

Newton-Methode für optimale Steuerungsprobleme bei nichtlinearen hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
Joseph Stephane Ambani
Berlin

Von der Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
der technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
- Dr. rer. nat. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. M. E. Pohst

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. F. Tröltzsch

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. K. Kunisch

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 08.09.2004

Berlin 2004

D 83

Zusammenfassung

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit optimalen Steuerungsproblemen unter nicht-linearen hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Speziell untersuchen wir verteilte- und Dirichlet-Randkontrollen und fassen dabei die Systemgleichung als Operatorgleichung zwischen Hilberträumen auf. Hauptsächlich befassen wir uns mit Fragen der Existenz von Lösungen des jeweiligen Kontrollproblems, einer Regularitätsbedingung, die die Existenz der Lagrange-Multiplikatoren gewährleistet, der notwendigen und hinreichenden Optimalitätskriterien. Auf der Grundlage dieser Untersuchungen wenden wir abschließend das Newton-Verfahren auf die behandelten Problemklassen an und führen numerische Tests durch.

Abstract

In this study we treat optimal control problems by nonlinear hyperbolic partial differential equations of the second order. We particularly investigate the cases of distributed controls and Dirichlet boundary controls making use of the System Equation as an Operator Equation between Hilbert Spaces. We handle mainly questions about the existence of optimal solutions for the specific control problem, a regularity condition which ensures the existence of Lagrange Multipliers, necessary and sufficient optimality conditions. Based on these investigations we finally apply the Newton Method on the studied cases and carry out numerical tests.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben, herzlich bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. K. Kunisch für die Betreuung der Arbeit, seine ständige Ansprechbarkeit und Anteilnahme an ihrem Entstehungsprozeß.

Herrn Prof. Dr. F. Tröltzsch danke ich für die Übernahme des Referats.

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	5
0.1	Einleitung	5
0.2	Bezeichnungen	9
I	Grundlegendes	11
I.1	Die Funktionenräume	11
I.1.1	Die Räume C^k und L^p	11
I.1.2	Die Räume $W(0, T; V, H)$	13
I.1.3	Interpolationsräume	15
I.1.4	Die Räume $H^{r,s}$	16
I.1.5	Die Räume $X_A(0, T; V, H)$	17
I.2	Einiges über hyperbolische Probleme	25
I.2.1	Über homogene Probleme	25
I.2.1.1	Problemstellung	25
I.2.1.2	Existenz- und Eindeutigkeitssatz	26
I.2.1.3	Regularität	34

I.2.2	Das inhomogene Dirichlet-Problem	34
I.2.2.1	Problemstellung	34
I.2.2.2	Existenz- und Eindeutigkeitssatz	36
II	Verteilte Kontrolle	39
II.1	Problemstellung	39
II.2	Existenz von Lösungen	41
II.3	Regularität des Problems	46
II.3.1	Die Systemgleichung und Beispiele von Nichtlinearitäten	47
II.3.2	Kostenfunktionale	51
II.3.3	Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$	51
II.4	Optimalitätskriterien	53
II.4.1	Notwendige Optimalitätsbedingungen	53
II.4.2	Positiv-Definitheit	62
II.4.2.1	Das Problem \mathbf{P}_1^V	62
II.4.2.2	Das reduzierte Problem \mathbf{p}^V	68
III	Dirichlet-Kontrolle	71
III.1	Das Kontrollproblem	71
III.2	Existenzsätze	74
III.3	Regularität des Problems	77
III.3.1	Kostenfunktional und Systemgleichung	77
III.3.2	Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$	79
III.4	Optimalitätskriterien	80
III.4.1	Notwendige Optimalitätskriterien	80
III.4.2	Positiv-Definitheit	85

IV Die Newton-Methode für hyperbolische Probleme	91
IV.1 Allgemeines	92
IV.1.1 Über das Newton-Verfahren	92
IV.1.2 Über das konjugierte Gradienten-Verfahren	93
IV.1.3 Ansatz eines Pseudo-Lagrange-Multiplikators	94
IV.2 Hesse-Matrix- und Gradientenauswertung	95
IV.2.1 Die Hesse-Matrix $j''(u)$	95
IV.2.2 Der Gradient $j'(u)$	98
IV.3 Algorithmus und Tests	98
IV.3.1 Der Algorithmus	98
IV.3.2 Numerische Tests	99
IV.3.2.1 Die Diskretisierungsmethode	99
IV.3.2.2 Testbeispiele	103
IV.3.2.2.1 Beispiel 1	104
IV.3.2.2.2 Beispiel 2	106
IV.3.2.2.3 Beispiel 3	107
IV.3.2.2.4 Interpretation der Ergebnisse und Graphiken	108

0 Einführung

0.1 Einleitung

Optimale Steuerungsprobleme sind aufgrund ihres Vorkommens in vielen technischen und physikalischen Prozessen seit einigen Jahrzehnten Gegenstand von großem Interesse und intensiven Untersuchungen. Dennoch ist die Klasse solcher Probleme bei denen das zugrundliegende System durch eine hyperbolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben ist, sowie deren numerische Aspekte bisher wohl weniger untersucht worden, insbesondere, wenn die Systemgleichung als Nebenbedingung in Operatorform formuliert wird. Dieser Umstand hat sicherlich u.a. damit zu tun, daß in den bekannten Existenzsätzen dieser Systeme, die “kleinsten” Räume in denen die Lösungen angenommen werden nicht-reflexive Banachräume (L^∞, C^k) [15], [17] sind. In Anbetracht des Entwicklungsstands der Analysis und speziell der Optimierungstheorie in solchen Räumen ist dies für die Behandlung dieser Probleme keine günstige Ausgangssituation.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag dafür leisten, dieser Entwicklung entgegen zu steuern: Wir behandeln Optimalkontrollprobleme für nichtlineare hyperbolische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, stellen dabei die Systemgleichungen als Operatorgleichung zwischen Hilberträumen dar und betrachten sie als Nebenbedingungen.

