Ein hocheffizientes finites Dreieckselement zur Berechnung dünnwandiger piezoelektrischer Strukturen

vorgelegt von
Dipl.-Ing.
Gil Rama

von der Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionssausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Andreas Bardenhagen
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Zehn
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus Rohwer
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 25.09.2019

Berlin 2019

„Trotz der umfangreichen Entwicklungsarbeit auf dem Gebiet der Finiten-Elementen-Formulierung von Schalenelementen, ist noch kein Element entwickelt worden, das alle Anwendungsgebiete abdeckt.“

Erwin Stein [115]

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet für Strukturmechanik und Strukturberechnung des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Berlin. Zunächst möchte ich mich besonders bei meinem Doktorvater, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Zehn, für die vertrauensvolle Zusammenarbeit, die wohlwollende Förderung sowie für die wissenschaftliche Betreuung meiner Arbeit bedanken.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Rohwer und bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Lammering möchte ich mich sehr herzlich für die Übernahme des Korreferates sowie für die aufmerksame Durchsicht meiner Arbeit bedanken. Weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Bardenhagen für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsausschusses.

Bei Herrn Dr.-Ing. Marinkovic möchte ich mich vielmals für die Möglichkeit der gemeinsamen Publikation und die damit verbundenen lehrreichen Diskussionen bedanken. Ich bedanke mich bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts, von denen viele Freunde geworden sind.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie für die ständige Unterstützung, die ich von ihr erfahren habe. Ein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Asmait für ihre liebevolle und vielseitige Unterstützung und für ihren unschätzbaren Rückhalt.

Berlin, im April 2019 Gil Rama

Abstract

Laminated composite structures consisting of load-carrying and multifunctional materials represent a rather powerful material system. The passive load-carrying layers can be made of isotropic materials or of fiber-reinforced composites, while piezoelectric materials represent the most common choice of multifunctional materials for active layers. The multifunctionality of piezoelectric layers is provided by their inherent property to couple mechanical and electric fields. The property can thus be used to sense deformations or produce actuating forces. A highly efficient 3-node shell element has been developed for modeling piezoelectric laminated composite shells. The equivalent single-layer approach and Mindlin-Reissner kinematics are used in the element formulation together with the discrete shear gap (DSG) technique to resolve the shear locking and strain smoothing technique to improve the performance. Piezoelectric layers are assumed to be polarized in the thickness direction thus coupling the in-plane strains with the electric field oriented in the thickness direction. The co-rotational FE formulation is used to account for geometrically nonlinear effects. Numerical examples cover linear and geometrically nonlinear static and dynamic cases with piezoelectric layers used as actuators and sensors.

Keywords:
Finite-Element-Method, Shell element, Piezoelectric, Co-Rotational formulation, Assumed-Natural-Deviatoric-Strain, Discrete-Shear-Gap, Cell-Smoothing

Zusammenfassung

Verbundlaminate aus lasttragenden und multifunktionalen Schichten stellen leistungsfähige moderne Materialsysteme dar. Die dabei verwendeten passiven lasttragenden Schichten bestehen in der Regel aus Faserverbundwerkstoffen oder aus isotropen Materialien. Piezoelektrische Materialien eignen sich aufgrund ihrer sehr gut nutzbaren elektromechanischen Kopplungseigenschaften zur Ausführung multifunktionaler Schichten. Das in dieser Arbeit präsentierte finite Komposite-Schalenelement bietet ein effizientes Simulationswerkzeug zur Berechnung dünnwandiger piezoelektrischer Strukturen. Das Schalenelement besitzt drei Knoten mit 18 mechanischen Freiheitsgraden und entsprechend vielen elektrischen Freiheitsgraden wie die Anzahl der definierten Piezoelementschichten.
Ausgangspunkt der Approximation des globalen Verhaltens der berücksichtigten Strukturen ist die implementierte Schubdeformationstheorie erster Ordnung. Die aus der Kombination eines angepassten ANDES-Membranelements und einer modifizierten DSG-Plattenformulierung entwickelte mechanische Elementsteifigkeit ist frei von künstlichen Versteifungseffekten und weist eine hohe Konvergenzrate auf. In Dickenrichtung polarisierte Piezoschichten können unter Berücksichtigung des e_{31}-Effekts sowohl als Aktuator als auch Sensor ausgeführt werden und ermöglichen so die Modellierung einer Vielzahl von piezoelektrischen technischen Anwendungen. Geometrisch nichtlineare Effekte werden mit einer vereinfachten und daher numerisch effizienten korotierenden Formulierung beschrieben. Die in der Arbeit dargestellten numerischen Beispiele belegen, dass die hier getroffenen Annahmen und angewendeten Techniken dazu beitragen, ein neues, effizientes, zuverlässiges sowie robustes finites Schalenelement zu entwickeln.

Schlagwörter:
Dreieckselement, Finite-Elemente-Methode, Schalenelement, Piezoelektrik, Korotierende Formulierung, Assumed-Natural-Deviatoric-Strain, Discrete-Shear-Gap

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Symbolverzeichnis

Kapitel 2

$[\sigma]$	Spannungstensor mit den Komponenten σ_{ij} mit $i, j = 1 \ldots 3$
$[\varepsilon']$	Verzerrungstensor bezüglich das MSV-KOS
$[\varepsilon^g]$	Greenscher Verzerrungstensor mit d. Komponenten ε_{ij} mit $i, j = 1 \ldots 3$
$[\varepsilon_{lin}]$	Linearer Anteil des Greenschen Verzerrungstensor
$[\varepsilon_{nl}]$	Nichtlinearer Anteil des Greenschen Verzerrungstensor
$[C]$	Hookesche Matrix mit den elastischen Koeffizienten C_{ij} mit $i, j = 1 \ldots 6$
$[D]$	Matrix der partiellen Ableitungen der Verschiebungskomponenten
$[F]$	Deformationsgradient
$[S]$	Nachgiebigkeitsmatrix
$[T_\sigma]$	Transformationsmatrix der Spannungen (Rotation in der Ebene)
$[T_\varepsilon]$	Transformationsmatrix der Verzerrungen (Rotation in der Ebene)
ϕ, ψ, υ	Koeffizienten d. Verschiebungsfeldes höherer 2D-Theorien
$\theta_{x'}, \theta_{y'}$	Rotationen um die x'- und die y'-Achse
$\{\gamma'_s\}$	Transversaler Schubverzerrungsvektor bezüglich des MSV-KOS
$\{\kappa'\}$	MSV-Referenzflächen-Krümmungen
$\{\sigma\}$	Spannungsvektor (Voigt-Notation) σ_{ij} mit $i = 1 \ldots 6$
$\{\varepsilon'_{mb}\}$	Membran- und Biegeverzerrungsvektor bezüglich des MSV-KOS
$\{\varepsilon^g\}$	Greenscher Verzerrungsvektor (Voigt-Notation)
$\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}$	Richtungsvektoren der Faserorientierung
$\{n\}, \{q\}, \{m\}$	MSV-Schnittkräfte und -momente
$\{t\}$	Cauchyscher Spannungsvektor
$\{u\}$	Verschiebungsvektor
$\{X\}$	Ortsvektor Anfangskonfiguration

$\{x\}$	Ortsvektor Momentankonfiguration
K	Schubkorrekturfaktor
L_Q	Dickenrichtungslinie des Punktes Q
$L_{Q'}$	Verformte Dickenrichtungslinie L_Q
Q	Beliebiger Punkt auf der MSV-Referenzfläche
Q'	Punkt Q nach der Verformung
u', v', w'	Verschiebungsfeld im MSV-KOS
u_0, v_0, w_0	Verschiebungen der MSV-Referenzfläche
x', y', z'	MSV-KOS

Kapitel 3

ϕ	Potentialdifferenz zwischen den Elektroden einer Piezoschicht
ϕ'	Elektrische Potentialfunktion in Dickenrichtung einer Piezoschicht
ρ_e	Ladungsdichte
ε	Charakteristische Verzerrung
$\{D\}$	Dielektrische Verschiebungen mit den Komponenten D_i mit $i = 1,2,3$
$\{E\}$	Elektrisches Feld mit den Komponenten E_i mit $i = 1,2,3$
E	Elektrische Feldstärke
$e, [e]$	Piezoelektrische Kopplungskonstante und -matrix
E_c	Koerzitivfeldstärke
h_p	Piezoschichthöhe
P	Polarisation
$x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}$	Materialorientierung

Kapitel 4

$[\overline{P}]$	Projektormatrix
$[B_u]$	Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix
$[D]$	Generalisierte Strukturdämpfungsmatrix
$[D_u]$	Mech. Freiheitsgraden zugeordnete Strukturdämpfungsmatrix
$[E_0]$	Initiales Elementkoordinatensystem
$[E_{cr}]$	Korotiertes Elementkoordinatensystem
$[J_{CR}]$	Jacobi-Matrix der Transformation des internen Kraftvektors zwischen dem globalen und dem korotierten System

$[K]$	Generalisierte Struktursteifigkeitsmatrix
$[K_e]$	Mechanische Elementsteifigkeitsmatrix
$[K_{\phi\phi,e}]$	Dielektrische Elementsteifigkeitsmatrix
$[K_{\phi u,e}]$	Piezoelektrische Elementkopplungsmatrix
$[M]$	Generalisierte Strukturmassenmatrix
$[M_e]$	Elementmassenmatrix (mech. FHG)
$[M_u]$	Mech. Freiheitsgraden zugeordnete Strukturmassenmatrix
$[N_u]$	Element Verschiebungsinterpolations-Matrix
$[N_\phi]$	Elektrische-Feld-Potentialinterpolations-Matrix
$[R]$	Elementstarrkörperrotationsmatrix
$[R_0]$	Rotationsmatrix der initialen Elementkonfiguration
$[R_c]$	Rotationsmatrix der momentanen Elementkonfiguration
$[R_i]$	Rotationstensor des Knoten i
$[R_{di}]$	Verzerrungserzeugender Anteil des Rotationstensors des Knoten i
α_d, β_d	Dämpfungskoeffizienten
Δ	Inkrement der bezogenen Größe
∇	Nabla-Operator (Divergenz)
$\overline{\theta}^d_{xi}, \overline{\theta}^d_{yi}, \overline{\theta}^d_{zi}$	Verzerrungserzeugende Knotenrotationen im korotierten KOS
$\overline{u}^d_i, \overline{v}^d_i, \overline{w}^d_i$	Verzerrungserzeugende Knotenverschiebungen im korotierten KOS
$\{\dot{u}_e\}, \{\ddot{u}_e\}$	Vektor der Knotengeschwindigkeiten und -beschleunigungen
$\{\overline{\theta}^d_i\}$	Verzerrungserzeugende Knotenverdrehungen im korotierten KOS
$\{\overline{d}'_i\}$	Verzerrende Knotenverschiebungen im korotierten KOS
$\{\phi_e\}$	Elektrische Elementfreiheitsgrade
$\{d'_i\}$	Verzerrende Knotenverschiebungen im initialen Elementsystem
$\{F\}$	Generalisierte äußere Kräfte
$\{f_e\}$	Elementlastvektor
$\{F_{A_1}\}, \{F_V\}$	Vektor der externen Flächen- und Volumenlasten
$\{f_{int,e}\}, \{q_{int,e}\}$	Mechanische und elektrische interne Elementkraftvektoren
$\{f_{int}\}, \{q_{int}\}$	Mechanische und elektrische interne Kraftvektoren
$\{F_P\}$	Vektor der angreifenden Einzelkräfte
$\{q_e\}$	Elementladungsvektor

$\{Q_P\}$	Vektor der externen Punktladungen
$\{u'_c\}$	Verschiebung des Koordinatenursprungs von $[E_0]$
$\{u'_i\}$	Verschiebungsvektor Knoten i im Elementsystem
$\{U\}$	Generalisierte Strukturverschiebungen
$\{u\},\{\dot{u}\},\{\ddot{u}\}$	Kontinuierliches Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld
$\{u_e\}$	Vektor der mechanischen Elementfreiheitsgrade
$\{u_S\},\{\phi_S\}$	Strukturverschiebungs- und Strukturpotentialdifferenzenvektor
$\{x'_i\}$	Ortsvektor Knoten i im Elementsystem
$\{\bar{u}_e^d\}$	Elementvektor der verzerrungserzeugenden Freiheitsgrade im korotierten KOS
$\{u_e^d\}$	Elementvektor der verzerrungserzeugenden Freiheitsgrade in x',y',z'
E_{kin}	Kinetische Energie
H	Enthalpie
L	Lagrange-Funktion
n_i	Knoten i
U	Formänderungsarbeit
V_e	Elementvolumen
W	Virtuelle Arbeit der äußeren Lasten
$(\dots)_{cr}$, $(\dots)^{cr}$	Bezogene Größe der korotierten initialen Konfiguration

Kapitel 5

$[\hat{K}_e]$	Mechanische Elementsteifigkeitsmatrix bezogen auf $\{\{u_{mem}\}^T\{u_p\}^T\}^T$
$[\hat{K}_{u\phi,e}]$	Elektromechanische Elementkopplungsmatrix bezogen auf $\{\{u_{mem}\}^T\{u_p\}^T\}^T$
$[\hat{M}_e]$	Elementmassenmatrix bezogen auf $\{\{u_{mem}\}^T\{u_p\}^T\}^T$
$[\bar{P}]$	Projektormatrix
$[A]$	Membran-Materialsteifigkeitsmatrix
$[B]$	Koppel-Materialsteifigkeitsmatrix
$[B_s^{\Delta i}]$	Schubverzerrungs-Verschiebungs Matrizen der Subdreiecke mit $i=1,2,3$
$[B_{pb}]$	Krümmungs-Verschiebungs-Matrix
$[B_s]$	Schubverzerrungs-Verschiebungs Matrix
$[D]$	Biege-Materialsteifigkeitsmatrix

$[F]$	Schub-Materialsteifigkeitsmatrix
$[J]$	Jacobi-Matrix
$[K_e]$	Mechanische Elementsteifigkeitsmatrix bezogen auf $\{u_e\}$
$[K_p]$	Mechanische Plattensteifigkeitsmatrix
$[K_\theta]$	Höhere Steifigkeitsmatrix (ANDES) in Abhängigkeit der hierarchischen Rotationen
$[K_b]$	ANDES Grundsteifigkeit (Basic Stiffness)
$[K_h]$	ANDES höhere Steifigkeit (Higher Stiffness)
$[K_{mem}]$	Mechanische Membransteifigkeitsmatrix
$[K_{mp}]$	Mechanische Koppelsteifigkeitsmatrix (Platte-Membran)
$[K_{pb}]$	Mechanische Plattenbiegesteifigkeitsmatrix
$[K_{ps}]$	Mechanische Plattenschubsteifigkeitsmatrix
$[K_{u\phi,e}]$	Elektromechanische Elementkopplungsmatrix bezogen auf $\{u_e\}$
$[K_{uu,es}]$	Induzierte mech. Steifigkeit der Piezoschichten
$[L]$	Die Lumpingmatrix
$[M_e]$	Elementmassenmatrix bezogen auf $\{u_e\}$
$[M_{LST}]$	Die konsistente LST-Massenmatrix
$[M_{mem}]$	Membranmassenmatrix
$[M_p]$	Plattenmassenmatrix
$[N_\theta]$	Matrix der angepassten Membran-Ansatzfunktionen (Drillfreiheitsgrade)
$[N_{LST}]$	Matrix der LST-Ansatzfunktionen
$[T_{\theta u}]$	Transformationsmatrix zw. hierarchischen Rotationen und phys. Membranfreiheitsgraden
$[T_{CR}]$	Transformationsmatrix der Ansatzfunktionen $[N_{LST}] \rightarrow [N_\theta]$
$[T_{nat}]$	Transformationsmatrix der natürlichen ANDES Verzerrungen und dem Element KOS
α, β_i	ANDES Parameter mit $i = 0 \ldots 9$
$\Delta w^2_{\gamma\xi_2}, \Delta w^3_{\gamma\xi_3}$	Diskrete Schubklaffungen an den Knoten 2 und 3
γ^*	DSG-Schubverzerrungen
$\overline{\theta}_i$	Hierarchische Rotationen der ANDES-Formulierung mit $i = 1,2,3$
$\theta_{x',i}, \theta_{y',i}, \theta_{z',i}$	Knotenverdrehungen um die x', y', z' Achsen

$\varepsilon_{x'x'}, \varepsilon_{y'y'}, \gamma_{x'y'}$	Biegeverzerrungen
ξ_1, ξ_2, ξ_3	Natürliche Dreieckskoordinaten
$\{\phi_{e,a}\}$	Vektor der Elementaktuatorspannungen
$\{\phi_{e,s}\}$	Vektor der Elementsensorspannungen
$\{\phi_e\}$	Vektor Elementpotentialdifferenzen
$\{f_{e,i}\}$	Vektor der äußeren Knotenkräfte
$\{f_{eA}\}$	Vektor der Elementflächenlasten
$\{f_{eg}\}$	Vektor der Elementgravitationslasten
$\{f_{el}\}$	Vektor der Elementlinienlasten
$\{f_P\}$	Vektor der konzentrierten Einzellasten
$\{q_{e,i}\}$	Vektor der Punktladungen
$\{u_p^{\Delta i}\}$	Vektor der Plattenfreiheitsgrade der Subdreiecke Δ_i mit $i = 1,2,3$
$\{u_e\}$	Vektor der mech. Elementfreiheitsgrade bezüglich (x', y', z')
$\{u_{mem}\}$	Membranverschiebungsvektor bezogen auf (x', y', z')
$\{u_{p0}\}$	Plattenverschiebungsvektor des geometrischen Mittelpunkts
$\{u_p\}$	Plattenverschiebungsvektor bezogen auf (x', y', z')
A	Dreiecksfläche (Elementmittelfläche)
A_1, A_2, A_3	Unterdreiecksflächen
h	Konstante Schalendicke
N_i'	LST-Ansatzfunktionen mit $i = 1 \ldots 6$
N_1, N_2, N_3	Lineare Ansatzfunktionen
u', v', w'	Verschiebungsfeld bezogen auf (x', y', z')
u_i', v_i', w_i'	Knotenverschiebungen entlang der x', y', z' Achsen
u_0, v_0	Membranverschiebungsfeld bezogen auf (x', y', z')
u_n, u_t	Normale und tangentiale Elementrandverschiebungen
u_p, v_p, w_p	Plattenverschiebungsfeld im (x', y', z')
V	Elementvolumen
w_γ^*	Schubklaffungsverlauf
$w_{\gamma\xi_i}$	Schubklaffungsverlauf entlang ξ_i, mit $i = 2,3$
x', y', z'	Lokales kartesisches Elementkoordinatensystem
x_i', y_i'	Elementknotenkoordinaten bezüglich (x', y', z') mit $i = 1,2,3$
θ_0	CST-Rotation

Kapitel 1

Einleitung

In vielen technischen Bereichen führt die Optimierung neuer Konstruktionen hinsichtlich ihrer Funktionalität, ihrer Betriebssicherheit sowie ihrer Wirtschaftlichkeit zu Leichtbaulösungen in Form von Schalenmodellen. Eine effiziente Ausführung solcher dünnwandiger Leichtbaustrukturen ist durch die Verwendung von speziell an die jeweiligen Anforderungen angepassten Mehrschichtverbunden realisierbar. Moderne Laminate aus faserverstärkten Kunststoffen besitzen eine hohe spezifische Festigkeit und Steifigkeit und haben gleichzeitig ein geringes spezifisches Gewicht. Sie erlauben zudem eine einfache konstruktive Integration adaptiver Materialien. Diese Materialien sind dadurch charakterisiert, dass sie eine Wechselwirkung zwischen zwei physikalischen Größen aufweisen - wie etwa zwischen dem elektrischen Feld und mechanischen Verzerrungen - wodurch sie aktiv oder passiv auf sich verändernde Umweltbedingungen reagieren können. Der Einsatz dieser adaptiven Werkstoffe als Aktuatoren und als Sensoren ermöglicht Konstruktionen, bei denen sich die Strukturen bei betriebsbedingten Störungen gezielt an die veränderten Umstände anpassen. Mit einem Anteil von über 60 % des Gesamtmarktes adaptiver Werkstoffe gehören piezoelektrische Materialien zu deren bedeutendsten Vertretern [2].
Piezoelektrika weisen einen wechselseitigen Koppeleffekt zwischen mechanischen und elektrischen Feldgrößen auf: Einerseits führen gerichtete Verformungen zu messbaren elektrischen Spannungen, und andererseits kann umgekehrt durch Anlegen einer elektrischen Spannung eine Verformung verursacht werden. Die besonders kurze Reaktionszeit von Piezoelektrika (sie liegt im Bereich von Submillisekunden) sowie deren hohe Präzision der Verformung (sie liegt im Subnanometer-Bereich) begünstigen ihren zunehmenden Einsatz sowohl als Sensor- als auch Aktuator-Anwendung [109]. Zur Beschreibung ihres Verhaltens müssen neben Differentialgleichungen der Mechanik zusätzlich noch Gleichungen der Elektrostatik gelöst werden. Die resultierenden Gleichungssysteme sind in der Regel nicht analytisch lösbar, daher ist eine numerische Modellierung erforderlich. Zu den bedeutends-

ten numerischen Approximationsverfahren für die Lösung elektromechanischer Probleme zählt die Finite-Elemente-Methode (FEM). Finite-Elemente-Formulierungen lassen sich grob in Kontinuums- und Strukturelementen unterteilen [60], [122]. Die Formulierung von Strukturelementen, wie z. B. von Schalen, zeichnet sich durch bestimmte Annahmen bezüglich ihrer Verformungs- und Spannungszustände aus. Kinematische und kinetische Restriktionen werden entweder aus Beobachtungen oder aus Formulierungen von Kontinuumselementen abgeleitet. Für FE-Modelle dünnwandiger Strukturen lässt sich hierdurch die Anzahl der unbekannten Freiheitsgrade - im Vergleich zu einer Berechnung mit Kontinuumselementen - erheblich reduzieren. Zwar sind Schalen durch ihre gekrümmte Referenzfläche charakterisiert, es ist jedoch möglich diese Fläche durch Facetten anzunähern. Eine Diskretisierung gekrümmter Schalenstrukturen mittels ebener finiter Elemente kann bei groben Netzen auf der Strukturebene zu einer ungenauen Koppelung der Platten- und Membran-Tragwirkung führen. Eine Verbindung beider Tragwirkungen erfolgt erst mit der Assemblierung der Elementsteifigkeitsbeziehungen durch die Transformation der Knotenfreiheitsgrade am Knick [14]. Zudem können in Folge der Diskontinuitäten der Steigung von benachbarten Facettenelementen künstliche Biegemomente entstehen. Bei Verwendung einer ausreichend feinen Netzdichte reduzieren sich diese Effekte jedoch soweit, dass ihr Einfluss vernachlässigt werden kann [132], [93].

Unter den zahlreich vorhandenen ebenen Schalenelementen sind die dreiknotigen unverzichtbar für die Vernetzung unregelmäßiger Geometrien. Ihre ebene Geometrie erlaubt eine getrennte Beschreibung ihrer Membran- und Plattentragwirkung auf Elementebene. Neuartige Membran- und Plattenentwicklungen können so effektiv zu Schalen kombiniert werden. Doch trotz dessen einfacher Geometrie stellt die Entwicklung eines leistungsfähigen dreiknotigen Schalenelements eine enorme Herausforderung dar. Klassische Ansätze (beispielsweise eine reine Verschiebungsinterpolation) führen häufig zu einem unbrauchbaren mechanischen Elementverhalten. Denn aufgrund der dabei getroffenen kinematischen Annahmen und der dabei verwendeten Interpolationsansätze können künstliche Versteifungseffekte (engl. *locking effects*) auftreten, die das Konvergenzverhalten stark beeinträchtigen. Das Konvergenzverhalten ist jedoch ein ausschlaggebendes Kriterium für die Beurteilung der Güte einer Elementformulierung. Es bestimmt, wie zügig sich die numerisch produzierte Lösung mit feiner werdendem Netz der exakten mathematischen Lösung des Modells annähert.

Wichtig für eine realistische Approximation des Verhaltens piezoelektrischer Systeme ist zum einen die Beschreibung des mechanischen Verhaltens, zum anderen die Formulierung der elektromechanischen Kopplung. Eine Vielzahl dünnwandiger piezoelektrischer Anwendungen basieren vorwiegend auf dem e_{31}-Koppelungseffekt. Dieser kann daher in

guter Näherung für solche Systeme als dominant angenommen werden [55]. Der e_{31}-Effekt zeigt sich, wie bereits erwähnt, einerseits in der Ausdehnung des Materials in der Schichtebene infolge eines in Dickenrichtung wirkenden elektrischen Feldes, aber auch umgekehrt in der Veränderung der Stärke des elektrischen Signals infolge der in der Schichtebene auftretenden Verformungen.
Piezoelektrische Anwendungen werden üblicherweise so ausgelegt, dass die Keramiken und die Schichten innerhalb ihrer Arbeitsbereiche nur moderat verzerrt werden. Treten infolge der Belastung jedoch große Verformungen und endliche Rotationen auf, kann das Verformungs- sowie das elektromechanische Kopplungsverhalten nicht mehr durch eine lineare Relation zwischen äußeren Belastungen und den Systemmatrizen der initialen Konfiguration beschrieben werden. Auftretende geometrisch nichtlineare Effekte müssen daher durch geeignete Formulierungen beschrieben und die resultierenden nichtlinearen Gleichungssysteme iterativ gelöst werden.
Die vorliegende Arbeit behandelt die Entwicklung eines neuen robusten, schnell konvergierenden finiten Schalenelements mit niedriger Interpolationsordnung, welches zur besonders zügigen Berechnung von dünnwandigen piezoelektrischen Sensor- und Aktuator-Anwendungen unter Berücksichtigung großer Verformungen und einem linear-elastischen Materialverhaltens verwendet werden kann.

1.1 Stand der Technik

Analytische Lösungen von Problemen mit piezoelektrischen Materialien werden in der Literatur nur für wenige, stark idealisierte Lastfälle und Geometrien beschrieben [102], [131], [26]. Seit der Pionierarbeit von Allik und Hughes aus dem Jahr 1970 [5] wurde deshalb beständig an der Entwicklung von finiten Elementen zur Berechnung piezoelektrischer Werkstoffe gearbeitet. Eine vollständige Übersicht aller Entwicklungen würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen. Zusammenfassenden Übersichten können den Arbeiten von Chee [29], Benjeddou [19], Chopra [31] sowie Mackerle [70] entnommen werden. Numerische Analysen piezoelektrischer Mehrschichtverbunde erfordern eine akkurate elektromechanische Modellierung, welche die Beschreibung der mechanischen wie auch der elektrischen Antwort beinhaltet. Für eine numerisch effiziente Berechnung von Flächentragwerken greift man in der Regel zu einer Modellierung des zu untersuchenden Tragwerkes als zweidimensionales Bauteil (Schale/Platte). Einen möglichen Ausgangspunkt zur Betrachtung der Thematik der Finiten-Elemente-Analyse von Schalenstrukturen bietet die Arbeit von Ahmad et al. [4]. Diese leiten darin [4] die Schalenkinematik aus einem 3D-Kontinuum ab, degenerieren sie also, und begründen damit das sogenannte „degene-

rierte“ Schalenelement-Konzept. Degenerierte Schalenelemente weisen jedoch infolge formulierungsbedingter Versteifungeffekte (Locking-Effekte) Defizite bei der Reproduktion des Biegeverhaltens dünner Schalenstrukturen auf. Locking-Effekte im allgemeinen wurden erstmals 1970 in der Arbeit von Doherty et al. [37] genauer analysiert. MacNeal und Harder [72] veröffentlichten 1985 eine Reihe von Testbeispielen zur Überprüfung Finiter-Elemente-Formulierungen hinsichtlich unterschiedlicher Versteifungseffekte. Eine systematische mathematische Analyse und die Beurteilung von Versteifungseffekten erfolgte 1992 in der Arbeit von Babuska und Suri [11].

Für niedrig-interpolierte Platten spielt das Querschub-Locking eine besondere Rolle, da es die Elementantwort dünner Platten signifikant verschlechtern kann. Querschub-Locking tritt dann auf, wenn für die Interpolation des Verschiebungsfeldes keine Kirchhoff-Love-Hypothese angewendet wird. Die Interpolation der Schubspannungen beinhalten dann Terme unterschiedlicher Ordnung, sodass bei reiner Biegung die Schubspannungen nicht in allen Punkten im Element verschwinden [28]. Wichtige Beiträge zur Eliminierung von Querschubversteifungseffekten sind die von Doherty et al. [37] 1969 angewandte Unterintegration, dass von MacNeal 1978 in [71] vorgeschlagene Assumed-Natural-Strain (ANS)-Konzept, die von Simo und Rifai 1990 in [114] veröffentlichte Enhanced-Assuemd-Strain (EAS)-Formulierung sowie das von Bletzinger 2000 in [27] vorgeschlagene Discrete-Shear-Gap (DSG)-Konzept. Einen umfassenden Überblick und Vergleich dieser Konzepte kann der Arbeit von Koschnick [59] entnommen werden.

Die Entwicklung finiter Elemente zur Beschreibung des Membranverhaltens von Flächentragwerken begann noch erheblich früher. Das von Turner 1956 in [120] vorgeschlagene Constant-Strain-Triangle (CST) war das erste finite Element überhaupt. Es ist das einfachste mögliche Membranelement. Es besitzt drei Knoten mit je zwei Freiheitsgraden pro Knoten und einer linearen Interpolation der Freiheitsgrade im Element unter Verwendung vollständiger Ansatzfunktionen. Eine der wenigen Möglichkeiten, dass Antwortverhalten dreiknotiger Membranelemente zu verbessern, ist die Erweiterung der Elementfreiheitsgrade durch Knotenrotationen um die Achse senkrecht zur Elementebene. Das erste Dreieckmembranelement mit Drillfreiheitsgraden wurde 1984 von Allman [6] vorgeschlagen. Dieses Element, auch Allman-Dreieck genannt, kann als Vorgänger einer von Allman 1988 publizierten allgemeineren Formulierung (siehe [7]) betrachtet werden. In [7] werden kubische Polynome in natürlichen Dreieckskoordinaten zur Interpolation des Membranverschiebungsfeld verwendet. Die zusätzlichen unbekannten Koeffizienten des Verschiebungsfeldes werden unter Berücksichtigung der Drillfreiheitsgrade und einer zusätzlichen Diskretisierung des Randes mit balkenähnlichen Ansatzfunktionen abgeleitet. Infolge seiner Komplexität ist diese Formulierung jedoch weniger populär als das Allman-Dreieck

[6]. Dieses besitzt die Besonderheit, dass unter bestimmten Verformungszuständen eine Singularität auftritt. Cook zeigt in [32], dass das Allman-Dreieck aus dem Linear-Strain-Triangle (LST)-Element mit einer Transformation abgeleitet werden kann. Das LST ist eine Erweiterung des CST mit drei zusätzlichen Kantenmittelknoten und einer hieraus folgenden quadratischen Interpolation der Verschiebungen im Element. Die von Cook in [32] dargestellte Transformation wird aus der Beschreibung der Mittelkantenverschiebungen durch die Knoteneckrotationen abgeleitet.

Die Freie-Formulierung (FF) wurde 1984 von Bergan und Nygård [22] vorgeschlagen. Sie stellt ein allgemeines Verfahren zur Entwicklung Finiter-Element-Formulierungen dar. Die FF basiert auf einer Re-Parametrisierung des Verschiebungsfeldes durch Verformungsmoden und modale Parameter. Die auf der FF basierenden Formulierungen, Extended-Free-Formulation (EFF) und Assumed-Natural-Deviatoric-Strain (ANDES)-Formulation, wurden 1992 von Alvin et al. [9], Felippa und Militello [45] sowie Felippa und Alexander [43] in einer dreiteiligen Serie präsentiert. Felippa veröffentlichte 2005 in einem technischen Report [44] das sogenannte optimale Membranelement. Dieses Element stellt eine Instanz des ANDES-Membranelements mit einem speziellen Satz modaler Parameter (optimale Parameter) dar und liefert ein von dem Elementkantenlängenverhältnis unabhängiges Antwortverhalten im Falle reiner Biegung in der Ebene. Als Ergebnis einer Parameterstudie veröffentlichen Shin et al. 2014 in [112] einen ANDES-Membranelement-Parametersatz, welcher in Kombination mit einem Plattenelement in einer Schalenformulierung zu einem verbesserten Antwortverhalten für diverse Benchmarkfälle führt.

Für die Modellierung dünnwandiger Mehrschichtmaterialsysteme haben sich Einzelschicht- und Mehrschicht-Theorien im Zuge von Schalenformulierung bewährt. Einzelschicht-Theorien (engl. *single-layer approach*) berücksichtigen das Laminat als eine einzelne Schicht mit äquivalenten Materialparametern. Diese Einzelschicht-Theorien können unterteilt werden in Theorien erster Ordnung und Theorien höherer Ordnung. Die Ordnung beschreibt dabei den Interpolationsgrad der Verformungen entlang der Dickenrichtung. Äquivalente Einzelschicht-Theorien erster Ordnung führen unter Verwendung der Kirchhoff-Love-Hypothese [69] zur klassischen Laminattheorie (engl. *Classical-Lamination-Theory* (CLT)) und unter Verwendung der Mindlin-Reissener Kinematik [82] zur Schubdeformationstheorie erster Ordnung (engl. *first-order shear deformation theory* (FSDT)). Höhere Interpolationsordnungen (engl. *higher-order shear deformation theory* (HSDT)) approximieren den Schalenquerschnitt als eine knickfreie gewölbte Fläche und erlauben so eine genauere Beschreibung der Querschnittsverformung, welche aber mit einem höheren numerischen Aufwand einher geht [104].

Der zweite Ansatz, der Ansatz mit Mehrschichten-Formulierungen oder auch Multi-Direktor-

Formulierungen, basiert auf der Anwendung mehrerer Einzelschicht-Formulierungen in Verbindung mit kinematischen Kopplungen zwischen den Einzelschichten. Für immer dünner werdende Schichten kann prinzipiell jeder Funktionsverlauf über die Dicke approximiert werden. Eine Netzverdichtung in Dickenrichtung ermöglicht zwar eine genauere Beschreibung interlaminarer Effekte [103], führt jedoch mit einer steigenden Anzahl an Schichten zu einem erheblich höheren numerischen Aufwand. Qualitative Vergleiche zwischen Einzelschicht- und Mehrschicht-Theorien kann den Arbeiten [24], [73] sowie [54] entnommen werden.

Piezoelektrische Applikationen, wie z. B. in Dickenrichtung polarisierte Piezokeramiken, werden im Betrieb in der Regel mit konstanten elektrischen Signalen an diskreten Orten gesteuert. Eine konstante Modellierung (C^{-1}-stetige) des elektrischen Potentials entlang der Elementflächenkoordinaten - wie sie etwa in den Arbeiten von Hwang und Park [50], Balamurugan und Narayanan [12] sowie Marinkovic [75] angewendet wird - scheint somit eine ausreichende Approximation darzustellen. Mesecke-Rischmann vergleicht in [81] die Berechnungsergebnisse unter Verwendung einer C^{-1}- und C^0-stetigen Formulierung (Stetigkeit in Längsrichtung) und kommt zu dem Ergebnis, dass infolge der unterschiedlichen Approximation der elektromechanischen Kopplung eine konstante Modellierung des elektrischen Potentials zu einem weicheren Elementverhalten führt. Mesecke-Rischmann führt in [81] aus, dass der Unterschied für gängige technische Anwendungen vernachlässigbar sei. Die notwendigen Modellierungsansätze des elektrischen Potentials und des elektrischen Feldes in Dickenrichtung, die das Gaußsche Gesetz erfüllen würden, sind abhängig von der verwendeten Theorie zur Beschreibung der Kinematik. Die durchgeführten Untersuchungen von Yang [126] und Marinkovic [74] zeigen, dass eine konsistente Erfüllung des Gaußschen Gesetzes für eine lineare Variation der Verschiebung über die Dicke eine quadratische Funktion für das elektrische Potential und damit eine lineare Funktion für das elektrische Feld erfordern. Anders als bei einem linearen Verlauf resultiert aus einer quadratischen Modellierung eine zusätzliche Steifigkeit, welche zu einer besseren Beschreibung des realen Werkstoffverhaltens führt. Dieser Unterschied kann nach einer detaillierten Untersuchung von Marinkovic und Gabbert [76] jedoch in guter Näherung für eine Vielzahl technischer Anwendungen piezoelektrischer Materialien vernachlässigt werden. Detaillierte Vergleiche zwischen einer linearen und quadratischen Modellierung des elektrischen Potentials in Dickenrichtung können den Arbeiten [81], [13], [85], [121], entnommen werden.

Die Untersuchungen von Mukherjee und Chauduri [80], Legner [65], Klinkel und Wagner [56] sowie Tan und Vu-Quoc [117] zeigen die Notwendigkeit der Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte für die Berechnung der Sensorspannungen, der richtungs-

treuen Aktuatorlasten sowie einer realistischen Reproduktion des Verformungsverhaltens. Für die Beschreibung geometrisch nichtlinearer Effekte besonderes stark in der Literatur vertreten sind die drei Lagrange-Formulierungen: die Totale-Lagrange (TL)-Formulierung, die Updated-Lagrange (UL)-Formulierungen und die korotierende Lagrange-Formulierung (CR; engl. *co-rotational formuluation*). Die 1980 veröffentlichte Arbeit von Bathe und Bolourchi [16] beschreibt detailliert die Implementierung der Totalen- und der Updated-Lagrange-Formulierungen für Schalenelemente. Surana wies 1983 in [116] darauf hin, dass die Formulierungen aufgrund der Annahme infinitesimaler Rotationen sehr kleine Last-Inkremente benötigen, und so erweitertete er die Formulierungen mit den Ausdrücken zur Berücksichtigung finiter Rotationen. Die korotierende Formulierung wurde erstmals 1969 von Wemper in [124] vorgeschlagen. Rankin and Brogan entwickelten 1986 das element unabhängige korotierende Konzept (engl. *Element Independent Corotational Concept* (EI-CR)), dass seitdem die Grundlage vieler mitdrehender Formulierungen darstellt und von vielen Autoren angewendet wurde, insbesondere von Rankin and Nour-Omid [88] sowie von Pacoste [89]. Das EICR kann auf eine unsymmetrische tangentialen Steifigkeitsmatrix führen, die für eine effektive programmiertechnisch Umsetzung ungünstig wäre. Izzuddin und Liang [53], Marinkovic und Zehn [79], Tang et al. [118] empfehlen deshalb, vereinfachte korotierende Formulierungen mit symmetrischen Systemmatrizen zu verwenden.
Im Vergleich zu viereckigen Elementen sind leistungsfähige niedrig interpolierte dreieckige piezoelektrische Schalenentwicklungen weit weniger in der Literatur vertreten. Das von Shen und Sharope 1996 in [111] vorgeschlagene dreiknotige Schalenelement besitzt 15 mechanische Freiheitsgrade, drei Translationen und zwei Rotationen je Knoten, und kann zur Berechnung von linearen und nichtlinearen Akturator-Lastfällen verwendet werden. Das Element wird durch die Kombination einer DKT-Platte (Kirchhoff-Love-Kinematik) und einer CST-Membran aufgestellt. Das von Simoes Moita et al. 2002 in [83] veröffentlichte dreiknotige Schalenelement basiert auf der klassischen Laminattheorie. Die Formulierung berücksichtigt sowohl den direkten als auch den indirekten Piezoeffekt unter Verwendung einer schichtweisen konstanten Approximation des elektrischen Potenzials in Dickenrichtung und unter einer konstanten Modellierung in der Schalenebene. Geometrisch nichtlineare Effekte werden mit der Updated-Lagrange-Formulierung beschrieben. Legner et al. entwickeln 2013 in [66] ein vierknotiges bilineares piezoelektrisches Schalenelement mit sechs mechanischen Knotenfreiheitsgraden und einem elektrischen Knotenfreiheitsgrad je definierter Piezoschicht. Die mechanische Steifigkeitsmatrix basiert auf der von Wagner und Gruttmann in [123] vorgeschlagenen Formulierung und verwendet die EAS- und die ANS-Methode zur Eliminierung mechanischer Versteifungseffekte. Die elektromechanische Koppelung erfolgt zwischen dem gesamten Verzerrungstensor und dem in Dicken-

richtung wirkenden elektrischen Feld. Geometrisch nichtlineare Effekte werden mit Hilfe der Totalen-Lagrange-Formulierung beschrieben. Die von Phung-Van et al. [92] 2013 publizierte Arbeit erweitert die von Nguyen-Thoi 2013 entwickelte CS-DSG3 Formulierung [86] für die Analyse piezoelektrischer Strukturen in der linearen Statik und Dynamik mit Hilfe einer linearen Modellierung des elektrischen Potenzials in Dickenrichtung und einer konstanten Modellierung in der Schalenebene. Für jede piezoelektrische Schicht resultiert ein elektrischer Freiheitsgrad. Die Kombination des mechanischen Elements aus einer CS-DSG3-Platte und einem CST-Membranelement kann jedoch aufgrund der unzureichenden Beschreibung des Membranverhaltens für gekrümmte Strukturen teilweise zu unbrauchbaren Berechnungsergebnissen führen. Klassische Benchmark-Lastfälle wie z. B. der Twisted Beam und das Raasch Problem (siehe Kapitel 6) konvergieren in der linearen Statik für feiner werdende Netze zu falschen Werten (siehe Anhang B.4). Niu entwickelte 2017 in [87] ein piezoelektrisches dreiknotiges Schalenelement mit 18 mechanischen und 3 elektrischen Freiheitsgraden je Schicht. Die elektrischen Freiheitsgrade setzen sich aus den Potentialdifferenzen der piezoelektrischen Ober- und Unterschicht an den Knoten zusammen. Das mechanische Verhalten basiert auf der von Seide 1989 veröffentlichten Mehrschicht-Schalenformulierung [110]. Geometrische nichtlineare Effekte werden unter Verwendung der Updated-Lagrange-Formulierung berücksichtigt. Nach besten Wissen des Autors ist das 2016 von Rama et al. in [94] vorgeschlagene Schalenelement das erste veröffentlichte dreiknotige piezoelektrische Schalenelement, dass eine mitdrehende Formulierung verwendet. Bisegnaa et al. veröffentlichten 2017 in [25] eine piezoelektrische Elementformulierung auf Grundlage eines dreiknotigen DKT-Plattenelements und einer OPT-Membran Formulierung mit sechs mechanischen Knotenfreiheitsgraden und einem elektrischen Freiheitsgrad je piezoelektrischer Schicht. Das Element implementiert die klassische Laminattheorie sowie eine konsistente, auf der polaren Dekomposition basierenden, korotierende Formierung.

1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Effiziente numerische Berechnungen elektromechanisch gekoppelter dünnwandiger Systeme sind mit kommerziellen Finite-Elemente-Programmsystemen nur eingeschränkt möglich. Finite-Elemente-Programme wie Ansys und Abaqus besitzen nur piezoelektrische Volumenelemente, die für die Berechnung dünnwandiger Flächentragwerke nicht zweckmäßig sind.

Die Entwicklung neuer adaptiver Schalenelemente und die Erweiterung bestehender mechanischer Elemente stellt einen notwendigen Schritt zur effizienten Berechnung solcher

Systeme dar. Schalenelemente niedriger Ansatzordnung ermöglichen eine schnelle und zuverlässige Berechnung unter Berücksichtigung einer geringen Anzahl an Freiheitsgraden. Dreieckige Schalen sind aufgrund ihrer hohen Flexibilität bei der Vernetzung komplexer Geometrien unverzichtbar. Wie bereits in der vorangegangenen Literaturübersicht erwähnt, ist die Anzahl piezoelektrischer Schalenentwicklungen mit niedrig interpolierten viereckigen Elementen im Vergleich zu dreieckigen jedoch deutlich höher.Dies lässt sich dadurch erklären das viereckige Elemente in der Regel eine bessere Performance aufweisen [58]. Zentrales Anliegen dieser Arbeit ist die Entwicklung eines schnell konvergierenden robusten dreiknotigen Verbundschalenelementes zur Berechnung adaptiver Strukturen. Besonderes Augenmerk der Arbeit gilt der Entwicklung einer effizienten FE-Formulierung, die eine schnelle Berechnung dünwanndiger piezoelektrischer Strukturen unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte ermöglicht. Notwendig ist dazu eine Approximation des mechanischen Elementverhaltens, eine Beschreibung der elektrostatischen Wirkmechanismen sowie eine geeignete geometrisch nichtlineare FE-Formulierung.
Diese Arbeit fasst die vom Autor in den Publikationen [94], [96], [78], [95], [97] und [98] dargestellte Elemententwicklung zusammen. Aus den Zielen der Arbeit ergibt sich folgender Aufbau: Kapitel 2 beschreibt die zu Grunde liegenden Annahmen und Vereinfachungen, auf der die Modellierung der untersuchten Laminatmaterialsysteme basiert. In Kapitel 3 werden die phänomenologischen Betrachtungen des Werkstoffverhaltens von Piezoelektrika erörtert, um dann mit Hilfe geeigneter Annahmen konstitutive Gleichungen für die Approximation des makroskopischen Strukturverhaltens dünnwandiger Strukturen abzuleiten. Das vierte Kapitel widmet sich der Herleitung der Finiten-Elemente-Gleichungen zur Näherung des Systemverhaltens piezoelektrischer Schalenstrukturen. Dabei werden die Systemmatrizen und die Vektoren ausgehend von der Annahme eines konservativen Systems hergeleitet und anschließend um die Ausdrücke zur Beschreibung dissipativer und geometrisch nichtlinearer Effekte erweitert. Kapitel 5 dokumentiert detailliert die Elemententwicklung. Dabei wird die mechanische Steifigkeitsmatrix mit Hilfe einer neuartigen Kombination aus einer modifizierten DSG3-Plattesteifigkeit und einer für eine Schalenanwendung optimierte ANDES-Membransteifigkeitsmatrix gebildet. Die elektromechanische Koppelung wird ausgehend von einem linearen Materialgesetz mit den in der Schalenebene wirkenden Verzerrungen und dem in Dickenrichtung wirkenden elektrischen Feldes gebildet. Geometrisch nichtlineare Effekte werden mit einer vereinfachten korotierenden Formulierung beschrieben. Unter der Annahme kleiner lokaler Verzerrungen und eines linear-elastischen Materialverhaltens können so die Matrizen und die Vektoren der linearen Elementformulierung durch bestimmte Transformationen in einer geometrisch nichtlinearen Analyse verwendet werden. Auf diese Weise können notwendigen Rechenoperationen

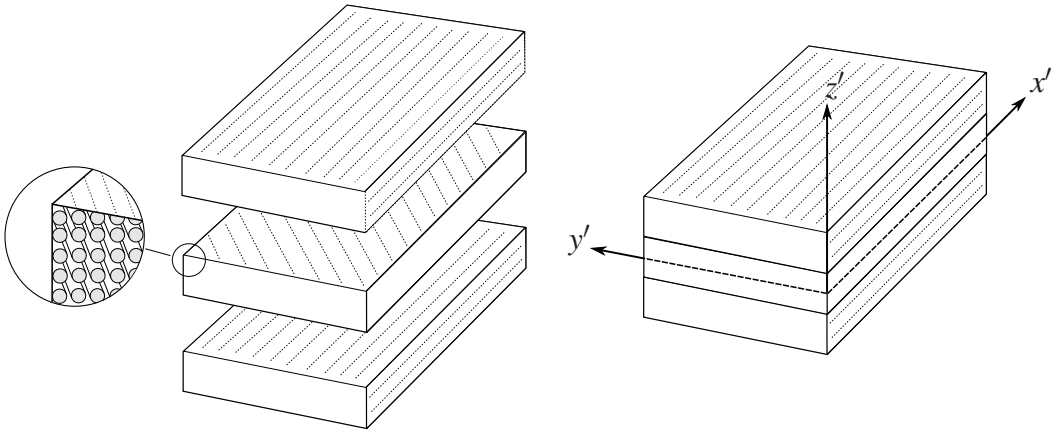
signifikant reduziert werden. In Kapitel 6 wird die vorgestellte Formulierung verifiziert, und zwar mit Hilfe von Vergleichsberechnungen mit dem kommerziellen Finite-Elemente-Programm Abaqus sowie mit Ergebnissen aus der Literatur. Abschließend werden in Kapitel 7 die in dieser Arbeit erzielten Fortschritte zusammengefasst sowie mögliche weitergehende Entwicklungen auf diesem Gebiet erörtert.

Kapitel 2

Modellierung von Verbundwerkstoffen

Als Verbundwerkstoffe (Kompositwerkstoff) werden Werkstoffe bezeichnet, die aus zwei oder mehr Materialien bestehen und dabei einen neuen Werkstoff bilden. Das Ziel ist es hierbei, die positiven Eigenschaften mehrerer Werkstoffe in einem neuen Verbundwerkstoff zu kombinieren. Ein Beispiel hierfür sind faserverstärkte Kunststoffe, bei denen die Fasern die Steifigkeit des Kunststoffs erhöhen, während die Kunststoffmatrix die Fasern in Form hält bzw. die äußeren mechanischen Lasten auf die Fasern überträgt. Durch die Verwendung von Fasern können so speziell an die Anforderungen einer Konstruktion angepasste Werkstoffe mit richtungsabhängigen Elastizitätseigenschaften (Materialeigenschaften) angefertigt werden. Durch die gezielte Kombination unterschiedlicher Werkstoffe können einige Vorteile gegenüber klassischen Konstruktionsmaterialien erzielt werden, wie z. B. eine hohe Steifigkeit und Festigkeit bei gleichzeitig niedriger Dichte, oder eine kostengünstigere Integration von Einzelkomponenten (Integralbauweise) und eine sehr gute Korrosionsbeständigkeit [108]. Das sehr gute Verhältnis von Dichte zu Steifigkeit macht Verbundwerkstoffe zu einem vielseitig verwendbaren Leichtbauwerkstoff, der in unterschiedlichen Industriezweigen Anwendung findet. Leichtbaustrukturen sind typischerweise dünnwandig und flächig gestaltet, so dass äußere Kräfte überwiegend in der Ebene wirksam werden. Diese Kräfte variieren je nach Konstruktion und Belastung in ihrer Größe und Richtung. In einem Faserverbund können die lasttragenden Fasern ebenfalls in verschiedenen Richtungen angeordnet werden. Technisch lässt sich das z. B. durch das Stapeln von Einzelschichten mit unterschiedlicher Faserrichtung realisieren. Im Folgenden wird angenommen, dass sowohl Matrix und Faser als auch die Einzelschichten untereinander ideal verbunden sind und somit keine Relativverschiebungen auftreten. Einen solchen Verbund, aus unterschiedlichen Einzelschichten, wie in Abb. 2.1 dargestellt, nennt man Laminat oder auch Mehrschichten-Verbund (MSV). Die Einzelschichten werden in der Regel als unidirektionale (UD) Schicht ausgeführt, sie stellen damit die Grundbausteine klassischer Lami-

nate dar. Es wird hierbei angenommen, dass die Fasern der UD-Schichten ohne Unterbrechung parallel in einer Richtung ideal gerade verlaufen [108]. Die Lage der UD-Schichten



a) b)

Abb. 2.1: a) Mehrschichtverbund aus mehreren UD-Schichten b) MSV-Referenzkoordinatensystem

werden bezüglich des MSV-Referenzkoordinatensystems (MSV-KOS) beschrieben (siehe Abb. 2.1), welches sich auf der Mittelfläche des Verbundes befindet. Zur Beschreibung des Schichtaufbaus wird folgende Notation verwendet:

- Jede UD-Schicht ist durch eine Nummer gekennzeichnet, die den Winkel zwischen der Faserorientierung und der x'-Referenzachse angibt.
- Die UD-Schichten innerhalb des Schichtaufbaus werden durch einen Schrägstrich (/) getrennt, wenn sich das Material oder die Faserorientierung ändert.
- Bei symmetrischen Laminaten wird der halbe Schichtaufbau dargestellt und dabei die Symmetrie durch das Symbol $[...]_s$ gekennzeichnet, analoges Vorgehen für antisymmetrische Laminate hingegen mit dem Symbol $[...]_{asym}$.

2.1 Elastisches Verhalten von Verbundwerkstoffen

Im Folgenden werden die Begriffe „Verzerrung“ und „Spannung“ aus kontinuumsmechanischer Sicht sowie deren Darstellung als Vektoren erläutert. Des Weiteren werden deren Relation zueinander in Form unterschiedlicher Materialgesetze dargestellt. Anschließend werden die für die Modellierung eines MSV notwendigen, Gleichungen zur Transformation der Materialgesetze gegeben.

2.1.1 Verzerrungen und Spannungen

In einer Struktur wirken innere Kräfte infolge äußerer Belastungen. Bezieht man diese Kräfte auf Flächen erhält man deren Beanspruchung in Form von Flächenlasten (Spannungen). Für eine große Anzahl praktischer Anwendungen ist es ausreichend, die UD-Schichten auf makromechanischer Ebene zu betrachten. Die elastischen Eigenschaften der Fasern und der Matrix werden verschmiert (homogenisiert) und die einzelne UD-Schicht wird als homogenes Kontinuum betrachtet.

