

Stabilitätsverhalten und Anwendungen der transienten Randelementmethode in der Akustik

vorgelegt von

Dipl.-Ing.

Michael Stütz

aus Stendal

von der Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme

der Technischen Universität Berlin

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaft

-Dr.-Ing.-

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. G. Holbach

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. M. Möser

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. M. Ochmann

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 25. November 2013

Berlin 2014

D83

Danksagung

Besonders möchte ich mich bei Prof. Möser und Prof. Ochmann bedanken. Prof. Ochmann schlug mir dieses interessante Thema vor und gab mir die Möglichkeit während meiner Tätigkeit als Forschungsassistent an der Beuth Hochschule daran zu arbeiten. Meinem Doktorvater Prof. Möser danke ich für die Betreuung und für die Möglichkeit die Dissertation am Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik als wissenschaftlicher Mitarbeiter weiterführen zu können.

Fachlichen Rat sowie professionelle Unterstützung erhielt ich natürlich auch von meinen Kollegen der Beuth Hochschule sowie der Technischen Universität Berlin. Auch hierfür mein herzlicher Dank. Die Möglichkeit die Rechensysteme der Projektgruppe Computational Acoustics benutzen zu dürfen, ermöglichte so manche größere Berechnung, welche sonst nicht realisierbar gewesen wäre.

Danken möchte ich auch der Hans und Eugenia Jütting - Stiftung, welche mir mit einem Stipendium ermöglichte mein Promotionsvorhaben zu beginnen.

Ein besonderer Dank geht an meine Eltern, mit deren langjähriger verständnisvoller Unterstützung ich überhaupt so weit kommen konnte.

Meiner Frau danke ich für Ihre Unterstützung und Liebe.

Abstract

For the simulation of transient radiation and scattering phenomena in the exterior the time domain boundary element method (TD-BEM) is a promising method. However, due to the known stability problems, the method is not being widely used. Numerical evidence shows that this unstable behavior is caused by the internal resonances of the structure. The internal resonances of the structure affect the exterior sound field, which may lead to inaccurate results or even unstable behaviour. The magnitude of the influence depends on β , which describes the ratio of time step size Δt and element size h . While for $\beta < 0.8$ results are generally unstable, for $\beta > 0.8$ an instability only occurs when the sampling frequency $f_s = 1/\Delta t$ coincides with an internal resonance.

The frequency domain boundary element method also has to address the problematic internal resonances because in these frequencies the integral equations have no unique solution (non-uniqueness problem). The CHIEF method (combined Helmholtz integral equation formulation) by Schenk is a known approach that places additional points, the so-called CHIEF points, in the interior of the structure. The use of the CHIEF method in the time domain does not show the desired results if, as usual, the solution is computed stepwise in time. But applying the method to the non-iterative solution shows a significant reduction of the internal resonances and their influence on the exterior sound field. In the numerically less complex stepwise calculation, the time dependence of the CHIEF points is lost and the CHIEF method does not show the stabilising effect.

For interior problems the TD-BEM shows a different instability behavior. The excitation of the so-called pneumatic mode, which presents the equilibrium sound pressure of the interior, causes a linear increase of the sound pressure. This can be avoided by a prior filtering of the boundary conditions with a high pass filter.

Keywords: Boundary Element Method, BEM, time domain, transient

Zusammenfassung

Für die Simulation transienter Abstrahl- und auch Streuphänomene im Außenraum ist die Zeitbereichs-Randelementemethode (TD-BEM) eine erfolgversprechende Methode. Aufgrund der bekannten Stabilitätsprobleme ist die Methode jedoch wenig verbreitet. Die Instabilität wird durch die Innenraumresonanzen der Struktur erzeugt, was numerisch nachgewiesen werden konnte. Die Stärke des Einflusses der Innenraumresonanzen auf den Außenraum hängt stark vom Parameter β ab, welcher das Verhältnis von Zeitschrittgröße Δt und Kantenlänge der Oberflächenelemente h beschreibt. Während für $\beta < 0,8$ generell instabile Ergebnisse zu erwarten sind, tritt für $\beta > 0,8$ eine Instabilität nur auf, wenn die Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ mit einer Innenraumresonanz zusammenfällt.

Auch bei der Frequenzbereichs-Randelementemethode sind die Innenraumresonanzen problematisch, da in diesen Frequenzen die Integralgleichungen keine eindeutige Lösung haben (Non-uniqueness Problem). Die CHIEF-Methode (combined Helmholtz integral equation formulation) von Schenk ist ein bekannter Lösungsansatz, bei dem zusätzlich zu den Kollokationspunkten sogenannte CHIEF-Punkte in dem Innenraum platziert werden, in denen der Schalldruck Null gesetzt wird. Dieser Ansatz kann auch im Zeitbereich angewendet werden. Allerdings kommt es bei der üblichen schrittweisen Berechnung des Schalldrucks zu keiner Stabilisierung der Simulationsergebnisse. Bei der Lösung des Schalldruckverlaufes in einem Schritt konnte in allen betrachteten Fällen eine Stabilisierung erreicht werden. Bei der numerisch weniger aufwendigen schrittweisen Berechnung geht die Zeitabhängigkeit des Einflusses der CHIEF-Punkte verloren, so dass die CHIEF-Methode dort nicht die gewünschte Wirkung zeigt.

Bei der Lösung von Innenraumproblemen weist die TD-BEM ein anderes Instabilitätsverhalten auf. Mit Anregung der sogenannten Pneumatischen Mode, welche den Ruheschalldruck des Innenraums beschreibt, kommt es zu einem linearen Anstieg des Schalldrucks. Dies kann durch eine vorherige Filterung der Randbedingungen mit einem Hochpassfilter verhindert werden.

Schlagwörter: Randelementmethode, BEM, Zeitbereich, CHIEF, transient

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
1.1	Stand der Forschung	11
1.2	Ziele der Arbeit	13
2	Theoretische Grundlagen	15
2.1	Wellengleichung	15
2.2	Herleitung der Kirchhoff Integralgleichung	17
2.2.1	Kirchhoff-Helmholtz-Integral	18
2.2.2	Übergang zum Zeitbereich	22
3	Numerische Implementierung	27
3.1	Ansatzfunktionen	28
3.1.1	Zeitdiskretisierung	28
3.1.2	Ortsdiskretisierung	30
3.2	Kollokationsmethode	32
3.2.1	Matrix-Aufstellung	32
3.3	Lösungsverfahren	35
3.4	Integrationsmethoden	37
3.4.1	Numerische Integration	37
3.4.2	Analytische Integration	40
4	Stabilitätskriterien und Parameter	45
4.1	Stabilität, Konsistenz und Konvergenz	45
4.2	Fehlerquellen	47
4.3	Relevante Parameter	48
4.4	Kondition des Gleichungssystems	49

5	Abstrahlprobleme im Außenraum	55
5.1	Analytische Testfälle Monopol und Dipol	55
5.2	Spektrum und Spektralradius des Verfahrensoperators	61
5.2.1	Berechnung des Spektrums und Spektralradiuses	63
5.3	Stabilitätsbetrachtungen am Kugelmodell	65
5.3.1	Abhängigkeit vom Parameter β	65
5.3.2	Abhängigkeit von der Abtastfrequenz und der räumlichen Diskretisierung	71
5.3.3	Abhängigkeit von der Helmholtz-Zahl	75
5.3.4	Abhängigkeit von der Integrationsgenauigkeit	80
5.4	Dämpfung der Instabilität	81
5.5	CHIEF-Methode	87
5.5.1	Ansatz der CHIEF-Methode	88
5.5.2	Anzahl benötigter CHIEF-Punkte	93
5.5.3	Toleranz des LSQR-Verfahrens	98
5.5.4	Zeitschrittgröße	102
5.6	Dual-Surface-Methode	103
5.7	Anwendungsbeispiele	106
5.7.1	Schallabstrahlung einer Flamme	106
5.7.2	Schallabstrahlung eines Dodekaederlautsprechers	109
6	Streuprobleme im Außenraum	115
6.1	Langzeitstabilität	117
6.2	CHIEF-Methode	119
7	Streuprobleme im Innenraum	121
7.1	Testfall Rechteckraum	122
7.2	Spektrum und Spektralradius	123
7.3	Stabilisierungsansätze	126
7.4	Ergebnisse	130
8	Ergebnisse	135
9	Ausblick	139
A	Schnittfälle bei der analytischen Integration	141

Kapitel 1

Einleitung

Begünstigt durch die rasante Computerentwicklung der letzten Jahrzehnte ist die numerische Simulation auch in der Akustik zu einem wichtigen Entwicklungswerkzeug geworden. Im Gegensatz zu aufwendigen Messreihen können mit numerischen Studien schnell und einfach verschiedene Auslegungsparameter variiert und optimiert werden. So lassen sich kosten- und zeitintensive Experimente durch die rechnergestützte Simulation wesentlich reduzieren. Dauer und Kosten des gesamten Entwicklungsprozesses können dadurch reduziert werden. Zwingende Voraussetzung für den praktischen Einsatz sind vertretbare Simulationszeiten und natürlich eine hohe Zuverlässigkeit des numerischen Verfahrens.

Die am weitesten verbreitete Methode für die numerische Simulation akustischer Probleme ist die Finite Elemente Methode (FEM), die sich insbesondere für abgeschlossene Systeme, wie z.B. Innenräume, sehr gut eignet. Der Vorteil der FEM ist, dass auch Nichtlinearitäten ohne großen Aufwand berücksichtigt werden können. Jedoch muss das ganze Gebiet diskretisiert werden, was zu recht großen Gleichungssystemen führt und die Behandlung von unendlichen Gebieten, wie sie bei Außenraumproblemen auftreten, nicht ohne weiteres möglich ist.

Für Außenraumprobleme wird deshalb häufig die Boundary Element Methode (BEM) eingesetzt, da sie ein Problem allein durch Randgrößen beschreiben kann und somit nur eine Diskretisierung des Randes erfolgen muss. Im dreidimensionalen Fall bedeutet das, dass nicht das dreidimensionale Gebiet sondern nur die zweidimensionale Oberfläche diskretisiert werden muss. Dies

reduziert die Größe der Gleichungssysteme erheblich. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass bei Berechnungen im Außenraum die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung bereits im Ansatz erfüllt ist. Im deutschsprachigen Gebiet wird die Boundary Element Methode auch als Randelementmethode bezeichnet. Aber da die Bezeichnung Boundary Element Methode gebräuchlicher ist, wird in dieser Arbeit die englische Bezeichnung verwendet.

Berechnungen der Boundary Element Methode werden üblicherweise im Frequenzbereich ausgeführt, d.h. jede Frequenz muss einzeln berechnet werden. Dies beschränkt die Anwendung der Methode auf die Simulation von stationären Vorgängen. Für die Simulation transienter Schallphänomene muss die Berechnung im Zeitbereich durchgeführt werden, wie z.B. Motorparameter bei Beschleunigung, Kurven- und Bremsenquietschen oder Bewegungen von Quellen. Die Berechnung im Zeitbereich erfolgt schrittweise in der Zeit und der so erhaltene Zeitverlauf liefert Ergebnisse über einen ganzen Frequenzbereich. Allerdings weist die Zeitbereichs-BEM (TD-BEM, Time Domain BEM) Schwächen in der numerischen Stabilität auf.

Bei BEM Rechnungen im Frequenzbereich (FD-BEM, Frequency Domain BEM) ist der Einfluss der Innenraummoden ein bekanntes Problem. Dort kann es bei der Berechnung von unendlichen Außenräumen zu einer Singularität der Matrix kommen, die durch die Innenraummoden der Struktur verursacht wird. In den sogenannten irregulären Frequenzen haben die Integralgleichungen dann keine eindeutige Lösung (Non-uniqueness Problem). Bekannte Lösungsansätze im Frequenzbereich sind die CHIEF-Methode (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) von Schenck [1] aus dem Jahr 1968 und die Burton-Miller Methode [2] von 1971.

Die Erkenntnis, dass der Einfluss der Innenraummoden auch im Zeitbereich problematisch ist, erfolgte allerdings erst viel später. Ergin et al. [3] zeigten 1999 als erster, dass die Burton-Miller Methode für Streuprobleme im Zeitbereich erfolgreich zur Stabilisierung eingesetzt werden kann. Dieser Ansatz wurde von anderen Veröffentlichungen wie z.B. Chappell et al. [4] und Hargreaves und Cox [5] benutzt und die stabilisierende Wirkung bestätigt. Chappell et al. [4] erweiterten den Ansatz von Ergin [3], so dass auch Abstrahlprobleme berechnet werden können. Der Ansatz der Burton-Miller Methode besteht darin, die der Methode zugrunde liegende Integralgleichung mit ihrer Ableitung in

Richtung der Flächennormalen zu kombinieren. Der Nachteil ist, dass dabei hypersinguläre Integrale auftreten und die Methode dadurch rechnerisch aufwändiger wird. Die CHIEF-Methode fand bis jetzt noch keine Anwendung im Zeitbereich. Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist, die Anwendung dieser Methode in der TD-BEM zu untersuchen.

1.1 Stand der Forschung

Die ersten Algorithmen zur Lösung transienter Probleme gab es schon sehr früh. 1951 veröffentlichten Keller und Blank [6] einen Artikel über die Streuung an einem unendlichen Keil. 1953 beschrieben Mindlin und Bleich [7] ein Modell zur Streuung an einem Zylinder und 1960 beschrieb Barakat [8] die Streuung an einer Kugel. Alle diese Ansätze benutzten Randbedingungen und Randgrößen, aber weder Raum noch Zeit wurden diskretisiert. Somit fallen diese Algorithmen eher unter die Rubrik Randintegrallöser.

Die ersten Algorithmen, welche die Oberfläche diskretisierten und somit die Grundlagen für die Zeitbereichs-BEM bilden, wurden 1960 von Friedman und Shaw [9] und später 1968 von Cruse und Rizzo [10] veröffentlicht. Aber auch diese Algorithmen galten nur für festgelegte Oberflächenformen (Zylinder). Den ersten Algorithmus der für völlig frei wählbare Oberflächenformen galt, wurde 1967 von Mitzner [11] veröffentlicht. Seitdem wurden viele Arbeiten veröffentlicht, welche zur Entwicklung eines allgemeingültigen und praxisnahen Zeitbereichs-Algorithmus beigetragen haben. Da eine ausführliche Darstellung dieser Entwicklung nicht Thema dieser Arbeit ist und den Rahmen sprengen würde, werden im folgenden Text nur einige wichtige Arbeiten genannt.

Viele Versuche, wie von Dohner et al. [12], kamen nicht über wenige Zeitschritte hinaus. Dies lag wahrscheinlich auch an der recht geringen Rechenkapazität die zu dieser Zeit zur Verfügung stand. Mit zunehmender Verbreitung leistungsfähiger Rechner stieg das Interesse an numerischen Methoden wie der TD-BEM und somit auch die Anzahl der Publikationen zu diesem Thema.

Die Doktorarbeit von Mansur [13] aus dem Jahr 1983 zählt zu den ersten ausführlichen Arbeiten zum Thema TD-BEM. Mansur beschreibt die Grundlagen der Methode im Bereich der Elastodynamik und der skalaren Wellengleichung. Allerdings beschränkt sich diese Arbeit auf den zweidimensionalen Fall.

Eine der ersten Doktorarbeiten aus dem deutschsprachigen Raum von Meise [14] aus dem Jahr 1990 vergleicht die Zeitbereichs- und die Frequenzbereichs-BEM für 3D-Gebiete miteinander. Er untersucht unter anderem, wie sich unterschiedliche Zeitansätze auf die Stabilität und die Genauigkeit des Verfahrens auswirken. Zur Stabilisierung der TD-BEM benutzt er die ξ -Kollokation, welche die Instabilität aber nur dämpft und somit das Auftreten zeitlich verzögert. In der Doktorarbeit von Jäger von [15] 1994 liegt der Schwerpunkt auf der Behandlung von bewegten Schallquellen. Jäger benutzt den Ansatz von Figueiredo et al. [16], um das Verfahren zu stabilisieren. Interessant ist ihr Vergleich der Punkt-Kollokation und des Gallerkin-Verfahrens bezüglich der Konvergenz und des Rechenaufwands. Jäger kommt zu dem Schluss, dass das Gallerkin-Verfahren in dem von ihr betrachteten Fall zwar eine doppelt so hohe Konvergenzordnung hat, aber die Rechenzeit auf Grund der höheren Komplexität des Verfahrens auf das 4-5 fache ansteigt. Weiterhin zeigt sie, dass durch Verfeinerung der Ortsdiskretisierung das Kollokationsverfahren eine dem Gallerkin-Verfahren äquivalente Konvergenz erreichen kann, wobei der Rechenaufwand im Vergleich zum Gallerkin-Verfahren geringer ausfällt.

Zur selben Zeit erschienen auch etliche Veröffentlichungen auf Französisch von Bamberger und Ha-Duong [17][18][19]. Sie basieren auf dem Gallerkin-Verfahren. Touffie Abboud und Isabelle Terrasse von der Ecole Polytechnique entwickelten das Verfahren weiter, welches zur einzigen dem Autor bekannten kommerziell verfügbaren Anwendung führte [20]. Ostermann [21] benutzt den Ansatz von Bamberger und Ha-Duong und untersucht wie die numerische Lösung der Integrale die Ergebnisse beeinflussen. Sie zeigt, dass neben den üblichen Singularitäten auch sogenannte Lichtkegel-Singularitäten auftreten können. Diese Singularitäten sind geometrischer Natur, welche bei der Kollokationsmethode nicht auftreten.

Ein anderer Ansatz ist die Convolution Quadrature Methode (CQM) von Lubich [22][23]. Bei der CQM wird der Zeitschritt-Algorithmus in den Laplace-Bereich transformiert und in einem zweiten Schritt wieder zurück in den Zeitbereich. Ein großer Vorteil der Methode ist, dass auch Dämpfungen sehr leicht berücksichtigt werden können. Ein weiterer Aspekt ist, dass bessere Stabilitätsverhalten im Vergleich mit den obig genannten Formulierungen. Zur CQM sind eine ganze Reihe von Veröffentlichungen erschienen, wie z.B. Hackbusch

et al. [24] und Banjai und Schanz [25], wovon letztere einen guten Überblick über die Methode gibt.

1.2 Ziele der Arbeit

Obwohl die TD-BEM kontinuierlich weiterentwickelt wurde, ist das Problem der Instabilität noch nicht vollständig geklärt worden. Die Ansätze von Bamberger und Ha-Duong [17][18] und auch die Convolution Quadrature Methode sind mathematisch stabil. Jedoch sind diese Ansätze wesentlich komplizierter und somit auch rechenintensiver. Insbesondere die Arbeit von Ostermann [21] zeigt, dass die mathematische Stabilität einer Methode nicht ausreicht und die auftretenden Integrale sehr sorgfältig gelöst werden müssen, um auch numerische Stabilität zu erreichen.

Obwohl die Kollokationsverfahren als am anfälligsten für Instabilitäten gelten, soll in dieser Arbeit dieser recht einfache Ansatz eingehend auf sein Stabilitätsverhalten hin untersucht werden. Weiterhin soll überprüft werden, ob durch eine Erweiterung der Methode, wie z.B. mit der CHIEF-Methode, die Stabilität verbessert werden kann.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Nachdem in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen der TD-BEM betrachtet werden, wird in Kapitel 3 die numerische Implementierung behandelt. Insbesondere die Diskretisierung von Ort und Zeit und das Aufstellen des sich aus der Kollokation ergebenden Gleichungssystems werden beschrieben. Ein wesentlicher Punkt bei der Matrix-Aufstellung ist die Berechnung der Integrale, was im Zeitbereich komplizierter als im Frequenzbereich ist, da hier besondere Integrationsgrenzen zu berücksichtigen sind.

In Kapitel 4 werden die Stabilitätskriterien, Fehlerquellen und die Parameter diskutiert, welche das Verfahren ausschlaggebend beeinflussen. In den darauf folgenden Kapiteln werden anhand analytisch lösbarer Testfälle die Einflüsse dieser Parameter auf die Stabilität des Verfahrens untersucht. Kapitel 5 betrachtet Abstrahlprobleme im Außenraum, Kapitel 6 Streuprobleme im Außenraum und Kapitel 7 Streuprobleme im Innenraum. Die Unterteilung ist

notwendig, da es bei diesen Fällen zu einem unterschiedlichen Stabilitätsverhalten der TD-BEM kommt.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Behandlung von Außenraumproblemen, insbesondere der Schallabstrahlung. Die BEM wird bei solchen Problemstellungen bevorzugt angewendet, da bei Außenraumproblemen die BEM gegenüber der FEM die schon genannten Vorteile aufweist.

Am Ende der Arbeit werden die Ergebnisse noch einmal zusammengefasst und es wird dargestellt, wie diese Arbeit weitergeführt werden könnte.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Die BEM ist ein numerisches Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Dabei ist der Ausgangspunkt nicht eine Differential-, sondern eine Integralgleichung. Hierzu muss die partielle Differentialgleichung in eine Integralgleichung umgewandelt werden, welche die Eigenschaften des gesamten Gebietes abbildet. Diese Integralgleichung beschreibt die Beziehung zwischen dem physikalischen Wert eines im analysierten Bereich liegenden Punktes und der physikalischen Werte der Punkte am Rand. Mit der Randintegralgleichung und den vorgeschriebenen Randbedingungen kann man die unbekannt physikalischen Werte am Rand ermitteln. Wenn man alle physikalischen Werte am Rand ermittelt hat, kann man mit Hilfe der Integralgleichung die physikalischen Werte eines beliebigen Punktes rechnen.

Eine analytische Lösung ist in der Regel unmöglich, da die Randbedingungen und die Geometrie praktischer Anwendungsfälle meistens zu kompliziert sind. Deswegen werden numerische Methoden angewendet, um solche Probleme zu lösen.

2.1 Wellengleichung

Zur Herleitung der Wellengleichung werden folgende Grundgleichungen benötigt:

- Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

- Euler-Gleichung

$$\varrho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } p \quad (2.2)$$

Die Massenerhaltung wird durch die Kontinuitätsgleichung beschrieben und die Euler-Gleichung beschreibt die Impulserhaltung. Beide Erhaltungsgleichungen werden hier als gegeben vorausgesetzt, können aber leicht aus einer Bilanzierung der Masse und des Impulses an einem Kontrollvolumen hergeleitet werden. Zunächst müssen die Gleichungen (2.1) und (2.2) linearisiert werden. Hierzu werden die Größen Druck p und Dichte ϱ in Gleich- und Schwankungsanteile zerlegt.

$$p = p_0 + p' \quad (2.3)$$

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho' \quad (2.4)$$

Eine Zerlegung der Schnelle v ist nicht notwendig, da vorausgesetzt wird, dass sich das Fluid in Ruhe befindet und somit $v_0 = 0$ ist. Durch Einsetzen der Gleichungen (2.3) und (2.4) in die Kontinuitätsgleichung (2.1) erhält man die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}) = 0. \quad (2.5)$$

Für die substantielle Ableitung der Euler-Gleichung (2.2) ergibt sich

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}. \quad (2.6)$$

Damit folgt für die Euler-Gleichung (2.2)

$$(\varrho_0 + \varrho') \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} \right] = -\text{grad}(p_0 + p') \quad (2.7)$$

und man erhält

$$\varrho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}(p'). \quad (2.8)$$

Um die Wellengleichung für den Schalldruck zu erhalten wird die Divergenz von der linearisierte Euler-Gleichung (2.8) gebildet

$$\varrho_0 \text{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{div} \text{grad}(p') = 0 \quad (2.9)$$

und die linearisierte Kontinuitätsgleichung (2.5) nach der Zeit abgeleitet

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} + \rho_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (2.11)$$

mit dem Laplace-Operator Δ . In einem idealen Medium, wie es hier vorausgesetzt wird, gilt folgende Druck-Dichte-Beziehung

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \varrho}. \quad (2.12)$$

Für die Druck-Dichte-Beziehung wird vorausgesetzt, dass der Druck nur von der Dichte abhängt.

$$p = p(\varrho) \quad (2.13)$$

Diese allgemeine Beziehung lässt sich über eine Taylorentwicklung linearisieren. Die ersten beiden Glieder der Taylorentwicklung von $p = p(\varrho)$ an der Stelle ϱ_0 lauten

$$p(\varrho) = p(\varrho_0) + (\varrho - \varrho_0) \frac{dp}{d\varrho}(\varrho_0) + \dots \quad (2.14)$$

Mit

$$c^2 = \frac{dp}{d\varrho}(\varrho_0) \quad (2.15)$$

erhält man die linearisierte Druck-Dichte-Beziehung

$$p' = \varrho' c^2. \quad (2.16)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.11) erhält man letztendlich die Wellengleichung für den Schalldruck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0. \quad (2.17)$$

Da im Rest der Arbeit ausschließlich der Wechselanteil des Drucks betrachtet wird, wird der Einfachheit halber darauf verzichtet dies explizit zu kennzeichnen. In Zukunft wird p anstelle von p' geschrieben.

2.2 Herleitung der Kirchhoff Integralgleichung

Für die BEM ist es erforderlich die Wellengleichung so umzuformen, dass die gesuchten Funktionen nur auf dem Rand des betrachteten Gebietes vorkommen. Ein möglicher Weg hierfür ist das Prinzip der gewichteten Residuen, wie ihn Meise [14] in seiner Arbeit beschreibt. Die Kirchhoff Integralgleichung lässt

sich auch etwas eleganter mit Hilfe der Dirac δ -Funktion herleiten (Jäger [15]). Der hier beschriebene Herleitung orientiert sich an der klassischen mathematischen Darstellungen, wie sie z.B. Ehrenfried [26] beschreibt. Dadurch wird die Herleitung zwar etwas umfangreicher aber auch anschaulicher. Die Integralgleichungen, die mit Hilfe dieser verschiedenen Verfahren hergeleitet werden, sind natürlich identisch.

Für die Herleitung der Kirchhoff Integralgleichung wird das akustische Potential ϕ eingeführt. Es ist ein formales Hilfsmittel, um Lösungen der Wellengleichung (2.17) einfach und elegant darstellen zu können. Aus dem akustischen Potential lassen sich die Größen Schnelle und Druck leicht berechnen.

$$\vec{v} = \text{grad}\phi \tag{2.18}$$

$$p = -\varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2.19}$$

Es kann gezeigt werden, dass das akustische Potential ϕ eine Lösung der Wellengleichung beschreibt und somit gilt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0. \tag{2.20}$$

2.2.1 Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Um die Wellengleichung zunächst einmal nur für eine Frequenz zu lösen, verwendet man einen harmonischen Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x})e^{j\omega t}, \tag{2.21}$$

wobei $\varphi(\vec{x})$ die komplexe Amplitude des akustischen Potentials $\phi(\vec{x}, t)$ darstellt. Eingesetzt in die Wellengleichung (2.17) ergibt sich die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \tag{2.22}$$

mit der Wellenzahl $k = \omega/c$. Eine Lösung der Helmholtz-Gleichung ist die Kugelwelle mit

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{r} = \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} e^{j\omega t}. \tag{2.23}$$

$r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ beschreibt den Abstand zwischen Quell- und Beobachtungspunkt. Das Kugelwellenfeld erfüllt die Wellengleichung überall außer am Quellpunkt

\vec{x}_0 , denn dort wird $r = 0$ und die Lösung besitzt eine Singularität. Für die komplexe Amplitude der Kugelwelle (2.23) erhält man

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.24)$$

Dies stellt eine Elementarlösung der Helmholtz-Gleichung (2.22) dar.

Wir betrachten nun ein abgeschlossenes Volumen V mit der Berandung Γ . Der Normalenvektor des Randes wird so definiert, dass er in das Volumen zeigt (Abbildung 2.1). Mit Hilfe des zweiten Greenschen Integralsatzes

$$\int_{\Gamma} \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_V (\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2) dV \quad (2.25)$$

lässt sich ein Zusammenhang zwischen einem Volumen und Oberflächenintegral herstellen, wenn die Felder $\varphi_1(\vec{x})$ und $\varphi_2(\vec{x})$ überall in V gegeben sind. Vorausgesetzt die Felder φ_1 und φ_2 sind zweimal differenzierbar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad} \varphi. \quad (2.26)$$

stellt die Normalableitung des Feldes φ an der Oberfläche in Richtung \vec{n} dar. Unter der Annahme, dass die Felder φ_1 und φ_2 zusätzlich auch die Helmholtz-Gleichung erfüllen, gilt

$$\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2 = \varphi_2 (-k^2 \varphi_1) - \varphi_1 (-k^2 \varphi_2) = 0 \quad (2.27)$$

und es folgt

$$\int_{\Gamma} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\Gamma. \quad (2.28)$$

Für das Feld φ_2 kann man nun die Elementarlösung (2.24) einsetzen. Hierbei muss jedoch vorher noch bedacht werden, dass die Elementarlösung im Punkt \vec{x}_0 nicht definiert ist und somit die Voraussetzung des Greenschen Integralsatzes nicht erfüllt sind. Man kann jedoch das Volumen so modifizieren, dass \vec{x}_0 herausfällt. Hierzu schneidet man eine kleine Kugel mit Mittelpunkt \vec{x}_0 und Radius a aus dem Volumen heraus und erhält

$$V_{neu} = V - V_k. \quad (2.29)$$

V_k bezeichnet das Volumen der herausgeschnittenen Kugel, wie in Abbil-

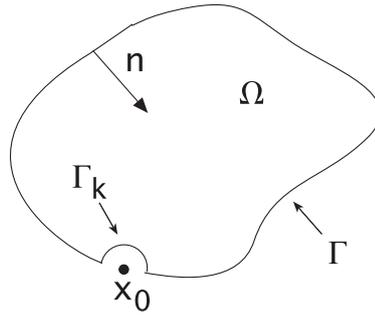


Abbildung 2.1: Punkt \vec{x}_0 auf dem Rand

dung 2.1 dargestellt. Für die Oberfläche gilt

$$\Gamma_{neu} = \Gamma + \Gamma_K. \quad (2.30)$$

Wenn man nun

$$\varphi_2(\vec{x}) = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (2.31)$$

in Gleichung (2.28) einsetzt erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_K} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) d\Gamma_K = \\ \int_{\Gamma} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_K} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\Gamma_K. \end{aligned} \quad (2.32)$$

In dem man den Kugelradius a gegen Null gehen lässt, lassen sich die Integrale über die Kugeloberfläche berechnen. Da der Normalenvektor \vec{n} auf der Kugeloberfläche immer in Richtung des Radius r zeigt gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.33)$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = - \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} \right) e^{-ikr}. \quad (2.34)$$

Auf der linken Seite der Gleichung (2.32) ergibt sich für das Γ_K -Integral

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Gamma_K} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) d\Gamma_K &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[-4\pi a^2 \left(\frac{1}{a^2} + i \frac{k}{a} \right) e^{-ika} \right] \varphi_1(\vec{x}_0) \\ &= -4\pi \varphi_1(\vec{x}_0) \end{aligned} \quad (2.35)$$

da sich die Singularität gerade aufhebt und sich somit ein endlicher Grenzwert ergibt. Es gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[-4\pi a^2 \frac{e^{-ika}}{a} \right] = 0 \quad (2.36)$$

und wegen der Beschränktheit von $\partial\varphi_1/\partial n$ folgt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Gamma_K} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} d\Gamma_K = 0. \quad (2.37)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.32) ergibt sich somit

$$4\pi d(\vec{x}_0)\varphi_1(\vec{x}_0) = - \int_{\Gamma} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) d\Gamma. \quad (2.38)$$

Der Index von φ_1 wurde weggelassen, da er nicht mehr benötigt wird. Der Faktor d hängt ab von der Lage des Punktes \vec{x}_0 . Für den Fall, dass \vec{x}_0 im Gebiet liegt aber nicht auf den Rand ergibt sich $d=1$. Falls \vec{x}_0 auf dem Rand liegt, muss nur über eine Halbkugel integriert werden und es ergibt sich $d = 1/2$. Dies gilt natürlich nur für ebene Ränder. Da in dieser Arbeit ausschließlich mit ebenen Elementen gearbeitet wird, ist diese Einschränkung ausreichend. Wenn \vec{x}_0 außerhalb des Gebietes Ω liegt, fallen die Γ_K -Integrale weg und es ergibt sich $d = 0$.

$$d(\vec{x}_0) = \begin{cases} 1 & ; \vec{x}_0 \in \Omega \setminus \Gamma \\ 1/2 & ; \vec{x}_0 \in \Gamma \\ 0 & ; \vec{x}_0 \notin \Omega \end{cases} \quad (2.39)$$

Somit ist es möglich jede Lösung innerhalb des betrachteten Gebietes durch ein Integral über die Oberfläche darzustellen.

Außenraumprobleme

Bisher wurde nur der Fall eines abgeschlossenen Gebietes (Innenraumproblem), wie in Abbildung 2.1 dargestellt, betrachtet. Natürlich lassen sich mit dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral auch Außenraumprobleme behandeln. Gerade hier liegt die Stärke der Randelementmethode. Wie in Abbildung 2.2 dargestellt, gibt es neben dem Rand Γ einen Rand Γ_∞ , der im Unendlichen liegt und den somit unendlichen Außenraum Ω begrenzt. Das Gebiet welches vom Rand Γ umschlossen wird, gehört in diesem Fall nicht zum Gebiet Ω . Die

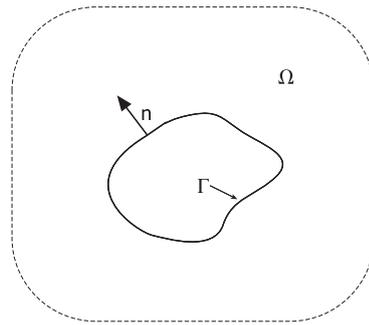


Abbildung 2.2: Außenraum um eine geschlossene Oberfläche: die gestrichelte Linie symbolisiert Berandung im Unendlichen.

Gleichung (2.38) unterscheidet sich vom Innenraumproblem nur insofern, dass der Normalenvektor sein Vorzeichen wechselt, da er so definiert ist, dass er in das betrachtete Gebiet zeigen soll. Die Integration über Γ_∞ kann vernachlässigt werden, da davon ausgegangen wird, dass keine Quellen im Unendlichen liegen. Somit liegen alle Quellen unendlich weit vom Rand Γ_∞ entfernt. Unter der Voraussetzung, dass das von einer Quelle verursachte Feld mit der Entfernung zum Ursprung abklingt, liefert der im Unendlichen liegende Rand bei der Integration keinen Beitrag.

Interpretation des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals

Die Randintegrale der Gleichung (2.38) lassen sich auch anschaulich deuten. Im ersten Integral wird über Monopolfelder mit Quellstärke $\partial\varphi/\partial n$ integriert. Im zweiten Integral tritt die Ableitung der Elementarlösung in Normalenrichtung auf. Daraus resultiert ein Dipolfeld. Die Lösung resultiert also durch eine Überlagerung von Monopol- und Dipolfeldern, welche auf dem Rand liegen. Dabei ist es egal, ob es sich um eine reale Oberfläche handelt oder um eine virtuelle Oberfläche mit virtuellen Quellen. Diese virtuellen Quellen beschreiben dann den Einfluss des nicht in Ω liegenden Außen- bzw. Innenbereiches, in dem echte Quellen und auch Berandungen liegen können.

2.2.2 Übergang zum Zeitbereich

Bis hierhin wurden unter Verwendung der Helmholtz-Gleichung (2.22) nur harmonische eingeschwungene Vorgänge betrachtet. Dies ist gerechtfertigt und

sinnvoll wenn man nur an einzelnen Frequenzen interessiert ist. Bei der Betrachtung von instationären Vorgängen oder bei Interesse an einem konkreten Zeitverlauf ist es sinnvoller die Lösung der Wellengleichung im Zeitbereich zu betrachten. Unter Verwendung der Fourier-Integralformel

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega \quad (2.40)$$

kann eine Lösung für den zeitabhängigen Fall abgeleitet werden. Die Fourier Transformierte des Zeitsignals ist

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.41)$$

Mit einem harmonischen Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{j\omega t} \quad (2.42)$$

und unter Verwendung der Fourier-Integralformel (2.40) erhält man

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\omega}(\vec{x}) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.43)$$

$\varphi_{\omega}(\vec{x})$ bezeichnet hierbei die Fouriertransformierte des Feldes $\phi(\vec{x}, t)$. Durch Einsetzen in die Kirchhoff-Helmholtz-Gleichung (2.38) erhält man

$$4\pi d(\vec{x}_0) \phi(\vec{x}_0, t) = - \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_{\omega}}{\partial n} e^{j\omega t} d\omega d\Gamma + \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\omega} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) e^{j\omega t} d\omega d\Gamma. \quad (2.44)$$

Für das erste innere Integral erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_{\omega}}{\partial n} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{\omega}}{\partial n} e^{j\omega(t-r/c)} d\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(\vec{x}, t - \frac{r}{c} \right). \quad (2.45)$$

Hierbei wurde von folgender Beziehung Gebrauch gemacht

$$\phi(\vec{x}, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\omega}(\vec{x}) e^{j\omega t + \Delta t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega \Delta t} \varphi_{\omega}(\vec{x}) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.46)$$

Mit $\Delta t = -r/c$ erhält man die retardierte Zeit

$$t_r = t - \frac{r}{c}. \quad (2.47)$$

Das zweite innere Integral in Gleichung (2.44) lässt sich in zwei Teilintegrale aufspalten. Hierzu bildet man zunächst die Normalableitung des Monopolfeldes.

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \left[-\frac{1}{r^2} e^{-ikr} - \frac{i\omega}{cr} e^{-ikr} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.48)$$

Die Teilintegrale lassen sich nun einzeln behandeln. Für den ersten Teil erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{r^2} e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi_{\omega} e^{j\omega t} d\omega = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \phi(\vec{x}, t - \frac{r}{c}) \quad (2.49)$$

und für den zweiten Teil ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{i\omega}{cr} e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi_{\omega} e^{j\omega t} d\omega &= -\frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \phi_{\omega} e^{j\omega(t-r/c)} d\omega \\ &= -\frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\vec{x}, t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Beide Ergebnisse eingesetzt in Gleichung (2.44) ergeben das Kirchhoff Integral

$$4\pi d(\vec{x}_0) \phi(\vec{x}_0, t) = - \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \phi + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{ret} d\Gamma. \quad (2.51)$$

Der Index der eckigen Klammer gibt an, dass alle Größen in Abhängigkeit zur retardierten Zeit zu nehmen sind, um das wiederholte Schreiben von $(\vec{x}, t - \frac{r}{c})$ zu vermeiden.

Gleichung (2.51) lässt sich mit den Beziehungen (2.18) und (2.19) so umformen, dass das entstehende Druckfeld ausgerechnet werden kann. Dafür muss (2.51) nach t abgeleitet werden. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi \left(\vec{x}, t - \frac{r}{c} \right) \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\vec{x}, t - \frac{r}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t - \frac{r}{c} \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\vec{x}, t - \frac{r}{c} \right) \quad (2.52)$$

und somit folgt

$$4\pi d(\vec{x}_0) p(\vec{x}_0, t) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\rho_0}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial n} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{ret} d\Gamma. \quad (2.53)$$

Wenn man nun noch die auftretenden Ableitungen von ϕ durch den Druck p und die Schnelle v ersetzt erhält man

$$4\pi d(\vec{x}_0) p(\vec{x}_0, t) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\varrho_0}{r} \frac{\partial v_n}{\partial t} - \frac{p}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial t} \right]_{ret} d\Gamma. \quad (2.54)$$

Mit Einführung des Schallflusses q

$$q = -\varrho_0 \frac{\partial v_n}{\partial t} \quad (2.55)$$

lässt sich (2.54) weiter vereinfachen

$$4\pi d(\vec{x}_0) p(\vec{x}_0, t) = - \int_{\Gamma} \left[\frac{q}{r} + \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{p}{r^2} + \frac{1}{cr} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right]_{ret} d\Gamma. \quad (2.56)$$

Wie auch im Kirchhoff-Helmholtz-Integral treten im Integral ein Monopolterm und ein Dipolterm auf. Beim Kirchhoff Integral ist der Dipolterm jedoch noch in einen Nah- und einen Fernfeldterm aufgespalten.

Kapitel 3

Numerische Implementierung

Im vorigen Kapitel wurde das Kirchhoff Integral hergeleitet. Es erlaubt die Berechnung des Schallfeldes in einem Gebiet Ω , wenn die Schnelle und der Druck auf dem Rand Γ gegeben sind. Damit ist es möglich das von einem vibrierenden Körper verursachte Schallfeld zu berechnen, wenn die Bewegung und die Geometrie des Körpers gegeben sind. Jedoch lässt sich nur in seltenen Fällen bei besonders einfachen Geometrien, wie der atmenden Kugel oder des Kolbenstrahlers in unendlicher Wand, eine analytische Lösung finden. In diesen Fällen reicht die Schnelle aus um das Schallfeld zu berechnen. Für beliebige Randgeometrien bleibt nur der Weg das Schallfeld numerisch zu berechnen. Hier wird zunächst der Schalldruck auf dem Rand bestimmt, um dann die Schallabstrahlung berechnen zu können. Es ist natürlich auch der Fall möglich, dass der Schalldruck auf dem Rand gegeben ist und die Schnelle berechnet werden muss. Dies ist jedoch äußerst selten der Fall. Zum einen lässt sich die Schnelle mit Beschleunigungsaufnehmern oder Laservibrometer wesentlich einfacher messen als der Schalldruck. Andererseits wird die Randelementmethode häufig mit der Finite-Elemente-Methode gekoppelt, um die Vorteile beider Methoden miteinander zu verbinden.

Für eine numerische Behandlung der Randintegralgleichung, ist es notwendig die Gleichung zu diskretisieren.

3.1 Ansatzfunktionen

3.1.1 Zeitdiskretisierung

Wir legen einen Anfangszeitpunkt t_0 fest und simulieren den Lauf der Zeit durch das fortwährende Hinzufügen von Zeitschritten Δt , wodurch eine Folge von Zeitpunkten entsteht. Sinnvoller Weise wird $t_0 = 0$ gesetzt und somit erhält man

$$t_i = i\Delta t \quad (3.1)$$

und für die retardierte Zeit

$$t_{ri} = i\Delta t - \frac{r}{c}. \quad (3.2)$$

Die Einteilung in äquidistante Zeitschritte Δt ist nicht zwingend erforderlich, erleichtert die Rechnung jedoch sehr. Der zeitliche Verlauf des Schallflusses q je Zeitschritt wird als konstant angesehen. Als Ansatz erhält man dann

$$q(x, t_{ri}) = \sum_{m=1}^i q_m \Psi(t_{ri}) \quad (3.3)$$

mit der Basisfunktion Ψ

$$\Psi(t_{ri}) = \begin{cases} 1 & ; t_{ri} \in [t_{m-1}, t_m) \\ 0 & ; \text{else} \end{cases} . \quad (3.4)$$

Natürlich ist es auch möglich kompliziertere Ansätze zu verwenden. Da hier jedoch die grundlegenden Stabilitätseigenschaften der Methode untersucht werden sollen, wird der allereinfachste Fall der Diskretisierung gewählt.

Ein wichtiger Punkt ist die Approximation der Zeitableitung $\frac{\partial p}{\partial t}$. Hier wird üblicherweise ein einfacher Rückwärtsdifferenzquotient gewählt

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p(x, t) - p(x, t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

In diskreter Form erhält man

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{m=1}^i \frac{p_m - p_{m-1}}{\Delta t} \Psi(t_{ri}). \quad (3.6)$$

Für p wird ein linearer Zeitansatz gewählt, damit die Ableitung nach der Zeit nicht Null wird.

$$p(x, t_{ri}) = \sum_{m=1}^i \left(\frac{t_m - t_{ri}}{\Delta t} p_{m-1} + \frac{t_{ri} - t_{m-1}}{\Delta t} p_m \right) \Psi(t_{ri}) \quad (3.7)$$

Aus Kausalitätgründen werden alle Zustandsgrößen vor dem Zeitpunkt t_0 zu Null gesetzt.

$$p(y, t_i) = 0 \text{ für } i\Delta t < \frac{r}{c} \quad (3.8)$$

$$q(y, t_i) = 0 \text{ für } i\Delta t < \frac{r}{c} \quad (3.9)$$

Mit den Ansätzen (3.3), (3.7) und (3.6) erhält man für (2.56)

$$\begin{aligned} & 4\pi d(\vec{x}_0) p_i(\vec{x}_0, t_{ri}) = \\ &= - \int_{\Gamma} \left[\frac{q}{r} + \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{p}{r^2} + \frac{1}{cr} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right]_{ret} d\Gamma \\ &= - \sum_{m=1}^i \int_{\Gamma} \left[\frac{q_m}{r} + \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{t_m - t_{ri}}{\Delta t} p_{m-1} + \frac{t_{ri} - t_{m-1}}{\Delta t} p_m \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{cr} \frac{p_m - p_{m-1}}{\Delta t} \right] \right] \Psi(t_{ri}) d\Gamma \\ &= - \sum_{m=1}^i \int_{\Gamma} \left[\frac{q_m}{r} + \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{m\Delta t - i\Delta t + \frac{r}{c}}{\Delta t} p_{m-1} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{i\Delta t - \frac{r}{c} - (m-1)\Delta t}{\Delta t} p_m \right) + \frac{1}{cr\Delta t} (p_m - p_{m-1}) \right] \right] \Psi(t_{ri}) d\Gamma \\ &= - \sum_{m=1}^i \int_{\Gamma} \left[\frac{q_m}{r} + \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{1}{r^2} \left(\left(m - i + \frac{r}{c\Delta t} \right) p_{m-1} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(i - m + 1 - \frac{r}{c\Delta t} \right) p_m \right) + \frac{1}{cr\Delta t} (p_m - p_{m-1}) \right] \right] \Psi(t_{ri}) d\Gamma \\ &= - \sum_{m=1}^i \int_{\Gamma} \left[\frac{q_m}{r} + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [(m-i)p_{m-1} + (i-m+1)p_m] \right] \Psi(t_{ri}) d\Gamma \\ &= - \sum_{m=1}^i \int_{\Gamma} \left[\frac{q_m}{r} + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [(i-m+1)p_m - (i-m)p_{m-1}] \right] \Psi(t_{ri}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Integrationsgrenzen

In Gleichung (3.10) muss für jeden i -ten Zeitschritt i mal über den Rand Γ integriert werden. Dies wäre natürlich sehr aufwendig und der Rechenaufwand nicht vertretbar. Jedoch beschränkt die Basisfunktion Ψ diesen Aufwand, da die Integrale lediglich innerhalb eines gewissen Zeitraums ungleich 0 sind. Zu jedem t_m muss somit nur über einen kleinen Teil des Randes integriert werden. Nach Gleichung (3.4) ergeben sich folgende Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned} t_{m-1} &\leq t_i - r/c < t_m \\ (m-1)\Delta t &\leq i\Delta t - r/c < m\Delta t \\ (i-m)c\Delta t &< r \leq (i-m+1)c\Delta t. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Integriert wird jeweils über eine Kugelschale mit äußerem Radius $(i-m+1)c\Delta t$ und innerem Radius $(i-m)c\Delta t$. Der Einfachheit halber wird ein neuer Index μ eingeführt mit

$$\mu = i - m + 1. \quad (3.12)$$

Die so definierte Kugelschale soll im Folgenden als μ -te Kugelschale bezeichnet werden. Abbildung (3.1) zeigt beispielhaft das Integrationsgebiet für die Kugelschale mit $\mu = 3$. Dieses Ergebnis lässt sich auch sehr anschaulich deuten. Durch die zeitliche Diskretisierung wurde die Integration in Quellgebiete aufgeteilt, welche die Form von Kugelschalen haben. Quellen die sich in einer dieser Kugelschalen befinden, haben auf Grund ihrer Entfernung zum Beobachtungspunkt \vec{x}_0 einen zeitlich verzögerten Einfluss auf diesen. So kommt der in der 3. Kugelschale zur Zeit t_i emittierte Schall erst zur Zeit t_{i+2} am Beobachtungspunkt an. Der Gesamtschalldruck ergibt sich nun einfach durch Aufsummieren der einzelnen Schalldrücke. Immer natürlich unter Berücksichtigung der Laufzeiten der Schallwellen. Ein großer Vorteil ist, dass die Integration nicht vom Schalldruck bzw. der Schnelle abhängt und somit immer wieder verwendet werden kann. Dies ist aber nur bei konstanter Zeitschrittweite Δt möglich, da sich sonst die Integrationsgebiete ändern würden.

