

Zur Modellbildung und Analyse von bistabilen Energy-Harvesting-Systemen

vorgelegt von

M.Sc.

Lukas Lentz

geb. in Berlin

von der Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme

der Technischen Universität Berlin

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Müller

Erstgutachter: Prof. Dr.-Ing Utz von Wagner

Zweitgutachter: Prof. Dr.-Ing. Hartmut Hetzler

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 14. August 2018

Berlin 2018

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Utz von Wagner möchte ich herzlich für die zahlreichen Anregungen zur Anfertigung dieser Arbeit, die wissenschaftliche Betreuung sowie für die Übernahme des Hauptreferats danken. Besonders dankbar bin ich dabei für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die damit einhergehende weitreichende wissenschaftliche Freiheit sowie die stete Unterstützung und Förderung meiner Vorhaben. Die umfangreiche Zusammenarbeit sowie die zahlreichen Diskussionen in Verbindung mit konstruktiver Kritik haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Dr.-Ing Hartmut Hetzler danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferats. Durch seine konstruktive Kritik und zahlreichen Anregungen hat er ebenfalls wesentlich zum erfolgreichen Abschluss dieser Arbeit beigetragen.

Für die Übernahme des Verfahrensvorsitzes möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. rer.nat. Wolfgang Müller bedanken.

Ein weiterer entscheidender Faktor für das gute Gelingen der Arbeit war die gute Atmosphäre am Institut, welche vor allem durch die Kolleginnen und Kollegen geprägt wird. Mein besonderer Dank gilt hier zunächst Herrn Dr.-Ing. Wofram Martens, der mich zu Beginn meiner Tätigkeit mit den Grundlagen stochastischer Differentialgleichungen vertraut machte, sowie den Herren Dr.-Ing. Nils Gräbner und M.Sc. Max-Uwe Noll, die mir in den letzten Jahren durch ihre stete Diskussionsbereitschaft eine große Hilfe waren. Weiter gilt mein Dank Herrn Dr.-Ing. Holger Gödecker für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

Der abschließende Dank gebührt meinen Eltern und meinen beiden Schwestern. So bin ich mir sicher, dass ich ohne die liebevolle Fürsorge meiner Eltern und deren stete Förderung nicht zu dem Menschen geworden wäre, der ich heute bin.

Berlin, im Juni 2018

Lukas Lentz

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung in die Thematik	1
1.2	Literaturübersicht	4
1.3	Motivation und Aufgabenstellung	6
1.4	Inhalt und Gliederung der Arbeit	8
1.5	Im Rahmen der Arbeit entstandene Publikationen	9
2	Modellierung des bistabilen Energy Harvesting Systems	11
2.1	Vorbereitende Überlegungen	11
2.1.1	Modellierung des mechanischen Bereichs	11
2.1.2	Modellierung des elektrischen Bereichs	12
2.1.3	Modellierung der Permanentmagnete	12
2.2	Elektro-mechanisches Modell	13
2.3	Herleitung des mathematischen Modells	14
2.3.1	Berechnung der Lagrange-Funktion	15
2.3.2	Auswertung mittels des Prinzips von Hamilton	18
2.3.3	Diskretisierung mittels Galerkin-Verfahren	20
2.3.4	Diskretisierung mittels Ritz-Verfahren	21
2.4	Untersuchte Realisierungen des mathematischen Modells	23
2.4.1	Modell 1: eine Ansatzfunktion und kubische Nichtlinearität	24
2.4.2	Modell 2: eine Ansatzfunktion und quintische Nichtlinearität	27
2.4.3	Modell 3: zwei Ansatzfunktionen und kubische Nichtlinearität	28
2.5	Experimentelle Validierung der Modelle	31
2.5.1	Aufbau des experimentellen EH-Systems	32
2.5.2	Modalanalyse des Systems	34
2.5.3	Koeffizienten der Modelle	35
2.5.4	Vergleich von Simulation und Experiment	35
3	Analyse für eine harmonische Anregung	40
3.1	Überblick über das dynamische Verhalten des Systems	40
3.1.1	Einblick in die Lösungsvielfalt	40
3.1.2	Zusammenfassende Darstellung des Systemverhaltens	46
3.2	Analyse mittels numerischer Integration	49
3.2.1	Durchführung der Integrationen	49
3.2.2	Auswertung der Ergebnisse	50
3.3	Analyse mittels der Methode der Harmonischen Balance	53
3.3.1	Beschreibung der Methode der Harmonischen Balance	53

3.3.2	Anwendung mit monofrequenter Ansatzfunktion	56
3.3.3	Anwendung mit multifrequenter Ansatzfunktion	59
3.3.4	Vergleich der Ergebnisse	66
4	Analyse für eine Anregung durch weißes Rauschen	69
4.1	Grundlagen der Untersuchung stochastische angeregter Systeme . . .	69
4.1.1	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie	69
4.1.2	Stochastische Prozesse	71
4.1.3	Wiener Prozess und weißes Rauschen	73
4.1.4	Stochastische Differentialgleichungen und Fokker-Planck-Gleichung	73
4.2	Bestimmung von Verteilungsdichten mittels Monte-Carlo-Simulation .	75
4.3	Bestimmung von Verteilungsdichten mittels Fokker-Planck-Gleichung	76
4.3.1	Beschreibung des Verfahrens	76
4.3.2	Vereinfachung durch orthonormale Ansatzfunktionen . .	78
4.3.3	Umsetzung durch Matrixmultiplikationen	79
4.3.4	Konstruktion der darstellenden Matrizen	82
4.4	Anwendung zur Untersuchung der Modelle des EH-Systems	87
4.4.1	Ergebnisse für Modell 1	90
4.4.2	Ergebnisse für Modell 2	91
4.4.3	Ergebnisse für Modell 3	92
4.5	Beurteilung der erzielten Verbesserung	93
5	Zusammenfassung	94
	Literaturverzeichnis	99
	Anhang	107
A	Modellierung	107
A.1	Integration der Elektrischen Enthalpiedichte	107
A.2	Auswertung des Prinzips von Hamilton	108
A.3	Diskretisierung mittels Ritz-Verfahren	110
A.4	Eigenfunktionen eines diskontinuierlichen Balkens	112
B	Harmonische Anregung	117
B.1	Darstellung beliebiger Potenzen harmonischer Funktionen	117
B.2	Analysierte Lösungen	119
C	Anregung durch weißes Rauschen	126
C.1	Berechnung der Elemente der Orthonormalbasen	126

D	Verwendete Simulationsparameter	129
D.1	Überblick über das dynamische Verhalten	129
D.2	Für die Harmonische Balance analysierte Lösungen	130

1 Einleitung

1.1 Einführung in die Thematik

Der Begriff „Energy Harvesting“ bezeichnet Verfahren, die eingesetzt werden, um aus Energiequellen, die von dem Verfahren selbst unabhängig existieren, elektrische Energie zu gewinnen. Typische Beispiele möglicher Energiequellen sind Sonnenstrahlung, Strömungen von Wind und Wasser, Temperaturgefälle und mechanische Vibrationen [36]. Im Gegensatz zu Anwendungen auf der Makroebene wie zum Beispiel Windkraft- und Solaranlagen, die eingesetzt werden, um die gewonnene Energie in das Stromnetz einzuspeisen, besteht das vorrangige Ziel beim Energy Harvesting in der Ermöglichung des energieautarken Betriebs elektronischer Kleinstgeräte [18, 19, 73]. Ein häufig betrachteter Anwendungsfall ist der Betrieb drahtloser Sensornetzwerke an schwer zugänglichen Stellen [84, 104], bei denen Energie zur Erhebung und Weitergabe von Daten benötigt wird. Ein oft betrachtetes Beispiel dafür ist die Überwachung von Bauteilen durch integrierte Sensoren [20, 22, 57, 64, 67].

Da Vibrationen im Betrieb technischer Strukturen nahezu immer auftreten, sind Energy Harvesting Systeme (EH-Systeme), welche die in der Bewegung einer Trägerstruktur enthaltene kinetische Energie umwandeln, sehr gut für diese Aufgabe geeignet. Für die Umwandlung der kinetischen in elektrische Energie stehen verschiedene physikalische Prinzipien zur Verfügung [5, 33], wobei die Verwendung des piezoelektrischen Effekts als besonders effizient und robust gilt [41, 43, 46] und in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet wird.

Die verwendeten EH-Systeme bestehen ihrerseits selbst aus schwingungsfähigen Systemen, welche durch die externen Vibrationen angeregt werden. Da es sich bei den grundlegenden Umsetzungen um Systeme handelt, die sich über weite Bereiche linear verhalten [28, 51], hängt die erzielte Energieausbeute maßgeblich von der Abstimmung des EH-Systems auf die Anregung ab [70, 96].

Für den Fall einer harmonischen Anregung wird die Abstimmung so vorgenommen, dass die Frequenz der Anregung möglichst genau der ersten Eigenfrequenz des EH-Systems entspricht [83]. Für den Fall einer stochastischen Anregung ist die Frage nach der richtigen Abstimmung weniger einfach zu beantworten [3, 21], aber auch hier führen bereits kleine Abweichungen in der Abstimmung zu großen Einbußen in der Energieausbeute [98].

Da die Abstimmung meist über die Anpassung geometrischer Parameter des EH-Systems erfolgt, unterliegt diese dem Einfluss von Fertigungstoleranzen und Schwankungen in den Materialeigenschaften, was in Verbindung mit der üblicherweise schwachen Dämpfung dazu führt, dass die Umsetzung einer fixen Abstimmung aufwändig ist [11].

Die Umsetzung einer dynamischen Abstimmung, die auf eine Veränderung in der Anregung zum Beispiel durch das Verschieben von Massen reagieren kann [2, 58], ist ebenfalls schwer umzusetzen und falls dabei eine aktive Regelung verwendet wird, verringert sich zudem die Energieausbeute um den für die Regelung benötigten Anteil [10].

Eine vielversprechende Möglichkeit dieser Problematik zu begegnen und damit den Einsatzbereich der EH-Systeme zu erweitern, liegt in der Einführung von Nichtlinearitäten [13, 30, 80, 85]. So führt zum Beispiel eine progressive (degressive) Nichtlinearität in der Rückstellung dazu, dass die Resonanzkurve hin zu höheren (niedrigeren) Werten der Erregerfrequenz gebogen wird und somit der Frequenzbereich, in dem es zu einer Systemantwort mit großen Amplituden kommt, vergrößert wird [17].

Ein noch stärkerer Effekt kann erzielt werden, wenn die Nichtlinearität so gewählt wird, dass sich die Anzahl der stabilen Gleichgewichtslagen des Systems erhöht. Dies führt dazu, dass zusätzlich zu den Lösungen, bei denen das System um eine der stabilen Gleichgewichtslagen schwingt (Intrawell-Lösungen), eine weitere Lösung auftritt, bei der alle stabilen Gleichgewichtslagen umlaufen werden (Interwell-Lösung). Dabei wird die Amplitude der Interwell-Lösung maßgeblich vom Abstand der Gleichgewichtslagen zueinander bestimmt, was dazu führt, dass auch bei Anregungen außerhalb der Resonanz Systemantworten mit großer Amplitude realisiert werden können [16].

Obwohl Stabilität eine Eigenschaft von Lösungen und nicht von Systemen ist, hat es sich weitestgehend durchgesetzt, dass die Anzahl der stabilen Gleichgewichtslagen zur Bezeichnung der Systeme verwendet wird. So werden Systeme mit einer stabilen Gleichgewichtslage monostabil, Systeme mit zwei stabilen Gleichgewichtslagen bistabil und Systeme mit drei stabilen Gleichgewichtslagen tristabil genannt.

Die Frage danach, welche Anzahl von Gleichgewichtslagen für den Betrieb von EH-Systemen am besten geeignet ist, lässt sich nicht allgemein beantworten und ist Gegenstand aktueller Forschung [44, 101, 102, 103]. Sicher ist, dass mit der Anzahl der stabilen Gleichgewichtslagen sowohl die Komplexität des Aufbaus des Systems als auch die Komplexität des dynamischen Verhaltens ansteigt. So treten zum Beispiel außer den Interwell- und Intrawell-Lösungen weitere Lösungen auf, bei denen zwar mehr als eine stabile Gleichgewichtslage, aber nicht alle stabilen Gleichgewichtslagen umlaufen werden [102].

Die zum gegenwärtigen Zeitpunkt am häufigsten untersuchte Variante stellen bistabile Systeme dar [73, 98]. Deren Umsetzung und Modellierung ist vergleichsweise einfach möglich und sie weisen im Vergleich zu monostabilen Systemen einen deutlich breiteren Frequenzbereich auf, in dem ein effizienter Betrieb möglich ist [23, 55].

Ein besonders häufig gewählter Aufbau für ein solches bistabiles, piezoelektrisches EH-System ist in Abbildung 1 zu sehen [23, 26, 37]. Das System besteht aus einem Rahmen, der mit der Trägerstruktur verbunden wird, sowie einem Balken der aus einem ferromagnetischen Material besteht und fest mit dem Rahmen verbunden ist. Auf dem Balken sind nahe der Einspannung beidseitig Piezokeramiken aufgeklebt, welche mit dem elektrischen Verbraucher, der hier vereinfacht durch einen Ohmschen Widerstand repräsentiert wird, verbunden sind. Gegenüber dem freien Ende des Balkens sind zwei identische Permanentmagnete symmetrisch angebracht (jeweils mit dem magnetischen Nordpol nach oben zeigend), welche dazu dienen, die gewünschte Nichtlinearität zu realisieren.

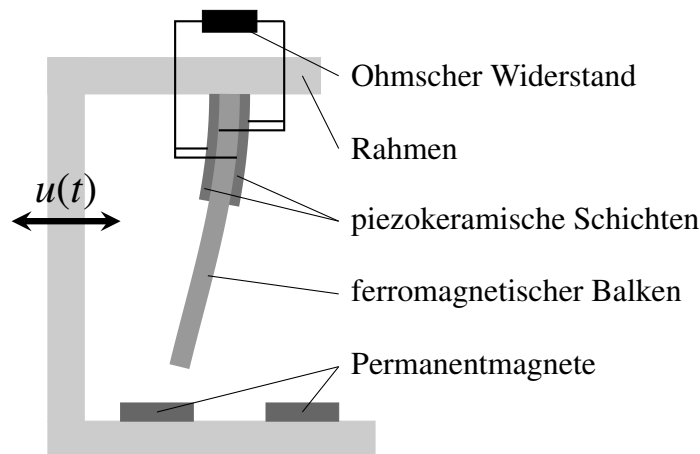


Abbildung 1: Das in der Arbeit untersuchte nichtlineare piezoelektrisches Energy Harvesting System.

In Abhängigkeit von der Anordnung der Magnete zueinander und zum Balken sind drei qualitativ unterschiedliche Arten von nichtlinearem Verhalten möglich [17, 59]. Befinden sich die Magnete direkt unter der unausgelenkten Balkenspitze und ist kein Abstand zwischen den Magneten vorhanden, stabilisieren diese die unausgelenkte Ruhelage und wirken auf das System wie eine zusätzliche degressive Steifigkeit. Sind die Magnete von einander abgerückt und befinden sich so nahe am Balken, dass es in der unausgelenkten Ruhelage zu einer Kraftwirkung auf diesen kommt, dann wird die unausgelenkte Ruhelage destabilisiert und der Balken bis hin zu einem Punkt ausgelenkt, in dem sich die Kraft der Magnete auf den Balken mit der rückstellenden Kraft des Balkens im Gleichgewicht befindet. Aufgrund der beidseitigen Anordnung der Magnete existieren zwei solcher stabilen Gleichgewichtslagen, woraus die Bistabilität des betrachteten EH-Systems folgt. Wird der Abstand zwischen den Magneten aus dieser Konfiguration heraus weiter vergrößert, kann es zu einem tristabilen Verhalten des Systems kommen, bei dem neben der stabilen unausgelenkten Gleichgewichtslagen zwei weitere stabile ausgelenkte Gleichgewichtslagen existieren [102].

Im Vergleich zu einem linearen System ist der Aufwand, der mit der Modellierung und Analyse verbunden ist, deutlich höher. Zunächst muss die nichtlineare Kraftwirkung der Magnete auf den Balken geeignet modelliert werden, was trotz der überschaubaren Komplexität des Aufbaus nicht trivial ist [63, 79]. Im Anschluss daran müssen geeignete Methoden gewählt werden, um das aus der Modellierung resultierende System nichtlinearer Differentialgleichungen analysieren zu können. Insgesamt steigt der notwendige Aufwand bei der Verwendung komplexer Modelle und/oder der Verwendung von Analysemethoden mit hoher Genauigkeit schnell an, weswegen in den bislang vorgestellten Arbeiten zum Thema vorrangig Minimalmodelle betrachtet wurden [26, 37, 75], deren Untersuchung häufig nur in erster Näherung erfolgte, siehe zum Beispiel [75, 77].

1.2 Literaturübersicht

Im Folgenden soll eine kurze Übersicht über den aktuellen Stand der Forschung der im Laufe der Arbeit behandelten Themenbereichen gegeben werden. Dazu wird eine Gliederung gewählt, die sich am Aufbau der Arbeit orientiert.

Modellierung des EH-Systems

Das mathematische Modell des betrachteten Systems wurde im Jahr 2009 von Erturk [23] vorgestellt und besteht bei genauer Betrachtung aus der Kombination zweier anderer Modelle. Das erste ist das von Moon [59] im Jahr 1979 vorgestellte Modell zur Beschreibung eines deterministischen, chaosfähigen mechanischen Systems, welches dem EH-System aus Abbildung 1 ohne Piezokeramiken und Ohmschen Widerstand entspricht. Die Modellierung des Balkens erfolgt gemäß der Euler-Bernoulli Balkentheorie und die resultierende Feldgleichung wird lediglich mit einer Ansatzfunktion diskretisiert. Der Einfluss der Magnete wird durch eine horizontale Einzelkraft, die an der Balkenspitze angreift und kubisch von der Auslenkung der Balkenspitze abhängt, berücksichtigt.

Das zweite verwendete Modell ist das von Erturk [24] im Jahr 2008 vorgestellte Modell eines linearen piezoelastischen EH-Systems mit verteilten Parametern, welches dem EH-System aus Abbildung 1 ohne Magnete entspricht. Auch hier wird der Balken gemäß der Euler-Bernoulli-Balkentheorie modelliert und die Diskretisierung der Feldgleichung erfolgt mit einer beliebigen Anzahl von Ansatzfunktionen. Die Modellierung der Piezokeramiken erfolgt gemäß der linearen Theorie, die im IEEE Standard zur Piezoelektrizität [1] dargestellt ist.

Um beide Modelle kombinieren zu können, wird auch in dem zuletzt genannten Modell die Diskretisierung auf eine Ansatzfunktion eingeschränkt. Das resultierende Modell besteht somit aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ordinary differential equation, ODE) zweiter Ordnung mit kubischer Nichtlinearität für den mechanischen Teil und einer ODE erster Ordnung für den elektrischen Teil. Dieses Modell ist insofern als minimal anzusehen, als dass der Grad der Nichtlinearität nicht niedriger gewählt werden kann, ohne das charakteristische bistabile Verhalten zu verlieren und zudem eine weitere Reduzierung des Diskretisierungsgrades nicht möglich ist [59].

Aus der Herleitung des Modells in [59] geht jedoch hervor, dass der Grad der Nichtlinearität, der benötigt wird um den Einfluss der Magnete vollständig abzubilden, theoretisch höher liegen kann und dass die in der Diskretisierung verwendete Ansatzfunktion möglicherweise von der tatsächlichen Schwingform des EH-Systems abweicht.

An dieser Stelle soll zuletzt noch auf zwei bautechnische Variante des EH-Systems hingewiesen werden, die ein vergleichbares dynamisches Verhalten aufweisen. Bei dem bislang beschriebenen System resultiert die Bistabilität aus der anziehenden Kraft, welche die Permanentmagnete auf den Balken ausüben. Alternativ dazu ist es möglich, einen Magneten

an der Balkenspitze und einen weiteren Magneten mit entgegengesetzter Polung, der direkt gegenüber fest am Rahmen angebracht ist, zu verwenden. In diesem Fall stoßen sich die Magnete gegenseitig ab, was ebenfalls zu einem bistabilen Verhalten führt [76]. Schließlich lässt sich derselbe Effekt auch durch eine axiale Kraft erzielen, die groß genug ist um ein Ausknicken des Balkens zu bewirken, siehe dazu zum Beispiel [55]. Da für alle drei vorgestellten Bauformen zumeist das gleiche mathematische Modell verwendet wird, lassen sich die zur Analyse der unterschiedlichen Bauformen verwendeten Methoden sowie die dabei erzielten Ergebnisse teilweise übertragen.

Analyse für den Fall einer harmonischen Anregung

Eine generelle Untersuchung des dynamischen Verhaltens des bistabilen EH-Systems erfolgt in der Arbeit von Stanton [76], in der auch gezeigt wird, dass für breite Frequenzbereiche mehrere Lösungen koexistieren, die sich im Energieertrag stark unterscheiden. Der Frage inwieweit und in welchen Szenarien das bistabile EH-System seinem linearen Gegenpart überlegen ist, widmen sich die Arbeiten von Mansana [55] und Erturk [26]. Beide Autoren gelangen dabei zu dem Ergebnis, dass das bistabile EH-System immer dann einen höheren Energieertrag als ein entsprechendes lineares System liefert, wenn Lösungen angenommen werden, bei denen das System um beide Gleichgewichtslagen umläuft. In einer weiteren Arbeit von Mansana [56] wird gezeigt, wie das Auftreten superharmonischer Resonanz dazu führt, dass das bistabile EH-System auch bei niederfrequenter Anregung effektiv eingesetzt werden kann.

Während in den bisher genannten Arbeiten die Analyse des Modells stets mittels numerischer Integration erfolgt, wird in dem Aufsatz von Stanton [77] ein analytisches Verfahren vorgestellt, welches eine Kombination aus dem Verfahren der langsam veränderlichen Phase und Amplitude sowie der Methode der Harmonischen Balance ist. Da in dem verwendeten Ansatz nur eine Frequenz berücksichtigt wird, erlaubt die Methode, wie auch in dem selben Artikel festgestellt wird, nur eine erste Näherung des dynamischen Verhaltens. Diese Aussage deckt sich mit den Ergebnissen des Autors bei der Untersuchung des Duffing-Schwingers [91, 92, 93, 94], in denen gezeigt wird, dass zur Berechnung von Lösungen, die eine gute quantitative und qualitative Übereinstimmung mit Referenzlösungen aufweisen, zumeist mehrere Frequenzen im Lösungsansatz berücksichtigt werden müssen. Da das Verfahren der Harmonischen Balance mit multifrequenter Ansatzfunktion in anderen Forschungsfeldern häufig eingesetzt wird [14, 31], überrascht es daher, dass in den Arbeiten zur Analyse des betrachteten und ähnlicher EH-Systeme [9, 32, 66, 71, 72, 74, 82, 101, 103] ausschließlich monofrequente Ansatzfunktionen verwendet werden.

Analyse für den Fall einer Anregung durch weißes Rauschen

Inwiefern sich das bistabile EH-System generell für den Einsatz bei vorliegender stochastischer Anregung eignet, wird in der Arbeit von Litak [50] untersucht. Ein Vergleich von bistabilem- und linearem EH-System wird in dem Aufsatz von Ferrari [29] präsentiert, mit dem Ergebnis, dass das bistabile System einen höheren Energieertrag liefert, falls die Intensität der Anregung so hoch ist, dass es zu häufigen Sprüngen zwischen den Gleichgewichtslagen kommt. Während in den beiden bisher genannten Arbeiten die stochastische Anregung stets durch ein weißes Rauschen modelliert wurde, wird in der Arbeit von Daqaq [15] zusätzlich ein farbiges Rauschen als Anregung betrachtet.

Eine weit verbreitete Methode zur rein simulativen Untersuchung des Systemverhaltens stellt die Monte-Carlo-Simulation dar [40]. Da die Methode lange Rechenzeiten benötigt und vergleichsweise schlecht handhabbare numerische Ergebnisse liefert, wird sie zumeist als Referenzlösung zur Beurteilung der Qualität semi-analytisch bestimmter Lösungen verwendet, siehe zum Beispiel [4, 45]. Ein häufig gewählter Ansatz zur semi-analytischen Bestimmung des Systemverhaltens besteht in der näherungsweisen Lösung der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung (Fokker-Planck equation, FPE) [69]. Die dabei eingesetzten Methoden unterscheiden sich jedoch stark. So erfolgt in der Arbeit von He [38] die Lösung mittels der Finiten-Elemente-Methode (FEM), in der Arbeit von Kumar [45] mittels FEM und Monte-Carlo-Simulation und in der Arbeit von Jiang [42] mittels stochastischer Mittelwertbildung.

Eine weitere Möglichkeit stellt das in der Arbeit von von Wagner [95] vorgestellte Galerkin-Verfahren dar, welches in dem Artikel von Martens [53] und später auch in einer Arbeit des Autors der vorliegenden Dissertation [48] zur Analyse des bistabilen EH-Systems genutzt wurde.

1.3 Motivation und Aufgabenstellung

Wie aus der Zusammenfassung zum Stand der Forschung hervorgeht, ist das vorgestellte bistabile EH-System Gegenstand aktueller Forschung. Während im letzten Jahrzehnt die Bemühungen vor allem auf die Untersuchung der grundlegenden Eigenschaften des EH-Systems gerichtet waren, verschiebt sich der Fokus inzwischen immer mehr hin zu Fragestellungen hinsichtlich der Auslegung und Optimierung konkreter Systeme für bestimmte Anwendungsszenarien. Dieser Wandel führt dazu, dass die Anzahl der durchzuführenden Simulationen, sowie die Anforderungen hinsichtlich der Genauigkeit der erzielten Ergebnisse ansteigen. Die Beantwortung der daraus resultierenden Fragestellungen nach

- einer verbesserten Modellierung des Systems
- und der Bereitstellung genauer und effizienter Analyseverfahren

ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert wurde, stellt das in den aktuellen Forschungsarbeiten vorrangig verwendete Modell ein Minimalmodell hinsichtlich der Diskretisierung und der berücksichtigten Nichtlinearität dar. Dies legt die Vermutung nahe, dass eine Verbesserung des Modells einerseits durch eine Erhöhung der Anzahl der in der Diskretisierung verwendeten Ansatzfunktionen und andererseits durch eine Berücksichtigung komplexerer Nichtlinearitäten erzielt werden kann. Da nach Kenntnisstand des Autors bislang kein entsprechendes Modell des EH-Systems veröffentlicht wurde, besteht die erste Aufgabe daher in der Herleitung eines Modells, welches mit beliebig vielen Ansatzfunktionen diskretisiert werden kann und die Berücksichtigung der Kraftwirkung der Magnete in allgemeiner Form ermöglicht. Nach der Herleitung sollen aus dem Modell verschiedene Realisierungen abgeleitet werden, die es ermöglichen, den Einfluss der verfeinerten Modellierung zu untersuchen.

Die nächste Aufgabe besteht dann in der Bereitstellung geeigneter Analysemethoden, sowohl für den Fall einer harmonischen Anregung als auch für den Fall einer Anregung durch weißes Rauschen. Dabei muss sichergestellt werden, dass die Methoden in der Lage sind, Ergebnisse mit einer hohen Genauigkeit zu liefern, ohne dass die dazu benötigten Rechenzeiten zu sehr ansteigen.

Für die Untersuchung der harmonisch angeregten Modelle soll dazu das Verfahren der Harmonischen Balance eingesetzt werden, welches vom Autor bereits mehrfach erfolgreich zur Analyse des Duffing-Schwingers und verwandter Systeme eingesetzt werden konnte. Wie sich im Rahmen dieser Arbeiten gezeigt hat, führt die Verwendung von multifrequenten Ansatzfunktionen im Allgemeinen zu einer deutlichen Verbesserung der quantitativen und qualitativen Übereinstimmung zwischen den berechneten Lösungen und Referenzlösungen. Da die Modellierung des betrachteten EH-Systems auf Gleichungen führt, die der Duffing-Gleichung ähnlich sind, ist zu erwarten, dass dadurch auch für diese eine Verbesserung in der Genauigkeit der Lösungen erzielt werden kann. Nach Kenntnisstand des Autors wurde bislang keine Arbeit zur Analyse des betrachteten EH-Systems mittels Harmonischer Balance unter Verwendung einer multifrequenten Ansatzfunktion veröffentlicht. Es ist daher zunächst zu klären, welche Anpassungen für eine Anwendung des Verfahrens notwendig sind und welche Frequenzen im Ansatz berücksichtigt werden müssen. Als nächstes soll untersucht werden, wie groß die Unterschiede zwischen den Ergebnissen sind, die unter Verwendung eines mono- beziehungsweise multifrequenten Ansatzes berechnet wurden.

Für den Fall der Anregung durch weißes Rauschen kann auf umfangreiche Vorarbeiten zurück gegriffen werden. Die Theorie des Verfahrens, das verwendet werden soll, wurde ausführlich beschrieben und bereits zur Analyse des EH-Systems eingesetzt. Dabei zeigte sich jedoch, dass die dafür verwendete Implementierung ineffizient ist und verbessert werden muss. So kommt es häufig zu langen Rechenzeiten oder aber sogar zu einem Abbruch der

Programmausführung, vor allem wenn für die Berechnung der Näherungslösungen Ansatzfunktionen mit einer vergleichsweise hohen Anzahl an Gliedern verwendet werden.

Die wahrscheinliche Ursache hierfür liegt in den umfangreichen Berechnungen, die zum Aufstellen des zu lösenden Gleichungssystems notwendig sind. Es ist daher davon auszugehen, dass eine deutliche Effizienzsteigerung erzielt werden kann, wenn es gelingt die notwendigen Berechnungen zu vereinfachen. Um dies zu erreichen, wird das Verfahren in Matrix-Schreibweise überführt. Dafür werden die darstellenden Matrizen der im Verfahren auftretenden Operationen hergeleitet und es wird gezeigt, wie sich deren Darstellung für die Wahl unterschiedlicher Basen ändert.

1.4 Inhalt und Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit verfolgt drei Ziele. Das erste besteht in der Herleitung eines mathematischen Modells für das in Abbildung 1 dargestellte EH-System. Desweiteren sollen akkurate und effiziente Analysemethoden für den Fall der harmonischen Anregung und für den Fall einer Anregung durch weißes Rauschen bereitgestellt werden.

In Kapitel 2 wird das elektro-mechanische Modell des EH-Systems besprochen und anschließend aus der Lagrange-Funktion ein mathematisches Modell hergeleitet, welches eine Diskretisierung mit beliebig vielen Ansatzfunktionen erlaubt und den Einfluss der Magnetkräfte in einer allgemeingültigen Form berücksichtigt. Um den Einfluss der Modellierung im Laufe der Arbeit untersuchen zu können, werden drei konkrete Realisierungen des Modells erstellt, die den am Institut vorhandenen experimentellen Aufbau in unterschiedlichem Detailierungsgrad abbilden. Zum Abschluss des Kapitels wird der für die Validierung verwendete experimentelle Aufbau vorgestellt und unterschiedliche Messergebnisse werden mit den Vorhersagen der Modelle verglichen.

Kapitel 3 widmet sich der Analyse des EH-Systems für den Fall einer harmonischen Anregung und beginnt mit einer Beschreibung des dynamischen Verhaltens des bistabilen EH-Systems. Als nächstes wird die Methode der Harmonischen Balance in allgemeiner Form vorgestellt und anschließend unter Verwendung einer monofrequenten und einer multifrequenten Ansatzfunktion zur Analyse des EH-Systems verwendet. Anhand eines ausführlich dargestellten Anwendungsbeispiels wird gezeigt, wie a priori Wissen über den Frequenzinhalt der zu erwartenden Lösungen genutzt werden kann, um die Methode besonders effektiv zu gestalten und welche Schritte für die Programmierung des Verfahrens wichtig sind. Das Kapitel endet mit einem Vergleich der Ergebnisse, die mit den unterschiedlichen Ansätzen erzielt wurden.

In Kapitel 4 wird die Analyse des EH-Systems für den Fall einer Anregung durch weißes Rauschen besprochen. Nach einer kurzen Einführung in die Grundlagen der Theorie der sto-

chastischen Differentialgleichungen wird das Verfahren, dass zur Lösung der Fokker-Planck-Gleichung verwendet wird, vorgestellt. Im nächsten Schritt wird eine Formulierung entwickelt, die zeigt wie das Verfahren durch Matrixmultiplikationen umgesetzt werden kann. Darauf aufbauend wird eine explizite Berechnungsvorschrift für die verwendeten Matrizen präsentiert. Anschließend wird das Verfahren auf die Modelle des EH-Systems angewendet.

Kapitel 5 enthält eine kurze Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse und schließt die Arbeit mit einem Ausblick auf weitere Möglichkeiten zur Verbesserung der Modellierung und der vorgestellten Analyseverfahren.

1.5 Im Rahmen der Arbeit entstandene Publikationen

Im Zuge der Bearbeitung der im Abschnitt 1.3 aufgeführten Fragestellungen entstanden drei Konferenzberichte und vier veröffentlichte Aufsätze, welche im Folgenden kurz besprochen werden.

In [47] wird gezeigt, wie das zur Lösung der FPE eingesetzte Verfahren durch die Verwendung orthonormaler Ansatzfunktionen vereinfacht werden kann. Diese Methodik wird dann in [49] zur Bestimmung der Verteilungsdichte eines bistabilen EH-Systems angewendet. Dabei besteht die Neuerung darin, dass erstmals ein Modell aus einer Diskretisierung mit zwei Ansatzfunktionen untersucht wird. Eine ausführlichere Untersuchung des Modells mit zwei Freiheitsgraden erfolgt dann in [48], wobei hier auch Überlegungen hinsichtlich der Gewinnung realistischer stochastischer Anregungsprozesse präsentiert werden.

Teile der vorliegenden Arbeit fanden zudem Eingang in die Bearbeitung des Forschungsprojekts „Untersuchung des nichtlinearen dynamischen Verhaltens von stochastisch erregten Energy Harvesting Systemen mittels Lösung der Fokker-Planck-Gleichung“, welches von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) unter den Projektnummern WA 1427/23-1 und WA 1427/23-2 gefördert wird.

Aus der Entwicklung eines Verfahrens zur Berücksichtigung multifrequenter Ansatzfunktionen innerhalb der Methode der Harmonischen Balance resultieren die Arbeiten [91, 92, 93, 94]. Gegenstand der Untersuchung ist dabei die Duffing-Gleichung oder verwandte Gleichungen und das Hauptaugenmerk liegt auf der Unterscheidung von physikalisch relevanten Lösungen von solchen, die numerische Artefakte darstellen. Auf Grundlage dieser Arbeiten wurde das Forschungsvorhaben „Artefakte bei analytischen Näherungslösungen in der Dynamik nichtlinearer mechanischer und mechatronischer Systeme“ bei der DFG beantragt, dessen Förderung inzwischen unter der Projektnummer WA 1427/30-1 bewilligt wurde.

Im Zusammenhang mit den in der vorliegenden Arbeit behandelten Themen wurden die folgenden fünf Arbeiten durch Studenten angefertigt. In [100] wird der Einfluss der Diskre-

tisierungsordnung bei einem linearen EH System untersucht. Die Modellierung des Magnetfelds und die Berechnung der Kräfte der Magnete auf den Balken sind Gegenstand der Arbeit [63]. Eine Untersuchung der Fehleranfälligkeit bei der numerischen Integration nichtlinearer Systeme erfolgt in [68] und in [7] wird die Einsatzmöglichkeit von Graphikkarten zur Parallelisierung numerischer Integrationen betrachtet. Die Thematik der Modellierung realer Anregungssignale durch stochastische Prozesse ist Gegenstand der Arbeit [99].

2 Modellierung des bistabilen Energy Harvesting Systems

In diesem Kapitel wird das verwendete elektro-mechanische Modell des in Abbildung 1 dargestellten EH-Systems besprochen und davon ausgehend ein mathematisches Modell hergeleitet. Dabei soll das resultierende Modell in der Lage sein, verteilte Kräfte in Längs- und Querrichtung, sowie verteilte Momente zu berücksichtigen. Desweiteren soll es prinzipiell möglich sein, eine beliebige Anzahl von Ansatzfunktionen in der Diskretisierung zu verwenden.

Ausgangspunkt für die Herleitung des mathematischen Modells ist die Lagrange-Funktion des EH-Systems, aus der die diskretisierten Bewegungsgleichungen abgeleitet werden. Im Anschluss daran werden drei konkrete Realisierungen des Modells mit unterschiedlichem Detaillierungsgrad erstellt, wobei die Wahl der Parameter so erfolgt, dass die Modelle den am Institut vorhandenen experimentellen Aufbau abbilden. Das Kapitel endet mit einem Vergleich von experimentell erzielten Ergebnissen und solchen, die durch die Simulation der Modelle erzielt wurden.

2.1 Vorbereitende Überlegungen

In Vorbereitung auf die eigentliche Modellierung muss geklärt werden, welche Annahmen und Vereinfachungen für die Modellierung getroffen werden können. Dazu erfolgt eine Unterteilung hinsichtlich der Modellierung des mechanischen Bereichs, des elektrischen Bereichs und der Magnete.

2.1.1 Modellierung des mechanischen Bereichs

Für die Modellierung des Balkens stehen mehrere Theorien zur Wahl, welche sich in ihrer Komplexität teilweise stark unterscheiden. Die Euler-Bernoulli-Balkentheorie führt auf das am einfachsten zu handhabende Modell und wird in der zum Thema untersuchten Literatur ausschließlich verwendet. Nach [97] ist die Euler-Bernoulli-Theorie ausreichend, wenn die betrachteten Bauteile hinreichend schlank sind und nur Schwingungen mit niedrigen Frequenzen betrachtet werden. Durch diese Anforderungen wird sichergestellt, dass die Schubverformung der Querschnitte und die rotatorische Trägheit vernachlässigt werden können, siehe dazu zum Beispiel [35].

Da das im Rahmen der Arbeit betrachtete System beide Anforderungen erfüllt, muss schließlich noch die Frage geklärt werden, ob für die zu erwartenden Auslenkungen ein lineares Verhalten gegeben ist. Dazu wurden, in Zusammenarbeit mit dem ebenfalls am Fachgebiet MMD beschäftigten Herrn Max-Uwe Noll, sowohl für den Balken ohne- (Abbildung 2 a)) als auch für den Balken mit applizierten und kurzgeschlossenen Piezoelementen (Abbildung 2 b)) experimentell statische Kraft-Weg-Kurven gemessen. Die Ergebnisse finden sich in Abbildung 2, wobei die Punkte den Messwerten entsprechen und die zum Vergleich ein-

gezeichneten Kurven die Werte wiedergeben, die aus der Berechnung der Biegelinie unter Annahme von linearem Materialverhalten folgen.

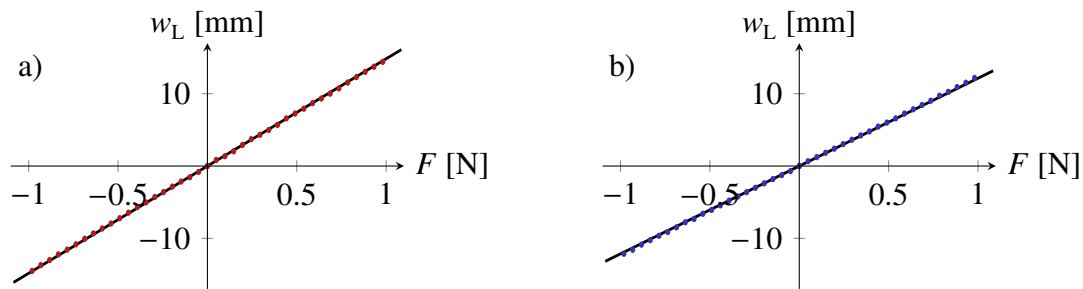


Abbildung 2: Statische Kraft-Weg-Kurven für das im Rahmen der Arbeit experimentell untersuchte EH-System. Dargestellt sind in a) die Ergebnisse für einen Balken ohne und in b) die Ergebnisse für einen Balken mit applizierten Piezokeramiken.

Wie zu sehen ist, stimmen die Messwerte im Bereich von ± 12 mm, der sich im Folgenden als für die Modellierung relevant herausstellen wird, sehr gut mit den theoretisch erzielten Werten überein. Aus diesen Überlegungen folgt, dass der Balken gemäß der Euler-Bernoulli-Theorie modelliert werden kann.

2.1.2 Modellierung des elektrischen Bereichs

Der elektrische Bereich besteht aus den Piezokeramiken und einem Ohmschen Widerstand. Da der Ohmsche Widerstand bereits das Modell eines Verbrauchers darstellt, muss lediglich geklärt werden, gemäß welcher Theorie die Piezokeramiken modelliert werden sollen. In den Arbeiten [75, 90] wird die nichtlineare Modellierung der Piezoelemente eines Piezobalkens untersucht. Dabei zeigt sich, dass die nichtlinearen Effekte der Piezokeramiken klein sind und daher vernachlässigt werden können.

Die Modellierung der Piezoelemente erfolgt somit ebenfalls linear, gemäß der in [81] dargestellten Theorie.

2.1.3 Modellierung der Permanentmagnete

Da gemäß der vorausgehenden Überlegungen sowohl der Balken, als auch die Piezoelemente linear modelliert werden, stellen die Permanentmagnete die einzige Quelle für Nichtlinearitäten im Modell dar. Da die Magnete ausschließlich verwendet werden, um das dynamische Verhalten des Balkens zu beeinflussen und selbst nicht betrachtet werden, ist es ausreichend, ihre Wirkung auf den Balken zu modellieren. Diese Wirkung besteht einerseits in der Anziehungskraft der Magnete auf den Balken und andererseits aus einer Dämpfung der Bewegung des Balkens infolge von im Balken induzierten Wirbelströmen [60].

Grundlage für die Berechnung beider Effekte ist das Magnetfeld, welches in drei Anteile zerlegt werden kann. Ein Anteil hängt nur von der Beschaffenheit der Magnete sowie ihrer

Positionierung zueinander ab und ist somit stationär. Die anderen beiden Anteile sind instationär und resultieren aus der Magnetisierung des Balkens und aus den induzierten Wirbelströmen [60, 78]. Um die letzteren beiden Anteile exakt berücksichtigen zu können, müssten innerhalb des Modells für jeden betrachteten Zeitschritt die Maxwell-Gleichungen numerisch gelöst werden [61], was im Rahmen der geplanten Verwendung des Modells nicht möglich ist.

Wird der Einfluss von Wirbelströmen und das Magnetfeld in Folge der Magnetisierung des Balkens vernachlässigt, bleibt nur noch das stationäre Magnetfeld der Magnete, welches im Laufe der Modellierung einmalig berechnet werden muss. Aus diesem Magnetfeld kann dann die Kraftwirkung auf den Balken für eine bestimmte Konfiguration des Balkens berechnet werden, wobei die Berechnung numerisch erfolgen muss und nicht trivial ist [60, 79]. Da Voruntersuchungen hierzu keine zufriedenstellenden Ergebnisse lieferten, wurde dieser Ansatz nicht weiter verfolgt und stattdessen eine heuristische Formulierung der Magnetkräfte verwendet, welche in Abschnitt 2.4 genau beschrieben wird.

2.2 Elektro-mechanisches Modell

Um ein mathematisches Modell den EH-Systems herzuleiten, wird das in Abbildung 3 a) beziehungsweise 3 b) dargestellte elektro-mechanische Modell verwendet. Das Modell besteht aus einem Kragbalken, welcher aus einer Trägerschicht (Länge l_s , Breite w , Höhe h_s) und zwei aufgeklebten identischen Piezokeramiksichten (jeweils Länge l_p , Breite w , Höhe h_p) besteht. Für die Modellierung wird angenommen, dass die Klebeschichten weder eine Steifigkeit noch eine Dicke besitzen und daher die kinematischen Größen am Übergang zwischen den verklebten Schichten stetig sind. Weiter wird angenommen, dass die gesamte Oberfläche der Piezokeramiksichten gleichmäßig leitend und von der Trägerschicht elektrisch isoliert ist. Aus diesen Annahmen folgt, unter Berücksichtigung der jeweils eingezeichneten Polarisierungsrichtung, dass es sich bei der in 2 a) skizzierten Anordnung um eine Parallelschaltung und bei der in 2 b) skizzierten Anordnung um eine Serienschaltung handelt. Da die Herleitung des Modells sich für beide Anordnungen nur unwesentlich unterscheidet, können beide Fälle parallel betrachtet werden.

Der elektrische Verbraucher wird durch einen Ohmschen Widerstand modelliert, was zwar eine Vereinfachung darstellt, aber eine übliche Vorgehensweise bei der Modellierung von EH-Systemen ist [5].

Zur räumlichen Beschreibung des Modells wird ein lokales mitbewegtes Koordinatensystem eingeführt, dessen x -Achse mit der neutralen Faser des Balkens zusammenfällt. Der im deutschsprachigen Raum zumeist verwendeten Konvention folgend ist die z -Achse nach unten orientiert und die y -Achse ist so angeordnet, dass das Koordinatensystem ein Rechtssystem bildet (diese Festlegung führt zu Unterschieden in den Bewegungsgleichungen im Vergleich zu Herleitungen aus dem amerikanischen Raum, siehe zum Beispiel [25]).

Die Biegung des Balkens w sowie die durch u gegebene Verschiebung des Koordinatensys-

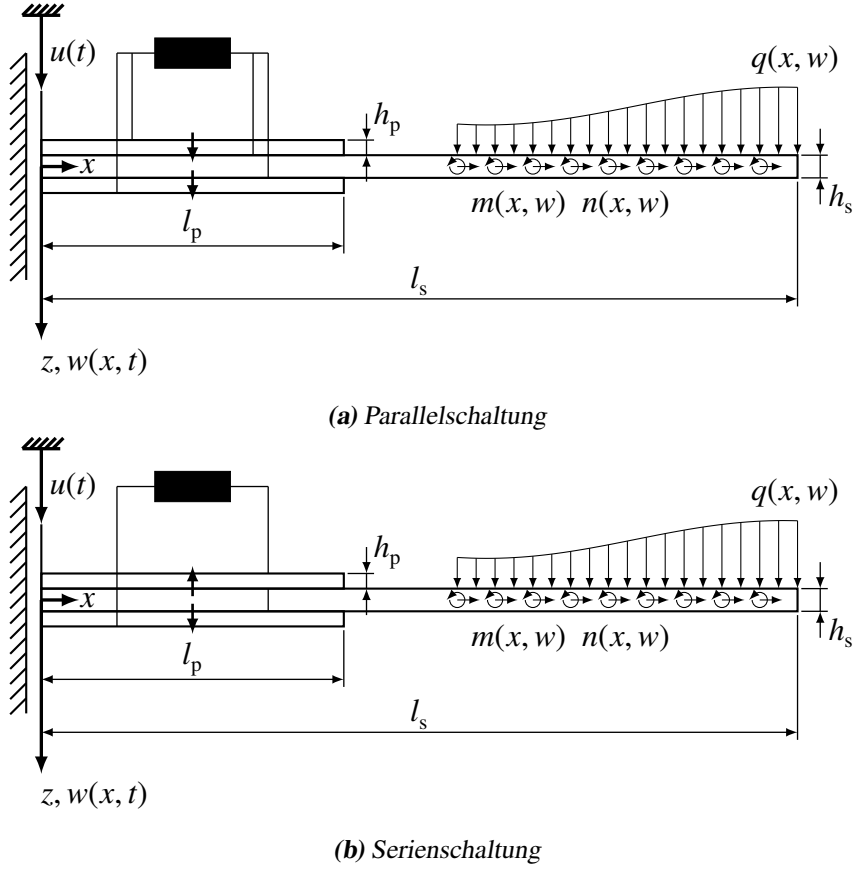


Abbildung 3: Elektro-mechanisches Modell für das betrachtete Energy Harvesting System.

tems erfolgen in Richtung der z -Achse.

Wie unter 2.1.3 erläutert, werden die Magnete selbst nicht modelliert. Stattdessen wird die Kraftwirkung der Magnete auf den Balken, die gemäß Moon [59] aus einer Volumenkraft und einem Volumenmoment besteht, berücksichtigt. Da der Balken als eindimensionales Kontinuum modelliert wird, entspricht der Volumenkraft eine Linienkraft deren x - und y -Komponenten mit n respektive q bezeichnet werden. Dem Volumenmoment entspricht ein Linienmoment, dessen Komponente, welche um die y -Achse dreht, mit m bezeichnet wird. Alle nicht benannten Komponenten verschwinden aus Symmetriegründen. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die Linienkraft und das Linienmoment sowohl von der Position auf dem Balken (x -Koordinate), als auch von der Auslenkung des Balkens (w als Funktion von x und t) abhängen.

