

Thilo Knacke

Numerische Simulation des Geräusches massiv abgelöster Strömung bei großer Reynoldszahl und kleiner Machzahl



Thilo Knacke

**Numerische Simulation des Geräusches massiv
abgelöster Strömung bei großer Reynoldszahl
und kleiner Machzahl**

Thilo Knacke

**Numerische Simulation des Geräusches massiv
abgelöster Strömung bei großer Reynoldszahl
und kleiner Machzahl**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de/> abrufbar.

Universitätsverlag der TU Berlin, 2015

<http://verlag.tu-berlin.de>

Fasanenstr. 88 (im VOLKSWAGEN-Haus), 10623 Berlin

Tel.: +49 (0)30 314 76131 / Fax: -76133

E-Mail: publikationen@ub.tu-berlin.de

Zugl.: Berlin, Techn. Univ., Diss., 2014

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele

2. Gutachter: Dr.-Ing. Roland Ewert

Die Arbeit wurde am 10. November 2014 an der Fakultät V unter Vorsitz von Prof. Dr.-Ing. Jürgen Thorbeck erfolgreich verteidigt.

Diese Veröffentlichung – ausgenommen Zitate – ist unter der CC-Lizenz CC BY lizenziert.

Lizenzvertrag: Creative Commons Namensnennung 3.0 Deutschland

<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/de>

Druck: docupoint GmbH

Satz/Layout/Titelbild: Thilo Knacke

ISBN 978-3-7983-2735-1 (print)

ISBN 978-3-7983-2736-8 (online)

Zugleich online veröffentlicht auf dem Digitalen Repositorium der Technischen Universität Berlin:

URN urn:nbn:de:kobv:83-opus4-60172

[<http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:kobv:83-opus4-60172>]

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik (ISTA) der TU-Berlin im Rahmen der durch das vierte Luftfahrtforschungsprogramm und durch das siebte EU-Forschungsrahmenprogramm geförderten Projekte *M-Fly/AeroNext* und *Valiant*.

Neben den Projektträgern möchte ich an erster Stelle Herrn Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele meinen aufrichtigen Dank aussprechen. Er hat als Leiter des Fachgebietes Numerische Methoden der Thermofluidodynamik am ISTA und als erster Gutachter sein Vertrauen in mich gesetzt und mir die Möglichkeit zur Promotion in einem höchst interessanten Arbeitsumfeld mit vielen internationalen Kooperationen gegeben. Besonderer Dank gilt auch Herrn Dr.-Ing. Roland Ewert vom Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt für das Interesse an meiner Arbeit und für die bereitwillige Übernahme der Begutachtung. Herrn Prof. Dr.-Ing. Jürgen Thorbeck danke ich sehr herzlich, dass er den Vorsitz im Promotionsausschuss übernommen hat.

Weiterhin möchte ich meinen ehemaligen und derzeitigen Kollegen am ISTA für die ausgesprochen kollegiale Arbeitsatmosphäre und für die zahlreichen fachlichen Diskussionen danken, die insgesamt sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Allen voran sind hier mein langjähriges Gegenüber Dr. Angelo Carnarius und mein aktueller Bürogenosse Dr. Felix Kramer zu nennen, welche stets für einen lebhaften Diskurs über die Rhie & Chow Interpolation zu haben waren. Ihnen beiden, sowie Dr. Charles Mockett und Marian Fuchs danke ich außerdem für so manches andere erhellende Gespräch sowie für die aufmerksame Durchsicht von Teilen des Manuskripts. Meinem studentischen Mitarbeiter Matthias Lemke gebührt Dank für seine stets gewissenhafte und sehr wertvolle Zuarbeit. Bei meinem alten Studienfreund Dr. Bert Günther bedanke ich mich ganz besonders herzlich für seine famose Idee, in der Arbeitsgruppe von Prof. Thiele „anzuheuern“. Ich hatte großes Glück, über viele Jahre mit so vielen kompetenten und hilfsbereiten Kollegen gemeinsam am ISTA arbeiten zu dürfen. Den Dres. Markus Schatz und Jianping Yan danke ich sehr herzlich für den guten Start, Prof. Ulf Michel für sein offenes Ohr in akustischen Fragen und den Administratoren Lars Oergel und Martin Franke für die stets zuverlässig funktionierende Infrastruktur.

Des Weiteren möchte ich es nicht versäumen, mich beim Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit und bei meinen Projektpartnern aus *AeroNext* und aus *Valiant* für die wirklich sehr gute und vertrauensvolle Zusammenarbeit zu bedanken. Vielen Dank Burkhard, Mark, Marcus, Andreas, Roland, Lilla, Paula, Tatiana, Misha, Michael, Mikhail, Victor, Alexey, Andrey, Ilya, Nikolay, Marc, Michel, Eric, Benoît, Stefan, Thomas, Gabriel und Christophe. Den Herren Dr. Meelan Choudhari und Dr. Mehdi Khorrani vom NASA Langley Research

Center danke ich herzlich für die zur Verfügung gestellten Bilder und Daten der Hochauftriebskonfiguration. Außerdem danke ich Prof. Bernard Geurts für seine Einführung in das TU/e Fischgrätenmodell, welches sich beim Schreiben schon oft als hilfreich erwies.

Mein innigster Dank gilt meinen Eltern Katrin und Hans-Jürgen Knacke, meiner Frau Pia und unseren Kindern Moritz und Anton, ohne deren Geduld und Rückhalt die Fertigstellung dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Meinem Bruder Ingmar ist diese Arbeit gewidmet.

Berlin, im Dezember 2014

Thilo Knacke

Kurzdarstellung

Strömungsinduzierte Geräusche stellen heute ein zunehmendes Problem dar, besonders in der Umgebung von Flughäfen. Eine flächendeckende Lärminderung ließe sich hier in erster Linie durch konstruktive Maßnahmen zur Abschwächung der wesentlichen Schallentstehungsmechanismen am Flugzeug erzielen. Dies setzt jedoch voraus, dass verlässliche aeroakustische Vorhersagen getroffen werden können, wozu nicht nur präzise Berechnungsverfahren für die Schallausbreitung, sondern auch für das mittlere Strömungsfeld und für die aerodynamischen Geräuschquellen erforderlich sind.

In der vorliegenden Arbeit wird ein im Bereich subsonischer Strömungssimulationen etabliertes, druckbasiertes 3D-Finite-Volumen-Verfahren für den Einsatz in aeroakustischen Grobstruktursimulationen weiterentwickelt. Der hier vordergründig betrachtete Strömungszustand und Kennzahlbereich ist typisch für das Entstehen von „airframe noise“, aerodynamischem Lärm, welcher primär durch die turbulente Umströmung von Fahrwerk und Hochauftriebshilfen startender oder landender Flugzeuge verursacht wird. Die Kopplung von kompressiblen Grobstruktursimulationen im Quellgebiet mit nachgeschalteten akustischen Extrapolationen ermöglicht eine Berechnung dieser Umströmungsgeräusche bis ins Fernfeld.

Nach kurzer Darstellung der physikalischen Grundlagen und verschiedener Möglichkeiten zur numerischen Simulation wird das ausgewählte Verfahren im Detail analysiert und eine Schwachstelle in der zur Berechnung der Massenflüsse eingesetzten Interpolation nach Rhie & Chow identifiziert. Der Schwerpunkt der Weiterentwicklung liegt anschließend auf der sorgfältigen Herleitung einer Familie konsistenter Approximationen zur Bestimmung von Massenflüssen über Kontrollvolumengrenzflächen auf nichtversetzten Gittern. Zwei neue Varianten der Massenflussberechnung werden in das bestehende Druckkorrekturverfahren integriert. Deren Verhalten wird im Vergleich zur ursprünglichen Implementierung an einem akademischen Testfall bewertet. Es folgt eine Abstimmung von Numerik und Feinstrukturmodell am Zerfall isotroper Turbulenz und nach der Qualifizierung des verbesserten Verfahrens schließlich dessen Anwendung zur Berechnung von Strömungsgeräuschen an einer generischen Fahrwerksverstrebung und an einer 3-Komponenten-Hochauftriebskonfiguration. Die Ergebnisse dieser Simulationen weisen überwiegend eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Daten auf. Auf Basis einer aeroakustischen Analyse der hochaufgelösten Simulationsergebnisse am Vorflügel gelingt letztlich ein statistischer Nachweis für den dort dominierenden Schallentstehungsmechanismus.

Abstract

Flow-induced noise represents an increasing problem today, particularly in the vicinity of airports. Comprehensive aircraft noise reduction could primarily be achieved through design changes which mitigate the major noise generation mechanisms. However, such changes require reliable aeroacoustic predictions, which is only possible if appropriate numerical tools are available. These must allow the precise calculation of the sound and mean flow fields as well as the most relevant aerodynamic noise sources.

In this work a pressure-based 3D finite volume method, which is already well-established in the area of subsonic flow computation, is further developed in order to enable its application for aeroacoustic large-eddy simulations. The flow state and the range of similarity parameters considered here are chosen to be representative of typical airframe noise. This is mainly caused by separated flow around deployed landing gear and high-lift devices during aircraft takeoff and landing. The coupling of compressible large-eddy simulations in the main sound source regions with subsequent acoustic extrapolations provides access to the prediction of such aerodynamic noise up to the farfield.

The selected method is analysed in detail following a brief overview of the physical background and state-of-the-art numerical simulation techniques. A weak point is identified in the Rhie & Chow interpolation which is employed for the calculation of mass fluxes. Particular emphasis is then placed on the careful derivation of a family of consistent approximations for the determination of mass flux over control volume faces on co-located grids. Two new flux formulations are integrated into the existing pressure correction method. Their behaviour is validated and compared to that of the original implementation on an academic test case. Following a thorough reassessment of the balance between numerical and modelled dissipation on the decay of isotropic turbulence, the improved method is finally applied to compute the flow-induced noise around a generic two-struts configuration and around a three-component high-lift configuration. The simulation results predominantly exhibit very good agreement with experimental data. Based on highly-resolved flow field data acquired from the simulation of the high-lift system, a concise aeroacoustic analysis is offered. Statistical evidence of the dominant noise generation mechanism near a leading edge slat is provided.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Stand der Forschung	3
1.2	Zielsetzung	7
1.3	Gliederung	10
2	Physikalischer Hintergrund	11
2.1	Navier-Stokes-Gleichungen	11
2.2	Strömungsakustische Gleichungen	13
2.2.1	Lighthill-Gleichung	13
2.2.2	Gleichung von Ffowcs-Williams und Hawkings	15
2.2.3	Klassifizierung der Schallquellen	18
2.3	Turbulente Strömungen	21
2.3.1	DNS	25
2.3.2	LES	25
2.3.3	RANS	34
2.3.4	Hybride Turbulenzbehandlung	37
2.3.5	DES	39
2.3.6	Gefilterte/Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen	41
2.3.7	Schließungsannahmen	45
2.3.8	Hybrides SALSA-Modell	49
2.4	Zusammenfassung zu lösender Transportgleichungen	57
3	Numerisches Verfahren	59
3.1	Finite-Volumen-Methode	59
3.1.1	Generische Transportgleichung	60
3.1.2	Diskretisierung	60
3.1.3	Zusammenfassung der lokalen Bilanz	67
3.1.4	Iterative Relaxation	67
3.2	SIMPLE-Algorithmus für nichtversetzte Gitter	68
3.2.1	Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit	69
3.2.2	Impulsinterpolation und Bestimmung der Massenflüsse	70
3.2.3	Diskussion der Korrekturterme	76
3.2.4	Diskussion in ELAN implementierter Varianten	81
3.2.5	Demonstration der Entkopplung	83
3.2.6	Druckkorrekturverfahren	85
3.2.7	Abschließende Bemerkungen	92
3.3	Randbedingungen	93
3.3.1	Einströmtränder	94
3.3.2	Ausströmtränder	96
3.3.3	Feste Wände	98
3.4	Fernfeldextrapolation	101

4	Validierung und Kalibration	105
4.1	Taylor-Green Wirbel	106
4.1.1	Testfall und Setup	106
4.1.2	Abklingverhalten der kinetischen Energie	108
4.1.3	Konvergenzverhalten der Massenbilanz	111
4.2	Zerfall isotroper Turbulenz	113
4.2.1	Testfall und Setup	115
4.2.2	Simulationen ohne Reibung	118
4.2.3	Simulationen mit Reibung	120
5	Technische Anwendungsfälle	129
5.1	Fahrwerksverstrebung	129
5.1.1	Testfall und Setup	130
5.1.2	Ergebnisse der Quellsimulation	135
5.1.3	Ergebnisse der Fernfeldextrapolation	146
5.2	Hochauftriebskonfiguration	155
5.2.1	Testfall und Setup	156
5.2.2	Aerodynamik der Gesamtkonfiguration	161
5.2.3	Strömungsverhältnisse in der Vorflügelregion	164
5.2.4	Vom Vorflügel ausgehende Schallemission	175
5.2.5	Analyse der Geräuschenstehung am Vorflügel	178
6	Zusammenfassung	185
A	Anhang	191
A.1	Allgemein krummlinige Koordinaten in 3D	191
A.2	Approximation von Integralen	195
A.2.1	Volumenintegrale	195
A.2.2	Oberflächenintegrale	195
A.3	Approximation von Variablen	196
A.3.1	Im Kontrollvolumenzentrum	196
A.3.2	Auf Kontrollvolumengrenzflächen	196
A.4	Approximation von Gradienten	198
A.4.1	Im Kontrollvolumenzentrum	198
A.4.2	Auf Kontrollvolumengrenzflächen	199
	Literaturverzeichnis	201

Nomenklatur

Zusammenstellung im Text verwendeter Symbole und Abkürzungen in alphabetischer Reihenfolge. Je nach Gebrauch im Text können bei vektoriellen Größen entweder der Vektor selbst, die Koordinaten des Vektors oder aber beide in der Auflistung enthalten sein. Nicht immer wird dabei in der Beschreibung begrifflich zwischen Vektor und Koordinaten unterschieden.

Große lateinische Buchstaben:

A	Oberfläche	(m^2)
A_{ij}	Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems	(\cdot)
C_p	spezifische isobare Wärmekapazität	$(\text{J}/(\text{kg K}))$
C_V	spezifische isochore Wärmekapazität	$(\text{J}/(\text{kg K}))$
D	Durchmesser	(m)
E	3D-Energiespektralfunktion von \mathbf{u}	(m^3/s^2)
F_i	Kraft	(N)
G	Transferfunktion	(\cdot)
H	diskrete Hilfsfunktion	(\cdot)
H	Heaviside-Funktion	(1)
I	Energiefluss pro Fläche	(W/m^2)
\mathcal{J}	Determinante der Jakobimatrix	(1)
J_{ij}	Jakobimatrix	(1)
K	kinetische Energie	(m^2/s^2)
\mathcal{L}	Länge	(m)
L_{ij}	Hilfsgröße aus erweiterter Lighthill-Gleichung	(N/m^2)
N	Anzahl	(1)
R	Residuum (\cdot) oder spezifische Gaskonstante	$(\text{J}/(\text{kg K}))$
\mathcal{R}	globales Residuum	(\cdot)
S	allgemeiner Quellterm für $\phi(\cdot)$ oder Oberfläche	(m^2)
S_{ij}	Scherraten Tensor	$(1/\text{s})$
T	Temperatur	(K)
T_{ij}	lighthillscher Spannungstensor	(N/m^2)
U	Summe aus innerer und kinetischer Energie	(J/kg)
V	Volumen	(m^3)
V_i	Hilfsgröße aus erweiterter Lighthill-Gleichung	(m/s)

Kleine lateinische Buchstaben:

a	Koeffizient eines Gleichungssystems	(\cdot)
b_{ij}	Anisotropietensor der Reynoldsspannungen	(1)
c	Schallgeschwindigkeit	(m/s)
c_A	Auftriebsbeiwert	(1)
c_W	Widerstandsbeiwert	(1)
c_p	Druckbeiwert	(1)

c_μ	Anisotropieparameter	(1)
d	Abstand	(m)
e	spezifische innere Energie	(J/kg)
e_i	kartesische Basis	(1)
e	eulersche Zahl ($e \approx 2.71828$)	(1)
f	Frequenz	(1/s)
f_i	Kraft pro Volumen (N/m^3) oder pro Fläche (N/m^2)	
g_i	kovariante Basis	(1)
g^i	kontravariante Basis	(1)
h	spezifische Enthalpie	(J/kg)
i	imaginäre Einheit ($i^2 = -1$)	($\sqrt{-1}$)
k	turbulente kinetische Energie	(m^2/s^2)
ℓ	Länge	(m)
\dot{m}	Massenstrom	(kg/s)
\mathbf{n}, n_i	Normaleneinheitsvektor	(1)
p	Druck	(N/m^2)
q	dynamischer Druck	(N/m^2)
q_i	Wärmestromdichtevektor	(W/m^2)
QU	volumenspezifische Energiequelle	(W/m^3)
r	Abstand oder Radius	(m)
\mathbf{r}, r_i	Abstandsvektor	(m)
s	Koordinate (\cdot) oder spezifische Entropie ..	($\text{J}/(\text{kg K})$)
t	Zeit	(s)
u	x -Koordinate von \mathbf{u}	(m/s)
\mathbf{u}, u_i	Geschwindigkeitsvektor	(m/s)
v	y -Koordinate von \mathbf{u}	(m/s)
\mathbf{v}, v_i	Geschwindigkeitsvektor (alternativ)	(m/s)
w	z -Koordinate von \mathbf{u}	(m/s)
x	x_1 -Koordinate von \mathbf{x}	(m)
\mathbf{x}, x_i	Ortsvektor	(m)
y	x_2 -Koordinate von \mathbf{x}	(m)
\mathbf{y}, y_i	Ortsvektor (alternativ)	(m)
$\hat{\mathbf{y}}, \hat{y}_i$	Ortsvektor im FWH-Relativsystem	(m)
z	x_3 -Koordinate von \mathbf{x}	(m)

Große griechische Buchstaben:

Γ_ϕ	generischer Diffusionskoeffizient	(\cdot)
Δ	Gitterlängenmaß im Feinstrukturmodell	(m)
Δ	Korrekturgröße (\cdot) oder LES-Filterbreite	(m)
Ω_{ij}	Wirbeltensor	(1/s)
Π	Leistung	(W)
Π	3D-Energiespektralfunktion von p	(N^2/m^3)
Φ	Dissipationsfunktion	(W/m^3)
Ψ	Wanddämpfungskompensationsfunktion	(1)
Ψ	Stromfunktion	(m^2/s)

Kleine griechische Buchstaben:

α	globaler Relaxationsfaktor (1) oder Anstellwinkel ($^\circ$)	
β	Skalierungsfaktor	(1)

γ	Konstante oder Wurzel der Kohärenzfunktion γ^2	(1)
δ	Differenz	(·)
δ_{99}	Grenzschichtdicke	(m)
δ_{ij}	Kronecker-Symbol	(1)
ε	Dissipation turbulenter kinetischer Energie	(m ² /s ³)
ε_{ijk}	Permutationstensor	(1)
ζ	ξ^3 -Koordinate von \mathbf{x} (bzgl. \mathbf{g}_i)	(m)
η	ξ^2 -Koordinate von \mathbf{x} (bzgl. \mathbf{g}_i)	(m)
ϑ	Winkel	(°)
\varkappa	Isentropenexponent	(1)
κ	Wellenzahl	(1/m)
κ	von kármánsche Konstante	(1)
λ	Wellenlänge (m) oder Wärmeleitfähigkeit (W/(m K))	
λ_2	zweitgrößter Eigenwert von $S_{ik}S_{kj} + \Omega_{ik}\Omega_{kj}$	(1/s ²)
μ	dynamische Zähigkeit	(Pa s)
ν	kinematische Zähigkeit	(m ² /s)
ξ	ξ^1 -Koordinate von \mathbf{x} (bzgl. \mathbf{g}_i)	(m)
ξ^i	kontravariante Koordinaten von \mathbf{x} (bzgl. \mathbf{g}_i)	(m)
π	Kreiszahl ($\pi \approx 3.14159$)	(1)
ρ	Dichte	(kg/m ³)
σ	Mischungsfunktion	(1)
τ	Zeitmaß	(s)
τ_{ij}	Reibungsspannungstensor	(N/m ²)
τ	Zeit (alternativ)	(s)
ϕ	generische Variable (·) oder Winkel	(°)
χ	projizierte Position	(m)
ψ	generische Variable (alternativ)	(·)
ω	Kreisfrequenz	(1/s)
ω, ω_i	Wirbelstärke	(1/s)

Operatoren:

$d^n()/dt^n$	vollständige n -te Ableitung
$\partial^n()/\partial t^n$	partielle n -te Ableitung
$\delta^n()/\delta t^n$	diskrete n -te Ableitung
$\nabla()$	Nabla-Operator
$\text{div}()$	Divergenz
$\text{rot}()$	Rotation
$\text{det}()$	Determinante
$\mathcal{O}()$	Fehlerordnung
$ \cdot $	euklidische Norm

Kennzeichnungen und Indizes:

$\overline{()}$	gemittelte/gefilderte Größe
$\overline{R}()$	Reynolds-gemittelte Größe
$\overline{F}()$	gefilderte Größe
$\widetilde{()}$	massengewichtet gemittelte/gefilderte Größe
$\widetilde{R}()$	massengewichtet Reynolds-gemittelte Größe
$\widetilde{F}()$	massengewichtet gefilderte Größe

$(\)'$	Abweichung von gemittelter Größe
$(\)''$	Abweichung von massengewichtet gemittelter Größe
$(\)^*$	Größe der letzten äußeren Iteration
$(\)^o$	Größe des letzten Zeitschrittes
$(\)^{oo}$	Größe des vorletzten Zeitschrittes
$(\)^\diamond$	vorläufige, nichtkonservative Größe
$(\)^\blacktriangledown$	Korrektur für vorläufige Größe
$(\)^*$	charakteristische Größe
$(\)^{\text{eff}}$	effektive Größe
$(\)^{\text{mod}}$	zu modellierende Größe
$(\)^{\text{T}}$	transponierte Größe
$(\)_0$	Maß im energetischen Bereich, Initial- oder Ruhegröße
$(\)_\eta$	Maß im dissipativen Bereich
$(\)_\infty$	Anströmungs- bzw. Fernfeldgröße
$(\)_{\text{ref}}$	Referenzgröße
$(\)_{\text{rms}}$	Effektivwert
$(\)_{i\dots o}$	Tensorindizes
$(\)_{\text{max}}$	Maximalwert einer Größe
$(\)_{\text{min}}$	Minimalwert einer Größe
$(\)_{\text{m}}$	Position des globalen Maximums
$(\)_{\text{a}}$	akustische Größe
$(\)_{\text{t}}$	turbulente Größe
$(\)_{x,y,z}$	x -, y - oder z -Koordinate eines Vektors
$(\)_{\text{F}}$	Größe im Mittelpunkt eines FV ($\mathbf{F} = \mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{N}, \mathbf{W}, \mathbf{E}$)
$(\)_{\text{f}}$	Größe im Zentrum einer FV-Fläche ($\mathbf{f} = \mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{e}$)
$(\)_{\text{f}}$	auf eine FV-Fläche interpolierte Größe

Dimensionslose Kennzahlen:

Co	Courantzahl
Kn	Knudsenzahl
Ma	Machzahl
Pe	Pécletzahl
Pr	Prandtlzahl
Re	Reynoldszahl
St	Strouhalzahl
Tu	Turbulenzgrad

Abkürzungen:

1D/2D/3D	ein-/zwei-/dreidimensional
APE	Acoustic Perturbation Equations
CAA	Computational Aero-Acoustics
CDS	Central-Differencing Scheme
CFD	Computational Fluid Dynamics
CPU	Central Processing Unit
DDES	Delayed-Detached-Eddy-Simulation
DES	Detached-Eddy-Simulation
DG	Discontinuous-Galerkin
DNS	Direct Numerical Simulation
DRP	Dispersion-Relation-Preserving

EDQNM	Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian
ELAN	ELliptic Analysis of the Navier-Stokes equations
FV	Finites Volumen
FWH	Ffowcs-Williams & Hawkings
ISTA	Institut für Strömungsmechanik & Technische Akustik
LaRC	Langley Research Center
LES	Large-Eddy-Simulation
MPI	Message Passing Interface
NLR	National Aerospace Laboratory
PIV	Particle-Image Velocimetry
PSD	Power-Spectral-Density
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
RCM	Rhie & Chow Interpolation in Modifizierter Form
RCS	Rhie & Chow Interpolation in Stationärer Form
RCX	Variante der Rhie & Chow Interpolation nach Xue [227]
RPM	Random-Particle-Mesh
SALSA	Strain-Adaptive Linear Spalart-Allmaras
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
SIP	Strongly Implicit Procedure
TKE	Turbulente Kinetische Energie
TVD	Total-Variation-Diminishing
UDS	Upwind-Differencing Scheme
URANS	Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes
VKI	Von Kármán Institute for Fluid Dynamics
ZiT	Zerfall isotroper Turbulenz

Über doppelt auftretende Tensorindizes ist nach der einsteinschen Summationskonvention zu summieren. Soll die Summationskonvention ausnahmsweise nicht gelten, ist dies durch die Unterstreichung eines der beiden Indices gekennzeichnet. In diesem Fall bezeichnet man \underline{i} als einen an i angebundenen Index [182].

1 Einleitung

Vor dem Hintergrund des seit den 50er Jahren stetig zunehmenden Luftverkehrs bei gleichzeitig wachsender Bevölkerungsdichte in der Nähe von Flughäfen kommt der Reduzierung von Fluglärm eine immer größere Bedeutung zu. Die gesellschaftliche Relevanz der Geräuschemission von Flugzeugen wird gegenwärtig an der Intensität der um An- und Abflugrouten des neuen Berliner Großflughafens (BER) geführten Debatte deutlich. Zwar ist es durch Verbesserungen im Bereich der Triebwerkstechnik und den vermehrten Einsatz moderner Turbofantriebwerke in der Vergangenheit gelungen, den zunächst in allen Flugphasen dominierenden Triebwerkslärm erheblich zu reduzieren. Weitere Triebwerksverbesserungen sind jedoch allein nur noch in der Startphase erfolgversprechend, da beim Landeanflug bereits die im Englischen als „airframe noise“ bezeichneten Umströmungsgeräusche in den Vordergrund getreten sind. Die Entstehung von „airframe noise“ resultiert im Wesentlichen aus der Wechselwirkung von Turbulenz mit den Oberflächen von bestimmten Komponenten der Flugzeugzelle. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der numerischen Simulation dieser Umströmungsgeräusche.

Beim Landeanflug ist die Strömung um Verkehrsflugzeuge durch große Reynoldszahlen und kleine Machzahlen geprägt, weswegen der Fokus der Untersuchungen auf diesem Kennzahlbereich liegt. Im Zentrum des Interesses steht hier die Berechnung des durch massive Strömungsablösung hervorgerufenen Geräusches, da das Eigengeräusch anliegender turbulenter Grenzschichten gegenüber diesem meist vernachlässigt werden kann [35, 39, 195]. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die abgelöste turbulente Strömung mit stromab gelegenen Körpern in Kontakt kommt, wodurch fluktuierende Kräfte auf deren Oberflächen entstehen und die in den Wirbeln enthaltene Energie zu einem Teil in ausbreitungsfähige akustische Energie umgewandelt wird. Solche Interaktionen zwischen freier Turbulenz und festen Oberflächen sind zum Beispiel an Fahrwerken und auf den Rückseiten ausgefahrener Vorflügel zu beobachten, womit bereits die zwei bei Verkehrsflugzeugen im Landeanflug dominierenden Quellen von Umströmungsgeräuschen genannt sind. Ob Trag- oder Fahrwerkskomponenten den größeren Anteil zur Schallabstrahlung beitragen, ist je nach Flugzeugtyp unterschiedlich und hängt zudem von der individuellen Strömungssituation ab. Grundsätzlich hat die stochastische Natur der Turbulenz aber in beiden Fällen eine breitbandige Schallemission zur Folge, welche zusätzlich, zum Beispiel in Folge periodischen Wirbelabwurfs, mit tonalen Anteilen überlagert sein kann.

Mit analytischen Methoden sind Vorhersagen derartiger Strömungsgeräusche lediglich für sehr stark vereinfachte Geometrien und Strömungsformen denkbar. Eine experimentelle Analyse der aeroakustischen Zusammenhänge ist zwar unter Einschränkungen möglich, wird aber in der Regel mit großem Aufwand und hohen Kosten verbunden sein. Da sich praxisrelevante Konfigurationen also einer analytischen Betrachtung entziehen und aeroakustische Experimente aufwändig und teuer sind, stellt die numerische Simulation ein potentiell sehr nützliches Werkzeug zur Vorhersage von Lärmemissionen dar. Zudem ermöglichen die im Ergebnis einer Simulation vorliegenden Daten vertiefte Einblicke in die Geräuschenstehungsmechanismen, wodurch die dominierenden Schallquellen analysiert, besser verstanden und effektivere Lärminderungsmaßnahmen entwickelt werden können. Allerdings stellt die Verschiedenheit der gekoppelt auftretenden aerodynamischen und akustischen Phänomene besondere Anforderungen an aeroakustische Simulationsverfahren, weswegen zuverlässige Vorhersagen der von komplexen Konfigurationen emittierten Strömungsgeräusche derzeit noch nicht möglich sind. Einige bei der numerischen Approximation aeroakustischer Problemstellungen zu berücksichtigende Besonderheiten werden im Folgenden kurz zusammengefasst:

1. Da bei der Geräuscherzeugung durch Turbulenz nur ein winziger Bruchteil der turbulenten kinetischen Energie in Schallenergie umgewandelt wird, sind akustische Störungen um mehrere Größenordnungen kleiner als die sie erzeugenden turbulenten Schwankungen (siehe hierzu Abschnitt 2.2.3). Um sowohl turbulente als auch akustische Störungen in einer numerischen Simulation erfassen zu können, sind hochgenaue Berechnungen erforderlich.
2. Turbulente Strukturen werden konvektiv mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit u fortbewegt. In einem ruhenden Medium breitet sich Schall dagegen mit der Geschwindigkeit c als Welle in alle Richtungen aus. Diese Umstände erfordern besondere Sorgfalt bei der Diskretisierung und bei der Formulierung von Randbedingungen für eine aeroakustische Simulation. In der Regel unterscheiden sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von konvektiv und akustisch transportierten Störungen erheblich. Die Machzahl $Ma = u/c$ charakterisiert diesen Unterschied.
3. Auch wenn die in der Strömung auftretenden Machzahlen nur gering sind und eine inkompressible Simulation aus aerodynamischer Sicht gerechtfertigt erscheint, erfordert die Erfassung akustischer Phänomene grundsätzlich die Berücksichtigung der Kompressibilität. Die Kopplung zwischen Dichte- und Geschwindigkeitsfeld ist in diesem Fall jedoch nur schwach ausgeprägt, weswegen speziell für kompressible Strömungen entwickelte Berechnungsverfahren ineffizient werden können [56].
4. Akustik lässt sich nur instationär erfassen. Die erforderliche zeitliche Auflösung resultiert aus der Genauigkeit des Zeitintegrationsansatzes und der Festlegung des zu erfassenden Frequenzbereiches. Ohne Relativbewegung zwischen Schallquelle und

Beobachter stimmt die von einem entfernten Beobachter akustisch wahrgenommene Frequenz mit der Frequenz der Schallquelle, f , überein.

5. Aus den unter 2. und 4. aufgeführten Eigenschaften ergibt sich, dass die von der räumlichen Diskretisierung abzubildenden Wellenlängen im Quellgebiet und in der Ausbreitungsregion unterschiedlich sein müssen. Für eine homogene Grundströmung mit der Geschwindigkeit u lässt sich eine konvektive Wellenlänge von $\lambda_t = D/St$ und eine akustische Wellenlänge von $\lambda_a = D(1 + Ma \cos \vartheta_e)/(St Ma)$ ableiten, wobei ϑ_e den zwischen der Strömungsrichtung und dem Normalenvektor auf einer Schallwellenfront eingeschlossenen „Emissionswinkel“ und D die zum Bilden der dimensionslosen Frequenz bzw. Strouhalzahl $St = f D/u$ benötigte charakteristische Abmessung bezeichnet.
6. Die Distanzen zwischen der Quellregion und den Beobachterpositionen können sehr groß sein, häufig ist man an der Schallimmission im akustischen Fernfeld interessiert. Die adäquate diskrete Auflösung des Transports der akustischen Schwankungen über weite Strecken würde bei Verwendung herkömmlicher Diskretisierungsverfahren einen unerschwinglich großen Bedarf an Computerressourcen verursachen [48].

Da es schwierig ist, den oben genannten Anforderungen mit einem universalen Berechnungsverfahren gerecht zu werden, sind im Bereich der numerischen Aeroakustik eine Vielzahl zum Teil hochspezialisierter Methoden entwickelt worden, welche sich entweder ausschließlich zur Simulation von Schallquellen, zur Simulation von Schallquellen und Schallausbreitung im Nahfeld oder nur zur Berechnung der Schallausbreitung eignen. Die unterschiedlichen Methoden werden dann zu einem zwei- oder dreistufigen Hybridverfahren kombiniert. Nachfolgender Abschnitt gibt einen Überblick über die bestehenden Möglichkeiten zur numerischen Simulation von Strömungsgeräuschen.

1.1 Stand der Forschung

Zur Simulation der Geräuschquellen sind potentiell alle turbulenzauflösenden Verfahren geeignet. Die direkte numerische Simulation (DNS) und die Grobstruktursimulation (LES) wurden bereits vielfach mit Erfolg bei der Berechnung von Strömungsgeräuschen eingesetzt [64, 117, 132, 196, 220]. Allerdings lassen die großen Reynoldszahlen praxisrelevanter Konfigurationen oft sowohl die DNS als auch die LES impraktikabel erscheinen, da beide Verfahren eine sehr feine Vernetzung erfordern und somit enormen Speicher- und Rechenzeitbedarf verursachen können (siehe Kapitel 2.3). Zur Wiedergabe typischer „airframe noise“ Schallquellen sind hybride RANS/LES-Methoden, welche das Konzept rein statistischer Turbulenzbehandlung auf Basis der Reynolds-gemittelten-Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) mit dem der LES vereinen, besser geeignet (siehe Abschnitt 2.3.4). Durch die

Kombination dieser zwei unterschiedlichen Ansätze kann die Wiedergabe der Geräuschquellen auf akustisch relevante Regionen eingeschränkt werden, was in der Regel erhebliche Einsparungen an Ressourcen gestattet [9]. Als Beispiele für die Anwendung derartiger Hybridverfahren zur Berechnung von Umströmungsgeräuschen seien die Arbeiten von Labourasse und Sagaut [116], Terracol [214] sowie von Spalart et al. [208] angeführt. Ein aktueller Überblick über hybride RANS/LES-Methoden und deren Einsatzmöglichkeiten auf dem Gebiet der Aeroakustik findet sich in [215].

Numerisch effizienter als die turbulenzauflösenden Verfahren sind stochastische Verfahren, welche eine synthetische Rekonstruktion der breitbandigen akustischen Quellen auf der Basis einer ensembledemittelten Strömungslösung ansetzen. Als Vertreter dieser Gattung sind die „Stochastic Noise Generation and Radiation“ (SNGR) [6, 11] und „Random Particle-Mesh“ (RPM) [49] Methoden zu nennen. Naturgemäß sind mit diesen Methoden berechnete Ergebnisse von der jeweiligen Güte der synthetischen Rekonstruktion abhängig, welche in der Regel basierend auf einer RANS Lösung erfolgt und somit den Einschränkungen der statistischen Turbulenzmodellierung unterliegt. Der Zugang zu statistisch instationären bzw. periodischen Strömungen mit gemischt tonal/breitbandigem Charakter und ausgeprägt kohärentem Wirbelabwurf ist in diesem Fall eingeschränkt (siehe Abschnitt 2.3.3). Theoretisch ist allerdings auch die synthetische Rekonstruktion der Feinstruktur in einer LES sowie eine Kombination stochastischer Modelle mit hybriden RANS/LES-Methoden denkbar. Von Ewert und Dierke [52] wird ein umfassender Überblick über die bestehenden Möglichkeiten zur stochastischen Modellierung von Schallquellen gegeben.

Zur Diskretisierung der aus dem gewählten Simulationsansatz resultierenden Transportgleichungen können sowohl finite Differenzen (FD) als auch finite Volumen (FV) oder finite Elemente (FE) verwendet werden. Letztere werden derzeit noch eher selten zur Simulation turbulenter Strömung eingesetzt, sie ermöglichen jedoch genau wie die FV-Diskretisierung den Einsatz unstrukturierter Gitter, was bei der Vernetzung komplexer Geometrien erhebliche Vorteile bietet [20]. Der konservative FV-Ansatz, welcher konstruktionsbedingt die lokale und globale Erhaltung der transportierten Strömungsgrößen garantiert, ist gegenwärtig viel weiter verbreitet. Die dem FV-Ansatz inhärenten Erhaltungseigenschaften können bei FD- und FE-Methoden zwar auch, aber nur unter Verwendung geeignet konstruierter diskreter Approximationen erreicht werden. Generell sind für DNS und LES zentrale räumliche Diskretisierungsschemata mit geringen Aliasing-Fehlern zu bevorzugen.

Für die Berechnung der diskreten Strömungslösung kommen sowohl dichte- als auch druckbasierte Algorithmen in Frage, wobei der Einsatz eines druckbasierten Verfahrens im Hinblick auf die schwache Kopplung zwischen Dichte- und Geschwindigkeitsfeldern bei kleinen Machzahlen vorteilhaft erscheint [56]. Wenn die Variation der Dichte im Strömungsfeld im aerodynamischen Sinn vernachlässigbar ist, kann die Simulation der Schallquellen sogar mit einem inkompressiblen Berechnungsverfahren durchgeführt werden.

Die Kompressibilität ist dann lediglich bei der nachgeschalteten Schallausbreitungsrechnung zu berücksichtigen, wodurch einige der auf Seite 2 angeführten numerischen Schwierigkeiten umgangen werden können. Ein solcher Ansatz wird mit der von Hardin und Pope [79] vorgeschlagenen „Expansion about Incompressible Flow“ (EIF) verfolgt. Die EIF zerlegt das Strömungsfeld in einen viskosen inkompressiblen und einen reibungsfreien kompressiblen Teil, welche sich überlappen und miteinander gekoppelt sind, aber getrennt voneinander approximiert werden. Eine Erfassung von aeroakustischen Feedbackmechanismen und Resonanzen ist mit einer inkompressiblen Quellsimulation allerdings nicht möglich. Kann die physikalische Relevanz solcher Mechanismen nicht a priori ausgeschlossen werden, oder erscheint die Annahme einer inkompressiblen Strömung aus anderen Gründen zu restriktiv, ist eine kompressible Simulation der Strömung im Quellgebiet erforderlich.

Nachdem die relevanten akustischen Quellen im Nahfeld berechnet worden sind, kann eine Berechnung der Schallausbreitung ins Fernfeld erfolgen, wobei grundsätzlich die Kompressibilität des Mediums zu berücksichtigen ist. Sofern bereits in der Quellregion eine kompressible Simulation durchgeführt wurde, ist nicht nur eine Kopplung innerhalb überlappender Bereiche wie bei der EIF, sondern auch eine Kopplung über die Berandung der Quellregion und/oder mit Hilfe künstlicher Austauschflächen möglich. Auf diese Weise lässt sich die Menge der zwischen Quell- und Ausbreitungsrechnung auszutauschenden Daten um eine Dimension reduzieren. Unabhängig von der gewählten Kopplungsmethode können die zur Berechnung der Schallausbreitung eingesetzten numerischen Verfahren in „analytical transport techniques“ bzw. Integralverfahren und „computational transport methods“ bzw. diskrete Ausbreitungsrechnungen unterteilt werden [98].

Diskrete Ausbreitungsrechnungen stützen sich auf die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen, welche allerdings im Unterschied zur Quellsimulation nicht den Transport primitiver Variablen, sondern den Transport von Störgrößen gegenüber einer (meist stationären) Hintergrundströmung beschreiben. So lässt sich die begrenzte Genauigkeit von Gleitkommaberechnungen besser ausnutzen. Indem der Transport der Stör- bzw. Schwingungsgrößen durch die Ausbreitungsregion diskret abgebildet wird, kann die Wirkung einer inhomogenen Hintergrundströmung auf die Schallausbreitung sowie die Reflektion von Schall an im Rechengebiet vorhandenen Körpern berücksichtigt werden. Zur Zerlegung der primitiven Variablen in Stör- und Hintergrundanteil bestehen vielfältige Möglichkeiten. Die individuellen Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Verfahren, welche sich nicht nur aus der Wahl der Störgröße, sondern auch aus den für die Schallausbreitung getroffenen Vereinfachungen ergeben, sollen hier nicht diskutiert werden, da im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Integralverfahren zur Berechnung der Schallausbreitung verwendet wird. Es sei jedoch erwähnt, dass man nichtlineare Berechnungsverfahren, und solche, die sich auf eine linearisierte Form der Störungstransportgleichungen stützen, unterscheidet. Im Allgemeinen wird der Transport akustischer Schwankungen sehr gut von den linearisierten Gleichungen, wie zum Beispiel den Linearized Euler Equations (LEE) [7],

den Acoustic Perturbation Equations [48, 53] (APE) oder den Perturbed Compressible Equations [193] (PCE), wiedergegeben. Nur wenn die der Linearisierung zugrunde liegende Annahme kleiner Störungen nicht gerechtfertigt ist, müssen in der Ausbreitungsregion nichtlineare Gleichungen, beispielsweise die Non-Linear Disturbance Equations (NLDE) [145] oder die PERTurbed Nonconservative Nonlinear Euler Equations [125] (PENNE) gelöst werden, was naturgemäß mit größerem Aufwand verbunden ist und den Einsatz mancher mathematischer Methoden bei der Lösung ausschließt. Meist kommen zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen in der Ausbreitungsregion strukturierte FD-Verfahren und für komplexe Geometrien auch Discontinuous-Galerkin (DG) Verfahren zur Anwendung. Die zur Diskretisierung eingesetzten numerischen Approximationen sind in der Regel von höherer als zweiter Ordnung und für die Wiedergabe akustischer Wellenausbreitung optimiert, wodurch die Simulation von im Verhältnis zur Wellenlänge großen Gebieten bei vertretbarem Aufwand ermöglicht wird. In Verbindung mit FD-Verfahren haben sich beispielsweise die kompakten Approximationen bzw. Padé Schemata nach Lele [119] sowie die von Tam und Webb entwickelten Dispersion-Relation-Preserving [211] (DRP) Schemata bewährt. Für eine detaillierte Diskussion der speziell für die Wiedergabe von Schallausbreitung entwickelten Numerik sowie der verschiedenen Störungsansätze sei an dieser Stelle auf die aktuelle Literatur verwiesen [51, 220].

Bei den Integralverfahren entfällt eine Diskretisierung der Ausbreitungsregion. Da lediglich diskrete Approximationen innerhalb der Quellregion bzw. auf den beteiligten Oberflächen und gegebenenfalls an der Position des akustischen Beobachters benötigt werden, sind diese Verfahren besonders effizient, insbesondere ist der numerische Aufwand vom Abstand zwischen Schallquelle und Beobachterposition unabhängig. Dieser Vorteil wird allerdings durch die Annahme eines ruhenden Mediums oder einer homogenen Strömung in der Ausbreitungsregion erkauft, weswegen die Brechung von Schall durch Inhomogenitäten nicht abgebildet werden kann. Sofern diese Einschränkung in Teilen der Ausbreitungsregion unzulässig ist, können die Integralverfahren mit den diskreten Ausbreitungsrechnungen und der Quellsimulation zu einem dreistufigen Hybridverfahren kombiniert werden. Bei kleinen Machzahlen ist der Effekt einer inhomogenen Grundströmung auf die Schallausbreitung jedoch meist gering und ein zweistufiges Hybridverfahren oft ausreichend. Zu den Integralverfahren zählen die Methoden von Lighthill [31], Kirchhoff [102, 163] und von Ffowcs-Williams und Hawkins [59] (FWH) sowie die Randlement- bzw. Boundary-Element-Methode (BEM) [131]. Letztere ist numerisch am aufwändigsten, sie bietet aber den Vorteil, dass die Wirkung beliebiger externer Berandungen auf die Schallausbreitung berücksichtigt werden kann. Eine detaillierte Diskussion der Kirchhoff und FWH Integralverfahren findet sich in [129], die BEM-Methode wird in [191] behandelt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Möglichkeiten zur numerischen Simulation von Strömungsgeräuschen ausgesprochen vielfältig sind. Die unterschiedlichen Herangehensweisen haben alle ihre individuellen Vor- und Nachteile, es gibt keinen grundsätzlich

„richtigen“ Weg, der allen möglichen Problemstellungen in optimaler Weise gerecht wird. Auch wenn gegenwärtig sowohl an analytischen als auch an numerischen Methoden zur Vorhersage von „airframe noise“ intensiv geforscht wird [51, 169] und kontinuierlich Fortschritte zu verzeichnen sind, ist derzeit nicht absehbar, dass sich an dieser Diversifikation etwas Grundlegendes ändern wird. Zumindest mittelfristig wird es daher noch dem mit der Beantwortung einer bestimmten Frage betrauten Ingenieur oder Wissenschaftler obliegen, ein für die jeweilige Problemstellung geeignetes Berechnungsverfahren auszuwählen bzw. zu entwickeln, bis sich im Lauf der Zeit Standardverfahren für gewisse Einsatzbereiche etabliert haben. Unabhängig von den in Quell- und Ausbreitungsregion getroffenen physikalischen Vereinfachungen geht der Trend der Forschung jedoch eindeutig zu auch in komplexen Geometrien einsetzbaren numerischen Methoden, bzw. mit Worten von Drazin und Riley ausgedrückt „[...] the development of computational fluid dynamics over the past half century has changed the emphasis of research from, as one might express it, finding exact solutions of approximate problems to finding approximate solutions of exact problems“ [167].

1.2 Zielsetzung

Die diskrete Erfassung aeroakustischer Zusammenhänge ist, wie eingangs dargelegt, mit einer Reihe von Schwierigkeiten verbunden. Das primäre Ziel dieser Arbeit besteht jedoch darin, durch Turbulenz hervorgerufene Geräusche numerisch zu simulieren. Um dies zu ermöglichen, soll ein konventionelles FV-Verfahren so weiterentwickelt werden, dass es zur Simulation der Schallentstehung durch Turbulenz sowie zur Berechnung der breitbandigen Strömungsgeräusche im Nahfeld der Schallquellen eingesetzt werden kann. Vorhersagen über die Geräuschimmission an entfernteren Beobachterpositionen sollten dann durch die Kopplung mit einem bestehenden, flächenbasierten Integralverfahren gelingen. Die Fokussierung auf das durch massive Strömungsablösung bei großer Reynoldszahl und kleiner Machzahl hervorgerufene Umströmungsgeräusch ist einerseits vor dem Hintergrund derzeit dominierender „airframe noise“ Quellen zu sehen, andererseits besteht aber auch ein Zusammenhang mit den Eigenschaften eines am Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik (ISTA) zur Verfügung stehenden FV-Verfahrens, welches aufgrund seiner ursprünglichen Konzeption und bereits erfolgter Erweiterungen prinzipiell für den Einsatz in diesem Kennzahlbereich prädestiniert erscheint.

Arbeitsgrundlage ist der am Fachgebiet „Numerische Methoden der Thermofluidodynamik“ entwickelte Strömungslöser **ELAN**, der ursprünglich für die Erfassung komplexer turbulenter Strömungen auf Basis höherwertiger statistischer Turbulenzmodelle konzipiert wurde [227] und sich aufgrund seiner druckbasierten Formulierung sehr gut für die Simulation schwach kompressibler Strömungen eignet [56]. In der Vergangenheit wurde das Programm um

Feinstrukturmodelle erweitert, und es wurden Möglichkeiten zur hybriden Turbulenzbehandlung hinzugefügt [22, 141, 187], so dass die turbulenzauflösende Simulation massiv abgelöster Strömungen bei großer Reynoldszahl realisierbar ist. Auch nichtreflektierende Randbedingungen, welche sowohl akustisch als auch konvektiv transportierten Störungen den Austritt aus dem Rechengebiet gestatten, wurden bereits in den Strömungslöser implementiert [46]. Die Durchführung hochgenauer instationärer Simulationen zur Wiedergabe der Entstehung von „airframe noise“ war mit dem zeitimpliziten, von zweiter Ordnung genauen FV-Verfahren jedoch ursprünglich nicht vorgesehen, weswegen der Strömungslöser im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf vorhandene Schwachstellen überprüft und den aeroakustischen Anforderungen im untersuchten Kennzahlbereich entsprechend weiterentwickelt werden soll.

Zu einer ersten Einschätzung dieser Anforderungen kann man durch Reflexion der in der Einleitung aufgezählten Besonderheiten aeroakustischer Problemstellungen gelangen. Da sich Schallwellen bei kleiner Machzahl im Verhältnis zur Strömung sehr schnell fortbewegen, sind die akustischen Wellenlängen um ein Vielfaches größer als die hydrodynamischen. Die räumliche Darstellung von Schallwellen erscheint somit verglichen mit der von den wesentlich kleineren turbulenten Strukturen unproblematisch, sofern sie auf das Nahfeld einer massiv abgelösten Strömung und den energetischen Teil des breitbandigen turbulenten Frequenzspektrums beschränkt bleibt. Die Erfassung der Schallausbreitung setzt zwar auch eine hinreichend feine zeitliche Auflösung voraus, aufgrund der uneingeschränkten Stabilität der in ELAN verwendeten impliziten Zeitintegration kann die Zeitschrittweite der Simulation aber frei an das räumliche Auflösungsvermögen in der Quellregion bzw. an den akustisch interessanten Frequenzbereich angepasst werden. Die energetischen Differenzen zwischen strömungsmechanischen und akustischen Schwankungen sind bei kleiner Machzahl allerdings ebenfalls sehr groß (siehe Abschnitt 2.2.3, Seite 18). Sowohl Konsistenz als auch Konvergenz des FV-Verfahrens müssen daher hohen Ansprüchen genügen, um eine Kontamination des physikalischen Schallfeldes durch numerische Approximationsfehler zu verhindern. Aufgrund der Effizienz akustischer Monopolquellen können zum Beispiel bereits kleine instationäre Störungen der Massenbilanz signifikante Schallemission verursachen und das Ergebnis einer „airframe noise“ Simulation verfälschen. Prinzipiell sollte die Mantissee der in ELAN verwendeten Gleitkommazahlen doppelter Genauigkeit jedoch genügend Spielraum zur Darstellung der wesentlichen aeroakustischen Phänomene bieten.

Bei der Weiterentwicklung des druckbasierten Strömungslösers ist demnach hauptsächlich eine in Raum und Zeit konsistente Diskretisierung mit guten Konvergenzeigenschaften anzustreben, wobei der Erfüllung der Massenbilanz besondere Bedeutung zugemessen wird. Zudem ist das bisher in zeitgenauen Simulationen mit ELAN gelegentlich zu beobachtende Auftreten unphysikalischer Oszillationen in Geschwindigkeits- und Druckschwankungsfeldern (siehe Abbildung 3-4 auf Seite 84, oben, und Abbildung 5-22 auf Seite 161) zu unterbinden, damit eine zuverlässige Vorhersage kleiner akustischer Störungen gelingen

kann. Es ist geplant, die korrekte programmtechnische Umsetzung von Modifikationen am numerischen Verfahren an geeigneten Testfällen zu verifizieren und die Funktion des weiterentwickelten Strömungslösers im Vergleich zur ursprünglichen Implementierung zu validieren. Grundsätzlich wird Wert darauf gelegt, dass die zentralen positiven Eigenschaften des bestehenden Strömungslösers, wie zum Beispiel eine für LES günstige, Aliasing-Fehler minimierende Konvektionsbehandlung sowie die generell einfache Übertragbarkeit aller bisher in ELAN implementierten Diskretisierungsformeln auf unstrukturierte Gitter [227], nach Möglichkeit erhalten bleiben.

Obwohl eine Diskretisierung von höherer Ordnung kleinere numerische Approximationsfehler verspricht wird eine Verbesserung der globalen Fehlerordnung des Strömungslösers ELAN hier nicht angestrebt. Dieser Schritt hätte weitreichende Konsequenzen für die Darstellung turbulenter Schallquellen bis hin zur Modellierung der Feinstruktur und erscheint außerdem im Hinblick auf eine zukünftige Erweiterung des numerischen Verfahrens für unstrukturierte Gitter ungünstig, da noch weiter entfernte Punkte in das lokale Gleichgewicht der räumlichen Diskretisierung miteinbezogen werden müssten. Zwar ist die Simulation der Ausbreitung von Schallwellen bis ins Fernfeld mit einem von zweiter Ordnung genauen Verfahren nicht bei vertretbarem Aufwand durchführbar [166]. In ELAN besteht aber über die Speicherung von instationären Oberflächendaten eine Möglichkeit zur Kopplung mit flächenbasierten Integralverfahren. Für die Berechnung der Schallausbreitung soll hier das Programm C3NOISE eingesetzt werden, welches auf der akustischen Analogie von Ffowcs-Williams und Hawkings basiert, ebenfalls am Fachgebiet „Numerische Methoden der Thermofluidynamik“ entwickelt wurde und sich bereits im Zusammenhang mit LEE Rechnungen bewährt hat [154, 190]. Änderungen an diesem Verfahren zur akustischen „Fernfeldextrapolation“ sind ebenfalls nicht vorgesehen.

Nach der Weiterentwicklung des druckbasierten Strömungslösers soll mit dem zweistufigen Hybridverfahren (ELAN+C3NOISE) das durch massive Strömungsablösung an generischen Trag- und Fahrwerkskomponenten verursachte Umströmungsgeräusch unter für den Landeanflug von Verkehrsflugzeugen typischen Bedingungen berechnet werden. Mit den aeroakustischen Simulationen einer geometrisch einfachen Doppelverstrebung und einer aus Vorflügel, Hauptelement und Klappe bestehenden Hochauftriebskonfiguration werden drei unterschiedliche Ziele verfolgt. An der Doppelverstrebung soll im direkten Vergleich mit experimentellen Daten zum einen die Eignung des zweistufigen Hybridverfahrens für aeroakustische Simulationen nachgewiesen und zum anderen die physikalische Relevanz akustischer Quadrupolquellen bei kleiner Machzahl bewertet werden. Bei der Simulation der Hochauftriebskonfiguration steht dagegen die detaillierte aeroakustische Analyse der instationären Strömungsvorgänge am Vorflügel im Vordergrund. Mit dieser Analyse wird das Ziel verfolgt, einen Beitrag zum Verständnis des dominierenden Schallentstehungsmechanismus an Vorflügeln zu liefern, da zur Entstehung von Vorflügelärm derzeit noch keine gesicherte Theorie besteht [35].

1.3 Gliederung

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 werden die physikalischen Grundlagen dargestellt, verschiedene Möglichkeiten zur numerischen Simulation turbulenter Strömungen diskutiert und die im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingesetzte hybride Turbulenzbehandlung vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einer kurzen Zusammenfassung des Systems der aus den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen und der mathematischen Modellbildung resultierenden und numerisch zu lösenden partiellen Differentialgleichungen. In Kapitel 3 wird zunächst die dem Strömungslöser **ELAN** zugrunde liegende Umsetzung der FV Diskretisierung anhand einer generischen Transportgleichung beschrieben. Im Anschluss an die Darstellung der diskreten Form dieser Transportgleichung erfolgt die Herleitung einer in Raum und Zeit konsistenten Formulierung des erweiterten SIMPLE-Druckkorrekturverfahrens für nichtversetzte Gitter, wobei der Schwerpunkt auf der zur Berechnung der Massenflüsse über Kontrollvolumengrenzflächen eingesetzten Impulsinterpolation liegt. Die Herleitung erfolgt ebenfalls in generischer Form, so dass die ursprüngliche Implementierung mit neu entwickelten konsistenten Formulierungen verglichen werden kann. Das Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Verifizierung und Validierung der am bestehenden Strömungslöser vorgenommenen Modifikationen. Die mit dem weiterentwickelten Hybridverfahren berechneten Ergebnisse der aeroakustischen Grobstruktursimulationen folgen in Kapitel 5. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung in Kapitel 6.

2 Physikalischer Hintergrund

Da in dieser Arbeit primär die Berechnung von Strömungsgeräuschen bei kleiner Machzahl und großer Reynoldszahl von Interesse ist, kann die Gültigkeit der Kontinuumsannahme vorausgesetzt werden. Maßgeblich für den Gültigkeitsbereich dieser Hypothese ist die Knudsenzahl Kn , welche die mittlere freie Weglänge von Molekülen mit einer charakteristischen Länge der Strömung ins Verhältnis setzt. In Gasen gilt $Kn = \mathcal{O}(Ma/Re)$ [181], und die Hypothese ist erfüllt für $Kn \leq 10^{-2}$ [153]. Im Folgenden werden daher ausschließlich kontinuierliche Medien betrachtet.

2.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Grundlage des eingesetzten Berechnungsverfahrens sind die kontinuumsmechanischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, deren Herleitung in der Fachliteratur ausführlich behandelt ist [2, 5, 15, 93, 153]. In kartesischen Koordinaten lassen sich diese Gleichungen in differentieller, konservativer Form wie folgt darstellen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + f_i, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\varrho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho U u_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(p u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + f_i u_i + q_U. \quad (2.3)$$

Mit $U = e + u_i u_i/2$ wird die Summe aus spezifischer innerer Energie e und kinetischer Energie des mit der Geschwindigkeit u_i strömenden Mediums bezeichnet. Für die volumenspezifischen Quellen von Impuls f_i und Energie q_U gilt im Rahmen dieser Arbeit $f_i = 0$ und $q_U = 0$. Wir wollen uns weiterhin auf die Betrachtung von Luft als ein ideales und kalorisch perfektes Gas beschränken, dessen intensive Zustandsgrößen Druck p , Dichte ϱ und Temperatur T durch die thermische Zustandsgleichung idealer Gase verknüpft sind,

$$p = \varrho RT, \quad (2.4)$$

und dessen spezifische innere Energie linear von der Temperatur abhängig ist,

$$de = C_V dT. \quad (2.5)$$

Für Luft ist die medienspezifische Gaskonstante $R = C_p - C_V = 287.6 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, und die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck C_p und konstantem Volumen C_V sind über ihr Verhältnis $\kappa = C_p/C_V = 1.4$ festgelegt.

Der nach dem cauchyschen Axiom symmetrische Reibungsspannungstensor τ_{ij} nimmt mit den üblichen Annahmen eines isotropen newtonschen Fluides und der stokesschen Hypothese [183] folgende Gestalt an:

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] = \tau_{ji}, \quad (2.6)$$

und der Vektor der Wärmestromdichten q_i wird nach dem Wärmeleitgesetz von Fourier ausgedrückt:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (2.7)$$

In (2.6) und (2.7) kann der Einfluss der Temperatur auf dynamische Zähigkeit $\mu = \mu(T)$ und Wärmeleitfähigkeit $\lambda = \lambda(T)$ nach der Formel von Sutherland berücksichtigt werden:

$$\mu(T) = \mu_{\text{ref}} \frac{T_{\text{ref}} + T_S}{T + T_S} \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2}. \quad (2.8)$$

Für Luft findet man z. B. in [17] die Referenzwerte $T_S = 122 \text{ K}$, $T_{\text{ref}} = 273 \text{ K}$ und $\mu_{\text{ref}} = 1.71 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$. Mit der Prandtlzahl $Pr = \mu C_p/\lambda$ als dimensionslose Kennzahl für das Verhältnis von molekularem Impuls- zu Energietransport lässt sich auch

$$\lambda(T) = \frac{\mu(T) C_p}{Pr} \quad (2.9)$$

temperaturabhängig bestimmen. Bei Standardbedingungen bis hin zu Temperaturen von $T = 600 \text{ K}$ gilt in Luft der konstante Wert $Pr = 0.71$ [3], d. h. Strömungs- und Temperaturschichten bilden sich unterschiedlich aus.

Die Einführung der statischen Enthalpie als massenspezifische Summe aus innerer Energie und Verdrängungsarbeit $h = e + p/\rho$ liefert eine weitere Zustandsgröße, die in idealen Gasen eine reine Temperaturfunktion ist. Mit der kalorischen Zustandsgleichung

$$dh = C_p dT, \quad (2.10)$$

der thermischen Zustandsgleichung idealer Gase (2.4) und dem Gesetz von Fourier (2.7) erhält man unter Ausnutzung von Massen- und Impulserhaltung eine Formulierung der

Energiegleichung (2.3) für die Temperatur:

$$\frac{\partial(\varrho C_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho C_p T u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi + q_U. \quad (2.11)$$

Mit $\Phi = \tau_{ji} (\partial u_i / \partial x_j)$ wird hier die mechanische Dissipationsleistung bezeichnet. Die Symmetrie des Reibungsspannungstensors (2.6) erlaubt ihre Redefinition wie folgt:

$$\Phi = \tau_{ji} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Omega_{ij}} \right] = \tau_{ji} S_{ij}, \quad (2.12)$$

wobei im ersten Schritt eine Zerlegung des Geschwindigkeitsgradiententensors $\partial u_i / \partial x_j$ in einen symmetrischen Anteil S_{ij} und einen antimetrischen Anteil Ω_{ij} durchgeführt und im zweiten Schritt ausgenutzt wurde, dass das doppelte Skalarprodukt eines symmetrischen und eines antimetrischen Tensors verschwindet [183]. Die mechanische Dissipationsleistung enthält mit $\tau_{ji} S_{ij} = \mu \left(2S_{ij}S_{ji} - \frac{2}{3}S_{ii}S_{jj} \right)$ nur quadratische Terme, daher gilt im gesamten Strömungsfeld $\Phi \geq 0$.

2.2 Strömungsakustische Gleichungen

Bei Verwendung geeigneter Rand- und Anfangsbedingungen ist das Gleichungssystem (2.1)-(2.9) prinzipiell dazu geeignet, alle physikalischen Effekte zu beschreiben, die zur Vorhersage von Strömungsgeräuschen von Interesse sind. Allerdings bietet sich aufgrund der Verschiedenartigkeit aerodynamischer und akustischer Phänomene oft eine zumindest zweistufige Vorgehensweise an, bei der zunächst eine Strömungssimulation zur Wiedergabe von Grundströmung und akustischen Quellen durchgeführt wird, und anschließend zumindest eine Ausbreitungsrechnung zur Ermittlung des ins Fernfeld abgestrahlten Schalls erfolgt. So können unterschiedliche, der jeweiligen Situation angepasste Berechnungsverfahren eingesetzt werden, wodurch erhebliche Einsparungen an benötigter Rechenleistung möglich sind. Nachfolgend soll die zu dieser Vorgehensweise erforderliche Abgrenzung zwischen Schallentstehungs- und Schallausbreitungsphänomenen anhand der akustischen Analogie von Lighthill verdeutlicht werden, wobei hier nur ein kurzer Überblick, basierend auf der vollständigen Herleitung und Diskussion in [45], gegeben wird.

2.2.1 Lighthill-Gleichung

Im Jahre 1952 hat Lighthill durch Umformen der nichtlinearen Erhaltungsgleichungen für Masse (2.1) und Impuls (2.2) eine inhomogene Wellengleichung abgeleitet [123]. Diese zum

Verständnis der Schallerzeugung durch Strömungen grundlegende Gleichung ist heute als Lighthill-Gleichung bekannt und lautet

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.13)$$

Darin stellt $c_\infty = \sqrt{(\partial p / \partial \varrho)_{s=\text{konst.}}} = \sqrt{\kappa R T_\infty}$ die (isentropische) Schallgeschwindigkeit der ruhenden Umgebung dar, und die Nichtlinearität ist im lighthillschen Spannungstensor

$$T_{ij} = \varrho u_i u_j - \tau_{ji} + \delta_{ij} (p' - c_\infty^2 \varrho') \quad (2.14)$$

versteckt. Für akustische Betrachtungen sind die Größen $p' = p - p_\infty$ und $\varrho' = \varrho - \varrho_\infty$ als Abweichungen gegenüber Umgebungsbedingungen p_∞ und ϱ_∞ anzusehen, und jegliche Fluidbewegung ist als Störung des Ruhezustands $u_i = 0$ aufzufassen. Bei homogener Grundströmung führt man deshalb eine Galilei-Transformation durch, um im Mittel diesen ungestörten Zustand herzustellen. Lässt man außerdem nur noch kleine akustische Schwankungen zu (d. h. $|p'| \ll p_\infty$ und $|\varrho'| \ll \varrho_\infty$), so werden die lighthillschen Spannungen T_{ij} und deren zweite räumliche Ableitungen in (2.13) vernachlässigbar klein [45]. Damit verschwindet die Inhomogenität, und die Lighthill-Gleichung geht näherungsweise in die homogene Wellengleichung der linearen Akustik

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2.15)$$

über, welche die Ausbreitung von Schallwellen in einem ruhenden Medium beschreibt [45]. Die rechte Seite von (2.13) kann somit als akustischer Quellterm interpretiert werden. Da aber die Lighthill-Gleichung ohne Näherung oder Linearisierung direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen folgt, beschreibt T_{ij} im Allgemeinen nicht nur Schallquellen, sondern auch andere physikalische Effekte, wie zum Beispiel die Inhomogenität der mittleren Strömung, Konvektion und Brechung von Schall sowie viskose Dämpfung. Zur Vorhersage von Strömungsgeräuschen kann der Bereich, in dem diese Effekte von Bedeutung sind, oft eingeschränkt und T_{ij} entsprechend vereinfacht werden. Bei kleiner Machzahl und großer Reynoldszahl ist für den Quellterm in (2.13) unter Umständen die isentrope Näherung

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \xrightarrow[\text{Re} \gg 1]{\text{Ma} \ll 1} \varrho_\infty \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \quad (2.16)$$

zulässig [87]. Diese Vereinfachung setzt voraus, dass die Ausdehnung der Quellregion ℓ_Q klein gegenüber der abgestrahlten akustischen Wellenlänge λ ist, d. h. $\ell_Q \ll \lambda$ (kompakte Quelle) und dass man sich nur für das Schallfeld an relativ weit von der Quellregion entfernten Beobachterpositionen interessiert, d. h. $r \gg \ell_Q$ (geometrisches Fernfeld) [45]. Zeitliche Schwankungen der Größe $\operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$ lösen demnach Schallwellen aus. Da die Wirbelstärke

$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ nur in wirbelbehafteter Strömung von null verschieden ist, spricht man auch von Wirbelschall. Gegebenenfalls lässt sich mit der Näherung (2.16) die Ausdehnung des akustisch wirksamen Quellgebietes also erheblich eingrenzen.

Auf Basis der Greenschen Funktion für die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum ohne Berandung lässt sich eine exakte Lösung von (2.13) ableiten [48, 192]. Formal ergibt sich die lokale Dichteschwankung aus einer Integration über einen unbeschränkten Bereich,

$$\varrho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{ij}(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty})}{r} d^3\mathbf{y}, \quad (2.17)$$

wobei $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|$ den Abstand zwischen Beobachterposition \mathbf{x} und Quellposition $\mathbf{y}(\tau)$ zum Zeitpunkt der Emission, τ , bezeichnet. Zwischen dieser sogenannten retardierten Zeit und der Beobachtungszeit t besteht der Zusammenhang $t - \tau = r/c_\infty$, welcher die Laufzeit des Signals über die Distanz r mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_∞ beschreibt.

Zur praktischen Anwendung der exakten Lösung der Lighthill-Gleichung, (2.17), ist es sinnvoll und notwendig, die räumliche Integration auf den Bereich zu beschränken, in dem Reibung, Inhomogenität der mittleren Strömung oder nichtlineare Effekte eine Rolle spielen. Außerhalb des relevanten Bereiches $V_q(t)$ wird $T_{ij} = 0$ gesetzt, weshalb dort nur noch kleine, akustische Störungen transportiert werden können. Wenn T_{ij} in der Quellregion beispielsweise aus einer Strömungssimulation bekannt ist, lässt sich im Fernfeld dann mit Hilfe der linearisierten Druck-Dichte-Beziehung

$$p' = c_\infty^2 \varrho' \quad (2.18)$$

die akustische Druckschwankung durch das bestimmte Integral

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{V_q(t)} \frac{T_{ij}(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty})}{r} d^3\mathbf{y} \quad (2.19)$$

ermitteln. Allerdings ist (2.19) nur gültig, wenn keine Körper im Fluid vorhanden sind, eine Voraussetzung, die im Hinblick auf technische Anwendungen sicherlich nur in Ausnahmefällen gegeben ist. Eine Erweiterung der Theorie von Lighthill zur Berücksichtigung von Körpern wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

2.2.2 Gleichung von Ffowcs-Williams und Hawkings

Die Lighthill-Gleichung (2.13) stellt eine exakte Umformung der Gleichungen (2.1) und (2.2) dar. Sie ist daher im Gegensatz zu ihrer speziellen Lösung (2.19) im gesamten von

Fluid erfüllten Raum gültig, unabhängig davon, ob sich Körper darin befinden oder nicht. Bei der Lösung von (2.13) wären allerdings auf Körperoberflächen gültige Randbedingungen einzuhalten. Mathematisch kann jedoch auch zwischen Fluid und Körper unterschieden werden, indem man die Heaviside-Funktion H innerhalb von Körpern zu 0 und außerhalb zu 1 setzt. Man erreicht dies durch Verwendung einer geeignet definierten Hilfsfunktion $f(\mathbf{x}, t)$ als Argument der Heaviside-Funktion, d. h. $H = H(f(\mathbf{x}, t))$ [45]. Möchte man eine Bewegung der Körper mit der Geschwindigkeit v_i zulassen, muss H von Ort und Zeit abhängig sein und dabei der Körperbewegung folgen, d. h.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \quad (2.20)$$

Multiplikation von (2.13) mit der Heaviside-Funktion H führt in Verbindung mit (2.20) und Anwendung der Kettenregel auf eine neue Gleichung für das Schallfeld, welche sowohl außerhalb als auch innerhalb der Körper gültig ist. Dabei ist es nicht notwendig, dass die durch $H = 0$ gekennzeichneten Regionen tatsächlich von Festkörpern ausgefüllt sind, auch können Regionen im Fluid bei der Lösung quasi übersprungen werden. In beiden Fällen ist die Wirkung der jeweils ausgeblendeten Region implizit über Quellterme auf deren Oberfläche zu berücksichtigen. Diese Vorgehensweise basiert auf Überlegungen von Ffowcs-Williams und Hawkins [58, 59], allerdings wird die resultierende Gleichung aufgrund der gegenüber (2.13) zusätzlichen Oberflächenquellterme meist als erweiterte Lighthill-Gleichung bezeichnet. Mit den auf di Francescantonio [61] zurückgehenden Definitionen

$$V_i = \frac{\varrho}{\varrho_\infty} (u_i - v_i) + v_i \quad \text{und} \quad L_{ij} = \varrho u_i (u_j - v_j) + \delta_{ij} p' - \tau_{ji} \quad (2.21)$$

lautet die erweiterte Lighthill-Gleichung

$$\frac{\partial^2 (\varrho' H)}{\partial t^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 (\varrho' H)}{\partial x_i^2} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varrho_\infty V_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \right\}}_{\text{Monopol}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ L_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\}}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\frac{\partial^2 (T_{ij} H)}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Quadrupol}}. \quad (2.22)$$

Für den Fall, dass im ganzen Raum $H = 1$ gilt, geht (2.22) wieder in (2.13) über. Im Allgemeinen sind jedoch neben dem als Quadrupol bezeichneten Quellterm auch Dipol- und Monopolquellen auf der Oberfläche S des mit $H = 0$ ausgeblendeten Bereiches zu berücksichtigen.

Setzt man voraus, dass die in (2.22) durch $\frac{\partial H}{\partial x_i} \neq 0$ gekennzeichnete Oberfläche S starr ist, kann die Lösung dieser inhomogenen Wellengleichung für den Ausdruck $\varrho' H$ wesentlich vereinfacht werden, indem die Integration in einem fest mit der Oberfläche verbundenen, mitbewegten Bezugssystem (mit \hat{y} -Koordinaten) ausgeführt wird. Dadurch entfällt die Zeitabhängigkeit der Heaviside-Funktion, und die spezielle Lösung der erweiterten Lighthill-

Gleichung (2.22) lässt sich wie folgt darstellen [45]:

$$\begin{aligned}
 4\pi c_\infty^2 \{ \varrho' H \} (\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \left[\frac{\varrho_\infty V_i n_i}{r |1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\hat{\mathbf{y}}) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \oint_S \left[\frac{L_{ij} n_j}{r |1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\hat{\mathbf{y}}) \\
 &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{V_q} \left[\frac{T_{ij} H}{r |1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3 \hat{\mathbf{y}}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dies ist die Gleichung von Ffowcs-Williams und Hawkins (FWH) [59]. Um eine Bewegung des $\hat{\mathbf{y}}$ -Systems zu beschreiben, wird der Abstand zwischen Beobachter und Quelle hier durch $r = |\mathbf{r}|$ mit $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_S(\hat{\mathbf{y}}, \tau)$ ausgedrückt, wobei im Falle gleichförmiger Translation von S mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} nur eine Zeitabhängigkeit des lokalen Verschiebungsvektors \mathbf{x}_S gemäß $\mathbf{x}_S(\tau) = \mathbf{v} \tau$ verbleibt. Mit $M_r = \mathbf{v}/c_\infty \cdot \mathbf{r}/r$ wird die sogenannte Beobachtungsmachzahl bezeichnet, sie entspricht der Projektion des Machzahlvektors einer sich bewegendem Quelle in Richtung der Beobachterposition. Aus dem in allen drei Quelltermen auftretenden Dopplerfaktor $|1 - M_r|$ ergibt sich also im Fall einer Bewegung der Quelle in bzw. entgegen der Richtung des Beobachters eine Verstärkung bzw. Abschwächung des empfangenen Signals.

Zur Berechnung der Dichteschwankung an einem Ort \mathbf{x} zum Zeitpunkt t sind die drei Quellterme in (2.23), welche oberflächlich verteilte Monopol- und Dipol- sowie räumlich verteilte Quadrupolquellen repräsentieren (vgl. (2.22)), in dem mit der starren Oberfläche S mitbewegten Bezugssystem (mit $\hat{\mathbf{y}}$ -Koordinaten) zu integrieren. Wie durch die eckigen Klammern $[\dots]_{\tau=\tau^*}$ angedeutet sein soll, können die Integranden dabei theoretisch zu mehreren retardierten Zeiten τ^* auszuwerten sein. Im Unterschall (d. h. $|M_r| < 1$) gibt es aber für jede Quellposition $\hat{\mathbf{y}}$ maximal einen möglichen Quellzeitpunkt τ^* , welcher der Beziehung

$$\tau = t - \frac{r(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}, \tau)}{c_\infty} \tag{2.24}$$

zwischen retardierter Zeit τ und Beobachtungszeit t am Beobachtungsort \mathbf{x} genügt.

In der Praxis werden in der FWH-Gleichung (2.23) meist nur die Oberflächenintegrale ausgewertet, oder es wird zumindest die Ausdehnung der Volumenintegration auf einen Bereich mit signifikanten Störungen der Grundströmung reduziert. Um diese Einschränkungen zu ermöglichen, sind alle Geschwindigkeiten als Störungen des Ruhezustands aufzufassen und in dem Inertialsystem mit y -Koordinaten zu messen. Wie in Abbildung 2-1 schematisch dargestellt, ist dann in größerer Entfernung zur Quellregion die Annahme $T_{ij} \approx 0$ gerechtfertigt, so dass bei geeigneter Wahl der Integrationsoberfläche S , innerhalb der $H = 0$

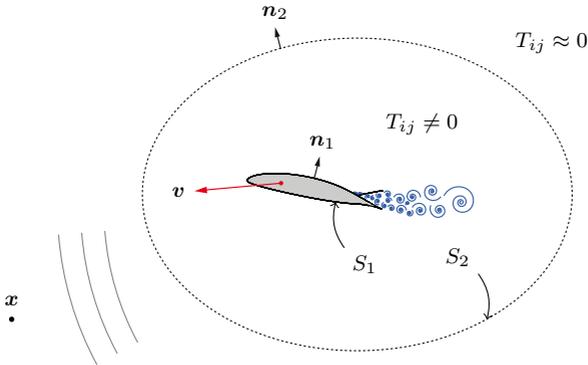


Abbildung 2-1: Zwei Möglichkeiten zur Definition der für die Integration der FWH-Gleichung (2.23) in Anwesenheit eines Körpers erforderlichen Oberfläche (S_1 : impermeabel, S_2 : permeabel) am Beispiel einer Profilumströmung mit Ablösung.

ist, ganz auf eine Integration über das Volumen mit $T_{ij} \approx 0$ verzichtet werden kann. Ist die Position des Beobachters bezüglich des ruhenden Mediums fixiert (d. h. $\mathbf{x} = \text{konst.}$), resultiert aus der relativen Bewegung der Schallquellen zusätzlich zum Dopplerfaktor auch eine Doppler-Verschiebung im Frequenzbereich [45].

Befinden sich keine Körper außerhalb des durch V_q bzw. S definierten Quellgebietes, kann man durch Integration der Gleichung (2.23) bei bekannter Quellverteilung die Dichteschwankung an beliebig weit von der Quelle entfernten Beobachterpositionen berechnen, da eine Diskretisierung der Ausbreitungsregion entfällt. Wenn sich die wesentlichen Schallquellen alle innerhalb bzw. auf der Integrationsoberfläche S befinden und zudem die Inhomogenität der Grundströmung außerhalb von S für die Schallausbreitung vernachlässigbar ist, was bei kleiner Machzahl sogar bei Verwendung impermeabler Flächen der Fall sein kann, muss keine Volumenintegration durchgeführt werden und die numerische Integration wird besonders effizient. Ein solches flächenbasiertes Integralverfahren kommt auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit zur Anwendung (siehe Abschnitt 3.4, S. 101). Die bei kleiner Machzahl und großer Reynoldszahl zu erwartende Relevanz oberflächlicher und räumlicher Schallquellmechanismen wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

2.2.3 Klassifizierung der Schallquellen

Die akustische Wirksamkeit von Monopol-, Dipol- und Quadrupolquellen in der erweiterten Lighthill-Gleichung (2.22) ist prinzipiell von der Machzahl der betrachteten Strömung abhängig. Analog zur Lösung (2.19) der Lighthill-Gleichung (2.13) lässt sich im freien Raum ohne Berandungen auch eine analytische Lösung für deren erweiterte Form (2.22)

angeben, welche es unter Beschränkung auf weit von der Quelle entfernte Beobachter erlaubt, die aus der jeweiligen akustischen Effizienz eines Quelltyps resultierende Abhängigkeit des Schalldrucks im Fernfeld von der Machzahl im Quellgebiet zu bestimmen [31]. Zur Ermittlung der entsprechenden Monopol- und Dipolskalierungen wählt man dabei eine mit der umströmten Körperkontur zusammenfallende, impermeable Integrationsoberfläche S , deren Vibrationen, sofern vorhanden, allein strömungsinduziert sind.

Wenn die Abmessung der betrachteten Quellregion klein gegenüber der abgestrahlten akustischen Wellenlänge ist (kompakte Quelle), lässt sich auf dieser Basis die Größenordnung der im Fernfeld (d. h. für $r \rightarrow \infty$) von Monopol-, Dipol- oder gemäß (2.16) vereinfachter Quadrupolquelle hervorgerufenen akustischen Druckschwankung durch

$$p' \sim \frac{\ell}{r} \varrho_\infty u^2 Ma^k \quad \text{mit} \quad k = \begin{cases} 0: \text{Monopol} \\ 1: \text{Dipol} \\ 2: \text{Quadrupol} \end{cases} \quad (2.25)$$

abschätzen, wobei die Richtungsabhängigkeit der Schallabstrahlung in Form von Dopplereffektoren und individueller Abstrahlcharakteristik der verschiedenen Quelltypen (vgl. [45]) hier unberücksichtigt bleibt [31, 87]. In Gleichung (2.25) stehen ℓ und u für die charakteristische Größe und Geschwindigkeit von Wirbeln in der Quellregion, deren charakteristische Frequenz sich proportional zu u/ℓ verhält. Die Machzahl ist als $Ma = u/\sqrt{\varkappa RT_\infty}$ definiert, womit sich, bezogen auf den Umgebungsdruck p_∞ , die Skalierungen $p'_m/p_\infty = \mathcal{O}(Ma^2)$, $p'_d/p_\infty = \mathcal{O}(Ma^3)$ und $p'_q/p_\infty = \mathcal{O}(Ma^4)$ für den von Monopol-, Dipol- und Quadrupolquelle erzeugten Schalldruck im Fernfeld ergeben [204].

Die von den drei verschiedenen Quelltypen in (2.25) abgestrahlte akustische Leistung Π lässt sich nun durch Integration der akustischen Intensität

$$\mathbf{I}_a = p' \mathbf{u}' , \quad (2.26)$$

welche in dieser Form den akustischen Energiefluss pro Fläche im ruhenden Medium beschreibt, über eine um die Quellregion zentrierte Kugeloberfläche S mit Radius $r \rightarrow \infty$ gemäß

$$\Pi = \oint_S \mathbf{I}_a \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS = \oint_S \frac{p'^2}{\varrho_\infty c_\infty} dS \quad (2.27)$$

ebenfalls berechnen [45, 87]. Sofern man die Schallemission unterschiedlicher Quelltypen isoliert voneinander betrachtet, und die Anzahl unabhängig abstrahlender Wirbelschallquellen mit V_q/ℓ^3 sowie die Anzahl unabhängig abstrahlender Dipol- bzw. Monopolquellen mit A_d/ℓ^2 bzw. A_m/ℓ^2 beschreibt, ergeben sich durch Verwendung des entsprechenden Exponenten in (2.25) und Einsetzen von p'_m, p'_d bzw. p'_q in Gleichung (2.27) die Beziehungen

$$\Pi_m \sim A_m \varrho_\infty c_\infty^3 Ma^4, \quad (2.28)$$

$$\Pi_d \sim A_d \varrho_\infty c_\infty^3 Ma^6 \quad (2.29)$$

$$\text{und} \quad \Pi_q \sim \frac{V_q}{\ell} \varrho_\infty c_\infty^3 Ma^8, \quad (2.30)$$

für die von Monopolen, Dipolen und Quadrupolen ins Fernfeld abgestrahlte Schalleistung, wobei V_q das Quellvolumen und A_d bzw. A_m die instationär überströmte Wandfläche bezeichnet.

Die bei kleiner Machzahl verhältnismäßig geringe akustische Effizienz von Quadrupolquellen wird besonders deutlich, wenn man deren Leistung Π_q mit der zum Aufrechterhalten der turbulenten Bewegungen im Quellgebiet erforderlichen Leistung Π_t vergleicht. Letztere kann auf Basis experimenteller Beobachtungen und einer Dimensionsbetrachtung durch

$$\Pi_t \sim \frac{V_q}{\ell} \varrho_\infty u^3 \quad (2.31)$$

angenähert werden [87], woraus sich die relativen Proportionalitäten

$$\frac{\Pi_q}{\Pi_t} \sim Ma^5 \quad , \quad \frac{\Pi_d}{\Pi_t} \sim \frac{A_d \ell}{V_q} Ma^3 \quad \text{und} \quad \frac{\Pi_m}{\Pi_t} \sim \frac{A_m \ell}{V_q} Ma \quad (2.32)$$

ergeben. Das Verhältnis von abgestrahlter Schalleistung zur von externen Kräften am Fluid erbrachten Leistung ist also je nach Quelltyp proportional zur fünften/dritten/ersten Potenz der Machzahl im Quellgebiet, weswegen die Schallabstrahlung von Quadrupolquellen bei kleiner Machzahl meist gegenüber der von Dipol- oder Monopolquellen vernachlässigt werden kann. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit keine flexiblen Wände oder beschleunigt bewegte Körper betrachtet werden, sind hier demnach hauptsächlich Dipolquellen relevant (vgl. (2.21) und (2.22)).

Die Machzahl, ab der auch die Schalleistung von Quadrupolquellen berücksichtigt werden muss, hängt neben der geforderten Genauigkeit des Ergebnisses in erster Linie vom charakteristischen Längenmaß der Wirbel sowie von dem Verhältnis instationär überströmter Wandfläche zum Volumen des Quellgebietes ab. Allerdings lässt sich die exakte Grenze auch bei Kenntnis dieser Parameter nicht ohne Weiteres festlegen. Spalart [204] weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass strömungserregte Dipolquellen und Quadrupolquellen in Wandnähe mit hoher Wahrscheinlichkeit korreliert sein werden, weswegen bei Überlagerung der von diesen zwei Quelltypen ausgelösten Druckschwankungen gemäß $p'(t) = p'_d(t) + p'_q(t)$ sowie

$$p'^2 = (p'_d + p'_q)^2 = p_d'^2 + 2 p'_d p'_q + p_q'^2 \quad (2.33)$$

in (2.27) auch bei Betrachtung der zeitlich gemittelten Schalleistung \bar{II} mit $2 \overline{p'_d p'_q} \neq 0$ ein gemischter Term verbleibt, welcher sich nach (2.25) proportional zu Ma^7 verhält. Je nach Ausprägung dieser Korrelation folgt daraus praktisch eine Verringerung der Machzahl, unterhalb der man die Wirkung von Wirbelschallquellen (deren mittlere akustische Leistung nur in Abwesenheit anderer Quelltypen gemäß (2.30) mit Ma^8 skaliert) gegenüber der von Dipolquellen vernachlässigen kann.

Zudem ist in einer turbulenten Strömung von einem kontinuierlichen und breitbandigen Energiespektrum der Schwankungsbewegungen auszugehen, so dass das charakteristische Längenmaß von Wirbeln in der Quellregion, ℓ , bei großer Reynoldszahl über mehrere Größenordnungen variieren wird. In Anbetracht der zum Teil von ℓ abhängigen Skalierungen der jeweiligen Quelleffizienz (2.32) wäre also eine zu hohen Frequenzen hin zunehmende Bedeutung von Quadrupolquellen denkbar, sofern man von einem festen Verhältnis von Quelloberfläche zu Quellvolumen ausgeht. Vor diesem Hintergrund erscheint bei den in Kapitel 5 betrachteten technischen Anwendungsfällen zumindest eine Überprüfung des Beitrags von Quadrupolquellen trotz kleiner Machzahl angebracht. Dies geschieht in Abschnitt 5.1 im Vergleich zu experimentellen Daten. Die grundlegenden Eigenschaften turbulenter Strömungen und bestehende Möglichkeiten zu deren Simulation werden im nächsten Abschnitt behandelt.

2.3 Turbulente Strömungen

Strömungen werden turbulent, sobald ein kritisches Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften, beschrieben durch die dimensionslose Reynoldszahl $Re = uL/\nu$, erreicht und überschritten wird [225]. Bereits im 19. Jahrhundert konnte dies durch Sichtbarmachung von Strömungen in Glasrohren experimentell nachgewiesen werden. In den zu dieser Zeit von Hagen und Reynolds durchgeführten Experimenten stellte sich heraus, dass eine zunächst stationär und geordnet in axialer Richtung fließende Strömung nach Überschreiten eines kritischen Massenstroms im Rohr plötzlich von instationären und chaotischen Schwankungsbewegungen überlagert wird, was sich je nach Versuchsaufbau entweder durch „wirbelnde“ Querbewegungen beigemengter Sägespäne [77] oder durch die schnelle Durchmischung unterschiedlich eingefärbter Streichlinien [164] zeigte. Derart ungeordnete, dreidimensionale und rotationsbehaftete Fluktuationen sind charakteristisch für das Phänomen der Turbulenz, welches in nahezu allen technisch relevanten Strömungen auftritt. Die turbulenten Austauschbewegungen können sich dabei sowohl positiv als auch negativ bemerkbar machen, indem sie den zeitgemittelten Transport von Masse, Impuls und Energie gegenüber einer geordneten, laminaren Strömung intensivieren. Außerdem rufen sie in ihrer Funktion als akustische Quellen (vgl. Abschnitt 2.2) grundsätzlich breitbandige Schallabstrahlung hervor. Ein breites und kontinuierliches Spektrum, wie in Abbildung 2-2

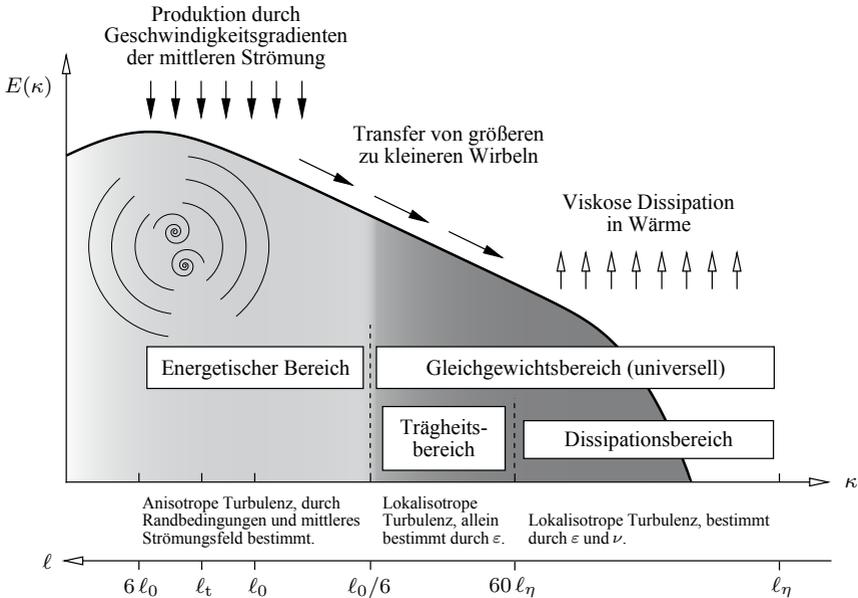


Abbildung 2-2: Dreidimensionales Energiespektrum für $Re_t = 150\,000$ nach dem Modell von Pope für isotrope Turbulenz [159] bei doppelt logarithmischer Auftragung. Charakterisierung der verschiedenen Bereiche angelehnt an schematische Darstellung in [141].

skizziert, ist kennzeichnend für den turbulenten Kaskadenprozess von tieffrequenten, großskaligen hin zu hochfrequenten, kleinskaligen Schwankungen [159]. Obwohl Turbulenz sich durch ein kontinuierliches Energiespektrum auszeichnet und die Grenzen zwischen großen (energetischen) und kleinen (dissipativen) Wirbeln fließend sind, ist es für theoretische Überlegungen hilfreich, eine Abgrenzung zwischen dissipativen und energetischen Strukturen vorzunehmen und diesen jeweils charakteristische Längen, Geschwindigkeits- und Zeitmaße zuzuordnen [42, 159, 170]:

Nach der ersten Ähnlichkeitshypothese von Kolmogorov werden die kleinsten Wirbel in einer turbulenten Strömung (bei hinreichend großer Reynoldszahl) allein durch kinematische Zähigkeit des Fluides, $\nu = \mu/\rho$, und massenspezifische Dissipationsrate ε bestimmt [111]. Aus diesen beiden Parametern können sowohl deren charakteristische Länge ℓ_η und Geschwindigkeit u_η als auch ein charakteristisches Zeitmaß im *Dissipationsbereich*, $\tau_\eta = \ell_\eta/u_\eta$, abgeleitet werden:

$$\ell_\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \quad , \quad u_\eta = (\varepsilon\nu)^{1/4} \quad \text{und} \quad \tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2} . \quad (2.34)$$

Dass Zähigkeitskräfte einen wesentlichen Einfluss auf diese kleinsten Strukturen ausüben, wird anhand der mit ℓ_η und u_η gebildeten Reynoldszahl deutlich, denn es gilt $u_\eta \ell_\eta / \nu = 1$.

