

Beiträge zur Beugungstheorie elektromagnetischer Wellen an Kanten vollkommen leitender Flächen

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Sherko Zinal

von der Fakultät IV - Elektrotechnik und Informatik
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Klaus Petermann

1. Bericht: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Mönich

2. Bericht: Prof. Dr.-Ing. Heino Henke

3. Bericht: Prof. Dr.-Ing. Albrecht Oehler (Hochschule Reutlingen)

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 11. Februar 2011

Berlin 2011

D 83

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	v
Abstract	vii
1 Darstellung des Beugungsproblems	1
1.1 Die Beugungsproblematik planarer Antennen	1
1.2 Formulierung des elementaren Beugungsproblems	7
2 Stromlinien-Modell	11
2.1 Allgemeine Beschreibung des Modells	12
2.2 Grundlegende Ideen zur Entwicklung des Modells	14
2.2.1 Beugung als lokales Phänomen: KELLERS Geometrische Beugungstheorie.	14
2.2.2 Kantenrückwirkungsströme: UFIMTSEVs Physikalische Beugungstheorie	17
2.3 Primärstrom-Sektorisierung	19
2.4 Besenreiser-Ströme	22
2.5 EM-Felder eines einzelnen Besens	26
2.6 Problemangepasstes Koordinatensystem	31
2.7 Darstellung des Beugungsfeldes	35
2.7.1 Betrachtung der äußersten Wellenfront	35
2.7.2 Das Beugungsfeld innerhalb des Spindel-Körpers:	40
2.8 Beugungsfeld eines GAUSS-Impulses	45
2.9 Simulation	52
2.10 Diskussion des Stromlinien-Modells	55
3 Näherungslösung mittels Spiegelungsmethode	57
3.1 Formulierung des Beugungsfeldes	58
3.1.1 Formulierung der primären elektromagnetischen Felder für eine harmonische Zeitabhängigkeit:	58
3.1.2 Näherungslösung des Beugungsfeldes:	60

3.1.3	Eigenschaften und Unzulänglichkeiten der Näherungs-lösung:	63
3.1.4	Feldliniendarstellung in der Symmetrieebene:	64
3.1.5	Betrachtung des unsymmetrischen Beugungsproblems:	66
A	Impuls-gespeister V-Dipol	69
B	Das Spindel-Koordinatensystem	75
C	Numerische Auswertungen	81
C.1	Beugungsfelder der äußersten Wellenfront	82
C.2	Beugungsfelder innerhalb des Spindelkörpers	85
D	Sommerfeldsches Beugungsproblem	89
E	Wiener-Hopf-Technik	99
F	Fresnel-Integrale	119
G	Die Kantenbedingung	123
	Danksagung	127

Zusammenfassung

Den Kern der vorliegenden Arbeit bilden die Untersuchung sowie die Formulierung von Lösungsansätzen für ein elementares, elektromagnetisches Beugungsproblem; einer unendlich langen Schlitzleitung mit einseitig begrenzter Metallisierungsplatte (Abschnitt 1.2).

Motiviert wird dieses Beugungsproblem im Hinblick auf die Beugungsproblematik planarer Strahler (Antennen) mit endlich ausgedehnter Grundmetallisierung (Abschnitt 1.1).

In Kapitel 2 wird ein Stromlinien-Modell zur Formulierung des Beugungsfeldes für den Fall einer transienten Anregung (im Zeitbereich) vorgestellt.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Formulierung einer geschlossenen Näherungslösung des Beugungsproblems für den Fall einer zeitharmonischen Anregung (im Frequenzbereich).

Es wird an verschiedenen Stellen der Versuch unternommen, Verknüpfungspunkte und Ähnlichkeiten der vorgestellten Lösungsansätze mit etablierten beugungstheoretischen Verfahren zu betonen, um erstere in einem historischen wie methodischen Rahmen der gesamten Beugungstheorie einzubetten. Dazu gehören insbesondere KELLERS Geometrische Beugungstheorie sowie UFIMTSEVs Physikalische Beugungstheorie (Abschnitt 2.2).

Zum grundsätzlichen Verständnis des singulären Verhaltens elektromagnetischer Felder an unendlich scharfen Kanten wird in Anhang D das SOMMERFELDSche Beugungsproblem sowie die MEIXNERSche Kantenbedingung erörtert.

Abstract

The thesis discusses solution concepts of an elementary electromagnetic diffraction problem: an infinite slot-line with semi-infinite metallization (Section 1.2).

The treated configuration is motivated within the context of edge-diffraction problems concerning planar antennas with finite ground planes (Section 1.1).

In Chapter 2, a current-line model describing the diffracted fields for the case of transient excitation is developed.

Chapter 3 presents an approximated ray-optical solution of the treated diffraction configuration in the case of time-harmonic excitation.

It was the aim of the author to expose the relations of his own solution concepts with several ideas presented in the past in different diffraction theories. In particular KELLER's Geometrical Theory of Diffraction and UFIMTSEV's Physical Theory of Diffraction. This is done in Section 2.2.

For understanding the general behaviour of electromagnetic fields at sharp edges, SOMMERFELD's diffraction problem and MEIXNER's edge condition are treated in Appendix D.

Kapitel 1

Darstellung des Beugungsproblems

In diesem einleitenden Kapitel wird der Versuch unternommen, ausgehend von einer allgemeinen Darstellung der Beugungsproblematik planarer Strahler mit endlich ausgedehnter Grundmetallisierung zu dem dieser Arbeit zugrundeliegenden, elementaren Beugungsproblem überzuleiten, wodurch dieses gleichzeitig motiviert werden soll. Dabei richtet sich das Augenmerk der Betrachtung nicht so sehr auf die endgültigen Berechnungsformeln der Strahlungsfelder der vorgestellten Antennen, sondern vielmehr auf die feldtheoretischen Annahmen und Voraussetzungen, auf denen die Berechnungsmodelle beruhen und welche für die Konstruktion des elementaren Beugungsproblems ausschlaggebend sind.

1.1 Allgemeine Darstellung der Beugungsproblematik planarer Antennen mit endlich ausgedehnter (Grund-)Metallisierung

Vorteile, wie z. B.: einfache und kostengünstige Herstellbarkeit, geringes Gewicht wie geringer Platzbedarf, Oberflächen-Konformität, Integrierbarkeit auf Leiterplatten, Kompatibilität mit MMIC-Technologien¹ sowie die vielfältigen Möglichkeiten der Einstellbarkeit der Strahlungseigenschaften, haben zu einer weiten Verbreitung planarer Antennen in diversen technischen Anwendungsbereichen geführt. Dazu zählen insbesondere Anwendungen in der mobilen Kommunikationstechnik und der Luft- und Raumfahrt. Abbildung 1.1 zeigt zwei der einfachsten und zugleich wichtigsten Vertreter planarer Antennen mit den entsprechenden charakteristischen Ebenen (E - und H -Ebene). Diese in der Antennentechnik wichtigen

¹MMIC (*engl.*): Monolithic Microwave Integrated Circuit.

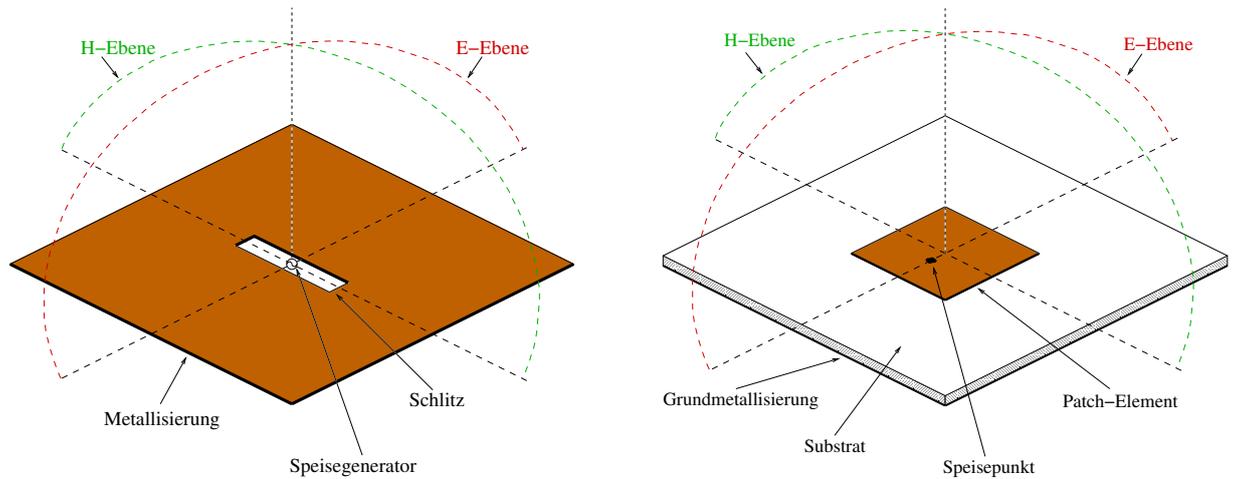


Abbildung 1.1: Zwei Beispiele planarer Antennen: Schlitz-Antenne (links) und Patch-Antenne (rechts).

Betrachtungsebenen bilden Symmetrieebenen, in denen nur die bezeichnende Feldkomponente vollständig liegt, wobei die jeweils andere Feldkomponente senkrecht auf dieser Ebene steht.

Die Strahlungsfelder planarer Antennen lassen sich vornehmlich über die magnetischen Stromverteilungen in den Apertur-Flächen berechnen.² Dabei werden die magnetischen Stromverteilungen nach dem HUYGENSSchen³-Äquivalenzprinzip für elektromagnetische Wellen⁴ anhand der elektrischen Feldverteilung in der Apertur bestimmt zu:

$\vec{M} = -\vec{n} \times \vec{E}$, wobei \vec{n} den Flächennormalenvektor bezeichnet.

Abbildung 1.2 zeigt die Verteilung des elektrischen Feldes in der Apertur eines $\lambda/2$ -Schlitzes mit dem entsprechenden äquivalenten magnetischen Strom. Durch Füllung der Apertur mit vollkommen leitendem Material und anschließender Spiegelung des magnetischen Stromes an der Grundmetallisierungsplatte (unter der Annahme einer unendlich ausgedehnten Platte!) erhält man die endgültige magnetische Stromverteilung zur Berechnung der Strahlungsfelder „unter Abwesenheit der Grundmetallisierung“: $\vec{M} = -2\vec{n} \times \vec{E}$.⁵

²In der Fachliteratur, z. B. in [BRT90] und [Bal97], ist eine Vielzahl von verschiedenen empirischen, halb-empirischen und analytischen Methoden zur Analyse und Berechnung von planaren Antennen zu finden. Für die Thematik dieser Arbeit sind jedoch ausschließlich die auf dem HUYGENS-Prinzip beruhenden Modelle von Interesse.

³CHRISTIAN HUYGENS (★ 14. April 1629 in Den Haag; † 8. Juli 1695 ebd.).

⁴Zur Herleitung des vektoriellen HUYGENS-Prinzips, siehe z.B.: H. HENKE, Skriptum zur Vorlesung „Elektromagnetische Wellen I & II“, TU-Berlin, WS 1995/96, S. 74.

⁵Es sei hier angemerkt, dass das Füllen der Apertur mit vollkommen leitendem Material und

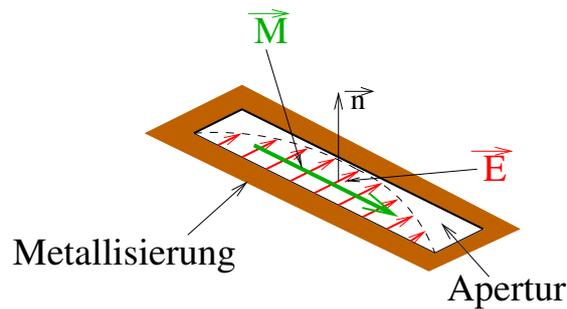


Abbildung 1.2: Darstellung der elektrischen Feldverteilung sowie der äquivalenten magnetischen Ströme in der Apertur einer $\lambda/2$ -Schlitz-Antenne.

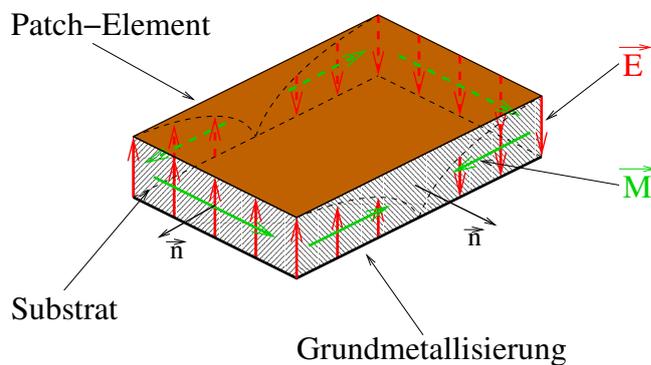


Abbildung 1.3: Darstellung der elektrischen Feldverteilungen sowie der äquivalenten magnetischen Ströme in den Apertur-Flächen eines Patch-Resonators im Grundswingungsmodus TE_{010} .

Auch für das Patch-Element lassen sich, wie in in [Abbildung 1.3](#) dargestellt, die magnetischen Ströme anhand der nach dem Resonator-Modell⁶ festgelegten elektri-

anschließend die Spiegelung der magnetischen Stromverteilung an der Metallplatte notwendige Bedingungen für die Berechnung der Strahlungsfelder unter ausschließlicher Heranziehung der magnetischen Ströme darstellen. Denn nach dem HUYGENS-Prinzip muss im Allgemeinen auch die elektrische Flächenstromverteilung in der Apertur ($\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$) zur Berechnung der Strahlungsfelder herangezogen werden. Auch wenn im betrachteten Fall der Schlitz-Antenne, aufgrund der Anregung der Felder in der Apertur-Ebene selbst, keine tangentielle magnetische Feldkomponente in der Apertur existiert, müsste für eine vollständige Beschreibung, im Fall eines Verzichtes auf die beiden obengenannten Bedingungen, die auf der Platte induzierte elektrische Flächenstromdichte mitberücksichtigt werden, deren Bestimmung die Lösung eines eigenständigen feldtheoretischen Problems darstellt.

⁶Nach dem Resonator-Modell wird das Patch-Element als offener Resonator betrachtet. Unter der vereinfachenden Annahme, dass das magnetische Feld an den strahlenden Schlitzen verschwindet, während das elektrische Feld dort sein Maximum besitzt, können diese beiden Schlitze durch magnetische Wände geschlossen werden. Nicht-ideale Effekte, wie z.B. Austritt und Wölbung

schen Feldverteilungen in den Seitenflächen⁷ bestimmen. Dabei ist ersichtlich, dass die magnetischen Ströme der seitlichen Schlitze sowohl innerhalb jedes einzelnen Schlitzes als auch bezüglich des gegenüberliegenden Schlitzes in entgegengesetzter Richtung verlaufen, wodurch deren Strahlungsbeiträge sich im Fernfeld kompensieren und somit die betreffenden Schlitze nicht zur Gesamtstrahlung des Patch-Elementes beitragen. Diese werden daher auch als die nicht-strahlenden Schlitze bezeichnet. Dagegen verlaufen die magnetischen Ströme in den Frontal-Schlitzten in gleicher Richtung, wodurch sich ihre Strahlungsbeiträge im Fernfeld konstruktiv überlagern und die betreffenden Schlitze somit die „strahlenden“ Schlitze des Patch-Elementes bilden.

Auch hier lässt sich das Spiegelungsverfahren (unter der Annahme einer unendlich ausgedehnten Platte!) auf die magnetischen Ströme anwenden, wodurch sich die zur Berechnung der Strahlungsfelder „genügende“⁸ magnetische Stromverteilung ergibt zu: $\vec{M} = -2\vec{n} \times \vec{E}$.

Somit ist anhand der beiden Beispiele (Patch- und Schlitz-Antenne) deutlich gemacht worden, dass die einfachen Berechnungsmodelle planarer Antennen immer von einer unendlich ausgedehnten Grundmetallisierungsplatte ausgehen.

Planare Antennen werden in der Praxis jedoch immer mit einer endlich ausgedehnten Grundmetallisierung ausgeführt. Diese Tatsache führt zu Beugungserscheinungen an den Kanten der Grundmetallisierung, welche sich dem eigentlichen Strahlungsfeld der Antenne überlagern, von dem Berechnungsmodell jedoch nicht erfasst werden.

Die in Abbildung 1.4 dargestellten Richtdiagramme⁹ veranschaulichen die Auswirkungen der begrenzten Ausdehnung der Grundmetallisierungsplatte.¹⁰ Während

der elektrischen Feldlinien an den Patch-Kanten (welche zu einer Längenerweiterung führt!) oder die Luft-Substrat-Schnittstelle außerhalb der Patch-Grenzen (welche zu einer Änderung der effektiven Permittivität führt!) werden anschließend an das Resonator-Modell durch empirische Modelle berücksichtigt. Die seitlichen Schlitze spielen dabei keine entscheidende Rolle, da sie, wie im Folgenden noch dargelegt wird, nicht zur Gesamtstrahlung des Patch-Elementes beitragen.

⁷Aufgrund der im Verhältnis zu den restlichen Abmessungen niedrigen Resonatorhöhe (bedingt durch die Substratdicke!) werden die offenen Seitenflächen in der Antennenliteratur als „Schlitze“ bezeichnet.

⁸Im Unterschied zu der Schlitz-Antenne liegen die hier betrachteten Schlitze nicht in der Grundmetallisierungsplatte, sondern senkrecht auf ihr. Eine Füllung der Apertur mit vollkommen leitendem Material kommt also nicht in Betracht. Die nach dem HUYGENS-Prinzip zusätzlich zu berücksichtigende elektrische Stromverteilung $\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$ (insbesondere in den seitlichen Schlitzten) kann durch Anwendung des Spiegelungsverfahrens vernachlässigt werden, da die elektrischen Ströme an einer Metallplatte bekanntlich mit entgegengesetztem Vorzeichen gespiegelt werden, wodurch sie sich mit ihren Spiegelbildern, aufgrund des geringen Abstandes, strahlungsmäßig kompensieren.

⁹Die Richtdiagramme wurden mit der Software IE3D von Zeland simuliert.

¹⁰Der dargestellte Winkelbereich wurde auf den Halbraum der Hauptstrahlungsrichtung beschränkt. Dabei ist zu beachten, dass durch die Kantenbeugung auch eine Rückwärtsstrahlung

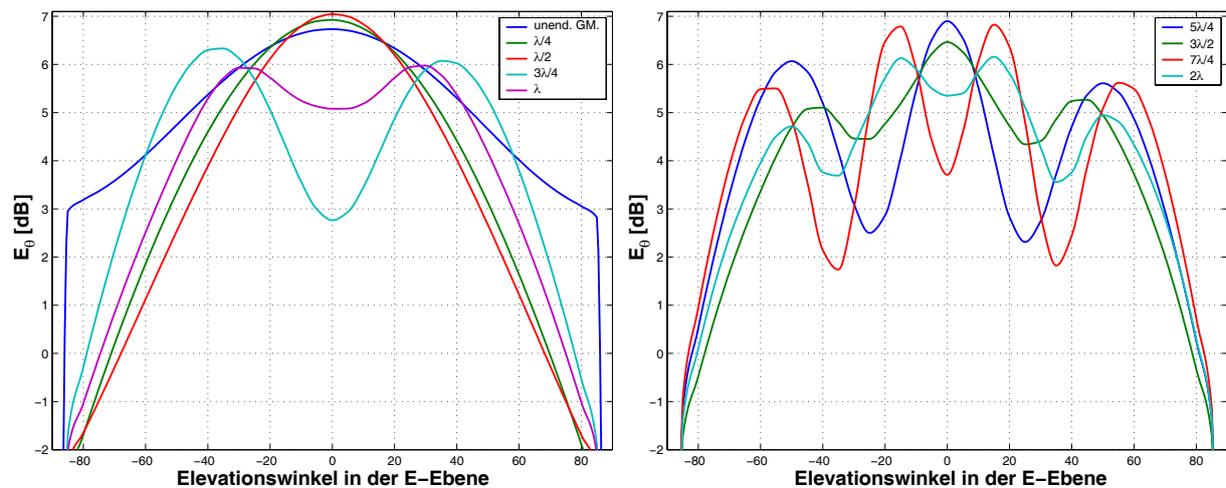


Abbildung 1.4: Richtdiagramme einer Patch-Antenne in der E-Ebene für verschiedene Abstände der zu den strahlenden Schlitzen parallelen Kanten der Grundplatte vom Element-Zentrum.

für Kantenabstände von bis zu einer halben Wellenlänge eine Strahlungs Bündelung in Hauptstrahlrichtung (im Vergleich zu dem Fall der unendlich ausgedehnten Metallisierung!) zu beobachten ist, treten oberhalb dieses Abstandes deutliche Interferenzmuster in der Richtcharakteristik auf.

Die Forschungsbemühungen zur Behandlung der Beugungserscheinungen an den Metallisierungskanten richten sich primär auf die praktische Eliminierung bzw. Dämpfung der Beugungswellen. Z. B. wird in [NMI03] die Metallplatte an den Rändern mit unsymmetrischen, rechteckigen Aussparungen versehen, derart, dass sich die Beugungsbeiträge der gegenüberliegenden Kanten aufgrund von Phasenunterschieden im Fernfeld gegenseitig kompensieren. Dagegen wird in [HB02] der Rand der Metallplatte zackenförmig gestaltet, was zu einer „Verschmierung“ der Beugungsfront führt. In [WDL90] wird eine messtechnische Methode zur Eliminierung der Beugungserscheinungen aus den gemessenen Richtdiagrammen vorgestellt. Dabei wird die Vorwärts-Rückwärts-Symmetrie der Beugungswellen ausgenutzt, wonach eine Subtraktion des Rückwärts-Strahlungsdiagramms von dem Vorwärts-Strahlungsdiagramm zur Eliminierung der Beugungswellen führt.

Verfahren zur Berechnung der Kantenbeugungsfelder¹¹ beruhen hauptsächlich auf der von J. B. KELLER entwickelten „Geometrischen Beugungstheorie“, auf die in Abschnitt 2.2 kurz eingegangen wird. Die GTD¹² stellt eine asymptotische Metho-

entsteht.

¹¹siehe z.B. [Hua83] und [Bal97] (12.10, S. 638).

¹²GTD (engl.): Geometrical Theory of Diffraction.

de für hochfrequente, zeitharmonische Vorgänge dar. Mit der Einschränkung auf hochfrequente Vorgänge, was lediglich bedeutet, dass die Abmessungen der beugenden Struktur „groß“ im Verhältnis zur Wellenlänge sein müssen, trägt dem strahlenoptischen Charakter dieser Methode Rechnung, wonach die beugenden Kanten sich im Fernfeld der primären Strahlungsquellen zu befinden haben.

Obwohl die Geometrische Beugungstheorie respektable Ergebnisse bei der Berechnung von Strahlungsdiagrammen planarer Antennen mit endlich ausgedehnter Grundmetallisierung liefert, wie in [Hua83] und [Bal97] an mehreren Beispielen demonstriert wird, stellt sich die Frage, inwiefern eine alternative Berechnungsmethode eine bessere Einsicht in die elektromagnetischen Vorgänge an den beugenden Kanten gewährleisten kann, insbesondere, ob die Einschränkungen der GTD auf zeitharmonische Vorgänge und Fernfeldbetrachtungen umgangen werden können. Die Strahlungsfelder der Antennen haben jedoch eine komplexe Struktur, wodurch sich die Lösung des Beugungsproblems in Form eines klassischen feldtheoretischen Problems als schwierig erweist, ja eine strenge Lösung schier unmöglich ist. Das Haupthindernis besteht dabei in der Tatsache, dass sich das primäre Strahlungsfeld und das Beugungsfeld nicht im gleichen Koordinatensystem in einer einfachen Form mathematisch beschreiben lassen, anders ausgedrückt, dass die Phasenfronten beider Wellen geometrische Flächen unterschiedlichen Typs bilden.

Daher wird im nachfolgenden Abschnitt eine einfache Beugungsanordnung konstruiert, die als elementares Beugungsproblem planarer Strahlungsstrukturen im weiteren Verlauf dieser Arbeit untersucht werden soll.

1.2 Formulierung des elementaren Beugungsproblems

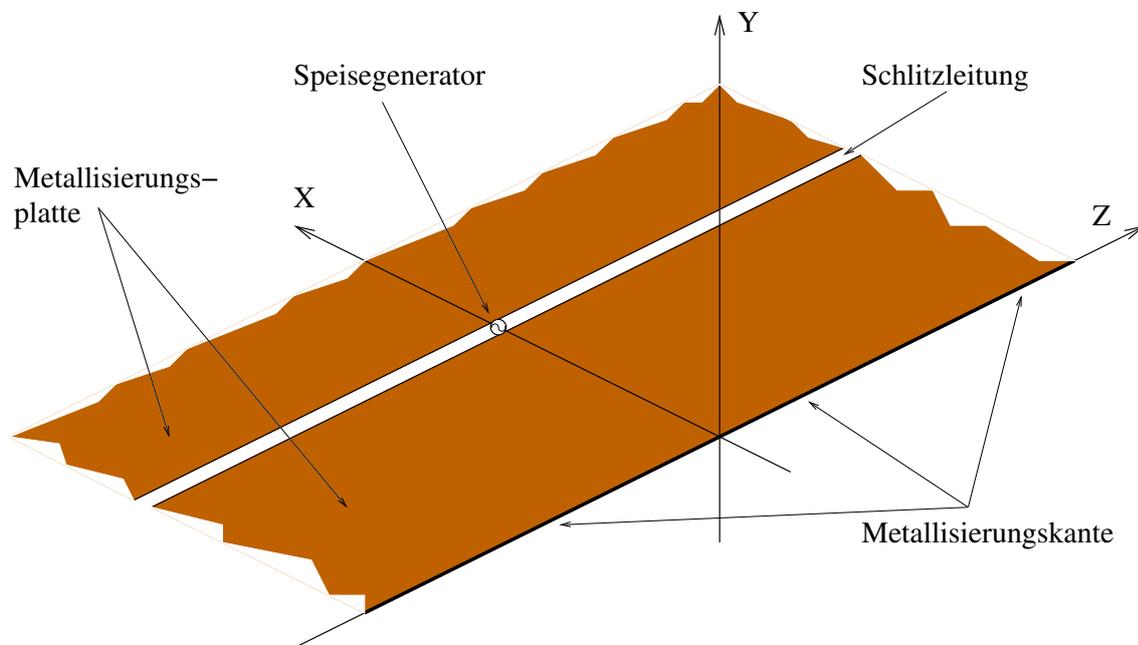


Abbildung 1.5: Unendlich lange Schlitzleitung mit einseitig begrenzter Metallisierungsplatte (Unendlich lange Schlitzleitung in einer leitenden Halbebene).

Abbildung 1.5 zeigt die zu untersuchende Beugungsanordnung, bestehend aus einer als unendlich lang angenommenen, durch einen konzentrierten Generator gespeisten Schlitzleitung mit einer einseitig begrenzten Metallisierungsplatte. Dabei wird hier nicht auf die leitungsspezifischen Eigenschaften der Schlitzleitung wie z.B. Leitungswellenwiderstand oder Ausbreitungskonstante eingegangen.¹³ Die Breite der Schlitzleitung wird als „sehr klein“ im Verhältnis zum Beobachtungsabstand und zu den verwendeten Wellen- bzw. Pulslängen angenommen, wodurch die elektrische Feldverteilung in der Schlitzebene näherungsweise durch einen magnetischen Fadenstrom beschrieben werden kann, die elektromagnetischen Felder einen TEM-Charakter aufweisen und sich mit Lichtgeschwindigkeit entlang der Leitung fortpflanzen und zuletzt die Schnittkurven der Wellenfronten mit zur Leitung senkrecht stehenden Ebenen Kreise bilden. Die „unendlich dünne“ Schlitzleitung stellt somit das BABINETSche¹⁴ Komplement zu einer unendlich dünnen

¹³Eine ausführliche Behandlung der Schlitzleitung ist in [GGBB96] zu finden.

¹⁴JACQUES BABINET (* 5. März 1794 in Lusignan, Vienne, Frankreich; † 21. Oktober 1872 in

Drahtleitung dar, mit der Einschränkung, dass die Felder der Drahtleitung eine 360° -Rotationssymmetrie aufweisen, während sie im Fall der Schlitzleitung eine Antisymmetrie bezüglich der Metallisierungsebene aufweisen.

Die Rolle der Schlitzleitung für das Beugungsproblem beschränkt sich somit auf die „physikalische“ Ermöglichung einer sich vom Speisegenerator aus ausbreitenden Kugelwelle, als einfachste Wellenform einer planaren Struktur, die anschließend an der Metallisierungskante gebeugt wird. Abbildung 1.6 zeigt die qualitative Struktur der elektromagnetischen Felder für den Fall einer DIRAC-Impuls gespeisten Leitung. Die Feldlinien liegen auf einer Kugeloberfläche und bilden in einem Kugelkoordinatensystem mit dem Generator im Mittelpunkt eine TEM-Welle. Aufgrund

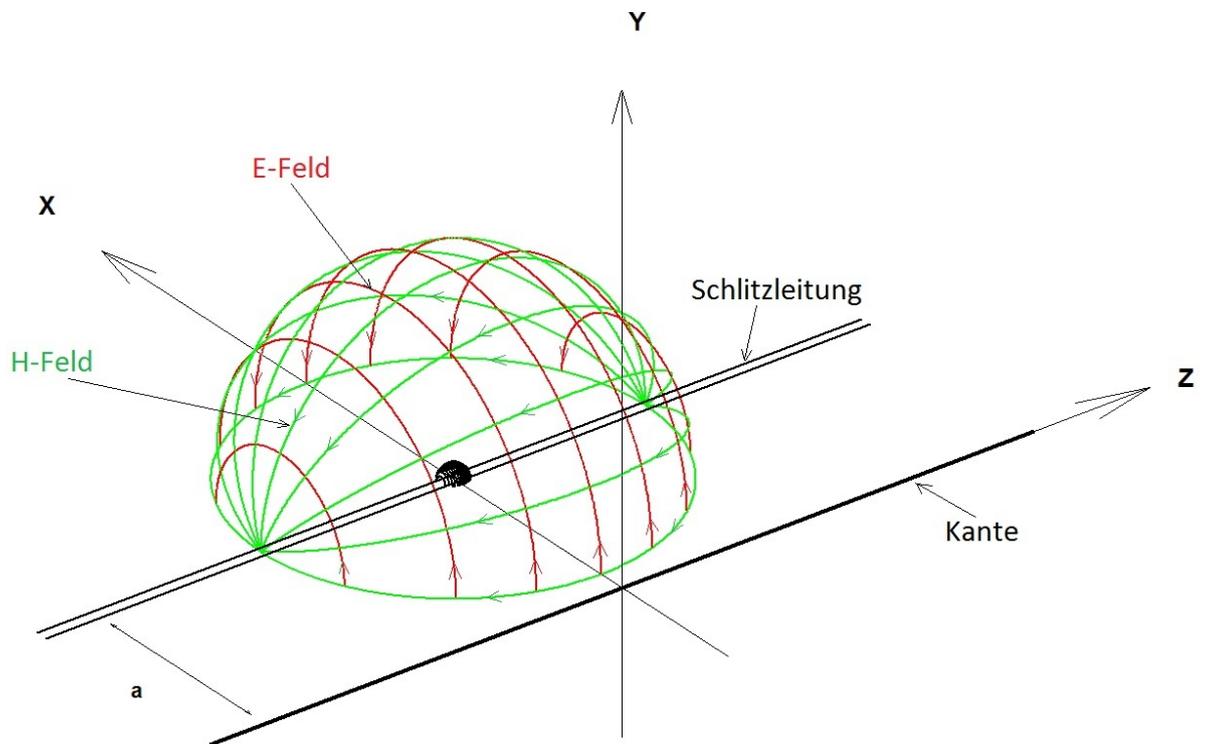


Abbildung 1.6: Qualitative Feldverteilung einer DIRAC-Impuls gespeisten Schlitzleitung.

der Antisymmetrie der Felder bezüglich der Metallisierungsebene, wurden, zum Zwecke der Übersichtlichkeit, ausschließlich die Felder im oberen Halbraum dargestellt.

Paris, Frankreich).

Die elektromagnetischen Felder lassen sich für einen Strom-Impuls $i(t)$ des speisenden Generators, in Analogie zur Drahtleitung¹⁵, wie folgt angeben (in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z)):

$$\vec{H}^p = \frac{i(t - r/c_0)}{2\pi r} \cdot \left[\pm \frac{(\rho - a \cos \phi)z}{\varrho^2} \vec{e}_\rho \pm \frac{(a \sin \phi)z}{r^2} \vec{e}_\phi \mp 1 \vec{e}_z \right] ; \quad (y \geq 0) \quad (1.1)$$

$$\vec{E}^p = \frac{q(t - r/c_0)}{2\pi\epsilon_0 \varrho} \cdot \left(\pm \frac{a \sin \phi}{\varrho} \vec{e}_\rho \mp \frac{\rho - a \cos \phi}{\varrho} \vec{e}_\phi \right) ; \quad (y \geq 0) \quad (1.2)$$

wobei $r = \sqrt{\rho^2 - 2a\rho \cos \phi + a^2 + z^2}$ den räumlichen Abstand zum Speisegenerator, $\varrho = \sqrt{\rho^2 - 2a\rho \cos \phi + a^2}$ den Querabstand zur Schlitzleitung bezeichnen, wie Abbildung 1.7 veranschaulicht. Desweiteren wurde, unter der Annahme, dass sich die Ladungen mit Lichtgeschwindigkeit (c_0) entlang der Leitung bewegen, von der Eigenschaft $i = c_0 q$ Gebrauch gemacht. Die auf der Metallisierungs-

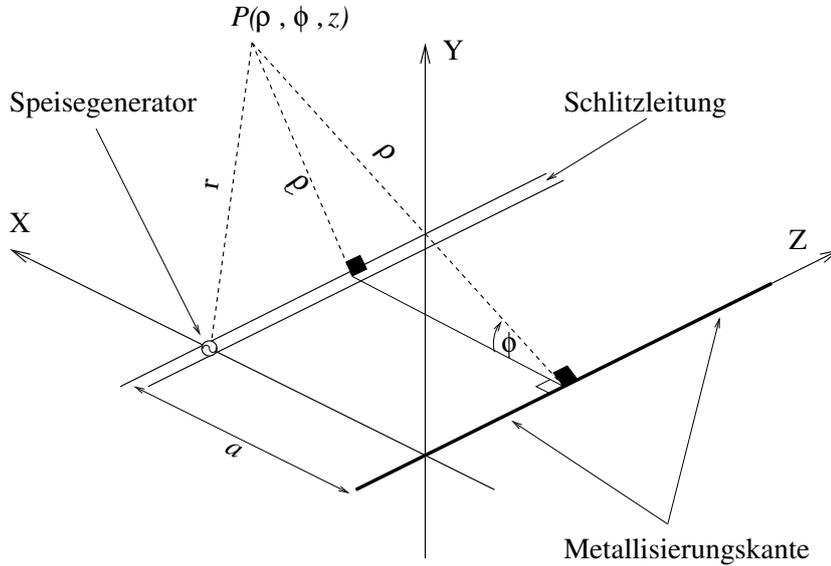


Abbildung 1.7: Veranschaulichung der verschiedenen Aufpunktskoordinaten.

platte induzierte Flächenstromdichte lässt sich aus dem magnetischen Feld, unter Berücksichtigung der Antisymmetrie, wie folgt berechnen:

$$\vec{J}_F^p = \vec{e}_\phi \times 2\vec{H}^p(\phi = 0) = \vec{e}_\rho 2H_z^p - \vec{e}_z 2H_\rho^p = -\frac{i(t - r_0/c_0)}{\pi r_0} \left[1\vec{e}_\rho + \frac{z}{(\rho - a)} \vec{e}_z \right] \quad (1.3)$$

wobei $r_0 = \sqrt{(\rho - a)^2 + z^2}$ den Abstand eines Punktes in der xz -Ebene vom Speisegenerator bezeichnet.

¹⁵Siehe dazu: G. MÖNICH, Skriptum zur Vorlesung „Elektromagnetische Verträglichkeit I“, TU-Berlin, SS 1997, Kap. 8, S. 95.

Zur Veranschaulichung des Beugungsvorganges wurde die zu untersuchende Anordnung mit Hilfe der Simulations-Software CST einer numerischen Feldsimulation unterzogen. Die beiden Abbildungen 1.8 und 1.9 zeigen die elektromagnetischen Felder in jeweils einer Ebene zu verschiedenen Zeitpunkten.

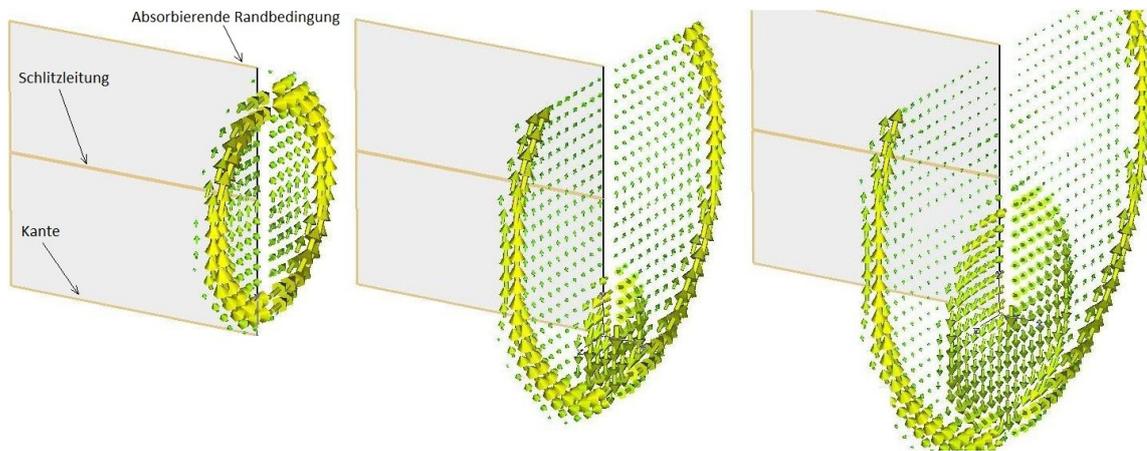


Abbildung 1.8: Darstellung des elektrischen Feldes einer mit einem Gauß-Impuls gespeisten Schlitzeitung in der Symmetrieebene (xy -Ebene) zu drei verschiedenen Zeitpunkten: Vor dem Erreichen der Kante (links) sowie nach der Beugung an der Kante (mitte, rechts). Die Feldvektoren sind logarithmisch skaliert. Simulations-Software: CST.

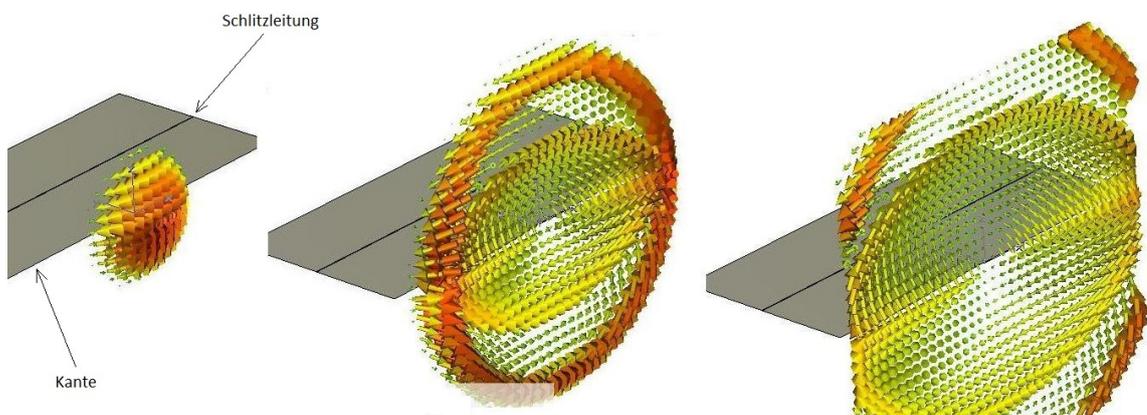


Abbildung 1.9: Darstellung des magnetischen Feldes einer mit einem Gauß-Impuls gespeisten Schlitzeitung in der yz -Ebene zu drei verschiedenen Zeitpunkten. Die Feldvektoren sind logarithmisch skaliert. Simulations-Software: CST.

Kapitel 2

V-Dipol basiertes Stromlinien-Modell zur Beschreibung des Beugungsfeldes

In diesem Kapitel wird ein diskretes Stromlinien-Modell zur Beschreibung des Beugungsfeldes vorgestellt, welches im wesentlichen das Ziel einer Veranschaulichung des Beugungsvorganges an der Kante verfolgt. Daher wird die Betrachtung im Zeitbereich für einen DIRAC-Impuls des primären Generators durchgeführt. Die Vorteile dieser Betrachtungsweise sind zum einen, dass sich aufgrund der verschwindenden Impuls-Länge die Zusammensetzung der einzelnen Feldbeiträge besser verfolgen lässt, zum anderen haben die ermittelten Feldformationen den Charakter einer Impulsantwort des Systems und erlauben somit die Berechnung der Beugungsfelder für eine beliebige Zeitabhängigkeit des treibenden Generators mittels einer Faltungsoperation mit der Impulsantwort.

Das vorgestellte Modell kann anhand zwei seiner Grundgedanken in einen historischen sowie methodischen Kontext beugungstheoretischer Verfahren eingebettet werden. Dies sind zum einen die Betrachtung der Beugung als lokales Phänomen, welche in der geometrisch-optischen Beugungstheorie J. B. KELLERS am deutlichsten zutage tritt, und zum anderen die Einführung von „Kantenrückwirkungsströmen“, ein Gedanke, der seine Entsprechung in der physikalischen Beugungstheorie P. Y. UFIMTSEV findet. Zum besseren Verständnis des Modells sei daher in [2.2](#) eine skizzenhafte Beschreibung beider Verfahren dargeboten.

