dunklen Bereiche repräsentieren die beiden Knochen Fersenbein (Calcaneus) und Sprunggelenk (Talus). Das Fett- und umgebende Weichgewebe wird durch den helleren Grauton wiedergegeben. Vergleicht man die beiden Bilder 4.5b und 4.5c miteinander, so ist eine lokale Deformation des Fettgewebes durch die Belastung der Druckplatte im unteren Bereich des Fersenbeins sehr deutlich durch den abgeplatteten Bereich zu erkennen. Das Gewebe weicht infolge der Belastung seitlich aus, die Haut dagegen zeigt keine Veränderung in Dickenrichtung (vgl. Pfeile in Bild 4.5). Aus diesem Grund werden bei der anschließenden Rekonstruktion das Fett- und Hautgewebe als eine Gewebeart rekonstruiert und in der späteren FE-Simulation als Fettgewebe betrachtet.

#### 4.2.4 Versuchsdurchführung Kraft-Weg-Messungen

Prinzipiell ist der Versuchsaufbau zur Messung der Kraft-Weg-Daten der gleiche wie im Abschnitt 4.2.2. Zur Messung der aufgetragenen Belastung  $F$  wird ein Folien-drucksensor der Firma Takscan verwendet, der direkt auf die Druckplatte befestigt wird (vgl. Bild 4.4). Dieses noch wenig verbreitete Messsystem besteht aus vier Komponenten: Dem Sensor, dem „Handle“, einer externen Messkarte und der Software für die Messdatenerfassung. Der Sensor besteht aus einem Verbund von zwei Trägerfolien mit einer Gesamtdicke von 0,12 mm (Bild 4.6). Zwischen den Trägerfolien befindet sich eine Tinte, die ihre elektrische Leitfähigkeit durch Aufbringen einer Druckbelastung ändert. Durch sich kreuzende Leiterbahnen, die beiderseits der drucksensiblen Tinte in den Folienverbund eingearbeitet sind, kann diese Widerstandsänderung gemessen werden.

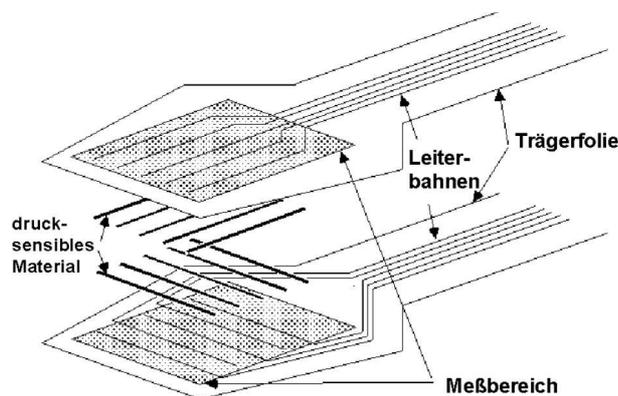


Bild 4.6: Foliendrucksensor der Firma TekScan

Es gibt eine Reihe von Sensoren, die sich in Gestalt, Auflösung und maximal zu messender Druckbeanspruchung unterscheiden. Für den vorliegenden Anwendungsfall kommt der Sensortyp #5051 zur Anwendung. Dieser Sensor besteht aus einer Matrix von 44 x 44 Drucksensor-Zellen mit einer Gesamtmessfläche von 3122,57 mm<sup>2</sup>. Die an den Kreuzungspunkten auftretende Widerstandsänderung wird am anderen Ende des Sensors mit Hilfe des „Handles“ abgegriffen und mittels der externen Messkarte ausgewertet. Die Daten werden über die parallele Schnittstelle auf den Messrechner übertragen und dort von dem Messprogramm ISCAN aufbereitet und visualisiert.

Die Kraft-Verformung-Messung ist in Bild 4.7 schematisch dargestellt. Die Wegmessung der Platte wird über einen an der Antriebswelle befestigten inkrementellen Winkeldrehgeber realisiert, wobei die Zustellbewegung manuell erfolgt.

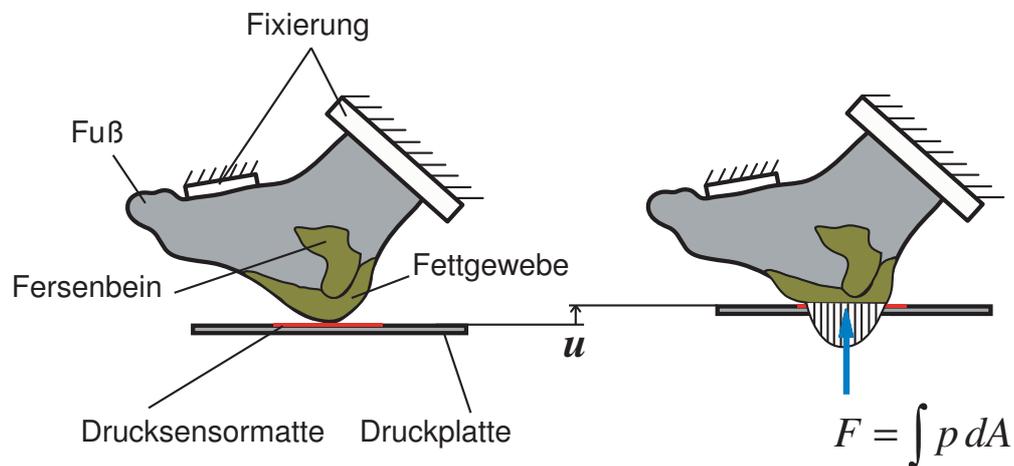


Bild 4.7: Prinzipieller Aufbau der Kraft-Verformung-Messung der Ferse

Zur Ermittlung der Kraft-Weg-Daten wurde mit Hilfe der graphischen Programmiersprache LabView ein Steuerprogramm entwickelt, welches die beiden im Versuch generierten Datenströme der ISCAN-Software und des Winkeldrehgebers miteinander zeitlich synchronisiert und auswertet. Die Messsoftware ISCAN startet automatisch das Steuerprogramm durch ein Triggersignal von  $\pm 5$  Volt und speichert die vom Drucksensor aufgenommenen Drücke in einem Intervall von 0,25 sec. Zeitgleich nimmt das Steuerprogramm die Daten der Wegmessung ebenfalls in einem Intervall von 0,25 sec auf. Nach Beendigung der Messung berechnet das Steuerprogramm die resultierende Kraft  $F$  aus den Druckdaten der einzelnen Sensorzellen für jeden auf-

genommenen Wegmesswert zur gleichen Zeitbasis. Resultierend daraus können die Kraft-Weg-Kurven graphisch dargestellt werden.

#### 4.2.5 Experimentelle Befunde der Kraft-Weg-Messung

Zur Determinierung des in Kapitel 2 beschriebenen Stoffgesetzes (2.108) werden in einer ersten Näherung die mit Hilfe des Foliendruckensors und des Winkeldrehgebers gemessenen Kraft- und Weg-Daten der Ferse herangezogen. In Bild 4.8 ist exemplarisch ein von der I-SCAN-Software gemessenes „Druckgebirge“ dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die Druckverteilung auf der Sensormatte, deren Maximum sich, bezogen auf die Ferse, direkt unterhalb des Fersenbeins ausbildet.

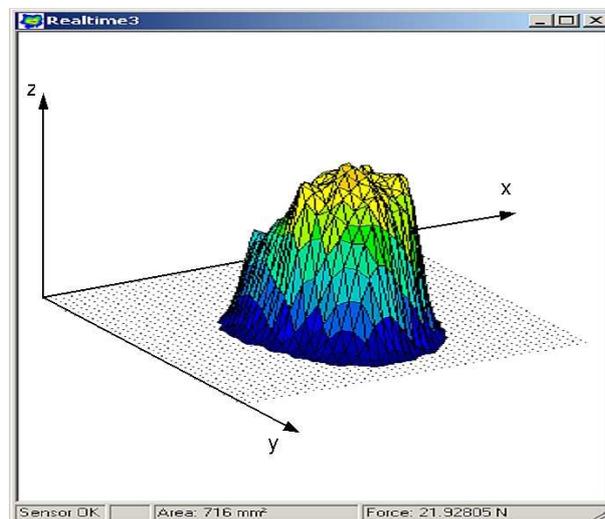


Bild 4.8: Durch die I-SCAN-Software aufgenommenes „Druckgebirge“ mit resultierender Auflagefläche  $A = 716 \text{ mm}^2$  und der resultierenden Kraft  $F = 21,93 \text{ N}$

In Bild 4.9 sind die experimentell ermittelten Daten der Kraft-Verformungs-Messung dargestellt. Die gezeigten Werte sind die jeweilig aufsummierten Kraftwerte aller mit Druck beaufschlagten Sensorzellen des Foliendruckensors, die durch das Steuerprogramm berechnet wurden. Zu erkennen ist eine stetige Zunahme der Kraft mit Annäherung an das Fersenbein. Zu Beginn der Deformation weicht das Fettgewebe seitlich aus, die Kraft nimmt nur langsam zu. Im Verlauf der Zustellung der Druckplatte wird das Fettgewebe deutlich komprimiert, was die Zunahme der Kraft erklärt.

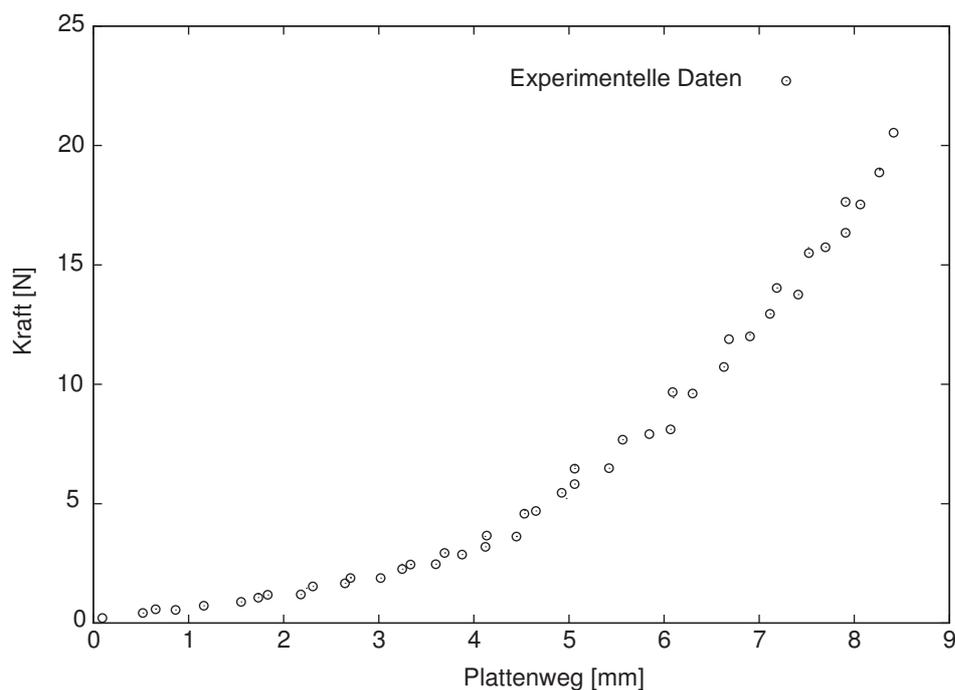


Bild 4.9: Experimentelle Daten der Kraft-Verformungs-Messung der Ferse

### 4.3 3D-Rekonstruktion

Zur Erzeugung eines FE-Modells der Ferse werden die in Abschnitt 4.2.3 dargestellten MRT-Schnittsequenzen der Ferse mit einer 3D-Rekonstruktionssoftware bearbeitet. 3D-Rekonstruktions-Systeme sind in der Medizin in den letzten Jahren Ziel zahlreicher Forschungsprojekte gewesen. So stehen den Medizinern mittlerweile Programme zur Verfügung, die es ermöglichen, die genaue räumliche Lage und Größe von erkranktem Gewebe wie z.B. Tumoren im Vorfeld einer Operation durch die 3D-Rekonstruktion am Computer genau zu lokalisieren und damit eine gezielte Behandlung zu ermöglichen. Dadurch können zusätzliche Schnitte während der Operation vermieden und so die Operationszeiten zu Gunsten des Patienten verringert werden.

Das Verfahren der 3D-Rekonstruktion wird in zunehmendem Maße auch zur numerischen Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Gewebearten durch entsprechende FE-Programme wie z.B. ABAQUS und ANSYS unterstützt. Dazu wurde eine Vielzahl von kommerziellen Programmen entwickelt, die es ermöglichen, aus den MRT- und CT-Schnittbildern Modelle für eine anschließende FE-Simulation zu

generieren. Diese Programme beinhalten eine vollständige oder auch teilweise automatisierte Aufbereitung medizinischer Datensätze bis hin zur automatischen Gitternetzgeneration. Trotzdem ist die Erstellung geeigneter Modelle immer noch mit hohem zeitlichen Aufwand verbunden.