Angesichts der obigen Anmerkungen ist uns diese Art der Problemstellung u.a. dadurch möglich geworden, daß wir Existenzsätze für diese Systeme in Hilberträumen, die noch “kleiner” als die oben erwähnten nicht-reflexiven Räume der klassischen Existenzaussagen sind, zeigen konnten. Wir werden selbstverständlich vorab diese Räume vorstellen und studieren. Das bildet die Grundlage der Arbeit und ermöglicht es, uns weiteren Schwerpunkten unserer Untersuchungen widmen zu können: Es sind Fragen der Exi-

stanz und Eindeutigkeit von Lösungen für die gestellten Kontrollprobleme, der Regularitätsbedingungen zur Sicherung der Existenz der Lagrange-Multiplikatoren und der notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen. Die daraus erhaltenen Antworten bilden die theoretische Basis für zahlreiche Optimierungsmethoden und speziell für das Newtonverfahren, dessen Anwendungsmöglichkeit auf unsere Problemklassen wir anschließend untersuchen.

Die folgenden später genau zu spezifizierenden Systeme liegen unseren Betrachtungen zugrunde:

$$\begin{aligned} y_{tt} - \Delta y + f(y) &= Bu, \\ y(\cdot, 0) &= y^0, \\ y_t(\cdot, 0) &= y^1, \\ y|_{\Sigma} &= 0 \end{aligned}$$

für verteilte Kontrollen, oder

$$\begin{aligned} y_{tt} - \Delta y + f(y) &= 0, \\ y(\cdot, 0) &= y^0, \\ y_t(\cdot, 0) &= y^1, \\ y|_{\Sigma} &= u \end{aligned}$$

für Dirichlet-Randkontrollen.

Dabei bezeichnet y die Zustandsvariable, u die Kontrollvariable, B einen in dem Kontrollraum definierten linearen Operator und $f(y)$ eine nichtlineare Funktion. Es ist außerdem $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$, wobei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^N darstellt. Wir schreiben diese Systeme in der Operatorform $e(y, u) = 0$.

Uns interessieren Kostenfunktionale der Gestalt:

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \|Cy - y_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\beta}{2} \|u\|_U^2; \quad \beta \geq 0,$$

wobei die hier beteiligten Räume \mathcal{H} und U Hilberträume sind. Da wir von der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung y für die Systemgleichung bei vorgegebenem Kontrollparameter u ausgehen, bewegen wir uns hier außerhalb der bei nichtlinearen zeitabhängigen Probleme bekannten Blow-up-Effekte [16]. Aufgrund der soeben erwähnten Voraussetzung können wir auch das Kostenfunktional als $j(u) = J(y(u), u)$ darstellen. Wir sprechen in diesem Fall vom reduzierten Kontrollproblem.

Wir haben die Arbeit in vier Teile gegliedert:

Im ersten Kapitel stellen wir einige Funktionenräume vor, die später in der Arbeit benötigt werden. Eine zentrale Rolle spielen dabei die Hilberträume $X_A(0, T; V, H)$. Wir beweisen ihre für uns wichtigen Eigenschaften. Der Einsatz dieser Räume als Definitionsgebiet für den Systemoperator e ist wesentlich: Einerseits läßt sich das Problem in dieser Form grundsätzlich formulieren, das heißt in einem Hilbertraumkontext, und weil wir dann mit der schwachen Formulierung der Systemgleichung arbeiten können, können wir die Regularitätsforderungen an die Inputdaten des Problems niedrig halten. Andererseits kann dank der bewiesenen Einbettungseigenschaften dieser Räume eine breite Klasse an Nichtlinearitäten $f(y)$ in die Theorie eingebunden werden.

Das Erreichen dieser Ziele ohne Einsatz dieser Räume hat sich als sehr problematisch erwiesen. Am Ende des Kapitels beweisen wir einige Existenz- und Regularitätssätze für hyperbolische partielle Differentialgleichungen. Darauf bauen die meisten der später in der Arbeit gestellten Probleme und definierten Operatoren auf.

Im zweiten Kapitel widmen wir uns den Problemen mit verteilten Kontrollen.

Hauptsächlich beschäftigen wir uns mit der Existenz von Lösungen für das Kontrollproblem, der Differenzierbarkeit der dort auftretenden Funktionale, einer Regularitätsbedingung in Form der Surjektivität der linearisierten Nebenbedingung, notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung, die wir aus der Tatsache herleiten, daß die Wirkung der linearisierten Lagrange-Funktion an einem (lokalen) Lösungspunkt in allen Richtungen verschwindet und hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung in Form der Positiv-Definitheit der Hesse-Matrix des Lagrange-Funktional auf dem Kern der linearisierten Systemgleichung. Wir gehen auch immer wieder auf das reduzierte Problem ein, in dem wir die Zustandsvariable als Funktion der Kontrollvariable interpretieren. Darauf werden wir im letzten Kapitel die Newton-Methode anwenden.

Wir behandeln im dritten Kapitel Probleme mit Dirichlet-Randkontrollen. Die Hauptthemen der Untersuchungen und der Aufbau des Kapitels sind denen des vorigen Kapitels ähnlich.

Im abschließenden Kapitel geben wir am Beispiel von Problemen mit verteilten Kontrollen eine Anwendungsmöglichkeit der Newton-Methode auf die untersuchten Aufgaben an. Die Newton-Methode wird aufgrund ihrer quadratischen Konvergenzordnung oft, sowohl in der klassischen Optimierungstheorie, als auch in der optimalen Steuerung, eingesetzt. Dennoch hat sie auch einige Nachteile. Dazu zählen unter anderem die Lo-

kalität der Konvergenz, der Rechenaufwand im Zusammenhang mit der Berechnung der Hesse-Matrix und die Notwendigkeit das zugehörige lineare System, das Newton-System, so exakt wie möglich zu lösen. Das Bemühen diese Nachteile zu umgehen, zeichnet sich in der Regel durch den Einsatz von Modifikationen der Methode aus, von denen man sich eine Behebung oder zumindest eine Milderung der Probleme verspricht. In unserem Fall besteht das Vorgehen darin, das Newton-Verfahren nicht auf das Optimalitätssystem, sondern direkt auf das reduzierte Problem anzuwenden und das Newton-System mit Hilfe des konjugierten Gradienten-Verfahrens zu lösen. Wir können dabei die Berechnung der Hesse-Matrix vermeiden und müssen dafür nur ihre Wirkung auf Funktionen des Kontrollraums ermitteln. Diese Idee wurde schon bei Kontrollproblemen unter zeitabhängigen Navier Stokes Gleichungen benutzt (siehe z.B. [7]). Wir stützen uns auf die in den vorigen Kapiteln gemachten theoretischen Vorbereitungen. Numerische Beispiele werden abschließend gerechnet.