2.1 Allgemeine Beschreibung des Modells (Das „Besenmodell“)

Das Modell beruht auf der Annahme diskreter Elemente des primären Flächenstromes \vec{I}_i^p , die entlang einzelner Linien vom Generator aus in Richtung Kante fortschreiten und diese an den Stellen z_i zu verschiedenen Zeitpunkten $t_{i0} = t_{g0} + \sqrt{a^2 + z_i^2}/c_0$ erreichen. Dabei stellt t_{g0} den Zeitpunkt der Aussendung des DIRAC-Impulses vom Primär-Generator dar und kann im Folgenden, aufgrund der Existenz einer einzigen Primär-Quelle, ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit zu Null gesetzt werden. An den Stellen z_i der Kante werden einzelne Sekundär-Generatoren angesetzt. Verbunden mit diesen Generatoren sind in der Plattenebene angeordnete, stromführende Linien, die im Plattenbereich sternförmig von den Generatoren ausgehen, während im Bereich außerhalb der Platte jeweils eine einzige Stromlinie existiert, als Weiterführung der Verbindungslinie zwischen dem Primär-Generator und dem entsprechenden Sekundär-Generator. Zur einfacheren begrifflichen Handhabung, werden im Folgenden die von den Sekundär-Generatoren ausgehenden Stromlinien als „Besen“ bezeichnet. Dabei bilden die sternförmig vom Generator in den Plattenbereich ausgehenden Linien die „Besenreiser“, während die einzelne Stromlinie im Bereich außerhalb der Platte den „Besenstiel“ bildet. Abbildung 2.1 zeigt die Anordnung der Stromlinien eines einzelnen Sekundär-Generators. Sobald ein Element \vec{I}_i^p des primären Stromes den

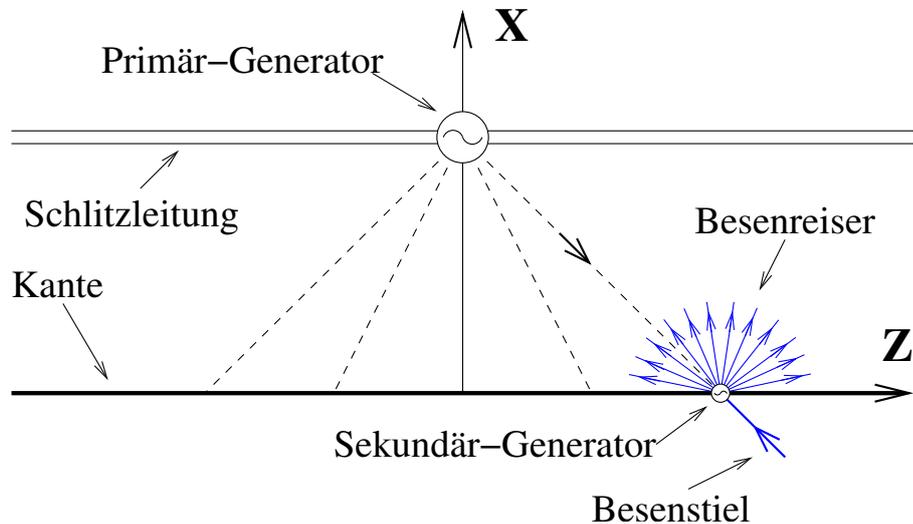


Abbildung 2.1: Stromlinien-Anordnung für einen einzelnen Sekundär-Generator am Ort z_i .

Ort z_i an der Kante erreicht hat, sendet der Sekundär-Generator an dieser Stel-

le einen Sekundär-Impuls aus. Dieser ist so bestellt, dass der Strom-Impuls entlang des Besenstieles den primären Strom-Impuls weiterführt, jedoch gewichtet und mit umgekehrten Vorzeichen, so dass die Unstetigkeit im Primär-Feld beim Überschreiten der Kante ausgeglichen wird. Auch in den Plattenbereich hinein sendet der Sekundär-Generator einen Strom-Impuls mit der gleichen Amplitude des ankommenden primären Strom-Impulses. Dieser verteilt sich jedoch auf die Besenreiser in einer Weise, die später noch zu bestimmen ist.¹ Aus der Gestaltung des „Besens“ wird offenbar, dass der Sekundär-Generator einen kugelförmigen Wellen-Impuls aussendet, der in einem lokalen Kugel-Koordinatensystem, mit dem Sekundär-Generator im Ursprung, einen TEM-Charakter aufweist. Berechnen lassen sich diese lokalen Sekundär-Wellen auf der Basis der Berechnung von V-Dipolen, die jeweils von den einzelnen Besenreisern mit dem Besenstiel gebildet werden. Das gesamte Beugungsfeld lässt sich anschließend als Kombination der einzelnen, lokalen Sekundär-Wellen darstellen. Es wird sich dabei zeigen, dass die Beschreibung des Beugungsfeldes durch die Einführung eines neuen problemangepassten Koordinatensystems vereinfacht wird, in dem die Phasenfronten des Kantenbeugungsfeldes mit einer der Koordinaten-Flächen übereinstimmen.

¹Die sternförmige Anordnung der Stromlinien im Plattenbereich entspricht anschaulich einer Streuung des primären Stromes an der Kante.

2.2 Grundlegende Ideen zur Entwicklung des Modells

2.2.1 Beugung als lokales Phänomen: Kellers Geometrische Beugungstheorie.

Die Geometrische Beugungstheorie stellt eine Erweiterung der Geometrischen Optik dar. Während letztere auf einer strahlenoptischen Betrachtungsweise von Wellenausbreitungsphänomenen mit der Einschränkung auf die Gesetze der Reflexion und der Brechung beruht, bietet erstere die zusätzliche Möglichkeit der Behandlung von Beugungserscheinungen.²

In dem zentralen Artikel von 1962 ([Kel62]) beschreibt J. B. KELLER³ die Grundlagen seiner Theorie sowie ihre Anwendung auf verschiedene Beugungsanordnungen.⁴

Ähnlich wie die Gesetze der Reflexion und Brechung, lässt sich auch das Gesetz der Beugung, das KELLER in seiner Theorie einführt, aus dem FERMAT⁵schen Prinzip herleiten. Dabei ist die Betrachtung der Beugung als lokales Phänomen entscheidend:

„The fundamental premise underlying the geometrical theory of diffraction is that light propagation is entirely a local phenomenon because the wavelength of light is small. By this it is meant that the manner of propagation at a given point is determined solely by the properties of the medium and the structure of the field in an arbitrarily small neighborhood of the point.“⁶

Wie Abbildung 2.2 am Fall der Beugung eines Wellenstrahls an einer unendlich scharfen, geradlinigen Kante zeigt, verlaufen die Beugungsstrahlen auf der Oberfläche eines Kegels, dessen Achse mit der Kante übereinstimmt und dessen Spitze am Beugungspunkt liegt. Dabei entspricht der Öffnungswinkel des Kegels dem Winkel, den der primäre Strahl mit der Kante bildet. Während die Abhängigkeit der Amplitude der Beugungsstrahlen bezüglich des Abstandes zur Kante anhand des Energieerhaltungssatzes ermittelt werden kann, geschieht die Bestimmung der Winkelabhängigkeit über den Vergleich mit der vorhandenen Lösung eines kanonischen Problems (in diesem Fall das SOMMERFELDSche Beugungsproblem).

²Für eine ausführliche Darstellung, siehe z. B.: [MPM90].

³JOSEPH BISHOP KELLER (* 31. Juli 1923, Paterson, New Jersey)

⁴Die GTD wurde von KELLER im Laufe der 50er Jahre entwickelt. Dementsprechend sind einige Vorarbeiten zur GTD vereinzelt auch in früheren Artikeln zu finden, z.B. in [Kel57].

⁵PIERRE DE FERMAT (* 1607/08 in Beaumont-de-Lomagne; † 12. Januar 1665 in Castres).

⁶[Kel62], S. 117.

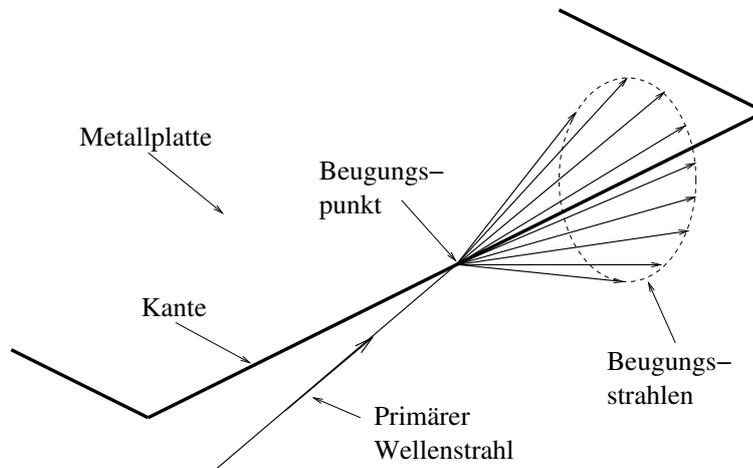


Abbildung 2.2: Beugung eines Wellenstrahls (mit beliebigem Einfallswinkel) an einer geradlinigen Kante.

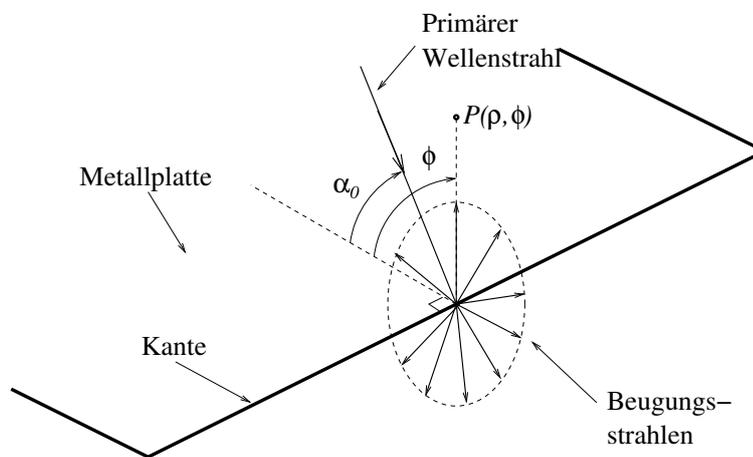


Abbildung 2.3: Beugung eines Wellenstrahls (mit senkrechtem Einfallswinkel) an einer geradlinigen Kante.

Betrachtet man den Fall des senkrechten Einfalls eines Wellenstrahls auf die Kante $u_0 = e^{-ik\rho}$ (Abb. 2.3), wobei der zeitharmonische Faktor $e^{-i\omega t}$ unterdrückt wird, so lässt sich das Beugungsfeld anhand der obigen Überlegungen angeben, durch:

$$u^d = D(\alpha_0, \phi) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (2.1)$$

wobei D den winkelabhängigen Beugungskoeffizienten darstellt.

Ein Vergleich mit der asymptotischen Lösung des SOMMERFELDSchen Beugungsproblems (Gl. (D.8), S. 95) liefert schließlich:

$$D(\alpha_0, \phi) = \frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \left(\frac{1}{\cos \frac{\phi - \alpha_0}{2}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\phi + \alpha_0}{2}} \right) \quad (2.2)$$

wobei wieder das obere Vorzeichen für den Fall der E -Polarisation, das untere Vorzeichen für den Fall der H -Polarisation gilt.

2.2.2 Kantenrückwirkungsströme: Ufimtsevs Physikalische Beugungstheorie

Die Methode der Physikalischen Optik⁷ (PO) zur Lösung von Beugungs- und Streuungsproblemen (an metallischen Gegenständen) beruht auf der Berechnung der Sekundär-Felder und -Potentiale durch Auswertung des COULOMB⁸schen Integrals⁹ für die induzierte Flächenstromdichte \vec{J}_F^s :

$$\vec{A}^s(r) = \frac{1}{4\pi} \int_O \frac{\vec{J}_F^s(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dO \quad (2.3)$$

$$\vec{E}^s(r) = i\omega\mu_0 \vec{A}^s(r) + i \frac{\text{grad div} \vec{A}^s(r)}{\omega\epsilon_0}, \quad \vec{H}^s(r) = \text{rot} \vec{A}^s(r) \quad (2.4)$$

Wobei eine harmonische Zeitabhängigkeit ($e^{-i\omega t}$) der Vorgänge vorausgesetzt wird.

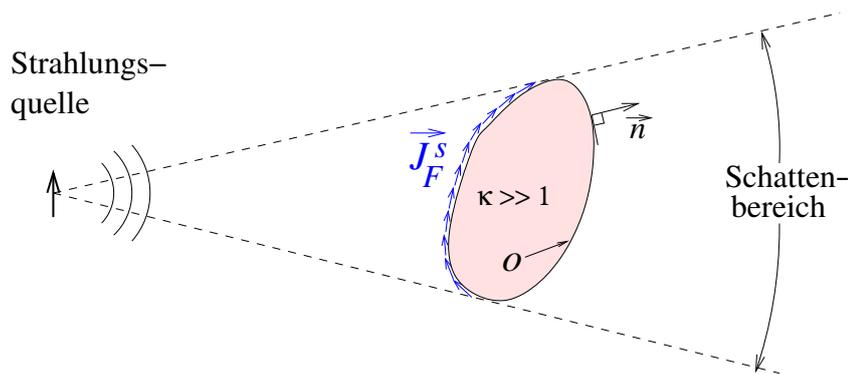


Abbildung 2.4: Bestimmung der sekundären Flächenstromdichte nach der Methode der Physikalischen Optik.

Wie Abbildung 2.4 veranschaulicht, wird die sekundäre Flächenstromdichte ausschließlich in dem im Sinne der Strahlenoptik ausgeleuchteten Bereich anhand der Formel

$$\vec{J}_F^s = 2\vec{n} \times \vec{H}^p \quad (2.5)$$

⁷Für eine ausführliche Darstellung, siehe z. B.: MAKOTO ANDO: Physical Optics. In: [Yam96].

⁸CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB (★ 14. Juni 1736 in Angoulême; † 23. August 1806 in Paris)

⁹Obwohl die Bezeichnung COULOMB-Integral in der Literatur ausschließlich für die Berechnung des skalaren Potentials aus der elektrischen Ladungsverteilung geläufig ist, wird diese hier, aufgrund der formalen Ähnlichkeit, auch für die Berechnung des Vektorpotentials aus der elektrischen Stromverteilung gebraucht.

aus der primären magnetischen Feldstärke \vec{H}^p berechnet, während im „strahlenoptischen“ Schattenbereich keine induzierte Flächenstromdichte angesetzt wird.¹⁰ Der abrupte Abbruch der sekundären Flächenstromdichte sowie die Vernachlässigung der durch Krümmungen und Diskontinuitäten in der Oberfläche verursachten Abweichungen von der durch Gl.(2.5) gegebenen Stromverteilung, bedingen den Näherungscharakter der Physikalischen Optik.

UFIMTSEVs¹¹ Erweiterung der Physikalischen Optik (PO) zur Physikalischen Beugungstheorie¹² (PTD) beruht auf der Einführung einer modifizierten Flächenstromdichte (siehe dazu: [Ufi03], 2.1, S. 45):

$$\vec{J}_F^{s,PTD} = \vec{J}_F^{s,PO} + \vec{J}_F^{s,N} \quad (2.6)$$

wobei $\vec{J}_F^{s,PO}$ die induzierte Flächenstromdichte der Physikalischen Optik nach Gleichung (2.5) darstellt (als *uniform currents* bezeichnet), während $\vec{J}_F^{s,N}$ jegliche Abweichungen der Oberfläche des beugenden Körpers von einer ausgedehnten, ebenen Fläche (Krümmungen, Kanten usw.) berücksichtigen soll. Diese werden allgemein als *nonuniform currents* und speziell im Falle von scharfen Kanten als *fringe currents* bzw. *truncation currents* bezeichnet.

Wie in [Lee77] erörtert wird, stellt sich im Allgemeinen die Schwierigkeit einer expliziten Bestimmung von $\vec{J}_F^{s,N}$ für ein bestimmtes Beugungsproblem. Diese gelingt nur in den Fällen, wo ein Vergleich mit einem kanonischen Problem mit bekannter Lösung möglich ist, wie z. B. im Falle des SOMMERFELDSchen Beugungsproblems anhand der Gleichungen (E.72, S. 115) und (E.83, S. 117).

Dennoch hat der UFIMTSEVsche Gedanke¹³ der Einführung von „*fringe currents*“ (in dieser Arbeit als „Kantenrückwirkungsströme“ bezeichnet) die Beugungstheorie nachhaltig beeinflusst.

¹⁰Die Unterscheidung von ausgeleuchtetem und Schattenbereich nach strahlenoptischen Kriterien begründet den Begriff „Optik“ im Namen der Methode, während die Bezeichnung „Physikalisch“ auf der Auswertung des Integrals über die induzierte Flächenstromdichte beruht.

¹¹PYOTR YAKOVLEVICH UFIMTSEV (★ 1931, Republik Altai (Sibirien)).

¹²UFIMTSEV hat seine Theorie in den frühen 1960ern entwickelt, vor dem Hintergrund von Rückstreuuntersuchungen an verschieden geformten Objekten. Sein Artikel von 1962 ([Ufi71]) wurde fortan vom Informationsdienst der Amerikanischen Luftwaffe ins Englische übersetzt (jedoch erst im Jahre 1971 zur allgemeinen Nutzung freigegeben) und hatte nachhaltige Auswirkungen auf die *Stealth*-Technik zur Minimierung des Radar-Echos von militärischen Flugzeugen.

¹³Eine ähnliche Idee besteht in dem nach KOTTLER benannten Ansatz von Linienladungen an scharfen Kanten zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung (siehe dazu: [Sim77], 4.40.5, S. 891). [FRIEDRICH KOTTLER (★ 10. Dezember 1886 in Wien; † 11. Mai 1965)].

2.3 Sektorisierung des primären Flächenstromes

Zur Bestimmung der diskreten Stromelemente \vec{I}_i^p , wird der vom Primär-Generator ausgesendete Flächenstrom in Winkel-Sektoren $\Delta\alpha_i$ aufgeteilt, welche an der Kante (z -Achse) gleiche Abschnitte Δz bilden, wie Abbildung 2.5 veranschaulicht.¹⁴

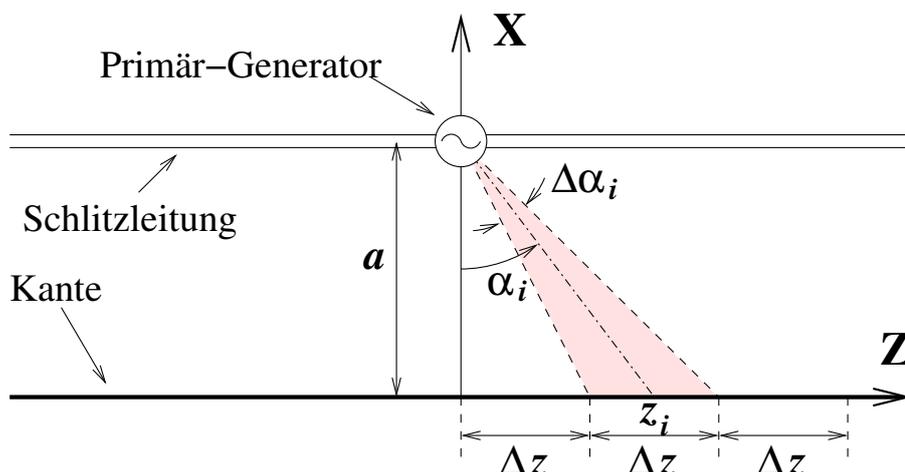


Abbildung 2.5: Sektorisierung der primären Flächenstromdichte zur Bildung diskreter Stromelemente.

Der Winkel eines Sektors $\Delta\alpha_i$ am Ort z_i lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\Delta\alpha_i = \arctan\left[\left(z_i + \frac{\Delta z}{2}\right)/a\right] - \arctan\left[\left(z_i - \frac{\Delta z}{2}\right)/a\right] \quad (2.7)$$

Für jeden Sektor $\Delta\alpha_i$ wird nun ein diskretes Stromelement \vec{I}_i^p angesetzt, welches aus der primären Flächenstromdichte auf folgende Weise berechnet werden kann:

Aus Gl. (1.3) geht hervor, dass die primäre Flächenstromdichte bezüglich des Speisegenerators radial gerichtet ist, wobei, durch die konventionelle Festlegung des Generator-Stromes $i(t)$ in negative x -Richtung, der Flächenstrom aus dem Bereich $x > a$ in den Generator hinein fließt, während der Flächenstrom im Bereich $x < a$ aus dem Generator fließt. Aus dem Ausdruck dieser Radialkomponente:

$$J_{F,r_0}^p = \sqrt{(J_{F,\rho}^p)^2 + (J_{F,z}^p)^2} = \frac{i(t - r_0/c_0)}{\pi(a - \rho)} = \frac{i(t - r_0/c_0)}{\pi r_0 \cos \alpha} \quad (2.8)$$

¹⁴Es sei hier angemerkt, dass eine Diskretisierung in Sektoren gleichen Winkels $\Delta\alpha$ zu unterschiedlichen Abschnitten an der Kante Δz_i und damit zu einer Verkomplizierung bei der Berechnung der Beugungsbeiträge entlang der Kante führen würde.

ist ersichtlich, dass deren Betrag ausschließlich vom Abstand zur Schlitzleitung $|a - \rho|$ abhängt.¹⁵

Der Strom innerhalb eines Sektors $\Delta\alpha_i$ am Ort z_i an der Kante kann unter der vereinfachenden Annahme, dass die Änderung der Flächenstromdichte entlang eines Kreisbogens $r_{0i}\Delta\alpha_i$ innerhalb des Sektors vernachlässigbar ist, wie folgt angegeben werden:

$$I_{\Delta\alpha_i, r_{0i}}^p(z_i) = J_{F, r_{0i}}^p \cdot r_{0i}\Delta\alpha_i = \frac{i(t - r_{0i}/c_0)}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 + z_i^2}}{a} \Delta\alpha_i \quad (2.9)$$

wobei $r_{0i} = \sqrt{a^2 + z_i^2}$ und $\Delta\alpha_i$ aus Gl. (2.7) zu ermitteln ist.

Hier stellt sich das Problem der Gewichtung der einzelnen diskreten Stromelemente (\vec{I}_i^p) entlang der Kante. Denn die Beiträge der verschiedenen Orte z_i entlang der Kante zum gesamten Beugungsfeld hängen zum einen vom Winkel α_i ab, mit dem der primäre Strom auf die Kante auftrifft¹⁶, zum anderen von der Richtung des primären Stromvektors, also vom Verhältnis der beiden zur Kante parallel bzw. senkrecht gerichteten Stromkomponenten am jeweiligen Ort.

In Ermangelung eines strengen feldtheoretischen Kriteriums für die Gewichtung der Stromelemente, soll dies im Folgenden auf heuristische Weise und im Vorgriff auf die Ergebnisse der späteren Abschnitte, insbesondere der Simulationsergebnisse, versucht werden:

Naheliegender wäre die Gewichtung der Ströme in Gl. (2.9) mit dem Faktor $\cos\alpha_i = a/\sqrt{a^2 + z_i^2}$, wodurch die diskreten Stromelemente \vec{I}_i^p an den Orten z_i wie folgt bestimmt werden:

$$I_i^p(z_i) = \frac{i(t - r_{0i}/c_0)}{\pi} \Delta\alpha_i \quad (2.10)$$

Die Stromamplitude nimmt mit wachsendem Abstand entlang der Kante ab, und zwar proportional zum Sektorwinkel $\Delta\alpha$ am jeweiligen Ort. Für die Summe der Stromelemente entlang der gesamten Kante ergibt sich aus Gl. (2.10) für $\sum \Delta\alpha_i = \pi$ der Generator-Strom $i(t)$, womit die Stromerhaltung gewährleistet ist.

Aus der Simulation des Stromlinien-Modells in Abschnitt 2.9 (S. 52) stellt sich jedoch heraus, dass diese Gewichtung zu schwach ist (siehe dazu: Abbildung 2.31 (oberes Bild), S. 53).

¹⁵Dies markiert ein wesentliches Merkmal der gewählten Anregungsstruktur: Während die Phasenfronten der primären Welle konzentrische Kugelflächen um den Generator bilden, bilden die Amplitudenfronten koaxiale Zylinderflächen um die Schlitzleitung herum.

¹⁶Es sei betont, dass es sich hierbei um die Fortpflanzungsrichtung des Stromes handelt, nicht jedoch um die Richtung des Stromvektors selbst. Denn bekanntlich führt auch eine zur Kante parallele Stromkomponente, die in einem bestimmten Winkel auf die Kante auftrifft zu Beugungserscheinungen, ausgenommen der Fall einer zur Kante parallelen Fortpflanzung dieser Komponente.

Eine zusätzliche Gewichtung mit dem Faktor $1/|z_i|$, wodurch sich die diskreten Stromelemente \vec{I}_i^p an den Orten z_i wie folgt bestimmen lassen:

$$I_i^p(z_i) = \frac{i(t - r_{0i}/c_0)}{\pi} \frac{\Delta\alpha_i}{|z_i|} \quad (2.11)$$

führt, wie in Abbildung 2.31 (unteres Bild), S. 53, zu sehen ist, zu einer guten Übereinstimmung im Hauptbereich des gebeugten GAUSS-Impulses, erweist sich jedoch als zu stark im Bereich der „Schleppe“, in dem die Beiträge der vom Aufpunkt weiter entfernten Orte entlang der Kante an Dominanz gewinnen.

Der Faktor $1/|z_i|$ verursacht eine Erhöhung der zur Kante parallel gerichteten elektrischen Komponente des Beugungsfeldes und führt somit zu einer Verschlechterung des Stromlinien-Modells (Abschnitt 2.7.2).

Desweiteren führt der Faktor $1/|z_i|$ zu einer Polstelle in der Gewichtung bei $z_i = 0$. Davon betroffen, sind zum einen die Berechnung der Felder der äußersten Wellenfront in der Symmetrieebene (Abschnitt 2.7.1), zum anderen die Berechnung der Beugungsfelder innerhalb des Spindelkörpers an Aufpunkten für die einer der beteiligten Sekundär-Generatoren am Ort $z_i = 0$ liegt (Abschnitt 2.7.2). Diese Fälle können daher nur asymptotisch berechnet werden.

Eine genauere Bestimmung der Gewichtung der primären Stromelemente wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter erörtert.

2.4 Bestimmung der Stromverteilung auf die einzelnen Besenreiser

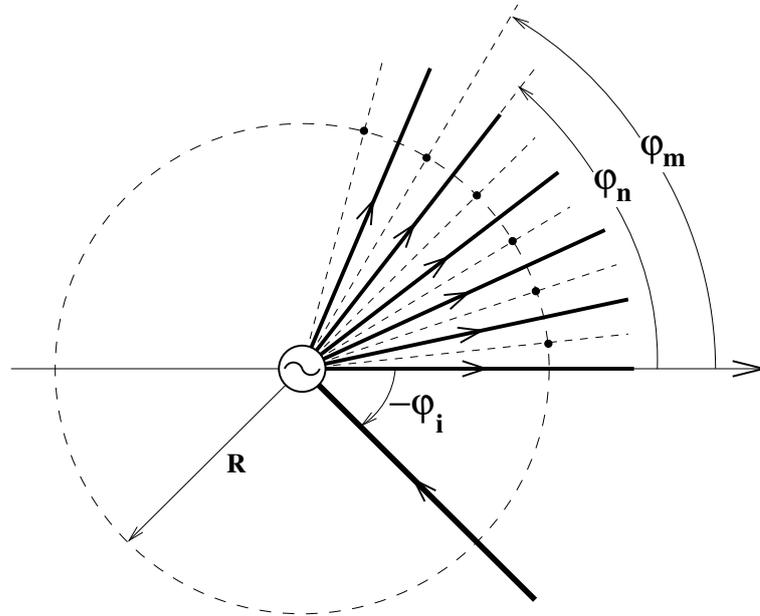


Abbildung 2.6: Stromlinien-Anordnung zur Berechnung der Besenreiser-Stromverteilung.

Abbildung 2.6 zeigt die zu untersuchende Anordnung eines Besens in einem lokalen Polar-Koordinatensystem mit dem Sekundär-Generator im Ursprung. Dabei bilde der Besenstiel mit der Kante den Winkel $-\varphi_i$, welcher aus den Koordinaten des Sekundär-Generators bezüglich des Primär-Generators ermittelt werden kann. Die N Besenreiser sind in Winkeln φ_n gleichmäßig über den Winkelbereich $[0, \pi]$ verteilt. Dazwischen sind in Winkeln φ_m insgesamt $M = N - 1$ Stützpunkte auf einem Kreis mit dem Radius r_i angeordnet.

Wie in [MS89] gezeigt wurde, können die elektromagnetischen Felder eines V-Dipols mit unendlich langen Armen, welcher mittels eines Generators im Verzweigungspunkt mit einem Strom-Impuls $i(t)$ gespeist wird, durch folgende Formeln angegeben werden (Abb. 2.7 zeigt die Anordnung des V-Dipols, wobei zum Zwecke einer einfachen Formulierung zwei lokale Kugel-Koordinatensysteme angesetzt sind, deren Ursprünge mit dem Ort des Generators übereinstimmen, während die z -Achsen entlang des jeweiligen Dipol-Armes gerichtet sind):

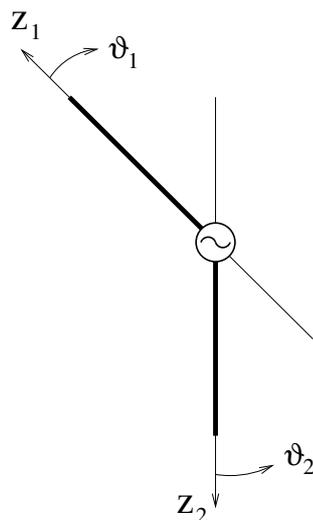


Abbildung 2.7: Anordnung des V-Dipols in verschiedenen, dem jeweiligen Dipol-Arm entsprechenden Kugel-Koordinatensystemen.

$$H_{\vartheta,\nu}(r,t) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{4\pi r} \left[i\left(t - \frac{r}{c_0}\right) \left(\frac{1 + \cos \vartheta_\nu}{\sin \vartheta_\nu} \right) \right] \quad ; \quad \nu = 1, 2 \quad (2.12)$$

$$E_{\vartheta,\nu}(r,t) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[i\left(t - \frac{r}{c_0}\right) \left(\frac{1 + \cos \vartheta_\nu}{\sin \vartheta_\nu} \right) \right] \quad (2.13)$$

Dabei resultieren die Felder in einem Beobachtungspunkt eines globalen Koordinatensystems aus der Überlagerung der Beiträge bezüglich der beiden lokalen Koordinatensysteme ($\nu = 1, 2$). In Anhang A ist eine Herleitung der beiden obigen Formeln, in Anlehnung an [MS89], dargebracht.

Im betrachteten Fall (nach Abb. 2.6) können, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Summe der Besenreiser-Ströme dem Besenstiel-Strom mit umgekehrtem Vorzeichen entspricht, die Besenreiser als Arme verschiedener V-Dipole betrachtet werden, deren jeweilige zweite Arme sich im Besenstiel überlagern. Wendet man Gl. (2.12) auf die Besen-Anordnung in Abb. 2.6 an, so ergibt sich:

$$H_y(r_i, \varphi_m)|_{y=0} = \frac{1}{4\pi r_i} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N \frac{I_n(\varphi_n) (1 + \cos(\varphi_m - \varphi_n))}{\sin(\varphi_m - \varphi_n)} \right] - \frac{I_i^p(\varphi_i) (1 + \cos(\varphi_m - \varphi_i))}{\sin(\varphi_m - \varphi_i)} \right\} \quad (2.14)$$

Dabei wurde die zeitliche Retardierung in der obigen Formel außer Acht gelassen, da alle Ströme die gleiche Zeitabhängigkeit aufweisen und nur deren Winkelabhängigkeit im Folgenden von Belang ist.

Aus der Anordnung ist ersichtlich, dass das in Gl. (2.14) angegebene Magnetfeld senkrecht auf der Ebene der Stromlinien steht. Da jedoch das Magnetfeld auf einer vollkommen leitenden Fläche ausschließlich eine tangentielle Komponente aufweisen darf, kann daraus gefolgert werden, dass der Ausdruck in Gl. (2.14) zur Erfüllung dieser Randbedingung verschwinden muss. Nimmt man noch die oben schon erwähnte Bedingung hinzu, dass die Summe der Besenreiser-Ströme gleich dem Besenstiel-Strom (Dieser wiederum ist gleich dem ankommenden Primär-Strom) sein muss: $\sum_{n=1}^N I_n = I_i^p$, so lässt sich ein $N \times N$ Gleichungssystem aufstellen, dessen Lösung die Strom-Werte I_n liefert:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} & \dots & b_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n} & \dots & b_{m,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M,1} & \dots & b_{M,n} & \dots & b_{M,N} \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} = I_i^p \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \\ \vdots \\ d_M \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}} \quad (2.15)$$

Dabei sind die Koeffizienten $b_{m,n}$ und d_m wie folgt definiert:

$$b_{m,n} = \frac{1 + \cos(\varphi_m - \varphi_n)}{\sin(\varphi_m - \varphi_n)} \quad , \quad d_m = \frac{1 + \cos(\varphi_m - \varphi_i)}{\sin(\varphi_m - \varphi_i)} \quad (2.16)$$

Die Besenreiser-Ströme I_n können nun durch die Formel:

$$\mathbf{I} = I_i^p \text{inv}(\mathbf{B}) \mathbf{d} \quad (2.17)$$

berechnet werden. Abbildung 2.8 zeigt die Stromverteilung auf die einzelnen Besenreiser für einen Besen am Ort $z_i = a$ ($\varphi_i = -45^\circ$). Dabei wurde $I_i^p = 1A$ gesetzt.

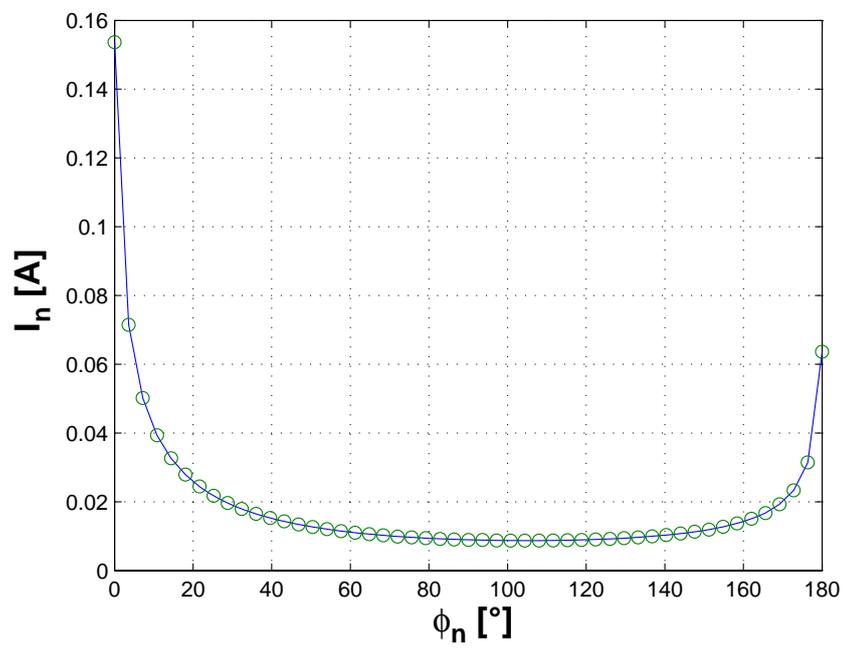


Abbildung 2.8: Stromverteilung auf die einzelnen Besenreiser für den Fall: $z_i = a$ ($\varphi_i = -45^\circ$) und $I_i^p = 1A$.

2.5 Berechnung der elektromagnetischen Felder eines einzelnen Besens

Nachdem die Amplituden der einzelnen Besenreiser-Ströme ermittelt wurden, können die Gleichungen (2.12) und (2.13) nun zur Berechnung der Komponenten des vom Sekundär-Generator ausgesendeten Feld-Impulses verwendet werden. Aus der Struktur des Besens ist ersichtlich, dass der Sekundär-Feldimpuls sich in Form einer Kugelwelle mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Aufgrund der Annahme eines DIRAC-Impulses, beschränken sich die elektromagnetischen Felder sowie die zu ihrer Berechnung angesetzten Aufpunkte auf eine Kugelfläche, welche zu einem Zeitpunkt $t > t_{i0}$ den Radius $r_i = c_0(t - t_{i0})$ besitzt. Durch die Abwesenheit einer radialen Komponente der elektromagnetischen Felder, weist der Feld-Impuls einen TEM-Charakter auf. Somit liegen alle Feldlinien auf der Kugeloberfläche, was ihre Berechnung deutlich erleichtert.

Zur Berechnung der elektromagnetischen Felder auf der Kugelfläche ($r = r_i$) wird ein lokales Kugel-Koordinatensystem (r, φ, ϑ) mit dem Sekundär-Generator im Ursprung und der z -Achse senkrecht auf der Plattenebene (entsprechend der globalen y -Achse) und der x -Achse entlang der Kante (entsprechend der globalen z -Achse) eingeführt, wie in Abb. 2.9 zu sehen ist.

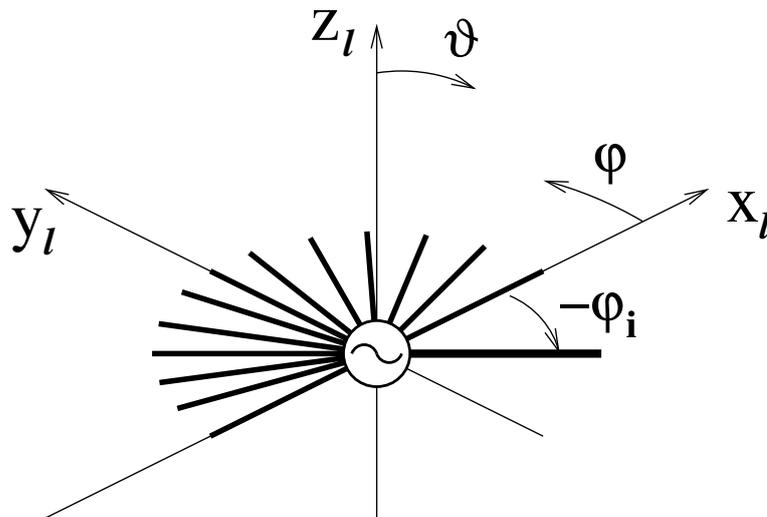


Abbildung 2.9: Lokales Koordinatensystem zur Berechnung der elektromagnetischen Felder.

Eine direkte Auswertung der beiden Gleichungen (2.12) und (2.13) in diesem Koordinatensystem würde zu unhandlichen Formulierungen führen, da zunächst die Beiträge der einzelnen Stromlinien in ihre φ - und ϑ -Komponenten bezüglich die-

ses Systems zerlegt werden müssen. Deshalb wird, in Anlehnung an [MS89], der Lösungsweg über die Einführung eines skalaren Potentials U bestritten:

Da der Ausdruck in Gl. (2.13) auf einer Kugelfläche um den Generator nur von den Winkeln $\theta_{1,2}$ abhängt (Zweidrahtleitung!), lässt sich ein Potential der Form:

$$U = \frac{-i}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \left(\frac{1 - \cos \vartheta_1}{1 - \cos \vartheta_2} \right) \quad \text{mit} \quad E_\vartheta = \text{grad}U = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \quad (2.18)$$

eingeführen. Angewendet auf unseren Fall, ergibt sich für das Potential:

$$U = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N I_n \ln(1 - \cos(\vec{v}_p \hat{\ } \vec{v}_n)) \right] - I_i^p \ln(1 - \cos(\vec{v}_p \hat{\ } \vec{v}_i)) \right\} \quad (2.19)$$

Dabei bezeichnen \vec{v}_p , \vec{v}_n und \vec{v}_i die Richtungsvektoren von Aufpunkt, Besenreiser und Besenstiel, $(\vec{v}_p \hat{\ } \vec{v}_n)$ und $(\vec{v}_p \hat{\ } \vec{v}_i)$ die räumlichen Winkel zwischen den jeweiligen Vektoren. Die Richtungsvektoren lassen sich in einem dem lokalen Kugel-Koordinatensystem entsprechenden lokalen kartesischen Koordinatensystem (x_l, y_l, z_l) wie folgt angeben¹⁷:

$$\begin{aligned} \vec{v}_p &= \sin \vartheta_p \cos \varphi_p \vec{e}_{x_l} + \sin \vartheta_p \sin \varphi_p \vec{e}_{y_l} + \cos \vartheta_p \vec{e}_{z_l} \\ &= \frac{1}{r_i} (x_{lp} \vec{e}_{x_l} + y_{lp} \vec{e}_{y_l} + z_{lp} \vec{e}_{z_l}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\vec{v}_n = \cos \varphi_n \vec{e}_{x_l} + \sin \varphi_n \vec{e}_{y_l} + 0 \vec{e}_{z_l} \quad (2.21)$$

$$\vec{v}_i = \cos \varphi_i \vec{e}_{x_l} + \sin \varphi_i \vec{e}_{y_l} + 0 \vec{e}_{z_l} \quad (2.22)$$

Dabei wurde in Gl. (2.20) die Abkürzung $r_i = \sqrt{x_{lp}^2 + y_{lp}^2 + z_{lp}^2}$ eingeführt, da sich alle Aufpunkte $P(x_{lp}, y_{lp}, z_{lp})$ auf einer Kugel mit dem Radius r_i befinden. Die Cosinus-Funktionen in Gl. (2.19) lassen sich unter Anwendung der Formel für das innere Produkt zweier Vektoren wie folgt berechnen:

$$\cos(\vec{v}_p \hat{\ } \vec{v}_n) = \frac{\vec{v}_p \cdot \vec{v}_n}{|\vec{v}_p| |\vec{v}_n|} \quad , \quad \cos(\vec{v}_p \hat{\ } \vec{v}_i) = \frac{\vec{v}_p \cdot \vec{v}_i}{|\vec{v}_p| |\vec{v}_i|} \quad (2.23)$$

¹⁷Die Formulierung der elektromagnetischen Feldkomponenten in kartesischen Koordinaten wird sich im weiteren Verlauf der Untersuchung als vorteilhaft erweisen, da bei einer Translation bzw. Rotation (um Vielfache einer Viertelumdrehung) des Koordinatensystems die Feldkomponenten durch bloßes Vertauschen der Indizes und Variablensubstitution transformiert werden können.

