

# Theoretische Untersuchung des Wärme- und Stoffübergangs am laminaren Fallfilm

vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Martin Mittermaier  
geb. in  
Rosenheim

von der Fakultät III - Prozesswissenschaften  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften  
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Prof. e.h. Dr. h.c. George Tsatsaronis

Gutachterin: Prof. Dr.-Ing. Andrea Luke

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Felix Ziegler

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 20. April 2018

Berlin 2018

# Danksagungen

Ich bedanke mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Felix Ziegler für seine inspirierende Betreuung und die mir entgegengebrachte Geduld. Ebenso möchte ich mich bei Frau Prof. Dr.-Ing. Andrea Luke für die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken.

Für die angenehme Zusammenarbeit bedanke ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen des Fachbereichs für Maschinen- und Energieanlagentechnik. Besonderer Dank gilt meinen Bürokolleginnen und -kollegen Anna Jahnke, Sarah Hunt und Christian Fleßner.

Ich möchte mich ebenfalls bei den Bereichsverantwortlichen Annett Kühn, Jan Albers und Stefan Petersen für die Unterstützung und Zusammenarbeit bedanken.

Für die zahlreichen inhaltlichen Diskussionen, die auf spannende Weise zur Verbesserung dieser Arbeit beitrugen, möchte ich mich besonders bei Dr.-Ing. Thomas Meyer bedanken.

Für das Lösen zahlreicher verwaltungstechnischer Herausforderungen bedanke ich mich ganz herzlich bei Doreen Oehme. Bei Katrin Fischer bedanke ich mich für das Lektorieren der vorliegenden Arbeit.

Mein Dank gilt ebenfalls meinen Diplomanden, Master- und Bachelorarbeitern Adrian Fabarius, Heiner Janßen, Florian Lederle, Philipp Schulze und Philip Sterchele.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern und meiner Schwester, die mich auf meinem Weg immer unterstützt haben.

# Abstract

In this thesis a model is presented describing a laminar film flow over a vertical isothermal plate while heat and mass transfer is occurring (see section 3). Most common assumptions, such as constant property data and constant film thickness, have been cancelled. The hydrodynamic model results in longitudinal and transversal velocity components and their evolution in the entrance region. Heat and mass transfer occurs simultaneously and is modelled with respect to uni-directional diffusion, release of differential heat of solution as well as heat flow due to interdiffusion.

A simplified model (equimolar diffusion, constant film thickness and stream-wise velocity) is described in section 3.6. For validation, the results of this is compared to an established analytical model with comparable assumptions in section 4.1. For a sub-cooled inlet temperature equal to the wall temperature a very good agreement is observed. However, due to instabilities in the analytical model a deviation occurs when the inlet temperature is different to the wall temperature.

In section 4.2 the influence of different hydrodynamic conditions at the inlet of the flow is illustrated and discussed using a fully developed velocity profile (Nusselt flow) and a plug flow at the inlet for comparison. Even if a Nusselt profile is assumed, it develops further since mass is absorbed or desorbed. It is found that the onset of absorption occurs at shorter flow length when applying a plug flow at the inlet. If the film is initially in equilibrium, this results in a 9.3% increase in absorbed mass over a length of  $0.03\text{ m}$  as compared with the Nusselt flow.

A fluid with a viscosity five times the one of lithium bromide solution but sharing comparable properties apart from that, leads to lower overall heat and mass transfer rates. If the respective fluids are saturated at the inlet, the accumulated mass flux absorbed by lithium bromide solution is 2.2 times higher than the one absorbed by a high viscous fluid. However, when a plug flow is applied and the fluid is sub-cooled, ab initio the absorbed mass flux is slightly higher for a high viscous fluid. Assuming a sub-cooling of  $3\text{ K}$  at the inlet, lithium bromide solution now only performs around 11% better as compared with a high viscous fluid over the considered length of  $0.03\text{ m}$ . This finding suggests that in applications with high viscous working fluid horizontal

tubes with a small diameter may increase the performance of the absorber and desorber respectively.

In section 4.4 the influence of uni-directional diffusion is shown by a comparison between the results of two models. The detailed one accounts for uni-directional diffusion along with a transversal velocity component and a variable film thickness. In the simplified model, equimolar is assumed with no transversal velocity component and consequently a constant film thickness. It is found that the disregard of uni-directional diffusion leads to an underestimation between 24% and 28% regarding mass flux absorbed.

The link for downloading the source code may be found in the appendix section A.3. The publications associated with this thesis can be found in the appendix section B.

Absorption, Desorption, Heat transfer, Mass transfer, Film flow, Laminar film, Flat plate, Isothermal plate, Modelling, Hydrodynamics.

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Modell vorgestellt, das eine laminare Filmströmung über eine vertikale isotherme Platte bei gleichzeitig stattfindendem Wärme- und Stoffaustausch beschreibt (siehe Abschnitt 3). Häufig getroffene Annahmen wie konstante Stoffdaten und konstante Filmdicke wurden aufgehoben. Das hydrodynamische Modell gibt longitudinale und transversale Geschwindigkeitskomponenten und ihre Entwicklung im Eintrittsbereich wieder. Wärme- und Stoffaustausch erfolgen gleichzeitig und sind unter Berücksichtigung einseitiger Diffusion, Freisetzung von differenzieller Lösungswärme sowie des Enthalpiestroms durch Diffusion modelliert.

Ein vereinfachtes Modell (äquimolare Diffusion, konstante Filmdicke und Strömungsgeschwindigkeit) wird in Abschnitt 3.6 beschrieben. Zur Validierung werden die Ergebnisse aus diesem in Abschnitt 4.1 mit einem in der Literatur etablierten analytischen Modell unter gleichen Annahmen verglichen. Für eine unterkühlte Eintrittstemperatur, die der Wandtemperatur entspricht, wird eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt. Auf Grund von Instabilitäten des analytischen Modells treten jedoch Abweichungen auf, sobald die Eintrittstemperatur sich von der Wandtemperatur unterscheidet.

In Abschnitt 4.2 wird der Einfluss verschiedener hydrodynamischer Bedingungen am Einlass der Strömung dargestellt. Es erfolgt ein Vergleich zwischen einem voll entwickelten Geschwindigkeitsprofil (Nußelt-Profil) und einer Kolbenströmung am Einlass. Wird von einem Nußelt-Profil ausgegangen, entwickelt es sich über die Lauflänge weiter, da Masse absorbiert oder desorbiert wird. Bei Annahme einer Kolbenströmung am Eintritt wird festgestellt, dass der Beginn der Absorption bereits bei kürzeren Lauflängen stattfindet. Ist der Film anfänglich im Gleichgewicht, führt dies im Vergleich zu einem Nußelt-Profil am Eintritt zu einem Anstieg von 9,3 % an absorbierter Masse über eine Länge von 0,03 m.

Eine fünffache Erhöhung der Viskosität gegenüber Lithiumbromidlösung bei ansonsten vergleichbaren Eigenschaften führt zu geringeren Wärme- und Stoffübertragungsraten. Bei Phasengleichgewichtsbedingungen am Eintritt ist die absorbierte Massenstromdichte bei Lithiumbromidlösung 2,2 mal höher als die eines hochviskosen Fluids. Unter Anwendung einer Kolbenströmung und einer

unterkühlten Flüssigkeitsaufgabe ist die absorbierte Massenstromdichte ab initio jedoch bei einer hochviskosen Flüssigkeit etwas höher. Bei einer Unterkühlung von 3 K am Einlass absorbiert die Lithiumbromidlösung jetzt nur etwa 11 % besser im Vergleich zu einem hochviskosen Fluid über die betrachtete Länge von 0,03 m. Dieses Ergebnis legt nahe, dass in technischen Anwendungen mit hoch viskosen Fluiden kleinere Durchmesser der eingesetzten horizontalen Rohre die Leistung des Absorbers bzw. Desorbers erhöhen können.

In Abschnitt 4.4 wird der Einfluss der einseitigen Diffusion anhand eines Ergebnisvergleichs zweier Modelle untersucht. Im detaillierten Modell wird die einseitige Diffusion in Verbindung mit einer transversalen Geschwindigkeitskomponente und einer variablen Filmdicke berücksichtigt. Im vereinfachten Modell wird äquimolare Diffusion angenommen. Als Konsequenz daraus wird die transversale Geschwindigkeitskomponente vernachlässigt und folglich die Filmdicke konstant angenommen. Durch den Vergleich wird festgestellt, dass eine Vernachlässigung der einseitigen Diffusion zu einer Unterschätzung des absorbierten Massenstroms zwischen 24 % und 28 % führt.

Die Adresse zum Herunterladen des Quellcodes ist im Anhang A.3 aufgeführt. Die zu dieser Arbeit gehörenden Veröffentlichungen sind im Anhang B zu finden.

Absorption, Desorption, Wärmeübergang, Stoffübergang, Filmströmung, Laminarer Film, Ebene Platte, Isotherme Platte, Modell, Hydrodynamik.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung und Ziel der Arbeit</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen und Stand der Forschung</b>	<b>3</b>
2.1 Hydrodynamik . . . . .	3
2.1.1 Strömungsformen von Fallfilmen . . . . .	5
2.1.2 Voll entwickelte laminare Filmströmung . . . . .	8
2.1.3 Grenzschichtgleichung . . . . .	11
2.2 Wärme- und Stoffübergang bei der Absorption . . . . .	17
2.2.1 Wärmeleitung und Konvektion . . . . .	18
2.2.2 Mischungs- und Exzessgrößen . . . . .	21
2.2.3 Stoffaustausch und Diffusion . . . . .	26
2.2.4 Absorption im Fallfilm . . . . .	27
2.2.5 Überlagerte Diffusion und Konvektion . . . . .	31
2.2.6 Stoffübergangstheorien . . . . .	33
2.3 Literaturüberblick zur Absorption in Fallfilmen . . . . .	38
2.3.1 Laminarer Fallfilm und sich entwickelndes Geschwindigkeitsprofil . . . . .	43
2.3.2 Nicht-laminarer Fallfilm . . . . .	45
2.4 Finite-Differenzen-Methode . . . . .	47
<b>3 Modellbildung</b>	<b>53</b>
3.1 Massenbilanz . . . . .	56
3.2 Impulsbilanz . . . . .	57

3.3	Komponentenbilanz . . . . .	59
3.4	Energiebilanz . . . . .	63
3.4.1	Konvektiver Wärmetransport . . . . .	66
3.4.2	Wärmeleitung in transversale Richtung . . . . .	67
3.4.3	Enthalpiestrom aufgrund von Diffusion . . . . .	67
3.4.4	Resultierende Energiebilanz . . . . .	68
3.5	Bedingungen an der an der Phasengrenzfläche . . . . .	71
3.5.1	Integrale Massenbilanz . . . . .	71
3.5.2	An der Oberfläche absorbierte Massenstromdichte . . . . .	72
3.5.3	An der Oberfläche freiwerdende Energiedichte . . . . .	73
3.6	Vereinfachtes Modell . . . . .	74
3.6.1	Massen- und Impulsbilanz . . . . .	75
3.6.2	Komponentenbilanz . . . . .	76
3.6.3	Energiebilanz . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>79</b>
4.1	Ergebnisse mit vereinfachter Hydrodynamik . . . . .	80
4.1.1	Aufgabenstellung und Ziel . . . . .	80
4.1.2	Untersuchungen und Ergebnisse . . . . .	81
4.1.3	Zusammenfassung . . . . .	82
4.2	Ergebnisse mit Grenzschichtgleichung zur Beschreibung der Hydrodynamik . . . . .	99
4.2.1	Aufgabenstellung und Ziel . . . . .	99
4.2.2	Untersuchungen und Ergebnisse . . . . .	99
4.2.3	Zusammenfassung . . . . .	103
4.3	Einfluss einer Veränderung des Diffusionskoeffizienten . . . . .	125
4.3.1	Aufgabenstellung und Ziel . . . . .	125
4.3.2	Untersuchungen und Ergebnisse . . . . .	125
4.3.3	Zusammenfassung . . . . .	127
4.4	Einfluss der einseitigen Diffusion . . . . .	137
4.4.1	Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht . . . . .	137
4.4.2	Unterkühlte Lösungsaufgabe . . . . .	139
4.5	Vergleich von Absorption und Desorption . . . . .	142
4.5.1	Aufgabenstellung und Ziel . . . . .	142
4.5.2	Untersuchungen und Ergebnisse . . . . .	142

---

4.5.3 Zusammenfassung . . . . .	145
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>159</b>
<b>A Anhang</b>	<b>167</b>
A.1 Spaltströmung am Einlass . . . . .	167
A.2 Vergleich der Filmdicken . . . . .	170
A.3 Quellcode des Programms . . . . .	171
<b>B Publikationsübersicht</b>	<b>173</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>175</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Unterschiedliche Strömungsformen bei Fallfilmen aus Al-Sibai (2004) . . . . .	6
2.2	Schematische Darstellung des voll entwickelten Geschwindigkeitsprofils . . . . .	9
2.3	Schematische Darstellung der Grenzschichtströmung entlang einer ebenen Wand . . . . .	11
2.4	Zusammenhang zwischen der integralen Exzessenthalpie $\Delta h^E$ und partiellen spezifischen Mischungsenthalpien $\Delta \bar{h}_1$ und $\Delta \bar{h}_2$ (nach Bošnjaković u. Knoche (1996)) . . . . .	24
2.5	Verlauf der Enthalpie $h$ eines binären Gemisches und zugehörige partielle spezifische Enthalpien $\bar{h}_1$ und $\bar{h}_2$ im $h, \xi$ -Diagramm (nach Bošnjaković u. Knoche (1996)) . . . . .	25
2.6	Diffusion in einem Fallfilm (nach Cussler (2009)) . . . . .	29
2.7	Schematische Darstellung der Stoffübertragung durch die Filmtheorie (nach Kraume (2012)) . . . . .	34
2.8	Schematische Darstellung der Stoffübertragung durch Oberflächenenergieerneuerungstheorie (nach Cussler (2009)) . . . . .	37
2.9	Schematische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils am Anfang (Anlauf) . . . . .	44
2.10	Darstellung der Gitterpunkte und Bezeichnung der Indizes für ein nicht-äquidistantes Gitter . . . . .	51
3.1	Modellvorstellung der Vorgänge im laminaren Fallfilm . . . . .	54
3.2	Bilanzraum für Komponentenbilanz . . . . .	60
3.3	Bilanzraum zur Energiebilanz . . . . .	63
3.4	Bilanzraum für Energiebilanz (detailliert) . . . . .	65

3.5	Modellvorstellung der Vorgänge im laminaren Fallfilm bei vereinfachter Hydrodynamik . . . . .	75
4.1	Verschiedene hydrodynamische Randbedingungen (aus Mittermaier u. Ziegler (2017)) . . . . .	101
4.2	Absorbierte Massenstromdichte $\dot{m}_A$ über Lauflänge $x$ für LiBr-Lösung und Fluid mit erhöhter Viskosität (aus Mittermaier u. Ziegler (2017)) . . . . .	103
4.3	Absorbierte Massenstromdichte $\dot{m}_A$ über Lauflänge $x$ für Diffusionskoeffizient $D$ von LiBr-Lösung und Fluid mit verringertem Diffusionskoeffizienten (gepunkteter Verlauf) (aus Mittermaier u. Ziegler (2016)) . . . . .	126
4.4	Temperaturprofil $T$ über transversale Koordinate $y$ für verringerten Diffusionskoeffizienten $D$ für $x = 1,4 \cdot 10^{-3}m$ und $x = 2,6 \cdot 10^{-3}m$ (aus Mittermaier u. Ziegler (2016)) . . . . .	127
4.5	Lokal absorbierte Massenstromdichte $\dot{m}_A$ bei Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht über Lauflänge $x$ für Modell 1 und Modell 2 . . . . .	138
4.6	Lokal absorbierte Massenstromdichte $\dot{m}_A$ bei unterkühlter Lösungsaufgabe über Lauflänge $x$ für Modell 1 und Modell 2 . . . . .	140
4.7	Transversale Geschwindigkeiten $v$ über die Filmdicke $\delta$ bei unterkühlter Lösungsaufgabe bei einer Lauflänge $x = 1 \cdot 10^{-5}m$ für Modell 1 mit Kolbenströmung (gepunktete Linie) und Nußelt-Profil (durchgezogene Linie) am Eintritt . . . . .	141
4.8	Vergleich zwischen absorbierten und desorbierten Massenstromdichten für typische Bedingungen in einstufigen Absorptionskälteanlagen (aus Mittermaier u. Ziegler (2015)) . . . . .	144
4.9	Vergleich zwischen absorbierten und desorbierten Massenstromdichten für typische Bedingungen in einstufigen Wärmetransformatoren (aus Mittermaier u. Ziegler (2015)) . . . . .	145
A.1	Schematische Darstellung einer Spaltströmung als hydrodynamische Anfangsbedingung . . . . .	167
A.2	Longitudinale Geschwindigkeit $u$ ausgehend von einer Spaltströmung am Eintritt für verschiedene Lauflängen $x$ . . . . .	169

---

A.3	Film Dicke $\delta$ bei unterkühlter Lösungsaufgabe über die Lauflänge $x$ für Modell 1 mit Kolbenströmung (gepunktete Linie) und Nußelt-Profil (durchgezogene Linie) am Eintritt . . . . .	170
A.4	Film Dicke $\delta$ ab einer Lauflänge von $x = 10^{-4}m$ bei unterkühlter Lösungsaufgabe über die Lauflänge $x$ für Modell 1 mit Kolbenströmung (gepunktete Linie) und Nußelt-Profil (durchgezogene Linie) . . . . .	171



# Symbolverzeichnis

$\dot{M}$	Massenstrom	$kg/s$
$\dot{m}$	Massenstromdichte	$kg/(m^2 \cdot s)$
$\dot{q}$	Wärmestromdichte	$W/m^2$
$\dot{r}$	Stoffstromquellendichte z. B. aufgrund chem. Reaktion	$kg/(s \cdot m^3)$
$\dot{V}$	Volumenstrom	$m^3/s$
$\dot{w}$	Wärmequellendichte z. B. aufgrund chem. Reaktion	$W/m^3$
$\hat{v}$	spezifisches Volumen = $\rho^{-1}$	$m^3/kg$
$\bar{h}$	Partiell spezifische Enthalpie	$J/kg$
$\overline{Nu}$	Mittlere Nußelt-Zahl nach Gl. (2.37)	
$\bar{u}$	Mittlere longitudinale Geschwindigkeit	$m/s$
$\bar{v}$	Transformierte Geschwindigkeit nach Gl. (2.26)	
$\bar{y}$	Transformierte Koordinate nach Gl. (2.26)	
$B$	Aufgabebreite	$m$
$c_p$	Wärmekapazität	$J/(kg \cdot K)$
$D$	Diffusionskoeffizient	$m^2/s$
$d$	Charakteristische Länge, z. B. $L$ oder $\delta$	$m$
$E$	Verteilung der Verweilzeit	
$F_i$	= $(\rho \cdot \sigma^3)/(g\mu^4)$ , Filmkennzahl	
$g$	Erdbeschleunigung	$m/s^2$
$H$	Enthalpie	$J$
$h$	Enthalpie	$J/kg$
$h^E$	Exzessenthalpie	$J/kg$
$h_{01}$	Spezifische Enthalpie des Reinstoffs 1	$J/kg$

$h_{02}$	Spezifische Enthalpie des Reinstoffs 2	J/kg
$j$	Diffusionsstromdichte	kg/(m <sup>2</sup> · s)
$L$	Länge	m
$Le$	= $\lambda/(D \cdot c_p \cdot \rho)$ , Lewis-Zahl	
$N$	Molmenge	mol
$Nu$	= $(\alpha \cdot L)/\lambda$ , Nußelt-Zahl	
$p$	Druck	Pa
$Pe$	= $(u \cdot d)/D$ , Péclet-Zahl für Stoffübergang	
$Q$	Wärmemenge	J
$Re$	= $(\rho \cdot u \cdot d)/\mu$ , Reynolds-Zahl	
$Sh$	= $(\beta \cdot d)/(D \cdot \rho)$ , Sherwood-Zahl	
$T$	Temperatur	K
$u$	Longitudinale Geschwindigkeit	m/s
$v$	Transversale Geschwindigkeit	m/s
$x$	Longitudinale Koordinate, in Strömungsrichtung	m
$y$	Transversale Koordinate, in Filmdickenrichtung	m
$Z$	Allgemeine partielle Zustandsgröße	

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Lokaler Wärmeübergangskoeffizient	W/(m <sup>2</sup> K)
$\beta$	Lokaler Stoffübergangskoeffizient	kg/(m <sup>2</sup> s)
$\Delta \bar{h}$	Partiell spezifische Mischungsenthalpie	J/kg
$\Delta h_{sor}$	Absorptions- oder Desorptionswärme	J/kg
$\delta$	Filmdicke	m
$\dot{\Gamma}$	Berieselungsdichte	kg/(ms)
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	W/(m · K)
$\mathcal{O}$	Abbruchfehler bei der Diskretisierung	
$\mu$	Dynamische Viskosität	Pa · s
$\nu$	Kinematische Viskosität	m <sup>2</sup> /s
$\bar{\alpha}$	Mittlerer Wärmeübergangskoeffizient nach Gl. (2.37)	W/(m <sup>2</sup> K)

---

$\rho$	Dichte	$kg/m^3$
$\sigma$	Oberflächenspannung	N/m
$\tau$	Scherspannung	$N/m^2$
$\tau'$	Verweilzeit	s
$\theta^+$	Dimensionslose Temperatur nach Gl. (4.1)	
$\varepsilon$	Neigungswinkel	°
$\xi$	Massenanteil	$kg/kg$

**Indizes**

*	Dimensionslos
$\delta$	Auf die Filmdicke bezogen
$\infty$	Ungehinderte Stelle im Freistrom
$B$	Auf die Aufgabebreite bezogen
$c$	Komponente z. B. Wasser oder LiBr
$d$	Diffusion, diffusiv
$i$	Index in x-Richtung
$j$	Index in y-Richtung
$k$	Konvektion, konvektiv
$L$	Auf die Länge bezogen
0	Einlassbedingung
$if$	Phasengrenzfläche
$A$	Absorbat, z.B flüssiges Wasser
$eq$	Phasengleichgewicht
$S$	Absorbens, z.B. Lithiumbromidlösung
$V$	Dampf, z.B. Wasserdampf
$w$	Wand



# Kapitel 1

## Einleitung und Ziel der Arbeit

In vielen technischen Anlagen finden Absorptions- sowie Desorptionsprozesse von Dämpfen statt. In Erdgastrocknungsanlagen wird beispielsweise der Taupunkt des Produktgases durch Absorption in Glykol eingestellt. Dabei ist der Übergang des Wasserdampfanteils aus der Gas- in die Flüssigphase von primärem Interesse. Eine weitere Anwendung entsteht durch den Bedarf nach Kälte- und Klimatisierungsanwendungen. In Absorptionskälteanlagen wird die notwendige Verdichtung des Kältemitteldampfes im Kaltdampfprozess durch Ab- und Desorption auf verschiedenen Druckniveaus erreicht. In vielen Anlagen wird dazu eine Mischung aus einem stark hygroskopischen Salz (Lithiumbromid) und Wasser (als Lösungsmittel) eingesetzt. Diese Lösung befindet sich in Kontakt mit der Wasserdampfatmosfera, welche für den Kaltdampfprozess benötigt wird. Unabhängig vom Zweck der Anwendungen tritt in vielen Fällen Wärme- und Stofftransport kombiniert auf.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Wärme- und Stofftransport in Fallfilmen. Häufig werden in Absorptionskälteanlagen sogenannte Fallfilm- oder Rieselfilmwärmeübertrager mit horizontalen Wärmeübertragerrohren eingesetzt. Diese technische Ausführung hat eine komplexe Strömungsform an der Außenfläche der Horizontalrohre zur Folge, welche durch das Ablösen und Auftreffen von Lösungstropfen entsteht. Jedoch bietet der laminare Fallfilm als Grenzfall für die Wärme- und Stoffübertragung wertvolle Untersuchungsmöglichkeiten. Um den Wärme- und Stofftransport unter kontrollierten Bedingungen experimentell untersuchen zu können, sollen am Institut für Energietechnik zunächst im laminaren Fallfilm Messungen lokaler Temperaturen

in Filmdickenrichtung durchgeführt werden. Das in dieser Arbeit entwickelte Modell dient zum Vergleich der Messergebnisse und enthält deshalb zum Experiment vergleichbare Randbedingungen. Dadurch ist es zukünftig möglich, die Simulationsergebnisse mit detaillierten experimentellen Messungen zu vergleichen, wie sie nur unter kontrollierten Bedingungen im laminaren Fallfilm möglich sind und damit neue Erkenntnisse zu gewinnen. Ziel dieser Arbeit ist es, durch die Modellierung und theoretische Untersuchung des Wärme- und Stoffübergangs am laminaren Fallfilm zu diesem Verständnis beizutragen.

Darüber hinaus kann mit Hilfe des in Kapitel 3 beschriebenen physikalischen Modells das Absorptionsverhalten auch bei veränderten Stoffeigenschaften der absorbierenden Lösung bestimmt werden. Dadurch gewonnene Erkenntnisse über den kombiniert auftretenden Wärme- und Stofftransport sind die Voraussetzung für eine weitere Verbesserung und Anpassung der technischen Anlagen.

In dieser Arbeit werden zunächst die Grundlagen behandelt, anschließend das verwendete physikalische Modell beschrieben und schließlich die Ergebnisse der Simulationen in Form veröffentlichter Artikel dargestellt. Ein Vergleich zweier Modelle bezüglich des Einflusses der einseitigen Diffusion bei der Absorption im Fallfilm wird in einem zusätzlichen Abschnitt (Kapitel 4.4 ab Seite 137) diskutiert.

## Kapitel 2

# Grundlagen und Stand der Forschung

Das vorliegende Kapitel ist in mehrere Teilbereiche gegliedert:

- Hydrodynamik
- Wärme- und Stoffübergang
- Literaturüberblick
- Finite-Differenzen-Methode

Für die Beschreibung der ablaufenden Phänomene ist es nötig, die Theorie der Hydrodynamik sowie die des Wärme- und Stoffübergangs zu betrachten, um im Kapitel 3 entsprechende Bilanzgleichungen aufzustellen. Diese Teilbereiche werden nachfolgend dargestellt und es werden Vereinfachungen eingeführt. Da es zwischen Wärme- und Stofftransport Ähnlichkeiten gibt, werden diese beiden Themen in einem gemeinsamen Unterkapitel erläutert. Zu den allgemeinen Erläuterungen werden jeweils Arbeiten ausgewählter Autoren und deren Beitrag besprochen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden kurz die Besonderheiten der eingesetzten Finiten-Differenzen-Methode dargestellt.

### 2.1 Hydrodynamik

Die allgemeine Beschreibung von Strömungen kann durch die Navier-Stokes-Gleichungen erfolgen. Diese Gleichungen wurden Anfang des 19. Jahrhunderts

von Saint-Venant, Navier und Stokes unabhängig voneinander entwickelt. Obwohl sie demnach schon seit geraumer Zeit bekannt sind, existiert keine geschlossene Lösung dafür, weshalb bisher mit mehr oder weniger umfangreichen Vereinfachungen gearbeitet wurde und die Gleichungen numerisch gelöst bzw. angenähert werden<sup>1</sup>. Unter gewissen Voraussetzungen kann die Beschreibung der Hydrodynamik vereinfacht werden, was eine wie in Unterkapitel 2.1.2 beschrieben analytische Lösung möglich macht.

Die Herleitung der Navier-Stokes'schen Gleichungen erfolgt aus einer differentiellen Impulsbilanz unter Verwendung eines geeigneten Ansatzes zur Beschreibung des Spannungszustands des Fluids und ist detailliert beispielsweise in Fox u. a. (2011) und Schlichting u. Gersten (2006) beschrieben. Für eine dreidimensionale Strömung unter Annahme eines inkompressiblen Fluids mit konstanter Viskosität  $\mu$  und Dichte  $\rho$  lauten die Navier-Stokes'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned} \quad (2.1)$$

Wie erwähnt, sind die Dichte  $\rho$  und Viskosität  $\mu$  in den Gleichungen (2.1) als konstant angenommen, jedoch können beide Stoffparameter beispielsweise von der Zusammensetzung eines Gemisches abhängen. Die Gleichungen können anschaulich als Bilanz der auftretenden Druck-, Volumen-, und Reibungskräfte verstanden werden.

Für den stationären Fließprozess entfallen auf der linken Seite die Terme  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Die verbleibenden Terme sind nur Funktionen des Ortes. Durch die Nutzung von Symmetrien kann ein Problem oftmals durch ein zweidimensionales Modell hinreichend genau beschrieben werden, wodurch eine Gleichung in 2.1 entfällt. Durch die Annahme von mechanischem Gleichgewicht können die Druckgradi-

---

<sup>1</sup>Der mathematische Beweis einer Lösung wurde bereits im Mai 2000 vom Clay Mathematics Institute zum Millenium Preis Problem erklärt. ([www.claymath.org](http://www.claymath.org))

enten  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$  und  $\frac{\partial p}{\partial z}$  entfallen. Jedoch sind Druckgradienten notwendig, wenn Schub- und Scherspannungen innerhalb oder am Rand der Strömung sowie zusätzliche dissipative Effekte innerhalb des Fluides berücksichtigt werden sollen.

### 2.1.1 Strömungsformen von Fallfilmen

Eine offene Strömung entlang einer festen Fläche wird als Filmströmung bezeichnet. Ist die Strömung schwerkraftgetrieben, so spricht man auch von einem Fallfilm. Wird die Flüssigkeit auf übereinander angeordnete, horizontale Rohre aufgegeben, wird die Strömungsform oft auch als Rieselfilm bezeichnet.

Grundsätzlich können verschiedene Strömungsformen bei Fallfilmen unterschieden werden. Da die Filmströmung eine freie Phasengrenzfläche aufweist, entstehen an dieser häufig Instabilitäten in Form von Wellen. Die Art und Form dieser ist abhängig vom aufgegebenen Massenstrom  $\dot{M}$  bzw. des Massenstroms bezogen auf die Aufgabebreite, der sogenannten Berieselungsdichte  $\dot{\Gamma}$  des Films. Die Definition der Berieselungsdichte  $\dot{\Gamma}$  ist in Gleichung (2.12) auf Seite 10 gegeben. Die Reynoldszahl kann als Maß zur Charakterisierung der Strömungsform verwendet werden.

Bei der Charakterisierung der Strömung im Fallfilm gibt es unterschiedliche Weisen, die Reynoldszahl zu formulieren. Die gängigste Formulierung ist vergleichbar mit der eines geschlossenen Kanals und entspricht dem üblichen Beziehen der Trägheitskraft auf die Scherkraft.

$$Re = \frac{\rho \cdot \bar{u} \cdot d}{\mu} = \frac{u \cdot d}{\nu} \quad \text{mit} \quad \mu = \nu \cdot \rho \quad (2.2)$$

Für die Strömung eines flüssigen Fallfilms über eine ebene Platte wird als charakteristische Länge  $d$  die Filmdicke  $\delta$  verwendet (Brauer, 1956) (Kraume, 2012). Es wird deshalb  $Re$  folgendermaßen definiert:

$$Re \equiv \frac{\rho \cdot \bar{u} \cdot \delta}{\mu} = \frac{\dot{\Gamma}}{\mu} \quad (2.3)$$

Die Geschwindigkeit  $\bar{u}$  ist nicht die lokale Strömungsgeschwindigkeit, sondern eine repräsentative Geschwindigkeit der Strömung. Oftmals wird die mittlere Geschwindigkeit über den Strömungsquerschnitt (siehe Gleichung 2.14) verwendet.

Es kann jedoch auch die Lauflänge  $L$  des Films für die Definition der Reynoldszahl verwendet werden (VDI-Wärmeatlas, 2013). Zur Unterscheidung ist diese Definition mit  $Re_L$  bezeichnet; sie wird in den Gleichungen (2.20) und (2.39) verwendet.

Für kleine Berieselungsdichten entsteht (Benetzung vorausgesetzt) ein glatter Film, der mit zunehmendem aufgegebenen Massenstrom und zunehmender Lauflänge instabiler und welliger wird. Al-Sibai (2004) hat diese Entwicklung experimentell untersucht (Abbildung 2.1). In dieser Arbeit wird die Reynoldszahl wie in Gleichung (2.3) eingeführt gebildet.

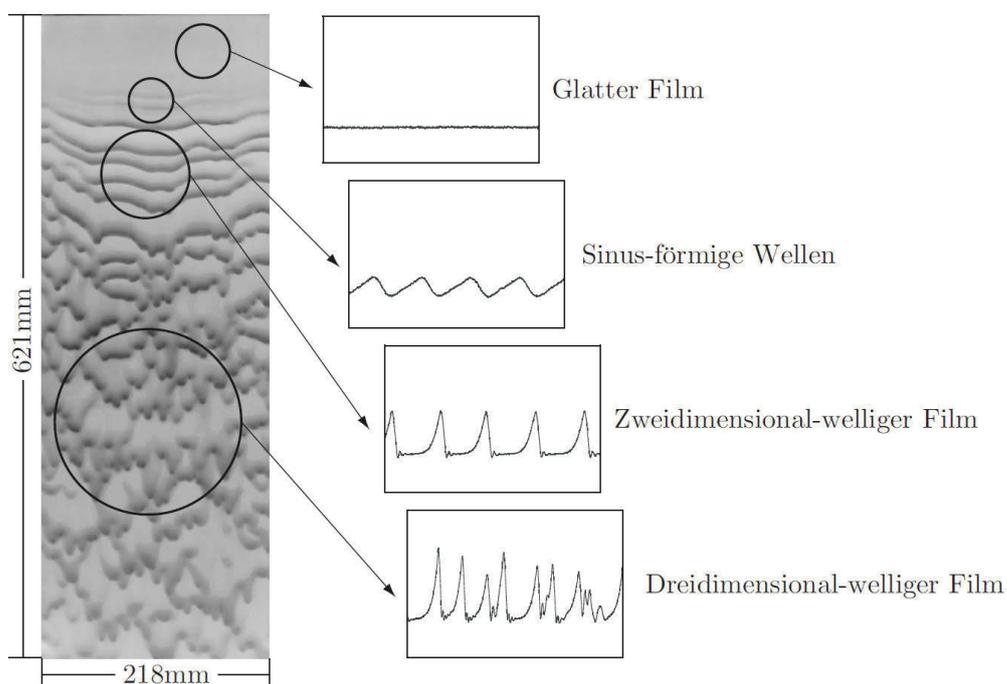


Abbildung 2.1: Unterschiedliche Strömungsformen bei Fallfilmen aus Al-Sibai (2004)

Brauer (1971) unterscheidet drei Strömungsregime anhand der Reynoldszahl. Streng laminar ist danach ein Film bis zu  $Re = 4$ . Im anschließenden Bereich von  $4 < Re < 400$  erstreckt sich ein Übergangsbereich, der auch als quasi laminarer Film bezeichnet wird. In diesem treten meist an der Oberfläche sinusförmige Wellen auf und es kommt nicht oder lediglich zu geringer Quervermischung im Film. Im Bereich  $Re > 400$  spricht man vom voll turbulenten Film. Die Wellen sind nun dreidimensional und nicht mehr von regelmäßiger Frequenz.

In Brauer (1971) wird weiterhin berichtet, dass für unterschiedliche Fluide verschiedenes Verhalten beobachtet wurde und demnach die Reynoldszahl alleine nicht ausreicht, um den Übergangsbereich exakt einzugrenzen. Aus diesem Grund fügten Ishigai u. a. (1972) zwei weitere Übergangsbereiche hinzu und teilten die Strömungscharakteristik damit in fünf Regionen ein. Da neben der Viskosität auch die Oberflächenspannung einen entscheidenden Einfluss auf die Wellenbildung hat, wird diese ebenfalls zur Charakterisierung herangezogen. Dass die Reynoldszahl alleine nicht ausreicht, um den Übergangsbereich exakt einzugrenzen, wird zum Beispiel auch in Christen (2010) deutlich. Dort wird der laminare Bereich bis zu einem Wert von  $Re = 16$  angegeben.

Ishigai u. a. (1972) verwenden deshalb neben der Reynoldszahl (vgl. Gleichung (2.3)) die Filmkennzahl<sup>2</sup>  $F_i$  zur Charakterisierung der Bereiche. Die Filmkennzahl lässt sich aus Stoffdaten und der Erdbeschleunigung berechnen.

$$F_i = \frac{\rho\sigma^3}{g\mu^4} \quad (2.4)$$

Die Unterteilung der Strömungsformen geben Ishigai u. a. (1972) folgendermaßen an:

Strömungsform	Gültigkeitsbereich
laminare Strömung	$Re_\delta \leq 0,47F_i^{0,1}$
erster Übergangsbereich	$0,47F_i^{0,1} < Re_\delta \leq 2,2F_i^{0,1}$
stabil welliger Film	$2,2F_i^{0,1} < Re_\delta \leq 75$
zweiter Übergangsbereich	$75 < Re_\delta \leq 400$
voll turbulent	$Re_\delta > 400$

Tabelle 2.1: Strömungsformen von Fallfilmen nach Ishigai u. a. (1972)

<sup>2</sup>Die Filmkennzahl ist der Kehrwert der Kapitza-Zahl  $Ka$ , wie sie beispielsweise im VDI-Wärmeatlas (2013) definiert ist.

In Al-Sibai (2004) konnten ähnliche Bereiche wie in Tabelle 2.1 identifiziert werden. Paschke (2011) stellt die Ergebnisse von Ishigai u. a. (1972) und Al-Sibai (2004) gegenüber und führt die auftretenden Abweichungen auf Unterschiede in den Versuchsaufbauten, den eingesetzten Stoffen und nicht zuletzt in den individuellen Bewertungen zurück. Ishigai u. a. (1972) geben für voll turbulente Strömungen einen festen Zahlenwert ( $Re_\delta > 400$ , vgl. Tabelle 2.1) zur Abgrenzung des Bereichs an. Al-Sibai (2004) zieht in seiner Arbeit auch zur Abgrenzung des voll turbulenten Bereichs die Filmkennzahl  $F_i$  nach Gleichung (2.4) heran.

### 2.1.2 Voll entwickelte laminare Filmströmung

Bereits Nußelt (1916) hat eine Beschreibung der Hydrodynamik eines laminaren Fallfilms entwickelt, um den Wärmeübergang bei der Filmkondensation an senkrechten Wänden und horizontalen Rohren zu berechnen. Im Folgenden wird diese in verkürzter und vereinfachter Form dargestellt.

Betrachtet man einen laminaren Fallfilm in genügender Entfernung vom Einlauf, so ergibt sich ein voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil wie in Abbildung 2.2 links dargestellt. Der Film fließt durch die Schwerkraft nach unten, die im Gleichgewicht mit den auftretenden Scherkräften steht.

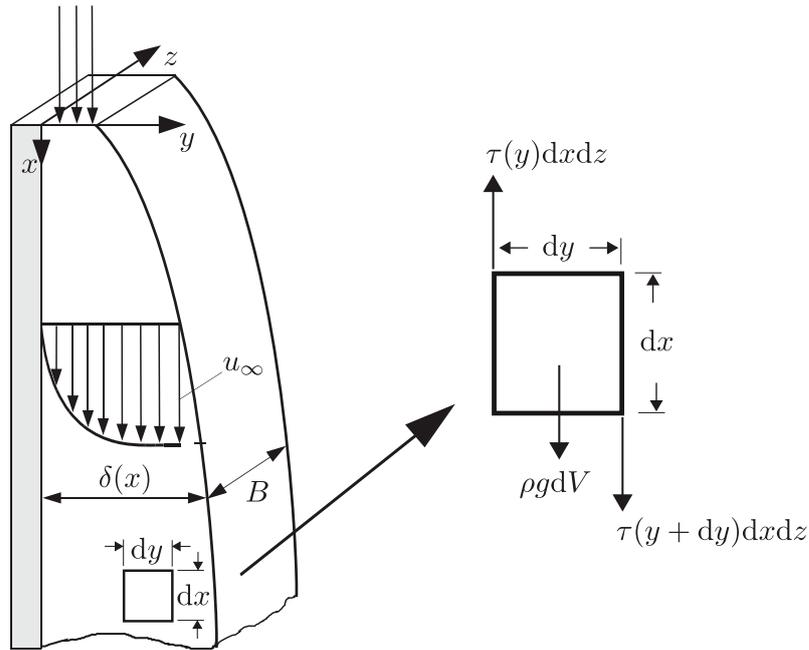


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des voll entwickelten Geschwindigkeitsprofils

Für ein differentielles Volumen- bzw. Flächenelement kann eine einfache Kräftebilanz aufgestellt werden (siehe Abbildung 2.2 rechts). Unter Vernachlässigung eventuell auftretender Druckunterschiede im Fluid bzw. im umgebenden Dampfraum kann für die auftretenden Kräfte einer stationären Strömung unter Annahme konstanter Stoffeigenschaften

$$\rho g dV + \tau(y + dy) dx dz = \tau(y) dx dz \quad (2.5)$$

angesetzt werden.

Wird die Taylorreihe nach dem ersten Glied abgebrochen

$$\tau(y + dy) - \tau(y) = \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \quad (2.6)$$

ergibt sich mit  $dx dy dz = dV$  die Gleichung

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} + \rho g = 0 \quad (2.7)$$

Wird nun ferner von einem Newton'schen Fluid ausgegangen, so ist die Scherspannung direkt proportional zum Geschwindigkeitsgradienten. Abweichende

Verhaltensweisen wie beispielsweise die der dilatanten Flüssigkeiten sind in Fox u. a. (2011) beschrieben.

Mit

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.8)$$

ergibt sich

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g = 0 \quad (2.9)$$

Für die Lösung von Gleichung (2.9) werden zwei Randbedingungen benötigt. Die erste ergibt sich aus der Haftbedingung an der Wand bei  $y = 0$ . Die zweite Randbedingung ergibt sich aus der Annahme, dass die Dampfgeschwindigkeit nicht groß oder die Dichte des Dampfes sehr klein gegenüber derjenigen der Flüssigkeit ist. Da dies in Absorptionssystemen in guter Näherung der Fall ist, kann davon ausgegangen werden, dass die Schubspannungen an der Oberfläche  $y = \delta$  dadurch ebenfalls sehr gering sind. Beide Randbedingungen lauten folglich

$$\begin{aligned} u(y=0) &= 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nach Integration der Gleichung (2.9) unter Verwendung der Randbedingungen (2.10) ergibt sich für das Geschwindigkeitsprofil eine Parabel:

$$u(y) = \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 \left( \frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{2\delta^2} \right) \quad (2.11)$$

Gleichung (2.11) findet im Kapitel 3 als Anfangsbedingung Verwendung.

Für weitere Betrachtungen ist die Berieselungsdichte  $\dot{\Gamma}$  von Bedeutung. Zur Bildung dieser wird der aufgegebene Massenstrom  $\dot{M}$  auf eine Länge bzw. Breite  $B$  bezogen. Unter Verwendung der Dichte  $\rho$  ergibt sich diese Größe ferner aus der Integration der Gleichung (2.11) über die Filmdicke  $\delta$ .

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{M}}{B} = \frac{\dot{V}\rho}{B} = \rho \int_0^\delta u(y) dy = \frac{\rho^2 g \delta^3}{\mu} \frac{1}{3} \quad (2.12)$$

Damit ergibt sich die Filmdicke eines voll entwickelten Fallfilms zu

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\dot{\Gamma}\mu}{\rho^2 g}} \quad (2.13)$$

Die über die Filmdicke gemittelte Geschwindigkeit des Fallfilms beträgt

$$\bar{u} = \frac{\dot{\Gamma}}{\rho\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u(y) dy = \frac{\rho g \delta^2}{\mu 3} \quad (2.14)$$

Die maximale Geschwindigkeit an der Filmoberfläche  $\delta$  ergibt sich zu

$$u(\delta) = u_{max} = \frac{\rho g \delta^2}{\mu 2} = \frac{3}{2}\bar{u} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\Gamma}}{\delta\rho} \quad (2.15)$$

### 2.1.3 Grenzschichtgleichung

Ein bedeutender Beitrag zur Beschreibung von Strömungen wurde durch Prandtl (1904) geliefert. Prandtl behandelte die Phänomene in wandnahen Grenzschichten turbulenter Strömungen, demzufolge von Strömungen mit hohen Reynoldszahlen. In wie weit dieses Konzept für die Beschreibung eines laminaren Fallfilms über eine ebene Platte genutzt werden kann, soll im Folgenden dargestellt werden.

Prandtl betrachtete zur Entwicklung der Grenzschichtgleichung zunächst eine *horizontale* Strömung über eine ebene Platte vergleichbar Abbildung 2.3.

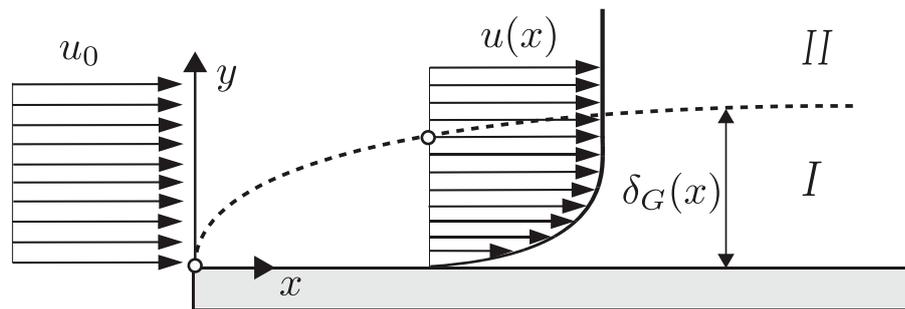


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der Grenzschichtströmung entlang einer ebenen Wand

Gedanklich wird die Strömung dazu in zwei Bereiche geteilt. Im wandnahen Bereich I muss dabei auf Grund des großen Geschwindigkeitsgradienten

$\partial u/\partial y$  auch bei geringen Viskositäten  $\mu$  die Reibung in der Flüssigkeit berücksichtigt werden. Für diesem Bereich **I** sollen die Grenzschichtgleichungen gelten. Im wandfernen Bereich **II** wird eine reibungsfreie Potentialströmung angenommen. Innerhalb der Potentialströmung treten definitionsgemäß keine Scherspannungen auf.

Im Bereich des Anlaufs kann weiterhin angenommen werden, dass die Potentialströmung des Bereichs **II** von der Grenzschicht nahezu unbeeinflusst ist. Anschaulich beschrieben erfasst die Grenzschicht immer mehr der Potentialströmung des Bereichs **II**. Für die Grenzschichtdicke  $\delta_G$  findet man in Schlichting u. Gersten (2006, S. 29) die Näherungsformel

$$\delta_G(x) = 5 \sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho \cdot u_\infty}} \quad (2.16)$$

Bei Betrachtung einer inkompressiblen und *offenen* Strömung über eine *vertikale* Wand werden die Scherspannungen wie bei Nußelt rein durch die Volumenkraft (Gewichtskraft, z.B.  $\rho g_x$ ) und die Haftbedingung an der Wand hervorgerufen. Durch die freie Oberfläche einer offenen Strömung kann bei geringen Dichten oder Geschwindigkeiten des umgebenden Gases bzw. Dampfes wie in einer Potentialströmung davon ausgegangen werden, dass die auftretenden Scherkräfte vernachlässigbar klein sind. Damit ist das Vorgehen Prandtls auch auf eine offene Filmströmung übertragbar.

### Das Vorgehen Prandtls

Bei der Entwicklung der Grenzschichtgleichung wurde vereinfacht wie folgt vorgegangen:

- Annahme konstanter Stoffwerte
- Annahme einer stationären Strömung
- Einführung dimensionsloser Größen
- Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Terme

Durch die Betrachtung einer horizontalen Strömung kann die Volumenkraft, ausgedrückt durch die Schwerkraft  $\rho g$  in Gleichung (2.1), in der Grenzschicht zunächst vernachlässigt werden. Ferner kann durch die Annahme konstanter

Stoffwerte durch die Dichte  $\rho$  geteilt werden. Die stationäre Strömung kann dadurch mit folgenden Gleichungen (2.17) beschrieben werden

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Zusätzlich wird durch die Kontinuitätsgleichung die Massenerhaltung innerhalb der Strömung ausgedrückt. Durch die Annahme konstanter Stoffwerte kann auch hier durch die Dichte  $\rho$  geteilt werden. Die Massenerhaltung wird durch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

beschrieben.

Zur Einführung der dimensionslosen Schreibweise wird eine Variablentransformation vorgenommen und einige Größen werden auf eine charakteristische Abmessung, z.B. die Dicke der Strömung oder die gesamte Lauflänge  $L$  bezogen. Die Geschwindigkeiten werden mit der Anströmgeschwindigkeit  $u_0$  (siehe auch Abbildung 2.3) entdimensioniert. Insgesamt werden dadurch die folgenden, mit \* gekennzeichneten, neuen Variablen eingeführt:

$$\begin{aligned} x &= x^* \cdot L; \quad y = y^* \cdot L \\ u &= u^* \cdot u_0; \quad v = v^* \cdot u_0 \\ p &= p^* \cdot \rho u_0^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Generell ist die Grenzschicht um so dünner, je kleiner die Viskosität  $\mu$  ist, bzw. je größer die Strömungsgeschwindigkeit  $u$  ist (Schlichting u. Gersten, 2006). Aus Gleichung (2.16) auf Seite 12 wird weiterhin ersichtlich, dass die Grenzschichtdicke proportional zur Wurzel der Viskosität  $\mu$  ist.

Werden als Bezugsgrößen für die dimensionslosen Variablen die Anströmgeschwindigkeit  $u_0$  und die Lauflänge  $L$  verwendet, kann aus Gleichung (2.16) die dimensionslose Beziehung

$$\delta^* = \frac{\delta_G}{L} = 5 \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \quad \text{mit} \quad Re_L = \frac{\rho u_0 L}{\mu} = \frac{u_0 L}{\nu} \quad (2.20)$$

eingeführt werden.

Werden die bezogenen Größen der Gleichungen (2.19) in die Gleichungen (2.17) eingesetzt ergeben sich die dimensionslosen Darstellungen. Unter den folgenden Gleichungen (2.21), (2.22) und (2.23) sind jeweils die Größenordnungen für den Grenzprozeß  $Re_L \rightarrow \infty$  aufgeführt, wie er beispielsweise in Schlichting u. Gersten (2006) aufgeführt ist. Auf die Vorgehensweise und Betrachtung aus Schlichting u. Gersten (2006) wird im Anschluss weiter eingegangen.

Die Impulsbilanz in longitudinale Richtung (x-Richtung) lautet:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.21)$$

$$1 \quad 1 \quad \delta^* \quad \frac{1}{\delta^*} \quad \delta^{*2} \quad 1 \quad \frac{1}{\delta^{*2}}$$

Die Impulsgleichung in transversale Richtung (y-Richtung) lautet analog:

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re_L} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.22)$$

$$1 \quad \delta^* \quad \delta^* \quad 1 \quad \delta^{*2} \quad \delta^* \quad \frac{1}{\delta^*}$$

Die Kontinuitätsgleichung wird in dimensionsloser Schreibweise zu

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.23)$$

$$1 \quad 1$$

Die Größenordnung der Druckgradienten wird zunächst nicht dargestellt. Auf die Druckverhältnisse in der Grenzschicht wird später eingegangen.

Da in dieser Grenzschicht Reibungskräfte eine wichtige Rolle spielen, dürfen nicht alle Reibungsterme vernachlässigt werden. Mit diesem Wissen werden die einzelnen Terme bezüglich ihrer Größenordnung abgeschätzt. Durch ihre Definition in Gleichungen (2.19) gelten für die Länge  $x^*$  und die Geschwindigkeit  $u^*$  die Größenordnung  $O(1)$ . Dagegen besitzt die Koordinate  $y^*$  die Größenordnung der Grenzschichtdicke  $O(\delta^*)$ . Da die Kontinuitätsgleichung (2.23) auch in der Grenzschicht erfüllt sein soll, folgt daraus für  $v^* = O(\delta^*)$ . Da sich die Entwicklung der Grenzschichtdicke wie die Wurzel aus der Viskosität verhält

(siehe Gleichung 2.20), besitzt die inverse Reynoldszahl die Größenordnung  $O(\delta^{*2})$ . Unter den Gleichungen (2.21) bis (2.23) sind die Größenordnungen  $O$  der einzelnen Terme angegeben.

Eine andere und anschaulichere Argumentation nach Stemmer (2012) lautet: Für sehr große Reynoldszahlen verschwindet der Term  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ , da die Grenzschicht nur noch äußerst langsam wächst. Würde nun der Term  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$  ebenfalls verschwinden, so würden die Eulergleichungen behandelt werden, was nicht das Ziel ist. Verschwände der Term  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$  nicht und die Reynoldszahl wäre von der Ordnung  $O(1)$ , würde der Term  $1/Re \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$  die Gleichung bestimmen und alle anderen Terme wären zu vernachlässigen. In diesem Fall wäre die Lösung der Couette-Strömung erreicht, was ebenfalls nicht das Ziel ist. Demnach muss die Größenordnung des Terms  $O(1/Re \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}})$  gleich 1 sein. Da die Größenordnung des Terms  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} = 1/\delta^{*2}$  ist, muss die Größenordnung der Reynoldszahl ebenfalls  $1/\delta^{*2}$  sein.

Vernachlässigt man nun alle Glieder, die von der Größenordnung  $O(\delta^*)$ ,  $O(\delta^{*2})$  oder  $O(\delta^{*3})$  sind, lassen sich die klassischen Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen darstellen:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.25)$$

Gleichung (2.24) ist noch von der Reynoldszahl  $Re_L$  abhängig. Um diese Abhängigkeit zu eliminieren, werden die Koordinate  $y^*$  und die Geschwindigkeitskomponente  $v^*$  einer weiteren Transformation unterzogen, welche auch als Grenzschichttransformation bezeichnet wird (Schlichting u. Gersten, 2006). Diese lautet:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y^* \sqrt{Re_L} \sim \frac{y^*}{\delta^*} \\ \bar{v} &= v^* \sqrt{Re_L} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die neuen Variablen sind von der Größenordnung  $O(1)$  und damit vergleichbar mit  $x^*$  und  $u^*$ . Führt man diese Variablen  $\bar{y}$  und  $\bar{v}$  in die Gleichungen (2.24) und (2.25) ein, wird die ganze Strömung in wandnormaler Richtung um den

Faktor  $\sqrt{Re_L}$  gestreckt, der wiederum von der Lauflänge abhängt.

Aus Gleichung (2.24) folgt:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\bar{v}}{\sqrt{Re_L}} \frac{\partial u^*}{\partial (\bar{y}/\sqrt{Re_L})} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial (\bar{y}/\sqrt{Re_L})^2} \quad (2.27)$$

Damit ergibt sich für die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen, zu denen auch die Kontinuitätsgleichung gehört:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.29)$$

Für den Druck in wandnormaler Richtung wird angenommen, dass er innerhalb der Grenzschicht durch den Druck der Potentialströmung außerhalb dieser bestimmt wird. Es wird auch davon gesprochen, dass die Außenströmung der Grenzschicht den Druck „aufprägt“ (Stemmer, 2012). Damit gilt in Gleichung (2.22)

$$-\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.30)$$

Für den Druck in Strömungsrichtung wird ebenfalls der Druckverlauf der Außenströmung angenommen. Für diesen gilt nach Stemmer (2012)

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \rho u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} \quad (2.31)$$

Im später verwendeten Modell (Kapitel 3) wird eine isobare Strömung angenommen, was zur Vereinfachung  $-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0$  führt. Diese Annahme ist dadurch gerechtfertigt, dass außerhalb der Filmströmung eine fast ruhende Wasserdampfatosphäre mit geringer Dichte vorliegt.

Für die Herleitung der Grenzschichtgleichungen war die Analyse der Größenordnungen in dimensionsloser Darstellung notwendig. Die Grenzschichttransformation kann jedoch rückgängig gemacht werden, um zur dimensionsbehafteten Beschreibung zurückzukehren. Dies erscheint zunächst als wenig sinnvoll, jedoch soll im später folgenden Modell eine Änderung der Stoffwerte und damit der Dichte  $\rho$  und Viskosität  $\mu$  berücksichtigt werden.

Für einen stationären Fließprozess eines dünnen Films über eine mit dem Winkel  $\varepsilon$  geneigte Platte muss zusätzlich die Gewichtskraft bzw. Erdbeschleunigung berücksichtigt werden. Unter konstantem Druck kann unter Berücksichtigung der Erdbeschleunigung für Gleichung (2.28) in dimensionsbehafteter Form

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \cdot \sin \varepsilon \quad (2.32)$$

geschrieben werden.

Gleichung (2.32) enthält auf der linken Seite die longitudinale Geschwindigkeitskomponente  $u$  sowie die transversale Komponente  $v$ . Die rechte Seite enthält neben dem Reibungsterm die resultierende Volumenkraft  $\rho g \cdot \sin \varepsilon$ . Durch die Annahme eines über die Lauflänge konstanten Drucks konnte der Gradient  $\partial p^* / \partial x^*$  entfallen. Neben der Kontinuitätsgleichung findet Gleichung (2.32) im Kapitel 3 Verwendung, um die Hydrodynamik inklusive einer transversalen Geschwindigkeitskomponente zu beschreiben.

## 2.2 Wärme- und Stoffübergang bei der Absorption

Die Ursache der Übertragung von Wärme durch Wärmeleitung ist die Schwingung von Atomen bzw. Molekülen. Ähnlich dazu wird die Stoffübertragung durch Diffusion durch eine zufällige Molekülbewegung verursacht. Der Prozess der Diffusion läuft meist deutlich langsamer ab als der Prozess der Wärmeleitung. Die Diffusionsgeschwindigkeiten reichen von  $5 \text{ cm/min}$  bei Gasen, über ca.  $0,05 \text{ cm/min}$  in Flüssigkeiten bis ca.  $0,00001 \text{ cm/min}$  in Feststoffen (Cussler, 2009).

Die Grundlagen zur Wärmeübertragung sind beispielsweise in Incropera u. Dewitt (2002) und Polifke u. Kopitz (2009) ausführlich beschrieben. Bei der Absorption von Dämpfen und Gasen in einem flüssigen Fallfilm spielt die Wärmeübertragung durch Strahlung eine untergeordnete Rolle, da die Temperaturen meist in einem moderaten Bereich bleiben. Daher werden in den folgenden Unterkapiteln lediglich die theoretischen Grundlagen für diffusiven und molekularen Transport beschrieben, welche zur späteren Modellierung relevant sind. Die daraus folgenden Modellgleichungen zur Beschreibung des Wärme-

und Stoffübergangs bei der Absorption werden im Kapitel 3 ab Seite 53 ausführlich hergeleitet.

### 2.2.1 Wärmeleitung und Konvektion

Die durch Wärmeleitung transportierte Wärmestromdichte  $\dot{q}$  wird durch das Fourier'sche Gesetz beschrieben. Für die x-Koordinate lautet dieses beispielsweise:

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.33)$$

Die Wärmestromdichte ist eine gerichtete Größe und steht als solche mit dem Speichervermögen eines Mediums sowie eventuell auftretender Wärmequellen  $\dot{\omega}$  in Verbindung. Für das Temperaturfeld in einem kartesischen Koordinatensystem für ein ruhendes Medium kann die erstmals von Fourier hergeleitete partielle Differentialgleichung gefunden werden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\omega} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.34)$$

Die Gleichung beschreibt, abhängig vom Speichervermögen  $\rho c_p$  und dem Auftreten innerer Quellen  $\dot{\omega}$ , beispielsweise auf Grund von Dissipation oder einer chemischen Reaktion, die Temperaturverteilung innerhalb eines Volumens.

Wird eine konstante Temperatur an einem Rand des Volumens  $V$  angenommen, spricht man von einer Randbedingung erster Art (auch Dirichlet Randbedingung genannt). Wird die Wärmestromdichte und damit bei konstanter Wärmeleitfähigkeit auch der Temperaturgradient als konstant betrachtet, so spricht man von einer Randbedingung zweiter Art (Neumann Randbedingung). Wird dagegen der konvektive Wärmeübergang an ein strömendes Medium beschrieben, so kann dafür mit Hilfe des Newton'schen Ansatzes an der Grenzfläche die Randbedingung dritter Art (Robin Randbedingung) aufgestellt werden. Dazu wird die Definition des Wärmeübergangs  $\alpha$  mit dem Gradienten zur Beschreibung des Wärmestroms  $\dot{q}$  in Beziehung gesetzt. Bei konstanter Wärmeleitfähigkeit lautet diese Beziehung beispielsweise für die x-Koordinate

$$\alpha (T_W - T_\infty) = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_W \quad (2.35)$$

Der konvektive Wärmeübergang in ein strömendes Medium kann prinzipiell auf zwei unterschiedliche Arten beschrieben werden. Da die Gestalt des Geschwindigkeitsfeldes, also die hydrodynamische Grenzschicht, für den konvektiven Wärmeübergang eine maßgebliche Rolle spielt, können für unterschiedliche Geometrien empirische Korrelationen angegeben werden. Diese Korrelationen beschreiben im Allgemeinen die Nußelt-Zahl, welche als dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient folgendermaßen definiert ist:

$$Nu \equiv \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (2.36)$$

Die Nußelt-Zahl kann sowohl zur lokalen Beschreibung des Wärmeübergangs verwendet werden, als auch mit Hilfe eines mittleren Wärmeübergangskoeffizienten  $\bar{\alpha}$  den globalen Wärmeübergang über eine Länge  $L$  beschreiben. Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient  $\bar{\alpha}$  wird dazu wie folgt gebildet:

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx \quad \text{womit} \quad \overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} \quad \text{ist.} \quad (2.37)$$

Für die Strömung längs einer ebenen Platte sind beispielsweise im VDI-Wärmeatlas (2013) im Abschnitt Gd. Korrelationen für die Nußelt-Zahl angegeben. Diese unterscheiden sich zunächst danach, ob eine turbulente oder laminare Strömung vorliegt. Die Reynoldszahl wird für die Verwendung der Korrelationen meist mit der Plattenlänge  $L$  bzw. der lokalen Lauflänge  $x$  gebildet. Entsprechend ergibt sich eine lokale Nußelt-Zahl  $Nu_x$  und eine mittlere Nußelt-Zahl  $Nu_L$  über die gesamte Plattenlänge:

$$Re_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu} \quad (2.38)$$

$$Re_L \equiv \frac{u_\infty L}{\nu} \quad (2.39)$$

Der Index  $\infty$  bezieht sich hierbei auf die ungehinderte Geschwindigkeit des freien Stroms. Für die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte wird näherungsweise ein Mittelwert aus Wandtemperatur am Eintritt  $T_{W,0}$  und Temperatur  $T_\infty$  der Kernströmung bzw. Umgebung genommen. Laut Polifke u. Kopitz (2009) liegt der kritische Bereich der Reynolds-Zahl, gebildet nach Gleichung

chung (2.38) und (2.39), für den laminar/turbulenten Umschlag bei  $3,2 \cdot 10^5 < Re_{krit} < 3 \cdot 10^6$ .

Für die laminare Strömung über eine längs angeströmte Platte gelten gemäß Polifke u. Kopitz (2009) für die Nußelt-Zahl folgende Gleichungen:

$$Nu_x = 0,332 \cdot Re_x^{1/2} Pr^{1/3} f(Pr) \quad (2.40)$$

$$Nu_L = 0,664 \cdot Re_L^{1/2} Pr^{1/3} f(Pr) \quad (2.41)$$

Der Gültigkeitsbereich für die Gleichungen (2.40) und (2.41) ist dabei mit  $10 < Re_x < Re_{krit}$  und  $0,1 < Pr < 1000$  angegeben.

$f(Pr)$  ist eine Korrekturfunktion für die Prandtl-Zahl mit folgenden Werten:

$Pr$	0,01	0,1	0,7	1	10	100	1000
$f(Pr)$	0,72	0,91	0,99	1,0	1,012	1,027	1,058

Außerdem gilt für eine turbulente Strömung über eine ebene Platte im Gültigkeitsbereich  $Re_{krit} < Re_x < 10^7$  und  $0,6 < Pr < 15$  für die lokale Nußelt-Zahl  $Nu_x$ :

$$Nu_x = 0,0296 \cdot Re_x^{0,8} Pr^{1/3} \quad (2.42)$$

Im Gültigkeitsbereich  $10^7 < Re_x < 10^9$  und  $0,6 < Pr < 15$  wird daraus:

$$Nu_x = 0,185 \frac{Re_x Pr^{1/3}}{(\log_{10} Re_x)^{2,584}} \quad (2.43)$$

Für die mittlere Nußelt-Zahl  $Nu_L$  im Gültigkeitsbereich  $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7$  und  $0,6 < Pr < 1000$  (mit laminarem Anlaufbereich) geben Polifke u. Kopitz (2009) an:

$$Nu_L = 0,037 (Re_L^{0,8} - 23100) Pr^{1/3} \quad (2.44)$$

Eine alternative Methode zur Beschreibung des konvektiven Wärmeübergangs ist die Modellierung der Hydrodynamik in Kombination mit der Wärmeübertragung. Dies kann beispielsweise mit Hilfe kommerzieller CFD-Software geschehen. Zur Auflösung des Strömungsverhaltens werden dazu wiederum Modellvorstellungen (Turbulenzmodelle, Large Eddy Simulation etc.) verwendet, auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll.

Bei der Filmströmung über einer ebenen Platte, wie sie in dieser Arbeit betrachtet wird, handelt es sich um eine einfache Strömungsform. Daher wurde die Strömung mit der in Abschnitt 2.1.3 ab Seite 11 vereinfachten Impulsbilanz beschrieben. Die Tatsache, dass Wärme- und Stoffübergang kombiniert stattfinden, führte jedoch dazu, dass keine kommerzielle Software zur Lösung des Problems eingesetzt werden konnte.

### 2.2.2 Mischungs- und Exzessgrößen

Bei einer isothermen und isobaren Mischung zweier Reinstoffe kann die spezifische integrale Mischungswärme bzw. Exzessenthalpie folgendermaßen angegeben werden:

$$\Delta h^E = h - ((1 - \xi) h_{01} + \xi h_{02}) \quad (2.45)$$

$h_{01}$  und  $h_{02}$  sind dabei die Enthalpien der Reinstoffe bei gleicher Temperatur wie die spätere Mischung. Daher wird  $\Delta h^E$  auch spezifisch isotherme Mischungswärme genannt und beschreibt den Unterschied der tatsächlichen, spezifischen Enthalpie der Mischung zur spezifischen Enthalpie der idealen Mischung.

Für die Beschreibung der Eigenschaften von Stoffmischungen sind jedoch oft partielle Zustandsgrößen von Bedeutung. Mit Hilfe dieser lassen sich beispielsweise Exzessvolumina oder Exzessenthalpien ausdrücken. In Stephan u. a. (2010) wird die Einführung partieller molarer Zustandsgrößen basierend auf den einführenden Grundlagen von Lewis u. Randall (1921) beschrieben. Eine beliebige partielle molare Zustandsgröße  $Z_i$  ist definiert durch

$$Z_i = \left( \frac{\partial Z}{\partial N_i} \right)_{T,p,N_{j \neq i}} \quad (2.46)$$

Die intensive Größe  $Z_i$  gibt an, wie sich eine Zustandsgröße durch isotherm-isobare Zugabe von  $dN_i$  Molen der Komponente  $i$  ändert und ist von der Temperatur, dem Druck und der Molmenge abhängig. Multiplikation der Molmengen mit einem Faktor ändert die partielle molare Zustandsgröße nicht, da diese eine intensive Zustandsgröße ist (Stephan u. a., 2010). Die resultierenden Zustandsgrößen werden als partielle spezifische Größen bezeichnet. Von Jernqvist u. Kockum (1996) wurde es beispielsweise auf die massenspezifische

Enthalpie  $h$  angewandt und diese in Anlehnung an die Begriffsdefinition aus Stephan u. a. (2010) partielle massive Enthalpie genannt.

In Bošnjaković u. Knoche (1996) wird dieses Konzept ebenfalls erläutert, allerdings für die Veränderung einer Mischung durch Zugabe einer geringen Masse  $dm_i$ . Besteht ein Gemisch aus lediglich den Komponenten 1 und 2, so kann der Massenanteil  $\xi$  folgendermaßen angegeben werden:

$$\xi = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (2.47)$$

Wird nun eine zusätzliche Masse  $dm_2$  der Komponente 2 der Mischung zugegeben, so ändert sich der Massenanteil  $\xi$  um  $d\xi$ . Durch Differenzieren der Gleichung (2.47) erhält man

$$\frac{d\xi}{dm_2} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1 - \xi}{m_1 + m_2} \quad (2.48)$$

Wie in Bošnjaković u. Knoche (1996) weiter ausgeführt, muss eine Wärmemenge  $dQ$  zu- oder abgeführt werden, um die Temperatur der Mischung konstant zu halten. Diese Wärmemenge  $dQ$  muss bei einem isobaren Mischungsprozess der Differenz der Enthalpien entsprechen:

$$dQ = (m_1 + m_2 + dm_2) h(T, p, \xi + d\xi) - (m_1 + m_2) h(T, p, \xi) - dm_2 h_{02}(T, p) \quad (2.49)$$

Die der Mischung zugeführte Masse  $dm$  sei so gering, dass sich der Massenanteil nur wenig ändert  $|d\xi| \ll \xi$ . Dadurch kann die Taylorreihe zur Beschreibung der Enthalpie  $h(T, p, \xi + d\xi)$  nach dem ersten Glied abgebrochen werden (Bošnjaković u. Knoche, 1996):

$$h(T, p, \xi + d\xi) = h(T, p, \xi) + d\xi \frac{\partial h(T, p, \xi)}{\partial \xi} \quad (2.50)$$

Wird Gleichung (2.50) in Gleichung (2.49) eingesetzt und die Terme kleiner Größenordnung vernachlässigt, so ergibt sich mit Gleichung (2.47) und (2.48) die partielle spezifische Mischungswärme. Da diese Wärme eine Zustandsgröße des Gemisches ist, wird sie auch als partielle spezifische Mischungsenthalpie

$\Delta\bar{h}$  bezeichnet (Bošnjaković u. Knoche, 1996):

$$\Delta\bar{h}_2 = \frac{dQ}{dm_2} = h(T, p, \xi) + (1 - \xi) \frac{\partial h(T, p, \xi)}{\partial \xi} - h_{02}(T, p) \quad (2.51)$$

Wird der Mischungsvorgang durch Zugeben der Komponente 1 durchgeführt, ergibt sich analog zu Gleichung (2.51)

$$\Delta\bar{h}_1 = \frac{dQ}{dm_1} = h(T, p, \xi) - \xi \frac{\partial h(T, p, \xi)}{\partial \xi} - h_{01}(T, p) \quad (2.52)$$

Der Zusammenhang zwischen den partiellen Mischungsenthalpien  $\Delta\bar{h}_c$  der Komponenten  $c$  und der integralen Mischungswärme bzw. spezifischen Exzessenthalpie  $\Delta h^E$  wird deutlich, wenn die Enthalpie des Gemisches (Gleichung (2.45)) in die Gleichungen (2.51) bzw. (2.52) eingesetzt wird.