3.1.2 Ortsdiskretisierung

Der Rand wird in ebene Elementen zerlegt mit der Anzahl N_{elem} . Die Form der Elemente spielt hier erst einmal keine Rolle. Jedoch wird die Diskretisierung

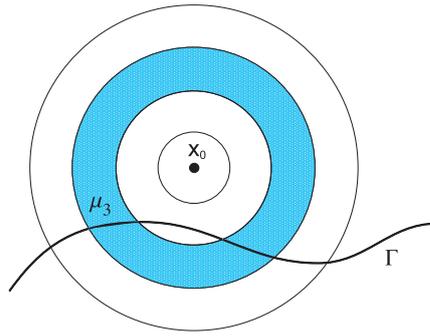


Abbildung 3.1: Bei jedem Zeitschritt muss über die Schnittfläche des Randes mit einer Kugelschale mit Innenradius $(i - m)c\Delta t$ und Außenradius $(i - m + 1)c\Delta t$ integriert werden

später auf ebene Dreiecke und Vierecke beschränkt, da sich die Integration sonst unnötig verkomplizieren würde.

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{N_{elem}} \Gamma_n. \quad (3.13)$$

Der Schalldruck und die Schnelle wird je Element als örtlich konstant angesetzt

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{N_{elem}} p^n(t) \quad (3.14)$$

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{N_{elem}} q^n(t). \quad (3.15)$$

Somit ergibt sich die Randintegralgleichung zu

$$4\pi d(\vec{x}_0) p_i(\vec{x}_0) = - \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^{N_{elem}} \left[\int_{\Gamma_n} \frac{1}{r} q_m^n \Psi(t_{ri}) d\Gamma_n + \int_{\Gamma_n} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [(i - m + 1)p_m^n - (i - m)p_{m-1}^n] \Psi(t_{ri}) d\Gamma \right]. \quad (3.16)$$

3.2 Kollokationsmethode

Die Randintegralgleichung muss zur weiteren numerischen Behandlung in endlich viele diskrete Gleichungen umgeformt werden. Eine Möglichkeit Gleichung (3.16) näherungsweise zu lösen, ist die Kollokationsmethode. Diese Methode besitzt den Vorteil eines relativ geringen numerischen Aufwandes, da die Erfüllung der Randintegralgleichung lediglich an einzelnen Kollokationspunkten gefordert wird. Als Kollokationspunkte verwendet man bei stückweise konstanten Ansatzfunktionen sinnvoller Weise die Mittelpunkte der Elemente. Bei höherwertigen Ansatzfunktionen werden die Eckpunkte oder auch die Kantenmittelpunkte der Elemente benutzt. Um von der Randintegralgleichung zu einem Gleichungssystem zur Ermittlung der unbekanntenen Randwerte zu kommen, wird für \vec{x}_0 der jeweilige Kollokationspunkt eingesetzt. So erhält man für den Schalldruck in allen Elementmittelpunkten je eine Gleichung.

3.2.1 Matrix-Aufstellung

Die Aufstellung der Matrizen die man mit der Kollokationsmethode erhält, soll für den ersten Zeitschritt ($i = 1$) beschrieben werden. Wenn man in Gleichung (3.16) die Kollokationspunkte einsetzt, ergeben sich folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
 -2\pi p_1^1 &= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r_{11}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma q_1^1 + \dots + \int_{\Gamma_N} \frac{1}{r_{1N}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma q_1^N + \dots \\
 -2\pi p_1^2 &= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r_{21}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma q_1^1 + \dots + \int_{\Gamma_N} \frac{1}{r_{2N}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma q_1^N + \dots \\
 &\vdots = \vdots \\
 -2\pi p_1^N &= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r_{N1}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma q_1^1 + \dots + \int_{\Gamma_N} \frac{1}{r_{NN}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma q_1^N + \dots
 \end{aligned}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$-2\pi \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_1^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r_{11}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma & \dots & \int_{\Gamma_N} \frac{1}{r_{1N}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r_{21}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma & \dots & \int_{\Gamma_N} \frac{1}{r_{2N}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r_{N1}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma & \dots & \int_{\Gamma_N} \frac{1}{r_{NN}} \Psi(t_{r1}) d\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_1^N \end{bmatrix} + \dots$$

In Matrixschreibweise ergibt sich

$$-2\pi\vec{p}_1 = \mathbf{G}_1\vec{q}_1 + \mathbf{H}_1\vec{p}_1.$$

Matrizen welche die Integrationen des 1. Integrals in Gleichung (3.16) beinhalten, werden mit \mathbf{G} bezeichnet und die des 2. Integrals mit \mathbf{H} . Als Matrix-Index wurde 1 gewählt. Dies steht aber nicht für den Zeitindex i sondern für den Index der Kugelschalen μ . Die Matrizen für die anderen Kugelschalen lassen sich genauso aufstellen. Da alle Kollokationspunkte auf dem Rand liegen, ergibt sich bei ebenen Elementen für den Faktor d (Gleichung (2.39)) der Wert 2.

Die einzelnen Einträge der \mathbf{G} und \mathbf{H} Matrizen berechnen sich folgendermaßen

$$g_{ab}^\mu = \int_{\Gamma_b} \frac{1}{r_{ab}} \Psi(t_{r\mu}) d\Gamma \quad (3.17)$$

$$h_{ab}^\mu = \int_{\Gamma_b} \frac{\partial r_{ab}}{\partial n} \frac{1}{r_{ab}^2} \Psi(t_{r\mu}) d\Gamma. \quad (3.18)$$

Da die \mathbf{G}_μ und \mathbf{H}_μ Matrizen nur von μ abhängen und nicht vom Zeitindex i , können diese bei jedem neuen Zeitschritt wieder verwendet werden. Insgesamt muss also für alle Zeitschritte nur einmal über den Rand integriert werden. Die schrittweise Berechnung des Schalldrucks in den Kollokationspunkten erfolgt dann folgendermaßen

$$\begin{aligned} i \leq 0 & & \vec{p}_0 &= 0 \\ i = 1 & & -(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)\vec{p}_1 &= \mathbf{G}_1\vec{q}_1 \\ i = 2 & & -(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)\vec{p}_2 &= (2\mathbf{H}_2\vec{p}_1 + \mathbf{G}_1\vec{q}_2 + \mathbf{G}_2\vec{q}_1) \\ i = 3 & & -(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)\vec{p}_3 &= (2\mathbf{H}_2\vec{p}_2 + (3\mathbf{H}_3 - \mathbf{H}_2)\vec{p}_1 + \dots) \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned} \quad (3.19)$$

Allgemein erhält man mit der Kollokationsmethode folgendes Gleichungssystem

$$-(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)\vec{p}_i = \vec{\psi}_i \quad (3.20)$$

mit

$$\vec{\psi}_i = \sum_{\mu=1}^{\min(i, \mu_{max})} \mathbf{G}_\mu \vec{q}_{i-\mu+1} + \sum_{\mu=2}^{\min(i, \mu_{max})} \mathbf{H}_\mu [\mu\vec{p}_{i-\mu+1} - (\mu-1)\vec{p}_{i-\mu}]. \quad (3.21)$$

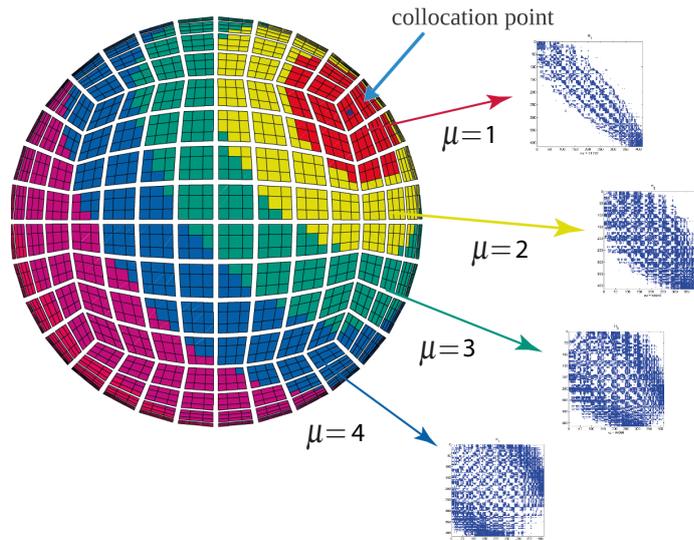


Abbildung 3.2: Unterteilung der Kugeloberfläche in unterschiedliche abstandsabhängige Integrationszonen μ für einen Kollokationspunkt und die daraus resultierenden schwach besetzten Matrizen

Der Index μ_{max} gibt die maximal benötigte Anzahl Matrizen an. Für alle $\mu > \mu_{max}$ sind alle Einträge g_{ab}^μ und h_{ab}^μ gleich Null. Da nur Strukturen mit endlicher Ausdehnung betrachtet werden, gibt es ein r_{max} zwischen Kollokations- bzw. Beobachtungspunkt \vec{x}_0 und dem am weitest entfernten Quellpunkt. Es gilt

$$\mu_{max} \approx \frac{r_{max}}{c\Delta t}. \quad (3.22)$$

Kugelschalen mit $\mu > \mu_{max}$ können somit vernachlässigt werden, da die Struktur Oberfläche nicht in diesem Integrationsgebiet liegt. Die resultierenden \mathbf{G} und \mathbf{H} Matrizen sind sehr schwach besetzt. Da immer nur ein geringer Teil der Quellen bzw. des Randes im betrachteten Gebiet liegen, ergibt sich für einen Großteil der Matrizeneinträge $\Psi(t_{r\mu}) = 0$ und somit auch $g_{ab}^\mu = h_{ab}^\mu = 0$. Zur Veranschaulichung wird in Abbildung 3.2 gezeigt, wie von einem Kollokationspunkt aus gesehen die Oberfläche einer Kugel in verschiedene abstandsabhängige Integrationszonen μ geteilt wird. Gleichung (3.20) lässt sich auch

umschreiben in ein großes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
 -2\pi \begin{bmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{p}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{G}_3 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \mathbf{G}_{\mu_{max}} & \cdots & \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{q}_i \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3\mathbf{H}_3 - \mathbf{H}_2 & 2\mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & -(\mu_{max} - 1)\mathbf{H}_{\mu_{max}} & \cdots & \mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{p}_i \end{bmatrix} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

oder in kurzer Schreibweise

$$-2\pi\vec{p}_g = \mathbf{G}_g\vec{q}_g + \mathbf{H}_g\vec{p}_g. \quad (3.24)$$

Umgestellt ergibt sich

$$-(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_g)\vec{p}_g = \vec{\psi}_g. \quad (3.25)$$

Man erhält zwei Block-Toeplitz-Matrizen, bei denen die Haupt- und Nebendiagonalen konstant sind. Die Einträge der erste Spalte $\mathbf{G}_{col} = \{\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \dots \mathbf{G}_{\mu_{max}}\}$ bzw. $\mathbf{H}_{col} = \{\mathbf{H}_1 2\mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_{\mu_{max}}\}$ reichen aus, um die Matrix vollständig bestimmen zu können.

3.3 Lösungsverfahren

Die Matrizen in Gleichung (3.23) sind sehr groß und lassen sich normalerweise nicht im Arbeitsspeicher des Computers aufstellen. Aufgrund der besonderen Struktur der Toeplitz-Matrizen ist dies bei Verwendung geeigneter iterativer Löser aber nicht nötig, da hier immer nur eine Zeile der Matrix benötigt wird. Sinnvoller ist es jedoch Gleichung (3.19) zu benutzen und den Zeitverlauf schrittweise zu lösen. Die Schrittweise Lösung des Zeitverlaufs hat die Vorteile, dass die Größe der zu lösenden Matrix normalerweise unkompliziert ist und die zu invertierende Matrix zeitunabhängig ist. Bei jedem Zeitschritt muss die Gleichung

$$-(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)\vec{p}_i = \vec{\psi}_i \quad (3.26)$$

gelöst werden. Die Größen \vec{p}_i und $\vec{\psi}_i$ sind zwar zeitabhängig, die Matrix $(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)$ ist es jedoch nicht. Deshalb ist es bei Verwendung direkter Lösungsverfahren ausreichend, die Inverse dieser Matrix nur ein einziges Mal für alle Zeitschritte zu berechnen. Durch die Identitätsmatrix \mathbf{E} ist die zu lösende Matrix in allen Fällen gut konditioniert, so dass es numerisch kein Problem bereitet die Inverse zu bilden. Darauf wird in Abschnitt 4.4 näher eingegangen.

In MATLAB[®] steht hierfür die *inv*-Funktion zur Verfügung, welche auf der LR-Faktorisierung beruht. Noch effektiver als die *inv*-Funktion ist die *inverse*-Funktion aus der FACTORIZE Toolbox von Tim Davis [27]. Die *inverse*-Funktion wählt unter einer Vielzahl von Faktorisierungsmethoden die effektivste Methode aus. Die Inverse wird nicht mehr wie bei der *inv*-Funktion berechnet, sondern nur die Faktorisierung, welche zur Lösung des Gleichungssystems in jedem Zeitschritt benötigt wird und wiederverwendet werden kann.

Die Gleichung (3.26) lässt sich natürlich auch mit iterativen Lösungsverfahren lösen. Hierfür stehen in MATLAB[®] eine Reihe von Lösungsverfahren wie CGS (Conjugate gradients squared method) [28], GMRES (Generalized minimum residual method) [29] und die LSQR Methode [30] zur Verfügung, um nur einige wenige zu nennen. Bei diesen Lösungsverfahren wird das Gleichungssystem iterativ gelöst. Es wird also keine Inverse der Matrix mehr gebildet. Dies ist normalerweise ein großer Vorteil dieser Lösungsmethoden, da dies bei sehr großen schwach besetzten Matrizen meist gar nicht mehr möglich ist. In diesem Fall ist es allerdings ein Nachteil, denn bei Verwendung eines iterativen Lösungsverfahrens muss zu jedem Zeitschritt das Gleichungssystem neu gelöst werden. Im Vergleich dazu muss bei einem direkten Lösungsverfahren bei jedem Zeitschritt nur noch eine Matrix-Vektor-Multiplikation durchgeführt werden, nachdem einmal die Inverse, bzw. die Faktorisierung der Matrix, berechnet wurde. Ausführliche Informationen zu iterativen Gleichungslösern findet man z.B. im Buch von Hackbusch [31]

Bei einem Vergleich der unter MATLAB[®] zur Verfügung stehenden Lösungsverfahren konnte kein nennenswerter Unterschied in den Ergebnissen festgestellt werden.

3.4 Integrationsmethoden

Die Berechnung der Integrale (3.17) und (3.18) benötigen den Hauptteil der Rechenzeit und haben großen Einfluss auf die Genauigkeit der Ergebnisse. Da man nur über den Teil des Elementes integrieren darf, der in der μ -ten Kugelschale liegt, ist die Lösung der Integrale im Zeitbereich wesentlich aufwendiger als im Frequenzbereich. Wie man in Abbildung 3.2 erkennen kann, liegen die Oberflächenelemente meist nicht vollständig im Integrationsgebiet. Die Lösung dieses Problem wird seltsamerweise nur in sehr wenigen Veröffentlichungen zu diesem Thema erwähnt oder gar beschrieben.

Schwach singuläre Integrale treten nur in der Hauptdiagonale der \mathbf{G}_1 -Matrix auf. Für diesen Fall ist der Beobachtungspunkt gleich dem Quellpunkt und somit ergibt sich $r = 0$. Alle anderen Einträge der \mathbf{G}_μ -Matrizen sind regulär. Die stark singulären Integrale der Hauptdiagonale der \mathbf{H}_1 -Matrix ergeben sich durch die Beschränkung auf ebene Elemente zu Null, da die Normalableitung $\partial r / \partial n$ in ebenen Elementen Null ergibt. Ein weiterer Vorteil ebener Elemente ist, dass sich alle Integrale auch analytisch lösen lassen. Die schwach singulären Integrale werden deshalb analytisch gelöst, da der Aufwand einer numerisch exakten Lösung viel größer wäre. Die analytische Lösung der Integrale wird in Abschnitt 3.4.2 beschrieben. Zunächst soll erst einmal die numerische Lösung der Integrale beschrieben werden.

3.4.1 Numerische Integration

Koordinatentransformation

Bevor man mit einem Quadraturschema die Integrale numerisch berechnen kann, muss jedes Oberflächenelement durch eine Koordinatentransformation in ein Referenzelement transformiert werden. Ein viereckiges Referenzelement ist durch die Bedingungen $-1 \leq \xi_1 \leq 1$ und $-1 \leq \xi_2 \leq 1$ festgelegt, mit den lokalen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 . Die Knoten befinden sich jeweils in den Ecken wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Die Koordinatentransformation lässt sich folgendermaßen durchführen

$$x(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{N_e} \Phi_n(\xi_1, \xi_2) x_n, \quad (3.27)$$

Knoten	Dreieck	Viereck
1	ξ_1	$\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$
2	ξ_2	$\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)$
3	$1 - \xi_1 - \xi_2$	$\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)$
4	-	$\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)$

Tabelle 3.1: Ansatzfunktionen für ebene dreieckige und viereckige Elemente

wobei N_e die Anzahl der Knoten des Elementes sind und Φ die jeweils zu den Punkten x_n (in Ortskoordinaten) gehörenden Ansatzfunktionen. In Tabelle 3.1 sind die Ansatzfunktionen für ebene dreieckige und viereckige Elemente angegeben. Um über das Referenzelement integrieren zu können, muss auch $d\Gamma$ transformiert werden.

$$d\Gamma = |n(\xi_1, \xi_2)|d\xi_1d\xi_2 \quad (3.28)$$

$n(\xi_1, \xi_2)$ ist der Normalenvektor des Elementes in dem Punkt (ξ_1, ξ_2) . Durch die Koordinatentransformation kann ein Randintegral über eine Funktion $F(x)$ folgendermaßen dargestellt werden

$$\int_{\Gamma_n} F(x)d\Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi_1, \xi_2)|n|d\xi_1d\xi_2 \quad (3.29)$$

Gauß-Quadratur

Für die Lösung aller nichtsingulären Integrale kann die Gauß-Quadratur angewendet werden. Dabei wird der Integrand an gewissen Stützstellen, den sogenannten Gaußpunkten, ausgewertet und mit einem der jeweiligen Stützstelle zugeordnetem Gewichtungsfaktor multipliziert und aufsummiert.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi_1, \xi_2)|n|d\xi_1d\xi_2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N W_i W_j F(\xi_{1i}, \xi_{2j})|n_{ij}| \quad (3.30)$$

Dabei sind W_i und W_j die Gewichtungsfaktoren, und ξ_{1i} und ξ_{2j} sind die Stützstellen. M und N sind die Integrationsordnung in Richtung der ξ_1 und ξ_2 Koordinaten. Je größer M und N sind, desto exakter ist das Ergebnis. Jedoch wird der Rechenaufwand entsprechend größer. Obwohl M und N unabhängig

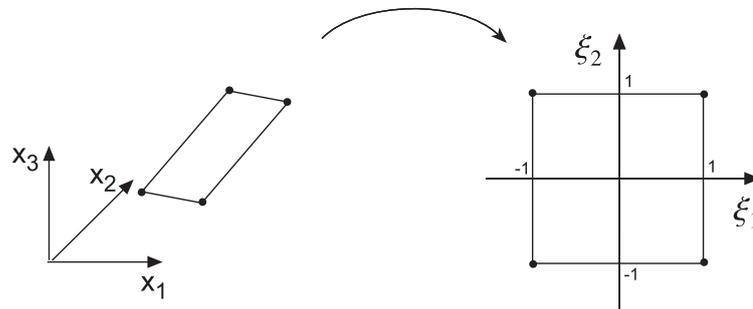


Abbildung 3.3: Koordinatentransformation eines ebenen viereckigen Elementes von globalen zu lokalen Koordinaten des Referenzelementes

voneinander gewählt werden können, wird hier jeweils die gleiche Integrationsordnung, also $M = N$, gewählt. Da der Rechenaufwand möglichst gering sein soll, sollte man entsprechend dem Abstand, der Elementgröße und der nötigen Genauigkeit eine passende Integrationsordnung wählen.

Die Approximation des Integrationsgebietes, also der Schnittfläche des Elementes mit der μ -ten Kugelschale, ist das Hauptproblem bei der Integration. Meise [14] schlägt vor, die Schnittpunkte des Dreiecks mit der Kugelschale zu bestimmen und diese dann zu Unterdreiecken zu verbinden. Jäger [15] hält diesen Ansatz für unzureichend, da die Schnittmenge unter Umständen auch sehr kompliziert sein kann. Sie unterteilt das Element in gleich große Unterelemente und überprüft dann, ob der jeweilige Mittelpunkt im Integrationsgebiet liegt. Dieser Ansatz kommt einem anderen Vorschlag von Meise [14] sehr nahe. Er schlägt vor, bei der numerischen Integration mit einer Quadraturformel bei jedem Stützpunkt zu prüfen, ob dieser im Integrationsgebiet liegt. Nur die Stützpunkte, welche im Integrationsgebiet liegen, werden bei der Summenbildung berücksichtigt. Andere Herangehensweisen für dieses doch sehr wichtige Thema konnten nicht gefunden werden, da die meisten Autoren nicht beschreiben, wie sie dieses Problem lösen. Ein bloßes prüfen, ob der Mittelpunkt des Elementes im Integrationsgebiet liegt und dann über das ganze Element zu

integrieren, ist nicht ausreichend. Dies würde nur für sehr feine Netze funktionieren mit $\beta \gg 1$. Dies wäre jedoch numerisch unsinnig, da man bestrebt ist, mit so wenig wie möglich Elementen zuverlässige Ergebnisse zu erzielen.

3.4.2 Analytische Integration

Da sich die hier dargestellte TD-BEM auf flache Elemente beschränkt, ist es möglich die Integrale (3.17) und (3.18) analytisch zu berechnen. Das generelle Vorgehen wird z.B. in Arnold [32] im Kapitel “Die Kollokationsmethode in 3D” beschrieben. Allerdings wird hier nur die Integration über ganze Dreiecke beschrieben. Da im Zeitbereich Schnittflächen der Elemente mit der μ -ten Kugelschale auftreten, muss die Berechnung erweitert werden. Eine weitere Schwierigkeit die sich aus der Integration über Schnittflächen ergibt, ist die Vielzahl der Schnittmöglichkeiten die sich ergeben können. In Atle [33] werden z.B. die unterschiedlichen Schnittmöglichkeiten eines Dreiecks mit einer Kugelschale beschrieben. Die numerische Realisierung der analytischen Integration ist allerdings sehr aufwendig, da sich die Berechnung der unterschiedlichen Schnittmöglichkeiten noch jeweils in spezielle Fälle aufteilt. Dies wird in der Projektarbeit von Behn [34] ausführlich beschrieben. Da der analytische Ansatz in dieser Vollständigkeit in der Literatur nicht zu finden ist, wird er in diesem Abschnitt noch einmal zusammengefasst dargestellt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass alle in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse unter Verwendung der numerischen Integration berechnet wurden.

Spezialfälle

Die Grundidee der analytischen Integration ist, dass sich die Integration über beliebige Schnittflächen eines Dreiecks mit einer Kugelschale durch die Kombination zweier Spezialfälle darstellen lässt.

Der erste Spezialfall ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Wir betrachten ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C . Der Punkt M ist der Kollokationspunkt und der Vektor \overrightarrow{AM} steht senkrecht auf der Ebene des Dreiecks. Der Abstand ϱ eines beliebigen Punktes x in der Dreiecksfläche Γ zum Eckpunkt A lässt sich dann sehr einfach aus r , dem Abstand des Punktes x zum Kollokationspunkt

M , und d , dem Abstand des Kollokationspunkts zum Eckpunkt A , berechnen. Die Höhe des Dreiecks wird mit h gekennzeichnet und der Winkel φ ist der Winkel zwischen h und \vec{Ax} . Weiterhin wird angenommen, dass über das ganze Dreieck integriert wird, also die Basisfunktion $\Psi = 1$ ist. Mit Einführung von Polarkoordinaten erhält man dann für Gleichung (3.17)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_b} \frac{1}{r} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} d\Gamma & (3.31) \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\frac{h}{\cos \varphi}} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} \rho \, d\rho \, d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\sqrt{\rho^2 + d^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{h}{\cos \varphi}} d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\sqrt{\left(\frac{h}{\cos \varphi}\right)^2 + d^2} - d \right) d\varphi \\
 &= \left[-\varphi d + h \cdot \operatorname{arctanh} \left[\frac{h \cdot \sin \varphi}{\sqrt{h^2 + (|d| \cos \varphi)^2}} \right] + |d| \cdot \arcsin \left[\frac{|d| \sin \varphi}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right] \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}
 \end{aligned}$$

und für Gleichung (3.18)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} d\Gamma &= \int_{\Gamma_b} \frac{\langle \vec{R}, \vec{n}_{el} \rangle}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} \frac{1}{(\sqrt{\rho^2 + d^2})^2} d\Gamma & (3.32) \\
 &= \int_{\Gamma_b} \frac{\pm d}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} d\Gamma \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\frac{h}{\cos \varphi}} \frac{\pm d}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \rho \, d\rho \, d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{\mp d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{h}{\cos \varphi}} d\varphi \\
 &= \mp d \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h}{\cos \varphi}\right)^2 + d^2}} - \frac{1}{d} \right) d\varphi \\
 &= \pm \left[\varphi - \arctan \left[\frac{d \sin \varphi}{\sqrt{h^2 + (d \cdot \cos \varphi)^2}} \right] \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.
 \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von Gleichung (3.32) hängt davon ab, ob der Normalenvektor der Dreiecksebene in Richtung des Kollokationspunktes M zeigt (+) oder in die andere Richtung (-).

Der zweite Spezialfall ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Auch hier gelten die gleichen Annahmen wie im ersten Spezialfall, nur dass diesmal über ein Kreisausschnitt mit Radius R integriert wird. Für Gleichung (3.17) erhält man in diesem Fall

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma &= \int_0^{\varphi} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} \rho \, d\rho \, d\varphi & (3.33) \\ &= \int_0^{\varphi} \left[\sqrt{\rho^2 + d^2} \right]_0^R d\varphi \\ &= \left(\sqrt{R^2 + d^2} - |d| \right) \cdot \varphi \end{aligned}$$

und für Gleichung (3.18)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} d\Gamma &= \int_0^{\varphi} \int_0^R \frac{\langle \vec{R}, \vec{n}_{el} \rangle}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} \frac{1}{\rho^2 + d^2} \rho \, d\rho \, d\varphi & (3.34) \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^R \frac{\pm d \cdot \rho}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{\mp d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} \right]_0^R d\varphi \\ &= \pm \left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right) \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von Gleichung (3.34) hängt wieder davon ab, ob der Normalenvektor der Dreiecksebene in Richtung des Kollokationspunktes M zeigt (+) oder in die andere Richtung (-).

Zerlegung in Spezialfälle

Nun wird es äußerst selten vorkommen, dass einer dieser analytisch lösbaren Spezialfälle auftritt. Dennoch sind diese 2 Fälle sehr nützlich, da alle auftretenden Integrale in diese Spezialfälle zerlegt werden können. Dies soll kurz an in Abbildung 3.6 dargestelltem Beispiel erklärt werden. Die Spitze des Dreiecks $\triangle ABC$ wird von der μ -ten Schale so geschnitten, dass die Spitze des

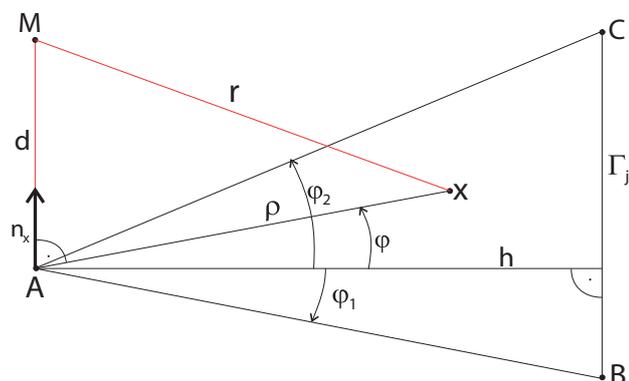


Abbildung 3.4: Geometrische Anordnung des ersten Spezialfalls zur analytischen Lösungen der Oberflächenintegrale

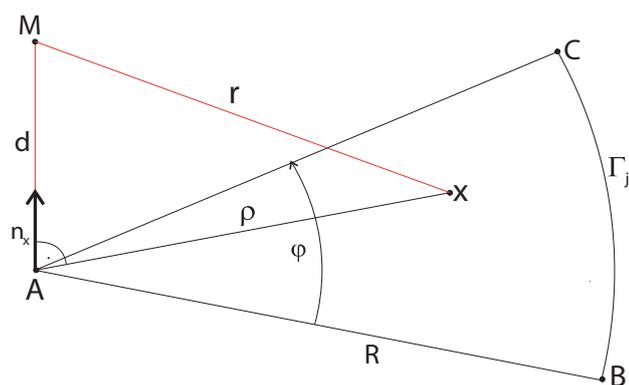


Abbildung 3.5: Geometrische Anordnung des zweiten Spezialfalls zur analytischen Lösungen der Oberflächenintegrale

Eckpunktes A vollständig in der Kugelschale liegt. Die Schnittpunkte werden mit S_1 und S_2 bezeichnet. Der Kollokationspunkt M wird wieder in die Ebene des Dreiecks projiziert, welcher mit M' bezeichnet wird. Im diesem Fall liegt M' außerhalb des Dreiecks. Die Fläche AS_1S_2 , über die man in diesem Fall integrieren muss, ergibt sich nun aus der Kreisbogenfläche $\sphericalangle M'S_1S_2$ abzüglich der Dreiecksflächen $\triangle M'AS_1$ und $\triangle M'AS_2$.

$$AS_1S_2 = \sphericalangle M'S_1S_2 - \triangle M'AS_1 - \triangle M'AS_2 \quad (3.35)$$

Diese Formel gilt allerdings nur wenn der Punkt A innerhalb des Kreisbogens $\sphericalangle(S_1S_2r_2)$ liegt. Wenn der Punkt A außerhalb des Kreisbogens liegt, kommt es je nach Lage des Punktes zu einem Vorzeichenwechsel bei der Dreiecksfläche $\triangle M'AS_1$ bzw. bei $\triangle M'AS_2$ in Gleichung (3.35). Dies verkompliziert die Anwendung erheblich. Eine Auflistung der möglicherweise auftretenden Schnittfälle und der jeweiligen Gleichungen ist in Anhang A näher beschrieben.

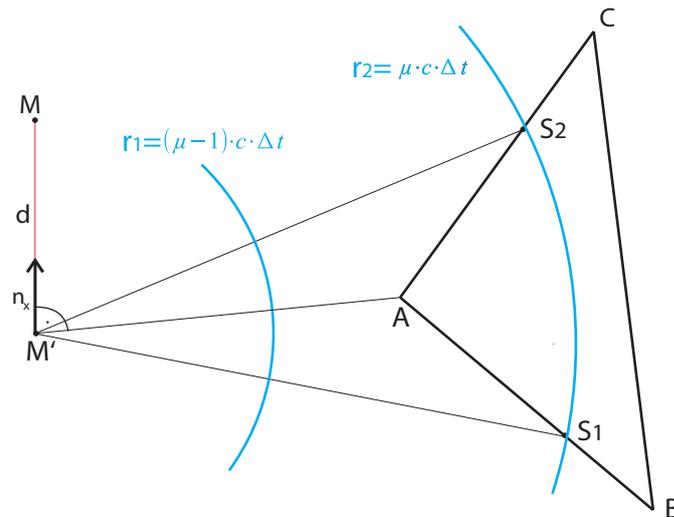


Abbildung 3.6: Beispiel für einen Schnitt eines Dreiecks mit der μ -ten und $(\mu - 1)$ -ten Schale

Kapitel 4

Stabilitätskriterien und Parameter

Die Anwendbarkeit und Qualität einer numerischen Methode hängt davon ab wie genau und verlässlich die Simulationsergebnisse sind und mit welchem numerischen Aufwand diese berechnet werden können. Die TD-BEM ist dafür bekannt, dass sie instabil werden kann, wie schon häufig in verschiedenen Publikationen berichtet wurde, z.B. [35][36]. Bei instabilem Verhalten wächst die berechnete Schalldruckamplitude mit der Zeit stark an, ohne dass hierfür ein physikalischer Grund vorliegt.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens der TD-BEM. Da das Stabilitätsverhalten der TD-BEM für Innen- und Außenraumprobleme, sowie für Streu- und Abstrahlprobleme Unterschiede aufweist, werden diese Fälle in getrennten Kapiteln behandelt.

Bevor die TD-BEM auf ihr Stabilitätsverhalten an verschiedenen Testfällen untersucht wird, werden in diesem Kapitel zunächst die dabei auftauchenden Begriffe, Fehlerquellen und relevante Parameter diskutiert.

4.1 Stabilität, Konsistenz und Konvergenz

Zur Validierung einer numerischen Methode und zur Bewertung der numerischen Ergebnisse lassen sich die Kriterien Stabilität, Konsistenz und Konvergenz heranziehen. Diese Begriffe sollen an dieser Stelle kurz erläutert werden.

Stabilität

Ein Algorithmus heißt gutartig oder stabil, wenn die durch ihn im Laufe der Rechnung erzeugten Fehler in der Größenordnung des durch die Kondition des Problems bedingten unvermeidbaren Fehlers bleiben. Dahmen, Reusken [37]

Ein Verfahren ist stabil, wenn es gegenüber kleinen Störungen der Daten unempfindlich ist und es kein beliebiges Anwachsen von Rundungs- oder Diskretisierungsfehlern im Laufe der Zeit gibt. Kleine Änderungen der Eingangsdaten haben bei einem stabilen Verfahren nur kleine Änderungen des Endergebnisses zur Folge. Bei einem instabilen Verfahren kann es dazu kommen, dass sich kleine Abweichungen vom Ergebnis im Laufe einer Berechnung aufschaukeln und sich während der Zeititeration verstärken.

Man unterscheidet hierbei zwischen bedingter und unbedingter Stabilität. Bei einer bedingten Stabilität ist das Verfahren nur unter Beachtung gewisser Grenzen, wie z.B. der Wahl von Diskretisierungsparametern, stabil. Die Stabilität ist sowohl problem- als auch verfahrensabhängig. Auf die von Dahmen und Reusken erwähnte Kondition des Problems wird ausführlich in Abschnitt 4.4 eingegangen.

Konsistenz

Die Konsistenz eines numerischen Verfahrens beschreibt, wie gut das diskrete Verfahren das kontinuierliche Problem beschreibt. Bei einem konsistenten Verfahren wird der Fehler in jedem Zeitschritt beliebig klein, wenn die Ortsdiskretisierung beliebig fein ist. Je höher die Konsistenzordnung, desto schneller strebt die numerische gegen die exakte Lösung. In Abschnitt 5.1 wird anhand einfacher Testfälle gezeigt, dass die numerische Lösung mit kleiner werdenden Schrittweiten gegen die exakte Lösung strebt und somit die TD-BEM als konsistent betrachtet werden kann.

Konvergenz

Konvergent heißt ein Verfahren, wenn die numerische Lösung gegen die exakte Lösung strebt, wenn Raum- und Zeitschrittweite gegen Null gehen. Wenn Konsistenz und Stabilität gegeben sind, ist das Verfahren in der Regel auch

konvergent. Bei einem konsistenten Verfahren muss somit noch Stabilität gewährleistet sein, um Konvergenz zu erreichen.

4.2 Fehlerquellen

Bei der numerischen Behandlung eines Problems treten verschiedene Fehlerquellen auf. Diese lassen sich in vier grundlegende Fehlerarten unterteilen.

Modellfehler

Das physikalische Modell beruht meist auf einer Idealisierung unter vereinfachenden Annahmen und führt somit zu Ergebnissen, die die Realität nicht exakt wiedergeben. So werden z.B. Ausbreitungsverluste bei der TD-BEM vernachlässigt und es wird eine totale Reflexion des Schalldrucks an Oberflächen angenommen.

Datenfehler

Im Modell können für die Randbedingungen Daten eingesetzt werden, die aus physikalischen Messungen stammen. Diese Daten sind in der Regel, z. B. durch Messungenauigkeiten, mit Fehlern behaftet. In den später betrachteten analytischen Fällen lassen sich solche Fehler ausschließen. Erst im Abschnitt 5.7 bei der Behandlung von Anwendungsbeispielen können solche Fehler relevant werden.

Verfahrensfehler

Die bei der Konstruktion eines numerischen Verfahrens gemachten Vereinfachungen werden als Verfahrensfehler bezeichnet. Beispielsweise wird die Zeitableitung des Schalldrucks als Rückwärtsdifferenzquotient angenähert.

Diskretisierungsfehler

Den Fehler, den man durch das Ersetzen kontinuierlicher Information durch diskrete Information begeht, nennt man Diskretisierungsfehler. In den meisten Fällen kann der Diskretisierungsfehler durch Erhöhung des Rechenaufwands

beliebig verkleinert werden. Welche Diskretisierungsfehler zu erwarten sind, wird in Abschnitt 5.3.3 näher untersucht.

Rundungsfehler

Bei der Durchführung von Berechnungen auf einem Computer, treten unvermeidbare Rundungsfehler auf. Punktzahlen können auf einem Computer nur bis zu einer bestimmten Genauigkeit dargestellt werden. Diese hängt vom zugrundeliegenden Datentyp (float oder double) ab. Bei jeder Rechenoperation muss das Ergebnis auf einen darstellbaren Wert abgebildet (gerundet) werden. Näheres hierzu findet man in der Literatur zu Numerik wie z.B. [38]

4.3 Relevante Parameter

Bevor die Stabilität des Verfahrens untersucht wird, muss geklärt werden, welche Parameter das Verfahren ausschlaggebend beeinflussen. Die Auswirkungen dieser Parameter werden dann in den folgenden Kapiteln diskutiert.

Räumlichen Auflösung

Wie im Frequenzbereich auch ist die räumliche Auflösung des Randes von entscheidender Bedeutung, da die Einhaltung der Wellengleichung nur in den diskreten Punkten der Oberfläche gefordert wird. Der Rand zwischen den Punkten wird durch die Ansatzfunktionen approximiert. Somit ist es nicht verwunderlich, dass die Näherungslösung sich mit steigender räumlicher Diskretisierung der analytischen Lösung annähern sollte. Da aber der Rechenaufwand mit dem Quadrat der Anzahl räumlichen Stützstellen N quadratisch ansteigt, $\mathcal{O}(N) \sim N^2$, wird man stets bemüht sein mit so wenig wie möglich Punkten akzeptable Ergebnisse zu erzielen. Als Faustregel wird üblicherweise eine Auflösung von mindestens 6 Elementen je Wellenlänge gefordert, $f_{max} = c/6l$ wobei l der Kantenlänge eines Elementes und c der Wellengeschwindigkeit des Fluids entspricht. Dies ist natürlich nur eine grobe Abschätzung. Wie die räumliche Auflösung zu wählen ist, hängt davon ab welche Fehlergrenze akzeptabel ist. Näheres hierzu lässt sich z.B. in Marburg [39] finden.

Zeitliche Auflösung

Zusätzlich zur räumlichen Auflösung ist im Zeitbereich die zeitliche Auflösung des Schalldruckverlaufes zu beachten. Hier lässt sich die Forderung aus der digitalen Signalverarbeitung übernehmen, dass ein Zeitsignal mit mindestens 6 Zeitschritten je Periode abgetastet werden muss. Bei einer geringeren Abtastung ist ein nicht unerheblicher Amplitudenfehler möglich. Bei der Verwendung von Messdaten als Eingangsdaten für die TD-BEM Rechnung muss natürlich darauf geachtet werden, dass das Nyquist-Kriterium eingehalten wird, da sonst nicht-lineare Verzerrungen entstehen können. Das Nyquist-Abtasttheorem besagt, dass die Taktfrequenz der punktwisen Probeentnahme aus dem Ursprungssignal mehr als doppelt so hoch wie die höchste im Ursprungssignal enthaltende Frequenz sein muss.

Verhältnis von räumlicher und zeitlicher Auflösung

Räumliche und zeitliche Diskretisierung können zwar unabhängig voneinander gewählt werden, allerdings sollten die Größen in einem gewissen Verhältnis zueinander stehen. Deshalb ist es üblich die Zeitschrittweite Δt mit der mittleren Elementabmessung l in Bezug zu setzen.

$$\beta = \frac{c\Delta t}{l} \quad (4.1)$$

Dieses Verhältnis gibt an, wie viel der Schall innerhalb eines Zeitschritts von einem Element überstreichen kann. Durch das Verhältnis β wird auch die Belegung der schwach besetzten \mathbf{G} und \mathbf{H} Matrizen bestimmt.

Integrationsordnung

Die korrekte Evaluation der Randintegrale ist eine Grundvoraussetzung der Methode. Im Falle der numerischen Approximation mittels der Gauß-Quadratur (siehe Abschnitt 3.4.1) muss geklärt werden welche Genauigkeit benötigt wird und wie sich Integrationsungenauigkeiten auf das Ergebnis auswirken.

4.4 Kondition des Gleichungssystems

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Betrachtung der Robustheit eines Algorithmus gegenüber Fehlerquellen ist die Kondition des zu lösenden Gleichungssystems.

Die Kondition eines Problems gibt an, welche Genauigkeit man bei exakter Lösung des Gleichungssystems bestenfalls erreichen kann. Die Kondition zeigt, wie stark sich kleine Änderungen in den Ausgangsdaten auf die Lösung auswirken. Wenn kleine Änderungen der Daten große Änderungen in der Lösung verursachen, spricht man von einem schlecht konditionierten Problem.

Fehlerquellen können in dem hier betrachteten Verfahren durch ungenaue Berechnung der Oberflächenintegrale hervorgerufen werden. Für den Fall, dass für die Randbedingung der Oberflächenschnelle Messdaten verwendet werden, können auch hier Ungenauigkeiten erwartet werden.

Die Kondition κ einer Matrix \mathbf{A} des Problems $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{y}$ wird aus dem Produkt der Matrixnormen $\|\cdot\|$ von der Matrix und der inversen Matrix berechnet.

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (4.2)$$

Wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, lässt sich das Gleichungssystem der TD-BEM schrittweise in der Zeit lösen, dazu muss Gleichung (3.19) gelöst werden. Für diesen Fall ist die Kondition der Matrix $(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)$ von Interesse. Matrix \mathbf{H}_1 enthält nur die Integrationsgebiete die im Abstand von $c\Delta t$ um den Kollokationspunkt liegen. Dies ist je nach Größe des Zeitschritts Δt meist nur das Element des Kollokationspunktes selber und eventuell dessen unmittelbaren Nachbarn. Deshalb ist die Matrix \mathbf{H}_1 nur sehr schwach besetzt. Außerdem besitzt \mathbf{H}_1 keine Einträge in der Hauptdiagonalen, da bei flachen Elementen die Ableitung des Abstandes zur Oberflächennormalen Null ist.

Die Kondition des Gleichungssystems soll hier beispielhaft an einer Kugel mit 384 Elementen betrachtet werden. Diese Struktur wird in Kapitel 5 und 6 als Teststruktur benutzt. In Abbildung 4.1 ist die Konditionszahl in Abhängigkeit von β (Gleichung 4.1) dargestellt. Für sehr kleine β und somit kleine Zeitschritte ist die Kondition gleich 1. In diesen Fällen ist der Zeitschritt so klein, dass alle Elemente sich innerhalb des ersten Zeitschritts nur selbst wahrnehmen. Die Kugelschale mit $\mu = 1$ schneidet nur das Element des Kollokationspunktes. Somit ist $\mathbf{H}_1 = 0$ und eine Lösung des Gleichungssystems damit überflüssig.

Der Zeitschritt wird üblicherweise aber so gewählt, dass $\mathbf{H}_1 \neq 0$ ist. Dann geht das Verfahren von einem expliziten zu einem impliziten Verfahren über.

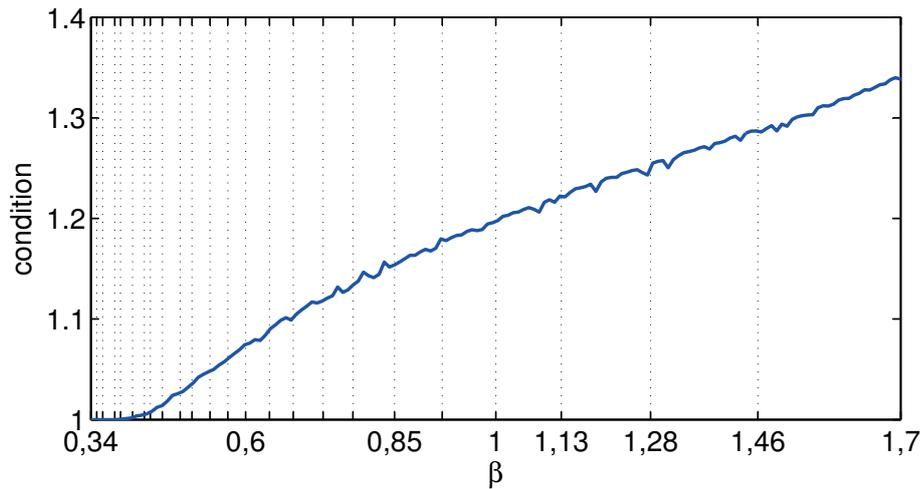


Abbildung 4.1: Kondition der Matrix $(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)$ zur schrittweisen Lösung des Gleichungssystems

Da die Identitätsmatrix \mathbf{E} nur Einträge auf der Hauptdiagonalen hat und \mathbf{H}_1 sehr schwach besetzt ist, ist die Kondition der Matrix $(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)$ sehr gut. Die Konditionszahl steigt leicht mit zunehmendem β an, aber das Gleichungssystem bleibt für alle Fälle sehr gut konditioniert, so dass Probleme beim Lösen des Gleichungssystems ausgeschlossen werden können. Auch wenn die Kondition eine Eigenschaft des gestellten Problems ist, lässt sich dieses Ergebnis verallgemeinern. Denn die Einträge auf der Hauptdiagonalen die durch die Identitätsmatrix $2\pi\mathbf{E}$ bestimmt werden, hängen nicht vom betrachteten Problem ab sondern von der Methode. Insbesondere die Wahl des Rückwärtsdifferenzquotienten ist hierbei ausschlaggebend.