Damit lässt sich das Potential aus Gl. (2.19) in dem lokalen, kartesischen Koordinatensystem wie folgt angeben:

$$U(x_{lp}, y_{lp}, z_{lp}) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N I_n \ln \left(1 - \frac{x_{lp} \cos \varphi_n + y_{lp} \sin \varphi_n}{r_i} \right) \right] - \right. \\ \left. I_i^p \ln \left(1 - \frac{x_{lp} \cos \varphi_i + y_{lp} \sin \varphi_i}{r_i} \right) \right\} \quad (2.24)$$

Aus dem Potential in Gl. (2.24) kann nun das elektrische Feld durch Gradientenbildung berechnet werden:

$$E_{x_l} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N I_n \frac{x_{lp}/r_i - \cos \varphi_n}{r_i - (x_{lp} \cos \varphi_n + y_{lp} \sin \varphi_n)} \right] - \right. \\ \left. I_i^p \frac{x_{lp}/r_i - \cos \varphi_i}{r_i - (x_{lp} \cos \varphi_i + y_{lp} \sin \varphi_i)} \right\} \quad (2.25)$$

$$E_{y_l} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N I_n \frac{y_{lp}/r_i - \sin \varphi_n}{r_i - (x_{lp} \cos \varphi_n + y_{lp} \sin \varphi_n)} \right] - \right. \\ \left. I_i^p \frac{y_{lp}/r_i - \sin \varphi_i}{r_i - (x_{lp} \cos \varphi_i + y_{lp} \sin \varphi_i)} \right\} \quad (2.26)$$

$$E_{z_l} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N I_n \frac{z_{lp}/r_i}{r_i - (x_{lp} \cos \varphi_n + y_{lp} \sin \varphi_n)} \right] - \right. \\ \left. I_i^p \frac{z_{lp}/r_i}{r_i - (x_{lp} \cos \varphi_i + y_{lp} \sin \varphi_i)} \right\} \quad (2.27)$$

Aufgrund des TEM-Charakters des Feld-Impulses, lässt sich das magnetische aus dem elektrischen Feld wie folgt berechnen:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_0} \vec{e}_r \times \vec{E} \quad (2.28)$$

wobei der Einheitsvektor in radialer Richtung \vec{e}_r dem eingeführten Richtungsvektor \vec{v}_p entspricht und $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ den Freiraum-Wellenwiderstand bezeichnet. Damit lauten die magnetischen Feldkomponenten in dem lokalen, kartesischen Koordinatensystem:

$$H_{x_i} = \frac{1}{Z_0 r_i} (y_{lp} E_{z_i} - z_{lp} E_{y_i}) \quad (2.29)$$

$$H_{y_i} = \frac{1}{Z_0 r_i} (z_{lp} E_{x_i} - x_{lp} E_{z_i}) \quad (2.30)$$

$$H_{z_i} = \frac{1}{Z_0 r_i} (x_{lp} E_{y_i} - y_{lp} E_{x_i}) \quad (2.31)$$

Die magnetischen Feldlinien lassen sich in einfacher Weise als Höhengchnittlinien des Potentials U darstellen. Abbildungen 2.10 und 2.11 zeigen die magnetischen Feldlinien eines einfachen V-Dipols sowie des gesamten Besens:

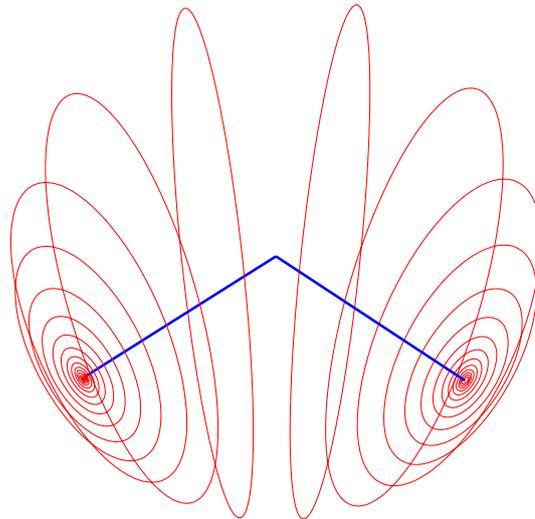


Abbildung 2.10: Magnetische Feldlinien eines DIRAC-Impuls gespeisten V-Dipols zu einem Zeitpunkt t auf einer Kugeloberfläche mit $r_i = c_0(t - t_{i0})$.

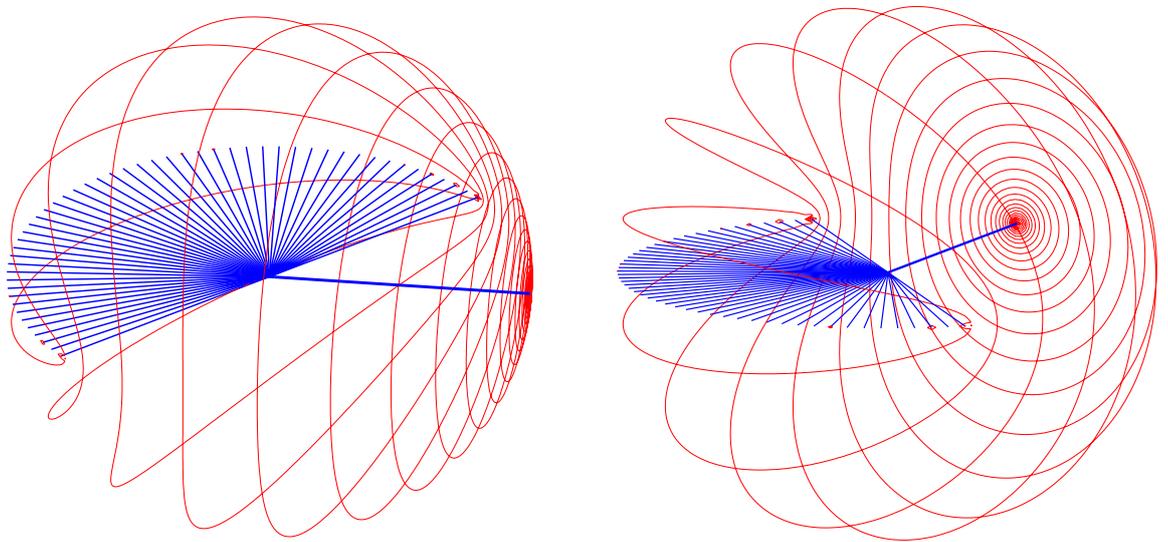


Abbildung 2.11: Magnetische Feldlinien des in Abb. 2.9 dargestellten Besens aus verschiedenen Perspektiven.

2.6 Problemangepasstes Koordinatensystem: Das Spindel-Koordinatensystem

Nachdem die Sekundär-Felder eines einzelnen Besens ermittelt worden sind, soll nun das gesamte Beugungsfeld als Überlagerung der einzelnen Sekundär-Felder formuliert werden. Die einzelnen Sekundär-Felder wurden aufgrund der Besen-Struktur in lokalen Kugel-Koordinatensystemen formuliert. Daher stellt sich die Frage, in welchem Koordinatensystem das gesamte Beugungsfeld in geeigneter Weise formuliert werden kann?

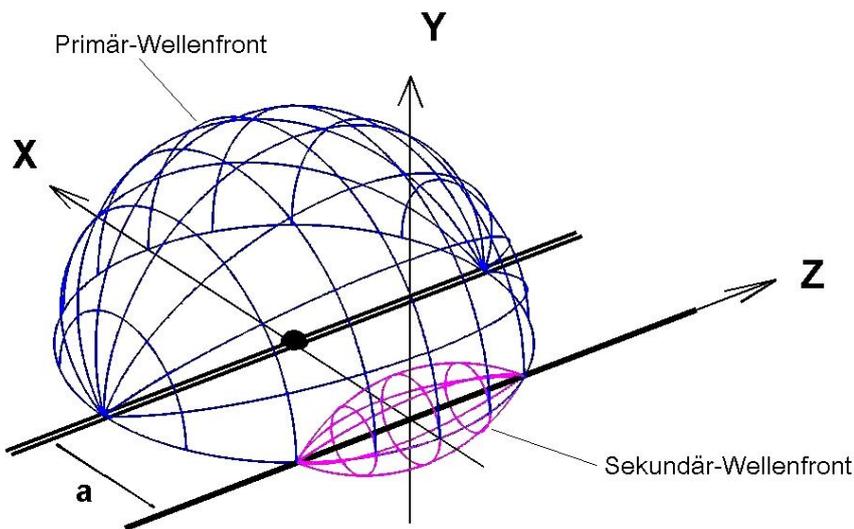


Abbildung 2.12: Darstellung der Primär-Wellenfront nach dem Überschreiten der Kante, sowie die dadurch entstehende Beugungs-Wellenfront

Wie in Abbildung 2.12 zu sehen ist, bilden die Phasenfronten des Beugungsfeldes Spindel-Flächen, mit der Kante (z -Achse) als Rotationsachse. Daher ist es zweckmäßig, ein Koordinatensystem einzuführen, in dem eine der Koordinaten-Flächenscharen eine Spindel-Form aufweisen, welche mit den Phasenfronten des Beugungsfeldes übereinstimmen.

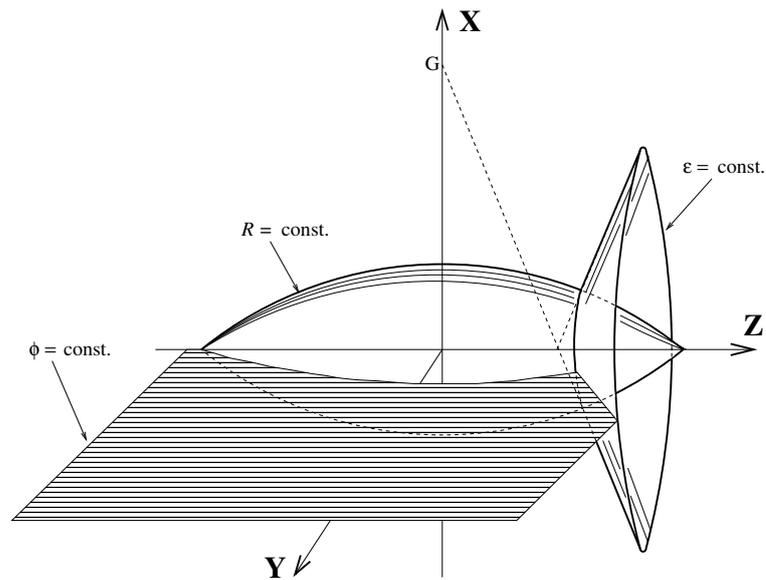


Abbildung 2.13: Dreidimensionale Darstellung der Spindel-Koordinaten-Flächen. Der Bezugspunkt G auf der x -Achse bezeichnet den Ort des Speisegenerators in der betrachteten Beugungsanordnung und liegt im Abstand a von der z -Achse.

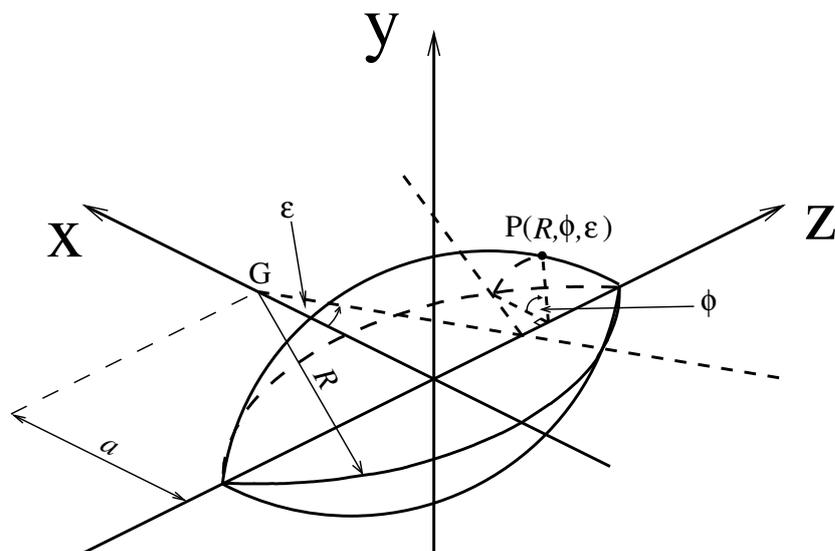


Abbildung 2.14: Dreidimensionale Darstellung eines Punktes P in den Spindel-Koordinaten (R, ϕ, ϵ) .

Abbildung [2.13](#) zeigt die drei Koordinaten-Flächen des Spindel-Koordinatensystems

während Abbildung 2.14 die Darstellung eines Punktes in dem neuen Koordinatensystem veranschaulicht:

Die Spindel-Flächenschar wird durch Werte $R = \text{const.}$ beschrieben, wobei $R \in]a, \infty[$ den Radius eines Kreises in der xz -Ebene bezeichnet, der im Bereich außerhalb der Platte mit dem Schnittbogen der entsprechenden Spindel-Fläche mit der xz -Ebene übereinstimmt.

Die zweite Flächenschar bilden Kegel-Flächen, welche durch Rotation der Besenstiele um die Kante gebildet werden und durch Werte $\varepsilon = \text{const.}$ beschrieben werden, wobei $\varepsilon \in [-\arccos(a/R), \arccos(a/R)]$ den Winkel zwischen dem entsprechenden Besenstiel und der x -Achse bezeichnet.

Die dritte Flächenschar bilden Halbebenen, die von der Kante mit Winkeln $\phi = \text{const.}$ ausgehen, wobei $\phi \in [0, 2\pi]$ den Winkel der entsprechenden Halbebene mit der x^+z -Halbebene bezeichnet.

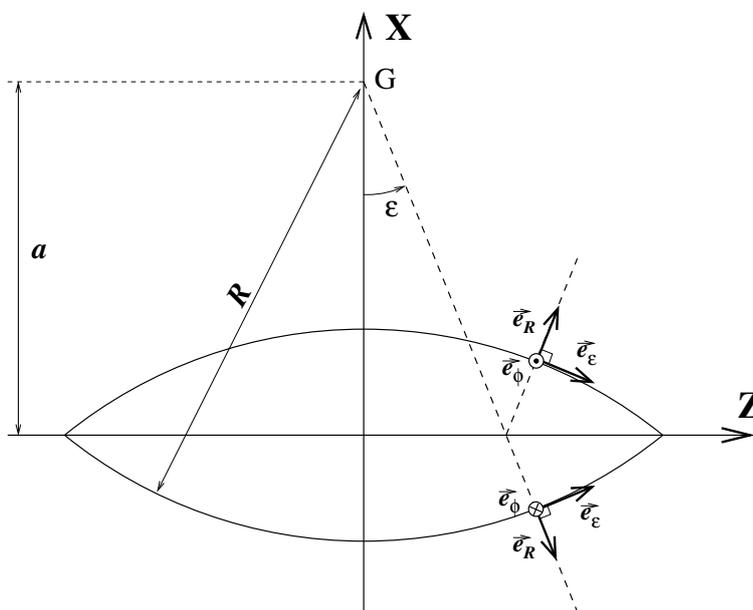


Abbildung 2.15: Darstellung der Einheitsvektoren \vec{e}_R , \vec{e}_ϕ und \vec{e}_ε für zwei Punkte in der xz -Ebene, welche die gleichen Koordinaten R und ε , jedoch verschiedene Winkel ϕ ($0^\circ, 180^\circ$) besitzen.

Mit der Festlegung der Einheitsvektoren \vec{e}_R , \vec{e}_ϕ und \vec{e}_ε nach Abbildung 2.15 ist ein rechtshändiges, orthogonales, krummliniges Koordinatensystem (R, ϕ, ε) gegeben, welches im Folgenden als Spindel-Koordinatensystem bezeichnet werden soll.¹⁸

¹⁸Die Bezeichnung „Spindel“ für die entsprechende Flächenform wurde auch in [MS71] (S. 110) vorgenommen.

Zum Zwecke der Veranschaulichung sei im Folgenden die Vorgehensweise zur Bestimmung der Spindel-Koordinaten eines beliebigen Punktes P im Raum dargestellt (Abbildung 2.16):

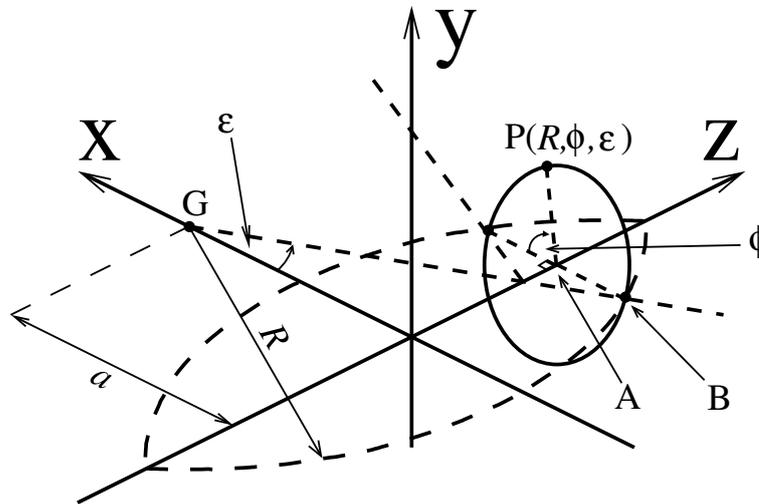


Abbildung 2.16: Bestimmung der Spindel-Koordinaten eines Punktes P .

Zunächst wird die kürzeste Verbindung von P zur z -Achse PA gezeichnet. Der Winkel den PA mit der x^+z -Halbebene bildet, stellt die ϕ -Koordinate von P dar. Bei der Rotation von AP um die z -Achse zeichnet P einen Kreis, dessen Schnittpunkt mit der x^-z -Halbebene als B bezeichnet wird. Der Winkel, den GB mit der negativen x -Achse bildet, stellt die ε -Koordinate von P dar.

Die Länge der Strecke GB legt zugleich die R -Koordinate von P fest.

Die Einzelheiten zu dem neuen Koordinatensystem (metrische Faktoren; Weg-, Flächen-, Volumenelemente; Operatoren usw.) sind ausführlich in Anhang B dargestellt.

2.7 Darstellung des Beugungsfeldes in Spindel-Koordinaten

2.7.1 Betrachtung der äußersten Wellenfront

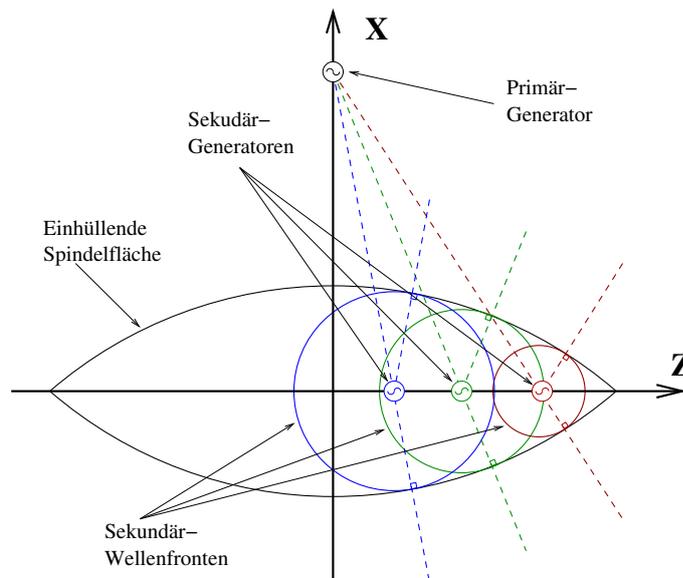


Abbildung 2.17: Beiträge der einzelnen Sekundär-Wellen zur einhüllenden, äußersten Beugungs-Wellenfront.

Zur Formulierung des Beugungsfeldes in Spindel-Koordinaten sei zunächst nur die äußerste Wellenfront betrachtet. Abbildung 2.17 zeigt drei Sekundär-Generatoren an verschiedenen Stellen z_i entlang der Kante, deren zu den Zeitpunkten $t_{i0} = \sqrt{a^2 + z_i^2}/c_0$ ausgesendete Kugelwellen zum Zeitpunkt t die Radien $r_i = c_0(t - t_{i0})$ besitzen. Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, berühren die einzelnen Kugel-Flächen die einhüllende Spindel-Fläche entlang verschiedener Kreisringe um die Kante herum. Daraus folgt, dass die Felder auf den Kreisringen der äußersten Wellenfront jeweils von einer einzigen Besen-Struktur herrühren.¹⁹ Zudem verläuft jeder Kreisring auf der entsprechenden Sekundär-Kugelfläche durch den Punkt, an dem der Besenstiel diese Fläche durchdringt.

Die in den Gleichungen (2.25)-(2.27) und (2.29)-(2.31) angegebenen Feldkomponenten für eine einzelne Besen-Struktur in einem lokalen, kartesischen Koordina-

¹⁹Aus diesem Grund, sowie zum Zwecke der Anschaulichkeit, werden im weiteren Verlauf der Untersuchung Kreisringe um die Kante herum, anstelle von einzelnen Aufpunkten, betrachtet.

tesystem können nun durch die Substitutionen

$$\vec{e}_{x_l} \rightarrow \vec{e}_z \quad , \quad \vec{e}_{y_l} \rightarrow \vec{e}_x \quad , \quad \vec{e}_{z_l} \rightarrow \vec{e}_y$$

sowie

$$x_l \rightarrow z - z_i \quad , \quad y_l \rightarrow x \quad , \quad z_l \rightarrow y$$

zunächst in das globale, kartesische Koordinatensystem (x, y, z) transformiert werden²⁰:

$$E_x^i = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N I_{n_i} \frac{x_p/r_i - \sin \varphi_{n_i}}{r_i - ((z_p - z_i) \cos \varphi_{n_i} + x_p \sin \varphi_{n_i})} \right] - \right. \\ \left. I_i^p \frac{x_p/r_i - \sin \varphi_i}{r_i - ((z_p - z_i) \cos \varphi_i + x_p \sin \varphi_i)} \right\} \quad (2.32)$$

$$E_y^i = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N I_{n_i} \frac{y_p/r_i}{r_i - ((z_p - z_i) \cos \varphi_{n_i} + x_p \sin \varphi_{n_i})} \right] - \right. \\ \left. I_i^p \frac{y_p/r_i}{r_i - ((z_p - z_i) \cos \varphi_i + x_p \sin \varphi_i)} \right\} \quad (2.33)$$

$$E_z^i = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N I_{n_i} \frac{(z_p - z_i)/r_i - \cos \varphi_{n_i}}{r_i - ((z_p - z_i) \cos \varphi_{n_i} + x_p \sin \varphi_{n_i})} \right] - \right. \\ \left. I_i^p \frac{(z_p - z_i)/r_i - \cos \varphi_i}{r_i - ((z_p - z_i) \cos \varphi_i + x_p \sin \varphi_i)} \right\} \quad (2.34)$$

$$H_x^i = \frac{1}{Z_0 r_i} (y_p E_z^i - (z_p - z_i) E_y^i) \quad (2.35)$$

$$H_y^i = \frac{1}{Z_0 r_i} ((z_p - z_i) E_x^i - x_p E_z^i) \quad (2.36)$$

$$H_z^i = \frac{1}{Z_0 r_i} (x_p E_y^i - y_p E_x^i) \quad (2.37)$$

²⁰Da im Folgenden mehrere Sekundär-Felder gleichzeitig sowie deren Überlagerungen betrachtet werden sollen, werden alle Größen, die von einer bestimmten Besen-Struktur abhängen, zusätzlich mit i gekennzeichnet.

wobei $r_i = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + (z_p - z_i)^2}$ gilt und die Aufpunkte $P(x_p, y_p, z_p)$ sich jeweils auf einer Kugel mit dem Radius r_i befinden.

Die Punkte eines Kreisringes auf der Spindel-Fläche besitzen gleiche Werte für die Koordinaten R_{kr} und ε_{kr} , während sich die Winkel ϕ über den Wertebereich $[0, 2\pi]$ erstrecken. Die dem Kreisring entsprechende Besen-Struktur lässt sich aus den Spindel-Koordinaten des Kreisringes wie folgt bestimmen:

$$z_i = a \tan \varepsilon_{\text{kr}} \quad , \quad r_i = R_{\text{kr}} - a / \cos \varepsilon_{\text{kr}} \quad , \quad -\varphi_i = \pi/2 - \varepsilon_{\text{kr}}$$

Weiter können die kartesischen Koordinaten des Kreisringes angegeben werden:

$$z_p = R_{\text{kr}} \sin \varepsilon_{\text{kr}} \quad , \quad x_p, y_p \in [-\rho_{\text{kr}}, \rho_{\text{kr}}] \quad ; \quad x_p^2 + y_p^2 = \rho_{\text{kr}}^2$$

wobei $\rho_{\text{kr}} = R_{\text{kr}} \cos \varepsilon_{\text{kr}} - a = r_i \sin(-\varphi_i)$ den Radius des Kreisringes darstellt. Abbildung 2.18 veranschaulicht die berechneten Koordinaten.

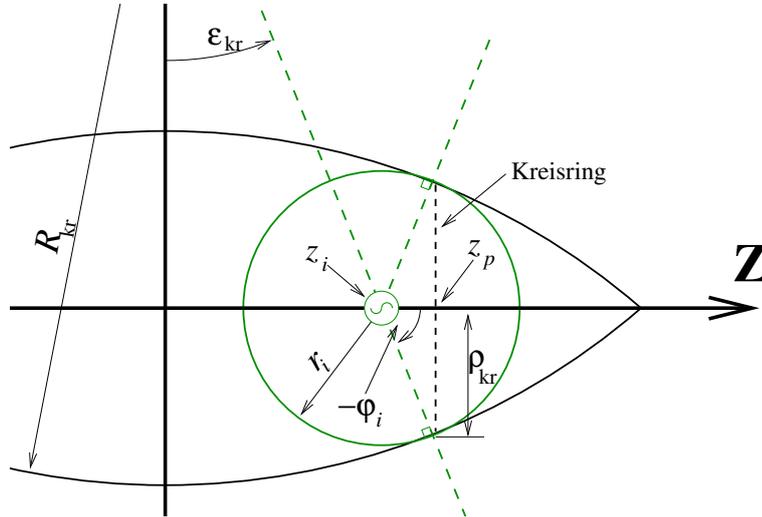


Abbildung 2.18: Koordinaten eines Kreisringes auf der äußersten Wellenfront sowie die Parameter der entsprechenden Besen-Struktur.

Mit diesen Informationen und der Bestimmung der Besenreiser-Stromverteilung anhand der Gl. (2.17) können nun die Gleichungen (2.32)-(2.34) und (2.35)-(2.37) ausgewertet werden. Anschließend lassen sich die elektromagnetischen Felder, dargestellt durch \vec{V} , in den Spindel-Koordinaten anhand der Transformationsregeln (siehe Anhang B, S. 77) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} V_R(R, \phi, \varepsilon) &= \cos \varepsilon \cos \phi \quad V_x + \cos \varepsilon \sin \phi \quad V_y + \sin \varepsilon \quad V_z \\ V_\phi(R, \phi, \varepsilon) &= -\sin \phi \quad V_x + \cos \phi \quad V_y + 0 \quad V_z \\ V_\varepsilon(R, \phi, \varepsilon) &= -\sin \varepsilon \cos \phi \quad V_x - \sin \varepsilon \sin \phi \quad V_y + \cos \varepsilon \quad V_z \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aus der Berechnung der elektromagnetischen Felder folgt, dass auf der äußersten Wellenfront nur die beiden Komponenten E_ϕ und H_ε existieren. Diese bilden somit eine TEM-Welle.

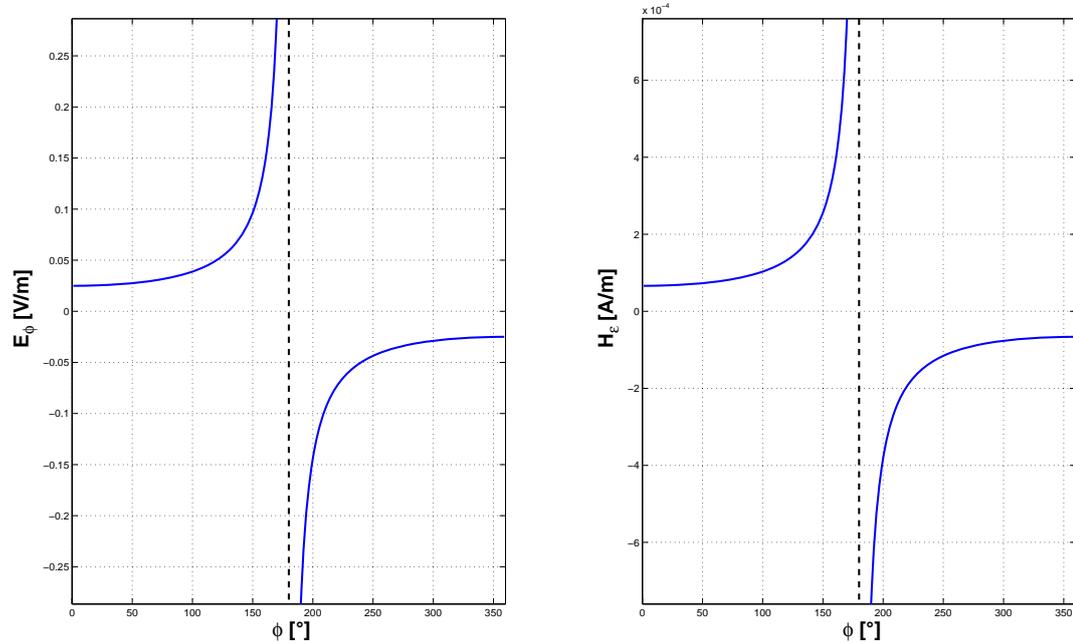


Abbildung 2.19: Verlauf der beiden einzig vorhandenen Feldkomponenten E_ϕ und H_ε auf einem Kreisring mit den Koordinaten: $R = 7m$ und $\varepsilon = 0^\circ$ ($a = 4m$, $\Delta z = 1cm$, $\hat{i} = \pi A$).

Abbildung 2.19 zeigt die ϕ -Abhängigkeit der beiden Feldkomponenten auf einem Kreisring um die Kante herum, in der Symmetrieebene ($z = 0$). Zu beachten ist dabei die antisymmetrische Polstelle um $\phi = 180^\circ$, welche durch die Annahme eines einzelnen Linienstromes („Besenstiel“) im Bereich außerhalb der Metallplatte begründet ist. Denn, während die Sekundärströme innerhalb der Platte durch die Winkelverteilung den Charakter eines Flächenstromes aufweisen, ist die Polstelle auf der äußersten Wellenfront um den Winkel $\phi = 180^\circ$ unvermeidbar, zumal, wie aus Abbildung 2.18 ersichtlich ist, jeder Kreisring der äußersten Wellenfront den entsprechenden „Besenstiel“-Strom durchschreitet.

In Anhang C.1 (Abbildungen C.3 und C.4) sind sämtliche elektromagnetische Feldkomponenten sowohl in Spindel- als auch in kartesischen Koordinaten für zwei Kreisringe an verschiedenen Orten auf der Spindeloberfläche dargestellt. Dabei bestätigt sich zum einen der TEM-Charakter der Beugungsfront. Zum anderen stimmt die Abwesenheit einer zur Kante parallelen elektrischen Feldkomponente (E_z) des Beugungsfeldes mit der Tatsache überein, dass aus einem Primär-Feld welches einer zur Kante parallel gerichteten elektrischen Feldkomponente entbehrt (wie in unserem Fall (Gl. 1.2)), keine parallel gerichtete Komponente des Beugungsfeldes hervorgehen kann.²¹

²¹Obwohl diese Tatsache als trivial erscheint, kann sie zusätzlich zu den gewöhnlichen Randbedingungen als Beurteilungskriterium für das Stromlinien-Modell herangezogen werden, wie im nächsten Abschnitt deutlich wird.

2.7.2 Das Beugungsfeld innerhalb des Spindel-Körpers:

Nachdem im vorigen Abschnitt die elektromagnetischen Felder der äußersten Wellenfront ermittelt worden sind, sollen nun die Felder im Inneren des Spindel-Körpers²² untersucht werden.

Aus der Beschaffenheit des Modells sowie der Annahme eines primären DIRAC-Impulses folgt, dass die Feldbeiträge im gesamten Spindel-Körper (einschließlich der Oberfläche!) zu einem bestimmten Zeitpunkt t die gleiche Weglänge $s = R_{max} = c_0 t$ aufweisen.

Während die Feldbeiträge auf einem Kreisring der einhüllenden Spindel-Fläche von einer einzigen Besen-Struktur herrühren, resultieren die Felder auf einem Kreisring innerhalb des Spindel-Körpers aus der Überlagerung der Beiträge genau zweier Sekundär-Kugelwellen. Dies folgt aus der oben geschilderten Tatsache gleicher Weglängen aller Feldbeiträge des Beugungsfeldes, wonach für einen bestimmten Kreisring innerhalb des Spindel-Körpers, zu einem bestimmten Zeitpunkt t , nur zwei Sekundär-Generatoren an verschiedenen Orten der Kante $z_{i,j}$ existieren, welche Beiträge der gleichen Weglänge s liefern. Mit wachsendem Radius des Kreisringes, nähern sich die beiden Sekundär-Generatoren bis sie schließlich zu einem einzelnen Generator verschmelzen, sobald der Kreisring die äußerste Wellen-Front erreicht.²³ Abbildung 2.19 zeigt die geometrische Darstellung eines Schnittringes mit den entsprechenden Koordinaten.

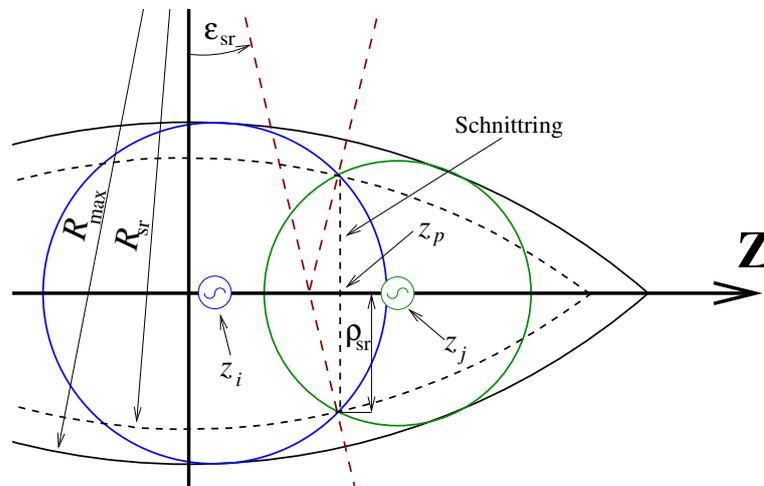


Abbildung 2.20: Darstellung eines Schnittringes mit den beiden entsprechenden Sekundär-Generatoren.

²²Als „Spindel-Körper“ wird im Folgenden das Volumen bezeichnet, dessen Ausdehnung zu einem Zeitpunkt t durch die Spindel-Oberfläche $R_{max} = c_0 t = \text{const.}$ begrenzt wird.

²³Die Kreisringe im Inneren des Spindel-Körpers werden daher, in Abgrenzung zu den Kreisringen auf der einhüllenden Spindel-Fläche, im Folgenden als Schnittringe bezeichnet.

Mit der Festlegung der von den verschiedenen Wellenbeiträgen zu einem bestimmten Zeitpunkt t zurückgelegten Weglänge $s = c_0 t = R_{max}$ sowie der Spindel-Koordinaten eines Schnittringes R_{sr} und ε_{sr} , können die restlichen, zur Auswertung der Feldgleichungen notwendigen Rechengrößen wie folgt ermittelt werden:

Zunächst lassen sich die kartesischen Koordinaten des Schnittringes angeben:

$$z_p = R_{sr} \sin \varepsilon_{sr} \quad , \quad x_p, y_p \in [-\rho_{sr}, \rho_{sr}] \quad ; \quad x_p^2 + y_p^2 = \rho_{sr}^2$$

wobei $\rho_{sr} = R_{sr} \cos \varepsilon_{sr} - a$ den Radius des Schnittringes darstellt.

Die Weglänge s lässt sich in Abhängigkeit der Parameter der Sekundär-Wellen ($z_{i,j}$, $r_{i,j}$) wie folgt formulieren:

$$s = \sqrt{z_{i,j}^2 + a^2} + r_{i,j} \quad (2.39)$$

Dabei lassen sich die beiden Radien $r_{i,j}$ wiederum in Abhängigkeit der Schnittring-Koordinaten (z_p , ρ_{sr}) beschreiben:

$$r_{i,j} = \sqrt{(z_p - z_{i,j})^2 + \rho_{sr}^2} \quad (2.40)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.40) in Gl. (2.39) erhalten wir die Funktion:

$$f(z_{i,j}) = \sqrt{z_{i,j}^2 + a^2} + \sqrt{(z_p - z_{i,j})^2 + \rho_{sr}^2} - s \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.41)$$

deren Nullstellen den Orten der beiden Sekundär-Generatoren z_i und z_j entsprechen.²⁴ Abbildung 2.21 zeigt den Verlauf von $f(z_{i,j})$ im gesamten Bereich: $z_{i,j} \in [-\sqrt{R_{max}^2 - a^2}, \sqrt{R_{max}^2 - a^2}]$. Mit $z_{i,j}$ lassen sich nun die Radien $r_{i,j}$ (anhand Gl. (2.40)) sowie die Besenstiel-Winkel $\varphi_{i,j}$ durch:

$$-\varphi_{i,j} = \arctan(a/z_{i,j})$$

bestimmen.

Der Abstand der beiden Sekundär-Generatoren $|z_j - z_i|$ hängt dabei vom Radius des Schnittringes ρ_{sr} ab und verschwindet, sobald der Schnittring die äußerste Front erreicht hat ($\rho_{sr} = R_{max} \cos \varepsilon_{sr} - a$), die beiden Sekundär-Kugelflächen also zu einer einzigen Kugelfläche verschmelzen. Für den Fall, dass die Bedingung $|z_j - z_i| < \Delta z$ erfüllt ist, wie in Abbildung 2.22 gezeigt wird, muss die Überlappung der beiden betrachteten Stromsektoren berücksichtigt werden, indem die beiden Stromelemente $\vec{I}_{i,j}^p$ mit dem Faktor:

$$\frac{\Delta z}{2\Delta z - |z_j - z_i|} \quad \text{für} \quad |z_j - z_i| < \Delta z$$

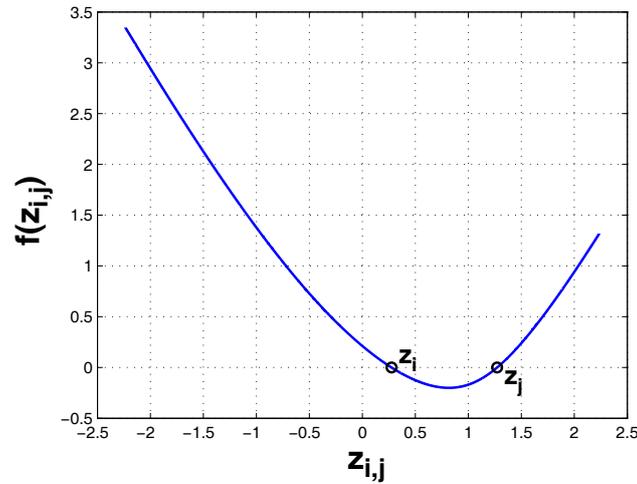


Abbildung 2.21: Verlauf der Funktion $f(z_{i,j})$ für den Fall: $a = 2m$, $s = R_{max} = 3m$, $R_{sr} = 2.8m$, $\varepsilon_{sr} = 22.2^\circ$.

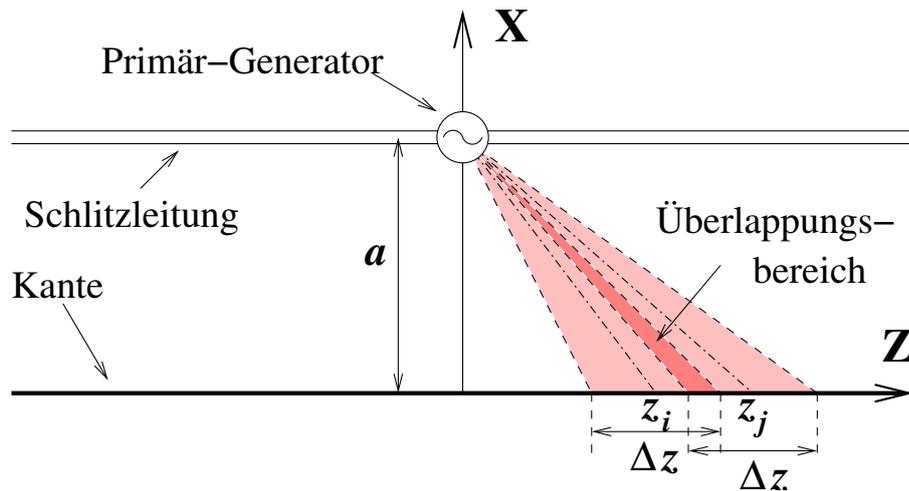


Abbildung 2.22: Überlappung zweier Sektoren der primären Flächenstromdichte.

gewichtet werden, so dass der Überlappungsbereich nicht doppelt zur Berechnung der elektromagnetischen Felder herangezogen wird.²⁵

²⁴Die Nullstellen können numerisch z. B. mittels der Regula-Falsi-Methode ermittelt werden. Siehe dazu: [DR08] (5.5, S. 188) oder [BSMM00] (19.1.1.3, S. 909).

²⁵Mit der Berücksichtigung der Stromsektoren-Überlappung ist es möglich, auch die Beugungsfelder auf der äußersten Wellenfront mit der Vorgehensweise dieses Abschnitts zu berechnen. Die separate Behandlung dieses Falles im vorigen Abschnitt (2.7.1) diente lediglich der besseren Veranschaulichung des Stromlinien-Modells.

Damit lassen sich die Besenreiser-Stromverteilungen (anhand Gl. (2.17)) und anschließend die elektromagnetischen Felder (Gln. (2.32)-(2.34) und (2.35)-(2.37)) beider Sekundär-Wellen berechnen. Durch Überlagerung der Einzelbeiträge erhält man die Gesamt-Felder auf dem vorgegebenen Schnitttring. Diese lassen sich anhand Gl. (2.38) in Spindel-Koordinaten transformieren.

In Anhang C.2 (Abbildungen C.5, C.6 und C.7) sind sämtliche elektromagnetische Feldkomponenten sowohl in Spindel- als auch in kartesischen Koordinaten für Schnitttringe an verschiedenen Orten innerhalb des Spindelkörpers dargestellt. Dabei ist Folgendes zu beobachten:

1. Alle Feldkomponenten erfüllen die Randbedingungen auf der Metallplatte, sowie die Symmetrie- bzw. Antisymmetrie-Bedingungen bezüglich der Platten- (xz -) Ebene.
2. Außerhalb der Symmetrieebene existiert eine zur Kante parallel gerichtete elektrische Feldkomponente (E_z). Auch wenn E_z in den dargestellten Fällen ungefähr um das Hundertfache kleiner ist als die restlichen Komponenten, ist sie feldtheoretisch unbegründet und beruht somit auf einer Ungenauigkeit des Modells an sich.

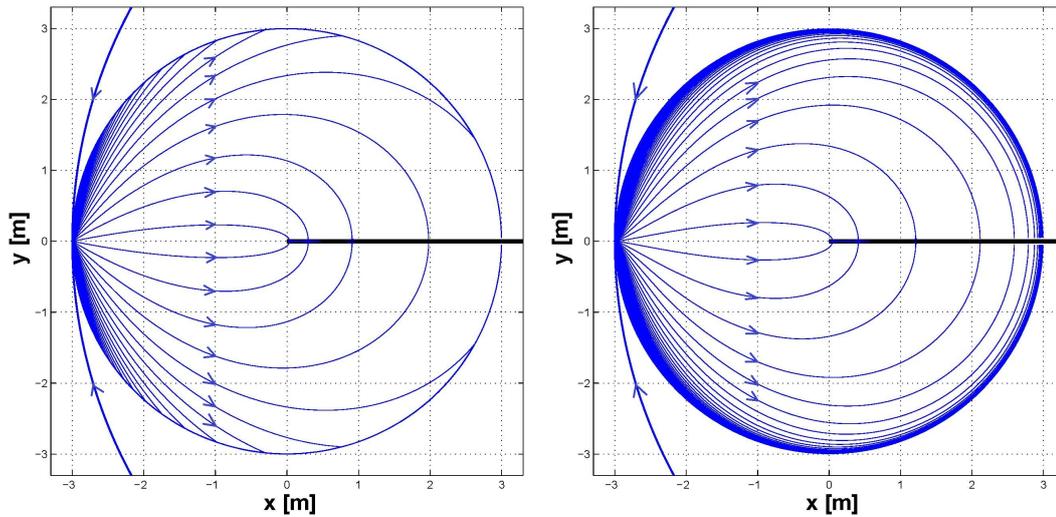


Abbildung 2.23: Elektrische Feldlinien eines gebeugten DIRAC-Impulses in der Symmetrieebene ($z = 0$) mit verschiedenen Gewichtungsfaktoren der primären Stromelemente: $a/\sqrt{a^2 + z_i^2}$ (linkes Bild) und $a/(z_i\sqrt{a^2 + z_i^2})$ (rechtes Bild).