2.3 Herleitung des mathematischen Modells

Für die Herleitung des mathematischen Modells wird zuerst die Lagrange-Funktion für das oben beschriebene elektro-mechanische Modell bestimmt. Mittels Auswertung des Hamilton-Formalismus werden dann die beschreibenden Feldgleichungen sowie die dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt.

Die Diskretisierung der Feldgleichungen der mechanischen Komponente erfolgt üblicher-

weise mit dem Ritz- oder dem Galerkin-Verfahren. Der Vollständigkeit halber werden hier beide Verfahren verwendet und es wird gezeigt unter welchen Voraussetzungen beide Verfahren das selbe Ergebnis liefern.

2.3.1 Berechnung der Lagrange-Funktion

Die Lagrange-Funktion des elektro-mechanischen Modells lautet nach [81]

$$\mathcal{L} = \int_V (T - H) dV \quad (2.1)$$

darin ist T die kinetische Energiedichte, H die elektrische Enthalpiedichte und V das gesamte Volumen des Modells. Um die Energiedichten weiter spezifizieren zu können, werden zunächst folgenden drei Bereiche eingeführt

$$V_s = \left\{ (x, y, z) \left| 0 \leq x \leq l_s, -\frac{w}{2} \leq y \leq \frac{w}{2}, -\frac{h_s}{2} \leq z \leq \frac{h_s}{2} \right. \right\} \quad (2.2a)$$

$$V_{p_1} = \left\{ (x, y, z) \left| 0 \leq x \leq l_p, -\frac{w}{2} \leq y \leq \frac{w}{2}, \frac{h_s}{2} \leq z \leq \frac{h_s}{2} + h_p \right. \right\} \quad (2.2b)$$

$$V_{p_2} = \left\{ (x, y, z) \left| 0 \leq x \leq l_p, -\frac{w}{2} \leq y \leq \frac{w}{2}, -\frac{h_s}{2} - h_p \leq z \leq -\frac{h_s}{2} \right. \right\} \quad (2.2c)$$

dabei entspricht V_s dem Volumen der Trägerschicht, V_{p_1} dem Volumen der unteren und V_{p_2} dem Volumen der oberen Piezokeramikschiicht. Weiter ist $V_p = V_{p_1} \cup V_{p_2}$ das Volumen beider Piezokeramikschiichten und $V = V_s \cup V_p$ das Gesamtvolumen des Modells. Für die kinetische Energiedichte gilt

$$T(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho_s [\dot{w}(x, t) + \dot{u}(t)]^2 & , \text{ falls } \mathbf{r} \in V_s \\ \frac{1}{2}\rho_p [\dot{w}(x, t) + \dot{u}(t)]^2 & , \text{ falls } \mathbf{r} \in V_p \end{cases} \quad (2.3)$$

wobei ρ_s und ρ_p die Massendichten der Trägerschicht respektive der Piezokeramikschiichten sind. Integration von Gleichung (2.3) liefert unter Verwendung der Bezeichnungen A_s und A_p für die Querschnittsfläche der Träger- beziehungsweise einer Piezokeramikschiicht, sowie $\mu_1 = A_s\rho_s + 2A_p\rho_p$ und $\mu_2 = A_s\rho_s$ für die Massenbelegung des Balkens im Bereich $0 \leq x \leq l_p$ beziehungsweise $l_p \leq x \leq l_s$ die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \mu_1 [\dot{w}(x, t) + \dot{u}(t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 [\dot{w}(x, t) + \dot{u}(t)]^2 dx . \quad (2.4)$$

Die elektrische Enthalpiedichte H wird ebenfalls aus [81] übernommen. Dabei findet die Summationskonvention für doppelt vorhandene Tensorindizes Anwendung und alle Indi-

zes i, j, k, l durchlaufen die Werte 1, 2 und 3 wobei die 1-Richtung der x -Richtung, die 2-Richtung der y -Richtung und die 3-Richtung der z -Richtung entspricht. Zunächst gilt

$$H(\mathbf{r}) = \begin{cases} U & , \text{ falls } \mathbf{r} \in V_s \\ U - E_i D_i & , \text{ falls } \mathbf{r} \in V_p \end{cases} \quad (2.5)$$

darin ist U die in der Verformung gespeicherte elastische Energiedichte, E_i sind die Komponenten des elektrischen Feldes und D_i sind die Komponenten der elektrischen Verschiebung. Weiter gilt

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} & , \text{ falls } \mathbf{r} \in V_s \\ \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j & , \text{ falls } \mathbf{r} \in V_p \end{cases} \quad (2.6)$$

und

$$D_i = e_{ijk} S_{jk} + \epsilon_{ij}^S E_j . \quad (2.7)$$

Darin sind c_{ijkl}^E die elastischen Konstanten des jeweiligen Materials gemessen bei einem konstanten elektrischen Feld, e_{ijk} die piezoelektrischen Konstanten, ϵ_{ij}^S die dielektrischen Konstanten gemessen bei einer konstanten Dehnung und S_{ij} die Komponenten des Verzerrungstensors.

Gemäß der Euler-Bernoulli-Balken-Theorie werden Schubverformungen vernachlässigt und es wird angenommen, dass lediglich Verzerrungen in x -Richtung auftreten, so dass für die Komponenten des Verzerrungstensors

$$S_{ij} = \begin{cases} -zw''(x, t), & \text{ falls } i = j = 1 \\ 0, & \text{ sonst} \end{cases} . \quad (2.8)$$

gilt. Aus der Annahme, dass das elektrische Feld lediglich Komponenten in Richtung der Polung (3-Richtung, z -Achse) besitzt, folgt zudem

$$E_1 = E_2 = 0 . \quad (2.9)$$

Einsetzen der Gleichungen (2.6) und (2.7) in (2.5) liefert unter Verwendung von (2.8) und (2.9)

$$H(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} c_{1111}^E z^2 w''^2(x, t) & , \text{ falls } \mathbf{r} \in V_s \\ \frac{1}{2} c_{1111}^E z^2 w''^2(x, t) + e_{311} z w''(x, t) E_3(t) - \frac{1}{2} \epsilon_{33}^S E_3^2(t) & , \text{ falls } \mathbf{r} \in V_p \end{cases} . \quad (2.10)$$

In der Literatur und in den Datenblättern der Hersteller von Piezokeramiken werden teilwei-

se andere Konstanten verwendet. Eine Umrechnung kann mittels der in [27] angegebenen Umrechnungsformeln für dünne Piezoschichten

$$\epsilon_{33}^S = \epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \quad (2.11a)$$

$$e_{311} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \quad (2.11b)$$

erfolgen. Darin ist ϵ_{33}^T die dielektrische Konstante in Polungsrichtung gemessen bei konstanter Spannung, d_{31} der piezoelektrische Ladungskoeffizient und s_{11}^E die elastische Nachgiebigkeit.

Für die weitere Auswertung von Gleichung (2.10) muss nun erstmals zwischen der Serien- und der Parallelschaltung unterschieden werden.

Für den Fall der Parallelschaltung beträgt die Spannung in jeder Piezoschicht v , und da beide Schichten die selbe Polungsrichtung besitzen, hat die Kopplungskonstante e_{311} das gleiche Vorzeichen in beiden Schichten. Dies führt wiederum zu einem unterschiedlichen Vorzeichen im jeweiligen elektrischen Feld, so dass in der unteren Piezoschicht $E_3(t) = -v(t)/h_p$ und in der oberen Piezoschicht $E_3(t) = v(t)/h_p$ gilt.

Im Fall der Serienschaltung ist die Spannung in jeder Piezoschicht $v/2$ und infolge der unterschiedlichen Polungsrichtung hat die Kopplungskonstante e_{311} unterschiedliche Vorzeichen, was dazu führt, dass die jeweiligen elektrischen Felder das selbe Vorzeichen aufweisen und $E_3(t) = -v(t)/2h_p$ für beide Schichten gilt.

Für eine ausführliche Diskussion des beschriebenen Sachverhalts siehe DuToit [19]. Die Anwendung obiger Überlegungen auf Gleichung (2.10) führt nach der Ausführung der Integration über die Höhe und die Breite des Systems (siehe dazu Anhang A.1) auf

$$\int_V H \, dV = \frac{1}{2} \int_0^{l_p} IY_1 w''^2(x, t) \, dx + \frac{1}{2} \int_{l_p}^{l_s} IY_2 w''^2(x, t) \, dx - \vartheta w'(l_p, t)v(t) - c_p v^2(t) \quad (2.12)$$

worin $IY_1 = Y_s I_s + 2Y_p I_p$ und $IY_2 = Y_s I_s$ die Biegesteifigkeiten des Balkens für den Bereich mit Piezokeramiken beziehungsweise für den Bereich ohne Piezokeramiken sind. Weiter bezeichnen Y_s und Y_p die E-Moduln der Trägerschicht und der Piezokeramiken und $I_s = \frac{1}{12}bh_s^3$ beziehungsweise $I_p = \frac{1}{3}b[(h_s/2 + h_p)^3 - (h_s/2)^3]$ sind die Flächenträgheitsmomente für eine Biegung um die y -Achse bezüglich der neutralen Faser. Die Kapazität einer Piezoschicht ist $c_p = \frac{l_p}{h_p} b \epsilon_{33}^S$ und der elektromechanische Kopplungsterm berechnet sich zu $\vartheta = (A_s + A_p)e_{311}$ für die Parallelschaltung und $\vartheta = 1/2 (A_s + A_p)e_{311}$ für die Serienschaltung. Einsetzen

der Gleichungen (2.4), (2.12) in (2.1) liefert schließlich die gesuchte Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \mu_1 [\dot{w}(x, t) + \dot{u}(t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 [\dot{w}(x, t) + \dot{u}(t)]^2 dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{l_p} IY_1 w''^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_{l_p}^{l_s} IY_2 w''^2(x, t) dx \\ & + \vartheta w'(l_p, t) v(t) + c_p v^2(t) . \end{aligned} \quad (2.13)$$

In (2.13) nicht enthaltenen sind die Lininekräfte q und n , das Linienmoment m sowie der Strom $I = v/R$. Um diese Größen zu berücksichtigen wird deren virtuelle Arbeit

$$\delta W = \int_0^{l_s} [q(x, w) \delta w(x, t) - m(x, w) \delta w'(x, t) + N(x, w) w'(x, t) \delta w'(x, t)] dx - \frac{v(t)}{R} \delta \lambda(t) \quad (2.14)$$

verwendet. Die darin verwendete Größe $N = \int_x^{l_s} n(\bar{x}, w) d\bar{x}$ ist die Normalkraft an der Stelle x und λ ist die sogenannte Flussverkettung, die über den Zusammenhang $\lambda(t) = \int v(s) ds$ beziehungsweise $\dot{\lambda}(t) = v(t)$ mit der Spannung v in Verbindung steht.

2.3.2 Auswertung mittels des Prinzips von Hamilton

Um aus der im vorherigen Abschnitt hergeleiteten Lagrange-Funktion (2.13), sowie der virtuellen Arbeit (2.14) die Feldgleichung des Modells herzuleiten, wird das Prinzip von Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 . \quad (2.15)$$

ausgewertet. Die damit verbundene umfangreiche Rechnung (siehe Anhang A.2) liefert die bereichsweise definierte PDE

$$\begin{aligned} \mu_1 \ddot{w}(x, t) + IY_1 w''''(x, t) - (N(x, w) w'(x, t))' &= q(x, w) + m'(x, w) - \mu_1 \ddot{u}(t), \quad 0 \leq x \leq l_p \\ \mu_2 \ddot{w}(x, t) + IY_2 w''''(x, t) - (N(x, w) w'(x, t))' &= q(x, w) + m'(x, w) - \mu_2 \ddot{u}(t), \quad l_p < x \leq l_s \end{aligned} \quad (2.16)$$

für den mechanischen Bereich des Modells, sowie die ODE

$$2c_p \dot{v}(t) + \frac{1}{R} v(t) + \vartheta \dot{w}'(l_p, t) = 0 \quad (2.17)$$

für den elektrischen Bereich des Modells. Offensichtlich ist die ODE (2.17) direkt mit dem mechanischen Teil gekoppelt, während die PDE (2.16) keine elektrischen Größen enthält. Unter Verwendung der geometrischen Randbedingungen des Kragbalkens (2.18a) und (2.18b), der Forderung nach Momentenfreiheit des freien Endes (2.18c) sowie der Kontinuität und Stetigkeit der Biegelinie (2.19a) und (2.19b) folgen zudem die übrigen Rand- und Übergangsbedingungen, so dass sich insgesamt

$$w(0, t) = 0 \quad (2.18a) \quad w(l_p^-, t) = w(l_p^+, t) \quad (2.19a)$$

$$w'(0, t) = 0 \quad (2.18b) \quad w'(l_p^-, t) = w'(l_p^+, t) \quad (2.19b)$$

$$w''(l_s, t) = 0 \quad (2.18c) \quad IY_1 w''(l_p^-, t) = IY_2 w''(l_p^+, t) + \vartheta v(t) \quad (2.19c)$$

$$IY_2 w'''(l_s, w(l_s, t)) = m(l_s, t) \quad (2.18d) \quad IY_1 w'''(l_p^-, t) = IY_2 w'''(l_p^+, t) \quad (2.19d)$$

ergibt. Wie zu erkennen ist, findet sich die Kopplung zwischen dem mechanischen und dem elektrischen Teil des Modells in der dynamischen Übergangsbedingung (2.19c). Da es sich dabei um eine inhomogene Übergangsbedingung handelt, welche die unbekannte elektrische Grösse v enthält, ist es schwierig, Ansatzfunktionen für eine Diskretisierung zu finden, die diese erfüllen. Die dynamische Randbedingung (2.18d), die das Linienmoment enthält, welches im Allgemeinen eine nichtlineare Funktion der Verschiebung des Balkens w ist, führt ebenfalls zu Schwierigkeiten beim Auffinden von Ansatzfunktionen, welche diese Randbedingung erfüllen.

Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, werden die Inhomogenitäten aus (2.19c) und (2.18d) unter Verwendung der Dirac-Distribution δ und deren distributiver Ableitung in die Feldgleichung übertragen. Die dabei verwendete Ausblendeigenschaft der Dirac-Distribution und deren distributiver Ableitungen lautet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n \delta(x - x_0)}{dx^n} f(x) dx = (-1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0}. \quad (2.20)$$

Daraus folgen die veränderten Feldgleichungen für den mechanischen Bereich

$$\begin{aligned} \mu_1 \ddot{w}(x, t) + IY_1 w''''(x, t) - (N(x, w)w'(x, t))' &= -\delta'(x - l_p) \vartheta v(t) + q(x, w) + m'(x, w) - \mu_1 \ddot{u}(t) \\ \mu_2 \ddot{w}(x, t) + IY_2 w''''(x, t) - (N(x, w)w'(x, t))' &= -\delta(x - l_s) m(x, w) + q(x, w) + m'(x, w) - \mu_2 \ddot{u}(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei die erste Gleichung wieder für den Bereich $0 \leq x \leq l_p$ und die zweite Gleichung für den Bereich $l_p \leq x \leq l_s$ gültig ist. Die entsprechend veränderten Rand- und Übergangsbedingungen ergeben sich aus (2.18a)-(2.18d) und (2.19a)-(2.19d), indem in (2.18d) der Term $m(l_s, t)$ und in (2.19c) der Term $\vartheta v(t)$, die nun in den Feldgleichungen enthalten sind, gestrichen wird.

2.3.3 Diskretisierung mittels Galerkin-Verfahren

Um das mathematische Modell des betrachteten EH-Systems in Form eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erhalten, muss eine Diskretisierung vorgenommen werden. Ausgangspunkt dafür ist der Ansatz

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \Phi_i(x) . \quad (2.22)$$

Darin sind die a_i unbekannte Zeitfunktionen und die Φ_i gewählte Ansatzfunktionen, welche sämtliche geometrischen und dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen müssen. Damit geeignete Ansatzfunktionen gefunden werden können, die diese Anforderungen erfüllen, ist es notwendig, dass das Randwertproblem mit den Feldgleichungen (2.21) verwendet wird. Einsetzen des Ansatzes (2.22) in die Feldgleichungen (2.21) liefert ein Residuum, welches auf die verwendeten Ansatzfunktionen projiziert wird. Die Forderung nach dem Verschwinden dieser Projektionen liefert ein System von n ODEs für den mechanischen Bereich. Da die Feldgleichung für den elektrischen Bereich (2.17) bereits eine ODE darstellt, muss diese nicht weiter diskretisiert werden und es wird lediglich der Ansatz (2.22) eingesetzt. Insgesamt ergeben sich die ODEs

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{a}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} a_j(t) + f_i(a_1, \dots, a_n, t) = g_i \ddot{u}(t) + \chi_i v(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.23a)$$

$$2c_p \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{R} + \sum_{i=1}^n \chi_i \dot{a}_i(t) = 0 \quad (2.23b)$$

wobei m_{ij} die modale Masse und k_{ij} die modale Steifigkeit bezeichnet und in f_i der Einfluss sämtlicher Magnetkräfte zusammengefasst ist. Die modale Verstärkung der Fußpunkterregung lautet g_i , die elektro-mechanische Kopplungskonstante wird mit χ_i bezeichnet und c_p ist die Kapazität einer Piezokeramiksicht. Die Berechnungsvorschrift für die einzelnen

Terme lautet wie folgt

$$m_{ij} = \int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx \quad (2.24a)$$

$$k_{ij} = \int_0^{l_p} IY_1 \Phi_i''''(x) \Phi_j(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} IY_2 \Phi_i''''(x) \Phi_j(x) dx \quad (2.24b)$$

$$f_i = - \int_0^{l_s} \left[q(x, t) + m'(x, t) - \left(N(x, t) \sum_{j=1}^n a_j \Phi_j'(x) \right)' \right] \Phi_i(x) dx + m(l_s, t) \Phi_i(l_s) \quad (2.24c)$$

$$g_i = - \left[\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_i(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_i(x) dx \right] \quad (2.24d)$$

$$\chi_i = \vartheta \Phi_i'(l_p) \quad (2.24e)$$

wobei eine weitere Vereinfachung möglich ist, wenn die verwendeten Ansatzfunktionen gewisse Eigenschaften erfüllen.

Im vorliegenden Fall werden als Ansatzfunktionen die Eigenfunktionen des Systems ohne Magnete verwendet, welche orthogonal sind (siehe Anhang A.4). Werden die Eigenfunktionen zusätzlich auf die Masse normiert, gilt unter Verwendung des Kronecker-Deltas δ_{ij}

$$m_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.25a)$$

$$k_{ij} = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (2.25b)$$

wobei ω_i der Eigenkreisfrequenz der i -ten Ansatzfunktion entspricht. Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse vereinfacht sich das durch (2.23a) und (2.23b) gegebene System zu

$$\ddot{a}_i(t) + \omega_i^2 a_i(t) + f_i(a_1, \dots, a_n, t) = g_i \ddot{u}(t) + \chi_i v(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.26a)$$

$$2c_p \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{R} + \sum_{i=1}^n \chi_i \dot{a}_i(t) = 0. \quad (2.26b)$$

2.3.4 Diskretisierung mittels Ritz-Verfahren

Obwohl mit (2.26a) und (2.26b) bereits ein mathematisches Model des betrachteten EH-Systems zur Verfügung steht, wird der Vollständigkeit halber mit dem Ritz-Verfahren eine weitere häufig benutzte Diskretisierungsmethode betrachtet. Dazu wird auch hier wieder der

Ansatz

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \Phi_i(x) \quad (2.27)$$

mit den noch unbekannten Zeitfunktionen a_i und den gewählten Ansatzfunktionen Φ_i verwendet. Im Unterschied zu dem bereits besprochenen Galerkin-Verfahren erfolgt die Diskretisierung nicht in der Feldgleichung, sondern bereits in der Lagrange-Funktion (2.13). Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die verwendeten Ansatzfunktionen lediglich die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen müssen.

Aus der Auswertung der Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art (siehe Anhang A.3)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta a_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.28a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \lambda} \quad (2.28b)$$

folgen n ODEs für den mechanischen Bereich des Modells und eine ODE für den elektrischen Bereich des Modells

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{a}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} a_j(t) + f_i(a_1, \dots, a_n, t) = g_i \ddot{u}(t) + \chi_i v(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.29a)$$

$$2c_p \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{R} + \sum_{i=1}^n \chi_i \dot{a}_i(t) = 0 \quad (2.29b)$$

welche formal dieselbe Struktur wie (2.23a) und (2.23b) besitzen. Auch hier ist m_{ij} die modale Masse, k_{ij} die modale Steifigkeit und in f_i ist der Einfluss sämtlicher Magnetkräfte zusammengefasst. Die modale Verstärkung der Fußpunkterregung lautet g_i , χ_i ist die elektromechanische Kopplungskonstante und c_p die Kapazität einer Piezokeramikschiicht. Bis auf die modale Steifigkeit k_{ij} können alle Koeffizienten gemäß (2.24a), (2.24c), (2.24d) und (2.24e) berechnet werden. Für die modale Steifigkeit gilt

$$k_{ij} = \int_0^{l_p} IY_1 \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} IY_2 \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx. \quad (2.30)$$

Der Unterschied zu dem Ergebnis aus dem Galerkin-Verfahren (2.24b) besteht also in der Verteilung der Ableitungen auf die Ansatzfunktionen, welche mittels zweifacher partieller

Integration wie folgt abgeändert werden kann

$$\begin{aligned}
 k_{ij} &= \int_0^{l_p} IY_1 \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} IY_2 \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx \\
 &= IY_1 \Phi_i''(x) \Phi_j'(x) \Big|_0^{l_p} - IY_1 \Phi_i'''(x) \Phi_j(x) \Big|_0^{l_p} + \int_0^{l_p} IY_1 \Phi_i''''(x) \Phi_j(x) dx \\
 &\quad + IY_2 \Phi_i''(x) \Phi_j'(x) \Big|_{l_p}^{l_s} - IY_2 \Phi_i'''(x) \Phi_j(x) \Big|_{l_p}^{l_s} + \int_{l_p}^{l_s} IY_2 \Phi_i''''(x) \Phi_j(x) dx .
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Hieraus wird ersichtlich, dass beide Diskretisierungen genau dann übereinstimmen, wenn sämtliche Randterme in (2.31) verschwinden. Nach Berücksichtigung der geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen (2.18a), (2.18b), (2.19a) und (2.19b) folgt daraus

$$[\Phi_i''(l_s) IY_2] \Phi_j'(l_s) = 0 \quad (2.32a) \quad [IY_1 \Phi_i''(l_p^-) - IY_2 \Phi_i''(l_p^+)] \Phi_j'(l_p) = 0 \quad (2.33a)$$

$$[\Phi_i'''(l_s) IY_2] \Phi_j(l_s) = 0 \quad (2.32b) \quad [IY_1 \Phi_i'''(l_p^-) - IY_2 \Phi_i'''(l_p^+)] \Phi_j(l_p) = 0 \quad (2.33b)$$

wobei die Terme in den eckigen Klammern gerade den dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen (2.18c), (2.18d), (2.19c) und (2.19d) in der Formulierung, bei der die Inhomogenitäten in der Feldgleichung berücksichtigt werden, entsprechen. Daraus folgt das bekannte Ergebnis (siehe [97]), dass beide Diskretisierungen übereinstimmen, falls im Ritz-Verfahren Ansatzfunktionen verwendet werden, die zusätzlich zu den geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen auch die dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen.

Da die im Anhang A.4 hergeleiteten Eigenfunktionen des Balkens mit applizierten Piezokeramiken aber ohne Magnete sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen, führt deren Verwendung als Ansatzfunktionen im Ansatz (2.27) erneut auf die Gleichungen (2.26a) und (2.26b).

2.4 Untersuchte Realisierungen des mathematischen Modells

Das im vorherigen Abschnitt hergeleitete mathematische Modell des EH-Systems wurde bewusst sehr allgemein gehalten. Für eine Analyse des dynamischen Verhaltens ist es notwendig, dass die Anzahl der in der Diskretisierung verwendeten Ansatzfunktionen festgelegt und dass eine Formulierung für die Magnetkräfte eingeführt wird. Beide Punkte sind insofern mit Schwierigkeiten verbunden, als dass die Verwendung von mehr als einer Ansatzfunktion als auch die Verwendung einer physikalisch motivierten Formulierung für die Magnetkraft einen hohen Aufwand bedeuten.

Im Folgenden werden daher drei Realisierungen des mathematischen Modells besprochen,

welche eine erste grundlegende Untersuchung des Einflusses der Art der Modellierung der Magnetkräfte und der Anzahl der verwendeten Ansatzfunktion ermöglichen.

Dabei wird für die Magnetkraft ein Ansatz in Form eines Polynoms verwendet, dessen Koeffizienten so gewählt werden, dass das Modell bestimmte Messergebnisse reproduzieren kann. Im vorliegenden Fall sind dies die Auslenkung der Balkenspitze in Ruhe w_0 sowie die Eigenkreisfrequenz ω_0 bei Schwingungen mit kleiner Amplitude um diese Ruhelage.

Der größte Vorteil bei dieser Art der Modellierung besteht darin, dass mit geringem Aufwand einfach handhabbare Modelle erstellt werden können. Das Verfahren wurde in der Vergangenheit nach Kenntnis des Autors ausschließlich zur Erstellung von Modellen mit kubischem Ansatz für die Magnetkraft und einer Ansatzfunktion in der Diskretisierung verwendet. Die in der Literatur (siehe zum Beispiel [23, 76]) präsentierten Ergebnisse zeigen über weite Bereiche eine gute Übereinstimmung der so erstellten Modelle mit experimentell gewonnenen Ergebnissen, wobei der Fokus der Untersuchungen klar auf dem qualitativen Verhalten über weite Frequenzbereiche liegt.

Der größte Nachteil der so erstellten Modelle besteht darin, dass in Vorbereitung der Modellierung zuerst ein physikalisches System gebaut und vermessen werden muss und dass das zu Grunde liegende physikalische System aus einem Modell nicht rekonstruiert werden kann. Dieser Nachteil kommt zum Tragen, wenn Parameterstudien oder Optimierungen durchgeführt werden. Physikalische Parameter können dabei nicht als Eingangsgrößen verwendet werden, da nicht klar ist, wie diese das Modell verändern.

Obwohl bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen gezeigt wurde, dass die Verwendung von massennormierten Ansatzfunktion zu einer Vereinfachung führt, können diese im Folgenden nicht verwendet werden. Der Grund dafür liegt darin, dass die Bestimmung der Koeffizienten der Magnetkraft in Modell 3 (siehe 2.4.3) nur gelingt, wenn die Ansatzfunktionen so normiert werden, dass für diese $\Phi_1(l_s) = \Phi_2(l_s) = \Phi_{l_s}$ gilt, was im Falle der Massennormierung nicht der Fall ist. Der genaue Wert auf den normiert wird, spielt dabei keine Rolle, da jede beliebige Normierung auf dieselben Koeffizienten in den Differentialgleichungen führt, wie im Folgenden zu sehen sein wird.

2.4.1 Modell 1: eine Ansatzfunktion und kubische Nichtlinearität

Das erste betrachtete Modell entspricht dem in der Literatur üblicherweise verwendeten Modell (siehe dazu zum Beispiel die Übersichtsartikel [43, 65, 98]). Für die Diskretisierung wird eine Ansatzfunktion verwendet und für die Magnetkraft ein Polynom angesetzt, welches kubisch von der Balkenverschiebung w abhängt und das auf die Balkenspitze beschränkt ist.

Der Einfluss der Magnetkraft im Modell gemäß Gleichung (2.24c) lautet daher

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_0^{l_s} \delta(x - l_s) \left[c_1 \Phi_1(x) a_1(t) + c_3 \Phi_1^3(x) a_1^3(t) \right] \Phi_1(x) dx \\ &= c_1 \Phi_{l_s}^2 a_1(t) + c_3 \Phi_{l_s}^4 a_1^3(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

und das Modell des mechanischen Bereichs, gemäß Gleichung (2.29a), ist gegeben durch

$$m_1 \ddot{a}_1(t) + k_1 a_1(t) + c_1 \Phi_{l_s}^2 a_1(t) + c_3 \Phi_{l_s}^4 a_1^3(t) = g_1 \ddot{u}(t) + \chi_1 v(t). \quad (2.35)$$

Division durch die Masse m_1 und Verwendung der neuen Koeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{m_1} (k_1 + c_1 \Phi_{l_s}^2) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1}{m_1} c_3 \Phi_{l_s}^4 \quad (2.36)$$

führt auf

$$\ddot{a}_1(t) + \alpha a_1(t) + \beta a_1^3(t) = \frac{1}{m_1} g_1 \ddot{u}(t) + \frac{1}{m_1} \chi_1 v(t). \quad (2.37)$$

Aus der Forderung nach Bistabilität folgt zunächst $\alpha < 0$, $\beta > 0$ und somit $c_1 \Phi_{l_s}^2 < -k_1$, wodurch zum Ausdruck kommt, dass der lineare Anteil der Rückstellung infolge der Magnete negativ und im Betrag größer als die elastische Rückstellung sein muss. Die Linearisierung von (2.37) um die stabilen Ruhelagen $a_{1/2} = \pm \sqrt{-\alpha/\beta}$ liefert

$$\ddot{a}_1(t) - 2\alpha \left(a_1(t) \pm \sqrt{-\alpha/\beta} \right) = \frac{1}{m_1} g_1 \ddot{u}(t) + \frac{1}{m_1} \chi_1 v(t) \quad (2.38)$$

woraus die Eigenkreisfrequenz $\omega = \sqrt{-2\alpha}$ direkt abgelesen werden kann. Sind aus einer Messung die statische Ruhelage w_0 , sowie die Eigenkreisfrequenz ω_0 für freie Schwingungen mit kleiner Amplitude um diese Ruhelage bekannt, ergeben sich die gesuchten Koeffizienten zu

$$\alpha = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \quad \text{bzw.} \quad c_1 = -\frac{m_1 \omega_0^2 + 2k_1}{2\Phi_{l_s}^2} \quad (2.39)$$

und

$$\beta = \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{\Phi_{l_s}^2}{w_0^2} \quad \text{bzw.} \quad c_3 = \frac{m_1 \omega_0^2}{2w_0^2 \Phi_{l_s}^2} \quad (2.40)$$

wobei die erste Form der Darstellung gebräuchlicher und die zweite Form der Darstellung für den Vergleich verschiedener Modelle nützlich ist. Wie aus beiden Darstellungen zu erkennen ist, hängt der Koeffizient des linearen Terms nur von der gemessenen Eigenkreisfrequenz ω_0

und nicht von Auslenkung in der Gleichgewichtslage ab.

Für die weitere Untersuchung - insbesondere im Hinblick auf die Anwendung numerischer Methoden - ist es empfehlenswert, eine Skalierung von (2.37) vorzunehmen. Dazu wird zunächst die dimensionslose Zeit

$$\tau = \omega_0 t \quad (2.41)$$

eingeführt. Die Zusammenhänge zwischen den Ableitungen nach den unterschiedlichen Zeiten lauten

$$(\dot{}) = \frac{d}{dt}() = \omega_0 \frac{d}{d\tau}() = \omega_0()' \quad \text{bzw.} \quad (\ddot{}) = \frac{d^2}{dt^2}() = \omega_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2}() = \omega_0^2()'' \quad (2.42)$$

wobei die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit τ wie üblich mit einem Apostroph gekennzeichnet wird. Obwohl dieselbe Notation bereits für die Ableitung nach der x -Koordinate verwendet wird, sind Verwechslungen ausgeschlossen, da beide Ableitungen in dieser Arbeit nicht im selben Kontext auftreten. Zusätzlich wird einer weiteren Konvention entsprochen, indem hier mit x die unbekannte Zeitfunktion bezeichnet wird. Dabei wird auch hier eine weitere Skalierung

$$a_1(t) = \frac{w_0}{\Phi_{l_s}} x(\tau(t)) \quad (2.43)$$

vorgenommen. Auch diese Umbenennung führt üblicherweise zu keinen Doppeldeutigkeiten. Unter Verwendung von (2.42) und (2.43) lassen sich (2.37) und (2.23b) schreiben als

$$x''(\tau) - \frac{1}{2}x(\tau) + \frac{1}{2}x^3(\tau) = fu''(\tau) + \gamma_m v(\tau) \quad (2.44a)$$

$$v'(\tau) + \mu v(\tau) + \gamma_e x'(\tau) = 0 \quad (2.44b)$$

mit den Koeffizienten

$$f = -\frac{1}{w_0 \omega_0^2} \frac{\Phi_{l_s} \left(\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_1(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_1(x) dx \right)}{\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_1^2(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_1^2(x) dx} \quad (2.45a)$$

$$\gamma_m = \frac{\vartheta}{w_0 \omega_0^2} \frac{\Phi_{l_s} \Phi_1'(l_p)}{\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_1^2(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_1^2(x) dx} \quad (2.45b)$$

$$\gamma_e = \frac{w_0 \vartheta}{2c_p} \frac{\Phi_1'(l_p)}{\Phi_{l_s}} \quad (2.45c)$$

$$\mu = \frac{1}{2c_p \omega_0 R} \quad (2.45d)$$

Aus der Betrachtung der Berechnungsvorschriften für die einzelnen Koeffizienten wird ersichtlich, dass sich diese bei einer geänderten Skalierung der Ansatzfunktion Φ_1 nicht verändern. Dies lässt sich ebenfalls an der Rücktransformation von modalen in physikalische Koordinaten erkennen. Aus dem gewählten Diskretisierungsansatz (2.22) und der Koordinatentransformation (2.43) folgt

$$w(\underline{x}, t) = a_1(t)\Phi_1(\underline{x}) = w_0x(\tau(t))\frac{\Phi_1(\underline{x})}{\Phi_{l_s}} \quad (2.46)$$

wobei hier \underline{x} die geometrische Koordinate bezeichnet. Wie anhand von (2.46) zu sehen ist, ist die Rücktransformation von der Skalierung der Ansatzfunktionen unabhängig, woraus folgt dass dies auch für die berechnete modale Koordinate gelten muss.

Die Gleichgewichtslagen des durch (2.44a) und (2.44b) gegebenen System liegen in $x_0 = \pm 1$ und die Eigenkreisfrequenz bei einer Linearisierung um diese Gleichgewichtslagen beträgt $\omega = 1$.

2.4.2 Modell 2: eine Ansatzfunktion und quintische Nichtlinearität

Für die Diskretisierung wird wieder der Ansatz $w(x, t) = a_1(t)\Phi_1(x)$ verwendet und für die Magnetkraft wird ein Polynom angesetzt, das ausschließlich lineare- und quintische Terme enthält. Aus Gleichung (2.24c) folgt dann unter Berücksichtigung der in der Beschreibung von Modell 1 getroffenen Überlegungen

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_0^{l_s} \delta(x - l_s) \left[c_1 \Phi_1(x) a_1(t) + c_5 \Phi_1^5(x) a_1^5(t) \right] \Phi_1(x) dx \\ &= c_1 \Phi_{l_s}^2 a_1(t) + c_5 \Phi_{l_s}^6 a_1^5(t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

und das mathematische Modell des mechanischen Bereichs lautet gemäß Gleichung (2.29a)

$$m_1 \ddot{a}_1(t) + k_1 a_1(t) + c_1 \Phi_{l_s}^2 a_1(t) + c_5 \Phi_{l_s}^6 a_1^5(t) = g_1 \ddot{u}(t) + \chi v(t) . \quad (2.48)$$

Nach Division durch die Masse m_1 und Berücksichtigung der neuen Koeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{m_1} (k_1 + c_1 \Phi_{l_s}^2) \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{m_1} c_5 \Phi_{l_s}^6 \quad (2.49)$$

wird daraus

$$\ddot{a}_1(t) + \alpha a_1(t) + \gamma a_1^5(t) = \frac{1}{m_1} g_1 \ddot{u}(t) + \frac{1}{m_1} \chi_1 v(t) . \quad (2.50)$$

Auch hier muss für Bistabilität wieder $\alpha < 0$, $\gamma > 0$ und daher auch $c_1 \Phi_{l_s}^2 < -k_1$ gelten und die Linearisierung von (2.50) um eine der stabilen reellen Ruhelagen $a_{1/2} = \pm \sqrt[4]{-\alpha/\gamma}$ lautet

$$\ddot{a}_1(t) - 4\alpha \left(a_1(t) \pm \sqrt[4]{-\alpha/\gamma} \right) = \frac{1}{m_1} g_1 \ddot{u}(t) + \frac{1}{m_1} \chi_1 v(t) \quad (2.51)$$

woraus die Eigenkreisfrequenz $\omega = \sqrt{-4\alpha}$ direkt abgelesen werden kann. Die Anpassung an die statische Ruhelage w_0 sowie die Eigenkreisfrequenz der freien Schwingungen um diese Ruhelage ω_0 liefert

$$\alpha = -\frac{1}{4}\omega_0^2, \quad \text{bzw.} \quad c_1 = -\frac{m_1\omega_0^2 + 4k_1}{4\Phi_{l_s}^2} \quad (2.52)$$

und

$$\gamma = \frac{1}{4}\omega_0^2 \frac{\Phi_{l_s}^4}{w_0^4}, \quad \text{bzw.} \quad c_5 = \frac{m_1\omega_0^2}{4w_0^4\Phi_{l_s}^2}. \quad (2.53)$$

Für die Skalierung von (2.50) wird wieder die dimensionslose Zeit

$$\tau = \omega_0 t \quad (2.54)$$

in Kombination mit der neuen Zeitfunktion x , welche

$$a_1(t) = \frac{w_0}{\Phi_{l_s}} x(\tau(t)) \quad (2.55)$$

erfüllt, verwendet. Unter Berücksichtigung der Ableitungsregeln (2.42) lassen sich (2.50) und (2.23b) als

$$x''(\tau) - \frac{1}{4}x(\tau) + \frac{1}{4}x^5(\tau) = f u''(\tau) + \gamma_m v(\tau) \quad (2.56a)$$

$$v'(\tau) + \mu v(\tau) + \gamma_e x'(\tau) = 0 \quad (2.56b)$$

schreiben, wobei die Koeffizienten durch die Gleichungen (2.45a)-(2.45d) gegeben sind. Die Gleichgewichtslagen des durch (2.56a) und (2.56b) gegebenen Systems liegen ebenfalls in $x_0 = \pm 1$ und die Eigenkreisfrequenz bei einer Linearisierung um diese Gleichgewichtslagen beträgt ebenfalls $\omega = 1$.

2.4.3 Modell 3: zwei Ansatzfunktionen und kubische Nichtlinearität

Diesmal wird für die Diskretisierung der Ansatz $w(x, t) = a_1(t)\Phi_1(x) + a_2(t)\Phi_2(x)$ verwendet und für die Magnetkraft wieder ein Polynom angesetzt, das kubisch von der Balkenverschiebung w abhängt. Unter Berücksichtigung der in der Beschreibung von Modell 1 getroffenen

Überlegungen folgt dann aus Gleichung (2.24c)

$$\begin{aligned}
 f_i &= \int_0^{l_s} \delta(x - l_s) \left[c_1 (\Phi_1(x)a_1(t) + \Phi_2(x)a_2(t)) + c_3 (\Phi_1(x)a_1(t) + \Phi_2(x)a_2(t))^3 \right] \Phi_i(x) dx \\
 &= c_1(a_1(t)\Phi_1(l_s) + a_2(t)\Phi_2(l_s))\Phi_i(l_s) + c_3(a_1(t)\Phi_1(l_s) + a_2(t)\Phi_2(l_s))^3\Phi_i(l_s)
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Aus der Voraussetzung, dass der Wert der Auslenkung an der Balkenspitze für jede Ansatzfunktion identisch ist und somit $\Phi_1(l_s) = \Phi_2(l_s) = \Phi_{l_s}$ gilt, folgt, dass die Magnetkraft für beide modalen Koordinaten identisch ist und die beiden Gleichungen für den mechanischen Teil des Systems lauten

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{a}_1(t) + k_1 a_1(t) + c_1(a_1(t)\Phi_{l_s} + a_2(t)\Phi_{l_s})\Phi_{l_s} + c_3(a_1(t)\Phi_{l_s} + a_2(t)\Phi_{l_s})^3\Phi_{l_s} \\
 = g_1(t) + \chi_1 v(t)
 \end{aligned} \tag{2.58a}$$

$$\begin{aligned}
 m_2 \ddot{a}_2(t) + k_2 a_2(t) + c_1(a_1(t)\Phi_{l_s} + a_2(t)\Phi_{l_s})\Phi_{l_s} + c_3(a_1(t)\Phi_{l_s} + a_2(t)\Phi_{l_s})^3\Phi_{l_s} \\
 = g_2(t) + \chi_2 v(t) .
 \end{aligned} \tag{2.58b}$$

Für diesen Fall bietet sich die Zusammenfassung und Umbenennung der Koeffizienten, wie sie bei den beiden vorherigen Modellen durchgeführt wurde, nicht an, da die Anzahl der neu generierten Koeffizienten die Anzahl der Freiwerte übersteigt und somit zu einer unnötig komplizierten Darstellung führt.

Die Bestimmung der modalen Gleichgewichtslagen liefert

$$a_{1,1/2} = \pm k_2 \sqrt{\frac{-c_1(k_1 + k_2)\Phi_{l_s}^2 - k_1 k_2}{c_3(k_1 + k_2)^3\Phi_{l_s}^4}} , \quad a_{2,1/2} = \pm k_1 \sqrt{\frac{-c_1(k_1 + k_2)\Phi_{l_s}^2 - k_1 k_2}{c_3(k_1 + k_2)^3\Phi_{l_s}^4}} \tag{2.59}$$

welche nur dann reell sind, wenn $c_1 \Phi_{l_s}^2 < -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ gilt, wobei der Term auf der rechten Seite der Ungleichung der Ersatzsteifigkeit bei einer Reihenschaltung der beiden Moden entspricht. Die Darstellung der Gleichgewichtslagen in physikalischen Koordinaten lautet

$$w_{1,2} = \pm(k_1 + k_2)\Phi_{l_s} \sqrt{\frac{-c_1(k_1 + k_2)\Phi_{l_s}^2 - k_1 k_2}{c_3(k_1 + k_2)^3\Phi_{l_s}^4}} . \tag{2.60}$$

Gleichsetzen von (2.60) mit der gemessenen Auslenkung w_0 und Auflösen nach c_3 liefert zunächst

$$c_3 = -\frac{c_1(k_1 + k_2)\Phi_{l_s}^2 + k_1 k_2}{(k_1 + k_2)w_0^2\Phi_{l_s}^2} \tag{2.61}$$

noch in Abhängigkeit von c_1 . Die vier aus der Linearisierung von (2.58a) und (2.58b) unter Verwendung von (2.61) berechneten rein imaginären Eigenwerte lassen sich nicht übersichtlich darstellen, so dass darauf verzichtet wird. Da die Eigenwerte in komplex-konjugierten Paaren auftreten und der Betrag der Imaginärteile der Eigenkreisfrequenz der zugehörigen Schwingung entspricht, stehen zwei Eigenkreisfrequenzen zur Bestimmung von c_1 zur Verfügung.

Falls aus Messungen zusätzlich zur Eigenkreisfrequenz ω_0 die Eigenkreisfrequenz der nächst höheren Schwingform bestimmt wurde, kann zum Beispiel versucht werden, c_1 so zu wählen, dass der Fehler im Bezug auf beide Eigenkreisfrequenzen möglichst gering wird. Alternativ ist es aber auch möglich, die niedrigere der beiden Eigenkreisfrequenzen mit ω_0 gleichzusetzen und nach c_1 aufzulösen, woraus schließlich unter Verwendung von (2.61)

$$c_1 = \frac{\omega_0^2 (k_1 m_2 (k_1 - m_1 \omega_0^2) + k_2^2 m_1 - k_2 m_1 m_2 \omega_0^2)}{2\Phi_{l_s}^2 \omega_0^2 (k_1 + k_2) (k_1 + k_2 + \omega_0^2 (-(m_1 + m_2)))} \quad (2.62)$$

und

$$c_3 = \frac{-k_1^2 (2k_2 + m_2 \omega_0^2) + k_1 (-2k_2^2 + 2k_2 \omega_0^2 (m_1 + m_2) + m_1 m_2 \omega_0^4) + k_2 m_1 \omega_0^2 (m_2 \omega_0^2 - k_2)}{2\Phi_{l_s}^2 (k_1 + k_2) (k_1 + k_2 - \omega_0^2 (m_1 + m_2))} \quad (2.63)$$

folgt. Durch die Skalierung der resultierenden Differentialgleichung mittels der Verwendung einer dimensionslosen Zeit und einem Proportionalitätsfaktor in der Koordinate wäre es möglich, einen von vier Koeffizienten der linearen Terme und einen von acht Koeffizienten der kubischen Terme beliebig einzustellen. Um eine möglichst gute Vergleichbarkeit mit den beiden anderen Modellen zu gewährleisten, wird hier aber ein anderes Vorgehen verwendet. Durch die Verwendung der dimensionslosen Zeit

$$\tau = \omega_0 t \quad (2.64)$$

und den neuen Koordinaten

$$a_i(t) = \frac{w_0}{\Phi_{l_s}} x_i(\tau(t)), \quad i = 1, 2 \quad (2.65)$$

wird sichergestellt, dass die Modelle und die erzielten Ergebnisse auch ohne eine vorherige Rücktransformation vergleichbar sind. Einsetzen von (2.64) unter Berücksichtigung von

(2.65) in (2.58a), (2.58b) und (2.23b) liefert schließlich

$$x_1''(\tau) + \alpha_{11}x_1(\tau) + \alpha_{12}x_2(\tau) + \beta_1(x_1(\tau) + x_2(\tau))^3 = f_1u''(\tau) + \gamma_{m_1}v(\tau) \quad (2.66a)$$

$$x_2''(\tau) + \alpha_{21}x_1(\tau) + \alpha_{22}x_2(\tau) + \beta_2(x_1(\tau) + x_2(\tau))^3 = f_2u''(\tau) + \gamma_{m_2}v(\tau) \quad (2.66b)$$

$$v'(\tau) + \mu v(\tau) + \gamma_{e_1}x_1'(\tau) + \gamma_{e_2}x_2'(\tau) = 0. \quad (2.66c)$$

Für die linearen und kubischen Steifigkeitskoeffizienten gilt

$$\alpha_{ij} = \frac{c_1 \Phi_{l_s}^2 + \delta_{ij} k_i}{m_i \omega_0^2}, \quad (2.67a)$$

$$\beta_i = \frac{c_3 w_0^4 \Phi_{l_s}^2}{m_i \omega_0^2}, \quad (2.67b)$$

und für die übrigen Koeffizienten

$$f_i = -\frac{1}{w_0 \omega_0^2} \frac{\Phi_{l_s} \left(\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_i(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_i(x) dx \right)}{\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_i^2(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_i^2(x) dx}, \quad (2.68a)$$

$$\gamma_{m_i} = \frac{\vartheta}{w_0 \omega_0^2} \frac{\Phi_{l_s} \Phi_i'(l_p)}{\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_i^2(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_i^2(x) dx}, \quad (2.68b)$$

$$\gamma_{e_i} = \frac{w_0 \vartheta}{2c_p} \frac{\Phi_i'(l_p)}{\Phi_{l_s}}, \quad (2.68c)$$

$$\mu = \frac{1}{2c_p \omega_0 R}, \quad (2.68d)$$

wobei stets $i = 1, 2$ gilt und δ_{ij} das Kronecker-Delta ist. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass in den Berechnungsvorschriften für die Steifigkeitskoeffizienten (2.67a) und (2.67b) die Ergebnisse für c_1 und c_3 , die durch (2.62) und (2.63) gegeben sind, nicht eingesetzt wurden um die Übersicht zu wahren. Wird dies allerdings getan und werden m_i und k_i gemäß (2.24a) und (2.24b) umgeschrieben, so zeigt sich, dass die Koeffizienten α_{ij} und β_i ebenfalls nicht von der gewählten Skalierung der Ansatzfunktionen Φ_i abhängen.

Für das auf diese Art skalierte System lässt sich lediglich noch die Aussage treffen, dass für die niedrigste Eigenkreisfrequenz bei einer Linearisierung in den Gleichgewichtslagen $\omega = 1$ gilt.