2.1.1.1 Verzerrungen

In Abb. 2.2 ist ein Kontinuum in der Anfangskonfiguration ($t = 0$) und in der Momentankonfiguration ($t > 0$) im kartesischen Koordinatensystem ($\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}$) dargestellt. Der Verschiebungsvektor $\{u\}$ für einen beliebigen Punkt P lässt sich aus der Differenz der Ortsvektoren des Punktes P in der Anfangskonfiguration $\{X\}$ und in der Momentankonfiguration $\{x\}$ bestimmen:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix}^T = \{x\} - \{X\} \tag{2.1}$$

Unter der Voraussetzung einer eindeutigen Zuordnung zwischen $\{X\}$ und $\{x\}$, können der Ortsvektor $\{x\}$ und der Verschiebungsvektor $\{u\}$, als Funktion von $\{X\}$ und t aufgefasst werden. Die Transformation eines differentiellen Linienelements aus der Anfangskonfigu-

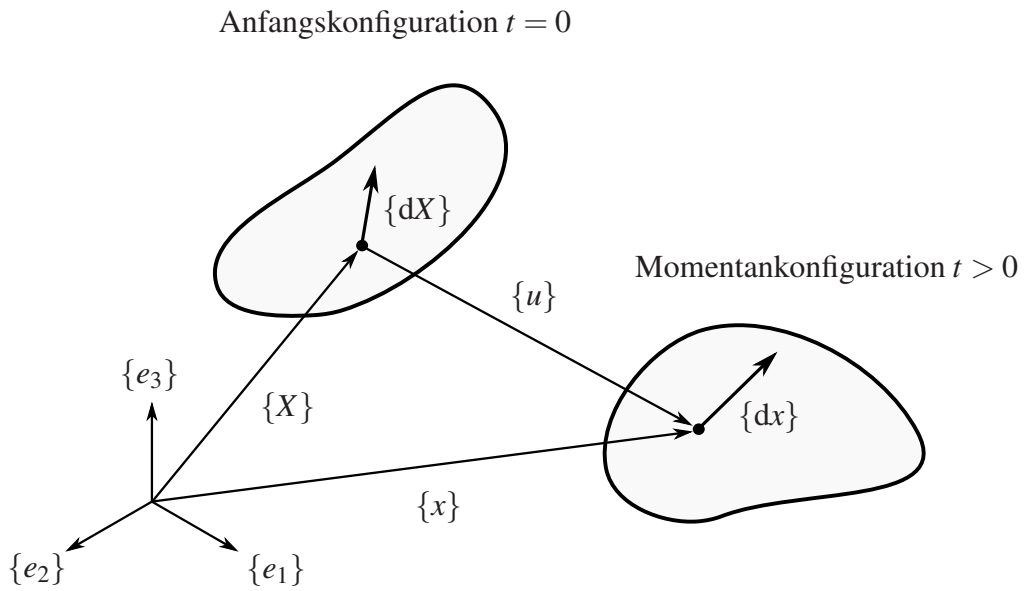


Abb. 2.2: Positionsvektor und Verschiebungen

ration $\{dX\}$ in die Momentankonfiguration $\{dx\}$ wird durch den Deformationsgradienten

$[F]$ beschrieben:

$$\{\mathrm{d}x\} = \frac{\partial x}{\partial X}\{\mathrm{d}X\} = [F]\{\mathrm{d}X\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}X_1 \\ \mathrm{d}X_2 \\ \mathrm{d}X_3 \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

oder:

$$\{\mathrm{d}x\} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1+\frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1+\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}X_1 \\ \mathrm{d}X_2 \\ \mathrm{d}X_3 \end{Bmatrix} = [I+D]\{\mathrm{d}X\} \tag{2.3}$$

mit der Matrix der partiellen Ableitungen der Verschiebungskomponenten $[D]$ und der 3×3 Einheitsmatrix $[I]$. Zur Herleitung der Verzerrungen wird die Differenz der quadrierten infinitesimalen Abstände $\{\mathrm{d}X\}^2$ und $\{\mathrm{d}x\}^2$ entsprechend [35] herangezogen:

$$\{\mathrm{d}x\}^2 - \{\mathrm{d}X\}^2 = 2\{\mathrm{d}X\}^T[\varepsilon^g]\{\mathrm{d}X\} \tag{2.4}$$

Aus Gleichung (2.2) und (2.4) folgt der Greensche Verzerrungstensor $[\varepsilon^g]$:

$$[\varepsilon^g] = \frac{1}{2}([F]^T[F]-[I]) = \frac{1}{2}[[D]+[D]^T+[D]^T[D]] \tag{2.5}$$

Es existieren neben den Greenschen Verzerrungen noch eine Vielzahl weiterer Verzerrungsmaße, die jeweils ihre Berechtigung und Vorteile in ihren Anwendungsgebieten besitzen [8]. Der dargestellte Greensche Verzerrungstensor repräsentiert die Verzerrungen in der aktuellen Konfiguration ($t > 0$) bezogen auf eine vorangegangene Konfiguration und kann entsprechend der Gleichung (2.5) in einen linearen $[\varepsilon_{lin}]$ und einen quadratischen Anteil $[\varepsilon_{nl}]$ aufgeteilt werden:

$$[\varepsilon^g] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = [\varepsilon_{lin}]+[\varepsilon_{nl}] \tag{2.6}$$

Der Verzerrungstensor $[\varepsilon^g]$ ist symmetrisch und besitzt dementsprechend 6 unabhängige Komponenten. Mit der Konvention (Voigt-Notation):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11},\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22},\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33},\ \gamma_4 = 2\varepsilon_{23},\ \gamma_5 = 2\varepsilon_{13},\ \gamma_6 = 2\varepsilon_{12} \tag{2.7}$$

lässt sich der Verzerrungstensor als Vektor wie folgt darstellen:

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)^2\right) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

Im Falle kleiner Verzerrungen können die quadratischen Terme in Gleichung (2.8) vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{lin}\} &= \left\{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5 \quad \gamma_6\right\}^T \\ &= \left\{\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \quad \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)\right\}^T \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.1.1.2 Spannungen

Auf den in Abb. 2.3 dargestellten Körper B wirken mechanische Belastungen ein. Die resultierenden inneren Kräfte sind nicht sichtbar, können aber durch einen Freischnitt des Körpers B in zwei Teile B_1 und B_2 entsprechend Abb. 2.3 sichtbar gemacht werden. Der

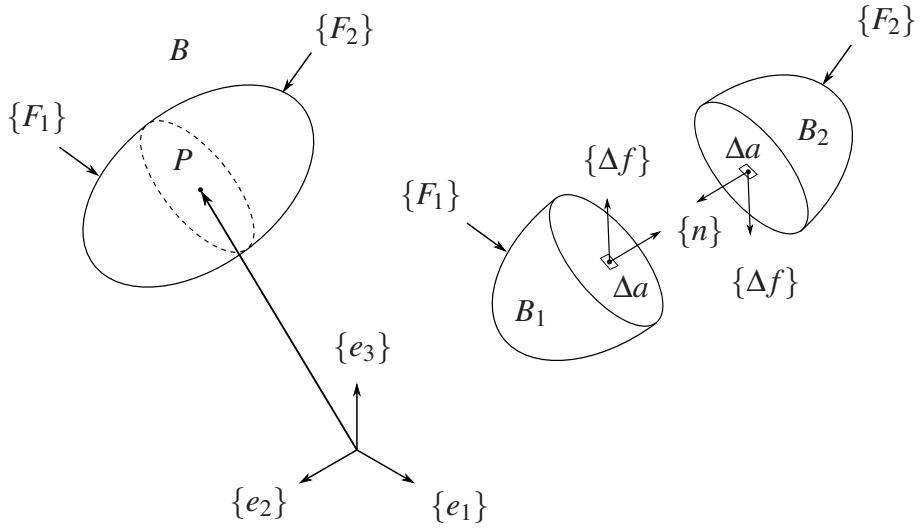


Abb. 2.3: Körper B zerlegt in B_1 und B_2

Schnitt durch den Körper B erfolgt längs einer Ebene mit der Normalen $\{n\}$. Der Span-

nungsvektor in Punkt P ist durch den folgenden Grenzwert definiert:

$$\{t\} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\{\Delta f\}}{\Delta a} = \frac{\{\mathrm{d}f\}}{\mathrm{d}a} \tag{2.10}$$

Dabei ist $\{\Delta f\}$ der auf die Oberfläche Δa wirkende innere Kraftvektor. Die beiden Teilkörper (B_1, B_2) sind im Gleichgewicht („actio = reactio“), so dass in jedem Punkt des Körpers B gilt:

$$\{t(\{n\})\} = -\{t(-\{n\})\} \tag{2.11}$$

Der Vektor $\{t\}$, auch Cauchyscher Spannungsvektor genannt, ist auf die Momentankonfiguration bezogen. In jedem Punkt des Körpers B können beliebig viele Schnitte unterschiedlicher Orientierung definiert werden. Zu jedem dieser Schnitte gehören ein Spannungsvektor und eine Normale, der die Schnittrichtung definiert. Der Cauchyscher Spannungstensor $[\sigma]$ wird aus den drei Spannungsvektoren, bezogen auf drei zueinander orthogonalen Schnitten entlang $\{e_1\}$, $\{e_2\}$ und $\{e_3\}$, gebildet.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Mit der Konvention:

$$\sigma_1 = \sigma_{11},\ \sigma_2 = \sigma_{22},\ \sigma_3 = \sigma_{33},\ \sigma_4 = \sigma_{23},\ \sigma_5 = \sigma_{13},\ \sigma_6 = \sigma_{12} \tag{2.13}$$

ergibt sich (2.12), dargestellt als Vektor zu:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \end{Bmatrix}^T \tag{2.14}$$

2.1.2 Formen der Materialmatrizen

Das Stoffgesetz eines Materials beschreibt die Relation zwischen Spannungen und Verzerrungen. Es kann nur auf Grundlage von Experimenten gewonnen werden. Ist das Materialverhalten in allen Punkten gleich, handelt es sich um ein homogenes Material, andernfalls ist es inhomogen. Die meisten Materialien besitzen einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen, der aber in vielen Fällen in guter Näherung für eine feste Temperatur und kleine Spannungsamplituden und -raten als linear angenommen werden kann. Ein solches Materialverhalten wird als ideal linear elastisch (generalisiertes Hookesches Gesetz) bezeichnet und kann bezogen auf die Materialorientierung ($\{e_1\}$,

$\{e_2\}$, $\{e_3\}$) in folgender Form angegeben werden:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

mit den elastischen Koeffizient C_{ij} bzw. der symmetrischen Materialmatrix $[C]$ (Steifigkeitsmatrix). Gleichung (2.15) in ihrer inversen Form führt zu

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

mit der Nachgiebigkeitsmatrix $[S]$ und ihren Komponenten S_{ij}. Zwischen der Steifigkeits- und der Nachgiebigkeitsmatrix besteht folgender Zusammenhang:

$$[S] = [C]^{-1} \tag{2.17}$$

Für den Fall, dass das Material 3 senkrecht zueinander stehende Symmetrieebenen besitzt, werden nur noch 9 unabhängige Materialparameter zur Formulierung des Elastizitätsgesetzes benötigt (Orthotropie). Das Material besitzt dann drei Materialvorzugrichtungen, welche normal zu den Symmetrieebenen liegen. Die Normalspannungen und Schubspannungen sowie die Dehnungen und die Schiebungen sind dann aufgrund der Symmetrien vollständig entkoppelt:

$$[C]_{\text{ortho}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Die transversale Isotropie stellt einen Sonderfall der Orthotropie dar. Unter der Annahme einer idealen UD-Schicht mit einer homogenen Faserverteilung kann in guter Näherung

eine isotrope Ebene normal zur Faserlängsrichtung ($\{e_2\}$-$\{e_3\}$-Ebene; siehe Abb. 2.4) angenommen werden. Die Symmetrie kann anhand einer in Abb. 2.4 dargestellt Elementarzellen einer UD-Schicht nachvollzogen werden [74]. Das Materialverhalten in der $\{e_2\}$-$\{e_3\}$-Ebene ist im Gegensatz zu dem in der $\{e_1\}$-$\{e_2\}$-Ebene richtungsunabhängig ist und damit invariant bezüglich einer Drehung um die $\{e_1\}$-Achse. Die Homogenisierung einer

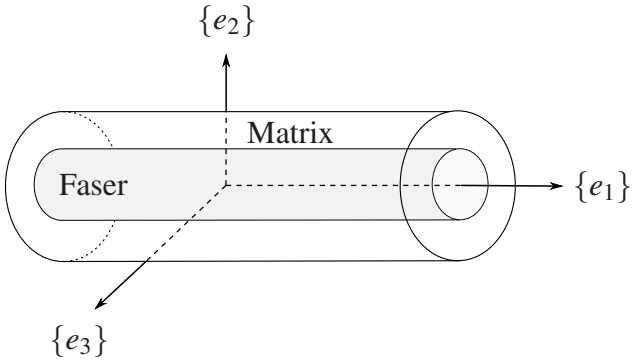


Abb. 2.4: Elementarzelle einer UD-Schicht

solchen Zelle führt zu transversalen isotropen Materialeigenschaften, was bedeutet, dass die Materialeigenschaften in der $\{e_2\}$-$\{e_3\}$-Ebene, infolge der Rotationssymmetrie, isotrop sind. Hierdurch reduziert sich die Anzahl der notwendigen Parameter weiter auf fünf:

$$[C]_{\text{transiso}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Im Fall von isotropen Materialeigenschaften ist die Materialmatrix invariant bezüglich der Drehung des Bezugssystems und die Anzahl der Konstanten reduziert sich auf zwei:

$$[C]_{\text{iso}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

2.1.3 Polartransformation der Spannungen und Verzerrungen

Für die UD-Schichten werden, wie bereits erwähnt, transversal isotrope Materialeigenschaften angenommen. Solch ein Material besitzt zwei ausgezeichnete Richtungen, längs

$\{e_1\}$ und quer $\{e_2\}$ zur Faserorientierung. Der MSV ist in der Regel aus Schichten mit unterschiedlicher Faserorientierung aufgebaut, sodass die Faserorientierung einzelner Schichten nicht mehr mit dem MSV-KOS übereinstimmt. Die Faserorientierung der UD-Schichten wird, wie in Abb. 2.5 dargestellt, durch den Winkel α in Bezug zum MSV-KOS angegeben. Die Transformation des Spannungs- $\{\sigma\}$ und des Verzerrungsvektor s $\{\varepsilon\}$, vom MSV-KOS

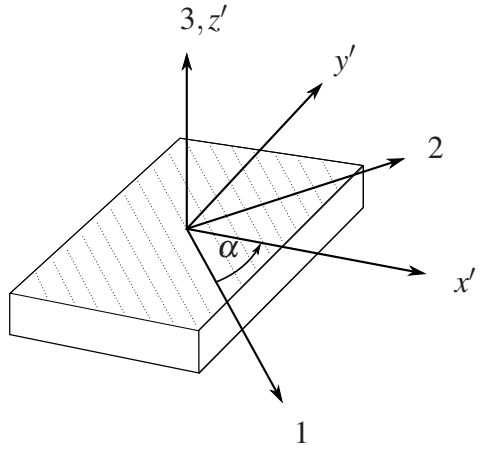


Abb. 2.5: Faserorientierung, positiver Faserwinkel α

in die neue Basis $(1,2,3)$, ist gegeben durch:

$$\{\sigma\}_{123} = [T_\sigma]\{\sigma\} \tag{2.21}$$

$$\{\varepsilon\}_{123} = [T_\varepsilon]\{\varepsilon\} \tag{2.22}$$

mit den Transformationsmatrizen:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) & 0 & 0 & 0 & -2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

und

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Die Inversen der Transformationsmatrizen (2.23) und (2.24) können durch Einsetzen des negativen Winkels α gewonnen werden:

$$\{\sigma\} = [T_\sigma]^{-1}\{\sigma\}_{123} \tag{2.25}$$

$$\{\varepsilon\} = [T_\varepsilon]^{-1}\{\varepsilon\}_{123} \tag{2.26}$$

Mit den Gleichungen (2.21), (2.22) und ihren inversen Beziehungen kann dann die Drehung der UD-Materialmatrix in der Ebene beschrieben werden. Hierfür wird das generalisierte Hookesche Gesetz (2.15) in die Transformation (2.21) eingesetzt:

$$\{\sigma\}_{123} = [T_\sigma][C]\{\varepsilon\} \tag{2.27}$$

Anschließend werden die Verzerrungen $\{\varepsilon\}$ in die kartesische Basis $(1,2,3)$ transformiert:

$$\{\sigma\}_{123} = [T_\sigma][C][T_\varepsilon]^{-1}\{\varepsilon\}_{123} \tag{2.28}$$

Die Transformation der Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix von $(x'y'z')$ in $(1,2,3)$ und umgekehrt kann dann wie folgt angegeben werden:

$$[C]_{123} = [T_\sigma][C][T_\varepsilon]^{-1} \tag{2.29}$$

$$[C] = [T_\varepsilon][C]_{123}[T_\sigma]^{-1} \tag{2.30}$$

$$[S]_{123} = [T_\varepsilon][S][T_\sigma]^{-1} \tag{2.31}$$

$$[S] = [T_\sigma][S]_{123}[T_\varepsilon]^{-1} \tag{2.32}$$

2.2 Äquivalente Einzelschicht-Theorie

Zur Beschreibung der getroffenen kinematischen Annahmen des MSV werden ein Punkt Q auf der MSV-Referenzfläche (x'-y'-Ebene) und eine gerade Linie L_Q normal zu dieser Fläche (Dickenrichtung) betrachtet (siehe Abb. 2.6). Die Grundannahme der Einzelschichtkinematik ist, dass die Deformation eines Punktes, der auf einer Dickenrichtungslinie liegend, beschrieben werden kann durch ein Polynom mit der Variablen z' (Dickenrichtung) und durch mehrere von der Lage des Punktes auf der Referenzfläche abhängigen Koeffizienten. Im Rahmen dieser Arbeit wird der MSV als eine äquivalente Einzelschicht angenommen (entsprechend der *equivalent single-layer theory*). Dies bedeutet, dass entlang einer beliebigen Dickenrichtungslinie (Faser in z'-Richtung) nur eine Relation (Polynom) je Verformungskomponente besteht. Äquivalente Einzelschicht-Theorien begrenzen den Polynomgrad zur Beschreibung dieser Relationen in der Regel auf drei [23], sodass das Verschiebungsfeld im lokalen MSV-KOS wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_0 + z'a_{x'} + z'^2 b_{x'} + z'^3 c_{x'} \\ v'_0 + z'a_{y'} + z'^2 b_{y'} + z'^3 c_{y'} \\ w'_0 + z'a_{z'} + z'^2 b_{z'} \end{Bmatrix} \tag{2.33}$$

mit den Verschiebungskomponenten u', v', w' entlang der lokalen Achsen x', y', z' und den Koeffizienten $u'_0, v'_0, w'_0, a_{x'}, b_{x'}, c_{x'}, a_{y'}, b_{y'}, c_{y'}, a_{z'}$ und $b_{z'}$ (abhängig von der Lage auf der Referenzfläche). Der Grad des Polynoms zur Beschreibung der vertikalen Verschiebungs-

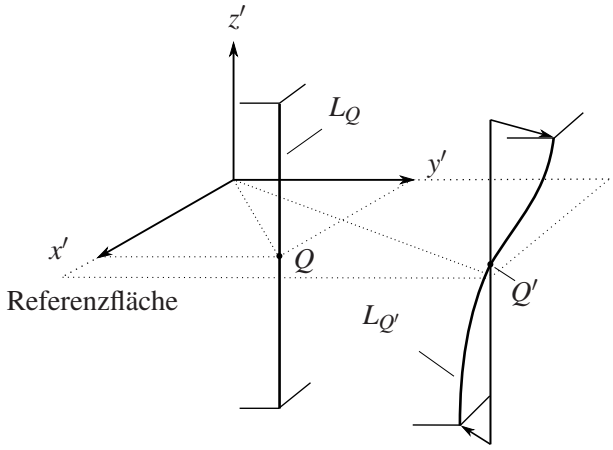


Abb. 2.6: Deformation einer Linie normal zur Mittelfläche (Dickenrichtungslinie)

komponente w' wird hierbei um eine Ordnung reduziert, damit die partiellen Ableitungen der Verschiebungen, welche die Schiebungen beschreiben (z. B. $\varepsilon_{x'z'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'}\right)$), die gleiche Ordnungen besitzen. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Schubdeformationstheorie erster Ordnung (engl. *First-order Shear Theory* (FSDT)) angewendet. Sie basiert auf der Mindlin-Reissner-Kinematik [82], die besagt: Eine gerade Linie normal zur Referenzfläche bleibt nach der Verformung gerade, ist aber nicht mehr zwangsläufig normal zur Referenzfläche (die Länge der Linie bleibt unverändert). Die Änderung der Neigungen zur Referenzfläche (siehe Abb. 2.7) ermöglicht die Berücksichtigung von Schubverformungen. Das Verschiebungsfeld wird dann durch 5 Variablen (3 Translationen und 2 Verdrehungen)

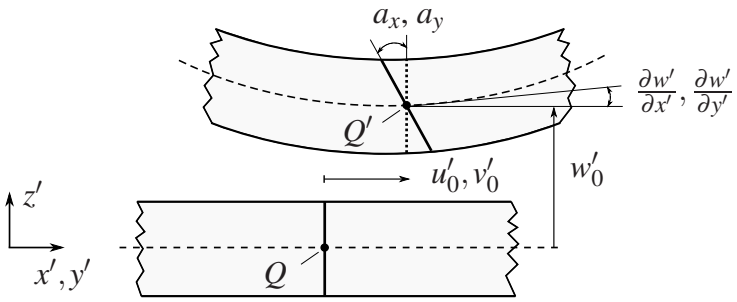


Abb. 2.7: Verformung des Querschnitts nach der Schubdeformationstheorie erster Ordnung

beschrieben, welche Funktionen der Lage auf der Referenzfläche sind. Ausgehend von Gleichung (2.33) folgt:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_0 + z' a_{x'} \\ v'_0 + z' a_{y'} \\ w'_0 \end{Bmatrix} \tag{2.34}$$

Die Neigungen der Dickenrichtungslinie $a_{x'}$, $a_{y'}$ können als Rotationen um die lokale y'- und x'-Achse $\theta_{y'}$ und $-\theta_{x'}$ im Sinne einer FEM-Formulierung ausgedrückt werden. Mit $a_{x'} = \theta_{y'}$ und $a_{y'} = -\theta_{x'}$ folgt:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_0 + z'\theta_{y'} \\ v'_0 - z'\theta_{x'} \\ w'_0 \end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

2.2.1 MSV-Verzerrungsfeld

Das Verzerrungsfeld wird auf Grundlage der linearen kinematischen Beziehungen (siehe Gleichung (2.35)) und unter Annahme kleiner Verzerrungen (2.9) gebildet:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x'x'} =& \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'_0}{\partial x'} + z'\frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \\
\varepsilon_{y'y'} =& \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial v'_0}{\partial y'} - z'\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} \\
\varepsilon_{z'z'} =& \frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{\partial w'_0}{\partial z'} \\
\varepsilon_{x'y'} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_0}{\partial y'} + \frac{\partial v'_0}{\partial x'} + z'(\frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} - \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'})\right) \\
\varepsilon_{x'z'} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'_0}{\partial x'} + \theta_{y'}\right) \\
\varepsilon_{y'z'} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'_0}{\partial y'} - \theta_{x'}\right)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Hieraus folgt der Vektor der Verzerrungen:

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon'\} &= \left\{\varepsilon_{x'x'} \quad \varepsilon_{y'y'} \quad \gamma_{x'y'} \quad \gamma_{z'x'} \quad \gamma_{y'x'}\right\}^T \\
&= \left\{\varepsilon_{x'x'} \quad \varepsilon_{y'y'} \quad 2\varepsilon_{x'y'} \quad 2\varepsilon_{z'x'} \quad 2\varepsilon_{y'y'}\right\}^T
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Die Komponente $\varepsilon_{z'z'}$ kann über das Materialgesetz unter der Annahme von $\sigma_{z'z'} = 0$ berechnet werden (siehe Abschnitt 2.2.2). Das Verzerrungsfeld (2.37) kann aufgeteilt werden in:

- Membran- und Biegeverzerrungen:

$$\{\varepsilon'_{mb}\} = \left\{\varepsilon_{x'x'} \quad \varepsilon_{y'y'} \quad \gamma_{x'y'}\right\}^T \tag{2.38}$$

- Transversale Schubverzerrungen:

$$\{\gamma'_s\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial x'} + \theta_{y'} \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y'} - \theta_{x'} \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

Die Membran- und Biegeverzerrungen lassen sich als Superposition folgender Verzerrungen darstellen:

- Membranverzerrungen (Referenzflächenverzerrungen) als Funktion der Referenzflächenverschiebungen (u_0, v_0) :

$$\{\varepsilon'_m\} = \left\{\varepsilon^0_{x'x'} \quad \varepsilon^0_{y'y'} \quad \gamma^0_{x'y'}\right\}^T = \left\{\frac{\partial u'_0}{\partial x'} \quad \frac{\partial v'_0}{\partial y'} \quad \left(\frac{\partial u'_0}{\partial y'} + \frac{\partial v'_0}{\partial x'}\right)\right\}^T \tag{2.40}$$

- Biegeverzerrungen als Funktion der partiellen Ableitungen der Querschnittsverdrehungen $(\theta_{x'}, \theta_{y'})$ und der z'-Koordinate:

$$\{\varepsilon'_b\} = \left\{\varepsilon^b_{x'x'} \quad \varepsilon^b_{y'y'} \quad \gamma^b_{x'y'}\right\}^T = z'\left\{\frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \quad -\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} \quad \left(\frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} - \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'}\right)\right\}^T \tag{2.41}$$

Anstelle der partiellen Ableitung der Verdrehungen lässt sich die Verzerrungsverteilung über den Querschnitt mit den Krümmungen $\kappa_{x'}$, $\kappa_{y'}$ und der Drillung $\kappa_{x'y'}$ wie folgt beschreiben:

$$\{\varepsilon'_b\} = z'\left\{\kappa_{x'} \quad \kappa_{y'} \quad \kappa_{x'y'}\right\}^T = z'\{\kappa'\} \tag{2.42}$$

2.2.2 MSV-Spannungsfeld

Das Spannungsfeld wird mit der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (2.19) und dem Verzerrungsfeld (2.37) aufgestellt. Ziel des folgenden Abschnitts ist es, mit den Annahmen der UD-Schichten das Elastizitätsgesetz des MSV aufzustellen. Wie bereits erwähnt, wird für die einzelnen homogenisierten UD-Schichten ein transversal isotropes Materialverhalten mit einer Faserorientierung α bezüglich des MSV-KOS (x', y', z') angenommen. Für die Entwicklung des Spannungsfeldes ist es also notwendig, das Elastizitätsgesetz jeder UD-Schicht in das MSV-KOS entsprechend Gleichung (2.30) zu transformieren, um so die UD-Schicht-Spannungen berechnen zu können:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{z'z'} \\ \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}}_{[C]_{x'y'z'}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \tag{2.43}$$

Die Koeffizienten C'_{ij} können direkt entsprechend der Transformation (2.30) mit der Faserorientierung α und den transversalen isotropen Materialparameter bestimmt werden.

Eine explizite Darstellung der resultierenden Koeffizienten entsprechend [74] findet sich in Anhang A.1. Wie bereits erwähnt, wird angenommen, dass keine Normalspannungen in z'-Richtung wirken ($\sigma_{z'z'} = 0$). Aus Gleichung (2.43) wird ersichtlich, dass die Schubspannungen $\sigma_{x'z'}$ und $\sigma_{y'z'}$ sowie die Verzerrungen $\gamma_{x'z'}$ und $\gamma_{y'z'}$ von den restlichen Komponenten entkoppelt sind, sodass die Gleichung (2.43) umsortiert werden kann zu:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ 0 \\ \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{16} & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{26} & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & C'_{36} & 0 & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & C'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \tag{2.44}$$

Mit der Annahme $\sigma_{z'z'} = 0$ kann die dritte Zeile und Spalte der Steifigkeitsmatrix aus Gleichung (2.44) kondensiert werden. Die resultierenden Koeffizienten der reduzierten Steifigkeitsmatrix Q'_{ij} können wie folgt bestimmt werden:

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}C'_{3j}}{C'_{ij}}, i, j = 1,2,6 \tag{2.45}$$

Hieraus folgt die reduzierte Form der Spannungs-Verzerrungs Beziehung (Steifigkeitsmatrix):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{36} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

Die Verzerrung $\varepsilon_{z'z'}$ kann mit der Gleichung (2.44) bestimmt werden:

$$\varepsilon_{z'z'} = -\frac{1}{C'_{33}} \left(C'_{13}\varepsilon_{x'x'} + C'_{23}\varepsilon_{y'y'} + C'_{36}\gamma_{x'y'} \right) \tag{2.47}$$

2.2.3 Konstitutive Gleichungen des MSV

Wie bereits erwähnt, wirken in einer Struktur infolge äußerer Belastungen innere Kräfte. Bezieht man diese Kräfte auf Flächen, etwa auf Querschnittsflächen, erhält man die Beanspruchung in Form von Flächenlasten (Spannungen, siehe Abschnitt 2.1.1). Für viele praktische Anwendungen ist es ausreichend die UD-Schichten auf makromechanischer Ebene zu betrachten. Die elastischen Eigenschaften der Fasern und der Matrix werden verschmiert (homogenisiert) und die einzelne UD-Schicht wird als homogenes Kontinuum betrachtet. Im Allgemeinen folgt hieraus ein räumliches Problem, welches im Folgenden unter den

Annahmen dünnwandiger Strukturen als zweidimensionales Problem (Scheibe und Platte) behandelt wird. Die homogenisierten UD-Schichten werden im Rahmen dieser Arbeit als ebene Schichten mit konstanten Dicke h_k und einem transversal isotropen Materialverhalten entsprechend Gleichung (2.16) angenommen [108]. In Abb. 2.8 ist ein Freischnitt

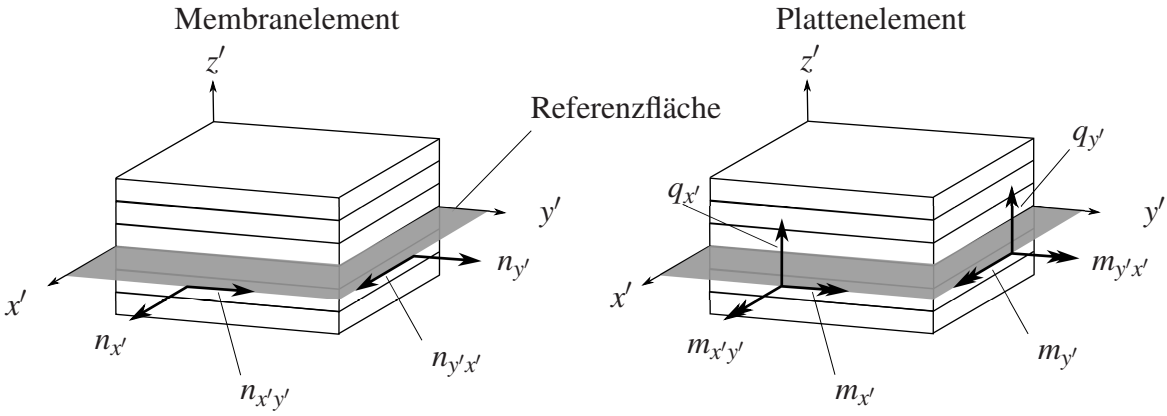


Abb. 2.8: Belastungen eines ebenen Membran-Plattenelements; links durch Schnittkraftflüsse $\{n\}$, rechts durch Schnittkraft- und Schnittmomentenflüsse $\{m\}$, $\{q\}$ (positives Schnittufer)

eines MSV-Elements als Kombination aus einem Membran- und einem Plattenelement dargestellt. Die aus dem Freischnitt folgenden Schnittkräfte und -momente, bezogen auf die Breite des Elements, werden als Kraft- bzw. Momentenflüsse bezeichnet. Sie setzen sich zusammen aus den Schnitt-Normalkraftflüssen $n_{x'}$ und $n_{y'}$, dem Schnitt-Schubfluss $n_{x'y'}$, den Schnitt-Biegemomentenflüssen $m_{x'}$ und $m_{y'}$, den Schnitt-Drillmomentenfluss $m_{x'y'}$ sowie den Schnitt-Querkraftflüssen $q_{x'}$ und $q_{y'}$:

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_{x'} \\ n_{y'} \\ n_{x'y'} \end{Bmatrix} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \end{Bmatrix} \quad \{m\} = \begin{Bmatrix} m_{x'} \\ m_{y'} \\ m_{x'y'} \end{Bmatrix} \tag{2.48}$$

An jedem Schnittufer herrscht ein Kräfte- und ein Momentengleichgewicht zwischen den Schnittkräften und den Momenten ($\{n\}, \{q\}, \{m\}$) und den zugehörigen Schichtkräften und Schichtmomenten. Die Kräfte- und Momenten-Äquivalenz folgt dann aus der Integration der Schichtspannungen über die Dicke des MSV-Elements. Die Integration der Schichtspannungen erfolgt bereichsweise über die Dicke $h_k = z'_k - z'_{k-1}$ der jeweiligen Einzelschichten. Aus der Summe der Einzelschichtintegrale kann dann das Kräfte- und Momen-

tengleichgewicht wie folgt dargestellt werden:

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_{x'} \\ n_{y'} \\ n_{x'y'} \end{Bmatrix} = \int_{(h)} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \end{Bmatrix} \mathrm{d}z' = \sum_{k=1}^{n} \int_{(h_k)} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \end{Bmatrix}_{(k)} \mathrm{d}z' \tag{2.49}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \end{Bmatrix} = \int_{(h)} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} \mathrm{d}z' = \sum_{k=1}^{n} \int_{(h_k)} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix}_{(k)} \mathrm{d}z' \tag{2.50}$$

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_{x'} \\ m_{y'} \\ m_{x'y'} \end{Bmatrix} = \int_{(h)} z' \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \end{Bmatrix} \mathrm{d}z' = \sum_{k=1}^{n} \int_{(h_k)} z' \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \end{Bmatrix}_{(k)} \mathrm{d}z' \tag{2.51}$$

Im nächsten Schritt werden die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (2.46) verwendet,

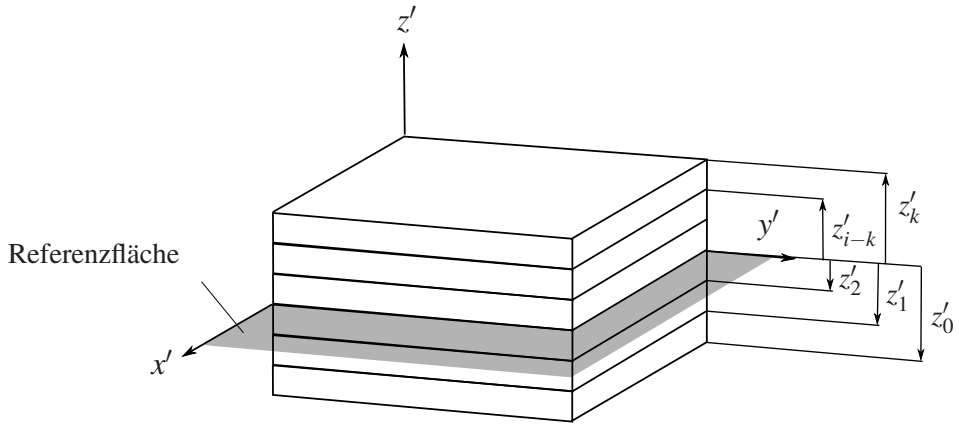


Abb. 2.9: MSV-Schichtrandabstände

um die Spannungen mit den Verzerrungen auszudrücken:

$$\{n\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{(h_k)} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{36} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{x'x'} \\ \varepsilon^0_{y'y'} \\ \gamma^0_{x'y'} \end{Bmatrix} + z' \begin{Bmatrix} \kappa_{x'} \\ \kappa_{y'} \\ \kappa_{x'y'} \end{Bmatrix} \right) \mathrm{d}z' \tag{2.52}$$

$$\{m\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{(h_k)} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{36} \end{bmatrix} z' \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{x'x'} \\ \varepsilon^0_{y'y'} \\ \gamma^0_{x'y'} \end{Bmatrix} + z' \begin{Bmatrix} \kappa_{x'} \\ \kappa_{y'} \\ \kappa_{x'y'} \end{Bmatrix} \right) \mathrm{d}z' \tag{2.53}$$

$$\{q\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{(h_k)} \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} \mathrm{d}z' \tag{2.54}$$

Die Integration der Gleichungen (2.52), (2.53) und (2.54) erfolgt (bereichsweise) analytisch über die jeweiligen Dicken h_k der UD-Schichten:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \left(z'_k - z'_{k-1}\right) Q'_{ij} \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(z'^2_k - z'^2_{k-1}\right) Q'_{ij} \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(z'^3_k - z'^3_{k-1}\right) Q'_{ij}, \qquad i,j = 1,2,6 \\
F_{ij} &= K \sum_{k=1}^{n} \left(z'_k - z'_{k-1}\right) C'_{ij}, \qquad i,j = 4,5
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Die Schubsteifigkeit $[F]$ wird zur Berücksichtigung der ungleichförmigen Spannungsverteilung über den Querschnitt mit einem Schubkorrekturfaktor K abgemindert. Zur Berechnung des Schubkorrekturfaktors können unterschiedliche Annahmen, wie z. B. in der Arbeit von Rolfes [105] und Rohwer dargestellt, getroffen werden. In der vorgeschlagenen Formulierung wird ein vereinfachtes Vorgehen zur Berechnung des Schubkorrekturfaktors k angewendet. Es wird gefordert, dass die Formänderungsenergie der angenommenen konstanten Schubspannungen identisch ist mit der Formänderungsenergie einer quadratischen Schubspannungsverteilung. Für ein Rechteckquerschnitt resultiert hieraus ein Schubkorrekturfaktor von $K = 5/6$. Die resultierenden Matrizen $[A]$, $[B]$, $[D]$ und $[F]$ (siehe Gleichung (2.55)) besitzen folgende besondere Bezeichnungen:

- $[A]$ = Membran-Steifigkeitsmatrix
- $[B]$ = Koppel-Steifigkeitsmatrix
- $[D]$ = Biege-Steifigkeitsmatrix
- $[F]$ = Schub-Steifigkeitsmatrix

Anschließend lassen sich Schnittkraft- und Schnittmomentenflüsse in Relation zu den Referenzflächen-Verzerrungen wie folgt in Matrixform beschreiben:

$$\begin{Bmatrix} n_{x'} \\ n_{y'} \\ n_{x'y'} \\ m_{x'} \\ m_{y'} \\ m_{x'y'} \\ q_{x'} \\ q_{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & B_{16} & B_{26} & B_{36} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{36} & D_{16} & D_{26} & D_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{x'x'} \\ \varepsilon^0_{y'y'} \\ \gamma^0_{x'y'} \\ \kappa_{x'} \\ \kappa_{y'} \\ \kappa_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \tag{2.56}$$

Die Steifigkeiten A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} sowie F_{ij} können als über die Dicke des MSV gemittelte Größen aufgefasst werden. Sie berücksichtigen den Lagenaufbau des MSV sowie die elastischen Eigenschaften aller Einzelschichten. In kompakterer Matrixschreibweise folgt:

$$\begin{Bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_m\} \\ \{\kappa\} \\ \{\gamma_s\} \end{Bmatrix} \tag{2.57}$$

Die im Folgenden vorgeschlagene Formulierung implementiert die dargestellte Einschichttheorie und reduziert somit die MSV-Eigenschaften rechnerisch auf seine Referenzfläche mit den entsprechenden verschmierten Eigenschaften A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} sowie F_{ij}.

Kapitel 3

Piezoelektrische Werkstoffe

Multifunktionale Werkstoffe können als Aktuator und/oder als Sensor eingesetzt werden. Sensoren dienen der Messung bestimmter Arbeits- oder Umgebungsbedingungen, während Aktuatoren für eine gezielte Beeinflussung von strukturellen oder funktionalen Systemeigenschaften verwendet werden. Zu den wichtigsten adaptiven Werkstoffen können die piezoaktiven Materialien gezählt werden. Der elektromechanische Kopplungseffekt von Piezoelektrika wurde von den Brüdern Curie 1880 bei Versuchen mit Turmalinkristallen entdeckt und beschrieben. Er beruht hauptsächlich auf zwei Phänomenen, der Piezoelektrizität und der Ferroelektrizität (siehe Ikeda1 [52]). Seit ihrer Entdeckung sind piezoelektrische Materialien einen vielbeachtetes Forschungsgebiet, aus dem eine Vielzahl verschiedener technischer Anwendungen hervorgegangen ist. Die gegenwärtig industriell gefertigten piezoelektrischen Werkstoffe können in unterschiedlichen Formen eingesetzt werden, etwa als Fasern, als Folien oder als Plättchen.

Beim piezoelektrischen Effekt muss unterschieden werden zwischen dem direkten und dem inversen piezoelektrischen Effekt. Entsprechendes gilt für die Anwendung piezoelektrischer Materialien. Beim direkten piezoelektrischen Effekt führen mechanische Deformationen zu dielektrischen Verschiebungen, also zu einer Relativverschiebung der positiven und der negativen Ladungsschwerpunkte im Kristallgitter. Dabei bilden sich innerhalb der Elementarzellen mikroskopische Dipole. Die Summe der im Material enthaltenden Dipole bildet ein elektrisches Feld (siehe Abb. 3.1). Dieses Feld kann mit Elektroden an der Oberfläche des piezoelektrischen Materials abgegriffen werden. Die so gemessenen elektrischen Spannungen erlauben Rückschlüsse auf die Deformation des Materials, weshalb der direkte piezoelektrische Effekt auch als Sensoreffekt bezeichnet wird. Der inverse piezoelektrische Effekt beschreibt umgekehrt die mechanische Deformation unter Einwirkung eines elektrischen Feldes infolge der Verschiebung von Ladungsschwerpunkten. Erzeugt werden kann ein solches elektrisches Feld durch das Aufbringen einer elektrischen Spannung an den

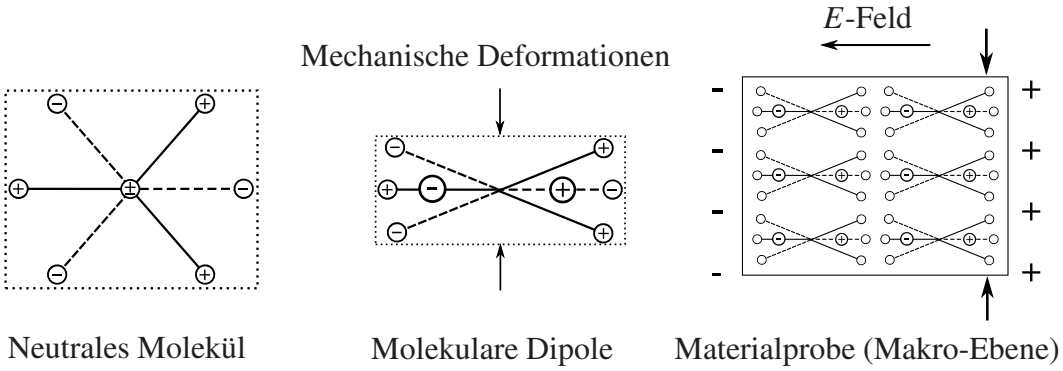


Abb. 3.1: Schematische Darstellung des piezoelektrischen Effektes

Oberflächen des piezoaktiven Materials.
Im folgenden Kapitel werden zunächst die für das Verständnis der vorgeschlagenen Formulierung notwendigen Grundlagen piezoelektrischer Materialien dargestellt. Weiterhin dargestellt werden die hier getroffenen Annahmen zur Modellierung von Aktuatoren und Sensoren als in Dickenrichtung gepolte Piezoschichten innerhalb des MSV.

3.1 Ferroelektrizität

Ferroelektrika stellen eine besondere Werkstoffgruppe unter den Piezoelektrika dar. Die Richtung ihrer Kristallgitterpolarisation lässt sich durch das Anlegen eines starken elektrischen Feldes gezielt verändern, wodurch die elektromechanischen Wechselwirkungen (Koppelungen) beeinflusst werden können. Die Beschreibung der elektromechanischen Koppelung kann auf mikromechanischer oder auf makromechanischer Ebene erfolgen. Für die Berechnung und die Entwicklung technischer Systeme ist vorrangig das makromechanische Verhalten von Piezoelektrika von Bedeutung. Im folgenden Abschnitt werden daher nur die für die Beschreibung der makromechanischen Zusammenhänge notwendigen mikromechanischen Betrachtungen erläutert. Eine umfangreichere Beschreibung kann der Arbeit von Ikeda [52] entnommen werden.

3.1.1 Mikromechanische Betrachtungen

Elektroaktive Keramiken (Ferroelektrika) bestehen aus polykristallinen Strukturen, die zu Körnern zusammengefasst werden können. Diese Körner können wiederum in sogenannte Domänen aufgeteilt werden, welche sich aus einer Reihe von Elementarzellen bestehen. Oberhalb der Curie-Temperatur T_c ist das Werkstoffverhalten aufgrund der kubischen raumzentrierten Gitterstruktur paraelektrisch (verspannungsfrei). Unterhalb der Curie-Temperatur

T_c wird die Gitterstruktur der Elementarzellen instabil, so dass sich die Ladungsschwerpunkte verschieben und Dipole entstehen, weshalb T_c auch Umwandlungstemperatur genannt wird. Dies bedeutet einen Übergang von der paraelektrischen in die ferroelektrische Phase [52]. Diese spontane Ausrichtung der Dipole ist jedoch zufällig (siehe Abb. 3.2). Sie

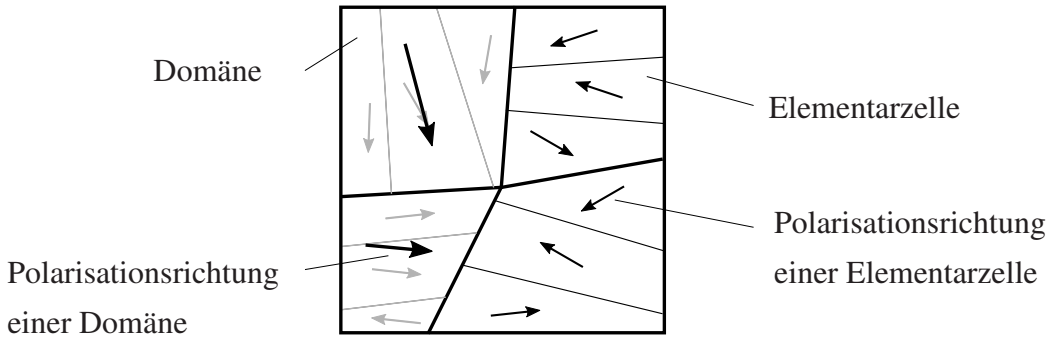


Abb. 3.2: Korn einer piezoelektrischen Materialprobe im depolarisierten Zustand

führt dazu, dass sich die mikroskopischen Polarisationseffekte makroskopisch aufheben. Der piezoelektrische Werkstoff befindet sich dann in einem depolarisierten Zustand.

3.1.2 Die dielektrische Hysterese

Im depolarisierten Zustand sind Piezokeramiken nicht technisch nutzbar. Eine gezielte Ausrichtung der Dipole ist, wie bereits erwähnt, durch das Anlegen eines elektrischen Feldes möglich. Abb. 3.3 zeigt schematisch das Hystereseverhalten einer Ferroelektrika-Probe unter einachsiger Belastung in Form eines elektrischen Feldes E. Mit dem Anstieg des auf-

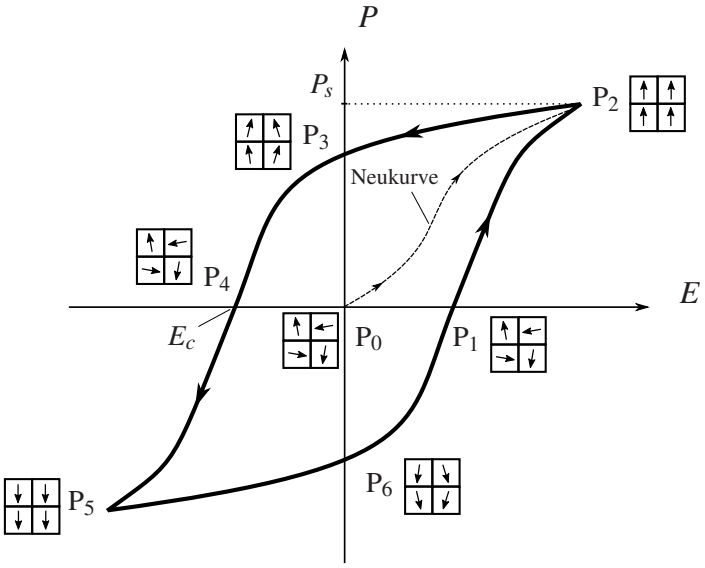


Abb. 3.3: Schematische Darstellung der dielektrischen Hysterese

gebrachten elektrischen Feldes steigt die Polarisation bis zu der Sättigung P_s an (Neukruve

P_0-P_2). Alle Dipol-Momente haben sich entlang der Feldrichtung orientiert, daher wird der Werkstoff in diesem Zustand als gepolt bezeichnet. Bei einer anschließenden Reduktion des elektrischen Feldes nimmt die Polarisation ab, geht jedoch nicht mehr auf den Wert Null zurück (Kurve P_2-P_3). Die Polarisation am Punkt P_3 wird auch remanente Polarisation P_r genannt. Sie entspricht der Polarisation nach der Abschaltung des elektrischen Feldes. Die Verringerung der Polarisation auf Null kann dann nur noch durch das Anlegen eines elektrischen Feldes E_c (Koerzitivfeldstärke) in entgegengesetzter Richtung erfolgen (Kurve P_3-P_4). Bei einer weiteren Verstärkung dieses Feldes orientieren sich die Dipolmomente in negativer Richtung (Kurve P_4-P_5). Eine kompletter Durchlauf der Hysterese erfolgt, wenn noch einmal ein Feld in positiver Feldrichtung angelegt wird (Kurve P_5-P_6 und P_6-P_1).

3.1.3 Die Schmetterlingskurve

Die bei der dielektrischen Hysterese vorkommenden Polarisationsprozesse beeinflussen das Verformungsverhalten des Materials signifikant. In Abb. 3.4 ist die Wechselwirkung zwischen dem angelegten elektrischen Feld und einer charakteristischen Verzerrung ε in Form einer Schmetterlingskurve schematisch dargestellt. Ausgehend vom depolarisierten

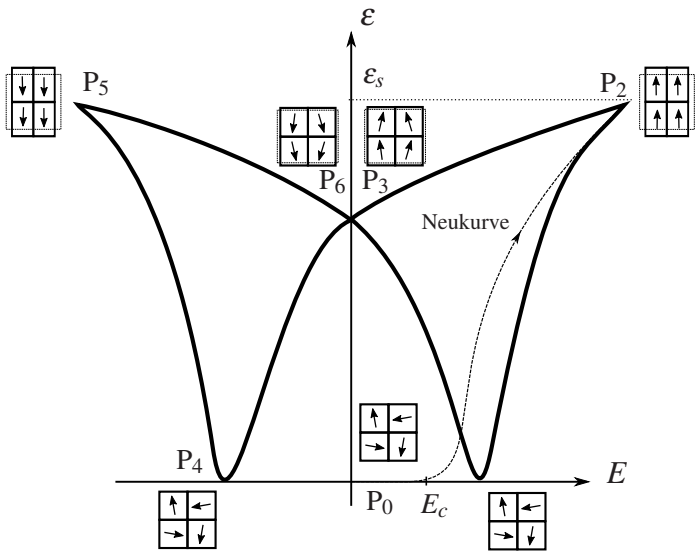


Abb. 3.4: Schematische Darstellung der Schmetterlingshysterese

Zustand im Punkt P_0 sind bis zum Erreichen der Koerzitivfeldstärke E_c keine makroskopischen Dehnungen zu erkennen. Mit dem Erreichen der kritischen Feldstärke E_c (Koerzitivfeldstärke) ist ein deutlicher Anstieg der Verzerrung ε zu erkennen. Diese Verzerrungen treten auf infolge der Umklappvorgänge in den Elementarzellen in den Domänen, verursacht durch deren Neuausrichtung entlang des angelegten elektrischen Feldes. Die Sättigungsverzerrung ε_s wird im Punkt P_2 erreicht. Bei einer Verringerung des elektrischen

Feldes bis zum Wert Null verbleibt eine remanente Dehnung in der Materialprobe (Punkt P_3). Ein elektrisches Feld, in Gegenrichtung aufgebracht, führt infolge einer zunehmenden Depolarisation (Kurve P_3-P_4) zu einer Reduktion der Verzerrungen. Mit dem Erreichen der Koerzitivfeldstärke beginnt die Neuausrichtung der ungeordneten Domänen entlang der Belastungsrichtung (Kurve P_4-P_5). Im Punkt P_5 ist erneut eine Sättigungsverzerrung erreicht. Bei einer anschließenden Reduktion des elektrischen Feldes bis zum Wert Null bleibt eine remanente Dehnung mit entgegengesetzten Vorzeichen bestehen.

3.2 In Dickenrichtung polarisierte Piezoschichten

Aufgrund der schnellen Wandlungsgeschwindigkeiten können für Piezokeramiken aus ferroelastischen Piezoelektrika quasi-elektrostatische Bedingungen angenommen werden (siehe [46], [74]). Zudem können sie in guter Näherung als nicht magnetisierbar und nichtleitend betrachtet werden [46]. Sie werden möglichst so ausgelegt, dass die Arbeitsbereiche des E-Feldes sowie auftretende Verzerrungen so gut wie keine Änderungen der Polarisation verursachen. Für solche Einsatzprofile können die piezoelektrischen Grundgleichungen zur Beschreibung der elektromechanischen Wechselwirkungen in guter Näherung als linear angenommen werden. Sie werden in Abhängigkeit eines Paares unabhängiger Variablen (mechanisch und elektrisch) formuliert. Die resultierenden Gleichungen beinhalten vier physikalische Größen: die mechanischen Spannungen $\{\sigma\}$ und Verzerrungen $\{\varepsilon\}$, sowie das elektrische Feld $\{E\}$ und die dielektrischen Verschiebungen $\{D\}$. Unter Berücksichtigung der Verzerrungen und des elektrischen Feldes als unabhängige Größen können die Grundgleichungen mit den Matrizen der piezoelektrischen $[e]$ und jene der dielektrischen Konstanten $[d^{\varepsilon}]$ wie folgt dargestellt werden [52]:

$$\{\sigma\} = [C^E]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\} \tag{3.1}$$

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} - [d^{\varepsilon}]\{E\} \tag{3.2}$$

Die oberen Indizierungen E und ε kennzeichnen hierbei die jeweils konstant gehaltenen Zustandsgrößen (elektrisches Feld, mechanische Verzerrungen). So ist z. B. $[C^E]$ der mechanische Steifigkeitstensor bei einem konstanten elektrischen Feld bzw. unter Kurzschlussbedingungen (elektrische Randbedingung, $E = 0$). Für die Piezoschichten kann infolge der Polarisation näherungsweise ein transversal isotropes Materialverhalten angenommen werden. Die Vorzugsrichtung ist hierbei durch die Richtung der makroskopischen Materialpolarisation gegeben. Das Material verhält sich senkrecht zur Polarisationsrichtung isotrop. Daraus folgt, dass sich die Materialkonstanten auf fünf elastische, drei piezoelektrische und zwei dielektrische Konstanten reduzieren lassen [119].

Je nach Beschaffenheit und Polarisierung der Piezokeramiken treten unterschiedliche Koppelungseffekte unterschiedlich stark auf. So beschreibt der Longitudinal- oder auch Längseffekt die Dehnung des Werkstoffs in Polungsrichtung infolge eines angelegten elektrischen Feldes in derselbe Richtung. Das entsprechende Verhältnis des elektrischen Feldes zu der in derselben Richtung wirkenden Normalspannung wird durch die Komponente $e_{3'3'}$ beschrieben. Die resultierenden Spannungen senkrecht zur Longitudinalachse werden durch den Querkoeffizienten $e_{3'1'}$ charakterisiert. Das Anlegen eines elektrischen Feldes senkrecht zur Polarisation verursacht eine Scherverformung, die damit verbundenen Schubspannungen sind durch den Koeffizienten $e_{1'5'}$ beschrieben [46]. Die Gleichungen (3.1) und (3.2) können mit den Komponenten $e_{3'3'}$, $e_{3'1'}$, $e_{1'5'}$ wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1'1'} \\ \sigma_{2'2'} \\ \sigma_{3'3'} \\ \sigma_{2'3'} \\ \sigma_{1'3'} \\ \sigma_{1'2'} \\ D_{1'} \\ D_{2'} \\ D_{3'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{3'1'} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{3'1'} \\ C_{31} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{3'3'} \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & 0 & 0 & e_{1'5'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & e_{1'5'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & -d_{1'1'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & -d_{1'1'} & 0 \\ e_{3'1'} & e_{3'1'} & e_{3'3'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{3'3'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1'1'} \\ \varepsilon_{2'2'} \\ \varepsilon_{3'3'} \\ \gamma_{2'3'} \\ \gamma_{1'3'} \\ \gamma_{1'2'} \\ -E_{1'} \\ -E_{2'} \\ -E_{3'} \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

Entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt (2.2.2) kann Zeile 3 und Spalte 3 mit der Anahme kondensiert werden, dass keine Normalspannung in Dickenrichtung wirkt. Des Weiteren wird angenommen, dass die elektrische Ladung gleichmäßig über die Elektroden (also über die Oberflächen der Piezoschicht) verteilt ist, sodass das elektrische Feld nur in Dickenrichtung wirkt ($E_2 = E_3 = 0$). Die dielektrischen Verschiebungen in der $1'$- und in der $2'$-Richtung müssen nicht zwangsläufig null sein, können aber nach einer Untersuchung von Benjeddou et al.[20] und Gopinathan et al. [47] für dünnwandige Bauteile vernachlässigt werden. Die Gleichung (3.3) kann nach einigen Umformungsschritten in der folgenden reduzierten Form angegeben werden:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1'1'} \\ \sigma_{2'2'} \\ \sigma_{1'2'} \\ \sigma_{2'3'} \\ \sigma_{1'3'} \\ D_{3'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & e'_{3'1'} \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 & e'_{3'1'} \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ e'_{3'1'} & e'_{3'1'} & 0 & 0 & 0 & -d'_{3'3'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{1'2'} \\ \gamma_{2'3'} \\ \gamma_{1'3'} \\ -E_{3'} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

mit den entsprechenden Koeffizienten:

$$\begin{aligned} &Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \qquad Q_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \qquad Q_{55} = C_{55} - \frac{e_{1'5'}^2}{d_{1'1'}} \\ &Q_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \qquad e'_{3'1'} = e_{3'1'} - \frac{C_{13}}{C_{33}} e_{3'3'} \qquad d'_{3'3'} = d_{3'3'} + \frac{e_{3'3'}^2}{C_{33}} e_{3'3'} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aus Gleichung (3.4) wird ersichtlich, dass die Schubverzerrungen und die Schubspannungen von den Normalkomponenten entkoppelt sind. Der Vergleich mit den berücksichtigten MSV-Materialmatrizen (2.46) zeigt, dass dies jedoch nicht für die in der Ebene wirkenden Schubverzerrungen im Allgemeinen gültig ist. Damit die Integration in Dickenrichtung in der gleichen Weise wie in Abschnitt 2.2.3 durchgeführt werden kann, wird die Gleichung (3.4) wie folgt umgeformt:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1'1'} \\ \sigma_{2'2'} \\ \sigma_{1'2'} \\ D_{3'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & e'_{3'1'} \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & e'_{3'1'} \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ e'_{3'1'} & e'_{3'1'} & 0 & -d'_{3'3'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1'1'} \\ \varepsilon_{2'2'} \\ \gamma_{1'2'} \\ -E_{3'} \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{2'3'} \\ \sigma_{1'3'} \end{Bmatrix} = k\, Q_{55} \begin{Bmatrix} \gamma_{2'3'} \\ \gamma_{2'3'} \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

Einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und den dielektrischen Verschiebungen wird mit dem Gaußschen Gesetz formuliert, welches besagt, dass ein dielektrisches Verschiebungsfeld $\{D\}$ ein Quellfeld mit der Ladungsdichte ρ_e als Quelle ist. Daher gilt (siehe [119]):

$$\nabla\{D\} = \rho_e \tag{3.8}$$

Mit der bereits erwähnten Annahme, dass das elektrische Feld sich auf E'_3 (in Dickenrichtung wirkend) reduziert und dass die Piezoschichten Dielektrika sind (und somit keine freien Ladungsträger aufweisen), folgt:

$$\frac{\partial D_{3'}}{\partial x_{3'}} = 0 \tag{3.9}$$

Für $D_{3'}$ folgt entsprechend Gleichung (3.6):

$$\frac{\partial D_{3'}}{\partial x'_3} = e'_{3'1'} \left(\frac{\partial \varepsilon_{1'1'}}{\partial x_{3'}} + \frac{\partial \varepsilon_{2'2'}}{\partial x_{3'}} \right) + d'_{3'3'} \frac{\partial E_{3'}}{\partial x_{3'}} = 0 \tag{3.10}$$

Die Änderungen der Dehnungen $\varepsilon_{1'1'}$ und $\varepsilon_{2'2'}$ in $x_{3'}$-Richtung werden durch die Krümmungen $\kappa_{1'}(x_{1'}, x_{2'})$ und $\kappa_{2'}(x_{1'}, x_{2'})$ (siehe Gleichung (2.42)) beschrieben. Das elektrische Feld $E_{3'}$ wiederum bildet sich aus der partiellen Ableitung des elektrischen Potentials ϕ' nach $x_{3'}$ (siehe [52]):

$$E_{3'} = -\frac{\partial \phi'(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'})}{\partial x_{3'}} \tag{3.11}$$

Gleichung (3.10) lässt sich dann umformen zu:

$$\frac{\partial^2 \phi'(x_{1'},x_{2'},x_{3'})}{\partial x_{3'}^2} = \frac{e'_{3'1'}}{d'_{3'3'}}\left(\kappa_{1'}(x_{1'},x_{2'}) + \kappa_{2'}(x_{1'},x_{2'})\right) = \kappa_\phi(x_{1'},x_{2'}) \tag{3.12}$$

Die zweimalige Integration von (3.12) nach $x_{3'}$ führt auf:

$$\phi'(x_{1'},x_{2'},x_{3'}) = \frac{x_{3'}^2}{2}\kappa_\phi(x_{1'},x_{2'}) + C_1(x_{1'},x_{2'})x_{3'} + C_2(x_{1'},x_{2'}) \tag{3.13}$$

Aus Gleichung (3.13) folgt ein quadratischer Verlauf des elektrischen Potentials bezüglich $x_{3'}$. Die Konstanten C_1 und C_2 können über die Randbedingungen des elektrischen Potentials bestimmt werden. Wird das $1'2'3'$-Koordinatensystem an der unteren Oberfläche der Piezoschicht platziert (siehe Abb. 3.5), folgt für das elektrische Potential ϕ':

$$\begin{aligned} \phi'(x_{1'},x_{2'},0) &= 0 \\ \phi'(x_{1'},x_{2'},h_p) &= \phi_o - \phi_u = \phi, \end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei ϕ der Potentialdifferenz der Ober- und der Unterseite der Piezoschicht und h_p ihrer Höhe entspricht. Hieraus folgt:

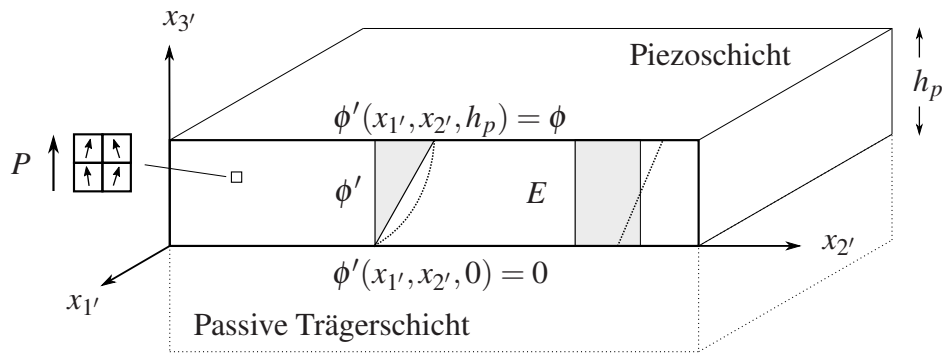


Abb. 3.5: Piezoschicht polarisiert in Dickenrichtung - Vergleich des linearen und quadratischen Potentialverlaufs sowie des konstanten und des linearen elektrischen Feldes

$$C_1(x_{1'},x_{2'}) = \frac{\phi}{h_p} - \frac{h_p}{2}\kappa_\phi(x_{1'},x_{2'}) \tag{3.15}$$

$$C_2(x_{1'},x_{2'}) = 0 \tag{3.16}$$

Das elektrische Feld $E_{3'}$ ergibt sich dann zu:

$$E_{3'}(x_{1'},x_{2'},x_{3'}) = -x_{3'}\kappa_\phi(x_{1'},x_{2'}) - \frac{\phi}{h_p} \tag{3.17}$$

Marinkovic zeigt in [75], dass für gängige piezoelektrische Materialien dünnwandiger technischer Anwendungen eine konstante Modellierung des elektrischen Feldes $E_{3'}$ ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Hieraus folgt:

$$E_{3'} = -\frac{\phi}{h_p} \tag{3.18}$$

und damit:

$$\phi(x_{3'}) = \frac{\phi}{h_p} x_{3'} \tag{3.19}$$

somit wird zur Beschreibung des elektrischen Feldes $E_{3'}$ nur noch ein elektrischer Freiheitsgrad in Form einer Potentialdifferenz benötigt. Die dielektrische Verschiebung in Dickenrichtung ist dann gegeben durch:

$$D_{3'} = d'_{3'3'} E_{3'} \tag{3.20}$$

Die Integration der Piezoschichten in den MVS erfolgt in der gleichen Weise die der UD-Schichten (siehe Kapitel 2), weshalb sie hier nicht weiter erläutert wird.

Kapitel 4

Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein numerisches Approximationsverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Die Grundidee besteht darin, elementlokale Ansätze aufzustellen, um aus der Summe der Elementlösungen die Lösung des gesamten Lösungsgebietes zu approximieren. Die Feldgrößen (z. B. mechanische und elektrische) werden elementweise mit Näherungsansätzen beschrieben. Diese Näherungsansätze enthalten unbekannte Parameter, denen in der Regel eine physikalische Bedeutung zugeordnet werden kann, beispielsweise die von Verschiebungen und Rotationen (Freiheitsgrade) in bestimmten Punkten (Knoten) der Struktur. Die Interaktion der Elemente wird gewährleistet, indem sich benachbarte Elemente Knoten teilen. Die aus den Näherungsansätzen resultierenden Gleichungen werden zusammengefasst (assembliert) und bilden so ein algebraisches Gleichungssystem, welches das physikalische Verhalten des Gesamtkörpers beschreibt.
Im folgenden Kapitel werden, ausgehend vom Hamilton-Prinzip, die zu lösenden dynamischen Finiten-Elemente-Gleichungen der verschiebungsbasierten FEM für Piezoelektrika entsprechend [74] hergeleitet und anschließend um Ausdrücke zur Beschreibung dissipativer und geometrisch nichtlinearer Effekte erweitert.