Nach der zweiten Ähnlichkeitshypothese von Kolmogorov gibt es (bei hinreichend großer Reynoldszahl) neben dem Dissipationsbereich einen sogenannten *Trägheitsbereich*, in dem die turbulenten Strukturen von der Zähigkeit weitgehend unbeeinflusst und allein durch die Dissipationsrate bestimmt sind [111]. Die Turbulenz in Trägheits- und Dissipationsbereich wird dabei theoretisch als lokal homogen und lokal isotrop angesehen, auch wenn das Turbulenzfeld insgesamt weder isotrop noch homogen ist. Diese beiden Bereiche mit universeller Struktur können zusammengefasst auch als *Gleichgewichtsbereich* bezeichnet werden.

Unter der Voraussetzung, dass sich Produktion und Dissipation von Turbulenzenergie die Waage halten (lokales Gleichgewicht), wird im Trägheitsbereich konstant Energie von größeren zu kleineren Strukturen übertragen, und die am Ende des Kaskadenprozesses stehende Dissipationsrate passt sich instantan dem hauptsächlich über die großen Strukturen erfolgenden Energieeintrag an. Formal bedeutet dies $\varepsilon \sim u_0^3 / \ell_0$ (s. (2.31)), wobei ein tiefgestellter Index ()₀ typische Maße der großen Skalen im *energetischen Bereich* kennzeichnen soll. Aus dieser Proportionalität resultieren die Abhängigkeiten der Verhältnisse

$$\frac{\ell_\eta}{\ell_0} \sim Re^{-3/4} \quad , \quad \frac{u_\eta}{u_0} \sim Re^{-1/4} \quad \text{und} \quad \frac{\tau_\eta}{\tau_0} \sim Re^{-1/2} \quad (2.35)$$

zwischen den durch (2.34) definierten Kolmogorov-Skalen und den energetischen Skalen von der Reynoldszahl [159].

Auf den Ähnlichkeitshypothesen von Kolmogorov basieren mehrere Modelle [42, 159, 170], die das räumliche Energiespektrum homogener isotroper Turbulenz, $E(\kappa)$, in Abhängigkeit der Wellenzahl $\kappa = 2\pi/\ell$ beschreiben können. Oft bezeichnet man das räumliche Energiespektrum auch als Energiespektralfunktion oder genauer als Energiespektraldichte, da $E(\kappa) d\kappa$ gerade den Anteil zur kinetischen Energie darstellt, der in den Fourier-Komponenten aller Wellenzahlen vom Betrag $\kappa \leq |\kappa| \leq \kappa + d\kappa$ enthalten ist [170]. Durch Integration über den gesamten Wellenzahlraum lassen sich daraus aber nicht nur die turbulente kinetische Energie

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa, \quad (2.36)$$

sondern auch deren massenspezifische Dissipationsrate

$$\varepsilon = \int_0^\infty 2\nu \kappa^2 E(\kappa) d\kappa \quad (2.37)$$

sowie ein charakteristisches Längenmaß energetischer Wirbel,

$$\ell_0 = \frac{3}{4} \frac{\pi}{k} \int_0^{\infty} \frac{E(\kappa)}{\kappa} d\kappa, \quad (2.38)$$

berechnen. Ein typisches räumliches Energiespektrum isotroper Turbulenz ist in Abbildung 2-2 zu sehen. Bei dem dargestellten Modellspektrum nach dem Entwurf von Pope [159] kann die Energiespektralfunktion für festgelegte Werte von k , ε und ν durch

$$E(\kappa) = C \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} f_0(\kappa \ell_t) f_\eta(\kappa \ell_\eta),$$

$$f_0(x) = \left(\frac{x}{(x^2 + c_0)^{1/2}} \right)^{5/3 + p_0} \quad \text{und} \quad f_\eta(x) = e^{-\beta \left[(x^4 + c_\eta^4)^{1/4} - c_\eta \right]} \quad (2.39)$$

mit $C = 1.5$, $p_0 = 2$ und $\beta = 5.2$ berechnet werden, wobei sich c_0 und c_η aus den Zwangsbedingungen (2.36) und (2.37) ergeben. In dimensionsloser Form (d. h. $E(\kappa)$ wird auf $k \ell_0$ oder auf $u_\eta^2 \ell_\eta$ bezogen und κ mit ℓ_0 bzw. mit ℓ_η multipliziert) ist dieses Modellspektrum allein durch Angabe der turbulenten Reynoldszahl

$$Re_t = \frac{u_t \ell_t}{\nu} = \frac{k^2}{\varepsilon \nu} \quad (2.40)$$

festgelegt [159]. Während $u_t = \sqrt{k}$ in Gleichung (2.40) ein Maß für turbulente Geschwindigkeitsschwankungen darstellt, charakterisiert das turbulente Längenmaß $\ell_t = k^{3/2}/\varepsilon$ die Abmessungen großer Wirbelstrukturen. Wenn man für das charakteristische Geschwindigkeitsmaß $u_0 = u_t$ vereinbart, ist das charakteristische Längenmaß der energietragenden Wirbel bei großer Reynoldszahl über $\ell_0 \approx 0.43 \ell_t$ mit dem turbulenten Längenmaß verknüpft. Die dissipative Wirkung viskoser Kräfte setzt etwa ab $60 \ell_\eta$ ein, dieser Punkt markiert deshalb in Abbildung 2-2 den Beginn des Dissipationsbereiches. Zwischen diesem und dem energetischen Bereich liegt der Trägheitsbereich, welcher, konsistent zur zweiten Ähnlichkeitshypothese von Kolmogorov (und übereinstimmend für alle gängigen $E(\kappa)$ -Modelle), durch eine mit $E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$ abklingende Energiespektralfunktion gekennzeichnet ist [159]. Der energetische Bereich des popeschen Modellspektrums lässt sich zwischen $6 \ell_0 > \ell > \ell_0/6$ eingrenzen, da in ebendiesem Intervall bei großer Reynoldszahl ca. 80% der turbulenten kinetischen Energie enthalten sind (siehe Abbildung 2-4) [159].

Vollständig isotrope und homogene Turbulenz stellt sich zwar nur in Abwesenheit äußerer Kräfte und Scherung der Grundströmung ein und erscheint somit als ein seltener Spezialfall turbulenter Strömungen [42], wesentliche Eigenschaften der in Abbildung 2-2 schematisch dargestellten turbulenten Energiekaskade lassen sich aber auch auf anisotrope und inhomogene Situationen übertragen. Die Erfassung aller turbulenten Austauschvorgänge ist in einer 3D-Simulation möglich, wenn sowohl Produktions- als auch Gleichgewichtsbereich zeitlich

und räumlich hinreichend genau abgebildet werden. Ist dies der Fall, spricht man von einer direkten numerischen Simulation (DNS). Aus nachfolgend beschriebenen Gründen ist eine DNS von Strömungen großer Reynoldszahl jedoch nicht mit vertretbarem Aufwand durchführbar. Stattdessen wird meist ein statistischer Ansatz zur Behandlung der Turbulenz verwendet, und man beschränkt sich in der Simulation auf die Wiedergabe energietragender Wirbel (Abschnitt 2.3.2) oder enemblegemittelter Grundströmung (Abschnitt 2.3.3).

2.3.1 Direkte numerische Simulation (DNS)

In Strömungen mit sehr großer Reynoldszahl liegen mehrere Größenordnungen zwischen den charakteristischen Zeit- und Längenskalen der kleinsten und energiereichsten Strukturen, was bezogen auf die großen Skalen eine in Raum und Zeit extrem feine Diskretisierung des Strömungsfeldes erforderlich macht. Die zur räumlichen Darstellung dreidimensionaler Turbulenz erforderliche Anzahl an Gitterpunkten in der Simulation skaliert gemäß (2.35) mit $N_{3D} \sim Re^{9/4}$. Für den Bedarf an Rechenoperationen zur instationären Wiedergabe der Turbulenz gilt dementsprechend $N_{DNS} \sim N_{3D} Re^{1/2} \sim Re^{11/4}$. In der Regel ist daher die DNS turbulenter Strömungen bei großer Reynoldszahl unverträglich, und es müssen zumindest derzeit und in naher Zukunft andere Wege der Simulation beschritten werden. In der Literatur finden sich alternative Methoden zur Behandlung von Turbulenz in der Simulation [178, 225]. Die beiden nachfolgend vorgestellten Konzepte der Filterung und der Reynolds-Mittelung haben zum Ziel, die Komplexität des Problems zu reduzieren, um letztlich eine gröbere Diskretisierung in der numerischen Simulation und damit den Zugang zu turbulenten Strömungen bei großer Reynoldszahl zu ermöglichen.

2.3.2 Grobstruktur-Simulation (LES)

Bei diesem im Englischen als „Large-Eddy-Simulation“ (LES) bezeichneten Ansatz [65, 71, 178] beschränkt man sich auf die Wiedergabe der großen und energietragenden Wirbel (Grobstruktur) und bildet den Einfluss kleinerer Skalen (Feinstruktur) über ein Modell ab. Die dazu notwendige Zerlegung des turbulenten Strömungsfeldes in Grobstruktur- und Feinstrukturanteile kann formal durch das Faltungsprodukt einer Strömungsgröße ϕ mit einer normalisierten Filterfunktion G beschrieben werden, wobei die Grobstruktur durch

$${}^F\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) d\tau d^3\mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{y}, \tau) d\tau d^3\mathbf{y} = 1 \quad (2.41)$$

und die Feinstruktur als Differenz zwischen ungefilterter und gefilterter Größe definiert wird.

Durch Anwendung der homogenen Filteroperation (2.41) auf die Navier-Stokes-Gleichungen aus Abschnitt 2.1 ergeben sich gefilterte Erhaltungsgleichungen (siehe Abschnitt 2.3.6), welche die Dynamik der Grobstruktur beschreiben und dabei den Effekt der Feinstruktur in Form zusätzlicher, zu modellierender Terme beinhalten. Bei der Lösung dieser gefilterten Erhaltungsgleichungen in einer LES kann infolge der Beschränkung auf die Wiedergabe der Grobstrukturdynamik sowohl die räumliche als auch die zeitliche Auflösung erheblich geringer als in einer DNS ausfallen (siehe Tabelle 2-1). Die mögliche Einsparung an Ressourcen hängt dabei zum einen von der Reynoldszahl und dem Typ der Strömung ab (zum Beispiel wandgebundene oder freie Turbulenz), zum anderen wird sie maßgeblich durch den effektiven Filter der LES bestimmt. Dessen Breite $\Delta > \ell_\eta$ legt die Position des Übergangs von Grob- zu Feinstruktur im Spektrum fest und damit letztlich das Verhältnis von in der Simulation aufgelöster Grobstrukturenergie zur gesamten turbulenten kinetischen Energie.

Üblicherweise wird in einer LES bei großer Reynoldszahl die Skalentrennung zwischen aufgelöster und modellierter Turbulenz in der Nähe der Grenze zwischen energetischem Bereich und Gleichgewichtsbereich (vgl. Abbildung 2-2) vorgenommen. Diese Aufteilung ermöglicht meist eine massive Einsparung an Ressourcen und bietet gleichzeitig den Vorteil, dass die Modellierung nur den universellen, isotropen Teil des Spektrums abbilden muss, während der stark durch die umströmte Geometrie geprägte, individuelle und anisotrope Teil des turbulenten Spektrums direkt von der Simulation wiedergegeben wird. Auf dieser Basis wird in [159] für den in einer LES mindestens aufzulösenden Grobstrukturanteil der gesamten turbulenten kinetischen Energie ein Orientierungswert von 80% angegeben und darüber hinaus mit $\Delta \approx 0.8 \ell_0/6$ auch ein Anhaltspunkt für die entsprechende Breite eines sphärischen Gauß-Filters definiert. Das schematische Energiespektrum in Abbildung 2-2 auf Seite 22 ist an dieser Stelle durch den Übergang von hellem Grau (Grobstruktur) zu dunklem Grau (Feinstruktur) gekennzeichnet.

Konzept der räumlichen Filterung

Im Weiteren wird näher auf das Konzept der räumlichen Filterung [121] eingegangen, wobei anzumerken ist, dass die Anwendung der räumlichen Filterung auf die Navier-Stokes-Gleichungen auch eine zeitliche Filterung impliziert [65, 178]. Hier wird vorausgesetzt, dass die räumliche Filterfunktion als Produkt dreier eindimensionaler Funktionen entwickelt werden kann [71]. Um die Wirkung räumlicher Filter in einer LES zu veranschaulichen, genügt die Betrachtung der eindimensionalen Situation

$$\overline{\phi}^F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y, t) G(x - y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} G(r) \phi(x - r, t) dr, \quad (2.42)$$

wobei im zweiten Schritt mit $r = x - y$ eine Substitution eingeführt wird. Mit Hilfe des Faltungstheorems und der Fourier-Transformation ist es möglich, die räumliche Filteroperation in den Frequenzbereich zu übertragen, wobei man sich der Transferfunktion

$$\widehat{G}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r) e^{-i\kappa r} dr \quad (2.43)$$

des Filters $G(r)$ bedient [65]. Dem Faltungsprodukt entspricht damit im Frequenzbereich ein einfaches Produkt aus Transferfunktion $\widehat{G}(\kappa)$ und Spektrum der Ausgangsgröße $\hat{\phi}(\kappa, t)$

$${}^F\bar{\phi}(\kappa, t) = \widehat{G}(\kappa) \hat{\phi}(\kappa, t), \quad (2.44)$$

woraus folgt, dass sich die Energiespektralfunktion der Grobstrukturdynamik, E_{LES} , über die Beziehung

$$E_{\text{LES}}(\kappa, t) = \widehat{G}^2(\kappa) E(\kappa, t) \quad (2.45)$$

unmittelbar aus der Energiespektraldichte der gesamten turbulenten Dynamik berechnen lässt [178]. Die Gleichung (2.45) ist nützlich, da mit ihr in Verbindung mit dem Modellspektrum für $E(\kappa)$ [159] nun die Wirkungsweise unterschiedlicher LES-Filter analysiert werden kann.

In einer LES sind vor allem räumliche Tiefpass-Filter mit einer um $r = 0$ bzw. $\kappa = 0$ konzentrierten und glättenden Filter- bzw. Transferfunktion von Bedeutung, nachfolgend sind exemplarisch die Filter- und Transferfunktionen von drei gebräuchlichen Filtertypen angegeben.

$$\text{Box-Filter: } G_{\text{B}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{für } |r| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{G}_{\text{B}}(\kappa) = \frac{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\kappa\right)}{\frac{\Delta}{2}\kappa}. \quad (2.46)$$

$$\text{Gauß-Filter: } G_{\text{G}}(r) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\Delta^2}} e^{-\frac{\gamma r^2}{\Delta^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{G}_{\text{G}}(\kappa) = e^{-\frac{\kappa^2\Delta^2}{4\gamma}}. \quad (2.47)$$

$$\text{Sinc-Filter: } G_{\text{S}}(r) = \frac{1}{\Delta} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}r\right)}{\frac{\pi}{\Delta}r} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{G}_{\text{S}}(\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\kappa| \leq \frac{\pi}{\Delta} = \kappa_c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.48)$$

Aus Abbildung 2-3 sind die Verläufe dieser Funktionen ersichtlich. In der Gegenüberstellung wird deutlich, dass Box-Filter und Sinc-Filter ein in physikalischem Raum und Fourier-Raum gegensätzliches Verhalten aufweisen und dass sie im Unterschied zum Gauß-Filter in jeweils einem der beiden Räume lokal begrenzt sind. Während der Sinc-Filter sich durch die

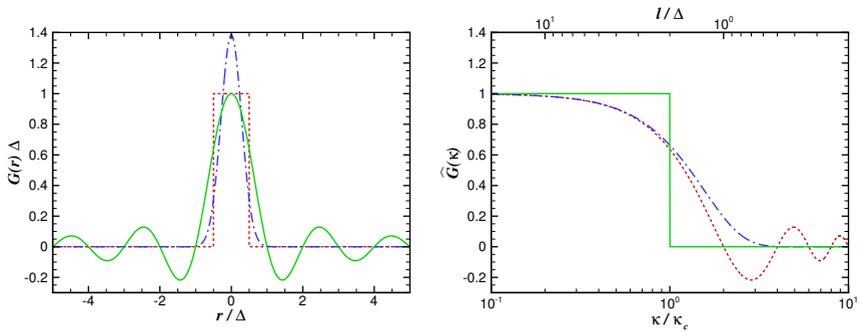


Abbildung 2-3: Verschiedene Filter- $G(r)$ (links) und deren Transferfunktionen $\hat{G}(\kappa)$ (rechts) in normierter Darstellung. --- Box-Filter, -·- Gauß-Filter (hier mit $\gamma = 6$), — Sinc-Filter.

scharfe Trennung von Grob- und Feinstruktur im Wellenzahlraum auszeichnet, ist der Box-Filter in seiner Ausdehnung im Ortsbereich beschränkt. Diese Eigenschaft hat er mit den im numerischen Verfahren eingesetzten diskreten Näherungen gemein, welche sich immer nur auf eine begrenzte Anzahl von Punkten stützen. In [73] wird allgemein gezeigt, dass sich der in Ableitungen durch Finite-Differenzen Approximationen induzierte numerische Fehler durch Linearkombination lokaler Box-Filter ausdrücken lässt. Beispielsweise kann die zentrale Approximation der ersten Ableitung mit einer Genauigkeit von 2. Ordnung gemäß

$$\frac{\delta\phi}{\delta x} = \frac{\phi(x + \delta x) - \phi(x - \delta x)}{2\delta x} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2\delta x} \int_{x-\delta x}^{x+\delta x} \phi(y) dy \right\} \stackrel{(2.42)}{=} \frac{F\bar{\phi}}{dx} \quad (2.49)$$

als exakte Ableitung einer einfach gefilterten Größe aufgefasst werden [168], deren Filterung mit einem Box-Filter G_B (2.46) der Breite $\Delta = 2\delta x$ erfolgt. Je nach Diskretisierung der einzelnen Terme in den Transportgleichungen wirkt demnach im numerischen Verfahren immer ein impliziter Filter, dessen genaue Eigenschaften zwar selten bekannt sind, der sich aber in der Regel stärker dämpfend auf schlecht aufgelöste Skalen auswirkt, je niedriger die Fehlerordnung des eingesetzten Verfahrens ist. Lediglich die Diskretisierung viskoser Terme stellt hier eine Ausnahme dar. In [72] ist mit zunehmender Fehlerordnung des Diffusionsterms eine stärkere Dämpfung kleiner Skalen beobachtet worden.

Bei der Finite-Volumen-Methode lässt sich, wie im Anhang A.2.1 dargestellt, auch der Volumenmittelwert als eine Box-gefilterte Größe interpretieren [66]. Eine explizite Filterung dieser volumenweise konstanten Variablen mit einem Box-Filter von der Größe des Volumens würde wieder auf die gleiche Ausgangsverteilung führen [20]. Bereits ohne die kombinierte Filterwirkung einzelner Approximationen in der Diskretisierung zu kennen,

muss demnach davon ausgegangen werden, dass der effektive implizite Filter des eingesetzten Verfahrens zumindest aus einem Box-Filter der Breite $\Delta = \sqrt[3]{\delta V}$ für die transportierten Strömungsgrößen besteht, wobei die von der Kugel abweichende Form des Volumens schon auf äquidistanten und orthogonalen Gittern eine Anisotropie des Filters zur Folge hat [159].

Darüber hinaus ist die größte/kleinste auf einem diskreten Rechengitter mit der Maschenweite δx darstellbare Wellenzahl/Struktur nach dem Sampling-Theorem mit $\kappa_{\max} = \pi/\delta x$ bzw. $\ell_{\min} = 2 \delta x$ begrenzt [12]. Die in den Navier-Stokes-Gleichungen enthaltenen Nichtlinearitäten können jedoch noch höhere Moden erzeugen, die nicht korrekt auf dem diskreten Rechengitter abgebildet werden [178]. Treten solche Moden auf, werden sie an der Grenzwellenzahl κ_{\max} in den darstellbaren Bereich der Diskretisierung „zurückgefaltet“, wodurch bei einem abklingenden Spektrum hauptsächlich die kleinskaligen Strukturen künstlich verstärkt werden [65]. Man bezeichnet diese unphysikalische Fehlinterpretation hochfrequenter Moden als Aliasing-Fehler. Da gerade die hochfrequenten Lösungsanteile stark durch die Diskretisierung gedämpft werden, ist der Aliasing-Fehler bei Verfahren geringer Ordnung aber meist klein [65]. Für nachfolgende Betrachtungen wollen wir daher den Aliasing Fehler vernachlässigen und in erster Näherung davon ausgehen, dass sich der effektive implizite Filter im Finite-Volumen-Verfahren durch die Kombination eines Box- und eines Sinc-Filters der gleichen Breite $\Delta = \delta x$ bzw. $\kappa_c = \pi/\delta x$ ausdrücken lässt. Die Transferfunktion des kombinierten Box- und Sinc-Filters entspricht dem Produkt $\widehat{G}_B(\kappa)\widehat{G}_S(\kappa)$.

Praktische Konsequenzen der Filterung

Abbildung 2-4 zeigt Ergebnisse der Anwendung von Sinc-Filter, Gauß-Filter und kombiniertem Box- und Sinc-Filter auf ein Energiespektrum bei hoher Reynoldszahl. Während der Sinc-Filter den langwelligen Teil des Ausgangsspektrums bis hin zu $\ell_{\min} = 2\Delta$ nicht verändert, lassen sowohl Gauß-Filter als auch der kombinierte Box- und Sinc-Filter bereits unterhalb der Grenzwellenzahl von $\kappa_{\max} = \pi/\Delta$ eine Dämpfung erkennen. Anhand des kumulativen Spektrums (Abbildung 2-4, unten) wird jedoch sichtbar, dass bei der gewählten Filterbreite von $\Delta = 0.8 \ell_0/6$ auch mit diesen beiden Filtern bereits ca. 80% der gesamten turbulenten kinetischen Energie k in der Grobstruktur enthalten sind, obwohl die Skalentrennung mehr als zwei Größenordnungen von den Kolmogorov-Skalen entfernt vorgenommen wurde. Das Maximum der Energiespektraldichte befindet sich dagegen für $Re_t = 150\,000$ etwa bei $\ell_m \approx 5 \ell_0 \approx 38 \Delta$ und ist damit der Filterbreite noch vergleichsweise nah. Darin, dass die kleinen Skalen nur unwesentlich zur Gesamtenergie beitragen, liegt gerade die Motivation für LES begründet [159]. Setzt man als Maß für die in einer Simulation benötigte räumliche Auflösung das Verhältnis ℓ_m/Δ an, wird das massive Einsparungspotential gegenüber einer DNS ersichtlich, für welche Δ in der Größenordnung der Kolmogorov-Skalen anzusetzen wäre [229].

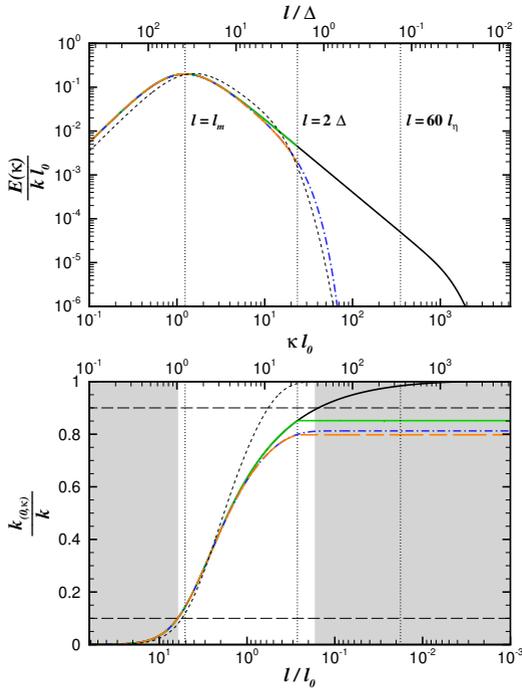


Abbildung 2-4: Wirkung verschiedener (sphärischer) Filter der Breite $\Delta = 0.8 \ell_0/6$ auf das dreidimensionale Energiespektrum nach Pope [159] bei $Re_t = 150\,000$ (— ungefiltert; gefiltert mit — Sinc-Filter, - - - - - Gauß-Filter, - - - - - kombiniertem Box- und Sinc-Filter) im Vergleich zum Energiespektrum bei $Re_t = 135$ (..... ungefiltert). Oben: normierte Spektren, unten: normierte kumulative Spektren (energetischer Bereich in weiß vor grauem Hintergrund). Die vertikalen gepunkteten Linien markieren für $Re_t = 150\,000$ von links nach rechts: Das Maximum der Energiespektraldichte bei $\ell_m \approx 5 \ell_0$, die charakteristische Wellenzahl des Filters bei $\ell = 2\Delta$ sowie den Beginn des Dissipationsbereiches bei $\ell = 60 \ell_\eta$.

Tabelle 2-1: Abschätzung der mit einem kombinierten Box- und Sinc-Filter zum Erreichen unterschiedlicher Anteile aufgelöster Turbulenzenergie (DNS $\approx 100\%$) erforderlichen Verhältnisse von ℓ_m/Δ in Abhängigkeit der turbulenten Reynoldszahl Re_t nach dem Modell von Pope [159]. Für die DNS wurde $\Delta = (\pi/1.5) \ell_\eta$ gesetzt, ein entsprechender Gitterpunktabstand ist in Simulationen isotroper Turbulenz als hinreichend zur Wiedergabe der kleinsten, dissipativen Skalen identifiziert worden [229]. : $2\Delta \lesssim 60 \ell_\eta$ (Wirbel im Dissipationsbereich darstellbar).

Re_t	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	DNS
10^3	11	13	16	19	24	31	43	69	222
10^4	13	16	19	25	34	48	77	152	1113
10^5	14	17	21	28	39	58	102	247	6022
10^6	14	17	22	29	41	62	113	303	33445
10^7	14	17	22	29	41	64	117	325	187334

Tabelle 2-1 gibt einen Überblick über die Änderung der entsprechenden Längenmaßverhältnisse bei Variation des Anteils aufgelöster turbulenter kinetischer Energie sowie der turbulenten Reynoldszahl. Die tabellierten Werte von ℓ_m/Δ resultieren aus Gleichung (2.45) unter Verwendung der kombinierten Transferfunktion $\widehat{G}_B(\kappa)\widehat{G}_S(\kappa)$ und des Modells von Pope (2.39) [159] für das räumliche Energiespektrum $E(\kappa)$. Im Vergleich zur DNS zeichnen sich die LES typischen Auflösungen sowohl durch erheblich kleinere Zahlenverhältnisse als auch durch einen wesentlich schwächer ausgeprägten Einfluss der Reynoldszahl aus. Die eingangs erwähnte Abhängigkeit der möglichen Ressourceneinsparung vom Strömungstyp hat letztlich ihren Ursprung in der für wandgebundene bzw. abgelöste Strömungen sehr unterschiedlichen Größenordnung von ℓ_m .

Während die Abmessung der großen Wirbel in anliegenden turbulenten Grenzschichten linear mit dem Wandabstand skaliert [159], wird deren Größenordnung in freien Scherschichten durch die lokale Scherschichtdicke bestimmt [43]. Im turbulenten Nachlauf stumpfer Körper ist dementsprechend davon auszugehen, dass die Ausdehnung der umströmten Geometrie, bzw. des sich anschließenden Rezirkulationsgebietes, für die maximale Abmessung energietragender Wirbel maßgeblich sein wird. Diese Feststellung ist wichtig, um die benötigte Gitterauflösung in den Fokusbereichen der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Grobstruktursimulationen abschätzen zu können, welche primär die Erfassung von durch Strömungsablösung erzeugten Geräuschquellen zum Ziel haben. Zur adäquaten Auflösung der Grobstruktur in einer LES wandnahe Bereiche wären im Allgemeinen wesentlich feinere Gitter erforderlich. Empfehlungen zur Gestaltung eines LES-Gitters in Wandnähe finden sich beispielsweise in [65], [179] und [21].

Auch mit Beschränkung auf die Wiedergabe der Grobstruktur von Turbulenz in abgelösten Strömungen bleibt eine instationäre, dreidimensionale Simulation erforderlich. Vor dem Hintergrund, dass eine LES grundsätzlich auf die Erfassung einer großen Bandbreite turbulenter Strukturen abzielt und nur annähernd isotrope Strukturen (welche als Produkt der Energiekaskade entstehen) herausgefiltert werden sollten, wird von Spalart in [203] als Voraussetzung für eine plausible Grobstrukturwiedergabe ein Minimum von 32^3 Zellen im turbulenten Fokusbereich der Simulation formuliert. Diese Forderung steht prinzipiell im Einklang mit den für einen aufgelösten Energieanteil zwischen 75 und 80% in Tabelle 2-1 angegebenen Verhältnissen von ℓ_m/Δ , sofern man vom Fall $Re_t = 10^3$ einmal absieht und die Ausdehnung des Fokusbereichs etwa mit ℓ_m^3 beschreibt. Allerdings sei an dieser Stelle daran erinnert, dass die LES-Abschätzungen in der Tabelle auf einem Modellspektrum für isotrope Turbulenz [159] sowie auf einer stark idealisierten Vorstellung des effektiv wirksamen Filters beruhen und außerdem eine perfekte Modellierung der in den gefilterten Erhaltungsgleichungen auftretenden Zusatzterme unterstellt wird. Es ist daher anzunehmen, dass man mit oben genannter Minimalanforderung tatsächlich nur einen noch kleineren Energieanteil akkurat erfassen kann und dass man sich im Bereich einer „Very Large-Eddy-Simulation“ (VLES) befindet. Nach [159] wird eine Grobstruktursimulation

als VLES bezeichnet, wenn weniger als 80% der turbulenten kinetischen Energie von der Grobstruktur repräsentiert werden. In diesem Zusammenhang ist auch darauf hinzuweisen, dass die Zeitschrittweite der Simulation passend zur räumlichen Diskretisierung gewählt werden muss, um eine vorwiegend zeitliche Filterung oder eine Verschwendung von Ressourcen auszuschließen. Setzt man dies voraus, lässt sich abschätzen, dass der Bedarf an Rechenoperationen bei impliziter Filterung insgesamt mit $N_{LES} \sim (\ell_m/\Delta)^{3+1} = (\ell_m/\delta x)^4$ skaliert.

Würde man zusätzlich eine explizite Filterung ausführen, ließen sich Filterbreite Δ und Maschenweite δx voneinander entkoppeln und man könnte theoretisch durch Steigerung der Auflösung im Bereich der Feinstruktur mit $\delta x/\Delta \ll 1$ die numerischen Approximationsfehler minimieren. Dies erscheint jedoch im Hinblick auf die LES komplexer Konfigurationen wenig realistisch, da unter Beibehaltung einer physikalisch motivierten Filterbreite bereits das moderate Verhältnis von $\delta x/\Delta = 1/2$ die erforderliche Anzahl an Gitterpunkten um den Faktor 8 ($= 2^3$) vervielfacht [20]. Fixiert man umgekehrt die Maschenweite δx und hält somit den Aufwand für die numerische Simulation konstant, würde mit abnehmendem Verhältnis von $\delta x/\Delta$ zwar auch der numerische Approximationsfehler kleiner werden, aber gleichzeitig durch Verschiebung der Skalentrennung in Richtung der energetischen Strukturen der zu modellierende Feinstrukturanteil zunehmen. Strebt man eine Minimierung des Gesamtfehlers der LES an, ist demnach ein optimales Verhältnis von $\delta x/\Delta$ denkbar, welches aber nicht nur in Abhängigkeit von Strömung, Diskretisierung und Feinstrukturmodell variieren kann, sondern welches letztlich auch mit der Fragestellung bzw. mit der betrachteten Statistik verknüpft ist [160]. Wird wie hier eine möglichst weitreichende Erfassung auch kleinskaliger, hochfrequenter Schallquellen in der Simulation beabsichtigt, ist ein Verhältnis von $\delta x/\Delta = 1$ in der Hinsicht optimal, dass sich damit auf einem gegebenen Gitter gerade der maximal mögliche Grobstrukturanteil darstellen lässt. Zwar kann in diesem Fall ganz auf die explizite Filterung verzichtet werden, aber es ist auch davon auszugehen, dass die numerischen Fehler von der gleichen Größenordnung wie die zu modellierenden Feinstrukturanteile sind [73], was eine Abstimmung von Numerik und Feinstrukturmodell unbedingt erforderlich macht. Um das in dieser Arbeit modifizierte numerische Verfahren produktiv für LES ohne explizite Filterung einsetzen zu können, wird daher in Abschnitt 4.2 die Rekalibration einer für die Diffusion maßgeblichen Modellkonstanten durchgeführt.

Anmerkungen zur Modellierung der Feinstruktur

Für ein funktionierendes Zusammenspiel von explizitem oder implizitem Filter und Feinstrukturmodell ist es wichtig, dass die infolge der Filterung in den Transportgleichungen auftretenden Zusatzterme (siehe Abschnitt 2.3.6) konsistent durch das Modell approximiert werden [161]. Dazu können bei der Modellbildung zwei grundsätzlich verschiedene Ansätze, „Structural Modeling“ und „Functional Modeling“, verfolgt werden [178]. Beim „Structural

Modeling“ erfolgt eine approximative Rekonstruktion unbekannter Größen in den Zusatztermen auf Basis der in den aufgelösten Skalen enthaltenen strukturellen Informationen, wobei aber keinerlei Annahme über den speziellen Charakter der Skaleninteraktion getroffen wird. Im Gegensatz dazu beschränkt man sich beim „Functional Modeling“ auf die Abbildung des energetischen Austauschs zwischen Grob- und Feinstruktur. Prinzipiell lässt sich der mittlere Energietransfer zwischen großen und kleinen Strukturen durch eine effektive Wirbelzähigkeit beschreiben. Bezogen auf die Grobstruktur stellen positive Werte dieser einen Energieentzug und negative Werte eine Energiezufuhr (engl. „backscatter“) durch Interaktionen mit der Feinstruktur dar. In isotroper Turbulenz ist der Energietransfer von großen zu kleinen Skalen hin allerdings deutlich stärker ausgeprägt und „backscatter“ spielt nur eine untergeordnete Rolle [178]. Da die kleinen Skalen also primär für die Dissipation von kinetischer Energie in Wärme verantwortlich sind, bilden die meisten Feinstrukturmodelle lediglich den Energiefluss in Richtung der Feinstruktur ab. Bei der klassischen, funktionalen Modellierung nach Smagorinsky [199] geschieht dies in Analogie zur molekularen Diffusion, indem die Wirkung der Feinstrukturfluktuationen auf die Dynamik der Grobstruktur allein über die lokale Anpassung einer isotropen Wirbelzähigkeit und einen damit verbundenen Anstieg der mechanischen Dissipationsleistung kontrolliert wird.

In der vorliegenden Arbeit wird innerhalb von LES-Bereichen ein dem Smagorinsky-Modell sehr ähnliches, funktionales Feinstrukturmodell eingesetzt (siehe Abschnitt 2.3.8, S. 52). Da diese Art der Modellierung prinzipiell die lokale Isotropie der herausgefilterten Skalen voraussetzt, erscheint es auch unabhängig von energetischen Betrachtungen wünschenswert, die Skalentrennung erst im Trägheitsbereich des Energiespektrums vorzunehmen (siehe Abbildung 2-2, S. 22). Mockett [141] weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass durch die Anwendung der LES bei kleinen Reynoldszahlen ein konzeptionelles Problem entstehen kann, wenn sich Produktions- und Dissipationsbereich im Energiespektrum überlappen und somit kein separater Trägheitsbereich mehr existiert. Günstig kann sich dabei auswirken, dass die Modellierung der Feinstruktur an Bedeutung verliert, je größer der prozentuale Anteil der Grobstrukturenergie wird. Die Situation bei kleiner Reynoldszahl wird in Abbildung 2-4 beispielhaft durch das ungefilterte Energiespektrum bei $Re_t = 135$ repräsentiert, welches in der doppelt logarithmischen Auftragung die für den Trägheitsbereich charakteristische Gerade vollständig vermissen lässt. Interessant ist, dass man stattdessen durchaus eine gewisse Ähnlichkeit mit dem gefilterten Energiespektrum bei $Re_t = 150\,000$ unter Anwendung des Gauß-Filters feststellen kann. Diese Ähnlichkeit legt den Umkehrschluss nahe, dass auch die Steigerung der mechanischen Dissipationsleistung durch das funktionale Feinstrukturmodell den Dissipationsbereich in Richtung größerer Strukturen verschieben wird, und dass das Modell somit wie ein dynamischer Filter auf kleinskalige turbulente Strukturen wirkt. Im Gegensatz zu einer global gesteigerten Zähigkeit können die Eigenschaften dieses Filters natürlich abhängig von Modell und Grobstruktur räumlich und zeitlich variieren.

2.3.3 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Simulation (RANS)

Beim RANS-Ansatz wird theoretisch das gesamte turbulente Spektrum über ein statistisches Modell abgebildet und im Unterschied zu den zuvor betrachteten Konzepten der DNS und LES kein stochastischer Inhalt in der Simulation aufgelöst. Die konstituierenden Gleichungen wurden bereits gegen Ende des 19. Jahrhunderts von O. Reynolds abgeleitet. Sie beschreiben ein mittleres Strömungsfeld, dessen Dynamik (im Gegensatz zum Phänomen der Turbulenz) rein deterministisch ist. Ähnlich wie bei der im letzten Abschnitt beschriebenen Filterung treten auch bei der reynoldsschen Mittelung von nichtlinearen Transportgleichungen zusätzliche Terme auf, welche die Wirkung der nicht aufgelösten Schwankungsbewegungen auf die in der Simulation dargestellte Strömung abbilden. Zunächst sind auch diese Zusatzterme unbekannt, sie lassen sich aber mit Hilfe statistischer Turbulenzmodelle auf die deterministischen Strömungsgrößen zurückführen und näherungsweise bestimmen [175, 225].

Zwar ist die Form von Reynolds-gemittelten und homogen gefilterten Gleichungen sogar identisch (siehe Abschnitt 2.3.6), da aber in einer RANS-Simulation im Unterschied zur LES das gesamte turbulente Spektrum rein statistisch erfasst werden muss, kommt der Modellierung der zusätzlichen Terme nun eine viel größere Bedeutung zu. Eine demgemäß stärker vereinfachende (aber dennoch meist komplexere) physikalische Modellbildung sowie eine potentiell größere Modellabhängigkeit der Simulationsergebnisse sind dabei als wesentliche Nachteile des RANS-Ansatzes zu nennen, der sich andererseits aber durch erhebliche Einsparungen an benötigter Rechenleistung gegenüber allen turbulenzauflösenden Verfahren auszeichnet. Die erforderliche Auflösung in RANS-Simulationen resultiert schließlich aus der meist verhältnismäßig moderaten Variation des mittleren Strömungsfeldes, weswegen in der Regel wesentlich gröbere Gitter als bei einer LES oder DNS verwendet werden können und bei statistisch stationärer Strömung bzw. bei Vorhandensein zumindest einer statistisch homogenen Richtung sogar stationäre und/oder zweidimensionale Berechnungen möglich sind.

Konzept der Mittelung

Im Folgenden wird die dem RANS-Ansatz zugrunde liegende Zerlegung des Strömungsfeldes in (deterministische) Mittelwerte und (stochastische) turbulente Schwankungen anhand einer generischen Transportgröße ϕ vorgestellt und vor dem Hintergrund einer praktischen Anwendung in zeitgenauen, aeroakustischen Simulationen diskutiert. Aus einer Zufallsgröße ϕ erhält man die deterministische Größe $\overline{\phi}^R$, indem der arithmetische Mittelwert aus einer

unendlichen Anzahl von Stichproben der Zufallsgröße, ϕ_n , gebildet wird:

$${}^R\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_n(\mathbf{x}, t). \quad (2.50)$$

Man bezeichnet den durch (2.50) definierten Mittelwert ${}^R\bar{\phi}$ auch als reynoldsschen Mittelwert, Ensemblemittel, Erwartungswert oder als erstes statistisches Moment. Zur Bestimmung dieses deterministischen Anteils können gegebenenfalls alternative Formulierungen in Betracht kommen, der turbulente Schwankungsanteil wird jedoch allgemein als Differenz zwischen Zufallsgröße und Mittelwert definiert. In statistisch periodischen Strömungen kann alternativ zum Ensemblemittel (2.50) auch ein Phasenmittelwert von ϕ verwendet werden

$${}^R\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi(\mathbf{x}, t + nT), \quad (2.51)$$

worin mit T hier die Dauer einer Periode bezeichnet ist. Für statistisch stationäre Strömung entfällt die Zeitabhängigkeit der gemittelten Größe, und das Ensemblemittel (2.50) geht nach dem Ergodentheorem in einen zeitlichen Mittelwert über [170], d. h.

$${}^R\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathcal{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \phi(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (2.52)$$

Umgekehrt verbleibt für statistisch homogene Strömung im unbegrenzten Raum allein die Zeitabhängigkeit, d. h. ${}^R\bar{\phi} = {}^R\bar{\phi}(t)$. Das Ensemblemittel entspricht dann einem räumlichen Mittelwert.

Würde man anstelle des unendlichen Zeitintervalls in Gleichung (2.52) nur eine begrenzte Zeitspanne $0 < \mathcal{T} \leq t$ betrachten, bliebe die Zeitabhängigkeit der gemittelten Größe erhalten. In diesem Fall ist die Mittelung als eine kausale [78], zeitliche Box-Filterung zu verstehen, die je nach Wahl des Mittelungsintervalls \mathcal{T} hochfrequente Fluktuationen ausblendet [69]:

$${}^F\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{t-\mathcal{T}}^t \phi(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (2.53)$$

Nur unter der Voraussetzung, dass das Mittelungsintervall \mathcal{T} im Verhältnis zum turbulenten Zeitmaß $\tau_t = k/\varepsilon$ so groß gewählt wird, dass alle turbulenten Fluktuationen herausgefiltert werden, wäre ${}^F\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ theoretisch wieder mit ${}^R\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ gleichzusetzen. Letztlich wird der in einer RANS-Simulation wirksame Filter aber durch das zur Schließung der gemittelten Gleichungen verwendete statistische Turbulenzmodell (siehe Abschnitt 2.3.8) festgelegt.

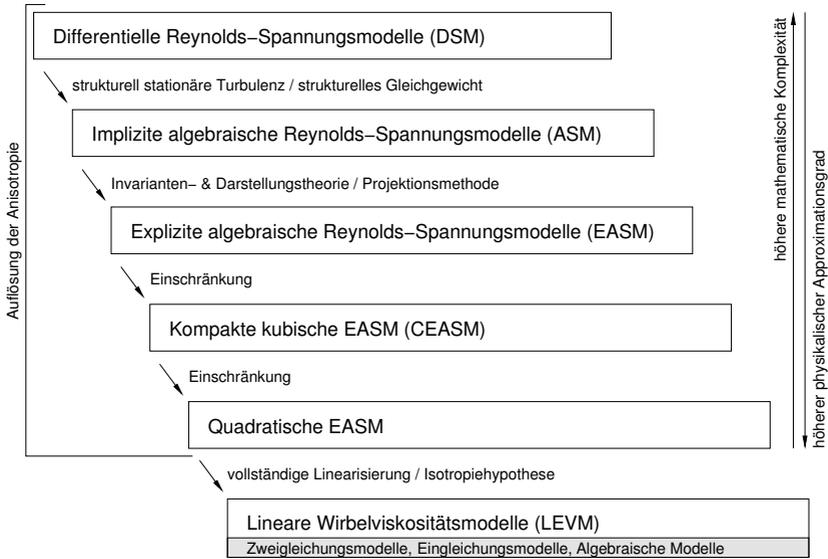


Abbildung 2-5: Hierarchie statistischer Turbulenzmodelle zur Schließung der RANS-Gleichungen nach Rung [174] und Lübcke [126] in der von Mockett und Schmidt verwendeten Darstellung [141, 188].

Modellierung der Turbulenz und Konsequenzen aus der Mittelung

Wie in Abbildung 2-5 dargestellt, gibt es eine Vielzahl möglicher Ansätze, um die bei der reynoldsschen Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen entstandenen, zunächst unbekannt-ten Zusatzterme in einer numerischen Simulation anzunähern. Rung [174, 175] weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass die Entwicklung statistischer Turbulenzmodelle fast vollständig auf statistisch stationären Strömungen beruht. Eine zuverlässige Berechnung instationärer Strömungen auf Basis herkömmlicher Turbulenzmodelle ist demnach nur für $T/\tau_t \gg 1$ zu erwarten, bzw. nur dann, wenn das Ensemblemittel in guter Näherung durch einen zeitlichen Mittelwert ersetzt werden kann. Sollten sich die Zeitskalen von Turbulenz und instationärer Grundströmung dagegen nicht wesentlich voneinander unterscheiden, ist bei Anwendung dieser Modelle prinzipiell Vorsicht geboten. Unter diesen Umständen kann es theoretisch zu erheblichen Wechselwirkungen zwischen stochastischen und deterministischen Schwankungen kommen, welche nicht durch die Modellbildung abgedeckt sind [225]. Bei entsprechender Auflösung ist es so möglich, dass nicht nur deterministische, sondern auch turbulente Fluktuationen von der Simulation erfasst werden, obwohl diese

ausschließlich im statistischen Turbulenzmodell berücksichtigt sein sollten. Dies kann man sich anschaulich als eine spektrale Überlappung modellierter und aufgelöster Fluktuationen im Frequenz- und Wellenzahlraum vorstellen [185].

Um in zeitgenauen RANS-Simulationen (engl. unsteady RANS, bzw. URANS) formale Konflikte in der Modellbildung von vornherein ausschließen zu können, wird häufig die Einhaltung einer spektralen Lücke zwischen aufgelösten und modellierten Fluktuationen gefordert [185]. Insbesondere in abgelösten Strömungen ist diese Forderung allerdings kaum zu erfüllen, da sich dort die Frequenzbänder von Turbulenz und instationärer Grundströmung oft naturgemäß überlappen (z. B. kármánsche Wirbelstraße bei hoher Reynoldszahl, siehe Abschnitt 5.1). Anliegende turbulente Grenzschichten sind dagegen aufgrund vergleichsweise kleiner turbulenter Zeitskalen nur selten von oben genannter Modellierungsproblematik betroffen und können in der Regel recht zuverlässig mit dem RANS-Ansatz abgebildet werden.

Im Hinblick auf aeroakustische Untersuchungen ist abschließend festzustellen, dass eine instationäre RANS-Simulation nur zur Wiedergabe tonaler Schallquellen geeignet sein kann, da sie per Definition (2.50) keinen turbulenten, breitbandigen Inhalt im gemittelten Strömungsfeld aufweisen darf. Dennoch kann der kostengünstige RANS-Ansatz bei der Vorhersage von Breitbandlärm von großem Nutzen sein, indem er entweder mit schnellen Verfahren zur synthetischen Rekonstruktion turbulenter Schallquellen gekoppelt [49, 50], oder mit einem turbulenzauflösenden Verfahren zu einer hybriden Methode kombiniert wird.

2.3.4 Hybride Turbulenzbehandlung

Die in den Abschnitten (2.3.2) und (2.3.3) beschriebenen Ansätze der Filterung und der reynoldsschen Mittelung zur Behandlung von Turbulenz bei großer Reynoldszahl können nicht nur separat in einer Large-Eddy- bzw. RANS-Simulation zur Anwendung kommen, sondern auch miteinander kombiniert werden. Sofern die direkte Erfassung turbulenten Inhalts nur in einem bestimmten Gebiet einer Strömungssimulation von Interesse ist, ist es beispielsweise denkbar, nur lokal begrenzt eine LES durchzuführen und diese innerhalb einer weiter ausgedehnten RANS-Lösung einzubetten. Auf diese Weise können die Kosten gegenüber einer globalen LES meist erheblich reduziert werden. In vielen technisch relevanten Fällen werden turbulenzauflösende Simulationen überhaupt erst durch eine zonal unterschiedliche Turbulenzbehandlung erschwinglich. Hybride RANS/LES Verfahren erfreuen sich daher zunehmender Beliebtheit, und die existierenden Möglichkeiten zur Kombination der beiden oft nur im Ansatz sehr verschiedenen Behandlungsweisen von Turbulenz sind bereits ausgesprochen vielfältig [179].



Abbildung 2-6: Konzeptskizze typischer RANS- und LES-Bereiche in einer DES nach [207].

Wenn die mittlere Strömung global von einer RANS-Simulation gut wiedergegeben wird, ist prinzipiell eine nachgeschaltete LES in einem Teilgebiet unter Verwendung von Randbedingungen aus der RANS-Lösung möglich. Neben dieser zonalen Zerlegung des Rechengebietes in RANS- und LES-Bereiche kommt in diesem Fall auch eine modale Zerlegung in ein mittleres (nicht notwendigerweise stationäres) RANS-Feld und ein überlagertes turbulentes Störungsfeld in Betracht [116, 145]. Wird die LES-Region in eine turbulente Umgebung eingebettet, ist allerdings nicht nur der Modellierung, sondern auch der Rekonstruktion aufgelöster turbulenter Fluktuationen aus dem gemittelten RANS-Feld Bedeutung zuzumessen, da die Fluktuationen der Grobstruktur theoretisch als Einströmbedingung für die LES-Region benötigt werden.

Sofern unmittelbar an der Grenze zwischen RANS- und LES-Bereich turbulente Fluktuationen erzeugt bzw. ausgelöscht werden, bezeichnet man den Übergang als scharf [179]. Der zwischen den RANS- und LES-Zonen verlaufende Übergang muss allerdings weder scharf noch a priori festgelegt sein. Zwar unterscheiden sich die durch Filterung bzw. reynoldssche Mittelung in den Navier-Stokes-Gleichungen auftretenden Zusatzterme in Form und Funktion, letztlich wird aber oft eine in beiden Fällen ähnliche funktionale Modellierung auf Basis einer turbulenten Wirbelzähigkeit verwendet, welche die im Konzept der Skalentrennung noch eindeutig erkennbaren Unterschiede zwischen RANS- und LES-Ansatz wieder verschwinden lässt. Praktisch kommt die Verschiedenartigkeit der beiden Ansätze dann nur noch in unterschiedlichen Größenordnungen der modellierten Zusatzterme zum Ausdruck, so dass ein gleitender Übergang von RANS- zu LES-Bereichen und umgekehrt auf der Basis hybrider RANS/LES-Modelle möglich ist.

Es stehen zunehmend global einsetzbare Hybridverfahren zur Verfügung [8, 75, 135, 206, 207], welche diskretisierungs- und/oder strömungssensitiv in unterschiedlichen Regionen entweder eine Reynolds-Mittelung oder eine Filterung ansetzen, um so die verfahrensspezifischen Vorteile von RANS-Simulation und LES innerhalb einer kombinierten Methode zu vereinen. Ist die mittlere Strömung in zumindest einem Teilgebiet nur mit der LES gut zu erfassen, bietet eine bidirektionale Kopplung von zonalen RANS- und LES-Lösungen innerhalb einer hybriden Simulation den Vorteil, dass der Einflussbereich des statistischen Turbulenzmodells eingeschränkt und damit die Aussicht auf eine bessere Qualität der Gesamtlösung gesteigert wird. Das Konzept eines dieser Hybridverfahren ist in Abbildung 2-6 dargestellt. Die darin skizzierte Detached-Eddy-Simulation kommt in der vorliegenden Arbeit zur Anwendung und wird daher im Weiteren näher vorgestellt.

2.3.5 Detached-Eddy-Simulation (DES)

Eine für aerodynamische und -akustische Berechnungen gleichermaßen attraktive Kombination ist in der RANS-Simulation anliegender Grenzschichten in Verbindung mit der LES von massiv abgelösten Strömungsstrukturen zu sehen. Genau diese Aufteilung wurde von Spalart et al. mit Einführung der „Detached-Eddy-Simulation“ (DES) beabsichtigt [207] (siehe Abbildung 2-6). Hintergrund für die zonal unterschiedliche Turbulenzbehandlung in einer DES ist einerseits, dass RANS-Simulationen zwar für anliegende Grenzschichten meist gute Vorhersagen bei geringem Rechenaufwand liefern können, sie aber oft ungeeignet sind, die bei massiver Strömungsablösung auftretende Wirbeldynamik mit ihren großen, anisotropen und in hohem Maße von der umströmten Geometrie geprägten Turbulenzstrukturen zu beschreiben. Andererseits ist die Erfassung energietragender Wirbel in einer abgelösten Strömung schon mit verhältnismäßig grober Filterbreite und entsprechender Diskretisierung möglich, während die innerhalb turbulenter Grenzschichten aufzulösenden „großen“ Wirbelstrukturen insbesondere in Wandnähe tatsächlich so klein sind, dass eine LES dort nicht mit vertretbarem Aufwand durchführbar ist [207]. Beziehungsweise mit Worten von P. Bradshaw ausgedrückt: „in the viscous near-wall region *there are no large eddies*“ [160].

Selbst bei Verwendung von Wandmodellen für die Überbrückung der *viskosen Wandschicht* (siehe hierzu Abschnitt 3.3.3) erweist sich die Erfassung turbulenter Strukturen innerhalb dünner Grenzschichten als unverhältnismäßig teuer im Vergleich zum Konzept der DES [207]. Darüber hinaus kann man nicht generell annehmen, dass eine LES bei Verwendung von Wandfunktionen die gleiche Vorhersagequalität bietet, wie eine RANS bei vollständig aufgelöster Grenzschicht [22]. Da zudem die durch Interaktion großskaliger Turbulenz mit festen Oberflächen hervorgerufene Schallabstrahlung erheblich lauter als das Eigengeräusch turbulenter Grenzschichten einzuordnen ist [39, 195] und im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Betrachtung von Strömungen mit Ablösung im Vordergrund steht, erscheint es hier als unproblematisch, dass Grenzschichtlärm mit einer DES nicht direkt erfasst werden kann. Solange Grenzschichtlärm eine untergeordnete Rolle spielt, oder durch ein Modell repräsentiert werden kann, ist die DES zur Berechnung von Strömungsgeräuschen bei großer Reynoldszahl geradezu prädestiniert.

Die hybride DES kann aufbauend auf nahezu jedem beliebigen RANS-Turbulenzmodell umgesetzt werden [141]. Im Mittelpunkt einer DES-Formulierung steht dabei immer die Sensibilisierung des statistischen Turbulenzmodells auf eine lokale Gitterweite Δ bzw. auf die implizite LES-Filterbreite Δ . So soll zum einen ein Sensor für die automatische Erkennung von RANS- und LES-Regionen bereitgestellt und zum anderen die Voraussetzung für eine alternative Funktion des Turbulenzmodells als Feinstrukturmodell in LES-Bereichen geschaffen werden. Vorbild für diesen Feinstrukturmodus ist derzeit meist das Modell von Smagorinsky [199] (siehe Seite 52, Gleichung (2.97)), und die Unterscheidung zwischen

RANS- und LES-Bereichen mit dem sogenannten DES-Sensor geschieht durch das Vergleichen von RANS-Längenmaß und impliziter LES-Filterbreite, wobei der Feinstrukturmodus prinzipiell dort aktiviert wird, wo die lokale Gitterweite das lokale RANS-Längenmaß unterschreitet (siehe Abschnitt 2.3.8, Seite 55).

In der ersten DES-Formulierung wurde die hybride Funktionalität auf dem Eingleichungs-Turbulenzmodell von Spalart & Allmaras basierend umgesetzt, in welchem das RANS-Längenmaß durch den lokalen Abstand zur nächsten Wand bestimmt ist [205, 207]. Der Intention einer DES entsprechend, sollten somit nur wandferne Regionen bei hinreichender Auflösung im LES-Modus behandelt werden. Allerdings zeigte sich bald in komplexeren DES-Anwendungen, dass es mit einem Sensor dieser Form auf „zu feinen“ Gittern bereits innerhalb anliegender Grenzschichten zu einem unerwünschten Umschalten in den LES-Modus kommen konnte. Dies zog in der Regel einen drastischen Abbau der modellierten Wirbelviskosität und turbulenten Spannungen (engl. „modelled stress depletion“) nach sich, aufgrund dessen nicht nur reduzierte Wandreibung, sondern in einigen Fällen sogar eine „gitterinduzierte“ Strömungsablösung (engl. „grid-induced separation“) zu beobachten war. Dieses Problem konnte aber später mit Einführung der sogenannten Delayed-Detached-Eddy-Simulation (DDES) [206] behoben werden, weswegen im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorrangig diese weiterentwickelte DES-Methode zum Einsatz kommt. Die Gleichungen des hier exklusiv als Basis für die DDES verwendeten „SALSA“-Turbulenzmodells sind in Verbindung mit den entsprechenden LES-, DES- und DDES-Modifikationen in Abschnitt 2.3.8 zusammengestellt und werden dort in ihrer Funktionsweise kurz beschrieben. Eine umfassende Analyse der DES und ihrer Erweiterungen findet sich in [141].

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass es trotz automatischer Umschaltung zwischen RANS- und LES-Modus letztlich der Verantwortung des Anwenders einer (D)DES obliegt, durch geeignete Gestaltung des Gitters und insbesondere durch Bereitstellung einer adäquaten Auflösung in LES-Bereichen (siehe Tabelle 2-1 auf Seite 30, sowie Abschnitt 2.3.2, Seite 25 ff.) sicherzustellen, dass die angestrebte zonale Aufteilung sinnvoll gelingen und die hybride Simulation zu guten Ergebnissen führen kann [203]. In diesem Zusammenhang ist zu beachten, dass der Übergang von Reynolds-gemittelten zu gefilterten Größen bei Verwendung dieses Hybridverfahrens meist unscharf ist. Das heißt es gibt zwischen RANS- und LES-Bereichen keine klare Trennfläche, sondern eine Grauzone (engl. „grey-area“), in der die Turbulenz eine Art Pseudo-Transition von modellierten zu aufgelösten Schwankungen (bzw. umgekehrt) durchläuft. Dies geschieht beim Übergang von RANS- zu LES-Zonen durch graduellen Anwachsen von Instabilitäten im schwach viskosen LES-Bereich und unter Umständen beschleunigt durch Rezirkulation bereits aufgelöster Wirbel, während beim Übergang von LES- zu RANS-Bereichen die modellierte Viskosität ansteigt und in die RANS-Zone hineintransportierte turbulente Strukturen allmählich gedämpft werden.

2.3.6 Gefilterte/Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Um die dem hybriden Verfahren zugrunde liegenden LES- und RANS-Gleichungen kompakt und zu einer Einheit zusammengefasst darstellen zu können, ist es sinnvoll, zunächst spezielle Eigenschaften von Filterung und Reynolds-Mittelung sowie die für LES- bzw. RANS-Regionen getroffenen Annahmen und Definitionen vorzuschicken:

In LES-Bereichen werden die transportierten Variablen als gefilterte Größen betrachtet. Zur Anwendung des Faltungsprodukts (2.41) auf die Navier-Stokes-Gleichungen werden hier folgende Eigenschaften der Filteroperation vorausgesetzt:

$$F\overline{\phi + c\psi} = F\overline{\phi} + c F\overline{\psi}, \quad (2.54)$$

$$\frac{F\overline{\partial\phi}}{\partial s} \approx \frac{\partial F\overline{\phi}}{\partial s}, \quad (2.55)$$

wobei c eine Konstante und s eine beliebige räumliche oder zeitliche Koordinate darstellt. Es ist anzumerken, dass sich (2.54) unmittelbar aus (2.41) ergibt, während die Vertauschbarkeit mit partiellen Ableitungen in (2.55) theoretisch nur ohne Berandungen und nur für homogene Filterfunktionen gegeben ist [178]. Der durch inhomogene Filterfunktionen eingebrachte Kommutationsfehler hat in Simulationsverfahren mit einer Genauigkeit von zweiter Ordnung jedoch die gleiche Größenordnung wie der Abbruchfehler der numerischen Approximation [74], weshalb die Gültigkeit von (2.55) hier näherungsweise vorausgesetzt wird. Ein Ansatz zur Milderung von Kommutationsfehlern findet sich in [221].

Die Anwendung der Filteroperation (2.41) auf die Massenbilanz (2.1) führt in Verbindung mit (2.54) und (2.55) zunächst auf das gefilterte Produkt $F\overline{\varrho\overline{u}_i}$ im konvektiven Term, welches nicht unmittelbar aus separat gefilterten Größen $F\overline{\varrho}$ und $F\overline{\overline{u}_i}$ berechnet werden kann. Um eine Bestimmung der Differenz $F\overline{\varrho}F\overline{\overline{u}_i} - F\overline{\varrho\overline{u}_i}$ in der Massenbilanz sowie generell das Auftreten von $F\overline{\varrho\phi}$ Korrelationen in den gefilterten Gleichungen zu vermeiden, wird bei der Simulation kompressibler Strömungen üblicherweise die Substitution $F\overline{\varrho\phi} = F\overline{\varrho}F\overline{\tilde{\phi}}$ angesetzt, wobei man allgemein

$$F\overline{\tilde{\phi}} = \frac{F\overline{\varrho\phi}}{F\overline{\varrho}} \quad (2.56)$$

als massengewichtet gefilterte bzw. Favre-gefilterte Variable bezeichnet [68].

In RANS-Bereichen sind die transportierten Variablen als gemittelte Größen anzusehen. Da turbulente Schwankungsbewegungen mit Druck- und Dichtefluktuationen in Zusammenhang stehen, können sie sich zwar insbesondere in kompressiblen Simulationen weit über die wirbelbehaftete Quellregion hinaus bemerkbar machen [170], weswegen breitbandige

Schwankungen durchaus auch in RANS-Bereichen einer hybriden turbulenzauflösenden Simulation zu erwarten sind. Allerdings soll die RANS-Lösung lediglich eine von außen aufgeprägte Ausbreitung durch Turbulenz erzeugter Störungen abbilden und selbst keine turbulenten Quellmechanismen wiedergeben.

Weil die reynoldssche Mittelung (2.50) eine lineare Operation ist, kann die Gültigkeit der beiden Beziehungen

$$R\overline{\phi + c\psi} = R\overline{\phi} + c R\overline{\psi}, \quad (2.57)$$

$$\frac{R\overline{\partial\phi}}{\partial s} = \frac{\partial R\overline{\phi}}{\partial s} \quad (2.58)$$

in diesem Fall ohne Einschränkung vorausgesetzt werden. Bei der LES-Filterungsoperation war die Vertauschbarkeit von Filterung und Ableitung (2.55) dagegen nur näherungsweise gegeben. Analog zur Favre-Filterung (2.56) wird hier eine massengewichtete Mittelung bzw. Favre-Mittelung [225] eingeführt

$$R\widetilde{\phi} = \frac{R\overline{\rho\phi}}{R\overline{\rho}}, \quad (2.59)$$

um das Auftreten von $R\overline{\rho\phi}$ Korrelationen in den gemittelten Gleichungen zu vermeiden.

Aus der Definition (2.50) folgt, dass eine wiederholte Anwendung der Mittelungsoperation zu keiner weiteren Änderung führt, d. h. es gelten die Beziehungen

$$R\overline{R\overline{\phi}} = R\overline{\phi}, \quad R\overline{R\overline{\phi\psi}} = R\overline{\phi} R\overline{\psi} \quad (2.60)$$

und mit (2.59) ferner

$$R\widetilde{R\widetilde{\phi}} = R\widetilde{\phi}, \quad R\widetilde{R\widetilde{\phi\psi}} = R\widetilde{\phi} R\widetilde{\psi}. \quad (2.61)$$

Definiert man eine turbulente Schwankungsgröße ϕ' als Differenz zwischen Momentanwert ϕ und Ensemble-Mittelwert $R\overline{\phi}$ sowie eine turbulente Schwankungsgröße ϕ'' als Differenz zwischen Momentanwert ϕ und Favre-Mittelwert $R\widetilde{\phi}$, erhält man zwei Möglichkeiten zur Zerlegung des Momentanwerts:

$$\phi = R\overline{\phi} + \phi' = R\widetilde{\phi} + \phi''. \quad (2.62)$$

Mit (2.57)–(2.62) lässt sich zeigen, dass für die turbulenten Schwankungsgrößen allgemein die Gleichungen

$$R\overline{\phi'} = 0, \quad R\widetilde{\phi''} = 0, \quad R\overline{\rho\phi''} = 0 \quad (2.63)$$

gelten und der Zusammenhang

$$\overline{R\phi''} = \overline{R\phi} - \overline{R\tilde{\phi}} = -\frac{\overline{R\phi'\phi'}}{\overline{R\phi}} = -\frac{\overline{R\phi'\phi''}}{\overline{R\phi}} \quad (2.64)$$

erfüllt ist, woraus sich wiederum Beziehungen für ensemblegemittelte Doppel- und Tripelkorrelationen ableiten lassen [224]

$$\begin{aligned} \overline{R\phi\psi} &= \overline{R\phi} \overline{R\psi} + \overline{R\phi'\psi'}, \\ \overline{R\phi\psi} &= \overline{R\phi} \overline{R\tilde{\psi}} = \overline{R\phi} \left(\overline{R\tilde{\phi}} \overline{R\tilde{\psi}} + \overline{R\phi''\psi''} \right) = \overline{R\phi} \overline{R\tilde{\phi}} \overline{R\tilde{\psi}} + \overline{R\phi''\psi''}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Da mit (2.54), (2.55), (2.57) und (2.58) nicht nur für die reynoldssche Mittelung (2.50), sondern auch (in erster Näherung) für die Filterungsoperation (2.41) sowohl Linearität als auch Kommutativität mit partiellen Ableitungen vorausgesetzt wurden, muss in der nachfolgenden Darstellung der gefilterten bzw. Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen nicht mehr explizit zwischen Mittelung und Filterung unterschieden werden.

Die konstituierenden Gleichungen des Hybridverfahrens können nun abgeleitet werden.

Durch das Weglassen des hochgestellten R bzw. F beim Überstreichen wird von nun an bewusst eine übereinstimmende Kennzeichnung gemittelter und gefilterter Größen gewählt, um eine duale Interpretation der dargestellten Gleichungen zu ermöglichen.

Mit Einführung der massengewichteten Filterung/Mittelung $\overline{\rho u_i} = \overline{\rho} \tilde{u}_i$ gemäß (2.56) bzw. (2.59) für die drei Komponenten der Geschwindigkeit behält die Massenbilanz (2.1) nach Anwendung der Mittelung bzw. Filterung ihre ursprüngliche Form und lautet

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2.66)$$

Anwendung der Mittelungs- bzw. Filteroperation auf die Impulsbilanz (2.2) führt mit Hilfe der massengewichteten Mittelung/Filterung und nach Addition von $\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) / \partial x_j$ auf

$$\frac{\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ji}}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\underbrace{\overline{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}_{\tau_{ij}^{\text{mod}}} \right] + \overline{f_i}. \quad (2.67)$$

Mit $\tau_{ij}^{\text{mod}} = \tau_{ji}^{\text{mod}}$ ist darin der gegenüber (2.2) hinzugekommene symmetrische Spannungstensor abgekürzt. Dieser muss geeignet modelliert werden, damit die Wirkung der durch die Mittelung/Filterung ausgeblendeten Dynamik auf die in der Simulation transportierten Variablen abgebildet werden kann. Für den Fall einer reynoldsschen Mittelung verbleibt

aus der allgemeinen Zerlegung („Leonard-decomposition“, [178])

$$\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} = \widetilde{\widetilde{u_i} \widetilde{u_j}} - \widetilde{\widetilde{u_i}} \widetilde{\widetilde{u_j}} + \widetilde{u_i' u_j'} + \widetilde{u_i'' u_j''} + \widetilde{u_i' u_j''} \quad (2.68)$$

lediglich der letzte Term (vgl. (2.65)), woraus sich folgende Vereinfachung für τ_{ij}^{mod} ergibt:

$$\tau_{ij}^{\text{mod}} = \overline{\varrho u_i'' u_j''}. \quad (2.69)$$

Es muss betont werden, dass diese Beziehung i. A. *nicht* für die Filterungsoperation gilt. Die durch Fluktuationen der Zähigkeit im Reibungsspannungstensor τ_{ij} (2.6) auftretenden Nichtlinearitäten sind gegenüber den anderen Termen vernachlässigbar klein, er kann nach Mittelung/Filterung wie folgt angenähert werden [68, 71, 95]:

$$\overline{\tau_{ij}} \approx \mu(\widetilde{T}) \left[\left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]. \quad (2.70)$$

Die Anwendung der Mittelungs- bzw. Filterungsoperation auf die Energiegleichung (2.11) liefert unter Einbeziehung der massengewichteten Mittelung/Filterung und nach Addition der Terme $\partial(\overline{\varrho} C_p \widetilde{T} \widetilde{u}_i)/\partial x_i$ und $\widetilde{u}_i \partial \overline{p}/\partial x_i$ zunächst folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{\varrho} C_p \widetilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\varrho} C_p \widetilde{T} \widetilde{u}_i)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \widetilde{u}_i \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{q}_i}{\partial x_i} + \overline{\Phi} + \overline{q}_U \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{\varrho} C_p (T \widetilde{u}_i - \widetilde{T} \widetilde{u}_i) \right] + \left(\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \widetilde{u}_i \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Definiert man mit $\check{\Phi}$ ein Symbol für den berechenbaren Anteil der gefilterten/gemittelten Dissipationsfunktion $\overline{\Phi}$

$$\check{\Phi} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i}}, \quad (2.72)$$

lässt sich (2.71) unter Einbeziehung der gefilterten/gemittelten thermischen Zustandsgleichung idealer Gase (2.4)

$$\overline{p} = \overline{\varrho} R \widetilde{T} \quad (2.73)$$

mit $R = C_p - C_V$ nach kurzer Nebenrechnung wie folgt umformulieren [68]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{\varrho} C_p \widetilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\varrho} C_p \widetilde{T} \widetilde{u}_i)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \widetilde{u}_i \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{q}_i}{\partial x_i} + \check{\Phi} + \underbrace{(\overline{\Phi} - \check{\Phi})}_{\Phi^{\text{mod}}} + \overline{q}_U \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\underbrace{\overline{\varrho} C_V (T \widetilde{u}_i - \widetilde{T} \widetilde{u}_i)}_{q_i^{\text{mod}}} \right] - \underbrace{\left(p \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_i} - \overline{p} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_i} \right)}_{\approx 0}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

wobei der gemittelte/gefilterte Vektor der Wärmestromdichten \bar{q}_i durch

$$\bar{q}_i \approx -\lambda(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} = -\frac{\mu(\tilde{T}) C_p}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.75)$$

approximiert werden kann [68, 71, 95]. Da sich die Kontinuitätsgleichung (2.1) für inkompressible Strömung auf $\partial u_i / \partial x_i = 0$ reduziert, ist der Beitrag des letzten Terms in (2.74) bei kleiner Machzahl meist vernachlässigbar klein. Dagegen müssen sowohl der aus turbulenten Schwankungen resultierende Vektor der Feinstruktur- bzw. reynoldsschen Wärmestromdichten q_i^{mod} als auch die turbulente Dissipationsleistung Φ^{mod} geeignet modelliert werden. Für den Fall einer reynoldsschen Mittelung ergeben sich analog zu (2.68) nachfolgende Vereinfachungen:

$$q_i^{\text{mod}} = C_V \overline{\varrho T'' u_i''} \quad (2.76)$$

$$\Phi^{\text{mod}} = \tau_{ij} \overline{\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}}. \quad (2.77)$$

Auch hier sei explizit darauf hingewiesen, dass diese Beziehungen im Allgemeinen *nicht* für die Filteroperation gelten.

Während Φ^{mod} in turbulenten Strömungen großer Reynoldszahl im Fall einer Reynoldsmittelung ein Vielfaches der direkten Dissipation $\check{\Phi}$ betragen kann [95], ist $\Phi^{\text{mod}} = \bar{\Phi} - \check{\Phi}$ in einer LES meist vernachlässigbar klein [68]. Um den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht zu verletzen, muss aber die Bedingung $\check{\Phi} + \Phi^{\text{mod}} + \partial \bar{q}_i / \partial x_i \geq 0$ grundsätzlich gewährleistet sein [68]. Die drei infolge der Filterung/Mittelung entstandenen neuen Unbekannten τ_{ij}^{mod} , q_i^{mod} und Φ^{mod} bedürfen nun, um das Gleichungssystem wieder schließen zu können, einer gesonderten Betrachtung. Die beiden folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit dem zu diesem Zweck verwendeten Modell.

2.3.7 Schließungsannahmen

Im letzten Abschnitt sind die fundamentalen Erhaltungsgleichungen einer Filterung bzw. einer reynoldsschen Mittelung unterzogen worden, was zum Auftreten neuer unbekannter Terme in Impuls- und Energiegleichung geführt hat. Das Gleichungssystem ist zunächst nicht mehr geschlossen. Um eine Berechnung der Strömung trotzdem zu ermöglichen, bedient man sich eines Modells für die turbulenten Austauschvorgänge. Einige grundlegende Schließungsannahmen in Impulsbilanz und Energiebilanz werden nachfolgend beschrieben.

Modellierung unbekannter Größen in der Impulsbilanz

Abhängig von der verwendeten Filter- oder Mittelungsoperation werden die neuen Unbekannten τ_{ij}^{mod} im vorletzten Term der Gleichung (2.67) entweder als Feinstruktur- oder als Reynoldsspannungen bezeichnet. Der Zusatzterm beschreibt ursprünglich den Effekt von nicht in der Simulation erfasster turbulenter Konvektion auf die gefilterten/gemittelten Größen. Da durch turbulente Schwankungsbewegungen insbesondere die diffusiven Eigenschaften einer Strömung erheblich gesteigert werden, modelliert man den Austausch durch Turbulenz häufig mit Hilfe einer turbulenten Scheinzähigkeit oder Wirbelviskosität (siehe Abbildung 2-5, S. 36), welche die molekulare Zähigkeit um mehrere Zehnerpotenzen übersteigen kann.

Bei diesem 1877 von Boussinesq eingeführten Ansatz [18] werden die Feinstruktur- bzw. Reynoldsspannungen τ_{ij}^{mod} analog zu den molekularen Reibungsspannungen τ_{ij} behandelt, deren diffusive Eigenschaften in Gasen auf einen Austausch durch Molekularbewegungen und -kollisionen zurückzuführen sind [15]. Voraussetzung ist dabei die Spurfreiheit des zu modellierenden Spannungstensors, daher wird zunächst eine Zerlegung von τ_{ij}^{mod} in einen spurfreien Anteil τ_{ij}^{dev} und einen sphärischen Tensor durchgeführt

$$\tau_{ij}^{\text{dev}} = \tau_{ij}^{\text{mod}} - \frac{1}{3}\tau_{kk}^{\text{mod}}\delta_{ij} \quad \rightsquigarrow \quad \tau_{ij}^{\text{mod}} = \tau_{ij}^{\text{dev}} + \frac{1}{3}\tau_{kk}^{\text{mod}}\delta_{ij} \quad (2.78)$$

und dann der spurfreie Anteil durch eine mit den gefilterten/mittleren Geschwindigkeitsgradienten gekoppelte, isotrope Wirbelzähigkeit μ_t wie folgt ausgedrückt:

$$-\tau_{ij}^{\text{dev}} = \mu_t \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]. \quad (2.79)$$

Für den sphärischen Anteil ergibt sich im Fall einer reynoldsschen Mittelung aus (2.65) nachfolgende Vereinfachung:

$$\frac{1}{3}\tau_{kk}^{\text{mod}}\delta_{ij} = \frac{1}{3}\overline{\varrho u_k'' u_k''} \delta_{ij} = \frac{2}{3}\overline{\varrho} k \delta_{ij}, \quad (2.80)$$

wobei unabhängig von Filterung oder Mittelung mit

$$k = \frac{1}{2} \widetilde{u_k'' u_k''} \quad (2.81)$$

ein Symbol für die turbulente kinetische Energie der nicht in der Simulation aufgelösten (d. h. herausgefilterten/herausgemittelten) Fluktuationen definiert wird. Für den Fall einer Filterung kann die Beziehung (2.80) zwar nur als eine Näherung angesehen werden, die Gültigkeit der Gleichung wird jedoch im hier eingesetzten hybriden Verfahren generell vorausgesetzt.

Die sechs unbekanntenen Feinstruktur- bzw. Reynoldsspannungen werden auf diese Weise über zwei zusätzliche Variablen bestimmbar, es müssen „nur“ noch Beziehungen für die isotrope Wirbelzähigkeit μ_t und die spezifische kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegungen k gefunden werden. Setzt man den Wirbelzähigkeitsansatz (2.78)–(2.80) in (2.67) ein, erhält man in Verbindung mit (2.70) eine gefilterte/gemittelte Impulsgleichung, in der keine weiteren Unbekannten mehr auftreten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(\bar{p} + \frac{2}{3}\bar{\rho}k\right)}_{p^{\text{eff}}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \underbrace{(\mu + \mu_t)}_{\mu^{\text{eff}}} \left[\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\} + \bar{f}_i. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Der sphärische Anteil des Modells für die Feinstruktur- bzw. Reynoldsspannungen wird im Strömungslöser mit dem gefilterten/gemittelten Druck zu einem wirksamen oder effektiven Druck p^{eff} zusammengefasst. Die im diffusiven Term auftretende Summe aus molekularer Zähigkeit und turbulenter Scheinzähigkeit wird dementsprechend auch als wirksame oder effektive Zähigkeit μ^{eff} bezeichnet.

Modellierung unbekannter Größen in der Energiebilanz

In Folge der turbulenten Schwankungsbewegungen findet neben dem Austausch von Impuls auch ein Energietransport statt. Dieser wird in der Energiegleichung (2.74) in Anlehnung an (2.7) und (2.79) durch eine mit den gefilterten/gemittelten Temperaturgradienten gekoppelte, turbulente Wärmeleitfähigkeit λ_t ausgedrückt

$$q_i^{\text{mod}} = -\lambda_t \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i} = -\frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i}, \quad (2.83)$$

wobei im zweiten Schritt analog zu (2.75) eine turbulente Prandtlzahl $Pr_t = \mu_t C_p / \lambda_t$ als dimensionslose Kennzahl für das Verhältnis von turbulentem Impuls- zu Energietransport eingeführt wird. Mit (2.77) kann die mittlere spezifische Leistung schwankender Reibungsspannungen für den Fall einer reynoldsschen Mittelung auch durch

$$\Phi^{\text{mod}} = \bar{\rho} \varepsilon, \quad (2.84)$$

ausgedrückt werden, wobei unabhängig von Filterung oder Mittelung mit

$$\varepsilon = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} / \bar{\rho} = \overline{\frac{\tau_{ij}}{\rho} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \quad (2.85)$$

ein Symbol für die massenspezifische Dissipation von kinetischer Energie durch nicht in der Simulation erfasste (d. h. herausgefilterte/herausgemittelte) Reibungsspannungen definiert wird. Die Beziehung (2.84) kann für den Fall einer Filterung ebenfalls nur als eine Näherung angesehen werden, jedoch wird auch die Gültigkeit dieser Gleichung im hier eingesetzten hybriden Verfahren generell vorausgesetzt.

Der Wirbeldiffusionsansatz (2.83) führt in Verbindung mit (2.84) schließlich auf folgende Form der gefilterten/gemittelten Energiegleichung:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} C_p \tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} C_p \tilde{T} \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\underbrace{C_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)}_{\lambda^{\text{eff}}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right] + \underbrace{\check{\Phi} + \bar{\rho} \varepsilon + \bar{q}_U}_{\Phi^{\text{eff}}} . \quad (2.86)$$

Während die Summe aus direkter und modellierter Dissipation darin als wirksame oder effektive Dissipation Φ^{eff} bezeichnet werden kann, lässt sich der Vorfaktor im diffusiven Term nach dem Gesetz von Fourier als eine wirksame oder effektive Wärmeleitfähigkeit λ^{eff} interpretieren. Die turbulente Prandtlzahl kann je nach Problemstellung im Bereich $0.5 \leq Pr_t \leq 1$ variieren [15], in dieser Arbeit wird der konstante Wert $Pr_t = 0.9$ angenommen.

Zusammenhänge zwischen den Turbulenzvariablen

In den gefilterten/gemittelten Bilanzgleichungen (2.82) und (2.86) treten mit k , ε und μ_t nur noch drei unbekannte Variablen in Erscheinung, welche die Wirkung der turbulenten Austauschvorgänge auf die gefilterte/gemittelte Grundströmung abbilden sollen. Natürlich stellt diese Art der funktionalen Modellierung infolge der mit (2.79), (2.80), (2.83) und (2.84) getroffenen Annahmen eine ganz erhebliche und nicht immer zu rechtfertigende Vereinfachung dar. So weist bereits der isotrope Zusammenhang zwischen den ursprünglich sechs unbekanntem Reynoldsspannungen und der Scherung der mittleren Strömung in (2.79) strukturelle Defizite auf, welche in RANS-Simulationen von abgelösten Strömungen zu sehr unbefriedigenden Ergebnissen führen können [174]. Dennoch sind statistische Turbulenzmodelle auf dieser Basis in vielen Fällen auch mit Erfolg einsetzbar, was sich nicht zuletzt anhand deren weiter Verbreitung in freien und kommerziellen Softwarepaketen zur Strömungssimulation ablesen lässt. Da anliegende turbulente Grenzschichten meist bereits sehr gut von linearen Wirbelviskositätsmodellen wiedergegeben werden [62], und die Turbulenz in abgelösten Strömungsbereichen ohnehin als dominierende Geräuschquelle im Sinne einer Grobstruktursimulation direkt erfasst werden soll (wodurch die Modellierung erheblich an Einfluss verliert), erscheinen oben getroffene Schließungsannahmen hier trotz ihrer Defizite als geeignet. Alternative Modellierungsansätze (siehe Abbildung 2-5, S. 36) werden daher im Rahmen dieser Arbeit nicht verfolgt, es sei an dieser Stelle lediglich

auf sehr umfangreiche Möglichkeiten in der statistischen Turbulenz- [42, 175, 225] und Feinstrukturmodellierung [71, 179] hingewiesen.

Wenn man annimmt, dass k , ε und μ_t allein abhängig vom lokalen Turbulenzzustand sind, lassen sich durch Dimensionsbetrachtungen weitere nützliche Beziehungen zwischen den Turbulenzvariablen herstellen [225]

$$\mu_t \sim \bar{\varrho} \ell_t u_t \sim \bar{\varrho} \ell_t \sqrt{k} \quad \text{und} \quad \varepsilon \sim \frac{k^{3/2}}{\ell_t}. \quad (2.87)$$

Hierin stellt ℓ_t wieder ein integrales turbulentes Längenmaß dar, welches die Ausdehnung der energietragenden Wirbel charakterisieren soll, während u_t ein für die turbulenten Schwankungsbewegungen charakteristisches Geschwindigkeitsmaß bezeichnet, das alternativ mit Hilfe der turbulenten kinetischen Energie über $u_t \sim \sqrt{k}$ ausgedrückt werden kann [42] (vgl. Abschnitt 2.3, S. 24). Durch Einführung eines Proportionalitätsfaktors c_μ erhält man schließlich aus (2.87) eine Gleichung, welche die drei noch unbekanntenen Turbulenzvariablen aus (2.82) und (2.86) miteinander in direkte Beziehung setzt:

$$\mu_t = c_\mu \bar{\varrho} \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (2.88)$$

Setzt man Kenntnis von c_μ voraus, fehlen zur Vervollständigung des Gleichungssystems somit nur noch zwei Gleichungen. Statistische Turbulenzmodelle, welche die Lösung von zwei zusätzlichen Transportgleichungen erfordern (z. B. für k und ε), sind zu diesem Zweck sehr weit verbreitet. Das hier eingesetzte, hybride Turbulenz- und Feinstrukturmodell stützt sich dagegen auf die Lösung nur einer zusätzlichen Transportgleichung (für eine zur Wirbelviskosität μ_t proportionale Variable) sowie auf die Bradshaw-Hypothese und je nach Betriebsart entweder auf die lokale Filterbreite oder auf den Wandabstand als ein charakteristisches turbulentes Längenmaß. Das Modell wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

2.3.8 Hybrides Strain-Adaptive-Linear-Spalart-Allmaras-Modell (SALSA-RANS/LES-Modell)

Das im Strömungslöser ELAN implementierte hybride SALSA-RANS/LES-Modell umfasst mehrere Ansätze zur Detached-Eddy-Simulation (DES) [206, 207] und ist von dem statistischen Turbulenzmodell von Spalart und Allmaras (SA-Modell) abgeleitet [205], welches speziell für aerodynamische Problemstellungen entwickelt worden ist und sich in der Praxis bereits vielfach als RANS-Modell bewährt hat [42, 62]. Da das Modell auf nur einer zusätzlichen Transportgleichung für eine modifizierte Wirbelzähigkeit $\check{\nu}_t$ basiert, bietet es verglichen mit herkömmlichen Zweigleichungsmodellen einen Rechenzeitvorteil. Allerdings

stützt sich das Modell nicht nur auf lokale Variablen, denn in die Berechnung geht mit d_w auch der Wandabstand als charakterisierendes Maß für die Abmessungen der großen, energietragenden Turbulenzstrukturen ein. Die Bestimmungsgleichungen des Modells sind im Folgenden angegeben, wobei die Darstellung gegenüber der ursprünglichen Veröffentlichung des RANS-Modells [176] zur Berücksichtigung eines je nach Betriebsart unterschiedlichen Längenmaßes im Dissipationsterm, ℓ_D , leicht angepasst wurde.