Ganz anders sieht es hingegen aus, wenn man Gleichung (3.25) löst, um den Verlauf des Schalldrucks direkt (nicht schrittweise) zu berechnen. Wie schon in Abschnitt 3.3 beschrieben, ist dies recht aufwendig, da das Gleichungssystem (3.23) ungemein groß ist und sich nicht im Arbeitsspeicher aufstellen lässt. Durch Ausnutzung der besonderen Struktur der Toeplitz-Matrizen und bei Verwendung geeigneter iterativer Löser ist dieser Rechenweg aber durchaus möglich. Für diesen Fall ist die Kondition der Matrix $(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_g)$ von Interesse. Auf den ersten Blick sieht die Matrix nicht viel anders aus als bei der Schrittweisen Berechnung des Schalldrucks. Allerdings ist die Matrix \mathbf{H}_g grund-

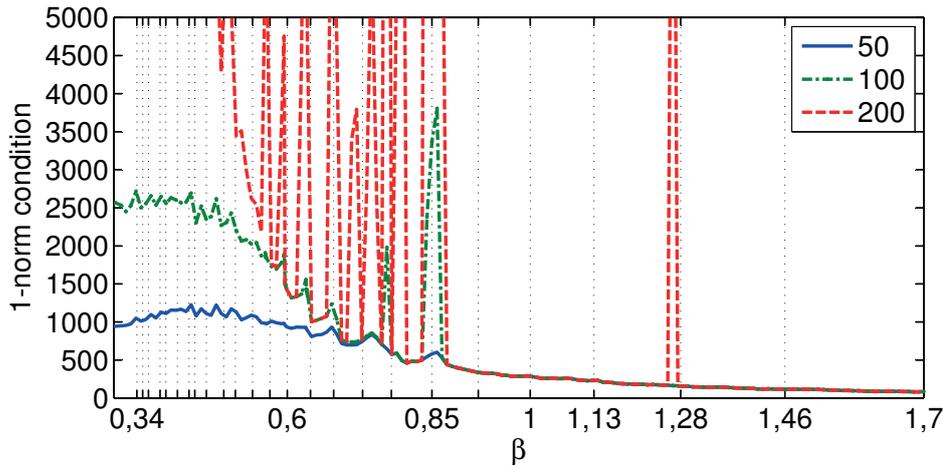


Abbildung 4.2: Kondition der Matrix $(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_g)$ in Abhängigkeit von β für die Anzahl der Zeitschritte $N_t = 50, 100, 200$, Innenraumresonanzen werden durch Skalenstriche der β -Achse und senkrechte gepunktete Linien gekennzeichnet

verschieden von Matrix \mathbf{H}_1 . Der Aufbau der Matrix \mathbf{H}_g ist in Gleichung (3.23) beschrieben. Es handelt sich hierbei um eine Block-Toeplitz-Matrix der Größe $(N_t \times N_{elem})^2$, wobei N_{elem} die Anzahl der Oberflächenelemente ist und N_t die Anzahl der Zeitschritte. Dies bedeutet, dass die Kondition abhängig von der Anzahl der Zeitschritte ist.

Wenn man nun wieder die Kugel mit 384 Elementen als Beispiel heranzieht, ergibt sich ein ganz anderes Bild. In Abbildung 4.2 ist die Konditionszahl in Abhängigkeit von β für $N_t = 50, 100, 200$ dargestellt. Der Verlauf lässt sich in 2 Gebiete einteilen. Für $\beta > 0,85$ ist der Verlauf der Kondition für die 3 Fälle bis auf eine Ausnahme gleich und sinkt etwas mit größer werdendem Zeitschritt. Für $\beta < 0,85$ wird die Kondition mit kleiner werdendem Zeitschritt schlechter. Dies wird umso schlechter je größer die Anzahl der Zeitschritte ist. Also je länger die Laufzeit der Simulation ist, umso schlechter lässt sich das Gleichungssystem lösen. Bei $N_t = 200$ lässt sich für $\beta < 0,85$ ein klarer Einfluss der Innenraumresonanzen erkennen. Immer wenn die Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ mit einer Innenraumresonanz der Struktur übereinstimmt, wird die Kondition extrem schlecht. Im Bereich $\beta > 0,85$ ist dieser Einfluss nur bei $\beta = 1,28$ und nur für den Fall $N_t = 200$ zu erkennen. Es ist aber auch möglich, dass in den

anderen Fällen die Innenraumresonanzen nicht genau getroffen wurden und somit der Einfluss nicht sichtbar wurde. Die Innenraumresonanzen der Kugel werden in Abbildung 4.2 durch die Skalenstriche der β -Achse und senkrechte gepunktete Linien gekennzeichnet.

Generell lässt sich sagen, dass die Kondition des Gleichungssystems für $\beta < 0,85$ sehr schlecht ist. Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist mit beträchtlichen Unsicherheiten behaftet und die Zuverlässigkeit der Ergebnisse kann bezweifelt werden. Insbesondere ist damit zu rechnen, dass Instabilitäten durch den Einfluss der Innenraummoden entstehen. Weiterhin ist die Anzahl der zu berechnenden Zeitschritte meist wesentlich größer als 200. Leider war es nicht möglich, die Kondition für Gleichungssysteme mit mehr als 200 Zeitschritten zu berechnen, da der zur Verfügung stehende Arbeitsspeicher des Computers hierfür nicht ausreichte. Aber es ist davon auszugehen, dass sich der beobachtete Trend auf längere Laufzeiten übertragen lässt, also der Einfluss der Innenraummoden mit der Anzahl der Zeitschritte zunimmt. Nur für $\beta > 0,85$ sind bei längeren Laufzeiten zuverlässige Simulationsergebnisse zu erwarten, da hier die Kondition in einem akzeptablen Bereich liegt und nicht von der Anzahl der Zeitschritte abhängt.

Nicht nur vom numerischen Aufwand, sondern auch von der Zuverlässigkeit der Lösung scheint es angeraten zu sein, den Schalldruck schrittweise zu berechnen. Allerdings zeigt die Kondition bei der schrittweisen Berechnung hauptsächlich wie zuverlässig das Gleichungssystem gelöst werden kann. Dies ist in diesem Fall viel einfacher, da hier nur die Matrix \mathbf{H}_1 mit einfließt und alle weiteren Matrizen nicht berücksichtigt werden. Bei der Berechnung des Schalldruckverlaufes in einem Schritt fließen hingegen alle \mathbf{H}_μ Matrizen mit ein. Hier wird also der ganze TD-BEM-Algorithmus beurteilt. Ob die schrittweise Berechnung auch zuverlässige Ergebnisse liefert und stabil ist, lässt sich so noch nicht beurteilen. Die Kondition bei der direkten nicht schrittweisen Lösung hingegen, dürfte auf das generelle Verhalten des Algorithmus hinweisen.

Kapitel 5

Abstrahlprobleme im Außenraum

Der entscheidende Vorteil der Boundary-Elemente-Methode liegt darin, dass bei Berechnungen im Außenraum die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung bereits im Ansatz erfüllt ist, da es keine Reflexionen von der im Unendlichen liegenden äußeren Berandung des Gebietes geben kann. Bei der sehr gebräuchlichen Finite-Elemente-Methode (FEM) hingegen muss der Außenraum diskretisiert werden. Da die Diskretisierung eines unendlichen Gebietes nicht möglich ist, wird eine künstliche Begrenzung des Gebietes geschaffen, deren Rand Reflexionen hervorruft. Um dies zu verhindern, müssen bei der FEM spezielle Randbedingungen geschaffen werden, wie z.B. mit der Perfectly Matched Layer-Methode (PML).

In diesem Kapitel werden nur Abstrahlprobleme im Außenraum betrachtet. Streuprobleme im Außenraum werden in Kapitel 6 behandelt.

5.1 Analytische Testfälle Monopol und Dipol

Der Einfluss der im Abschnitt 4.3 beschriebenen Parameter soll nun anhand von einfachen analytisch berechenbaren Testfällen überprüft werden. Auch wenn die Strukturen in der Praxis wesentlich komplexer sind, lassen sich so erste Abhängigkeiten ableiten, die sicher auch für komplexere Strukturen gelten.

Als Struktur wird eine Kugel zur Simulation der Schallabstrahlung in den Außenraum verwenden. Bei allen folgenden Beispielen wird der Schalldruck schrittweise berechnen, es sei denn es wird explizit darauf hingewiesen, dass der Schalldruckverlauf direkt berechnet wurde.

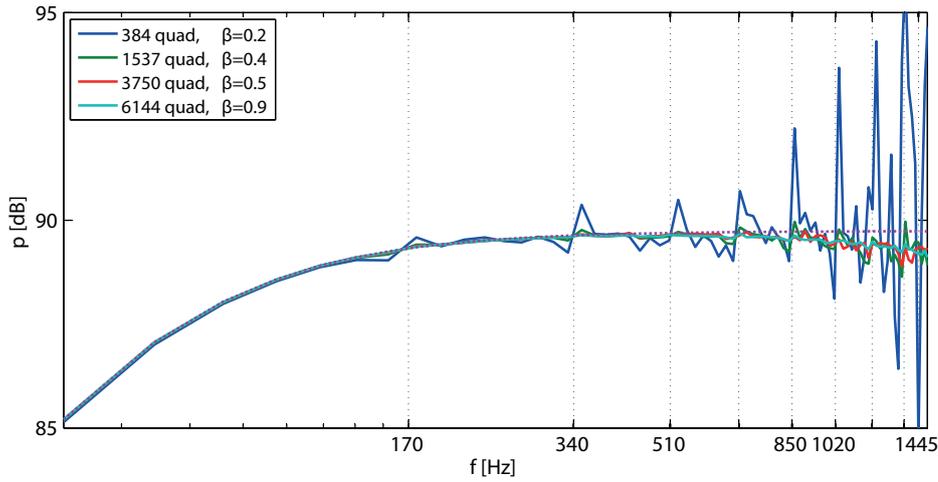


Abbildung 5.1: Einfluss der räumlichen Diskretisierung auf die Monopol-Schallabstrahlung einer Kugel bei konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0.15\text{ms}$ und abgestrahlten Impuls mit Schnelleamplitude $0,007\text{ m/s}$. (quad = quadrilateral = viereckig)

Bei einer allseitig gleichmäßig harmonisch pulsierenden Kugeloberfläche wird ein unidirektionales Schallfeld abgestrahlt. Das entstehende Monopolschallfeld lässt sich folgendermaßen berechnen

$$p(r, t, \omega) = -\rho_0 \omega^2 \Delta r \frac{r_K^2}{r(1 + ikr_K)} e^{-ik(r-r_K)} e^{i\omega t}. \quad (5.1)$$

Dabei ist Δr die Amplitude der Auslenkung der Kugeloberfläche und r der Abstand des Immissionspunktes zum Kugelmittelpunkt.

Im Fall einer vibrierenden Kugel lässt sich ein Dipolschallfeld erzeugen. Mit "vibrierender Kugel" ist eine periodisch hin- und herbewegte Kugel gemeint. Für das so entstehende Schallfeld erhält man

$$p(r, t, \omega, \theta) = -\rho_0 \omega^2 \Delta r \cos(\theta) r_K^3 \frac{\frac{1}{r^2} + \frac{i k}{r}}{2 - (kr_K)^2 + 2ikr_K} e^{-ik(r-r_K)} e^{i\omega t}. \quad (5.2)$$

Die Herleitungen der Gleichungen (5.1) und (5.2) lassen sich z.B. in [26] nachschlagen. In Abbildung 5.1 und 5.2 sind die Ergebnisse für die Simulation eines Monopols bzw. Dipols dargestellt. Es wurde eine Kugel mit Radius $r_K = 1\text{m}$ und ein konstanter Zeitschritt $\Delta t = 0.15\text{ms}$ verwendet. Die räumliche Diskretisierung der Kugel wurde schrittweise verfeinert.

Insbesondere bei der groben Diskretisierung des Randes mit 384 viereckigen Elementen (quad=quadrilateral) ist eine starke Abweichung von der analyti-

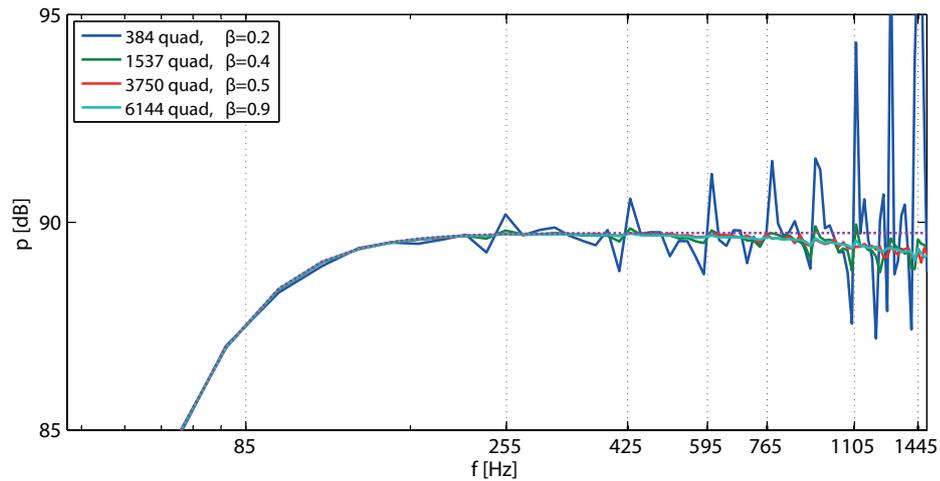


Abbildung 5.2: Einfluss der räumlichen Diskretisierung auf die Dipol-Schallabstrahlung einer Kugel bei konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0.15\text{ms}$ und abgestrahlten Impuls mit Schnelleamplitude $0,007\text{ m/s}$. (quad = quadrilateral = viereckig)

schen Lösung in den Innenraumresonanzen f_{eig} , auch Eigenfrequenzen genannt, zu beobachten. Dieser Einfluss ließ sich in der Kondition des Gleichungssystems, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, bei der schrittweisen Lösung nicht erkennen. Doch wurde hier nicht der gesamte Algorithmus beurteilt, sondern nur die Lösbarkeit des Gleichungssystems (3.19).

Die Eigenfrequenzen des Kugelinnenraumes [1] mit schallharter Berandung müssen folgende Bedingung erfüllen

$$\tan(kr_K) = kr_K \quad (5.3)$$

mit der Wellenzahl $k = \omega/c$. Eine gute Näherung der Lösung hierfür ist

$$f_{eig} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2r_K} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4)$$

In Abbildung 5.2 sieht man, dass bei der Dipolabstrahlung der Kugel genau in diesen Frequenzen eine Störung auftritt. Bei der Monopolabstrahlung (Abbildung 5.1) werden allerdings die Frequenzen

$$f_{eig} = n \frac{c}{2r_K} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5)$$

gestört. Diese entsprechen den Eigenfrequenzen des Kugelinnenraumes bei schallweicher Berandung. Die unterschiedlichen Randbedingungen der Ober-

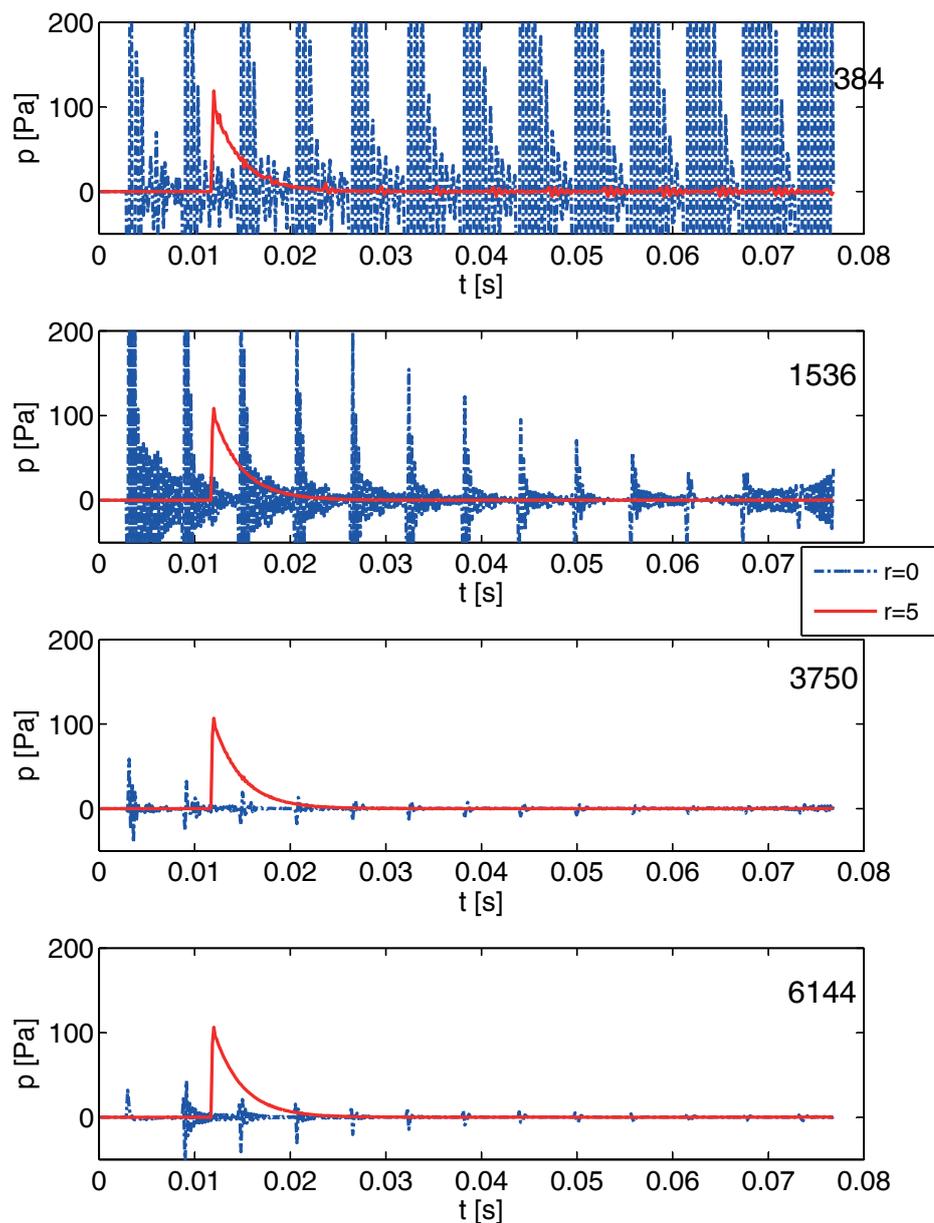


Abbildung 5.3: Schalldruck im Kugelmittelpunkt ($r=0$) und in 5m Entfernung bei 4 verschiedenen Oberflächendiskretisierungen (384, 1536, 3750 und 6144 viereckige Elemente) und konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0.15ms$

flächenschnelle regen seltsamerweise unterschiedliche Eigenfrequenzen des Kugelinnenraumes an.

Mit zunehmender Anzahl der Elemente und somit besserer räumlicher Dis-

diskretisierung schwächt sich der Einfluss der Eigenmoden ab und verschwindet nahezu. Bei Betrachtung des Schalldrucks im Inneren der Kugel wird der Einfluss der Diskretisierungsfehler besonders deutlich. Der Schalldruck im Kugelinnenraum sollte Null ergeben, da der Innenraum nicht im betrachteten Gebiet liegt. In Abbildung 5.3 ist der Schalldruckverlauf im Kugelmittelpunkt ($r = 0$) und in 5 m Entfernung dargestellt. Es werden wieder die 4 Kugelmodelle mit 384, 1536, 3750 und 6144 viereckigen Elementen und ein konstanter Zeitschritt $\Delta t = 0.15ms$ verwendet. In allen Fällen bildet sich im Kugelinnenen ein Schallfeld aus. Der Impuls, der von der Oberfläche erzeugt wird, breitet sich nicht nur im Außenraum sondern auch im Kugelinnenraum aus. Dieser Impuls wird dann im Inneren der Kugel hin und her reflektiert. Da der Kugelradius $r_k = 1m$ ist und die Wellengeschwindigkeit $c = 340m/s$ beträgt, wandert alle 6 ms ein Impuls durch den Kugelmittelpunkt. Das Problem ist, dass das Schallfeld im Inneren der Struktur nicht vom äußeren Schallfeld entkoppelt ist. Jedes Mal wenn der Impuls im Inneren reflektiert wird, strahlt ein Teil davon in den Außenraum ab. Dadurch wird das Ergebnis im Außenraum verfälscht, da es im Kugelinnenraum eigentlich kein Schallfeld geben soll.

Mit zunehmender Diskretisierung der Kugeloberfläche nimmt die Amplitude des Impulses im Innenraum ab. Im Fall mit 384 Elementen bildet sich ein relativ starkes Schallfeld aus, welches mit der Zeit anwächst und somit instabil ist. In allen anderen Fällen fällt das Schallfeld im Inneren mit der Zeit ab. Durch die bessere räumliche Diskretisierung wird der Diskretisierungsfehler verringert und dadurch auch das Schallfeld im Inneren weniger angeregt. Außerdem steigt die Dämpfung im Inneren, so dass das Schallfeld schneller abfällt.

Wie schon in Kapitel 1 dargestellt wurde, handelt es sich beim Einfluss der Innenraummoden auf den Außenraum um ein bekanntes Problem (Nonuniqueness Problem). Bei BEM Rechnungen im Frequenzbereich sind die Burton-Miller Methode [2] und die CHIEF-Methode von Schenk [1] bekannte Lösungsansätze. Auf die CHIEF-Methode und ihrer Anwendung im Zeitbereich wird in Kapitel 5.5 näher eingegangen. Zuvor soll zunächst der Einfluss der Parameter auf die Stärke der Kopplung zwischen Innen- und Außenraum untersucht werden, denn momentan sieht es so aus als ob mit einer ausreichend genauen Diskretisierung stabile Ergebnisse erzielt werden können. Wenn dem so ist,

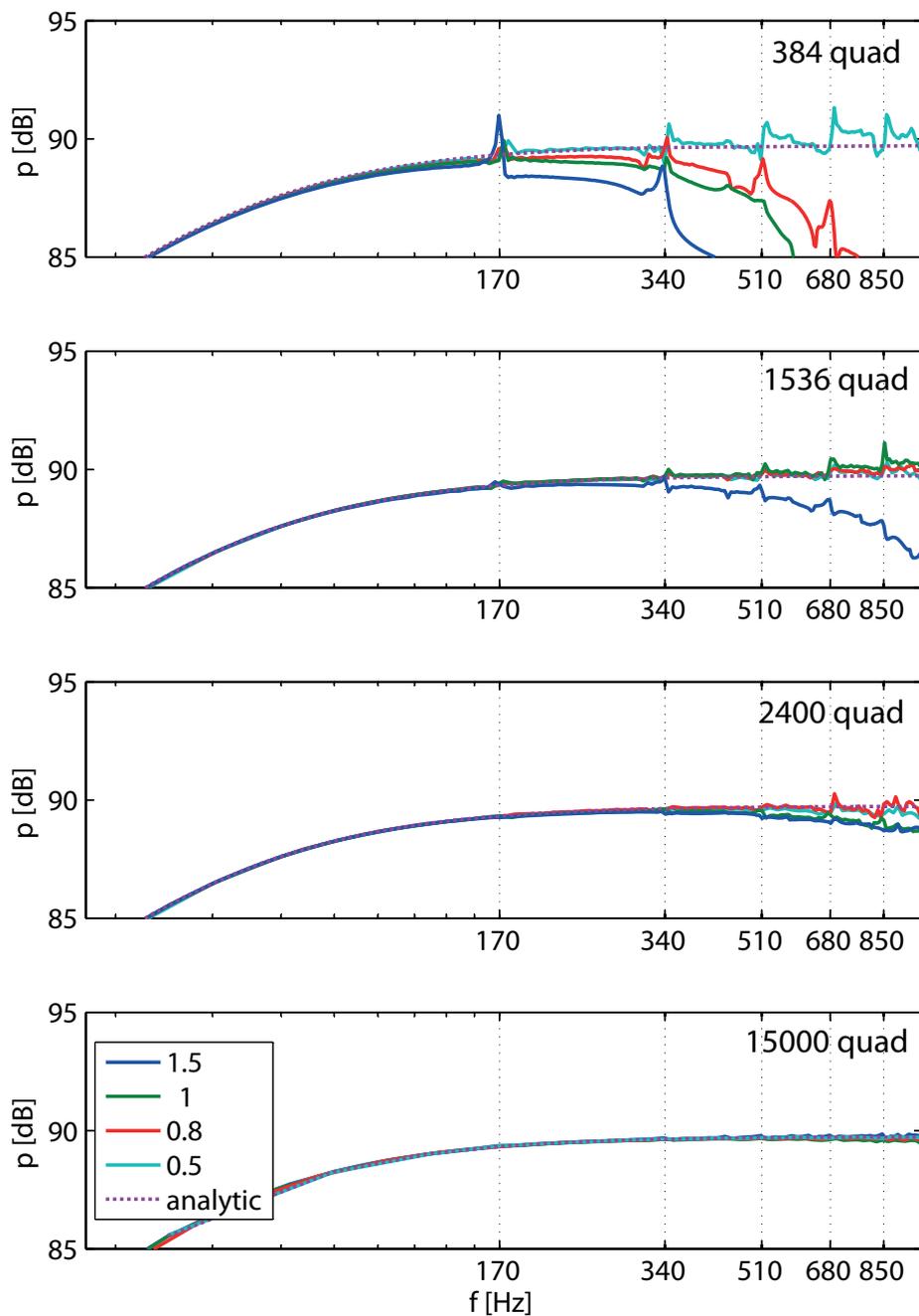


Abbildung 5.4: Schallabstrahlung (Monopol) einer Kugel mit 4 verschiedenen Oberflächendiskretisierungen (384, 1536, 2400 und 15000 viereckigen (quad) Elementen) und je Modell 4 Simulationen mit $\beta = [0,5 \ 0,8 \ 1 \ 1,5]$

stellt sich auch die Frage wie die Parameter gewählt werden müssen.

Obwohl man aus den Ergebnissen der Abbildungen 5.1 und 5.2 schlussfol-

gern könnte, dass ein kleines β schlechte Simulationsergebnisse liefert, zeigen die Ergebnisse aus Abbildung 5.4, dass dem nicht so ist. In Abbildung 5.4 sind die Ergebnisse der Schallabstrahlung (Monopol) einer Kugel mit 4 verschiedenen Oberflächendiskretisierungen (384, 1536, 2400 und 15000 viereckigen (quad) Elementen) dargestellt. Bei diesen Berechnungen ist diesmal nicht der Zeitschritt Δt konstant gehalten, sondern der Parameter β . Je Modell wurden 4 Simulationen mit $\beta = [0,5 \quad 0,8 \quad 1 \quad 1,5]$ durchgeführt. Während im Fall der groben Diskretisierung des Randes mit 384 Vierecken bei allen Simulationen der Einfluss der Innenraummoden klar zu erkennen ist, schwindet mit zunehmender räumlicher Diskretisierung für alle Werte von β dieser Einfluss. Dass der Frequenzbereich, für den man zuverlässige Ergebnisse erhält, mit zunehmender räumlicher Auflösung ansteigt, ist zu erwarten. Interessanter ist vielmehr, dass der Einfluss der Innenraummoden im betrachteten Frequenzbereich stark abnimmt und im Fall der Oberflächendiskretisierung mit 15000 Elementen sogar nicht mehr erkennbar ist.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass der Wert β alleine leider nicht dazu dienen kann die Zuverlässigkeit des Verfahrens abzuschätzen, wie es in vielen Veröffentlichungen getan wird. Es zeigt sich, dass die Oberflächendiskretisierung an sich eine entscheidende Rolle spielt. Darauf wird in Abschnitt 5.3.3 eingegangen.

5.2 Spektrum und Spektralradius des Verfahrensoperators

Als erste analysierten Smith [40] und Ergin et al. [41] das Stabilitätsverhalten der TD-BEM mithilfe des Verfahrensoperators. Später stellte Wang et al. [42] dar, wie sich der Einfluss der Innenraummoden am Spektrum des Verfahrensoperators zeigen lässt. Mit diesem Hilfsmittel soll nun auch die hier beschriebene TD-BEM untersucht werden.

Einschrittverfahren lassen sich mit der Operatoren Schreibweise auf die folgende Form bringen:

$$\vec{\chi}_i = \mathbf{T}\vec{\chi}_{i-1} + \vec{\psi}_i \tag{5.6}$$

Dabei wird die Matrix \mathbf{T} auch Verfahrensoperator genannt. Ausgeschrieben erhält man für Gleichung (5.6)

$$\begin{bmatrix} \vec{p}_{i-\mu_{max}+1} \\ \vec{p}_{i-\mu_{max}+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{E} \\ \mathbf{M}_{\mu_{max}} & \cdots & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_{i-\mu_{max}} \\ \vec{p}_{i-\mu_{max}+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{p}_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\psi}_{i-\mu_{max}+1} \\ \vec{\psi}_{i-\mu_{max}+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{\psi}_i \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Die Matrizen \mathbf{M}_μ werden folgendermaßen berechnet

$$\mathbf{M}_\mu = \begin{cases} [2\pi\mathbf{E} - \mathbf{H}_1]^{-1}2\mathbf{H}_2 & ; \mu = 1 \\ [2\pi\mathbf{E} - \mathbf{H}_1]^{-1}(\mu_{max} - 1)\mathbf{H}_{\mu_{max}} & ; \mu = \mu_{max} \\ [2\pi\mathbf{E} - \mathbf{H}_1]^{-1}[\mu\mathbf{H}_\mu - (\mu - 2)\mathbf{H}_{\mu-1}] & ; else \end{cases} \quad (5.8)$$

$\vec{\psi}_i$ wird aus den Randbedingungen, also der Oberflächenschnelle oder anderen Quelltermen berechnet, wird aber bei der weiteren Stabilitätsbetrachtung nicht benötigt. Für die Berechnung des Schalldrucks \vec{p}_i wird nur die letzte Zeile von \mathbf{T} benötigt. Alle anderen Zeilen mit der Identitätsmatrix \mathbf{E} in der Nebendiagonalen bewirken nur eine Verschiebung der Druckwerte von i zu $i - 1$. Deshalb wird bei der praktischen Berechnung auch nicht der Verfahrensoperator \mathbf{T} verwendet, da ein Aufstellen der Matrix \mathbf{T} in den meisten Fällen auf Grund der Größe auch gar nicht möglich wäre. Jedoch lassen sich aus den Kenngrößen des Verfahrensoperators Erkenntnisse über das Stabilitätsverhalten der Methode ableiten.

Die Menge der Eigenwerte $\sigma(\mathbf{A})$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wird Spektrum genannt. Als Spektralradius bezeichnet man den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts. Für die Eigenwert λ_e lassen sich die Eigenvektoren aus der Gleichung $(\mathbf{A} - \lambda_e\mathbf{E})\vec{x} = 0$ bestimmen. Durch Lösung des Eigenwertproblems können Eigenfrequenzen, Eigenformen und Dämpfungscharakteristiken eines schwingfähigen Systems berechnet werden. Es lässt sich auch vorhersagen, wie sich das Verfahren verhält, wenn man zu einem beliebigen Zeitpunkt die Energiezufuhr „abschaltet“, also zu Null setzt. In dem hier betrachteten Fall bedeutet das, dass die Oberflächenschnelle zu Null gesetzt wird. $\vec{\psi}_i$ in Gleichung (5.6) wird somit Null und es bleibt

$$\vec{\chi}_i = \mathbf{T}\vec{\chi}_{i-1} \quad (5.9)$$

übrig. Damit die Lösung zum Zeitschritt i kleiner als die zum Zeitschritt $i - 1$ ist, muss der betragsmäßig größte Eigenwert $|\lambda_e|_{max}$, also der Spektralradius von \mathbf{T} , kleiner als eins sein. Der Grenzfall $|\lambda_e|_{max} = 1$ würde bedeuten, dass der dazu gehörigen Eigenschwingung keine Energie verloren geht und somit auch keine Dämpfung besitzt. Ein Eigenwert vom Betrag größer Eins wäre instabil und unphysikalisch, da das Verfahren Energie produzieren würde. Die Anzahl der Zeitschritte in solch einem Verfahren wäre begrenzt, da ab einem gewissen Zeitschritt der Schalldruck ins Unendliche anwachsen würde.

Die Veröffentlichungen [40][41] und [42] weisen jedoch nicht darauf hin, dass nur für normale Matrizen Stabilität gewährleistet ist, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{T} kleiner als eins sind. In unserem Fall ist \mathbf{T} eine nicht-normale Matrix und der Spektralradius ist keine hinreichende Bedingung für die Stabilität [43]. Eine Matrix \mathbf{A} ist normal wenn gilt

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T. \quad (5.10)$$

Dennoch ist der Spektralradius ein wichtiger Parameter, um instabiles Verhalten vorherzusagen, denn für $|\lambda_e|_{max} > 1$ ist das Verfahren definitiv instabil. Der Spektralradius $|\lambda_e|_{max} < 1$ ist nur nicht ausreichend, um Stabilität zu gewährleisten.

5.2.1 Berechnung des Spektrums und Spektralradiuses

Zur Berechnung des Spektrums einer Matrix steht die MATLAB[®] Funktion *eig* zur Verfügung. Nun ist es auf Grund der Größe der Matrix \mathbf{T} von $(\mu_{max} \cdot N_{elem})^2$ nicht ohne weiteres möglich die Eigenwerte zu berechnen. So würde schon ein recht kleines Modell mit 1000 Elementen und einem $\mu_{max} = 30$ einen 6,7 GB großen Arbeitsspeicher benötigen. Das volle Spektrum des Verfahrensoperators lässt sich somit nur für recht grobe räumliche Diskretisierungen mit einer geringen Anzahl von Oberflächenelementen berechnen. Zur Beurteilung der Stabilität ist es aber gar nicht nötig das ganze Spektrum des Verfahrensoperators zu berechnen. Die Kenntnis des betragsmäßig größten Eigenwertes ist dafür völlig ausreichend. Da \mathbf{T} sehr schwach besetzt ist, kann die Matrix speichersparend im *sparse*-Format gespeichert werden. Zur Berechnung des Spektralradiuses bietet sich die in MATLAB[®] implementierte Funktion *eigs* an. Diese

kann die größten Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix im sparse-Format berechnen. Die Berechnungen der *eigs*-Funktion beruhen auf der Arnoldi Methode [44]. Da diese Methode leider in vielen Fällen nicht konvergierte und kein Ergebnis lieferte, wurde der JDQR Algorithmus (Jacobi-Davidson style QR algorithm) verwendet. Der JDQR Algorithmus welcher von Fokkema et al [45] veröffentlicht wurde, konvergierte in fast allen Fällen und liefert gute Ergebnisse. Die verwendete *jdqr*-Funktion basiert auf einer Veröffentlichung von Zhaojun Bai et al [46].

Um die Zuverlässigkeit der *jdqr*-Funktion zu testen, wurde die Abhängigkeit des Spektralradius vom Parameter β für eine mit 384 Elementen diskretisierte Kugel berechnet und mit Ergebnissen der *eig*-Funktion verglichen. Im Bereich oberhalb $\beta = 0,7$ sind die Ergebnisse deckungsgleich. Leider stimmen die Ergebnisse des *eig* und des JDQR Algorithmus für kleiner werdende β immer schlechter überein. Wie man in Abbildung 5.7 sehen kann, beträgt der Unterschied im Mittel ungefähr 0,006. Dieser Unterschied entscheidet jedoch darüber, ob man das betrachtete Modell als stabil bzw. instabil einstufen sollte.

Test auf Langzeitstabilität

Nun stellt sich die Frage, welchen Ergebnissen man mehr Vertrauen schenken kann. Rein visuell scheinen die Ergebnisse des JDQR Algorithmus besser zum Gesamtverlauf des Spektralradius in Abbildung 5.7 zu passen. Dies allein kann natürlich kein Kriterium sein. Deshalb wird ein Stabilitätstest durchgeführt, um das Verhalten bei längeren Simulationszeiten zu testen. Hierzu wird der Schalldruckverlauf auf der Kugeloberfläche über 7000 Zeitschritte simuliert, wobei die Kugel einen kurzen Impuls mit der Impulsbreite Δt abstrahlt. Eine Simulation wird als instabil deklariert, wenn der Schalldruck am Ende der Simulationszeit nicht auf 0,1 % des maximalen Schalldrucks des Impulses abgefallen ist. Dies entspricht einem Signal-Rauschabstand von 60 dB. In Abbildung 5.7 sind stabile Ergebnisse dieses Testes mit einem schwarzen Punkt und instabile Ergebnisse mit einem roten Stern in Höhe von $|\lambda_e|_{max} = 1$ gekennzeichnet. Im Bereich unterhalb $\beta = 0,7$ wo unklar ist, welcher Methode man vertrauen kann, zeigt sich, dass die *eig*-Funktion in fast allen Fällen die

Instabilität vorhersagen konnte. Ob allerdings die absolute Größe des Spektralradiuses richtig berechnet wurde, lässt sich so nicht klären.

Das Dilemma ist nun, dass für größere Probleme mit mehreren tausend Oberflächenelementen die *eig*-Funktion nicht verwendet werden kann, da die Matrix des Verfahrensoperators nicht in den Arbeitsspeicher des Rechners passt. Deshalb wird in den folgenden Betrachtungen der JDQR Algorithmus zur Berechnung des Spektralradiuses verwendet und zur Absicherung der Ergebnisse zusätzlich ein Test auf Langzeitstabilität durchgeführt.

5.3 Stabilitätsbetrachtungen am Kugelmodell

Mit dem Spektrum und insbesondere dem Spektralradius steht nun ein Kriterium zur Verfügung mit dem die Stabilität der TD-BEM beurteilt werden kann. In den folgenden Abschnitten wird der Einfluss des Parameter β , der Abtastfrequenz sowie der räumlichen Diskretisierung auf den Spektralradius eines Kugelmodells eingehend untersucht. Weiterhin wird der Einfluss der Integrationsgenauigkeit auf die Stabilität des Verfahrens untersucht.

In den Abbildungen 5.5 und 5.6 sind die Spektren für eine Kugeloberfläche bestehend aus 384 rechteckigen Elementen dargestellt. Im ersten Fall mit $\beta = 1,9$ ($\Delta t = 1,1ms$) und im zweiten Fall mit $\beta = 0,66$ ($\Delta t = 0,38ms$). Der Spektralradius für den Fall $\beta = 0,66$ ist nahezu gleich eins und ist somit gerade noch stabil. Dies ist wesentlich größer als im Fall $\beta = 1,9$. Hier ist der Spektralradius kleiner 1, was auf einen stabilen Fall hindeutet. Man erkennt, dass die Eigenwerte insgesamt dichter um Zentrum verteilt liegen, was auf eine stärkere Dämpfung des Verfahrens hindeutet.

5.3.1 Abhängigkeit vom Parameter β

Die Abhängigkeit des Spektralradius $|\lambda_e|_{max}$ von dem Parameter β bei einem Kugelmodell 384 Elementen ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Die Berechnung des Spektralradiuses wurde mit der *eig*-Funktion sowie der *jdqr*-Funktion durchgeführt was in Abschnitt 5.2.1 näher beschrieben ist. Wie dort auch schon beschrieben, lassen sich klar 2 Bereiche erkennen, wenn man die Ergebnisse der

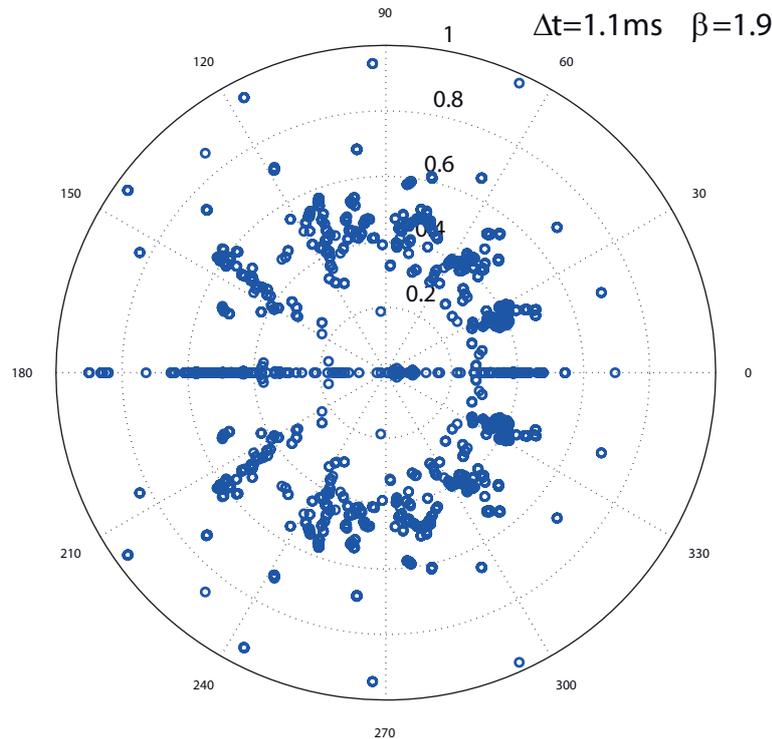


Abbildung 5.5: Spektrum einer Kugel bestehend aus 384 rechteckigen Elementen und $\beta = 1,9$ ($\Delta t = 1,1\text{ms}$) im Einheitskreis

eig-Funktion, welche das volle Spektrum aus der ganz aufgebauten Matrix berechnet, und der *jdqr*-Funktion, welche nur die größten Eigenwerte aus der Matrix im sparse-Format berechnet, miteinander vergleicht. Im Bereich oberhalb $\beta = 0,7$, wo ausgeprägte periodische Resonanzen erkennbar sind, liefern beide Algorithmen die gleichen Ergebnisse. Von hohen zu niedrigen β werden die Peaks weniger ausgeprägt und nähern sich dem kritischen Wert 1 an. Im Bereich unterhalb $\beta = 0,7$ stimmen die Ergebnisse der beiden Algorithmen nur noch in einzelnen Fällen überein, und unterhalb $\beta = 0,54$ gibt es gar keine Übereinstimmungen mehr. Während die Ergebnisse des *jdqr*-Algorithmus den Trend der abklingenden Resonanzen weiterführen und sich die Ergebnisse mit kleiner werdendem β dem Wert 1 annähern, sind die Ergebnisse der *eig*-Funktion fast immer größer 1 wobei sich der Wert unregelmäßig ändert.

Im Bereich oberhalb $\beta = 0,7$, wo die Ergebnisse der *eig*-Funktion und der *jdqr*-Funktion übereinstimmen, sieht man, dass bei jeder Resonanz der kritische maximale Spektralradius von 1, überschritten wird und eine Instabilität

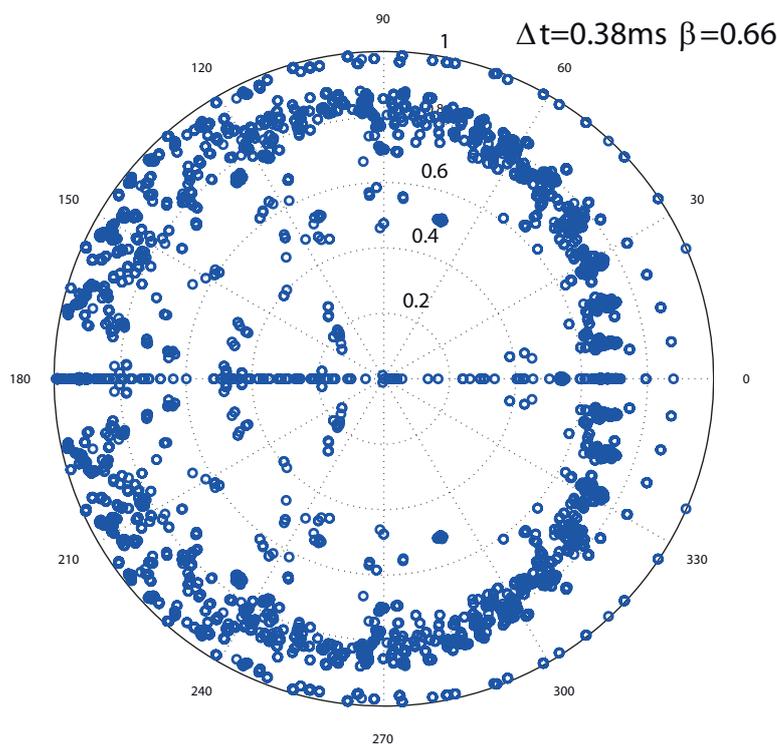


Abbildung 5.6: Spektrum einer Kugel bestehend aus 384 rechteckigen Elementen und $\beta = 0,66$ ($\Delta t = 0,38ms$) im Einheitskreis

auftritt. Im Bereich unterhalb $\beta = 0,7$ wo unklar ist welcher Methode man vertrauen kann, zeigt sich, dass die *eig*-Funktion in fast allen Fällen die Instabilität vorhersagen kann. Ob allerdings die absolute Größe des Spektralradius richtig berechnet wird, lässt so sich nicht klären.

Diese Ergebnisse scheinen erst einmal im Widerspruch mit den Ergebnissen aus Abbildung 5.4 zu stehen. In keinem Fall konnte dort ein instabiles Verhalten beobachtet werden und für kleinere β nahm der Einfluss der Innenraummoden sogar ab. Die Ergebnisse der Spektralradien zeigen dagegen, dass mit kleiner werdenden β die Ergebnisse instabiler werden. Um diesem Widerspruch aufzuklären wurden 2 instabile Fälle näher untersucht. Es wurde jeweils ein instabiler Fall mit einem Spektralradius von $|\lambda_e|_{max} > 1$ aus dem Bereich unterhalb sowie oberhalb $\beta = 0,7$ ausgewählt und näher untersucht. Im ersten Fall handelt es sich um die Simulation mit $\beta = 1,27$. In Abbildung 5.8 sind die Ergebnisse im Zeit- und im Frequenzbereich dargestellt. Im Frequenzbe-

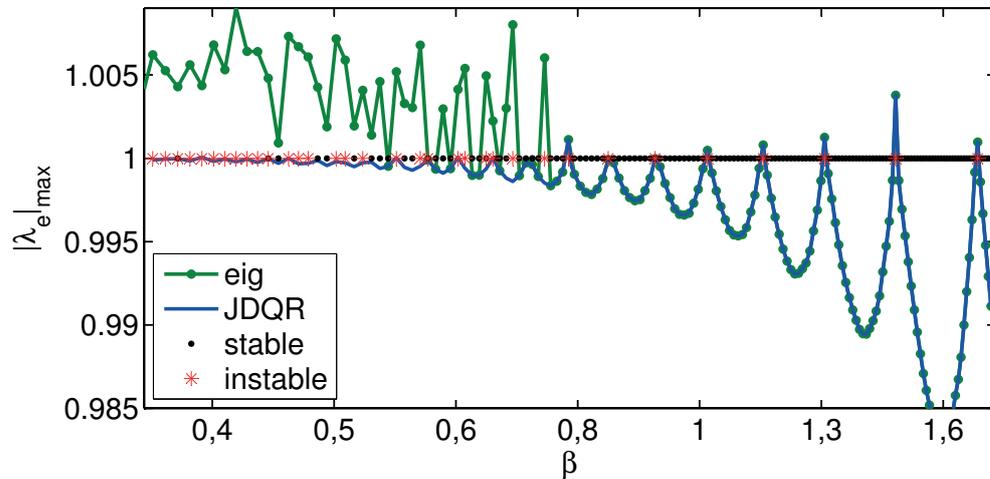


Abbildung 5.7: Spektralradius $|\lambda_e|_{\max}$ des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von β für Kugelmodell mit 384 Elementen. Eigenwerte wurden mit der *MATLAB*[®] Funktion *eig* (vollständige Matrix) bzw. *jdqr* (Matrix im sparse-Format) berechnet. Schwarze bzw. rote Punkte kennzeichnen stabiles bzw. instabiles Verhalten bei einem Testfall mit 7000 Zeitschritten.

reich sind wieder deutlich die Einflüsse der Innenraummoden erkennbar. Diese Einflüsse sind im Zeitbereich jedoch kaum erkennbar. Eine Instabilität kann erst beobachtet werden, wenn man die Anzahl der Zeitschritte stark erhöht. In Abbildung 5.9 ist erkennbar, dass erst ab dem 5000. Zeitschritt die Instabilität sichtbar wird.

Für den zweiten Fall wurde eine Simulation mit $\beta = 0,59$ durchgeführt. Die Ergebnisse aus Abbildung 5.10 lassen erkennen, dass ein Einfluss der Innenraummoden zwar noch erkennbar ist (jedenfalls im Frequenzbereich), aber dieser Einfluss im Vergleich zum ersten Fall viel kleiner ist. Ein instabiles Verhalten lässt sich auch hier erst bei sehr langen Simulationszeiten beobachten, wie man Abbildung 5.11 entnehmen kann.