Es ergibt sich

$$\Delta\bar{h}_2 = \Delta h^E + (1 - \xi) \frac{\partial \Delta h^E}{\partial \xi} \quad (2.53)$$

und analog

$$\Delta\bar{h}_1 = \Delta h^E - \xi \frac{\partial \Delta h^E}{\partial \xi} \quad (2.54)$$

Wird Gleichung (2.54) nach dem Differentialquotienten aufgelöst und in (2.53) eingesetzt, ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen der integralen Exzessenthalpie  $\Delta h^E$  und den partiellen spezifischen Mischungsenthalpien  $\Delta\bar{h}_1$  und  $\Delta\bar{h}_2$ :

$$\Delta h^E = (1 - \xi) \Delta\bar{h}_1 + \xi \Delta\bar{h}_2 \quad (2.55)$$

Die Gleichungen (2.54) und (2.53) können auch einfach grafisch dargestellt werden. Dazu wird zunächst die integrale Exzessenthalpie  $\Delta h^E$  für konstante Werte des Drucks und der Temperatur über den Massenanteil  $\xi$  aufgetragen. Die partiellen spezifischen Mischungsenthalpien werden ermittelt, indem an den Verlauf der integralen Exzessenthalpie an entsprechendem Wert (in Abbildung 2.4 markiert mit A) die Tangente gebildet wird. Die partiellen spezifischen Mischungsenthalpien  $\Delta\bar{h}_1$  und  $\Delta\bar{h}_2$  können an den jeweiligen Ordinaten abgelesen werden.

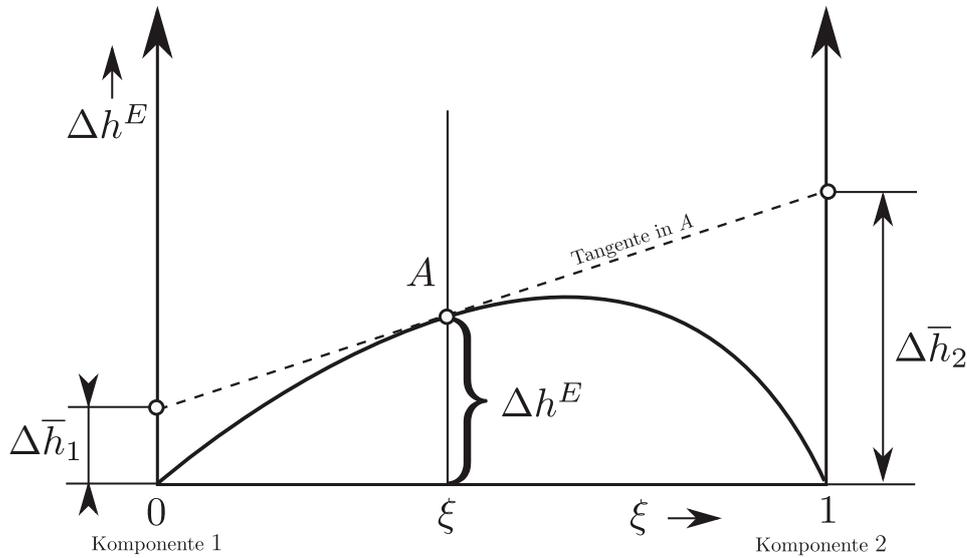


Abbildung 2.4: Zusammenhang zwischen der integralen Exzessenthalpie  $\Delta h^E$  und partiellen spezifischen Mischungsenthalpien  $\Delta \bar{h}_1$  und  $\Delta \bar{h}_2$  (nach Bošnjaković u. Knoche (1996))

Der mathematische Zusammenhang zwischen integraler Exzessenthalpie  $\Delta h^E$  und den partiellen spezifischen Mischungsenthalpien  $\Delta \bar{h}_c$  ist damit hergestellt. Die tatsächliche Ermittlung erfolgt anhand von Messwerten. Aus den Messwerten der frei werdenden Wärmemengen  $dQ$  bei Zugabe einer reinen Komponente in eine isotherme und isobare Mischung (vgl. Gleichung (2.49)), kann die differentielle Exzessenthalpie eines Gemisches ermittelt werden. Daraus erhält man wiederum die partiellen spezifischen Mischungsenthalpien, für ein binäres Gemisch entsprechend  $\Delta \bar{h}_1$  und  $\Delta \bar{h}_2$ . Dieser Zusammenhang ist oben grafisch und mathematisch beschrieben. Beide Beschreibungen sind in Bošnjaković u. Knoche (1996) sowie Stephan u. a. (2010) erläutert.

Da im später verwendeten Modell zur Beschreibung der Absorption und Desorption im Fallfilm der diffusiv-konvektive Stofftransport auch in der Energiebilanz Berücksichtigung finden soll, wird im Folgenden kurz erläutert, wie die Gesamtenthalpie  $H$  eines Gemisches mit Hilfe der partiellen spezifischen Enthalpien  $\bar{h}_c$  ausgedrückt werden kann. Der Zusammenhang mit den eben eingeführten Exzessgrößen ist für die Enthalpie eines binären Gemisches in Abbildung 2.5 mit Hilfe des  $h, \xi$ -Diagramms dargestellt.

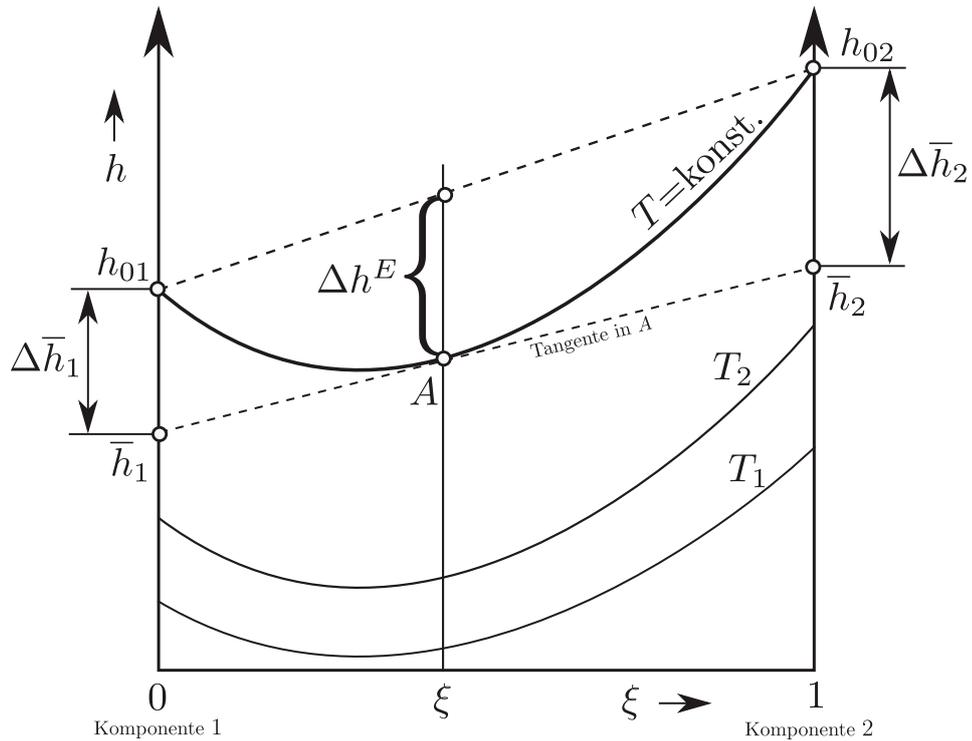


Abbildung 2.5: Verlauf der Enthalpie  $h$  eines binären Gemisches und zugehörige partielle spezifische Enthalpien  $\bar{h}_1$  und  $\bar{h}_2$  im  $h, \xi$ -Diagramm (nach Bošnjaković u. Knoche (1996))

Die Werte  $\bar{h}_1$  und  $\bar{h}_2$  im  $h, \xi$ -Diagramm haben dabei folgende Bedeutung: Wie in Abbildung 2.5 ersichtlich ist, gilt

$$\begin{aligned}\bar{h}_2 &= h(T, p, \xi) + (1 - \xi) \frac{\partial h(T, p, \xi)}{\partial \xi} \\ \bar{h}_1 &= h(T, p, \xi) - \xi \frac{\partial h(T, p, \xi)}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (2.56)$$

Die spezifische Enthalpie  $h$  ist die auf die Gesamtmasse  $m = m_1 + m_2$  bezogene Enthalpie

$$h(T, p, \xi) = \frac{H(T, p, m_1, m_2)}{m} \quad (2.57)$$

Mit den Gleichungen (2.47), (2.56) und (2.57) kann die Gesamtenthalpie eines Gemisches sehr einfach durch die partiellen spezifischen Enthalpien ausgedrückt werden:

$$H = m_1 \bar{h}_1 + m_2 \bar{h}_2 \quad (2.58)$$

Dieser Zusammenhang wird bei der Formulierung der Energiebilanz in Kapitel 3 auf Seite 63ff. genutzt.

### 2.2.3 Stoffaustausch und Diffusion

Die Beschreibung der diffusiven Stoffstromdichte  $\dot{m}_i$  einer Komponente  $i$  folgt aus dem Fick'schen Gesetz, indem der Gradient des Massenanteils in einer Koordinatenrichtung mit dem Diffusionskoeffizienten  $D$  und der Dichte  $\rho$  multipliziert wird.

Für die x-Koordinate lautet dieses beispielhaft für eine Komponente  $i$

$$\dot{m}_i = -\rho D \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \quad (2.59)$$

Wie die Wärmestromdichte ist auch die Stoffstromdichte eine gerichtete Größe und gleicht zusammen mit eventuell auftretenden Quellen  $\dot{r}_i$  Konzentrationsunterschiede innerhalb eines Volumens aus. Für die Beschreibung der Massenanteile in einem kartesischen Koordinatensystem kann analog zu Gleichung (2.34) folgende Gleichung angegeben werden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho D \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho D \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \dot{r}_i = \frac{\partial (\xi \rho)}{\partial t} \quad (2.60)$$

Innere Quellen  $\dot{r}_i$  entstehen beispielsweise auf Grund einer chemischen Reaktion innerhalb des betrachteten Volumens. Durch Unterschiede im Massenanteil  $\xi_i$  eines Stoffes ist ein Potential für den Stofftransport vorhanden. Dieses Potential existiert besonders deutlich an Phasengrenzflächen, wobei der Diffusionskoeffizient  $D$  dort eine Unstetigkeit aufweist. Durch den Vorgang der Diffusion wird dieses Potential solange abgebaut, bis ein Gleichgewicht bzw. eine homogene Phase entsteht. Dies führt zu einem räumlichen Profil des Massenanteils bzw. zu einer zeitlichen Veränderung des Massenanteils.

Es gibt mehrere Arten, den Stofftransport zu beschreiben: Wenn durch Messungen der Stoffübergang in chemischen Apparaten mit komplexen Geometrien phänomenologisch beschrieben werden soll, werden häufig empirische Koeffizienten verwendet. Dabei sind in den Koeffizienten diffusive, konvektive und weitere hydrodynamische Effekte enthalten, wie sie beispielsweise in turbulenten Strömungen vorkommen.

Soll bei der Beschreibung der Stoffübertragung nach diffusiven und konvektiven Vorgängen unterschieden werden, kann dies mit vertretbarem Aufwand oft nur für einfache Geometrien und Strömungsformen erfolgen. Wird der konvektive Stoffübergang an ein strömendes Medium beschrieben, so kann dafür mit Hilfe des Newton'schen Ansatzes, vergleichbar zur Wärmeübertragung (Gleichung (2.35), auf Seite 18), an der Grenzfläche die Randbedingung dritter Art (Robin Randbedingung) aufgestellt werden. Dazu wird die Definition des Stoffübergangs  $\beta$  mit dem Gradienten zur Beschreibung des Stoffstroms  $\dot{m}_i$  (Gleichung (2.59)) in Beziehung gesetzt. Bei konstant angenommenem Diffusionskoeffizient  $D$  und Dichte  $\rho$  lautet die Beziehung zwischen den Größen für die x-Koordinate:

$$\beta (\xi_{P_{gf}} - \xi_{\infty}) = \rho D \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{P_{gf}} \quad (2.61)$$

#### 2.2.4 Absorption im Fallfilm

Auch die Vorgänge in Fallfilmen, wie sie in Absorptionskälteanlagen zur Anwendung kommen, können mit analytischen oder numerischen Modellen beschrieben werden. Analytische Methoden kommen beispielsweise in Auracher u. a. (2008), Cussler (2009) und Meyer (2016) zur Anwendung, numerische Methoden zur Lösung des Gleichungssystems beispielsweise in Markatos u. a. (2012), Killion u. Garimella (2001) und Majumdar (2005). Zunächst erfolgt hier die analytische Beschreibung (vgl. Cussler (2009), S.44ff). Dazu müssen Vereinfachungen vorgenommen werden, damit anschließend eine Aussage über die Veränderung des Konzentrationsprofils innerhalb des Films als Folge einer Konzentrationsveränderung an der Phasengrenzschicht gemacht werden kann. Mit anderen Worten: Es soll die Konzentration und Komponentenstromdichte  $\dot{m}_c$  als eine Funktion des Ortes bestimmt werden.

Zunächst wird die Koppelung mit dem Wärmetransport vernachlässigt und damit beispielsweise von der Absorption eines Gases mit vernachlässigbarer Absorptionswärme ausgegangen. Üblicherweise werden in Absorptionskälteanlagen Wärmeübertrager mit horizontal liegenden Rohren eingesetzt. Die Krümmung der Rohrwand der horizontal liegenden Rohre wird ebenfalls vernachlässigt. Um eine einfache mathematische Beschreibung zu erreichen, sind die

folgenden Modellvorstellungen mit umfangreichen Annahmen verbunden. Die Hauptannahmen sind:

- Die Lösung ist stark verdünnt.
- Die Masse wird in x-Richtung durch Konvektion und in y-Richtung durch Diffusion transportiert.
- Das vom Film absorbierte Gas ist rein.
- Durch die Absorption wird keine Wärme frei.
- Die Filmdicke  $\delta$  ändert sich durch die absorbierte Masse nicht.
- Die Krümmung der horizontalen Rohre wird vernachlässigt und eine ebene Platte betrachtet.
- Die Betrachtungszeit ist kurz.

Die folgende analytische Problembeschreibung bei der Absorption im Fallfilm basiert auf der instationären Diffusion in eine halb-unendliche Platte. Die Übertragbarkeit ist durch die Annahme einer Zeitspanne für den gesamten Vorgang gerechtfertigt, welche so kurz ist, dass der Konzentrationsgradient die gekühlte Platte nicht erreicht (vgl. Cussler (2009), S.28). Ist ein Absorber einer Absorptionskälteanlage als Rohrbündelwärmeübertrager ausgeführt, so ist diese Annahme dadurch gerechtfertigt, dass die Lauflänge der Lösung um eine Rohrhälfte kurz ist. Die Kontaktzeit liegt für übliche Rohrdurchmesser von  $< 20\text{mm}$  bei weniger als 0,5 Sekunden.

Die folgende Abbildung 2.6 zeigt schematisch einen Fallfilm sowie die relevanten Größen für die Formulierung der Massenbilanz.

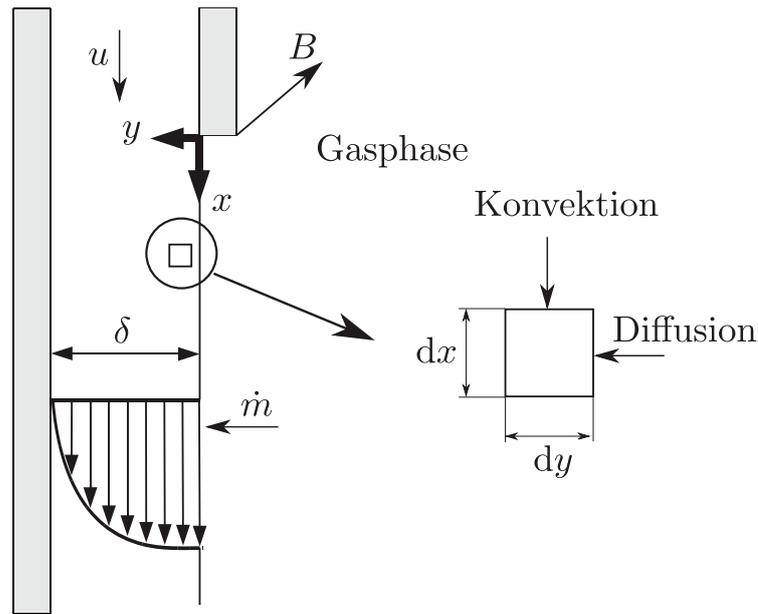


Abbildung 2.6: Diffusion in einem Fallfilm (nach Cussler (2009))

Um Aussagen über die Veränderung des Konzentrationsprofils innerhalb eines Lösungsfilms durch eine Konzentrationsveränderung an der Phasengrenzschicht zu machen, wird zunächst folgende stationäre Massenbilanz für die Komponente 1 aufgestellt:

$$0 = \dot{m}_1(y)Bdx - \dot{m}_1(y + dy)Bdx + \xi_1(x)\rho(x)u(x)Bdy - \xi_1(x + dx)\rho(x + dx)u(x + dx)Bdy \quad (2.62)$$

Die Massenbilanz wird anschließend auf das Volumen  $Bdxdy$  bezogen. Man erhält

$$0 = -\frac{d\dot{m}_1}{dy} - \frac{d}{dx}(\xi_1\rho u) \quad (2.63)$$

In einem weiteren Schritt wird in Gleichung (2.63) das Fick'sche Gesetz (Gleichung 2.59) eingesetzt. Damit wird von äquimolarer Diffusion ausgegangen bzw. konvektiver Transport in y-Richtung vernachlässigt (siehe auch Abbildung 2.6). Im Kapitel 3 wird diese Vereinfachung aufgehoben. Der Grund hierfür wird im folgenden Abschnitt 2.2.5 erläutert. Die Massenbilanz wird zu

$$0 = \rho D \frac{d^2 \xi_1}{dy^2} - \frac{d}{dx}(\xi_1 \rho u) \quad (2.64)$$

Die nun folgende Annahme betrifft die Geschwindigkeit  $u$ . Unter Vernachlässigung des Scherspannungsgradienten an der Phasengrenzfläche

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.65)$$

erreicht dort die Geschwindigkeit ihr Maximum. Mit der Lösung für das voll entwickelte Geschwindigkeitsprofil aus Abschnitt 2.1.2 kann die maximale Geschwindigkeit an der Filmoberfläche berechnet werden. Wie bereits in Gleichung (2.15) auf Seite 11 gezeigt, ergibt sich für  $u_{max}$

$$u_{max} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\Gamma}}{\rho \delta} \quad (2.66)$$

Mit Gleichung (2.65) wird von einer konstanten Geschwindigkeit für kleine Werte von  $y$  ausgegangen. Unter der weiteren Annahme einer kurzen Betrachtungszeit diffundiert der Dampf nur wenig in die Lösung. Durch die geringe Eindringtiefe ist die Verwendung einer konstanten Geschwindigkeit eine annehmbare Vereinfachung (Cussler, 2009). Damit wird das Geschwindigkeitsprofil aus Abbildung 2.6 vernachlässigt und  $u(x)$  durch  $u_{max}$  ersetzt. Unter der Annahme einer konstanten Dichte kann für Gleichung (2.64)

$$\frac{d\xi_1}{dx} u_{max} = D \frac{d^2 \xi_1}{dy^2} \quad (2.67)$$

geschrieben werden.

Die linke Seite repräsentiert darin den konvektiven Anteil, die rechte Seite den diffusiven Anteil der Massenbilanz. Die Massenbilanz unterliegt folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \xi_1(x=0, y) &= \xi_{1,0} = 0 \\ \xi_1(x > 0, y=0) &= \xi_{1,eq}(T, p) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Wie aus den Randbedingungen (2.68) ersichtlich, ist der Massenanteil des gasförmigen Stoffes in der Flüssigkeit am Anfang Null. Sobald der Kontakt der Flüssigkeit mit der Gasphase erfolgt, stellt sich ein lokales Phasengleichgewicht

$\xi_{1,eq}$  ein. Die letzte Randbedingung ist gegeben durch:

$$\xi_1(x > 0, y \rightarrow \infty) = \xi_{1,\infty} = 0 \quad (2.69)$$

In  $y \rightarrow \infty$  kommt zum Ausdruck, dass Gleichung (2.69) streng genommen weit von der Phasengrenze entfernt gültig ist, was wiederum nur unter der Annahme einer kurzen Betrachtungszeit gerechtfertigt ist. Als Konsequenz daraus hat dieses Modell eine Einschränkung in der Anwendbarkeit auf kurze Lauflängen eines Fallfilms. Kann sich der Gradient des Massenanteils weit genug in den Film hinein ausprägen, wird dieser die Wand bei  $y = \delta$  erreichen und die Randbedingung (2.69) ist nicht mehr gerechtfertigt.

Mit den oben getroffenen Annahmen lässt sich die Diffusion in einen dünnen Flüssigkeitsfilm analog zur instationären Diffusion in einen halb-unendlichen Körper beschreiben. Der alleinige Unterschied ist, dass die Zeit  $t$  nun durch den Ausdruck  $x/u_{max}$  ersetzt wird. Dies führt zu der aus Cussler (2009) und Baehr u. Stephan (2010) bekannten Lösung für eine Differentialgleichung dieser Struktur. Die Lösung für das Profil des Massenanteils ist

$$\frac{\xi_1}{\xi_{1,eq}} = 1 - \operatorname{erf} \frac{y}{\sqrt{4Dx/u_{max}}} \quad (2.70)$$

Die lokal absorbierte Massenstromdichte an der Phasengrenze beträgt

$$\dot{m}_1 \Big|_{y=0} = \rho \sqrt{\frac{Du_{max}}{\pi x}} (\xi_{1,eq} - \xi_{1,\infty}) \quad (2.71)$$

### 2.2.5 Überlagerte Diffusion und Konvektion

Diffusion und Konvektion können überlagert auftreten. Konvektive Ströme können beispielsweise auch auf Grund von Temperatur- oder Druckunterschieden entstehen. Diffundiert ein Stoff aufgrund von Konzentrationsunterschieden, entstehen diese Konvektionsströme auch während isobarer und isothermer Prozesse. Diffusion kann also selbst eine Konvektionsgeschwindigkeit induzieren. Diese sind in stark verdünnten Lösungen meist so gering, dass sie vernachlässigt werden. Das heißt, der Stofftransport wird wie im vorangegangenen Kapitel 2.2.3 mit Hilfe des Fick'schen Gesetzes (Gleichung 2.59) erklärt. Speziell in konzentrierten Lösungen kann die induzierte Konvektion aber nicht

immer vernachlässigt werden.

Um das Zusammenwirken von Diffusion und Konvektion zu verdeutlichen, wird ein Beispiel aus Cussler (2009) zu Hilfe genommen. Ein Kohlenwasserstoff, z. B. Benzol, wird in einem Reservoir gelagert, welches mit einem Kapillarrohr mit der Umgebung in Verbindung steht. Benzol verdampft und gelangt über das Kapillarrohr in die Umgebung. Bei geringer Temperatur (Raumtemperatur) ist der Dampfdruck des Benzols gering und der Benzoldampf im Kapillarrohr bewegt sich langsam aufgrund der zufälligen Molekülbewegung. In diesem Stadium kann der Stofftransport durch Diffusion, wie im vorangegangenen Kapitel 2.2.3 beschrieben, erklärt werden. Wird die Temperatur des Reservoirs allerdings bis auf Siedetemperatur ( $80,1^\circ\text{C}$ ) erhöht, entsteht viel Dampf, der auf Grund eines Druckunterschiedes schnell in der Kapillare in die Umgebung strömt. Dieser Vorgang kann als konvektiver Stofftransport aufgefasst werden, da der Stoff regelrecht ausgeblasen wird. Befindet sich das Reservoir nun zwischen Raum- und Siedetemperatur, treten sowohl konvektiver als auch diffusiver Stofftransport auf. Um beide Arten des Transports voneinander zu unterscheiden, werden zunächst die Diffusionsstromdichte  $j_c$  und eine Bezugsgeschwindigkeit  $u_{ref}$  eingeführt. Die Diffusionsstromdichte  $j_c$  berechnet sich nach Gleichung (2.59). Die insgesamt transportierte Komponentenstromdichte  $\dot{m}_1$  kann dann durch

$$\dot{m}_1 = \xi_1 \rho (u_1 - u_{ref}) + \xi_1 \rho u_{ref} = j_1 + \xi_1 \rho u_{ref} \quad (2.72)$$

mit  $j_1 = -\rho D \frac{\partial \xi_1}{\partial x}$

ausgedrückt werden.

In Gleichung (2.72) wurde die Schwerpunktsgeschwindigkeit  $u_{ref} = \dot{m}/\rho$  als Bezugsgeschwindigkeit verwendet. Es gibt jedoch keine zwingende Definition dieser Bezugsgeschwindigkeit  $u_{ref}$ , welche auf die mittlere Masse, das mittlere Volumen oder die mittlere Molmenge bezogen werden kann. Soll gleichzeitig der Impulstransport beschrieben werden, ist ein Bezug auf den Massenschwerpunkt allerdings am besten geeignet (Cussler, 2009, S. 60). Die Massenstromdichte einer Komponente 1 kann damit in Bezug auf diese Schwerpunkts- geschwindigkeit ausgedrückt werden. Für die Koordinatenrichtung  $x$  lässt sich

die Massenstromdichte ausdrücken als

$$\dot{m}_1 = -\rho D \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \xi_1 \rho u \quad (2.73)$$

Der erste Term beschreibt darin den diffusiven Stofftransport der Komponente 1 (vgl. Gleichung 2.59), der zweite Term beschreibt den konvektiven Stofftransport der Komponente 1.

### 2.2.6 Stoffübergangstheorien

Im folgenden werden drei Modellvorstellungen zur Stoffübertragung beschrieben. Ziel dieser Theorien ist es, eine einfache Verbindung zwischen Stoffübergang und Hydrodynamik zu schaffen und damit gleichzeitig auftretende Phänomene zu beschreiben. Oftmals soll der Stoffübergangskoeffizient in Abhängigkeit vom Diffusionskoeffizienten  $D$  und der Strömungsgeschwindigkeit  $u$  angegeben werden. Da jedoch sehr starke Vereinfachungen vorgenommen werden, wird dieses Ziel nur eingeschränkt erreicht. Viele Korrelationen zeigen folgende Abhängigkeit (Cussler, 2009, S. 274):

$$\beta \propto u^{2/3} D^{1/2} \quad (2.74)$$

#### Filmtheorie

Die Filmtheorie ist die älteste und einfachste Theorie zur Stoffübertragung an Grenzflächen. Das Prinzip, welches erstmals von Nernst (1904) eingeführt wurde, ist in Abbildung 2.7 dargestellt.

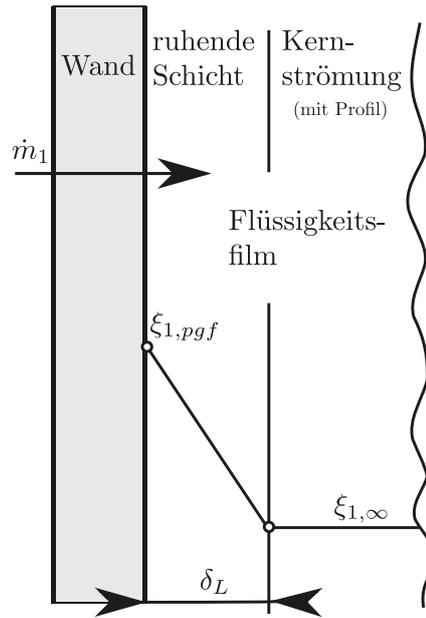


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung der Stoffübertragung durch die Filmtheorie (nach Kraume (2012))

Es wird angenommen, dass von einer festen Wandoberfläche, oder einer ruhenden Grenzfläche ausgehend eine Komponentenstromdichte  $\dot{m}_1$  in ein strömendes Medium übertragen wird. Die Konzentration bzw. der Massenanteil soll sich normal zur Grenzfläche ändern, nicht jedoch mit der Zeit oder in Strömungsrichtung. Es wird von einem ruhenden Flüssigkeitsfilm an der Grenzfläche ausgegangen, in den eine Komponente 1 diffundiert. In der Modellvorstellung soll ferner davon ausgegangen werden, dass der durch Diffusion ausgelöste Konvektionsstrom vernachlässigbar klein ist. Die Massenstromdichte durch diesen dünnen Film kann damit analog zu Gleichung (2.61) durch

$$\beta (\xi_{1,pgf} - \xi_{1,\infty}) = \frac{\rho D}{\delta_L} (\xi_{1,pgf} - \xi_{1,\infty}) \quad (2.75)$$

ausgedrückt werden. Der Stoffübergangskoeffizient  $\beta$  ist

$$\beta = \frac{\rho D}{\delta_L} \quad (2.76)$$

In der Filmtheorie ist damit der Stoffübergangskoeffizient  $\beta$  direkt proportional zum Diffusionskoeffizienten  $D$  und unabhängig von einer Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit. Die Proportionalität nach Gleichung (2.74) ist noch nicht gegeben. Die Information über die Strömungsgeschwindigkeit ist je-

doch implizit in der unbekanntem Filmdicke  $\delta_L$  enthalten. Durch Messung des Stoffübergangskoeffizienten  $\beta$  und Diffusionskoeffizienten  $D$  kann die Dicke der Konzentrationsgrenzschicht  $\delta_L$  ermittelt werden.

Mit Hilfe dieser Theorie kann der Stoffübergangskoeffizient  $\beta$  somit nicht direkt ermittelt werden. Dennoch kann durch einfache Größen der Stoffübergangswiderstand ausgedrückt werden und weitere Einflüsse können gegebenenfalls über Korrekturfaktoren einfließen. Ferner kann durch Vergleich mit Literaturwerten die Dicke der Konzentrationsgrenzschicht  $\delta_L$  abgeschätzt werden und beispielsweise der Einfluss grenzflächennaher chemischer Reaktionen auf den Stofftransport vorhergesagt werden (Cussler (2009)).

### Penetrationstheorie

Die der Penetrationstheorie zu Grunde liegenden Überlegungen stammen von Higbie (1935) und wurden für den Stoffaustausch zwischen Dampfblasen und Flüssigkeiten mit kurzer Kontaktzeit entwickelt. Im Gegensatz zur Filmtheorie wird von einem sich bewegenden Film ausgegangen, wobei die Zusammensetzung der Kernströmung ebenfalls als konstant betrachtet wird. In der Modellvorstellung geht man somit entweder von einer kurzen Kontaktzeit und damit geringen Eindringtiefe der absorbierten Komponente aus, oder von einer turbulenten Strömung, bei der kontinuierlich Lösung der Ausgangskonzentration in Richtung Oberfläche transportiert wird. Dadurch entspricht die mathematische Beschreibung dem bereits in Abschnitt 2.2.4 auf Seite 31 dargestellten Ergebnis (Gleichung 2.71). Mit den Gleichungen (2.59) und (2.61) ist der lokale Stoffübergangskoeffizient  $\beta$  damit gegeben durch

$$\beta(x) = \rho \sqrt{\frac{D u_{max}}{\pi x}} = \rho \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sqrt{\frac{D \bar{u}}{x}} \quad (2.77)$$

Die Geschwindigkeiten  $\bar{u}$  und  $u_{max}$  können mit Hilfe der Gleichungen (2.14) und (2.15) auf Seite 11 ermittelt werden. Der Ausdruck  $u_{max}/x$  wird in der Literatur auch als Kontaktzeit bezeichnet. Für Gleichung (2.77) ergibt sich gemittelt über die Lauflänge  $L$ :

$$\beta_L = 2\rho \sqrt{\frac{D u_{max}}{\pi L}} = \rho \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\frac{D \bar{u}}{L}} \quad (2.78)$$

In dimensionsloser Schreibweise gilt für die über die Lauflänge  $L$  gemittelte Sherwood-Zahl

$$Sh_L = \sqrt{\frac{6}{\pi}} Pe_L^{1/2} \quad (2.79)$$

mit

$$Sh_L \equiv \frac{\beta L}{D\rho} \quad \text{und} \quad Pe_L \equiv \frac{\bar{u}L}{D} = Re_L Sc \quad (2.80)$$

Wie anhand der Definitionen der Nußelt- und Reynolds-Zahl in den vorangegangenen Kapiteln gesehen werden konnte, gibt es auch für die Sherwood-Zahl die Möglichkeit, als charakteristische Länge die Filmstärke  $\delta$  einzusetzen. Wird  $\delta$  als charakteristische Länge verwendet, so ist

$$Sh_\delta \equiv \frac{\beta\delta}{D\rho} \quad \text{und} \quad Pe_\delta \equiv \frac{\bar{u}\delta}{D} = Re Sc \quad (2.81)$$

Die aus der Penetrationstheorie folgende Korrelation lautet damit

$$Sh_\delta = \sqrt{\frac{6\delta}{\pi L}} Pe_\delta^{1/2} \quad (2.82)$$

Wie man anhand der Gleichungen (2.77) und (2.78) sieht, liefert die Penetrationstheorie eine Proportionalität zu  $D^{1/2}$ . Allerdings ist die Kontaktzeit  $u_{max}/x$  für komplexe Geometrien ebenso unbekannt wie die Dicke der Konzentrationsgrenzschicht  $\delta_L$  aus der Filmtheorie. In der Penetrationstheorie wird von einer einzig relevanten Kontaktzeit ausgegangen. Diese Annahme ist nicht immer gerechtfertigt.

### Oberflächenerneuerungstheorie

Eine weitere Theorie hebt die Annahme auf, dass es für einen Prozess nur eine einzige relevante Kontaktzeit gibt. In der von Danckwerts (1951) eingeführten Oberflächenerneuerungstheorie wird davon ausgegangen, dass es eine Region an der Phasengrenze gibt, die sich gemäß der Penetrationstheorie verhält und eine Kernregion, die sich mit der Phasengrenzregion im Austausch befindet. Die Modellvorstellung ist in Abbildung 2.8 dargestellt.

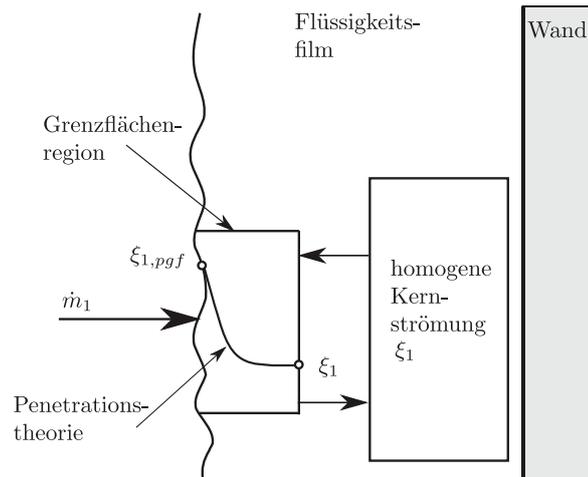


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung der Stoffübertragung durch Oberflächenenerneuerungstheorie (nach Cussler (2009))

In der Vorstellung werden kleine Volumenelemente der Grenzfläche permanent durch neue Volumenelemente aus der Kernströmung ersetzt und damit die Oberfläche gewissermaßen erneuert. Die Rate der Oberflächenenerneuerung hängt von der Verweilzeit der Volumenelemente in der Grenzflächenregion ab. Für diese Verweilzeit wird eine Verteilungsfunktion angenommen. Es wird angenommen, dass der Transport verschiedener Grenzflächenelemente in die Kernregion zufällig erfolgt. Mit anderen Worten, es ist für jedes Grenzflächenelement gleich wahrscheinlich, ausgetauscht zu werden (Cussler, 2009). In Cussler (2009) wird weiterhin gezeigt, dass die Verteilung der Verweilzeit  $E(t)$  von Grenzflächenelementen durch

$$E(t) = \frac{e^{-t/\tau'}}{\tau'} \quad (2.83)$$

gegeben ist. Allerdings ist auch bei der Oberflächenenerneuerungstheorie die durchschnittliche Verweilzeit  $\tau'$  unbekannt.

Damit wird der Stoffübergangskoeffizient durch

$$\beta = \rho \sqrt{D/\tau'} \quad (2.84)$$

beschrieben. Wie auch in der Penetrationstheorie wird die Abhängigkeit des Stoffübergangskoeffizienten  $\beta$  vom Diffusionskoeffizienten durch den Exponenten  $1/2$  beschrieben.

Die Stoffübergangstheorien tragen zum Verständnis des Stoffübergangs sowie zur Verbesserung von Korrelationen bei, können allerdings speziell für komplexe Geometrien keine direkten Ergebnisse liefern. Aus diesem Grund sind nach wie vor Messungen und detailliertere physikalische Modellbildungen nötig. Zu beiden Möglichkeiten gibt es umfangreiche Literatur, welche im folgenden Kapitel auszugsweise dargestellt wird.

## 2.3 Literaturüberblick zur Absorption in Fallfilmen

Im Allgemeinen wird in der Literatur zum Wärme- und Stoffübergang in Fallfilmen zwischen experimentellen und theoretischen Arbeiten unterschieden. Einen Überblick über die Literaturlage experimenteller Arbeiten liefern beispielsweise Killion u. Garimella (2003). Da die weitere Analyse anhand eines physikalischen Modells erfolgt, wird im Folgenden die Literatur zu theoretischen Modellen zur Einordnung der vorliegenden Arbeit herangezogen. Zunächst werden Modelle zur Absorption im vertikalen Fallfilm besprochen.

Nakoryakov u. Grigor'eva (1977) begannen mit ersten Modellierungen zur Absorption im Fallfilm über einer isothermen Platte. Diese sind mit umfangreichen Annahmen versehen. Nakoryakov und Grigor'eva gehen von konstanten Stoffwerten und einer konstanten Filmdicke aus. Beides ist bei sehr geringen Mengen an absorbiertem Dampf eine brauchbare Annahme. Die Bedingungen an der Phasengrenzfläche werden unter Berücksichtigung des thermodynamischen Phasengleichgewichts ermittelt. Die Gleichgewichtstemperatur der Lösung hängt dabei linear vom Massenanteil ab. Temperatur und Konzentration am Einlass sind als konstant angenommen. Die Geschwindigkeit über die betrachtete Lauflänge ist ebenfalls konstant gesetzt. Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Platte bzw. senkrecht zur Strömungsrichtung wird vernachlässigt, wodurch ein einfaches Modell entsteht. Die Diffusion und die Wärmeleitung in Strömungsrichtung werden ebenfalls vernachlässigt. Die Absorptionswärme wird als vollständig an der Phasengrenze freiwerdend angenommen; Oberflächeneffekte und Schubspannungen an der Phasengrenzfläche finden keine Berücksichtigung. Unter diesen Annahmen war es Nakoryakov und Grigor'eva möglich, eine analytische Lösung des Gleichungssystems durch Se-

paration der Variablen zu finden. Die präsentierte Lösung ist für eine einfache Implementierung und Anwendung in Computerprogrammen geeignet. Allerdings treten mathematische Instabilitäten bei kurzen Lauflängen auf (siehe 4.1). Die Instabilitäten führten Nakoryakov u. Grigor'eva (1977) auf die Inkonsistenz der Randbedingungen bzw. den Sprung an der Phasengrenzfläche auf Gleichgewichtsbedingungen zurück. Deshalb entwickeln sie ebenfalls eine Kurzzeitlösung wie sie der Penetrationstheorie aus Abschnitt 2.2.6 entspricht. Über die tatsächliche Ursache dieser Instabilitäten und die Verbesserung der ursprünglichen Lösung wurde in Meyer (2014) berichtet. Meyer stellte fest, dass eine Einschränkung des Definitionsbereichs der von Nakoryakov und Grigor'eva gefundenen Tangensfunktion zum Verlust von Eigenwerten führt, welche in der Reihenentwicklung der Lösung benötigt werden. Durch Umformen der alternativen Sinus- und Kosinusausdrücke unter Zuhilfenahme von Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen, konnten zusätzliche Eigenwerte gefunden und die Instabilitäten der ursprünglichen Lösung von Nakoryakov u. Grigor'eva (1977) beseitigt werden.

Grossman (1983) trifft grundsätzlich vergleichbare Annahmen wie Nakoryakov und Grigor'eva, löst die Gleichungen allerdings für ein voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil (Nußelt-Lösung). Grossman verwendet zwei Methoden zur Lösung der Gleichungen, zum Einen eine Entwicklung von Potenzreihen und zum Anderen eine Finite-Differenzen-Methode. In Grossman (1983) wird deutlich beschrieben, dass bei beiden Methoden Konvergenzschwierigkeiten auftreten, da der Film als unterkühlt angenommen wird, jedoch durch die Annahme von Gleichgewichtsbedingungen an der Phasengrenze eine Diskontinuität entsteht. Deshalb wird in der Nähe des Einlaufs ebenfalls eine Kurzzeitlösung verwendet. Grossman vergleicht seine Ergebnisse mit jenen von Nakoryakov u. Grigor'eva (1977) und beschreibt, dass die Annahme eines homogenen Geschwindigkeitsprofils zu einer etwa 40%igen Unterschätzung der Lauflänge führt, bis zu der eine bestimmte Konzentration und Temperatur erreicht wird. Die asymptotischen Werte der Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten werden durch die Annahme eines homogenen Geschwindigkeitsprofils um etwa 20% überschätzt.

Zahlreiche weitere Autoren haben die Wärme - und Stoffübertragung am Fallfilm über eine vertikale Wand untersucht. Kholpanov u. a. (1982) verwen-

den ebenfalls eine Ähnlichkeitslösung und untersuchen den Einfluss der Scherspannung bei einer Dampfströmung im Gegenstrom. Andberg u. Vliet (1983) gehen wie Grossman von einem parabolischem Geschwindigkeitsprofil aus, lassen eine Veränderung der Filmdicke zu und verwenden ein Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung der Modellgleichungen.

Ein Überblicksartikel von Killion u. Garimella (2001) zur Absorption in Fallfilmen unterteilt diese und nachfolgende Arbeiten zu theoretischen Modellen nach der Art des Absorbens. Unabhängig vom tatsächlich eingesetzten Absorbens ist eine Unterscheidung nach flüchtigem und nicht-flüchtigem (ohne eigenen oder sehr niedrigem Dampfdruck) Absorbens sinnvoll, da im Fall eines nicht-flüchtigen Absorbens ein Stefanstrom im flüssigen Fallfilm induziert wird und im Fall eines flüchtigen Absorbens eine zweite Konzentrationsgrenzschicht im Dampfraum entsteht. Eine von vielen Autoren gemachte Annahme ist die der unendlichen Verdünnung bzw. äquimolaren Diffusion zwischen den Phasen, die allerdings als kritisch eingeschätzt wird (Killion u. Garimella, 2001) (Wohlfeil, 2009). Die Ermittlung des Stefanstroms in Wohlfeil (2009) hat für wässrige Lithiumbromidlösung ergeben, dass der Einfluss des Konvektionsstroms auf den diffusiven Anteil des Stoffübergangskoeffizienten etwa 10% beträgt. Da in der vorliegenden Arbeit als Lösung ebenfalls wässriges Lithiumbromid betrachtet wird und Lithiumbromid sowohl in nennenswerter Konzentration auftritt als auch selbst einen sehr niedrigen Dampfdruck hat, werden im Folgenden Arbeiten untersucht, welche nicht von äquimolarer Diffusion ausgehen.

Van der Wekken u. Wassenaar (1988) erweitern die von Grossman eingesetzten Gleichungen um den Wärmeübergang an ein Kühlmedium konstanter Temperatur (Annahme entspricht Kreuzstromführung) und variieren als Parameter den Wärmeübergangskoeffizienten. Die Stoffwerte sowie die Filmdicke werden als konstant betrachtet und die transversale Geschwindigkeitskomponente vernachlässigt, obwohl an der Phasengrenzfläche einseitige Diffusion angenommen wird. Brauner u. a. (1989) formulieren ähnlich wie Nakoryakov u. Grigor'eva (1977) eine Kurzzeitlösung, berücksichtigen jedoch die einseitige Diffusion an der Phasengrenzfläche.

In einem späteren Artikel (Brauner, 1991) wird erstmals einseitige Diffusion, veränderliche Filmdicke und eine transversale Geschwindigkeitskomponente zugelassen. Ihr eingesetztes Lösungsverfahren ist insofern komplex, als dass

dabei der Film in drei Regionen eingeteilt wird. In der ersten Region entwickeln sich beide Grenzschichten, die thermische und die Konzentrationsgrenzschicht. In der zweiten Region ist die thermische Grenzschicht voll entwickelt, die Konzentrationsgrenzschicht auf Grund des kleinen Diffusionskoeffizienten jedoch noch nicht. Im letzten Gebiet sind beide Grenzschichten voll entwickelt. Die Lösung je Region erfolgt durch Annahme parabolischer Profile für Temperatur- und Konzentrationsverlauf, welche die Randbedingungen erfüllen, und werden nach Einsetzen in die Erhaltungsgleichungen numerisch integriert. Allerdings wird in Brauner (1991) nach wie vor von einem voll entwickelten Geschwindigkeitsprofil und konstanten Stoffwerten ausgegangen. Darüber hinaus wurde der Enthalpiestrom durch Stofftransport vernachlässigt. Es konnte gezeigt werden, dass der Wärmeübergangskoeffizient von der Lösungskonzentration bzw. vom Massenanteil  $\xi$  unabhängig ist, obwohl experimentell arbeitende Autoren wie Deng u. Ma (1999) in ihrer Gleichung für die Nusselt-Zahl von LiBr-Rieselfilmen über Horizontalrohre den Massenbruch als zusätzliche Größe verwenden, um die Korrelation zu verbessern:

$$Nu = 10^{(8,7\xi_0 - 7,95)} \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{1,1} \quad (2.85)$$

Jedoch wird in einer ähnlichen Arbeit von Cosenza u. Vliet (1990) keine entsprechende Abhängigkeit der Nusselt-Zahl von der Eintrittskonzentration  $\xi_0$  festgestellt.

Yang u. Wood (1992) modellieren die Strömung des Fallfilms wie in Brauner (1991) als voll entwickelt. Yang u. Wood (1992) beschreiben diese mit Hilfe der Nusseltlösung und vergleichen ihre Ergebnisse mit Andberg u. Vliet (1983). Dabei wird eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse deutlich. Zusätzlich zu den Stoffdaten von wässriger Lithiumbromidlösung werden auch jene von Lithiumchlorid verwendet. Leider wurde kein Vergleich zwischen den beiden Fluiden durchgeführt, obwohl sich die verwendeten Fluide zum Beispiel in der Viskosität signifikant unterscheiden. Auffällig ist beim Ergebnis für Lithiumchlorid ein Anstieg der Temperatur an der Phasengrenze kurz nach dem Einlass. Dies lässt auf eine unterkühlte Eintrittstemperatur und unzureichende numerische Auflösung der Gradienten an der Phasengrenze schließen. Unklar bleibt, inwieweit die Anfangsunterkühlung zwischen Lithiumbromid- und Lithiumchloridlösung

vergleichbar ist.

Conlisk (1995) löst das Wärme- und Stoffübergangsproblem am Fallfilm analytisch mit Hilfe der Laplace-Transformation. Darin merkt Conlisk an, dass der Einsatz der Laplace-Transformation den Umgang mit der Diskontinuität am Filmanfang vereinfacht. Er nimmt ein voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil und eine variable Filmdicke an, und geht von einem linearen Temperaturprofil im Film aus. In einen Vergleich mit einem früheren numerischen Modell (Conlisk, 1992) zeigt er, dass der lokal absorbierte Massenstrom einer unterkühlten Lösung unmittelbar am Eintritt stark voneinander abweicht. Der anfänglich absorbierte Massenstrom wird durch das numerische Modell unterschätzt, was er auf die Diskontinuität in der Grenzflächentemperatur zurückführt. Das bedeutet, diese Diskontinuität bzw. der daraus folgende Temperatur- und Konzentrationsgradient wurden durch das numerische Modell nicht exakt genug aufgelöst, was dafür spricht, die Vernetzung zu optimieren bzw. lokal zu verfeinern (siehe dazu Abschnitt 4.2).

Da in Conlisk (1995) eine Lauflänge von 1,5 m betrachtet wurde, ist jedoch der Einfluss auf die insgesamt absorbierte Masse klein. Conlisk schlussfolgert, dass die kumulierte absorbierte Masse annähernd unabhängig von der anfänglichen Temperaturdifferenz zwischen Lösung und Wand ist. Diese Aussage steht im Widerspruch zur Schlussfolgerung in Andberg u. Vliet (1987), in der kurze Lauflängen um ein horizontales Rohr betrachtet wurden. In Killion u. Gari-mella (2001) wird dieser Gegensatz auf die unterschiedlich Lauflängen zurückgeführt. Es ist offensichtlich, dass bei Betrachtung einer kumulierten Größe ein Unterschied, der lediglich über eine sehr kurze Distanz auftritt, mit zunehmender Lauflänge als abgeschwächt wahrgenommen wird. Bei Betrachtung dünner Flüssigkeitsfilme über eine Lauflänge von 1,5 m ist die sensible Wärmemenge resultierend aus der anfänglichen Temperaturdifferenz zwischen Lösung und Wand klein und hat somit wenig Einfluss auf die absorbierte Gesamtmenge. Bei Betrachtung kurzer Lauflängen hat jedoch die Ausbildung des Temperaturprofils einen größeren Einfluss und wird seinerseits wiederum durch das sich entwickelnde Geschwindigkeitsprofil beeinflusst.

### 2.3.1 Laminarer Fallfilm und sich entwickelndes Geschwindigkeitsprofil

Fast alle Arbeiten zur Absorption im vertikalen Fallfilm gehen von einem voll entwickelten, parabolischen Geschwindigkeitsprofil aus. Eine Ausnahme stellt die Arbeit von Jernqvist u. Kockum (1996) dar, die ein sich entwickelndes Geschwindigkeitsprofil zulässt. Außerdem arbeiten Jernqvist u. Kockum (1996) mit variablen Stoffwerten und gehen von einseitiger Diffusion an der Phasengrenzfläche aus. Auf Grund der ähnlichen Annahmen zu vorliegender Arbeit wird auf diese etwas detaillierter eingegangen.

Jernqvist u. Kockum (1996) formulieren die Bewegungsgleichung<sup>3</sup> als

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \quad (2.86)$$

Für die linke Seite von Gleichung (2.86) kann auch geschrieben werden

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} \rho u \quad (2.87)$$

Obwohl Jernqvist und Kockum von einem sich über die longitudinale Koordinate entwickelnden Geschwindigkeitsprofil ausgehen, vernachlässigen sie die transversale Geschwindigkeit  $v$  (siehe auch (Killion u. Garimella, 2001, S. 771)). Unter dieser Annahme wird die Kontinuitätsgleichung zu

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (2.88)$$

Zunächst wird in Gleichung (2.88) von einem nicht absorbierenden Fallfilm ausgegangen, um nur das Geschwindigkeitsfeld zu betrachten. Gleichung (2.88) eingesetzt in Gleichung (2.87) lässt den aus Seite 13 (Gleichung 2.17) bekannten Trägheitsterm  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$  übrig.

Die Beschreibung der Hydrodynamik erfolgt in Jernqvist u. Kockum (1996)

---

<sup>3</sup>Die Koordinatenachsen sind in vorliegender Arbeit gegenüber Jernqvist u. Kockum (1996) getauscht, da in der Literatur  $x$  üblicherweise als Lauflänge und  $y$  als Koordinate in Filmdickenrichtung verwendet wird.

somit mit der Gleichung

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \quad (2.89)$$

Im Folgenden wird kurz betrachtet, inwieweit eine Vernachlässigung der transversalen Geschwindigkeitskomponente  $v$  bei einer sich entwickelnden Strömung zulässig ist. Dazu wird zunächst von einer Kolbenströmung ausgegangen, bevor diese tangential (bei  $x = 0$ ) auf eine Wand trifft (vgl. Abb. 2.9).

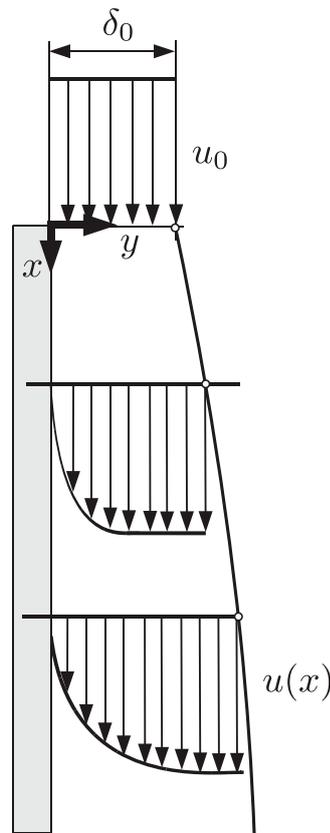


Abbildung 2.9: Schematische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils am Anfang (Anlauf)

Betrachtet man zusätzlich zu den Gleichungen (2.17) auf Seite 13 die Haftbedingung an der Wand eines stationären, inkompressiblen Fallfilms, so wird deutlich, dass die longitudinale Abbremsung an der Wand zu einer transversalen Geschwindigkeitskomponente führen muss.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.90)$$

Dies zeigt: Ein hydrodynamischer Anlauf einer Strömung kann in Jernqvist u. Kockum (1996) nicht hinreichend exakt abgebildet werden. Darüber hinaus wird durch die Vernachlässigung der transversalen Geschwindigkeitskomponente  $v$  die durch einseitige Diffusion hervorgerufene Konvektion nicht vollständig berücksichtigt. Wie bereits in Gleichung (2.73) gesehen, lautet die Beschreibung des konvektiv-diffusiven Transports in  $y$ -Richtung

$$\dot{m}_1 = -\rho D \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \xi_1 \rho v \quad (2.91)$$

Bei gegebener absorbiertem Massenstromdichte  $\dot{m}_1$  an der Phasengrenze, wird in Jernqvist u. Kockum (1996) der sich einstellende Gradient im Massenanteil nicht fehlerfrei ermittelt.

Jernqvist u. Kockum (1996) lassen in ihrem Modell unter anderem eine variable Filmdicke zu. Die Änderungen der Filmdicke durch absorbierte Masse, die Änderung der Dichte  $\rho$  sowie der Viskosität  $\mu$  führen dazu, dass sich das Geschwindigkeitsprofil entwickelt. Eine Beschreibung des hydrodynamischen Anlaufs ist damit jedoch nicht möglich. Im Kapitel 3 wird deshalb die Grenzschichtgleichung verwendet, um die Hydrodynamik zu modellieren.

### 2.3.2 Nicht-laminarer Fallfilm

Ein frühes Modell zur Wärme- und Stoffübertragung in turbulenten Fallfilmen wurde von Grossman u. Heath (1984) entwickelt. Darin wurde dem Diffusionskoeffizienten und der Temperaturleitfähigkeit eine sogenannte Eddy-Diffusivität hinzu addiert. Diese Größe ist abhängig von der transversalen Koordinate  $y$  und für Wärme- und Stofftransport gleich groß angenommen worden. Grossman u. Heath (1984) teilten zur Beschreibung der Eddy-Diffusivität die Filmdicke in drei Regionen ein (Wandnähe, Kern und Phasengrenzregion) und nutzen Korrelationen verschiedener Autoren für die Bildung des Verhältnisses aus Eddy-Diffusivität und Viskosität. Grossman u. Heath (1984) konnten rechnerisch zeigen, dass der Stofftransport an der Phasengrenze mit zunehmender Reynolds-Zahl und Schmidt-Zahl intensiviert wird. Der Wärmeübergang von der Phasengrenze in Richtung Kernströmung steigt mit zunehmender Reynolds- und Prandtl-Zahl. Beide Übergangskoeffizienten erreichen innerhalb relativ kurzer Lauflängen asymptotische Werte.

Aktuellere Veröffentlichungen beschäftigen sich teilweise nur mit der reinen Hydrodynamik, also mit der Beschreibung von Wellen und weiteren komplexen Phänomenen wie beispielsweise Oberflächenphänomenen. Gao u. a. (2003) nutzen eine Finite-Volumen-Methode und nehmen eine periodische Störung am Einlass der Strömung an, die zu Oberflächenwellen führt. Sie stellen eine starke Beeinflussung der Geschwindigkeiten und Druckverhältnisse in den Wellentälern fest, welche auf die ausgeprägte Krümmung in dieser Region zurückgeführt wird. Jedoch sind die Druckunterschiede normal zur Wand vernachlässigbar klein. Min u. Park (2011) führten eine ähnliche Studie durch und betonen den Stellenwert einer präzisen Erfassung der freien Oberfläche, um die Bewegung der Wellen realistisch vorhersagen zu können.

Arbeiten zu welligen Filmen mit gleichzeitig stattfindendem Wärme- und Stofftransport wurden von Islam u. a. (2009) mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Modells durchgeführt. Sie konnten zeigen, wie Einzelwellen Rückflusszonen erzeugen und dadurch während der Absorption kalte Lösung an die Filmoberfläche transportiert wird. Dadurch ist der Stoffübergang bei Filmen mit Einzelwellen verstärkt. Albert u. a. (2014) führten eine ähnliche Studie mittels eines Finite-Volumen-Modells durch und berichten, dass in ausgeprägten Wellen an der Filmoberfläche Wirbel entstehen können. Bei einzelnen Oberflächenwellen ist dies nicht der Fall, sondern erst, wenn der Wellenkamm mehr als 2,5 mal so dick ist wie die mittlere Filmdicke. Zusammenfassend stützen Albert u. a. (2014) die Aussage von Islam u. a. (2009), wonach der Stoffübergang signifikant durch Rückflusszonen beeinflusst wird.

Die Veröffentlichung von Killion u. Garimella (2004) behandelt die dreidimensionale Beschreibung einer Filmströmung über horizontale Rohrbündel. Darin wird das simulierte Strömungs- und Tropfenverhalten mit Hilfe einer Bildauswertung mit Experimenten verglichen. Der visuelle Vergleich zeigt, dass das Modell das Strömungsverhalten gut beschreibt. Die Arbeit von Killion u. Garimella (2004) ist die Ausgangsbasis für eine weitere Modellbildung durch Subramaniam u. Garimella (2009), worin zusätzlich zur Rieselfilmströmung der gekoppelte Wärme- und Stofftransport simuliert wird. Subramaniam u. Garimella (2009) betrachten sowohl die Transportvorgänge auf den Horizontalrohren als auch die während des Tropfenfalls zwischen diesen. Es werden lokale Gradienten und Stoffströme sowie ihre räumliche und zeitliche Variati-

on gezeigt.

Wie in diesem kurzen Überblick gezeigt, wurden bereits umfangreiche Simulationen zur Absorption in Fallfilmen durchgeführt. Obwohl die Vorgänge im laminaren Fallfilm deutlich weniger komplex sind als beispielsweise bei einem Rieselfilm über Rohre, wurde ein sich entwickelndes Geschwindigkeitsprofil an einem vertikalen laminaren Fallfilm im Zusammenhang mit konvektiv-diffusivem Stofftransport bisher nicht stringent modelliert. Ein Modell hierfür wäre jedoch für Vergleiche mit experimentellen Untersuchungen hilfreich.

## 2.4 Finite-Differenzen-Methode

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen kurzen Einblick in das eingesetzte numerische Verfahren zur Lösung der Modellgleichungen aus Kapitel 3 zu geben. Der Vorteil der Finite-Differenzen-Methode (FDM) gegenüber anderen Finite-Verfahren ist die direkte Lösung der Ausgangsgleichungen ohne weitere Approximationsansätze, da infinite direkt durch finite Differenzen angenähert werden (Sigloch, 2012, S. 314). Das macht eine einfache Implementierung und damit Fokussierung auf die physikalischen Phänomene möglich. Der Nachteil der FDM ist ein eventuell schlechtes Konvergenzverhalten, da die Methode nicht notwendigerweise fluss-konservativ ist. Das heißt, die Erhaltungssätze müssen in einer numerischen Lösung sowohl lokal als auch global nicht erfüllt sein. Die durch diese Nachteile resultierenden Approximationsfehler werden durch den Einsatz eines angepassten bzw. eines nicht-äquidistanten Gitters minimiert und durch unabhängige Bilanzen geprüft.

Wie die Finite-Differenzen-Methode (FDM) beispielsweise auf Wärmeleitungs- und Fluidynamikprobleme angewandt wird, kann in Polifke u. Kopitz (2009), Li u. Chen (2009), Incropera u. Dewitt (2002) oder Fox u. a. (2011) nachgelesen werden. Im folgenden werden lediglich Besonderheiten der eingesetzten Methode in Verbindung mit einem nicht-äquidistanten Gitter erläutert. Zur Einführung soll zunächst von einem regelmäßigen bzw. äquidistanten Gitter ausgegangen werden. Bei der einfachsten Form der Finiten-Differenzen-Methode werden die Gradienten der Differentialgleichungen durch eine Taylor-Reihenentwicklung für diskrete Orts- bzw. Zeitschritte angenähert. Für eine

stetige Funktion  $f(x)$  kann der Funktionswert an einer Stelle  $(x + \Delta x)$  durch

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (2.92)$$

ausgedrückt werden.

Teilen der Gleichung (2.92) durch  $\Delta x$  und Umstellen nach dem Gradienten  $\partial f / \partial x$  liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \dots \quad (2.93)$$

Der Methode liegt die Annahme zugrunde, dass immer  $\Delta x \ll 1$  gewählt wird und somit der erste Term der rechten Seite die Gleichung (2.93) dominiert. Bricht man die Reihe (2.93) nach dem ersten Glied ab, so erhält man den vorwärtigen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.94)$$

Den Term  $\mathcal{O}(\Delta x)$  bezeichnet man als Abbruchfehler, Abschneidefehler oder englisch *truncation error*. Dieser Term beinhaltet alle höheren Glieder der Reihe. Wie man an Gleichung (2.93) sieht, ist der Abschneidefehler für den vorwärtigen Differenzenquotienten von der Größenordnung  $\Delta x$ .

Analog zu (2.92) kann ein Funktionswert an einer Stelle  $(x - \Delta x)$  ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} f(x - \Delta x) &= f(x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-\Delta x)^n}{n!} \right] \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Der Gradient  $\partial f / \partial x$  wird dann über den sogenannten rückwärtigen Differenzenquotienten zu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.96)$$

Der Abbruchfehler  $\mathcal{O}(\Delta x)$  aus Gleichung (2.96) beinhaltet in diesem Fall andere Glieder als in Gleichung (2.94). Die genaue Zusammensetzung ist nicht entscheidend, vielmehr ist die Größenordnung zu beachten. Auch bei Anwendung des rückwärtigen Differenzenquotienten ist der Abschneidefehler von der Größenordnung  $\Delta x$ .

Eine weitere Möglichkeit Gradienten anzunähern, besteht durch Bildung des zentralen Differenzenquotienten. Dieser wird durch Subtrahieren der Gleichung (2.95) von (2.92) erhalten. Ist die Schrittweite  $\Delta x$  konstant, so entfallen alle Terme mit geradem Exponenten. Man erhält folgende Gleichung

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (2.97)$$

Auflösen nach dem Gradienten  $\partial f / \partial x$  führt zur Definition des zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (2.98)$$

Der durch die Diskretisierung gemachte Abbruchfehler ist bei Anwendung des zentralen Differenzenquotienten (Gleichungen (2.98) von der Ordnung  $(\Delta x)^2$ . Da  $\Delta x \ll 1$  ist, ist die Diskretisierung mit dem zentralen Differenzenquotienten die genauere Näherung.

Für die zweiten Ableitungen lässt sich das Prinzip der Differenzenformulierung ebenfalls anwenden. Eine vorwärtige Annäherung kann beispielsweise analog zu Gleichung (2.92) auch durch eine Diskretisierung über die doppelte Distanz ( $2\Delta x$ ) ausgedrückt werden:

$$f(x + 2\Delta x) = f(x) + 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (2.99)$$

Wird Gleichung (2.92) mit dem Faktor 2 erweitert und von Gleichung (2.99) abgezogen, erhält man:

$$-2f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x) = -f(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (2.100)$$

Löst man Gleichung (2.100) nach  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  auf, ergibt sich vergleichbar zu Gleichung

(2.94)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.101)$$

Analog zu den Gleichungen (2.96) und (2.98) finden sich für den rückwärtigen und zentralen Differenzenquotienten die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{f(x - 2\Delta x) - 2f(x - \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \end{aligned} \quad (2.102)$$

Es liegt auch für die zweiten Ableitungen unter Verwendung der vorwärtigen und rückwärtigen Annäherung die Größenordnung des Abbruchfehlers bei  $\mathcal{O}(\Delta x)$ . Für die Verwendung des zentralen Differenzenquotienten (2.102, unten)) gilt wie bei der Annäherung der ersten Ableitung eine Größenordnung des Abbruchfehlers von  $\mathcal{O}(\Delta x)^2$

Die gemachten Aussagen über die lokalen Genauigkeiten der Annäherungen gelten nur unter der Verwendung eines äquidistanten Gitters. In diesem Fall führt die Anwendung eines zentralen Differenzenquotienten gegenüber der eines vorwärtigen oder rückwärtigen Differenzenquotienten zu einer genaueren Diskretisierung. Bei Verwendung eines nicht-äquidistanten Gitters ist dies nicht der Fall. Eine nicht-äquidistante Diskretisierung der Gleichungen wird im Allgemeinen bevorzugt, um große Gradienten und deren Änderung möglichst exakt abzubilden. Wie im Folgenden gezeigt wird, wirkt sich ein nicht-äquidistantes Gitter jedoch auf die Ordnung des Abbruchfehlers aus.

Zur übersichtlicheren Darstellung wird nun folgende Notation eingeführt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_j \\ f(x + \Delta x) &= f_{j+1} \\ f(x - \Delta x) &= f_{j-1} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Diese Nomenklatur entspricht jener in Kapitel 4 bzw. jener in den dort aufgeführten Veröffentlichungen. In Abbildung 2.10 ist die räumliche Position der Gitterpunkte veranschaulicht.

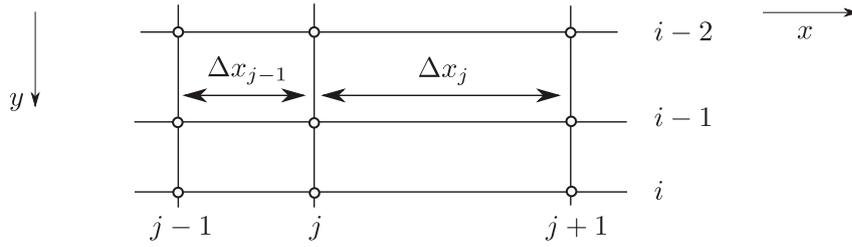


Abbildung 2.10: Darstellung der Gitterpunkte und Bezeichnung der Indizes für ein nicht-äquidistantes Gitter

Die Taylorreihenentwicklung für den Funktionswert an der Stelle  $j+1$  lautet

$$f_{j+1} = f_j + \Delta x_j \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_j + \frac{(\Delta x_j)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_j + \frac{(\Delta x_j)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_j + \mathcal{O}(\Delta x_j)^4 \quad (2.104)$$

Der Ausdruck an der Stelle  $j-1$  ist entsprechend

$$f_{j-1} = f_j - \Delta x_{j-1} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_j + \frac{(\Delta x_{j-1})^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_j - \frac{(\Delta x_{j-1})^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_j + \mathcal{O}(\Delta x_{j-1})^4 \quad (2.105)$$

Wird Gleichung (2.104) durch  $\Delta x_j$  und (2.105) durch  $\Delta x_{j-1}$  geteilt und das Ergebnis dieser beiden anschließend addiert, so erhält man für die zweite Ableitung die Näherung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_j = \frac{2}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} \left( \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x_j} - \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x_{j-1}} \right) - \frac{(\Delta x_j - \Delta x_{j-1})}{3} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_j + \dots \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_j = \frac{2}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} \left( \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x_j} - \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x_{j-1}} \right) + \begin{cases} \mathcal{O}(\Delta x_j) \\ \mathcal{O}(\Delta x_{j-1}) \end{cases} \quad (2.107)$$

An Gleichung (2.106) wird deutlich, dass der Abbruchfehler nun in der Größenordnung von  $\Delta x_j$  bzw.  $\Delta x_{j-1}$  liegt, je nachdem, welcher der beiden Werte der größere ist. Für die Näherung der ersten Ableitung durch einen zentralen Differenzenquotienten gilt diese Aussage gleichermaßen. Damit ist die Näherung eines zentralen Differenzenquotienten nicht mehr genauer als die mittels vorwärtigem oder rückwärtigem Differenzenquotienten.

Ebenfalls wird anhand der Gleichung (2.107) deutlich, dass in den Abständen benachbarter Gitterpunkte keine starken Änderungen vorgenommen werden sollten. Wird durch die vorgenommene Vernetzung beispielsweise  $\Delta x_{j-1}$

um eine Größenordnung gegenüber  $\Delta x_j$  verkleinert, dominiert  $\Delta x_j$  den Abbruchfehler. Das bedeutet: Je nicht-äquidistanter die Gitterabstände um einen gegebenen Punkt  $j$  sind, desto größer ist der Fehler in diesem Punkt (Ferziger u. Peric, 2008, S.57). Werden übliche moderate Faktoren  $<1,5$  zur Veränderung der Schrittweite verwendet, liegt der Abbruchfehler in Gleichung (2.107) in der Größenordnung der Differenz aus  $\Delta x_{j-1}$  und  $\Delta x_j$ . Durch Vermeidung großer Veränderungen in der Schrittweite ist es also möglich, den resultierenden Abbruchfehler klein zu halten und die zweite Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten hinreichend genau anzunähern. Ein Vorteil bei Verwendung eines nicht-äquidistanten Gitters ist, dass alle drei Formen des Differenzenquotienten zur gleichen Größenordnung des Abbruchfehlers führen. Gleichung (2.107) wird verwendet, um die im Modell (Kapitel 3) vorkommenden zweiten Ableitungen nach dem Ort anzunähern.