Wirbelzähigkeit:

$$\mu_t = \bar{\varrho} \nu_t = \bar{\varrho} f_{\nu 1} \check{\nu}_t \quad (2.89)$$

$\check{\nu}_t$ -Transportgleichung:

$$\frac{\partial(\bar{\varrho} \check{\nu}_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\varrho} \check{\nu}_t \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = P_{\check{\nu}_t} - D_{\check{\nu}_t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_{\check{\nu}_t}} \right) \frac{\partial \check{\nu}_t}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial \check{\nu}_t}{\partial x_i} \frac{\partial \check{\nu}_t}{\partial x_i} \frac{\bar{\varrho} C_{b2}}{Pr_{\check{\nu}_t}} \quad (2.90)$$

Produktions- und Dissipationsterm:

$$P_{\check{\nu}_t} = f_{b1} \bar{\varrho} \check{\nu}_t \check{S} \quad D_{\check{\nu}_t} = f_w \left(\frac{f_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{Pr_{\check{\nu}_t}} \right) \frac{\bar{\varrho} \check{\nu}_t^2}{\ell_D^2} \quad (2.91)$$

Modellfunktionen und Parameter:

$$f_{\nu 1} = \frac{(\nu_t^+)^3}{C_{\nu 1}^3 + (\nu_t^+)^3} \quad f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad g = r + C_{w2} (r^6 - r)$$

$$r = 1.6 \tanh \left(0.7 \frac{\check{\nu}_t}{\kappa^2 \ell_D^2 \check{S}} \right) \quad \check{S} = \tilde{S}^* \left[\left(\frac{1}{\nu_t^+} \right) + f_{\nu 1} \right] \quad \nu_t^+ = \frac{\check{\nu}_t}{\nu}$$

$$f_{b1} = C_{b1} \sqrt{\Gamma} \quad \Gamma = \min [1.25; \max (\gamma; 0.75)] \quad \gamma = \max (\alpha_1; \alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \left(1.01 \frac{\check{\nu}_t}{\kappa^2 d_w^2 \tilde{S}^*} \right)^{0.65} \quad \alpha_2 = \max \left[0; 1 - \tanh \left(\frac{\nu_t^+}{68} \right) \right]^{0.65}$$

$$C_{b1} = 0.1355 \quad C_{b2} = 0.622 \quad C_{w2} = 0.3 \quad C_{w3} = 2 \quad C_{\nu 1} = 7.1$$

$$\kappa = 0.41 \quad Pr_{\check{\nu}_t} = \frac{2}{3}$$

Beim SALSA-Modell wurden insbesondere Produktions- und Dissipationsterm gegenüber dem Basismodell modifiziert. Die Verwendung der Funktion f_{b1} anstelle des im SA-Modell festen Koeffizienten C_{b1} hat zum Ziel, dass Strömungszustände, in denen zwischen Produktion und Dissipation von Turbulenzenergie kein lokales Gleichgewicht herrscht,

realistischer wiedergegeben werden [176]. Entsprechend einer ursprünglich von Edwards und Chandra zur Verbesserung der Stabilität vorgeschlagenen Modifikation des SA-Modells [44] geht auch beim SALSA-Modell, anstelle des Betrags der Wirbelstärke, der Scherparameter \tilde{S}^* in Produktions- und Dissipationsterm ein. Dieser ist als skalierte Invariante des spurfreien Scherratentensors \tilde{S}_{ij}^* wie folgt aus den Geschwindigkeitsgradienten der gefilterten/gemittelten Grundströmung zu berechnen:

$$\tilde{S}^* = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}^*\tilde{S}_{ji}^*} \quad \text{mit} \quad \tilde{S}_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (2.92)$$

Auf Basis des Scherparameters \tilde{S}^* und (2.79) kann die Bradshaw-Hypothese $|\widetilde{u_1'' u_2''}| = 0.3 k$ unabhängig vom Koordinatensystem formuliert werden [134]. Man setzt

$$\nu_t \tilde{S}^* = 0.3 k = \sqrt{c_\mu} k \quad \text{mit} \quad c_\mu = 0.09, \quad (2.93)$$

wodurch sich (in Verbindung mit (2.88)) beim SALSA-Modell die beiden Turbulenzgrößen

$$k = \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \frac{\tilde{S}^*}{\sqrt{c_\mu}} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \tilde{S}^{*2} \quad (2.94)$$

bestimmen lassen und das Gleichungssystem somit geschlossen ist. Diesbezüglich ist anzumerken, dass zwar der konstante Wert $c_\mu = 0.09$ in (2.94) mit in die Berechnung von k eingeht, er aber dennoch keine globale Konstante für das SALSA-Modell darstellt. Stattdessen geht man bei der Herleitung des Produktionsterms P_{ν_t} implizit davon aus, dass sich der Anisotropieparameter c_μ reziprok proportional zum dimensionslosen Scherparameter $\tilde{S}^* k/\varepsilon$ verhält. Mit diesem durch Invariantentheorie belegbaren Zusammenhang kann ein zu starkes Anwachsen der turbulenten Produktion bei der Simulation strömungsmechanisch hochbelasteter Bauteile vermieden werden [175].

Die Größenordnungen der turbulenten kinetischen Energie, Wirbelzähigkeit und Energie-dissipation hängen von der Betriebsart (RANS/LES) des hybriden Turbulenz/Feinstrukturmodells ab, welche je nach Wahl des im Dissipationsterm D_{ν_t} verwendeten Längenmaßes

$$\ell_D = \begin{cases} \ell_{\text{RANS}} & : \text{RANS-Modus (global)} \\ \ell_{\text{LES}} & : \text{LES-Modus (global)} \\ \ell_{\text{DES}} & : \text{hybrider RANS/LES-Modus (lokal)} \\ \ell_{\text{DDES}} & : \text{hybrider RANS/LES-Modus (lokal, strömungssensitiv)} \end{cases} \quad (2.95)$$

entweder global definiert werden oder in Abhängigkeit von Auflösung und Strömungszustand lokal und instantan variieren kann. Die unterschiedlichen Möglichkeiten zur Definition des

Längenmaßes im Dissipationsterm und wesentliche damit einhergehende Eigenschaften des hybriden Hintergrundmodells werden nachfolgend beschrieben.

RANS-Modus: In dieser Betriebsart wird das turbulente Längenmaß im Dissipationsterm, ℓ_D , mit dem Wandabstand d_w gleichgesetzt, welcher zumindest in anliegenden turbulenten Grenzschichten ein sinnvolles Maß für die charakteristische Abmessung der großen, energetischen Turbulenzstrukturen darstellt. In der Form

$$\ell_{\text{RANS}} = d_w \quad (2.96)$$

wird das gesamte turbulente Spektrum vom statistischen Turbulenzmodell repräsentiert, und das simulierte Strömungsfeld ist als ensemblemittelte Grundströmung anzusehen (siehe Abschnitt 2.3.3). Beim SALSA-Modell führt das im instationären RANS-Modus vorhergesagte Maß an turbulenter Zähigkeit in der Regel zu einem quasi-periodischen Verhalten der Grundströmung, d. h. es werden keine stochastischen Schwankungsbewegungen direkt in der Simulation erfasst. Will man dagegen in einer instationären Simulation auch die energietragenden turbulenten Wirbelstrukturen als Bestandteil der Lösung und nicht als modellinhärente Zähigkeit erhalten, muss die turbulente Zähigkeit reduziert werden. Dies kann in der von Quelltermen dominierten $\check{\nu}_t$ -Transportgleichung zum Beispiel durch eine Verminderung des Produktionsterms oder, wie im nächsten Abschnitt beschrieben, durch eine Steigerung des Dissipationsterms geschehen.

LES-Modus: Als Vorbild für den LES-Modus ist das in Grobstruktursimulationen häufig verwendete Feinstruktur-Modell von Smagorinsky anzusehen [199]. Da im LES-Modus zumindest 80% der turbulenten kinetischen Energie direkt in der Simulation aufgelöst sein sollten [65], werden nur die Wirbel in Trägheits- und Dissipationsbereich funktional vom Feinstrukturmodell repräsentiert. Die dissipative Wirkung dieser herausgefilterten Skalen auf die gefilterte Grundströmung wird im Smagorinsky-Modell durch den Ansatz von Boussinesq (2.79) mit einer isotropen Wirbelzähigkeit $\mu_t = \mu_S$ abgebildet, welche auf der Scherrate der gefilterten Strömung basierend bestimmt wird:

$$\mu_S = \bar{\rho} (C_S \Delta)^2 \tilde{S} \quad \text{mit} \quad \tilde{S} = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ji}}. \quad (2.97)$$

Ein Vergleich mit (2.87) lässt die Interpretation zu, dass beim Smagorinsky-Modell die für die Feinstruktur charakteristischen Längen- und Geschwindigkeitsmaße zu $\ell_t = \Delta$ und $u_t = \Delta \tilde{S}$ gewählt wurden. Das Längenmaß Δ steht also in sehr enger Beziehung zu der Grob- und Feinstruktur definierenden Filterbreite Δ (siehe Abschnitt 2.3.2). Ausgehend von einer impliziten Filterung durch die strukturierte Finite-Volumen Diskretisierung kann Δ lokal als maximale Abmessung aus drei Koordinatenrichtungen eines Kontrollvolumens

(siehe Abbildung 3-1, S. 61) definiert werden:

$$\Delta = \max(|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_w|, |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_s|, |\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b|). \quad (2.98)$$

Auf unstrukturierten Gittern ist dagegen auch eine unter Umständen erheblich abweichende Definition von Δ auf Basis der Kubikwurzel des Kontrollvolumens gebräuchlich.

Der LES-Modus des hybriden SALSA-Modells basiert nun auf dem Ansatz, dass in Abhängigkeit der lokalen Gitterweite Δ der Dissipationsterm D_{ν_t} in (2.90) gesteigert und somit die modellierte Wirbelzähigkeit μ_t gegenüber einer Vorhersage im RANS-Modus von der Größenordnung eines Turbulenzmodells auf die eines Feinstrukturmodells reduziert wird. Dazu wird das turbulente Längenmaß in (2.95) nun nicht mehr mit dem Wandabstand d_w gleichgesetzt, sondern es wird stattdessen als charakteristisches Feinstruktur-Längenmaß in Abhängigkeit der lokalen Filterbreite formuliert

$$\ell_{\text{LES}} = \Psi C_{\text{DES}} \Delta. \quad (2.99)$$

Um nicht gleichzeitig die Produktion P_{ν_t} zu beeinflussen, wird der Wandabstand d_w im Nenner des Parameters α_1 von dieser Längenmaßsubstitution ausgenommen. Unter der Voraussetzung lokalen turbulenten Gleichgewichts, d. h. $P_{\nu_t} = D_{\nu_t}$, erhält man durch diese Redefinition des turbulenten Längenmaßes einen dem Smagorinsky-Modell (2.97) nachempfundenen Ausdruck für die dynamische turbulente Wirbelzähigkeit:

$$\mu_t = A \Psi^2 \underbrace{\bar{\rho} (C_{\text{DES}} \Delta)^2}_{\sim \mu_s} \tilde{S} \quad \text{mit} \quad A = \frac{f_{\nu 1} f_{b1}}{f_w \left(\frac{f_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+C_{b2}}{Pr_{\nu_t}} \right)} \tilde{S}. \quad (2.100)$$

Die Ψ -Funktion dient dabei dem Zweck, einem im LES-Modus unerwünschten Einfluss von in A enthaltenen und nur in Wandnähe benötigten Dämpfungsfunktionen entgegenzuwirken, welche im Wesentlichen sensitiv auf das Verhältnis von turbulenter zu molekularer Zähigkeit ν_t/ν reagieren. Aus (2.40) und (2.88) folgt $Re_t = c_\mu^{-1} \nu_t/\nu$, weshalb man diese Korrekturterme im Englischen auch als „low-Reynolds number terms“ bezeichnet [206]. Gemäß der Herleitung in [141] ist die Ψ -Funktion so konstruiert, dass zum einen der Vorfaktor $A \Psi^2$ für beliebige Viskositätsverhältnisse möglichst konstant bleibt und zum anderen im Grenzwert sehr großer Viskositätsverhältnisse (engl. „high-Reynolds limit“) mit $\Psi = 1$ die ursprünglich vorgeschlagene DES-Formulierung [207], d. h. $\ell_{\text{LES}} = C_{\text{DES}} \Delta$, wiederhergestellt wird. Die Definition der im hybriden SALSA-Modell implementierten Ψ -Funktion lautet [141]

$$\Psi^2 = \min \left\{ 10^2; \left[\frac{\max(f_{\nu 1}; 10^{-10})}{\max(\nu_t^+; 10^{-10})} + f_{\nu 1}^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (2.101)$$

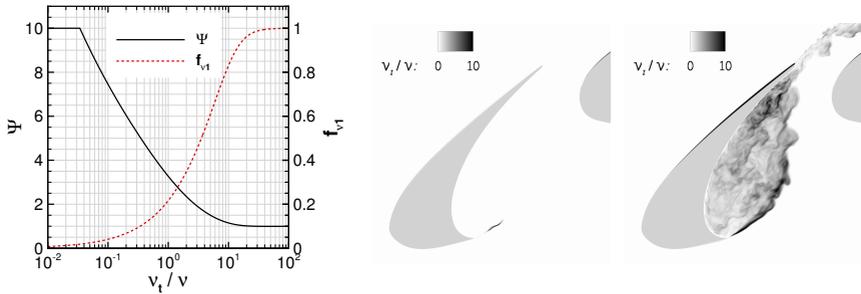


Abbildung 2-7: Abhängigkeit der Ψ -Funktion sowie der Dämpfungsfunktion $f_{\nu,1}$ vom Viskositätsverhältnis ν_t/ν (links). Momentaufnahmen von ν_t/ν in der Umgebung des Vorflügels einer Hochauftriebskonfiguration aus DDES auf Basis des hybriden SALSA-Modells ohne (Mitte) und mit implementierter Ψ -Funktion (rechts) [138].

Der Verlauf von Ψ in Abhängigkeit des Viskositätsverhältnisses ist in Abbildung 2-7 mit dem der Dämpfungsfunktion $f_{\nu,1}$ gegenübergestellt. Der bei Unterschreiten von $\nu_t/\nu \approx 30$ beginnende Anstieg der Ψ -Funktion fällt dabei mit der Aktivierung der Dämpfungsfunktion $f_{\nu,1}$ zusammen, um deren Einfluss und den der übrigen Funktionen in A zu kompensieren. Wie wichtig diese Kompensation sein kann, wird an der Gegenüberstellung zweier DDES Momentaufnahmen mit und ohne Ψ -Funktion in Abbildung 2-7 deutlich. Der Vergleich zeigt, dass nicht nur die Viskositätsverhältnisse in der abgelösten Strömung, sondern auch die DDES-Schutzfunktion für anliegende Grenzschichten (siehe Seite 55) von einer ungewünschten Dämpfung durch low-Reynolds Terme betroffen sein können [142].

Um eine korrekte Funktionsweise des SALSA-Turbulenzmodells im Feinstruktur-Modus sicherzustellen, ist der Parameter C_{DES} geeignet zu kalibrieren, was beispielsweise durch Simulation des Zerfalls isotroper Turbulenz geschehen kann (siehe Abschnitt 4.2). Alternativ ist auch eine analytische Ableitung von C_{DES} auf Basis einer unter Umständen bereits bekannten Smagorinsky-Konstante C_S möglich, indem man die Ausdrücke (2.97) für μ_S sowie (2.100) für μ_t bei turbulentem Gleichgewicht vergleicht. Für große Werte von ν_t/ν folgt mit $\Psi = 1$ der Zusammenhang

$$C_S = \sqrt{A^*} C_{DES}, \quad (2.102)$$

wobei $A^* \approx 0.0993$ den asymptotischen Grenzwert der A -Funktion (2.100) im sogenannten „high-Reynolds limit“ bezeichnet [141]. Die „Konstante“ des Smagorinsky-Modells kann allerdings je nach Diskretisierung und Strömungstyp im Bereich $C_S = 0.1 \dots 0.2$ variieren [68]. Auch unter der Voraussetzung lokalen turbulenten Gleichgewichts und mit Beschränkung auf ein isotropes Energiespektrum lässt sich C_S (und damit C_{DES}) nicht eindeutig festlegen, zwei theoretisch mögliche Werte sind $C_S = 0.148$ und $C_S = 0.18$ [179].

DES-Modus: Der DES-Modus stellt eine Kombination aus RANS- und LES-Modus dar und versucht dabei die Vorteile beider Verfahren zu vereinen (siehe Abschnitt 2.3.5). Im DES-Modus wird das Umschalten vom RANS-Modus in den LES-Modus vorwiegend gitteradaptiv gesteuert, indem man das turbulente Längenmaß ℓ_{RANS} immer dann durch das Feinstruktur-Längenmaß ℓ_{LES} ersetzt, wenn dieses kleiner als der Wandabstand d_w wird:

$$\ell_{\text{DES}} = \min(\ell_{\text{RANS}}; \ell_{\text{LES}}) \quad (2.103)$$

Sieht man einmal von der Ψ -Funktion in (2.99) ab, ist diese Formulierung nur von geometrischen Größen abhängig und führt im Idealfall bei körperangepassten Gittern dazu, dass anliegende Wandgrenzschichten im RANS-Modus ($\ell_{\text{DES}} = d_w < \ell_{\text{LES}}$) und wandferne Regionen im LES-Modus ($\ell_{\text{DES}} = \ell_{\text{LES}} < d_w$) behandelt werden. Dem in Abbildung 2-6 skizzierten, ursprünglichen Konzept der DES entsprechend, werden demnach die großskaligen Wirbel in einer abgelösten Strömung direkt in der Simulation erfasst, während die kleinskalige Grenzschichtturbulenz vollständig durch das Turbulenzmodell abgebildet wird. Durch diese hybride Turbulenzbehandlung sinkt der Bedarf an räumlicher und zeitlicher Auflösung gegenüber einer globalen LES in der Regel beträchtlich, da zur Auflösung der Grobstruktur in wandnahen Bereichen ($\ell_m \sim d_w$), verglichen mit wandfernen Bereichen ($\ell_m \sim \ell_{\text{ref}}$), extrem feine Gitter notwendig sind (vgl. Tabelle 2-1, S. 30).

DDES-Modus: Das zusätzliche D in der Bezeichnung DDES steht für „delayed“ und soll auf ein verzögertes Umschalten in den LES-Modus hinweisen (siehe Abschnitt 2.3.5). Durch Verwendung geeigneter strömungssensitiver Funktionen im Längenmaß ℓ_{DDES} werden anliegende turbulente Grenzschichten vor einem Umschalten in den LES-Modus geschützt, auch wenn das effektive LES-Längenmaß lokal den Wandabstand unterschreitet [206]. Die Definition des Längenmaßes im DDES-Modus lautet:

$$\ell_{\text{DDES}} = \ell_{\text{RANS}} - f_d \max(0; \ell_{\text{RANS}} - \ell_{\text{LES}}) \quad (2.104)$$

$$\text{mit } f_d = 1 - \tanh \left[(8r_d)^3 \right] \quad (2.105)$$

$$\text{und } r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\kappa^2 d_w^2 \max \left(\sqrt{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}; 10^{-10} \right)}. \quad (2.106)$$

Die Schutzfunktion $f_d(r_d)$ und die Sensorfunktion r_d sind so konstruiert, dass sich innerhalb turbulenter Grenzschichten möglichst lange $f_d = 0$ ergibt und erst am Grenzschichttrand ein steiler Anstieg auf den Wert $f_d = 1$ erfolgt. Innerhalb fein aufgelöster Grenzschichtbereiche bleibt somit in Gleichung (2.104) das RANS-Längenmaß aktiv, auch wenn die Längenmaßdifferenz $\ell_{\text{RANS}} - \ell_{\text{LES}}$ positiv ausfallen sollte. Wenn aber aufgelöste turbulente Strukturen in eine anliegende Grenzschicht gelangen, kann dennoch ein Umschalten in den

LES-Modus erfolgen, sofern es die lokale Gitterauflösung zulässt. Von einer Verwendung des LES-Modus der DDES als LES-Wandmodell ist jedoch aufgrund von Defiziten in der Wiedergabe des logarithmischen Bereiches turbulenter Grenzschichten abzuraten [141]. Für diesen Einsatzbereich ist die „improved“ DDES (IDDES) [197] besser geeignet.

Hybride Konvektionsbehandlung: Da die Auswirkungen einer durch die Längenmaßsubstitution $\ell_{\text{RANS}} \leftarrow \ell_{\text{LES}}$ reduzierten Wirbelzähigkeit in den dissipativen Eigenschaften einer upwind-basierten Flussapproximation gemäß (A.20) oder (A.22) untergehen können [22] (vgl. Abb. 4-7, S. 119), wird in ELAN sowohl für den DES- als auch für den DDES-Modus ein hybrides Konvektionsschema verwendet (siehe Abschnitt 3.1.2, S. 64), welches ausgehend von einer solchen für rotationsfreie oder grob vernetzte Bereiche geeigneten Konvektionsbehandlung in ein zentrales Schema für fein vernetzte, rotationsbehaftete LES-Bereiche übergeht, um dort die numerische Dissipation auf ein notwendiges Minimum zu beschränken. Das zentrale Schema (A.21) enthält zwar nur ungerade (dispersive) Fehlerterme, im verwendeten Verfahren verbleibt aber immer noch eine dissipative Fehlerquelle in Form der Impulsinterpolation (siehe Abschnitt 3.2.1). Ein sanfter Übergang zwischen RANS- und LES-Bereichen in einer hybriden Simulation wird durch die Verwendung einer geeigneten Mischungsfunktion $\sigma(x_i, t)$ in Gleichung (3.13) sichergestellt, welche die Wichtung der Konvektionsschemata in Abhängigkeit von Strömungsparametern vorteilhaft an die lokale Strömungssituation anpasst. Die implementierte Definition von σ wurde von Travin et al. entwickelt [216] und stützt sich auf ein turbulentes Längenmaß, integrale Längen- und Geschwindigkeitsmaße sowie auf die skalierten Invarianten von Scher- und Wirbeltensor, \tilde{S}^* (2.92) und $\tilde{\Omega} = \sqrt{2\tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ji}}$, um zwischen scherungs- und rotationsdominierten Bereichen unterscheiden zu können. Die Definition der Mischungsfunktion lautet

$$\begin{aligned} \sigma &= \max \left[\sigma_{\max} \tanh \left(A^{C_{H1}} \right), \sigma_{\min} \right], \\ A &= C_{H2} \max \left(\frac{C_{\text{DES}} \Delta}{\ell_{\text{turb}} g} - \frac{1}{2}, 0 \right), \quad \ell_{\text{turb}} = \sqrt{\frac{\nu_t + \nu}{c_\mu^{3/2} K}}, \quad g = \tanh \left(B^4 \right), \\ K &= \max \left(\sqrt{\frac{\tilde{S}^{*2} + \tilde{\Omega}^2}{2}}, \frac{0.1}{\tau_0} \right), \quad B = \frac{C_{H3} \tilde{\Omega} \max(\tilde{S}^*, \tilde{\Omega})}{\max \left[(\tilde{S}^{*2} + \tilde{\Omega}^2)/2, \Omega_{\min}^2 \right]}, \\ C_{H1} &= 3, \quad C_{H2} = 1, \quad C_{H3} = 2, \quad \tau_0 = \frac{\ell_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}}}, \quad \Omega_{\min} = \frac{10^{-3}}{\tau_0}. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Über den Verlauf des Tangens hyperbolicus, eine obere Schranke σ_{\max} und eine untere Schranke σ_{\min} wird die Mischungsfunktion dabei auf den Bereich $\sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}$ beschränkt. Für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten DDES-Simulationen wurden als Grenzwerte $\sigma_{\min} = 0$ und $\sigma_{\max} = 1$ eingestellt.

2.4 Zusammenfassung zu lösender Transportgleichungen

Bevor im nächsten Kapitel auf die diskrete Approximation der kontinuierlichen Bilanzgleichungen im Simulationsverfahren eingegangen wird, ist es zweckmäßig, das konstituierende Gleichungssystem kurz zusammenzufassen.

Aus Gründen der Übersicht wird nachfolgend auf die Kennzeichnung Favre- bzw. Reynolds-gefilterter/gemittelter Größen verzichtet:

$$\tilde{u}_i \leftarrow u_i, \quad \tilde{T} \leftarrow T, \quad \bar{\varrho} \leftarrow \varrho, \quad \bar{p} \leftarrow p, \quad \bar{f}_i \leftarrow f_i \quad \text{und} \quad \bar{q}_U \leftarrow q_U.$$

Damit lautet die gefilterte/gemittelte Massenbilanz (2.66)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.108)$$

und lässt sich formal nicht mehr von ihrer Ausgangsform (2.1) unterscheiden. Für die gefilterte/gemittelte Impulsbilanz (2.82) kann man in Anlehnung an Gleichung (2.2) auch

$$\frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^{\text{eff}}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}^{\text{eff}}}{\partial x_j} + f_i \quad (2.109)$$

schreiben, wobei die mit einem hochgestellten Kürzel „eff“ gekennzeichneten Größen

$$\tau_{ij}^{\text{eff}} = \mu^{\text{eff}} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] = \tau_{ji}^{\text{eff}} \quad (2.110)$$

den effektiven symmetrischen Reibungsspannungstensor, $\mu^{\text{eff}} = \mu + \mu_t$ die effektive dynamische Zähigkeit und $p^{\text{eff}} = p + \frac{2}{3} \varrho k$ den effektiven Druck darstellen. Analog zu Gleichung (2.11) findet man für die gefilterte/gemittelte Energiebilanz (2.86) folgenden Ausdruck:

$$\frac{\partial(\varrho C_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho C_p T u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i^{\text{eff}}}{\partial x_i} + \Phi^{\text{eff}} + q_U, \quad (2.111)$$

worin $q_i^{\text{eff}} = -\lambda^{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_i}$ den effektiven Wärmestromdichtevektor, $\lambda^{\text{eff}} = C_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)$ die effektive Wärmeleitfähigkeit sowie $\Phi^{\text{eff}} = \check{\Phi} + \varrho \varepsilon$ die effektive Dissipation bezeichnen. Zur Vervollständigung des Gleichungssystems fehlt mit der Zustandsgleichung (2.4) und den Beziehungen (2.8), (2.89) und (2.94) nur noch die Transportgleichung (2.90) für die modifizierte Wirbelviskosität des hybriden SALSA-Modells,

$$\frac{\partial(\varrho \check{\nu}_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \check{\nu}_t u_i)}{\partial x_i} = P_{\check{\nu}_t} - D_{\check{\nu}_t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_{\check{\nu}_t}} \right) \frac{\partial \check{\nu}_t}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial \check{\nu}_t}{\partial x_i} \frac{\partial \check{\nu}_t}{\partial x_i} \frac{\varrho C_{b2}}{Pr_{\check{\nu}_t}}. \quad (2.112)$$

Die umseitig zusammengestellten Transportgleichungen lassen insbesondere auf ihren linken Seiten Gemeinsamkeiten erkennen, welche man sich bei der Diskretisierung und bei der programmtechnischen Umsetzung dieser zu Nutze machen kann. Abschließend sei erneut darauf hingewiesen, dass es sich bei den transportierten Strömungsgrößen in Abhängigkeit der effektiv wirksamen Terme auf den rechten Seiten von (2.109) und (2.111) um ensemblemittelte, gefilterte oder auch, im Falle verschwindender Turbulenz- bzw. Feinstrukturgrößen, um primitive Variablen handeln kann. Ein Übergang zwischen diesen theoretisch sehr unterschiedlichen Betrachtungsweisen ist innerhalb einer hybriden Simulation zu erwarten. Das Verhalten der Strömung wird dabei maßgeblich durch die Größenordnungen der vom Turbulenzmodell abhängigen, effektiven Terme in Impuls- und Energiebilanz festgelegt.

3 Numerisches Verfahren

Zur Vorhersage von Strömungsgeräuschen wird, wie in Abschnitt 2.2 motiviert, ein aus zwei Schritten bestehendes numerisches Verfahren eingesetzt.

Der im ersten Schritt verwendete Strömungslöser **ELAN** wurde ursprünglich von L. Xue zur dreidimensionalen Simulation komplexer turbulenter Strömungen entwickelt. Hintergründe zu den im Programm verwendeten numerischen Approximationen sowie deren technische Umsetzung sind in [227] ausführlich behandelt. Obwohl in **ELAN** von Anfang an auch die Berechnung instationärer und kompressibler Strömungen vorgesehen war, zeigte sich im Rahmen aeroakustischer Simulationen die Notwendigkeit, an Teilen des vorhandenen Programms Modifikationen vorzunehmen, um eine zuverlässige Vorhersage kleiner akustischer Störungen zu ermöglichen. Die zu diesem Zweck implementierten Änderungen werden in Abschnitt 3.2 detailliert hergeleitet und beschrieben. Zuvor soll jedoch die zugrunde liegende Umsetzung der Finite-Volumen-Methode (FVM) in **ELAN** kurz vorgestellt werden.

Im zweiten Schritt wird der von D. Eschricht entwickelte FWH-Löser **C3NOISE** eingesetzt [47], um den Schalldruck an entfernten Beobachterpositionen zu berechnen. Dieses Programm konnte nahezu unmodifiziert verwendet werden, es wurde lediglich um die Berücksichtigung eines Anstellwinkels der umströmten Geometrie erweitert. Wesentliche Merkmale dieses Verfahrens zur akustischen Fernfeldextrapolation werden in Abschnitt 3.4 behandelt.

3.1 Finite-Volumen-Methode

Die numerische Lösung der kontinuierlich formulierten Transportgleichungen erfolgt bei der verwendeten FVM auf einem diskreten Rechengitter, welches sich lückenlos und ohne Überlappung aus vielen einzelnen Kontrollvolumen zusammensetzt und die zu untersuchende Geometrie körperangepasst umgibt. Ausgangspunkt der Diskretisierung ist dabei naturgemäß die integrale Form der Erhaltungsgleichungen. Sind die Gleichungen wie in Abschnitt (2.4) in ihrer differentiellen Form gegeben, werden sie zunächst über ein finites Volumen (FV) integriert bevor man diskrete Approximationen zur Bestimmung von Integralen, Variablen und Gradienten einführt und so in jedem einzelnen FV nur die Abhängigkeit einer Variable ϕ von ihrer unmittelbaren Umgebung berücksichtigt.

Das infolge der lokalen Approximationen entstehende algebraische Gleichungssystem skaliert mit der Anzahl von FV und wird meist mit einem iterativen Löser zur Konvergenz gebracht. Sind die Bilanzgleichungen schließlich innerhalb jedes einzelnen Kontrollvolumens erfüllt, wird bei der FVM durch Lösung einer integralen Form der Gleichungen auch die Erfüllung der globalen Bilanzen über das gesamte Rechengebiet garantiert, sofern die Berechnung von Oberflächenintegralen auf FV-Grenzflächen einheitlich für beide benachbarten Kontrollvolumina durchgeführt wird [56]. Die in ELAN umgesetzte Diskretisierung der einzelnen Terme in den Transportgleichungen für Masse, Impuls, Energie und Wirbelviskosität soll nun anhand einer generischen Gleichung für die skalare Transportgröße ϕ vorgestellt werden.

3.1.1 Generische Transportgleichung

Die in Abschnitt 2.4 zusammengefassten Ausgangsgleichungen des numerischen Verfahrens weisen aufgrund ihrer kontinuumsmechanischen Herkunft deutliche Ähnlichkeiten zueinander auf und lassen sich durch geeignete Wahl der massenspezifischen Transportgröße ϕ , eines Diffusionskoeffizienten Γ_ϕ und einer Quelle S_ϕ aus der folgenden Transportgleichung generieren:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\substack{\text{lokale} \\ \text{zeitliche} \\ \text{Änderung}}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho\phi u_j)}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{Quelle}}. \quad (3.1)$$

Alle Terme, die sich nicht als zeitliche Änderung, Konvektion oder Diffusion darstellen lassen, werden im Quellterm S_ϕ zusammengefasst. Eine Integration der generischen Transportgleichung (3.1) über ein beliebiges FV liefert unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß

$$\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \oint_{A(V)} \rho\phi u_j dA_j = \oint_{A(V)} \Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j} dA_j + \int_V S_\phi dV. \quad (3.2)$$

Diese generische Gleichung stellt den Ausgangspunkt für die Diskretisierung dar.

3.1.2 Diskretisierung

Durch die nachfolgend beschriebene Diskretisierung wird eine kontinuierlich formulierte Integro-Differentialgleichung vom Typ (3.2) in ein System diskreter, algebraischer Gleichungen überführt, indem für jedes einzelne FV eine Bilanz von folgender Art aufgestellt wird:

$$a_F \phi_F = \sum_F a_F \phi_F + S \quad \text{mit} \quad F = B, T, S, N, W, E. \quad (3.3)$$

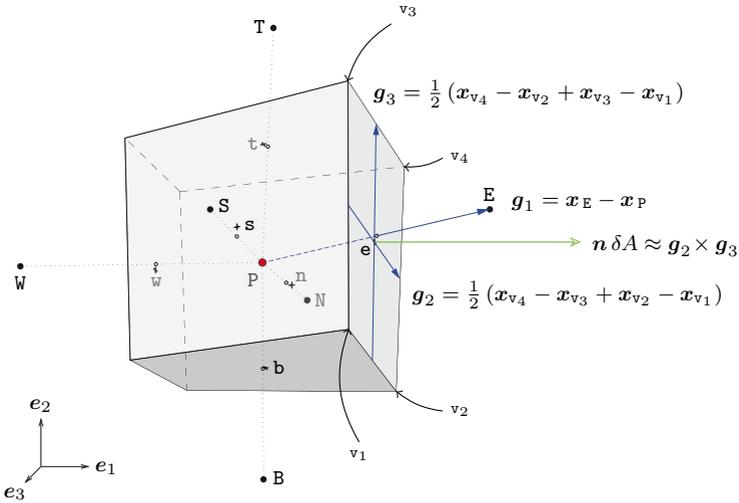


Abbildung 3-1: Finites Volumen mit Kompassnotation und kovarianten Basisvektoren für $\mathbf{f} = \mathbf{e}$.

Mit den Großbuchstaben B, T, S, N, W, E und P werden dabei nach der Kompassnotation gemäß Abbildung 3-1 die Zentren der direkt am lokalen Gleichgewicht beteiligten Kontrollvolumen benannt. Die dazugehörigen Kleinbuchstaben $\mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{e}$ werden verwendet, um am Punkt P die dem jeweiligen Nachbarvolumen F zugewandte Fläche des zentralen FV zu kennzeichnen. Da bei der Diskretisierung von (3.2) in der Regel nicht zwischen den einzelnen Flächen unterschieden werden muss, wird eine beliebige Fläche des zentralen FV nachfolgend mit \mathbf{f} bezeichnet, das gegenüberliegende FV-Zentrum entsprechend mit F und der zu ϕ_F gehörige Nachbarkoeffizient mit a_F .

Setzt man für jedes FV eines aus n FV bestehenden Gitterblocks eine lokale Bilanz vom Typ (3.3) an, lässt sich aus den n diskreten Differenzgleichungen vom Typ (3.3) folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Aufgrund der Struktur der Gleichung (3.3) im 3D enthält jede Zeile der Koeffizientenmatrix aus Gleichung (3.4) maximal 7 von 0 verschiedene Elemente, man bezeichnet sie daher als dünn besetzt. Die Hauptdiagonale der Matrix wird von den zentralen Koeffizienten a_P gebildet. Aus den übrigen Koeffizienten entstehen bei strukturierten Gittern 6 Nebendiagonalen, wodurch die Matrix insgesamt eine heptadiagonale Bandstruktur erhält.

Die dünne und regelmäßige Besetzung der Koeffizientenmatrix wird vom Verfahren ausgenutzt, indem zur Lösung des Gleichungssystems ein impliziter SIP-Solver verwendet wird [227]. Gegenüber direkten Lösern, welche die Speicherung der gesamten Koeffizientenmatrix erfordern, zeichnet sich dieser iterative Löser durch minimalen Speicherbedarf und geringen Rechenaufwand aus. Durch eine Aufteilung des Rechengebietes in mehrere strukturierte Blöcke, ist neben der Realisierbarkeit moderat komplexer Geometrien auch die Möglichkeit zur Parallelschaltung von mehreren Rechnern zu einem Rechnerverbund gegeben. Zur Kommunikation zwischen den Rechnern des Verbundes wird dabei das standardisierte „Message Passing Interface“ (MPI) eingesetzt.

Die numerischen Approximationen der einzelnen Terme in der generischen Gleichung (3.2), die zu algebraischen Ausdrücken vom Typ (3.3) führen, werden nun der Reihe nach vorgestellt.

Lokale zeitliche Änderung: Zunächst wird der transiente Term aus Gleichung (3.2) mit Hilfe von Kettenregel und Kontinuitätsgleichung umformuliert:

$$\int_V \frac{\partial(\varrho\phi)}{\partial t} dV = \int_V \varrho \frac{\partial\phi}{\partial t} dV + \int_V \phi \frac{\partial\varrho}{\partial t} dV \stackrel{(2.108)}{=} \underbrace{\int_V \varrho \frac{\partial\phi}{\partial t} dV}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\int_V \phi \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial x_i} dV}_{\textcircled{2}}. \quad (3.5)$$

Für den ersten Term der zeitlichen Änderung, $\textcircled{1}$, erhält man eine Approximation 2. Ordnung, indem die zellzentralen Werte ϱ_P bzw. ϕ_P zur Festlegung der Volumenmittelwerte von ϱ und ϕ innerhalb der Grenzen eines FV verwendet werden und mit dessen Volumen δV multipliziert wird [56] (siehe Anhang A.2.1):

$$\int_V \varrho \frac{\partial\phi}{\partial t} dV \approx \varrho_P \left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_P \delta V. \quad (3.6)$$

Die Zeitableitung von ϕ wird dabei voll implizit mit einer Genauigkeit von 1. oder 2. Ordnung approximiert, wodurch stabile Lösungen ohne Restriktion der Zeitschrittweite δt möglich werden und die Diagonaldominanz des resultierenden Gleichungssystems gestärkt

wird:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\mathbb{P}}^t = \begin{cases} \frac{\phi_{\mathbb{P}} - \phi_{\mathbb{P}}^o}{\delta t} \\ \frac{3\phi_{\mathbb{P}} - 4\phi_{\mathbb{P}}^o + \phi_{\mathbb{P}}^{oo}}{2\delta t} \end{cases} . \quad (3.7)$$

Die voll implizite Diskretisierung schließt ein, dass alle Terme aus (3.2) zur Zeitstufe t ausgewertet werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird jedoch bei den räumlichen Approximationen auf eine explizite Kennzeichnung der Zeitstufe wie in (3.7) verzichtet. Die hochgestellten Indizes o und oo kennzeichnen Variablen aus den zwei zurückliegenden Zeitstufen $t - \delta t$ bzw. $t - 2\delta t$.

Den zweiten Term der zeitlichen Änderung, ②, approximiert man unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß durch

$$\int_V \phi \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial x_i} dV \approx \phi_{\mathbb{P}} \sum_{\mathbf{f}} \underbrace{(\varrho u_i \delta A_i)_{\mathbf{f}}}_{\dot{m}_{\mathbf{f}}} . \quad (3.8)$$

Die Summation der Massenflüsse $\dot{m}_{\mathbf{f}}$ ist geschlossen über alle Flächen des FV auszuführen, d. h. $\mathbf{f} = \mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{e}$, wobei alle Flächennormalen nach außen zeigen und die flächenzentrierten Werte von ϱ und u_i zur Bestimmung des Massenflusses über eine Fläche $\delta A_{i,\mathbf{f}}$ verwendet werden. Die Geschwindigkeitskomponenten für den Massenfluss (3.61) werden in Anlehnung an das Verfahren von Rhie & Chow [165] aus benachbarten Kontrollvolumenzentren auf die Grenzfläche \mathbf{f} interpoliert, um das Auftreten unphysikalisch oszillierender Druck- und Geschwindigkeitsfelder auf dem nichtversetzten Rechengitter zu unterbinden. Zunächst werden die Massenflüsse jedoch als bekannt vorausgesetzt, deren Berechnung wird später in Abschnitt 3.2.2 beschrieben. Details zur Approximation von Volumen- und Oberflächenintegralen finden sich im Anhang A.2.

Diese Art der Diskretisierung lässt aus dem instationären Term nur Anteile für $a_{\mathbb{P}}$ und für den Quellterm S in Gleichung (3.3) entstehen. Aus Term ① ergeben sich je nach zeitlicher Approximationsordnung in (3.7) die Beiträge

$$a_{\mathbb{P},\textcircled{1}} = \begin{cases} \frac{\varrho_{\mathbb{P}} \delta V}{\delta t} \\ \frac{3}{2} \frac{\varrho_{\mathbb{P}} \delta V}{\delta t} \end{cases} \quad \text{und} \quad S_{\textcircled{1}} = \begin{cases} \frac{\varrho_{\mathbb{P}} \delta V}{\delta t} \phi_{\mathbb{P}}^o \\ \frac{\varrho_{\mathbb{P}} \delta V}{\delta t} \left(2\phi_{\mathbb{P}}^o - \frac{1}{2}\phi_{\mathbb{P}}^{oo} \right) \end{cases} , \quad (3.9)$$

während Term ② aus (3.5) folgenden Beitrag zum zentralen Koeffizienten $a_{\mathbb{P}}$ liefert:

$$a_{\mathbb{P},\textcircled{2}} = - \sum_{\mathbf{f}} \dot{m}_{\mathbf{f}} . \quad (3.10)$$

Konvektion: Die konvektiven Flüsse werden analog zu (3.8) als konstant über jede Kontrollvolumengrenzfläche angenommen und der Flächenmittelwert durch den flächenzentrierten Wert approximiert (siehe Anhang A.2.2), d. h.

$$\oint_{A(V)} \varrho \phi u_j dA_j \approx \sum_{\mathbf{f}} \phi_{\mathbf{f}} \dot{m}_{\mathbf{f}}. \quad (3.11)$$

Auch hier ist die Summation geschlossen über alle Flächen des FV auszuführen, d. h. $\mathbf{f} = \mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{e}$. Da sich die einzelnen Summanden in (3.11) formell nicht unterscheiden, genügt es, nachfolgend die Diskretisierung für eine exemplarische Kontrollvolumengrenzfläche \mathbf{f} darzustellen.

Die Transportgröße $\phi_{\mathbf{f}}$ kann im Programm durch „Upwind“-Interpolation (UDS), lineare Interpolation (CDS) und verschiedene limitierte Ansätze höherer Ordnung (TVD) approximiert werden (siehe Anhang A.3.2), wobei alle Verfahren basierend auf einer impliziten UDS-Diskretisierung (A.20) implementiert sind [184]. Infolge dieser entsteht aus einem konvektiven Fluss über die Fläche \mathbf{f} je nach lokaler Strömungsrichtung entweder ein Beitrag zu a_P oder zu a_F :

$$\phi_{\mathbf{f},\text{UDS}} \approx \begin{cases} \phi_P & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{f}} \geq 0) \Rightarrow a_{P,\mathbf{f},\text{Konvektion}} = \max(\dot{m}_{\mathbf{f}}, 0) \\ \phi_F & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{f}} < 0) \Rightarrow a_{F,\text{Konvektion}} = \max(-\dot{m}_{\mathbf{f}}, 0) \end{cases}. \quad (3.12)$$

Der führende Fehlerterm ist bei der UDS-Diskretisierung nur von 1. Ordnung. Damit verbunden sind stark diffusive Eigenschaften der Approximation des konvektiven Flusses [56]. Um eine höhere Approximationsordnung zu erreichen, kann ein auf Werten der letzten Iteration basierender, expliziter Korrekturteil (engl. „deferred correction“, [100]) addiert werden

$$\phi_{\mathbf{f}} \approx \underbrace{\phi_{\mathbf{f},\text{UDS}}}_{\text{implizit}} + \underbrace{(1 - \sigma) \phi_{\mathbf{f},\text{CDS-add.}} + \sigma \phi_{\mathbf{f},\text{TVD-add.}}}_{\text{explizit}}, \quad (3.13)$$

wobei die optionalen Korrekturanteile durch (A.21) bzw. (A.22) und

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{f},\text{CDS-add.}} &= \sigma_{\text{CDS}} (\phi_{\mathbf{f},\text{CDS}} - \phi_{\mathbf{f},\text{UDS}}) \\ \text{sowie} \quad \phi_{\mathbf{f},\text{TVD-add.}} &= \sigma_{\text{TVD}} (\phi_{\mathbf{f},\text{TVD}} - \phi_{\mathbf{f},\text{UDS}}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

definiert sind. Durch die Parameter σ_{TVD} , σ_{CDS} und σ wird es möglich, das verwendete UDS- oder TVD-Schema mit einem CDS-Schema zu mischen, was insbesondere in Verbindung mit hybrider Turbulenzbehandlung von Nutzen sein kann (siehe Abschnitt 2.3.8, S. 56).

Bezieht man den zweiten transienten Anteil (3.10) mit ein, kann man die insgesamt aus Konvektion über FV-Flächen entstehenden Beiträge zum zentralen Koeffizienten a_P , zu

einem beliebigen Nachbarkoeffizienten $a_{\mathbf{F}}$, und zum Quellterm S wie folgt darstellen:

$$a_{\mathbf{P},\text{Konvektion}} = \sum_{\mathbf{f}} \max(\dot{m}_{\mathbf{f}}, 0) - \sum_{\mathbf{f}} \dot{m}_{\mathbf{f}} = \sum_{\mathbf{f}} \max(-\dot{m}_{\mathbf{f}}, 0), \quad (3.15)$$

$$a_{\mathbf{F},\text{Konvektion}} = \max(-\dot{m}_{\mathbf{f}}, 0), \quad (3.16)$$

$$S_{\text{Konvektion}} = - \sum_{\mathbf{f}} \dot{m}_{\mathbf{f}} [(1 - \sigma) \phi_{\mathbf{f},\text{CDS-add.}} + \sigma \phi_{\mathbf{f},\text{TVD-add.}}]. \quad (3.17)$$

Diffusion: Auch die diffusiven Flüsse werden als konstant über jede Kontrollvolumengrenzfläche angenommen und der Flächenmittelwert durch den Wert im Flächenzentrum approximiert, d. h.

$$\oint_{A(V)} \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dA_j \approx \sum_{\mathbf{f}} \Gamma_{\phi,\mathbf{f}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \delta A_j \right)_{\mathbf{f}}. \quad (3.18)$$

Wiederum ist die Summation geschlossen über alle Flächen des FV auszuführen, d. h. $\mathbf{f} = \mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{e}$. Da sich die einzelnen Summanden in (3.18) formell nicht unterscheiden, genügt es auch hier, die Diskretisierung für eine exemplarische Kontrollvolumengrenzfläche \mathbf{f} darzustellen. Zunächst kann der umklammerte Ausdruck mit (A.34) auf Basis der Gradientenkorrekturformel nach Demirdžić & Muzaferija [38, 227] umformuliert werden

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \delta A_j \right)_{\mathbf{f}} \approx \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbf{f}} \delta A_j + \left(\phi_{\mathbf{F}} - \phi_{\mathbf{P}} - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{f}} g_i \right) \frac{1}{g_j} \delta A_j. \quad (3.19)$$

Die kartesischen Koordinaten des kontravarianten Basisvektors, $\frac{1}{g_j}$, stimmen mit denen des Flächenelements, $\delta A_j = n_j \delta A$, bzw. des Flächennormalenvektors, n_j , in der Richtung überein. Man kann das Skalarprodukt der beiden Vektoren gemäß (A.35) auch durch

$$\frac{1}{g_j} \delta A_j = \frac{\delta A_j \delta A_j}{g_k \delta A_k} = \frac{\delta A}{\delta \chi} \quad \text{mit} \quad \delta \chi = g_k n_k \quad (3.20)$$

ausdrücken. Ist das Rechengitter orthogonal, fallen auch die Richtungen der kartesischen Koordinaten von Flächennormale, n_k , und kovariantem Basisvektor, $\frac{1}{g_k}$, zusammen. Dadurch heben sich die Projektionen interpolierter Gradienten in (3.19) gegenseitig auf und es verbleibt

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \delta A_j \right)_{\mathbf{f}} \approx (\phi_{\mathbf{F}} - \phi_{\mathbf{P}}) \frac{1}{g_j} \delta A_j = \frac{\phi_{\mathbf{F}} - \phi_{\mathbf{P}}}{\delta \chi} \delta A. \quad (3.21)$$

Dieser Ausdruck beinhaltet eine zentrale Approximation $\mathcal{O}(\delta x^2)$ für die randflächennormale Ableitung von ϕ und kann implizit in das Gleichungssystem eingearbeitet werden. Ein Erhalt der Ordnung der zentralen Diskretisierung wird für nichtorthogonale Gitter durch die Berücksichtigung des interpolierten Gradienten in (3.19) ermöglicht, welcher basierend

auf Werten der vorherigen Iteration als „deferred correction“ im Quellterm implementiert ist. Man approximiert den Diffusionsfluss über eine FV-Fläche \mathbf{f} durch:

$$\Gamma_{\phi, \mathbf{f}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \delta A_j \right)_{\mathbf{f}} \approx \langle \Gamma_{\phi} \rangle_{\mathbf{f}} \left[\underbrace{\left(\phi_{\mathbf{F}} - \phi_{\mathbf{P}} \right) \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}}}_{\text{implizit}} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbf{f}} \left(\delta A_j - g_j \frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}}}_{\text{explizit}} \right]. \quad (3.22)$$

Eine lokale Änderung des Transportkoeffizienten Γ_{ϕ} wird dabei in Form einer linearen Interpolation (A.21) auf die Kontrollvolumengrenzfläche berücksichtigt. Man bezeichnet die implizit bzw. explizit behandelten Anteile auch als Normal- bzw. Kreuzdiffusion. Aus der Normaldiffusion über FV-Flächen entstehen demnach gleichermaßen Beiträge zum zentralen Koeffizienten $a_{\mathbf{P}}$ und zu einem exemplarischen Nachbarkoeffizienten $a_{\mathbf{F}}$

$$a_{\mathbf{P}, \text{Diffusion}} = \sum_{\mathbf{f}} \langle \Gamma_{\phi} \rangle_{\mathbf{f}} \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}}, \quad (3.23)$$

$$a_{\mathbf{F}, \text{Diffusion}} = \langle \Gamma_{\phi} \rangle_{\mathbf{f}} \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}}, \quad (3.24)$$

während die Kreuzdiffusion folgenden Beitrag zum Quellterm S liefert:

$$S_{\text{Diffusion}} = \sum_{\mathbf{f}} \langle \Gamma_{\phi} \rangle_{\mathbf{f}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbf{f}} \left(\delta A_j - g_j \frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}}. \quad (3.25)$$

Quelle: Ein von ϕ abhängiger Quellterm kann linearisiert und in $S_{\phi} = S_P \phi + S_C$ zerlegt werden. Dabei ist die Aufteilung so vorzunehmen, dass S_P negativ ist, damit durch dessen Beitrag zum zentralen Koeffizienten die für den iterativen Löser wichtige Diagonaldominanz des Gleichungssystems gestärkt wird. Analog zur Approximation des transienten Terms (3.6) erhält man bei Verwendung zellzentraler Werte zur Festlegung der Volumenmittelwerte eine Näherung der Ordnung $\mathcal{O}(\delta x^2)$ mit

$$\int_V S_{\phi} dV \approx (S_P \phi + S_C)_{\mathbf{P}} \delta V. \quad (3.26)$$

Aus dem linearisierten Anteil entsteht so ein Beitrag zum zentralen Koeffizienten

$$a_{\mathbf{P}, \text{Quelle}} = -S_{P, \mathbf{P}} \delta V, \quad (3.27)$$

während der übrige Anteil auf der rechten Seite des Gleichungssystems (3.4) eingeht:

$$S_{\text{Quelle}} = S_{C, \mathbf{P}} \delta V. \quad (3.28)$$

3.1.3 Zusammenfassung der lokalen Bilanz

Durch die im letzten Abschnitt beschriebene Diskretisierung ist die generische Ausgangsgleichung des FV-Verfahrens (3.2) in eine approximative lokale Bilanz vom Typ (3.3) überführt worden, wobei die resultierende diskrete Formulierung zunächst vollständig mit der Darstellung in [227] und der vorgefundenen Umsetzung im Programm übereinstimmt. Die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Änderungen am numerischen Verfahren beschränken sich auf die Bestimmung der bisher als bekannt vorausgesetzten Massenflüsse sowie deren Korrekturen im Zusammenhang mit dem zur Erfüllung der Massenbilanz eingesetzten SIMPLE-Algorithmus [158]. Bevor in den nächsten Abschnitten die Änderungen des vorhandenen Programms motiviert und hergeleitet werden, ist es sinnvoll, die aus den Approximationen von zeitlicher Änderung, Konvektion, Diffusion und Quelle resultierende, lokale Bilanz zusammenzufassen. Mit den Gleichungen (3.9), (3.15), (3.16), (3.17), (3.23), (3.24), (3.25), (3.27), (3.28) summieren sich Koeffizienten und Quellterm zu

$$a_P = (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\rho_P \delta V}{\delta t} + \sum_F a_F - S_{P,P} \delta V, \quad (3.29)$$

$$a_F = \max(-\dot{m}_f, 0) + \langle \Gamma_\phi \rangle_f \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_f, \quad (3.30)$$

$$S = (\gamma_1 \phi_P^o + \gamma_2 \phi_P^{oo}) \frac{\rho_P \delta V}{\delta t} - \sum_f \dot{m}_f [(1 - \sigma) \phi_{f,\text{CDS-add.}} + \sigma \phi_{f,\text{TVD-add.}}] \quad (3.31)$$

$$+ \sum_f \langle \Gamma_\phi \rangle_f \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_f \left(\delta A_j - g_j \frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_f + S_{C,P} \delta V.$$

γ_1 und γ_2 sind der zeitlichen Approximationsordnung entsprechend einzustellende Konstanten. Im Programm erhält man für $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 0$ eine Approximation erster und für $\gamma_1 = 2$ und $\gamma_2 = -1/2$ eine Approximation zweiter Ordnung. Die Summationen sind wie zuvor über alle direkt benachbarten Punkte ($F = B, T, S, N, W, E$) und korrespondierende Flächen ($f = b, t, s, n, w, e$) auszuführen.

3.1.4 Iterative Relaxation

Um Stabilität und Konvergenz des Verfahrens bei der sequentiellen Lösung linearisierter gekoppelter Transportgleichungen zu verbessern, kann eine iterative Unterrelaxationstechnik eingesetzt werden, indem anstelle von Gleichung (3.3) die modifizierte Gleichung

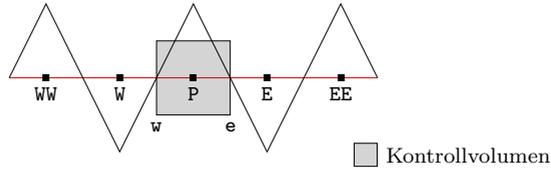
$$a_P \phi_P = \alpha_\phi \left(\sum_F a_F \phi_F + S \right) + (1 - \alpha_\phi) a_P \phi_P^* \quad (3.32)$$

mit $0 < \alpha_\phi \leq 1$ aufgestellt wird [156]. Hierin bezeichnet α_ϕ einen globalen Relaxationsfaktor für ϕ und ϕ_p^* stellt den Wert von ϕ_p aus der letzten äußeren Iteration dar. Auf diese Weise wird in jeder inneren Iteration nur ein α_ϕ Bruchteil der sich theoretisch aus (3.3) für ϕ_p ergebenden Änderung auf ϕ angewandt und so eine (pseudo-)zeitnahe Aktualisierung der linearisierten bzw. für die Kopplung zuständigen Terme ermöglicht [56]. Innere und äußere Iterationen werden im nächsten Abschnitt auf Seite 69 oben definiert.

3.2 SIMPLE-Algorithmus für nichtversetzte Gitter

Zur Berechnung des Strömungsfeldes wird der 1972 von Patankar und Spalding vorgeschlagene SIMPLE-Algorithmus [158] eingesetzt. Dieses iterative Prädiktor-Korrektor Verfahren wurde ursprünglich für schwach kompressible und inkompressible Strömungen entwickelt, ist aber durch entsprechende Erweiterung auch bei hohen Machzahlen einsetzbar [37, 90, 96]. Bei geringen Machzahlen bietet der druckbasierte SIMPLE-Algorithmus häufig Vorteile gegenüber dichte-basierten Strömungslösern, deren Konvergenzverhalten durch zu schwache Kopplung von Dichte- und Geschwindigkeitsfeld beeinträchtigt sein kann. Im Anschluss an eine Initialisierung aller Transportgrößen mit Schätzwerten stellt sich der sequentielle Ablauf des hier eingesetzten Verfahrens [227] wie folgt dar:

1. Prädiktor-Schritt
 - a) Lösen der Impulsbilanz für u_i
 - b) Bestimmung der Massenflüsse und des Residuums der Massenbilanz (Impulsbilanz ist erfüllt im Zellzentrum)
2. Korrektor-Schritt
 - a) Lösen der Druckkorrekturgleichung für p^∇
 - b) Korrektur der Geschwindigkeiten, Drücke und Massenflüsse (Massenflüsse erfüllen Kontinuitätsgleichung)
3. gegebenenfalls weitere Schritte
 - a) Lösen der Energiebilanz für T
 - b) Lösen der Gleichung(en) des statistischen Turbulenzmodells
 - c) Bestimmung der Dichte ρ aus thermischer Zustandsgleichung
4. Zurück zu 1. bis das gesamte Gleichungssystem hinreichend genau erfüllt ist


 Abbildung 3-2: Alternierende ϕ Verteilung mit Kompassnotation in 1D

Das zyklische Durchlaufen der Punkte 1-3, die sogenannte äußere Iteration, findet bei instationären Simulationen auf jedem Zeitschritt statt, so lange bis die gewünschte Konvergenz erreicht ist. Einen Zyklus bei der iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems mit festen Koeffizienten, welche separat für jede einzelne Bilanzgleichung erfolgt, bezeichnet man dagegen als innere Iteration.

3.2.1 Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit

Sofern für alle Transportgrößen die gleichen Bilanzvolumina verwendet werden (nicht-versetzte Gitter), kann bei zentraler Approximation der Druckkraft in der Impulsbilanz eine Entkopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeld auftreten, wenn die Geschwindigkeit auf der Kontrollvolumengrenzfläche ebenfalls zentral approximiert wird [156, 165]. Diese Möglichkeit unphysikalischer Lösungen entsteht infolge einer symmetrischen, zentralen Diskretisierung erster Ableitungen (nach (A.21), vgl. Abschnitt A.3), wovon man sich am Beispiel einer eindimensionalen Finite-Volumen Integration von $\partial\phi/\partial x$ auf einem äquidistanten Gitter an der Stelle P überzeugen kann

$$\int_w^e \frac{\partial\phi}{\partial x} dx = [\phi]_w^e \approx \langle\phi\rangle_e - \langle\phi\rangle_w = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - \frac{\phi_W + \phi_P}{2} = \frac{\phi_E - \phi_W}{2}. \quad (3.33)$$

In der symmetrischen Approximation (3.33) tritt der Wert von ϕ nicht in benachbarten Punkten mit Abstand δx auf, sondern es wird eine $2\delta x$ -Differenz gebildet. Infolgedessen sind $1\delta x$ -Differenzen zwischen ϕ_P und ϕ_E bzw. ϕ_P und ϕ_W unsichtbar, und eine alternierende Variablenverteilung wie in Abbildung 3-2 würde nicht von der Diskretisierung erfasst. Betrachtet man zum Beispiel die inkompressible 1D Kontinuitätsgleichung $\int \frac{du}{dx} dx = 0$, ist rein theoretisch nur die Lösung $u = \text{konst.}$ möglich. Mit der zentralen Diskretisierung (3.33) und $\phi = u$ würde jedoch eine unphysikalische „Zick-Zack“-Geschwindigkeitsverteilung ebenfalls eine gültige Lösung der diskretisierten Gleichung darstellen. Ein analoges Problem tritt bei zentraler Diskretisierung des Druckterms in der Impulsbilanz auf, so dass sich im Verlauf der iterativen Lösung unphysikalisch oszillierende Druck- und Geschwindigkeitsfelder einstellen können.

Lange Zeit wurde die Lösung von Massen- und Impulsbilanz auf zueinander versetzten Gittern als einzige Möglichkeit angesehen, um das Entkopplungsproblem zu vermeiden [156]. Ein wirksames Mittel gegen die $1\delta x$ Oszillationen auf nichtversetzten Gittern wurde jedoch 1983 von Rhie & Chow durch Bestimmung der Massenflüsse auf Basis der diskretisierten Impulsbilanz, der sogenannten Impulsinterpolation, gefunden [165]. Im Englischen sind die Bezeichnungen „Rhie & Chow interpolation“, „momentum interpolation scheme“ [130] oder auch „pressure-weighted interpolation method“ [140] gebräuchlich.

3.2.2 Impulsinterpolation und Bestimmung der Massenflüsse

Um auf nichtversetzten Gittern eine enge Kopplung zwischen Druck- und Geschwindigkeitsfeldern herzustellen, kann anstatt einer direkten Approximation der Grenzflächengeschwindigkeit u_f (zum Beispiel mit (A.21): $u_f \approx \langle u \rangle_f$) eine indirekte Interpolation auf Basis der Impulsbilanz verwendet werden. Die diskretisierte Impulsbilanz in x -Richtung lautet, aufgestellt für ein Zellzentrum P (vgl. Gleichung (3.32), S. 67),

$$(a_P)_P u_P = \alpha_u \left(\sum_F a_F u_F + S \right) + (1 - \alpha_u) (a_P)_P u_P^*. \quad (3.34)$$

Darin stellt α_u einen globalen Relaxationsfaktor für u und u_P^* den Wert von u_P aus der letzten äußeren Iteration dar. Um einzelne Bestandteile des Quellterms später unterschiedlich behandeln zu können, ist dessen Aufspaltung in drei Teile sinnvoll. Einsetzen der Zerlegung $S = S^I + S^{II} + S^{III}$ in Gleichung (3.34) und Division durch eine zunächst beliebige Funktion $\psi = \psi(\mathbf{x}, t) \neq 0$ ergibt

$$\left(\frac{a_P}{\psi} \right)_P u_P = \alpha_u \left(\underbrace{\sum_F \frac{a_F u_F}{\psi}}_H + \frac{S^I}{\psi} + \frac{S^{II}}{\psi} + \frac{S^{III}}{\psi} \right)_P + (1 - \alpha_u) \left(\frac{a_P}{\psi} \right)_P u_P^*. \quad (3.35)$$

Für die ersten zwei Terme in der Klammer wird von nun an mit $S^I/\psi + \sum_F a_F u_F/\psi = H$ eine abkürzende Schreibweise vereinbart. Wenn man Gleichung (3.35) nicht nur für das FV-Zentrum P , sondern auch für das benachbarte Zentrum F sowie (der Vorgehensweise bei versetzten Gittern entsprechend) für die dazwischenliegende Grenzfläche f aufstellt, erhält man zusätzlich die Gleichungen

$$\left(\frac{a_P}{\psi} \right)_F u_F = \alpha_u \left[H_F + \left(\frac{S^{II}}{\psi} \right)_F + \left(\frac{S^{III}}{\psi} \right)_F \right] + (1 - \alpha_u) \left(\frac{a_P}{\psi} \right)_F u_F^* \quad (3.36)$$

und
$$\left(\frac{a_P}{\psi} \right)_f u_f = \alpha_u \left[H_f + \left(\frac{S^{II}}{\psi} \right)_f + \left(\frac{S^{III}}{\psi} \right)_f \right] + (1 - \alpha_u) \left(\frac{a_P}{\psi} \right)_f u_f^*. \quad (3.37)$$

Die Geschwindigkeit auf der FV-Grenzfläche, $u_{\mathbf{f}}$, kann nun indirekt mit Hilfe von Gleichung (3.37) approximiert werden. Da im Gegensatz zur Vorgehensweise bei versetzten Gittern für $u_{\mathbf{f}}$ kein Gleichungssystem aufgestellt wurde, sind zunächst sowohl die Koeffizienten $(a_{\mathbf{p}})_{\mathbf{f}}$ und Hilfsgrößen $H_{\mathbf{f}}$ als auch die Quelltermanteile $S_{\mathbf{f}}^{\text{II}}$ und $S_{\mathbf{f}}^{\text{III}}$ (und gegebenenfalls $\psi_{\mathbf{f}}$) unbekannt. Alle Unbekannten aus Gleichung (3.37) lassen sich aber durch diskrete Approximationen annähern. Die Zerlegung des Quellterms wird an dieser Stelle wesentlich, damit die drei Anteile unterschiedlich behandelt werden können. Zunächst werden mit (A.21) folgende Approximationen eingeführt:

$$H_{\mathbf{f}} \approx \langle H \rangle_{\mathbf{f}} = \left\langle \frac{\sum_{\mathbf{F}} a_{\mathbf{F}} u_{\mathbf{F}}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} + \left\langle \frac{S^{\text{I}}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}}, \quad (3.38)$$

$$\left(\frac{S^{\text{III}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} \approx (1 - \beta_{\mathbf{p}}) \left\langle \frac{S^{\text{III}}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} + \beta_{\mathbf{p}} \left(\frac{S^{\text{III}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}}. \quad (3.39)$$

Durch lineare Interpolation der Gleichungen (3.35) und (3.36) mit (A.21) findet man

$$\left\langle \frac{a_{\mathbf{p}}}{\psi} u \right\rangle_{\mathbf{f}} = \alpha_u \left[\langle H \rangle_{\mathbf{f}} + \left\langle \frac{S^{\text{II}}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} + \left\langle \frac{S^{\text{III}}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \right] + (1 - \alpha_u) \left\langle \frac{a_{\mathbf{p}}}{\psi} u^* \right\rangle_{\mathbf{f}}. \quad (3.40)$$

Einsetzen der Approximationen (3.38) und (3.39) in Gleichung (3.37) liefert

$$\left(\frac{a_{\mathbf{p}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} u_{\mathbf{f}} \approx \alpha_u \left[\langle H \rangle_{\mathbf{f}} + \left(\frac{S^{\text{II}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} + (1 - \beta_{\mathbf{p}}) \left\langle \frac{S^{\text{III}}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} + \beta_{\mathbf{p}} \left(\frac{S^{\text{III}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} \right] + (1 - \alpha_u) \left(\frac{a_{\mathbf{p}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} u_{\mathbf{f}}^*. \quad (3.41)$$

Subtraktion der Gleichung (3.40) von der Approximation (3.41) führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_{\mathbf{p}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} u_{\mathbf{f}} - \left\langle \frac{a_{\mathbf{p}}}{\psi} u \right\rangle_{\mathbf{f}} &\approx (1 - \alpha_u) \left[\left(\frac{a_{\mathbf{p}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} u_{\mathbf{f}}^* - \left\langle \frac{a_{\mathbf{p}}}{\psi} u^* \right\rangle_{\mathbf{f}} \right] \\ &\quad + \alpha_u \left[\left(\frac{S^{\text{II}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} - \left\langle \frac{S^{\text{II}}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \right] \\ &\quad + \alpha_u \beta_{\mathbf{p}} \left[\left(\frac{S^{\text{III}}}{\psi} \right)_{\mathbf{f}} - \left\langle \frac{S^{\text{III}}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Aufgrund der Approximation (3.38) taucht die Hilfsgröße H in dieser Beziehung nicht mehr auf, womit auch der darin enthaltene Quelltermanteil S^{I} entfällt. Dagegen ist für die beiden übrigen Quelltermanteile S^{II} und S^{III} neben einer linearen Interpolation aus benachbarten Werten (A.21) auch eine direkte Auswertung auf der FV-Grenzfläche erforderlich. Bei geeigneter Aufteilung des Quellterms wird es durch diese direkte Auswertung später möglich, zu einer kompakten Form des diffusiven Terms in der Druckkorrekturgleichung zu gelangen (siehe Seite 91) und so eine lokal enge Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern wie auf versetzten Gittern zu erzeugen. Die dazu benötigte Aufspaltung des Quellterms S

(3.31) der über ein FV integrierten Impulsbilanz (2.109) kann nun vorgenommen werden:

Zunächst wird der zentrale Koeffizient der diskretisierten Impulsbilanz, a_p , gemäß (3.29) in einen aus der (impliziten) Diskretisierung räumlicher Ableitungen und der Quelle aus (3.1) entstandenen Anteil a_p^s und einen aus der Diskretisierung der Zeitableitung entstandenen Anteil a_p^t zerlegt:

$$a_p = a_p^s + a_p^t \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_p^s = \sum_F a_F - S_{F,P} \delta V \\ a_p^t = (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\varrho_P \delta V}{\delta t} \end{cases} . \quad (3.43)$$

Der explizit behandelte Quellterm der diskretisierten Impulsbilanz, S , kann neben dem Druckgradienten und transienten Termen auch viskose Terme (zum Beispiel Kreuzdiffusion) sowie Anteile aus einer „deferred-correction“ Diskretisierung des konvektiven Terms enthalten (vgl. (2.109) und (3.31)). Die Bestimmung letztgenannter Anteile auf der FV-Grenzfläche ist jedoch kompliziert, weswegen es sich anbietet, diese Anteile in S^I zu absorbieren und nur den Druckanteil und den zeitlichen Anteil von S in Gleichung (3.42) zu berücksichtigen. Dazu wird die Aufteilung

$$S^I = S - S^{II} - S^{III} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} S^{II} = \frac{a_p^t}{\gamma_1 + \gamma_2} (\gamma_1 u^o + \gamma_2 u^{oo}) \\ S^{III} = -\delta V \frac{\partial p^{\text{eff}}}{\partial x} \end{cases} \quad (3.44)$$

gewählt, wobei nachfolgend aus Gründen der Übersicht mit $p^{\text{eff}} \leftarrow p$ auf eine explizite Kennzeichnung des effektiven Drucks verzichtet wird. Mit u^o und u^{oo} sind in (3.44) die Geschwindigkeiten der beiden zurückliegenden Zeitschritte bezeichnet, und a_p^t stellt gemäß (3.43) den aus der zeitlichen Diskretisierung der Impulsgleichung entstandenen Anteil des zentralen Koeffizienten dar. Einsetzen der entsprechend (3.44) definierten Quelltermanteile S^{II} und S^{III} in Gleichung (3.42) führt auf folgenden Ausdruck für u_f :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_p}{\psi} \right)_f u_f &\approx \left\langle \frac{a_p}{\psi} u \right\rangle_f + (1 - \alpha_u) \left[\left(\frac{a_p}{\psi} \right)_f u_f^* - \left\langle \frac{a_p}{\psi} u^* \right\rangle_f \right] \\ &+ \alpha_u \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[\left(\frac{a_p^t}{\psi} \right)_f u_f^o - \left\langle \frac{a_p^t}{\psi} u^o \right\rangle_f \right] \\ &+ \alpha_u \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[\left(\frac{a_p^t}{\psi} \right)_f u_f^{oo} - \left\langle \frac{a_p^t}{\psi} u^{oo} \right\rangle_f \right] \\ &- \alpha_u \beta_p \left[\left(\frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_f - \left\langle \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_f \right] . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Für $\beta_p = 1$ entspricht diese Gleichung einer Erweiterung des von Pascau angegebenen generischen Ausdrucks [155] um die Möglichkeit einer Zeitintegration von 2. Ordnung. Mit $\beta_p = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$ und den in Tabelle 3-1 angegebenen Werten für ψ lassen sich in dieser Form verschiedene Abwandlungen der von Rhie & Chow vorgeschlagenen Impulsinterpolation [165] kompakt darstellen. Es sei darauf hingewiesen, dass die Wahl

Tabelle 3-1: Varianten der Impulsinterpolation nach Rhie & Chow.

	ψ	u_f abhängig von δt für $u = u^* = u^\circ = u^{\circ\circ}$	Quelle
Choi	a_p	ja (schwach)	[26]
Pascau	a_p^s	nein	[155]
Lien	1	nein	[122]

von ψ entscheidend für eine Unabhängigkeit des gewählten Interpolationsansatzes von der Zeitschrittweite ist. Zum Erreichen einer von δt unabhängigen Formulierung gibt Pascau die Erfüllung folgender Bedingung als notwendig und hinreichend an [155]:

“If in the (steady state) limit when $u = u^* = u^\circ$ the expression for u_f takes the same form as its corresponding steady state equation, the scheme is time step independent”

Es ist leicht nachzuvollziehen, dass dies für $\psi = 1$ und $\psi = a_p^s$ oder zum Beispiel auch für $\psi = \delta V$ gegeben ist.

Analog zu (3.45) lassen sich zwei Näherungen für die beiden übrigen kartesischen Koordinaten der Grenzflächengeschwindigkeit u_f , v_f und w_f , aufstellen. Werden in allen drei Gleichungen nun die Approximationen

$$\left(\frac{a_p^s}{\psi}\right)_f \approx \left\langle \frac{a_p^s}{\psi} \right\rangle_f, \quad (3.46)$$

$$\left(\frac{a_p^t}{\psi}\right)_f \approx \left\langle \frac{a_p^t}{\psi} \right\rangle_f \quad (3.47)$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{\delta V}{\psi}\right)_f \approx \left\langle \frac{\delta V}{\psi} \right\rangle_f \quad (3.48)$$

eingeführt, folgt mit $a_p = a_p^s + a_p^t$ zunächst

$$\left(\frac{a_p}{\psi}\right)_f \approx \left\langle \frac{a_p}{\psi} \right\rangle_f, \quad (3.49)$$

und man kann mit $\mathbf{u}_f = u_{i,f} \mathbf{e}_i$ zusammenfassend schreiben:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{a_{i,P}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} u_{i,f} &\approx \left\langle \frac{a_{i,P}}{\psi} u_i \right\rangle_{\mathbf{f}} + (1 - \alpha_u) \left[\left\langle \frac{a_{i,P}}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} u_{i,f}^* - \left\langle \frac{a_{i,P}}{\psi} u_i^* \right\rangle_{\mathbf{f}} \right] \\
 &+ \alpha_u \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[\left\langle \frac{a_P^t}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} u_{i,f}^o - \left\langle \frac{a_P^t}{\psi} u_i^o \right\rangle_{\mathbf{f}} \right] \\
 &+ \alpha_u \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[\left\langle \frac{a_P^t}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} u_{i,f}^{oo} - \left\langle \frac{a_P^t}{\psi} u_i^{oo} \right\rangle_{\mathbf{f}} \right] \\
 &- \alpha_u \beta_p \left[\left\langle \frac{\delta V}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{f}} - \left\langle \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{f}} \right]. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde angenommen, dass sich Relaxationsfaktor α_u und Mischungsparameter β_p nicht zwischen den drei Raumrichtungen unterscheiden. Andererseits wird mit $a_p \leftarrow a_{i,P}$ angedeutet, dass der zentrale Koeffizient der Impulsgleichung nicht unbedingt für alle drei Komponenten gleich sein muss (siehe Nomenklatur, Seite xiii). Da in Abwesenheit richtungsabhängiger Quellterme aber keine Differenzen auftreten, kann diese Unterscheidung im Weiteren wieder fallengelassen werden.

Grundsätzlich wäre eine Bestimmung von $u_{i,f}$ mit Gleichung (3.50) bereits möglich, die Formulierung ist jedoch für den vorgesehenen Einsatzbereich des Verfahrens suboptimal. In einem im Hinblick auf aeroakustische Simulationen durchgeführten numerischen Experiment mit durch ein gestrecktes Gitter konvektierten Wirbeln hat sich gezeigt, dass diese Form der Impulsinterpolation die Entstehung von numerisch induzierten Pseudo-Schallquellen zur Folge haben kann [104]. Mit Einführung der zusätzlichen Näherungen

$$\left\langle \frac{a_P}{\psi} u_i \right\rangle_{\mathbf{f}} \approx \left\langle \frac{a_P}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \langle u_i \rangle_{\mathbf{f}}, \tag{3.51}$$

$$\left\langle \frac{a_P}{\psi} u_i^* \right\rangle_{\mathbf{f}} \approx \left\langle \frac{a_P}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \langle u_i^* \rangle_{\mathbf{f}}, \tag{3.52}$$

$$\left\langle \frac{a_P^t}{\psi} u_i^o \right\rangle_{\mathbf{f}} \approx \left\langle \frac{a_P^t}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \langle u_i^o \rangle_{\mathbf{f}}, \tag{3.53}$$

$$\left\langle \frac{a_P^t}{\psi} u_i^{oo} \right\rangle_{\mathbf{f}} \approx \left\langle \frac{a_P^t}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \langle u_i^{oo} \rangle_{\mathbf{f}} \tag{3.54}$$

$$\text{und} \quad \left\langle \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{f}} \approx \left\langle \frac{\delta V}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{f}} \tag{3.55}$$

lässt sich die Wirkung der im letzten Term von (3.50) enthaltenen Differenz zwischen direkt ausgewertetem und interpoliertem Druckgradienten auf $u_{i,f}$ vollständig isolieren und die Entstehung von Pseudo-Schall deutlich reduzieren [104]. Die Druckgradientendifferenz

kann nun mit der Gradientenkorrekturformel (A.34) nach Demirdžić & Muzaferija [38] und der geometrischen Beziehung (A.35) wie folgt approximiert werden:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{f}} - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{f}} \approx \left[\left(p_{\mathbb{F}} - p_{\mathbb{P}} - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbf{1}} g_j \right) \frac{\delta A_i}{g_k \delta A_k} \right]_{\mathbf{f}}. \quad (3.56)$$

Durch Einsetzen der Approximationen (3.51–3.56) in (3.50) gewinnt man nach Division durch $\langle a_{\mathbb{P}}/\psi \rangle_{\mathbf{f}}$ einen Ausdruck für den Geschwindigkeitsvektor auf der Grenzfläche, der sich aus einem linear interpolierten Anteil sowie drei Korrekturtermen zusammensetzt:

$$u_{i,\mathbf{f}} \approx \langle u_i \rangle_{\mathbf{f}} + \underbrace{\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]} + \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]} + \beta_p \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]}}_{\Delta u_{i,\mathbf{f}}}, \quad (3.57)$$

mit

$$\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]} = (1 - \alpha_u) \left(\underbrace{u_{i,\mathbf{f}}^* - \langle u_i^* \rangle_{\mathbf{f}}}_{\Delta u_{i,\mathbf{f}}^*} \right), \quad (3.58)$$

$$\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]} = \frac{\alpha_u}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{\langle a_{\mathbb{P}}^t/\psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_{\mathbb{P}}/\psi \rangle_{\mathbf{f}}} \left[\gamma_1 \left(\underbrace{u_{i,\mathbf{f}}^o - \langle u_i^o \rangle_{\mathbf{f}}}_{\Delta u_{i,\mathbf{f}}^o} \right) + \gamma_2 \left(\underbrace{u_{i,\mathbf{f}}^{oo} - \langle u_i^{oo} \rangle_{\mathbf{f}}}_{\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{oo}} \right) \right], \quad (3.59)$$

$$\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]} = -\alpha_u \frac{\langle \delta V/\psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_{\mathbb{P}}/\psi \rangle_{\mathbf{f}}} \left[\left(p_{\mathbb{F}} - p_{\mathbb{P}} - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbf{1}} g_j \right) \frac{\delta A_i}{g_k \delta A_k} \right]_{\mathbf{f}}. \quad (3.60)$$

Der letzte Korrekturterm entspricht dabei im Prinzip für $\psi = a_{\mathbb{P}}$ und $\beta_p = 1$ der von Rhie & Chow zur Vermeidung oszillierender Druckfelder vorgeschlagenen Korrektur [165]. Ohne die beiden zusätzlichen Korrekturterme $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]}$ und $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]}$ würde eine Auswertung der Grenzflächengeschwindigkeit nach (3.57) mit $\psi = a_{\mathbb{P}}$ sowie $\beta_p = 1/\alpha_u$ zudem exakt mit der von L. Xue hergeleiteten und ursprünglich im Strömungslöser implementierten Form übereinstimmen [227, S. 43 ff.]. Zwar wird bei dieser Variante durch die spezielle Wahl von $\beta_p \sim 1/\alpha_u$ die Grenzflächengeschwindigkeit vom Relaxationsfaktor der Impulsbilanz, α_u , unabhängig [94]. Rückblickend auf (3.44) und (3.39) kann man aber feststellen, dass diese Vorgehensweise bei Verwendung von Unterrelaxation einer Extrapolation des Druckgradienten im Quelltermanteil S^{III} gleichkommt, wodurch die Konvergenz des Druckkorrekturverfahrens beeinträchtigt werden kann. Der erste Korrekturterm $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]}$ ermöglicht es hingegen, auch ohne Wichtung des Druckgradienten in (3.39) durch $\beta_p \sim 1/\alpha_u$ eine Abhängigkeit der Grenzflächengeschwindigkeit $u_{i,\mathbf{f}}$ vom Relaxationsfaktor α_u zu vermeiden [130, 140]. Ein weiteres Problem der ursprünglichen Impulsinterpolation tritt in instationären Simulationen in Erscheinung. So lässt sich am Beispiel der instationären Lösung eines

stationären Problems analytisch zeigen, dass die in diesem Fall theoretisch frei wählbare Zeitschrittweite einen Einfluss auf das konvergierte Ergebnis ausüben kann. Die genauen Zusammenhänge und die Funktion der beiden zusätzlichen Korrekturterme $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]}$ und $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]}$ werden im nächsten Abschnitt ab Seite 79 analysiert und diskutiert.

Nach Bestimmung des Geschwindigkeitsvektors $u_{i,\mathbf{f}}$ mit (3.57)–(3.60) kann schließlich der Massenfluss über eine Kontrollvolumengrenzfläche, $\dot{m}_{\mathbf{f}}$, berechnet werden, wobei die lokale Dichte im kompressiblen Fall zentral nach (A.21) approximiert wird, d. h.

$$\dot{m}_{\mathbf{f}} = \langle \rho \rangle_{\mathbf{f}} u_{i,\mathbf{f}} \delta A_{i,\mathbf{f}}. \quad (3.61)$$

Für eine inkompressible Strömung und den Fall $\Delta u_{i,\mathbf{f}} = 0$ führt (3.57) in (3.61) in Verbindung mit einer CDS Approximation (A.21) für $\phi_{\mathbf{f}}$ in (3.11) auf eine quasi schiefsymmetrische Approximation konvektiver Flüsse [41], welche sich in Grobstruktursimulationen günstig auf die Entwicklung von Aliasing-Fehlern auswirkt [114].

3.2.3 Diskussion der Korrekturterme

Um die Wirkungsweise der durch (3.57)–(3.60) definierten Impulsinterpolationsvarianten zu untersuchen, bietet es sich an, das eindimensionale Beispiel einer Finite-Volumen Diskretisierung aus Abschnitt 3.2.1 wieder aufzugreifen. Mit $\phi = u$ wird hier speziell die Integration der inkompressiblen, eindimensionalen Kontinuitätsgleichung $du/dx = 0$ auf einem äquidistanten Gitter am Punkt P betrachtet. Im Unterschied zur Vorgehensweise auf Seite 69 wird dabei jedoch nicht die lineare Interpolation (A.21), sondern die Approximation (3.57) zur Berechnung flächenzentrierter Werte von u eingesetzt. Dies führt gemäß

$$0 = \int_{\mathbf{w}}^{\mathbf{e}} \frac{du}{dx} dx = [u]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{e}} \approx [\langle u \rangle]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{e}} + [\Delta u^{[\alpha]}]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{e}} + [\Delta u^{[t]}]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{e}} + [\beta_p \Delta u^{[p]}]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{e}} \quad (3.62)$$

auf eine gegenüber der Ausgangsform (3.33) um drei Zusatzterme erweiterte Näherung.

Grundsätzlich können alle in (3.62) zusätzlichen Terme als Quellen bzw. Senken der diskretisierten Massenbilanz aufgefasst werden. Allerdings gibt es prinzipielle Unterschiede in deren Funktion, da $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[\alpha]}$ bzw. $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[t]}$ per Definition erst dann einen Beitrag liefern können, wenn in zurückliegenden Iterationen bzw. Zeitschritten bereits Abweichungen gegenüber einer linear interpolierten Geschwindigkeit durch $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]} \neq 0$ aufgetreten sind. Die Korrektur (3.60) ist daher als das zentrale Element der Impulsinterpolation anzusehen, welches auf nichtversetzten Gittern überhaupt erst eine lokale Kopplung zwischen Druck- und Geschwindigkeitsfeldern herbeiführt. Nachfolgend wird dieser Korrekturterm daher auch als *Kopplungsterm* bezeichnet. Die beiden übrigen Korrekturterme $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[\alpha]}$ und $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[t]}$

verleihen der Approximation der Massenflüsse dagegen ein „Gedächtnis“. Durch die Berücksichtigung zurückliegender Iterations- und Zeitstufen in (3.58) und (3.59) wird praktisch ein Gegengewicht zur Schwächung des Kopplungsterms $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}$ in (pseudo-)zeitgenauen Simulationen geschaffen. Zur Abgrenzung werden die Terme $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[\alpha]}$ und $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[t]}$ daher im Weiteren als *Kompensationsterme* bzw. in der Summe auch als *Fluxkompensator* bezeichnet. Die Funktionsweisen von Kopplungsterm und Fluxkompensator werden nachfolgend separat analysiert und diskutiert.

Kopplungsterm $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]}$

Der in (3.60) enthaltene Ausdruck in eckigen Klammern entspricht gemäß (3.56) einer Differenz zwischen direkt ausgewertetem und interpoliertem Druckgradienten und soll hier anhand einer einfachen orthogonalen Situation in x -Richtung näher betrachtet werden. Auf einem äquidistanten Gitter (d. h. $\delta x = x_E - x_P = x_e - x_w$) erhält man mit $g_j = (\delta x, 0, 0)^T$ und $\delta A_i = (\delta A_x, 0, 0)^T$ für die Stelle \mathbf{e} :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\mathbf{e}} - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_{\mathbf{e}} \approx \frac{1}{4\delta x} (p_w - 3p_P + 3p_E - p_{EE}) = -\frac{(\delta x)^2}{4} \left(\frac{\delta^3 p}{\delta x^3}\right)_{\mathbf{e}}. \quad (3.63a)$$

Analog findet man für die Stelle \mathbf{w} :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\mathbf{w}} - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_{\mathbf{w}} \approx \frac{1}{4\delta x} (p_{wW} - 3p_w + 3p_P - p_E) = -\frac{(\delta x)^2}{4} \left(\frac{\delta^3 p}{\delta x^3}\right)_{\mathbf{w}}. \quad (3.63b)$$

Die (approximative) Proportionalität der Druckgradientendifferenz in (3.63a) und (3.63b) zur diskreten 3. räumlichen Ableitung des Drucks an Ost- bzw. Westfläche lässt sich durch Taylorreihenentwicklungen um die Stelle \mathbf{e} bzw. \mathbf{w} zeigen. Offenbar tritt infolge des Korrekturterms $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]}$ erst dann eine Abweichung gegenüber der linear interpolierten Grenzflächengeschwindigkeit in (3.57) auf, wenn sich der Druckverlauf nicht mehr durch eine quadratische Funktion abbilden lässt. Die Wirkung des Korrekturterms (3.60) nimmt mit kleiner werdender Schrittweite δx quadratisch ab und verschwindet gänzlich im Grenzfall unendlich feiner räumlicher Auflösung. Nimmt man vereinfachend an, dass sowohl β_p als auch der Vorfaktor der Druckgradientendifferenz in (3.60), $-\alpha_u \langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}} / \langle a_P / \psi \rangle_{\mathbf{f}}$, räumlich konstant sind, kann man die Differenz $(\beta_p \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]})_{\mathbf{e}} - (\beta_p \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]})_{\mathbf{w}}$ in der diskretisierten Kontinuitätsgleichung (3.62) nach Division durch β_p und Subtraktion der Gleichung (3.63b) von Gleichung (3.63a) für ein äquidistantes Gitter folgendermaßen ausdrücken:

$$\Delta u_{\mathbf{e}}^{[p]} - \Delta u_{\mathbf{w}}^{[p]} \approx -\alpha_u \frac{\delta V}{\alpha_P} \left[\frac{1}{4\delta x} \underbrace{(-p_{wW} + 4p_w - 6p_P + 4p_E - p_{EE})}_{-(\delta x)^4 \left(\delta^4 p / \delta x^4\right)_P} \right]. \quad (3.64)$$

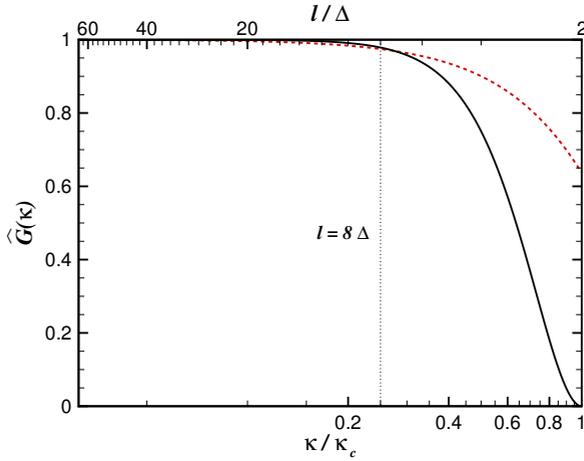


Abbildung 3-3: Transferfunktionen des in der Approximation (3.65) identifizierten, diskreten 5-Punkte Filters (—) und des Box-Filters (---) mit $\kappa_c = \pi/\Delta = \pi/\delta x$.