Das in dieser Arbeit verwendete Programm MIMICS Mat (2005) findet bei der Erstellung anatomischer Modelle Anwendung. Das Programm dient dabei als Schnittstelle zwischen medizinischen Scannern, wie z.B. MRT-Scannern und den CT-Scannern einerseits und Rapid Prototyping- oder CAD- und FEA-Systemen andererseits. Im Allgemeinen werden aus den gewonnenen Bilddaten mit Hilfe von MIMICS die Oberflächen anatomischer Strukturen berechnet. Zwecks einer Untersuchung der 3D-rekonstruierten Strukturen mittels eines FE-Codes können mit MIMICS direkt Berechnungsgitter generiert werden. Im Rahmen der 3D-Rekonstruktion der Ferse stellte sich jedoch heraus, dass die automatisch erzeugten Berechnungsgitter durch MIMICS keine ausreichende Qualität für eine anschließende Berechnung durch das FE-Programm ABAQUS liefert. Aus diesem Grund wird für die Generierung der Berechnungsgitter der Fersenstrukturen ein alternativer Weg gewählt. Dabei werden durch das Modul MedCAD in MIMICS Oberflächen generiert und anschließend in das IGES-Format konvertiert. IGES ist die Abkürzung für Initial Graphics Exchange Specification. Es definiert ein neutrales, herstellerunabhängiges Datenformat, welches dem digitalen Austausch von Informationen zwischen CAD-Programmen dient. Die Anwendung reicht von traditionellen, zweidimensionalen Zeichnungen bis hin zu dreidimensionalen Modellen für Simulationen oder Fertigung. Die so erzeugten Oberflächen werden anschließend mit einem externen Pre- und Post-Prozessor vernetzt. In Bild 4.10 ist der prinzipielle Ablauf einer 3D-Rekonstruktion dargestellt.

Ein erster Schritt zum Erzeugen der Oberflächengeometrien der Ferse besteht im Importieren der MRT-Datensätze in MIMICS. Die Serienschneitbilder werden im DICOM-Format durch die MRT-Software gespeichert. DICOM (**D**igital **I**maging and **C**ommunication in **M**edicine) ist ein spezieller Standard für die Radiologie und beinhaltet neben den eigentlichen Schnittbildern zusätzlich eine Vielzahl an Informationen wie beispielsweise Patientendaten und spezielle Protokolle. Im Anschluss an das Importieren der MRT-Sequenzen können die Daten mit MIMICS bearbeitet werden. Die anschließende Bildnachverarbeitung erfolgt durch eine Segmentierung der MRT-Schnittsequenzen. Als Segmentierung bezeichnet man die gezielte Auswahl bestimmter Informationen aus einem MRT-Datensatz. Diese Auswahl kann auf zwei

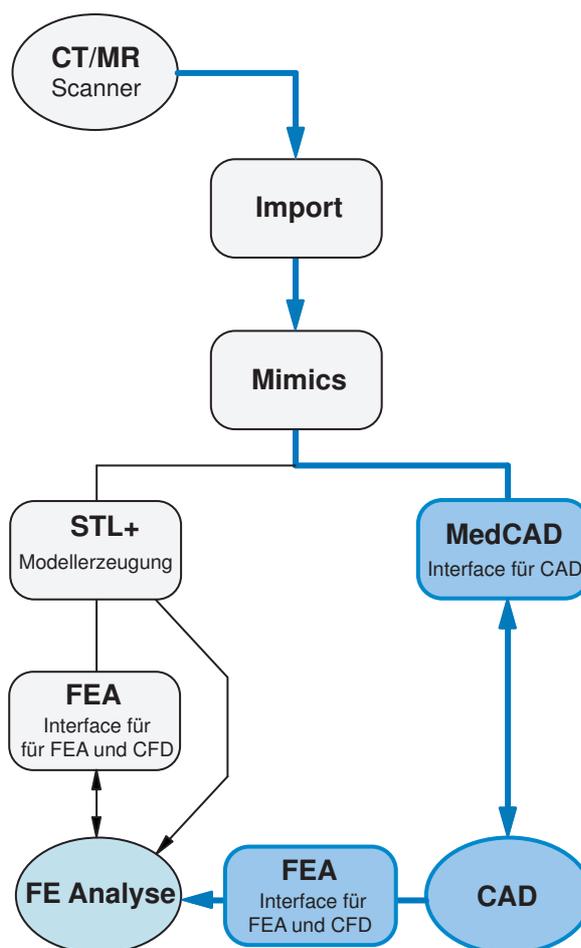


Bild 4.10: Prinzipieller Ablauf einer 3D-Rekonstruktion mit MIMICS

Arten durchgeführt werden, zum einen durch eine automatisierte Schwellwertsegmentierung und zum anderen durch eine Segmentierung von Hand.

Die automatisierte Schwellwertsegmentierung kommt häufig bei der Segmentierung von Strukturen auf Basis von CT-Schnittbildern zum Einsatz. Als Schwellwertsegmentierung wird die Auswahl von Bildpunkten bestimmter Dichtewerte bezeichnet. Die Dichtewerte bzw. Grauwerte, die bei der CT den unterschiedlichen Strukturen bzw. Geweben zugeordnet werden, hängen von ihren Absorptionseigenschaften für Röntgenstrahlen (Röntgendichte) ab. Schwellwertsegmentierung geht davon aus, dass die Grauwerte des zu segmentierenden Objektes sich von den Grauwerten des Objekthintergrundes unterscheiden. Diejenigen Voxel, deren Grauwert einen gewählten Schwellwert übersteigen, werden zum Objekt gehörig definiert. Dagegen werden

Bildinformationen über Gewebe, dessen Dichte unterhalb des unteren Schwellenwertes liegt, in der Folge nicht berücksichtigt. Diese Methode der Segmentierung eignet sich besonders für die Darstellung einzelner Gewebearten.

Für die Modellierung der Ferse ist dieses Vorgehen nicht praktikabel. Da für das FE-Modell der Ferse die verschiedenen Gewebearten benötigt werden, ist die verwendete Aufnahme­sequenz ein Kompromiss zwischen Auflösung und guter Differenzierbarkeit der unterschiedlichen Gewebe. Mit der Tatsache, dass Fett und Muskelmasse annähernd die gleiche Protonendichte besitzen, ergeben sich nur leichte Unterschiede in den Graustufen; eine klare Abgrenzung, wie bei der Darstellung einzelner Gewebe, ist nicht ohne weiteres möglich.

Bei der Handsegmentierung müssen die Grenzen in jeder einzelnen MRT-Schicht mittels Spline-Kurven markiert werden. Dies erfolgt in MIMICS durch Ausfüllen der jeweiligen Gebiete mit einer der Gewebeart zugeordneten Farbe (Bild 4.11). Nachdem auf diese Weise alle Schichtbilder selektiert werden konnten, wurden um die jeweiligen markierten Flächen die Berandungskurven (spline-Kurven) automatisch generiert und in einem weiteren Schritt die Oberflächen auf Basis dieser Berandungskurven der jeweiligen Gewebearten erzeugt. Die resultierende Oberfläche ist dabei lückenlos und als eigenständiges Objekt definiert. In Bild 4.12 sind die mittels MIMICS generierten Oberflächen der Knochen dargestellt. Für die spätere FE-Simulation werden folgende Vereinfachungen bezüglich der Fersengeometrie getroffen: Haut, Sehnen, Knorpel und Gefäße werden je nach Lage entweder den Muskeln, Knochen oder dem Fettgewebe durch entsprechendes Selektieren der Regionen zugeordnet. Dadurch reduziert sich das FE-Modell der Ferse bezüglich der Elementanzahl erheblich, da diese komplexen geometrischen Bereiche wie Knorpel und Gefäße entsprechend fein vernetzt werden müssten und dies einen signifikanten Anstieg der Rechenzeit zur Folge hätte.

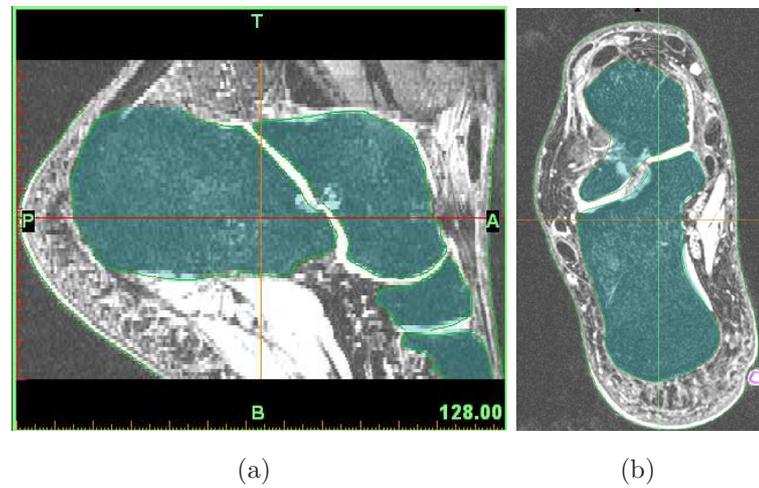


Bild 4.11: Mittels MIMICS selektierte Knochen: (a) Sagittalschnitt der Ferse mit selektiertem Fersenbein, Sprunggelenk und Mittelfußknochen, (b) Transversalschnitt der Ferse mit selektiertem Fersenbein und Sprunggelenk

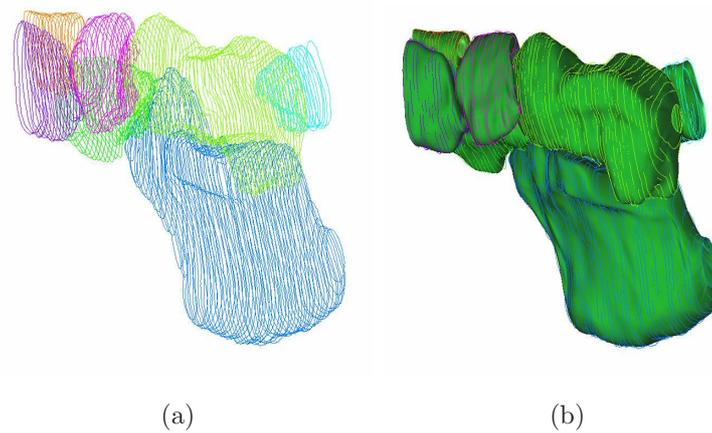


Bild 4.12: Rekonstruierte Geometrie der Knochen: (a) Angepasste Polylinien der selektierten Knochen, (b) Auf Basis der Polylinien berechnete Oberflächen der Knochen

## 4.4 FE-Modellierung

Im folgenden Abschnitt wird die FE-Modellierung der Ferse anhand der aus MRT-Schnittsequenzen rekonstruierten Oberflächen erläutert.

### 4.4.1 Berechnungsgitter des Fersenmodells

Die Erstellung des FE-Netzes wird mit dem Pre- und Postprozessor HYPERMESH Alt (2005) durchgeführt. Hierfür werden die durch den Rekonstruktionsprozess in MIMICS entstandenen Oberflächenmodelle in das IGES-Format konvertiert und anschließend in HYPERMESH bearbeitet. Die Diskretisierung der einzelnen Gewebearten erfolgt hierbei in zwei Teilschritten. Zunächst sind die jeweiligen Oberflächenstrukturen durch Tria-Elemente zu vernetzen. Anschließend wird das Volumen-Netz mit Hilfe des Tetra-Mesh-Moduls automatisch generiert. Dabei dienen die Tria-Elemente als äußere Begrenzungsfläche des eingeschlossenen Volumens. Ausgehend von dieser Berandung „wachsen“ die Tetra-Elemente von außen in das Innere der Struktur und generieren dadurch das Volumen-Netz. In Bild 4.13 sind die mittels HYPERMESH erstellten Netzgeometrien der rekonstruierten Oberflächen für Muskel, Knochen und Haut abgebildet.

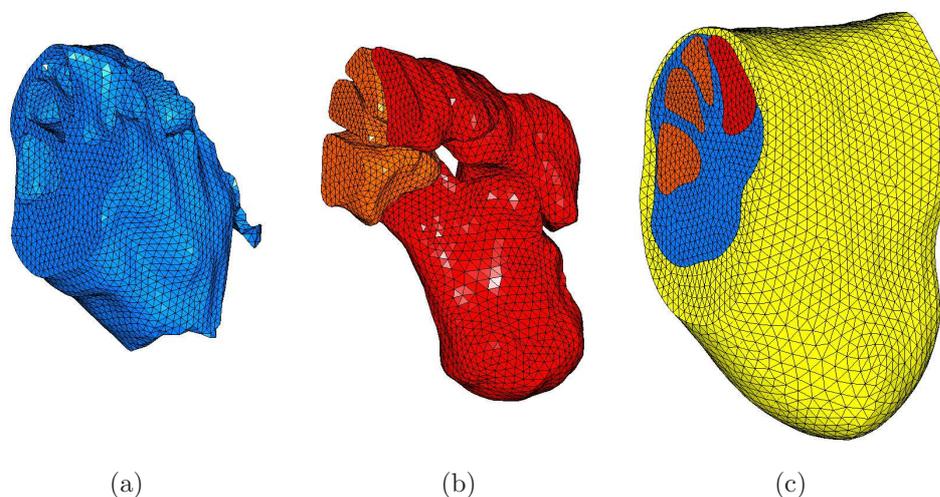


Bild 4.13: Berechnungsgitter des Fersenmodells: (a) Tetra-Netz der Muskelregion, (b) Tetra-Netz der Knochen, (c) Gesamtmodell (Muskel, Knochen, Fett)

### 4.4.2 Randbedingungen

Zur numerischen Beschreibung des Kraft-Verformungs-Versuchs der Ferse mittels ABAQUS wird das mit HYPERMESH generierte Netz in ABAQUS importiert. Die Umsetzung der Fixierung der Ferse durch die Halterung am Oberkasten (vgl. Bild 4.4, Pos. 8) erfolgt durch Einspannen der Verschiebungsfreiheitsgrade aller Knoten der Randelemente, die annähernd die fixierte Fläche im Versuch beschreiben. Ein Rotieren der Ferse wird durch Fixieren aller Knoten eines Mittelfußknochens in 1- und 3-Richtung (Bild 4.14) unterbunden. Die Druckplatte wird als starrer Körper (Analytical Rigid Body) modelliert. Die Festlegung der Freiheitsgrade der Druckplatte erfolgt durch Einspannung des zugehörigen Referenzknotens in 1- und 3-Richtung. In 2-Richtung wird die Belastung entsprechend des Kraft-Verformungs-Versuchs in Form einer Verschiebung von  $u = 9$  mm aufgebracht. In Bild 4.14 ist das FE-Modell des Kraft-Verformungs-Versuchs mit den zugehörigen Randbedingungen dargestellt.