Abbildung 2.23 zeigt die elektrischen Feldlinien in der Symmetrieebene ($z = 0$)²⁶ für die beiden in Abschnitt 2.3 diskutierten Gewichtungen der primären Stromelemente. Dabei ist ersichtlich, dass einige Feldlinien im Fall der schwachen Gewichtung (linkes Bild) in Richtung der äußersten Wellenfront verlaufen wo sie abrupt enden. Da elektrische Feldlinien jedoch entweder in ihren Anfangs- und Endpunkten an den elektrischen Ladungen hängen oder geschlossen sein müssen, deutet dies auf eine unzureichende Gewichtung der primären Stromelemente entlang der beugenden Kante.

Dagegen liefert die alternative Stromgewichtung ein hinsichtlich der vorigen Überlegungen annehmbares Feldlinienbild. Zu beachten ist hier die Tatsache, dass trotz der Annahme eines primären DIRAC-Impulses, das Beugungsfeld auch innerhalb des Spindelkörpers existiert und somit eine zeitliche Ausdehnung aufweist.

²⁶Die elektrischen Feldlinien wurden als Höhenschnitlinien des Magnetfeldes berechnet, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in der Symmetrieebene ausschließlich eine ε - bzw. z -Komponente des Magnetfeldes existiert, sowie unter der vereinfachenden Annahme, dass die z -Ableitungen der beiden übrigen Komponenten H_x und H_y in der engeren Umgebung der Symmetrieebene ($z = 0$) verschwinden, also die Krümmung der magnetischen Feldlinien in diesem Bereich vernachlässigbar ist.

2.8 Das Kantenbeugungsfeld eines primären Gauß-Impulses

Wie schon in der Einleitung dieses Kapitels (S. 11) angedeutet, diente die bisherige Betrachtung eines einzelnen DIRAC-Impulses als primäre Wellenform ausschließlich der konstruktiven Handhabbarkeit des vorgestellten Stromlinien-Modells. Da jedoch aus praktischer Sicht vielmehr Wellen endlicher zeitlicher Ausdehnung von Interesse sind, soll im Folgenden das Beugungsfeld der Kante für den Fall eines primären GAUSS-Impulses $i(t) = g(t)$ ermittelt werden.

Ein GAUSS-Impuls mit der Maximum-Amplitude gleich 1 lässt sich wie folgt formulieren:

$$g(t) = e^{-\gamma^2 (t - t_0)^2} \quad \text{mit: } \gamma = \frac{2}{T_g} \sqrt{\ln(1/g_a)} \quad (2.42)$$

wobei T_g die Impulsdauer, t_0 den Ort des Amplitudenmaximums auf der Zeitachse und g_a die Amplitude an den Stellen $t = t_0 \pm T_g/2$ bezeichnen.

Somit lassen sich Dauer (T_g) bzw. Länge (T_g/c_0) und Anfangsamplitude (g_a) des Impulses unabhängig voneinander einstellen, wobei der Anfangszeitpunkt durch $t_a = t_0 - T_g/2$ gegeben ist.²⁷

Die Stromelemente \vec{I}_i^p an den Orten z_i lassen sich aus Gl. (2.11) wie folgt angeben:

$$I_i^p(z_i) = \frac{g(t - r_{0i}/c_0)}{\pi} \frac{\Delta\alpha_i}{|z_i|} \quad (2.43)$$

Zur Anwendung des Stromlinien-Modells wird zunächst der GAUSS-Impuls zu einer zeitlichen Folge einzelner, gewichteter DIRAC-Impulse diskretisiert:

$$g(t_k) = g(t) \cdot \delta(t - t_k) \quad (2.44)$$

wodurch die Ergebnisse des vorigen Abschnitts (2.7.2) mittels einer Faltung mit dem diskreten GAUSS-Impuls zur Beschreibung des Beugungsfeldes herangezogen werden können.

Für die weitere Betrachtung empfiehlt sich die Variablensubstitution $t \rightarrow s = c_0 t$, wobei s den zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg bezeichnet. Gl. (2.44) lautet dann:

$$g(s_k) = g(s) \cdot \delta(s - s_k) \quad (2.45)$$

Sei $h(s)$ eine beliebige Komponente des Kantenbeugungsfeldes eines DIRAC-Impulses,

²⁷Alternativ lässt sich ein GAUSS-Impuls anhand seiner spektralen Eigenschaften (f_{max} : Höchste Spektrallinie, $g_{f_{max}}$: Amplitude der höchsten Spektrallinie) bestimmen. Dabei gilt: $\gamma = \pi f_{max} / \sqrt{\ln(1/g_{f_{max}})}$ und $t_0 = \sqrt{\ln(1/g_a)} / \gamma$.

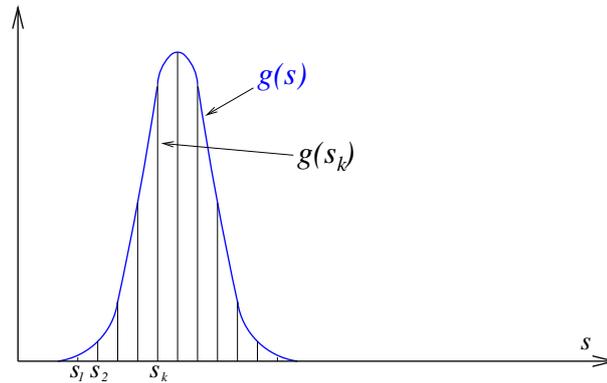


Abbildung 2.24: Gewichtete DIRAC-Impulse ($g(s_k)$) mit einhüllender GAUSS-Kurve ($g(s)$).

so lässt sich diese Komponente im Falle eines GAUSS-Impulses nach Abbildung 2.24 durch folgenden Ausdruck berechnen:

$$f(s_k) = \sum_{l=1}^k g(s_l) \cdot h(s_k - s_l) \quad (2.46)$$

welcher einer diskreten Faltungsoperation entspricht. Dabei muss bei der Auswertung der Formel an einem bestimmten Punkt $P(R, \phi, \varepsilon)$ darauf geachtet werden, dass die Bedingung $s_1 \geq R$ erfüllt ist, das Beugungsfeld also am Aufpunkt P angekommen ist.

Abbildung 2.25 zeigt die ersten drei DIRAC-Wellenfronten des GAUSS-Impulses. Eine Anwendung der Gl. (2.46) auf diesen Fall ergibt:

$$f(s_3) = g(s_1) \cdot h(2\Delta s) + g(s_2) \cdot h(\Delta s) + g(s_3) \cdot h(0) \quad (2.47)$$

wobei $s_{l+1} - s_l = \Delta s$ gesetzt wurde.

Im dritten Term der Gl. (2.47) tritt der Fall auf, in dem der Schmitttring auf der äußersten Wellenfront liegt und somit eine einzige Sekundär-Kugelwelle zur Ermittlung des Beugungsfeldes benötigt (siehe Abschnitt 2.7.1), wie in Abbildung 2.25 zu sehen ist.

Abbildung 2.26 zeigt die zeitlichen Verläufe des Kantenbeugungsfeldes für verschiedene Abstände zur Kante ($\rho = R \cos \varepsilon - a$) bei gleichem Winkel, während Abbildung 2.27 die zeitlichen Verläufe für verschiedene Winkel bei gleichem Abstand zur Kante zeigt. Wie dabei ersichtlich wird, hängt die Amplitude des gebeugten Impulses sowohl vom Abstand des Beobachtungspunktes zur Kante als auch vom Winkel, den dieser Punkt mit der Metallplatte bildet, ab.

Zu beobachten ist auch die Ausbildung einer „Schleppe“ im gebeugten Impuls, welche mit wachsendem Abstand zur Kante zunimmt, jedoch mit wachsendem Winkel zur Metallplatte abnimmt.

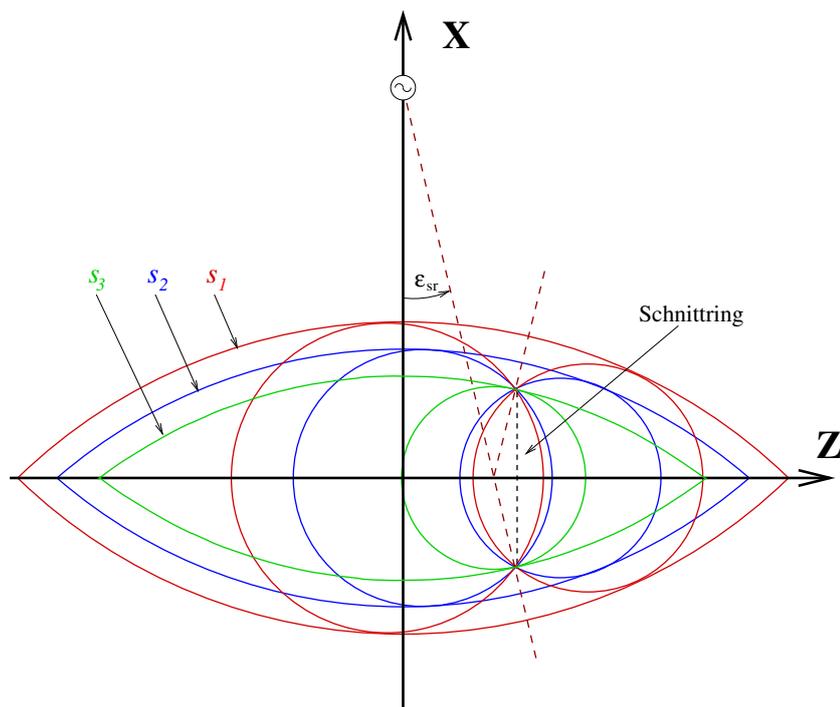


Abbildung 2.25: Darstellung der ersten drei DIRAC-Wellenfronten mit den entsprechenden Sekundär-Kugelwellen für den eingezeichneten Schnitttring.

Zur besseren Anschaulichkeit, sind die Zeitverläufe der Abbildungen 2.26 und 2.27 nochmals in normierter Form und im Vergleich zu dem primären GAUSS-Impuls in den Abbildungen 2.28 und 2.26 dargestellt.

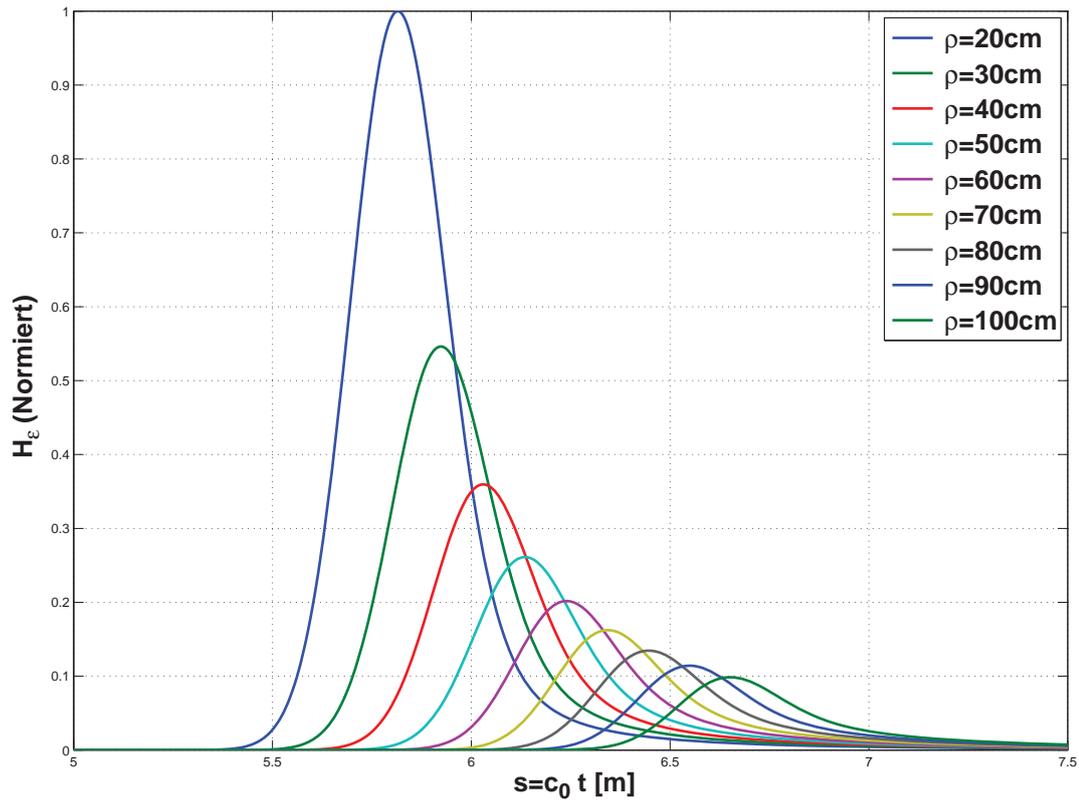


Abbildung 2.26: Zeitverläufe der H_e -Komponente des Beugungsfeldes (Normiert auf den Maximalwert für $\rho = 20\text{cm}$) in der Symmetrieebene ($z = 0$) in verschiedenen Abständen zur Kante in einem Winkel von $\phi = 120^\circ$ ($a = 5\text{m}$, $\Delta z = 1\text{cm}$).

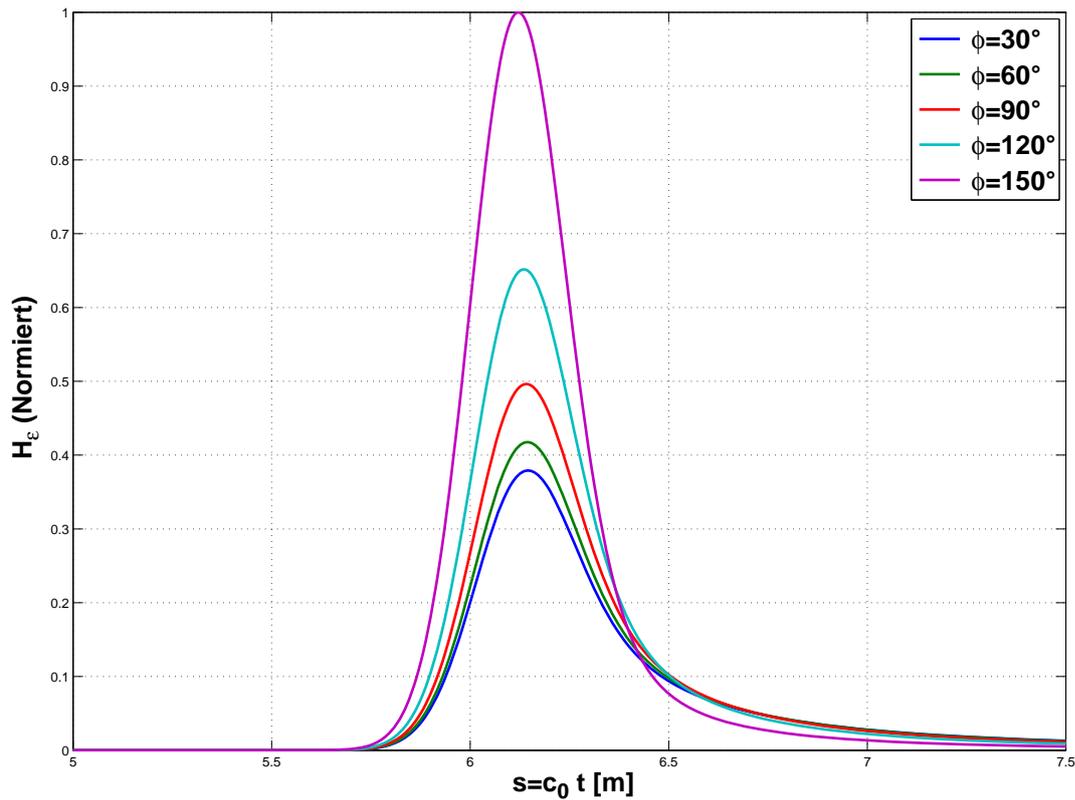


Abbildung 2.27: Zeitverläufe der H_e -Komponente des Beugungsfeldes (Normiert auf den Maximalwert für $\phi = 150^\circ$) in der Symmetrieebene ($z = 0$) in verschiedenen Winkeln bei gleichem Abstand ($\rho = 0.5m$) zur Kante ($a = 5m$, $\Delta z = 1cm$).

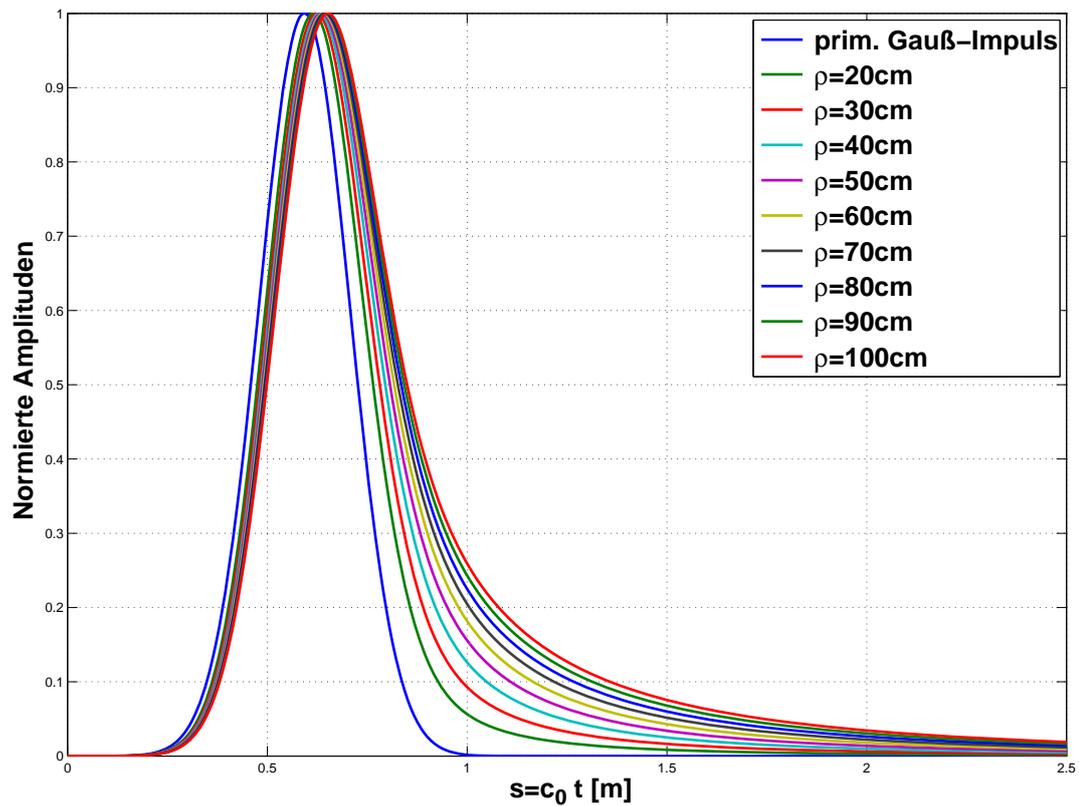


Abbildung 2.28: Vergleich der Zeitverläufe der H_ε -Komponente des Beugungsfeldes in der Symmetrieebene ($z = 0$) in verschiedenen Abständen zur Kante in einem Winkel von $\phi = 120^\circ$ mit dem primären GAUSS-Impuls. Dabei wurden die Kurven, zum besseren Vergleich, amplitudenmäßig normiert und auf die gleiche Anfangsposition verschoben ($a = 5m$, $\Delta z = 1cm$).

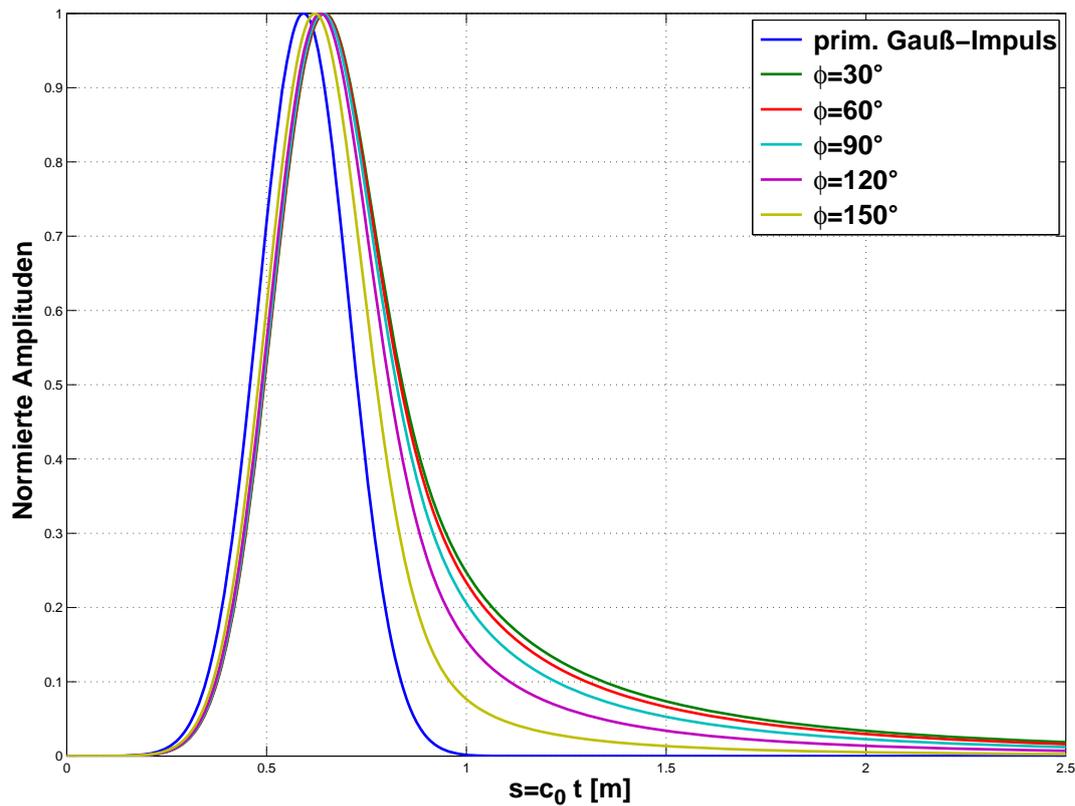


Abbildung 2.29: Vergleich der Zeitverläufe der H_ε -Komponente des Beugungsfeldes in der Symmetrieebene ($z = 0$) in verschiedenen Winkeln bei gleichem Abstand ($\rho = 0.5m$) zur Kante mit dem primären GAUSS-Impuls. Dabei wurden die Kurven, zum besseren Vergleich, amplitudenmäßig normiert und auf die gleiche Anfangsposition verschoben ($a = 5m$, $\Delta z = 1cm$).

2.9 Verifikation des Stromlinien-Modells mittels Feldsimulation

Zur Verifikation des Stromlinien-Modells wurde die untersuchte Beugungsanordnung mit Hilfe des Programms CST-Studio einer elektromagnetischen Feldsimulation unterzogen. Dabei wurde eine Schlitzleitung der Breite 2mm mittels eines konzentrierten Generators mit einem GAUSS-Impuls einer maximalen Frequenz von $f_{max} = 900\text{MHz}$ sowie einer maximalen Spannung $U_{max} = 10^4\text{V}$ gespeist.²⁸ Der Abstand zwischen der Schlitzleitung und der Kante beträgt $a = 5\text{m}$. Zum Zwecke der Darstellbarkeit des reinen Beugungsfeldes wurde die gleiche Struktur jedoch mit durchgehender Metallisierung simuliert. Eine Subtraktion beider Simulationsergebnisse ergibt somit, wie Abbildung 2.30 zeigt, das reine Beugungsfeld, während sich die primären Felder beider Strukturen wegheben.

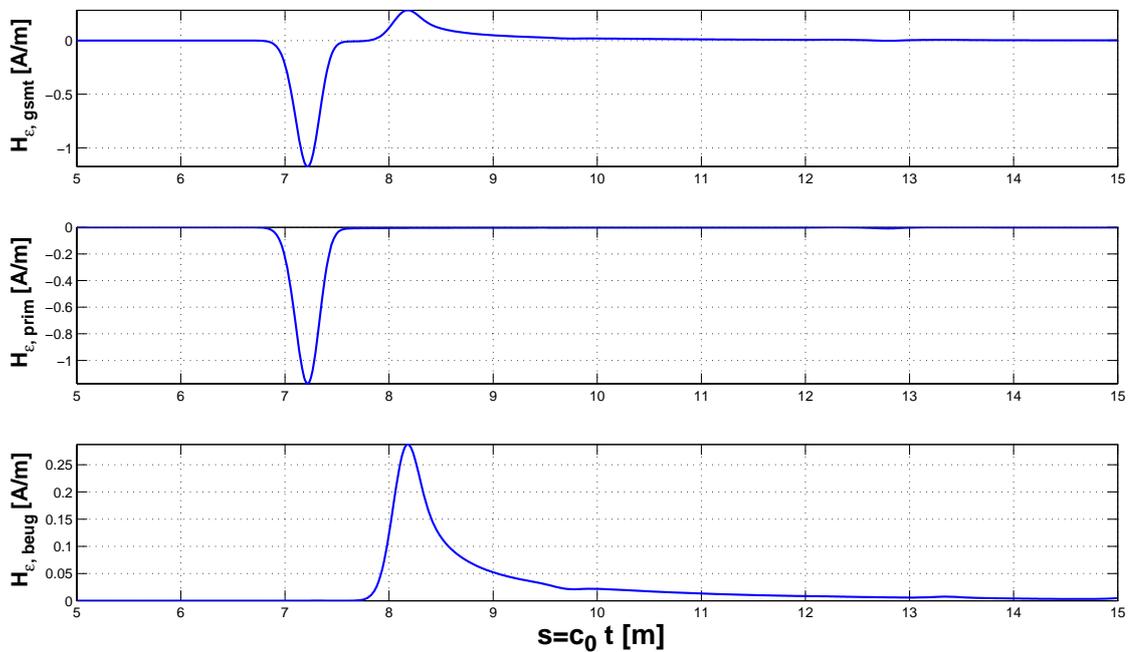


Abbildung 2.30: Simulierte Zeitverläufe der H_ε -Komponente des Gesamtfeldes (oben), des Primärfeldes (mitte) sowie des Beugungsfeldes (unten) an einem Punkt der Koordinaten ($\rho = 2.5\text{m}$, $\phi = 120^\circ$) in der Symmetrieebene ($z = 0$).

Abbildung 2.31 zeigt den Vergleich zwischen simuliertem und berechnetem Zeit-

²⁸Der in CST verwendete GAUSS-Impuls lässt sich anhand der Formeln auf Seite 45 wie folgt nachbilden: $g(t) = 10^4 \cdot e^{-\gamma^2(t-t_0)^2}$; $\gamma = \pi f_{max} / \sqrt{\ln(1/g_{f_{max}})}$, $t_0 = \sqrt{\ln(1/g_a)} / \gamma$, wobei die Parameterwerte $f_{max} = 900\text{MHz}$, $g_{f_{max}} = 0.1$ und $g_a = 1.3 \times 10^{-6}$ einzusetzen sind.

verlauf der H_ε -Komponente des Beugungsfeldes an einem Punkt der Koordinaten ($\rho = 2.5\text{m}$, $\phi = 120^\circ$) in der Symmetrieebene ($z = 0$). Dabei wurden die primären Stromelemente aus Gleichung (2.9) im oberen Bild mit dem Faktor $a/\sqrt{a^2 + z_i^2}$, im unteren Bild dagegen mit dem Faktor $a/(z_i\sqrt{a^2 + z_i^2})$ gewichtet.

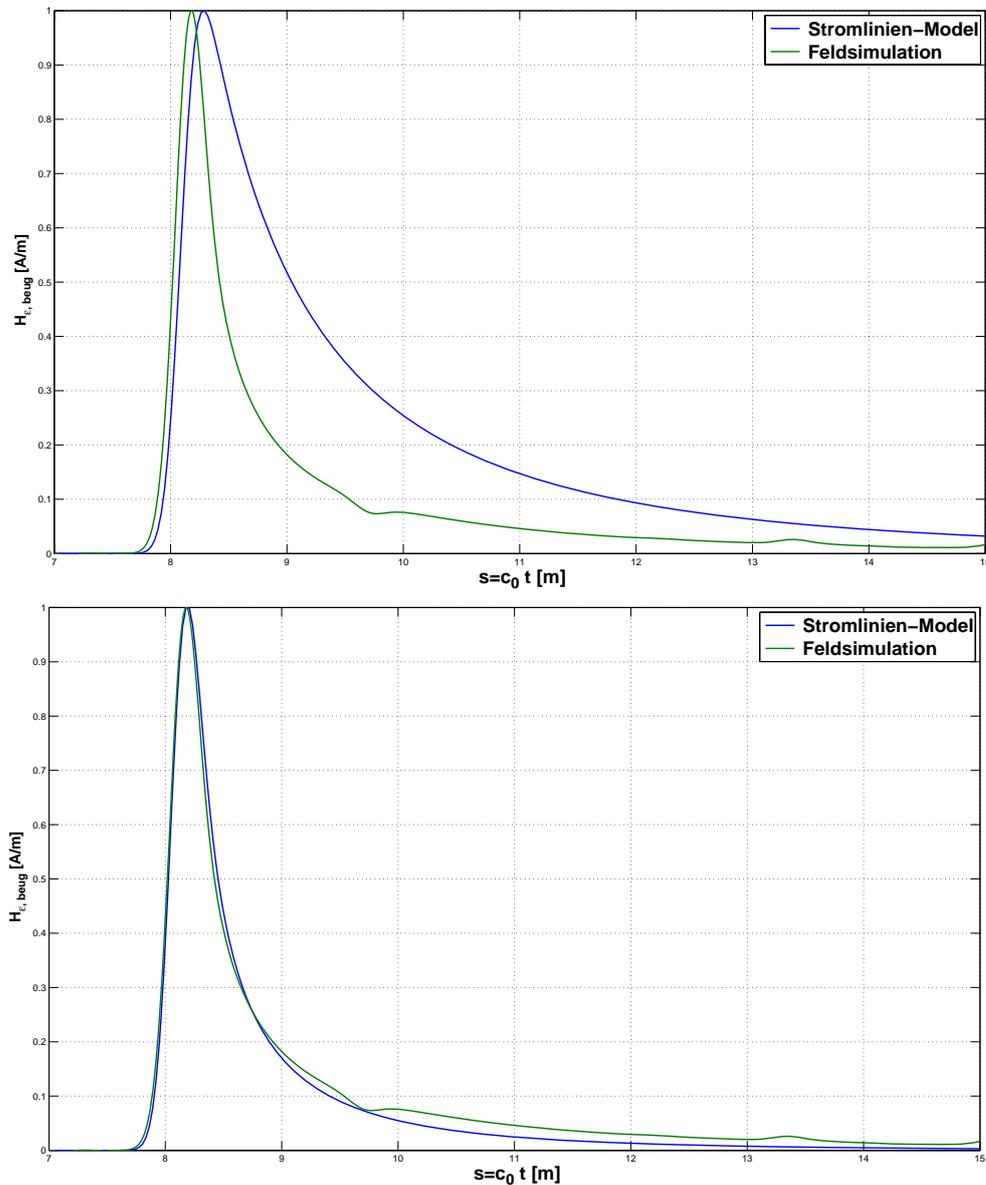


Abbildung 2.31: Simulierter versus berechneter Zeitverlauf der H_ε -Komponente (normiert) des Beugungsfeldes mit dem Gewichtungsfaktor $a/\sqrt{a^2 + z_i^2}$ (oberes Bild) sowie dem Gewichtungsfaktor $a/(z_i\sqrt{a^2 + z_i^2})$ (unteres Bild).

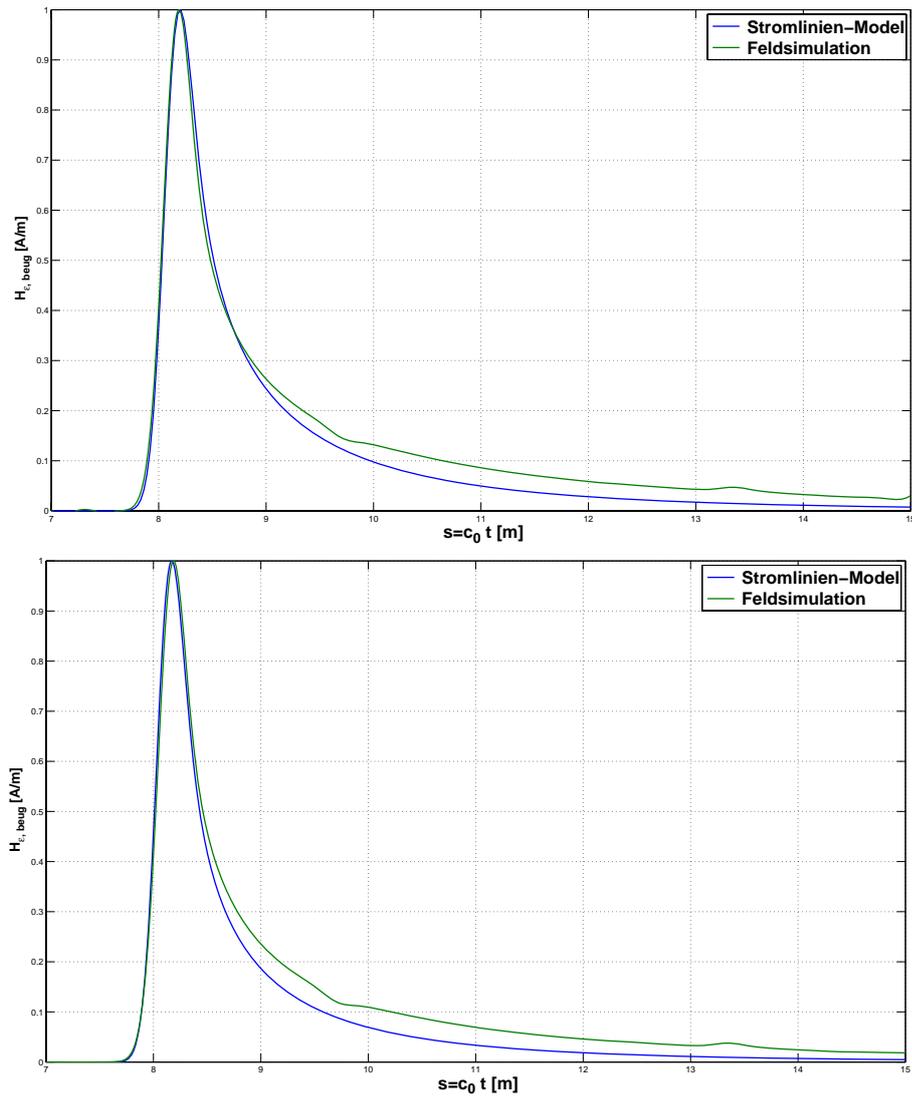


Abbildung 2.32: Vergleich zwischen simuliertem und berechnetem Zeitverlauf der H_z -Komponente (normiert) des Beugungsfeldes an zwei weiteren Punkten ($\rho = 2.5\text{m}$, $\phi = 60^\circ, 90^\circ$ (oben, unten)) in der Symmetrieebene ($z = 0$). Dabei wurden die primären Stromelemente mit dem Faktor $a/(z_i \sqrt{a^2 + z_i^2})$ gewichtet.

Abbildung 2.32 zeigt den Vergleich zwischen simuliertem und berechnetem Zeitverlauf der H_z -Komponente des Beugungsfeldes an zwei weiteren Punkten in der Symmetrieebene ($z = 0$). Zur Interpretation der Ergebnisse, siehe Abschnitt 2.3, S. 21.

2.10 Diskussion des Stromlinien-Modells

Da, wie IMMANUEL KANT²⁹ es formulierte, die Natur nur die Fragen beantwortet, die wir ihr stellen, so ist mit dem Stromlinien-Modell ein Instrument geschaffen, mit dem zuerst Fragen an die Natur (Physik) der Beugungserscheinungen an dem betrachteten Spezialfall gestellt werden können, deren Erörterung im Rückschluss zur Verifikation und Verfeinerung des Modell führt.

Obwohl das vorgestellte Modell im Großen und Ganzen eine gute Beschreibung des Beugungsphänomens an der Kante liefert, besitzt es einige Unzulänglichkeiten, die im Laufe der Ausarbeitung an verschiedenen Stellen deutlich hervortraten und bei der Anwendung des Modells beachtet werden müssen. Diese sind hauptsächlich:

1. Die Polstelle um $\phi = 180^\circ$ auf der äußersten Wellenfront (siehe dazu: Abschnitt 2.7.1, S. 38).
2. Die Existenz einer zur Kante parallel gerichteten elektrischen Komponente des Beugungsfeldes (siehe dazu: Abschnitt 2.7.2, S. 43).
3. Die ungenaue Gewichtung der primären Stromelemente entlang der Kante (siehe dazu: Abschnitt 2.3, S. 20, sowie: Abschnitt 2.9, S. 53).

Des Weiteren wurde im Rahmen dieser Arbeit auf eine Bestimmung der absoluten Feldstärken im Beugungsfeld verzichtet. Dementsprechend sind für die Bewertung der Ergebnisse nur die relativen (normierten) Amplituden von belang.

Die unter Punkt 1 erwähnte Polstelle ist ein wesentliches Merkmal des Stromlinien-Modells, kann jedoch umgangen werden, in dem die Aufpunkte der äußersten Wellenfront vom Inneren des Spindelkörpers her asymptotisch angestrebt werden. Die weiteren Unzulänglichkeiten des Modells hingegen, können anhand einer systematischen Analyse behoben werden. Dazu seien die folgenden zwei Vorschläge für die Herangehensweise dargeboten, die jedoch aufgrund ihrer gegenseitigen Wechselwirkung womöglich nicht einzeln zu bewältigen sind:

1. Zum einen ist zu erörtern, ob die Bestimmung der „Besenreiser“-Stromverteilung durch die ausschließliche Erfüllung der Randbedingungen auf der Metallplatte ausreichend ist, oder vielmehr eine weitere Gewichtungsfunktion in Abhängigkeit vom Ort entlang der Kante erforderlich ist.
2. Zum anderen sind bezüglich der Gewichtung der primären Stromelemente die einzelnen Einflüsse von Strom-Fortpflanzungsrichtung und Strom-Vektor-Richtung einer genaueren Analyse zu unterziehen.

²⁹IMMANUEL KANT (* 22. April 1724 in Königsberg (Ostpreußen); † 12. Februar 1804 ebd.).

Kapitel 3

Näherungslösung des Beugungsproblems mittels Spiegelungsmethode

In diesem Kapitel wird eine geschlossene Formulierung des Beugungsfeldes des in Abschnitt 1.2 vorgestellten Beugungsproblems angestrebt. Ausgehend von einem geometrisch-optischen Näherungsansatz bezüglich der induzierten Flächenstromdichte werden Ausdrücke für die elektromagnetischen Felder ermittelt, deren Näherungscharakter jedoch einige Einschränkungen des Gültigkeitsbereiches bedingen.

Für das grundsätzliche Verständnis des Verhaltens elektromagnetischer Felder an unendlich scharfen Kanten und aufgrund ihrer historischen Bedeutsamkeit für die Beugungstheorie insgesamt, sei auf die SOMMERFELDSche Lösung der Beugung an der Halbebene (als erstes exakt gelöstes Beugungsproblem) sowie auf die MEIXNERSche Kantenbedingung (als Eindeutigkeitskriterium für die Lösung von Beugungsproblemen) hingewiesen, welche in Anhang D erörtert werden.

Vorbemerkung: Wie die Erörterungen in diesem Kapitel zeigen werden, liefert der hier gemachte Ansatz Lösungen, die in wesentlichen Merkmalen von den feldtheoretischen Erwartungen aus dem Vergleich mit dem SOMMERFELDSchen Beugungsproblem abweichen. Insbesondere die fehlende ϕ -Abhängigkeit der magnetischen Feldkomponenten H_z und H_ρ sowie die fehlende Singularität der Felder an der Kante. Dennoch wurde auf diesen Ansatz in der Arbeit nicht verzichtet, als mögliche Herangehensweise, die jedoch entsprechend modifiziert und verfeinert werden muss.

3.1 Formulierung des Beugungsfeldes in Zylinder-Koordinaten

3.1.1 Formulierung der primären elektromagnetischen Felder für eine harmonische Zeitabhängigkeit:¹

Gegeben sei die Beugungsanordnung nach Abschnitt 1.2, welche in Abbildung 3.1 dargestellt ist:

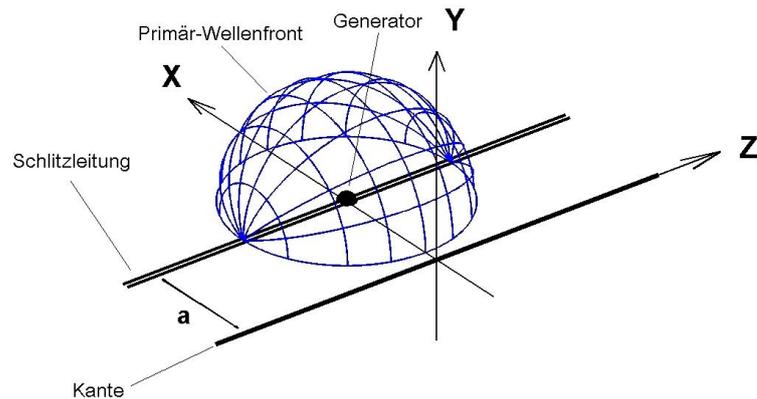


Abbildung 3.1: Dreidimensionale Darstellung der Beugungsanordnung mit einer Primär-Wellenfront vor dem Erreichen der Metallisierungskante

Ausgehend von einer harmonischen Zeitabhängigkeit des Generatorstromes $I_g e^{-i\omega t}$, lässt sich der Strom entlang der Leitung wie folgt angeben (Dabei wird auf eine Kennzeichnung der komplexen Größen verzichtet):

$$I(z, t) = I_g e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.1)$$

wobei k die Ausbreitungskonstante bezeichnet.²

Durch Anwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial I}{\partial z} = i\omega Q \quad (3.2)$$

auf Gl. (3.1), ergibt sich für die Ladung Q :

$$Q(z, t) = \frac{k}{\omega} I_g e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.3)$$

¹Die Ausdrücke für die elektromagnetischen Felder werden ähnlich wie in Abschnitt 1.2 anhand der Analogie zur Drahtleitung ermittelt.

²Aufgrund der Annahme, dass sich die Leitungswelle mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, kann auf die Einführung einer richtungsabhängigen Ausbreitungskonstante verzichtet werden.

Somit lauten die Gleichungen (1.1) (1.2) für den zeitharmonischen Fall (unter Ausblendung der Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$):

$$\vec{H}^p = \frac{I_g e^{ikr}}{2\pi r} \cdot \left[\pm \frac{(\rho - a \cos \phi)z}{\rho^2} \vec{e}_\rho \pm \frac{(a \sin \phi)z}{r^2} \vec{e}_\phi \mp 1 \vec{e}_z \right] \quad ; \quad (y \geq 0) \quad (3.4)$$

$$\vec{E}^p = \frac{k I_g e^{ikr}}{\omega 2\pi \varepsilon_0 \rho} \cdot \left(\pm \frac{a \sin \phi}{\rho} \vec{e}_\rho \mp \frac{\rho - a \cos \phi}{\rho} \vec{e}_\phi \right) \quad ; \quad (y \geq 0) \quad (3.5)$$

wobei $r = \sqrt{\rho^2 - 2a\rho \cos \phi + a^2 + z^2}$ den räumlichen Abstand zum Speisegenerator, $\rho = \sqrt{\rho^2 - 2a\rho \cos \phi + a^2}$ den Querabstand zur Schlitzleitung bezeichnen, wie Abbildung 3.2 veranschaulicht.