Auf der rechten Seite lässt sich in dieser Form die zentrale Finite-Differenzen Approximation einer vierten räumlichen Ableitung identifizieren, deren Verwendung in künstlichen Dämpfungstermen gebräuchlich ist [83]. Mit der Definition einer (diskret) gefilterten Größe ${}^F\bar{\phi}_P = \phi_P + \sum_{m=-2}^2 C_m \phi_{P+m}$ und $C_{-2} = C_2 = -\frac{1}{16}$, $C_{-1} = C_1 = \frac{1}{4}$ sowie $C_0 = -\frac{3}{8}$ kann man in Gleichung (3.64) allerdings auch einen symmetrischen Filter von 4. Ordnung [219] erkennen. Eine alternative Schreibweise von (3.64) auf dieser Basis lautet

$$\Delta u_e^{[p]} - \Delta u_w^{[p]} \approx -\alpha_u \frac{\delta V}{\alpha_P} \left[\frac{4}{\delta x} \sum_{m=-2}^2 C_m p_{P+m} \right] = \alpha_u \frac{4 \delta A_x}{\alpha_P} \left(p - {}^F\bar{p} \right)_P. \quad (3.65)$$

Die Störung der Massenbilanz in Gleichung (3.62) verhält sich somit proportional zur lokalen Druckstörung $p'_P = p_P - {}^F\bar{p}_P$ gegenüber der gefilterten Größe ${}^F\bar{p}_P$ am Punkt P. Wenn das Druckfeld glatt ist, gibt es durch (3.64) bzw. (3.65) keine Quellen in der diskretisierten Massenbilanz. Betrachtet man jedoch exemplarisch eine unphysikalische $1\delta x$ Druckoszillation mit erhöhtem Druck im Punkt P (vgl. Abb. 3-2) in einem ruhenden Medium, entstünde infolge der Korrektur (3.63b) eine negative Geschwindigkeit auf dem Westrand, durch die Korrektur (3.63a) eine positive Geschwindigkeit auf dem Ostrand und entsprechend (3.64) bzw. (3.65) eine zu den druckinduzierten Grenzflächengeschwindigkeiten konsistente Massenquelle im Zellzentrum. Wie in [104] beschrieben, würde die lokale Druckstörung im iterativen SIMPLE-Verfahren letztlich durch die Antwort der auf das Residuum der Massenbilanz reagierenden Druckkorrekturgleichung (3.106) und die Anwendung der resultierenden Geschwindigkeits- und Druckkorrekturen ausgelöscht.

In Abbildung 3-3 ist die Transferfunktion des in (3.65) auf p angewandten 5 Punkte Filters im Vergleich zur Transferfunktion des Box-Filters (2.46) dargestellt. Fasst man die FV-Approximation des Druckfeldes gleichfalls als eine räumliche Filterung auf (siehe Abschnitt 2.3.2 und Anhang A.2.1), kann man anhand der in Abbildung 3-3 bis $\kappa/\kappa_c = 0.2$ nahezu konstanten Verläufe der beiden Transferfunktionen und deren Schnittpunkt bei $l/\Delta \approx 8$ ableiten, dass der Korrekturterm vorwiegend auf Druckstörungen reagiert, die mit höchstens 8 Punkten pro Wellenlänge in der Simulation aufgelöst sind. Ist der lokale Druckverlauf nicht mehr durch eine kubische Funktion darstellbar (vgl. (3.64)), tritt infolge der Impulsinterpolationen eine Quelle oder Senke in der diskretisierten Kontinuitätsgleichung auf [202]. Auf diese Tatsache ist vor dem Hintergrund aeroakustischer Simulationen explizit hinzuweisen, da eine instationäre Zu- und Abfuhr von Volumen bzw. Masse als akustische Monopolquelle signifikante Schallentstehung zur Folge haben kann [36, 45, 210]. Würden derart kurzzeitige Störungen im Druckfeld nicht hinreichend gedämpft, sondern z. B. durch plötzliche Gittervergrößerung hervorgerufen, wäre in einer kompressiblen Simulation die Erzeugung künstlicher Monopolquellen durch instationäre Störungen der Massenbilanz möglich. Infolge der Dämpfung erscheint andererseits die physikalische Schallemission turbulenter Strukturen unterhalb einer Mindestgröße von $\ell_{\min} \approx 8 \Delta$ nicht sehr vertrauenswürdig, weswegen es sinnvoll erscheint, mit $f_{\max} = u/\ell_{\min} \approx u/(8 \Delta)$ eine obere Grenzfrequenz als Orientierungswert für die in einer Grobstruktursimulation erfassbaren Geräuschquellen festzulegen.

Fluxkompensator $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]} + \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]}$

Es soll nun die Funktion der beiden übrigen Korrekturterme aus (3.57) analysiert werden. Da der diagonale Koeffizient $a_p = a_p^s + a_p^t$ im Nenner des Vorfaktors von (3.60) bzw. (3.65) auftritt, hängt $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]}$ bzw. die Differenz $\Delta u_e^{[p]} - \Delta u_w^{[p]}$ in instationären Simulationen unmittelbar von der gewählten Zeitschrittweite δt ab. Aufgrund der Proportionalität $a_p^t \sim \delta t^{-1}$ bringt eine kleiner werdende Zeitschrittweite dabei eine zunehmende Schwächung des Kopplungsterms $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]}$ mit sich. Zudem ist dieser Term linear vom Relaxationsfaktor α_u abhängig, weswegen die Wirksamkeit der Impulsinterpolation bei Verwendung von Unterrelaxation bereits in stationären Simulationen herabgesetzt sein kann. Nachfolgend soll nun gezeigt werden, wie sich diese zwei unerwünschten Effekte durch Berücksichtigung der Kompensationsterme $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]}$ und $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]}$ in (3.57) aufheben lassen. Ausgangspunkt der Analyse ist die Gegenüberstellung zweier Impulsinterpolationsvarianten in x-Richtung,

$$u_{\mathbf{f}} - \langle u \rangle_{\mathbf{f}} = \beta_p^{[\alpha,t]} \Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]} \quad (3.66)$$

$$\text{und} \quad u_{\mathbf{f}} - \langle u \rangle_{\mathbf{f}} = \Delta u_{\mathbf{f}}^{[\alpha]} + \Delta u_{\mathbf{f}}^{[t]} + \Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}, \quad (3.67)$$

und deren hypothetische Anwendung in der instationären Simulation eines stationären Problems. Gleichsetzen von (3.66) und (3.67) führt nach Division durch $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}$ auf

$$\beta_p^{[\alpha,t]} = \frac{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[\alpha]}}{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}} + \frac{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[t]}}{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}} + 1. \quad (3.68)$$

Durch diese Beziehung kann die Wirkung der beiden Korrekturterme $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[\alpha]}$ und $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[t]}$ in einen äquivalenten Skalierungsfaktor $\beta_p^{[\alpha,t]}$ für $\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}$ übersetzt werden. Mit (3.58) und der Annahme einer auf dem Zeitschritt auskonvergierten Lösung, d. h. $u \approx u^*$, wird jetzt der erste Term umformuliert

$$\frac{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[\alpha]}}{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}} \approx (1 - \alpha_u) \frac{u_{\mathbf{f}} - \langle u \rangle_{\mathbf{f}}}{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}} \stackrel{(3.66)}{=} (1 - \alpha_u) \beta_p^{[\alpha,t]}. \quad (3.69)$$

Für den zweiten Term erhält man mit (3.59) und der stationären Annahme $u \approx u^o \approx u^{oo}$

$$\frac{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[t]}}{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}} \approx \alpha_u \frac{\langle a_p^t / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_p / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \frac{u_{\mathbf{f}} - \langle u \rangle_{\mathbf{f}}}{\Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]}} \stackrel{(3.66)}{=} \alpha_u \frac{\langle a_p^t / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_p / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \beta_p^{[\alpha,t]}. \quad (3.70)$$

Einsetzen von (3.69) und (3.70) in (3.68) und anschließende Division durch $\beta_p^{[\alpha,t]}$ führt auf

$$1 \approx 1 - \alpha_u + \alpha_u \frac{\langle a_p^t / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_p / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} + \frac{1}{\beta_p^{[\alpha,t]}}, \quad (3.71)$$

und Auflösen nach β_p liefert schließlich den Zusammenhang

$$\beta_p^{[\alpha,t]} \approx \frac{1}{\alpha_u} \frac{\langle a_p / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_p^t / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \stackrel{(3.43)}{=} \frac{1}{\alpha_u} \frac{\langle a_p / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_p^s / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}. \quad (3.72)$$

Eine geeignete Wahl von ψ vorausgesetzt (siehe Tabelle 3-1 auf Seite 73), wird der mit $\beta_p^{[\alpha,t]}$ skalierte Kopplungsterm in Gleichung (3.66) durch diese Definition unabhängig von Zeitschrittweite δt und Relaxationsfaktor α_u , denn es gilt

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{f}} - \langle u \rangle_{\mathbf{f}} &= \frac{1}{\alpha_u} \frac{\langle a_p / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_p^s / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \Delta u_{\mathbf{f}}^{[p]} \\ &= - \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_p^s / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \left[\left(p_{\mathbf{F}} - p_{\mathbf{P}} - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbf{1}} g_j \right) \frac{\delta A_x}{g_k \delta A_k} \right]_{\mathbf{f}}, \text{ q. e. d.} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Im Vergleich zu (3.60) wird sofort deutlich, dass durch die Skalierung mit $\beta_p^{[\alpha,t]}$ zum einen der Relaxationsfaktor α_u entfällt und zum anderen der zentrale Koeffizient a_p

durch a_p^s ersetzt wird. Um die durch die Konstruktion des Kopplungsterms bedingte Abhängigkeit der Massenflüsse (3.61) vom Relaxationsfaktor und von der Zeitschrittweite wieder auszugleichen, wäre demnach entweder eine Skalierung von $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]}$ mit $\beta_p = \beta_p^{[\alpha,t]}$ gemäß der Beziehung (3.72) wie beim Ansatz (3.66) oder aber eine Berücksichtigung des Fluxkompensators $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]} + \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]}$ wie in (3.57) bzw. (3.67) denkbar.

3.2.4 Diskussion in ELAN implementierter Varianten

Mit den generischen Ausdrücken (3.57) und (3.66) wurden zwei verschiedene Möglichkeiten der Impulsinterpolation definiert. Eine geschlossene Darstellung dieser kann durch

$$u_{i,\mathbf{f}} = \langle u_i \rangle_{\mathbf{f}} + \beta_\alpha \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]} + \beta_t \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]} + \beta_p \Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]} \quad (3.74)$$

erfolgen, wobei die gegenüber (3.57) zusätzlich eingeführten Parameter β_α und β_t ein Ausblenden von Relaxationsfaktor- (3.58) und Zeitschrittkompensation (3.59) ermöglichen sollen. Tabelle 3-2 fasst auf dieser Basis drei in ELAN implementierte Varianten der Impulsinterpolation zusammen und definiert Abkürzungen für deren eindeutige Zuordnung.

Tabelle 3-2: Definition der in ELAN implementierten Impulsinterpolationsvarianten auf Basis der generischen Gleichung (3.74) mit Korrekturtermen $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[\alpha]}$, $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[t]}$ und $\Delta u_{i,\mathbf{f}}^{[p]}$ gemäß (3.58), (3.59) und (3.60).

Bezeichnung	ψ	β_α	β_t	β_p
RCX(ue)	a_p	0	0	$1/\alpha_u$
RCS(tationär)	a_p^s	0	0	$\beta_p^{[\alpha,t]}$
RCM(odifiziert)	1	1	1	1

Die erste, RCX, entspricht exakt der ursprünglichen Variante von L. Xue [227]. Der wesentliche Unterschied zwischen dieser und der neuen RCS Variante ist dabei nicht in der abweichenden Definition von ψ , sondern im Verhältnis der Skalierungsfaktoren

$$\frac{\beta_{p,\text{RCS}}}{\beta_{p,\text{RCX}}} = \alpha_u \beta_p^{[\alpha,t]} \stackrel{(3.72)}{=} \left\langle \frac{a_p}{a_p^s} \right\rangle_{\mathbf{f}} \stackrel{(3.43)}{=} 1 + \left\langle \frac{a_p^t}{a_p^s} \right\rangle_{\mathbf{f}} \quad (3.75)$$

zu sehen. Während in einer stationären Simulation beide Varianten formal identisch sind, sorgt der in $\beta_p^{[\alpha,t]}$ enthaltene instationäre Term $\langle a_p^t/a_p^s \rangle_{\mathbf{f}} \sim \delta t^{-1}$ bei der RCS Interpolation dafür, dass die bereits angesprochene Schwächung des Kopplungsterms (3.60) in zeitgenauen Simulationen vollständig kompensiert wird (vgl. (3.60) und (3.73)).

Die Unterschiede zwischen RCX und RCS Variante lassen sich nach Einsetzen der Definition (3.72) von $\beta_p^{[\alpha,t]}$ in Gleichung (3.66) auf eine Ersetzung $a_p \leftarrow a_p^s$ im Vorfaktor des Korrekturterms (3.60) reduzieren. In Form dieser Substitution ist die RCS Variante in ELAN sehr einfach zu implementieren. Gleichzeitig wird aber deutlich, dass es sich im Prinzip um eine Interpolation auf Basis der stationären Impulsbilanz handelt. Die zur Herleitung von $\beta_p^{[\alpha,t]}$ getroffene Annahme $u \approx u^\circ \approx u^{oo}$ wird in instationären Simulationen nur selten erfüllt sein, weswegen die Anwendung der RCS Interpolation in diesem Fall fragwürdig erscheint. Die Implementierung der instationären RCM Variante gestaltet sich dagegen etwas komplizierter, da zur Berechnung sämtlicher Terme aus (3.74) entweder Geschwindigkeitsvektoren oder Korrekturen zurückliegender Iterations- und Zeitstufen auf FV-Grenzflächen abgespeichert werden müssen.

Für die Zeitschrittweitenabhängigkeit der ursprünglichen RCX-Variante sind gemäß (3.75) die lokalen Verhältnisse von a_p^t zu a_p^s ausschlaggebend, weswegen es sinnvoll erscheint, die Beiträge der Diskretisierung zu diesen zwei Teilen des zentralen Koeffizienten (3.43) näher zu betrachten. Um die Analyse kompakt zu halten, wird eine inkompressible, reibungsfreie Strömung vorausgesetzt und eine zeitliche Diskretisierung von 1. Ordnung (3.9) sowie eine „Upwind“-Interpolation (3.15) im konvektiven Term gewählt. In diesem Fall gilt $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$ und $S_{P,p} = 0$, so dass man für den zeitlichen und den räumlichen Anteil von a_p gemäß (3.43)

$$a_p^t = \frac{\rho \delta V}{\delta t} \quad \text{und} \quad a_p^s = \sum_F a_F \stackrel{(3.30)}{=} \sum_f \max(-\dot{m}_f, 0) \quad (3.76)$$

erhält. Nimmt man exemplarisch ein kartesisches Gitter sowie mit $\mathbf{u} = (u, 0, 0)^T$ und $u > 0$ eine homogene Strömung in x-Richtung an, kann man das Volumen durch $\delta V = \delta x^3$ ausdrücken, dessen Grenzflächeninhalte entsprechend mit $\delta A = \delta x^2$, und die Summation der Massenflüsse nach (3.15) liefert lediglich einen Beitrag für den Westrand. Es folgt

$$\frac{a_p^t}{a_p^s} = \frac{\rho \delta V / \delta t}{\dot{m}_w} = \frac{\rho \delta x^3 / \delta t}{\rho u \delta x^2} = \frac{\delta x}{u \delta t} \quad (3.77)$$

und eingesetzt in (3.75)

$$\frac{\beta_{p,\text{RCS}}}{\beta_{p,\text{RCX}}} = 1 + \frac{1}{Co_1} \quad \text{mit} \quad Co_1 = u \frac{\delta t}{\delta x}. \quad (3.78)$$

Diese Beziehung zeigt, dass das Verhältnis der RCS und RCX Skalierungsfaktoren für $\Delta u_{i,f}^{[p]}$ (siehe Tabelle 3-2) unter oben genannten Voraussetzungen ausschließlich von der x-Koordinate des Courant-Zahl-Vektors $Co_i = u_i \delta t / \delta x_i$ abhängt (siehe Nomenklatur, Seite xiii), welcher die zeitliche und räumliche Auflösung einer Simulation ins Verhältnis setzt [2, 30]. Es ist daher anzunehmen, dass die Courant-Zahl auch in reibungsbehafteten

Strömungen großer Reynoldszahl einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Wirksamkeit der RCX-Interpolation haben wird.

Am Betrag von Co_i kann man ablesen, wie groß die von einem mitbewegten Fluidpartikel innerhalb eines Zeitschritts zurückgelegte Strecke im Verhältnis zur lokalen Maschenweite ist. Für turbulenzauflösende Simulationen wird zur Abschätzung einer möglichst ökonomischen Diskretisierung häufig $|Co_1| \approx |Co_2| \approx |Co_3| \leq 1$ gefordert [141, 203]. Aus Gleichung (3.78) ist nun aber ersichtlich, dass die Wirksamkeit des ursprünglich implementierten Korrekturterms bereits im Fall $Co_1 = 1$ um 50% gemindert wäre. Dies muss zwar nicht unbedingt ein Problem darstellen, da der Korrekturterm $\Delta u_{i,f}^{[p]}$ nur dann einen Beitrag liefert, wenn überhaupt kleinskalige Druckstörungen vorhanden sind. In turbulenten Regionen einer Grobstruktursimulation ist davon allerdings auszugehen (vgl. Abbildung 4-11, S. 125). Verglichen mit dem theoretischen Einfluss typischer Relaxationsfaktoren von $\alpha_u \approx 0.7$ [56] auf $\Delta u_{i,f}^{[p]}$ (der durch die Skalierung mit $\beta_p \sim 1/\alpha_u$ berücksichtigt wird) ist die Herabsetzung der RCX-Korrektur durch die Zeitschrittweite zudem nicht unerheblich. Wenn man nun noch in die Betrachtung mit einbezieht, dass der globale Zeitschritt in der Regel für die fein aufgelöste Fokusregion einer Simulation angepasst wird und die Courant-Zahlen in größeren Bereichen des Gitters um ein Vielfaches kleiner werden können, wird anhand des Zusammenhangs (3.78) bereits recht deutlich, dass die Wirksamkeit der RCX-Impulsinterpolation in turbulenzauflösenden Simulationen zumindest gebietsweise gefährdet sein wird.

3.2.5 Demonstration der Entkopplung

Die RCS und RCM Interpolationen wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt, um eine Abhängigkeit des numerischen Verfahrens von der Zeitschrittweite beheben zu können. Die programmtechnische Umsetzung dieser zwei Varianten wird in Kapitel 4 validiert. Aus Konsistenzgründen ziehen die Änderungen der Impulsinterpolation gemäß Tabelle 3-2 entsprechende Modifikationen am Druckkorrekturverfahren nach sich. Bevor die hierzu erforderlichen Herleitungen dargestellt werden, erscheint es jedoch angebracht, die Änderungen von Impulsinterpolation und Druckkorrekturverfahren auch anhand einer praktischen Demonstration des ursprünglich vorgefundenen Problems zu motivieren. Zwar würde sich die ursprünglich implementierte Impulsinterpolation erst im Extremfall unendlich kleiner Zeitschrittweite wieder auf eine lineare Interpolation reduzieren, es genügt jedoch bereits, eine Simulation mit DES-typischer zeitlicher Auflösung durchzuführen, um eine signifikante Schwächung des einzigen Korrekturterms der RCX-Variante (3.60) und folglich unphysikalische Oszillationen in Druck- und Geschwindigkeitsfeldern hervorzurufen.

Beispielhaft sind in Abbildung 3-4 Schnappschüsse des Druckfeldes aus sechs unterschiedlichen, zeitgenauen Simulationen der inkompressiblen, zweidimensionalen Strömung um

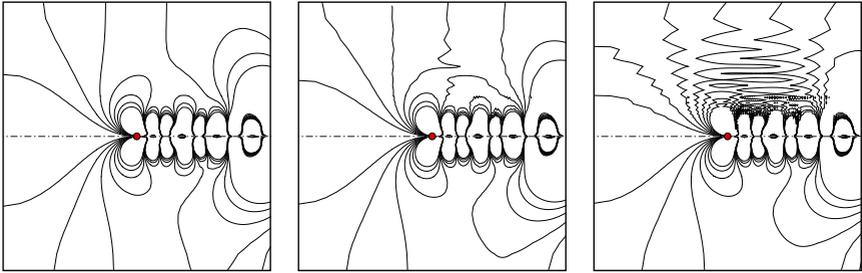


Abbildung 3-4: Einfluss der Zeitschrittweite δt (von links nach rechts $\delta t = 0.1D/u_\infty$, $\delta t = 0.01D/u_\infty$ und $\delta t = 0.001D/u_\infty$) auf das Druckfeld der Strömung um einen Kreiszyylinder (rot) unter Verwendung der Impulsinterpolationsvarianten RCX (oben) und RCM (unten). Dargestellt sind Isolinien des statischen Drucks zum Zeitpunkt maximalen Auftriebs, die untere Bildhälfte ist an der Symmetrieebene gespiegelt.

einen Kreiszyylinder bei $Re_D = 100$ gegenübergestellt. Bei der mit dem Durchmesser D gebildeten Reynoldszahl $Re_D = u_\infty D/\nu = 100$ ist die Strömung durch eine reine kármánsche Wirbelstraße im Nachlauf des Kreiszyinders geprägt [186]. Dabei liegt die dimensionslose Frequenz der durch alternierende Wirbelablösung induzierten Auftriebsschwankungen in den Simulationen übereinstimmend bei $St_A = f D/u_\infty \approx 0.168$. Während einer Periodendauer lösen jeweils zwei Wirbel mit entgegengesetztem Drehsinn von der Rückseite des Zylinders ab, weswegen dessen Widerstandskraft gerade mit der doppelten Frequenz schwankt und die Dauer eines Wirbelabwurfs entsprechend mit $t^* = 0.5/St_A$ charakterisiert werden kann.

Ausgehend von einer typischerweise für die Simulation der laminaren Strömung ausreichenden Zeitschrittweite von $\delta t = 0.1D/u_\infty$ (dies entspricht einer Auflösung von 29 Zeitschritten pro Wirbelabwurf) wurde die Zeitschrittweite in zwei Stufen um jeweils eine Zehnerpotenz abgesenkt, wobei die mittlere Zeitschrittweite von $\delta t = 0.01D/u_\infty$ prinzipiell einen für eine DES geeigneten Wert darstellt. Nimmt man an, die Strömung sollte bei großer Reynoldszahl mit einer DES erfasst werden, würde eine erste Abschätzung der benötigten räumlichen Auflösung nach Tabelle 2-1 mit $\ell_m \approx D$ auf Zellen der Größe $\Delta \approx \Delta \approx D/40$ im Nachlauf des Kreiszyinders führen. Unter der Voraussetzung, dass die größte Strömungsgeschwindigkeit in der LES-Region $u_{max} \approx 1.5 u_\infty$ nicht wesentlich übersteigt, würde sich eine sinnvolle Zeitschrittweite gemäß [203] zu $\delta t \approx \Delta/u_{max} = 0.01\bar{6} D/u_\infty$ ergeben.

Während die oberen Bildhälften Resultate auf Basis der ursprünglich implementierten Rhie & Chow Interpolation nach L. Xue (RCX) wiedergeben, zeigen die unteren Bildhälften jeweils Ergebnisse der modifizierten Implementierung (RCM) gemäß (3.57) mit allen drei Korrekturtermen und $\psi = \beta_p = 1$ (siehe Tabelle 3-2). Die alternierende Druckverteilung im Falle der ursprünglichen Implementierung kommt in dem Vergleich bei kleinen Zeit-

schrittweisen deutlich zum Ausdruck. Es handelt sich dabei um spontane Sprünge von Zelle zu Zelle, wie eingangs in Abbildung 3-2 skizziert. Da die unphysikalischen Oszillationen insbesondere im Fall der kleinsten Zeitschrittweite recht dramatisch aussehen, ist es wichtig darauf hinzuweisen, dass die Störungen gegenüber dem hydrodynamischen Nahfeld der Nachlaufwirbel verhältnismäßig schwach ausgeprägt sind, weswegen die Wirbelstraße noch nahezu unverändert erscheint. Es ist allerdings bereits ein Einfluss auf die zeitgemittelte Widerstandskraft zu verzeichnen. Bei Verwendung der ursprünglichen Implementierung wird keine Zeitschrittkonvergenz erreicht, die mittleren Widerstandsbeiwerte variieren in der dritten Nachkommastelle (~ 10 „drag counts“). Mit der modifizierten Implementierung ergibt sich dagegen für die beiden feinen Zeitschrittweiten nach Mittelung über 69 Wirbelabwürfe ein bis in die sechste Nachkommastelle übereinstimmender Widerstandsbeiwert von $\bar{c}_w = 1.343605$.

Weil bei kleiner Machzahl nur ein winziger Bruchteil der hydrodynamischen Schwankungsenergie in Form akustischer Wellen abgestrahlt wird, ist das Auftreten derartiger Störungen in aeroakustischen Simulationen unbedingt zu vermeiden. Zudem können die Oszillationen im Druckfeld bei fortgesetzter Zeitintegration eine Destabilisierung instationärer Simulationen verursachen. Dies gilt insbesondere im kompressiblen Fall, wenn die in Abschnitt 3.3 beschriebene, nichtreflektierende Randbedingung eingesetzt wird.

3.2.6 Druckkorrekturverfahren

In diesem Abschnitt werden die zum Erhalt der Konsistenz des Druckkorrekturverfahrens notwendigen Anpassungen abgeleitet und beschrieben. Alle Herleitungen erfolgen dabei in generischer Form, d. h. auf Basis der beiden Parameter ψ und β_p aus Tabelle 3-2, um eine kompakte Darstellung der je nach Impulsinterpolation (RCX/RCS/RCM) unterschiedlichen Modifikationen zu ermöglichen.

Korrekturen für Geschwindigkeiten und Druck im Zellzentrum

Nach der Lösung der Impulsbilanz (Prädiktorschritt, vgl. Kapitel 3.2) erfüllen die Geschwindigkeiten nicht notwendigerweise die Massenbilanz. Man bezeichnet diese vorläufigen Geschwindigkeiten nun mit u^\diamond , das dazugehörige vorläufige Druckfeld mit p^\diamond und nimmt an, dass sich die konservativen Geschwindigkeiten u und ein dazu passendes Druckfeld p aus den vorläufigen Werten und zunächst unbekanntem Korrekturen u_i^∇ und p^∇ bestimmen lassen, d. h.

$$u_i = u_i^\diamond + u_i^\nabla \tag{3.79}$$

$$\text{und } p = p^\diamond + p^\nabla . \tag{3.80}$$

Schreibt man nun in Gleichung (3.35) den Quelltermanteil S^{II} gemäß der Zerlegung von S (3.44) aus, ist nach dem Lösen der Impulsbilanz zunächst die Beziehung

$$\left(\frac{a_p}{\psi}\right)_p u_p^\diamond = \alpha_u \left(H^\diamond + \frac{S^{\text{II}}}{\psi} - \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p^\diamond}{\partial x} \right)_p + (1 - \alpha_u) \left(\frac{a_p}{\psi}\right)_p u_p^* \quad (3.81)$$

erfüllt. Aber natürlich sollen auch die gesuchten konservativen Geschwindigkeiten u_i (3.79) und das dazugehörige Druckfeld p (3.80) der diskretisierten Impulsbilanz genügen, d. h.

$$\left(\frac{a_p}{\psi}\right)_p (u_p^\diamond + u_p^\blacktriangleright) = \alpha_u \left(H^\diamond + H^\blacktriangleright + \frac{S^{\text{II}}}{\psi} - \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p^\diamond}{\partial x} - \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p^\blacktriangleright}{\partial x} \right)_p + (1 - \alpha_u) \left(\frac{a_p}{\psi}\right)_p u_p^*. \quad (3.82)$$

Subtrahiert man nun Gleichung (3.81) von Gleichung (3.82), findet man einen impliziten Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Druckkorrekturen

$$\left(\frac{a_p}{\psi}\right)_p u_p^\blacktriangleright = \alpha_u \left(H^\blacktriangleright - \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p^\blacktriangleright}{\partial x} \right)_p. \quad (3.83)$$

Es ist anzumerken, dass diese Gleichung nicht für jede äußere Iteration des Druckkorrekturverfahrens erfüllt sein muss. Es genügt, eine approximative Beziehung zwischen den Korrekturgrößen herzustellen, mit welcher nach Einsetzen in die diskretisierte Massenbilanz (3.102) und Lösen der resultierenden Druckkorrekturgleichung (3.106) divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder erzeugt werden können, bis schließlich das gesamte Gleichungssystem konvergiert ist und keine Druck- oder Geschwindigkeitskorrekturen mehr erforderlich sind. Die Geschwindigkeitskorrekturen in (3.83) könnten z. B. mit einem Faktor $\beta > 0$ skaliert werden, wodurch lediglich das Konvergenzverhalten, nicht aber die konvergierte Lösung beeinträchtigt wird,

$$\left(\frac{a_p}{\psi}\right)_p u_p^\blacktriangleright = \alpha_u \beta \left(\underbrace{H^\blacktriangleright}_{\rightarrow 0} - \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p^\blacktriangleright}{\partial x} \right)_p. \quad (3.84)$$

Beim SIMPLE Druckkorrekturverfahren wird nun, um einen expliziten Zusammenhang zwischen den Korrekturen herbeizuführen, der erste unterklammerte Term in (3.84) vernachlässigt. Davon ausgehend, dass diese Vereinfachung eine Beeinträchtigung des Konvergenzverhaltens mit sich bringt, sind in der Vergangenheit auch andere Ansätze für H^\blacktriangleright verfolgt worden. Obwohl in der Literatur Verbesserungen des Konvergenzverhaltens durch die SIMPLE Weiterentwicklungen SIMPLER [157] und SIMPLEC nachgewiesen sind [217], wollen wir uns im Rahmen dieser Arbeit auf Anpassungen am bestehenden SIMPLE Verfahren [227] beschränken. Unter Berücksichtigung der Impulsgleichungen in y - und z -Richtung findet man analoge Beziehungen für v_p^\blacktriangleright und w_p^\blacktriangleright , so dass man zusammenfassend

$$\left(\frac{a_p}{\psi}\right)_p u_{i,p}^\blacktriangleright = -\alpha_u \beta \left(\frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p^\blacktriangleright}{\partial x_i} \right)_p \quad (3.85)$$

schreiben kann. Auflösen von (3.85) nach $u_{i,p}^\nabla$ und Einsetzen in die Zerlegung (3.79) liefert schließlich eine Formel zur Korrektur der nicht konservativen Geschwindigkeiten im Zellzentrum, u_p^\diamond :

$$u_{i,p} = u_{i,p}^\diamond - \alpha_u \beta \left(\frac{\delta V}{a_p} \frac{\partial p^\nabla}{\partial x_i} \right)_p. \quad (3.86)$$

Geschwindigkeitskorrekturen auf der Kontrollvolumengrenzfläche

Zur Bestimmung von Korrekturformeln für die Geschwindigkeiten auf Kontrollvolumengrenzflächen wird analog zur Herleitung der Gleichung (3.86) verfahren. Man fordert, dass Gleichung (3.50) sowohl für die vorläufigen Geschwindigkeiten u_i^\diamond und das vorläufige Druckfeld p^\diamond als auch für die gesuchten konservativen Geschwindigkeiten (3.79) und das dazugehörige Druckfeld (3.80) gelten soll. Da die Geschwindigkeiten zurückliegender Zeitschritte und äußerer Iteration aber in beiden Fällen identisch sind, entfallen drei Terme bei der Subtraktion der zwei Gleichungen und man erhält den Zusammenhang

$$\left\langle \frac{a_p}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} u_{i,\mathbf{f}}^\nabla = \left\langle \frac{a_p}{\psi} u_i^\nabla \right\rangle_{\mathbf{f}} - \alpha_u \beta_p \left[\left\langle \frac{\delta V}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \left(\frac{\partial p^\nabla}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{f}} - \left\langle \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p^\nabla}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{f}} \right]. \quad (3.87)$$

Die Geschwindigkeitskorrekturen im Zellzentrum sind durch (3.85) bereits gegeben, man erhält für den ersten Korrekturterm

$$\left\langle \frac{a_p}{\psi} u_i^\nabla \right\rangle_{\mathbf{f}} \stackrel{(3.85)}{\approx} -\alpha_u \langle \beta \rangle_{\mathbf{f}} \left\langle \frac{\delta V}{\psi} \frac{\partial p^\nabla}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{f}}. \quad (3.88)$$

Um in der weiter unten aus der Massenbilanz abgeleiteten Druckkorrekturgleichung (3.106) zu einer kompakten Formulierung des „diffusiven Terms“ zu gelangen (siehe Seite 91), muss man sich an dieser Stelle auf den Fall $\langle \beta \rangle_{\mathbf{f}} = \beta_p$ beschränken, denn nur dann entfallen beim Einsetzen von (3.88) in (3.87) die interpolierten Druckgradienten, und es gilt

$$\left\langle \frac{a_p}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} u_{i,\mathbf{f}}^\nabla = -\alpha_u \beta_p \left\langle \frac{\delta V}{\psi} \right\rangle_{\mathbf{f}} \left(\frac{\partial p^\nabla}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{f}}. \quad (3.89)$$

Die Korrekturen der Grenzflächengeschwindigkeit werden zur Herleitung der Druckkorrekturgleichung benötigt. Der Gradient der Druckkorrektur auf der Grenzfläche beinhaltet auch grenzflächentangentiale Komponenten, welche sich nicht implizit in das Gleichungssystem für die Druckkorrektur einarbeiten lassen. Wenn die Gitterlinien annähernd orthogonal verlaufen, ist der Beitrag dieser grenzflächentangentialen Komponenten zum Massenfluss (3.61) aber in der Regel klein. Auf orthogonalen Gittern liefert nur der grenzflächennormale Gradient einen Beitrag, wovon man sich durch Auswertung des Skalarproduktes $\mathbf{u}_{\mathbf{f}}^\nabla \cdot \delta \mathbf{A}_{\mathbf{f}}$

überzeugen kann:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{f}}^{\nabla} \cdot \delta \mathbf{A}_{\mathbf{f}} = -\alpha_u \beta_p \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_P / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} (\nabla p^{\nabla} \cdot \delta \mathbf{A})_{\mathbf{f}} \quad (3.90)$$

$$\stackrel{(A.29)}{=} -\alpha_u \beta_p \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_P / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \left(\frac{\partial p^{\nabla}}{\partial \xi^1} \mathbf{g}^1 \cdot \delta \mathbf{A} + \underbrace{\frac{\partial p^{\nabla}}{\partial \xi^2} \mathbf{g}^2 \cdot \delta \mathbf{A}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\partial p^{\nabla}}{\partial \xi^3} \mathbf{g}^3 \cdot \delta \mathbf{A}}_{\rightarrow 0} \right)_{\mathbf{f}}. \quad (3.91)$$

Ist das Gitter orthogonal, stimmen die Richtungen von Flächenvektor $\delta \mathbf{A}$ und kontravariantem Basisvektor \mathbf{g}^1 überein, und die Skalarprodukte $\mathbf{g}^2 \cdot \delta \mathbf{A}$ und $\mathbf{g}^3 \cdot \delta \mathbf{A}$ verschwinden. Da die beiden letzten Terme jedoch generell vernachlässigt werden (d. h. $\partial p^{\nabla} / \partial \xi^2 = 0$ und $\partial p^{\nabla} / \partial \xi^3 = 0$), kann das Konvergenzverhalten der iterativen Methode unter Umständen beeinträchtigt sein, wenn das Gitter starke Verzerrungen aufweist. Allerdings ist anzumerken, dass diese Vereinfachung auf eine konvergierte Lösung, in der die Massenbilanz erfüllt ist und keine Druckkorrekturen mehr notwendig sind, keinen Einfluss mehr hat. In kartesischen Koordinaten verbleibt für die Korrektur des Geschwindigkeitsvektors auf einer Grenzfläche zwischen zwei Kontrollvolumen somit folgender Ausdruck:

$$u_{i,\mathbf{f}}^{\nabla} = -\alpha_u \beta_p \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_P / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \left(\frac{\partial p^{\nabla}}{\partial \xi^1} g_i \right)_{\mathbf{f}}. \quad (3.92)$$

Wertet man nun noch den Gradienten der Druckkorrektur in ξ^1 -Richtung aus und ersetzt die kartesischen Koordinaten des kontravarianten Basisvektors mit (A.35), findet man die zur Korrektur der Geschwindigkeiten auf FV-Grenzflächen geeignete Formel

$$u_{i,\mathbf{f}}^{\nabla} = -\alpha_u \beta_p \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_P / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \left[\frac{\delta A_i}{g_j \delta A_j} (p_{\mathbf{F}}^{\nabla} - p_{\mathbf{P}}^{\nabla}) \right]_{\mathbf{f}}. \quad (3.93)$$

Massenflusskorrekturen auf der Kontrollvolumengrenzfläche

In einer kompressiblen Strömung sind zur Korrektur der Massenflüsse (3.61) neben den Geschwindigkeitskorrekturen nach Gleichung (3.93) auch Korrekturen der Dichte auf den Kontrollvolumengrenzflächen zu berücksichtigen. Zur Ableitung dieser wird nun analog zu (3.79) und (3.80) die Zerlegung der Dichte in einen vorläufigen Wert und einen Korrekturteil eingeführt, d. h.

$$\varrho = \varrho^{\diamond} + \varrho^{\nabla}. \quad (3.94)$$

Die Dichtekorrekturen ϱ^{∇} sind nun ebenso wie die Geschwindigkeitskorrekturen u_i^{∇} auf Druckkorrekturen p^{∇} zurückzuführen. Die dazu notwendige Beziehung $\varrho^{\nabla} = \varrho^{\nabla}(p^{\nabla})$ wird im Folgenden abgeleitet, indem wir die thermische Zustandsgleichung idealer Gase (2.4) heranziehen und annehmen, dass eine isotherme Kopplung der beiden Größen vorliegt.

Alternativ könnten an dieser Stelle aber auch andere Ansätze, wie z. B. die Annahme einer adiabaten Zustandsänderung, verfolgt werden [96].

Um das Konvergenzverhalten des iterativen Verfahrens zu verbessern, welches insbesondere durch Einführung des Skalierungsfaktors β und die Vernachlässigung von $H^\mathbf{v}$ in Gleichung (3.84) beeinträchtigt wird, wendet man (auch bei inkompressibler Strömung) nur einen Bruchteil der errechneten Druckkorrekturen an, um das vorläufige Druckfeld aus der letzten Iteration zu korrigieren. Anstelle von Gleichung (3.80) verwendet man

$$p = p^\diamond + \alpha_p p^\mathbf{v}, \quad (3.95)$$

wobei mit α_p ein globaler Relaxationsfaktor für die Druckkorrektur eingeführt wird. Um in einer inkompressiblen, stationären Simulation schnelle Konvergenz zu erreichen, kann ein Orientierungswert von $\alpha_p \approx 1.0 - \alpha_u$ empfohlen werden [56]. Für die Simulation turbulenter Strömungen ist an dieser Stelle zu berücksichtigen, dass es sich bei p tatsächlich um einen effektiven Druck p^{eff} handeln kann, der sich aus dem statischen Druck und einer modellierten isotropen Normalspannung zusammensetzt (vgl. (2.82), S. 47). Aus der thermischen Zustandsgleichung idealer Gase (2.4) folgt dann zunächst $p^{\text{eff}} = \varrho \left(RT + \frac{2}{3} k \right)$ und mit den Zerlegungen (3.94) und (3.95) schließlich

$$p^\diamond + \alpha_p p^\mathbf{v} = (\varrho^\diamond + \varrho^\mathbf{v}) \left(RT + \frac{2}{3} k \right). \quad (3.96)$$

Da die Dichte am Ende einer äußeren Iteration aus Gleichung (2.4) bestimmt wird, genügen die vorläufigen Felder p^\diamond und ϱ^\diamond der Beziehung

$$p^\diamond = \varrho^\diamond \left(RT + \frac{2}{3} k \right). \quad (3.97)$$

Subtrahiert man Gleichung (3.97) von Gleichung (3.96) erhält man den gesuchten Zusammenhang:

$$\alpha_p p^\mathbf{v} = \varrho^\mathbf{v} \left(RT + \frac{2}{3} k \right) \quad \Rightarrow \quad \varrho^\mathbf{v} = \alpha_p \frac{p^\mathbf{v}}{RT + \frac{2}{3} k}. \quad (3.98)$$

Einsetzen der Gleichungen (3.79) und (3.94) in den Massenfluss (3.61) liefert auch dessen Zerlegung in einen vorläufigen Wert und einen Korrekturteil:

$$\begin{aligned} \dot{m}_f &= \langle \varrho^\diamond + \varrho^\mathbf{v} \rangle_f (u_i^\diamond + u_i^\mathbf{v})_f \delta A_{i,f} \\ &= \underbrace{\langle \varrho^\diamond \rangle_f u_{i,f}^\diamond \delta A_{i,f}}_{\dot{m}_f^\diamond} + \underbrace{\langle \varrho^\mathbf{v} \rangle_f u_{i,f}^\diamond \delta A_{i,f} + \langle \varrho^\diamond \rangle_f u_{i,f}^\mathbf{v} \delta A_{i,f}}_{\dot{m}_f^\mathbf{v}} + \underbrace{\langle \varrho^\mathbf{v} \rangle_f u_{i,f}^\mathbf{v} \delta A_{i,f}}_{\rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Während das Produkt aus zwei Korrekturgrößen im letzten Term von (3.99) vernachlässigt wird, sind die Korrekturen von Dichte und Geschwindigkeit gemäß den Gleichungen (3.98) und (3.93) anzuwenden. Auf Basis der Approximation

$$\left\langle \frac{p^{\nabla}}{RT + \frac{2}{3} k} \right\rangle_{\mathbf{f}} \approx \frac{p_{\mathbf{f}}^{\nabla}}{\left\langle RT + \frac{2}{3} k \right\rangle_{\mathbf{f}}} \quad (3.100)$$

kann zur Berechnung der Dichtekorrektur auf FV-Flächen zwischen einer UDS- und einer CDS-Interpolation für $p_{\mathbf{f}}^{\nabla}$ gewählt werden (siehe Anhang A.3.2). Mit der auf Seite 65 definierten Abkürzung (3.20) lautet die Korrektur für den Massenfluss über die Kontrollvolumengrenzfläche schließlich

$$\dot{m}_{\mathbf{f}}^{\nabla} = \alpha_p \frac{p_{\mathbf{f}}^{\nabla}}{\left\langle RT + \frac{2}{3} k \right\rangle_{\mathbf{f}}} u_{i,\mathbf{f}}^{\diamond} \delta A_{i,\mathbf{f}} - \alpha_u \beta_p \left\langle \varrho^{\diamond} \right\rangle_{\mathbf{f}} \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_p / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} (p_{\mathbf{F}}^{\nabla} - p_{\mathbf{P}}^{\nabla}) \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}}. \quad (3.101)$$

Druckkorrekturgleichung

Ausgangspunkt zur Herleitung der Druckkorrekturgleichung ist die diskretisierte Massenbilanz, welche sich für eine implizite Zeitapproximation erster oder zweiter Ordnung gemäß (3.7) sowie Abschnitt 3.1.3 und eine Flussapproximation nach (3.61) wie folgt darstellt:

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \varrho_{\mathbf{P}} \frac{\delta V}{\delta t} + \sum_{\mathbf{f}} \dot{m}_{\mathbf{f}} = (\gamma_1 \varrho_{\mathbf{P}}^{\circ} + \gamma_2 \varrho_{\mathbf{P}}^{\circ\circ}) \frac{\delta V}{\delta t}. \quad (3.102)$$

Einsetzen der Zerlegungen (3.94) und (3.99) in Gleichung (3.102) führt auf:

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \left(\varrho^{\diamond} + \varrho^{\nabla} \right)_{\mathbf{P}} \frac{\delta V}{\delta t} + \sum_{\mathbf{f}} \left(\dot{m}^{\diamond} + \dot{m}^{\nabla} \right)_{\mathbf{f}} = (\gamma_1 \varrho_{\mathbf{P}}^{\circ} + \gamma_2 \varrho_{\mathbf{P}}^{\circ\circ}) \frac{\delta V}{\delta t}, \quad (3.103)$$

wobei hier angenommen wird, dass das Druckkorrekturverfahren auf beiden zurückliegenden Zeitschritten konvergiert ist (vgl. sequentieller Ablauf, S. 68). Sortiert man in (3.103) alle zunächst unbekanntem Terme auf die linke und die bekannten Terme auf die rechte Seite, ergibt sich der Zusammenhang

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \varrho_{\mathbf{P}}^{\nabla} \frac{\delta V}{\delta t} + \sum_{\mathbf{f}} \dot{m}_{\mathbf{f}}^{\nabla} = -R_{\mathbf{P}}^{\diamond}, \quad (3.104)$$

wobei mit

$$R_{\mathbf{P}}^{\diamond} = \left[(\gamma_1 + \gamma_2) \varrho_{\mathbf{P}}^{\diamond} - \gamma_1 \varrho_{\mathbf{P}}^{\circ} - \gamma_2 \varrho_{\mathbf{P}}^{\circ\circ} \right] \frac{\delta V}{\delta t} + \sum_{\mathbf{f}} \dot{m}_{\mathbf{f}}^{\diamond} \quad (3.105)$$

ein Symbol für das lokale Residuum der Massenbilanz im Punkt \mathbf{P} definiert wird. Werden in (3.104) nun noch die Dichtekorrekturen mit (3.98) sowie die Massenflusskorrekturen mit (3.101) ersetzt, ergibt sich bei kompressibler Strömung letztlich die diskrete Form einer Transportgleichung für die Druckkorrektur:

$$\begin{aligned} \alpha_p (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{p_{\mathbf{P}}^{\nabla}}{\left(RT + \frac{2}{3}k\right)_{\mathbf{P}}} \frac{\delta V}{\delta t} + \alpha_p \sum_{\mathbf{f}} \frac{p_{\mathbf{f}}^{\nabla}}{\left\langle RT + \frac{2}{3}k \right\rangle_{\mathbf{f}}} u_{i,\mathbf{f}}^{\diamond} \delta A_{i,\mathbf{f}} \\ - \alpha_u \sum_{\mathbf{f}} \beta_p \langle \varrho^{\diamond} \rangle_{\mathbf{f}} \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_{\mathbf{P}} / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} (p_{\mathbf{F}}^{\nabla} - p_{\mathbf{P}}^{\nabla}) \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}} = -R_{\mathbf{P}}^{\diamond}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Eine partielle Differentialgleichung für die Druckkorrektur hat zwar keine physikalische Relevanz, theoretisch könnte man jedoch die diskrete Form (3.106) wieder in eine kontinuierliche Form übersetzen und in Anlehnung an Gleichung (3.1) wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\partial(\kappa_T \varrho^{\diamond} p^{\nabla})}{\partial t} + \frac{\partial(\kappa_T \varrho^{\diamond} p^{\nabla} u_j^{\diamond})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_u \beta_p \varrho^{\diamond} \frac{\delta V}{a_{\mathbf{P}}} \frac{\partial p^{\nabla}}{\partial x_j} \right) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_j)}{\partial x_j} \right)^{\diamond}.$$

Darin wäre $\kappa_T = (\partial \varrho^{\nabla} / \partial p^{\nabla}) / \varrho^{\diamond}$ als eine künstliche isotherme Kompressibilität aufzufassen und durch (3.98) definiert. Trotz der differentiellen Schreibweise würde aber insbesondere im Diffusionskoeffizienten die diskrete Herkunft dieser Transportgleichung immer noch sehr deutlich. Bei konstanter Dichte gilt $\varrho^{\nabla} = \partial \varrho^{\nabla} / \partial p^{\nabla} = 0$, die Zeitableitungen sowie der konvektive Term entfallen, und es verbleibt mit dem diffusiven Term und dem Massendefekt $-R_{\mathbf{P}}^{\diamond}$ die diskrete Form einer Poisson-Gleichung für die Druckkorrektur p^{∇} .

Möchte man eine Mischung von UDS und CDS-Interpolation über den Parameter $0 \leq \sigma_{\text{CDS}} \leq 1$ gestatten, entstehen aus (3.106) folgende Beiträge zu den Koeffizienten $a_{\mathbf{P}}^{\diamond}$ und $a_{\mathbf{F}}^{\diamond}$ und zum Quellterm S^{\diamond} der diskreten Druckkorrekturbilanz $a_{\mathbf{P}}^{\diamond} p_{\mathbf{P}}^{\nabla} = \sum_{\mathbf{F}} a_{\mathbf{F}}^{\diamond} p_{\mathbf{F}}^{\nabla} + S^{\diamond}$:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{P}}^{\diamond} = \alpha_p \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\left(RT + \frac{2}{3}k\right)_{\mathbf{P}}} \frac{\delta V}{\delta t} + \alpha_p \sum_{\mathbf{f}} \frac{(1 - \sigma_{\text{CDS}}) \max(\dot{m}_{\mathbf{f}}^{\diamond}, 0) + \sigma_{\text{CDS}} (1 - \lambda) \dot{m}_{\mathbf{f}}^{\diamond}}{\langle \varrho^{\diamond} \rangle_{\mathbf{f}} \left\langle RT + \frac{2}{3}k \right\rangle_{\mathbf{f}}} \\ + \alpha_u \sum_{\mathbf{f}} \beta_p \langle \varrho^{\diamond} \rangle_{\mathbf{f}} \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_{\mathbf{P}} / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{F}}^{\diamond} = \alpha_p \frac{(1 - \sigma_{\text{CDS}}) \max(-\dot{m}_{\mathbf{f}}^{\diamond}, 0) - \sigma_{\text{CDS}} \lambda \dot{m}_{\mathbf{f}}^{\diamond}}{\langle \varrho^{\diamond} \rangle_{\mathbf{f}} \left\langle RT + \frac{2}{3}k \right\rangle_{\mathbf{f}}} \\ + \alpha_u \beta_p \langle \varrho^{\diamond} \rangle_{\mathbf{f}} \frac{\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathbf{f}}}{\langle a_{\mathbf{P}} / \psi \rangle_{\mathbf{f}}} \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$S^{\diamond} = -R_{\mathbf{P}}^{\diamond}. \quad (3.109)$$

Da im Unterschied zu anderen Transportgleichungen in (3.106) keine expliziten Korrekturen durch gespeicherte Größen aus der letzten Iteration möglich sind, erfolgt die zentrale Diskretisierung des konvektiven Terms hier ausnahmsweise nicht in Form einer „deferred correction“, sondern vollständig implizit. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass der diagonale Koeffizient der Druckkorrekturgleichung, a_p^\diamond , sich nur im inkompressiblen Fall so wie in Gleichung (3.29) als Summe der Nachbarkoeffizienten ausdrücken lässt.

3.2.7 Abschließende Bemerkungen

Die mit den Änderungen der Impulsinterpolation gemäß Tabelle 3-2 verbundenen Anpassungen am Druckkorrekturverfahren beschränken sich, abgesehen von entsprechend modifizierten Massenflüssen, Massenflusskorrekturen und Massendefekten, auf die von β_p oder ψ abhängigen Terme, d. h. auf Korrekturen der Geschwindigkeiten in Zellzentren (3.86) und auf Kontrollvolumengrenzflächen (3.93) sowie auf den diffusiven Term der Druckkorrekturgleichung (3.106). Vor dem Lösen dieser Gleichung sind alle Druckkorrekturen mit 0 zu initialisieren. Nur wenn die diskretisierte Massenbilanz im ganzen Feld mit $R_p^\diamond = 0$ exakt erfüllt ist, kann diese Initialisierung im Verlauf der inneren Iterationen bestehen bleiben. In der Regel sind nach dem Lösen der Druckkorrekturgleichung die Geschwindigkeiten und Massenflüsse auf der Kontrollvolumengrenzfläche mit Gleichung (3.93) bzw. Gleichung (3.101) sowie die Drücke und Geschwindigkeiten im Zellzentrum nach Gleichung (3.95) bzw. Gleichung (3.86) zu korrigieren, wobei die in Abschnitt 3.2.6 getroffene Vereinbarung $\langle \beta \rangle_{\mathbf{f}} = \beta_p$ zu beachten ist. Wie bei Vernachlässigung von H^\blacktriangledown in (3.84) oder der auf FV-Grenzflächen außer Acht gelassenen Nichtorthogonalität in Abschnitt 3.2.6 kann auch im Fall $\beta_p \neq 1$ davon ausgegangen werden, dass der dadurch im Druckkorrekturverfahren eingebrachte Fehler bei Konvergenz des gesamten Gleichungssystems keine Rolle mehr spielt. Allerdings wird in Abschnitt 4.1 deutlich, dass das Konvergenzverhalten des Verfahrens bei Verwendung der RCS-Interpolation mit $\langle \beta \rangle_{\mathbf{f}} = \beta_p = \beta_p^{[\alpha, t]}$ in Verbindung mit kleinen Zeitschrittweiten erheblich beeinträchtigt werden kann (siehe Tabelle 4-1, Seite 112).

In der Praxis wird die Konvergenz des Gleichungssystems meist anhand globaler Residuen für die gelösten Transportgleichungen bewertet. Als Residuum bezeichnet man allgemein einen mit den aktuellen Werten von ϕ verbliebenen Fehler in einer diskretisierten Gleichung. Die Fehler werden im Programm berechnet, indem unmittelbar nach Aktualisierung von Koeffizienten a_p , a_F und Quellterm S , d. h. bei Eintritt in die erste innere Iteration, zunächst die Bestimmung eines lokalen Residuums $R_p^{[\phi]}$ für alle FV-Zentren im Rechengebiet erfolgt:

$$R_p^{[\phi]} = -a_p \phi_p + \sum_F a_F \phi_F + S. \quad (3.110)$$

Im Anschluss wird eine Summation über die Beträge dieser lokalen Residuen ausgeführt, um das globale Residuum für ϕ ,

$$\mathcal{R}^{[\phi]} = \sum_{\mathbf{p}} \left| R_{\mathbf{p}}^{[\phi]} \right|, \quad (3.111)$$

und damit ein Maß für die integrale Erfüllung der approximierten Bilanzgleichung zu bestimmen. In der Regel beendet man die äußere Iteration des Gleichungssystems genau dann, wenn die globalen Residuen die für alle gelösten Gleichungen individuell vorgegebenen Toleranzen unterschreiten. Um die Festlegung dieser Toleranzen möglichst unabhängig vom jeweils betrachteten Testfall zu gestalten, werden die globalen Residuen vor Überprüfung der Toleranz meist in Relation zu integralen Größen am Einströmrand gesetzt oder auf das Anfangsresiduum der Simulation bzw. des aktuellen Zeitschrittes bezogen. Der Referenzwert wird nachfolgend mit $\mathcal{R}_{\text{ref}}^{[\phi]}$ bezeichnet. Im sequentiellen Ablauf des SIMPLE Algorithmus (siehe S. 68) betrachtet man das Gleichungssystem erst dann als konvergiert, wenn für alle Gleichungen die Bedingung

$$\mathcal{R}^{[\phi]} < \varepsilon^{[\phi]} \mathcal{R}_{\text{ref}}^{[\phi]} \quad (3.112)$$

mit $\varepsilon^{[\phi]} \ll 1$ bereits beim Eintritt in die erste innere Iteration erfüllt ist.

3.3 Randbedingungen

Zur Lösung der Differentialgleichungen aus Kapitel 2.4 sind sowohl physikalisch als auch numerisch sinnvolle Randbedingungen (RB) an allen Grenzen des betrachteten Integrationsgebietes vorzugeben. Um dieses Gebiet auf einen Teil des gesamten Strömungsfeldes beschränken zu können, sind im Simulationsprogramm neben RB-Formulierungen für feste und bewegliche Wände auch verschiedene Möglichkeiten zur künstlichen Berandung einer Strömung implementiert [227]. Blockverbindungsflächen und periodische Ränder werden hier als Sonderfälle angesehen und nicht weiter betrachtet, da sie keine echte Begrenzung, sondern vielmehr eine Fortsetzung des Integrationsgebietes darstellen und im Simulationsprogramm auch nahezu wie reguläre Flächen behandelt werden [227]. Die übrigen künstlichen Ränder lassen sich anhand des mittleren Massenstroms über die Randfläche in Einströmränder, Ausströmränder und undurchdringliche Symmetrieebenen unterteilen. Letztere kommen im Rahmen dieser Arbeit nicht zur Anwendung. Die Ausführungen in den Abschnitten 3.3.1 bis 3.3.3 beschränken sich daher auf die an Einströmrändern, Ausströmrändern sowie an festen Wänden eingesetzten physikalischen RB, wobei auf eine Beschreibung der programmtechnischen Umsetzung weitgehend verzichtet wird, sofern kein direkter Zusammenhang zwischen RB und den in Kapitel 3.2 beschriebenen Modifikationen an Impulsinterpolation und Druckkorrekturverfahren besteht. Für weitere Informationen bzgl. der Implementierung von RB in ELAN sei an dieser Stelle auf [227] verwiesen.

3.3.1 Einströmränder

Über diese Ränder strömt im zeitlichen Mittel Fluid in das Integrationsgebiet ein. Der lokale Strömungszustand muss hier den beim jeweiligen Testfall vorherrschenden Bedingungen entsprechend definiert werden. Allerdings kann eine direkte Festlegung aller Variablen am Einströmrand nur bei lokaler Überschallströmung ($Ma > 1$) erfolgen. In inkompressiblen Simulationen ist es prinzipiell möglich, an Einströmändern den Geschwindigkeitsvektor, die statische Temperatur sowie die Turbulenzgrößen vorzuschreiben (Dirichlet-RB). Eine Ausnahme stellt die Druckkorrektur dar, für die sich aus (3.86) bzw. (3.93) und der Forderung, dass die vorgegebenen Geschwindigkeiten nicht korrigiert werden sollen, eine Nullgradienten-RB (Neumann-RB) ergibt. Dabei kann sich der statische Druck auf dem Rand in Folge eventuell resultierender Druckkorrekturen frei einstellen. Wird das Druckniveau nicht über einen anderen Rand des Integrationsgebietes festgelegt, ist zu dessen Fixierung die Definition einer Referenzdruckzelle üblich, in der der statische Druck durch entsprechende Verschiebung des Druckkorrekturfeldes künstlich konstant gehalten wird. In kompressiblen Simulationen ist diese Fixierung des Druckes in nur einer Zelle allerdings oft unzureichend. Um Stabilität und Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten, sollte das Druckniveau in diesem Fall besser über zumindest einen Ausströmrand festgelegt werden (siehe hierzu Abschnitt 3.3.2). Überdies ist bei kompressiblen Simulationen ein Unterschied zwischen *stationären* und *instationären* Rechnungen zu beachten.

Im *stationären* Fall lassen sich die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sowie die statische Temperatur entweder wie bei einer inkompressiblen Simulation direkt vorgeben, oder aber sie können indirekt über den lokalen Ruhezustand sowie über die lokale Richtung der Strömung definiert werden. Zur Erzeugung von Startlösungen für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten aeroakustischen Simulationen wurde ausschließlich letztere Variante eingesetzt. In ELAN wird dabei der statische Druck linear aus dem Gebietsinneren auf den Rand extrapoliert, während der Ruhedruck p_0 , die Ruhetemperatur T_0 sowie der Strömungswinkel dort explizit vorgegeben werden [227]. Der Betrag der Geschwindigkeit $|\mathbf{u}|$ und die statische Temperatur lassen sich anschließend auf Basis der Isentropenbeziehungen [4]

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^\kappa = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (3.113)$$

$$\text{und} \quad \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2 \quad (3.114)$$

mit $Ma = |\mathbf{u}|/\sqrt{\kappa RT}$ ermitteln, was in Verbindung mit der vorgegebenen Strömungsrichtung die (vorübergehende) Festlegung der zum Lösen der Impulsbilanz benötigten Randgeschwindigkeiten gestattet [56]. Trotz dieser Dirichlet-RB für die Geschwindigkeit

wird für die Druckkorrekturgleichung jedoch keine einfache Nullgradienten-RB verwendet. Wie in [57] beschrieben, werden stattdessen spezielle Randkorrekturen für die Geschwindigkeit und den Massenfluss abgeleitet und im Gleichungssystem eingearbeitet, wodurch die lokale Verknüpfung von $|\mathbf{u}|$ und p in Form der Beziehungen (3.113) und (3.114) implizit berücksichtigt und die Konvergenz des iterativen Verfahrens erheblich verbessert werden kann. Die Turbulenzgrößen werden durch Spezifikation des Turbulenzgrades der Anströmung und/oder des Verhältnisses von molekularer zu turbulenter Zähigkeit vorgeschrieben, und die Dichte wird mit Hilfe der Zustandsgleichung (3.97) bestimmt.

Für *instationäre* kompressible Simulationen ist zu berücksichtigen, dass sich akustische Störungen für $0 < Ma < 1$ in alle Richtungen ausbreiten und somit auch den Einströmrand erreichen können. Um eine Verfälschung der Ergebnisse durch Reflektion von Schallwellen in das Rechengebiet zu vermeiden, sind für aeroakustische Simulationen daher spezielle RB einzusetzen, die einen möglichst reflektionsfreien Austritt dieser Störungen über den Einströmrand gestatten. Die hierzu verwendete „nichtreflektierende“ RB für Einströmränder (NRRB-E) ist von D. Eschricht in ELAN implementiert und validiert worden [46]. Zwar orientiert sich dessen Umsetzung im Wesentlichen an der von Bogey und Bailly für akustische Berechnungen vorgeschlagenen 3D Formulierung [16], sie unterscheidet sich aber doch in einigen Punkten, weswegen die NRRB-E nachfolgend kurz skizziert wird. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird dabei auf eine Kennzeichnung gefilterter/ensemblegemittelter Größen verzichtet, d. h. eine Schwankung $\phi' = \phi - \bar{\phi}$ ist nachfolgend ganz allgemein als Differenz zwischen Momentanwert ϕ und zeitlichem Mittelwert $\bar{\phi}$ zu verstehen. Abgesehen vom effektiv wirksamen Druck wird in der Implementierung der RB auch nicht unterschieden, ob die Momentanwerte einer DNS, LES oder einer instationären RANS Simulation entstammen.

Bei der NRRB-E werden zunächst die Randwerte von Druck, Dichte und Geschwindigkeitskomponenten explizit auf Basis der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \varrho' \\ u'_i \\ p' \end{Bmatrix} + v_g \frac{\partial}{\partial n} \begin{Bmatrix} \varrho' \\ u'_i \\ p' \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.115)$$

berechnet, wobei zeitliche Änderungen der Mittelwerte vernachlässigt werden. In dieser Gleichung stellt $\partial\phi'/\partial n = n_i \partial\phi'/\partial x_i$ eine partielle Ableitung der Schwankung von ϕ in randnormale Richtung dar (n_i kennzeichnet die kartesischen Koordinaten der nach außen zeigenden Einheitsnormalen einer Randfläche), und $v_g = \bar{c} + \bar{u}_i n_i$ ist eine Approximation für die mittlere Wellenausbreitungsgeschwindigkeit in diese Richtung. Durch die implizite Annahme einer eindimensionalen, randnormalen Wellenausbreitung [83] kommt diese Umsetzung der RB entgegen der ursprünglichen Formulierung [16] ohne Definition

eines akustischen Zentrums aus. Dies bietet Vorteile in Situationen mit ausgedehnten oder verteilten Quellregionen, in denen ein solches Zentrum nicht eindeutig zu definieren ist. Da die Geschwindigkeiten auf dem Rand mit Gleichung (3.115) explizit für die nächste Iteration vorgegeben werden, wird für die Druckkorrekturgleichung eine Nullgradienten-RB verwendet. Wie im stationären Fall werden die Turbulenzgrößen auf dem Rand vorgegeschrieben und die statische Temperatur wird mit Hilfe der thermischen Zustandsgleichung idealer Gase (3.97) bestimmt.

3.3.2 Ausströmränder

Über diese Ränder strömt im zeitlichen Mittel Fluid aus dem Integrationsgebiet aus. Hier sollte es konvektiv transportierten Strömungsstrukturen also erlaubt sein, das Integrationsgebiet möglichst störungsfrei zu verlassen. Aus der Diskretisierung der Konvektionsgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_M \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (3.116)$$

erhält man eine zu diesem Zweck prinzipiell gut geeignete RB [56, 201], die in **ELAN** in inkompressiblen Simulationen sowohl für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors als auch für skalare Transportgrößen eingesetzt wird.

Im Unterschied zur NRRB-E (3.115) basiert (3.116) auf Momentanwerten von ϕ und einer rein konvektiven mittleren Geschwindigkeit am Ausströmrand, u_M , welche über eine globale Massenbilanz aus Geschwindigkeiten am Einströmrand berechnet wird [22]. Aus der expliziten Vorgabe der Randgeschwindigkeiten gemäß (3.116) ergibt sich mit (3.86) bzw. (3.93) wiederum eine Nullgradienten-RB für die Druckkorrekturgleichung. An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass sich in einer *stationären* Simulation auch (3.116) auf eine Nullgradienten-RB reduziert. Im Gegensatz zur *instationären* konvektiven Form wird diese dann allerdings implizit in das Gleichungssystem eingearbeitet. Um sicherzustellen, dass die in (3.116) zur Bestimmung von u_M verwendete globale Massenbilanz zwischen Ein- und Ausströmrändern bereits zu Beginn einer Simulation erfüllt ist, können die zunächst aus der konvektiven RB (3.116) berechneten Geschwindigkeiten und Massenflüsse auf dem Ausströmrand noch mit einem Korrekturfaktor multipliziert werden, wodurch der Konvergenzverlauf meist beschleunigt werden kann. In kompressiblen Simulationen wird am Ausströmrand wie beim Einströmrand zwischen *stationären* und *instationären* Berechnungen unterschieden.

Im *stationären* Fall ist es üblich, nur den statischen Druck (bzw. dessen räumlichen Mittelwert) an Ausströmrändern zu fixieren. In Verbindung mit am Einströmrand vorgegebenen Ruhegrößen (siehe 3.3.1) wird so der Massenstrom über die Berandung des Rechengebietes definiert. Da der Rand mit vorgegebenem statischen Druck unmittelbar von den zuvor

diskutierten Änderungen an Impulsinterpolation und Druckkorrekturverfahren betroffen ist, erscheint es angebracht, die programmtechnische Umsetzung dieses RB-Typs etwas ausführlicher zu beschreiben.

Generell sind Randzellen in ELAN von der impliziten Lösung des Gleichungssystems ausgenommen, sie treten daher ausschließlich als benachbarte Zellen \mathbf{F} in Erscheinung. Sie besitzen auch kein Volumen, d. h. sie sind zu Flächen degeneriert und die Positionen ihrer FV-Zentren $x_{i,\mathbf{F}}$ sind mit denen der dazugehörigen Flächenzentren $x_{i,\mathbf{f}}$ identisch [227]. Auf dem Rand gilt also

$$\phi_{\mathbf{F}} = \phi_{\mathbf{f}}. \quad (3.117)$$

Die Geschwindigkeiten sind zwar auf Druckrändern zunächst unbekannt, dennoch kann die Lösung der Impulsbilanz dort unter Verwendung einer Dirichlet-RB für $u_{i,\mathbf{F}}$ erfolgen. Dazu werden diese Geschwindigkeiten gemäß (3.117) und (3.57) bzw. Tabelle 3-2 mit den jeweiligen Korrekturen nach (3.58), (3.59) und (3.60) bestimmt, wobei alle linear auf \mathbf{f} interpolierten Größen nicht unter Ausnutzung von (3.117), sondern durch extrapolierte Werte aus dem angrenzenden FV-Zentrum \mathbf{P} zu ersetzen sind. Infolge der Substitution

$$\langle \phi \rangle_{\mathbf{f}} \leftarrow \phi_{\mathbf{P}} \quad (3.118)$$

in (3.57) wird die Extrapolationsvorschrift zur Bestimmung der Randflächengeschwindigkeiten $u_{i,\mathbf{F}}$ von ψ unabhängig. Aus der Vorgabe des statischen Drucks resultiert $p_{\mathbf{F}}^{\nabla} = 0$ als natürliche Dirichlet-RB für die Druckkorrekturgleichung. Im Anschluss an die Lösung dieser Gleichung können aber durchaus im angrenzenden FV-Zentrum Druckkorrekturen $p_{\mathbf{P}}^{\nabla} \neq 0$ vorliegen, welche schließlich Korrekturen der vorläufigen Geschwindigkeiten auf dem Rand gemäß (3.117) und (3.93) sowie Massenflusskorrekturen gemäß (3.101) nach sich ziehen. Dabei ist wiederum eine Ersetzung von linear interpolierten Größen durch Werte im angrenzenden FV-Zentrum vorzunehmen. Unter Beachtung der für die Druckkorrekturgleichung verwendeten Dirichlet-RB kann man die korrigierte Geschwindigkeit auf dem Rand mit

$$u_{i,\mathbf{F}} = u_{i,\mathbf{F}}^{\diamond} + \alpha_u \beta_p \left(\frac{\delta V}{a_p} \right)_{\mathbf{P}} \left(\frac{\delta A_i}{g_j \delta A_j} \right)_{\mathbf{f}} p_{\mathbf{P}}^{\nabla} \quad (3.119)$$

und den korrigierten Massenfluss mit

$$\dot{m}_{\mathbf{F}} = \dot{m}_{\mathbf{F}}^{\diamond} + \alpha_u \beta_p \varrho_{\mathbf{F}}^{\diamond} \left(\frac{\delta V}{a_p} \right)_{\mathbf{P}} \left(\frac{\delta A}{\delta \chi} \right)_{\mathbf{f}} p_{\mathbf{P}}^{\nabla} \quad (3.120)$$

berechnen, wobei temperaturbedingte Dichteänderungen hier vernachlässigt wurden. Die Dichte auf dem Rand wird aus der thermischen Zustandsgleichung idealer Gase (3.97)

bestimmt, und die Randtemperaturen ergeben sich aus der Lösung der Energiegleichung unter Verwendung einer Nullgradienten-RB für die Temperatur und anschließender Extrapolation. Für andere skalare Transportgrößen (z. B. Turbulenzmodell) wird im *stationären* Fall am Druckrand ebenfalls eine Nullgradienten-RB verwendet.

Es verbleibt anzumerken, dass ein Rand mit fixiertem Druck grundsätzlich auch in inkompressiblen Simulationen sowie als Einström-RB Verwendung finden kann. Bei der Verwendung als Einström-RB werden die Randwerte skalarer Transportgrößen dann meist explizit vorgeschrieben.

Für *instationäre* Simulationen können bei kompressibler Strömung sowohl akustische als auch konvektiv transportierte Schwankungen auf den Ausströmrand treffen. Diesem Umstand wird in den von Bogey und Bailly zur Verwendung in akustischen Simulationen vorgeschlagenen Fernfeld RB Rechnung getragen [16]. Die in der Implementierung von D. Eschricht etwas gegenüber der ursprünglichen Formulierung modifizierte Variante dieser nichtreflektierenden RB für Ausströmränder (NRRB-A) ist nachfolgend angegeben.

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \bar{u}_i n_i \frac{\partial \varrho'}{\partial n} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u}_i n_i \frac{\partial p'}{\partial n} \right), \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j n_j \frac{\partial u'_i}{\partial n} = -\frac{n_i}{\varrho} \frac{\partial p'}{\partial n}, \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + v_g \frac{\partial p'}{\partial n} = 0. \quad (3.123)$$

Die Bezeichnungen der Variablen entsprechen denen der NRRB-E aus Abschnitt 3.3.1. Da die Geschwindigkeiten auf dem Rand mit Gleichung (3.122) explizit für die nächste Iteration vorgegeben sind, muss für die Druckkorrekturgleichung auch hier eine Nullgradienten-RB verwendet werden. Die Temperatur auf dem Rand wird mit Hilfe der thermischen Zustandsgleichung idealer Gase (3.97) bestimmt, und die Turbulenzgrößen werden wie im inkompressiblen Fall mit der RB nach Gleichung (3.116) behandelt.

3.3.3 Feste Wände

Feste Wände werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit als adiabatisch und hydraulisch glatt betrachtet, an ruhenden Wandoberflächen gilt generell die Haftbedingung $\mathbf{u} = 0$. Zur Integration der Impulsbilanz über wandbenachbarte Zellen werden diese Randwerte der Geschwindigkeit durch das Nullsetzen der konvektiven Flüsse realisiert. In der Energiegleichung führt das geforderte Verschwinden der Wandwärmeflüsse auf eine Nullgradienten-RB an der Wand. Für die Druckkorrekturgleichung resultiert aus der Haftbedingung mit (3.86) bzw. (3.93) ebenfalls eine Nullgradienten-RB, und der in der Impulsbilanz zur Bestimmung

der wandnormalen Kraftkomponente benötigte statische Druck wird linear auf die Wandfläche extrapoliert. Die diffusiven Flüsse der Impulsbilanz werden als von der Wand auf das Fluid ausgeübte Tangentialkraft in Form des Skalarproduktes aus einem modifizierten Spannungstensor und dem lokalen Flächenvektor vorgegeben [227]. Durch geeignete Redefinition des effektiven Reibungsspannungstensors (2.110) an der Wandfläche ermöglicht diese Vorgehensweise eine flexible Implementierung unterschiedlicher Wandgesetze, deren Verwendung, wie nachfolgend dargestellt, bei der Berechnung turbulenter Grenzschichten hilfreich sein kann.

Bei großer Reynoldszahl besteht der wandnahe „innere“ Bereich turbulenter Grenzschichten ($y/\delta_{99} < 0.1$) im wesentlichen aus zwei Schichten. Während in der *viskosen Wandschicht* Trägheits- und Druckkräfte nur eine untergeordnete Rolle spielen, können in der darüberliegenden *vollturbulenten Außenschicht* gerade die viskosen Effekte vernachlässigt werden [186]. Naturgemäß gibt es dazwischen auch einen Übergangsbereich, in dem eine Beschränkung auf einzelne Effekte nicht vorstellbar ist. Allerdings scheint innerhalb anliegender und voll entwickelter turbulenter Grenzschichten (in Abwesenheit äußerer Kräfte, wie z. B. starker Druckgradienten) die mittlere Verteilung von Strömungsgrößen *universellen Wandgesetzen* zu folgen, so dass deren wandnormale Profile in Hauptströmungsrichtung sich auf Basis der mittleren Wandschubspannung $\overline{\tau_w}$ bzw. der sogenannten Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\overline{\tau_w}/\varrho}, \quad (3.124)$$

der kinematischen Zähigkeit ν sowie des Wandabstands ℓ_n parametrisieren lassen [170]. Die Gültigkeit dieser Ähnlichkeitshypothese voraussetzend, kann man mit Definition des Betrags der wandparallelen Geschwindigkeit $u_{\parallel} = |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}|$ und Einführung der dimensionslosen Größen

$$u^+ = \frac{u_{\parallel}}{u_\tau} \quad \text{und} \quad y^+ = \frac{u_\tau \ell_n}{\nu} \quad (3.125)$$

die normierte Geschwindigkeit u^+ allein als Funktion der Wandkoordinate y^+ bestimmen. Es gilt $u^+ = f(y^+)$, wobei innerhalb der dünnen *viskosen Wandschicht* ($0 \leq y^+ < 5$) mit

$$u^+ = y^+ \quad (3.126)$$

ein linearer und innerhalb der *vollturbulenten Außenschicht* ($30 < y^+ < 0.3 u_\tau \delta_{99}/\nu$)

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log_e(y^+) + C^+ \quad (3.127)$$

ein logarithmischer Zusammenhang zwischen den beiden Größen besteht [159, 170, 186]. In (3.127) stellt $\kappa = 0.41$ die von kármánsche Konstante und $C^+ = 5.2$ eine von der Wandrauhigkeit abhängige Integrationskonstante dar.

Auf den Gleichungen (3.126) bzw. (3.127) basierende RB-Formulierungen bezeichnet man als „low-Reynolds“ bzw. „high-Reynolds“ RB. Während „low-Reynolds“ RB eine gute räumliche Auflösung der Grenzschichten bis in die *viskose Wandschicht* hinein erfordern und entsprechende asymptotische Randwerte für das Turbulenzfeld definieren, zeichnen sich „high-Reynolds“ RB durch eine Überbrückung des wandnahen Bereiches bis in die *vollturbulente Außenschicht* aus. Neben der mittleren Tangentialgeschwindigkeit wird dabei auch das Turbulenzfeld in der Grenzschicht mit Hilfe von Gleichgewichtshypothesen parametrisiert [173]. Somit werden zwar prinzipiell erhebliche Einsparungen an Gitterpunkten möglich, allerdings verlieren die der „high-Reynolds“ RB zugrunde liegenden Hypothesen mit zunehmender strömungsmechanischer Belastung einer Grenzschicht ihre Gültigkeit [174]. Demgemäß sind verlässliche Vorhersagen druckinduzierter Strömungsablösung allenfalls unter Verwendung von „low-Reynolds“ RB zu erwarten.

Wird einer dieser beiden RB Typen in einer numerischen Simulation verwendet, ist der eingeschränkte Gültigkeitsbereich der jeweils eingesetzten Formulierung unbedingt zu berücksichtigen. Zur Verwendung der „low-Reynolds“ RB wird in [173] für den Abstand des ersten Gitterpunktes $y^+ \approx 1$ gefordert, und es wird aufgrund der starken Variation von Turbulenzgrößen im semi-viskosen Bereich (für ein von zweiter Ordnung genaues Verfahren) eine wandnormale Auflösung von zumindest 5-10 Punkten bis zum Erreichen von $y^+ \approx 30$ empfohlen. Für eine „high-Reynolds“ RB stellt dieser Wert von y^+ hingegen eine Mindestanforderung für den Wandabstand des ersten Gitterpunktes dar. Bei der Generierung eines Rechenetzes für wandgebundene, turbulente Strömungen können sich die gegensätzlichen Anforderungen durchaus als problematisch erweisen, insbesondere da die Gültigkeitsbereiche von „low/high-Reynolds“ RB durch eine Lücke voneinander getrennt sind.

In den hier durchgeführten Simulationen wird diese Schwierigkeit durch Verwendung einer universellen RB-Formulierung vermieden. Ausgangspunkt dieser universellen RB ist eine aus (3.126) und (3.127) konstruierte inverse Wandfunktion $y^+ = f(u^+)$

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{e^{\kappa C^+}} \left[e^{\kappa u^+} - \sum_{n=0}^N \frac{(\kappa u^+)^n}{n!} \right], \quad (3.128)$$

welche für $N = \infty$ in (3.126) übergeht (und somit den gleichen Einschränkungen unterliegt), für eine bei $N = 4$ abgebrochene Potenzreihe aber eine sehr gute Approximation für die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der gesamten Grenzschicht darstellt [209]. Wie von T. Rung in [177] vorgeschlagen, lässt sich auf dieser Basis die zur Approximation diffusiver Impulsflüsse an der Wand benötigte Wandschubspannung iterativ bestimmen, ohne explizit zwischen „low-Reynolds“ bzw. „high-Reynolds“ Bedingungen unterscheiden zu müssen. Die Wirbelviskosität des hybriden SALSA Modells (siehe Abschnitt 2.3.8) wird dabei mit Hilfe

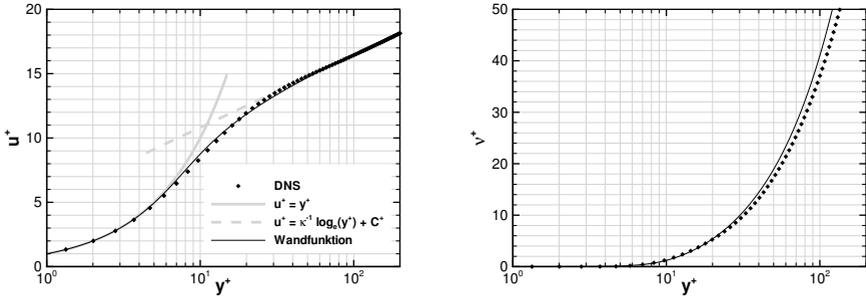


Abbildung 3-5: Wandfunktionen nach (3.128) und (3.129) mit $\kappa = 0.41$, $C^+ = 5.2$ und $N = 4$ im Vergleich zu Daten aus einer DNS der turbulenten Strömung durch einen Kanal der Höhe $2h$ bei $Re_\tau = u_\tau h / \nu = 2003$ [88, 89].

der Beziehung

$$\nu^+ = \frac{\check{\nu}_t}{\nu} = \min \left[150, \frac{\kappa}{e^{\kappa C^+}} \left(e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} \right) \right] \quad (3.129)$$

im wandnächsten Kontrollvolumen fixiert [173].

Abbildung 3-5 vermittelt einen Eindruck von der Güte der Approximationen (3.128) und (3.129) im inneren Bereich einer turbulenten Grenzschicht. Die genaue Konstruktion der auf dieser Grundlage in ELAN implementierten universellen Wand-RB ist [173] zu entnehmen. Hier ist nur wesentlich, dass durch Verwendung dieser universellen Wand-RB sowohl Wandschubspannung als auch Turbulenzgrößen nahezu unabhängig von der Positionierung des innersten Punktes in der Grenzschicht stets sinnvoll approximiert werden [173, 189]. Die zuvor beschriebene Lücke zwischen herkömmlichen „low/high-Reynolds“ RB ist somit geschlossen. Sofern sich allerdings die Wandkoordinate y^+ im typischen Einsatzbereich einer „high-Reynolds“ RB befindet, ist auch keine Verbesserung in der Wiedergabe stark belasteter Grenzschichten gegenüber einer herkömmlichen „high-Reynolds“ Implementierung zu erwarten.

3.4 Fernfeldextrapolation

Nachdem das Strömungsfeld in der Quellregion mit dem bisher beschriebenen numerischen Verfahren simuliert worden ist, kann theoretisch auf Basis der FWH-Gleichung (2.23) auch eine Berechnung der Schallabstrahlung ins Fernfeld erfolgen, indem alle relevanten Quellterme dieser Gleichung numerisch ausgewertet und integriert werden [54]. Allerdings erfordert eine numerische Approximation der Ableitungen bezüglich Beobachtungszeit und

-ortskordinaten eine mehrfache Integration der jeweiligen Oberflächen- und Volumenquellen und ist deshalb verhältnismäßig teuer und ungenau [61]. Abhilfe kann durch eine Transformation der räumlichen Ableitungen und das Hereinziehen der äußeren Ableitungen in die Integrale geschaffen werden. Durch diese mit mehreren Rechenschritten verbundenen Umformungen erhält man eine zu (2.23) alternative Formulierung, welche in der Regel sowohl die Effizienz als auch die Genauigkeit von numerischen Verfahren zur Fernfeldextrapolation verbessert [19, 61]. Beschränkt man sich auf Strömungen bzw. Bewegungen im Unterschall, vernachlässigt zudem Beiträge räumlich verteilter Quadrupolquellen außerhalb der Integrationsflächen und ersetzt die Dichtefluktuaton im Fernfeld mit (2.18) durch eine Druckschwankung, besteht diese alternative Formulierung aus zwei Teilen,

$$p'(\mathbf{x}, t) \approx p'_T(\mathbf{x}, t) + p'_L(\mathbf{x}, t), \quad (3.130)$$

wobei sich der als „thickness-noise“ bezeichnete Anteil p'_T aus

$$4\pi p'_T(\mathbf{x}, t) = \oint_S \left[\frac{\varrho_\infty \dot{V}_n}{r(1-M_r)^2} + \frac{\varrho_\infty V_n \dot{M}_i \hat{r}_i}{r(1-M_r)^3} \right]_{\text{ret}} dS(\hat{\mathbf{y}}) + \oint_S \left[\frac{\varrho_\infty c_\infty V_n (M_r - M^2)}{r^2(1-M_r)^3} \right]_{\text{ret}} dS(\hat{\mathbf{y}}) \quad (3.131)$$

ergibt und der sogenannte „loading-noise“ Anteil p'_L durch

$$4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_\infty} \oint_S \left[\frac{\dot{L}_i \hat{r}_i}{r(1-M_r)^2} + \frac{L_r \dot{M}_i \hat{r}_i}{r(1-M_r)^3} \right]_{\text{ret}} dS(\hat{\mathbf{y}}) + \oint_S \left[\frac{L_r - L_i M_i}{r^2(1-M_r)^2} + \frac{L_r (M_r - M^2)}{r^2(1-M_r)^3} \right]_{\text{ret}} dS(\hat{\mathbf{y}}) \quad (3.132)$$

bestimmt ist [55, 61]. Dabei wurden basierend auf den Definitionen (2.21) die Abkürzungen

$$V_n = V_i n_i, \quad \dot{V}_n = \frac{\partial V_n}{\partial \tau}, \quad L_i = L_{ij} n_j, \quad L_r = L_i \hat{r}_i \quad \text{und} \quad \dot{L}_i = \frac{\partial L_i}{\partial \tau} \quad (3.133)$$

vereinbart, wobei $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ mit $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ und $r = |\mathbf{r}|$ den zur Quellzeit τ von der Quellposition $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{x}_S(\hat{\mathbf{y}}, \tau)$ zum Beobachter zeigenden Einheitsvektor und \mathbf{n} den von der Oberfläche S nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor bezeichnet. Ferner gilt

$$\mathbf{M} = \mathbf{v}/c_\infty, \quad M = |\mathbf{M}|, \quad M_r = M_i \hat{r}_i \quad \text{sowie} \quad \dot{M}_i = \frac{\partial M_i}{\partial \tau}. \quad (3.134)$$

Der Index ret in (3.131) und (3.132) bedeutet, dass die Integrale zu den retardierten Zeiten $\tau = t - r/c_\infty$ auszuwerten sind, welche wiederum vom Abstand zwischen Quell- und Beobachterposition, $r = r(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}, \tau)$, abhängen. Möchte man den Schalldruck für einen relativ zum ruhenden Medium bewegten Beobachter berechnen, lässt sich dies allgemein durch entsprechende Variation von \mathbf{x} mit der Zeit t darstellen. Bei gleichförmig translatorischer Bewegung der Quelle ist man zur Bestimmung von Richtcharakteristiken aber oft nur an Beobachterpositionen interessiert, deren geometrische Lage relativ zur Schallquelle fixiert ist. In diesem Fall stimmt die Geschwindigkeit des Beobachters, $d\mathbf{x}/dt$, mit der Geschwindigkeit der Oberfläche S , \mathbf{v} , überein, so dass die Abstände r zeitlich konstant bleiben und sich die Berechnung der retardierten Zeiten τ entsprechend vereinfacht. Unter Umständen sind weitere Vereinfachungen möglich:

Für einen Beobachter im geometrischen Fernfeld (siehe Seite 14, letzter Absatz) ist in den Gleichungen (3.131) und (3.132) beispielsweise nur das jeweils erste Integral relevant. Das zweite Integral ist aufgrund der Proportionalität zu r^{-2} für große r gegenüber ersterem zu vernachlässigen. Ist zudem \mathbf{v} konstant, können auch die zwei Fernfeldterme mit zeitlichen Änderungen der Machzahl, \dot{M}_i , entfallen. Beschränkt man sich darüber hinaus bei der Integrationsoberfläche auf eine impermeable Wand, verbleibt in (3.130) lediglich der „loading-noise“ Anteil

$$p'(\mathbf{x}, t) \approx -\frac{1}{4\pi c_\infty} \oint_S \left[\frac{\hat{r}_i}{r(1-M_r)^2} \frac{\partial f_i}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS(\hat{\mathbf{y}}), \quad (3.135)$$

wobei $f_i = -n_i(p-p_\infty) + n_j \tau_{ji}$ eine lokal zur Quellzeit τ vom Fluid auf die Wand ausgeübte Kraft pro Einheitsfläche darstellt. Ist außerdem die Oberfläche S kompakt (s. Seite 14), kann man in (3.135) lokale Unterschiede in den retardierten Zeiten sowie im Abstandsvektor unberücksichtigt lassen. Dazu muss allerdings die Bedingung $MSt \ll 1$ erfüllt sein, wobei die Strouhal-Zahl St basierend auf der Gesamtausdehnung der betrachteten Konfiguration zu bestimmen ist [204]. Die Druckschwankung im Fernfeld wird dann direkt aus der zeitlichen Änderung der auf die Wand einwirkenden Kraft $F_i = \oint_S f_i dS$ berechenbar. Ersetzt man diese Kraft gemäß der typischen Definition aerodynamischer Beiwerte durch $F_i = A_{\text{ref}} q_\infty c_i$, ergibt sich folgende Näherung:

$$p'(\mathbf{x}, t) \approx -\frac{A_{\text{ref}} q_\infty}{4\pi c_\infty} \left[\frac{\hat{r}_i}{r(1-M_r)^2} \frac{dc_i}{d\tau} \right]_{\text{ret}}, \quad (3.136)$$

wobei $q_\infty = \rho_\infty u_\infty^2/2$ den dynamischen Druck der Anströmung bezeichnet. Unter oben genannten Voraussetzungen skaliert der Schalldruck im Fernfeld also mit der zeitlichen Änderung aerodynamischer Kräfte zur Quellzeit, weswegen der Effektivwert zeitlicher Schwankungen von $dc_i/d\tau$ als Indikator für die Stärke von Lärmquellen geeignet sein kann.

Mit Ausnahme der Reibungsspannungen, die bei großer Reynoldszahl gegenüber dem Druckanteil vernachlässigbar klein sind, werden in **C3NOISE** jedoch alle Terme aus (3.131) und (3.132) mit einer Genauigkeit von zweiter Ordnung integriert, wodurch die Berechnung des Schalldrucks in Nah- und Fernfeld auch für nichtkompakte Quellen und sowohl auf impermeablen als auch auf permeablen Integrationsflächen basierend möglich ist. Die Verwendung permeabler Kontrollflächen bietet dabei den Vorteil, dass Volumenquellen ohne aufwendige Volumenintegration mit berücksichtigt werden können, indem man die potentielle Quellregion mit der Integrationsoberfläche umschließt. Die Schallabstrahlung der Volumenquellen wird dabei, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, durch eine entsprechende Ersatzquellenverteilung auf der Oberfläche abgebildet. Praktisch besteht bei dieser Art der Integration aber das Problem, dass die Ergebnisse unter Umständen durch das Passieren von Wirbeln über die permeable Kontrollfläche verfälscht werden können. Einen Ausweg kann in diesem Fall das stromabseitige Öffnen der permeablen Kontrollfläche bieten [139]. Infolge dieser theoretisch unzulässigen Maßnahme werden dann allerdings auch akustische Vorhersagen in Richtung der geöffneten Fläche verhindert [67].