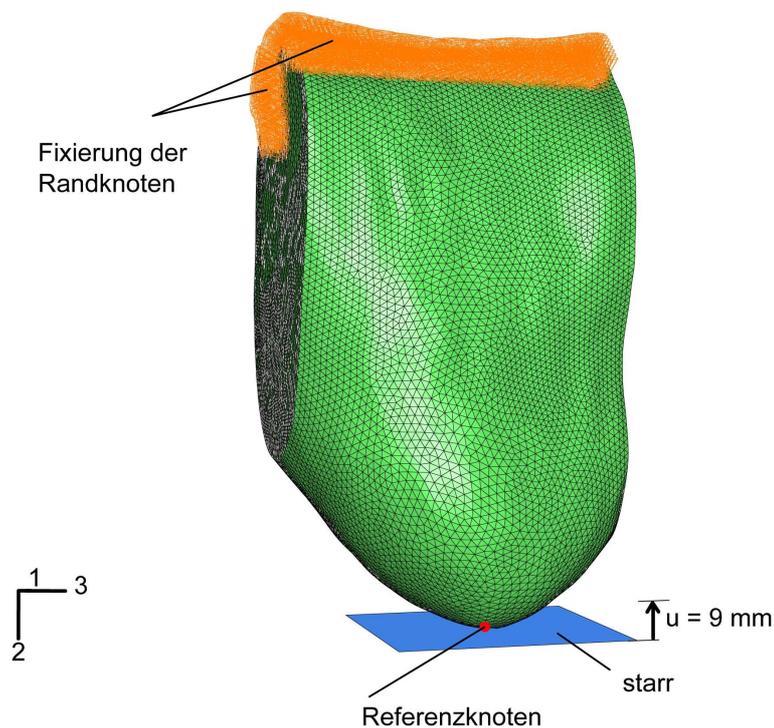


Bild 4.14: FE-Modell des Kraft-Verformungs-Versuchs der Ferse mit Randbedingungen

### 4.4.3 Berücksichtigung des Materialverhaltens

In diesem Kapitel geht es in erster Linie um die Identifikation von humanem Weichgewebe. Aus diesem Grund wird zur Vereinfachung des Modells ein linear-elastisches Materialverhalten (E-Modul  $20.000 \text{ N/mm}^2$ ) der Knochen angenommen. Weiterhin ist aus den MRT-Schnittbildern zu erkennen, dass im überwiegenden Maße das Fettgewebe und die Knochen an dem Verformungsprozess beteiligt sind. Da im betrachteten lokalen Fersenbereich kein Muskelgewebe vorhanden ist und davon ausgegangen werden kann, dass die in entfernteren Bereichen vorhandenen Muskelpartien keinen Einfluss auf die untersuchte Fersenregion ausüben, wurde zwecks einer Vereinfachung des Modells für Muskelgewebe im Rahmen einer ersten Approximation ebenfalls hyperelastisches Materialverhalten zugeordnet.

### 4.4.4 Berücksichtigung des Eigengewichtes der Ferse

Die Bestimmung des Gesamtgewichtes der Ferse über die einzelnen Dichtewerte der in der Ferse vorkommenden Gewebearten ist aufgrund fehlender einheitlicher Daten, zum Beispiel für Fettgewebe, nicht möglich. In der Literatur finden sich keinerlei miteinander vergleichbare Dichtewerte für Weichgewebe, da sich die Dichten dieser Gewebearten je nach Position und Vorkommen im menschlichen Körper deutlich voneinander unterscheiden. Aus diesem Grunde wird zur Bestimmung des Eigengewichtes der Ferse eine alternative Vorgehensweise gewählt.

Die Berücksichtigung des Eigengewichtes der Ferse erfolgt über die Definition einer auf das Einheits-Volumen bezogenen Kraft (Body-Force), zu deren Berechnung eine Bestimmung des Gewichtes der Ferse erforderlich ist. Hierzu können in verschiedenen Artikeln zur Biomechanik Werte über das relative Gewicht von Körperstellen gefunden werden (vgl. Tabelle 4.2), wobei in Söll (1976) und Willimczik (1989) ein Überblick der Werte von Fischer, Hochmuth und Bernstein gegeben wird. In Tabelle 4.2 enthält die Spalte „Normal“ diejenigen Werte, die vielfach in der Literatur verwendet werden und nicht genauer spezifizierten Rundungen und Mittelungen entstammen. Alle Angaben sind in % angegeben. Die Summe aller Prozentwerte ergibt unter Beachtung, dass Arme und Beine jeweils doppelt vorkommen, das Gesamtgewicht eines Körpers (100 %). Für das Finite Elemente Modell der Ferse wird das Gesamtgewicht des Probanden von 66 kg angenommen, wobei sich unter Berücksichtigung des Gewichtungsfaktors nach Fischer (1,79) ein Gewicht von 1,2 kg für den Fuß ergibt. Die

Ermittlung des Volumens der Ferse erfolgte über einen Versuch, in welchem der Fuß in ein Wasserbecken getaucht und das verdrängte Volumen gemessen wurde. Hierbei ergibt sich ein Volumen der Ferse von ca.  $8 \times 10^5 \text{ mm}^3$ . Unter Berücksichtigung der Erdbeschleunigung und der Werte für das Volumen und das Gewicht der Ferse ergibt sich ein Dichtewert für die Body-Force von  $\rho = 1,45 \times 10^{-5} \text{ N/mm}^3$ .

Tabelle 4.2: Gegenüberstellung der prozentualen Verteilung des Gesamtkörpergewichtes bezogen auf die einzelnen Körperteile nach Fischer, Hochmuth und Bernstein

Relatives Gewicht [%]	Fischer	Hochmuth	Bernstein		Normal
			Männer	Frauen	
<b>Kopf</b>	7,06	8,1	6,72	8,12	7
<b>Rumpf</b>	42,70	49,1	46,30	43,90	43
<b>Oberarm</b>	3,36	2,8	2,65	2,60	3
<b>Unterarm</b>	2,28	1,6	1,82	1,82	2
<b>Hand</b>	0,84	0,6	0,70	0,55	1
<b>Oberschenkel</b>	11,58	9,9	12,21	12,89	12
<b>Unterschenkel</b>	5,27	4,0	4,65	4,34	5
<b>Fuß</b>	1,79	1,4	1,46	1,29	2

#### 4.4.5 Kontaktdefinition

Die Kontaktdefinition zwischen Ferse und Druckplatte wird als Oberflächenkontakt modelliert. Die Berücksichtigung der Reibung zwischen Ferse und Druckplatte erfolgt durch einen Reibungskoeffizienten von 0,75.

Für die nachfolgende Identifikation der Materialparameter wird, wie auch im Falle der Identifikation der Schäume, die Reaktionskraft in Belastungsrichtung (2-Richtung) und die zugehörige Verschiebung der Druckplatte ausgewertet.

## 4.5 Identifikation der Materialparameter

Für die Berechnung des Gütefunctionals (3.2) wird die Reaktionskraft bezogen auf den Referenzknoten in Belastungsrichtung (2-Richtung) und die zugehörigen Verschiebungen eingesetzt (vgl. Bild 4.14). Dabei entsprechen in (3.2)  $f(h, p)$  den mittels ABAQUS auf Basis des OGDEN Materialgesetzes (2.108) berechneten resultierenden Kraftwerten und  $f_i$  den gemessenen Kraftwerten aus dem *in-vivo* Druckversuch der Ferse (vgl. Bild 4.9). Das bedeutet, dass bei der numerischen Rechnung mit Hilfe des FE-Solvers als Ergebnis wieder diskrete Kraft und Verschiebungswerte ausgegeben werden und die Abstände der einzelnen Verschiebungen sich dabei nach der Integrationsschrittweite des numerischen Lösungsverfahrens richten. Dies erfordert ebenfalls wieder eine Interpolation zwischen den gemessenen und den mittels FE-Programm berechneten Werten. Das zur Ermittlung der Materialparameter des humanen Weichgewebes (Fettgewebe) verwendete Optimierungsverfahren ist prinzipiell dasselbe, wie das in Unterabschnitt 3.4.4 zur Ermittlung der Materialparameter für Weichschaumstoff beschriebene (SIMPLEX-Strategie von NELDER und MEAD).

Nachfolgend sind die generierten Materialparameter mittels der Simplexmethode und dem in ABAQUS implementierten FE-Modell für schwach-kompressible Materialien nach OGDEN aufgeführt:

$$\mu = 7,422E^{-3}MPa$$

$$\alpha = 2,7808$$

$$D = 2,6948MPa^{-1}$$

Die mit Hilfe dieser Materialparameter mittels ABAQUS berechnete Kraft-Weg-Kurve ist in Bild 4.15 den experimentell ermittelten Kraft-Weg-Daten der Ferse gegenübergestellt. Demnach wird mit dem zugrunde gelegten groben Modell (Vernachlässigung von Knorpel, Sehnen, Gefäße und Bänder) die physikalische Realität hinreichend gut abgebildet; offensichtlich haben von der untersuchten Fersenregion entfernter liegende Anatomische Strukturen wenig Einfluss auf das Ergebnis. Ferner ist die FE-Simulation des Kraft-Verformungs-Versuchs der Ferse in Bild 4.16 dargestellt. Zur besseren Übersicht werden dabei die Knochen im Modell ausgespart. Deutlich zu erkennen sind die Spannungsspitzen unterhalb des Fersenbeins, die durch die Verschiebung der starren Druckplatte um 9 mm gegen die Ferse hervorgerufen werden.

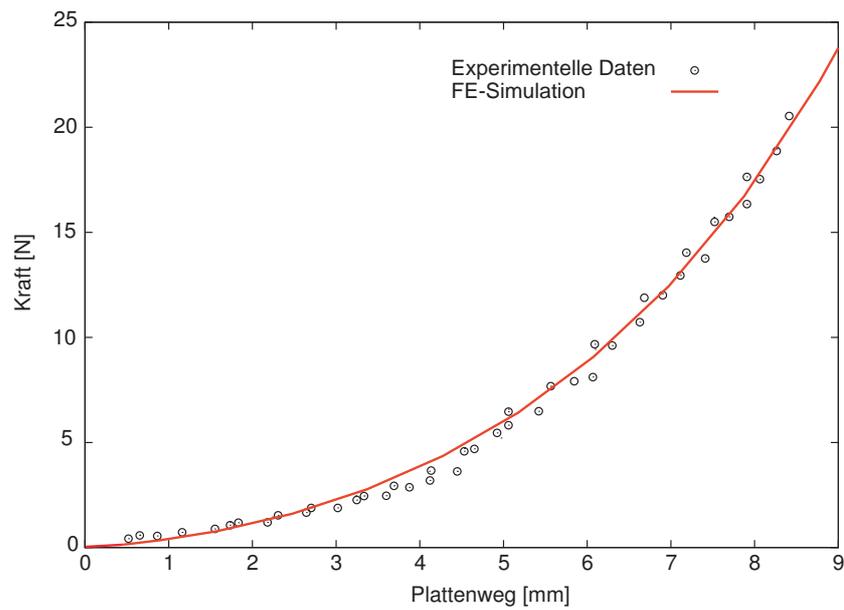


Bild 4.15: Vergleich der experimentell ermittelten Daten des Kraft-Verformungs-Versuchs mit der mittels ABAQUS berechneten Kraft-Weg-Kurve auf Basis der optimierten Materialparameter

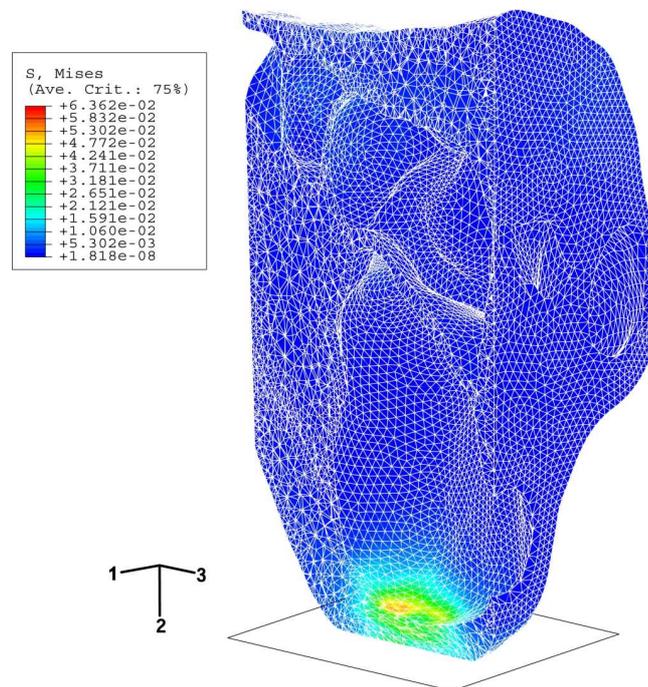


Bild 4.16: FE-Simulation des Kraft-Verformungs-Versuchs. Vertikaler Schnitt durch die Ferse

# Kapitel 5

## Simulation des Gesamtsystems Ferse/Unterlage

Nachdem sowohl für den Schaumstoff als auch für die Ferse geeignete Modelle zur Verfügung stehen, sollen im Folgenden die Spannungen in der Ferse für unterschiedliche Auflagenmaterialien mit Hilfe der Finiten Elemente Methode untersucht werden. Im Einzelnen werden drei verschiedene Auflagenmaterialien zur Analyse verwendet:

- Auflagenmaterial SAF
- Auflagenmaterial SUPRA
- Eine Kombination aus den Material SUPRA und SAF

Für die dritte Variante der Auflagen wird eine Kombination von den beiden beschriebenen Materialien SUPRA und SAF verwendet. Der obere Teil der Auflage besteht dabei aus SUPRA, während für das untere Teilstück SAF verwendet wird.