In den in Abbildung 5.4 gezeigten Ergebnissen sind nur die Einflüsse der Innenraummoden der Struktur sichtbar, aber keine Instabilitäten. Dies liegt daran, dass im Falle einer Instabilität diese bei den betrachteten Fällen erst nach einigen tausend Zeitschritten auftritt, wie z.B. in Abbildung 5.9. Zur Berechnung der bisherigen Ergebnisse reichten 512 Zeitschritte aus, so dass

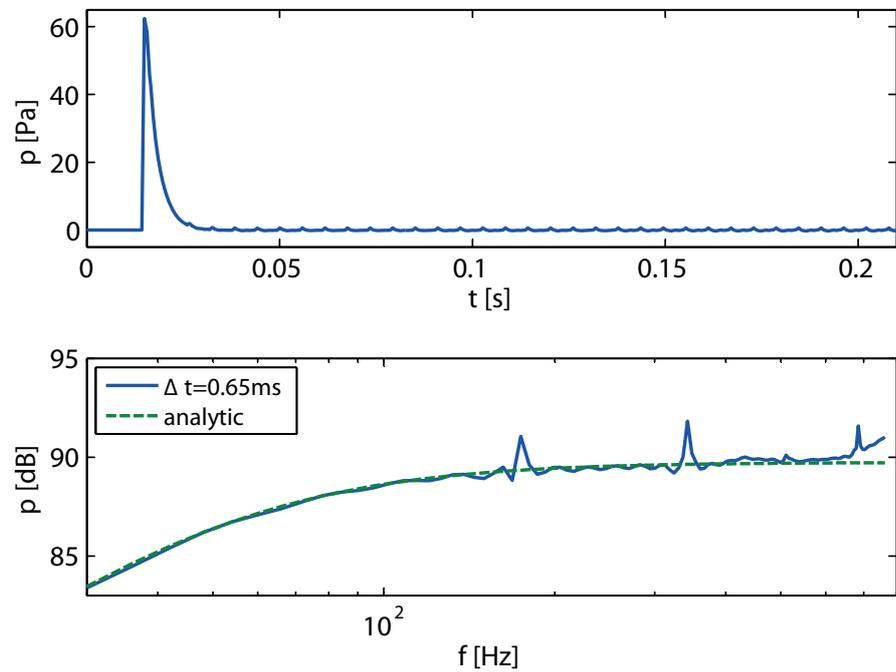


Abbildung 5.8: Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit $\beta = 1,27$ über 330 Zeitschritte

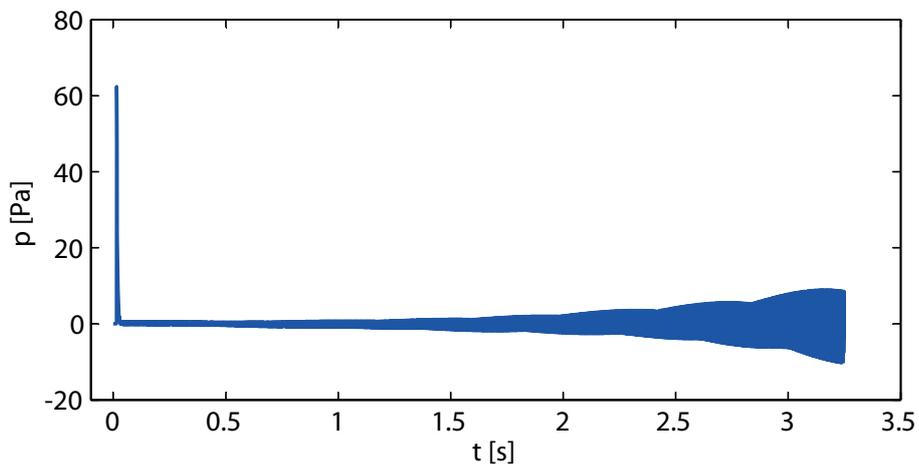


Abbildung 5.9: Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit $\beta = 1,27$ über 5000 Zeitschritte

die Instabilität noch nicht auftreten konnte.

Aus den Fallstudien lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Ein Eigenwert von

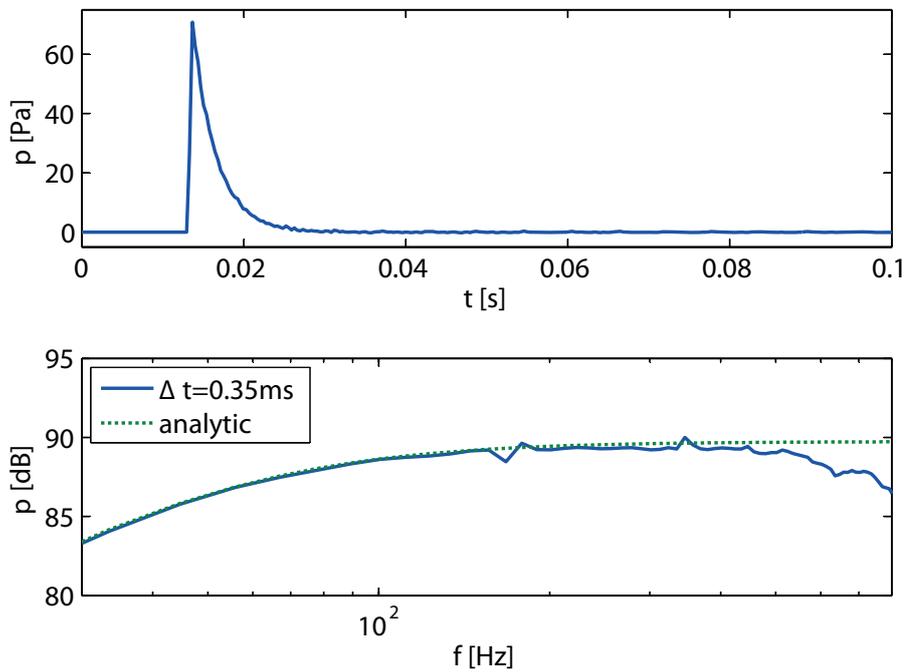


Abbildung 5.10: Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit $\beta = 0,59$ über 330 Zeitschritte

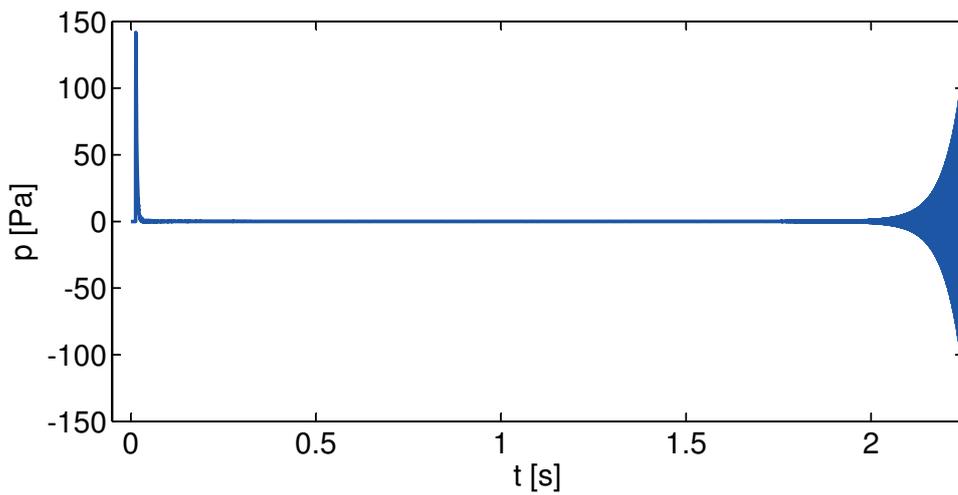


Abbildung 5.11: Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit $\beta = 0,59$ über 7000 Zeitschritte mit Instabilität ab 6600

$|\lambda_e|_{max} > 1$ muss nicht zwangsläufig zu unbrauchbaren Ergebnissen führen, da der Beginn der Instabilität erst sehr spät erfolgen kann. Auch scheint die Stärke der Überschreitung des Spektralradiuses über den Grenzwert 1 nichts über die Stärke des Einflusses der Innenraummoden auszusagen. Diese Aussage ist natürlich nur dann richtig, wenn man davon ausgehen kann, dass die Eigenwerte richtig berechnet wurden. Hier bestehen aber noch erhebliche Zweifel (siehe Abschnitt 5.2.1). Eine Schlussfolgerung lassen die Ergebnisse jedoch schon zu. Für die Berechnung der Ergebnisse im Frequenzbereich wurde ein Zeitabschnitt von 256 bzw. 512 Zeitschritten verwendet, welcher sich innerhalb der ersten 1000 Zeitschritte befand. Der Einfluss der Innenraummoden auf die Schallabstrahlung innerhalb der ersten 1000 Zeitschritte ist für kleinere β weniger stark ausgeprägt auch wenn die Ergebnisse später instabiles Verhalten zeigen. Wenn man die Abbildungen 5.8 und 5.10 vergleicht, sieht man, dass mit $\beta = 0,59$ der Schalldruck ab Beginn der Instabilität sehr viel stärker anwächst als bei $\beta = 1,27$. Dafür wird der Verlauf bis zum Beginn der Stabilität weniger von den Innenraummoden gestört.

5.3.2 Abhängigkeit von der Abtastfrequenz und der räumlichen Diskretisierung

Wenn man die Ergebnisse aus Abbildung 5.7 statt über β über die Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ aufträgt, ist klar zu erkennen, dass die Peaks mit den Innenraummoden der Kugel korrelieren (Abbildung 5.12). Immer wenn die Abtastfrequenz mit einer der Innenraummoden der Kugel übereinstimmt (gestrichelte senkrechte Linie in Abbildung 5.12) überschreitet der größte Eigenwert die Stabilitätsgrenze von 1. Die durchgeführten Stabilitätstests bestätigen dieses Ergebnis.

Um die Abhängigkeit des Spektralradiuses des Verfahrens von der räumlichen Diskretisierung der Kugeloberfläche zu untersuchen, wurden Kugelmodelle bestehend aus 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen im Bereich $0,4 < \beta < 2$ untersucht. Die Ergebnisse in Abbildung 5.13 zeigen, dass in allen Fällen der Spektralradius dem Einfluss der Innenraumresonanzen unterliegt. Die Resonanzen sind mit zunehmendem Grad der Diskretisierung der Oberfläche weniger stark ausgeprägt und liegen dichter am Grenzwert 1.

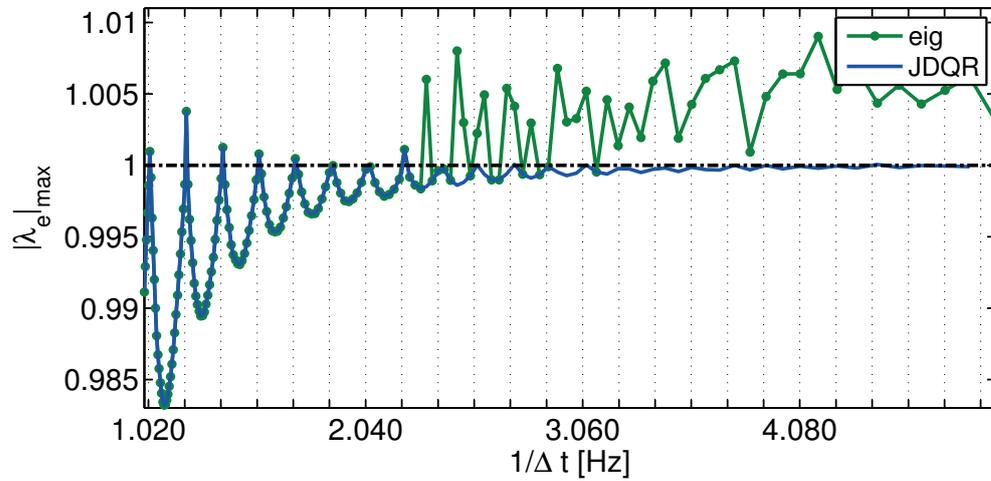


Abbildung 5.12: Spektralradius des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von der Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ für Kugelmodell mit 384 Elementen. An gestrichelten senkrechten Linien treten Innenraummoden der Kugel auf.

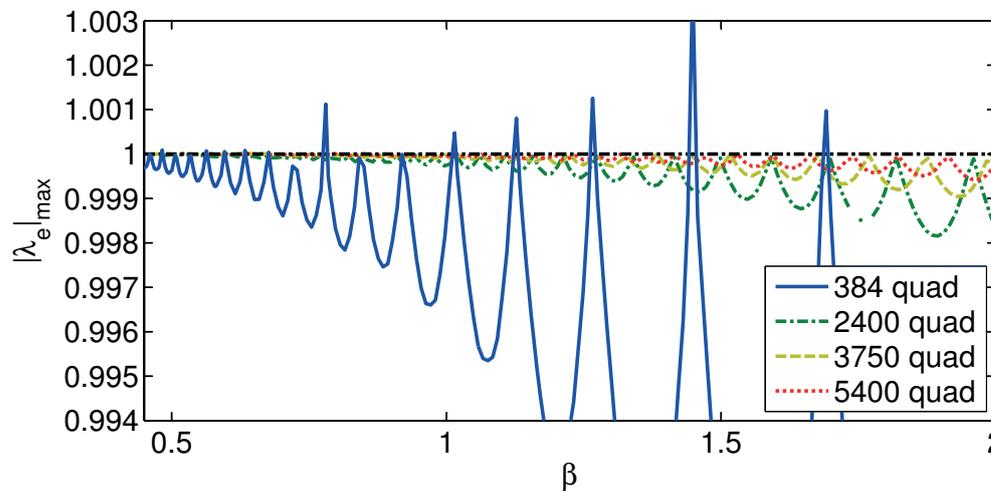


Abbildung 5.13: Spektralradius des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von β für Kugelmodelle mit 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen. Eigenwerte wurden mit dem JDQR-Algorithmus berechnet.

Wenn man den Spektralradius nun wieder über die Abtastfrequenz f_s auf-

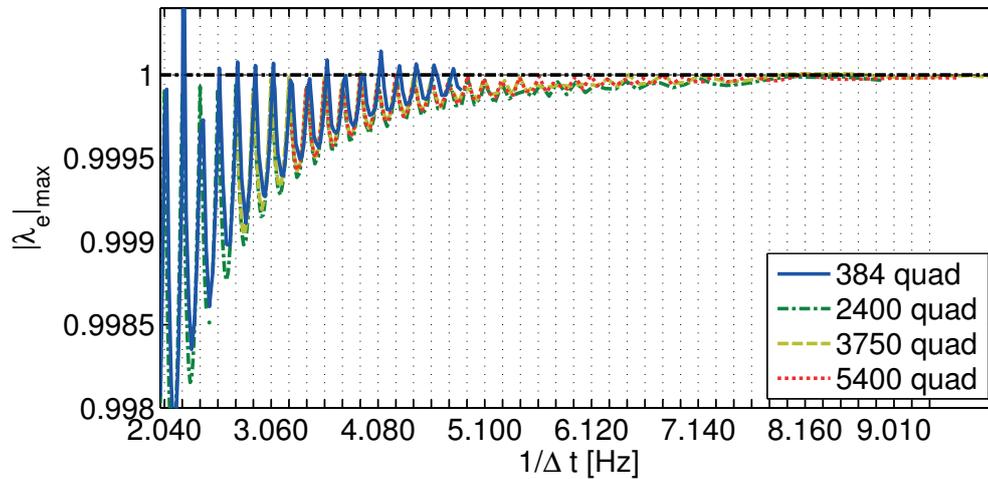


Abbildung 5.14: Spektralradius des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von der Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ für Kugelmodelle mit 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen. An gestrichelten senkrechten Linien treten Innenraummoden der Kugel auf.

trägt, zeigt sich, dass der Verlauf des Spektralradiuses fast unabhängig vom Grad der Oberflächendiskretisierung ist. Der resonante Verlauf des Spektralradiuses ist für niedrige Abtastfrequenzen, also für große Zeitschritte, stark ausgeprägt. Mit steigender Abtastfrequenz strebt der Spektralradius gegen 1, wobei das resonante Verhalten abflacht. Überraschend hierbei ist, dass die Diskretisierung der Oberfläche hierauf fast keinen Einfluss hat.

Die Berechnung jedes Spektralradiuses ist sehr rechenaufwendig und kann je nach Modellgröße mehrere Stunden dauern. Wie in den Abbildungen 5.13 und 5.14 erkennbar ist, werden manche Resonanzspitzen abgeschnitten, da der Verlauf des Spektralradiuses ungenügend abgetastet wird, um die Rechenzeit in einem vertretbaren Rahmen zu halten.

Deshalb wurde zur Untersuchung der Abhängigkeit des Spektralradiuses vom Grad der Oberflächendiskretisierung ein kleinerer Bereich um die Resonanzfrequenz von $f_{res} = 2890\text{Hz}$ feiner abgetastet. In den Resonanzen wurde hierbei die Abtastfrequenz in 1 Hz Schritten geändert. Dies entspricht einer Änderung des Zeitschrittes von ungefähr $1.2e - 07\text{s}$.

In Abbildung 5.15 sind die Ergebnisse für die Kugelmodelle bestehend aus

384, 2400, 3750, 5400 und 9600 quad-Elementen dargestellt. Während beim sehr groben Kugelmodell mit 384 Elementen die Resonanzen nicht ganz mit den analytischen Innenraummoden der Kugel übereinstimmen, treffen die feineren Modelle diese sehr gut. Der Verlauf des Spektralradius für die Kugelmodelle mit 2400, 3750, 5400 und 9600 quad-Elementen ist fast deckungsgleich. In den Maximalwerten der Resonanzen gibt es leichte Unterschiede, wobei nicht auszuschließen ist, dass diese Unterschiede auf den *JDQR*-Algorithmus zurückzuführen sind.

Auch hier wurde die Berechnung des Spektralradiuses mit einem Test auf Langzeitstabilität kombiniert. Die Ergebnisse sind im oberen Teil von Abbildung 5.15 dargestellt. Stabile Simulationen sind mit einem blauen Punkt und instabile Simulationen mit einem roten Punkt gekennzeichnet. Beim sehr groben Kugelmodell mit 384 Elementen treten Instabilitäten auch außerhalb der Resonanzen auf. Dies deckt sich mit den Ergebnissen aus Abbildung 5.7. Bei einer Abtastfrequenz von 2890 Hz ergibt sich ein $\beta = 0,6$ für das grobe Kugelmodell, womit man im instabilen Gebiet von $\beta < 0,7$ liegt. Alle anderen Modelle weisen nur direkt in der jeweiligen Resonanzfrequenz eine Instabilität auf. Das Modell mit 9600 Elementen zeigt sogar nur bei 3060 Hz eine Instabilität.

Da die Stärke der Instabilität aus der Berechnung des Spektralradiuses nicht klar hervorgeht, wurde der Schalldruckverlauf beim Stabilitätstest für den Fall $f_s = 2890\text{Hz}$ näher untersucht (siehe Abbildung 5.16). Der Schalldruck beim Kugelmodell mit 384 Elementen wächst schon kurz nach dem von der Kugel abgestrahlten Impuls stark an. Bei allen anderen Modellen liegt am Ende der Simulationszeit von 7000 Zeitschritten der Schalldruck noch weit unter der Amplitude des Impulses. Mit zunehmender Oberflächendiskretisierung wird der instabile Anstieg des Schalldrucks verringert. Wenn man die letzten 512 Zeitschritte des Schalldruckverlaufes in den Frequenzbereich transformiert (siehe Abbildung 5.17), erkennt man, dass alle Innenraumresonanzen der Kugel an der Instabilität beteiligt sind. Die Werte für das Kugelmodell mit 384 Elementen werden in Abbildung 5.17 nicht dargestellt, da sie um ein Vielfaches größer sind als die Werte der anderen Kugelmodelle und eine sinnvolle Darstellung so nicht möglich ist.

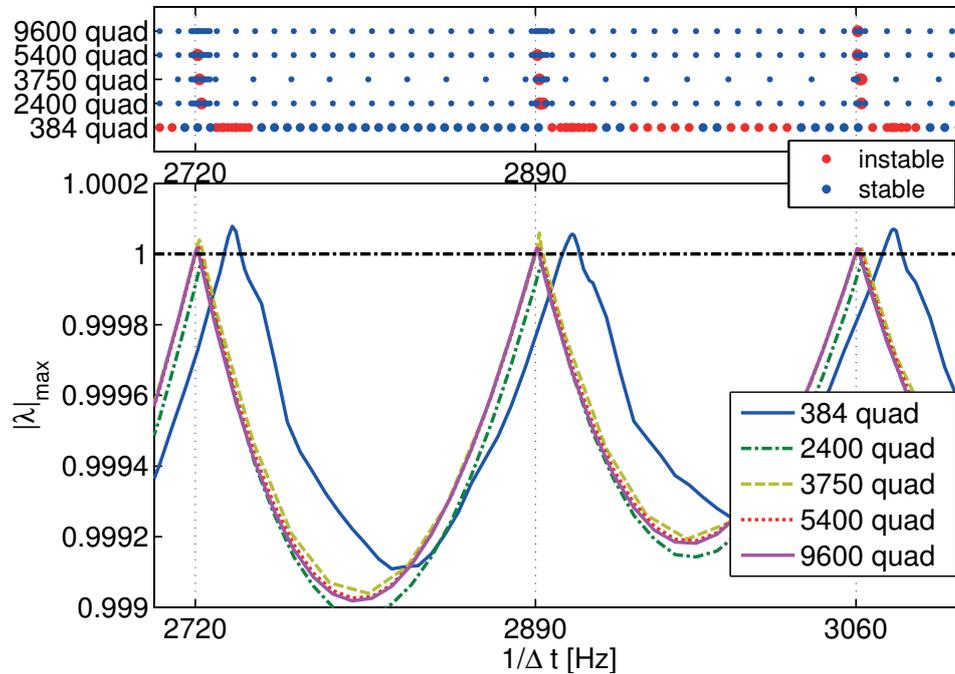


Abbildung 5.15: Spektralradius des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von der Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ für Kugelmodelle mit 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen. An gestrichelten senkrechten Linien treten Innenraummoden der Kugel auf.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich eine feine Oberflächendiskretisierung positiv auf die Stabilität auswirkt, auch wenn der Spektralradius des Verfahrensoperators nur sehr wenig von der Oberflächendiskretisierung abhängt. Allerdings muss auch bedacht werden, dass eine sehr kleine Änderung über die Stabilität des Verfahrens entscheiden kann, wenn der Spektralradius fast den Betrag 1 hat.

5.3.3 Abhängigkeit von der Helmholtz-Zahl

Aus Effizienzgründen will man die Anzahl der Elemente so gering wie möglich halten, da der Rechenaufwand quadratisch mit der Anzahl der Elemente wächst. Nun stellt sich natürlich die Frage, wie fein die Oberfläche diskretisiert sein muss, um Ergebnisse innerhalb einer gewissen Fehlertoleranz zu erhalten.

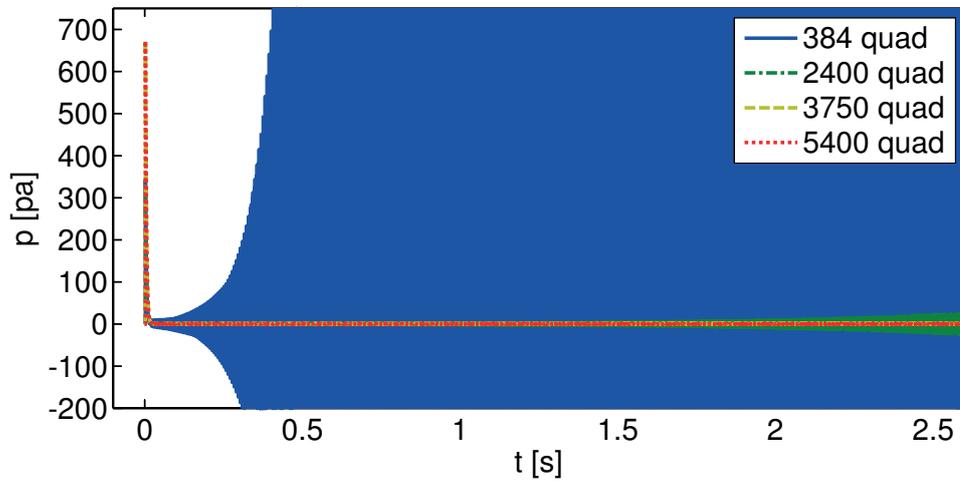


Abbildung 5.16: Zeitverlauf des Schalldrucks auf der Kugeloberfläche für Kugelmodelle mit 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen bei instabiler Abtastfrequenz $f_s = 2890\text{Hz}$ nach Abstrahlung eines Impulses.

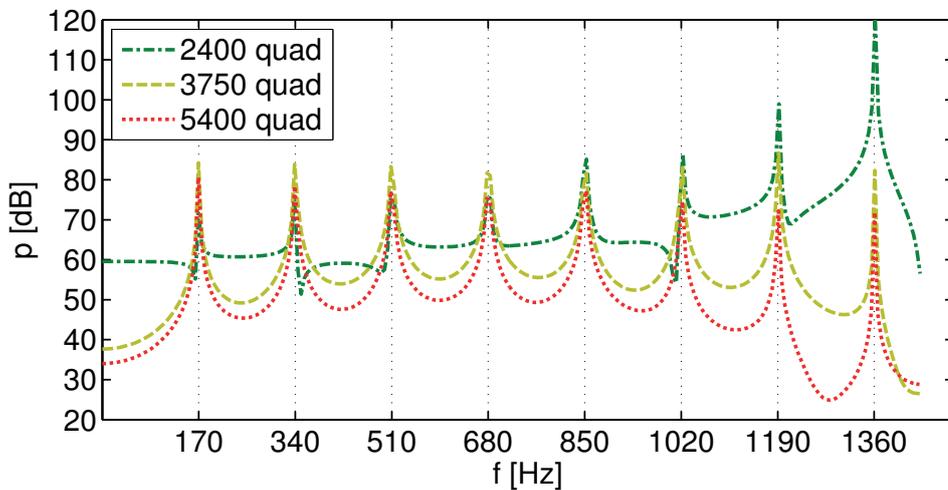


Abbildung 5.17: Spektrum des Schalldrucks auf der Kugeloberfläche für Kugelmodelle mit 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen bei instabiler Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t = 2890\text{Hz}$ nach Abstrahlung eines Impulses. An gestrichelten senkrechten Linien treten Innenraummoden der Kugel auf.

Der Parameter β alleine reicht, wie gezeigt wurde, nicht aus, um die Größe des Fehlers oder gar Stabilität vorherzusagen.

Wie in der Akustik üblich bietet es sich an, die Helmholtz-Zahl zu verwenden. Die Helmholtz-Zahl He , benannt nach Hermann von Helmholtz, bezeichnet das Verhältnis einer charakteristischen Länge zur Wellenlänge der Schallwellen.

$$He = l/\lambda \quad (5.11)$$

Als charakteristische Länge wird die Kantenlänge eines Oberflächenelementes gewählt. In den hier benutzten Kugelmodellen sind die Elemente alle ungefähr gleich groß, so dass es nicht schwierig ist die Kantenlänge festzulegen. In praktischen Anwendungen kommen jedoch häufig Oberflächenmodelle zum Einsatz, welche sehr unterschiedlich große Elemente verwenden, da gewisse Gebiete feiner diskretisiert sind als andere. Ob es sinnvoll ist, in diesem Fall die größte oder die mittlere Kantenlänge als charakteristische Länge zu wählen, müsste noch untersucht werden. In den meisten Veröffentlichungen wird entweder gar nicht auf diesen Punkt eingegangen oder es wird die größte Kantenlänge benutzt.

In Abbildung 5.18 ist der absolute Fehler des abgestrahlten Schalldrucks $|\Delta p|$ in Bezug zur Helmholtz-Zahl $He = l/\lambda$ dargestellt. Es wurden Kugelmodelle mit einer Oberflächendiskretisierung von 384, 2400, 3750, 5400 und 9600 viereckigen Elementen verwendet. Für jedes Oberflächenmodell wurden Simulationen mit $\beta = 1, 5; 1; 0, 8; 0, 5$ und über 1024 Zeitschritte durchgeführt. Wie zu erwarten steigt der absolute Fehler mit steigender Helmholtz-Zahl exponentiell an. Bei gleichem β ist der Fehlerverlauf für alle Oberflächenmodell im Mittel ungefähr gleich. Eine höhere Anzahl von Elementen führt nicht zu einem besseren Ergebnis. Das Oberflächenmodell mit 5400 Elementen weist z.B. bei $\beta = 1.5$ von allen Modellen den geringsten Fehler auf, aber bei $\beta = 1$ ist es von allen Modellen das schlechteste.

Ein Vergleich der Ergebnisse in Bezug zum Parameter β zeigt, dass der mittlere absolute Fehler mit kleiner werdendem β sinkt. So ist für $\beta = 0.5$ bei allen Oberflächenmodellen der absolute Fehler geringer als für $\beta = 0.8$. Nur für das Modell mit 384 Elementen lassen sich Störungen der Innenraummoden erkennen. Aber selbst für diesen Fall ist der dadurch entstehende Fehler nicht größer als der mittlere Fehler für $\beta = 0, 8$.

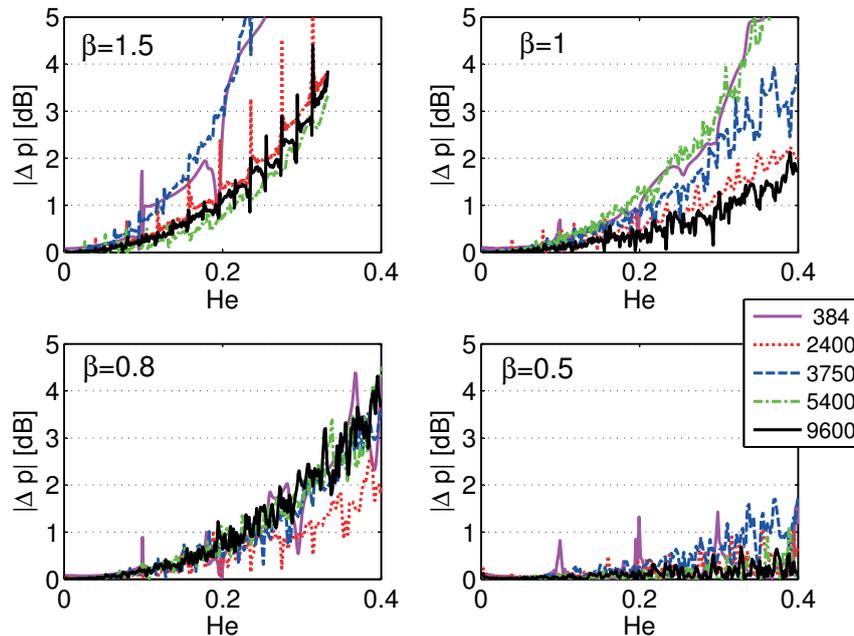


Abbildung 5.18: Absoluter Fehler des abgestrahlten Schalldrucks $|\Delta p|$ in Bezug zur Helmholtz-Zahl $He = l/\lambda$ für $\beta = 1,5; 1; 0,8; 0,5$

Auch in anderen Fällen tritt der Einfluss der Innenraummoden deutlich hervor, zu sehen an den periodisch auftretenden Fehlermaxima. Dies ist auf die ungünstige Nähe der Abtastfrequenz zu einer der Innenraummoden zurückzuführen.

Für alle Simulationen, bis auf wenige Ausnahmen mit $\beta = 1,5$, ist der absolute Fehler bei $He = 0.2$ kleiner oder gleich 1 dB. Eine Helmholtz-Zahl von $He = 0.2$ bedeutet, dass es 5 Oberflächenelemente je Wellenlänge gibt. Die in vielen Veröffentlichungen (z.B. [47]) angegebene Faustregel, dass sechs lineare Elemente pro Wellenlänge benötigt werden, um eine Genauigkeit mit einem Fehler von wenigen Prozent zu erhalten, die typisch für viele technische Anwendungen ist, stimmt gut mit den hier gefundenen Ergebnissen überein. Natürlich handelt es sich bei dem hier betrachteten Kugelmodell um ein sehr einfaches Modell. Auch die Randbedingung ist sehr einfach, da bei einer atmenden Kugel alle Oberflächenelemente die gleiche Randbedingung haben. Bei komplizierteren Modellen mit Randbedingungen, bei denen auch Oberflächenwellen auftreten, sind höhere Fehlerwerte zu erwarten. Trotzdem dürfte auch für diese Fälle der hier gezeigt generelle Zusammenhang zwischen absolutem

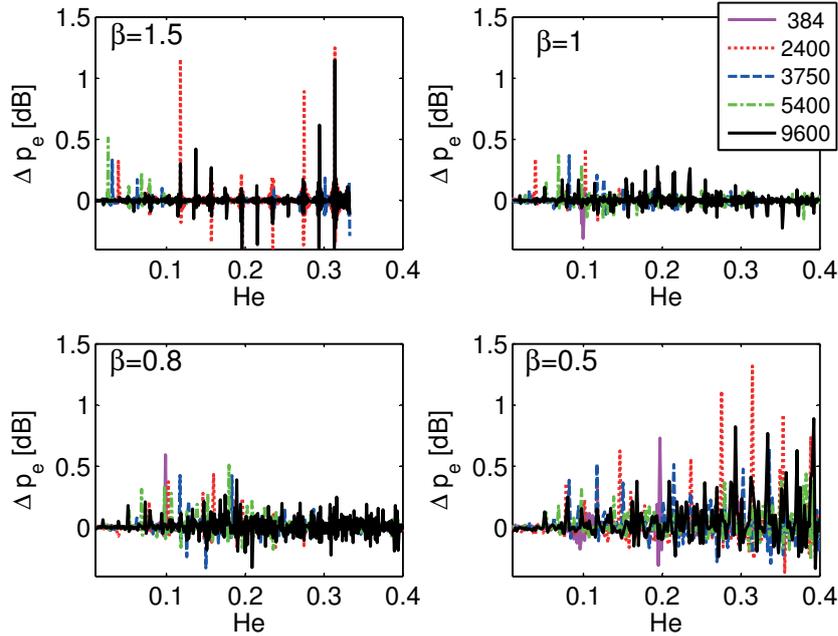


Abbildung 5.19: Änderung des absoluten Fehler des abgestrahlten Schalldrucks $\Delta p_e = |\Delta p_{4096}| - |\Delta p_{1024}|$ in Bezug zur Helmholtz-Zahl $He = l/\lambda$ bei einer Zunahme der Zeitschritte von 1024 auf 4096.

Fehler, der Helmholtz-Zahl und dem Parameter β erhalten bleiben.

Abschließend soll noch betrachtet werden, wie sich der absolute Fehler ändert, wenn die Laufzeit der Simulation erhöht wird. Hierfür wurde die Anzahl der Zeitschritte von 1024 auf 4096 erhöht und die Simulationen erneut durchgeführt. In Abbildung 5.19 ist die Veränderung des absoluten Fehlers $\Delta p_e = |\Delta p_{4096}| - |\Delta p_{1024}|$ dargestellt. Man sieht, dass in allen Fällen die Veränderung hauptsächlich in den durch die Innenraummoden verursachten Fehlermaxima stattfindet. Wie zu erwarten war, steigt der Einfluss der Innenraummoden mit der Zeit an. Für eine noch höhere Anzahl von Zeitschritten ist ein exponentieller Anstieg des Einflusses zu erwarten.

Es lässt sich wiederum keine Abhängigkeit von der Anzahl der Oberflächenelemente erkennen, sondern nur vom Parameter β . Für $\beta = 1.5$ und $\beta = 0.5$ beträgt die Fehlerzunahme bis zu 1,5 dB und für $\beta = 1$ und $\beta = 0.8$ beträgt die Fehlerzunahme maximal 0,5 dB. Ein sehr kleines sowie ein großes β führen zu einer verstärkten Störung durch die Innenraummoden der Struktur.

Zusammenfassend lassen sich also 2 Einflüsse auf den Fehler erkennen. Zum einen der Fehler durch die Güte der räumlichen Diskretisierung, welcher unabhängig von der Laufzeit der Simulation ist. Der Diskretisierungsfehler steigt mit der Helmholtz-Zahl und sinkt mit abnehmendem β . Das der Fehler mit kleiner werdendem β sinkt, ist dadurch zu erklären, dass hier eine bessere zeitliche Auflösung des Schalldrucks gegeben ist.

Der andere zu beobachtende Fehler ist der Einfluss der Innenraummoden. Dieser steigt mit der Laufzeit der Simulation an, da sich die Fehler mit der Zeit aufaddieren. Der Haupteinfluss auf diesen Fehler ist die Nähe der Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ zu einer der Innenraummoden der Struktur, wie in Abschnitt 5.3.2 gezeigt wurde. Aber auch das Verhältnis β beeinflusst die Stärke der Innenraummoden. Ein β zwischen 0,8-1,2 ist hier am günstigsten. Zu kleine als auch zu große Werte wirken sich eher ungünstig aus.

Die Helmholtz-Zahl ist in Kombination mit β zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers sehr gut geeignet. Für die Abschätzung des Einflusses der Innenraummoden zeigt sich, dass ein kleiner Diskretisierungsfehler sich positiv auswirkt. Jedoch ist im Falle des Zusammentreffens von Abtastfrequenz und Innenraummode bei keiner Helmholtz-Zahl mit einem stabilen Ergebnis zu rechnen. Da man in den meisten praktischen Fällen die Innenraummoden nicht kennt, ist die Wahl der Abtastfrequenz ein Glücksspiel. Im ungünstigen Fall einer Instabilität bleibt dann nur die Abtastfrequenz etwas zu verändern und die Rechnung erneut zu starten. Mit hoher Wahrscheinlichkeit wird das Ergebnis dann stabil sein. Trotzdem ist diese Einschränkung der TD-BEM nicht sehr vertrauenerweckend. Deshalb werden in den folgenden Abschnitten unterschiedliche Stabilisierungsansätze des Verfahrens untersucht.

5.3.4 Abhängigkeit von der Integrationsgenauigkeit

Die numerische Integration stellt eine weitere Fehlerquelle dar, die das Verfahren stark beeinflusst. So konnte bei der Umsetzung der TD-BEM in MATLAB[®] beobachtet werden, dass eine fehlerhafte Integration, welche nur sehr wenige Matrixeinträge betraf, zu sofortiger Instabilität des Verfahrens führte.

Bei der numerischen Integration werden die Integrationsgebiete nur angenähert. Je mehr Gauß-Punkte je Koordinate verwendet werden, umso genauer

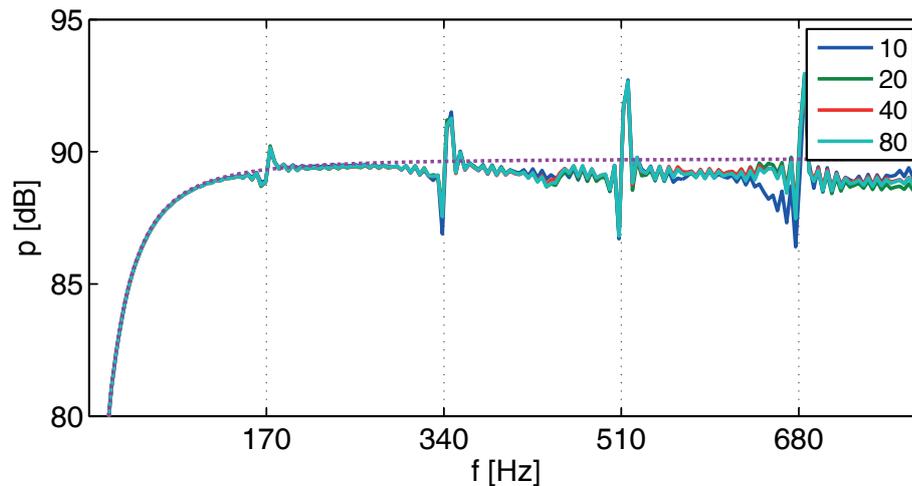


Abbildung 5.20: Einfluss der Integrationsgenauigkeit auf den Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit 10, 20, 40 und 80 Gauß-Punkten je Dimension ($\beta = 0,8$)

werden die Ergebnisse. Der Rechenaufwand steigt natürlich dementsprechend an. In Abbildung 5.20 sind die Schalldrücke im Immissionspunkt für den instabilen Fall mit $\beta = 0,8$ für verschiedene Integrationsgenauigkeiten dargestellt. Es lässt sich keine Reduzierung des Einflusses der Innenraummoden beobachten. Bei einem Test auf Langzeitstabilität lässt sich auch keine Abhängigkeit beobachten. Nur die Ergebnisse mit 10 Gauß-Punkten zeigt ein schlechteres Verhalten. Sobald aber eine ausreichende Integrationsgenauigkeit erreicht ist, stellt sich keine Verbesserung ein.

5.4 Dämpfung der Instabilität

Wie im vorhergehenden Abschnitt 5.3 gezeigt wurde, führen Eigenwerte, deren Betrag größer als 1 ist, zu einem instabilen Verhalten. Diese Eigenwerte entsprechen den Eigenfrequenzen des Innenraums der Struktur. Insbesondere wenn die Abtastfrequenz mit der Frequenz einer Innenraummode übereinstimmt, sind instabile Eigenwerte größer 1 zu erwarten.

Die Randintegralgleichung (3.16) enthält keine Dämpfung, wie z.B. eine Ausbreitungsdämpfung durch das Medium oder eine Schallabsorption an Oberflächen in Form eines Reflexionsfaktors. Es ist also durchaus physikalisch mög-

lich, dass ein Eigenwert mit Betrag 1 auftritt. Durch Diskretisierungsfehler der Strukturoberfläche und der Zeit ist es nicht auszuschließen, dass solch ein kritischer Eigenwert im diskreten Modell vom Betrag her größer als 1 wird. Die Diskretisierungsfehler lassen sich durch eine feinere Diskretisierung minimieren, was sich, wie in Abschnitt 5.3 gezeigt wurde, auch positiv auf die Stabilität auswirkt. Dies führt jedoch zu einem immer höheren numerischen Aufwand und garantiert trotzdem keine Stabilität.

Es ist naheliegend den mathematischen Ansatz zu erweitern und einen Dämpfungsterm einzuführen. In [48] benutzt Parot einen Reflexionsfaktor der die Instabilität dämpfen soll. Das Ziel ist nicht eine reale Dämpfung des physikalischen Modells darzustellen, sondern nur eine minimale Dämpfung in das ungedämpfte mathematische Modell einzuführen. Durch diese Dämpfung sollen insbesondere die Eigenmoden gedämpft werden, die das System instabil werden lassen. Die Simulationsergebnisse sollen dabei nur minimal verfälscht werden.

Mit der Annahme, dass der Schall nicht vollständig reflektiert wird, lässt sich Gleichung (3.20) mit dem Reflexionsfaktor $R = (1 + \epsilon)^{-\mu}$ erweitern und man erhält

$$-2\pi\vec{p}_i = \sum_{\mu=1}^{\mu_{max}} \mathbf{G}_\mu \vec{q}_{i-\mu+1} + \sum_{\mu=1}^{\mu_{max}} (1 + \epsilon)^{-\mu} \mathbf{H}_\mu [\mu\vec{p}_{i-\mu+1} - (\mu - 1)\vec{p}_{i-\mu}]. \quad (5.12)$$

ϵ ist der Dämpfungskoeffizient der die Reflexion des Schalldrucks an einem Element reduziert. Die Wichtung mit μ stellt eine Ausbreitungsdämpfung da. Für unmittelbar benachbarte Elemente ist $\mu = 1$ und für Elemente die sehr weit entfernt liegen, steigt μ bis auf den Maximalwert μ_{max} an. Dieses Dämpfungsmodell ist natürlich sehr einfach und hat keine Frequenzabhängigkeit, wie man sie in der Realität finden würde. Aber das ist ja auch nicht der Zweck des Dämpfungskoeffizienten.

Als Testfall, um die Wirksamkeit des Dämpfungskoeffizienten zu prüfen, soll auch hier wieder die Schallabstrahlung einer Kugel dienen. Es wird das Modell mit 384 Elementen gewählt, da hier die Instabilität besonders stark sichtbar ist. Auch wird ein Test auf Langzeitstabilität durchgeführt, bei dem der Schalldruckverlauf in einem Immissionspunkt über 7000 Zeitschritte simuliert wird, nachdem die Kugel einen kurzen Impuls mit der Impulsbreite Δt abgestrahlt hat. Der Zeitschritt wird so gewählt, dass die Abtastfrequenz mit einer Ei-

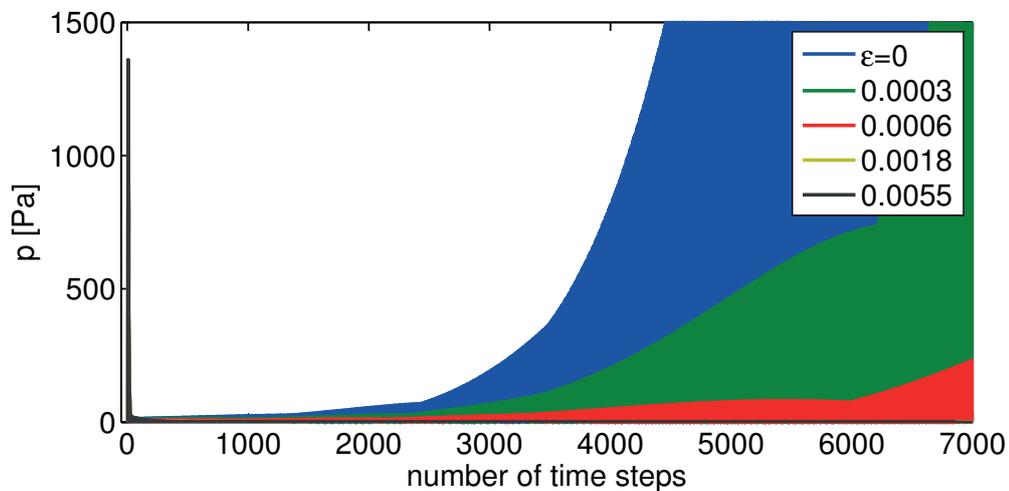


Abbildung 5.21: Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 1,266$ und 7000 Zeitschritte

genmode des Kugelinnenraums zusammenfällt, sodass es zu einer Instabilität kommt.

In Abbildung 5.21 erkennt man, dass die Instabilität wie erhofft gedämpft wird. Die Dämpfungskoeffizienten $\epsilon = 0,0003$, $\epsilon = 0,0006$, $\epsilon = 0,0018$, und $\epsilon = 0,0055$ werden mit dem ungedämpften System $\epsilon = 0$ verglichen. Mit steigendem Dämpfungskoeffizienten steigt auch die Dämpfung der Instabilität. Leider wird der Schalldruckverlauf vor Einsetzen der Stabilität dadurch nicht verbessert. In Abbildung 5.22 sind die ersten 150 Zeitschritte des Schalldruckverlaufes in einem Immissionspunkt dargestellt. Für $\epsilon = 0,0055$ verschlechtert sich sogar das Ergebnis sehr stark. In Abbildung 5.23 wird der dazugehörige Frequenzverlauf dargestellt. Bei $\epsilon = 0,0006$ lässt sich eine leichte Verbesserung in den beiden Eigenmoden erkennen. Für kleinere Werte verschwindet diese Verbesserung aber sehr schnell. Auch bei einer Erhöhung der Dämpfung wird der Einfluss der Eigenmoden auf den anfänglichen Schalldruckverlauf nicht weiter vermindert. Weiterhin werden die beiden Eigenmoden nicht gleich stark gedämpft. Während sich die Dämpfung bis $\epsilon = 0,0018$ auf die 2. Eigenmode positiv auswirkt, wird der Einfluss der 1. Eigenmode nicht verringert sondern verstärkt.