4 Validierung und Kalibration

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben und in Tabelle 3-2 zusammengefasst, sind im Rahmen der vorliegenden Arbeit verschiedene Änderungen an der Berechnung der Massenflüsse in ELAN vorgenommen worden, um eine im ursprünglichen Druckkorrekturverfahren [227] vorhandene Zeitschrittweitenabhängigkeit zu beheben und somit eine enge Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern auch für zeitgenaue Simulationen zu gewährleisten. Am Beispiel einer instationären Zylinderumströmung wurde in Abschnitt 3.2.4 bereits gezeigt, dass sich mit dem Wechsel von der RCX zur RCM Variante der Impulsinterpolation das unphysikalische Auftreten hochfrequenter Oszillationen im Druckfeld unterbinden und Zeitschrittkonvergenz erreichen lässt. In diesem Kapitel soll nun die Zeitschrittweitenunabhängigkeit der RCS und RCM Implementierungen verifiziert und deren Tauglichkeit für hochauflösende Simulationen geprüft werden. Vor diesem Hintergrund wird insbesondere der Einfluss der Modifikationen auf die numerische Dissipation sowie auf das Konvergenzverhalten des Druckkorrekturverfahrens im Vergleich zur ursprünglichen RCX Implementierung untersucht.

Da die Modifikationen der Massenflussberechnung nach Gleichung (3.61) und Tabelle 3-2 nur die Bestimmung der Geschwindigkeit auf der Kontrollvolumengrenzfläche und nicht die Interpolation der Dichte betreffen, bietet sich zur Überprüfung oben genannter Eigenschaften die Simulation inkompressibler Strömungen an. Die nachfolgend dokumentierte Validierung des Verfahrens stützt sich daher auf zwei inkompressible Testfälle. Als Erstes werden reibungsfreie Simulationen einer analytisch zugänglichen, periodischen 2D-Anordnung gegensinnig rotierender Wirbel durchgeführt, die zu einer 1923 von G.I. Taylor entdeckten Gruppe von exakten Lösungen der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen gehört [213]. Diese im Weiteren als Taylor-Green Wirbel bezeichnete Anordnung stellt einen klassischen Testfall zur Validierung von instationären numerischen Simulationsverfahren dar [27, 101]. Um eine Überprüfung der DES-Funktionalität des modifizierten Verfahrens sowie eventuell eine Anpassung der modellierten Diffusion an geänderte Eigenschaften der Diskretisierung zu ermöglichen, wird im Anschluss mit dem Zerfall isotroper Turbulenz zudem ein Standardtestfall zur Validierung von turbulenzauflösenden Verfahren simuliert.

4.1 Taylor-Green Wirbel

Zweidimensionale Taylor-Green Wirbel lassen sich kompakt auf Basis der Stromfunktion

$$\Psi(x, y, t) = A \sin(ax) \sin(by) e^{-(a^2+b^2)\nu t} \quad (4.1)$$

definieren [167], wobei man die klassische Anordnung mit $a = b = \pi/d$ erhält [213]. In diesem Fall ergibt sich ein schachbrettartiges, periodisches Raster aus quadratisch begrenzten, gegenseitig rotierenden Wirbeln. Die Seitenlänge der Quadrate, welche praktisch mit dem Wirbeldurchmesser übereinstimmt, wird dabei durch den Parameter d festgelegt. Aus (4.1) können die kartesischen Koordinaten des zweidimensionalen Geschwindigkeitsvektors \mathbf{u} direkt abgeleitet werden. Es gilt

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = A b \sin(ax) \cos(by) e^{-(a^2+b^2)\nu t}, \quad (4.2)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -A a \cos(ax) \sin(by) e^{-(a^2+b^2)\nu t}. \quad (4.3)$$

Die inkompressible Kontinuitätsgleichung wird von dieser Geschwindigkeitsverteilung immer erfüllt. Durch Integration der (inkompressiblen) Impulsbilanz in x - und y -Richtung erhält man mit (4.2) und (4.3) folgende Bestimmungsgleichung für den statischen Druck,

$$p(x, y, t) = \frac{\rho A^2}{4} [b^2 \cos(2ax) + a^2 \cos(2by)] e^{-2(a^2+b^2)\nu t} + C, \quad (4.4)$$

wobei das Druckniveau der inkompressiblen Strömung beliebig durch die Integrationskonstante C verschoben werden kann.

4.1.1 Testfall und Setup

Für die im Anschluss beschriebenen Untersuchungen wurden Wellenzahlen und Zirkulation der durch die Gleichungen (4.2)–(4.4) definierten Wirbel mit den Parametern $a = b = 1 \text{ m}^{-1}$ und $A = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ festgelegt. Zudem wurde eine konstante Dichte von $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ gewählt und das Druckniveau durch $C = 0$ definiert. Es wird nun eine reibungsfreie Strömung mit $\nu = 0$ betrachtet. Geschwindigkeits- und Druckverteilung dieser klassischen Taylor-Green Anordnung sind in Abbildung 4-1 dargestellt. Die Seitenlänge d eines jeden „Quadratwirbels“ beträgt in diesem Fall $d = \pi \text{ m}$. Die so definierte Strömung wird auf einem quadratischen Rechennetz der doppelten Seitenlänge simuliert, welches von periodischen Rändern begrenzt wird und sich aus 32×32 identischen, ebenfalls quadratischen FV zusammensetzt.

Aufgrund der Reibungsfreiheit sollte die in Abbildung 4-1 gezeigte Initialisierung theoretisch für alle Zeiten erhalten bleiben. Numerische Simulationen der reibungsfreien Taylor-Green

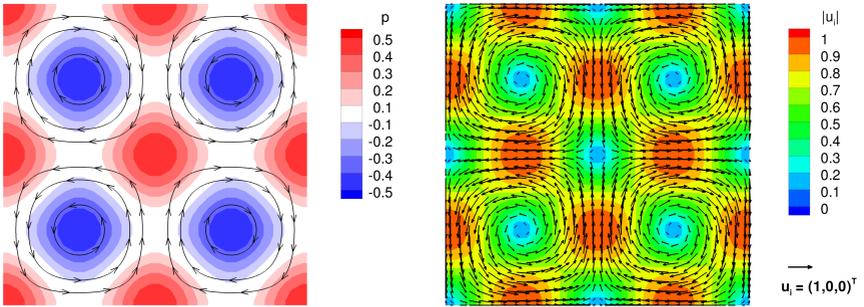


Abbildung 4-1: Anfangsbedingungen für Druck- (links) und Geschwindigkeitsfeld (rechts).

Anordnung sind aber grundsätzlich durch Diskretisierungsfehler und infolgedessen durch ein instationäres Verhalten gekennzeichnet, welches sich in Form einer Änderung der Strömungstopologie und/oder in Form eines Abklingens der kinetischen Energie der Wirbel äußern kann. Ein vollständiger Erhalt der kinetischen Energie ist zwar bei Verwendung zentraler Diskretisierungsschemata für den konvektiven Term grundsätzlich möglich [41], auf nichtversetzten Gittern verbleibt allerdings mit der Impulsinterpolation eine dissipative Fehlerquelle, welche der Strömung kontinuierlich Energie entziehen kann [13, 56]. Auch wenn die dissipative Wirkung der Fehlerterme nicht direkt mit einer künstlichen Viskosität ν_{num} bzw. mit einer global gesteigerten effektiven Zähigkeit gemäß $\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_{\text{num}}$ gleichzusetzen ist, wird ein höheres Maß an numerischer Dissipation im Allgemeinen auch ein schnelleres Abklingen der kinetischen Energie zur Folge haben.

Die Impulsinterpolation RCX und die neu implementierten Varianten RCS und RCM sollen nachfolgend anhand des Abklingverhaltens der kinetischen Energie und anhand des Konvergenzverhaltens der Massenbilanz bewertet werden. Um in den Simulationen einerseits nicht die dissipativen Eigenschaften der Impulsinterpolation durch den führenden Fehlerterm einer Upwind Interpolation zu kaschieren und um andererseits Stabilitätsprobleme mit dem (dissipationsfreien) CDS Schema in der theoretisch reibungsfreien Strömung zu vermeiden, wird der konvektive Term der Impulsbilanz mit einem auf CUI basierenden TVD Schema höherer Ordnung approximiert (siehe Anhang A.3). Die auf FV Grenzflächen wirkenden Druckkräfte werden zentral mit dem CDS Schema berechnet, und die Approximation der Zeitableitung in der Impulsbilanz erfolgt mit dem rückwärtigen Schema 2. Ordnung (3.7).

Da sich die reibungsfreie Strömung theoretisch stationär verhalten sollte, können zeitliche Änderungen nur infolge räumlicher Diskretisierungsfehler auftreten. Um eine Abhängigkeit dieser Fehler und speziell der Impulsinterpolation von der Zeitschrittweite δt zu prüfen, wird letztere in den Simulationen über zwei Größenordnungen variiert. Im Unterschied

zur Impulsinterpolation kann für die im Anhang A.3 beschriebenen Interpolationen eine Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ausgeschlossen werden, da δt in der Implementierung dieser Schemata gar nicht vorkommt. Bei Variation der Zeitschrittweite auftretende Änderungen im zeitlichen Abklingverhalten der kinetischen Energie sind vor diesem Hintergrund im Wesentlichen einer Zeitschrittweitenabhängigkeit der durch die Impulsinterpolation hervorgerufenen Dämpfung (siehe Abbildung 3-3 auf Seite 78) zuzuordnen. Normiert mit einem aus Wirbelumfang und Maximalgeschwindigkeit gebildeten charakteristischen Zeitmaß $\pi d / (1 \text{ m s}^{-1}) = \pi^2 \text{ s} \approx 10 \text{ s} = t^*$ betragen die Zeitschrittweiten $\delta t / t^* = 10^{-1}$, 10^{-2} und 10^{-3} . Nach einer simulierten Zeitspanne von $100 t^*$ wurden die instationären Rechnungen beendet.

Um das Abklingverhalten der kinetischen Energie und die Konvergenzeigenschaften des iterativen SIMPLE-Algorithmus (siehe S. 68) im Hinblick auf die modifizierte Berechnung der Massenflüsse möglichst präzise beurteilen zu können, wurde in den Simulationen der Taylor-Green Wirbel vor jedem Übergang zum nächsten Zeitschritt eine Konvergenz der Massenbilanz im Bereich der Maschinengenauigkeit gefordert. Der letzte Korrektor-Schritt auf einem Zeitschritt wurde erst dann durchgeführt, wenn das globale Residuum der Massenbilanz, $\mathcal{R}^\diamond = \sum_{\text{p}} |R_{\text{p}}^\diamond|$, der Austrittsbedingung $\mathcal{R}^\diamond \leq 10^{-12} \text{ kg s}^{-1}$ bereits nach dem Prädiktor-Schritt, d. h. mit dem Eintritt in die Druckkorrekturgleichung genügt hat. Der nach dem Lösen der Druckkorrekturgleichung beim Anwenden der Druckkorrekturen in (3.95) verwendete Relaxationsfaktor musste dabei zur Stabilisierung des Verfahrens für die größte Zeitschrittweite von $\alpha_p = 0.7$ auf $\alpha_p = 0.35$ reduziert werden. Abgesehen von dieser Ausnahme wurden für alle Taylor-Green Simulationen identische numerische Parameter verwendet. Zum Lösen der Impulsbilanz wurde keine Unterrelaxation eingesetzt.

4.1.2 Abklingverhalten der kinetischen Energie

Wie bereits im letzten Abschnitt festgestellt wurde, ist trotz theoretisch reibungsfreier Strömung in den Simulationen ein Abklingen der kinetischen Energie infolge numerischer Dissipation zu erwarten [13]. Im Weiteren wird das Abklingverhalten der über das Rechengebiet volumengemittelten kinetischen Energie

$$K(t) = \frac{1}{V} \sum_{\text{p}} \frac{1}{2} |u_{\text{p}}(t)|^2 \delta V_{\text{p}} \quad \text{mit} \quad V = \sum_{\text{p}} \delta V_{\text{p}}, \quad (4.5)$$

bezogen auf deren Initialwert $K_0 = K(0)$ als Maß für die effektive numerische Dissipation herangezogen und dieses im Hinblick auf eine Abhängigkeit von der Zeitschrittweite δt untersucht. In Abbildung 4-2 ist der mit den drei Impulsinterpolationsvarianten RCX, RCS und RCM bei drei verschiedenen Zeitschrittweiten erzielte normierte Energieverlauf über der Zeit aufgetragen. Von den Ergebnissen der insgesamt 9 Simulationen fallen in dieser

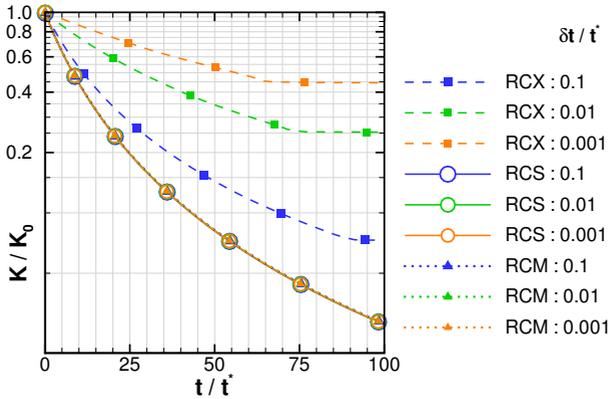


Abbildung 4-2: Einfluss der Zeitschrittweite δt auf das Abklingverhalten der kinetischen Energie bei Verwendung unterschiedlicher Varianten der Impulsinterpolation (RCX, RCS, RCM).

Darstellung 6 Kurven zusammen. Das Abklingverhalten der kinetischen Energie scheint unter Verwendung der RCS und RCM Varianten der Impulsinterpolation nahezu identisch und unabhängig von der Zeitschrittweite zu sein. Nur die mit der RCX Interpolation berechneten Ergebnisse lassen eine Abhängigkeit von δt erkennen, wobei die numerische Dissipation bei dieser Variante generell schwächer ausfällt und mit kleiner werdender Zeitschrittweite stetig abzunehmen scheint. Bei der kleinsten untersuchten Zeitschrittweite $\delta t = 0.001 t^*$ wird hier mit Abstand am wenigsten kinetische Energie dissipiert.

Dieses Verhalten der RCX Variante lässt sich mit der Abhängigkeit des diagonalen Koeffizienten der Impulsbilanz, a_p , von der Zeitschrittweite δt erklären (siehe (3.29) auf S. 67). Wie der Tabelle 3-2 auf S. 81 zu entnehmen ist, besteht der einzige Unterschied zwischen einer linearen Interpolation und der RCX Impulsinterpolation in der additiven Korrektur $\Delta u_{i,\xi}^{[p]}/\alpha_u$. Da sich dieser Korrekturterm aber gemäß (3.60) reziprok proportional zu a_p verhält, wird er mit abnehmender Zeitschrittweite immer kleiner, bis die RCX Interpolation im Grenzfall einer unendlich kleinen Zeitschrittweite wieder in das CDS Schema (A.21) übergeht, welches sich (auf kartesischen Gittern) durch verschwindende numerische Dissipation auszeichnet. Die kinetische Energie wird somit bei Verwendung der RCX Variante für kleinere δt immer langsamer abklingen, wobei einer globalen Erhaltung der Energie in den hier durchgeführten Simulationen letztlich auch die zur Berechnung des konvektiven Terms eingesetzte TVD Approximation entgegensteht. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Erhaltung kinetischer Energie zwar eine theoretisch wünschenswerte Eigenschaft numerischer Approximationen ist, die bessere Energieerhaltung aber im Falle der RCX Interpolation durch eine schwächer werdende lokale Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern erkauft wird.

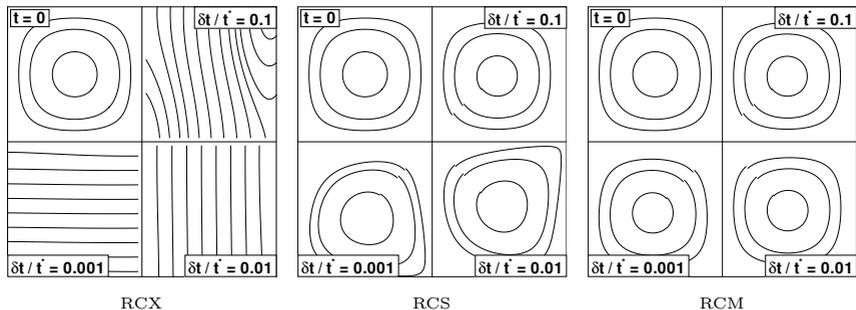


Abbildung 4-3: Stromlinien der mit den Zeitschrittweiten $\delta t/t^* = 0.1$, $\delta t/t^* = 0.01$ und $\delta t/t^* = 0.001$ durchgeführten Simulationen bei $t = 100 t^*$ im Vergleich zur Initialverteilung bei $t = 0$. Jedes einzelne Stromlinienbild zeigt nur ein Viertel des Rechengebietes (vgl. Abb. 4-1).

Im zeitlichen Verlauf der kinetischen Energie kann man in Abbildung 4-2 gegen Ende der Simulationen mit dem RCX Schema jeweils eine spontane Veränderung des Gradienten ausmachen. Insbesondere für die beiden kleineren Zeitschrittweiten scheint sich die kinetische Energie ab einem gewissen Zeitpunkt in der zweiten Hälfte der Simulation nicht weiter zu verringern. Das Erreichen dieses energetischen Plateaus steht im Zusammenhang mit einem „Umkippen“ der Lösung zu einer anderen Strömungstopologie, welches nur mit dem RCX Schema zu beobachten war. Um Veränderungen in der Strömungstopologie sichtbar zu machen, werden in Abbildung 4-3 Stromlinien zum Zeitpunkt der Initialisierung mit solchen zum Ende der Simulationen gegenübergestellt. Alle drei mit dem RCX Schema erzielten Ergebnisse weisen dabei erhebliche Abweichungen gegenüber der ursprünglichen Strömungstopologie auf. Die periodische Anordnung gegensinnig rotierender Wirbel ist abhängig von der Zeitschrittweite entweder einer horizontalen oder einer vertikalen Strömung gewichen, nur für $\delta t/t^* = 0.1$ sind noch Anzeichen rotatorischer Bewegung erkennbar. Bei dieser Zeitschrittweite zeigen die Ergebnisse mit dem RCS Schema dagegen eine im direkten Vergleich mit der Initialisierung noch nahezu unveränderte Topologie. Für $\delta t/t^* = 0.01$ und $\delta t/t^* = 0.001$ weisen die mit dem RCS Schema auch zum Ende dieser Simulationen noch erhaltenen Wirbel allerdings Deformationen auf. Die mit dem RCM Schema erzielten Ergebnisse scheinen die ursprüngliche Taylor-Green Anordnung unabhängig von der gewählten Zeitschrittweite am besten zu bewahren.

Wie in Abschnitt 3.2.3 bereits diskutiert wurde, sollte die Wirksamkeit der Korrekturterme bei den RCS und RCM Varianten theoretisch nicht von der Zeitschrittweite abhängig sein. Eine mögliche Erklärung für die unterschiedlichen Stromlinienbilder am Ende der Simulationen mit dem RCS Schema ist in der für reibungsfreie Strömungen ungünstigen Wahl von $\psi = a_p^s$ bei dieser Variante zu sehen. Gemäß (3.43) und (3.30) kann sich der

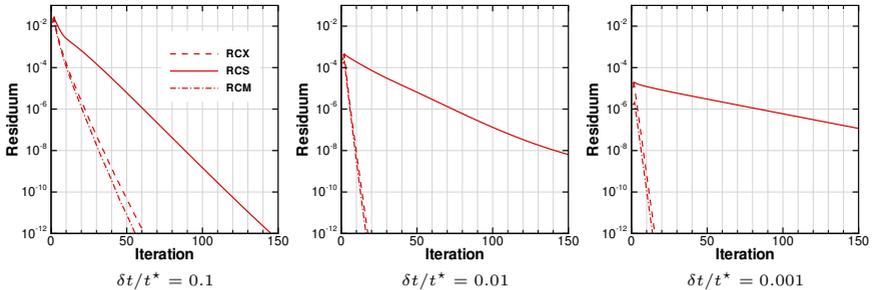


Abbildung 4-4: Einfluss der Impulsinterpolation auf den Konvergenzverlauf der Massenbilanz zum Zeitpunkt $t = 50 t^*$ mit drei unterschiedlichen Zeitschrittweiten.

stationäre Anteil des diagonalen Koeffizienten im Grenzfall verschwindender Massenflüsse auf Null reduzieren, wodurch gleichzeitig der $\langle \delta V / \psi \rangle_{\mathcal{E}}$ Vorfaktor im Korrekturterm (3.73) bei der RCS Interpolation gegen unendlich strebt. Dieses Verhalten kann sich aufgrund von Rundungsfehlern im numerischen Verfahren unter Umständen schon bei Geschwindigkeiten nahe Null ungünstig auf die Genauigkeit der RCS Interpolation auswirken. Die aus Abbildung 4-2 ersichtliche, nahezu perfekte Übereinstimmung im Energieabklingverhalten bei allen mit den RCS und RCM Implementierungen durchgeführten Taylor-Green Simulationen lässt dennoch darauf schließen, dass die während der Herleitung dieser Impulsinterpolationsvarianten in Kapitel 3.2 angestrebte Unabhängigkeit von der Zeitschrittweite nicht nur theoretisch vorhanden, sondern auch in der programmtechnischen Umsetzung gelungen ist.

4.1.3 Konvergenzverhalten der Massenbilanz

Abbildung 4-4 zeigt eine Gegenüberstellung des Konvergenzverhaltens der Massenbilanz auf einem Zeitschritt inmitten der instationären Simulationen mit den drei Zeitschrittweiten $\delta t/t^* = 10^{-1}$, 10^{-2} und 10^{-3} unter Verwendung der Impulsinterpolationen RCX, RCS und RCM. Die Strömungstopologie der Initialisierung ist bei $t = 50 t^*$ noch mit allen drei Impulsinterpolationen erhalten geblieben, weswegen der ausgewählte Zeitpunkt repräsentativ für die mit den RCX, RCS und RCM Varianten erzielte Konvergenz in der ersten Hälfte der Simulationen ist. Nennenswerte Abweichungen vom dargestellten Konvergenzverhalten waren erst gegen Ende der Simulationen im Zusammenhang mit einem „Umkippen“ der Strömungstopologie bei der RCX Variante zu beobachten (vgl. Abbildung 4-3).

Die Konvergenzverläufe von RCX und RCM Variante liegen in Abbildung 4-4 unabhängig von der verwendeten Zeitschrittweite verhältnismäßig dicht beieinander. Diese beiden

Tabelle 4-1: Anzahl der zum Unterschreiten einer absoluten Toleranz von $\varepsilon^{\diamond} \mathcal{R}_{\text{ref}}^{\diamond} = 10^{-12} \text{ kg s}^{-1}$ für die diskretisierte Massenbilanz erforderlichen äußeren Iterationen zum Zeitpunkt $t = 50 t^*$.

$\delta t/t^*$	0.1	0.01	0.001
RCX	62	18	16
RCS	146	329	1110
RCM	56	17	14

Formen der Impulsinterpolation weisen im Gegensatz zur RCS Variante auch das zu erwartende Verhalten auf, dass mit kleiner werdender Zeitschrittweite immer weniger äußere Iterationen benötigt werden, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen. Die erheblich höhere Iterationsanzahl bei der größten untersuchten Zeitschrittweite ist allerdings zumindest teilweise auf den in diesem Fall halbierten Relaxationsfaktor α_p zurückzuführen. Bei der RCS Variante ist in Abbildung 4-4 hingegen der umgekehrte Trend sowie ein insgesamt schlechteres Konvergenzverhalten zu beobachten. Dies hängt vermutlich mit der unzutreffenden stationären Annahme $u = u^o = u^{oo}$ bei der Herleitung des Skalierungsfaktors $\beta_p^{[\alpha, t]}$ auf S. 80 sowie mit der Verwendung dieses Faktors zur Skalierung des Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeits- und Druckkorrekturen in (3.84) auf S. 86 zusammen.

Wie sich anhand der Anzahl benötigter Iterationen in Tabelle 4-1 ablesen lässt, mussten bei der kleinsten untersuchten Zeitschrittweite mit der RCS Variante pro Zeitschritt nahezu $80\times$ so viele äußere Iterationen durchgeführt werden wie mit der RCM Variante. Letztere instationäre Form der Impulsinterpolation zeigt sich insbesondere bei der größten Zeitschrittweite auch der RCX Variante überlegen und weist insgesamt die besten Konvergenzeigenschaften auf.

Fazit

Die Taylor-Green Wirbel Simulationen ließen die Zeitschrittweitenabhängigkeit der RCX Impulsinterpolation im Abklingverhalten der kinetischen Energie sehr deutlich in Erscheinung treten. Trotz der offenbar großen Sensitivität dieses Testfalls für numerische Approximationsfehler zeichneten sich die neu entwickelten RCS und RCM Varianten der Impulsinterpolation dagegen durch eine robuste Übereinstimmung der Ergebnisse und deren weitgehende Unabhängigkeit von der Zeitschrittweite aus. Neben dieser bei der Herleitung angestrebten Eigenschaft der Diskretisierung konnten der programmtechnischen Umsetzung der RCM Variante mit den entsprechenden Änderungen an der Druckkorrektur zudem verbesserte Konvergenzeigenschaften nachgewiesen werden. Die RCS Variante erscheint aufgrund eines stark beeinträchtigten Konvergenzverhaltens indes nicht zur Anwendung in kostenintensiven hochauflösenden Simulationen geeignet. Die mit den neuen Implementierungen erzielten Ergebnisse ließen allerdings beide auch eine gegenüber der Ausgangsform

RCX erheblich gesteigerte numerische Dissipation erkennen. Für die Durchführung von DESen mit der RCM Variante erscheint dies zunächst als problematisch, weil der dem hybriden RANS/LES-Verfahren zugrunde liegende implizite Filterungsansatz (siehe Abschnitt 2.3.2) eine genaue Abstimmung von modellierter und numerischer Dissipation erforderlich macht [22, 141, 228]. Modellerte Diffusion und numerische Dissipation können die gleiche Größenordnung erreichen, sofern auf eine explizite Filterung und hinreichende Auflösung im Bereich der Feinstruktur verzichtet wird [73]. Die Auswirkungen eines Wechsels zur RCM Variante sind vor dem Hintergrund der Durchführung von LESen bzw. DESen folglich noch zu überprüfen.

4.2 Zerfall isotroper Turbulenz

In LES-Regionen einer DES wird die modellierte Diffusion maßgeblich durch die C_{DES} Konstante beeinflusst (siehe Gl. (2.100) auf S. 52). Bevor mit irgendeinem numerischen Verfahren erstmalig eine DES durchgeführt wird, sollte dieser Modellparameter zwecks Abstimmung von modellierter und numerischer Diffusion zuerst kalibriert werden. Unter der Kalibration eines Turbulenz- bzw. Feinstrukturmodells versteht man prinzipiell den Versuch, die Abweichung(en) zwischen Referenzdaten und zumindest einer Größe aus der DES bzw. LES durch Variation von Modellkonstanten zu minimieren. Die Ergebnisse einer solchen Optimierung sind naturgemäß nicht universell, sondern von der betrachteten Statistik bzw. Zielfunktion, von der Gitterauflösung und nicht zuletzt vom eingesetzten numerischen Verfahren abhängig [72, 136].

Für das hier zur Verwendung vorgesehene Verfahren wurde auf Basis der RCX Variante bereits eine Kalibration der C_{DES} Konstanten bei relativ kleinen Courant Zahlen ($|Co_i| \ll 1$) vorgenommen [141]. Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs (3.78) auf S. 82 und der Ergebnisse des letzten Abschnitts könnten nun mit einem Wechsel zur RCM Variante erhebliche Auswirkungen auf die LES-Funktionalität des hybriden RANS/LES-Modells verbunden sein. Um Abweichungen in der Wiedergabe der Grobstruktur im LES-Modus feststellen zu können und gegebenenfalls eine Anpassung von Modellkonstanten zu ermöglichen, wird nachfolgend der denkbar einfachste Fall einer turbulenten Strömung, nämlich der Zerfall isotroper Turbulenz (ZiT), herangezogen und mit den RCX und RCM Varianten der Impulsinterpolation im direkten Vergleich simuliert. Beim reibungsbehafteten, abklingenden ZiT (engl. Decay of Isotropic Turbulence, DIT) handelt es sich um einen klassischen Testfall der Turbulenztheorie, der von den dissipativen Mechanismen am Ende der turbulenten Energiekaskade dominiert wird und sich daher besonders gut zur Kalibration von Feinstrukturmodellen eignet [22]. Zur Validierung numerischer Verfahren kann aber auch die Betrachtung einer reibungsfreien Situation von Nutzen sein [14].

Auswahl und Durchführung der hier vorgenommenen Validierungs- und Kalibrationsarbeiten (ohne und mit Reibung) entsprechen im Wesentlichen der in der Dissertation von C. Mockett [141] dokumentierten Vorgehensweise, weswegen die nachfolgende Beschreibung des inkompressiblen Testfalls kurz gehalten wird.

Isotrope Turbulenz ist dadurch definiert „[...], daß der Mittelwert einer beliebigen aus Geschwindigkeitskomponenten gebildeten Funktion unverändert bleibt, wenn das Bezugssystem in beliebiger Weise gedreht und wenn es an irgendeiner Ebene gespiegelt wird“ [170]. Da diese Definition eine homogene Grundströmung impliziert, kann es in isotroper Turbulenz keine Produktion turbulenter Schwankungen durch Geschwindigkeitsgradienten der mittleren Strömung geben. Ausgehend von einer beliebigen Anfangsverteilung ist im reibungsfreien Fall dann lediglich eine Umverteilung der Energie möglich. Wenn die Anzahl darstellbarer Moden begrenzt ist, bewirken turbulente Transfermechanismen theoretisch so lange einen kontinuierlichen Ausgleich zwischen den Moden, bis sich ein statistisch stationärer Zustand mit Gleichverteilung der Energie über alle Moden einstellt [24]. In diesem Endzustand nimmt die Energiespektralfunktion die universelle Form $E(\kappa) \sim \kappa^2$ an [112, 113]. In reibungsbehafteter Strömung sind dagegen sowohl Transfer- als auch Dissipationsmechanismen der Energiekaskade aktiv (vgl. Abbildung 2-2 auf S. 22), so dass die Turbulenz über die Zeit zerfällt und abklingt.

Der Trägheitsbereich des turbulenten Spektrums ist bei großer Reynoldszahl durch eine zum Dissipationsbereich hin mit $E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$ abfallende Energiespektralfunktion geprägt [42, 159, 170] (siehe auch Abschnitt 2.3). Allerdings scheint sich der Exponent p des Potenzgesetzes $E(\kappa) \sim \kappa^{-p}$ im abklingenden ZiT nur langsam dem für große Reynoldszahlen zu erwartenden Wert von $5/3$ anzunähern [148]. Zumindest lässt sich mit dem empirischen Verlauf $p = 5/3 - 8 Re_\lambda^{-3/4}$ im Bereich $Re_\lambda \approx 50 \dots 500$ eine bessere Übereinstimmung mit experimentellen Daten erzielen [159]. Die hier mit dem taylorischen „Mikro-Längenmaß“ λ_τ gebildete Reynoldszahl $Re_\lambda = u'_{\text{rms}} \lambda_\tau / \nu$ wird üblicherweise zur Charakterisierung isotroper Turbulenz herangezogen, sie steht mit der turbulenten Reynoldszahl $Re_t = \frac{3}{20} Re_\lambda^2 = 1638$ in quadratischem Zusammenhang. Das 1935 von G.I. Taylor eingeführte „Mikro-Längenmaß“ beschreibt nicht die energetischen, sondern die kleinen Skalen, es ist in isotroper Turbulenz durch $u'_{\text{rms}} / \lambda_\tau = (\partial u' / \partial x)_{\text{rms}}$ definiert [159].

Anhand des Grades der Übereinstimmung mit dem theoretisch zu erwartenden Verhalten kann man oft schon auf die Qualität einer Simulation sowie auf die prinzipielle Eignung eines numerischen Verfahrens für LES schließen. Für eine quantitative Bewertung sowie zur Kalibration von Modellparametern ist jedoch der Vergleich mit verlässlichen Referenzdaten aus einem Experiment oder einer DNS unverzichtbar. Nachfolgend beschriebene Untersuchungen stützen sich in erster Linie auf DNS Daten von A. Wray [60, 226].

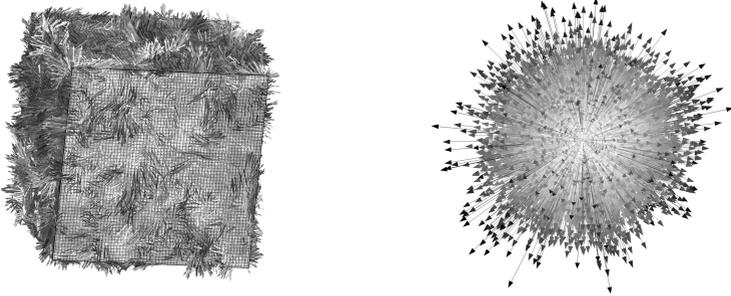


Abbildung 4-5: Instantane Geschwindigkeitsvektoren im ZiT, dargestellt in den FV Zentren des 64^3 Punkte Gitters (links) und verschoben in den Ursprung (rechts).

4.2.1 Testfall und Setup

Die Simulationen des ZiT werden in einem nur durch periodische Ränder begrenzten Gebiet in Form eines Würfels mit der Kantenlänge $\mathcal{L} = 2\pi\text{m}$ durchgeführt (siehe Abbildung 4-5). Zur räumlichen Darstellung der turbulenten Strömung werden drei homogene, kartesische Rechnernetze unterschiedlicher Feinheit eingesetzt, die das betrachtete Gebiet in 32^3 (grob), 64^3 (mittel) oder in 128^3 (fein) ebenfalls würfelförmige FV unterteilen. Je nach kantenparalleler Auflösung $N_{1D} = \{32, 64, 128\}$ variiert der Bereich diskret darstellbarer Wellenzahlen somit zwischen $\kappa_{\min} = 2\pi/\mathcal{L}$ und $\kappa_{\max} = \kappa_c$, wobei $\kappa_c = \pi/\delta x = \pi N_{1D}/\mathcal{L}$ die von der Maschenweite δx abhängige, charakteristische Wellenzahl der diskreten Filteroperation bezeichnet. Den Überlegungen aus Abschnitt 2.3.2 folgend, kann man annehmen, dass sich die Wirkung der äquidistanten Finite-Volumen Diskretisierung in erster Näherung durch die Kombination eines Box- und eines Sinc-Filters der konstanten Breite $\Delta = \delta x$ darstellen lässt (siehe Seite 29). Da für eine LES des ZiT (bei großer Reynoldszahl) theoretisch schon allein mit dem Sinc-Filter eine minimale Auflösung von 38^3 Punkten erforderlich wäre, um zumindest 80% der turbulenten kinetischen Energie aufzulösen [159, S. 606], erscheint das gröbste hier verwendete Gitter mit 32^3 Punkten lediglich VLES geeignet.

Zur Initialisierung der inkompressiblen Strömung wird ein für das feine 128^3 FV Gitter spektral scharf beschnittenes Geschwindigkeitsfeld aus einer mit 512^3 Punkten erheblich höher auflösenden DNS isotroper Turbulenz bei $Re_\lambda = 104.5$ verwendet [60, 226]. Auch für die Simulationen auf dem mittleren und auf dem groben Gitter werden reduzierte Daten aus demselben Geschwindigkeitsfeld genutzt, in diesen beiden Fällen ist daher schon zum Zeitpunkt der Initialisierung mit Aliasingfehlern im Bereich hoher Wellenzahlen zu rechnen. Da aber das turbulente Energiespektrum zu hohen Wellenzahlen hin relativ steil abfällt

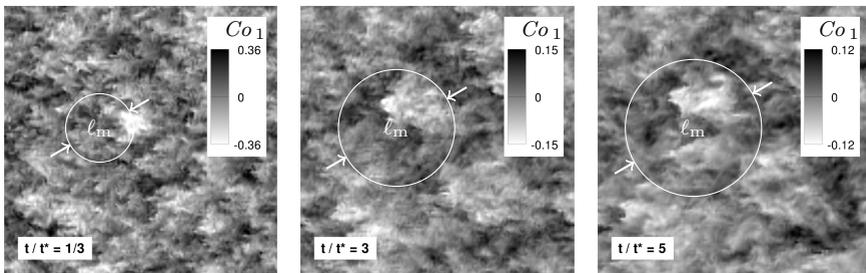


Abbildung 4-6: Lokale Courant Zahlen in einem 2D Schnitt durch den ZiT zu den drei Zeitpunkten $t/t^* = 1/3$, $t/t^* = 3$ und $t/t^* = 5$. Abgesehen von den auf Basis der DNS Daten [226] ermittelten Längenmaßen ℓ_m (siehe Tabelle 4-2), resultieren die dargestellten Ergebnisse aus einer Simulation des ZiT mit Reibung, dem SALS-LES Modell und $C_{DES} = 0.3$ auf dem feinen 128^3 FV Gitter. Die Geschwindigkeitsfluktuationen klingen mit der Zeit ab, weswegen der dargestellte Bereich von Co_1 von links nach rechts eingeengt wird.

und kurzweilige Aliasingfehler durch die von zweiter Ordnung genaue Diskretisierung generell stark gedämpft werden [65], kann hier davon ausgegangen werden, dass der Einfluss dieser Fehler schnell abklingt und im Wesentlichen auf das Anfangsstadium der Simulation beschränkt bleibt. Analog zur bewährten Vorgehensweise von C. Mockett [141] wird dies berücksichtigt, indem der Schwerpunkt bei der Auswertung auf die zweite Hälfte der Simulationen gelegt wird. Eine signifikante Beeinträchtigung der Ergebnisse durch Aliasingfehler der Initialisierung ist in diesem Fall nicht zu erwarten.

Das initiale Geschwindigkeitsfeld enthält eine kinetische Energie von $k = 0.95 \text{ m}^2/\text{s}^2$ bei einer Dissipationsrate von $\varepsilon = 1.56 \text{ m}^2/\text{s}^3$, woraus sich eine charakteristische Zeitskala der Energiedissipation von $k/\varepsilon \approx 0.6 \text{ s} = t^*$ ableiten lässt [42]. Ausgehend von der Initialisierung zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der ZiT über eine Dauer von $5t^*$ mit dem rückwärtigen Schema 2. Ordnung (3.7) und einer von der Gitterfeinheit unabhängigen konstanten Zeitschrittweite von $\delta t = t^*/60$ simuliert, woraus sich mit (3.78) für das gröbste Gitter die kleinsten Courant Zahlen ergeben. In allen Fällen sind die lokalen Courant Zahlen aber deutlich kleiner als eins, eine vorwiegend zeitliche Filterung ist somit ausgeschlossen. Abbildung 4-6 zeigt exemplarisch die Variation der Courant Zahl in horizontaler Richtung auf dem feinen 128^3 FV Gitter im reibungsbehafteten ZiT. Die Courant Zahlen auf dem mittleren und groben Gitter fallen entsprechend um den Faktor 2 bzw. 4 kleiner aus. Anhand der dargestellten Co_1 Konturen lässt sich außerdem die für das Abklingen von Turbulenz typische, schnelle Dissipation kleinerer Strukturen und das langsamere Verschwinden größerer Strukturen beobachten.

Während die auf FV Flächen wirkenden Druck- und Reibungskräfte grundsätzlich zentral und von zweiter Ordnung genau approximiert werden, ist die Konvektionsbehandlung in den reibungsfreien und in den reibungsbehafteten Simulationen zum Teil unterschiedlich. In

Tabelle 4-2: Übersicht der im Verlauf des reibungsbehafteten ZiT variierenden Reynoldszahlen und Längenmaße, sowie des relativen Auflösungsvermögens ℓ_m/Δ der drei unterschiedlich feinen LES Gitter. Infolge einer für niedrige Wellenzahlen geringen spektralen Auflösung der DNS Daten [226] lässt sich das Maximum im Energiespektrum nicht präzise lokalisieren. Die tabellierten Längenverhältnisse ℓ_m/\mathcal{L} und ℓ_m/Δ sind daher als Orientierungswerte zu verstehen.

t/t^*	Re_λ	Re_t	ℓ_η/\mathcal{L}	ℓ_0/\mathcal{L}	ℓ_m/\mathcal{L}	ℓ_m/Δ		
						32^3	64^3	128^3
1/3	82.1	1011	3.9×10^{-4}	0.038	1/4	8.0	16.0	32.0
3.0	63.0	595	7.9×10^{-4}	0.065	0.43	13.8	27.5	55.0
5.0	61.0	558	1.0×10^{-3}	0.076	1/2	16.0	32.0	64.0

den reibungsfreien Simulationen werden zur Approximation konvektiver Terme UDS, TVD und CDS Approximationen eingesetzt. Für die LES des abklingenden ZiT mit Reibung ist dagegen nur noch die dissipationsfreie CDS Konvektionsbehandlung (A.21) in Gebrauch.

Das relative Konvergenzkriterium der instationären Simulationen wird auf das Anfangsresiduum des jeweiligen Zeitschritts bezogen, es beträgt in beiden Fällen und für alle gelösten Transportgleichungen übereinstimmend $\varepsilon^{[\phi]} = 10^{-4}$. Diese Schranke wurde unabhängig von der Gitterauflösung nach jeweils 13 (RCX) bis 14 (RCM) äußeren Iterationen auf einem Zeitschritt (zuletzt von der Druckkorrekturgleichung) unterschritten. Iterative Unterrelaxation wurde dabei lediglich für die Anwendung der Druckkorrekturen eingesetzt ($\alpha_p = 0.5$).

In den instationären Simulationen des ZiT wird zu den drei Zeitpunkten $t/t^* = \{1/3, 3, 5\}$ jeweils das Geschwindigkeits- und das Druckfeld ausgegeben, um im Anschluss, nach Durchführung räumlicher Fourier-Transformationen, eine Analyse der instantanen Energiespektraldichten im Wellenzahlraum und einen Vergleich mit entsprechenden DNS Referenzdaten [226] beziehungsweise mit den theoretisch erwarteten Gesetzmäßigkeiten zu ermöglichen. Tabelle 4-2 gibt hierzu einen Überblick über die im zeitlichen Verlauf des reibungsbehafteten ZiT variierenden Reynoldszahlen und Längenmaße (siehe Abschnitt 2.3, S. 21–25) und über das entsprechend veränderliche räumliche Auflösungsvermögen ℓ_m/Δ der drei unterschiedlich feinen LES Gitter. Vergleicht man die aus den DNS Daten [226] ermittelten Werte in Tabelle 4-2 mit den basierend auf dem Modellspektrum von Pope für isotrope Turbulenz [159] abgeschätzten Zahlenverhältnissen aus Tabelle 2-1 auf S. 30, kann man feststellen, dass auf dem groben/mittleren/feinen Gitter in der zweiten Hälfte der Simulationen jeweils ca. 65–70/80–85/90–95 % der turbulenten kinetischen Energie aufgelöst werden könnten, sofern sich die in Abschnitt 2.3.2 entwickelte Vorstellung des effektiv wirksamen Filters als sinnvoll erweist und man näherungsweise eine Größenordnung der turbulenten Reynoldszahl von $Re_t \approx 10^3$ zugrunde legen kann. Die Feinheit des mittleren 64^3 FV Gitters entspricht somit am ehesten einer typischen LES Auflösung.

4.2.2 Simulationen ohne Reibung

Ob ein numerisches Verfahren generell zu dissipativ und damit zur Grobstruktursimulation ungeeignet oder aber prinzipiell für LES und DES tauglich ist, lässt sich unabhängig von der Modellierung der Feinstruktur in einer reibungsfreien Simulation des ZiT überprüfen [141]. Dass turbulenzauflösende Simulationen mit dem hier eingesetzten Verfahren grundsätzlich möglich sind, wurde bereits mehrfach demonstriert [22, 63, 141]. Unter Verwendung der neuen Impulsinterpolation RCM muss dies allerdings erst noch nachgewiesen werden. Um diesen Nachweis möglichst unabhängig von der verwendeten Feinstrukturmodellierung erbringen zu können, und um zu einer modellunabhängigen Einschätzung der Auswirkungen des Wechsels von der RCX zur RCM Variante der Impulsinterpolation in nicht glatten Strömungsfeldern zu gelangen, sind zunächst Simulationen des ZiT ohne Reibung mit verschiedenen Konvektionsschemata durchgeführt worden. Zwar ist es für turbulenzauflösende Simulationen üblich und in der Regel auch empfehlenswert, zentrale Approximationen wie zum Beispiel die CDS Diskretisierung (A.21) einzusetzen, um unnötige Quellen numerischer Dissipation zu vermeiden [20]. Der reibungsfreie ZiT wurde hier jedoch nicht nur unter Verwendung des CDS Konvektionsschemas, sondern auch auf Basis der UDS und TVD Approximationen (siehe Anhang A.3, S. 196–197) simuliert. Die Simulationen mit diesen zwei asymmetrischen Approximationen wurden in erster Linie vorgenommen, um den Effekt der modifizierten Impulsinterpolation im Vergleich zu bekannten diffusiven bzw. dissipativen Fehlerquellen einordnen zu können. Dies wird möglich, da der Einfluss numerischer Dissipation im reibungsfreien Fall isoliert ist. Eine korrekte Wiedergabe der Turbulenz ist mit UDS oder TVD Konvektionsbehandlung allerdings nicht zu erwarten [141]. Die Ergebnisse werden im Folgenden analysiert.

Abbildung 4-7 stellt von links nach rechts jeweils mit dem UDS, TVD bzw. CDS Schema erzielte 3D-Energiespektren aus reibungsfreien Simulationen auf dem 64^3 FV Gitter mit der DNS Referenzlösung des reibungsbehafteten, abklingenden ZiT gegenüber. Wie eingangs erwähnt, sollte auf einem diskreten Rechengitter in Abwesenheit dissipativer Mechanismen theoretisch nur eine (transiente) Umverteilung der Turbulenzenergie stattfinden, bis sich schließlich ein stationärer Zustand mit Gleichverteilung der Energie über alle Moden einstellt [112]. Mit allen hier untersuchten Diskretisierungen ist jedoch eine mit der Zeit kontinuierlich abnehmende kinetische Energie zu verzeichnen. Besonders deutlich tritt dieser Effekt bei den auf der UDS Diskretisierung basierenden Ergebnissen hervor, welche schon kurz nach der Initialisierung eine massive Dämpfung kurzweiliger Signalanteile bis hin zu $\ell/\Delta \approx 8$ erkennen lässt. Zwar markiert diese Wellenzahl gerade den Beginn des primären Wirkungsbereiches der Rhie & Chow Interpolation (vgl. Abbildung 3-3), die massive Dämpfung bei hohen Wellenzahlen ist hier jedoch eindeutig der UDS Diskretisierung zuzuordnen, wenn man die Spektren links mit den CDS Ergebnissen rechts vergleicht. Zudem sind mit der UDS Konvektionsbehandlung kaum Unterschiede zwischen den RCX

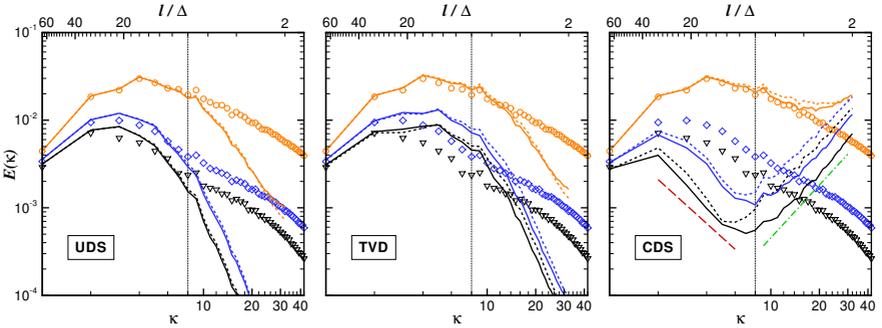


Abbildung 4-7: 3D-Energiespektren des Geschwindigkeitsfeldes im ZiT zu den drei Zeitpunkten $t/t^* \approx 1/3$ (○), $t/t^* \approx 3$ (◇) und $t/t^* \approx 5$ (▽). Symbole: DNS Wray [226] (mit Reibung, ungefiltert); Linien: Simulationen *ohne Reibung* auf Basis von RCX (-----) bzw. RCM (—) Variante der Impulsinterpolation (Farbegebung analog) sowie theoretisch im reibungsfreien Fall zu erwartendes $E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$ (---) und $E(\kappa) \sim \kappa^2$ Verhalten (---) für transiente Umverteilung der Energie auf alle Moden [24]. Verwendung *unterschiedlicher Konvektionsschemata* v.l.n.r. (siehe Anhang A.3, S. 196) auf dem 64^3 FV Gitter (Markierungen bei $l = 8 \Delta$).

und RCM Varianten der Impulsinterpolation auszumachen. Erst mit Verwendung der TVD Approximation zeichnet sich in der zweiten Hälfte der Simulationen eine anscheinend geringfügig stärkere Dissipation der zeitschrittweitenunabhängigen Formulierung ab. Die numerische Dissipation scheint bei den Simulationen mit dem TVD Schema geringer als bei den UDS Ergebnissen auszufallen, das Maximum der Energiespektralfunktion verschiebt sich hier mit der Zeit nach rechts und nicht nach links. In beiden Fällen lassen die Spektren aber die theoretisch für den reibungsfreien Fall zu erwartende charakteristische $E(\kappa) \sim \kappa^2$ Proportionalität vermissen und weisen stattdessen sogar einen steileren Energieabfall in Richtung hoher Wellenzahlen auf, als die DNS-Ergebnisse für den ZiT mit Reibung. Größere Unterschiede zwischen RCX und RCM Variante ergeben sich erst bei Verwendung der CDS Approximation. In diesem Fall zeigt sich außerdem ein ganz anderes transientes Verhalten als in der reibungsbehafteten DNS.

Aus DNSen des reibungsfreien ZiT ist bekannt, dass sich die für statistisches Gleichgewicht zu erwartende Proportionalität $E(\kappa) \sim \kappa^2$ [112, 113] zunächst im Bereich großer Wellenzahlen einstellt und sich von dort mit der Zeit langsam in Richtung $\kappa = 0$ ausbreitet, wobei dem benachbarten Nichtgleichgewichtsbereich bei kleinen Wellenzahlen kontinuierlich Energie entzogen wird [24]. Bis zum Erreichen des theoretisch stationären Endzustands (mit monoton $\sim \kappa^2$ ansteigender Energieverteilung) weist der stetig schrumpfende Nichtgleichgewichtsbereich dabei temporär eine mit $\kappa^{-5/3}$ abfallende Energiespektralfunktion auf [24]. In Abbildung 4-7 ist deutlich zu erkennen, dass lediglich die unter Verwendung der CDS Approximation durchgeführten Simulationen dieses Verhalten prinzipiell richtig wiedergeben können. Allerdings ist auch in den auf dieser Basis erzielten Ergebnissen

insgesamt eine Abnahme der kinetischen Energie $k(t) = \int_0^\infty E(\kappa, t) d\kappa$ über die Zeit t zu verzeichnen, wobei die Energieerhaltung mit der neuen RCM Formulierung der Impulsinterpolation stärker als bei der RCX Variante beeinträchtigt zu sein scheint. Dies deckt sich mit den Beobachtungen aus Abschnitt 4.1 und ist mithin wenig überraschend. Die wesentliche Erkenntnis ist hier, dass die Energiespektralfunktion auch bei Verwendung der dissipativeren RCM Variante zu hohen Wellenzahlen hin immer noch steil gegenüber der reibungsbehafteten Referenzlösung ansteigt. Dies ist vor dem Hintergrund der geplanten Durchführung von DES mit dem modifizierten Verfahren wichtig, da eine zumindest flacher als in der DNS mit Reibung abfallende Energiespektralfunktion Grundvoraussetzung für den erfolgreichen Einsatz einer rein dissipativen Feinstrukturmodellierung ist [141].

Zusätzliche, auf den 32^3 FV und 128^3 FV Gittern erzielte Simulationsergebnisse zeigten bei Variation von Konvektionsschema und Impulsinterpolation ein in allen beschriebenen Aspekten sehr ähnliches Verhalten. Die mit dem Wechsel von der RCX zur RCM Variante verbundene Steigerung der numerischen Dissipation ist demnach, verglichen mit dem Einfluss asymmetrischer Konvektionsschemata, moderat und erscheint für die Durchführung von turbulenzauflösenden Simulationen als vollkommen unproblematisch. Eine Überprüfung der für die modellierte Diffusion in LES Regionen maßgeblichen Modellkonstanten durch LES des ZiT mit Reibung ist dennoch angebracht, da die unter Verwendung des CDS Konvektionsschemas zwischen RCX und RCM Variante auftretenden energetischen Differenzen im Verlauf der Simulationen zunehmen und dort am Ende (für $t/t^* = 5$) nicht unerheblich sind. Der nächste Abschnitt behandelt die zu diesem Zweck vorgenommenen Simulationen des ZiT mit Reibung.

4.2.3 Simulationen mit Reibung

Im letzten Abschnitt konnte anhand des reibungsfreien ZiT die grundsätzliche Eignung der RCM Interpolation für turbulenzauflösende Simulationen nachgewiesen werden. Die nachfolgend behandelten Simulationen des reibungsbehafteten ZiT haben nun primär eine Überprüfung und gegebenenfalls eine Wiederherstellung der LES-Funktionalität des hybriden SALSA Turbulenzmodells (siehe Abschnitt 2.3.8, S. 49 ff.) unter Verwendung der modifizierten Impulsinterpolation zum Ziel. Zur Simulation des ZiT mit Reibung wird global der LES Modus des SALSA Hybridmodells aktiviert und die initiale Verteilung der Wirbelzähigkeit unmittelbar nach Initialisierung des Geschwindigkeitsfeldes durch numerische Lösung der Transportgleichung (2.90) bestimmt. In den hier durchgeführten Simulationen kommt ausschließlich das CDS Konvektionsschema (A.21) zur Anwendung. Alle weiteren numerischen Einstellungen stimmen mit dem reibungsfreien Setup überein.

Ausgangspunkt der nachfolgend dokumentierten Untersuchungen ist der an die ursprünglich implementierte Numerik angepasste Konstantensatz [141]. Abzielend auf eine möglichst gute

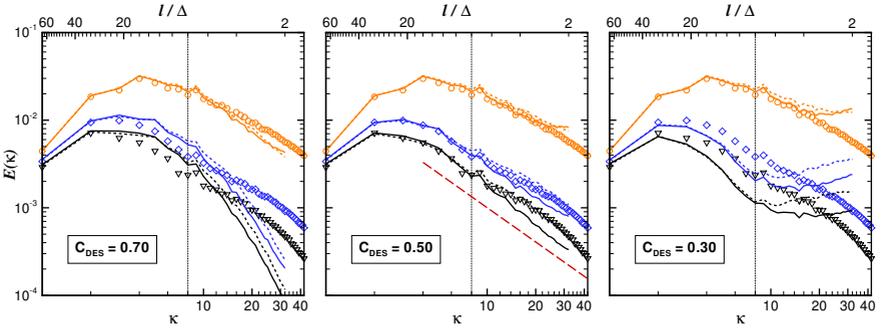


Abbildung 4-8: 3D-Energiespektren des Geschwindigkeitsfeldes im ZiT zu den drei Zeitpunkten $t/t^* \approx 1/3$ (○), $t/t^* \approx 3$ (◇) und $t/t^* \approx 5$ (▽). Symbole: DNS Wray [226] (ungefiltert); Linien: SALSA-LES Ergebnisse auf Basis von RCX (-----) und RCM (—) Variante der Impulsinterpolation (Farbgebung analog) sowie bei $Re_\lambda = 61$ erwartetes Verhalten $E(k) \sim \kappa^{-1.3}$ [159] (---) (ungefiltert). Alle SALSA-LES Ergebnisse wurden auf dem 64^3 FV Gitter berechnet (Markierungen bei $l = 8 \Delta$) bei Absenkung der C_{DES} Modellkonstanten v.l.n.r..

Übereinstimmung mit den DNS Daten von Wray [226] wurde in den Kalibrationsarbeiten von Mockett [141] für das hybride SALSA Modell auf dem 32^3 FV Gitter ein optimaler Wert von $C_{DES} = 0.6$ und auf dem 64^3 FV Gitter ein optimaler Wert von $C_{DES} = 0.5$ ermittelt. Obwohl, wie sich im Weiteren noch herausstellen wird, zum Teil erhebliche Differenzen zwischen den auf Basis von RCX bzw. RCM Impulsinterpolation berechneten Ergebnissen auftreten, sei vorweggenommen, dass diese mit der RCX Variante kalibrierten C_{DES} Konstanten auch unter Verwendung der zeitschrittweitemunabhängigen Numerik ihre Gültigkeit behalten. Die mit RCX und RCM Variante erzielten Ergebnisse werden im Folgenden mit den DNS Daten von Wray [226] gegenübergestellt und analysiert.

Abbildung 4-8 zeigt mehrere aus instantanen Geschwindigkeitsfeldern im ZiT berechnete, dreidimensionale Energiespektren. Jeder einzelne Plot (links, Mitte, rechts) stellt jeweils auf Basis der RCX bzw. RCM Variante der Impulsinterpolation erzielte Ergebnisse aus SALSA LES mit den Referenzdaten aus der hochauflösenden DNS von Wray [226] gegenüber. Die LES Ergebnisse wurden auf dem mittleren 64^3 FV Gitter berechnet, welches gemäß den Überlegungen aus Abschnitt 4.2.1 zumindest in der zweiten Simulationshälfte eine für LES typische Auflösung energetischer Strukturen aufweist. Die mit $C_{DES} = 0.5$ (Mitte) und der RCX Variante auf diesem Gitter erzielten Ergebnisse stimmen insgesamt sehr gut mit den DNS Spektren überein. Dies deckt sich mit den Beobachtungen von Mockett [141]. Die auf Basis der RCM Variante berechneten Ergebnisse sind bis etwa $l = 8 \Delta$ noch nahezu deckungsgleich, für größere Wellenzahlen ist allerdings zum Ende der Simulation eine gegenüber den RCX und DNS Ergebnissen steiler abfallende Energiespektralfunktion zu beobachten. Wie exemplarisch für $C_{DES} = 0.7$ (links) und $C_{DES} = 0.3$ (rechts) dargestellt,

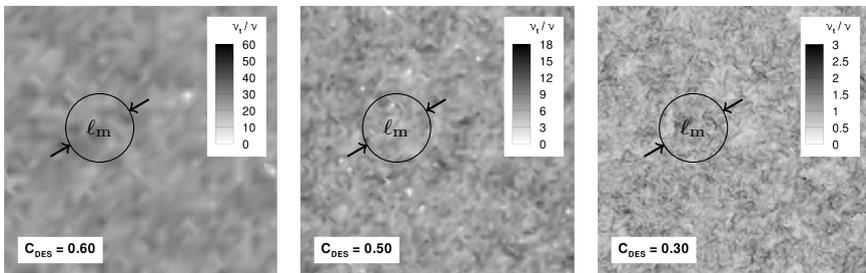


Abbildung 4-9: Lokale Verhältnisse von modellierter zu molekularer Viskosität in einem 2D Schnitt durch den ZiT zum Zeitpunkt $t/t^* = 1/3$. Dargestellt sind Ergebnisse aus SALS-LES unter Verwendung der RCM Interpolation. Unterschiedliche Wertebereiche von ν_t/ν bei Gitterverfeinerung v.l.n.r. (32^3 , 64^3 und 128^3 FV) mit C_{DES} gemäß Kalibration.

ließ sich auch durch Variation der C_{DES} Konstanten keine bessere Übereinstimmung zwischen RCM basierten LES und DNS Ergebnissen im kurzwelligen Bereich herbeiführen. Eine Steigerung der Modellkonstanten führt prinzipiell immer zu einer erhöhten modellierten Diffusion und schnelleren Dissipation kleiner Strukturen, wodurch in der Folge größere Strukturen zu langsam abgebaut werden. Bei Absenkung der Modellkonstanten ist das Gegenteil zu beobachten. Diese Effekte sind weitgehend unabhängig von der eingesetzten Variante der Impulsinterpolation, allerdings nehmen die etwa ab $\ell < 8\Delta$ auftretenden Differenzen zwischen RCX und RCM Variante mit abnehmender Modelldiffusion zu.

Ein vergleichbares Verhalten zeigte sich auch auf dem groben und dem feinen LES Gitter, wobei sich die beste Übereinstimmung mit den DNS Daten für das 32^3 FV Gitter mit dem ursprünglich kalibrierten Wert von $C_{DES} = 0.6$ [141] und für das 128^3 FV Gitter mit $C_{DES} = 0.3$ ergab. Abbildung 4-9 stellt die mit diesen Modellkonstanten auf dem jeweiligen Gitter resultierenden Viskositätsverhältnisse gegenüber. Dass auf dem feinen Gitter nur noch relativ wenig modellierte Diffusion benötigt wird, lässt sich bei der kleinen turbulenten Reynoldszahl des vorliegenden Testfalls durch eine mit zunehmender Auflösung verbesserte Darstellung von Strukturen im Dissipationsbereich erklären (vgl. Tabelle 2-1 auf S. 30 und Tabelle 4-2 auf S. 117). Schließlich wäre die C_{DES} Konstante bei Erreichen einer DNS typischen Auflösung auf 0 zu reduzieren, da eine Modellierung von Turbulenz dann überflüssig wird.

Auch wenn der energetische Bereich des turbulenten Spektrums auf dem 64^3 FV Gitter für $C_{DES} = 0.5$ bis $\ell/\Delta \approx 8$ mit beiden Varianten der Impulsinterpolation nahezu identisch wiedergegeben wird, ist die in Abbildung 4-8 (Mitte) zu beobachtende Vergrößerung der Differenzen zwischen LES Ergebnissen und der DNS Referenzlösung im kurzwelligen Bereich zunächst überraschend, da mit dem Wechsel von der RCX zur RCM Variante der Impulsinterpolation ein Erhalt der Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern

bei kleinen Courant Zahlen und damit eine Verbesserung und keine Beeinträchtigung der Lösungsqualität angestrebt wurde. Bisher sind die LES Ergebnisse allerdings direkt mit einer sehr viel höher auflösenden DNS Lösung [226] verglichen worden. Eine Übereinstimmung der gefilterten LES Lösung mit ungefilterten DNS Spektren wäre jedoch zumindest in der Nähe der Nyquist-Wellenzahl nur bei Verwendung eines im Wellenzahlraum scharfen Sinc-Filters zu erwarten. Da die Transferfunktion des Sinc-Filters (2.48) im Ortsbereich aber unendlich ausgedehnt ist [65], ist die Realisierung eines solchen Filters insbesondere mit den lokal begrenzten, diskreten Approximationen eines numerischen Verfahrens von zweiter Ordnung theoretisch nicht vorstellbar. Folgt man den Ausführungen zum Konzept der räumlichen Filterung auf den Seiten 26 bis 29, wäre im darstellbaren Wellenzahlbereich $|\kappa| \leq \pi/\Delta$ viel eher eine mit dem Box-Filter vergleichbare Dämpfung zu erwarten. Um diesen dämpfenden Effekt der impliziten FV-Filterung bei der Auswertung der LES Ergebnisse zu berücksichtigen, besteht einerseits die Möglichkeit, vor einem Vergleich von LES und DNS Daten das ungefilterte DNS Energiespektrum mit der quadrierten Transferfunktion des kombinierten Box- und Sinc-Filters zu multiplizieren (siehe Gleichung (2.45) auf S. 27 sowie S. 29). Andererseits könnte man auch eine approximative Rekonstruktion des ungefilterten Geschwindigkeitsfeldes aus den gefilterten LES Daten ansetzen [179]. Die zweite Möglichkeit erscheint jedoch ungleich komplizierter, weswegen im Weiteren nur noch gefilterte Strömungsfelder miteinander verglichen werden sollen. Zur nachträglichen Filterung der DNS Energiespektren wird dabei die Anisotropie der FV-Diskretisierung in erster Näherung vernachlässigt und die charakteristische Wellenzahl der Transferfunktion eines sphärischen Box- und Sinc-Filters, $\kappa_c = \pi N_{1D}/\mathcal{L} = \{16, 32, 64\} \text{ m}^{-1}$, allein in Abhängigkeit der jeweiligen 1D-Auflösung der drei unterschiedlich feinen LES Gitter festgelegt.

Im Unterschied zu Abbildung 4-8 stellt Abbildung 4-10 die auf Basis der RCX und RCM Interpolationen erzielten SALSA LES Ergebnisse nun nicht mehr mit ungefilterten, sondern mit den sphärisch Box- und Sinc-gefilterten Referenzdaten gegenüber. Alle auf S. 124 oben abgebildeten LES Energiespektren wurden bereits unter Verwendung von für die jeweilige Auflösung (v.l.n.r.: grob, mittel, fein) energetisch optimierten C_{DES} Konstanten berechnet. Der mittlere Plot in Abbildung 4-10 zeigt also dieselben LES Ergebnisse wie der mittlere Plot in Abbildung 4-8, nur eben nicht im Vergleich mit ungefilterten, sondern mit passend zur Auflösung des 64^3 FV Gitters gefilterten DNS Daten. Um zu einer konsistenten Darstellung zu gelangen, wurde außerdem das für $Re_\lambda = 61$ im abklingenden ZiT erwartete Verhalten (siehe Seite 114, dritter Absatz) $E(\kappa) \sim \kappa^{-1.3}$ durch $E(\kappa) \sim \widehat{G}(\kappa)^2 \kappa^{-1.3}$ mit $\widehat{G} = \widehat{G}_B \widehat{G}_S$ je nach Auflösung ersetzt. Infolgedessen ist die für Potenzgesetze in doppelt-logarithmischer Darstellung charakteristische Gerade nur noch näherungsweise im Bereich $\ell/\Delta > 8$ vorhanden (vgl. Abbildung 2-3, S. 28).

Im Vergleich zu den gefilterten Referenzdaten ergibt sich nun ein qualitativ anderes Bild: Auf dem 64^3 FV Gitter stimmen die mit der RCM Interpolation erzielten LES Ergebnisse

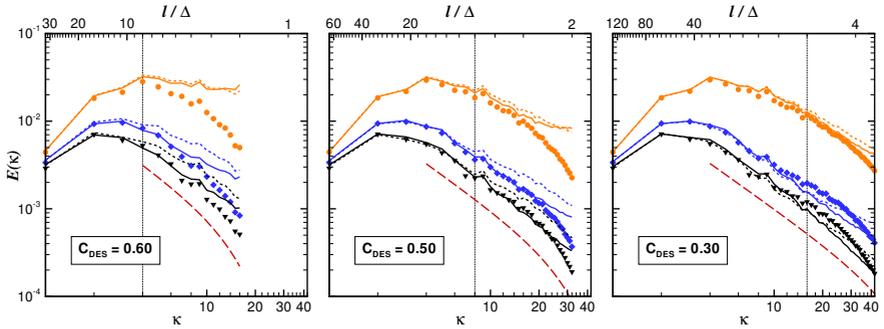


Abbildung 4-10: 3D-Energiespektren des Geschwindigkeitsfeldes im ZiT zu den drei Zeitpunkten $t/t^* \approx 1/3$ (●), $t/t^* \approx 3$ (◆) und $t/t^* \approx 5$ (▼). Symbole: DNS Wray [226] (gefiltert durch sphärischen Box- und Sinc-Filter mit $\kappa_c = \pi/\Delta$); Linien: SALSA-LES Ergebnisse auf Basis von RCX (-----) und RCM (—) Variante der Impulsinterpolation (Farbgebung analog) sowie bei $Re_\lambda = 61$ theoretisch zu erwartendes Verhalten $E(\kappa) \sim \kappa^{-1.3}$ [159] nach Filterung des Geschwindigkeitsfeldes durch sphärischen Box- und Sinc-Filter mit $\kappa_c = \pi/\Delta$ (---). Anpassung der C_{DES} Modellkonstanten gemäß energetischer Kalibration bei *Gitterverfeinerung* v.l.n.r. (32^3 , 64^3 und 128^3 FV, Markierungen bei $l = 8\Delta$).

im energetischen Bereich bis hin zu $l/\Delta \approx 4$ sehr gut mit den gefilterten Referenzdaten überein, während die auf Basis der RCX Variante berechneten Energiespektren sich ab etwa $l/\Delta < 8$ zunehmend nach oben entfernen. Auch auf dem gröberen 32^3 FV Gitter ist ein vergleichbares Verhalten zu beobachten, sieht man von den durch Aliasingfehler in diesem Fall stärker verzerrten Spektren kurz nach der Initialisierung ab. Für das feinste 128^3 FV Gitter fallen die Differenzen zwischen LES und gefilterten DNS Ergebnissen verhältnismäßig klein aus, die RCX Spektren sind jedoch auch hier durch gegenüber den RCM Spektren erhöhte kinetische Energie im kurzwelligen Bereich gekennzeichnet. Im Zusammenhang mit den auf größeren Gittern sichtlich zunehmenden Differenzen zwischen den Ergebnissen der zwei unterschiedlichen Impulsinterpolationsvarianten ist erneut auf die entsprechend kleiner werdenden Courant Zahlen und die Beziehung (3.78) auf S. 82 hinzuweisen. Denkbar wäre aber auch, dass der Wirkungsbereich der Impulsinterpolation in Abhängigkeit der jeweiligen Auflösung unterschiedliche physikalische Mechanismen im ZiT betrifft. Auf dem 128^3 FV Gitter könnte sich zum Beispiel eine im Verhältnis zu Druck- und Trägheitskräften zunehmende Wirkung diffusiver Kräfte ausgleichend bemerkbar machen.

Bisher ist ausschließlich die spektrale Zusammensetzung von instantanen Geschwindigkeitsfeldern betrachtet worden. Da die Impulsinterpolation speziell für die Kopplung von Geschwindigkeits- und Druckfeld von Bedeutung ist, macht es Sinn, zudem die Auswirkungen der unterschiedlichen Formulierungen auf das Druckfeld zu analysieren. Die dreidimensionale Energiespektralfunktion der Druckfluktuation, $\Pi(\kappa)$, ist analog zur Ener-

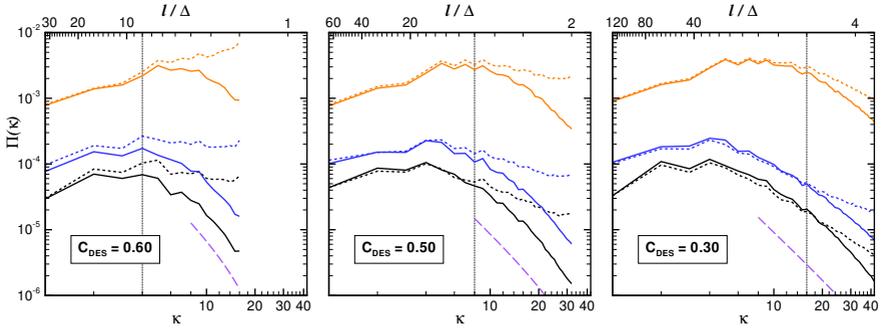


Abbildung 4-11: 3D-Energiespektren des Druckfeldes im abklingenden ZiT zu den Zeitpunkten $t/t^* = 1/3$ (—), $t/t^* = 3$ (—) und $t/t^* = 5$ (—). Gegenübergestellt sind LES Ergebnisse auf Basis des hybriden SALSA Modells unter Verwendung von RCX (-----) bzw. RCM (—) Variante der Impulsinterpolation im Vergleich zum theoretischen Verhalten $\Pi(\kappa) \sim \kappa^{-7/3}$ [82] nach Filterung des Druckfeldes durch einen sphärischen Box- und Sinc- Filter mit $\kappa_c = \pi/\Delta$ (---). Anpassung der C_{DES} Modellkonstanten gemäß energetischer Kalibration bei *Gitterverfeinerung* v.l.n.r. (32^3 , 64^3 und 128^3 FV, Markierungen bei $l = 8 \Delta$).

giespektralfunktion des Geschwindigkeitsfeldes (siehe S. 23), $E(\kappa)$, definiert [82]. Der RMS Wert der Druckfluktuation ist entsprechend durch Integration von $\Pi(\kappa)$ über den gesamten Wellenzahlraum gegeben. Für isotrope Turbulenz bei großer Reynoldszahl verhält sich $\Pi(\kappa)$ nach der Theorie von Kolmogorov im Inertialbereich proportional zu $\kappa^{-7/3}$ [82]. Dieses Verhalten konnte im ZiT sowohl experimentell, als auch numerisch durch DNS und mit Hilfe von EDQNM Berechnungen nachgewiesen werden [70, 133, 162]. Nach jüngsten Erkenntnissen wäre allerdings eine Reynoldszahl von $Re_\lambda = \mathcal{O}(10^4)$ erforderlich, um im ZiT eine Ausdehnung der $\Pi(\kappa) \sim \kappa^{-7/3}$ Skalierung über eine Dekade von Wellenzahlen zu erhalten [133]. Die vorliegenden Reynoldszahlen sind erheblich geringer, weswegen ein kleinerer Inertialbereich zu erwarten ist und eine moderate Änderung des Exponenten wie bei der Energiespektralfunktion des Geschwindigkeitsfeldes (siehe Seite 114, dritter Absatz) durchaus möglich erscheint. Da aber die räumliche Druckverteilung aus der DNS von Wray nicht zur Verfügung steht, zeigt Abbildung 4-11 die auf Basis von RCX- bzw. RCM-Impulsinterpolation berechneten Energiespektralfunktionen des Druckfeldes im Vergleich zu dem theoretisch bei großer Reynoldszahl erwarteten Verhalten.

Die in Abbildung 4-11 dargestellten Energiespektren des Druckfeldes entstammen denselben SALSA basierten LES wie die entsprechenden Energiespektren des Geschwindigkeitsfeldes aus Abbildung 4-10. Die Differenzen zwischen den RCX und RCM Formulierungen der Impulsinterpolation treten im Druckfeld der turbulenten Strömung noch deutlicher hervor. Hauptsächlich ist aber auch hier der Bereich $l/\Delta < 8$ von den Änderungen betroffen. Das räumliche Spektrum der turbulenten Druckfluktuation stimmt im kurzwelligen Bereich (ab etwa $\kappa \approx 10$) nur bei den auf Basis der RCM Variante erzielten Ergebnissen gut mit

der theoretischen $\Pi(\kappa)$ Skalierung überein. Die mit der ursprünglichen RCX Formulierung berechneten Ergebnisse zeigen dagegen je nach räumlicher Auflösung ein zum Teil erheblich abweichendes Verhalten. Unter Verwendung der RCX Interpolation steigt die im Bereich $\kappa \leq 16$ enthaltene Energie mit größer werdendem Gitter immer weiter an, obwohl infolge einer zunehmend dämpfenden Filterwirkung theoretisch das entgegengesetzte Verhalten zu erwarten wäre.

Fazit

Durch Simulationen des reibungsfreien ZiT konnte zunächst gezeigt werden, dass die RCM Variante der Impulsinterpolation grundsätzlich zum Einsatz in LES geeignet ist. Die mit der modifizierten Berechnung der Massenflüsse einhergehende Steigerung an numerischer Dissipation erwies sich, verglichen mit dem dissipativen Einfluss asymmetrischer Konvektionsschemata, als geringfügig. In den anschließend unter Verwendung des SALSA Hybridmodells durchgeführten LES des ZiT mit Reibung stellte sich heraus, dass mit dem Wechsel von der ursprünglich implementierten RCX Variante zur neuen RCM Formulierung die LES Fähigkeit des Verfahrens nicht nur erhalten, sondern die Übereinstimmung der Ergebnisse mit Referenzdaten und theoretischen Gesetzmäßigkeiten zum Teil sogar erheblich verbessert werden konnte.

Die in 3D-Energiespektren zwischen RCX und RCM Ergebnissen auftretenden Differenzen werden zwar mit zunehmender räumlicher Auflösung des ZiT kleiner, aber selbst auf verhältnismäßig feinen, für LES gut geeigneten Gittern sind insbesondere im Druckfeld der turbulenten Strömung immer noch Defizite der ursprünglichen RCX Formulierung sichtbar. Infolge der in den Abschnitten 3.2.4 und 4.1 bereits demonstrierten Abhängigkeit dieser Formulierung von der Zeitschrittweite, scheint die Kopplung zwischen Geschwindigkeits- und Druckfeld im kurzwelligen Bereich so gestört zu sein, dass die Energiespektralfunktion $\Pi(\kappa)$ auf gröberen VLES Gittern praktisch keinen negativen Trend in Richtung kleinerer Strukturen mehr aufweist. Dieses Verhalten ist unphysikalisch. Aus DNS des ZiT ist bekannt, dass Druckfluktuationen im Wesentlichen von großen turbulenten Strukturen hervorgerufen werden [162]. Das ursprüngliche Verfahren erscheint somit insbesondere für die Anwendung auf praxisrelevante Konfigurationen suboptimal, wenn eine hohe räumliche Auflösung wie bei akademischen Testfällen nicht mehr möglich ist. Da die Qualität der Vorhersage von Breitbandlärm naturgemäß von der Wiedergabe des turbulenten Spektrums abhängt, ist die Beeinträchtigung der Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern auch im Hinblick auf aeroakustische Vorhersagen problematisch. Unter Verwendung der RCM Impulsinterpolation sind jedoch sowohl $E(\kappa)$ als auch $\Pi(\kappa)$ Energiespektren unabhängig von der räumlichen Auflösung physikalisch sinnvoll, sofern entsprechend angepasste C_{DES} Konstanten verwendet werden.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die zu beobachtenden breitbandigen Differenzen zwischen den Energiespektren RCX und RCM basierter Simulationen keine Änderung der ursprünglich auf Basis der RCX Variante kalibrierten C_{DES} Konstanten zur Folge haben. Dies ist in erster Linie darauf zurückzuführen, dass signifikante Abweichungen in $E(\kappa)$ auf den primären Einflussbereich der Impulsinterpolation (d. h. $\ell/\Delta < 8$, siehe Abbildung 3-3 auf S. 78) beschränkt bleiben. Für praxisrelevante VLES Simulationen mit dem hybriden SALSA Modell ist nach wie vor $C_{\text{DES}} = 0.6$ zu empfehlen [141]. Bei Erreichen einer für LES hinreichenden Auflösung scheint allerdings ein kleinerer Wert von $C_{\text{DES}} = 0.5$ bessere Ergebnisse zu versprechen. Gemäß (2.102) kann man $C_{\text{DES}} = \{0.5, 0.6\}$ in $C_S \approx \{0.158, 0.189\}$ übersetzen, womit sich die Smagorinsky Konstante im für den ZiT typischen Bereich bewegt [159, 179].

Bezüglich der Bewertung von RCX und RCM Ergebnissen sei angemerkt, dass hier im Gegensatz zu früheren Untersuchungen die erwartete Dämpfung einer idealisierten impliziten FV-Filterung in die Auswertung miteinbezogen wurde. Der Ansatz, die DNS Daten mit einem sphärischen Box- und Sinc-Filter der Breite $\Delta = \delta x$ zu filtern, erfährt letztlich durch die mit der RCM Variante auf verschiedenen Gittern bis hin zu $\ell/\Delta \approx 4$ erzielte, sehr gute Übereinstimmung von gefilterten DNS und LES Spektren eine praktische Bestätigung. Abgesehen von Aliasing Fehlern nahe der Nyquist-Wellenzahl scheint der effektive LES Filter des modifizierten und rekaliibrierten Verfahrens zumindest auf kartesischen Gittern einem Box-Filter der Breite $\Delta = \delta x$ nicht unähnlich zu sein. Zu dieser Schlussfolgerung wäre man allein unter Verwendung der RCX Interpolation nicht gekommen. Mit der RCM Variante lag der Anteil aufgelöster turbulenter kinetischer Energie zum Ende der Simulationen ($t/t^* = 5.0$) auf dem groben/mittleren/feinen Gitter bei ca. 66/81/91 % des Referenzwertes aus der DNS.

5 Technische Anwendungsfälle

In diesem Kapitel wird das in den zurückliegenden Kapiteln im Hinblick auf zeitgenaue Simulationen weiterentwickelte und entsprechend validierte numerische Verfahren zur Berechnung von Strömungsgeräuschen bei kleiner Machzahl und großer Reynoldszahl eingesetzt. In den Abschnitten 5.1 und 5.2 werden zwei technisch relevante Anwendungsfälle betrachtet. Für die Simulation der Schallquellen kommt dabei das hybride SALSA Turbulenzmodell im DDES Modus unter Verwendung der RCM Variante der Impulsinterpolation zur Anwendung. Im Verlauf der Simulationen werden instationäre Strömungsdaten auf Oberflächen in der Quellregion abgespeichert. Die Berechnung der Schallausbreitung ins akustische Fernfeld erfolgt anschließend auf Basis der gesammelten Oberflächendaten und der in Kapitel 3.4 beschriebenen FWH Integration.

Aus Überflugmessungen ist bereits bekannt, dass die von Verkehrsflugzeugen im Landeanflug ausgehende Schallemission hauptsächlich von Fahrwerk und Hochauftriebshilfen hervorgerufen wird [137]. Beim Fahrwerk spielt dabei oft der sogenannte Interaktionslärm eine dominierende Rolle, welcher durch die Wechselwirkung von abgelösten Strömungsstrukturen mit stromab gelegenen Körpern entsteht. Im nächsten Abschnitt (5.1) wird ein im Rahmen des EU Projekts „*Validation and improvement of airframe noise prediction tools*“ (*Valiant*) entworfenes, geometrisch einfaches Modell für Interaktionslärm an Fahrwerkskomponenten behandelt, wobei die kritische Bewertung des kombinierten Berechnungsverfahrens durch Gegenüberstellung mit experimentellen Daten im Vordergrund steht. Der darauffolgende Abschnitt (5.2) widmet sich schließlich der Vorhersage und Analyse der Geräuschenstehung an Vorflügeln, welche nicht nur aufgrund ihrer großen spannweiten Ausdehnung entlang der Flügelvorderkante, sondern auch wegen der speziellen Strömungsverhältnisse für den Großteil der Lärmemission moderner Hochauftriebshilfen verantwortlich sind.

5.1 Fahrwerksverstrebung „two struts“

Flugzeugfahrwerke bestehen aus einer Vielzahl technischer Komponenten, die zum Teil durch Verstrebungen miteinander verbunden sind. In ausgefahrenem Zustand sind diese tragenden Bauteile in der Regel nicht aerodynamisch verkleidet, sondern unmittelbar der

Strömung ausgesetzt. Druck- und geometrieinduzierte Strömungsablösungen sind daher an Fahrwerken in vielfacher Weise zu beobachten. Befinden sich Bauteile im turbulenten Nachlauf oder auch nur in der Nähe einer abgelösten Strömung, können sie dort starken hydrodynamischen Fluktuationen ausgesetzt sein, welche wiederum die Emission von Schallwellen zur Folge haben (siehe Abschnitt 2.2.2). Mit dem „two struts“ Testfall wird in diesem Abschnitt quasi der Prototyp einer solchen Interaktionslärmquelle behandelt. Die nachfolgend beschriebene Konfiguration repräsentiert eine generische Doppelverstrebung, welche im Projekt *Valiant* als idealisiertes Element eines Fahrwerks unter für den Landeanflug von Verkehrsflugzeugen typischen Bedingungen untersucht wurde.

5.1.1 Testfall und Setup

Die *Valiant* „two struts“ Konfiguration besteht aus zwei identischen, geraden Zylindern mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge $D = 0.04$ m. Der Aufbau des Testfalls ist so konzipiert, dass sowohl breit- als auch schmalbandige Schallentstehungsmechanismen angeregt werden und außerdem numerische Simulationen unter Verwendung periodischer Randbedingungen möglich sind. Die beiden Zylinder der Zwillingskonfiguration sind parallel zueinander und mit einem Abstand von $3 \cdot D$ hintereinander angeordnet. Die Anströmung erfolgt mit einer im Fernfeld konstanten Geschwindigkeit von $u_\infty = 70$ m/s normal zu den Achsen der Zylinder, so dass senkrecht zu den Zylindergrundflächen eine homogene Richtung mit im Mittel verschwindender Strömungskomponente entsteht. Gebildet mit der Seitenlänge D beträgt die Reynoldszahl der Anströmung $Re_D = 182\,000$ und die Machzahl $Ma = 0.2$. Es werden zwei unterschiedliche Anstellwinkel $\alpha = 0^\circ$ (Fall 1) und $\alpha = -15^\circ$ (Fall 2) dieser Zwillingskonfiguration untersucht (siehe Abbildung 5-1).

Um die in Abhängigkeit des Anstellwinkels variierenden Strömungsverhältnisse besser berücksichtigen zu können, werden zur Simulation der beiden Testfälle zwei verschiedene Gitter eingesetzt, deren Auflösung jeweils auf die turbulente Fokusregion in den Zylinder-nachläufen konzentriert ist. Die block-strukturierten Rechenetze zur Simulation von Fall 1 bzw. Fall 2 setzen sich aus 8.7 bzw. 8.8 Millionen FV zusammen und wurden im Rahmen einer vom Autor betreuten Diplomarbeit [120] generiert. Abbildung 5-1 zeigt jeweils eine 2D-Ansicht dieser zwei Rechenetze, wobei zum Zwecke einer besseren Übersicht in der dargestellten x - y -Ebene (e_x zeigt in Hauptströmungsrichtung) nur jede zweite Gitterlinie eingezeichnet ist.

Die Ausdehnung der beiden Gitter beträgt in der spannweiten (homogenen) z -Richtung übereinstimmend $\mathcal{L}_{\text{sim}} = 3D$, an diesen Rändern wird das Rechengelände aber durch Verwendung periodischer Randbedingungen künstlich fortgesetzt. Senkrecht zur homogenen Richtung befinden sich die physikalischen Ein- und Ausströmränder. An diesen äußeren Rändern, welche in beiden Fällen mindestens $50D$ vom Zentrum des stromauf liegenden

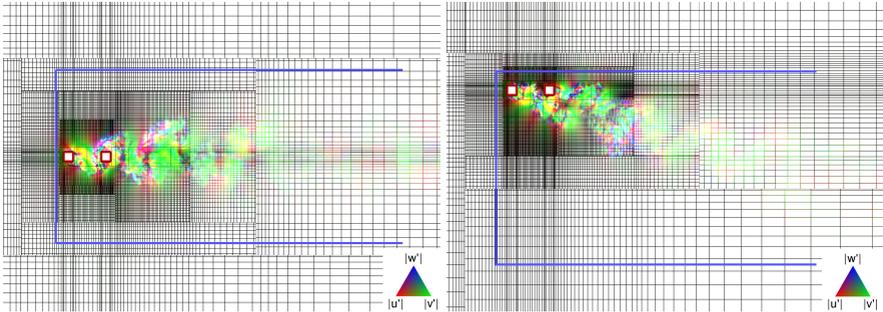


Abbildung 5-1: 2D Schnitte durch die in Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts) verwendeten Gitter und FWH-Flächen (blau). Gitterlinien eingefärbt mit instantanen Geschwindigkeitsschwankungen.

Zylinders entfernt sind, werden je nach lokaler Hauptströmungsrichtung die in Abschnitt 3.3 beschriebenen nicht-reflektierenden Ein- und Ausström-RB verwendet. Zur Initialisierung des Strömungsfeldes und der für die NRRB-E und NRRB-A benötigten Mittelwerte wurden stationäre RANS-Simulationen unter Verwendung der Totaldruck-RB am Einströmrand mit am Ausströmrand fixiertem mittlerem statischen Druck durchgeführt. Um dem geringen Turbulenzgrad im Windkanal zu entsprechen ($Tu \approx 5 \times 10^{-3}$), wurde am Einströmrand ein Viskositätsverhältnis von $\check{\nu}_t/\nu = 0.1$ festgelegt.

Die Mantelflächen der Zylinder sind starr, hydraulisch glatt und werden als adiabatisch betrachtet, zudem wird hier die hybride Wandrandbedingung aus Abschnitt 3.3.3 eingesetzt. So ist es möglich, relativ grobe Zellen innerhalb der „Grenzschichten“ zu verwenden, deren exakte Erfassung in der massiv abgelösten Strömung vermutlich von untergeordneter Bedeutung ist. Auch wenn in den Simulationen keine Definition bzw. spezielle Behandlung laminarer Strömungsbereiche vorgenommen und die Transition somit dem statistischen Turbulenzmodell überlassen wird, sind die „echten“ Grenzschichten auf der Stirnfläche des vorderen Zylinders aufgrund des geringen Turbulenzgrades der Anströmung nur durch sehr geringe Viskositätsverhältnisse gekennzeichnet und können daher quasi als laminar betrachtet werden. Die Zentren der wandnächsten FV befinden sich in einem konstanten wandnormalen Abstand $\ell_n = 7.92 \times 10^{-4} D$ von der jeweiligen Mantelfläche entfernt, ein dimensionsloser Wandabstand von $y^+ \approx 15$ wird dabei nirgends überschritten.