2.5 Experimentelle Validierung der Modelle

Um die im vorherigen Abschnitt besprochenen Modelle zu validieren, wurde ein experimenteller Aufbau erstellt, an dem umfangreiche Messungen vorgenommen wurden. Dabei erfolgte die Planung und Konstruktion des Aufbaus durch den Autor. Die Planung der Experimente erfolgte gemeinsam mit dem zu dieser Zeit ebenfalls am Fachgebiet Mechatronische

Maschinendynamik beschäftigten Herrn Nguyen Huy The, welcher die Experimente dann auch durchführte. Im Folgenden wird der Aufbau vorgestellt und es werden einige aussagekräftige Vergleiche zwischen Messungen und Simulationen präsentiert.

2.5.1 Aufbau des experimentellen EH-Systems

Das Kernstück des verwendeten experimentellen Aufbaus ist das in Abbildung 4 dargestellte EH-System. Um die Handhabung zu vereinfachen, wurde der Aufbau bewusst größer dimensioniert als es in den meisten Anwendungsszenarien der Fall ist.



Abbildung 4: Das im Rahmen der Arbeit verwendete experimentelle EH-System.

Das EH-System besteht aus einem Balken aus handelsüblichem Federstahl auf den Piezokeramiken vom Typ PIC 255 der Firma PI Ceramics aufgeklebt wurden. Der Rahmen, an dem der Balken befestigt ist, wurde aus Aluminiumprofilen der Firm Item hergestellt, um den Einfluss auf das Magnetfeld möglichst gering zu halten. Um die feste Einspannung zu realisieren, wurde der Balken zwischen zwei eigens dafür gefertigte Aluminiumprofile gespannt, die sich auf einem Schlitten aus Item-Aluminiumprofil befinden, welcher in Balkenlängsrichtung (x -Achse des Balkenkoordinatensystems) verschiebbar ist. Auf dem Rahmen befindet sich ein weiterer Schlitten, der ebenfalls aus einem Item-Aluminiumprofil gefertigt wurde, der in die Breitenrichtung des Balkens (y -Achse des Balkenkoordinatensystems) verschiebbar ist. Auf diesem Schlitten wiederum befinden sich zwei weitere Schlitten, die aus Aluminium Vollmaterial gefertigt wurden, welche in die Bewegungsrichtung des Balkens (z -Achse des Balkenkoordinatensystems) verschoben werden können. Auf diese wurden die beiden verwendeten NeFdb-N45 Permanentmagnete aufgeklebt, welche von der Firma Conrad bezogen wurden. Die Maße und relevanten physikalischen Parameter des Balkens, der

Piezokeramiken und der Magnete finden sich in Tabelle 1. Für eine weitere Beschreibung der verwendeten Größen siehe die Erläuterungen in Abschnitt 2.2.

Tabelle 1: Geometrische- und physikalische Parameter des experimentellen EH-Systems

Größe	Zeichen	Einheit	Balken	Piezokeramik	Magnete
Länge (x -Richtung)	l_s, l_p, l_m	mm	250	60	5
Breite (y -Richtung)	b_s, b_p, b_m	mm	20	20	20
Höhe (z -Richtung)	h_s, h_p, h_m	mm	1	0.2	10
Massendichte	ρ_s, ρ_p	kg/m ³	7870	7800	-
E-Modul	Y_s, Y_p	GPa	213	62	-
Piezoelek. Ladungskoeff.	d_{31}	pm/V	-	-190	-
Permittivitätszahl	ϵ_{33}^T	nF/m	-	6.43	-
Remanenzflussdichte	B_r	T	-	-	1,3

Durch die Verwendung der Schlitten ist es möglich, die Lage der Magnete in Bezug auf die Balkenspitze frei zu wählen, wobei bislang ausschließlich symmetrische Aufbauten untersucht wurden. Da die y -Richtung in der Modellierung und Untersuchung des Systems nicht betrachtet wird, werden die Magnete in dieser Richtung symmetrisch zur Balkenmitte angeordnet. Der Abstand in x -Richtung von der Oberseite der Magnete zur Balkenspitze wird mit d und der Abstand in z -Richtung vom Mittelpunkt eines der symmetrisch angeordneten Magnete zur x -Achse mit z_m bezeichnet. Für den untersuchten experimentellen Aufbau gilt dabei $d = 6$ mm und $z_m = 11,5$ mm was dazu führt, dass die statische Auslenkung der Balkenspitze in der Ruhelage, welche mit w_0 bezeichnet wird 6 mm beträgt.

Für die durchgeführten Messungen wurde eine Serienschaltung der Piezokeramiken verwendet und der verwendete Ohmsche Widerstand beträgt 120 k Ω .

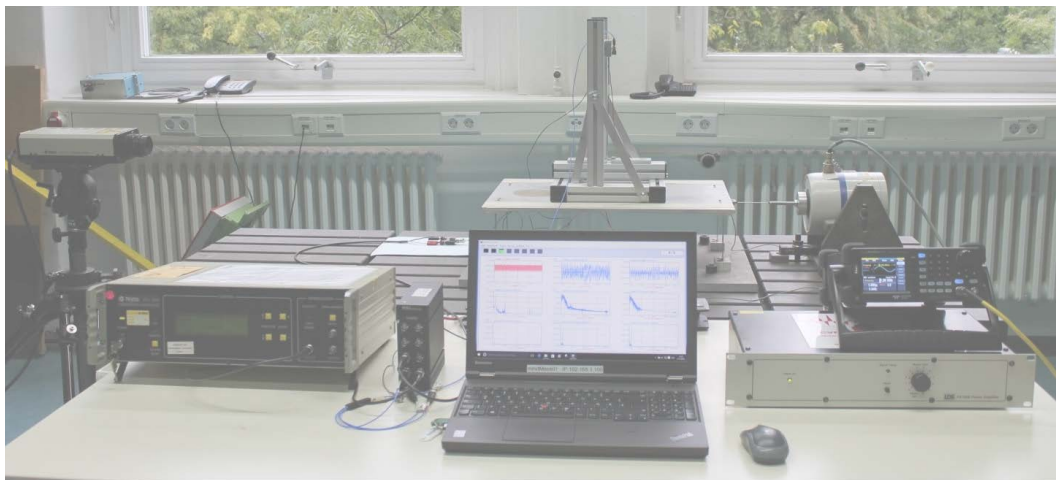


Abbildung 5: Der für die im Rahmen der Arbeit durchgeführten Experimente verwendete Aufbau.

Zur Durchführung der Messungen wird der in Abbildung 5 dargestellte Messaufbau verwendet. Das beschriebene EH-System wird auf einen Schwingtisch montiert, welcher über einen elektrodynamischen Shaker angeregt wird. Dem Shaker wird durch einen Signalgenerator ein harmonisches Signal vorgegeben, welches über den Schwingtisch und den Rah-

men auf den Balken übertragen wird. Da es durch die übertragenden Komponenten zu einer Veränderung der gewünschten Anregung kommt, wurde an der Einspannung des Balkens ein Beschleunigungssensor montiert, der die tatsächliche Anregung des Balkens misst. Zur Messung der Schwingungen des Balkens wird ein Laservibrometer verwendet, welches die Geschwindigkeit an der Balkenspitze misst.

2.5.2 Modalanalyse des Systems

Zu Beginn wurde eine Modalanalyse bei Anregung mit einem Modalhammer zur Ermittlung der Eigenfrequenzen und Dämpfungsgrade für das System ohne und mit montierten Magneten durchgeführt. Da das System mit Magneten zwei stabile Ruhelagen besitzt, wurde die Modalanalyse hier für jede der Ruhelagen durchgeführt, wobei ausschließlich Schwingungen untersucht wurden, bei denen es zu keinem Wechsel der Gleichgewichtslagen kam. Obwohl es sich bei dem System mit Magneten um ein nichtlineares System handelt, war es möglich aus dem Antwortspektrum einer FFT die ersten vier Eigenfrequenzen abzulesen. Da für das System ohne Magnete eine analytische Lösung existiert (siehe Anhang A.4) können diese Ergebnisse verwendet werden, um Unsicherheiten in den Parametern zu verringern. Im vorliegenden Fall betraf dies den E-Modul des Flachstahls für den vom Hersteller eine Spanne von 200 – 230 GPa angegeben wurde. Durch die Anpassung der analytisch bestimmten Frequenzen der ersten und zweiten Schwingform an die in Tabelle 2 aufgeführten Messwerte wurde ein Wert von 213 GPa bestimmt. Die Verwendung dieses Wertes führt zu einer sehr guten Übereinstimmung zwischen den ersten vier gemessenen und analytisch berechneten Frequenzen wie an den in Tabelle 2 aufgeführten prozentualen Abweichungen zu sehen ist.

Tabelle 2: Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse für das System ohne Magnete.

Schwingform	1	2	3	4
Frequenz [Hz]	96,1	537,8	1433,8	2757,1
Dämpfungsgrad [%]	0,40	0,30	0,20	0,32
Abweichung zur analytischen Lösung [%]	0,04	4,06	5,37	6,41

In Tabelle 3 sind die Ergebnisse für das System mit Magneten aufgeführt, wobei der jeweils linke/rechte Wert der Messung in der linken/rechten Ruhelage entspricht. Wie zu erkennen ist, stimmen die gemessenen Frequenzen annähernd überein, was ein Zeichen dafür ist, dass das System tatsächlich symmetrisch ist. Gestützt wird diese Annahme auch durch die Messung der statischen Auslenkung der Balkenspitze w_0 die in beiden Gleichgewichtslagen genau 6 mm beträgt. Die Beurteilung des gemessenen Dämpfungsgrads fällt schwer, da dieser bei der ersten und vierten Schwingform große Abweichungen zeigt, für die zweite und dritte Schwingform aber gut übereinstimmt. Da auch eine Wiederholung der Messungen keine Verbesserung in den Ergebnissen brachte, wurden die gemessenen Dämpfungsgrade nicht

Tabelle 3: Ergebnisse der Modalanalyse für das System mit Magneten.

Schwingform	1	2	3	4
Frequenz [Hz]	94,2/93,1	541,0/540,3	1437,3/1433,8	2760,8/2758,5
Dämpfungsgrad [%]	0,66/0,48	0,28/0,29	0,19/0,20	0,44/0,27

weiter verwendet und stattdessen aus der Anpassung an Ausschwingversuche Dämpfungsgrade für die erste und zweite Schwingform bestimmt.

2.5.3 Koeffizienten der Modelle

Unter Verwendung der in Tabelle 1 aufgeführten Parameter können zunächst die in Anhang A.4 hergeleiteten Ansatzfunktionen explizit berechnet werden. Anschließend können unter Berücksichtigung der gemessenen statischen Auslenkung der Balkenspitze in der Ruhelage $w_0 = 6$ mm und der gemittelten Frequenz der ersten Schwingform mit kleiner Amplitude um die stabilen Ruhelagen $f_\omega = 93.65$ Hz sämtliche Koeffizienten der Modelle berechnet werden.

In Tabelle 4 finden sich zunächst die Koeffizienten, die in allen drei Modellen auftreten. Zusätzlich zu den bei der Beschreibung der Modelle besprochenen Größen ist die verwendete modale Dämpfung ξ aufgeführt, welche als einziger Faktor vor der modalen Geschwindigkeit steht. Bei den Einträgen entspricht die Reihenfolge der Nummerierung der Koordinaten, so dass für Modell 1 und Modell 2 jeweils nur der erste Eintrag relevant ist.

Tabelle 4: Koeffizienten der Modelle.

Koeffizient	f	ξ	γ_m	γ_e	μ
Wert	0,0301/-0,0176	0,011/0,030	0,1280/-0,4689	-0,2350/0,9123	0,5503

Die Steifigkeitskoeffizienten von Modell 3 sind in Tabelle 5 aufgeführt. Wie zu erkennen ist, weichen der lineare Steifigkeitskoeffizient α_{11} und der kubische Steifigkeitskoeffizient β_1 von den entsprechenden Werten aus Modell 1 ab, so dass dieses nicht als Spezialfall in Modell 3 enthalten ist.

Tabelle 5: Steifigkeitskoeffizienten für Modell 3.

Koeffizient	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	β_1	β_2
Wert	-0,4572	-1.5111	-1.4254	34,2875	0,4858	0,4582

2.5.4 Vergleich von Simulation und Experiment

Für die Validierung der Modelle wurden die oben beschriebenen Messungen mit harmonischer Anregung $u''(\tau) = q \cos(\eta\tau)$ durchgeführt. Für die Validierung wird neben den grundlegenden Lösungstypen Interwell und Intrawell auch ein Spezialfall, nämlich eine Intrawell-Lösung mit Periodenverdopplung betrachtet.

Tabelle 6: Werte der zur Validierung verwendeten Messungen.

Messung	η [-]	q [m/s ²]	betrachtete Lösungen
1	0,6	1,9	Interwell und Intrawell
2	1,0	4,5	Intrawell mit Periodenverdopplung

In Tabelle (6) sind die jeweils zur Generierung der Anregung verwendeten Amplituden q , sowie die normierten Kreisfrequenzen η für die einzelnen Messungen aufgeführt. Dabei ist zu beachten, dass die an der Einspannung des Balkens gemessene Beschleunigung leichte Abweichungen in der Amplitude und dem Verlauf zeigt. Für die Simulationen wurden die gemessenen Beschleunigungen als Anregung verwendet.

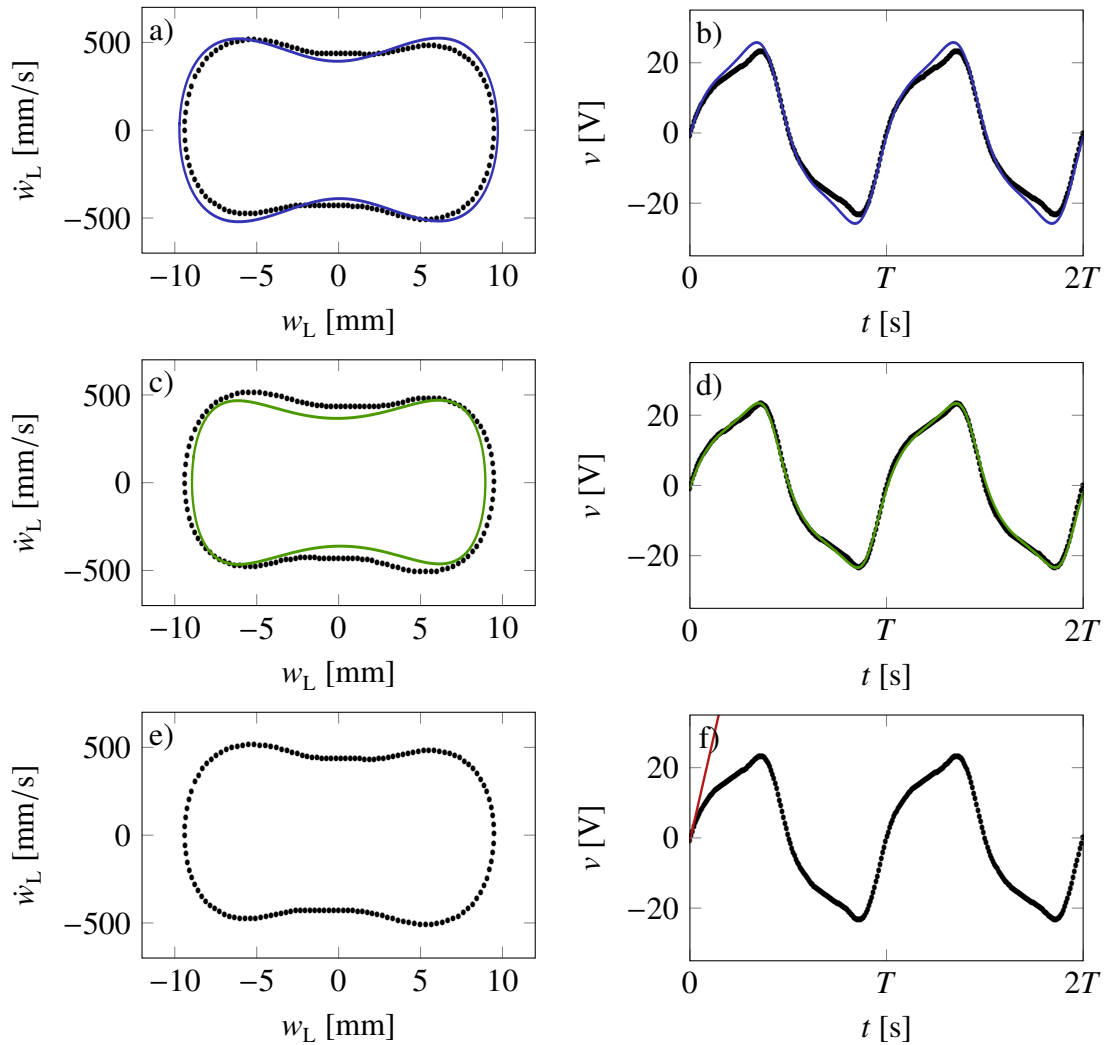


Abbildung 6: Vergleich zwischen Experiment und Simulation bei einer harmonischen Anregung mit $\eta = 0,6$ und $q = 1,9 \text{ m/s}^2$ für Interwell-Lösungen, Messung 1. Dabei ist das Ergebnis aus Modell 1 in *blau*, das aus Modell 2 in *grün* und das aus Modell 3 in *rot* dargestellt.

In den für den Vergleich verwendeten Abbildungen 6-8 sind in der linken Spalte Phasenportraits für Lage- und Geschwindigkeit und in der rechten Spalte Zeitverläufe der Spannung v dargestellt. Dabei werden die Daten aus der Messung stets schwarz gepunkt und die Ergeb-

nisse aus der Simulation in Farbe und durchgezogen dargestellt. Im Farbcode entspricht **blau** dem Ergebnis aus der Simulation von Modell 1, **grün** dem Ergebnis aus der Simulation von Modell 2 und **rot** dem Ergebnis aus der Simulation von Modell 3.

In Abbildung 6 sind die Ergebnisse aus dem Vergleich von Simulation und Messung 1 für den Fall der Interwell Lösungen dargestellt. Augenscheinlich ist die qualitative und quantitative Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation für alle drei Modelle sehr gut. Bei einer Betrachtung der Phasenportraits fällt auf, dass die beiden kubischen Modelle (Graphiken 6 a) und e)) tendenziell überschätzen und das quintische Modell (Graphik 6 c)) tendenziell unterschätzt. Die Zeitverläufe der Spannung zeigen ein abweichendes Bild, da hier die Ergebnisse aus Modell 2 und Modell 3 (Graphiken 6 d) und f)) die gemessenen Verläufe am besten wiedergeben.

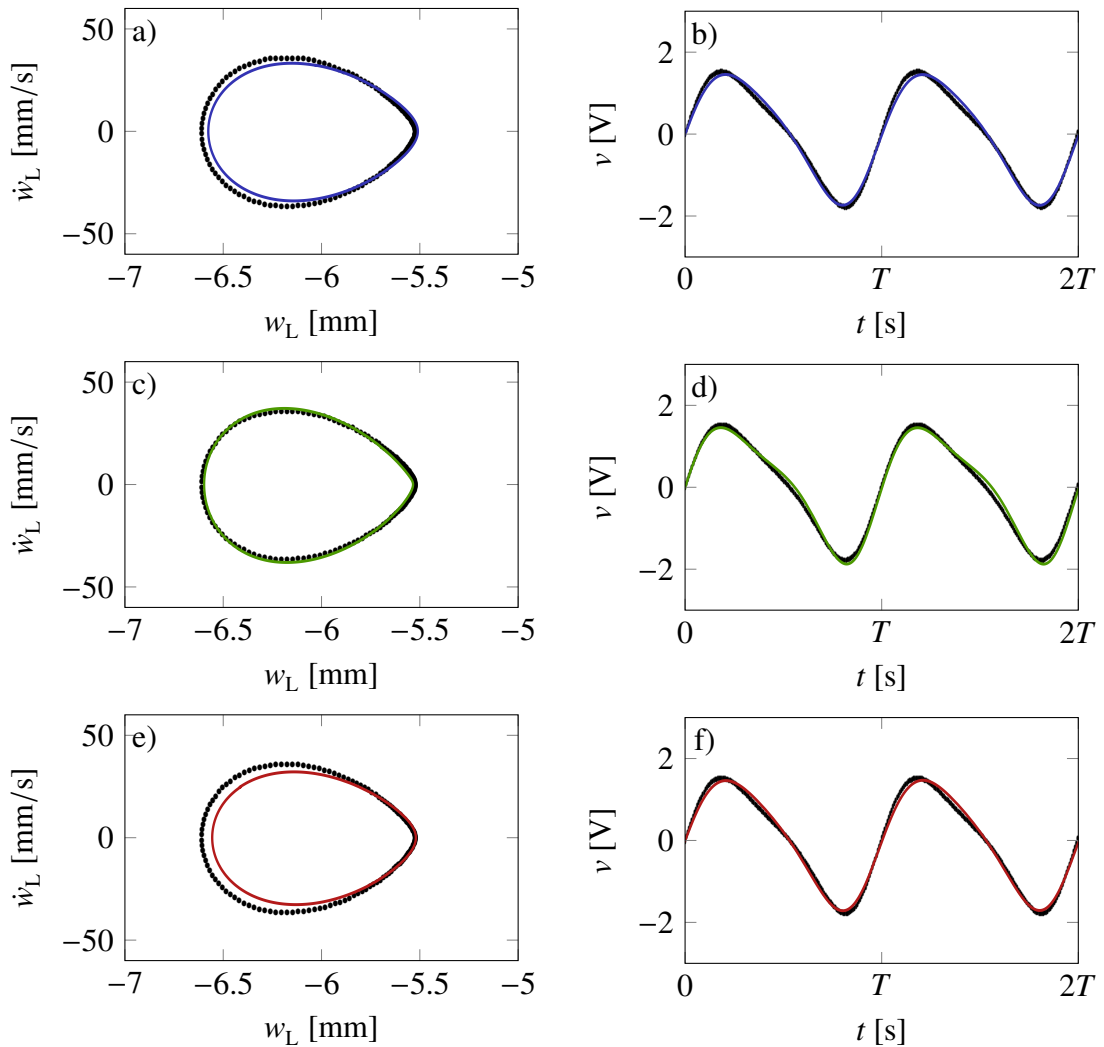


Abbildung 7: Vergleich zwischen Experiment und Simulation bei einer harmonischen Anregung mit $\eta = 0,6$ und $q = 1,9 \text{ m/s}^2$ für Intrawell-Lösungen, Messung 1. Dabei ist das Ergebnis aus Modell 1 in **blau**, das aus Modell 2 in **grün** und das aus Modell 3 in **rot** dargestellt.

Die Ergebnisse aus dem Vergleich von Simulation und Messung 1 für den Fall der Intrawell Lösungen finden sich in Abbildung 7. Auch hier ist die qualitative und quantitative Über-

einstimmung zwischen Experiment und Simulation für alle drei Modelle wieder sehr gut. Die beim vorherigen Vergleich der Phasenportraits festgestellte Tendenz der kubischen Modelle (Graphiken 7 a) und e)) das Ergebnis zu überschätzen findet sich hier nicht wieder; tatsächlich ist hier das Gegenteil der Fall und die Modelle unterschätzen das Ergebnis und das quintische Modell (Graphik 7 c)) zeigt die beste Übereinstimmung. Bei der Betrachtung der Zeitverläufe der Spannung lässt sich lediglich feststellen, dass das Ergebnis von Modell 2 (Graphik 7 d)) trotz besserer Übereinstimmung im Phasenportrait ähnlich kleine Abweichungen wie die Ergebnisse von Modell 1 und Modell 3 (Graphiken 7 b) und f)) zeigt.

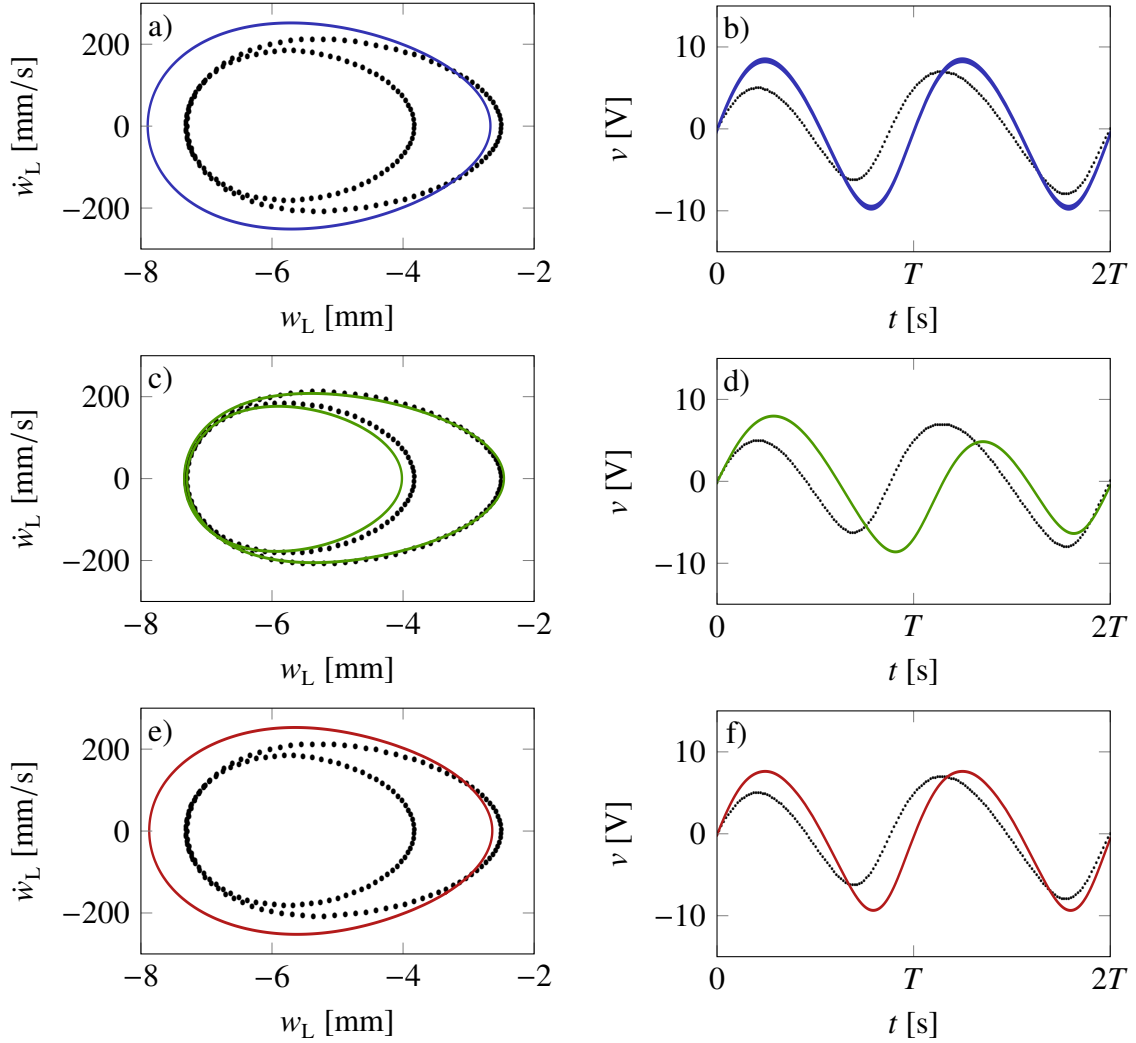


Abbildung 8: Vergleich zwischen Experiment und Simulation bei einer harmonischen Anregung mit $\eta = 1.0$ und $q = 4.5 \text{ m/s}^2$ für Interwell-Lösungen, Messung 2. Dabei ist das Ergebnis aus Modell 1 in *blau*, das aus Modell 2 in *grün* und das aus Modell 3 in *rot* dargestellt.

In Abbildung 8 finden sich die Ergebnisse aus dem Vergleich von Simulation und Messung 2 für den Fall der Intrawell Lösungen. Wie eine Betrachtung der Phasenportraits zeigt, ist die vorliegende Lösung insofern besonders, als dass die Gleichgewichtslage zweimal umlaufen wird. Aus den Zeitverläufen der Spannung ist zu erkennen, dass es dabei zu einer Verdoppelung der Periodendauer kommt. Der Vergleich der Ergebnisse aus der Simulation mit der

Messung zeigt, dass lediglich Modell 2 (Graphik 8 c)) das beschriebene Verhalten korrekt abbildet. In Verbindung mit den starken qualitativen Abweichungen bei den Ergebnissen der Modelle 1 und 3 (Graphiken 8 a) und e)) kommt es auch zu großen quantitativen Abweichungen sowohl im Phasenportrait als auch im Zeitverlauf der Spannung.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass alle drei Modelle erfolgreich validiert werden konnten, mit einer Einschränkung hinsichtlich der Vorhersagegenauigkeit von speziellen Lösungen wie zum Beispiel der betrachteten IntraWell Lösung mit Periodenverdopplung.

3 Analyse für eine harmonische Anregung

Im folgenden Kapitel wird gezeigt, wie sich das dynamische Verhalten der Modelle für den Fall einer harmonischen Anregung untersuchen lässt. Dazu wird zunächst ein Überblick über das mögliche dynamische Verhalten gegeben. Als nächstes wird erläutert, wie die im Folgenden zur zusammenfassenden Darstellung des Systemverhaltens verwendeten Antwortdiagramme erstellt werden. Der Hauptteil des Kapitels besteht aus der Vorstellung der Methode der Harmonischen Balance unter Verwendung einer multifrequenten Ansatzfunktion. Nach einer Besprechung der theoretischen Grundlagen der Methode wird die konkrete Umsetzung anhand eines Beispiels ausführlich erläutert.

3.1 Überblick über das dynamische Verhalten des Systems

Um ein Verständnis für das dynamische Verhalten des untersuchten Systems zu entwickeln, ist es hilfreich, konkrete Lösungen zu betrachten. Da deren Ausprägung aber stets zu einem gewissen Grad von der gewählten Modellierung des Systems abhängt, ist es bei den folgenden Überlegungen wichtig, das Hauptaugenmerk auf die beschriebenen Effekte zu legen und die gezeigten Realisierungen als Beispiel zu verstehen. Alle gezeigten Lösungen wurden durch die Simulation von Modell 1 (siehe Abschnitt 2.4.1) erzielt und die dabei verwendeten Parameterwerte können aus Abschnitt 2.5.3 Tabelle 4 entnommen werden und die verwendeten Anfangsbedingungen finden sich in Anhang D.

3.1.1 Einblick in die Lösungsvielfalt

Als Grundlage für die Beschreibung des dynamischen Verhaltens des Systems ist es nützlich zuerst das Potenzial U der rückstellenden Kraft zu betrachten. In Abbildung 9 a) ist dessen qualitativer Verlauf in Abhängigkeit von der modalen Koordinate x dargestellt.

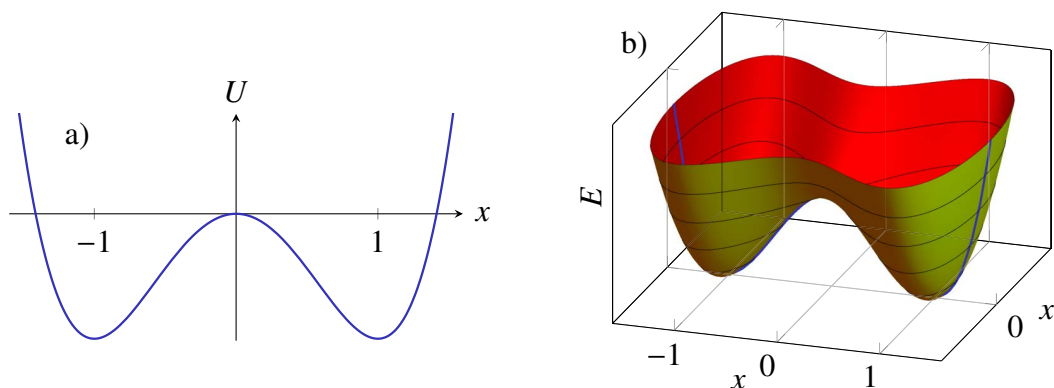


Abbildung 9: Potenzialfunktion und Energiefläche des bistabilen Systems.

Wie zu sehen ist, besitzt das Potenzial zwei achsensymmetrische Potenzielsenken (potential wells) die durch eine Barriere (potential barrier) voneinander abgetrennt sind. Insgesamt besitzt das Potenzial drei lokale Extremstellen, wobei die Extremstellen bei ± 1 globale Minima

und die Extremstelle im Ursprung ein lokales Maximum darstellen. Daraus folgt, dass es sich bei den Extremstellen in ± 1 um stabile Gleichgewichtslagen handelt, und die unausgelenkte Lage instabil ist.

Für den Fall einer verschwindenden Geschwindigkeit entspricht die im System vorhandene Energie dem Potenzial der rückstellenden Kraft, so dass die in Abbildung 9 a) dargestellte Kurve das Energieniveau des Systems in Abhängigkeit von der Auslenkung darstellt.

Wird die Geschwindigkeit hinzugenommen, ergibt sich für das Energieniveau die in Abbildung 9 b) dargestellte Fläche. Aus deren Betrachtung wird ersichtlich, dass das System auf Bewegungen innerhalb einer der Potenzialsenken beschränkt ist, solange die Energie nicht hoch genug ist um die Potenzialbarriere zu überwinden.

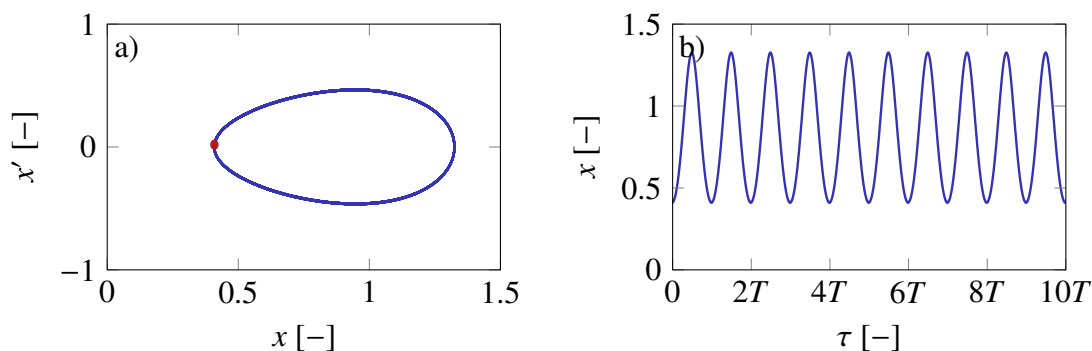


Abbildung 10: Phasenportrait und Zeitverlauf für eine Intrawell-Lösung mit Periodizität 1. Die für die Simulation verwendeten Parameter finden sich in Anhang D.1, Tabelle 13.

Diese Art von Schwingungen (Intrawell-Lösung) ist in Abbildung 10 a) im Phasenportrait und in 10 b) im Zeitverlauf dargestellt. Der rote Punkt im Phasenportrait ist eine Poincaré-Abbildung, die dadurch erzeugt wurde, dass im zeitlichen Abstand von einer Erregerperiode die Lage und Geschwindigkeit des Systems eingetragen wurde. Aus der Betrachtung der Poincaré-Abbildung und dem Zeitverlauf wird ersichtlich, dass die Periodendauer der betrachteten Schwingung der Periodendauer der Anregung entspricht, was im Folgenden mit Periodizität 1 bezeichnet wird.

Kommt es zu einer Erhöhung der Energie, so dass das System in der Lage ist die Potenzialbarriere zu überschreiten, sind zwei Szenarien möglich. Liegt die Energie des Systems nicht dauerhaft über dem Grenzwert, der notwendig ist um die Potenzialbarriere zu überschreiten, stellt sich nach dem Übertritt zunächst wieder eine Intrawell-Lösung ein. Kommt es dann wieder zu einem Anstieg der Energie über den Grenzwert, erfolgt ein erneuter Übertritt und dieser Vorgang wiederholt sich, wobei es entscheidend ist, ob die Wiederholungen in regelmäßigen zeitlichen Abständen stattfinden oder nicht. Der Fall unregelmäßiger Übertritte stellt ein chaotisches Systemverhalten dar und ist in Abbildung 11 zu sehen, wobei der Übersicht halber im Phasenportrait 11 a) lediglich die Poincare-Abbildung dargestellt wurde.

Im Zeitverlauf 11 b) ist der beschriebene unregelmäßige Wechsel zwischen den Potenzialsenken gut zu erkennen und die Poincare-Abbildung zeigt, wie für chaotische Lösungen

typisch, einen seltsamen Attraktor.

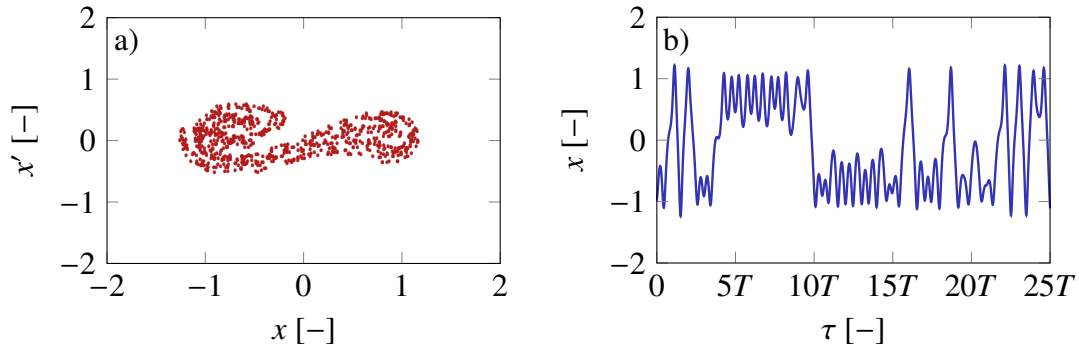


Abbildung 11: Phasenportrait und Zeitverlauf für eine chaotische Lösung. Die für die Simulation verwendeten Parameter finden sich in Anhang D.1, Tabelle 13.

Für den Fall, dass die Energie des Systems dauerhaft über dem Grenzwert liegt, der zum Überschreiten der Potenzialbarriere notwendig ist, kommt es zu einer Schwingung bei der beide stabilen Gleichgewichtslagen umlaufen werden (Interwell-Lösung). Aus der Darstellung in Abbildung 12 wird deutlich, dass die Auslenkungen vergleichsweise groß sind, und erwartungsgemäß liefert diese Schwingung auch die höchste Energieausbeute (siehe zum Beispiel [26]) was zu der alternativen Bezeichnung high-energy orbits für diese Art der Lösung geführt hat.

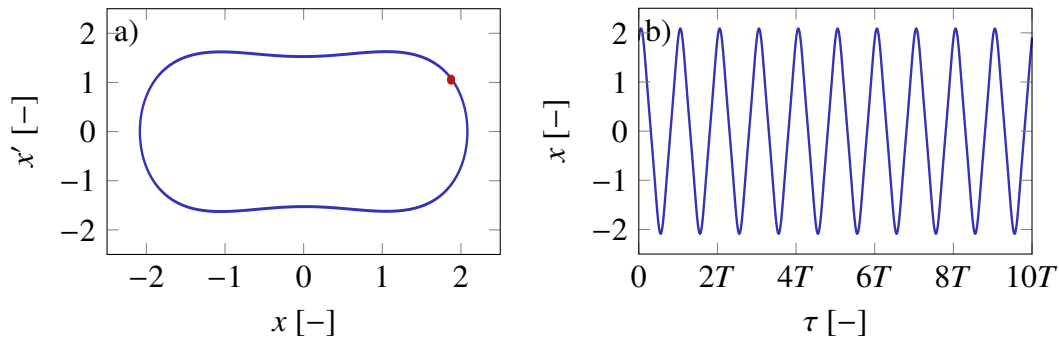


Abbildung 12: Phasenportrait und Zeitverlauf für eine Interwell-Lösung mit Periodizität 1. Die für die Simulation verwendeten Parameter finden sich in Anhang D.1, Tabelle 13.

An dieser Stelle soll erwähnt werden, dass die besprochenen Lösungen sowie weitere Sonderformen häufig koexistieren. Welche Lösung angenommen wird, hängt in diesen Fällen entscheidend von der ursprünglichen Lage und Geschwindigkeit (Anfangsbedingungen) des Systems ab. Dieser Sachverhalt kann durch eine Betrachtung der Einzugsbereiche des Systems anschaulich gemacht werden. Dabei handelt es sich um Karten in der Phaseebene, in denen jeder Kombination von Anfangsbedingungen, in Abhängigkeit von der Lösung die sich für diese einstellt, eine Farbe zugeordnet wird.

In Abbildung 13 sind zwei Karten von Einzugsbereichen für das gleiche System dargestellt, wobei für die Berechnung der rechten Karte eine höhere Erregeramplitude verwendet wurde.

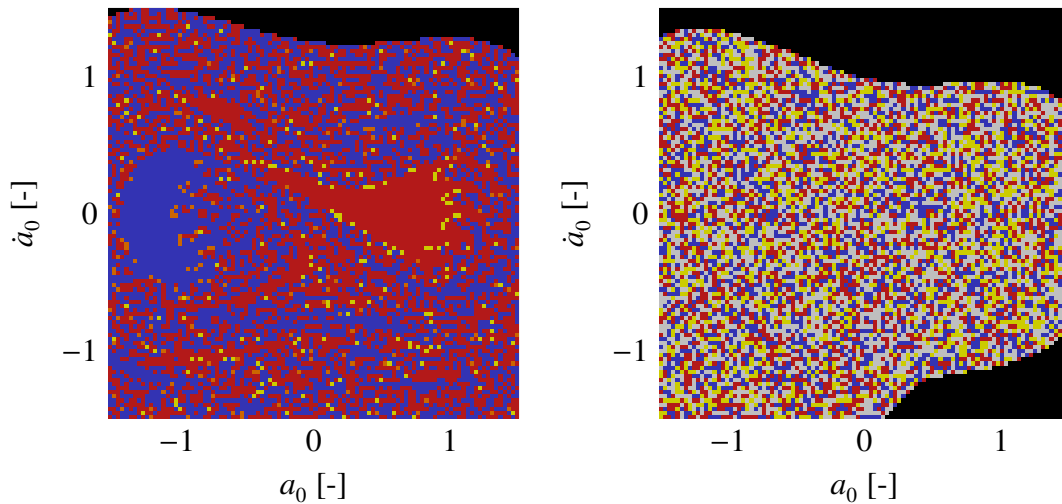


Abbildung 13: Qualitativ unterschiedliche Karten von Einzugsbereichen für das gleiche System bei unterschiedlichen Erregeramplituden. Dabei stehen *rot* und *blau* für Intrawell-Schwingungen um die linke beziehungsweise rechte Gleichgewichtslage mit Periodizität 1, *gelb* und *orange* für Intrawell-Schwingungen um die linke beziehungsweise rechte Gleichgewichtslage mit Periodizität 2, schwarz für Interwell-Schwingungen um beide stabile Gleichgewichtslagen und *grau* für chaotische Lösungen

In den Abbildungen stehen *rot* und *blau* für Intrawell-Schwingungen um die linke, respektive rechte Gleichgewichtslage mit Periodizität 1, *gelb* und *orange* für Intrawell-Schwingungen um die linke, respektive rechte Gleichgewichtslage mit Periodizität 2, schwarz für Interwell-Schwingungen um beide stabile Gleichgewichtslagen und *grau* für chaotische Lösungen. Wie zu erkennen ist, treten in der Karte links drei koexistierende Lösungen auf und die Bereiche der Anfangsbedingungen, die zu diesen Lösungen führen, weisen eine gewisse Struktur auf. Im Unterschied dazu, wirkt die Karte auf der rechten Seite nahezu unstrukturiert und es existieren Anfangsbedingungen, die zu chaotischen Lösungen führen.

Zusätzlich zu der beschriebenen Unterteilung in verschiedenen Lösungsarten, kommt es innerhalb einer Art von Lösung zu Periodenvervielfachungen. In Abbildung 14 ist dieses Phänomen für eine Intrawell-Lösung dargestellt. Wie anhand der Phasenportraits 14 a) und 14 c) und der Zeitverläufe 14 b) und 14 d) zu erkennen ist, entspricht die Periode der oberen Lösung dem doppelten Wert der Erregerperiode und die Periode der im Bild unten dargestellten Lösung dem vierfachen Wert der Erregerperiode.

In den Simulationen die zur Erzeugung der Abbildungen 14 a) und 14 c) durchgeführt wurden, wurde lediglich die Erregerfrequenz verändert und alle anderen Parameter konstant gehalten. Desweiteren existiert kein Bereich, in dem die beide Lösungen koexistieren, so dass es gerechtfertigt ist davon auszugehen, dass es sich um eine Fortsetzung einer Lösung handelt, die beim Überschreiten gewisser Parameterwerte (Verzweigungspunkte) die Periodizität ändert. Tatsächlich wurden für die dargestellte Lösung weitere Periodenvervielfachungen bis hin zum zwölffachen Wert der Erregerperiode simulativ ermittelt.

Wie aus dem Vergleich der Phasenportraits beider Lösungen ersichtlich wird, stellt die Topographie der Orbits dabei keine zuverlässige Möglichkeit zur Bestimmung der Periodizität

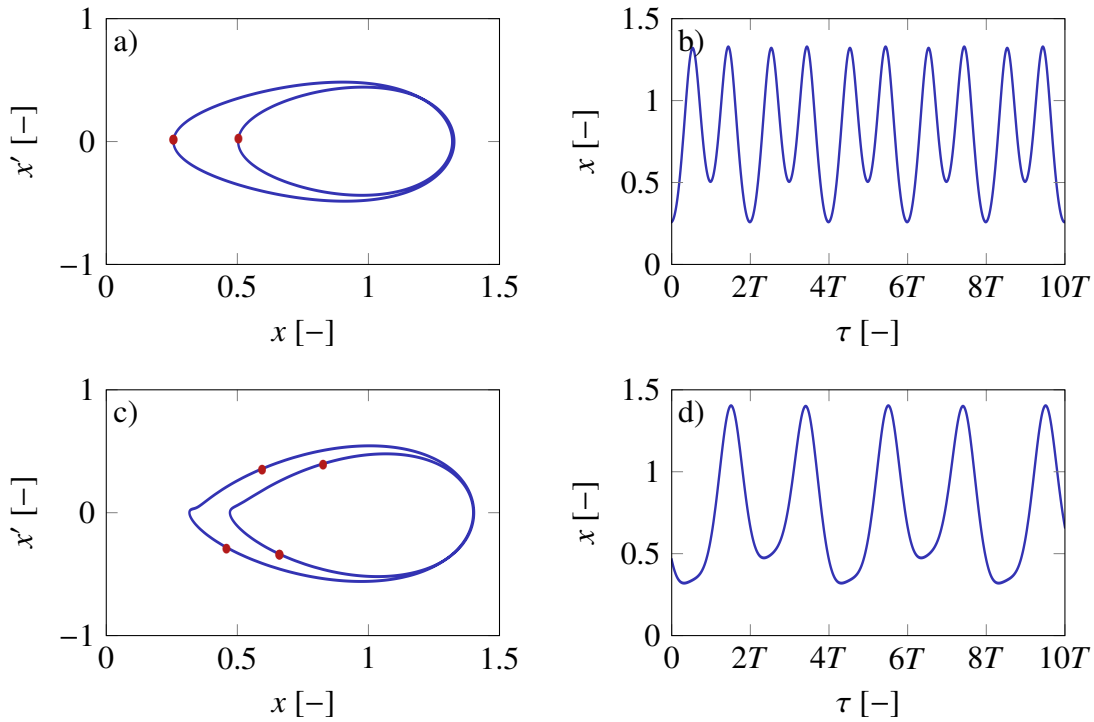


Abbildung 14: Phasenportrait und Zeitverlauf für Intrawell-Lösungen mit Periodizität 2 (oben) und 4 (unten). Die für die Simulation verwendeten Parameter finden sich in Anhang D.1, Tabelle 13.

dar, so dass andere Kriterien verwendet werden müssen. Neben dem hier gewählten Verfahren der Auszählung der unterschiedlichen Punkte in der zugehörigen Poincaré-Abbildung und der Analyse des Zeitverlaufs, bietet sich auch die Fast Fourier Transformation (FFT) an. Im Gegensatz zu den aufgezählten Möglichkeiten, die einen zusätzlichen Aufwand bedeuten, liefert das weiter unten besprochene Verfahren der Harmonischen Balance die gewünschte Information ohne jeglichen Mehraufwand.

Wie aus Abbildung 15 ersichtlich wird, ist das Phänomen der Periodenvervielfachung weder auf Intrawell-Lösungen noch auf gerade Vielfache der Erregerperiode beschränkt. So sind in Abbildung 15 eine Interwell-Lösung und eine Intrawell-Lösung zu sehen, deren Periodizität jeweils dem dreifachen Wert der Erregerperiode entspricht.