Die Auswertung der Spannungen im Fettgewebe der Ferse, bezieht sich hierbei auf die Unterseite der Fersenregion. Zur besseren Übersicht über die Lage des zur Analyse der Spannungen betrachteten Teilgebietes der Ferse ist diese Stelle durch den Ausschnitt im Gesamtmodell Ferse/Unterlage im unverformten Zustand in der linken Bildhälfte bzw. in der rechten Bildhälfte des Bildes 5.1 ohne die Knochen vergrößert dargestellt. Die Auswertung der Spannungsverteilung über die Dicke des Fersenpolsters (Fettgewebe) erfolgt hierbei entlang dem in Bild 5.2 gekennzeichneten Pfades.

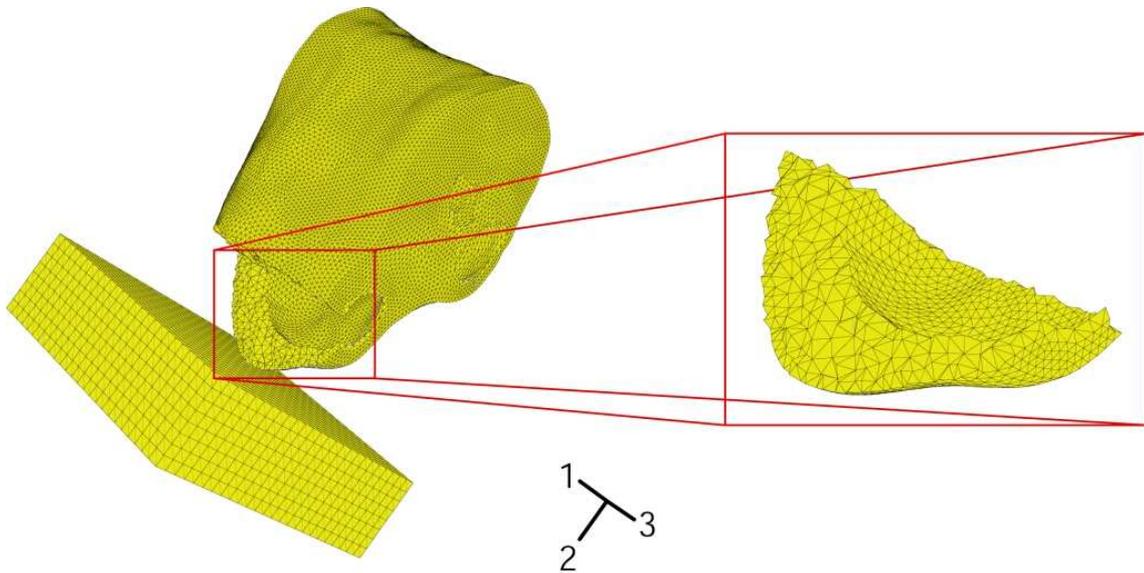


Bild 5.1: FE-Gesamtmodell der Ferse/Auflage

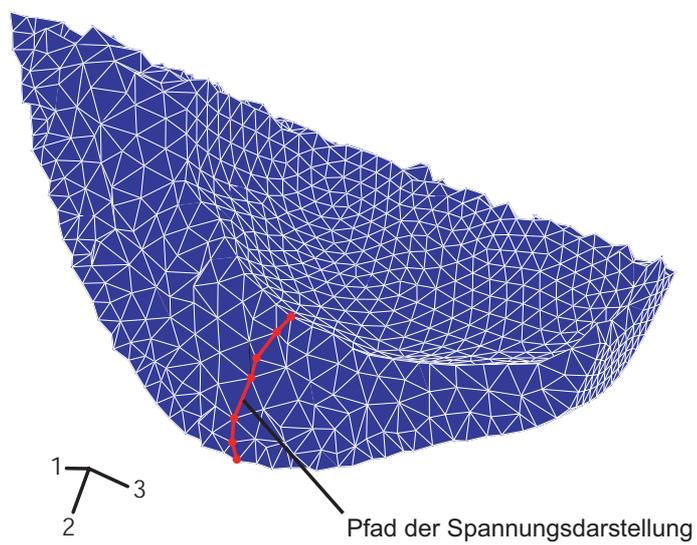


Bild 5.2: Vergrößerte Darstellung des in Bild 5.1 gezeigten Fersenbereichs ohne Knochen mit definiertem Spannungspfad

## 5.1 FE-Modellierung des Gesamtsystems Ferse und Auflage

Mit Hilfe des FE-Gesamtmodells Ferse/Auflage wird der quasistatische Prozess des Eindringens der Ferse in den Schaumstoff infolge einer über das Eigengewicht auf-gebrachten Belastung simuliert. Für die Ferse wird ein Gesamtgewicht von 2 kg vorausgesetzt und deren Modellierung über die Definition einer Bodyforce in dem FE-Code ABAQUS bewerkstelligt. Die Simulation wird insofern vereinfacht, als dass die Rotation der Ferse beim Eindringen in die Unterlage durch Festhalten der Randknoten eines Mittelfußknochens in 1- und 3-Richtung unterbunden wird (vgl. Pfeile im oberen Bildbereich in Bild 5.3). Die Diskretisierung der Schaumstoffauflage (100 x 40 x 100 mm) erfolgt dabei mit 25 x 8 x 25 Acht-Knoten-Kontinuums-Elementen (C3D8), wobei ein Verschieben der Auflage durch die Fixierung aller translatorischen Knotenfreiheitsgrade der Auflagenunterseite verhindert wurde (vgl. unterer Bildbereich in Bild 5.3). Die Kontaktdefinition zwischen Ferse und Unterlage wird als Oberflächenkontakt modelliert. Die Berücksichtigung der Reibung zwischen Ferse und Schaumstoffauflage erfolgte durch einen Reibungskoeffizienten von 0,75.

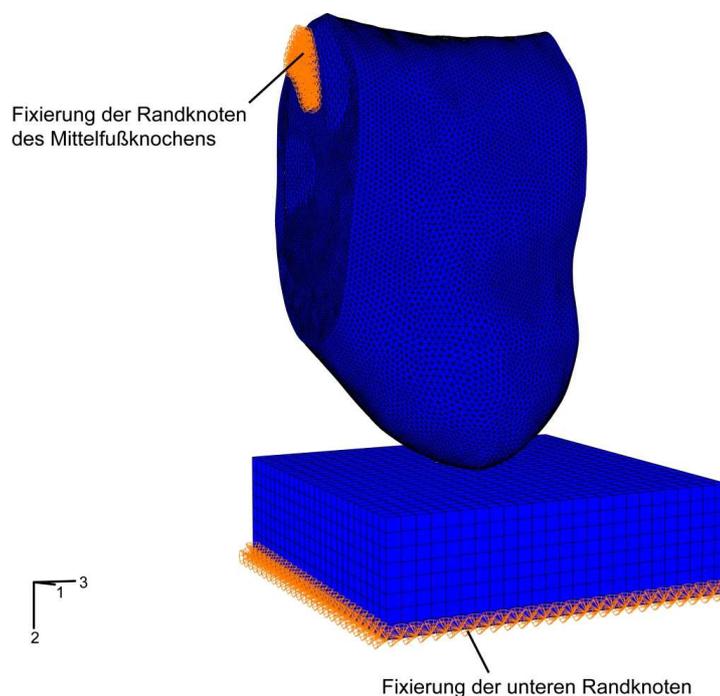


Bild 5.3: Randbedingungen des Ferse/Auflage-Systems

## 5.2 Ergebnisse der FE-Berechnung des Gesamtmodells Ferse/Auflage

Für eine adäquate Auswertung der Spannungen im Humangewebe bietet sich eine additive Zerlegung des Spannungstensors  $\mathbf{S}$  in einen Deviator-Anteil (Gestaltänderung) und in einen Kugeltensoranteil (reine Volumenänderung) wie folgt an: Durch Erweiterung des Spannungstensors  $\mathbf{S}$  um einen Null-Tensor  $p\mathbf{I} - p\mathbf{I}$  ergibt sich nach Silber u. Steinwender (2005)

$$\mathbf{S} = \mathbf{S} + p\mathbf{I} - p\mathbf{I} = \hat{\mathbf{S}} - p\mathbf{I} \quad (5.1)$$

mit der Definition

$$\hat{\mathbf{S}} := \mathbf{S} + p\mathbf{I} \quad \text{und} \quad p := -\frac{1}{3}Sp\mathbf{S} \quad (5.2)$$

wobei  $\hat{\mathbf{S}}$  als Spannungsdeviator und  $p\mathbf{I}$  als Volumenänderungsanteil bezeichnet werden. Allerdings liegt mit dieser Zerlegung nun ein skalares Maß  $p$  für die Volumenänderung einerseits und ein tensorielles Maß  $\hat{\mathbf{S}}$  für die Gestaltänderung andererseits vor. Um im Rahmen der weiteren Analyse auch für letzteren Anteil ein skalares Maß benutzen zu können, wird auf die folgende, im FE-Code ABAQUS definierte Größe der Mises-Spannung  $q$  reflektiert. Dieses Spannungsmaß stellt eine Funktion der zweiten Grundinvarianten des Spannungsdeviators dar und kann als ein zu  $p$  duales skalares Spannungsmaß aufgefasst werden, welches die Gestaltänderungsanteile widerspiegelt

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}Sp\hat{\mathbf{S}}} \quad (5.3)$$

Im Hinblick auf eine mögliche Dekubitusentstehung sind die Druckspannungen sowie die Scherspannungen im Gewebe von besonderer Bedeutung. Im Allgemeinen wird in der Medizin bzw. in der Pflegewissenschaft von der Hypothese ausgegangen, dass ein Gewebeareal dann nicht mehr durchblutet wird, wenn der äußere Druck höher als im arteriellen Schenkel der Kapillare ist Bienstein u. a. (1997). Hierfür wird üblicherweise ein Grenzwert von 30 mmHg angenommen, der nicht überschritten werden darf. Dabei handelt es sich in den meisten Fällen um solche Stellen der Körperoberfläche, an denen das Skelett direkt an das Unterhautfettgewebe grenzt und die druckverteilende Funktion der Muskulatur fehlt. Typischerweise sind die Skelettkonturen an den Prädilektionsstellen des Dekubitus konvex, wobei dort der Gewebe-Druck von der Oberfläche zur Tiefe hin ansteigt Phillips (1997).

Prinzipiell kann dieses Phänomen im Rahmen dieser Arbeit mittels der FE-Simulation des Gesamtsystems Ferse/Auflage bestätigt werden. So ergibt sich entsprechend der Bilder 5.5, 5.7 und 5.9 ein signifikanter Anstieg der Druckspannung von der Oberfläche der Ferse bis hin zum Fersenbein (Calcaneus). Dabei verläuft die Druckspannung entlang des Pfades, der in Bild 5.2 dargestellt ist, zunächst relativ konstant und steigt dann im Bereich des Fersenbeins sprunghaft an. Die Mises-Spannung  $q$  verläuft hingegen im Vergleich zur Druckspannung konstant.

Wie aus den Bildern 5.4 - 5.9 weiter hervorgeht, zeigt die Interaktion Ferse/Schaumstoffunterlage für alle drei Schaumstoffmodelle nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ nahezu die gleichen mechanischen Spannungen im Humangewebe. Dies könnte daran liegen, dass sich die Werte für die Stauchhärten der beiden zur Analyse verwendeten Schaumstofftypen SAF und SUPRA nicht stark unterscheiden. Darüber hinaus wurde in dieser Arbeit nur jeweils das elastische Materialverhalten der beiden Schaumstoffe berücksichtigt, wobei im Rahmen einer weiterführenden Untersuchung hinsichtlich deren viskoelastischen Verhaltens möglicherweise stärkere Unterschiede aufdeckbar sind (siehe hierzu auch Abschnitt 3.3 Hauptversuche). Die Folge könnte dann ein mehr oder weniger schneller Abbau der Belastung im Gewebe sein.