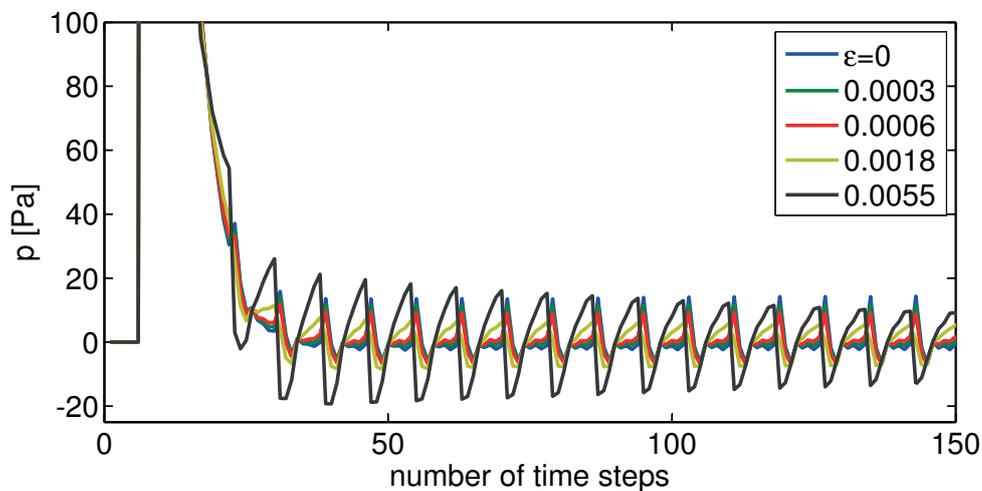


Abbildung 5.22: Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 1,266$ und 150 Zeitschritte

Die Einführung eines einfachen Dämpfungskoeffizienten bringt leider nicht die erhoffte Verbesserung. Zwar lässt sich der Beginn der Instabilität verzögern, bzw. im betrachteten Zeitraum unterdrücken, aber der Einfluss der Eigenmoden auf den abgestrahlten Schalldruck bleibt bestehen und wird sogar bei großen Dämpfungskoeffizienten verstärkt. Dies klingt etwas widersprüchlich. Aber obwohl der unerwünschte Einfluss der Innenraummoden auf den Schalldruckverlauf unmittelbar nach dem Impuls durch die Dämpfung nicht verbessert sondern eher verschlechtert wird, wird ein späteres unkontrolliertes Anwachsen des Schalldrucks hinausgezögert.

Es lässt sich ein Dämpfungskoeffizient finden, bei dem der Einfluss der Eigenmoden auf den abgestrahlten Schalldruck vor der Instabilität gering verbessert wird ($\epsilon = 0,0006$). Bei diesem Dämpfungskoeffizient wird das Einsetzen der Instabilität aber nur leicht verzögert. Für das oben betrachtete Beispiel betrug $\beta = 1,266$. Es wird nun noch ein Beispiel betrachtet mit $\beta = 0,7$. Hier tritt auch eine Instabilität auf, aber der Einfluss der Eigenmoden auf den abgestrahlten Schalldruck vor der Instabilität ist hier geringer als bei $\beta = 1,266$. Für die Dämpfungskoeffizienten werden $\epsilon = 0,0001$, $\epsilon = 0,0003$, $\epsilon = 0,0006$, und $\epsilon = 0,0009$ gewählt und die Ergebnisse werden wieder mit dem unge-dämpften System $\epsilon = 0$ verglichen. In Abbildung 5.24 erkennt man, dass die

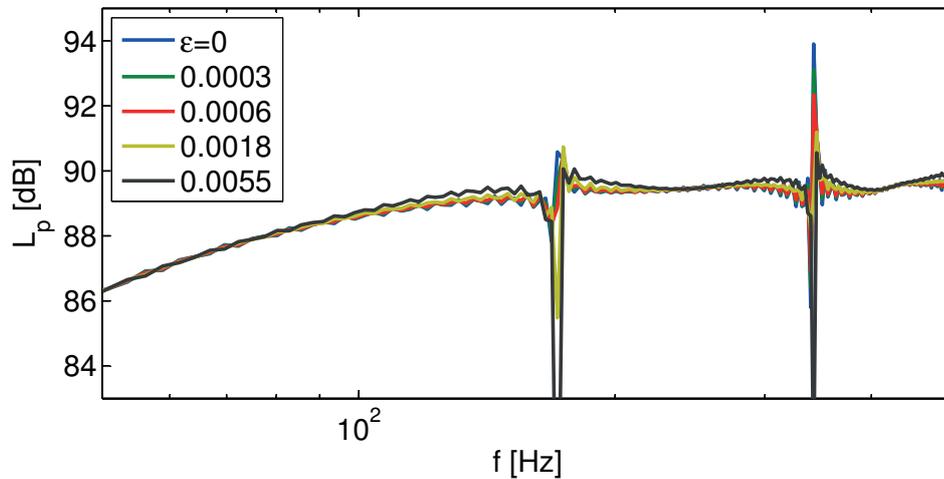


Abbildung 5.23: Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 1,266$

gewählten Dämpfungskoeffizienten nur zu einer zeitlichen Verzögerung des Einsetzens der Instabilität führen. Abbildungen 5.25 und 5.26 zeigen den Einfluss der Dämpfung auf den abgestrahlten Schalldruck vor der Instabilität im Zeit- bzw. im Frequenzbereich. Die optimale Dämpfung liegt hier bei $\epsilon = 0,0003$. Wie im Fall $\beta = 1,266$ führt die Dämpfung, die optimal für die Reduzierung des Einflusses der Eigenmoden auf den frühen Schalldruckverlauf ist, nicht zu einer Unterdrückung der später auftretenden Instabilität. Höhere Dämpfungskoeffizienten wirken sich auch hier wieder negativ auf den anfänglichen Schalldruckverlauf aus.

Das eine Verfälschung der Ergebnisse mit steigender Dämpfung auftritt, war zu erwarten. Es ist aber überraschend, dass der Einfluss der Eigenmoden auf den abgestrahlten Schalldruck steigt, obwohl gleichzeitig die Instabilität gedämpft wird. Da Stabilität an sich nicht ausreicht, sondern auch immer die Korrektheit der Ergebnisse notwendig ist, ist das hier präsentierte Dämpfungsmodell nicht geeignet das Verfahren zu verbessern.

Für den Fall, dass die später einsetzende Instabilität nicht stört, da nur der erste stabile Verlauf des Schalldrucks von Interesse ist, könnte das Dämpfungsmodell leichte Verbesserungen bringen. Allerdings stellt sich hier die Schwierigkeit den optimalen Dämpfungskoeffizienten zu finden. In [48] benutzt Parot

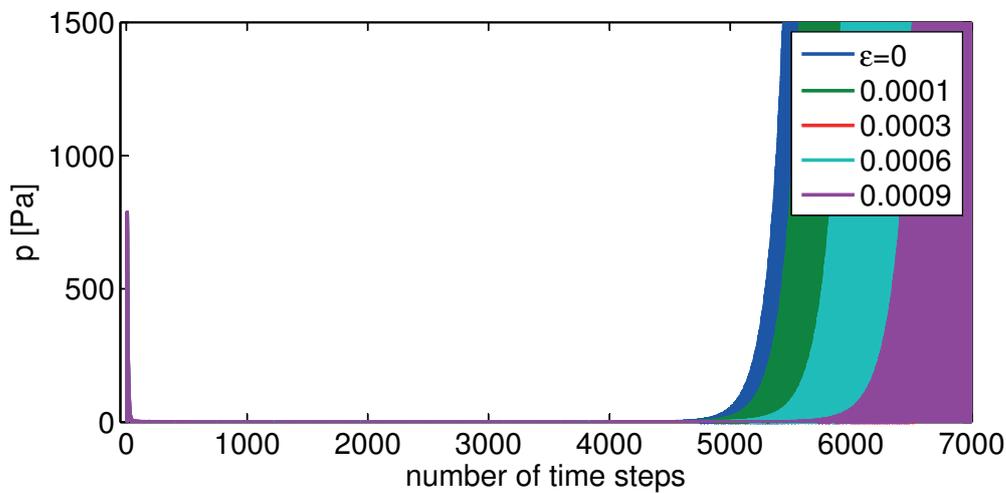


Abbildung 5.24: Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 0,7$ und 7000 Zeitschritte

den Spektralradius um den optimalen Dämpfungskoeffizienten zu bestimmen. Im Fall $\beta = 1,266$ beträgt der Spektralradius 1,0012522 und die optimale Dämpfung liegt hier bei $\epsilon = 0,0006$. Die Ergebnisse für den Spektralradius der *eig*-Funktion und des JDQR Algorithmus stimmen für diesen Fall überein. Für den Fall $\beta = 0,7$ berechnet die *eig*-Funktion 1.0080144 und die *jdqr*-Funktion 0.9986083 für den Spektralradius. Die optimale Dämpfung liegt hier bei $\epsilon = 0,0003$. Um den optimalen Dämpfungskoeffizienten zur Minimierung des Einflusses der Eigenmoden auf den frühen Schalldruckverlauf zu bestimmen, reicht der Spektralradius also nicht aus. Erschwert wird das Ganze noch durch die Schwierigkeiten der Berechnung des Spektralradiuses, worauf im Abschnitt 5.2.1 ausführlich eingegangen wurde.

Man kann natürlich für jede beliebige Struktur einen Testfall mit Abstrahlung eines Impulses für verschiedene Dämpfungskoeffizienten berechnen und anhand des Abklingverhaltens den optimalen Dämpfungskoeffizienten wählen. Diese Vorgehensweise ist allerdings sehr aufwendig. Da auch die zu erwartende Verbesserung sehr gering ist, ist das hier präsentierte Dämpfungsmodell nicht geeignet, die Instabilitätsprobleme zufriedenstellend zu lösen.

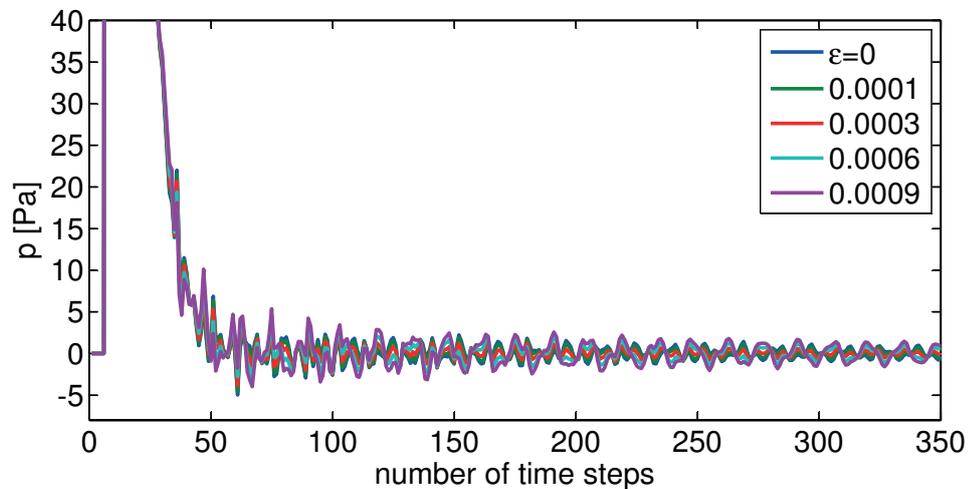


Abbildung 5.25: Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 0,7$ und 350 Zeitschritte

5.5 CHIEF-Methode

Ein im Frequenzbereich bekannter Lösungsansatz zur Unterdrückung der Innenraummoden ist die CHIEF-Methode (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) von Schenk [1]. Nach bestem Wissen des Autors gibt es, neben der Veröffentlichung vom Autor selbst [49], bis jetzt nur eine Veröffentlichung von Jang und Ih [50] welche die Anwendung der CHIEF-Methode im Zeitbereich beschreibt. Allerdings zeigen Jang und Ih, dass die CHIEF-Methode bei der schrittweisen Lösung die tieffrequenten Moden zwar stabilisiert aber die Eigenwerte der hochfrequenten Moden verstärkt. Somit wird die TD-BEM eher instabiler und kann von Jang und Ih erst durch Verwendung eines weiteren Ansatzes stabilisiert werden. Dieser Ansatz basiert allerdings auf der sehr aufwendigen spektralen Zerlegung des Verfahrensoperators (Gleichung (5.6)) womit die Zweckmäßigkeit dieses Ansatzes eher impraktikabel erscheint, da dieser nur bei sehr kleinen Modellen angewendet werden kann.

Die CHIEF-Methode wird in anderen Veröffentlichungen zwar kurz erwähnt, wie z.B. in [3] und [51], aber ihre mögliche Anwendung im Zeitbereich wird nicht weiter ausgeführt. Hargreaves [51] hält die Methode in seiner Arbeit sogar für ungeeignet. Es ist sehr unwahrscheinlich, dass sich keiner der Forscher,

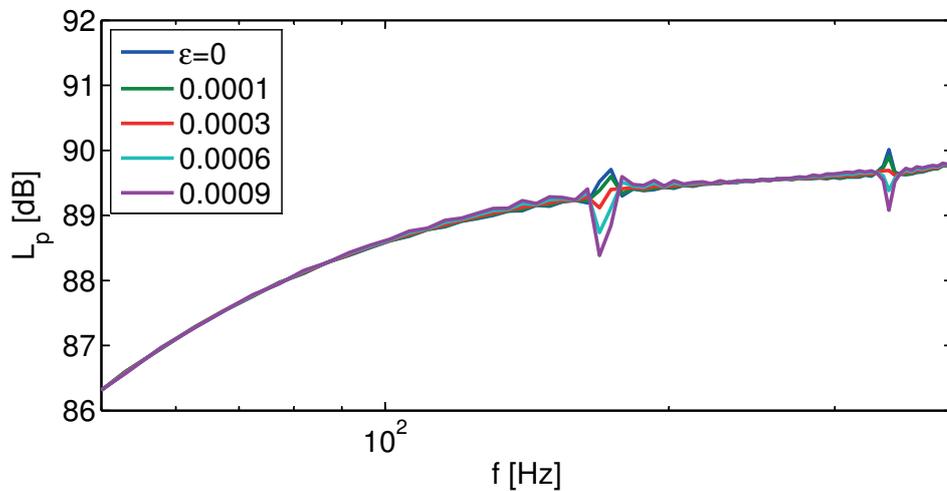


Abbildung 5.26: Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 0,7$

welche sich mit Stabilitätsproblemen der TD-BEM beschäftigen, mit der Anwendung der CHIEF-Methode im Zeitbereich auseinandergesetzt hat. Denn der Ansatz der CHIEF-Methode ist viel einfacher als die Burton-Miller Methode und lässt sich im Gegensatz zur Burton-Miller Methode auch problemlos mit dem bestehenden BEM-Ansatz kombinieren. Wahrscheinlicher ist, dass die später in diesem Abschnitt beschriebenen Probleme auftraten und die CHIEF-Methode als ungeeignet eingestuft wurde.

5.5.1 Ansatz der CHIEF-Methode

Zusätzlich zu den Kollokationspunkten, mit denen das Gleichungssystem zur Berechnung des Schalldrucks auf der Strukturoberfläche aufgestellt wird, platziert man sogenannte CHIEF-Punkte in den Innenraum der Struktur. In Abbildung 5.27 ist dies beispielhaft an einer Kugel dargestellt.

Wenn man die CHIEF-Punkte in Gleichung (3.16) einsetzt, ergibt sich

man dabei begegnet ist, dass für den ersten Zeitschritt $i = 1$ der Schalldruck in den CHIEF-Punkten möglicherweise ohnehin Null ist, da der Schall μ_s Schritte benötigt, um die CHIEF-Punkte zu erreichen. Ein Gleichungssystem mit der Gleichung $0 = 0$ zu erweitern macht natürlich keinen Sinn. Um dieses Problem zu lösen, kann man nun einerseits einige CHIEF-Punkte so wählen, dass sie sehr dicht am Rand liegen, so dass $\mu_s = 1$ wird. Allerdings ist diese Herangehensweise problematisch, da die zu lösenden Integrale bei sehr kleinem Abstand r nahe ihrer Singularität liegen. Eine einfachere Herangehensweise ist es, die Gleichungen zeitversetzt zu kombinieren. Für den ersten Zeitschritt $i = 1$ kombiniert man

$$-(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)\vec{p}_1 = \mathbf{G}_1\vec{q}_1 \quad (5.14)$$

aus Gleichung (3.19) mit

$$0 = \mu_s\mathbf{H}_{\mu_s}^c\vec{p}_1 + \vec{\psi}_{\mu_s}^c \quad (5.15)$$

für $i = \mu_s$ aus Gleichung (5.13) und man erhält

$$\begin{bmatrix} 2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1 \\ \mu_s\mathbf{H}_{\mu_s}^c \end{bmatrix} \vec{p}_1 = - \begin{bmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_{\mu_s}^c \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

für den ersten Zeitschritt. Für alle anderen Zeitschritte ändert sich nur der Zeitindex von $\vec{\psi}$ und $\vec{\psi}^c$ auf der rechten Seite von Gleichung (5.16).

Beim Überprüfen der CHIEF-Methode anhand von Testfällen ließ sich jedoch weder mit der einen noch mit der anderen Herangehensweise eine Verbesserung der Ergebnisse erzielen. Wie man in Gleichung (5.16) erkennen kann, hat nur $\mathbf{H}_{\mu_s}^c$ unmittelbaren Einfluss auf die Systemmatrix. Das bedeutet, dass nur ein kleiner Teil der CHIEF-Punkte das Ergebnis direkt beeinflussen (Abbildung 5.28). Nur die CHIEF-Punkte, die in einem Abstand von $c\Delta t$ zum Rand liegen bzw. innerhalb einer Kugelschale mit Dicke $c\Delta t$ im Abstand von $\mu_s * c\Delta t$ zum Rand, beeinflussen die Matrix auf der linken Seite von Gleichung (5.16). Alle anderen CHIEF-Punkte beeinflussen das Ergebnis nur über den Vektor $\vec{\psi}^c$. Im Vektor $\vec{\psi}^c$ ist aber die Zeitabhängigkeit des Einflusses der CHIEF-Punkte verloren gegangen. Der Zeitverlauf des Schalldrucks im Inneren der Struktur lässt sich nur minimieren, wenn der Einfluss der CHIEF-Punkte

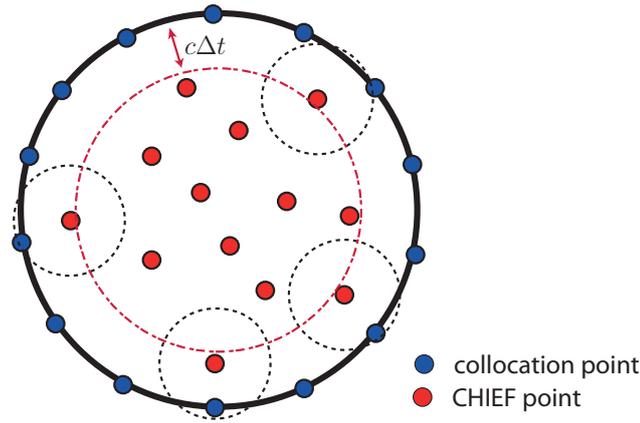


Abbildung 5.28: Nur die CHIEF-Punkte, die in einem Abstand von $c\Delta t$ zum Rand liegen, haben unmittelbaren Einfluss auf die Ergebnisse

zeitabhängig und nicht nur als Summe betrachtet wird. Hierfür muss man alle CHIEF-Punkte auf die linke Seite des Gleichungssystems bringen. Dann bleibt allerdings nur der Weg, den Schalldruck in allen Orts- und Zeitpunkten in einem einzigen Schritt zu berechnen. Bisher wurde die Lösung immer schrittweise berechnet, da dies wesentlich einfacher ist und die Ein-Schritt-Lösung, also das Lösen von Gleichung (3.25), keinerlei Vorteil bietet. Für Gleichung (5.13) mit $\vec{p}^c = 0$ erhält man in Matrixschreibweise

$$0 = \mathbf{H}_g^c \vec{p}_g + \vec{\psi}_g^c \quad (5.17)$$

mit

$$\vec{p}_g = \begin{bmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \vdots \\ \vec{p}_i \end{bmatrix} \quad \vec{\psi}_g^c = \begin{bmatrix} \vec{\psi}_1^c \\ \vec{\psi}_2^c \\ \vdots \\ \vec{\psi}_i^c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_g^c = \begin{bmatrix} \mu_s \mathbf{H}_{\mu_s}^c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ ((\mu_s + 1)\mathbf{H}_{\mu_{s+1}}^c - (\mu_s - 1)\mathbf{H}_{\mu_s}^c) & \mu_s \mathbf{H}_{\mu_s}^c & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & -(\mu_{max}^c - 1)\mathbf{H}_{max}^c & \cdots & \mu_s \mathbf{H}_{\mu_s}^c \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Gleichung (5.17) kann umgestellt werden zu

$$\mathbf{H}_g^c \vec{p}_g = -\vec{\psi}_g^c \quad (5.19)$$

Zusammengefasst mit Gleichung (3.25) erhält man folgendes überbestimmtes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_g \\ \mathbf{H}_g^c \end{bmatrix} \vec{p}_g = - \begin{bmatrix} \vec{\psi}_g \\ \vec{\psi}_g^c \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Im Gleichungssystem (5.20) beeinflussen alle CHIEF-Punkte die Matrix des Gleichungssystems. Allerdings stellt sich die Frage ob Gleichungssystem (5.20) mit üblicher PC Hardware zu lösen ist. Problematisch hierbei ist die Größe des zu lösenden Gleichungssystems. Die Blockmatrix für die Kollokationspunkte \mathbf{H}_g (3.23) hat eine Größe von $(N_{elem} \times N_t)^2$, mit N_{elem} = Anzahl der Oberflächenelemente und N_t = Anzahl der Zeitschritte. Die Blockmatrix für die CHIEF-Punkte \mathbf{H}_g^c (5.18) hat eine Größe von $(N_c \times N_t)^2$, mit N_c = Anzahl der CHIEF-Punkte. Nehmen wir z.B. das kleinste Modell der zuvor betrachteten Testfälle, die Kugel mit 384 Elementen, und nehmen an, dass 512 Zeitschritte berechnet werden sollen. Dann erhält man ein Gleichungssystem mit über 37,4 Milliarden Unbekannten. Auch wenn dieses Gleichungssystem nur sehr schwach besetzt ist, überschreitet selbst dieses recht kleine Modell schon die Kapazitäten normaler PCs.

Es ist ein bekanntes Problem, dass sich für größere Strukturmodelle mit vielen Freiheitsgraden die Gleichungssysteme nicht mehr als Ganzes im Arbeitsspeicher aufstellen lassen. Zur Lösung solcher Probleme werden deshalb iterative Gleichungslöser verwendet, da hier nur Matrix-Vektor-Multiplikationen durchgeführt werden müssen, welche auch zeilenweise erfolgen können. Der entscheidende Vorteil solcher Gleichungslöser ist, dass es nicht mehr nötig ist das ganze Gleichungssystem aufzustellen. Da es sich bei der Matrix aus Gleichung (5.20) um eine überbestimmte Matrix handelt, ist die Wahl an geeigneten Gleichungslösern recht eingeschränkt. Es bietet sich die LSQR-Methode [30] an, die alle Bedingungen, das Problem iterativ zu lösen, erfüllt. Die LSQR-Methode ist ein Lösungsverfahren um Probleme im Sinne der kleinsten Quadrate zu lösen.

Wie schon in Abschnitt 3.2.1 erwähnt, handelt es sich bei der Matrix \mathbf{H}_g um eine Block-Toeplitz-Matrix, bei der die Haupt- und Nebendiagonalen konstant

sind. Auch bei \mathbf{H}_g^c handelt es sich um eine Block-Toeplitz-Matrix. Es werden also nur die Matrizen $\mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_{\mu_{max}}$ und $\mathbf{H}_{\mu_s}^c \dots \mathbf{H}_{\mu_{max}}^c$ benötigt, um das Gleichungssystem vollständig zu beschreiben. Diese Matrizen müssen auch für den schrittweisen Lösungsprozess in den Hauptspeicher des Rechners passen. Es ist somit möglich die Matrix-Vektor-Multiplikation durch eine Funktion zu beschreiben. Diese Funktion wird an den LSQR-Lösungsalgorithmus übergeben, welche die erforderlichen Matrix-Vektor-Multiplikationen berechnet, ohne die Matrix im Speicher des Rechners abbilden zu müssen.

Im Falle der Ein-Schritt-Lösung, bei der sich alle CHIEF-Punkte in der Systemmatrix befinden, zeigt die CHIEF-Methode nun den gewünschten Erfolg. In Abbildung 5.29 ist die Schallabstrahlung eines Impulses mit einer Impulslänge von Δt dargestellt. Durch Anwendung der CHIEF-Methode kann der Einfluss der Innenraummoden der Struktur auf die Schallabstrahlung vollständig unterdrückt werden. Um die meist recht spät einsetzende hochfrequente Instabilität auszuschließen, wurde die Testrechnung für 10000 Zeitschritte durchgeführt. Wie man in Abbildung 5.30 erkennen kann, unterdrückt die CHIEF-Methode nicht nur den störenden Einfluss der Innenraummoden auf den anfänglichen Schalldruckverlauf, sondern führt auch zu stabilen Langzeitsimulationen. Die hochfrequente Instabilität tritt wie im Fall ohne CHIEF-Punkte nicht mehr auf. In den folgenden Abschnitten wird genauer untersucht, welche Parameter die CHIEF-Methode beeinflussen und wie sich optimale Ergebnisse erzielen lassen.

5.5.2 Anzahl benötigter CHIEF-Punkte

Als Testfall dient wieder das Kugelmodell zur Simulation eines Monopolfeldes. In den Abbildungen 5.31 und 5.32 ist die Abweichung der Schallabstrahlung vom analytischen Fall für ein Modell mit 384 bzw. 1536 Oberflächenelemente in Abhängigkeit von der Anzahl der CHIEF-Punkte dargestellt. Weiterhin wurde die Rechenzeit sowie die Anzahl benötigter Iterationen des LSQR-Lösungsalgorithmus in Abhängigkeit von der Anzahl von CHIEF-Punkten abgebildet. Da es sich bei den Eigenmoden um stehende Wellen mit Minima und Maxima handelt, ist eine Platzierung der CHIEF-Punkte in den Maxima besonders wirksam. Obwohl in dem betrachteten Beispiel die analytische Lösung und somit die Lage der Maxima bekannt ist, wurden die CHIEF-Punkte zufällig

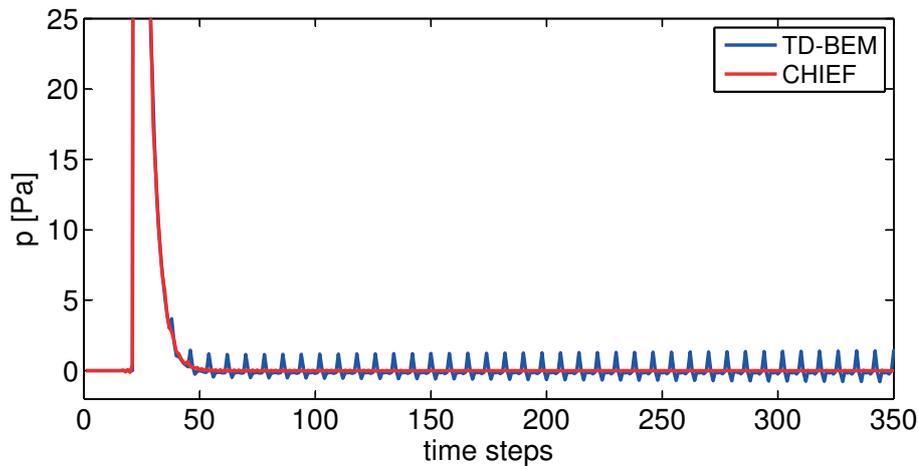


Abbildung 5.29: Schalldruck über 350 Zeitschritte im Immissionspunkt berechnet mit und ohne CHIEF-Methode für Kugel mit 384 quad Elementen und $\beta = 1,266$

verteilt. Bei komplizierteren praxisnahen Anwendungen ist dies sicher die übliche Herangehensweise, da mangels analytischer Lösungen die Lage der Maxima nicht bekannt ist. Mit zunehmender Anzahl von zufällig verteilten CHIEF-Punkten steigt natürlich die Chance, dass einige davon in den Maxima der Eigenmoden liegen. Das bekannte Problem der CHIEF-Methode ist nun, dass mit zunehmender Frequenz und abnehmender Wellenlänge auch die Anzahl von Minima und Maxima des Wellenfeldes zunimmt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein CHIEF-Punkt in einem Minima liegt, steigt somit mit zunehmender Frequenz an. Dies lässt sich auch sehr gut in den Ergebnissen ablesen. Während man bei den tieffrequenten Moden schon mit wenigen CHIEF-Punkten gute Ergebnisse erzielt, sind für die höherfrequenten Moden wesentlich mehr CHIEF-Punkte nötig, um ähnlich gute Ergebnisse zu erzielen.

Nicht weiter verwunderlich ist, dass mit steigender Anzahl von CHIEF-Punkten die Innenraummoden immer besser unterdrückt werden und ab einer gewissen Anzahl von Punkten keine weitere Verbesserung erzielt werden kann. Interessant ist natürlich herauszufinden, wo das Optimum für die Anzahl der CHIEF-Punkte liegt. Hierfür muss man die Ergebnisse für das Kugelmodell mit 384 Oberflächenelementen genauer mit dem Kugelmodell mit 1536 Oberflächenelementen vergleichen. In beiden Fällen wurde das gleiche Set an zufäl-

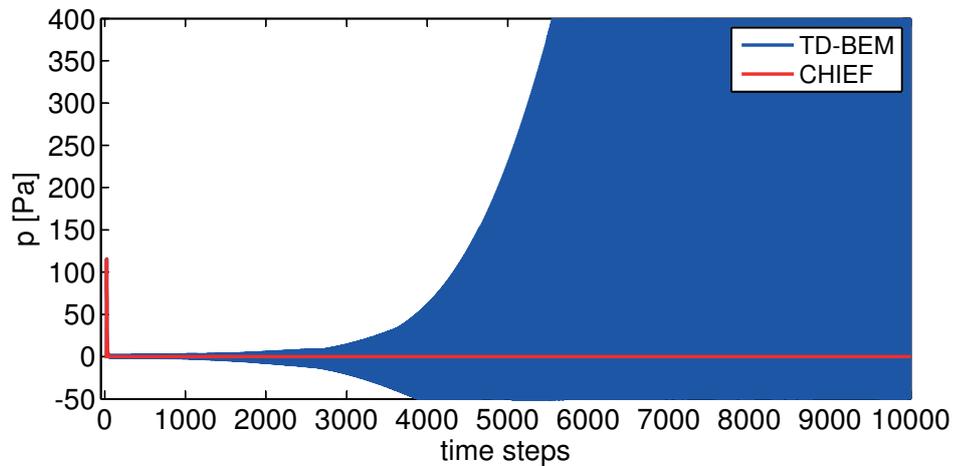


Abbildung 5.30: Schalldruck über 10000 Zeitschritte im Immissionspunkt berechnet mit und ohne CHIEF-Methode für Kugel mit 384 quad Elementen und $\beta = 1,266$

lig im Kugelinnenraum verteilten CHIEF-Punkten verwendet, so dass die Lage der CHIEF-Punkte in beiden Fällen gleich ist und somit keinen Einfluss auf Unterschiede zwischen beiden Kugelmodellen hat.

Einerseits kann man ab einer Anzahl von 50 CHIEF-Punkten in beiden Fällen nur noch eine Verbesserung der Ergebnisse im höherfrequenten Bereich beobachten. Die oberen Grenzfrequenzen der Zeit- und Oberflächendiskretisierung für diese Modelle liegen ungefähr bei 400 Hz und 800 Hz. Trotzdem lässt sich mittels der CHIEF-Methode der Einfluss der Eigenmoden im gesamten Frequenzbereich, der mit der gegebenen Zeitschrittgröße Δt abbildbar ist, unterdrücken.

Die Güte der Oberflächendiskretisierung wirkt sich, wie schon in Abschnitt 5.3 festgestellt wurde, positiv auf die Reduzierung des Einflusses der Innenraummoden aus. Das dürfte am geringeren Diskretisierungsfehler liegen der durch die Oberflächendiskretisierung gemacht wird. Der Diskretisierungsfehler kann durch die CHIEF-Methode nicht beeinflusst werden und bleibt bestehen.

Die Wirksamkeit der CHIEF-Punkte scheint aber nicht von der räumlichen Auflösung der Oberfläche abzuhängen. Dies ist auch plausibel, da die Wirkung der CHIEF-Punkte von ihrer Lage im Wellenfeld des Innenraumes abhängt, und der Innenraum in beiden Fällen der gleiche ist. Wenn man jedoch einen

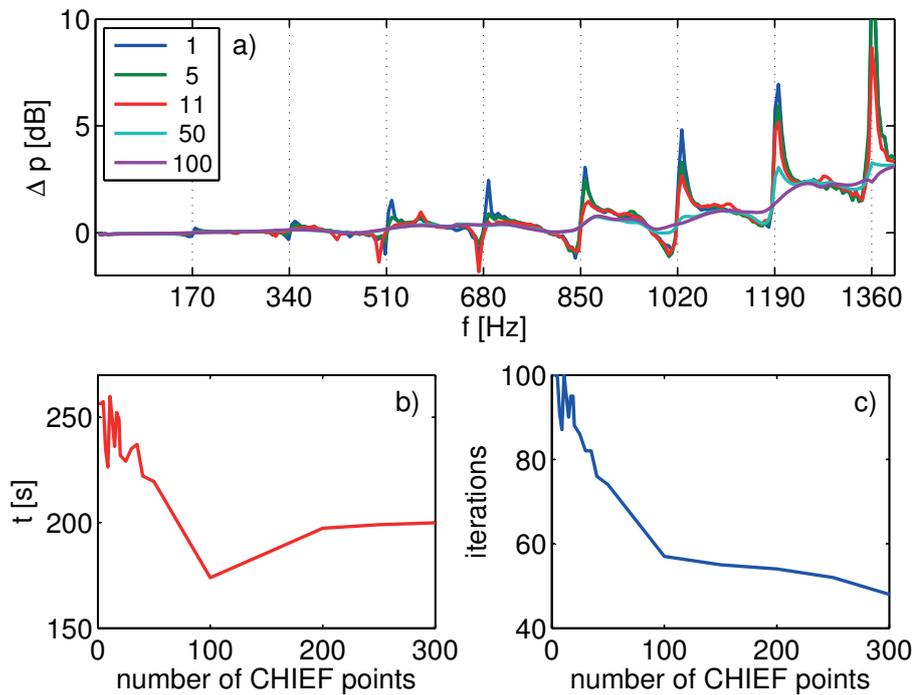


Abbildung 5.31: (a): Einfluss der Anzahl der CHIEF-Punkte auf Abweichung der Schallabstrahlung einer Kugel (384 quad Elemente) vom analytischen Fall ($\Delta t = 0.346$ ms $f_s = 2890$ Hz); Rechenzeit (b) sowie Anzahl benötigter Iterationen (c) des LSQR-Lösungsalgorithmus in Abhängigkeit von der Anzahl von CHIEF-Punkten

Blick auf die benötigte Rechenzeit wirft, sieht man andererseits, dass das Verhältnis der Anzahl von CHIEF-Punkten zu Anzahl von Oberflächenelementen trotzdem nicht zu vernachlässigen ist. Die in den Abbildungen 5.31 und 5.32 abgebildete Rechenzeit, ist die Zeit, die der LSQR-Lösungsalgorithmus für die Lösung des Gleichungssystems 5.20 benötigt. Das Berechnen der Oberflächenintegrale zum Aufstellen der \mathbf{G} und \mathbf{H} Matrizen wurde nicht berücksichtigt.

In beiden Fällen fällt die Rechenzeit am Anfang mit steigender Anzahl von CHIEF-Punkten stark ab, bis ein Optimum erreicht ist. Danach steigt die Rechenzeit wieder langsam an. Dieses Verhalten lässt sich leicht erklären, wenn man die Anzahl benötigter Iterationen des LSQR-Lösungsalgorithmus zur Lösung des Gleichungssystems betrachtet. Die Rechenzeit ergibt sich direkt aus der Anzahl der Iterationen. Am Anfang fällt die Anzahl der Iterationen mit steigender Anzahl von CHIEF-Punkten stark ab und ändert sich dann fast

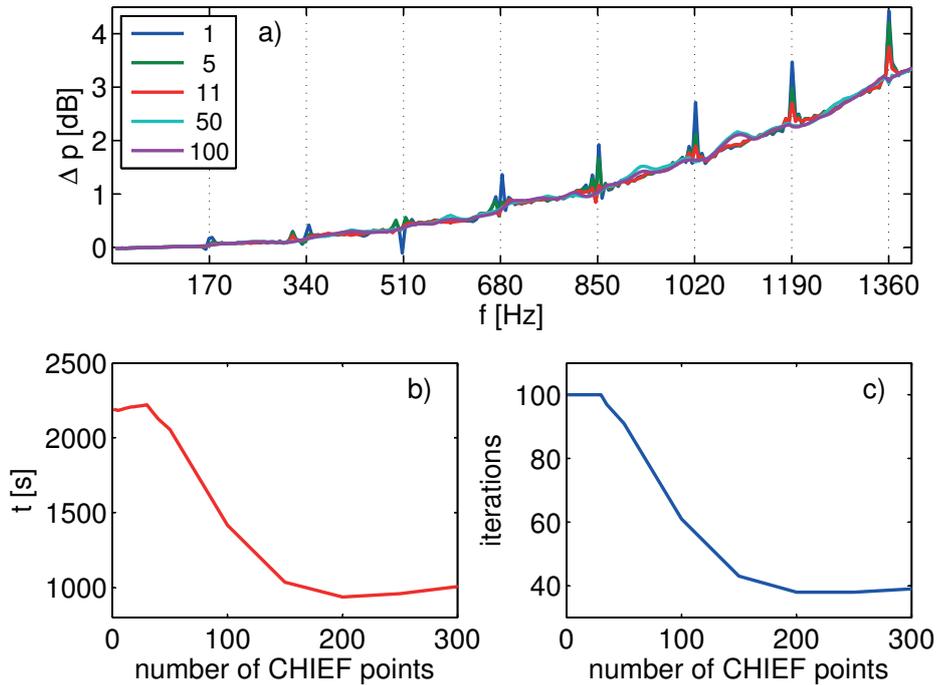


Abbildung 5.32: (a): Einfluss der Anzahl der CHIEF-Punkte auf Abweichung der Schallabstrahlung einer Kugel (1536 quad Elementen) vom analytischen Fall ($\Delta t = 0.346$ ms $f_s = 2890$ Hz); Rechenzeit (b) sowie Anzahl benötigter Iterationen (c) des LSQR-Lösungsalgorithmus in Abhängigkeit von der Anzahl von CHIEF-Punkten

nicht mehr. Die Anzahl von CHIEF-Punkten bestimmt bis zu einem gewissen Punkt, wie leicht es dem Lösungsalgorithmus fällt eine Lösung zu finden. Dieser Punkt stellt das Optimum für die Anzahl benötigter CHIEF-Punkte dar, denn für eine höhere Anzahl verbessert sich die Anzahl benötigter Iterationen nicht mehr. Auch in der errechneten Lösung ist keine Verbesserung feststellbar. Der leichte Anstieg in der Rechenzeit trotz konstanter Anzahl von Iterationen lässt sich mit dem größer werdenden Gleichungssystem begründen. Die Matrix-Vektor-Multiplikation nimmt für größere Gleichungssysteme mehr Zeit in Anspruch.

Im Falle der Kugel mit 384 Elementen liegt das Optimum für die benötigte Rechenzeit bei 100 CHIEF-Punkten. Bei der Kugel mit 1536 Elementen liegt das Optimum bei ungefähr 200 CHIEF-Punkten. Bis zu dieser Anzahl sinken in beiden Fällen die Anzahl der benötigten Iterationen des LSQR-

Algorithmus und somit auch die benötigte Rechenzeit. Eine höhere Anzahl an CHIEF-Punkten zu verwenden, macht ab diesem Punkt keinen Sinn, da nur die Rechenzeit steigt, ohne das Ergebnis zu verbessern. Aus den beiden hier betrachteten Fällen lässt sich noch keine allgemeine Aussage über die optimale Anzahl von CHIEF-Punkten machen. Man kann aber schlussfolgern, dass es Sinn macht, mehr CHIEF-Punkte zu verwenden als eigentlich nötig wären. Denn der Anstieg der Rechenzeit nach Erreichen des Optimums ist sehr viel geringer, als der Anstieg bei einer Unterschätzung der optimalen Anzahl von CHIEF-Punkten.

Die optimale Anzahl wird einerseits von der Größe des Innenraumes in Bezug zur Abtastfrequenz abhängen. Andererseits wird auch das Verhältnis von Kollokationspunkten zu CHIEF-Punkten eine Rolle spielen, wie viele Iterationen der Lösungsalgorithmus zur Berechnung der Lösung braucht. Mit einem Verhältnis von CHIEF-Punkten zu Kollokationspunkte von 1:3 wird man wahrscheinlich nicht unterhalb der optimalen Anzahl liegen.

5.5.3 Toleranz des LSQR-Verfahrens

Bei der Verwendung von iterativen Verfahren ist es möglich, die Fehlertoleranz für die Norm des Residualvektors anzugeben. Iterative Verfahren berechnen die Lösung des Gleichungssystems nur näherungsweise. Das bedeutet, dass die Berechnung an einem bestimmten Punkt abgebrochen wird. Wenn die Berechnung konvergiert, wird die Berechnung abgebrochen, wenn die Abweichung der Norm des Restvektors kleiner als der gesetzte Toleranzwert ist. In den bisherigen Berechnungen des LSQR-Verfahrens wurde die Standardeinstellung von 10^{-6} verwendet. Ein Problem, das sich bei iterativen Verfahren stellt, ist, wie die Toleranz zu wählen ist, um eine gewisse Toleranz im Fehler der Lösung zu erreichen.

Für ein Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ ergibt sich der Fehler $e = \vec{x} - \vec{x}'$, wobei \vec{x}' der approximativ berechnete Lösungsvektor ist. Im Allgemeinen kann man nicht überprüfen, wie groß der Fehler ist, da man die Lösung \vec{x} nicht kennt. Ein Weg, die Lösung des Gleichungssystems zu überprüfen ist, die Lösung in die Gleichung einzusetzen und die linke und die rechte Seite zu vergleichen.

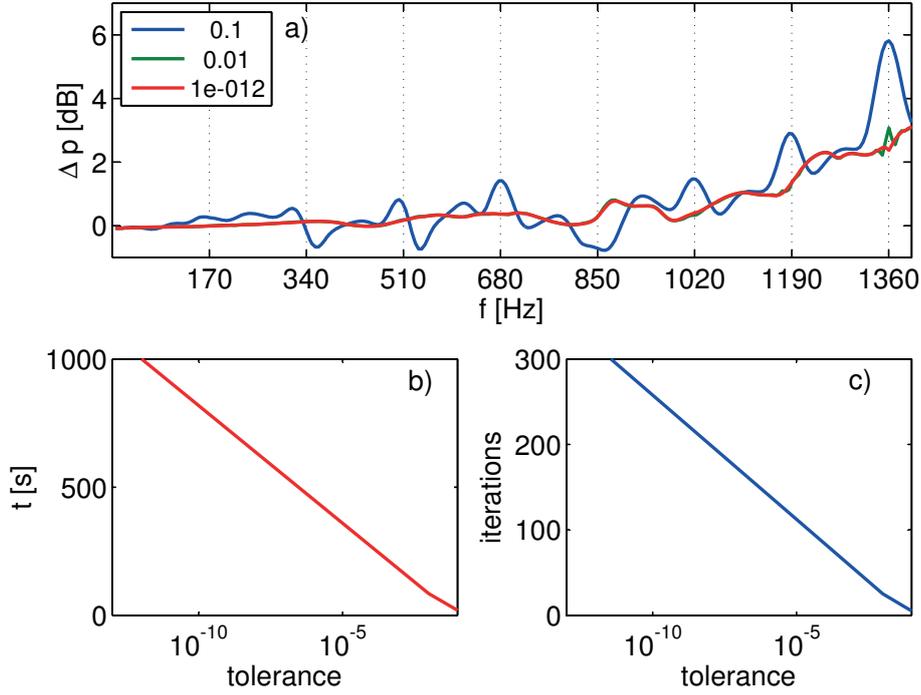


Abbildung 5.33: Einfluss der Toleranz des LSQR-Algorithmus auf den Fehler der Abstrahlung (Monopol) einer Kugel mit 384 quad Elementen, ($\Delta t = 0.346 \text{ms}$)

Man erhält damit das Residuum r_{res} .

$$r_{res} = \mathbf{A}\vec{x} - \mathbf{A}\vec{x}' = \vec{b} - \vec{b}' \quad (5.21)$$

Wenn man die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ mit einer beliebigen von Null verschiedenen Konstanten multipliziert, dann ist die Lösung davon unberührt, aber das Residuum wird mit dem gleichen Faktor multipliziert. Das Residuum kann beliebig groß oder klein sein, abhängig von der Skalierung des Problems, und somit ist die absolute Größe unbedeutend. Deshalb setzt man das Residuum in Bezug zur Größe \vec{b} . Damit ergibt sich das relative Residuum zu

$$r_{rel} = \frac{\|\mathbf{A}\vec{x} - \mathbf{A}\vec{x}'\|}{\|\mathbf{A}\vec{x}\|} = \frac{\|\vec{b} - \vec{b}'\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{\|r_{res}\|}{\|\vec{b}\|} \quad (5.22)$$

Um das relative Residuum in Bezug zum relativen Fehler zu bringen, dividiert man beide Seiten von

$$\|e\| = \|\vec{x} - \vec{x}'\| = \|\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\vec{x}' - \vec{b})\| = \|\mathbf{A}^{-1}r_{res}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|r_{res}\| \quad (5.23)$$

mit $\|\vec{x}\|$ und erhält mit der Definition der Konditionszahl $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$

$$\frac{\|e\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|r_{res}\|}{\|\vec{b}\|} \quad (5.24)$$

Mit der Konditionszahl der Matrix \mathbf{A} lässt sich somit der obere relative Fehler der Lösung schätzen. Wenn die Konditionszahl nahe 1 ist, dann ist der relative Fehler und das relative Residuum ungefähr gleich groß. Problematisch ist es, wenn die Konditionszahl sehr groß ist. Dann kann das relative Residuum viel größer als der relative Fehler sein. Die Konditionszahl legt aber nur eine obere Schranke des relativen Fehlers fest. Eine Möglichkeit der Interpretation der Ergebnisse ist, dass die berechnete Lösung etwa $\log_{10}(\kappa(\mathbf{A}))$ Dezimalziffern an Genauigkeit relativ zu der Genauigkeit der Eingabe verliert.

Nun handelt es sich bei der Matrix aus Gleichung 5.20 um eine sehr große schwach besetzte überbestimmte Matrix, was die Berechnung der Konditionszahl etwas erschwert. Man kann die Konditionszahl einer Matrix auch über eine Singulärwertzerlegung berechnen [52].

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \quad (5.25)$$

mit σ_{max} für den größten und σ_{min} für den kleinsten von Null verschiedenen Singulärwert. In MATLAB[®] steht zur näherungsweisen Berechnung von Singulärwert schwach besetzter Matrizen die *svds*-Funktion zur Verfügung. σ_{max} lässt sich somit auch berechnen. Bei der Berechnung von σ_{min} stößt man allerdings auf das Problem, dass die *svds*-Funktion nicht den kleinsten Singulärwert berechnen kann, sondern nur einen Singulärwert, welcher am dichtesten an einem frei wählbaren Punkt liegt. Allerdings ist σ_{min} natürlich unbekannt und es gibt etliche Singulärwerte, welche gleich 0 sind. Mit dem Lanczos Bidiagonalization Algorithmus [53] ergibt sich dieses Problem nicht. Mit PROPACK [54] steht auch eine Implementierung des Algorithmus in MATLAB[®] zur Verfügung.