## Kapitel 3

# Modellbildung

Bei der Herleitung dieses Modells, welches durch Koppelung von Impuls-, Massen- und Energiebilanz die physikalischen Vorgänge bei der Absorption im laminaren Fallfilm beschreibt, wurde auf viele bisher gemachten Vereinfachungen verzichtet. Es wurde anschließend diskretisiert und numerisch gelöst und bildet die Grundlage für die in Kapitel 4 ab Seite 79 dargestellten Geschwindigkeits-, Konzentrations-, und Temperaturverläufe sowie weitere Ergebnisse.

Ein laminarer Fallfilm stellt hinsichtlich Wärme- und Stofftransport lediglich einen Grenzfall dar. Häufig treten in technischen Anwendungen beabsichtigte Turbulenzen auf. Um den Wärme- und Stofftransport unter kontrollierten Bedingungen experimentell untersuchen zu können, sollen am Institut für Energietechnik zunächst im laminaren Fallfilm Messungen lokaler Temperaturen in Filmdickenrichtung durchgeführt werden. Das entwickelte Modell dient zum Vergleich der Messergebnisse und enthält deshalb zum Experiment vergleichbare Randbedingungen. Neben der Annahme einer laminaren Strömungsform zählt dazu die Randbedingung einer isothermen Wandtemperatur. Die Strömung kann sich ausgehend von einem homogenen Profil entwickeln. An der Filmoberfläche wird lokales Phasengleichgewicht angenommen. Die Modellvorstellung ist in Abbildung 3.1 skizziert.

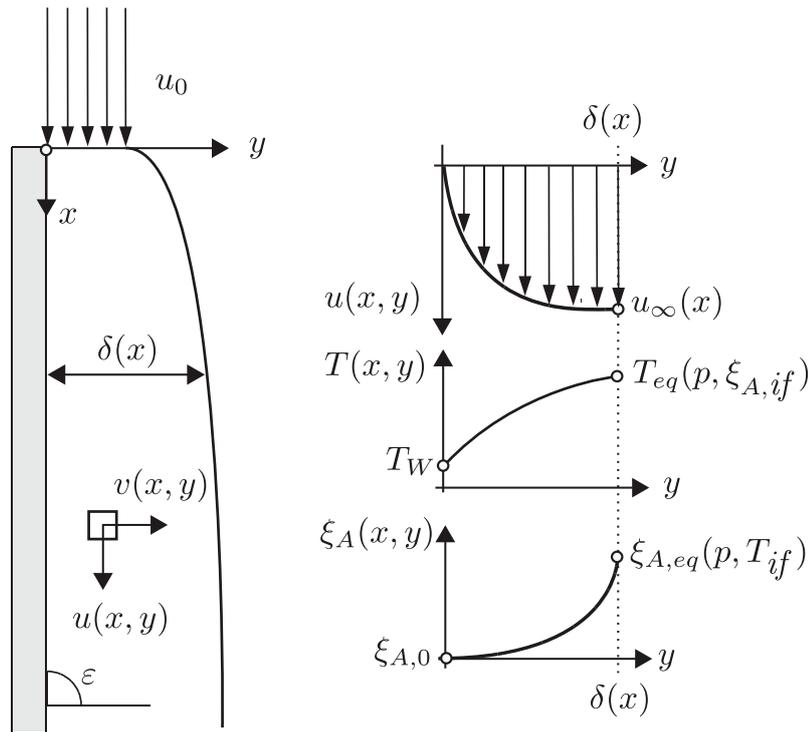


Abbildung 3.1: Modellvorstellung der Vorgänge im laminaren Fallfilm

Zur Ermittlung einer Lösung des oben skizzierten Problems sind einige grundlegenden Annahmen nötig. Die folgenden Annahmen wurden bei der Modellbildung verwendet:

- (a) homogene Temperatur und Zusammensetzung am Eintritt der Strömung
- (b) isotherme und impermeable Plattenwand
- (c) stationäre Flüssigkeitsströmung
- (d) inkompressible Flüssigkeit und konstanter Druck über dem gesamten Flüssigkeitsfilm
- (e) vernachlässigbarer Dampfdruck von Lithiumbromid
- (f) keine Übertragung von Scherspannungen zwischen flüssigem Fallfilm und Dampf an der Phasengrenzfläche
- (g) keine Wärmeübertragung zwischen flüssigem Fallfilm und Dampf an der Phasengrenzfläche
- (h) z-Koordinate ist zur Problembeschreibung nicht relevant
- (i) vernachlässigbare Änderung des Spannungszustands (Normalspannung) im Fallfilm in Fließrichtung (x-Koordinate)

- (j) vernachlässigbare Temperaturänderung durch dissipative Vorgänge im Fallfilm

Die ersten beiden Annahmen führen zu einer einfachen Formulierung der Randbedingungen. Es wird von vollständiger Durchmischung am Einlass ausgegangen. Durch Annahme (b) kann eine Dirichlet'sche Randbedingung an der Wand verwendet werden. Die Annahme einer stationären Strömung (c) führt zu einem einfachen partiellen Differentialgleichungssystem. Unter Annahme (d) ändert sich die Dichte der Lösung im Fallfilm lediglich mit der Konzentration und der Temperatur. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass die Dichte von Temperatur und Zusammensetzung stärker abhängig ist als vom Druck und sich letzterer kaum ändert. Die Änderung weiterer Stoffeigenschaften in Abhängigkeit von der Temperatur und dem Massenanteil wird im Folgenden ebenfalls berücksichtigt.

Durch die Annahme einer laminaren Strömung des Films, einem konstanten Druck über dessen Lauflänge und einem vernachlässigbarem Schergradienten an der Phasengrenzfläche (f), wird der Wärmetransport über die Phasengrenzfläche hinweg von möglicher Wärmeleitung in der Dampfphase bestimmt (g). Gesättigter Wasserdampf bei einem in Absorbieren üblichem Druck von  $20\text{mbar}$  weist eine Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  von  $0,02\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$  (NIS, 2011) auf. Durch den kleinen Transportkoeffizienten sowie dem relativ kleinen Temperaturunterschied zwischen Dampf- und Flüssigphase (ca.  $30\text{K}$ ) lässt sich an der Phasengrenze der Wärmetransport gegenüber der bei Dämpfen meist hohen auftretenden Phasenwechselenthalpie vernachlässigen (g).

Eine streng laminare Strömung über eine ebene isotherme Platte kann durch ein zweidimensionales Modell hinreichend genau beschrieben werden, da in Plattentiefe (z-Koordinate) weder Wärmeleitung noch Konvektion auftritt (h). Quer zur Strömungsrichtung treten Scherspannungen auf, die im Modell berücksichtigt werden. Normalspannungen in Fließrichtung können vernachlässigt werden, da ein inkompressibles Fluid angenommen wird (i). Die Volumenviskosität, die bei der Kompression oder Expansion von Flüssigkeiten oder Gasen infolge einer durch das Fluid selbst bedingte Spannung entsteht, wird dadurch vernachlässigt. Methoden der statistischen Mechanik haben gezeigt, dass die Volumenviskosität von Gasen geringer Dichte verschwindet und dass sie in dichten Gasen und Flüssigkeiten sehr klein ist (Baehr u. Stephan, 2010).

Da von einer inkompressiblen Flüssigkeit mit relativ großer Wärmekapazität ausgegangen wird und nennenswerte Scherspannungen nur in einer Koordinatenrichtung auftreten, ist die aus der Flüssigkeitsreibung resultierende Temperaturerhöhung im Fallfilm vernachlässigbar gering (j).

In Abschnitt 3.6 wird die Hydrodynamik des Fallfilms über die oben genannten Annahmen hinaus stark vereinfacht, um dadurch das Modell mit der analytischen Lösung von Nakoryakov u. Grigor'eva (1997) in Kapitel 4.1 zu validieren. Wie in Kapitel 2 bereits beschrieben, gehen Nakoryakov u. Grigor'eva (1997) unter anderem von einem homogenen Geschwindigkeitsprofil und einer konstanten Filmdicke aus. Daher erfolgt im Abschnitt 3.6 eine vergleichbare Beschreibung der Strömung.

In den folgenden Abschnitten 3.1 und 3.2 wird nicht von einer Vereinfachung der Hydrodynamik ausgegangen. Daher kann sich, ausgehend von einem initialen Geschwindigkeitsprofil, die Geschwindigkeit in beiden Koordinatenrichtungen entwickeln. Die Geschwindigkeitskomponente  $u$  in x-Richtung wird als longitudinale Geschwindigkeit, die Geschwindigkeitskomponente  $v$  in y-Richtung als transversale Geschwindigkeit bezeichnet. In Abschnitt 3.3 wird der Stofftransport, in 3.4 der Wärmetransport beschrieben. Des Weiteren wird in Abschnitt 3.5 auf den Zusammenhang zwischen Komponenten- und Impulsbilanz sowie die Auswirkung auf die Randbedingung an der freien Filmoberfläche eingegangen.

### 3.1 Massenbilanz

Mit der Kontinuitätsgleichung wird die Erhaltung von Masse in einem differentiellen, ortsfesten, zeitlich veränderlichen Volumenelement beschrieben. Die Herleitung kann Lehrbüchern wie zum Beispiel Baehr u. Stephan (2010, Kap. 3.2) entnommen werden. Unter Annahme (c) kann eine Änderung der Dichte mit der Zeit  $\partial\rho/\partial t$  ausgeschlossen werden. Die Kontinuitätsgleichung, welche unter Annahme (h) die Änderung der Massenstromdichte in longitudinaler und transversaler Richtung bilanziert, vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Nach Anwenden der Produktregel wird Gleichung 3.1 zu

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

Die Dichte  $\rho$  ist keine Funktion des Ortes, sondern abhängig von  $T(x, y)$  und  $\xi_A(x, y)$ . Deshalb gilt:

$$\rho = \rho(T(x, y), \xi_A(x, y)) \quad (3.3)$$

Damit wird Gleichung (3.2) zu

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Die Randbedingungen zur Lösung von 3.2 sind folgendermaßen zu wählen:

$$u(x, y = 0) = 0 \quad (3.5)$$

$$v(x, y = 0) = 0 \quad (3.6)$$

Gleichung (3.5) beschreibt die Wandhaftung in longitudinaler Richtung. Die Randbedingung (3.6) der transversalen Geschwindigkeit  $v$  entspricht der Wandhaftungsbedingung in transversaler Richtung.

## 3.2 Impulsbilanz

Grundlage zur Beschreibung eines Geschwindigkeitsfeldes bilden zusammen mit der Kontinuitätsgleichung die Navier-Stokes'schen Gleichungen (vgl. Gleichung 2.1 auf Seite 4). Wie von Prandtl (1904) hergeleitet und in Kapitel 2.1.3 aufgeführt, können diese für den Fall einer laminaren Strömung über einer ebenen Platte deutlich vereinfacht werden. Ebenso wurde verdeutlicht, dass die Grenzschichtformulierung für die Strömung eines laminaren Fallfilms anwendbar ist.

Cerro u. Whitaker (1971) haben bereits gezeigt, dass mit Hilfe der Grenzschichtgleichung für eine Strömung mit freier Oberfläche im Anlaufbereich eine gute Übereinstimmung zwischen errechneter und experimentell ermittelter Oberflächengeschwindigkeit zu erreichen ist. Deshalb soll hier die Grenzschicht-

formulierung verwendet werden. Wie bereits auf Seite 17 in Gleichung (2.32) hergeleitet, lautet diese für variable Stoffwerte sowie für auf die Horizontale bezogene Winkel  $0 \leq \varepsilon \leq 90^\circ$  der Platte (siehe Abb. 3.1)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \cdot \sin \varepsilon \quad (3.7)$$

Die obige Gleichung (3.7) ist über die beiden Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  mit der Kontinuitätsgleichung (3.2) gekoppelt. Die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  in transversaler Richtung kann während des hydrodynamischen Anlaufs durch die Abbremsung der Strömung an der Wand relativ hoch sein. Dadurch steigt auch die Filmdicke  $\delta$  an, deren Berechnung als Randbedingung in das Gleichungssystem eingeht. Dies geschieht durch eine Koppelung der integralen Kontinuitätsgleichung mit dem absorbierten Massenstrom an der Phasengrenzfläche und ist in Abschnitt 3.5 ab Seite 71 beschrieben. Im Verlauf der Filmströmung bildet sich das Geschwindigkeitsprofil aus, wodurch die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  in transversaler Richtung klein wird.

Wie oben dargestellt, ist die Dichte  $\rho$  eine Funktion der lokalen Temperatur  $T$  und des Massenanteils  $\xi_A$ . Analog zu Gleichung (3.3) gilt für die Viskosität die Beziehung:

$$\mu = \mu(T(x, y), \xi_A(x, y)) \quad (3.8)$$

Die Daten zur Berechnung der Viskosität  $\mu$  wurden Löwer (1960) entnommen, die Gleichungen sind in Mittermaier u. a. (2014) aufgeführt. Mit (3.8) kann nach Anwenden der Produktregel für Gleichung (3.7)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial \xi_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \cdot \sin \varepsilon \quad (3.9)$$

geschrieben werden.

Gleichung (3.9) ist bezüglich der Geschwindigkeitskomponente  $u$  eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, weshalb zur Lösung von  $u(y)$  insgesamt zwei Randbedingungen benötigt werden. Als erste Randbedingung wird von einer konstanten Geschwindigkeit am Einlass der Strömung ausgegangen (Gleichung (3.10)).

$$u(x = 0, y > 0) = u_0 \quad (3.10)$$

Von Gleichung (3.10) wird im Ergebnisteil (Kapitel 4) abgewichen. Um den Einfluss der Hydrodynamik zu analysieren, wird zu Vergleichszwecken auch von einem voll entwickeltem Geschwindigkeitsprofil am Einlass ausgegangen (vgl. Abschnitt 2.1.2, Gleichung (2.11) auf Seite 10). Eine weitere mögliche Anfangsbedingung ist beispielsweise eine Spaltströmung, die in Anhang A.1 auf Seite 167 dargestellt ist.

Zur vollständigen Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes wird eine zweite Randbedingung benötigt. Diese lautet:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0 \quad (3.11)$$

Randbedingung (3.11) beruht auf der Annahme vernachlässigbarer Scherkräfte an der Phasengrenzfläche (Annahme (f) auf Seite 54).

### 3.3 Komponentenbilanz

Der Stofftransport wird durch die Komponentenbilanz beschrieben. Da diese Untersuchung lediglich ein Zweistoffgemisch behandelt und gleichzeitig die oben in Abschnitt 3.1 beschriebene Kontinuitätsgleichung Verwendung findet, darf nur eine Komponentenbilanz genutzt werden, um einen Satz linear unabhängiger Gleichungen aufzustellen.

Da in der Anwendung die Aufnahme des Absorbats entscheidend für die Bereitstellung des Nutzens ist, soll im Folgenden die Bilanz des Wassermassenanteils  $\xi_A$  gebildet werden. Mit Hilfe der Komponentenstromdichte  $\dot{m}_{Ax}$  kann der Komponentenstrom  $d\dot{M}_{Ax}$  in longitudinale Richtung als

$$d\dot{M}_{Ax} = \dot{m}_{Ax} B dy \quad (3.12)$$

bzw. analog der Massenstrom  $d\dot{M}_{Ay}$  in transversaler Richtung als

$$d\dot{M}_{Ay} = \dot{m}_{Ay} B dx \quad (3.13)$$

ausgedrückt werden.  $B$  ist darin die Aufgabebreite des Flüssigkeitsfilms.

Das Bilanzelement für die Komponentenbilanz zeigt Abbildung 3.2.

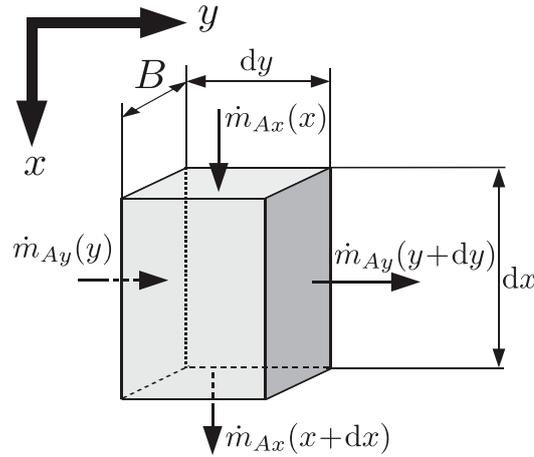


Abbildung 3.2: Bilanzraum für Komponentenbilanz

Die Komponentenbilanz für das Absorbat lautet:

$$[\dot{m}_{Ax}(x) - \dot{m}_{Ax}(x + dx)] B dy + [\dot{m}_{Ay}(y) - \dot{m}_{Ay}(y + dy)] B dx = 0 \quad (3.14)$$

Wird die Taylorreihe nach dem ersten Glied abgebrochen, kann für Gleichung (3.14)

$$-\frac{\partial \dot{m}_{Ax}}{\partial x} dx dy B - \frac{\partial \dot{m}_{Ay}}{\partial y} dy dx B = 0 \quad (3.15)$$

geschrieben werden.

Zur weiteren Bestimmung der Komponentenstromdichte  $\dot{m}_A$  in longitudinaler Richtung wird der diffusive Anteil gegenüber dem konvektiven Anteil am Transport vernachlässigt, da die Diffusionsgeschwindigkeit klein gegenüber der Strömungsgeschwindigkeit ist. Als Transportgesetz für  $\dot{m}_{Ax}$  kann geschrieben werden:

$$\dot{m}_{Ax} = \xi_A \cdot \rho \cdot u \quad (3.16)$$

Die Salzkomponente kann auf Grund des vernachlässigbar geringen Dampfdrucks von Lithiumbromid an der Filmoberfläche nicht entweichen, wodurch eine konvektive Komponentengeschwindigkeit induziert wird (sog. Stefan-Strom, Baehr u. Stephan (2010)). Zudem gibt es eine Geschwindigkeitskomponente in transversaler Richtung durch die Ausbildung des Geschwindigkeitsprofils. Aus diesen Gründen wird in transversaler Richtung konvektiver und diffusiver

Stofftransport zugelassen. Das entsprechende Transportgesetz lautet

$$\dot{m}_{Ay} = \xi_A \cdot \rho \cdot v - \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \quad (3.17)$$

Werden die Gleichungen (3.16) und (3.17) in (3.15) eingesetzt, ergibt sich

$$-\frac{\partial (\xi_A \rho u)}{\partial x} - \frac{\partial \left( \xi_A \rho v - \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right)}{\partial y} = 0 \quad (3.18)$$

Nach Anwenden der Produktregel kann für die Komponentenbilanz

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} + \underbrace{\xi_A u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \xi_A \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \xi_A v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \xi_A \rho \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} + \rho v \frac{\partial \xi_A}{\partial y} = \\ \frac{\partial \left( \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right)}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.19)$$

geschrieben werden.

Die partiellen Ableitungen der Dichte in beide Raumrichtungen sowie der Geschwindigkeiten nach ihren jeweiligen Raumkoordinaten erfüllen die Kontinuitätsgleichung (Gleichung (3.2) auf Seite 57), welche lediglich mit  $\xi_A$  erweitert wurde. Daher ergänzen sich die in Gleichung (3.19) mit der Klammer markierten Terme zu Null. Damit ergibt sich die Komponentenbilanz zu

$$\rho \left( u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} + v \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) = \frac{\partial \left( \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right)}{\partial y} \quad (3.20)$$

Diese Form der Gleichung (3.20) wird, wie in Abschnitt 4.2 dargestellt, diskretisiert und unter Verwendung der entsprechenden Stoffdatenfunktionen gelöst.

Wie oben bereits erwähnt, sind Dichte  $\rho$  und Diffusionskoeffizient  $D$  jeweils Funktionen der lokalen Temperatur  $T$  und des Massenanteils  $\xi_A$ . Wird die rechte Seite der Gleichung (3.20) ausformuliert, wird deutlich, dass die Differenzialgleichung bezüglich  $\xi_A(x)$  erster Ordnung und bezüglich  $\xi_A(y)$  zweiter

Ordnung ist. Daher sind insgesamt drei Randbedingungen nötig.

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} + v \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) &= \rho \left( \frac{\partial D}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \xi_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \\ &+ D \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_A}{\partial y} + \rho D \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die erste Randbedingung zur Lösung der Komponentenbilanz ist die Zusammensetzung am Eintritt:

$$\xi_A(x=0, y) = \xi_{A,0} \quad (3.22)$$

Zwei weitere Randbedingungen ergeben sich aus der Annahme (b) einer impermeablen Wand bei ( $y=0$ ) und einer Massenbilanz an der freien Oberfläche bei  $\delta(x)$ . Da die sich bei  $\delta(x)$  ergebende Randbedingung das Geschwindigkeitsfeld mit dem Konzentrations- und Temperaturfeld koppelt, wird sie zusammen mit weiteren Koppelungsbedingungen im Abschnitt 3.5 ab Seite 71 eingeführt. Zunächst soll lediglich die Randbedingung an der impermeablen Wand erläutert werden.

Der Stoffstrom, beschrieben durch Gleichung (3.17), kann durch die Annahme einer impermeablen Wand an der Stelle ( $y=0$ ) zu Null gesetzt werden.

$$\dot{m}_{Ay}(x, y=0) = \rho \xi_A \cdot v - \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

Da die Randbedingung (Gleichung 3.6)

$$v(y=0) = 0$$

aus Abschnitt 3.1 ebenfalls erfüllt sein muss, folgt daraus, dass der Gradient des Massenanteils  $\frac{\partial \xi_A}{\partial y}$  an der Stelle ( $y=0$ ) Null sein muss:

$$\left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.24)$$

### 3.4 Energiebilanz

Energieströme gibt es ebenfalls in zwei Raumkoordinaten. In Strömungsrichtung wird dabei die Wärmeleitung gegenüber der Konvektion vernachlässigt. Diese Annahme ist analog zur Vernachlässigung des diffusiven gegenüber dem konvektiven Stofftransport aus vorherigem Abschnitt 3.3.

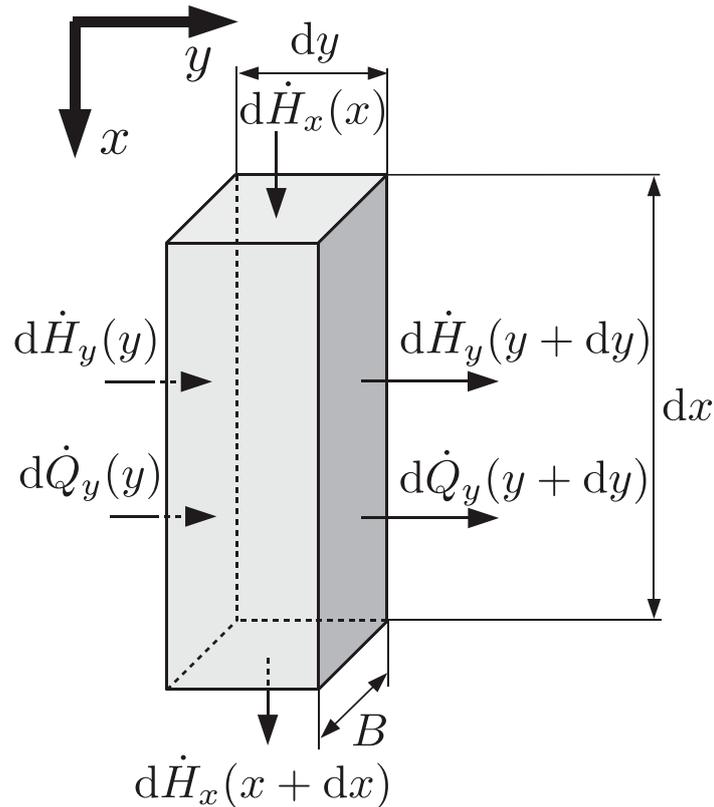


Abbildung 3.3: Bilanzraum zur Energiebilanz

Für das differentielle Volumenelement aus Abbildung 3.3 lautet die Energiebilanz

$$d\dot{H}_x(x) - d\dot{H}_x(x + dx) + d\dot{H}_y(y) - d\dot{H}_y(y + dy) + d\dot{Q}_y(y) - d\dot{Q}_y(y + dy) = 0 \quad (3.25)$$

Wie in Abschnitt 3.3 können auch die differentiellen Enthalpie- und Wärmeströme einfach durch die Massenstromdichten  $\dot{m}$  und die spezifischen Ent-

halprien  $h$  bzw. die Wärmestromdichten  $\dot{q}$  ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} d\dot{H}_x &= \dot{m}_x h B dy \\ d\dot{H}_y &= \dot{m}_y h B dx \\ d\dot{Q}_y &= \dot{q}_y B dx \end{aligned} \quad (3.26)$$

Zunächst wird die Enthalpie in y-Richtung weiter über die partiellen Enthalpien ausgedrückt, wie in Abschnitt 2.45 eingeführt. Für den Ausdruck  $\dot{m}_y h$  aus Gleichung (3.26) kann mit Hilfe von Gleichung (2.58) auch

$$\dot{m}_y h = \sum \dot{m}_{c,y} \bar{h}_c \quad (3.27)$$

geschrieben werden.  $\dot{m}_c$  bezeichnet die Komponentenstromdichte. Der Index  $c$  steht darin für die Komponenten Wasser (später Index  $A$ ) und Lithiumbromid (später Index  $S$ ).

Die Massenstromdichten  $\dot{m}_{c,y}$  der Bilanz lassen sich weiter anhand ihrer Ursachen unterscheiden. Konvektiver Transport wird mit Index  $k$  bezeichnet, diffusiver Transport mit Index  $d$ . Aus Gleichung (3.27) wird damit

$$\begin{aligned} \dot{m}_y h &= \sum (\dot{m}_{d,y} + \dot{m}_{k,y})_c \bar{h}_c \\ &= \sum \dot{m}_{c,d,y} \bar{h}_c + \sum \dot{m}_{c,k,y} \bar{h}_c \\ &= \sum \dot{m}_{c,d,y} \bar{h}_c + \sum \rho_c v \bar{h}_c \\ &= \sum \dot{m}_{c,d,y} \bar{h}_c + \rho v \sum \xi_c \bar{h}_c \\ &= \sum \dot{m}_{c,d,y} \bar{h}_c + \rho v h \\ &= \sum \dot{m}_{c,d,y} \bar{h}_c + \dot{m}_{k,y} h \end{aligned} \quad (3.28)$$

Den Enthalpiestrom in y-Richtung kann man insgesamt also in drei Teilströme unterteilen. Die beiden Enthalpieströme  $\dot{m}_{A,d,y} \bar{h}_A$  und  $\dot{m}_{S,d,y} \bar{h}_S$  werden durch Diffusion induziert, ein Enthalpiestrom  $\dot{m}_{k,y} h$  entsteht durch Konvektion in y-Richtung.

Da Diffusion nur quer zur Fließrichtung betrachtet werden soll, treten die zugehörigen Enthalpieströme ebenfalls nur in y-Richtung auf. Diese Enthalpieströme werden durch Konzentrationsgradienten hervorgerufen (engl.: *heat flow due to interdiffusion*). Da sich der Diffusionsmassenstrom des Wassers von der

Phasengrenzfläche in Richtung der gekühlten Wand bewegt, wurde der Enthalpiestrom ebenfalls in diese Richtung angenommen. Die Wärmeleitung tritt weiterhin zusätzlich auf. Abbildung 3.4 zeigt diese Detaillierung graphisch.

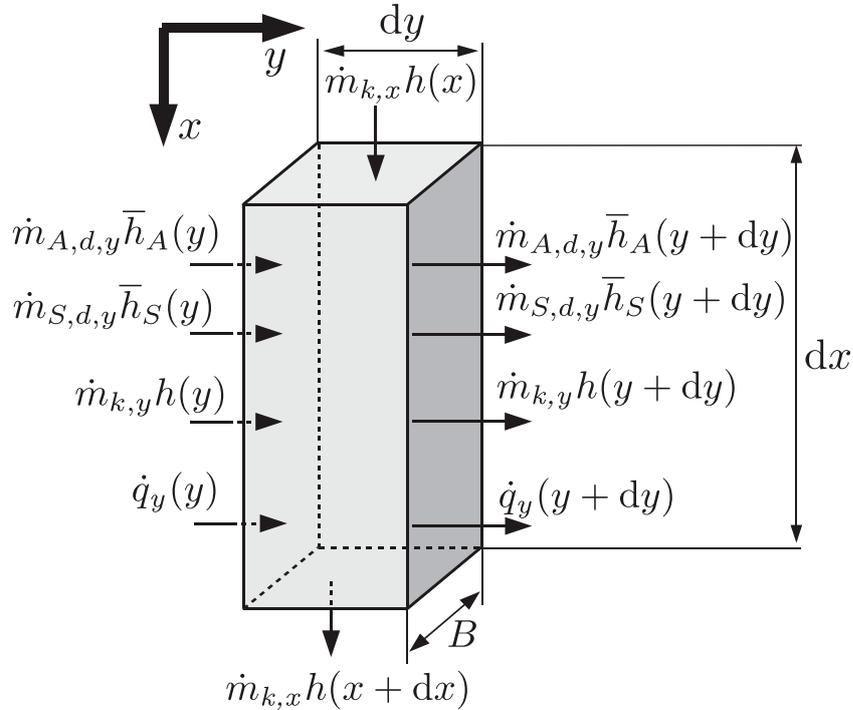


Abbildung 3.4: Bilanzraum für Energiebilanz (detailliert)

Für die Energiebilanz (3.25) kann nun

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{[\dot{m}_{k,x} h(x) - \dot{m}_{k,x} h(x + dx)] B dy}_{\text{Konvektiver Wärmetransport in longitudinale Richtung}} + \\
 & \underbrace{[\dot{m}_{k,y} h(y) - \dot{m}_{k,y} h(y + dy)] B dx}_{\text{Konvektiver Wärmetransport in transversale Richtung}} + \underbrace{[\dot{q}_y(y) - \dot{q}_y(y + dy)] B dx}_{\text{Wärmeleitung in transversale Richtung}} + \\
 & \underbrace{[\dot{m}_{A,d,y} \bar{h}_A(y) - \dot{m}_{A,d,y} \bar{h}_A(y + dy)] B dx}_{\text{Diffusiver Enthalpiestrom der Wasserkomponente}} + \\
 & \underbrace{[\dot{m}_{S,d,y} \bar{h}_S(y) - \dot{m}_{S,d,y} \bar{h}_S(y + dy)] B dx}_{\text{Diffusiver Enthalpiestrom der Salzkomponente}} = 0
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

geschrieben werden.

Wird die Taylorreihe jeweils nach dem ersten Glied abgebrochen, wird Gleichung (3.29) zu

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{-\frac{\partial(\dot{m}_{k,x}h)}{\partial x} B dx dy}_{\text{Konvektiver Wärmetransport in longitudinale Richtung}} - \\
 & \underbrace{\frac{\partial(\dot{m}_{k,y}h)}{\partial y} B dx dy}_{\text{Konvektiver Wärmetransport in transversale Richtung}} - \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} B dx dy}_{\text{Wärmeleitung in transversale Richtung}} - \\
 & \underbrace{\frac{\partial(\dot{m}_{A,d,y}\bar{h}_A)}{\partial y} B dx dy}_{\text{Diffusiver Enthalpiestrom der Wasserkomponente}} - \underbrace{\frac{\partial(\dot{m}_{S,d,y}\bar{h}_S)}{\partial y} B dx dy}_{\text{Diffusiver Enthalpiestrom der Salzkomponente}} = 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Im Folgenden werden für die einzelnen Massenstromdichten  $\dot{m}$  sowie den Wärmestrom durch Wärmeleitung  $\dot{q}$  die jeweiligen Transportgesetze in die Bilanz eingesetzt. Dazu werden die markierten Terme aus Gleichung (3.30) nach ihren Ursachen getrennt betrachtet.

### 3.4.1 Konvektiver Wärmetransport

#### Konvektiver Wärmetransport in longitudinale Richtung

Wie in Gleichung (3.28) ersichtlich ist, kann die Massenstromdichte durch die entsprechende Geschwindigkeitskomponente  $u$

$$\dot{m}_{k,x} = \rho \cdot u \tag{3.31}$$

ausgedrückt werden. Damit gilt für den entsprechenden Teil aus Gleichung (3.30)

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial(\dot{m}_{k,x}h)}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u h) \\
 &= -\rho u \frac{\partial h}{\partial x} - u h \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho h \frac{\partial u}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

### Konvektiver Wärmetransport in transversale Richtung

Analog zu Gleichung (3.32) kann für die transversale Richtung der Gleichung (3.30) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial (\dot{m}_{k,y} h)}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} (\rho v h) \\ &= -\rho v \frac{\partial h}{\partial y} - v h \frac{\partial \rho}{\partial y} - \rho h \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.4.2 Wärmeleitung in transversale Richtung

Für den spezifischen Wärmestrom in transversale Richtung  $\dot{q}_y$  lautet das Fourier'sche Gesetz

$$\dot{q}_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.34)$$

Einsetzen des Transportgesetzes (3.34) in den entsprechenden Teil aus Gleichung (3.30) ergibt für den differentiellen Wärmestrom die Beziehung

$$-\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.35)$$

### 3.4.3 Enthalpiestrom aufgrund von Diffusion

Nun werden die Enthalpieströme betrachtet, die den diffundierenden Massenstromdichten anhaften.

#### Diffusiver Enthalpiestrom der Wasserkomponente

Der diffusive Transport wird durch das Fick'sche Gesetz beschrieben:

$$\dot{m}_{A,d,y} = -\rho D_{AS} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \quad (3.36)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.36) ergibt sich für den diffusiven Enthalpiestrom der Wasserkomponente (vgl. Gl. (3.30)) folgende Form:

$$-\frac{\partial (\dot{m}_{A,d,y} \bar{h}_A)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_{AS} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \bar{h}_A \right) \quad (3.37)$$

### Diffusiver Enthalpiestrom der Salzkomponente

Für den Salzmassenstrom kann analog zu Gleichung (3.36) nun

$$\dot{m}_{S,d,y} = -\rho D_{SA} \frac{\partial \xi_S}{\partial y} \quad (3.38)$$

geschrieben werden.

Es ist jedoch vorteilhaft, auch die Massenstromdichte des Salzes in Abhängigkeit vom Gradienten des Massenanteils des Wassers auszudrücken. Damit wird Gleichung (3.38) zu

$$\dot{m}_{S,d,y} = \rho D_{SA} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \quad (3.39)$$

Für den diffusiven Enthalpiestrom der Salzkomponente aus Gleichung (3.30) kann also

$$-\frac{\partial (\dot{m}_{S,d,y} \bar{h}_S)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_{SA} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \bar{h}_S \right) \quad (3.40)$$

geschrieben werden.

### 3.4.4 Resultierende Energiebilanz

Anschließend können nun die Gleichungen (3.32), (3.33), (3.35), (3.37) und (3.40) in die Gleichung (3.30) auf Seite 66 eingesetzt werden. Dieser Schritt führt zu Gleichung (3.41):

$$\underbrace{\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + uh \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho h \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} + vh \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho h \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{Konvektiver Wärmetransport in x- und y-Richtung, vgl. Kap. 3.4.1}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{\text{Wärmeleitung in y-Richtung, vgl. Kap. 3.4.2}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_{AS} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \bar{h}_A \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_{SA} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \bar{h}_S \right)}_{\text{Diffusiver Wärmetransport der Wasser- und Salzkomponente in y-Richtung, vgl. Kap. 3.4.3}} \quad (3.41)$$

In dieser Gleichung (3.41) kann analog zur Komponentenbilanz mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die linke Seite vereinfacht werden. Erweitert man

die Kontinuitätsgleichung mit der Lösungsenthalpie  $h$  erhält man:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} h + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} h = 0 \Rightarrow \rho h \frac{\partial u}{\partial x} + u h \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho h \frac{\partial v}{\partial y} + v h \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

Dadurch entfallen die Ableitungen der Dichte und der Geschwindigkeiten jeweils nach den Raumkoordinaten.

Unter der Annahme, dass bei Zweikomponentensystemen  $D_{AS} = D_{SA} = D$  gilt, kann die Energiebilanz weiter vereinfacht werden. Für Gleichung (3.41) kann nun übersichtlich

$$\rho \left[ u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \right] \quad (3.42)$$

geschrieben werden. Die Enthalpie von Gemischen ist von Temperatur, Druck und Zusammensetzung abhängig (Baehr u. Stephan, 2010, S. 333). Unter Verwendung des spezifischen Volumens ( $\hat{v} = \rho^{-1}$ ) ist ihr Differential gegeben durch

$$dh = c_p dT - \left( T \frac{\partial \hat{v}}{\partial T} \Big|_p - \hat{v} \right) dp + \sum_c \bar{h}_c d\xi_c \quad (3.43)$$

Unter der Annahme eines isobaren Fließprozesses entfällt in (3.43) der druckabhängige mittlere Term. Durch diese Annahme vereinfacht sich Gleichung (3.43) für ein binäres System zu:

$$dh = c_p dT + \bar{h}_A d\xi_A - \bar{h}_S d\xi_A \quad (3.44)$$

Wie die Dichte  $\rho$  in Gleichung (3.3), so hängen die weiteren Stoffparameter  $c_p$ ,  $\lambda$ ,  $D$ ,  $\bar{h}_A$  und  $\bar{h}_S$  nicht direkt von den Raumkoordinaten  $x$  und  $y$  ab, sondern von der Temperatur  $T$  und dem Massenanteil  $\xi_A$ . Die Bestimmungsgleichungen basieren auf Messungen von Löwer (1960) und sind in Mittermaier u. a. (2014)

aufgeführt.

$$\begin{aligned}
c_p &= c_p(T(x, y), \xi_A(x, y)) \\
\lambda &= \lambda(T(x, y), \xi_A(x, y)) \\
D &= D(T(x, y), \xi_A(x, y)) \\
\bar{h}_A &= \bar{h}_A(T(x, y), \xi_A(x, y)) \\
\bar{h}_S &= \bar{h}_S(T(x, y), \xi_A(x, y))
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Mit Gleichung (3.44) wird die Energiebilanz also zu:

$$\begin{aligned}
\rho \left[ u \left( c_p \frac{\partial T}{\partial x} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right) + v \left( c_p \frac{\partial T}{\partial y} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \right] = \\
\frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \right] \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Diese Form der Gleichung wird, wie in Mittermaier u. Ziegler (2015) dargestellt, diskretisiert und unter Verwendung der entsprechenden Stoffdatenfunktionen (Gleichungen 3.45) gelöst. Für die Enthalpiedifferenz  $\bar{h}_A - \bar{h}_S$  gilt auch

$$\bar{h}_A - \bar{h}_S = \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T \tag{3.47}$$

Wird (3.47) zusammen mit den Stoffdatenfunktionen (3.45) in Gleichung (3.46) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\rho \left[ u \left( c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T \right) + v \left( c_p \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T \right) \right] = \\
\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + D \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T \\
+ \rho \left( \frac{\partial D}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \xi_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T + \rho D \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial y^2} + \rho D \frac{\partial}{\partial y} \left( \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T \right)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $T(x, y)$  und  $\xi_A(x, y)$  werden insgesamt sechs Randbedingungen benötigt. Da in den vorangegangenen Abschnitten bereits zwei Randbedingungen für  $\xi_A(x, y)$  eingeführt wurden (Gleichungen (3.22) und (3.24)), werden nur noch vier weitere Randbedingungen benötigt.

Da von homogenen Bedingungen an der Stelle  $x=0$  sowie einer isothermen Wand ausgegangen wird, können folgende Bedingungen aufgestellt werden:

$$T(x=0, y > 0) = T_0 \quad (3.49)$$

$$T(x, y=0) = T_W \quad (3.50)$$

Nun werden noch zwei Bedingungen benötigt. Mit diesen Bedingungen wird außerdem die Koppelung zwischen Geschwindigkeits-, Konzentrations- und Temperaturfeld hergestellt. Diese folgenden Gleichungen (3.59) und (3.61) werden jeweils an der Oberfläche aufgestellt und sollen im folgenden Abschnitt erläutert werden.

## 3.5 Bedingungen an der an der Phasengrenzfläche

Die Koppelung zwischen Komponenten- und Energiebilanz erfolgt durch eine Bilanz an der Filmoberfläche. Zusätzlich muss das Phasengleichgewicht an dieser Filmoberfläche erfüllt sein.

### 3.5.1 Integrale Massenbilanz

Die Lage der freien Filmoberfläche ist nur am Eintritt der Lösung (bei  $x=0$ ), jedoch nicht im weiteren Verlauf über die longitudinale Koordinate  $x$  bekannt. In Crank (1984) wird bezüglich solcher Probleme nach freien und beweglichen Oberflächen, engl: *free and moving boundary problems*, unterschieden. Während bei beweglichen Oberflächen zeitliche Abhängigkeiten auftreten, bewegt sich die freie Oberfläche nicht. Trotzdem muss die Lage der freien Oberfläche als Teil der Lösung ermittelt werden (Crank, 1984). Da die Filmdicke, welche diese Lage bestimmt, über die longitudinale Koordinate nicht konstant ist, muss sie durch eine zusätzliche Gleichung ermittelt werden. Hierzu wird eine integrale Massenbilanz unter Berücksichtigung der absorbierten Massenstromdichte an der Oberfläche (Index  $_{if}$ ) aufgestellt. Diese lautet:

$$\int_0^{\delta(x)} \rho u dy + \dot{m}_{A,if}(x) = \int_0^{\delta(x+dx)} \rho u dy \quad (3.51)$$

Mit Gleichung (3.51) ist die Ermittlung der Lage der freien Oberfläche  $\delta(x)$  Teil der Lösung des Gleichungssystems geworden. Damit ist die Voraussetzung geschaffen, um iterativ die Lage der Phasengrenzfläche zu ermitteln und weitere Bedingungen zur Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen herzuleiten.

Die an der Oberfläche absorbierte Massenstromdichte  $\dot{m}_{A,if}$  folgt aus der Randbedingung der Komponentenbilanz. Diese wird zugleich für die integrale Massenbilanz (Gleichung 3.51) benötigt. Im folgenden Abschnitt wird diese hergeleitet.

### 3.5.2 An der Oberfläche absorbierte Massenstromdichte

Die Gleichung zur Beschreibung des diffusiven und konvektiven Stofftransports der Wasserkomponente  $\dot{m}_A$  an der Phasengrenzfläche (Index  $if$ ) dient als Randbedingung der Komponentenbilanz und lautet gemäß Gleichung (3.17) auf Seite 61:

$$\dot{m}_{A,if}(x) = \dot{m}_A(x, y = \delta(x)) = -\xi_{A,if} \cdot \rho_{if} \cdot v_{if} + \rho_{if} \cdot D_{if} \frac{\partial \xi_{A,if}}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} \quad (3.52)$$

Die freie Oberfläche (Index  $if$ ) ist unbeweglich bei  $y = \delta(x)$  und undurchdringlich für Lithiumbromid. An der Oberfläche selbst kann somit lediglich die Wasserkomponente ein- oder austreten, da von einem vernachlässigbar geringen Dampfdruck des Lithiumbromids ausgegangen wird (Annahme e). Für die Komponentenstromdichte  $\dot{m}_S$  des Salzes gilt also

$$\dot{m}_{S,if}(x) = \dot{m}_S(x, y = \delta(x)) = -\xi_{S,if} \cdot \rho_{if} \cdot v_{if} + \rho_{if} \cdot D_{if} \frac{\partial \xi_{S,if}}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} = 0 \quad (3.53)$$

Unter Verwendung der Komponentenbilanz  $\xi_S + \xi_A = 1$  kann Gleichung (3.53) umgeschrieben werden zu

$$\rho_{if} \cdot v_{if} = -\frac{\rho_{if} D_{if}}{1 - \xi_{A,if}} \cdot \frac{\partial \xi_{A,if}}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} \quad (3.54)$$

Gleichung (3.54) wird nun in (3.52) eingesetzt. Damit ergibt sich

$$\dot{m}_{A,if}(x) = \frac{\xi_{A,if}}{1 - \xi_{A,if}} \cdot \rho_{if} \cdot D_{if} \frac{\partial \xi_{A,if}}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} + \rho_{if} \cdot D_{if} \frac{\partial \xi_{A,if}}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} \quad (3.55)$$

und nach Umformen

$$\dot{m}_{A,if}(x) = \frac{1}{1 - \xi_{A,if}} \cdot \rho_{if} \cdot D_{if} \frac{\partial \xi_{A,if}}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} \quad (3.56)$$

Die Randbedingung (3.56) wird für die Lösung der Komponentenbilanz (Gleichung (3.20)) benötigt und koppelt diese über Gleichung (3.51) mit der Impulsbilanz und über (3.59) mit der Energiebilanz. Gleichung (3.56) wird auch Eckert-Schneider-Bedingung genannt. Durch diese ist auch bei konstant angenommenen Stoffwerten das Geschwindigkeitsfeld vom Konzentrations- und Temperaturfeld abhängig (Schlichting u. Gersten, 2006, S. 319).

### 3.5.3 An der Oberfläche freiwerdende Energiedichte

Analog zum vorangegangenen Abschnitt erfolgt die Koppelung der Komponentenbilanz mit der Energiebilanz durch eine Bilanz an der freien Phasengrenzfläche. Diese Bilanz soll nicht komplett hergeleitet werden, da die verwendete Modellvorstellung bereits in Jernqvist u. Kockum (1996), Killion u. Garimella (2001), Wohlfeil (2009) sowie Bo u. a. (2010) diskutiert wurde.

In der Modellvorstellung wird die Phasenwechselenthalpie an der Filmoberfläche frei und dort durch Leitung in den Film transportiert. Die Phasenwechselenthalpie  $\Delta h_{sor}$  ist somit als lokale Wärmequelle zu verstehen, jedoch werden durch die Formulierung der Energiebilanz im Film ebenfalls Quellen auf Grund differenzieller Mischungswärmen zugelassen.

Zunächst muss die Größe der frei werdenden Wärme (Absorptionsenthalpie) (bzw. im Falle der Desorption die der aufzubringenden Wärme) bestimmt werden. Dazu wird sich der partiell massiven Enthalpie des Wassers bedient (vgl. Abschnitt 2.2.2). Die Absorptionsenthalpie kann dann aus der Differenz der Sattedampfenthalpie bei vorgegebener Temperatur sowie der partiell massiven Enthalpie des Wassers gebildet werden (siehe auch Jernqvist u. Kockum (1996), oder Bošnjaković u. Knoche (1996)). Die Gleichung zur Bestimmung der massenspezifischen Absorptionsenthalpie lautet demzufolge:

$$\Delta h_{sor}(\xi_A, p, T) = h_V(T) - \bar{h}_A \quad (3.57)$$

mit

$$\bar{h}_A = h(\xi_A, T) + (1 - \xi_A) \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T \quad (3.58)$$

Um die absolut frei werdende flächenspezifische Absorptionswärme zu ermitteln, wird  $\Delta h_{sor}$  mit der absorbierten Massenstromdichte an Wasser multipliziert. Dazu wird abermals Gleichung (3.56) benötigt. Zusammen mit dem Fourier'schen Gesetz zur Wärmeleitung ergibt sich die Bilanz bzw. Koppelung an der Phasengrenze zu

$$\lambda_{if} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = \dot{m}_{A,if}(x) \cdot \Delta h_{sor} = \dot{m}_{A,if}(x) \cdot (h_V - \bar{h}_A) \quad (3.59)$$

Werden Gleichungen (3.58) und (3.56) eingesetzt, ergibt sich

$$\lambda_{if} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = \frac{1}{1 - \xi_{A,if}} \cdot \rho_{if} \cdot D_{if} \left. \frac{\partial \xi_{A,if}}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} \cdot \left( h_V - h(\xi_A, T) + (1 - \xi_A) \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_T \right)_{if} \quad (3.60)$$

Schließlich soll sich in der Modellvorstellung die Salzlösung lokal an der Phasengrenzfläche im Phasengleichgewicht befinden. Der Druck  $p$  wird als konstant über dem gesamten Flüssigkeitsfilm angenommen (vgl. Annahme d):

$$T(y = \delta(x)) = T_{eq}(p, \xi_A(y = \delta(x))) \quad (3.61)$$

Damit sind alle benötigten Rand- und Koppelungsbedingungen zur Lösung des Gleichungssystems vorhanden. Die Formulierung der oben aufgeführten Gleichungen in Form von finiten Differenzen sowie die eingesetzte Methode zur Lösung dieser wird in Mittermaier u. Ziegler (2015) (siehe Kapitel 4.2) dargestellt. Zunächst wird das eingeführte Modell etwas vereinfacht, um einen Vergleich mit anderen Veröffentlichungen (siehe Kapitel 4.1) zu ermöglichen.

### 3.6 Vereinfachtes Modell

Das vereinfachte Modell berücksichtigt grundsätzlich die gleichen Transportmechanismen für Stoff- und Wärmeübertragung, allerdings wird der Impulsaustausch stark vereinfacht. Die Annahme einer konstanten Filmdicke sowie

einer homogenen und konstanten Geschwindigkeit in longitudinale Richtung führt dazu, dass alle in transversale Richtung stattfindenden konvektiven Vorgänge vernachlässigt werden. Die Modellvorstellung ist in Abbildung 3.5 skizziert:

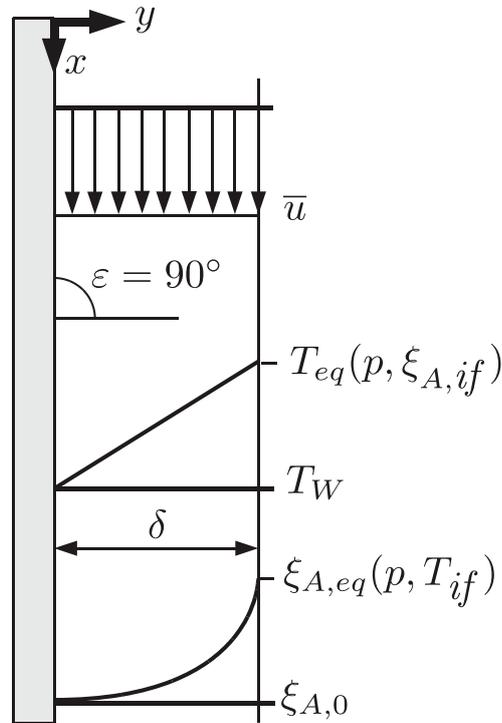


Abbildung 3.5: Modellvorstellung der Vorgänge im laminaren Fallfilm bei vereinfachter Hydrodynamik

### 3.6.1 Massen- und Impulsbilanz

Die Dicke des Films wird unter der Annahme eines voll ausgebildeten, parabolischen Geschwindigkeitsprofils nach der von Nußelt (1916) ermittelten Gleichung berechnet:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\dot{\Gamma}\eta}{g\rho^2}} \quad (3.62)$$

Die größte Vereinfachung besteht darin, dass sowohl die Filmdicke  $\delta$  in Strömungsrichtung als auch die Geschwindigkeit  $\bar{u}$  in Strömungsrichtung über die komplette Filmdicke als konstant angenommen werden. Die mit der Filmdicke

aus Gleichung (3.62) ermittelte Geschwindigkeit ist folglich

$$\bar{u} = \frac{\dot{\Gamma}}{\delta \bar{\rho}} \quad (3.63)$$

Damit ergibt sich eine Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes, die einen Vergleich mit den Arbeiten von Nakoryakov u. Grigor'eva (1997) zulässt. Die Dichte  $\bar{\rho}$  ist über die Filmdicke gemittelt, da später auch im Modell mit vereinfachter Hydrodynamik variable Stoffwerte zugelassen werden sollen.

Da die Filmdicke während dieses Vergleichs ebenfalls konstant gehalten werden soll, ist die Kontinuitätsgleichung vorerst nicht nötig, um ein lösbares Gleichungssystem zu erhalten. Jedoch wird auf Grund des absorbierten Massenstroms der Grundsatz der Massenerhaltung und damit die Kontinuitätsgleichung verletzt. Dies geschieht mit dem Wissen, dass der absorbierte Massenstrom klein gegenüber dem Massenstrom der Filmströmung ist. Für beide folgenden Bilanzen bedeutet die hier eingeführte Vereinfachung, dass die transversale Geschwindigkeit  $v=0$  ist.

### 3.6.2 Komponentenbilanz

Wird die transversale Geschwindigkeitskomponente vernachlässigt, kann in dem Gleichungssystem keine variable Schwerpunktgeschwindigkeit mehr abgebildet werden. Damit ist die Annahme von einseitiger Diffusion an der Phasengrenzfläche inkonsistent zu den sonstigen Annahmen. Aus diesem Grund wird bei der Betrachtung eines homogenen Geschwindigkeitsprofils äquimassive Diffusion im Film angenommen. Für die Komponentenbilanz kann

$$\rho u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} = \frac{\partial \dot{m}_A}{\partial y} \quad (3.64)$$

geschrieben werden.

Da äquimassive Diffusion angenommen und damit der durch Diffusion hervorgerufene Konvektionsstrom vernachlässigt wird, kann die Massenstromdichte  $\dot{m}_A$  mit dem Fick'schen Gesetz (3.65) beschrieben werden:

$$\dot{m}_A = \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \quad (3.65)$$

Gleichung (3.65) in (3.64) eingesetzt ergibt

$$\rho u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} = \frac{\partial \left( \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right)}{\partial y} \quad (3.66)$$

Gleichung (3.66) gleicht bis auf die entfallene Geschwindigkeitskomponente  $v$  der Gleichung (3.20) auf Seite 61.

Für die Randbedingung an der Wand ( $y=0$ ) wird weiterhin von einer impermeablen Wand ausgegangen. Aus  $\dot{m}_A|_{y=0} = 0$  und  $v = 0$  folgt dieselbe Randbedingung wie in Gleichung (3.24):

$$\left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.67)$$

### 3.6.3 Energiebilanz

Durch die Vernachlässigung der transversalen Konvektion, reduziert sich die Energiebilanz (Gleichung 3.46) von Seite 70 auf

$$\rho \left[ u \left( c_p \frac{\partial T}{\partial x} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \right] \quad (3.68)$$

Sowohl das Fick'sche (3.36) als auch das Fourier'sche Gesetz (3.34) wurden auch hier genutzt, um den lokalen Stoff-  $\dot{m}_A$  und den Wärmestrom  $\dot{q}$  zu ermitteln.

Die Randbedingungen zur Lösung des Gleichungssystems werden analog zu obigen Abschnitten gewählt. Die Randbedingung  $\dot{m}_A(y=0)$  wurde bereits aufgeführt. Darüber hinaus werden drei Randbedingungen und zwei Kopplungsbeziehungen benötigt. Diese lauten:

$$T(x, y=0) = T_W; \quad T(x=0, y) = T_0 \quad (3.69)$$

$$\xi_A(x=0, y) = \xi_{A,0} \quad (3.70)$$

Die Koppelungsbeziehung zwischen Impuls- und Komponentenbilanz entfällt. Die Koppelungsbeziehung zwischen Energie- und Komponentenbilanz wird auf Grund des Wegfalls des konvektiven Anteils zu Gleichung (3.71). Weiterhin wird von lokalem Phasengleichgewicht an der Filmoberfläche ausgegangen.

Gleichung (3.72) ist daher identisch zu Gleichung (3.61) von Seite 74.

$$\lambda(y = \delta) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \dot{m}_{A,if} \cdot \Delta h_{sor} = \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \Big|_{y=\delta} \cdot (h_V - \bar{h}_A) \quad (3.71)$$

$$T(y = \delta) = T_{eq}(p, \xi_A(y = \delta)) \quad (3.72)$$

# Kapitel 4

## Ergebnisse

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die durchgeführten Untersuchungen gegeben und die Ergebnisse beschrieben und zusammengefasst. Da die Details zugehörigen Veröffentlichungen zu entnehmen sind, sind diese nach dem jeweiligen Abschnitt aufgeführt. Die Ergebniskapitel 4.1 bis 4.3 weisen folgende Struktur auf:

- Aufgabenstellung und Ziel
- Untersuchungen und Ergebnisse
- Diskussion und Zusammenfassung

Das Ergebnis aus Abschnitt 4.4 ist bisher unveröffentlicht und weist deshalb eine andere Struktur auf. Darin wird anhand zweier vergleichbarer Modellvorstellungen der Einfluss der einseitigen Diffusion diskutiert.

In Abschnitt 4.5 wird die oben genannte Struktur wieder aufgenommen, da er auf dem bereits veröffentlichten Vergleich zwischen Absorption und Desorption basiert.

## 4.1 Ergebnisse mit vereinfachter Hydrodynamik

**Zum folgenden Abschnitt gehört der Artikel<sup>1</sup>:**

*Mittermaier, M.; Schulze, P.; Ziegler, F.: A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics. International Journal of Heat and Mass Transfer 70 (2014), Nr. 70, 990 - 1002*

Die Veröffentlichung ist bei Elsevier unter:

<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.11.075>

verfügbar.

### 4.1.1 Aufgabenstellung und Ziel

Die betrachtete Lauflänge entspricht den Bedingungen in einem Wärmeübertrager mit Horizontalrohren und beträgt den halben Umfang eines Rohres mit einem Durchmesser von 20 mm (circa 3 cm).

Zunächst wurde die Hydrodynamik stark vereinfacht behandelt wie in Abschnitt 3.6 auf Seite 74 beschrieben, um die Ergebnisse des numerischen Modells mit einem etablierten Modell der Literatur (Nakoryakov u. Grigor'eva, 1977) zu vergleichen. Zu diesem Zweck wird die durchgeführte Diskretisierung der Gleichungen erklärt, anschließend werden dimensionslose Größen verwendet.

In einem ersten Fall wird die Wandtemperatur  $T_W$  der Temperatur der unterkühlten Flüssigkeit  $T_0$  gleich gesetzt, was zu einer dimensionslosen Temperatur (vgl. Nakoryakov u. Grigor'eva (1977) sowie Nakoryakov u. Grigor'eva (1997))

$$\theta_0^+ = \frac{T_0 - T_W}{T_{eq,0} - T_0} = 0 \quad (4.1)$$

führt. Für diesen Fall wurde eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den

---

<sup>1</sup>Ein erstes Modell wurde mit einer äquidistanten Vernetzung in einer Bachelorarbeit (Schulze, 2012) programmiert. Es zeigte sich darin, dass der Algorithmus konvergiert. Spätere Untersuchungen machten deutlich, dass eine Diskretisierung auf nicht-äquidistanter Vernetzung notwendig ist, um die anfänglich ausgeprägten Gradienten abzubilden und physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten.

Ergebnissen des numerischen und des analytischen Modells aus Nakoryakov u. Grigor'eva (1997) festgestellt.

In einem zweiten Fall wird ebenfalls ein unterkühlter Film betrachtet, da diese Bedingung eine Voraussetzung für das analytische Modell ist (siehe auch Gleichung 4.1). Jedoch wurde die Temperatur der unterkühlten Lösung so gewählt, dass sie zwischen der Wandtemperatur  $T_W$  und der Sättigungstemperatur  $T_{eq,0}$  liegt. Das führt zu  $T_0 = (T_{eq,0} + T_W)/2$ , bzw.

$$\theta_0^+ = \frac{T_0 - T_W}{T_{eq,0} - T_0} = 1 \quad (4.2)$$

In diesem Fall gibt es Abweichungen zwischen den Ergebnissen des numerischen und des analytischen Modells. Diese Abweichungen wurden eindeutig auf das analytische Modell zurückgeführt und wurden durch die Arbeit von Meyer (2014) erklärt und eliminiert.

Die Temperatur- und Massenanteilsprofile des numerischen Modells in der Nähe des Einlasses entsprechen in allen Fällen der Kurzzeitlösung, wie sie beispielsweise in Abschnitt 2.2.4 oder in Nakoryakov u. a. (2011) eingeführt wurde.

### 4.1.2 Untersuchungen und Ergebnisse

Folgende Untersuchungen werden in diesem Abschnitt zusammengefasst:

- Effekt differenzieller Lösungswärme im Film
- Effekt von variablen Stoffwerten
- Effekt einer linearisierten Phasengleichgewichtsfunktion

Für die Bedingungen am Eintritt des Films ergibt sich eine Reynoldszahl von  $Re = 9$  (vgl. Gleichung 2.3). Nach Brauer (1971) kann die Strömung von  $4 < Re < 400$  als quasi laminarer Film bezeichnet werden. Mit Daten für die Oberflächenspannung der Lithiumbromidlösung nach Park u. a. (2001) oder Kulankara u. Herold (2002) befindet sich der Film im ersten Übergangsbereich (Ishigai u. a., 1972) (vgl. Tabelle 2.1 auf Seite 7).

Ein Aspekt, der in Mittermaier u. a. (2014) untersucht wird, ist der Einfluss freigesetzter differenzieller Lösungswärme im Film. Die Sensitivität der

Freisetzung differenzieller Lösungswärme auf die Nußeltzahl wurde bereits von Grossman (1987) untersucht. In Mittermaier u. a. (2014) wird die Freisetzung der differenziellen Lösungswärme um den Faktor zehn überhöht und anhand der Temperatur- und Massenanteilsverläufe der Unterschied zu einem zehnfach erhöhten Diffusionskoeffizienten diskutiert.

Ebenfalls wurde der Einfluss variabler Stoffwerte auf die Ergebnisse, insbesondere auf den Zustand an der Phasengrenzfläche untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass die Variabilität der Stoffwerte bei Verwendung einer Lithiumbromidlösung die Temperatur an der Phasengrenze in ähnlicher Größenordnung beeinflusst, wie die Berücksichtigung differenzieller Lösungswärme. Der zuletzt genannte Effekt ist jedoch etwas größer. Da der Einfluss beider Effekte nicht besonders stark ist, sollten zukünftige Modelle entweder beide Effekte enthalten oder eben diese vernachlässigen.

Die Funktion zur Beschreibung der Gleichgewichtstemperatur in Abhängigkeit von Druck und Massenanteil wird an dem Punkt der Einlassbedingungen linearisiert. Die Auswirkungen dieser Linearisierung werden im Zusammenhang mit dem Vergleich zwischen Absorption und Desorption analysiert.

Im Fall einer linearisierten Phasengleichgewichtsfunktion und konstanter Stoffwerte verhalten sich Absorption und Desorption bei vergleichbaren treibenden Temperaturdifferenzen exakt spiegelbildlich zueinander. Die absorbierten und desorbierten Massenstromdichten sind gleich. Der Vergleich mit einer realistischen Phasengleichgewichtsfunktion für Lithiumbromid (Löwer, 1960) zeigt, dass durch die Linearisierung bei der Absorption der resultierende Wärmestrom in Richtung der gekühlten Wand geringfügig unterschätzt wird. Dadurch ist der Wassermassenanteil ebenfalls etwas geringer als bei Verwendung der realistischen Phasengleichgewichtsfunktion nach Löwer (1960). Im Gegensatz dazu wird während der Desorption durch die Linearisierung der Wärmestrom etwas überschätzt und der Massenanteil an Wasser  $\xi_A$  damit ebenfalls als etwas geringer eingeschätzt als bei Verwendung der nicht-linearen Phasengleichgewichtsfunktion.

### 4.1.3 Zusammenfassung

Bei gleichen Druckverhältnissen und unter vergleichbaren treibenden Temperaturdifferenzen ist die absorbierte Massenstromdichte höher als die desor-

bierte. Die Verbesserung bei der Absorption basiert auf der Nicht-Linearität der Funktion zwischen Gleichgewichtstemperatur und Massenanteil. Ausgehend von Phasengleichgewichtsbedingungen am Einlass des Films muss zum Erreichen eines bestimmten Konzentrationsunterschieds deshalb die Temperaturabsenkung während der Absorption nicht so groß sein wie die entsprechende Temperaturerhöhung bei der Desorption. Da es sich um einen gekoppelten Wärme- und Stoffübergangsprozess handelt, stellt sich während der Desorption eine geringere treibende Temperaturdifferenz ein als bei der Absorption.

Auf Grund der Veränderung der Stoffparameter (hauptsächlich der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und des Produktes aus Dichte und Diffusionskoeffizienten  $\rho D$ ) während des Prozesses, wird die erhöhte absorbierte Massenstromdichte etwas reduziert. Der Rückgang beträgt ca. 10% bezogen auf die kleinere berechnete absorbierte Massenstromdichte mit variablen Stoffparametern. Die erhöhte Temperatur während der Desorption verbessert im Allgemeinen die Transportkoeffizienten. Jedoch verschlechtern sich diese mit abnehmendem Wasseranteil. Dadurch kompensieren sich die Effekte über die kurze betrachtete Lauflänge.

In Absorptionskälteanlagen findet die Desorption bei höheren Temperaturen und Drücken statt als die Absorption. Von den Ergebnissen dieser Veröffentlichung kann darauf geschlossen werden, dass dies in der Praxis der Grund ist für einen besseren Wärme- und Stofftransport bei der Desorption. Diese Fragestellung wird in Abschnitt 4.5 ab Seite 142 geklärt.

Zusammenfassend muss gesagt werden, dass zukünftige Modelle die Nicht-Linearität der Phasengleichgewichtsfunktion berücksichtigen sollten, während zusätzliche Effekte wie variable Stoffwerte und das Freiwerden von Lösungswärme im Film für die Praxis weniger relevant sind. Diese Aussage ist für wässrige Lithiumbromid-Lösung gültig. Die zusätzlichen Effekte können für andere eingesetzte Stoffe durchaus von Bedeutung werden.

In der bisherigen Arbeit konnten die Wechselwirkungen zwischen Impuls- und Stoffaustausch noch nicht untersucht werden, da bisher von äquimolarer Diffusion ausgegangen wird, die Filmdicke konstant gehalten wird und das Geschwindigkeitsprofil sehr stark vereinfacht ist. Um die einseitige Diffusion zu berücksichtigen, muss konsequenterweise eine transversale Geschwindigkeitskomponente berücksichtigt werden, was in einer weiterführenden Studie in Abschnitt 4.2 ab Seite 99 dargestellt wird.





# A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics



M. Mittermaier\*, P. Schulze, F. Ziegler

Technische Universität Berlin, Institut fuer Energietechnik, Sekretariat KT 2, Marchstrasse 18, 10587 Berlin, Germany

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 13 September 2013

Received in revised form 25 November 2013

Accepted 26 November 2013

### Keywords:

Absorption

Desorption

Film flow

Modelling

Heat transfer

Mass transfer

Isothermal plate

## ABSTRACT

We present a model describing simultaneous heat and mass transfer of an absorbing or desorbing laminar liquid film flowing over a vertical isothermal plate. We start with a formulation which is comparable to established models by using simplifying assumptions such as homogeneous velocity and constant film thickness. In contrast to those, we allow for effects like change in properties and differential heat of solution within the bulk of the film. Additionally, enthalpy transport due to interdiffusion is accounted for. The impact of the considered effects are discussed and compared.

The numerical solution is obtained by utilising a Newton–Raphson scheme to solve the finite difference formulation of the governing equations. Since the temperature gradients adjacent to wall and phase boundary are expected to be large, we discretise the equations on an irregular grid. The results of the model agree very well with established analytical models.

It is found that the influence of released differential heat of solution within the bulk is relatively small. However, the impact on the temperature distribution is in the same order of magnitude as the one of a change in properties. Moreover, when comparing desorption with absorption under equivalent conditions, the mass transfer rate during absorption is higher than during desorption.

© 2013 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Simultaneous heat and mass transfer occurs in nature as well as in various technical apparatuses. While in nature highly efficient systems (e.g. lungs or villi) have evolved, we still lack full understanding of the process. In energy engineering, efficient heat and mass transfer is crucial to obtain high performing thermodynamic cycles at low cost. Heat driven cycles, especially absorption chillers, rely mostly on transfer effectiveness and hence require diligent analysis and design.

An investigation of property and transfer issues with regard to irreversibilities as well as cycle restrictions has been provided earlier [1]. Herein, properties of working fluids and their thermodynamic behaviour are discussed but for heat and mass transfer only lumped parameters are used, which allows no real understanding of working fluid impact. Inside absorption chillers, falling film heat exchangers are widely-used as absorber, desorber, and evaporator. Therefore, modelling of falling films is significant for understanding cycle behaviour, design, and optimisation.

Although the properties vary with concentration and temperature, most authors assume them to be constant. Bo et al. [2] discuss this influence by comparing results with and without variable

property data and they report a reduction in mass transfer rate by 6.5% during absorption over a flow distance of 1 metre when variable properties are considered. In our work a similar comparison is enlarged upon occurring differential heat of solution within the film. Since most absorption chillers work with aqueous LiBr solution, the respective property data have been used for this article, however, for new or tailor-made working fluids, this assessment will be valuable also.

## 2. State of the art

One of the first models describing vapour absorption into a thin film was introduced by Nakoryakov and Grigor'eva in 1977 [3]. They assumed a uniform flow velocity throughout the film. In 1983, Grossman [4] extended the model by using a fully developed, laminar Nusselt solution as velocity profile. Since these pioneering works, heat, mass, and momentum transfer in falling films have been widely investigated. An extensive literature review up to 2001 has been provided by Killion and Garimella [5]. Recently, modelling of details such as surface tension effects, solitary waves, and mass transfer in the entrance have received considerable attention [6–10]. Solitary waves have been investigated by Islam et al. [7] using a finite difference method. They show that solitary waves produce recirculation zones in the film and conclude that these have significant effect on heat and mass transfer and thus

\* Corresponding author. Tel.: +49 30 314 25315.

E-mail address: [martin.mittermaier@tu-berlin.de](mailto:martin.mittermaier@tu-berlin.de) (M. Mittermaier).