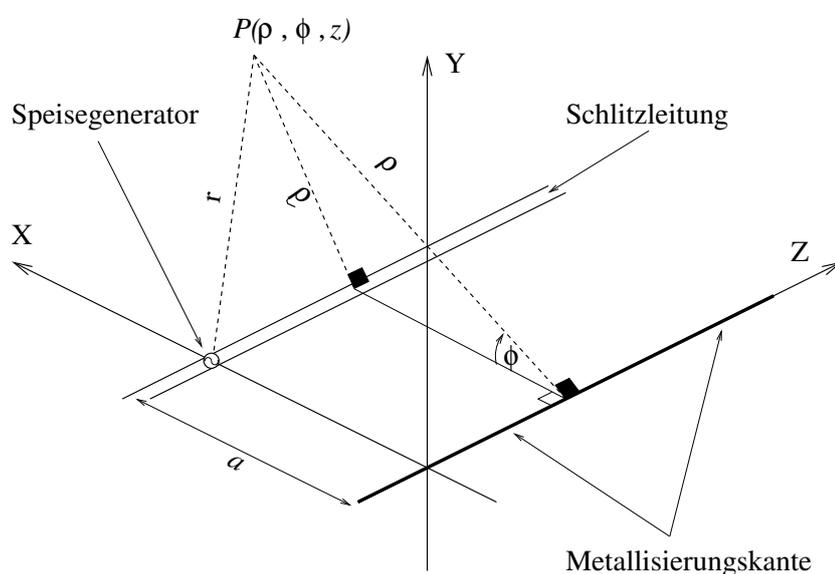


Abbildung 3.2: Veranschaulichung der verschiedenen Aufpunktskoordinaten.

Die auf der Metallisierungsplatte induzierte Flächenstromdichte lässt sich aus dem magnetischen Feld, unter Berücksichtigung der Antisymmetrie, wie folgt berechnen:

$$\vec{J}_F^p = \vec{e}_\phi \times 2\vec{H}^p(\phi = 0) = \vec{e}_\rho 2H_z^p - \vec{e}_z 2H_\rho^p = -\frac{I_g e^{ikr_0}}{\pi r_0} \left[1\vec{e}_\rho + \frac{z}{(\rho - a)}\vec{e}_z \right] \quad (3.6)$$

wobei $r_0 = \sqrt{(\rho - a)^2 + z^2}$ den Abstand eines Punktes in der xz -Ebene vom Speisegenerator bezeichnet.

3.1.2 Näherungslösung des Beugungsfeldes:

Wie eingangs aus der Problemstellung deutlich wurde, induziert das Primär-Feld auf der Metallplatte eine elektrische Flächenstromdichte, welche aus den zur Platte tangentialen Komponenten des Magnetfeldes berechnet und nach Gl.(3.6) angegeben werden kann. Geht man von einer reinen Reflexion des primären Flächenstromes an der Kante nach den Gesetzen der geometrischen Optik aus, so lässt sich die reflektierte Flächenstromdichte als die von einer bezüglich der Kante gespiegelten Schlitzleitung herrührenden Flächenstromdichte formulieren. Abbildung 3.3 zeigt die Anordnung des Spiegel-Generators sowie eine anschauliche Darstellung von Primär- und Sekundär-Flächenstrom. Der Näherungscharakter dieses Vorgehens-

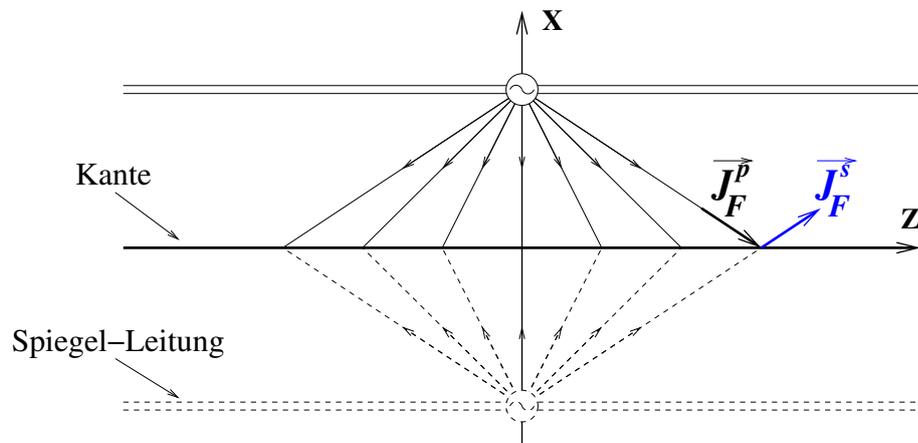


Abbildung 3.3: Reflexion des primären Flächenstromes an der Kante

weise rührt aus der ausschließlichen Heranziehung des induzierten Flächenstromes zur Beschreibung des Beugungsvorganges an der Kante. In Wirklichkeit sind die physikalischen Vorgänge an der Kante komplizierter als sie durch eine reine Reflexion des Flächenstromes an der Kante exakt zu beschreiben wären. Eine strenge Lösung des Beugungsproblems erfordert die Heranziehung der elektromagnetischen Felder.

In Analogie zu Gl.(3.6) lässt sich die reflektierte Flächenstromdichte wie folgt angeben:

$$\vec{J}_F^s = \frac{I_g}{\pi} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}} \left[1\vec{e}_\rho + \frac{z}{(\rho+a)}\vec{e}_z \right] \quad (3.7)$$

wobei der Zeitfaktor ($e^{-i\omega t}$), welcher durch den treibenden Generator vorgegeben ist, wiederum ausgeblendet wird.

Daraus lassen sich die zur Metallplatte tangentialen magnetischen Feldkomponen-

ten anhand der Gleichung:

$$\vec{J}_F^s = \vec{e}_\phi \times 2\vec{H}^s(\phi = 0) = \vec{e}_\rho 2H_z^s - \vec{e}_z 2H_\rho^s \quad (3.8)$$

wie folgt berechnen:

$$H_\rho^s(\phi = 0_+) = \frac{-I_g}{2\pi} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}} \frac{z}{(\rho+a)} \quad (3.9)$$

$$H_z^s(\phi = 0_+) = \frac{I_g}{2\pi} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}} \quad (3.10)$$

Die Winkelabhängigkeit $f(\phi)$ dieser beiden Feldkomponenten kann anhand der Symmetrie- und Randbedingungen ermittelt werden: An der Stelle ($\phi = 0$), beim Durchgang durch die Platte, erleiden beide Feldkomponenten einen Richtungswechsel, der durch den induzierten Flächenstrom (Gl. (3.7)) vorgegeben ist. Da die Sprungamplitude durch die (ρ, z) -Abhängigkeit bestimmt ist, kann der Richtungswechsel durch einen bloßen Vorzeichenwechsel berücksichtigt werden. Bei ($\phi = \pi$) muss das Beugungsfeld die Unstetigkeit des Primär-Feldes an dieser Stelle kompensieren. Dazu müssen die beiden Feldkomponenten an dieser Stelle einen Richtungswechsel vollbringen, dessen Sprungamplitude auch hier durch die (ρ, z) -Abhängigkeit erfüllt ist (Vergleiche Gln. (3.9) und (3.10) mit (3.4)), und somit durch einen weiteren Vorzeichenwechsel berücksichtigt werden kann. Aus diesen Überlegungen und der Tatsache, dass beide Vorzeichenwechsel (für $\phi = 0$ und für $\phi = \pi$) in gleicher Richtung stattfinden, folgt, dass die beiden untersuchten Feldkomponenten keine Winkelabhängigkeit aufweisen und lediglich beim Durchgang durch die xz -Ebene einen Vorzeichenwechsel erleiden. Somit lauten die Ausdrücke für H_ρ^s und H_z^s :

$$H_\rho^s = \mp \frac{I_g}{2\pi} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}} \frac{z}{(\rho+a)} \quad ; \quad (y \geq 0) \quad (3.11)$$

$$H_z^s = \pm \frac{I_g}{2\pi} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}} \quad ; \quad (y \geq 0) \quad (3.12)$$

Die fehlende ϕ -Abhängigkeit der beiden Komponenten H_ρ^s und H_z^s , welche jedoch der Vergleich mit dem SOMMERFELDSchen Beugungsproblem einer H -polarisierten ebenen Welle nahelegt (siehe Gln. (E.75) bzw. (E.77)), zeigt bereits den Näherungscharakter des Lösungsansatzes.

62KAPITEL 3. NÄHERUNGSLÖSUNG MITTELS SPIEGELUNGSMETHODE

Wendet man die 2. MAXWELLSche Gleichung auf die Sekundär-Felder an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{H}^s &= -\frac{1}{-i\omega\mu_0} \text{rot} \vec{E}^s \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \left[\left(\frac{\partial E_\phi^s}{\partial z} - \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial E_\rho^s}{\partial z} - \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{E_\phi^s}{\rho} + \frac{\partial E_\phi^s}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho^s}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z \right] \quad (3.13) \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Feldkomponenten E_ϕ^s , E_ρ^s und H_ϕ^s in folgender Reihenfolge berechnen:

$$E_\phi^s = -i\omega\mu \int H_\rho^s dz = \pm \frac{I_g \omega \mu_0}{2\pi k} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{\rho+a} ; \quad (y \geq 0) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} E_\rho^s &= \int \left(E_\phi^s + \rho \frac{\partial E_\phi^s}{\partial \rho} - i\omega\mu_0 \rho H_z^s \right) d\phi \\ &= \int \left(\pm \frac{I_g \omega \mu_0 a}{2\pi k} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{(\rho+a)^2} \right) d\phi \\ &= \frac{I_g \omega \mu_0 a}{2k} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{(\rho+a)^2} \cdot \begin{cases} \frac{\phi}{2\pi} & ; y > 0 \\ \frac{2\pi - \phi}{\pi} & ; y < 0 \end{cases} \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\phi^s &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_\rho^s}{\partial z} \\ &= \frac{I_g}{2} \frac{e^{ik\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}} \frac{az}{(\rho+a)^2} \cdot \begin{cases} \frac{\phi}{2\pi} & ; y > 0 \\ \frac{2\pi - \phi}{\pi} & ; y < 0 \end{cases} \quad (3.16) \end{aligned}$$

Eine erneute Einsetzung der ermittelten Feldkomponenten in die 1. MAXWELLSche Gleichung würde zu weiteren Termen führen, die jedoch mit höherer Ordnung als die ursprünglichen Terme in ρ -Richtung abfallen und daher für eine Fernfeldbeurteilung ohne Belang sind.

3.1.3 Eigenschaften und Unzulänglichkeiten der Näherungslösung:

Der Näherungscharakter der ermittelten Ausdrücke für die elektromagnetischen Felder (Gln. (3.11), (3.12), (3.14)-(3.16)) führt zu einer Einschränkung des Gültigkeitsbereiches der angegebenen Lösungen. Im Folgenden werden die wesentlichen Eigenschaften der Näherungslösungen aufgeführt:

1. Die Feldkomponenten erfüllen die Randbedingungen $E_t^s = 0$ und $H_n^s = 0$ auf der Metallplatte.
2. Die Beträge der elektrischen Feldkomponenten E_ρ^s und E_ϕ^s weisen keine z -Abhängigkeit auf. Auch die Beträge der magnetischen Feldkomponenten H_ρ und H_ϕ weisen für große Werte von z ($z \gg (\rho + a)$) keine z -Abhängigkeit auf. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass die Anregung des Beugungsfeldes entlang der Kante mit wachsendem z abnehmen muss, da die primäre Welle mit immer kleineren Winkeln auf die Kante trifft, für sehr große Werte von z näherungsweise parallel zu ihr fortschreitet und somit keine Sekundär-Welle anregt.

Diese Unzulänglichkeit der angegebenen Sekundärfelder ist durch den Ansatz der Spiegelquelle begründet, welche für eine Reflexion des primären Flächenstromes sorgt, ungeachtet dessen, inwieweit dieser zur Anregung des Beugungsfeldes beiträgt.

Damit ist der Gültigkeitsbereich der Felder entlang der Kante auf einen begrenzten Bereich um den Symmetriepunkt ($z = 0$) beschränkt, in dem die Reflexion der primären Flächenstromdichte eine dominante Rolle spielt.

3. Die Feldkomponenten E_ρ , H_ρ und H_ϕ weisen für große Werte von ρ ($\rho \gg a, z$) eine $(1/\rho^2)$ -Abhängigkeit auf. Die Fernfeldkomponenten E_ϕ und H_z hingegen, fallen für große Werte von ρ mit $1/\rho$ ab und erfüllen damit die SOMMERFELDSche Ausstrahlungsbedingung für eine Kugelwelle. Diese Kugelwellen-Charakteristik (Aus der Symmetrieebene her gesehen!) steht in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass die Anregung entlang der Kante abnimmt und somit die Strahlung aus Sicht eines weit genug entfernten Beobachters aus einem begrenzten Bereich der Kante herrührt.
4. Alle Feldkomponenten besitzen an der Kante endliche Werte. Damit ist die elektromagnetische Energie in der Kantenumgebung endlich und die MEIXNERSche Kantenbedingung in dem Sinne erfüllt, dass es zu keinem physikalischen Widerspruch kommt. Die Abwesenheit des singulären Verhaltens der zur Kante senkrechten Feldkomponenten jedoch schränkt den Gültigkeitsbereich der Näherungslösungen auf den Kanten-Fernfeldbereich

ein. Denn aufgrund der Annahme einer unendlich scharfen Kante, müsste eine im Nahbereich der Kante gültige Lösung für die senkrechten Feldkomponenten „notwendigerweise“ eine Singularität der Ordnung $1/\sqrt{\rho}$ aufweisen. Dies gilt bei dem betrachteten Beugungsproblem sowohl für den Fall einer einseitigen als auch für den Fall einer beidseitigen (sich oberhalb und unterhalb der Metallplatte ausbreitenden) Primär-Welle.³

3.1.4 Feldliniendarstellung in der Symmetrieebene:

Da sowohl das primäre als auch das sekundäre Magnetfeld in der ($z = 0$)-Symmetrieebene ausschließlich eine z -Komponente aufweisen, können die elektrischen Feldlinien als Höhenschnitte des Magnetfeldes in dieser Ebene dargestellt werden, unter der vereinfachenden Annahme, dass die z -Ableitungen der beiden übrigen Komponenten H_x und H_y in der engeren Umgebung der Symmetrieebene ($z = 0$) verschwinden, also die Krümmung der magnetischen Feldlinien in diesem Bereich vernachlässigbar ist. Abbildung 3.4 zeigt Feldliniendarstellungen zu vier verschiedenen Zeitpunkten, wobei sich die Schlitzleitung in einer Entfernung von $a = 2\lambda$ zur Kante befindet.

³In [VB91] (4.4, S. 122-124) sind einige Fälle geschildert, bei denen es aufgrund bestimmter Symmetrieeigenschaften trotz unendlich scharfer Kanten zu keiner Ausbildung von Singularitäten kommt.

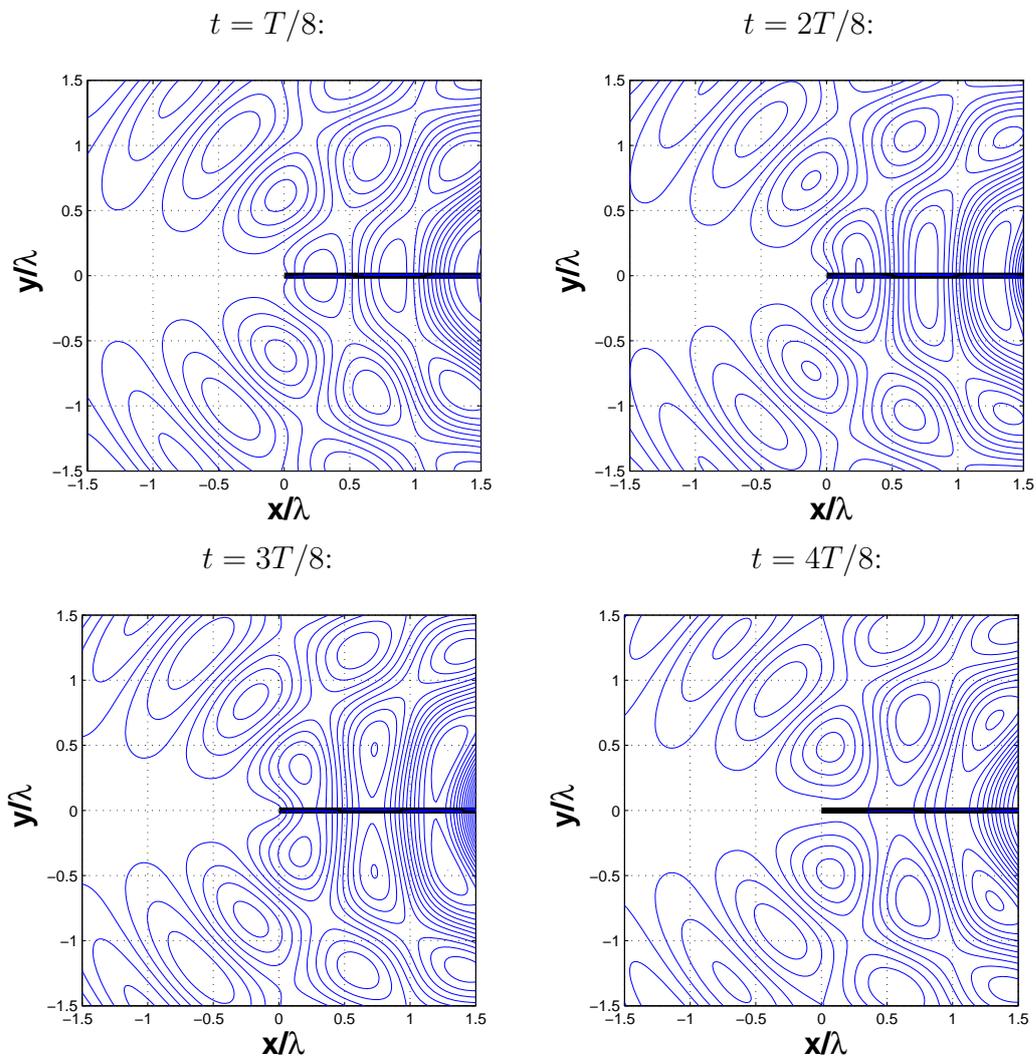


Abbildung 3.4: Elektrische Feldlinien in der Symmetrieebene ($z = 0$) zu verschiedenen Zeitpunkten.

3.1.5 Betrachtung des unsymmetrischen Beugungsproblems:

Die in den vorhergehenden Abschnitten ermittelten Lösungen für das symmetrische Beugungsproblem lassen sich auch auf das unsymmetrische Problem, bei dem die Schlitzleitung nur in den oberen (oder unteren) Halbraum strahlt, anwenden. Dabei seien die Probleme die mit der praktischen Realisierung einer solchen Vorrichtung verbunden sind, außer Acht gelassen.⁴

Zur Gewährleistung der Strom- bzw. Ladungserhaltung, wird angenommen, dass die Schlitzleitung im unsymmetrischen Fall die doppelte Feldstärke in den einen Halbraum abstrahlt, verglichen mit dem symmetrischen Fall, so dass die primären elektromagnetischen Felder durch Multiplikation der beiden Gleichungen (3.4) und (3.5) mit 2 für das unsymmetrische Problem übernommen werden können. Die induzierte primäre und sekundäre Flächenstromdichte sind unverändert durch die Gleichungen (3.6) und (3.7) gegeben.

Auch die sekundären elektromagnetischen Feldkomponenten lassen sich unverändert aus dem symmetrischen Fall übernehmen, wobei diese nicht mehr die Unstetigkeit der primären Felder von +1 zu -1, sondern von 2 zu 0 kompensieren.

Abbildung 3.5 zeigt Feldliniendarstellungen zu vier verschiedenen Zeitpunkten, wobei sich die Schlitzleitung in einer Entfernung von $a = 2\lambda$ zur Kante befindet.

⁴Zum einen bedingt die praktische Ausführung, z. B. in Form eines geschlitzten Hohlleiters, das Entstehen eines Einschwingvorganges, wodurch das vom Generator gespeiste Signal verzerrt wird, zum anderen kann dadurch die Voraussetzung einer sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitenden Leitungswelle nicht aufrechterhalten werden.

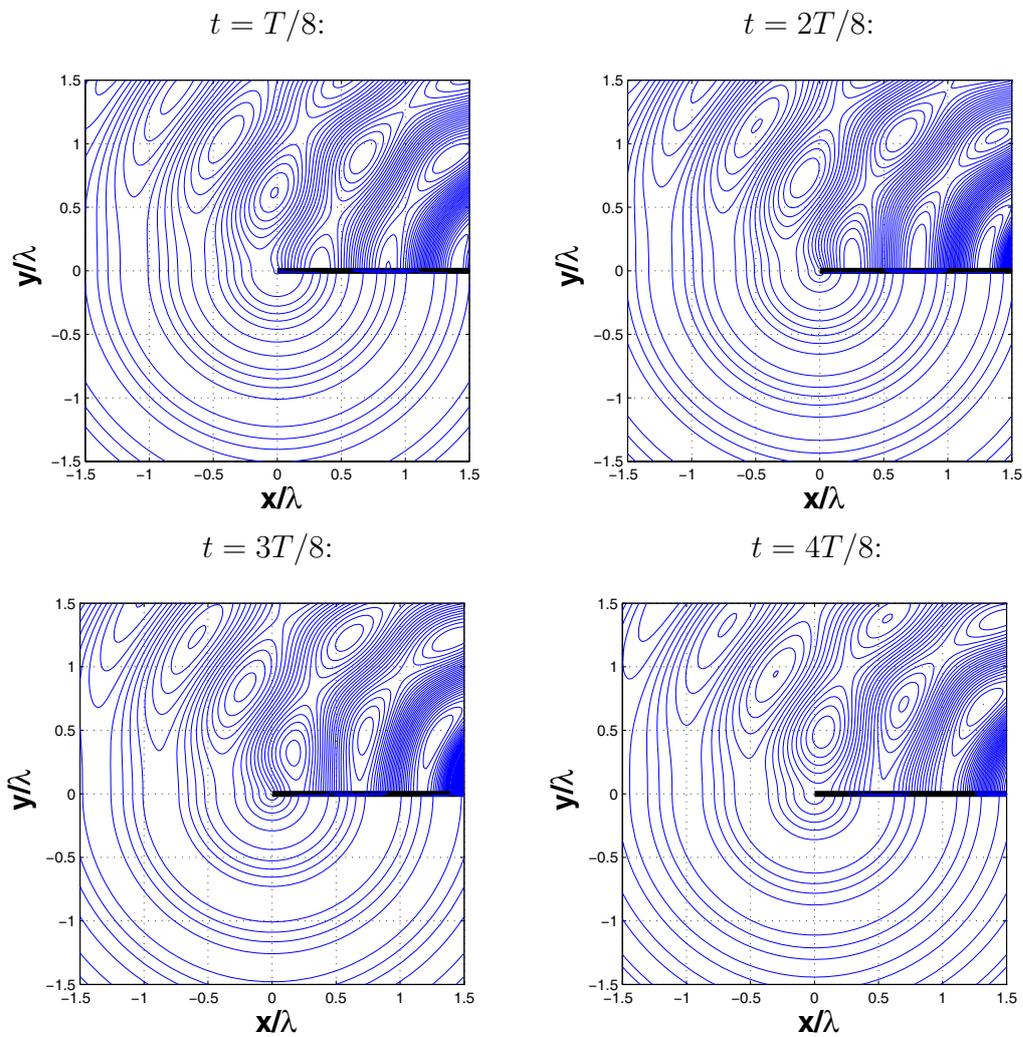


Abbildung 3.5: Elektrische Feldlinien in der Symmetrieebene ($z = 0$) zu verschiedenen Zeitpunkten.

Anhang A

Elektromagnetische Felder eines Impuls- gespeisten V-Dipols

Die folgende Herleitung orientiert sich an den Ausführungen in [MS89].

Gegeben sei ein V-Dipol nach Abb. A.1, der mittels des Generators im Verzweigungspunkt mit einem transienten Strom-Impuls $i(t)$ gespeist wird. Die Annahme eines, im Vergleich zur Impuls-Länge, vernachlässigbaren Drahtdurchmessers der vollkommen leitenden Dipol-Arme, erlaubt die Anwendung der Theorie verlustloser Leitungen auf das Problem¹, wobei die Phasengeschwindigkeit entlang des Drahtes gleich der Lichtgeschwindigkeit c_0 ist.

Zum Zwecke einer konsistenten Herleitung, werden die Dipol-Arme als endlich lang (mit der Länge L) betrachtet. Die Länge L wird jedoch als so groß angenommen, dass der vom Generator ausgesendete Strom-Impuls im betrachteten Zeitintervall das Ende des Drahtes nicht erreicht haben wird.

Die mathematische Behandlung des Problems kann vereinfacht werden, indem die beiden Dipolarme getrennt betrachtet werden, womit in jedem der beiden Teilprobleme, bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems, eine einzige Komponente des Stromes existiert und dementsprechend ein einkomponentiges „Vektor“-Potential angesetzt werden kann.²

Abb. A.1 zeigt die Anordnung des V-Dipols in zwei lokalen Kugel-Koordinatensystemen, deren Ursprünge mit dem Ort des Generators übereinstimmen, während die z -Achsen entlang des jeweiligen Dipol-Armes ausgerichtet sind. Zunächst sei der obere Arm des V-Dipols im Koordinatensystem $(r, \vartheta_1, \varphi_1)$ zu betrachten, wobei

¹Dies ist mit dem reinen TEM-Charakter (auf dem die Leitungstheorie beruht) des sich entlang des Drahtes ausbreitenden Wellen-Impulses begründet. Siehe dazu: [Hen01] (14.1, S. 271)

²Diese Aufteilung des Problems in zwei Teilprobleme ist aus mathematischer Sicht legitim. Für eine physikalisch-konsistente Argumentation müssen jedoch die beiden Dipol-Arme zusammen gedacht werden, da die Ladungstrennung, die bei der Speisung des Impulses durch den Generator bewirkt wird, bei einer einseitigen Speisung nur schwerlich zu begründen ist.

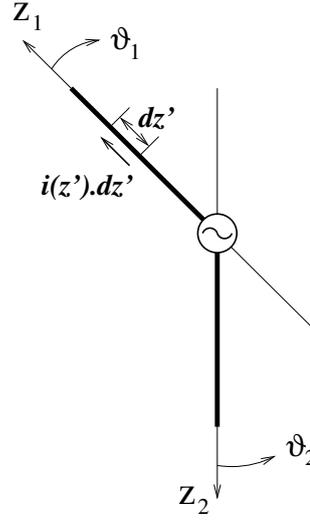


Abbildung A.1: Anordnung des V-Dipols in verschiedenen, dem jeweiligen Dipol-Arm entsprechenden Kugel-Koordinatensystemen.

zum Zwecke der Übersichtlichkeit, die Indizierung der Koordinaten bis auf weiteres ausgeblendet wird.

Ausgehend von der Lösung der inhomogenen Wellengleichung des Vektorpotentials³ für ein Stromelement $i(z')dz'$:

$$dA_z(r, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{i(z', t - \frac{R}{c_0}) dz'}{R} ; \quad R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \quad (\text{A.1})$$

lässt sich die Gesamtlösung für das Vektorpotential als Integral wie folgt angeben:

$$A_z(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^L \frac{i(z', t - \frac{R}{c_0})}{R} dz' \quad (\text{A.2})$$

Für das magnetische Feld ergibt sich mit $\vec{H} = \text{rot}\vec{A}$:

$$H_\varphi(r, t) = -\frac{dA_z}{d\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_0^L \left[\frac{\rho}{R^3} i(z', t - \frac{R}{c_0}) + \frac{\rho}{c_0 R^2} \frac{\partial}{\partial t} i(z', t - \frac{R}{c_0}) \right] dz' \quad (\text{A.3})$$

wobei der Rotationsoperator in Zylinderkoordinaten angewendet wurde.

Erweitert man die obige Gleichung mit ρ , wobei $\rho^2 = R^2 - (z - z')^2$ aus Gl. (A.1) ersichtlich ist, so erhält man:

$$H_\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^L \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{(z - z')^2}{R^3} \right) i - \frac{1}{c} \frac{(z - z')^2}{R^2} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial i}{\partial t} \right] dz' \quad (\text{A.4})$$

³Zur Herleitung der Lösung sei auf [Hen01] (15.1, S. 284) verwiesen.

Die beiden Leitungsgleichungen:

$$\frac{\partial i}{\partial z'} = -C' \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z'} = -L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{A.5})$$

lassen sich mit $u = q/C'$ und $c_0 = 1/\sqrt{L'C'}$ umwandeln in:

$$\frac{\partial i}{\partial z'} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial q}{\partial z'} \quad (\text{A.6})$$

wobei die obige, linke Gleichung der Kontinuitätsgleichung entspricht.

Anhand Gl. (A.6, rechts) lässt sich der letzte Term des Integranden in Gl. (A.4) durch $-c_0 \partial q / \partial z'$ ersetzen. Subtrahiert man nun die obige Kontinuitätsgleichung, multipliziert mit $(z - z')/R$, von Gl. (A.4), so erhält man den Ausdruck:

$$\begin{aligned} H_\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^L \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{(z - z')^2}{R^3} \right) i - \frac{1}{c} \frac{(z - z')^2}{R^2} \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{(z - z')}{R} \frac{\partial i}{\partial z'} \right] dz' \\ + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^L \left[-\frac{(z - z')}{R} \frac{\partial q}{\partial t} - c_0 \frac{\partial q}{\partial z'} \right] dz' \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Führt man die folgenden totalen Ableitungen⁴ bezüglich z' aus:

$$c_0 \frac{d}{dz'} q(z', t - \frac{R}{c_0}) = c_0 \left(\frac{\partial q}{\partial z'} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{-1}{c_0} \frac{dR}{dz'} \right) = \frac{(z - z')}{R} \frac{\partial q}{\partial t} + c_0 \frac{\partial q}{\partial z'} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dz'} \left[\frac{(z - z')}{R} i(z', t - \frac{R}{c_0}) \right] = - \left(\frac{1}{R} - \frac{(z - z')^2}{R^3} \right) i + \frac{1}{c} \frac{(z - z')^2}{R^2} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{(z - z')}{R} \frac{\partial i}{\partial z'} \quad (\text{A.9})$$

so ist es leicht ersichtlich, dass die beiden obigen Ausdrücke den beiden Integranden in Gl. (A.7) mit umgekehrten Vorzeichen entsprechen. Setzt man die linken Seiten der Gln. (A.8) und (A.9) in Gl. (A.7) ein, so reduziert sich die Integration zu einer Auswertung der Stammfunktionen an den Integrationsgrenzen:

$$H_\varphi(r, t) = \frac{-1}{4\pi\rho} \left[\frac{(z - z')}{R} i(z', t - \frac{R}{c_0}) + c_0 q(z', t - \frac{R}{c_0}) \right]_0^L \quad (\text{A.10})$$

Da, wie oben schon erwähnt, in Bezug auf den betrachteten Zeitintervall die Dipol-Arme als unendlich lang angenommen werden, genügt die Auswertung der obigen

⁴Von einer totalen Ableitung spricht man, wenn beim Ableiten sowohl die expliziten als auch die impliziten Abhängigkeiten bezüglich der Ableitungsvariablen berücksichtigt werden.

Gleichung an der unteren Integrationsgrenze ($z' = 0$), wobei für den Beitrag der oberen Integrationsgrenze der Wert 0 eingesetzt wird. Desweiteren kann, da sich der Impuls ungehindert ausbreitet, $i = c_0 q$ gesetzt werden. Mit den Umformungen (für $z' = 0$!):

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2} = r \quad , \quad \frac{z}{\rho} = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \quad , \quad \frac{r}{\rho} = \frac{1}{\sin \vartheta} \quad (\text{A.11})$$

lässt sich das magnetische Feld für den betrachteten Dipol-Arm (Von hier an wird die Indizierung wieder eingeblendet!) wie folgt angeben:

$$H_{\varphi,1}(r,t) = \frac{1}{4\pi r} \left[i \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \left(\frac{1 + \cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} \right) \right] \quad (\text{A.12})$$

Für den zweiten Dipol-Arm kann die gleiche Rechnung in dem Koordinatensystem $(r, \vartheta_2, \varphi_2)$ durchgeführt werden. Dabei muss jedoch das negative Vorzeichen des Strom-Impulses (bezüglich der z_2 -Richtung) berücksichtigt werden:

$$H_{\varphi,2}(r,t) = \frac{-1}{4\pi r} \left[i \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \left(\frac{1 + \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_2} \right) \right] \quad (\text{A.13})$$

Somit ergibt sich für das gesamte magnetische Feld des V-Dipols:

$$H_{\varphi,\nu}(r,t) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{4\pi r} \left[i \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \left(\frac{1 + \cos \vartheta_\nu}{\sin \vartheta_\nu} \right) \right] \quad ; \quad \nu = 1, 2 \quad (\text{A.14})$$

Die obige Formel muss für einen bestimmten Beobachtungspunkt in einem globalen Koordinatensystem bezüglich beider lokaler Koordinatensysteme ausgewertet werden, wobei die Zerlegung der beiden lokalen $\varphi_{1,2}$ -Komponenten im globalen System zu beachten ist.

Das elektrische Feld lässt sich aus dem magnetischen Feld anhand der ersten MAXWELLSchen Gleichung ($\text{rot} \vec{H} = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$) aus dem magnetischen Feld wie folgt berechnen:

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (H_\varphi \sin \vartheta) \quad (\text{A.15})$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_\vartheta}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \quad (\text{A.16})$$

Angewandt auf Gl. (A.14) ergibt dies:

$$E_{r,\nu}(r,t) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{4\pi \epsilon_0 r^2} \int_0^t i \left(t' - \frac{r}{c_0} \right) dt' \quad (\text{A.17})$$

$$E_{\vartheta,\nu}(r,t) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[i \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \left(\frac{1 + \cos \vartheta_\nu}{\sin \vartheta_\nu} \right) \right] \quad (\text{A.18})$$

Wie aus Gl. (A.17) ersichtlich ist, hängt die radiale Komponente des elektrischen Feldes räumlich nur von r ab. Da diese Koordinate jedoch für beide lokalen Koordinatensysteme die gleiche ist, unterscheidet sich der Ausdruck für E_r in beiden Systemen nur im Vorzeichen. Dementsprechend führt eine Überlagerung der Beiträge beider Dipol-Arme zum Verschwinden der gesamten radialen Komponente. Die beiden Feldkomponenten $E_{\vartheta,\nu}$ und $H_{\varphi,\nu}$ bilden somit einen sich in radialer Richtung ausbreitenden TEM-Wellenimpuls.

Anhang B

Das Spindel-Koordinatensystem

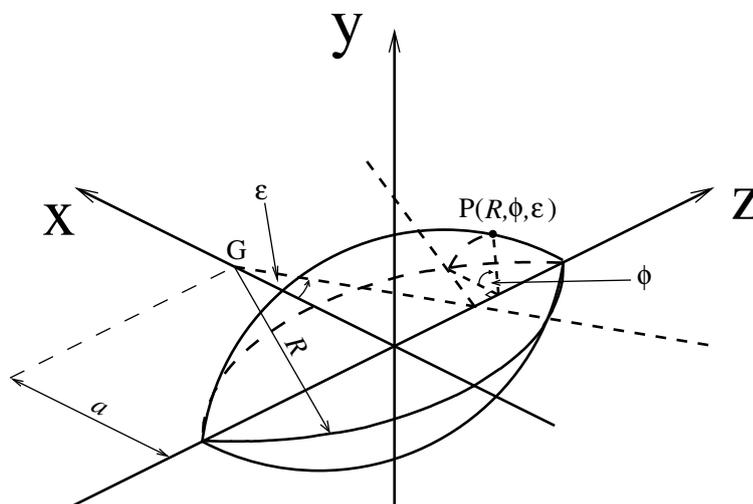


Abbildung B.1: Dreidimensionale Darstellung eines Punktes P in den Spindel-Koordinaten (R, ϕ, ε) .

In Anlehnung an die in [Leh96] (3.1, S. 118) gegebenen Formulierungen für ein allgemeines, krummliniges Koordinatensystem, werden im Folgenden die wesentlichen, speziellen Ausdrücke für das Spindel-Koordinatensystem ermittelt. Dabei entsprechen die Koordinaten (R, ϕ, ε) den allgemeinen krummlinigen Koordinaten (u_1, u_2, u_3) in folgender Weise:

$$u_1 = R \quad , \quad u_2 = \phi \quad , \quad u_3 = \varepsilon$$

Für ein kartesisches Koordinatensystem nach der Anordnung in Abbildung B.1

lassen sich folgende Transformations- und Rücktransformationsregeln angeben:

$$R = u_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2a\sqrt{x^2 + y^2} + a^2}$$

$$\phi = u_2(x, y, z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\varepsilon = u_3(x, y, z) = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2} + a}\right)$$

$$x(u_1, u_2, u_3) = (R \cos \varepsilon - a) \cos \phi$$

$$y(u_1, u_2, u_3) = (R \cos \varepsilon - a) \sin \phi$$

$$z(u_1, u_2, u_3) = R \sin \varepsilon$$

Da das betrachtete Koordinatensystem orthogonal ist, die Koordinatenlinien also in einem beliebigen Punkt senkrecht aufeinander stehen, erfüllen die Tangentenvektoren (Metrik-Vektoren)

$$\vec{t}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial y}{\partial u_1}, \frac{\partial z}{\partial u_1} \right) = (\cos \varepsilon \cos \phi, \cos \varepsilon \sin \phi, \sin \varepsilon)$$

$$\vec{t}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial y}{\partial u_2}, \frac{\partial z}{\partial u_2} \right) = (-(R \cos \varepsilon - a) \sin \phi, (R \cos \varepsilon - a) \cos \phi, 0)$$

$$\vec{t}_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_3}, \frac{\partial y}{\partial u_3}, \frac{\partial z}{\partial u_3} \right) = (-R \sin \varepsilon \cos \phi, -R \sin \varepsilon \sin \phi, R \cos \varepsilon)$$

die folgenden Orthogonalitätsbedingungen:

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = -\cos \varepsilon \cos \phi (R \cos \varepsilon - a) \sin \phi + \cos \varepsilon \sin \phi (R \cos \varepsilon - a) \cos \phi + 0 = 0$$

$$\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_3 = (R \cos \varepsilon - a) \sin \phi R \sin \varepsilon \cos \phi - (R \cos \varepsilon - a) \cos \phi R \sin \varepsilon \sin \phi + 0 = 0$$

$$\vec{t}_3 \cdot \vec{t}_1 = -R \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos^2 \phi - R \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \phi + R \cos \varepsilon \sin \varepsilon = 0$$

Die sogenannten Metrik-Faktoren lassen sich durch Betragsbildung aus den Metrik-Vektoren wie folgt berechnen:

$$|\vec{t}_1| = \sqrt{\cos^2 \varepsilon \cos^2 \phi + \cos^2 \varepsilon \sin^2 \phi + \sin^2 \varepsilon} = 1$$

$$|\vec{t}_2| = \sqrt{(R \cos \varepsilon - a)^2 \sin^2 \phi + (R \cos \varepsilon - a)^2 \cos^2 \phi} = R \cos \varepsilon - a$$

$$|\vec{t}_3| = \sqrt{R^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \phi + R^2 \sin^2 \varepsilon \sin^2 \phi + R^2 \cos^2 \varepsilon} = R$$

Aus Metrik-Vektoren und -Faktoren ergeben sich die Einheitsvektoren zu:

$$\vec{e}_R = \frac{\vec{t}_1}{|\vec{t}_1|} = (\cos \varepsilon \cos \phi, \cos \varepsilon \sin \phi, \sin \varepsilon)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{t}_2}{|\vec{t}_2|} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$\vec{e}_\varepsilon = \frac{\vec{t}_3}{|\vec{t}_3|} = (-\sin \varepsilon \cos \phi, -\sin \varepsilon \sin \phi, \cos \varepsilon)$$

Die Beziehungen dieser Einheitsvektoren zu denen des kartesischen Koordinatensystems lauten:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_R \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos \phi & \cos \varepsilon \sin \phi & \sin \varepsilon \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \varepsilon \cos \phi & -\sin \varepsilon \sin \phi & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \varepsilon & -\sin \phi & -\cos \phi \sin \varepsilon \\ \sin \phi \cos \varepsilon & \cos \phi & -\sin \phi \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_R \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_\varepsilon \end{bmatrix}$$

Für zwei Punkte $P(u_1, u_2, u_3)$ und $P'(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ lautet der Vektor von P nach P' :

$$\vec{dr} = \vec{t}_1 du_1 + \vec{t}_2 du_2 + \vec{t}_3 du_3$$

sowie der Abstand zwischen P und P' :

$$ds = \sqrt{\vec{dr} \cdot \vec{dr}} = \sqrt{t_1^2 du_1^2 + t_2^2 du_2^2 + t_3^2 du_3^2}$$

Daraus ergeben sich die Wegelemente in den drei Koordinatenrichtungen:

$$ds_1 = t_1 du_1 = dR$$

$$ds_2 = t_2 du_2 = (R \cos \varepsilon - a) d\phi$$

$$ds_3 = t_3 du_3 = R d\varepsilon$$

und die Flächenelemente:

$$dF_m = t_k t_l du_k du_l$$

sowie das Volumenelement:

$$d\tau = t_1 t_2 t_3 du_1 du_2 du_3 = R(R \cos \varepsilon - a) dR d\phi d\varepsilon$$

Zuletzt seien noch die Formulierungen für wichtigsten Operatoren der Vektoranalysis in Spindel-Koordinaten angegeben:

$$\text{grad}\Phi = \left(\frac{1}{t_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \frac{1}{t_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, \frac{1}{t_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}, \frac{1}{(R \cos \varepsilon - a)} \frac{\partial\Phi}{\partial \phi}, \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial \varepsilon} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{A} &= \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (t_2 t_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (t_1 t_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (t_1 t_2 A_3) \right] \\ &= \frac{1}{R(R \cos \varepsilon - a)} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R(R \cos \varepsilon - a) A_R) + \frac{\partial}{\partial \phi} (R A_\phi) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} ((R \cos \varepsilon - a) A_\varepsilon) \right] \\ &= \frac{2R \cos \varepsilon - a}{R(R \cos \varepsilon - a)} A_R + \frac{\partial}{\partial R} A_R + \frac{1}{(R \cos \varepsilon - a)} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi - \frac{\sin \varepsilon}{(R \cos \varepsilon - a)} A_\varepsilon + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} A_\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \text{div grad}\Phi = \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{t_2 t_3}{t_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{t_1 t_3}{t_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{t_1 t_2}{t_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{R(R \cos \varepsilon - a)} \cdot \\ &\quad \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R(R \cos \varepsilon - a) \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{R}{(R \cos \varepsilon - a)} \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{(R \cos \varepsilon - a)}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial \varepsilon} \right) \right] \\ &= \frac{2R \cos \varepsilon - a}{R(R \cos \varepsilon - a)} \frac{\partial\Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{(R \cos \varepsilon - a)^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \phi^2} - \frac{\sin \varepsilon}{R(R \cos \varepsilon - a)} \frac{\partial\Phi}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \varepsilon^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{A} &= \left[\frac{1}{t_2 t_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} (t_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (t_2 A_2) \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{t_1 t_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} (t_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (t_3 A_3) \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{t_1 t_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (t_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (t_1 A_1) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{R(R \cos \varepsilon - a)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (RA_\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} ((R \cos \varepsilon - a)A_\phi) \right), \right. \\
&\quad \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (A_R) - \frac{\partial}{\partial R} (RA_\varepsilon) \right), \\
&\quad \left. \frac{1}{(R \cos \varepsilon - a)} \left(\frac{\partial}{\partial R} ((R \cos \varepsilon - a)A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (A_R) \right) \right] \\
&= \left[\frac{1}{(R \cos \varepsilon - a)} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial \phi} + \frac{\sin \varepsilon}{(R \cos \varepsilon - a)} A_\phi - \frac{1}{R} \frac{\partial A_\phi}{\partial \varepsilon}, \right. \\
&\quad \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{R} A_\varepsilon - \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial R}, \\
&\quad \left. \frac{\cos \varepsilon}{(R \cos \varepsilon - a)} A_\phi + \frac{\partial A_\phi}{\partial R} - \frac{1}{(R \cos \varepsilon - a)} \frac{\partial A_R}{\partial \phi} \right]
\end{aligned}$$

Anhang C

Numerische Auswertungen des Stromlinien-Modells (Kapitel 2)

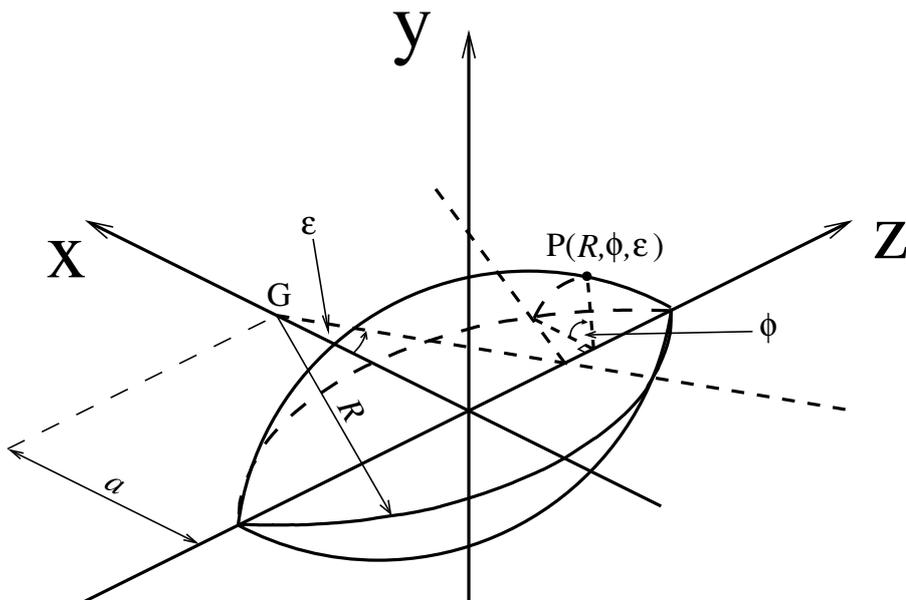


Abbildung C.1: Dreidimensionale Darstellung eines Punktes P in den Spindel-Koordinaten (R, ϕ, ϵ) .