Zur Erfassung der dominierenden Lärmquellmechanismen wurde für die Fokusregionen der DDES eine möglichst „isotrope“ Mindestauflösung von $\delta x \approx \delta y \approx \delta z \approx D/32$ gefordert, entsprechend ist die simulierte Spannweite dort äquidistant mit 96 FV aufgelöst. Diese Auflösung wird als hinreichend für eine LES der abgelösten Wirbelstrukturen angesehen. Unter der Annahme $D \approx \ell_m$ könnte man die Auflösung im Fokusbereich mit der des 64^3 FV Gitters gegen Ende des in Abschnitt 4.2.3 simulierten ZiT in Verbindung bringen

(siehe Tabelle 4-2 auf Seite 117). In Anbetracht der auf S. 134 in Abbildung 5-2 größer als D erscheinenden kohärenten Strukturen ist jedoch davon auszugehen, dass die relative Auflösung im Nachlauf tatsächlich besser ist und das Gitter dort trotz einer im Vergleich zum reibungsbehafteten ZiT großen Reynoldszahl immer noch den Anforderungen für eine LES nach Tabelle 2-1 auf S. 30 genügt. Die C_{DES} Konstante des hybriden SALSA Modells wird daher, gemäß der Kalibration am ZiT auf dem 64^3 FV Gitter, zu 0.5 gesetzt. Zu den Ein- und Ausströmrändern hin wird die spannweite Auflösung dann in zwei Schritten auf 24 FV reduziert, indem an einigen entfernteren Block-Verbindungsflächen hängende Knoten im Verhältnis 2/1 eingesetzt wurden. Unstetigkeiten im DES Längenmaß Δ (2.98) konnten dabei durch vorgelagerte, moderate Gitteraufweitungen in x- und y-Richtung weitgehend vermieden werden [120].

Die auf FV Flächen wirkenden Kräfte werden zentral mit einer Genauigkeit von zweiter Ordnung diskretisiert. Nur zur Diskretisierung konvektiver Terme wird die speziell für DES entwickelte, hybride Konvektionsbehandlung nach Travin [216] eingesetzt, welche unter Verwendung der Beziehung (2.107) in (3.13) automatisch zwischen dem für LES Regionen geeigneten CDS (A.21) und dem in RANS Regionen meist stabileren TVD Schema (A.22) auf CUI Basis umschaltet. Eine Ausnahme stellt der konvektive Term der Druckkorrekturgleichung dar, der mit dem impliziten CDS Schema approximiert wird. Die globale Zeitschrittweite δt unterliegt durch die Verwendung einer voll impliziten Zeitintegration von zweiter Ordnung keinerlei Stabilitätsbeschränkung. Sie kann daher gemäß der Empfehlung von Spalart [203] auf Basis der Beziehung $u_{\max} \delta t / \Delta \approx 1$ an die räumliche Auflösung in der Fokusregion angepasst werden. Mit der Annahme einer maximalen Strömungsgeschwindigkeit von $u_{\max} \approx 1.75 u_{\infty}$ und $\Delta = D/32$ wurde eine Zeitschrittweite von $\delta t = 10^{-5} \text{ s} = 1.75 \times 10^{-2} t^*$ festgelegt, wobei $t^* = D/u_{\infty}$ im Weiteren als charakteristische Zeitskala des Testfalls betrachtet wird. Obwohl die stationären RANS Rechnungen zum Erzeugen der Startlösung nicht konvergierten, verliefen die instationären Simulationen unter Verwendung der Relaxationsfaktoren $\alpha_u = 0.7$, $\alpha_p = 0.4$, $\alpha_T = 0.7$ und $\alpha_{\hat{v}_t} = 0.5$ absolut stabil. Zum Unterschreiten einer relativen Konvergenzschranke von 3 Größenordnungen auf einem Zeitschritt waren ca. 13...14 äußere Iterationen des Gleichungssystems erforderlich. Die aus lokaler Strömungsgeschwindigkeit sowie aus der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung resultierenden Courant Zahlen überstiegen nur selten die angestrebte Obergrenze von eins, eine vorwiegend zeitliche Filterung kann somit ausgeschlossen werden.

Sowohl in Fall 1 als auch in Fall 2 wurden mit oben genannten Einstellungen insgesamt 60 000 Zeitschritte simuliert, was jeweils etwa 210 Überströmungen der Zwillingskonfiguration mit der Geschwindigkeit der Anströmung entspricht. Ein relativ kurzer, transients Anfahrvorgang von 5 000 Zeitschritten wurde in beiden Fällen von der Auswertung ausgenommen, die in den Abschnitten 5.1.2 und 5.1.3 präsentierten Statistiken basieren demnach auf einer simulierten Zeitspanne von $T = 0.55 \text{ s} = 962.5 t^*$. Nach dem Erreichen des

statistisch stationären Zustands wurden auf jedem zweiten Zeitschritt instationäre Oberflächendaten auf den Mantelflächen der Zylinder und auf einer permeablen Kontrollfläche um die Konfiguration gespeichert, um im Anschluss akustische Fernfeldextrapolationen auf Basis der Gleichung von FWH zu ermöglichen. Ein 4 kHz Signal ist also in der Quellregion mit 25 und im Fernfeld mit 12.5 Samples aufgelöst. Oberhalb dieser Grenzfrequenz, bzw. ab einer Strouhal-Zahl von $St = fD/u_\infty \approx 2.3$, sind verlässliche Vorhersagen aus den numerischen Simulationen theoretisch nicht zu erwarten.

Unterschiede zum experimentellen Aufbau

In den zwei nachfolgenden Abschnitten 5.1.2 und 5.1.3 werden Simulationsergebnisse mit experimentellen Daten verglichen, wobei verschiedene Statistiken aus PIV Messungen, gemittelte und fluktuierende Drücke auf den Zylinderoberflächen sowie mit Mikrofonen im Fernfeld aufgenommene Schalldruckspektren zum Vergleich herangezogen werden. Um eine korrekte Interpretation der paarweise gegenübergestellten numerischen und experimentellen Ergebnisse zu ermöglichen, ist es wichtig, vorher einige Details des experimentellen Aufbaus zu nennen und insbesondere auf Unterschiede zum Setup in der Simulation hinzuweisen.

Die zur Validierung der „two struts“ DDES Ergebnisse benötigten experimentellen Daten wurden in gemeinsam von NLR und VKI im Rahmen des *Valiant* Projektes durchgeführten Windkanalmessungen gewonnen [151]. In diesen Experimenten besaßen die Zylinder eine endliche Spannweite von $\mathcal{L}_{\text{exp}} = 12.75 D$ und waren fest zwischen zwei drehbar um die Achse des vorderen Zylinders gelagerten Endplatten eingespannt. Das Verhältnis $\mathcal{L}_{\text{exp}}/\mathcal{L}_{\text{sim}} = 4.25$ ist bei Vergleichen von Lärmpegeln im Fernfeld entsprechend zu berücksichtigen [97]. Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass die Experimente in einem aeroakustischen Windkanal Göttinger Bauweise durchgeführt worden sind, dessen rechteckige Düsenaustrittsfläche quer zur Spannweitenrichtung eine konstante Höhe von $H_{\text{exp}} = 9.5 D$ aufwies. Um die im Versuchsaufbau unvermeidlichen Randeinflüsse zu minimieren, wurde der Mittelpunkt des vorderen Zylinders in der Strahlmitte mit einem Abstand von $6.625 D$ zum Düsenaustritt platziert und sowohl PIV als auch Druckmessungen in der Mitte der Spannweite durchgeführt. Installationseffekte im Mittelschnitt sind aufgrund der im Verhältnis zur umströmten Geometrie großen Wirbelstrukturen im Nachlauf trotzdem nicht auszuschließen.

Um eine Einschätzung der Situation im Experiment zu ermöglichen, sind in Abbildung 5-2 zwei DDES Momentaufnahmen der sich in den Zylindernachläufen ausbildenden Wirbelstraße im Vergleich zur vermuteten Ausdehnung vom Potentialkern des Windkanal-Freistrahls dargestellt. Dabei wurde der Potentialkern in beiden Grafiken als gleichschenkliges Dreieck idealisiert, dessen Basis (schwarz) mit der Höhe der rechteckigen Windkanaldüse zusammenfällt. Die Mittelsenkrechte der Basis entspricht somit der Länge des Potentialkerns, \mathcal{L}_{pot} ,

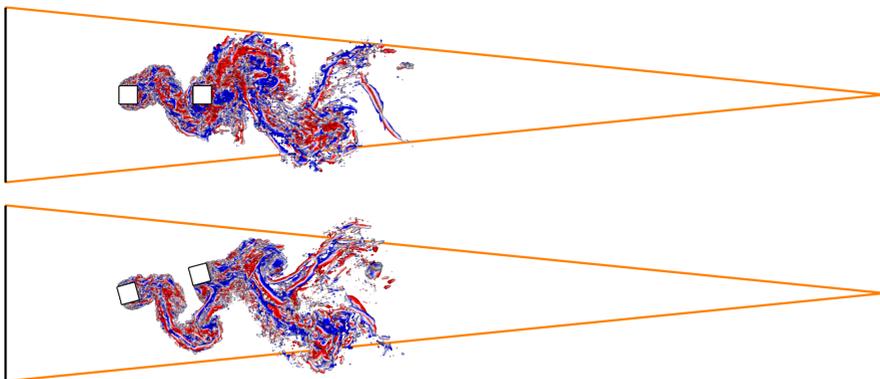


Abbildung 5-2: In den DDES von Fall 1 (oben) und Fall 2 (unten) erfasste Wirbelstrukturen (λ_2 -Isofläche [92], eingefärbt mit spannwertiger Geschwindigkeitskomponente) zum Zeitpunkt minimalen Auftriebs jeweils im Vergleich zur abgeschätzten Ausdehnung vom Potentialkern eines idealisierten, planaren Windkanal-Strahls.

welche mit einem für rechteckige Düsen zu erwartenden Wert von $\mathcal{L}_{\text{pot}} \approx 5 H_{\text{exp}} = 47.5 D$ festgelegt wurde [115, 194]. Wie man in dieser Darstellung recht gut erkennen kann, ist zwar die Zwillingskonfiguration in beiden Fällen vollständig im Potentialkern eingetaucht, die im Verhältnis zu den Zylindern großen Wirbelstrukturen deuten jedoch auf Interaktionen des Nachlaufs mit den freien Scherschichten des Windkanalstrahls hin.

In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, dass im Experiment von Fall 1 zwei unterschiedliche stabile Zustände beobachtet wurden, zwischen denen man durch eine einfache Handbewegung im Windkanalstrahl umschalten konnte [151]. Im leiseren dieser zwei Zustände bildete sich zwischen den beiden Zylindern ein nahezu stationäres Ablösegebiet aus. In allen im Rahmen des *Valiant* Projektes durchgeführten numerischen Simulationen ließ sich jedoch nur der lautere Zustand reproduzieren, welcher durch alternierende Wirbelablösung (wie in Abbildung 5-2 dargestellt) gekennzeichnet war [34]. Die in Abschnitt 5.1.2 gezeigten experimentellen Ergebnisse geben dementsprechend ausschließlich letzteren Zustand wieder.

Bezüglich akustischer Vergleiche zwischen Experiment und Simulation sei abschließend festgestellt, dass die ebenfalls im Mittelschnitt aber außerhalb des Windkanal-Strahls im geometrischen Fernfeld der Konfiguration aufgenommenen Mikrophonsignale nach einer modifizierten Amiet Methode [1, 147] um den Einfluss der freien Scherschichten korrigiert wurden [151]. Für weitergehende Informationen zur Konfiguration und zur Durchführung der Experimente sowie zu numerischen Vorarbeiten wird an dieser Stelle auf die Quellen [34, 120] und [151] verwiesen. Auswertung und Diskussion der nachfolgend präsentierten „two struts“ Ergebnisse basieren zum Teil auf der Darstellung in [109].

5.1.2 Ergebnisse der Quellsimulation

In diesem Abschnitt werden unterschiedliche, aus den Simulationen von Fall 1 und Fall 2 gewonnene Statistiken jeweils mit den entsprechenden experimentell ermittelten Daten gegenübergestellt. Zur Verbesserung der Datenbasis im Sinne einer Reduktion zufälliger Fehler in den statistischen Erwartungswerten [12] wurden die Ergebnisse der DDES nicht nur über die Zeit, sondern auch über die homogene Richtung gemittelt.

Gegenüberstellung zeitgemittelter Simulationsergebnisse mit PIV Daten

Zuverlässige Vorhersagen von Strömungsgeräuschen sind nicht ohne eine korrekte Erfassung der Grundströmung denkbar. Die Analyse von Ergebnissen des „two struts“ Testfalls beginnt daher mit einer Gegenüberstellung zeitgemittelter Geschwindigkeitsfelder aus Simulation und Experiment. Abbildung 5-3 zeigt Stromlinien, welche auf Basis der in Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts) ermittelten Geschwindigkeitsfelder berechnet wurden. In den darunter liegenden Abbildungen 5-4 und 5-5 sind entsprechend für beide Fälle Isolinien der \bar{u} - und \bar{v} -Koordinaten dieser Geschwindigkeitsfelder dargestellt.

Im Fall 1 (linke Bildreihe auf S. 137) wurden die PIV Ergebnisse an der Symmetrieebene gespiegelt. Aber auch in den DDES Ergebnissen ist die Topologie des mittleren Strömungsfeldes in diesem Fall nahezu symmetrisch, was auf eine zumindest für die ersten statistischen Momente von \mathbf{u} hinreichend lange Mittelungszeit schließen lässt. Vergleicht man die roten, gestrichelten und die schwarzen Stromlinien im linken Bild von Abbildung 5-3, kann man eine überwiegend sehr gute Übereinstimmung von DDES und PIV Ergebnissen feststellen. Die sich nach der massiven Strömungsablösung an den Vorderkanten des ersten Zylinders ausbildenden Rezirkulationsgebiete ähneln sich in Form, Größe und Position sehr stark. Zudem sind Stromlinien aus DDES und PIV im inneren Bereich des aus der Windkanaldüse austretenden Strahls auch nach längerer Integrationszeit immer noch praktisch deckungsgleich. Die in den Abbildungen 5-4 und 5-5 dargestellten Isolinien von \bar{u} bzw. \bar{v} stimmen im inneren Bereich ebenfalls sehr gut zwischen Simulation und Experiment überein. Lediglich in den äußeren Randzonen mit hoher Strömungsgeschwindigkeit werden im direkten Vergleich nennenswerte Abweichungen in \bar{u} und auch in der Stromlinienrichtung sichtbar. Es erscheint aber nicht unwahrscheinlich, dass diese Abweichungen im Außenbereich zumindest teilweise auf nicht in der Simulation erfasste Installationseffekte zurückzuführen sind. Insbesondere ist hier die von Beginn an mit $9.5 D$ relativ begrenzte und stromab immer kleiner werdende Ausdehnung des Potentialkerns vom Freistrahls des Windkanals mit offener Messstrecke zu nennen, wenn man sich die Verdrängungswirkung der beiden stumpfen Körper in Abbildung 5-3 vor Augen führt (vgl. Abbildung 5-2, S. 134).

Im Fall 2 (rechte Bildreihe auf S. 137) liegt infolge der -15° Anstellung keine symmetrische Strömung mehr vor. Betrachtet man das rechte Bild in Abbildung 5-3, treten erheblich größere Unterschiede zwischen DDES und PIV Ergebnissen als im linken Bild auf, die Rezirkulationszonen im Nachlauf des vorderen Zylinders unterscheiden sich deutlich. In den Außenbereichen der Strömung sind oberhalb der Konfiguration ebenfalls größere Abweichungen als im nicht angestellten Fall zu verzeichnen, allerdings stimmen die Stromlinien unterhalb der Konfiguration relativ gut zwischen Experiment und Simulation überein. Dies ist vermutlich auf eine leichte Ablenkung des Windkanalstrahls zurückzuführen, welche vom insgesamt positiven Auftrieb der Zwillingskonfiguration verursacht wird. Eine Übersicht integraler aerodynamischer Beiwerte aus der Simulation findet sich in Tabelle 5-1 auf S. 144. Wie zu erwarten, ist auch die Übereinstimmung zwischen DDES und PIV basierten Isolinen in den Abbildungen 5-4 und 5-5 nun längst nicht mehr so gut wie im symmetrischen Fall. Darüber hinaus ist aber auch festzustellen, dass es im angestellten Fall bereits Differenzen am Übergang zwischen den oberen und unteren Bildhälften der PIV Messung gibt. Die Ursache hierfür liegt vermutlich in einer unbeabsichtigten, leichten Veränderung des Anstellwinkels bzw. der Anströmbedingungen im Experiment, da zur Aufnahme der zweiten Bildhälfte anstelle des Aufbaus der PIV Anordnung die „two struts“ Konfiguration gedreht worden ist. Vor dem Hintergrund dieser offenbar großen Sensitivität der betrachteten Konfiguration bezüglich sehr kleiner Änderungen in den Anströmbedingungen erscheinen auch die in Fall 2 zu beobachtenden Differenzen zwischen den zeitgemittelten Geschwindigkeitsfeldern aus Freistrahlexperiment und Simulation in homogener Anströmung plausibel.

Nachdem die Grundströmung analysiert wurde, erfolgt nun eine Gegenüberstellung der im zeitlichen Mittel von Simulation und Experiment erfassten Schwankungsbewegungen. Bei der Interpretation dieser Ergebnisse ist zu berücksichtigen, dass die auf S. 139 in den Abbildungen 5-6, 5-7 und 5-8 dargestellten Korrelationen von Geschwindigkeitsschwankungen lediglich die vom jeweiligen Verfahren aufgelösten Fluktuationen beinhalten. Turbulente Dichteschwankungen können nach der Hypothese von Morkovin [144] bei kleiner Machzahl zwar vernachlässigt werden, weswegen eine Unterscheidung zwischen Favre- und Reynoldsgefilterten Größen hier überflüssig erscheint. Da aber nicht nur per Definition [68], sondern auch in der räumlichen und zeitlichen Auflösung Unterschiede zwischen den in DDES und PIV erfassten Variablen bestehen, ist eine perfekte Übereinstimmung der Ergebnisse hier nicht zu erwarten. Ein erheblicher Anteil der Schwankungsenergie ist allerdings in einem relativ schmalen Frequenzband enthalten (siehe Abbildungen 5-10 und 5-12), dessen Erfassung in beiden Fällen unterstellt werden kann. Eine direkte Gegenüberstellung der DDES und PIV Ergebnisse erscheint daher durchaus begründet und nützlich.

Im Fall 1 (linke Bildreihe auf S. 139) spiegelt sich die Symmetrie des Testfalls in der nahezu symmetrischen Verteilung der Normalspannungen $\overline{u'u'}$ und $\overline{v'v'}$ sowie in der antisymmetrischen Schubspannungsverteilung $\overline{u'v'}$ wieder. Die Mittelungsdauer scheint

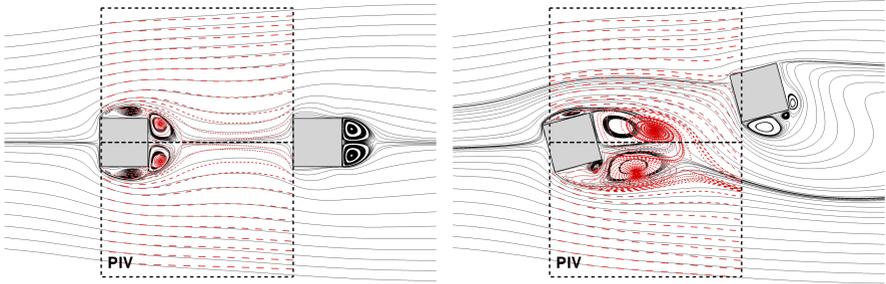


Abbildung 5-3: Stromlinien zeitgemittelter Geschwindigkeitsfelder aus DDES (—) und PIV (---) für Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts).

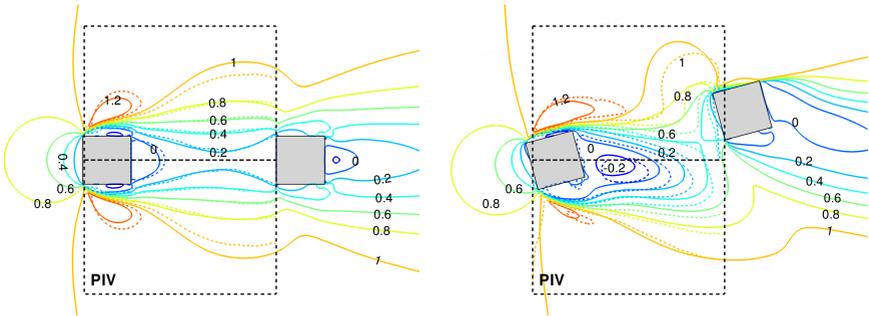


Abbildung 5-4: Isolinien von \bar{u}/u_∞ aus der DDES (—) im Vergleich zur PIV Messung (---) für Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts).

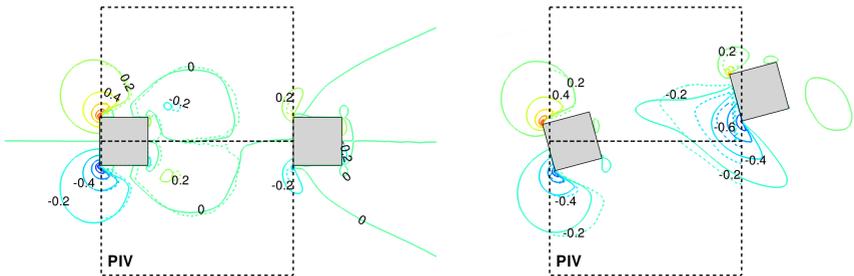


Abbildung 5-5: Isolinien von \bar{v}/u_∞ aus der DDES (—) im Vergleich zur PIV Messung (---) für Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts).

demnach auch für die (zentralen) zweiten statistischen Momente hinreichend zu sein. Die Darstellung der Schubspannungsverteilung in Abbildung 5-8 weist prinzipiell die größten Abweichungen zwischen Simulation und Experiment auf, in der PIV Messung sind die Regionen betragsmäßig großer Schubspannungen generell etwas weiter ausgedehnt. In Abbildung 5-7 ist dagegen der hochgradig turbulente Bereich ($\overline{v'v'} \geq 0.7 u_\infty^2$) im Nachlauf des ersten Zylinders in der Simulation etwas größer als in der PIV Messung. Möglicherweise spielen hier Unterschiede im Auflösungsvermögen eine Rolle. Insgesamt ist aber die Übereinstimmung von Isolinien aus Simulation und Experiment auch hinsichtlich der erfassten Normal- und Schubspannungen als sehr gut zu bezeichnen, streckenweise fällt sogar eine Unterscheidung der Ergebnisse aufgrund zusammenfallender Isolinien schwer.

Im Fall 2 (rechte Bildreihe auf S. 139) sind in Experiment und Simulation übereinstimmend erheblich schwächere Normalspannungen als im Fall 1 feststellbar. Die Differenzen in den von PIV und DDES erfassten turbulenten Fluktuationen sind jedoch mit Anstellung der Konfiguration prinzipiell größer geworden, was aufgrund der zuvor diskutierten Unterschiede in der Hauptströmung (siehe Abbildungen 5-3, 5-4 und 5-5) auch wenig verwunderlich ist. In den Schwankungsgrößen werden hier erneut Differenzen zwischen oberen und unteren Bildhälften der PIV Messungen ersichtlich. Die Unterschiede zwischen Experiment und Simulation erscheinen allerdings nach wie vor etwas größer als die im Bereich experimenteller Unsicherheiten liegenden Abweichungen, wobei der nicht in der Simulation abgebildete Effekt des Windkanal-Freistrahls in Verbindung mit dem Auftrieb der angestellten Konfiguration weiterhin als primäre Ursache dieser Unterschiede angesehen wird. Eine gute Übereinstimmung der DDES Ergebnisse mit Simulationsergebnissen numerischer Partner aus dem *Valiant* Projekt spricht ebenfalls für diese Interpretation [34].

Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse mit Druckmessungen

Zur Überprüfung der Simulationsergebnisse aus den zwei DDES stehen neben PIV Daten auch Messungen statischer Drücke auf den Zylindermantelflächen zur Verfügung [151]. Da bei der kleinen Machzahl des untersuchten Testfalls Druckschwankungen auf festen Wänden als dominierender Schallquellmechanismus anzusehen sind [32], ist eine korrekte Erfassung fluktuierender Wanddrücke hier besonders relevant. Nachfolgend werden daher nicht nur Mittelwerte, sondern auch Leistungsdichtespektren von Drucksignalen aus den Simulationen und aus verschiedenen, mittig in der Spannweite auf den Zylindermantelflächen durchgeführten Messungen miteinander verglichen und analysiert. Dabei ist zu beachten, dass Druckschwankungen im tieffrequenten Bereich ($St \lesssim 0.08$) von im Verhältnis zur Wirbelstraße großskaligen Strukturen hervorgerufen werden. Ein direkter Vergleich erscheint hier aufgrund der Differenzen zwischen experimentellem und numerischem Setup wenig aussagekräftig. Oberhalb von $St \approx 2.3$ ist hingegen aufgrund zunehmender dissipativer

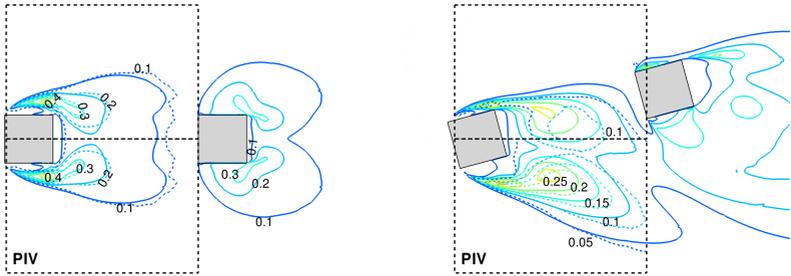


Abbildung 5-6: Isolinien von $\overline{u'u'}/u_\infty^2$ aus der DDES (—) im Vergleich zur PIV Messung (----) für Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts). Wertebereich der Isolinien im rechten Bild halbiert.

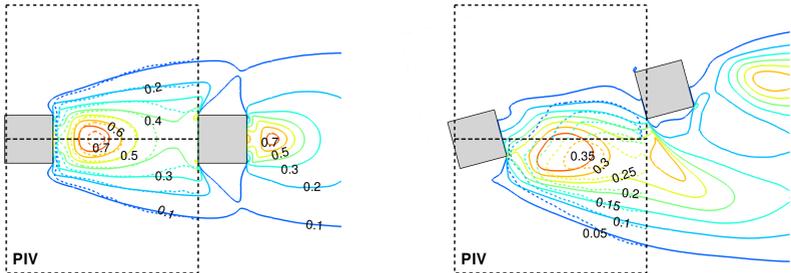


Abbildung 5-7: Isolinien von $\overline{v'v'}/u_\infty^2$ aus der DDES (—) im Vergleich zur PIV Messung (----) für Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts). Wertebereich der Isolinien im rechten Bild halbiert.

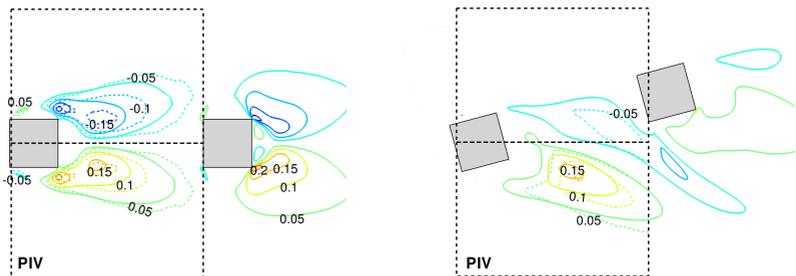


Abbildung 5-8: Isolinien von $\overline{u'v'}/u_\infty^2$ aus der DDES (—) im Vergleich zur PIV Messung (----) für Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts).

Approximationsfehler mit einer Dämpfung der simulierten Energiespektren und folglich mit geringeren Amplituden als im Experiment zu rechnen.

Die aus Experiment und Simulation resultierenden Statistiken der fluktuierenden Wanddrücke sind für den symmetrischen Fall 1 auf S. 141 und für den asymmetrischen Fall 2 auf S. 143 zusammengestellt. Während die oberen Abbildungen 5-9 und 5-11 jeweils zeitlich gemittelte Druckverteilungen um beide Zylinder zeigen, ist in den Abbildungen 5-10 bzw. 5-12 darunter die spektrale Energieverteilung der Druckfluktuationen für ausgewählte Positionen zu sehen. Dargestellt sind Autospektren von in den Mittelpunkten der Zylinderflächen (d. h. bei $d/D = \{0, 1, 2\}$) aufgenommenen Drucksignalen, wobei nahezu übereinstimmende Parameter für die digitale Signalverarbeitung verwendet wurden. In Experiment bzw. DDES sind die Drucksignale auf den Zylinderoberflächen mit einer Abtastfrequenz von 102.4 kHz bzw. 50 kHz über eine Zeitspanne von 20 s bzw. 0.55 s erfasst worden. Zur Ermittlung der Energieverteilung im Frequenzbereich wurden die aufgenommenen Zeitreihen zunächst in jeweils 8192 bzw. 4096 Datenpunkte umfassende und zu 50% überlappende Segmente unterteilt. Die Daten innerhalb dieser etwa gleich großen Zeitfenster wurden anschließend mit einem Hanning Fenster [12] gewichtet, Fourier-transformiert und die resultierenden Energiespektren frequenzweise über alle zur Verfügung stehenden Segmente sowie im Falle der Simulation zusätzlich über die homogene Richtung gemittelt. Die Frequenzauflösung der in den Abbildungen 5-10 und 5-12 dargestellten, einseitigen Autospektren beträgt entsprechend $\delta St = \delta f D/u_\infty \approx 7 \times 10^{-3}$. Zur Umrechnung spektraler Amplituden in eine dB-Skala wurde ein Referenzdruck von $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa verwendet.

In den auf S. 141 dargestellten Druckverteilungen und Spektren treten aufgrund der Symmetrie von Fall 1 nur sehr kleine Differenzen zwischen Ober- und Unterseite auf. Dies gilt sowohl für die numerischen, als auch für die experimentellen Ergebnisse. Allerdings sind in Abbildung 5-9 auf der dem Nachlauf zugewandten Rückseite des zweiten Zylinders deutliche Abweichungen im mittleren Druckniveau zwischen Experiment und Simulation erkennbar. Da vergleichbare Differenzen gegenüber den experimentellen Daten aber auch in den Simulationen numerischer Partner aus dem *Valiant* Projekt zu beobachten waren [34], liegt die Vermutung nahe, dass auch hier Installationseffekte eine Rolle spielen. Betrachtet man die engen Grenzen des Potentialkerns in Abbildung 5-2 auf S. 134, kann man sich vorstellen, dass das sichtbar höhere Nachlaufdruckniveau im Experiment durch Interaktionen der Wirbelstraße mit der freien Scherschicht des Windkanalstrahls verursacht wird, wodurch eine Durchmischung mit Fluid aus der ruhenden Umgebung des Strahls herbeigeführt und somit die effektive Abströmgeschwindigkeit im Nachlauf der Konfiguration verringert wird. Dieser Effekt scheint aber im Wesentlichen auf den Nachlauf der Zwillingiskonfiguration beschränkt zu bleiben, da die numerisch und experimentell ermittelten Druckverteilungen auf dem ersten Zylinder und auf drei von vier Flächen des zweiten Zylinders sehr gut bis gut übereinstimmen, wobei die auf den Seitenflächen des zweiten Zylinders verbliebenen Differenzen mit zunehmendem Abstand von der Rückseite immer kleiner werden.

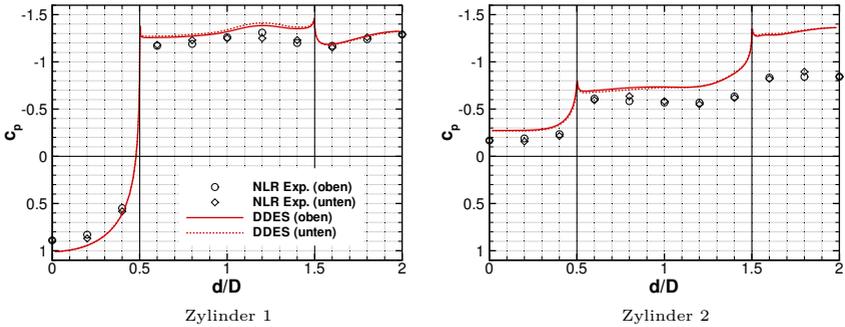


Abbildung 5-9: Zeitlich gemittelte, statische Druckverteilung um den ersten Zylinder (links) und den zweiten Zylinder (rechts) im symmetrischen Fall 1. Die dimensionlose Wandkoordinate d/D hat ihren Ursprung im Mittelpunkt der Stirnfläche des jeweiligen Zylinders und läuft von dort entlang von Ober- und Unterseite bis zum Mittelpunkt der hinteren Fläche bei $d/D = 2$. Die Kanten der Zylinder befinden sich bei $d/D = \{0.5, 1.5\}$ und sind durch senkrechte Linien markiert.

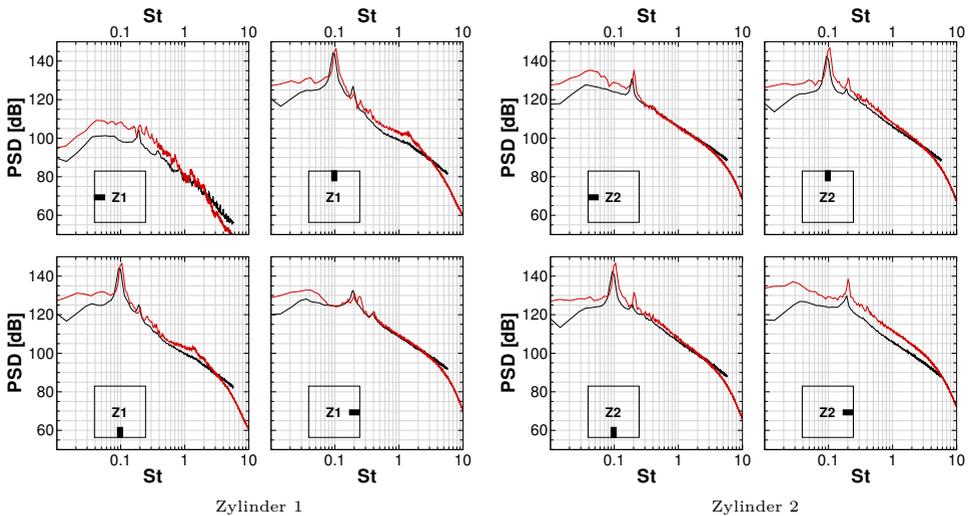


Abbildung 5-10: Leistungsdichtespektren oberflächlicher Druckfluktuationen aus Experiment (—) und Simulation (—) für jeweils vier Positionen am ersten Zylinder (Z1) und am zweiten Zylinder (Z2) im symmetrischen Fall 1.

Vergleicht man die in Abbildung 5-10 gezeigten Spektren aus Experiment und Simulation, kann man im verlässlichen Frequenzbereich $0.08 < St < 2.3$ fast überall eine sehr gute und zum Teil sogar eine ausgezeichnete Übereinstimmung in der spektralen Leistungsdichte fluktuierender Drucksignale feststellen. An zwei dem turbulenten Bereich zwischen den Zylindern zugewandten Sensoren erscheint der breitbandige Teil der Energiespektren über eine Dekade von Frequenzen praktisch deckungsgleich. Dieses Ergebnis passt zu den auf S. 137 und S. 139 im Bereich zwischen den Zylindern beinahe zusammenfallenden Isolinien der Geschwindigkeitsfelder aus PIV und DDES. Aber auch die dominante Wirbelabwurf-frequenz, $St_p = f_p D/u_\infty \approx 0.1$, ist in Experiment und Simulation nahezu identisch, wobei anzumerken ist, dass sich das energetische Schmalband um diese Frequenz in Abbildung 5-10 bei den DDES Spektren etwas deutlicher vom Hintergrundgeräusch abhebt. Größere breitbandige Differenzen von etwa 5 dB sind lediglich an der vordersten und an der hintersten Sensorposition zu verzeichnen. Diese könnten zum einen mit der quasi-zweidimensionalen Schallausbreitung in der DDES [120] (bei tiefen Frequenzen) und zum anderen mit den bereits diskutierten Differenzen im Nachlauf im Zusammenhang stehen.

Im Fall 2 sind aufgrund von Unterschieden zwischen Experiment und Simulation in der mittleren Strömung (s. S. 135–139) bei einer Gegenüberstellung von Statistiken der Druckfelder keine deckungsgleichen Resultate mehr zu erwarten. In dem Vergleich auf S. 143 zeigt sich jedoch, dass mit einer Anstellung der Konfiguration prinzipielle Änderungen verbunden sind, welche sowohl experimentell als auch numerisch beobachtet werden können, auch wenn sich der effektive Anstellwinkel infolge einer Ablenkung des Windkanalstrahls vermutlich etwas unterscheidet. In Abbildung 5-11 fällt zunächst auf, dass die statischen Druckverteilungen im Fall 2 nicht mehr symmetrisch sind, woraus im Wesentlichen auch die zeitgemittelten Auftriebskräfte in Tabelle 5-1 resultieren. Des Weiteren ist festzustellen, dass der für Tandem-Konfigurationen typische „forebody wake effect“ [110] in Widerstandsbeiwert und Staudruck des zweiten Zylinders viel schwächer ausgeprägt ist als im Fall 1, da dieser sich durch die Anstellung nun zeitweise oberhalb des Nachlaufs vom ersten Zylinder befindet (vgl. Abbildung 5-2). Diese exponierte Lage mag auch dazu beitragen, dass die mittlere Druckverteilung auf dem zweiten Zylinder im Fall 2 so gut zwischen Experiment und Simulation übereinstimmt, obwohl auf der unteren Hälfte des ersten Zylinders bereits erheblich größere Abweichungen als im Fall 1 zu verzeichnen sind.

Aus der Anstellung der Konfiguration resultieren aber nicht nur größere Unterschiede in der Grundströmung. In Abbildung 5-12 lassen sich breitbandige Differenzen von mehr als 5 dB zwischen den numerisch und experimentell ermittelten Leistungsdichtespektren von Drucksignalen auf fast allen Oberflächen ablesen, nur der Mittelpunkt auf der Unterseite des zweiten Zylinders stellt eine Ausnahme dar, denn hier stimmen die Spektren im verlässlichen Frequenzbereich bis auf etwa 2 dB Abweichung überein. Sowohl im Experiment als auch in der Simulation ist eine deutliche Absenkung der PSD Pegel gegenüber der nichtangestellten Konfiguration sowie eine Verschiebung der Wirbelabwurf-frequenz hin

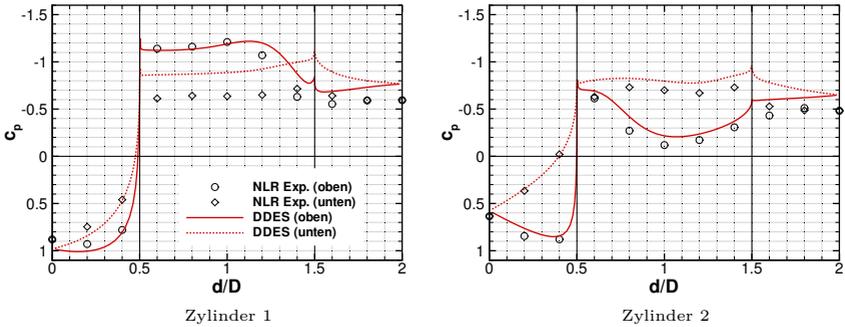


Abbildung 5-11: Zeitlich gemittelte, statische Druckverteilung um den ersten Zylinder (links) und den zweiten Zylinder (rechts) im asymmetrischen Fall 2. Die dimensionslose Wandkoordinate d/D hat ihren Ursprung im Mittelpunkt der Stirnfläche des jeweiligen Zylinders und läuft von dort entlang von Ober- und Unterseite bis zum Mittelpunkt der hinteren Fläche bei $d/D = 2$. Die Kanten der Zylinder befinden sich bei $d/D = \{0.5, 1.5\}$ und sind durch senkrechte Linien markiert.

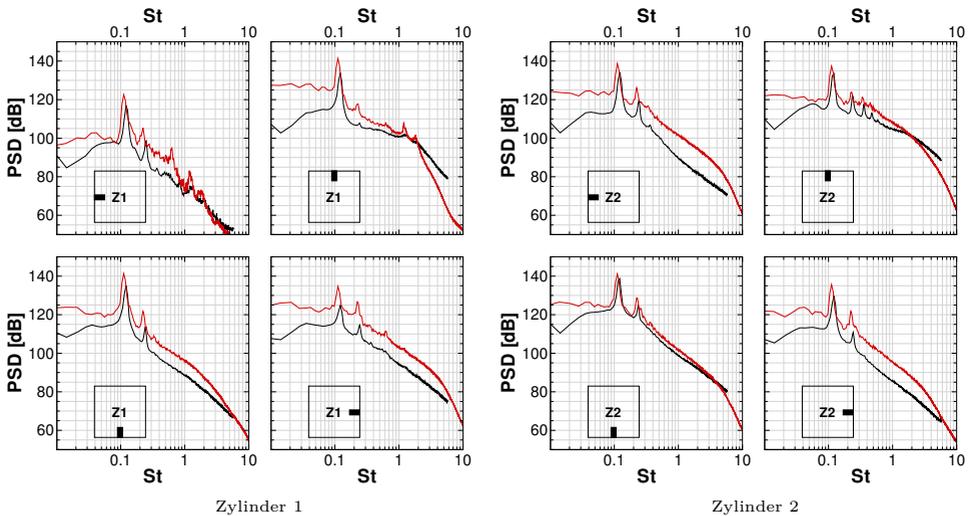


Abbildung 5-12: Leistungsdichtespektren oberflächlicher Druckfluktuationen aus Experiment (—) und Simulation (—) für jeweils vier Positionen am ersten Zylinder (Z1) und am zweiten Zylinder (Z2) im asymmetrischen Fall 2.

Tabelle 5-1: Statistiken der integralen aerodynamischen Beiwerte $c_A = F_y/(q_\infty A_{\text{ref}})$ und $c_W = F_x/(q_\infty A_{\text{ref}})$ vom vorderen Zylinder (Z1) und vom hinteren Zylinder (Z2) sowie von der Gesamtkonfiguration (Z1+Z2) aus den DDES von Fall 1 und Fall 2. Als Referenzfläche dient ein Viertel der Mantelfläche eines Zylinders, d. h. $A_{\text{ref}} = 3 D^2$.

	Fall 1			Fall 2		
	Z1	Z2	Z1+Z2	Z1	Z2	Z1+Z2
\bar{c}_A	-0.019	0.012	-0.007	0.592	-0.112	0.481
\bar{c}_W	2.025	1.007	3.032	1.452	1.224	2.676
rms(c'_A)	1.469	1.468	2.846	0.715	0.632	1.146
rms(c'_W)	0.254	0.509	0.496	0.167	0.495	0.586
rms($dc_A/d\tau$)	1693	1768	3319	907	883	1510
rms($dc_W/d\tau$)	528	730	856	385	714	900

zu höheren Frequenzen (Exp: $St_p \approx 0.12$, DDES: $St_p \approx 0.115$) zu beobachten. Zudem tritt die Wirbelabwurfrequenz mit dem Wegfallen der Symmetrie nun wieder an allen Positionen dominant hervor. Insgesamt kann man feststellen, wenn man von dem in der Simulation generell höheren Energieniveau einmal absieht, dass sich die experimentellen und numerischen Ergebnisse auch im Fall 2 in vielen wesentlichen Merkmalen entsprechen, wobei speziell Unterschiede zum symmetrischen Fall in ähnlicher Weise sichtbar werden.

Um einen Einblick in die räumliche Struktur der Druckfluktuationen auf den Mantelflächen der Zylinder zu ermöglichen, sind in den Abbildungen 5-13 und 5-14 auf S. 145 mehrere Konturplots der Kohärenzfunktion in einer normierten δz - f -Ebene zusammengestellt. Für die Darstellung von $\gamma^2(St; \delta z/D)$ wurde die aus zwei Zeitreihen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ zu bildende Kohärenzfunktion [12]

$$\gamma_{\alpha\beta}^2(f) = \frac{|G_{\alpha\beta}(f)|^2}{G_{\alpha\alpha}(f)G_{\beta\beta}(f)} \quad (5.1)$$

basierend auf Drucksignalen von je zwei separaten Sensoren berechnet, deren spannweitiger Abstand entlang der Mittellinie einer Zylinderfläche im Bereich $0 < \delta z \leq \mathcal{L}_{\text{sim}}/2$ variiert wurde. In Gleichung (5.1) bezeichnen $G_{\alpha\alpha}(f)$ und $G_{\beta\beta}(f)$ die spektrale Leistungsdichte der Signale $\alpha(t)$ bzw. $\beta(t)$ und $G_{\alpha\beta}(f)$ das entsprechende Kreuzleistungs(dichte)spektrum, die Kohärenzfunktion bewegt sich somit im Bereich $0 \leq \gamma_{\alpha\beta}^2(f) \leq 1$ [12].

Aufgrund der Symmetrie im Fall 1 werden in Abbildung 5-13 nur Statistiken von jeweils einer der zwei Seitenflächen der beiden Zylinder gezeigt. Auf den Seitenflächen ist die spannweitige Kohärenz besonders stark im Bereich der Wirbelabwurfrequenz sowie um die erste subharmonische und die erste höherharmonische ausgeprägt. Nur auf den Rückseiten der Zylinder tritt die Wirbelabwurfrequenz nicht durch verstärkte Kohärenz in Erscheinung. Da es für einen Drucksensor in der Symmetrieebene praktisch keinen Unterschied macht, ob sich Wirbel von der oberen oder der unteren Hinterkante ablösen, wird dort gerade die

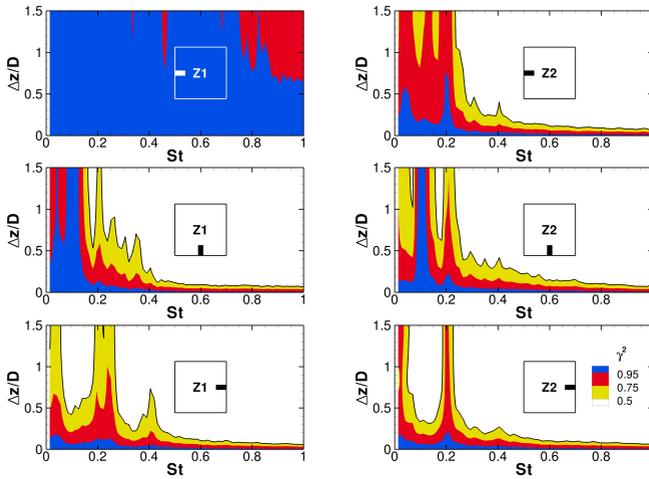


Abbildung 5-13: Konturplot der Kohärenzfunktion $\gamma^2(St; \delta z/D)$ für jeweils drei Positionen am ersten Zylinder (links) und am zweiten Zylinder (rechts) im symmetrischen Fall 1.

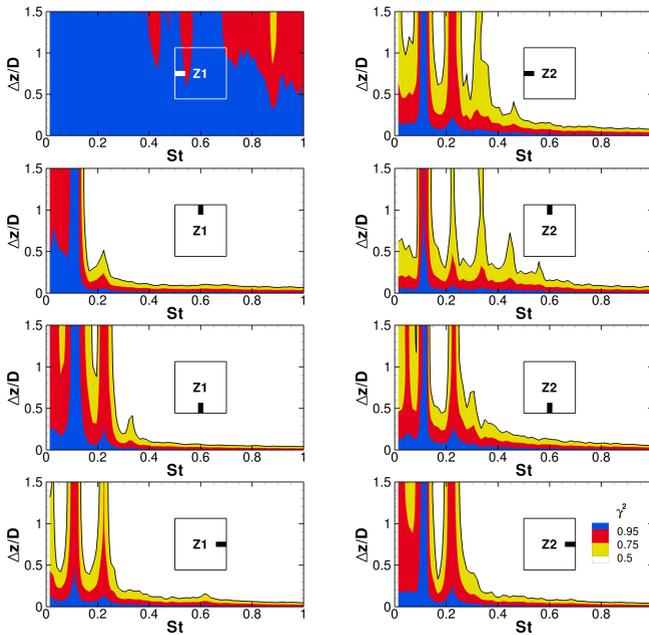


Abbildung 5-14: Konturplot der Kohärenzfunktion $\gamma^2(St; \delta z/D)$ für jeweils vier Positionen am ersten Zylinder (links) und am zweiten Zylinder (rechts) im asymmetrischen Fall 2.

doppelte Frequenz detektiert. Ab einer normierten Frequenz von $St \approx 0.25$ ist jedoch für fast alle Sensorpositionen ein relativ steiler Abfall der Kohärenzfunktion in spannweitere Richtung festzustellen. Lediglich auf der Frontseite des ersten Zylinders bleibt das Druckfeld in der homogenen Richtung noch bis $St \approx 0.8$ fast perfekt korreliert, da in dieser Region eine geordnete, laminare Strömung vorliegt.

Im Fall 2 zeigt sich in Abbildung 5-14 ein prinzipiell vergleichbares Verhalten, mit dem Unterschied, dass hier durch den Wegfall der Symmetrie keine Auslöschung der Wirbelabwurf Frequenz mehr stattfindet. Interessant ist, dass infolge der Anstellung auf der Oberseite des zweiten Zylinders nun deutlich mehr höherharmonische Frequenzen als im symmetrischen Fall durch starke spannweitige Kohärenz in Erscheinung treten. Bereits in Abbildung 5-12 ließen sich bei diesen Frequenzen höherharmonische Spitzen im PSD Pegel ausmachen. In den simulierten Spektren hoben sich diese allerdings etwas weniger deutlich als im Experiment vom breitbandigen, turbulenten Rauschen ab. Abgesehen von diesen höherharmonischen Spitzen auf Front- und Oberseite des zweiten Zylinders, sowie von der laminar überströmten Frontseite des ersten Zylinders, ist jedoch auch im asymmetrischen Fall ab $St \approx 0.25$ ein relativ steiles Abklingen der Kohärenzfunktion in spannweitere Richtung zu beobachten.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die in den Abbildungen 5-10 und 5-12 aus den breitbandigen Leistungsdichtespektren herausragenden Spitzen in beiden Fällen von spannweitig stark kohärenten Wirbelstrukturen verursacht werden, während der breitbandige Anteil oberhalb der Wirbelabwurf Frequenz noch innerhalb der simulierten Spannweite dekoriert. Dieses Resultat deckt sich mit experimentellen Beobachtungen an der „two struts“ Konfiguration [152] und ist insbesondere für den im nächsten Abschnitt vorgenommenen Vergleich von akustischen Ergebnissen aus Experiment und Simulation relevant.

5.1.3 Ergebnisse der Fernfeldextrapolation

Nach den Ergebnissen der Quellsimulationen werden in diesem Abschnitt nun Resultate akustischer Fernfeldextrapolationen im Vergleich zu experimentellen Daten analysiert. Zur Berechnung der Schallimmission an weit von der Quellregion entfernten Beobachterpositionen wurde, wie in Abschnitt 2.2 motiviert, das in Abschnitt 3.4 beschriebene Integralverfahren auf Basis der akustischen Analogie von Ffowcs-Williams und Hawkins eingesetzt. Grundlage dieser mit dem C3NOISE Löser durchgeführten Fernfeldextrapolationen sind die Gleichungen (3.130)–(3.134) in Verbindung mit (2.21) sowie den instationären Druck- und Geschwindigkeitsfeldern, welche während den DDESen auf den Mantelflächen der Zylinder und auf einer permeablen Kontrollfläche gespeichert wurden. Die Lage dieser permeablen Kontrollfläche ist Abbildung 5-1 zu entnehmen. Um den Einfluss periodischer Randbedingungen auf die Schallabstrahlung zu minimieren, wurde die Ausdehnung der

Oberflächenintegrale auf jeweils eine Hälfte der simulierten Spannweite beschränkt. Sämtliche Fernfeldextrapolationen erfolgten für mit der Tandem-Konfiguration mitbewegte Beobachter im Mittelschnitt des ausgewerteten Kontrollflächenbereichs, deren geometrischer Abstand zum Zentrum des ersten Zylinders übereinstimmend und konstant $r_B = 50 D$ betrug.

Zur Bewertung der Simulationsergebnisse in Fall 1 und Fall 2 steht aus Mikrofonmessungen die spektrale Leistungsdichte des Schallfeldes an insgesamt zehn Positionen im geometrischen Fernfeld zur Verfügung. Die Mikrofone waren im Experiment ebenfalls mit einem konstanten Abstand von $r_B = 50 D$ kreisförmig um den Mittelpunkt des vorderen Zylinders und im Mittelschnitt angeordnet. Da sie sich allerdings außerhalb des Windkanalstrahls befanden, mussten sowohl die experimentell ermittelten Spektren als auch die Mikrofonpositionen nachträglich korrigiert werden, um die Vergleichbarkeit mit Daten aus numerischen Simulationen mit homogener Grundströmung zu gewährleisten [151]. Die im Experiment zwischen Mikrofonen und Hauptströmungsrichtung geometrisch gebildeten Winkel von $\pm \{105^\circ, 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ\}$ stimmen daher nicht mit den entsprechenden Winkeln zwischen virtuellen Fernfeldbeobachtern und der Hauptströmungsrichtung im numerischen Setup, $\pm \{93^\circ, 79^\circ, 65^\circ, 49^\circ, 32^\circ\}$, überein. Um die Sensitivität der Ergebnisse bezüglich dieser naturgemäß nicht exakten Winkelkorrekturen einschätzen zu können, erscheint es vor dem Vergleich experimentell und numerisch ermittelter Leistungsdichtespektren an einzelnen Beobachterpositionen sinnvoll, zunächst die Winkelabhängigkeit der Schallabstrahlung zu untersuchen.

Richtcharakteristik der Schallabstrahlung

Im Folgenden wird die Winkelabhängigkeit der von den Mantelflächen der zwei Zylinder ausgehenden Schallemission analysiert. Zu diesem Zweck wurden in Fall 1 und Fall 2 mehrere Fernfeldintegrationen auf Basis der simulierten Oberflächendrucke durchgeführt. Die Fernfeldextrapolationen erfolgten für jeweils 360 kreisförmig und gleichmäßig in 1° Intervallen um das Zentrum des ersten Zylinders angeordnete Beobachter, wobei sich die 0° Position stromab der Konfiguration in Hauptströmungsrichtung befindet und der Radius des Beobachterkreises $r_B = 50 D$ beträgt.

Abbildung 5-15 stellt die Ergebnisse der Fernfeldextrapolationen in Form von Gesamtschalldruckpegeln $L_p = 20 \log_{10} (p'_{\text{rms}}/p_{\text{ref}})$ dB gegenüber. Die dargestellten Pegel wurden aus den lokalen Effektivwerten zeitlicher Druckfluktuationen p'_{rms} an der jeweiligen Beobachterposition berechnet. Betrachtet man die Ergebnisse der Gesamtkonfiguration, sind in beiden Fällen dipolartige Richtcharakteristiken zu erkennen, deren maximale Amplituden etwa senkrecht zu der die Mittelpunkte beider Zylinder verbindenden Sehne der Tandem-Konfiguration ausgerichtet sind.

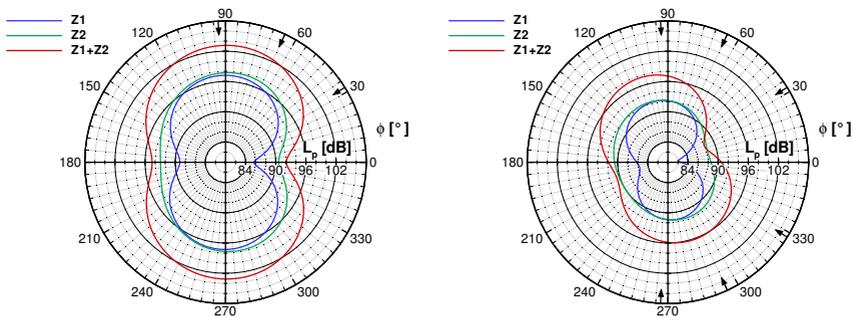


Abbildung 5-15: Richtcharakteristiken der vom vorderen (Z1) und vom hinteren Zylinder (Z2) sowie von der Gesamtkonfiguration (Z1+Z2) ausgehenden Schallabstrahlung im symmetrischen Fall 1 (links) und im asymmetrischen Fall 2 (rechts). Dargestellt sind auf $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa bezogene Gesamtschalldruckpegel an kreisförmig um den Mittelpunkt des ersten Zylinders angeordneten Beobachterpositionen im geometrischen Fernfeld.

Wie zu erwarten, ist die Schallabstrahlung nur im Fall 1 symmetrisch. Im Fall 2 liegen die Maximalpegel oberhalb der Konfiguration um etwa 2 dB höher als unterhalb. Bemerkenswert ist außerdem, dass die Beiträge der einzelnen Zylinder in Richtung maximaler Amplituden in beiden Fällen fast gleich groß sind, und sie sich in der Summe mit ca. +6 dB nahezu vollkohärent addieren. Parallel zur Hauptströmungsrichtung fallen dagegen die Beiträge des zweiten Zylinders deutlich größer aus, da dieser im Nachlauf des ersten Zylinders stärkeren Schwankungen der Widerstandskraft bzw. stärkeren Fluktuationen von $dc_W/d\tau$ ausgesetzt ist (siehe Tabelle 5-1). Weil sich bei der symmetrischen Konfiguration die dominante Frequenz von Widerstandsschwankungen gegenüber der von Auftriebsschwankungen verdoppelt hat (vgl. Abbildung 5-10, S. 141, und Abbildung 5-13, S. 145), sind in diesem Fall insbesondere auch frequenzabhängige Unterschiede in der Schallabstrahlung zu erwarten.

Um einen Einblick in die Frequenzabhängigkeit der Richtcharakteristik zu erhalten, werden in Abbildung 5-16 Schalldruckpegel aus drei verschiedenen Terzbändern gegenübergestellt. Im Fall 1 ist das Terzband im Bereich der Wirbelabwurffrequenz durch eine klassische Dipolcharakteristik mit ausgeprägten Differenzen zwischen Maximal- und Minimalpegeln gekennzeichnet, wobei die stärkste Schallabstrahlung wie beim Gesamtschalldruckpegel in Abbildung 5-15 normal zur Sehne der Konfiguration erfolgt. Obwohl der maximale Pegel im Terzband der doppelten Wirbelabwurffrequenz um etwa 12 dB geringer ausfällt, trägt dieser Frequenzbereich aufgrund seiner um 90° gedrehten Spitzenabstrahlungsrichtung nicht unwesentlich zur gesamten Schallemission entgegen und in Richtung der Hauptströmung bei. Im hochfrequenten Terzband um $St_c = 1.14$ ist der Maximalpegel zwar ebenfalls entgegen der Hauptströmungsrichtung zu finden, fällt aber noch um fast 10 dB kleiner aus. Trotz

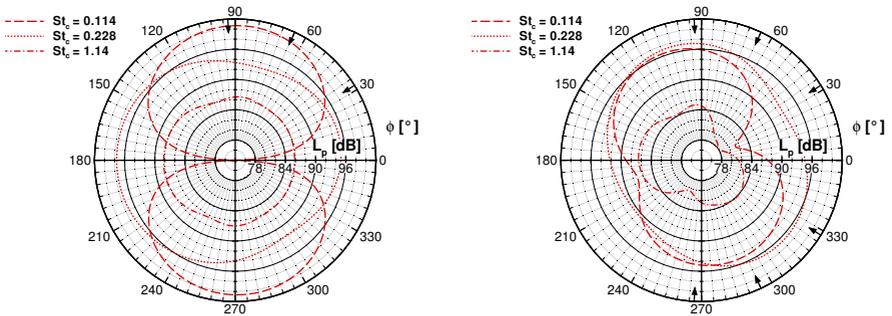


Abbildung 5-16: Richtcharakteristiken der von den Mantelflächen beider Zylinder (Z1+Z2) ausgehenden Schallabstrahlung im symmetrischen Fall 1 (links) und im asymmetrischen Fall 2 (rechts). Dargestellt sind auf $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa bezogene Terzbandpegel für drei Frequenzbereiche an kreisförmig um den Mittelpunkt des ersten Zylinders angeordneten Beobachterpositionen im geometrischen Fernfeld. Zwecks besserer Übersicht wurden die Terzbandpegel für die Mittenfrequenzen $St_c \approx 0.228$ und $St_c \approx 1.14$ um +10 dB nach oben verschoben.

bereits mit der Länge der Gesamtkonfiguration vergleichbarer akustischer Wellenlängen in diesem Frequenzbereich sind dabei in Fall 1 kaum winkelabhängige Unterschiede im Pegel feststellbar. Im Fall 2 betragen die Differenzen dagegen mehr als 8 dB, wobei die stärkste Schallemission im hochfrequenten Terzband wieder entgegen der Hauptströmungsrichtung stattfindet. Im mittleren Terzband sind die Unterschiede in der Richtcharakteristik weniger stark ausgeprägt. Die deutlich höher liegenden Maxima im tiefsten Frequenzbereich sind dagegen wieder wie beim Gesamtschalldruckpegel ungefähr senkrecht zur Sehne der Tandem-Konfiguration ausgerichtet.

Die richtungsabhängige Differenz zwischen maximalem und minimalem Gesamtschalldruckpegel in Abbildung 5-15 beträgt in Fall 1 bzw. 2 etwa 11 dB bzw. 10 dB. Auch wenn die Unterschiede in einzelnen Terzbändern noch größer ausfallen können (siehe Abbildung 5-16), lässt sich schlussfolgern, dass die Pegel im numerisch gut aufgelösten Frequenzbereich $St < 2$ zumindest im experimentell abgedeckten Winkelbereich (siehe S. 147) in beiden Fällen nicht sprunghaft variieren. Nachfolgende Gegenüberstellung von experimentell und numerisch ermittelten Leistungsdichtespektren erscheint daher auch vor dem Hintergrund nicht exakter Windkanalkorrekturen vertrauenswürdig und kann im Sinne einer Datenreduktion auf die extremen und die mittleren zur Verfügung stehenden Messpositionen und im Fall 1 zudem auf Ergebnisse oberhalb der Konfiguration eingeschränkt werden. Die entsprechenden Beobachtungswinkel sind in den Abbildungen 5-15 und 5-16 durch Pfeilspitzen markiert. Ein Vergleich experimenteller und numerischer Ergebnisse für die hier nicht betrachtete 79° Position findet sich in [109].

Gegenüberstellung von Spektren aus der Simulation mit Mikrofonmessungen

Vor einem Vergleich experimenteller und numerischer Ergebnisse im Fernfeld ist zusätzlich zu den Scherschichtkorrekturen auch noch eine Korrektur der simulierten Schalldruckpegel erforderlich, um den Einfluss der in der Simulation erheblich kleineren Spannweite zu kompensieren. Zu diesem Zweck wurde von Kato et al. [97] mit

$$\text{PSD}_{\text{sim,korr.}} = \text{PSD}_{\text{sim}} + \Delta_{\text{dB}}(f) \quad (5.2)$$

eine frequenzabhängige Korrektur der simulierten PSD-Pegel (in dB) eingeführt, wobei

$$\Delta_{\text{dB}}(f) = \begin{cases} 10 \log_{10} \left(\frac{\mathcal{L}_{\text{exp}}}{\mathcal{L}_{\text{sim}}} \right) & , \text{ wenn } \ell_c(f) \leq \mathcal{L}_{\text{sim}} & (5.3a) \\ 10 \log_{10} \left(\frac{\mathcal{L}_{\text{exp}}}{\ell_c(f)} \right) + 20 \log_{10} \left(\frac{\ell_c(f)}{\mathcal{L}_{\text{sim}}} \right) & , \text{ wenn } \mathcal{L}_{\text{sim}} < \ell_c(f) < \mathcal{L}_{\text{exp}} & (5.3b) \\ 20 \log_{10} \left(\frac{\mathcal{L}_{\text{exp}}}{\mathcal{L}_{\text{sim}}} \right) & , \text{ wenn } \mathcal{L}_{\text{exp}} \leq \ell_c(f) & (5.3c) \end{cases}$$

in Abhängigkeit der in Experiment und Simulation unterschiedlichen Spannweiten, \mathcal{L}_{exp} und \mathcal{L}_{sim} , sowie einer Kohärenzlänge in spannweitisger Richtung $\ell_c(f)$ zu bestimmen ist.

Die Kohärenzlänge $\ell_c(f)$ wird von Kato et al. [97] mit dem spannweitisgen Abstand δz gleichgesetzt, an dem die Kohärenzfunktion oberflächlicher Druckfluktuationen auf den Wert $\gamma^2(f; \delta z) = 0.5$ abgefallen ist. Betrachtet man den Verlauf entsprechender Isolinien in den Abbildungen 5-13 und 5-14 wird allerdings deutlich, dass dieser Abstand je nach Quellposition variieren kann. Eine eindeutige Definition der Kohärenzlänge ist hier demnach nicht möglich. Insbesondere ist deren Bestimmung im Bereich der Wirbelablösefrequenz auf Basis der Simulationsergebnisse ausgeschlossen. Nach der Kohärenzanalyse auf den Seiten 144–146 erscheint jedoch für den breitbandigen Teil des Spektrums eine Korrektur nach (5.3a) und für die Wirbelabwurfrequenz entweder eine Korrektur nach (5.3b) oder nach (5.3c) angemessen.

Da im Experiment sowohl in Fall 1 als auch in Fall 2 nahezu über die gesamte Spannweite stark kohärente Wirbelablösung von den Seitenflächen der Zylinder zu beobachten war [152], wurde im dominanten Frequenzbereich neben der inkohärenten Korrektur mit (5.3a) auch eine voll kohärente Korrektur nach (5.3c) zur Abschätzung der maximal möglichen Schallemission vollzogen. Ergebnisse dieser inkohärenten bzw. voll kohärenten Korrekturen werden in den Abbildungen 5-17 und 5-18 durch durchgezogene bzw. gestrichelte Linien (im Bereich der Wirbelabwurfrequenz) repräsentiert. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Oberflächenintegration auf die Hälfte des simulierten Gebietes eingeschränkt wurde, um den kohärenzsteigernden Einfluss periodischer Randbedingungen in der Simulation zu minimieren. Es gilt also $\mathcal{L}_{\text{sim}} = 1.5 D$ und für das Verhältnis $\mathcal{L}_{\text{exp}}/\mathcal{L}_{\text{sim}} = 8.5$, woraus sich

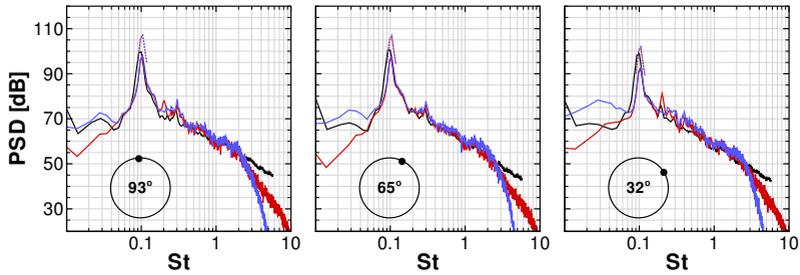


Abbildung 5-17: Leistungsdichtespektren akustischer Druckfluktuationen für drei Beobachterpositionen im geometrischen Fernfeld der „two struts“ Konfiguration ($r_B = 50 D$) im Fall 1. Auf Basis der FWH-Gleichung extrapolierte Simulationsergebnisse bei Integration fluktuierender Mantelflächendrücke (—) und bei Integration von Strömungsdaten auf der permeablen Kontrollfläche (—) im Vergleich zu Ergebnissen der Mikrofonmessung (—). Die gestrichelten Simulationsergebnisse im Bereich der dominanten Wirbelabwurf Frequenz wurden unter der Annahme spannungweitig perfekt kohärent abstrahlender Schallquellen korrigiert.

nach (5.3a) bzw. (5.3c) Korrekturen von $\Delta_{dB} \approx +9.3 \text{ dB}$ bzw. $\Delta_{dB} \approx +18.6 \text{ dB}$ ergeben. Der tatsächlich für ein Simulationsgebiet entsprechender Spannweite zu erwartende Pegel sollte sich je nach Kohärenzlänge(n) im Bereich der dominierenden Quellposition(en) innerhalb dieser Grenzen bewegen.

Abbildung 5-17 zeigt eine Gegenüberstellung von Leistungsdichtespektren akustischer Druckschwankungen im Fernfeld für den symmetrischen Fall 1. Ergebnisse aus Experiment und Simulation werden an drei verschiedenen Beobachterpositionen miteinander verglichen, wobei die Ergebnisse der DDES sowohl auf Basis fluktuierender Mantelflächendrücke als auch mit Hilfe permeabler FWH-Integrationen ins Fernfeld extrapoliert wurden. Im verlässlichen Frequenzbereich lässt sich unabhängig von der zur Fernfeldextrapolation eingesetzten Kontrollfläche an allen drei Beobachterpositionen eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten feststellen. Nahe der Wirbelablösefrequenz liegen die Messergebnisse erwartungsgemäß zwischen den inkohärent und den vollkohärent korrigierten Simulationsergebnissen, und im breitbandigen Teil des Spektrums sind die experimentellen und numerischen Ergebnisse über ca. eine Dekade von Frequenzen nahezu deckungsgleich.

Die Insensitivität der spektralen Leistungsdichte bezüglich der zur Fernfeldextrapolation eingesetzten FWH-Integrationsmethode ist mit der aeroakustischen Theorie für kleine Machzahlen im Einklang [32, 204]. Da Volumenquellen gegenüber den Oberflächenquellen hier vernachlässigbar klein erscheinen, lässt sich die gute Übereinstimmung der Ergebnisse im Fernfeld auf die bereits in der Quellsimulation zu beobachtende gute Übereinstimmung oberflächlicher Druckfluktuationen auf den Mantelflächen zurückführen. Darüber hinaus ist abgesehen vom Energieabfall bei Strouhalzahlen $St > 2$ kein Hinweis auf eine unzu-

reichende Auflösung akustischer Wellenausbreitung bis zum Erreichen der permeablen Integrationsfläche erkennbar. Auffallend sind dagegen die Differenzen zwischen druckbasierter und permeabler Fernfeldintegration im tieffrequenten Bereich. Obwohl in der DDES auf den Zylindermantelflächen im Vergleich zu den experimentellen Daten relativ starke Druckschwankungen unterhalb der Wirbelablösefrequenz zu beobachten waren (siehe Abbildung 5-10), fällt die von diesen Flächen ausgehende Schallabstrahlung ins Fernfeld vergleichsweise schwach aus. Die Ergebnisse der permeablen Integration stimmen dagegen trotz im Nahfeld bei tiefen Frequenzen zu beobachtender Differenzen meist besser und an der 93° Position sogar relativ gut mit dem Experiment überein. Wie bereits auf Seite 138 erwähnt, ist der Vergleich zwischen Experiment und Simulation für $St \lesssim 0.08$ jedoch nicht unbedingt verlässlich, weswegen eine Kompensation von Fehlern hier nicht ausgeschlossen werden sollte.

In Abbildung 5-18 finden sich entsprechende Gegenüberstellungen akustischer Leistungsdichtespektren für den asymmetrischen Fall 2. Erwartungsgemäß sind die Unterschiede zwischen experimentellen und numerischen Ergebnissen hier größer als im Fall 1. Wie in den Leistungsdichtespektren oberflächlicher Druckfluktuationen aus Abbildung 5-12 auf S. 143, sind auch im Fernfeld der angestellten „two struts“ Konfiguration zum Teil Abweichungen von mehr als 5 dB zu verzeichnen. An vier von sechs untersuchten Beobachterpositionen lassen sich im hochfrequenten Bereich ($St > 1.5$) zudem größere Unterschiede zwischen den zwei Extrapolationsvarianten auf Basis fester/permeabler Kontrollflächen ausmachen. Obwohl theoretisch eine Dämpfung hoher Frequenzen durch stärkere numerische Dissipation bei kleinen Wellenlängen zu erwarten wäre, liegen die Ergebnisse der permeablen Integration an der 65° Position sogar um bis zu 10 dB über dem Niveau der druckbasiert extrapolierten Fernfelddaten. Ein so starker Beitrag physikalischer Quadrupolquellen erscheint aber aufgrund der kleinen Machzahl des Testfalls wenig wahrscheinlich.

Vermutlich sind die Unterschiede eher auf Resonanzen durch die Verwendung periodischer Randbedingungen und/oder auf numerische Approximationsfehler zurückzuführen. Da in einer kompressiblen Simulation beim konvektiven Transport von Wirbeln durch ein gröber werdendes Gitter prinzipiell auch unphysikalische Schallemission ausgelöst werden kann [104], ist es denkbar, dass zum Beispiel an im Nachlauf der angestellten Konfiguration vorhandenen Blockgrenzen mit hängenden Knoten [120] „künstliche“ Volumenquellen entstehen, deren primäre Schallabstrahlung nur bei Verwendung einer die Quellregion umgebenden, permeablen Kontrollfläche erfasst wird [109]. Womöglich ist es aber auch kein Zufall, dass der Energieüberschuss der permeablen Integration gerade im Bereich der durch Schallgeschwindigkeit und spannweitige Ausdehnung des Rechengebietes gegebenen Resonanzfrequenz $St_{z,res} = \frac{c_\infty}{\mathcal{L}_{sim}} \frac{D}{u_\infty} \approx 1.6$ beginnt. Dafür spricht, dass in aeroakustischen Simulationen einer ähnlichen, aus zwei runden Zylindern bestehenden Tandem-Konfiguration bei identischer spannweitiger Ausdehnung $\mathcal{L}_{sim}/D = 3$, Verwendung periodischer Randbedingungen und einer Machzahl von $u_\infty/c_\infty = 0.1285$ etwa gleich

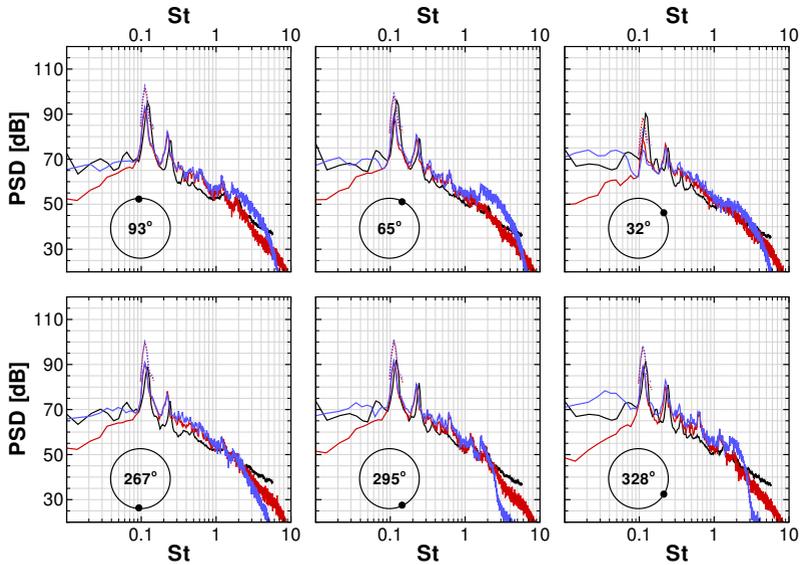


Abbildung 5-18: Leistungsdichtespektren akustischer Druckfluktuationen für sechs Beobachterpositionen im geometrischen Fernfeld der „two struts“ Konfiguration ($r_B = 50 D$) im Fall 2. Auf Basis der FWH-Gleichung extrapolierte Simulationsergebnisse bei Integration fluktuierender Mantelflächendrücke (—) und bei Integration von Strömungsdaten auf der permeablen Kontrollfläche (—) im Vergleich zu Ergebnissen der Mikrofonmessung (—). Die gestrichelten Simulationsergebnisse im Bereich der dominanten Wirbelabwurfrequenz wurden unter der Annahme spannungsteilig perfekt kohärent abstrahlender Schallquellen korrigiert.

große Differenzen im Bereich $St_{z,res} \approx 2.6$ zwischen fester/permeabler FWH-Integration auftreten [76], während in Simulationen einer generischen 3D-Fahrwerkskonfiguration ohne Periodizität (bei kleiner Machzahl) kein vergleichbarer Energieüberschuss im Ergebnis der Auswertung offener permeabler Kontrollflächen zu beobachten war [222]. Ergänzend sei angemerkt, dass auch für die aeroakustischen Simulationen der zwei runden Zylinder [76] und des Fahrwerks [222] das im Rahmen der vorliegenden Arbeit weiterentwickelte numerische Verfahren auf Basis der RCM Impulsinterpolation eingesetzt wurde. Eine Maskierung „künstlicher“ Volumenquellen durch ein insgesamt höheres Schallpegelniveau wäre allerdings ebenso vorstellbar.

Folgt man dieser Interpretation der Differenzen im hochfrequenten Bereich, erscheint die Verwendung impermeabler Kontrollflächen im vorgesehenen Einsatzbereich des Verfahrens vorteilhaft, da sich nicht nur die zu speichernde Datenmenge erheblich reduziert, sondern die Ergebnisse auch weniger sensitiv auf oben genannte Fehlerquellen reagieren. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass neben Volumenquellen auch der Einfluss einer inhomogenen

Grundströmung auf die Wellenausbreitung verloren geht, welcher trotz kleiner Machzahl nicht unbedingt vernachlässigbar sein muss.

Abgesehen von den etwa ab $St = 1.5$ auftretenden Differenzen im hochfrequenten Bereich, deren Beitrag zum Gesamtschalldruckpegel im Übrigen sehr gering ausfällt, beschränken sich nennenswerte Unterschiede zwischen den Fernfeldextrapolationsvarianten auch im Fall 2 auf tiefe Frequenzen unterhalb der dominanten Wirbelablösefrequenz, wobei die dort zu beobachtenden Abweichungen zwischen druckbasierter Extrapolation und experimentellen Daten prinzipiell mit denen im symmetrischen Fall vergleichbar sind. Signifikante Änderungen gegenüber den Spektren im Fall 1, wie z. B. die etwa zehnpromtente Steigerung der dominanten Wirbelablösefrequenz, das vermehrte Auftreten höherharmonischer Spitzen und der insgesamt niedrigere Geräuschpegel, treten dagegen unabhängig von der Fernfeldintegrationsvariante in der Simulation ähnlich wie im Experiment hervor.

Fazit

In den Simulationen der *Valiant* „two struts“ Konfiguration hat sich gezeigt, dass das weiterentwickelte Hybridverfahren sehr gut dazu geeignet ist, das Geräusch massiv abgelöster Strömung um stumpfe Körper (bei großer Reynoldszahl und kleiner Machzahl) vorherzusagen. Die im symmetrischen Fall erzielte Übereinstimmung mit experimentellen Vergleichsdaten in Nah- und Fernfeld lässt darauf schließen, dass die wesentlichen Geräuschenstehungs- und -ausbreitungsmechanismen mit hinreichender Genauigkeit erfasst werden. Weder innerhalb der hochgradig turbulenten Strömung, noch im Bereich akustischer Wellenausbreitung gab es während den kompressiblen DDESen Hinweise auf das bisher in instationären Simulationen aufgetretene Problem einer gestörten Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern. Oszillierende Isolinien im Druckfeld wie in Abbildung 3-4 auf Seite 84 waren trotz im Außenbereich des Gitters sehr kleiner Courant Zahlen zu keinem Zeitpunkt zu beobachten und die Simulationen verliefen stabil.

Durch die solide Übereinstimmung der numerischen und experimentellen Ergebnisse im Fall 1 erfährt nicht nur der gewählte Simulationsansatz, sondern auch die auf Basis theoretischer Überlegungen und der Kalibration am ZiT getroffene Auswahl der Modellkonstanten $C_{DES} = 0.5$ eine gewisse Bestätigung, wobei anzumerken ist, dass die Sensitivität einer Strömung mit ausgeprägt quasi periodischem Wirbelabwurf in Bezug auf diesen Modellparameter nicht zwangsläufig so groß wie beim ZiT ausfallen muss. Die im Fall 2 aufgetretenen Abweichungen zum Experiment erscheinen insgesamt plausibel, wenn man die Unterschiede zwischen numerischem und experimentellem Setup sowie den Auftrieb der asymmetrischen Konfiguration in die Betrachtungen mit einbezieht. Grundsätzliche Veränderungen gegenüber dem nichtangestellten, symmetrischen Fall 1 traten übereinstimmend in Simulation und Experiment hervor.

Im Vergleich der auf Basis fester und permeabler Kontrollflächen durchgeführten akustischen Fernfeldextrapolationen ließen sich, wenn man von den vermutlich numerisch induzierten Differenzen im energetisch schwachen, hochfrequenten Bereich absieht, lediglich Unterschiede bei sehr tiefen Frequenzen unterhalb der Wirbelabwurf Frequenz feststellen. Eine Bewertung der Simulationsergebnisse in diesem Frequenzbereich, welcher ebenfalls nur unwesentlich zur abgestrahlten Schallenergie beiträgt, ist jedoch wegen der Unterschiede zwischen experimentellem und numerischem Setup nicht möglich. Dies trifft auf beide simulierten Fälle zu. Die im energetischen Bereich der Frequenzspektren weitgehend übereinstimmenden Fernfeldextrapolationsergebnisse bestätigen jedoch die Annahme, dass die Schallemission turbulenter Quadrupolquellen bei kleinen Machzahlen gegenüber der von oberflächlichen Dipolen zu vernachlässigen ist. Die Verwendung impermeabler Kontrollflächen erscheint somit numerisch robuster, effizienter und insgesamt vorteilhaft.

5.2 Hochauftriebskonfiguration „30P30N“

Die Tragflächen von Verkehrsflugzeugen verfügen gegenwärtig meist über mehrere variable Auftriebshilfen, durch deren Ausfahren die temporäre Anpassung einer für den Reiseflug optimierten Basisgeometrie an langsamere Fluggeschwindigkeiten erfolgen kann. Um im Landeanflug genügend Auftriebskraft zu erzeugen, werden in der Regel Vorflügel und Hinterkantenklappen in einer sogenannten Hochauftriebskonfiguration eingesetzt, deren auftriebssteigernde Wirkung nicht nur in einer insgesamt vergrößerten Flügelfläche und Wölbung, sondern auch in einer aerodynamisch günstigen gegenseitigen Beeinflussung der Einzelkomponenten begründet ist [85, 200]. Da neben strömungsmechanischer Effizienz allerdings auch eine gute Integration der Auftriebshilfen in das Gesamtkonzept des Flügels erforderlich ist, kann der Entwurf dieser beweglichen Klappensysteme nicht allein unter aerodynamischen Gesichtspunkten erfolgen, was häufig zur Folge hat, dass auch an Hochauftriebskonfigurationen Bereiche abgelöster Strömung anzutreffen und eine Vielzahl potentieller Schallquellmechanismen zu beobachten sind [29]. Abbildung 5-21 vermittelt einen Eindruck von möglichen Geräuschquellen am Vorflügel, welcher heutzutage neben dem Fahrwerk als eine weitere wesentliche Ursache für die weiträumige Lärmbelastung der Bevölkerung in der Umgebung von Flughäfen anzusehen ist [39, 40, 137].

Ziel der nachfolgend beschriebenen Simulation einer generischen, aus Vorflügel, Hauptelement und Hinterkantenklappe bestehenden Hochauftriebskonfiguration war es, einen Beitrag zum Verständnis der geräuschintensivsten Strömungsvorgänge an Vorflügeln unter für den Landeanflug typischen Bedingungen zu liefern, in der Hoffnung, dass dies hilfreich für die Entwicklung wirksamer Lärminderungskonzepte ist [108]. Die Vorstellung der wesentlichen Simulationsergebnisse dient hier aber auch dem Zweck, den Nutzen des weiterentwickelten CFD-Verfahrens in der Anwendung auf komplexe, technisch relevante

Fragestellungen zu demonstrieren. Diesbezüglich ist anzumerken, dass die Entwicklung der RCM Variante der Impulsinterpolation zu Beginn der Untersuchungen an der Hochauftriebskonfiguration noch nicht abgeschlossen war, weswegen die hier zur Simulation eingesetzte Implementierung im Detail etwas von der finalen Form aus Kapitel 3.2 abweicht.

Die hier verwendete Impulsinterpolation kombiniert die unterschiedlichen Formulierungen von Xue (RCX) [227] und Choi [26] und erweitert letztere auf eine Zeitintegration von 2. Ordnung. Sie unterscheidet sich von der RCM Definition gemäß Tabelle 3-2 auf Seite 81 durch $\psi = a_p$ anstelle von $\psi = 1$ und ist somit noch schwach von der Zeitschrittweite abhängig (vgl. Tabelle 3-1) und dadurch, dass die Approximationen (3.53) und (3.54) fehlen, so dass die Berücksichtigung zurückliegender Zeitstufen noch mit der Form aus Gleichung (3.50) übereinstimmt. Diese Variante der Impulsinterpolation hat den Nachteil, dass bei Konvektion schlecht aufgelöster Wirbel über gestreckte Gitter mit vermehrter Pseudo-Schallentstehung im hochfrequenten Bereich zu rechnen ist [104]. Das Hauptproblem der Entkopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern bei kleinen Courant-Zahlen war jedoch bereits behoben und die aeroakustische Simulation verlief entsprechend stabil. Erfolgreiche Tests dieser Variante am Taylor-Green Wirbel und im ZiT sind im *Valiant* Zwischenbericht D21 dokumentiert [198]. Der untersuchte Testfall und das numerische Setup werden nachfolgend beschrieben.

5.2.1 Testfall und Setup

Die Hochauftriebskonfiguration „30P30N“ war bereits mehrfach Gegenstand experimenteller und numerischer Untersuchungen [28, 29, 91, 99, 103, 105, 106, 118, 124, 146, 171, 172, 180], weswegen an dieser Stelle auf eine detaillierte Beschreibung der Geometrie verzichtet werden kann. Es sei jedoch erwähnt, dass die Ziffern in der Modellbezeichnung für die Ausschlagswinkel von Vorflügel und Hinterkantenklappe stehen. Umfassende Informationen zur Konfiguration finden sich beispielsweise bei Klausmeyer et al. [103]. Abweichend von der dort beschriebenen Anordnung sind die Hinterkanten von Hauptelement und Hinterkantenklappe hier allerdings spitz ausgeführt, lediglich die obere Vorflügel-Hinterkante weist noch eine endliche Dicke von $\ell_{HK} \approx 6.1 \times 10^{-3} c_s$ auf. Mit $c_s = 0.15 c_{ref}$ wird hier und im Weiteren die Profiltiefe des Vorflügels bezeichnet, $c_{ref} = 0.457$ m entspricht der Profiltiefe des Referenzflügels in Reiseflugkonfiguration. Dass die generische 3-Komponenten-Konfiguration weder Verwindung noch Zuspitzung entlang der spannweiten Richtung aufweist, ermöglicht die Realisierung eines idealisierten Flügels unendlicher Spannweite und damit Rechenzeiteinsparungen durch Verwendung periodischer Randbedingungen in der Simulation.

Die Anströmung der Hochauftriebskonfiguration erfolgt normal zur Flügelvorderkante, so dass die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der homogenen (spannweiten) Richtung

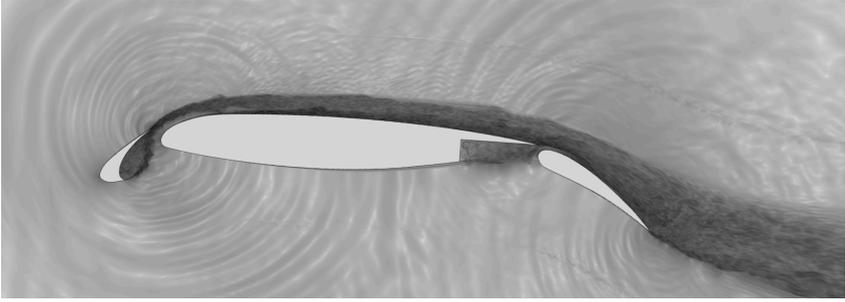


Abbildung 5-19: Momentanbild aus der kompressiblen Simulation mit schlierenartiger Darstellung im Nahfeld der Gesamtkonfiguration aufgelöster Wirbelstrukturen und Schallwellen.

verschwindet, mit einer im Fernfeld konstanten Geschwindigkeit von $u_\infty = 56$ m/s und unter einem Anstellwinkel von $\alpha = 4^\circ$. Die Machzahl der Anströmung beträgt $Ma = 0.17$, die Reynoldszahl liegt, mit der Profiltiefe des Referenzflügels c_{ref} gebildet, bei $Re = 1.7 \times 10^6$. Um die effektive Reynoldszahl nicht wesentlich zu verändern, wird das für die Simulation mit dem SALS-Modell benötigte Verhältnis von Wirbelviskosität zu kinematischer Zähigkeit in der Anströmung mit $\check{\nu}_t/\nu = 0.1$ festgelegt. Durch die in den Abbildungen 5-19 und 5-20 gezeigten Seitenansichten bekommt man einen Eindruck von der Konfiguration, den in der Simulation erfassten physikalischen Effekten sowie von dem für deren diskrete Darstellung verwendeten block-strukturierten Rechennetz. Die äußeren physikalischen Ränder des Rechengebietes befinden sich in einem Abstand von etwa $10 c_{\text{ref}}$ von der oberen Hinterkante des Vorflügels entfernt. Nach Berechnung einer stationären Startlösung mit Vorgabe von Totaldruck- und Totaltemperatur am Einströmrand sowie fixiertem mittleren Druck am Ausströmrand wurden dort die nichtreflektierenden Ein- und Ausströmrandbedingungen aus Kapitel 3.3 eingesetzt.