0.2 Bezeichnungen

Wir wollen hier vorab einige in der Arbeit vorkommenden Bezeichnungen auflisten und sie grob erklären. Die exakten Definitionen werden gegebenenfalls in den jeweiligen Abschnitten, wo sie eingeführt werden, gegeben.

Mit X , V und H bezeichnen wir beliebige reelle Banachräume.

$V \subset H$: Inklusion.

$V \hookrightarrow H$: stetige Einbettung.

$V \hookrightarrow\hookrightarrow H$: kompakte Einbettung.

V^* : dualer Raum zu V .

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sei ein beschränktes Gebiet und $0 \leq T < \infty$. Wir schreiben:

$\partial\Omega$: Rand von Ω .

$Q = \Omega \times]0, T[$

$\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$

$C^k(]0, T[; X)$: stetig-differenzierbare Abbildungen bis zur Ordnung k von $]0, T[$ in X .

$C^k([0, T]; X) = C^k(0, T; X)$: stetig-differenzierbare Abbildungen bis zur Ordnung k von $[0, T]$ in X .

$C^0(0, T; X) = C(0, T; X)$: stetige Abbildungen von $[0, T]$ in X .

$C^\infty(0, T; X) = \{\varphi : \varphi \in C^k(0, T; X), \forall k = 1, 2, \dots\}$.

$C^\infty(]0, T[; X) = \{\varphi : \varphi \in C^k(]0, T[; X), \forall k = 1, 2, \dots\}$.

$\mathcal{D}(]0, T[; X)$: Funktionen aus $C^\infty(]0, T[; X)$ mit kompaktem Träger in $]0, T[$.

$\mathcal{D}(]0, T[) = \mathcal{D}(]0, T[; \mathbb{R})$.

$\mathcal{D}'(]0, T[; X)$: Raum der Distributionen auf $]0, T[$ mit Werten in X .

$[V, H]_{\theta, p}$: Interpolationsräume zwischen V und H .

$L^p(0, T; X)$: Raum der Äquivalenzklassen von meßbaren Funktionen φ von $]0, T[$ in X mit $\|\varphi\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|\varphi(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

$L^\infty(0, T; X)$: Raum der Äquivalenzklassen von meßbaren Funktionen φ von $]0, T[$ in X mit $\|\varphi(t)\|_X \leq c$ f.ü. ; $c \in \mathbb{R}$.

$H^s(0, T; X) = [H^n(0, T; X), L^2(0, T; X)]_\theta$ für $(s \in \mathbb{R}_+), n \in \mathbb{N}$ mit $n > s$ und $(1 - \theta)n = s$, wobei $H^s(0, T; X) = \left\{ \varphi \mid \frac{d^r \varphi}{dt^r} \in L^2(0, T; X), 0 \leq r \leq s \right\}$, für $s \in \mathbb{N}$ und $H^0(0, T; X) = L^2(0, T; X)$.

$$H^{r,s}(Q) = L^2(0, T; H^r(\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\Omega)).$$

$$H_0^{r,s}(Q) = L^2(0, T; H_0^r(\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\Omega)).$$

$$H^{r,s}(\Sigma) = L^2(0, T; H^r(\partial\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\partial\Omega)).$$

Es gelten nun:

V und H sind zwei Hilberträume, V ist separabel, $\bar{V} = H$, $V \hookrightarrow H$ und $H \equiv H^*$ (Identifizierung von H mit H^*). Es ist dann $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$.

Letzteres bezeichnen wir als Gelfand Tripel.

Wir schreiben hier:

$$W(0, T; V, H) = \{ \varphi \in L^2(0, T; V) : \varphi_t \in L^2(0, T; V^*) \}$$

und

$$X_A(0, T; V, H) = \{ \varphi \in L^2(0, T; V) : \varphi_t, \varphi_{tt} + A\varphi \in L^2(0, T; H) \},$$

wobei $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ einen symmetrischen und positiv-definiten Operator darstellt.

Kapitel I

Grundlegendes

In diesem Kapitel werden wir zunächst ausgewählte Funktionenräume, die in der Arbeit vorkommen, definieren und ihre für unsere Zwecke wichtigsten Eigenschaften darstellen. In einem zweiten Teil beweisen wir einige Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für hyperbolische Differentialgleichungen. Auf den hier erzielten Ergebnissen beruhen die nachstehenden Kapitel.

I.1 Die Funktionenräume

Wir haben bei den Definitionen der Räume versucht übliche Bezeichnungen der Literatur zu benutzen. Die Räume $X_A(0, T; V, H)$, die wir hier neu einführen, waren technisch gesehen nicht immer bequem, finden aber ihre Berechtigung unter anderem in unserem Bestreben, mit minimaler Regularitätsforderung zu arbeiten.

I.1.1 Die Räume C^k und L^p

Es sei X ein Banachraum, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ ein beschränktes Gebiet und $0 \leq T < \infty$ gegeben. Wir setzen $Q = \Omega \times]0, T[$ und definieren:

$$C^k(]0, T[; X) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in X^{]0, T[} : \varphi \text{ ist stetig und stetig-} \\ \text{differenzierbar bis zur Ordnung } k \end{array} \right\}.$$

Hier bezeichnet $I_1^{I_2}$ die Menge aller Abbildungen von I_2 nach I_1 (2 nichtleere Mengen). Analog definiert man die Räume $C^k([0, T]; X)$, wobei im Punkt 0 (bzw. T) von rechtsseitigen (bzw. linksseitigen) Ableitungen die Rede ist. $C^k([0, T]; X)$ ist mit der Norm $\|\varphi\| = \sum_{s=0}^k \max_{[0, T]} \|\varphi^s(t)\|_X$ ein Banachraum. Dabei ist $\varphi^0 = \varphi$.

Wir schreiben

$$C^k([0, T]; X) = C^k(0, T; X), \quad k = 0, 1, \dots,$$

mit

$$C^0(0, T; X) = C(0, T; X).$$

Letzteres beschreibt die Menge der stetigen Funktionen von $[0, T]$ nach X . Die unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit

$$C^\infty(0, T; X) = \{\varphi \in C^k(0, T; X), \quad \forall k = 1, 2, \dots\}.$$

Wir setzen

$$\mathcal{D}(]0, T[; X) = C_0^\infty(]0, T[; X) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in C^\infty(]0, T[; X) : \\ \varphi \text{ mit kompaktem Träger} \end{array} \right\}.$$

Für $X = \mathbb{R}$ schreiben wir

$$C^k(0, T) = C^k([0, T], \mathbb{R}),$$

$$C^k(]0, T[) = C^k(]0, T[, \mathbb{R})$$

und analog

$$\mathcal{D}(]0, T[) = \mathcal{D}(]0, T[; \mathbb{R}).$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}'(0, T; X)$ den Raum der Distributionen auf $]0, T[$ mit Werten in X , das heißt, den Raum der stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(]0, T[)$ nach X (versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen von $\mathcal{D}(]0, T[)$).