4.1 Variationsprinzip für piezoelektrische Kontinua

Die piezoelektrischen Gleichungen mit den mechanischen Verzerrungen und dem elektrischen Feld als unabhängige Variablen wurden bereits im Abschnitt 3.2 erläutert. Sie können in Matrixform wie folgt dargestellt werden:

$$\{\sigma\} = [C^E]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\} \tag{4.1}$$

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} - [d^\varepsilon]\{E\} \tag{4.2}$$

Die Bewegungsgleichung des piezoelektrischen Kontinuums können nach dem Hamilton-Prinzip hergeleitet werden. Dies besagt, dass die Bewegung eines Körpers im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ so verläuft, dass die Variation der Wirkung verschwindet, dass also der Körper eine Bahn der stationären Wirkung einnimmt:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \delta W \, \mathrm{d}t = 0, \tag{4.3}$$

mit der Lagrange-Funktion L und der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte δW. Die Lagrange-Funktion L setzt sich aus der kinetischen Energie E_{kin} und der elektrischen Enthalpie H zusammen:

$$L = E_{kin} - H \tag{4.4}$$

Die elektrische Enthalpie H ist eine Energiefunktion, die in Abhängigkeit von den mechanischen Verzerrungen $\{\varepsilon\}$ und des elektrischen Feldes $\{E\}$ wie folgt dargestellt werden kann [52]:

$$H = \frac{1}{2}\left(\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} - \{E\}^T\{D\}\right) \tag{4.5}$$

Die mechanische kinetische Energie ist wie folgt definiert:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\rho\{\dot{u}\}^T\{\dot{u}\}, \tag{4.6}$$

wobei ρ die Dichte und $\{\dot{u}\}$ das Geschwindigkeitsfeld darstellt. Mit den Ausdrücken für die elektrische Enthalpie und der kinetischen Energie ergibt sich die Lagrange-Funktion durch die Integration dieser über das Volumen V:

$$L = \frac{1}{2}\int_V \left(\rho\{\dot{u}\}^T\{\dot{u}\} - \{\varepsilon\}^T\{\sigma\} + \{E\}^T\{D\}\right) \mathrm{d}V \tag{4.7}$$

Die Randbedingungen können unterteilt werden in Dirichlet-Randbedingungen, in Form von mechanischen Verschiebungen und elektrischen Potentialen und Neumann-Randbedingungen im Sinne als mechanische Kräfte und elektrische Ladungen. Die vorgegebenen Verschiebungen und elektrischen Spannungen werden auf Ω_1 und Ω_2 definiert. Mechanische Kräfte in Form der Flächenlasten $\{F_{A_1}\}$ (wirkend auf A_1) und von Punktlasten $\{F_p\}_j$ werden für Ω_3 definiert. Analog hierzu werden die elektrischen Ladungen (Flächenladungen q_{A_2} auf A_2 und Punktladungen Q_j in m Punkten) für Ω_4 definiert. Mit der Annahme, dass nur konservative Kräfte wirken und es sich bei dem zu analysierenden System um ein elektrisch isoliertes System handelt, kann die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \delta W = &\int_{V_1} \{\delta u\}^T\{F_V\} \, \mathrm{d}V_1 + \int_{A_1} \{\delta u\}^T\{F_{A_1}\} \, \mathrm{d}A_1 - \int_{A_2} \delta\phi \, q_{A_2} \, \mathrm{d}A_2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \{\delta u_i\}^T\{F_P\} - \sum_{j=1}^{n} \delta\phi_j Q_j, \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit den äußeren Volumenlasten $\{F_V\}$ wirkend auf das Volumen V_1, dem Verschiebungsfeld $\{u\}$ und der elektrischen Potentialdifferenz ϕ. Die Indizes (i) und (j) in Gleichung (4.8) kennzeichnen die zugehörigen Punkte und $\{u_i\}$ repräsentieren die diskreten Knotenverschiebungen. Das in Gleichung (4.3) enthaltene Integral der Variation der kinetischen Energie kann, nachdem die Variation ausgeführt wurde, mit Hilfe der partiellen Integration wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\rho\{\dot{u}\}^T\{\dot{u}\}\,\mathrm{d}t\right) &= \int_{t_1}^{t_2}\rho\{\delta\dot{u}\}^T\{\dot{u}\}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\rho\{\delta u\}^T\{\dot{u}\}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\rho\{\delta u\}^T\{\ddot{u}\}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{4.9}$$

wobei $\{\ddot{u}\}$ das Beschleunigungsfeld ist. Der erste Ausdruck von (4.9) verschwindet, da t_1 und t_2 entsprechend dem Hamilton-Prinzip so gewählt sind, dass die Variation $\{\delta u\}$ gleich null ist:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\rho\{\dot{u}\}^T\{\dot{u}\}\,\mathrm{d}t\right) = -\int_{t_1}^{t_2}\rho\{\delta u\}^T\{\ddot{u}\}\,\mathrm{d}t \tag{4.10}$$

Hieraus folgt das Hamilton-Prinzip (4.3) für piezoelektrische Kontinua in folgender Form:

$$\begin{aligned}0 = &-\int_V\left(\rho\{\delta u\}^T\{\ddot{u}\} + \{\delta\varepsilon\}^T\left([C^E]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\}\right)\right)\mathrm{d}V \\ &+\int_V\left(\{\delta E\}^T\left([e]\{\varepsilon\} + [d^\varepsilon]\{E\}\right)\right)\mathrm{d}V + \int_{V_1}\{\delta u\}^T\{F_V\}\,\mathrm{d}V_1 \\ &+\int_{A_1}\{\delta u\}^T\{F_{A_1}\}\,\mathrm{d}A_1 - \int_{A_2}\delta\phi\, q_{A_2}\,\mathrm{d}A_2 + \sum_{i=1}^{n}\{\delta u_i\}^T\{F_P\} - \sum_{j=1}^{n}\delta\phi_j Q_j\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.2 Diskretisierte Finite-Elemente-Gleichungen

Die aus dem Hamilton-Prinzip gewonnene Variationsaufgabe (4.11) kann mit Hilfe der Diskretisierung in ein algebraisches Gleichungssystem (FE-Modell) überführt werden. Hierfür wird das in Gleichung (4.11) enthaltende Funktional mit Hilfe von Näherungsansätzen als eine Funktion der Freiwerte dieser Nährungsansätze beschrieben. Die Variation wird dann zu einer Differentiation nach den Freiwerten, welche auf ein Gleichungssystem mit genau so vielen Gleichungen wie Freiwerten führt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die verschiebungsbasierte Finite-Elemente-Methode, mit den Verschiebungen $\{u\}$ und dem elektrischen Potential $\{\phi\}$ als primäre Unbekannte, berücksichtigt. Die kontinuierlichen Verläufe von $\{u\}$ und $\{\phi\}$ werden elementweise im lokalen Elementkoordinatensystem (x', y', z') mit Hilfe der Interpolationsfunktionen $[N_u]$, $[N_\phi]$ und den dem Element zugehörigen diskreten Knotenwerten $\{u_e\}$ sowie den Schichtpoten-

tialdifferenzen $\{\phi_e\}$ angenährt:

$$\{u\} = [N_u]\{u_e\} \tag{4.12}$$

$$\{\phi\} = [N_\phi]\{\phi_e\} \tag{4.13}$$

Die kinematischen Beziehungen (2.9) verknüpfen die Verschiebungen mit den Verzerrungen im Bereich kleiner Verformungen. Unter Verwendung der Verschiebungsinterpolation (4.12) kann dieser Zusammenhang mit der Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix $[B_u]$ kompakt dargestellt werden:

$$\{\varepsilon\} = [B_u]\{u_e\} \tag{4.14}$$

Das elektrische Feld berechnet sich aus den partiellen Ableitungen des elektrischen Potentials (siehe Abschnitt 3.2) und kann in diskretisierter Form wie folgt dargestellt werden:

$$\{E\} = \nabla[N_\phi]\{\phi_e\} = -[B_\phi]\{\phi_e\} \tag{4.15}$$

Für die Variationen $\{\delta u\}$ und $\{\delta\phi\}$ und das Beschleunigungsfeld $\{\ddot{u}\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \{\delta u\} &= [N_u]\{\delta u_e\} \\ \{\delta\phi\} &= [N_\phi]\{\delta\phi_e\} \\ \{\ddot{u}\} &= [N_u]\{\ddot{u}_e\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Das Hamilton-Prinzip in Form von Gleichung (4.11) kann nun für ein Element in diskretisierter Form angegeben werden. Die resultierende Gleichung wird umgeformt, sodass die internen Arbeitsterme auf der linke und die externen auf der rechten Seite der Gleichung stehen. Des Weiteren werden die virtuellen Verschiebungen $\{\delta u_e\}$ und die Potentialdifferenzen $\{\delta\phi_e\}$ ausgeklammert:

$$\begin{aligned} &\{\delta u_e\}^T \left(\int_{V_e} [N_u]^T [N_u] \rho \, \mathrm{d}V_e \{\ddot{u}_e\} + \int_{V_e} \left([B_u]^T [C^E][B_u] + [B_u]^T [e]^T [B_\phi] \right) \mathrm{d}V_e \{u_e\} \right) \\ &+ \{\delta\phi_e\}^T \left(\int_{V_e} [B_\phi]^T [e][B_u] \, \mathrm{d}V_e \{u_e\} - \int_{V_e} [B_\phi]^T [d^\varepsilon][B_\phi] \, \mathrm{d}V_e \{\phi_e\} \right) \\ &= \{\delta u_e\}^T \left(\int_{V_e} [N_u]^T \{F_V\} \, \mathrm{d}V_e + \int_{A_1} [N_u]^T \{F_{A_1}\} \, \mathrm{d}A_1 + \{F_P\} \right) \\ &- \{\delta\phi_e\}^T \left(\int_{A_2} [N_{\phi i}]^T q_{A_2} \, \mathrm{d}A_2 + \{Q_e\} \right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

wobei V_e das Elementvolumen kennzeichnet und $\{F_P\}$ und $\{Q_e\}$ die Vektoren der externen Knotenkräfte bzw. der elektrischen Punktladungen darstellen. Die Gleichung (4.17) muss für beliebige $\{\delta u_e\}$ und $\{\delta\phi_e\}$ gelten, sodass das folgende Gleichungssystem aus ihr abgeleitet werden kann:

$$\begin{bmatrix} [M_e] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_e] & [K_{u\phi,e}] \\ [K_{\phi u,e}] & [K_{\phi\phi,e}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\} \\ \{\phi_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_e\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

mit den folgenden Matrizen und Vektoren:

- Elementmassenmatrix:

$$[M_e] = \int_{V_e} [N_u]^T \rho [N_u] \, \mathrm{d}V_e \tag{4.19}$$

- Mechanische Elementsteifigkeitsmatrix:

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_u]^T [C^E] [B_u] \, \mathrm{d}V_e \tag{4.20}$$

- Piezoelektrische Kopplungsmatrix:

$$[K_{\phi u,e}] = \int_{V_e} [B_\phi]^T [e]^T [B_u] \, \mathrm{d}V_e \tag{4.21}$$

- Inverse piezoelektrische Kopplungsmatrix:

$$[K_{u\phi,e}] = \int_{V_e} [B_u]^T [e] [B_\phi] \, \mathrm{d}V_e \tag{4.22}$$

- Dielektrische Elementsteifigkeitsmatrix:

$$[K_{\phi\phi,e}] = -\int_{V_e} [B_\phi]^T [d^\varepsilon] [B_\phi] \, \mathrm{d}V_e \tag{4.23}$$

- Externe mechanische Kräfte:

$$\{f_e\} = \int_{V_e} [N_u]^T \{F_V\} \, \mathrm{d}V_e + \int_{A_1} [N_u]^T \{F_{A_1}\} \, \mathrm{d}A_1 + \{F_P\} \tag{4.24}$$

- Elektrische Elementladungen:

$$\{q_e\} = -\int_{A_2} [N_{\phi i}]^T q_{A_2} \, \mathrm{d}A_2 - \{Q_e\} \tag{4.25}$$

Realistische Systeme weisen immer ein gewisses Maß an nicht konservativem Verhalten auf. Ursache hierfür können - neben nicht konservativen Lasten - z. B. dissipative Effekte sein, wie z. B. Dämpfung. Aufgrund ihrer Komplexität und den damit verbundenen Unsicherheiten ist es schwierig die Strukturdämpfung zu modellieren. Es wird üblicherweise angenommen, dass sie proportional zum Geschwindigkeitsfeld ist. Wie bereits erwähnt, werden quasi-elektrostatische Bedingungen angenommen, sodass Trägheitseffekte sowie Dämpfungseffekte des elektrischen Feldes und deren elektromechanische Koppelung vernachlässigt werden können:

$$\begin{bmatrix} [M_e] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_e] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}_e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_e] & [K_{u\phi,e}] \\ [K_{\phi u,e}] & [K_{\phi\phi,e}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\} \\ \{\phi_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_e\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix} \tag{4.26}$$

Die Elementmatrizen und Vektoren der Gleichung (4.26) werden anschließend in das globale Koordinatensystem transformiert und zur diskretisierten Strukturbewegungsgleichung assembliert:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \tag{4.27}$$

mit den Abkürzungen:

- Globale Strukturmassenmatrix:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_u] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

- Globale Dämpfungsmatrix:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_u] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

- Generalisierte globale Steifigkeitsmatrix:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

- Generalisierter Verschiebungsvektor:

$$\{U\} = \left\{ \{u_S\}^T \quad \{\phi_S\}^T \right\}^T \tag{4.31}$$

  bestehend aus dem Strukturverschiebungsvektor $\{u_S\}$ und dem Strukturpotentialdifferenzvektor $\{\phi_S\}$.

- Generalisierter Kraftvektor:

$$\{F\} = \left\{ \{f\}^T \quad \{q\}^T \right\}^T \tag{4.32}$$

Die viskose Dämpfung des Systems wird üblicherweise auf Strukturebene in Form der Rayleigh-Dämpfung als skalierte Linearkombination der globalen Massen- $[M]$ und Steifigkeitsmatrix $[K]$ approximiert:

$$[C_u] = \alpha_d [M_u] + \beta_d [K_{uu}] \tag{4.33}$$

4.3 Geometrisch nichtlineare Analyse

In den vorigen Abschnitten wurde stets von der Annahme kleiner Verformungen ausgegangen. Hieraus folgte, dass das Gleichgewicht am undeformierten System gebildet wurde. Das Verhältnis zwischen den äußeren Belastungen und den resultierenden Deformationen

konnte somit durch ein lineares System beschrieben werden. Kann jedoch nicht mehr von kleinen Verformungen ausgegangen werden, müssen zur Berechnung realistischer Systemantworten die geometrisch nichtlinearen Effekte berücksichtigt werden. Das resultierende nichtlineare Gleichungssystem muss dann mit Hilfe eines inkrementell-iterativen Verfahrens gelöst werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Newton-Raphson-Verfahren verwendet [36]. Zur Berechnung von nichtlinearen dynamischen Ereignissen muss zusätzlich die Zeit diskretisiert werden. Die Verfahren zur Diskretisierung der Zeit können grob in zwei Gruppen unterteilt werden: die expliziten und die impliziten Verfahren. Die expliziten Verfahren eignen sich besonders gut zur Simulation von hochdynamischen nichtlinearen Kurzeitereignissen (z. B. Crash-Simulationen), erfordern jedoch im Vergleich zu den impliziten Verfahren einen sehr kleinen Zeitschritt [15]. Für die Simulationen größerer Zeitperioden sind implizite Verfahren daher besser geeignet. Unter Verwendung einer impliziten Zeitintegration ist die Steifigkeitsmatrix für den neuen Zeitschritt unbekannt, aber abhängig von dem noch zu berechnenden Verschiebungszustand. Daher muss in jedem Zeitschritt der Verschiebungsvektor und die Steifigkeitsmatrix iterativ ermittelt werden. Das Gleichungssystem wird ausgehend von der Anfangskonfiguration gelöst, anschließend wird die Steifigkeit im deformierten Zustand aktualisiert und das Gleichungssystem erneut gelöst. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis das dynamische Gleichgewicht innerhalb einer vorgegebenen Toleranz erfüllt ist. Unter Verwendung einer impliziten Zeitintegration (siehe de Borst et al. [36] und Lammering [62]) und eines inkrementell-iterativen Lösungsverfahrens können die dynamischen Finite-Elemente-Gleichungen des piezoelektrischen Kontinuums (4.26) wie folgt dargestellt werden [78]:

$$\begin{bmatrix} [M_u] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_u] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\{\dot{u}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{t}[K_{uu}]^{k-1} & {}^{t}[K_{u\phi}]^{k-1} \\ {}^{t}[K_{\phi u}]^{k-1} & {}^{t}[K_{\phi\phi}]^{k-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta u\}^k \\ \{\Delta\phi\}^k \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\{f\} - {}^{t+\Delta t}\{f_{int}\}^{k-1} \\ {}^{t+\Delta t}\{q\} - {}^{t+\Delta t}\{q_{int}\}^{k-1} \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

mit den mechanischen und elektrischen internen Kraftvektoren $\{f_{int}\}$ und $\{q_{int}\}$ sowie den inkrementellen Verschiebungen $\{\Delta u\}$ und den Potentialdifferenzen $\{\Delta\phi\}$, wobei der Index (k) die Iterationsnummer darstellt.

4.3.1 Korotierende Formulierung

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene korotierende Formulierung beruht im Wesentlichen auf dem element-unabhängigen korotierenden Konzept (engl. *Element Independent Corotational Concept* (EICR)). Das EICR wurde von Rankin and Brogan 1986 [100] entwickelt und später von Nour-Omid und Rankin in [88] erweitert. Eine detaillierte Darstellung und Dis-

kussion der Methodik bieten Felippa und Haugen in [44]. Die Grundidee der korotierenden Formulierung kann auf Elementebene wie folgt zusammengefasst werden:

1. Einführung eines lokalen, sich mitbewegenden Elementkoordinatensystems zur Beschreibung der Starrkörperverschiebung

2. Berechnung der verzerrungserzeugenden Verformungen aus der Gesamtdeformation und den Starrkörperverschiebungen

3. Aufstellen des internen Lastvektors unter Verwendung der verzerrenden Verformungen und der linearen Steifigkeitsmatrix

4.3.1.1 Elementstarrkörperrotation

Grundsätzlich weist jeder Teil der Struktur, infolge der Deformation, eine unterschiedliche Starrkörperrotation auf. Für ebene finite Elemente ist die Elementstarrkörperrotation jedoch konstant, was wiederum auf Elementebene zur einer konstanten Starrkörperrotationsmatrix $[R]$ führt. Die Matrix $[R]$ (Co-Rotational Matrix) kann mit Hilfe der polaren Dekomposition des Deformationsgradienten oder auf Grundlage eines der Elementverformung folgenden Koordinatensystems bestimmt werden [99]. In der vorgeschlagenen Formulierung wird $[R]$ mittels eines körperfesten Elementkoordinatensystems bestimmt. Die-

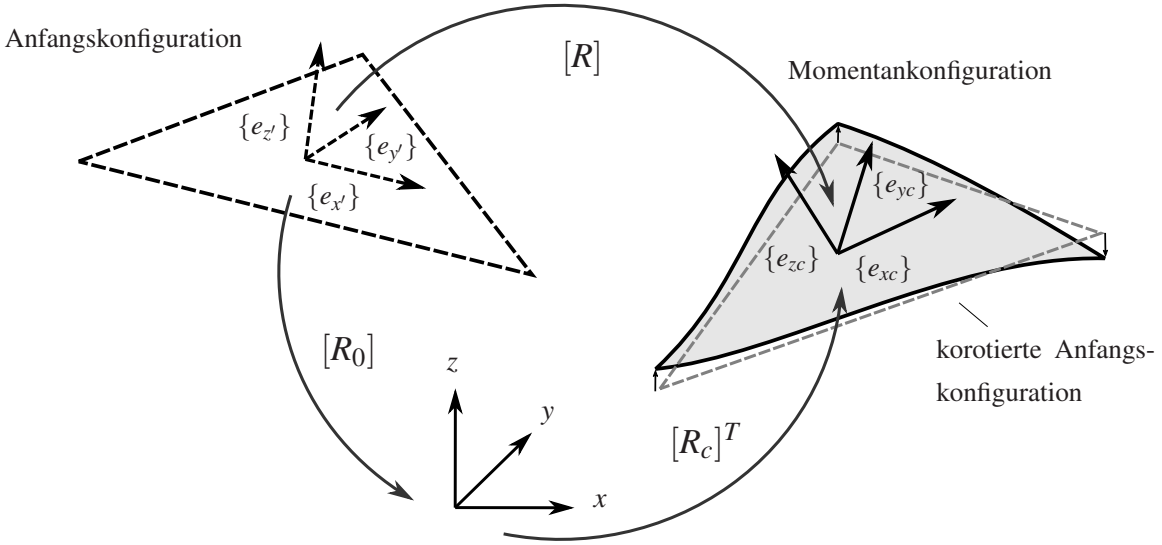


Abb. 4.1: Mitdrehendes Bezugssystem

ses Koordinatensystem wird in der Anfangs- und in der Momentankonfiguration durch die zugehörigen Rotationsmatrizen $[R_0]$ (Anfangskonfiguration) und $[R_c]$ (Momentankonfiguration) beschrieben (siehe Abb. 4.1). Mit Hilfe der Knotenkoordinaten der Anfangs- und der Momentankonfiguration können die zugehörigen Richtungsvektoren $\{e_{x'}\}$,$\{e_{y'}\}$,$\{e_{z'}\}$

und $\{e_{xc}\}$,$\{e_{yc}\}$,$\{e_{zc}\}$ bestimmt werden, und damit auch ihre Rotationsmatrizen bezüglich des globalen kartesischen Koordinatensystem (x, y, z):

$$\begin{aligned} [R_0]^T &= \Big[\{e_{x'}\} \quad \{e_{y'}\} \quad \{e_{z'}\}\Big] \\ [R_c]^T &= \Big[\{e_{xc}\} \quad \{e_{yc}\} \quad \{e_{zc}\}\Big] \end{aligned} \tag{4.35}$$

Die Matrix $[R]$ kann dann entsprechend Abb. 4.1 wie folgt bestimmt werden:

$$[R] = [R_c]^T [R_0] \tag{4.36}$$

4.3.1.2 Kinematik der korotierenden Formulierung - Translationen

Die Erläuterung der kinematischen Zusammenhänge folgt im Wesentlichen der von Felippa und Haugen in [44] gegebenen Beschreibung. Ziel ist es hierbei, die Grundlagen für die Herleitung der Elementmatrizen darzustellen, welche wiederum notwendig sind für die im weiteren Verlauf getroffenen Annahmen der vorgeschlagenen vereinfachten korotierenden Formulierung. Zur Beschreibung der Kinematik werden Verformungen im Elementkoordinatensystem $[E_0]$ und im korotierten System $[E_{cr}]$ betrachtet (siehe Abb. 4.2). Aus Gründen der Lesbarkeit werden im Folgenden die im korotierten Koordinatensystem beschriebenen Größen durch das Zeichen „¯“ gekennzeichnet. Das Vorgehen zur Berechnung der verzerrungserzeugenden Verschiebungen unterscheidet sich von dem der Rotationen, weshalb es im Folgenden separat erläutert wird. Zur Beschreibung der kinematischen Zusammenhänge wird zunächst ein Knoten i mit der Bezeichnung $n_{i,0}$ und den Koordinaten $\{x'_i\}$ in der initialen Konfiguration und der Bezeichnung $n_{cr,i}$ und den Koordinaten $\{x'_{cr,i}\}$ in korotierten Konfiguration betrachtet. Es ist offensichtlich, dass

$$\{x'_i\} = [R]^T \{x'_{cr,i}\} = \{\bar{x}_{cr,i}\} \tag{4.37}$$

gilt. In der Momentankonfiguration verschiebt sich $n_{cr,i}$ infolge der Deformation $(n_{cr,i} \rightarrow n_i)$ und besitzt daraufhin im korotierten System die Koordinaten $\{\bar{x}_{cr,i}\} + \{\bar{d}_i\}$, wobei $\{\bar{d}_i\}$ den verzerrenden Anteil der Deformation darstellt. Beide Anteile können in das initiale System zurückgedreht und um $\{u'_c\}$ (Verschiebung des Koordinatenursprungs) zurückverschoben werden (siehe Abb. 4.2). Die Verschiebung $\{u'_i\}$ kann nun aufgeteilt werden in eine Starrkörperverschiebung $\{u'_{cr,i}\}$ $(n_{0,i} \rightarrow n_{cr,i})$ und eine verzerrenden Verschiebung $\{d'_i\}$ $(n_{cr,i} \rightarrow n_i)$:

$$\{u'_i\} = \{u'_c\} + \{x'_{cr,i}\} - \{x'_i\} + \{d'_i\} = \{u'_{cr,i}\} + \{d'_i\} \tag{4.38}$$

Die Dekomposition (4.38) kann in gleicher Form bezogen auf das $[E_{cr}]$ System dargestellt werden:

$$\{\bar{u}_i\} = \{\bar{u}_c\} + \{\bar{x}_{cr,i}\} + \{\bar{d}_i\} - \{\bar{x}_i\} = \{\bar{u}_{cr,i}\} + \{\bar{d}_i\} \tag{4.39}$$

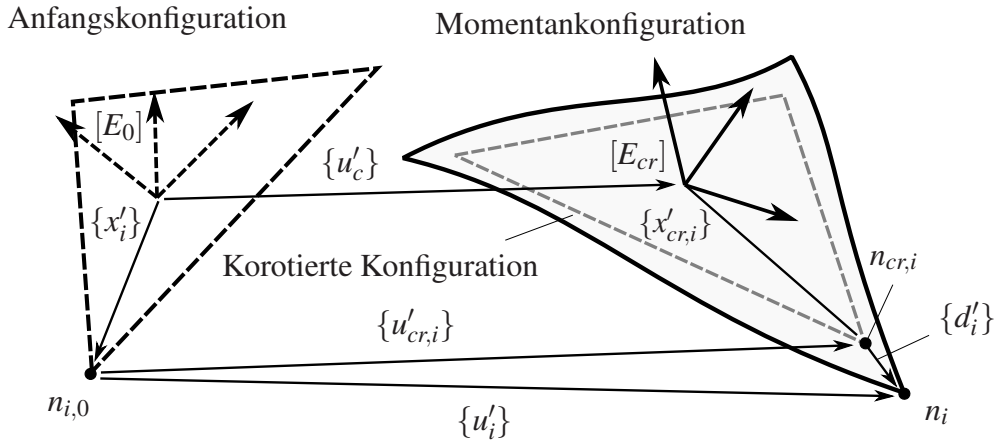


Abb. 4.2: Kinematik eines korotierten Elements

Die verzerrenden Verschiebungen können dann in dem jeweiligen Bezugssystem wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \{d'_i\} &= \{u'_i\} - \{u'_c\} - ([R] - [I])\{x'_i\} \\ \{\bar{d}_i\} &= [R]^T\{d'_i\} = [R]^T\Big(\{u'_i\} + \{x'_i\} - \{u'_c\}\Big) - \{x'_i\}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

mit der Einheitsmatrix $[I]$ und $\{x'_{cr,i}\} = [R]\{x'_i\}$.

4.3.1.3 Kinematik der korotierenden Formulierung - Rotationen

Finite Rotationen besitzen keinen vektoriellen Charakter und sind daher nicht kommutativ. Daher ist es notwendig, die endlichen Rotationen im inkrementellen Lösungsverfahren in geeigneter Weise zu parametrisieren. Die Rotation eines beliebigen Vektors $\{x_0\}$ im Raum um mehrere Achsen kann entsprechend [17] als Matrixmultiplikation mit einer 3×3-Rotationsmatrix $[R_\omega]$ dargestellt werden:

$$\{x_1\} = [R_\omega]\{x_0\} \tag{4.41}$$

Eine Berechnung der Rotationsmatrix $[R_\omega]$ ist mit der Rodrigues-Gleichung möglich. Hierbei wird die finite Rotation im Raum eines Vektors mit einem normierten Rotationsvektors $\{n_\omega\}$ (siehe Abb. 4.3) und seinem Betrag θ beschrieben:

$$\{\omega\} = \Big\{\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\Big\}^T = \theta\{n_\omega\}, \tag{4.42}$$

mit:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \tag{4.43}$$

Der Zusammenhang zwischen der Rotationsmatrix $[R_\omega]$ und dem Rotationsvektor $\{\omega\}$ ist

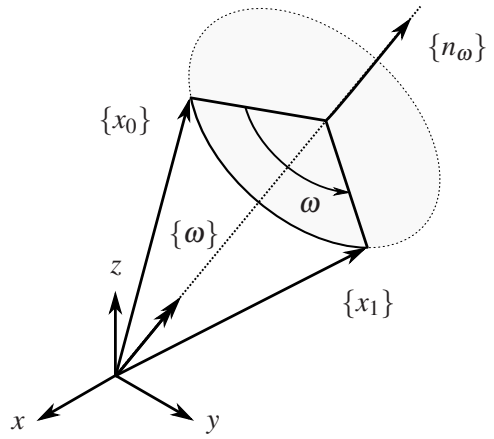


Abb. 4.3: Räumliche finite Rotation eines Vektors $\{x_0\}$

durch die Rodrigues-Formel [10] gegeben (siehe Anhang A.2):

$$[R_\omega] = [I] + \frac{\sin\theta}{\omega}[S] + \frac{1-\cos\omega}{\omega^2}[S]^2, \tag{4.44}$$

mit der schiefsymmetrische Matrix $[S]$ (Spinor) bestehend aus den Komponenten des Vektors $\{\omega\}$:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

Eine detaillierte Beschreibung der Theorie endlicher Rotationen kann [10], [17], [35] und [51] entnommen werden.

Zur Beschreibung der verzerrungserzeugenden Verdrehungen wird in der vorgeschlagenen Formulierung in jedem Knoten ein Koordinatensystem definiert, mit den in der Matrix $[R_i]$ zusammengefassten zugehörigen Richtungsvektoren. Aus Gründen der Einfachheit entspricht die initiale Ausrichtung dieser Richtungsvektoren von $[R_i]$ den Achsen der raumfesten Basis (x,y,z), sodass zu Beginn der Berechnung die Matrix $[R_i]$ der Einheitsmatrix gleicht. Innerhalb der Iterationen wird die Matrix $[R_i]$ multiplikativ mit den inkrementellen Verdrehungen aktualisiert:

$$[R_i]^{k+1} = [\Delta R_i][R_i]^k \tag{4.46}$$

Die Rotationsmatrix $[\Delta R_i]$ wird entsprechend der Gleichung (4.44) mit den inkrementellen Knotenrotationen $\Delta\theta_{xi}$, $\Delta\theta_{yi}$, $\Delta\theta_{zi}$ wie folgt gebildet:

$$[\Delta R_i] = [I] + \frac{\sin\Delta\theta_i}{\Delta\theta_i}[\Delta S_i] + \frac{1-\cos\Delta\theta_i}{\Delta\theta_i^2}[\Delta S_i]^2 \tag{4.47}$$

mit:

$$[\Delta S_i] = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_{z,i} & \Delta\theta_{y,i} \\ \Delta\theta_{z,i} & 0 & -\Delta\theta_{x,i} \\ -\Delta\theta_{y,i} & \Delta\theta_{x,i} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

und:

$$\Delta\theta_i = \sqrt{\Delta\theta_{x,i}^2 + \Delta\theta_{y,i}^2 + \Delta\theta_{z,i}^2} \tag{4.49}$$

Die totalen Rotationen des Knoten i infolge der Deformation ($n_i^0 \rightarrow n_i$) (siehe Abschnitt 4.3.1.2) wird dann durch die Matrix $[R_i]$ beschrieben, weshalb im Folgenden die Matrix $[R_i]$ als Knotenrotationsmatrix bezeichnet wird. Analog zu den Translationen können die totalen Knotenrotationen in einen verzerrenden Anteil $[R_{di}]$ und einen die Starrkörperrotationen beschreibenden Anteil $[R]$ (siehe Abschnitt 4.3.1.1) aufgeteilt werden:

$$[R_i] = [R_{di}][R] \tag{4.50}$$

Hieraus folgt mit $[R] = [R_c]^T[R_0]$:

$$[R_{di}] = [R_i][R]^T = [R_i][R_0]^T[R_c] \tag{4.51}$$

Ausgedrückt im korotierten System folgt:

$$[\overline{R}_{di}] = [R_c][R_{di}][R_c]^T = [R_c][R_i][R_0]^T[R_c][R_c]^T = [R_c][R_i][R_0]^T \tag{4.52}$$

Der Zusammenhang zwischen der Rotationsmatrix $[\overline{R}_{di}]$ und den Verdrehungen $\{\overline{\theta}_i^d\}$ des Knotens i wird durch eine nichtlineare Funktion beschrieben, welche entsprechend Argyris [10] aus dem nicht symmetrischen Anteil der Rotationsmatrix $[\overline{R}_{di}]$ bestimmt werden kann:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{R}_{di} - \overline{R}_{di}^T\right) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}[S_{di}] = \frac{\sin(\theta)}{\theta}\begin{bmatrix} 0 & -\overline{\theta}_{zi}^d & \overline{\theta}_{yi}^d \\ \overline{\theta}_{zi}^d & 0 & -\overline{\theta}_{xi}^d \\ -\overline{\theta}_{yi}^d & \overline{\theta}_{xi}^d & 0 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

mit:

$$\theta = \sqrt{\left(\overline{R}_{di}(3,2) - \overline{R}_{di}(2,3)\right)^2 + \left(\overline{R}_{di}(1,3) - \overline{R}_{di}(3,1)\right)^2 + \left(\overline{R}_{di}(2,1) - \overline{R}_{di}(1,2)\right)^2} \tag{4.54}$$

aus dem Vergleich der linken und rechten Seite der Gleichung (4.53) können die Verdrehungen $\{\overline{\theta}_i^d\}$ wie folgt bestimmt werden:

$$\{\overline{\theta}_i^d\} = \begin{Bmatrix} \overline{\theta}_{xi}^d \\ \overline{\theta}_{yi}^d \\ \overline{\theta}_{zi}^d \end{Bmatrix} = \frac{\theta}{2\sin\theta}\begin{Bmatrix} \overline{R}_{di}(3,2) - \overline{R}_{di}(2,3) \\ \overline{R}_{di}(1,3) - \overline{R}_{di}(3,1) \\ \overline{R}_{di}(2,1) - \overline{R}_{di}(1,2) \end{Bmatrix} \tag{4.55}$$

Eine numerisch stabile Form der Gleichung (4.55) kann mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung der in der Gleichung enthaltenden Sinusterme entsprechend der Arbeit von Tang [118] erzielt werden:

$$\frac{\theta}{2\sin\theta} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\theta^2 + \frac{7}{720}\theta^4 \tag{4.56}$$

Hieraus folgt schließlich:

$$\{\overline{\theta}_i^d\} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\theta^2 + \frac{7}{720}\theta^4\right) \begin{Bmatrix} \overline{R}_{di}(3,2) - \overline{R}_{di}(2,3) \\ \overline{R}_{di}(1,3) - \overline{R}_{di}(3,1) \\ \overline{R}_{di}(2,1) - \overline{R}_{di}(1,2) \end{Bmatrix} \tag{4.57}$$

Ein im Anhang in Abb. A.5 dargestellter Vergleich der Termen der Gleichung (4.56) zeigt, dass die in der Gleichung (4.56) dargestellte Taylor-Entwicklung auch für große θ-Werte (bis $\pi/2$) sehr gute Resultate liefert.

4.3.1.4 Elementmatrizen der korotierenden Formulierung

Eine detaillierte Beschreibung der Herleitung der EICR-Elementmatrizen ist von Felippa in [41] dargestellt. Im Folgenden wird eine verkürzte Herleitung gegeben, welche die für das Verständnis der vorgeschlagenen Formulierung wesentlichen Gleichungen beinhaltet. Ausgangspunkte der Herleitung sind die lineare Elementsteifigkeit $[\overline{K}_e]$ im sich mitbewegenden Elementkoordinatensystem und der Vektor der verzerrungserzeugenden Deformationen $\{\overline{u}_e^d\}$, welche den Verzerrungszustand des Elements im Elementkoordinatensystem vollständig beschreiben. Für den Knoten i setzt sich $\{\overline{u}_i^d\}$ aus den bereits dargestellten verzerrungserzeugenden Translationen und Rotationen wie folgt zusammen:

$$\{\overline{u}_i^d\} = \begin{Bmatrix} \{\overline{d}_i\} \\ \{\overline{\theta}_i^d\} \end{Bmatrix} = \Big\{ \underbrace{\overline{u}_i^d \quad \overline{v}_i^d \quad \overline{w}_i^d}_{\{\overline{d}_i\}^T} \; \underbrace{\overline{\theta}_{xi}^d \quad \overline{\theta}_{yi}^d \quad \overline{\theta}_{zi}^d}_{\{\overline{\theta}_i^d\}^T} \Big\}^T \tag{4.58}$$

Der Elementvektor der verzerrungserzeugenden Freiheitsgrade kann dann wie folgt aufgestellt werden:

$$\{\overline{u}_e^d\} = \Big\{ \{\overline{u}_1^d\}^T \quad \{\overline{u}_2^d\}^T \quad \{\overline{u}_3^d\}^T \Big\}^T \tag{4.59}$$

Für konservative Systeme kann der interne Kraftvektor aus der Differentiation der Formänderungsenergie $\overline{U}_e$ nach den verzerrungserzeugenden Verformungen bestimmt werden:

$$\{\overline{f}_{int,e}\} = \frac{\partial \overline{U}_e}{\partial \{\overline{u}_e^d\}} \tag{4.60}$$

Im korotierten Elementsystem ist der interne Kraftvektor $\{\overline{f}_{int,e}\}$ mit den Verformungen $\{\overline{u}_e^d\}$ über die elastische Steifigkeitsmatrix $[\overline{K}_e]$ verbunden:

$$\{\overline{f}_{int,e}\} = [\overline{K}_e]\{\overline{u}_e^d\} \tag{4.61}$$

Aus der Invarianz der virtuellen Arbeit:

$$\{\overline{f}_{int,e}\}^T\{\delta\overline{u}_e^d\} = \{f_{int,e}\}^T\{\delta u_e\} \tag{4.62}$$

folgt mit der Variation der verzerrungserzeugenden Freiheitsgrade:

$$\{\delta\overline{u}^d\} = \frac{\{\partial\overline{u}^d\}^T}{\{\partial u_e\}}\{\delta u_e\} \tag{4.63}$$

die Transformation des internen Kraftvektors zwischen dem globalen und korotierten System in Form der transponierten Jacobi-Matrix $[J_{CR}]$:

$$\{f_{int,e}\} = \underbrace{\frac{\{\partial\overline{u}_e^d\}^T}{\{\partial u_e\}}}_{[J_{CR}]^T}\{\overline{f}_{int,e}\} \tag{4.64}$$

Die Matrix $[J_{CR}]$ kann entsprechend dem Vorgehen in [41] wie folgt aufgeteilt werden:

$$[J_{CR}] = [\overline{H}][\overline{P}][\hat{R}_c], \tag{4.65}$$

mit der Transformationsmatrix $[\hat{R}_c] = [Diag([R_c])]$, der Projektormatrix $[\overline{P}]$ und der H-Matrix $[\overline{H}]$, welche $\{\delta\overline{\omega}_{di}\}$ in $\{\delta\overline{\theta}_i^d\}$ transformiert. Hieraus folgt:

$$\{f_{int,e}\} = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\overline{H}]^T\{\overline{f}_{int,e}\} \tag{4.66}$$

und mit Gleichung (4.61) schließlich:

$$\{f_{int,e}\} = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\overline{H}^T][\overline{K}_e]\{\overline{u}_e^d\} \tag{4.67}$$

Die konsistente tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix $[K_{T,e}]$ folgt aus der Variation des internen Kraftvektors nach den globalen Freiheitsgraden (siehe Felippa [41]):

$$\{\delta f_{int,e}\} \stackrel{\text{def}}{=} [K_{e,T}]\{\delta u_e\} \tag{4.68}$$

Die ausgeführte Variation (4.68) beinhaltet vier Terme:

$$\begin{aligned}\{\delta f_{int,e}\} =& [\delta\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\overline{H}]^T\{\overline{f}_{int,e}\} + [\hat{R}_c]^T[\delta\overline{P}]^T[\overline{H}]^T\{\overline{f}_{int,e}\} \\ &+ [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\delta\overline{H}]^T\{\overline{f}_{int,e}\} + [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\overline{H}]^T\{\delta\overline{f}_{int,e}\} \\ =& \Big([K_{GR,e}] + [K_{GP,e}] + [K_{GH,e}] + [K_{M,e}]\Big)\{\delta u_e\},\end{aligned} \tag{4.69}$$

mit den folgenden Bezeichnungen entsprechend Felippa [44]:

- Rotational-Steifigkeit $[K_{GR,e}]$
- Projektor-Steifigkeit $[K_{GP,e}]$
- Momenten-Korrektur-Steifigkeit $[K_{GH,e}]$
- Materielle Steifigkeit $[K_{M,e}]$

Die Summe der Steifigkeiten $[K_{GR,e}]$, $[K_{GP,e}]$, $[K_{GH,e}]$ bildet entsprechend [44] die geometrische Steifigkeit. Die materielle Steifigkeit $[K_{M,e}]$ kann wie folgt dargestellt werden:

$$[K_{M,e}]\{\delta u_e\} = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\overline{H}]^T\{\delta\overline{f}_{int,e}\}, \tag{4.70}$$

mit den Gleichungen (4.61) und (4.63) führt die Gleichung (4.70) dann auf:

$$[K_{M,e}]\{\delta u_e\} = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\overline{H}]^T[\overline{K}_e][\overline{H}][\overline{P}][\hat{R}_c]\{\delta u_e\} \tag{4.71}$$

und somit zu:

$$[K_{M,e}] = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\overline{H}]^T[\overline{K}_e][\overline{H}][\overline{P}][\hat{R}_c] \tag{4.72}$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine vereinfachte, numerisch effektive korotierende Formulierung vorgeschlagen, die im Gegensatz zur konsistenten Formulierung (siehe Felippa [44]) ohne weitere Maßnahmen auf symmetrische Systemmatrizen führt. Zur Reduktion der notwendigen Rechenoperationen werden zwei Vereinfachungen vorgenommen: 1.) Die Transformationen der H-Matrix werden vernachlässigt ($[\overline{H}] = [I]$), was für kleine Lastinkremente im Zuge der Newtoniteration zulässig ist (siehe [118]); 2.) Die tangentiale Steifigkeitsmatrix wird auf die Materielle-Steifigkeit reduziert, sodass die Berechnungen der Matrizen $[K_{GR,e}]$, $[K_{GP,e}]$, $[K_{GH,e}]$ und der in ihnen enthaltenden Variationen entfallen. Hieraus folgt für die vereinfachte korotierende Formulierung entsprechend den Gleichungen (4.72) und (4.67) die tangentiale Steifigkeitsmatrix $[K_{T,e}]$ und der interne Kraftvektor $\{f_{int,e}\}$, bezogen auf die raumfeste Basis (x,y,z):

$$[K_{T,e}] = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[\overline{K}_e][\overline{P}][\hat{R}_c] \tag{4.73}$$

$$\{f_{int,e}\} = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T][\overline{K}_e]\{\overline{u}_e^d\} \tag{4.74}$$

Die tangentiale Steifigkeitsmatrix $[K_{T,e}]$ wird also aus der konsistente Tranformation der lokalen Steifigkeitsmatrix $[\overline{K}_e]$ in das globale raumfeste System bestimmt. Die lokalen Steifigkeitsmatrix $[\overline{K}_e]$ bleibt formal die gleiche nur die Tranformationsbeziehungen zwischen der korotierten und der raumfesten Basis ändern sich mit der Elementdeformation, sodass Gleichung (4.73) ausgehend von der initialen Konfiguration wie folgt, mit der Elementsteifigkeitsmatrix $[K_e]$ (vgl. Gleichung (4.37)) beschrieben im initialen System, ausgedrückt werden kann:

$$[K_{T,e}] = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[K_e][\overline{P}][\hat{R}_c] \tag{4.75}$$

Die Genauigkeit der vorgeschlagenen vereinfachten korotierenden Formulierung ist aufgrund der getroffenen Annahmen abhängig vom Charakter des geometrisch nichtlinearen Verhaltens der zu untersuchenden Struktur. Die Annahme, dass das elastische Verhalten der Elemente konstant bezüglich des mitdrehenden Systems ist, bedeutet, dass der Einfluss

der Spannungen auf die Elementsteifigkeit vernachlässigt wird. Bei Problemstellungen, in denen überwiegend große lokale Starrkörperrotationen das Verformungsverhalten bestimmen, kann mit der vorgeschlagenen korotierenden Formulierung eine sehr hohe Genauigkeit erzielt werden.

Kapitel 5

Elementformulierung

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines effektiven finiten Elements zur Berechnung dünnwandiger piezoelektrischer Strukturen unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte. Die Effektivität der vorgeschlagenen Formulierung basiert im Wesentlichen auf der hohen Konvergenzrate des Elements und der damit verbundenen möglichen Reduktion der Dimension der aus der Vernetzung der Struktur resultierenden algebraischen Gleichungssysteme sowie aus der Reduktion des numerischen Aufwandes für ihre iterative Lösung. Hierfür wurde, als Teil des Lösungskonzeptes der Arbeit, der Kompromiss getroffen, zur Vernetzung der Struktur ebene Elemente mit niedriger Interpolationsordnung zu verwenden und dafür eine höhere Anzahl von Elementen - im Vergleich zur Verwendung quadratischer Elemente -, in Kauf zu nehmen, um eine ausreichende Genauigkeit zu erzielen. Die damit verbundene feinere Auflösung der Starrkörperrotation wirkt sich unter Verwendung einer mitdrehenden Formulierung positiv auf die Genauigkeit sowie auf die Konvergenz der nichtlinearen Analyse aus. Zudem muss auf diese Weise die Starrkörperrotation im Zuge der korotierenden Formulierung nicht auf Elementebene gemittelt werden, da diese für ebene Elemente - anders als für gekrümmte Elementen konstant ist. Hierdurch sind zusätzliche Rechenoperationen in jedem Iterationsschritt nicht mehr nötig.
Niedrig interpolierte finite Schalenelemente können entsprechend ihrer Form in drei- und viereckige Elemente unterteilt werden. Beide Elementformen besitzen speziellen Vorteile, weshalb in nahezu jedem kommerziellen FE-Programm Elemente beider Formen implementiert sind. Während viereckige Elemente weitgehend ein besseres Konvergenzverhalten aufweisen, sind dreieckige Elemente, aufgrund ihrer Flexibilität, unverzichtbar für die Modellierung unregelmäßiger Geometrien. Trotz ihrer Relevanz stehen lineare dreieckige Elemente, wie bereits in der Literaturübersicht erwähnt, weit weniger im Fokus der Entwickler. Mit dieser Arbeit soll ein Betrag zur Fortentwicklung dieser unverzichtbaren Elementtypen geleistet werden. Des Weiteren soll gezeigt werden, dass diese Elententwicklung in

Kombination mit einer vereinfachten korotierenden Formulierung zu effektiven, flexiblen sowie robusten numerischen Modellen für die Berechnung adaptiver Strukturen führt.
Ebene finite Schalenelemente können durch die Kombination eines Membran- und eines Plattenelements entwickelt werden. Anders als bei Elementen mit gekrümmten Geometrien, treten bei ebenen Elementen keine Momente infolge der Richtungsänderung der Normalkräfte auf, sodass die Tragwirkung solcher Schalen ohne weitere Einschränkungen separat durch eine Membran- $[K_{mem}]$ und eine Plattensteifigkeit $[K_p]$ beschrieben werden kann. Eine Kopplung beider Anteile auf Elementebene folgt nur noch aus dem Aufbau des Materialsystems (Laminataufbau) in Form der Kopplungssteifigkeit $[K_{mp}]$ (siehe Abschnitt 2.2.3).
Im folgenden Kapitel wird die Entwicklung des vorgeschlagenen Schalenelements detailliert beschrieben. Die Membransteifigkeitsmatrix $[K_{mem}]$ dieses Schalenelements basiert auf der von Felippa und Militello [39] vorgeschlagen „Assumed-Natural-Deviatoric-Strain“ (ANDES)-Formulierung. Das Plattenelement beruht auf einer Verschiebungsinterpolation unter Verwendung der Mindlin-Reissner-Kinematik (siehe Abschnitt 2.2), wobei die transversalen Schubsteifgkeiten separat mit einem vom Autor modifizierten Schubklaffungs-Ansatzes (siehe Abschnitt 5.5) beschrieben werden. Zweckdienlicherweise werden die Elementmatrizen und -vektoren in einem lokalen Elementkoordinatensystem (x', y', z') entwickelt und dargestellt. Das hierfür verwendete kartesische Elementkoordinatensystem kann beliebig in der Elementebene angeordnet werden. Ein möglicher Algorithmus zur Bestimmung solch eines Elementkoordinatensystems ist in Abschnitt 5.1 dargestellt. Die zusammengesetzte lineare mechanische Schalensteifigkeitsmatrix $[\hat{K}_e]$, bezogen auf das lokale Elementkoordinatensystem (siehe Abb. 5.1), kann wie folgt dargestellt werden:

$$[\hat{K}_e] = \begin{bmatrix} [K_{mem}] & [K_{mp}] \\ [K_{mp}]^T & [K_p] \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Das zu approximierende Elementverschiebungsfeld kann analog zu den Steifigkeiten in ein Membranverschiebungsfeld (u_0, v_0) und ein Plattenverschiebungsfeld (u_p, v_p, w_p) aufgeteilt werden:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} \tag{5.2}$$

Die Interpolation des Membranverschiebungsfeldes (u_0, v_0) erfolgt unter Berücksichtigung der Knotenverschiebungen u'_i, v'_i sowie der Drillfreiheitsgrade $\theta_{z'i}$ (siehe Abb. 5.1). Sie ist im Detail im Abschnitt (5.6.6) dargestellt. Das auf der Mindlin-Reissner-Kinematik basierende Plattenverschiebungsfeld wird mit linearen Ansatzfunktionen und den Knotenfreiheitsgraden w'_i, $\theta_{x'i}$ sowie $\theta_{y'i}$ interpoliert (siehe Abschnitt 5.4). Das resultierende Schalen-

element besitzt drei Knoten mit je sechs mechanischen Freiheitsgraden. Die mechanischen

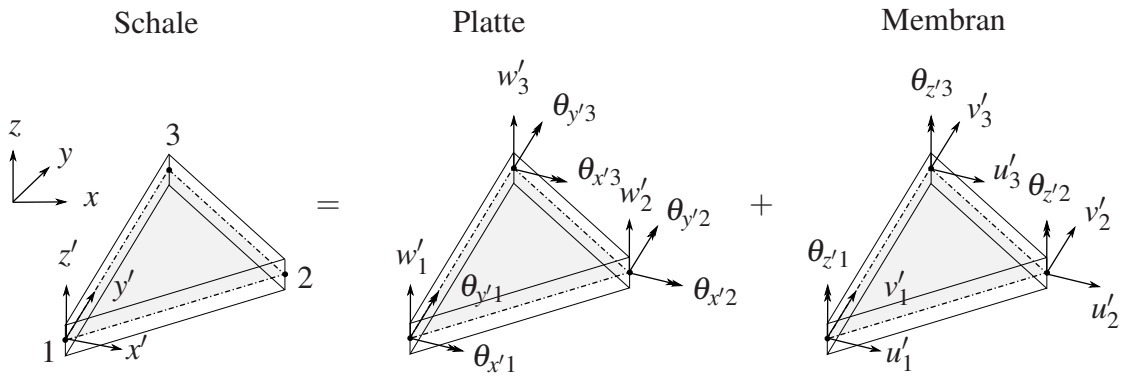


Abb. 5.1: Überlagerung von Membran und Platte zur Schale

Knotenfreiheitsgrade $\{u_i\}$ setzen sich aus drei Translationen $(u_i \quad v_i \quad w_i)$ und drei Rotationen $(\theta_{x'i} \quad \theta_{y'i} \quad \theta_{z'i})$ zusammen:

$$\{u_i\} = \left\{ u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta_{x'i} \quad \theta_{y'i} \quad \theta_{z'i} \right\}^T \tag{5.3}$$

Die Elementfreiheitsgrade werden für die in den folgenden Abschnitten dargestellte separate Entwicklung der Membran- und Plattensteifigkeiten aufgeteilt in einen Membranverschiebungsvektor $\{u_{mem}\}$ und einen Plattenverschiebungsvektor $\{u_p\}$:

$$\begin{aligned} \{u_{mem}\} &= \left\{ u'_1 \quad v'_1 \quad \theta_{z'1} \quad u'_2 \quad v'_2 \quad \theta_{z'2} \quad u'_3 \quad v'_3 \quad \theta_{z'3} \right\}^T \\ \{u_p\} &= \left\{ w'_1 \quad \theta_{x'1} \quad \theta_{y'1} \quad w'_2 \quad \theta_{x'2} \quad \theta_{y'2} \quad w'_3 \quad \theta_{x'3} \quad \theta_{y'3} \right\}^T \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die für die Berechnungen verwendete finale mechanische Elementsteifigkeitsmatrix $[K_e]$ wird durch, ein - den Knotenfreiheitsgraden $\{u_i\}$ entsprechendes - Umsortieren der Matrix $[\hat{K}_e]$ gewonnen. Der zu $[K_e]$ zugehörige Verschiebungsvektor $\{u_e\}$ setzt sich - nach einer Sortierung entsprechend der Knotenfreiheitsgrade $\{u_i\}$ - wie folgt zusammen:

$$\{u_e\} = \left\{ \{u_1\}^T \quad \{u_2\}^T \quad \{u_3\}^T \right\}^T \tag{5.5}$$

Zusätzlich besitzt das Element jeweils einen elektrischen Freiheitsgrad (ϕ) pro im Element enthaltener Piezoschicht:

$$\{\phi_e\} = \left\{ \phi_1 \quad \dots \quad \phi_k \right\}^T, \tag{5.6}$$

wobei k die Anzahl der definierten Piezoschichten ist. Die piezoelektrische Kopplungswirkung zwischen den elektrischen und den mechanischen Freiheitsgraden wird durch die elektro-mechanische Kopplungssteifigkeit $[K_{u\phi,e}]$ beschrieben. Diese Kopplungsmatrix $[K_{u\phi,e}]$ wird aus den in der Elementebene wirkenden approximierten Verzerrungen und den

piezoelektrischen Materialeigenschaften (siehe Abschnitt 4.2) im Elementsystem entwickelt. Die den mechanischen und elektrischen Freiheitsgraden zugeordneten Belastungen können unterteilt werden in Knotenkräfte und -momente:

$$\{f_{e,i}\} = \left\{ f_{x',i} \quad f_{y',i} \quad f_{z',i} \quad m_{x',i} \quad m_{y',i} \quad m_{z',i} \right\}^T \tag{5.7}$$

und in elektrische Elementladungen:

$$\{q_e\} = \left\{ q_{e,1} \quad \dots \quad q_{e,k} \right\}^T \tag{5.8}$$

Geometrisch nichtlineare Elementeffekte werden durch die in Kapitel 4 dargestellte vereinfachte korotierenden Formulierung berücksichtigt.

5.1 Elementkoordinatensystem

Das lokale kartesische Elementkoordinatensystem (x', y', z') wird auf der Basis der Ortsvektoren der Elementknoten, bezogen auf die raumfeste Basis (x, y, z), gebildet. Der Einheitsvektor $\{e_{y'}\}$ wird aus der normierten Differenz der Ortsvektoren von Knoten 3 und 1 bestimmt:

$$\{e_{y'}\} = \frac{\left\{ x_3 \quad y_3 \quad z_3 \right\}^T - \left\{ x_1 \quad y_1 \quad z_1 \right\}^T}{\left\| \left\{ x_3 \quad y_3 \quad z_3 \right\}^T - \left\{ x_1 \quad y_1 \quad z_1 \right\}^T \right\|} \tag{5.9}$$

Anschließend wird ein Hilfsvektor $\{e_{21}\}$ aufgestellt, welcher von Knoten 1 zu Knoten 2 zeigt:

$$\{e_{21}\} = \frac{\left\{ x_2 \quad y_2 \quad z_2 \right\}^T - \left\{ x_1 \quad y_1 \quad z_1 \right\}^T}{\left\| \left\{ x_2 \quad y_2 \quad z_2 \right\}^T - \left\{ x_1 \quad y_1 \quad z_1 \right\}^T \right\|} \tag{5.10}$$

Aus dem Kreuzprodukt der Vektoren $\{e_{x'}\}$ und $\{e_{21}\}$ kann dann $\{e_{z'}\}$ bestimmt werden:

$$\{e_{z'}\} = \{e_{y'}\} \times \{e_{21}\} \tag{5.11}$$

und damit $\{e_{x'}\}$:

$$\{e_{x'}\} = \{e_{z'}\} \times \{e_{y'}\} \tag{5.12}$$

5.2 Dreiecksgeometrie

Die Geometrie eines einzelnen Dreiecks mit drei geraden Seiten kann im Elementkoordinatensystem vollständig über seine Eckpunktkoordinaten (x'_i, y'_i, mit $i = 1,2,3$) beschrieben werden. Die Nummerierung der Knoten wird entgegen dem Uhrzeigersinn (siehe Abb. 5.2)

festgelegt. Die für die Entwicklung der Steifigkeiten benötigten Koordinatendifferenzen werden bezüglich des lokalen kartesische Koordinatensystems (x', y', z') beschrieben und wie folgt abgekürzt:

$$\begin{aligned} x'_{ij} &= x'_i - x'_j \\ y'_{ij} &= y'_i - y'_j \end{aligned} \tag{5.13}$$

Die von den Eckpunkten aufgespannte Dreiecksfläche A ist gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2}\left(y'_{21}x'_{13} - x'_{21}y'_{13}\right) \tag{5.14}$$

Neben den Eckknoten $(1,2,3)$ ist der geometrische Mittelpunkt 0 für die Entwicklung der Steifigkeitsmatrizen von Bedeutung:

$$\left\{x'_0 \quad y'_0\right\}^T = \frac{1}{3}\left\{\left(x'_1 + x'_2 + x'_3\right) \quad \left(y'_1 + y'_2 + y'_3\right)\right\}^T \tag{5.15}$$

Die Längen der Elementkanten werden mit l_{ji} abgekürzt. Sie berechnen sich aus den jeweilig zugehörigen Eckpunktkoordinatendifferenzen:

$$l_{ji} = \sqrt{x'^2_{ji} + y'^2_{ji}} \tag{5.16}$$

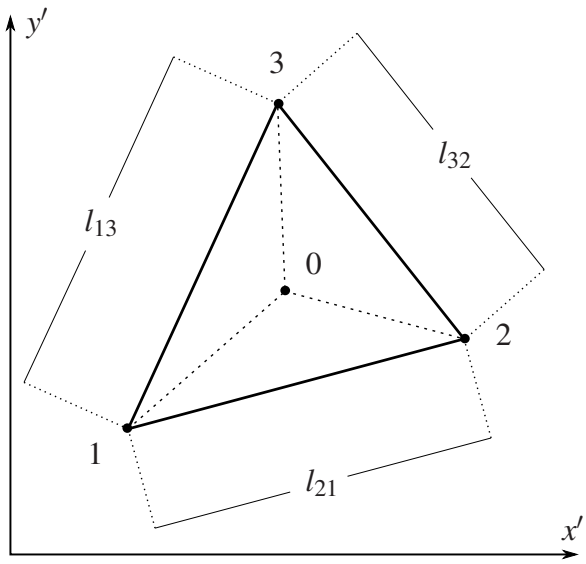


Abb. 5.2: Geometrische Bezeichnungen (Dreiecksgeometrie)

5.3 Natürliche Dreieckskoordinaten

Für die Entwicklung des Dreieckelementes ist es zweckdienlich Dreieckskoordinaten zu verwenden. In Abb. 5.3 ist ein in drei Unterdreiecke aufgeteiltes Dreieck mit den Teilflächen A_1, A_2 und A_3 dargestellt. Die Unterdreiecke A_i $(i = 1,2,3)$ liegen den jeweiligen

Eckpunkten i gegenüber. Die Lage des Punktes P innerhalb des Dreiecks kann aus den Verhältnissen der Unterdreiecksflächen A_1, A_2, A_3 und aus der Gesamtfläche A bestimmt werden. Diese Größen bilden die sogenannten Dreieckskoordinaten:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1/A \\ \xi_2 &= A_2/A \\ \xi_3 &= A_3/A \end{aligned} \tag{5.17}$$

Des Weiteren gilt:

$$\frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{5.18}$$

Gleichung (5.18) lässt sich umformen zu:

$$\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3 \tag{5.19}$$

Aus der Abhängigkeit (5.19) folgt, dass die Lage eines beliebigen Punktes P innerhalb des Dreiecks eindeutig durch zwei Dreieckskoordinaten beschrieben werden kann. Werden die

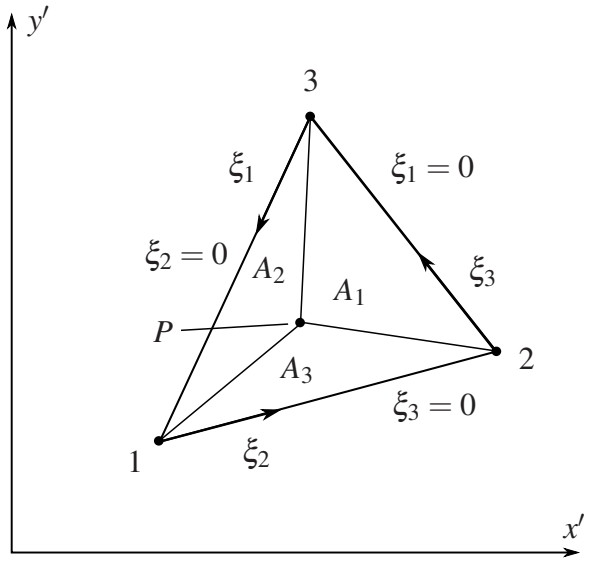


Abb. 5.3: Dreieckskoordinaten

Teilflächen A_i durch die kartesischen Koordinaten x', y' ausgedrükt kann ein Zusammenhang zwischen den kartesischen Elementkoordinaten und den natürlichen Dreieckskoordinaten aufgestellt werden. Die Gleichung (5.18) sowie die Umrechnung der Dreieckskoordinaten in kartesische Koordinaten können wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x'_2 y'_3 - x'_3 y'_2 & y'_{23} & x'_{32} \\ x'_3 y'_1 - x'_1 y'_3 & y'_{31} & x'_{13} \\ x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 & y'_{12} & x'_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{Bmatrix}, \tag{5.21}$$

mit

$$2A = x'_{21} y'_{31} - y'_{21} x'_{31} \tag{5.22}$$

Die partiellen Ableitungen nach den Dreieckskoordinaten lassen sich mit Hilfe der Kettenregel bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial x'}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} &= \frac{\partial x'}{\partial \xi_3} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial \xi_3} \frac{\partial}{\partial y'} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Hieraus folgt in Matrixform:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial y'}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial y'}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \end{Bmatrix} \tag{5.24}$$

Mit der Gleichung (5.20) ergibt sich:

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial y'}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial y'}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{21} & y'_{21} \\ x'_{31} & y'_{31} \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y'_{31} & y'_{12} \\ x'_{13} & x'_{21} \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

5.4 Lineare Ansatzfunktion

Die Dreieckskoordinaten können als linear veränderliche Ansatzfunktionen interpretiert werden. Sie ermöglichen somit die Interpolation einer beliebigen skalaren Größe $c(x', y')$ innerhalb des Dreiecks, und zwar mit Hilfe einer Matrix der Ansatzfunktionen $[N_c]$ und einem Vektor der Eckpunktwerte $\{c\}$:

$$c(x', y') = [N_c]\,\{c\} = \begin{bmatrix} N_1(\xi_2, \xi_3) & N_2(\xi_2, \xi_3) & N_3(\xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}, \tag{5.27}$$

mit:

$$\begin{aligned} N_1(\xi_2, \xi_3) &= 1 - \xi_2 - \xi_3 \\ N_2(\xi_2, \xi_3) &= N_2(\xi_2) = \xi_2 \\ N_3(\xi_2, \xi_3) &= N_3(\xi_3) = \xi_3 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Mit der Gleichung (5.21) können die Ansatzfunktionen in den kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} N_1(x',y') &= \frac{1}{2A}\left(x'_2y'_3 - x'_3y'_2 + y'_{23}x' + x'_{32}y'\right) \\ N_2(x',y') &= \frac{1}{2A}\left(x'_3y'_1 - x'_1y'_3 + y'_{31}x' + x'_{13}y'\right) \\ N_3(x',y') &= \frac{1}{2A}\left(x'_1y'_2 - x'_2y'_1 + y'_{12}x' + x'_{21}y'\right) \end{aligned} \tag{5.29}$$

Die Ableitung der Ansatzfunktionen (5.28) nach den Dreieckskoordinaten ξ_2, ξ_3 ergibt:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1(\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial N_2(\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial N_3(\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial N_1(\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial N_2(\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial N_3(\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen (5.29) nach x', y' können wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1(x',y')}{\partial x'} & \dfrac{\partial N_2(x',y')}{\partial x'} & \dfrac{\partial N_3(x',y')}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial N_1(x',y')}{\partial y'} & \dfrac{\partial N_2(x',y')}{\partial y'} & \dfrac{\partial N_3(x',y')}{\partial y'} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y'_{23} & y'_{31} & y'_{12} \\ x'_{32} & x'_{13} & x'_{21} \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

5.5 Plattensteifigkeit auf Basis einer modifizierten diskreten Schubklaffungs-Formulierung

Im diesem Abschnitt wird die Plattensteifigkeitsmatrix $[K_p]$ mit den zugehörigen Freiheitsgraden $\{u_p\}$ im lokalen Elementkoordinatensystem (x', y') entwickelt. Die Plattenverformungen können entsprechend der Mindlin-Reisser-Kinematik (siehe Abschnitt 2.2.1) in eine Schub- und eine Biegedeformation unterteilt werden. Die zugehörigen Biege- $[K_{pb}]$ und Schubsteifigkeiten $[K_{ps}]$ können daraufhin getrennt voneinander bestimmt und anschließend zur Plattensteifigkeitsmatrix $[K_p]$ zusammengefasst werden:

$$[K_p] = [K_{pb}] + [K_{ps}] \tag{5.32}$$

Ausgangspunkt der Entwicklung der Plattensteifigkeiten ist die lineare Interpolation der Plattendeformation im Element:

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} N_i \begin{Bmatrix} z'\theta_{y',i} \\ -z'\theta_{x',i} \\ w'_i \end{Bmatrix}, \tag{5.33}$$

mit einem Definitionsbereich für z' von $-h/2$ bis $h/2$. Die Biegesteifigkeit wird mit interpolierten Krümmungen und Drillungen entwickelt. Diese wiederum werden aus partiellen Ableitungen der Biegedeformationen bestimmt. Für die Schubsteifigkeit führt solch eine rein verschiebungsinterpolierte Approximation der Verzerrungen jedoch zu einer unzureichenden Beschreibung (siehe Abschnitt 1.1). Als Folge können unerwünschte Versteifungseffekte („Shear Locking“) auftreten, insbesondere bei Plattenelementen niederer Ansatzordnung. Diese sind annährend proportional zu dem Quadrat des Verhältnisses der Elementkantenlänge zur Elementdicke [60], sodass sie insbesondere die Konvergenz dünner Platten negativ beeinflussen. Um diesem entgegenzuwirken, wird das „Discrete-Shear-Gap “ (DSG)-Konzept angewendet. Laut Bletzinger et al. [27] eliminieren die DSG-Modifikationen die unerwünschten Schubversteifungseffekte, besitzen jedoch den Nachteil, dass sie bei der Angewendung auf Dreieckselemente eine Abhängigkeit der Schubsteifigkeitsmatrix von der Knotennummerierung verursacht.
Die von Nguyen-Thoi et al. in [86] vorgeschlagene Glättung der Verzerrungen auf Elementebene (Cell-Smoothing (CS)) behebt diese Problematik. In [86] wird das vorgeschlagenen CS-Verfahren auf das gesamte Plattenverzerrungsfeld angewendet. Effektiver ist es, wie in dieser Arbeit vorgeschlagen, die Anwendung der CS-Technik bei linearen dreieckigen Elementen auf das Schubverzerrungsfeld zu begrenzen. Die Berechnungsergebnisse bleiben hiervon unverändert, da die Glättung der konstanten Krümmungen und Drillungen im Element keinen Einfluss auf die Steifigkeitsmatrix ausüben. Die Anwendung dieser CS-Technik nur auf den Schubanteil wurde, soweit dem Autor bekannt, in dieser Form noch nicht implementiert.