In der Simulation wird nur ein schmales Segment des in spannweitischer Richtung unendlich ausgedehnten Flügels betrachtet. Die Breite des simulierten Flügelsegments beträgt $\mathcal{L}_z = 0.22 c_s$ und ist mit maximal 40 Gitterpunkten in der homogenen Richtung aufgelöst. Zur Generierung des block-strukturierten Rechengitters wurde zunächst ein zweidimensionaler Schnitt durch die Konfiguration vernetzt und das Gitter anschließend entlang der Spannweite extrudiert. Das extrudierte Gitter besteht aus ca. 25×10^6 FV, wobei mehr als 35% der Zellen innerhalb der Fokusregion auf der Vorflügeldruckseite konzentriert sind (siehe Abbildung 5-20, links). Dort wird mit annähernd würfelförmigen Zellen im Bereich der Ablöseblase eine möglichst genaue Wiedergabe der abgelösten Strömung angestrebt, damit die wesentlichen Geräuschquellen auf der Basis hybrider Turbulenzbehandlung erfasst und die während der DDES gewonnenen Daten für eine aeroakustische Analyse zur Identifikation des dominierenden Schallquellmechanismus herangezogen werden können.

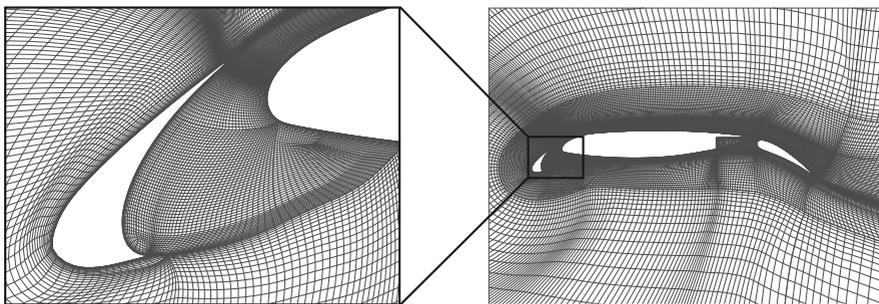


Abbildung 5-20: 2D-Schnitt durch das für die DDES verwendete block-strukturierte Gitter mit Ausschnittsvergrößerung des Fokusbereichs. Dargestellt ist lediglich jede 4. Gitterlinie.

Die Ausschnittsvergrößerung in Abbildung 5-20 und das rechte Bild in Abbildung 5-21 vermitteln einen Eindruck vom Auflösungsvermögen des Gitters in der Fokusregion. Die effektive Filterwirkung des hybriden SALSA-Modells wird hier maßgeblich durch das Feinstruktur-Längenmaß $\ell_{\text{LES}} = \psi C_{\text{DES}} \Delta$ (2.99) und damit durch die Maschenweite der Zellen in spannwitiger Richtung, $\delta z = \mathcal{L}_z/40 \approx c_s/182$, festgelegt. Das Längenmaß Δ (2.98) stimmt mit δz nämlich nicht nur im Bereich würfelförmiger Vernetzung, sondern auch noch in unmittelbarer Umgebung der Vorflügelhinterkante überein (siehe S. 53, ff.). Zwar ist das Gitter dort zwecks Erfassung von Kante und Wirbelstraße im Nachlauf deutlich verfeinert, dies betrifft jedoch nur die Auflösung in der x - y -Ebene, wovon die effektive Filterbreite praktisch unbeeinflusst bleibt. Lokal liegt lediglich eine zweidimensional erhöhte Auflösung im Bereich der Feinstruktur vor. Sieht man von der beim SALSA Hybridmodell zur Kompensation von Wanddämpfungstermen benötigten Ψ -Funktion (2.101) ab, wird ℓ_{LES} bei konstantem $\Delta = \delta z$ also nur noch von dem Modellparameter C_{DES} beeinflusst. Da die Größenordnung energetischer Wirbel in der freien Scherschicht vermutlich nicht mit der Vorflügelsehnenlänge c_s , sondern eher mit der lokalen Scherschichtdicke skaliert, muss davon ausgegangen werden, dass die räumliche Auflösung stromab der unteren Vorflügelkante zumindest in der ersten Hälfte der freien Scherschicht noch nicht den typischen LES Anforderungen entspricht (vgl. Tabelle 2-1, S. 30). Gemäß den Empfehlungen für praxisrelevante Konfigurationen [22, 141] wurde daher ein Wert von $C_{\text{DES}} = 0.6$ gewählt.

Anliegende turbulente Grenzschichten werden per Definition der DDES theoretisch im RANS-Modus behandelt. Deren Eigengeräusch sollte in Anwesenheit deutlich größerer energietragender Wirbel vernachlässigbar sein [39, 195]. In Abbildung 5-19 sind allerdings kurz nach dem Zusammenfließen von Vorflügel-Nachlauf und saugseitiger Grenzschicht des Hauptelements viele sehr kurze Schallwellen zu beobachten, die vermutlich durch Interaktion von freien Wirbeln mit der sich entwickelnden Grenzschicht und den Wänden entstanden

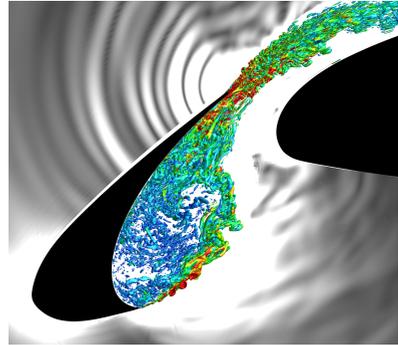
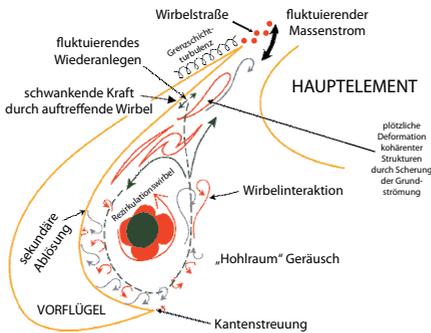


Abbildung 5-21: Schematische Darstellung potentieller Schallquellen in der Umströmung eines Vorfügels nach Choudhari und Khorrani (links) [28]. Momentaufnahme von in der Fokusregion der DDES erfassten Wirbelstrukturen und hochfrequenten Schallwellen (rechts).

sind. Die Erfassung dieser hochfrequenten Geräuschquellen war jedoch nicht beabsichtigt. Die räumliche Auflösung der Simulation ist auch nicht darauf ausgelegt. Durch die im entfernten Nachlauf des Vorfügels immer noch verhältnismäßig feine Diskretisierung sollte primär eine zu plötzliche Filterung und Deformation aus dem Spalt austretender, hochenergetischer Wirbelstrukturen vermieden werden, da dies im Zusammenhang mit instationären Approximationsfehlern in den kompressiblen Bilanzgleichungen unphysikalische Schallemission zur Folge haben kann [36, 104]. Eine adäquate LES Auflösung der über dem Hauptelement zusammenfließenden Grenzschichten ist mit dem verwendeten Rechenetz zwar nicht gegeben, in wandnormaler Richtung werden turbulente Grenzschichten aber mit zumindest 25 Punkten bis in die zähe Unterschicht hinein aufgelöst, so dass theoretisch auf den Einsatz von Wandfunktionen verzichtet werden kann.

Alle Wände der Hochauftriebskonfiguration werden als adiabat, starr und hydraulisch glatt betrachtet. Auch hier kommt wieder die in Abschnitt 3.3.3 beschriebene hybride Wandrandbedingung zum Einsatz. Im Gegensatz zur Verwendung beim „two-struts“ Testfall arbeitet diese jedoch nun mit $y^+ < 1$ ausschließlich im „low- Re “ Modus, so dass im Prinzip kein Unterschied zu einer herkömmlichen Wandbehandlung besteht. Die Grenzschichtentwicklung wird dabei dem statistischen Turbulenzmodell überlassen, es findet keine besondere Transitionsbehandlung statt. Stromauf der Strömungablösung an der unteren Vorfügelkante ist die Grenzschicht aufgrund lokal sehr geringer Viskositätsverhältnisse (siehe S. 174, Abbildung 5-29, links) als laminar anzusehen, was aufgrund der kurzen Lauflänge von der Staulinie zur Kante auch der Situation am realen Flügel entspricht.

Die zur Simulation der „30P30N“ Konfiguration eingesetzten numerischen Approximationen stimmen im Wesentlichen mit denen des „two-struts“ Testfalls aus dem letzten Abschnitt überein. Wie zuvor werden sowohl die Druckkräfte als auch die diffusiven Flüsse auf

FV-Flächen im ganzen Feld zentral mit einer Genauigkeit von 2. Ordnung bestimmt, während für die konvektiven Flüsse eine lokale Unterscheidung zwischen RANS und LES Regionen getroffen und das CDS Schema (A.21) nur für LES Regionen verwendet wird. In RANS Regionen wird zur Stabilisierung der Lösung das TVD Schema (A.22) auf CUI Basis aktiviert, wobei durch die hybride Konvektionsbehandlung mit (3.13) und (2.107) ein glatter Übergang sowie eine automatische Erkennung der unterschiedlich zu behandelnden Zonen gewährleistet ist [216]. Nur der konvektive Term der Druckkorrekturgleichung wird überall mit dem impliziten CDS Schema approximiert.

In der DDES kommt erneut die voll-implizite Zeitintegration von 2. Ordnung nach (3.7) zur Anwendung. Um die Wirbelstraße im Nachlauf der stumpfen Vorflügelhinterkante abbilden zu können, ist eine verhältnismäßig feine zeitliche Diskretisierung erforderlich. In zweidimensionalen Simulationen hat sich zu deren Auflösung eine globale Zeitschrittweite von $\delta t = 10^{-6} \text{ s} \approx 0.82 \times 10^{-3} c_s / u_\infty$ als hinreichend erwiesen [105]. Mit diesem auch hier eingestellten Wert ist theoretisch eine vernünftige Darstellung von Frequenzen bis hin zu $St_{\max} = f_{\max} c_s / u_\infty \approx 60$ möglich, allerdings ist die räumliche Auflösung so hochfrequenter Schallwellen in der Simulation nur in unmittelbarer Umgebung der Vorflügelhinterkante sichergestellt. Dies erscheint zwar zunächst als unproblematisch, da der Maximalpegel des Vorflügellärms eher um $St_p \approx 2$ zu erwarten [35, 40] und eine Erfassung akustischer Wellenlängen der Größenordnung $\lambda_a / c_s \sim St_p^{-1} Ma^{-1} \approx 2.9$ mit der verwendeten Auflösung garantiert ist. Voraussetzung für die Simulation eines solchen Mehrskalens-Problems war jedoch die in Kapitel 3.2 beschriebene Weiterentwicklung des numerischen Verfahrens.

Im Fokusbereich der DDES ist $u_\infty \delta t / \Delta \approx 0.15$ und eine vorwiegend zeitliche Filterung kleiner turbulenter Strukturen mit Sicherheit auszuschließen. Bedingt durch die Vergrößerung des Rechnetzes nach außen, wird die lokale Courant-Zahl außerhalb der Fokusregion aber noch sehr viel kleiner. Unter Berücksichtigung des in Kapitel 3.2.4 abgeleiteten Zusammenhangs (3.78) ist daher anzunehmen, dass eine enge Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeld mit der an die winzigen Hinterkantenwirbel angepassten Zeitschrittweite δt bei Verwendung der RCX Impulsinterpolation nicht überall gewährleistet sein kann. Abbildung 5-22 veranschaulicht dies anhand zweier Momentaufnahmen des Druckfeldes p' aus einer auf dieser Basis mit einer früheren ELAN Variante durchgeführten 2D-Simulation. Es ist deutlich zu sehen, dass in der zeitgenauen kompressiblen Rechnung mit der RCX Variante gravierende unphysikalische „Zick-Zack“ Oszillationen auftreten, in deren Folge auch unphysikalische Schallemission entsteht. Durch die Weiterentwicklung von Impulsinterpolation und Druckkorrekturverfahren im Rahmen der vorliegenden Arbeit konnten diese Probleme behoben und eine Entkopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern unabhängig von der verwendeten Zeitschrittweite global vermieden werden.

In der zeitgenauen 3D-Simulation der „30P30N“ Hochauftriebskonfiguration wurde mit den Relaxationsfaktoren $\alpha_u = 0.8$, $\alpha_p = 0.3$, $\alpha_T = 0.8$ und $\alpha_{\tilde{v}_t} = 0.6$ auf jedem simu-

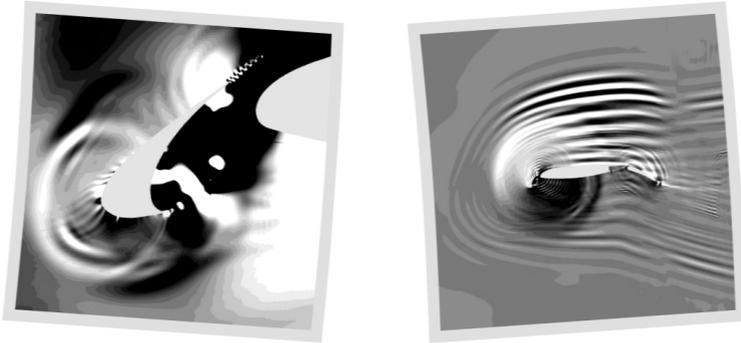


Abbildung 5-22: Zwei Momentaufnahmen des Schwankungsdruckfeldes aus einer fehlgeschlagenen, zeitgenauen 2D-Simulation der „30P30N“ Konfiguration auf der Basis einer früheren ELAN Variante mit RCX Impulsinterpolation.

lierten Zeitschritt in 9 bis 10 äußeren Iterationen eine relative Konvergenz von nahezu 3 Größenordnungen erzielt. Während der Berechnung, die parallel mit einer ausgeglichenen Lastverteilung auf 240 CPUs des HLRB-II durchgeführt werden konnte [107], ist auf jedem vierten Zeitschritt die statische Wanddruckverteilung und auf jedem zehnten Zeitschritt das instationäre Strömungsfeld in der Umgebung des Vorflügels gespeichert worden, um im Anschluss Vorhersagen über den ins Fernfeld abgestrahlten Lärm auf Basis der FWH-Gleichung sowie eine aeroakustische Analyse des dominierenden Schallquellmechanismus zu ermöglichen. Von einer stationären RANS-Lösung ausgehend, wurden insgesamt 100 000 Zeitschritte im DDES-Modus des SALSA-Hybridmodells simuliert, was etwa der Dauer von 8.5 Überströmungen des Referenzflügels (in Reiseflugkonfiguration) mit der Anströmgeschwindigkeit entspricht. Trotz einer gut auskonvergierten Startlösung stellte sich erst nach ca. 2.5 simulierten Überströmungen ein annähernd statistisch stationärer Zustand ein, weswegen die ersten 30 000 Zeitschritte nicht für die Auswertung herangezogen werden konnten. Nachfolgend präsentierte Statistiken und die daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen stützen sich also, sofern nicht anders angegeben, auf eine simulierte Zeitspanne von $T = 0.07 \text{ s} \approx 57 c_s / u_\infty$. Sowohl Aufbereitung als auch Diskussion der Simulationsergebnisse basieren auf der Darstellung in [108].

5.2.2 Aerodynamik der Gesamtkonfiguration

Im nächsten Abschnitt werden die Simulationsergebnisse vor allem im Hinblick auf die Wiedergabe der turbulenten Strömung in der Vorflügelregion diskutiert. Bevor jedoch der Blickwinkel auf diese strömungsakustisch besonders interessante Region eingeschränkt wird, soll die Gesamtsituation am simulierten Flügelsegment kurz dargestellt werden.

Tabelle 5-2: Statistiken der integralen aerodynamischen Beiwerte $c_A = F_A/(q_\infty A_{\text{ref}})$ und $c_W = F_W/(q_\infty A_{\text{ref}})$ für die drei Einzelkomponenten sowie für die Gesamtkonfiguration. Als Referenzfläche dient das Produkt aus Profiltiefe des Referenzflügels (in Reiseflugkonfiguration) und Ausdehnung des Rechengebietes in spannweitere Richtung, d. h. $A_{\text{ref}} = 0.033 c_{\text{ref}}^2$.

	Vorflügel	Hauptelement	Klappe	Gesamt
\bar{c}_A	0.094	2.105	0.482	2.681
\bar{c}_W	-0.018	-0.186	0.251	0.046
$100 \times \text{rms}(c'_A)$	0.402	1.247	0.520	1.910
$100 \times \text{rms}(c'_W)$	0.379	0.216	0.351	0.423
$\text{rms}(dc_A/d\tau)$	19.331	14.020	8.582	23.118
$\text{rms}(dc_W/d\tau)$	18.516	12.434	8.247	15.636

Tabelle 5-2 enthält hierzu eine Übersicht über die während der Simulation ermittelten integralen aerodynamischen Beiwerte, und in Abbildung 5-23 sind Stromlinien im Nahfeld der Konfiguration sowie statische Druckverteilungen für alle drei Elemente dargestellt. Wie beim „two-struts“ Testfall wurden die Ergebnisse zur Minimierung statistischer Zufallsfehler [12] nach Möglichkeit nicht nur über die Zeit, sondern auch über die homogene Richtung gemittelt. Aus obiger Tabelle geht hervor, wie die einzelnen Elemente zum Mittelwert und zur Standardabweichung von Auftrieb und Widerstand der Gesamtkonfiguration beitragen. Neben den Statistiken aerodynamischer Beiwerte wurden auch die Effektivwerte von $dc_A/d\tau$ und $dc_W/d\tau$ analysiert. Die Fluktuation dieser zwei abgeleiteten Größen lässt in Verbindung mit (3.136) bereits auf die von dem jeweiligen Element ausgehende Schallemission schließen. Bemerkenswert ist, dass der Vorflügel mit Abstand das lauteste Element zu sein scheint, obwohl er mit ca. 3.5% nur relativ wenig zum Gesamtauftrieb beiträgt. Beides ist typisch für Vorderkanten-Auftriebshilfen bei kleinen Anstellwinkeln, welche in erster Linie benötigt werden, um bei großen Anstellwinkeln einer saugseitigen Strömungsablösung auf aerodynamisch stark belasteten, stromab befindlichen Elementen entgegenzuwirken [137, 150]. Wie man gut in dem simulierten Stromlinienbild aus Abbildung 5-23 erkennen kann, liegt die mittlere Strömung bei $\alpha = 4^\circ$ auf den Saugseiten aller drei Elemente an. Die Umströmung des Vorflügels wird aber druckseitig von einer verhältnismäßig großen Ablöseblase geprägt.

Unter dem Stromlinienbild in Abbildung 5-23 können zeitgemittelte Druckverteilungen aus der DDES mit experimentellen Daten verglichen werden, wobei die Abszissenachse in den Plots jeweils zur Sehne des betrachteten Elements parallel verläuft und die Skalierung der Ordinatenachse an die drei verschiedenen c_p -Spannweiten angepasst wurde. Die experimentellen Daten entstammen einer Messkampagne des NASA LaRC, die in einem relativ kleinen Windkanal (BART) mit geschlossener Messstrecke durchgeführt worden ist [91]. Die Abkürzung BART steht für Basic Aerodynamic Research Tunnel. Die Messstrecke dieses Windkanals besitzt eine Querschnittsfläche von $1.56 c_{\text{ref}} \times 2.22 c_{\text{ref}}$

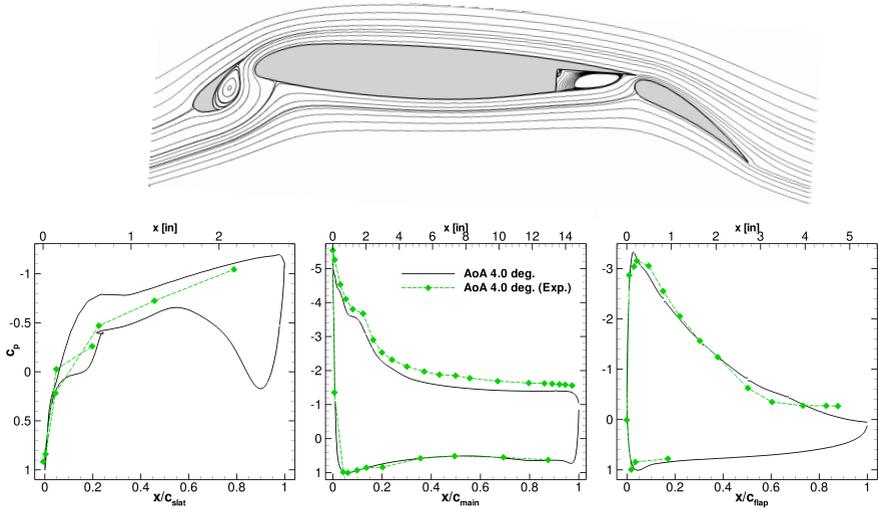


Abbildung 5-23: Simulierte Stromlinien (oben) und gemittelte statische Druckverteilung $c_p = (\bar{p} - p_\infty) / q_\infty$ auf Vorflügel, Hauptelement und Hinterkantenklappe aus Simulation und Experiment [91] (unten).

[91]. Da weder eine Adaption der Windkanalwände noch eine nachträgliche Korrektur der gemessenen Werte vorgenommen wurde, ist eine perfekte Übereinstimmung mit der simulierten Freiflugsituation nicht zu erwarten. Die Gegenüberstellung ermöglicht dennoch eine qualitative Einschätzung der Simulationsergebnisse, wenn man die unterschiedlichen Randbedingungen in die Betrachtung einbezieht. Da der Profiltropfen des Hauptelements die stärkste Dicke unter den drei Komponenten aufweist, ist die Versperrung des Kanals und damit die Abweichung gegenüber der Simulation bei diesem Element am größten. Auf dessen Saugseite wird die Strömung im Experiment etwas stärker als in der Simulation beschleunigt, wobei der Druckverlauf im Wesentlichen vertikal verschoben erscheint. Die langsamere Saugseitenströmung in der Simulation muss entsprechend beim Abströmen weniger stark verzögert werden, womit sich der bessere Druckrückgewinn auf der Hinterkantenklappe erklären lässt. Am Vorflügel liegt vermutlich eine leichte Änderung des effektiven Anstellwinkels durch Wandinflüsse vor, da die Saugseite trotz der Verblockung im Experiment etwas langsamer als in der Simulation überströmt wird. Diese Interpretation der Differenzen wird dadurch gestützt, dass von Choudhari und Khorrami mit einem dichtebasierten numerischen Verfahren, einem anderen Rechenetz und einem Anstellwinkel von $\alpha = 5.5^\circ$ vergleichbare Abweichungen zwischen Windkanal- und Freiflugsituation beobachtet worden sind [29]. Eine Gegenüberstellung statischer Druckverteilungen aus der DDES mit diesen Simulationsergebnissen findet sich in [106].

Den zeitgemittelten Ergebnissen aus Abbildung 5-23 ist zu entnehmen, dass die mit Abstand schnellsten Strömungsgeschwindigkeiten in dem Spalt zwischen Vorflügel und Hauptelement erreicht werden. Die Stromlinien weisen dort die stärkste Kontraktion und die Saugspitze des Hauptelements einen maximalen Druckabfall von ca. $5.2 q_\infty$ gegenüber dem Umgebungsdruck p_∞ auf. In dieser Unterdruckregion werden im zeitlichen Mittel Machzahlen von bis zu $Ma \approx 0.43$ erreicht. Die Durchführung einer kompressiblen Simulation erscheint daher bereits unabhängig von aeroakustischen Anforderungen angebracht. Zwar wird die Geschwindigkeit im Spalt mit zunehmender Entfernung vom Hauptelement wieder kleiner, aber auch bei Annäherung an die stumpfe Vorflügelhinterkante liegen die lokalen Geschwindigkeiten auf dessen Druckseite mit $c_p \approx -1.1$ noch deutlich oberhalb von u_∞ (bevor in Wandnähe die Wirkung viskoser Kräfte einsetzt). Ausgehend vom Wiederaufbaupunkt der druckseitig abgelösten Strömung bei $x/c_{\text{slat}} \approx 0.9$ ist in der c_p -Verteilung eine kontinuierliche Beschleunigung der Strömung bis zum Erreichen der Hinterkante bei $x/c_{\text{slat}} = 1$ zu beobachten. Da die abgestrahlte Schalleistung bei kleiner Machzahl und großer Reynoldszahl gemäß (2.32) direkt mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit im Zusammenhang steht, sind die wesentlichen Geräuschquellen meist in der Region mit der höchsten Strömungsgeschwindigkeit zu suchen [210]. Neben den fluktuierenden aerodynamischen Kräften deuten also auch die hohen Spaltgeschwindigkeiten auf besonders starke Schallquellen in der Umgebung des Vorflügels hin. Dessen turbulente Umströmung und Schallabstrahlung steht im Fokus der weiteren Untersuchungen.

5.2.3 Strömungsverhältnisse in der Vorflügelregion

Die Analyse der turbulenten Vorflügelumströmung beginnt mit einer Gegenüberstellung von Ergebnissen aus der DDES mit experimentellen Daten. Letztere entstammen PIV-Messungen des NASA LaRC und dem gleichen experimentellen Aufbau wie die statischen Druckverteilungen aus Abbildung 5-23 [91], weswegen auch hier mit moderaten Abweichungen zwischen den Ergebnissen zu rechnen ist. Wie beim „two-struts“ Testfall in Abschnitt 5.1.2 werden turbulente Dichteschwankungen vernachlässigt, indem der theoretische Unterschied zwischen Favre- und Reynolds-gefilterten Größen aus Simulation bzw. Experiment nicht berücksichtigt wird.

Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse mit PIV Daten

In Abbildung 5-24 ist die Verteilung von Wirbelstärke und turbulenter kinetischer Energie in der Umgebung des Vorflügels dargestellt. Die obere Bildreihe zeigt Statistiken aus der PIV Messung und die untere Bildreihe ein instantanes und zwei gemittelte Ergebnisse aus der Simulation. Im Vergleich der beiden Momentaufnahmen (links) werden zwar in der freien Scherschicht Strukturen von ähnlicher Form und Größe sichtbar, innerhalb des

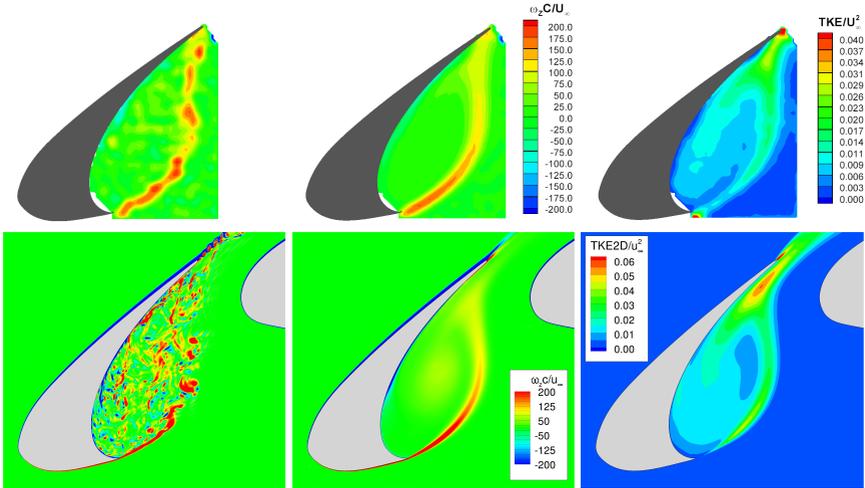


Abbildung 5-24: Gegenüberstellung von Ergebnissen aus PIV-Messung [91] (obere Bildreihe) und aus der DDES (untere Bildreihe) in der Umgebung des Vorflügels. Instantane (links) und zeitgemittelte Verteilung (Mitte) der spannungsweitigen Komponente des Wirbelstärkevektors, $\omega_z c_{ref}/u_\infty$. Aus horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen berechnete turbulente kinetische Energie $(u'u' + v'v')/(2u_\infty^2)$ (rechts).

Ablösegebietes sind im Ergebnis der DDES jedoch deutlich mehr kleine Wirbel zu sehen als im Experiment. Diese Unterschiede lassen sich mit dem unterschiedlichen Auflösungsvermögen von PIV-Messung und DDES erklären. Die räumliche Auflösung der statistischen PIV-Daten Auswertung liegt in der Messebene bestenfalls bei $1.02 \times 10^{-2} c_s$ [29] und wäre somit auch unter günstigen Bedingungen nur etwa halb so hoch wie die der LES. In dem durch 3D-Schwankungsbewegungen geprägten Ablösegebiet [106] kommt noch ein Verlust an Schärfe infolge der endlichen Ausdehnung des LASER-Lichtschnittes hinzu. Auch wenn die Tiefe des Messvolumens in z -Richtung mit $2.19 \times 10^{-2} c_s$ bekannt ist [91], lässt sich die effektive Filterwirkung der PIV Messung in der Ablöseblase nicht genau einschätzen, da dort permanent mit dem chaotischen Ein- und Austritt von Tracerpartikeln in das ausgeleuchtete Volumen zu rechnen ist. Vor diesem Hintergrund erscheint es durchaus sinnvoll, dass im Ergebnis der hochauflösenden Simulation wesentlich mehr kleine Wirbelstrukturen erkennbar sind. ω_z -Momentaufnahmen der spannungsweitig gemittelten Strömung lieferten ein ähnliches Bild wie das Experiment.

Die nicht nur zwischen den Momentanbildern, sondern auch zwischen den zeitgemittelten Ergebnissen auftretenden Differenzen in der anfänglichen Dicke der freien Scherschicht sind sehr wahrscheinlich ebenfalls auf die im Vergleich schlechtere Auflösung der PIV-Daten zurückzuführen [29]. Mit zunehmendem Abstand vom Ablösepunkt (und wachsender Scher-

schichtdicke in der Simulation) werden diese Differenzen zunächst immer kleiner. Über die zweite Hälfte der Strecke vom Ablöse- zum Wiederanlegepunkt liegt dann auch quantitativ eine gute Übereinstimmung zwischen den gemittelten Wirbelstärkeverteilungen aus DDES und PIV vor, was auf eine adäquate Wiedergabe der mittleren Vorflügelumströmung in der turbulenzauflösenden Simulation schließen lässt. Da aber das Auflösungsvermögen von Simulation und Experiment offenbar unterschiedlich ist, kann eine übereinstimmende Erfassung turbulenter Schwankungsbewegungen (auch in Form der messbaren Turbulenzenergie $\text{TKE}_{2D} = \overline{u'u'}/2 + \overline{v'v'}/2$) nicht erwartet werden.

Betrachtet man die zwei rechten Bilder in Abbildung 5-24, ist zu erkennen, dass das Energieniveau von den in der Simulation erfassten turbulenten Austauschbewegungen etwa 50% über dem der PIV-Messung liegt. Als mögliche Erklärung für diese nicht unerheblichen Differenzen kommen neben den bereits erwähnten Unterschieden im Auflösungsvermögen allerdings auch andere Ursachen in Frage. Auf Seiten der Simulation sind beispielsweise Fehler in der funktionalen Modellbildung für die Feinstruktur, eine mangelhafte Auflösung kleinskaliger Schwankungsbewegungen in der frühen Scherschicht oder auch ein verbliebener Einfluss der periodischen Randbedingungen anzuführen. Bezüglich des Vergleichs zwischen Windkanal- und Freiflugsituation ist außerdem auf die im Experiment noch stärkere Beschleunigung der mittleren Strömung durch den Spalt hinzuweisen (siehe c_p -Verteilungen in Abbildung 5-23, Mitte), welche sich theoretisch dämpfend auf die Entwicklung turbulenter Strukturen auswirken kann. Wenn man jedoch über die unterschiedliche Farbcodierung der zwei rechten Bilder aus Abbildung 5-24 hinwegsieht, lässt sich in der Verteilung der aufgelösten 2D-Turbulenzenergie eine gute qualitative Übereinstimmung feststellen. In beiden Fällen liegen innerhalb der Rezirkulationszone deutlich kleinere Intensitäten als in der freien Scherschicht vor, und die stärksten Schwankungsbewegungen sind in der Nähe des Wiederanlegepunktes auf der Vorflügeldruckseite sowie unmittelbar stromab der stumpfen Vorflügelhinterkante zu beobachten. Auch wenn also eine gewisse Unsicherheit in Bezug auf die quantitative Ausprägung der turbulenten Schwankungsbewegungen verbleibt, lässt die zwischen den Simulationsergebnissen und den experimentellen Daten insgesamt festzustellende Konsistenz darauf schließen, dass neben der Grundströmung auch die wesentlichen Mechanismen der turbulenten Vorflügelumströmung von der DDES erfasst werden. Die Analyse dieser turbulenten Schwankungsbewegungen und deren Zusammenhang mit der breitbandigen Geräuschenstehung an Vorflügeln stehen im Mittelpunkt der weiteren Diskussion.

Lokale Struktur der Turbulenz

Bisher ist lediglich die aus den Schwankungen von zwei Geschwindigkeitskomponenten resultierende kinetische Energie betrachtet worden. Natürlich können die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten bereits in einem Punkt verschieden stark fluktuieren. Eine

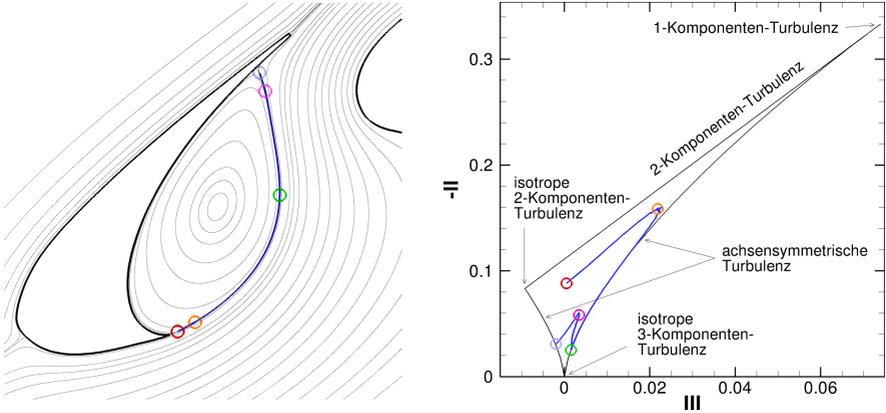


Abbildung 5-25: Trennstromlinie (—) im Zentrum der freien Scherschicht mit Markierungen und andere Stromlinien der mittleren Strömung in der Umgebung des Vorfügels (links). Strukturelle Veränderung der Turbulenz entlang der Trennstromlinie auf der Anisotropie-Invarianten-Karte nach Lumley und Newman [128] (rechts).

Vorstellung von der lokalen räumlichen Struktur der Turbulenz lässt sich anhand der von Lumley und Newman vorgeschlagenen Anisotropie-Invarianten-Karte [128] entwickeln. Dazu sind zunächst die statistisch anisotropen Eigenschaften der Schwankungsbewegung zu isolieren, indem aus dem symmetrischen Reynoldsspannungstensor $\overline{u'_i u'_j}$ durch Subtraktion des isotropen Anteils $\overline{u'_k u'_k} \delta_{ij}/3$ und Normierung mit $2k = \overline{u'_k u'_k}$ gemäß

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2k} - \frac{\delta_{ij}}{3} \quad (5.4)$$

der sogenannte Anisotropietensor der Reynoldsspannungen berechnet wird. Die skalaren Invarianten des dimensionslosen Tensors b_{ij} , welcher zudem symmetrisch und spurfrei ist und im Falle isotroper Turbulenz ganz verschwindet, sind durch

$$I = b_{ii} = 0, \quad II = -(b_{ij} b_{ji})/2 \quad \text{und} \quad III = (b_{ij} b_{jk} b_{ki})/3 \quad (5.5)$$

gegeben. Aus den Grenzen der physikalisch möglichen Turbulenzzustände lassen sich nun spezielle Beziehungen zwischen der zweiten und der dritten Invariante ableiten. Dies sind die Spezialfälle der achsensymmetrischen $((III/2)^2 + (II/3)^3 = 0)$ und der 2-Komponenten-Turbulenz $(9II + 27III + 1 = 0)$ [127]. Auf der in Abbildung 5-25 (rechts) dargestellten Anisotropie-Invarianten-Karte umschließen diese Begrenzungen den physikalisch zulässigen Wertebereich von $-II$ und III , und die drei Eckpunkte markieren die Grenzzustände der 1-Komponenten-Turbulenz, der isotropen 2-Komponenten-Turbulenz und der isotropen (3-Komponenten-) Turbulenz.

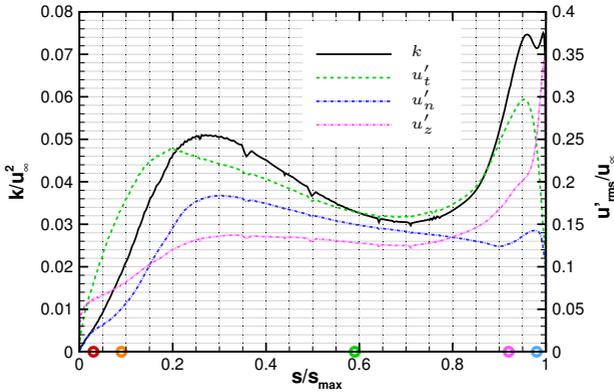


Abbildung 5-26: Entwicklung turbulenter Schwankungsbewegungen entlang der Trennstromlinie aus Abbildung 5-25. Die scharfen Knicken im Kurvenverlauf (z. B. bei $s/s_{\max} \approx \{0.36, 0.5, \dots\}$) wurden durch fehlerhafte Informationen an Blockgrenzen im post-processing verursacht und können ignoriert werden.

Nach Berechnung der Invarianten des Anisotropietensors mit (5.4) und (5.5) kann prinzipiell jedem Punkt eines turbulenten Strömungsfeldes auch eine Position auf der Invarianten-Karte zugeordnet werden, anhand derer sich dann die lokale Struktur der turbulenten Schwankungsbewegungen charakterisieren lässt. Vor dem Hintergrund breitbandiger Geräuschenstehung am Vorflügel ist hier jedoch hauptsächlich die Entstehungsgeschichte hochenergetischer Turbulenz in der freien Scherschicht relevant. Basierend auf den in der DDES aufgelösten Reynoldsspannungen der Grobstruktur wurden die Invarianten des Anisotropietensors daher auf einer mitten durch die Scherschicht verlaufenden Trennstromlinie bestimmt, welche das Ablösegebiet im zeitlichen Mittel von der schnellen Außenströmung separiert.

Im Vergleich der linken und rechten Darstellung aus Abbildung 5-25 kann man nun die strukturelle Variation der turbulenten Schwankungsbewegungen entlang dieser Trennstromlinie (—) analysieren. Die Bogenlänge der Trennstromlinie, s , wird ausgehend vom Ablösepunkt an der unteren Vorflügelkante gemessen und liegt am Wiederanlegepunkt bei $s_{\max} \approx 0.8 c_s$. Um bestimmten Abschnitten der freien Scherschicht unterschiedliche Turbulenzzustände zuordnen zu können, wurden die fünf Positionen $s/s_{\max} \approx \{0.03, 0.09, 0.59, 0.92, 0.98\}$ in Abbildung 5-25 mit farbigen Kreisen gekennzeichnet. Entsprechende Markierungen in Abbildung 5-26 ermöglichen es, auch die Variation der turbulenten kinetischen Energie k entlang dieser Abschnitte und deren lokale Zusammensetzung aus tangential (u'_t) und normal (u'_n) zur Trennstromlinie sowie in spannweitiger Richtung (u'_z) fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten zu verfolgen.

In der frühen Scherschicht (○) sind die aufgelösten Reynoldsspannungen zwar weit entfernt von einem isotropen oder einem anderen charakteristischen Zustand, allerdings ist das Verhältnis von aufgelöster zu modellierter Turbulenz hier noch relativ klein [106]. Infolge des steilen Anstiegs der im LES-Modus erfassten Schwankungsenergie (siehe Abbildung 5-26) ändert sich dies aber nur ein kurzes Stück stromab (○), und die Turbulenz nähert sich einem achsensymmetrischen Turbulenzzustand mit zigarrenförmigem Energieellipsoid [25] an. In Bezug auf eine (trenn)stromlinienorientierte Orthonormalbasis aus Tangentenvektor e_t , Normalenvektor e_n und Binormalenvektor $e_b = e_z$ sind dabei die Geschwindigkeitsfluktuationen tangential zur Scherschicht mit Abstand am stärksten ausgeprägt. Im Bereich $s/s_{\max} \approx 0.09 \dots 0.59$ (○—○) entfernt sich die Turbulenz vom 1-Komponenten-Limit und strebt stetig dem Zustand der Isotropie entgegen. Während die Intensität in den untergeordneten Fluktuationsrichtungen im Verhältnis zunimmt, wird bei $s/s_{\max} \approx 0.27$ ein erstes energetisches Maximum passiert. Der nahezu achsensymmetrische Zustand bleibt noch bis $s/s_{\max} \approx 0.6$ erhalten. Erst an diesem Punkt der Trennstromlinie hat die mittlere Tangentialgeschwindigkeit ihr Maximum von $\bar{u}_t \approx 0.84 u_\infty$ erreicht, und eine Verzögerung der Hauptströmung setzt ein. In dem unteren Momentanbild aus Abbildung 5-27 lässt sich ungefähr bis hierher eine zunehmend dreidimensionale Verformung der anfänglich fast zylindrischen Wirbelstrukturen beobachten. Weiter stromab (○—○) scheinen diese rollenförmigen Gebilde dann zu zerfallen, womit vermutlich auch die Achsensymmetrie der Turbulenz verloren geht. Mit Annäherung an den Wiederanlegepunkt (○—○) wird die Strömung stark verzögert, und die Schwankungsenergie strebt einem zweiten energetischen Maximum zu. Während die Dämpfung der wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuationen durch den Wandeinfluss zunimmt, beginnt die lokale Struktur der Turbulenz sich rapide zu verändern. Die letzte Markierung (○) kennzeichnet in Abbildung 5-25 das kurzzeitige Auftreten einer Achsensymmetrie, bei der zwei Schwankungskomponenten stärker sind als die dritte. In Übereinstimmung mit Beobachtungen von Lockard, Choudhari und Khorrami [28, 124] existiert noch dichter an der Wand ein drittes energetisches Maximum mit ausgeprägten Geschwindigkeitsfluktuationen in spannweitere Richtung, bevor die turbulenten Schwankungen zuletzt infolge viskoser Effekte abklingen.

Globale Struktur der Turbulenz

Da die Effektivität breitbandiger Schallentstehungsmechanismen nicht nur von der lokalen, sondern auch von der globalen Struktur der Schwankungsbewegungen im Quellgebiet abhängig ist, erscheint es sinnvoll, neben Einpunkt-Statistiken auch Zweipunkt-Statistiken und 3D-Visualisierungen der Strömung in die Untersuchung der Lärmquellen am Vorflügel mit einzubeziehen. Links in Abbildung 5-27 wird eine Momentaufnahme der turbulenten Vorflügelumströmung aus drei verschiedenen Blickwinkeln gezeigt, wobei der Vorflügel transparent dargestellt wurde, um im oberen Bild die Durchsicht auf Wirbel in Wand-

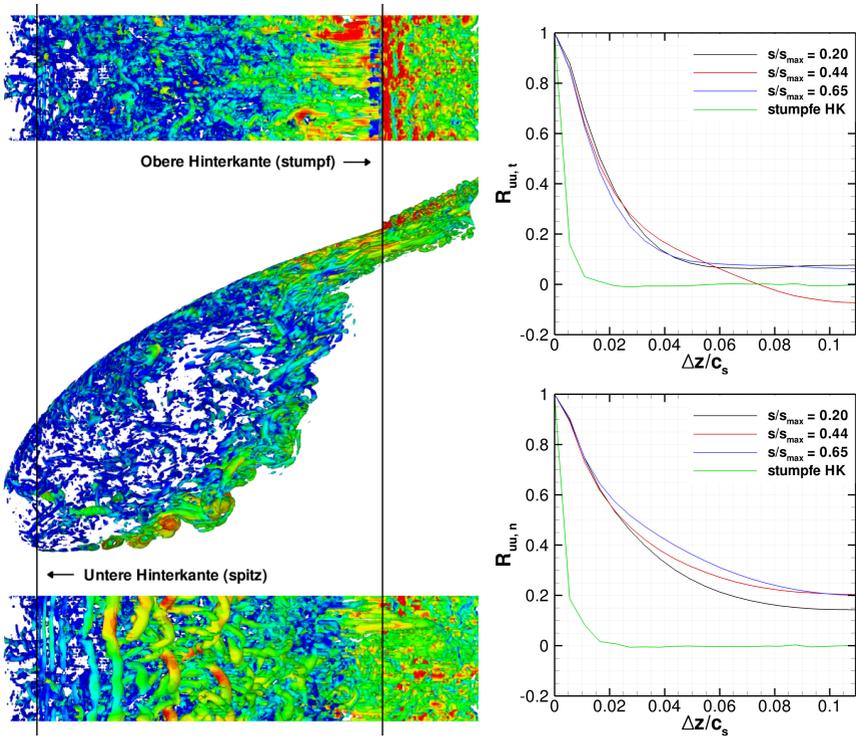


Abbildung 5-27: Links: Momentaufnahme kohärenter Wirbelstrukturen (mit substantieller Beschleunigung eingefärbte Isofläche bei $\lambda_2 = -300 u_\infty^2/c_s^2$) in der turbulenten Umströmung des Vorflügels aus drei verschiedenen Blickwinkeln (von oben, von der Seite und von unten). Rechts: Spannweite Dekorrelation von Geschwindigkeitsfluktuationen tangential (oben) und normal (unten) zur Trennstromlinie an den auf Seite 174 in Abbildung 5-29 markierten Positionen.

nähe zu ermöglichen. Potentielle Wirbelschallquellen sind in dieser Darstellung farblich hervorgehoben, indem die durch eine Isofläche des λ_2 -Kriteriums [92] erfassten kohärenten Strukturen mit dem Betrag ihrer substantiellen Beschleunigung eingefärbt worden sind. Rot steht für besonders starke, grün für mittlere und blau für geringe Beschleunigungswerte. Eine Analyse von Bildfolgen in dieser Darstellung liefert folgende Interpretation der instationären Strömung:

Unmittelbar nach dem Überströmen der unteren Vorflügelkante führen Störungen der freien Scherschicht in Verbindung mit der Kelvin-Helmholtz-Instabilität [153] zum Aufrollen einzelner Wirbelstrukturen. Kurz nach der Ablösung sind diese Wirbel noch sehr klein und von elliptisch-zylindrischer Form, mit fast parallel zur homogenen Richtung verlaufender Symmetrieachse. Während ihres konvektiven Transports entlang der Trennstromlinie

werden sie aber größer, sie scheinen zunächst stetig mit der Scherschichtdicke zu wachsen. Ungefähr ab $s/s_{\max} \approx 0.2$ ist dann jedoch eine zunehmend dreidimensionale Verformung der rollenförmigen Strukturen zu beobachten, wobei diese Position in Abhängigkeit des momentanen Turbulenzzustands innerhalb der Rezirkulationszone variiert. Mit Annäherung an den Wiederanlegepunkt werden die Wirbel fortwährend weiter deformiert und gestreckt, bis sie in kleinere Strukturen zerfallen und schließlich keine spannwitigen Rollen mehr erkennbar sind. Beim Erreichen der Wiederanlegelinie auf der Vorflügeldruckseite teilt sich die Strömung dann auf, und die Wirbel treten entweder nach links in das Rezirkulationsgebiet ein, in welchem sie an die untere Vorflügelkante zurückbefördert werden und dort die freie Scherschicht stören können, oder sie strömen nach rechts und an der oberen Vorflügelhinterkante (stumpfe HK) vorbei, wobei sie schließlich unter starker Beschleunigung den Spalt zwischen Vorflügel und Hauptelement verlassen. Beim Abströmen der aus dem Spalt austretenden Wirbel ist schließlich eine Interaktion und Durchmischung mit den kleineren Strukturen aus dem Nachlauf der stumpfen HK zu beobachten (vgl. Blickwinkel von oben/von unten). Während dieses sich laufend wiederholenden Vorgangs bleibt die Strömung innerhalb des Rezirkulationsgebietes vergleichsweise ruhig. Schnelle Veränderungen sind dagegen in der freien Scherschicht, der Wiederanlegeregion, im Spalt zwischen Vorflügel und Hauptelement sowie im Nachlauf zu beobachten. Letztere Regionen sind auch durch ein mittleres bis hohes Niveau der substantiellen Beschleunigung gekennzeichnet.

Die beiden Diagramme aus Abbildung 5-27 (rechts) gewähren Einblick in die spannwitige Korrelation von Geschwindigkeitsschwankungen an drei Positionen auf der Trennstromlinie und an einer vierten Position unmittelbar stromab der stumpfen HK. Auf den Abszissen ist jeweils der normierte spannwitige Abstand $\delta z/c_s$ zwischen zwei (virtuellen) Geschwindigkeitssensoren aufgetragen. Deren planare Positionierung ist in Abbildung 5-29 (links) kenntlich gemacht. Die Ordinatenbeschriftungen $R_{uu,t}$ (oben) bzw. $R_{uu,n}$ (unten) stehen für die Kreuzkorrelationskoeffizienten $R_{\phi\psi} = \overline{\phi' \psi'} / (\phi'_{\text{rms}} \psi'_{\text{rms}})$ von tangential bzw. normal zur lokalen Hauptströmungsrichtung fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten.

Damit die simulierte Strömung um den spannwitig unendlich ausgedehnten Flügel nicht künstlich von den periodischen Randbedingungen in dieser Richtung beeinflusst werden kann, ist es theoretisch notwendig, dass noch innerhalb der halben Spannweite des Rechengebietes, $\mathcal{L}_z/2 = 0.11 c_s$, ein Abfall der Korrelationskoeffizienten auf $R_{\phi\psi} \approx 0$ erfolgt. Eine derart vollständige Dekorrelation ist in Abbildung 5-27 nur für die Sensorposition stromab der stumpfen HK zu beobachten. Innerhalb der freien Scherschicht ist ein verbliebener Einfluss der periodischen Ränder dagegen nicht auszuschließen, die Korrelationskoeffizienten fallen aber auch dort für große spannwitige Sensorabstände auf relativ niedrige Werte ab ($|R_{uu,t}| < 0.1$, $|R_{uu,n}| \lesssim 0.2$). Dieser Rückgang lässt darauf schließen, dass die spannwitige Ausdehnung des Rechengebietes prinzipiell genügend Raum für die Entwicklung dreidimensionaler turbulenter Schwankungen bietet, und dass der verbliebene Einfluss periodischer Randbedingungen im turbulenten Strömungsfeld nur

schwach ausgeprägt ist. Der etwas größere $R_{uu,n}$ Koeffizient scheint allerdings im Bereich $0.02 < \delta z/c_s < 0.09$ mit zunehmendem Abstand vom Ablösepunkt zu wachsen. Diese Beobachtung ist zunächst etwas überraschend, da die Momentaufnahme der mit dem λ_2 Kriterium [92] erfassten Wirbel eine stromab zunehmende Deformation dieser erkennen und einen Zerfall der kohärenten Strukturen vermuten lässt. In dem Schnappschuss aus Abbildung 5-27 ist in der frühen Scherschicht allerdings auch das Wachstum von Wirbeln und ein fundamentaler Größenunterschied zwischen den aus der Scherschicht stammenden Wirbeln und den winzigen Nachlaufstrukturen stromab der stumpfen HK zu erkennen, was wiederum zu den Verläufen der spannwitigen Korrelationsfunktionen zu passen scheint. Um Aufschluss über diese zum Teil etwas widersprüchlich erscheinenden Beobachtungen zu erhalten, wird nachfolgend die spektrale Struktur der Turbulenz in der freien Scherschicht analysiert.

Spektrale Struktur der Turbulenz

Die Analyse der spektralen Turbulenzstruktur beschränkt sich auf die drei bereits zuvor untersuchten Positionen $s/s_{\max} = \{0.2, 0.44, 0.65\}$ inmitten der freien Scherschicht. Hier wurde aus den fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten (jeweils in Bezug auf eine lokal stromlinienorientierte e_t, e_n, e_z -Basis) nicht nur die mittlere spektrale Leistungsdichte der Schwankungsbewegungen, sondern auch die spannwitige Variation der Kohärenzfunktion $\gamma^2(St; \delta z/c_s)$ nach Gleichung (5.1) ermittelt, wozu der Abstand zwischen den virtuellen Sonden im Bereich $0 \leq \delta z/c_s \leq 0.1$ variiert worden ist. In Abbildung 5-28 sind normierte f - δz -Konturplots der aus den tangentialen (u'_t) und normalen (u'_n) Geschwindigkeitsschwankungen berechneten Kohärenzfunktionen zu sehen.

In der Gegenüberstellung fällt auf, dass in der spannwitigen Kohärenz große Unterschiede zwischen Tangential- und Normalkomponente der Geschwindigkeitsfluktuation bestehen. Hinweise auf dieses Verhalten waren in einer zuvor durchgeführten Analyse bezüglich eines fixen kartesischen Koordinatensystems erkennbar [108], weswegen die Transformation in das stromlinienorientierte Koordinatensystem hier vorgenommen wurde. Betrachtet man den durch eine schwarze Isolinie gekennzeichneten Wert $\gamma^2(St; \delta z/c_s) = 0.5$ als Maß für die typische Kohärenzlänge von mit der dimensionslosen Frequenz St fluktuierenden Schwankungsbewegungen, kann man in der rechten Bildhälfte je nach Position auf der Trennstromlinie zwischen $St \approx 3$ und $St \approx 14$ ausgedehnte spannwitige Kohärenzlängen in den Schwankungsbewegungen normal zur Scherschicht feststellen. Mit zunehmendem Abstand vom Ablösepunkt bewegt sich in diesem Frequenzbereich ein ca. $\delta St = 5 \dots 7$ breites Band mit besonders ausgeprägter Kohärenz allmählich von hohen zu niedrigen Frequenzen, wobei die maximale Kohärenzlänge stromab zunimmt. In den Schwankungsbewegungen tangential zur Scherschicht finden sich dagegen nur sehr schwache Hinweise auf ein vergleichbares Verhalten.

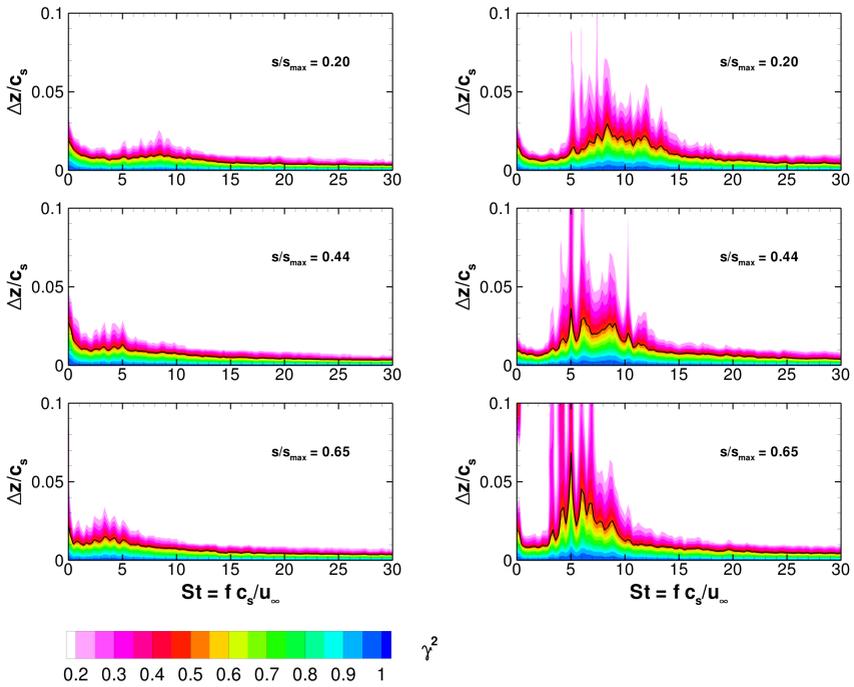


Abbildung 5-28: Konturplots der auf Basis tangential (links) und normal (rechts) zur Trennstromlinie fluktuierender Geschwindigkeitskomponenten berechneten spannwitigen Kohärenzfunktion an drei Positionen in der freien Scherschicht. Die schwarze Isolinie bei $\gamma^2 = 0.5$ dient der Kennzeichnung einer lokalen frequenzabhängigen Kohärenzlänge.

Eine stromab zunehmende Kohärenzlänge bei gleichzeitiger Verschiebung zu tieferen Frequenzen würde theoretisch gut zu dem Wachstum der zylindrischen Wirbelstrukturen in der freien Scherschicht passen. Da größere Kohärenzlängen aber auf ein relativ schmales Frequenzband beschränkt bleiben und lediglich in der normalen Schwingungskomponente vorhanden sind, lässt sich die Vermutung anstellen, dass das λ_2 Kriterium, welches einen Wirbelkern als zusammenhängende Region mit zwei negativen Eigenwerten von $S_{ik}S_{kj} + \Omega_{ik}\Omega_{kj}$ definiert [92], in der zweiten Hälfte der freien Scherschicht zunehmend auf Geschwindigkeitsschwankungen in anderen Raumrichtungen reagiert und die in Korrelationskoeffizient und Kohärenzfunktion von u'_n nachweisliche spannwitig kohärente Struktur bei $s/s_{\max} = 0.65$ in Abbildung 5-27 vom turbulenten Strömungsfeld maskiert wird. Trotz dieser offenbar nicht unerheblichen Überlagerung durch kohärente Wirbelstrukturen mit chaotisch variierenden Rotationsachsen ist aber davon auszugehen, dass die spannwitige Kohärenz immer noch vorhanden ist und sich in Form einer akustisch besonders effizienten

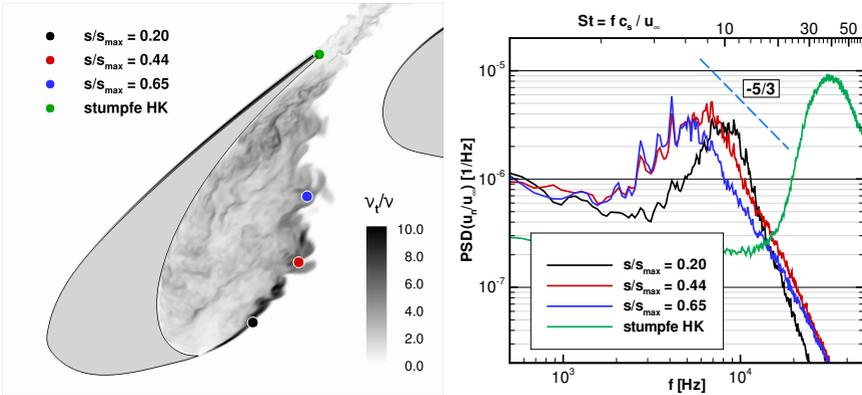


Abbildung 5-29: Momentaufnahme der lokalen Verteilung von v_t/v in der DDES mit Kennzeichnung virtueller Sondenpositionen in der Vorflügelregion (links). Spektrale Leistungsdichte von Geschwindigkeitsschwankungen normal zur lokalen Hauptströmungsrichtung an den im linken Bild gekennzeichneten Positionen (rechts).

Linienquelle auch wieder aus dem breitbandigen turbulenten Rauschen abheben kann. Dies ist insbesondere deswegen erwähnenswert, da der durch spannweitig ausgedehnte Kohärenzlängen geprägte Frequenzbereich an allen drei Sensorpositionen exakt mit der lokal dominierenden Bandbreite der spektralen Leistungsdichte von Geschwindigkeitsschwankungen normal zur Scherschicht zusammenfällt.

In Abbildung 5-29 sind die planaren Positionen der virtuellen Sensoren im turbulenten Strömungsfeld (links) und die lokale spektrale Leistungsdichte der Geschwindigkeitsfluktuationen normal zur Hauptströmungsrichtung (rechts) dargestellt. Bei $s/s_{max} = 0.2$ tritt ein dominierendes Frequenzband um $St \approx 10$ deutlich aus dem breitbandigen Hintergrundgeräusch hervor. Weiter stromab verschiebt sich dieser Bereich mit erhöhten Amplituden in etwa kongruent mit der Kohärenzfunktion aus Abbildung 5-28 hin zu tieferen Frequenzen. Das wandernde energetische Schmalband hebt sich dabei noch bis zur letzten Sensorposition in der freien Scherschicht um zumindest eine halbe Größenordnung vom tieffrequenten Breitbandgeräusch ab. Dieser „Rauschabstand“ ist allerdings erst nach Transformation in das stromlinienorientierte Koordinatensystem und auch nur in der Normalkomponente zu beobachten (vgl. Spektren in [104, 106]). Das energetische Gefälle zu höheren Frequenzen hin wird stromab schwächer und nähert sich bei $s/s_{max} = 0.65$ bereits dem bekannten $f^{-5/3}$ Potenzgesetz an. Die den kohärenten Scherschichtwirbeln zuzuordnenden Spitzen werden im Leistungsdichtespektrum nur noch von einem hochenergetischen Schmalband um $St \approx 40 \approx 0.24 c_s / \ell_{HK}$ überragt, welches von dem kleinskaligen Wirbelabwurf im unmittelbaren Nachlauf der stumpfen HK verursacht wird.

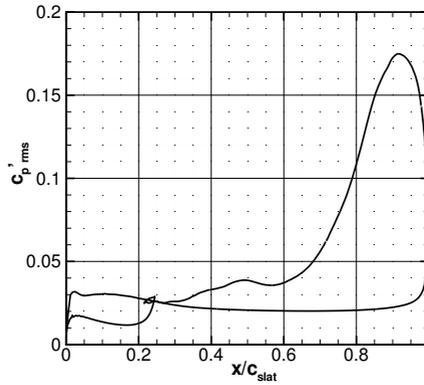


Abbildung 5-30: Oberflächliche Druckfluktuationen auf dem Vorflügel. Dargestellt ist der mit dem dynamischen Druck $q_\infty = \varrho_\infty u_\infty^2/2$ normierte Effektivwert von p' , $c'_{p,rms} = \sqrt{p'^2}/q_\infty$.

5.2.4 Vom Vorflügel ausgehende Schallemission

Die intensiven Schwankungsbewegungen in der Vorflügelregion rufen erhebliche Druckfluktuationen und schwankende Oberflächenkräfte auf den festen Wänden in der näheren Umgebung hervor (vgl. Tabelle 5-2). Dabei hängt die Intensität der oberflächlichen Fluktuationen natürlich nicht nur von der Wirbelstärke, sondern auch vom Abstand zwischen Wirbeln und Wand ab. Die hochenergetischen Wirbel aus der freien Scherschicht haben daher insbesondere beim Wiederanlegen der Strömung auf der Vorflügeldruckseite sehr heftige Druckfluktuationen zur Folge. Der „Fußabdruck“ von den um $x/c_{slat} \approx 0.9$ auf die Wand auftreffenden Wirbelstrukturen ist in Abbildung 5-30 gut zu erkennen. Das globale Maximum des Effektivwertes der Druckschwankungen auf der Oberfläche liegt bei $p'_{rms} \approx 0.175 q_\infty$, was einem lokalen Gesamtschalldruckpegel von $L_p = 144$ dB entspricht und sehr gut mit den Ergebnissen von Deck und Larauie [33] an einer vergleichbaren Hochauftriebskonfiguration übereinstimmt.

Die fluktuierenden Oberflächenkräfte lassen sich auf Basis der Gleichung (3.135) als akustische Dipolquellen interpretieren, was die Region um den Wiederanlegepunkt im Hinblick auf die Geräuschenstehung an Vorflügeln interessant macht (siehe Abbildung 5-21). Dabei ist neben dem Spitzenwert aber auch auf den relativ breiten Bereich mit $c'_{p,rms}$ Werten von über 0.05 ($L_p > 132$ dB) hinzuweisen, welcher die Hinterkante des Vorflügels mit einschließt. Die sich dort sprunghaft entlang einer Linie verändernde Randbedingung könnte in Verbindung mit den spannweitig kohärenten Wirbelstrukturen zu besonders intensiver Schallemission führen, da der Effektivwert des durch Kantengeräusche verursachten

Schalldrucks im Fernfeld bei kleiner Machzahl mit

$$p'_{\text{rms}} \sim \frac{\sqrt{\mathcal{L}\ell}}{r} \rho_{\infty} u^2 Ma^k \quad \text{und} \quad k = 1/2 \quad (5.6)$$

skaliert [86] (\mathcal{L} und ℓ stehen hierin für die Länge der turbulent überströmten Kante sowie für die kantenparallele Korrelationslänge der Turbulenz, vgl. Dipol in (2.25), S. 19) und die mittlere Strömungsgeschwindigkeit von der Wiederanlegelinie bis zur Hinterkante rapide ansteigt (siehe Abbildung 5-23, S. 163). Im nächsten Abschnitt werden Untersuchungen zur Identifikation des dominierenden Quellmechanismus durchgeführt. Zunächst wird jedoch die vom Vorflügel ausgehende Schallemission analysiert.

Im Verlauf der zeitgenauen Simulation wurden die fluktuierenden Oberflächendrücke auf allen drei Elementen der Konfiguration gespeichert, um anschließend auf Basis der Gleichung von Ffowcs-Williams und Hawkings die Berechnung der Schallemission ins Fernfeld zu ermöglichen. Auf den Seiten 157 und 159 ließen sich in den Abbildungen 5-19 und 5-21 bereits eindeutige Hinweise auf die Erfassung akustischer Wellenausbreitung in der kompressiblen Simulation erkennen, wobei das Schallwellenmuster in ersterer Visualisierung aktive Schallquellen nicht nur in der Vorflügelregion, sondern auch im Spalt zwischen Hauptelement und Klappe sowie an der Hinterkante der Klappe vermuten lässt. Um die vom Vorflügel ausgehende Schallemission weitgehend von anderen Geräuschquellen isolieren zu können, wurden die akustischen Fernfeldextrapolationen mit dem in Abschnitt 3.4 beschriebenen Verfahren separat für die Oberflächendaten von Vorflügel, Hauptelement und Klappe ausgeführt. Richtcharakteristiken und Spektren der von Vorflügel, Klappe und von allen drei Elementen in der Summe ausgehenden Schallemission finden sich in [139]. Da hier die Analyse von Vorflügelärm im Vordergrund steht, beschränkt sich nachfolgende Betrachtung auf den Beitrag des Vorflügels zum Gesamtgeräusch.

In Abbildung 5-31 ist links die Richtcharakteristik des allein aus den Oberflächendaten des Vorflügels berechneten Schalldruckpegels im Fernfeld zu sehen. Das dargestellte Liniennpaar kennzeichnet das statistische 95% Vertrauensintervall für den in der jeweiligen Abstrahlrichtung ermittelten Pegel und wurde nach der in [143] beschriebenen Methode aus den Zeitreihen des Schalldrucks im Fernfeld abgeschätzt. Letztere wurden für insgesamt 360 mit der Konfiguration mitbewegte Beobachter bestimmt, welche gleichmäßig auf einem um den Mittelpunkt der stumpfen Vorflügelhinterkante zentrierten Kreis mit dem Radius $r = 10 c_{\text{ref}}$ und im Mittelschnitt angeordnet sind. Die 90° Position befindet sich oberhalb der Konfiguration, und der Vektor der Anströmung zeigt vom Zentrum in Richtung der 4° Position. In der Richtcharakteristik ist ein asymmetrischer Dipol zu erkennen, dessen lokale Maxima etwa bei 180° und bei 300° liegen. Rechts daneben ist die spektrale Leistungsdichte der in diesen zwei Richtungen abgestrahlten akustischen Signale dargestellt. Beide Spektren weisen in dem für Vorflügelgeräusche typischen Frequenzbereich $1 < St < 5$ die höchsten Amplituden auf. Das Maximum für die Schallabstrahlung nach

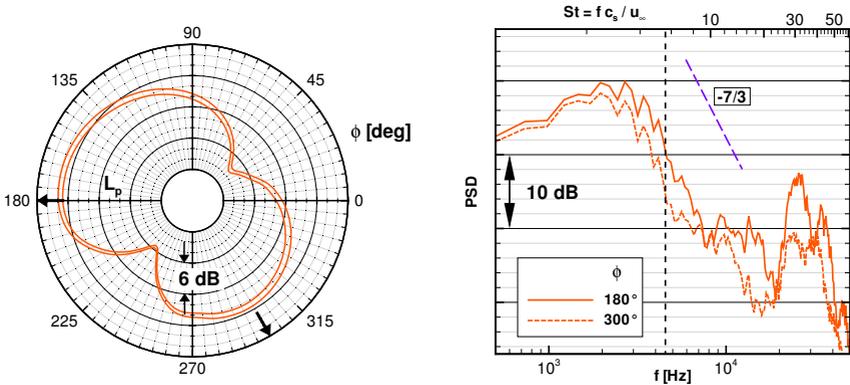


Abbildung 5-31: Links: Richtcharakteristik der vom Vorflügel ausgehenden Schallemission. Das Linienpaar kennzeichnet das statistische 95% Konfidenzintervall [143] des Schalldruckpegels L_p an kreisförmig um die Vorflügelhinterkante angeordneten Beobachterpositionen im Fernfeld. Rechts: Spektrale Leistungsdichte des Fernfeldschalls in den zwei im linken Bild markierten Richtungen mit besonders intensivem Schalldruckpegel. Die vertikale gestrichelte Linie kennzeichnet die charakteristische Frequenz des im nächsten Abschnitt für die Analyse der Geräusentstehung eingesetzten Tiefpassfilters.

unten liegt bei $St \approx 2.4$, was sehr gut mit aus der Literatur bekannten Werten übereinstimmt [40, 124]. Das energiereiche Schmalband im Bereich $26 < St < 44$ wird durch den hochfrequenten Wirbelabwurf von der stumpfen Vorflügelhinterkante hervorgerufen [105] (vgl. Abbildung 5-29). Dieser Frequenzbereich liegt jedoch mit $f > 20$ kHz oberhalb der menschlichen Hörbarkeitsgrenze und ist daher im Hinblick auf die Lärmzertifizierung von Luftfahrzeugen irrelevant, zumindest dann, wenn man davon ausgeht, dass die Dicke der stumpfen Hinterkante auch in der Großausführung nicht zunimmt.

Das energetische Gefälle von tiefen zu hohen Frequenzen folgt in guter Näherung einem $G_{pp}(f) \sim f^{-7/3}$ Trend, was unter Einbeziehung der Taylor-Hypothese [170] theoretisch zum räumlichen Energiespektrum turbulenter Druckschwankungen im Inertialbereich ausgebildeter Turbulenz passen würde (siehe Abschnitt 4.2). Für eine Abstrahlrichtung von 290° ist ein vergleichbarer Trend sowohl im Ergebnis einer hochauflösenden Simulation mit dem CFL3D Code [124], als auch in Vorhersagen auf Basis der RPM-APE-DG Methode wiederzufinden [10, 51, 149]. Die in Abbildung 5-31 zu beobachtende Überhöhung gegenüber dem $f^{-7/3}$ Verhalten im Bereich $10 < St < 20$ ist sehr wahrscheinlich auf die nicht vollständig separierbare Schallemission der Klappe zurückzuführen, welche in diesem Frequenzbereich ein Maximum hat [139]. Infolge der isolierten Auswertung oberflächlicher Dipolquellen auf dem Vorflügel gehen zwar Schallquellen und Reflektionen von den Oberflächen des Hauptelements und der Klappe verloren, von dort in Richtung Vorflügel abgestrahlte Schallwellen werden aber immer noch partiell auf dessen Oberfläche erfasst.

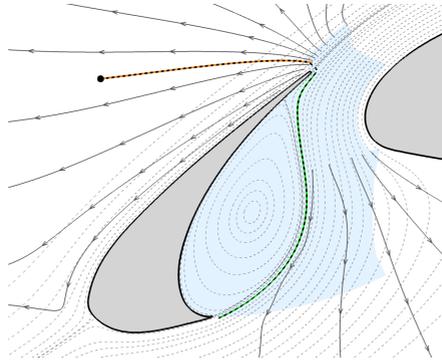


Abbildung 5-32: Stromlinien (-----) sowie parallel zur gefilterten akustischen Intensität (2.26) verlaufende „Emissionslinien“ (→) in der Umgebung des Vorflügels. Für die Korrelationsanalyse über die homogene Richtung gemittelter Bereich (■) und vermuteter Pfad des Informationsflusses (---●) bis zur Beobachterposition (●).

5.2.5 Analyse der Geräusentstehung am Vorflügel

Im letzten Abschnitt wurde festgestellt, dass der Frequenzbereich $1 < St < 5$ einen großen Teil der akustischen Schwankungsenergie beinhaltet, die vom Vorflügel abgestrahlt wird. Die in diesem Abschnitt vorgestellte aeroakustische Analyse soll nun Hinweise auf den dominierenden Geräusentstehungsmechanismus liefern, der hinter der Schallemission in diesem Frequenzbereich steht. Um Zusammenhänge zwischen aerodynamischen und akustischen Schwankungen nachzuweisen, können Zweipunktkorrelationen zwischen Punkten im potentiellen Quellgebiet und Punkten im Ausbreitungsgebiet hilfreich sein [80, 81]. Ein solcher Korrelationsansatz wird auch hier verfolgt, indem die während der DDES gespeicherten Druckfelder statistisch analysiert werden. Das potentielle Quellgebiet, in dem dreidimensionale Daten erfasst wurden, ist in Abbildung 5-32 durch eine hellblaue Färbung markiert. Außerhalb dieser Region musste lediglich eine zweidimensionale Ebene gespeichert werden, da im Bereich rotationsfreier Strömung infolge des verhältnismäßig schmalen simulierten Segments und der quasi-zweidimensionalen Schallausbreitung eine nahezu vollständige Korrelation des Druckfeldes über die spannweite Richtung vorliegt. Anliegende Grenzschichten und der Nachlauf oberhalb des Hauptelementes sind als potentielle Geräuschquellen hier nicht von Interesse.

Die nachfolgend präsentierte aeroakustische Analyse stützt sich auf insgesamt 4000 Druckfelder, welche gegen Ende der Simulation über eine Zeitspanne von $T_S = 0.04 \text{ s} \approx 33 c_s / u_\infty$ (zu jedem zehnten Zeitschritt) gespeichert worden sind. Bei der statistischen Auswertung dieser Daten wird das Drucksignal an einer außerhalb des turbulenten Strömungsfeldes fixierten Beobachterposition mit Drucksignalen aus der Umgebung des Vorflügels verglichen

bzw. korreliert. Berücksichtigt man dabei einen Zeitversatz zwischen empfangenem Signal am Beobachterpunkt und den Signalen in der Quellregion, kann man anhand der räumlich-zeitlichen Variation des Korrelationskoeffizienten den Transport von Druckinformationen in der Strömung nachvollziehen und letztlich durch Rückverfolgung des Informationsflusses auch auf den dominierenden Quellmechanismus schließen. Als Beobachterposition wurde ein im Bereich rotationsfreier Strömung und in Richtung der maximalen Geräuschabstrahlung liegender Punkt ausgewählt. Diese Position ist in Abbildung 5-32 (sowie in den drei folgenden Abbildungen) durch einen schwarzen Punkt \bullet markiert. Die von diesem Punkt ausgehende gestrichelte Linie kennzeichnet den vermuteten Pfad des Informationsflusses, welcher sich aus zwei unterschiedlich eingefärbten Teilen sowie einem kurzen farblosen Verbindungsstück zusammensetzt. Der erste Teil (---) wird von einer Stromlinie der zeitgemittelten Strömung gebildet, welche nahe vom Ablösepunkt an der unteren Vorflügelkante startet und fast bis an die obere (stumpfe) Hinterkante des Vorflügels heranreicht. Der zweite Teil (---) verläuft etwa von dort aus parallel zu Feldlinien der zeitgemittelten akustischen Intensität (siehe (2.26), S. 19) bis hin zur Beobachterposition. Vor Berechnung der akustischen Intensität wurden die gespeicherten Druck- und Geschwindigkeitsfelder mit dem nachfolgend beschriebenen „moving-average-filter“ gefiltert, d. h. die analysierten Größen stellen gefilterte Schwankungsgrößen gegenüber lokalen Mittelwerten dar.

Um bei den Korrelationen mit dem Drucksignal am Beobachterpunkt Ereignisse in der Quellregion auf der gesamten Spannweite zu erfassen und gleichzeitig spannenweitig kohärente Strukturen im turbulenten Strömungsfeld hervorzuheben, wurden die Drucksignale aus dem Quellgebiet über die homogene Richtung gemittelt. Außerdem erfolgte eine Filterung sämtlicher Drucksignale im Zeitbereich, um den Rauschabstand in der Korrelationsanalyse zu erhöhen. Zur Filterung ist ein einfacher „moving-average-filter“ verwendet worden, dessen charakteristische Frequenz $f_c = (2T_w)^{-1}$ über die Breite des gleitenden Mittelungsintervalls, $T_w = N_w \delta t$, festgelegt werden kann. Die Drucksignale wurden auf dieser Basis zunächst einer Hochpassfilterung mit $f_c \approx 99.8 \text{ Hz} \approx 0.12 u_\infty / c_s$ und dann einer Tiefpassfilterung mit $f_c \approx 4545.45 \text{ Hz} \approx 5.56 u_\infty / c_s$ unterzogen, wobei der Hochpass durch Subtraktion des geglätteten Signals vom ungefilterten Ausgangssignal realisiert worden ist. Anschließend wurde die normierte Zweipunkt-Korrelationsfunktion [12]

$$R_{pp}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \tau) = \frac{\overline{p'(\mathbf{y}, t) p'(\mathbf{x}, t + \tau)}}{p'_{\text{rms}}(\mathbf{y}) p'_{\text{rms}}(\mathbf{x})} \quad (5.7)$$

aus den gefilterten Drucksignalen berechnet, wobei \mathbf{x} die fixe Position des Beobachters bezeichnet, die Position \mathbf{y} in der Umgebung des Vorflügels variiert und τ einen ebenfalls variablen Zeitversatz zwischen den Drucksignalen an den Punkten \mathbf{x} und \mathbf{y} darstellt. Per Definition bewegt sich die normierte Korrelationsfunktion (5.7) somit immer im Bereich $-1 \leq R_{pp} \leq 1$. Im Weiteren werden die Ergebnisse der Auswertung von R_{pp} bei Variation des Zeitversatzes im Bereich $0 \leq \tau \leq 1.1 \times 10^{-3} \text{ s} \approx 0.9 c_s / u_\infty$ diskutiert.

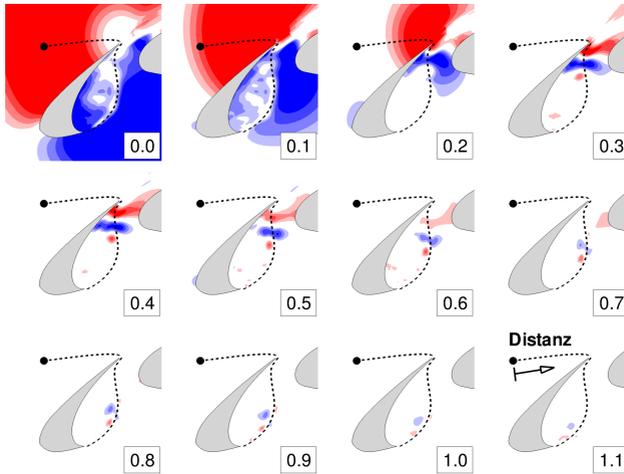


Abbildung 5-33: Lokale Variation des Korrelationskoeffizienten R_{pp} aus mehrfacher Kreuzkorrelation des (gefilterten) Drucksignals am Beobachterpunkt (●) mit (gefilterten) Drucksignalen aus der Umgebung des Vorflügels für zunehmenden Zeitversatz τ (in 10^{-3} s $\approx 0.82 c_s/u_\infty$) zwischen den korrelierten Signalen von oben links nach unten rechts. Rot kennzeichnet Bereiche mit hoher positiver, blau Bereiche mit ausgeprägt negativer Korrelation (Farbskala wie in Abbildung 5-34).

In Abbildung 5-33 sind zunächst für $\tau = 0$ positive Korrelationskoeffizienten auf der Saugseite und negative Korrelationskoeffizienten auf der Druckseite zu erkennen, was auf eine zum Dipolcharakter der Richtcharakteristik passende (vgl. Abbildung 5-31, links) gegenphasige Schallabstrahlung hinweist. Die räumliche Ausdehnung in Phase schwingender Druckstörungen ist stromauf etwa vergleichbar mit der Vorflügelsehne und lässt auf charakteristische Wellenlängen der Größenordnung $\lambda_a \approx 2 c_s$ schließen. Diese Wellenlänge kann man wiederum über $f \approx c_\infty(1 - Ma)/\lambda_a$ mit der dominanten Frequenz von $St \approx 2.44$ in Verbindung bringen. Mit zunehmender Zeitverschiebung von links nach rechts in der oberen Bildreihe ist dann eine Bewegung der korrelierten Zonen in Richtung der stumpfen Hinterkante zu beobachten. Bei einer Zeitverschiebung von $\tau = 0.3 \times 10^{-3}$ s $\approx 0.25 c_s/u_\infty$ haben sich die ursprünglich großflächigen, gegenphasigen Korrelationszonen erheblich verkleinert und in den Spalt zwischen Vorflügel und Hauptelement zurückgezogen. Ab dieser Stelle lassen sich die korrelierten Regionen mit weiter zunehmendem Zeitversatz entlang der freien Scherschicht noch bis in die Nähe des Ablösepunktes an der unteren Vorflügelkante zurückverfolgen, wobei die stetig schwächer werdende Färbung eine kontinuierliche Abnahme der Korrelation erkennen lässt. Interessant ist, dass sich nicht nur die Ausdehnung der Korrelationszonen deutlich gegenüber der ursprünglichen Größe (bei $\tau = 0$) verringert hat, sondern dass auch die Geschwindigkeit, mit der die Druckinformation entlang der freien Scherschicht wandert, viel langsamer als die in der obersten Bildreihe erscheint.

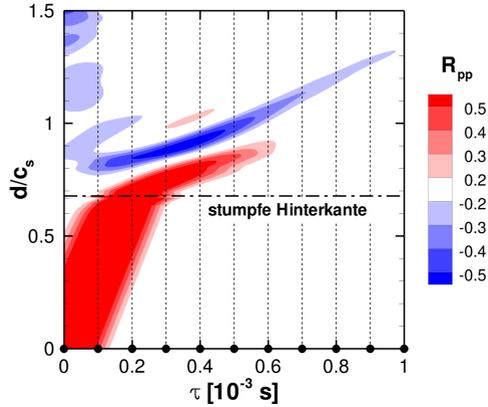


Abbildung 5-34: Variation des Korrelationskoeffizienten R_{pp} entlang der in den Abbildungen 5-32 und 5-33 markierten Linie mit Veränderung des Zeitversatzes τ zwischen den korrelierten Signalen. Die normierte Bogenlänge d/c_s wird ausgehend von der Position des Beobachters (●) bei $d/c_s = 0$ gemessen (vgl. Abbildung 5-33, letztes Bild). Die Lage der stumpfen Vorflügelhinterkante ist bei $d/c_s \approx 0.68$ markiert (---), der Ablösepunkt befindet sich in der Nähe von $d/c_s \approx 1.59$. Die vertikalen gestrichelten Linien kennzeichnen Momente auf der Zeitversatzachse, in denen in Abbildung 5-33 jeweils ein Momentanbild zu sehen ist.

Etwas deutlicher lässt sich die plötzliche Änderung von Größe und Geschwindigkeit der korrelierten Bereiche anhand der Raum-Zeit-Korrelationskarte in Abbildung 5-34 erkennen. In dieser Darstellung ist die gestrichelte Linie aus Abbildung 5-32 bzw. Abbildung 5-33 entlang der vertikalen Achse abgerollt, und die in der Kreuzkorrelation verwendete Zeitverschiebung nimmt entlang der horizontalen Achse zu. Der feste Beobachterpunkt liegt bei $d/c_s = 0$, wobei d die entlang der gestrichelten Linie gemessene Bogenlänge bezeichnet. Die Lage der Vorflügelhinterkante ist bei $d/c_s \approx 0.68$ markiert. An dieser Stelle tritt die Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit in Form einer sich plötzlich verändernden Steigung und die veränderte Größe der korrelierten Zone durch die Stauchung bzw. Streckung des roten Bereiches in vertikaler Richtung hervor. Das Vorzeichen der Störung ändert sich dabei nicht, d. h. ein konvektiv zur Kante transportiertes Druckminimum würde zunächst eine Druckabsenkung oberhalb des Vorflügels auslösen.

Um feststellen zu können, ob die je nach Region bzw. Zeitversatz unterschiedlich schnelle Bewegung der korrelierten Zonen zu aerodynamisch oder akustisch transportierten Störungen im Druckfeld passt, wurde in Abbildung 5-35 die Korrelationsfunktion $R_{pp}(d/c_s; \tau)$ für 10 verschiedene Werte von τ über der Bogenlänge des vermuteten Informationsflusspfades aufgetragen. Dividiert man die Distanz zwischen zwei lokalen R_{pp} Maxima, δd , durch den entsprechenden Zeitversatz $\delta \tau$ zwischen den jeweils betrachteten R_{pp} Kur-

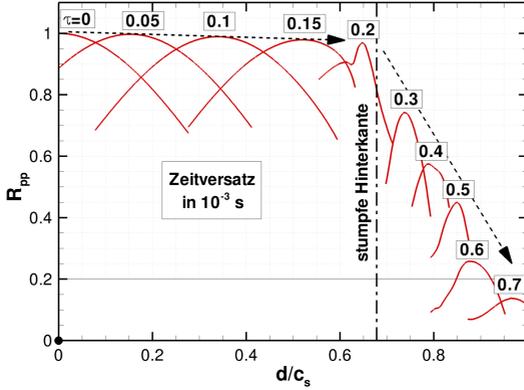


Abbildung 5-35: Verlauf des Korrelationskoeffizienten R_{PP} über der Bogenlänge entlang des vermuteten Informationsflusspfades bei Variation des Zeitversatzes τ (in $10^{-3} \text{ s} \approx 0.82 c_s / u_\infty$). Die normierte Bogenlänge d/c_s wird wie in Abbildung 5-34 ausgehend von der Beobachterposition (\bullet) gemessen. Die Lage der stumpfen Vorflügelhinterkante ist bei $d/c_s \approx 0.68$ markiert.

ven, kann man mit $u_{RPP} = \delta d / \delta \tau$ eine charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeit der Korrelationsspitze bestimmen. Mit dieser Definition lässt sich zwischen $\tau = 0$ und $\tau = 0.1 \times 0.82 c_s / u_\infty$ eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von $u_{RPP} \approx 4.2 u_\infty$ ablesen, ein Wert, der nur knapp 30% geringer als die Schallgeschwindigkeit im ruhenden Medium ausfällt ($c_\infty = u_\infty / 0.17 \approx 5.88 u_\infty$). Berücksichtigt man die auf der Vorflügelsgaube der Schallausbreitung entgegenwirkende hohe Strömungsgeschwindigkeit, erscheint dieses Ergebnis für eine akustische Informationsausbreitung charakteristisch und sinnvoll. Zwischen $\tau = 0.4 \times 0.82 c_s / u_\infty$ und $\tau = 0.5 \times 0.82 c_s / u_\infty$ beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit dagegen $u_{RPP} \approx 0.75 u_\infty$, was etwa mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit entlang des entsprechenden Kurvenstücks der betrachteten Stromlinie übereinstimmt. Die dazugehörige Veränderung in der Größenordnung der zusammenhängend korrelierten Bereiche kommt im Abklingverhalten der Korrelationsfunktion ebenfalls zum Ausdruck.