Für $1 \leq p < \infty$ ist

$$L^p(0, T; X) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ (Äquivalenzklasse)} \in X^{]0, T[} : \varphi \text{ ist} \\ \text{meßbar und } \|\varphi\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|\varphi(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \end{array} \right\}$$

und für $p = \infty$

$$L^\infty(0, T; X) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzklassen von meßbaren Funktionen } \varphi \in X^{]0, T[} \text{ so;} \\ \text{daß } \exists C \in \mathbb{R} \text{ mit } \|\varphi(t)\|_X \leq C \text{ f..} \end{array} \right\}.$$

Hier definiert man die Norm $\|\varphi\|_{L^\infty} = \inf\{C\}$.

Die Räume $L^p(0, T; X)$, $0 \leq p \leq \infty$, sind mit den so definierten Normen Banachräume. Ist X ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$; so auch $L^2(0, T; X)$ mit dem Skalarprodukt $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle \varphi(t), \psi(t) \rangle_X dt$. Falls $X = L^p(\Omega)$, werden wir $L^p(Q)$ statt $L^p(0, T; X)$ schreiben (beide Räume sind miteinander identifizierbar). Wir werden auch gelegentlich die Abkürzung $L^p(X)$ für $L^p(0, T; X)$ benutzen. Für $y \in L^1(0, T; X)$ werden wir mit $\partial_t y$, y_t oder y' zugleich die klassische Ableitung (falls diese definiert ist) und die verallgemeinerte Ableitung von y bezeichnen. Letztere erhält man durch

$$\int_0^T y \varphi_t dt \stackrel{\text{Def}}{=} - \int_0^T y_t \varphi dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}]0, T[.$$

Analog haben wir $\partial_{tt} y = y_{tt} = y''$.

I.1.2 Die Räume $W(0, T; V, H)$

Es seien V und H zwei Hilberträume mit: V ist separabel, dicht in H und es gelte $V \hookrightarrow H$ (\hookrightarrow steht für die stetige Einbettung). Wir identifizieren H mit seinem Dualraum und erhalten $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ (Gelfand-Tripel), wobei V^* den Dualraum von V bezeichnet. Wir definieren

$$W(0, T; V, H) = \{\varphi \in L^2(0, T; V) : \varphi_t \in L^2(0, T; V^*)\}.$$

Dieser ist mit der Norm $\|\varphi\|_W = [\|\varphi\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|\varphi_t\|_{L^2(0, T; V^*)}^2]^{\frac{1}{2}}$ ein Hilbertraum. Äquivalent zu dieser Norm ist die folgende

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{L^2(0, T; V)} + \|\varphi_t\|_{L^2(0, T; V^*)}.$$

Man erhält dann mit [25]

$$W(0, T; V, H) \hookrightarrow C(0, T; H). \quad (1.1)$$

In diesem Zusammenhang wollen wir zwei Lemmata über die Greensche Formel angeben. Die Räume $W(a, b; V, H)$ und $L^2(a, b; X)$ werden analog wie $W(0, T; V, H)$ und $L^2(0, T; X)$ definiert. Wir werden auch dabei, und dies bis Ende des Kapitels, mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Dualitätsprodukt zwischen V und V^* sowie das Skalarprodukt auf H für einen gegebenen Gelfand-Tripel $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, wie oben definiert, bezeichnen.

Lemma I.1.1 [25]

Es sei $\varphi, \psi \in W(a, b; V, H)$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, so gilt

$$\int_a^b \langle \varphi_t(t), \psi(t) \rangle dt + \int_a^b \langle \varphi(t), \psi_t(t) \rangle dt = \langle \varphi(b), \psi(b) \rangle - \langle \varphi(a), \psi(a) \rangle. \quad (1.2)$$

Das nächste Lemma wird zeigen, daß (1.2) gültig bleibt, wenn man die Regularität von φ schwächt und die von ψ stärkt (oder umgekehrt).

Lemma I.1.2

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $\varphi \in W(a, b; H, V^*)$ (somit $\varphi \in L^2(a, b; H)$ mit $\varphi_t \in L^2(a, b; V^*)$) und ψ so, daß $\psi \in C(a, b; V)$ mit $\psi_t \in L^2(a, b; H)$. Dann gilt (1.2).

Beweis

Es sein φ und ψ wie im Lemma, und P die Menge aller Polynome $p : [0, T] \rightarrow H$ mit Koeffizienten in V .

Es ist bekannt, daß P in $C^1(a, b; H)$ und $C^1(a, b; H)$ in $W(a, b; H, V^*)$ dicht liegen [25] S. 442-446. Es existiert dann $\{\varphi_n\} \subset P$ mit

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } L^2(a, b; H), \text{ wenn } n \rightarrow \infty$$

und

$$\varphi_n' \rightarrow \varphi' \text{ in } L^2(a, b; V^*), \text{ wenn } n \rightarrow \infty.$$

Weil

$$W(a, b; H, V^*) \hookrightarrow C(a, b; V^*),$$

gilt dann

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } C(a, b; V^*), \text{ falls } n \rightarrow \infty$$

und damit

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} \varphi_n(b) \rightarrow \varphi(b) \\ \varphi_n(a) \rightarrow \varphi(a) \end{array} \right\} \text{ in } V^*, \text{ falls } n \rightarrow \infty.$$

Aus $\psi \in C(a, b; V)$ und $\psi_t \in L^2(a, b; H)$ folgt $\psi \in W(a, b; V, H)$ mit $\psi(a), \psi(b) \in V$. Nach Definition von P ist es auch klar, daß $\varphi_n \in W(a, b; V, H)$. Wegen Lemma I.1.1

haben wir dann

$$\int_a^b \langle \varphi'_n(t), \psi(t) \rangle dt + \int_a^b \langle \varphi_n(t), \psi'(t) \rangle dt = \langle \varphi_n(b), \psi(b) \rangle - \langle \varphi_n(a), \psi(a) \rangle.$$

Durch Grenzübergang erhält man die Behauptung.