Anhand des Kugelmodells mit 384 Elementen mit 100 CHIEF-Punkten und $\Delta t=0.346\text{ms}$ soll das Fehlerverhalten näher untersucht werden. In Tabelle 5.1 ist die Konditionszahl κ in Abhängigkeit von der Anzahl der Zeitschritte N_t und die dazu gehörigen Singulärwerte dargestellt. Wie schon in Abschnitt 4.4 beobachtet wurde, ändert sich die Konditionszahl mit der Anzahl der Zeitschritte, da die Größe der Gesamtmatrix sich ändert. Für den hier betrachteten

N_t	σ_{max}	σ_{min}	κ
20	32,4	4,3	7,5
50	34,1	2,8	12,2
100	34,5	1,9	18,5
150	34,6	1,6	21,7

Tabelle 5.1: Konditionszahl κ in Abhängigkeit von der Anzahl der Zeitschritte N_t , berechnet aus dem größten σ_{max} und dem kleinsten σ_{min} Singulärwert.

Fall ist $\beta=0,6$. Mit zunehmender Anzahl von Zeitschritten wird σ_{min} kleiner, während sich σ_{max} kaum ändert. Der kleinste Singulärwert ist ein Maß dafür, wie nahe die Matrix an der Singularität ist. Singulärwerte für $N_t > 150$ ließen sich aufgrund des beschränkten Arbeitsspeichers leider nicht berechnen. Die Kondition der Gesamtmatrix bis 150 Zeitschritte ist durchaus akzeptabel und die Ergebnisse der Testfälle deuten darauf hin, dass die Kondition auch für längere Simulationszeiten unproblematisch ist.

In Abbildung 5.33 ist die Abweichung der Schallabstrahlung einer Kugel vom analytischen Fall mit Toleranzwerten von 10^{-1} bis 10^{-12} dargestellt. Während ein Toleranzwert von 0,1 noch unzureichende Ergebnisse liefert, sind die Ergebnisse bei einem Wert von 0,01 nicht mehr von den Ergebnissen mit Toleranzwert 10^{-12} zu unterscheiden. Nur bei 1360 Hz ist noch ein Unterschied zu erkennen. Der Unterschied in der Anzahl benötigter Iterationen, um dieses Ergebnis zu erreichen, ist natürlich enorm. Um das Ergebnis mit dem Toleranzwert von 0,01 zu erreichen werden nur 25 Iterationen und 84 s Rechenzeit benötigt. Bei einem Toleranzwert von 10^{-12} sind es jedoch 316 Iterationen und 1001 s Rechenzeit. Durch die Wahl eines geeigneten Toleranzwertes lässt sich enorm viel Rechenzeit sparen.

Interessant ist, welche relativen Residuen für die jeweiligen Toleranzwerte erreicht wurden. Für die gewählten Toleranzwerten $tol = [10^{-1} \ 10^{-2} \ 10^{-12}]$ wurden die relativen Residuen $r_{rel} = [0,0831 \ 0,0251 \ 0,0249]$ erreicht. Obwohl der Algorithmus angibt, dass die Lösung mit der gewünschten Toleranz konvergiert ist, gilt bis auf das erste Ergebnis nicht $\frac{\|r_{res}\|}{\|\bar{b}\|} = r_{rel} \leq tol$. Der Unterschied in $r_{rel}(tol = 10^{-2}) - r_{rel}(tol = 10^{-12}) = 1.83 \cdot 10^{-4}$ ist auch nicht so groß wie eigentlich zu erwarten wäre. Wieso diese Diskrepanz zwischen gewünsch-

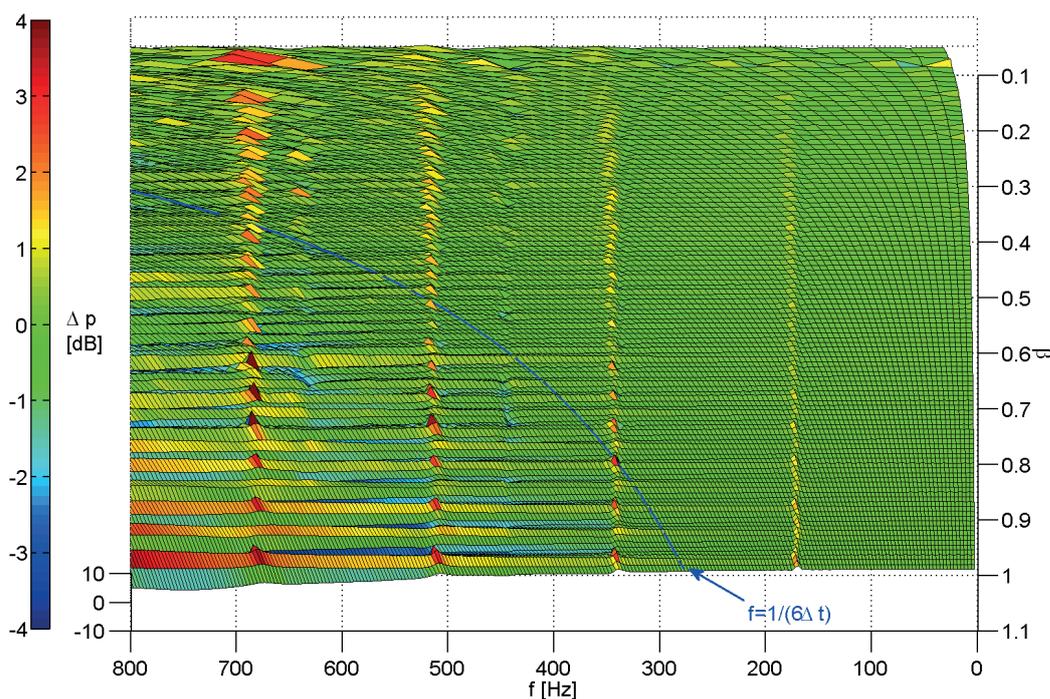


Abbildung 5.34: Abweichung Δp des berechneten vom analytischen Schalldruck im Immissionspunkt in Abhängigkeit von β ohne CHIEF-Methode berechnet. (Kugel mit 384 quad Elementen)

tem und erreichtem relativen Residuum nicht zu der Fehlermeldung führt, dass die Lösung nicht konvergiert, ist ungeklärt.

5.5.4 Zeitschrittgröße

Abschließend soll noch betrachtet werden, in wie weit eine Abhängigkeit der Ergebnisse von der Zeitschrittgröße Δt besteht. Auch hier wird wieder die Schallabstrahlung einer Kugel als Testfall verwendet. Es wurde die größte räumliche Auflösung mit 384 Elementen gewählt, da hier der Einfluss der Eigenmoden besonders stark ist. In Abbildung 5.34 sind die Abweichungen des simulierten abgestrahlten Schalldrucks zur analytischen Lösung in dB dargestellt, die man ohne die Verwendung von CHIEF-Punkten erhält. Ergebnisse der Farbe Grün stehen für einen Fehler $\Delta p < 1 \text{ dB}$. Der Einfluss der Eigenmoden tritt in allen Fällen deutlich zu Tage. In Abbildung 5.35 sind die Ergebnisse für die gleichen Simulationen diesmal mit CHIEF-Punkten dargestellt. Der Einfluss der Eigenmoden konnte in allen Fällen unterdrückt werden.

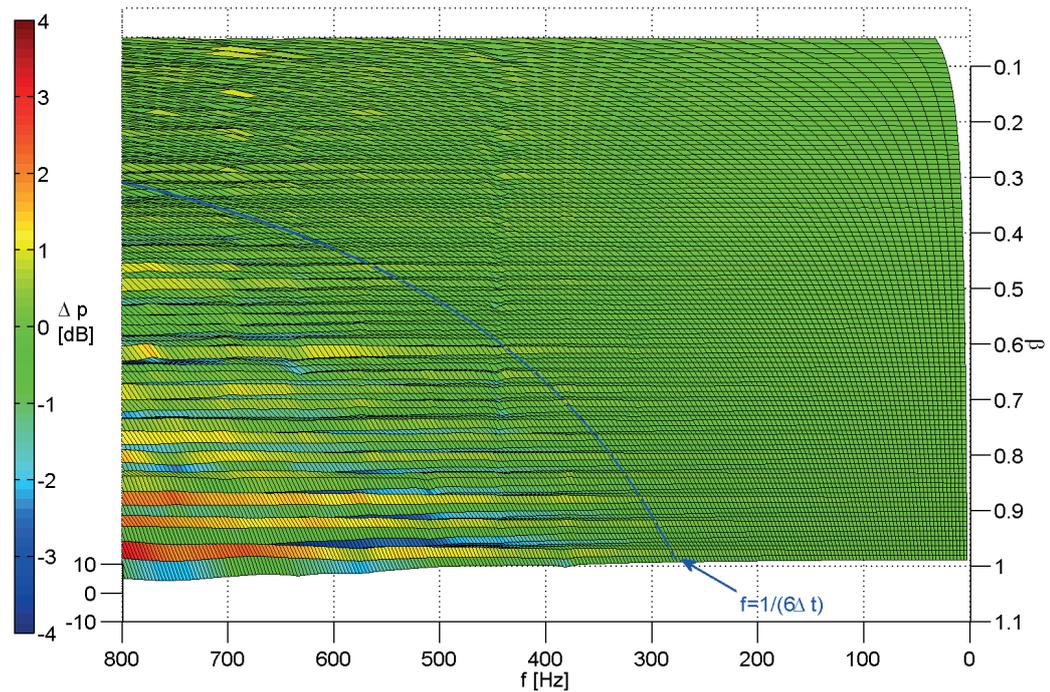


Abbildung 5.35: Abweichung Δp des berechneten vom analytischen Schalldruck im Immissionspunkt in Abhängigkeit von β mit CHIEF-Methode berechnet. (Kugel mit 384 quad Elementen)

Die Wirksamkeit der CHIEF-Methode ist also unabhängig von der zeitlichen Diskretisierung. Sogar für sehr kleine Zeitschritte und somit kleinem β werden sehr gute Ergebnisse erreicht. Was die CHIEF-Methode natürlich nicht kann, ist die Fehler, die durch die Diskretisierung entstehen, zu minimieren. Um dies zu verdeutlichen, ist in den Abbildungen 5.34 und 5.35 die Grenzfrequenz $f_g = 1/(6\Delta t)$ eingezeichnet. Für Frequenzen größer f_g treten in zunehmendem Maße Diskretisierungsfehler auf, welche von der CHIEF-Methode unbeeinflusst bleiben.

5.6 Dual-Surface-Methode

Ein der CHIEF-Methode recht ähnlicher Ansatz ist die Dual-Surface-Methode. Diese Methode ist bis jetzt noch recht unbekannt und ist hauptsächlich in der Literatur zu elektromagnetischen Streuungen zu finden [55] [56] [57]. Mohsen et al. zeigte als erster die Anwendbarkeit der Methode auf akustische Probleme [58], allerdings im Frequenzbereich. Die Theorie der Dual-Surface-Methode

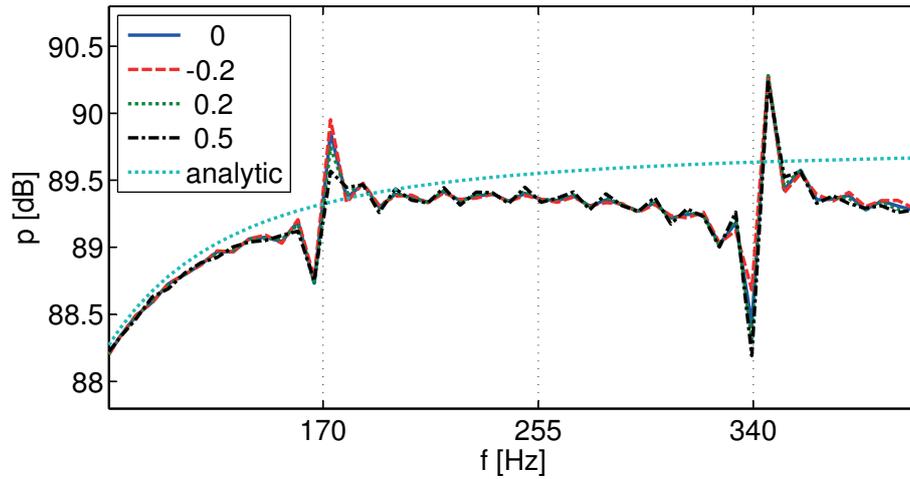


Abbildung 5.36: Einfluss des Kopplungsfaktors α auf die Ergebnisse der Dual-Surface-Methode auf die Abstrahlung (Monopol) einer Kugel mit 384 quad Elementen, ($\Delta t=0.305ms$)

In der anfangs erwähnten Literatur zur Dual-Surface-Methode wird angegeben, dass der Abstand der inneren Fläche nicht größer als $\lambda/2$ sein darf und der Koppelungsfaktor α rein imaginär sein muss. Im Zeitbereich sind diese Bedingungen nicht umsetzbar. Da im Zeitbereich mit reellen Zahlen gerechnet wird, muss auch α reell sein. Der Höchstabstand lässt sich am ehesten so deuten, dass $\mu_s = 1$ ist. Also die beiden Oberflächen nicht weiter als $c\Delta t$ auseinander liegen. Dies ist zwar numerisch anspruchsvoll aber umsetzbar. In Abbildung 5.36 sind die Ergebnisse der Dual-Surface-Methode für verschiedene Kopplungsfaktoren dargestellt mit $\mu_s = 1$. Wie man erkennen kann, hat die Dual-Surface-Methode leider keinen großen Einfluss auf die Ergebnisse der Berechnung. Der Einfluss der Innenraummoden auf die Abstrahlung bleibt bestehen und ändert sich nur minimal. Es wurden auch andere Konfigurationen getestet. Aber auch größere Abstände zwischen den Oberflächen mit $\mu_s > 1$ oder chaotisch verteilte DS-Punkte im Innenraum brachten keine nennenswerte Verbesserung und werden deshalb hier nicht dargestellt. Die im Falle der CHIEF-Methode erfolgreiche Ein-Schritt-Lösung wurde auch für die Dual-Surface-Methode angewendet, allerdings ohne eine Verbesserung zu erzielen.

5.7 Anwendungsbeispiele

Die bisherigen Stabilitätsbetrachtungen bei Außenraumproblemen wurden ausschließlich an Kugelmodellen vollzogen. Dies hat den Vorteil, dass analytische Lösungen zur Verfügung stehen und man Fehler sehr leicht erkennen kann. Da man Fehler in den Anfangsdaten weitgehend ausschließen kann, müssen die Abweichungen durch Diskretisierungs- und Verfahrensfehler entstanden sein. Rundungsfehler sind natürlich nicht vermeidbar.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, ob sich die daraus gewonnenen Erkenntnisse auch auf kompliziertere Modelle und Randbedingungen, wie man sie in der Praxis findet, übertragen lassen. Als erstes Beispiel wird die Schallabstrahlung einer Flamme betrachtet und als zweites Beispiel die Schallabstrahlung eines Dodekaederlautsprechers.

5.7.1 Schallabstrahlung einer Flamme

Im DFG-Verbundvorhaben “Vorhersage von Verbrennungslärm” wurde u.a. die Schallabstrahlung turbulenter vorgemischten Freistrahlfammen untersucht. Da die numerische Simulation der Schallabstrahlung ins Fernfeld mit Hilfe der Computational Fluid Dynamics (CFD) sehr zeitaufwändig ist, wurde die Methode mit der FD-BEM bzw. mit der Equivalent Source Method (ESM) gekoppelt. Bei den untersuchten Flammen handelt es sich um turbulente nicht vorgemixte H_2/N_2 Jetflammen, bezeichnet als H3-Flamme und HD-Flamme. Das Schnellefeld auf der zylindrischen Oberfläche, welches die Flamme umgibt, lieferte eine Large Eddy Simulation (LES) vom Fachgebiet Energie- und Kraftwerkstechnik der TU-Darmstadt. In Abbildung 5.37 ist der Aufbau und eine beispielhafte Schnelleverteilung auf der Kirchhoff-Fläche dargestellt. Daten und Rechenergebnisse wurden dem Autor vom Forschungsprojekt “Modellierung der Schallabstrahlung von Flammen mit akustischen Ersatzstrahlern” zur Verfügung gestellt.

Mit diesen Daten kann die TD-BEM die Schallabstrahlung der Flammen berechnen und die Ergebnisse können mit den vorliegenden Simulationsergebnissen einer FD-BEM-Simulation verglichen werden. Die Ergebnisse für die Schalleistungsdichte für die H3-Flamme und die HD-Flamme sind in Abbildung 5.38 dargestellt. Der Vergleich der TD-BEM mit der FD-BEM zeigt im

Frequenzbereich zwischen 400-3000Hz eine recht gute Übereinstimmung. Bei hohen Frequenzen fällt bei der TD-BEM die Schalleistungsdichte stärker ab als bei der FD-BEM. Dies liegt an der zu geringen räumlichen Auflösung der Zylinderoberfläche, so dass es zu steigender numerischer Dämpfung mit steigender Frequenz kommt.

Es standen LES-Daten über einen Zeitraum von 0.17s zur Verfügung. Sowohl bei der BEM im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich, wurde der Verlauf in sich überlappende Bereiche geteilt, um dann die Ergebnisse aller Bereiche zu mitteln. Bei der FD-BEM wurde die Unterteilung vor der Simulation durchgeführt. Bei der TD-BEM hingegen wurde erst die Simulation durchgeführt und dann das Ergebnis unterteilt, in den Frequenzbereich transformiert und dann die Ergebnisse gemittelt.

Für beide Flammen standen auch Messergebnisse zur Verfügung. Messergebnisse und Simulationsergebnisse stimmen bei der HD-Flamme gut überein, bei der H3-Flamme kommt es jedoch zu starken Abweichungen. Die Ursachen für diese Abweichungen werden an dieser Stelle nicht weiter erläutert, da sie für die TD-BEM nicht von Interesse sind. Näheres hierzu lässt sich im Abschlussbericht des Forschungsprojekts “Modellierung der Schallabstrahlung von Flammen mit akustischen Ersatzstrahlern” finden [59].

Ein Vorteil der TD-BEM ist, dass die Schnelldaten direkt übernommen werden konnten, da sie schon im Zeitbereich vorlagen. Für die FD-BEM mussten die Schnelldaten noch in den Frequenzbereich transformiert werden. Da verschiedene Flammentypen untersucht wurden, bestand ein weiterer Vorteil darin, dass die Rechenzeit reduziert werden konnte, wenn man die zylindrische Kirchhoff-Oberfläche für alle Flammentypen unverändert lässt. Dann muss die aufwendige Integration der Gleichungen (3.17) und (3.18) zum Aufstellen der \mathbf{G} und \mathbf{H} Matrizen nur einmal durchgeführt werden. Für jede neue Schnelleverteilung kann die Berechnung der Schallabstrahlung dann sehr schnell durchgeführt werden, da die Integrale unabhängig von der Oberflächenschnelle sind.

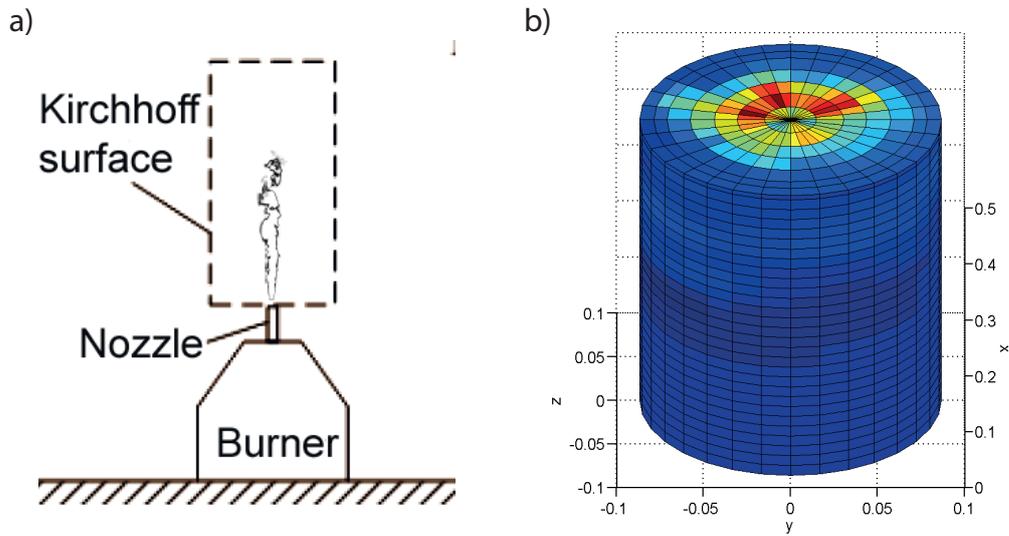


Abbildung 5.37: a) Flamme von zylindrischer Kirchhoff-Fläche umgeben, b) beispielhafte Schnelleverteilung auf der Kirchhoff-Fläche

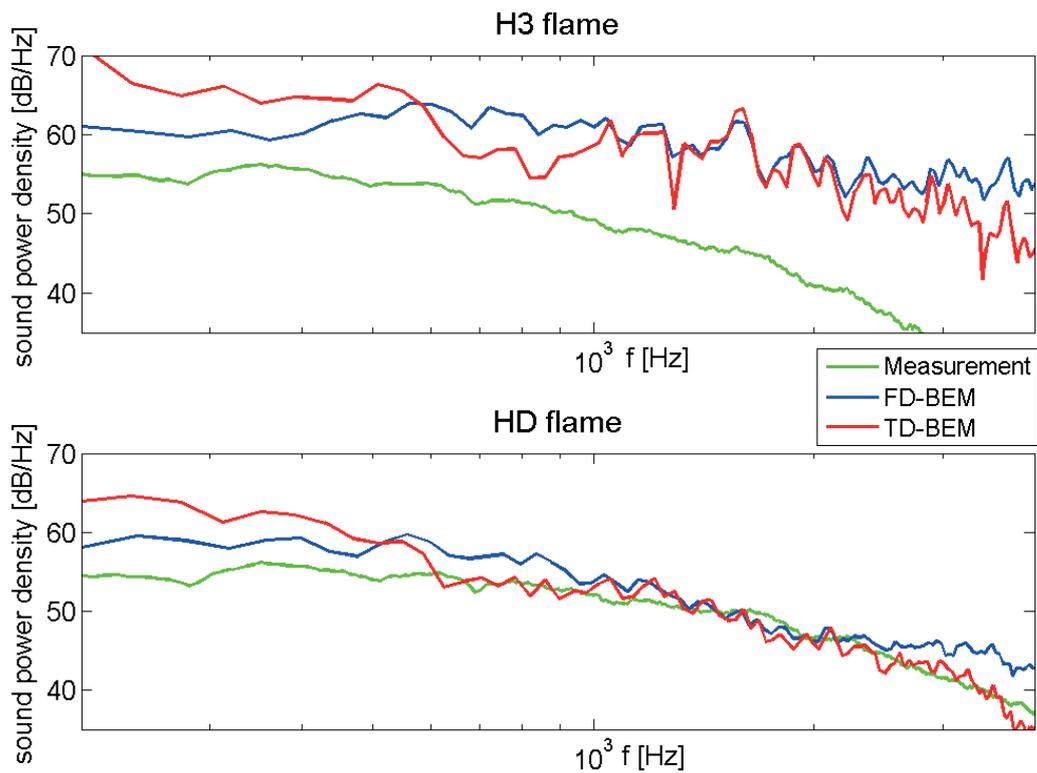


Abbildung 5.38: Schalleistungsdichte HD/H3-Flamme gemessen und simuliert mit der TD-BEM und FD-BEM

5.7.2 Schallabstrahlung eines Dodekaederlautsprechers

Dodekaederlautsprecher werden verwendet, um Bauakustik-Messungen gemäß DIN EN ISO 140-4 und DIN EN ISO 717-1 durchzuführen. Hierfür benötigt man eine Schallquelle mit kugelförmiger Abstrahlcharakteristik. Die kugelförmige Abstrahlcharakteristik wird durch 12 Einzellautsprecher erreicht, welche auf den Dodekaederflächen verteilt sind. Auf Grund der zunehmenden Richtwirkung der Einzellautsprecher mit zunehmender Frequenz lässt auch die Kugelförmigkeit der Abstrahlung des Dodekaeders bei höheren Frequenzen nach. Der Dodekaeder DO12-S der Schalltechnik Süd&Nord GmbH (Abbildung 5.40), sollte auf seine Tauglichkeit für Bauakustik-Messungen untersucht werden. Hierfür wurde die Abstrahlcharakteristik des Dodekaederlautsprechers messtechnisch im reflexionsarmen Raum ermittelt. Um die Praxistauglichkeit der TD-BEM zu testen, wurde die Abstrahlcharakteristik simuliert und mit den Messwerten verglichen. Die Messungen wurden im reflexionsarmen Vollraum des Instituts für Strömungsmechanik und Technische Akustik durchgeführt. Der Lautsprecher wurde dabei auf einen digitalen Drehteller montiert, welcher vom Messsystem “Monkey-Forest” vom ITA-Aachen angesteuert wurde. Mit einer Referenzmessung wurde die Übertragungsfunktion des Messsystems samt Messmikrofon bestimmt. Mit Hilfe der Referenzmessung kann das Messsystem die gemessene Übertragungsfunktion bereinigen, so dass als Ergebnis nur die Übertragungsfunktion des Lautsprechers vorliegt.

Für die numerische Simulation wurde ein Oberflächenmodell mit COMSOL Multiphysics erstellt. Der Einfachheit halber wurden die Lautsprechermembranen als ebene kreisförmige Flächen dargestellt. Weiterhin wurde im numerischen Modell angenommen, dass die Membran als Ganzes schwingt und es keine Partialschwingungen der Membran gibt. Das Oberflächenmodell wurde mit COMSOL Multiphysics diskretisiert und die Netzstruktur nach MATLAB[®] exportiert. In Abbildung 5.39 ist beispielhaft das Dodekaedermodell mit einer Diskretisierung von 3680 dreieckigen Elementen dargestellt. Die dunklen Elemente stellen die Membranflächen der Einzellautsprecher dar. Für die Größe des Zeitschritts der Simulation wurde $\Delta t = 0,05ms$ gewählt. Mit dem räumlichen Diskretisierung von 3680 Elementen ergibt sich dann ungefähr $\beta = 0.8$.

Trotz dieser vereinfachten Darstellung der Membranflächen der Einzellaut-

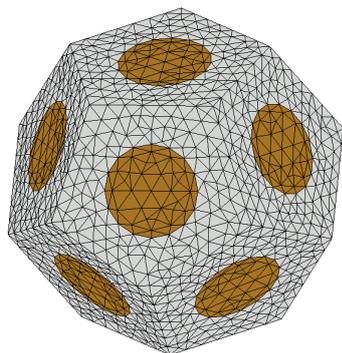


Abbildung 5.39: Oberflächenmodell des Dodekaederlautsprechers bestehend aus 3680 Dreiecken. Dunkle Elemente stellen die Membranflächen der Einzellautsprecher dar.

sprecher zeigt der Vergleich der Rechenergebnisse mit den Messdaten bis 4000 Hz sehr gute Übereinstimmungen. In Abbildung 5.41 sind die simulierten und gemessenen Richtwirkungen des Dodekaederlautsprechers für 1000 Hz, 2000 Hz, 4000 Hz und 6300 Hz dargestellt. Bei 1000 Hz ist die Abstrahlcharakteristik fast kugelförmig und Simulation und Messung stimmen genau überein. Bei höheren Frequenzen nimmt die Richtwirkung des Dodekaederlautsprechers wie zu erwarten weiter zu. Bei 2000 Hz und 4000 Hz stimmen die Ergebnisse der Simulation mit den Messergebnissen noch recht gut überein. Bei 6300 Hz zeigen die Simulationsergebnisse eine sehr starke Richtwirkung, die aber in dem Maße nicht gemessen wurde. Hier scheinen die Grenzen des doch recht einfachen Oberflächenmodells erreicht zu sein. In Abbildung 5.42 ist die simulierte und gemessene Richtwirkung des Dodekaederlautsprechers bis 6000 Hz normiert auf den maximalen Schalldruck dargestellt.

Langzeitstabilität

In Abschnitt 5.3 wird gezeigt, dass die Instabilitäten meist erst bei langen Simulationszeiten von etlichen tausend Zeitschritten auftreten. Zur Überprüfung der Langzeitstabilität des Dodekaedermodells, wurde die Schallabstrahlung eines Sweep-Signals gemessen und zum Vergleich mit der TD-BEM simuliert. Das Sweep-Signal wurde so eingestellt, dass es bei 300 Hz anfängt und bei 1000 Hz aufhört. Die Oberflächenschnelle eines Einzellautsprechers des Do-



Abbildung 5.40: Foto des Messaufbaus zur Messung der Membranschnelle des Dodekaederlautsprechers im reflexionsarmen Raum

dekaeders wurde mittels eines Laservibrometers vom Typ Polytec PDV 100 gemessen (siehe Abbildung 5.40). Die Messdaten werden als Randbedingung für die Membranschnelle des Dodekaedermodells benutzt. Mit $\Delta t = 0,05ms$ beträgt die Länge des Sweep-Signals 67500 Zeitschritte. Die Ergebnisse der Messung und der Simulation sind in Abbildung 5.43 dargestellt. Die Simulation bleibt trotz der sehr langen Simulationszeit stabil. In Abbildung 5.44 sieht man einen Vergleich der Ergebnisse im Frequenzbereich. Auch hier sieht man eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse der TD-BEM Simulation und den Messergebnissen. Zu höheren Frequenzen fallen die Simulationsergebnisse geringer aus als die Messergebnisse. Diese Abweichung entsteht durch die numerische Dämpfung der groben Oberflächendiskretisierung mit 3680 Elementen.

In Abbildung 5.44 wird der Bereich um 945 Hz vergrößert dargestellt, da hier in den Simulationsergebnissen eine kleine Unregelmäßigkeit zu erkennen ist. Hier scheint es einen Einfluss einer Innenraummode der Struktur auf das Abstrahlverhalten zu geben. Dieser Einfluss ist sehr gering und liegt unter 1 dB, so dass diese Abweichung in der Praxis nicht stören würde. Um die in Abschnitt 5.5 vorgestellte CHIEF-Methode zu testen, wird die Simulation mit 370 zufällig im Innenraum verteilten CHIEF-Punkten wiederholt. Die Ergebnisse in Abbildung 5.44 zeigen, dass der, wenn auch sehr geringe, Einfluss der Innenraummode auf das Abstrahlverhalten dadurch eliminiert werden kann.

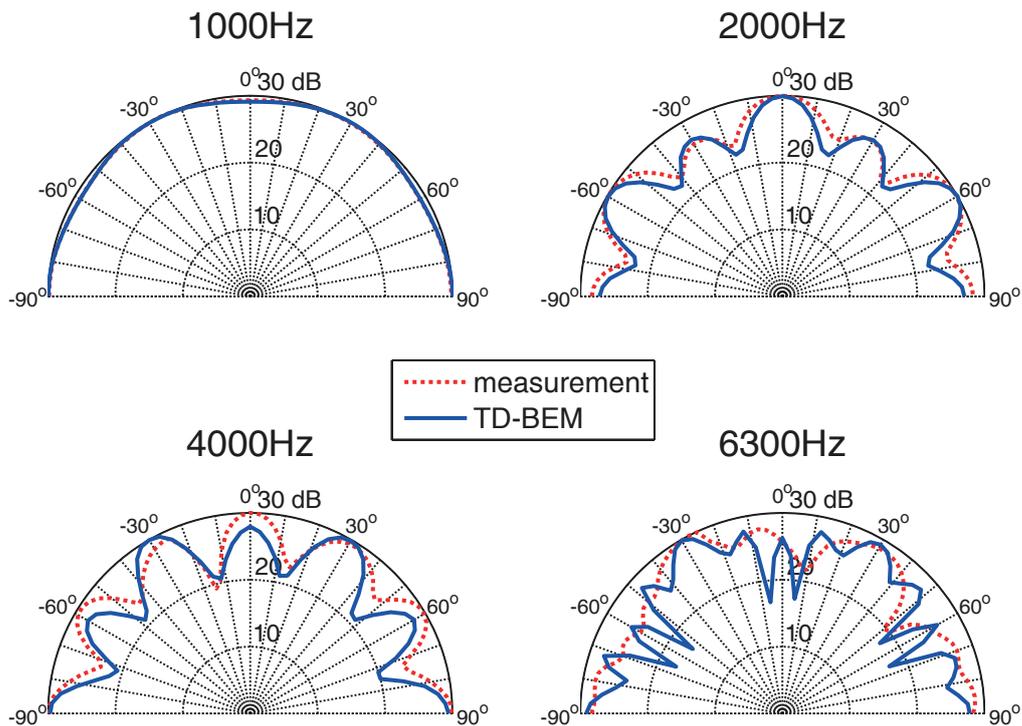


Abbildung 5.41: Simulierte und gemessene Richtwirkung des Dodekaederlautsprechers für 1000 Hz, 2000 Hz, 4000 Hz und 6300 Hz

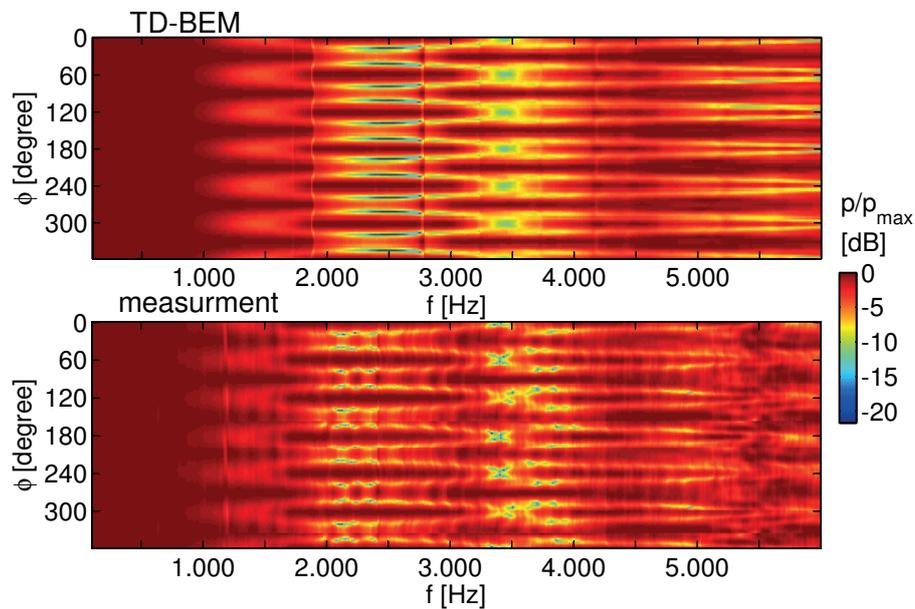


Abbildung 5.42: Simulierte und gemessene Richtwirkung des Dodekaederlautsprechers bis 6000 Hz normiert auf den maximalen Schalldruck

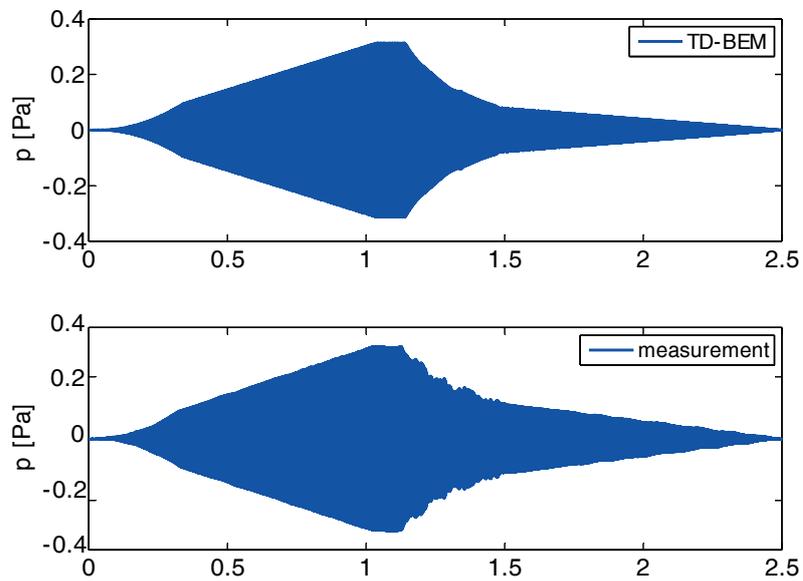


Abbildung 5.43: Simulierter und gemessener Schalldruckverlauf bei Abstrahlung eines Sweep-Signals von 300-1000 Hz (Simulationszeit 67500 Zeitschritte)

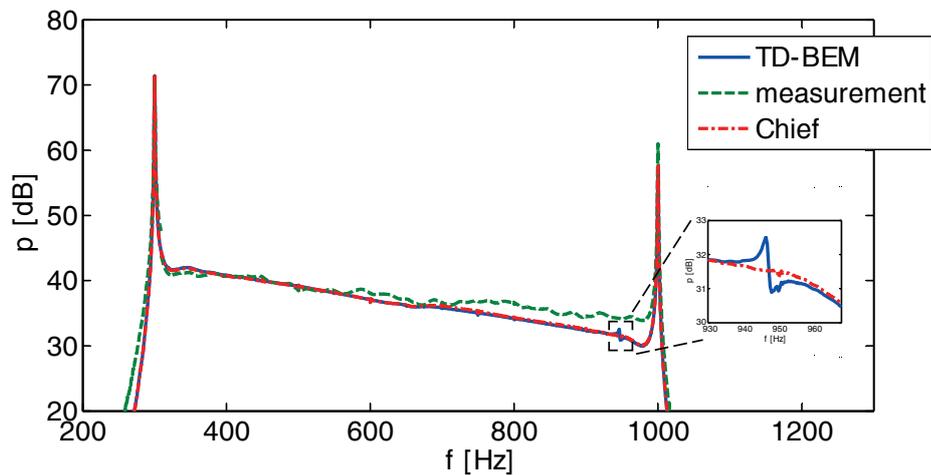


Abbildung 5.44: Simulierter und gemessener Schalldruckpegel bei Abstrahlung eines Sweep-Signals von 300-1000 Hz. Vergrößerte Ausschnitt bei 946 Hz zeigt Irregularität, welche durch die CHIEF Methode beseitigt wird.

Kapitel 6

Streuprobleme im Außenraum

Nachdem im Kapitel 5 die Stabilitätsprobleme für Abstrahlprobleme betrachtet wurden, wird nun das Stabilitätsverhalten der TD-BEM bei Streuproblemen betrachtet. Die Randintegralgleichung (2.56) wird hierfür um die Summe aller Quellen B_k erweitert.

$$4\pi d(\vec{x}_0) p(\vec{x}_0, t_0) = - \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{p}{r^2} + \frac{1}{cr} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right]_{ret} d\Gamma + \sum_k B_k(t_{ri}). \quad (6.1)$$

Für B_k können beliebige Quellterme gewählt werden, wie z.B. Monopolquellen oder ebene Wellen. Da hier reine Streuprobleme betrachtet werden und die Oberfläche als schallhart betrachtet wird, wurde der Schallfluss q in Gleichung (6.1) weggelassen, da die Oberflächenschnelle null ist. Ein gemischtes Problem mit Abstrahlung und Streuung ließe sich natürlich auch berechnen, wenn man den Schallfluss q berücksichtigt. Hier sollen jedoch nur Probleme betrachtet werden, welche sich aus reinen Streuproblemen ergeben. Für die Diskretisierung werden die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Ansätze benutzt und aus Gleichung (3.16) wird dann

$$\begin{aligned} -2\pi p_i(\vec{x}_0) = & \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^N \left[\int_{\Gamma_n} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [(i-m+1)p_m^n - (i-m)p_{m-1}^n] \Psi(t_{ri}) d\Gamma \right] \\ & + \sum_k B_k(t_{ri}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Mit der Matrixschreibweise erhält man dann folgendes Gleichungssystem

$$-2\pi \vec{p}_i = \sum_{\mu=1}^{\min(i, \mu_{max})} \mathbf{H}_{\mu} [\mu \vec{p}_{i-\mu+1} - (\mu-1) \vec{p}_{i-\mu}] + \sum_k B_k(t_{ri}). \quad (6.3)$$

In diesem Kapitel werden nur Streuprobleme im Außenraum betrachtet. Obwohl es im mathematischen Ansatz keinen Unterschied bei Außen- und Innenraumproblemen gibt, treten bei Streuung im Innenraum unterschiedliche Instabilitäten auf, wie in Kapitel 7 gezeigt wird.

Die in Abschnitt 5.3 gemachten Stabilitätsbetrachtungen am Kugelmodell lassen sich alle auch auf Streuprobleme übertragen, da der Spektralradius des Problems nicht von den Quelltermen abhängt, sondern nur von den H_μ Matrizen. Da die \mathbf{H}_μ Matrizen aus der Gleichung 6.3 für den Streufall und der Gleichung 3.20 für den Abstrahlfall identisch sind, ist zu erwarten, dass die gleichen Probleme auftreten werden und hoffentlich auch die gleichen Stabilisierungsansätze verwendet werden können.

Als Testfall für die Streuung des Schall an einem Körper soll auch hier wieder eine Kugel mit Radius $r = 1m$ dienen, da somit ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit der analytischen Lösung möglich ist. Wie in Abbildung 6.1 dargestellt ist, befindet sich im verwendeten Testfall in 3m Entfernung zur Kugeloberfläche eine Monopolschallquelle und die Immissionspunkte, in denen der gestreute Schalldruck berechnet wird, befinden sich in 1,5m Entfernung zum Kugelmittelpunkt. Die Monopolschallquelle sendet einen Impuls aus, welcher an der Kugel gestreut wird. Die Ergebnisse werden dann in den Frequenzbereich transformiert. In Abbildung 6.2 sind die Polardiagramme des berechneten reflektierten Schalldrucks bei 100 Hz, 200 Hz, 300Hz und 400Hz im Vergleich zur analytischen Lösung dargestellt. Der berechnete Schalldruck stimmt sehr gut mit der analytischen Lösung überein. Nur ab 300 Hz kommt es zu geringen Abweichungen, welche mit steigender Frequenz zunehmen. Dies ist auf die ungenügende zeitliche und räumliche Diskretisierung zurückzuführen, da das Kugelmodell mit 384 Oberflächenelementen verwendet wurde.

Der Einfluss der Innenraummoden lässt sich auch hier wieder nur in den entsprechenden Frequenzen finden. In Abbildung 6.3 ist die absolute Abweichung $|\Delta p|$ des berechneten vom analytischen Schalldruck im Immissionspunkt bei $\theta = 0^\circ$ in Abhängigkeit von β dargestellt. Es wurde $\theta = 0^\circ$ gewählt, da hier die Hauptkeule des gestreuten Schalldrucks liegt. In anderen Punkten sieht die Abweichung $|\Delta p|$ ähnlich aus. Da kein Erkenntnisgewinn durch die Darstellung weiterer Punkte zu erwarten ist, wurde darauf verzichtet. Man erkennt deutlich den Einfluss der Innenraummoden, welcher sich zwar in Abhängigkeit von

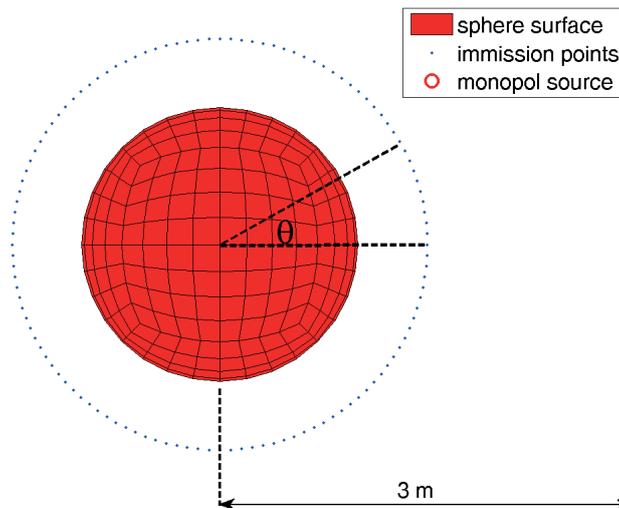


Abbildung 6.1: Streuung von einer Monopolquelle an einer 3m entfernten Kugel und Lage der berechneten Immissionspunkte.

β ändert, aber eigentlich immer auftritt. Die rote Linie in Abbildung 6.3 stellt die Grenze der zeitlichen Diskretisierung von $f_{max} = 1/6\Delta t$ dar. Im Bereich bis 250 Hz sind die Abweichungen kleiner als 1 dB. Mit kleiner werdenden Zeitschritt bei gleichbleibender räumlicher Diskretisierung wird der Parameter β kleiner und f_{max} steigt. Da jedoch die räumliche Diskretisierung nicht besser wird, nimmt der numerische Fehler für höhere Frequenzen zu und die Abweichungen in den Frequenzen der Innenraummoden werden stärker.