C.1 Beugungsfelder der äußersten Wellenfront

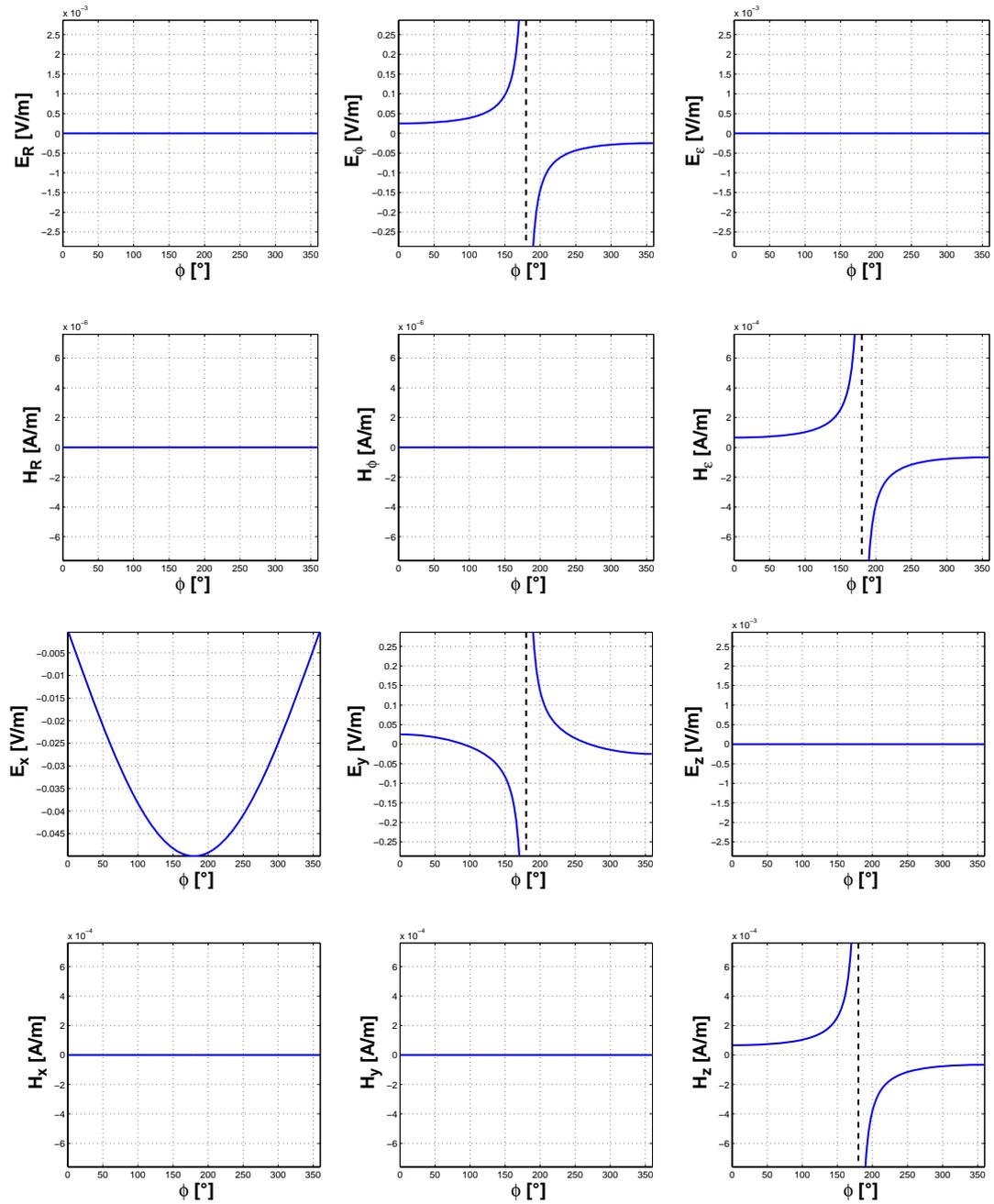


Abbildung C.2: Elektromagnetische Feldkomponenten in Spindel- sowie in kartesischen Koordinaten für Aufpunkte eines Kreisringes auf der äußersten Wellenfront ($R_{\text{kr}} = R_{\text{max}} = 7m$, $\varepsilon_{\text{kr}} = 0^\circ$, $\rho_{\text{kr}} = 3m$, $a = 4m$, $\Delta z = 1cm$, $\hat{i} = \pi A$).

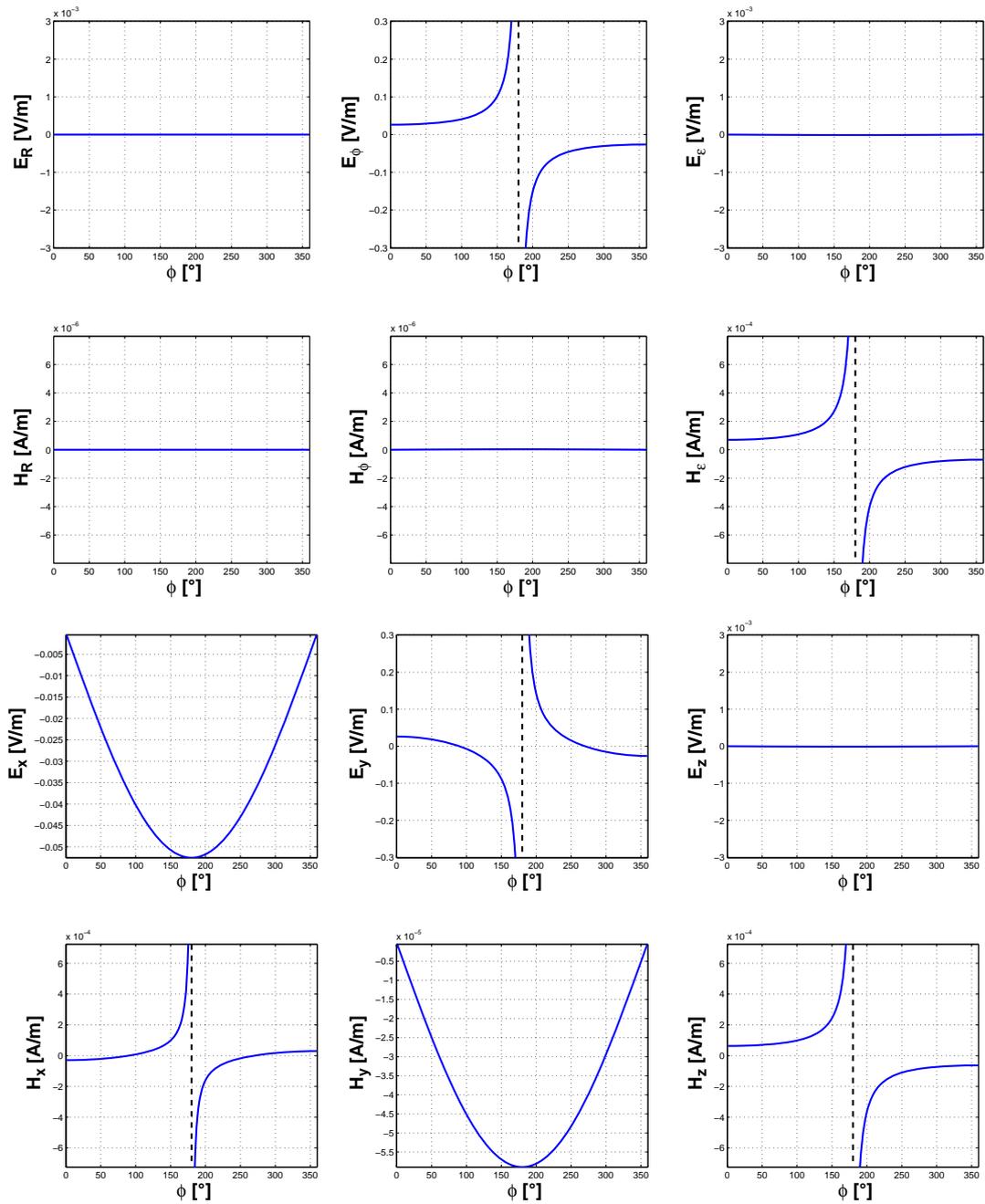


Abbildung C.3: Elektromagnetische Feldkomponenten in Spindel- sowie in kartesischen Koordinaten für Aufpunkte eines Kreisringes auf der äußersten Wellenfront ($R_{\text{kr}} = R_{\text{max}} = 7\text{m}$, $\varepsilon_{\text{kr}} = 25^\circ$, $\rho_{\text{kr}} = 2.34\text{m}$, $a = 4\text{m}$, $\Delta z = 1\text{cm}$, $\hat{i} = \pi A$).

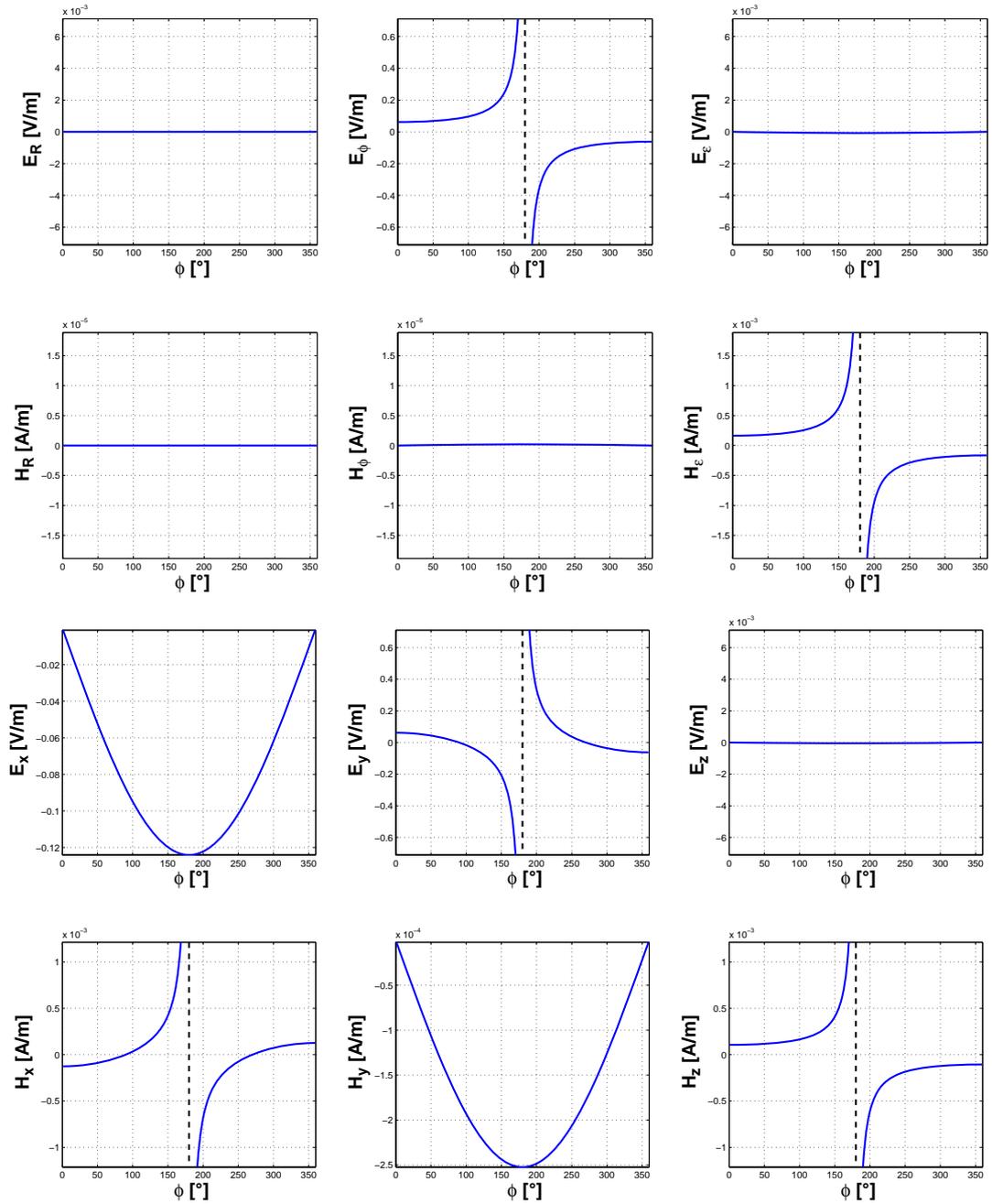


Abbildung C.4: Elektromagnetische Feldkomponenten in Spindel- sowie in kartesischen Koordinaten für Aufpunkte eines Kreisringes auf der äußersten Wellenfront ($R_{\text{kr}} = R_{\text{max}} = 7\text{m}$, $\varepsilon_{\text{kr}} = 50^\circ$, $\rho_{\text{kr}} = 0.5\text{m}$, $a = 4\text{m}$, $\Delta z = 1\text{cm}$, $\hat{i} = \pi A$).

C.2 Beugungsfelder innerhalb des Spindelkörpers

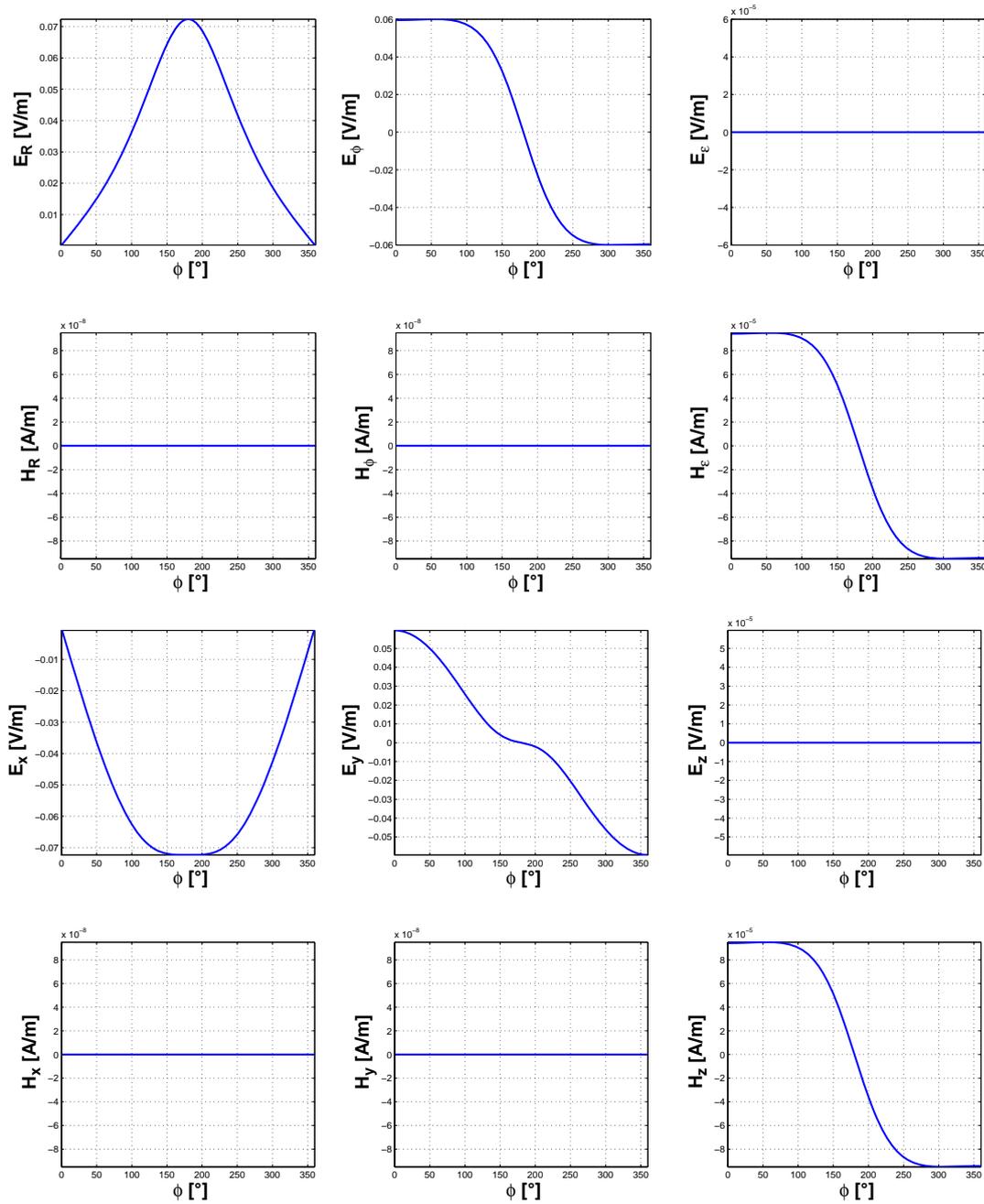


Abbildung C.5: Elektromagnetische Feldkomponenten in Spindel- sowie in kartesischen Koordinaten für Aufpunkte eines Schnittringes innerhalb des Spindelkörpers ($R_{max} = 7m$, $R_{sr} = 5.5m$, $\varepsilon_{kr} = 0^\circ$, $\rho_{sr} = 1.5m$, $a = 4m$, $\Delta z = 1cm$, $\hat{i} = \pi A$).

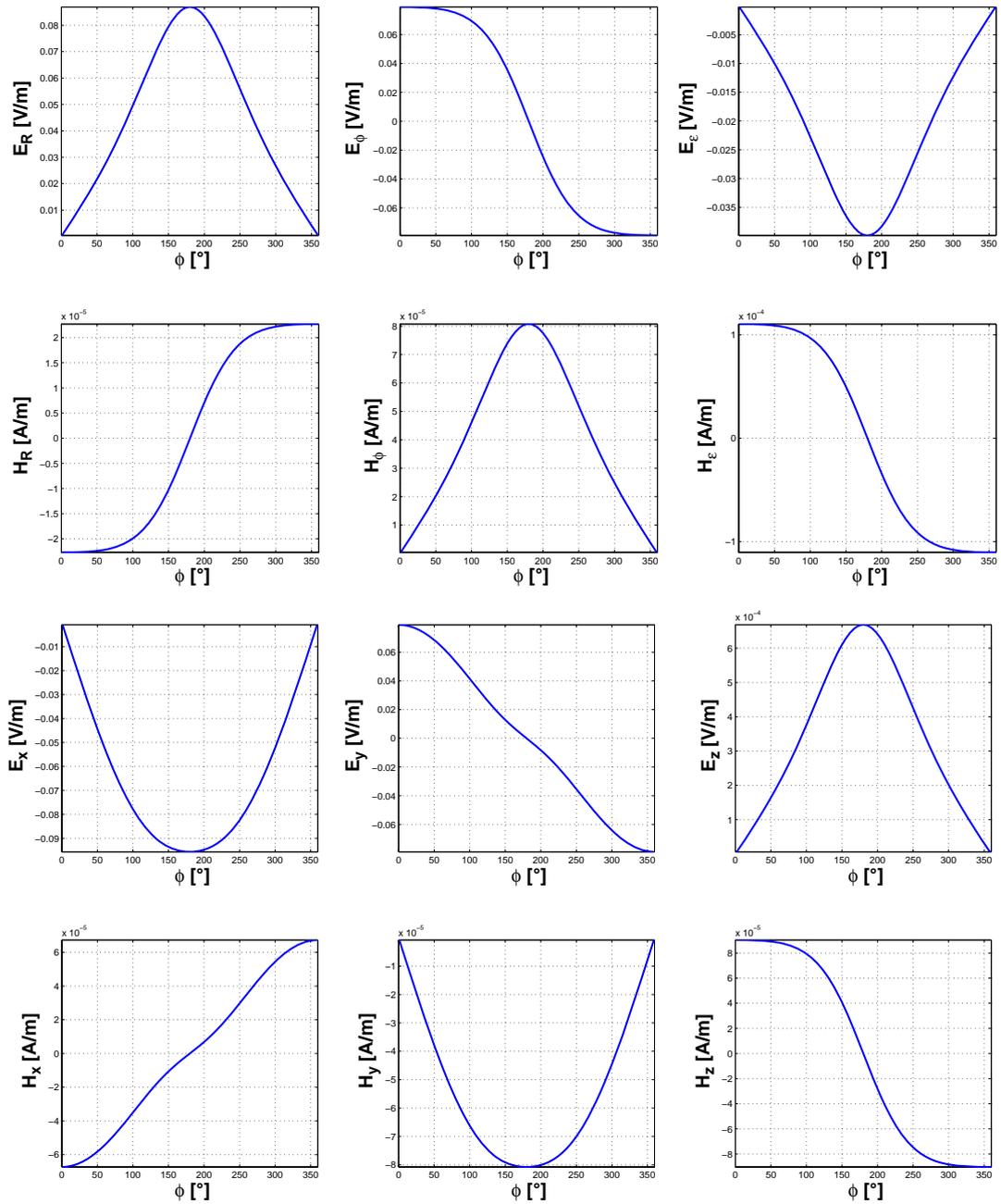


Abbildung C.6: Elektromagnetische Feldkomponenten in Spindel- sowie in kartesischen Koordinaten für Aufpunkte eines Schnitttringes innerhalb des Spindelkörpers ($R_{max} = 7m$, $R_{sr} = 5.5m$, $\epsilon_{sr} = 25^\circ$, $\rho_{sr} = 1m$, $a = 4m$, $\Delta z = 1cm$, $\hat{i} = \pi A$).

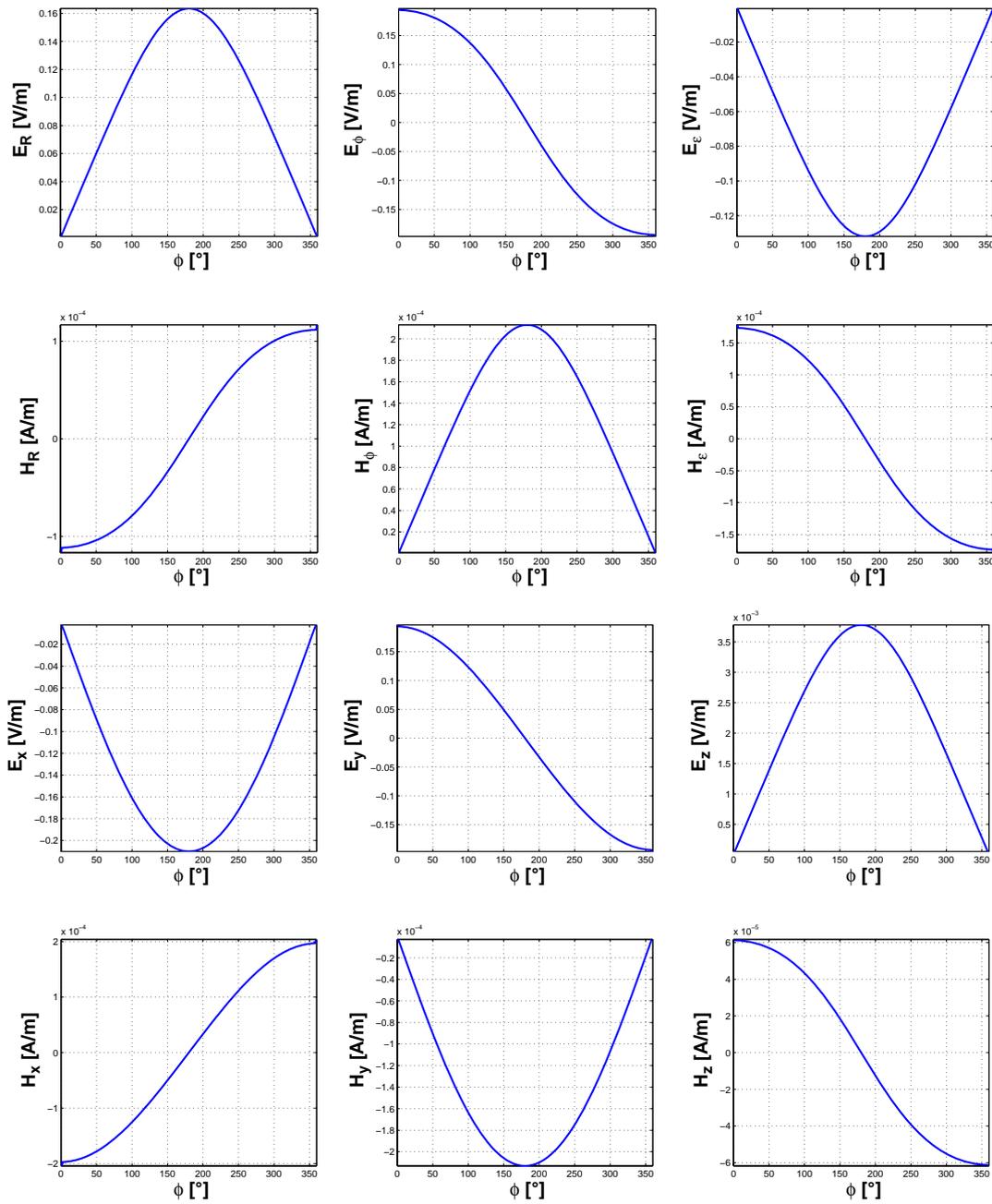


Abbildung C.7: Elektromagnetische Feldkomponenten in Spindel- sowie in kartesischen Koordinaten für Aufpunkte eines Schnitttringes innerhalb des Spindelkörpers ($R_{max} = 7m$, $R_{sr} = 5.5m$, $\varepsilon_{sr} = 40^\circ$, $\rho_{sr} = 0.216m$, $a = 4m$, $\Delta z = 1cm$, $\hat{i} = \pi A$).

Anhang D

Singuläres Verhalten der Felder an der Kante: Sommerfeldsches Beugungsproblem. Meixnersche Kantenbedingung.

Das unter dem Namen „SOMMERFELDSches Beugungsproblem“ berühmt gewordene Problem der Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einer vollkommen leitenden Halbebene gilt als erstes und eines der wenigen streng (exakt) gelösten Beugungsprobleme. Dabei handelt es sich, wie A. SOMMERFELD¹ in [Som89] (S. 217) betont, um eine im mathematischen, jedoch nicht im physikalischen Sinne strenge Lösung, da die Annahme eines unendlich dünnen und trotzdem vollkommen undurchsichtigen Schirms eine Idealisierung darstellt, welche ihre Konsequenzen für das Verhalten der elektromagnetischen Felder an der Schirmkante haben wird.²

Da sich eine beliebig linear polarisierte Welle als Überlagerung zweier einfacher Fälle, nämlich einer reinen E -polarisierten sowie einer reinen H -polarisierten Welle, darstellen lässt³, genügt die separate Betrachtung dieser beiden Fälle, welche sich jeweils als skalares, zweidimensionales Problem behandeln lassen.

Es lässt sich also mit einer skalaren Funktion u rechnen, wobei u im Fall der E -polarisierten Welle das zur Schirmkante parallele elektrische Feld, im Fall der H -polarisierten Welle das zur Schirmkante parallele magnetische Feld darstellt.

Abb. D.1 zeigt die geometrische Anordnung des zu lösenden Beugungsproblems.

¹ARNOLD JOHANNES WILHELM SOMMERFELD (★ 5. Dezember 1868 in Königsberg, Ostpreußen; † 26. April 1951 in München).

²Es ist hier darauf hinzuweisen, dass die Annahme eines unendlich dünnen Schirms notwendig ist, um die mathematische Handhabbarkeit des Problems zu gewährleisten.

³SOMMERFELD führt diese Vorgehensweise in [Som96] (S. 366) auf POINCARÉ zurück.

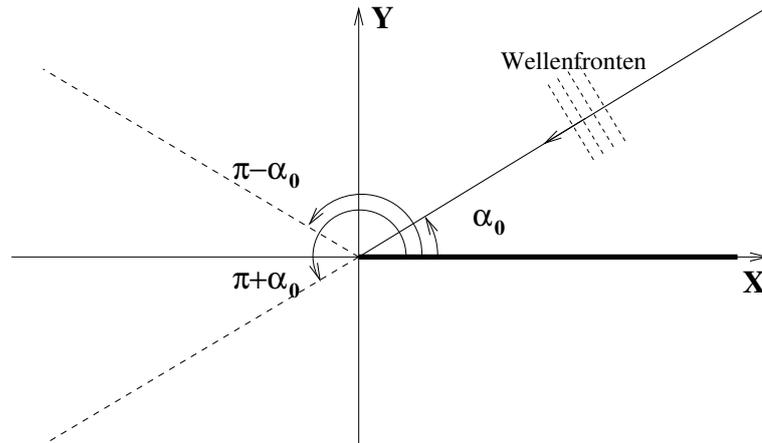


Abbildung D.1: Geometrische Anordnung des zweidimensionalen Beugungsproblems

Dabei stellt die Linie $\phi = \pi - \alpha_0$ die Schattengrenze der am Schirm reflektierten Welle dar, während die Linie $\phi = \pi + \alpha_0$ die Schattengrenze der einfallenden Welle darstellt. Im Winkelbereich *I* ($0 < \phi < \pi - \alpha_0$) existieren die einfallende, die reflektierte und die an der Schirmkante gebeugte Welle, während im Winkelbereich *II* ($\pi - \alpha_0 < \phi < \pi + \alpha_0$) die einfallende sowie die gebeugte Welle existieren, und zuletzt im Winkelbereich *III* ($\pi + \alpha_0 < \phi < 2\pi$) nur die gebeugte Welle existiert. Die einfallende Welle ist gegeben durch:

$$u_0 = A e^{-ik\rho \cos(\phi - \alpha_0)} \quad (\text{D.1})$$

Dabei ist die Zeitabhängigkeit ($e^{-i\omega t}$), wie generell in der folgenden Betrachtung, unterdrückt, und die Berechnungen auf die Phasoren beschränkt.

Die Gesamtlösung u , welche je nach Winkelbereich die verschiedenen Wellenanteile beschreibt, muss den folgenden Bedingungen genügen⁴

1. Sie genügt der Wellengleichung (HELMHOLTZ⁵-Gl.):

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (\text{D.2})$$

⁴Die Formulierung der Bedingungen folgt der in [Som89] (S. 218). Wie sich später, anhand der Diskussion der exakten Lösungen für die Felder zeigen wird, sind die hier fett gedruckten Aussagen teilweise unpräzise.

⁵HERMANN LUDWIG FERDINAND VON HELMHOLTZ (* 31. August 1821 in Potsdam; † 8. September 1894 in Charlottenburg).

2. Sie erfüllt die Randbedingungen auf der Schirmoberfläche:

$$\left. \begin{array}{l} u \quad (E\text{-pol.}) \\ \partial u / \partial n \quad (H\text{-pol.}) \end{array} \right\} = 0 \quad \text{für} \quad \phi = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}, \quad \text{entsprechend} \quad E_{\text{tang.}} = 0 \quad (\text{D.3})$$

3. Sie ist überall endlich und stetig **außerhalb des Schirmrandes**.

4. Sie erfüllt die Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - jk v \right) \longrightarrow 0 \quad v = \begin{cases} u - u_0 & 0 < \phi < \pi + \alpha_0 \\ u & \pi + \alpha_0 < \phi < 2\pi \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Die Ausstrahlungsbedingung besagt, dass, sofern alle Quellen im Endlichen liegen, das Feld im Unendlichen sich wie eine ausstrahlende Kugelwelle e^{jkr}/r (3D-Fall) bzw. Zylinderwelle $e^{jk\rho}/\sqrt{\rho}$ (2D-Fall) verhält.

5. Sie erfüllt die Bedingung:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \operatorname{grad} u \longrightarrow 0 \quad (\text{D.5})$$

Demzufolge darf $\operatorname{grad} u$ für $\rho = 0$ unendlich werden, jedoch nur so „schwach“, dass $\rho \operatorname{grad} u$ beim Grenzübergang verschwindet. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Forderung, dass die Schirmkante elektromagnetische Energie weder aufnehmen noch abstrahlen darf.

SOMMERFELD stellt fest, dass das gewöhnliche Spiegelungsverfahren, durch Einführung einer gespiegelten ebenen Welle $u'_0 = -A e^{-ik\rho \cos(\phi + \alpha_0)}$, für die Lösung des Beugungsproblems nicht anwendbar ist, da, zum einen, die einfallende und die gespiegelte Welle sich in der gesamten xz -Ebene kompensieren und nicht nur in der Schirm-Halbebene, wie es physikalisch gefordert ist, und zum anderen, die gespiegelte Welle die Ausstrahlungsbedingung verletzen würde. Mit diesem Ansatz ließe sich vielmehr das Problem der Reflexion an einer vollkommen leitenden Ebene lösen.

Allgemein lässt sich dieser Sachverhalt so formulieren, dass das gewöhnliche Spiegelungsverfahren immer dann nicht anwendbar ist, wenn die Spiegelquellen in dem zu untersuchenden Rechengebiet auftreten.⁶

SOMMERFELD formuliert in [Som96] (S. 319) seinen allgemeinen Ansatz zur Rettung des Spiegelungsverfahrens:

⁶Siehe dazu: R. Süße, *Das Kompensationsprinzip*, Z. elektr. Inform.- u. Energietechnik, Leipzig **10** (1980) 5, S. 461-468.

„In dem gewöhnlichen Raume ist für den Spiegelungsprocess kein Platz. Wir construiren daher einen doppelt überdeckten Raum, in welchem er möglich wird. Einen solchen Riemann'schen Doppelraum erzeugen wir uns auf folgende Weise. Wir denken uns den gewöhnlichen Raum in zwei Exemplaren angefertigt, welche wir beide längs der Fläche von S aufschneiden und wechselweise an einander fügen. Die Randcurve C bildet für diesen Doppelraum eine Verzweigungslinie. [...]
Dass wir hier von einem Doppelraume sprechen, bedeutet, abstract zu reden, nichts Anderes, als dass wir die Function über das Gebiet, in dem sie einen physikalischen Sinn hat, hinaus analytisch fortsetzen und dass wir *den physikalischen Zweig der Function und seine analytische Fortsetzung gleichzeitig betrachten*.“

Bei dem zu untersuchenden zweidimensionalen Beugungsproblem reduziert sich der Riemann'sche ⁷ Doppelraum auf eine Riemann'sche Doppelfläche, die Verzweigungslinie auf einen Verzweigungspunkt.

An Stelle der gewöhnlichen ebenen Welle $u_0(\rho, \psi = \phi - \alpha_0)$ welche in ψ 2π -periodisch ist, wird nun eine in ψ doppeltperiodische Funktion $U(\rho, \psi)$ eingeführt, welche im gesamten Winkelbereich $\psi \in]-2\pi, 2\pi]$ den Bedingungen 1-3, ferner der Bedingung 4 mit $v = U - u_0$ für $|\psi| < \pi$, dagegen mit $v = U$ für $|\psi| > \pi$ genügt.

Damit ist U eine Lösung der Wellengleichung auf einer zweiblättrigen RIEMANNschen Fläche, deren zwei Blätter in den Halbstrahlen $\psi = \pm\pi$ zusammenhängen, und welche für $\rho = 0$ und für $\rho = \infty$ zwei einfache Verzweigungspunkte besitzt.⁸

Abb. D.2 zeigt eine anschauliche Darstellung der zweiblättrigen RIEMANNschen Fläche, wobei das obere Blatt den Winkelbereich $\psi \in [-\pi, \pi]$, das untere Blatt den Winkelbereich $\psi \in [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$ abdecken.

Der Vorteil dieser Konstruktion ist, und das ist Sinn und Zweck der bisherigen Überlegungen, dass sich nun eine in ψ' doppeltperiodische Spiegel-Funktion $U'(\rho, \psi' = \phi + \alpha_0)$ ansetzen lässt. Für sie gelten die gleichen Bestimmungen wie für die ursprüngliche Funktion U : sie erfüllt die Bedingungen 1-3 im gesamten Winkelbereich $\psi' \in]-2\pi, 2\pi]$, und die Bedingung 4 mit $v' = U' - u'_0$ für $|\psi'| < \pi$, dagegen mit $v' = U'$ für $|\psi'| > \pi$. Auch sie lässt sich (Ähnlich wie in Abb. D.2) auf einer zweiblättrigen RIEMANNschen Fläche, deren zwei Blätter in den Halbstrahlen $\psi' = \pm\pi$ zusammenhängen, darstellen.⁹

⁷GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (* 17. September 1826 in Breselenz bei Dannenberg (Elbe); † 20. Juli 1866 in Selasca bei Verbania am Lago Maggiore (Italien)).

⁸Den Verzweigungspunkt für $\rho = \infty$ kann man sich veranschaulichen, indem man die RIEMANNsche Fläche stereographisch auf einer Kugel projiziert denkt, wobei alle Punkte im Unendlichen sich im Nordpol treffen und den zweiten Verzweigungspunkt bilden.

⁹Hier ist es wichtig, auf ein wesentliches Merkmal RIEMANNscher Flächen aufmerksam zu machen. Denn die RIEMANNsche Fläche ist nicht als eine feste „Ersatz-Geometrie“ zu verstehen, in der

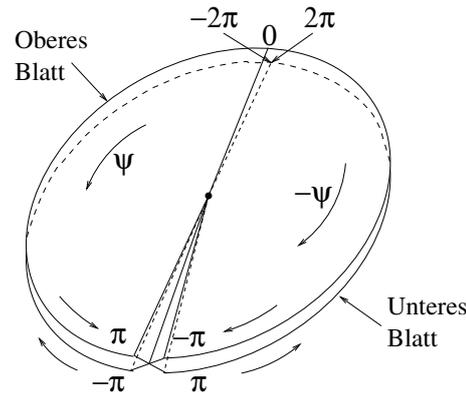


Abbildung D.2: Anschauliche Darstellung der zweiblättrigen RIEMANNschen Fläche für die Funktion $U(\rho, \psi)$.

Aufgrund der α_0 -Symmetrie beider Funktionen, kompensieren sie sich in der ursprünglichen ϕ -Ebene bei den Winkelwerten $\phi = 0, 2\pi$, also auf beiden Seiten des Schirms, wie es physikalisch gefordert ist.

Aus dem Vorangegangenen ist ersichtlich, dass für beide Funktionen U und U' das untere Blatt der jeweiligen RIEMANNschen Fläche den „Schattenbereich“ bildet, aus denen die verschiedenen Schatten der ursprünglichen, „physikalischen“ Anordnung rekonstruiert werden können, wie nachfolgend erläutert wird. Dies ist der Schlüssel zum Verständnis des SOMMERFELDSchen Lösungsansatzes.

Die Gesamtlösung u lässt sich nun angeben:

$$u = U(\rho, \phi - \alpha_0) \mp U'(\rho, \phi + \alpha_0) \quad (\text{D.6})$$

Dabei gilt das obere ($-$) Zeichen für den Fall der E -polarisierten Welle, bei dem u die zur Schirmkante parallele elektrische Feldkomponente E_z darstellt, während das untere ($+$) Zeichen für den Fall der H -polarisierten Welle gilt, bei dem u die zur Schirmkante parallele magnetische Feldkomponente H_z darstellt.

Bei der Konstruktion der Gesamtlösung muss darauf geachtet werden, aus welchem Bereich der RIEMANNschen Fläche die Anteile der Funktionen U und U' für den jeweiligen Winkelbereich der „physikalischen“ Ebene zu wählen sind:

- Im Winkelbereich $0 < \phi < \pi - \alpha_0$ treten sowohl die einfallende als auch die reflektierte Welle auf. Dementsprechend ist dieser Bereich dem oberen Blatt beider Funktionen zuzurechnen.

das transformierte Problem gelöst werden kann, sondern vielmehr als eine „gedachte“ funktionsbezogene Geometrie. Somit haben wir in Wirklichkeit für jede der beiden Funktionen U und U' jeweils eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche, durch deren Kombination die Lösung in der ursprünglichen Geometrie konstruiert werden kann. Siehe dazu: [BC50] (S. 143).