Q.E.D

I.1.3 Interpolationsräume

Zur Definition von (reellen) Interpolationsräumen gibt es verschiedene Zugänge, die, je nachdem welche Resultate gezeigt werden sollen, mehr oder weniger geeignet erscheinen. Wir benutzen hier die sogenannte K -Methode [17, 21]. Mit X und Y bezeichnen wir zwei Banachräume mit $X \hookrightarrow S$ und $Y \hookrightarrow S$, wobei S einen lokal konvexen topologischen Raum darstellt. Wir setzen für $x \in X + Y$ und $t > 0$

$$K(t, x; X, Y) = \inf_{\substack{x=a+b \\ a \in X, b \in Y}} (\|a\|_X + t \|b\|_Y).$$

Seien nun $0 < \theta \leq 1$ und $1 \leq p \leq \infty$. Wir definieren

$$[X, Y]_{\theta, p} = \{x \in X + Y, \quad t^{-(\theta + \frac{1}{p})} K(t, x; X, Y) \in L^p(0, +\infty)\}$$

und

$$\|x\|_{[X, Y]_{\theta, p}} = \|t^{-(\theta + \frac{1}{p})} K(t, x; X, Y)\|_{L^p(0, +\infty)} \quad (1.3)$$

($\frac{1}{p} = 0$ für $p = +\infty$).

Bemerkung I.1.1

Die Räume $[X, Y]_{\theta, p}$ bezeichnen wir als Interpolationsräume zwischen X und Y . Versehen mit der Norm (1.3) sind sie Banachräume.

Der folgende Satz faßt ihre für uns notwendigen Eigenschaften zusammen.

Satz I.1.1 [17], [21]

Es seien $0 < \theta < 1$ und $1 \leq p \leq \infty$. Es gilt

$$(a) [X, Y]_{\theta, p} = [Y, X]_{1-\theta, p}.$$

(b) $\exists C(\theta, p) > 0$ mit

$$\|x\|_{[X, Y]_{\theta, p}} \leq C(\theta, p) \|x\|_X^\theta \|x\|_Y^{1-\theta} \quad \forall x \in X \cap Y.$$

(c) Falls $X \hookrightarrow Y$ und $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, so ist

$$X \hookrightarrow [X, Y]_{\theta, p_1} \hookrightarrow [X, Y]_{\theta, p_2} \hookrightarrow \overline{X}.$$

(d) $[X, Y]_{\theta_1, p} \hookrightarrow [X, Y]_{\theta_2, p}$, falls $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$.

(e) Falls $X = Y$, gilt $[X, Y]_{\theta, p} = X = Y$.

Wir fixieren ab jetzt $p = 2$ und setzen

$$[X, Y]_\theta = [X, Y]_{\theta, 2}.$$

I.1.4 Die Räume $H^{r, s}$

Es sei X ein Hilbertraum. Wir definieren:

- Falls $s \in \mathbb{N}$

$$H^s(0, T; X) = \left\{ \varphi \mid \frac{d^r \varphi}{dt^r} \in L^2(0, T; X), \quad 0 \leq r \leq s \right\}$$

- und generell ($s \in \mathbb{R}_+$)

$$H^s(0, T; X) = [H^n(0, T; X), L^2(0, T; X)]_\theta \quad (1.4)$$

$n \in \mathbb{N}$ mit $n > s$ und $(1 - \theta)n = s$.

Bei der letzten Definition ist $H^0(0, T; X) = L^2(0, T; X)$.

Es sei dann $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Wir setzen wie oben $Q = \Omega \times]0, T[$ und weiterhin $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$. Für $r, s \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definieren wir folgende Räume

$$H^{r,s}(Q) = L^2(0, T; H^r(\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$H_0^{r,s}(Q) = L^2(0, T; H_0^r(\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\Omega)),$$

und wenn $\partial\Omega$ (Rand von Ω) von der Klasse C^∞ ist

$$H^{r,s}(\Sigma) = L^2(0, T; H^r(\partial\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\partial\Omega)).$$

In diesem Rahmen gilt der folgende Spurensatz:

Satz I.1.2 [18] S.10

Es sei $y \in H^{r,s}(Q)$ mit $r > \frac{1}{2}$ und $s \geq 0$,

- so läßt sich $\frac{\partial^j y}{\partial n^j}$ auf Σ definieren für $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j < r - \frac{1}{2}$. Es ist $\frac{\partial^j y}{\partial n^j} \in H^{r_j, s_j}(\Sigma)$, wobei $\frac{r_j}{r} = \frac{s_j}{s} = \frac{2r-2j-1}{2r}$ ($r_j = 0$, falls $s = 0$) und die Abbildungen $y \mapsto \frac{\partial^j y}{\partial n^j}$ sind linear und stetig von $H^{r,s}(Q)$ in $H^{r_j, s_j}(\Sigma)$.
- Falls $r \geq 0$ und $s > \frac{1}{2}$, so kann man auch $\frac{\partial^k y}{\partial t^k}(x, 0)$ auf Ω für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k < s - \frac{1}{2}$ definieren. Es ist $\frac{\partial^k y}{\partial t^k}(\cdot, 0) \in H^{p_k}(\Omega)$, $p_k = \frac{r}{s}(s - k - \frac{1}{2})$ und die Abbildungen $y \mapsto \frac{\partial^k y}{\partial t^k}(\cdot, 0)$ von $H^{r,s}(Q)$ in $H^{p_k}(\Omega)$ sind stetig.

Es sei hier erwähnt, daß für den Fall, daß Ω beschränkt ist und einen hinreichend glatten Rand besitzt, die Räume $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}_+$ sich ähnlich wie in (1.4) durch Interpolation definieren lassen. Man hat ([17] S. 45)

$$H^s(\Omega) = [H^n(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad (1 - \theta)n = s. \quad (1.5)$$

I.1.5 Die Räume $X_A(0, T; V, H)$

Weil sich unsere Arbeit im Kontext von Hilberträumen artikulieren wird, und wir unseren Arbeitsräumen, soweit es geht, minimale Regularitätsforderungen stellen wollen, haben wir sehr oft die im Folgenden von uns neu eingeführten Nicht-Standardräume $X_A(0, T; V, H)$ eingesetzt. Da wir für unsere Zwecke keine hier brauchbaren Resultate

über ähnliche Räume in der Literatur finden konnten, werden wir auch ihre für uns wichtigsten Eigenschaften beweisen.