An dieser Stelle soll angemerkt werden, dass die auftretende Periodizität in direktem Zusammenhang zum Grad der Nichtlinearität des betrachteten Systems steht. So ist eine Vielfachheit vom Wert drei ein direkter Hinweis auf kubische Nichtlinearitäten und eine Periodizität vom Wert zwei ein Hinweis auf quadratische Nichtlinearitäten. Dabei ist zu beachten, dass die Zusammensetzung der Nichtlinearität durch die Transformation des Systems in eine der stabilen Ruhelagen verändert wird. Betrachtet man zur Verdeutlichung die bistabile Duffing-Gleichung

$$x'' + \xi x' - \alpha x + \beta x^3 = f \cos(\eta \tau) \quad (3.1)$$

und die Transformation in die stabile Ruhelage mit der neuen Koordinaten $y = x - \sqrt{\alpha/\beta}$, so lautet die beschreibende Differentialgleichung

$$y'' + \xi y' + 2\alpha y - 3\sqrt{\alpha\beta}y^2 + \beta y^3 = f \cos(\eta\tau) \quad (3.2)$$

woraus ersichtlich wird, dass bei Intrawell-Lösungen gerade Periodenvervielfachungen möglich sind, auch wenn das Ausgangssystem ausschließlich ungerade Nichtlinearitäten enthält.

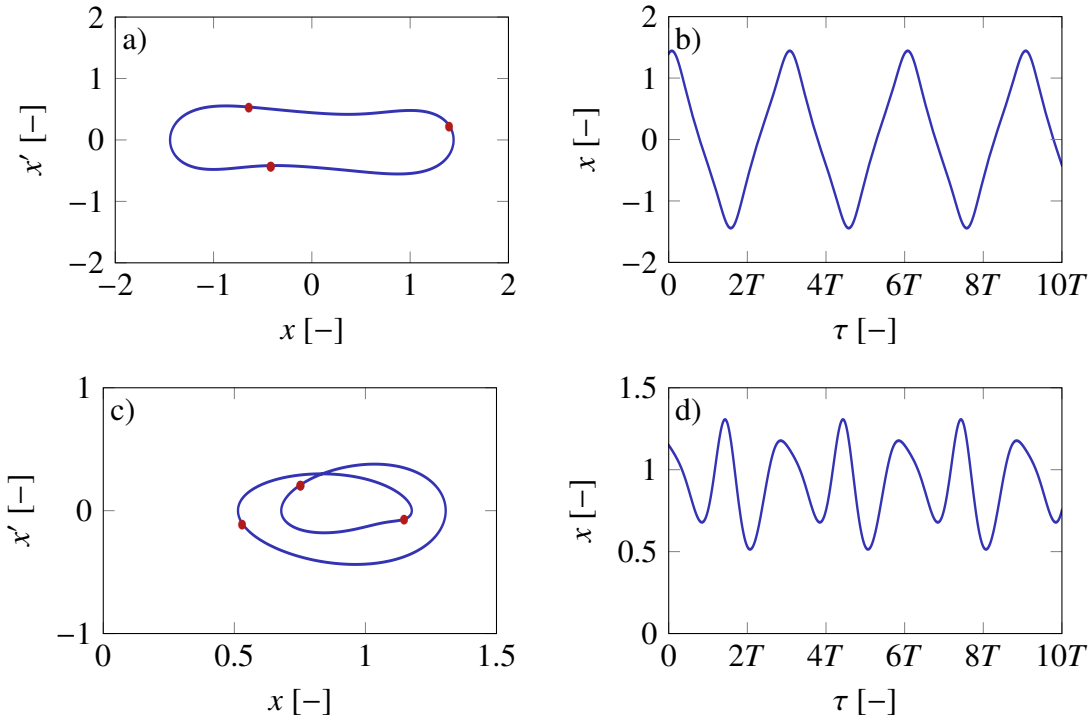


Abbildung 15: Phasenportrait und Zeitverlauf für eine Interwell- (oben) und eine Intrawell-Lösung (unten), beide mit Periodizität 3. Die für die Simulation verwendeten Parameter finden sich in Anhang D.1, Tabelle 13.

Schließlich existieren auch Lösungen, die keinem der bisher beschriebenen Lösungstypen Intrawell-, Interwell- oder chaotische Lösung klar zugeordnet werden können und deren Periodizität ebenfalls nicht einfach aus dem Grad der Nichtlinearität abgeleitet werden kann. Ein Beispiel hierfür ist die in Abbildung 16 dargestellte Lösung, die sowohl Charakteristiken einer Intrawell- als auch einer Interwell-Lösung besitzt und eine Periodizität aufweist, die dem Siebenfachen der Erregerperiode entspricht.

Da die simulierte Differentialgleichung lediglich Nichtlinearitäten bis zum Grad drei enthält und sieben eine Primzahl ist, handelt es sich hier also nicht um eine einfache Periodenvervielfachung. Ergänzend sei hier darauf hingewiesen, dass Lösungen dieser Art in vom Autor durchgeführten Untersuchungen nur selten aufgetreten sind.

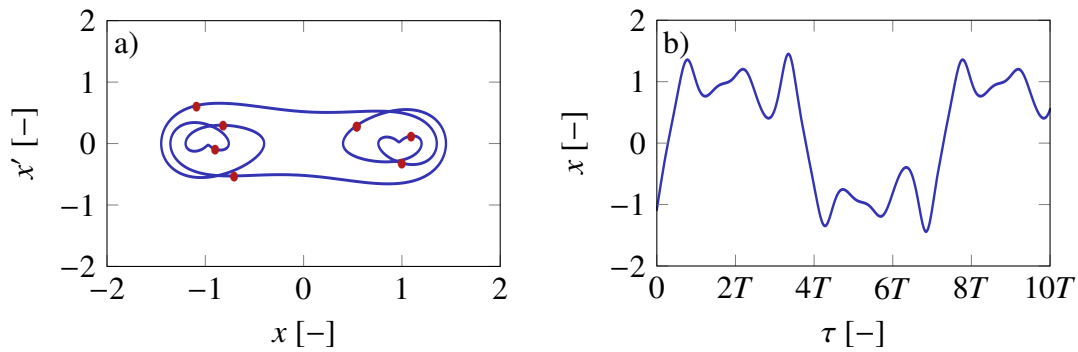


Abbildung 16: Phasenportrait und Zeitverlauf für eine nicht eindeutig zuordenbare Lösung mit Periodizität 7. Die für die Simulation verwendeten Parameter finden sich in Anhang D.1, Tabelle 13.

3.1.2 Zusammenfassende Darstellung des Systemverhaltens

Wie aus der Diskussion deutlich wird, stellt die Unterteilung in Intrawell-, Interwell- und chaotische Lösungen zusammen mit der Angabe der Periodizität eine gute Möglichkeit zur Gliederung des dynamischen Verhaltens dar. Da das Systemverhalten üblicherweise über einen Frequenzbereich betrachtet wird, ist es allerdings nicht praktikabel, die gewünschte Information in Form von Phasenportraits darzustellen.

Stattdessen werden die in Abbildung 17 dargestellten Diagramme verwendet, welche im Folgenden als Antwortdiagramme bezeichnet werden. Dargestellt sind die Extremstellen (Umkehrpunkte) der Auslenkung der modalen Koordinate x aller Lösungen, die bei einer gegebenen Frequenz auftreten, welche über der Frequenz aufgetragen werden. Aus Gründen der Symmetrie reicht es dabei aus, die positive Halbebene zu betrachten. Diese Form der Darstellung ähnelt insofern dem zur Beschreibung linearer Systeme verwendeten Amplituden-Frequenzgang, als dass die maximale Auslenkung, die für eine bestimmte Frequenz auftritt sofort abgelesen werden kann. Zudem ist ersichtlich in welchen Frequenzbereichen es zu einer starken Erhöhung kommt (analog zur Resonanz im linearen Fall). Da alle Umkehrpunkte einer Lösung dargestellt werden, ist es zudem möglich, die Topographie einer Lösung abzuschätzen und zu erkennen, ob es sich um eine Intrawell-, Interwell- oder chaotische Lösung handelt. Um die Information über die Periodizität ebenfalls in das Diagramm aufzunehmen, kann ein Farbcode eingeführt und die jeweiligen Lösungen entsprechend eingefärbt werden. Da die Periodizität bei einer gewissen Vertrautheit mit dem Systemverhalten für viele Lösungen aber auch aus der Lage der Lösung im Diagramm abgeleitet werden kann und die Bestimmung der Periodizität bei Daten, die durch numerische Integration gewonnen wurden aufwändig ist, wird meistens darauf verzichtet.

Um den Nutzen der Antwortdiagramme zu verdeutlichen, erfolgt an dieser Stelle eine kurze Diskussion der beiden in Abbildung 17 dargestellten Diagramme. Ohne genauer auf die Details des simulierten Systems einzugehen, sei erwähnt, dass die Eigenkreisfrequenz des um eine der stabilen Gleichgewichtslagen linearisierten Systems bei 1 liegt. Weiter ist die Amplitude der Fußpunktbeschleunigung, die zur Erstellung von Diagramm 17 a) verwendet

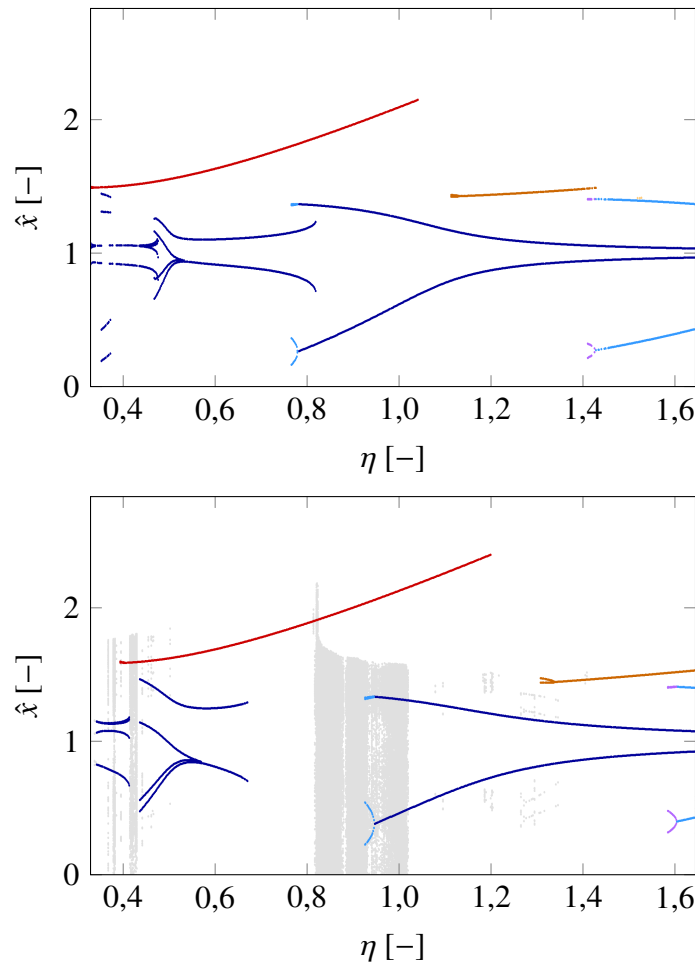


Abbildung 17: Exemplarische Darstellung der im Laufe der Arbeit verwendeten Antwortdiagramme zur zusammenfassenden Darstellung des dynamischen Verhaltens über der Frequenz. Dargestellt sind Extremwerte der Auslenkung der jeweils existierenden Lösungen. Der Unterschied zwischen den Abbildungen a) und b) liegt in der Intensität der Anregung. Dabei entspricht **rot** einer Interwell-Lösung mit Periodizität 1, **braun** einer Interwell-Lösung mit Periodizität 3, **gelb** einer Interwell-Lösung mit Periodizität 5, **dunkelblau** einer Intrawell-Lösung mit Periodizität 1, **hellblau** einer Intrawell-Lösung mit Periodizität 2, **lila** einer Intrawell-Lösung mit Periodizität 4 und **grau** einer chaotischen Lösung.

wurde, halb so groß wie die, die zur Erstellung von Diagramm 17 b) verwendet wurde.

Der für beide Diagramme verwendete Farbcode lautet wie folgt: **rot** entspricht einer Interwell-Lösung mit Periodizität 1, **braun** einer Interwell-Lösung mit Periodizität 3, **gelb** einer Interwell-Lösung mit Periodizität 5, **dunkelblau** einer Intrawell-Lösung mit Periodizität 1, **hellblau** einer Intrawell-Lösung mit Periodizität 2, **lila** einer Intrawell-Lösung mit Periodizität 4 und **grau** einer chaotischen Lösung.

Betrachtet man zunächst Diagramm 17 a), so lässt sich erkennen, dass das globale Verhalten in zwei Anteile zerfällt. Der Anteil der durch die Intrawell-Lösungen gegeben ist, entspricht einem nichtlinearen Schwinger mit degressivem Verhalten und asymmetrischer Rückstellung und der durch die Interwell-Lösungen gegebene Anteil einem nichtlinearen Schwinger mit progressivem Verhalten. Der durch die Intrawell-Lösungen gegebene Anteil weist drei Stellen mit besonders starker Erhöhung auf, die in Bereichen um $\eta \approx 0,46$ sowie $\eta \approx 0,92$ und

$\eta \approx 1,38$ liegen. Ein Vergleich dieser Werte mit der Eigenkreisfrequenz des um die Ruhelage linearisierten Systems von $\eta = 1$ zeigt, dass es sich bei der ersten und der dritten Resonanzstelle um super- beziehungsweise subharmonische Resonanz handelt, was sich auch darin zeigt, dass die Lösung in der dritten Resonanzstelle eine Periodizität von 2 aufweist. Interessant sind auch die Stellen der Kurven, an denen die maximale Auslenkung auftritt. Wie an der zweiten und dritten Resonanzstelle zu sehen ist, kommt es dort zu einer Verzweigung in Verbindung mit einer Periodenverdopplung.

Betrachtet man nun Diagramm 17 b), für dessen Berechnung die Amplitude verdoppelt wurde, so fällt zunächst auf, dass hier nun chaotische Bereiche existieren. Desweiteren ist die Resonanzstelle der Intrawell-Lösungen bei $\eta \approx 0,92$ nicht mehr vorhanden, was dadurch erklärt werden kann, dass das Energieniveau der Lösungen so hoch ist, dass die Potenzi- alsenke verlassen wird und es somit ausschließlich zu Interwell-Lösungen kommt. Denkt man an den Einsatz des EH-Systems zur Energiegewinnung welche am effizientesten bei Interwell-Lösungen abläuft, so wird klar, dass es sich dabei um das bevorzugte Szenario handelt.

3.2 Analyse mittels numerischer Integration

Die numerische Integration stellt das Standardverfahren zur Analyse von nichtlinearen dynamischen Systemen dar. Die Gründe dafür liegen in der einfachen Anwendbarkeit und der zumeist hohen Qualität der erzielten Lösungen. Ein großer Nachteil bei der Anwendung auf nichtlineare Systeme besteht darin, dass im Allgemeinen nicht bekannt ist, wie viele Lösungen koexistieren und welche Anfangsbedingungen zu diesen Lösungen führen. Als Konsequenz daraus müssen Integrationen für eine große Anzahl von unterschiedlichen Anfangsbedingungen durchgeführt und die resultierenden Lösungen charakterisiert und verglichen werden. Da dies zumeist nicht von Hand durchgeführt werden kann, sind umfangreiche Programmierarbeiten notwendig, die im Folgenden besprochen werden.

3.2.1 Durchführung der Integrationen

Da die Durchführung der Integrationen viel Zeit beansprucht ist es sinnvoll, die eigentliche Auswertung von diesen zu trennen um im Falle einer wiederholten Auswertung die Integrationen nicht erneut durchführen zu müssen. Dabei ist sicherzustellen, dass alle Daten, die für die Auswertung benötigt werden, in geeigneter Form abgespeichert werden.

Der Ablauf des Programms, das zur Durchführung der numerischen Integrationen und zur Erzeugung der Datengrundlage für die spätere Auswertung verwendet wurde, ist in Programm 1 dargestellt.

Programm 1 Erzeugung der Datengrundlage zur Erstellung von Antwortdiagrammen mittels numerischer Integration.

Eingangsgrößen: $\ddot{x} + g(x, \dot{x}, v, t) = f \cos(\Omega t)$, $\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{x} = 0$, Ω_{\min} , Ω_{\max} , Δ_{Ω}
 x_0 , \dot{x}_0 , n_{\min} , n_{\max}

```

1: for  $i = 0$ , to  $(\Omega_{\max} - \Omega_{\min})/\Delta_{\Omega}$  do
2:    $\Omega = \Omega_{\min} + i\Delta_{\Omega}$ 
3:    $T = 2\pi/\Omega$ 
4:   for  $j = 1$ , to  $\#x_0$  do
5:     for  $k = 1$ , to  $\#\dot{x}_0$  do
6:       bestimme  $x(t; x_{0,j}, \dot{x}_{0,k})$  mittels numerischer Integration
7:       bestimme alle  $t \in [n_{\min}T, n_{\max}T]$  für die  $\dot{x}(t) = 0$  gilt
8:       speichere  $\mathbf{erg}_{j,k} = (\dots, \{t_r, x(t_r), v(t_r)\}, \dots)$ 
9:     end for
10:  end for
11:  Speichere  $(\Omega, [\mathbf{erg}_{j,k}])$  in Datei
12: end for
```

Ausgangsgrößen: für jede betrachtete Erregerfrequenz eine Datei $(\Omega, [\mathbf{erg}_{j,k}])$

Als Eingangsgrößen müssen die Differentialgleichungen des untersuchten Modells, ein Minimal- und Maximalwert Ω_{\min} , Ω_{\max} sowie ein Inkrement Δ_{Ω} für die Erregerkreisfrequenz,

Anfangswerte für die Lage \mathbf{x}_0 und die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_0$ und Faktoren n_{\min} , n_{\max} zur Bestimmung der Zeitgrenzen übergeben werden.

Für jeden Wert $\Omega = \Omega_{\min} + i\Delta_\Omega$ der Erregerkreisfrequenz werden für sämtliche Kombinationen der Anfangswerte numerische Integrationen durchgeführt. Aus dem Ergebnis dieser Integrationen werden dann alle Zeitpunkte $t \in [n_{\min}T, n_{\max}T]$ in denen die Geschwindigkeit verschwindet und somit alle Umkehrpunkte der Lage und die zugehörigen Werte der Spannung bestimmt und in **erg**_{*j,k*} gespeichert. Nachdem alle möglichen Kombinationen von Anfangswerten bei einer bestimmte Erregerkreisfrequenz verwendet wurden, wird eine Datei abgespeichert, in der die verwendete Erregerkreisfrequenz Ω und sämtliche **erg**_{*j,k*} hinterlegt sind.

Tabelle 7: Eingangsgrößen für den in Programm 1 skizzierten Algorithmus zur Berechnung der in Abbildung 17 dargestellten Antwortdiagramme.

Größe	Ω_{\min}	Ω_{\max}	Δ_Ω	$\#\mathbf{x}_0$	$\#\dot{\mathbf{x}}_0$	n_{\min}	n_{\max}
Wert	5	25	0.025	10	10	900	1000

Um einen Überblick über die Anzahl der durchzuführenden Rechnungen zu erhalten, sind in Tabelle 7 die Werte für die Eingangsgrößen angegeben, die zur Berechnung der Diagramme in Abbildung 17 verwendet wurden. Aus $(\Omega_{\max} - \Omega_{\min})/\Delta_\Omega = 800$ folgt zunächst, dass die äußerste Schleife 801-mal durchlaufen wird. In jedem Durchlauf wird für jede der $10 \cdot 10 = 100$ möglichen Kombinationen der Anfangsbedingungen eine numerische Integration durchgeführt, so dass insgesamt 80100 numerische Integration durchgeführt werden. Auf dem verwendeten Computer (32GB RAM, i7-6700 Prozessor, Windows 10, Mathematica 11.0) werden dafür ungefähr 48 h benötigt und die Größe der gespeicherten Ergebnisse beträgt knapp 1,2 GB.

3.2.2 Auswertung der Ergebnisse

Das Ziel der Auswertung der mittels numerischer Integration erzeugten Daten besteht darin, die Periodizität der Lösung zu bestimmen und zwischen Intrawell-, Interwell und chaotischen Lösungen zu unterscheiden. Der Ablauf des Programms, das für die Auswertung der mittels Programm 1 erzeugten Daten verwendet wurde, ist in Programm 2 dargestellt. Die vom Programm benötigten Eingangsgrößen bestehen aus dem Datensatz $(\Omega, [\mathbf{erg}_{j,k}])$. In zwei Schleifen wird das Feld $[\mathbf{erg}_{j,k}]$ durchlaufen und für jeden Eintrag werden zunächst die Wendepunkte gerundet, wobei die Genauigkeit so zu wählen ist, dass identische Punkte zusammenfallen und unterschiedliche Punkte nach wie vor unterschieden werden können. Als nächstes werden die Zeitabstände Δt_i zwischen identischen Wendepunkten bestimmt, wobei darauf zu achten ist, dass die zeitliche Reihenfolge, in der die Wendepunkte auftreten, nicht verändert wird.

Im nächsten Schritt werden die Δt_i gerundet um Rechenungenauigkeiten auszugleichen und

Programm 2 Auswertung der durch Programm 1 erzeugten Daten**Eingangsgrößen:** $(\Omega, [\mathbf{erg}_{j,k}])$

```

1: for  $j = 1$ , to #Zeilen $[\mathbf{erg}_{j,k}]$  do
2:   for  $k = 1$ , to #Spalten $[\mathbf{erg}_{j,k}]$  do
3:      $\tilde{x}(t_r) = \text{runde}(x(t_r))$ 
4:     bestimme alle  $\Delta t$  für die ein  $t_r$  existiert, so dass  $x(t_r + \Delta t) = x(t_r)$  gilt
5:      $\tilde{\Delta t}_i = \text{runde}(\Delta t_i)$  und bestimme  $\#\tilde{\Delta t} = \#(\tilde{\Delta t}_1, \dots)$ 
6:     lösche alle sich wiederholenden Werte in  $(\tilde{x}(t_1), \dots)$ 
7:     if  $\#\tilde{\Delta t} = 1$  then
8:       die Periodizität ist  $\alpha = \Omega \Delta t_1 / (2\pi)$ 
9:       bestimme  $s_1 = \#(x(t_1), \dots)$ ,  $s_2 = \#^+(x(t_1), \dots)$  und  $s_3 = \#^-(x(t_1), \dots)$ 
10:    else
11:      die Lösung ist chaotisch, setze  $\alpha = s_1 = s_2 = s_3 = -1$ 
12:    end if
13:    setze type $_{j,k} = (\alpha, s_1, s_2, s_3)$ 
14:  end for
15: end for
16: Speichere  $(\Omega, [\mathbf{type}_{j,k}])$  in Datei

```

Ausgangsgrößen: für jede betrachtete Erregerkreisfrequenz eine Datei $(\Omega, [\mathbf{type}_{j,k}])$

die Anzahl $\#\tilde{\Delta t}$ verschiedener $\tilde{\Delta t}_i$ wird bestimmt. Für eine periodische Lösung gilt $\#\tilde{\Delta t} = 1$ und die Periodizität einer Lösung ist $\alpha = \Omega \Delta t_1 / (2\pi)$. Zur Charakterisierung der Lösung wird die Anzahl der Wendepunkte s_1 , die Anzahl der Wendepunkte in der positiven Halbebene s_2 sowie die Anzahl der Wendepunkte in der negativen Halbebene s_3 berechnet. Lösungen mit $\#\tilde{\Delta t} \neq 1$ werden als chaotische Lösungen charakterisiert. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass das beschriebene Verfahren in dieser Form nur möglich ist, da es bei dem untersuchten System nicht zum Auftreten von quasi-periodischen Lösungen kommt, wie dies zum Beispiel bei nichtlinearen Systemen, die einer kombinierten Fremd- und Selbsterregung unterliegen, der Fall sein kann.

Um die Möglichkeiten der beschriebenen Auswertemethode zu verdeutlichen, wird beispielhaft die Auswertung besprochen, die durchgeführt wurde, um das Antwortdiagramm in Abbildung 17 a) zu erhalten. Von den insgesamt 80100 berechneten Lösungen wurden 74849 (93.44 %) als periodisch identifiziert und hinsichtlich ihrer Periodizität analysiert.

Tabelle 8: Periodizitäten und relative Häufigkeiten der im Antwortdiagramm 17 a) dargestellten Lösungen.

Periodizität α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rel. Häufigkeit [%]	94,82	2,95	1,81	0,10	0,08	0,11	0,04	0,02	0,05	0,02

Die gefundenen Periodizitäten zusammen mit ihren relativen Häufigkeiten bezogen auf die Gesamtanzahl periodischer Lösungen wurden in Tabelle 8 zusammengefasst. Wie zu sehen

ist, sind Lösungen mit Periodizität 1 mit großem Abstand am häufigsten vertreten und Lösungen mit einer Periodizität größer als 3 sehr selten. Die periodischen Lösungen lassen sich anhand der Charakteristiken s_1 , s_2 und s_3 in 47 unterschiedliche Lösungsarten unterteilen, von denen 28 dem Typ Intrawell- und 19 dem Typ Interwell-Lösung zugeordnet werden können. Wird auch hier wieder die relative Häufigkeit in Bezug auf alle periodischen Lösungen betrachtet, so ergibt sich ein Wert von 85.16 % für die Intrawell- und ein Wert von 14.84 % für die Interwell-Lösungen, wobei an dieser Stelle darauf hingewiesen werden soll, dass die untersuchten Anfangswerte um die Null zentriert sind und somit niedrige Werte, die tendenziell eher zu Intrawell-Lösungen führen, besonders stark vertreten sind.

3.3 Analyse mittels der Methode der Harmonischen Balance

Die Methode der Harmonischen Balance ist ein häufig verwendetes Verfahren zur (semi-) analytischen Berechnung von periodischen Lösungen nichtlinearer dynamischer Systeme und wurde bereits mehrfach zur Analyse des betrachteten und ähnlicher EH-Systeme eingesetzt [9, 32, 66, 71, 72, 74, 82, 75, 77, 101, 103].

Der Grund dafür, dass die Methode der Harmonischen Balance hier erneut aufgegriffen wird, liegt darin, dass in den genannten Arbeiten lediglich eine monofrequente Ansatzfunktion verwendet wird. Eigene Erfahrungen mit ähnlichen Systemen [91, 92, 93, 94] zeigen aber, dass durch die Verwendung von multifrequenten Ansatzfunktionen eine deutliche Verbesserung in der Übereinstimmung zwischen den berechneten Lösungen und Referenzlösungen erzielt werden kann.

3.3.1 Beschreibung der Methode der Harmonischen Balance

Eine umfassende Beschreibung der Methode der Harmonischen Balance zusammen mit einigen Anwendungsbeispielen findet sich in den bereits vor fünfzig Jahren erschienenen Arbeiten von URABE [86, 87, 88].

In den zitierten Arbeiten werden die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der Ansatzfunktion durch die Projektion des Residuums auf Gewichtsfunktionen gewonnen, weswegen die Methode dort als Galerkin-Verfahren bezeichnet wird. Da als Ansatz- und Gewichtsfunktionen dabei ausschließlich orthogonale trigonometrische Funktionen verwendet werden, kann die Projektion aber auch als technische Umsetzung eines Koeffizientenvergleichs aufgefasst werden, so dass die vorgestellte Methode als Harmonische Balance interpretiert werden kann.

Im Fokus der Arbeiten von URABE steht die mathematische Analyse der Methode und dabei insbesondere die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von periodischen Lösungen, sowie nach der Konvergenz der Näherungslösungen. Als wichtigstes Ergebnis (Theorem 1 aus [86]) lässt sich festhalten, dass für zweimal stetig differenzierbare nichtlineare periodische Systeme das im Folgenden beschriebene Verfahren Approximationen liefert, welche gleichmäßig gegen die exakte periodische Lösung konvergieren, falls eine solche existiert.

Auf dieser Grundlage wird die Methode im Folgenden zusammenfassend besprochen. Ausgangspunkt ist das q -dimensionale, periodische Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) . \quad (3.3)$$

Darin ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$ der Zustandsvektor, $t \in [0, \infty)$ die Zeit und $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^q$ der Fluss im Phasenraum, welcher polynomiale Nichtlinearitäten enthalten kann. Des Weiteren bezeichnet $(\dot{}) = d/dt$ die Ableitung nach der Zeit und es existieren positive Zahlen T_n , so dass $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T_n)$ gilt, wobei die kleinste dieser Zahlen als Periodendauer T_f des Flusses bezeichnet wird. Bereits an dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die gesuchten Lösungen von (3.3) zwar

ebenfalls periodisch sind, dass aber die Periodendauer der Lösung T_x nicht der Periodendauer des Flusses entsprechen muss, da es in Folge der Nichtlinearität zum Auftreten von Lösungen mit subharmonischen Frequenzanteilen kommen kann (superharmonische Frequenzanteile sind ebenfalls möglich, führen aber zu keiner Veränderung der Periodendauer). Ziel des Verfahrens ist es, die unbekannte Lösung \mathbf{x} durch eine trigonometrische Summe der Form

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^n [\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)] \quad (3.4)$$

zu approximieren, wobei $\omega = 2\pi/T_x$ die Grundkreisfrequenz der approximierten Lösung bezeichnet und die $2n+1$ Koeffizientenvektoren $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ noch bestimmt werden müssen. Einsetzen von (3.4) in (3.3) liefert zunächst rein formal

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, t) \quad (3.5)$$

wobei die linke Seite durch die Differentiation von (3.4) ersetzt werden kann. Um die rechte Seite von (3.4) ebenfalls umschreiben zu können, ist eine Vorüberlegung notwendig. Angenommen der höchste Grad der Nichtlinearität in \mathbf{f} sei r , dann treten in der rechten Seite von (3.4), gemäß der im Anhang B.1 ausgeführten Rechnungen, harmonische Anteile mit Kreisfrequenzen bis hin zum r -fachen Wert der höchsten in der trigonometrischen Summe verwendeten Kreisfrequenz auf. Unter Verwendung der neuen Koeffizientenvektoren $\tilde{\mathbf{a}}_k, \tilde{\mathbf{b}}_k$, die wie folgt

$$\tilde{\mathbf{a}}_k(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \frac{2}{T_x} \int_0^{T_x} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, t) \cos(k\omega t) dt, \quad k = 0, \dots, nr \quad (3.6a)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_k(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \frac{2}{T_x} \int_0^{T_x} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, t) \sin(k\omega t) dt, \quad k = 1, \dots, nr \quad (3.6b)$$

berechnet werden, lässt sich die rechte Seite von (3.5) als Fourier-Reihe darstellen. Dabei wird aus den Berechnungsvorschriften (3.6a) und (3.6b) ersichtlich, dass die neu eingeführten Koeffizientenvektoren $\tilde{\mathbf{a}}_k, \tilde{\mathbf{b}}_k$ nichtlineare Funktionen der Koeffizienten der Ansatzfunktion sind. Die Differentialgleichung (3.5) lässt sich schließlich in die algebraische Gleichung

$$\sum_{k=1}^n [\mathbf{b}_k k\omega \cos(k\omega t) - \mathbf{a}_k k\omega \sin(k\omega t)] = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{a}}_0 + \sum_{k=1}^{nr} [\tilde{\mathbf{a}}_k \cos(k\omega t) + \tilde{\mathbf{b}}_k \sin(k\omega t)] \quad (3.7)$$

überführen und ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\tilde{a}_0(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = 0 \quad (3.8a)$$

$$\tilde{a}_k(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} -k\omega b_k & , \text{ für } 1 \leq k \leq n \\ \mathbf{0} & , \text{ für } n < k \leq nr \end{cases} \quad (3.8b)$$

$$\tilde{b}_k(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} k\omega a_k & , \text{ für } 1 \leq k \leq n \\ \mathbf{0} & , \text{ für } n < k \leq nr \end{cases} \quad (3.8c)$$

das zur Bestimmung der gesuchten Koeffizientenvektoren $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ verwendet wird. Dabei fällt auf, dass durch (3.8) $2nr+1$ vektorwertige Gleichungen zur Bestimmung der $2n+1$ Koeffizientenvektoren gegeben sind und das Gleichungssystem überbestimmt ist. Für die Lösung des Gleichungssystem werden daher nur (3.8a) sowie (3.8b) und (3.8c) für $1 \leq k \leq n$ verwendet. Falls durch die so gefundenen Koeffizientenvektoren $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ die nichtberücksichtigten Gleichungen aus (3.8b) und (3.8c) für $n < k \leq nr$ ebenfalls erfüllt werden, stellt die zugehörige Approximation eine exakte Lösung dar. Üblicherweise ist dies nicht der Fall, und der Ausdruck

$$\mathbf{R}(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, t) = \sum_{k=n+1}^{nr} [\tilde{a}_k \cos(k\omega t) + \tilde{b}_k \sin(k\omega t)] \quad (3.9)$$

stellt ein Maß dafür dar, inwieweit eine gefundenen Approximation die zugrundeliegende Differentialgleichung (3.3) nicht erfüllt. Für die Verwendung als Fehlermaß besser geeignet ist das absolute zeitliche Maximum der Abweichung

$$e_{\text{abs}}(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \max \{|\mathbf{R}(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, t)|\} \quad (3.10)$$

das theoretisch bereits zur Beurteilung der Qualität einer Approximation verwendet werden kann. Da dessen Wert allerdings noch direkt von der Größe der Koeffizientenvektoren $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ abhängt, liefert (3.10) für Lösungen mit größeren Amplituden systematisch höhere Werte. Um diesen Effekt auszugleichen, wird der Fehler auf das Maximum der zugehörigen Lösung bezogen, woraus der durch

$$e(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = 100 \cdot (e_{\text{abs},1}/\tilde{x}_{\text{max},1}, \dots, e_{\text{abs},q}/\tilde{x}_{\text{max},q})^T \quad (3.11)$$

gegebene, prozentuale relative Fehler folgt, welcher im Folgenden zur Bewertung der Qualität von Lösungen verwendet wird (siehe dazu [91, 92]).

Um die Stabilität einer Approximation $\tilde{\mathbf{x}}$ zu untersuchen, wird zu dieser eine kleine Störung Δ addiert und dieser Term in die Differentialgleichung (3.3) eingesetzt, was zunächst den

Ausdruck

$$\ddot{\tilde{x}} + \dot{\Delta} = f(\tilde{x} + \Delta, t) \quad (3.12)$$

liefert. Als nächstes wird die rechte Seite von (3.12) um die Stelle $\Delta = 0$ entwickelt, mit dem Ergebnis

$$\ddot{\tilde{x}} + \dot{\Delta} = f(\tilde{x}, t) + J_f(\tilde{x}, t)\Delta + O(\Delta^2) \quad (3.13)$$

wobei J_f die Jacobi-Matrix von f und O das Landau-Symbol bezeichnet. Da \tilde{x} die Differentialgleichung (3.3) näherungsweise erfüllt, können die entsprechenden Terme in (3.13) gestrichen werden und es bleibt

$$\dot{\Delta} = J_f(\tilde{x}, t)\Delta + O(\Delta^2). \quad (3.14)$$

Anhand von (3.14) kann nun die ursprüngliche Fragestellung nach der Stabilität von \tilde{x} beantwortet werden, da die Stabilität der trivialen Lösung von (3.14) gleichbedeutend mit der Stabilität von \tilde{x} ist. Zur Untersuchung der Stabilität der trivialen Lösung reicht es aus, den linearen Anteil von (3.14) zu betrachten. Da es sich um ein System mit periodischen Koeffizienten handelt, erfolgt die Stabilitätsuntersuchung gemäß dem Satz von Floquet (siehe [62]). Sei dazu Φ ein Fundamentalsystem der Linearisierung von (3.14) und M eine konstante Matrix mit der Eigenschaft

$$\Phi(T_x + t) = M\Phi(t) \quad (3.15)$$

dann ist die triviale Lösung von (3.14) und somit auch \tilde{x} asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von M betragsmäßig kleiner als 1 sind.

3.3.2 Anwendung mit monofrequenter Ansatzfunktion

Wie eingangs erwähnt wurde, existieren mehrere Arbeiten (siehe zum Beispiel [75, 77, 103]), in denen das betrachtete EH-System mit der Methode der Harmonischen Balance unter Verwendung eines monofrequenten Ansatzes analysiert wird.

Da die so berechneten Lösungen im Folgenden mit solchen, die unter Verwendung eines multifrequenten Ansatzes berechnet wurden, verglichen werden sollen, werden die notwendigen Rechnungen besprochen. Beispielhaft soll dies hier für das unter 2.4.1 beschriebene Modell 1 gezeigt werden, wobei ein Übertrag der vorgestellten Schritte auf die beiden anderen Modelle ohne Schwierigkeiten möglich ist und zu vergleichbaren Ergebnissen führt.

Da es für die weitere Rechnung günstig ist, den Phasenversatz ϕ in der Anregung und nicht

in der Approximation zu berücksichtigen, wird die leicht veränderte Form

$$\begin{aligned} x''(\tau) + \xi x'(\tau) - \alpha x(\tau) + \beta x^3(\tau) - \chi v(\tau) &= f \cos(\eta\tau - \phi) \\ &= f_1 \cos(\eta\tau) + f_2 \sin(\eta\tau) \end{aligned} \quad (3.16)$$

der Differentialgleichung (2.44a) betrachtet. Die monofrequente Ansatzfunktion lautet

$$\tilde{x}(\tau) = a_0 + A \cos(\eta\tau) \quad (3.17)$$

mit zunächst unbekannten Koeffizienten a_0 und A . Wird der Ansatz (3.17) in die Differentialgleichung des Stromkreises eingesetzt, stellt das Ergebnis eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit harmonischer Anregung dar, deren Lösung gemäß der Theorie der linearen Differentialgleichungen durch

$$v(\tau) = v_0 \exp(-\lambda\tau) - \frac{\eta^2 \kappa}{\eta^2 + \lambda^2} A \cos(\eta\tau) + \frac{\eta \kappa \lambda}{\eta^2 + \lambda^2} A \sin(\eta\tau) \quad (3.18)$$

gegeben ist. Einsetzen von (3.17) und (3.18) für $v(0) = 0$ in (3.16) liefert, nach der Durchführung eines Koeffizientenvergleichs, das folgende System nichtlinearer Gleichungen

$$1 : \quad -\alpha a_0 + \beta a_0^3 + \frac{3}{2} \beta a_0 A^2 = 0 \quad (3.19a)$$

$$\cos(\eta\tau) : \quad A \left[-\alpha - \eta^2 \left(\frac{\kappa \chi}{\eta^2 + \lambda^2} - 1 \right) + 3\beta a_0^2 + \frac{3}{4} \beta A^2 \right] = f_1 \quad (3.19b)$$

$$\sin(\eta\tau) : \quad A \eta \left(\xi + \frac{\kappa \chi \lambda}{\eta^2 + \lambda^2} \right) = -f_2 \quad (3.19c)$$

$$\cos(2\eta\tau) : \quad \frac{3}{2} \beta a_0 A^2 = 0 \quad (3.19d)$$

$$\cos(3\eta\tau) : \quad \frac{1}{4} \beta A^3 = 0 \quad (3.19e)$$

zur Bestimmung der Koeffizienten a_0 , A und falls gewünscht des Phasenversatzes ϕ . Wie oben beschrieben werden lediglich die Gleichungen (3.19a), (3.19b) und (3.19c) zur Bestimmung der Unbekannten verwendet und mittels den Gleichungen (3.19d) und (3.19e) wird das Fehlermaß

$$e(\tau) = \frac{3}{2} \beta a_0 A^2 \cos(2\eta\tau) + \frac{1}{4} \beta A \cos(3\eta\tau) \quad (3.20)$$

formuliert. Aus Gleichung (3.19a) folgt zunächst die Lösung für den konstanten Anteil

$$a_0 = 0 \quad \text{oder} \quad a_0 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{3}{2} A^2} \quad (3.21)$$

wobei die Nulllösung zu einer Interwell- und die nichtverschwindende Lösung zu einer Intrawell-Lösung führt. Um einen funktionalen Zusammenhang zwischen der normierten Kreisfrequenz η und der Amplitude A herzuleiten, werden die Gleichungen (3.19b) und (3.19c) quadriert und addiert, woraus das Ergebnis

$$f^2 = \left[-\alpha + \eta^2 \left(\frac{\kappa\chi}{\eta^2 + \lambda^2} - 1 \right) + \frac{3}{4}\beta A^2 \right]^2 A^2 + \eta^2 \left(\xi + \frac{\kappa\chi}{\eta^2 + \lambda^2} \right)^2 A^2 \quad (3.22a)$$

oder

$$f^2 = \left[2\alpha + \eta^2 \left(\frac{\kappa\chi}{\eta^2 + \lambda^2} - 1 \right) - \frac{15}{4}A^2\beta \right]^2 A^2 + \eta^2 \left(\xi + \frac{\kappa\chi}{\eta^2 + \lambda^2} \right)^2 A^2 \quad (3.22b)$$

folgt. Auch hier führt das erste Ergebnis zu einer Interwell- und das zweite Ergebnis zu einer Intrawell-Lösung. Die Auswertung der Gleichungen (3.22a) und (3.22b) für die unter 2.5 beschriebenen Parameter führt zu den in Abbildung 18 dargestellten Diagrammen.

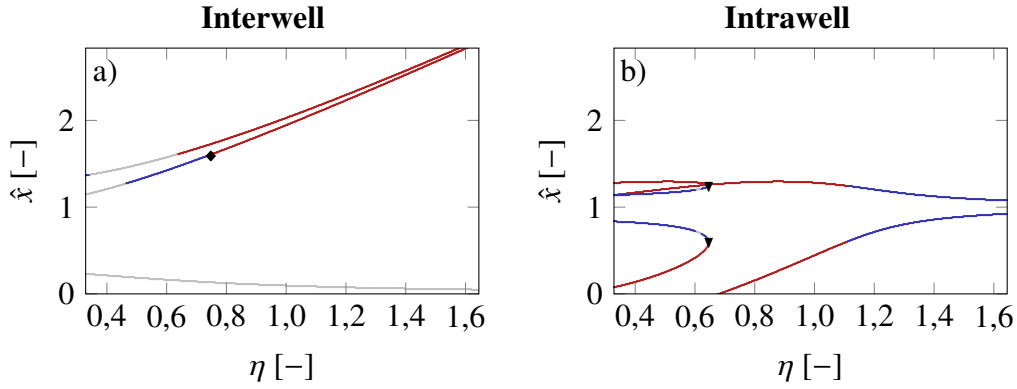


Abbildung 18: Antwortdiagramme erstellt mit dem Verfahren der Harmonischen Balance mit monofrequenter Ansatzfunktion und Anregung $f = 0.1304$. Lösungen mit großem Fehler sind in **rot**, instabile Lösungen mit kleinem Fehler in **grau** und stabile Lösungen mit kleinem Fehler in **blau** dargestellt.

Für beide Approximationen ist der gemäß (3.11) berechnete prozentuale relative Fehler mit Werten von $0,02\% \leq e \leq 107,19\%$ für die Interwell- und $5,83\% \leq e \leq 35,00\%$ für die Intrawell-Lösung sehr hoch. Da bislang kein Kriterium bekannt ist, das verwendet werden kann um den maximalen zulässigen Fehler zu bestimmen und eine zu restriktive Wahl in diesem konkreten Fall dazu führen würde, dass kaum Lösungen zur anschließenden Diskussion übrig bleiben, wird für beide Fälle ein Wert verwendet, der einem Drittel des jeweiligen Bereichs des Fehlers entspricht. Die konkreten Zahlenwerte lauten $e = 32,17\%$ für die Interwell- und $e = 14,58\%$ für die Intrawell-Lösung.

Um einen Eindruck von der Qualität der Lösungen, die in der Nähe der Fehlerschranke liegen zu erhalten, werden die stabilen Interwell- und Intrawell-Lösungen, welche den höchsten noch zulässigen Fehler aufweisen, im Phasenportrait dargestellt. Die Lage der betrachteten Lösungen ist in Abbildung 18 a) durch den Diamant und in Abbildung 18 b) durch die

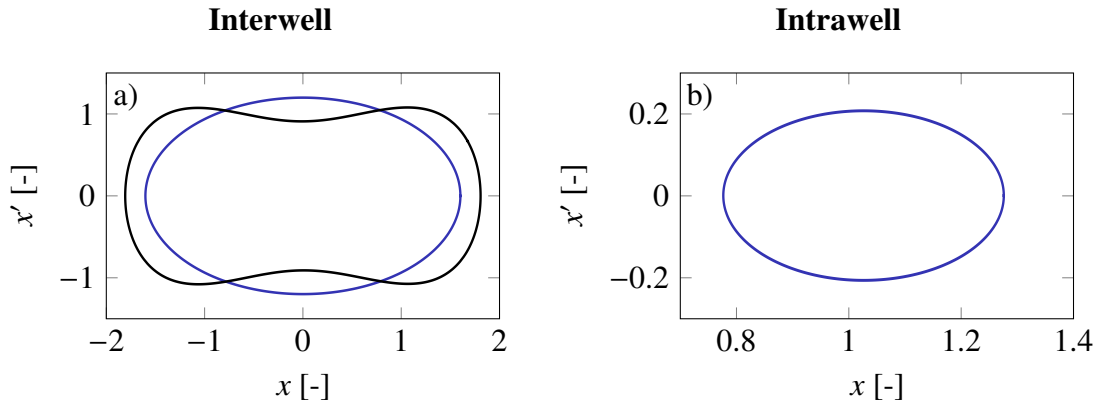


Abbildung 19: Vergleich der Lösungen mit dem höchstem noch zugelassenem Fehler aus dem Verfahren der Harmonischen Balance mit monofrequenter Ansatzfunktion in blau und numerischer Integration in schwarz.

Dreiecke gekennzeichnet. Zum Vergleich werden in Abbildung 19 den Lösungen aus der Harmonischen Balance (blau) Referenzlösungen (schwarz) aus der numerischen Integration gegenübergestellt.

Für die Interwell-Lösung beträgt der Wert des relativen Fehlers $e = 32,09\%$ und die zugehörige Kreisfrequenz der Anregung ist $\eta = 0,63$. Wie der Vergleich der Lösungen zeigt, ist die Übereinstimmung der beiden Orbits niedrig. Das qualitative Verhalten im Bereich der Nulldurchgänge der Lage, das in der Referenzlösung durch eine Einschnürung gekennzeichnet ist, wird nicht wiedergegeben und auch quantitativ unterscheiden sich die beiden Lösungen stark.

Noch drastischer fällt der Vergleich bei der Betrachtung der Orbits der Intrawell-Lösung aus, welche einen relativen Fehlers von $e = 15,58\%$ aufweist und bei einer Kreisfrequenz der Anregung von $\eta = 0,52$ auftritt. Wie zu sehen ist, unterscheiden sich beide Orbits in ihrer Form stark voneinander und es kommt zu großen quantitativen Abweichungen.

3.3.3 Anwendung mit multifrequenter Ansatzfunktion

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie durch die Verwendung einer multifrequenten Ansatzfunktion Näherungslösungen bestimmt werden können, die eine sehr gute Übereinstimmung mit den zugehörigen Referenzlösungen aufweisen. Da die benötigten Programmierarbeiten einigen Aufwand erfordern, werden diese ausführlich besprochen.

Da sowohl die Qualität der berechneten Lösungen als auch die Effizienz des Verfahrens entscheidend von der Wahl der verwendeten Ansatzfunktionen abhängt, wird zuerst besprochen, wie diese zweckmäßig gewählt werden können. Im Allgemeinen ist davon auszugehen, dass die Qualität der Näherungslösungen mit der Anzahl der Glieder im Ansatz (3.4) steigt, so dass es wünschenswert erscheint, diese möglichst hoch zu wählen. Dem entgegen steht das Ansteigen des rechnerischen Aufwands, der mit der Erhöhung der Anzahl der Unbekann-

ten einhergeht, was dafür spricht den Ansatz möglichst klein zu halten. Die hier verfolgte Strategie mit diesem Konflikt umzugehen besteht darin, in Vorbereitung der eigentlichen Berechnung einige charakteristische Referenzlösungen hinsichtlich ihres Frequenzinhalts zu analysieren und auf dieser Grundlage passende Ansatzfunktionen zu wählen.

Zur Demonstration des Vorgehens wird dazu im Folgenden von folgendem Szenario ausgegangen. Zur Generierung von a priori Wissen stehen die zur Konstruktion des in Abschnitt 3.1.2 besprochenen Diagramm 17 a) verwendeten Daten zur Verfügung. Ziel ist es, mittels der besprochenen Methode eine Datengrundlage zur Erstellung von Diagramm 17 b) zu erzeugen. Da dieses Diagramm bereits mittels numerischer Integration konstruiert wurde, stehen die dabei verwendeten Daten sowie das Diagramm selbst zur Validierung zur Verfügung.