Ferner kann man aus den Bildern 5.4, 5.6 und 5.8 entnehmen, dass der durch das Eindringen der Ferse in die Auflage verursachte Gewebedruck  $p$  sehr viel höher im Vergleich zu den von Mises-Spannungen  $q$  ist. Möglicherweise deutet dies auf ein vor allem auf Druck beanspruchbares, gelartiges Material des Humangewebes hin. Allerdings überschreiten beide Spannungsmaße den zulässigen kritischen Wert in Höhe von 30 mmHg, womit beide Maße zur Entstehung eines Dekubitus beitragen würden. Insbesondere die Druckspannung steigt deutlich zum Fersenbein hin an. Damit liegt die höchste Belastung direkt unterhalb des Fersenbeins vor. In diesem Falle könnte gefolgert werden, dass sich ein dekubitales Geschwür sehr wahrscheinlich von innen nach außen entwickeln würde. Nach derzeitigem Kenntnisstand der Pflegewissenschaft ist die Entstehung von Dekubiti je nach Lage der jeweiligen Prädilektionsstelle sowohl von innen nach außen als auch umgekehrt möglich.

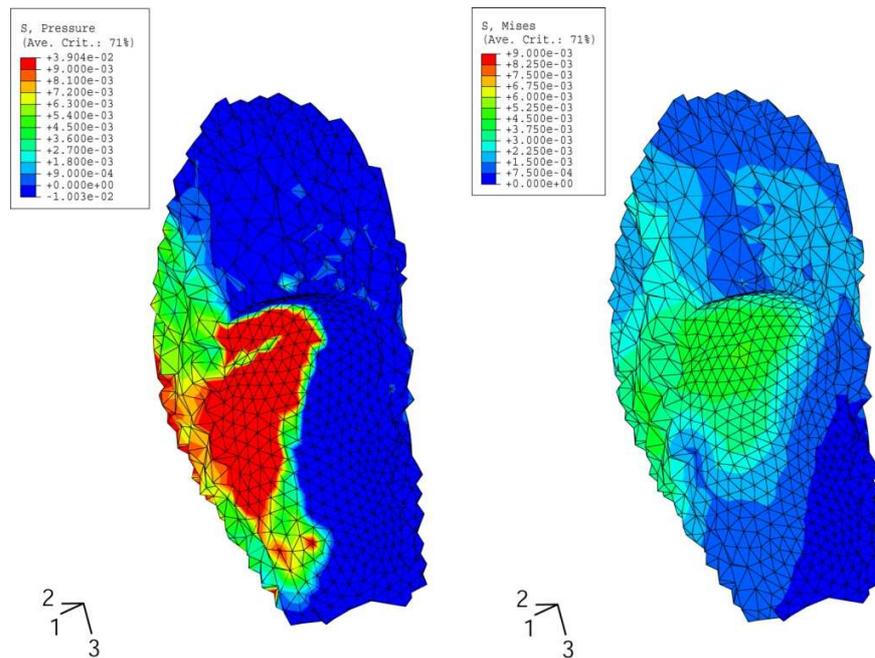


Bild 5.4: Vergleich der Druck- und Mises-Spannung für das Gesamtmodell Ferse/Auflage aus SUPRA

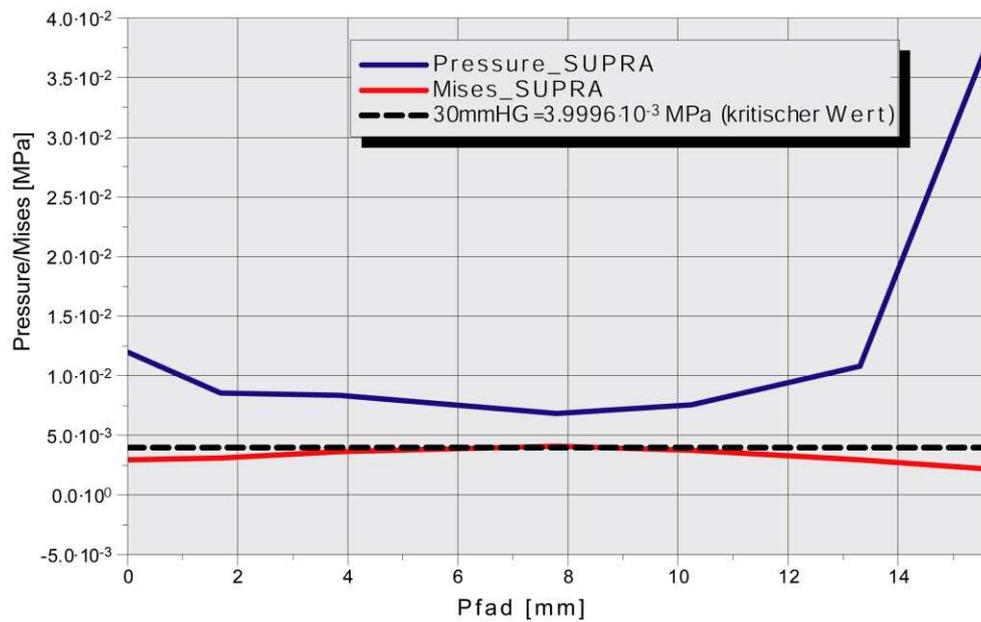


Bild 5.5: Vergleich der Druck- und Mises-Spannung entlang des Pfads entsprechend Bild 5.2 für das Gesamtmodell Ferse/Auflage aus SUPRA

## 5.2 Ergebnisse der FE-Berechnung des Gesamtmodells Ferse/Auflage 100

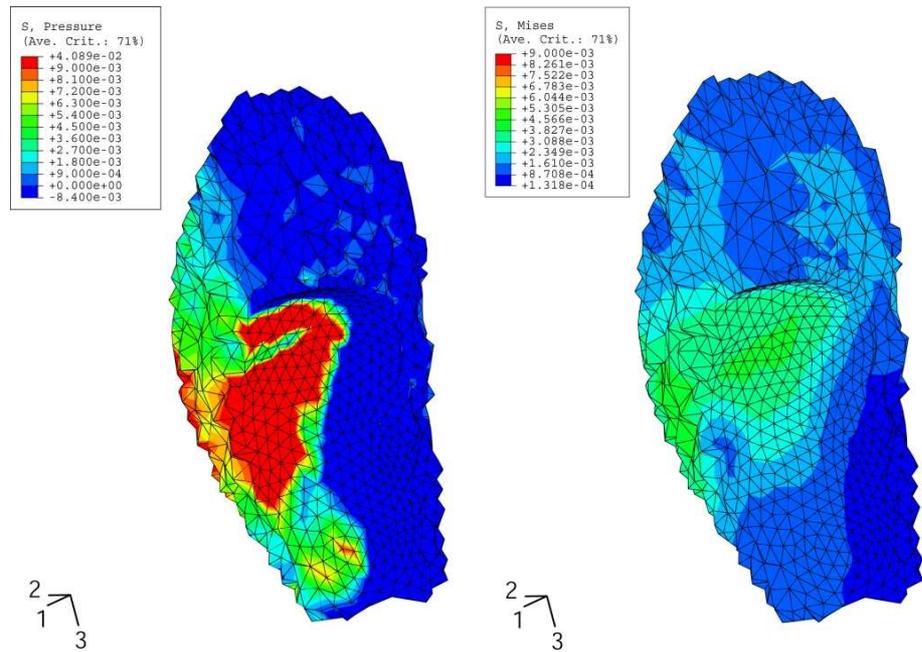


Bild 5.6: Vergleich der Druck- und Mises-Spannung für das Gesamtmodell Ferse/Auflage aus SAF

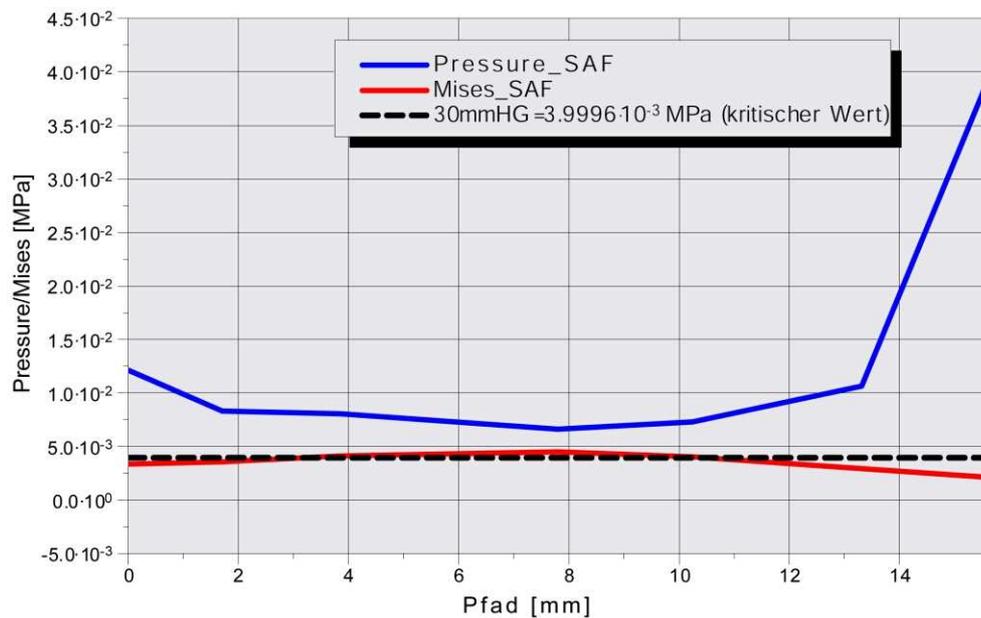


Bild 5.7: Vergleich der Druck- und Mises-Spannung entlang des Pfads entsprechend Bild 5.2 für das Gesamtmodell Ferse/Auflage aus SAF

## 5.2 Ergebnisse der FE-Berechnung des Gesamtmodells Ferse/Auflage 101

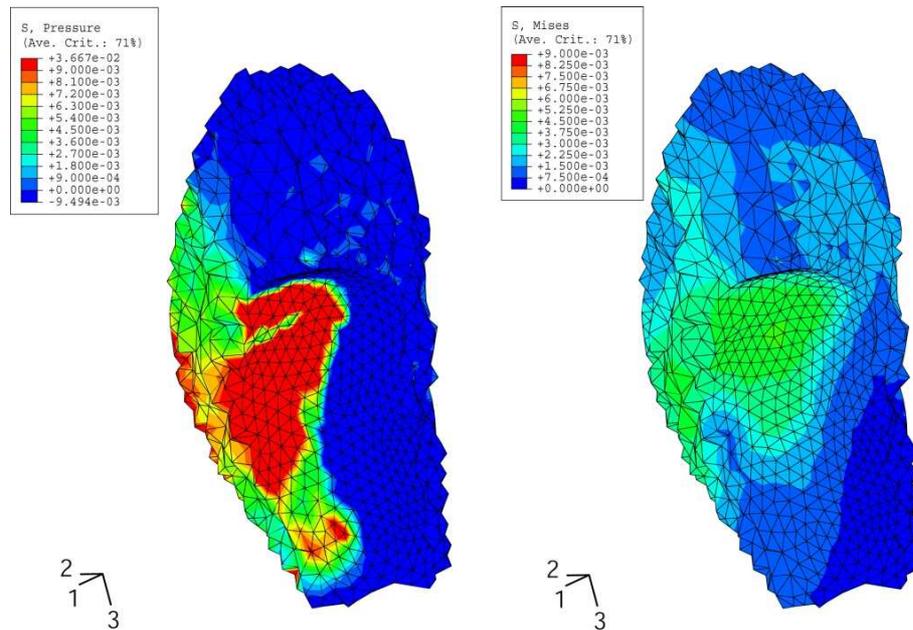


Bild 5.8: Vergleich der Druck- und Mises-Spannung für das Gesamtmodell Ferse/Auflage aus SUPRA/SAF

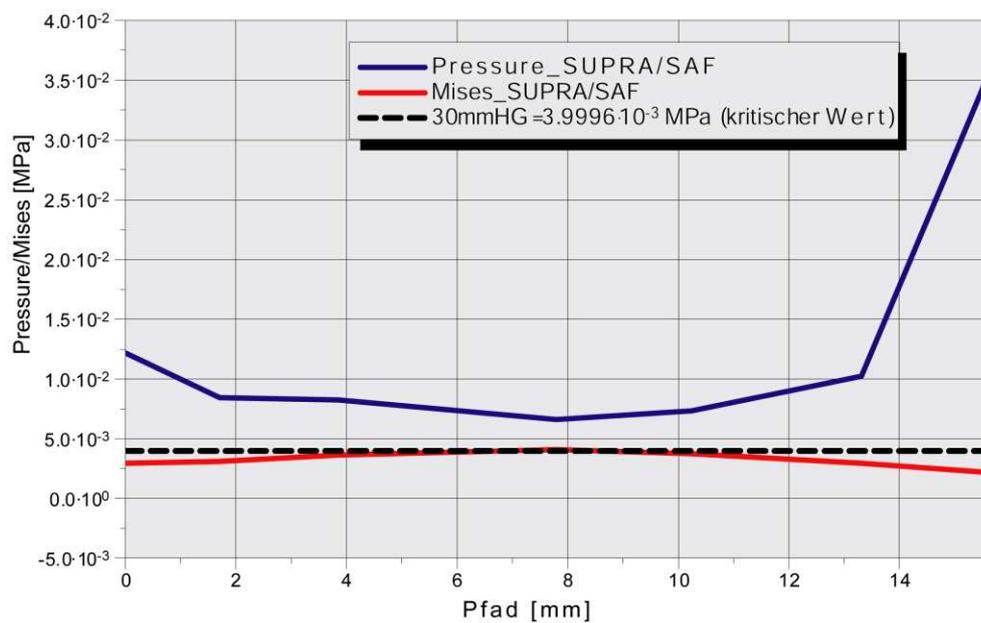


Bild 5.9: Vergleich der Druck- und Mises-Spannung entlang des Pfads entsprechend Bild 5.2 für das Gesamtmodell Ferse/Auflage aus SUPRA/SAF