**Nomenclature**

$c_p$	Heat capacity J/(kg K)
$D$	Mass diffusivity $m^2/s$
$g$	Gravitational acceleration $m/s^2$
$h$	Enthalpy J/kg
$\bar{h}$	Partial massive enthalpy J/kg
$Le = \lambda/(D \cdot c_p \cdot \rho)$	Lewis-Number –
$\dot{m}$	Mass flux $kg/(m^2 s)$
$p$	Pressure Pa
$\dot{q}$	Heat flux $W/m^2$
$St = (\Delta h_{sor}(\xi_{eq} - \xi_0))/(c_p(T_{eq} - T_0))$	–
$T$	Temperature K
$u$	Longitudinal velocity $m/s$
$x$	Longitudinal coordinate, streamwise m
$y$	Transversal coordinate m

**Greek letters**

$\dot{\Gamma}$	Mass flow per unit length $kg/(m s)$
$\gamma^+ = (\xi - \xi_0)/(\xi_{eq,0} - \xi_0)$	dimensionless mass fraction –
$\Delta h, \Delta y$	Abbreviations, please see Eq. (14)
$\Delta h_{sor}$	Heat of sorption J/kg
$\delta$	Film thickness $m$

$\eta^+ = y/\delta$	dimensionless $y$ -coordinate –
$\theta^+ = (T - T_0)/(T_{eq,0} - T_0)$	dimensionless temperature –
$\lambda$	Thermal conductivity $W/(m K)$
$\mu$	Dynamic viscosity Pa s
$\xi$	Mass fraction $kg/kg$
$\xi^+ = (\lambda \cdot x)/(\rho \cdot c_p \cdot u \cdot \delta^2)$	dimensionless $x$ -coordinate –
$\rho$	Density $kg/m^3$

**Subscripts**

0	Inlet condition
A	Absorbate e.g. water in liquid state
eq	Equilibrium
$\vartheta$	Temperature in Celsius $^{\circ}C$
if	Interface
$i$	node index in longitudinal direction ( $x$ )
$j$	node index in transversal direction ( $y$ )
s	Solution of absorbent e.g. LiBr–H <sub>2</sub> O
v	Vapour e.g. steam
w	Wall

enhance absorption rates. Moreover, the entrance region has been investigated analytically by Nakoryakov et al. [8]. They have obtained self-similar solutions for temperature and concentration in the film assuming a uniform velocity profile. Latest numerical calculations by Hofmann and Kuhlmann [11] suggest optimised Reynolds numbers, which have been interpreted as an optimal film thickness. In their work they closely investigate both the wall and the free surface boundary condition. Since a fully developed flow is assumed, they compare the obtained numerical solution to Grossman's findings [4] and observe only minor deviations close to the inlet. Although few authors [2,12], include variable property data in their investigations, neither of these accounts for differential heat of solution occurring in the bulk of the flow. The release of differential heat of solution has been considered by van der Weken and Wassenaar [13]. However, in this study all fluid properties have been kept constant throughout the process.

**3. Model description**

The considered thin film is depicted in Fig. 1. In this work, we assume a film thickness  $\delta$  corresponding to Nusselt's solution  $\delta = \sqrt{\frac{3\dot{\Gamma}\mu}{g\rho^2}}$ , meaning the film thickness  $\delta$  for a given specific flow rate  $\dot{\Gamma}$  agrees with Nusselt but the profile does not. In other words, the usual 'no slip' condition at the wall is neglected and the average velocity has been used as flow velocity across the entire film. Thus, the averaged flow velocity results from  $\bar{u} = \dot{\Gamma}/\delta\rho$ . This severe simplification is made for two reasons: first, in order to strictly distinguish between thermodynamic and hydrodynamic effects. Although a fully laminar flow regime was more realistic, further hydrodynamic simplifications would remain in connection with an absorbing falling film. Since diffusion occurs in unidirectional manner, there is a transversal velocity even though the hydrodynamic flow is already fully developed. However, laminar flow conditions (Nusselt profile) do not allow for a transversal velocity component. Furthermore, the thickness of the film changes throughout the process since mass is absorbed at the interface. In the present study the component balance covers the convective flux in flow direction only (see Eq. 1). Consequently, the film thickness is kept constant to maintain a consistent set of equations. If a

change in film thickness was considered, advective transport in transversal direction would be induced which is currently not included in the governing equations. The second reason is that we want to compare the results to the established analytical solutions which use exactly the same simplifications (see below). However, a full treatment of hydrodynamics will be given in a consecutive paper.

Overall, the following assumptions have been made:

- constant flow velocity  $u$  across the film,
- constant film thickness  $\delta$ ,
- constant pressure  $p$  throughout the entire film,
- transfer of heat across the free interface,
- negligible change in temperature  $T$  caused by dissipation throughout the film,
- negligible diffusion and heat conduction in flow direction as compared to convection,
- negligible vapour pressure of the absorbent,
- incompressible fluid,
- steady state,

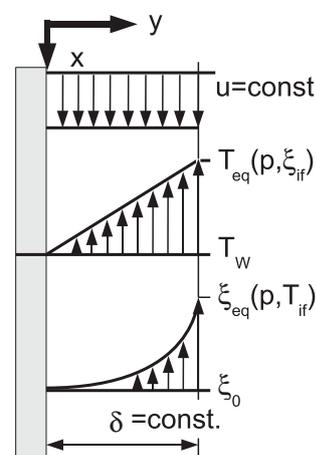


Fig. 1. Simplified distribution of longitudinal velocity  $u$ , temperature  $T$ , and mass fraction  $\xi$  in a laminar absorbing film.

The assumptions (a to i) are comparable with those by Nakoryakov and Grigor'eva [14]. Additionally, in [14] a linear absorbent, constant thermophysical properties, and a heat of sorption solely released at the interface was assumed. The term linear absorbent refers to a linear relation between saturation temperature and mass fraction.

Under those additional assumptions, in Section 4 we consistently validate our numerical model with the analytical solution provided by Nakoryakov and Grigor'eva [14]. Subsequently, the three additional assumptions are relaxed and the results are discussed in Section 5.

### 3.1. Governing equations

The density is allowed to vary only with mass fraction and temperature since a constant pressure is assumed. As we simultaneously assume (a) and (b) the continuity equation is not applicable, but conservation of total mass is violated when absorption occurs. However, for typical conditions the absorbed mass flow is at least one order of magnitude less than the mass flow of the film, so the induced error is small. In reality the absorbed mass will increase film thickness and film velocity, both by less than 10%. Due to a concomitant change in interface temperature diffusive and convective flows will change by less than 10%, so that the effects we want to show here remain valid. However, as stated above, these effects will be treated in a consecutive paper.

Since two components are present within the film, a component balance is necessary to resolve the distribution of mass fraction in the film. The convective flux in longitudinal direction  $x$  has to equal the diffusive flux transversal to it ( $y$ ). Therefore, for component A the mass balance may be written as

$$\rho u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} = \frac{\partial \dot{m}_A}{\partial y} \quad (1)$$

The longitudinal convective heat transport has to equal the conductive and diffusive transport transversal to the film flow. Based on assumptions (c) to (f) the energy balance can be expressed by

$$\rho u \left( c_p \frac{\partial T}{\partial x} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \dot{q} + \dot{m}_A (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \right) \quad (2)$$

The right hand side was also used by Andberg and Vliet [15], Grossman [16], and Jernqvist and Kockum [17]. In the derivative, the first term  $\dot{q}$  describes the heat conduction, and the second term describes the energy transport due to interdiffusion. Jernqvist and Kockum [17] have suggested working with partial massive enthalpies of water (A) and salt (S) (see Eqs. (10) and (11)) to determine the enthalpy flow due to interdiffusion ( $\bar{h}_A - \bar{h}_S$ ) as well as the heat of absorption  $\Delta h_{sor}$  in Eq. (8).

The left hand side of Eq. (2) accounts for the usual convective flow (first term) and the differential heat of solution which is set free due to mixing in flow direction within the film. This is again expressed by the difference in partial massive enthalpies ( $\bar{h}_A - \bar{h}_S$ ). Fick's and Fourier's laws are used to determine the local diffusive mass flux  $\dot{m}_A$  and heat flux  $\dot{q}$ , respectively.

$$\dot{m}_A = \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \quad (3)$$

$$\dot{q} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4)$$

Due to assumption (g) there is no transport of salt across the vapour-liquid interface and, to be precise, Fick's law modified for uni-directional diffusion (Eckert-Schneider-relation) as in [11] should be used. This would lead to an amplification of the absorbed mass flux. However, for the present study convection in transversal

direction is not considered. Consequently, the Eckert-Schneider-relation has not been used – as in the former related studies [2,4,12,14].

In order to solve Eqs. (1) and (2), altogether six boundary conditions are necessary. The impermeable wall constrains diffusion at  $y = 0$ . Thus, boundary condition (5) can be stated. Since we assume a constant wall temperature as well as a given, and uniform temperature in the liquid film at the inlet, we can write Eq. (6). The given and uniform mass fraction at the inlet provides boundary condition (7).

$$\dot{m}_A(y = 0) = 0 \quad (5)$$

$$T(y = 0) = T_W; \quad T(x = 0) = T_0 \quad (6)$$

$$\xi_A(x = 0) = \xi_{A,0} \quad (7)$$

Finally, the conditions which couple heat and mass transfer are to be defined. The first coupling condition (8) is an energy balance at the interface which states that the heat set free due to absorption is transferred into the film by conduction. The second link is obtained through the assumption of vapour pressure equilibrium at the interface (9).

$$\lambda(y = \delta) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \dot{m}_{A,if} \cdot \Delta h_{sor} = \dot{m}_{A,if} \cdot (h_V - \bar{h}_A) \quad (8)$$

$$T(y = \delta) = T_{eq}(p, \xi_A(y = \delta)) \quad (9)$$

### 3.2. Property data

Any property used is dependent on mass fraction and temperature. Aqueous lithium bromide solution has been considered as absorbent. The vapour phase is composed of water (steam) only. Thermodynamic and transport properties of the fluids are determined at local conditions using data from Löwer [18]. Based on his measured data, property functions have been derived by polynomial regression for specific heat capacity  $c_p$ , density  $\rho$ , and saturation temperature  $T_{eq}$ , viscosity  $\mu$ , and thermal conductivity  $\lambda$  (see appendix). To calculate the diffusion coefficient  $D$  an equation developed by Kim [19] has been used.

The enthalpy of the mixture has been determined using the equations published by Pátek and Klomfar [20]. The partial massive enthalpy for the absorbate (e.g. water) as used in Eqs. (2) and (8) is defined by

$$\bar{h}_A = h + (1 - \xi_A) \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \Big|_{p,T} \quad (10)$$

$$\bar{h}_S = h - \xi_A \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \Big|_{p,T} \quad (11)$$

### 3.3. Discretisation of the equations

Fick's law (3) can be substituted for the diffusive flux  $\dot{m}_A$  in the derivative of Eq. (1). After application of the product rule for differentiation the equation can be expressed by

$$\rho u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} = \frac{\partial(\rho D)}{\partial y} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} + \rho D \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial y^2} \quad (12)$$

Similarly, both laws (3) and (4) describing the transport of mass and heat have been inserted into the energy balance (2), leading to

$$\rho u \left( c_p \frac{\partial T}{\partial x} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial(\rho D(\bar{h}_A - \bar{h}_S))}{\partial y} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} + \rho D(\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial y^2} \quad (13)$$

Eqs. (12) and (13) have been discretised in both dimensions  $x$  and  $y$  in order to obtain a solvable algebraic system of equations. The notation of indices is depicted in Fig. 2. Subscript  $i$  represents the node index in longitudinal direction, the transversal nodes are denoted by  $j$ . For any derivative with respect to  $x$ , the backward difference approximation has been used. Thus, the solution of the equations can be calculated step by step beginning at the given inlet conditions (node  $i = 1$ ).

The boundary condition at the wall is denoted by the index  $j = 1$ , the conditions at the interface by  $j = n$ . Parameter  $n$  is the pre-set quantity of transversal nodes (see Table 1). To solve the boundary value problem, the set of equations has to cover the domain  $j = 2 \dots n - 1$ . In both directions step sizes  $\Delta x_i$  and  $\Delta y_j$  are varying as explained in Section 3.4.

For convenience, the following abbreviations are introduced:

$$\Delta \bar{h}_{ij} = (\bar{h}_{A_{ij}} - \bar{h}_{S_{ij}}); \quad \Delta y_{ij} = \frac{\Delta y_{ij} + \Delta y_{i,j-1}}{2} \quad (14)$$

Eq. (12) then may be written in discrete form as

$$\rho_{ij} u_{ij} \frac{\zeta_{A_{ij}} - \zeta_{A_{i,j-1}}}{\Delta x_i} = \frac{(\rho D)_{i,j+1} - (\rho D)_{ij}}{\Delta y_{ij}} \cdot \frac{\zeta_{A_{ij}} - \zeta_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{(\rho D)_{ij}}{\Delta y_{ij}} \left[ \frac{\zeta_{A_{i,j+1}} - \zeta_{A_{ij}}}{\Delta y_{ij}} - \frac{\zeta_{A_{ij}} - \zeta_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \right] \quad (15)$$

Due to the impermeable wall at  $y = 0$  diffusion is constrained and Eq. (5) translates into  $\partial \zeta_A / \partial y = 0$ . Hence, the concentration gradients approximated by  $\frac{\zeta_{A_{ij}} - \zeta_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}}$  in Eq. (15) vanish at  $j = 2$ .

Then, the energy balance (13) was discretised:

$$\begin{aligned} \rho_{ij} u_{ij} \left( c_{p_{ij}} \frac{T_{ij} - T_{i,j-1}}{\Delta x_i} + \Delta \bar{h}_{ij} \frac{\zeta_{A_{ij}} - \zeta_{A_{i,j-1}}}{\Delta x_i} \right) \\ = \frac{\lambda_{i,j+1} - \lambda_{ij}}{\Delta y_{ij}} \cdot \frac{T_{ij} - T_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{\lambda_{ij}}{\Delta y_{ij}} \left[ \frac{T_{i,j+1} - T_{ij}}{\Delta y_{ij}} - \frac{T_{ij} - T_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} \right] \\ + \frac{(\rho D)_{i,j+1} \Delta \bar{h}_{i,j+1} - (\rho D)_{ij} \Delta \bar{h}_{ij}}{\Delta y_{ij}} \cdot \frac{\zeta_{A_{ij}} - \zeta_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \\ + \frac{(\rho D)_{ij} \Delta \bar{h}_{ij}}{\Delta y_{ij}} \left[ \frac{\zeta_{A_{i,j+1}} - \zeta_{A_{ij}}}{\Delta y_{ij}} - \frac{\zeta_{A_{ij}} - \zeta_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Again, the formulations close to the boundaries have to be discussed briefly. Since the wall itself has been assumed to be isothermal, we can write  $T_{i,1} = T_W$ . Therefore, adjacent to the wall (at node  $j = 2$ ), in the respective equation the value  $T_{i,j-1}$  becomes the constant value  $T_W$ . At the same node, the gradient  $\frac{\zeta_{A_{ij}} - \zeta_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}}$  becomes naught as seen above. The temperature at the inlet  $T_{1,j}$  equals the constant temperature  $T_0$  except for  $T_{1,1}$  which was set to  $T_W$ .

Adjacent to the interface (at node  $j = n - 1$ , in Eq. (16) the index  $j + 1$  represents the interface itself. Therefore, the above mentioned coupling condition (9) has been inserted into the discretised energy balance (16). The temperature  $T_{eq}(p, \zeta_{A_{i,n}})$  has to be substituted for  $T_{i,j+1}$  to comply with the boundary condition (9).

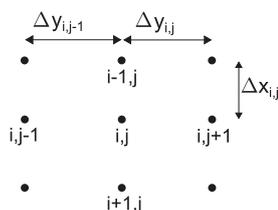


Fig. 2. Schematic of the indices used for the nodes.

At the free interface of the film (at node  $j = n$ ), the coupling condition (Eq. 8) has been used as energy balance instead of Eq. (16). To find the solution at node  $n$ , Eq. (8) can be rewritten in discrete form

$$\lambda_{i,n} \frac{T_{eq}(p, \zeta_{A_{i,n}}) - T_{i,n-1}}{\Delta y_{i,n-1}} = (\rho D)_{i,n} \frac{\zeta_{A_{i,n}} - \zeta_{A_{i,n-1}}}{\Delta y_{i,n-1}} \Delta h_{sor,i}(T_{eq}(p, \zeta_{A_{i,n}}), \zeta_{A_{i,n}}) \quad (17)$$

### 3.4. Solving procedure

The equations introduced in Section 3.3 have been rearranged to yield a system of linear equations of the form  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ . The vector  $\vec{x}$  represents all values we are looking for, namely, the temperature as well as the mass concentration field. The matrix  $A$  contains all coefficients belonging to the sought value  $\vec{x}$  and  $\vec{b}$  holds the corresponding inhomogeneity. As the computations are conducted sequentially along the flow path, all terms with index  $i - 1$  are treated as inhomogeneity.

Fig. 3 depicts the procedure carried out by the algorithm. After the input values (see Table 1) have been set, the inlet conditions are calculated. The inlet conditions comprise property data in the first horizontal layer (row of nodes  $i=1, j=1 \dots n$ ), the film thickness corresponding to Nusselt's solution, and the averaged flow velocity.

A loop over the flow length starts with the calculation of the second horizontal layer and is repeated until the entire flow path is covered. To provide the actual property data at each node, the computation of each horizontal layer takes place within the property loop. The temperatures  $T_{ij}$  and mass fractions  $\zeta_{A_{ij}}$  of any horizontal row of nodes ( $i, j = 2 \dots n$ ) are computed using a Newton–Raphson-iteration. As guess value, in each case the result of the previous iteration (at  $i - 1$ ) is used. For the Newton–Raphson-iteration all partial derivatives of Eqs. (15)–(17) are necessary to form the Jacobian matrix. The Newton–Raphson-iteration is being repeated until the root is found and a minimal residual is left. However, this solution does not yet feature the correct property data – they originate from the former step. Subsequently, with these intermediate results of temperatures and mass fractions the properties are determined and the algebraic approximation of the governing equations is solved again with the Newton–Raphson-iteration. The property loop is repeated until the change in temper-

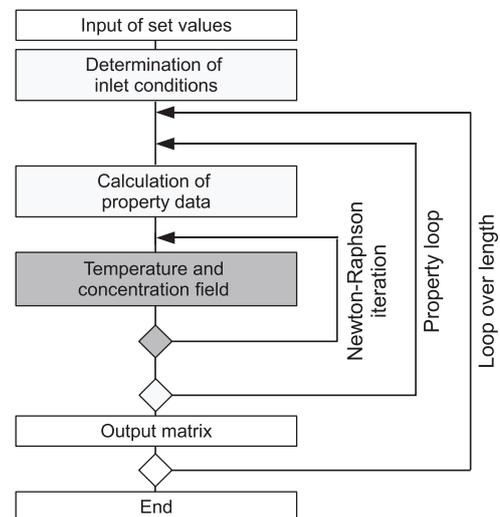


Fig. 3. Schematic of the program.

ature or mass fraction between two successive computations of properties is below the intended accuracy. In other words, after the solution to the differential equations has been found in the Newton–Raphson-iteration, the feedback, e.g. a change in temperature, on the involved properties is determined and the solution is computed again.

Finally, the computation of this horizontal row of nodes is terminated, the result is written to an output matrix and the following horizontal layer is calculated (loop over length).

The thickness of the film is discretised by 300 non-equidistant steps across the film (in  $y$ -direction). Towards the wall and the interface, the distance between grid points has been reduced to provide high numerical accuracy at low computation time. The function used to determine the transversal grid spacing  $\Delta y_j$  is a scaled Gaussian function (18) with its peak in the middle of the film, at  $y = \delta/2$ .

$$\Delta \tilde{y}_j = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{j-1}{n-2} - 1/2\right)^2 \frac{1}{\sigma^2}\right) \Delta y_{ij}$$

$$= \Delta \tilde{y}_j \frac{\delta_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta \tilde{y}_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad \sigma = 1/6 \quad (18)$$

In Eq. (18) an arbitrary value for  $\sigma$  is set to define the two inflexion points of the curve. The smaller the value  $\sigma$  the bigger the difference between maximum and minimum grid spacing. The chosen value leads to a grid spacing between  $10^{-8}$  m at the boundaries and  $10^{-6}$  m in the middle of the flow when 300 grid points are used. If the number of grid points is increased by 100 grid points, changes in mass fractions and temperatures at the interface are below  $1 \cdot 10^{-4}$  and  $5 \cdot 10^{-3}$  K respectively. A further increase to 500 grid points leads to differences in mass fractions of  $4 \cdot 10^{-5}$  and  $2 \cdot 10^{-3}$  K in temperatures as compared to the simulation with 400 grid points.

The grid spacing in flow direction  $\Delta x_i$  may vary as well and is adjusted depending on the considered overall length of the film flow.

#### 4. Model validation

To validate the present model, it is compared with the analytical results of Nakoryakov and Grigor'eva [14]. This analytical solution requires a linear relation between saturation temperature and mass fraction of the mixture. Therefore, within the following section a linear function is fitted to the equilibrium data and applied

**Table 1**  
Input values for validation.

<i>Common input</i>	
Equilibrium mass fraction $\xi_{eq,0}$	0.504
Equilibrium temperature $T_{eq,0}$	304.40 K
Inlet mass flow $\dot{\Gamma}$	0.036 kg/(ms)
Dynamic viscosity $\mu$	0.004 Pas
Density $\rho$	1500 kg/m <sup>3</sup>
<i>Input to numerical model</i>	
Inlet mass fraction $\xi_{A,0}$	0.47
Wall temperature $T_w$	300.15 K
Specific heat of absorption $\Delta h_{sor}$	$2500 \cdot 10^3$ J/kg
Specific heat capacity $c_p$	2000 J/(kgK)
Thermal conductivity $\lambda$	0.3 W/(mK)
Mass diffusivity $D$	$1 \times 10^{-9}$ m <sup>2</sup> /s
Number of transversal nodes $n$	300
<i>Input to the model of [14]</i>	
$Le$	100
$\tilde{St}$	10
Number of eigenvalues	$5 \times 10^6$

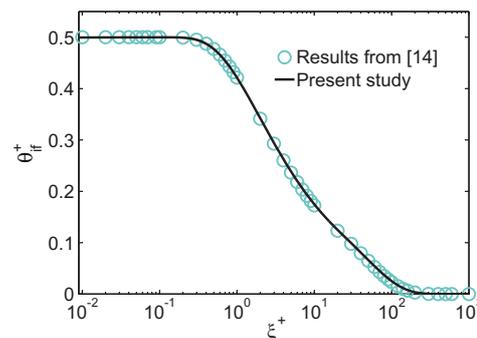
in both models. The comparison is carried out using non-dimensional variables, namely, coordinate in longitudinal direction  $\xi^+$ , coordinate in transversal direction  $\eta^+$ , temperatures  $\theta^+$  and mass fractions  $\gamma^+$ . The definition of these variables is equivalent to [14] and provided in the nomenclature. The input which is required for the method presented in [14] is given in Table 1. The dimensionless group  $\tilde{St}$ , sometimes labelled as modified Stefan number is also known as phase change criterion [14]. Please note that in [14,16], the Lewis number  $Le$  is defined in inverse manner as compared to this paper.

The properties for the present numerical model (cf. Table 1) are chosen to be comparable with the inputs to [14]. After the dimensionless longitudinal coordinate  $\xi^+$  exceeds  $10^0$ , the grid spacing  $\Delta y_{ij}$  grows gradually from  $4 \cdot 10^{-6}$  m to  $4 \cdot 10^{-2}$  m at  $\xi^+ = 10^3$  to reduce computation time. At a first glance a longitudinal grid spacing of  $4 \cdot 10^{-2}$  m may appear large, however the dimensionless coordinate  $\xi^+ = 10^3$  corresponds to approximately 65 m.

In a first case, the numerical results with a wall temperature equal to the sub-cooled inlet temperature of the film are compared to the analytical solution.  $T_w = 300.15$  K =  $T_0$  has been applied to both models, leading to a dimensionless temperature at the entrance of  $\theta_0^+ = \frac{T_0 - T_w}{T_{eq,0} - T_0} = 0$ . Fig. 4 depicts the temperature at the liquid-vapour interface over flow distance  $\xi^+$ . The interface temperature  $\theta_{if}^+$  starts at 0.5 what agrees with the self similar solution also provided in [14]. Beyond a flow length of  $\xi^+ = 2 \cdot 10^{-1}$ , with mass absorbed at the interface,  $\theta_{if}^+$  steadily declines. At a flow length of around  $\xi^+ = 1 \cdot 10^1$  the slope slightly changes because the gradient of mass fraction has developed across the entire film and arrived at the wall. Finally, the equilibrium temperature at the interface has been reduced to the wall temperature, leading to  $\theta_{if}^+ = 0$ . As can be seen from Fig. 4, both methods exhibit excellent agreement.

Now, the inlet condition of the liquid film is changed. We still consider a sub-cooled film, but set the temperature  $T_0$  at the inlet in between the temperature of the isothermal wall  $T_w$  and saturation condition  $T_{eq,0}$  - leading to  $T_0 = (T_{eq,0} + T_w)/2$ , or  $\theta_0^+ = \frac{T_0 - T_w}{T_{eq,0} - T_0} = 1$ . A sub-cooled entrance somewhere in between saturation and wall temperature is a likely scenario during operation of an absorption chiller. All other input parameters remain unmodified (cf. Table 1).

In this case, numerical and analytical solution do not coincide anymore: The dimensionless interface temperature of the numerical solution is larger than that of the analytical solution. In order to discuss this discrepancy, in Fig. 5 the resulting temperature profiles across the film are illustrated. The temperature profiles are shown at a flow length of  $\xi^+ = 0.01$ ,  $\xi^+ = 0.1$  and  $\xi^+ = 1$ . They are similar in a qualitative way, but not quantitatively. Especially close to the entrance (at  $\xi^+ = 0.01$ ), the two methods reveal a noticeable deviation not only at the interface but even in the bulk domain of the flow. The reason for this deviation may be attributed



**Fig. 4.** Interface temperature over flow distance  $\xi^+$  of Nakoryakov and Grigor'eva [14] and present study. Results are shown for  $T_0 = T_w = 300.15$  K.

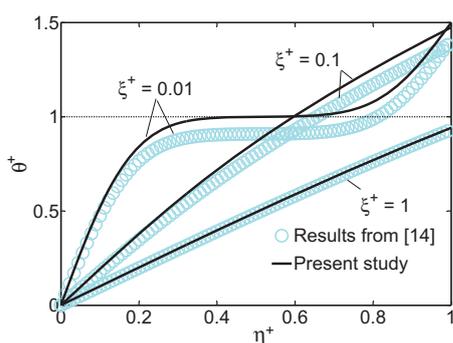


Fig. 5. Temperature profiles over longitudinal coordinate  $\eta^+$  of Nakoryakov and Grigor'eva [14] and present study. Results are shown for  $T_0 = (T_{eq,0} + T_W)/2$ .

to the analytical solution by Nakoryakov and Grigor'eva [14]. As they state, close to the inlet (for a flow length  $\xi^+ \mapsto 0$ ) oscillations can occur in the analytical solution since initial and boundary conditions become inconsistent. As a consequence, in the analytical solution even close to the entrance, the dimensionless temperature is less than the inlet temperature  $\theta_0^+ = 1$ . Nakoryakov et. al. [8] [14] have proposed and implemented a self similar solution to resolve the distribution of temperature and mass fraction within the entrance region and to overcome this problem. The numerical solution perfectly agrees to this self similar solution.

To be more precise, at the inlet itself the temperature has to be uniform across the entire film, since this is required by the inlet condition (cf. Eq. 6): at a flow length of  $\xi^+ = 0$  for any  $\eta^+$  the solution to the PDE system is  $\theta_0^+ = 1$ . In the entrance region (for small  $\xi^+$ ), the temperature gradients develop from both boundaries towards the bulk of the flow. However,  $\theta^+$  remains at the inlet level  $\theta_0^+ = 1$ , unless the wall-sided distortion in temperature has merged with the distortion developing from the interface.

The present numerical model provides a coherent solution to the physical problem described here. Both, inlet condition as well as boundary conditions are satisfied by the numerical solution. It can be concluded that the numerical solution is congruent with the analytical solution where the latter is valid, and provides reasonable results where the latter is not reliable.

## 5. Results and discussion

Following this validation, the assumptions made in Section 4 are relaxed and properties may vary according to Section 3.2. The consequences on temperature and concentration profiles are discussed for both absorption and desorption process using different inlet conditions.

### 5.1. Absorption

The influence of a change in Lewis-Number, release of differential heat of solution within the film, as well as varying properties on the absorption process are discussed. The input parameters utilised to simulate the absorption process are shown in Table 2.

#### 5.1.1. Effect of a change in Lewis-Number

As Grossman [16] analysed already, the thermal effect associated with the absorption process is reduced with decreasing heat of absorption and increasing Lewis number.<sup>1</sup> The Lewis number is defined as the ratio of thermal to mass diffusivity. In this calculation, it was changed primarily by changing the mass diffusivity; one reason is that this quality is often not very well known.

<sup>1</sup> Please note that in [16],  $Le$  is defined inversely.

Table 2  
Model parameters for absorption process.

Input parameters	
Inlet mass flow $\dot{\Gamma}$	0.036 kg/(ms)
Inlet mass fraction $\xi_{A,0}$	0.470
Wall temperature $T_W$	300.15 K
Pressure $p$	1500 Pa
Number of transversal nodes $n$	300
Output parameters at inlet	
Equilibrium temperature $T_{eq,0}$ [18]	312.40 K
Eq. mass fraction $\xi_{eq,0}(\theta_0^+ = 0)$ [18]	0.572
Eq. mass fraction $\xi_{eq,0}(\theta_0^+ = 1)$ [18]	0.516
Density $\rho_0(\theta_0^+ = 0)$ [18]	1577.8 kg/m <sup>3</sup>
Mass diffusivity $D_0(\theta_0^+ = 0)$ [19]	$1.1787 \times 10^{-9}$ m <sup>2</sup> /s
Mass diffusivity $D_0(\theta_0^+ = 1)$ [19]	$1.3533 \times 10^{-9}$ m <sup>2</sup> /s

The distribution of temperature  $\theta^+$  and mass fraction  $\gamma^+$  is depicted in Fig. 6. The solid lines show results at a flow length of  $\xi^+ = 0.5$  for a mixture of lithium bromide and water with a Lewis-number of approximately 100. The dash-dotted curves show results for a Lewis number of approximately 10 at the same flow length.

In conjunction with the inlet mass flow chosen, the distance from the entrance to a flow length of  $\xi^+ = 0.5$  corresponds to approximately half the circumference of a horizontal tube having a diameter of 20 mm.

Since the mass diffusivity is increased by a factor of ten, the boundary layer for mass concentration develops quicker and the absorption rate is higher. As expected, the thermal effect of the absorption process rises with decreasing Lewis number. It can be concluded that an uncertainty in mass diffusivity has a tremendous effect on the profiles.

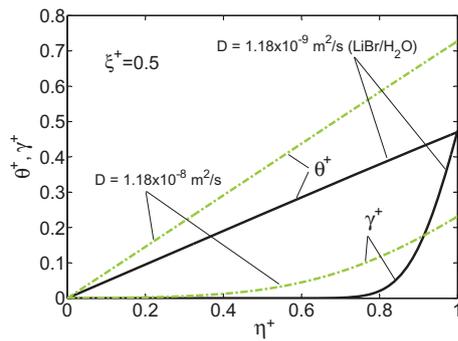
A reduction of thermal conductivity  $\lambda$  by a factor of 10 leads to the same Lewis number as the tenfold increase of mass diffusivity. Thus, at the same  $\xi^+$  the respective results were congruent with the dash-dotted curves shown in Fig. 6. However,  $\lambda$  is factored into the calculation of the dimensionless flow distance  $\xi^+$ . Hence, in the latter case,  $\xi^+$  refers to an actual distance 10 times further down the stream.

#### 5.1.2. Effect of differential heat of solution within the bulk

An usual assumption related to modelling absorption phenomena is that the heat of absorption is released solely at the interface and transferred through the bulk of the film by conduction and convection. However, in addition differential heat of solution is released in the bulk since the concentration boundary layer grows towards the wall. According to Eq. (2), in the present study this release of differential heat of solution is considered only in flow direction.

In particular when vapour is absorbed the heat of absorption (enthalpy difference  $h_v - \bar{h}_A$  in Eq. (8)) is often one order of magnitude larger than the differential heat of solution. Therefore, the temperature increase due to this additional release of heat is rather small. In order to illustrate the influence, the amount of differential heat of solution released within the bulk is exaggerated by a factor of ten as compared to LiBr/H<sub>2</sub>O. Temperature  $\theta^+$  and mass fraction  $\gamma^+$  can be seen in Fig. 7 for constant fluid properties. The solid lines are those from Fig. 6.

When allowing for differential heat of solution within the bulk of the flow, the dashed lines arise. Since additional heat is released within the bulk, the temperature rises as compared to the approach with disregarded differential heat of solution. As we assume local equilibrium at the interface, again the mass fraction of water  $\gamma^+$  is lower.



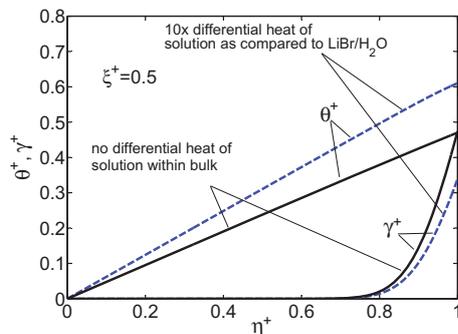
**Fig. 6.** Profiles of temperature  $\theta^+$  and mass fraction  $\gamma^+$  with inlet condition  $\theta_0^+ = 0$  at  $\xi^+ = 0.5$ . Results are shown for constant properties and absent differential heat of solution.

When we compare this to Fig. 6, the quantitative effects on temperatures as well as mass concentration at the interface are comparable. In short, additional release of heat leads to rising temperatures at the interface and lower mass fraction at the interface. However, on the presence of differential heat of solution, the gradient in mass fraction at the interface is smaller compared to absent differential heat of solution, indicating a low absorption rate. While the reason for an elevated temperature in Fig. 6 is the high absorption rate, in Fig. 7 it originates from a constraint in diffusion due to the release of differential heat of solution. Furthermore, the distribution of  $\theta^+$  over  $\eta^+$  reveals a slight curvature in comparison to the result neglecting release of differential heat of solution, which again originates from the heat source within the bulk.

### 5.1.3. Effect of non-constant properties

As a secondary effect of changing temperatures and mass fractions during absorption, properties change as well. Often these effects are deemed less important since those changes are small. In order to quantify the effect of the occurring differential heat of solution, the results are compared to those with varying properties. Hence, in the following discussion the occurring differential heat of solution is not exaggerated as compared to a mixture of LiBr/H<sub>2</sub>O.

To distinguish the small effects, in Fig. 8 only the region near the vapour-liquid interface is shown. In the case of variable properties, the boundary layer of mass concentration at  $\xi^+ = 0.5$  is further developed although the gradient at the interface is lower. Since slightly more mass has been absorbed the temperatures in the film are higher. Fick's law of diffusion (see Eq. 3) provides that



**Fig. 7.** Profiles of temperature  $\theta^+$  and mass fraction  $\gamma^+$  for absorption at  $\xi^+ = 0.5$  with inlet condition  $\theta_0^+ = 0$ . Results are shown for constant properties only. Please note: Occurrent differential heat of solution is 10 times exaggerated as compared to a mixture of LiBr/H<sub>2</sub>O.

only an increase of mass diffusivity or density is a possible explanation.

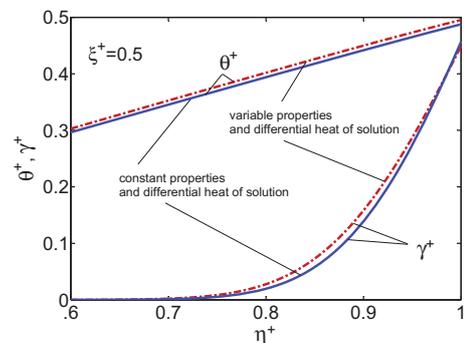
In Fig. 9, mass diffusivity (dotted line) as well as the respective product of mass diffusivity and density (solid line) over film thickness  $\eta^+$  are depicted. With rising water content towards the interface mass diffusivity increases. Further, it can be seen that the product of mass diffusivity and density rises as well even though density decreases with increasing water content. Consequently, more mass is transported with a smaller gradient and more heat is set free. It should be noted, that sensitivity on both mass diffusivity and density is higher with regard to a change in mass fraction than to a change in temperature.

Summarising the last two points Sections 5.1.2 and 5.1.3, the interface temperatures of the lithium bromide solution increase as compared to the usual approach. Naturally occurring differential heat of solution within the bulk while keeping properties fixed, leads to an increase in temperature of roughly 0.2 K for a mixture of lithium bromide and water (not shown in figure). When solely allowing for the effect of variable properties, for the same mixture the interface temperature rises by approximately 0.08 K (also not shown). Thus, both effects are small and almost in the same order of magnitude but heat of mixing is more important.

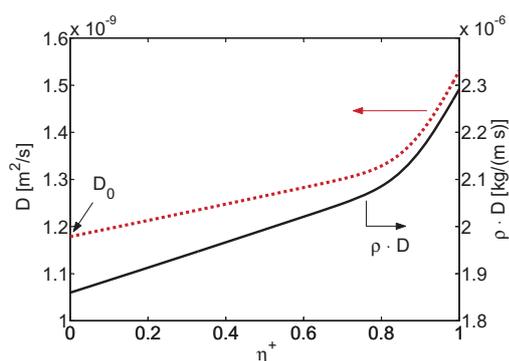
### 5.2. Comparison between absorption and desorption

Transfer coefficients in desorption often are reported to be larger than in absorption although the reason is not discussed. The considerations from above, in most cases, have been made for absorbing falling films. However, they should be valid for desorbing falling films as well.

For comparison between absorption and desorption, results have been computed allowing for various effects. First, the influence of a non-linear equilibrium relation, second the release of differential heat of solution in the bulk, in conjunction with variable properties are discussed. In order to change absorption to desorption, the boundary conditions have to be defined appropriately. The inlet of the entire film is assumed to be in equilibrium state. Hence, for desorption any input parameter is equal to absorption except for the wall temperature. For simulating desorption, the wall temperature  $T_w$  has been set above, for absorption below the temperature at the inlet and  $T_{eq,0}$ , respectively. The absolute value of the temperature difference driving the process  $|T_{eq,0} - T_w|$ , is set to 20 K for both absorption and desorption which is rather large, in order to render the effects more visibly. Of course, in reality these large temperature differences only occur in pool desorb-ers and may lead to nucleate boiling.



**Fig. 8.** Profiles of temperature  $\theta^+$  and mass fraction  $\gamma^+$  at  $\xi^+ = 0.5$  close to the interface ( $0.6 \leq \eta^+ \leq 1$ ) with inlet condition  $\theta_0^+ = 0$ . Results are shown for present differential heat of solution and constant (solid lines) as well as variable properties (dash-dotted lines). Please note: Occurrent differential heat of solution is **not** exaggerated as compared to a mixture of LiBr/H<sub>2</sub>O.



**Fig. 9.** Mass diffusivity (solid line) and product of mass diffusivity and density (dotted line) at  $\zeta^+ = 0.5$  during absorption with inlet condition  $\theta_0^+ = 0$ . Please note: Occurrent differential heat of solution is **not** exaggerated as compared to a mixture of LiBr/H<sub>2</sub>O.

Compared to applications in LiBr absorption chillers the driving temperature difference is exaggerated in order to illustrate the influence of a non-linearity in the equilibrium state. Usually in absorption chillers (also known as type I heat pumps) the pressure level during desorption is higher as compared to absorption. However, in type II heat pumps the desorber operates at a lower pressure level as compared to the absorber. Thus, in any case the starting points of the absorption and desorption processes will be different. Here the conditions are chosen to be at the same pressure level in order to solely investigate the influence of a non-linearity in equilibrium conditions in connection with variable properties. The input parameters for simulation of both processes can be seen in Table 3.

In the following sections mainly the original physical quantities with dimensions have been used, since variations in the thermal conductivity  $\lambda$  change the dimensionless flow distance  $\zeta^+$ . In conjunction with the inlet condition, the dimensionless temperature  $\theta^+ = \frac{T - T_W}{T_{eq,0} - T_0}$  can neither be used since it is undefined. However, the dimensionless transversal coordinate  $\eta^+$  is used to depict the results since it helps to scale-up the film thickness.

### 5.2.1. Effect of a non-linear equilibrium function

The relation between saturation temperature, pressure, and mass fraction (Eq. (9)) has been linearised to distinguish the influence of non-linearity from other effects considered in the governing equations. Fig. 10 shows the comparison between the non-linear equilibrium relation based on Löwer's [18] data and the linearised relation (dashed line). The equilibrium function has been linearised around the inlet condition.

From the curves in Fig. 10 the influence of non-linearity becomes evident. Starting at  $T_{eq,0}$  a temperature reduction by  $\Delta T$  during absorption leads to a larger difference in mass fraction  $\Delta \zeta$  than a temperature increase by the same  $\Delta T$  during desorption. This impacts on the following results.

In the lower part of Fig. 11, results for absorption, in the upper part those for desorption are shown, both computed using constant properties. Results generated with a linear function between saturation temperature and mass fraction are plotted with broken lines, solid lines represent results with a non-linear function. Please note that the ordinate is scaled to the temperature differences  $T_{eq,0} \pm 12$  K. In connection with the inlet mass flow chosen, the longitudinal coordinate  $x = 0.031$  m is roughly comparable to  $\zeta^+ = 0.5$ , which was introduced in the previous section.

The broken curves using a linear equilibrium function are symmetrical around the horizontal axis at  $T = 308.24$  K; the transfer rate in both cases is exactly the same. When accounting for the non-linear equilibrium, temperatures at the interface are higher

**Table 3**

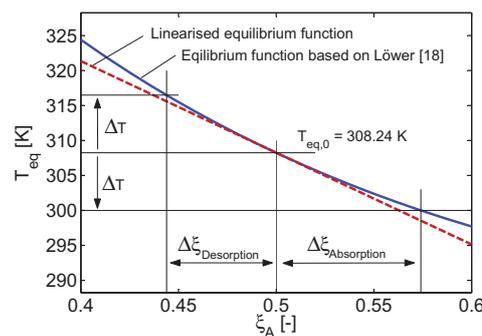
Model parameters for absorption and desorption process.

Common input parameters	
Inlet mass flow $\dot{\Gamma}$	0.036 kg/(ms)
Inlet mass fraction $\zeta_{A,0}$	0.500
Pressure $p$	1500 Pa
Number of transversal nodes $n$	300
Input parameters for absorption	
Wall temperature $T_W$	288.24 K
Input parameters for desorption	
Wall temperature $T_W$	328.24 K
Common output parameters at the inlet	
Equilibrium temperature $T_{eq,0}$ [18]	308.24 K
Eq. mass fraction $\zeta_{eq,0}$ [18]	0.500
Density $\rho_0$ [18]	1521.9 kg/m <sup>3</sup>
Mass diffusivity $D_0$ [19]	$1.5337 \times 10^{-9}$ m <sup>2</sup> /s

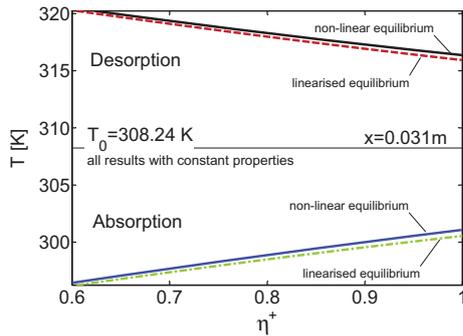
in both absorption and desorption case, due to the positive curvature of the respective function seen in Fig. 10. In other words, when a linear equilibrium function is used, for a given composition at the interface the driving temperature difference between interface and wall and consequently, the heat flow towards the wall is underestimated for the absorption process. Since the heat flow is underestimated, a lower mass fraction of water can be anticipated as well because less heat was set free. In contrary, for desorption, the driving temperature difference between wall and interface and the heat flow towards the interface is overestimated, if a linear equilibrium function is utilised. Thus, compared to the non-linear case the mass fraction of water is expected to be lower as well because more water was desorbed.

In Fig. 12 the mass fraction over dimensionless film thickness is shown. As can be seen there, due to the non-linear equilibrium function the elevated interface temperature in Fig. 11 is associated with a higher water mass fraction  $\zeta_A$  at  $\eta^+ = 1$  for both absorption and desorption case.

Again, the curves labelled with linearised equilibrium are symmetrical around the horizontal axis at  $\zeta_A = 0.5$ . In both cases absorption as well as desorption, the respective curves do not intersect. Bearing in mind that in Figs. 11 and 12 only the equilibria are altered but the properties are held constant, we can derive from the gradient in mass fraction at  $\eta^+ = 1$  that the mass transfer rate is lower in case of desorption than in case of absorption when the non-linear equilibrium is used. Although the difference is marginal, this does not agree to most experimental measurements. For most authors the absorber is deemed the crucial component in absorption chillers [5].



**Fig. 10.** Relation between saturation temperature  $T_{eq}$  and mass fraction  $\zeta_A$  for  $p = 1500$  Pa.



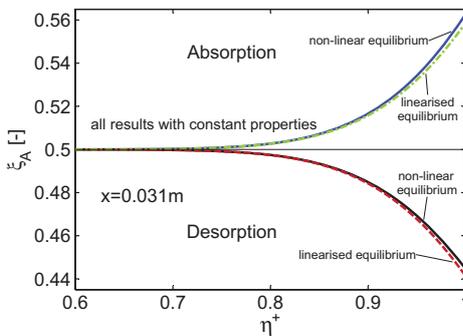
**Fig. 11.** Comparison of local temperature profiles close to the interface ( $0.6 \leq \eta^+ \leq 1$ ) between absorption and desorption with inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K. Results are shown at  $x = 0.031$  m for absent differential heat of solution and constant properties.

5.2.2. Effect of variable properties and release of partial differential heat in the bulk

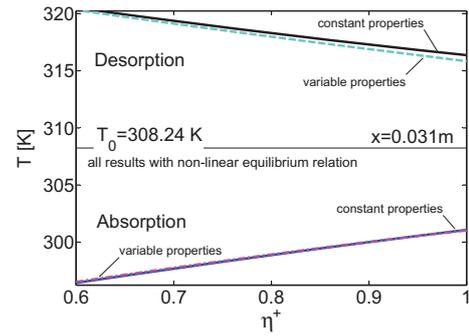
Subsequently, the influence of variable properties in conjunction with occurring partial differential heat of solution has been investigated. The initial situation remains unchanged to Table 3 and the phase equilibrium is not linearised. During absorption, allowing for these effects does almost not affect the temperature at the interface as can be seen in Fig. 13.

The temperature distribution over  $\eta^+$  almost perfectly agrees to the previous result with constant properties. However, as can be seen between  $\eta^+ = 0.6$  and  $\eta^+ = 1$ , during desorption the temperature is slightly lower when taking variable properties and differential heat of solution into account.

When the mass fraction is analysed, a similar behaviour is encountered. In case of absorption, the mass fraction over dimensionless film thickness deviates only very little from the original curve. During desorption, the deviation is slightly more pronounced. For desorption, in both Figs. 12 and 14, the mass fraction at the interface differs by around  $3.3 \cdot 10^{-3}$  between the respective curves. Moreover, while the curvature in Fig. 12 only changes due to a variation at the interface, in Fig. 14 the curves for variable properties intersect the ones based on constant properties. The intersection point for absorption lies in immediate vicinity of the interface, the intersection point for desorption is approximately at  $\eta^+ = 0.9$ . In other words, in contrast to the absorption process, during desorption the boundary layer of mass fraction is further developed when accounting for variable properties. Hence in Fig. 14, left from  $\eta^+ = 0.9$  the broken lines lie below the solid ones for both absorption and desorption process. However, all these effects are very small.



**Fig. 12.** Comparison of local mass fraction profiles between absorption and desorption close to the interface ( $0.6 \leq \eta^+ \leq 1$ ) with inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K. Results are shown at  $x = 0.031$  m for absent differential heat of solution and constant properties.



**Fig. 13.** Comparison of local temperature profiles between absorption and desorption close to the interface ( $0.6 \leq \eta^+ \leq 1$ ) with inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K. Results are shown at  $x = 0.031$  m for constant properties without differential heat of solution and variable properties in conjunction with differential heat of solution.

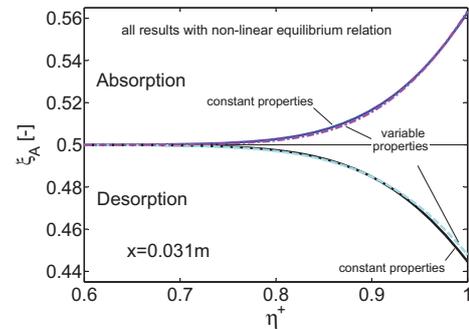
5.2.3. Comparison of mass fluxes

The effects discussed in the previous section influence the mass flux transferred across the interface. In addition to the distribution of mass fraction, now the different drivers – meaning the mass fraction gradients at the interface, as well as the changes in mass diffusivity and density are analysed. Since mass transfer is coupled with heat transfer, the latter is part of the analysis provided below.

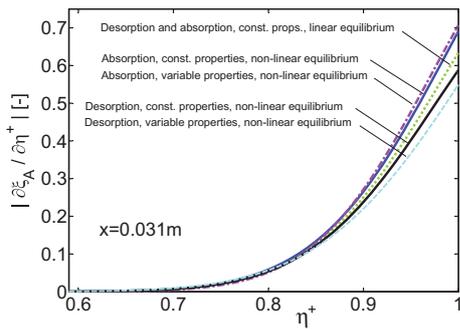
Fig. 15 depicts the absolute values of mass fraction gradients  $\partial \xi_A / \partial \eta^+$  over film thickness  $\eta^+$  corresponding to results shown in Sections 5.2.1 and 5.2.2. Simulating desorption and absorption with constant properties and linear equilibrium function leads to equal gradients with reversed signs only. Hence, these two cases are represented by one curve (green dotted line) in Fig. 15.

When properties are held constant but the coupling condition at the interface (Eq. (9)) accounts for non-linearities, the gradients are higher in case of absorption (blue solid line) but lower in case of desorption (black solid line). Since the properties are comparable to the results shown as green dotted line, this translates into a lower mass flux during desorption as compared to absorption. When accounting for variable properties as well as differential heat of solution, the mass fraction gradient during absorption is even more pronounced, while it is restrained during desorption. However, to infer the transferred mass flux from the gradients only is not possible any more since thermal conductivity, heat of sorption, mass diffusivity and density changes throughout the processes. Therefore, the energy balance at the interface (Eq. (19)) has been analysed, since any term in the coupling condition

$$\lambda_{if} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{if} = \rho_{if} D_{if} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \Big|_{if} \cdot \Delta h_{sor} \tag{19}$$



**Fig. 14.** Comparison of local mass fraction profiles between absorption and desorption close to the interface ( $0.6 \leq \eta^+ \leq 1$ ) with inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K. Results are shown at  $x = 0.031$  m for constant properties without differential heat of solution and variable properties in conjunction with differential heat of solution.



**Fig. 15.** Absolute values of local gradients in mass fraction  $\partial\xi_A/\partial\eta^+$  over film thickness  $\eta^+$  between absorption and desorption with inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K. Results are shown at  $x = 0.031$  m for constant as well as variable properties in conjunction with differential heat of solution.

may vary throughout the processes.

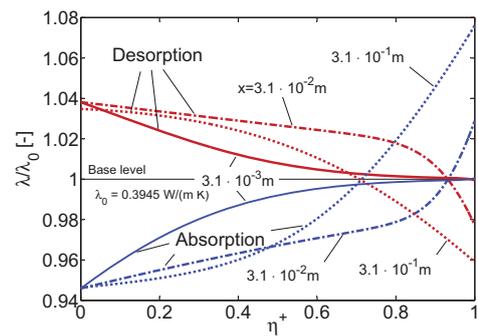
First, the causation between transversal development of properties and the temperature as well as mass fraction gradients at the interface is outlined. Second, the connection between properties at the interface and the mass flux transferred is discussed.

To begin with, the distribution of thermal conductivity  $\lambda$  across the film is plotted in Fig. 16 for various longitudinal coordinates. Due to an elevated temperature at the wall ( $\eta^+ = 0$ ) during desorption, the thermal conductivity improves but by less than 4%. The improvement, albeit marginal, arrives at the interface within a short flow distance. At  $x = 3.1 \cdot 10^{-3}$  m, thermal conductivity has risen in about 90% of the film (red solid line). An equal but negative temperature difference during absorption leads to a reduction of thermal conductivity by more than 5% as can be seen on the left side of Fig. 16. Again, it occurs almost throughout the entire film (blue solid line). In both cases, the change in thermal conductivity originates from a fast propagation of the thermal boundary layer. Due to the change of thermal conductivity this propagation is accelerated in case of desorption, while it is hindered during absorption. Consequently, the temperature gradient at the interface  $\partial T/\partial y|_{if}$  drops slightly earlier because of desorption (red dotted line in Fig. 17) than it rises for the comparable case during absorption (cyan solid line). The absolute values of the temperature gradients are plotted in the upper part of Fig. 17.

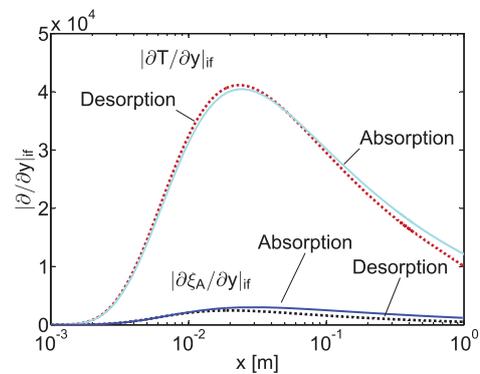
From Fig. 16 we can see that as soon as the boundary layer of mass fractions significantly starts growing towards the wall (beyond  $3.1 \cdot 10^{-3}$  m, see Fig. 17), the thermal diffusivity drops at the interface below the base level for desorption and it rises above base level for absorption. Since desorption starts at slightly shorter flow distance than absorption the change in mass fraction occurs earlier. Therefore, the absolute value of the temperature gradient in Fig. 17 grows a bit higher during desorption. Simultaneously, the decline in water mass fraction at the interface constrains the thermally induced increase of the product  $\rho D$  at the wall as can be seen in the upper part of Fig. 18 for curves beyond  $x = 1 \cdot 10^{-2}$  m.

Overall, the product of density and mass diffusivity during desorption is higher than during absorption. The elevated temperature at the wall ( $\eta^+ = 0$ ) improves the  $\rho D$ -product by more than 45%, while the reduced wall temperature decreases it by almost 37%. The factor  $\rho D$  rises with increasing water content and temperature. Beyond  $1 \cdot 10^{-2}$  m, with decreasing water content the mass diffusivity declines stronger than the density increases. Nevertheless, during absorption, albeit at the interface only slightly,  $\rho D$ -values remain below the values of desorption throughout the entire film thickness.

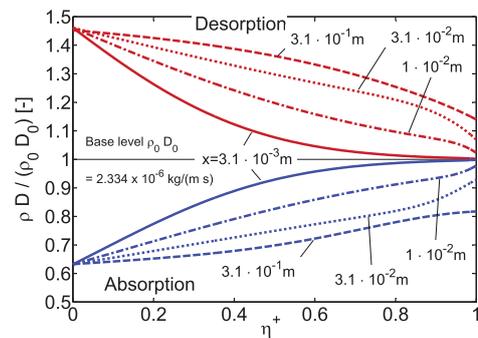
After outlining the consequences of property variations, their development over flow distance and impact on mass transferred is illustrated. In Fig. 19 the development of thermal conductivity



**Fig. 16.** Comparison of thermal conductivity  $\lambda$  across the film between absorption and desorption with inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K at various longitudinal coordinates  $x$ .



**Fig. 17.** Comparison of mass and temperature gradients between absorption and desorption at the interface ( $\eta^+ = 1$ ) over longitudinal coordinate  $x$  under inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K.



**Fig. 18.** Comparison of the product  $\rho \cdot D$  across the film between absorption and desorption with inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K at various  $x$ -values.

and the product  $\rho D$  along the interface has been juxtaposed in stream-wise direction.

The positive change of  $\rho D$  during desorption is accompanied by a degradation of thermal conductivity in vicinity of the free interface. However, the heat of sorption has to be provided to boil-off water at the interface and this heat transfer is deteriorated. Hence, the temperature at the interface is reduced when variable properties are accounted for (see cyan dashed line in upper part of Fig. 13 on right hand side).

Finally, the development of the heat of sorption has to be analysed. As depicted in Fig. 20, due to the change in composition, the enthalpy difference  $\Delta h_{sor}$  required to boil-off the absorbate is

about 13% larger than the respective enthalpy difference being released during the absorption of water. In addition to the lower thermal conductivity at the interface during desorption, the increase in  $\Delta h_{sor}$  is the second reason for the decreased temperature at the interface, as depicted in Fig. 13 at  $\eta^+ = 1$ . During absorption, the considered effects nearly cancel each other, thus in Fig. 13 the temperature distribution remains almost unchanged.

In Fig. 21 the mass flux transferred across the interface is plotted over longitudinal coordinate  $x$ . In any case the onset of mass transfer occurs not before  $10^{-3}$  m. Although the wall-sided change in the factor  $\rho D$  is high (see Fig. 18), up to a longitudinal coordinate of  $x = 1 \cdot 10^{-2}$  m it has almost levelled off towards the interface.

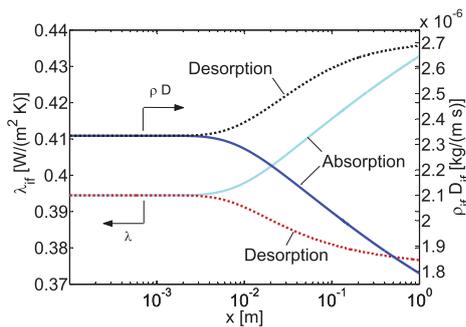


Fig. 19. Comparison of quantities used for the energy balance at the interface (Eq. 19). Values are depicted over longitudinal coordinate  $x$  for absorption and desorption with inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K.

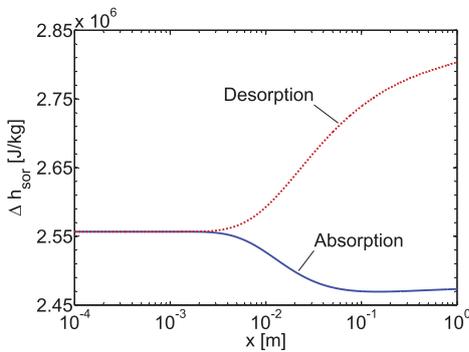


Fig. 20. Development of the heat of sorption required during desorption and released during absorption at the interface ( $\eta^+ = 1$ ) over longitudinal coordinate  $x$ , both for an inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K.

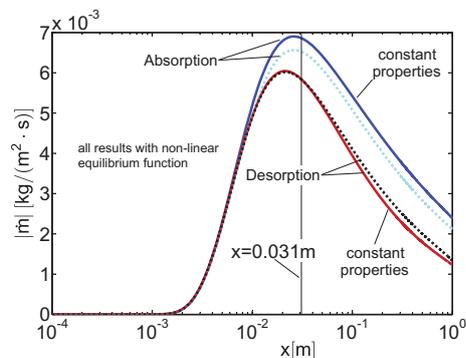


Fig. 21. Local absolute mass fluxes transferred across the interface for desorption and absorption over longitudinal coordinate  $x$  for inlet condition  $T_0 = T_{eq,0} = 308.24$  K. Results are shown for constant as well as variable properties in conjunction with differential heat of solution.

For this simple reason, up to this distance the development of mass flux in absorption and desorption is almost congruent (see Fig. 21).

As already seen from the mass fraction gradients in Fig. 15, if the properties are constant and heat flows towards the interface, the gradient and consequently the desorbed mass flux is small (red solid line). Simply a change in direction of the heat flow yields to a larger mass flux during absorption (blue solid line) due to associated advantage in equilibrium conditions at the interface. Variable properties reduce this advantage, since changes in thermal or mass diffusivity impair transfer characteristics of the liquid (cyan dotted line). As can be seen from Fig. 16, adjacent to the interface ( $\eta^+ = 1$ ) the thermal conductivity is enhanced with rising water content during absorption. Although the values for thermal conductivity even exceed the initial ones (base level), the absorbed mass flux is reduced because the product  $\rho D$  has decreased and the process is diffusion-controlled ( $Le \approx 80$ ).

During desorption the opposite effect is observed, though an improvement of transfer obviously occurs further downstream (black dotted line). The explanation is indicated in Fig. 19 already. While the values for  $\rho D$  are increased during desorption, the thermal conductivity  $\lambda$  is degraded at the interface due to decreasing water content. However, the increased heat of sorption (see Fig. 20) has to be provided to boil-off water at the interface and this heat flow has deteriorated. Hence, the temperature at the interface is reduced when variable properties are accounted (see cyan dashed line in upper part of Fig. 13) and the mass flux across it is not improved during desorption. Beyond approximately  $x = 0.03$  m, the rising temperature has slowly abated the drop in thermal conductivity at the interface (red dotted line in Fig. 19). Consequently, from there onwards the mass flux rises as compared to constant properties (see Fig. 21).

Interestingly, the impact of variable properties is greater for absorption than desorption. Moreover, advantageous properties during desorption do not fully compensate for the lower gradient due to the non-linearity of the equilibrium function.

### 6. Conclusion

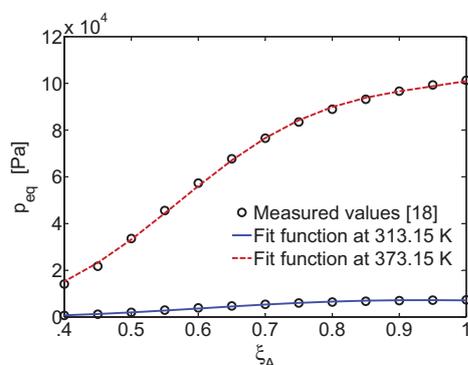
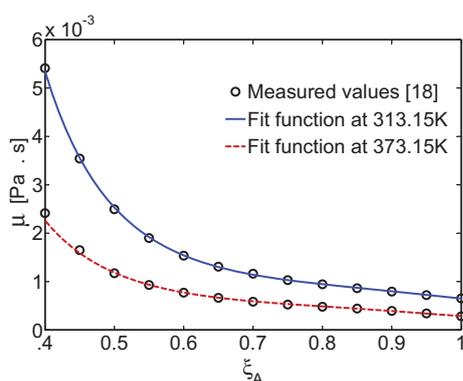
A numerical model for combined heat and mass transfer in a film with simplified hydrodynamics has been introduced. The model accounts for heat flow due to interdiffusion, variable properties and release of differential heat of solution within the bulk. For a mixture of lithium bromide and water, the influence of occurrent differential heat of solution proves to be slightly larger than the influence of changing properties. However, both effects are

Table 4  
Coefficients used in Eqs. (21), and (20).

	$\nu$	$T_{eq}$
$a_0$	-771.2238243	-0.00470858
$a_1$	1.313986647	-0.001276757
$a_2$	6661.751115	0.000145597
$a_3$	-0.176584923	0.000428261
$a_4$	-0.00049714	0.000948526
$a_5$	-327.2586134	3.47501E-06
$a_6$	0.000136026	0.000495401
$a_7$	0.069697926	-5.44472E-05
$a_8$	-0.000103042	0.000110477
$a_9$	283.1165871	0.004915398
$a_{10}$	-5.806649869	-7.21234E-08
$a_{11}$	-5.412275708	-0.00058121
$a_{12}$	-6824.256192	-2.23738E-05
$a_{13}$	-2993.737847	2.39788E-06
$a_{14}$	-816.7742305	-6.64049E-06
$a_{15}$	35.8541012	4.26683E-06

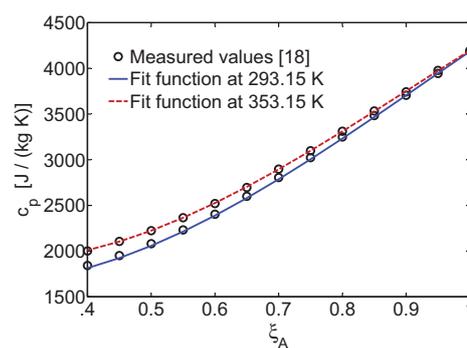
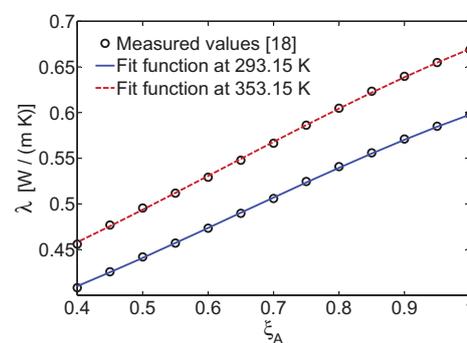
**Table 5**  
Coefficients used in Eqs. (22)–(24).

	$\rho$	$c_p$	$\lambda$
$a_0$	-158.792071	6462.731914	-3.289756188
$a_1$	18502.67064	-68158.25241	0.0315131868
$a_2$	9.79173601	-17.426854	-8.5591584E-05
$a_3$	-158.6456762	520.285681	7.95845188E-08
$a_4$	-73846.71379	5800.384892	0.19623046
$a_5$	-0.025910389	0.041611	0.43183769
$a_6$	679.2667079	-55.755167	0.19951162
$a_7$	0.465762844	-1.4047670	-0.0023665808
$a_8$	-2.043875777	0.1688020	2.8033128E-06
$a_9$	86252.5194	288567.2066	-0.00388631292
$a_{10}$	2.04622E-05	-2.95603E-05	5.74312181E-06
$a_{11}$	-794.2826466	-197.10322	
$a_{12}$	2.390046288	0.474334	
$a_{13}$	-0.000453566	1.25375E-03	
$a_{14}$	0.002046451	-1.81967E-04	
$a_{15}$	-0.00239635	-3.38265E-04	
$a_{16}$	2093.332625		

**Fig. 22.** Equilibrium pressure  $p_{eq}$  over water mass fraction  $\xi_A$  – comparison between measured data and values calculated using the inverse of Eq. (20).**Fig. 23.** Dynamic viscosity  $\mu$  over water mass fraction  $\xi_A$  – comparison between measured data and values calculated using Eq. (21).

rather small. Thus, for similar solutions future models should include both effects or none.

Moreover, for simplified hydrodynamics, differences between absorption and desorption processes have been shown. Under comparable conditions, the mass flux transferred during absorption is significantly larger than during the desorption process. The improvement originates from a non-linearity of equilibrium temperature which couples heat and mass transfer at the interface. Starting from equilibrium conditions, for a comparable difference in mass fraction, this non-linearity leads to a considerably smaller temperature decrease during absorption as compared to the tem-

**Fig. 24.** Specific heat capacity over water mass fraction  $\xi_A$  – comparison between measured data and values calculated using Eq. (23).**Fig. 25.** Thermal conductivity over water mass fraction  $\xi_A$  – comparison between measured data and values calculated using Eq. (24).

perature increase during desorption. Thus, if equilibrium and comparable temperature differences are assumed at the inlet, the driving temperature difference is significantly lower during desorption than during absorption – leading to the differences in mass flux transferred.

Due to changing transport coefficients (e.g. thermal conductivity and mass diffusivity), the elevated mass flux during absorption is reduced again when variable properties are accounted for. The reduction in total mass flow absorbed over 1m length is approximately 10% relative to the smaller mass flow calculated with variable properties and conditions shown in Table 3. The elevated temperature during desorption generally improves transport coefficients. However, within a short flow distance, the impact of a low water content at the interface on the thermophysical properties compensates for the thermally induced improvement. In absorption cycles, desorption takes place at higher temperatures than absorption. As already stated earlier, transfer coefficients in desorption are often reported to be larger than in absorption. From the results of this paper, we can derive that the improvement in transfer coefficients during desorption probably originates from favourable properties at the higher temperature and pressure level.

In essence, models must account for a potential non-linearity of equilibrium conditions, while additional effects such as variable properties and release of differential heat of solution are just nice-to-have features. They will, however, be of more significance for fluid pairs with less favourable transport properties as compared to lithium bromide.

## Appendix A

In the following section we describe the equations used to determine property data since the functions, derived by regression

analysis from data measured by Löwer [18] have not been published yet. The polynomial regression was conducted by A. Wohlfühl to whom the authors express their gratitude.

The respective coefficients necessary in Eqs. (21) and (20) are listed in Table 4. All coefficients used in Eqs. (22)–(24) are provided in Table 5. Please note, that  $\xi_S$  refers to the mass fraction of LiBr in relation to the total mass of the mixture and  $T_\theta$  has to be inserted in Celsius.

The equilibrium temperature  $T_{eq}$  of the mixture of LiBr and water is provided in Eq. (20). The respective coefficients used in Eq. (20) are listed in Table 4.

$$-T_{eq}^{-1} = a_0 + a_1 \xi_S + a_2 \ln p + a_3 \xi_S \ln p + a_4 \xi_S^2 + a_5 \ln p^2 + a_6 \xi_S^2 \ln p + a_7 \xi_S \ln p^2 + a_8 \xi_S^2 \ln p^2 + a_9 \xi_S^3 + a_{10} \ln p^3 + a_{11} \xi_S^3 \ln p + a_{12} \xi_S^3 \ln p^2 + a_{13} \xi_S^3 \ln p^3 + a_{14} \xi_S^2 \ln p^3 + a_{15} \xi_S^3 \ln p^3 \quad (20)$$

The fitted function to determine the kinematic viscosity  $\nu$  as well as dynamic viscosity  $\mu = \nu \cdot \rho$  of the mixture of LiBr and water is provided in Eq. (21). The respective coefficients used in Eq. (21) are listed in Table 4.

$$\nu = \mu / \rho = \exp(a_0 + a_1 T_\theta + a_2 \xi_S + a_3 T_\theta \xi_S + a_4 T_\theta^2 + a_5 \xi_S^2 + a_6 T_\theta^2 \xi_S + a_7 T_\theta \xi_S^2 + a_8 T_\theta^2 \xi_S^2 + a_9 \ln(T_\theta) + a_{10} \ln(T_\theta)^2 + a_{11} \ln(T_\theta)^3 + a_{12} \ln(1 + \xi_S) + a_{13} \ln(1 + \xi_S)^2 + a_{14} \ln(1 + \xi_S)^3 + a_{15} \ln(T_\theta) \ln(1 + \xi_S)) \cdot 1 \times 10^{-6} \quad (21)$$

The quality of the fits above is evaluated for dynamic viscosity  $\mu$  and equilibrium pressure  $p_{eq}$ . The former includes the density (see Eq. 22), the latter is calculated using the inverse of Eq. (20) and is chosen because it was the actual measurand quantified by Löwer. Fig. 22 and Fig. 23 illustrate comparisons between calculated values and data reported in [18] at 313.15 K and 373.15 K.