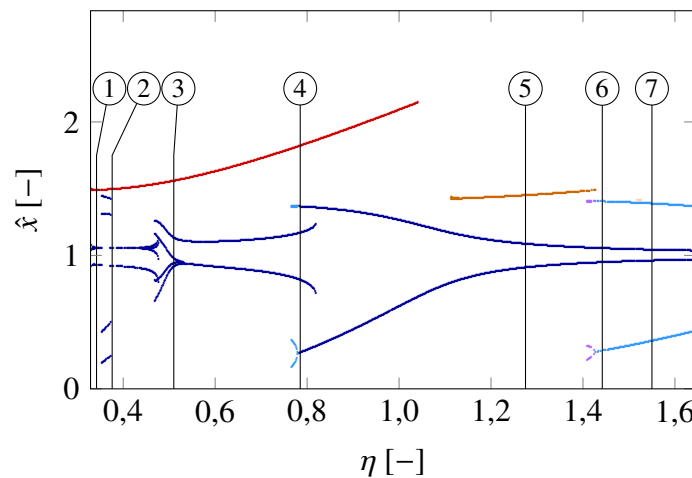


Abbildung 20: Antwortdiagramm aus Abbildung 17. Zusätzlich eingezeichnet sind die Frequenzen, für die Lösungen hinsichtlich ihrer Periodizität analysiert wurden. Eine Übersicht aller analysierten Lösungen findet sich in Anhang B.2.

In Abbildung 20 ist Diagramm 17 a) erneut dargestellt, wobei nun zusätzlich die Frequenzen gekennzeichnet wurden, für die charakteristische Lösungen analysiert werden. Bei der Wahl der untersuchten Frequenzen wurde darauf geachtet, dass möglichst alle auftretenden Lösungstypen erfasst wurden.

Die Untersuchung der einzelnen Lösungen wird beispielhaft an Frequenz 4 besprochen. Wie aus Abbildung 20 ersichtlich wird, existieren zu dieser Erregerfrequenz eine Interwell- und zwei Intrawell-Lösungen. Die Phasenportraits sowie die Ergebnisse einer schnellen Fourier Transformation (FFT) dieser Lösungen sind in Abbildung 21 dargestellt.

Die Darstellung des Phasenportraits dient dabei lediglich dazu, eine Vorstellung von der Gestalt der Lösung zu erhalten. Für die Analyse der Lösung entscheidend ist das Ergebnis der FFT.

Da im vorliegenden Fall vorrangig das Verhältnis zwischen den in der Lösung enthaltenen Frequenzen und der Erregerfrequenz von Interesse ist, wurde als Abszissenwert das Verhältnis dieser Frequenzen gewählt und als Frequenzverhältnis bezeichnet. Dabei bedeutet

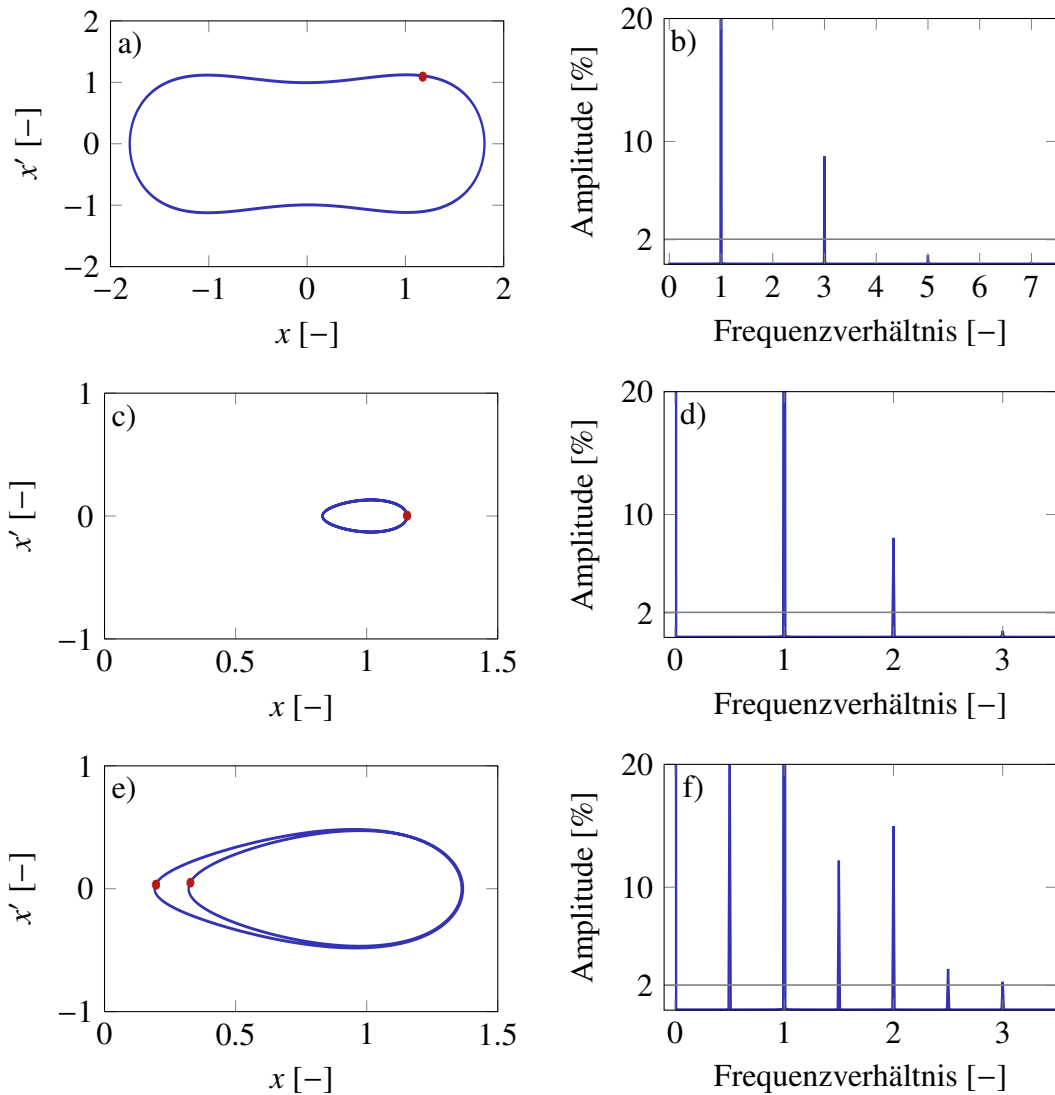


Abbildung 21: Phasenportraits und Frequenzspektren der Lösungen in Frequenzpunkt 4. Die für die Simulation verwendeten Parameter finden sich in Anhang D.2, Tabelle 14.

ein Wert von beispielsweise 2, dass die zugehörige Frequenz doppelt so hoch wie die Erregerfrequenz ist. Für die Beschriftung der Ordinate wurden die Amplituden aller beteiligten Schwingungen auf die größte beteiligte Schwingung bezogen. Zusätzlich wurde ein Wert von 2% der maximalen Amplitude markiert, der die Schwelle dafür darstellt, ob ein Frequenzanteil als für eine Lösung relevant eingestuft wird. Da der Kehrwert der niedrigsten im Frequenzspektrum enthaltenene Frequenz gerade der Periodizität T_x der Lösung entspricht, können aus dem Diagramm die beteiligten Frequenzen sowie die Periodizität einer Lösung direkt abgelesen werden.

Die Analyse der FFT-Diagramme der in Abbildung 21 dargestellten Lösungen zeigt, dass die Interwell-Lösung (obere Zeile) eine Periodizität von 1 aufweist und dass Harmonische mit Frequenzverhältnis 1 und 3 relevant sind. Die Intrawell-Lösung mit kleiner Amplitude (mittlere Zeile) hat eine Periodizität von 1 und es sind Harmonische mit Frequenzverhältnis

1 und 2 relevant. Die Intrawell-Lösung mit großer Amplitude (untere Zeile) weist eine Periodizität von 2 auf und Harmonische mit Frequenzverhältnis $1/2$, 1 , $3/2$ und 2 sind relevant.

Tabelle 9: Periodizität und relevante Frequenzvielfache der zur Bestimmung der multifrequenten Ansatzfunktionen untersuchten Lösungen. Eine Darstellung der analysierten Lösungen findet sich in Anhang B.2 und die verwendeten Simulationsparameter in Tabelle D.2.

Frequenzpunkt	Lösungsart	Periodizität	relevante Frequenzvielfache
① $\eta = 0,342$	Interwell	1	1, 2, 3, 4, 5, 6
	Intrawell	1	1, 2, 3, 4
② $\eta = 0,376$	Interwell	1	1, 3, 5
	Intrawell	1	1, 2, 3
	Intrawell	1	1, 2, 3, 4, 5
③ $\eta = 0,510$	Interwell	1	1, 3, 5
	Intrawell	1	1, 2, 3, 4
④ $\eta = 0,785$	Interwell	1	1, 3
	Intrawell	1	1, 2
	Intrawell	2	$1/2$, 1, $3/2$, 2, $5/2$, 3
⑤ $\eta = 1,275$	Interwell	3	$1/3$, 1, $5/3$
	Intrawell	1	1
⑥ $\eta = 1,442$	Interwell	3	$1/3$, 1, $5/3$
	Intrawell	1	1
	Intrawell	4	$1/4$, $2/4$, $3/4$, 1, $5/4$, $6/4$
⑦ $\eta = 1,550$	Interwell	5	$1/5$, $3/5$, 1, $7/5$
	Intrawell	1	1
	Intrawell	2	$1/2$, 1, $3/2$

Die nach dem selben Schema durchgeführte Analyse der übrigen Frequenzpunkte findet sich in Anhang B.2 und wird an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt. Insgesamt lieferte die Analyse aller 7 Frequenzpunkte 3 unterschiedliche Interwell- und 8 unterschiedliche-Intrawell Lösungen. Dabei wird davon ausgegangen, dass eine Lösung, die weder eine Verzweigung noch einen Sprung aufweist, keine Änderung in ihrer Periodizität und in ihrem Frequenzinhalt erfährt. Diese Annahme ermöglicht es, ausgehend von einer Analyse in einem Frequenzpunkt Aussagen über Frequenzbereiche zu treffen. Die Analyse der Diagramme in Anhang B.2 zeigt, dass diese Annahme zulässig ist.

Aus den in Tabelle 9 zusammengefassten Ergebnissen wird ersichtlich, dass die überwiegende Mehrheit der untersuchten Lösungen aus einer Überlagerung mehrerer harmonischer Funktionen besteht. Erwartungsgemäß handelt es sich dabei nicht nur um Vielfache der Erregerfrequenz sondern auch um Bruchteile. Desweiteren zeigt sich, dass in keiner der untersuchten Lösungen mehr als 6 Frequenzen relevant sind und dass zudem die relevanten Frequenzen bei Lösungen mit unterschiedlicher Periodizität sehr verschieden sind.

Basierend auf diesen Feststellungen werden die folgenden Ansatzfunktionen verwendet

$$\text{Periodizität 1: } x_1(\tau) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{i=1}^6 \left[a_{1,i} \cos(i\eta\tau) + b_{1,i} \sin(i\eta\tau) \right], \quad (3.23a)$$

$$\text{Periodizität 2: } x_2(\tau) = \frac{a_{2,0}}{2} + \sum_{i=1}^6 \left[a_{2,i} \cos\left(\frac{i}{2}\eta\tau\right) + b_{2,i} \sin\left(\frac{i}{2}\eta\tau\right) \right], \quad (3.23b)$$

$$\text{Periodizität 3: } x_3(\tau) = \frac{a_{3,0}}{2} + \sum_{i=1}^6 \left[a_{3,i} \cos\left(\frac{2i-1}{3}\eta\tau\right) + b_{3,i} \sin\left(\frac{2i-1}{3}\eta\tau\right) \right]. \quad (3.23c)$$

Wie zu sehen ist, wird für jede Periodizität ein eigener Ansatz verwendet und es werden in jedem Ansatz 6 Frequenzen berücksichtigt. Der Grund dafür, dass darauf verzichtet wird Ansätze zur Ermittlung der Lösungen mit Periodizität 4 und 5 zu verwenden liegt darin, dass die entsprechenden Lösungen nur in einem sehr kleinen Frequenzbereich auftreten. Dies stellt allerdings auch keine starke Einschränkung dar, da diese bei Bedarf problemlos ergänzt werden können. Desweiteren wäre es wahrscheinlich möglich, den Ansatz x_3 weiter zu reduzieren, da in der Analyse von Lösungen mit einer Periodizität von 3 nur 3 Frequenzen als relevant ermittelt wurden. Da der Rechenaufwand für einen Ansatz in dem 6 Frequenzen berücksichtigt werden aber gut vertretbar ist, wurde darauf verzichtet.

Da die Anzahl der berücksichtigten Frequenzen in allen Ansatzfunktionen $n = 6$ beträgt, liefert das oben beschriebene Verfahren ein System von $4n + 1 - 2\lfloor n/3 \rfloor = 21$ nichtlinearen algebraischen Gleichungen pro Ansatzfunktion. Zur Bestimmung der Koeffizienten in der Ansatzfunktion werden die ersten $2n + 1 = 13$ Gleichungen verwendet und die verbleibenden $2(n - \lfloor n/3 \rfloor) = 8$ Gleichungen werden zur Ermittlung des Fehlers (3.11) verwendet. Obwohl die Anzahl der zu lösenden nichtlinearen Gleichungen nicht sehr hoch ist, gelingt es in den meisten Fällen nicht, eine exakte Lösung zu bestimmen, was dazu führt, dass numerische Näherungsverfahren verwendet werden müssen. Für die in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse wurde dazu die in MATHEMATICA10 enthaltene Implementierung des Newton-Verfahrens verwendet. Da es sich dabei um ein lokales Verfahren handelt, bei dem der verwendete Startwert einen entscheidenden Einfluss darauf hat, welche von mehreren möglichen Lösungen gefunden wird, ist es wichtig, dass das Verfahren mehrmals mit unterschiedlichen Startwerten durchgeführt wird. Der prinzipielle Ablauf der dabei verwendeten Implementierung ist in Programm 3 dargestellt.

Die Eingangsgrößen sind das zu lösende System nichtlinearer Gleichungen **eqs** und die natürliche Zahl **anz** welche angibt, wieviele Variationen von Startwerten verwendet werden sollen. In Vorbereitung für die Anwendung des Newton-Verfahrens wird zunächst ein reduziertes Gleichungssystem **redeqs** erzeugt, indem in den ersten 3 Gleichungen von **eqs** die Koeffizienten a_i und b_i für $i = 2, \dots, 6$ zu Null gesetzt werden. Die resultierenden Gleichungen sind analytisch lösbar und liefern r Lösungen die mit $\hat{c}_j = (a_{0,j}, a_{1,j}, b_{1,j}, 0, \dots, 0)$ bezeichnet werden.

Programm 3 Bestimmung der Ansatzkoeffizienten mittels Newton-Verfahren.

Eingangsgrößen: eqs , anz

- 1: $redeqs = (eqs_1, eqs_2, eqs_3)$ setze darin $a_i = b_i = 0$ für $i = 2, \dots, 6$
- 2: berechne alle analytischen Lösungen von $redeqs$, bezeichne diese als \hat{c}_i , $i = 1, \dots, r$
- 3: **for** $j = 1$, to r **do**
- 4: **for** $k = 1$, to anz **do**
- 5: $c_0 = \hat{c}_j + \Delta_k$
- 6: berechne $c_{j,k} = \text{Newton}(eqs, c_0)$
- 7: **end for**
- 8: **end for**
- 9: bestimme alle verschiedenen Lösung in $c_{j,k}$, bezeichne diese als c_i , $i = 1, \dots, q$

Ausgangsgrößen: c_i

Für jede dieser Lösungen wird nun eine Anzahl von anz Startwerten c_0 erzeugt, indem zu den berechneten Lösungen eine Störung Δ_k addiert wird. In der verwendeten Implementierung handelt es sich bei der Störung Δ_k um Zufallszahlen mit vorgegebener Bandbreite, was sich in den bisherigen Anwendungen bewährt hat, aber wahrscheinlich nicht die optimale Wahl darstellt. So ist davon auszugehen, dass die so berechneten Störungen für nicht ausreichend große Werte von anz nicht gleichmäßig verteilt sind.

Ausgehend von den Startwerten c_0 lassen sich nun mit dem Newton-Verfahren j - k -Lösungen $c_{j,k}$ berechnen, welche im Allgemeinen nicht alle verschieden sind. Der letzte Schritt des Verfahrens besteht daher darin, die mehrfach enthaltenen Lösungen zu entfernen.

Tabelle 10: Anzahl berechneter Lösungen und verwendeter Startwerte.

Ansatz mit Periodizität	1	2	3
#Lösungen reduziertes System \hat{c}	4781	2403	2403
#Startwerte c_0	239050	120150	120150
#Lösungen vollständiges System c	5301	18134	84805

Um die Bedeutung der einzelnen Schritte des Programms zu verdeutlichen, sind in Tabelle 10 Zahlenwerte für die Anzahl der bei der Berechnung des Beispiels aufgetretenen Lösungen dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass das in Programm 3 dargestellte Verfahren für 801-Frequenzwerte angewendet wurde und die dargestellten Zahlenwerte der Summe der Anzahl der Lösungen für alle Frequenzwerte entspricht.

Konkret folgten aus der Lösung des reduzierten Gleichungssystem $redeqs$, das für die Ansatzfunktion mit Periodizität 1 erstellt wurde, bei der Auswertung von 801 Frequenzwerten 4781 analytisch bestimmte Lösungen \hat{c} . Da für die Berechnung des Beispiels $anz = 50$ gewählt wurde, folgten daraus $4781 \cdot 50 = 239050$ Startwerte c_0 für das Newton-Verfahren. Aus der Auswertung des Newton-Verfahrens resultierten 5301 verschiedene Lösungen c . Da das Newton-Verfahren für jeden Startwert genau eine Lösung liefert, zeigt sich in der Differenz $5301 - 4781 = 520$ die Wirkung der Verwendung von variierten Startwerten. Noch

deutlicher ausgeprägt ist dieser Effekt bei den Ansätzen mit Periodizität 2 und 3 bei denen die Anzahl der Lösungen des vollständigen Systems die der Lösungen des reduzierten Systems weit übersteigt.

Tabelle 11: Aufschlüsselung der berechneten Lösungen hinsichtlich Fehler und Stabilität.

Ansatz mit Periodizität	1	2	3
#Lösungen vollständiges System c	5301	18134	84805
#Lösungen mit großem Fehler	206	8657	66356
#instabile Lösungen	3025	9301	17375
#stabile Lösungen	2070	176	1074

Als nächstes werden die aus den berechneten Lösungen konstruierten Approximationen hinsichtlich ihrer Qualität untersucht. Dazu wird zunächst für jede der Lösungen der relative Fehler (3.11) ausgewertet und mit einem Schwellenwert, der im vorgestellten Beispiel bei 1% liegt, verglichen. Liegt der Wert des Fehlers oberhalb des Schwellenwertes, wird die Lösung verworfen. Andernfalls wird die Stabilität der Lösung mittels der oben beschriebene Methode bestimmt.

Für das behandelte Beispiel wurde die Untersuchung der Lösungen sowohl zahlenmäßig ausgewertet als auch graphisch dargestellt. Die zahlenmäßige Auswertung, deren Ergebnisse in Tabelle 11 zusammengefasst sind, zeigt, dass insbesondere bei den Lösungen mit Periodizität 2 und 3 eine hohe Anzahl von Lösungen stark fehlerbehaftet ist.

Da ausgehend von der beschriebenen Voruntersuchung davon ausgegangen werden kann, dass die Anzahl der berücksichtigten Terme in den Ansatzfunktionen ausreichend hoch gewählt wurde, resultiert der hohe Fehler vermutlich nicht aus einer unvollständigen Konvergenz, sondern aus dem Auftreten von Lösungen aus dem Newton-Verfahren, die auf Approximationen führen, welche keine Lösung der Differentialgleichung darstellen (siehe dazu [93, 94]). Diese Annahme wird sich im Folgenden beim Vergleich der durch die Harmonische Balance berechneten Lösungen mit den Referenzlösungen aus der numerischen Integration bestätigen.

Des Weiteren ist in Tabelle 11 zu sehen, dass von den verbleibenden Lösungen mit geringem Fehler der größte Anteil instabil ist.

Um eine Vorstellung davon zu geben, wie die fehlerbehafteten, instabilen und stabilen Lösungen über die Frequenz und die möglichen Lösungsarten verteilt sind, wurde Abbildung 22 erstellt. In den beiden Spalten der Abbildung finden sich die Antwortdiagramme für die Interwell- und Intrawell-Lösungen, wobei jede Zeile zu einer anderen Ansatzfunktion gehört. Dabei sind die Lösungen mit einem hohen Fehler in **rot**, die instabilen Lösungen mit geringem Fehler in **grau** und die stabilen Lösungen mit geringem Fehler in **blau** dargestellt. Wie zu erkennen ist, sinkt die Anzahl fehlerbehafteter Lösungen mit steigendem η . Insbesondere bei den Intrawell-Lösungen mit Periodizität 2 und 3 tritt die größte Anzahl fehlerhafter Lösungen in einem niedrigen Frequenzbereich (bis ungefähr $\eta = 0,5$) auf.

Des Weiteren existieren derart viele Lösungen, dass ohne eine Auswahl anhand des Fehlers

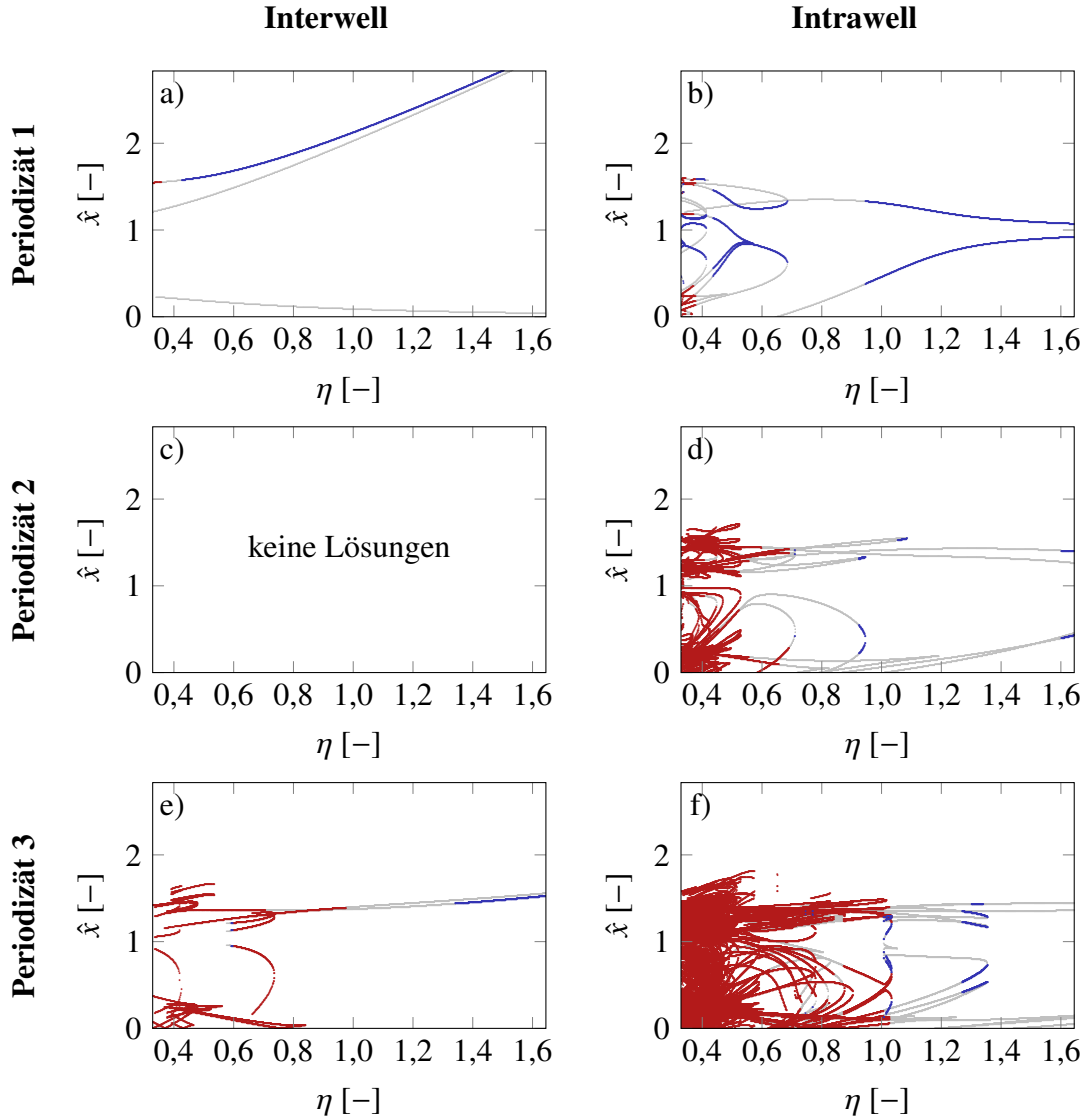


Abbildung 22: Antwortdiagramme aus der Harmonischen Balance mit multifrequenten Ansatzfunktionen. Lösungen mit großem Fehler sind in *rot*, instabile Lösungen mit kleinem Fehler in *grau* und stabile Lösungen mit kleinem Fehler in *blau* dargestellt.

und der Stabilität, und der dadurch ermöglichten Reduzierung, der Nutzen der erzeugten Graphiken sehr gering wäre. Da für die Analyse des Systemverhaltens ausschließlich Lösungen mit geringem Fehler in Frage kommen, und von diesen vorrangig die stabilen von Interesse sind, werden aus den Diagrammen in Abbildung 22 lediglich die *blau* dargestellten Lösungen zur Konstruktion des Verzweigungsdiagramms verwendet, welches in Abbildung 23 zu sehen ist.

3.3.4 Vergleich der Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus der Methode der Harmonischen Balance unter Verwendung einer monofrequenten und einer multifrequenten Ansatzfunktion miteinander ver-

glichen. Wie aus den vorausgegangenen Ausführungen deutlich wird, erhöht sich der erforderliche Aufwand bei der Verwendung multifrequenter Ansatzfunktionen deutlich. Demgegenüber steht eine Erhöhung der Genauigkeit der berechneten Lösungen. Zur Verdeutlichung der jeweils erzielten Genauigkeit werden die resultierenden Antwortdiagramme mit einem Referenzdiagramm, das mittels numerischer Integration erzeugt wurde, verglichen. In Abbildung 23 findet sich dazu oben das Antwortdiagramm aus der Harmonischen Balance mit monofrequenter Ansatzfunktion, in der Mitte das Antwortdiagramm aus der Harmonischen Balance mit multifrequenter Ansatzfunktion und unten das Antwortdiagramm, welches mit der numerischen Integration bestimmt wurde.

Wie zu sehen ist, liefert die Methode der Harmonischen Balance mit monofrequenter Ansatzfunktion ein Antwortdiagramm, welches ein sehr schlechtes Abbild des Referenzdiagramms darstellt. Weder die Bereiche in denen Interwell-Lösungen existieren, noch der Bereich in dem keine Intra-Well-Lösung existiert werden richtig abgebildet. Besonders auffällig ist der große Frequenzbereich, für den keine Lösung vorhergesagt wird. Konkret würde dies bedeuten, dass das System in diesem Bereich keine periodische Lösung besitzt, was wie ein Vergleich mit dem Referenzdiagramm zeigt, nicht richtig ist.

Das Antwortdiagramm hingegen, welches unter Verwendung des multifrequenten Ansatzes erstellt wurde, ist in der Lage die grundlegenden Merkmale des Referenzdiagramms richtig abzubilden. Insbesondere die Grenzen des Bereichs, in dem lediglich die in der Anwendung bevorzugte Interwell-Lösung auftritt, werden richtig abgebildet. Desweiteren ist zu sehen, dass das Antwortdiagramm aus der Harmonischen Balance das Auftreten der Interwell-Lösung für einen größeren Frequenzbereich vorhersagt als das Referenzdiagramm. Der Grund hierfür liegt darin, dass für die Erstellung des Referenzdiagramms nur eine begrenzte Anzahl von Anfangsbedingungen verwendet wurden und der Energie-Schwellenwert (siehe Abschnitt 3.1.1), der für das Auftreten von Interwell-Lösung überschritten werden muss, bei deren Verwendung nicht erreicht wird. Daraus folgt, dass das mit der Methode der Harmonischen Balance konstruierte Antwortdiagramm das Referenzdiagramm in diesem Punkt an Genauigkeit übertrifft.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Verwendung der Methode der Harmonischen Balance mit monofrequenter Ansatzfunktion kein adäquates Mittel zur Untersuchung des betrachteten bistabilen Systems darstellt und dass stattdessen ein multifrequenter Ansatz verwendet werden muss.

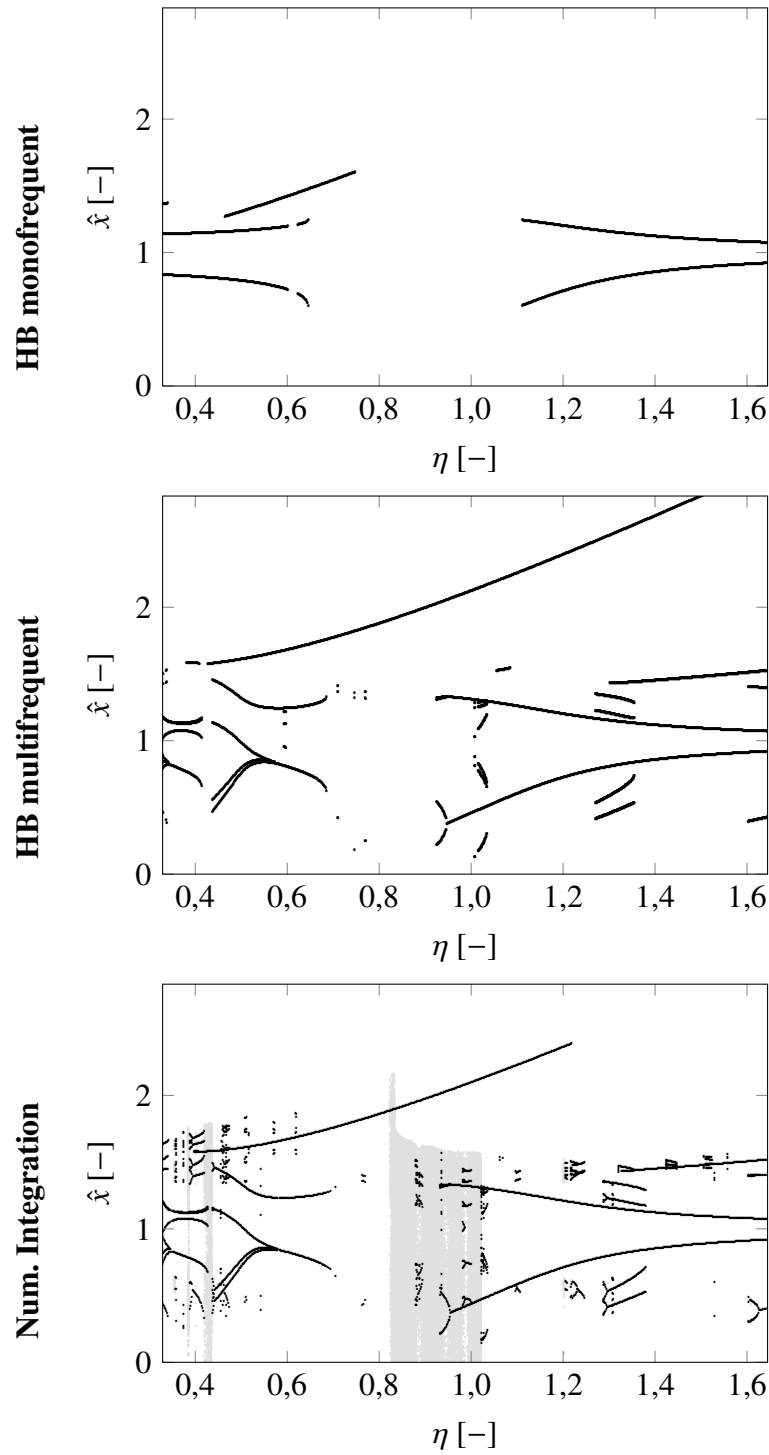


Abbildung 23: Vergleich der Antwortdiagramme erstellt mit der Methode der Harmonischen Balance mit monofrequenter Ansatzfunktion (oben), mit der Methode der Harmonischen Balance mit multifrequenter Ansatzfunktion (mitte) und numerischer Integration (unten).

4 Analyse für eine Anregung durch weißes Rauschen

Im diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich das dynamische Verhalten des Systems für den Fall einer Anregung durch weißes Rauschen untersuchen lässt.

Als Grundlage für die anschließenden Ausführungen wird zuerst eine kurze Zusammenfassung der Grundlagen stochastisch angeregter Systeme gegeben. Als nächstes wird erläutert, wie die Verteilungsdichten von Zufallsgrößen mittels der Monte-Carlo-Simulation numerisch bestimmt werden können. Als nächstes wird ein semi-analytisches Verfahren vorgestellt, in dem Verteilungsdichten durch eine näherungsweise Lösung der dem System zugeordneten Fokker-Planck-Gleichung (Fokker-Planck equation, FPE) bestimmt werden.

4.1 Grundlagen der Untersuchung stochastische angeregter Systeme

Im Gegensatz zu dem im vorherigen Kapitel betrachteten Fall der harmonischen Anregung, bei der die äußere Anregung aus einer eindeutig definierten Funktion besteht, wird nun eine Anregung betrachtet, von der lediglich statistische Kenngrößen bekannt sind. Demzufolge besteht das gesuchte Ergebnis auch nicht in einer von der Zeit abhängigen Funktion, welche die Systemantwort beschreibt, sondern ebenfalls in statistischen Kenngrößen. Im Folgenden sollen die Werkzeuge, die zur Beschreibung der Anregung und der Systemantwort benötigt werden, vorgestellt und besprochen werden. Für eine weiterführende Beschäftigung mit der Thematik werden die Grundlagenwerke [6, 69] empfohlen.

4.1.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die mathematische Beschreibung von Zufallsexperimenten [6]. Dabei versteht man unter einem Zufallsexperiment ein (gedankliches) Experiment, das beliebig häufig wiederholt werden kann und das trotz gleicher äußerer Bedingungen (Parameter, Anfangsbedingungen, etc.) unvorhersagbare Ergebnisse liefert. Eine mögliche Realisierung der Zufallskomponente des Experiments wird Elementarereignis ω genannt und die Menge aller möglichen Elementarereignisse wird mit Ω bezeichnet.

Von besonderem Interesse ist nun die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Elementarereignisses oder aber einer Kombination von Elementarereignissen $A \subseteq \Omega$. Dabei versteht man unter Wahrscheinlichkeit formal eine Abbildung $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften

$$P(\{\}) = 0 \tag{4.1a}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{4.1b}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \text{ falls } A_i \cap A_j = \{\} \ \forall i \neq j \text{ gilt.} \tag{4.1c}$$

Für ein besseres Verständnis des Begriffs der Wahrscheinlichkeit soll hier noch die Häufigkeitsinterpretation aus [6] wiedergegeben werden. Bezeichne dazu n die Anzahl von Durchführungen eines Zufallsexperiments und n_A die Anzahl von Fällen in denen dabei das Ereignis A eingetreten ist, dann ist durch

$$r_A = \frac{n_A}{n} \quad (4.2)$$

die relative Häufigkeit des Eintretens von A gegeben und es gilt

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_A . \quad (4.3)$$

Nun ist in den meisten Anwendungsfällen gar nicht das bei der Durchführung des Experiments eintretende Ereignis A von Interesse, sondern eine Größe, die sich aus A berechnen lässt. Zum Beispiel sind im Fall des EH-Systems unter stochastischer Anregung nicht der Wert der Anregung der sich einstellt, sondern die daraus folgenden Werte für Lage und Geschwindigkeit von Interesse. Aus diesem Grund wird eine weitere Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n , \quad \Omega \mapsto X(\Omega) = \begin{pmatrix} X_1(\Omega) \\ \vdots \\ X_n(\Omega) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

eingeführt, die aus der Menge aller Elementarereignisse auf \mathbb{R}^n abbildet und als Zufallsvariable bezeichnet wird. Der Übertrag des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf die Zufallsvariable erfolgt über die Verteilung

$$P_X(\tilde{A}) = P(\{\Omega : X(\Omega) \in \tilde{A}\}) \quad (4.5)$$

die einer Menge \tilde{A} von Realisationen von X die Wahrscheinlichkeit des Urbildes zuordnet. Eng mit der Verteilung verknüpft ist die Verteilungsfunktion F

$$F(\mathbf{x}) = P(X \leq \mathbf{x}) = P(\{\Omega : X_1(\Omega) \leq x_1, \dots, X_n(\Omega) \leq x_n\}) \quad (4.6)$$

welche die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass X Werte annimmt die komponentenweise kleiner-gleich \mathbf{x} sind. Falls die durch F gegebene Verteilung Lebesgue-stetig ist (siehe dazu [6]) existiert die Verteilungsdichte p und es gilt

$$F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1 = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} p(\mathbf{s}) d\mathbf{s} . \quad (4.7)$$

Aus der Additivität der Wahrscheinlichkeit (4.1c) folgt für $\tilde{A} = [\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \times \dots \times [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]$ zudem

$$P_X(\tilde{A}) = F(\tilde{\mathbf{b}}) - F(\tilde{\mathbf{a}}) = \int_{-\infty}^{\tilde{b}} p(s) ds - \int_{-\infty}^{\tilde{a}} p(s) ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} p(s) ds \quad (4.8)$$

woraus ersichtlich wird, dass die Verteilung einer einpunktigen Menge stets 0 ist.

Die Betrachtung der Wahrscheinlichkeiten bestimmter Komponenten einer vektorwertigen Zufallsvariablen erfolgt über die Verwendung von Randverteilungsdichten, die aus p berechnet werden, indem für die Komponenten, die nicht betrachtet werden, jegliche Ausgänge zugelassen werden. Ist beispielsweise die Komponente X_i nicht von Interesse, so ergibt sich die Verteilungsdichte der übrigen Komponenten von \mathbf{X} zu

$$p_{x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}) dx_i. \quad (4.9)$$

Eine weitere wichtige Größe, die zur Charakterisierung von Zufallsvariablen verwendet wird ist deren α -Moment, das für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ gegeben ist durch

$$m_\alpha = E\{X^\alpha\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} p(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n. \quad (4.10)$$

Von besonderer Bedeutung sind dabei die k -ten Momente der einzelnen Komponenten der Zufallsvariablen \mathbf{X}

$$m_i^k = E\{x_i^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k p_{x_i}(x_i) dx_i. \quad (4.11)$$

So entspricht m_i^1 zum Beispiel dem Mittelwert von X_i . Die um den Mittelwert verschobenen Momente

$$E\{(x_i - m_i^1)^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i^1)^k p_{x_i}(x_i) dx_i. \quad (4.12)$$

werden als zentrale Momente k -ter Ordnung bezeichnet und das zentrale Moment 2-ter Ordnung von x_i entspricht der Varianz σ_i .

4.1.2 Stochastische Prozesse

Für die Modellierung des EH-Systems muss das Konzept der Zufallsvariable um die Abhängigkeit von einem Parameter, der als Zeit interpretiert wird, erweitert werden. Dabei soll

durch die verwendete Bezeichnung zum Ausdruck gebracht werden, dass sich die Zeit t und das betrachtete Elementarereignis nicht gleichzeitig ändern.

Der Notation in [6] folgend wird die Menge $\{X_t(\Omega) : t \in [t_0, T]\}$ stochastischer Prozess genannt wobei die Bedeutung von X_t folgende ist:

- a) für ein festes $t \in [t_0, T]$ stellt X_t eine Zufallsvariable gemäß (4.4) dar,
- b) für ein festes $\omega \in \Omega$ stellt $\mathbf{x}_\omega(t) = X_t(\omega)$ den zeitlichen Verlauf des Experiments mit dem Ausgang ω dar und wird als Trajektorie bezeichnet.

Der Übertrag des Konzepts der Verteilung auf stochastische Prozesse geschieht über

$$F_t(\mathbf{x}) = P(X_t \leq \mathbf{x}) = P(\{\Omega : X_{t,1}(\Omega) \leq x_1, \dots, X_{t,n}(\Omega) \leq x_n\}) \quad (4.13)$$

und erfährt eine Erweiterung dadurch, dass beliebig viele Zeitpunkte t_1, \dots, t_m berücksichtigt werden können

$$F_{t_1, \dots, t_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = P(X_{t_1} \leq \mathbf{x}_1, \dots, X_{t_m} \leq \mathbf{x}_m) . \quad (4.14)$$

Gilt dabei für alle $t_i \in [t_0, t_1]$ und beliebige Δt_i mit $t_i + \Delta t_i \in [t_0, t_1]$

$$F_{t_1 + \Delta t_1, \dots, t_m + \Delta t_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = F_{t_1, \dots, t_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \quad (4.15)$$

dann wird der zu Grunde liegende stochastische Prozess als stationär bezeichnet.

Eine weitere wichtige Eigenschaft stochastischer Prozesse ist die Markov-Eigenschaft welche besagt, dass der betrachtete Prozess „kein Gedächtnis“ besitzt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prozess X_t sich zum Zeitpunkt t in A befindet, hängt dann nur vom letzten bekannten (also dem gegenwärtigen) Zustand $X_{t_s} = \mathbf{x}_s$ ab. Es gilt also

$$P(X_t \in A | \{X_{t_i} = \mathbf{x}_i : t_i \in [t_0, t_s]\}) = P(X_t \in A | \{X_{t_s} = \mathbf{x}_s\}) \quad (4.16)$$

was direkt auf den Begriff der Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(t_s, \mathbf{x}_s, t, A) = P(X_t \in A | X_{t_s} = \mathbf{x}_s) \quad (4.17)$$

und deren Dichte

$$P(t_s, \mathbf{x}_s, t, A) = \int_A p(t_s, \mathbf{x}_s, t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_n \quad (4.18)$$

führt. Besitzt ein Prozess die Markov-Eigenschaft, wird dieser häufig als Markov-Prozess bezeichnet. Gilt weiter, dass die Übergangswahrscheinlichkeit nur von der Zeitdifferenz $t - t_s$ abhängt, also stationär ist, spricht man zudem von einem homogenen Markov-Prozess und

bringt dies zum Ausdruck, indem in (4.17) anstelle der Zeiten t_s , t nur noch ihre Differenz $\Delta t = t - t_s$ als Argument genannt wird.

Die besondere Bedeutung der Übergangswahrscheinlichkeit für Markov-Prozesse liegt darin, dass bei zusätzlicher Kenntnis eines Anfangswerts sämtliche Verteilungen des Prozesses aus dieser berechnet werden können (siehe [6], S.47).

4.1.3 Wiener Prozess und weißes Rauschen

Der Wiener Prozess W_t ist ein homogener Markov-Prozess, der von besonderer Bedeutung für die Modellierung von stochastischen Anregungen ist. Der Wiener Prozess hat den Anfangswert $W_0 = \mathbf{0}$ und seine Übergangswahrscheinlichkeit besitzt die Dichte

$$p(\Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{N}_{\mathbf{x}, \Delta t \mathbf{I}_n}(\mathbf{y}) \quad (4.19)$$

wobei $\mathcal{N}_{\mathbf{x}, \Delta t \mathbf{I}_n}$ die Normalverteilung mit Mittelwert \mathbf{x} und Kovarianz-Matrix $\Delta t \mathbf{I}_n$ ist (für eine alternative Charakterisierung siehe zum Beispiel [12]). Obwohl der so definierte Wiener Prozess stetig in der Zeit ist, existiert die als weißes Rauschen bezeichnete Ableitung

$$\frac{d}{dt} W_t = \xi_t \quad (4.20)$$

lediglich im Sinne einer Distribution. Das weiße Rauschen ist ein stationärer Gauß'scher stochastischer Prozess mit Mittelwerten $\mu = \mathbf{0}$ und einer auf der gesamten reellen Achse konstanten Spektraldichte, das heißt in einer Fouriertransformation seiner Komponenten sind alle Frequenzen mit gleicher Intensität vertreten (siehe [6] S. 65ff). Obwohl ein solcher Prozess in der Realität nicht existiert, ist seine Verwendung zur Modellierung von Zufallsprozessen in den Ingenieurwissenschaften weit verbreitet.

4.1.4 Stochastische Differentialgleichungen und Fokker-Planck-Gleichung

Das mathematische Modell eines deterministischen dynamischen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ welches durch das im vorherigen Abschnitt beschriebene weiße Rauschen angeregt wird, ist formal durch die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} X_t = \mathbf{f}(X_t, t) + \mathbf{G}(X_t, t) \xi_t \quad (4.21)$$

gegeben, wobei $X_t, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\xi_t \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gilt. In den nachfolgenden Betrachtungen hängen \mathbf{f} und \mathbf{G} nicht explizit von der Zeit ab, woraus die Vereinfachung

$$\frac{d}{dt} X_t = \mathbf{f}(X_t) + \mathbf{G}(X_t) \xi_t \quad (4.22)$$

folgt. Da das weiße Rauschen zudem keine reguläre Funktion ist und unklar ist, ob die Zeitableitung der Zufallsvariablen existiert, wird anstelle von (4.22) häufig die integrale Darstellung

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t_0} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{X}_s) ds + \int_{t_0}^t \mathbf{G}(\mathbf{X}_s) d\mathbf{W}_s \quad (4.23)$$

sowie die damit assoziierte Kurzschreibweise

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t)dt + \mathbf{G}(\mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t \quad (4.24)$$

verwendet, wobei das zweite Integral in (4.23) hier und im Folgenden gemäß [52, 89] als Itô-Integral interpretiert werden soll und $d\mathbf{W}_t = \boldsymbol{\xi}dt$ gilt.

Die Lösungen stochastischer Differentialgleichungen sind ihrerseits Markov-Prozesse (siehe [6], S.157), welche durch die Angabe eines Anfangswertes und der Übergangswahrscheinlichkeit vollständig beschrieben sind. Da durch (4.23) und (4.24) Bestimmungsgleichungen für \mathbf{X}_t in Abhängigkeit des Anfangswertes \mathbf{X}_{t_0} und einer konkreten Realisierung des Wiener-Prozess gegeben sind, stellt deren Lösung eine Realisierung von \mathbf{X}_t , also eine Trajektorie dar. Eine Möglichkeit um aus diesen Trajektorien die Übergangswahrscheinlichkeit näherungsweise zu bestimmen besteht darin, eine hohe Anzahl von Trajektorien zu berechnen und auszuwerten (siehe 4.2).

Die (zumindest theoretisch mögliche) exakte Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeit erfolgt durch das Lösen der Fokker-Planck-Gleichung

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(\mathbf{x})p(\mathbf{x})] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(\mathbf{x})p(\mathbf{x})] = 0 \quad (4.25)$$

welche hier bereits in der stationären Form angeschrieben wurde. Die darin auftretenden Koeffizienten f_i und $B_{ij} = \sum_{k=1}^m G_{ik}G_{jk}$ können dabei direkt aus (4.24) übernommen werden. Wie zu sehen ist, handelt es sich bei (4.25) um eine PDE 2.Ordnung die linear in der gesuchten Größe p ist. Für den Fall, dass das modellierte System nichtlinear ist, sind die Koeffizienten f_i nichtlineare Funktionen von \mathbf{x} und es kann in den meisten Fällen keine exakte Lösung angegeben werden, so dass auf Näherungsverfahren zurückgegriffen werden muss.

4.2 Bestimmung von Verteilungsdichten mittels Monte-Carlo-Simulation

Um die stochastische Differentialgleichung (4.24) einer numerischen Behandlung zugänglich zu machen, wird diese in die Differenzengleichung

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \mathbf{f}(\mathbf{X}_k, t_k)\Delta t_k + \mathbf{G}(\mathbf{X}_k, t_k)\Delta W_{t_k} \quad (4.26)$$

mit $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ umgeschrieben, was eine direkte Analogie zum expliziten Euler-Verfahren darstellt und als Euler-Maruyama-Verfahren bezeichnet wird. Das darin verwendete Inkrement des Wiener-Prozess berechnet sich gemäß

$$\Delta W_{t_k} = \kappa \sqrt{\Delta t_k} \quad (4.27)$$

wobei κ eine normalverteilte Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$ darstellt (für eine kritische Betrachtung computergenerierter Zufallszahlen siehe z.B. [39]).