5.5.1 Biegesteifigkeit

Die Biegesteifigkeit des Plattenelements wird auf der Basis einer reinen Verschiebungsinterpolation gebildet. Die Verschiebungs-Krümmungs-Matrix $[B_{pb}]$ kann direkt aus den diskretisierten Biegeverzerrungen abgeleitet werden:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^b_{x'x'} \\ \varepsilon^b_{y'y'} \\ \gamma^b_{x'y'} \end{Bmatrix} = z' \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \\ -\dfrac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} - \dfrac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \end{Bmatrix} = z' \sum_{i=1}^{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x'} \\ 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial x'} & \dfrac{\partial N_i}{\partial y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'_i \\ \theta_{x'i} \\ \theta_{y'i} \end{Bmatrix} \tag{5.34}$$

Hieraus folgt:

$$[B_{pb}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & y'_{23} & 0 & 0 & y'_{31} & 0 & 0 & y'_{12} \\ 0 & -x'_{32} & 0 & 0 & -x'_{13} & 0 & 0 & -x'_{21} & 0 \\ 0 & -y'_{23} & x'_{32} & 0 & -y'_{31} & x'_{13} & 0 & -y'_{12} & x'_{21} \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

Die Biegesteifigkeitsmatrix $[K_{pb}]$ kann dann mit der Biege-Material-Matrix $[D]$ (siehe Abschnitt 2.2.3) in folgender Form bestimmt werden:

$$[K_{pb}] = \int_{(A)} [B_{pb}]^T [D][B_{pb}] \, \mathrm{d}A \tag{5.36}$$

Da die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen der Gleichung (5.34) konstant sind, kann die Integration in der Gleichung (5.36) als Multiplikation mit der Dreiecksfläche ausgeführt werden:

$$[K_{pb}] = \left([B_{pb}]^T [D][B_{pb}]\right) A \tag{5.37}$$

5.5.2 Schubsteifigkeit

Die Schubsteifigkeit der vorgeschlagenen Formulierung wird, wie bereits erwähnt, auf Basis einer modifizierten DSG-Formulierung entwickelt. Die Berechnung der Schubsteifigkeitsmatrix $[K_{ps}]$ kann mit Hilfe der geglätteten, konstanten DSG-Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix $[B_{ps}]$ wie folgt dargestellt werden:

$$[K_{ps}] = \left([B_{ps}]^T [F][B_{ps}]\right) A \tag{5.38}$$

Im Folgenden werden zunächst die Grundzüge der DSG-Formulierung erläutert. Darauf aufbauend werden die DSG-Matrizen für die dreiknotige Platte hergeleitet. Anschließend wird mit Hilfe der vorgeschlagenen Glättung die Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix $[B_{ps}]$ entwickelt und dann die Schubsteifigkeitsmatrix $[K_{ps}]$ wie in Gleichung (5.38) dargestellt berechnet.

5.5.2.1 DSG-Konzept

Die Grundidee der DSG-Methode besteht in der Bestimmung der Querschubverzerrungen erzeugenden Verschiebungsanteile w_γ aus der Differenz der Gesamtverschiebungen und der reinen Biegeverschiebungen ($w_\gamma = w - w_\theta$) sowie der anschließenden Bildung eines aus w_γ resultierenden lockingfreien Verzerrungsfeldes.
Die DSG-Methode läßt sich anschaulich anhand eines linearen zweiknotigen schubweichen Timoshenko-Balkens in der Ebene beschreiben. Ausgangspunkt des Konzepts ist die lineare Interpolation der Verformungsgrößen (Verschiebungen und Rotationen) über die Balkenlänge l_e. Die vertikale Verschiebung $w'(x')$ und Verdrehung $\theta'(x')$ werden hierbei mit Hilfe linearer Ansatzfunktionen und den Knotenverschiebungen w'_i sowie -rotationen θ'_i (siehe Abb. 5.4) interpoliert:

$$\begin{aligned} w'(x') &= \left(1 - \frac{x'}{l_e}\right) w'_1 + \left(\frac{x'}{l_e}\right) w'_2 \\ \theta'(x') &= \left(1 - \frac{x'}{l_e}\right) \theta'_1 + \left(\frac{x'}{l_e}\right) \theta'_2 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Anschließend wird der Verschiebungsanteil w'_γ infolge der Gleitung γ durch die Integration der kinematischen Gleichung der Querschubverzerrungen bestimmt:

$$w_\gamma(x') = \int_{x'} \gamma \, \mathrm{d}x' = \int_0^{x'} \frac{\partial w'}{\partial x'} \, \mathrm{d}x' + \int_0^{x'} \theta \, \mathrm{d}x' \tag{5.40}$$

Die untere Integrationsgrenze des Integrals in Gleichung (5.40) kann ohne jegliche Ein-

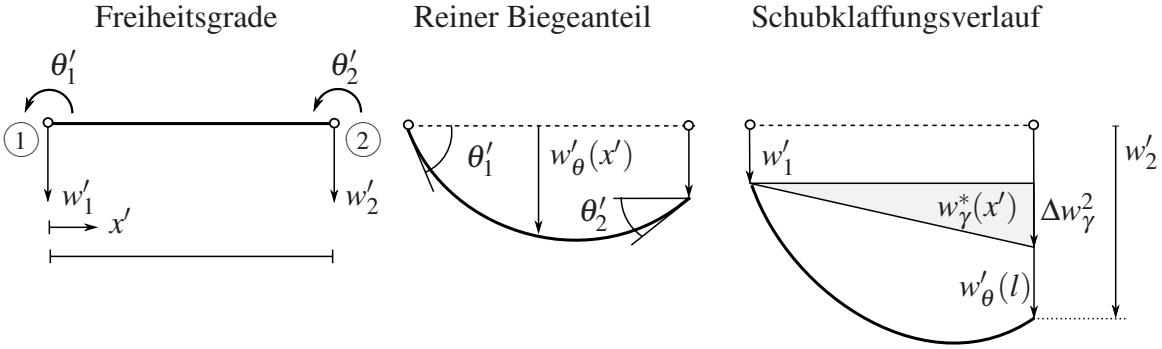


Abb. 5.4: Diskrete-Schubklaffungs-Methode (Discret-Shear-Gap-Method)

schränkung zu null gesetzt werden, da nur die Relativverformungen für die Berechnung der Verzerrungen relevant sind. Gleichung (5.40) führt, unter Verwendung der Interpolation (5.39), auf:

$$w_\gamma(x') = \int_0^{x'} \left(\frac{1}{l_e}(w_2 - w_1) + \left(1 - \frac{x'}{l_e}\right) \theta'_1 + \left(\frac{x'}{l_e}\right) \theta'_2 \right) \mathrm{d}x' \tag{5.41}$$

und damit auf die Schubklaffung $w_\gamma(x')$:

$$w_\gamma(x') = \frac{x'}{l_e}(w'_2 - w'_1) + x' \left(1 - \frac{x'}{2l_e}\right) \theta'_1 + x' \left(\frac{x'}{2l_e}\right) \theta'_2 \tag{5.42}$$

Infolge der unterschiedlichen Interpolationsordnung von w' und θ' in Gleichung (5.42) ist der Verlauf der Schubklaffung nicht über die gesamte Elementlänge frei von parasitären Anteilen. In den Knoten jedoch sind die Verschiebungen und Rotationen bekannt, so dass das Verschiebungsfeld interpoliert aus den diskreten Knoten-Schubklaffungen auf ein Verzerrungsfeld frei von künstlichen Versteifungseffekten führt. Mit den diskreten Schubklaffungen Δw^i_γ $(i = 1,2)$:

$$\begin{aligned} \Delta w^1_\gamma &= w_\gamma(0) = 0 \\ \Delta w^2_\gamma &= w_\gamma(l_e) = w'_2 - w'_1 + \frac{l_e}{2}\left(\theta'_1 + \theta'_2\right) \end{aligned} \tag{5.43}$$

und den Ansatzfunktionen aus Gleichung (5.39) kann dann der modifizierte Schubklaffungsverlauf w^*_γ aufgestellt werden:

$$w^*_\gamma(x') = \left(1 - \frac{x'}{l_e}\right) \Delta w^1_\gamma + \left(\frac{x'}{l_e}\right) \Delta w^2_\gamma = \left(\frac{x'}{l_e}\right) \Delta w^2_\gamma = \frac{x'}{l_e}\left(w'_2 - w'_1 + \frac{l_e}{2}\left(\theta'_1 + \theta'_2\right)\right) \tag{5.44}$$

Durch Differentiation von w_γ^* kann dann die modifizierte Schubverzerrung $\gamma^*(x')$ bestimmt werden:

$$\gamma^*(x') = \frac{\partial w_\gamma^*}{\partial x'} = \frac{1}{l_e}\left(w_2' - w_1'\right) + \frac{1}{2}\left(\theta_1' + \theta_2'\right) \tag{5.45}$$

Die aus der diskretisierten modifizierten Schubverzerrung folgenden Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix wird anschließend zur Entwicklung einer lockingfreien Schubsteifigkeit verwendet.

Ein Vergleich zwischen den Schubverzerrungen auf Basis der DSG-Formulierung (5.45) und einer reinen Verschiebungsinterpolation:

$$\gamma^{DISP}(x') = \frac{1}{l_e}\left(w_2' - w_1'\right) + \left(1 - \frac{x'}{l_e}\right)\theta_1' + \frac{x'}{l_e}\theta_2' \tag{5.46}$$

zeigt für den schubvezerrungsfreien Fall der reinen Biegung ($\theta_1' = -\theta_2'$, $w_1' = w_2' = 0$), dass die DSG-Formulierung im Gegensatz zu (5.46) zum richtigen Ergebnis führt ($\gamma^* = 0$) .

5.5.2.2 Modifizierter Schubklaffungsverlauf der dreieckigen Platte

Der Schubklaffungsverlauf des Plattenelements wird durch die Integration der kinematischen Gleichung der Schubverzerrungen (2.2.1) entlang der Elementkanten $(2-1)$ und $(3-1)$ bestimmt. Die hierfür notwendige Integration wird zweckdienlich in den Dreiecks-koordinaten ξ_2, ξ_3 durchgeführt. Die zu integrierenden Ansatzfunktionen (5.28) reduzieren sich zu:

$$\begin{aligned} N_1^{21} &= 1 - \xi_2 \quad N_2^{21} = \xi_2 \quad N_3^{21} = 0 \\ N_1^{31} &= 1 - \xi_3 \quad N_2^{31} = 0 \quad N_3^{31} = \xi_3 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Im Sinne der Schubklaffung als Relativverschiebung können die unteren Integrationsgrenzen zu null gesetzt werden, und es folgt:

$$\begin{aligned} w_{\gamma\xi_2}(\xi_2) &= w(\xi_2) + \int_0^{\xi_2}\left(\theta_{y'}(\xi_2)x_{21}' - \theta_{x'}(\xi_2)y_{21}'\right)\,\mathrm{d}\xi_2 \\ &= N_1^{21}w_1' + N_2^{21}w_2' + \int_0^{\xi_2}\left(x_{21}'\left(N_1^{21}\theta_{y'1} + N_2^{21}\theta_{y'2}\right) - y_{21}'\left(N_1^{21}\theta_{x'1} + N_2^{21}\theta_{x'2}\right)\right)\,\mathrm{d}\xi_2 \\ &= N_1^{21}w_1' + N_2^{21}w_2' + x_{21}'\left(\overline{N}_1^{21}\theta_{y'1} + \overline{N}_2^{21}\theta_{y'2}\right) - y_{21}'\left(\overline{N}_1^{21}\theta_{x'1} + \overline{N}_2^{21}\theta_{x'2}\right) \\ w_{\gamma\xi_3}(\xi_3) &= w(\xi_3) + \int_0^{\xi_3}\left(\theta_{y'}(\xi_3)x_{31}' - \theta_{x'}(\xi_3)y_{31}'\right)\,\mathrm{d}\xi_3 \\ &= N_1^{31}w_1' + N_2^{31}w_3' + \int_0^{\xi_3}\left(x_{31}'\left(N_1^{31}\theta_{y'1} + N_3^{31}\theta_{y'3}\right) - y_{31}'\left(N_1^{31}\theta_{x'1} + N_3^{31}\theta_{x'3}\right)\right)\,\mathrm{d}\xi_3 \\ &= N_1^{31}w_1' + N_2^{31}w_3' + x_{31}'\left(\overline{N}_1^{31}\theta_{y'1} + \overline{N}_3^{31}\theta_{y'3}\right) - y_{31}'\left(\overline{N}_1^{31}\theta_{x'1} + \overline{N}_3^{31}\theta_{x'3}\right) \end{aligned} \tag{5.48}$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \overline{N}_1^{21} &= \xi_2 - \tfrac{1}{2}\xi_2^2 \quad \overline{N}_2^{21} = \tfrac{1}{2}\xi_2^2 \\ \overline{N}_1^{31} &= \xi_3 - \tfrac{1}{2}\xi_3^3 \quad \overline{N}_3^{31} = \tfrac{1}{2}\xi_3^2 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Die an den Knoten ausgewerteten Schubklaffungen ergeben dann die diskreten Knoten-Schubklaffungen:

$$\begin{aligned}
\Delta w^1{}_{\gamma\xi_2} &= w_{\gamma\xi_2}(\xi_2 = 0) = \Delta w^3{}_{\gamma\xi_2} = 0 \\
\Delta w^2{}_{\gamma\xi_2} &= w_{\gamma\xi_2}(\xi_2 = 1) = w_2' - w_1' + \frac{1}{2}\left(x_{21}'\left(\theta_{y'1} + \theta_{y'2}\right) - y_{21}'\left(\theta_{x'1} + \theta_{x'2}\right)\right) \\
\Delta w^1{}_{\gamma\xi_3} &= w_{\gamma\xi_3}(\xi_3 = 0) = \Delta w^2{}_{\gamma\xi_3} = 0 \\
\Delta w^3{}_{\gamma\xi_3} &= w_{\gamma\xi_3}(\xi_3 = 1) = w_3' - w_1' + \frac{1}{2}\left(x_{31}'\left(\theta_{y'1} + \theta_{y'3}\right) - y_{31}'\left(\theta_{x'1} + \theta_{x'3}\right)\right)
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Diese diskreten Knoten-Schubklaffungen werden anschließend mit den linearen Ansatzfunktion (5.29) im Elementinneren interpoliert und bilden den modifizierten Schubklaffungsverlauf:

$$w_\gamma^* = N_2 \Delta w^2{}_{\gamma\xi_2} + N_3 \Delta w^3{}_{\gamma\xi_3} \tag{5.51}$$

5.5.2.3 Modifiziertes Schubverzerrungsfeld der dreieckigen Platte

Die DSG-Gleitungen $\gamma_{x'z'}^*, \gamma_{y'z'}^*$ berechnen sich aus den partiellen Ableitungen (siehe Gleichung (5.26)) des interpolierten Schubklaffungsverlaufs w_γ^* (5.51):

$$\begin{aligned}
\gamma_{x'z'}^* &= \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x'}\Delta w^2{}_{\gamma\xi_2} + \frac{\partial N_3}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x'}\Delta w^3{}_{\gamma\xi_3} \\
&= \frac{y_{31}'}{2A}\left(w_2' - w_1' + \frac{1}{2}\left(x_{21}'\left(\theta_{y'1} + \theta_{y'2}\right) - y_{21}'\left(\theta_{x'1} + \theta_{x'2}\right)\right)\right) \\
&\quad + \frac{y_{12}'}{2A}\left(w_3' - w_1' + \frac{1}{2}\left(x_{31}'\left(\theta_{y'1} + \theta_{y'3}\right) - y_{31}'\left(\theta_{x'1} + \theta_{x'3}\right)\right)\right) \\
\gamma_{y'z'}^* &= \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial y'}\Delta w^2{}_{\gamma\xi_2} + \frac{\partial N_3}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial y'}\Delta w^3{}_{\gamma\xi_3} \\
&= \frac{x_{13}'}{2A}\left(w_2' - w_1' + \frac{1}{2}\left(x_{21}'\left(\theta_{y'1} + \theta_{y'2}\right) - y_{21}'\left(\theta_{x'1} + \theta_{x'2}\right)\right)\right) \\
&\quad + \frac{x_{21}'}{2A}\left(w_3' - w_1' + \frac{1}{2}\left(x_{31}'\left(\theta_{y'1} + \theta_{y'3}\right) - y_{31}'\left(\theta_{x'1} + \theta_{x'3}\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

In kompakter Form:

$$\{\gamma^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = [B_s]\{u_p\}, \tag{5.53}$$

mit der Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix $[B_s]$:

$$[B_s] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x_{32}' & A & 0 & x_{13}' & a_1 & a_3 & x_{21}' & -a_2 & -a_3 \\ y_{23}' & 0 & -A & y_{31}' & a_4 & a_2 & y_{12}' & -a_4 & -a_1 \end{bmatrix}, \tag{5.54}$$

mit:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} y_{12}' x_{13}' \qquad & a_2 &= \frac{1}{2} y_{31}' x_{21}' \\
a_3 &= \frac{1}{2} x_{21}' x_{13}' \qquad & a_4 &= \frac{1}{2} y_{12}' y_{31}'
\end{aligned} \tag{5.55}$$

5.5.3 Glättung der transversalen Schubverzerrungen

Wie bereits erwähnt, sind die aus dem DSG-Konzept abgeleiteten Schubverzerrungen - infolge der in diesem Konzept enthaltenen gerichteten Integration entlang der Elementkanten - abhängig von der Knotennummerierung. Eine von der Knotennummerierung unabhängige DSG-Formulierung kann mit der von Nguyen-Thoi in [86] vorgeschlagenen Glättung der Verzerrungen auf Elementebene gewonnen werden. Hierbei wird das Dreieck in drei Subdreiecke (Zellen) mit dem geometrischen Mittelpunkt als zusätzlichem Knoten 0 (siehe Abb. 5.5) aufgeteilt. Die Freiheitsgrade des Knoten 0 werden aus dem Mittel der Knotenfreiheitsgrade gebildet. Anschließend werden die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrizen entsprechend der DSG-Methodik für die Subdreiecke aufgestellt. Um diese Subdreieckmatrizen dann mitteln zu können, werden zunächst die Freiheitsgrade des Knoten 0 kondensiert und anschließend werden die Verzerrungen-Verschiebungs-Matrizen der Subdreiecke so umsortiert, dass die zugehörigen Freiheitsgerade der Knotennummerierung (1, 2, 3) entsprechen. Die Matrix $[B_{ps}]$ kann dann aus dem Durchschnitt dieser angepassten Subdreiecksmatrizen gebildet werden.
Für die detaillierte Darstellung dieser Methodik werden die Plattenfreiheitsgrade $\{u_p\}$ wie folgt in Knotenfreiheitsgrade unterteilt:

$$\{u_p\} = \begin{Bmatrix} \{u_{p1}\} \\ \{u_{p2}\} \\ \{u_{p3}\} \end{Bmatrix} = \Big\{ \underbrace{w_1' \quad \theta_{x'1} \quad \theta_{y'1}}_{\{u_{p1}\}^T} \quad \underbrace{w_2' \quad \theta_{x'2} \quad \theta_{y'2}}_{\{u_{p2}\}^T} \quad \underbrace{w_3' \quad \theta_{x'3} \quad \theta_{y'3}}_{\{u_{p3}\}^T} \Big\}^T \tag{5.56}$$

Die Freiheitsgrade des Knotens 0 $\{u_{p0}\}$ werden analog zu seinen Koordinaten $\{x_0'\}$ (siehe Gleichung (5.15)) aus dem Durchschnitt der Elementknotenverformungen bestimmt:

$$\{u_{p0}\} = \begin{Bmatrix} w_0' \\ \theta_{x'0} \\ \theta_{y'0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} w_1' + w_2' + w_3' \\ \theta_{x'1} + \theta_{x'2} + \theta_{x'3} \\ \theta_{y'1} + \theta_{y'2} + \theta_{y'3} \end{Bmatrix} \tag{5.57}$$

Der Vektor der Freiheitsgrade der Subdreiecke setzen sich entsprechend ihrer Knotennummerierung $\triangle_1 = (0,3,1)$, $\triangle_2 = (0,1,2)$ und $\triangle_3 = (0,2,3)$ (siehe Abb. 5.5) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \{u_p^{\triangle_1}\} &= \Big\{ \{u_{p0}\}^T \quad \{u_{p1}\}^T \quad \{u_{p3}\}^T \Big\}^T \\ \{u_p^{\triangle_2}\} &= \Big\{ \{u_{p0}\}^T \quad \{u_{p1}\}^T \quad \{u_{p2}\}^T \Big\}^T \\ \{u_p^{\triangle_3}\} &= \Big\{ \{u_{p0}\}^T \quad \{u_{p2}\}^T \quad \{u_{p3}\}^T \Big\}^T \end{aligned} \tag{5.58}$$

Die zugehörigen Verzerrungs-Verschiebungs-Matrizen der Subdreiecke werden entspre-

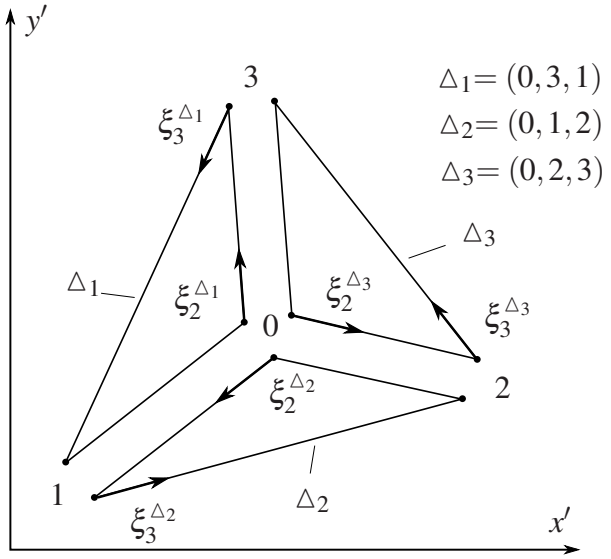


Abb. 5.5: Dreieckaufteilung in drei Subdreiecke

chend der Gleichung (5.54) mit den jeweiligen geometrischen Größen der Subdreiecke aufgestellt:

$$
\begin{aligned}
[B_s^{\triangle 1}] &= \frac{1}{2A_1}\begin{bmatrix} x'_{13} & A_1 & 0 & x'_{01} & a_{1|1} & a_{3|2} & x'_{30} & -a_{2|1} & -a_{3|1} \\ y'_{31} & 0 & -A_1 & y'_{10} & a_{4|1} & a_{2|2} & y'_{01} & -a_{4|1} & -a_{1|2} \end{bmatrix}_{\triangle 1} \\
[B_s^{\triangle 2}] &= \frac{1}{2A_2}\begin{bmatrix} x'_{21} & A_2 & 0 & x'_{02} & a_{1|2} & a_{3|2} & x'_{10} & -a_{2|2} & -a_{3|2} \\ y'_{12} & 0 & -A_2 & y'_{20} & a_{4|2} & a_{2|2} & y'_{01} & -a_{4|2} & -a_{1|2} \end{bmatrix}_{\triangle 2}, \\
[B_s^{\triangle 3}] &= \frac{1}{2A_3}\begin{bmatrix} x'_{32} & A_3 & 0 & x'_{03} & a_{1|3} & a_{3|3} & x'_{20} & -a_{2|3} & -a_{3|3} \\ y'_{23} & 0 & -A_3 & y'_{30} & a_{4|3} & a_{2|3} & y'_{02} & -a_{4|3} & -a_{1|3} \end{bmatrix}_{\triangle 3}
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

mit:

$$
\begin{aligned}
a_{1|1} &= \frac{1}{2}y'_{03}x'_{01} & a_{2|1} &= \frac{1}{2}y'_{10}x'_{30} & a_{3|1} &= \frac{1}{2}x'_{30}x'_{01} & a_{4|1} &= \frac{1}{2}y'_{03}y'_{10} \\
a_{1|3} &= \frac{1}{2}y'_{01}x'_{02} & a_{2|2} &= \frac{1}{2}y'_{20}x'_{10} & a_{3|2} &= \frac{1}{2}x'_{10}x'_{02} & a_{4|2} &= \frac{1}{2}y'_{01}y'_{20} \\
a_{1|2} &= \frac{1}{2}y'_{02}x'_{03} & a_{2|3} &= \frac{1}{2}y'_{30}x'_{20} & a_{3|3} &= \frac{1}{2}x'_{20}x'_{03} & a_{4|3} &= \frac{1}{2}y'_{02}y'_{30}
\end{aligned}
\tag{5.60}
$$

Die konstanten Schubverzerrungen der Subdreiecke können dann wie folgt dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
\{\gamma_s^{\triangle 1}\} &= [B_s^{\triangle 1}]\{u_p^{\triangle 1}\} = \Big[[B_{s1}^{\triangle 1}] \quad [B_{s2}^{\triangle 1}] \quad [B_{s3}^{\triangle 1}]\Big]\Big\{\{u_{p0}\}^T \quad \{u_{p1}\}^T \quad \{u_{p3}\}^T\Big\}^T \\
\{\gamma_s^{\triangle 2}\} &= [B_s^{\triangle 2}]\{u_p^{\triangle 2}\} = \Big[[B_{s1}^{\triangle 2}] \quad [B_{s2}^{\triangle 2}] \quad [B_{s3}^{\triangle 2}]\Big]\Big\{\{u_{p0}\}^T \quad \{u_{p2}\}^T \quad \{u_{p1}\}^T\Big\}^T \\
\{\gamma_s^{\triangle 3}\} &= [B_s^{\triangle 3}]\{u_p^{\triangle 3}\} = \Big[[B_{s1}^{\triangle 3}] \quad [B_{s2}^{\triangle 3}] \quad [B_{s3}^{\triangle 3}]\Big]\Big\{\{u_{p0}\}^T \quad \{u_{p2}\}^T \quad \{u_{p3}\}^T\Big\}^T
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

Im nächsten Schritt werden die Freiheitsgrade $\{u_{p0}\}$ des Knoten (0) mit der Gleichung (5.57) kondensiert. Die resultierenden Matrizen $[B_s^{\triangle i}]$ werden so angeordnet, dass die Vek-

toren $\{u_p^{\triangle i}\}$ dem Vektor $\{u_p\}$ entsprechen. Die Verzerrungen der Subdreiecke in Abhängigkeit von $\{u_p\}$ können dann wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\{\gamma_s^{\triangle 1}\} &= \left[\left[\tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 1}]+[B_{s3}^{\triangle 1}]\right] \quad \tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 1}] \quad \left[\tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 1}]+[B_{s2}^{\triangle 1}]\right]\right]\{u_p\} \\
&= [B_{s*}^{\triangle 1}]\{u_p\} \\
\{\gamma_s^{\triangle 2}\} &= \left[\tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 2}] \quad \left[\tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 2}]+[B_{s2}^{\triangle 2}]\right] \quad \left[\tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 2}]+[B_{s3}^{\triangle 2}]\right]\right]\{u_p\} \\
&= [B_{s*}^{\triangle 2}]\{u_p\} \\
\{\gamma_s^{\triangle 3}\} &= \left[\left[\tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 3}]+[B_{s2}^{\triangle 3}]\right] \quad \left[\tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 3}]+[B_{s3}^{\triangle 3}]\right] \quad \tfrac{1}{3}[B_{s1}^{\triangle 3}]\right]\{u_p\} \\
&= [B_{s*}^{\triangle 3}]\{u_p\}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

mit den resultierenden Verzerrungs-Verschiebungs-Matrizen der Subdreiecke $B_{s*}^{\triangle i}$. Die Verzerrungen werden anschließend, bezogen auf die Fläche der Subdreiecke A_i, gemittelt. Da alle Subdreiecke die gleiche Fläche besitzen ($A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{3}A$), können die gemittelten Elementverzerrungen aus dem Durchschnitt der Subdreieckverzerrungen wie folgt bestimmt werden:

$$\{\gamma_s\} = \frac{1}{3}\left\{\{\gamma_s^{\triangle 1}\}+\{\gamma_s^{\triangle 2}\}+\{\gamma_s^{\triangle 3}\}\right\} = \underbrace{\frac{1}{3}\left[[B_{s*}^{\triangle 1}]+[B_{s*}^{\triangle 2}]+[B_{s*}^{\triangle 3}]\right]}_{[B_{ps}]}\{u_p\}, \tag{5.63}$$

mit der resultierenden Schub-Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix $[B_{ps}]$ kann dann die Schubsteifigkeitsmatrix $[K_{ps}]$ entsprechend Gleichung (5.38) berechnet werden.

5.6 Membranformulierung

Die Membransteifigkeitsmatrix der vorgeschlagenen Elementformulierung wird mit der Assumed-Natural-Deviatoric-Strains (ANDES)-Formulierung [42] entwickelt. Die ANDES-Formulierung stellt eine Kombination der von Bergan und Nygård in [22] vorgeschlagenen Freien-Formulierung (FF) und der von Park in [90] dargestellten Assumed-Natural-Strain (ANS)-Methode dar. Das ANDES-Membranelement besitzt Drillfreiheitsgrade $\theta_{z',i}$. Die Idee, ein Membranelement mit Drillfreiheitsgraden zu formulieren, kann durch folgende Punkte motiviert werden:

1. Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens des Elements ohne zusätzlichen numerischen Aufwand.

2. Zur Lösung von Problemen, in denen das Vorhandensein einer Drillsteifigkeit notwendig ist.

3. Zur Vereinfachung der Modellierung von Schalen- und Plattenstößen.

Zum besseren Verständnisses der Formulierung werden zunächst die Grundzüge der FF erläutert. Anschließend wird die Membransteifigkeitsmatrix nach der ANDES Formulierung entwickelt.

5.6.1 Freie-Formulierung

Die von Bergan und Nygård in [22] vorgeschlagene FF ist ein allgemein gültiges Verfahren zur Entwicklung von FE-Formulierungen. Die Grundidee der FF besteht darin, die Elementverformung mittels einer Linearkombination aus linear unabhängigen Verschiebungsfeldern $\{N_i\}$ auszudrücken. Diese, bezügliches des lokalen Elementkoordinatensystems beschriebenen, Verschiebungszustände werden in der FF in zwei Gruppen aufgeteilt: Die erste Gruppe der Basismoden $[N_{rc}]$ beinhaltet alle Starrkörperverschiebungsfelder $[N_r]$ des Elements, und zudem Verschiebungsfelder $[N_c]$, die konstante Verzerrungszustände im Element erzeugen. Die zweite Gruppe der höheren Moden $[N_h]$ umfasst nichtkonforme Verschiebungszustände höherer Ordnung. Das Membranverschiebungsfeld (u_0, v_0) wird als folgende Linearkombination dargestellt:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = [N]\{u_{mem}\} = \begin{bmatrix} [N_{rc}] & [N_h] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{rc}\} \\ \{q_h\} \end{Bmatrix} = [N_q]\{q\} \tag{5.64}$$

Die Verschiebungszustände $\{N_{qi}\}$ sind Polynomfunktionen mit den generalisierten Verschiebungen q_i. Die Anzahl der notwendigen linear unabhängigen Verschiebungszustände entspricht der Anzahl der Knotenfreiheitsgerade. Der Zusammenhang zwischen den Knotenfreiheitsgraden $\{u_{mem}\}$ und den verallgemeinerten Verschiebungen $\{q\}$ ist von der jeweiligen Elementformulierung abhängig und wird mit der Matrix $[G]$ dargestellt, die aus den zugehörigen Teilmatrizen $[G_{rc}]$ und $[G_h]$ besteht:

$$\{u_{mem}\} = [G]\{q\} = \begin{bmatrix} [G_{rc}] & [G_h] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{rc}\} \\ \{q_h\} \end{Bmatrix}, \tag{5.65}$$

mit der zugehörigen inversen Beziehung:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q_{rc}\} \\ \{q_h\} \end{Bmatrix} = [G]^{-1}\{u_{mem}\} = [H]\{u_{mem}\} = \begin{bmatrix} [H_{rc}] \\ [H_h] \end{bmatrix} \{u_{mem}\} \tag{5.66}$$

Folgende Beziehungen können aus der Orthogonalität der (rc) und (h) Untermatrizen von $[G]$ und $[H]$ sowie ihrem inversen Zusammenhang (siehe Gleichung (5.66)), entsprechend [21] wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} [G_{rc}][H_{rc}] = [I] \quad [G_h][H_h] = [I] \\ [G_{rc}][H_h] = [0] \quad [G_h][H_{rc}] = [0] \\ \big[[G_{rc}]\,[G_h]\big]\,\big[[H_{rc}]\,[H_h]\big]^T = [I] \end{aligned} \tag{5.67}$$

Die Interpolation des Membranverschiebungsfeld mit den Freiheitsgraden $\{u_{mem}\}$ und den berücksichtigten Moden folgt aus dem Einsetzen von Gleichung (5.66) in (5.64):

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_{rc}] & [N_h] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_{rc}] \\ [H_h] \end{bmatrix} \{u_{mem}\} \tag{5.68}$$

Der Membran-Verzerrungszustand lässt sich mittels der partiellen Ableitungen der Verschiebungen (2.40), gekennzeichnet durch den Differentialoperator Δ, wie folgt ausdrücken:

$$\{\varepsilon'_m\} = \Delta \begin{bmatrix} [N_{rc}] & [N_h] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{rc}\} \\ \{q_h\} \end{Bmatrix} = [B_q]\{q\} = \begin{bmatrix} [B_{rc}] & [B_h] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{rc}\} \\ \{q_h\} \end{Bmatrix} \tag{5.69}$$

Die Aufteilung der Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix $[B_q]$ in Anteile aus Basis und höheren Moden ($[B_{rc}]$, $[B_h]$) ermöglicht eine ähnliche Aufteilung der Steifigkeitsmatrix in folgender Form:

$$[K_{mem}] = [H]^T [K_q][H] = \begin{bmatrix} [H_{rc}^T] & [H_h^T] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_{rc}] & [K_{rch}] \\ [K_{rch}]^T & [K_h] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_{rc}] \\ [H_h] \end{bmatrix}, \tag{5.70}$$

mit der Steifigkeitsmatrix $[K_q]$, bestehend aus den Steifigkeitmatrizen der Basismoden $[K_{rc}]$, der höheren Moden $[K_h]$ sowie der Kopplungssteifigkeit beider Anteile $[K_{rch}]$. Mit den B-Matrizen aus Gleichung (5.69) folgen die Ausdrücke zur Berechnung dieser Steifigkeitsmatrizen:

$$\begin{aligned} [K_{rc}] &= \int_V [B_{rc}]^T [C_{mem}][B_{rc}] \, \mathrm{d}V = V_e \, [B_{rc}]^T [C_{mem}][B_{rc}] \\ [K_{rch}] &= \int_V [B_{rc}]^T [C_{mem}][B_h] \, \mathrm{d}V \\ [K_{qh}] &= \int_V [B_h]^T [C_{mem}][B_h] \, \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{5.71}$$

Um mit feiner werdener Diskretisierung unter Verwendung von FF-Elementen die Konvergenz des FE-Modells implizit zu gewährleisten, wird verlangt, dass das FF-Element den Individuellen-Element-Test (IET) besteht. Dieser fordert, dass ein Element in Interaktion mit seinen Nachbarelementen in der Lage ist, ein konstantes Verzerrungsfeld, beschrieben durch die Verschiebungen $\{u_{mem,rc}\}$, reproduzieren zu können [22]. Für solch ein konstantes Verzerrungsfeld ist das globale sowie lokale Gleichgewicht an den Elementkanten gleichermaßen gegeben. Hieraus folgt, dass die äquivalenten Knotenlasten $\{f_{rc}\}$, berechnet aus den Kantenspannungen, mit den aus der Steifigkeitsmatrix berechneten Lasten ($[K_{mem}]\{u_{mem,rc}\}$) übereinstimmen müssen:

$$[K_{mem}]\{u_{mem,rc}\} = \{f_{rc}\} \tag{5.72}$$

Die Kantenspannungen eines konstanten Verzerrungfeldes können mit der Gleichung (5.69) und der Hookeschen Matrix wie folgt ausgedrückt werden:

$$\{\sigma_{rc}\} = [C_{mem}][B_{rc}]\{q_{rc}\} \tag{5.73}$$

Das Verschmieren der Kantenspannungspannungen zu Knotenlasten kann mit der sogenannten Lumping-Matrix $[L]$ dargestellt werden:

$$\{f_{rc}\} = [L][C_{mem}][B_{rc}]\{q_{rc}\} \tag{5.74}$$

Die Herleitung der Matrix $[L]$ ist in Abschnitt 5.6.3 gegeben. Aus den Gleichungen (5.72) und (5.74) folgt dann:

$$[K_{mem}]\{u_{mem,rc}\} = \{f_{rc}\} = [L][C_{mem}][B_{rc}]\{q_{rc}\} = [R_{rc}]\{q_{rc}\} \tag{5.75}$$

Für die weitere Beschreibung wird die Abkürzung $[R_{rc}]$ eingeführt:

$$[R_{rc}] = [L][C_{mem}][B_{rc}] \tag{5.76}$$

Einen Zusammenhang zwischen der Lumping-Matrix $[L]$ und der Steifigkeitsmatrix $[K_{rc}]$ kann mit Hilfe der Formänderungsenergie Π_{rc} eines beliebigen, konstanten Verzerrungszustandes und den Gleichungen (5.65), (5.71) sowie (5.75) aufgestellt werden [49]:

$$\begin{aligned}
\Pi_{rc} &= \frac{1}{2}\{u_{mem,rc}\}^T[K_{mem}]\{u_{mem,rc}\} \\
&= \frac{1}{2}\{u_{mem,rc}\}^T[L][C_{mem}][B_{rc}]\{q_{rc}\} \\
&= \frac{1}{2}\{q_{rc}\}^T[G_{rc}]^T[L][C_{mem}][B_{rc}]\{q_{rc}\} \\
&= \frac{1}{2}\{q_{rc}\}^T[K_{rc}]\{q_{rc}\}
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Aus dem Vergleich der Gleichungen (5.71) und (5.77) kann dann $[B_{rc}]^T$ bestimmt werden:

$$[B_{rc}]^T = \frac{1}{V_e}[G_{rc}]^T[L] \tag{5.78}$$

Hieraus folgt $[K_{rc}]$ in Abhängigkeit von $[L]$:

$$[K_{rc}] = \frac{1}{V_e}[G_{rc}]^T[L][C_{mem}][L]^T[G_{rc}] \tag{5.79}$$

Aus der Gleichung (5.70) und den in Gleichung (5.67) dargestellten Beziehungen können die notwendigen Bedingungen zur Erfüllung des IET formuliert werden:

$$\begin{aligned}
[K_{mem}][G_{rc}]\{q_{rc}\} &= \Big([H_{rc}]^T[G_{rc}]^T[R_{rc}] + [H_h]^T[K_{qrch}]\Big)\{q_{rc}\} \\
&= \Big(\left([I] - [H_h]^T[G_h]^T\right)[R_{rc}] + [H_h]^T[K_{qrch}]\Big)\{q_{rc}\} \\
&= \Big([R_{rc}] + [H_h]^T\left([K_{qrch}] - [G_h]^T[R_{rc}]\right)\Big)\{q_{rc}\}
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Aus dem Vergleich der Gleichungen (5.75) und (5.80) folgt:

$$[K_{rch}] = [G_h]^T[R_{rc}] \tag{5.81}$$

Eine spezielle Form dieser Bedingungen ist mit $[K_{qrch}] = [0]$ gegeben:

$$[K_{rch}] = [G_h]^T [R_{rc}] = [0] \tag{5.82}$$

Aus diesem speziellen Fall resultieren zwei Bedingungen, die zur Erfüllung des IET notwendig sind:

1. $[K_{rch}] = [0]$; hieraus folgt, dass die Basis- und die höheren Moden entkoppelt sein müssen und somit keine Kopplungssteifigkeit vorhanden ist.

2. $[G_h]^T [R_{rc}] = [0]$ verlangt, dass die Knotenlasten $[R_{rc}]\{q_{rc}\}$ orthogonal zu den Ansätzen höherer Ordnung $\{q_{rc}\}^T [G_h]^T$ sind (siehe [49]).

Die in der Gleichung (5.70) dargestellte Matrix $[K_q]$ wird von Bergan und Nygård in [22] wie folgt modifiziert:

$$[K_q] = \begin{bmatrix} [K_{rc}] & [R_{rc}]^T [G_h] \\ [G_h]^T [R_{rc}] & \left([K_h] + V^{-1} [G_h]^T [L][C][L]^T [G_h]\right) \end{bmatrix} \tag{5.83}$$

Mit der Reparametrisierung der Knotenvariablen (5.64), den Bedingungen aus Gleichung (5.67) sowie der Gleichung (5.75) folgt die Steifigkeitsmatrix $[K_{mem}]$ aus der Gleichung (5.83) in folgender vereinfachter Form:

$$[K_{mem}] = \underbrace{V^{-1}[L][C][L]^T}_{[K_b]} + \underbrace{[H_h]^T [K_h][H_h]}_{[K_h]}, \tag{5.84}$$

mit den Bezeichnungen der Basis-Steifigkeit $[K_b]$ und der höheren Steifigkeit $[K_h]$. Die zunächst willkürlich erscheinende Modifikation (5.83) wurde von Bergan und Nygård so gewählt, dass der ITE ohne weitere Bedingungen erfüllt wird und somit die Wahl der höheren Moden frei ist. Ein Beweis hierfür kann der Arbeit von Hausser [49] entnommen werden.

5.6.2 Assumed-Natural-Deviatoric-Strain-Formulierung

Die ANDES-Formulierung [45] unterscheidet sich von der FF in der Wahl der höheren Moden. Die aus diesen höheren Moden abgeleiteten Verzerrungskomponenten werden in der ANDES-Formulierung zusätzlich mit frei wählbaren Parametern skaliert, um so ein Elementtemplate zu erstellen, welches erlaubt, dass Elementverhalten durch die Wahl der Parameter gezielt zu beeinflussen. Die ANDES-Membransteifigkeitsmatrix $[K_{mem}]$ kann entsprechend der FF (siehe Abschnitt 5.6.1), unter Berücksichtigung eines globalen Skalierungsfaktors $\frac{3}{4}\beta_0$ der höheren Steifigkeit, wie folgt dargestellt werden:

$$[K_{mem}] = [K_b] + \frac{3}{4}\beta_0 [K_h] \tag{5.85}$$

Der Faktor $\frac{3}{4}$ wird in [42] aus β_0 ausgeklammert, da es so möglich ist, besonders effektive Parametersätze des ANDES-Elementtemplates, mit geraden β_0-Werten zu beschreiben. Die Basissteifigkeit $[K_b]$ gewährleistet die Konvergenz mit einer feiner werdenden Diskretisierung. Die wesentlichen Grundzüge der Herleitung der Matrix $[K_b]$ sowie ihre explizite Darstellung sind in Abschnitt 5.6.3 gegeben. Die höhere Steifigkeit $[K_h]$ hat das Ziel, die Konvergenzrate und damit die Güte des Elements zu verbessern. Die dieser Steifigkeitsmatrix zugeorneten höheren Moden basieren auf Verschiebungszuständen des LST-Elements (siehe Abschnitt A.4), welche dahingehend modifiziert werden, dass die Biegung der Elementkanten durch die Knotendrillungen ausgedrückt werden können. Diese Modifikationen können als eine Kette von aufeinanderfolgenden Transformationen dargestellt werden. Diese führen, wie in [45] detailliert dargestellt, zu den sogenannten hierarchischen Rotationen (siehe Abschnitt 5.6.4) zur Beschreibung der Moden. In den folgenden zwei Abschnitten werden die für das Verständnis der Formulierungen notwendigen Grundlagen der ANDES-Formulierung entsprechend der Arbeit von Felippa und Militello [45] erläutert und die Auswahl der freien Parameter des implementierten ANDES-Membranelements begründet. Eine variationelle Basis der ANDES-Formulierung ist von Felippa in [40] dargestellt. Eine detailliertere Beschreibung sowie eine klare Abgrenzung zu anderen Formulierungen für den interessierten Leser bieten Alvin et al. in [9] sowie Felippa et al. in [43] und [45].

5.6.3 Basis Steifigkeit

Die Basissteifigkeit $[K_b]$ der ANDES-Formulierung entspricht die der FF [22]. Sie lässt sich entsprechend Abschnitt (5.6.1) wie folgt darstellen:

$$[K_b] = (Vh)^{-1}[L][A][L]^T, \tag{5.86}$$

mit der Elementdicke h, dem Elementvolumen V, der Membranmaterialmatrix $[A]$ und der Lumping-Matrix $[L]$. Die im Folgenden dargestellte verkürzte Herleitung basiert im Wesentlichen auf der Arbeit von Bergan und Felippa [21]. Eine detaillierte Beschreibung der Herleitung der Matrix $[K_b]$ kann den Arbeiten [9] sowie [22] entnommen werden. Die für die Bestimmung dieser Matrix essentielle Lumping-Matrix $[L]$ fasst die Kantenspannungen $\{\sigma_{rc}\}$ eines beliebigen konstanten Verzerrungsfeldes zu konsistente Knotenkräfte und Knotenmomente $\{f_{rc}\}$ zusammen:

$$\{f_{rc}\} = [L][C_{mem}]\{\varepsilon'_m\} = [L]\{\sigma_{rc}\} = [L]\left\{\sigma^{rc}_{x'x'} \quad \sigma^{rc}_{y'y'} \quad \sigma^{rc}_{x'y'}\right\}^T, \tag{5.87}$$

mit den Komponenten des Kraftvektors $\{f_{rc}\}$:

$$\{f_{rc}\} = \left\{t_{u1} \quad t_{v1} \quad m_{\theta 1} \quad t_{u2} \quad t_{v2} \quad m_{\theta 2} \quad t_{u3} \quad t_{v3} \quad m_{\theta 3}\right\}^T \tag{5.88}$$

Die Herleitung der Matrix $[L]$ wird im Folgenden kurz skizziert. Ausgangspunkt der Herleitung ist eine Beschreibung der Kantenspannungen und -verformungen unter Berücksichtigung der Knotendrillungen. Die normalen und die tangentialen Komponenten (σ_n^{rc}, σ_t^{rc}) von $\{\sigma_{rc}\}$ der Elementkante $i-j$ können mit der folgenden Transformation bestimmt werden:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n^{rc} \\ \sigma_t^{rc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'}^{rc} \\ \sigma_{y'y'}^{rc} \\ \sigma_{x'y'}^{rc} \end{Bmatrix}, \tag{5.89}$$

mit der Orientierung der Kante φ entsprechend Abb. 5.6. Die Elementkantenverschiebungen (u_n, u_t) können mit balkenähnlichen Ansatzfunktionen und mit den Knotenfreiheitsgraden auf der Kante $i-j$ (siehe Abb. 5.6) interpoliert werden:

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{ni} & 0 & \alpha N_{\theta i} & N_{nj} & 0 & \alpha N_{\theta j} \\ 0 & N_{si} & 0 & 0 & N_{sj} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ni} \\ u_{ti} \\ \theta_{z'i} \\ u_{nj} \\ u_{tj} \\ \theta_{z'j} \end{Bmatrix}, \tag{5.90}$$

mit den Ansatzfunktionen:

$$\begin{aligned} N_{ni} &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) & N_{nj} &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \\ N_{\theta i} &= \tfrac{1}{8}l_{ji}(1-\xi)^2(1+\xi) & N_{\theta j} &= -\tfrac{1}{8}l_{ji}(1+\xi)^2(1-\xi) \\ N_{ti} &= \tfrac{1}{2}(1-\xi) & N_{tj} &= \tfrac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned} \tag{5.91}$$

und der natürlichen Randkoordinate $\xi = 2s_{ij}/l_{ji} - 1$. Der Wert s_{ij} variiert von 0 (am Knoten i) bis l_{ji} am Knoten j. Der Parameter α wird zur Wichtung des Einflusses der Knotenrotationen auf die Verschiebung normal zum Rand eingeführt und wird im Abschnitt (5.6.5) definiert. Die Transformation der Kantenverformungen $\{u_n\, u_t\}^T$ in das kartesische Elementkoordinatensystem (x', y') kann wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{Bmatrix} u'_{i-j} \\ v'_{i-j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix} \tag{5.92}$$

Der Wert der virtuellen Arbeit am Rand $i-j$ infolge der Spannungen $\{\sigma_{rc}\}$ und der virtuellen Knotenverschiebungen des Knoten j kann dann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \delta W &= h\int_{l_{ji}} \left(\delta u_n\,\sigma_n^{rc} + \delta u_t\,\sigma_t^{rc}\right) \mathrm{d}s_{ij} \\ &= h\int_{l_{ji}} \left(\left(\delta u_{nj}N_{nj} + \alpha\delta\theta_j N_{\theta j}\right)\sigma_n^{rc} + \delta u_{tj}N_{tj}\sigma_t^{rc}\right) \mathrm{d}s_{ij} \end{aligned} \tag{5.93}$$

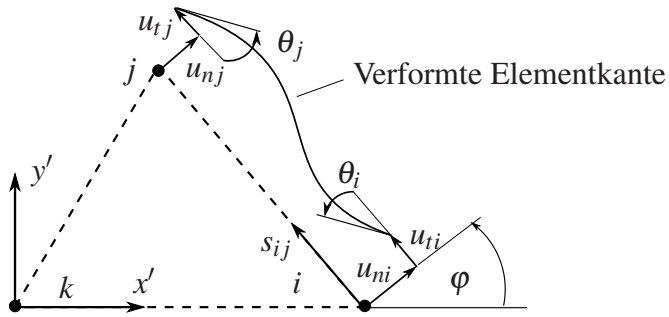


Abb. 5.6: Deformation einer Dreiecksseite in der Schaleneben

Nach vorangegangener Integration der Ansatzfunktionen (5.91) entlang des Randes $i-j$, können die Terme der virtuellen Arbeit (5.93) mit den Transformationen (5.89) und (5.92) bezüglich des Elementkoordinatensystems ausgedrückt werden:

$$\delta W = \delta u'_j t_{uj} + \delta v'_j t_{vj} + \delta\theta_j m_{\theta,j} \tag{5.94}$$

Mit den folgenden Kraft- und Momentkomponenten [21]:

$$\begin{aligned}
t_{uj} &= \frac{hl_{ij}}{2}\left(\sigma^{rc}_{x'x'}\cos\varphi + \sigma^{rc}_{x'y'}\sin\varphi\right) = \frac{h}{2}\left(\sigma^{rc}_{x'x'}y'_{ji} + \sigma^{rc}_{x'y'}x'_{ij}\right)\\
t_{vj} &= \frac{hl_{ij}}{2}\left(\sigma^{rc}_{x'x'}\sin\varphi + \sigma^{rc}_{x'y'}\cos\varphi\right) = \frac{h}{2}\left(\sigma^{rc}_{x'x'}x'_{ij} + p_{x'y'}y'_{ji}\right)\\
m_{\theta j} &= \frac{h\alpha l_{ij}^2}{12}\left(\sigma^{rc}_{x'x'}\cos^2\varphi + \sigma^{rc}_{y'y'}\sin^2\varphi + 2\sigma^{rc}_{x'y'}\sin\varphi\cos\varphi\right)\\
&= \frac{h\alpha\, l_{ij}^2}{12}\left(\sigma^{rc}_{x'x'}\,(y'_{ji})^2 + \sigma^{rc}_{y'y'}\,(x'_{ij})^2 + 2\,\sigma^{rc}_{x'y'}\,x'_{ij}y'_{ji}\right)
\end{aligned} \tag{5.95}$$

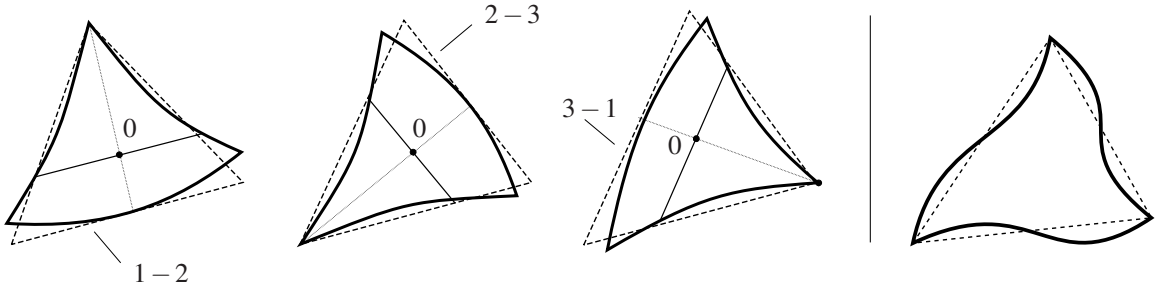
Die virtuelle Arbeit der Kante $j-k$ infolge der Verschiebungen und der Rotation des Knotens j kann anlog zum beschriebenen Vorgehen bestimmt werden. Aus der Summe beider Arbeitsterme können anschließend die die zusammengefassten Gesamtkräfte des Knoten j bestimmt werden. Die Lasten der beiden weiteren Knoten werden in gleicher Weise bestimmt, sodass die resultierende Lumping-Matrix $[L]$, mit der Gleichung (5.87), wie folgt in expliziter Form dargestellt werden kann [9]:

$$[L] = \frac{h}{2}\begin{bmatrix}
y'_{23} & 0 & x'_{32}\\
0 & x'_{32} & y'_{23}\\
\frac{\alpha}{6}y'_{23}\left(y'_{32}-y'_{12}\right) & \frac{\alpha}{6}x'_{32}\left(x'_{31}-x'_{12}\right) & \frac{\alpha}{3}\left(x'_{31}y'_{13}-x'_{12}y'_{21}\right)\\
y'_{31} & 0 & x'_{13}\\
0 & x'_{13} & y'_{31}\\
\frac{\alpha}{6}y'_{31}\left(y'_{32}-y'_{12}\right) & \frac{\alpha}{6}x'_{13}\left(x'_{12}-x'_{23}\right) & \frac{\alpha}{3}\left(x'_{12}y'_{21}-x'_{23}y'_{32}\right)\\
y'_{12} & 0 & x'_{21}\\
0 & x'_{21} & y'_{12}\\
\frac{\alpha}{6}y'_{12}\left(y'_{32}-y'_{12}\right) & \frac{\alpha}{6}x'_{21}\left(x'_{23}-x'_{31}\right) & \frac{\alpha}{3}\left(x'_{23}y'_{32}-x'_{31}y'_{13}\right)
\end{bmatrix} \tag{5.96}$$

Wenn $\alpha = 0$, entspricht $[L]$ der Lumping-Matrix des CST-Membranelements. In diesem Fall sind also alle Knotenkräfte nur noch mit den Translationen u'_i, v'_i $(i = 1, 2, 3)$ verknüpft.