The fitted function that has been used to determine the density of the mixture of LiBr and water is

$$\rho = a_0 + a_1 \xi_S + a_2 T_\theta + a_3 \xi_S T_\theta + a_4 \xi_S^2 + a_5 T_\theta^2 + a_6 \xi_S^2 T_\theta + a_7 \xi_S T_\theta^2 + a_8 \xi_S^2 T_\theta^2 + a_9 \xi_S^3 + a_{10} T_\theta^3 + a_{11} \xi_S^3 T_\theta + a_{12} \xi_S^3 T_\theta^2 + a_{13} \xi_S T_\theta^3 + a_{14} \xi_S^2 T_\theta^3 + a_{15} \xi_S^3 T_\theta^3 + a_{16} \xi_S^4 \quad (22)$$

The function found by polynomial regression to determine the specific heat capacity  $c_p$  of the mixture of LiBr and water is provided in Eq. (23).

$$c_p = a_0 + a_1 \xi_S + a_2 T_\theta + a_3 \xi_S T_\theta + a_4 \xi_S^2 + a_5 T_\theta^2 + a_6 \xi_S^2 T_\theta + a_7 \xi_S T_\theta^2 + a_8 \xi_S^2 T_\theta^2 + a_9 \xi_S^3 + a_{10} T_\theta^3 + a_{11} \xi_S^3 T_\theta + a_{12} \xi_S^3 T_\theta^2 + a_{13} \xi_S T_\theta^3 + a_{14} \xi_S^2 T_\theta^3 + a_{15} \xi_S^3 T_\theta^3 \quad (23)$$

The thermal conductivity  $\lambda$  of the mixture of LiBr and water is determined by the fitted function

$$\lambda = a_0 + a_1 T_\theta + a_2 T_\theta^2 + a_3 T_\theta^3 + a_4 \xi_S + a_5 \xi_S^2 + a_6 \xi_S^3 + a_7 T_\theta \xi_S + a_8 T_\theta^2 \xi_S + a_9 T_\theta \xi_S^2 + a_{10} T_\theta^2 \xi_S^2 \quad (24)$$

The quality of the last three fits is assessed for two exemplary values: specific heat capacity  $c_p$  and thermal conductivity  $\lambda$ . In Figs. 24 and 25 comparisons between calculated and measured data are depicted at 293.15 K and 353.15 K.

For the sake of completeness, the functions provided in [19] are briefly stated. First the diffusivity is determined at 25 °C using data from Kashiwagi [21].

$$D(25 \text{ °C}) = (1.3528 + 0.19881b - 0.036382b^2 + 0.0020299b^3 - 0.000039375b^4) \times 10^{-9} \quad (25)$$

where  $b$  is the molality in mol/kg solvent defined by

$$b = \frac{\xi_S}{M(1 - \xi_S)}$$

and  $M = 86.845 \cdot 10^{-3}$  kg/mol for LiBr. Please note that in Eq. (25), the correct second coefficient linear in  $b$  is one order of magnitude smaller than originally printed in [19].<sup>2</sup> Gierow and Jernqvist [22] also measured diffusivity at 25 °C. As reported in [22], Kashiwagi's data show some deviation from their own data. Diffusivity at 25 °C is typically 10–15% lower in Kashiwagi's measurements. This deviation is, however, small in comparison with the change of a factor of 10 which we choose for the sensitivity analysis in Section 5.1.1.

Once diffusivity at 25 °C is obtained, the temperature dependence is accounted by an equation provided in [23].

$$D = D(25 \text{ °C}) \frac{T_\theta + 273.15}{298.15} \frac{\mu(25 \text{ °C})}{\mu(T_\theta)} \quad (26)$$

## References

- [1] F. Ziegler, Heat driven cooling cycles: the property and transfer issues, in: 3rd IIR Conference on Thermophysical Properties and Transfer Processes of Refrigerants, 2009.
- [2] S. Bo, X. Ma, Z. Lan, J. Chen, H. Chen, Numerical simulation on the falling film absorption process in a counter-flow absorber, Chem. Eng. J. 156 (3) (2010) 607–612.
- [3] V.E. Nakoryakov, N.I. Grigor'eva, Combined heat and mass transfer during absorption in drops and films, J.E.P.T. 32 (1977) 243–247.
- [4] G. Grossman, Simultaneous heat and mass transfer in film absorption under laminar flow, Int. J. Heat Mass Transfer 26 (3) (1983) 357–371.
- [5] J.D. Killion, S. Garimella, A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling-film absorption, Int. J. Refrig. 24 (2001) 755–797.
- [6] D. Gao, N. Morley, V. Dhir, Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method, J. Comput. Phys. 192 (2) (2003) 624–642.
- [7] M.A. Islam, A. Miyarab, T. Setoguchib, Numerical investigation of steam absorption in falling film of LiBr aqueous solution with solitary waves, Int. J. Refrig. 32 (2009) 1597–1603.
- [8] V. Nakoryakov, N. Grigor'eva, M. Bartashevich, Heat and mass transfer in the entrance region of the falling film: absorption, desorption, condensation and evaporation, Int. J. Heat Mass Transfer 54 (21–22) (2011) 4485–4490.
- [9] J.K. Min, I.S. Park, Numerical study for laminar wavy motions of liquid film flow on vertical wall, Int. J. Heat Mass Transfer 54 (15–16) (2011) 3256–3266.
- [10] Y. Kabova, V. Kuznetsov, O. Kabov, Temperature dependent viscosity and surface tension effects on deformations of non-isothermal falling liquid film, Int. J. Heat Mass Transfer 55 (4) (2012) 1271–1278.
- [11] E. Hofmann, H.C. Kuhlmann, On the optimum mass transfer of flat absorbing falling films, Int. J. Heat Mass Transfer 55 (25–26) (2012) 7686–7697.
- [12] N. Kawae, T. Shigechi, K. Kanemaru, T. Yamada, Water vapor evaporation into laminar film flow of a lithium bromide-water solution (influence of variable properties and inlet film thickness on absorption mass transfer rate), Heat Transfer Jpn. Res. 18 (3) (1989) 58–70.
- [13] B.J.C. van der Wekken, R.H. Wassenaar, Simultaneous heat and mass transfer accompanying absorption in laminar flow over a cooled wall, Int. J. Refrig. 11 (2) (1988) 70–77.
- [14] V. Nakoryakov, N. Grigor'eva, Analysis of exact solutions to heat- and mass-transfer problems for absorption with films or streams, Theor. Found. Chem. Eng. 31 (1997) 119–126.
- [15] J.W. Andberg, G.C. Vliet, Nonisothermal absorption of gases into falling liquid films, in: ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference Proceedings, vol. 2, 1983, pp. 423–431.
- [16] G. Grossman, Analysis of interdiffusion in film absorption, Int. J. Heat Mass Transfer 30 (1) (1987) 205–208.
- [17] A. Jernqvist, H. Kockum, Simulation of falling film absorbers and generators, in: Ab-Sorption 96, vol. 1, 1996, pp. 311–318.
- [18] H. Löwer, Thermodynamische und physikalische Eigenschaften der wässrigen Lithiumbromid-Lösung (Ph.D. thesis), Karlsruhe, 1960.
- [19] K.J. Kim, Heat and mass transfer enhancement in absorption cooling (Ph.D. thesis), Arizona State University, 1992.
- [20] J. Pátek, J. Klomfar, A computationally effective formulation of the thermodynamic properties of LiBr–H<sub>2</sub>O solutions from 273 to 500 K over full composition range, Int. J. Refrig. 29 (4) (2006) 566–578.
- [21] T. Kashiwagi, The activity of surfactant in high-performance absorber and absorption enhancement, Reito (Refrigeration, Japanese) 60 (1985) 72–79.
- [22] M. Gierow, A. Jernqvist, Measurement of mass diffusivity with holographic interferometry for H<sub>2</sub>O/NaOH and H<sub>2</sub>O/LiBr working pairs, in: Proceedings of the Int. Heat Pump Absorption Conference, 1993.
- [23] R.C. Reid, J. Prausnitz, T. Sherwood, The Properties of Gases and Liquids, McGraw-Hill, New York, 1977.

<sup>2</sup> personal communication between K. J. Kim and F. Ziegler.



## 4.2 Ergebnisse mit Grenzschichtgleichung zur Beschreibung der Hydrodynamik

**Zum folgenden Abschnitt gehört der Artikel:**

*Mittermaier, M. ; Ziegler, F.: The impact of viscosity on the combined heat, mass and momentum transfer in laminar liquid falling films. Journal of Heat and Mass Transfer (2017)*

Die finale Veröffentlichung ist bei Springer unter:

<https://doi.org/10.1007/s00231-017-2219-9> verfügbar.

### 4.2.1 Aufgabenstellung und Ziel

In dieser Veröffentlichung wird das zweidimensionale Modell mit Beschreibung der Strömung durch die Grenzschichtgleichungen diskutiert. Als Lauflänge für die Analyse des Wärme- und Stoffübergangs wird in dieser Veröffentlichung 10 cm betrachtet. Die errechneten absorbierten Massenstromdichten werden zum Vergleich auch für kürzere Lauflängen (3 cm) angegeben, da dies dem halben Umfang eines Horizontalrohres mit einem Durchmesser von 20 mm entspricht und damit mit der Veröffentlichung aus Abschnitt 4.1 vergleichbar ist.

Ziel dieses Artikels ist, die Wechselwirkungen zwischen Impuls-, Wärme- und Stofftransport im laminaren Fallfilm umfassend zu betrachten und zu analysieren.

### 4.2.2 Untersuchungen und Ergebnisse

Folgende Untersuchungen werden in diesem Abschnitt zusammengefasst:

- Validierung der numerischen Lösung
- Effekt des Wärme- und Stofftransports auf ein voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil
- Effekt des sich entwickelnden Geschwindigkeitsprofils auf den Wärme- und Stofftransport
- Effekt einer erhöhten Viskosität des Absorbens

Zunächst wird die numerische Lösung der Grenzschichtgleichungen ohne Wärme- und Stofftransport und somit bei konstanten Stoffwerten für eine Lauflänge von einem Meter mit der analytischen Nußelt-Lösung aus Abschnitt 2.1.2 auf Seite 8 verglichen. Der Vergleich zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Geschwindigkeitsprofile mit einer maximalen Abweichung der numerischen Lösung von 0,04%. Das heißt, dass die Lösung der Grenzschichtgleichung auf die Nußelt-Lösung für ein voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil konvergiert.

Für die Überprüfung der Konsistenz des Modells wird die Gesamtwasserbilanz über 10 cm Lauflänge gebildet. Diese Wassermassenbilanz (siehe Gleichung 35 auf Seite 8 der anschließenden Veröffentlichung) ist mit einer maximalen Abweichung von 1,5 % geschlossen, bezogen auf den absorbierten Massenstrom.

Die Gitterunabhängigkeit wurde, ausgehend von 600 transversalen Gitterpunkten, durch eine schrittweise Erhöhung um jeweils 100 transversale Gitterpunkte überprüft. Die Veränderung der Ergebnisse ist in Tabelle 4.1 zusammengefasst:

Tabelle 4.1: Überprüfung der Gitterunabhängigkeit

Gitterpunkte	Abweichung von der Nußeltlösung [%]	Änderung der Temperatur [K]	Änderung des Massenanteils [-]
600	0,04	—	—
700	0,033	$< 1 \cdot 10^{-2}$	$< 7 \cdot 10^{-5}$
800	0,028	$< 5 \cdot 10^{-3}$	$< 5 \cdot 10^{-5}$

Die Rechnungen wurden daraufhin mit 600 Gitterpunkten in transversaler Ausdehnung des Films durchgeführt. Nach der Validierung wird beschrieben, wie der Wärme- und Stofftransport ein bereits voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil verändert. Durch die einseitige Diffusion entsteht eine transversale Schwerpunktgeschwindigkeit (Konvektion) in Richtung der Wand, da das Salz an der Oberfläche nicht entweichen kann. Dies ist für konstante Stoffwerte in Abbildung 8 der Veröffentlichung zu erkennen. Da sich die Dichte durch die Absorption ändert, was sich wiederum auf die transversale Geschwindigkeit  $v$  auswirkt, ist die Entwicklung der transversalen Geschwindigkeit für eine veränderliche Dichte ebenfalls berechnet worden. Das Ergebnis (Abbildung 10 in Mittermaier u. Ziegler (2017)) hat dazu geführt, dass alle Stoffparameter (Vis-

kosität  $\mu$ , Wärmeleitfähigkeit  $c_p$ , Dichte  $\rho$ , etc.) als variabel zugelassen wurden. Der Wärme- und Stoffübergang in den Film sorgt für eine wachsende Filmdicke und damit für eine leichte Beschleunigung der Strömung in longitudinale Richtung.

Der umgekehrte Effekt des sich entwickelnden Geschwindigkeitsprofils auf den Wärme- und Stofftransport wird durch Verwendung verschiedener hydrodynamischer Randbedingungen untersucht. Die Bedingungen sind in Abbildung 4.1 illustriert.

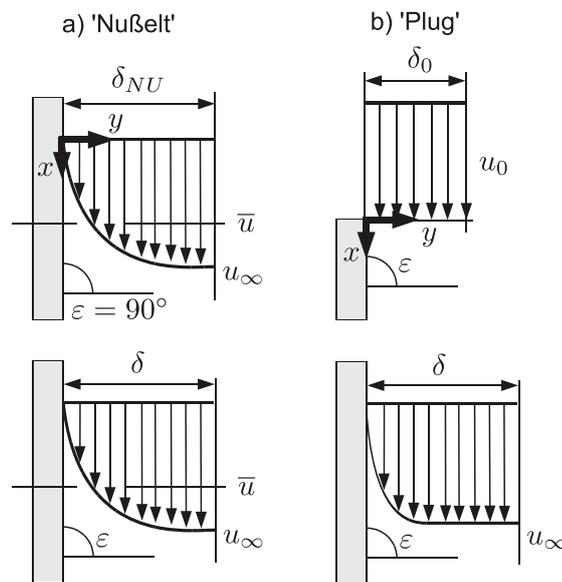


Abbildung 4.1: Verschiedene hydrodynamische Randbedingungen (aus Mittermaier u. Ziegler (2017))

Der linke Fall in Abbildung 4.1 ist mit a) 'Nußelt' bezeichnet. Wie bereits von vielen Autoren angenommen (Grossman (1983), Brauner (1991), Yang u. Wood (1992), Conlisk (1995) und Karami u. Farhanieh (2011)), wurde für diesen Fall von einem voll entwickeltem Geschwindigkeitsprofil ausgegangen.

Der rechte Fall wurde mit b) 'Plug' bezeichnet. Darin wird von einer Kolbenströmung ausgegangen, die auf eine Wand trifft und bei der sich auf Grund der Wandhaftung ein Geschwindigkeitsprofil entwickelt. Durch die Abbremsung an der Wand ergibt sich eine starke transversale Geschwindigkeitskomponente  $v$ . Diese Konvektion in Richtung Oberfläche sorgt für ein früheres Einsetzen der Absorption im Vergleich zu Fall a).

Für kurze Lauflängen (ca. 3 cm) wird bei einer treibenden Temperaturdifferenz zwischen Film und Wand von  $T_{0,eq} - T_W = 6K$  durch den Effekt eines sich entwickelnden Geschwindigkeitsprofils 9,3 % mehr absorbiert als ohne diese Entwicklung. Mit der Grenzschichtgleichung kann eine freie Strömung auch für andere Anfangsbedingungen simuliert werden. Im Anhang A.1 auf Seite 167 ist das sich entwickelnde Geschwindigkeitsprofil ausgehend von einer Spaltströmung dargestellt.

Für die Filmströmung ergibt sich eine vergleichbare Reynoldszahl zu Abschnitt 4.1. Im Fall einer erhöhten Viskosität beträgt die Reynoldszahl  $Re \approx 2$  und liegt damit im streng laminaren Bereich. Der Effekt einer erhöhten Viskosität wird für zwei Fälle untersucht: Einmal für eine Lösung, die sich am Einlass im Phasengleichgewicht befindet und einmal für eine Unterkühlung von 3 K. Die Viskosität wurde gegenüber der von Lithiumbromidlösung um den Faktor 5 erhöht. Alle anderen Stoffparameter blieben jedoch unverändert.

Im Fall einer Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht reduziert sich durch die erhöhte Viskosität und die damit steigende Filmdicke die absorbierte Massenstromdichte. Auf eine kurze Lauflänge (3 cm) bezogen, absorbiert eine Lithiumbromidlösung etwa 2,2 mal so viel wie eine Fluid mit der fünffachen Viskosität.

Ist die Viskosität gegenüber Lithiumbromidlösung erhöht, ist durch die hohe transversale Geschwindigkeit  $v$  am Anfang der konvektive Wärmetransport ebenfalls erhöht. In Kombination mit einer am Einlass 3 K unterkühlten Lösung ist dadurch die absorbierte Massenstromdichte  $\dot{m}_A$  in der unmittelbaren Nähe zum Einlass ebenfalls leicht höher als bei Lithiumbromidlösung (siehe Abbildung 4.2).

Wegen der halblogarithmischen Darstellung von Abbildung 4.2 kann die Fläche unter der Kurve nicht als kumulierte absorbierte Massenstromdichte interpretiert werden. Tatsächlich ist die insgesamt über eine Lauflänge von 3 cm absorbierte Menge im Falle der Lithiumbromidlösung immer noch um 11 % höher.

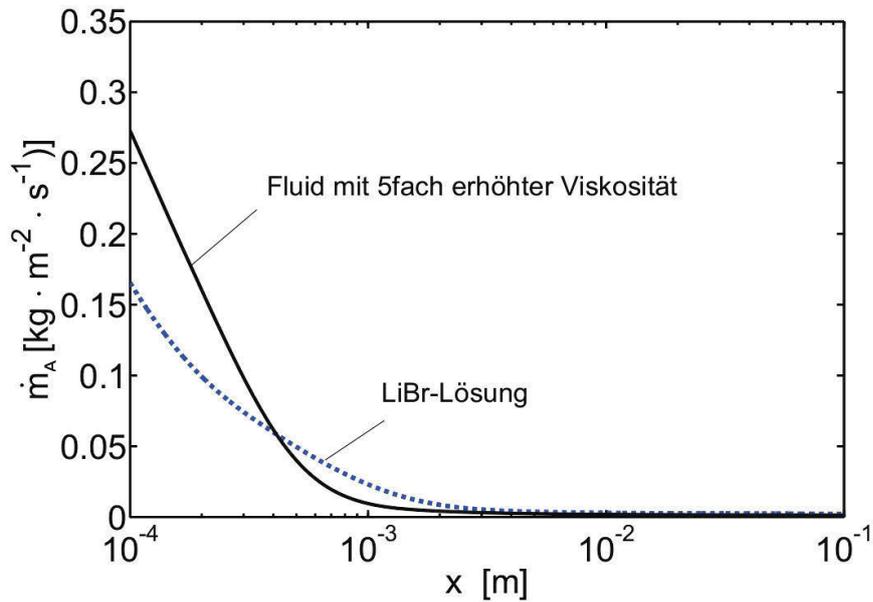


Abbildung 4.2: Absorbierte Massenstromdichte  $\dot{m}_A$  über Lauflänge  $x$  für LiBr-Lösung und Fluid mit erhöhter Viskosität (aus Mittermaier u. Ziegler (2017))

### 4.2.3 Zusammenfassung

In der Arbeit konnte der Einfluss des Stofftransports auf die Strömung und umgekehrt gezeigt werden. Obwohl die Absorption zu einem Anstieg der Filmdicke führt, konnte auf Grund der einseitigen Diffusion eine geringe Schwerpunktgeschwindigkeit in Richtung Wand festgestellt werden.

Der Effekt des Stofftransports auf die Strömung ist sehr gering im Vergleich zu dem umgekehrten Einfluss der Strömung auf den Stofftransport. Wird eine Kolbenströmung am Einlass angenommen, so kommt es zu einem früheren Einsetzen der Absorption als im Falle eines voll entwickeltem Nußelt-Profiles am Einlass. Über eine Lauflänge von 3 cm hat dies eine um 9,3 % höhere absorbierte Masse zur Folge.

Ist die Viskosität gegenüber Lithiumbromidlösung 5fach erhöht, ist die absorbierte Massenstromdichte auf Grund einer erhöhten Filmdicke geringer. Jedoch wird bei einer Unterkühlung des hochviskosen Absorbens und einer anfänglichen Kolbenströmung in der Nähe des Einlasses eine hohe lokal absorbierte Massenstromdichte vorgefunden. Der Grund hierfür liegt in einem erhöhten konvektiven Strom kalter Lösung in Richtung der Phasengrenzflä-

che. Da die Massenstromdichte des hochviskosen Absorbens nur über eine sehr kurze Lauflänge höher ist als die von Lithiumbromidlösung, wird der Effekt wieder aufgehoben. Über eine übliche Lauflänge in Horizontalrohrbündel-Wärmeübertragern von 3 cm ist das Absorptionsvermögen von Lithiumbromid immer noch um 11 % besser als jenes eines hochviskosen Absorbens. Grundsätzlich kann ausgesagt werden, dass auf Grund der Wechselwirkung von Impuls- und Stofftransport für hochviskose Lösungen eine kurze Lauflänge vorteilhaft ist. Deswegen sollte in Verbindung mit diesen Lösungen der Einsatz von Horizontalrohren mit kleinem Durchmesser in Erwägung gezogen werden.

# The impact of viscosity on the combined heat, mass and momentum transfer in laminar liquid falling films

M. Mittermaier · F. Ziegler

Received: date / Accepted: date

**Abstract** In this article we present a model describing a laminar film flow over a vertical isothermal plate while heat and mass transfer is occurring. We focus on a formulation where most common assumptions, such as constant property data and constant film thickness, have been cancelled. The hydrodynamic model results in longitudinal and transversal velocity components and their evolution in the entrance region. Heat and mass transfer occurs simultaneously and is modelled with respect to release of differential heat of solution as well as heat flow due to interdiffusion. The numerical solution is obtained by utilising a Newton-Raphson method to solve the finite difference formulation of the governing equations.

Mass transfer across the film affects the development of both longitudinal and transversal velocity components. The hydrodynamics are modelled using a boundary layer approximation of the Navier-Stokes equations. The significance of simplifications on the hydrodynamic model are illustrated and discussed using a fully developed velocity profile (Nusselt flow) and a plug flow at the inlet for comparison. Even if a Nusselt profile is assumed, it develops further since mass is absorbed or desorbed. It is found that the onset of absorption occurs at shorter flow length when applying a plug flow at the inlet. If the film is initially in equilibrium, this results in a 9.3% increase in absorbed mass over a length of 0.03 m as compared with the Nusselt flow.

M. Mittermaier  
Technische Universitaet Berlin, Institut fuer Energietechnik,  
Sekretariat KT 2, Marchstrasse 18, 10587 Berlin, Germany  
E-mail: mittermaier.martin@gmail.com

F. Ziegler  
Technische Universitaet Berlin, Institut fuer Energietechnik,  
Sekretariat KT 2, Marchstrasse 18, 10587 Berlin, Germany

A fluid with a viscosity five times the one of lithium bromide solution but sharing comparable properties apart from that, leads to lower overall heat and mass transfer rates. If the respective fluids are saturated at the inlet, the accumulated mass flux absorbed by lithium bromide solution is 2.2 times higher than the one absorbed by a high viscous fluid. However, when a plug flow is applied and the fluid is sub-cooled, ab initio the absorbed mass flux is slightly higher for a high viscous fluid. Assuming a sub-cooling of 3 K at the inlet, lithium bromide solution now only performs around 11% better as compared with a high viscous fluid over the considered length of 0.03 m.

The code may be downloaded from:  
<https://github.com/mittermaier/hmt>

**Keywords** Falling film · Absorption · Uni-directional diffusion · Boundary layer approximation · Heat transfer · Mass transfer · Entrance region

## Nomenclature

$c_p$	Specific heat capacity	$J/(kg \cdot K)$
$D$	Mass diffusivity	$m^2/s$
$g$	Gravitational acceleration	$m/s^2$
$h$	Enthalpy	$J/kg$
$\bar{h}$	Partial massive enthalpy	$J/kg$
$Le$	Lewis-Number, $= \lambda/(D \cdot c_p \cdot \rho)$	-
$\dot{m}$	Mass flux	$kg/(m^2 \cdot s)$
$p$	Pressure	$Pa$
$\dot{q}$	Heat flux	$W/m^2$
$T$	Temperature	$K$
$u$	Longitudinal velocity	$m/s$
$v$	Transversal velocity	$m/s$
$x$	Longitudinal coordinate, streamwise	$m$
$y$	Transversal coordinate	$m$
	<i>Greek letters</i>	

$\dot{\Gamma}$	Mass flow per unit length	$kg/(m \cdot s)$
$\overline{\Delta y}$	Abbreviation, please see eq. (24)	
$\overline{\Delta h}$	Abbreviation, please see eq. (27)	
$\Delta h_{sor}$	Heat of sorption	$J/kg$
$\delta$	Film thickness	$m$
$\lambda$	Thermal conductivity	$W/(m \cdot K)$
$\mu$	Dynamic viscosity	$Pa \cdot s$
$\xi$	Mass fraction	$kg/kg$
$\rho$	Density	$kg/m^3$
<i>Subscripts</i>		
$_0$	Inlet condition	
$_{avg}$	Average	
$_A$	Absorbate e.g. water in liquid state	
$_{eq}$	Equilibrium	
$_{if}$	Interface	
$_i$	node index in longitudinal direction (x)	
$_j$	node index in transversal direction (y)	
$_S$	Solution of absorbent e.g. $LiBr - H_2O$	
$_v$	Vapour e.g. steam	
$_w$	Wall	

## 1 Introduction

The application of falling films is prevalent in absorption columns and chillers. Often a liquid solution is spread over horizontal tube banks, droplets form at the bottom of the tubes and fall on subsequent rows. It is well known that wavy films have features differing from laminar films. However, it is the scope of this paper to understand some characteristics of the most simple film case, which is the laminar film. More complicated structures maybe regarded later.

Due to low film Reynolds numbers most authors simplify the problem and assume a laminar flow regime over an inclined plate even if the real behaviour may cause local turbulences. Furthermore, this simplification is sometimes accompanied by more rigid assumptions. Often, a fully developed laminar flow at the inlet is assumed, properties are held constant, two-directional diffusion or a constant film thickness is assumed. However, when these common assumptions are relaxed even in a laminar film the hydrodynamics are linked to heat and mass transfer, since interactions occur due to a change in film thickness, uni-directional diffusion, as well as a change in properties.

In this article we investigate the influence of heat and mass transfer on the hydrodynamics of a laminar film and vice versa. First, the validation and the influence of mass transfer on hydrodynamics are illustrated for constant properties. Second, the differences for various hydrodynamic inlet conditions are analysed and the effect of an increased viscosity is discussed using variable properties. Moreover, in the last section transfer coefficients are computed for saturated as well as sub-

cooled inlet conditions. In any case uni-directional mass transfer is considered.

## 2 State of the art

One of the first models about combined heat and mass transfer in an absorbing falling film has been published by Nakoryakov and Grigor'eva [27] in 1977. The study was based on the assumption of constant velocity throughout the absorbing film flow and has been improved recently by Meyer [21]. The treatment of hydrodynamics has become more realistic in 1983, when a fully developed laminar flow over an inclined plate has been examined by Grossman [7]. An extensive literature review up to 2001 has been provided by Killion and Garimella [15].

Meanwhile, modelling of certain details such as solitary waves and mass transfer in the entrance region of a film received attention. Solitary waves have been investigated by Islam et al. [10] using a finite difference method. They could show that solitary waves produce recirculation zones in the film and concluded that these have significant effect on heat and mass transfer and thus enhance absorption rates. Moreover, the entrance region has been investigated analytically by Nakoryakov et al. [26]. They have obtained self-similar solutions for temperature and concentration in the film assuming a uniform velocity profile. An analytical model has been also presented by Kim and Infante Ferreira [17]. They show how the governing equations of a falling film absorber can be reduced to two ordinary differential equations and determine heat and mass transfer coefficients.

Studies using latest numerical techniques examine mainly pure hydrodynamics. Studies conducted by Gao et al. [6] as well as Min and Park [23] are both utilising a volume of fluid (VOF) method. Gao et al. have computed surface wave dynamics on thin vertical film flows under a forcing perturbation at the inlet. They report that the variation of velocity and pressure are strong at the wave trough and capillary wave region due to the large curvature there. However, as they state further the pressure variation perpendicular to the wall is negligible and only small variations are observed [6]. Min and Park have also investigated the motion of a thin wavy film. In their work they have demonstrated the importance of precise free-surface capturing in conjunction with surface-tension effects in order to predict the wavy film motions. Details related to surface tension effects have also been investigated by Kabova et al. [12]. In their model the dynamic viscosity and the surface tension are assumed to depend linearly on

temperature. The process of droplet formation, detachment and impact has been investigated by Killion and Garimella [16]. As they state, when droplet formation and impact is investigated the interaction between volume and surface forces dominate the flow regime. For pure substances, three dimensional modelling of evaporating or condensing turbulent falling films is studied in [24] and [14]. While Mirzabeygi and Zhang [24] have simulated the fluid flow and heat transfer in steam condensers with complex irregular shapes and presence of non-condensable gases, Kharangate et al. [14] predict eddy diffusivities and temperature gradients at the interface of a film over vertical circular tubes. Their temperature profile across the liquid film exhibits a steep gradient near the interface, which is attributed to turbulence dampening coupled with energy loss at the film's interface.

Recent analytical models have been developed by Meyer [22] and Wu [30]. Both utilise an Laplace model to resolve temperature and mass fraction profiles across the film. While Meyer focuses on the thermal boundary condition at the wall and allows for arbitrary conditions, Wu uses cylindrical coordinates to account for the film flow around a horizontal tube.

A recent study by Hosseinnia et al. investigates Soret and Dufour effects. They also include the interdiffusion term in the energy equation and observe a significant impact on mass transfer. However, the Soret and Dufour effects result in a rather small impact in heat and mass fluxes at the interface [9]. Aminyavari et al. describe heat and mass transfer using a lumped element model and compare the results with experimental data gathered from an heat transformer. Their investigation showed that the majority of the gas is absorbed by the film at the top segments of the pipes since the driving forces along the interface are higher in these segments [1].

Although mass transfer is enhanced by turbulences, a laminar film is a valuable limiting case for analysing interdependences during the process. Simulations of laminar flow fields justify rather simple formulations to describe the motion of the fluid. Therefore, most authors focus on diffusion and heat transfer assuming a fully developed Nusselt profiles or negligible transversal velocity components [7], [3], [11]. The latter is not possible if a developing velocity profile shall be part of the model. A developing longitudinal velocity in conjunction with a negligible transversal velocity component would violate the continuity equation. Therefore, we propose the application of the boundary-layer approximation to describe the flow field for a developing laminar film. Already in 1971, Cerro and Whitaker [4] investigated the entrance region of a flow with a free surface with

regard to hydrodynamics. They explored three ways of using a boundary layer approximation in order to assess the different assumptions they made. In their last case, they allowed the film thickness to vary and obtained excellent agreement of their numerical solution with experimental values using the kinematic condition at the free surface.

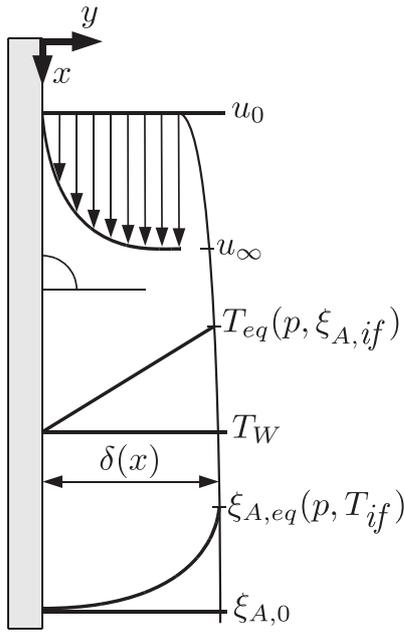
In the present article the scope is the investigation of coupling effects between hydrodynamics and heat and mass transfer. Since interactions occur due to a change in film thickness, uni-directional diffusion, as well as a change in properties we use a boundary layer approximation to describe the film flow instead of Nusselt's solution to the problem. This 2D-solution, as always, is only one possibility for a 3D-description; a 3D-solution may have other forms of, e.g., waves. However, description of waves is beyond the scope of this paper.

### 3 Model description

By allowing for variable properties and developing velocities while simultaneous heat and mass transfer occurs, three coupling effects arise. The first link of variable thermophysical properties and its consequences on component and energy balance has been discussed in a former study [25]. Of course, variable properties link the temperatures and mass fractions to the velocity field as well. Additionally, transversal velocities occur either in the hydrodynamic entrance region or due to uni-directional diffusion, the latter effect is much smaller than in the hydrodynamic entrance region. However, at the interface transversal convection is coupled with mass diffusion. Finally, the mass transfer at the interface is linked to the heat transfer.

The development of transversal velocity components are shown for distinctive cases in figure 8 and 13 in section 5. The general distribution of longitudinal velocity, temperature, and mass fraction is illustrated in figure 1.

Since the solvent is assumed to be non-volatile, diffusion occurs in unidirectional manner. Consequently, a transversal velocity component (Stefan-flow) occurs even when the hydrodynamic flow is already fully developed. This is in contrast to the usual laminar flow conditions (Nusselt profile) which do not allow for transversal velocities. Furthermore, we allow the film thickness to vary with change in velocities and mass being absorbed. Surface tension effects are not considered in this study. However, they will be small due to the small curvature of the film. They cannot be disregarded, of course, in wavy films. Overall, the following assumptions have been made:



**Fig. 1** Typical distribution of the calculated values in a laminar absorbing film: Longitudinal velocity  $u$ , temperature  $T$ , mass fraction  $\xi$ , and film thickness  $\delta(x)$

- (a) incompressible liquid
- (b) negligible lateral velocity ( $z$ -coordinate)
- (c) no slip at the smooth wall
- (d) impermeable and fully wetted, isothermal wall
- (e) no shear stresses at the liquid vapour interface
- (f) constant pressure throughout the entire film
- (g) negligible change in temperature caused by dissipation throughout the film
- (h) negligible diffusion and heat conduction in flow direction as compared to convection
- (i) negligible vapour pressure of the solvent
- (j) steady state problem

### 3.1 Governing equations

Transfer of momentum can be described in detail using Newton's laws of motion together with functions for shear and normal stresses (Navier-Stokes equations). For simplicity we neglect normal stresses (assumption f), reduce the model to two dimensions (assumption b), and assume a 'no shear stress' condition at the free surface (e). For steady state conditions the motion of a fluid flow over an vertical plate can be described by the boundary layer form [29] of the continuity and momentum balance

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \quad (2)$$

Although the flow can be described by equations (1) and (2), it is not possible yet to solve for the actual velocities  $u$  and  $v$  because the film thickness  $\delta$  is still unknown. However, we may apply an additional balance to obtain this missing information and use it in an iterative process. How the velocity field is linked to the absorbing surface is described with equation (30) in section 3.5.

Since two components are considered, another balance is necessary to resolve the distribution of mass fraction in the film. With assumption (h) one arrives at the following balance for component  $A$

$$\rho \left( u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} + v \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \quad (3)$$

Equation (3) states that the convective component transport on the left hand side of the equation equals the diffusive mass transport on the right hand side.

Under steady state conditions, the convective heat transport has to equal the conductive and diffusive terms across the film. Based on assumptions from (f) to (h) the energy balance can be expressed by

$$\begin{aligned} & \rho \left[ u \left( c_p \frac{\partial T}{\partial x} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + v \left( c_p \frac{\partial T}{\partial y} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \right] \\ & = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

For both coordinates  $x$  and  $y$ , convective heat transfer as well as heat set free due to mixing is considered. The latter is expressed by the differential heat of solution composed of the gradient in mass fraction and the difference in partial massive enthalpies  $(\bar{h}_A - \bar{h}_S)$ .

The right hand side was investigated by Andberg and Vliet [2], Grossman [8], and in modified form by Jernqvist and Kockum [11]. Herein, heat conduction and energy transport due to diffusion is accounted for.

Among others, Jernqvist and Kockum [11] have suggested to work with partial massive enthalpies  $\bar{h}_A$  and  $\bar{h}_S$  (see eq. 19 and 20) to determine the enthalpy flow due to interdiffusion as well as the heat of sorption  $\Delta h_{sor}$  in equation (18).

Next, the common boundary conditions for equation (1) to (4) are described. The coupling conditions are introduced later. If a parabolic Nusselt profile at the inlet is assumed we can use equation (5) as inlet condition for velocity  $u$ . Alternatively, if a uniform velocity at the inlet is assumed, we can write equation (6).

$$u(x=0, y) = \frac{\rho g}{\mu} \delta_0^2 \left( \frac{y}{\delta_0} - \frac{y^2}{2\delta_0^2} \right) \quad (5)$$

$$u(x=0, y) = u_0 \quad (6)$$

The 'no slip' conditions at the wall are stated in equations (7). The assumption of 'no shear stress' at the interface leads to equation (8).

$$u(x, y = 0) = 0; v(x, y = 0) = 0 \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = 0 \quad (8)$$

The impermeable wall constrains diffusion at  $y = 0$ . Thus, boundary condition (9) can be stated.

$$\dot{m}_A(x, y = 0) = \rho v_w \cdot \xi_A + \rho D \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (9)$$

According to boundary condition (7) we know that  $v = 0$  at  $y = 0$ . Thus, equation (9) becomes

$$\rho D \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (10)$$

As stated above, we assume a constant wall temperature as well as a given and uniform temperature in the liquid film at the inlet. We can therefore write equations (11). The given and uniform concentration at the inlet, or mass fraction respectively provides boundary condition (12).

$$T(x, y = 0) = T_w; T(x = 0, y) = T_0 \quad (11)$$

$$\xi_A(x = 0, y) = \xi_{A,0} \quad (12)$$

Finally, the coupling conditions are defined. The first link follows from the assumption of vapour pressure equilibrium at the interface.

$$T(x, y = \delta(x)) = T_{eq}(p, \xi_A(x, y = \delta(x))) \quad (13)$$

The second coupling condition is obtained by a component balance for the absorbent  $S$ . Since the absorbent  $S$  is assumed to be non-volatile, the interface is impermeable for this component. Thus, for the convective and diffusive transport of component  $S$  at the interface it holds

$$\dot{m}_S(x, y = \delta(x)) = \rho v_{if} \cdot \xi_{S,if} + \rho D \left. \frac{\partial \xi_S}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = 0 \quad (14)$$

Applying the component balance  $\xi_S + \xi_A = 1$  on equation (14) and rearranging yields

$$\left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = \frac{1 - \xi_{A,if}}{D} \cdot v_{if} \quad (15)$$

The mass flow absorbed per area at the interface  $\dot{m}_{A,if}$  can be determined from (15). After expanding equation (15) with the density at the interface  $\rho$  it can be inserted in the equation describing the convective and diffusive transport of component  $A$

$$\dot{m}_{A,if} = \rho v_{if} \cdot \xi_{A,if} + \rho D \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} \quad (16)$$

Rearranging gives

$$\dot{m}_{A,if} = \rho D \frac{1}{1 - \xi_{A,if}} \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} \quad (17)$$

The third coupling is an energy balance at the interface:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y = \delta(x)) \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} &= \dot{m}_{A,if} \cdot \Delta h_{sor} \\ &= \dot{m}_{A,if} \cdot (h_V - \bar{h}_A) \end{aligned} \quad (18)$$

The thermal effect associated with the absorption or desorption process is expressed by  $\Delta h_{sor}$ . The temperature increase during absorption is pronounced if the heat of sorption  $\Delta h_{sor}$  is large or the Lewis-number is small.

### 3.2 Property data

All properties used are dependent on mass fraction and temperature. Aqueous LiBr solution has been considered as absorbent. The vapour phase is composed of water (steam) only. Thermodynamic and transport properties of the fluids are determined at the local conditions using data from Löwer [19]. Based on his measured data, property functions have been derived by polynomial regression for specific heat capacity, viscosity, thermal conductivity, density, saturation temperature and mass concentration. The equations are provided in [25]. Please note that other than stated in [25], the temperature  $T$  has to be inserted in Kelvin. For the diffusion coefficient the equation developed by Kim [18] has been used.

The partial massive enthalpy for the absorbate (e.g. water) as used in equation (4) and (13) is defined by

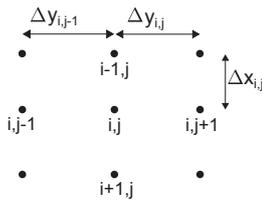
$$\bar{h}_A = h + (1 - \xi_A) \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_{p,T} \quad (19)$$

The partial massive enthalpy for the solvent is consequently

$$\bar{h}_S = h - \xi_A \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_{p,T} \quad (20)$$

### 3.3 Grid generation

The governing equations have been discretised in both dimensions in order to obtain a solvable algebraic system of equations. The notation of indices is depicted in figure 2. Subscript  $i$  represents the node index in longitudinal direction, the transversal nodes are denoted by  $j$ . The boundary condition at the wall is denoted by the index  $j=1$ , the conditions at the interface by



**Fig. 2** Schematic of the indices used for the nodes

$j=n$ . Thus, the set of equations has to cover the domain  $j=2\dots n-1$ . Parameter  $n$  is the pre-set quantity of transversal nodes.

In both directions the step size is varying. The thickness of the film is discretised by 600 non-equidistant steps across the film (i.e.  $n=600$ ). Towards the wall and the interface, the distance between grid points,  $\Delta y_{i,j}$ , has been reduced to provide high numerical accuracy. However, by allowing the film thickness to change, the step size  $\Delta y_{i,j}$  varies also with longitudinal position in the film and thus is denoted as well by subscript  $i$ . The function used to determine the transversal grid spacing  $\Delta y_{i,j}$  is a scaled Gaussian function (21) with its peak in the middle of the film, at  $y=\delta/2$ .

$$\Delta \tilde{y}_j = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{j-1}{n-2} - 1/2\right)^2\right)$$

$$\Delta y_{i,j} = \Delta \tilde{y}_j \frac{\delta_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta \tilde{y}_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad \sigma = 1/6$$
(21)

In equation (21) a value for  $\sigma$  has to be selected to define the two inflexion points of the curve. The smaller the value  $\sigma$  the bigger the difference between maximum and minimum grid spacing. The chosen value leads to a grid spacing between  $10^{-8} m$  at the boundaries and  $10^{-7} m$  in the middle of the flow when 600 grid points are used.

The hydrodynamic boundary layer develops rather quickly within the inlet region of the falling film. Therefore, the mesh is refined in x-direction by estimating the location of the boundary layer and adapting the step size in flow direction. In other words, an increase of the boundary layer by one single transversal node determines the distance between subsequent longitudinal nodes. This grid has been used for practical reasons. Other grid settings lead to the same results. The longitudinal grid points are calculated this way until the boundary layer meets the interface. Subsequently, the grid spacing is increased step-by-step to reduce computation time. Equation (22) has been used to trace the location of the boundary layer [29].

$$\delta_B(x) \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \quad (22)$$

### 3.4 Discretisation of the equations

For discretisation of the partial differential equations the finite difference method has been used. The continuity equation (1) for  $j = 2\dots n-1$  can be written as

$$\frac{\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}}{\Delta x_i} u_{i,j} + \rho_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_i} + \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j}}{\Delta y_i} v_{i,j} + \rho_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y_i} = 0$$
(23)

The boundary conditions (7) translate into  $u_{i,j=1} = 0$  and  $v_{i,j=1} = 0$ . Inserting these two boundary conditions into equation (23) for  $j=1$  leads to  $v_{i,2} = 0$ . Therefore, the continuity equation simplifies somewhat at node  $j=2$  (close to the wall).

The mass and the momentum transfer as described by equation (3) and (2) include second order derivatives with respect to  $y$ . For these second order derivatives a centred second difference approximation has been used. Since the step size is varying as explained in section 3.3, formally the centred second difference approximation is now only first order accurate. The simple forward and backward differences are also of first order accuracy. However, the grid is refined in regions where high gradients are expected to reduce the errors associated with the discretisation to a negligible size. To approximate the second order derivatives, two neighbouring step sizes  $\Delta y_{i,j}$  are necessary. Therefore, the following abbreviation has been introduced:

$$\overline{\Delta y}_{i,j} = \frac{\Delta y_{i,j} + \Delta y_{i,j-1}}{2} \quad (24)$$

Regarding derivatives with respect to  $y$  the definition of the difference quotient has been chosen depending mainly on the boundary conditions at the wall and interface respectively. Given that the gradient  $\frac{\partial u}{\partial y}$  is at maximum close to the wall and assumed to be naught at the interface, a forward difference approximation has been used in order to obtain a numerically robust solution.

Using equation (24), the boundary layer approximation (2) reads

$$\rho_{i,j} \left( u_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_i} + v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \right) = \frac{\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \cdot \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \frac{\mu_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \left[ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} \right] + \rho_{i,j} g$$
(25)

As known from above, adjacent to the wall at  $j=2$  the terms  $u_{i,j-1}$  and  $v_{i,2}$  are naught. Furthermore, close to the interface of the film  $u_{i,n}$  represents the velocity of

the free surface. There, the velocity is equal to  $u_{i,n-1}$  since we have assumed boundary condition (8). Both leads to minor simplifications at the respective nodes.

The impermeable wall constrains the diffusion as expressed by equation (9). Hence, the concentration gradients approximated by  $\frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_i}$  in equation (26) vanish at  $j=2$ . Again, equation (24), has been used to discretise the balance (3). It is expressed by

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} \left( u_{i,j} \frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i-1,j}}}{\Delta x_i} + v_{i,j} \frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \right) \\ = \frac{\rho_{i,j+1} D_{i,j+1} - \rho_{i,j} D_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \cdot \frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \\ + \frac{\rho_{i,j} D_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \left[ \frac{\xi_{A_{i,j+1}} - \xi_{A_{i,j}}}{\Delta y_{i,j}} - \frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Finally, the energy balance (4) has been discretised. For the sake of clarity the term  $(\bar{h}_A - \bar{h}_S)$  is abbreviated by  $\Delta \bar{h}_{i,j}$ .

$$\Delta \bar{h}_{i,j} = (\bar{h}_{A_{i,j}} - \bar{h}_{S_{i,j}}) \quad (27)$$

Equation (4) then reads:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} \left[ u_{i,j} \left( c_{p,i,j} \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_i} + \Delta \bar{h}_{i,j} \frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i-1,j}}}{\Delta x_i} \right) \right. \\ \left. + v_{i,j} \left( c_{p,i,j} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + \Delta \bar{h}_{i,j} \frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \right) \right] \\ = \frac{\lambda_{i,j+1} - \lambda_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \cdot \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} \\ + \frac{\lambda_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \left[ \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} - \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} \right] \\ + \frac{\rho_{i,j+1} D_{i,j+1} \Delta \bar{h}_{i,j+1} - \rho_{i,j} D_{i,j} \Delta \bar{h}_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \cdot \frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \\ + \frac{\rho_{i,j} D_{i,j} \Delta \bar{h}_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \left[ \frac{\xi_{A_{i,j+1}} - \xi_{A_{i,j}}}{\Delta y_{i,j}} - \frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_{i,j-1}} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Again, the formulations at the boundaries have to be discussed briefly. Very close to the wall (at node  $j=2$ ) the transversal velocity  $v_{i,2}$  is naught what causes the associated term (second line on the left hand side of equation (28)) to disappear. Further, the gradient  $\frac{\xi_{A_{i,j}} - \xi_{A_{i,j-1}}}{\Delta y_i}$  becomes naught as seen above. Since we have assumed an isothermal wall,  $T_{i,1}$  is set to the constant value  $T_w$ .

At the free interface of the film the coupling conditions have been used. These conditions (13), (18) and (17) may be combined and rewritten in discrete form

$$\begin{aligned} \lambda_{i,n} \frac{T_{eq}(\xi_{A_{i,n}}) - T_{i,n-1}}{\Delta y_{i,n}} \\ = \rho_{i,n} D_{i,n} \frac{1}{1 - \xi_{A_{i,n}}} \frac{\xi_{A_{i,n}} - \xi_{A_{i,n-1}}}{\Delta y_{i,n}} \Delta h_{sor,i} \end{aligned} \quad (29)$$

### 3.5 Solving procedure

The equations introduced in section 3.4 have been rearranged to yield a system of linear equations of the form  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . The vector  $\mathbf{x}$  represents all values we are looking for, namely, the velocity field as well as the temperature- and mass concentration field. The tridiagonal matrix  $A$  contains all coefficients belonging to the sought value. Since the calculations are conducted sequentially along the flow distance, all terms with index  $i-1$  are treated as inhomogeneity  $\mathbf{b}$ . The solution is found using a Newton-Raphson-iteration.

Figure 3 depicts the algorithm to solve the discrete equations. After the input values (see table 1 in section 5) have been set, the inlet conditions are calculated. The loop over the flow distance starts with the calculation of the first horizontal layer.

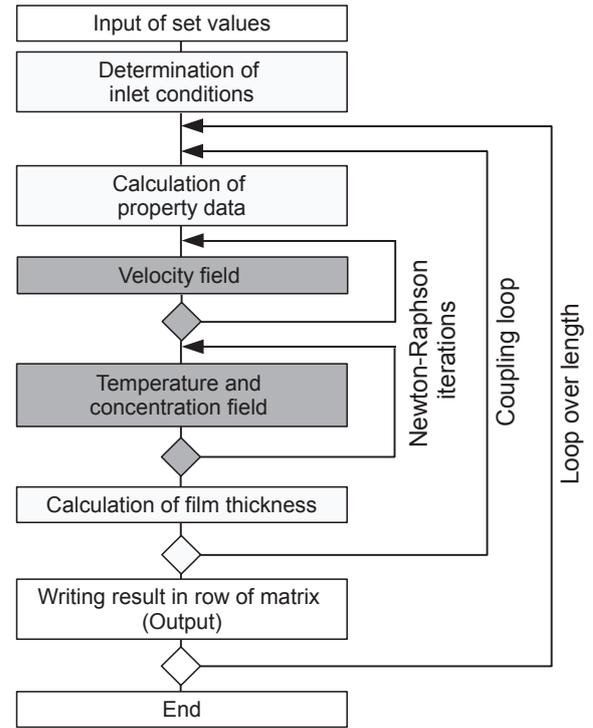


Fig. 3 Schematic of the program

Initially, the velocities are calculated. As guess value and for local fluid properties the previous result is used. The loop is being repeated until the required accuracy is obtained for the velocities.

Secondly, the temperatures and mass concentrations are computed using the same method. When minimal residuals for changes in temperature and mass fraction are obtained, the fluid properties are corrected and ve-

locity, temperature and mass fraction are calculated again (coupling loop).

As a last step within the coupling loop the developing film thickness is calculated. In general, three methods are widely in use for tracking the free-surface location: VOF, MAC, and the moving-grid technique [20][28]. Since the expected change in film thickness is small, the latter has been used by applying an integral form of the continuity equation in conjunction with the mass flux absorbed at the interface.

$$\int_0^{\delta(x)} \rho u \, dy + \dot{m}_{A,if} \, dx = \int_0^{\delta(x+dx)} \rho u \, dy \quad (30)$$

$\dot{m}_{A,if}$  on the left hand side is described by equation (17). Since a finite difference formulation has been used, we approximate the longitudinal mass flux and substitute the Riemann sum of  $\rho u$  for the integral across the film thickness. Hence, an abbreviation for the averaged product  $\overline{\rho u}$  is introduced

$$\overline{\rho u}_{i,j} = \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j+1}}{2} \cdot \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} \quad (31)$$

With equation (31) the integral mass balance (30) can be approximated and expressed by

$$\rho_{i,n} D_{i,n} \frac{1}{1 - \xi_{A_{i,n}}} \frac{\xi_{A_{i,n}} - \xi_{A_{i,n-1}}}{\Delta y_{i,n}} \cdot \Delta x_i = \sum_{j=1}^{n-1} \overline{\rho u}_{i,j} \cdot \Delta y_{i,j} + \sum_{j=1}^{n-1} \overline{\rho u}_{i+1,j} \cdot \Delta y_{i+1,j} \quad (32)$$

Since the number of grid points remains constant, the distribution across the film thickness stays the same as well. Therefore, we can write

$$\Delta y_{i+1,j} = \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} \Delta y_{i,j} \quad (33)$$

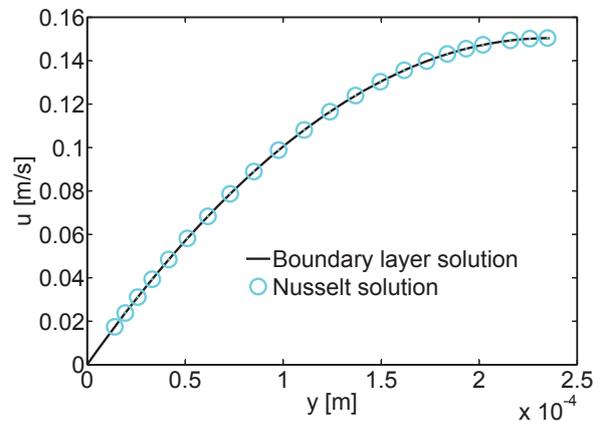
Substituting  $\Delta y_{i+1,j}$  in equation (32) with (33) and rearranging it, we find for the new film thickness based on the thickness at the previous node  $\delta_i$

$$\delta_{i+1} = \left( \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \overline{\rho u}_{i,j} \cdot \Delta y_{i,j}}{\sum_{j=1}^{n-1} \overline{\rho u}_{i+1,j} \cdot \Delta y_{i,j}} + \frac{\rho_{i,n} D_{i,n} \frac{1}{1 - \xi_{A_{i,n}}} \frac{\xi_{A_{i,n}} - \xi_{A_{i,n-1}}}{\Delta y_{i,n}} \cdot \Delta x_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \overline{\rho u}_{i+1,j} \cdot \Delta y_{i,j}} \right) \cdot \delta_i \quad (34)$$

The coupling loop is repeated until a change in film thickness, temperature, and mass fraction is smaller than the desired accuracy (see table 1). This means that the computation of one horizontal layer is terminated and the following horizontal layer is calculated.

#### 4 Model verification

The shown approach of modelling heat and mass transfer has been validated in [25] for simplified hydrodynamics. Additionally, in this article the momentum transfer is validated by comparing the numerical results of the boundary layer formulation with the analytical Nusselt solution for laminar falling films. Therefore, the wall is assumed to be vertical, all properties are held constant and there is no heat and mass transfer. The number of grid points is set to 600. For the numerical hydrodynamic model, a plug flow at the inlet of the film is assumed and mass as well as momentum balance are solved. For various velocities applied at the inlet, the solution converges to the same asymptotic state. The resulting velocity profile at a flow length  $x$  of 1 metre is compared with the Nusselt solution (cf. equation 5) for a inlet velocity, mass flow and accuracies as shown in table 1 in section 5. The comparison is shown in figure 4. The two methods appear to have very good



**Fig. 4** Comparison between analytical Nusselt solution and numerical results

agreement with each other. The maximal relative deviation between the two velocity profiles is below 0.04%. If the number of grid points is increased by 100 grid points to 700, the deviation of the numerical solution to the analytical result decreases to 0.033%. A further increase of grid points to 800 result in a relative deviation of longitudinal velocity of 0.028%. Similar deviations have been observed when using higher viscosities.

The agreement with the asymptotic state is, of course, not a proof that also the transients are true. However, as the mechanisms are relatively simple and no strange patterns have been observed it may be taken as a relatively strong confirmation.

The heat and mass transfer model is verified by an overall component balance of the absorbate. The overall balance of absorbate  $A$  may be written as

$$\int_0^{\delta(0)} \xi_A \rho u \, dy + \int_0^L \dot{m}_{A,if} \, dx = \int_0^{\delta(L)} \xi_A \rho u \, dy \quad (35)$$

When applying the balance (35) under the conditions shown in table 1, a deviation of 1.5% related to the overall mass absorbed is observed.

Mass fractions and temperatures show also high numerical accuracy when the number of grid points is set to 600. If the number of grid points is increased by 100 grid points to 700, changes in mass fractions and temperatures at the interface are below  $7 \cdot 10^{-5}$  and below  $1 \cdot 10^{-2} \text{ K}$  respectively. A further increase to 800 grid points leads to maximal differences in mass fractions of  $5 \cdot 10^{-5}$  and  $5 \cdot 10^{-3} \text{ K}$  in temperatures as compared to the simulation with 700 grid points.

The subsequent results have been computed using 600 grid points in order to represent the transversal extent of the falling film.

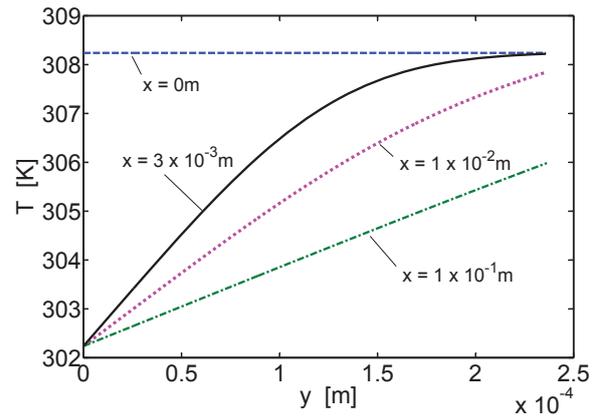
## 5 Results and discussion

In this study, fully non-dimensional treatment is not looked at. The reason is that we want to stick as tightly as possible to size of the effects which occur. It is well known that the hydrodynamic entrance impacts on heat and mass transfer. On the other hand, heat and mass transfer influences hydrodynamics, too. We start with analysing the influence of mass transfer on hydrodynamics. Afterwards, the influence of various hydrodynamic inlet conditions on heat and mass transfer is analysed as well. The common input values for the following subsections are shown in table 1. Throughout the following considerations the liquid is assumed to be in equilibrium state at the inlet.

### 5.1 Influence of mass transfer on hydrodynamics

In order to show the influence of mass transfer on hydrodynamics, at the inlet of the film a fully developed flow (Nusselt profile) is assumed. For better understanding, the properties are held constant and differential heat of solution is disregarded in this subsection.

Figure 5 depicts the temperature profiles across the film at various flow lengths  $x$ . At  $x = 0$ , a homogeneous temperature is given as inlet condition. Since the wall is cooled, a gradient in temperature develops towards the interface. At a flow length of  $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  the distortion in temperature has reached the free surface of the film. Onwards from there the temperature profile becomes more and more linear and also the temperature at the interface decreases.



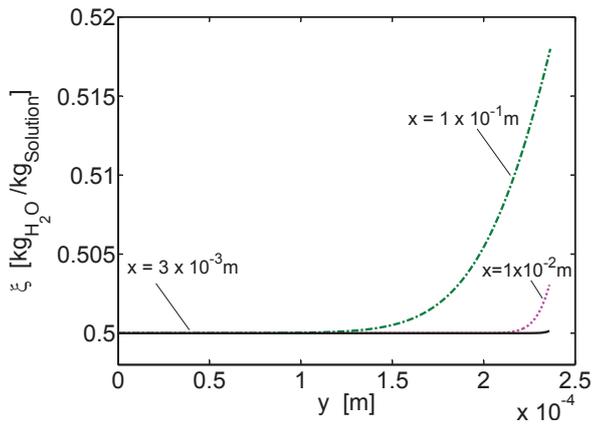
**Fig. 5** Temperature profiles across the film at various flow lengths

At the inlet, the film is assumed to be in equilibrium state. Therefore, only when the temperature at the free surface of the film starts decreasing absorption occurs. Consequently, the water mass fraction increases at the surface and a gradient develops towards the wall beyond  $x = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  as can be seen in figure 6

In figure 7 both the temperature at the liquid vapour interface and the film thickness are plotted over the flow length. Up to a flow length of  $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  the in-

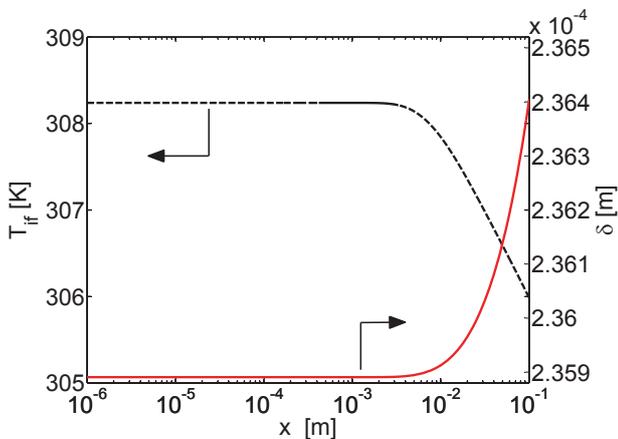
**Table 1** Input values and set parameters

Number of transversal nodes, $n$	600
Length, $L$	0.1m
Inlet velocity (longitudinal), $u$	0.31m/s
Inlet mass flow, $\dot{I}$	0.036kg/(ms)
Pressure, $p$	1,500Pa
Inlet mass fraction, $\xi_0$	0.50kg/kg
Inlet temperature (saturated), $T_0$	308.24K
Inlet temperature (sub-cooled), $T_0$	305.24K
Wall temperature, $T_w$	302.24K
Gravity constant, $g$	9.80665m/s <sup>2</sup>
Accuracy - longitudinal velocity	$10^{-12} \text{ m/s}$
Accuracy - transversal velocity	$10^{-10} \text{ m/s}$
Accuracy - temperature	$10^{-7} \text{ K}$
Accuracy - mass concentration	$10^{-10}$
Accuracy - film thickness	$10^{-12} \text{ m}$



**Fig. 6** Mass fraction profiles across the film at various flow lengths

interface temperature remains constant at the saturated inlet temperature. Within this distance, inside the film the temperature gradient develops towards the free surface (cf. figure 5). Beyond  $x = 3 \cdot 10^{-3}m$ , when the temperature distortion has arrived at the interface the temperature starts decreasing. From there onwards the film is absorbing vapour.

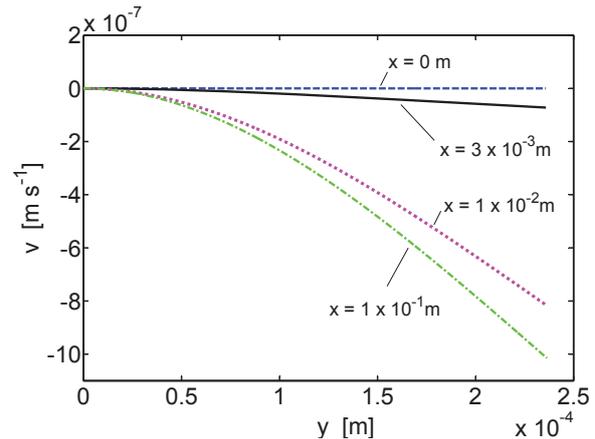


**Fig. 7** Temperature at the liquid vapour interface  $T_{if}$  and film thickness  $\delta$  over flow length

The absorption of vapour causes the film to become thicker as can also be seen in figure 7. Adjacent to the inlet, the film thickness remains constant since the velocity of the flow is fully developed, the film is in equilibrium and the properties are kept constant. Beyond  $x = 3 \cdot 10^{-3}m$ , with interface temperature decreasing, the film thickness  $\delta$  starts rising with flow length.

Not only the film thickness is subject to changes but also transversal as well as longitudinal velocities are so. The transversal velocity  $v$  is affected by both

an increasing film thickness and an uni-directional diffusion. The increasing thickness of the film suggests a positive transversal velocity towards the interface. However, the liquid vapour interface is impermeable for the absorbent (e.g. LiBr). Therefore, a convective component is induced from the interface towards the wall. The velocity of the centre of mass comprises both effects and can be positive or negative. The development of the transversal velocity  $v$  is depicted in figure 8.

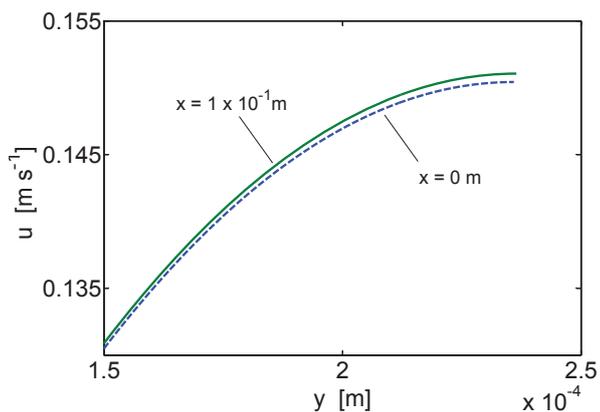


**Fig. 8** Transversal velocity profiles across the film at various flow lengths

The profile is fully developed at the inlet. Therefore, the transversal velocity  $v$  is naught at  $x = 0m$ . When the mass fraction gradient starts growing at the interface (see figure 6 at  $x = 3 \cdot 10^{-3}m$ ) the transversal velocity starts developing as well. With increasing flow length  $x$  mass fraction  $\xi$  rises at the interface. This results in an evolution of the transversal velocity towards increasing negative values. In other words, the velocity of the centre of mass points towards the wall although the film thickness rises in the opposite direction. When mass diffusivity is increased and hence Lewis number decreased, this effect becomes more pronounced.

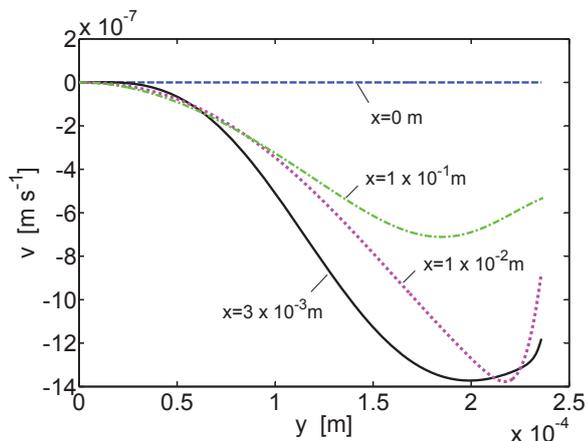
At the inlet the longitudinal velocity  $u$  corresponds to the Nusselt profile. Again, through absorption the momentum transfer in transversal direction is affected by both a change in film thickness and a negative transversal velocity at the interface. The uptake of mass at the interface increases the longitudinal velocity  $u$  slightly as can be seen in a detail of figure 9. The dashed profile is shown at the inlet of the film. After a flow distance of  $x = 1 \cdot 10^{-1}m$  a slight acceleration at the interface has occurred.

When considering the velocity of the centre of mass in transversal direction, a constant density  $\rho$  proves to be a rough assumption. Therefore, the density  $\rho$  is al-



**Fig. 9** Longitudinal velocity profiles close to the interface (detail)

lowed to vary with mass fraction and temperature and the transversal velocities are computed again for comparison. The influence of a variable density on the velocity of the centre of mass in transversal direction is shown in figure 10.



**Fig. 10** Transversal velocity profiles across the film at various flow lengths calculated with variable density

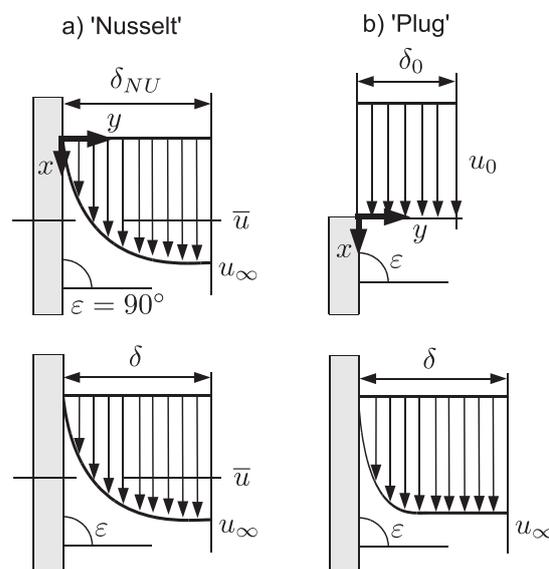
The density reduces with increasing water content and rising temperatures as can also be seen later (figure 20). Therefore, due to the cooling at the wall side the density increases and the transversal velocity reduces as compared with figure 8 (e.g. see curve  $x = 3 \cdot 10^{-3}m$ ). However, at the interface the uptake of water leads to a lower density which causes the transversal velocity to increase towards the interface. Since the variable density shows significant impact on the transversal velocity profiles, the following analysis is conducted using variable properties.

### 5.2 Influence of hydrodynamics on mass transfer

For the following analysis, the release of differential heat of solution as well as variable properties have been considered. As inlet conditions, two different profiles have been analysed (figure 11).

Inlet condition *a*) on the left hand side of figure 11 is labelled as 'Nusselt'. In this case a fully developed velocity profile is assumed as used by many authors [7], [3], [31], [5] and [13].

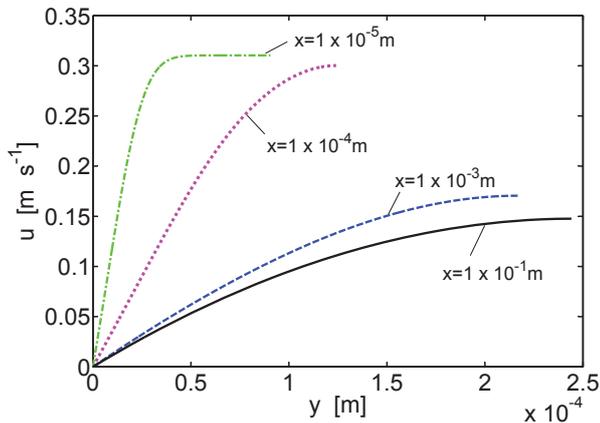
In case *b*) a plug flow is assumed at the inlet. Within a short inlet region, the film flow is decelerated at the wall, a hydrodynamic boundary layer develops resulting in a fully developed profile similar to case *a*). The inlet velocity  $u_0$  (see also table 1) corresponds to a free fall of 5mm distance with no drag assumed. This distance is often found in absorption chillers as clearance between two horizontal rows of tubes. In this test case, typical inlet and boundary conditions are used which - fundamentally taken, cause inherent contradictions. For example, the plug flow inlet profile contradicts the no-slip wall at a single point. Still we see that the algorithm can handle these inconsistencies and we want to stay with these typical conditions, for reasons of comparing to literature.