Abschließend ist darauf hinzuweisen, dass sich das Maximum der Korrelationsfunktion nur unwesentlich verringert, solange die Ausbreitungsgeschwindigkeit einen akustischen Informationsfluss erkennen lässt. Erst ab dem Erreichen der Vorflügelhinterkante bei $d/c_s > 0.68$ ist ein relativ schnelles Abfallen der lokalen Maxima zu beobachten, was sehr wahrscheinlich mit der Dynamik der turbulenten Schwankungsbewegungen in der freien Scherschicht zusammenhängt (siehe Abschnitt 5.2.3). Insgesamt deuten die Ergebnisse der aeroakustischen Analyse darauf hin, dass das Vorflügelgeräusch hauptsächlich durch das schnelle und wiederholte Vorbeiströmen von spannungweit kohärenten, in der freien

Scherschicht gewachsenen Wirbelstrukturen an der Vorflügelhinterkante hervorgerufen wird. Zumindest scheint bei der betrachteten Konfiguration unter den simulierten Anströmungsbedingungen in unmittelbarer Nähe dieser Kante ein statistisch signifikanter Anteil der Geräusche im Frequenzbereich $1 < St < 5$ zu entstehen, welche wenig später an der ausgewählten Beobachterposition wahrzunehmen sind.

Fazit

Mit der weiterentwickelten numerischen Methode ist es möglich geworden, die instationäre und kompressible Strömung um eine 3-Komponenten-Hochauftriebskonfiguration unter für den Landeanflug typischen Bedingungen wiederzugeben. Die hochauflösende numerische Strömungssimulation wurde auf dem Höchstleistungsrechner HLRB II (SGI Altix 4700) am Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt. Die entstandenen CPU-Kosten für die instationäre kompressible DES lassen sich pro Kontrollvolumen und pro äußerer Iteration mit $t_{\text{CPU}} \approx 1.7 \times 10^{-5}$ s beziffern, wobei für eine globale Konvergenz von nahezu drei Größenordnungen auf einem Zeitschritt ca. 9 bis 10 äußere Iterationen benötigt worden sind. Trotz im Rechengbiet lokal stark unterschiedlicher Zeit- und Längenskalen und zum Teil sehr kleiner Courant-Zahlen war die enge Kopplung von Druck-, Dichte- und Geschwindigkeitsfeldern global und zu jedem Zeitpunkt gewährleistet. Die DDES mit dem druckbasierten CFD-Verfahren erwies sich als geeignet, sowohl die dominierenden Lärmquellen in der Umströmung des Vorflügels als auch die akustische Wellenausbreitung im Nahfeld zu erfassen. Durch die Kombination mit Fernfeldextrapolationen auf Basis der Integralgleichung von Ffowcs-Williams und Hawkings wurden darüber hinaus Richtcharakteristik und spektrale Zusammensetzung des Vorflügelgeräusches im Fernfeld vorhergesagt. Nicht nur die aerodynamischen, sondern auch die akustischen Ergebnisse erwiesen sich dabei durchweg als plausibel und konsistent zu bekannten Ergebnissen aus der Literatur. Die Resultate der im letzten Abschnitt präsentierten statistischen Analyse aeroakustischer Phänomene in der Vorflügelregion geben berechtigten Anlass zu der Vermutung, dass das Vorflügelgeräusch im Wesentlichen durch das schnelle Vorbeiströmen von aus der freien Scherschicht stammenden, spannungweitig kohärenten Strukturen an der oberen Vorflügelhinterkante verursacht wird. Dieses Ergebnis bestätigt die von Dobrzynski und Pott-Pollenske auf Basis experimenteller Beobachtungen entwickelte „trailing-edge noise“ Theorie [40].

6 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist es auf der Basis eines konventionellen FV-Verfahrens und der DES gelungen, die Geräusche von massiv abgelösten Strömungen um technisch relevante Konfigurationen bei großer Reynoldszahl und kleiner Machzahl erfolgreich zu simulieren. Neben akustischen Fernfeldextrapolationen mit der Gleichung von Ffowcs-Williams und Hawkings waren dazu verschiedene Anpassungen am eingesetzten Strömungslöser ELAN erforderlich. Bei der Anwendung dieses strukturierten FV-Verfahrens auf aeroakustische Problemstellungen traten zwar zunächst Schwächen in der Kopplung von Druck-, Dichte- und Geschwindigkeitsfeldern hervor. Die Ursache für die in zeitgenauen Simulationen zu beobachtende Entkopplung dieser Felder konnte jedoch identifiziert und vollständig behoben werden, ohne dabei die Komplexität des Verfahrens nennenswert zu erhöhen oder die wünschenswerten Eigenschaften des druckbasierten Löser in anderer Weise nachteilig zu beeinflussen.

Der Schlüssel zur Behebung des Entkopplungsproblems lag in der Implementierung einer mit dem Druckkorrekturverfahren auf nichtversetzten Gittern kompatiblen und für präzise instationäre Berechnungen geeigneten Näherungsformel zur Bestimmung von Geschwindigkeitsvektoren auf (und Massenflüssen über) Kontrollvolumengrenzflächen. Im Anschluss an eine Studie alternativer Lösungsansätze nach dem Vorbild der ursprünglich von Rhie & Chow vorgeschlagenen Impulsinterpolation konnte durch Kombination der von Lien & Leschziner [122] und von Xue [227, S. 43 ff.] verwendeten Näherungen mit den zusätzlichen Approximationen (3.51)–(3.55) die RCM-Interpolation

$$\begin{aligned}
 u_{i,\mathfrak{f}} \approx \langle u_i \rangle_{\mathfrak{f}} + \Delta u_{i,\mathfrak{f}} \quad \text{mit} \quad \Delta u_{i,\mathfrak{f}} = & \underbrace{-\alpha_u \frac{\langle \delta V \rangle_{\mathfrak{f}}}{\langle a_{i,p} \rangle_{\mathfrak{f}}}}_{\text{Vorfaktor}} \left[\left(p_{\text{F}} - p_{\text{P}} - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle_1 g_j \right) \frac{\delta A_i}{g_k \delta A_k} \right]_{\mathfrak{f}} \\
 & + \underbrace{\alpha_u \frac{\langle a_{\text{P}}^t \rangle_{\mathfrak{f}}}{\langle a_{i,p} \rangle_{\mathfrak{f}}} \frac{\gamma_1 \Delta u_{i,\mathfrak{f}}^o + \gamma_2 \Delta u_{i,\mathfrak{f}}^{oo}}{\gamma_1 + \gamma_2} + (1 - \alpha_u) \Delta u_{i,\mathfrak{f}}^*}_{\text{Fluxkompensator}}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

entwickelt werden (siehe Abschnitt 3.2.2, S. 70 ff.), welche eine enge Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern in zeitgenauen Simulationen garantiert und zum Einsatz

in aeroakustischen Grobstruktursimulationen geeignet ist [104]. Die Unterschiede zur Variante von Xue [227] sind in (6.1) durch geschweifte Klammern markiert. Gegenüber der ursprünglichen Implementierung wurde der Vorfaktor im Kopplungsterm verändert und ein bisher nicht vorhandener Fluxkompensationsterm für (pseudo-)zeitgenaue Simulationen hinzugefügt. Die in Kapitel 3.2 konsequent aus der diskretisierten Impulsbilanz abgeleitete RCM-Interpolation weist mit diesen beiden Änderungen gegenüber der RCX-Interpolation (und entsprechenden Anpassungen am Druckkorrekturverfahren) eine Reihe vorteilhafter Eigenschaften auf.

Die Interpolationsvorschrift (6.1) ist eine diskrete Approximation von maximal 2. Ordnung, dadurch gekennzeichnet, dass

1. die Approximation der Geschwindigkeit $u_{i,\mathbf{x}}$ unabhängig von der Zeitschrittweite ist,
2. keine Abhängigkeit vom Relaxationsfaktor der diskreten Impulsbilanz besteht, sie
3. für den Fall von $\Delta u_{i,\mathbf{x}} = 0$ einer linearen Interpolation (A.21) entspricht, sie sich
4. zum Einsatz in reibungsbehafteten und reibungsfreien Simulationen eignet, sie
5. auf gestreckten und nichtorthogonalen Rechnernetzen verwendbar sowie
6. mit unstrukturierten Lösern kompatibel ist und sie
7. keine freien Parameter enthält.

Zwar treffen die Punkte 2-7 prinzipiell auch auf die RCX-Interpolation zu, dennoch ist die Interpolationsvorschrift (6.1) ein zentrales Ergebnis der vorliegenden Arbeit, da der erste Punkt wichtig ist, um global eine enge Kopplung von Druck-, Dichte- und Geschwindigkeitsfeldern in instationären Simulationen sicherzustellen, was wiederum Voraussetzung für die Simulation aeroakustischer Zusammenhänge ist (siehe Abschnitt 3.2.3, S. 79 f. sowie Abschnitt 3.2.4, S. 81 ff.). Genau genommen ist auch Punkt 2 bei der RCX-Interpolation nicht ganz zutreffend, da die Multiplikation des Kopplungsterms mit $\beta_p = 1/\alpha_u$ bei dieser Variante eine entsprechende Skalierung des Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeits- und Druckkorrekturen in (3.84) nach sich zieht, wodurch das Konvergenzverhalten des Druckkorrekturverfahrens in Abhängigkeit der Unterrelaxation beeinträchtigt werden kann.

Um die korrekte programmtechnische Umsetzung der weiterentwickelten Impulsinterpolation und die angestrebte Unabhängigkeit der räumlichen Diskretisierung von der Zeitschrittweite überprüfen zu können, wurden in Kapitel 4 zunächst reibungsfreie Simulationen einer periodischen Anordnung von Taylor-Green Wirbeln durchgeführt. Trotz der ausgeprägten Sensitivität dieses Testfalls gegenüber numerischen Approximationsfehlern und einer über zwei Größenordnungen variierten Zeitschrittweite zeichneten sich die mit der RCM-Interpolation erzielten Resultate auch nach längerer Integrationszeit noch durch eine nahezu perfekte Koinzidenz aus, während sich die bei verschiedenen Zeitschrittweiten mit

der RCX-Interpolation berechneten Ergebnisse bereits unmittelbar nach der Initialisierung voneinander entfernten. Der modifizierten Impulsinterpolation konnten in Verbindung mit den entsprechenden Anpassungen am Druckkorrekturverfahren außerdem sehr gute Konvergenzeigenschaften nachgewiesen werden (siehe Abschnitt 4.1, S. 106 ff.).

Nach erfolgreicher Verifikation der Implementierung war zu zeigen, dass die RCM-Variante der Impulsinterpolation trotz gesteigerter numerischer Dissipation für den Einsatz in Grobstruktursimulationen geeignet ist. Zu diesem Zweck sind sowohl reibungsfreie als auch reibungsbehaftete Simulationen des Zerfalls isotroper Turbulenz durchgeführt worden. Im Ergebnis zeigt sich die RCM-Interpolation insbesondere auf groben Gittern der weniger dissipativen RCX-Interpolation überlegen. Erst unter Verwendung des weiterentwickelten numerischen Verfahrens sind sowohl die Energiespektren des Geschwindigkeitsfeldes als auch die des Druckfeldes immer physikalisch sinnvoll und konsistent zur LES Theorie, vorausgesetzt, dass das CDS Konvektionsschema und eine an die räumliche Auflösung angepasste C_{DES} Konstante verwendet werden. Eine Änderung dieses Modellparameters erschien mit dem Wechsel von der RCX- zur RCM-Interpolation indes nicht erforderlich (siehe Abschnitt 4.2, S. 113 ff.).

Das Ziel dieser Arbeit bestand in der Simulation von Geräuschen abgelöster Strömungen bei großer Reynoldszahl und kleiner Machzahl. Ergebnisse der Anwendung des weiterentwickelten Verfahrens in diesem Einsatzbereich sind in Kapitel 5 dokumentiert. Auf der Basis hybrider Turbulenzbehandlung wurden zwei für unterschiedliche „airframe noise“ Quellen repräsentative Testfälle mit massiver Strömungsablösung simuliert.

Stellvertretend für eine Doppelverstrebung im Fahrwerk eines Flugzeuges wurde mit dem „two struts“ Testfall zunächst der Prototyp einer Interaktionslärmquelle betrachtet. Bei dieser geometrisch simplen, aus zwei Zylindern mit quadratischer Grundfläche bestehenden Tandem-Konfiguration stand der Vergleich mit experimentellen Daten im Vordergrund. Die hochgradig turbulente Umströmung der stumpfen Körper wurde für zwei verschiedene Anstellwinkel unter Verwendung des SALSA-Hybridmodells im DDES Modus simuliert. Während den kompressiblen DESen sind instationäre Strömungsdaten auf impermeablen und permeablen Oberflächen im Nahfeld gespeichert worden, um anschließend die Berechnung der Schallausbreitung ins Fernfeld mit der Gleichung von Ffowcs-Williams und Hawkings sowie eine Bewertung des Beitrags akustischer Quadrupolquellen zu ermöglichen. Im Sinne einer fortgesetzten Validierung des zweistufigen Simulationsansatzes für aeroakustische Berechnungen wurden nicht nur Statistiken der simulierten Strömung mit Messergebnissen gegenübergestellt, sondern es wurde auch die spektrale Zusammensetzung von Drucksignalen auf den Mantelflächen der Zylinder sowie an mehreren Beobachterpositionen im Fernfeld zwischen Simulation und Experiment verglichen. Die Vergleichbarkeit der akustischen Ergebnisse wurde dabei durch geeignete Pegelkorrekturen weitgehend sichergestellt.

Während im nichtangestellten Fall 1 ($\alpha = 0^\circ$) sowohl im Nahfeld als auch im Fernfeld eine solide Übereinstimmung der numerischen und experimentellen Ergebnisse festzustellen war, zeigten sich im angestellten Fall 2 ($\alpha = -15^\circ$) bereits im Nahfeld Differenzen. Diese Unterschiede ließen sich aber auf eine Deflektion des Windkanalstrahls infolge der bei Schräganströmung entstehenden Zirkulation zurückführen. Im Fall 1 war der Auftrieb dagegen gleich Null und dieser Effekt nicht zu beobachten. Die spektrale Leistungsdichte der mit Mikrofonen im Fernfeld aufgezeichneten Schalldrucksignale war für $\alpha = 0^\circ$ im verlässlichen Frequenzbereich beinahe deckungsgleich mit den Ergebnissen der Simulation, unabhängig davon, ob impermeable oder permeable Kontrollflächen zur Fernfeldextrapolation verwendet wurden. Die verbreitete Theorie, dass der Beitrag von Quadrupolquellen bei kleiner Machzahl gegenüber dem von Dipolquellen zu vernachlässigen ist, wird durch dieses Ergebnis bestätigt. Darüber hinaus ist zu konstatieren, dass die wesentlichen Geräuscentstehungs- und ausbreitungsmechanismen zumindest im Fall 1 mit hinreichender Genauigkeit von der Simulation erfasst worden sind. Das weiterentwickelte numerische Verfahren hat somit seinen Zweck erfüllt, und der in zweierlei Hinsicht hybride Ansatz (RANS/LES und DES/FWH) erweist sich insgesamt als sehr gut geeignet für die Vorhersage des durch massiv abgelöste Strömung erzeugten Geräusches (siehe Abschnitt 5.1, S. 129 ff.).

Als zweiter aeroakustischer Testfall wurde eine generische, aus Vorflügel, Hauptelement und Fowler-Klappe bestehende Hochauftriebskonfiguration unter Landeanflugbedingungen simuliert. Im Fokus der Untersuchung stand hier die Analyse des dominierenden Schallentstehungsmechanismus am Vorflügel, da dieser einen erheblichen Teil zur Geräuschemission landender Flugzeuge beiträgt, eine gesicherte Theorie zum Verständnis der Schallentstehung jedoch noch nicht existiert [35]. Auch hier war die kompressible DDES auf Basis des SALSA-Hybridmodells in der Lage, sowohl die wesentlichen Lärmquellen in Form kohärenter turbulenter Strukturen als auch die akustische Wellenausbreitung im Nahfeld zu erfassen. Eine Entkopplung von Druck-, Dichte- und Geschwindigkeitsfeldern war trotz einer sehr feinen zeitlichen Auflösung zu keinem Zeitpunkt zu beobachten, und die Simulation verlief stabil. Durch die Kombination mit druckbasierten Fernfeldextrapolationen auf Basis der Integralgleichung von Ffowcs-Williams und Hawkings konnten Richtcharakteristik und spektrale Zusammensetzung des vom Vorflügel ins Fernfeld abgestrahlten Geräusches vorhergesagt werden. Die in Nah- und Fernfeld erzielten Resultate erwiesen sich als konsistent zu bekannten Ergebnissen aus der Literatur. Durch eine statistische Analyse der in der zeitgenauen Simulation erfassten aeroakustischen Phänomene wurde letztlich das schnelle Vorbeiströmen spannungweitig kohärenter turbulenter Strukturen an der oberen Vorflügelhinterkante als wesentlicher Geräuscentstehungsmechanismus identifiziert, und die Entstehung dieser Strukturen konnte bis in die freie Scherschicht zurückverfolgt werden (siehe Abschnitt 5.2, S. 155).

Abschließend kann festgestellt werden, dass die Weiterentwicklung der Impulsinterpolation und die entsprechenden Anpassungen am Druckkorrekturalgorithmus nicht nur für

Grobstruktursimulationen und für die Berechnung von Strömungsgeräuschen bei kleiner Machzahl von Bedeutung sind. Erfahrungsgemäß treten die Unterschiede zwischen den RCX- und RCM-Formulierungen auch dann hervor, wenn sehr kleine Relaxationsfaktoren in der Impulsbilanz verwendet werden und/oder räumlich und zeitlich darstellbare Skalen lokal stark differieren. Die Einführung des Fluxkompensationsterms in (3.57) bzw. (6.1) ist generell vorteilhaft für eine (pseudo-)zeitgenaue Anwendung des Strömungslösers in komplexen, praxisrelevanten 3D-Geometrien, wenn eine stärkere Gittervergrößerung und Unterrelaxation aus Kosten- bzw. Stabilitätsgründen unvermeidlich ist. Sie hat sich nicht nur im Rahmen der vorliegenden Arbeit, sondern auch bereits in Simulationen geometrisch komplexerer Konfigurationen [84, 223] sowie bei der Verwendung in einem kontinuierlichen Adjungiertenverfahren zur Optimierung instationärer Strömungen [23] bewährt.

A Anhang

A.1 Allgemein krummlinige Koordinaten in 3D

Zur Darstellung von Gradienten auf Kontrollvolumengrenzflächen werden einige elementare Eigenschaften krummliniger Koordinaten benötigt, welche im Folgenden angelehnt an [182] und [212] abgeleitet werden. Kartesische Koordinaten werden dabei entweder mit (x_1, x_2, x_3) oder mit (x, y, z) , krummlinige Koordinaten entweder mit (ξ^1, ξ^2, ξ^3) oder mit (ξ, η, ζ) bezeichnet, und es wird zum Beispiel mit $\xi_x = \partial\xi/\partial x$ eine abkürzende Schreibweise für partielle Ableitungen vereinbart.

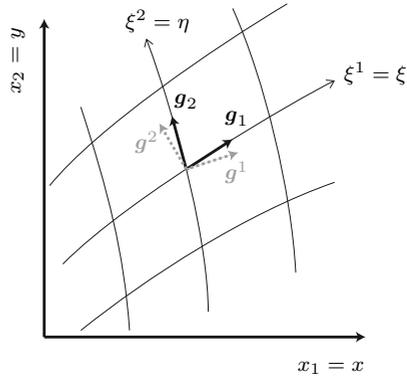


Abbildung A-1: Krummlinige Koordinaten in 2D

In expliziter Parameterdarstellung lauten die Koordinaten des krummlinigen Variablenraumes

$$\xi^1 = \xi = \xi(x, y, z), \quad \xi^2 = \eta = \eta(x, y, z), \quad \xi^3 = \zeta = \zeta(x, y, z).$$

Die Transformation ist über die totalen Differentiale aller Koordinaten bestimmt:

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi_x dx + \xi_y dy + \xi_z dz \\ d\eta &= \eta_x dx + \eta_y dy + \eta_z dz \\ d\zeta &= \zeta_x dx + \zeta_y dy + \zeta_z dz \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}}_{J_{ij}^{-1}} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Die Koordinatentransformation soll eindeutig und umkehrbar sein, so dass man die kartesischen Koordinaten wie folgt darstellen kann:

$$x_1 = x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad x_2 = y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad x_3 = z = z(\xi, \eta, \zeta).$$

Die Rücktransformation erhält man analog durch:

$$\begin{aligned} dx &= x_\xi d\xi + x_\eta d\eta + x_\zeta d\zeta \\ dy &= y_\xi d\xi + y_\eta d\eta + y_\zeta d\zeta \\ dz &= z_\xi d\xi + z_\eta d\eta + z_\zeta d\zeta \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}}_{J_{ij}} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

J_{ij} wird als Jakobimatrix bezeichnet, und sie enthält in ihren Spalten die kartesischen Koordinaten der Basisvektoren $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$, welche in jedem Punkt in Richtung der krummlinigen Koordinatenlinien (ξ, η, ζ) zeigen. Man bezeichnet diese Basis daher auch als natürliche oder kovariante Basis, in Tensornotation sind kovariante Basis \mathbf{g}_j und deren kartesische Koordinaten g_i wie folgt definiert:

$$\mathbf{g}_j = \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad g_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} = J_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

Die Abbildungsmatrizen der Hin- (A.1) und Rücktransformation (A.2) sind zueinander invers, und man kann nach der Adjunktenregel schreiben:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & -(x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta) & x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \\ -(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & -(x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi) \\ y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi & -(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

\mathcal{J} bezeichnet die Determinante der Jakobimatrix, welche man nach der Regel von Sarrus berechnen kann:

$$\mathcal{J} = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta x_\zeta - z_\eta y_\zeta x_\xi - z_\zeta y_\xi x_\eta.$$

Beschränkt man sich auf Rechtssysteme, ist die Determinante der Jakobimatrix stets positiv ($\mathcal{J} > 0$). Eine geometrische Interpretation der Determinante $\mathcal{J} = \det J_{ij} = \det J_{ji}$ ist durch das Volumen des von den Spalten- oder Zeilenvektoren von J_{ij} aufgespannten

Spats gegeben. In tensorieller Darstellung erhält man:

$$\mathcal{J} = g_i \epsilon_{ijk} g_j g_k = \epsilon_{ijk} g_i g_j g_k. \quad (\text{A.5})$$

Ein Koeffizientenvergleich in (A.4) liefert elementare Beziehungen zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren beider Transformationen:

$$\begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta \\ x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta \\ x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial \xi^1}{\partial x_i} = \frac{\epsilon_{ijk} g_j g_k}{\epsilon_{mno} g_m g_n g_o} = \overset{1}{g}_i, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{bmatrix} y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi \\ x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi \\ x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial \xi^2}{\partial x_i} = \frac{\epsilon_{ijk} g_j g_k}{\epsilon_{mno} g_m g_n g_o} = \overset{2}{g}_i, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{bmatrix} y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi \\ x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta \\ x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial \xi^3}{\partial x_i} = \frac{\epsilon_{ijk} g_j g_k}{\epsilon_{mno} g_m g_n g_o} = \overset{3}{g}_i. \quad (\text{A.8})$$

Mit der Definition der Koordinaten des Kreuzproduktes,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k = c_i, \quad (\text{A.9})$$

lassen sich die rechten Seiten in (A.6)–(A.8) als skalierte Kreuzprodukte aus den kartesischen Koordinaten von je zwei Vektoren der kovarianten Basis auffassen.

Geometrisch liefert das Kreuzprodukt einen Vektor \mathbf{c} , der auf \mathbf{a} und \mathbf{b} senkrecht steht, der zusammen mit \mathbf{a} und \mathbf{b} ein Rechtssystem bildet und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms ist. Offenbar erhält man als Ergebnis des Koeffizientenvergleichs eine zu g_j orthogonale Basis g^j und deren kartesische Koordinaten $\overset{j}{g}_i$ wie folgt:

$$\mathbf{g}^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad \overset{j}{g}_i = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial x_j}{\partial \xi^i} \right]^{-1} = J_{ji}^{-1}. \quad (\text{A.10})$$

Die so definierte Basis wird als kontravariante Basis der krummlinigen Koordinaten bezeichnet, ihre Basisvektoren $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$ stehen gemäß (A.6)–(A.8) senkrecht auf den durch jeweils zwei Koordinatenlinien aufgespannten Flächen. Die aus den kartesischen Koordinaten der kontravarianten Basisvektoren zeilenweise gebildete Matrix $(\overset{1}{g}_i, \overset{2}{g}_i, \overset{3}{g}_i)^T$ ist demnach die Inverse der aus den kartesischen Koordinaten der kovarianten Basisvektoren spaltenweise gebildeten Matrix (g_i, g_i, g_i) .

Zwischen ko- (A.3) und kontravarianter (A.10) Basis ergibt sich mit $J_{ik}J_{kj}^{-1} = \delta_{ij}$ und der Definition des δ -Tensors $\delta = \delta_{ij} e_i e_j$ folgende Orthogonalitätsrelation:

$$\mathbf{g}_k \mathbf{g}^k = \delta \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j^k = \delta_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Entsprechend findet man mit $J_{jk}^{-1} J_{ki} = \delta_{ji} = \delta_{ij}$ die Orthogonalitätsrelation:

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_k \mathbf{g}_i^j = \delta_{ij}. \quad (\text{A.12})$$

Ein Vektor \mathbf{g}^j ist demnach zu allen Vektoren \mathbf{g}_i für $i \neq j$ orthogonal.

Mit Definition der beiden zueinander reziproken Basen \mathbf{g}_i und \mathbf{g}^i sind für einen Vektor \mathbf{a} nun neben der kartesischen Darstellung $\mathbf{a} = \hat{a}_i e_i$ auch zwei spezielle Darstellungen im krummlinigen Koordinatensystem möglich:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_i \mathbf{g}^i. \quad (\text{A.13})$$

Man bezeichnet die Koordinaten in Bezug auf die kovariante Basis \mathbf{g}_i als kontravariant und kennzeichnet sie mit einem hochgestellten Index (a^i), umgekehrt bezeichnet man die Koordinaten in Bezug auf die kontravariante Basis \mathbf{g}^i als kovariant und kennzeichnet sie mit einem tiefgestellten Index (a_i).

Für einen Tensor zweiter Stufe $\mathbf{A} = \hat{a}_{ij} e_i e_j$ ist auch die Verwendung gemischter Basen möglich, woraus sich insgesamt 4 Darstellungen im krummlinigen Koordinatensystem ergeben:

$$\mathbf{A} = a^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = a_i^j \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j = a_i^j \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j = a_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j. \quad (\text{A.14})$$

Aus (A.13) und (A.14) lassen sich in Verbindung mit (A.3) und (A.10) schließlich die nützlichen Beziehungen

$$\hat{a}_i = J_{ij} a^j = J_{ji}^{-1} a_j \quad \text{und} \quad \hat{a}_{ij} = J_{im} J_{jn} a^{mn} = J_{mi}^{-1} J_{nj}^{-1} a_{mn} \quad (\text{A.15})$$

zur Transformation kontravarianter oder kovarianter Tensorkoordinaten in die kartesischen Koordinaten \hat{a}_i bzw. \hat{a}_{ij} bezüglich der Basis e_i ableiten, die beispielsweise in Kapitel 5.1 (für den Spezialfall einer orthonormalen Ausgangsbasis mit $J_{ji}^{-1} = J_{ij}$) zur Rotation der Simulationsergebnisse in das Koordinatensystem des experimentellen Aufbaus verwendet worden sind.

A.2 Approximation von Integralen

A.2.1 Volumenintegrale

Bei der Berechnung von Volumenintegralen betrachtet man den Integranden als innerhalb eines Kontrollvolumens V konstant, bzw. man überführt die FV-Integration von ϕ zunächst in ein Produkt aus Volumenmittelwert von ϕ und Volumen δV und approximiert den Volumenmittelwert mit einer Genauigkeit von zweiter Ordnung durch den Wert von ϕ im Kontrollvolumenzentrum [56], d. h.

$$\int_V \phi \, dV = {}^F\bar{\phi} \, \delta V \approx \phi_P \, \delta V. \quad (\text{A.16})$$

Wie durch Verwendung des in Kapitel (2.3.2) definierten Symbols ${}^F\bar{\phi}$ für den Volumenmittelwert vorweggenommen, kann die Volumenmittelung auch als eine räumliche Filterung aufgefasst werden [66]:

$$\begin{aligned} {}^F\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{y}, t) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d^3\mathbf{y} \quad \text{mit } G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{\delta V} & \text{innerhalb von } V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \frac{1}{\delta V} \int_V \phi(\mathbf{y}, t) \, dV, \quad \text{für } \mathbf{x} \text{ innerhalb von } V. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Übersetzt man die Ausdehnung des Kontrollvolumens δV in eine Filterbreite Δ , weist diese Art der Volumenmittelung Gemeinsamkeiten mit dem Box-Filter G_B in (2.46) auf. Allerdings besteht neben dem Übergang vom 1-dimensionalen zum 3-dimensionalen ein Unterschied durch die bei der diskreten Volumenmittelung nicht gegenüber dem jeweiligen Kontrollvolumen verschiebbliche Filterfunktion. Im Gegensatz zur kontinuierlichen Filterung wird auch durch mehrmaliges Anwenden dieser diskreten Filteroperation keine weitere Änderung eines bereits volumengemittelten Feldes hervorgerufen. Das heißt diese Mittelungsoperation ist idempotent, und beim Übergang von der kontinuierlichen zur diskreten Formulierung gehen alle auf dem Rechengitter nicht darstellbaren Fluktuationen verloren [178].

A.2.2 Oberflächenintegrale

Analog zur Vorgehensweise bei der Volumenintegration wird auch der Integrand auf Kontrollvolumengrenzflächen als konstant betrachtet, bzw. man approximiert den Mittelwert

von ϕ , $\bar{\phi}$, auf einer Oberfläche δA mit einer Genauigkeit von 2. Ordnung durch den Wert von ϕ im Flächenzentrum, $\phi_{\mathbf{f}}$, [56], d. h.

$$\int_A \phi \, dA = \bar{\phi} \delta A \approx \phi_{\mathbf{f}} \delta A. \quad (\text{A.18})$$

A.3 Approximation von Variablen

A.3.1 Im Kontrollvolumenzentrum

Da ELAN alle Transportgrößen zell-zentriert speichert und keine versetzten Gitter verwendet werden, wird zur Bestimmung von ϕ in FV-Zentren keine Approximation benötigt.

A.3.2 Auf Kontrollvolumengrenzflächen

In ELAN sind mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung von Variablen auf FV-Grenzflächen vorhanden. Am Beispiel der FV-Grenzfläche \mathbf{e} wird nachfolgend ein kurzer Überblick über die implementierten Schemata gegeben, wobei auf Basis der $F_{\mathbf{e}}^{\pm}$ -Funktionen

$$F_{\mathbf{e}}^+ = \begin{cases} 1 & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{e}} > 0) \\ 0 & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{e}} \leq 0) \end{cases} \quad \text{und} \quad F_{\mathbf{e}}^- = \begin{cases} 0 & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{e}} \geq 0) \\ 1 & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{e}} < 0) \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

eine möglichst kompakte Darstellung für abhängig von der Strömungsrichtung formulierte Interpolationen angestrebt wird. Aus Effizienzgründen wurde diese explizite Fallunterscheidung bei der programmtechnischen Umsetzung der diskretisierten konvektiven Terme in (3.15) durch Verwendung von max-Funktionen umgangen.

„Upwind“-Interpolation (UDS): Dieses Schema setzt $\phi_{\mathbf{e}}$ mit dem Wert von ϕ im stromauf gelegenen, benachbarten FV-Zentrum gleich, um so dem Transportcharakter der Strömung zu entsprechen:

$$\phi_{\mathbf{e}, \text{UDS}} \approx F_{\mathbf{e}}^+ \phi_{\mathbf{P}} + F_{\mathbf{e}}^- \phi_{\mathbf{E}} = \begin{cases} \phi_{\mathbf{P}} & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{e}} > 0) \\ 0 & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{e}} = 0) \\ \phi_{\mathbf{E}} & (\text{wenn } \dot{m}_{\mathbf{e}} < 0) \end{cases}. \quad (\text{A.20})$$

Diese Approximation $\mathcal{O}(\delta x)$ ist zwar uneingeschränkt stabil, aber infolge des Abschneidefehlers von 1. Ordnung meist durch starke numerische Diffusion geprägt [56].

Lineare Interpolation (CDS): Wird ϕ_e im Mittelpunkt der FV-Grenzfläche durch lineare Interpolation von ϕ aus den beiden benachbarten FV-Zentren bestimmt, erhält man mit

$$\phi_{e,\text{CDS}} = \langle \phi \rangle_e \approx (1 - \lambda) \phi_P + \lambda \phi_E \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_P|}{|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_P| + |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_e|} \quad (\text{A.21})$$

eine kompakte Approximation $\mathcal{O}(\delta x^2)$ [56], welche sich (auf kartesischen Gittern) durch verschwindende numerische Dissipation auszeichnet. Bei Verwendung der linearen Interpolation als Konvektionsschema können allerdings Oszillationen in der Lösung auftreten, wenn die lokale Péclet-Zahl, die ein richtungsabhängiges Maß für das Verhältnis von Konvektion zu Diffusion innerhalb eines FV darstellt (z. B. $Pe_x = u \delta x / \Gamma_\phi$), im Betrag $Pe_{\text{krit.}} = 2$ übersteigt [156].

Limitierte Interpolation (TVD): Durch Interpolation auf Basis von Polynomen höherer Ordnung lässt sich eine verbesserte Genauigkeit der Approximation von ϕ_e erzielen. Allerdings steigt mit zunehmender Approximationsordnung nicht nur die Anzahl der zur Interpolation benötigten Stützstellen, sondern auch die Anzahl lokaler Extremwerte des Polynoms und damit die Neigung zu Oszillationen in der Lösung. Bei den nach dem TVD-Prinzip limitierten Interpolationsschemata höherer Ordnung wird die Entstehung bzw. Verstärkung von bestehenden Extremwerten durch eine lokal adaptive Reduktion der Ordnung vermieden. Die TVD-Interpolation in ELAN basiert auf der Formulierung

$$\phi_{e,\text{TVD}} = \phi_{e,\text{UDS}} + \frac{1}{2} \left[F_{e^+} \varphi(r_P) - F_{e^-} \varphi(r_E) \right] (\phi_E - \phi_P), \quad (\text{A.22})$$

wobei sich mit den in (A.19) definierten F_{e^\pm} -Funktionen und der Hilfsfunktion

$$\varphi(r) = \frac{1}{2} \left[(1 + \varkappa) \psi(\beta_1, r) + (1 - \varkappa) r \psi(\beta_2, r^{-1}) \right] \quad (\text{A.23})$$

verschiedene limitierte Schemata in Abhängigkeit des Parameters \varkappa realisieren lassen [227]. Tabelle A-1 zeigt eine Übersicht der sich im unlimitierten Fall, d. h. für $\psi = 1$, ergebenden Approximationen höherer Ordnung für den Fall eines positiven Massenflusses über die FV-Grenzfläche. Die Werte von ϕ in den nicht der FV-Grenzfläche e benachbarten Punkten

Tabelle A-1: Übersicht nicht-limitierter Schemata höherer Ordnung, adaptiert nach [184].

Schema	\varkappa	$\varphi(r)$	$\phi_e (\dot{m}_e > 0)$	$Pe_{\text{krit.}}$	$\mathcal{O}(\delta x^n)$
CDS2	1	1	$1/2 \phi_P + 1/2 \phi_E$	2	$n = 2$
QUICK	1/2	$3/4 + 1/4 r$	$6/8 \phi_P + 3/8 \phi_E - 1/8 \phi_W$	8/3	$n = 3$
CUI	1/3	$2/3 + 1/3 r$	$5/6 \phi_P + 2/6 \phi_E - 1/6 \phi_W$	3	$n = 3$
LUDS	-1	r	$3/2 \phi_P - 1/2 \phi_W$	∞	$n = 2$

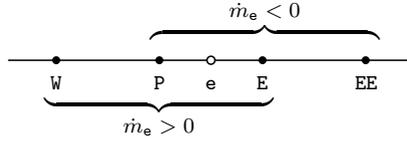


Abbildung A-2: An TVD-Interpolation beteiligte FV-Zentren mit Kompassnotation in 1D.

W bzw. EE (vgl. Abbildung A-2) sind im Argument der Hilfsfunktion, r , enthalten. Sie werden mit Hilfe von Gradienten approximiert. Gemäß [227] ergeben sich die Näherungen

$$r_P = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} \approx \frac{2g_j \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_P}{\phi_E - \phi_P} - 1 \quad \text{und} \quad r_E = \frac{\phi_{EE} - \phi_E}{\phi_E - \phi_P} \approx \frac{2g_j \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_E}{\phi_E - \phi_P} - 1. \quad (\text{A.24})$$

Zur Limitierung wird in (A.23) ein asymmetrischer „Slope“-Limiter $\psi(\beta, r)$ nach Van Leer [218], [227] verwendet,

$$\psi(\beta, r) = \max [0, \min (1, \beta r)], \quad (\text{A.25})$$

dessen Asymmetrieparameter $\beta_1 = \frac{3+\varkappa}{1+\varkappa}$ und $\beta_2 = \frac{3-\varkappa}{1-\varkappa}$ mit Festlegung von \varkappa fixiert sind.

A.4 Approximation von Gradienten

A.4.1 Im Kontrollvolumenzentrum

Die Berechnung von zellzentrierten Gradienten einer Größe ϕ erfolgt auf Basis der in Abschnitt A.2 eingeführten Approximationen für Volumen- und Oberflächenintegrale unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß, es gilt zunächst:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_P \delta V \stackrel{(\text{A.16})}{\approx} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV = \oint_{A(V)} \phi dA_i \stackrel{(\text{A.18})}{\approx} \sum_{\mathbf{f}} \phi_{\mathbf{f}} \delta A_{i,\mathbf{f}}. \quad (\text{A.26})$$

Demgemäß kann man den Gradienten im Kontrollvolumenzentrum mit

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_P \approx \frac{\sum_{\mathbf{f}} \phi_{\mathbf{f}} \delta A_{i,\mathbf{f}}}{\delta V} \quad (\text{A.27})$$

bis auf einen Fehler von 2. Ordnung genau bestimmen, vorausgesetzt, dass zur Berechnung des Volumens δV , der Flächen $\delta A_{i,\mathbf{f}}$ sowie der flächenzentrierten Werte $\phi_{\mathbf{f}}$ Schemata der

gleichem oder einer höheren Approximationsordnung eingesetzt werden. In ELAN wird $\phi_{\mathbf{f}}$ in (A.27) durch $\langle \phi \rangle_{\mathbf{f}}$ gemäß (A.21) approximiert.

A.4.2 Auf Kontrollvolumengrenzflächen

Für den Gradienten einer Größe ϕ , $\nabla\phi$, folgt mit der Kettenregel

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_k} \mathbf{e}_k = \frac{\partial\phi}{\partial\xi^i} \frac{\partial\xi^i}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \stackrel{(A.10)}{=} \frac{\partial\phi}{\partial\xi^i} \mathbf{g}^i, \quad (\text{A.28})$$

oder ausgeschrieben

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\xi^1} \mathbf{g}^1 + \frac{\partial\phi}{\partial\xi^2} \mathbf{g}^2 + \frac{\partial\phi}{\partial\xi^3} \mathbf{g}^3. \quad (\text{A.29})$$

Betrachtet man exemplarisch eine FV-Grenzfläche \mathbf{f} , ist die Koordinatenlinie ξ^1 gerade durch den Verbindungsvektor von \mathbf{P} nach \mathbf{F} definiert, und die Richtungsableitung $\partial\phi/\partial\xi^1$ kann direkt aus benachbarten zellzentralen Werten bestimmt werden (siehe Abbildung 3-1, S. 61). Eine direkte Auswertung der Richtungsableitungen $\partial\phi/\partial\xi^2$ und $\partial\phi/\partial\xi^3$ setzt jedoch Kenntnis über Werte von ϕ auf den Kontrollvolumenkanten voraus, weswegen die randflächentangentiale Ableitungen im Programm durch den in \mathbf{P} und \mathbf{F} mit (A.27) zellzentral berechneten und linear mit (A.21) auf \mathbf{f} interpolierten Gradienten $\langle \nabla\phi \rangle_{\mathbf{f}}$ approximiert werden:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi^1} \approx (\phi_{\mathbf{F}} - \phi_{\mathbf{P}}), \quad \frac{\partial\phi}{\partial\xi^2} \approx \langle \nabla\phi \rangle_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}_2, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\xi^3} \approx \langle \nabla\phi \rangle_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}_3. \quad (\text{A.30})$$

Einsetzen der Beziehungen (A.30) in Gleichung (A.29) führt auf der Fläche \mathbf{f} zu:

$$\langle \nabla\phi \rangle_{\mathbf{f}} \approx (\phi_{\mathbf{F}} - \phi_{\mathbf{P}}) \mathbf{g}^1 + \langle \nabla\phi \rangle_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}_2 \mathbf{g}^2 + \langle \nabla\phi \rangle_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}_3 \mathbf{g}^3. \quad (\text{A.31})$$

Allgemein kann man einen interpolierten Gradienten wie folgt in seine Einzelkomponenten bzgl. der kontravarianten Basis zerlegen

$$\langle \nabla\phi \rangle = \langle \nabla\phi \rangle_1 \mathbf{g}^1 + \langle \nabla\phi \rangle_2 \mathbf{g}^2 + \langle \nabla\phi \rangle_3 \mathbf{g}^3,$$

wobei sich die kovarianten Koordinaten $\langle \nabla\phi \rangle_i$ wiederum durch die Projektion des interpolierten Gradienten auf die kovarianten Basisvektoren ausdrücken lassen:

$$\langle \nabla\phi \rangle_1 = \langle \nabla\phi \rangle \cdot \mathbf{g}_1, \quad \langle \nabla\phi \rangle_2 = \langle \nabla\phi \rangle \cdot \mathbf{g}_2, \quad \langle \nabla\phi \rangle_3 = \langle \nabla\phi \rangle \cdot \mathbf{g}_3.$$

Den auf die Fläche \mathbf{f} interpolierten Gradienten kann man demnach auch durch

$$\langle \nabla \phi \rangle_{\mathbf{f}} = \langle \nabla \phi \rangle_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}_1 \mathbf{g}^1 + \langle \nabla \phi \rangle_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}_2 \mathbf{g}^2 + \langle \nabla \phi \rangle_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}_3 \mathbf{g}^3 \quad (\text{A.32})$$

ausdrücken. Subtrahiert man Gleichung (A.32) von der Approximation (A.31) ergibt sich:

$$(\nabla \phi)_{\mathbf{f}} - \langle \nabla \phi \rangle_{\mathbf{f}} \approx \left(\phi_{\mathbf{F}} - \phi_{\mathbf{P}} - \langle \nabla \phi \rangle_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}_1 \right) \mathbf{g}^1. \quad (\text{A.33})$$

Die rechte Seite kann man demnach als Korrektur für einen auf die FV-Grenzfläche interpolierten Gradienten auffassen. Ist das Rechengitter orthogonal, stimmen die Basisvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}^1 in ihrer Richtung überein, und deren Beträge sind zueinander reziprok.

Für den im Programm verwendeten Fall einer linearen Interpolation (A.21) des Gradienten kann man sich am Beispiel eines äquidistanten, kartesischen Gitters leicht davon überzeugen, dass der Korrekturterm eine $2\delta x$ -Differenz im interpolierten Gradienten durch eine $1\delta x$ -Differenz ersetzt, wodurch zum Beispiel das Auftreten von Gitterschwingungen vermieden werden kann (siehe Abschnitt 3.2.3). In kartesischen Koordinaten ausgedrückt lautet die in ELAN implementierte Formel zur Berechnung des Gradienten auf regulären FV-Flächen:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{f}} \approx \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{f}} + \underbrace{\left(\phi_{\mathbf{F}} - \phi_{\mathbf{P}} - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbf{f}} g_j \right)}_{\text{Gradientenkorrektur}} g_i^1. \quad (\text{A.34})$$

Wenn man darin noch den auf die Fläche interpolierten Gradienten $\langle \partial \phi / \partial x_i \rangle_{\mathbf{f}}$ durch den Gradienten im angrenzenden FV-Zentrum \mathbf{P} , $(\partial \phi / \partial x_i)_{\mathbf{P}}$, ersetzt, ergibt sich eine für Randflächen geeignete Extrapolationsformel, die in ELAN beispielsweise zur Bestimmung der Flächenkräfte auf Einströmrändern verwendet wird [227]. Da die Koordinaten des kovarianten Basisvektors \mathbf{g}_1 , g_i , in (A.34) gerade durch den Verbindungsvektor zwischen den angrenzenden FV-Zentren von \mathbf{P} nach \mathbf{F} definiert sind (siehe Abbildung 3-1 auf S. 61), werden zur Bestimmung des Gradienten nach dieser Gleichung nur noch die kartesischen Koordinaten des kontravarianten Basisvektors \mathbf{g}^1 , g_i^1 , benötigt. Gemäß (A.6) lassen sich diese durch

$$g_i^1 = \frac{\epsilon_{ijk} g_j^2 g_k^3}{\epsilon_{mno} g_m^1 g_n^2 g_o^3} = \frac{\delta A_i}{g_m \delta A_m} = \frac{n_i}{g_m n_m} \quad (\text{A.35})$$

von den mit n_i bezeichneten kartesischen Koordinaten des Normaleneinheitsvektors der FV-Grenzfläche $\delta A_i \mathbf{e}_i = \delta A n_i \mathbf{e}_i$ und den kartesischen Koordinaten des kovarianten Basisvektors \mathbf{g}_1 ableiten.

Literaturverzeichnis

- [1] AMIET, R.: *Refraction of sound by a shear layer*. Journal of Sound and Vibration, 58(4):467–482, 1978.
- [2] ANDERSON, JR., J. D.: *Computational Fluid Dynamics*. Series in Aeronautical and Aerospace Engineering. McGraw-Hill, New York, 1. Aufl., 1995.
- [3] ANDERSON, JR., J. D.: *Fundamentals of Aerodynamics*. Series in Aeronautical and Aerospace Engineering. McGraw-Hill, New York, 3. Aufl., 2001.
- [4] ANDERSON, JR., J. D.: *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. Series in Aeronautical and Aerospace Engineering. McGraw-Hill, New York, 3. Aufl., 2003.
- [5] BAEHR, H. D. und K. STEPHAN: *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Aufl., 1996.
- [6] BAILLY, C. und D. JUVÉ: *A Stochastic Approach To Compute Subsonic Noise Using Linearized Euler's Equations*. AIAA Paper 99-1872, 1999.
- [7] BAILLY, C. und D. JUVÉ: *Numerical Solution of Acoustic Propagation Problems Using Linearised Euler Equations*. AIAA Journal, 38(1):22–29, 2000.
- [8] BATTEN, P., U. GOLDBERG und S. CHAKRAVARTHY: *Sub-grid Turbulence Modeling for Unsteady Flow with Acoustic Resonance*. AIAA Paper 00-0473, 2000.
- [9] BATTEN, P., P. R. SPALART und M. TERRACOL: *Use of Hybrid RANS–LES for Acoustic Source Predictions*. In: WAGNER, C., T. HÜTTL und P. SAGAUT (Hrsg.): *Large-Eddy Simulation for Acoustics*, Cambridge Aerospace Series, S. 128–166. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Aufl., 2007.
- [10] BAUER, M.: *Airframe noise prediction using a discontinuous Galerkin method*. Doktorarbeit, Technische Universität Braunschweig, 2011.
- [11] BÉCHARA, W., C. BAILLY, P. LAFON und S. M. CANDEL: *Stochastic Approach to Noise Modeling for Free Turbulent Flows*. AIAA Journal, 32(3):455–463, March 1994.
- [12] BENDAT, J. S. und A. G. PIERSON: *Random Data Analysis and Measurement Procedures*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York, 4. Aufl., 2010.
- [13] BENHAMADOUCHE, S.: *Large Eddy Simulation with the unstructured collocated arrangement*. Doktorarbeit, University of Manchester, 2006.
- [14] BENHAMADOUCHE, S. und D. LAURENCE: *Global kinetic energy conservation with unstructured meshes*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 40:561–571, 2002.

- [15] BIRD, B. R., W. E. STEWART und E. N. LIGHTFOOT: *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, New York, 2. Aufl., 2002.
- [16] BOGEY, C. und C. BAILLY: *Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: far-field formulation and validation test cases*. *Acta Acustica united with Acustica*, 88:463–471, 2002.
- [17] BOHL, W.: *Technische Strömungslehre*. Vogel Verlag, 12. Aufl., 2002.
- [18] BOUSSINESQ, J.: *Théorie de l'Écoulement Tourbillant*. *Mém. Acad. Sci. Inst. Fr.*, 23:46–50, 1877.
- [19] BRENTNER, K. S.: *Prediction of Helicopter Rotor Discrete Frequency Noise - A Computer Program Incorporating Realistic Blade Motions and Advanced Acoustic Formulation*. NASA Technical Memorandum 87721, 1986.
- [20] BREUER, M.: *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. *Berichte aus der Strömungstechnik*. Shaker Verlag, 1. Aufl., 2002.
- [21] BREUER, M.: *Boundary conditions for LES*. In: WAGNER, C., T. HÜTTL und P. SAGAUT (Hrsg.): *Large-Eddy Simulation for Acoustics*, Cambridge Aerospace Series, S. 201–216. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Aufl., 2007.
- [22] BUNGE, U.: *Numerische Simulation turbulenter Strömungen im Kontext der Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2005.
- [23] CARNARIUS, A.: *Instationäre Optimierung der aktiven Beeinflussung abgelöster Strömungen mit Hilfe eines Adjungiertenverfahrens*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2013.
- [24] CHICOWLAS, C., P. BONAÏTI, F. DEBBASCH und M. BRACHET: *Effective Dissipation and Turbulence in Spectrally Truncated Euler Flows*. *Physical Review Letters*, 95(264502), 2005.
- [25] CHOI, K.-S. und J. L. LUMLEY: *The return to isotropy of homogeneous turbulence*. *Journal of Fluid Mechanics*, 436:59–84, 2001.
- [26] CHOI, S. K.: *Note on the use of momentum interpolation method for unsteady flows*. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 36:545–550, 1999.
- [27] CHORIN, A. J.: *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*. *Math. Comp.*, 22:745–762, 1968.
- [28] CHOUDHARI, M. M. und M. R. KHORRAMI: *Slat Cove Unsteadiness: Effect of 3D Flow Structures*. AIAA Paper 2006-211, 2006.
- [29] CHOUDHARI, M. M. und M. R. KHORRAMI: *Effect of Three-Dimensional Shear-Layer Structures on Slat Cove Unsteadiness*. *AIAA Journal*, 45(9):2174–2186, September 2007.
- [30] COURANT, R., K. FRIEDRICHS und H. LEWY: *Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.

-
- [31] CRIGHTON, D. G., A. P. DOWLING, J. E. FFWOWCS WILLIAMS, M. HECKL und F. G. LEPPINGTON: *Modern Methods in Analytical Acoustics*. Lecture Notes. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [32] CURLE, N.: *The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound*. Proc. R. Soc. Lond. A, 231(1187):505–514, 1955.
- [33] DECK, S. und R. LARAUFIE: *Numerical investigation of the flow dynamics past a three-element aerofoil*. Journal of Fluid Mechanics, 732:401–444, 2013.
- [34] DECONINCK, T., L. TEMMERMAN, C. HIRSCH, S. OERLEMANS, T. KNACKE, F. THIELE, A. DUBEN, A. GOROBETS, T. KOZUBSKAYA, J. BAIGES, R. CODINA und H. ESPINOZA: *Final report on the assessment of the existing numerical approaches based on comparison of numerical predictions with each other and with experiments: two-struts test case*. VALIANT project report D27, NUMECA, 2011.
- [35] DELFS, J., W. DOBRZYNSKI, H. HELLER, U. ISERMANN, U. MICHEL, W. SPLETTSTÖSSER und F. OBERMEIER: *Fluglärm*. In: MÜLLER, G. und M. MÖSER (Hrsg.): *Taschenbuch der Technischen Akustik*, S. 585–638. Springer-Verlag, 2004.
- [36] DELFS, J., J. YIN und X. LI: *Leading Edge Noise Studies using CAA*. AIAA Paper 99-1897, 1999.
- [37] DEMIRDŽIĆ, I., Ž. LILEK und M. PERIĆ: *A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 16:1029–1050, 1993.
- [38] DEMIRDŽIĆ, I. und S. MUZAFERIJA: *Numerical Method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 125:235–255, 1995.
- [39] DOBRZYNSKI, W.: *Almost 40 Years of Airframe Noise Research: What Did We Achieve?* Journal of Aircraft, 47(2):353–367, 2010.
- [40] DOBRZYNSKI, W. und M. POTT-POLLENKE: *Slat Noise Source Studies for Farfield Noise Prediction*. AIAA Paper 2001-2158, 2001.
- [41] DUCROS, F., F. LAPORTE, T. SOULÈRES, V. GUINOT, P. MOINAT und B. CARUELLE: *High-Order Fluxes for Conservative Skew-Symmetric-like Schemes in Structured Meshes: Application to Compressible Flows*. Journal of Computational Physics, 161(1):114–139, 2000.
- [42] DURBIN, P. und B. PETTERSON REIF: *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows*. John Wiley & Sons, New York, 1. Aufl., 2001.
- [43] DURBIN, P. A.: *A perspective on recent developments in RANS modeling*. In: RODI, W. und N. FUEYO (Hrsg.): *Engineering Turbulence Modelling and Experiments – 5*, S. 3–16. Elsevier, Amsterdam, 2002.
- [44] EDWARDS, J. R. und S. CHANDRA: *Comparison of Eddy Viscosity-Transport Turbulence Models for Three-Dimensional, Shock-Separated Flowfields*. AIAA Journal, 34(4):756–763, 1996.
- [45] EHRENFRIED, K.: *Strömungsakustik*. Mensch & Buch Verlag, Berlin, 1. Aufl., 2004.
- [46] ESCHRICHT, D.: *Persönliche Kommunikation*, 2010.

- [47] ESCHRICHT, D.: *Developers Guide To C3NOISE – An Aero Acoustic Analogy Tool*. Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik, Berlin, 2011.
- [48] EWERT, R.: *A Hybrid Computational Aeroacoustics Method to Simulate Airframe Noise*. Doktorarbeit, RWTH Aachen, 2002.
- [49] EWERT, R.: *RPM - the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications*. AIAA Paper 2007-3506, 2007.
- [50] EWERT, R.: *Broadband slat noise prediction based on CAA and stochastic sound sources from a fast random particle-mesh (RPM) method*. *Computers & Fluids*, 37(4):369–387, May 2008.
- [51] EWERT, R., M. BAUER und M. LUMMER: *State-of-the-art CAA approaches*. In: SCHRAM, C., R. DÉNOS und E. LECOMTE (Hrsg.): *Accurate and efficient aeroacoustic prediction approaches for airframe noise*, VKI lecture notes. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genèse, Belgium, 2013.
- [52] EWERT, R. und J. DIERKE: *Stochastic approaches for airframe noise prediction*. In: SCHRAM, C., R. DÉNOS und E. LECOMTE (Hrsg.): *Accurate and efficient aeroacoustic prediction approaches for airframe noise*, VKI lecture notes. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genèse, Belgium, 2013.
- [53] EWERT, R. und W. SCHRÖDER: *Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering*. *Journal of Computational Physics*, 188(2):365–398, 2003.
- [54] FARASSAT, F.: *Linear Acoustic Formulas for Calculation of Rotating Blade Noise*. AIAA Journal, 19(9):1122–1130, 1981.
- [55] FARASSAT, F.: *Derivation of Formulations 1 and 1A of Farassat*. NASA Technical Memorandum 214853, March 2007.
- [56] FERZIGER, J. H. und M. PERIĆ: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 3. Aufl., 2002.
- [57] FERZIGER, J. H. und M. PERIĆ: *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 1. Aufl., 2008.
- [58] FFWCS-WILLIAMS, J. E.: *The Acoustic Analogy – Thirty Years On*. *IMA J. Appl. Math.*, 32:113–124, 1984.
- [59] FFWCS-WILLIAMS, J. E. und D. L. HAWKINGS: *Sound Generation by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion*. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 264(1151):321–342, May 1969.
- [60] FLUID DYNAMICS PANEL WORKING GROUP 21: *A Selection of Test Cases for the Validation of Large-Eddy Simulations of Turbulent Flows*, Bd. 345 d. Reihe *AGARD Advisory Reports*. Advisory Group for Aerospace Research and Development, Neuilly-sur-Seine, France, 1998.
- [61] FRANCESCANTONIO, P. DI: *A new boundary integral formulation for the prediction of sound radiation*. *Journal of Sound and Vibration*, 202(4):491–509, 1997.

-
- [62] FRANKE, M.: *Untersuchung zum Potential höherwertiger Turbulenzmodelle für den aerodynamischen Entwurf*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2003.
- [63] FREDERICH, O.: *Numerische Simulation und Analyse turbulenter Strömungen am Beispiel der Umströmung eines Zylinderstumpfes mit Endscheibe*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2010.
- [64] FREUND, J. B., S. K. LELE und P. MOIN: *Numerical simulation of a Mach 1.92 Turbulent Jet and Its Sound Field*. AIAA Journal, 38(11):2023–2031, 2000.
- [65] FRÖHLICH, J.: *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. Teubner Verlag, Wiesbaden, 1. Aufl., 2006.
- [66] FUREBY, C. und F. F. GRINSTEIN: *Monotonically Integrated Large Eddy Simulation of Free Shear Flows*. AIAA Journal, 37(5):544–556, May 1999.
- [67] GARBARUK, A., M. SHUR, M. STRELETS und A. TRAVIN: *Report summarising results of computations of single-source model problem*. VALIANT project report D8, NTS, 2010.
- [68] GARNIER, E., N. ADAMS und P. SAGAUT: *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Scientific Computation. Springer-Verlag, 1. Aufl., 2009.
- [69] GATSKI, T. B., C. L. RUMSEY und R. MANCEAU: *Current trends in modelling research for turbulent aerodynamic flows*. Phil. Trans. R. Soc. A, 365:2389–2418, 2007.
- [70] GEORGE, W. K., P. D. BEUTHER und R. E. A. ARNDT: *Pressure spectra in turbulent free shear flows*. Journal of Fluid Mechanics, 148:155–191, 1984.
- [71] GEURTS, B. J.: *Elements of direct and large-eddy simulation*. Edwards, Philadelphia, 1. Aufl., 2004.
- [72] GEURTS, B. J.: *Analysis of errors occurring in large eddy simulation*. Phil. Trans. R. Soc. A, 367:2873–2883, 2009.
- [73] GEURTS, B. J. und F. VAN DER BOS: *Numerically induced high-pass dynamics in large-eddy simulation*. Phys. Fluids, 17:125103, 2005.
- [74] GHOSAL, S. und P. MOIN: *The Basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry*. Journal of Computational Physics, 118(1):24–37, 1995.
- [75] GIRIMAJI, S. N. und K. S. ABDOL-HAMID: *Partially-averaged Navier Stokes Model for Turbulence: Implementation and Validation*. AIAA Paper 2005-502, 2005.
- [76] GRESCHNER, B., D. ESCHRIGHT, C. MOCKETT und F. THIELE: *Turbulence Modelling Effects on Tandem Cylinder Interaction Flow and Analysis of Installation Effects on Broadband Noise Using Chimera Technique*. AIAA Paper 2012-3033, 2012.
- [77] HAGEN, G. H. L.: *Über den Einfluss der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren*. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, 1854.
- [78] HAMMING, R. W.: *Digital Filters*. Dover Publications, New York, 3. Aufl., 1998.
- [79] HARDIN, J. C. und D. S. POPE: *An Acoustic/Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics*. Theor. Comput. Fluid Dyn., 6:323–340, 1994.

- [80] HENNING, A., L. KOOP und K. EHRENFRIED: *Causality Correlation in Aeroacoustic experiments by means of simultaneous PIV and microphone-array measurements*. In: *Proc. of the BeBeC Berlin Beamforming Conference*, 2010.
- [81] HENNING, A., L. KOOP, K. EHRENFRIED, A. LAUTERBACH und S. KROEBER: *Simultaneous Multiplane PIV and Microphone Array Measurements on a Rod-Airfoil Configuration*. AIAA Paper 2009-3184, 2009.
- [82] HILL, R. J. und J. M. WILCZAK: *Pressure structure functions and spectra for locally isotropic turbulence*. *J. Fluid Mech.*, 296:247–269, 1995.
- [83] HOFFMANN, K. A. und S. T. CHIANG: *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Bd. 1. Engineering Education System, Wichita, Kansas, USA, 1. Aufl., 1995.
- [84] HÖLL, T.: *Numerische Simulation der aktiven Strömungsbeeinflussung dreidimensionaler Hochauftriebskonfigurationen*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2012.
- [85] HOUGHTON, E. und P. CARPENTER: *Aerodynamics for Engineering Students*. Arnold, London, 4. Aufl., 1993.
- [86] HOWE, M.: *A Review of the Theory of Trailing Edge Noise*. *Journal of Sound and Vibration*, 61(3):437–465, 1978.
- [87] HOWE, M. S.: *Theory of Vortex Sound*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Aufl., 2003.
- [88] HOYAS, S. und J. JIMENEZ: *Scaling of velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2000$* . *Phys. of Fluids*, 18:011702, 2006.
- [89] HOYAS, S. und J. JIMENEZ: *Reynolds number effects on the Reynolds-stress budgets in turbulent channels*. *Phys. of Fluids*, 20:101511, 2008.
- [90] ISSA, R. I. und F. C. LOCKWOOD: *On the Prediction of Two-Dimensional Supersonic Viscous Interactions Near Walls*. *AIAA Journal*, 15(2):182–188, 1977.
- [91] JENKINS, L. N., M. R. KHORRAMI und M. M. CHOUDHARI: *Characterization of Unsteady Flow Structures Near Leading-Edge Slat: Part I. PIV Measurements*. AIAA Paper 2004-2801, 2004.
- [92] JEONG, J. und F. HUSSAIN: *On the identification of a vortex*. *J. Fluid Mech.*, 285:69–94, 1995.
- [93] JISCHA, M.: *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Grundlagen und Fortschritte der Ingenieurwissenschaften. Springer-Verlag, Wiesbaden, 1. Aufl., 1982.
- [94] JOHANSSON, P. und L. DAVIDSON: *Modified collocated SIMPLEC algorithm applied to a buoyancy-affected turbulent flow using a multigrid solution procedure*. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 28(1):39–57, 1995.
- [95] JOHNSON, R. W.: *The Handbook of Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1. Aufl., 1998.

-
- [96] KARKI, K. C. und S. V. PATANKAR: *Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations*. AIAA Journal, 27(9):1167–1174, September 1989.
- [97] KATO, C., A. IIDA, Y. TAKANO, H. FUJITA und M. IKEGAWA: *Numerical Prediction of Aerodynamic Noise Radiated from Low Mach Number Turbulent Wake*. AIAA Paper 93-0145, 1993.
- [98] KESSLER, M.: *Introduction to computational aeroacoustics*. In: WAGNER, C., T. HÜTTL und P. SAGAUT (Hrsg.): *Large-Eddy Simulation for Acoustics*, Cambridge Aerospace Series, S. 7–14. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Aufl., 2007.
- [99] KHORRAMI, M. R., M. M. CHOUDHARI und L. N. JENKINS: *Characterization of Unsteady Flow Structures Near Leading-Edge Slat: Part II. 2D Computations*. AIAA Paper 2004-2802, 2004.
- [100] KHOSLA, P. K. und S. G. RUBIN: *A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme*. Computers & Fluids, 2:207–209, 1974.
- [101] KIM, J. und P. MOIN: *Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations*. Journal of Computational Physics, 59(2):308–323, 1985.
- [102] KIRCHHOFF, G. R.: *Zur Theorie der Lichtstrahlen*. Annalen der Physik, 4:663–695, 1883.
- [103] KLAUSMEYER, S. M. und J. C. LIN: *Comparative Results From a CFD Challenge Over a 2D Three-Element High-Lift Airfoil*. NASA Technical Memorandum 112858, May 1997.
- [104] KNACKE, T.: *Potential effects of Rhie & Chow type interpolations in airframe noise simulations*. In: SCHRAM, C., R. DÉNOS und E. LECOMTE (Hrsg.): *Accurate and efficient aeroacoustic prediction approaches for airframe noise*, VKI lecture notes. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genèse, Belgium, 2013.
- [105] KNACKE, T. und F. THIELE: *Slat Noise Reduction using Steady Suction*. AIAA Paper 2008-17, 2008.
- [106] KNACKE, T. und F. THIELE: *Time-Resolved 3D Simulation of an Aircraft Wing with Deployed High-Lift System*. In: DEVILLE, M., T.-H. LÊ und P. SAGAUT (Hrsg.): *Turbulence and Interactions*, Bd. 110 d. Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, S. 223–230. Springer Berlin/Heidelberg, 2010.
- [107] KNACKE, T. und F. THIELE: *Simulation of broadband noise from high-lift systems*. In: WAGNER, S., A. BODE, H. SATZGER und M. BREHM (Hrsg.): *High Performance Computing in Science and Engineering*, S. 126–128. Bayerische Akademie der Wissenschaften, Garching/München, 2012.
- [108] KNACKE, T. und F. THIELE: *Numerical Analysis of Slat Noise Generation*. AIAA Paper 2013-2162, 2013.

- [109] KNACKE, T. und F. THIELE: *Prediction of Broadband Noise from Two Square Cylinders in Tandem Arrangement Using a Combined DDES/FWH Approach*. In: DEVILLE, M. O., J.-L. ESTIVALEZES, V. GLEIZE, T.-H. LÊ, M. TERRACOL und S. VINCENT (Hrsg.): *Turbulence and Interactions*, Bd. 125 d. Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, S. 123–131. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [110] KNACKE, T. W.: *Parachute Recovery Systems Design Manual*. Para Publishing, Santa Barbara, California, 1. Aufl., 1992.
- [111] KOLMOGOROV, A. N.: *Die lokale Struktur der Turbulenz in einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit bei sehr großen REYNOLDSSchen Zahlen*. In: GOERING, H. (Hrsg.): *Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz*, S. 71–76. Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
- [112] KRAICHNAN, R. H.: *Inertial Ranges in TwoDimensional Turbulence*. *Phys. Fluids*, 10:1417–1423, 1967.
- [113] KRAICHNAN, R. H.: *Helical turbulence and absolute equilibrium*. *Journal of Fluid Mechanics*, 59:745–752, 1973.
- [114] KRAVCHENKO, A. G. und P. MOIN: *On the Effect of Numerical Errors in Large Eddy Simulations of Turbulent Flows*. *Journal of Computational Physics*, 131(2):310–322, 1997.
- [115] KROTHAPALLI, A., D. BAGANOFF und K. KARAMCHETI: *On the mixing of a rectangular jet*. *Journal of Fluid Mechanics*, 107:201–220, 1981.
- [116] LABOURASSE, E. und P. SAGAUT: *Reconstruction of Turbulent Fluctuations Using a Hybrid RANS/LES Approach*. *Journal of Computational Physics*, 182(1):301–336, 2002.
- [117] LARCHEVEQUE, L., P. SAGAUT, I. MARY, O. LABBÉ und P. COMTE: *Large-eddy simulation of the compressible flow over a deep, open cavity*. *Phys. Fluids*, 14(1):193–210, 2003.
- [118] LEE, S. H., J. R. KIM, Y. BAE, Y. W. JO und Y. J. MOON: *Computation of Slat Noise by a LES/LPCE Hybrid Method with Brinkman Penalization*. AIAA Paper 2010-3839, 2010.
- [119] LELE, S. K.: *Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution*. *Journal of Computational Physics*, 103(1):16–42, 1992.
- [120] LEMKE, M.: *Numerische Simulation der Schallerzeugung durch Turbulenz an einer Tandem-Zylinder-Konfiguration*. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2011.
- [121] LEONARD, A.: *Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows*. *Adv. Geophys. A*, 18:237–248, 1974.
- [122] LIEN, F. S. und M. A. LESCHZNER: *A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 114:123–148, 1994.

-
- [123] LIGHTHILL, M. J.: *On sound generated aerodynamically. Part I: General theory.* Proc. of the Royal Society of London, A211:564–587, 1952.
- [124] LOCKARD, D. P. und M. M. CHOUDHARI: *Noise Radiation from a Leading-Edge Slat.* AIAA Paper 2009-3101, 2009.
- [125] LONG, L. N.: *A Nonconservative Nonlinear Flowfield Splitting Method for 3-D Unsteady Fluid Dynamics.* AIAA Paper 2000-1998, 2000.
- [126] LÜBCKE, H.: *Entwicklung expliziter Darstellungen zweiter statistischer Momente zur numerischen Simulation turbulenter Strömungen.* Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2001.
- [127] LUMLEY, J. L.: *Computational Modeling of Turbulent Flows.* Adv. Appl. Mech., 18:123–176, 1978.
- [128] LUMLEY, J. L. und G. R. NEWMAN: *The return to isotropy of homogeneous turbulence.* Journal of Fluid Mechanics, 82:161–178, 1977.
- [129] LYRINTZIS, A. S.: *Surface integral methods in computational aeroacoustics – From the (CFD) near-field to the (Acoustic) far-field.* Int. Journal of Aeroacoustics, 2(2):95–128, 2003.
- [130] MAJUMDAR, S.: *Role of underrelaxation in momentum interpolation method for calculation of flow with nonstaggered grids.* Numerical Heat Transfer, Part A, 13:125–132, 1988.
- [131] MANOHA, E., G. ELIAS, B. TROFF und P. SAGAUT: *Towards the Use of Boundary Element Method in Computational Aeroacoustics.* AIAA Paper 99-1980, 1999.
- [132] MANOHA, E., S. REDONNET, C. DELAHAY, P. SAGAUT, I. MARY, S. B. KHELIL und P. GUILLEN: *Numerical Prediction of the Unsteady Flow and Radiated Noise from a 3D Lifting Airfoil.* In: *Proc. of NATO/RTO AVT Symposium on „Aging Mechanisms and Control: Part A – Development in Computational Aero- and Hydro-Acoustics“*, Manchester, UK, 8.–11. Oktober 2001.
- [133] MELDI, M. und P. SAGAUT: *Pressure statistics in self-similar freely decaying isotropic turbulence.* Journal of Fluid Mechanics, 712:R2, 2013.
- [134] MENTER, F. R.: *Eddy Viscosity Transport Equations and their Relation to the k - ϵ Model.* NASA Technical Memorandum 108854, November 1994.
- [135] MENTER, F. R. und Y. EGOROV: *The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description.* Flow Turbulence Combust, 85:113–138, 2010.
- [136] MEYERS, J.: *Error-landscape assessment of large-eddy simulations: a review.* Journal of Scientific Computing, 49(1):65–77, 2011.
- [137] MICHEL, U., B. BARSIKOW, J. HELBIG, M. HELLMIG und M. SCHÜTTPELZ: *Flyover Noise Measurements on a Landing Aircraft with a Microphone Array.* AIAA Paper 98-2336, 1998.

- [138] MICHEL, U., D. ESCHRICHT, B. GRESCHNER, T. KNACKE, C. MOCKETT, Ł. PANEK, F. THIELE und J. YAN: *Simulation of the sound radiation of turbulent flows with DES*. In: *Proc. of the West-East High Speed Flow Field Conference*, Moscow, Russia, 19.–22. November 2007.
- [139] MICHEL, U., D. ESCHRICHT, B. GRESCHNER, T. KNACKE, C. MOCKETT und F. THIELE: *Advanced DES methods and their application to aeroacoustics*. In: PENG, S.-H., P. DOERFFER und W. HAASE (Hrsg.): *Progress in hybrid RANS-LES modelling*, Bd. 111 d. Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, S. 59–76. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [140] MILLER, T. F. und F. W. SCHMIDT: *Use of a pressure-weighted interpolation method for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations on a nonstaggered grid system*. *Numerical Heat Transfer*, 14:213–233, 1988.
- [141] MOCKETT, C.: *A comprehensive study of detached-eddy simulation*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2009.
- [142] MOCKETT, C., B. GRESCHNER, T. KNACKE, R. PERRIN, J. YAN und F. THIELE: *Demonstration of Improved DES Methods for Generic and Industrial Applications*. In: PENG, S.-H. und W. HAASE (Hrsg.): *Advances in Hybrid RANS-LES Modelling*, Bd. 97 d. Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, S. 222–231. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [143] MOCKETT, C., T. KNACKE und F. THIELE: *Detection of initial transient and estimation of statistical error in time-resolved turbulent flow data*. In: *Proc. of the ETMM8 Conference*, Marseille, France, 2010.
- [144] MORKOVIN, M. V.: *Effects of compressibility on turbulent flows*. In: FAVRE, A. J. A. (Hrsg.): *The mechanics of turbulence*, S. 367–380. Gordon and Breach, New York, 1964.
- [145] MORRIS, P. J., L. N. LONG, A. BANGALORE und Q. WANG: *A Parallel Three-Dimensional Computational Aeroacoustics Method Using Nonlinear Disturbance Equations*. *Journal of Computational Physics*, 133(1):56–74, 1997.
- [146] MORRISON, J.: *Numerical Study of Turbulence Model Predictions for the MD 30P/30N and NHLP-2D Three-Element Highlift Configurations*. NASA/CR-1998-208967, 1998.
- [147] MÜLLER, T. J. (Hrsg.): *Aeroacoustic Measurements*. Experimental Fluid Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [148] MYDLARSKI, L. und Z. WARHAFT: *Passive scalar statistics in high Péclet number grid turbulence*. *Journal of Fluid Mechanics*, 358:135–175, 1998.
- [149] NAGY, A. B.: *Aeroacoustics research in Europe: The CEAS-ASC report on 2010 highlights*. *Journal of Sound and Vibration*, 330(21):4955–4980, 2011.
- [150] NITSCHKE, W.: *Aerodynamik I*. Vorlesungsskript, Technische Universität Berlin, 2004.
- [151] OERLEMANS, S.: *Acoustic wind tunnel tests on two-struts configuration*. VALIANT project report D20, NLR, 2011.

-
- [152] OERLEMANS, S.: *Coherence analysis for VALIANT 2-struts experimental benchmark data*. VALIANT memo, NLR, August 2011.
- [153] OERTEL JR., H. (Hrsg.): *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 11. Aufl., 2002.
- [154] PANEK, Ł.: *Simulation und Modellierung der tonalen Schallausbreitung in Nebenstromkanälen von Flugtriebwerken*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2010.
- [155] PASCAU, A.: *Cell face velocity alternatives in a structured colocated grid for the unsteady Navier–Stokes equations*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2009.
- [156] PATANKAR, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington D.C., 1980.
- [157] PATANKAR, S. V.: *A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations*. Numerical Heat Transfer, Part A, 4(4):409–425, 1981.
- [158] PATANKAR, S. V. und D. B. SPALDING: *A calculation procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows*. Int. J. Heat Mass Transfer, 15(10):1787–1806, 1972.
- [159] POPE, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Aufl., 2000.
- [160] POPE, S. B.: *Ten questions concerning the large-eddy simulation of turbulent flows*. New Journal of Physics, 6(35), 2004.
- [161] PRUETT, C. D.: *Toward the de-mystification of LES*. In: LIU, C., L. SAKELL und T. BEUTNER (Hrsg.): *DNS/LES Progress and Challenges*, S. 231–238. Greyden Press, Columbus, OH, 2001.
- [162] PUMIR, A.: *A numerical study of pressure fluctuations in three-dimensional, incompressible, homogeneous, isotropic turbulence*. Phys. Fluids, 6(2071), 1994.
- [163] RAHIER, G. und J. PRIEUR: *An efficient Kirchhoff integration method for rotor noise prediction starting indifferently from subsonically or supersonically rotating meshes*. In: *53rd Annual Forum of the American Helicopter society*, Virginia Beach, VA, USA, April–May 1997.
- [164] REYNOLDS, O.: *An Experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels*. Phil. Trans. of the Royal Society of London, 174:935–982, 1883.
- [165] RHIE, C. M. und W. L. CHOW: *Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation*. AIAA Journal, 21(11):1525–1532, 1983.
- [166] RICHTER, C.: *Liner impedance modeling in the time domain with flow*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2009.
- [167] RILEY, N. und P. DRAZIN: *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, Bd. 334 d. Reihe *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Aufl., 2006.

- [168] ROGALLO, R. S. und P. MOIN: *Numerical Simulation of Turbulent Flows*. Ann. Rev. Fluid Mech., 16:99–137, 1984.
- [169] ROGER, M.: *Analytical Modeling of Airframe Noise*. In: SCHRAM, C., R. DÉNOS und E. LECOMTE (Hrsg.): *Accurate and efficient aeroacoustic prediction approaches for airframe noise*, VKI lecture notes. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genèse, Belgium, 2013.
- [170] ROTTA, J. C.: *Turbulente Strömungen*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1. Aufl., 1972.
- [171] RUMSEY, C. und T. GATSKI: *Prediction of High-Lift Flows Using Turbulent Closure Models*. AIAA Journal, 36(5):765–774, 1998.
- [172] RUMSEY, C., E. LEE-RAUSCH und R. WATSON: *Three-Dimensional Effects on Multi-Element High Lift Computations*. AIAA Paper 2002-845, 2002.
- [173] RUNG, T.: *Formulierung universeller Wandrandbedingungen für Transportgleichungs-turbulenzmodelle*. Institutsbericht 02/99, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, 1999.
- [174] RUNG, T.: *Entwicklung anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen mit Hilfe von Projektionstechniken*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2000.
- [175] RUNG, T.: *Statistische Turbulenzmodellierung*. Vorlesungsskript, Technische Universität Berlin, 2002.
- [176] RUNG, T., U. BUNGE, M. SCHATZ und F. THIELE: *Restatement of the Spalart-Allmaras Eddy Viscosity Model in Strain-Adaptive Formulation*. AIAA Journal, 41(7):1396–1399, 2003.
- [177] RUNG, T., H. LÜBCKE und F. THIELE: *Universal wall-boundary conditions for turbulence-transport models*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 81(S3):481–482, 2000.
- [178] SAGAUT, P.: *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer, Berlin, 1. Aufl., 2001.
- [179] SAGAUT, P.: *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer, Berlin, 3. Aufl., 2006.
- [180] SATTI, R., Y. LI, R. SHOCK und S. NOELTING: *Unsteady Flow Analysis of a Multi-Element Airfoil Using Lattice Boltzmann Method*. AIAA Journal, 50(9):1805–1816, 2012.
- [181] SCHAAF, S. A. und L. TALBOT: *Mechanics of Rarefied Gases*. In: *Handbook of Supersonic Aerodynamics – Section 16*, Bd. 5 d. Reihe NAVORD Report 1488. U. S. Naval Ordnance Lab., 1959.
- [182] SCHADE, H.: *Tensoranalysis*. Walther de Gruyter, Berlin, 1. Aufl., 1997.
- [183] SCHADE, H. und E. KUNZ: *Strömungslehre*. Walther de Gruyter, Berlin, 2. Aufl., 1989.
- [184] SCHATZ, M.: *Konvektionsschemata in FAN / ELAN2 / ELAN3*. Institutsbericht, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik, 2003.

-
- [185] SCHATZ, M.: *Numerische Simulation der Beeinflussung instationärer Strömungsablösung durch frei bewegliche Rückstromklappen auf Tragflügel*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Mensch & Buch Verlag, Berlin, 2003.
- [186] SCHLICHTING, H. und K. GERSTEN: *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, Berlin, 10. Aufl., 2006.
- [187] SCHMIDT, S.: *Grobstruktursimulation turbulenter Strömungen in komplexen Geometrien bei hohen Reynoldszahlen*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2000.
- [188] SCHMIDT, T.: *Quantifizierbarkeit von Unsicherheiten bei der Grenzschichtwiedergabe mit RANS-Verfahren*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2011.
- [189] SCHMIDT, T., C. MOCKETT und F. THIELE: *Adaptive Wall Function for the Prediction of Turbulent Flows*. In: KROLL, N., D. SCHWAMBORN, K. BECKER, H. RIEGER und F. THIELE (Hrsg.): *MEGADESIGN and MegaOpt - German Initiatives for Aerodynamic Simulation and Optimization in Aircraft Design*, Bd. 107 d. Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, S. 21–33. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [190] SCHÖNWALD, N.: *Effiziente Simulation der Schallausbreitung in anwendungsnahen Triebwerkskonfigurationen*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 2010.
- [191] SCHRAM, C., R. DÉNOS und E. LECOMTE (Hrsg.): *Accurate and efficient aeroacoustic prediction approaches for airframe noise*. VKI lecture notes. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genèse, Belgium, 1. Aufl., 2013.
- [192] SCHRAM, C. F.: *Aeroacoustics of Subsonic Jets: Prediction of the Sound Produced by Vortex Pairing based on Particle Image Velocimetry*. Doktorarbeit, Technische Universität Eindhoven, 2003.
- [193] SEO, J.-H. und Y. J. MOON: *Perturbed Compressible Equations for Aeroacoustic Noise Prediction at Low Mach Numbers*. *AIAA Journal*, 43(8):1716–1724, 2005.
- [194] SFORZA, P. M., M. H. STEIGER und N. TRENTACOSTE: *Studies on Three-Dimensional Viscous Jets*. *AIAA Journal*, 4(5):800–806, May 1966.
- [195] SHARLAND, I. J.: *Sources of Noise in Axial Flow Fans*. *J. Sound Vib.*, 1(3):302–322, 1964.
- [196] SHUR, M. L., P. R. SPALART und M. K. STRELETS: *Noise prediction for increasingly complex jets. Part II: Applications*. *Int. Journal of Aeroacoustics*, 4(3 & 4):247–266, 2005.
- [197] SHUR, M. L., P. R. SPALART, M. K. STRELETS und A. K. TRAVIN: *A hybrid RANS-LES approach with delayed DES and wall-modeled LES capabilities*. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29(6):1638–1649, 2008.
- [198] SHUR, M. L. und M. K. STRELETS: *Intermediate report on the progress achieved in improving source modelling*. VALIANT project report D21, NTS, 2011.
- [199] SMAGORINSKY, J.: *General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment*. *Mon. Weather Rev.*, 91(3):99–164, 1963.

- [200] SMITH, A. M. O.: *High-Lift Aerodynamics*. Journal of Aircraft, 12(6):501–530, 1975.
- [201] SOHANKAR, A., C. NORBERG und L. DAVIDSON: *Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: Study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids, 26:39–56, 1998.
- [202] SOTIROPOULOS, F. und S. ABDALLAH: *The Discrete Continuity Equation in Primitive Variable Solutions of Incompressible Flow*. Journal of Computational Physics, 95(1):212–227, 1991.
- [203] SPALART, P. R.: *Young-Person's Guide to Detached-Eddy Simulation Grids*. CR-2001-211032, NASA, 2001.
- [204] SPALART, P. R.: *On the precise implications of acoustic analogies for aerodynamic noise at low Mach numbers*. Journal of Sound and Vibration, 332(11):2808–2815, 2013.
- [205] SPALART, P. R. und S. R. ALLMARAS: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA Paper 92-439, 1992.
- [206] SPALART, P. R., S. DECK, M. L. SHUR, K. D. SQUIRES, M. K. STRELETS und A. TRAVIN: *A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities*. Theor. Comput. Fluid Dyn., 20:181–195, 2006.
- [207] SPALART, P. R., W. JOU, M. K. STRELETS und S. R. ALLMARAS: *Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach*. Advances in DNS/LES, 1, 1997.
- [208] SPALART, P. R., M. L. SHUR, M. K. STRELETS und A. K. TRAVIN: *Initial noise predictions for rudimentary landing gear*. Journal of Sound and Vibration, 330(17):4180–4195, 2011.
- [209] SPALDING, D. B.: *A single formula for the "Law of the Wall"*. J. Appl. Mech., 28(3):455–458, 1961.
- [210] STÜBER, B., K. R. FRITZ, C.-C. HANTSCHK, S. HEIM, H. NÜRNBERGER, E. SCHORER und D. VORTMEYER: *Strömungsgeräusche*. In: MÜLLER, G. und M. MÖSER (Hrsg.): *Taschenbuch der Technischen Akustik*, S. 683–749. Springer-Verlag, 2004.
- [211] TAM, C. K. W. und J. C. WEBB: *Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics*. Journal of Computational Physics, 107(2):262–281, 1993.
- [212] TANNEHILL, J. C., D. A. ANDERSON und R. H. PLETCHER: *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences. Taylor & Francis, London, 2. Aufl., 1997.
- [213] TAYLOR, G. I.: *LXXV. On the decay of vortices in a viscous fluid*. Philos. Mag., 46(274):671–674, 1923.
- [214] TERRACOL, M.: *A Zonal RANS/LES Approach for Noise Sources Prediction*. Flow, Turbulence Combust, 77:161–184, 2006.

-
- [215] TERRACOL, M.: *Advanced RANS/LES methods for aeroacoustics*. In: SCHRAM, C., R. DÉNOS und E. LECOMTE (Hrsg.): *Accurate and efficient aeroacoustic prediction approaches for airframe noise*, VKI lecture notes. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genèse, Belgium, 2013.
- [216] TRAVIN, A., M. SHUR, M. STRELETS und P. R. SPALART: *Physical and numerical upgrades in the Detached Eddy Simulation of complex turbulent flows*. In: FRIEDERICH, R. und W. RODI (Hrsg.): *Advances in LES of Complex Flows*, Bd. 65 d. Reihe *Fluid Mechanics and it's Applications*, S. 239–254, 2002.
- [217] VAN DOORMAAL, J. P. und G. D. RAITHBY: *Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows*. *Numerical Heat Transfer*, 7(2):147–163, 1984.
- [218] VAN LEER, B.: *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*. *Journal of Computational Physics*, 32(1):101–136, 1979.
- [219] VASILYEV, O. V., T. S. LUND und P. MOIN: *A General Class of Commutative Filters for LES in Complex Geometries*. *Journal of Computational Physics*, 146(1):82–104, 1998.
- [220] WAGNER, C., T. HÜTTL und P. SAGAUT (Hrsg.): *Large-Eddy Simulation for Acoustics*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Aufl., 2007.
- [221] WALLIN, S. und S. S. GIRIMAJI: *Commutation error mitigation in variable-resolution PANS closure: Proof of concept in decaying isotropic turbulence*. AIAA Paper 2011-3105, 2011.
- [222] WANG, L., C. MOCKETT, T. KNACKE und F. THIELE: *Noise prediction of a rudimentary landing gear using Detached-Eddy Simulation*. In: FU, S., W. HAASE, S.-H. PENG und D. SCHWAMBORN (Hrsg.): *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling*, Bd. 117 d. Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, S. 279–289. Springer Berlin/Heidelberg, 2012.
- [223] WANG, L., C. MOCKETT, T. KNACKE und F. THIELE: *Detached-Eddy Simulation of Landing-Gear Noise*. AIAA Paper 2013-2069, 2013.
- [224] WESSELING, P.: *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1. Aufl., 2001.
- [225] WILCOX, D. C.: *Turbulence Modelling for CFD*. DCW Industries, Inc., La Canada, California, 3. Aufl., 2006.
- [226] WRAY, A.: *Unpublished DNS data. Available on AGARD database*. Test Cases for the Validation of Large-Eddy Simulations of Turbulent Flows, ftp://torroja.dmt.upm.es, 1997.
- [227] XUE, L.: *Entwicklung eines effizienten parallelen Lösungsalgorithmus zur dreidimensionalen Simulation komplexer turbulenter Strömungen*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, 1998.

- [228] YAN, J., C. MOCKETT und F. THIELE: *Investigations of Alternative Length Scale Substitutions in Detached-Eddy Simulation*. *Flow, Turbulence and Combustion*, 74:85–102, 2005.
- [229] YEUNG, P. K. und S. B. POPE: *Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence*. *Journal of Fluid Mechanics*, 207:531–586, 1989.

Numerische Simulation des Geräusches massiv abgelöster Strömung bei großer Reynoldszahl und kleiner Machzahl

Strömungsinduzierte Geräusche stellen heute ein zunehmendes Problem dar, besonders in der Umgebung von Flughäfen. Eine flächendeckende Lärminderung ließe sich hier durch konstruktive Maßnahmen zur Abschwächung der wesentlichen Schallentstehungsmechanismen am Flugzeug erzielen. Dazu müssen verlässliche aeroakustische Vorhersagen getroffen werden können, wozu präzise Berechnungsverfahren erforderlich sind. In dieser Arbeit wird ein druckbasiertes Finite-Volumen-Verfahren für den Einsatz in aeroakustischen Grobstruktursimulationen weiterentwickelt. Der betrachtete Strömungszustand ist typisch für das Entstehen von „airframe noise“, aerodynamischem Lärm, welcher primär durch turbulente Strömungen um Fahrwerk und Hochauftriebshilfen von Flugzeugen verursacht wird. Die Kopplung von Grobstruktursimulationen im Quellgebiet mit akustischen Extrapolationen ermöglicht eine Berechnung dieser Umströmungsgeräusche bis ins Fernfeld. Mit dem entwickelten Verfahren werden die an einer Fahrwerksverstrebung und einer Hochauftriebskonfiguration entstehenden Strömungsgeräusche simuliert. Durch Analyse der Simulationsergebnisse gelingt ein statistischer Nachweis für den dominierenden Schallentstehungsmechanismus am Vorflügel.

ISBN 978-3-7983-2735-1 (print)

ISBN 978-3-7983-2736-8 (online)



ISBN 978-3-7983-2735-1



<http://verlag.tu-berlin.de>