5.6.4 Höhere Steifigkeit

Das Ziel der höheren Moden ist die Beschreibung der in der Schalenebene liegenden Biegung auf Basis der eingeführten Drillfreiheitsgrade. Die berücksichtigten höheren Moden der ANDES-Formulierung bestehen aus vier speziell modifizierten Verschiebungszuständen der LST-Verschiebungsinterpolation (siehe A.4): aus drei Biegemoden und einer Torsionsverschiebungsmode (siehe Abb. 5.7). Zur Beschreibung dieser Moden werden die so-



$-\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = 1; \overline{\theta}_3 = 0$ $\quad -\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_3 = 1; \overline{\theta}_1 = 0$ $\quad \overline{\theta}_1 = -\overline{\theta}_3 = 1; \overline{\theta}_2 = 0$ $\quad \overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_3 = 1$

Abb. 5.7: Deformations-Moden der höheren Steifigkeit

genannten hierarchischen Rotationen $\overline{\theta}_i$ als generalisierte Verschiebungen gewählt. Die hierarchischen Rotationen werden berechnet, indem die konstante Elementrotation θ_0 der linearen CST-Verschiebungsinterpolation (siehe A.3) subtrahiert wird von den totalen Knotenrotationen (siehe Abb. 5.8):

$$\overline{\theta}_i = \theta_{z'i} - \theta_0 = \theta_{z'i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) \tag{5.97}$$

Die CST-Rotation θ_0 kann aus den partiellen Ableitungen der CST-Verschiebunginterpolation wie folgt bestimmt werden:

$$\theta_0 = \frac{1}{4A}\left(x'_{23}u'_1 + x'_{31}u'_2 + x'_{12}u'_3 + y'_{23}v'_1 + y'_{31}v'_2 + y'_{12}v'_3\right) \tag{5.98}$$

Die Gleichungen (5.97) und (5.98) erlauben anschließend, die hierarchischen Rotationen $\{\overline{\theta}\}$ mit der Transformationsmatrix $[T_{\theta u}]$ und dem Vektor der Knotenfreiheitsgraden $\{u_{mem}\}$ zu berechnen:

$$\{\overline{\theta}\} = \begin{Bmatrix} \overline{\theta}_1 \\ \overline{\theta}_2 \\ \overline{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{4A}\begin{bmatrix} x'_{32} & y'_{32} & 4A & x'_{13} & y'_{13} & 0 & x'_{21} & y'_{21} & 0 \\ x'_{32} & y'_{32} & 0 & x'_{13} & y'_{13} & 4A & x'_{21} & y'_{21} & 0 \\ x'_{32} & y'_{32} & 0 & x'_{13} & y'_{13} & 0 & x'_{21} & y'_{21} & 4A \end{bmatrix}}_{[T_{\theta u}]} \{u_{mem}\} \tag{5.99}$$

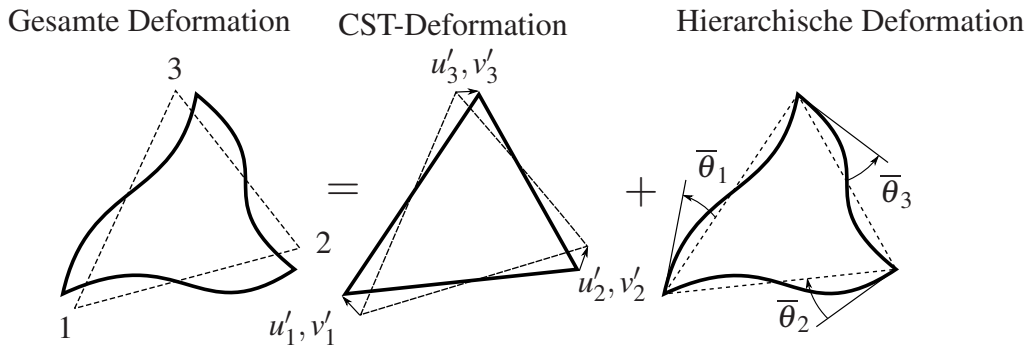


Abb. 5.8: CST-Deformation und hierarchische Rotationen

Die Beschreibung der höheren Moden durch die von den CST-Verformungen gefilterten hierarchischen Rotationen $\{\overline{\theta}\}$ gewährleistet so, dass diese linear unabhängig von den Basismoden sind. Die höhere Steifigkeit $[K_h]$ der ANDES-Formulierung wird aus einem - aus den höheren Moden abgeleiteten - angenommenen Verzerrungsfeld $\{\varepsilon\}$ konstruiert. Diese Verzerrungen werden im natürlichen Raum entwickelt und sind infolge der quadratischen Verschiebungsinterpolationen der gewählten LST-Moden im Element linear veränderlich. Die angenommenen Verzerrungen der Biegemoden und der Torsionsmode werden zur Beschreibung des Vorgehens separat entwickelt und anschließend überlagert:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_b\} + \{\varepsilon_t\} \tag{5.100}$$

Zur Beschreibung der Verzerrungen $\{\varepsilon_b\}$, $\{\varepsilon_t\}$ werden die hierarchischen Rotationen zweckdienlicher Weise aufgeteilt in die deviatorische hierarchische Rotationen $\{\theta'\}$ und in die durchschnittliche hierarchische Rotation $\{\theta\}$:

$$\{\overline{\theta}\} = \underbrace{\begin{Bmatrix}\theta & \theta & \theta\end{Bmatrix}^T}_{\{\theta\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix}\theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3\end{Bmatrix}^T}_{\{\theta'\}}, \tag{5.101}$$

mit:

$$\theta = \frac{1}{3}\left(\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2 + \overline{\theta}_3\right) \tag{5.102}$$

Mit den Gleichungen (5.101) und (5.102) kann die Relation zwischen $\{\overline{\theta}\}$, $\{\theta\}$ sowie $\{\theta'\}$ wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{Bmatrix}\theta'_1\\ \theta'_2\\ \theta'_3\\ \theta\end{Bmatrix} = \left[\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\overline{\theta}_1\\ \overline{\theta}_2\\ \overline{\theta}_3\end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{\theta}_1\\ \overline{\theta}_2\\ \overline{\theta}_3\end{Bmatrix} \tag{5.103}$$

Es wird angenommen, dass die durchschnittliche Verdrehung $\{\theta\}$ ausschließlich Torsionsverzerrungen $\{\varepsilon_t\}$ verursacht, woraus folgt, dass die Biegeverzerrungen $\{\varepsilon_b\}$ nur aus den

deviatorischen Verdrehungen $\{\theta'\}$ resultieren. Felippa wählt in [45] zur Beschreibung der natürlichen Verzerrungen drei Komponenten entlang der drei Elementkanten (siehe Abb. 5.9):

$$\{\varepsilon\} = \left\{\varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{32}\right\}^T \tag{5.104}$$

Die Transformation zwischen den natürlichen und kartesischen Verzerrungskomponenten erfolgt mit den klassischen Transformationsbeziehungen:

$$[T_{nat}] = \frac{1}{4A^2}\begin{bmatrix} y'_{23}y'_{13}l_{21}^2 & x'_{23}x'_{13}l_{21}^2 & \left(y'_{23}x'_{31}+x'_{32}y'_{13}\right)l_{21}^2 \\ y'_{31}y'_{21}l_{32}^2 & x'_{31}x'_{21}l_{32}^2 & \left(y'_{31}x'_{12}+x'_{13}y'_{21}\right)l_{32}^2 \\ y'_{12}y'_{32}l_{13}^2 & x'_{12}x'_{32}l_{13}^2 & \left(y'_{12}x'_{23}+x'_{21}y'_{32}\right)l_{13}^2 \end{bmatrix}^T \tag{5.105}$$

Hieraus folgt:

$$\{\varepsilon'_m\} = [T_{nat}]\{\varepsilon\} \tag{5.106}$$

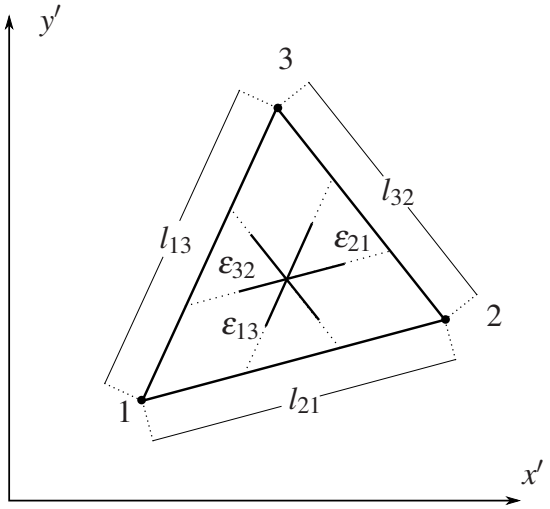


Abb. 5.9: Natürliche Verzerrungskomponenten

5.6.4.1 Biegeverzerrungen $\{\varepsilon_b\}$

Die Auswahl der Bezugsrichtungen der Verzerrungen (5.104) hat den Vorteil, dass diese mit den Richtungen der neutralen Achsen der Biegemoden übereinstimmen (siehe Abb. 5.7). Mit der Annahme, dass jede Biegemode nur eine Verzerrungskomponente in Richtung der jeweiligen neutralen Faser (NF) erzeugt, leiten Felippa und Militello in [45] die Biegeverzerrungen in den Knoten $\{\varepsilon_{b,i}\}$ auf Basis der skalierten normalen Abstände des Knotens i zur jeweiligen NF ab. Für die erste Biegemode können die vorzeichenbehafteten normalen Abstände $d_{21,i}$ der Elementknoten zur NF aus der Dreieckgeometrie exemplarisch für den

Knoten 1 wie folgt ausgedrückt werden (siehe [45]):

$$d_{21,1} = d_{21,2} = -\frac{2A}{3\,l_{21}},\ \ d_{21,3} = \frac{4A}{3\,l_{21}} \tag{5.107}$$

Anschließend werden diese Abstände mit der Länge der Bezugskante l_{21} skaliert:

$$\chi_{21,1} = \chi_{21,2} = -\frac{2A}{3\,l_{21}^2},\ \ \chi_{21,3} = \frac{4A}{3\,l_{21}^2} \tag{5.108}$$

Ein analoges Vorgehen für die übrigen Biegemoden führt auf die Biegeverzerrungen $\{\varepsilon_{b,1}\}$ am Knoten 1, in Abhängigkeit der Verdrehungen $\{\theta'\}$, in folgender Form [45]:

$$\{\varepsilon_{b,1}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{b21,1} \\ \varepsilon_{b32,1} \\ \varepsilon_{b13,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{21,1} & \chi_{21,2} & \chi_{21,3} \\ \chi_{32,1} & \chi_{32,2} & \chi_{32,3} \\ \chi_{13,1} & \chi_{13,2} & \chi_{13,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{Bmatrix} \tag{5.109}$$

An dieser Stelle werden die Wichtungsfaktoren $\psi_1 - \psi_9$, mit dem Ziel der Konstruktion eines Elementtemplates, wie folgt eingeführt:

$$\{\varepsilon_{b,1}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{b21,1} \\ \varepsilon_{b32,1} \\ \varepsilon_{b13,1} \end{Bmatrix} = \frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \frac{\psi_1}{l_{21}^2} & \frac{\psi_2}{l_{21}^2} & \frac{\psi_3}{l_{21}^2} \\ \frac{\psi_4}{l_{32}^2} & \frac{\psi_5}{l_{32}^2} & \frac{\psi_6}{l_{32}^2} \\ \frac{\psi_7}{l_{13}^2} & \frac{\psi_8}{l_{13}^2} & \frac{\psi_9}{l_{13}^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{Bmatrix} = [Q_{b1}]\{\theta'\} \tag{5.110}$$

Dies geschieht, vor dem Hintergrund der Erstellung eines ANDES-Element-Templates [42]. Die Ausdrücke für die verbleibenden Knoten ($\{\varepsilon_{b,2}\}$, $\{\varepsilon_{b,3}\}$) werden durch zyklisches Vertauschen der Indizes gewonnen (siehe [45]).

5.6.4.2 Torsionsverzerrungen $\{\varepsilon_t\}$

Das Vorgehen zur Entwicklung der Verzerrungen der Tosionmode unterscheidet sich von der Entwicklung Biegeverzerrungen. Hiefür wird zunächst das Verschiebungsfeld der Torsionsmode mit der kubischen Verschiebungsinterpolation des QST4/20G-Elements (siehe A.5) und speziellen Zwangsbedingungen, welche aus der Torsionsmode abgeleitet werden können, interpoliert. Das QST4-Element besitzt 20 Freiheitgrade, sodass entsprechend viele Zwangsbedingungen definiert werden müssen. Die verwendeten Zwangsbedingungen können entsprechend [42] wie folgt dargestellt werden:

$$u'_j = v'_j = \frac{\partial u'_j}{\partial x'} = \frac{\partial v'_j}{\partial y'} = 0;\ \frac{\partial u'_i}{\partial y'} = -\theta;\ \frac{\partial v'_i}{\partial x'} = +\theta, \tag{5.111}$$

mit $j = 1,2,3,4$ und $i = 1,2,3$. Das zugehörige Verzerrungsfeld $\{\varepsilon_t\}$ im kartesischen Elementsystem kann dann durch die partiellen Ableitungen dieses Verschiebungsfeldes, entsprechend Gleichung (2.40), beschrieben werden. Die natürlichen Verzerrungen $\{\varepsilon_t\}$ der

Torsionmode können nach vorangegangener Transformation mit der Matrix $[T_{nat}]$ (siehe Gleichung(5.105)) dann wie folgt dargestellt werden [42]:

$$\{\varepsilon_t\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{t21} \\ \varepsilon_{t32} \\ \varepsilon_{t13} \end{Bmatrix} = 3 \begin{Bmatrix} \chi_{21,3}(\xi_1 - \xi_2)\xi_3 \\ \chi_{32,1}(\xi_2 - \xi_3)\xi_1 \\ \chi_{12,2}(\xi_3 - \xi_1)\xi_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{5.112}$$

Es ist offensichtlich, dass das Verzerrungsfeld (5.112) quadratisch ist. Um es mit den natürlichen Biegeverzerrungen überlagern zu können, wird das Feld auf den Kantenmittelpunkten ausgewertet und anschließend mit diesen Werten und mit linearen Ansatzfunktionen im Element interpoliert:

$$\{\varepsilon_t^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{t21}^m \\ \varepsilon_{t32}^m \\ \varepsilon_{t13}^m \end{Bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{Bmatrix} \chi_{21,3}(\xi_2 - \xi_3) \\ \chi_{32,1}(\xi_3 - \xi_1) \\ \chi_{12,2}(\xi_1 - \xi_2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{5.113}$$

Darauf folgend wird ein weiterer Parameter ψ_0 (Elementtemplate) zur Wichtung der Torsionsverzerrungen eingeführt. Der Faktor $\frac{16}{9}\frac{A}{l_{21}^2}$ wird zweckdienlicher Weise zur anschließenden Überlagerung der Biege-Torsionsverzerrungsfelder wie folgt aus ψ_0 ausgeklammert [42]:

$$\{\varepsilon_{t1}^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{t21}^m \\ \varepsilon_{t32}^m \\ \varepsilon_{t13}^m \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4A}{3}\psi_0 \begin{Bmatrix} \chi_{21,3}(\xi_2 - \xi_3)/l_{21}^2 \\ \chi_{32,1}(\xi_3 - \xi_1)/l_{21}^2 \\ \chi_{12,2}(\xi_1 - \xi_2)/l_{21}^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{5.114}$$

Die Verzerrungen $\{\varepsilon_{b1}\}$ und $\{\varepsilon_{t1}^m\}$ können dann mit der Gleichung (5.101) überlagert werden:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_1\} &= \{\varepsilon_{b1}\} + \{\varepsilon_{t1}^m\} \\ &= \frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \frac{\psi_1}{l_{21}^2} & \frac{\psi_2}{l_{21}^2} & \frac{\psi_3}{l_{21}^2} & \frac{4\,\psi_0}{l_{21}^2} \\ \frac{\psi_4}{l_{32}^2} & \frac{\psi_5}{l_{32}^2} & \frac{\psi_6}{l_{32}^2} & 0 \\ \frac{\psi_7}{l_{13}^2} & \frac{\psi_8}{l_{13}^2} & \frac{\psi_9}{l_{13}^2} & -\frac{4\,\psi_0}{l_{13}^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_3' \\ \theta \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{l_{21}^2} & \frac{\beta_2}{l_{21}^2} & \frac{\beta_3}{l_{21}^2} \\ \frac{\beta_4}{l_{32}^2} & \frac{\beta_5}{l_{32}^2} & \frac{\beta_6}{l_{32}^2} \\ \frac{\beta_7}{l_{13}^2} & \frac{\beta_8}{l_{13}^2} & \frac{\beta_9}{l_{13}^2} \end{bmatrix}}_{[Q_1]} \begin{Bmatrix} \overline{\theta}_1 \\ \overline{\theta}_2 \\ \overline{\theta}_3 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \tag{5.115}$$

mit der Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix $[Q_1]$ des Knotens 1 und den folgenden Ausdrücken für $\beta_1 \ldots \beta_9$ [42]: $\beta_1 = \frac{1}{3}(4\psi_0 + 2\psi_1 - \psi_2 - \psi_3)$, $\beta_2 = \frac{1}{3}(4\psi_0 - \psi_1 + 2\psi_2 - \psi_3)$, $\beta_3 = \frac{1}{3}(4\psi_0 - \psi_1 - \psi_2 + 2\psi_3)$, $\beta_4 = \frac{1}{3}(2\psi_4 - \psi_5 - \psi_6)$, $\beta_5 = \frac{1}{3}(-\psi_4 + 2\psi_5 - \psi_6)$, $\beta_6 = \frac{1}{3}(-\psi_4 - \psi_5 + 2\psi_6)$, $\beta_7 = \frac{1}{3}(-4\psi_0 + 2\psi_7 - \psi_8 - \psi_9)$, $\beta_8 = \frac{1}{3}(-4\psi_0 - \psi_7 + 2\psi_8 - \psi_9)$, $\beta_9 = \frac{1}{3}(-4\psi_0 - \psi_7 - \psi_8 + 2\psi_9)$. Durch zyklisches Vertauschen der Indizes können an-

schließend die Matrizen $[Q_2]$ und $[Q_3]$ bestimmt werden [42]:

$$[Q_2] = \frac{2A}{3}\begin{bmatrix} \frac{\beta_9}{l_{21}^2} & \frac{\beta_7}{l_{21}^2} & \frac{\beta_8}{l_{21}^2} \\ \frac{\beta_3}{l_{32}^2} & \frac{\beta_1}{l_{32}^2} & \frac{\beta_2}{l_{32}^2} \\ \frac{\beta_6}{l_{13}^2} & \frac{\beta_4}{l_{13}^2} & \frac{\beta_5}{l_{13}^2} \end{bmatrix} \quad [Q_3] = \frac{2A}{3}\begin{bmatrix} \frac{\beta_5}{l_{21}^2} & \frac{\beta_6}{l_{21}^2} & \frac{\beta_4}{l_{21}^2} \\ \frac{\beta_8}{l_{32}^2} & \frac{\beta_9}{l_{32}^2} & \frac{\beta_7}{l_{32}^2} \\ \frac{\beta_2}{l_{13}^2} & \frac{\beta_3}{l_{13}^2} & \frac{\beta_1}{l_{13}^2} \end{bmatrix} \tag{5.116}$$

Daraufhin kann das natürliche Verzerrungsfeld schließlich mit linearen Ansatzfunktionen und den Matrizen $[Q_i]$ im Element interpoliert werden:

$$\varepsilon(\xi_2,\xi_3) = \underbrace{\Big([Q_1](1-\xi_2-\xi_3) + [Q_2]\,\xi_2 + [Q_3]\,\xi_3\Big)}_{[B_\theta]} \begin{Bmatrix} \overline{\theta}_1 & \overline{\theta}_2 & \overline{\theta}_3 \end{Bmatrix}^T \tag{5.117}$$

Aus der Gleichung (5.117) kann direkt die Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix $[B_\theta]$ abgeleitet und die höhere Steifigkeit in Abhängigkeit der hierarchischen Rotation bestimmt werden:

$$[K_\theta] = \int_A [B_\theta]^T [A_{nat}][B_\theta]\,\mathrm{d}A, \tag{5.118}$$

mit der, in das natürliche System transformierten, Membranmaterialmatrix:

$$[A_{nat}] = [T_{nat}]^T [A][T_{nat}] \tag{5.119}$$

Die Integration der Gleichung (5.118) erfolgt numerisch, unter Verwendung spezieller Stützstellen und Wichtungsfaktoren (siehe Tab. 5.1) entsprechend dem ANS-Konzept (siehe [90]):

$$\begin{aligned} [K_\theta] &= \sum_{j=1}^{3} \Big([B_\theta]^T [A_{nat}][B_\theta]\Big) 2Aw_j \\ &= \frac{h}{3}\left([Q_4]^T[C_{nat}][Q_4] + [Q_5]^T[C_{nat}][Q_5] + [Q_6]^T[C_{nat}][Q_6]\right) \end{aligned}, \tag{5.120}$$

mit:

$$[Q_4] = \tfrac{1}{2}\left([Q_1]+[Q_2]\right); \quad [Q_5] = \tfrac{1}{2}\left([Q_2]+[Q_3]\right); \quad [Q_6] = \tfrac{1}{2}\left([Q_1]+[Q_3]\right) \tag{5.121}$$

Mit der Transformation $[T_{\theta u}]$ ergibt sich schließlich die höhere Steifigkeit $[K_h]$ in Abhängigkeit von den Membranfreiheitsgraden $\{u_{mem}\}$:

$$[K_h] = [T_{\theta u}]^T [K_\theta][T_{\theta u}] \tag{5.122}$$

Tab. 5.1: Stützstellen und Wichtungsfaktoren der ANS-Integration

ξ_2^j	ξ_3^j	$2w_j$
0,5	0.0	0,3333333333
0,5	0,5	0.3333333333
0,0	0,5	0.3333333333

5.6.5 Parametersatz der Formulierung

Für das ANDES-Membranelement-Template gibt Felippa in [42], den für einen Lastfall der reinen Biegung in der Ebene optimalen Parametersatz an. Der optimale Parametersatz wird in [42] bestimmt aus dem Vergleich der mit der ANDES-Membran berechneten Formänderungsenergie mit der analytischen Lösung einer balkenähnlichen Struktur unter einer reiner Biegebelastung (in der Membranebene). Shin und Lee argumentieren in [112], dass diese Parameter aufgrund der Membran-Platten Koppelung im Zuge einer Schalenformulierung angepasst werden sollten, um eine bessere Performance zu erzielen. Im Falle der Membran-Platten-Koppelung kann die höhere Steifigkeit unter Verwendung der optimalen Parameter zu „Drill-Locking-Effekten“ [112] führen. Eine Reduktion des Einflusses der höheren Moden durch eine Änderung der Parameter kann diesen negativen Effekt reduzieren. Wird jedoch die höhere Steifigkeit im Vergleich zur Gesamtsteifigkeit zu stark reduziert, kann ein Phänomen auftreten, dass von Cook in [33] als „Freies-Ecken-Problem“ bezeichnet wird. Beide Effekte können unter umständen die Qualität der Element-Antwort erheblich verschlechtern. Shin und Lee geben in [112] die Werte $\alpha = 1/8$ und $\beta_0 = \alpha^2/4$, die sie in einer umfangreichen Parameterstudie mit diversen Schalenbenchmark-Fällen ermittelt hatten, sowie die weiteren optimalen ANDES-β-Parameter von Felippa [42] als guten Kompromiss an. In der vorgeschlagenen Formulierung wird dieser von Shin und Lee in [112] angegebenen Parametersatz verwendet: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 0$, $\beta_5 = 1$, $\beta_6 = -1$, $\beta_7 = -1$, $\beta_8 = -1$, $\beta_9 = -2$.

5.6.6 Membranverschiebungsfeld

Die Steifigkeitsmatrix der ANDES-Formulierung basiert auf einem angenommenen Verzerrungsfeld (siehe Abschnitt 5.6), hieraus folgt das, dass zugehörige Verschiebungsfeld noch unbekannt ist. Die Bestimmung geeigneter Ansatzfunktionen zur Interpolation des Membranverschiebungsfeldes (u_0, v_0) mit den Freiheitsgraden des Membranelements (u_i', v_i', $\theta_{z'i}$) ist möglich mit Hilfe der quadratischen Verschiebungsinterpolation des LST-Elements (siehe Anhang A.4) und einer anpassenden Transformation $[T_{CR}]$. Die Transformation $[T_{CR}]$ basiert auf der von Allman in [6] vorgeschlagenen Beschreibung der Mittelknotenfrei-

heitsgrade der LST-Verschiebungsinterpolation durch die Eckknotenrotationen ($\theta_{z'i}$) und -verschiebungen (u'_i, v'_i). Sie wurde von Felippa in [42] für das ANDES-Membranelement dahingehend angepasst, dass der Parameter α berücksichtigt wird. Die Bestimmung der Matrix der angepassten LST-Ansatzfunktion $[N_\theta]$ kann wie folgt dargestellt werden:

$$[N_\theta] = [N_{LST}][T_{CR}], \tag{5.123}$$

mit der Matrix der quadratischen Ansatzfunktionen des LST-Elements $[N_{LST}]$:

$$[N_{LST}] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & N'_2 & 0 & N'_3 & 0 & N'_4 & 0 & N'_5 & 0 & N'_6 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & N'_2 & 0 & N'_3 & 0 & N'_4 & 0 & N'_5 & 0 & N'_6 \end{bmatrix} \tag{5.124}$$

und den zugehörigen Ansatzfunktionen N'_i in natürlichen Dreieckskoordinaten:

$$\begin{aligned} N'_1 &= \xi_1\,(2\xi_1 - 1) & N'_2 &= 4\xi_1\xi_2 \\ N'_3 &= \xi_2\,(2\xi_2 - 1) & N'_4 &= 4\xi_2\xi_3 \\ N'_5 &= \xi_3\,(2\xi_3 - 1) & N'_6 &= 4\xi_1\xi_3 \end{aligned} \tag{5.125}$$

und der explizit in [42] dargestellten Matrix $[T_{CR}]$:

$$[T_{CR}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8}\alpha y'_{12} & 0 & 0 & \frac{1}{8}\alpha y'_{21} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\alpha x'_{21} & 0 & 0 & \frac{1}{8}\alpha x'_{12} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8}\alpha y'_{23} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8}\alpha y'_{32} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8}\alpha x'_{32} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8}\alpha x'_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8}\alpha y'_{13} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8}\alpha y'_{31} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\alpha x'_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\alpha x'_{13} \end{bmatrix} \tag{5.126}$$

Aus Gleichung (5.123) folgt dann $[N_\theta]$:

$$[N_\theta] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_1^{\theta u} & N_2 & 0 & N_2^{\theta u} & N_3 & 0 & N_3^{\theta u} \\ 0 & N_1 & N_1^{\theta v} & 0 & N_2 & N_2^{\theta v} & 0 & N_3 & N_3^{\theta v} \end{bmatrix}, \tag{5.127}$$

mit den zugehörigen Ansatzfunktionen in natürlichen Dreieckskoordinaten:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1 & N_1^{\theta u} &= \frac{1}{2}\alpha\xi_1\left(y'_{12}\xi_2 + y'_{13}\xi_3\right) & N_1^{\theta v} &= \frac{1}{2}\alpha\xi_1\left(x'_{21}\xi_2 + x'_{31}\xi_3\right) \\ N_2 &= \xi_2 & N_2^{\theta u} &= \frac{1}{2}\alpha\xi_2\left(y'_{23}\xi_3 + y'_{21}\xi_1\right) & N_2^{\theta v} &= \frac{1}{2}\alpha\xi_2\left(x'_{32}\xi_3 + x'_{12}\xi_1\right) \\ N_3 &= \xi_3 & N_3^{\theta u} &= \frac{1}{2}\alpha\xi_3\left(y'_{31}\xi_1 + y'_{32}\xi_2\right) & N_3^{\theta v} &= \frac{1}{2}\alpha\xi_3\left(x'_{13}\xi_1 + x'_{23}\xi_2\right) \end{aligned} \tag{5.128}$$

Hieraus folgt die Interpolation des Membranverschiebungsfeldes unter Berücksichtigung der Drillfreiheitsgrade:

$$\left\{ u_0 \quad v_0 \right\}^T = [N_\theta]\{u_{mem}\} \tag{5.129}$$

5.7 Membran-Platten Kopplungssteifigkeit

Die aus dem Aufbau des Laminats resultierende Kopplungssteifigkeit $[K_{mp}]$ zwischen dem Membran- und dem Plattenelement kann durch das folgende Integral bestimmt werden:

$$[K_{mp}] = \int_A \left(\Big[[B_{pb}] + [B_{ps}]\Big]^T [B][B_{mem*}] + [B_{mem*}]^T [B] \Big[[B_{pb}] + [B_{ps}]\Big] \right) \mathrm{d}A, \tag{5.130}$$

mit der in Gleichung (2.55) dargestellten Laminat-Kopplungsmatrix $[B]$ und den Verzerrungs-Verschiebungsmatrizen des Membran- und des Plattenelements. Im Gegensatz zu $[B_{pb}]$ und $[B_{ps}]$ wurde $[B_{mem*}]$ noch nicht explizit dargestellt. Die Matrix $[B_{mem*}]$ kann aus der Gleichung (5.85) unter Verwendung bereits eingeführter Matrizen in Abhängigkeit von den natürlichen Dreieckskoordinaten wie folgt konstruiert werden:

$$[B_{mem*}] = [L]^T V^{-1} + \frac{3}{2}\sqrt{\beta_0}[T_e]\Big((1-\xi_2-\xi_3)\,[Q_1] + \xi_2[Q_2] + \xi_3[Q_3] \Big)[T_{\theta u}] \tag{5.131}$$

Das Integral (5.130) wird numerisch mit dem Verfahren von Gauß-Legendre gelöst. Hierfür werden die in Tabelle 5.2 angegeben Stützstellen und Wichtungsfaktoren w_j verwendet:

$$[K_{mp}] = \sum_{j=1}^{3} \Big([B_p]^T [B][B_{mem*}(\xi_2^j, \xi_3^j)] + [B_{mem*}(\xi_2^j, \xi_3^j)]^T [B][B_p] \Big)\, 2A\, w_j, \tag{5.132}$$

mit der Abkürzung:

$$[B_p] = \Big[[B_{pb}] + [B_{ps}]\Big] \tag{5.133}$$

Tab. 5.2: Stützstellen und Wichtungsfaktoren der Dreipunkt-Gauß-Integration

ξ_2^j	ξ_3^j	$2w_j$
0,1666666667	0,1666666667	0,3333333333
0,6666666667	0,1666666667	0,3333333333
0,1666666667	0,6666666667	0,3333333333

5.8 Massenmatrix

Analog zum Vorgehen bei der Entwicklung der mechanischen Steifigkeitsmatrix wird die Massenmatrix $[\hat{M}_e]$ durch die Kombination eines Membran- und eines Plattenanteils aufgestellt:

$$[\hat{M}_e] = \begin{bmatrix} [M_{mem}] & [0] \\ [0] & [M_p] \end{bmatrix} \tag{5.134}$$

Anschließend wird $[\hat{M}_e]$ in gleicher Weise wie $[\hat{K}_e] \rightarrow [K_e]$ zu $[M_e]$ umsortiert, sodass die der Matrix $[M_e]$ zugehörigen Freiheitsgrade dem Vektor $\{u_e\}$ entsprechen.
Die den Plattenfreiheitsgraden zugeordneten Massen werden entsprechend der Gleichung (4.19) mit den Ansatzfunktionen (5.28) bestimmt. Die Integration in Dickenrichtung erfolgt analytisch, wohingegen die Flächenintegration numerisch ausgeführt wird. Hieraus folgt mit den in der Tab. 5.2 dargestellten Integrationspunkten und Wichtungsfaktoren folgender Ausdruck für die Plattenmassenmatrix:

$$[M_p] = \int_V [N_p]^T [m][N_p]\,\mathrm{d}V = \sum_{j=1}^{3} \left([N_p(\xi_2^j, \xi_3^j)]^T [m][N_p(\xi_2^j, \xi_3^j)] \right) 2A\,w_j, \tag{5.135}$$

mit:

$$[N_p] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{5.136}$$

und:

$$[m] = h\rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & h^2/12 \end{bmatrix} \tag{5.137}$$

Die Massenmatrix $[M_{mem}]$ wird aus der konsistenten Massenmatrix des LST-Elements $[M_{LST}]$ mit der über die Laminatschichten gemittelten Dichte ρ und der Transformation $[T_{CR}]$ (siehe Abschnitt 5.6.6) wie folgt gebildet:

$$[M_{mem}] = [T_{CR}]^T [M_{LST}][T_{CR}] \tag{5.138}$$

Die Zeilen der Massenmatrix des quadratischen Membranelements $[M_{LST}]$ wird hierfür so angeordnet, dass die zugeordneten Freiheitsgrade wie folgt dargestellt werden können:

$$\{u_{LST}\} = \left\{ u_1' \quad v_1' \quad u_4' \quad v_4' \quad u_2' \quad v_2' \quad u_5' \quad v_5' \quad u_3' \quad v_3' \quad u_6' \quad v_6' \right\}^T \tag{5.139}$$

Dies geschieht vor dem Hintergrund, dass die Freiheitsgrade der Mittelknoten $(u_4', v_4', u_5', v_5', u_6', v_6')$ durch die Knotenrotationen $(\theta_{z'i})$ ausgedrückt werden. Die Massenmatrix $[M_{LST}]$ kann wie

folgt dargestellt werden:

$$[M_{LST}] = A\rho/180 \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 32 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 32 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 32 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 32 & 0 & 16 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \tag{5.140}$$

5.9 Elementlastvektor

Erläutert wird im Folgenden die Berechnung des mechanischen Elementlastvektors $\{f_e\}$ infolge von Gravitation ($\{f_{eg}\}$), eines normal wirkenden Flächendrucks ($\{f_{eA}\}$), einer konstanten Linienlast ($\{f_{el}\}$) sowie von Einzelkräften und -momenten ($\{f_P\}$:

$$\{f_e\} = \{f_{eg}\} + \{f_{eA}\} + \{f_{el}\} + \{f_P\} \tag{5.141}$$

Die Berechnung der in Gleichung (5.141) dargestellten Lastvektoren erfolgt entsprechend der Gleichung (4.24), die aber erweitert wird um einen Term, zur Berechnung der äquivalenten Knotenlasten infolge einer konstanten Elementlinienlast ($\{f_{el}\}$):

$$\{f_e\} = \underbrace{\int_V [N_u]^T \{F_V\}\, \mathrm{d}V}_{\to\{f_{eg}\}} + \underbrace{\int_A [N_u]^T \{F_A\}\, \mathrm{d}A}_{\to\{f_{eA}\}} + h \underbrace{\int_{l_1} [N_u]^T \{F_l\}\, \mathrm{d}l_1}_{\to\{f_{el}\}} + \{f_P\} \tag{5.142}$$

Die Matrix $[N_u]$ beinhaltet die Ansatzfunktionen der kombinierten Verschiebungsinterpolation, bestehend aus dem Membran- (siehe Abschnitt 5.6.6) und dem Plattenverschiebungsfeld (siehe Abschnitt 5.5):

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \begin{Bmatrix} N_i u_i' + N_i^{\theta u} \theta_{z'i} \\ N_i v_i' + N_i^{\theta v} \theta_{z'i} \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{3} N_i \begin{Bmatrix} z' \theta_{y',u} \\ -z' \theta_{x',i} \\ w_i' \end{Bmatrix} \tag{5.143}$$

Zur Beschreibung des weiteren Vorgehen wird die Gleichung (5.143) wie folgt kompakt dargestellt:

$$\left\{u' \quad v' \quad w'\right\}^T = \underbrace{\left[[N_{mp,1}] \quad [N_{mp,2}] \quad [N_{mp,3}]\right]}_{[N_u]}\{u_e\}, \tag{5.144}$$

mit:

$$[N_{mp,i}] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & z'N_i & N_i^{\theta u} \\ 0 & N_i & 0 & -z'N_i & 0 & N_i^{\theta v} \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.145}$$

und einem Definitionsbereich für z' von $-h/2$ bis $h/2$.

5.9.1 Diskretisierte Gravitationselementlasten

Der Gravitationslastvektor $\{f_{eg}\}$ berücksichtigt die Wirkung eines Gravitationsfeldes mit der Beschleunigung g und der Wirkrichtung $\{v_g\} = \{x'_g\, y'_g\, z'_g\}^T$ auf die Elementmasse. Unter Berücksichtigung der kombinierten Verschiebungsinterpolation (5.144) kann die Berechnung der zugehörigen Knotenlasten $\{f_{eg,i}\}$ wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \{f_{eg,i}\} &= \int_{(V)} [N_{mp,i}]^T \underbrace{g\rho\,\{v_g\}}_{\{F_V\}}\,\mathrm{d}V \\ &= \sum_{j=1}^{3} \begin{bmatrix} m_0 N_i & 0 & 0 & 0 & m_1 N_i & m_0 N_i^{\theta u} \\ 0 & m_0 N_i & 0 & -m_1 N_i & 0 & m_0 N_i^{\theta v} \\ 0 & 0 & m_0 N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} x'_g \\ y'_g \\ z'_g \end{Bmatrix} 2A\,g\,w_j, \end{aligned} \tag{5.146}$$

mit den in Tab. 5.2 dargestellten Integrationspunkten und Wichtungsfaktoren, unter Verwendung der folgenden Abkürzungen m_0 und m_1 (MSV aufgebaut aus n Schichten):

$$m_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(z'_k - z'_{k-1}\right)\rho_k \tag{5.147}$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(z'^2_k - z'^2_{k-1}\right)\rho_k, \tag{5.148}$$

Der Gravitationselementlastvektor $\{f_{eg}\}$ kann dann mit den Knotenlasten $\{f_{eg,i}\}$ wie folgt zusammengefasst werden:

$$\{f_{eg}\} = \left\{\{f_{eg,1}\}^T \quad \{f_{eg,2}\}^T \quad \{f_{eg,3}\}^T\right\}^T \tag{5.149}$$

5.9.2 Diskretisierte Druckelementlasten

Die Berechnung der Elementlasten $\{f_{eA}\}$, die infolge eines auf der Elementmittelfläche normal zur Elementebene wirkenden gleichmäßigen Drucks p_A entstehen, wird mit Hilfe der Interpolation der Verschiebungskomponente w' des Plattenelements berechnet. Die

hierfür notwendige Integration über die Elementmittelfläche (siehe Gleichung (5.142)) kann vereinfacht als Multiplikation mit der Fläche A ausgeführt werden. Die resultierenden Elementlasten können anschließend wie folgt dargestellt werden:

$$\{f_{eA}\} = p_A \frac{A}{3} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \tag{5.150}$$

5.9.3 Diskretisierte Linienelementlasten

Das Vorgehen zur Berechnung der diskretisierten Linienlasten wird exemplarisch für eine Elementlinienlast $\{F_l\}$ mit den Komponenten $q_{x'}, q_{y'}, q_{z'}$ dargestellt. Die Streckenlast $\{F_l\}$ wirkt entlang der Elementkante $1-2$ ($z' = 0$). Die zugehörigen diskreten Knotenlasten können entsprechend der Gleichung (5.142), unter Verwendung der Verschiebungsinterpolation (5.144), mittels der Integration entlang der Kante $1-2$ (Länge l_{21}) wie folgt bestimmt werden:

$$\{f_{l_{21,i}}\} = h \int_{(l_{21})} [N_{mpi}]^T \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \\ q_{z'} \end{Bmatrix} \mathrm{d}l_{12} = h\, l_{21} \int_0^1 \begin{Bmatrix} N_i q_{x'} \\ N_i q_{y'} \\ N_i q_{z'} \\ 0 \\ 0 \\ N_i^{\theta u} q_{x'} + N_i^{\theta v} q_{y'} \end{Bmatrix} \mathrm{d}\xi_2, \tag{5.151}$$

mit $\xi_3 = 0$ für die Kante $1-2$ und $z' = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \{f_{l_{12,1}}\} &= \frac{l_{12}}{2} \begin{Bmatrix} q_{x'} & q_{y'} & q_{z'} & 0 & 0 & \frac{\alpha}{6}\left(y'_{12} q_{y'} + x'_{21} q_{x'}\right) \end{Bmatrix}^T \\ \{f_{l_{12,2}}\} &= \frac{l_{12}}{2} \begin{Bmatrix} q_{x'} & q_{y'} & q_{z'} & 0 & 0 & \frac{\alpha}{6}\left(y'_{21} q_{y'} + x'_{12} q_{x'}\right) \end{Bmatrix}^T, \\ \{f_{l_{12,3}}\} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \end{aligned} \tag{5.152}$$

Hieraus folgt der zugehörige Elementlastvektor $\{f_{l_{12}}\}$:

$$\{f_{l_{12}}\} = \begin{Bmatrix} \{f_{l_{12,1}}\}^T & \{f_{l_{12,2}}\}^T & \{f_{l_{12,3}}\}^T \end{Bmatrix}^T \tag{5.153}$$

5.10 Projektormatrix

Wie bereits in Abschnitt 4.3.1.4 erläutert, stellt die Projektormatrix $[\overline{P}]$ einen Teil der Transformation zwischen den Variationen der verzerrungserzeugenden und den totalen Verformungen dar. Pacoste beschreibt in [89] den Einfluss der Projektormatrix innerhalb des iterativen Lösungsverfahrens unter Verwendung des korotierenden Konzeptes und berichtet,

dass infolge der elementweisen Approximation der Starrkörperrotation, sich die Knotenlasten benachbarter Elemente auf eine unterschiedliche Lage der gemeinsamen Knoten beziehen. Pacoste [89] und Eriksson [38] schlussfolgern, dass die hieraus resultierenden zusätzlichen Momente einen negativen Einfluss auf das Konvergenzverhalten wie auch auf die Berechnungsergebnisse der nichtlinearen Analyse ausüben. Die Projektormatrix projiziert die Elementknotenlasten in die korrekte Lage der Knoten und behebt so diese Problematik. In der Arbeit von Rankin und Nour-Omid [101] wird die Projektormatrix für ein lineares Dreieckselement detailliert hergeleitet. Eine ausführliche Darstellung dieser Herleitung würde unverhältnismäßig viel Platz einnehmen. Im Folgenden werden deshalb nur die wesentlichen Schritte erläutert. Anschließend wird die Matrix $[\bar{P}]$, unter Verwendung der Teilmatrizen $[\Psi]$ und $[\Gamma]$, für die vorgeschlagene Elementformulierung dargestellt.
Entsprechend der Gleichung (4.64) berechnet sich die Projektormatrix aus den partiellen Ableitungen der verzerrungserzeugenden Freiheitsgrade nach den totalen Verformungen. Die verzerrungserzeugenden Verdrehungen werden in der vorgeschlagenen Formulierung durch die Rotationsmatrizen $[\bar{R}_{di}]$ (siehe Gleichung (4.52)) beschrieben. Unter der Annahme, dass die inkrementellen Verdrehungen klein sind, wird angenommen, dass die infinitesimale Änderung der verzerrungserzeugenden Verdrehungen in guter Näherung gleich der Änderungen der Komponenten des zugehörigen Knoten-Rotationsvektors $\{\delta\bar{\omega}_{di}\}$ (siehe Abschnitt 4.3.1.3) sind. Die Projektor-Matrix $[\bar{P}]$ kann dann unter Verwendung der gewählten Parametrisierung der finiten Rotationen wie folgt dargestellt werden:

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \{\partial\bar{d}_i\}^T/\{\partial\bar{u}_i\} & \{\partial\bar{d}_i\}^T/\{\partial\bar{\omega}_i\} \\ \{\partial\bar{\omega}_{di}\}^T/\{\partial\bar{u}_i\} & \{\partial\bar{\omega}_{di}\}^T/\{\partial\bar{\omega}_i\} \end{bmatrix} \tag{5.154}$$

Zur Beschreibung von $\{\delta\bar{\omega}_{di}\}$ ist zunächst die Variation der Rotationsmatrix der verzerrungserzeugenden Verdrehungen ($[\bar{R}_{di}] = [R_c][R_i][R_0]^T$) zu bestimmen:

$$[\delta\bar{R}_{di}] = [\delta R_c][R_i][R_0]^T + [R_c][\delta R_i][R_0]^T \tag{5.155}$$

Für infinitesimale Rotationen und damit auch für $[\delta\bar{R}_{di}]$ gilt folgender Zusammenhang [101]:

$$[\delta\bar{R}_{di}] = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\bar{\omega}_{di,z} & \delta\bar{\omega}_{di,y} \\ \delta\bar{\omega}_{di,z} & 0 & -\delta\bar{\omega}_{di,x} \\ -\delta\bar{\omega}_{di,y} & \delta\bar{\omega}_{di,x} & 0 \end{bmatrix} [\bar{R}_{di}] = \mathrm{Spin}(\{\delta\bar{\omega}_{di}\})[\bar{R}_{di}] \tag{5.156}$$

Aus Gleichung (5.155) folgt:

$$[\delta\bar{R}_{di}] = \Big[-[R_c]\mathrm{Spin}(\{\delta\omega_c\})[R_i] + [R_c]\mathrm{Spin}(\{\delta\omega_i\})[R_i] \Big][R_0]^T, \tag{5.157}$$

mit:

$$\mathrm{Spin}(\{\delta\omega_c\})[R_c] = -[R_c]\mathrm{Spin}(\{\delta\omega_c\}) \tag{5.158}$$

kann die Gleichung (5.157) dann wie folgt dargestellt werden:

$$[\delta\bar{R}_{di}] = \Big[-[R_c]\mathrm{Spin}(\{\delta\omega_c\})[R_i] + [R_c]\mathrm{Spin}(\{\delta\omega_i\})[R_i]\Big][R_0]^T \tag{5.159}$$

Anschließend werden die Matrizen $\mathrm{Spin}(\{\delta\omega_i\})$ und $\mathrm{Spin}(\{\delta\omega_c\})$ durch die zugehörigen Rotationsvektoren, welche im Koordinatensystem der deformierten Konfiguration beschrieben sind, dargestellt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Spin}(\{\delta\omega_i\}) &= [R_c]^T\mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_i\})[R_c] \\ \mathrm{Spin}(\{\delta\omega_c\}) &= [R_c]^T\mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_c\})[R_c] \end{aligned}, \tag{5.160}$$

sodass die Gleichung (5.157) wie folgt umgeformt werden kann:

$$\begin{aligned} [\delta\bar{R}_{di}] &= \Big[-[R_c][R_c]^T\mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_c\})[R_c][R_i] + [R_c][R_c]^T\mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_i\})[R_c][R_i]\Big][R_0]^T \\ &= \Big[-\mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_c\}) + \mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_i\})\Big][R_c][R_i][R_0]^T \\ &= \Big[-\mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_c\}) + \mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_i\})\Big][\bar{R}_{di}] \end{aligned} \tag{5.161}$$

Ein analoges Vorgehen für die verzerrungserzeugenden Verschiebungen (siehe [101]) führt auf:

$$[\delta\bar{d}_i] = -\mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_c\})\{\bar{x}_i^c\} + \{\delta\bar{u}_i\} = -\mathrm{Spin}(\{\bar{x}_i^c\})\{\delta\overline{\omega}_c\} + \{\delta\bar{u}_i\} \tag{5.162}$$

Die Gleichungen (5.161) und (5.162) ermöglichen es zusammen mit der Annahme, dass die infinitesimale Änderung des Rotationsvektors $\{\delta\overline{\omega}_i\}$ der Änderung der Knotenrotationen $\{\delta\overline{\theta}_i\}$ entspricht, die Projektormatrix (5.154) wie folgt darzustellen:

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} [I] - \big(\{\partial\overline{\omega}_c\}^T/\{\partial\bar{u}_i\}\big)\mathrm{Spin}(\{\bar{x}_i^c\}) & -\big(\{\partial\overline{\omega}_c\}^T/\{\partial\overline{\theta}_i\}\big)\mathrm{Spin}(\{\bar{x}_i^c\}) \\ -\big(\{\partial\overline{\omega}_c\}^T/\{\partial\bar{u}_i\}\big) & [I] - \big(\{\partial\overline{\omega}_c\}^T/\{\partial\overline{\theta}_i\}\big) \end{bmatrix} \tag{5.163}$$

Die Matrix $[\bar{P}]$ wird dann zweckdienlich durch die Teilmatrizen $[\Psi]$ und $[\Gamma]$ wie folgt dargestellt:

$$[\bar{P}] = [I] - [\Psi][\Gamma]^T \tag{5.164}$$

Die Anteile der Matrix $[\bar{P}]$, die in der Matrix $[\Gamma]$ zusammengefasst werden, beschreiben die Änderung der mitdrehenden Basis bezüglich der Knotentranslationen und -rotationen:

$$[\Gamma_i] = \begin{bmatrix} \{\partial\overline{\omega}_c\}^T/\{\partial\bar{u}_i\} \\ \{\partial\overline{\omega}_c\}^T/\{\partial\overline{\theta}_i\} \end{bmatrix} \tag{5.165}$$

Eine explizite Darstellung dieser Matrix kann als Variation der Richtungsvektoren des sich mitbewegenden Systems E_{cr} (siehe Abb. 4.2) ausgedrückt werden. Zunächst werden hierfür

die Knotenkoordinaten der deformierten Konfiguration $\{x_i^c\}$, bezogen auf den Knoten 1 als Ursprung des Systems E_{cr}, ausgedrückt:

$$\{x_i^c\} = \left\{ x_i^c \quad y_i^c \quad w_i^c \right\}^T = \{x_i\} + \{u_i\} - \{x_1\} - \{u_1\} \tag{5.166}$$

Mit den aktualisierten Knotenkoordinaten können dann die Richtungsvektoren (siehe Abschnitt 5.1) wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\{e_{yc}\} &= \Big(\{x_3^c\} - \{x_1^c\}\Big) / \|\{x_3^c\} - \{x_1^c\}\| = \{\bar{x}_{31}^c\}/\|\{\bar{x}_{31}^c\}\| \\
\{e_{21}\} &= \Big(\{x_2^c\} - \{x_1^c\}\Big) / \|\{x_2^c\} - \{x_1^c\}\| = \{\bar{x}_{21}^c\}/\|\{\bar{x}_{21}^c\}\| \\
\{e_{zc}\} &= \{e_{yc}\} \times \{e_{21}\} \\
\{e_{xc}\} &= \{e_{zc}\} \times \{e_{yc}\},
\end{aligned} \tag{5.167}$$

Diese Richtungsvektoren und die aktualisierten Knotenkoordinaten können dann mit $[R_c]^T$ in das System der deformierten Konfiguration transformiert werden:

$$\begin{aligned}
\{\bar{e}_{xc}\} &= [R_c]^T \{e_{xc}\} \\
\{\bar{e}_{yc}\} &= [R_c]^T \{e_{yc}\} \\
\{\bar{e}_{zc}\} &= [R_c]^T \{e_{zc}\}
\end{aligned} \tag{5.168}$$

$$\{\bar{x}_i^c\} = \left\{ \bar{x}_i^c \quad \bar{y}_i^c \quad \bar{w}_i^c \right\}^T = \{\bar{x}_i\} + \{\bar{u}_i\} - \{\bar{x}_1\} - \{\bar{u}_1\} \tag{5.169}$$

Die Variation der Richtungsvektoren kann mit den variierten Knotenverschiebungen ausgedrückt werden. So folgt zum Beispiel für $\{\delta\bar{e}_{yc}\}$:

$$\{\delta\bar{e}_{yc}\} = \frac{1}{\|\{\bar{x}_{31}^c\}\|}\Big(\{\bar{e}_{zc}\}\big(\delta\bar{w}_3^c - \delta\bar{w}_1^c\big) + \{\bar{e}_{xc}\}\big(\delta\bar{u}_3^c - \delta\bar{u}_1^c\big)\Big) \tag{5.170}$$

Die Relation zwischen dem $\mathrm{Spin}\big(\{\delta\overline{\omega}_c\}\big)$ und der Variation der Richtungsvektoren des sich mitbewegenden Systems kann ausgehend von Gleichung (5.156) aufgestellt werden und führt auf:

$$\mathrm{Spin}(\{\delta\overline{\omega}_c\} = [R_c][\delta R_c]^T = \begin{bmatrix} \{\bar{e}_{xc}\}^T \\ \{\bar{e}_{yc}\}^T \\ \{\bar{e}_{zc}\}^T \end{bmatrix} \Big[\{\delta\bar{e}_{xc}\} \quad \{\delta\bar{e}_{yc}\} \quad \{\delta\bar{e}_{zc}\}\Big] \tag{5.171}$$

Aus dem Vergleich der beiden Seiten der Gleichung (5.171) folgt dann:

$$\begin{aligned}
\delta\overline{\omega}_{c,x} &= \{\bar{e}_{zc}\}^T\{\delta\bar{e}_{yc}\} = \frac{\delta\bar{w}_3^c - \delta\bar{w}_1^c}{\bar{y}_3^c} \\
\delta\overline{\omega}_{c,z} &= -\{\bar{e}_{xc}\}^T\{\delta\bar{e}_{yc}\} = \frac{\delta\bar{u}_1^c - \delta\bar{u}_3^c}{\bar{y}_3^c}
\end{aligned} \tag{5.172}$$

Der Term $\delta\overline{\omega}_{c,y}$ kann in analoger Weise bestimmt werden (siehe [101]). Die Orientierung des Elements wird somit komplett durch seine Knotenkoordinaten beschrieben, sodass:

$$\{\partial\overline{\omega}_c\}^T/\{\partial\overline{\theta}_i\} = [0] \tag{5.173}$$

gilt und die Matrix $[\Gamma]$ (siehe Gleichung (5.165)) wie folgt dargestellt werden kann:

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{u}_1} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{u}_1} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{u}_1} \\ \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{v}_1} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{v}_1} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{v}_1} \\ \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{w}_1} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{w}_1} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{w}_1} \end{bmatrix} \\ [0] \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{u}_2} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{u}_2} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{u}_2} \\ \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{v}_2} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{v}_2} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{v}_2} \\ \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{w}_2} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{w}_2} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{w}_2} \end{bmatrix} \\ [0] \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{u}_3} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{u}_3} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{u}_3} \\ \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{v}_3} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{v}_3} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{v}_3} \\ \frac{\partial\overline{\omega}_{c,x}}{\partial\bar{w}_3} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,y}}{\partial\bar{w}_3} & \frac{\partial\overline{\omega}_{c,z}}{\partial\bar{w}_3} \end{bmatrix} \\ [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\bar{y}_3^c \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\bar{y}_3^c & (1/\bar{x}_2^c)(1-\bar{y}_2^c)/\bar{y}_3^c & 0 \end{bmatrix} \\ [0] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\bar{x}_2^c & 0 \end{bmatrix} \\ [0] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\bar{y}_3^c \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\bar{y}_3^c & \bar{y}_2^c/\bar{x}_2^c\bar{y}_3^c & 0 \end{bmatrix} \\ [0] \end{bmatrix} \tag{5.174}$$

Die verbleibende Matrix $[\Psi]$ berechnet sich wie folgt:

$$[\Psi] = \Big[-\mathrm{Spin}\big(\{\bar{x}_1^c\}\big)^T \quad [I] \quad -\mathrm{Spin}\big(\{\bar{x}_2^c\}\big)^T \quad [I] \quad -\mathrm{Spin}\big(\{\bar{x}_3^c\}\big)^T \quad [I]\Big]^T, \tag{5.175}$$

5.11 Interner Elementkraftvektor und tangentiale Steifigkeitsmatrix

Mit der Projektormatrix $[\overline{P}]$ (siehe Abschnitt 5.10) und den in Abschnitt 4.3.1.3 beschriebenen verzerrungserzeugenden Verformungen $\{\bar{u}_i^d\}$ können die internen Elementkräfte bezüglich des globalen Koordinatensystems, entsprechend der Gleichung (4.74) wie folgt berechnet werden:

$$\{f_{int,e}\} = [\hat{R}_c]^T[\overline{P}]^T[K_e]\{\bar{u}_e^d\} \tag{5.176}$$

Bestimmt wird die tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix $[K_{T,e}]$ der vorgeschlagenen Formulierung entsprechend der Gleichung (4.75) mit Hilfe der Transformationsmatrix der

Momentankonfiguration $[\hat{R}_c]$, der linearen Steifigkeitsmatrix $[K_e]$, beschrieben im lokalen Elementsystem, und der Projektormatrix $[\overline{P}]$ wie folgt:

$$[K_{T,e}] = [\hat{R}_c]^T [\overline{P}]^T [K_e][\overline{P}][\hat{R}_c] \tag{5.177}$$

Für die programmiertechnische Umsetzung der Formulierung werden die Terme der tangentialen Elementsteifigkeitsmatrix $[K_{T,e}]$ und der internen Elementkräfte $\{f_{int,e}\}$ bezüglich der raumfesten Basis (x, y, z) ausgedrückt. Ausgehend von der Gleichung (5.177) folgt dann für $[K_{T,e}]$:

$$\begin{aligned}
[K_{T,e}] &= [\hat{R}_c]^T [\overline{P}]^T [K_e][\overline{P}][\hat{R}_c] \\
&= \underbrace{[\hat{R}_c]^T [\hat{R}_c]}_{[I]}[P]^T \underbrace{[\hat{R}_c]^T [\hat{R}_0]}_{[\hat{R}]}[K_e^g] \underbrace{[\hat{R}_0]^T [\hat{R}_c]}_{[\hat{R}]^T}[P] \underbrace{[\hat{R}_c]^T [\hat{R}_c]}_{[I]} \\
&= [P]^T [\hat{R}][K_e^g][\hat{R}]^T [P]
\end{aligned} \tag{5.178}$$

mit den auf die raumfeste Basis bezogenen Matrizen $[P]$ und $[K_e^g]$. Ein analoges Vorgehen für $\{f_{int,e}\}$ führt auf:

$$\begin{aligned}
\{f_{int,e}\} &= [\hat{R}_c]^T [\overline{P}]^T [K_e]\{\overline{u}_e^d\} \\
&= \underbrace{[\hat{R}_c]^T [\hat{R}_c]}_{[I]}[P]^T \underbrace{[\hat{R}_c]^T [\hat{R}_0]}_{[\hat{R}]}[K_e^g] \underbrace{[\hat{R}_0]^T [\hat{R}_c]}_{[\hat{R}]^T}\{u_e^d\} \\
&= [P]^T [\hat{R}][K_e^g][\hat{R}]^T \{u_e^d\}
\end{aligned} \tag{5.179}$$

5.12 Piezoelektrische Elementmatrizen

Die Kopplung der elektrischen und der mechanischen Freiheitsgrade wird durch die bereits in Abschnitt 4.2 dargestellte Kopplungsmatrix $[K_{u\phi,e}]$ beschrieben. Die Dimension der Matrix $[K_{u\phi,e}]$ ist $18 \times n_E$, wobei n_E der Anzahl der definierten Elementpiezoschichten entspricht. Wie bereits in Kapitel 3 erläutert, erfolgt die Koppelung ausschließlich zwischen den in der Schalenebene wirkenden Verzerrungen und dem elektrischen Feld E_3. Aus Gleichung (4.22) folgt nach vorangegangener analytischer Integration in Dickenrichtung mit den B-Matrizen der Membranverzerrungen und der Krümmungen ($[B_{mem*}]$, $[B_{pb}]$) für jede definierte Elementpiezoschicht eine Spalte (k):

$$\{k_{u\phi}\}_k = \int_A \left(\begin{bmatrix} \left(z'_k - z'_{k-1}\right)[B_{mem*}]^T \\ \frac{1}{2}\left(z'^2_k - z'^2_{k-1}\right)[B_{pb}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e]^k \\ [e]^k \end{bmatrix} \right) \mathrm{d}A, \tag{5.180}$$

mit $[e]^k = [e'^k_{3'1'}\, e'^k_{3'1'}\, 0]^T$. Die Integration über die Elementmittelfläche wird numerisch entsprechend Abschnitt 5.8 durchgeführt:

$$\{k_{u\phi}\}_k = \sum_{j=1}^{3} \left(\begin{bmatrix} \left(z'_k - z'_{k-1}\right)[B_{mem*}(\xi_2^j, \xi_3^j)]^T \\ \frac{1}{2}\left(z'^2_k - z'^2_{k-1}\right)[B_{pb}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e]^k \\ [e]^k \end{bmatrix} \right) 2Aw_j = \{k_{\phi,eu}\}_k^T \tag{5.181}$$

Die Spalten $\{k_{u\phi}\}_k$ werden zur Matrix $[\hat{K}_{u\phi,e}]$ zusammengefasst:

$$[\hat{K}_{u\phi,e}] = \Big[\{k_{u\phi}\}_1 \quad \dots \quad \{k_{u\phi}\}_k\Big] \tag{5.182}$$

Anschließend wird $[\hat{K}_{u\phi,e}]$ analog zu ($[\hat{K}] \rightarrow [K_e]$) zur finalen Kopplungsmatrix $[K_{u\phi,e}]$ umsortiert, sodass die assoziierten mechanischen Freiheitsgrade dem Vektor $\{u_{mem}\}$ entsprechen.

Die dielektrische Steifigkeitsmatrix $[K_{\phi\phi,e}]$ besitzt die Dimension $n_E \times n_E$ und ist durch den Ausdruck (4.23) definiert. Die diagonale Matrix $[K_{\phi\phi,e}]$ kann nach vorangegangener analytischer Integration in Dickenrichtung für n_E Piezoschichten, mit $\left([B_{\phi,k}] = \frac{1}{(z'_k - z'_{k-1})}\right)$, wie folgt dargestellt werden:

$$[K_{\phi\phi,e}] = -\int_{V_e} [B_\phi]^T [d^\varepsilon][B_\phi]\,\mathrm{d}V_e = \begin{bmatrix} -\dfrac{d'^{1}_{3'3'}}{(z'_1 - z'_0)}A & & [0] \\ & \ddots & \\ [0] & & -\dfrac{d'^{n_E}_{3'3'}}{\left(z'_{n_E} - z'_{n_E-1}\right)}A \end{bmatrix} \tag{5.183}$$

5.12.1 Kondensierte Darstellungsform

Infolge der konstanten Modellierung der Schichtpotentialdifferenzen (siehe Kapitel 3) müssen keine elektrischen Übergangsbedingungen zwischen den Elementen eingehalten werden. Dadurch ist es möglich, die elektrischen Freiheitsgrade bereits auf Elementebene zu kondensieren, um so die Dimension des resultierenden Gleichungssystems zu reduzieren. Im Folgenden wird die in dieser Arbeit verwendete kondensierte Darstellungsform entsprechend der Arbeit von Lammering und Mesecke-Rischmann [64] erläutert.

Die vorgeschlagen Formulierung erlaubt es, beliebig viele Piezoschichten auf Elementebene auszuführen, und zwar als Aktuator (mit dem Index „a“) wie auch als Sensor (mit dem Index „s“). Je nachdem, welche elektrischen Randbedingungen für die jeweiligen Schichten definiert wurden, muss deren Einfluss im Zuge einer Kondensation unterschiedlich berücksichtigt werden. Für die folgende Beschreibung des Vorgehens werden die elektrischen Elementfreiheitsgrade $\{\phi_e\}$ aufgeteilt in unbekannte Sensorspannungen $\{\phi_{e,s}\}$ (offene Elektroden) und bekannte Aktuatorspannungen $\{\phi_{e,a}\}$ (kurzgeschlossene aktive Elektroden):

$$\{\phi_e\} = \Big\{\{\phi_{e,a}\}^T \quad \{\phi_{e,s}\}^T\Big\}^T \tag{5.184}$$

Eine analoge Aufteilung der in Gleichung (4.18) enthaltenden Systemmatrizen führt für den statisch linearen Fall zu den folgenden Gleichungen:

$$[K_{uu,e}]\{u_e\} + [K_{u\phi,ea}]\{\phi_{e,a}\} + [K_{u\phi,es}]\{\phi_{e,s}\} = \{f_e\} \tag{5.185}$$

$$[K_{\phi u,es}]\{u_e\} + [K_{\phi\phi,es}]\{\phi_{e,s}\} = \{0\} \tag{5.186}$$

Aus Gleichung (5.186) folgt die Sensorspannung $\{\phi_{s,e}\}$:

$$\{\phi_{e,s}\} = -[K_{\phi\phi,es}]^{-1}[K_{\phi u,es}]\{u_e\} \tag{5.187}$$

Die Aktuatorspannung $\{\phi_{e,a}\}$ ist bekannt, sie kann direkt zur Berechnung des Aktuator-Lastvektors $\{f_{e,a}\}$ verwendet werden:

$$\{f_{e,a}\} = [K_{u\phi,ea}]\{\phi_{e,a}\} \tag{5.188}$$

Durch das Einsetzen der Sensorspannung $\{\phi_{e,s}\}$ in die Gleichung (5.185) und der anschließenden Subtraktion dieser mit $\{f_{e,a}\}$ folgt die reduzierte Elementgleichung:

$$\big([K_{uu,e}]\underbrace{-[K_{u\phi,es}][K_{\phi\phi,es}]^{-1}[K_{\phi u,es}]}_{[K_{uu,es}]}\big)\{u_e\} = \{f_e\} - \{f_{e,a}\} \tag{5.189}$$

Die Gleichung (5.189) zeigt somit den Einfluss der elektrischen Randbedingungen auf die mechanische Steifigkeit. Die elektromechanische Koppelung erhöht die Gesamtsteifigkeit ($[K_{\phi\phi,es}]$ ist negativ), wenn die Elektroden geöffnet sind. In der statisch nichtlinearen Analyse ist ein ähnliches Vorgehen unter Verwendung der vorgeschlagenen mitdrehenden Formulierung möglich. Die Erweiterung der Gleichung (5.189) für die geometrisch nichtlineare Analyse kann durch die Rotation der Matrix $[K_{uu,es}]$ und des Vektors $\{f_{e,a}\}$ in die korotierte Konfiguration umgesetzt werden:

$$[K_{T,s}] = [\hat{R}][K_{uu,es}][\hat{R}]^T, \tag{5.190}$$

mit $[\hat{R}] = [diag([R])]$.

$$\{f^c_{e,a}\} = [\hat{R}]\{f_{a,e}\} \tag{5.191}$$

Die unbekannten Sensorspannungen können mit Hilfe der verzerrungserzeugenden Verformungen bestimmt werden:

$$\{\phi^c_{e,s}\} = -[K_{\phi\phi,es}]^{-1}[K_{\phi u,es}]\{u^d_e\} \tag{5.192}$$

Werden mehrere Elemente zur Modellierung eines Sensors verwendet, müssen zusätzliche Zwangsbedingungen formuliert werden, die sicherstellen, dass in den zugehörigen Elementschichten der Sensoren dieselben elektrischen Spannungen herrschen.