**Fig. 11** Various velocity profiles at the inlet

As previously stated in section 5.1, in case *a*) the velocity profile changes only slightly. Therefore, in the following section the velocities are shown for case *b*) only. In figure 12 the developing longitudinal velocity profile  $u$  is depicted across the film. At the inlet the velocity profile is constant at  $0.31m/s$ . After a distance of  $x = 1 \cdot 10^{-5}m$ , the boundary layer has reached almost

half of the film thickness. However, the interface is not yet affected by the shear stress adjacent to the wall. At  $x = 1 \cdot 10^{-4}m$ , the boundary layer covers the entire thickness of the film. The velocity at the interface has decelerated only slightly. Further down the flow, the velocity at the interface decreases more and more.

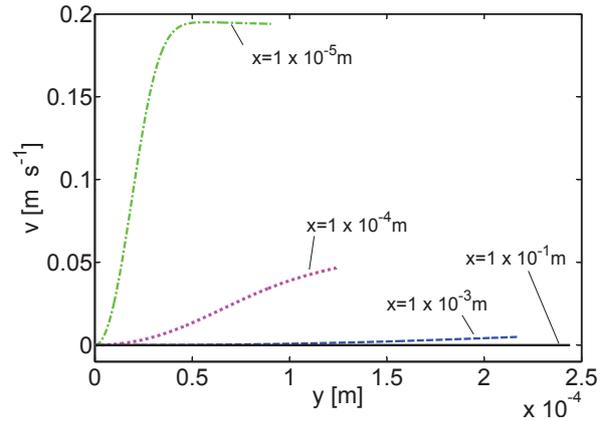


**Fig. 12** Developing longitudinal velocity profiles across the film

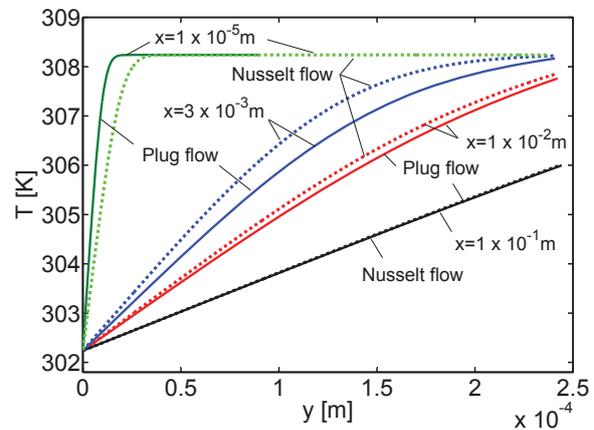
The curves of transversal velocity show similar behaviour to the longitudinal velocities (see figure 13) albeit with different reason. Since the initial longitudinal velocity  $u_0$  exceeds the average velocity, the flow is decelerated. Due to the deceleration of the film its thickness increases immediately with a corresponding transversal velocity. Therefore, in contrast to figure 8 the transversal velocity  $v$  is positive; the velocity points towards the free interface of the film. Adjacent to the inlet (at  $x = 1 \cdot 10^{-5}m$ ), the transversal velocity rises steeply towards the middle of the film. Further, from the middle of the film towards the free surface, the transversal velocity  $v$  decreases slightly revealing a negative gradient  $\partial v/\partial y$ . This is caused by downward acceleration in longitudinal direction due to gravity force. When the boundary layer has reached the free surface (cf. figure 12 at  $x = 1 \cdot 10^{-4}m$ ) the respective curve of  $v$  exhibits an entirely positive gradient  $\partial v/\partial y$ . However, the transversal velocity  $v$  decreases further within the inlet region.

Next, the temperature and mass fraction profiles of case a) and b) are compared with each other. Figure 14 shows the temperature profiles for both cases. The dotted lines represent case a) with a fully developed Nusselt profile at the inlet. The solid lines represent case b) with plug flow at the inlet.

Near the wall where the fluid velocity is low heat transfer is dominated by diffusive heat transfer. As can



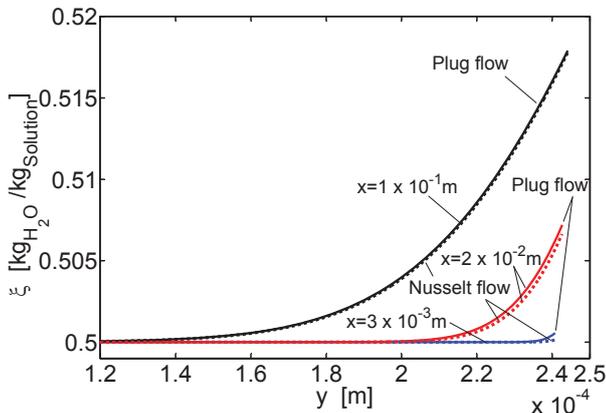
**Fig. 13** Developing transversal velocity profiles across the film



**Fig. 14** Temperature profiles across the film for fully developed velocity profile (Nusselt) and (plug flow)

be seen in figure 14, for a short flow length of  $x = 1 \cdot 10^{-5}m$  the gradient  $\partial T/\partial y$  at the wall is steeper in case of plug flow as compared to Nusselt flow. Consequently, at the inlet the heat flux towards the wall is higher in case of plug flow. As depicted in figure 12 and 13 in case of plug flow the hydrodynamic boundary layer grows towards the free surface of the film. Thus, with increasing transversal coordinate  $y$  the motion of bulk contributes more and more to the heat transfer. Additionally, in this case the initial film is thinner than in the Nusselt case. As a consequence of both, the thermal boundary layer propagates faster through the film (see curve  $x = 3 \cdot 10^{-3}m$ ) in case of plug flow. Therefore, the film starts absorbing slightly earlier as can be seen from the mass fraction profiles in figure 15. At a distance of  $x = 3 \cdot 10^{-3}m$ , with a plug flow at the inlet the gradient  $\partial \xi/\partial y$  is more pronounced than in the Nusselt case. For intermediate flow lengths (e.g.  $x = 2 \cdot 10^{-2}m$ ), a slight deviation between both cases

remains, but again vanishes with increasing longitudinal coordinate  $x$ . The earlier onset of absorption and its release of heat leads to the fact, that the slight deviation between both temperature profiles vanishes also (see curve  $x = 1 \cdot 10^{-1}m$  in figure 14).



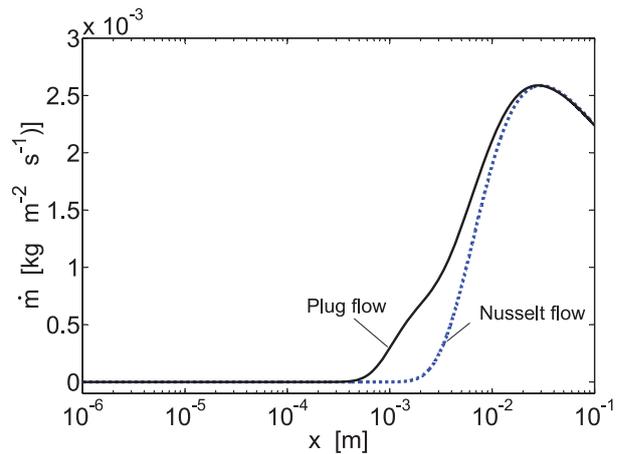
**Fig. 15** Mass fraction profiles across the film for fully developed velocity profile (Nusselt) and (plug flow)

Finally, the local absorbed mass fluxes have been computed to evaluate the differences between the two inlet conditions. Figure 16 depicts the absorbed mass flux at the interface over the flow distance  $x$ . As can be inferred from the previous figures the film starts absorbing earlier when a plug flow is assumed as inlet condition. Given the logarithmic scale in figure 16 the differences are small since the deviation occurs between  $x = 5 \cdot 10^{-4}m$  and  $x = 1 \cdot 10^{-2}m$  only. For plug flow, the accumulated mass flux over a longitudinal distance of  $0.1m$  is  $3.47 \cdot 10^{-4}kg m^{-1} s^{-1}$  while for a Nusselt flow it is  $3.41 \cdot 10^{-4}kg m^{-1} s^{-1}$ . In other words, when a plug flow in conjunction with saturated inlet conditions is assumed the accumulated mass flux is 1.8% higher than in the case of fully developed flow conditions.

For shorter flow length the difference between a fully developed and plug flow is more pronounced. If an absorber is made of horizontal tube banks with tubes of  $20mm$  in diameter, half of the circumference of one tube is approximately  $0.03m$ . With the conditions chosen, a solution in fully developed flow absorbs only  $8.55 \cdot 10^{-5}kg m^{-1} s^{-1}$  whereas a solution initially in plug flow absorbs 9.3% more ( $9.35 \cdot 10^{-5}kg m^{-1} s^{-1}$ ) over the same flow length.

### 5.3 Other influences on mass transfer

Especially when laminar hydrodynamics are assumed, there are other important influences on the transfer of



**Fig. 16** Absorbed mass flux  $\dot{m}$  over flow length  $x$  for fully developed velocity profile (Nusselt) and (plug flow)

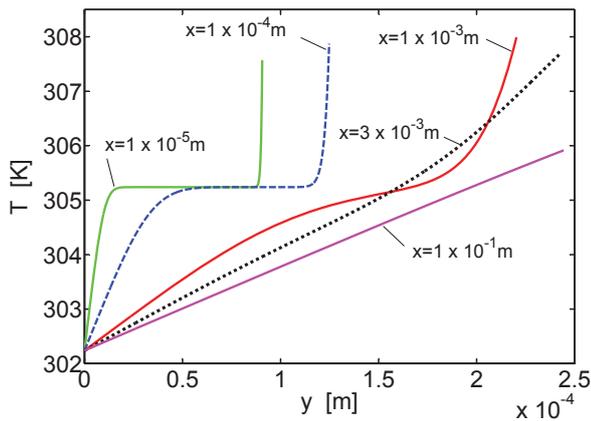
mass. In some applications the fluid might not be in equilibrium at the beginning of the process. Moreover, a fluid differing in thermophysical properties may be used instead of lithium bromide solution. Therefore, both the effect of sub-cooling at the inlet and a higher viscosity are investigated subsequently. Since a plug flow (cf. figure 11, case b) is more realistic in an absorption heat exchanger the analysis is based on that scenario. Thus, adjacent to the inlet, a pronounced change in film thickness occurs due to the hydrodynamic development (figure 17 and 18).

#### 5.3.1 Effect of sub-cooled inlet

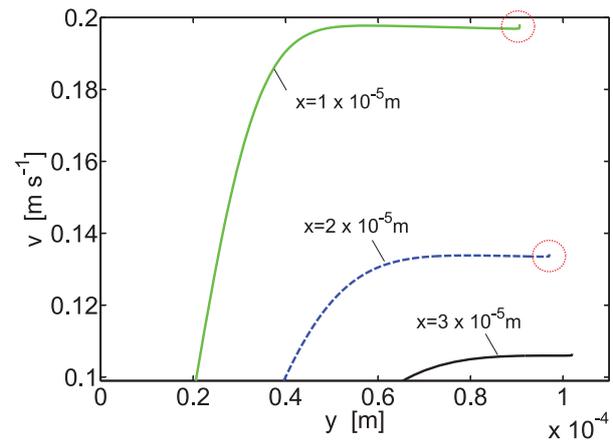
In the following part the inlet condition is altered. Now, a sub-cooled film at the inlet is assumed. The sub-cooling is set as a temperature difference of  $3K$  to the equilibrium state. Thus, at the liquid vapour interface, ab initio the temperature is higher as compared with the bulk of the film. Again, this discontinuity in temperatures is deduced from typical conditions in applications, e.g. absorption chillers and the inlet and boundary conditions are used which - fundamentally taken, cause inherent contradictions.

In contrast to figure 15, due to the sub-cooling two thermal boundary layers develop from both the wall and the interface. As can be seen in figure 17, adjacent to the inlet the temperature level in the bulk of the film remains at the inlet temperature of  $305.2K$ . At a longitudinal coordinate of approximately  $x = 1 \cdot 10^{-3}m$  the two boundary layers meet each other.

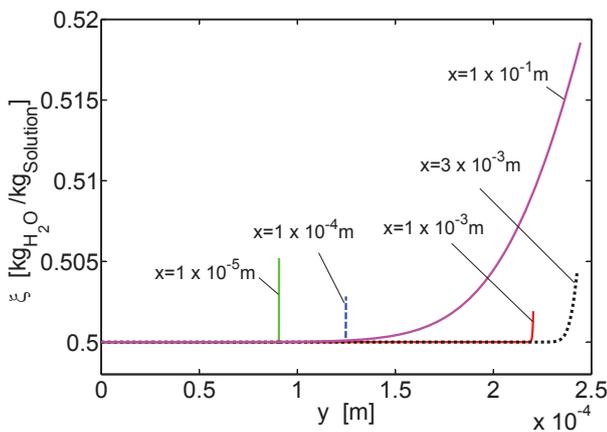
Since the liquid is sub-cooled at the inlet, the film starts absorbing from the beginning. Therefore, a steep mass fraction gradient  $\partial\xi/\partial y$  occurs within the inlet region (figure 18). From the steep gradient  $\partial\xi/\partial y$  at the interface a high absorption rate may be inferred. Due to



**Fig. 17** Temperature profiles across the film for sub-cooling of 3K



**Fig. 19** Transversal velocity profiles across the film for sub-cooling of 3K near the inlet

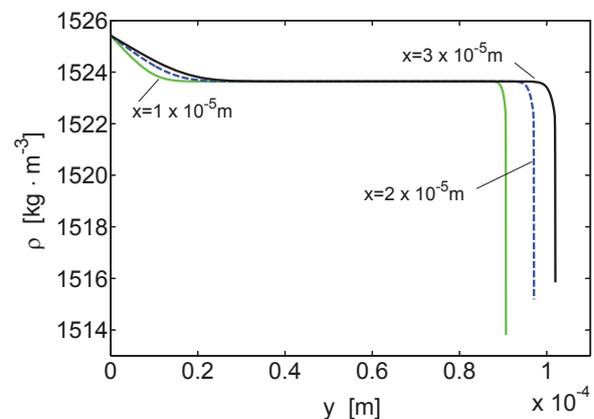


**Fig. 18** Mass fraction profiles across the film for sub-cooling of 3K

a positive transversal velocity  $v$  (towards the interface) in conjunction with occurring absorption in the inlet domain, the interface temperature increases slightly as can be observed in figure 17. Since local equilibrium is assumed, the mass fraction decreases slightly in the inlet region as can be observed in figure 18 at longitudinal coordinates of  $x = 1 \cdot 10^{-5}m$ ,  $x = 1 \cdot 10^{-4}m$  and  $x = 1 \cdot 10^{-3}m$ .

The transversal velocity  $v$  is also slightly affected by the sub-cooling. Adjacent to the inlet, a very small increase in transversal velocity is observed at the interface. This is marked with a circle and shown in figure 19. Two reasons can be found for this behaviour. As stated above, the absorption rate is high in the inlet region. Therefore, the increase in film thickness is more pronounced than in the case of a saturated film at the inlet. Moreover, the thermophysical properties change as well. In figure 20, the local density is plotted over the thickness of the film. The values are shown near the in-

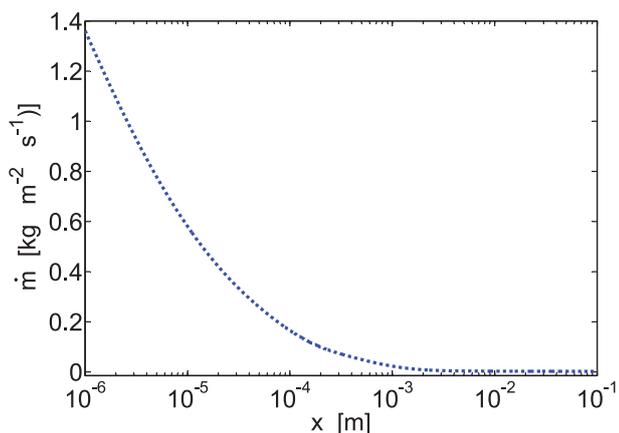
let. As found earlier [25], properties e.g. mass diffusivity and density are more sensitive to a change in mass fraction than a change in temperature. Close to the wall a slight increase of density is observed within the thermal boundary layer since the wall is cooled. Adjacent to the interface, a pronounced decrease occurs due to the uptake of water. The latter leads to the increasing transversal velocity close to the interface (marked in figure 19).



**Fig. 20** Density profiles across the film for sub-cooling of 3K near the inlet

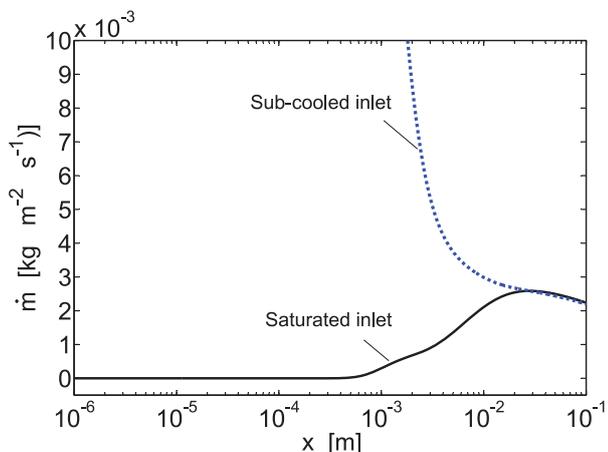
Figure 21 shows the locally absorbed mass flux  $\dot{m}$  over flow length  $x$  for the sub-cooled inlet case. As inferred from the gradient in mass fraction  $\partial\xi/\partial y$ , adjacent to the inlet the mass flux is tremendously high. However, it decreases within a flow distance of  $x = 1 \cdot 10^{-1}m$  to values around  $x = 2 \cdot 10^{-3}kg m^{-2}s^{-1}$ .

In figure 22 the absorbed mass flux  $\dot{m}$  is plotted again with a different scale of the ordinate in compari-



**Fig. 21** Local absorbed mass flux  $\dot{m}$  over flow length  $x$  for sub-cooled inlet

son with the saturated inlet case. For both calculations, plug flow has been assumed at the inlet. The differences for small longitudinal coordinates  $x$  become clearly evident in figure 22. The accumulated mass flux over a longitudinal distance of  $0.1\text{ m}$  is  $5.24 \cdot 10^{-4}\text{ kg m}^{-1}\text{ s}^{-1}$  while for a saturated inlet it is  $3.47 \cdot 10^{-4}\text{ kg m}^{-1}\text{ s}^{-1}$ . Thus, for lithium bromide solution a sub-cooling of  $3\text{ K}$  at the inlet leads to a 50% increase of absorbed mass compared with the accumulated mass flux for saturated inlet condition. For shorter flow length the difference between sub-cooled and saturated solution becomes even more pronounced. If an absorber with horizontal tubes of  $20\text{ mm}$  in diameter is considered again, half of the circumference of one tube is approximately  $0.03\text{ m}$ . In this case saturated lithium bromide solution absorbs only  $9.35 \cdot 10^{-5}\text{ kg m}^{-1}\text{ s}^{-1}$  whereas  $3\text{ K}$  sub-cooled solution absorbs three times as much ( $2.75 \cdot 10^{-4}\text{ kg m}^{-1}\text{ s}^{-1}$ ) over the same flow length.



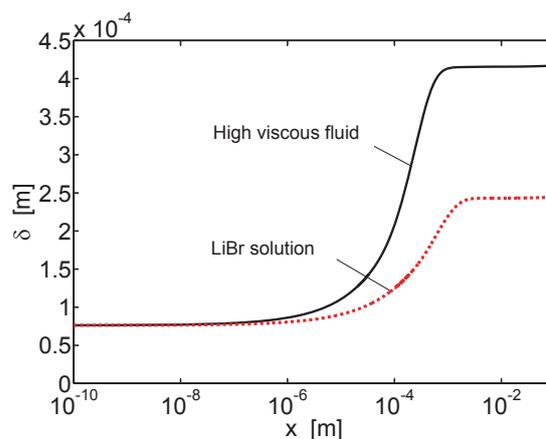
**Fig. 22** Comparison of absorbed mass fluxes  $\dot{m}$  between sub-cooled and saturated inlet

If the liquid solution were superheated at the inlet, in contrast to figure 22, the transferred mass flux adjacent to the inlet would be negative since water is desorbed. Moreover, the temperature rise at the interface as seen in figure 17, would invert into a temperature drop since the temperature in the bulk exceeds the equilibrium temperature at the interface. With increasing flow length the thermal boundary layer from the cooled wall will grow towards the surface of the film and will reduce the bulk temperature below equilibrium temperature. Once the interface is reached, the lithium bromide solution absorbs vapour and the transferred mass flux becomes positive again.

### 5.3.2 Effect of increased viscosity

There may be salt solutions used as working fluids which differ in thermophysical properties from lithium bromide solution. In this chapter we exemplarily consider a 'high viscous fluid' with a viscosity five times the one of lithium bromide solution. Again, a plug flow at the inlet (see figure 11, case b) is assumed. The results of the high viscous fluid are compared with the ones of lithium bromide solution. Please note that besides the viscosity all thermophysical properties remain at the natural level of lithium bromide solution and change with temperature and mass fraction.

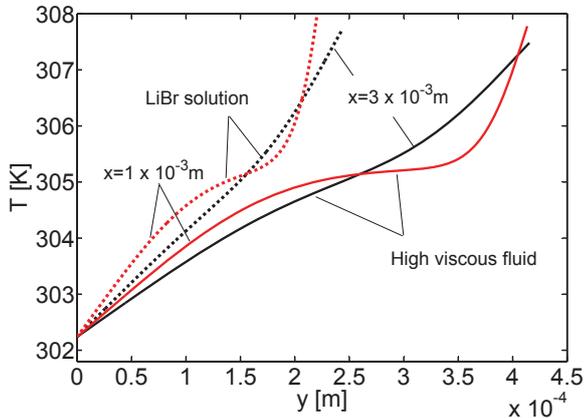
First, the comparison is conducted for subcooling of  $3\text{ K}$  at the inlet. Second, it is shown for the fluid in equilibrium state at the inlet. In figure 23 the thickness of the film  $\delta$  is plotted over the longitudinal coordinate  $x$  for plug flow at the inlet and a subcooling of the film of  $3\text{ K}$ . As expected, the film is thicker for the high vis-



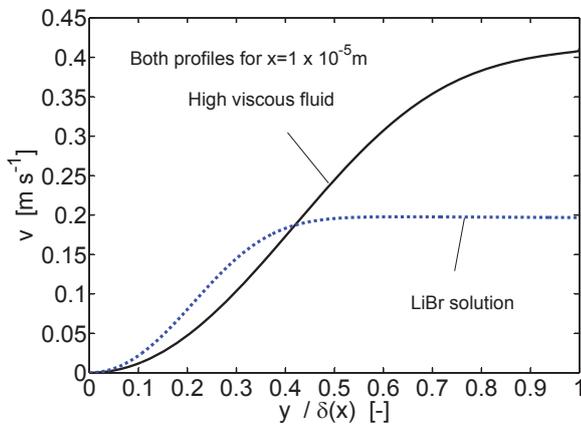
**Fig. 23** Comparison of film thickness  $\delta$  between lithium bromide solution and a high viscous fluid

cous fluid. The consequences of a higher viscosity on the

temperature profile are shown in figure 24. At the wall the temperature gradient  $\partial T/\partial y$  is steeper for lithium bromide solution as compared to the high viscous fluid. However, the temperature at the interface is slightly lower for the high viscous fluid. A reason can be found



**Fig. 24** Comparison of temperature profiles across the film between lithium bromide solution and a high viscous fluid both with sub-cooling of 3K

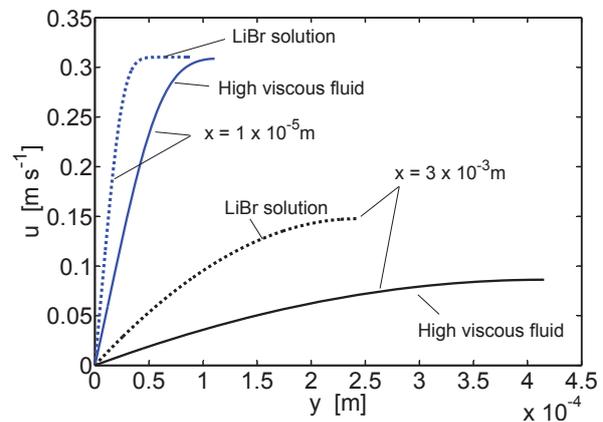


**Fig. 25** Comparison of transversal velocities  $v$  across the film (scaled to film thickness  $\delta$ ) between lithium bromide solution and a high viscous fluid in the immediate vicinity to the inlet both with sub-cooling of 3K

in the convective flow towards the interface (figure 25). Please note, for better comparison the transversal coordinate  $y$  is scaled to the local film thickness  $\delta(x)$ . In the immediate vicinity to the inlet ( $x = 1 \cdot 10^{-5}m$ ) the transversal velocity  $v$  in the bulk domain is higher for the high viscous fluid. In other words, close to the inlet the contribution to heat transfer due to convection in transversal direction is more pronounced for the high

viscous fluid. Therefore, the sub-cooled bulk is transported earlier (at smaller values of transversal coordinate  $x$ ) towards the surface. Thus, the absorbed mass flux should be higher at the beginning for the high viscous fluid.

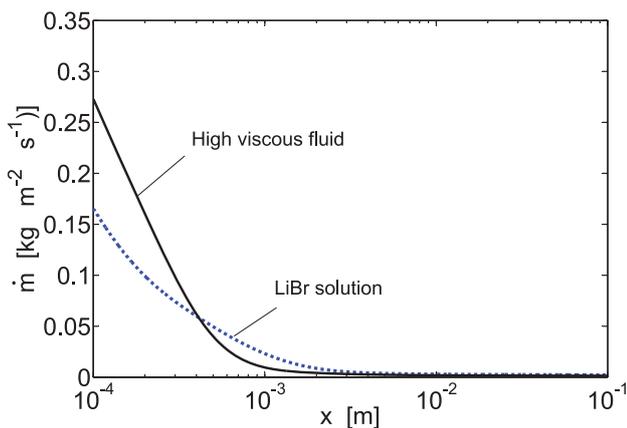
Moreover, as can be derived from the gradient  $\partial v/\partial y$  at the interface (at  $y/\delta = 1$  in figure 25) the hydrodynamic is further developed for the high viscous fluid. Figure 26 depicts the longitudinal velocities  $u$  across the film between lithium bromide solution and a high viscous fluid. As can be seen from curve at  $x = 1 \cdot 10^{-5}m$  the hydrodynamic boundary layer of the high viscous fluid develops faster. However, the velocity of the free surface and hence the average velocity of the film remains higher for lithium bromide solution (see curve at  $x = 3 \cdot 10^{-3}m$ ).



**Fig. 26** Comparison of longitudinal velocities  $u$  across the film between lithium bromide solution and a high viscous fluid both with sub-cooling of 3K

Figure 27 depicts the local absorbed mass fluxes for both lithium bromide solution and the high viscous fluid over the longitudinal coordinate  $x$ . Please note, that in this analysis the mass diffusivity remains at the original level of lithium bromide solution although relations between viscosity and mass diffusivity are prevalent.

In immediate vicinity to the inlet, the local absorbed mass flux is higher for the high viscous fluid. This is due to a more pronounced transversal motion of the sub-cooled bulk towards the interface of the film. However, for the high viscous fluid the deceleration of the flow during the development of the hydrodynamic boundary layer is more distinct and causes a thicker film as can be seen from figure 26. Therefore, both the convective heat transport in longitudinal direction  $x$  and the diffusive heat transfer across the thinner film remain higher

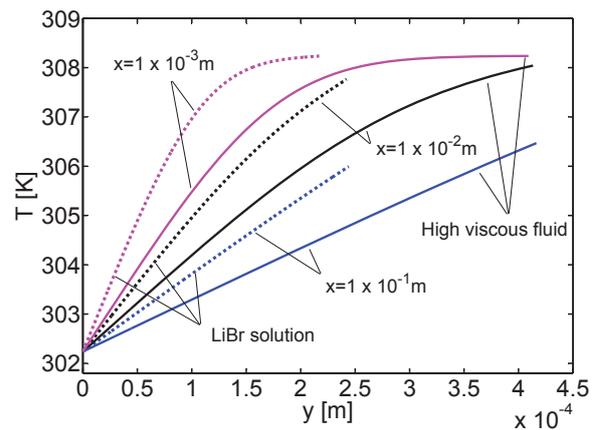


**Fig. 27** Comparison of local absorbed mass fluxes between lithium bromide solution and a high viscous fluid both with sub-cooling of 3K

for lithium bromide solution as compared to the high viscous fluid. Both effects lead to a higher overall mass flux absorbed by lithium bromide solution once the hydrodynamic boundary layer is developed far enough. Please note that figure 27 is again in logarithmic scale. Therefore, the difference appears pronounced although it occurs up to a flow length of  $x = 4 \cdot 10^{-4}m$  only. In fact, the overall mass flux absorbed up to  $x = 1 \cdot 10^{-1}m$  is  $4.01 \cdot 10^{-4}kg m^{-1}s^{-1}$  in case of the high viscous fluid while it is  $5.24 \cdot 10^{-4}kg m^{-1}s^{-1}$  in case of lithium bromide solution. Thus, when a sub-cooling of 3K at the inlet is applied to both fluids, lithium bromide solution performs 30% better as compared with the high viscous fluid over a flow length of 0.1m. Again a short flow length of 0.03m is considered for both fluids. Since the high viscous fluid performs better at the beginning the differences between the two fluids become less pronounced. For the high viscous fluid the overall mass flux absorbed up to  $x = 3 \cdot 10^{-2}m$  is  $2.47 \cdot 10^{-4}kg m^{-1}s^{-1}$ . Over the same distance lithium bromide solution absorbs only 11.2% more ( $2.75 \cdot 10^{-4}kg m^{-1}s^{-1}$  in total) than the high viscous fluid.

Now, the results are discussed for equilibrium state at the inlet. As seen earlier (cf. figure 14), when the film is saturated, the thermal boundary develops from the wall side only. However, when the viscosity is five times the one of lithium bromide solution the film is significantly thicker as can be seen in figure 23. Hence, the cooling effect of the wall arrives later (at a larger longitudinal coordinate  $x$ ).

As depicted in figure 28, adjacent to the inlet (at  $x = 1 \cdot 10^{-3}m$ ) the thermal boundary layer is clearly further developed for lithium bromide solution than in case of the high viscous fluid. After the temperature profile is fully developed (at  $x = 1 \cdot 10^{-2}m$ ), for lithium



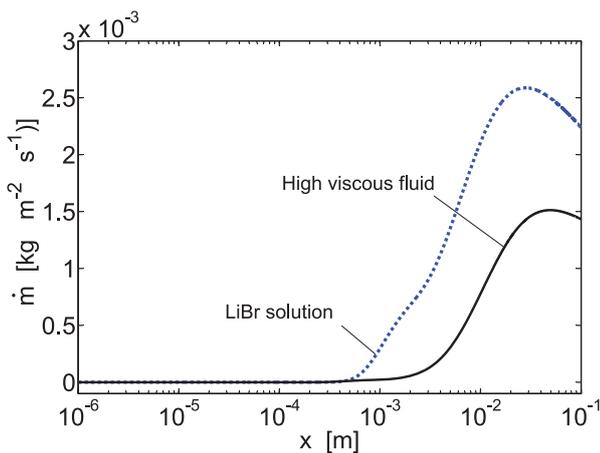
**Fig. 28** Comparison of temperature profiles across the film between lithium bromide solution and a high viscous fluid both in equilibrium condition at the inlet

bromide solution the temperature at the interface is lower with an even steeper gradient  $\partial T/\partial y$  at the interface compared with the high viscous fluid. With increasing flow length ( $x = 1 \cdot 10^{-1}m$ ) the temperature at the interface stays lower in case of lithium bromide solution even though a higher absorption rate may be assumed as compared with the high viscous fluid.

Figure 29 depicts the local mass flux absorbed at the interface. As can be clearly seen, the mass flux is significantly reduced for the high viscous fluid. Absorption starts at a larger longitudinal coordinate  $x$  and does not reach the same magnitude since the thicker film impairs the heat transfer and thus limits the mass transfer. The overall mass flux absorbed up to  $x = 1 \cdot 10^{-1}m$  is  $1.97 \cdot 10^{-4}kg m^{-1}s^{-1}$  in case of the high viscous fluid while it is  $3.47 \cdot 10^{-4}kg m^{-1}s^{-1}$  in case of lithium bromide solution. Hence, when both fluids are saturated at the inlet, lithium bromide solution performs 1.5 times better as compared with the high viscous fluid over a flow length  $x$  of 0.1m. For a short flow length of 0.03m and both fluids in equilibrium, lithium bromide performs better from the beginning. For the high viscous fluid the overall mass flux absorbed up to  $x = 3 \cdot 10^{-2}m$  is  $4.17 \cdot 10^{-5}kg m^{-1}s^{-1}$ . Over the same distance lithium bromide solution absorbs around 2.2 times as much as the high viscous fluid ( $9.35 \cdot 10^{-5}kg m^{-1}s^{-1}$  in total).

## 6 Conclusion

A model for solving simultaneous heat, mass and momentum transfer in a laminar falling film has been introduced. Most common simplifications have been relaxed. The model resolves longitudinal and transversal velocities. Both, the influence of mass transfer on hydro-



**Fig. 29** Comparison of local absorbed mass fluxes between lithium bromide solution and a high viscous fluid both in equilibrium condition at the inlet

dynamics and vice versa have been investigated. Moreover, effects such as sub-cooling at the inlet and high viscosity of the absorbing fluid have been discussed.

The influence of mass transfer on the hydrodynamic behaviour of a laminar film has been shown for lithium bromide solution initially in equilibrium. Although absorption leads to an increasing thickness of the film, it results in very small transversal velocities (centre of mass) towards the wall due to uni-directional diffusion. The effect though is minor and the hydrodynamic inlet condition is rather important for the development of transversal velocity and absorption of mass respectively.

When a plug flow is assumed at the inlet and the fluid is in equilibrium, absorption occurs earlier (at shorter flow length) in comparison with a Nusselt flow at the inlet. For lithium bromide solution this results in a 9.3% increase in absorbed mass over a length of 0.03m as compared with the Nusselt case.

A viscosity of the fluid five times the one of lithium bromide solution leads to lower overall heat and mass transfer rates. When the respective fluids are saturated at the inlet, the absorbed mass flux accumulated over the considered flow length  $x$  of 0.03 m is 2.2 times higher for lithium bromide solution as compared with the high viscous fluid sharing comparable properties apart from that. However when a plug flow is applied and the fluid is sub-cooled (as it usually is in common applications), in the immediate vicinity to the inlet, the absorbed mass flux is slightly higher for the high viscous fluid. This is due the fast hydrodynamic development and thus large convective flow of cold fluid towards the interface. Nevertheless, when a sub-cooling of 3 K at the inlet is prevalent in both fluids, lithium bromide solution still performs 11% better as compared with the high

viscous fluid over comparable flow length  $x$  of 0.03 m. The observed behaviour suggests that for high viscous fluids short flow lengths are beneficial because the solution enters sub-cooled. Thus, in applications smaller tubes for horizontal banks should be considered.

## References

1. Aminyavari, M., Aprile, M., Toppi, T., Garone, S., Motta, M.: A detailed study on simultaneous heat and mass transfer in an in-tube vertical falling film absorber. *International Journal of Refrigeration* **80**, 37 – 51 (2017)
2. Andberg, J.W., Vliet, G.C.: Nonisothermal absorption of gases into falling liquid films. *ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference Proceedings* **2**, 423–431 (1983)
3. Brauner, N.: Non-isothermal vapour absorption into falling film. *Int. J. Heat Mass Tran.* **34**, 767 – 784 (1991)
4. Cerro, R.L., Whitaker, S.: Entrance region flows with a free surface: the falling liquid film. *Chem. Eng. Sci.* **26**, 785 – 798 (1971)
5. Conlisk, A.: Analytical solutions for the heat and mass transfer in a falling film absorber. *Chem. Eng. Sci.* **50**, 651 – 660 (1995)
6. Gao, D., Morley, N., Dhir, V.: Numerical simulation of wavy falling film flow using vof method. *J. Comput. Phys.* **192**, 624 – 642 (2003)
7. Grossman, G.: Simultaneous heat and mass transfer in film absorption under laminar flow. *Int. J. Heat Mass Tran.* **26**, 357 – 371 (1983)
8. Grossman, G.: Analysis of interdiffusion in film absorption. *Int. J. Heat Mass Tran.* **30**, 205 – 208 (1987)
9. Hosseinnia, S.M., Naghashzadegan, M., Kouhikamali, R.: Numerical study of falling film absorption process in a vertical tube absorber including soret and dufour effects. *International Journal of Thermal Sciences* **114**, 123 – 138 (2017)
10. Islam, M.A., Miyarab, A., Setoguchib, T.: Numerical investigation of steam absorption in falling film of liBr aqueous solution with solitary waves. *Int. J. Refrig.* **32**, 1597–1603 (2009)
11. Jernqvist, A., Kockum, H.: Simulation of falling film absorbers and generators. In: *Ab-Sorption 96* (1996)
12. Kabova, Y., Kuznetsov, V., Kabov, O.: Temperature dependent viscosity and surface tension effects on deformations of non-isothermal falling liquid film. *Int. J. Heat Mass Tran.* **55**(4), 1271 – 1278 (2012)
13. Karami, S., Farhanieh, B.: Numerical modeling of incline plate liBr absorber. *Heat Mass Transf.* **47**, 259–267 (2011)
14. Kharangate, C.R., Lee, H., Mudawar, I.: Computational modeling of turbulent evaporating falling films. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **81**, 52 – 62 (2015)
15. Killion, J.D., Garimella, S.: A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling-film absorption. *Int. J. Refrig.* **24**, 755 – 797 (2001)
16. Killion, J.D., Garimella, S.: Simulation of pendant droplets and falling films in horizontal tube absorbers. *J. Heat Trans.-T. ASME* **126**, 1003 – 1013 (2004)
17. Kim, D.S., Infante Ferreira, C.A.: Analytic modelling of a falling film absorber and experimental determination of transfer coefficients. *Int. J. Heat Mass Tran.* **52**, 4757 – 4765 (2009)

Reprinted by permission from Springer Customer Service Centre GmbH:

Springer, *Journal of Heat and Mass Transfer, The impact of viscosity on the combined heat, mass and momentum transfer in laminar liquid falling films*, Mittermaier, M.; Ziegler, F., (2017), advance online publication, 12 June 2018 (<https://doi.org/10.1007/s00231-017-2219-9>)

18. Kim, K.J.: Heat and mass transfer enhancement in absorption cooling. Ph.D. thesis, Arizona State University (1992)
19. Löwer, H.: Thermodynamische und physikalische Eigenschaften der wässrigen Lithiumbromid-Lösung. Ph.D. thesis, Karlsruhe (1960)
20. McKee, S., Tom, M., Ferreira, V., Cuminato, J., Castelo, A., Sousa, F., Mangiavacchi, N.: The mac method. *Comput. Fluids* **37**, 907 – 930 (2008)
21. Meyer, T.: Improvement of the exact analytical solutions for combined heat and mass transfer problems obtained with the fourier method. *Int. J. Refrig.* **43**, 133 – 142 (2014)
22. Meyer, T.: Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminar falling film absorption with uniform film velocity - diabatic wall boundary. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **80**, 802 – 811 (2015)
23. Min, J.K., Park, I.S.: Numerical study for laminar wavy motions of liquid film flow on vertical wall. *Int. J. Heat Mass Tran.* **54**, 3256 – 3266 (2011)
24. Mirzabeygi, P., Zhang, C.: Three-dimensional numerical model for the two-phase flow and heat transfer in condensers. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **81**, 618 – 637 (2015)
25. Mittermaier, M., Schulze, P., Ziegler, F.: A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics. *Int. J. Heat Mass Tran.* **70**, 990 – 1002 (2014)
26. Nakoryakov, V., Grigoryeva, N., Bartashevich, M.: Heat and mass transfer in the entrance region of the falling film: Absorption, desorption, condensation and evaporation. *Int. J. Heat Mass Tran.* **54**, 4485 – 4490 (2011)
27. Nakoryakov, V.E., Grigor'eva, N.I.: Combined heat and mass transfer during absorption in drops and films. *J.E.P.T.* **32**, 243–247 (1977)
28. Park, I.S.: Numerical analysis for flow, heat and mass transfer in film flow along a vertical fluted tube. *Int. J. Heat Mass Tran.* **53**, 309 – 319 (2010)
29. Schlichting, H., Gersten, K.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer Berlin / Heidelberg (2006)
30. Wu, Y.: Simultaneous heat and mass transfer in laminar falling film on the outside of a circular tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **93**, 1089 – 1099 (2016)
31. Yang, R., Wood, B.D.: A numerical modeling of an absorption process on a liquid falling film. *Sol. Energy* **48**, 195 – 198 (1992)



## 4.3 Einfluss einer Veränderung des Diffusionskoeffizienten

**Zum folgenden Abschnitt gehört der Artikel:**

Mittermaier, M.; Ziegler, F.: *Impact of a developing velocity profile on heat and mass transfer in absorbing laminar falling films*. In: *Chemie Ingenieur Technik* (2016), Nr. 88, 139 - 146

Die Veröffentlichung ist bei WILEY-VCH unter:

<https://doi.org/10.1002/cite.201500093>

verfügbar.

### 4.3.1 Aufgabenstellung und Ziel

Im Zusammenhang mit einem sich entwickelnden Geschwindigkeitsprofil wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt 4.2 der Einfluss der Viskosität untersucht. Nun wird in einer weiteren Parametervariation der Diffusionskoeffizient  $D$  variiert. Die Auswirkungen werden für ein homogenes und ein voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil betrachtet. Die aufgegebenen Massenströme sind in beiden Fällen identisch, was bei einer homogenen Anfangsgeschwindigkeit eine höhere Geschwindigkeit als die mittlere Nußelt-Geschwindigkeit ergibt und damit am Anfang eine kleinere Filmdicke bedeutet. In der folgenden Untersuchung wird die Temperatur- und Konzentrationsabhängigkeit der Stoffwerte vernachlässigt, um dadurch die Interpretation der Ergebnisse zu erleichtern. Aus gleichem Grund wurde eine Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht für folgende Untersuchung gewählt.

### 4.3.2 Untersuchungen und Ergebnisse

Folgende Untersuchungen werden in diesem Abschnitt zusammengefasst:

- Effekt eines reduzierten Diffusionskoeffizienten des Absorbens
- Effekt des anfänglich homogenen Geschwindigkeitsprofils bei reduziertem Diffusionskoeffizienten

Zunächst wurde die Parametervariation für ein voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil durchgeführt. Wie zu erwarten und in Mittermaier u. Ziegler

(2016) zu sehen, reduziert sich die absorbierte Wassermenge bei reduziertem Diffusionskoeffizienten. Durch die Koppelung zwischen Wärme- und Stoffübergang, wird bei einer Verringerung des Diffusionskoeffizienten um den Faktor 10 die absorbierte Massenstromdichte lediglich halbiert.

Durch die Reduktion des Diffusionskoeffizienten wird die Wechselwirkung zwischen der thermischen und hydrodynamischen Grenzschichtentwicklung deutlich sichtbar. Im Fall einer homogenen Geschwindigkeit am Eintritt (Kolbenströmung) und reduziertem Diffusionskoeffizienten, geht nach anfänglichem Anstieg die absorbierte Massenstromdichte signifikant zurück, bevor sie wieder ansteigt und das übliche Maximum durchläuft. Dieser Verlauf ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

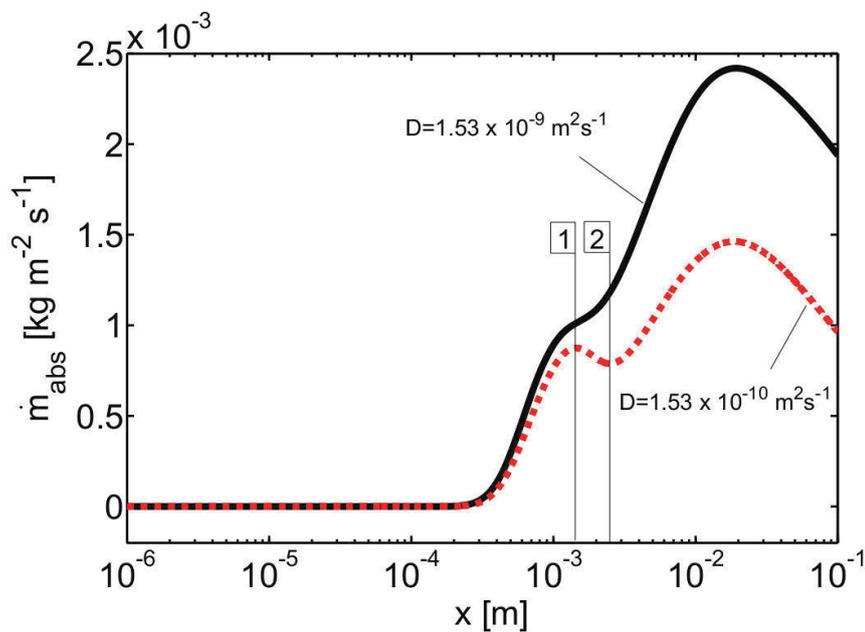


Abbildung 4.3: Absorbierte Massenstromdichte  $\dot{m}_A$  über Lauflänge  $x$  für Diffusionskoeffizient  $D$  von LiBr-Lösung und Fluid mit verringertem Diffusionskoeffizienten (gepunkteter Verlauf) (aus Mittermaier u. Ziegler (2016))

Der Verlauf der absorbierten Massenstromdichte kann durch die Analyse des Temperaturprofils erklärt werden. Die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils am Eintritt sorgt zunächst dafür, dass bereits bei kürzeren Lauflängen absorbiert wird als bei einem Fallfilm mit voll entwickeltem Geschwindigkeitsprofil. Jedoch ist am Punkt 1 (in Abbildung 4.3 bei  $x = 1,4 \cdot 10^{-3} m$ ) die Entwicklung des Temperatur- und Geschwindigkeitsprofils noch nicht voll-

ständig abgeschlossen. Die noch vorhandene Konvektion Richtung Oberfläche führt zu einem Anwachsen der Filmdicke. Dadurch wird das nicht vollständig entwickelte Temperaturprofil „gedehnt“ und der Temperaturgradient an der Filmoberfläche wird etwas flacher. Da der Diffusionskoeffizient klein ist, führt dies zu einem relativ starken Rückgang der lokal absorbierten Massenstromdichte. Abbildung 4.4 zeigt den Anstieg der Filmdicke und das Abflachen des Temperaturgradienten an der Filmoberfläche im kurzen Lauflängenabschnitt zwischen Markierung 1 und 2.

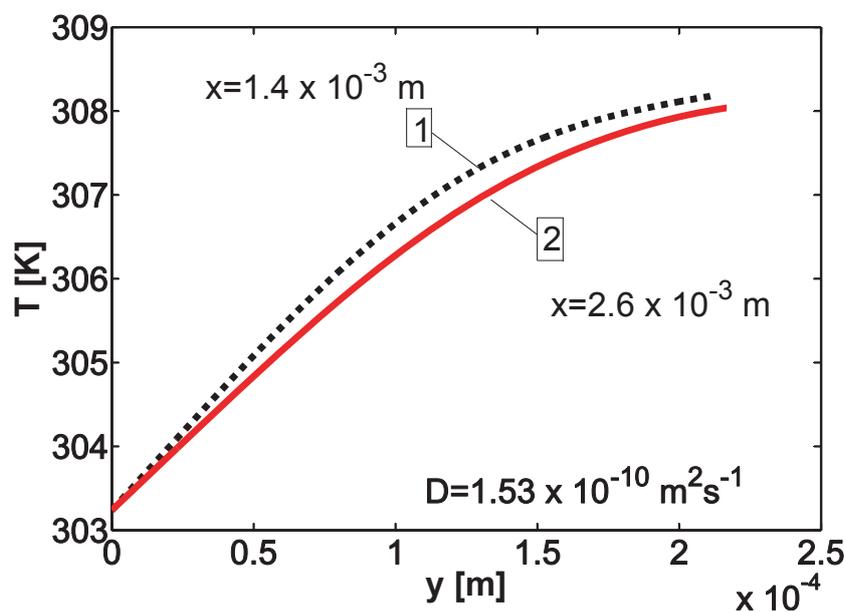


Abbildung 4.4: Temperaturprofil  $T$  über transversale Koordinate  $y$  für verringerten Diffusionskoeffizienten  $D$  für  $x = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  und  $x = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  (aus Mittermaier u. Ziegler (2016))

### 4.3.3 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt konnte ein weiterer Zusammenhang zwischen Impuls- und Stofftransport dargestellt werden. Ein sich entwickelndes Geschwindigkeitsprofil führt dazu, dass die Absorption an der Oberfläche des Fallfilms bereits bei kürzeren Lauflängen beginnt. Dies liegt an der kleineren Filmdicke am Anfang sowie am konvektiven Wärmetransport während der Strömungsentwicklung. Der anfänglich steile Anstieg der absorbierten Massenstromdichte wird durch die Entwicklung des Temperaturgradienten an der Oberfläche des Fallfilms

kurz vor der vollständigen Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils gedämpft. Dieser Effekt wird bei verringertem Diffusionskoeffizienten besonders deutlich.

# Impact of a Developing Velocity Profile on Heat and Mass Transfer in Absorbing Laminar Falling Films

Martin Mittermaier, and Felix Ziegler\*

DOI: 10.1002/cite.201500093

*Dedicated to Prof. Dr.-Ing. Matthias Kraume on the occasion of his 60th birthday*

This study describes a developing laminar falling film over a vertical plate while heat and mass transfer occurs. The model accounts for a developing film thickness and uni-directional diffusion. The fluid properties are assumed to be constant, and latent heat, which is relatively large in comparison to the sensible heat, is set free at the liquid-vapor interface. Temperature and concentration profiles in the film, the development of the interface velocity, as well as the absorbed mass fluxes are presented and two different boundary conditions have been applied to the inlet of the film.

**Keywords:** Absorption, Boundary layer approximation, Entrance region, Film flow, Uni-directional diffusion

*Received:* July 03, 2015; *revised:* October 30, 2015; *accepted:* November 05, 2015

## 1 Introduction

In many chemical apparatuses either desorption or absorption of vapor occurs. For example, in natural gas production a reduction of the product's water content is often achieved by absorption using glycol as absorbent. For these mass transfer processes often structured packings are employed which is possible if the developed heat is small and shall not be rejected. Lately, new packing concepts are investigated for this purpose, e.g., wire bundle packings [1]. Falling films flowing over cooled or heated tubes or plates are prevalent when significant heat fluxes occur or a delicate product requires careful temperature control. An important field of application is the refrigeration industry where absorption chillers often use falling films in absorbers, desorbers, condensers, and evaporators.

The falling film produced in industrial plants often exhibits hydrodynamic turbulences. Nevertheless, laminar films are important subjects of investigation because they represent limiting cases for technical applications and are rather simple to describe mathematically.

Often, a fully developed laminar flow is assumed at the inlet to the absorbing device and throughout the film flow. However, the significance of this simplification has to be checked since even in a laminar film the hydrodynamics are linked to heat and mass transfer and interactions occur in

the entrance region of the film, due to a change in film thickness, or uni-directional diffusion.

In this study, aqueous lithium bromide solution is considered as binary mixture and the vapor is assumed to solely consist of water. Due to the mass transfer resistance, during absorption in a laminar film a pronounced concentration gradient occurs. Since the heat of sorption is high when steam is absorbed, the interface heats up considerably and a significant temperature gradient is generated at the same time. Therefore, we describe the momentum transfer using a boundary layer approximation and solve it together with the heat and mass transfer equations as described below.

In an extensive literature survey, Killion and Garimella [2] state that most work found in literature to this specific topic up to 2001 has focused on the particularly simplified case of a fully developed velocity profile. Moreover, they state that common simplifications to the governing equations and potential interaction of the heat and mass transfer process on the film hydrodynamics should be considered carefully [2]. Since then solitary waves have been investigated [3, 4] and it was shown that waves produce recirculation zones in the fluid, and thus cool solution moves towards the interface and enhances absorption. Beyond that, a detailed study on a liquid falling film over horizontal tube banks including droplet formation and impact on the hydrodynamics as well as coupled heat and mass transfer has been conducted [5]. Information about local gradients and their temporal variations along the film flow and even in inter-tube regions is provided. Although these achievements have delivered insight into the effects of waves, the interaction

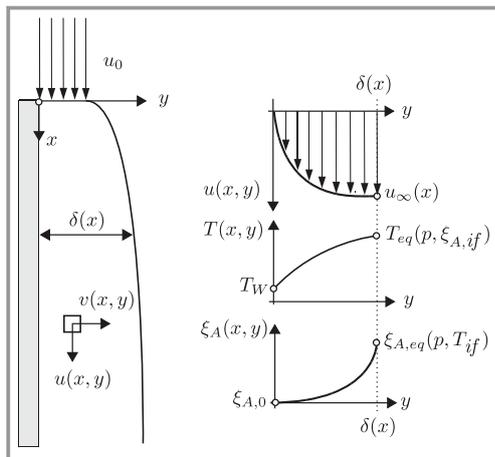
---

Martin Mittermaier, Prof. Felix Ziegler (felix.ziegler@tu-berlin.de), Technische Universität Berlin, Institut für Energietechnik KT 2, Marchstraße 18, 10587 Berlin, Germany.

between the heat and mass transfer process and the hydrodynamics of a laminar film has not been discussed fully yet.

## 2 Model Description

Momentum, energy and mass balance are formulated to describe the problem for some simplifying assumptions. Any effects concerning waves or droplets as they may occur in technical applications are disregarded and a simple laminar film over a vertical wall is considered. A schematic of the problem is depicted in Fig. 1.



**Figure 1.** Profile of longitudinal velocity, temperature, and mass fraction.

At the inlet a constant temperature and mass fraction is assumed. The velocity at the inlet is determined by the acceleration of free fall over a distance of 5 mm (droplet fall, no drag assumed). It exhibits either a Nusselt-kind of profile or it is constant; in this case the hydrodynamic boundary layer develops simultaneously with the thermal boundary layer. Since the film is assumed to be in equilibrium state at the inlet, absorption starts only when the temperature at the interface has started to decrease.

Overall the following assumptions have been made:

- 2-dimensional geometry (no changes in lateral direction)
- Constant pressure throughout the entire film
- Heat of sorption solely set free at the interface (no heat of mixing)
- No transfer of heat or momentum across the free interface
- Negligible change in temperature caused by dissipation throughout the film
- Negligible diffusion and heat conduction in flow direction as compared to convection
- Negligible vapor pressure of the solvent
- Incompressible ideal fluid with constant thermo-physical properties
- Steady state

## 2.1 Governing Equations

As we simultaneously assume (a), (h), and (i), the differential continuity equation may be written as

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

The momentum transfer is described using the simplifications introduced by Prandtl and known as boundary layer approximation. It reads

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \quad (2)$$

The film flow is not yet fully described by Eq. (1) and (2) because the mass flux changes and the film thickness  $\delta$  is only known at the inlet, but unknown further downstream. Since the film thickness changes through acceleration or deceleration as well as due to absorption, the local overall mass balance at flow coordinate  $x$  is used as additional information; it links the momentum transfer to the mass transfer. The overall mass balance is

$$\int_0^{\delta} \rho u \, dy + \dot{m}_{\text{abs}} \, dx = \int_0^{\delta+dx} \rho u \, dy \quad (3)$$

In order to determine the absorbed mass, the temperature and composition profile has to be known. To resolve the distribution of mass fraction, a component balance is necessary since two components are present within the film. The flux of the absorbate or absorbent, respectively, can be convective as well as diffusive. As stated in assumption (f), diffusion in flow direction is neglected as compared to convection and it holds that

$$u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} + v \frac{\partial \xi_A}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial y^2} \quad (4)$$

Since the absorbent is assumed to be non-volatile one, a convective back flow from the interface to the bulk film flow is induced. In the model unidirectional diffusion is accounted for by the velocity  $v$ . It also shows up in the boundary condition as can be seen later.

The longitudinal convective heat transport has to equal the conductive and diffusive transport transversal to the film flow. Based on assumptions (c) and (e) to (i), the energy balance can be simplified. The enthalpy of the solution is modeled as an ideal pure liquid with no dependence on composition:

$$dh = c_p dT + \frac{dp}{\rho} \quad (5)$$

Assuming additionally constant pressure during the absorption process (b), the change in enthalpy is a function

of the liquid's temperature only. The partial differential equation for the energy transport is obtained as

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6)$$

### 2.3 Initial and Boundary Conditions

In order to solve the problem, initial and boundary conditions have to be determined. Assuming a homogenous temperature and mass fraction at the inlet of the film leads to

$$T(x=0, y) = T_0; \xi_A(x=0, y) = \xi_{A,0} \quad (7)$$

The assumption of negligible shear stress at the liquid vapor interface is stated in Eq. (8). The 'no slip' conditions at the wall lead to Eq. (9).

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=\delta(x)} = 0 \quad (8)$$

$$u(x, y=0) = 0, v(x, y=0) = 0 \quad (9)$$

As additional boundary conditions at the wall a constant temperature and no mass flux is given by Eqs. (10) and (11), respectively.

$$T(x, y=0) = T_w \quad (10)$$

$$\dot{m}_A(x, y=0) = \rho v(x, y=0) \xi_A(x, y=0) + \rho D \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (11)$$

Since the velocity  $v$  is zero at the wall (see Eq. (9)), the boundary Eq. (11) becomes

$$\dot{m}_A(x, y=0) = \rho D \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (12)$$

At the interface, the absorbed mass flux is given by

$$\dot{m}_A(x, y=\delta(x)) = \frac{\rho D}{1 - \xi_A(x, y=\delta(x))} \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} \quad (13)$$

Eq. (13) allows for unidirectional diffusion in the film and is derived in detail in [6, 7].

Finally, heat and mass transfer have to be coupled. Within this model this occurs at the free interface only. First, an equilibrium state (Eq. (14)) is assumed. Then, an energy balance at the interface (Eq. (15)) is applied to link both the temperature and the mass fraction profile:

$$T(x, y=\delta(x)) = T_{eq}(p, \xi_A(x, y=\delta(x))) \quad (14)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = \dot{m}_A(x, y=\delta(x)) \Delta h_{abs} \quad (15)$$

The absorbed mass flux  $\dot{m}_A$  is given by Eq. (13) and also represents the link to the velocity field (see Eq. (3)). The heat of sorption  $\Delta h_{abs}$  is determined using the concept of partial molar quantities. The data used to determine the properties are taken from [8]. It is calculated with Eq. (16) for a typical point of operation and just added to the latent heat of condensation. So it is disregarded in the film as stated before.

$$\Delta h_{abs} = h_V - \left( h_L + (1 - \xi_A) \left. \frac{\partial h_L}{\partial \xi_A} \right|_{p,T} \right) \quad (16)$$

### 2.4 Flow Conditions

The average film velocity is approximately  $0.1 \text{ m s}^{-1}$ . The corresponding Reynolds number calculated with the film thickness  $\delta$  and the average longitudinal velocity  $\bar{u}$  is  $Re = 10$ . According to [9], starting with Reynolds numbers in the range of 3 to 6, waves may evolve at the surface of a film. Therefore, a closer look at the assumption of laminar flow is necessary.

The film number is determined by

$$K_f^{1/10} = \left( \frac{\rho \sigma^3}{\mu^4 g} \right)^{1/10} \quad (17)$$

Several critical Reynolds numbers have been defined to classify five flow regimes as follows [10]:

Fully laminar region:	$Re_{crit} \leq 0.47 K_f^{1/10}$
First transition region:	$0.47 K_f^{1/10} \leq Re_{crit} \leq 2.2 K_f^{1/10}$
Stable wave region:	$2.2 K_f^{1/10} \leq Re_{crit} \leq 75$
Second transition region:	$75 \leq Re_{crit} \leq 400$
Fully turbulent region:	$Re_{crit} \geq 400$

For the surface tension  $\sigma$  of lithium bromide solution, a range of values can be found mainly depending on temperature, and mass fraction. The values range from approximately  $\sigma = 30 \text{ mN m}^{-1}$  to roughly  $\sigma = 90 \text{ mN m}^{-1}$  [11, 12]. The properties of Tab. 2 lead to values for  $K_f^{1/10}$  in the range  $6.1 \leq K_f^{1/10} \leq 8.5$ . Hence, the critical Reynolds numbers for the fully laminar region are in the range of  $2.9 \leq Re_{crit} \leq 4$ , depending on the surface tension  $\sigma$  of lithium bromide solution. Consequently, the first transition region is between critical Reynolds numbers of  $2.9 \leq Re_{crit} \leq 13.4$  for lithium bromide solution with low a surface tension and between  $4 \leq Re_{crit} \leq 18.7$  for lithium bromide solution with a high surface tension. Since the conditions chosen lead to a Reynolds number of  $Re = 10$ , the flow regime may be classified as in the first transition region. The Reynolds number may be al-

so defined using the longitudinal coordinate  $x$  instead of the film thickness  $\delta$ . This allows estimating the distance at which waves are expected to develop. Turbulences are expected to occur for Reynolds numbers between  $3.2 \cdot 10^5 < Re_x < 3 \cdot 10^6$  [13]. With the conditions chosen, waves that affect heat and mass transfer are expected to occur beyond 0.20 m flow distance. So, due to the short flow length of up to only 0.10 m, the film may still be classified as laminar.

Having said this, implementing a fully developed entrance flow profile in the model described above is straightforward. The Nusselt solution is used as initial condition.

$$u(x=0, y) = \frac{\rho g \delta^2}{\mu} \left( \frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{2\delta^2} \right) \quad (19)$$

Since the thickness of the film may change due to absorption a slight development of the velocity profile occurs once the temperature decreases at the interface [7].

Alternatively to Eq. (19), also a constant entrance velocity will be used. In this case, the Nusselt profile develops after the film has touched the wall:

$$u(x=0, y) = u_0 \quad (20)$$

The entrance velocity  $u_0$  is chosen such that the same mass flux of solution as in the case of the entrance with Nusselt profile is achieved.

### 3 Numerical Solution

The presented set of equations is solved by utilizing a Newton-Raphson scheme for the finite difference formulation of the governing equations. The thickness of the film is discretised by 600 non-equidistant steps across the film (in  $y$ -direction). Towards the wall and the interface, the distance between grid points has been reduced since the gradients adjacent to wall and phase boundary are expected to be large. The function used to determine the transversal grid spacing is a scaled Gaussian function with its peak in the middle of the film. The grid spacing in flow direction may vary as well and is adjusted depending on the considered overall length of the film flow. More details regarding the discretization and grid function including grid independence can be found in [7]. The solving procedure is depicted in Fig. 2.

As set values the accuracies for the Newton-Raphson iterations and the coupling loop have to be given. Next, the inlet conditions, namely, the initial mass flow, velocity, pressure, wall and solution temperature as well as mass fraction have to be determined. Now the velocity distribution of the second horizontal row of nodes is computed in the first Newton iteration with the inlet values as first guess. Subsequently, based on this velocity field the temperature

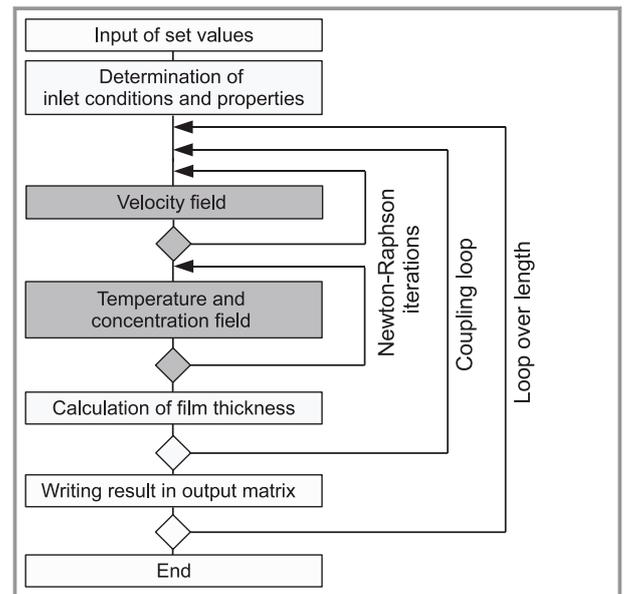


Figure 2. Schematic of the program.

and mass fraction distribution is iterated in the second Newton iteration. Once the temperature and concentration field is determined, the calculation of the thickness of the film is conducted based on Eq. (3). The final step within the coupling loop is a comparison of the last two iteration values for temperature, mass fraction, velocities and thickness of the film. If the residuals are above the set accuracy, the last iteration values are used to start with the computation of the velocity field, again followed by the iteration of the temperature and mass fraction profile, and calculation of the thickness of the film. The coupling loop is repeated until all residuals are below the set accuracies and Eq. (3) is fulfilled. If convergence is not achieved within 1000 loops, an error message will be shown. The coupling loop offers possible extension of the model for variable properties. If the residual of each of these values is below the set accuracy, the result is written into an output matrix and the subsequent row of nodes is calculated using the previous result as guess values. The values used for the following results are provided in Tab. 1.

The properties of lithium bromide solution for the chosen inlet temperature and mass fraction as stated in Tab. 1 are shown in Tab. 2. The equilibrium temperature as a function of mass fraction and pressure is stated in [14].

### 4 Results

The results are first shown for a fully developed flow at the inlet. Later, a homogenous velocity at the inlet is assumed and the hydrodynamic development is analyzed.

**Table 1.** Input values and set parameters.

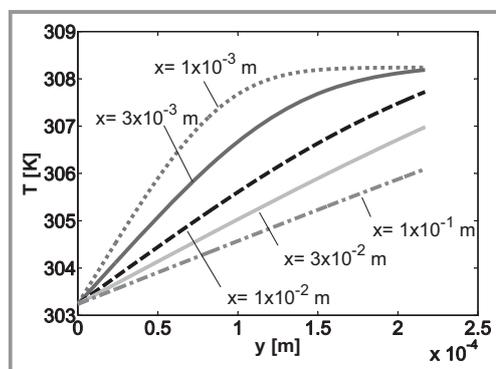
Parameter	Value
Number of transversal nodes $n$	600
Length [m]	0.1
Inlet velocity (homogenous flow) [m s <sup>-1</sup> ]	0.31
Inlet mass flow [kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	0.028
Pressure [Pa]	1500
Inlet mass fraction [-]	0.50
Inlet temperature (saturated) [K]	308.24
Wall temperature [K]	303.24
Gravity constant [m s <sup>-2</sup> ]	9.80665
Accuracy (longitudinal velocity) [m s <sup>-1</sup> ]	10 <sup>-12</sup>
Accuracy (transversal velocity) [m s <sup>-1</sup> ]	10 <sup>-10</sup>
Accuracy (temperature) [K]	10 <sup>-7</sup>
Accuracy (mass concentration) [-]	10 <sup>-10</sup>
Accuracy (film thickness) [m]	10 <sup>-12</sup>

**Table 2.** Properties of lithium bromide solution for inputs according to Tab. 1.

Parameter	Value
$\lambda$ [W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	0.394
$D$ [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	1.53 · 10 <sup>-9</sup>
$c_p$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	2149
$\mu$ [Pa s]	2.76 · 10 <sup>-3</sup>
$\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	1522
$\Delta h_{\text{abs}}$ [J kg <sup>-1</sup> ]	2557 · 10 <sup>3</sup>

#### 4.1 Fully Developed Flow at the Inlet

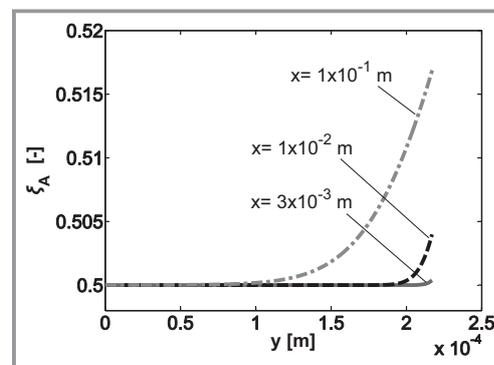
In Fig. 3 the temperature profiles across the film are plotted for varying flow length  $x$ . The temperature gradients deve-



**Figure 3.** Temperature profiles across the film for a fully developed flow at the inlet at various flow lengths  $x$ .

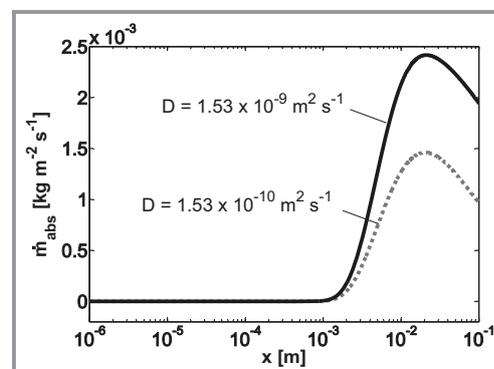
lop from the wall ( $y = 0$ ) towards the interface. Up to a flow distance of  $x = 1 \cdot 10^{-3}$  m, the temperature at the interface ( $y = \delta$ ) remains at the inlet value. At a flow distance of approximately  $x = 3 \cdot 10^{-3}$  m, the temperature gradient has arrived at the interface. Onwards from there, the interface temperature decreases ( $x = 1 \cdot 10^{-2}$  m) and the temperature gradient at the interface increases while the temperature distribution evolves into an almost linear profile. Once the temperature profile is fully developed (at  $x = 3 \cdot 10^{-2}$  m), the respective gradient at the interface decreases again.

The mass fraction profiles are depicted in Fig. 4. At the inlet a homogeneous distribution of water mass fraction is given ( $\xi_A = 0.5$ ). The gradient of mass fraction develops from the interface as soon as the temperature starts decreasing there. At a flow distance of  $x = 3 \cdot 10^{-3}$  m, a slight increase in water content is noticeable and due to absorption, the water mass fraction increases constantly with increasing flow distance.



**Figure 4.** Mass fraction profiles across the film for fully developed velocity at the inlet at various flow lengths  $x$ .

Next the absorbed mass flux is plotted in Fig. 5 over the flow distance of the film in logarithmic scale using Eq. (13). For a subsequent simulation run, the mass diffusivity  $D$  of lithium bromide has been reduced by a factor of ten. At small flow length in both cases no mass is absorbed since the lithium bromide solution is in equilibrium state. As can



**Figure 5.** Absorbed mass flux over flow distance  $x$  for two different mass diffusivities and a fully developed velocity.