Unter der Verwendung von (4.26) und (4.27) ist es nun möglich, den zeitlichen Verlauf von \mathbf{X}_t zu simulieren. Aus der relativen Häufigkeit, mit der verschiedene Zustände angenommen werden, kann dann im Sinne der eingangs erwähnten Häufigkeitsinterpretation (4.3) die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsdichte bestimmt werden. Dabei hängt die Qualität der erzielten Ergebnisse stark von der Anzahl der simulierten Zeitschritte, der verwendeten Schrittweite und der ausreichend feinen Zerlegung des Zustandsraums ab.

Obwohl es nicht möglich ist, generelle Aussagen hinsichtlich der richtigen Wahl dieser Parameter zu treffen, zeigt die gesammelte Erfahrung, dass typische Rechenzeiten im Bereich mehrerer Stunden oder gar Tage liegen. Das Verfahren eignet sich daher schlecht für häufig durchzuführende Rechnungen, wie sie zum Beispiel für Parameterstudien notwendig sind.

4.3 Bestimmung von Verteilungsdichten mittels Fokker-Planck-Gleichung

Im Folgenden wird das in [89, 95] vorgestellte und in [52] weiterentwickelte Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen der Fokker-Planck-Gleichung in eine Darstellung gebracht, die eine effiziente Programmierung erlaubt.

Das Verfahren wurde nach seiner Vorstellung stetig weiterentwickelt [53] und auch bereits mehrfach erfolgreich zur Behandlung des betrachteten EH-Systems eingesetzt [47, 48, 49, 52]. Was bislang aber fehlt, ist eine Darstellung des Verfahrens, welche auf eine effiziente Programmierung abzielt. Diese Lücke soll im Folgenden geschlossen werden, indem mittels Methoden aus dem Bereich der linearen Algebra ein Weg aufgezeigt wird, wie der gesamte Lösungsprozess durch Matrixmultiplikationen umgesetzt werden kann. In einem weiteren Schritt wird dann gezeigt, dass es möglich ist, sämtliche dazu benötigten Matrizen durch Kroneckerprodukte von Matrizen mit deutlich geringerer Dimension darzustellen.

4.3.1 Beschreibung des Verfahrens

Ziel des Verfahrens ist die Berechnung einer Näherungslösung für die Verteilungsdichte p , welche die stationäre FPE

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(\mathbf{x})p(\mathbf{x})] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(\mathbf{x})p(\mathbf{x})] = 0 \quad (4.28)$$

exakt löst. Ausgangspunkt dafür ist eine, im Vorfeld zu wählende, Verteilungsdichte p_0 , die im Allgemeinen von der tatsächlichen Verteilungsdichte p verschieden ist. Der Ansatz für die zu berechnende Näherungslösung \tilde{p} lautet

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x})k(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad (4.29)$$

wobei k ein multivariates Polynom aus dem m -dimensionalen Ansatzraum \mathcal{K} mit Basis $\mathcal{B}_1 = \{\phi_i \mid \phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m\}$ ist. Einsetzen des Ansatzes in (4.28) liefert das Residuum

$$R(k) = \sum_{i=1}^m c_i \left[-\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [p_0(\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x})f_k(\mathbf{x})] + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [p_0(\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x})B_{kl}(\mathbf{x})] \right] \quad (4.30)$$

das nur dann identisch zu Null wird falls $\tilde{p} = p$ gilt, also \tilde{p} eine exakte Lösung der FPE ist. Für das weitere Vorgehen wird nun ganz im Sinne eines Galerkin-Verfahrens gefordert, dass das Residuum orthogonal zu dem gewählten Ansatzraum \mathcal{K} ist. Unter Verwendung des L^2 -

Skalarprodukts ergibt sich daraus die Forderung

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(k) \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.31)$$

beziehungsweise mit (4.30) nach Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation

$$\sum_{i=1}^m c_i \left[- \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} [p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x})] \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) B_{kl}(\mathbf{x})] \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right] = 0 \quad (4.32)$$

für $j = 1, \dots, m$. Mittels partieller Integration können die beiden Integrale in (4.32) bedeutend vereinfacht werden. Beispielhaft gilt für das erste Integral

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} [p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x})] \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x})]_{x_k=-\infty}^{x_k=\infty} dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n + \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.33)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass p_0 eine Verteilungsdichte ist und daher die Randbedingungen $\lim_{a \rightarrow \pm\infty} p_0(x_1, \dots, x_{k-1}, a, x_{k+1}, \dots, x_m) = 0$ erfüllt. Auf dem selben Weg erhält man für das zweite Integral in (4.32)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) B_{kl}(\mathbf{x})] \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) B_{kl}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (4.34)$$

und somit ist eine alternative Formulierung von (4.32) durch

$$\sum_{i=1}^m c_i \left[\sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) B_{kl}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right] = 0 \quad (4.35)$$

gegeben. Für die gesuchten Koeffizienten c_i muss

$$\mathbf{M}^T \mathbf{c} = \mathbf{0}, \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (4.36)$$

mit $\mathbf{M} = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^T \in \mathbb{R}^m$ gelten. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$g_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \phi_j(\mathbf{x}) \quad (4.37a)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n B_{kl}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \phi_j(\mathbf{x}) \quad (4.37b)$$

für $j = 1, \dots, n$ können die Einträge der Koeffizientenmatrix \mathbf{M} gemäß

$$m_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) g_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) h_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.38)$$

berechnet werden.

4.3.2 Vereinfachung durch orthonormale Ansatzfunktionen

Der Aufwand der zur Berechnung der Koeffizientenmatrix \mathbf{M} in (4.36) notwendig ist, lässt sich durch die Verwendung von an das Problem angepassten Ansatzfunktionen stark reduzieren.

Voraussetzung dafür ist, daß es sich bei den Ausdrücken g_i , h_i um Polynome mit endlichem Grad handelt. In diesem Fall existiert ein Multiindex $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \in \mathbb{N}^n$, so dass für $i = 1, \dots, n$ stets g_i , $h_i \in \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}]$ gilt, wobei $\mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}]$ den Vektorraum der Polynome in n Variablen mit reellen Koeffizienten und Grad kleiner oder gleich β_i in der Variablen x_i bezeichnet und zudem $\dim(\mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}]) = s$ gelten soll. Sei außerdem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}^n$ ein weiterer Multiindex, so dass für alle verwendeten Ansatzfunktionen $\phi_i \in \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}]$, $i = 1, \dots, m$ gilt und sei die Menge aller Ansatzfunktionen $\mathcal{B}_1 = \{\phi_i : i = 1, \dots, m\}$ vollständig in dem Sinne, dass sie eine Basis von $\mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}]$ bildet. Des Weiteren seien die Ansatzfunktionen ϕ_i orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt mit Kern p_0 , es gelte also

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{p_0} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{ij}. \quad (4.39)$$

Per Konstruktion gilt $\mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \subseteq \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}]$ und es folgt, dass \mathcal{B}_1 durch Hinzunahme von $s - m$ geeignet gewählten Elementen aus einer beliebigen Basis von $\mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}]$ zu einer Basis von $\mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}]$ ergänzt werden kann. Werden die hinzugenommenen Elemente mit ψ_i bezeichnet, dann lässt

sich die so erzeugte Basis als $\mathcal{B}_2 = \{\phi_1, \dots, \phi_m, \psi_1, \dots, \psi_{s-m}\}$ schreiben. Da die Menge \mathcal{B}_2 linear unabhängig ist, gilt für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, s-m$ die wichtige Eigenschaft

$$\langle \phi_i, \psi_j \rangle_{p_0} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (4.40)$$

Die Entwicklung von (4.37a) und (4.37b) in der Basis \mathcal{B}_2 liefert dann

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{s-m} b_{ij} \psi_j(\mathbf{x}) \quad (4.41a)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n B_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m c_{ij} \phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{s-m} d_{ij} \psi_j(\mathbf{x}) \quad (4.41b)$$

und aus der Auswertung von (4.38) folgt unter Berücksichtigung von (4.39) und (4.40)

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) g_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) h_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=1}^m a_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \phi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{s-m} b_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m c_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \phi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{s-m} d_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= a_{ji} + c_{ji}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aus dem Ergebnis dieser Rechnung wird ersichtlich, dass auf die aufwändige Berechnung uneigentlicher Integrale verzichtet werden kann, wenn es gelingt die Koordinaten von g_j und h_j bezüglich der ersten m -Elemente der Basis \mathcal{B}_2 zu bestimmen.

4.3.3 Umsetzung durch Matrixmultiplikationen

Für eine effiziente Programmierung des Verfahrens ist es erstrebenswert, die zur Berechnung der Koeffizientenmatrix \mathbf{M} erforderlichen Schritte durch Matrixmultiplikation darzustellen. Dazu werden zunächst ausgehend von den Termen (4.37a) und (4.37b) die beiden Abbildungen

$$g : \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}], \quad v(\mathbf{x}) \mapsto \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} v(\mathbf{x}) \quad (4.43a)$$

$$h : \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}], \quad v(\mathbf{x}) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n B_{kl}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} v(\mathbf{x}) \quad (4.43b)$$

eingeführt. Unter Verwendung der Abbildungen g und h lautet die Berechnungsvorschrift für die Einträge der Koeffizientenmatrix nun

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) g_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) h_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) g(\phi_j(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) h(\phi_j(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Für beliebige $u, v \in \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}]$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} g(\sigma_1 u(\mathbf{x}) + \sigma_2 v(\mathbf{x})) &= \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_1 u(\mathbf{x}) + \sigma_2 v(\mathbf{x})) \\ &= \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) \left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_k} u(\mathbf{x}) + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x_k} v(\mathbf{x}) \right) \\ &= \sigma_1 \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} u(\mathbf{x}) + \sigma_2 \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} v(\mathbf{x}) \\ &= \sigma_1 g(u) + \sigma_2 g(v) . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Die Abbildung g ist also linear und der Nachweis der Linearität für h verläuft vollkommen analog. Daraus folgt, dass beide Abbildungen durch Matrizen dargestellt werden können. Bezeichne nun $\Phi_{\mathcal{B}_1}$ die durch

$$\Phi_{\mathcal{B}_1} : \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i \mapsto (c_1, \dots, c_m)^T \quad (4.46)$$

gegebene Koordinatenabbildung bezüglich der Basis \mathcal{B}_1 und $\Phi_{\mathcal{B}_2}$ die entsprechend definierte Koordinatenabbildung bezüglich der Basis \mathcal{B}_2 . Dann ist die Inverse der Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathcal{B}_1}$ durch

$$\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}], \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \mapsto v(\mathbf{x}) = (\phi_1, \dots, \phi_m) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

gegeben und die Inverse der Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathcal{B}_2}$ berechnet sich analog und wird mit $\Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1}$ bezeichnet. Die darstellenden Matrizen der Abbildungen (4.43a) und (4.43b) bezüglich den Basen \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 sind dann durch

$$\mathbf{G} = [g]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = [\Phi_{\mathcal{B}_2} (g(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{e}_1))), \dots, \Phi_{\mathcal{B}_2} (g(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{e}_m)))] \in \mathbb{R}^{s \times m} \quad (4.48a)$$

$$\mathbf{H} = [h]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = [\Phi_{\mathcal{B}_2} (h(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{e}_1))), \dots, \Phi_{\mathcal{B}_2} (h(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{e}_m)))] \in \mathbb{R}^{s \times m} \quad (4.48b)$$

gegeben. In Vorbereitung auf später wird dieser, zunächst noch sehr übersichtliche Zusammenhang in Abbildung 24 beispielhaft für g durch das entsprechende kommutative Diagramm dargestellt.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}] \\
 \downarrow \Phi_{\mathcal{B}_1} & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}_2} \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^s
 \end{array}$$

Abbildung 24: Kommutatives Diagramm für die Abbildung g

Unter Verwendung von G und H lautet die Berechnungsvorschrift für die Einträge der Koeffizientenmatrix (4.44) nun

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) g(\phi_j(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) h(\phi_j(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1} \left(G \Phi_{\mathcal{B}_1}(\phi_j(\mathbf{x})) \right) \, d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1} \left(H \Phi_{\mathcal{B}_1}(\phi_j(\mathbf{x})) \right) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Da ϕ_j gerade das j -te Element der Basis \mathcal{B}_1 ist, gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}_1}(\phi_j(\mathbf{x})) = \mathbf{e}_j \tag{4.50}$$

und unter Verwendung der Notation aus (4.41a) und (4.41b) folgt weiter

$$\Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(G \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ji} \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{s-m} b_{ji} \psi_i(\mathbf{x}) \tag{4.51a}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(H \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m c_{ji} \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{s-m} d_{ji} \psi_i(\mathbf{x}) \tag{4.51b}$$

was unter Verwendung von (4.47) umgeschrieben werden kann zu

$$\left(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_m(\mathbf{x}), \psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_{s-m}(\mathbf{x}) \right) G \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^m a_{ji} \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{s-m} b_{ji} \psi_i(\mathbf{x}) \tag{4.52a}$$

$$\left(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_m(\mathbf{x}), \psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_{s-m}(\mathbf{x}) \right) H \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^m c_{ji} \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{s-m} d_{ji} \psi_i(\mathbf{x}) \tag{4.52b}$$

Aus einem Vergleich der linken- und rechten Seiten in (4.52a) und (4.52b) wird ersichtlich,

dass für die gesuchten Koeffizienten

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{G} \mathbf{e}_j = a_{ji} \quad (4.53a)$$

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{H} \mathbf{e}_j = c_{ji} \quad (4.53b)$$

gelten muss. Mit den gefundenen Ergebnissen kann die Koeffizientenmatrix wie folgt

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{s-m} \end{bmatrix} (\mathbf{G} + \mathbf{H}) \quad (4.54)$$

geschrieben werden.

4.3.4 Konstruktion der darstellenden Matrizen

Mit (4.54), (4.48a) und (4.48b) liegt bereits eine Berechnungsvorschrift für die Koeffizientenmatrix \mathbf{M} vor. Da zu deren Umsetzung lineare Gleichungssysteme gelöst werden müssen, deren Dimension der Anzahl der verwendeten Ansatzfunktionen entspricht, steigt der Rechenaufwand sehr schnell an, wenn die Anzahl der Ansatzfunktionen erhöht wird. Dieser Effekt, der in [53], S.45ff als „Fluch der Dimension“ bezeichnet wird, führt dazu, dass die Anzahl an Ansatzfunktionen die verwendet werden können, und damit letztendlich auch die Dimension der Systeme die betrachtet werden können, stark begrenzt ist.

Aus diesem Grund ist es wünschenswert Berechnungsvorschriften für \mathbf{G} und \mathbf{H} zu finden, die ohne das Lösen linearer Gleichungssysteme auskommen. Neben der dadurch ermöglichten Erhöhung der Anzahl von Ansatzfunktionen besteht die Möglichkeit, den dadurch gegebenen Einblick in die Struktur der Matrizen in Zukunft zu verwenden, um besser angepasste Lösungsverfahren zu entwickeln.

Aus der Definition der Abbildungen (4.43a) und (4.43b) folgt, dass diese durch

$$g : \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}], \quad v(\mathbf{x}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n *f_i \circ \partial_k \right) (v(\mathbf{x})) \quad (4.55a)$$

$$h : \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}], \quad v(\mathbf{x}) \mapsto \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l=1}^n *B_{ij} \circ \partial_k \circ \partial_l \right) (v(\mathbf{x})) \quad (4.55b)$$

als Kompositionen der Abbildungen

$$\partial_i : \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}], \quad v(\mathbf{x}) \mapsto \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (4.56a)$$

$$*f_i : \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}], \quad v(\mathbf{x}) \mapsto f_i(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \quad (4.56b)$$

$$*B_{ij} : \mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq \beta}[\mathbf{x}], \quad v(\mathbf{x}) \mapsto B_{ij}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \quad (4.56c)$$

aufgefasst werden können, wobei wieder $i, j = 1, \dots, n$ gilt. Da es sich bei (4.56a), (4.56b) und (4.56c) wieder um lineare Abbildungen handelt, können diese ebenfalls als Matrizen

dargestellt werden. Dabei wird die Darstellung dieser Abbildung besonders einfach, wenn die Monom-Basen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 verwendet werden, wobei $\text{span}\mathcal{M}_1 = \mathbb{R}_{\leq\alpha}[\mathbf{x}]$ und $\text{span}\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}_{\leq\beta}[\mathbf{x}]$ gelten soll. Mit den zugehörigen Koordinatenabbildungen $\Phi_{\mathcal{M}_1}$ und $\Phi_{\mathcal{M}_2}$, sowie deren Inversen, folgen zunächst die darstellenden Matrizen

$$\mathbf{D}_i = [\partial_i]_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_1} = [\Phi_{\mathcal{M}_1}(\partial_i(\Phi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(\mathbf{e}_1))), \dots, \Phi_{\mathcal{M}_1}(\partial_i(\Phi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(\mathbf{e}_m)))] \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (4.57a)$$

$$\mathbf{F}_i = [*f_i]_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2} = [\Phi_{\mathcal{M}_2}(*f_i(\Phi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(\mathbf{e}_1))), \dots, \Phi_{\mathcal{M}_2}(*f_i(\Phi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(\mathbf{e}_m)))] \in \mathbb{R}^{s \times m} \quad (4.57b)$$

$$\mathbf{B}_{ij} = [*B_{ij}]_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2} = [\Phi_{\mathcal{M}_2}(*B_{ij}(\Phi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(\mathbf{e}_1))), \dots, \Phi_{\mathcal{M}_2}(*B_{ij}(\Phi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(\mathbf{e}_m)))] \in \mathbb{R}^{s \times m} \quad (4.57c)$$

welche unter Verwendung der Basistransformationen \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 und deren Inversen verwendet werden können um \mathbf{G} und \mathbf{H} darzustellen. Dabei berechnet sich die Transformation \mathbf{T}_1 gemäß

$$\mathbf{T}_1 = [\Phi_{\mathcal{M}_1}(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{e}_1)), \dots, \Phi_{\mathcal{M}_1}(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{e}_m))] \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (4.58)$$

und für deren Inverse \mathbf{T}_1^{-1} gilt

$$\mathbf{T}_1^{-1} = [\Phi_{\mathcal{B}_1}(\Phi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(\mathbf{e}_1)), \dots, \Phi_{\mathcal{B}_1}(\Phi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(\mathbf{e}_m))] \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (4.59)$$

und die Berechnung von \mathbf{T}_2 und \mathbf{T}_2^{-1} erfolgt analog. Zusammenfassend ist der gesamte Sachverhalt am Beispiel von g in Abbildung 25 als kommutatives Diagramm dargestellt.

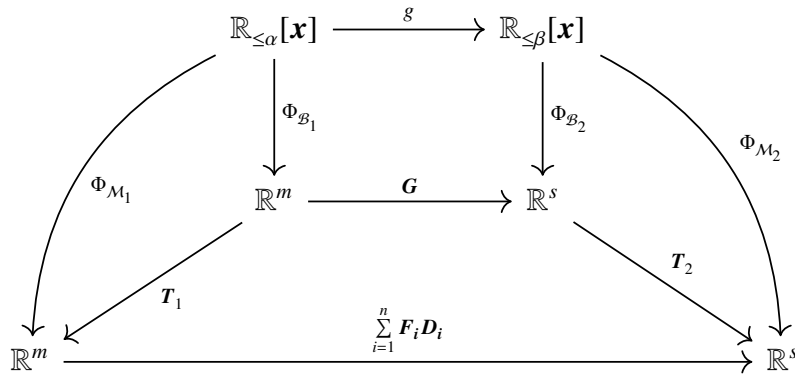


Abbildung 25: Erweitertes kommutatives Diagramm für die Abbildung g

Wie anhand des Diagramms zu sehen ist, gilt

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{D}_i \right) \mathbf{T}_1 \quad (4.60)$$

und entsprechend

$$H = T_2^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^n B_{ij} D_i D_j \right) T_1. \quad (4.61)$$

Da T_1 und T_2 bei der Bestimmung der Basen \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 mitberechnet werden (siehe dazu Anhang C.1), muss nur noch die Frage geklärt werden, wie D_i , F_i und B_{ij} aussehen.

Berechnung von D_i :

Als Vorbereitung wird zunächst die univariate Monombasis

$$\mathcal{U}_i = \{x_i^j : j = 0, \dots, \alpha_i\} \quad (4.62)$$

betrachtet. Für die Differentiation der Basiselemente bezüglich x_i gilt unter Verwendung der Abbildung (4.56a)

$$\partial_i(x_i^j) = \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^j = \begin{cases} 0 & \text{falls } j = 0 \\ j x_i^{j-1} & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.63)$$

Bezeichne nun $\Phi_{\mathcal{U}_i}$ die Koordinatenabbildung bezüglich \mathcal{U}_i mit der entsprechenden Inversen, dann ist die darstellende Matrix der Abbildung ∂_i eingeschränkt auf $\mathbb{R}_{\leq \alpha_i}[x_i]$ bezüglich der Basis \mathcal{U}_i durch

$$[\partial_i]_{\mathcal{U}_i \mathcal{U}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_i \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\alpha_i+1) \times (\alpha_i+1)} \quad (4.64)$$

gegeben. Das Ziel ist es nun, diese einfache Struktur auf den multivariaten Fall zu übertragen. Wählt man dazu für jede Variable x_i in $\mathbb{R}_{\leq \alpha}[\mathbf{x}]$ die entsprechende Monombasis \mathcal{U}_i wie oben, dann ist

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{U}_n \otimes \dots \otimes \mathcal{U}_1 \quad (4.65)$$

eine mögliche Wahl für die bereits mehrfach verwendete Monombasis \mathcal{M}_1 und die gesuchte Matrix D_i ist dann durch

$$D_i = [\partial_i]_{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1} = I_{\alpha_n+1} \otimes \dots \otimes I_{\alpha_{i+1}+1} \otimes [\partial_i]_{\mathcal{U}_i \mathcal{U}_i} \otimes I_{\alpha_{i-1}+1} \otimes \dots \otimes I_{\alpha_1+1} \quad (4.66)$$

gegeben, wobei \otimes das Kroneckprodukt (siehe zum Beispiel [34]) und $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die n dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

Berechnung von F_i und B_{ij} :

Die Berechnung von F_i und B_{ij} erfolgt ähnlich wie die Berechnung von D_i . Ausgangspunkt ist wieder die Monombasis \mathcal{U}_i von oben sowie eine weitere analog aufgebaute Monombasis \mathcal{V}_i , für die $\text{span}\mathcal{V}_i = \mathbb{R}_{\leq\beta_i}[x]$ gilt. Da $\mathbb{R}_{\leq\alpha_i}[x] \subseteq \mathbb{R}_{\leq\beta_i}[x]$ ist, existiert eine positive Zahl $\gamma_i = \beta_i - \alpha_i$, so dass eine weitere Monombasis \mathcal{W}_i mit $\text{span}\mathcal{W}_i = \mathbb{R}_{\leq\gamma_i}[x]$ existiert. Unter diesen Voraussetzungen gilt dann $u_i * w_i \in \mathcal{V}_i$ für alle $w_i \in \mathcal{W}_i$ und $u_i \in \mathcal{U}_i$. Diese Überlegungen führen zunächst auf die Abbildungen

$$*x_i^j : \mathbb{R}_{\leq\alpha_i}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq\beta_i}[x], \quad v(\mathbf{x}) \mapsto x_i^j v(\mathbf{x}) \quad (4.67)$$

wobei $j = 0, \dots, \gamma_i$ und $i = 1, \dots, n$ gilt. Die entsprechenden darstellenden Matrizen bezüglich der Basen \mathcal{U}_i und \mathcal{V}_i sind dann durch

$$\left[*x_i^j \right]_{\mathcal{U}_i \mathcal{V}_i} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{0}} \\ \mathbf{I}_{\alpha_i+1} \\ \hat{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\beta_i+1) \times (\alpha_i+1)} \quad (4.68)$$

gegeben. Dabei sind $\tilde{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^{j \times (\alpha_i+1)}$, $\hat{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^{(\gamma-j) \times (\alpha_i+1)}$ Nullmatrizen und \mathbf{I}_{α_i+1} ist wie oben definiert. Für die Erweiterung auf den multivariaten Fall sei \mathcal{M}_1 gemäß (4.65) definiert und

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{V}_n \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_1 \quad (4.69)$$

die ebenfalls bereits mehrfach verwendete Monombasis \mathcal{M}_2 , dann gilt

$$\left[*x_i^j \right]_{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2} = \mathbf{I}_{\beta_n+1, \alpha_n+1} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}_{\beta_{i+1}+1, \alpha_{i+1}+1} \otimes \left[*x_i^j \right]_{\mathcal{U}_i \mathcal{V}_i} \otimes \mathbf{I}_{\beta_{i-1}+1, \alpha_{i-1}+1} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}_{\beta_1+1, \alpha_1+1} \quad (4.70)$$

wobei $\mathbf{I}_{m,n} = [\mathbf{I}_n, \mathbf{0}_{m-n,n}]^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist. Daraus folgt, dass in der Definition (4.68) für $j = 0$ der Spezialfall

$$\left[*x_i^0 \right]_{\mathcal{U}_i \mathcal{V}_i} = \mathbf{I}_{\beta_i+1, \alpha_i+1} \quad (4.71)$$

enthalten ist. Insgesamt ergibt sich unter Verwendung der Superskripte $j_i = 0, \dots, \gamma_i$ für $i = 1, \dots, n$

$$\left[*x_n^{j_n} * \dots * x_1^{j_1} \right]_{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2} = \left[*x_n^{j_n} \right]_{\mathcal{U}_n \mathcal{V}_n} \otimes \dots \otimes \left[*x_1^{j_1} \right]_{\mathcal{U}_1 \mathcal{V}_1} \quad (4.72)$$

womit nun die Multiplikation mit einem beliebigen $m_3 \in \mathcal{M}_3 = \mathcal{W}_n \otimes \dots \otimes \mathcal{W}_1$ darstellbar ist. Per Konstruktion gilt weiter $f_i(\mathbf{x}), B_{ij}(\mathbf{x}) \in \text{span}\mathcal{M}_3$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Es existieren

also Zahlen $a_{i,k}, b_{ij,k}$ so dass

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{M}_3} a_{i,k} m_{3,k} \quad (4.73a)$$

$$B_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{M}_3} b_{ij,k} m_{3,k} \quad (4.73b)$$

gilt, wobei $\dim \mathcal{M}_3$ die Anzahl der Elemente in der Basis \mathcal{M}_3 bezeichnet und der Ausdruck $m_{3,k}$ so zu verstehen ist, dass jedes Element aus der Basis \mathcal{M}_3 genau einmal in der Summe vertreten ist. Daraus folgt schließlich, dass die gesuchten Matrizen \mathbf{F}_i und \mathbf{B}_{ij} durch

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{M}_3} a_{i,k} \left[*x_n^{j_{n,k}} * \dots * x_1^{j_{1,k}} \right]_{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2} \quad (4.74a)$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{M}_3} b_{ij,k} \left[*x_n^{j_{n,k}} * \dots * x_1^{j_{1,k}} \right]_{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2} \quad (4.74b)$$

gegeben sind, wobei hier nun durch die Doppelindizierung $j_{i,k}$ zum Ausdruck gebracht werden soll, dass sämtliche möglichen Indexkombinationen durchlaufen werden. In den meisten Anwendungsfällen bestehen die Ausdrücke $f_i(\mathbf{x})$ und $B_{ij}(\mathbf{x})$ aus einzelnen Monomen oder aus der Summe weniger Monome, so dass in (4.74a) und (4.74b) nur wenige Glieder berücksichtigt werden müssen.

4.4 Anwendung zur Untersuchung der Modelle des EH-Systems

Im Folgenden soll das in 4.3 vorgestellte Verfahren zur näherungsweisen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsdichten der durch weißes Rauschen angeregten Modelle des EH-Systems verwendet werden.

Dazu müssen die Modelle zunächst in ein System 1. Ordnung umgeschrieben werden. Sei dazu \mathbf{x} der Vektor der Zustandsgrößen, dann gilt

$$\text{für Modell 1 und Modell 2: } \mathbf{x} = (x, x', v)^T = (x_1, x_2, x_3)^T \quad (4.75a)$$

$$\text{für Modell 3: } \mathbf{x} = (x_w, x_2, x'_w, x'_2, v)^T = (x_w, x_2, x'_w, x_4, x_5)^T \quad (4.75b)$$

wobei diese Bezeichnung insofern konsistent ist, als dass die Verwendung von x_i für die i -te Komponente von \mathbf{x} gebraucht werden kann, ohne dass es zu einer doppelten Belegung der Symbole x_1 und x_2 kommt, sofern immer zwischen den unterschiedlichen Modellen unterschieden wird. In Vorbereitung auf die Auswertung der Ergebnisse, wurde in den Koordinaten von Modell 3 eine Änderung vorgenommen. Der Grund hierfür liegt darin, dass letztendlich die Verteilungsdichten für w und \dot{w} gesucht sind und diese aus den Verteilungsdichten von x_1 , x'_1 und x_2 , x'_2 nicht ohne weiteres rekonstruiert werden können. Daher wird die neue Koordinate $x_w = x_1 + x_2$ eingeführt und benutzt um x_1 zu ersetzen.

Die entsprechenden rechten Seiten \mathbf{f} können dann für Modell 1 aus (2.44a), (2.44b), für Modell 2 aus (2.56a), (2.56b) und für Modell 3 aus (2.66a), (2.66b), (2.66c) zu

$$\text{für Modell 1: } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\zeta_1 x_2 + \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_1^3 + \gamma_m x_3 \\ -\gamma_e x_2 - \mu x_3 \end{pmatrix} \quad (4.76a)$$

$$\text{für Modell 2: } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\zeta_1 x_2 + \frac{1}{4} x_1 - \frac{1}{4} x_1^5 + \gamma_m x_3 \\ -\gamma_e x_2 - \mu x_3 \end{pmatrix} \quad (4.76b)$$

für Modell 3:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} x'_w \\ x_4 \\ -\zeta_1 x'_w - (\zeta_2 - \zeta_1) x_4 + (\alpha_{11} + \alpha_{21})(x_w - x_2) + (\alpha_{12} + \alpha_{22}) x_2 + (\beta_1 + \beta_2) x_w^3 - (\gamma_{m_1} + \gamma_{m_2}) x_5 \\ -\zeta_2 x_4 + \alpha_{21}(x_w - x_2) + \alpha_{22} x_2 + \beta_2 x_w^3 - \gamma_{m_2} x_5 \\ -\gamma_{e_1}(x'_w - x_4) - \gamma_{e_2} x_4 - \mu x_5 \end{pmatrix} \quad (4.76c)$$

bestimmt werden, wobei in allen drei Fällen der Term der Fußpunkterregung entfernt und eine Dämpfung ζ hinzugefügt wurde. Die Modellierung der Anregung durch das weiße Rau-

schen erfolgt gemäß (4.21), wobei

$$\text{für Modell 1 und Modell 2: } \mathbf{G} = (0, w_1\sigma, 0)^T \quad (4.77a)$$

$$\text{für Modell 3: } \mathbf{G} = (0, 0, w_1\sigma + w_2\sigma, w_2\sigma, 0)^T \quad (4.77b)$$

mit

$$w_i = -\frac{1}{w_0\omega_0^2} \frac{\Phi_{l_s} \left(\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_i(x) dx + \int_p^{l_s} \mu_2 \Phi_i(x) dx \right)}{\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_i^2(x) dx + \int_p^{l_s} \mu_2 \Phi_i^2(x) dx} \quad i = 1, 2 \quad (4.78)$$

gilt. Die Anregung durch das weiße Rauschen ist also unabhängig von der Position des Systems und wirkt nur auf den mechanischen Bereich. Desweiteren ist die Intensität, die auf die einzelnen Koordinaten von Modell 3 wirkt, nicht unabhängig.

Aus (4.77a) und (4.77b) können nun die Matrizen \mathbf{B} zu

$$\text{für Modell 1 und Modell 2: } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1^2\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.79a)$$

$$\text{für Modell 3: } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (w_1 + w_2)^2\sigma^2 & (w_1 + w_2)w_2\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & (w_1 + w_2)w_2\sigma^2 & w_2^2\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.79b)$$

berechnet werden, wobei für die konkrete Rechnung der Wert $\sigma = 1/w_1$ verwendet wird. Wie die zur Bestimmung der orthonormalen Ansatzfunktionen benötigte Wahrscheinlichkeitsdichte p_0 bestimmt werden kann, wird in [53] S.74ff ausführlich beschrieben und hier deswegen nicht erneut aufgegriffen.

Von wesentlicher Bedeutung für die erzielten Ergebnisse ist der Grad der einzelnen Variablen, der in den Ansatzfunktionen berücksichtigt wird und in den oben aufgeführten Überlegungen mit α bezeichnet wurde. Für die hier gezeigten Ergebnisse wurde

$$\text{für Modell 1 und Modell 2: } \alpha = (10, 4, 4) \quad (4.80a)$$

$$\text{für Modell 3: } \alpha = (10, 10, 1, 1, 1) \quad (4.80b)$$

verwendet. Wie zu sehen ist, wird für die Korrektur der Geschwindigkeiten und der Spannung in Modell 3 lediglich ein linearer Ansatz verwendet, was daran liegt, dass mit höheren Ansätzen kein verwertbares Ergebnis erzielt werden konnte. Der Grund dafür liegt nicht in der Programmierung des Verfahrens, sondern in Schwierigkeiten, die bei der Normierung der berechneten Lösung entstehen.

Aus der Betrachtung von f und B kann zudem

$$\text{für Modell 1: } \gamma = (3, 1, 1) \quad (4.81a)$$

$$\text{für Modell 2: } \gamma = (5, 1, 1) \quad (4.81b)$$

$$\text{für Modell 3: } \gamma = (3, 1, 1, 1, 1) \quad (4.81c)$$

abgelesen werden, so dass sich schließlich

$$\text{für Modell 1: } \beta = (13, 5, 5) \quad (4.82a)$$

$$\text{für Modell 2: } \beta = (15, 2, 2) \quad (4.82b)$$

$$\text{für Modell 3: } \beta = (13, 11, 2, 2, 2) \quad (4.82c)$$

ergibt. Die Anzahl der berücksichtigten Ansatzfunktionen in den einzelnen Basen, die als Maß für die Größe des gelösten Problems interpretiert werden kann, ist in Tabelle 12 aufgeführt. Wie zu sehen ist, müssen für Modell 1 und Modell 2 jeweils 275 Koeffizienten und für Modell 3 schon 968 Koeffizienten bestimmt werden. Die Unterschiede in der Problemgröße spiegeln sich direkt in der zur Lösung benötigten Rechenzeit wieder. So benötigt die Berechnung der Lösung von Modell 1 und Modell 2 weniger als 5 Minuten, während die Berechnung der Lösung von Modell 3 bereits knapp 2 Stunden dauert.

Tabelle 12: Dimension der verwendeten Basen

Modell	$\dim \mathcal{M}_1$	$\dim \mathcal{M}_2$	$\dim \mathcal{M}_3$
1	275	504	16
1	275	576	24
3	968	4536	64

Damit die Ergebnisse, die mit den Modellen 1 und 2 erzielt wurden, mit denen von Modell 3 verglichen werden können, muss zuvor eine Rücktransformation in physikalische Koordinaten gemäß Gleichung (2.46) durchgeführt werden. Für die Auswertung werden im Folgenden zunächst die Randverteilungen der einzelnen Koordinaten dargestellt, wobei die dafür verwendeten Abbildungen wie folgt aufgebaut sind. In der linken Spalte sind die im Ansatz (4.29) verwendeten initialen Randverteilungen p_0 in schwarz und die durch die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung berechneten Randverteilungen p in blau für Modell 1, in grün für Modell 2 und in rot für Modell 3 dargestellt. In der rechten Spalte wird der selbe Farbcode verwendet und es sind die Randverteilungen p als durchgezogene Linien und die mittels Monte-Carlo-Simulation berechnete Referenzlösungen gepunktet dargestellt.

4.4.1 Ergebnisse für Modell 1

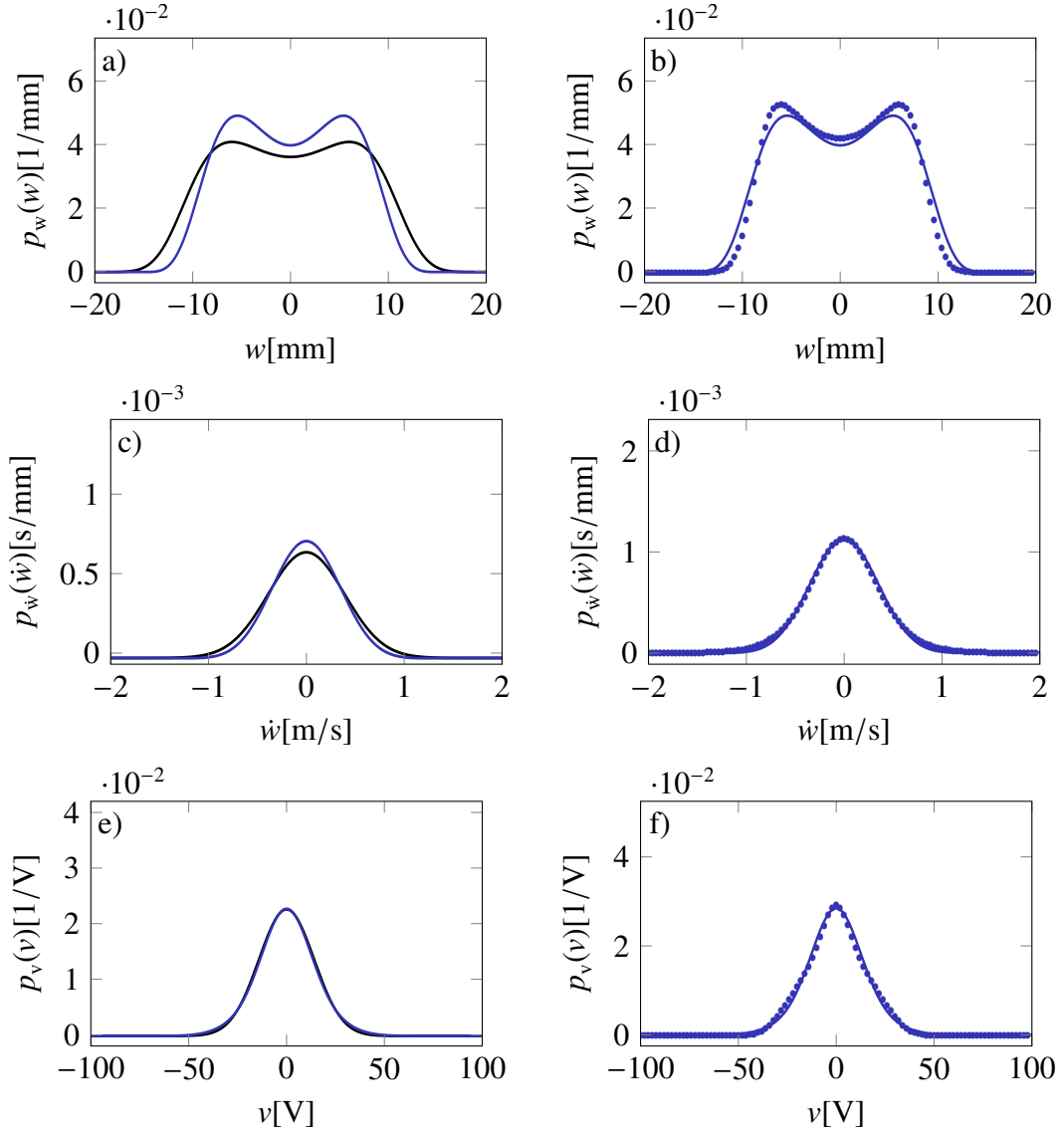


Abbildung 26: Initiale (schwarz) und berechnete Randverteilungen aus der Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (blau) und Monte-Carlo-Simulationen (blau gepunktet) für Modell 1.

Wie durch die Betrachtung der Abbildungen 26 a), 26 c) und 26 e) zu sehen ist, findet durch das Verfahren eine deutliche Korrektur der initialen Lösungen für die Wahrscheinlichkeitsdichten der Lage p_w und der Geschwindigkeit $p_{\dot{w}}$ statt, während die Randverteilungsdichte der Spannung p_v durch die initiale Lösung bereits sehr gut getroffen wird. Die Vergleiche mit den Referenzlösungen aus der Monte-Carlo-Simulation in Abbildungen 26 b), 26 d) und 26 f) zeigen generell eine gute bis sehr gute Übereinstimmung.

4.4.2 Ergebnisse für Modell 2

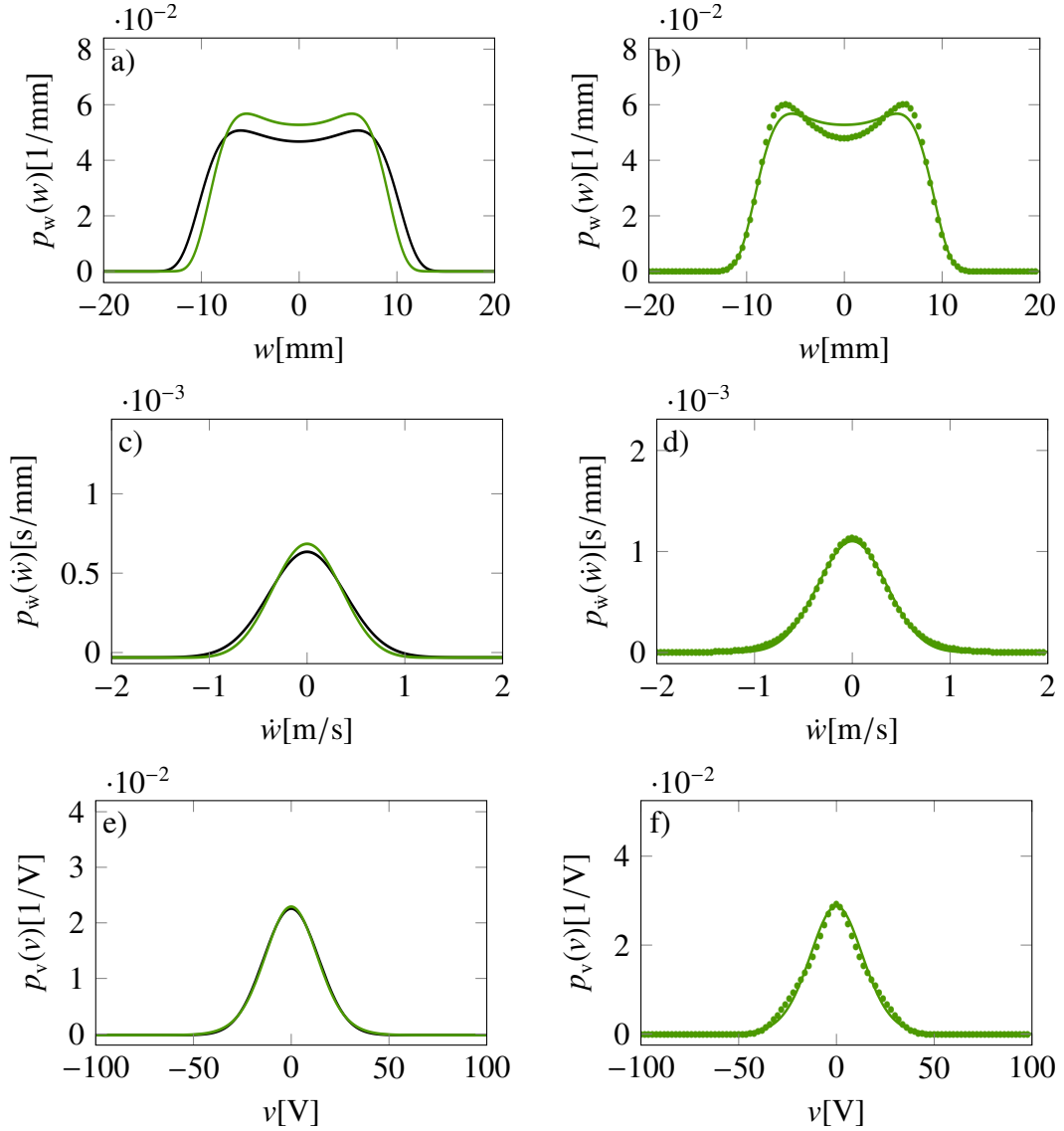


Abbildung 27: Initiale (schwarz) und berechnete Randverteilungen aus der Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (grün) und Monte-Carlo-Simulationen (grün gepunktet) für Modell 2.

Die Auswertung der in Abbildung 27 dargestellten Ergebnisse für Modell 2 zeigt ein ähnliches Bild wie im vorherigen Abschnitt. Auch hier findet durch das Verfahren eine deutliche Korrektur der initialen Lösungen für die Wahrscheinlichkeitsdichten der Lage p_w und der Geschwindigkeit $p_{\dot{w}}$ statt, wie anhand der Abbildungen 27 a) und 27 c) zu sehen ist. Die Randverteilungsdichte der Spannung p_v , welche in Abbildung 27 e) dargestellt ist, wird durch die initiale Lösung erneut so gut getroffen, dass keine sichtbare Korrektur stattfindet. Die Vergleiche mit den Referenzlösungen aus der Monte-Carlo-Simulation in Abbildungen 27 b), 27 d) und 27 f) zeigen erneut eine gute bis sehr gute Übereinstimmung.

4.4.3 Ergebnisse für Modell 3

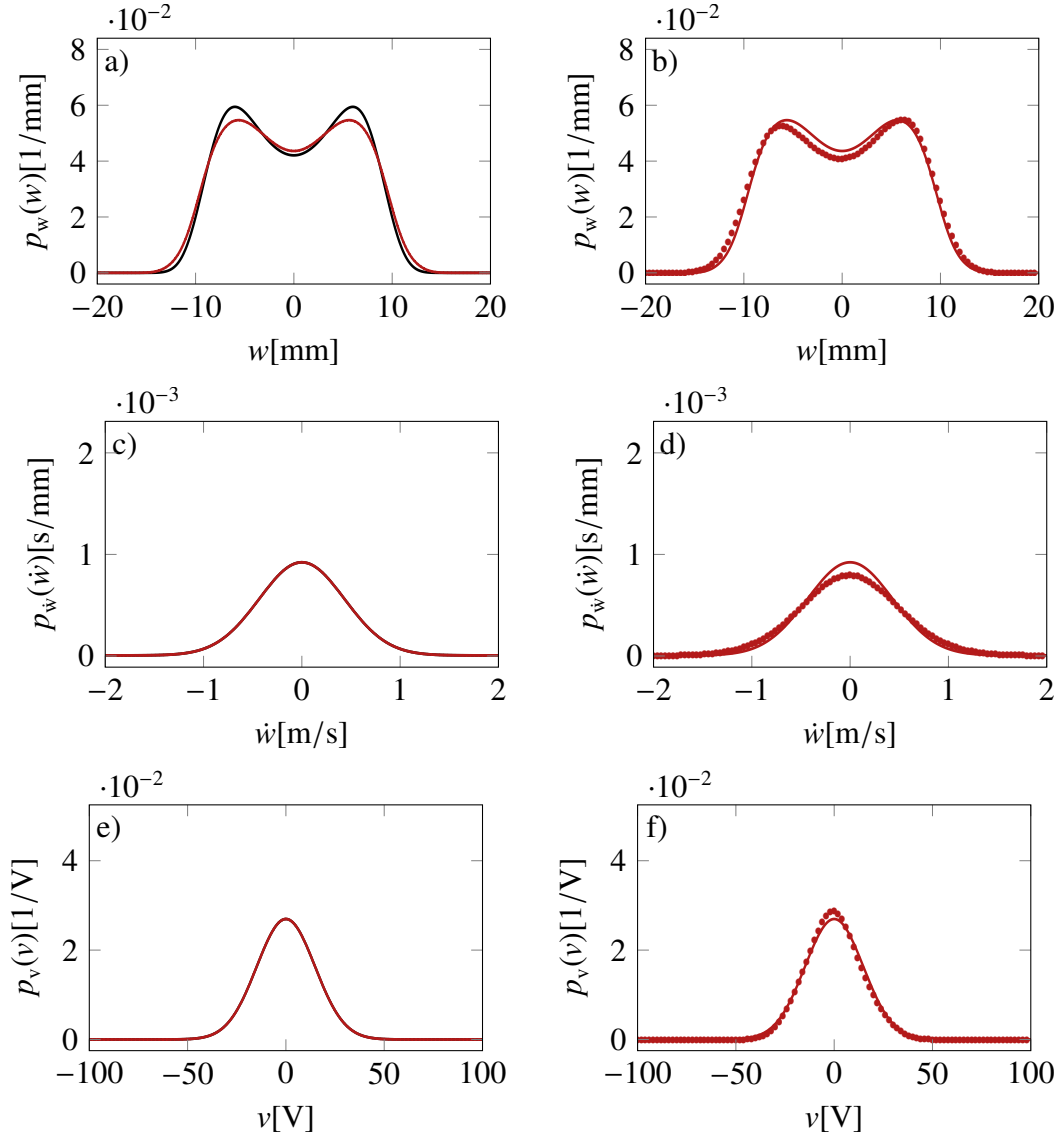


Abbildung 28: Initiale (schwarz) und berechnete Randverteilungen aus der Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (rot) und Monte-Carlo-Simulationen (rot gepunktet) für Modell 3.