Es sei $T \in (0, +\infty)$, und wie in § I.1.2 mögen $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ ein Gelfand Tripel bilden. Es bezeichne $\|\cdot\|_V$ (bzw. $\|\cdot\|_H$) die Norm in V (bzw. in H) und sei $a(\varphi, \psi)$ eine stetige Bilinearform auf V , mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 \quad &: \quad a(\varphi, \psi) = a(\psi, \varphi) \quad \forall \varphi, \psi \in V \\ & \quad (\text{Symmetrie}) \text{ und } \exists \kappa \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ & \quad a(\varphi, \varphi) + \kappa |\varphi|_H^2 \geq \alpha \|\varphi\|_V^2, \quad \alpha > 0, \varphi \in V \quad (\text{Koerzivität}). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit bezüglich φ und ψ kann man der Abbildung $a(\varphi, \psi)$ einen Operator $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ wie folgt zuordnen:

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = a(\varphi, \psi). \quad (1.6)$$

Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Dualitätsprodukt zwischen V und V^* bzw. das Skalarprodukt auf H .

Wir definieren

$$X_A(0, T; V, H) = \{\varphi \in L^2(0, T; V) : \varphi_t, \varphi_{tt} + A\varphi \in L^2(0, T; H)\},$$

sowie das Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{X_A} = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(V)} + \langle \varphi_t, \psi_t \rangle_{L^2(H)} + \langle \varphi_{tt} + A\varphi, \psi_{tt} + A\psi \rangle_{L^2(H)}$$

mit der zugehörigen Norm

$$\|\varphi\|_{X_A} = \left[\|\varphi\|_{L^2(V)}^2 + \|\varphi_t\|_{L^2(H)}^2 + \|\varphi_{tt} + A\varphi\|_{L^2(H)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7)$$

Satz I.1.3

$X_A(0, T; V, H)$ ist mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_A}$ ein Hilbertraum.

Beweis

Es reicht zu zeigen, daß $X_A(0, T; V, H)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{X_A}$ vollständig ist. Sei φ_n eine Cauchyfolge in $X_A(0, T; V, H)$, so ist wegen (1.7) $\{\varphi^n, \varphi_t^n, (\varphi_{tt} + A\varphi)^n\}$ eine Cauchyfolge in $L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; H)$. Aufgrund der Vollständigkeit von $L^2(0, T; H)$ und $L^2(0, T; V)$ existieren φ , $\bar{\varphi}$ und $\hat{\varphi}$, so daß

$$\left. \begin{array}{l} \varphi^n \longrightarrow \varphi \quad \text{in } L^2(0, T; V), \\ \varphi_t^n \longrightarrow \bar{\varphi} \quad \text{in } L^2(0, T; H) \end{array} \right\} \text{ wenn } n \longrightarrow +\infty.$$

und

$$(\varphi_{tt} + A\varphi)^n \longrightarrow \hat{\varphi} \quad \text{in } L^2(0, T; H), \text{ wenn } n \longrightarrow +\infty.$$

Weil $A \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V), L^2(0, T; V^*))$, $L^2(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; V^*)$ und $L^2(0, T; V^*) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; V^*)$, erhalten wir folgende Limes in $\mathcal{D}'(0, T; V^*)$, wenn $n \longrightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi^n &\longrightarrow \varphi, & (1.8) \\ \varphi_t^n &\longrightarrow \bar{\varphi}, \quad (\varphi_{tt} + A\varphi)^n \longrightarrow \hat{\varphi} \end{aligned}$$

und

$$A\varphi^n \longrightarrow A\varphi. \quad (1.9)$$

Die Stetigkeit des Operators ∂_t von $\mathcal{D}'(0, T; V^*)$ in $\mathcal{D}'(0, T; V^*)$ impliziert $\varphi_t^n \longrightarrow \varphi_t$ in $\mathcal{D}'(0, T; V^*)$ und damit auch

$$\varphi_{tt}^n \longrightarrow \varphi_{tt} \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, T; V^*), \quad n \longrightarrow +\infty. \quad (1.10)$$

Wegen der Eindeutigkeit des Limes gilt $\varphi_t = \bar{\varphi}$. Dadurch ist $\varphi_t \in L^2(0, T; H)$. Mit (1.9) und (1.10) haben wir außerdem $(\varphi_{tt} + A\varphi)^n \longrightarrow \varphi_{tt} + A\varphi$ in $\mathcal{D}'(0, T; V^*)$, $n \longrightarrow +\infty$ und damit $\hat{\varphi} = \varphi_{tt} + A\varphi \in L^2(0, T; H)$. Insgesamt erhalten wir $\varphi \in X_A(0, T; V, H)$.

Q.E.D

Als Nächstes beweisen wir einen Einbettungssatz für $X_A(0, T; V, H)$. Die Bedeutungen der Bezeichnungen $L^2(a, b; X)$, $\mathcal{D}(\]a, b[, X)$, $X_A(a, b; V, H)$ ergeben sich in Analogie zu jenen mit $a = 0$ und $b = T$. Wir brauchen das folgende

Lemma I.1.3

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$; $a \leq b$, so existiert $C > 0$, so daß

$$\begin{aligned} \text{Max} \left\{ \|\psi\|_{C(a,b;V)}, \|\psi\|_{C^1(a,b;H)} \right\} \\ \leq C \|\psi\|_{X_A(a,b;V,H)}, \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{D}(]a, b[; V) \cap X_A(a, b; V, H). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Beweis

Es sei $\psi \in \mathcal{D}(]a, b[; V) \cap X_A(a, b; V, H)$. Wir können nach Definition von $X(a, b; V, H)$, $F \in L^2(a, b; H)$ finden mit

$$\psi_{tt}(t) + A\psi(t) = F(t), \quad t \in (a, b). \quad (1.12)$$

Wir bilden das innere Produkt von (1.12) mit $\psi_t(t)$ und erhalten

$$a(\psi(t), \psi_t(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\psi_t(t)\|_H^2 = \langle F(t), \psi_t(t) \rangle_H.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} [\|\psi_t(t)\|_H^2 + a(\psi(t), \psi(t))] = 2 \langle F(t), \psi_t(t) \rangle_H.$$

Eine Integration von a bis t mit Benutzung von **(h₁)** ergibt:

$$\|\psi(t)\|_V^2 + \|\psi_t\|_H^2 \leq C_0 \left[\int_a^t \|F(s)\|_H^2 ds + \int_a^t \|\psi_t(s)\|_H^2 ds \right].$$