- Im Winkelbereich $\pi - \alpha_0 < \phi < \pi + \alpha_0$ tritt nur die einfallende Welle auf. Dementsprechend ist dieser Bereich zum oberen Blatt der Funktionen U , jedoch zum unteren Blatt der Funktion U' zuzurechnen.
- Im Winkelbereich $\pi + \alpha_0 < \phi < 2\pi$ treten weder die einfallende noch die reflektierte Welle auf. Dementsprechend ist dieser Bereich dem unteren Blatt beider Funktionen zuzurechnen.
- Die beiden Schattengrenzen $\phi = \pi \pm \alpha_0$ mit ihren nahen Umgebungen bilden die Übergangsbereiche zwischen den verschiedenen Gebieten. Das Verhalten der Felder an diesen Grenzen ist ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal zwischen exakter und asymptotischer Lösung des Problems, wie später noch erörtert wird.

Damit ist das Fundament für die Anwendung des Spiegelungsverfahrens gelegt, und die nicht weniger anspruchsvolle Aufgabe besteht nun darin, eine Funktion U zu finden bzw. zu konstruieren, welche den Bedingungen 1-5 genügt (Die Spiegel-Funktion U' kann im Anschluss durch bloße Substitution ($\phi - \alpha_0 \rightarrow \phi + \alpha_0$) aus U ermittelt werden.).

SOMMERFELD wählt dazu eine eher „heuristische“ Methode, die, kurz gefasst, über eine winkel-spektrale Darstellung ebener Wellen und der Anwendung der Integrationstechniken komplexer Funktionen, mit geschickter Wahl der Integrationswege (Sattelpunktmethode), zu einer Darstellung der Lösungsfunktion mittels eines modifizierten FRESNEL¹⁰-Integrals führt.

Auf eine Nachzeichnung des SOMMERFELDSchen Lösungsweges wird hier verzichtet. Dagegen wird in Anhang E eine ausführliche Lösung des zweidimensionalen Beugungsproblems unter Anwendung der WIENER¹¹-HOPF¹²-Technik sowie der Sattelpunkt-Methode dargeboten.

Die exakte Lösung für u lautet:

$$u = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-ik\rho \cos(\phi - \alpha_0)} F_1\left[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi - \alpha_0}{2}\right] \mp e^{-ik\rho \cos(\phi + \alpha_0)} F_1\left[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi + \alpha_0}{2}\right] \right\} \quad (\text{D.7})$$

¹⁰AUGUSTIN JEAN FRESNEL (★ 10. Mai 1788 in Broglie (Eure); † 14. Juli 1827 in Ville-d'Avray bei Paris).

¹¹NORBERT WIENER (★ 26. November 1894 in Columbia, Missouri; † 18. März 1964 in Stockholm).

¹²EBERHARD FREDERICH FERDINAND HOPF (★ 4. April 1902 in Salzburg; † 24. Juli 1983 in Bloomington (Indiana)).

Wobei die Vorzeichen wie in Gl. (D.6) zuzuordnen sind und $F_1()$ ein modifiziertes¹³ FRESNEL-Integral der Form $F_1(x) = \int_x^\infty e^{it^2} dt$ bezeichnet.

SOMMERFELD gibt keine expliziten Formeln für alle beteiligten elektromagnetischen Felder an. Er untersucht die Eigenschaften seiner Lösung nicht anhand der in Gl. (D.7) gegebenen, exakten Form, sondern vielmehr anhand einer asymptotischen Lösung, die er für das „reine“ Beugungsfeld angibt:

$$u^d = \frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k\rho}} \left(\frac{1}{\cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}} \right) e^{ik\rho} \quad (\text{D.8})$$

Wie BOUWKAMP in [Bou46] (S. 473) ausführlich dargelegt hat, führt dies zu einer Fehleinschätzung des Verhaltens der elektromagnetischen Felder an der Schirmkante.

In [Som96] (S. 369-370) schreibt SOMMERFELD:

„[...] Unser Auge schreibt die Strahlen wirklich einer Lichtquelle zu, welche in dem Windungspunkte supponiert wird, d. h. der Schirmrand erscheint, vom Gebiete des geometrischen Schattens aus gesehen, als feine leuchtende Linie. Das ist natürlich eine optische Täuschung. In Wahrheit gibt es im Windungspunkte keine Unendlichkeitsstelle. Der Fehler rührt daher, dass das Auge die analytische Fortsetzung der Näherungsformel über die Übergangsparabel hinaus bildet, was nicht erlaubt ist. Das Auge sollte die analytische Fortsetzung nicht von der Näherungsformel, sondern von der exacten Formel bilden.“

In [Som89] (S. 229) wird dieses Argument bekräftigt, indem gezeigt wird, dass die von der Schirmkante je Zeit- und Längeneinheit in einem Winkelbereich $\delta\phi$ abgestrahlte Energie verschwindet, und damit u die Bedingung 5 erfüllt:

$$\delta\mathcal{E} = S_r \rho \delta\phi = \rho \delta\phi \left\{ \begin{array}{c} -E_z H_\phi \\ +E_\phi H_z \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{c} E_z \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \delta\phi \\ H_z \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \delta\phi \end{array} \right\} = 0 \quad \text{für } \rho \rightarrow 0 \quad (\text{D.9})$$

Obwohl die obige Analyse bezüglich der zur Schirmkante parallelen Feldkomponenten und bezüglich der Energieerhaltung vollkommen richtig ist, und damit die Kritik BOUWKAMPS teilweise zurückgewiesen werden kann, bleibt dennoch eine

¹³Während dieses Integral in der Literatur bloß als FRESNEL-Integral bezeichnet wird, wird hier die Bezeichnung „modifiziertes FRESNEL-Integral“ gewählt, um es von dem gewöhnlichen, in den meisten Tabellenwerken angegebenen FRESNEL-Integral der Form $F(x) = \int_0^x e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt$ zu unterscheiden. In Anhang F sind Umrechnungsformeln sowie Auswertungsmöglichkeiten für die FRESNEL-Integrale angegeben.

Analyse des Verhaltens der zur Schirmkante senkrechten Feldkomponenten zu leisten.

Die zur Schirmkante senkrechten magnetischen Feldkomponenten im Fall der E -Polarisation lauten in kartes. Koordinaten¹⁴:

$$H_x = \frac{-k}{\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \left[\sin \alpha_0 (G(v) + G(w)) + i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{D.10})$$

$$H_y = \frac{k}{\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \left[\cos \alpha_0 (G(v) - G(w)) - i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{D.11})$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$v = -\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi - \alpha_0}{2} \quad , \quad w = -\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi + \alpha_0}{2} \quad (\text{D.12})$$

$$G(v) = e^{-iv^2} F_1(v) \quad , \quad G(w) = e^{-iw^2} F_1(w) \quad (\text{D.13})$$

Analog dazu lauten die elektrischen Feldkomponenten für den Fall der H -Polarisation¹⁵:

$$E_x = \frac{k}{\omega\varepsilon} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \left[\sin \alpha_0 (G(v) - G(w)) - i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{D.14})$$

$$E_y = \frac{-k}{\omega\varepsilon} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \left[\cos \alpha_0 (G(v) + G(w)) + i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{D.15})$$

Aus den Gleichungen (D.10), (D.11), (D.14) und (D.15) ist ersichtlich, dass alle zur Schirmkante senkrechten Feldkomponenten an der Kante ein singuläres Verhalten aufweisen und zwar mit der Abhängigkeit $\sim 1/\sqrt{\rho}$.

Die Frage, die sich hier stellt, ist: Wenn das singuläre Verhalten der elektromagnetischen Felder (und auch der Ladungsverteilungen) als Konsequenz der Annahme einer unendlich scharfen Schirmkante unvermeidbar ist, welcher „mathematischen Natur“ entspricht diese Singularität und welche Ordnung bezüglich des Abstandes von der Schirmkante darf sie maximal haben, um dennoch von einer, im „globalen“ Sinne, physikalisch widerspruchsfreien Lösung sprechen zu können? Mit anderen Worten: Kann bezüglich des Singulärverhaltens der Felder, eine präzisere Anforderung gestellt werden, als es die Bedingung 5 leistet? Denn die von SOMMERFELD an die Lösung u gestellte 3. Bedingung ist in dem Sinne unpräzise, als die zur Schirmkante parallelen Feldkomponenten auch an der Kante endlich sind,

¹⁴Zur Berechnung, siehe: Anhang E, S. 112.

¹⁵Siehe Anhang E, S. 117.

während die Bedingung 5 lediglich eine Minimalanforderung bezüglich des singulären Verhaltens von $\text{grad } u$ darstellt, nämlich, dass $\text{grad } u$ maximal mit $1/\rho^v$ ($v < 1$) unendlich werden darf.

Eine Antwort auf diese Frage liefert die von J. MEIXNER¹⁶ in [Mei48] und [Mei49] eingeführte und bis heute mit seinem Namen verbundene „Kantenbedingung“.

In [Mei48] (S. 507) formuliert MEIXNER seine Idee:

„[...] Es liegt nahe und ist tatsächlich zur Erzwingung der eindeutigen Lösbarkeit des Beugungsproblems ausreichend, vom elektromagnetischen Feld zu verlangen, daß seine Energie in jedem endlichen Bereich endlich ist. Dann können zwar die elektrische und die magnetische Feldstärke an der Schirmkante unendlich groß werden, aber nur so, daß sie in der Umgebung der Schirmkante quadratisch integrierbar sind. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so wird nur die auf den Schirm auftreffende Energie der einfallenden Welle, aber keine zusätzliche Energie abgestrahlt; ist sie nicht erfüllt, so haben wir kein reines Beugungsproblem, sondern das elektromagnetische Feld der reinen Beugung wird überlagert von einer zusätzlichen Ausstrahlung, die aus der Schirmkante heraus erfolgt und als eine Art erzwungene Ausstrahlung betrachtet werden kann.“

Im Anhang G ist eine Herleitung der MEIXNERSchen Kantenbedingung dargeboten. Die Herleitung orientiert sich jedoch nicht an der ursprünglichen Vorgehensweise MEIXNERS, sondern vielmehr an der ergiebigeren Vorgehensweise in [VB91] (4.2, S. 118-121).

Für den ebenen Schirm folgt aus der Kantenbedingung, dass die zur Schirmkante senkrechten Feldkomponenten maximal mit $1/\sqrt{\rho}$ unendlich werden dürfen. Damit ist erwiesen, dass die SOMMERFELDSche Lösung eindeutig ist.

¹⁶JOSEF MEIXNER (★ 24. April 1908 in Percha (Starnberg); † 19. März 1994 in Aachen).

Anhang E

Lösung des Sommerfeldschen Beugungsproblems mittels Wiener-Hopf-Technik und Sattelpunkt-Methode

Die hier dargebotene Lösung des zwei-dimensionalen Beugungsproblems orientiert sich an den Ausführungen in [BW75] (11.5, S. 565-575).

Winkelspektrale Darstellung ebener Wellen: Eine Lösung der zweidimensionalen HELMHOLTZ-Gleichung lässt sich als Spektrum ebener Wellen über den Einfallswinkel α angeben:

$$\int_C f(\alpha) e^{ik\rho \cos(\phi-\alpha)} d\alpha \quad (\text{E.1})$$

wobei $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ einen komplexen Winkel darstellt. Da der Integrationsweg C oBdA festgelegt werden kann, reduziert sich die Problemstellung auf die Bestimmung der Funktion $f(\alpha)$.

Im Falle einer einfallenden E -polarisierten ebenen Welle:

$$\vec{E}^p = (0, 0, 1) e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} \quad , \quad \vec{H}^p = \frac{k}{\omega\mu} (-\sin \alpha_0, +\cos \alpha_0, 0) e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} \quad (y > 0) \quad (\text{E.2})$$

lassen sich die Sekundärfelder in winkelspektraler Darstellung wie folgt angeben:

$$E_z^s = \int_C P(\cos \alpha) e^{ik\rho \cos(\phi \mp \alpha)} d\alpha \quad (\text{E.3})$$

$$H_x^s = \pm \frac{k}{\omega\mu} \int_C \sin \alpha P(\cos \alpha) e^{ik\rho \cos(\phi \mp \alpha)} d\alpha \quad (\text{E.4})$$

$$H_y^s = -\frac{k}{\omega\mu} \int_C \cos \alpha P(\cos \alpha) e^{ik\rho \cos(\phi \mp \alpha)} d\alpha \quad (\text{E.5})$$

wobei das obere Vorzeichen für den oberen Halbraum, das untere Vorzeichen für den unteren Halbraum gilt.

Der Integrationsweg wird so gewählt, dass $\cos \alpha$ die Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft. In Abb. E.1 ist ein geeigneter Integrationsweg C in der komplexen α -Ebene skizziert. Die folgende Rechnung veranschaulicht die Wahl des Integrati-

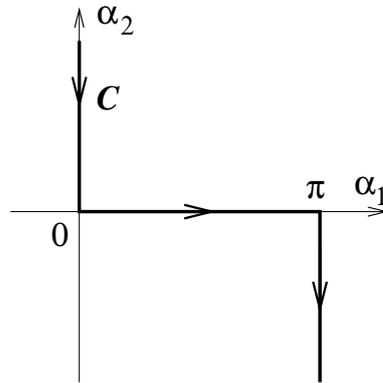


Abbildung E.1: Integrationsweg C in der komplexen α -Ebene

onsweges:

$$2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = e^{i\alpha_1} e^{-\alpha_2} + e^{-i\alpha_1} e^{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 = 0 \implies 2 \cos \alpha = e^{-\alpha_2} + e^{\alpha_2} \implies \lim_{\alpha_2 \rightarrow \pm\infty} \cos \alpha = +\infty$$

$$\alpha_1 = \pi \implies 2 \cos \alpha = -e^{-\alpha_2} - e^{\alpha_2} \implies \lim_{\alpha_2 \rightarrow \pm\infty} \cos \alpha = -\infty$$

Die Wellen, welche dem auf der reellen Achse verlaufenden Teil des Integrationsweges C entsprechen ($\alpha_1 \in [0, \pi], \alpha_2 = 0$), stellen homogene Wellen dar, die sich in beiden Halbräumen ausbreiten und den kompletten Winkelbereich im jeweiligen Halbraum abdecken.

Die zu den beiden Armen des Integrationsweges C , ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \infty \rightarrow 0$) und

($\alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 0 \rightarrow -\infty$), zugehörigen Wellen sind inhomogene Wellen deren Phase sich entlang der ($y = 0$)-Ebene ausbreitet jedoch transversal zu dieser Ebene exponentiell gedämpft sind. Eine Betrachtung des Poynting-Vektors würde ergeben, dass diese Wellen, im Mittel, keine Energie von der ($y = 0$)-Ebene wegtransportieren. Sie dienen lediglich der Berücksichtigung von Stromverteilungen die kleiner als eine Wellenlänge sind.

Führt man die folgende Substitution ein:

$$\beta = \cos \alpha \quad \Longrightarrow \quad d\beta = -\sin \alpha d\alpha \quad \Longrightarrow \quad \frac{-d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = d\alpha \quad (\text{E.6})$$

so lassen sich die Sekundärfelder in der ($y = 0$)-Ebene wie folgt angeben:

$$E_z^s(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{ikx\beta} d\beta \quad (\text{E.7})$$

$$H_x^s(x, 0) = \frac{k}{\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} P(\beta) e^{ikx\beta} d\beta \quad (\text{E.8})$$

$$H_y^s(x, 0) = -\frac{k}{\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta P(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{ikx\beta} d\beta \quad (\text{E.9})$$

Dabei sei auf die Vertauschung der Integrationsgrenzen hingewiesen.

Die Funktion $1/\sqrt{1-\beta^2}$ besitzt in der komplexen β -Ebene zwei Verzweigungslinien $]-\infty, -1]$ und $[+1, +\infty[$. Diese Verzweigungslinien (*branch cuts*) müssen bei der Festlegung des Integrationsweges vermieden werden, wie in Bild E.2 skizziert ist.

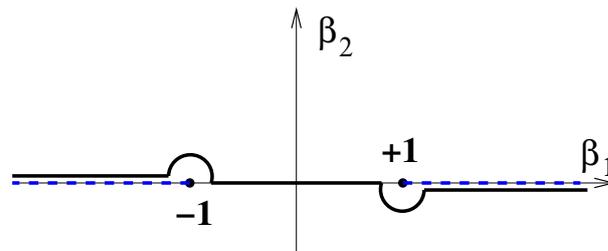


Abbildung E.2: Integrationsweg entlang der reellen Achse zur Umgehung der beiden Verzweigungslinien.

Aufstellung der Integralgleichungen für die Beugung an der Halbebene:

Für den Fall der Beugung einer E -polarisierten, ebenen Welle (nach Gl. (E.2))

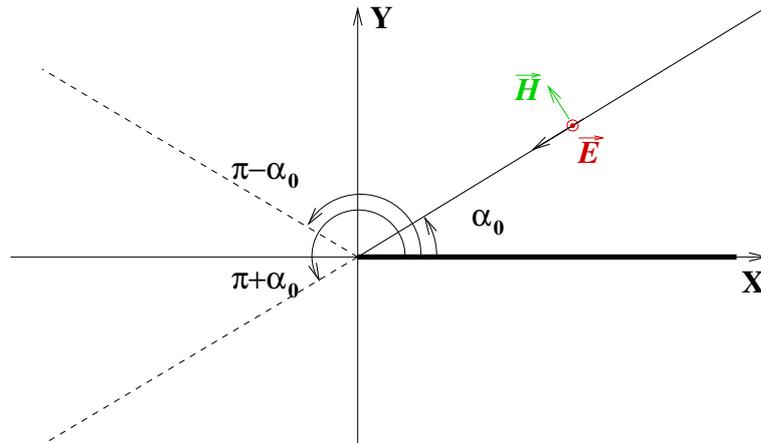


Abbildung E.3: Einfall einer E -polarisierten, ebenen Welle auf die vollkommen leitende Halbebene.

an einer x^+ -Richtung ausgedehnten, vollkommen leitenden Halbebene, lauten die Randbedingungen in der ($y = 0$)-Ebene:

$$E_z^p + E_z^s = 0 \quad \text{für } x > 0 \quad , \quad H_x^s = 0 \quad \text{für } x < 0 \quad (\text{E.10})$$

Setzt man die Spektraldarstellungen der Sekundärfelder aus den Gln. (E.7) und (E.8) in die obigen Randbedingungen ein, so erhält man die beiden folgenden Integralgleichungen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{ikx\beta} d\beta = -e^{-ikx\beta_0} \quad \text{für } x > 0 \quad (\text{E.11})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\beta) e^{ikx\beta} d\beta = 0 \quad \text{für } x < 0 \quad (\text{E.12})$$

wobei $\beta_0 = \cos \alpha_0$ für den Winkel der einfallenden Welle gesetzt wurde.

Gl. (E.11) und Gl. (E.12) werden als duale Integralgleichungen bezeichnet, weil die unbekannte Funktion $P(\beta)$ zwei Integralgleichungen für jeweils unterschiedliche Wertebereiche des Parameters x erfüllt.

Bestimmung der Funktion $P(\beta)$ mittels Wiener-Hopf-Technik ¹: Unter der Annahme, dass:

$$\lim_{|\beta| \rightarrow \infty} P(\beta) = 0 \quad ; \quad 0 \geq \arg \beta \geq -\pi \quad (\text{untere Halbebene}) \quad (\text{E.13})$$

¹Auch als WIENER-HOPF-Faktorisierung bzw. Zerlegung bekannt.

also die Funktion $P(\beta)$ in der unteren β -Halbebene im Unendlichen verschwindet, so kann, nach dem Lemma von JORDAN², der Integrationsweg in Gl. (E.12) durch einen Halbkreis (mit $R \rightarrow \infty$) in der unteren Halbebene geschlossen werden. Da das Integral laut Gl. (E.12) den Wert Null ergibt, muss $P(\beta)$ innerhalb des geschlossenen Integrationsweges, also in der gesamten unteren Halbebene regulär sein.

Unter der weiteren Annahme, dass:

$$\lim_{|\beta| \rightarrow \infty} \frac{P(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0 \quad ; \quad 0 \leq \arg \beta \leq \pi \quad (\text{obere Halbebene}) \quad (\text{E.14})$$

also die Funktion $P(\beta)/\sqrt{1 - \beta^2}$ in der oberen β -Halbebene im Unendlichen verschwindet, so kann, nach dem Lemma von JORDAN, der Integrationsweg in Gl. (E.11) durch einen Halbkreis (mit $R \rightarrow \infty$) in der oberen Halbebene geschlossen werden. Die beiden Verzweigungspunkte, bei $\beta = \pm 1$, können durch Deformation des Integrationsweges umgangen werden. Wie in Abb. E.4 skizziert ist, wird die Deformation so gestaltet, dass, für die Funktion $1/\sqrt{(1 + i\epsilon)^2 - \beta^2}$ ($\epsilon \in \mathfrak{R}^+$), die beiden Verzweigungspunkte mit ihren Verzweigungslinien weiterhin umgangen sind.³ Die rechte Seite von Gl. (E.11) deutet darauf hin, dass der Integrand ei-

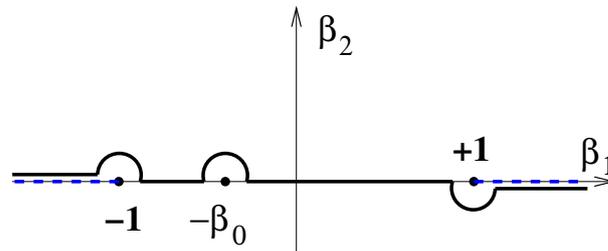


Abbildung E.4: Integrationsweg für Gl. (E.11)

ne Polstelle bei $\beta = -\beta_0$ besitzt, welche in das Integrationsgebiet eingeschlossen werden muss (Abb. E.4). Wendet man nämlich das Lemma von der Integration entlang eines Kreisbogens um eine Polstelle auf die Funktion $-e^{ikx\beta}/(\beta + \beta_0)$ an:

$$\lim_{\beta \rightarrow -\beta_0} (\beta + \beta_0) \frac{-e^{ikx\beta}}{\beta + \beta_0} = -e^{-ikx\beta_0} \quad \implies \quad \lim_{R \rightarrow 0} \oint \frac{-e^{ikx\beta}}{\beta + \beta_0} d\beta = -2\pi i e^{-ikx\beta_0} \quad (\text{E.15})$$

Ein Vergleich mit Gl. (E.11) deutet darauf hin, dass der Integrand den Faktor $\frac{-1}{2\pi i} \frac{1}{\beta + \beta_0}$ enthält.

²MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (★ 5. Januar 1838 in Lyon; + 21. Januar 1922 in Paris).

³Damit wäre auch der Fall leicht verlustbehafteter Medien behandelbar.

Mit den obigen Überlegungen und der Annahme, $U(\beta)$ sei eine in der gesamten oberen Halbebene reguläre Funktion, kann der Integrand aus Gl. (E.11) wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{P(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-1}{2\pi i} \frac{U(\beta)}{U(-\beta_0)} \frac{1}{\beta + \beta_0} \quad (\text{E.16})$$

Diese Gleichung kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\frac{P(\beta)}{\sqrt{1-\beta}} (\beta + \beta_0) = \frac{-1}{2\pi i} \frac{U(\beta)}{U(-\beta_0)} \sqrt{1+\beta} \quad (\text{E.17})$$

Die linke Seite der obigen Gleichung ist unterhalb des Integrationsweges, also in der unteren komplexen Halbebene, regulär, da sie dort keine Singularitäten aufweist und aufgrund der Voraussetzung (Gl. (E.13)) im Unendlichen beschränkt ist. Die gleichen Eigenschaften weist die rechte Seite der obigen Gleichung für die obere komplexe Halbebene auf. Dementsprechend kann jede Seite als analytische Fortsetzung der anderen Seite für die jeweilige Halbebene betrachtet werden. Da beide Seiten jedoch gleichgesetzt sind, sind beide in der gesamten komplexen Ebene regulär.⁴

Die Anwendung des Theorems von LIOUVILLE⁵, wonach eine Funktion, welche in der gesamten komplexen Ebene keine Singularitäten besitzt und im Unendlichen beschränkt ist, eine Konstante sein muss, ergibt, dass beide Seiten der Gl. (E.17) konstant sind. Den konstanten Wert erhalten wir durch Einsetzen von $\beta = -\beta_0$ in der rechten Seite von Gl. (E.17).

Somit ergibt sich die Funktion $P(\beta)$ bzw. $P(\cos \alpha)$ in ihrer endgültigen Form:

$$P(\beta) = \frac{-1}{2\pi i} \frac{\sqrt{1-\beta_0}\sqrt{1-\beta}}{\beta + \beta_0} \quad (\text{E.18})$$

$$P(\cos \alpha) = \frac{-1}{\pi i} \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha + \cos \alpha_0} \quad (\text{E.19})$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0)} - \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0)} \right) \quad (\text{E.20})$$

Auswertung des Integrals für das Sekundärfeld: Nach der Bestimmung der Funktion $P(\beta)$, kann das elektrische Sekundärfeld wie folgt formuliert werden:

⁴Diese Methode zur Lösung von Integralgleichungen durch die Konstruktion regulärer Funktionen mittels analytischer Fortsetzung wird als WIENER-HOPF-Technik bezeichnet. Ausführliche Erörterungen dieser Methode sind z. B. in [Nob58], [Wei69] oder [Yam96] zu finden.

⁵JOSEPH LIOUVILLE (★ 24. März 1809 in Saint-Omer; † 8. September 1882 in Paris).

$$E_z^s = \frac{1}{4\pi i} \int_C \left(\frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0)} - \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0)} \right) e^{ik\rho \cos(\phi \mp \alpha)} d\alpha \quad (\text{E.21})$$

wobei das obere Vorzeichen für die obere Halbebene, das untere Vorzeichen für die untere Halbebene gilt.

Abb. E.5 zeigt einen möglichen Integrationsweg C für die obere Halbebene, wobei die Polstelle des Integranden, bei $\alpha = \pi - \alpha_0$, berücksichtigt wurde. Dieser Inte-

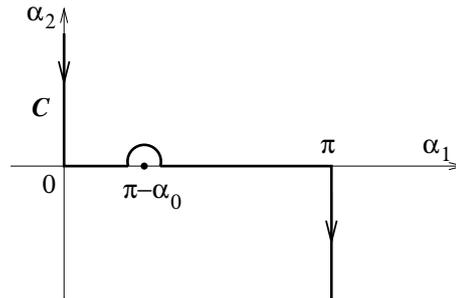


Abbildung E.5: Integrationsweg zur Berechnung des Sekundärfeldes in der oberen Halbebene

grationspfad ermöglicht jedoch keine analytische Auswertung des Integrals. Daher wird auf die Sattelpunkt-Methode zurückgegriffen, mit entsprechender Modifikation des Integrationspfades.

Die Sattelpunkt-Methode⁶ zur asymptotischen Auswertung von Integralen: Es sei ein Integral der allgemeinen Form:

$$I = \int_C f(z) e^{ikg(z)} dz \quad \text{mit: } g(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad , \quad z = x + iy \quad (\text{E.22})$$

gegeben, wobei $f(z)$ und $g(z)$ zwei auf C reguläre Funktionen der komplexen Variable z darstellen und die beiden reellen Funktionen u und v dementsprechend die CAUCHY⁷-RIEMANNschen Gleichungen erfüllen.

Für hinreichend große Werte für k werden die Hauptanteile zu dem obigen Integral, entlang der Kurve C , durch die Umgebungen von sogenannten stationären Punkten geliefert. In einfachen Fällen lassen sich diese stationären Punkte (Sattelpunkte) durch die Gleichung $g'(z_0) = 0$ bestimmen. Bei der Sattelpunkt-Methode wird der Gesamtwert des Integrals durch seinen Wert in der Umgebung des Sattelpunktes

⁶Auch „Methode des steilsten Abstiegs“ genannt. Engl.: *Method of Steepest Descent*.

⁷AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (★ 21. August 1789 in Paris; + 23. Mai 1857 in Sceaux).

(Auch mehrere Sattelpunkte!) abgeschätzt. Dazu wird die Integrationskontur derart deformiert, dass die Funktion $e^{ikg(z)}$ in der Umgebung des Sattelpunktes, ihre stärkste Betragsänderung aufweist. Schreibt man das obige Integral in der Form:

$$I = \int_C f(z) e^{iku} e^{-kv} dz \quad (\text{E.23})$$

so wird ersichtlich, dass das Integral seinen Hauptbeitrag, entlang der Kontur C , in der Umgebung des Minimums der Funktion v liefert, da der Integrand außerhalb des Minimums stärker exponentiell gedämpft wird. Um diese Umgebung einzuschränken, sollte daher die Funktion v außerhalb des Minimums einen möglichst steilen Anstieg aufweisen. Da die beiden Funktionen v und u über die CAUCHY-RIEMANNschen Gleichungen zusammenhängen, kann gezeigt werden, dass v in den Bereichen entlang der Kontur am stärksten variiert, in denen u konstant ist, und umgekehrt. Daher lauten die beiden Bedingungen zur Gestaltung des Integrationspfades in der Umgebung des Sattelpunktes z_0 :

$$u(x, y) = \text{const.} \quad , \quad v(x, y) \geq v(x_0, y_0) \quad (\text{E.24})$$

Die oben geschilderte Vorgehensweise, bei der die Auwertung in einer begrenzten Umgebung des Sattelpunktes stattfindet, geht auf RIEMANN zurück. Sie führt zu einer „asymptotischen Näherung“⁸ für das Integral. Eine Berücksichtigung des gesamten Integrationspfades, falls sie gelingt, führt auf eine „vollständige asymptotische Entwicklung“⁹ für das Integral. Dieses Erkenntnis geht auf DEBYE¹⁰ zurück.¹¹

Bestimmung des Integrationspfades des steilsten Abstiegs $S(\phi)$ ¹²: Der Sattelpunkt für den Integranden aus Gl. (E.21) lässt sich (für die obere Halbebene) wie folgt bestimmen:

$$g(\alpha) = \cos(\phi - \alpha) = \cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha \quad (\text{E.25})$$

$$g'(\alpha) = -\cos \phi \sin \alpha + \sin \phi \cos \alpha \stackrel{!}{=} 0 \quad \implies \quad \alpha|_{\text{SP}} = \phi \quad (\text{E.26})$$

Mit $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ bedeutet dies:

$$\alpha_1|_{\text{SP}} = \phi \quad , \quad \alpha_2|_{\text{SP}} = 0 \quad (\text{E.27})$$

⁸Engl.: *Asymptotic Approximation*.

⁹Engl.: *Complete Asymptotic Expansion*.

¹⁰PETER DEBYE (★ 24. März 1884 in Maastricht, Niederlande; † 2. November 1966 in Ithaca, New York).

¹¹Siehe dazu: [Cop65] (S. 64).

¹²In der engl. Literatur wird dieser Integrationspfad als *Steepest Descent Path (SDP)* (dt.: Pfad des steilsten Abstiegs) bezeichnet. Um längere Bezeichnungen zu vermeiden, wird im Folgenden einfach von dem Integrationspfad S gesprochen.

Mit der Substitution $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = \alpha - \phi \implies \gamma_1 = \alpha_1 - \phi$, $\gamma_2 = \alpha_2$, liegt der Sattelpunkt im Ursprung der komplexen γ -Ebene.

Unter Berücksichtigung der Gleichung:

$$\underbrace{\cos \gamma}_{g(\gamma)} = \underbrace{\cos \gamma_1 \cosh \gamma_2}_{u(\gamma_1, \gamma_2)} - i \underbrace{\sin \gamma_1 \sinh \gamma_2}_{-v(\gamma_1, \gamma_2)} \quad (\text{E.28})$$

lauten die beiden Bedingungen aus Gl. (E.24):

$$\begin{aligned} u(\gamma_1, \gamma_2) &= \text{const.} \\ \implies \cos \gamma_1 \cosh \gamma_2 &= \text{const.} = 1 \quad \text{weil: } \cos(\gamma_1|_{\text{SP}} = 0) = 1 \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

$$\begin{aligned} v(\gamma_1, \gamma_2) &\geq v(\gamma_1|_{\text{SP}}, \gamma_2|_{\text{SP}}) \\ \implies \sin \gamma_1 \sinh \gamma_2 &\leq 0 \quad \text{weil: } \sin(\gamma_1|_{\text{SP}} = 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Abbildung E.6 zeigt den Integrationspfad $S(0)$ in der γ -Ebene. Zur Erfüllung der zweiten Bedingung (Gl. (E.30)), darf der Pfad ausschließlich in den schraffierten Bereichen verlaufen. Die Asymptoten des Integrationspfades für $\gamma_2 \rightarrow \pm\infty$ können

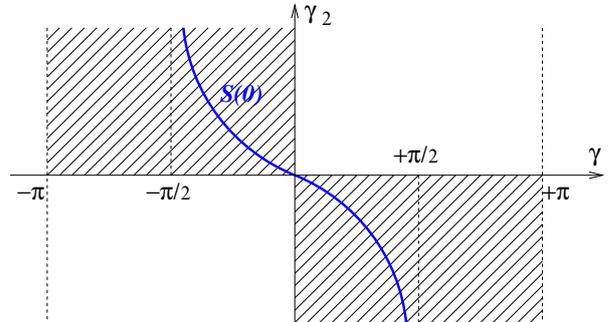


Abbildung E.6: $S(0)$ in der γ -Ebene.

aus der ersten Bedingung (Gl. (E.29)) wie folgt ermittelt werden:

$$\lim_{\gamma_2 \rightarrow \pm\infty} \cos \gamma_1 = \lim_{\gamma_2 \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\cosh \gamma_2} = 0 \implies \gamma_1|_{\gamma_2 \rightarrow \pm\infty} = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{E.31})$$

Weiter ist es sinnvoll, eine parametrische Beschreibung für den so bestimmten Integrationspfades zu finden. Wie die folgende Rechnung unter Einbeziehung der

ersten Bedingung (Gl. (E.29)) zeigt:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = -\cos \frac{\gamma_1}{2} \sinh \frac{\gamma_2}{2} + i \sin \frac{\gamma_1}{2} \cosh \frac{\gamma_2}{2} \quad (\text{E.32})$$

$$\begin{aligned} &= -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \gamma_1)} \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh \gamma_2 - 1)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \gamma_1)} \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh \gamma_2 + 1)} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\cosh \gamma_2 - 1 + \underbrace{\cos \gamma_1 \cosh \gamma_2 - \cos \gamma_1}_{=1}} + \\ &\quad i \frac{1}{2} \sqrt{\cosh \gamma_2 + 1 - \underbrace{\cos \gamma_1 \cosh \gamma_2 - \cos \gamma_1}_{=1}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\cosh \gamma_2 - \underbrace{\cos \gamma_1}_{1/\cosh \gamma_2}} (1 - i) = -\frac{1}{2} \frac{\sinh \gamma_2}{\sqrt{\cosh \gamma_2}} \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \quad (\text{E.33}) \end{aligned}$$

lässt sich durch Multiplikation der obigen Gleichung mit $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ eine neue Variable τ einführen:

$$\tau = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \sin \frac{\gamma}{2} = -\frac{\sinh \gamma_2}{\sqrt{\cosh \gamma_2}} \quad (\text{E.34})$$

welche auf dem Integrationspfad $S(0)$ den Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ durchschreitet. Abbildung E.7 zeigt den Integrationspfad $S(\phi)$ in der α -Ebene. Daraus ist ersicht-

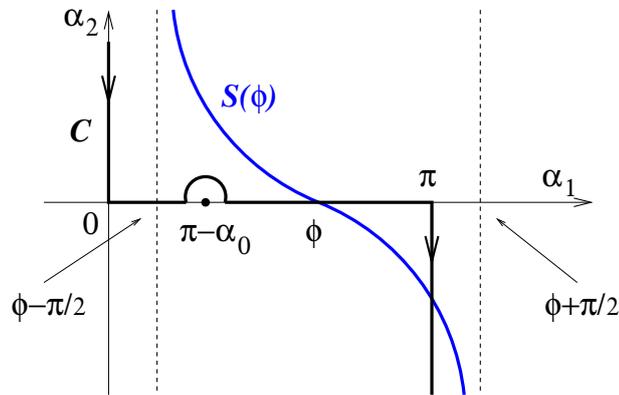


Abbildung E.7: $S(\phi)$ in der α -Ebene.

lich, dass sich $S(\phi)$ in Abhängigkeit des Parameters ϕ horizontal verschiebt. Dabei muss die Polstelle ($\alpha = \pi - \alpha_0$) nur in dem Bereich $\phi < \pi - \alpha_0$ berücksichtigt werden.

Ausführung der Integration für die obere Halbebene ($0 < \phi < \pi$):

$$I = \frac{1}{4\pi i} \int_{S(\phi)} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha - \alpha_0}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha + \alpha_0}{2}} \right) e^{ik\rho \cos(\phi - \alpha)} d\alpha +$$

{Beitrag der Polstelle bei: $\alpha = \pi - \alpha_0$ für: $\phi < \pi - \alpha_0$ } (E.35)

Zum Zwecke der Übersichtlichkeit, genügt es, das Integral nur für den ersten Term des Integranden auszuwerten. Die Integration des zweiten Termes kann danach durch bloßen Vorzeichenwechsel von α_0 berücksichtigt werden.

$$I_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_{S(\phi)} \frac{1}{\cos \frac{\alpha - \alpha_0}{2}} e^{ik\rho \cos(\phi - \alpha)} d\alpha \quad (\text{E.36})$$

In der γ -Ebene lautet das Integral:

$$I_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_{S(0)} \frac{1}{\cos \frac{\gamma - \alpha_0 + \phi}{2}} e^{ik\rho \cos \gamma} d\gamma \quad (\text{E.37})$$

Führt man eine modifizierte Substitution: $\gamma' = \phi - \alpha = -\gamma$, ($d\gamma' = -d\alpha$) ein, so lautet I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_{-S(0)} \frac{1}{\cos \frac{-\gamma' - \alpha_0 + \phi}{2}} e^{ik\rho \cos \gamma'} (-d\gamma') = \frac{1}{4\pi i} \int_{S(0)} \frac{1}{\cos \frac{\gamma' + \alpha_0 - \phi}{2}} e^{ik\rho \cos \gamma'} d\gamma' \quad (\text{E.38})$$

Das Zusammenfügen der beiden Integrale aus Gl. (E.37) und Gl. (E.38) ergibt schließlich:

$$I_1 = \frac{1}{8\pi i} \int_{S(0)} \left(\frac{1}{\cos \frac{\gamma - \alpha_0 + \phi}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\gamma + \alpha_0 - \phi}{2}} \right) e^{ik\rho \cos \gamma} d\gamma \quad (\text{E.39})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0)} \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha_0 - \phi) \cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \gamma + \cos(\alpha_0 - \phi)} e^{ik\rho \cos \gamma} d\gamma \quad (\text{E.40})$$

Durch Einsetzen von τ aus Gl. (E.34) erhält man den Ausdruck:

$$I_1 = \frac{-1}{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ik\rho\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\rho\tau^2}}{\tau^2 - i\eta^2} d\tau \quad (\text{E.41})$$

wobei $\eta = \sqrt{2} \cos \frac{\phi - \alpha_0}{2}$ und $\eta^2 = 1 + \cos(\phi - \alpha_0)$.

Zurückführung des Integrals in Gl. (E.41) auf ein Fresnel-Integral: Ausgehend von der Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu\tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \quad (\text{E.42})$$

lässt sich folgende Rechnung durchführen:

$$A = \int_{k\rho}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} e^{i\eta^2\nu} d\nu = \int_{k\rho}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu(\tau^2 - i\eta^2)} d\tau d\nu \quad (\text{E.43})$$

Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge und Ausführung der Integration über ν , ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{k\rho}^{\infty} e^{-\nu(\tau^2 - i\eta^2)} d\nu d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\rho(\tau^2 - i\eta^2)}}{\tau^2 - i\eta^2} d\tau = e^{ik\rho\eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\rho\tau^2}}{\tau^2 - i\eta^2} d\tau = B \quad (\text{E.44})$$

Wird nun A durch die Substitution $\eta^2\nu = \kappa^2$ umgeschrieben, so erhält man:

$$A = \frac{2\sqrt{\pi}}{|\eta|} \int_{|\eta|\sqrt{k\rho}}^{\infty} e^{i\kappa^2} d\kappa = \frac{2\sqrt{\pi}}{|\eta|} F_1[|\eta|\sqrt{k\rho}] \quad (\text{E.45})$$

wobei $F_1(x) = \int_x^{\infty} e^{it^2} dt$ eine modifizierte Form des FRESNEL-Integrals darstellt.

$$B = A \implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\rho\tau^2}}{\tau^2 - i\eta^2} d\tau = e^{-ik\rho\eta^2} \frac{2\sqrt{\pi}}{|\eta|} F_1[|\eta|\sqrt{k\rho}] \quad (\text{E.46})$$

Berechnung der Gesamtlösung für das elektrische Feld: Setzt man dieses Ergebnis aus Gl. (E.46) in Gl. (E.41) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\text{sgn}(\eta) \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-ik\rho(\eta^2-1)} F_1[|\eta|\sqrt{k\rho}] \\ &= \mp \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} F_1\left[\pm \sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}\right] \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

wobei das obere Vorzeichen für $\phi - \alpha_0 < \pi$ ($\eta > 0$), das untere für $\phi - \alpha_0 > \pi$ ($\eta < 0$) gilt.

Auf gleiche Weise lässt sich die Integration des zweiten Terms in Gl. (E.35) durchführen, mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{-1}{4\pi i} \int_{S(\phi)} \frac{1}{\cos \frac{\alpha+\alpha_0}{2}} e^{ik\rho \cos(\phi-\alpha)} d\alpha \\ &= \pm \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-ik\rho \cos(\phi+\alpha_0)} F_1\left[\pm \sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}\right] \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

wobei das obere Vorzeichen für $\eta > 0$ ($\phi + \alpha_0 < \pi$), das untere für $\eta < 0$ ($\phi + \alpha_0 > \pi$) gilt.

Die Polstelle bei $\alpha = \pi - \alpha_0$, liefert den Beitrag:

$$I_3 = -e^{-ik\rho \cos(\phi + \alpha_0)} \quad (\text{E.49})$$

welcher nur für $\phi < \pi - \alpha_0$ zum tragen kommt und damit die reflektierte Welle der geometrischen Optik darstellt.

Nun kann das gesamte elektrische Feld E_z durch Kombination der Teillösungen I_1 , I_2 , I_3 und E_z^p berechnet werden. Dabei müssen jedoch einige Fallunterscheidungen bezüglich der verschiedenen Winkelbereiche berücksichtigt werden:

- Für I_1 tritt in der oberen Halbebene nur der Fall $\phi - \alpha_0 < \pi$ ($\eta > 0$) auf, so dass in Gl. (E.47) nur das obere Vorzeichen zum Tragen kommt. Addiert man nun E_z^i und I_1 unter der Verwendung der Eigenschaft $F_1(a) + F_1(-a) = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4}$, so ergibt sich:

$$E_z^i + I_1 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-ik\rho \cos(\phi - \alpha_0)} F_1[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi - \alpha_0}{2}] \quad (\text{E.50})$$

- Addiert man I_2 und I_3 für $\eta > 0$ ($\phi + \alpha_0 < \pi$) (Der Bereich in dem die Polstelle zum Tragen kommt!), so ergibt sich, unter der Verwendung der Eigenschaft $F_1(a) + F_1(-a) = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4}$:

$$I_2 + I_3 = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-ik\rho \cos(\phi + \alpha_0)} F_1[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi + \alpha_0}{2}] ; \phi < \pi - \alpha_0 \quad (\text{E.51})$$

- Den gleichen Ausdruck wie in Gl. (E.51), bekommt man für I_2 im Bereich $\eta < 0$ ($\phi + \alpha_0 > \pi$). Also gilt Gl. (E.51) für die gesamte obere Halbebene.