Die Auswertung der in Abbildung 28 dargestellten Ergebnisse für Modell 3 zeigt im Vergleich zu den beiden vorherigen Abschnitten ein abweichendes Bild. Auch hier findet durch das Verfahren eine deutliche Korrektur der initialen Lösungen für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lage p_w statt, wie anhand Abbildung 28 a) zu sehen ist. Für die Wahrscheinlichkeitsdichten der Geschwindigkeit p_w und der Spannung p_v findet keine Korrektur statt. Im Gegensatz zu den Ergebnissen der in den beiden vorherigen Abschnitten präsentierten Modellen 1 und 2, liegt dies aber teilweise daran, dass in der Berechnung ein Ansatz mit zu niedrigem Polynomgrad verwendet wurde. So zeigt der Vergleich mit den Ergebnissen aus der Monte-Carlo-Simulation für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Geschwindigkeit p_w in Abbildung 28 d) eine relativ starke Abweichung, so dass davon auszugehen ist, dass eine

weitere Verbesserung der Lösung möglich wäre. Der Vergleich mit den Ergebnissen aus der Monte-Carlo-Simulation für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Spannung p_v in Abbildung 28 f) zeigt jedoch wieder eine sehr gute Übereinstimmung, so dass auch hier wieder davon ausgegangen werden kann, dass die initiale Lösung bereits ausreichend genau ist.

Die berechnete Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lage p_w stimmt wieder sehr gut mit den Ergebnissen aus der Monte-Carlo-Simulation überein, wie in Abbildung 28 b) zu sehen ist.

4.5 Beurteilung der erzielten Verbesserung

Die Verbesserung, welche durch die vorgestellte Programmierung erzielt wird, liegt neben einer Steigerung der Geschwindigkeit vor allem in der Größe der Probleme, die behandelt werden können. Dies ist relevant, da die Anwendbarkeit bisheriger Implementierungen insofern durch die Problemgröße eingeschränkt war, als dass zu große Probleme zu einem Abbruch der Programmausführung während der Aufstellung des zu lösenden Gleichungssystems führten.

In der Arbeit von Martens [54] wird als Beispiel für ein großes Problem ein System mit 10 Zustandsgrößen analysiert. Aus der Arbeit geht außerdem hervor, dass zur Bestimmung des gesuchten Polynoms ein Gleichungssystem mit knapp $5 \cdot 10^4$ Unbekannten gelöst werden musste. Diese Zahl stellt ein plausibles Maß für die Größe des betrachteten Problems dar, da der Hauptaufwand des Programms in der Erstellung und Lösung dieses Gleichungssystems liegt.

Mit der Implementierung welche in der vorliegenden Arbeit vorgestellt wird, wurden Probleme behandelt, die knapp $3 \cdot 10^5$ Unbekannte enthielten. Dabei konnte das resultierende Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden, aber es kam zum Auftreten einer neuen Problematik, welche darin besteht, dass das berechnete Ergebnis nicht mehr normiert werden konnte, da die dazu benötigte Berechnung der uneigentlichen Integrale nicht mehr möglich war.

5 Zusammenfassung

Inhalt

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Modellierung und der Bereitstellung von Analysemethoden für ein bistabiles piezoelektrisches Energy-Harvesting System. Da das betrachtete System seit mehreren Jahren Gegenstand umfangreicher Untersuchungen ist, existieren zwar bereits Modelle und Analysemethoden, allerdings stammen diese aus einer Phase, in welcher der Fokus auf der Untersuchung der grundlegenden Eigenschaften des Systems lag. Dies hat sich mittlerweile geändert. In den aktuellen Arbeiten zum Thema geht es meist darum, Systeme für konkrete Anwendungsszenarien auszulegen und zu optimieren, was zu gesteigerten Anforderungen hinsichtlich der Vorhersagefähigkeit der verwendeten Modelle, sowie der Effizienz und Genauigkeit der eingesetzten Analysemethoden geführt hat.

Nach einer grundlegenden Einführung in die Thematik des Energy-Harvestings in Kapitel 1 werden dazu in der vorliegenden Arbeit die folgenden Themen behandelt:

- Eine ausführliche Herleitung des mathematischen Modells in Kapitel 2.
- Die Anwendung der Methode der Harmonischen Balance mit multifrequenter Ansatzfunktion zur Analyse des dynamischen Verhaltens bei einer harmonischen Anregung in Kapitel 3.
- Die Anwendung eines Galerkin-Verfahrens zur Berechnung von Wahrscheinlichkeitsdichten bei einer Anregung durch weißes Rauschen in Kapitel 4.

In Vorbereitung auf den Modellierungsprozess werden in Abschnitt 2.1 Vorüberlegungen dazu angestellt, welche Theorien verwendet werden müssen. Da experimentell ermittelte Kraft-Weg-Kurven einen linearen Zusammenhang aufweisen und ausschließlich Schwingungen mit niedriger Frequenz betrachtet werden, wird der Balken gemäß der Euler-Bernoulli Balkentheorie modelliert und für die Modellierung der Piezokeramiken wird die lineare Theorie verwendet.

Die Beschreibung des elektro-mechanischen Modells des EH-Systems erfolgt in Abschnitt 2.2. Für dieses Modell wird in Abschnitt 2.3 zunächst die Lagrange-Funktion berechnet und anschließend wird aus dieser, durch Auswertung des Prinzips von Hamilton, die Bewegungsgleichungen hergeleitet. Diese sind durch eine bereichsweise definierte partielle Differentialgleichung für den mechanischen Bereich und eine gewöhnliche Differentialgleichung für den Stromkreis gegeben. Für die weitere Verwendung der Bewegungsgleichungen wird die partielle Differentialgleichung diskretisiert. Da die Diskretisierung mittels Ritz-Verfahren in den Energieausdrücken oder mittels Galerkin-Verfahren in den Bewegungsgleichungen erfolgen kann und beide Verfahren gebräuchlich sind, werden beide Möglichkeiten besprochen und es wird gezeigt unter welchen Bedingungen beide Verfahren ein identisches Ergebnis liefern.

In Abschnitt 2.4 werden aus den diskretisierten Bewegungsgleichungen drei verschiedene Modelle abgeleitet, welche den am Fachgebiet Mechatronische Maschinendynamik vorhandenen experimentellen Aufbau in unterschiedlichem Detailierungsgrad abbilden. Zur Validierung der Modellbildung werden in Abschnitt 2.5 Simulationsergebnisse dieser Modelle mit experimentell erzielten Ergebnissen verglichen.

Dabei zeigt sich eine gute quantitative Übereinstimmung, solange die Modelle Lösungen liefern, die qualitativ zu dem im Experiment gemessenem Verhalten passen. Für den Fall koexistierender Inter- und Intrawell-Lösungen ist diese Einschränkung offensichtlich, und anhand der Abbildungen 6 und 7 zu sehen. Darüber hinaus existieren aber auch Anregungen, bei denen die Modelle qualitativ unterschiedliche Lösungen liefern, was beispielhaft in Abbildung 8 zu sehen ist. Für die gewählte Anregung zeigt das Experiment eine Intrawell-Lösung, welche im Vergleich zur Anregung eine Periodenverdopplung aufweist. Diese Periodenverdopplung wird lediglich vom Modell mit quintischer Nichtlinearität korrekt vorhergesagt, während die beiden anderen Modelle Lösungen liefern, die in ihrer Periodizität der Anregung entsprechen. Diese Abweichung im qualitativen Verhalten führt auch zu großen quantitativen Unterschieden, welche zu Problemen bei der Auslegung oder Optimierung des Systems führen können. Wie dieses Beispiel zeigt, ist das meist verwendete Modell mit kubischer Nichtlinearität und einer Ansatzfunktion in der Diskretisierung nicht immer in der Lage, das Systemverhalten korrekt wiederzugeben.

Als Grundlage für die Analyse des dynamischen Verhaltens bei einer harmonischen Anregung werden in Abschnitt 3.1 die verschiedenen möglichen Lösungsarten Intrawell, Interwell und Chaos besprochen. Desweiteren wird gezeigt, wie sich die Information über das Auftreten der verschiedenen Lösungsarten in sogenannten Antwortdiagrammen übersichtlich zusammenfassen lässt. In Abschnitt 3.2 wird erläutert, wie solche Antwortdiagramme mittels numerischer Integration erstellt werden können. Dabei wird ausführlich auf die Nachteile der Methode eingegangen, welche vor allem in der langen Laufzeit und der aufwändigen Programmierung bestehen.

Als alternative Möglichkeit zur Konstruktion der Antwortdiagramme wird in Abschnitt 3.3 die Methode der Harmonischen Balance vorgestellt. Nach einer grundlegenden Beschreibung der Methode in Abschnitt 3.3.1, erfolgt in Abschnitt 3.3.2 die Konkretisierung für den Fall einer monofrequenten Ansatzfunktion, wie sie in der Literatur zum Thema Energy-Harvesting mehrfach zu finden ist. In Abschnitt 3.3.3 erfolgt die Konkretisierung für den Fall einer multifrequenten Ansatzfunktion, welche nach Kenntnisstand des Autors für das betrachtete EH-System bislang noch nicht veröffentlicht wurde.

Generell ist damit zu rechnen, dass die Verwendung einer multifrequenten Ansatzfunktion zu einer Verbesserung der Qualität der erzielten Näherungslösung führt, falls die Lösung mehrere Frequenzen enthält, was für das betrachtete EH-System meist zutrifft. Gleichzeitig führt die Verwendung einer multifrequenten Ansatzfunktion zu einer deutlichen Erhöhung

der Komplexität in der Umsetzung des Verfahrens, was in erster Linie daran liegt, dass die resultierenden nichtlinearen Gleichungen nicht mehr analytisch lösbar sind. Bei der Lösung mittels numerischer Näherungsverfahren muss sichergestellt werden, dass alle Lösungen gefunden werden und die Lösungen, die keine physikalische Relevanz besitzen, aussortiert werden. Die dazu notwendigen Schritte sowie deren praktische Umsetzung werden anhand eines Beispiels ausführlich besprochen. Dabei wird deutlich, dass insbesondere die Ansatzfunktionen, die in der Lage sind Näherungslösungen mit Periodenvervielfachungen abzubilden, eine sehr hohe Anzahl von physikalisch nicht relevanten Lösungen produzieren.

Weiter wird gezeigt, wie durch die Analyse des Frequenzinhalts von im Vorfeld erzeugten Simulationsergebnissen besonders gut geeignete Ansatzfunktionen bestimmt werden können, wodurch der erforderliche Rechenaufwand drastisch reduziert werden kann.

Abschließend werden in Abschnitt 3.3.4 Antwortdiagramme, die mittels der Methode der Harmonischen Balance mit monofrequenter- beziehungsweise multifrequenter Ansatzfunktion berechnet wurden, miteinander verglichen und einem Referenzdiagramm, welches durch numerische Integrationen bestimmt wurde, gegenübergestellt. Wie in Abbildung 23 zu sehen ist, unterscheiden sich die Antwortdiagramme für verschiedene Ansatzfunktionen, die mit der Methode der Harmonischen Balance erstellt wurden, stark voneinander. Dies gilt besonders für die Frequenzspanne des Bereichs, in dem ausschließlich eine Interwell-Lösung mit einer Periodizität von eins existiert. Da dieser Bereich für den Betrieb des EH-Systems besonders günstig ist, stellt diese Größe ein mögliches Kriterium für die Auslegung oder Optimierung des Systems dar, was eine genaue Vorhersage notwendig macht.

Weitere auffällige Unterschiede finden sich bei der Intra-Well-Lösung für niedrige Frequenzen der Anregung. So ist der monofrequente Ansatz nicht dazu geeignet die superharmonische Resonanzstelle abzubilden, was zu starken qualitativen und quantitativen Abweichungen führt.

Das Referenzdiagramm, welches durch numerische Integration berechnet wurde, stimmt mit dem Diagramm das mittels Harmonischer Balance und multifrequenter Ansatzfunktion berechnet wurde in weiten Bereichen sehr gut überein. Da zudem die benötigte Rechenzeit im Vergleich zur numerischen Integration vergleichsweise gering ausfällt, lässt sich als Schlussfolgerung festhalten, dass die Methode der Harmonischen Balance ein adäquates Verfahren zur Analyse des betrachteten EH-Systems darstellt, sofern eine geeignete multifrequente Ansatzfunktion verwendet wird.

Als Grundlage für die Analyse des dynamischen Verhaltens bei einer stochastischen Anregung durch weißes Rauschen werden in Abschnitt 4.1 die Grundlagen stochastischer Differentialgleichungen wiederholt. Anschließend wird in Abschnitt 4.2 gezeigt, wie die Bestimmung von Verteilungsdichten mittels Monte-Carlo-Simulationen erfolgen kann, wobei dieses Verfahren den Nachteil besitzt, dass sehr lange Rechenzeiten benötigt werden. Als Alternative wird in Abschnitt 4.3 ein Galerkin-Verfahren vorgestellt, welches zur Bestim-

mung von Verteilungsdichten durch die Berechnung von Näherungslösungen der zugeordneten Fokker-Planck-Gleichung verwendet werden kann.

Eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens erfolgt in Abschnitt 4.3.1 und in Abschnitt 4.3.2 wird gezeigt, wie durch die Verwendung orthonormaler Ansatzfunktionen eine drastische Vereinfachung des Verfahrens erzielt werden kann. Da die dabei verwendete Darstellung des Verfahrens analytisch ist, lässt sich daraus zunächst noch keine effiziente Möglichkeit zur Programmierung ableiten. Um zu einer dafür geeigneten Darstellung zu gelangen, werden in Abschnitt 4.3.3 die darstellenden Matrizen der zur Umsetzung des Verfahrens benötigten Operationen bezüglich beliebiger Basen berechnet und das Verfahren in Matrix-Schreibweise überführt. Darauf aufbauend erfolgt dann in Abschnitt 4.3.4 eine explizite Berechnung der Einträge der darstellenden Matrizen bezüglich geeigneter Monombasen, was eine nochmalige Vereinfachung der Umsetzung des Verfahrens erlaubt. Desweiteren wird gezeigt, wie die benötigten Matrizen als Kronecker-Produkte deutlich kleinerer Matrizen geschrieben werden können, was einen Einstiegspunkt für eine zukünftige Weiterentwicklung des Verfahrens darstellt.

Zum Abschluss des Kapitels wird das besprochene Verfahren in Abschnitt 4.4 zur Analyse der drei hergeleiteten Modelle verwendet. Ein Vergleich mit Referenzergebnissen aus Monte-Carlo-Simulationen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung, bei deutlich geringeren Rechenzeiten. Das vorgestellte Verfahren stellt daher ein effizientes Werkzeug zur Untersuchung des betrachteten EH-Systems bei einer Anregung durch weißes Rauschen dar.

Ausblick

Nach Beendigung der vorliegenden Arbeit stellt sich eine Vielzahl weiterführender Fragen hinsichtlich der Anwendung und der Möglichkeiten zur Verbesserung des vorgestellten Modells und der beschriebenen Analysemethoden.

Im Hinblick auf die Anwendung muss geklärt werden, welcher Detailierungsgrad für die Modellierung notwendig ist. Die in der vorliegenden Arbeit präsentierten Vergleiche zwischen Experiment und Simulation enthalten bereits ein Beispiel, in dem die Lage der Verzweigungspunkte der Intrawell-Lösungen durch das häufig verwendete Minimalmodell (in der Arbeit als Modell 1 bezeichnet) falsch vorausgesagt werden. Da das dabei simulierte EH-System, sowie die verwendete Anregung nicht untypisch sind, kann dies als Hinweis darauf verstanden werden, dass das Minimalmodell generell nicht detailliert genug ist. Desweiteren stellt sich die Frage, inwiefern die Berücksichtigung des Einflusses einer durch die Magnete verursachten Längskraft und eines Moments zu einer verbesserten Vorhersagegenauigkeit führen.

Eine deutliche Verbesserung der im Rahmen der Arbeit präsentierten Modellierung könnte erreicht werden, falls es gelingt die auf den Balken wirkenden Magnetkräfte ausschließ-

lich aus physikalischen Parametern zu berechnen. Das momentan verwendete Verfahren, bei dem ein durch ein Polynom gegebenes Kraftmodell an Messergebnisse angepasst wird, hat den Nachteil, dass aus den Modellparametern das ursprüngliche physikalische System nicht rekonstruiert werden kann. Dieser Nachteil kommt insbesondere dann zum Tragen, wenn durch Parametervariationen oder Optimierungen Modellparameter bestimmt werden sollen. Desweiteren stellt sich die Frage, ob es möglich ist Ansatzfunktionen zu finden, welche die tatsächliche Schwingform des Systems besser abbilden, als die momentan verwendeten. Dies könnte zu einer Verbesserung der Vorhersagegenauigkeit des Modells bei gleichbleibend niedriger Anzahl von Ansatzfunktionen in der Diskretisierung führen.

Da in der vorliegenden Arbeit nahezu ausschließlich die mechanische Komponente des EH-Systems betrachtet wurde, stellt sich zudem die Frage, inwieweit die Modellierung des Verbrauchers durch einen Ohmschen Widerstand ausreichend ist. Eine alternative Vorgehensweise besteht zum Beispiel darin, einen Kondensator in Kombination mit einer geeigneten Gleichrichterschaltung als Energiespeicher zu verwenden.

Ausgehend von der vorliegenden Arbeit besteht der nächste Schritt in einer umfassenden Analyse des EH-Systems unter Verwendung der präsentierten Analysemethoden. Ein naheliegendes Ziel besteht dabei in der Herleitung von Auslegungsrichtlinien, die für ein vorgegebenes Anwendungsszenario ein möglichst effizientes EH-System liefern. Neben der Frage nach den optimalen geometrischen Parametern des EH-Systems und der Piezokeramiken ist dabei vor allem die Frage nach der optimalen Gestaltung der Nichtlinearität von Bedeutung. Charakteristische Größen, die dazu betrachtet werden können, sind zum Beispiel der Abstand zwischen den Potenzialsenken und deren Tiefe.

Weiterführend stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, inwiefern ein EH-System, das für eine harmonische Anregung optimiert wurde, auch bei einer stochastischen Anregung effizient betrieben werden kann und umgekehrt. Falls sich dabei zeigt, dass bei einer harmonischen Anregung andere Anforderungen an das EH-System gestellt werden als bei einer stochastischen Anregung, folgt daraus wiederum die Frage, wie bei einer kombinierten Anregung vorgegangen werden soll.

Literatur

- [1] IEEE Standard on Piezoelectricity. *ANSI/IEEE Std 176-198*, 1988.
- [2] N. A. Aboufotouh, M. H. Arafa, and S. M. Megahed. A self-tuning resonator for vibration energy harvesting. *Sensors and Actuators A: Physical*, 201:328–334, 2013.
- [3] S. Adhikari, M. I. Friswell, and D. J. Inman. Piezoelectric energy harvesting from broadband random vibrations. *Smart Materials and Structures*, 18(11):115005, 2009.
- [4] S. F. Ali, S. Adhikari, M. I. Friswell, and S. Narayanan. The analysis of piezomagnetoelastic energy harvesters under broadband random excitations. *Journal of Applied Physics*, 109(7):074904, 2011.
- [5] S. R. Anton and H. A. Sodano. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006). *Smart Materials and Structures*, 16(3):R1–R21, 2007.
- [6] L. Arnold. *Stochastic differential equations: theory and applications*. Dover Publications, 2011.
- [7] M. Brinker. *Berechnung der Einzugsbereiche eines bistabilen dynamischen Systems mittels GPU-Parallelisierung mit Fokus auf chaosfähigen Parameterbereichen*. Masterarbeit Technische Universität Berlin, 2017.
- [8] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*, volume 23. Springer Spektrum, 2008.
- [9] S. G. Burrow, L. R. Clare, A. Carrella, and D. Barton. Vibration energy harvesters with non-linear compliance. volume 6928, page 692807. International Society for Optics and Photonics, 2008.
- [10] V. R. Challa, M. G. Prasad, and F. T. Fisher. Towards an autonomous self-tuning vibration energy harvesting device for wireless sensor network applications. *Smart Materials and Structures*, 20(2):025004, 2011.
- [11] V. R. Challa, M. G. Prasad, Y. Shi, and F. T. Fisher. A vibration energy harvesting device with bidirectional resonance frequency tunability. *Smart Materials and Structures*, 17(1):015035, 2008.
- [12] M. G. Cichon. *Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische Systeme*. Dissertation Universität Karlsruhe, Universitätsverlag Karlsruhe, 2006.
- [13] F. Cottone, H. Vocca, and L. Gammaitoni. Nonlinear Energy Harvesting. *Physical Review Letters*, 102(8):080601, 2009.

-
- [14] H. Dai, X. Yue, J. Yuan, and D. Xie. Dealiasing harmonic balance method for obtaining periodic solutions of an aeroelastic system. *Aerospace Science and Technology*, 77:244–255, 2018.
- [15] M. F. Daqaq. Transduction of a bistable inductive generator driven by white and exponentially correlated Gaussian noise. *Journal of Sound and Vibration*, 330(11):2554–2564, 2011.
- [16] M. F. Daqaq. On intentional introduction of stiffness nonlinearities for energy harvesting under white Gaussian excitations. *Nonlinear Dynamics*, 69(3):1063–1079, 2012.
- [17] M. F. Daqaq, R. Masana, A. Erturk, and D. Quinn. On the Role of Nonlinearities in Vibratory Energy Harvesting: A Critical Review and Discussion. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4):040801, 2014.
- [18] I. K. Dimov, L. Basabe-Desmonts, and J. L. Garcia-Cordero. Stand-alone self-powered integrated microfluidic blood analysis system (SIMBAS). *Lab on a chip*, 11(5):845–850, 2011.
- [19] N. E. Du Toit. *Modeling and design of a MEMS piezoelectric vibration energy harvester*. Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [20] N. Elvin, A. Elvin, and D. H. Choi. A self-powered damage detection sensor. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 38(2):115–124, 2003.
- [21] N. Elvin and A. Erturk. *Advances in energy harvesting methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [22] A. Erturk. Piezoelectric energy harvesting for civil infrastructure system applications: Moving loads and surface strain fluctuations. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(17):1959–1973, 2011.
- [23] A. Erturk, J. Hoffmann, and D. J. Inman. A piezomagnetoelastic structure for broadband vibration energy harvesting. *Applied Physics Letters*, 94:11–14, 2009.
- [24] A. Erturk and D. J. Inman. A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(4):041002, 2008.
- [25] A. Erturk and D. J. Inman. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, 18(2):025009, 2009.

-
- [26] A. Erturk and D. J. Inman. Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable Duffing oscillator with electromechanical coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 330(10):2339–2353, 2011.
- [27] A. Erturk and D. J. Inman. *Piezoelectric Energy Harvesting*. Wiley, 2011.
- [28] M. N. Fakhzan and A. G. A. Muthalif. Harvesting vibration energy using piezoelectric material: Modeling, simulation and experimental verifications. *Mechatronics*, 23(1):61–66, 2013.
- [29] M. Ferrari, V. Ferrari, and M. Guizzetti. Improved energy harvesting from wideband vibrations by nonlinear piezoelectric converters. *Sensors and Actuators A: Physical*, 162(2):425–431, 2010.
- [30] L. Gammaitoni, I. Neri, and H. Vocca. Nonlinear oscillators for vibration energy harvesting. *Applied Physics Letters*, 94(16):164102, 2009.
- [31] I. Gatin, V. Vukcevic, H. Jasak, and S. Malenica. Harmonic Balance method for nonlinear and viscous free surface flows. *Ocean Engineering*, 157:164–179, 2018.
- [32] M. Ghandchi Tehrani and S. J. Elliott. Extending the dynamic range of an energy harvester using nonlinear damping. *Journal of Sound and Vibration*, 333(3):623–629, 2014.
- [33] J. M. Gilbert and F. Balouchi. Comparison of energy harvesting systems for wireless sensor networks. *International Journal of Automation and Computing*, 5(4):334–347, 2008.
- [34] A. Graham. *Kronecker products and matrix calculus: with applications*. Horwood, 1981.
- [35] P. Hagedorn. *Technische Schwingungslehre*. Springer, 1989.
- [36] A. Harb. Energy harvesting: State-of-the-art. *Renewable Energy*, 36(10):2641–2654, 2011.
- [37] R. L. Harne and K. W. Wang. A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems. *Smart Materials and Structures*, 22(2):023001, 2013.
- [38] Q. He and M. F. Daqaq. Influence of potential function asymmetries on the performance of nonlinear energy harvesters under white noise. *Journal of Sound and Vibration*, 333(15):3479–3489, 2014.
- [39] H. Hetzler. *Stabilität eines nichtlinearen Schwingungssystems unter harmonischer und stochastischer Anregung*. Diplomarbeit Universität Karlsruhe, 2003.

-
- [40] D. J. Higham. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*, 43(3):525–546, 2001.
- [41] C. A. Howells. Piezoelectric energy harvesting. *Energy Conversion and Management*, 50(7):1847–1850, 2009.
- [42] W. Jiang and L. Chen. Stochastic averaging based on generalized harmonic functions for energy harvesting systems. *Journal of Sound and Vibration*, 377:264–283, 2016.
- [43] H. S. Kim, J. H. Kim, and J. Kim. A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 12(6):1129–1141, 2011.
- [44] P. Kim and J. Seok. A multi-stable energy harvester: Dynamic modeling and bifurcation analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(21):5525–5547, 2014.
- [45] P. Kumar, S. Narayanan, S. Adhikari, and M.I. Friswell. Fokker Planck equation analysis of randomly excited nonlinear energy harvester. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):2040–2053, 2014.
- [46] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard, L. Petit, and D. Guyomar. A comparison between several vibration-powered piezoelectric generators for standalone systems. *Sensors and Actuators A: Physical*, 126(2):405–416, 2006.
- [47] L. Lentz and W. Martens. On the solution of the Fokker-Planck equation on infinite domains using problem-specific orthonormal basis functions in a Galerkin-type method. *PAMM*, 14(1):767–768, 2014.
- [48] L. Lentz, H. T. Nguyen, and U. von Wagner. Energy harvesting from bistable systems under random excitation. *Machine Dynamics Research*, 41(1), 2017.
- [49] L. Lentz and U. von Wagner. Multi-mode model of a piezomagnetoelastic energy harvester under random excitation. *PAMM*, 15(1):259–260, 2015.
- [50] G. Litak, M. I. Friswell, and S. Adhikari. Magnetopiezoelectric energy harvesting driven by random excitations. *Applied Physics Letters*, 96(21):214103, 2010.
- [51] M. F. Lumentut and I. M. Howard. Analytical and experimental comparisons of electromechanical vibration response of a piezoelectric bimorph beam for power harvesting. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(1):66–86, 2013.
- [52] W. Martens. *On the solution of the Fokker-Planck-Equation for multi-dimensional nonlinear mechanical systems*. Dissertation Technische Universität Berlin, Shaker, 2013.

-
- [53] W. Martens, U. von Wagner, and G. Litak. Stationary response of nonlinear magneto-piezoelectric energy harvester systems under stochastic excitation. *The European Physical Journal Special Topics*, 222(7):1665–1673, 2013.
- [54] W. Martens, U. von Wagner, and V. Mehrmann. Calculation of high-dimensional probability density functions of stochastically excited nonlinear mechanical systems. *Nonlinear Dynamics*, 67(3):2089–2099, 2012.
- [55] R. Masana and M. F. Daqaq. Relative performance of a vibratory energy harvester in mono- and bi-stable potentials. *Journal of Sound and Vibration*, 330(24):6036–6052, 2011.
- [56] R. Masana and M. F. Daqaq. Energy harvesting in the super-harmonic frequency region of a twin-well oscillator. *Journal of Applied Physics*, 111(4):044501, 2012.
- [57] J. W. Matiko, N. J. Grabham, S. P. Beeby, and M. J. Tudor. Review of the application of energy harvesting in buildings. *Measurement Science and Technology*, 25(1):012002, 2014.
- [58] L. M. Miller, P. Pillatsch, E. Halvorsen, P. K. Wright, and E. M. Yeatman. Experimental passive self-tuning behavior of a beam resonator with sliding proof mass. *Journal of Sound and Vibration*, 332(26):7142–7152, 2013.
- [59] F. C. Moon and P. J. Holmes. A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, 65(2):275–296, 1979.
- [60] F. C. Moon and Y. Pao. Magnetoelastic Buckling of a Thin Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 35(1):53, 1968.
- [61] F. C. Moon and Y. Pao. Vibration and Dynamic Instability of a Beam-Plate in a Transverse Magnetic Field. *Journal of Applied Mechanics*, 36(1):92, 1969.
- [62] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*. Wiley, 1979.
- [63] M. Noll. *Entwicklung eines nichtlinearen Mehrfreiheitsgradmodells für einen bistabilen Schwinger unter Berücksichtigung eines stationären Magnetfeldes*. Masterarbeit Technische Universität Berlin, 2016.
- [64] G. Park, T. Rosing, M. D. Todd, C. R. Farrar, and W. Hodgkiss. Energy Harvesting for Structural Health Monitoring Sensor Networks. *Journal of Infrastructure Systems*, 2008.
- [65] S. P. Pellegrini, N. Tolou, M. Schenk, and J. L. Herder. Bistable vibration energy harvesters: A review. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(11):1303–1312, 2012.

-
- [66] R. Ramlan, M. J. Brennan, B. R. Mace, and I. Kovacic. Potential benefits of a non-linear stiffness in an energy harvesting device. *Nonlinear Dynamics*, 59(4):545–558, 2010.
 - [67] J. Rastegar, C. Pereira, and H.-L. Nguyen. Piezoelectric-based power sources for harvesting energy from platforms with low-frequency vibration. *Smart Structures and Materials 2006: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, 6171(1):617101–7, 2006.
 - [68] F. Rentzsch. *Überlegungen zur Numerischen Integration nichtlinearer Dynamischer Systeme*. Bachelorarbeit Technische Universität Berlin, 2017.
 - [69] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, 1996.
 - [70] S. Roundy and P. K. Wright. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics. *Smart Materials and Structures*, 13(5):1131–1142, 2004.
 - [71] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar, and B. Ducharne. Experimental Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting. *Smart Materials and Structures*, 20(10):102001, 2011.
 - [72] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar, and B. Ducharne. Simulation of a Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting. *Smart Materials and Structures*, 20(7):075022, 2011.
 - [73] F. K. Shaikh and S. Zeadally. Energy harvesting in wireless sensor networks: A comprehensive review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 55:1041–1054, 2016.
 - [74] Y. C. Shu and I. C. Lien. Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems. *Smart Materials and Structures*, 15(6):1499–1512, 2006.
 - [75] S. C. Stanton, A. Erturk, B. P. Mann, and D. J. Inman. Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification Stanton. *Journal of Applied Physics*, 108(7):074903, 2010.
 - [76] S. C. Stanton, C. C. McGehee, and B. P. Mann. Nonlinear dynamics for broadband energy harvesting: Investigation of a bistable piezoelectric inertial generator. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(10):640–653, 2010.
 - [77] S. C. Stanton, B. A. M. Owens, and B. P. Mann. Harmonic balance analysis of the bistable piezoelectric inertial generator. *Journal of Sound and Vibration*, 331(15):3617–3627, 2012.
 - [78] T. Takagi, J. Tani, S. Matsuda, and S. Kawamura. Analysis and Experiment of Dynamic Deflection of a Thin Plate with a Coupling Effect. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1992.

-
- [79] J. I. Tam and P. Holmes. Revisiting a magneto-elastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, 333(6):1767–1780, 2014.
- [80] L. Tang, Y. Yang, and C. K. Soh. Toward Broadband Vibration-based Energy Harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 21(18):1867–1897, 2010.
- [81] H. F. Tiersten. The Linear Theory of Piezoelectricity. In *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, pages 33–39. IEEE, New York, 1969.
- [82] S.B. Tiwari, B. Nageswara Rao, N. Shivakumar Swamy, K.S. Sai, and H.R. Nataraja. Analytical study on a Duffing-harmonic oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 285(4-5):1217–1222, 2005.
- [83] A. Toprak and O. Tigli. Piezoelectric energy harvesting: State-of-the-art and challenges. *Applied Physics Reviews*, 1(3):031104, 2014.
- [84] R. Torah, P. Glynn-Jones, J. Tudor, and T. O'Donnell. Self-powered autonomous wireless sensor node using vibration energy harvesting. *Measurement Science and Technology*, 19(12):125202, 2008.
- [85] J. Twiefel and H. Westermann. Survey on broadband techniques for vibration energy harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(11):1291–1302, 2013.
- [86] M. Urabe. Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 20(2), 1965.
- [87] M. Urabe. Periodic solutions of differential systems, Galerkin's procedure and the method of averaging. *Journal of Differential Equations*, 2(3):265–280, 1966.
- [88] M. Urabe and A. Reiter. Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 14(1):107–140, 1966.
- [89] U. von Wagner. *Zur Berechnung stationärer Verteilungsdichten nichtlinearer stochastisch erregter Systeme*. Dissertation Universität Karlsruhe, VDI-Verlag, 1999.
- [90] U. von Wagner and P. Hagedorn. Piezo-Beams systems subjected to weak electric field: Experiments and modeling of non-linearities. *Journal of Sound and Vibration*, 256(5):861–872, 2002.
- [91] U. von Wagner and L. Lentz. On some aspects of the dynamic behavior of the softening Duffing oscillator under harmonic excitation. *Archive of Applied Mechanics*, 8(86):1383–1390, 2016.

-
- [92] U. von Wagner and L. Lentz. On artifacts in nonlinear dynamics. *Vibration, Control and Stability of Dynamical Systems, Proceedings of DSTA*, pages 525–535, 2017.
- [93] U. von Wagner and L. Lentz. On artifact solutions of semi-analytic methods in nonlinear dynamics. *Archive of Applied Mechanics*, 2018.
- [94] U. von Wagner and L. Lentz. On the Detection of Artifacts in Harmonic Balance Solutions of Nonlinear Oscillators. *Journal of Applied Mathematical Modelling*, 65, 2018.
- [95] U. von Wagner and W. V. Wedig. On the Calculation of Stationary Solutions of Multi-Dimensional Fokker-Planck Equations by Orthogonal Functions. *Nonlinear Dynamics*, 21(3):289–306, 2000.
- [96] H. Wang and Q. Meng. Analytical modeling and experimental verification of vibration-based piezoelectric bimorph beam with a tip-mass for power harvesting. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(1):193–209, 2013.
- [97] J. Wauer. *Kontinuumsschwingungen*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [98] C. Wei and X. Jing. A comprehensive review on vibration energy harvesting: Modeling and realization, 2017.
- [99] O. Weißenbach. *Modalanalyse und Modellbildung eines Fahrrades in Hinblick auf Erregerspektren eines Energy Harvesting Systems*. Masterarbeit Technische Universität Berlin, 2017.
- [100] P. Wulff. *Einfluss der Diskretisierung auf die Modellierung eines Energy-Harvesting Systems*. Bachelorarbeit Technische Universität Berlin, 2014.
- [101] S. Zhou, J. Cao, D. J. Inman, J. Lin, and D. Li. Harmonic balance analysis of nonlinear tristable energy harvesters for performance enhancement. *Journal of Sound and Vibration*, 373:223–235, 2016.
- [102] S. Zhou, J. Cao, D. J. Inman, J. Lin, and S. Liu. Broadband tristable energy harvester: Modeling and experiment verification. *Applied Energy*, 133:33–39, 2014.
- [103] Z. Zhou, W. Qin, and P. Zhu. Improve efficiency of harvesting random energy by snap-through in a quad-stable harvester. *Sensors and Actuators A: Physical*, 243:151–158, 2016.
- [104] H. Zhu, G. Er, V. Iu, and K. Kou. Probabilistic solution of nonlinear oscillators excited by combined Gaussian and Poisson white noises. *Journal of Sound and Vibration*, 330(12):2900–2909, 2011.

A Modellierung

A.1 Integration der Elektrischen Enthalpiedichte

Das Integral der elektrischen Enthalpiedichte gemäß Formel (2.10) berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} H \, dV &= \frac{1}{2} \int_{-h_s/2}^{h_s/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{l_s} Y_s [zw''(x, t)]^2 \, dx \, dy \, dz \\
&+ \frac{1}{2} \int_{h_s/2}^{h_s/2+h_p} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{l_p} \left\{ Y_p [zw''(x, t)]^2 - e_{311} \frac{1}{h_p} v(t) zw''(x, t) - \frac{1}{2} \epsilon_{33}^S \frac{1}{h_p^2} v^2(t) \right\} \, dx \, dy \, dz \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-h_s/2-h_p}^{-h_s/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{l_p} \left\{ Y_p [zw''(x, t)]^2 + e_{311} \frac{1}{h_p} v(t) zw''(x, t) - \frac{1}{2} \epsilon_{33}^S \frac{1}{h_p^2} v^2(t) \right\} \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{l_s} \frac{1}{3} b z^3 \Big|_{-h_s/2}^{h_s/2} Y_s [w''(x, t)]^2 \, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \left\{ \frac{1}{3} b z^3 \Big|_{h_s/2}^{h_s/2+h_p} Y_p [w''(x, t)]^2 - e_{311} \frac{1}{h_p} v(t) \frac{1}{2} z^2 \Big|_{h_s/2}^{h_s/2+h_p} w''(x, t) - \frac{1}{2} \epsilon_{33}^S b z \Big|_{h_s/2}^{h_s/2+h_p} \frac{1}{h_p^2} v^2(t) \right\} \, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \left\{ \frac{1}{3} b z^3 \Big|_{-h_s/2-h_p}^{-h_s/2} Y_p [w''(x, t)]^2 + e_{311} \frac{1}{h_p} v(t) \frac{1}{2} z^2 \Big|_{-h_s/2-h_p}^{-h_s/2} w''(x, t) - \frac{1}{2} \epsilon_{33}^S b z \Big|_{-h_s/2-h_p}^{-h_s/2} \frac{1}{h_p^2} v^2(t) \right\} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{l_s} \frac{1}{12} b h_s^3 Y_s [w''(x, t)]^2 \, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \left\{ \left(\frac{1}{12} b h_p^3 + \left(\frac{h_s}{2} + \frac{h_p}{2} \right)^2 b h_p \right) Y_p [w''(x, t)]^2 - \frac{1}{2} e_{311} b (h_p + h_s) v(t) w''(x, t) \right\} \, dx - \frac{1}{4} \epsilon_{33}^S b \frac{l_p}{h_p} v^2(t) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \left\{ \left(\frac{1}{12} b h_p^3 + \left(\frac{h_s}{2} + \frac{h_p}{2} \right)^2 b h_p \right) Y_p [w''(x, t)]^2 - \frac{1}{2} e_{311} b (h_p + h_s) v(t) w''(x, t) \right\} \, dx - \frac{1}{4} \epsilon_{33}^S b \frac{l_p}{h_p} v^2(t) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{l_p} IY_1 [w''(x, t)]^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{l_p}^{l_s} IY_2 [w''(x, t)]^2 \, dx - \vartheta v(t) w'(l_p, t) - \frac{1}{2} c_p v^2(t) .
\end{aligned}$$

(A.1)

A.2 Auswertung des Prinzips von Hamilton

Die Lagrange-Funktion lautet gemäß Gleichung (2.13)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \mu_1 (\dot{w}(x, t) + \dot{u}(t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 [\dot{w}(x, t) + \dot{u}(t)]^2 dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{l_p} IY_1 w''^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_{l_p}^{l_s} IY_2 w''^2(x, t) dx \\ & + \vartheta w'(l_p, t) \dot{\lambda}(t) + c_p \dot{\lambda}^2(t)\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

und die Ausführung der Variation liefert

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ - \int_0^{l_p} \mu_1 [\ddot{w}(x, t) + \ddot{u}(t)] \delta w(x, t) dx - \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 [\ddot{w}(x, t) + \ddot{u}(t)] \delta w(x, t) dx \right. \\ & - IY_1 w''(x, t) \delta w'(x, t) \Big|_0^{l_p} + IY_1 w'''(x, t) \delta w(x, t) \Big|_0^{l_p} - \int_0^{l_p} IY_1 w''''(x, t) \delta w(x, t) dx \\ & - IY_2 w''(x, t) \delta w'(x, t) \Big|_{l_p}^{l_s} + IY_2 w'''(x, t) \delta w(x, t) \Big|_{l_p}^{l_s} - \int_{l_p}^{l_s} IY_2 w''''(x, t) \delta w(x, t) dx \\ & \left. - \vartheta \dot{w}'(l_p, t) \delta \lambda(t) + \vartheta v(t) \delta w'(l_p, t) - 2c_p \dot{v}(t) \delta \lambda(t) \right\} dt\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Die virtuelle Arbeit der in \mathcal{L} nicht berücksichtigten nicht konservativen Größen lautet nach Gleichung (2.14)

$$\begin{aligned}\delta W = & \int_0^{l_s} [q(x, w) \delta w(x, t) - m(x, w) \delta w'(x, t) + N(x, w) w'(x, t) \delta w'(x, t)] dx - \frac{v(t)}{R} \delta \lambda(t) \\ = & \int_0^{l_s} [q(x, w) + m'(x, w) - (N(x, w) w'(x, t))'] \delta w(x, t) dx - m(l_s, w) \delta w(l_s, t) - \frac{v(t)}{R} \delta \lambda(t).\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

Die Auswertung duech das Prinzip von Hamilton liefert schließlich

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ - \int_0^{l_p} \left(\mu_1 [\ddot{w}(x, t) + \ddot{u}(t)] + IY_1 w''''(x, t) - (N(x, w)w'(x, t))' - q(x, w) - m'(x, w) \right) \delta w(x, t) dx \right. \\
&\quad - \int_{l_p}^{l_s} \left(\mu_2 [\ddot{w}(x, t) + \ddot{u}(t)] + IY_2 w''''(x, t) - (N(x, w)w'(x, t))' - q(x, w) - m'(x, w) \right) \delta w(x, t) dx \\
&\quad - \left(2c_p \ddot{\lambda}(t) + \frac{1}{R} \dot{\lambda}(t) + \vartheta \dot{w}'(l_p, t) \right) \delta \lambda(t) \\
&\quad + (IY_1 w''(0, t)) \delta w'(0, t) \\
&\quad - (IY_1 w''(l_p, t) - IY_2 w''(l_p, t) - \vartheta \dot{\lambda}(t)) \delta w'(l_p, t) \\
&\quad - (IY_2 w''(l_s, t)) \delta w'(l_s, t) \\
&\quad - (IY_1 w'''(0, t)) \delta w(0, t) \\
&\quad + (IY_1 w'''(l_p, t) - IY_2 w'''(l_p, t)) \delta w(l_p, t) \\
&\quad \left. + (IY_2 w'''(l_s, t) - m(l_s, w)) \delta w(l_s, t) \right\} dt .
\end{aligned}
\tag{A.5}$$

A.3 Diskretisierung mittels Ritz-Verfahren

Einsetzen des Ansatzes

$$w(x, t) \approx \sum_{i=1}^n a_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{A.6})$$

in die Lagrange-Funktion (2.13) liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \left\{ \mu_1 \left[\sum_i^n \dot{a}_i(t) \Phi_i(x) + \dot{u}(t) \right]^2 - IY_1 \left[\sum_i^n a_i(t) \Phi_i''(x) \right]^2 \right\} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{l_p}^{l_s} \left\{ \mu_2 \left[\sum_i^n \dot{a}_i(t) \Phi_i(x) + \dot{u}(t) \right]^2 - IY_2 \left[\sum_i^n a_i(t) \Phi_i''(x) \right]^2 \right\} dx \\ & + \vartheta \sum_i^n a_i(t) \Phi_i'(l_p) \dot{\lambda}(t) + c_p \dot{\lambda}^2(t) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

und Einsetzen in die virtuelle Arbeit (2.14) liefert

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^{l_s} [q(x, w) + m(x, w)'] \sum_i^n \delta a_i(t) \Phi_i(x) dx \\ & \int_0^{l_s} \left[N(x, w) \sum_i^n a_i(t) \Phi_i'(x) \right] \sum_j^n \delta a_j(t) \Phi_j'(x) dx \\ & - m(l_s, t) \sum_i^n \delta a_i(t) \Phi_i(l_s) - \frac{\dot{\lambda}}{R} \delta \lambda(t). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Die für die Auswertung der Lagrange-Gleichungen 2. Art benötigten Terme sind

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_j} = & \int_0^{l_p} \mu_1 \left[\sum_i^n \ddot{a}_i(t) \Phi_i(x) + \ddot{u}(t) \right] \Phi_j(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \left[\sum_i^n \ddot{a}_i(t) \Phi_i(x) + \ddot{u}(t) \right] \Phi_j(x) dx \\ = & \sum_i^n \left[\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx \right] \ddot{a}_i(t) + \left[\int_0^{l_p} \mu_1 \Phi_j(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} \mu_2 \Phi_j(x) dx \right] \ddot{u}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j} &= - \int_0^{l_p} IY_1 \sum_i^n a_i(t) \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx - \int_0^{l_p} IY_2 \sum_i^n a_i(t) \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx + \vartheta \Phi_j'(l_p) \dot{\lambda}(t) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_p} IY_1 \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx + \int_{l_p}^{l_s} IY_2 \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx \right] a_i(t) + \vartheta \Phi_j'(l_p) \dot{\lambda}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

beziehungsweise

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} = \sum_i^n \vartheta \Phi_i'(l_p) \dot{a}_i(t) + 2c_p \ddot{\lambda}(t) \quad (\text{A.11})$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Die rechten Seiten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta W}{\partial \delta a_j} &= \int_0^{l_s} \left\{ [q(x, t) + m(x, t)'] \Phi_j(x) + N(x, w) \sum_i^n a_i(t) \Phi_i'(x) \Phi_j'(x) \right\} dx - m(l_s, t) \Phi_j(l_s) \\ &= \int_0^{l_s} \left[q(x, t) + m(x, t)' - \left(N(x, w) \sum_i^n a_i(t) \Phi_i'(x) \right)' \right] \Phi_j(x) dx - m(l_s, t) \Phi_j(l_s) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial \delta W}{\partial \delta \lambda} = -\frac{\dot{\lambda}}{R}. \quad (\text{A.14})$$

A.4 Eigenfunktionen eines diskontinuierlichen Balkens

Im Folgenden werden die Eigenfunktionen und Eigenkreisfrequenzen des in Abbildung 29 dargestellten Balkens mit sprunghafter Änderung in Geometrie und Parametern hergeleitet.

Der Balken besitzt die Gesamtlänge l und der Sprung findet an der Stelle $x = l_1$ statt.

Die Massenbelegung und Biegesteifigkeit im Abschnitt 1 ($0 \leq x < l_1$) werden mit μ_1 und IY_1 beziehungsweise mit μ_2 und IY_2 im Abschnitt 2 ($l_1 < x \leq l$) bezeichnet.