Wir können die linke Seite nach unten abschätzen, indem wir etwa

$\|\psi(t)\|_V^2 = \frac{1}{2} \|\psi(t)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\psi(t)\|_V^2$ setzen und bei einem Glied der rechten Seite dieser Gleichung die Inklusion $V \hookrightarrow H$ ausnutzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|_H^2 + \|\psi_t(t)\|_H^2 + \|\psi(t)\|_V^2 \\ \leq C_1 \left[\int_a^b \|F(s)\|_H^2 ds + \int_a^b \|\psi_t(s)\|_H^2 ds \right], \quad \text{für alle } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Satz I.1.4

Es gilt

$$X_A(0, T; V, H) \hookrightarrow C(0, T; V) \cap C^1(0, T; H).$$

Beweis

Wir versehen die rechte Seite der Inklusion mit der Norm

$$\text{Max} \left\{ \max_{[0, T]} \|\varphi(t)\|_H + \max_{[0, T]} \|\varphi_t(t)\|_H, \max_{[0, T]} \|\varphi(t)\|_V \right\}.$$

Es sei nun $\varphi \in X_A(0, T; V, H)$.

① Fortsetzung von φ auf $\phi \in X_A(-T, 2T; V, H)$ mit kompaktem Träger in $] - T, 2T[$.

Wir definieren:

$\varphi(t) = -\varphi(-t) + 2\varphi(0)$, falls $t \in [-T, 0]$ und $\varphi(T+t) = -\varphi(T-t) + 2\varphi(T)$, falls $t \in [T, 2T]$ und haben dadurch $\varphi \in X_A(-T, 2T; V, H)$. Wir setzen $\phi = \theta\varphi$, wobei $\theta \in \mathcal{D}(] - T, 2T[)$ mit $\theta \equiv 1$ auf $[0, T]$ und erhalten $\phi \equiv \varphi$ auf $[0, T]$, ϕ hat einen kompakten Träger auf $] - T, 2T[$ und $\phi \in X_A(-T, 2T; V, H)$.

② Approximation von ϕ (aus ①) durch Funktionen ϕ_α aus $\mathcal{D}(] - T, 2T[; V) \cap X_A(-T, 2T; V, H)$.

Wir setzen zunächst die Funktion ϕ in $\mathbb{R} \setminus] - T, 2T[$ durch $\phi(t) = 0$ fort und regularisieren sie bezüglich t wie folgt:

Es sei $\vartheta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\vartheta \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \vartheta(t) dt = 1$ und Träger $\text{Supp } \vartheta \subset [-1, 1]$. Wir definieren $\vartheta_\alpha(t) = \alpha\vartheta(\alpha t)$, $\alpha = 1, 2, \dots$ und setzen

$$\phi_\alpha = \vartheta_\alpha * \phi|_{[-T, 2T]}; \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

wobei $\vartheta_\alpha * \phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_\alpha(t-s) \phi(s) ds$ (Konvolutionsprodukt). Da $\phi \in X_A(-T, 2T; V, H)$, haben wir nach Definition $\phi \in L^2(-T, 2T; V)$, $\phi_t \in L^2(-T, 2T; H)$ und $\phi_{tt} + A\phi \in L^2(-T, 2T; H)$.

Es ist bekannt, daß dann für die entsprechenden gemäß (1.13) regularisierten Funktionen gilt: $\phi_\alpha \in C^\infty(-T, 2T; V)$, $(\partial_t \phi)_\alpha \in C^\infty(-T, 2T; H)$ und $(\phi_{tt} + A\phi)_\alpha \in C^\infty(-T, 2T; H)$, mit

$$\begin{aligned} \phi_\alpha &\longrightarrow \phi \text{ in } L^2(-T, 2T; V), \text{ wenn } \alpha \longrightarrow +\infty, \\ (\partial_t \phi)_\alpha &\longrightarrow \partial_t \phi \text{ in } L^2(-T, 2T; H), \text{ wenn } \alpha \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

und

$$(\phi_{tt} + A\phi)_\alpha \longrightarrow \phi_{tt} + A\phi \text{ in } L^2(-T, 2T; H), \text{ wenn } \alpha \longrightarrow +\infty.$$

Nun haben wir $(\partial_t \phi)_\alpha = \partial_t \phi_\alpha$ und $(\phi_{tt} + A\phi)_\alpha = \partial_{tt} \phi_\alpha + A\phi_\alpha$. Wir erhalten

$$\phi_\alpha \in X_A(-T, 2T; V, H)$$

und

$$\phi_\alpha \longrightarrow \phi \text{ in } X_A(-T, 2T; V, H), \text{ wenn } \alpha \longrightarrow +\infty. \quad (1.14)$$

Weil ϕ einen kompakten Träger in $[-T, 2T]$ besitzt (siehe ①), $\phi_\alpha \in C^\infty(-T, 2T; V)$; $\alpha = 1, 2, \dots$ und

$$\text{Supp } (\vartheta_\alpha * \phi) \subset \left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right] + \text{Supp } \phi,$$

haben wir dann

$$\phi_\alpha \in \mathcal{D}(\cdot - T, 2T]; V),$$

wenn α hinreichend groß ist. Dieser Teil der Folge, den wir auch mit ϕ_α bezeichnen, gewährleistet den Punkt ②.

$$\textcircled{3} \quad \phi_\alpha \longrightarrow \phi \text{ in } C(-T, 2T; V) \cap C^1(-T, 2T; H), \text{ wenn } \alpha \longrightarrow +\infty.$$

Wegen (1.14) ist $\{\phi_\alpha\}$ eine Cauchyfolge in $X_A(-T, 2T; V, H)$ mit Grenzwert $\phi \in X_A(-T, 2T; V, H)$.

Setzt man in (1.11) $\psi = \phi_\alpha - \phi_\beta$, $a = -T$ und $b = 2T$, so folgt daraus, daß $\{\phi_\alpha\}$ auch in $C(-T, 2T; V) \cap C^1(-T, 2T; H)$ eine Cauchyfolge ist. Letzterer Raum ist vollständig. Somit existiert $\hat{\phi}$ mit

$$\phi_\alpha \longrightarrow \hat{\phi}, \quad \alpha \longrightarrow +\infty \text{ in } C(-T, 2T; V) \cap C^1(-T, 2T; H).$$

Wegen $C(-T, 2T; V) \cap C^1(-T, 2T; H) \hookrightarrow L^2(-T, 2T; V)$ und (1.14) ist dann bei Vernachlässigung einer Nullmenge, $\hat{\phi} \equiv \phi$ auf $C(-T, 2T; V) \cap C^1(-T, 2T; H)$.