Kapitel 6

Numerische Beispiele

Die vorgeschlagene Elementformulierung wurde für Testzwecke in ein vom Autor erstelltes Testprogramm implementiert. Im folgenden Kapitel wird die Formulierung anhand einiger ausgewählter Testbeispiele validiert. Gezeigt werden dabei neben Benchmarks und rein akademischen Beispielen auch praktische Anwendungsbeispiele. In den aufgeführten Testproblemen werden SI- oder Nicht-SI-Einheiten (z. B. inch, pound, etc.) von einigen der zitierten Autoren verwendet. Der Übersichtlichkeit halber werden in der Beschreibung der Beispiele und in den Berechnungsergebnissen nur numerische Werte angegeben (mit Ausnahme der Zeit und der Frequenz in der dynamischen Analyse). Jedes Einheitensystem kann bei konsistenter Nutzung mit den in den Beispielen gegeben Größen assoziiert werden. Die Berechnungsergebnisse wurden, wo es möglich war, mit den zugehörigen Referenzlösungen normiert. Bei der Beschreibung der Materialeigenschaften der einzelnen Beispiele werden, wie es teilweise in der englischsprachigen Fachliteratur üblich ist, die E-Moduli (engl. *Young's modulus*) mit Y abgekürzt, um eventuelle Verwechselungen mit dem elektrischen Feld E zu vermeiden. In der folgenden Dokumentation der Beispiele werden jene Ergebnisse, die mit der in der Arbeit vorgeschlagenen Formulierung berechnet wurden, in den Diagrammen und den Tabellen jeweils mit „SH3“ abgekürzt.

6.1 Rein mechanische Beispiele

Das mechanische Verhalten der vorgeschlagenen Formulierung wird zunächst anhand einiger Beispiele isoliert untersucht und bewertet. Evaluiert wird - neben der Fähigkeit der Reproduktion der Referenzlösungen - das Konvergenzverhalten des entwickelten Elements, und zwar mit Hilfe des im kommerziellen FE-Programm Abaqus vorhandenen dreiknotigen ebenen S3-Elements. Des Weiteren wird das Verhalten des vorgeschlagenen Elements in der geometrisch nichtlinearen Analyse untersucht. Hierfür werden einige in der Literatur

vorhandene akademische Beispiele mit der vorgeschlagenen Elementformulierung berechnet und dann mit den Referenzlösungen verglichen. Anschließend wird das dynamische Verhalten des Elements in der linearen und in der geometrisch nichtlinearen Analyse untersucht und zwar unter Verwendung der implementierten Newmark-Zeitintegrationverfahren.

6.1.1 Patch-Tests

Patch-Tests stellen einen allgemeinen Indikator für die Konvergenz einer Elententwicklung dar. Sie werden in der Regel als einfache Beispiele mit bekannten analytischen Lösungen ausgeführt. Die Test-Strukturen werden so belastet, dass sich konstante Spannungszustände (Verzerrungszustände) einstellen. Die zu untersuchende Elementformulierung muss diese dann unter Verwendung eines verzerrten Netzes exakt wiedergeben. Die korrekte Darstellung solcher konstanter Spannungszustände stellt eine notwendige Bedingung für Konvergenz dar. Der Patch-Test wird zur Untersuchung des mechanischen Verhaltens des entwickelten Elements für die Membran- und für die Plattenantwort jeweils separat durchgeführt. Dabei wird das gleiche, in Abb. 6.1 dargestellte, Netz verwendet und die entsprechenden konstante Spannungszustände erzeugenden äußeren Lasten aufgebracht. Die Patch-Test-Struktur besitzt eine Dicke von $h = 0,001$, das isotrope Material ist charakterisiert durch ein E-Modul von $Y = 1,0 \cdot 10^6$ und eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,3$.

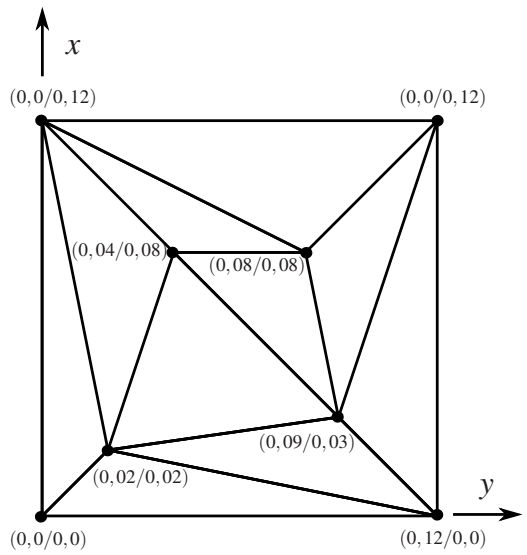


Abb. 6.1: Die Patch-Test-Geometrie

6.1.1.1 Der Membran-Patch-Test

Der Membrane-Patch-Test besteht aus vier Lastfällen. In den Lastfällen 1) und 2) (siehe Abb. 6.2) werden jeweils zwei gegenüberliegende Kanten mit konstanten Linienlasten $q_n = 1$ auf Zug belastet. Die resultierenden Knotenkräfte besitzen einen Wert von $0,06$ und die zugehörigen Drillmomente einen Wert von $0,012$ ($\alpha q_n l^2/12$, mit der Kantenlänge l). Die analytisch berechnete konstante Normalspannung beträgt in beiden Lastfällen 1000, sie wird von allen im FE-Modell enthaltenden Elementen exakt reproduziert wird.
In den beiden verbleibenden Lastfällen 3) und 4) wird das Netz mit den resultierenden Knotenlasten von linear veränderlichen, an den Rändern wirkenden Streckenlasten (von $+1$ bis -1) belastet. Die resultierende konstante Referenzschubspannung von $1224,7$ wird von allen Elementen korrekt wiedergegeben.

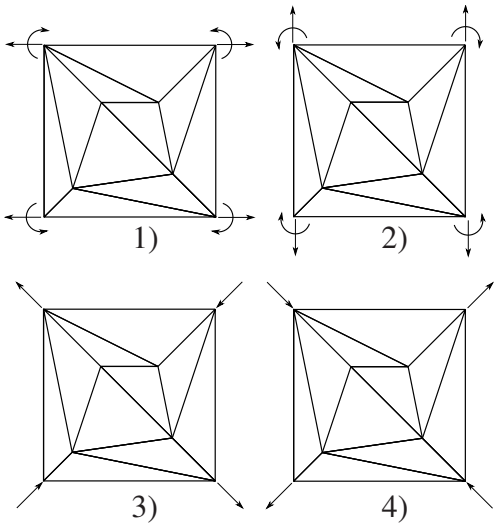


Abb. 6.2: Lastfälle des Membran-Patch-Tests

6.1.1.2 Platten-Patch-Test

Genau wie der Membran-Test beinhaltet der Platten-Patch-Test vier Lastfälle. Diese werden - analog zum Vorgehen in den Membranfällen - aus konstanten und linear veränderlichen Streckenmomenten gebildet. Die resultierenden Knotenmomente sind in Abb. 6.3 schematisch dargestellt. Die Knotenmomente der Lastfälle 1) und 2) resultieren aus den konstanten Streckenmomenten und die der Lastfälle 3) und 4) aus den linear veränderlichen Streckenmomenten. Die Belastungen wurden so gewählt, dass die resultierenden Biegenormalspannungen an der Oberfläche den Normalspannungen der zugehörigen Membranlastfälle entspricht. Alle Werte werden von jedem Element in jedem der vier Lastfälle exakt wiedergegeben.

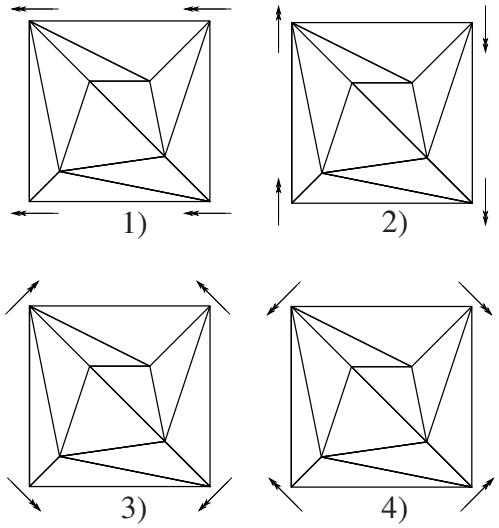


Abb. 6.3: Lastfälle des Platten-Patch-Tests

6.1.2 Raasch-Problem

Das „Raasch-Problem“ wurde ursprünglich von Ingo Raasch 1991 vorgeschlagen, anlässlich eines von ihm untersuchten nicht konvergierenden Lastfalls, bei dem er Schalenelemente des kommerziellen FEM-Programms MSC/NASTRAN [57] in der statisch linearen Analyse verwendet hatte. Später berichtete Knight [57], dass schubstarre Schalenelemente (Kirchhoff-Love-Kinematik) - im Gegensatz zu den damals zu Verfügung stehenden schubweichen Elementen (Reissner-Mindlin-Kinematik) - zum richtigen Ergebnis konvergieren. Die Geometrie des Raasch-Tests ähnelt einem Haken ähnlich gebogenen Streifen, bestehenden aus zwei Segmenten. Die Segmente verlaufen tangential an ihrer Verbindungslinie (siehe Abb. 6.4). Der Radius des ersten Segments beträgt $R_1 = 14$, während der des zweiten $R_2 = 46$ beträgt. Die Dicke der Teststruktur ist 2 und die Breite 20. Das linke Ende der Struktur ist fest eingespannt und das andere Ende ist mit einer konstanten Streckenlast f von $8,7563$ in Breitenrichtung wirkend (z-Richtung) belastet. Das isotrope Material besitzt ein E-Modul von $Y = 22,77 \cdot 10^6$ und eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,35$. Die Her-

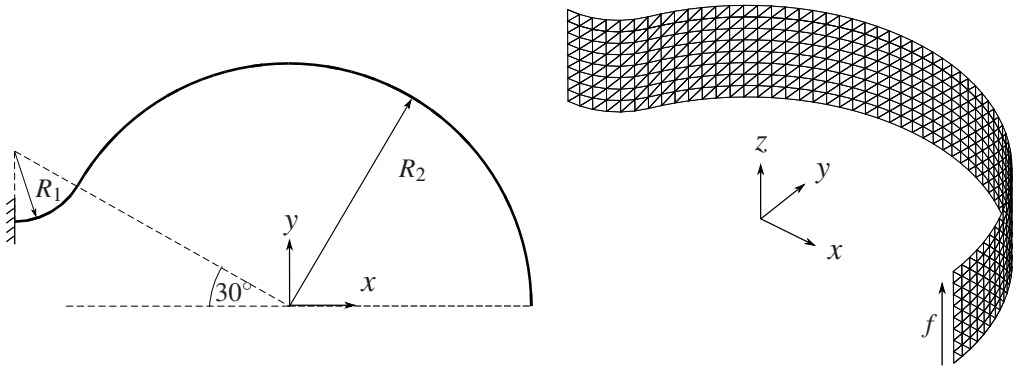


Abb. 6.4: Geometrie des Raasch-Hakens

ausforderung dieses Testfalls resultiert aus dem komplexen Deformationszustand, der sich aufgrund der Geometrie und der Randbedingungen einstellt. Die Verformungen beinhalten Biegung, torsionsbedingte Verdrehungen und Schubverformungen in der Ebene. MacNeal et al. [72] schlussfolgerten, dass der Transfer der Torsionsmomenten von Element zu Element Schubverformungen hervorruft, weshalb die Referenzlösung nur mit einer geeigneten Formulierung der Drillsteifigkeit erreicht werden kann.
Untersucht wird das Konvergenzverhalten sowie die Fähigkeit, die Referenzlösung mit feiner werdenden Netzen wiederzugeben, im Zuge einer Konvergenzstudie mit 18, 216, 896 und 1072 Elementen. Die in der Mitte des rechten Endes berechneten Verschiebungen in z-Richtung werden mit der Referenzlösung $w_{ref} = 0,12535$ [57] normiert. Die in Tab. 6.1 dargestellten Ergebnisse zeigen, dass die vorgeschlagene Formulierung im Vergleich zu dem Abaqus-S3-Element mit einer geringfügig besseren Rate zur Referenzlösung konvergiert.

Tab. 6.1: Normierte Verschiebung der belasteten Kante in z-Richtung - Raasch-Problem

Elemente	SH3	Abaqus S3
18	0,845	0,842
216	0,968	0,912
896	0,998	0,961
1072	1,000	0,988

6.1.3 Twisted-Beam-Analyse

Der Twisted-Beam-Test ist ein weitverbreitetes Testbeispiel zur Untersuchung der Genauigkeit und der Performance von Elemententwicklungen in der statisch linearen Analyse. Die von einem zum anderen Ende spannungsfrei um 90° verdrehte Balkengeometrie ist in Abb. 6.5 dargestellt. Infolge der doppelt gekrümmten Geometrie führen selbst einfache Belastungen zu komplexen Deformationszuständen. Die auf einer Seite fest eingespannte Teststruktur besitzt eine Länge $L = 12$ und eine Breite $W = 1,1$. Das isotrope Material ist definiert durch ein E-Modul von $Y = 29,0$ und durch eine Querkontraktionszahl von $0,22$. Es werden zwei, für dünne wie für dicke Schalen repräsentative, Schalendicken berücksichtigt: $0,05$ und $0,32$. Für jede Schalendicke werden zwei Lastfälle, mit einer konzentrierten Kraft $f = 1.0$ am freien Ende wirkend, die in z- und y-Richtung wirkt (siehe Abb. 6.5), untersucht. Unter Verwendung der sieben Diskretisierungen (mit 24, 32, 48, 64, 96, 386 bzw. 1536 Elementen) wurden für die Mitte des freien Endes die Verschiebungen (v, w) berechnet. Für die unterschiedlichen Lastfälle werden diese Verschiebungen

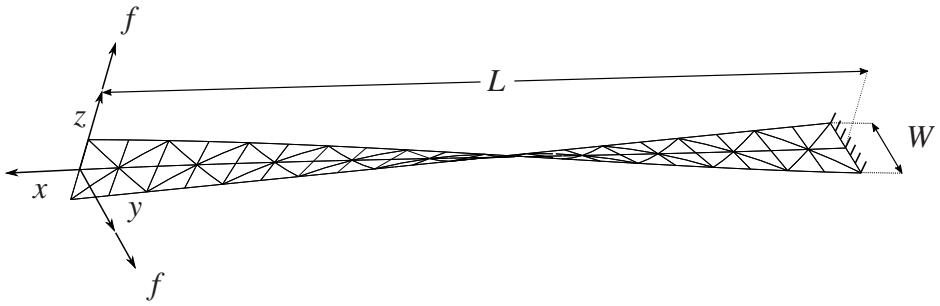


Abb. 6.5: Geometrie des Twisted-Beam

Tab. 6.2: Normierte Verschiebungen - Twisted-Beam-Problem

$t = 0,05$	$w_{ref} = 0,3431$		$v_{ref} = 1,390$	
Elemente	SH3	Abaqus S3	SH3	Abaqus S3
24	0,916	0,751	0,903	0,768
32	0,951	0,901	0,964	0,914
48	0,981	0,960	0,986	0,967
64	0,989	0,984	0,991	0,986
96	0,995	0,993	0,994	0,992
384	0,999	0,998	0,997	0,996
1536	1,000	0,999	0,999	0,998
$t = 0,32$	$w_{ref} = 1,754 \cdot 10^{-3}$		$v_{ref} = 5,424 \cdot 10^{-3}$	
Elemente	SH3	Abaqus S3	SH3	Abaqus S3
24	0,764	0,701	0,975	0,895
32	0,809	0,782	0,983	0,960
48	0,862	0,831	0,991	0,979
64	0,889	0,862	0,995	0,987
96	0,910	0,887	0,999	0,990
384	0,971	0,958	1,003	0,997
1536	0,996	0,989	1,004	1,000

normiert mit der Referenzlösung von Simo et al. [113] ($w_{ref} = 0,3431$, $v_{ref} = 1.390$) und mit jener von MacNeal und Harder [72] $w_{ref} = 1,754 \cdot 10^{-3}$, $v_{ref} = 5,424 \cdot 10^{-3}$). Die in Tab. 6.2 zusammengefassten Ergebnisse zeigen, dass das FE-Modell unter Verwendung des SH3-Elements im Vergleich zur einer Diskretisierung mit dem Abaqus-S3-Element für ein großteil der Lastfälle schneller zur Referenzlösung konvergiert.

6.1.4 Drei-Punkt-Biegeversuch

Der von der NAFEMS in [3] vorgeschlagene Drei-Punkt-Biegeversuch eines Laminatstreifen stellt ein weit verbreitetes Benchmark-Beispiel zur Validierung von Komposit-Elementen in der statisch linearen Finiten-Elemente-Analyse dar. Der MSV-Streifen besitzt einen Laminatschichtaufbau von [0/90/0/90/0/90/0]. Die zugehörigen Schichtdicken sind in Abb. 6.6 dargestellt. Die in Bezug zur Materialorientierung (globale x-Achse, siehe Abb. 6.6) richtungsabhängigen Materialeigenschaften sind in Tab. 6.3 zusammengefasst. Der MSV-Streifen wird mit einer konstanten Streckenlast $q = 10$ entlang der Streifenbreite in der Mitte des Streifens wie Abb. 6.6 dargestellt belastet. Unter Berücksichtigung der

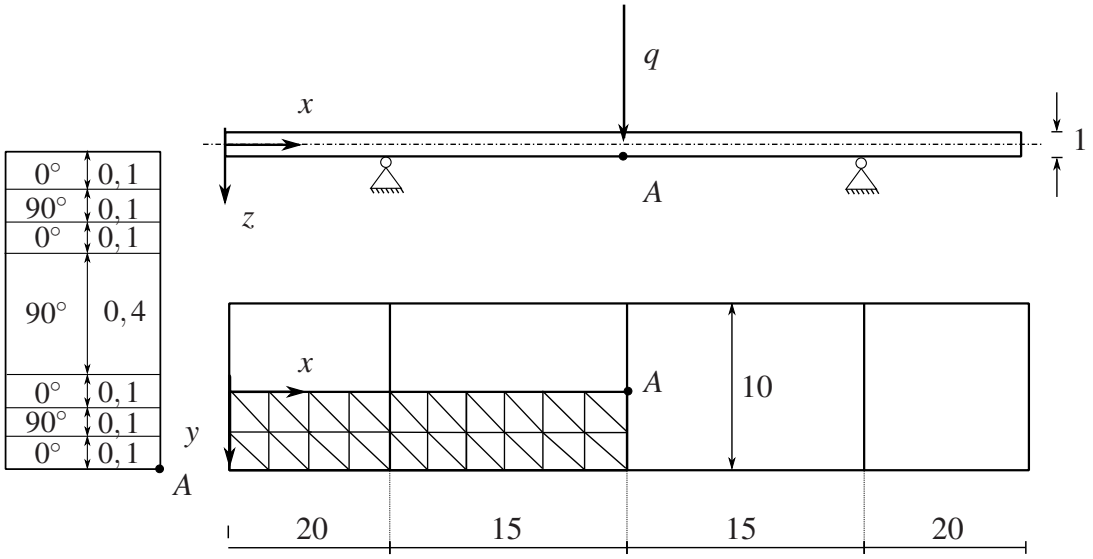


Abb. 6.6: Geometrie des Drei-Punkt-Biegeversuchs

Tab. 6.3: Materialeigenschaften des MSV-Streifens

Y_{11}	Y_{22}	ν_{12}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
$100{\cdot}10^9$	$5{\cdot}10^9$	0,4	$3{\cdot}10^9$	$2{\cdot}10^9$	$2{\cdot}10^9$

Symmetrie wird nur ein Viertel der Struktur modelliert. Die aus der Einwirkung der äußeren Lasten vertikale Verschiebung und die ebenfalls daraus resultierende Biegenormalspannung an Punkt A an der Unterseite werden für fünf unterschiedliche Netze berechnet (14, 32, 120, 528 und 800 Elemente). Bereits mit dem gröbsten Netz wird die Referenzverschiebung erreicht, weshalb nur die normierten Spannungen (Referenzlösung $\sigma_{ref} = 684$ [1]) für die berücksichtigten Netze in Tab. 6.4 dargestellt sind.

Tab. 6.4: Konvergenzdaten der normierten Biegenormalspannungen am Punkt A

Elemente	SH3	Abaqus S3
14	0,884	0,879
32	0,904	0,908
120	0,952	0,952
528	0,980	0,982
800	0,989	0,988

6.1.5 Einrollender-Balken

Der in Abb. 6.7 dargestellte Balken wird am linken Ende fest eingespannt und am freien rechten Ende durch ein konstantes Streckenmoment belastet (siehe Abb. 6.7) und unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte analysiert. Der Betrag des Streckenmomentes ist so gewählt, dass der Balken zu einem kompletten Ring gebogen wird. Die Länge des Balkens ist $L = 10$, die Breite $W = 0,5$ und die Dicke $h = 0,01$. Damit die berechneten Ergebnisse mit der analytischen Lösung verglichen werden können, wird eine Poissonzahl von $\nu = 0$ angenommen, sodass das isotrope Material ausschließlich durch das E-Modul $Y = 200 \cdot 10^9$ beschrieben wird. Das Moment, das zur Biegung des Balken zu einem Ring notwendig ist, lässt sich unter den getroffenen Annahmen analytisch berechnen. Es beträgt $M = h^3 \pi Y W / 6L$. Hieraus folgt ein konstantes Streckenmoment von $m = h^3 \pi Y / 6L = \pi / 3 \cdot 10^4$. In Abb. 6.8 sind die initiale und unterschiedlich deformier-

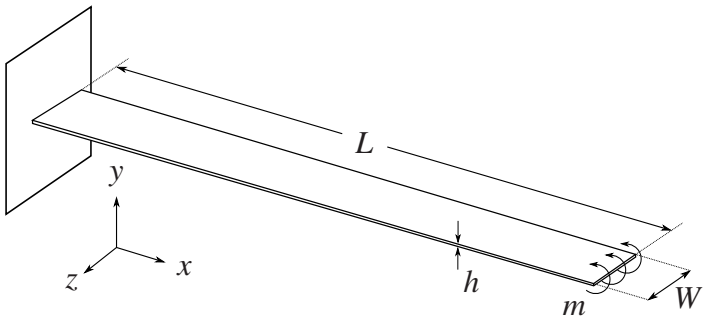


Abb. 6.7: Geometrie Einrollender-Balken

ten Konfigurationen (Lastinkremente) dargestellt. Das Beispiel wurde berechnet mit einem Netz aus 176 Elementen. Verwendet wurde dabei die vorgeschlagene Formulierung und das Abaqus-S3-Element. Bei Verwendung der automatischen Inkrement-Steuerung bricht die Analyse in Abaqus bei einem Lastniveau von 90 % ab (305 Inkremente und mehr als 1500 Iterationen). Die vorgeschlagene Formulierung konvergiert hingegen ohne Probleme auch bei einem Lastniveau von 100 % unter Verwendung von 4 Lastinkrementen und einer Ge-

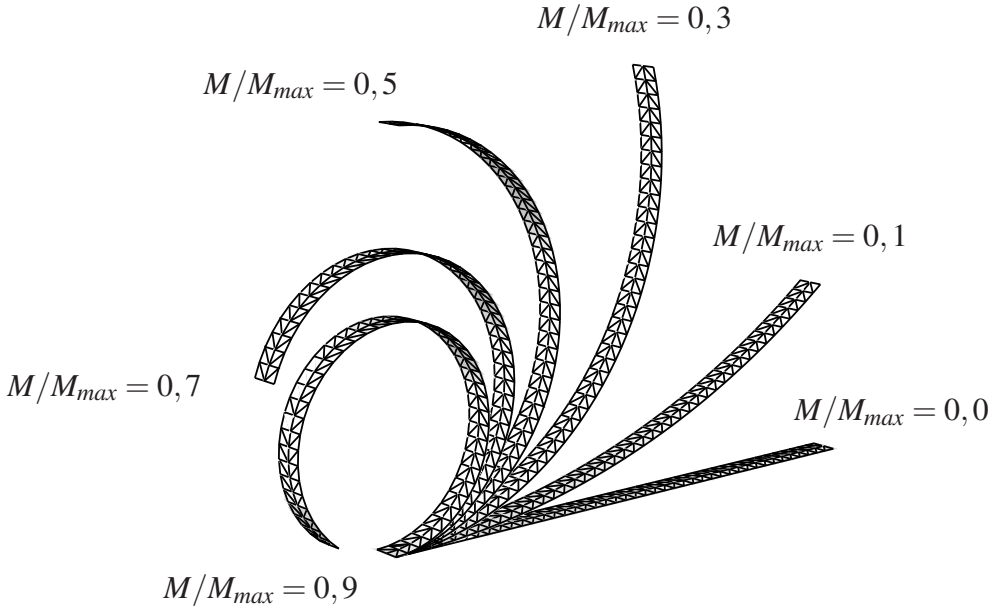


Abb. 6.8: Verformungsfiguren (einrollender Balken)

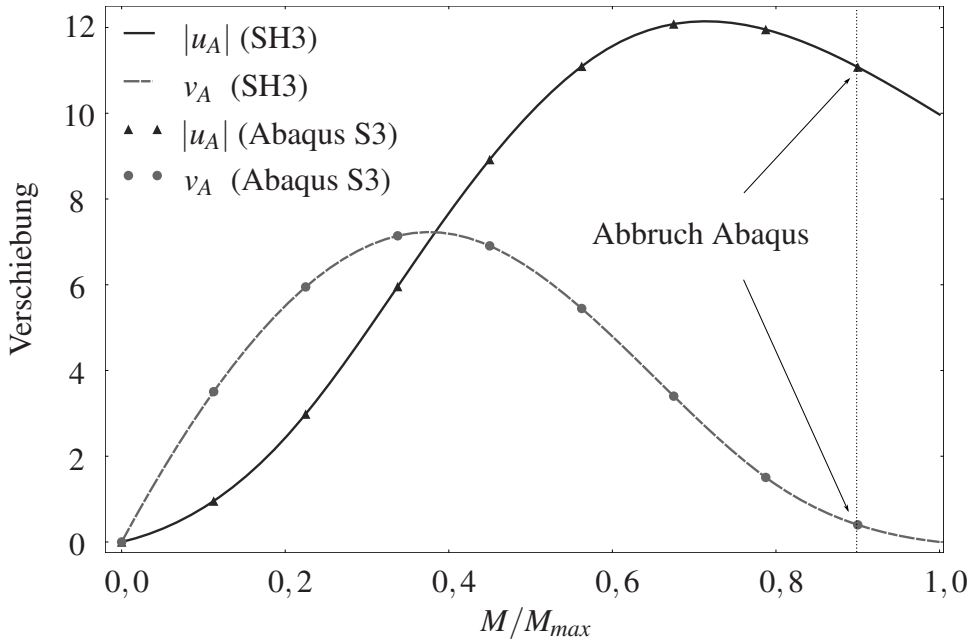


Abb. 6.9: Last-Verschiebungs-Kurven des Punktes A (einrollender Balken)

samtanzahl von 24 Iterationen. Als repräsentative Ergebnisse sind die Verformungen an der Balkenspitze (u, v) in Abb. 6.9 dargestellt. Die Ergebnisse zeigen, dass die vorgeschlagene Formulierung in diesem Beispiel deutlich effektiver und robuster ist.

6.1.6 MSV-Zylinderpanel (Kreuzverbund)

Die Geometrie des MSV-Zylinderpanels ist in Abb. 6.10 dargestellt. Dieses statische nichtlineare Testbeispiel wurde zuerst von Yeom und Lee [127] vorgeschlagen und später von

Kulikov und Plotnikova [61] erweitert. Bei diesem Beispiel liegt das Hauptaugenmerk auf dem geometrisch nichtlinearen Verhalten der Verbundschalenstruktur unter Einwirkung einer konzentrierten, in der Plattenmitte angreifenden Einzellast $f = 10000$.
Die gebogenen Kanten der Struktur sind frei, während die geraden Kanten fest eingespannt sind (siehe Abb. 6.10). Die Schalendicke h beträgt $0,496$. Sie setzt sich aus zwei gleich dicken Schichten zusammen. Die Materialorientierung ist defeniert durch die α_1-Richtung entsprechend Abb. 6.10. Yeom and Lee berücksichtigen in [127] einen Kreuzverbund mit einem Schichtaufbau von [45/-45]. Kulikov und Plotnikova erweiterten in [61] das Testbeispiel und untersuchen zusätzlich zwei weitere Schichtsequenzen: [75/-75] und [15/-15]. Die Materialeigenschaften der UD-Schichten sind in Tab. 6.5 dargestellt. Die Ergebnisse von von Yeom und Lee [127] basieren auf einem biquadratischen (9-Knoten)-Schalenelement, während Kulikov und Plotnikova [61] ein bilineares (4-Knoten)-Schalenelement verwenden. Die resultierenden Last-Verschiebungs-Kurven der Lastan-

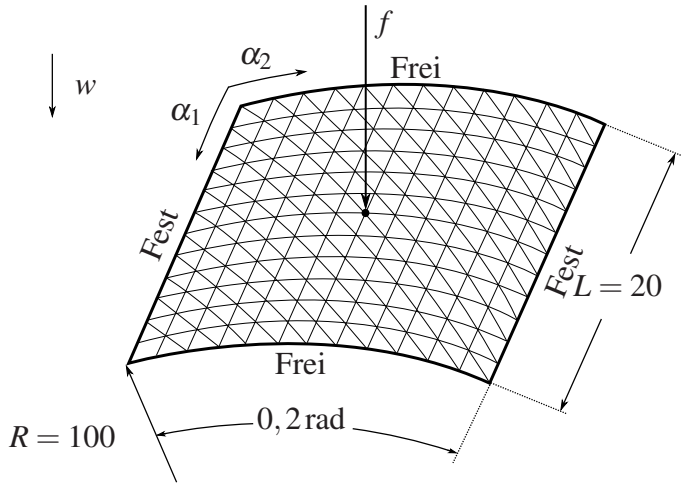


Abb. 6.10: Geometrie des MSV-Zylinderpanels (Kreuzverbund)

Tab. 6.5: Materialeigenschaften des MSV-Zylinderpanels

Y_{11}	Y_{22}	ν_{12}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
$4{,}785 \cdot 10^6$	$1{,}595 \cdot 10^6$	0,25	$0{,}64 \cdot 10^6$	$0{,}957 \cdot 10^6$	$0{,}957 \cdot 10^6$

griffspunkte aller berücksichtigten Schichtverbände sind in Abb. 6.11 dargestellt. Die mit der vorgeschlagenen Formulierung berechneten Verschiebungen zeigen eine sehr hohe Übereinstimmung mit den Referenzwerten (siehe Abb. 6.11).

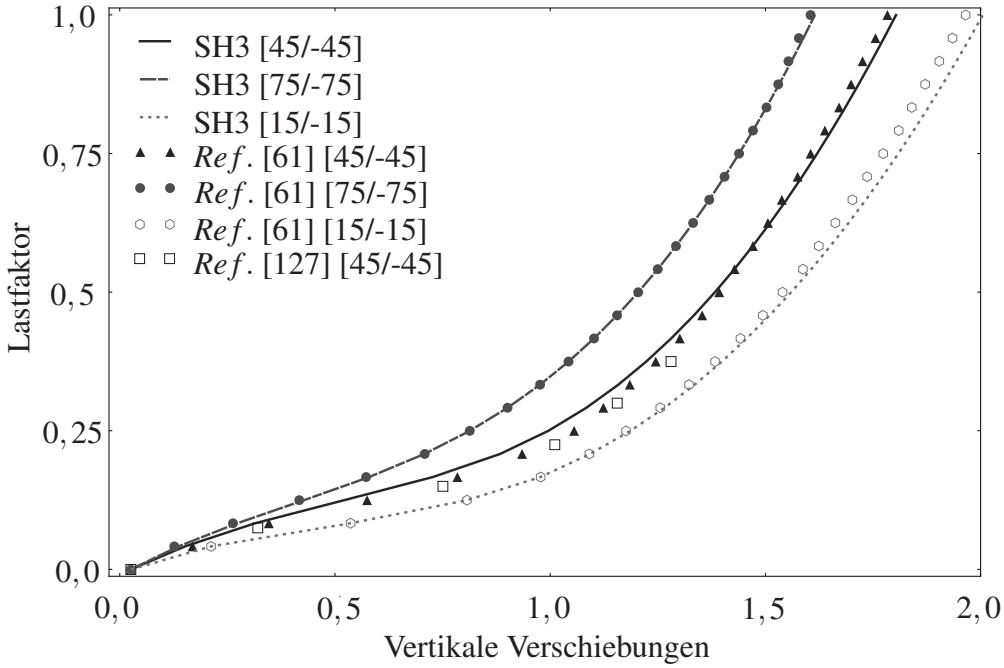


Abb. 6.11: Last-Verschiebungs-Kurven des MSV-Zylinderpanels - Testbeispiels

6.1.7 Durchschlagsproblem

Das nächste Beispiel stellt eine Erweiterung des vorangegangenen Beispiels im Bereich sehr großer geometrischer Nichtlinearitäten dar. Das Lastniveau wird im Vergleich zum vorigen Beispiel (siehe Abschnitt 6.1.6) soweit erhöht, dass es zum „Durchschlagen“ der Struktur kommt. Die Geometrie des gebogenen MSV-Streifens mit einer Breite von 1 ist zusammen mit den restlichen Abmessungen in Abb. 6.12 dargestellt. Die Teststruktur wird mit einer im Mittelpunkt angreifenden konzentrierten Einzelkraft $f = 10000$ belastet. Die geometrischen Randbedingungen sind die gleichen wie im vorigen Beispiel (siehe Abschnitt 6.1.6). Die Schalenstruktur besteht aus zwei Schichten mit einem Aufbau von [0/90] und einer 0°-Richtung entlang des Umfangs. Beide Schichten besitzen die gleiche Dicke $h_i = 1$. Die Materialeigenschaften sind in Tab. 6.6 zusammengefasst. Aus Gründen der Symmetrie wird nur ein Viertel der Struktur mit 40 Elementen modelliert. Berechnet wurden die Referenzergebnisse von Li et al. [67] mit einem bilinearen 4-Knoten-Schalenelement (basierend auf dem ANS-Konzept) unter Verwendung einer konsistenten korotierenden Formulierung. Die in Abb. 6.13 dargestellten Last-Verschiebungs-Kurven

Tab. 6.6: Materialeigenschaften des MSV-Bogens

Y_{11}	Y_{22}	ν_{12}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
$25{\cdot}10^6$	$1{\cdot}10^6$	0,3	$0{,}2{\cdot}10^6$	$0{,}5{\cdot}10^6$	$0{,}5{\cdot}10^6$

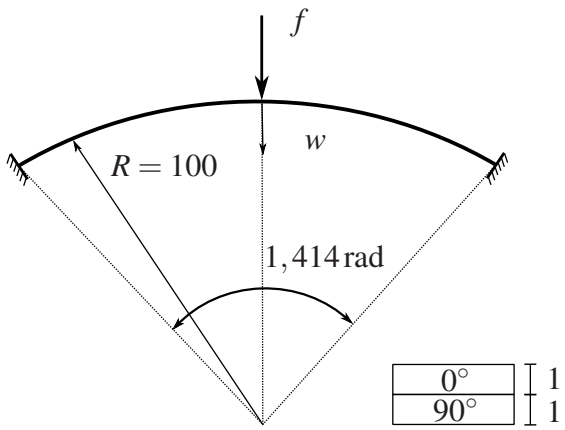


Abb. 6.12: Geometrie des MSV-Bogens

des Lastangriffspunktes zeigen deutlich, dass das Testproblem durch den Durchschlagseffekt (engl. *snap-through effect*) charakterisiert ist. In Abb. 6.13 sind zwei Lastvershiebungskurven unter Verwendung der vorgeschlagenen Elementformulierung dargestellt. Die erste Kurve wird mit Hilfe der kraftgesteuerten dynamischen Relaxation bestimmt. Die Grundidee der dynamischen Relaxation ist es, die statische Analyse als dynamische auszuführen und die dynamischen Effekte mit einer sehr hohen Dämpfung auf ein vernachlässigbares Maß zu reduzieren. Die dynamischen Relaxation ermöglicht es, den Lastverschiebungspfad jenseits des Limitpunktes zu bestimmen. Der komplette Pfad (2. Kurve) kann mit Hilfe einer verschiebungsgesteuerten Newton-Raphson Prozedur bestimmt werden. Beim Vergleich (siehe Abb. 6.13) der Ergebnisse der vorgeschlagenen Formulierung mit der Referenzlösung, zeigen sich für dieses Beispiel nahezu kongruente Ergebnisse.

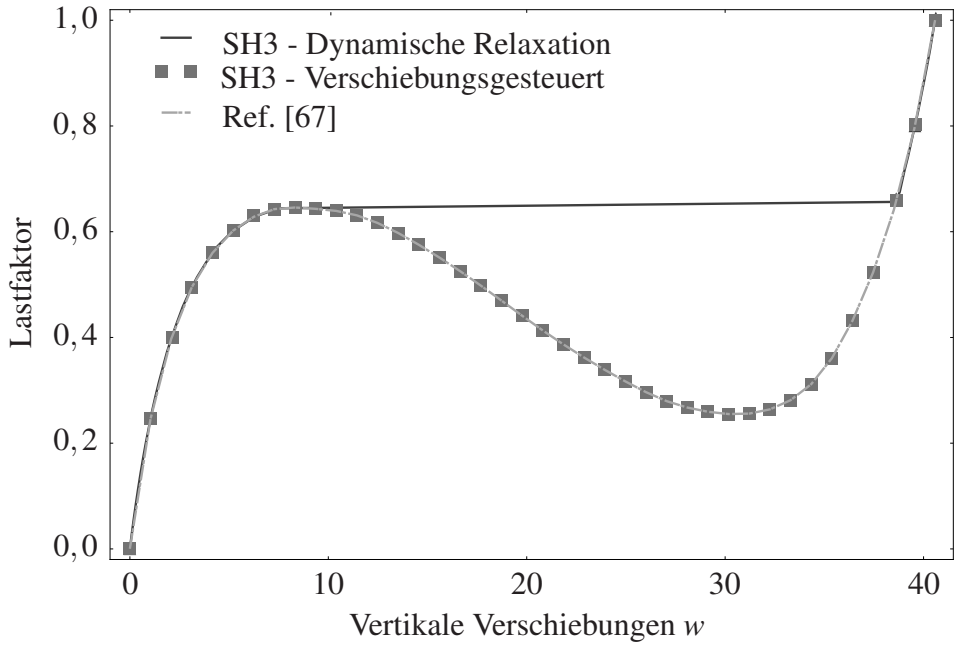


Abb. 6.13: Last-Verschiebungs-Kurven des Lastangriffspunktes (MSV-Bogen)

6.1.8 MSV-Kreisring (Composite slit annular plate)

Das folgende Beispiel stellt ein standardisiertes Benchmark-Beispiel zur Validierung von Elementformulierungen in der geometrisch nichtlinearen Analyse dar. Die initiale Geometrie ist ein an einer Stelle durchgeschnittener Kreisring. Die eine Schnittlinie wird fest eingespannt und die andere mit einer konstanten, in vertikaler Richtung wirkenden, Streckenlast $q = 5$ belastet. Die Geometrie sowie das aus 350 Elementen bestehende FE-Netz sind in Abb. 6.14 dargestellt. Die Materialreferenzrichtung verläuft entlang der Umfangsrichtung des Kreisringes. Berücksichtigt werden zwei unterschiedliche Schichtsequenzen, [0/0/0] und [90/0/90], mit den zugehörigen, in Tab. 6.7 dargestellten Materialeigenschaften. Die einzelnen Schichten besitzen eine Dicke von $0,015$. Das Diagramm in Abb. 6.15 zeigt

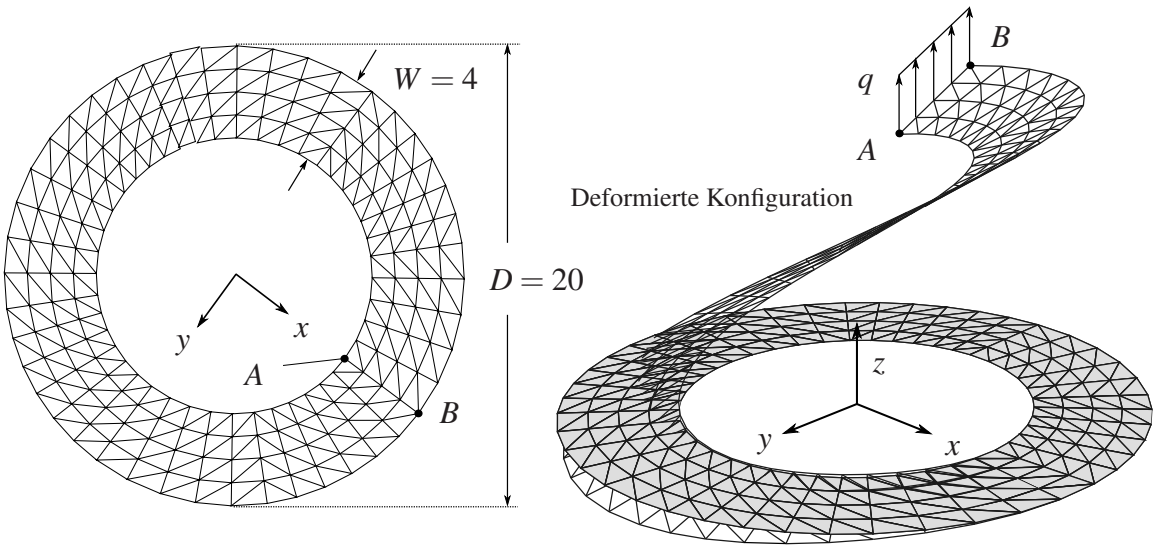


Abb. 6.14: Geometrie des MSV-Kreisringes

Tab. 6.7: Materialeigenschaften des MSV-Kreisringes

Y_{11}	Y_{22}	ν_{12}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
$2{\cdot}10^6$	$0{,}6{\cdot}10^6$	0,3	$0{,}24{\cdot}10^6$	$0{,}3{\cdot}10^6$	$0{,}4{\cdot}10^6$

die vertikalen Verschiebungen der Punkte A und B in Abhängigkeit vom Lastniveau. Die berechneten Verformungen werden mit den von Liang in [68] dargestellten Ergebnissen verglichen. Liang verwendet in [68] ein quadratisches (co-rotational) Dreiecksschalenelement mit einer Mehrschichtformulierung. Abb. 6.15 zeigt eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

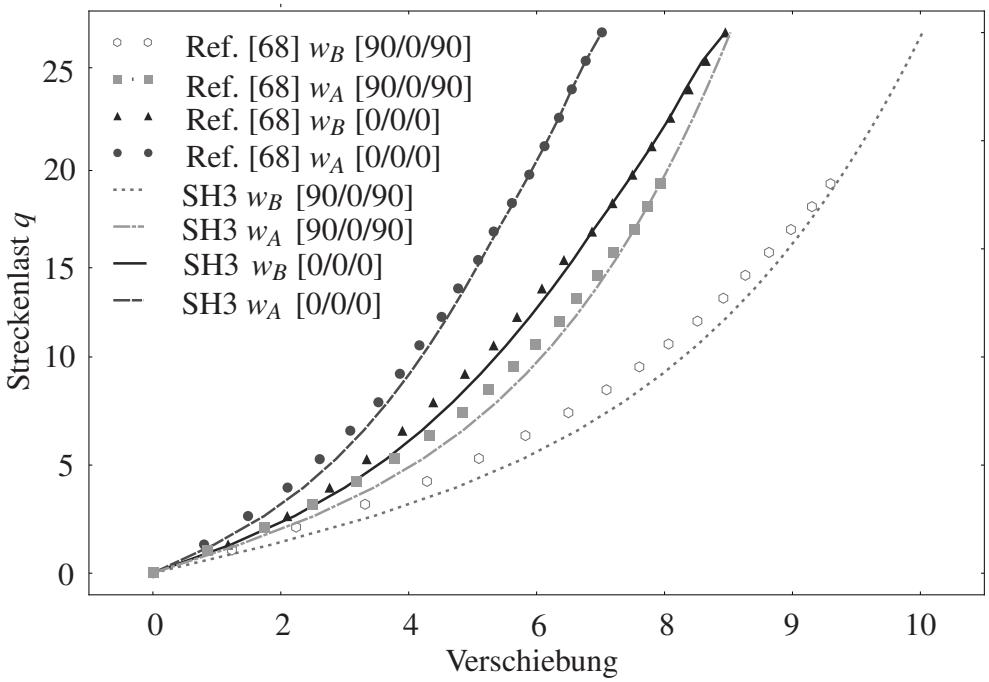


Abb. 6.15: Last-Verschiebungs-Kurve der Punkte A und B des MSV-Kreisringes

6.1.9 Modalanalyse eines CFK-Arm-Segmentes

Das aus 70 Schichten bestehende CFK-Arm-Segment einer Betonpumpe ist in Abb. 6.16 dargestellt. Eine detaillierte Beschreibung der Geometrie sowie der Materialeigenschaften würde an dieser Stelle unverhältnismäßig viel Platz einnehmen, weshalb sie weggelassen wird. Das folgende Beispiel stellt kein klassisches Benchmark-Beispiel zur Beurteilung der Performance der Elementformulierung dar. Vielmehr handelt es sich dabei um eine komplexe Geometrie, anhand derer die vorgeschlagene Formulierung mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden soll. Die experimentelle Modalanalyse des CFK-Armsegments wurde mit einem Laser-Scanning-Vibrometer (Polytech) durchgeführt [128]. Die Scan-Software erstellt hierbei ihr eigenes Netz der Messpunkte über die reale Struktur. Um die Ergebnisse der Punkte vergleichen zu können, müssen die zu vergleichenden Größen entweder interpoliert, oder direkt an den entsprechenden Koordinaten bestimmt werden. Im Folgenden werden die Knotenwerte mit dem geringsten Abstand zu den Messpunkten verwendet. Auf der linken Seite der Abb. 6.17 ist das Netz der Messsoftware dargestellt, und auf der rechten Seite das viel feiner aufgelöste FE-Netz mit den Knoten, die den geringsten Abstand zu den Messpunkten aufweisen. Die gemessenen modalen Daten werden mit Hilfe der Modal Assurance Criteria (MAC)-Werte mit den berechneten Werten verglichen. Der MAC-Wert der i^{ten} numerisch berechneten Mode, $\{\phi_{ci}\}$, und der j^{ten} experimentell

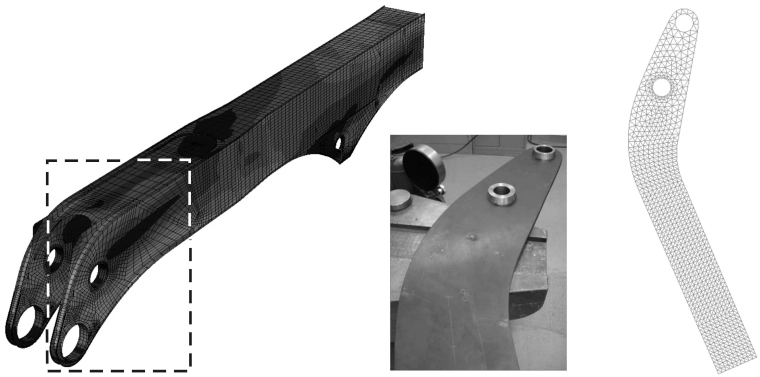


Abb. 6.16: CFK-Komposit-Armsegment einer Betonpumpeb (Quelle: Zehn und Marinkovic [128])

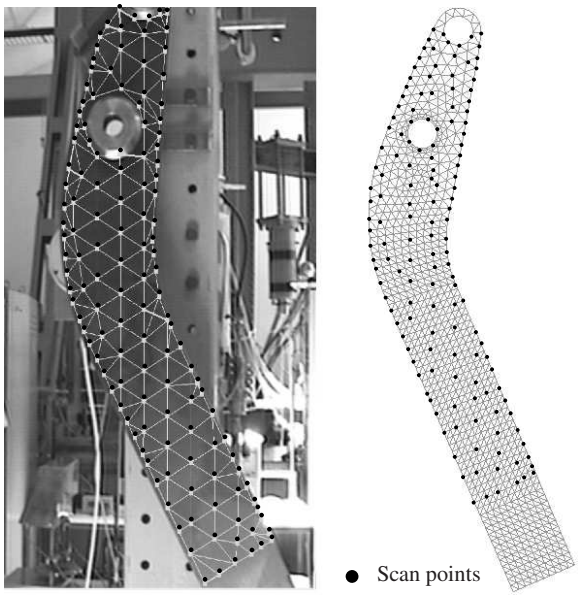


Abb. 6.17: CFK-Komposit-Armsegment: Reale Struktur mit den Scanning-Punkten und dem FE-Netz mit den zugehörigen Knoten (Quelle: Zehn und Marinkovic [128])

bestimmten Mode, $\{\phi_{ej}\}$, berechnet sich wie folgt:

$$\mathrm{MAC} = \frac{\left(\{\phi_{ci}\}^T\{\phi_{ej}\}\right)^2}{\left(\{\phi_{ci}\}^T\{\phi_{ci}\}\right)\left(\{\phi_{ej}\}^T\{\phi_{ej}\}\right)} \tag{6.1}$$

Die Ergebnisse für die ersten Moden sind in Tab. 6.8 zusammengefasst. Im Experiment wurde die Struktur punktuell mit einem Shaker normal zum Armsegment angeregt. Mit solch einem Eingangssignal können in der Ebene liegende Moden nicht angeregt werden. Aus diesen Gründen konnte im Experiment keine Moden, gefunden werden, die den numerisch berechneten 3. und 5. Moden zugehören. Die in Tab. 6.8 dargestellten MAC-Werte zeigen, außer bei einigen höheren Moden, eine deutliche Übereinstimmung der Moden.

Tab. 6.8: Modal Assurance Criterion (MAC) Ergebnise

		Messung				
FEM Berechnung	MACs	Mode 1 7,9 Hz	Mode 2 35 Hz	Mode 3 97 Hz	Mode 4 183 Hz	Mode 5 213 Hz
	Mode 1 7,3 Hz	**0,99**	0,16	0,22	0,02	0,01
	Mode 2 35 Hz	0,19	**0,98**	0,05	0,20	0,05
	Mode 3 69 Hz	0,06	0,03	0,68	0,01	0,07
	Mode 4 92 Hz	0,17	0,05	**0,95**	0,01	0,09
	Mode 5 94 Hz	0,08	0,005	0,01	0,004	0,01
	Mode 6 174 Hz	0,02	0,24	0,05	**0,94**	0,02
	Mode 7 218 Hz	0,01	0,004	0,17	0,01	**0,92**

6.2 Piezoelektrische Beispiele

In den folgenden Abschnitten wird das entwickelte Element für eine Aktuator- und Sensormodellierung in der geometrisch linearen und nichtlinearen Analyse untersucht. In der linearen Statik und in der linearen Dynamik werden die Steifigkeit, die piezoelektrischen Lasten (Aktuator) sowie auch die Sensorspannungen bezogen auf die unverformten Ausgangsgeometrie bestimmt. Berücksichtigt werden in den anschließenden geometrisch nichtlinearen Analysen die Abhängigkeit der strukturellen Steifigkeit von den Verschiebungen und der nicht richtungstreue Charakter der piezoelektrischen Lasten (Folgelasten) (siehe Abschnitt 5.12)).

6.2.1 Aktiver Balken (Aktuator)

In Abb. 6.18 ist ein fest eingespannter Balken mit einem an den Außenflächen gegenüber angeordneten Paar Piezokeramiken dargestellt. Die Balkengeometrie sowie die Abmaße können Abb. 6.18 entnommen werden. Das passive Trägermaterial des piezoaktiven Balkens besteht aus Aluminium, während die Piezokeramiken aus PIC151 gefertigt sind. Die Aluminiumlegierung wird als isotrop angenommen. Sie besitzt ein E-Modul von

$Y = 70,3 \cdot 10^9$ und eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,345$. Das piezoelektrische Material PIC151 wird entsprechend Nestorovic et al. [85] direkt über die Hooksche Matrix (mit einer Materialvorzugsrichtung entlang der x-Achse) definiert:

$$[C_{PIC}] = \begin{bmatrix} 1,15 \cdot 10^5 & 7,06 \cdot 10^4 & 7,23 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 7,06 \cdot 10^4 & 1,15 \cdot 10^5 & 7,23 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 7,23 \cdot 10^4 & 7,23 \cdot 10^4 & 1,09 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,29 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,29 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,22 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Die piezoelektrischen Koppeleigenschaften des PIC151-Keramikmaterials werden im Aktuatorfall durch die piezoelektrischen Konstanten $e_{31} = e_{32} = 9,6$ beschrieben. Die Piezokeramiken sind in Dickenrichtung entgegengesetzt polarisiert und werden mit einer konstanten elektrischen Spannung von 100 belastet. Infolge der entgegengesetzten Polarisierung wird eine der beiden Piezokeramiken gestreckt, während sich die andere zusammenzieht. Die entgegengesetzten Dehnungen induzieren so ein an den Piezokeramiken gleichmäßig verteiltes Biegemoment. Die Applikation zweier symmetrisch gegenüberliegender Piezokeramiken erhöht somit die Aktuatorwirkung. Die aus den induzierten Biegemomenten resultierenden Verformungen werden mit der vorgeschlagenen Formulierung unter Verwendung von 180 Elementen berechnet. Der Betrag der vertikalen Verschiebung an der Balkenspitze beträgt an Punkt A $w_A = 6,03 \cdot 10^{-4}$. Nestorovic et al. berechnen in [85], unter Verwendung eines 9-Knoten biquadratischen Schalenelements, eine vertikale Verschiebung des Punktes A von $w_{A,ref} = 6,06 \cdot 10^{-4}$. Die mit der Referenzlösung ($w_{A,ref}$) normierten transversalen Verschiebungen entlang der Mittellinie des Balkens sind in Abb. 6.19 dargestellt. Die Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der vorgeschlagenen Formulierung mit den Ergebnissen von Nestorovic et al. in [85].

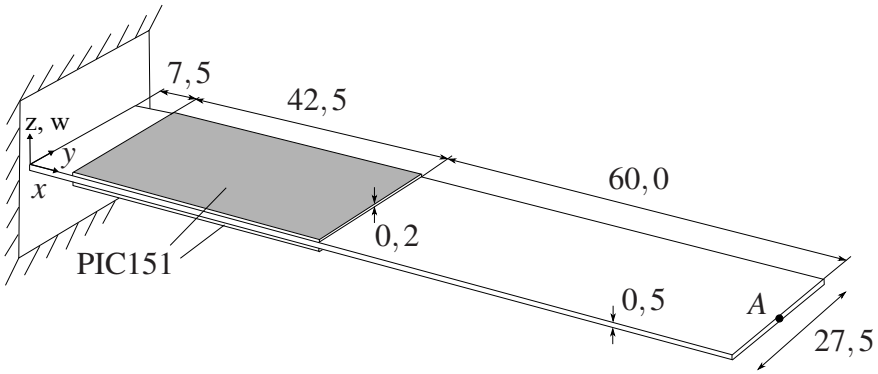


Abb. 6.18: Geometrie des piezoelektrischen Balkens

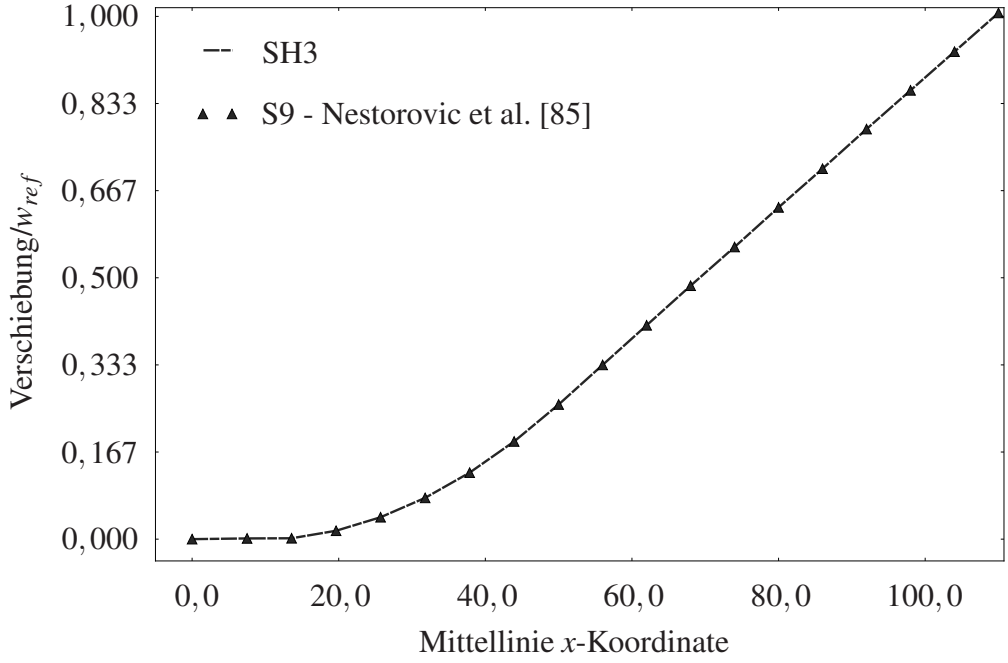


Abb. 6.19: Piezoaktiver Balken - vertikale Verschiebungen entlang der Mittellinie

6.2.2 Aktiver Balken mit zwei Aktuatorpaaren

Im folgenden Beispiel werden die mit der vorgeschlagenen Formulierung berechneten Verschiebungen eines Aktuator-Beispiels mit den experimentell gewonnenen Werten von Gupa et al. [48] verglichen. Die Teststruktur ähnelt der des vorigen Beispiels, jedoch sind diesmal zwei entgegengesetzt polarisierte Piezokeramikpaare auf der Trägerstruktur (siehe Abb. 6.20) appliziert. Die Balkengeometrie, die Lage der Piezokeramiken sowie die Dicke der Piezokeramiken und der Aluminiumträgerstruktur sind in der Abb. 6.20 dargestellt. Die Eigenschaften des passiven Trägermaterials (Aluminium) sowie das der Piezokeramiken (PTZ-3) sind in der Tab. 6.9 zusammengefasst. Die in Abb. 6.20 dargestellte Struktur wird mit 280 Elementen vernetzt und in der linearen statischen Analyse untersucht. Die Piezokeramikpaare werden jeweils mit einer elektrischen Spannung mit einem Betrag von 100, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen, belastet. Aufgrund der Aktuatorwirkung

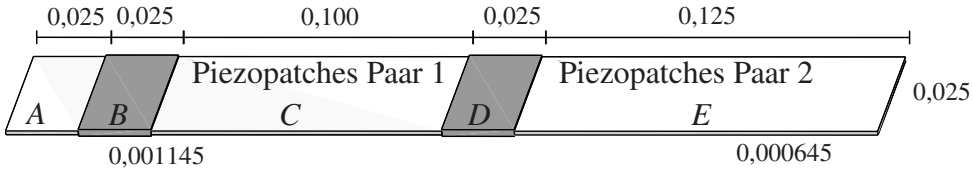


Abb. 6.20: Geometrie des aktiven Balkens mit zwei Paar Piezopatches

treten gleichmäßig verteilte Biegemomente, mit unterschiedlichem Vorzeichen, an den jeweiligen Keramikpaarrändern auf. Infolge der Keramikkonstellation wird der Balken durch reine Biegung belastet. Da die Piezokeramiken baugleich sind (siehe Abb. 6.20) und mit

Tab. 6.9: Materialeigenschaften des Balkens mit zwei Aktuatorpaaren

	Aluminium	PTZ-4
Elastische Eigenschaften		
Y_{11}	$63,8 \cdot 10^9$	$47,6 \cdot 10^9$
Y_{22}	$63,8 \cdot 10^9$	$47,6 \cdot 10^9$
ν_{12}	$0,345$	$0,300$
G_{12}	$23,7 \cdot 10^9$	$18,3 \cdot 10^9$
G_{13}	$23,7 \cdot 10^9$	$18,3 \cdot 10^9$
G_{23}	$23,7 \cdot 10^9$	$18,3 \cdot 10^9$
Piezoelektrische Konstanten		
$e_{31} = e_{32}$		18,02

einer gleich hohen Spannung beaufschlagt werden, sind auch die Biegeverformungen in den Bereichen B und D in entgegengesetzter Richtung gleich (siehe Abb 6.21). Die in Abb. 6.21 dargestellten, berechneten vertikalen Verschiebungen der Balkenmittelline zeigen deutlich, dass die Bereiche A und E, wie erwartet, unverformt bleiben und dass sich der Bereich E als Ganzes vertikal verschiebt. Zusätzlich zu den berechneten Verschiebungen sind von Gupta et al. [48] experimentell gewonnene Ergebnisse dieses Lastfalls in Abb. 6.21 dargestellt. Die experimentellen Ergebnisse von Gupta et al. [48] weisen eine gewisse Streuung auf, welche nach Auffassung des Autors auf Messfehler beziehungsweise Messungenauigkeiten zurückzuführen sind. Abgesehen von der Streuung zeigen die numerisch und experimentell gewonnenen Ergebnisse eine gute Übereinstimmung.