6.1 Langzeitstabilität

Die bis hier hin gezeigten Ergebnisse stammen aus Simulationen, deren Laufzeiten weniger als 1000 Zeitschritte betragen. Der in Abschnitt 5.2.1 beschriebene Test auf Langzeitstabilität wird nun auf Streuprobleme angewandt. Eine Simulation wird dabei als instabil deklariert, wenn der Schalldruck am Ende der Simulationszeit von 7000 Zeitschritten nicht auf 0,1 % des maximalen Schalldrucks des Impulses abgefallen ist (60 dB Signal-Rauschabstand). Die Ergebnisse dieses Test sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Ergebnisse ähneln sehr den Ergebnissen der Schallabstrahlung, welche in Abbildung 5.7 dargestellt sind. Auch hier sind 2 Bereiche zu unterscheiden. Im Bereich bis

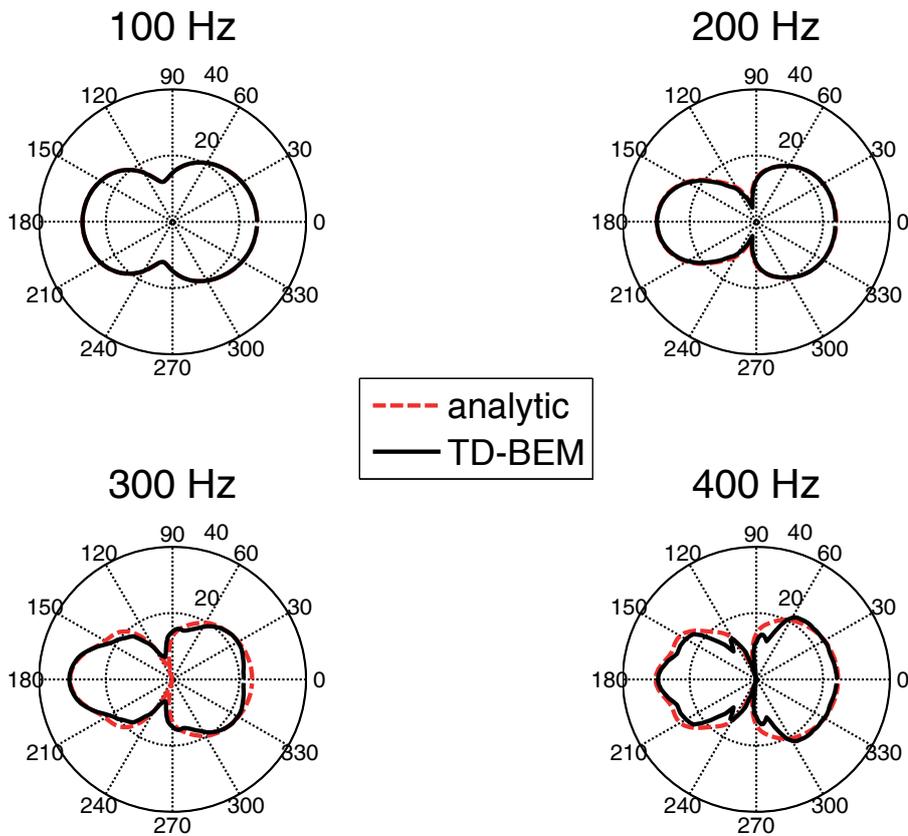


Abbildung 6.2: Polardiagramm des berechneten reflektierten Schalldrucks bei 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz und 400 Hz im Vergleich zur analytischen Lösung

$f_s < 2040 \text{ Hz}$ ($\beta > 0,85$) treten Instabilitäten nur auf wenn die Abtastfrequenz f_s mit einer Innenraummode der Kugel übereinstimmt. Diese Frequenzen sind in Abbildung 6.4 als senkrecht gestrichelte Linien dargestellt. Für $f_s > 2040 \text{ Hz}$ ($\beta < 0,85$) werden die Ergebnisse generell instabil. Der Unterschied zum Abstrahlfall liegt darin, dass der Bereich der Instabilität schon bei $f_s = 2040 \text{ Hz}$ ($\beta = 0,85$) anfängt. Bei der Abstrahlung fing der instabile Bereich erst ab $f_s > 2480 \text{ Hz}$ ($\beta < 0,7$) an, und auch der Übergang war nicht so abrupt. Im Fall der Streuung scheint die TD-BEM also empfindlicher auf zu kleine β zu reagieren. Es sei auch hier noch einmal darauf hingewiesen, dass dieser Stabilitätstest mit 7000 Zeitschritten natürlich noch keine Stabilität garantiert. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass es bei längeren Laufzeiten

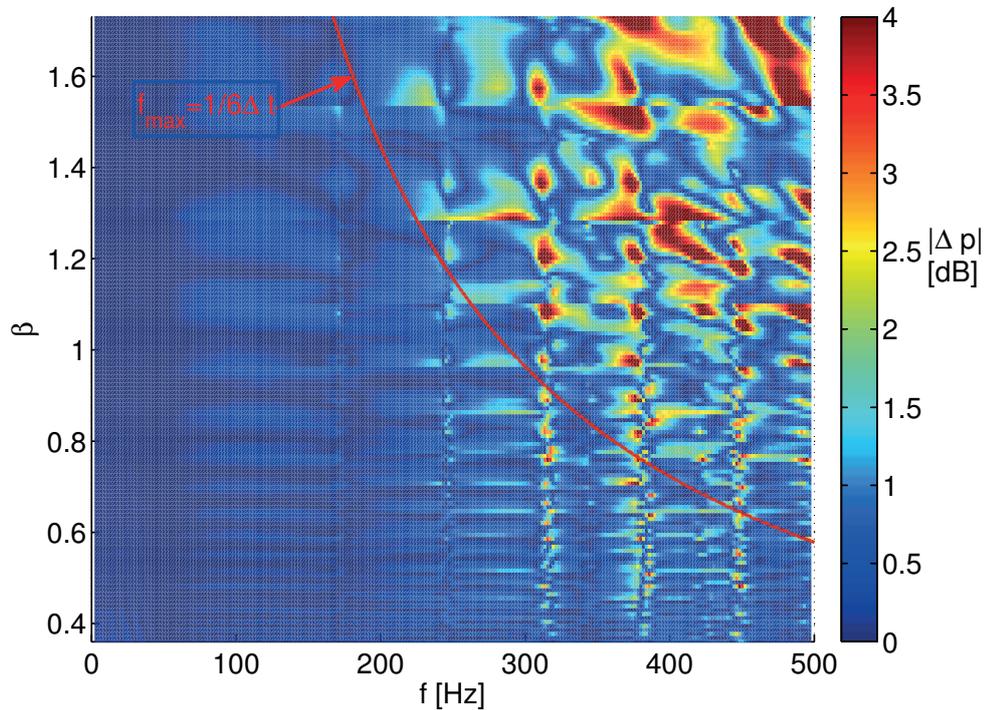


Abbildung 6.3: Absolute Abweichung $|\Delta p|$ des berechneten vom analytischen Schalldruck im Immissionspunkt bei $\theta = 0^\circ$ in Abhängigkeit von β . Rote Linie stellt die Grenze der zeitlichen Diskretisierung von $f_{max} = 1/6\Delta t$ dar.

noch zu einem instabilen Verhalten kommen kann.

6.2 CHIEF-Methode

In Abschnitt 5.5 wurde gezeigt, wie die CHIEF-Methode erfolgreich zur Stabilisierung von Abstrahlproblemen im Außenraum angewendet werden kann. Der gleiche Ansatz lässt sich natürlich auch bei Streuproblemen im Außenraum anwenden.

Wenn man die in Abbildung 6.3 dargestellten Ergebnisse unter Verwendung der CHIEF-Methode berechnet, zeigt sich leider keine Verbesserung. Der Einfluss der Innenraummoden auf das gestreute Schallfeld ist weiterhin vorhanden. Die in Abschnitt 6.1 beschriebene Instabilität kann jedoch mit Hilfe der CHIEF-Methode unterdrückt werden. Dies ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Keine der mit der CHIEF-Methode durchgeführten Simulationen über

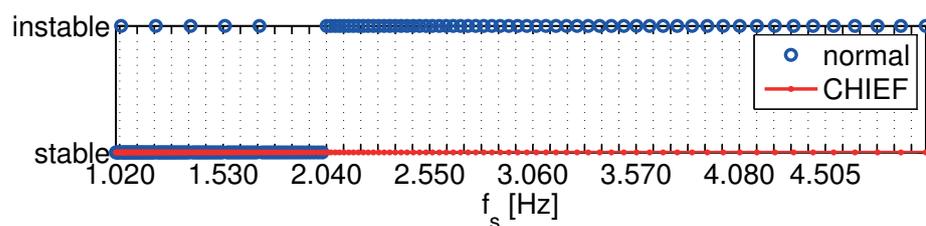


Abbildung 6.4: Langzeitstabilität bei 7000 Zeitschritten

7000 Zeitschritte zeigt ein instabiles Verhalten. Auch wenn der Einfluss der Innenraummoden auf das gestreute Schallfeld nicht unterdrückt werden kann, stellt die Unterdrückung der Instabilität doch eine wesentliche Verbesserung dar. Wieso sich der positive Einfluss der CHIEF-Methode nicht auch in der Reduzierung des Fehlers des gestreuten Schalldrucks zeigt, ist allerdings rätselhaft.

Kapitel 7

Streuprobleme im Innenraum

Ein interessanter Anwendungsfall der TD-BEM ist, die Impulsantwort eines Raumes zu berechnen. Die Impulsantwort beinhaltet sämtliche Information, die dem System entnommen werden können, so dass sich alle raumakustischen Parameter daraus berechnen lassen. Auf diese Weise ist auch eine Auralisation, d.h. Hörbarmachung, des Raumes möglich.

Einer Anwendung der Methode als raumakustische Planungsmethode stehen allerdings noch einige Probleme im Weg. Zum einen ist die Anwendung zurzeit noch auf Grund des Rechenaufwands auf den tieffrequenten Bereich, bzw. auf kleine Räume, beschränkt. Die räumliche Diskretisierung muss sich nach der kleinsten Wellenlänge des Frequenzbereiches richten, welcher von Interesse ist. Räume haben jedoch eine Ausdehnung von etlichen Metern, so dass die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems leicht die zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten sprengen.

Ein anderes Problem ist, dass es schwierig ist die Absorptionswirkung der Oberflächen im Zeitbereich zu modellieren. Eine einfache frequenzunabhängige Dämpfung lässt sich ohne Probleme modellieren. Dies ist für praktische Anwendungen aber nicht ausreichend, da Oberflächenmaterialien üblicherweise eine frequenzabhängige Dämpfung aufweisen. Die Modellierung von Oberflächenimpedanzen ist ein spannendes Forschungsfeld, welches den Rahmen dieser Arbeit jedoch sprengen würde.

Die in Kapitel 6 beschriebenen Ansätze für Streuprobleme gelten auch für Innenraumprobleme. Der einzige Unterschied zu Außenraumproblemen ist, dass der Normalenvektor sein Vorzeichen wechselt, da er so definiert ist, dass

er in das betrachtete Gebiet zeigen soll.

7.1 Testfall Rechteckraum

Ein einfacher rechteckiger Raum mit schallharter Berandung wird als Testfall gewählt, da sich hierfür auch analytische Ergebnisse herleiten lassen und somit ein Vergleich mit den Ergebnissen der TD-BEM möglich ist. Die Größe des Raumes beträgt: Länge=5m x Breite=3m x Höhe=3,25m. Dies entspricht ungefähr der Größe eines kleinen Büroraumes und ist mit den zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten noch numerisch zu bewältigen.

Man könnte vermuten, dass hier keine Stabilitätsprobleme auftreten, da es im Außenraum keine Moden geben kann, welche den Innenraum beeinflussen. Doch leider treten hier andere Probleme auf. In Abbildung 7.1 ist der Zeitverlauf des Schalldrucks im Raum für verschiedenen Diskretisierungen der Oberfläche (Anzahl der Oberflächenelemente 2030, 3652, 8280, 16594 und 22664 Elemente) und der Zeit (je Modell 4 Simulationen mit $\beta = [0, 50, 811, 5]$) dargestellt. Alle Simulationen mit $\beta = 0,5$ zeigen eine Instabilität mit hochfrequent oszillierender und exponentiell ansteigender Amplitude. Hier zeigt sich schon der erste Unterschied zu Außenraumproblemen. Dort lieferten Simulationen mit $\beta < 0,5$ anfangs noch gute Ergebnisse. Erst bei längeren Simulationszeiten konnten Instabilitäten beobachtet werden. Das Problem der hochfrequenten Instabilität lässt sich jedoch leicht umgehen, indem man einen größeren Zeitschritt wählt, so dass $\beta > 0,5$ ist. Das eigentliche Problem besteht darin, dass alle anderen Simulationen einen linearen Anstieg des Ruheschalldrucks aufweisen. Dieses Ergebnis spiegelt natürlich nicht das Verhalten des Modells in der Realität wieder. Es handelt sich hierbei um einen speziellen Fall von Instabilität. In der Literatur lassen sich zu diesem Thema nur 2 Veröffentlichungen von Jean-Marc Parot et.al. [60][48] finden. Parot verwendet für diese Art von Instabilität den Ausdruck Pneumatische Mode bzw. Statische Mode. Diese Bezeichnung wird in dieser Arbeit übernommen. Die geringe Anzahl von Veröffentlichungen lässt sich wahrscheinlich darauf zurückführen, dass die TD-BEM hauptsächlich für Außenraumprobleme verwendet wird. Für Innenraumprobleme ist die Verwendung der Finiten Elemente Methode (FEM) gebräuchlicher.

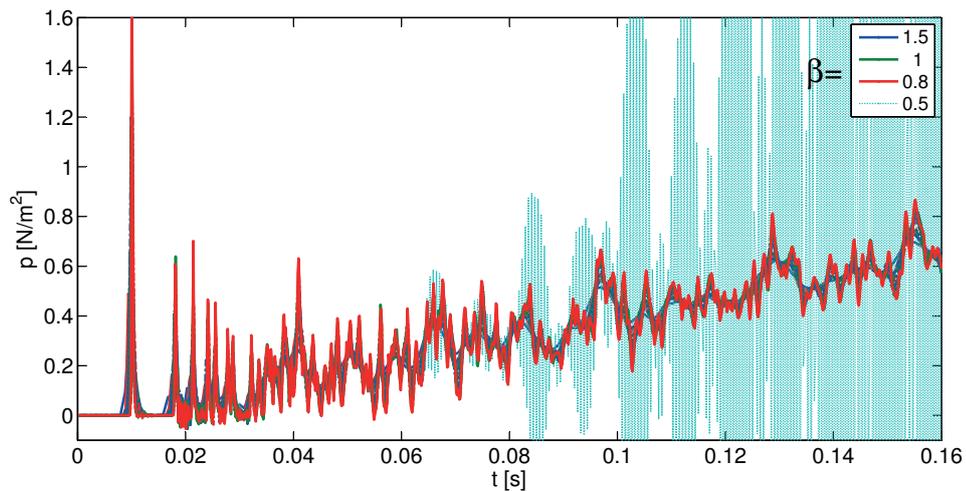


Abbildung 7.1: Zeitverlauf des Schalldrucks im Raum für verschiedene Modelle (Anzahl der Oberflächenelemente 2030, 3652, 8280, 16594 oder 22664 Elemente) und je Modell 4 Simulationen mit $\beta = [0, 5 \ 0, 8 \ 1 \ 1, 5]$. Alle Simulationen mit $\beta = 0, 5$ zeigen eine Instabilität mit hochfrequent oszillierender und exponentiell ansteigender Amplitude. Alle anderen Simulationen zeigen einen linearen Anstieg des Ruhschalldrucks.

Bevor auf die unterschiedlichen Stabilisierungsansätze in Abschnitt 7.3 eingegangen wird, soll vorher in Abschnitt 7.2 noch ein Blick auf die Ursache der Instabilität geworfen werden.

7.2 Spektrum und Spektralradius

Wie in Kapitel 5.2 beschrieben, lassen sich aus den Kenngrößen des Verfahrensoperators Erkenntnisse über das Stabilitätsverhalten der Methode ableiten. Im Gegensatz zu Außenraumproblemen sind bei Innenraumproblemen die Innenraummoden natürlich Teil der Lösung und sollten nicht unterdrückt werden. Da es im mathematischen Modell keine Dämpfung gibt, müssten die Schallwellen im Innenraum theoretisch unendlich oft reflektiert werden. Eine Eigenmode ohne Dämpfung wird durch einen Eigenwert des Verfahrensoperators T mit einem Betrag von 1 dargestellt. Der Imaginärteil des Eigenwertes repräsentiert die Frequenz der Eigenmode. Demnach muss der Eigenwert der Statischen Mode rein reell sein, da hier keine Oszillation auftritt. Dieser Eigenwert hat

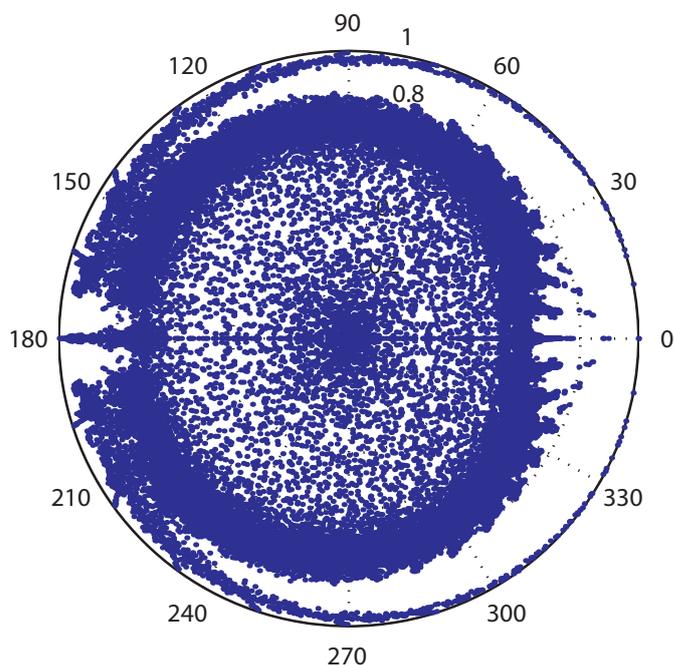


Abbildung 7.2: Spektrum des Rechteckraums im Einheitskreis mit einer Oberflächendiskretisierung von 2030 rechteckigen Elementen und $\beta = 1$.

auch einen physikalischen Sinn. Er beschreibt das Verhalten eines Systems, bei dem der Ruheschalldruck im Innenraum verändert wird. Dies kann durch eine Volumenquelle erfolgen oder durch Auslenkung der Oberflächenelemente in nur eine Richtung, wodurch sich das Raumvolumen und somit auch der Ruheschalldruck ändert.

In Abbildung 7.2 werden die Eigenwerte des Verfahrensoperators T für den Testraum mit einer Oberflächendiskretisierung von 2030 Elementen und $\beta = 1$ im Einheitskreis dargestellt. Viele der Eigenwerte liegen sehr dicht am Einheitskreis. Mit zunehmendem Winkel und somit auch zunehmender Frequenz, wird der Abstand zum Einheitskreis größer. Die Moden werden also mit zunehmender Frequenz stärker gedämpft. Die Statische Mode, welche rein reell ist und somit beim Winkel 0 liegt, ist ungedämpft und hat einen Wert von $1 + 1,22 \cdot 10^{-9}$. Dies dürfte auch der Grund für den linear anwachsenden Ruheschalldruck des Systems sein.

Das Problem ist, dass durch Diskretisierungsfehler die Eigenwerte immer etwas von den analytischen Betrachtungen abweichen werden. Mit zunehmender

Frequenz kann bei den Eigenmoden eine steigende numerische Dämpfung beobachtet werden. Dies ist auch plausibel da mit kleiner werdender Wellenlänge die räumliche und zeitliche Diskretisierung, relativ gesehen, immer schlechter wird. Problematisch hingegen sind die tieffrequenten Eigenmoden des Raumes, da hier keine numerische Dämpfung zu beobachten ist. Ganz im Gegenteil kann bei der Pneumatischen Mode eine minimale Anhebung des Eigenwertes um $1,22 * 10^{-9}$ beobachtet werden. Obwohl diese Abweichung nur sehr gering ist, reicht dies aus die Simulation instabil werden zu lassen, insbesondere da man zur Berechnung der Impulsantwort recht lange Simulationszeiten benötigt.

Auffällig an den Schalldruckverläufen in Abbildung 7.1 ist, dass bei allen Verläufen der Schalldruck gleich stark ansteigt. Weder die räumliche noch die zeitliche Diskretisierung scheinen einen Einfluss auf die Pneumatische Mode zu haben. Dies würde aber bedeuten, dass der Spektralradius des Verfahrensoperators T in allen Fällen gleich groß sein muss. In Abschnitt 5.3 wurde festgestellt, dass bei Abstrahlproblemen der Spektralradius von der Zeitschrittweite Δt abhängt und nur sehr wenig von der örtlichen Diskretisierung. Dass der Eigenwert der Pneumatischen Mode nicht von der Zeitschrittweite abhängt, erscheint zwar recht unwahrscheinlich, aber bei der Pneumatischen Mode verursacht die zeitliche Abtastung wiederum keinen Amplitudenfehler wie bei anderen Moden.

Wenn die Abweichungen vom theoretischen Wert 1 nicht durch Diskretisierungsfehler entstehen, müsste der Spektralradius für alle Diskretisierungen gleich groß sein. Leider ist es nicht möglich die Eigenwerte der Pneumatischen Mode für die verwendeten Modelle zu vergleichen, da sie nicht mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden können. Auf die Schwierigkeiten der Berechnung des Spektralradiuses des Verfahrensoperators T wurde schon in Abschnitt 5.2.1 eingegangen. Obwohl die Ergebnisse eher auf einen Modellfehler hinweisen, konnte kein solcher Fehler gefunden werden.

Die Quellstärke sowie deren Frequenzinhalt haben jedoch Einfluss auf die Stärke des Druckanstieges. So wurde für die Berechnungen in Abbildung 7.1 ein Impuls verwendet, der bei allen Berechnungen den gleichen Energiegehalt hat. Hierauf wird im folgenden Abschnitt 7.3 noch etwas näher eingegangen.

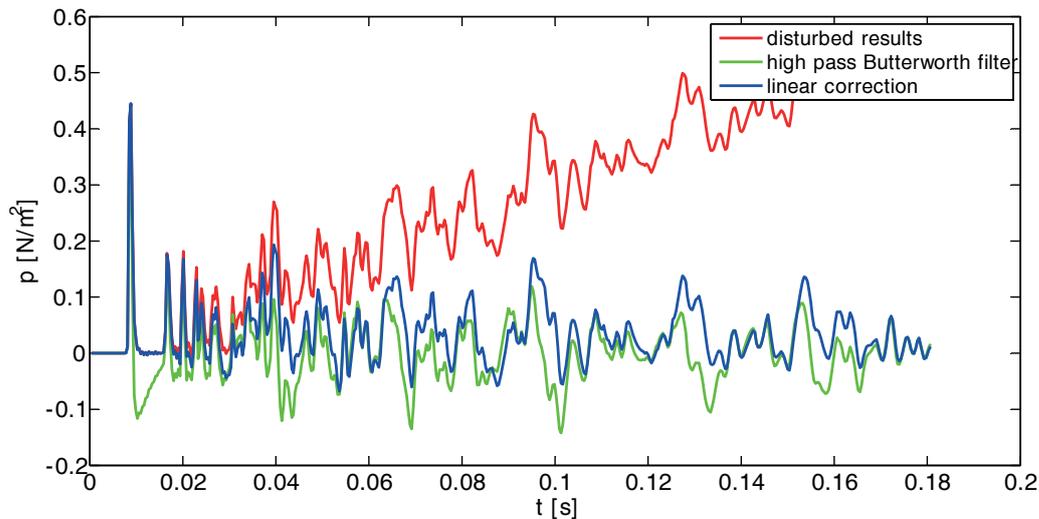


Abbildung 7.3: Unterschied im Zeitverlauf des Schalldrucks im Raum einmal gefiltert mit einem Butterworth Hochpassfilter und einmal korrigiert mit einem linearen Korrekturfaktor.

7.3 Stabilisierungsansätze

Da die Störung des Ergebnisses ausschließlich tieffrequenter Natur ist, lässt sich diese Störung durch einen Hochpassfilter herausfiltern. Dies setzt natürlich voraus, dass die erste Eigenmode des Raumes nicht zu tieffrequent ist, da sie sonst mit herausgefiltert wird bzw. die Amplitude verfälscht wird. Dies hängt natürlich auch von der Güte des Filters ab. Ein noch einfacherer Ansatz ist die Anwendung eines linearen Korrekturfaktors. Hierfür muss nur der Anstieg des Ruheschalldrucks bestimmt werden. Dieser wird dann einfach vom Ergebnis subtrahiert. In Abbildung 7.3 sind diese beiden Ansätze miteinander verglichen. Als Hochpassfilter wurde ein Butterworth Filter verwendet. Man kann erkennen, dass die lineare Korrektur das Problem sehr gut behebt, wobei der Hochpassfilter das Signal etwas verfälscht. Beide Ansätze haben den Nachteil, dass sie die Pneumatische Mode nicht verhindern. Sie versuchen nur aus den verfälschten Daten sinnvolle Ergebnisse zu extrahieren. Sinnvoller ist es natürlich, vor der Berechnung anzusetzen. Eine Möglichkeit, ohne die Ansätze der TD-BEM verändern zu müssen, ist, die Pneumatische Mode gar nicht erst anzuregen. In Abbildung 7.4 erkennt man, dass der Anstieg des Schalldruckver-

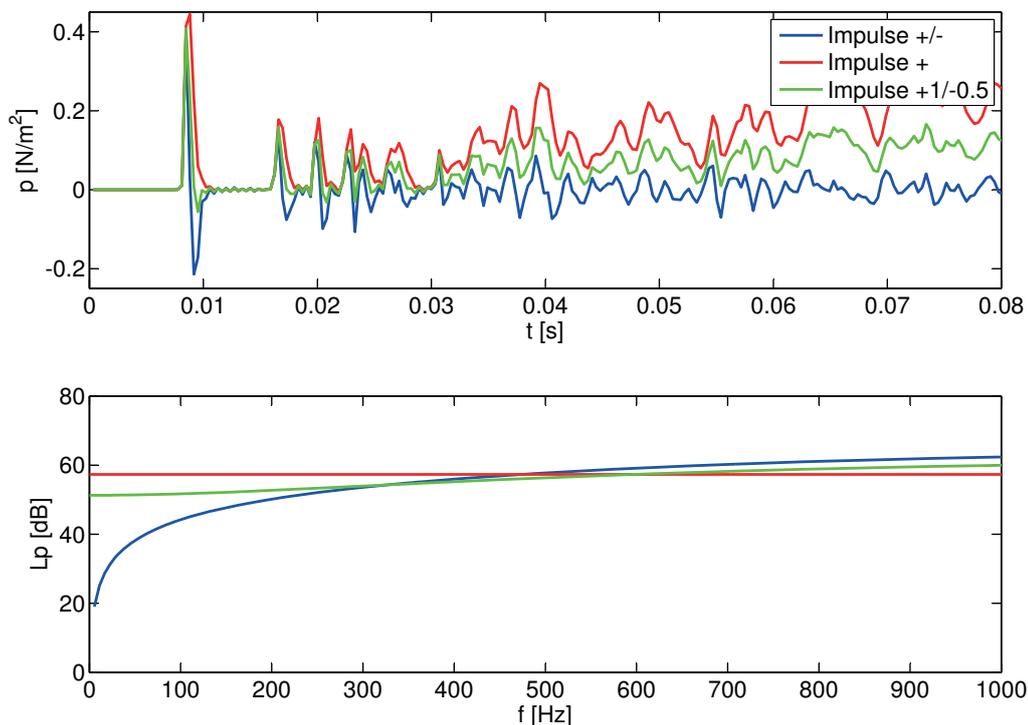


Abbildung 7.4: oben: Zeitverlauf des Schalldrucks im Raum für unterschiedliche Impulse, unten: Frequenzspektrum des jeweiligen, $+$ Impuls: Impuls mit rein positiver Amplitude, $+/-$ Impuls: gleich große positive sowie negative Amplitude des Impulses, $+1/-0.5$ Impulse: positive Amplitude gefolgt von halb so starker negativer Amplitude

laufes stark vom verwendeten Anregeimpuls abhängt. Den stärksten Anstieg kann man beim $(+)$ -Impuls beobachten. Dieser hat eine Zeitdauer von Δt und eine rein positive Amplitude. Das Frequenzspektrum (unteres Bild in Abbildung 7.4) dieses Impulses zeigt, dass alle Frequenzen gleich stark angeregt werden. Dadurch wird auch die Pneumatische Mode angeregt, da der Ruheschalldruck des Raumes erhöht wird. Physikalisch würde sich ein etwas höherer Ruheschalldruck einstellen, aber das numerische Modell ist hingegen instabil und zeigt einen unbegrenzten Anstieg. Wenn man den Impuls, mit dem man den Raum anregt, jedoch verändert, indem man auf den positiven Impuls einen ebenso kurzen aber negativen Impuls folgen lässt, regt man die Pneumatische Mode weniger stark oder gar nicht an. Im Idealfall bei gleich großer positiver sowie negativer Amplitude, gekennzeichnet als $(+/-)$ Impuls, wird die Pneu-

matische Mode gar nicht angeregt. Dies ist auch verständlich, da durch solch einen Impuls der Ruheschalldruck unverändert bleiben würde. Dies lässt sich auch am Frequenzspektrum des Impulses erkennen. Zu tiefen Frequenzen fällt das Signal exponentiell ab und für 0 Hz ist die Amplitude 0. Jegliche Änderung des Ruheschalldrucks führt zu einer Anregung der Pneumatischen Mode und somit zu einem stetig anwachsenden Schalldruck im Raum. Da für die Berechnung der Impulsantwort eines Raumes eine Änderung des Ruheschalldrucks von wenig Interesse ist, stellt diese Lösung keine große Einschränkung dar.

Bevor im nächsten Abschnitt die Ergebnisse für den Testraum vorgestellt werden, soll noch ein weiterer Versuch unternommen werden, den Ansatz der TD-BEM so zu erweitern, dass die Pneumatische Mode stabil bleibt. Jean-Marc Parot et.al. [60] schlägt einen Ansatz zur Stabilisierung der Pneumatischen Mode vor, der auf der spektrale Zerlegung der Matrix T basiert. Aufgrund der Größe der Matrix und den daraus resultierenden numerischen Kosten ist dieser Ansatz auf kleine Fälle mit nicht sehr vielen Elementen begrenzt und ist somit eher von akademischem Interesse. In [48] stellt Parot einen Ansatz vor, der eher für die Stabilisierung der instabilen hochfrequenten Moden gedacht ist. Durch Einführung eines Reflexionsfaktors wird eine Dämpfung im System eingeführt. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 5.4 vorgestellt, um die hochfrequente Instabilität bei Abstrahlproblemen im Außenraum zu dämpfen. Allerdings zeigt sich dort, dass der Beginn der Instabilität zwar verzögert werden kann, aber paradoxerweise der Einfluss der Innenraummoden eher verstärkt wird. Bei der instabilen Pneumatischen Mode scheint die Nichtexistenz von Dämpfung das Problem zu sein. Deshalb wird die Wirkung des Dämpfungsansatzes hier noch einmal untersucht. Mit Einführung des Reflexionsfaktors $R = (1 + \epsilon)^{-\mu}$ in Gleichung (3.20) erhält man

$$-2\pi\hat{p}_i = \sum_{\mu=1}^{\min(i, \mu_{max})} (1 + \epsilon)^{-\mu} \mathbf{H}_\mu [\mu\hat{p}_{i-\mu+1} - (\mu - 1)\hat{p}_{i-\mu}] + \sum_k B_k(t_{ri}). \quad (7.1)$$

ϵ ist der Dämpfungskoeffizient, welcher die Reflexion des Schalldrucks an den Oberflächenelementen reduziert. Um eine Ausbreitungsdämpfung im Medium zu simulieren, wird der Dämpfungskoeffizient mit μ gewichtet. Für $\mu = 1$ ist die Ausbreitungsdämpfung am kleinsten, da hier nur unmittelbar benachbarte Elemente mit einem Abstand von $c\Delta t$ betrachtet werden und für $\mu = \mu_{max}$ ist

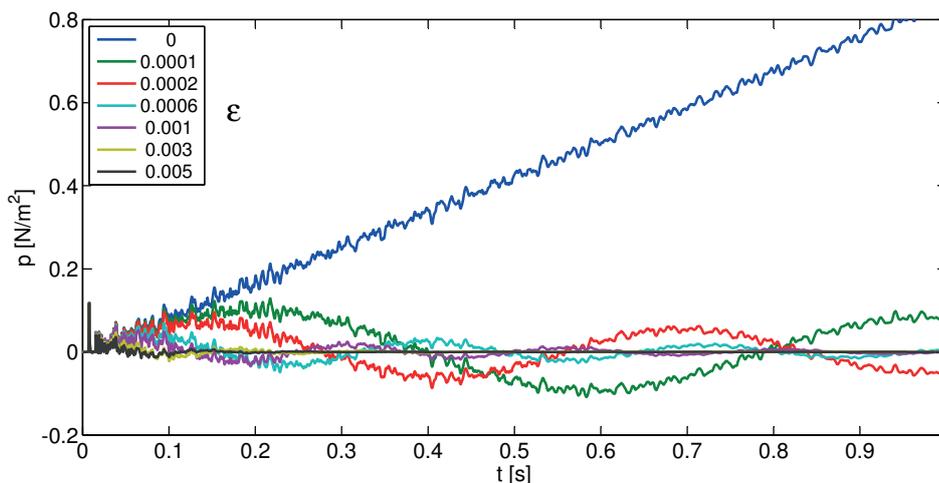


Abbildung 7.5: Schalldruckverlauf im Testraum für verschiedene Dämpfungskoeffizient $\epsilon = 0$ (keine Dämpfung, $R = 1$) bis 0.005

der Abstand am größten und somit auch die Ausbreitungsdämpfung.

In Abbildung 7.5 ist der Schalldruckverlauf im Testraum für verschiedene Dämpfungskoeffizient $\epsilon = 0$ (keine Dämpfung, $R = 1$) bis 0.005 dargestellt. Mit steigender Dämpfung wird auch die Pneumatische Mode gedämpft bzw. in der Frequenz verschoben, so dass man eigentlich nicht mehr von einer Pneumatischen Mode sprechen kann. In Abbildung 7.6 sind die Ergebnisse im Frequenzbereich dargestellt. Man sieht, dass die Frequenzverschiebung der Pneumatischen Mode nur wenige Herz beträgt und die Dämpfung, wie zu erwarten, mit steigendem Dämpfungskoeffizient steigt. Die Raummoden sind nun sehr deutlich zu erkennen. Allerdings werden auch diese durch den Dämpfungskoeffizient gedämpft. Ein sehr kleiner Dämpfungskoeffizient von $0,0001$ reicht aus, um die Raummoden sichtbar zu machen. Wenn die erste Raummode nicht zu tieffrequent ist, lässt sich hier schon das Spektrum der Raumimpulsantwort erkennen. Allerdings ist das Zeitsignal noch stark verfälscht und es ist somit z.B. nicht benutzbar um eine Faltung eines beliebigen Signals mit der berechneten Raumimpulsantwort durchzuführen. Die Einführung eines Dämpfungskoeffizienten ist somit keine Lösung für das Problem der Pneumatischen Mode. Weder lässt sich ein Problem mit einer Änderung des Ruheschalldrucks simulieren noch ergeben sich irgendwelche Vorteile gegenüber den schon beschriebenen Ansätzen.

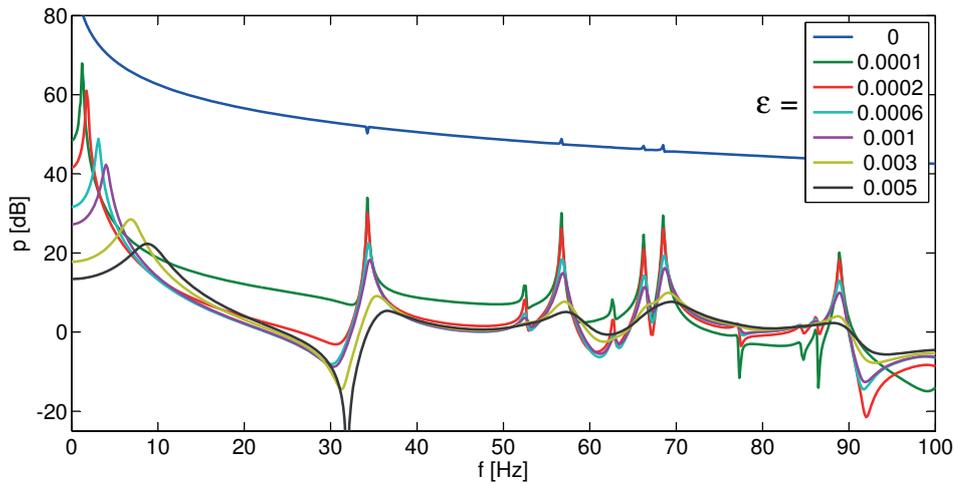


Abbildung 7.6: Schalldruck im Frequenzbereich für verschiedene Dämpfungskoeffizient $\epsilon = 0$ (keine Dämpfung, $R = 1$) bis 0.005

7.4 Ergebnisse

Die hier diskutierten Ergebnisse wurden mit dem beschriebenen Ansatz des (+/-) Impulses simuliert. In Abbildung 7.7 sind die Ergebnisse für den Testraum im Frequenzbereich dargestellt und werden mit der analytischen Lösung verglichen. Eine analytische Lösung für einen rechteckigen Raum mit schallharten Wänden lässt sich z.B. in [61] finden. Die Impulsantwort wurde für unterschiedliche Oberflächendiskretisierungen des Raumes berechnet. Es wurden Modelle mit 3652, 8280 und 16594 rechteckigen Elementen benutzt und der Zeitschritt wurde so gewählt, dass sich $\beta = 0.8$ ergibt. Alle Ergebnisse stimmen sehr gut mit der analytischen Lösung überein. Die tieffrequenten Raummoden können auch mit dem recht groben Modell mit 3652 Elementen gut berechnet werden. In Abbildung 7.9 sind die Ergebnisse bis 2000 Hz dargestellt. Erst ab ungefähr 700 Hz zeigt das 3652 Elemente Modell stärkere Abweichungen auf.

Der hauptsächliche Unterschied zwischen den Ergebnissen der einzelnen Modelle liegt in der Amplitude der Raummoden. Generell lässt sich beobachten, dass die Amplituden umso größer ist, je feiner das Oberflächenmodell ist. Dieser Unterschied tritt mit steigender Frequenz immer deutlicher zutage. Im analytischen Modell ohne Dämpfung sind die Amplituden in den Raummoden eigentlich unendlich groß. Da im TD-BEM Modell aber numerische Dämpfung vorhanden ist, wurden die Raumbegrenzungen im analytischen Modell

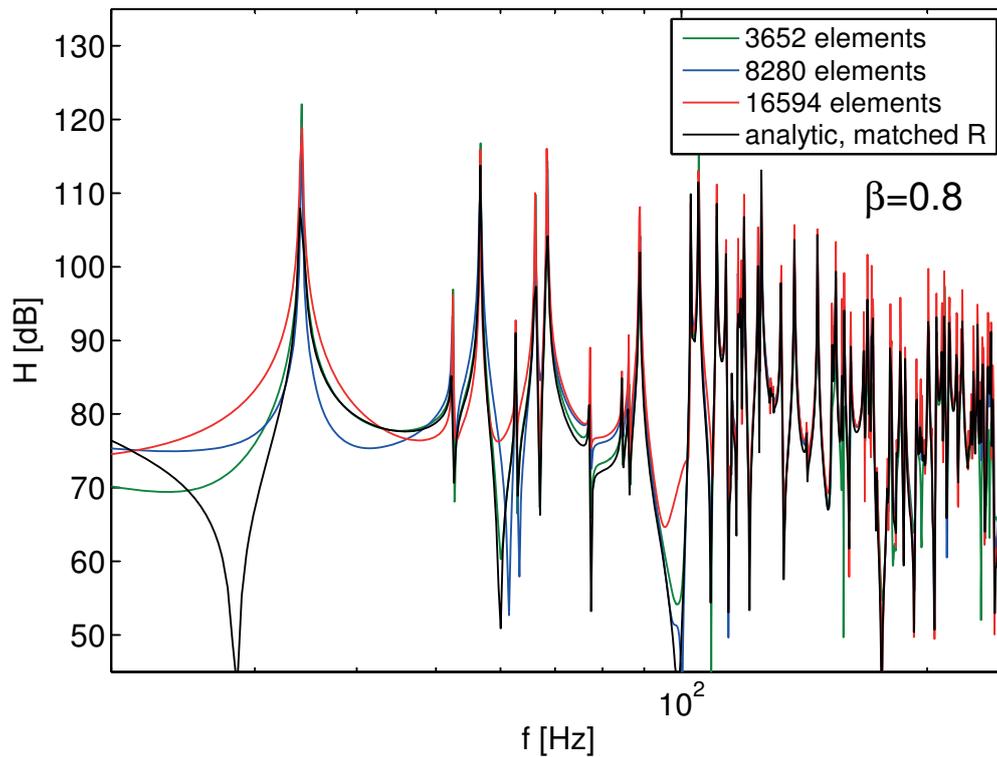


Abbildung 7.7: Übertragungsfunktion bis 300 Hz für Raummodelle mit 3652, 8280 und 16594 Elementen und $\beta = 0.8$ im Vergleich zur analytischen Lösung mit angepasstem Reflexionsfaktor

um einen Reflexionsfaktor erweitert, welcher frequenzabhängig ist und der Dämpfung des numerischen Modells angepasst wurde. In Abbildung 7.8 ist der Frequenzverlauf des Reflexionsfaktors dargestellt. Für einzelne Raummoden, in der Abbildung 7.8 durch einen Punkt markiert, wurde der Reflexionsfaktor der analytischen Lösung so gewählt, das die Amplitude mit den Ergebnissen des 8280 Elemente Modelles übereinstimmen. Der Verlauf zwischen den Punkten wurde interpoliert. Für tiefe Frequenzen ist der Reflexionsfaktor fast 1 und die numerische Dämpfung somit vernachlässigbar. Mit steigender Frequenz sinkt der Reflexionsfaktor stark, was gleichbedeutend ist mit zunehmender numerischer Dämpfung. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die Diskretisierungsfehler mit der Frequenz steigen. Interessant ist, dass die numerische Dämpfung nur zu einem Amplitudenfehler führt und nicht zu verfälschten oder instabilen Ergebnissen.

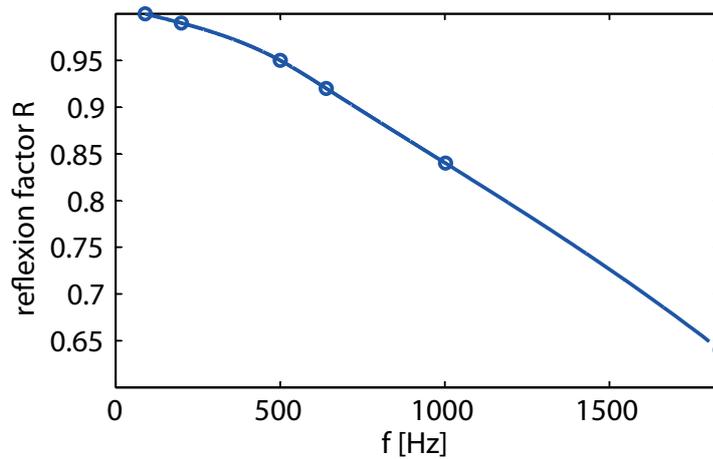


Abbildung 7.8: Reflexionsfaktor des analytischen Modelles angepasst an die numerische Dämpfung des 8280 Elemente Modelles

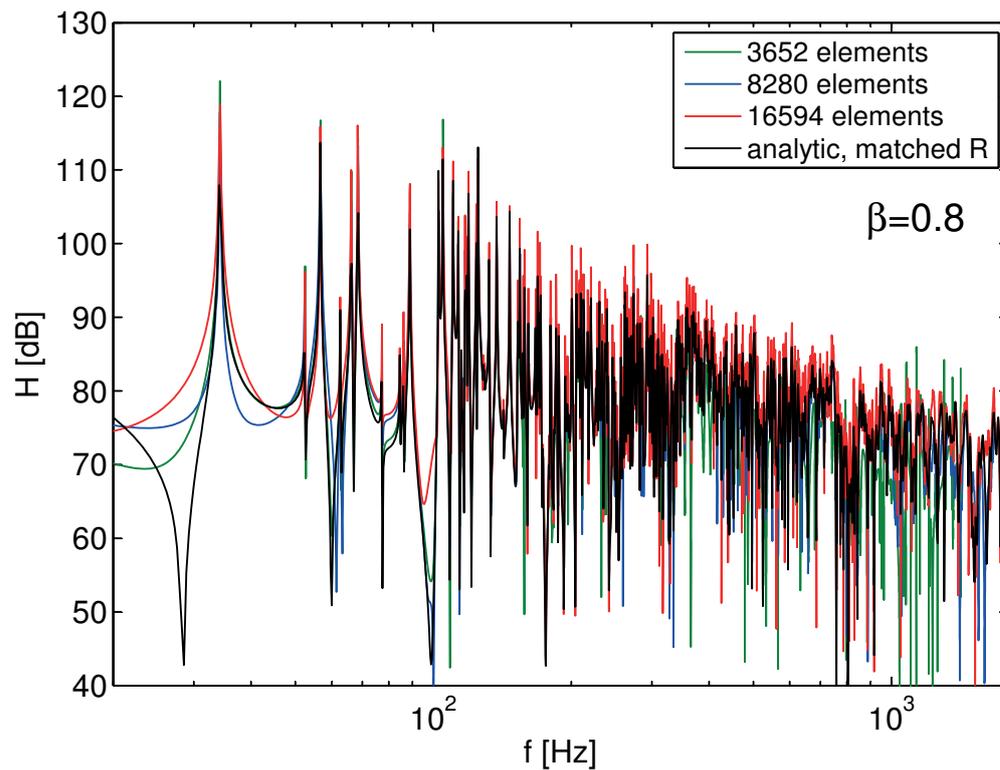


Abbildung 7.9: Übertragungsfunktion bis 1500 Hz für Raummodelle mit 3652, 8280 und 16594 Elementen und $\beta = 0.8$ im Vergleich zur analytischen Lösung mit angepasstem Reflexionsfaktor

Trotz des Problems der pneumatischen Mode kann die TD-BEM sehr gut dafür verwendet werden, die Raumimpulsantwort von Räumen zu berechnen, solange der Ruheschalldruck nicht verändert wird. Ein großer Nachteil ist die Beschränktheit auf schallharte Oberflächen. Somit ist die TD-BEM noch nicht einsetzbar für viele Problemstellungen in der Raumakustik. Denn hier geht es fast immer darum, wie die Akustik des Raumes durch Einsatz von Absorbern so verändert werden kann, dass Parameter wie Nachhallzeit und Sprachverständlichkeit gewünschte Werte einnehmen. Es gibt interessante Ansätze wie z.B. von Jang und Ih [62] welche Oberflächenimpedanzen ermöglichen. Auch dort wird noch mit dem Problem der Instabilität gekämpft.

Kapitel 8

Ergebnisse

Bei der Behandlung von Außenraumproblemen können die Innenraummoden der Struktur die Schallabstrahlung bzw. Streuung beeinflussen oder gar zu einem instabilen Verhalten der Methode führen. Dieses bekannte Problem wird in vielen Veröffentlichungen erwähnt und konnte auch in dieser Arbeit numerisch nachgewiesen werden. Die in dieser Arbeit verwendete TD-BEM beruht auf der Kollokationsmethode. Dieser Ansatz gilt als besonders instabil, hat aber den Vorteil, dass der Rechenaufwand gegenüber dem stabileren Galerkin-Verfahren wesentlich geringer ist.

Anhand einfacher analytisch lösbarer Testfälle wurde die Abhängigkeit der TD-BEM von der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung des Problems, sowie der Genauigkeit der Oberflächenintegrale untersucht. Während eine korrekte Evaluation der Randintegrale eine Grundvoraussetzung für die Stabilität der Methode ist, kann auch eine exakte analytische Integration eine instabile Konfiguration nicht stabilisieren. Eine ungenaue oder fehlerhafte Evaluation einiger Randintegrale führt hingegen sehr schnell zu instabilem Verhalten.

Den größten Einfluss auf die Stabilität des Verfahrens bei Außenraumproblemen hat die Zeitschrittgröße Δt bzw. die Abtastfrequenz $1/\Delta t$. Immer wenn die Abtastfrequenz mit einer Eigenmode des Innenraumes der Struktur übereinstimmt, kommt es zu instabilem Verhalten. Für diese Fälle kann eine Verbesserung der räumlichen Diskretisierung das Einsetzen der Instabilität verzögern, aber nicht verhindern. Für kurze Simulationszeiten lassen sich so brauchbare Ergebnisse erzielen.

Weiterhin sollte das Verhältnis von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung

gut aufeinander abgestimmt sein. Dies wird durch den Parameter $\beta = c\Delta t/l$ beschrieben. Der in einem Zeitschritt vom Schall zurückgelegte Weg ($c\Delta t$) sollte ungefähr der Kantenlänge l der Oberflächenelemente betragen ($\beta = 1$). Unterhalb von ungefähr $\beta = 0,7$ werden die Ergebnisse bei längeren Simulationszeiten generell instabil. Dies lässt sich dadurch erklären, dass jedes Element als Quelle mit konstanter Schnelle- und Schalldruckverteilung je Zeitschritt angenommen wird. Das Problem dabei ist nicht, dass die Kollokationspunkte nur einen kleinen Teil der Elementoberfläche je Zeitschritt wahrnehmen, sondern dass dieser Einfluss dann über ein Element verteilt wird, welches mehrere Zeitschritte groß ist. Mit nicht konstanten höherwertigen Basisfunktionen ließe sich der Grenzwert von $\beta = 0,7$ sicher verbessern. Dies würde jedoch die Integration erheblich aufwendiger machen. Für $\beta \gg 1$ lassen sich keine Instabilitätsprobleme außerhalb der Eigenmoden beobachten. Allerdings steigt der Rechenaufwand und auch der Rechenfehler wird nicht verbessert.