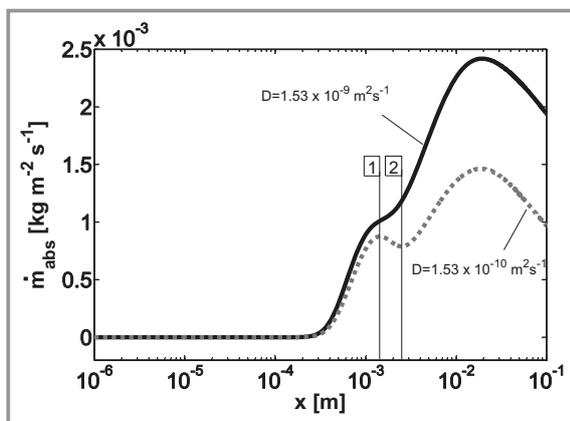
be seen in Fig. 5, for both diffusivities the onset of absorption occurs at approximately  $x = 1 \cdot 10^{-3}$  m.

A lower mass diffusivity by a factor of 10 leads to a lower mass flux absorbed (dotted line) by a factor of about 2 only due to the additional effect of heat transfer resistance. Both curves show similar behavior. At the beginning of absorption the local mass flux increases and shows a maximum at roughly  $x = 2 \cdot 10^{-2}$  m which is in the order of magnitude of a typical flow length over a tube. The maximum occurs in a domain where the temperature profile exhibits a steep gradient but is not fully developed yet. As seen earlier (Fig. 3) the temperature gradient at the interface decreases once the temperature profile is fully developed. The heat flow is reduced and consequently absorption is also reduced beyond a flow distance of  $x = 3 \cdot 10^{-2}$  m. The overall mass absorbed over the considered flow length of 0.1 m accumulates to  $3.13 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup> for lithium bromide. If the mass diffusivity is reduced by a factor of 10, the accumulated mass flux is reduced by 45% to a value of  $1.75 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>. This effect is pronounced since a short flow length is considered and a low mass diffusivity increases the transfer resistance. If the flow length was long enough to decrease the temperature of the entire film nearly to the one of the wall, the overall mass fluxes absorbed would become equal again.

#### 4.2 Homogenous Velocity at the Inlet

When a homogenous velocity is assumed at the inlet, the overall mass absorbed over a flow length of 0.1 m accumulates to  $3.20 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup> for lithium bromide solution. If the mass diffusivity is reduced by a factor of 10, the accumulated mass flux is reduced by 44% to a value of  $1.79 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>.

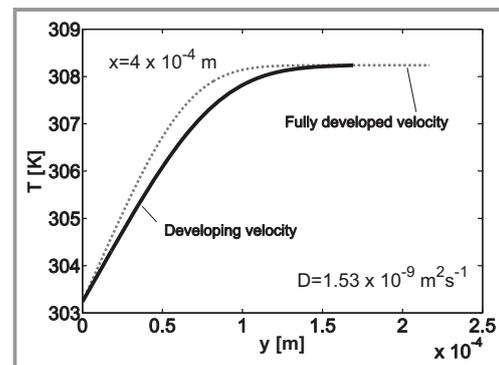
When comparing the absorbed mass flux for a homogenous velocity at the inlet with the one computed with a fully developed velocity at the inlet significant differences occur at the beginning of the absorption process (see Fig. 6 in comparison to Fig. 5).



**Figure 6.** Absorbed mass flux over flow distance  $x$  for two different mass diffusivities and a constant velocity at the inlet.

A constant velocity at the inlet leads to an earlier onset of absorption. When both boundary layers – hydrodynamic and thermal one – develop simultaneously, absorption starts at a flow distance of around  $x = 4 \cdot 10^{-4}$  m, whereas for a fully developed velocity profile absorption starts at approximately  $x = 1 \cdot 10^{-3}$  m. The reason is the temperature profile at the very beginning.

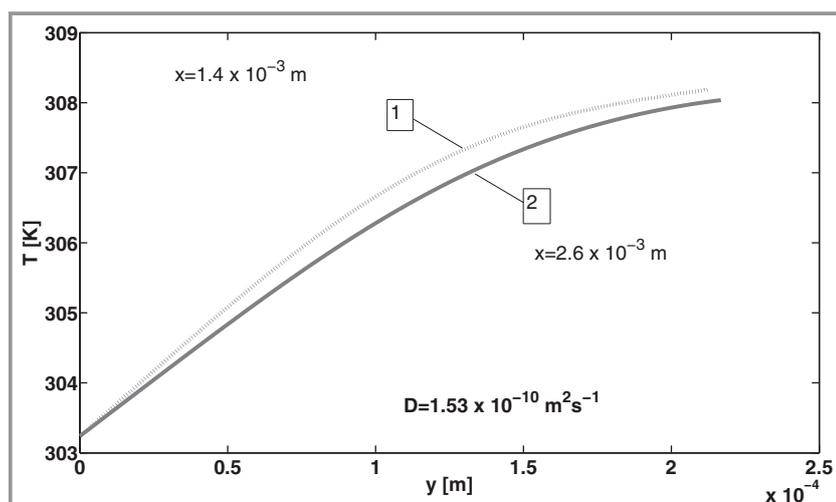
Fig. 7 depicts the temperature profiles at  $x = 4 \cdot 10^{-4}$  m for both the fully developed velocity profile at the inlet and the developing velocity with a mass diffusivity of lithium bromide solution ( $D = 1.53 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>). Since the velocities are still developing at this flow length, the film is thinner which leads to faster heat transfer. Moreover, convection towards the interface occurs due to the deceleration of the film. Therefore, the temperature profile is faster developed and a temperature gradient occurs at the interface (black solid line); the interface temperature will start to decrease and absorption occurs. In contrast to this, the temperature profile for a fully developed flow at the inlet exhibits no temperature gradient at the interface yet (thin dotted line).



**Figure 7.** Comparison of temperature profiles at  $x = 4 \cdot 10^{-4}$  m for developing velocity and fully developed velocity profile at the inlet both with  $D = 1.53 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>.

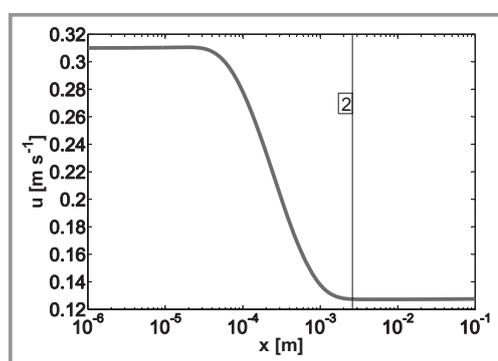
As can be further seen in Fig. 6, once the process has started the mass flux increases steeply but declines somewhat after a short flow distance (beyond  $x = 1 \cdot 10^{-3}$  m). The effect becomes more pronounced when the mass diffusivity is reduced. Therefore, in Fig. 8, the temperature profiles are analyzed for a reduced mass diffusivity of  $D = 1.53 \cdot 10^{-10}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup> at a flow distance marked with the tags 1 and 2 in Fig. 6.

In Fig. 8, at  $x = 1.4 \cdot 10^{-3}$  m (tag 1), the temperature profile is only gently inclined at the interface since the mass diffusivity is low and therefore only little heat is released there. Both the temperature profile and the hydrodynamic boundary layer are not fully developed yet and the convection towards the interface causes the thickness of the film to grow and the temperature profile to be stretched. This concurrence leads to an even smaller temperature gradient at  $x = 2.6 \cdot 10^{-3}$  m (tag 2) and consequently to a reduced mass flux absorbed. However, as can be seen from Fig. 9, the development of the hydrodynamic boundary layer ends at

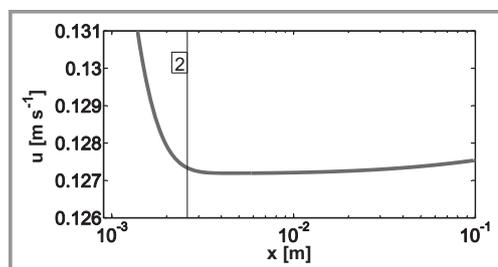


**Figure 8.** Comparison of temperature profiles at  $x = 1.4 \cdot 10^{-3}$  m (tag 1) and  $x = 2.6 \cdot 10^{-3}$  m (tag 2) for developing velocity and reduced mass diffusivity  $D = 1.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

approximately  $x = 2.6 \cdot 10^{-3}$  m (tag 2). Fig. 9 depicts the longitudinal velocity  $u$  at the interface over the flow distance. At  $x = 2.6 \cdot 10^{-3}$  m (tag 2), the interface velocity has reached an almost constant value. Due to absorption of mass, only a slight acceleration occurs further downstream as can be seen in Fig. 10 with enlarged scales.



**Figure 9.** Longitudinal velocity  $u$  at the interface over flow distance  $x$ .



**Figure 10.** Detail of longitudinal velocity  $u$  at the interface beyond flow distance of tag 2 of Fig. 9.

## 5 Conclusion

A model describing a laminar falling film with simultaneous heat and mass transfer has been presented. The model accounts for developing film thickness as well as uni-directional diffusion. The model has been solved using a finite difference approximation of the governing equations. Changing fluid properties may be accounted for but have been disregarded in this basic analysis.

When the hydrodynamic boundary layer develops simultaneously to the thermal one, absorption starts at a shorter flow length than for an entrance with a fully developed velocity profile. In other words, the absence of convective heat transfer in case of a fully developed velocity profile leads to a later (at larger

flow length) onset of absorption as compared with a developing hydrodynamic.

Although the initial increase in absorbed mass flux is pronounced, it does not grow steadily when a developing hydrodynamic is considered. After the process has started, the mass flux increases steeply but declines somewhat after a short flow distance (beyond  $x = 1 \cdot 10^{-3}$  m). The effect becomes more pronounced when the mass diffusivity is small. It was shown that the concurrence of hydrodynamics and heat transfer causes this effect. When the velocity profile is almost fully developed but the temperature profile is not, the increase in film thickness results in a slightly smaller temperature gradient at the interface. Since heat and mass transfer are coupled, this leads to a reduced mass flux absorbed within a short domain.

In general, over a flow length of 0.03 m the earlier onset of absorption results in an about 10 % higher accumulated mass flux when the developing hydrodynamic is accounted for. The effect is stronger when the mass diffusivity or the considered flow length is small. Especially in these cases laminar film models which do not account for changes in film thickness and flow velocity tend to underestimate the absorbed mass flux.

### Symbols used

$a$	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$	thermal diffusivity
$C$	$[-]$	constant
$c_p$	$[\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}]$	specific heat capacity
$D$	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$	mass diffusivity
$g$	$[\text{m s}^{-2}]$	gravity constant
$h$	$[\text{J kg}^{-1}]$	specific enthalpy
$\Delta h$	$[\text{J kg}^{-1}]$	heat of sorption
$K_f$	$[-]$	film number
$\dot{m}$	$[\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}]$	mass flux

$p$	[Pa]	pressure
Re	[-]	Reynolds number, $\frac{\rho \bar{u} \delta}{\mu}$
Re <sub>x</sub>	[-]	Reynolds number, $\frac{\rho \bar{u} x}{\mu}$
$T$	[K]	temperature
$u$	[m s <sup>-1</sup> ]	longitudinal film velocity
$v$	[m s <sup>-1</sup> ]	transversal film velocity
$x$	[m]	longitudinal coordinate
$y$	[m]	transversal coordinate

$v$	vapor
W	wall

### Greek Symbols

$\xi$	[-]	mass fraction
$\rho$	[kg m <sup>-3</sup> ]	density
$\delta$	[m]	film thickness
$\sigma$	[mN m <sup>-1</sup> ]	surface tension
$\mu$	[Pa s]	dynamic viscosity
$\lambda$	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	thermal conductivity

### Indices

0	initial
A	absorbate
abs	absorption
crit	critical
eq	equilibrium with inlet conditions
if	interface
L	liquid

### References

- [1] J. Grünig, E. Lyagin, S. Horn, T. Skale, M. Kraume, *Chem. Eng. Sci.* **2012**, *69*, 329 – 339. DOI: 10.1016/j.ces.2011.10.049
- [2] J. D. Killion, S. Garimella, *Int. J. Refrig.* **2001**, *24*, 755 – 797. DOI: 10.1016/S0140-7007(00)00086-4
- [3] M. A. Islam, A. Miyarab, T. Setoguchib, *Int. J. Refrig.* **2009**, *32*, 1597 – 1603. DOI: 10.1016/j.ijrefrig.2009.06.007
- [4] C. Albert, H. Marschall, D. Bothe, *Int. J. Heat Mass Transf.* **2014**, *69*, 343 – 357. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.10.025
- [5] V. Subramaniam, S. Garimella, *Int. J. Refrig.* **2009**, *32*, 607 – 626. DOI: 10.1016/j.ijrefrig.2009.02.008
- [6] E. Hofmann, H. C. Kuhlmann, *Int. J. Heat Mass Transf.* **2012**, *55*, 7686 – 7697. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.07.074
- [7] M. Mittermaier, F. Ziegler, *J. Heat Mass Transf.* **2015**, submitted.
- [8] H. Löwer, *Ph.D. Thesis*, Technische Hochschule Karlsruhe, **1960**.
- [9] M. Kraume, *Transportvorgänge in der Verfahrenstechnik*, Springer, Heidelberg **2012**.
- [10] S. Ishigai, S. Nakanisi, T. Koizumi, Z. Oyabu, *Bull. JSME*, **1972**, *15*, 594 – 602.
- [11] W. Yao, H. Bjurstroem, F. Setterwall, *J. Chem. Eng. Data* **1991**, *36*, 96 – 98. DOI: 10.1021/je00001a029
- [12] Z. Yuan, K. E. Herold, *Appl. Therm. Eng.* **2001**, *21*, 881 – 897. DOI: 10.1016/S1359-4311(00)00088-0
- [13] W. Polifke, J. Kopitz, *Wärmeübertragung*, Pearson, Hallbergmoos **2009**.
- [14] M. Mittermaier, P. Schulze, F. Ziegler, *Int. J. Heat Mass Transf.* **2014**, *70*, 990 – 1002. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.11.075

## 4.4 Einfluss der einseitigen Diffusion

In diesem bisher unveröffentlichten Abschnitt wird durch einen Vergleich zweier Modellvorstellungen der Einfluss der einseitigen Diffusion veranschaulicht. Der Vergleich erfolgt anhand der absorbierten Massenstromdichten, die in der Praxis oft als entscheidende Größe betrachtet werden. In beiden Modellen wird von einem voll entwickelten Geschwindigkeitsprofil (Nußeltprofil) und variablen Stoffwerten ausgegangen.

Die Unterschiede der Modellvorstellungen sind:

- 1) einseitige Diffusion an der Phasengrenzfläche und variable Filmdicke
- 2) äquimolare Diffusion (auch an der Grenzfläche) und konstante Filmdicke

In **Modell 1** wird der Einfluss der einseitigen Diffusion berücksichtigt. Durch die einseitige Diffusion wird eine transversale Geschwindigkeitskomponente induziert (siehe Abschnitt 4.2), die den Stofftransport verstärkt. Um diese Geschwindigkeitskomponente und ihren Einfluss auf den Stofftransport nicht zu verfälschen, wird eine variable Filmdicke zugelassen. Das heißt, in Modell 1 steigt die Filmdicke auf Grund des absorbierten Massenstroms leicht an.

In **Modell 2** wird äquimolare Diffusion angenommen. Das heißt, in dieser Modellvorstellung kann LiBr über die Phasengrenzfläche hinweg transportiert werden. Es treten deshalb in diesem Modell keine transversalen Geschwindigkeiten auf, weshalb als Konsequenz auch die Filmdicke konstant gehalten wird.

### 4.4.1 Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht

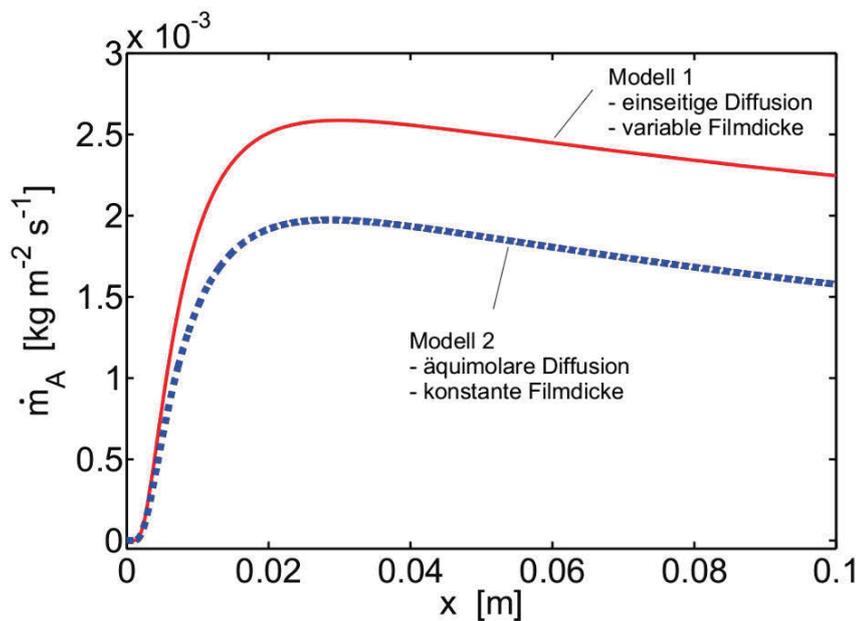
Zunächst erfolgt der Vergleich für die Aufgabe einer Lithiumbromidlösung im Gleichgewichtszustand. Eine thermische Grenzschicht bildet sich von der Wand her aus wie es beispielsweise in Mittermaier u. Ziegler (2017, Abb. 14) zu sehen ist. Die Bedingungen sind Tabelle 4.2 zu entnehmen.

Das Geschwindigkeitsprofil in Modell 1 verändert sich durch die Absorption und steigende Filmdicke nur geringfügig im Verlauf der betrachteten Lauflänge. Dies ist auch in Mittermaier u. Ziegler (2017, Abb. 8 und 9) zu erkennen. In Modell 2 ändert sich das Profil per definitionem nicht.

Tabelle 4.2: Bedingungen für Modell 1 und 2 für den Phasengleichgewichtsfall

Lauflänge $L$	0,1m
Aufgegebener Massenstrom $\dot{\Gamma}$	0,036kg/(ms)
Druck $p$	1500Pa
Massenanteil am Eintritt $\xi_{A,0}$	0,50kg/kg
Gleichgewichtstemperatur $T_{eq}(\xi_{A,0}, p)$	308,24 K
Filmtemperatur am Eintritt $T_0$	308,24K
Wandtemperatur $T_W$	302,24K

Bei beginnendem Absinken der Phasengrenztemperatur setzt die Absorption an der Oberfläche ein. Dies ist in Abbildung 4.5 zu erkennen. Nach Beginn der Absorption steigt die absorbierte Massenstromdichte  $\dot{m}_A$  zunächst stark an und nimmt nach voller Entwicklung des Temperaturprofils über den weiteren Verlauf  $x$  etwas ab.

Abbildung 4.5: Lokal absorbierte Massenstromdichte  $\dot{m}_A$  bei Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht über Lauflänge  $x$  für Modell 1 und Modell 2

Die absorbierte Massenstromdichte des Modells 2 (gepunktete Linie) liegt unter sonst gleichen Umständen deutlich unter derjenigen des Modells 1. Das heißt, durch den Mechanismus der einseitigen Diffusion wird deutlich mehr absorbiert, obwohl in diesem Modell die Filmdicke leicht ansteigt, was den Stoffübergang prinzipiell etwas reduziert (siehe auch Abschnitt 4.2, Mittermaier u.

Ziegler (2017, Abb. 7)).

Über eine Lauflänge von 10 cm ergibt sich für Modell 1 eine kumulierte Massenstromdichte von  $3,41 \cdot 10^{-4} \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ . Im Falle von Modell 2 sind es über die gleiche Lauflänge nur  $2,52 \cdot 10^{-4} \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ . Damit wird die absorbierte Menge durch Modell 2 um 26 % unterschätzt.

Über eine Lauflänge von 3 cm ist die kumulierte Massenstromdichte  $8,55 \cdot 10^{-5} \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$  für Modell 1 und  $6,51 \cdot 10^{-5} \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$  für Modell 2. Damit wird durch Modell 2 die auf einem Rohr mit 20 mm Durchmesser absorbierte Menge um circa 24 % unterschätzt.

#### 4.4.2 Unterkühlte Lösungsaufgabe

Nun erfolgt ein ähnlicher Vergleich mit unterkühlter Lithiumbromidlösung. Die Unterkühlung am Eintritt soll 3 K betragen (Filmtemperatur am Eintritt  $T_0$  305,24 K). Die Unterkühlung der Lösung führt dazu, dass sich eine thermische Grenzschicht von beiden Seiten (aus Richtung der Wand und der Oberfläche) entwickelt. Die weiteren Daten sind wie in Tabelle 4.2 aufgeführt.

Durch die Unterkühlung am Eintritt wird von Anfang an Wasserdampf absorbiert, wodurch sich die beiden Verläufe der absorbierten Massenstromdichte auch bei kurzen Lauflängen  $x$  schon unterscheiden. Deshalb ist der Verlauf der lokal absorbierten Massenstromdichte in Abbildung 4.6 halb-logarithmisch dargestellt. Die lokal absorbierte Massenstromdichte in Modell 1 ist immer größer als die des Modells 2, was wieder am Mechanismus der einseitigen Diffusion liegt. Durch die halb-logarithmische Darstellung erscheint dieser Unterschied über kurze Lauflängen besonders ausgeprägt. Tatsächlich nehmen die Unterschiede in den absorbierten Massenstromdichten bei größeren Lauflängen etwas ab. Dies liegt an der Koppelung zwischen Wärme- und Stofftransport. Die durch einseitige Diffusion verstärkte Absorption hat eine erhöhte Freisetzung von Absorptionswärme zur Folge. Da die an der Filmoberfläche frei werdende spezifische Phasenwechselenthalpie ( $\Delta h_{abs} \approx 2500 \text{kJ/kg}$ ) sehr groß ist, ist die Unterkühlung des Films innerhalb einer kurzen Lauflänge abgebaut und der Prozess hängt maßgeblich von der weiteren Wärmeübertragung im Film ab. Diese Wärmeübertragung hängt wiederum von der transversalen Wärmeleitung im Film ab, da in Modell 1 nur sehr geringe Konvektionsströme in diese Richtung ( $y$ ) auftreten und in Modell 2 durch die getroffenen Annahmen gar

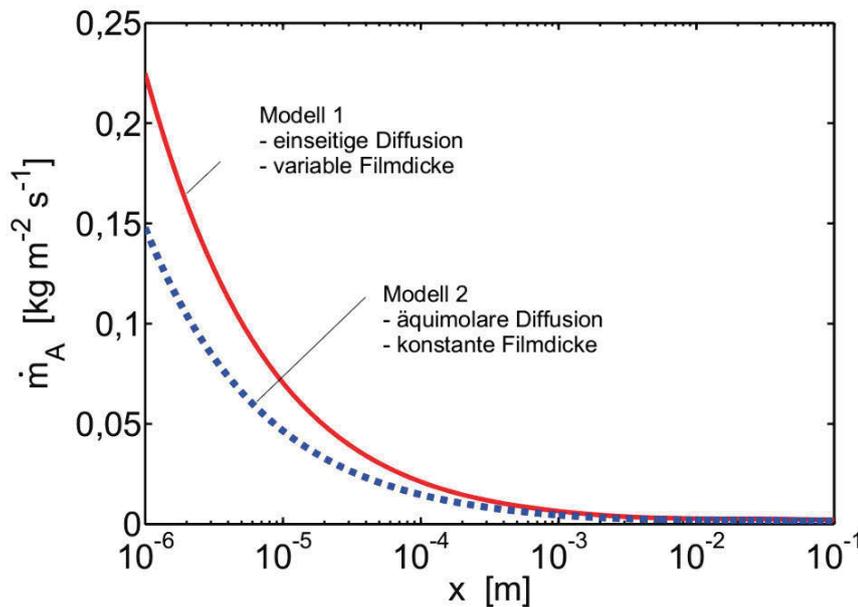


Abbildung 4.6: Lokal absorbierte Massenstromdichte  $\dot{m}_A$  bei unterkühlter Lösungsaufgabe über Lauflänge  $x$  für Modell 1 und Modell 2

keine auftreten können. Dadurch ergeben sich im weiteren Verlauf (in Abb. 4.6 ab  $x > 10^{-3}m$ ) Unterschiede zwischen den Modellen, welche vergleichbar zu Abbildung 4.5 sind.

Über eine Lauflänge von 10 cm ergibt sich für Modell 1 eine kumulierte Massenstromdichte von  $3,92 \cdot 10^{-4} kg m^{-1} s^{-1}$ . Für Modell 2 sind es über die gleiche Lauflänge nur  $2,82 \cdot 10^{-4} kg m^{-1} s^{-1}$ . Damit wird die absorbierte Menge durch Modell 2 um 28 % unterschätzt.

Eine kürzere Lauflänge von 3 cm hat für Modell 1 die kumulierte Massenstromdichte von  $1,45 \cdot 10^{-4} kg m^{-1} s^{-1}$  und von  $1,07 \cdot 10^{-4} kg m^{-1} s^{-1}$  für Modell 2 zur Folge. Damit wird durch Modell 2 die über eine kurze Lauflänge absorbierte Menge um circa 26 % unterschätzt.

Wie bereits erwähnt, entwickelt sich bei der unterkühlten Lösungsaufgabe eine thermische Grenzschicht an der Wand sowie eine an der Oberfläche. Die Temperatur- und Massenanteilsprofile sind dafür beispielsweise in Abschnitt 5.3.1 der Veröffentlichung Mittermaier u. Ziegler (2017, Abb. 17ff.) zu finden. Die dortigen Ergebnisse sind jedoch für ein sich entwickelndes Geschwindigkeitsprofil dargestellt, weshalb die Filmdicke stärker ansteigt als im hier diskutierten Vergleich der Modelle (siehe Anhang A.2) und die ausgeprägte

Konvektion in transversaler wie in longitudinaler Richtung zu einem erhöhten Stofftransport beiträgt. Die Werte für die absorbierte Massenstromdichte  $\dot{m}_A$  aus Mittermaier u. Ziegler (2017, Kap. 5.3.1) sind deshalb höher als die vorherigen Werte.

Um dies zu zeigen, sind in Abbildung 4.7 die transversalen Geschwindigkeiten  $v$  in der Nähe des Einlasses ( $x = 1 \cdot 10^{-5} m$ ) über die Filmdicke  $\delta$  bzw. die transversale Koordinate  $y$  aufgetragen.

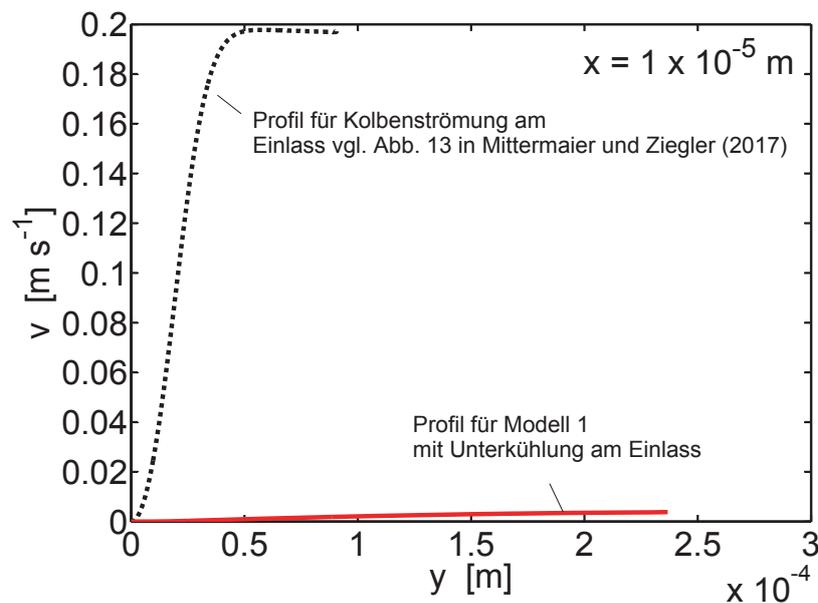


Abbildung 4.7: Transversale Geschwindigkeiten  $v$  über die Filmdicke  $\delta$  bei unterkühlter Lösungsaufgabe bei einer Lauflänge  $x = 1 \cdot 10^{-5} m$  für Modell 1 mit Kolbenströmung (gepunktete Linie) und Nußelt-Profil (durchgezogene Linie) am Eintritt

Im Falle einer Kolbenströmung ist der Film anfangs deutlich dünner, da die Anströmgeschwindigkeit ( $u_0 = 0,31 m/s$ ) größer ist als die mittlere Geschwindigkeit der voll entwickelten Strömung ( $\bar{u} = 0,1 m/s$ ). Außerdem zeigt Abbildung 4.7, dass die transversale Geschwindigkeit und damit der konvektive Wärmetransport in Wandnähe in diesem Fall deutlich höher sind als im Fall eines voll entwickelten Geschwindigkeitsprofils (durchgezogene Linie).

## 4.5 Vergleich von Absorption und Desorption

**Zum folgenden Abschnitt gehört der Artikel:**

*Mittermaier, M. ; Ziegler, F.: Theoretical evaluation of absorption and desorption processes under typical condition for chillers and heat transformers, In: International Journal of Refrigeration (2015), Nr. 59, 91 - 101*

Die Veröffentlichung ist bei Elsevier unter:

<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2015.07.015>  
verfügbar.

### 4.5.1 Aufgabenstellung und Ziel

In Abschnitt 4.1 bzw. Mittermaier u. a. (2014) wurden bereits Absorption und Desorption auf gleichem Druck-, Temperatur- und Konzentrationsniveau verglichen. Das Ziel der folgenden Veröffentlichung ist es, einen Vergleich zwischen Absorption und Desorption unter den jeweiligen Bedingungen in Absorptionskälteanlagen und Wärmetransformatoren zu ziehen. Dazu wird zunächst der Einfluss verschiedener Annahmen und Vereinfachungen auf Absorption und Desorption unter gleichem Druck analysiert, um die anschließenden Aussagen unabhängig von den getroffenen Annahmen zu machen. Die Auswirkung werden anhand des kumulierten absorbierten Massenstroms über eine Lauflänge von 10 cm bewertet.

### 4.5.2 Untersuchungen und Ergebnisse

Absorption und Desorption werden für folgende Annahmen untersucht:

- 1) Konstante Filmdicke, konstante Stoffwerte
- 2) Konstante Filmdicke, variable Stoffwerte
- 3) Variable Filmdicke, konstante Stoffwerte
- 4) Variable Filmdicke, variable Stoffwerte

Bei gleichem Druckniveau sind die einzelnen Unterschiede in den kumulierten absorbierten bzw. desorbierten Massenstromdichten klein. Für die Fälle 1 bis

3 ist der absorbierte Massenstrom höher als der desorbierte, im Fall 4 ist es umgekehrt.

In Fall 1 liegt die absorbierte Massenstromdichte ca. 4 % über der desorbierten, was auf den nicht-linearen Zusammenhang zwischen Phasengleichgewichtstemperatur und Massenanteil zurückgeführt werden kann, da andere Einflussfaktoren wie Stoffwerte und Filmdicke konstant gehalten wurden. Bei gleichen treibenden Temperaturdifferenzen  $\Delta T$  führt die Nicht-Linearität der Phasengleichgewichtstemperatur bei der Absorption zu einer größeren Veränderung des Massenanteils  $\Delta \xi$  als bei der Desorption. Dies ist in Abbildung 2 der folgenden Veröffentlichung für einen Druck von 1500 Pa dargestellt.

In Fall 2 wird durch die Variabilität der Stoffwerte die Desorption etwas besser, die Absorption etwas schlechter. Jedoch überwiegt bei vergleichbarem Druckniveau der Effekt der Nicht-Linearität der Phasengleichgewichtstemperatur, weshalb die absorbierte Massenstromdichte um 2,3 % höher als die desorbierte Massenstromdichte ist.

In Fall 3 führt die ansteigende Filmdicke bei der Absorption zu einer leicht reduzierten Massenstromdichte gegenüber Fall 1. Umgekehrt wird durch die abnehmende Filmdicke während der Desorption die Massenstromdichte gegenüber Fall 1 etwas erhöht. Jedoch reicht auch dieser Einfluss nicht aus, um den Effekt der Nicht-Linearität der Phasengleichgewichtstemperatur zu kompensieren. Die absorbierte Massenstromdichte ist in diesem Fall um ca. 3 % höher als die desorbierte.

Erst wenn sowohl variable Filmdicke als auch Stoffwerte (Fall 4) zugelassen werden, ist die desorbierte Massenstromdichte um typischerweise 3 % größer als die absorbierte.

In Killian u. Garimella (2001) wird – wie in der gesamten einschlägigen Literatur – der Absorber als die kritische Komponente im Absorptionskälteprozess bezeichnet. Die Unterschiede bei vergleichbaren Druckniveaus sind jedoch zu gering, um diese Aussage zu bestätigen. Deshalb werden typische Bedingungen für Absorptionskälteanlagen und Wärmetransformatoren festgelegt und das Verhalten unter diesen Bedingungen untersucht. Für den Vergleich wird eine Lauflänge von 10 cm herangezogen, variable Stoffwerte und Filmdicke zugelassen und eine sich entwickelnde Geschwindigkeit angenommen. Die treibende Temperaturdifferenz zwischen Wand und Film  $|T_0 - T_W|$  wurde mit 6 K

festgelegt. Die genauen Bedingungen (Drücke, Temperaturen, Massenanteile) sind in Mittermaier u. Ziegler (2015) dokumentiert.

Wie in Abbildung 4.8 ersichtlich, wird in Absorptionskälteanlagen bei der Desorption auf einem angenommenen Druckniveau von 15.000 Pa deutlich mehr transportiert, als bei der Absorption auf einem Druckniveau von 1.500 Pa. Der Grund dafür ist ein circa um den Faktor 2 erhöhter Diffusionskoeffi-

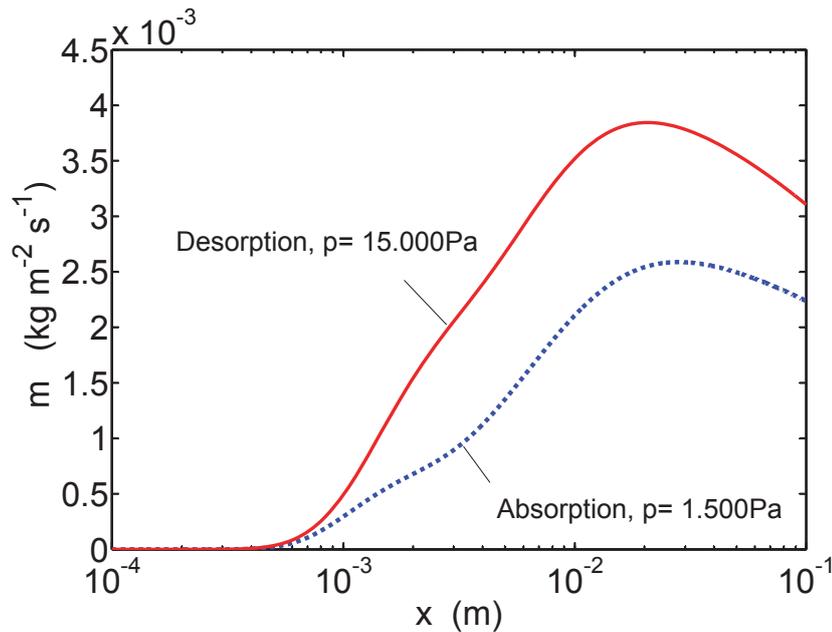


Abbildung 4.8: Vergleich zwischen absorbierten und desorbierten Massenstromdichten für typische Bedingungen in einstufigen Absorptionskälteanlagen (aus Mittermaier u. Ziegler (2015))

zient während der Desorption gegenüber der Absorption. Zudem ist durch die höhere Temperatur während der Desorption die Viskosität ebenfalls circa um den Faktor 2 geringer, was zu einem deutlich dünneren Fallfilm führt, wodurch der notwendige Wärmetransport verbessert wird.

In Wärmetransformatoren wird bei der Absorption auf einem Druckniveau von 40.000 Pa mehr transportiert, als bei der Desorption auf einem Druckniveau von 15.000 Pa. Der Verlauf der transportierten Massenstromdichten ist in Abbildung 4.9 ersichtlich. Vergleicht man Abbildung 4.8 mit 4.9, so fällt auf, dass der Unterschied zwischen ab- und desorbierter Massenstromdichte in einem Wärmetransformator kleiner ausfällt als in einer Absorptionskälteanlage. Das liegt zum einen daran, dass sich für die jeweils gewählten Bedingungen die

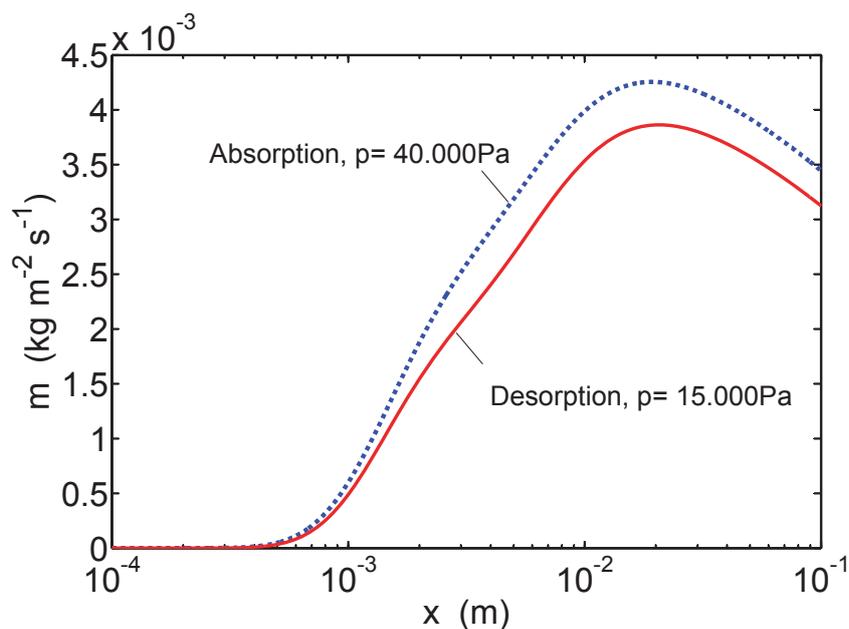


Abbildung 4.9: Vergleich zwischen absorbierten und desorbierten Massenstromdichten für typische Bedingungen in einstufigen Wärmetransformatoren (aus Mittermaier u. Ziegler (2015))

Filmdicken in der Absorptionskälteanlage stärker unterscheiden als im Wärmetransformator. Zum anderen ist für die Absorptionskälteanlage ein Druckverhältnis von 10 zwischen Desorption und Absorption gewählt, während das Druckverhältnis für den Wärmetransformator lediglich bei circa 2,7 liegt.

Die zugehörigen Verläufe des Massenanteils und der Filmdicke sind in der folgenden Veröffentlichung ersichtlich.

### 4.5.3 Zusammenfassung

Zunächst wurden Absorption und Desorption bei gleichem Druckniveau und vier verschiedenen Annahmen verglichen, wobei die einzelnen Unterschiede in der kumulierten absorbierten Massenstromdichte klein sind. Werden Filmdicke und Stoffwerte bzw. jeweils nur eins von beiden konstant gehalten, so ist der absorbierte Massenstrom wenige Prozent höher als der desorbierte. Erst wenn sowohl variable Filmdicke als auch variable Stoffwerte zugelassen werden, ist die desorbierte Massenstromdichte um typischerweise 3 % größer als die absorbierte. Das liegt daran, dass die Transportkoeffizienten für Wärme- und

Stofftransport während der Absorption kleiner werden und zudem die Filmdicke auf Grund der absorbierten Masse und der erhöhten Viskosität ansteigt.

Des Weiteren wurden Absorption und Desorption für typische Bedingungen in einstufigen Absorptionskälteanlagen und Wärmetransformatoren untersucht. Die unterschiedlichen Druck- bzw. Temperaturniveaus zwischen Absorption und Desorption führen zu einem Unterschied in den Stoffeigenschaften. Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , Wärmekapazität  $c_p$  sowie die Dichte  $\rho$  ändern sich dabei im einstelligen Prozentbereich. Die Viskosität  $\mu$  und der Diffusionskoeffizient  $D$  ändern sich circa um den Faktor 2. Durch die reduzierte Viskosität und den erhöhten Diffusionskoeffizienten ist die transportierte Massenstromdichte während der Desorption über die betrachtete Lauflänge von 10 cm um circa 46 % erhöht.

Im Wärmetransformator beeinflussen die Druck- bzw. Temperaturunterschiede bei der Ab- und Desorption ebenfalls die Stoffeigenschaften. Da jedoch in dieser Anwendung die Absorption auf hohem Temperaturniveau stattfindet, ist während dieses Teilprozesses der Diffusionskoeffizient  $D$  erhöht sowie die Viskosität  $\mu$  verringert. Das führt zu einem leicht erhöhten Stoffübergang während der Absorption im Vergleich zur Desorption. Die kumulierte absorbierte Massenstromdichte ist um 10 % höher als die desorbierte. Der geringere Unterschied in der Massenstromdichte über die gleiche Lauflänge ergibt sich daraus, dass für den Wärmetransformator ein kleineres Druckverhältnis zwischen Desorption und Absorption gewählt wurde als in der Absorptionskälteanlage.

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/ijrefrig](http://www.elsevier.com/locate/ijrefrig)

# Theoretical evaluation of absorption and desorption processes under typical conditions for chillers and heat transformers

M. Mittermaier<sup>\*</sup>, F. Ziegler

Institut fuer Energietechnik, Technische Universitaet Berlin, Sekretariat KT 2, Marchstrasse 18, 10587 Berlin, Germany

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 22 April 2015

Received in revised form 4 July 2015

Accepted 14 July 2015

Available online 22 July 2015

### Keywords:

Absorption

Desorption

Property data

Uni-directional diffusion

Heat transfer

Mass transfer

## ABSTRACT

A comparison of absorption and desorption is conducted using a detailed model describing heat and mass transfer. First, the influences of various assumptions have been evaluated. Second, typical conditions for both absorption chillers and heat transformers have been defined. The performance of absorption and desorption processes have been analysed for a flow length of 0.1 m. In an absorption chiller, during desorption, the viscosity is lowered and the mass diffusivity is increased. These circumstances cause a 46% higher transfer rate as compared to absorption. Thus, the overall performance of the process is determined by the absorber component. In a heat transformer, during absorption at an elevated pressure and temperature level, the viscosity is lower and mass diffusivity is higher as compared to desorption. Therefore, the transfer rate of during absorption is 10% higher as compared to desorption. Hence, the desorber performance is somewhat more influential to the overall system performance.

© 2015 Elsevier Ltd and International Institute of Refrigeration. All rights reserved.

## Evaluation théorique des processus d'absorption et désorption sous des conditions caractéristiques pour des refroidisseurs et des transformateurs de chaleur

Mots clés : Absorption ; Désorption ; Données de propriété ; Diffusion unidirectionnelle ; Transfert de chaleur ; Transfert de masse

### 1. Introduction

According to Killion and Garimella (2001) the absorber is the most critical part in an absorption chiller, both in terms of cycle

performance and system cost. In this article we would like to shed some light on the reasons and illustrate circumstances under which a desorber becomes the more restrictive component in an absorption cycle. Therefore, we compare the absorption process with the desorption process under typical

<sup>\*</sup> Corresponding author. Institut fuer Energietechnik, Technische Universitaet Berlin, Sekretariat KT 2, Marchstrasse 18, 10587 Berlin, Germany. Tel.: +49 30 314 25315; Fax: +49 30 314 22253.

E-mail address: [martin.mittermaier@tu-berlin.de](mailto:martin.mittermaier@tu-berlin.de) (M. Mittermaier).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2015.07.015>

0140-7007/© 2015 Elsevier Ltd and International Institute of Refrigeration. All rights reserved.

Nomenclature			
$c_p$	heat capacity ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )	$\delta$	film thickness (m)
$D$	mass diffusivity ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )	$\lambda$	thermal conductivity ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$g$	gravitational acceleration ( $\text{m s}^{-2}$ )	$\mu$	dynamic viscosity (Pa s)
$h$	enthalpy ( $\text{J kg}^{-1}$ )	$\xi$	mass fraction (-)
$\bar{h}$	partial massive enthalpy ( $\text{J kg}^{-1}$ )	$\rho$	density ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\dot{m}$	mass flux ( $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ )	<b>Subscripts</b>	
$p$	pressure (Pa)	$o$	inlet condition
$\dot{q}$	heat flux ( $\text{W m}^{-2}$ )	$abs$	absorption
$T$	temperature (K)	$avg$	average
$u$	longitudinal velocity ( $\text{m s}^{-1}$ )	$A$	absorbate e.g. water in liquid state
$v$	transversal velocity ( $\text{m s}^{-1}$ )	$des$	desorption
$x$	longitudinal coordinate, streamwise (m)	$eq$	equilibrium
$y$	transversal coordinate (m)	$if$	interface
<b>Greek letters</b>		$s$	solution of absorbent e.g. LiBr–H <sub>2</sub> O
$\dot{\Gamma}$	mass flow per unit length ( $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ )	$v$	vapour e.g. steam
$\Delta h_{sor}$	heat of sorption ( $\text{J kg}^{-1}$ )	$w$	wall

conditions for both absorption chillers and heat transformers. We also investigate which typical simplifications and assumptions have an impact and should not be applied any more.

Falling films are often used in absorption chillers and heat pumps. The liquid solution is spread over horizontal tubes and droplets detached from one tube fall on subsequent ones. However, even if the real behaviour may cause local turbulences, most authors simplify the problem and assume a laminar flow regime over an inclined plate. Sometimes the hydrodynamic behaviour is simplified to a fully developed laminar flow starting the inlet of the film. Furthermore, properties are held constant, two-directional diffusion or a constant film thickness is assumed. However, when these common assumptions are relaxed the hydrodynamics are linked to heat and mass transfer even in a laminar film. The link is caused by occurring interactions among a changing film thickness, uni-directional diffusion and a change in properties. In the model which is used to conduct this study, most common assumptions, such as constant property data and constant film thickness, have been cancelled. Still we assume a laminar falling film in order to only investigate said effects for absorption and desorption on a sound basis for further, more applied studies.

## 2. State of the art

Analytical models usually assume constant properties (Kim and Infante Ferreira, 2009) or simplified hydrodynamics (Meyer, 2015). The authors of early numerical models such as Grossman (1983) and Yang and Wood (1992), for example, also assumed constant properties and a constant film thickness. Brauner (1991) could show the convective term at the free interface ought to be accounted for. However, from the activities summarised by Killion and Garimella (2001) one can see that most authors neglected transversal velocity components. In latest numerical studies distinct details have been investigated.

Karami and Farhanieh (2011) studied the effect of film flow rate and plate angle on the heat and mass transfer. They concluded that at plate angles between 85° and 90° mass and heat transfer exhibit the highest values. Hofmann and Kuhlmann (2012) accounted for uni-directional diffusion and found an optimal Reynolds number for the absorption process, which can be interpreted as an optimal film thickness. Some authors focus on detailed hydrodynamic phenomena such as droplets and solitary waves. Islam et al. (2009) investigated the effects of solitary waves using a finite difference approach. They showed that solitary waves produce recirculation in the fluid and this recirculation moves the cool solution to the interface and thus enhances absorption. Albert et al. (2014) also examined the influence of wave regimes on mass transfer using a VOF method. They investigated vortices and recirculation and found that the former is irrelevant with respect to mass transfer enhancement, but the latter significantly determines mass transfer rates into the liquid film. Killion and Garimella (2004) conducted a 3-D simulation of the hydrodynamics of a liquid falling film over horizontal tubes. Their visual comparison of the simulation with an experiment shows that the model can predict the fluid behaviour. Based on this, a fully coupled model incorporating 3-D fluid flow with heat and mass transfer was developed by Subramaniam and Garimella (2009) to resolve the respective transfer phenomena on a local level, both on the horizontal tube and in the inter-tube region. They provide local gradients and transfer rates, and their spatial and temporal variations in the film and inter-tube regions.

Although many details have been investigated, a comprehensive comparison between absorption and desorption is missing. Therefore, this paper is focussed on the comparison of these two processes for both absorption heat pumps and heat transformers. Since the definitions of heat transfer coefficients in literature are ambiguous as reported in Kim and Infante Ferreira (2009), the evaluation of absorption and desorption is based on the mass fluxes transferred at the liquid vapour interface.

For applications, the main interest has been rather in absorption heat pump systems than in heat transformers (Ziegler, 2002). However, recently some works indicate renewed activity in this field of research. Kotenko et al. (2012) simulated an absorption heat transformer using partially miscible working mixtures, Zhang and Hu (2012) conducted a performance analysis of the single-stage absorption heat transformer for a new working pair and Zebbar et al. (2012) optimised a heat transformer cycle.

### 3. Model description

In commercial lithium bromide chillers, surfactants are widely used to improve the absorption process. Even though mass transfer is enhanced by turbulences caused by the utilised surfactants and, additionally, by droplets and waves we first want to keep it simple and discuss very fundamental effects. Therefore, the following two-dimensional model is only a simplified description for a three-dimensional problem; a three-dimensional solution may have other forms of, e.g., waves. However, description of turbulences is beyond the scope of this paper and a laminar flow is the limiting case for both processes absorption and desorption.

The model accounts for variable properties, uni-directional diffusion, release of differential heat of solution, as well as heat flow due to interdiffusion. The hydrodynamic model results in longitudinal and transversal velocity components and their evolution in the entrance region. The numerical solution is obtained by utilising a Newton–Raphson method to solve the finite difference formulation of the governing equations and is described in Mittermaier and Ziegler (2015). Parts of the description are repeated here.

Overall, the following assumptions have been made:

- (a) incompressible liquid;
- (b) negligible lateral velocity (z-coordinate);
- (c) no slip at the wall;
- (d) impermeable and isothermal wall;
- (e) no shear stresses at the liquid vapour interface;
- (f) constant pressure throughout the entire film;
- (g) negligible change in temperature caused by dissipation throughout the film;
- (h) negligible diffusion and heat conduction in flow direction as compared to convection;
- (i) negligible vapour pressure of the solvent;
- (j) steady state.

A typical distribution of longitudinal velocity, temperature, and mass fraction is illustrated in Fig. 1.

#### 3.1. Governing equations

In general, momentum transfer is described in detail using Newton's laws of motion together with functions for shear and normal stresses (Navier–Stokes equations). For description of a laminar flow, the boundary layer approximation (Schlichting and Gersten, 2006) may be applied, since a 2-D model (assumption b) and 'no shear stress' at the free surface (e) has been assumed. This

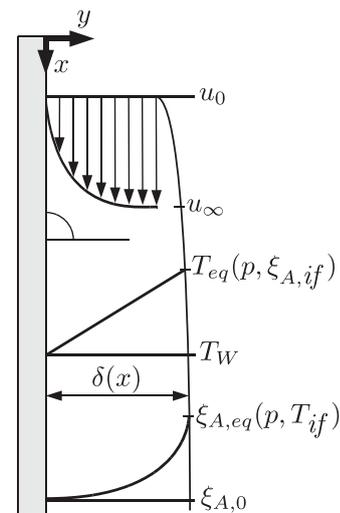


Fig. 1 – Typical distribution of longitudinal velocity  $u$ , temperature  $T$ , and mass fraction  $\xi$  in a laminar absorbing film.

2D-solution is only possible if more complex phenomena e.g., waves and surface tension effects, are neglected. However, the description of these is beyond the scope of this paper.

For a steady state motion of a fluid flow over a vertical plate the momentum balance is

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \quad (1)$$

Equation (1) was solved by Cerro and Whitaker (1971) for a non-absorbing film. They reported excellent agreement with experimental data. The conservation of mass is expressed by

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Due to the fact that the film thickness  $\delta$  is known at the inlet only but remains an unknown value further downstream, an additional balance is necessary. This balance reads

$$\int_0^{\delta(x)} \rho u \, dy + \dot{m}_{A,if} \, dx = \int_0^{\delta(x+dx)} \rho u \, dy \quad (3)$$

Equation (3) links the velocity field to the mass flux absorbed at the interface and is part of an iteration procedure to solve the coupled problem. Further details are provided in Mittermaier and Ziegler (2015). The absorbed mass flux  $\dot{m}_{A,if}$  is given in equation (15).

To resolve the distribution of mass fraction across the film the following balance for component A is applied

$$\rho \left( u \frac{\partial \xi_A}{\partial x} + v \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \quad (4)$$

Since (h) is assumed, equation (4) states that the convective component transport on the left hand side of the equation equals the diffusive mass transport on the right hand side.

Under steady state conditions the convective heat transport equals the conductive and diffusive terms across the film. Based on assumptions (f)–(h) the energy balance can be expressed by

$$\rho \left[ u \left( c_p \frac{\partial T}{\partial x} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right) + v \left( c_p \frac{\partial T}{\partial y} + (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial y} (\bar{h}_A - \bar{h}_S) \right] \quad (5)$$

In the left hand side, convective heat transfer as well as heat set free due to mixing is considered for both coordinates  $x$  and  $y$ . The heat set free due to mixing is given by the differential heat of solution and expressed by the gradient in mass fraction together with the difference in partial massive enthalpies  $(\bar{h}_A - \bar{h}_S)$ . In the right hand side heat conduction and energy transport due to diffusion is accounted for. Similar forms of equation (5) were used by [Andberg and Vliet \(1983\)](#), [Grossman \(1987\)](#), and [Jernqvist and Kockum \(1996\)](#). In order to determine the enthalpy flow due to interdiffusion as well as the heat of sorption  $\Delta h_{sor}$  in equation (16) [Jernqvist and Kockum \(1996\)](#) have suggested to work with partial massive enthalpies  $\bar{h}_A$  and  $\bar{h}_S$  (see eqs. 17 and 18).

Now, the boundary conditions for equations (1)–(5) are described. In case of a parabolic Nusselt profile at the inlet we can use equation (6) as inlet condition for velocity  $u$ . Alternatively, if a uniform velocity is assumed at the inlet, equation (7) may be used instead of equation (6)

$$u(x=0, y) = \frac{\rho g}{\mu} \delta_0^2 \left( \frac{y}{\delta_0} - \frac{y^2}{2\delta_0^2} \right) \quad (6)$$

$$u(x=0, y) = u_0 \quad (7)$$

Equations (8) express the ‘no slip’ conditions at the wall. Assuming a negligible shear stress at the interface leads to equation (9).

$$u(x, y=0) = 0; \quad v(x, y=0) = 0 \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = 0 \quad (9)$$

The wall is considered to be impermeable. Therefore, equation (10) may be used as boundary condition.

$$\dot{m}_A(x, y=0) = \rho v_w \cdot \xi_A + \rho D \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (10)$$

From boundary condition (8) we see that  $v=0$  at  $y=0$ . Hence, equation (10) reads

$$\rho D \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (11)$$

As stated earlier, a constant wall temperature as well as a given and uniform temperature in the liquid film at the inlet

is assumed. Hence, equations (12) may be applied. Similarly, the uniform mass fraction at the inlet leads to boundary condition (13).

$$T(x, y=0) = T_w; \quad T(x=0, y) = T_0 \quad (12)$$

$$\xi_A(x=0, y) = \xi_{A,0} \quad (13)$$

Finally, the two coupling conditions for heat and mass transfer are defined. The first link follows from the assumption of vapour pressure equilibrium at the interface.

$$T(x, y = \delta(x)) = T_{eq}(p, \xi_A(x, y = \delta(x))) \quad (14)$$

The second coupling condition requires the mass flux absorbed at the interface. It is obtained by a component balance for the absorbent  $S$ . Since the absorbent is assumed to be non-volatile, the interface is impermeable for this component. Thus, for the mass  $\dot{m}_{A,if}$  absorbed at the interface it holds

$$\dot{m}_{A,if} = \rho D \left. \frac{1}{1 - \xi_{A,if}} \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} \quad (15)$$

This mass flux is now linked to the energy flux at the interface:

$$\lambda(x, y = \delta(x)) \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\delta(x)} = \dot{m}_{A,if} \cdot \Delta h_{sor} = \dot{m}_{A,if} \cdot (h_V - \bar{h}_A) \quad (16)$$

The thermal effect associated with the absorption or desorption process is expressed by  $\Delta h_{sor}$  and determined by the difference between the enthalpy of the vapour  $h_V$  and the partial massive enthalpy of the absorbate  $\bar{h}_A$ .

### 3.2. Property data

It is assumed that the vapour phase next to the film consists of water (steam) only. As absorbent aqueous LiBr solution has been considered. Based on data measured by [Löwer \(1960\)](#), property functions have been derived by polynomial regression for specific heat capacity, viscosity, thermal conductivity, density, saturation temperature and mass concentration. The equations are used in order to determine these properties at the local conditions and provided in [Mittermaier et al. \(2014\)](#). Please note that other than stated in there, the temperature  $T$  has to be inserted in Kelvins. For the diffusion coefficient the equation developed by [Kim \(1992\)](#) has been used.

The partial massive enthalpy for the absorbate (e.g. water) as used in equation (5) and (14) is defined by

$$\bar{h}_A = h + (1 - \xi_A) \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_{p,T} \quad (17)$$

The partial massive enthalpy for the solvent is consequently

$$\bar{h}_S = h - \xi_A \left. \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right|_{p,T} \quad (18)$$

## 4. Results and discussion

The comparison between absorption and desorption is the centre of interest in this study. First, we briefly describe which assumptions are most critical and significantly influence the results of the model. In a second part of the subsequent section we compare absorption and desorption under typical conditions for both a single stage chiller and a heat transformer.

### 4.1. Evaluation of typical assumptions

To solve the set of coupled partial differential equations described in Section 3 various assumption can be made to simplify the problem and solving procedure. Subsequently, we describe the influences of linearised vapour pressure equilibrium, constant film thickness, constant properties as well as combinations of the latter two simplifications.

For the following analyses, equilibrium state and a fully developed velocity profile (Nusselt solution) are assumed at the inlet (cf. boundary condition eq. 6). Furthermore, comparable pressure levels as well as temperature differences between film and wall were applied for absorption and desorption. The common conditions are stated in Table 1.

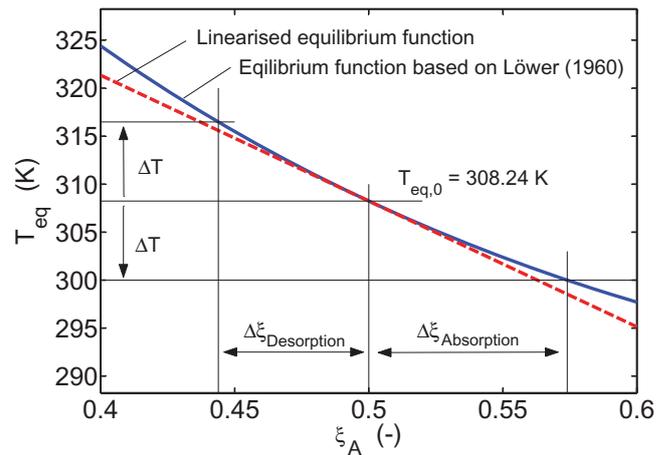
#### 4.1.1. Vapour pressure equilibrium

For lithium bromide solution at a given pressure the relation between saturation temperature and mass fraction (cf. equation 14) is non-linear. In an absorber a subcooling of  $\Delta T$  is imposed on the solution which leads to a driving mass fraction difference  $\Delta \xi$ . If the superheating in a desorber is of the same extent as the subcooling in an absorber, due to the non-linearity the driving mass fraction difference  $\Delta \xi$  varies. This fact is illustrated in Fig. 2 (blue solid line). In order to clearly depict the curvature in Fig. 2, the relation between saturation temperature and mass fraction is linearised around the inlet temperature  $T_{eq,0}$  (red broken line). Starting at  $T_{eq,0}$  a temperature reduction by  $\Delta T$  during absorption leads to a larger difference in mass fraction  $\Delta \xi$  than a temperature increase by the same  $\Delta T$  during desorption.

Since the vapour pressure equilibrium is assumed at the interface the absorbed or desorbed mass flux is influenced. Consequently, for a given pressure level the mass flux transferred during the absorption process is higher as compared with the desorption process at same temperature difference  $|T_0 - T_w|$ . The accumulated mass flux over the considered flow length for absorption and desorption with non-linear vapour pressure equilibrium is labelled as case 1 and stated in Table 2. In order to solely investigate the influence of a non-linearity in

**Table 1 – Conditions for evaluation of typical assumptions.**

Flow length $L$	0.1 m
Inlet mass flow $\dot{\Gamma}_0$	$0.036 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Pressure $p$	1500 Pa
Inlet mass fraction $\xi_0$	0.50 kg/kg
Inlet temperature $T_0$ (saturated)	308.24 K
Temperature difference between film and wall $ T_0 - T_w $	6 K



**Fig. 2 – Relation between saturation temperature  $T_{eq}$  and mass fraction  $\xi_A$  at  $p = 1,500 \text{ Pa}$ .**

equilibrium conditions, the properties and the thickness of the film were set constant in this case.

#### 4.1.2. Variable thermophysical properties

A detailed analysis regarding the influence of variable properties is provided in Mittermaier et al. (2014). When the thermophysical properties are allowed to vary with mass fraction and temperature throughout the process, the mass transfer rate during desorption improves slightly while it decreases somewhat during absorption. The accumulated mass flux over the considered flow length is stated in Table 2 as case 2.

Nevertheless, for lithium bromide solution the non-linearity in equilibrium conditions is large enough to result in a higher mass flux transferred for absorption as compared with desorption even when properties are allowed to vary.

#### 4.1.3. Variable film thickness

When the thermophysical properties are set constant but the film thickness is allowed to vary with mass absorbed or desorbed the result is similar to cases 1 and 2. As depicted in Fig. 3, adjacent to the inlet ( $x < 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ) the thickness of the film first remains constant. Within this domain the thermal boundary layer develops through the film. Once the temperature at the interface changes ( $x > 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ) the mass transfer at the

**Table 2 – Absolute accumulated mass fluxes  $|\dot{m}_{A,if}|$  absorbed or desorbed over 0.1 m in  $10^{-4} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  computed with various assumptions.**

No.	Condition	$ \dot{m}_{A,if} $ ( $10^{-4} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ )	
		Absorption	Desorption
1	Constant film thickness, constant properties	3.52	3.38
2	Constant film thickness, variable properties	3.49	3.41
3	Variable film thickness, constant properties	3.51	3.40
4	Variable film thickness, variable properties	3.40	3.50

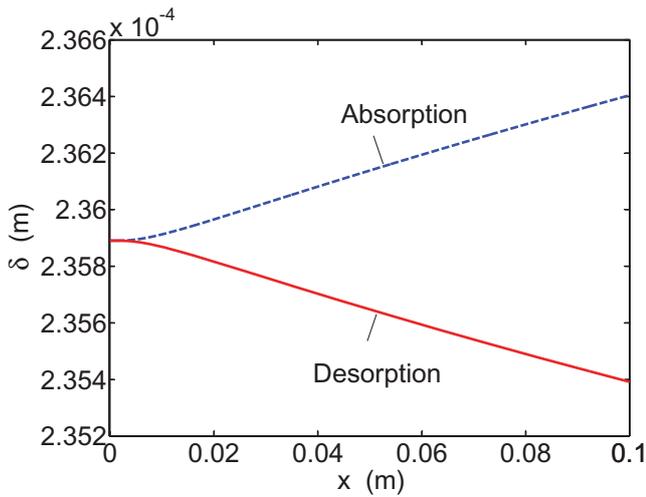


Fig. 3 – Comparison of film thickness  $\delta$  between absorption and desorption both computed using constant properties.

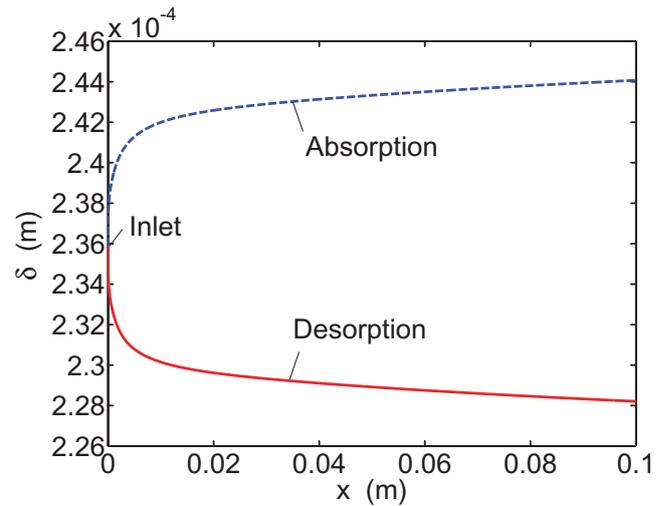


Fig. 5 – Comparison of film thickness  $\delta$  between absorption and desorption both computed using variable properties.

interface leads to a change in film thickness: it increases for absorption (broken line) and decreases for desorption (solid line).

The accumulated mass fluxes over the considered flow length are stated in Table 2 labelled as case 3. Since the film grows thicker during absorption, the absorbed mass flux is slightly reduced as compared to the results computed assuming a constant film thickness (cf. Table 2 no. 1). Similarly, during desorption, the absolute mass flux transferred is slightly higher, since the thickness of the film is reduced.

4.1.4. Variable film thickness and properties

If thermophysical properties and film thickness are allowed to vary with mass absorbed and desorbed respectively the results become more realistic. Now, the mass flux transferred is higher for desorption as compared with absorption.

Fig. 4 depicts the local mass flux transferred for both absorption and desorption assuming variable properties. The mass

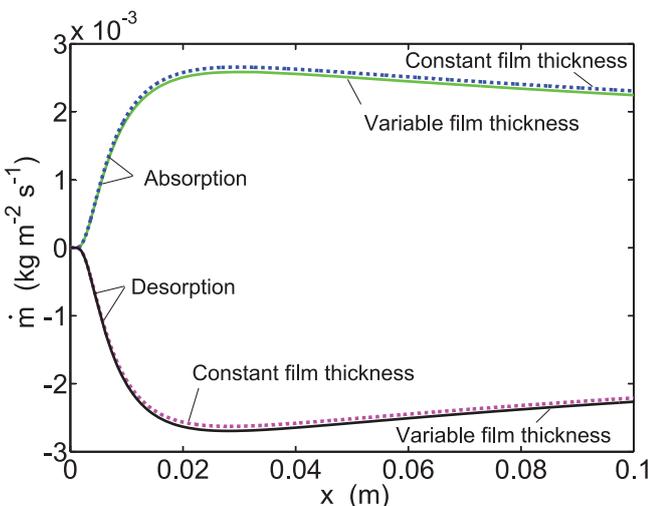


Fig. 4 – Comparison of local mass fluxes  $|m_{A,i}|$  over flow length between absorption and desorption for variable and constant film thickness at  $p = 1,500$  Pa both with variable properties.

flux absorbed is plotted on the positive ordinate of Fig. 4, the mass flux leaving the film flow during desorption is plotted on the negative ordinate. The results computed with the assumption of a constant film thickness (case 2, dashed lines) are compared with the ones obtained allowing for a varying thickness of the film (case 4, solid lines).

From Fig. 4 one can see that the onset of absorption and desorption occurs at roughly the same flow length (around  $x = 1.5 \cdot 10^{-3}$  m). When the increase in film thickness during absorption is accounted for, the transferred mass flux is reduced as compared to the computation with constant film thickness.

During the desorption process, the transferred mass flux is increased when the decrease in film thickness throughout the process is accounted for. The absolute values of accumulated mass transferred for this case are provided in Table 2 (no. 4).

The results in Table 2 make it evident that the assumptions of a constant thickness of the film or constant properties lead to an underestimation of the absolute mass transferred  $|m|$  during desorption and to an overestimation during absorption. However, the values computed with the model accounting for variable film thickness and properties (case 4) do agree with most experimental observations: desorption works slightly better.

When comparing cases 1-4, it becomes evident that all these effects are marginal; the differences among cases 1, 2 and 3 are even small compared with case 4. The reason for this is found in the interaction between the variation in properties and the change in film thickness. The change in film thickness is depicted in Fig. 5 for computations with variable properties. In both cases adjacent to the inlet, the thickness changes from the beginning even though the mass transfer occurs later (cf. Fig. 4). When comparing Fig. 5 with Fig. 3 one can see that the extent of change in film thickness is more pronounced when variable properties are allowed for.

Adjacent to the inlet, the film thickness changes mainly because of a change in viscosity. Due to the cooling of the liquid film during absorption the viscosity and consequently the film thickness increase. On the contrary the heating during

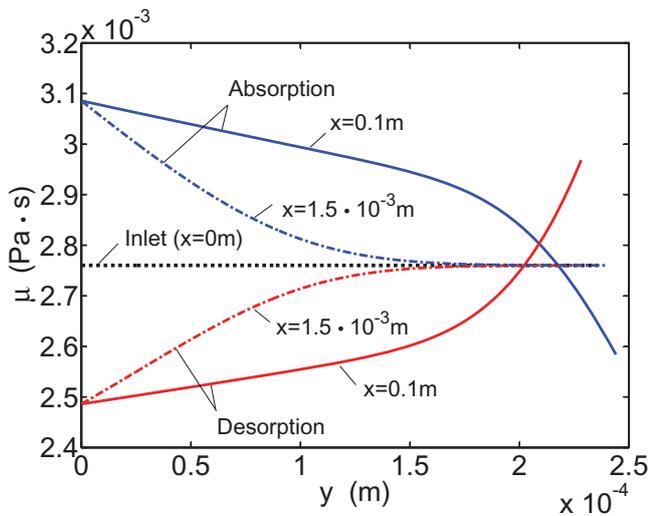


Fig. 6 – Comparison of viscosity  $\mu$  between absorption and desorption.

desorption causes the viscosity and thus the film thickness to decrease. In Fig. 6 the viscosity  $\mu$  is plotted across the film. The upper curves represent the values for absorption, the lower ones show the values for viscosity during desorption. Even for a short flow length of  $x = 1.5 \cdot 10^{-3}$  m a significant difference in viscosity between absorption and desorption can be observed throughout more than half of the thickness of the film.

Since the viscosities change during the processes, the longitudinal velocities are influenced as well. In Fig. 7, the longitudinal velocities  $u$  are plotted across the film for a flow length of 0.1 m. At the inlet a fully developed Nusselt profile is assumed for both cases. During desorption the film accelerates slightly (red dashed line) while it decelerates during absorption (green dotted line).