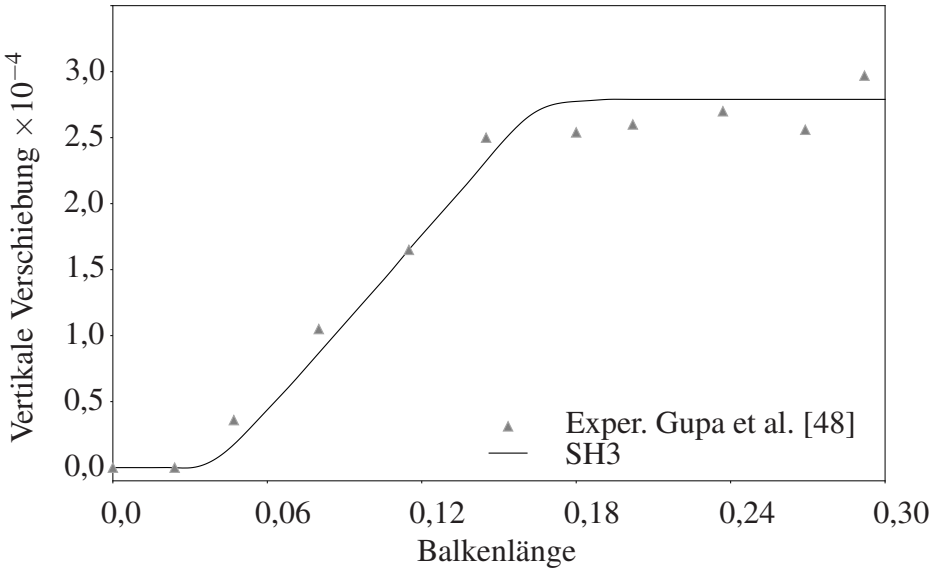


Abb. 6.21: Normierte vertikale Verschiebung der Mittellinie

6.2.3 Bimorph-Beam-Analyse

Der Bimorph-Beam stellt ein Standartbenchmark-Beispiel zur Valedierung von FE-Formulierungen zur Berechnung piezoelektrischer Strukturen dar. Es wurde bereits von einigen Autoren, wie etwa Hwang und Park [50], Chee et al. [30] sowie Phung-Van et al. [91], detailliert beschrieben. Die Geometrie des aus zwei uniaxialen PVDF-Schichten (entgegengesetzt polarisiert) bestehenden Balkens ist zusammen mit den Materialeigenschaften in Abb. 6.22 dargestellt. Die Länge des Balkens beträgt $l = 0,1$, die Dicke $h = 0,001$ und die Breite $b = 0,005$. Zunächst wird der Bimorph-Beam als Aktuator ausgeführt und un-

PVDF
Elastische Eigenschaften
$Y = 2,0 \cdot 10^9$
$\nu = 0,29$
Piezoelektrische Konstanten
$e_{31} = e_{32} = 0,046$
Dielektrische Konstante
$d_{31} = 0,01062 \cdot 10^{-8}$

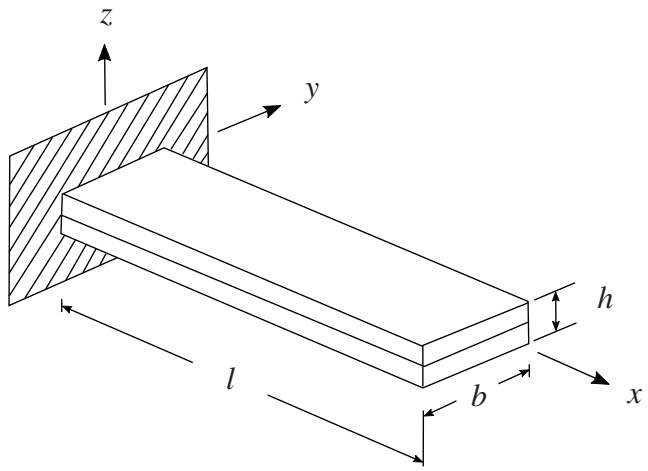


Abb. 6.22: Piezoelektrischer Bimorph-Beam - Geometrie

ter Einwirkung einer vorgegebenen Potentialdifferenz ϕ in einer statisch linearen Analyse untersucht. Eine analytische Lösung der Durchbiegung der Balkenmittellinie $w(x)$ kann mit Hilfe der konstitutiven Gleichungen der Piezoelektrik und unter den Annahmen des Bernoulli-Balkens erhalten werden:

$$w(x) = \frac{3}{2}\frac{e_{31}}{Yh^2}\phi x^2 \tag{6.3}$$

Für eine Potentialdifferenz von $\phi = 1$ resultiert aus Gleichung (6.3) eine vertikale Verschiebung der Balkenspitze von $3,45 \cdot 10^{-7}$. Dieser Wert wird mit der vorgeschlagenen Formulierung bereits mit acht Elementen exakt erreicht. Die mit dem Wert $3,45 \cdot 10^{-7}$ normierten vertikalen Verschiebungen entlang der Mittellinie sind in Abb. 6.23 dargestellt. Sie zeigen eine sehr hohe Übereinstimmung mit der analytischen Lösung entsprechend der Gleichung (6.3).

Im nächsten Lastfall wird der Bimorph Beam als Sensor ausgeführt und unter Einwirkung einer vorgegebenen Verschiebung des freien Ende von $w^* = 0,01$ analysiert. Die induzierten Verformungen führen, infolge des direkten Piezoeffekts, zu elektrischen Spannungen zwischen den Oberflächen der Sensoren. Der berechnete Verlauf der Sensorspannung entlang der Balkenlänge ist abhängig von der Sensoren-Diskretisierung der Struktur. Jeder

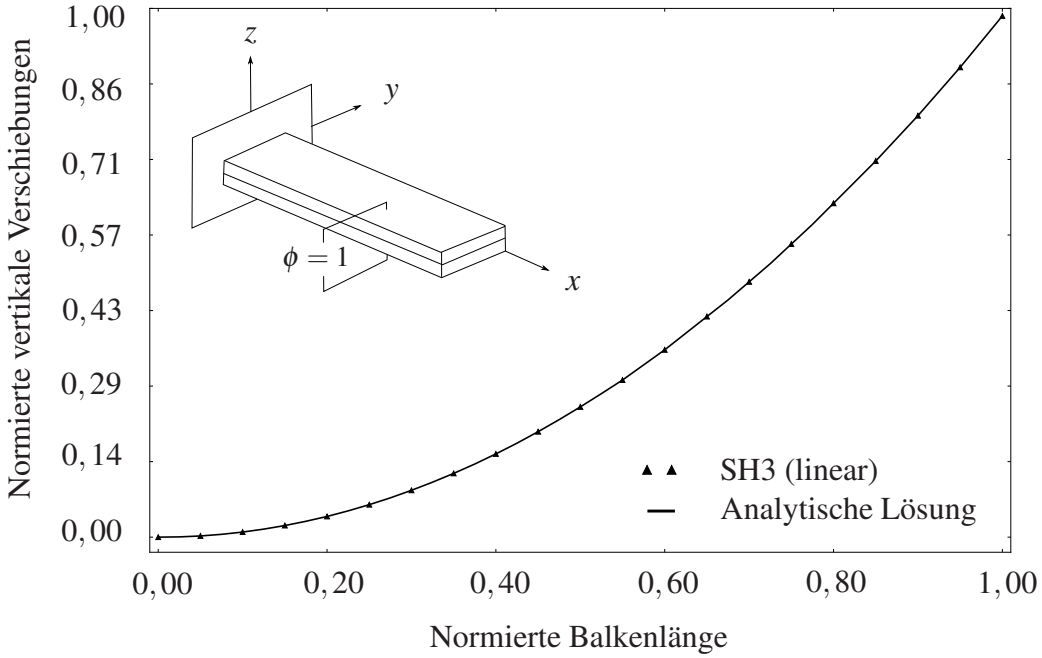


Abb. 6.23: Vertikale Verschiebungen unter Einwirkung einer Sensorspannung $\phi = 1$

Sensor liefert einen elektrischen Spannungswert, der aus durchschnittlichen Verzerrung des zugehörigen Anteils der Balkenstruktur resultiert. Die vorgegebene Verschiebung w^* bewirkt einen linearen Verlauf des Biegemoments, infolge dessen ein gradueller Anstieg der Sensorspannungen entlang der Länge des Balkens zu erwarten ist. Gleichmäßig über die Länge verteilte äquidistante Sensoren müssen somit zu einer Treppenfunktion im Antwortsignal führen, welche sich mit einer feiner werdenden Sensor-Diskretisierung einer Graden annähert. Die zu erwartende Treppenfunktion der Sensorspannungen wird mit zwei unterschiedlichen Sensor-Diskretisierungen (6 und 20 Sensoren entlang der Länge) verifiziert. Die in Abb. 6.24 dargestellten Ergebnisse zeigen, dass der Verlauf der Sensorspannungen adäquat approximiert wird.

Im Folgenden wird der Einfluss der Netzverzerrung auf die berechnete Sensorspannung in der linearen Statik untersucht. Hierfür wird der der Bimorph-Beam mit zwei in vertikaler Richtung wirkenden Einzellasten $f = 0,1$ belastet und die resultierende Sensorspannung unter Verwendung von 8 Elementen (ein Sensor-Diskretisierung) berechnet. Für das unverzerrte Netz resultiert ein Wert von $\phi_0 = 127,1$. Dieser Wert zeigt eine gute Übereinstimmung mit der von Nestorovic et al. in [84], unter Verwendung eines 9-Knoten-Schalenelements und vier Elementen, berechneten Sensorspannung von $\phi = 129,9$. Das Netz wird durch den in Abb. 6.25 dargestellten Netz-Verzerrungsparameter e modifiziert und die zugehörigen Sensorspannungen mit dem Ergebnis des unverzerrten Netzes normiert. Die in Abb. 6.25 dargestellten Ergebnisse zeigen, dass - selbst für das sehr grob gewählte Netz - ein sehr gutes Approximationsverhalten auch bei stärker verzerrten Ele-

menten (maximale Abweichung $< 1\%$) erzielt wird.

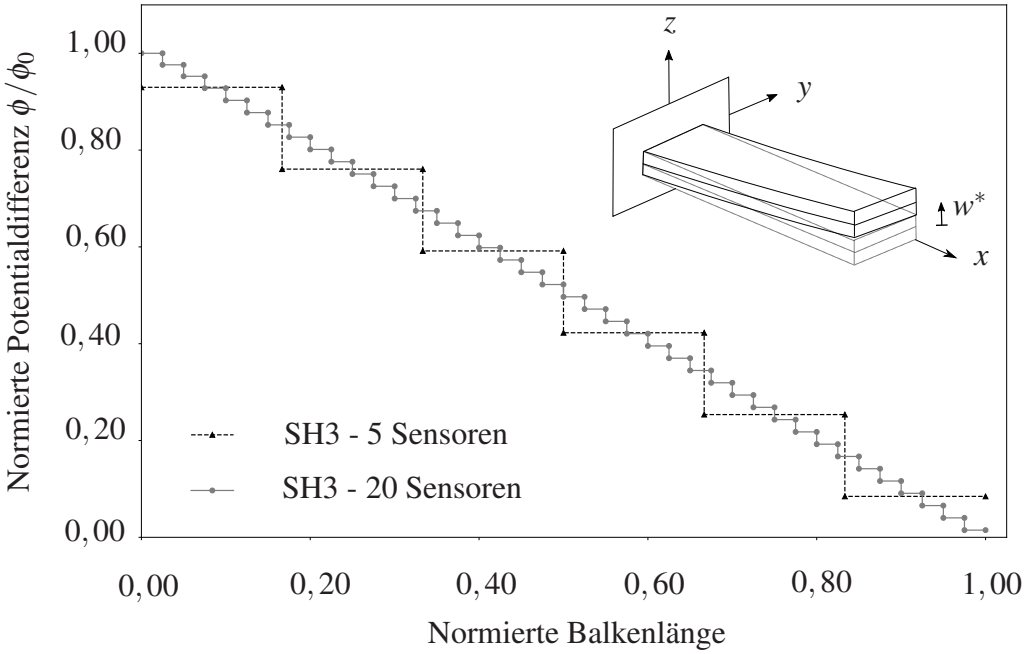


Abb. 6.24: Sensorspannungen infolge vorgegebener Verschiebung $w^* = 0,01$

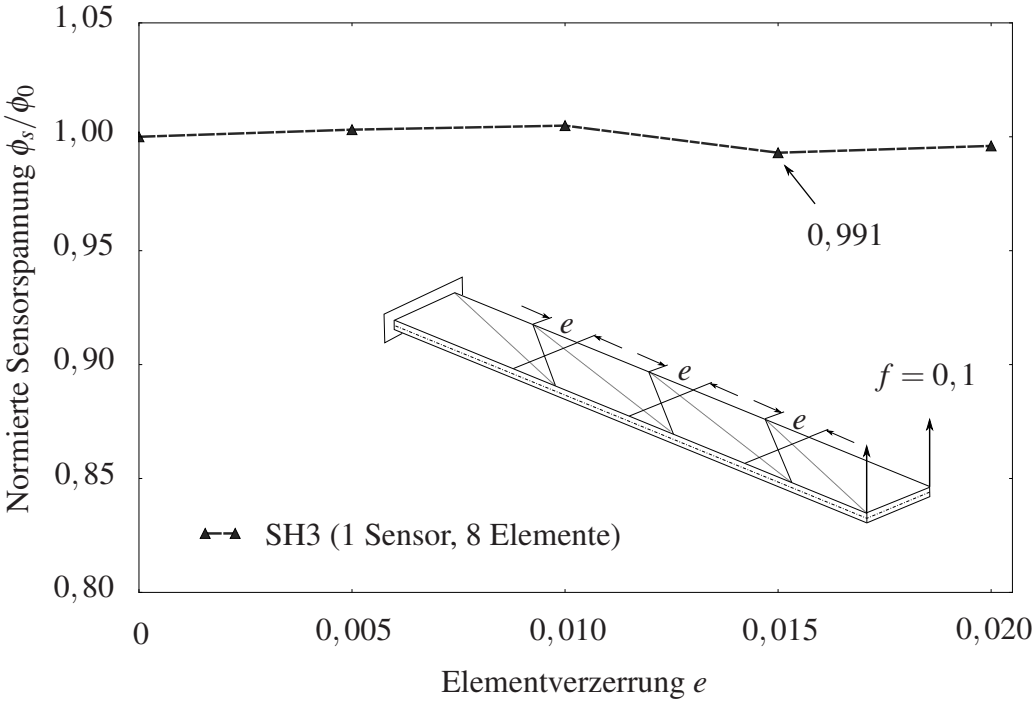


Abb. 6.25: Sensorspannungen in Abhängigkeit von der Netzverzerrung e

6.2.4 Sensor-Bogen

Das folgende statisch lineare Sensorbeispiel wurde ursprünglich von Saravanos [106] vorgeschlagen und anschließend von Balamurugan und Narayanan [13] weiter untersucht. Die geometrischen Abmaße sowie der Schichtaufbau (definiert bezüglich der Umfangsrichtung) der halbkreisförmigen komposit-zylindrischen Schale sind in Abb. 6.26 dargestellt. Der MSV setzt sich aus acht Graphit-Epoxy-Trägerschichten und zwei auf den beiden Außenflächen aufgebrachten PZT-4 Piezoschichten zusammen. Die Materialeigenschaften beider Materialien sind in Tab. 6.10 zusammengefasst. Die Graphit-Epoxy-Schichten

Tab. 6.10: Materialeigenschaften des Sensorbogens

	Graphit-Epoxy	PTZ-4
Elastische Eigenschaften		
Y_{11}	$1,324 \cdot 10^{11}$	$8,13 \cdot 10^{10}$
Y_{22}	$1,08 \cdot 10^{10}$	$8,13 \cdot 10^{10}$
ν_{12}	$0,24$	$0,33$
G_{12}	$5,6 \cdot 10^{9}$	$3,06 \cdot 10^{10}$
G_{13}	$5,6 \cdot 10^{9}$	$2,56 \cdot 10^{10}$
G_{23}	$6,6 \cdot 10^{9}$	$2,56 \cdot 10^{10}$
Piezoelektrische Konstanten		
$e_{31} = e_{32}$		14,8
Dielektrische Konstante		
d_{31}		$1,1505 \cdot 10^{-8}$

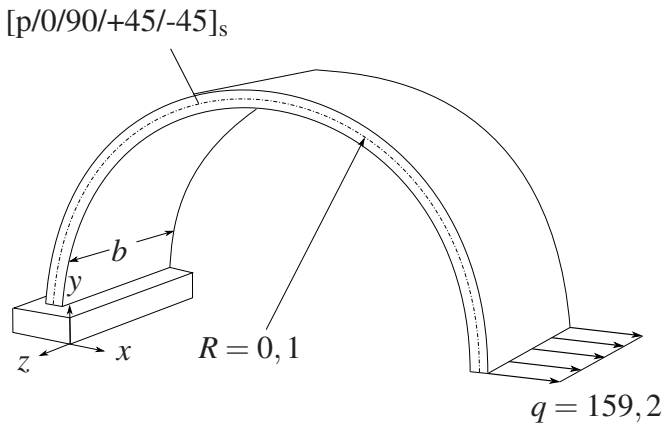


Abb. 6.26: Geometrie Sensorbogens

besitzen eine Dicke von $1,2 \cdot 10^{-3}$. Mit den Piezoschichtendicken von $2,4 \cdot 10^{-3}$ ergibt sich eine Gesamtdicke der Schale von $0,0144$. Die linke Seite des Bogen ist fest ein-

gespannt, während die rechte Seite mit einer konstanten, in x-Richtung wirkenden Streckenlast $q = 159,2$ (siehe Abb. 6.26) belastet wird. Die Struktur wird auf Grundlage einer durchgeführten Konvergenzanalyse für die weiteren Berechnungen mit 100 Elementen diskretisiert. Die aus den äußeren mechanischen Lasten resultierenden Deformationen verursachen eine elektrische Spannung in den Piezoschichten. Infolge der unterschiedlichen Deformationen der oberen und unteren Piezoschicht treten auch unterschiedliche elektrische Spannungen auf. Aus Gründen der direkten Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen von Saravanos [106] wie von Balamurugan und Narayanan [13] werden die Sensorspannung der oberen Piezoschicht ausgewertet und auf dieselbe Art wie den genannten Autoren normiert ($\phi_s \cdot 122 \cdot 10^{-10}/h$). Saravanos [106] Ergebnisse (siehe Abb. 6.27) basieren auf einer infinitesimalen Sensorlänge in Umfangsrichtung, wohingegen Balamurugan und Narayanan [13] die Piezoschichten mit 15 gleichmäßig über den gesamten Umfang verteilten Sensoren diskretisieren. Die Ergebnisse von Balamurugan und Narayanan [13] basieren auf einer degenerierten 9-Knoten-Schalenformulierung mit einem quadratischen Verlauf des elektrischen Potential in Dickenrichtung. Die mit der vorgeschlagenen Formulierung berechneten Sensorspannungen der oberen Piezoschicht unter Verwendung der 15-Sensoren-Diskretisierung sind zusammen mit den Referenzergebnissen [13] und [106] in Abb. 6.27 dargestellt. Betrachtet man die in Abb. 6.27 dargestellten Ergebnisse, wird deutlich, dass

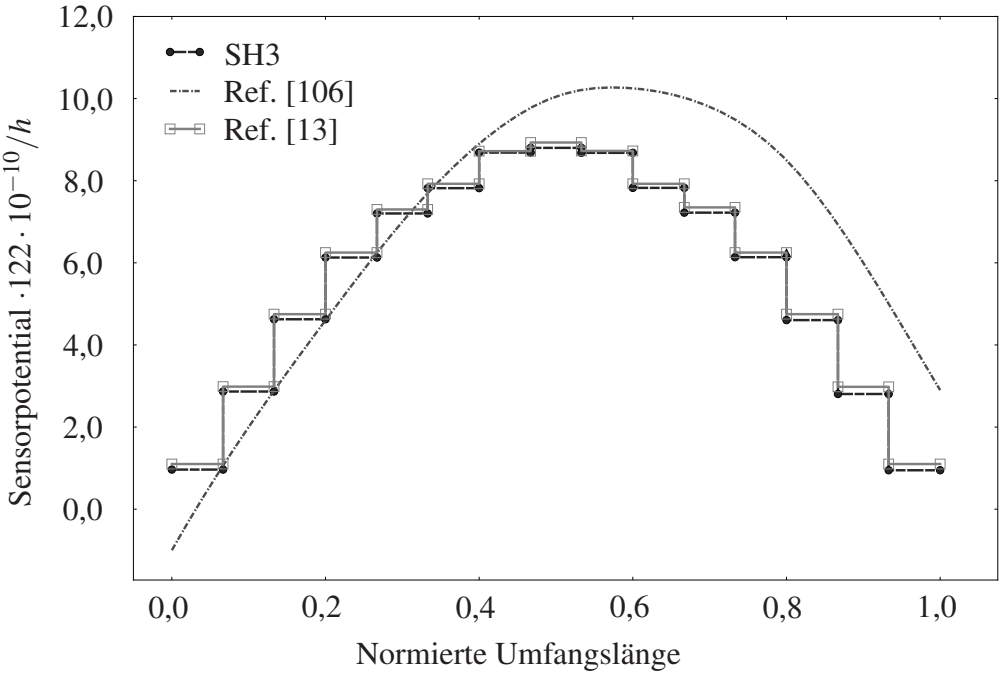


Abb. 6.27: Verteilung der Sensorspannung (Sensor-Bogen)

die theoretischen Ergebnisse von Saravanos [106] eine andere Tendenz aufweisen - sie sind nicht im gleichen Maße symmetrisch zur Mitte der Umgangsrichtung (0,5) wie die anderen beiden, und zudem näheren sich die Sensorspannungen am freien Ende nicht dem

Wert 0. An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich mit der vorgeschlagenen Formulierung, bei einer unendlichen Anzahl an Sensorelementen über den Umfang, am freien Ende eine Sensorspannung von 0 einstellen würde, da die Schubverzerrungen bei der Berechnung der Sensorspannungen vernachlässigt werden (siehe Abschnitt 3.2). Balamurugan und Narayanan koppeln in ihrer Formulierung [13] das gesamte mechanische Verzerrungsfeld - einschließlich der transversalen Schubverzerrungen - mit dem elektrischen Feld, sodass ein Wert von ungleich null als Grenzwert zu erwarten wäre. Aus dem Vergleich der berechneten Ergebnisse mit denen von Balamurugan und Narayanan [13] wird jedoch ersichtlich (siehe Abb. 6.27), dass der Einfluss der Schubverzerrungen für dieses Beispiel als vernachlässigbar angenommen werden kann. Folglich ist auch mit dem Element von Balamurugan und Narayanan [13] annährend ein Grenzwert (bei unendlich vielen Sensoren) von null am freien Ende zu rechnen. Ein direkter Vergleich mit den Ergebnissen von Saravanos ist somit schwierig. Die Ergebnisse der vorgeschlagenen Formulierung zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit denen von Balamurugan und Narayanan [13].

6.2.5 Piezoelektrische Aktuator-Platte

Die in Abb. 6.28 dargestellte quadratische piezoelektrische Platte (Seitenlänge $a = 0,4$) wird mit einer vorgegebenen Potentialdifferenz von $\phi = 150$ pro Piezoschicht belastet und unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte untersucht. Die Komposit-Platte besteht aus drei Schichten, zwei äußere entgegengesetzt polarisierte PZT-G1195N Piezoschichten und einer T300/976-Trägerschicht. Die PZT-Schichten besitzen eine Dicke von 0,00015 während die Trägerschicht 0,0002 dick ist. Die Materialeigenschaften der Kompositschicht bezogen auf die globale x-Achse, sind in Tab. 6.11 dargestellt. Zwei unterschiedliche Randbedingungen werden berücksichtigt: I) feste Einspannung und II) gelenkige Lagerung (siehe Abb. 6.28). Auf Basis einer vorangegangenen Konvergenzanalyse wird ein FE-Netz mit 128 Elementen für die weiteren Berechnungen ausgewählt. Beide Lastfälle wurden bereits von Marinkovic et al. in [77] mit Hilfe eines degenerierten 9-Knoten-Schalenelementes und der Updated-Lagrange-Formulierung untersucht. Als repräsentative Auswertepositionen der vertikalen Verschiebungen werden die Punkte A und B (siehe Abb. 6.28) ausgewählt. Die zugehörigen Last-Verschiebungs-Kurven sind in Abb. 6.29 und 6.30 dargestellt. Zusätzlich sind in Tab. 6.12 die Ergebnisse der linearen und geometrisch nichtlinearen Analyse für die volle Last (Lastfaktor = 1) zusammengefasst. Die mit der vorgeschlagenen Formulierung berechneten Verschiebungen zeigen (siehe Tab. 6.12) eine sehr gute Übereinstimmung mit denen von Marinkovic et al. [77]. Die Differenzen im Fall I) sind kleiner als $0,1\,\%$ und im Lastfall II) kleiner als $0,3\,\%$. Offensichtlich sind die geometrisch nichtlinearen Effekte im Fall I) deutlich weniger ausgeprägt als im Fall II). Die

Tab. 6.11: Materialeigenschaften der Aktuatorplatte

	T300/976	PTZ-G1195
Elastische Eigenschaften		
Y_{11}	$150,0 \cdot 10^9$	$63,0 \cdot 10^9$
Y_{22}	$9,0 \cdot 10^9$	$63,0 \cdot 10^9$
Y_{33}	$9,0 \cdot 10^9$	$63,0 \cdot 10^9$
ν_{12}	$0,3$	$0,3$
ν_{13}	$0,3$	$0,3$
ν_{23}	$0,3$	$0,3$
Piezoelektrische Konstanten		
$e_{31} = e_{32}$		22.86

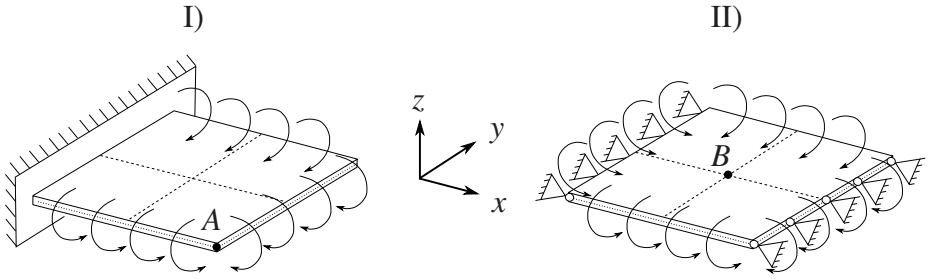


Abb. 6.28: Initiale Geometrie und Randbedingungen für Fall I und II

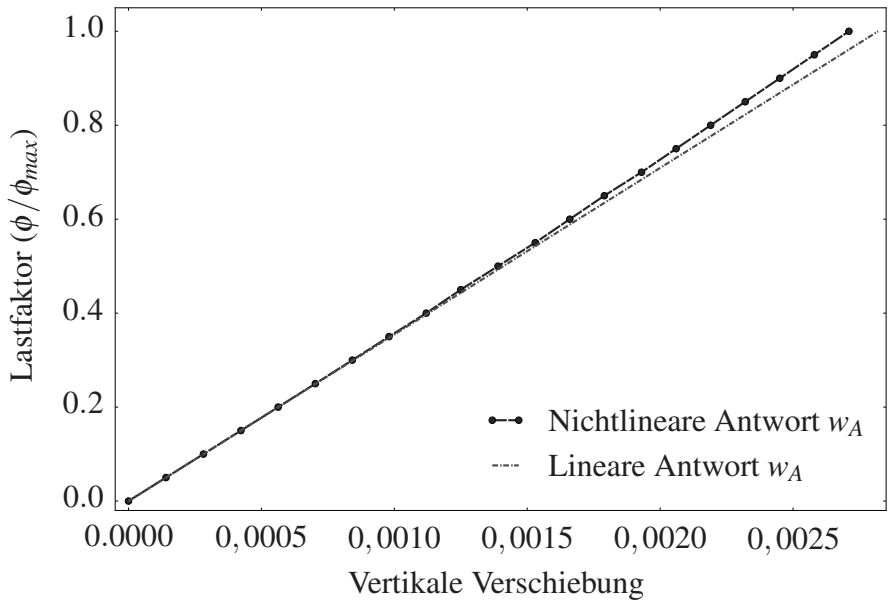


Abb. 6.29: Lineare und nichtlineare vertikale Verschiebung w_A (Fall I)

Änderung der Geometrie im Fall I) beeinflusst die Steifigkeit infolge der biege-dominaten Deformationen nur geringfügig. Umgekehrt treten im Fall II) schon bei einem niedrigen

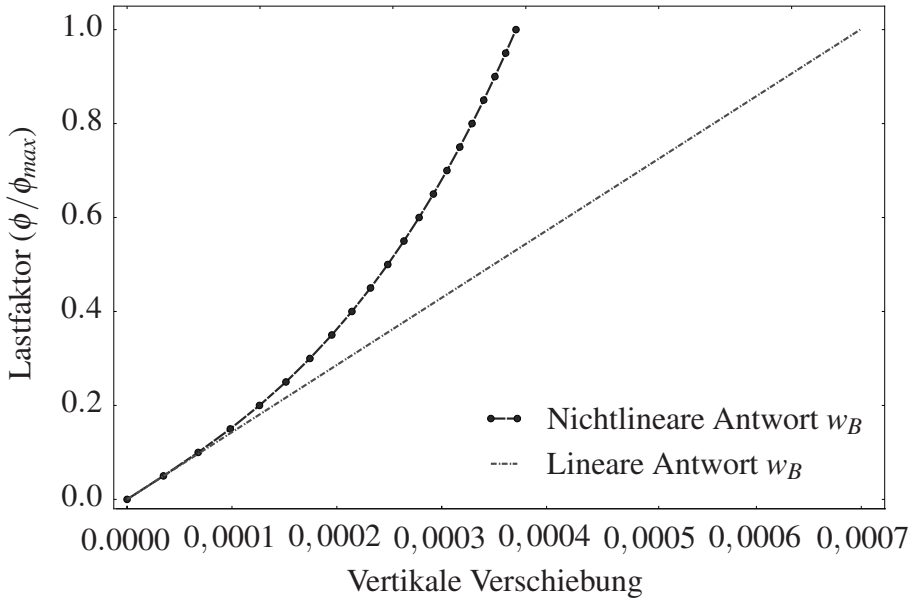


Abb. 6.30: Lineare und nichtlineare vertikale Verschiebung w_B (Fall II)

Lastniveau signifikante Membraneffekte auf, welche die Steifigkeit der Struktur erhöhen. In der initialen Konfiguration ist die Biegesteifigkeit vorherrschend, mit zunehmender Verformung erhöht sich der Einfluss der Membransteifigkeit zusehends. Dies führt zu deutlichen Unterschieden zwischen den Ergebnissen der linearen und jenen der geometrisch nichtlinearen Analyse, dargestellt in Abb. 6.30.

Tab. 6.12: Repräsentative Verformungen w_A und w_B (Aktuatorplatte)

Lineare Statik	SH3	Marinkovic et al. [77]
Lastfall I w_A	0,00282	0,0028
Lastfall II w_B	0,00070	0,0007
Nichtlineare Statik	**SH3**	**Marinkovic et al. [77]**
Lastfall I w_A	0,002710	0,00270
Lastfall II w_B	0,000371	0,00037

6.2.6 Piezo-Bogen (nichtlinear)

Im nächsten Beispiel wird eine an der linken Seite fest eingespannte halbkreisförmige Bogenstruktur berücksichtigt. Die Teststruktur besitzt einen Radius der Mittelfläche $R = 318,31 \cdot 10^{-6}$, eine Breite $b = 50,8 \cdot 10^{-6}$ und eine Gesamtdicke $h = 6,35 \cdot 10^{-6}$. Der MSV besteht aus drei Schichten. Die passive Mittelschicht ist metallisch und besitzt eine Dicke von $5,842 \cdot 10^{-6}$, während die äußeren piezoelektrischen PTZ-Schichten jeweils eine Dicke

von $0,254 \cdot 10^{-3}$ aufweisen. Die Materialeigenschaften sind in Tab. 6.13 dargestellt. Die ge-

Tab. 6.13: Materialeigenschaften des Sensorbogens

	Metallischer Werkstoff	PTZ
Elastische Eigenschaften		
Y_{11}	$68,95 \cdot 10^9$	$63,00 \cdot 10^9$
Y_{22}	$68,95 \cdot 10^9$	$63,00 \cdot 10^9$
ν_{12}	$0,30$	$0,30$
G_{12}	$26,52 \cdot 10^9$	$24,23 \cdot 10^9$
G_{13}	$26,52 \cdot 10^9$	$24,23 \cdot 10^9$
G_{23}	$26,52 \cdot 10^9$	$24,23 \cdot 10^9$
Piezoelektrische Konstanten		
$e_{31} = e_{32}$		16,11
Dielektrische Konstante		
d_{33}		$1,65 \cdot 10^{-8}$

samte untere Sensorschicht wird in diesem Beispiel als ein gebogener Piezopatch (Sensor) ausgeführt. Dieses Beispiel wurde zuerst von Tzou and Ye [121] vorgeschlagen und später

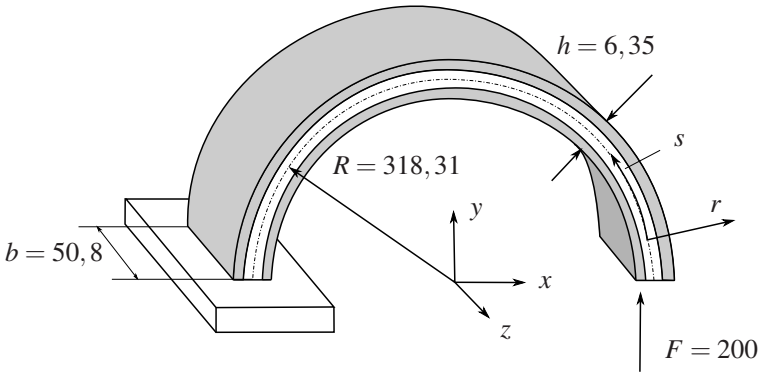


Abb. 6.31: Geometrie und Randbedingungen des Sensorbogens (nichtlinear)

von Zhang [129] modifiziert. Die Struktur wird mit einer in der Mitte des freien Endes angreifenden, in vertikaler Richtung wirkenden, Einzelkraft (siehe Abb. 6.31) belastet. Ausgewertet werden neben der resultierenden Verformung des freien Endes auch die elektrischen Spannungen, die sich infolge der Deformation in der unteren Piezoschicht einstellen. Beide Größen werden unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte berechnet und mit den von Tzou and Ye [121] und Zhang [129] berechneten Ergebnissen verglichen. Zhang verwendet in [129] ein 8-Knoten-Schalenelement mit fünf mechanischen und einem elektrischen Freiheitsgraden pro Piezoschicht (abgekürzt duch SH851URI) unter Verwendung einer reduzierten Integration zur Reduktion von künstlichen Versteifungseffekten. Die

in Abb. 6.32 dargestellten Verschiebungen des freien Endes in radialer- und in Umfangsrichtung zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Zhang [129] und mit den Ergebnissen, die mit dem Abaqus-S3-Element berechnet wurden. Abb. 6.33 zeigt vernachlässigbar kleine Differenzen der Sensorspannungen im Vergleich zu den Werten von Zhang [129]. Die Anzahl der notwendigen Iterationen konnte unter Verwendung vorgeschlagenen Formulierung im Vergleich zu Berechnung mit Abaqus erheblich reduziert werden.

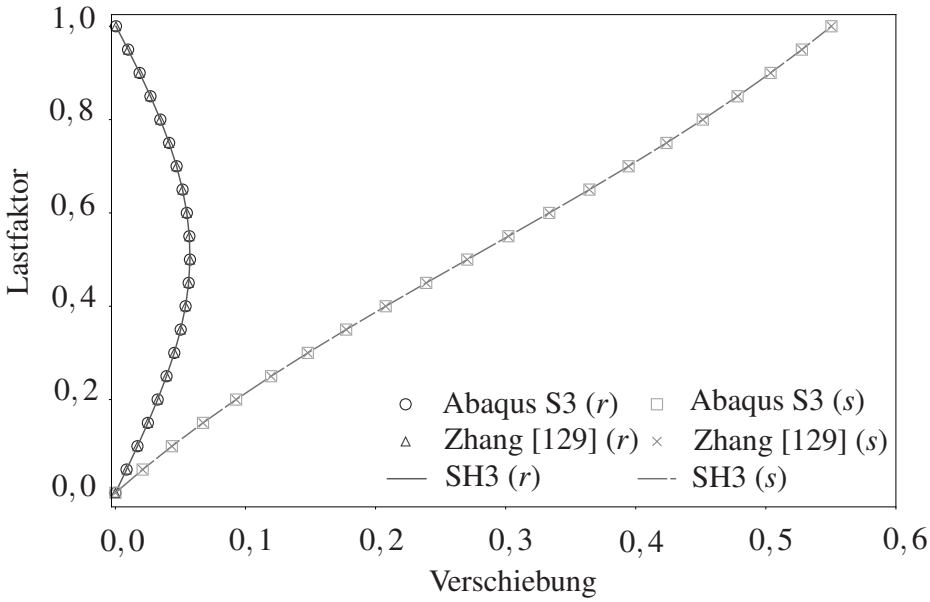


Abb. 6.32: Verschiebung der Mitte des freien Endes in Umgangsrichtung (s-Richtung) und in radialer Richtung (r-Richtung)

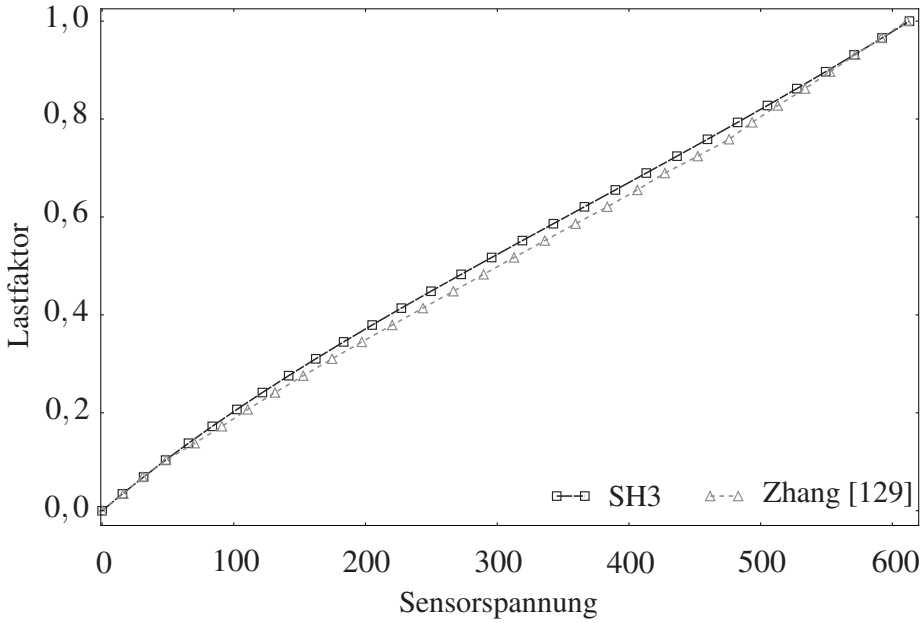


Abb. 6.33: Sensorspannungen in der unteren Sensorschicht

6.2.7 Eigenwertanalyse einer piezoelektrischen Platte

Das nächste Beispiel ist eine Eigenwertanalyse einer piezoelektrischen Kompositplatte. Zur Validierung der vorgeschlagenen Formulierung und um den Einfluß der elektrisch-mechanischen Koppelung auf die dynamischen Eigenschaften zu verdeutlichen, werden im Folgenden zwei unterschiedliche elektrische Randbedingungen untersucht. Im ersten Fall (SC) sind die Elektroden der Piezoschichten kurzgeschlossen (engl. *short-circuited*). Hieraus folgt ein elektrisches Potential $\{\phi\}$ von null und somit ein rein mechanisches Eigenwertproblem. Im zweite Fall (O) sind die Elektroden geöffnet (engl. *open*), was das Verschwinden der elektrischen Ladung impliziert ($\{q\} = \{0\}$). Ausgehend von Gleichung (4.26) folgt somit eine in den Sensorschichten induzierte Potentialdifferenz von:

$$\{\phi_s\} = -[K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}]\{u\} \tag{6.4}$$

Die elektrischen Spannungen führen aufgrund der elektrischen Randbedingungen (offene Elektroden) zu mechanischen Spannungen in den Piezoschichten (inverser Piezoeffekt). Innerhalb der Eigenwertanalyse werden diese Spannungen durch eine modifizierte Steifigkeitsmatrix $[K^*]$ berücksichtigt. Die modifizierte Steifigkeit kann aus der Substitution von $\{\phi_s\}$ in Gleichung (4.26) gewonnen werden:

$$[K^*] = [K_{uu}] - [K_{u\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}] \tag{6.5}$$

Das elektromechanische gekoppelte Eigenwertproblem kann dann wie folgt formuliert werden:

$$\Big[[K^*] - \omega^2[M_{uu}]\Big]\{u\} = \{0\} \tag{6.6}$$

Es ist offensichtlich, dass die Frequenzen und die Moden in diesem Fall von den piezoelektrischen Eigenschaften des Sensormaterials beeinflusst werden. Die Werte der Eigenfrequenzen erhöhen sich infolge der zusätzlichen Steifigkeit. Beide Fälle (O) und (SC) werden mit derselben Struktur untersucht. Die quadratische Plattenteststruktur ist gelenkig gelagert und besitzt eine Seitenlänge von $a = 0,2$ (siehe Abb. 6.34). Der Laminataufbau der piezoelektrischen Platte ist [p/0/90/0/p]. Die äußeren Schichten bestehen aus PTZ-4-Keramiken (gegenzeichnet durch „p“), während die passiven Trägerschichten aus Graphite-Epoxy (Gr/Ep) bestehen. Die Eigenschaften beider Materialien sind Tab. 6.10 dargestellt. Die Dicke der piezoelektrischen Schichten beträgt 0,0004, die Graphite-Epoxy-Schichten weisen eine Dicke von 0,001068 auf. Die von Saravanos in [107], unter Verwendung unterschiedlicher Netze, berechnete erste Eigenfrequenz wird im Folgenden als Referenzlösung herangezogenen. Die Dichte wird entsprechend [107] für alle Schichten auf 1 gesetzt, um eine Vergleichbarkeit der berechneten Ergebnisse mit [107] zu gewährleisten. In Tab. 6.14 sind die Ergebnisse der Konvergenzanalyse für die erste Eigenfrequenz, normiert mit der

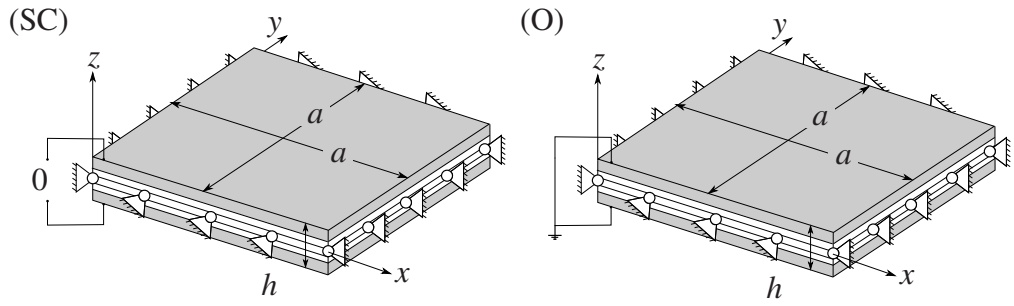


Abb. 6.34: Geometrie der gelenkig gelagerten piezoelektrischen Platte mit unterschiedlichen elektrischen Randbedingungen (SC) und (O)

Referenzlösung, dargestellt. Die Referenzlösung des rein mechanischen (SC)-Falls wurden mit Abaqus unter Verwendung eines biquadratischen S8-Elements und einem Netz von 24×24 Elementen berechnet. Die analytische Referenzlösung des (O) Falls ist in [107] dargestellt und dokumentiert. Die Differenzen zu den Referenzlösung sind in beiden Fällen kleiner als $0,8\,\%$ (288 Elemente). Das Konvergenzverhalten ist in beiden Fällen besser als bei den jeweiligen Referenz.

Tab. 6.14: Normierte erste Eigenfrequenzen - Konvergenzanalyse (Piezo-Platte)

	(SC)-Randbedingung $f^{SC}_{1,Ref} = 22915\,{}^1\!/_{\mathrm{s}}$ (Abaqus S8 24×24 Netz)			(0)-Randbedingung $f^{O}_{1,Ref} = 24594\,{}^1\!/_{\mathrm{s}}$ (Saravanos [107])	
Elemente	SH3	Abaqus S3	Ref. [107]	SH3	Ref. [107]
32	1,190	1,220	1,090	1,107	1,109
128	1,031	1,050	1,034	1,028	1,054
288	1,008	1,024	1,023	1,005	1,044

6.2.8 Dynamische Analyse - Sensorplatte

Die nächste Teststruktur besteht aus einer an einer Seite fest eingespannten piezoelektrische Platte. Die geometrischen Abmaße der Platten sind in Abb. 6.35 dargestellt. Die Kompositplatte besteht aus sechs Schichten mit einem antisymmetrischen Schichtaufbau von [p/-45/45/-45/45/p]. Die zwei äußeren PTZ-Piezoschichten sind entgegensetzt polarisiert und besitzen jeweils eine Dicke von 0,0001. Die aus T300/976 gefertigten Trägerschichten sind jeweils 0,00025 dick. Die Piezoschichten werden in der folgenden dynamisch linearen Analyse als Sensor verwendet. Die Platte wird mit einer harmonisch variierenden Punktlast belastet. Die Kraft greift im Punkt A an. Sie besitzt eine Amplitude von 0,2 und eine

Frequenz von $0,1\,{}^{1}/_{s}$ (siehe Abb. 6.35). Die Sensorspannung der unteren Schicht wird für eine Zeitperiode von 4 s mit einem Zeitschritt von 0,0005 s untersucht. Es wird eine modale Dämpfung mit einem Dämpfungsgrad von 0,008 verwendet (siehe Abschnitt 4.2). Das verwendete FE-Netz besteht aus 200 Elementen. Zhang et al. [130] analysiert dieses Beispiel

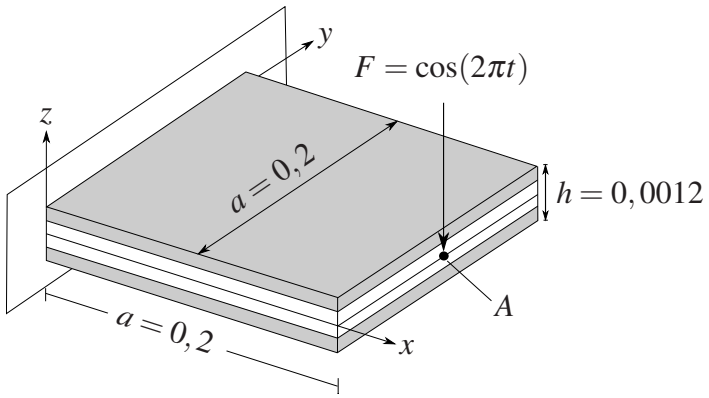


Abb. 6.35: Fest eingespannte Piezoplatte (harmonisch variierende Einzellast)

mit einem biquadratischen Schalenelement (reduzierte Integration) mit Hilfe der modalen Superpostion-Methode unter Berücksichtigung der ersten 12 Moden. In Abb. 6.36 sind die mit einem Wert von $\phi_{max} = 8$ normierten Sensorspannungen dargestellt. Die in Abb. 6.36 dargestellten Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung bei den Sensoramplituden und bei den Frequenzen zwischen der vorgeschlagenen Formulierung und den Ergebnissen von Zhang et al. [130]. Die minimalen lokalen Differenzen können mit der unterschiedlichen Schrittweite (nicht angegeben in [130]) erklärt werden.

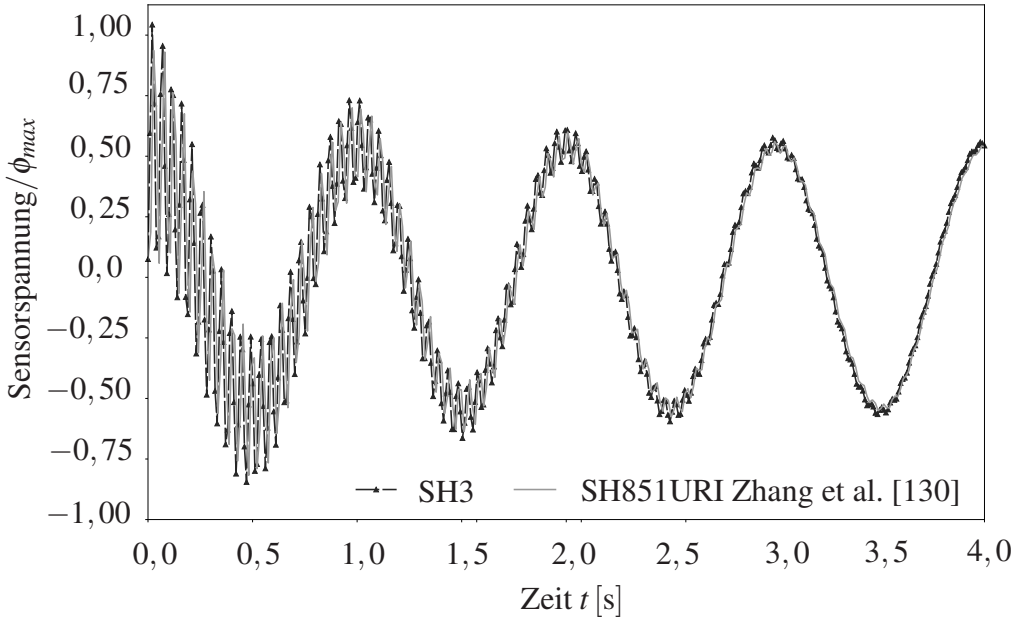


Abb. 6.36: Dynamische Sensorantwort unter harmonisch variierender Einzellast

6.2.9 Nichtlineare dynamische Analyse eines gelenkig gelagerten piezoelektrischen Kompositstreifens

Im folgenden Beispiel wird ein, an zwei Enden gelenkig gelagerter, piezoelektrischer Kompositstreifen (siehe Abb. 6.37) im Aktuatorbetrieb unter Berücksichtigung geometrischer nichtlinearer Effekte untersucht. Der Kompositstreifen besteht aus drei Schichten: eine Aluminiumträgerschicht mit einer Dicke von $0,0005$ und aus zwei äußeren PTZ-4 Schichten mit einer Dicke von $0,00025$. Die Materialparameter können der Tab. 6.15 entnommen werden. Die in entgegengesetzter Richtung polarisierten Piezoschichten werden mit

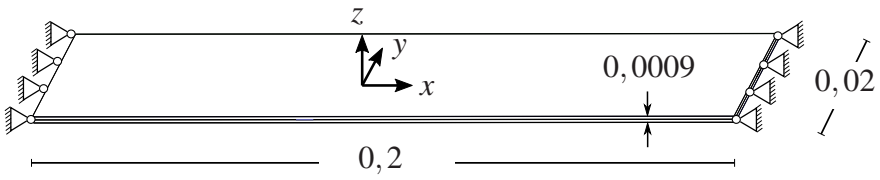


Abb. 6.37: Geometrie des Aktuatorstreifens

Tab. 6.15: Materialeigenschaften des Kompositstreifens

	Aluminium	PTZ-4
Elastische Eigenschaften		
Y_{11}	$70,3 \cdot 10^9$	$8,13 \cdot 10^9$
Y_{22}	$70,3 \cdot 10^9$	$8,13 \cdot 10^9$
ν_{12}	$0,345$	$0,33$
G_{12}	$26,1 \cdot 10^9$	$3,06 \cdot 10^9$
G_{13}	$26,1 \cdot 10^9$	$2,56 \cdot 10^9$
G_{23}	$26,1 \cdot 10^9$	$2,56 \cdot 10^9$
Piezoelektrische Konstanten		
$e_{31} = e_{32}$		14,8
Dielektrische Konstante		
d_{31}		$1,1505 \cdot 10^{-8}$

einer zeitlich veränderlichen elektrischen Spannung beaufschlagt. Der Verlauf der aufgebrachten Spannung wird durch eine Sinusfunktion mit einer Amplitude von 100 und einer Frequenz von $100\,{}^1\!/_s$ beschrieben. Die elektrischen Spannungen führen zu zeitlich veränderlichen mechanischen Lasten (inverser Piezoeffekt) in Form von gleichförmig an den äußeren Rändern der Piezoschicht verteilten Biegemomenten. Die vorgeschlagene Formulierung wird in der dynamischen geometrischen nichtlinearen Aktuatoranwendung mit Hilfe des Abaqus-S3-Elements verifiziert. Hierfür werden zunächst äquivalente mechanische

Lasten berechnet und als Folgelasten auf das Abaqus-Modell aufgebracht. Anschließend wird unter Verwendung des gleichen Netzes und des gleichen Zeitschritts die vertikale Verschiebung des Streifenmittelpunkts als Referenzgröße berechnet. In Abb. 6.38 sind die vertikalen Verschiebungen des Mittelpunktes der Teststruktur über die berücksichtigte Zeitperiode normiert mit $w_{max} = 0,0006$ dargestellt. Die Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Vergleichsberechnungen in Abaqus. Der Vergleich der linearen und der nichtlinearen Antwort (siehe Abb. 6.38) zeigt, dass sich auch im Bereich kleiner relativer Verformungen ($w_{max}/l \approx 0,002$) die Systemantwort signifikant voneinander unterscheiden kann. Dies verdeutlicht die Wichtigkeit der Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte auch im Bereich niedriger Lastniveaus.

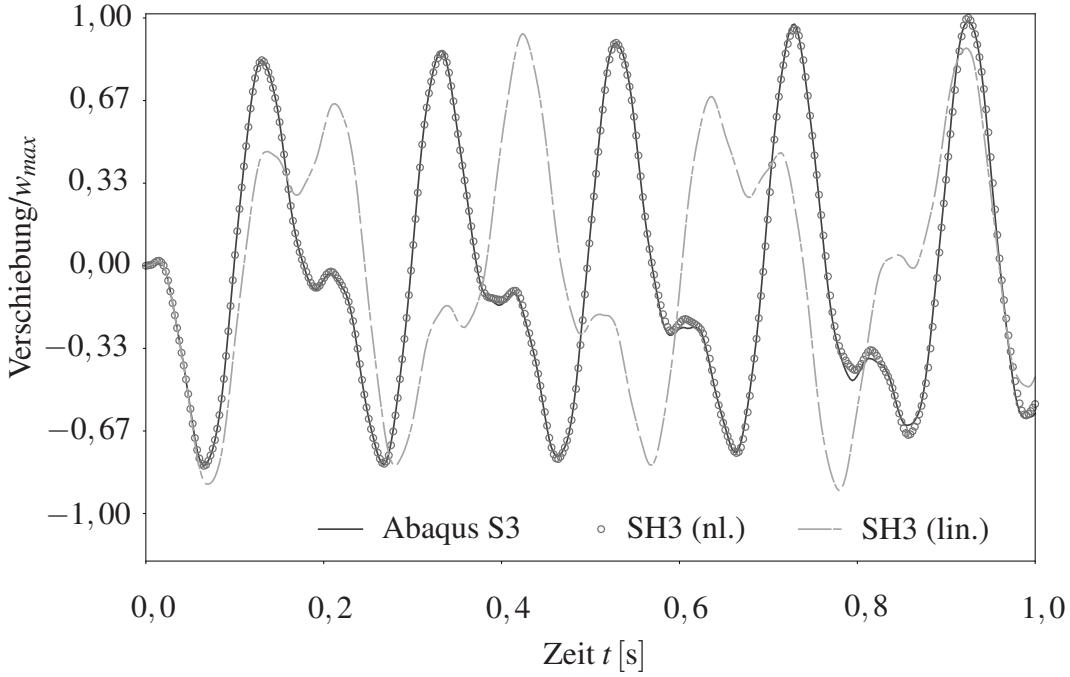


Abb. 6.38: Normierte dynamische Verschiebungsantwort unter harmonisch variierender elektrischer Spannung

6.2.10 Sensorbogen dynamisch nichtlineare Analyse

Im Folgenden wird die bereits in Abschnitt 6.2.6 berücksichtigte Bogengeometrie (siehe Abb. 6.31) unter Belastung einer konstanten Einzellast in der dynamischen geometrisch nichtlinearen Analyse untersucht (siehe Abb. 6.39). Die Verformungen des freien Endes des Bogens und die daraus resultierenden Sensorspannungen in der unteren Piezoschicht werden in einem Zeitintervall von 1 s und mit einem festen Zeitschritt von 10^{-4} s berechnet und dann mit den Ergebnisse von Zhang [129] verglichen. In Abb. 6.40 sind die zeitlichen Verläufe der Umfangs- und der Radialverschiebungen der Mitte des freien Endes (normiert

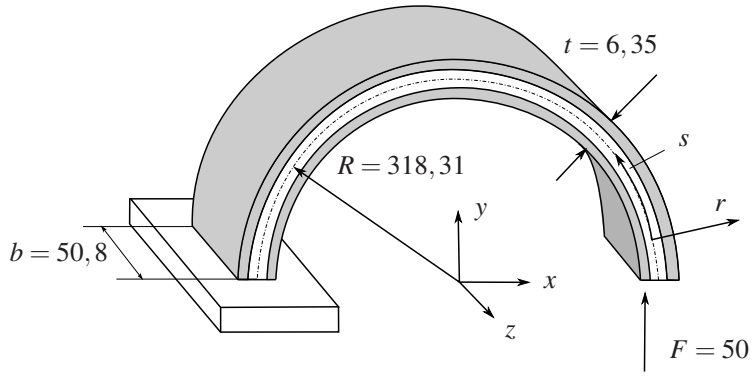


Abb. 6.39: Geometrie und Randbedingungen des Sensorbogens (nichtlinear)

mit $u = 0,25$) dargestellt und in Abb. 6.41 die resultierenden Sensorspannungen der unteren Piezoschicht (normiert mit $\phi = 300$). Es ist deutlich zu erkennen, dass die Ergebnisse eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnisse von Zhang [129] aufweisen.

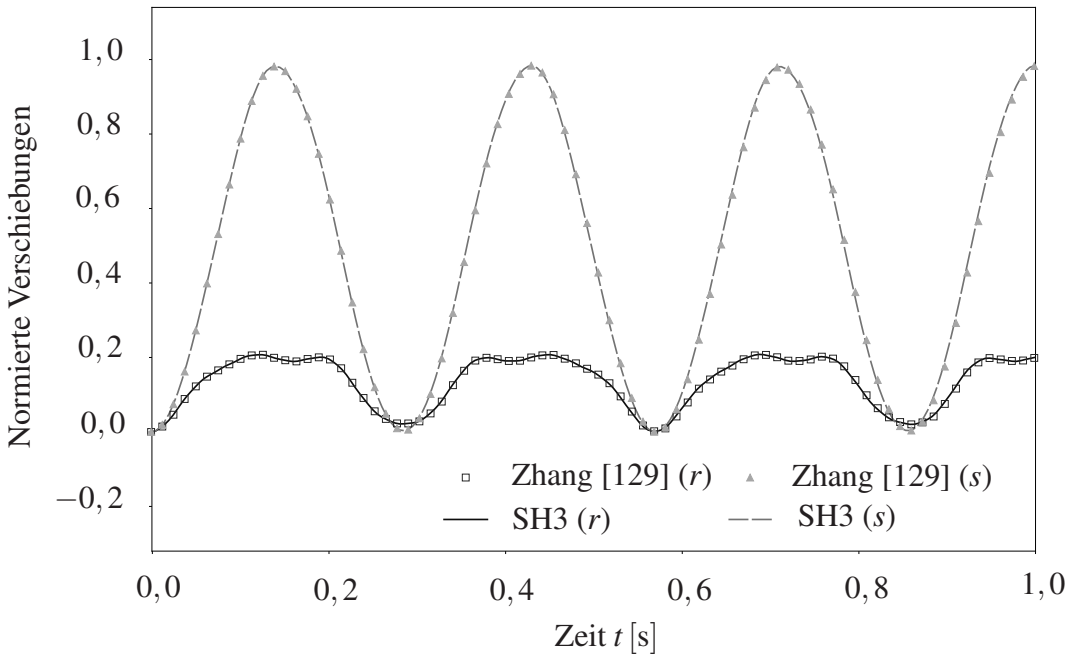


Abb. 6.40: Normierte Bogenverschiebungen der Mitte des freien Endes in Umgangsrichtung (s-Richtung) und in radialer Richtung (r-Richtung) in der dynamischen geometrisch nichtlinearen Analyse

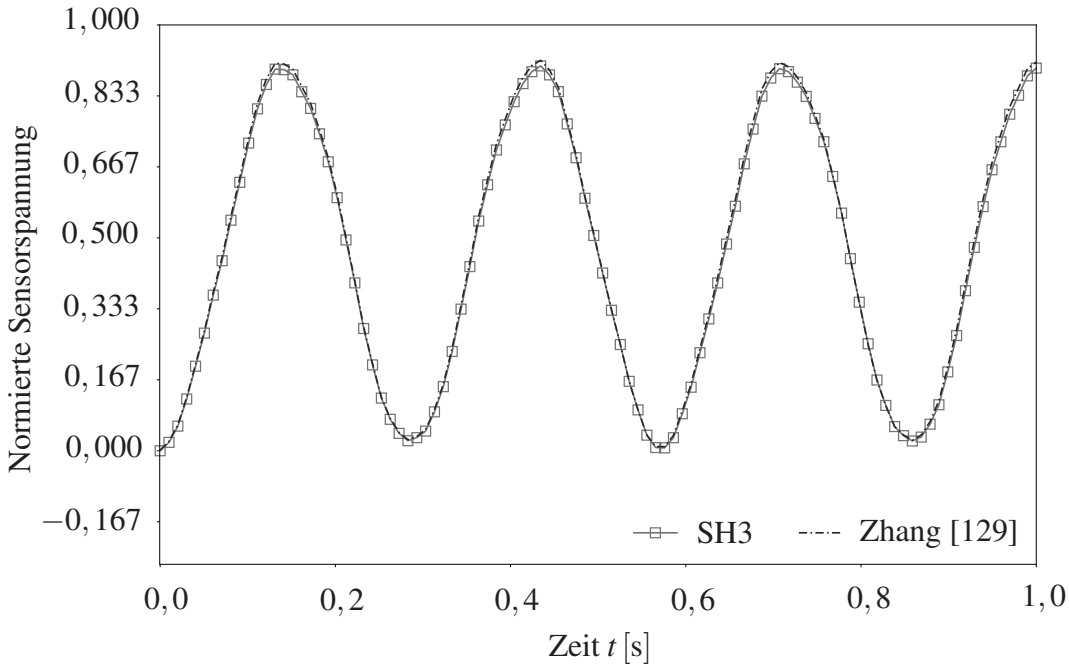


Abb. 6.41: Normierte Sensorspannung der inneren Piezoschicht - nichtlineare Ergebnisse

Kapitel 7

Fazit und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung eines neuartigen dreieckigen niedrig interpolierten piezoelektrischen Schalenelements. Trotz der hohen technischen Relevanz dünnwandiger piezoelektrischer Strukturen ist ihre numerische Simulation mit den aktuell verfügbaren kommerziellen Finiten-Elemente-Programmen nur bedingt möglich, da die dazu notwendigen Elemente in den Programmen großenteils nicht vorhanden sind. Mit der Entwicklung eines neuartigen effizienten finiten piezoelektrischen Komposit-Schalenelements leistet die vorliegende Arbeit einen wichtigen Beitrag zur Weiterentwicklung der bislang verwendeten numerischen Methoden zur Berechnung dünnwandiger, elektromechanisch gekoppelter Strukturen.