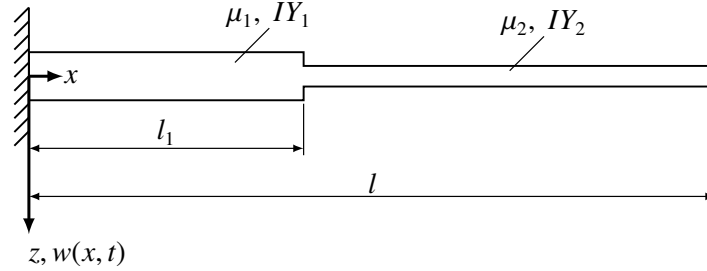


Abbildung 29: Skizze des Balkens mit sprunghafter Änderung in Geometrie und Parametern

Die Feldgleichung für die Auslenkung in z -Richtung gemäß der Euler-Bernoulli Theorie lautet

$$\begin{aligned} \mu_1 \ddot{w}(x, t) + IY_1 w''''(x, t) &= 0, \quad 0 \leq x < l_1 \\ \mu_2 \ddot{w}(x, t) + IY_2 w''''(x, t) &= 0, \quad l_1 < x \leq l \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

und die Rand- und Übergangsbedingungen sind

$$w(0, t) = 0 \quad (\text{A.16a}) \quad w(l_1^-, t) = w(l_1^+, t) \quad (\text{A.17a})$$

$$w'(0, t) = 0 \quad (\text{A.16b}) \quad w'(l_1^-, t) = w'(l_1^+, t) \quad (\text{A.17b})$$

$$w''(l, t) = 0 \quad (\text{A.16c}) \quad IY_1 w''(l_1^-, t) = IY_2 w''(l_1^+, t) \quad (\text{A.17c})$$

$$w'''(l, t) = 0 \quad (\text{A.16d}) \quad IY_1 w'''(l_1^-, t) = IY_2 w'''(l_1^+, t) \quad (\text{A.17d})$$

wobei die hochgestellten Symbole $+/-$ anzeigen, ob sich die Koordinate dem entsprechenden Wert von oben oder unten annähert. Wird für die Verschiebung der Produktansatz $w(x, t) = W(x)T(t)$ verwendet, kann die PDE (A.15) in eine ODE für die Zeitfunktion T und eine ODE für die Eigenfunktion W separiert werden. Die ODE für die Zeitfunktion lautet

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{A.18})$$

und hat die Lösung

$$T(t) = A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t) \quad (\text{A.19})$$

worin ω die Eigenkreisfrequenz ist, welche im Folgenden bestimmt werden soll. Die ODE für die Orstsfunktion lautet

$$\begin{aligned} -\mu_1 \omega W(x) + IY_1 W''''(x) &= 0, \quad 0 \leq x < l_1 \\ -\mu_2 \omega W(x) + IY_2 W''''(x) &= 0, \quad l_1 < x \leq l \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

und hat die Lösung

$$\begin{aligned} W(x) &= A_1 \cos(\kappa_1 x) + B_1 \sin(\kappa_1 x) + C_1 \cosh(\kappa_1 x) + D_1 \sinh(\kappa_1 x), \quad 0 \leq x < l_1 \\ W(x) &= A_2 \cos(\kappa_2 x) + B_2 \sin(\kappa_2 x) + C_2 \cosh(\kappa_2 x) + D_2 \sinh(\kappa_2 x), \quad l_1 < x \leq l \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

worin die Abbkürzungen

$$\kappa_1 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \mu_1}{IY_1}}, \quad \kappa_2 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \mu_2}{IY_2}} \quad (\text{A.22})$$

verwendet wurden. Für die weitere Rechnung werden die dimensionslosen Koordinaten $\xi_1 = x/l$ und $\xi_2 = (x - l_1)/l$ sowie die Abbkürzungen

$$\alpha_1 = \kappa_1 l, \quad \alpha_2 = \kappa_2 l, \quad \beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \gamma = \frac{IY_1}{IY_2} \quad (\text{A.23})$$

verwendet. Einsetzen in Gleichung (A.21) führt auf die ODE

$$\begin{aligned} W(\xi_1) &= A_1 \cos(\alpha_1 \xi_1) + B_1 \sin(\alpha_1 \xi_1) + C_1 \cosh(\alpha_1 \xi_1) + D_1 \sinh(\alpha_1 \xi_1), \quad 0 \leq \xi_1 < l_1/l \\ W(\xi_2) &= A_2 \cos(\alpha_2 \xi_2) + B_2 \sin(\alpha_2 \xi_2) + C_2 \cosh(\alpha_2 \xi_2) + D_2 \sinh(\alpha_2 \xi_2), \quad 0 < \xi_2 \leq (l - l_1)/l \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

welche zur Auswertung der Rand- und Übergangsbedingungen verwendet wird. Aus den Randbedingungen (A.16a) und (A.16b) folgt

$$A_1 + C_1 = 0 \quad (\text{A.25a})$$

$$B_1 + D_1 = 0 \quad (\text{A.25b})$$

und somit

$$W(\xi_1) = A_1 [\cos(\alpha_1 \xi_1) - \cosh(\alpha_1 \xi_1)] + B_1 [\sin(\alpha_1 \xi_1) - \sinh(\alpha_1 \xi_1)], \quad 0 \leq \xi_1 < l_1/l. \quad (\text{A.26})$$

Aus den Übergangsbedingungen (A.17a)-(A.17c) und dem bisherigem Ergebniss zusammen mit den Abkürzungen

$$\delta_1 = \cos(\alpha_1 l_1/l) - \cosh(\alpha_1 l_1/l) \quad (\text{A.27a})$$

$$\delta_2 = \sin(\alpha_1 l_1/l) - \sinh(\alpha_1 l_1/l) \quad (\text{A.27b})$$

$$\delta_3 = \cos(\alpha_1 l_1/l) + \cosh(\alpha_1 l_1/l) \quad (\text{A.27c})$$

$$\delta_4 = \sin(\alpha_1 l_1/l) + \sinh(\alpha_1 l_1/l) \quad (\text{A.27d})$$

folgt das Gleichungssystem

$$-A_2 - C_2 + \delta_1 A_1 + \delta_2 B_1 = 0 \quad (\text{A.28a})$$

$$-B_2 - D_2 - \beta \delta_4 A_1 + \beta \delta_1 B_1 = 0 \quad (\text{A.28b})$$

$$A_2 - C_2 - \beta^2 \gamma \delta_3 A_1 - \beta^2 \gamma \delta_4 B_1 = 0 \quad (\text{A.28c})$$

$$B_2 - D_2 + \beta^3 \gamma \delta_2 A_1 - \beta^3 \gamma \delta_3 B_1 = 0 \quad (\text{A.28d})$$

das nach den Koeffizienten A_2 , B_2 , C_2 und D_2 aufgelöst werden kann. Einsetzen der Ergebnisse

$$A_2 = \frac{1}{2} \left[(\beta^2 \gamma \delta_3 - \delta_1) A_1 + (\delta_2 + \beta^2 \gamma \delta_4) B_1 \right] \quad (\text{A.29a})$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \beta \left[-(\beta^2 \gamma \delta_2 + \delta_4) A_1 + (\delta_1 + \beta^2 \gamma \delta_3) B_1 \right] \quad (\text{A.29b})$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[-(\delta_1 + \beta^2 \gamma \delta_3) A_1 + (\delta_2 - \beta^2 \gamma \delta_4) B_1 \right] \quad (\text{A.29c})$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \beta \left[(\beta^2 \gamma \delta_2 - \delta_4) A_1 + (\delta_1 - \beta^2 \gamma \delta_3) B_1 \right] \quad (\text{A.29d})$$

unter Verwendung der Abkürzungen

$$\text{cs} = \cos\left(\alpha_2 \frac{l-l_1}{l}\right), \quad \text{sn} = \sin\left(\alpha_2 \frac{l-l_1}{l}\right), \quad \text{csh} = \cosh\left(\alpha_2 \frac{l-l_1}{l}\right), \quad \text{snh} = \sinh\left(\alpha_2 \frac{l-l_1}{l}\right)$$

in die Randbedingung (A.16c) liefert

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[-(\beta^2 \delta_3 - \delta_1) \text{cs} + \beta (\beta^2 \delta_2 + \delta_4) \text{sn} - (\delta_1 + \beta^2 \delta_3) \text{csh} + \beta (\beta^2 \delta_2 - \delta_4) \text{snh} \right]}_{=d_{11}} A_1 \\ & + \underbrace{\left[-(\delta_2 + \beta^2 \delta_4) \text{cs} - \beta (\delta_1 + \beta^2 \delta_3) \text{sn} + (\delta_2 - \beta^2 \delta_4) \text{csh} + \beta (\delta_1 - \beta^2 \delta_3) \text{snh} \right]}_{=d_{12}} B_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

nach Einsetzen in die Randbedingung (A.16d)

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[(\beta^2 \delta_3 - \delta_1) \operatorname{sn} + \beta (\beta^2 \delta_2 + \delta_4) \operatorname{cs} - (\delta_1 + \beta^2 \delta_3) \operatorname{snh} + \beta (\beta^2 \delta_2 - \delta_4) \operatorname{csh} \right]}_{=d_{21}} A_1 \\ & + \underbrace{\left[(\delta_2 + \beta^2 \delta_4) \operatorname{sn} - \beta (\delta_1 + \beta^2 \delta_3) \operatorname{cs} + (\delta_2 - \beta^2 \delta_4) \operatorname{snh} + \beta (\delta_1 - \beta^2 \delta_3) \operatorname{csh} \right]}_{=d_{22}} B_1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Die Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen von (A.21) lautet dann

$$p(\omega) = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0. \quad (\text{A.32})$$

Die Auswertung von (A.32) führt auf abzählbar unendlich viele Werte ω_k und zugehörige Eigenfunktionen W_k .

Um die Orthogonalität der Eigenfunktionen zu beweisen muss gezeigt werden, dass der dem System zugehörige Differentialoperator selbstadjungiert ist, was für den Massenoperator offensichtlich ist und daher nur für den Steifigkeitsoperator gerechnet wird. Sei dazu $K[\cdot]$ der Steifigkeitsoperator und seien f, g zwei Funktionen welche sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen. Die kurze Rechnung

$$\begin{aligned} \langle f, K[g] \rangle &= \int_0^{l_1} f(x) IY_1 g''''(x) \, dx + \int_{l_1}^l f(x) IY_2 g''''(x) \, dx \\ &= f(x) IY_1 g'''(x) \Big|_0^{l_1} - f'(x) IY_1 g''(x) \Big|_0^{l_1} + f''(x) IY_1 g'(x) \Big|_0^{l_1} - f'''(x) IY_1 g(x) \Big|_0^{l_1} \\ &\quad + f(x) IY_2 g'''(x) \Big|_{l_1}^l - f'(x) IY_2 g''(x) \Big|_{l_1}^l + f''(x) IY_2 g'(x) \Big|_{l_1}^l - f'''(x) IY_2 g(x) \Big|_{l_1}^l \quad (\text{A.33}) \\ &\quad + \int_0^{l_1} IY_1 f''''(x) g(x) \, dx + \int_{l_1}^l IY_2 f''''(x) g(x) \, dx \\ &= \langle K[f], g \rangle \end{aligned}$$

zeigt, dass K selbstadjungiert ist und daher die Eigenfunktionen orthogonal sind.

Falls die Eigenfunktionen zusätzlich auf ihre Masse normiert werden, erfüllen diese die folgenden beiden nützlichen Eigenschaften

$$\int_0^{l_1} \mu_1 W_i(x) W_j(x) \, dx + \int_{l_1}^l \mu_2 W_i(x) W_j(x) \, dx = \delta_{ij} \quad (\text{A.34})$$

$$\int_0^{l_1} IY_1 W_i''''(x) W_j(x) dx + \int_{l_1}^l IY_2 W_i''''(x) W_j(x) dx = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (\text{A.35})$$

wobei die erste Eigenschaft die Orthonormalität bezüglich der Masse darstellt und die zweite Eigenschaft verwendet, dass $IY_1 W_i''''(x) = \omega_i^2 \mu_1 W_i(x)$ und $IY_2 W_i''''(x) = \omega_i^2 \mu_2 W_i(x)$ gilt.

B Harmonische Anregung

B.1 Darstellung beliebiger Potenzen harmonischer Funktionen

Für n ungerade gilt:

$$\begin{aligned}\cos^n(r\omega t) &= 2^{-n} \left(e^{ir\omega t} + e^{-ir\omega t} \right)^n \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^n \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^0 \binom{n}{k+n} e^{i(n+2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^0 \binom{n}{-k} e^{i(n+2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)r\omega t} \\&= 2^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} \cos((n-2k)r\omega t)\end{aligned} \tag{B.1}$$

und

$$\begin{aligned}\sin^n(r\omega t) &= 2^{-n} \left(-ie^{ir\omega t} + ie^{-ir\omega t} \right)^n \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^n \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^0 \binom{n}{k+n} (-1)^{k+n} i^n e^{i(n+2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^0 \binom{n}{-k} (-1)^{k+n} i^n e^{i(n+2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^{-k+n} i^n e^{i(n-2k)r\omega t} \\&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} - 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^{-k+n-1} i^n e^{i(n-2k)r\omega t} \\&= 2^{-(n-1)} i^{n-1} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k \sin((n-2k)r\omega t) .\end{aligned} \tag{B.2}$$

Für n gerade gilt

$$\begin{aligned}
 \cos^n(r\omega t) &= 2^{-n} \left(e^{ir\omega t} + e^{-ir\omega t} \right)^n \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \binom{n}{n/2} + 2^{-n} \sum_{k=n/2+1}^n \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \binom{n}{n/2} + 2^{-n} \sum_{k=-(n/2-1)}^0 \binom{n}{k+n} e^{-i(n-2k)r\omega t} \quad (\text{B.3}) \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \binom{n}{n/2} + 2^{-n} \sum_{k=-(n/2-1)}^0 \binom{n}{-k} e^{i(n+2k)r\omega t} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} e^{-i(n-2k)r\omega t} + 2^{-n} \binom{n}{n/2} + 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)r\omega t} \\
 &= 2^{-n} \binom{n}{n/2} + 2^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)r\omega t)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \sin^n(r\omega t) &= 2^{-n} \left(-ie^{ir\omega t} + ie^{-ir\omega t} \right)^n \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} + (-1)^{n/2} 2^{-n} i^n \binom{n}{n/2} + 2^{-n} \sum_{k=n/2+1}^n \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} + (-1)^{n/2} 2^{-n} i^n \binom{n}{n/2} + 2^{-n} \sum_{k=-(n/2-1)}^0 \binom{n}{k+n} (-1)^k i^n e^{i(n+2k)r\omega t} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} + (-1)^{n/2} 2^{-n} i^n \binom{n}{n/2} + 2^{-n} \sum_{k=-(n/2-1)}^0 \binom{n}{-k} (-1)^k i^n e^{i(n+2k)r\omega t} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{-i(n-2k)r\omega t} + (-1)^{n/2} 2^{-n} i^n \binom{n}{n/2} + 2^{-n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k i^n e^{i(n-2k)r\omega t} \\
 &= (-1)^{n/2} 2^{-n} i^n \binom{n}{n/2} + 2^{-(n-1)} i^n \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k \cos((n-2k)r\omega t) . \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

B.2 Analyisierte Lösungen

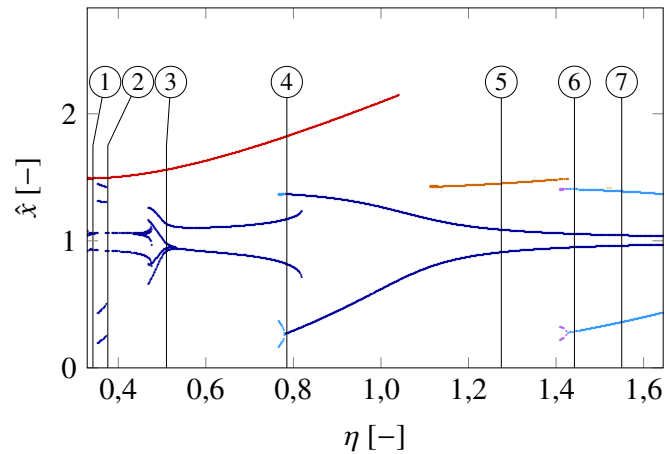


Abbildung 30: Zur Ermittlung des Frequenzinhalts charakteristischer Lösungen verwendetes Antwortdiagramm.

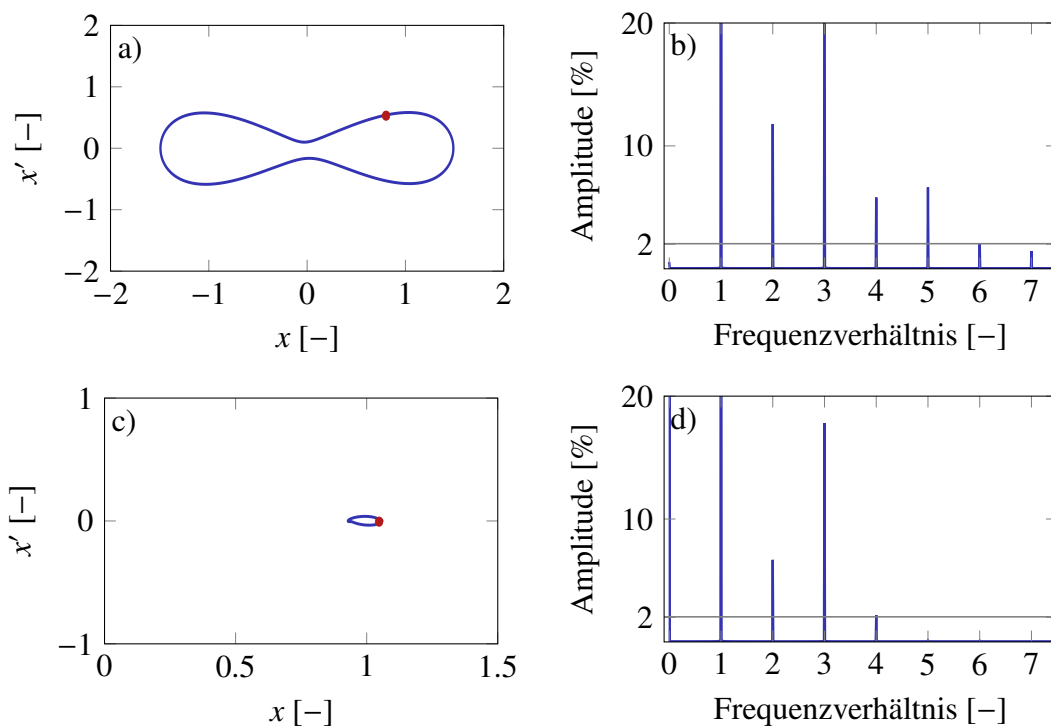


Abbildung 31: Phasenportraits und Frequenzspektren der Lösungen in Frequenzpunkt 1. Die zur Berechnung verwendeten Simulationsparameter finden sich in Tabelle 14.

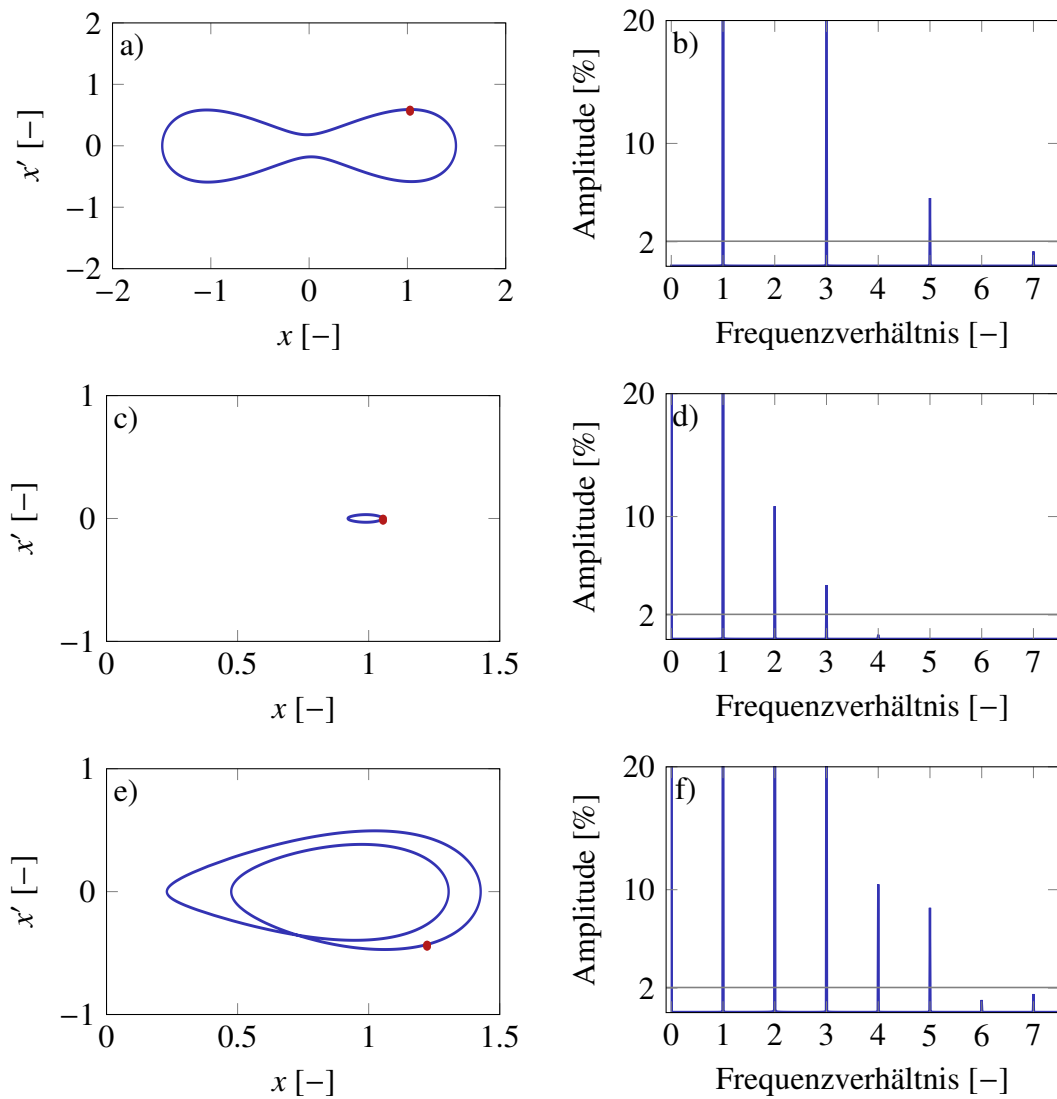


Abbildung 32: Phasenportraits und Frequenzspektren der Lösungen in Frequenzpunkt 2. Die zur Berechnung verwendeten Simulationsparameter finden sich in Tabelle 14.

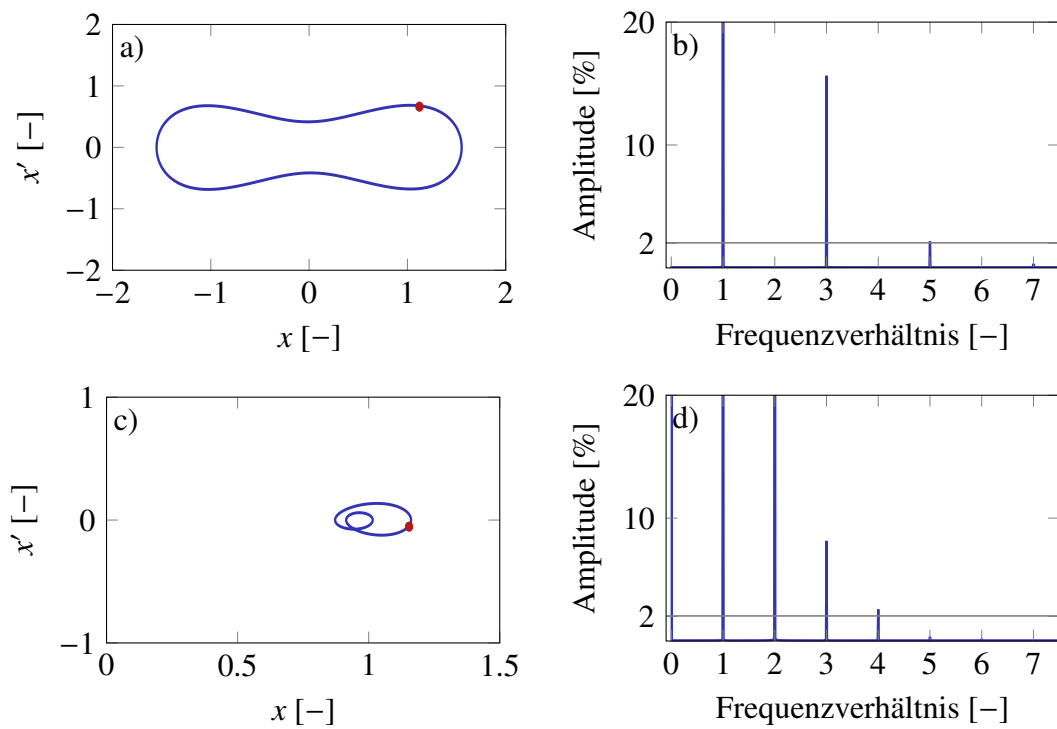


Abbildung 33: Phasenportraits und Frequenzspektren der Lösungen in Frequenzpunkt 3. Die zur Berechnung verwendeten Simulationsparameter finden sich in Tabelle 14.

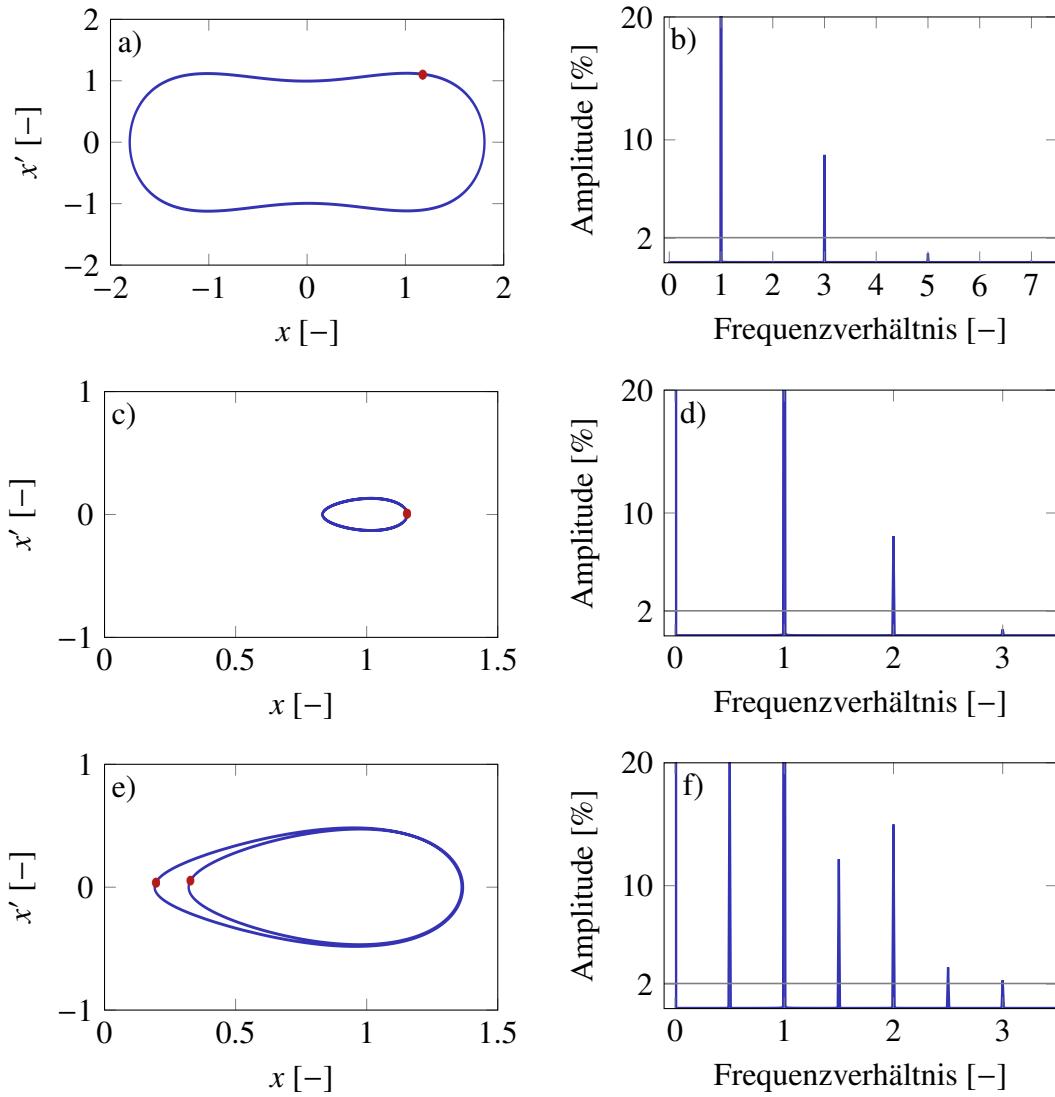


Abbildung 34: Phasenportraits und Frequenzspektren der Lösungen in Frequenzpunkt 4. Die zur Berechnung verwendeten Simulationsparameter finden sich in Tabelle 14.

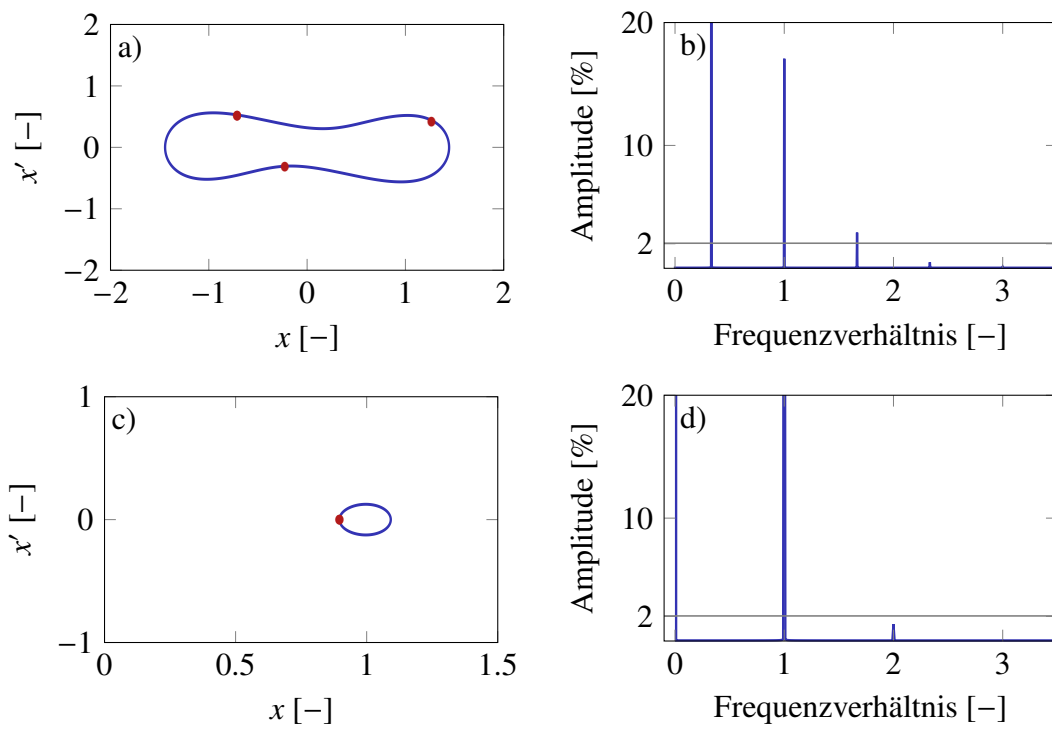


Abbildung 35: Phasenportraits und Frequenzspektren der Lösungen in Frequenzpunkt 5. Die zur Berechnung verwendeten Simulationsparameter finden sich in Tabelle 14.

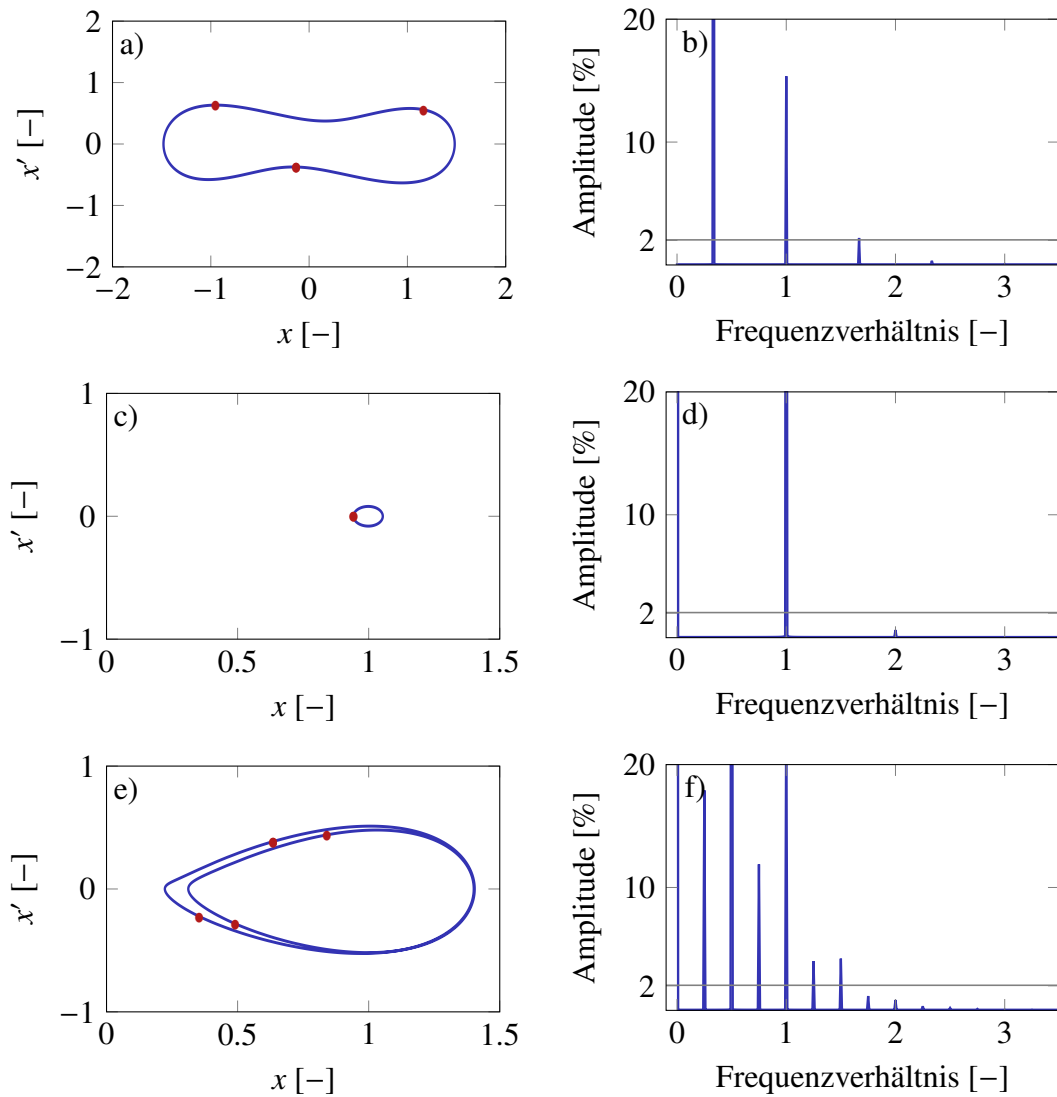


Abbildung 36: Phasenportraits und Frequenzspektren der Lösungen in Frequenzpunkt 6. Die zur Berechnung verwendeten Simulationsparameter finden sich in Tabelle 14.

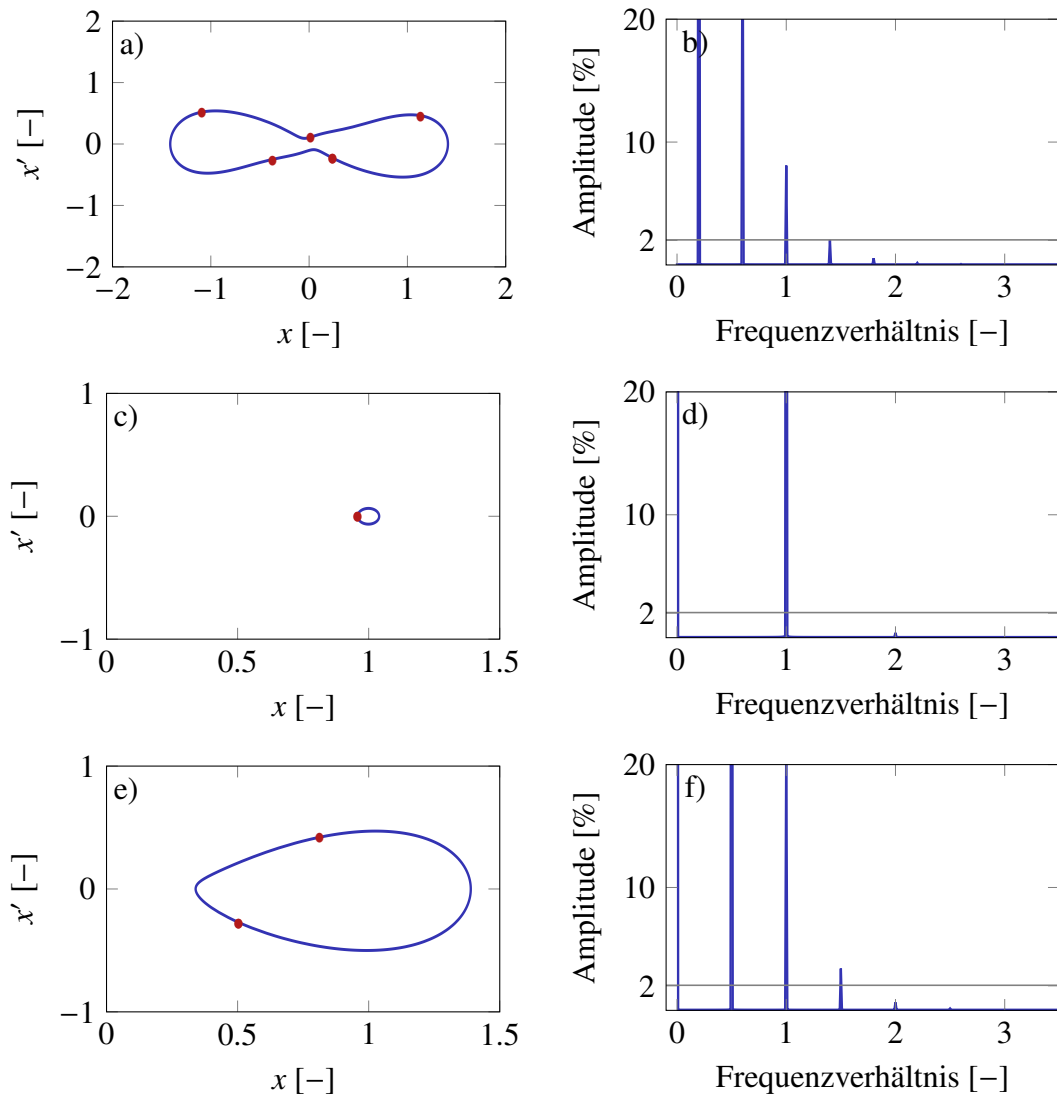


Abbildung 37: Phasenportraits und Frequenzspektren der Lösungen in Frequenzpunkt 7. Die zur Berechnung verwendeten Simulationsparameter finden sich in Tabelle 14.

C Anregung durch weißes Rauschen

C.1 Berechnung der Elemente der Orthonormalbasen

Ziel ist es die Koeffizienten aller Basisvektoren der Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ zusammen zu fassen. Für ein Element ϕ_j aus der Basis soll

$$\phi_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x^{i-1} \quad (\text{C.1})$$

gelten. Da stets $\text{grad}(\phi_j) = j - 1$ gelten soll, ist $a_{ii} \neq 0$ und $a_{ij} = 0$ für $i > j$ und daher $A = [a_{ij}]$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Fasst man die Koeffizienten von ϕ_j in $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, \dots, a_{jj})^T \in \mathbb{R}^j$ zusammen, lässt sich (C.1) schreiben als

$$\phi_j(x) = \sum_{i=1}^j a_{ij} x^{i-1} = (1, \dots, x^{j-1}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{jj} \end{pmatrix} = (1, \dots, x^{j-1}) \mathbf{a}_j. \quad (\text{C.2})$$

Die Berechnung der Matrix A erfolgt iterativ. Sei dazu $A_j \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Block-Matrix

$$A_j = \begin{bmatrix} A_{jj} & \mathbf{0}_{j,n-j} \\ \mathbf{0}_{n-j,j} & I_{n-j} \end{bmatrix}, \text{ mit } A_{jj} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{jj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{j,j}, \quad (\text{C.3})$$

$\mathbf{m}_j \in \mathbb{R}^j$ der Vektor

$$\mathbf{m}_j = [E(x^j), \dots, E(x^{2j-1})]^T. \quad (\text{C.4})$$

in dem die Momente $E(x^j) = \int_{-\infty}^{\infty} x^j \phi_0(x) dx$ der Ordnung j bis $2j - 1$ zusammengefasst sind, und $\hat{\mathbf{a}}_j \in \mathbb{R}^j$ der Vektor

$$\hat{\mathbf{a}}_j = (\hat{a}_{1j}, \dots, \hat{a}_{j(j-1)}, 1)^T = a_{jj}^{-1} \mathbf{a}_j, \quad (\text{C.5})$$

der die Koeffizienten des Polynoms $\hat{\phi}_j$ enthält, welches durch Normierung des Leitkoeffizienten aus ϕ_j hervorgeht. Es gilt

$$\hat{\mathbf{a}}_{j+1} = [-\mathbf{m}_j^T A_{jj} A_{jj}^T, 1]^T, \quad (\text{C.6a})$$

$$a_{(j+1)(j+1)} = \left(\hat{\mathbf{a}}_{j+1} \cdot [\mathbf{m}_j^T, E(x^{2j})]^T \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.6b})$$

$$\mathbf{a}_{i+1} = a_{(i+1)(i+1)} \hat{\mathbf{a}}_{i+1}. \quad (\text{C.6c})$$

Für den Beweis gehen wir davon aus, dass die Basiselemente ϕ_1, \dots, ϕ_j bereits berechnet wurden. Für $\hat{\phi}_{j+1}$ gilt dann

$$\hat{\phi}_{j+1} = \sum_{i=1}^j \hat{a}_{i(j+1)} x^{i-1} + x^j = \sum_{i=1}^j b_{i(j+1)} \phi_i + x^j = \sum_{i=1}^j b_{i(j+1)} \sum_{r=1}^i a_{ri} x^{r-1} + x^j, \quad (\text{C.7})$$

woraus mittels Koeffizientenvergleich für $k = 1, \dots, j$

$$\hat{a}_{k(j+1)} = \sum_{i=1}^j b_{i(j+1)} a_{ki} \quad (\text{C.8})$$

folgt. Die Koeffizienten $b_{i(j+1)}$ lassen sich aus den bekannten Koeffizienten a_{kl} , mit $1 \leq k, l \leq j$, unter Verwendung der Orthogonalitätseigenschaft wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \hat{\phi}_{j+1}, \phi_i \rangle \\ &= \sum_{s=1}^j b_{s(j+1)} \langle \phi_s, \phi_i \rangle + \langle x^j, \phi_i \rangle = \sum_{s=1}^j b_{s(j+1)} \delta_{si} + \langle x^j, \phi_i \rangle \\ &= b_{i(j+1)} + \langle x^j, \phi_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

also gilt für $i \leq j$ zunächst $b_{i(j+1)} = -\langle x^j, \phi_i \rangle$ und weiter

$$\begin{aligned} \langle x^j, \phi_i \rangle &= \sum_{s=1}^i a_{si} \langle x^j, x^{s-1} \rangle = \sum_{s=1}^i a_{si} E(x^{j+s-1}) \\ &\Rightarrow b_{i(j+1)} = - \sum_{s=1}^i a_{si} E(x^{j+s-1}). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Einsetzen von (C.10) in (C.8) liefert dann

$$\hat{a}_{k(j+1)} = - \sum_{i=1}^j \sum_{s=1}^i a_{si} E(x^{j+s-1}) a_{ki} \quad (\text{C.11})$$

dabei ist $a_{si} = 0$ für $s > i$ also lässt sich (C.11) schreiben als

$$\hat{a}_{k(j+1)} = - \sum_{i=1}^j \sum_{s=1}^i a_{si} E(x^{j+s-1}) a_{ki} = -\mathbf{m}_j^T \mathbf{A}_{jj} \mathbf{A}_{jj}^T \mathbf{e}_k \quad (\text{C.12})$$

woraus (C.6a) direkt folgt.

Anwendung der Orthogonalitätsrelation auf ϕ_{j+1} liefert

$$\begin{aligned}
 1 = \langle \phi_{j+1}, \phi_{j+1} \rangle &= a_{(j+1)(j+1)}^2 \langle \hat{p}_{j+1}, \hat{p}_{j+1} \rangle \\
 &= a_{(j+1)(j+1)}^2 \left(\sum_{i=1}^j b_{ij} \langle \phi_i, \hat{\phi}_{j+1} \rangle + \langle x^j, \hat{\phi}_{j+1} \rangle \right) \\
 &= a_{(j+1)(j+1)}^2 \langle x^j, \hat{\phi}_{j+1} \rangle \\
 &= a_{(j+1)(j+1)}^2 \sum_{i=1}^{j+1} \hat{a}_{i(j+1)} \langle x^j, x^{i-1} \rangle \\
 &= a_{(j+1)(j+1)}^2 \sum_{i=1}^{j+1} \hat{a}_{i(j+1)} E(x^{j+i-1}) .
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

Aus diesem Ergebnis folgt schließlich

$$|a_{(j+1)(j+1)}| = \left(\hat{\mathbf{a}}_{j+1} \cdot \left[\mathbf{m}_j^T, E(x^{2j}) \right]^T \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{C.14}$$

und da das Vorzeichen der Basiselemente beliebig ist (C.6b) und (C.6c). Nach dem Vorgegebenem Schema können nun die Matrizen A_0, \dots, A_n berechnet werden, wobei A_n die gesuchte Matrix A ist.

D Verwendete Simulationsparameter

Im Folgenden werden sämtliche Anfangsbedingungen, die zur Berechnung der in der Arbeit präsentierten Ergebnisse verwendet wurden, aufgeführt. Für die Durchführung der Numerischen Integration wurde stets das klassische Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung [8], mit einer Schrittweite von $h = T/1000$ verwendet.

D.1 Überblick über das dynamische Verhalten

Tabelle 13: Simulationsparameter, die zur Berechnung der in Abschnitt 3.1 gezeigten Abbildungen verwendet wurden. Die Intensität der Anregung beträgt für alle Rechnungen $f=0,13562$ und als Zeitbereich wurde für alle Rechnungen mit regulärer Lösung $0 \leq \tau \leq 1000T$ und für die Berechnung der chaotischen Lösung $0 \leq \tau \leq 5000T$ gewählt.

Abbildungen	η	$x(0)$	$x'(0)$	$v(0)$
10 a) und 10 b)	0,98626	0,9	0,0	0,0
11 a) und 11 b)	0,98626	-0,9	1,2	0,0
12 a) und 12 b)	0,98626	0,9	-1,5	0,0
14 a) und 14 b)	0,95271	-1,2	0,6	0,0
14 c) und 14 d)	1,61692	1,5	1,5	0,0
15 a) und 15 b)	1,36868	1,2	-0,3	0,0
15 c) und 15 d)	1,36868	1,5	0,3	0,0
16 a) und 16 b)	0,98626	0,0	0,0	0,0

D.2 Für die Harmonische Balance analysierte Lösungen

Tabelle 14: Simulationsparameter für die Lösungen aus Abschnitt B.2, welche zur Bestimmung der multifrequenten Ansatzfunktionen verwendet wurden. Die Intensität der Anregung beträgt für alle Rechnungen $f=0,05797$ und als Zeitbereich wurde $0 \leq \tau \leq 1000T$ gewählt.

Abbildungen	η	$x(0)$	$x'(0)$	$v(0)$
31 a) und 31 b)	0,34217	0,3	0,6	0,0
31 c) und 31 d)	0,34217	0,0	0,0	0,0
32 a) und 32 b)	0,37572	0,0	0,0	0,0
32 c) und 32 d)	0,37572	0,6	0,0	0,0
32 e) und 32 f)	0,37572	-1,5	-0,3	0,0
33 a) und 33 b)	0,50990	0,0	0,0	0,0
33 c) und 33 d)	0,50990	0,6	0,0	0,0
34 a) und 34 b)	0,78498	-1,2	-1,5	0,0
34 c) und 34 d)	0,78498	0,0	0,0	0,0
34 e) und 34 f)	0,78498	0,0	0,3	0,0
35 a) und 35 b)	1,27475	-1,5	0,3	0,0
35 c) und 35 d)	1,27475	0,0	0,0	0,0
36 a) und 36 b)	1,44248	0,9	0,6	0,0
36 c) und 36 d)	1,44248	0,0	0,0	0,0
36 e) und 36 f)	1,44248	0,6	-0,6	0,0
37 a) und 37 b)	1,54983	0,3	-0,9	0,0
37 c) und 37 d)	1,54983	0,6	0,0	0,0
37 e) und 37 f)	1,54983	0,0	0,0	0,0