The difference in velocities  $u$  has consequences on both convective heat flow as well as conductive heat transfer. During desorption, the film is thinner which improves heat conduction in transversal direction. Moreover, due to slightly higher

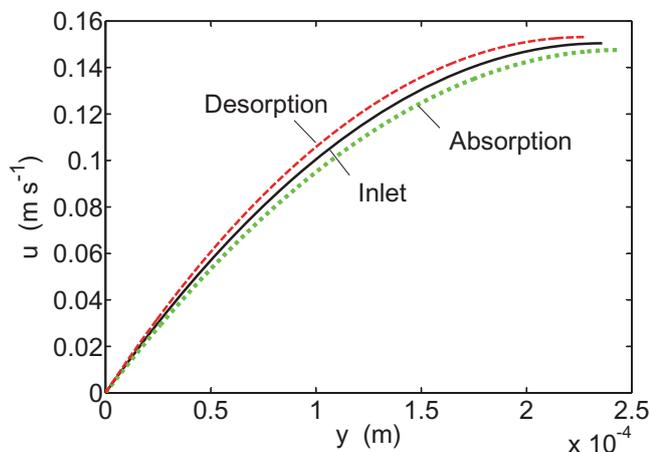


Fig. 7 – Comparison of longitudinal velocity profiles between absorption and desorption both plotted for  $x = 0.1$  m.

velocities  $u$ , the convective heat flow in longitudinal direction is higher during desorption than absorption. These causal effects lead to the fact that case 4 shows larger effects than the other cases.

Still, it has to be accepted that the changes which result from all these effects are small and would not lead to a statement about the absorber or the desorber to be the more delicate component.

#### 4.2. Comparison within cycles

Now, we compare absorption and desorption under typical conditions for both a single stage chiller and a heat transformer. For the comparison a flow length of 0.1 m is considered, variable properties and film thickness are accounted for. Furthermore a developing velocity profile is assumed (cf. boundary condition 7). The absolute temperature difference between film and wall  $|T_0 - T_w|$ , driving the process, is chosen to be 6 K.

Fig. 8 depicts the main components of a single stage absorption heat pump or chiller. Desorber (D) and condenser (C) are often operated at a pressure level of 15,000–20,000 Pa. Typical conditions for evaporator (E) and absorber (A) are 1000–1500 Pa. In this configuration, the diluted solution is pumped from the absorber to the desorber to become concentrated again. The refrigerant flows from condenser to evaporator, the pressure is reduced using an expansion valve (EV).

For the numerical study the conditions are chosen such that in both cases the absorber starts to absorb at a mass fraction of 50% and the desorber regenerates this solution. Depending on the performance, the start-value of 50% may be reached, or even surpassed, or not reached.

*Absorption chiller conditions:*

- The film is in equilibrium state at the beginning of the absorption process.
- The absorption process is operated at a pressure of  $p_{abs} = 1,500$  Pa with a mass fraction of  $\xi_{0,abs} = 0.5$  at the inlet. These conditions correspond roughly to a cooling water temperature of 30–35 °C.
- At the end of the absorption process an average mass fraction  $\xi_{avg,abs}$  across the film is achieved.
- Subsequently the desorption process at a pressure level of  $p_{des} = 15,000$  Pa is considered. The film at the entrance is considered to be in equilibrium, using the average mass fraction at the end of the absorption

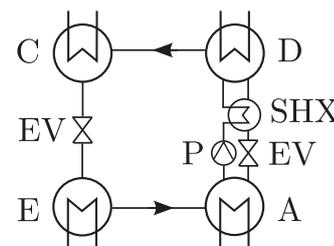
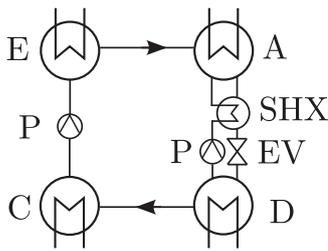


Fig. 8 – Components of a single stage absorption heat pump or chiller. A – absorber, C – condenser, D – desorber, E – evaporator, EV – expansion valve, P – pump, SHX – solution heat exchanger.



**Fig. 9 – Components of a single stage heat transformer.** A – absorber, C – condenser, D – desorber, E – evaporator, EV – expansion valve, P – pump, SHX – solution heat exchanger.

process  $\xi_{0,des} = \xi_{avg,abs}$ . These conditions correspond roughly to a hot water temperature of 80–85 °C.

In a heat transformer, absorber (A) and evaporator (E) are operated at a higher pressure level than desorber (D) and condenser (C). Typical conditions for absorber and evaporator range from  $p_{abs} = 40,000$  Pa for single stage configuration to more than  $p_{abs} = 100,000$  Pa for multi stage heat transformers. The concentrated solution is pumped from the desorber to the absorber to become diluted again. The refrigerant is pumped from the condenser to the evaporator. The process is depicted in Fig. 9.

The conditions are chosen as followed:

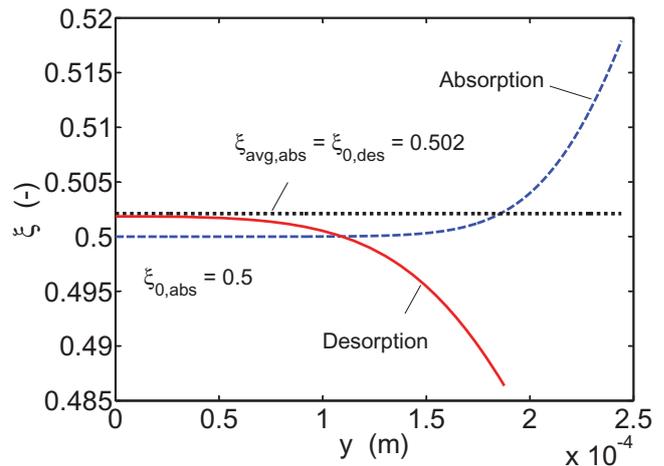
Heat transformer conditions:

- The film is in equilibrium state at the beginning of the absorption process.
- The absorption process is operated at a pressure of  $p_{abs} = 40,000$  Pa with a mass fraction of  $\xi_{0,abs} = 0.5$  at the inlet. These conditions correspond roughly to a heat sink temperature of 100–105 °C.
- At the end of the absorption process an average mass fraction  $\xi_{avg,abs}$  across the film is achieved.
- Subsequently the desorption process at a pressure level of  $p_{des} = 15,000$  Pa is considered. Again, the film is considered to be in equilibrium at the entrance with the average mass fraction which has been attained at the end of the absorption process  $\xi_{0,des} = \xi_{avg,abs}$ . These conditions correspond roughly to a heat source temperature of 80–85 °C

Said conditions hold for single effect cycles. In multi-effect cycles the differences in pressure, temperature and composition can be much larger. Consequently, the effects discussed subsequently would be more pronounced.

#### 4.3. Results for absorption chiller conditions

In Fig. 10 the water mass fractions are plotted across the film for the end of absorption and desorption at a flow length of 0.1 m. During absorption the film is cooled which causes the film to take up water at the interface. The increasing water content at the interface causes diffusion towards the wall. However, adjacent to the wall ( $y < 0.5 \cdot 10^{-4}$  m) the mass fraction profile (blue dashed line) remains at the inlet level of  $\xi_0 = 0.5$ .



**Fig. 10 – Mass fraction profile for absorption at  $p = 1,500$  Pa and desorption at  $p = 15,000$  Pa across the film at  $x = 0.1$  m.**

**Table 3 – Inlet conditions for absorption at 1,500 Pa and subsequent desorption at 15,000 Pa.**

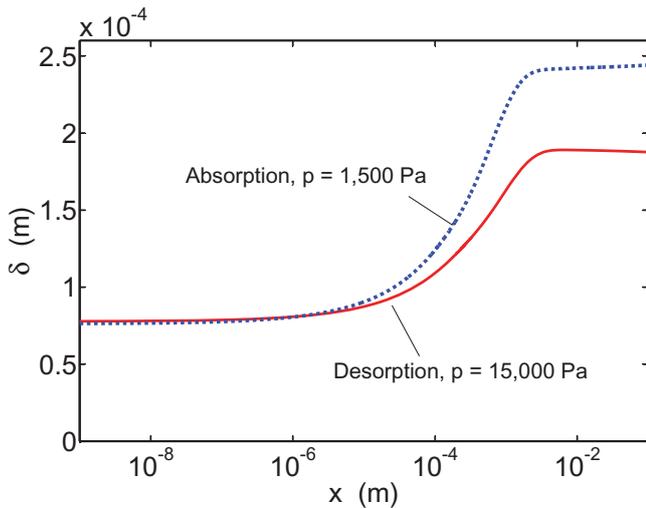
	Absorption	Desorption	Unit
P	1.5	15	$10^3$ Pa
$\xi_0$	0.5	0.5021	kg/kg
$T_0$	308.24	353.47	K
$\dot{\Gamma}_0$	0.036	0.036	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
$ T_0 - T_w $	6	6	K
$D_0$	1.54	3.37	$10^{-9} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\mu_0$	2.76	1.43	$10^{-3} \text{Pa s}$
$\rho_0$	1.52	1.49	$10^3 \text{kg m}^{-3}$
$c_{p,0}$	2.15	2.23	$10^3 \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$\lambda_0$	0.394	0.425	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$

After a flow length of 0.1 m the overall mass fraction averaged across the film has changed from 0.5 to 0.502 (black dotted line).

The mass fraction profile after desorption is shown as solid red line in Fig. 10. The profile for desorption ends at a smaller transversal coordinate  $y$  and is significantly further developed as the one for absorption. For desorption, in the domain  $y < 0.5 \cdot 10^{-4}$  m a minor difference occurs between the mass fraction at the inlet  $\xi_{0,des}$  and the resulting profile at  $x = 0.1$  m. This fact indicates a higher mass diffusivity in case of desorption as compared with absorption.

Inlet conditions for both absorption and subsequent desorption process can be seen in Table 3. The differing conditions at the inlet lead to a change in thermophysical properties. Thermal conductivity changes approximately by 8%, heat capacity by 4% and density by roughly 2%. While these properties differ only slightly, viscosity and mass diffusivity change roughly by a factor of 2 for the conditions present in a single stage absorption chiller.

The impact on the resulting thickness of the films is shown in Fig. 11. Since the density  $\rho_0$  is slightly higher at the beginning of absorption, the corresponding thickness  $\delta$  is slightly below the film thickness for desorption. However, the high viscosity leads to a large increase while the velocity profile is developing. Once the velocity profile is fully developed (at

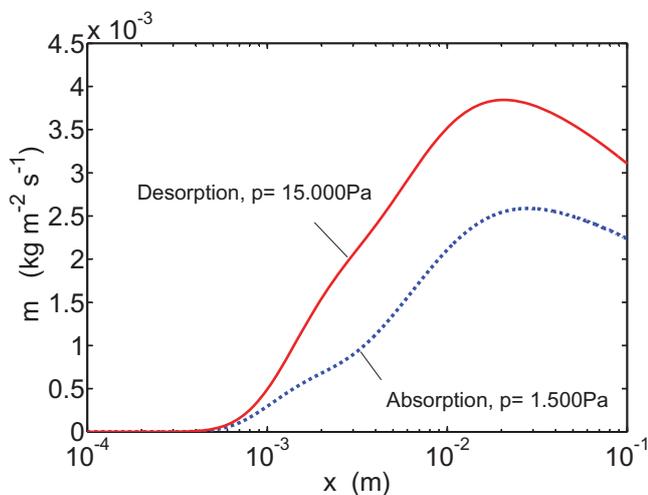


**Fig. 11 – Comparison of film thickness between absorption and desorption for typical conditions in a single stage absorption chiller.**

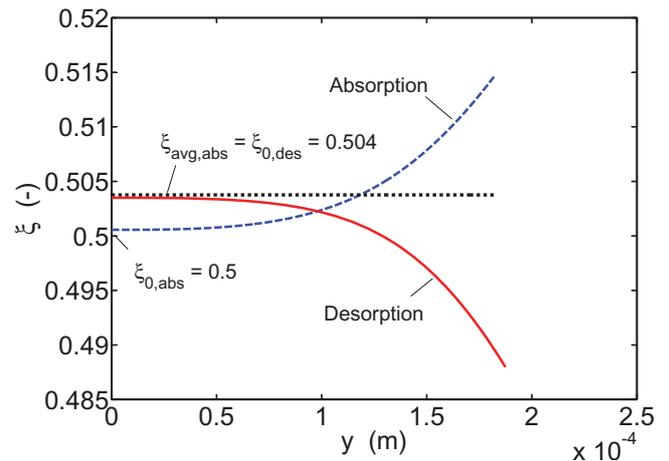
$x \approx 3 \cdot 10^{-3}$  m), the further increase in film thickness during absorption is minor.

Due to the low viscosity, the increase in film thickness during desorption is not as steep as during absorption. After the development of the velocity profile, the thickness decreases slightly since water is boiled off at the interface.

The comparison between the absolute transferred mass fluxes at the interface  $|\dot{m}_{A,if}|$  is shown in Fig. 12 over the flow length of 0.1 m. Between  $x \approx 2 \cdot 10^{-3}$  m and  $x \approx 4 \cdot 10^{-3}$  m a change in steepness of the curves occurs due to the development of the velocity profiles. Due to a thinner film and a higher mass diffusivity the absolute mass flux transferred at the interface  $|\dot{m}_{A,if}|$  is significantly higher for desorption as compared with absorption. The accumulated value for the mass flux absorbed at the interface is  $3.47 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>. During the subsequent desorption at the higher pressure level 46% more



**Fig. 12 – Comparison of absorbed and desorbed mass fluxes for typical conditions in a single stage absorption chiller.**



**Fig. 13 – Mass fraction profile for absorption at  $p = 40,000$  Pa and desorption at  $p = 15,000$  Pa across the film at  $x = 0.1$  m.**

( $5.08 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>) can be transferred at the interface over the same flow length. So the desorber is able to regenerate the solution further than required.

#### 4.4. Results for heat transformer conditions

Fig. 13 depicts the mass fraction profiles for the heat transformer process described in Section 4.2. The profile for the absorption process at a pressure  $p$  of 40,000 Pa is further developed as compared to the desorption process at 15,000 Pa. After 0.1 m of absorption, at  $y = 0$  the water mass fraction is significantly higher than the mass fraction at the inlet  $\xi_{0,abs}$ . Again, this indicates a high mass diffusivity  $D$ , this time for absorption. Moreover, while the overall mass fraction averaged across the film has developed from 0.5 to only 0.502 during the absorption at  $p = 1,500$  Pa (Fig. 10), now during the process at  $p = 40,000$  Pa it has changed from 0.5 to 0.504.

Adjacent to the wall ( $y < 0.5 \cdot 10^{-4}$  m) the mass fraction profile for desorption differs only slightly from the level at the inlet  $\xi_{0,des}$ , indicating a lower mass diffusivity  $D$  as compared to absorption.

Table 4 lists the inlet conditions and properties for typical heat transformer conditions. The inlet mass flow  $\dot{m}_0$  and driving

**Table 4 – Inlet conditions for absorption at 40,000 Pa and subsequent desorption at 15,000 Pa.**

	Absorption	Desorption	Unit
$p$	40	15	$10^3$ Pa
$\xi_0$	0.5	0.5038	kg/kg
$T_0$	378.06	353.22	K
$\dot{\Gamma}_0$	0.036	0.036	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>
$ T_0 - T_w $	6	6	K
$D_0$	4.58	3.37	$10^{-9}$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$\mu_0$	1.13	1.42	$10^{-3}$ Pa s
$\rho_0$	1.48	1.49	$10^3$ kg m <sup>-3</sup>
$c_{p,0}$	2.21	2.23	$10^3$ J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$\lambda_0$	0.441	0.426	W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>

temperature differences  $|T_0 - T_w|$  are comparable to Section 4.3. The values for desorption are similar to the ones in Table 3 since the mass fraction at the inlet  $\xi_0$  and thus the saturated temperature  $T_0$  differ only slightly. Again, the densities  $\rho_0$ , heat capacities  $c_{p,0}$  and thermal conductivities  $\lambda_0$  are roughly comparable between absorption and desorption. Only the mass diffusivities  $D_0$  and viscosities  $\mu_0$  exhibit significant differences between the two processes. However, due to the high temperature  $T_0$ , now the mass diffusivity  $D_0$  is higher and the viscosity  $\mu_0$  is lower for the absorption process as compared to the desorption process.

The impact on the resulting thicknesses of the films is shown in Fig. 14. Since the viscosity is lower during the high temperature absorption, the respective film thickness is smaller than the one for desorption. Beyond  $x > 3 \cdot 10^{-3}$  m the film thickness increases due to absorption while it decreases during desorption. However, the influence of the differing properties is not compensated within a flow length of 0.1 m.

The absolute mass flux absorbed or desorbed at the interface is plotted over the flow length  $x$  in Fig. 15. For the typical conditions in a single stage heat transformer the absorption process performs better than the desorption process. A thinner film and higher mass diffusivity lead to favourable conditions for the absorption process and thus higher mass flux transferred. The absorbed mass flux at the interface accumulated over 0.1 m is  $5.64 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Approximately 10% less ( $5.11 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ) is transferred at the interface over the same flow length during the subsequent desorption at the lower pressure level. Since the chosen pressure difference and hence differences in properties are smaller than in Section 4.3, the difference in mass flux transferred is now smaller as compared with the one for the absorption chiller conditions. Now, the generator is not able to produce the state of 50% again.

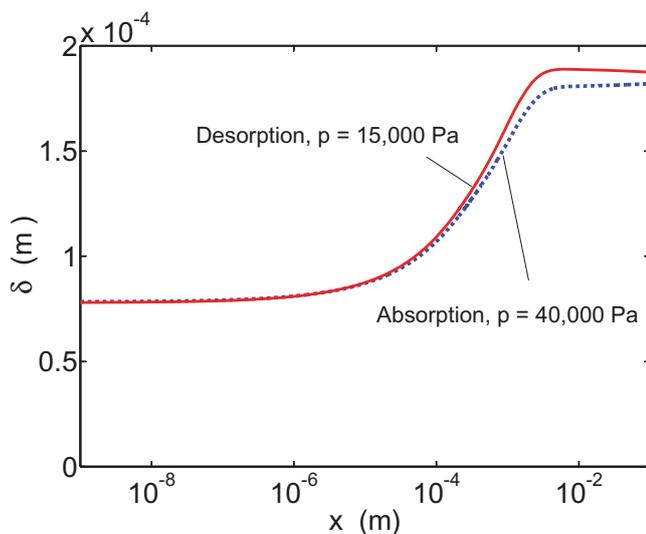


Fig. 14 – Comparison of film thickness between absorption and desorption for typical conditions in a single stage heat transformer.

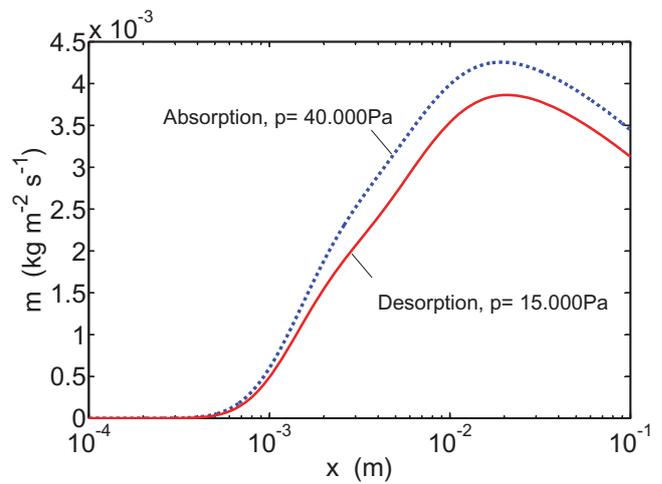


Fig. 15 – Comparison of absorbed and desorbed mass fluxes for typical conditions in a single stage heat transformer.

## 5. Conclusion

A comprehensive model for combined heat, mass and momentum transfer has been described and typical assumptions and simplifications have been evaluated. For typical conditions of both absorption chillers and heat transformers, the performance of absorption and desorption processes have been analysed and compared.

The assumption of a linearised equilibrium temperature, constant properties, constant film thickness as well as combinations of the latter two simplifications have been evaluated. If the non-linearity in equilibrium temperature is accounted for and either of the two simplifications is applied, the mass flux absorbed is overestimated and vice versa the mass flux desorbed is underestimated. When absorption and desorption are compared at same conditions, the mass flux absorbed is higher than the one desorbed. However, if thermophysical properties and film thickness are allowed to vary with mass absorbed and desorbed respectively the results become more realistic. Now, the mass flux transferred is some % higher for desorption as compared with absorption. The influence of variable properties throughout the short flow length is marginal. Since the properties change mostly due to the various inlet conditions applied, the results may be also calculated using an exact solution as provided for example by Grossman (1983).

In both absorption chillers and heat transformers, absorption and desorption occur at different pressure and temperature levels. In an absorption chiller the desorption process is operated at an elevated pressure and temperature level as compared to the absorption process. Due to the raised temperature, the viscosity is lowered and the mass diffusivity is increased. These circumstances cause a thinner and better performing film during desorption. When typical conditions are applied, the transfer rate during desorption is 46% higher over a considered flow length of 0.1 m as compared to absorption. Hence, the absorber determines the system performance. In a heat

transformer the absorption process is operated at an elevated pressure and temperature level as compared to the desorption process. Thus, the viscosity is lower and mass diffusivity is higher during absorption. Application of typical conditions lead to a 10% better performance of this process as compared to desorption over a flow length of 0.1 m. Therefore, both components perform relatively equal in this case.

## Acknowledgements

This study was solely funded by the budget of the Technical University of Berlin.

## REFERENCES

- Albert, C., Marschall, H., Bothe, D., 2014. Direct numerical simulation of interfacial mass transfer into falling films. *Int. J. Heat Mass Transf.* 69 (0), 343–357.
- Andberg, J.W., Vliet, G.C., 1983. Nonisothermal absorption of gases into falling liquid films. *ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference Proceedings* 2, 423–431.
- Brauner, N., 1991. Non-isothermal vapour absorption into falling film. *Int. J. Heat Mass Transf.* 34 (3), 767–784.
- Cerro, R.L., Whitaker, S., 1971. Entrance region flows with a free surface: the falling liquid film. *Chem. Eng. Sci.* 26 (6), 785–798.
- Grossman, G., 1983. Simultaneous heat and mass transfer in film absorption under laminar flow. *Int. J. Heat Mass Transf.* 26 (3), 357–371.
- Grossman, G., 1987. Analysis of interdiffusion in film absorption. *Int. J. Heat Mass Transf.* 30 (1), 205–208.
- Hofmann, E., Kuhlmann, H.C., 2012. On the optimum mass transfer of flat absorbing falling films. *Int. J. Heat Mass Transf.* 55, 7686–7697.
- Islam, M.A., Miyarab, A., Setoguchib, T., 2009. Numerical investigation of steam absorption in falling film of liquid aqueous solution with solitary waves. *Int. J. Refrigeration* 32, 1597–1603.
- Jernqvist, A., Kockum, H., 1996. Simulation of falling film absorbers and generators. In: *Proceedings of the International Absorption Heat Pump Conference*, 96. Vol. 1, pp. 311–318.
- Karami, S., Farhanieh, B., 2011. Numerical modeling of incline plate liquid absorber. *Heat Mass Transf.* 47, 259–267.
- Killion, J.D., Garimella, S., 2001. A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling-film absorption. *Int. J. Refrigeration* 24, 755–797.
- Killion, J.D., Garimella, S., 2004. Simulation of pendant droplets and falling films in horizontal tube absorbers. *J. Heat Transf.* 126 (6), 1003–1013.
- Kim, D.S., Infante Ferreira, C.A., 2009. Analytic modelling of a falling film absorber and experimental determination of transfer coefficients. *Int. J. Heat Mass Transf.* 52 (2122), 4757–4765.
- Kim, K.J., 1992. Heat and mass transfer enhancement in absorption cooling (Ph.D. thesis), Arizona State University.
- Kotenko, O., Moser, H., Rieberer, R., 2012. Thermodynamic simulation of alternative absorption heat pumping processes using natural working fluids. *Int. J. Refrigeration* 35 (3), 594–604. *Refrigeration and Heat Pumping with Sorption Processes*.
- Löwer, H., 1960. Thermodynamische und physikalische Eigenschaften der wässrigen Lithiumbromid-Lösung (Ph.D. thesis), Karlsruhe.
- Meyer, T., 2015. Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminar falling film absorption with uniform film velocity – diabatic wall boundary. *Int. J. Heat Mass Transf.* 80, 802–811.
- Mittermaier, M., Ziegler, F., 2015. On the combined heat, mass and momentum transfer in laminar liquid falling films and the impact of viscosity. *Heat Mass Transf.* (to be published).
- Mittermaier, M., Schulze, P., Ziegler, F., 2014. A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics. *Int. J. Heat Mass Transf.* 70 (0), 990–1002.
- Schlichting, H., Gersten, K., 2006. *Grenzschicht-Theorie*. Springer Berlin, Heidelberg.
- Subramaniam, V., Garimella, S., 2009. From measurements of hydrodynamics to computation of species transport in falling films. *Int. J. Refrigeration* 32, 607–626. *Progress in Sorptive Cooling Systems*.
- Yang, R., Wood, B.D., 1992. A numerical modeling of an absorption process on a liquid falling film. *Sol. Energy* 48 (3), 195–198.
- Zebbar, D., Kherris, S., Zebbar, S., Mostefa, K., 2012. Thermodynamic optimization of an absorption heat transformer. *Int. J. Refrigeration* 35 (5), 1393–1401.
- Zhang, X., Hu, D., 2012. Performance analysis of the single-stage absorption heat transformer using a new working pair composed of ionic liquid and water. *Appl. Therm. Eng.* 37, 129–135.
- Ziegler, F., 2002. State of the art in sorption heat pumping and cooling technologies. *Int. J. Refrigeration* 25 (4), 450–459.



## Kapitel 5

# Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die physikalische Modellierung und Untersuchung des kombinierten Wärme- und Stoffübergangs im laminaren Fallfilm. Als Arbeitsmedium wurde hauptsächlich wässrige Lithiumbromidlösung betrachtet. In der vorliegenden Arbeit wurden folgende Zusammenhänge und Effekte untersucht:

1. Einfluss verschiedener in diesem Bereich üblicher Vereinfachungen bei der Modellierung auf das Ergebnis
2. Einfluss des Strömungsprofils am Einlass des Films auf den Wärme- und Stoffübergang
3. Einfluss einer erhöhten Viskosität und eines verringerten Diffusionskoeffizienten auf die absorbierte Massenstromdichte
4. Einfluss der einseitigen Diffusion auf die absorbierte Massenstromdichte
5. Einfluss des Temperatur- und Druckniveaus auf den Stofftransport anhand eines Vergleichs von Ab- und Desorption unter typischen Bedingungen von Kälteanlagen und Wärmetransformatoren

**Zu 1.)** Die Freisetzung differentieller Lösungswärme im Lösungsfilm und die Berücksichtigung variabler Stoffwerte haben nur einen geringen Einfluss auf die Ergebnisse. Beide Effekte sind jeweils in derselben Größenordnung, wobei der Einfluss der differentiellen Lösungswärme etwas größer ist. Unter Vernachlässigung beider Effekte wird die absorbierte Massenstromdichte um 10 % überschätzt, die desorbierte Massenstromdichte hingegen um circa 7 %

unterschätzt. Diese Aussagen gelten für Absorption und Desorption über eine betrachtete Lauflänge von 1 m. Bei Verwendung von Lithiumbromidlösung müssen diese Effekte in künftigen Modellen also nicht zwangsläufig berücksichtigt werden. Unter gewissen Umständen allerdings, zum Beispiel bei Berücksichtigung eines sich entwickelnden Geschwindigkeitsprofils, ist es sinnvoll, variable Stoffwerte zuzulassen (siehe 2.). Sollten sie jedoch einbezogen werden, sind auf Grund der ähnlichen Größenordnung differentielle Lösungswärmen ebenfalls in das Modell zu integrieren. Bei Verwendung anderer Absorbenzien können beide Effekte die Ergebnisse stärker beeinflussen. Um dazu eine gesicherte Aussage machen zu können, sind weitere Parameterstudien sinnvoll. Diese können mit dem vorliegenden Algorithmus (siehe Anhang A.3) durchgeführt werden.

In der Modellvorstellung wird von lokalem Phasengleichgewicht an der freien Oberfläche des Films ausgegangen. Die Funktion zur Beschreibung der Gleichgewichtstemperatur von Lithiumbromidlösung in Abhängigkeit von Massenanteil und Druck weist eine Nicht-Linearität bezüglich des Massenanteils auf. Diese Nicht-Linearität hat einen etwas größeren Einfluss auf die Ergebnisse als die Berücksichtigung variabler Stoffwerte und differentieller Lösungswärmen. Im Vergleich zu einer linearisierten Funktion zur Beschreibung des Gleichgewichtszustands sinkt die Temperatur an der Phasengrenzfläche des Films für beide Prozesse, Absorption sowie Desorption, geringfügig ab. Dieser Effekt soll auf Grund seiner Größenordnung auch in einfachen Modellen für Lithiumbromidlösung eher Berücksichtigung finden als die vorgenannten Effekte.

**Zu 2.)** Es wurde der Einfluss einer Kolbenströmung (konstante, homogene Geschwindigkeit) am Einlass des Films mit einer von Anfang an voll entwickelten Strömung verglichen. Es zeigt sich, dass bei Annahme einer Kolbenströmung die Absorption bereits bei kleineren Lauflängen beginnt. Dies gilt sowohl für die Aufgabe der Lösung im Phasengleichgewicht als auch bei unterkühlter Lösungsaufgabe. Die Ursache ist eine ausgeprägte Konvektion in Richtung der freien Oberfläche des Films, da die Aufgabegeschwindigkeit schneller als die mittlere Geschwindigkeit des Films war und die Abbremsung der Strömung an der Wand eine transversale Geschwindigkeitskomponente zur Folge hatte. Die Aufgabegeschwindigkeit wurde hier entsprechend der Geschwindigkeit für eine Fallhöhe von 5 mm gewählt, was einem gängigen Abstand zweier Hori-

zontalrohre in Absorptionskälteanlagen entspricht. Durch diesen Effekt wird bei Annahme einer Kolbenströmung am Einlass über eine Lauflänge von 3 cm ca. 10 % mehr absorbiert. In diesem Zusammenhang ist eine Berücksichtigung variabler Stoffwerte durchaus sinnvoll, da eine Veränderung der Viskosität die Filmdicke und damit den transversalen Konvektionsstrom ebenfalls beeinflusst.

Ungeachtet der Berücksichtigung verschiedener Strömungsformen am Einlass wurde in dieser Arbeit der Wärme- und Stoffübergang in einem laminaren Fallfilm untersucht. Dies bot die Möglichkeit, einzelnen Phänomenen eindeutige Ursachen zuzuordnen. In Absorptionskolonnen und -kälteanlagen werden meist Packungen beziehungsweise Rohrbündelwärmeübertrager verwendet, wodurch die Strömung in diesen Apparaten bewusst herbeigeführte Turbulenzen oder Tropfen und Wellen aufweist. Dafür ist die in dieser Arbeit betrachtete Strömungsform unrealistisch und der entwickelte Algorithmus nur bedingt geeignet.

Zur Berücksichtigung der Bedingungen in solchen Apparaten in weiterführenden Arbeiten wäre sowohl die Integration von Turbulenzmodellen in die Modellierung der Filmströmung als auch die Kreuzgegenstromführung des Kühlmediums in die Berechnung sinnvoll. Dazu kann es vorteilhaft sein, die beschreibenden Gleichungen mit Hilfe der Finite-Volumen-Methode zu lösen, da hierfür bereits zahlreiche Lösungsmöglichkeiten, beispielsweise Moukalled u. a. (2015), Park (2010) und Groff u. a. (2007) bekannt sind und damit anschließend ein Vergleich zu Messungen im Anlagenmaßstab erfolgen kann.

**Zu 3.)** Wird der Diffusionskoeffizient verringert, so ist allgemein ein Rückgang im absorbierten Massenstrom zu beobachten. Bei einer Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht führt ein um den Faktor 10 verringerter Diffusionskoeffizient zu einer Halbierung des absorbierten Massenstroms. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf eine Lösungsaufgabe bei konstanter Geschwindigkeit bzw. einem sich entwickelnden Geschwindigkeitsprofil. Bei einer erhöhten Viskosität der Lösung wird der Fallfilm dicker, was grundsätzlich zu einer Reduktion des absorbierten Massenstroms führt. Bei einem Fluid mit 5fach erhöhter Viskosität und einer Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht wird ein Rückgang der absorbierten Massenstromdichte über 3 cm Lauflänge um mehr als 50 % beobachtet. Wird eine um 3 K unterkühlte Lösung aufgegeben, beträgt der Rückgang durch die erhöhte Viskosität nur ca. 10 %. Der geringere

Rückgang in absorbierte Massenstromdichte bei unterkühlter Lösungsaufgabe liegt ebenfalls an der erhöhten Viskosität, welche zu einem stärkeren konvektiven Wärme- und Stofftransport und damit zu hohen Absorptionsraten im Bereich des hydrodynamischen Anlaufs führt.

Im Fall einer Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht kommt es an der freien Filmoberfläche erst nach Absinken der Phasengrenztemperatur zur Absorption. Die lokal absorbierte Massenstromdichte steigt dann relativ stark an, jedoch wird bei einer Lauflänge von ca. 1 mm ein Rückgang der Massenstromdichte beobachtet. Dieser Rückgang wird mit geringeren Diffusionskoeffizienten ausgeprägter. Die Ursache des Rückgangs in der lokal absorbierten Massenstromdichte liegt im Ansteigen der Filmdicke und damit kurzzeitig abgeflachten Temperaturgradienten an der Phasengrenzfläche begründet. Durch die Koppelung zwischen Wärme- und Stoffübergang ist die lokal absorbierte Massenstromdichte bei reduziertem Diffusionskoeffizienten stärker vom Temperaturgradienten an der freien Oberfläche beeinflusst, weshalb sich unter diesen Bedingungen das Phänomen deutlicher darstellt.

Die sich entwickelnde Geschwindigkeitsgrenzschicht führt auch bei reduziertem Diffusionskoeffizienten zu einem früheren Einsetzen der Absorption gegenüber einer voll entwickelten Strömung am Eintritt.

**Zu 4.)** Der Einfluss der einseitigen Diffusion wurde in einem Vergleich des detaillierten Modells (Modell 1) aus Kapitel 3 mit dem vereinfachten Modell aus Abschnitt 3.6 (Modell 2) deutlich. Der Vergleich erfolgte über 3 cm und 10 cm Lauflänge. In beiden Modellen wird von einem voll entwickelten Geschwindigkeitsprofil am Einlass des Films ausgegangen und es werden variable Stoffwerte angenommen. Im detaillierten Modell 1 werden die einseitige Diffusion sowie die transversale Geschwindigkeitskomponente berücksichtigt. Die Filmdicke nimmt mit der an der freien Oberfläche absorbierten Masse zu. Im vereinfachten Modell 2 wird äquimolare Diffusion angenommen und folglich keine transversale Geschwindigkeitskomponente berücksichtigt. Dementsprechend wird auch die Filmdicke in Modell 2 konstant gehalten.

In Modell 2 wird bei einer Lösungsaufgabe im Phasengleichgewicht durch die Vernachlässigung der einseitigen Diffusion die absorbierte Menge um 24 % bis 26 % unterschätzt, obwohl durch die geringere (weil konstante) Filmdicke der Wärmetransport tendenziell überschätzt wird.

Eine Unterkühlung der Lösung am Eintritt um 3 K hat generell einen höheren Stofftransport zur Folge. Über die betrachteten Lauflängen führt hier die Berechnung mittels Modell 2 zu einer Unterschätzung der kumulierten Massenstromdichte von 26 % bis 28 %.

Dieser ausgeprägte Unterschied zeigt, dass die einseitige Diffusion berücksichtigt werden muss, um bei Absorbenzien mit sehr geringen Dampfdruck den Stofftransport zu beschreiben. In diesem Fall ist es folglich auch bei einem laminaren Fallfilm notwendig, für die Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes eine transversale Komponente zuzulassen.

Für die weiterführende Beurteilung dieser Ergebnisse wäre ein Vergleich mit experimentellen Daten zu einem laminaren Fallfilm über eine isotherme Platte hilfreich. Dieser sollte mit unterschiedlichen Absorbenzien betrieben werden können, um die in dieser Arbeit untersuchten Effekte zu überprüfen. Zunächst wäre eine belastbare Funktion der Messtechnik sicherzustellen, wobei eine hochviskose Lösung durchaus hilfreich sein kann, um einen relativ dicken Fallfilm zu erzeugen.

**Zu 5.)** Mit dem beschriebenen Modell wurden im letzten Abschnitt praxisrelevante Fragestellungen bearbeitet, obwohl in einer technischen Anlage eine weitaus komplexere Hydrodynamik vorgefunden wird und zudem oberflächenaktive Substanzen eingesetzt werden, die den Stofftransport zusätzlich verbessern (Ziegler u. Grossman, 1996). Dazu wurden typische Bedingungen in Absorptionskälteanlagen und Wärmetransformatoren angenommen und dafür der Wärme- und Stoffübergang ermittelt. Die unterschiedlichen Druck- bzw. Temperaturniveaus zwischen Absorption und Desorption in Absorptionskälteanlagen und Wärmetransformatoren führen zu einem Unterschied der Stoffeigenschaften.

Durch die höhere Temperatur während der Desorption in einer Absorptionskälteanlage verringert sich die Viskosität  $\mu$  und erhöht sich der Diffusionskoeffizient  $D$  um jeweils ca. den Faktor 2. Durch diese Veränderung ist im Desorber die transportierte Massenstromdichte erhöht (über eine Lauflänge von 10 cm um circa 46 %). Da in einem Wärmetransformator die Absorption auf hohem Temperaturniveau stattfindet, ist während dieses Teilprozesses der Diffusionskoeffizient  $D$  erhöht sowie die Viskosität  $\mu$  verringert. Das führt zu einer um 10 % erhöhten absorbierten Massenstromdichte während der Absorp-

tion im Vergleich zur Desorption. Der Unterschied fällt hier kleiner aus, da bei der Absorption die Filmdicke ansteigt, was den Wärmetransport vermindert.

Im Allgemeinen wurde in der vorliegenden Arbeit der Einfluss der Konzentrations- und Temperaturbedingungen sowie deren Auswirkung auf die Stoffwerte auf die absorbierte Massenstromdichte dargestellt und analysiert. Ebenfalls wurde der Einfluss der einseitigen Diffusion mit entsprechenden Modellannahmen simuliert und diskutiert. Der Einfluss einer Kolbenströmung am Einlass der Filmströmung auf die absorbierte Massenstromdichte wurde durch einen Vergleich mit einer von Anfang voll entwickelten Strömung genauso herausgearbeitet wie der Einfluss des Stofftransportes auf ein Anfangs bereit voll entwickeltes Geschwindigkeitsprofil.

In einem nächsten Schritt ist der Vergleich der vorliegenden theoretischen Untersuchung mit entsprechend orts aufgelösten Messdaten von besonderem Interesse. Dazu ist eine geeignete Messmethodik zu entwickeln, um in der laminaren Filmströmung möglichst störungsarm Temperaturprofile zu ermitteln.

Um Fehler der numerischen Approximation der auftretenden Gradienten in der hier eingesetzten Finite-Differenzen-Methode zu vermeiden, wurde ein nicht-äquidistantes Gitter verwendet. Außerdem wurde die Unabhängigkeit des Ergebnisses von der Anzahl der Gitterpunkte und deren Konsistenz geprüft. Trotzdem ist bei einer zukünftigen Verwendung des Algorithmus diese Prüfung bei jeder Dateninterpretation erneut durchzuführen. Dies liegt daran, dass die Finite-Differenzen-Methode nicht-konservativ ist und die Bilanzen der Erhaltungsgrößen nicht automatisch geschlossen sind.

Weitere numerische Studien mit Stoffdatenmodellen zu neuen Absorbenzen, wie beispielsweise ionischer Flüssigkeiten, sind außerdem von Interesse, damit zukünftige technische Anlagen auf die Eigenschaften dieser Absorbenzen hin optimiert werden können. Aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit kann bereits geschlossen werden, dass bei hochviskosen Absorbenzen eine intensive Scherung der Flüssigkeit zu erhöhten Absorptionsraten führt. Für eine entsprechende Anwendung bedeutet dies, dass ein Rohrbündelwärmeübertrager in dem Fall größere Abstände zwischen den vertikalen Rohrreihen bräuchte und die Wärmeübertragerrohre einen kleineren Durchmesser haben sollten.

Natürlich ist mit dem vorliegenden Modell Tropfenflug, Turbulenz und Wellenbildung nicht abbildbar. Um diese für den Stofftransport äußerst relevanten

---

Effekte abzubilden, ist es wie bereits erwähnt notwendig, Turbulenzmodelle zu integrieren und dazu gegebenenfalls eine Finite-Volumen-Methode einzusetzen. Diese hat den Vorteil, dass sie konservativ ist, numerisch sehr stabil und auch bei großen Gradienten sicher konvergiert. Für die Modellierung kompletter technischer Anlagen wäre in diesem Zusammenhang die Integration des Wärmeübergangs der Heiz- bzw. Kühlwasserseite ebenfalls sinnvoll.



# Anhang A

## Anhang

### A.1 Spaltströmung am Einlass

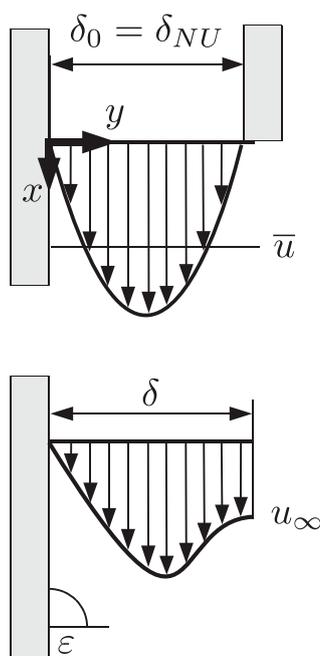


Abbildung A.1: Schematische Darstellung einer Spaltströmung als hydrodynamische Anfangsbedingung

Aufgabesysteme können in der Praxis vielfältige Konstruktionen aufweisen. Eine Art der Lösungsaufgabe kann durch ein sogenanntes Unterlaufwehr erfolgen. Dadurch kann beispielsweise eine gute Verteilung der Flüssigkeit auf einer ebenen Platte erfolgen. Eine schematische Darstellung der sich im Idealfall einstellenden hydrodynamischen Anfangsbedingung ist in Abbildung A.1,

oben dargestellt.

Vernachlässigt man die Wandhaftung in lateraler Richtung  $z$  und ist der Spalt lang genug, so bildet sich bei dieser Art der Lösungsaufgabe im Eintritt eine Spaltströmung aus. An der Stelle  $(x = 0, y = \delta_0)$  wird die Wandhaftung aufgehoben und die Geschwindigkeit der freien Oberfläche nimmt auf Grund der Erdbeschleunigung zu (siehe Abbildung A.1, unten).

Für das Geschwindigkeitsprofil einer Spaltströmung gilt gemäß Fox u. a. (2011) folgende Gleichung:

$$u(y) = \frac{\delta^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left( \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 - \left( \frac{y}{\delta} \right) \right) \quad (\text{A.1})$$

Gleichung (A.1) kann als Randbedingung an der Stelle  $(x = 0)$  für die Beschreibung der Strömung verwendet werden. Der Druckgradient in Strömungsrichtung  $\frac{\partial p}{\partial x}$  kann für die Anfangsbedingung in seiner Größe so festgelegt werden, dass sich in Zusammenhang mit der anfänglichen Filmdicke  $\delta_0 = \delta_{NU}$  eine zu Mittermaier u. Ziegler (2017) vergleichbare mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  ergibt:

$$\bar{u} = \frac{\dot{\Gamma}}{\rho\delta} = \frac{\rho g}{\mu} \frac{\delta^2}{3} = 0,10028 \text{ m/s}$$

Abbildung A.2 zeigt die sich entwickelnde Geschwindigkeit. Diese hier gezeigte Randbedingung kann beispielsweise für einen Vergleich zwischen simulierten und gemessenen Temperaturprofilen dienen, sofern ein Unterlaufwehr als Aufgabesystem für die Strömung über eine ebene Platte verwendet wird. Jedoch ist in Abbildung A.2 auch zu erkennen, dass der Einlaufeffekt nach ca. 1 mm annähernd verschwunden ist, wodurch zu erwarten ist, dass bei einem solchen Vergleich kein nennenswerter Einfluss zu erkennen ist.

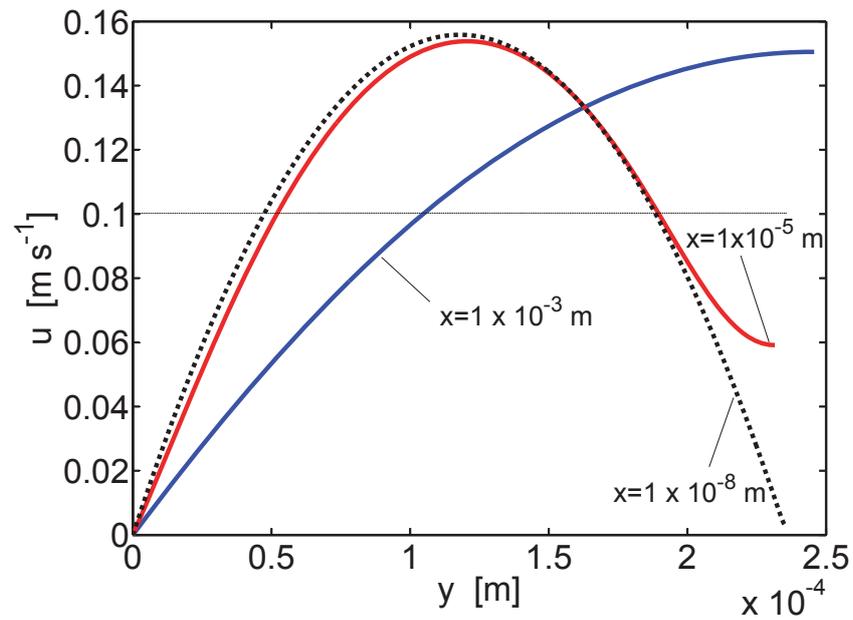


Abbildung A.2: Longitudinale Geschwindigkeit  $u$  ausgehend von einer Spaltströmung am Eintritt für verschiedene Lauflängen  $x$

## A.2 Vergleich der Filmdicken

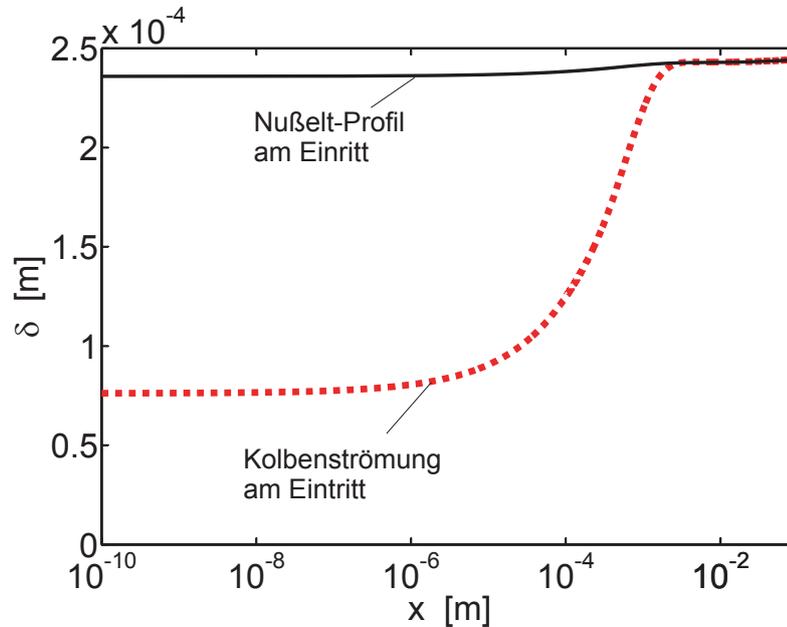


Abbildung A.3: Filmdicke  $\delta$  bei unterkühlter Lösungsaufgabe über die Lauflänge  $x$  für Modell 1 mit Kolbenströmung (gepunktete Linie) und Nußelt-Profil (durchgezogene Linie) am Eintritt

In der Abbildung ist der anfängliche Unterschied der Filmdicken zwischen einem Film mit anfänglicher Kolbenströmung und einem voll entwickeltem Geschwindigkeitsprofil gut zu erkennen. Ab einer Lauflänge von circa  $x = 10^{-3}m$  gleichen sich Filmdicken augenscheinlich aus.

Bei genauerer Betrachtung übersteigt die zur Kolbenströmung gehörende Filmdicke (gepunktete Linie) die zum Nußelt-Profil gehörende durchgezogene Linie. Dies ist in Abbildung A.4 zu erkennen und liegt an dem durch transversale Konvektion erhöhten Wärme- und Stofftransport. Der Nullpunkt der Ordinate ist in Abbildung A.4 unterdrückt, um den Effekt zu verdeutlichen.

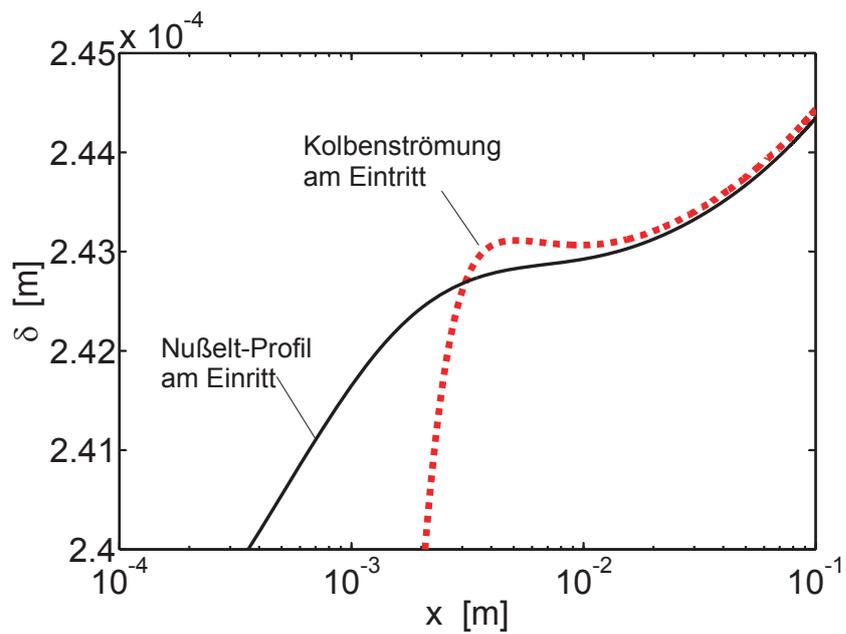


Abbildung A.4: Filmdicke  $\delta$  ab einer Lauflänge von  $x = 10^{-4}m$  bei unterkühlter Lösungsaufgabe über die Lauflänge  $x$  für Modell 1 mit Kolbenströmung (gepunktete Linie) und Nußelt-Profil (durchgezogene Linie)

### A.3 Quellcode des Programms

Die Berechnungen wurden mit dem Programm MatLab der Firma Mathworks durchgeführt. Der Quellcode des Programms kann von

<https://github.com/mittermaier/hmt>

heruntergeladen werden.



# Anhang B

## Publikationsübersicht

Folgende Veröffentlichungen gehören zu dieser kumulativen Arbeit:

1. Mittermaier, M.; Schulze, P.; Ziegler, F.: A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 70 (2014), Nr. 70, 990 - 1002, Published version  
The final publication is available at Elsevier via:  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.11.075>
2. Mittermaier, M.; Ziegler, F.: The impact of viscosity on the combined heat, mass and momentum transfer in laminar liquid falling films. *Journal of Heat and Mass Transfer* (2017), Volume 54, Issue 4, 1199 - 1215, Postprint  
The final publication is available at Springer via:  
<https://doi.org/10.1007/s00231-017-2219-9>
3. Mittermaier, M.; Ziegler, F.: Impact of a developing velocity profile on heat and mass transfer in absorbing laminar falling films. *Chemie Ingenieur Technik* (2016), Nr. 88, 139 - 146, Published version  
The final publication is available at WILEY-VCH via:  
<https://doi.org/10.1002/cite.201500093>

4. Mittermaier, M.; Ziegler, F.: Theoretical evaluation of absorption and desorption processes under typical condition for chillers and heat transformers, International Journal of Refrigeration (2015), Nr. 59, 91 - 101, Published version

The final publication is available at Elsevier via:

<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2015.07.015>

## Literaturverzeichnis

- [NIS 2011] National Institute of Standards and Technology, <http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/> abgerufen am 09.06.2015 [55]
- [Al-Sibai 2004] AL-SIBAI, Faruk: *Experimentelle Untersuchung der Strömungscharakteristik und des Wärmeübergangs bei welligen Rieselfilmen*, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Diss., 2004 [v, 6, 8]
- [Albert u. a. 2014] ALBERT, Christoph ; MARSCHALL, Holger ; BOTHE, Dieter: Direct Numerical Simulation of interfacial mass transfer into falling films. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 69 (2014), Nr. 0, S. 343 – 357 [46]
- [Andberg u. Vliet 1983] ANDBERG, J. W. ; VLIET, G. C.: Nonisothermal absorption of gases into falling liquid films. In: *ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference Proceedings* 2 (1983), S. 423–431 [40, 41]
- [Andberg u. Vliet 1987] ANDBERG, J. W. ; VLIET, G. C.: Absorption of vapors into liquid films flowing over cooled horizontal tubes. In: *2. ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference* Bd. 2, 1987, S. 533–41 [42]
- [Auracher u. a. 2008] AURACHER, Hein ; WOHLFEIL, Arnold ; ZIEGLER, Felix: A simple physical model for steam absorption into a falling film of aqueous lithium bromide solution on a horizontal tube. In: *Heat and Mass Transfer* 44 (2008), S. 1529–1536 [27]
- [Baehr u. Stephan 2010] BAEHR, Hans D. ; STEPHAN, Karl ; BAEHR, Hans D. (Hrsg.) ; STEPHAN, Karl (Hrsg.): *Wärme-und Stoffübertragung*. Springer Verlag, 2010 [31, 55, 56, 60, 69]

- [Bo u. a. 2010] BO, Shoushi ; MA, Xuehu ; LAN, Zhong ; CHEN, Jiabin ; CHEN, Hongxia: Numerical simulation on the falling film absorption process in a counter-flow absorber. In: *Chemical Engineering Journal* 156 (2010), Nr. 3, S. 607 – 612 [73]
- [Bošnjaković u. Knoche 1996] BOŠNJAKOVIĆ, F. ; KNOCHE, K.F.: *Technische Thermodynamik - Teil II*. Steinkopff-Verlag Darmstadt, 1996 [v, 22, 23, 24, 25, 73]
- [Brauer 1971] BRAUER, H.: *Grundlagen der Einphasen- und Mehrphasenströmungen*. Sauerländer Verlag, 1971 (Grundlagen der chemischen Technik) [6, 7, 81]
- [Brauer 1956] BRAUER, Heinz: *Strömung und Wärmeübergang bei Rieselfilmen*, Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Diss., 1956 [5]
- [Brauner 1991] BRAUNER, Neima: Non-isothermal vapour absorption into falling film. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 34 (1991), Nr. 3, S. 767 – 784 [40, 41, 101]
- [Brauner u. a. 1989] BRAUNER, Neima ; MARON, David M. ; MEYERSON, Hanuch: Coupled heat condensation and mass absorption with comparable concentrations of absorbate and absorbent. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 32 (1989), Nr. 10, S. 1897 – 1906 [40]
- [Cerro u. Whitaker 1971] CERRO, Ramon L. ; WHITAKER, Stephen: Entrance region flows with a free surface: the falling liquid film. In: *Chemical Engineering Science* 26 (1971), Nr. 6, S. 785 – 798 [57]
- [Christen 2010] CHRISTEN, Daniel S.: *Praxiswissen der chemischen Verfahrenstechnik: Handbuch für Chemiker und Verfahreningenieure*. Springer-Verlag, 2010 [7]
- [Conlisk 1992] CONLISK, A.T.: Falling film absorption on a cylindrical tube. In: *AIChE journal* 38 (1992), Nr. 11, S. 1716–1728 [42]
- [Conlisk 1995] CONLISK, A.T.: Analytical solutions for the heat and mass transfer in a falling film absorber. In: *Chemical Engineering Science* 50 (1995), Nr. 4, S. 651 – 660 [42, 101]

- [Cosenza u. Vliet 1990] COSENZA, F. ; VLIET, G.C.: Nonisothermal absorption on a horizontal cylindrical tube - 1. The film flow. In: *Chemical Engineering Science* 51 (1990), S. 1275–1285 [41]
- [Crank 1984] CRANK, John: *Free and moving boundary problems*. Clarendon Press Oxford, 1984 [71]
- [Cussler 2009] CUSSLER, Edward L.: *Diffusion – Mass transfer in fluid systems*. 3. Edition. Cambridge University Press, 2009 [v, 17, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37]
- [Danckwerts 1951] DANCKWERTS, P. V.: Significance of Liquid-Film Coefficients in Gas Absorption. In: *Industrial & Engineering Chemistry* 43 (1951), Nr. 6, S. 1460–1467 [36]
- [Deng u. Ma 1999] DENG, S.M. ; MA, W.B.: Experimental studies on the characteristics of an absorber using LiBr/H<sub>2</sub>O solution as working fluid. In: *International Journal of Refrigeration* 22 (1999), Nr. 4, S. 293 – 301 [41]
- [Ferziger u. Peric 2008] FERZIGER, Joel H. ; PERIC, Milovan: *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag, 2008 [52]
- [Fox u. a. 2011] FOX, Robert W. ; McDONALD, Alan T. ; PRITCHARD, Philip J.: *Introduction to fluid mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., 2011 [4, 10, 47, 168]
- [Gao u. a. 2003] GAO, D. ; MORLEY, N.B. ; DHIR, V.: Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method. In: *Journal of Computational Physics* 192 (2003), Nr. 2, S. 624 – 642 [46]
- [Groff u. a. 2007] GROFF, M.K. ; ORMISTON, S.J. ; SOLIMAN, H.M.: Numerical solution of film condensation from turbulent flow of vapor-gas mixtures in vertical tubes. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007), Nr. 19-20, S. 3899 – 3912 [161]
- [Grossman 1983] GROSSMAN, G.: Simultaneous heat and mass transfer in film absorption under laminar flow. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 26 (1983), Nr. 3, S. 357 – 371 [39, 101]

- [Grossman 1987] GROSSMAN, Gershon: Analysis of interdiffusion in film absorption. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 30 (1987), Nr. 1, S. 205 – 208 [82]
- [Grossman u. Heath 1984] GROSSMAN, Gershon ; HEATH, Michael T.: Simultaneous heat and mass transfer in absorption of gases in turbulent liquid films. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 27 (1984), Nr. 12, S. 2365 – 2376 [45]
- [Higbie 1935] HIGBIE, Ralph: The rate of absorption of a pure gas into still liquid during short periods of exposure. In: *Transactions of the American Institute of Chemical Engineers* 31 (1935), S. 365 – 389 [35]
- [Incropera u. Dewitt 2002] INCROPERA, Frank P. ; DEWITT, David P.: *Introduction to Heat Transfer*. Wiley, 2002 [17, 47]
- [Ishigai u. a. 1972] ISHIGAI, Seikan ; NAKANISI, Sigeyasu ; KOIZUMI, Takesi ; OYABU, Zyozi: Hydrodynamics and Heat Transfer of Vertical Falling Liquid Films : Part 1, Classification of Flow Regimes. In: *Bulletin of JSME* 15 (1972), Nr. 83, S. 594–602 [7, 8, 81]
- [Islam u. a. 2009] ISLAM, Mohammad A. ; MIYARAB, Akio ; SETOGUCHI, Toshiaki: Numerical investigation of steam absorption in falling film of LiBr aqueous solution with solitary waves. In: *International Journal of Refrigeration* 32 (2009), S. 1597–1603 [46]
- [Jernqvist u. Kockum 1996] JERNQVIST, A ; KOCKUM, H.: Simulation of falling film absorbers and generators. In: *Ab-Sorption* 96 Bd. 1, 1996 [21, 43, 45, 73]
- [Karami u. Farhanieh 2011] KARAMI, Shahram ; FARHANIEH, Bijan: Numerical modeling of incline plate LiBr absorber. In: *Heat and Mass Transfer* 47 (2011), S. 259–267 [101]
- [Kholpanov u. a. 1982] KHOLPANOV, LP ; MALYUSOV, VA ; ZHAVORONKOV, NM: Hydrodynamics and heat- and mass-transfer in a liquid film in the presence of a gas stream or of surface tension. In: *Theoretical Foundations of Chemical Engineering (English translation of Teoreticheskie Osnovy Khimicheskoi Tekhnologii)* 16 (1982), Nr. 3, S. 201–207 [39]

- [Killion u. Garimella 2003] KILLION, J.D. ; GARIMELLA, S.: A review of experimental investigations of absorption of water vapor in liquid films falling over horizontal tubes. In: *HVAC and R Research* 9 (2003), Nr. 2, S. 111–136 [38]
- [Killion u. Garimella 2001] KILLION, Jesse D. ; GARIMELLA, Srinivas: A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling-film absorption. In: *International Journal of Refrigeration* 24 (2001), S. 755 – 797 [27, 40, 42, 43, 73, 143]
- [Killion u. Garimella 2004] KILLION, Jesse D. ; GARIMELLA, Srinivas: Simulation of pendant droplets and falling films in horizontal tube absorbers. In: *Journal of heat transfer* 126 (2004), Nr. 6, S. 1003 – 1013 [46]
- [Kraume 2012] KRAUME, Matthias: *Transportvorgänge in der Verfahrenstechnik*. Springer Berlin / Heidelberg, 2012 [v, 5, 34]
- [Kulankara u. Herold 2002] KULANKARA, S. ; HEROLD, K. E.: Surface tension of aqueous lithium bromide with heat/mass transfer enhancement additives: the effect of additive vapor transport. In: *International Journal of Refrigeration* 25 (2002), Nr. 3, S. 383 – 389 [81]
- [Lewis u. Randall 1921] LEWIS, Gilbert N. ; RANDALL, Merle: The activity coefficient of strong electrolytes. In: *Journal of the American Chemical Society* 43 (1921), Nr. 5, S. 1112 – 1154 [21]
- [Li u. Chen 2009] LI, Jichun ; CHEN, Yi-Tung: *Computational partial differential equations using MATLAB*. CRC Press, 2009 [47]
- [Löwer 1960] LÖWER, Harald: *Thermodynamische und physikalische Eigenschaften der wässrigen Lithiumbromid-Lösung*, Karlsruhe, Diss., 1960 [58, 69, 82]
- [Majumdar 2005] MAJUMDAR, P.: *Computational Methods for Heat and Mass Transfer*. Taylor & Francis, 2005 [27]
- [Markatos u. a. 2012] MARKATOS, N.C. ; TATCHELL, D.G. ; CROSS, M. ; RHODES, N.: *Numerical Simulation of Fluid Flow and Heat/Mass Transfer Processes*. Springer Berlin / Heidelberg, 2012 [27]

- [Meyer 2014] MEYER, T.: Improvement of the exact analytical solutions for combined heat and mass transfer problems obtained with the Fourier method. In: *International Journal of Refrigeration* 43 (2014), Nr. 0, S. 133 – 142 [39, 81]
- [Meyer 2016] MEYER, Thomas: *Analytische Lösung des gekoppelten Wärme- und Stofftransportproblems bei der Absorption im laminaren Rieselfilm*, Technische Universität Berlin, Diss., 2016 [27]
- [Min u. Park 2011] MIN, June K. ; PARK, Il S.: Numerical study for laminar wavy motions of liquid film flow on vertical wall. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54 (2011), Nr. 15-16, S. 3256 – 3266 [46]
- [Mittermaier u. a. 2014] MITTERMAIER, M. ; SCHULZE, P. ; ZIEGLER, F.: A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 70 (2014), S. 990 – 1002 [58, 69, 81, 82, 142]
- [Mittermaier u. Ziegler 2015] MITTERMAIER, M. ; ZIEGLER, F.: Theoretical evaluation of absorption and desorption processes under typical condition for chillers and heat transformers. In: *International Journal of Refrigeration* 59 (2015), S. 91 – 101 [vi, 70, 74, 144, 145]
- [Mittermaier u. Ziegler 2016] MITTERMAIER, M. ; ZIEGLER, F.: Impact of a developing velocity profile on heat and mass transfer in absorbing laminar falling films. In: *Chemie Ingenieur Technik* 88 (2016), S. 139 – 146 [vi, 125, 126, 127]
- [Mittermaier u. Ziegler 2017] MITTERMAIER, M. ; ZIEGLER, F.: The impact of viscosity on the combined heat, mass and momentum transfer in laminar liquid falling films. In: *Journal of Heat and Mass Transfer* (2017) [vi, 100, 101, 103, 137, 138, 140, 141, 168]
- [Moukalled u. a. 2015] MOUKALLED, F. ; MANGANI, L. ; DARWISH, M.: *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*. Springer International Publishing, 2015 [161]

- [Nakoryakov u. Grigor'eva 1977] NAKORYAKOV, V. E. ; GRIGOR'EVA, N. I.: Combined heat and mass transfer during absorption in drops and films. In: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 32 (1977), S. 243–247 [38, 39, 40, 80]
- [Nakoryakov u. Grigor'eva 1997] NAKORYAKOV, V.E. ; GRIGOR'EVA, N.I.: Analysis of exact solutions to heat- and mass-transfer problems for absorption with films or streams. In: *Theoretical Foundations of Chemical Engineering* 31 (1997), S. 119–126 [56, 76, 80, 81]
- [Nakoryakov u. a. 2011] NAKORYAKOV, V.E. ; GRIGORYEVA, N.I. ; BARTASHEVICH, M.V.: Heat and mass transfer in the entrance region of the falling film: Absorption, desorption, condensation and evaporation. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54 (2011), Nr. 21, S. 4485–4490 [81]
- [Nernst 1904] NERNST, Walther: Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit in heterogenen Systemen. In: *Zeitschrift für Physikalische Chemie* 47 (1904), S. 52–55 [33]
- [Nußelt 1916] NUSSELT, Wilhelm: Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. In: *Zeitschr. Ver. Deutsch. Ing.* 60 (1916), S. 541–546 [8, 75]
- [Park 2010] PARK, Il S.: Numerical analysis for flow, heat and mass transfer in film flow along a vertical fluted tube. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53 (2010), Nr. 1-3, S. 309 – 319 [161]
- [Park u. a. 2001] PARK, S. B. ; LEE, J. W. ; LEE, H. ; BAEK, Y. S.: Surface Tensions and Thermal Conductivities of Aqueous LiBr-Based Solutions Containing n-Octanol and 2-Ethyl-1-Hexanol: Application to an Absorption Heat Pump. In: *International Journal of Thermophysics* Volume 22, Number 2 (2001), S. 445–458 [81]
- [Paschke 2011] PASCHKE, Steve: *Experimentelle Analyse ein- und zweiphasiger Filmströmungen auf glatten und strukturierten Oberflächen*, Technische Universität Berlin, Diss., 2011 [8]
- [Polifke u. Kopitz 2009] POLIFKE, Wolfgang ; KOPITZ, Jan: *Wärmeübertragung*. Pearson, 2009 [17, 19, 20, 47]

- [Prandtl 1904] PRANDTL, Ludwig: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In: *Int. Math. Kongr. Heidelberg* (1904), S. 484–491 [11, 57]
- [Schlichting u. Gersten 2006] SCHLICHTING, Hermann ; GERSTEN, Klaus ; SCHLICHTING, Hermann (Hrsg.) ; GERSTEN, Klaus (Hrsg.): *Grenzschicht-Theorie*. Springer Berlin / Heidelberg, 2006 [4, 12, 13, 14, 15, 73]
- [Schulze 2012] SCHULZE, Philipp: *Modellvergleich und Simulation des Wärme- und Stofftransports bei der Absorption im laminaren Fallfilm*, Technische Universität Berlin, Diplomarbeit, 2012 [80]
- [Sigloch 2012] SIGLOCH, Herbert: *Technische Fluidmechanik*. Bd. 1. Springer, 2012 [47]
- [Stemmer 2012] STEMMER, Dr.-Ing. C. ; MÜNCHEN, TU (Hrsg.): *Grenzschichttheorie*. Vorlesungsskript des Lehrstuhls für Aerodynamik, 2012 [15, 16]
- [Stephan u. a. 2010] STEPHAN, Peter ; SCHABER, Karlheinz ; STEPHAN, Karl ; MAYINGER, Franz: *Thermodynamik – Grundlagen und technische Anwendungen: Band 2: Mehrstoffsysteme und chemische Reaktionen*. Springer Berlin / Heidelberg, 2010 [21, 22, 24]
- [Subramaniam u. Garimella 2009] SUBRAMANIAM, Vishwanath ; GARIMELLA, Srinivas: From measurements of hydrodynamics to computation of species transport in falling films. In: *International Journal of Refrigeration* 32 (2009), S. 607 – 626 [46]
- [VDI-Wärmeatlas 2013] VDI-WÄRMEATLAS ; VDI GESELLSCHAFT (Hrsg.): *VDI-Wärmeatlas*. Springer Verlag Berlin / Heidelberg, 2013 [6, 7, 19]
- [van der Wekken u. Wassenaar 1988] WEKKEN, B.J.C van d. ; WASSENAAR, R.H: Simultaneous heat and mass transfer accompanying absorption in laminar flow over a cooled wall. In: *International Journal of Refrigeration* 11 (1988), Nr. 2, S. 70 – 77 [40]
- [Wohlfeil 2009] WOHLFEIL, Arnold: *Wärme- und Stoffübertragung bei der Absorption an Rieselfilmen in Absorptionskälteanlagen*, Technische Universität Berlin, Diss., 2009 [40, 73]

- 
- [Yang u. Wood 1992] YANG, R. ; WOOD, B. D.: A numerical modeling of an absorption process on a liquid falling film. In: *Solar Energy* 48 (1992), Nr. 3, S. 195 – 198 [41, 101]
- [Ziegler u. Grossman 1996] ZIEGLER, F. ; GROSSMAN, G.: Heat-transfer enhancement by additives. In: *International Journal of Refrigeration* 19 (1996), Nr. 5, S. 301 – 309 [163]