Damit ergibt sich die Gesamtlösung für E_z in der oberen Halbebene:

$$E_z = E_z^p + I_1 + I_2 + I_3 =$$

$$\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-ik\rho \cos(\phi - \alpha_0)} F_1[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi - \alpha_0}{2}] - e^{-ik\rho \cos(\phi + \alpha_0)} F_1[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi + \alpha_0}{2}] \right\} \quad (\text{E.52})$$

Für die untere Halbebene ($0 > \phi > -\pi$) lässt sich eine ähnliche Rechnung durchführen, wobei der Integrationspfad durch $S(2\pi - \phi)$ gegeben ist und der

Beitrag der Polstelle $\alpha = \pi - \alpha_0$ erst im Bereich $\phi > \pi + \alpha_0$ zum Tragen kommt, wo er die einfallende Welle in ihrem Schattenbereich kompensiert. Die Ausführung der Rechnung würde schließlich wieder Gl. (E.52) liefern. Somit gilt E_z aus Gl. (E.52) in der gesamten Ebene ($0 < \phi < 2\pi$).

Berechnung der magnetischen Feldkomponenten: Durch die folgenden Substitutionen:

$$v = -\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi - \alpha_0}{2} \quad , \quad w = -\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi + \alpha_0}{2} \quad (\text{E.53})$$

$$G(v) = e^{-iv^2} F_1(v) \quad , \quad G(w) = e^{-iw^2} F_1(w) \quad (\text{E.54})$$

lässt sich E_z aus Gl. (E.52) wie folgt wiedergeben

$$E_z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} (G(v) - G(w)) \quad (\text{E.55})$$

Unter Anwendung der LEIBNIZschen¹³ Regel für die Differentiation eines Integrals ([AS65], 3.3.7, S. 11):

$$\frac{d}{dc} \int_{a(c)}^{b(c)} f(x, c) dx = \int_{a(c)}^{b(c)} \frac{\partial}{\partial c} f(x, c) dx + f(b, c) \frac{db}{dc} - f(a, c) \frac{da}{dc} \quad (\text{E.56})$$

lässt sich $dG(a)/da$ wie folgt berechnen:

$$\frac{d}{da} G(a) = \frac{d}{da} \left(e^{-ia^2} F_1(a) \right) = \frac{d}{da} \left(e^{-ia^2} \int_a^\infty e^{it^2} dt \right) \quad (\text{E.57})$$

$$= -2iaG(a) - e^{-ia^2} \frac{d}{da} \int_a^\infty e^{it^2} dt = -2iaG(a) - 1 \quad (\text{E.58})$$

Damit lassen sich die beiden H-Feldkomponenten in zylindrischen Koordinaten wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} H_\rho &= \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial}{\rho \partial \phi} E_z \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \left(\frac{\partial G(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{\partial G(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{k}{\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} . \end{aligned}$$

$$\left[\sin(\phi - \alpha_0)G(v) - \sin(\phi + \alpha_0)G(w) - i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{E.59})$$

¹³GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (★ 1. Juli 1646 in Leipzig; † 14. November 1716 in Hannover).

$$\begin{aligned}
H_\phi &= \frac{-1}{i\omega\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} E_z \\
&= \frac{-1}{i\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left[ik e^{ik\rho} (G(v) - G(w)) + e^{ik\rho} \left(\frac{\partial G(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\partial G(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \right] \\
&= \frac{k}{\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \cdot \\
&\quad \left[\cos(\phi - \alpha_0)G(v) - \cos(\phi + \alpha_0)G(w) + i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{E.60})
\end{aligned}$$

In kartesischen Koordinaten lauten die beiden Feldkomponenten:

$$\begin{aligned}
H_x &= \cos \phi H_\rho - \sin \phi H_\phi \\
&= \frac{-k}{\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \left[\sin \alpha_0 (G(v) + G(w)) + i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{E.61})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_y &= \sin \phi H_\rho + \cos \phi H_\phi \\
&= \frac{k}{\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \left[\cos \alpha_0 (G(v) - G(w)) - i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{E.62})
\end{aligned}$$

Formulierung des reinen Beugungsfeldes: Aus den beiden Termen I_1 (Gl. (E.47)) und I_2 (Gl. (E.48)) kann das Beugungsfeld E_z^d wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}
E_z^d &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \\
&\left\{ \begin{array}{ll} -e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} F_1\left[+\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}\right] + e^{-ik\rho \cos(\phi+\alpha_0)} F_1\left[+\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}\right] & \text{falls:} \\ & \phi \leq \pi - \alpha_0 \\ -e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} F_1\left[+\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}\right] - e^{-ik\rho \cos(\phi+\alpha_0)} F_1\left[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}\right] & \text{falls:} \\ & \pi - \alpha_0 < \phi \leq \pi + \alpha_0 \\ +e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} F_1\left[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}\right] - e^{-ik\rho \cos(\phi+\alpha_0)} F_1\left[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}\right] & \text{falls:} \\ & \pi + \alpha_0 < \phi \end{array} \right. \quad (\text{E.63})
\end{aligned}$$

Formulierung einer asymptotischen Lösung des Beugungsfeldes: Das modifizierte FRESNEL-Integral lässt sich, für große Werte des Argumentes, asymptotisch formulieren ([Bor94], S. 1-2):

$$F_1(a) = \frac{i}{2a} e^{ia^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a^3}\right) \quad ; \quad a \gg 1 \quad (\text{E.64})$$

Setzt man F_1 aus Gl. (E.64) in Gl. (E.63) ein, so lautet die asymptotische Lösung des Beugungsfeldes (In allen Winkelbereichen):

$$E_{z \text{ asymp}}^d \approx \frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k\rho}} \left(\frac{1}{\cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}} \right) e^{ik\rho} \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (\text{E.65})$$

$$\approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k\rho}} \left(\frac{4 \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\alpha_0}{2}}{\cos \phi + \cos \alpha_0} \right) e^{ik\rho} \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (\text{E.66})$$

Abbildung E.8 zeigt einen Vergleich zwischen asymptotischer und exakter Lösung des Beugungsfeldes.

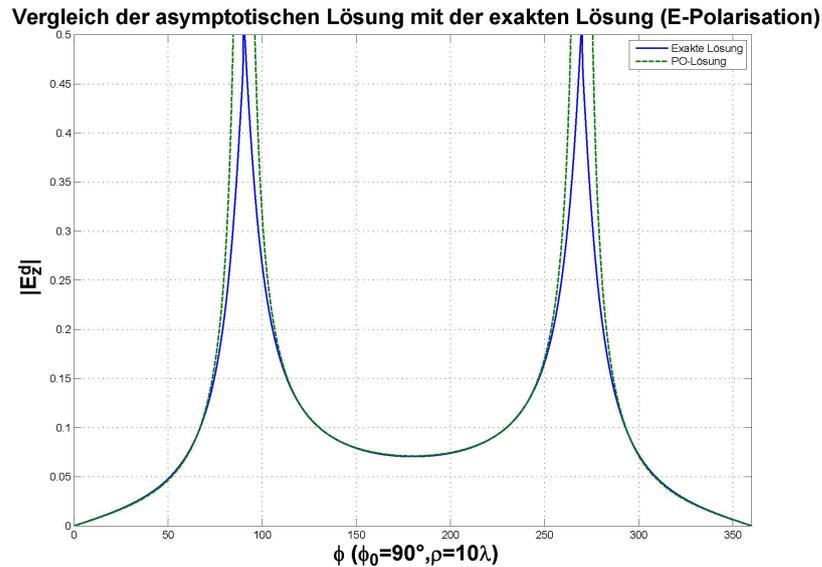


Abbildung E.8: Vergleich zwischen asymptotischer und exakter Lösung des Beugungsfeldes

Berechnung der Flächenstromdichte in der leitenden Halbebene: Die Flächenstromdichte lässt sich aus dem tangentialen Magnetfeld wie folgt berechnen:

$$\vec{J}_F = \vec{e}_y \times \vec{e}_x [H_x(\phi = 0) - H_x(\phi = 2\pi)] = -\vec{e}_z [H_x(\phi = 0) - H_x(\phi = 2\pi)] \quad (\text{E.67})$$

Ausgehend von den Gleichungen (E.53), (E.54) und (E.61) sowie der Anwendung der Regel:

$$F_1(-a) - F_1(a) = F_1(-a) + F_1(a) - 2F_1(a) = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} - 2F_1(a) \quad (\text{E.68})$$

ergibt sich für die Flächenstromdichte:

$$J_{Fz} = \frac{k}{\omega\mu} \left\{ 2 \sin \alpha_0 e^{-ikx \cos \alpha_0} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ikx} \left[4 \sin \alpha_0 G(\sqrt{2kx} \cos \frac{\alpha_0}{2}) - i2\sqrt{\frac{2}{kx}} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] \right\} \quad (\text{E.69})$$

Diese Gesamt-Flächenstromdichte lässt sich formulieren, als Summe aus der physikalisch-optisch aus dem primären Magnetfeld berechneten Flächenstromdichte J_{Fz}^{PO} , und der aus dem Beugungs-Magnetfeld berechneten Flächenstromdichte J_{Fz}^d :

$$J_{Fz} = J_{Fz}^{PO} + J_{Fz}^d \quad (\text{E.70})$$

Da sich die PO-Flächenstromdichte durch:

$$J_{Fz}^{PO} = \vec{e}_y \times \vec{e}_x 2H_x^i(y=0) = \vec{e}_z \frac{k}{\omega\mu} 2 \sin \alpha_0 e^{-ikx \cos \alpha_0} \quad (\text{E.71})$$

angeben lässt, ergibt sich für die Beugungs-Flächenstromdichte:

$$J_{Fz}^d = J_{Fz} - J_{Fz}^{PO} = \frac{-k}{\omega\mu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ikx} \left[4 \sin \alpha_0 G(\sqrt{2kx} \cos \frac{\alpha_0}{2}) - i2\sqrt{\frac{2}{kx}} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{E.72})$$

Abbildung E.9 zeigt eine Momentaufnahme der Beugungs-Flächenstromdichte.

Ergebnisse für den Fall der H -Polarisation: Die Beugung einer H -polarisierten, ebenen Welle an der Halbebene kann ähnlich wie im Fall der E -Polarisation berechnet werden. Hier seien lediglich die Ergebnisse aufgelistet: Die einfallende Welle ist gegeben, durch:

$$\vec{H}^p = (0, 0, 1) e^{-ik\rho \cos(\phi - \alpha_0)} \quad , \quad \vec{E}^p = \frac{k}{\omega\varepsilon} (\sin \alpha_0, -\cos \alpha_0, 0) e^{-ik\rho \cos(\phi - \alpha_0)} \quad y > 0 \quad (\text{E.73})$$

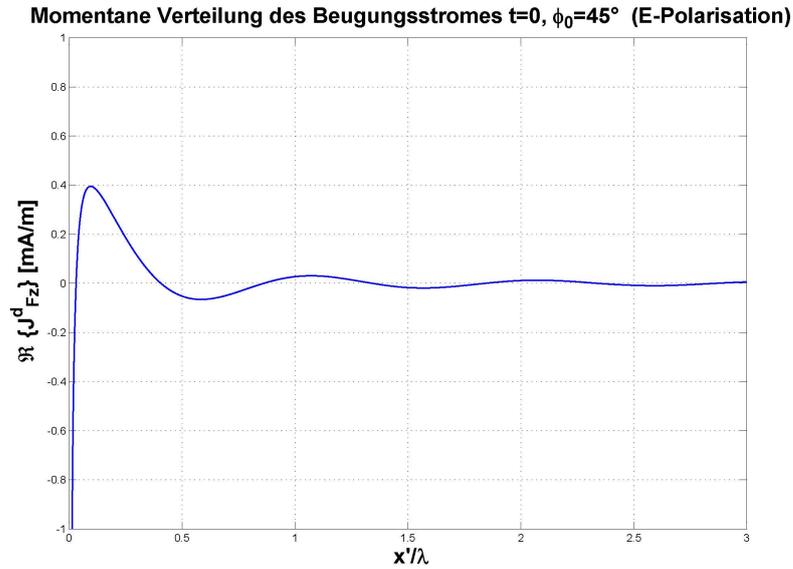


Abbildung E.9: Momentane Verteilung des Beugungsstromes zum Zeitpunkt $t = 0$. Der Einfallswinkel der primären Welle beträgt 45°

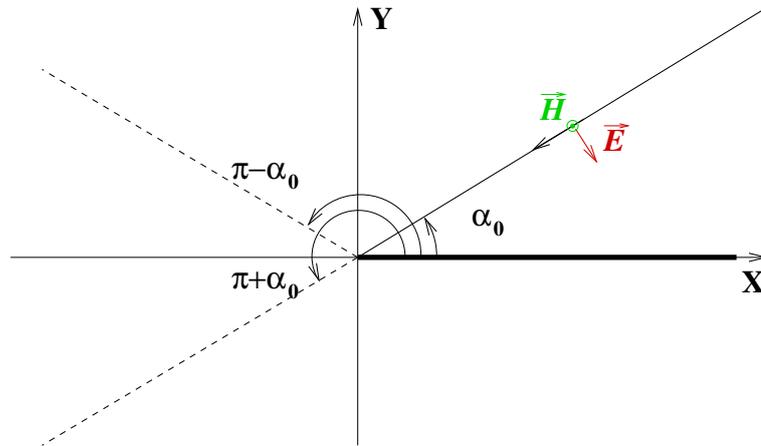


Abbildung E.10: Einfall einer H -polarisierten, ebenen Welle auf die vollkommen leitende Halbebene.

Die Gesamtlösung für H_z lautet:

$$H_z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-ik\rho \cos(\phi - \alpha_0)} F_1\left[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi - \alpha_0}{2}\right] + e^{-ik\rho \cos(\phi + \alpha_0)} F_1\left[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi + \alpha_0}{2}\right] \right\} \quad (\text{E.74})$$

Das reine Beugungsfeld:

$$H_z^d = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} +e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} F_1[+\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}] + e^{-ik\rho \cos(\phi+\alpha_0)} F_1[+\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}] & \text{falls:} \\ & \phi \leq \pi - \alpha_0 \\ +e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} F_1[+\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}] - e^{-ik\rho \cos(\phi+\alpha_0)} F_1[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}] & \text{falls:} \\ & \pi - \alpha_0 < \phi \leq \pi + \alpha_0 \\ -e^{-ik\rho \cos(\phi-\alpha_0)} F_1[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}] - e^{-ik\rho \cos(\phi+\alpha_0)} F_1[-\sqrt{2k\rho} \cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}] & \text{falls:} \\ & \pi + \alpha_0 < \phi \end{array} \right. \quad (\text{E.75})$$

Asymptotische Lösung des Beugungsfeldes:

$$H_z^d \text{ asymp} \approx -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k\rho}} \left(\frac{1}{\cos \frac{\phi-\alpha_0}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\phi+\alpha_0}{2}} \right) e^{ik\rho} \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (\text{E.76})$$

$$\approx -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k\rho}} \left(\frac{4 \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\alpha_0}{2}}{\cos \phi + \cos \alpha_0} \right) e^{ik\rho} \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (\text{E.77})$$

Die elektrischen Feldkomponenten:

$$E_x = \frac{k}{\omega\varepsilon} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \left[\sin \alpha_0 (G(v) - G(w)) - i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{E.78})$$

$$E_y = \frac{-k}{\omega\varepsilon} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ik\rho} \left[\cos \alpha_0 (G(v) + G(w)) + i\sqrt{\frac{2}{k\rho}} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\alpha_0}{2} \right] \quad (\text{E.79})$$

Die Flächenstromverteilungen in der leitenden Halbebene:

$$\vec{J}_F = \vec{e}_y \times \vec{e}_z [H_z(\phi = 0) - H_z(\phi = 2\pi)] = \vec{e}_x [H_z(\phi = 0) - H_z(\phi = 2\pi)] \quad (\text{E.80})$$

$$J_{Fx} = 2e^{-ikx \cos \alpha_0} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} 4e^{ikx} G(\sqrt{2kx} \cos \frac{\alpha_0}{2}) = J_{Fx}^{PO} + J_{Fx}^d \quad (\text{E.81})$$

$$J_{Fx}^{PO} = \vec{e}_y \times \vec{e}_z 2H_z^i(y = 0) = \vec{e}_x 2e^{-ikx \cos \alpha_0} \quad (\text{E.82})$$

$$J_{Fx}^d = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} 4e^{ikx} G(\sqrt{2kx} \cos \frac{\alpha_0}{2}) \quad (\text{E.83})$$

Vergleich der asymptotischen Lösung mit der exakten Lösung (H-Polarisation)

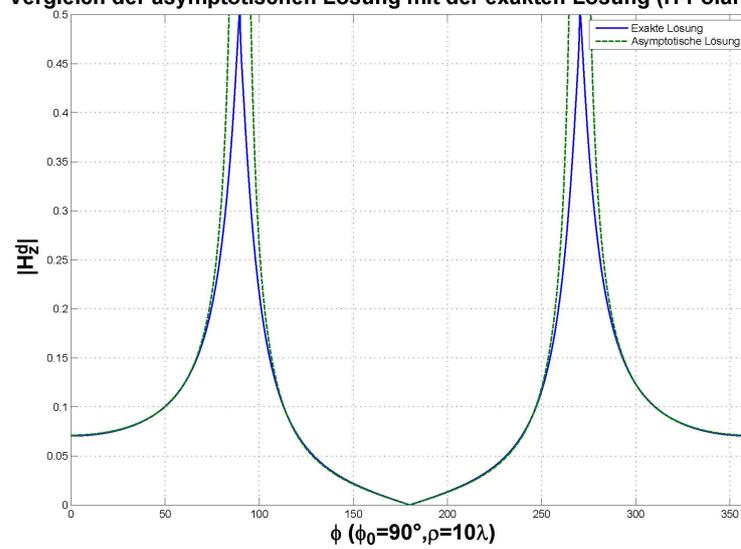
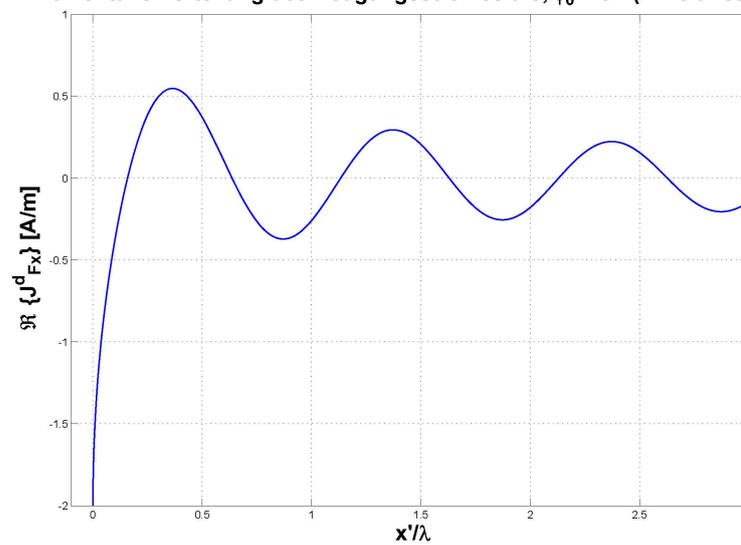


Abbildung E.11: Vergleich zwischen asymptotischer und exakter Lösung des Beugungsfeldes

Momentane Verteilung des Beugungsstromes $t=0$, $\phi_0=45^\circ$ (H-Polarisation)Abbildung E.12: Momentane Verteilung des Beugungsstromes zum Zeitpunkt $t = 0$. Der Einfallswinkel der primären Welle beträgt 45°

Anhang F

Fresnel-Integrale: Auswertungs- und Umrechnungsformeln

Mit der Substitution $t \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} t$ lässt sich das „modifizierte“ FRESNEL-Integral in das „übliche“ FRESNEL-Integral umrechnen ([Bor94], S. 1):

$$F_1(x) = \int_x^\infty e^{it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{\frac{2}{\pi}} x}^\infty e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\underbrace{\int_0^\infty e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt}_{F(0)=\frac{i+1}{2}} - \underbrace{\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}} x} e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt}_{F(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x)} \right) \quad (\text{F.1})$$

Dabei ist das FRESNEL-Integral F wie folgt definiert:

$$F(x) = \int_0^x e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt + i \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt = C(x) + i S(x) \quad (\text{F.2})$$

Zur Auswertung des FRESNEL-Integrals bestehen neben der numerischen Auswertung des Integrals noch folgende Möglichkeiten:

Darstellung des Fresnel-Integrals durch unendliche Reihen

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} x^{4n+1}}{2^{2n} (2n)! (4n+1)} \quad ([AS65], 7.3.11, S. 301) \quad (F.3)$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} x^{4n+3}}{2^{2n+1} (2n+1)! (4n+3)} \quad ([AS65], 7.3.13) \quad (F.4)$$

Aufgrund der begrenzten Darstellbarkeit großer Zahlen im Rechner, ist die Reihendarstellung nur für Argumente $x \leq 4.5$ geeignet, wie in Abb. F.1 gezeigt wird.

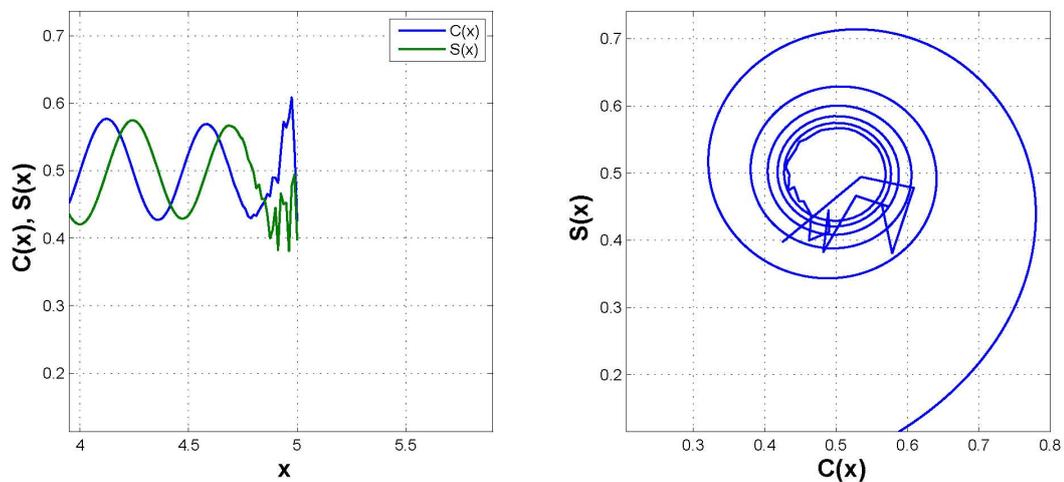


Abbildung F.1: Grenzen der numerischen Berechenbarkeit der FRESNEL-Integrale in ihrer Reihendarstellung

Darstellung des Fresnel-Integrals durch rationale Hilfsfunktionen

$$C(x) = \frac{1}{2} + f(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) - g(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \quad ([AS65], 7.3.9, \text{S. } 301) \quad (\text{F.5})$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - f(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) - g(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \quad ([AS65], 7.3.10) \quad (\text{F.6})$$

wobei die beiden rationalen Hilfsfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ wie folgt definiert sind:

$$f(x) = \frac{1 + 0.926x}{2 + 1.792x + 3.104x^2} + \epsilon(x) \quad ([AS65], 7.3.32, \text{S. } 302) \quad (\text{F.7})$$

$$g(x) = \frac{1}{2 + 4.142x + 3.492x^2 + 6.670x^3} + \epsilon(x) \quad ([AS65], 7.3.33) \quad (\text{F.8})$$

Dabei wird ein maximaler Fehler von $|\epsilon(x)| \leq 2 \times 10^{-3}$ garantiert.

Die angegebenen rationalen Hilfsfunktionen sind nur für positive Argumente definiert. Im Falle negativer Argumente macht man von den folgenden Antisymmetrie-Eigenschaften der FRESNEL-Integrale gebrauch:

$$C(-x) = -C(x) \quad , \quad S(-x) = -S(x) \quad (\text{F.9})$$

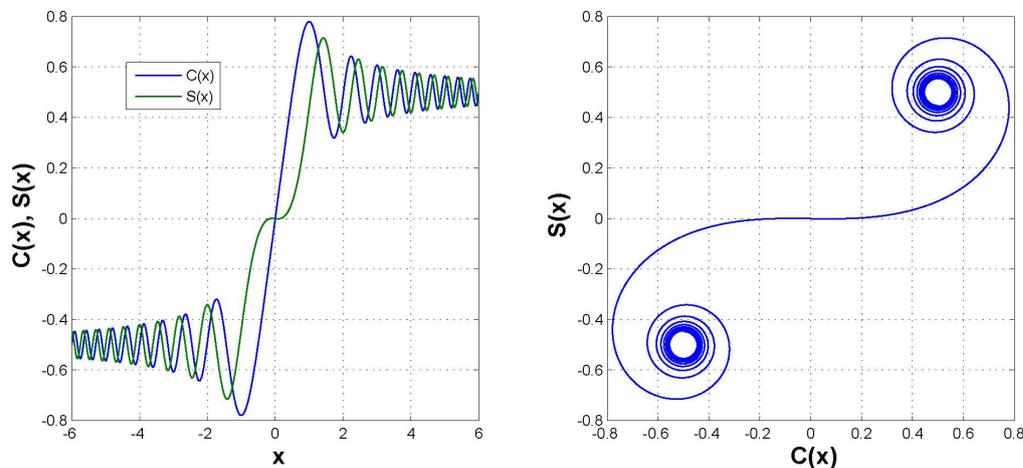


Abbildung F.2: FRESNEL-Integrale, berechnet mittels rationaler Hilfsfunktionen

Anhang G

Die Kantenbedingung

Die hier dargebotene Herleitung der MEIXNERSchen Kantenbedingung orientiert sich an den Ausführungen in [VB91] (4.2, S. 118-121).

Abbildung G.1 zeigt das Szenario der Beugung einer E -polarisierten, ebenen Welle an einem zweidimensionalen Keil mit dem Öffnungswinkel α . Nahe der Keilkante

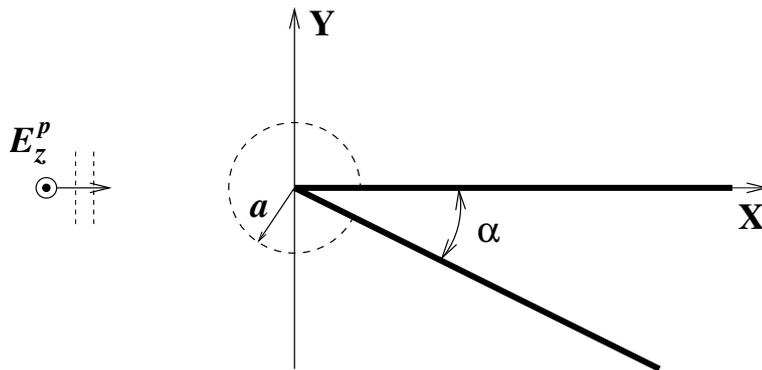


Abbildung G.1: Zweidimensionaler vollkommen leitender Keil.

lässt sich das gesamte elektrische Feld als Potenzreihe (in Potenzen des Abstandes von der Keilspitze) wie folgt darstellen:

$$E_z = \rho^\nu [a_0(\phi) + a_1(\phi) \rho + a_2(\phi) \rho^2 + \dots] \quad (\text{G.1})$$

Die Kantenbedingung fordert nun, dass die elektromagnetische Energie im Nahbereich der Kante (sowie in jedem anderen endlichen Bereich) endlich ist. Für die elektrische Energie bedeutet dies, dass das Integral über die elektrische Energiedichte (pro Längeneinheit in z -Richtung) in einem Zylinder um die Keilkante herum:

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi-\alpha} \int_0^a |E_z|^2 \rho \, d\rho d\phi \quad (\text{G.2})$$

existiert¹. Damit dies gewährleistet ist, muss der Exponent ν in Gl. (G.1) größer als -1 sein². Die magnetischen Feldkomponenten sind proportional zu $\text{rot}(E_z \vec{e}_z)$ und weisen daher nahe der Kante eine $\sim \rho^{\nu-1}$ Abhängigkeit auf. Da auch für sie das Integral über die Energiedichte existieren muss, muss der Exponent ν positiv sein. Damit ist eine untere Schranke für den Exponenten gesetzt ($0 < \nu$) und es gilt im Weiteren eine präzisere Bestimmung von ν zu ermitteln.

Durch Einsetzen des Potenzreihenansatzes (Gl. (G.1)) in die zweidimensionale HELMHOLTZ-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + k^2 E_z = 0 \quad (\text{G.3})$$

erhält man die Gleichung (aufgelöst nach den Potenzen von ρ):

$$\begin{aligned} \rho^{\nu-2} \left(\frac{\partial^2 a_0}{\partial \phi^2} + \nu^2 a_0 \right) + \rho^{\nu-1} \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial \phi^2} + (\nu+1)^2 a_1 \right) + \\ \rho^\nu \left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial \phi^2} + (\nu+2)^2 a_2 + k^2 a_0 \right) + \dots = 0 \quad (\text{G.4}) \end{aligned}$$

Zur Erfüllung dieser Gleichung, bei variablem ρ , müssen alle Koeffizienten (in den großen runden Klammern) gleich Null sein. Da wir uns nur für den Term niedrigster Ordnung interessieren, genügt die Betrachtung des ersten Koeffizienten (der Potenz $\rho^{\nu-2}$):

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial \phi^2} + \nu^2 a_0 = 0 \quad \implies \quad a_0 = C_1 \sin(\nu\phi) + C_2 \cos(\nu\phi) \quad (\text{G.5})$$

Das Verschwinden des tangentialen elektrischen Feldes auf der Keiloberfläche ($\phi = 0, \beta$) impliziert die Lösung:

$$a_0 = C_1 \sin(\nu_n \phi) \quad \text{mit} \quad \nu_n = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{n\pi}{2\pi - \alpha} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{G.6})$$

wobei für die Singularität an der Kante wieder nur der kleinste Wert $\nu_1 = \pi/(2\pi - \alpha)$ (im Weiteren als ν bezeichnet) von belang ist. Es ist ersichtlich, dass ν mit

¹Von der Existenz eines bestimmten Integrals spricht man, falls der Grenzwert: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_{i-1}$ unabhängig von der Wahl von ξ_i und x_i existiert.

²Für die Betrachtung der Nahumgebung der Kante ($\rho \ll 1$), ist nur der Term niedrigster Ordnung von belang, da die Terme höherer Ordnungen bezüglich des Singulärverhaltens unkritisch sind. Für Bereiche fernab der Kante ($\rho \gg 1$) jedoch, müssten diese Terme daraufhin bestimmt werden, dass die elektromagnetische Energie auch dort endlich bleibt.

dem Öffnungswinkel des Keils ansteigt. Den kleinsten Wert $\nu = 0.5$ besitzt er im Fall der leitenden Halbebene, $\nu = 1$ für den Fall des leitenden Halbraumes, während er für überstumpfe Winkel Werte größer als 1 erreicht. Abbildung G.2 zeigt die Abhängigkeit des Exponenten ν von dem Öffnungswinkel des Keils α . Aus

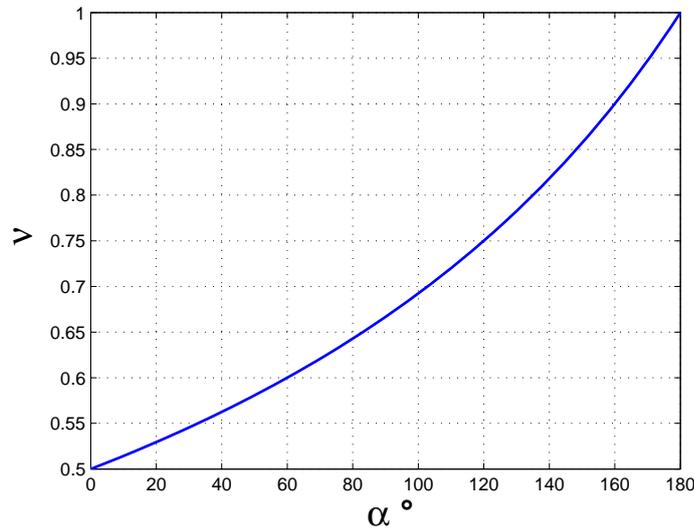


Abbildung G.2: Abhängigkeit des Singularitätsexponenten ν vom Öffnungswinkel des Keiles α

den Gln. (G.1), (G.6) und der MAXWELLSchen Gleichung $\text{rot } \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H}$ ³ lassen sich die elektromagnetischen Felder in erster Näherung (in Kantenumgebung) wie folgt angeben:

$$E_z = C_1 \rho^\nu \sin(\nu\phi) \quad , \quad \vec{H} = \frac{C_1}{i\omega\mu_0} \frac{\nu}{\rho^{1-\nu}} [\vec{e}_\rho \cos(\nu\phi) - \vec{e}_\phi \sin(\nu\phi)] \quad (\text{G.7})$$

Für den Fall einer H -polarisierten, ebenen Welle kann eine ähnliche Untersuchung durchgeführt werden. Sie würde für die elektromagnetischen Felder folgende Ausdrücke zu Tage fördern:

$$H_z = C_2 \rho^\nu \cos(\nu\phi) + \text{const.} \quad , \quad \vec{E} = \frac{C_2}{i\omega\epsilon_0} \frac{\nu}{\rho^{1-\nu}} [\vec{e}_\rho \sin(\nu\phi) + \vec{e}_\phi \cos(\nu\phi)] \quad (\text{G.8})$$

Aus den Gln. (G.7) und (G.8) ist zu entnehmen, dass die zur Keilkante parallelen Feldkomponenten an der Kante endliche Werte besitzen (H_z) bzw. verschwinden (E_z), während alle zur Keilkante senkrechten Feldkomponenten, im Falle eines Öffnungswinkels ($\alpha < 180^\circ$), an der Kante ein singuläres Verhalten aufweisen.

³Hierbei ist die Festlegung von $e^{-i\omega t}$ als harmonischen Zeitfaktor zu beachten.

**Diskussion der Flächenstromdichte auf der Keiloberfläche in der Kanten-
umgebung:** Für eine beliebig linear polarisierte, ebene, einfallende Welle lässt
sich die Flächenstromdichte aus den magnetischen Feldkomponenten in den Gln.
(G.7) und (G.8) wie folgt berechnen:

$$\vec{J}_F = \vec{n} \times \vec{H} = \vec{e}_\rho C_2 \rho^\nu - \vec{e}_z \frac{C_1}{i\omega\mu_0} \frac{\nu}{\rho^{1-\nu}} \quad (\phi = 0, \beta) \quad (\text{G.9})$$

wobei im Falle der Halbebene ($\beta = 2\pi$) beide Keilflächen zu einer einzigen Fläche
mit doppelter Flächenstromdichte „verschmelzen“. Während die zur Kante senk-
rechte Flächenstromdichte an der Kante verschwindet, besitzt die zur Kante par-
allele Flächenstromdichte an der Kante eine Singularität. Die Integration dieser
Flächenstromdichte in ρ -Richtung:

$$\int_0^\rho \frac{d\rho}{\rho^{1-\nu}} = \frac{\rho^\nu}{\nu} \quad (\text{G.10})$$

zeigt jedoch, dass der Flächenstrom nahe der Kante mit $\sim \rho^\nu$ abnimmt und somit
keine Stromanhäufung an der Kante stattfindet.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen herzlich bedanken, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben.

Für die hervorragende Unterstützung und die überaus hilfreichen Ideen und Ratschläge gilt mein besonderer Dank meinem Betreuer Herrn Prof. Gerhard Mönich. Bei Herrn Prof. Heino Henke möchte ich mich für die intensive Begutachtung der Arbeit, insbesondere für seine kritischen Anmerkungen und Hinweise, herzlich bedanken. Auch Herrn Prof. Albrecht Oehler gilt ein besonderer Dank für seine Bereitschaft als externer Berichter meine Arbeit zu begutachten. Desweiteren möchte ich mich bei Herrn Prof. Klaus Petermann für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsausschusses recht herzlich bedanken.

Zum Schluss möchte ich mich bei meiner Frau und meinem Sohn bedanken für ihre Unterstützung, ihre Geduld und die Entbehrungen, die sie in dieser Zeit hinnehmen mussten.

Literaturverzeichnis

- [AS65] ABRAMOWITZ, Milton (Hrsg.) ; STEGUN, Irene A. (Hrsg.): *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover Publications, 1965. – Zuerst erschienen 1964, *National Bureau of Standards (USA)*. 1046 Seiten.
- [Bal97] BALANIS, Constantine A.: *Antenna Theory - Analysis and Design*. 2. Aufl. New York Chichester ... : John Wiley & Sons, 1997. – 941 Seiten.
- [BC50] BAKER, Bevan B. ; COPSON, E. T.: *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*. 2. Aufl. Oxford University Press, 1950. – 1. Aufl. erschienen 1939 bei Clarendon Press. 192 Seiten.
- [Bor94] BOROVNIKOV, V. A.: *Uniform Stationary Phase Method*. IEE Press, 1994 (Electromagnetic Waves Series 40)
- [Bou46] BOUWKAMP, C. J.: A Note on Singularities Occuring at Sharp Edges in Electromagnetic Diffraction Theory. In: *Physica* 12 (1946), Nr. 7, S. 467–473
- [BRT90] BHARTIA, P. ; RAO, K. V. S. ; TOMAR, R. S.: *Millimeter-Wave Microstrip and Printed Circuit Antennas*. Boston London : Artech House, 1990. – 322 Seiten.
- [BSMM00] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Aufl. Frankfurt a. M. : Harri Deutsch, 2000. – Russische Originalausgabe: I. N. Bronstein; K. A. Semendjajew, Moskau, 1977. 1191 Seiten.
- [BW75] BORN, Max ; WOLF, Emil: *Principles of Optics*. 5. Aufl. Oxford New York Toronto Sydney Braunschweig : Pergamon Press, 1975. – 808 Seiten.
- [Cop65] COPSON, E. T.: *Asymptotic Expansions*. Cambridge University Press, 1965 (Cambridge Tracts in Mathematics No. 55). – 120 Seiten.

- [DR08] DAHMEN, Wolfgang ; REUSKEN, Arnold: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 2008 (Springer-Lehrbuch). – 633 Seiten.
- [GGBB96] GUPTA, K. C. ; GARG, Ramesh ; BAHL, Inder ; BHARTIA, Parkash: *Microstrip Lines and Slotlines*. Boston London : Artech House, 1996. – 535 Seiten.
- [HB02] HUFF, G. H. ; BERNHARD, J. T.: Improvements in the Performance of Microstrip Antennas on Finite Ground Planes Through Ground Plane Edge Serrations. In: *IEEE Microwave and Wireless Components Letters* 12 (2002), Nr. 8, S. 308–310
- [Hen01] HENKE, Heino: *Elektromagnetische Felder - Theorie und Anwendung*. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 2001 (Springer-Lehrbuch). – 356 Seiten.
- [Hua83] HUANG, John: The Finite Ground Plane Effect on the Microstrip Antenna Radiation Patterns. In: *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* 31 (1983), Nr. 4, S. 649–653
- [Kel57] KELLER, Joseph B.: Diffraction by an Aperture. In: *J. Appl. Phys.* 28 (1957), Nr. 4, S. 426–444
- [Kel62] KELLER, Joseph B.: Geometrical Theory of Diffraction. In: *J. Opt. Soc. Am.* 52 (1962), Nr. 2, S. 116–130
- [Lee77] LEE, Shung-Wu: Comparison of Uniform Asymptotic Theory and Ufimtsev's Theory of Electromagnetic Edge Diffraction. In: *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* 25 (1977), Nr. 2, S. 162–170
- [Leh96] LEHNER, Günther: *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*. 3. Aufl. Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag, 1996 (Springer-Lehrbuch). – 638 Seiten.
- [Mei48] MEIXNER, Josef: Strenge Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe. In: *Zeitschrift für Naturforschung* 3a (1948), S. 506–518
- [Mei49] MEIXNER, Josef: Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Schirmen. In: *Annalen der Physik* 6 (1949), S. 2–9

- [MPM90] MCNAMARA, D. A. ; PISTORIUS, C. W. I. ; MALHERBE, J. A. G.: *Introduction to the Uniform Theory of Diffraction*. Boston London : Artech House, 1990. – 471 Seiten.
- [MS71] MOON, P. ; SPENCER, D. E.: *Field Theory Handbook - Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag, 1971. – 236 Seiten.
- [MS89] MÖNICH, G. ; SCHEFFER, N.: Impulse Radiation by Wire Bends. In: *IEEE Proc. of the 6th. International Conference on Antennas and Propagation ICAP '89*. Warwick, UK, 4. - 7. April 1989
- [NMI03] NAMIKI, Takefumi ; MURAYAMA, Yuichi ; ITO, Koichi: Improving Radiation-Pattern Distortion of a Patch Antenna Having a Finite Ground Plane. In: *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* 51 (2003), Nr. 3, S. 478–482
- [Nob58] NOBLE, B.: *Methods Based On The Wiener-Hopf Technique for the solution of partial differential equations*. Pergamon Press, 1958
- [Sim77] SIMONYI, Károly: *Theoretische Elektrotechnik*. 6. Aufl. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1977 (Hochschulbücher für Physik, Bd. 20)
- [Som96] SOMMERFELD, A.: Mathematische Theorie der Diffraction (Habilitationsschrift). In: *Mathematische Annalen* 47 (1896), S. 317–374
- [Som89] SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik. Band IV: Optik*. 3. Aufl. Frankfurt a. M. : Verlag Harry Deutsch, 1989. – Revidiert von Fritz Bopp und Joseph Meixner. 336 Seiten.
- [Ufi71] UFIMTSEV, P. Y.: Asymptotic Theory of Diffraction at the Open End of a Waveguide. In: *Electromagnetic Wave Theory* (1971), S. 107–113. – Preprints of 1971 URSI Symposium. [in Russian].
- [Ufi03] UFIMTSEV, P. Y.: *Theory of Edge Diffraction in Electromagnetics*. 1. Aufl. Encino, California : Tech Science Press, 2003. – Herausgegeben von Andrew J. Terzuoli. Aus dem Russischen von Richard D. Moore. 413 Seiten.
- [VB91] VAN-BLADEL, J.: *Singular Electromagnetic Fields and Sources*. IEEE Press, 1991 (IEEE Series on Electromagnetic Wave Theory). – 237 Seiten.
- [WDL90] WILLIAMS, Jeffery T. ; DELEGADO, Heriberto J. ; LONG, Stuart A.: An Antenna Pattern Measurement Technique for Eliminating the

- Fields Scattered from the Edges of a Finite Ground Plane. In: *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* 38 (1990), Nr. 11, S. 1815–1822
- [Wei69] WEINSTEIN, Lev A.: *The Theory of Diffraction and the Factorization Method (Generalized Wiener-Hopf-Technique)*. Boulder, Colorado : Golem Press, 1969. — Russische Originalausgabe: Moskau, 1966. Übersetzung aus dem Russischen: Peter Beckmann. 411 Seiten.
- [Yam96] YAMASHITA, Eikichi (Hrsg.): *Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems*. Bd. 2. Artech House, 1996