Das Problem der eingeschränkten Stabilität des Verfahrens ist, dass die Eigenmoden der Struktur in der Regel unbekannt sind. Damit wird die Wahl eines geeigneten Zeitschritts zu einem Glücksspiel. Auch wenn die Chancen nicht schlecht sind, stabile Ergebnisse zu erhalten, macht dieses Verhalten die TD-BEM für die Praxis unbrauchbar.

In dieser Arbeit konnte erstmals der erfolgreiche Einsatz der CHIEF-Methode (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) zur Unterdrückung der Innenraummoden im Zeitbereich gezeigt werden. Dabei wird das Gleichungssystem mit sogenannten CHIEF-Punkten, welche im Innenraum der Struktur liegen, erweitert, um die Innenraummoden zu unterdrücken. Bei der üblichen schrittweisen Lösung des Schalldruckverlaufes lässt sich mit der CHIEF-Methode jedoch keine Stabilisierung erzielen. Die Ursache hierfür liegt in der Aufteilung in zeitabhängige Einflusszonen. Nur die am dichtesten zur Strukturoberfläche liegenden CHIEF-Punkte haben deshalb unmittelbaren Einfluss auf die Systemmatrix.

Erst bei der Lösung des Schalldruckverlaufes in einem einzigen Schritt konnten alle instabilen Außenraumprobleme stabilisiert werden. Die Lösung in einem Schritt ist numerisch anspruchsvoll und kann nur mit Hilfe eines iterativen Gleichungslösers erfolgen. Mit zunehmender Anzahl von CHIEF-Punkten verringert sich der Einfluss der Innenraumresonanzen und die Ergebnisse bleiben

auch bei langen Simulationszeiten stabil.

Es gibt eine optimale Anzahl von CHIEF-Punkten, ab der eine Erhöhung der Anzahl zu keiner nennenswerten Verbesserungen der Ergebnisse führt. Auch die Anzahl benötigter Iterationen zur Lösung des Gleichungssystems hängt von der Anzahl der CHIEF-Punkte ab. Es lässt sich ein Optimum finden ab dem die Anzahl benötigter Iterationen konstant bleibt. Da die optimale Anzahl von CHIEF-Punkten von dem zu lösenden Problem und auch der Lage der CHIEF-Punkte abhängt, wird dazu geraten die Anzahl sicherheitshalber zu überschätzen. Aus einer Überschätzung ergeben sich keine Nachteile außer einem geringfügig größeren Rechenaufwand gegenüber dem Optimum. Bei einer Unterschätzung der Anzahl benötigter CHIEF-Punkte ergibt sich ein wesentlich größerer Rechenaufwand und im ungünstigsten Fall eine unzureichende Unterdrückung der Innenraummoden.

Der Vorteil der CHIEF-Methode gegenüber anderen Stabilisierungsansätzen ist, dass man die Methode optional anwenden kann. Im Falle instabiler Ergebnisse, kann man die Berechnung unter Verwendung der CHIEF-Methode erneut durchführen werden. Hierbei bleiben die \mathbf{H} und \mathbf{G} Matrizen des Gleichungssystems, die einen Großteil der Rechenzeit benötigen, unberührt. Alle anderen Berechnungen können weiterhin mit dem weniger aufwendigen Kollokationsverfahren berechnet werden. Dies dürfte unter Beachtung der beschriebenen Parameter-Richtlinien in den meisten Fällen zu guten Ergebnissen führen.

Auch bei Streuproblemen im Außenraum kann mit der CHIEF-Methode eine Instabilität der Simulation verhindert werden, allerdings konnte keine Verringerung des Einflusses der Innenraummoden auf den gestreuten Schall beobachtet werden. Dieser Fehler betrug im betrachteten Testfall, der Streuung an einer Kugel, jedoch maximal 1,5 dB innerhalb der Grenzen der Diskretisierung von $f < 1/6\Delta t$ und $f < c/6\lambda$.

Bei Innenraumproblemen tritt die Instabilität der pneumatischen Mode auf, welcher zu einem konstanten Anstieg des Schalldrucks führt. Die pneumatische Mode präsentiert den Ruhedruck des Raumes. Da dieser sich ohne äußere Einflüsse mit der Zeit nicht ändern sollte, ist diese Mode ungedämpft und der die Mode repräsentierende Eigenwert des Verfahrensoperators hat den Wert 1. Dies ist numerisch sehr kritisch, da durch Diskretisierungs- und Modellfehler

dieser Wert auch minimal größer ausfallen kann und somit das System instabil wird. Die numerischen Ergebnisse weisen auf einen Modellfehler hin, welcher aber nicht gefunden werden konnte.

Solange eine Änderung des Ruhedrucks im Innenraum nicht von Interesse ist, kann das Instabilitätsproblem sehr einfach vermieden werden, indem man eine Anregung der pneumatischen Mode verhindert. Dies kann z.B. durch den Einsatz eines Hochpassfilters geschehen.

Kapitel 9

Ausblick

Das in dieser Doktorarbeit entwickelte Randelementeverfahren im Zeitbereich wurde im Rahmen eines DEGA Projektes als Open-Source-Tool der Akustiker Gemeinschaft zur Verfügung gestellt. Diese MATLAB[®] Toolbox ist unter der GNU General Public License, eine Freie-Software-Lizenz, veröffentlicht und steht jedermann zur Verfügung. Damit sollen eine Nutzung für die universitäre Lehre und Forschung und ein verbesserter Austausch zwischen Anwendern ermöglicht werden. Für das Projekt wurde eine Homepage (<http://www.bemacoustics.com/>) eingerichtet, wo die aktuelle Version heruntergeladen werden kann. Im Rahmen des Projektes wurde mit Hilfe einer studentischen Hilfskraft u.a. eine grafische Oberfläche (GUI) erstellt, um die Anwendung der TD-BEM auch für unerfahrene Benutzer zu ermöglichen. Da unter der GNU General Public License der Quelltext öffentlich zugänglich ist und frei kopiert, modifiziert und verändert weiterverbreitet werden darf, ist eine Weiterentwicklung von Seiten anderer Nutzer möglich. Es gibt auch noch genug Entwicklungsbedarf, um die Toolbox leistungsfähiger und attraktiver zu machen.

Ein Hauptkriterium bei der Beurteilung einer numerischen Methode ist der Rechenaufwand und somit die benötigte Rechenzeit. Hier gibt es noch viele Möglichkeiten das zur Verfügung stehende MATLAB[®] Skript zu optimieren. Ein Geschwindigkeitsgewinn ist z.B. durch die Auslagerung von besonders rechenintensiven Funktionen in C-Code zu erreichen.

Da heutzutage Mehrkernprozessoren auch bei einfachen Desktop-Computern Standard sind, ist eine Parallelisierung der Berechnungen sinnvoll. Bei den re-

chenintensiven Integrationsroutinen ist dies besonders einfach, da die Oberflächenintegrale voneinander unabhängig sind. Hier bietet sich die Parallel Computing Toolbox von MATLAB[®] an. Schöner wäre es natürlich, dem Open-Source-Charakter des Projektes zu folgen und eine Lösung zu finden, die ohne eine teure Toolbox funktioniert.

Für raumakustische Anwendungen ist es notwendig ein Modell für Absorption an Oberflächen zu entwickeln und zu implementieren. Dies ist im Zeitbereich leider nicht ganz so einfach wie im Frequenzbereich. Die hierbei auftretende Faltung könnte zu neuen Stabilitätsproblemen führen und bietet genug Raum für weitere Forschungsarbeiten.

Anhang A

Schnittfälle bei der analytischen Integration

In Abschnitt 3.4.2 wurden die Gleichungen für die analytische Integration der dort beschriebenen Spezialfälle hergeleitet. Alle auftretenden Schnitte von Oberflächenelementen mit dem Integrationsgebiet, einer Kugelschale mit innerem Radius $(\mu - 1)c\Delta t$ und äußerem Radius $\mu c\Delta t$, können in diese Spezialfälle unterteilt werden. Bei der Berechnung wird der Kollokationspunkt M in die Ebene des Dreiecks projiziert und wird mit M' bezeichnet. Der Punkt M' kann entweder innerhalb oder außerhalb der Dreiecksfläche liegen.

Projektion des Kollokationspunktes außerhalb des Dreiecks

Für den Fall, dass die Projektion des Kollokationspunktes außerhalb des Dreiecks liegt, ergeben sich die in den Tabellen A.1, A.2 und A.3 dargestellten Berechnungsfälle. Für jeden Schnittfall ergeben sich 3 unterschiedliche Gleichungen, welche von dem in Spalte $\max(\angle)$ stehenden Winkel abhängen. Mit $\angle(AMB)$ ist z.B. der Winkel zwischen den Vektoren \overrightarrow{MA} und \overrightarrow{MB} gemeint und mit $\max(\angle)$ der maximale Winkel. Für jeden Schnittfall muss dann die entsprechende Zeile gewählt werden. Das Vorzeichen (Vz) jeder Zeile ist meistens noch von einer weiteren Bedingung abhängig, welche im Kopf der 3. Spalte steht. Für die in Tabelle A.1 beschriebene Integration über das ganze Dreieck ergibt sich die Vorzeichen-Bedingung zu $\xi \geq 1$, wobei ξ der Längenfaktor der Geradengleichung $\vec{g} = \vec{M} + \xi \cdot \overrightarrow{MC}$ ist.

In den Tabellen A.2 und A.3 gibt es zusätzlich noch eine 4. Spalte mit Flä-

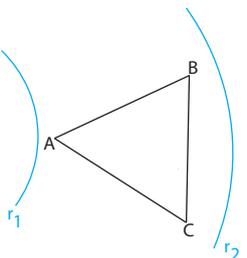
Schnittfall	$\max(\angle)$	Flächen mit Vz-Bedingung $\xi \geq 1$	
	$\angle(BMC)$	+	$\Delta(MBC)$ $-\Delta(MAB)$ $-\Delta(MAC)$
	$\angle(AMB)$	\pm	$\Delta(MBC)$ $-\Delta(MAB)$ $+\Delta(MAC)$
	$\angle(AMC)$	\pm	$\Delta(MBC)$ $+\Delta(MAB)$ $-\Delta(MAC)$

Tabelle A.1: Berechnungsformeln für ganzes Dreieck, mit dem Längenfaktor ξ , (Vz=Vorzeichen)

chen, welche von der Vorzeichen-Bedingung unabhängig sind.

An einem Beispiel soll kurz erläutert werden, wie die Tabellen zu lesen sind. Angenommen es tritt der Fall auf bei der nur der Punkt A im Integrationsgebiet liegt (siehe Abbildung 3.6). Dies entspricht dem 2. Fall in Tabelle A.2. Wenn der Winkel $\angle(AMB)$ größer ist als die Winkel $\angle(BMC)$ und $\angle(AMC)$ und es gilt $\angle(AMS_1) > \angle(AMS_2)$, dann berechnet sich die Schnittfläche zu $-(\Delta(MAS_1) - \Delta(MAS_2)) + \sphericalangle(S_1S_2, r_2)$. Dabei beschreibt $\sphericalangle(S_1S_2, r_2)$ die Kreisbogenfläche mit dem Winkel $\angle(S_1MS_2)$ und dem Radius r_2 .

Projektion des Kollokationspunktes innerhalb des Dreiecks

Wenn die Projektion des Kollokationspunktes innerhalb des Dreiecks liegt, muss das Dreieck $\Delta(ABC)$ in die Dreiecke $\Delta(M'CB)$, $\Delta(M'BA)$ und $\Delta(M'AC)$ unterteilt werden. Diese Dreiecke werden dann einzeln behandelt. Die möglichen Schnittmöglichkeiten sind in Tabelle A.4 dargestellt.

Singuläre Fälle bei denen der Kollokationspunkt gleich dem Elementmittelpunkt ist ($M = M'$), werden genauso behandelt. Hier ist nur der Abstand $d = 0$.

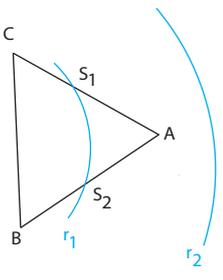
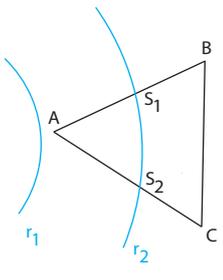
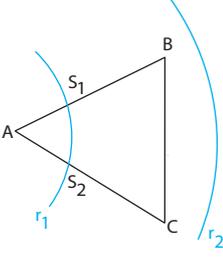
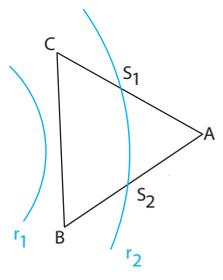
Schnittfall	$\max(\angle)$	Flächen mit Vz-Bedingung $\angle(AMS_1) \gtrless \angle(AMS_2)$		unabhängige Flächen
	$\angle(BMC)$	+	$\Delta(MAS_1)$ $+\Delta(MAS_2)$	$-\sphericalangle(S_1S_2, r_1)$
	$\angle(AMB)$	\pm	$\Delta(MAS_1)$ $-\Delta(MAS_2)$	$-\sphericalangle(S_1S_2, r_1)$
	$\angle(AMC)$	\pm	$\Delta(MAS_1)$ $-\Delta(MAS_2)$	$-\sphericalangle(S_1S_2, r_1)$
	$\angle(BMC)$	-	$\Delta(MAS_1)$ $+\Delta(MAS_2)$	$+\sphericalangle(S_1S_2, r_2)$
	$\angle(AMB)$	\mp	$\Delta(MAS_1)$ $-\Delta(MAS_2)$	$+\sphericalangle(S_1S_2, r_2)$
	$\angle(AMC)$	\mp	$\Delta(MAS_1)$ $-\Delta(MAS_2)$	$+\sphericalangle(S_1S_2, r_2)$
	$\angle(BMC)$	+	$\Delta(MBC)$ $-\Delta(MBS_1)$ $-\Delta(MCS_2)$	$-\sphericalangle(S_1S_2, r_1)$
	$\angle(AMB)$	\pm	$\Delta(MBC)$ $-\Delta(MBS_1)$ $+\Delta(MCS_2)$	$-\sphericalangle(S_1S_2, r_1)$
	$\angle(AMC)$	\mp	$\Delta(MBC)$ $+\Delta(MBS_1)$ $-\Delta(MCS_2)$	$-\sphericalangle(S_1S_2, r_1)$
	$\angle(BMC)$	-	$\Delta(MBC)$ $-\Delta(MBS_1)$ $-\Delta(MCS_2)$	$+\sphericalangle(S_1S_2, r_2)$
	$\angle(AMB)$	\mp	$\Delta(MBC)$ $-\Delta(MBS_1)$ $+\Delta(MCS_2)$	$+\sphericalangle(S_1S_2, r_2)$
	$\angle(AMC)$	\pm	$\Delta(MBC)$ $+\Delta(MBS_1)$ $-\Delta(MCS_2)$	$+\sphericalangle(S_1S_2, r_2)$

Tabelle A.2: Berechnungsformeln für Schnitte mit einem Kreisbogen, (Vz=Vorzeichen)

ANHANG A. SCHNITTFÄLLE BEI DER ANALYTISCHEN INTEGRATION

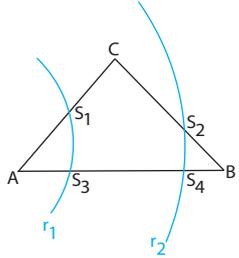
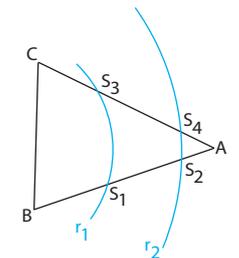
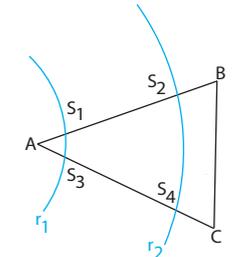
Schnittfall	$\max(\angle)$	Flächen mit Vz-Bedingung $\angle(AMS_1) \gtrless \angle(AMS_3)$	unabhängige Flächen	
	$\angle(BMC)$	-	$\Delta(MBS_1)$ $-\Delta(MBS_2)$ $+\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$
	$\angle(AMB)$	-	$\Delta(MBS_1)$ $-\Delta(MBS_2)$ $-\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$
	$\angle(AMC)$	\mp	$\Delta(MBS_1)$ $+\Delta(MBS_2)$ $-\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$
	$\angle(BMC)$	+	$\Delta(MS_1S_2)$ $+\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$
	$\angle(AMB)$	\pm	$\Delta(MS_1S_2)$ $-\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$
	$\angle(AMC)$	\pm	$\Delta(MS_1S_2)$ $-\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$
	$\angle(BMC)$	-	$\Delta(MS_1S_2)$ $+\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$
	$\angle(AMB)$	\mp	$\Delta(MS_1S_2)$ $-\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$
	$\angle(AMC)$	\mp	$\Delta(MS_1S_2)$ $-\Delta(MS_3S_4)$	$-\triangleleft(S_1S_3, r_1)$ $+\triangleleft(S_2S_4, r_2)$

Tabelle A.3: Berechnungsformeln für Schnitte mit 2 Kreisbögen, (Vz=Vorzeichen)

Schnittfall	Berechnungsformel
	$\sphericalangle(AB, r_2) - \sphericalangle(AB, r_1)$
	$\Delta(MAB) - \sphericalangle(AS_1, r_1) - \sphericalangle(BS_2, r_1) - \Delta(MS_1S_2)$
	$\Delta(MAB) \Rightarrow \Delta(MAS_1) - \sphericalangle(AS_1, r_1)$ $\Delta(MBA) \Rightarrow \Delta(MBS_1) - \sphericalangle(BS_1, r_1)$
	$\Delta(MS_1S_2) - \sphericalangle(BS_1, r_1) + \sphericalangle(BS_2, r_1)$
	$\Delta(MBA) \Rightarrow \Delta(MAS_1) + \sphericalangle(BS_1, r_2)$ $\Delta(MAB) \Rightarrow \Delta(MBS_1) + \sphericalangle(AS_1, r_2)$
	$\sphericalangle(AB, r_2) - \sphericalangle(AB, r_1)$
	$\sphericalangle(AS_1, r_2) + \sphericalangle(BS_2, r_2) + \Delta(MS_1S_2) - \sphericalangle(AB, r_1)$

Tabelle A.4: Berechnungsformeln wenn die Projektion des Kollokationspunkt innerhalb des Elementes liegt

Symbolverzeichnis

Nomenklatur

Matrizen sind durch fette, große Buchstaben gekennzeichnet und Vektoren werden regulär geschrieben mit einem Pfeil.

Griechische Buchstaben

- α Kopplungskoeffizient der Dual Surface Methode
- β dimensionslose Beziehung zwischen Orts- und Zeitdiskretisierung
- Γ Rand der Struktur
- κ Spektralradius
- λ Wellenlänge
- λ_e Eigenwert einer Matrix
- μ Zähler der abstandsabhängigen Integrationszonen
- ξ Längenfaktor der Geradengleichung
- π Pi
- ρ Dichte
- σ Menge der Eigenwerte einer Matrix
- \vec{v} Schnelle
- \vec{v}_n Schnelle normal zum Rand
- ϕ akustisches Potential
- φ Elementarlösung der Helmholtz-Gleichung
- Ψ konstante Ansatzfunktion
- ω Kreisfrequenz
- Ω Gebiet
- ξ lokale Koordinaten der Koordinatentransformation

Lateinische Buchstaben

B_k	Quellterm
c	Schallgeschwindigkeit
d	Abstand des Kollokationspunktes zur Ebene des Elementes
E	Identitätsmatrix
f	Frequenz
F	Kraft
G	BEM Matrix
H	BEM Matrix
i	Zeitschrittzähler
j	imaginäre Einheit
k	Wellenzahl
l	mittlere Elementgröße
\vec{n}	Normalenvektor
N_{elem}	Anzahl der Oberflächenelemente
N_t	Anzahl der Zeitschritte
p	Schalldruck
q	Schallfluss
r	Abstand zwischen Quell- und Beobachtungspunkt
r_{max}	größtmöglicher Abstand zwischen Quell- und Beobachtungspunkt
t	Zeit
T	Matrix des Verfahrensoperators
Δt	Zeitschritt
V	Volumen
\vec{x}	Ortsvektor
Z	Impedanz

Symbole

$\ \cdot\ $	Norm einer Matrix bzw. Vektors
$\triangle(ABC)$	Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C
$\sphericalangle(AMB)$	der Winkel zwischen den Vektoren \overrightarrow{MA} und \overrightarrow{MB}
$\sphericalangle(AB, r)$	Kreisbogen mit dem Winkel $\sphericalangle(AMB)$ und dem Radius r

Indizes

<i>i</i>	Zeitschrittzähler
<i>res</i>	Resonanzfall
<i>ret</i>	Größe ist in Bezug zur retardierten Zeit
μ	Zähler der abstandsabhängigen Integrationszonen
<i>max</i>	Maximum von

Abbildungsverzeichnis

2.1	Punkt \vec{x}_0 auf dem Rand	20
2.2	Außenraum um eine geschlossene Oberfläche: die gestrichelte Linie symbolisiert Berandung im Unendlichen.	22
3.1	Bei jedem Zeitschritt muss über die Schnittfläche des Randes mit einer Kugelschale mit Innenradius $(i - m)c\Delta t$ und Außenradius $(i - m + 1)c\Delta t$ integriert werden	31
3.2	Unterteilung der Kugeloberfläche in unterschiedliche abstandsabhängige Integrationszonen μ für einen Kollokationspunkt und die daraus resultierenden schwach besetzten Matrizen	34
3.3	Koordinatentransformation eines ebenen viereckigen Elementes von globalen zu lokalen Koordinaten des Referenzelementes	39
3.4	Geometrische Anordnung des ersten Spezialfalls zur analytischen Lösungen der Oberflächenintegrale	43
3.5	Geometrische Anordnung des zweiten Spezialfalls zur analytischen Lösungen der Oberflächenintegrale	43
3.6	Beispiel für einen Schnitt eines Dreiecks mit der μ -ten und $(\mu - 1)$ -ten Schale	44
4.1	Kondition der Matrix $(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_1)$ zur schrittweisen Lösung des Gleichungssystems	51
4.2	Kondition der Matrix $(2\pi\mathbf{E} + \mathbf{H}_g)$ in Abhängigkeit von β für die Anzahl der Zeitschritte $N_t = 50, 100, 200$, Innenraumresonanzen werden durch Skalenstriche der β -Achse und senkrechte gepunktete Linien gekennzeichnet	52

5.1	Einfluss der räumlichen Diskretisierung auf die Monopol-Schallabstrahlung einer Kugel bei konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0.15ms$ und abgestrahlten Impuls mit Schnelleamplitude 0,007 m/s. (quad = quadrilateral = viereckig)	56
5.2	Einfluss der räumlichen Diskretisierung auf die Dipol-Schallabstrahlung einer Kugel bei konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0.15ms$ und abgestrahlten Impuls mit Schnelleamplitude 0,007 m/s. (quad = quadrilateral = viereckig)	57
5.3	Schalldruck im Kugelmittelpunkt ($r=0$) und in 5m Entfernung bei 4 verschiedenen Oberflächendiskretisierungen (384, 1536, 3750 und 6144 viereckige Elemente) und konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0.15ms$	58
5.4	Schallabstrahlung (Monopol) einer Kugel mit 4 verschiedenen Oberflächendiskretisierungen (384, 1536, 2400 und 15000 viereckigen (quad) Elementen) und je Modell 4 Simulationen mit $\beta = [0,5 \quad 0,8 \quad 1 \quad 1,5]$	60
5.5	Spektrum einer Kugel bestehend aus 384 rechteckigen Elementen und $\beta = 1,9$ ($\Delta t = 1,1ms$) im Einheitskreis	66
5.6	Spektrum einer Kugel bestehend aus 384 rechteckigen Elementen und $\beta = 0,66$ ($\Delta t = 0,38ms$) im Einheitskreis	67
5.7	Spektralradius $ \lambda_e _{max}$ des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von β für Kugelmodell mit 384 Elementen. Eigenwerte wurden mit der MATLAB [®] Funktion <i>eig</i> (vollständige Matrix) bzw. <i>jdqr</i> (Matrix im sparse-Format) berechnet. Schwarze bzw. rote Punkte kennzeichnen stabiles bzw. instabiles Verhalten bei einem Testfall mit 7000 Zeitschritten.	68
5.8	Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit $\beta = 1,27$ über 330 Zeitschritte	69
5.9	Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit $\beta = 1,27$ über 5000 Zeitschritte	69
5.10	Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit $\beta = 0,59$ über 330 Zeitschritte	70
5.11	Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit $\beta = 0,59$ über 7000 Zeitschritte mit Instabilität ab 6600	70

5.12 Spektralradius des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von der Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ für Kugelmodell mit 384 Elementen. An gestrichelten senkrechten Linien treten Innenraummoden der Kugel auf.	72
5.13 Spektralradius des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von β für Kugelmodelle mit 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen. Eigenwerte wurden mit dem <i>JDQR</i> -Algorithmus berechnet.	72
5.14 Spektralradius des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von der Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ für Kugelmodelle mit 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen. An gestrichelten senkrechten Linien treten Innenraummoden der Kugel auf.	73
5.15 Spektralradius des Verfahrensoperators in Abhängigkeit von der Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ für Kugelmodelle mit 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen. An gestrichelten senkrechten Linien treten Innenraummoden der Kugel auf.	75
5.16 Zeitverlauf des Schalldrucks auf der Kugeloberfläche für Kugelmodelle mit 384, 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen bei instabiler Abtastfrequenz $f_s = 2890Hz$ nach Abstrahlung eines Impulses.	76
5.17 Spektrum des Schalldrucks auf der Kugeloberfläche für Kugelmodelle mit 2400, 3750 und 5400 quad-Elementen bei instabiler Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t = 2890Hz$ nach Abstrahlung eines Impulses. An gestrichelten senkrechten Linien treten Innenraummoden der Kugel auf.	76
5.18 Absoluter Fehler des abgestrahlten Schalldrucks $ \Delta p $ in Bezug zur Helmholtz-Zahl $He = l/\lambda$ für $\beta = 1, 5; 1; 0, 8; 0, 5$	78
5.19 Änderung des absoluter Fehler des abgestrahlten Schalldrucks $\Delta p_e = \Delta p_{4096} - \Delta p_{1024} $ in Bezug zur Helmholtz-Zahl $He = l/\lambda$ bei einer Zunahme der Zeitschritte von 1024 auf 4096.	79
5.20 Einfluss der Integrationsgenauigkeit auf den Schalldruck im Immissionspunkt, Simulation mit 10, 20, 40 und 80 Gaußpunkten je Dimension ($\beta = 0, 8$)	81
5.21 Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 1, 266$ und 7000 Zeitschritte	83

5.22	Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 1,266$ und 150 Zeitschritte . . .	84
5.23	Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 1,266$	85
5.24	Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 0,7$ und 7000 Zeitschritte . . .	86
5.25	Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 0,7$ und 350 Zeitschritte	87
5.26	Schalldruck im Immissionspunkt für verschieden Dämpfungskoeffizienten ϵ , Simulation mit $\beta = 0,7$	88
5.27	Zufällig verteilte CHIEF-Punkte (rot) im Inneren einer Kugel und Kollokationspunkte (blau) auf der Kugeloberfläche	89
5.28	Nur die CHIEF-Punkte, die in einem Abstand von $c\Delta t$ zum Rand liegen, haben unmittelbaren Einfluss auf die Ergebnisse . .	91
5.29	Schalldruck über 350 Zeitschritte im Immissionspunkt berechnet mit und ohne CHIEF-Methode für Kugel mit 384 quad Elementen und $\beta = 1,266$	94
5.30	Schalldruck über 10000 Zeitschritte im Immissionspunkt berechnet mit und ohne CHIEF-Methode für Kugel mit 384 quad Elementen und $\beta = 1,266$	95
5.31	(a): Einfluss der Anzahl der CHIEF-Punkte auf Abweichung der Schallabstrahlung einer Kugel (384 quad Elemente) vom analytischen Fall ($\Delta t=0.346$ ms $f_s = 2890Hz$); Rechenzeit (b) sowie Anzahl benötigter Iterationen (c) des LSQR-Lösungsalgorithmus in Abhängigkeit von der Anzahl von CHIEF-Punkten	96
5.32	(a): Einfluss der Anzahl der CHIEF-Punkte auf Abweichung der Schallabstrahlung einer Kugel (1536 quad Elementen) vom analytischen Fall ($\Delta t=0.346$ ms $f_s = 2890Hz$); Rechenzeit (b) sowie Anzahl benötigter Iterationen (c) des LSQR-Lösungsalgorithmus in Abhängigkeit von der Anzahl von CHIEF-Punkten	97
5.33	Einfluss der Toleranz des LSQR-Algorithmus auf den Fehler der Abstrahlung (Monopol) einer Kugel mit 384 quad Elementen, ($\Delta t=0.346ms$)	99

5.34	Abweichung Δp des berechneten vom analytischen Schalldruck im Immissionspunkt in Abhängigkeit von β ohne CHIEF-Methode berechnet. (Kugel mit 384 quad Elementen)	102
5.35	Abweichung Δp des berechneten vom analytischen Schalldruck im Immissionspunkt in Abhängigkeit von β mit CHIEF-Methode berechnet. (Kugel mit 384 quad Elementen)	103
5.36	Einfluss des Kopplungsfaktors α auf die Ergebnisse der Dual-Surface-Methode auf die Abstrahlung (Monopol) einer Kugel mit 384 quad Elementen, ($\Delta t=0.305\text{ms}$)	105
5.37	a) Flamme von zylindrischer Kirchhoff-Fläche umgeben, b) beispielhafte Schnelleverteilung auf der Kirchhoff-Fläche	108
5.38	Schalleistungsdichte HD/H3-Flamme gemessen und simuliert mit der TD-BEM und FD-BEM	108
5.39	Oberflächenmodell des Dodekaederlautsprechers bestehend aus 3680 Dreiecken. Dunkle Elemente stellen die Membranflächen der Einzellautsprecher dar.	110
5.40	Foto des Messaufbaus zur Messung der Membranschnelle des Dodekaederlautsprechers im reflexionsarmen Raum	111
5.41	Simulierte und gemessene Richtwirkung des Dodekaederlautsprechers für 1000 Hz, 2000 Hz, 4000 Hz und 6300 Hz	112
5.42	Simulierte und gemessene Richtwirkung des Dodekaederlautsprechers bis 6000 Hz normiert auf den maximalen Schalldruck .	112
5.43	Simulierter und gemessener Schalldruckverlauf bei Abstrahlung eines Sweep-Signals von 300-1000 Hz (Simulationszeit 67500 Zeitschritte)	113
5.44	Simulierter und gemessener Schalldruckpegel bei Abstrahlung eines Sweep-Signals von 300-1000 Hz . Vergrößerte Ausschnitt bei 946 Hz zeigt Irregularität, welche durch die CHIEF Methode beseitigt wird.	113
6.1	Streuung von einer Monopolquelle an einer 3m entfernten Kugel und Lage der berechneten Immissionspunkte.	117
6.2	Polardiagramm des berechneten reflektierten Schalldrucks bei 100 Hz, 200 Hz, 300Hz und 400Hz im Vergleich zur analytischen Lösung	118

6.3	Absolute Abweichung $ \Delta p $ des berechneten vom analytischen Schalldruck im Immissionspunkt bei $\theta = 0^\circ$ in Abhängigkeit von β . Rote Linie stellt die Grenze der zeitlichen Diskretisierung von $f_{max} = 1/6\Delta t$ dar.	119
6.4	Langzeitstabilität bei 7000 Zeitschritten	120
7.1	Zeitverlauf des Schalldrucks im Raum für verschieden Modelle (Anzahl der Oberflächenelemente 2030, 3652, 8280, 16594 oder 22664 Elemente) und je Modell 4 Simulationen mit $\beta = [0,5 \ 0,8 \ 1 \ 1,5]$. Alle Simulationen mit $\beta = 0,5$ zeigen eine Instabilität mit hochfrequent oszillierender und exponentiell ansteigender Amplitude. Alle anderen Simulationen zeigen einen linearen Anstieg des Ruheschalldrucks.	123
7.2	Spektrum des Rechteckraums im Einheitskreis mit einer Oberflächendiskretisierung von 2030 rechteckigen Elementen und $\beta = 1$	124
7.3	Unterschied im Zeitverlauf des Schalldrucks im Raum einmal gefiltert mit einem Butterworth Hochpassfilter und einmal korrigiert mit einem linearen Korrekturfaktor.	126
7.4	oben: Zeitverlauf des Schalldrucks im Raum für unterschiedliche Impulse, unten: Frequenzspektrum des jeweiligen, + Impuls: Impuls mit rein positiver Amplitude, +/- Impuls: gleich große positive sowie negative Amplitude des Impulses, +1/-0.5 Impulse: positive Amplitude gefolgt von halb so starker negativer Amplitude	127
7.5	Schalldruckverlauf im Testraum für verschiedene Dämpfungskoeffizient $\epsilon = 0$ (keine Dämpfung, $R = 1$) bis 0.005	129
7.6	Schalldruck im Frequenzbereich für verschiedene Dämpfungskoeffizient $\epsilon = 0$ (keine Dämpfung, $R = 1$) bis 0.005	130
7.7	Übertragungsfunktion bis 300 Hz für Raummodelle mit 3652, 8280 und 16594 Elementen und $\beta = 0.8$ im Vergleich zur analytischen Lösung mit angepasstem Reflexionsfaktor	131
7.8	Reflexionsfaktor des analytischen Modelles angepasst an die numerische Dämpfung des 8280 Elemente Modelles	132

7.9 Übertragungsfunktion bis 1500 Hz für Raummodelle mit 3652,
8280 und 16594 Elementen und $\beta = 0.8$ im Vergleich zur analy-
tischen Lösung mit angepasstem Reflexionsfaktor 132

Literaturverzeichnis

- [1] SCHENCK, Harry A.: Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems. In: *JASA* 44 (1968), Nr. 1, S. 41–58
- [2] BURTON, A. J. ; MILLER, G. F.: The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary-Value Problems. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 323 (1971), Nr. 1553, S. 201–210
- [3] ERGIN, A. A. ; SHANKER, Balasubramaniam ; MICHELSEN, Eric: Analysis of transient wave scattering from rigid bodies using a Burton–Miller approach. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 106 (1999), Nr. 5, 2396-2404. <http://dx.doi.org/10.1121/1.428076>. – DOI 10.1121/1.428076
- [4] CHAPPELL, D. J. ; HARRIS, P. J. ; HENWOOD, D. ; CHAKRABARTI, R.: A stable boundary element method for modeling transient acoustic radiation. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 120 (2006), Nr. 1, 74-80. <http://dx.doi.org/10.1121/1.2202909>. – DOI 10.1121/1.2202909
- [5] HARGREAVES, Jonathan A. ; COX, Trevor J.: A transient boundary element method model of Schroeder diffuser scattering using well mouth impedance. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 124 (2008), Nr. 5, 2942-2951. <http://dx.doi.org/10.1121/1.2982420>. – DOI 10.1121/1.2982420
- [6] KELLER, Joseph B. ; BLANK, Albert: Diffraction and reflection of pulses by wedges and corners. In: *Communications on Pure and Applied*

- Mathematics* 4 (1951), Nr. 1, 75–94. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160040109>. – ISSN 1097–0312
- [7] MINDLIN, R. D. ; BLEICH, H. H.: Response of an elastic cylindrical shell to a transverse, step shock wave. In: *Journal of Applied Mechanics* 20 (1953), S. 189–195
- [8] BARAKAT, Richard G.: Transient Diffraction of Scalar Waves by a Fixed Sphere. 32 (1960), Nr. 1, 61–66. <http://dx.doi.org/10.1121/1.1907876>. – ISSN 00014966
- [9] FRIEDMANN, M. ; SHAW, R.: Diffraction of pulses by cylindrical Obstacles of Arbitrary cross Section. In: *J. Appl. Mech.* 29 (1962), S. 40–46
- [10] CRUSE, T.A. ; RIZZO, F.J.: A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. In: *J. Math. Analysis and Applic.* 22 (1968), S. 244–259
- [11] MITZNER, K. M.: Numerical Solution for Transient Scattering from a Hard Surface of Arbitrary Shape - Retarded Potential Technique. 42 (1967), Nr. 2, 391–397. <http://dx.doi.org/10.1121/1.1910590>. – ISSN 00014966
- [12] DOHNER, Jeffrey L. ; SHOURESHI, Rahmatallah ; BERNHARD, Robert J.: Transient analysis of three-dimensional wave propagation using the boundary element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), Nr. 3, 621–634. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620240311>. – ISSN 1097–0207
- [13] MANSUR, W. J.: *A Time-Stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary Element Method*, University of Southampton, Diss., 1983
- [14] MEISE, Thomas: *Randelementeverfahren zur Berechnung der Ausbreitung skalarer Wellen im 3D- Zeit- und Frequenzbereich*, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1990

- [15] JÄGER, Monika: *Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen*, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Diss., 1994
- [16] FIGUEIREDO, A.M. ; SIPCIC, S.R. ; MORINO, L.: Kirchhoff integral equation - Instability issues introduced by the spacial discretization. In: *DGLR/AIAA Aeroacoustics Conference, 14th, Aachen, Germany* (11-14 May 1992), S. 39–45
- [17] T. HA DUONG, A. B. ; NEDELEC, J. C.: Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique (I). In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 8 (1986), Nr. 1, 405–435. <http://dx.doi.org/10.1002/mma.1670080127>. – ISSN 1099–1476
- [18] T. HA DUONG, A. B. ; NEDELEC, J. C.: Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 8 (1986), Nr. 1, 598–608. <http://dx.doi.org/10.1002/mma.1670080139>. – ISSN 1099–1476
- [19] HA-DUONG, Tuong: On Retarded Potential Boundary Integral Equations and their Discretisation. Version:2003. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-55483-4_8. In: AINSWORTH, Mark (Hrsg.) ; DAVIES, Penny (Hrsg.) ; DUNCAN, Dugald (Hrsg.) ; RYNNE, Bryan (Hrsg.) ; MARTIN, Paul (Hrsg.): *Topics in Computational Wave Propagation* Bd. 31. Springer Berlin Heidelberg, 2003. – ISBN 978–3–642–55483–4, 301-336
- [20] *Time Domain BEM vibro-acoustic solver SONATE*. <http://imacs.xtec.polytechnique.fr/>
- [21] OSTERMANN, Elke: *Numerical Methods for Space-Time Variational Formulations of Retarded Potential Boundary Integral Equations*, Institut für Angewandte Mathematik, Leibniz Universität Hannover, Diss., 2010
- [22] LUBICH, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus. I. In: *Numerische Mathematik* 52 (1988), 129-145. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01398686>

- [23] LUBICH, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus. II. In: *Numerische Mathematik* 52 (1988), 413-425. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01462237>
- [24] HACKBUSCH, W. ; KRESS, W. ; SAUTER, S. A.: Sparse convolution quadrature for time domain boundary integral formulations of the wave equation. In: *IMA Journal of Numerical Analysis* 29 (2009), Nr. 1, 158-179. <http://imajna.oxfordjournals.org/content/29/1/158.abstract>
- [25] BANJAI, Lehel ; SCHANZ, Martin: Wave Propagation Problems Treated with Convolution Quadrature and BEM. Version:2012. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25670-7_5. In: *Fast Boundary Element Methods in Engineering and Industrial Applications* Bd. 63. Springer Berlin Heidelberg, 2012. – ISBN 978-3-642-25669-1, 145-184
- [26] EHRENFRIED, Klaus: *Strömungsakustik*. Mensch und Buch Verlag, 2004
- [27] DAVIS, T. A.: *Algorithm 9xx, FACTORIZE: an object-oriented linear system solver for MATLAB®*. <http://www.cise.ufl.edu/~davis/techreports/factorize.pdf>. Version:2011
- [28] SONNEVELD: CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. In: *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 10 (1989), S. 36–52
- [29] SAAD, Youcef ; SCHULTZ, Martin H.: GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. In: *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7 (1986), Juli, Nr. 3, 856-869. <http://dx.doi.org/10.1137/0907058>. – DOI 10.1137/0907058. – ISSN 0196–5204
- [30] PAIGE, Christopher C. ; SAUNDERS, Michael A.: LSQR: An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 8 (1982), Nr. 1, 43-71. <http://dx.doi.org/10.1145/355984.355989>. – DOI 10.1145/355984.355989. – ISSN 0098–3500
- [31] HACKBUSCH, Wolfgang: *Iterative Lösung großer Gleichungssysteme*. 2004 www.mis.mpg.de/scicomp/Fulltext/ggl.ps
- [32] ARNOLD, A. ; EHRHARDT ; RJASANOW, M.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Universität Münster & Universität Saarbrücken, 2005.

- 147–150 S. <http://www-anna.math.uni-wuppertal.de/~ehrhardt/NumPar/pdf/PDE-Script.pdf>
- [33] ATLE, A.: Numerical approximations of time domain boundary integral equation for wave propagation. (2003). http://www.csc.kth.se/utbildning/forskar/avhandlingar/doktor/2005_2006/AtleAndreas.pdf
- [34] BEHN, Maximilian: *Zur analytischen Berechnung von Oberflächenintegralen ebener Elemente der TD-BEM-Methode*, Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik, Technische Universität Berlin, Diss., 2013
- [35] RYNNE, B. P.: Instabilities in Time Marching Methods for Scattering Problems. In: *Electromagnetics* 6 (1986), S. 129–144
- [36] HARRIS, P.J. ; WANG, H. ; CHAKRABARTI, R. ; HENWOOD, D.B.: Stability analysis of a collocation method for solving the retarded potential integral equation. In: *Journal of Computational Acoustics* 13 (2005), Nr. 2, S. 287–299. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218396X05002645>. – DOI 10.1142/S0218396X05002645. – ISSN 0218–396X
- [37] DAHMEN, W. ; REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 2009 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 9783540764922
- [38] HANS RUDOLF SCHWARZ, N.K. ; KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. Vieweg + Teubner, 2009. – ISBN 9783834806833
- [39] MARBURG, STEFFEN: SIX BOUNDARY ELEMENTS PER WAVELENGTH: IS THAT ENOUGH? In: *Journal of Computational Acoustics* 10 (2002), Nr. 01, 25–51. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218396X02001401>. – DOI 10.1142/S0218396X02001401
- [40] SMITH, P. D.: Instabilities in Time Marching Methods for Scattering: Cause and Rectification. In: *Electromagnetics* 10 (1990), Nr. 4, 439–451. <http://dx.doi.org/10.1080/02726349008908256>. – DOI 10.1080/02726349008908256

- [41] ERGIN, A. A. ; SHANKER, Balasubramaniam ; MICHIELSSEN, Eric: Analysis of transient wave scattering from rigid bodies using a Burton–Miller approach. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 106 (1999), Nr. 5, 2396-2404. <http://dx.doi.org/10.1121/1.428076>. – DOI 10.1121/1.428076
- [42] WANG, H. ; HENWOOD, D.J. ; HARRIS, P.J. ; CHAKRABARTI, R.: Concerning the cause of instability in time-stepping boundary element methods applied to the exterior acoustic problem. In: *Journal of Sound and Vibration* 305 (2007), Nr. 1-2, 289 - 297. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X07002787>. – ISSN 0022–460X
- [43] *Kapitel 14*. In: ISERLES, Arieh: *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. SIAM Publications
- [44] LEHOUCQ, D.C. S. R.B. ; YANG, C.: *ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. SIAM Publications, 1998
- [45] FOKKEMA, Diederik R. ; SLEIJPEN, Gerard L. G. ; VORST, Henk A. d.: Jacobi-Davidson style QR and QZ algorithms for the reduction of matrix pencils. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 20 (1999), Nr. 1, S. 94–125 (electronic). – ISSN 1095–7197
- [46] SLEIJPEN, Gerard L. G. ; VAN DER VORST, Henk A.: Jacobi–Davidson Methods (Section 4.7). In: BAI, Zhaojun (Hrsg.) ; DEMMEL, James (Hrsg.) ; DONGARRA, Jack (Hrsg.) ; RUHE, Axel (Hrsg.) ; VAN DER VORST, Henk (Hrsg.): *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide*. Philadelphia : SIAM, 2000, S. 88–105
- [47] FISCHER, Matthias ; GAUGER, Ute ; GAUL, Lothar: A multipole Galerkin boundary element method for acoustics. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 28 (2004), Nr. 2, 155 - 162. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2003.07.001>. – DOI 10.1016/j.enganabound.2003.07.001. – ISSN 0955–7997

- [48] PAROT, Jean-Marc ; THIRARD, Christophe: A numerical algorithm to damp instabilities of a retarded potential integral equation. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (2011), Nr. 4, S. 691–699
- [49] STÜTZ, Michael ; OCHMANN, Martin ; MÖSER, Michael: Improving stability of the transient boundary element method using the CHIEF-Method. In: *1stEAA - EuroRegio 2010, Congress on Sound and Vibration* (2010). ISBN 978–961–269–283–4
- [50] JANG, Hae-Won ; IH, Jeong-Guon: Stabilization of time domain acoustic boundary element method for the exterior problem avoiding the nonuniqueness. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 133 (2013), Nr. 3, 1237–1244. <http://dx.doi.org/10.1121/1.4774377>. – DOI 10.1121/1.4774377
- [51] HARGREAVES, Jonathan A.: *Time Domain Boundary Element Method for Room Acoustics*, University of Salford, Diss., 2007
- [52] HORN, R. A. ; JOHNSON, C. R.: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985. – ISBN 0–521–30586–1
- [53] LARSEN, R. M.: Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization / Department of Computer Science, Aarhus University. 1998 (DAIMI PB-357). – Forschungsbericht
- [54] *PROPACK*. <http://soi.stanford.edu/~rmunk/PROPACK/>
- [55] WOODWORTH, M. B. ; YAGHJIAN, A. D.: Derivation, application and conjugate gradient solution of dual-surface integral equations for three-dimensional, multi-wavelength perfect conductors. In: *Progress In Electromagnetics Research* 5 (1991), may, S. 103–129
- [56] PRAKASH, V. V. S. ; MITTRA, Raj: Dual-surface combined-field integral equation for three-dimensional scattering. In: *Microwave and Optical Technology Letters* 29 (2001), Nr. 5, 293–296. <http://dx.doi.org/10.1002/mop.1159>. – DOI 10.1002/mop.1159. – ISSN 1098–2760

- [57] SHORE, R.A. ; YAGHJIAN, A.D.: Dual-surface integral equations in electromagnetic scattering. In: *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* 53 (2005), may, Nr. 5, S. 1706 – 1709. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2005.846806>. – DOI 10.1109/TAP.2005.846806. – ISSN 0018–926X
- [58] MOHSEN, A. ; PISCOYA, R. ; OCHMANN, M.: The Application of the Dual Surface Method to Treat the Nonuniqueness in Solving Acoustic Exterior Problems. In: *Acta Acustica united with Acustica* 97 (2011), Nr. 4, 699-707. <http://dx.doi.org/doi:10.3813/AAA.918449>. – DOI doi:10.3813/AAA.918449
- [59] A. SCHWARZ, J. J.: *Combustion Noise*. Springer Verlag, 2009
- [60] PAROT, Jean-Marc ; THIRARD, Christophe ; PUILLET, Christian: Elimination of a non-oscillatory instability in a retarded potential integral equation. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 31 (2007), Nr. 2, S. 133–1511
- [61] MORSE, P. M. ; INGARD, K. U.: *Theoretical Acoustic*. Princeton University Press, 1986
- [62] JANG, Hae-Won ; IH, Jeong-Guon: Stabilization of time domain acoustic boundary element method for the interior problem with impedance boundary conditions. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 131 (2012), Nr. 4, 2742-2752. <http://dx.doi.org/10.1121/1.3688504>. – DOI 10.1121/1.3688504