## 5.2 Ergebnisse der FE-Berechnung des Gesamtmodells Ferse/Auflage 102

Des weiteren hat sich bei allen Simulationen gezeigt, dass die Scherspannungen infolge der Reibung an der Kontaktfläche Ferse/Auflage gering sind. Dies könnte darauf hindeuten, dass sich die Schaumstoffunterlage um jeweils den in die Unterlage quasi senkrecht eindringenden Fersenbereich herumlegt. Darüber hinaus wird durch die zusätzliche, im Rahmen der Modellierung vorgenommene Vereinfachung, dass nämlich ein Rotieren der Ferse ausgeschlossen wird, eine mögliche Scherbelastung vermieden.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode entwickelt, mittels welcher der mechanische Spannungs- und Verzerrungszustand in einer Prädilektionsstelle, speziell dem Fersenbein, infolge der Interaktion mit einer elastischen Unterlage (Matratze aus Weichschaumstoff) berechnet und simuliert werden kann. Die Methode ist durch eine im Wesentlichen aus drei Blöcken bestehende Auswertekette gekennzeichnet, nämlich der Digitalisierung der interagierenden Materialien mittels bildgebender Verfahren, der Bearbeitung dieser Daten mittels CAE-Technologien (3D-Rekonstruktion, Flächenrückführung) und der kontinuumsmechanischen Beschreibung inklusive numerischer Berechnung und Simulation mittels der FEM. Insbesondere wird für die Digitalisierung der in zwei Konfigurationen erforderlichen Prädilektionsstelle (unverformt und verformt) die Magnet-Resonanz-Tomographie herangezogen.

Ein zentrales Problem stellt dabei die kontinuumsmechanische Modellierung der Weichschaumstoffe einerseits und des humanen Weichgewebes andererseits dar. Beide Materialien werden auf Basis dreidimensionaler hyperelastischer Materialgesetze beschrieben. Für die Weichschaumstoffe wird eine Verzerrungsenergiefunktion hochkompressibler Stoffe nach OGDEN und HILL, für das Gewebeareal eine Verzerrungsenergiefunktion für schwach-kompressible Stoffe nach OGDEN zugrunde gelegt.

Die Festlegung der in den mechanischen Modellen verwendeten Materialparameter erfolgt durch Identifikation. Dazu werden im Falle der Schaumstoffmaterialien ein uniaxialer Druckversuch und ein Indenterversuch durchgeführt. Zwecks einer Separierung der elastischen und der viskoelastischen Eigenschaften sowie zur Elimination

des Mullins-Effektes werden die Schaumstoffproben vor den eigentlichen Tests jeweils einer zyklischen Vorkonditionierung unterzogen. Die numerische Bestimmung der Materialparameter erfolgt mittels einer Optimierung mit der Simplex-Strategie, gekoppelt mit dem FE-Programm ABAQUS.

Anhand der Ergebnisse der Anpassung kann gezeigt werden, dass eine Beschreibung der Schaumstoffe sehr gut durch das in ABAQUS implementierte Stoffgesetz möglich ist. Lediglich bei geringen Verformungen der Schaumstoffproben unter 4 mm ergibt sich eine geringfügige Abweichung von den aus den Versuchen ermittelten Daten. Abhilfe könnte möglicherweise eine feinere Auflösung der Kraft-Weg-Daten durch kleinere Wegintervalle bringen, was aber eine signifikante Erhöhung der Versuchszeiten zur Folge hätte. Weiterhin wäre die Verwendung alternativer Materialmodelle denkbar, die diesen Bereich besser abbilden könnten.

Im Falle der numerischen Beschreibung von humanem Weichgewebe wird das in ABAQUS implementierte schwach-kompressible Materialmodell nach OGDEN verwendet. Die Anpassung der Materialparameter erfolgte dabei an die in einem *in-vivo* Experiment ermittelten Kraft-Verformungs-Daten der Ferse. Hierfür ist es notwendig, die 3D-Geometrie der Ferse mit den entsprechenden Gewebearten zu generieren. Dies erfolgt durch eine 3D-Rekonstruktionssoftware (MIMICS) auf Basis von MRT-Schnittbildern, wobei das Modell der Ferse die Gewebearten Fett und Knochen enthält. Obwohl die Ferse wesentlich komplexere Strukturen beinhaltet, wie z.B. Knorpel, Sehnen und Gefäße, wird die experimentell ermittelte Kraft-Weg-Kurve durch das Finite Elemente Modell der Ferse sehr gut wiedergegeben.

Im letzten Schritt dieser Arbeit werden die beiden Teilmodelle zu einer Gesamtsimulation zusammengefügt. Durch die Simulation des Gesamtsystems kann zum ersten Mal gezeigt werden, dass sich die höchste Belastung infolge von Weichschaumauflagen aus PUR-Schäumen direkt unterhalb des Knochens (Fersenbein) ausbildet. In der Fachliteratur wird davon ausgegangen, dass unter anderem eine Schädigung des Gewebes durch eine Druckbeanspruchung von außen nach innen sowie durch Scherspannungen hervorgerufen wird. Die Scherspannung in der Kontaktfläche stellt sich in der Simulation als unwesentlich heraus, was aber daran liegen könnte, dass die Rotation der Ferse bei dem Eindringvorgang in die Auflage nicht berücksichtigt wurde.

Die Simulation der Interaktion Ferse/Schaumstoffunterlage für die drei unterschiedlichen Schaumstoffmodelle lässt kaum einen Unterschied der mechanischen Spannungen im Humangewebe erkennen. Dies könnte daran liegen, dass sich die Werte für die Stauchhärten der beiden zur Analyse verwendeten Schaumstofftypen SAF und SUPRA nicht signifikant voneinander unterscheiden. Ferner wird in dieser Arbeit nur jeweils das elastische Materialverhalten der beiden Schaumstoffe berücksichtigt, wobei im Rahmen einer weiteren Untersuchung hinsichtlich des viskoelastischen Verhaltens der Schaumstoffe, möglicherweise sich starke Unterschiede ergeben. Die Folge könnte dann ein mehr oder weniger schneller Abbau der Belastung im Gewebe sein.

Obwohl das viskoelastische Materialverhalten der Schaumstoffe nicht berücksichtigt wird, kann eine Spannungsminimierung durch Variation von Geometrie und Material der Auflage mit dem in dieser Arbeit generierten FE-Modell des Gesamtsystems Ferse/Auflage berechnet werden. Eine sukzessive Erweiterung des Gesamtmodells durch Berücksichtigung von weiteren humanen Weichgewebearten, wie z.B. Muskel- und Hautgewebe sowie durch die Einbeziehung der viskoelastischen Effekte im Zusammenhang mit der Struktur der Schaumstoffe, könnte zusätzliche Erkenntnisse über die Spannungsverhältnisse im Gewebe liefern. Damit könnten die Auswirkungen durch Veränderungen von Material und Struktur der Auflagen bereits im Vorfeld einer Produktion am Computer simuliert und somit eine gezielte Entwicklung von Auflagesystemen, die den jeweiligen Anforderungen entsprechen, ermöglicht werden.

# Anhang A

## Vektor- und Tensoroperationen

Im Folgenden werden die für die vorliegende Arbeit wichtigsten Regeln und Umrechnungen aus der Tensoralgebra und -analysis angegeben. Die Darstellungen lehnen sich an die Ausführungen in Gummert u. Reckling (1987), Silber u. Steinwender (2005), Trostel (1993) und Trostel (1997) an.

### A.1 Produktregel

Divergenz eines Rechts-Kreuzprodukts zwischen einem beliebigen Tensor  $\mathbf{A}$  und einem Vektor  $\mathbf{x}$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \times \mathbf{x} + \overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{A} \equiv -\mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.1})$$

Divergenz eines Rechts-Skalarprodukts zwischen einem beliebigen Tensor  $\mathbf{A}$  und einem Vektor  $\mathbf{x}$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{x} \nabla) \quad (\text{A.2})$$

### A.2 GAUSSscher Integralsatz

Bedeutet  $A(V)$  die geschlossene Oberfläche des Volumens  $V$  eines Körpers,  $\mathbf{n}$  der stets nach außen gerichtete Normalenvektor von  $A(V)$ ,  $\overset{(n)}{\mathbf{B}}$  eine tensorielle Feldgröße  $n$ -ter Stufe ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) und „ $\otimes$ “ eine beliebige Verknüpfung (Skalar-, Kreuz- oder dyadisches Produkt für  $n \geq 1$ ), so lässt sich wie folgt das Oberflächenintegral in ein

Volumenintegral (und umgekehrt) umwandeln (*GAUSS'scher Integralsatz*):

$$\int_{A(V)} \mathbf{n} \otimes \mathbf{B} dA = \int_V \nabla \otimes \mathbf{B} dV \quad (\text{A.3})$$

### A.3 Grundinvarianten eines Tensors $\mathbf{A}$

Ein symmetrischer Tensor  $\mathbf{A}$  besitzt die nachfolgend aufgeführten drei voneinander unabhängigen Grundinvarianten

$$\begin{aligned} A_I &= Sp\mathbf{A} = \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{A} \quad , \quad A_{II} = \frac{1}{2} (A_I^2 - Sp\mathbf{A}^2) = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{A})^2 - \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}] \\ A_{III} &= \det \mathbf{A} \equiv \frac{1}{3} (A_I A_{II} - A_I Sp\mathbf{A}^2 + Sp\mathbf{A}^3) \equiv \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} A_I^3 - \frac{3}{2} A_I Sp\mathbf{A}^2 + Sp\mathbf{A}^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Die Identität von (A.4)<sub>3</sub> entsteht durch Spurbildung von (A.10) und Umstellen nach  $A_{III}$  unter Beachtung von (A.4)<sub>2</sub>.

### A.4 Epsilon-Tensor

Für diverse Anwendungen in der Kontinuumsmechanik ist der dreistufige Epsilon- oder Permutationstensor hilfreich, der mit Hilfe des Einheitstensors  $\mathbf{I}$  entsprechend

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} := -\mathbf{I} \times \mathbf{I} \quad (\text{A.5})$$

definiert ist. Ferner lautet der Epsilon-Tensor in kartesischen Koordinaten wie folgt

$$\begin{aligned} \overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} &= -(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i) \times (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_j) = -\mathbf{e}_i \overbrace{(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)}^{\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k} \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_i (\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_j = -\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \\ &\equiv \varepsilon_{ikj} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \equiv \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

mit 
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i, j, k \text{ zyklisch: } 1,2,3 \text{ } 2,3,1 \text{ } 3,1,2 \\ 1 & \text{falls } i, j, k \text{ antizyklisch: } 2,3,1 \text{ } 1,3,2 \text{ } 3,2,1 \\ 0 & \text{falls } i = j \text{ oder/und } i = k \text{ oder/und } j = k \end{cases}$$

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$$

Die Aussage (2.44), dass das Doppelt-Skalarprodukt des Epsilon-Tensors mit einem symmetrischen Tensor  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  Null ergibt, kann mit (A.6) wie folgt gezeigt werden:

Zunächst gilt mit (A.6) für einen beliebigen Tensor  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{A} &= (\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) \cdot \cdot (A_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) = \varepsilon_{ijk} A_{mn} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) \cdot \cdot (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) = \\ &= \varepsilon_{ijk} A_{mn} \underbrace{(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m)}_{\delta_{km}} \underbrace{(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_n)}_{\delta_{jn}} \mathbf{e}_i = \varepsilon_{ijk} A_{mn} \delta_{km} \delta_{jn} \mathbf{e}_i = \underline{\varepsilon_{ijk} A_{kj} \mathbf{e}_i} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Durch Summation über den Index  $i$  erhält man

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{A} = \varepsilon_{1jk} A_{kj} \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{2jk} A_{kj} \mathbf{e}_2 + \varepsilon_{3jk} A_{kj} \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.8})$$

Unter Beachtung von (A.7) ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{A} &= \left( \underbrace{\varepsilon_{123}}_1 A_{32} + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1} A_{23} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \underbrace{\varepsilon_{231}}_1 A_{13} + \underbrace{\varepsilon_{213}}_{-1} A_{31} \right) \mathbf{e}_2 + \\ &+ \left( \underbrace{\varepsilon_{312}}_1 A_{21} + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1} A_{12} \right) \mathbf{e}_3 \\ &= (A_{32} - A_{23}) \mathbf{e}_1 + (A_{13} - A_{31}) \mathbf{e}_2 + (A_{21} - A_{12}) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Wegen der Unabhängigkeit der Basisvektoren verschwinden die Terme in () dann und nur dann (d.h. es gilt dann  $\overset{(3)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ), wenn  $A_{ij} = A_{ji}$ , d.h. wenn  $\mathbf{A}$  symmetrisch ist  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .

## A.5 CALEY-HAMILTON-Gleichung

Mit Hilfe der CALEY-HAMILTON-Gleichung

$$\mathbf{A}^3 - A_I \mathbf{A}^2 + A_{II} \mathbf{A} - A_{III} \mathbf{I} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}^3 = A_I \mathbf{A}^2 - A_{II} \mathbf{A} + A_{III} \mathbf{I} \quad (\text{A.10})$$

lassen sich Tensorpotenzen dritten Grades durch die niedrigeren Potenzen  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$  ausdrücken. Eine skalare Multiplikation von (A.10) mit dem Tensor  $\mathbf{A}^{p-3}$  führt auf die Verallgemeinerung

$$\mathbf{A}^p = A_I \mathbf{A}^{p-1} - A_{II} \mathbf{A}^{p-2} + A_{III} \mathbf{A}^{p-3} \quad (\text{A.11})$$

Damit lässt sich die  $p$ -te Potenz eines Tensors  $\mathbf{A}$  durch die nächsten drei niedrigeren Potenzen  $\mathbf{A}^{p-1}$ ,  $\mathbf{A}^{p-2}$  und  $\mathbf{A}^{p-3}$  ausdrücken.

## A.6 Ableitung einer skalarwertigen Tensorfunktion nach der Zeit

Gesucht ist die Zeitableitung einer skalarwertigen Funktion  $f$  eines (beliebigen) Tensors  $\mathbf{A}$ , welcher von der Zeit  $t$  abhängen kann

$$f(\mathbf{A}) = f(A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j), \quad \mathbf{A}(t) \quad \text{bzw.} \quad A_{ij}(t) \quad (\text{A.12})$$

Unter der Voraussetzung, dass die Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  ein zeitlich konstantes Basissystem bilden und nur die Koordinaten  $A_{ij}$  von der Zeit abhängen, gilt unter Beachtung der Kettenregel zunächst:

$$\dot{f}(\mathbf{A}) = \frac{df(\mathbf{A})}{dt} = \frac{df(A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)}{dt} = \frac{\partial f(A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)}{\partial A_{ij}} \frac{dA_{ij}}{dt} \equiv \frac{\partial f(A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)}{\partial A_{ij}} \dot{A}_{ij} \quad (\text{A.13})$$

Aus Gründen einer besseren Übersichtlichkeit werden die beiden folgenden Abkürzungen eingeführt

$$\mathbf{M} = M_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{N} = N_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad \text{mit} \quad M_{ij} := \frac{\partial f(A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)}{\partial A_{ij}}, \quad N_{ij} := \dot{A}_{ij} \quad (\text{A.14})$$

Damit ergibt sich folgende weitere Rechnung, wenn zum Schluss wieder rücksubstituiert wird:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\mathbf{A}) &= M_{ij}N_{ij} \equiv M_{kl}N_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl} = M_{kl}N_{ij} \overbrace{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)}^{\delta_{ik}} \overbrace{(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l)}^{\delta_{jl}} = \\ &= M_{kl}N_{ij} (\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i) \cdot \cdot (\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) = M_{kl}N_{ij} (\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) \cdot \cdot (\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i) = \underbrace{(M_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l)}_M \cdot \cdot \underbrace{(N_{ij}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i)}_{N^T} = \\ &= \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{N}^T = \mathbf{M}^T \cdot \cdot \mathbf{N} = Sp(\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{N}) \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}}^T = \left[ \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \right]^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}} \equiv Sp \left\{ \left[ \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \right]^T \cdot \dot{\mathbf{A}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

## A.7 Richtungsableitung einer skalarwertigen Tensorfunktion nach dem Argumenttensor

Gesucht ist die Ableitung einer skalarwertigen Tensorfunktion  $f$  (vgl. A.15) nach dem Argumenttensor  $\mathbf{A}$ . In Anlehnung an den Ableitungsbegriff der reellen Analysis

für eine Funktion  $f(x)$

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x + h) - f(x)] \quad (\text{A.16})$$

besitzt die entsprechende Erweiterung für skalare Funktionen  $f$  einer tensorwertigen Variablen  $\mathbf{A}$  die Form

$$\delta f(\mathbf{A}; \overline{\mathbf{C}}) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [f(\mathbf{A} + \lambda \overline{\mathbf{C}}) - f(\mathbf{A})] \quad (\text{A.17})$$

wobei die (partielle) Ableitung von  $f$  nach  $\mathbf{A}$  über die folgende Vorschrift zu berechnen ist:

$$\delta f(\mathbf{A}; \overline{\mathbf{C}}) = \frac{d}{d\lambda} [f(\mathbf{A} + \lambda \overline{\mathbf{C}})]|_{\lambda=0} \stackrel{!}{=} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \cdot \overline{\mathbf{C}} \quad (\text{A.18})$$

Die Ableitung  $\delta f$  in (A.16) wird auch als Richtungs-differential oder auch GATEAUX-Differential bezeichnet.

Die Rechenvorschrift (A.18) wird beispielhaft anhand der benötigten Ableitungen in (2.80) verdeutlicht

$$\begin{aligned} \delta C_I(\mathbf{C}; \overline{\mathbf{C}}) &= \frac{d}{d\lambda} [Sp(\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})]|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} [Sp(\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})]|_{\lambda=0} = \\ &= \frac{d}{d\lambda} [Sp\mathbf{C}]|_{\lambda=0} + \frac{d}{d\lambda} [Sp(\lambda \overline{\mathbf{C}})]|_{\lambda=0} = Sp\overline{\mathbf{C}} = \underbrace{\left( \frac{\partial C_I}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \cdot \overline{\mathbf{C}}} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\delta C_{II}(\mathbf{C}; \overline{\mathbf{C}}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{d\lambda} [C_{II}(\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})]|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{2} \left\{ [Sp(\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})](\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})]^2 - Sp(\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})^2 \right\}|_{\lambda=0} = \\ &= \frac{1}{2} \left\langle 2 [Sp(\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})]|_{\lambda=0} (Sp\overline{\mathbf{C}}) - \frac{d}{d\lambda} \left\{ Sp[\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} + \lambda(\mathbf{C} \cdot \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}) + \lambda^2 \overline{\mathbf{C}}^2] \right\}|_{\lambda=0} \right\rangle = \\ &= (Sp\mathbf{C})(Sp\overline{\mathbf{C}}) - \frac{1}{2} [Sp(\mathbf{C} \cdot \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C})] = (Sp\mathbf{C})(Sp\overline{\mathbf{C}}) - Sp(\mathbf{C} \cdot \overline{\mathbf{C}}) = \\ &= \left\{ \left[ \underbrace{(Sp\mathbf{C})}_{C_I} \mathbf{I} \right] - \underbrace{\mathbf{I} \cdot \mathbf{C}}_{\mathbf{C}} \right\} \cdot \overline{\mathbf{C}} = \underbrace{(C_I \mathbf{I} - \mathbf{C})}_{\left( \frac{\partial C_{II}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T} \cdot \overline{\mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\delta C_I^3 = \frac{d}{d\lambda} [Sp(\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})]^3 \Big|_{\lambda=0} = 3 [Sp(\mathbf{C} + \lambda \overline{\mathbf{C}})]^2 (\mathbf{I} \cdot \overline{\mathbf{C}})|_{\lambda=0} \equiv 3 [(Sp^2 \mathbf{C}) \mathbf{I}] \cdot \overline{\mathbf{C}} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned}
\delta (C_I SpC)^2 &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ [Sp(\mathbf{C} + \lambda \bar{\mathbf{C}})] Sp[(\mathbf{C} + \lambda \bar{\mathbf{C}})(\mathbf{C} + \lambda \bar{\mathbf{C}})] \right\} \Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left\langle Sp(\mathbf{C} + \lambda \bar{\mathbf{C}}) \left\{ Sp \left[ \mathbf{C}^2 + \lambda (\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}}) + \lambda^2 \bar{\mathbf{C}}^2 \right] \right\} \right\rangle \Big|_{\lambda=0} \\
&= \left\langle (Sp \bar{\mathbf{C}}) \left\{ Sp \left[ \mathbf{C}^2 + \lambda (\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}}) + \lambda^2 \bar{\mathbf{C}}^2 \right] \right\} \right\rangle + \\
&\quad + Sp(\mathbf{C} + \lambda \bar{\mathbf{C}}) \left[ Sp(\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}}) + 2\lambda \bar{\mathbf{C}}^2 \right] \Big|_{\lambda=0} \\
&= (Sp \mathbf{C}^2) Sp \bar{\mathbf{C}} + 2 (Sp \mathbf{C}) \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}} \equiv [(Sp \mathbf{C}^2) \mathbf{I} + 2 (Sp \mathbf{C}) \mathbf{C}] \cdot \bar{\mathbf{C}}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
\delta Sp \mathbf{C}^3 &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ Sp \left[ \mathbf{C}^2 + \lambda (\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}}) + \lambda^2 \bar{\mathbf{C}}^2 \right] (\mathbf{C} + \lambda \bar{\mathbf{C}}) \right\} \Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left\{ Sp \left[ \mathbf{C}^3 + \lambda (\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}^2 + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}) + \lambda^2 \bar{\mathbf{C}}^2 \cdot \mathbf{C} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda \mathbf{C}^2 \cdot \bar{\mathbf{C}} + \lambda^2 (\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}}^2) + \lambda^3 \bar{\mathbf{C}}^3 \right] \right\} \Big|_{\lambda=0} \\
&= Sp(\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}^2 + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C}^2 \cdot \bar{\mathbf{C}}) = 3Sp(\mathbf{C}^2 \cdot \bar{\mathbf{C}}) \equiv 3\mathbf{C}^2 \cdot \bar{\mathbf{C}}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Einsetzen von (A.21) bis (A.23) in (A.4)<sub>3</sub> führt auf die folgende Form

$$\begin{aligned}
\delta C_{III}(\mathbf{C}; \bar{\mathbf{C}}) &= \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{2} (Sp^2 \mathbf{C}) \mathbf{I} - \frac{3}{2} (Sp \mathbf{C}^2) \mathbf{I} + 3 (Sp \mathbf{C}) \mathbf{C} + 3 \mathbf{C}^2 \right] \right\} \cdot \bar{\mathbf{C}} \\
&= \underbrace{\left[ \frac{1}{2} (Sp^2 \mathbf{C} - Sp \mathbf{C}^2) \mathbf{I} - \underbrace{(Sp \mathbf{C})}_{C_I} \mathbf{C} + \mathbf{C}^2 \right]}_{C_{II}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = \left( \frac{\partial C_{III}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \cdot \bar{\mathbf{C}}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Zusammenfassend sind die Ableitungen der invarianten nach dem Tensor  $\mathbf{C}$  aufgeführt

$$\frac{\partial C_I}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial C_{II}}{\partial \mathbf{C}} = C_I \mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial C_{III}}{\partial \mathbf{C}} = C_{II} \mathbf{I} - C_I \mathbf{C} + \mathbf{C}^2 = C_{III} \mathbf{C}^{-1} \tag{A.25}$$

# Literaturverzeichnis

## **ABA 2000**

ABACOM SOFTWARE GMBH (Hrsg.): *Theory Manual*. Version 6.3. Aachen: ABACOM Software GmbH, 2000

## **Alt 2005**

ALTAIR ENGINEERING GMBH (Hrsg.): *Hyperworks Online Manual*. Version 7.0. Böblingen: Altair Engineering GmbH, 2005

## **Altenbach u. Altenbach 1994**

ALTENBACH, J. ; ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1994

## **Anderson 2000**

ANDERSON, J.: Passive tension during a relaxation test: simulation of the behaviour of muscles lacking desmin. In: PRENDERGAST, P. J. (Hrsg.) ; LEE, T. C. (Hrsg.) ; CARR, A. J. (Hrsg.): *Proceedings of the 12th Conference of the European Society of Biomechanics*, Royle Academy of Medicine, Dublin, 2000

## **Bestle 1994**

BESTLE, D.: *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Stuttgart : Springer-Verlag, 1994

## **Bienstein u. Schröder 1993**

BIENSTEIN, C. ; SCHRÖDER, G.: DEKUBITUS - Prophylaxe und Therapie. In: *Deutscher Berufsverband für Pflegebeufe, Eschborn* (1993)

## **Bienstein u. a. 1997**

BIENSTEIN, C. ; SCHRÖDER, G. ; BRAUN, M. ; NEANDER, K.-D.: *Dekubitus - Die Herausforderung für Pflegende*. Stuttgart : Georg Thieme Verlag, 1997

**Van den Bogert u. de Borst 1994**

BOGERT, P. A. J. d. ; BORST, R. de: On the behaviour of rubberlike materials in compression and shear. In: *Arch. Appl. Mech.* 64 (1994), S. 136–146

**Czysz 1986**

CZYSZ, H.-J.: *Experimentelle Untersuchungen an Polyurethan-Integralweichschaum zur Bestimmung von Kennwerten zu Berechnungsgrundlagen*, Universität der Bundeswehr Hamburg, Diss., 1986

**Daly 2000**

DALY, S.: Use of finite element analysis to simulate the hyperelastic behaviour of cardiovascular tissue. In: PRENDERGAST, P. J. (Hrsg.) ; LEE, T. C. (Hrsg.) ; CARR, A. J. (Hrsg.): *Proceedings of the 12th Conference of the European Society of Biomechanics*, Royl Academy of Medicine, Dublin, 2000