Hauptaugenmerk dieser Entwicklung war die numerisch effiziente Beschreibung des globalen Verformungsverhaltens und der infolge der Verformungen auftretenden Sensorspannungen unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte. Ausgangspunkt der Entwicklung des numerischen Modells war die Annahme, dass sich das globale Verhalten dünnwandiger Strukturen ausreichend genau beschreiben lässt durch eine 2-D-Referenzfläche unter Verwendung von Approximationsansätzen zur Beschreibung der Kinematik in Dickenrichtung. Unter den zahlreichen vorhandenen 2-D-Theorien stellt die implementierte Schubdeformationstheorie erster Ordnung (Einzelschicht-Theorie) einen nahezu optimalen Kompromiss zwischen der damit erzielbaren Genauigkeit und dem für die Berechnung notwendigen numerischen Aufwand dar. Die flache Elementgeometrie ermöglicht die Entwicklung des Schalenelements aus der Kombination eines Membran- und eines Plattenelements. Zur Vermeidung ungewollter künstlicher mechanischer Versteifungseffekte wurden wirksame Techniken angewendet mit dem Ziel eine möglichst hohe Konvergenzrate zu realisieren.

Die Membransteifigkeit wurde mit der von Felippa [42] vorgeschlagenen ANDES-Formulierung auf der Basis angenommener gewichteter Verformungszustände entwickelt. Es konnte

gezeigt werden, dass die ANDES-Formulierung bei Verwendung geeigneter Wichtungsparameter zu einem zuverlässigen und schnell konvergierenden Membranelement mit Drillfreiheitsgraden führt. Die Drillfreiheitsgrade erlauben eine bessere Beschreibung des Membranverschiebungsfeldes und wirken sich daher positiv auf die Konvergenz aus, ohne einen zusätzlichen numerischen Aufwand während der Berechnung zu bewirken. Zudem werden modellierungsbedingte singuläre Struktursteifigkeitsmatrizen bei rechtwinkligen Plattenstößen vermieden. Des Weiteren ist die Berücksichtigung der Drillsteifigkeit notwendig, damit beliebig gekrümmte Schalenstrukturen berechnet werden können. Belegt wird diese Behauptung durch die Ergebnisse eines durchgeführten numerischen Experiments, unter Berücksichtigung der Schalenbenchmark-Lastfälle des Twisted-Beams und des Raasches-Problems, wobei im Zuge einer Schalenformulierung ein CST- und ein ANDES-Membranelement verwendet wurden (siehe Anhang B.4).

Ausgangspunkt der Entwicklung der Plattensteifigkeitsmatrix war die Interpolation des Plattenverschiebungsfeldes unter Verwendung linearer Ansatzfunktionen und der Mindlin-Reissner-Kinematik. Das Lösungskonzept dieser Arbeit teilt die Plattensteifigkeit in einen Biege- und einen Schubanteil auf. Die Biegesteifigkeit wird auf klassischem Wege basierend auf einer reinen Verschiebungsinterpolation und den aus ihr abgeleiteten Krümmungen gebildet. Die Schubsteifigkeitsmatrix wurde mit dem von Bletzinger et al. [27] vorgeschlagenen diskreten Schubklaffungskonzeptes entwickelt. Dieses eliminiert die künstlichen transversalen Schubversteifungseffekte, führt jedoch bei der Anwendung auf Dreieckselemente zu einer von der Knotennummerierung abhängigen Elementsteifigkeitsmatrix. Eine von Nguyen-Thoi et al. in [86] vorgeschlagene Modifikation der Schalenverzerrungen auf Elementebene kann diese Problematik beheben. Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Formulierung verwendet die von Nguyen-Thoi et al. in [86] dargestellte Technik, wendet diese jedoch nur auf die Schubverzerrungen an. Dies geschieht vor dem Hintergrund der Tatsache, dass eine Glättung der konstanten Biegeverzerrungen keinen Einfluss auf die Plattensteifigkeit besitzt. Die Anzahl der notwendigen Rechenschritte zur Aufstellung der Plattensteifigkeit konnte somit im Vergleich zu [86] reduziert werden. Diese Vorgehensweise wurde - soweit dem Autor bekannt - in dieser Form noch nicht angewendet.

Die vorgeschlagene Formulierung erlaubt die Modellierung beliebig vieler in Dickenrichtung polarisierter Aktuator- und/oder Sensorschichten und ermöglicht somit die Berechnung einer Vielzahl von technischen Anwendungen unter Berücksichtigung des e_{31}-Effekts. Der Einfluss der Modellierung des elektrischen Potenzials auf die Genauigkeit der Sensorantwort und auf das Verformungsverhalten ist abhängig von den elektromechanischen Koppeleigenschaften des eingesetzten Materials. Um möglichst kurze Berechnungszeiten zu erzielen, wurde unter anderem ein konstanter Ansatz zur Modellierung des elektrischen

Potentials in der Schalenebene gewählt. Dabei konnte nachgewiesen werden, dass dieser Ansatz für die untersuchten Strukturen geeignet ist. Die präsentierte kondensierte Darstellungsform der elektromechanischen Bewegungsgleichung erlaubt es zudem, die Dimension der zu lösenden Gleichungssysteme zu reduzieren.
Die Zielsetzung der Arbeit grenzt das Anwendungsspektrum der Formulierung auf solche Systeme ein, die unter Einwirkung der äußeren Belastungen große Verformungen mit kleinen lokalen Verzerrungen ausführen. Systeme, die solch ein Verformungsverhalten aufweisen, besitzen in der Regel einen nicht unerheblichen Anteil an Starrkörperverschiebungen. Die implementierte korotierende Formulierung erlaubt bei solchen Problemstellungen eine effiziente Beschreibung auftretender geometrisch nichtlinearer Effekte. Dabei wurde die tangentiale Steifigkeit zu Gunsten der numerischen Effizienz auf die materielle Steifigkeit reduziert. Die angewendeten Vereinfachungen ermöglichen es, die Matrizen und die Vektoren der linearen Elementformulierung nach geeigneten Transformationen auch in der geometrisch nichtlinearen Analyse zu verwenden. Die notwendigen Rechenoperationen je Iterationsschritt können so im Vergleich zu der Totalen- und zur Updated-Lagrange-Formulierung erheblich reduziert werden. Ohne zusätzliche Maßnahmen führt die vorgeschlagene vereinfachte korotierende Formulierung - im Gegensatz zur konsistenten Formulierung (siehe [44]) - zu symmetrischen Systemmatrizen. Sie ermöglichen somit eine numerisch effektive Speicherung der Matrizen innerhalb des Lösungsverfahrens. Die Validierung der Elementformulierung beinhaltet verschiedene statische sowie dynamische Lastfälle. Ein direkter Vergleich aller rein mechanischen Lastfälle wurde mit dem dreiknotigen Abaqus-S3-Element durchgeführt. Zusätzlich wurden vorhandene Referenzlösungen aus der Literatur herangezogen. Die numerischen Beispiele zeigen, dass die vorgeschlagene Formulierung in der rein mechanischen linearen Statik eine ausgezeichnete Konvergenzrate aufweist. Die durchgeführten Konvergenzanalysen zeigen, dass die Elementantwort der vorgeschlagenen Formulierung bei einer sukzessiven Netzverfeinerung - im Vergleich zu ihrem direkten Kontrahenten, dem Abaqus-S3-Element - mit einer hohen Rate zu den Referenzlösungen konvergiert. Im Vergleich zur Totalen- und zur Updated-Lagrange-Formulierung (unter Verwendung von Abaqus) konnte in der statischen geometrisch nichtlinearen Analyse die Anzahl der notwendigen Iterationen in einer Vielzahl der untersuchten Beispiele reduziert werden. Im Zuge dieser Arbeit wurden des Weiteren Berechnungen unterschiedlicher Testprobleme durchgeführt, in denen das Element sowohl als Aktuator als auch als Sensor ausgeführt wurde. Der Einfluss der elektrischen Randbedingungen auf die dynamischen Eigenschaften wurde zusätzlich mit Hilfe von Eigenwertanalysen untersucht. Erfolgreich getestet wurden darüber hinaus die nichtlineare dynamische Sensorantwort sowie die Aktuatorwirkung unter Verwendung einer impliziten Zeitintegration. Die Berech-

nungsergebnisse zeigen, dass die vorgeschlagene Formulierung in der elektromechanisch nichtlinearen Analyse eine ebenso hohe Effizienz bietet wie in der rein mechanischen Analyse. Die durchgeführten numerischen Berechnungen demonstrieren, dass die getroffenen Annahmen und die angewendeten Techniken die Formulierung eines neuen effizienten dreiknotigen Schalenelements ermöglichen, das zur Berechnung von dünnwandigen piezoelektrischen Strukturen unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte geeignet ist. Mögliche Anwendungen solch eines effektiven und robusten Simulationswerkzeuges sind Optimierungen von Vorentwürfen [63], Ermüdungsberechnungen sowie Echtzeitsimulationsanwendungen adaptiver Systeme.
Zusammenfassend sollen die wesentlichen innovativen Aspekte der Elemententwicklung genannt werden:

- Die Beschreibung des mechanischen Antwortverhaltens erfolgt durch eine neuartige Kombination einer modifizierten DSG-Platten-Formulierung mit einer ANDES-Membran.
- Die Modifikation der DSG-Platten-Formulierung durch eine gezielte Glättung der Schubverzerrungen mit dem Ziel der Entwicklung einer transversalen Schubsteifigkeit, welche unabhängig von der Knotennummerierung ist.
- Die Diskretisierung der Elementmassen und der Elementlasten unter Berücksichtigung von Drillfreiheitsgraden.
- Die Implementierung einer vereinfachten korotierenden Formulierung zur Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte infolge großer Verschiebungen und endlicher Rotationen.
- Die numerische effiziente Implementierung des elektromechanischen e_{31}-Kopplungseffektes sowie deren Integration in die vorgeschlagene korotierende Formulierung.

Die Elementformulierung bietet zudem eine Vielzahl von Erweiterungsmöglichkeiten für weitergehende Problemstellungen. Die Berechnung einer Vielzahl weiterer piezoelektrischer Anwendungen kann ermöglicht werden durch eine Ergänzung mit zusätzlichen elektromechanischen Kopplungsmechanismen und Polarisierungen anlog zum hier dokumentierten Vorgehen. Im Sinne der Zielsetzung dieser Arbeit wäre auch eine Kombination mit bekannten Reduktionsmethoden denkbar. Die korotierende Formulierung erlaubt eine einfache Integration von Substrukturen (Superelemente). In Verbindung mit einer teilweisen Vernetzung der Struktur mit dem vorgeschlagenen Element könnten so hoch effektive numerische Modelle gebildet werden.

Anhang A

A.1 Koeffizienten der Polartransformation der MSV-Steifigkeitsmatrix

Explizite Darstellung der Koeffizienten entsprechend [74]:

$$
\begin{aligned}
C'_{11} &= C_{11}\cos^4\alpha + C_{22}\sin^4\alpha + 2\left(C_{12}+2C_{66}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
C'_{12} &= \left(C_{11}+C_{22}-4C_{66}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha + C_{12}\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right) \\
C'_{13} &= C_{13}\cos^2\alpha + C_{23}\sin^2\alpha \\
C'_{14} &= C'_{15} = 0 \\
C'_{16} &= \left(C_{11}-C_{12}-2C_{66}\right)\sin\alpha\cos^3\alpha + \left(C_{12}-C_{22}+2C_{66}\right)\sin^3\alpha\cos\alpha \\
C'_{22} &= C_{11}\sin^4\alpha + C_{22}\cos^4\alpha + 2\left(C_{12}+2C_{66}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
C'_{23} &= C_{13}\sin^2\alpha + C_{23}\cos^2\alpha \\
C'_{24} &= C'_{25} = 0 \\
C'_{16} &= \left(C_{11}-C_{12}-2C_{66}\right)\sin^3\alpha\cos\alpha + \left(C_{12}-C_{22}+2C_{66}\right)\sin\alpha\cos^3\alpha \\
C'_{33} &= C_{33} \\
C'_{34} &= C'_{35} = 0 \\
C'_{36} &= \left(C_{13}-C_{23}\right)\sin\alpha\cos\alpha \\
C'_{44} &= C_{44}\cos^2\alpha + C_{55}\sin^2\alpha \\
C'_{45} &= \left(C_{55}-C_{44}\right)\sin\alpha\cos\alpha \\
C'_{46} &= C'_{56} = 0 \\
C'_{55} &= C_{44}\sin^2\alpha + C_{55}\cos^2\alpha \\
C'_{66} &= \left(C_{11}+C_{22}-2\left(C_{12}+C_{66}\right)\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha + C_{66}\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

A.2 Rodrigues Rotation

Im Zuge dieser Arbeit wird zur Parametrisierung der finiten Rotationen die Rodrigues Rotationsmatrix verwendet. Die im folgenden dargestellte Herleitung basiert im wesentlichen auf der Arbeit von Argyris [10]. Zum besseren Verständis sind die in der Herleitung auftretenden Vektoren in Abb. A.1 schematisch dargestellt.
Ausgangspunkt bildet die Projektion von $\{x_0\}$ auf die Achse die durch den Vektor $\{n_\omega\}$ gebildet wird:

$$\{x_{0,n}\} = \Big(\{n_\omega\} \cdot \{x_0\}\Big)\{n_\omega\} \tag{A.2}$$

Die Radialkomponente von $\{x_0\}$ kann anschließend wie folgt bestimmt werden:

$$\{x_{0,r}\} = \{x_0\} - \{x_{0,n}\} \tag{A.3}$$

Der Vektor normal zu $\{x_0\}$ und $\{n_\omega\}$ ergibt sich aus ihrem Kreuzprodukt:

$$\{x_n\} = \{n_\omega\} \times \{x_0\} \tag{A.4}$$

Aus der Betrachtung der Drehung von $\{x_{0,r}\}$ in der Ebene führt auf folgende Parametrisierung bezüglich θ:

$$\{x_{0,rr}\} = \{x_{0,r}\}\cos(\theta) + \{x_n\}\sin(\theta) \tag{A.5}$$

Hieraus folgt schließlich der im Raum gedrehte Vektor $\{x_p\}$:

$$\begin{aligned}\{x_p\} &= \{x_{0,rr}\} + \{x_{0,n}\} \\ &= \Big(\{x_{0,r}\}\cos(\theta) + \{x_n\}\sin(\theta)\Big) + \Big(\{n_\omega\} \cdot \{x_0\}\Big)\{n_\omega\}\end{aligned} \tag{A.6}$$

Gleichung (A.6) kann mit den vorigen Gleichungen umgeformt werden zu:

$$\{x_p\} = \Big(\{x_0\} - \big(\{n_\omega\} \cdot \{x_0\}\big)\{n_\omega\}\Big)\cos(\theta) + \big(\{n_\omega\} \times \{x_0\}\big)\sin(\theta)\Big(\{n_\omega\} \cdot \{x_0\}\Big)\{n_\omega\} \tag{A.7}$$

Hieraus folgt:

$$\{x_p\} = \{x_0\}\cos(\theta) - \big(\{n_\omega\} \cdot \{x_0\}\big)\{n_\omega\}\cos(\theta) + \big(\{n_\omega\} \times \{x_0\}\big(\sin(\theta)\big(\{n_\omega\} \cdot \{x_0\}\big)\{n_\omega\} \tag{A.8}$$

mit:

$$\Big(\{n_\omega\} \cdot \{x_0\}\Big)\{n_\omega\} = \{n_\omega\}\{n_\omega\}^T\{x_0\} \tag{A.9}$$

und:

$$\{n_\omega\} \times \{x_0\} = \mathrm{Spin}(\{n_\omega\})\{x_0\} \tag{A.10}$$

folgt:

$$\begin{aligned}\{x_p\} &= \{x_0\}\cos(\theta) + \{n_\omega\}\{n_\omega\}^T\{x_0\}\Big(1-\cos(\theta)\Big) + \mathrm{Spin}(\{n_\omega\})\{x_0\}\sin(\theta) \\ &= \Big([I]\cos(\theta) + \{n_\omega\}\{n_\omega\}^T\big(1-\cos(\theta)\big) + \mathrm{Spin}(\{n_\omega\})\sin(\theta)\Big)\{x_0\} \\ &= [R_\omega]\{x_0\}\end{aligned} \tag{A.11}$$

Somit kann $[R_\omega]$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$[R_\omega] = [I]\cos(\theta) + \{n_\omega\}\{n_\omega\}^T\big(1-\cos(\theta)\big) + \mathrm{Spin}(\{n_\omega\})\sin(\theta) \tag{A.12}$$

mit:

$$\{n_\omega\}\{n_\omega\}^T = \mathrm{Spin}(\{n_\omega\})^2 + [I] \tag{A.13}$$

folgt nach einigen Umformungsschritten:

$$[R_\omega] = [I] + \sin(\theta)\mathrm{Spin}(\{n_\omega\}) + \big(1-\cos(\theta)\big)\mathrm{Spin}(\{n_\omega\})^2 \tag{A.14}$$

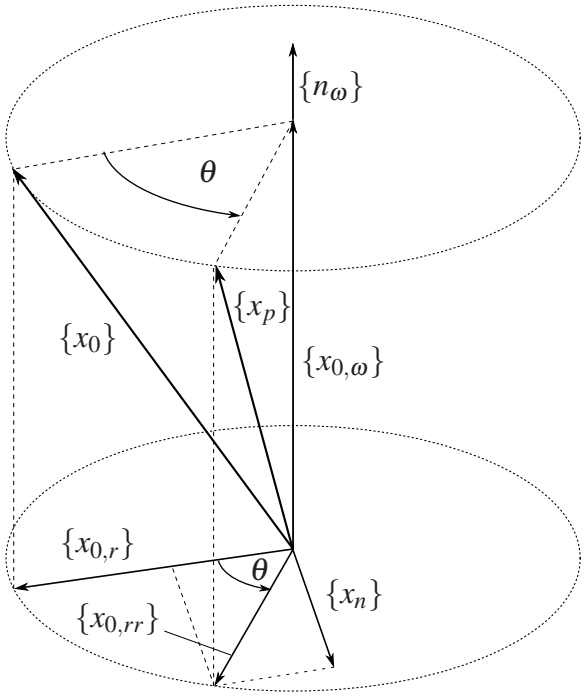


Abb. A.1: Schematische Darstellung der in der Herleitung der Rodriguesmatrix auftretenden Vektoren

A.3 Verschiebungsinterpolation des Constant Triangle (CST)

Das Verschiebungsfeld (u_0, v_0) des CST-Elements (siehe Abb. A.2) wird mit den lienaren Ansatzfunktionen (5.28) und den Knotenverschiebungen (u_i', v_i'; $i = 1,2,3$) in natürlichen Dreieckskoordinaten interpoliert:

$$\begin{aligned} u_0 &= [N^{CST}] \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix}^T \\ v_0 &= [N^{CST}] \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix}^T \end{aligned} \tag{A.15}$$

mit den linearen Ansatzfunktionen des CST-Elements:

$$[N^{CST}] = \begin{bmatrix} (1-\xi_2-\xi_3) & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \tag{A.16}$$

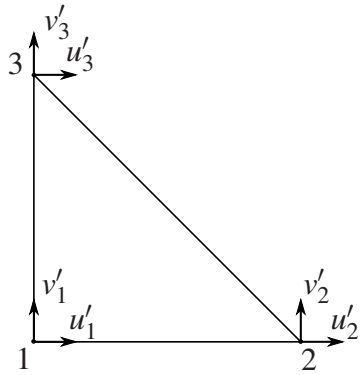


Abb. A.2: Freiheitsgrade des LST-Membranelements

A.4 Verschiebungsinterpolation des Linear Strain Triangle (LST)

Das Verschiebungsfeld (u_0, v_0; $i = 1\ldots6$) des LST-Elements (siehe Abb. A.3) wird mit den quadratischen Ansatzfunktionen (A.18) und den Knotenverschiebungen (u_i', v_i') in natürlichen Dreieckskoordinaten interpoliert:

$$\begin{aligned} u_0 &= [N^{LST}] \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{Bmatrix}^T \\ v_0 &= [N^{LST}] \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{Bmatrix}^T \end{aligned} \tag{A.17}$$

mit den quadratischen Ansatzfunktionen des LST–Elements:

$$[N^{LST}] = \begin{bmatrix} 2\,(1-\xi_2-\xi_3)\,(0.5-\xi_2-\xi_3) \\ \xi_2\,(2\xi_2-1) \\ \xi_3\,(2\xi_3-1) \\ 4\xi_2\,(1-\xi_2-\xi_3) \\ 4\xi_2\xi_3 \\ 4\xi_3\,(1-\xi_2\xi_3) \end{bmatrix}^T \tag{A.18}$$

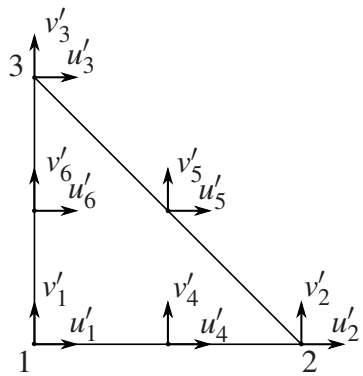


Abb. A.3: Freiheitsgrade des LST-Membranelements

A.5 Verschiebungsinterpolation des QST4/20G Elements

Das Verschiebungsfeld (u_0, v_0) des QST4/20G-Elements (siehe Abb. A.4) wird mit den kubischen Ansatzfunktionen entsprechend [42] wie folgt interpoliert:

$$\{u_0\} = \begin{bmatrix} \xi_1^2\left(3-2\xi_1\right)-7\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_1^2\left(x'_{21}\xi_2-x'_{13}\xi_3\right)+\left(x'_{13}-x'_{21}\right)\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_1^2\left(y'_{21}\xi_2-y'_{13}\xi_3\right)+\left(y'_{13}-y'_{21}\right)\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_2^2\left(3-2\xi_2\right)-7\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_2^2\left(x'_{21}\xi_3-x'_{13}\xi_1\right)+\left(x'_{13}-x'_{21}\right)\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_2^2\left(y'_{21}\xi_3-y'_{13}\xi_1\right)+\left(y'_{13}-y'_{21}\right)\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_3^2\left(3-2\xi_3\right)-7\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_3^2\left(x'_{21}\xi_1-x'_{13}\xi_3\right)+\left(x'_{13}-x'_{21}\right)\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_3^2\left(y'_{21}\xi_1-y'_{13}\xi_2\right)+\left(y'_{13}-y'_{21}\right)\xi_1\xi_2\xi_3 \\ 27\xi_1\xi_2\xi_3 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u'_1 \\ \left(\partial u'_1/\partial x'\right) \\ \left(\partial u'_1/\partial y'\right) \\ u'_2 \\ \left(\partial u'_2/\partial x'\right) \\ \left(\partial u'_2/\partial y'\right) \\ u'_3 \\ \left(\partial u'_3/\partial x'\right) \\ \left(\partial u'_3/\partial y'\right) \\ u'_0 \end{Bmatrix} \tag{A.19}$$

$$\{v_0\} = \begin{bmatrix} \xi_1^2(3-2\xi_1) - 7\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_1^2(x'_{21}\xi_2 - x'_{13}\xi_3) + (x'_{13} - x'_{21})\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_1^2(y'_{21}\xi_2 - y'_{13}\xi_3) + (y'_{13} - y'_{21})\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_2^2(3-2\xi_2) - 7\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_2^2(x'_{21}\xi_3 - x'_{13}\xi_1) + (x'_{13} - x'_{21})\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_2^2(y'_{21}\xi_3 - y'_{13}\xi_1) + (y'_{13} - y'_{21})\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_3^2(3-2\xi_3) - 7\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_3^2(x'_{21}\xi_1 - x'_{13}\xi_3) + (x'_{13} - x'_{21})\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \xi_3^2(y'_{21}\xi_1 - y'_{13}\xi_2) + (y'_{13} - y'_{21})\xi_1\xi_2\xi_3 \\ 27\xi_1\xi_2\xi_3 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v'_1 \\ (\partial v'_1/\partial x') \\ (\partial v'_1/\partial y') \\ v'_2 \\ (\partial v'_2/\partial x') \\ (\partial v'_2/\partial y') \\ v'_3 \\ (\partial v'_3/\partial x') \\ (\partial v'_3/\partial y') \\ v'_0 \end{Bmatrix} \tag{A.20}$$

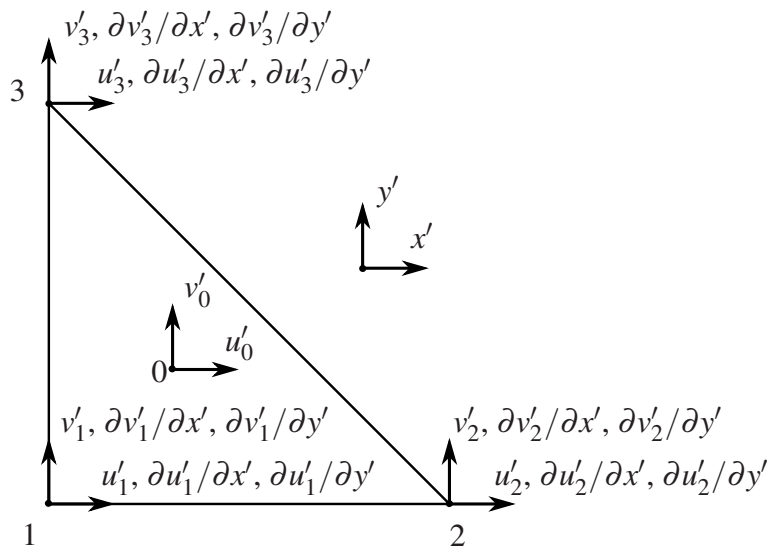


Abb. A.4: Freiheitsgrade des QST4/20G-Membranelements

A.6 Graphische Darstellung der Taylor-Approximation von $\theta/2\sin\theta$ für kleine θ-Werte

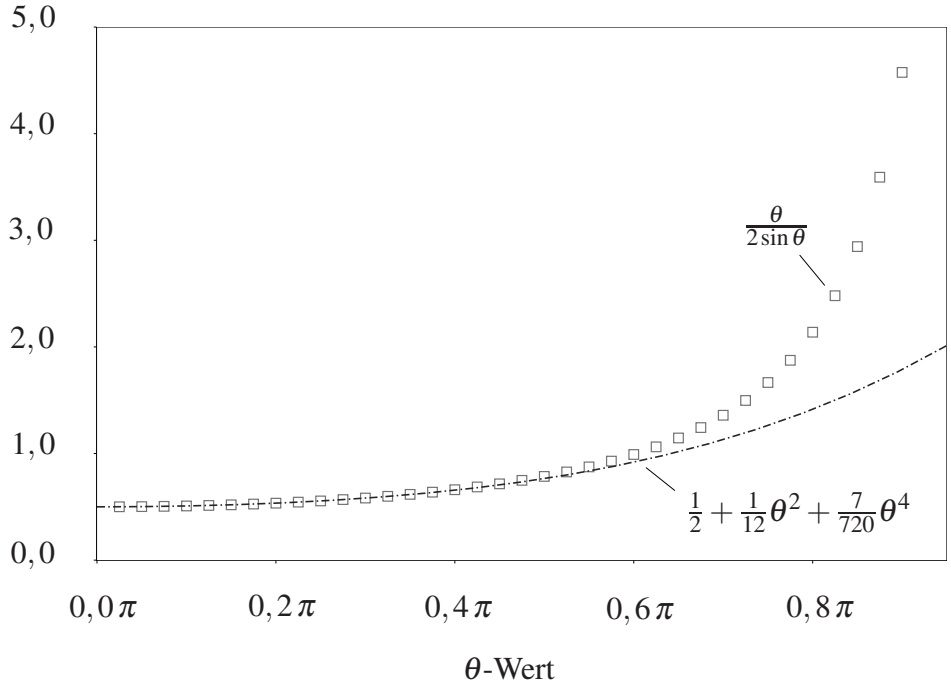


Abb. A.5: Graphische Darstellung der Gleichung (4.56)

Anhang B

Zusätzliche numerische Beispiele

B.1 Hemisphäre

Das nächste Testbeispiel ist eine dünnwandige Hemisphäre mit einem Loch an der Spitze (18° siehe Abb. B.1), welche durch zwei zwei Kräftepaare ($f = 1$) nach innen (entlang der z-axis) und nach außen (entlang der x-axis) wirkend belastet wird. Aus Gründen der Sysmmetrie wird nur ein Viertel der Struktur modelliert (siehe Abb. B.1). Die Halbkugel hat einen Radius von 10 und eine Dicke von $0,04$. Das E-Modul des isotropen Materials besitzt den Wert $68,25 \cdot 10^6$ und die Poissonzahl beträgt $0,3$. Die Verschiebungen der Kraftangriffspunkte in Richtung der Wirkung der Einzelkräfte wird mit drei FE-Netzen (128, 512 and 2048 Elemente) berechnet und mit der von Simo et al. [113] ($u_{ref} = w_{ref} = 0,093$) bereitgestellten Referenzlösungen normiert (siehe Tabelle B.1). Für beide Punkte ist eine nahezu identische Konvergenzrate zwischen der vorgeschlagenen Formulierung und dem ABAQUS S3 Element festzustellen.

Tab. B.1: Normierte Verschiebungen (w_A, u_B) - Testfall Hemisphäre

Elemente	SH3		ABAQUS S3	
	u_B/u_{ref}	w_A/w_{ref}	u_B/u_{ref}	w_A/w_{ref}
128	0,929	0,899	0,931	0,898
512	0,985	0,980	0,986	0,980
2048	0,999	0,997	0,998	0,996

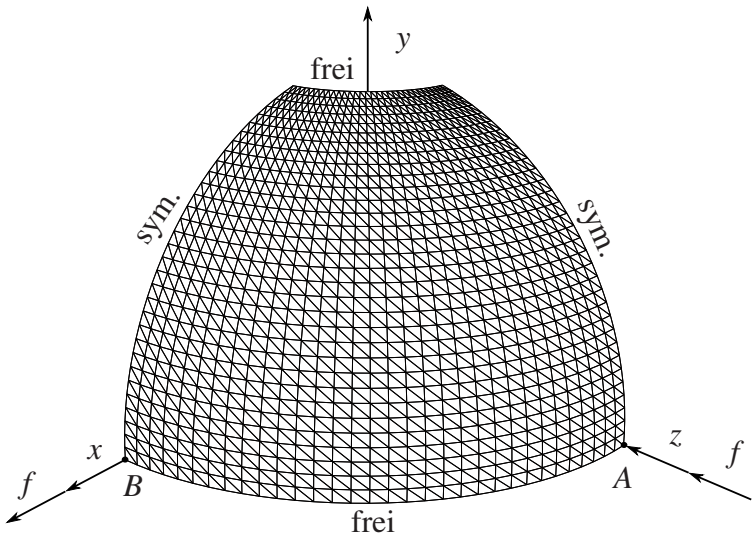


Abb. B.1: Geometrie Hemisphäre

B.2 Dünnwandiger Zylinder

Die folgende Testgeometrie ist ein dünnwandiger Zylinder, der an zwei gegenüberliegenden Punkten durch Einzelkräfte auseinandergezogen wird. Der Zylinder wird an beiden Stirnenden so gelagert, dass die Verschiebungen in der Zylinderringebene blockiert sind (rigid diaphragm $u = v = \theta_z = 0$, siehe Abb. B.2). Unter Berücksichtigung der Symmetrie wird ein Achtel der Struktur modelliert (siehe Abb. B.2). Die Geometrie ist über den Radius $R = 300$, der Länge $L = 300$ und der Schalendicke $t = 3$ definiert. Das Material wird als isotrop angenommen und besitzt einen E-Modul von $3 \cdot 10^6$ und eine Poissonzahl von $0,3$. Die konzentrierte Kraft $f = 0,25$ greift am reduzierten Modell am Punkt A an und wirkt

Tab. B.2: Normierten vertikalen Verschiebungen des Punktes A

Elemente	SH3	ABAQUS S3
720	0,918	0,899
1428	0,952	0,941
2820	0,978	0,978
4484	0,994	0,990

in vertikaler Richtung (siehe Abb. B.2). Die durchgeführte Konvergenzanlyse (720, 1428, 2828 und 4482 Elemente) zeigt ein besseres Konvergenzverhalten der vorgeschlagenen Formulierung im Vergleich zu dem Abaqus S3 Element. Die vertikalen Verschiebungen w_A des Punktes A werden mit den Ergebnissen von Belytschko [18] normiert und in Tabelle B.2 zusammengefasst.

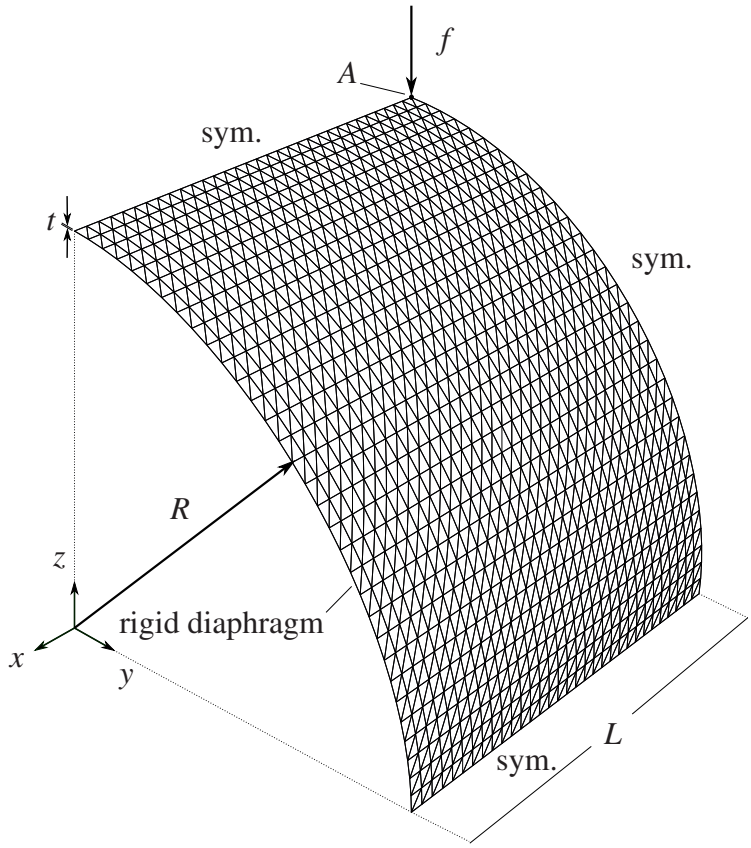


Abb. B.2: Geometrie der Zylinder Teststruktur

B.3 Cook's Membran

Ein weiteres weit verbreitetes Testbeispiel ist die Cook's Membran benannt nach R. D. Cook [34]. Die trapezförmige Membran ist an ihrer längeren Seite fest eingespannt und an der gegenüberliegenden Seite mit einer konstanten Linienlast, mit einem Betrag von $1/16$, belastet (siehe Abb. B.3). Das isotrope Material wird durch das E-Modul von $Y = 1$ und einer Querkontraktionszahl von $1/3$ beschrieben. Der Belastungszustand führt in diesem Beispiel auf Biege- und Schubverformungen in der Membranebene (in-plane). Die berechneten vertikalen Verschiebungen am Punkt A (v_A), werden mit der Referenzslösung $v_{ref} = 23,91$, berechnet von Winkler und Plakomytis [125], in Tab. B.3 aufgelistet. Es ist offensichtlich, dass die vorgeschlagene Formulierung in diesem Beispiel schneller zur Referenzlösung als konvergiert das Abaqus S3 Element.

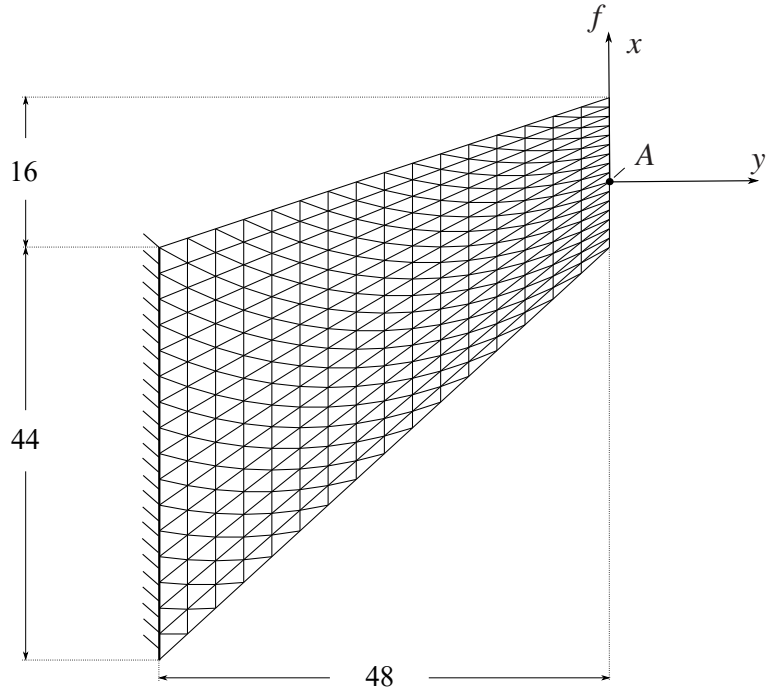


Abb. B.3: Geometrie Cook's Membran

Tab. B.3: Normierte Verschiebungen (u) des Punktes A der Cook's Membran

Elemente	SH3	Abaqus S3
8	0,562	0,531
32	0,842	0,825
128	0,935	0,916
512	0,983	0,976

B.4 Vergleich der CST- und der ANDES-Membran

Eine detaillierte Beschreibung der Testgeometrien, der Belastungen sowie der Auswertungen kann dem Abschnitt 6 entnommen werden.

Tab. B.4: Vergleich CST- und ANDES-Membran - Twisted Beam

$t = 0,05$	$w_{ref} = 0,3431$		$v_{ref} = 1.390$	
Elemente	SH3-ANDES	SH3-CST	SH3-ANDES	SH3-CST
48	0,981	0,989	0,986	0,989
96	0,995	0,999	0,994	0,999
384	0,999	1,017	0,997	1,014
1536	1,000	1,059	0,999	1,054

Tab. B.5: Vergleich CST- und ANDES-Membran - Raasch Problem

Elemente	SH3-ANDES	SH3-CST
18	0,845	0.857
216	0,968	1.047
896	0,998	1.386
1072	1,000	1.517

Literaturverzeichnis

[1] *Composites Benchmarks – Test R0031\1*, 1995. NAFEMS publication R0031.

[2] Global piezoelectric device market. Tech. rep., Acmite Market Intelligence, 2017.

[3] *National Agency for Finite Element Methods and Standards – NAFEMS*, (accessed April 12, 2018). https:\\www.nafems.org.

[4] AHMAD, S., IRONS, B. M., AND ZIENKIEWICZ, O. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 2*, 3 (1970), 419–451.

[5] ALLIK, H., AND HUGHES, T. J. Finite element method for piezoelectric vibration. *International journal for numerical methods in engineering 2*, 2 (1970), 151–157.

[6] ALLMAN, D. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Computers & Structures 19*, 1-2 (1984), 1–8.

[7] ALLMAN, D. Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 26*, 12 (1988), 2645–2655.

[8] ALTENBACH, H. Kontinuumsmechanik. *Kapitel 8* (2012), 253–279.

[9] ALVIN, K., HORACIO, M., HAUGEN, B., AND FELIPPA, C. A. Membrane triangles with corner drilling freedoms-i. the eff element. *Finite Elements in Analysis and Design 12*, 3-4 (1992), 163–187.

[10] ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. *Computer methods in applied mechanics and engineering 32*, 1-3 (1982), 85–155.

[11] BABUŠKA, I., AND SURI, M. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. *Numerische Mathematik 62*, 1 (1992), 439–463.

[12] BALAMURUGAN, V., AND NARAYANAN, S. Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control. *Finite Elements in Analysis and Design 37*, 9 (2001), 713–738.

[13] BALAMURUGAN, V., AND NARAYANAN, S. A piezolaminated composite degenerated shell finite element for active control of structures with distributed piezosensors and actuators. *Smart materials and Structures 17*, 3 (2008), 035031.

[14] BARTH, C., AND RUSTLER, W. *Finite Elemente in der Baustatik-Praxis: Mit vielen Anwendungsbeispielen DVD mit Demoversionen von RSTAB, RFEM*. Beuth Verlag, 2010.

[15] BATHE, K.-J. On finite element methods for nonlinear dynamic response. In *Proceedings EURODYN* (2008).

[16] BATHE, K.-J., AND BOLOURCHI, S. A geometric and material nonlinear plate and shell element. *Computers & structures 11*, 1-2 (1980), 23–48.

[17] BATTINI, J.-M. Large rotations and nodal moments in corotational elements. *CMES 33*, 1 (2008), 1–15.

[18] BELYTSCHKO, T., STOLARSKI, H., LIU, W. K., CARPENTER, N., AND ONG, J. S. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 51*, 1-3 (1985), 221–258.

[19] BENJEDDOU, A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers & Structures 76*, 1-3 (2000), 347–363.

[20] BENJEDDOU, A., DEÜ, J.-F., AND LETOMBE, S. Free vibrations of simply-supported piezoelectric adaptive plates: an exact sandwich formulation. *Thin-walled structures 40*, 7-8 (2002), 573–593.

[21] BERGAN, P., AND FELIPPA, C. A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 50*, 1 (1985), 25–69.

[22] BERGAN, P., AND NYGÅRD, M. Finite elements with increased freedom in choosing shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 20*, 4 (1984), 643–663.

[23] BERTHELOT, J.-M. *Composite materials: mechanical behavior and structural analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.

[24] BHAR, A., PHOENIX, S., AND SATSANGI, S. Finite element analysis of laminated composite stiffened plates using fsdt and hsdt: A comparative perspective. *Composite Structures 92*, 2 (2010), 312–321.

[25] BISEGNA, P., CARUSO, G., CASELLI, F., AND NODARGI, N. A. A corotational triangular facet shell element for geometrically nonlinear analysis of thin piezoactuated structures. *Composite Structures 172* (2017), 267–281.

[26] BISEGNA, P., AND MACERI, F. An exact three-dimensional solution for simply supported rectangular piezoelectric plates. *Journal of Applied Mechanics 63*, 3 (1996), 628–638.

[27] BLETZINGER, K.-U., BISCHOFF, M., AND RAMM, E. A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers & Structures 75*, 3 (2000), 321–334.

[28] CÉSAR DE SÁ, J. M., NATAL JORGE, R. M., FONTES VALENTE, R. A., AND ALMEIDA AREIAS, P. M. Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 53*, 7 (2002), 1721–1750.

[29] CHEE, C. Y., TONG, L., AND STEVEN, G. P. A review on the modelling of piezoelectric sensors and actuators incorporated in intelligent structures. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures 9*, 1 (1998), 3–19.

[30] CHEE, C. Y., TONG, L., AND STEVEN, G. P. A mixed model for composite beams with piezoelectric actuators and sensors. *Smart Materials and Structures 8*, 3 (1999), 417.

[31] CHOPRA, I. Review of state of art of smart structures and integrated systems. *AIAA journal 40*, 11 (2002), 2145–2187.

[32] COOK, R. D. On the allman triangle and a related quadrilateral element. *Computers & Structures 22*, 6 (1986), 1065–1067.

[33] COOK, R. D. Further development of a three-node triangular shell element. *International journal for numerical methods in engineering 36*, 8 (1993), 1413–1425.

[34] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., AND WITT, R. J. *Concepts and applications of finite element analysis*, vol. 4. Wiley New York, 1974.

[35] CRISFIELD, M. A., REMMERS, J. J., VERHOOSEL, C. V., ET AL. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons, 2012.

[36] DE BORST, R., CRISFIELD, M. A., REMMERS, J. J., AND VERHOOSEL, C. V. *Nichtlineare Finite-Elemente-Analyse von FestkÃķrpern und Strukturen*. John Wiley & Sons, 2014.

[37] DOHERTY, W. P., WILSON, E. L., AND TAYLOR, R. L. *Stress analysis of axi-symmetric solids utilizing higher-order quadrilateral finite elements*. University of California, Structural Engineering Laboratory, 1969.

[38] ERIKSSON, A. On a thin shell element for non-linear analysis, based on the isoparametric concept. *Computers & structures 42*, 6 (1992), 927–939.

[39] FELIPPA, C., AND MILITELLO, C. Membrane triangles with corner drilling freedoms-ii. the andes element. *Finite Elements in Analysis and Design 12*, 3-4 (1992), 189–201.

[40] FELIPPA, C. A. Parametrized multifield variational principles in elasticity: I. mixed functionals. *Communications in Applied Numerical Methods 5*, 2 (1989), 79–88.

[41] FELIPPA, C. A. A systematic approach to the element-independent corotational dynamics of finite elements. Tech. rep., Technical Report CU-CAS-00-03, Center for Aerospace Structures, 2000.

[42] FELIPPA, C. A. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192*, 16 (2003), 2125–2168.

[43] FELIPPA, C. A., AND ALEXANDER, S. Membrane triangles with corner drilling freedoms-iii. implementation and performance evaluation. *Finite Elements in Analysis and Design 12*, 3-4 (1992), 203–239.

[44] FELIPPA, C. A., AND HAUGEN, B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194*, 21-24 (2005), 2285–2335.

[45] FELIPPA, C. A., AND MILITELLO, C. Membrane triangles with corner drilling freedoms-ii. the andes element. *Finite Elements in Analysis and Design 12*, 3-4 (1992), 189–201.

[46] GALL, M. Experimentelle und numerische untersuchungen zur lebensdauer von flächigen piezokeramischen sensor–/aktor–modulen.

[47] GOPINATHAN, S. V., VARADAN, V. V., AND VARADAN, V. K. A review and critique of theories for piezoelectric laminates. *Smart Materials and Structures 9*, 1 (2000), 24.

[48] GUPTA, V. K., SESHU, P., AND ISSAC, K. K. Finite element and experimental investigation of piezoelectric actuated smart shells. *Aiaa Journal 42*, 10 (2004), 2112–2123.

[49] HAUSSER, C. *Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke*. na, 1996.

[50] HWANG, W.-S., AND PARK, H. C. Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators. *AIAA journal 31*, 5 (1993), 930–937.

[51] IBRAHIMBEGOVIĆ, A., FREY, F., AND KOŽAR, I. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 38*, 21 (1995), 3653–3673.

[52] IKEDA, T. *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford university press, 1996.

[53] IZZUDDIN, B., AND LIANG, Y. Bisector and zero-macrospin co-rotational systems for shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 105*, 4 (2016), 286–320.

[54] JUSTIN, K., HEOW-PUEH, L., AND KURICHI, K. *Recent Advances In Computational Science And Engineering - Proceedings Of The International Conference On Scientific And Engineering Computation (Ic-sec) 2002*. World Scientific Publishing Company, 2002.

[55] KAISER, C. *Elastische Kopplungen in aktiven und passiven Laminaten sowie dünnwandigen Faserverbundbalken*. Herbert Utz Verlag, 2000.

[56] KLINKEL, S., AND WAGNER, W. A piezoelectric solid shell element based on a mixed variational formulation for geometrically linear and nonlinear applications. *Computers & structures 86*, 1-2 (2008), 38–46.

[57] KNIGHT, N. Raasch challenge for shell elements. *AIAA journal 35*, 2 (1997), 375–381.

[58] KO, Y., LEE, Y., LEE, P.-S., AND BATHE, K.-J. Performance of the mitc3+ and mitc4+ shell elements in widely-used benchmark problems. *Computers & Structures 193* (2017), 187–206.

[59] KOSCHNICK, F. *Geometrische Locking-Effekte bei finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*. PhD thesis, Technische Universität München, 2004.

[60] KOSCHNICK, F. *Geometrische Lockingeffekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*. Shaker, 2004.

[61] KULIKOV, G., AND PLOTNIKOVA, S. Non-linear strain–displacement equations exactly representing large rigid-body motions. part i timoshenko–mindlin shell theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192*, 7-8 (2003), 851–875.

[62] LAMMERING, R. The application of a finite shell element for composites containing piezo-electric polymers in vibration control. *Computers & Structures 41*, 5 (1991), 1101–1109.

[63] LAMMERING, R., JIA, J., AND ROGERS, C. Optimal placement of piezoelectric actuators in adaptive truss structures. *Journal of sound and vibration 171*, 1 (1994), 67–85.

[64] LAMMERING, R., AND MESECKE-RISCHMANN, S. Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells. *Smart Materials and Structures 12*, 6 (2003), 904.

[65] LEGNER, D. *Finite-Element-Formulierungen mit abgestimmten Approximationsräumen für die Modellierung piezoelektrischer Stab- und Schalenstrukturen*. dissertation, Karlsruher Instituts für Technologie, 2011.

[66] LEGNER, D., KLINKEL, S., AND WAGNER, W. An advanced finite element formulation for piezoelectric shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 95*, 11 (2013), 901–927.

[67] LI, Z., ZHENG, T., VU-QUOC, L., AND IZZUDDIN, B. A 4-node co-rotational quadrilateral composite shell element. *International Journal of Structural Stability and Dynamics 16*, 09 (2016), 1550053.

[68] LIANG, Y. Nonlinear analysis of composite shells with application to glass structures.

[69] LOVE, A. E. H. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A 179* (1888), 491–546.

[70] MACKERLE, J. Smart materials and structures-a finite element approach-an addendum: a bibliography (1997–2002). *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering 11*, 5 (2003), 707.

[71] MACNEAL, R. H. A simple quadrilateral shell element. *Computers & Structures 8*, 2 (1978), 175–183.

[72] MACNEAL, R. H., AND HARDER, R. L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite elements in analysis and design 1*, 1 (1985), 3–20.

[73] MANTARI, J., AND SOARES, C. G. Generalized layerwise hsdt and finite element formulation for symmetric laminated and sandwich composite plates. *Composite Structures 105* (2013), 319–331.

[74] MARINKOVIC, D. *A new finite composite shell element for piezoelectric active structures*. PhD thesis, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2007.

[75] MARINKOVIĆ, D., KÖPPE, H., AND GABBERT, U. Numerically efficient finite element formulation for modeling active composite laminates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures 13*, 5 (2006), 379–392.

[76] MARINKOVIĆ, D., KÖPPE, H., AND GABBERT, U. Accurate modeling of the electric field within piezoelectric layers for active composite structures. *Journal of intelligent material systems and structures 18*, 5 (2007), 503–513.

[77] MARINKOVIĆ, D., KÖPPE, H., AND GABBERT, U. Degenerated shell element for geometrically nonlinear analysis of thin-walled piezoelectric active structures. *Smart Materials and Structures 17*, 1 (2008), 015030.

[78] MARINKOVIĆ, D., AND RAMA, G. Co-rotational shell element for numerical analysis of laminated piezoelectric composite structures. *Composites Part B: Engineering 125* (2017), 144–156.

[79] MARINKOVIC, D., ZEHN, M., AND MARINKOVIC, Z. Finite element formulations for effective computations of geometrically nonlinear deformations. *Advances in Engineering Software 50* (2012), 3–11.

[80] MERESSI, T., AND PADEN, B. Buckling control of a flexible beam using piezoelectric actuators. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics 16*, 5 (1993), 977–980.

[81] MESECKE-RISCHMANN, S. Modellierung von flachen piezoelektrischen schalen mit zuverlässigen finiten elementen.

[82] MINDLIN, R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. appl. Mech. 18* (1951), 31.

[83] MOITA, J. M. S., SOARES, C. M. M., AND SOARES, C. A. M. Geometrically non-linear analysis of composite structures with integrated piezoelectric sensors and actuators. *Composite structures 57*, 1-4 (2002), 253–261.

[84] NESTOROVIĆ, T., MARINKOVIĆ, D., CHANDRASHEKAR, G., MARINKOVIĆ, Z., AND TRAJKOV, M. Implementation of a user defined piezoelectric shell element for analysis of active structures. *Finite Elements in Analysis and Design 52* (2012), 11–22.

[85] NESTOROVIĆ, T., SHABADI, S., MARINKOVIĆ, D., AND TRAJKOV, M. Modeling of piezoelectric smart structures by implementation of a user defined shell finite element. *Facta universitatis-series: Mechanical Engineering 11*, 1 (2013), 1–12.

[86] NGUYEN-THOI, T., BUI-XUAN, T., PHUNG-VAN, P., NGUYEN-XUAN, H., AND NGO-THANH, P. Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by cs-fem-dsg3 using triangular elements. *Computers & structures 125* (2013), 100–113.

[87] NIU, W. *Development and applications of geometrically nonlinear piezoelectric shell elements*. dissertation, The University of Nebraska - Lincoln, 2017.

[88] NOUR-OMID, B., AND RANKIN, C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 93*, 3 (1991), 353–384.

[89] PACOSTE, C. Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses. *Computer methods in applied mechanics and engineering 156*, 1-4 (1998), 75–110.

[90] PARK, K., AND STANLEY, G. A curved c0 shell element based on assumed natural-coordinate strains. *Journal of Applied Mechanics 53*, 2 (1986), 278–290.

[91] PHUNG-VAN, P., DE LORENZIS, L., THAI, C. H., ABDEL-WAHAB, M., AND NGUYEN-XUAN, H. Analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using higher-order shear deformation theory and isogeometric finite elements. *Computational Materials Science 96* (2015), 495–505.

[92] PHUNG-VAN, P., NGUYEN-THOI, T., LE-DINH, T., AND NGUYEN-XUAN, H. Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap method (cs-fem-dsg3). *Smart Materials and Structures 22*, 9 (2013), 095026.

[93] PRATHAP, G. *General Shell Elements*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1993, pp. 337–361.

[94] RAMA, G., MARINKOVIC, D., AND ZEHN, M. Piezoelectric co-rotational 3-node shell element. *American Journal of Engineering and Applied Sciences 4* (2016), 902–912.

[95] RAMA, G., MARINKOVIC, D., AND ZEHN, M. Linear shell elements for active piezoelectric laminates. *Smart Struct Syst 20*, 6 (2017), 729–737.

[96] RAMA, G., MARINKOVIĆ, D., AND ZEHN, M. Efficient three-node finite shell element for linear and geometrically nonlinear analyses of piezoelectric laminated structures. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures 29*, 3 (2018), 345–357.

[97] RAMA, G., MARINKOVIC, D., AND ZEHN, M. High performance 3-node shell element for linear and geometrically nonlinear analysis of composite laminates. *Composites Part B: Engineering 151* (2018), 118–126.

[98] RAMA, G., MARINKOVIC, D., AND ZEHN, M. A three-node shell element based on the discrete shear gap and assumed natural deviatoric strain approaches. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 40*, 7 (2018), 356.

[99] RANKIN, C. Applicaton of linear finite elements to finite strain using corotation. In *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 14th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 7th* (2006), p. 1751.

[100] RANKIN, C., AND BROGAN, F. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. *Journal of pressure vessel technology 108*, 2 (1986), 165–174.

[101] RANKIN, C., AND NOUR-OMID, B. The use of projectors to improve finite element performance. In *Computational Structural Mechanics & Fluid Dynamics*. Elsevier, 1988, pp. 257–267.

[102] RAY, M., BHATTACHARYA, R., AND SAMANTA, B. Exact solutions for static analysis of intelligent structures. *AIAA journal 31*, 9 (1993), 1684–1691.

[103] REDDY, J. On refined computational models of composite laminates. *International Journal for numerical methods in engineering 27*, 2 (1989), 361–382.

[104] ROHWER, K. Simulation of fiber composites: An assessment. In *Adaptive, tolerant and efficient composite structures*. Springer, 2013, pp. 131–153.

[105] ROLFES, R., AND ROHWER, K. Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 40*, 1 (1997), 51–60.

[106] SARAVANOS, D. A. Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures. *AIAA journal 35*, 8 (1997), 1327–1333.

[107] SARAVANOS, D. A., HEYLIGER, P. R., AND HOPKINS, D. A. Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. *International Journal of Solids and Structures 34*, 3 (1997), 359–378.

[108] SCHÜRMANN, H. *Konstruieren Mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. VDI-Buch. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[109] SCHWAAB, H. *Nichtlineare Modellierung von Ferroelektrika unter Berücksichtigung der elektrischen Leitfähigkeit*, vol. 5. KIT Scientific Publishing, 2014.

[110] SEIDE, P., AND CHAUDHURI, R. A. Triangular finite element for analysis of thick laminated shells. *International journal for numerical methods in engineering 24*, 8 (1987), 1563–1579.

[111] SHEN, J. Y., AND SHARPE, JR, L. A finite element model for the aeroelasticity analysis of hypersonic panels, part ii: Determination of flutter boundary. In *Engineering, Construction, and Operations in Space V*. 1996, pp. 1148–1154.

[112] SHIN, C. M., AND LEE, B. C. Development of a strain-smoothed three-node triangular flat shell element with drilling degrees of freedom. *Finite Elements in Analysis and Design 86* (2014), 71–80.

[113] SIMO, J., FOX, D., AND RIFAI, M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part ii: The linear theory; computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 73*, 1 (1989), 53–92.

[114] SIMO, J. C., AND RIFAI, M. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International journal for numerical methods in engineering 29*, 8 (1990), 1595–1638.

[115] STEIN, E. *Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau: Berichte zum Schlußkolloquium des gleichnamigen DFG-Schwerpunktprogramms am 2./3. März 1989 in Hannover*. Springer Science & Business Media, 2012.

[116] SURANA, K. S. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 19*, 4 (1983), 581–615.

[117] TAN, X., AND VU-QUOC, L. Optimal solid shell element for large deformable composite structures with piezoelectric layers and active vibration control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 64*, 15 (2005), 1981–2013.

[118] TANG, Y. Q., ZHOU, Z. H., AND CHAN, S. A simplified co-rotational method for quadrilateral shell elements in geometrically nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 112*, 11 (2017), 1519–1538.

[119] TIERSTEN, H. F. *Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations Piezoelectric Plates*. Springer, 2013.

[120] TURNER, M. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *journal of the Aeronautical Sciences 23*, 9 (1956), 805–823.

[121] TZOU, H., AND YE, R. Analysis of piezoelastic structures with laminated piezoelectric triangle shell elements. *AIAA journal 34*, 1 (1996), 110–115.

[122] WAGNER, M. Lineare und nichtlineare fem. *Lineare und nichtlineare FEM, ISBN 978-3-658-17865-9. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2017* (2017).

[123] WAGNER, W., AND GRUTTMANN, F. A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 64*, 5 (2005), 635–666.

[124] WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *International Journal of Solids and Structures 5*, 2 (1969), 117–153.

[125] WINKLER, R., AND PLAKOMYTIS, D. A new shell finite elemen with drilling degrees of freedom and its relation to existing formulations. In *ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* (Crete Island, Greece, 2016), pp. 5–10.

[126] YANG, J. Equations for thick elastic plates with partially electroded piezoelectric actuators and higher order electric fields. *Smart materials and structures 8*, 1 (1999), 73.

[127] YEOM, C., AND LEE, S. An assumed strain finite element model for large deflection composite shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 28*, 8 (1989), 1749–1768.

[128] ZEHN, M., AND MARINKOVIC, D. Some advanced structural design solutions in the field of transportation. In *The fifth international conference transport and logistics (til2014)* (Nis, Serbia, 2014), pp. 9–14.

[129] ZHANG, S. *Nonlinear FE Simulation and Active Vibration Control of Piezoelectric Laminated Thin-Walled Smart Structures*. PhD thesis, Hochschulbibliothek der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2014.

[130] ZHANG, S., SCHMIDT, R., AND QIN, X. Active vibration control of piezoelectric bonded smart structures using pid algorithm. *Chinese Journal of Aeronautics 28*, 1 (2015), 305–313.

[131] ZHOU, Y., AND TIERSTEN, H. An elastic analysis of laminated composite plates in cylindrical bending due to piezoelectric actuators. *Smart Materials and Structures 3*, 3 (1994), 255.

[132] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., AND TAYLOR, R. L. *The finite element method: solid mechanics*, vol. 2. Butterworth-heinemann, 2000.