**Dassen 2004**

DASSEN, T.: *Dekubitus-Prävalenz-Studie*. Institut für Medizin-/Pflegepädagogik und Pflegewissenschaften, Humbolt Universität, Berlin, 2004

**Ehlers u. Markert 2003**

EHLERS, W. ; MARKERT, B.: A macroscopic finite strain model for cellular polymers. In: *Journal of Plasticity* 19 (2003), S. 961–976

**Eipper 1998**

EIPPER, G.: *Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluid-gesättigten porösen Festkörpern*. Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, Diss., 1998

**ESI 2005**

ESI GROUP (Hrsg.): *PAM Talk*. Ausgabe 18. Cedex, Frankreich: ESI Group, 2005

**Gummert u. Reckling 1987**

GUMMERT, P. ; RECKLING, K.-A.: *Mechanik*. Friedrich Vieweg & Sohn, 1987

**Gurtin u. Francis 1981**

GURTIN, M. E. ; FRANCIS, E.C.: Simple rate-independent model for damage, AIAA. In: *Journal of Spacecraft* 18 (1981), S. 285–288

**Hartmann u. a. 2001**

HARTMANN, S. ; HAUPT, P. ; TSCHÖPE, T.: Parameter Identification with a Direct Search Method using Finite Elements. In: BESDO, D. (Hrsg.) ; H., Schuster R. (Hrsg.) ; IHLEMANN, J. (Hrsg.): *Constitutive Models for Rubber II*, 2001, S. 249–256

**Hartmann u. a. 2003**

HARTMANN, S. ; TSCHÖPE, T. ; HAUPT, P.: Large deformations of a carbon black-filled rubber. Experiment, optical measurement and parameter identification using finite elements. In: *European Journal of Mechanics in Applied Mechanics, Series A/Solids* 22 (2003), S. 309–324

**Hill 1978**

HILL, R.: Aspects of invariance in solid mechanics. In: *Advances in Applied Mechanics* 18 (1978), S. 1–72

**Hirota u. a. 2003**

HIROTA, G. ; FISHER, S. ; STATE, A.: An improved finite-element contact model for anatomical simulations. In: *Visual Computer* 19 (2003), S. 291–309

**Holzapfel 2000**

HOLZAPFEL, G.: *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, 2000

**Hu u. Desai 2002**

HU, T. ; DESAI, J. P.: Characterization of soft-tissue material properties: large deformation analysis. In: *Proceedings of the International Symposium on Medical Simulation*, 2002, S. 294

**James u. Green 1975**

JAMES, A. G. ; GREEN, A. E.: Strain energy functions of rubber. II. The characterization of filled vulcanizates. In: *Journal of Applied Polymer Sciences* 19 (1975), Nr. 8, S. 2319–2330

**Kaliske u. Heinrich 2000**

KALISKE, M. ; HEINRICH, G.: Eine Formulierung von Gummielastizität und Viskoelastizität mit Schädigung für die Finite-Elemente-Simulationen. In: *Elastomere und Kunststoffe* 53 (2000), S. 110–117

**Klüppel u. Schramm 1998**

KLÜPPEL, M ; SCHRAMM, J.: Ein molekular-statistischer Zugang zur Hyperelastizität elastomerer Werkstoffe. In: *3. Tagungsband Kautschuk-Herbst-Kolloquium*. Hannover : Deutsches Institut für Kautschuktechnologie e.V., 1998

**Kühhorn u. Silber 2000**

KÜHHORN, A. ; SILBER, G.: *Technische Mechanik*. Heidelberg : Hüthig Verlag GmbH, 2000

**Lemos u. a. 2001**

LEMONS, R. ; EPSTEIN, M. ; HERZOG, W. ; WYVILL, B.: Realistic skeletal muscle deformation using finite element analysis. In: *Proceedings of the 14th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, 2001

**Lenz 1999**

LENZ, T.: Modellierung von Polymerschäumen. In: *Tagungshandbuch zur Fachtagung Polymerschäume - Perspektive und Trends*, 1999

**Lion 1996**

LION, A.: A Constitutive model for carbon black filled rubber. Experimental investigations and mathematical representation. In: *Continuum. Mech. Thermodyn* 8 (1996), S. 153–169

**Maenhout u. a. 2000**

MAENHOUT, M. ; HESSELINK, M. K. C. ; OOMENS, C. W. J. ; DROST, M. R.: Muscle deformation measurements to validate a 2-D-continuum model of muscle. In: PRENDERGAST, P. J. (Hrsg.) ; LEE, T. C. (Hrsg.) ; CARR, A. J. (Hrsg.): *Proceedings of the 12th Conference of the European Society of Biomechanics*, Royal Academy of Medicine, Dublin, 2000

**Mat 2005**

MATERIALISE (Hrsg.): *MIMICS Online Manual*. Version 9.0. Leuven (Belgien): Materialise, 2005

**Medaila 1978**

MEDAILA, A. I.: Effect of Carbon Black on Dynamic Properties of Rubber Vulcanizates. In: *Rubber Chemistry and Technology* 51 (1978), S. 437–523

**Mills u. a. 2003**

MILLS, N. J. ; FITZGERALD, C. ; GILCHRIST, A. ; VERDEJO, R.: Polymer foams for personal protection: cushions, shoes and helmets. In: *Composites Science and Technology* 63 (2003), S. 2389–2400

**Mills u. Gilchrist 2000**

MILLS, N. J. ; GILCHRIST, A.: Modelling the indentation of low density polymer foams. In: *Cellular Polymers* 19 (2000), S. 389–412

**Moes 2003**

MOES, C. C. M.: Sitting stresses inside the body. In: *The Ergonomics society* (2003), S. 549–554

**Moes u. Horvath 2002**

MOES, C. C. M. ; HORVATH, I.: Finite elements model of the human body: geometrie and non-linear material properties. In: HORVATH, I. (Hrsg.) ; LI, P. (Hrsg.) ; VERGEEEST, J. S. M. (Hrsg.): *Tools and Methods of Competitive Engineering (TMCE)* Bd. 326. Wuhan : HUST Press, 2002, S. 451–467

**Mullins 1969**

MULLINS, L.: Softening of rubber by deformation. In: *Rubber Chemistry and Technology* 42 (1969), S. 339–362

**Murdoch u. a. 2002**

MURDOCH, A. H. ; MATHIAS, K. J. ; SMITH, F. W.: Measurement of the bony anatomy of the humerus using magnetic resonance imaging. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part H, Journal of engineering in medicine* Bd. 216. England : Mechanical Engineering Publications For The Institution Of Mechanical Engineers, 2002, S. 31–5

**Natali 2000**

NATALI, A.: Numerical analysis of short time response of periodontal ligament. In: PRENDERGAST, P. J. (Hrsg.) ; LEE, T. C. (Hrsg.) ; CARR, A. J. (Hrsg.): *Proceedings of the 12th Conference of the European Society of Biomechanics*, Royl Academy of Medicine, Dublin, 2000

**National Library of Medicine 2001**

NATIONAL LIBRARY OF MEDICINE (Hrsg.): *The Visible Human Project*. <http://www.nlm.nih.gov/visible/data2knowledge.html>, Abruf: 3. Mai. 2004

**Nelder u. Mead 1965**

NELDER, J. A. ; MEAD, R.: A Simplex Method for Function Minimization. In: *Computer Journal* 7 (1965), S. 308–313

**Ogden 1972**

OGDEN, R. W.: Large deformations isotropic elasticity. On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. In: *Proceedings of the Royal Society of London* Bd. 326, 1972, S. 565–584

**Parisch 2003**

PARISCH, H.: *Festkörper Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : B. G. Teubner, 2003

**Phillips 1997**

PHILLIPS, J.: *Dekubitus und Dekubitusprophylaxe*. Bern : Verlag Hans Huber, 1997

**Pini u. a. 2004**

PINI, M. ; ZYSSET, P. ; BOTSIS, J. ; CONTRO, R.: Tensile and compressive behaviour of the bovine periodontal ligament. In: *Journal of biomechanical engineering* 37 (2004), S. 111–119

**Reese 1994**

REESE, S.: *Theorie und Numerik des Stabilitätsverhalten hyperelastischer Festkörper*. Darmstadt, Technische Hochschule Darmstadt, Diss., 1994

**Reger u. a. 1990**

REGER, S. ; MCGOVERN, T. ; CHI CHUNG, K.: Biomechanics of tissue distortion and stiffness by magnetic resonance imaging. In: BADER, D. (Hrsg.): *Pressure Sores. Clinical Practice and Scientific Approach*, McMillian Press London, 1990, S. 177–190

**Renz 1977**

RENZ, R.: *Zum zügigen und zyklischen Verformungsverhalten polymerer Hartschaumstoffe*. Karlsruhe, TH Karlsruhe, Diss., 1977

**Renz 1978**

RENZ, R.: Modellvorstellungen zur Berechnung des mechanischen Verhaltens von Hartschaumstoffen. In: *Schaumkunststoffe*. Düsseldorf : Fachverband Schaumkunststoffe e. V., 1978

**Rivlin 1948**

RIVLIN, R. S.: Large elastic deformation of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 241 (1948), Nr. 835, S. 379–397

**Sacks 2000**

SACKS, M. S.: Biaxial mechanical evaluation of planar biological materials. In: *Journal of Elasticity* 61 (2000), S. 199–246

**Sahoun u. a. 2000**

SAHOUN, S. ; DIAMANTOPOULUS, P. ; RICHARDSON, J. D.: Modelling the spine and rib cage of a child for biomechanical purposes. In: PRENDERGAST, P. J. (Hrsg.) ; LEE, T. C. (Hrsg.) ; CARR, A. J. (Hrsg.): *Proceedings of the 12th Conference of the European Society of Biomechanics*, Royal Academy of Medicine, Dublin, 2000

**Samani u. Plewes 2004**

SAMANI, A. ; PLEWES, D.: A method to measure the hyperelastic parameters of ex vivo breast tissue samples. In: *Physics in Medicine and Biology* 49 (2004), S. 4395–4405

**Schünke u. a. 2005**

SCHÜNKE, M. ; SCHULTE, E. ; SCHUMACHER, U.: *Prometheus, Lernatlas der Anatomie*. Stuttgart : Georg Thieme Verlag, 2005

**Schwefel 1995**

SCHWEFEL, H.-P.: *Evolution and Optimum Seeking*. New York : John Wiley & Sons, 1995

**Silber u. Steinwender 2005**

SILBER, G. ; STEINWENDER, F.: *Bauteilberechnung und Optimierung mit der FEM*. Wiesbaden : B. G. Teubner, 2005

**Simo u. Taylor 1991**

SIMO, J. C. ; TAYLOR, R. L.: Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. In: *Continuum basis and numerical algorithms. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 85 (1991), S. 273–310

**Sobotta 1993**

SOBOTTA, J.: *Sobotta - Atlas der Anatomie des Menschen*. München : Urban & Schwarzenberg, 1993

**Söll 1976**

SÖLL, H.: *Biomechanik in der Sportpraxis*. Schorndorf : Verlag Hofmann, 1976

**Stichnoth 1994**

STICHNOTH, F.-A.: *MR-Tomographie, Technische Grundlagen und klinische Aspekte*. Berlin : Blackwell Wissenschafts-Verlag, 1994

**Storakers 1986**

STORAKERS, B.: On the material representation and constitutive branching in finite compressible elasticity. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 34 (1986), S. 125–145

**Teran u. a. 2003**

TERAN, J. ; BLEMKER, S. ; NG THOW HING, V. ; FEDKIW, R.: Finite Volume Methods for the simulation of skeletal muscle. In: *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*. San Diego, California : Eurographics Association, 2003, S. 63–74

**Trostel 1993**

TROSTEL, R.: *Vektor- und Tensor-Algebra - Mathematische Grundlagen der Technischen Mechanik I*. Wiesbaden : Vieweg-Verlag, 1993

**Trostel 1997**

TROSTEL, R.: *Vektor- und Tensor-Algebra - Mathematische Grundlagen der Technischen Mechanik II*. Wiesbaden : Vieweg-Verlag, 1997

**Trostel 1999**

TROSTEL, R.: *Materialmodelle in der Ingenieurmechanik, Mathematische Grundlagen der Technischen Mechanik III*. Wiesbaden : Vieweg-Verlag, 1999

**Truesdell u. Noll 1992**

TRUESDELL, C. ; NOLL, W.: *The non-linear field theories of mechanics*. Berlin : Springer-Verlag, 1992

**Vana 2000**

VANA, P.: A viscoelastic model for artificial ligament made of composite materials. In: PRENDERGAST, P. J. (Hrsg.) ; LEE, T. C. (Hrsg.) ; CARR, A. J. (Hrsg.): *Proceedings of the 12th Conference of the European Society of Biomechanics*, Royl Academy of Medicine, Dublin, 2000

**Wang u. Cuitino 2000**

WANG, Y. ; CUITINO, A. M.: Three-dimensional nonlinear open-cell foams with large deformations. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000)

**Willimczik 1989**

WILLIMCZIK, K.: *Biomechanik der Sportarten*. Reinebek bei Hamburg : Rowohlt, 1989

**Wriggers 2001**

WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methode*. Berlin : Springer-Verlag, 2001