④ Grenzübergang

Durch Grenzübergang in (1.11) mit $\psi = \phi_\alpha$, $a = -T$ und $b = 2T$ erhalten wir

$$\|\phi\|_{C(-T, 2T; V) \cap C^1(-T, 2T; H)} \leq C \|\phi\|_{X_A(-T, 2T; V, H)}.$$

Nun gilt aufgrund der Konstruktion von ϕ :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{C(0,T;V)\cap C^1(-T,2T;H)} &\leq \|\phi\|_{C(-T,2T;V)\cap C^1(-T,2T;H)} \\ &\leq C \|\phi\|_{X_A(-T,2T;V,H)} \leq 3C \max_{[-T,2T]} |\theta(t)| \|\varphi\|_{X_A(0,T;V,H)}. \end{aligned}$$

Q.E.D

Der soeben bewiesene Satz sowie die folgenden Sobolev'schen Einbettungsergebnisse werden eine zentrale Rolle spielen.

Satz I.1.5

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und hinreichend glatt (etwa $\partial\Omega$ von der Klasse C^1), so ist:

- $H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, falls $m > \frac{N}{2}$. Die Einbettung ist kompakt, wenn Ω beschränkt ist.
- $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, falls $m < \frac{N}{2}$ und $2 \leq q \leq \frac{2N}{N-2m}$. Die Einbettung ist kompakt, wenn zusätzlich Ω beschränkt ist und $q < \frac{2N}{N-2m}$.
- $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$; $2 \leq q < \infty$ beliebig, falls $m = \frac{N}{2}$ und kompakt, wenn Ω beschränkt ist.

Bemerkung I.1.2

Die Räume $X_A(0, T; V, H)$ werden wir im Laufe der Arbeit für $V = H_0^1(\Omega)$ und $V = H^1(\Omega)$ einsetzen. Im ersten Fall wählen wir als Abbildung A den Operator $-\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$. Im Falle $V = H^1(\Omega)$ werden wir aus Notationsgründen auch $A = -\Delta$ setzen. Hierbei meinen wir aber die Form $A : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)^*$ mit $\langle A\varphi, \psi \rangle_{H^1(\Omega)^*, H^1(\Omega)} = \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle_{L^2(\Omega)}$ (steht für $\sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$).

In beiden Fällen erfüllt die gemäß (1.6) definierte Bilinearform die Bedingung (\mathbf{h}_1).

Bemerkung I.1.3

(i) Es ist nach Definition klar, daß

$$X_A(0, T; V, H) \hookrightarrow W(0, T; V, H).$$

(ii) Für $V \in \{H_0^1(\Omega), H^1(\Omega)\}$ und $H = L^2(\Omega)$ folgt :

(*) wegen (1.1), $X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega)) \hookrightarrow C(0, T; L^2(\Omega))$ und somit
 $X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$.

(**) wegen Satz I.1.4, $X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega)) \hookrightarrow C(0, T; C(\overline{\Omega})) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$,
falls $N = 1$.

(iii) Es gilt offensichtlich:

$X_{-\Delta}(0, T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) \hookrightarrow H_0^{1,1}(Q) \hookrightarrow W(0, T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$. Mit (1.1) haben wir dann $H_0^{1,1}(Q) \hookrightarrow C(0, T; L^2(\Omega))$. Da $W(0, T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$ [15] (S. 58), gilt auch $H_0^{1,1}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$.

Diese Inklusionen gelten auch, wenn wir $H_0^1(\Omega)$ und $H_0^{1,1}(Q)$ durch $H^1(\Omega)$ und $H^{1,1}(Q)$ ersetzen.

I.2 Einiges über hyperbolische Probleme

I.2.1 Über homogene Probleme

I.2.1.1 Problemstellung

Wir werden im Laufe dieser Arbeit sehr oft mit Operatoren der Form $\partial_{tt} - \Delta + q$ zu tun haben. Dies führt uns zu der nächsten Problemstellung.

Wir brauchen folgende Hypothesen :

$$\mathbf{h}_2: \quad q \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \text{ mit} \\ p \in (2, \infty] \text{ beliebig, falls } N \leq 2 \text{ und} \\ p = N, \text{ falls } N \geq 3$$

und

$$\mathbf{h}_3: \quad q_t \in L^\infty(0, T; L^s(\Omega)) \text{ mit} \\ s \in (1, \infty] \text{ beliebig, falls } N \leq 2, \text{ und} \\ s = \frac{N}{2}, \text{ falls } N \geq 3.$$

\mathbf{P}_D : Wir suchen:

$$y \in L^2(0, T; V) \quad \text{mit} \quad y_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (1.15)$$

so, daß

$$y_{tt} - \Delta y + qy = w \quad \text{auf }]0, T[, \quad (1.16)$$

$$y(\cdot, 0) = y^0, \quad (1.17)$$

$$y_t(\cdot, 0) = y^1, \quad (1.18)$$

$$y = 0 \quad \text{auf } \Sigma \quad (\text{wir setzen } V = H_0^1(\Omega)) \quad (1.19)$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Sigma \quad (\text{wir setzen } V = H^1(\Omega)),$$

wobei

$$w \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad y^0 \in V \quad \text{und} \quad y^1 \in L^2(\Omega).$$

Bemerkung I.2.1

Bei den Bedingungen (\mathbf{h}_2) und (\mathbf{h}_3) liegt der Sobolevsche Einbettungssatz (Satz I.1.5) zugrunde.

Da wir davon ausgehen, daß (1.15) erfüllt ist, erhalten wir mit (\mathbf{h}_2) :
 $qy \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Aus (1.16) folgt dann $y_{tt} - \Delta y \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Damit gilt insgesamt $y \in X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega))$ und somit (Satz I.1.4) $y \in C(0, T; V)$ und $y_t \in C(0, T; L^2(\Omega))$. Die Bedingung (1.17) (bzw. (1.18)) gilt dann in V (bzw. $L^2(\Omega)$).

Im Falle der homogenen Neumann-Randbedingung ist (1.16) in der folgenden variationennellen Formulierung zu interpretieren:

$$\langle y_{tt}(t), v \rangle + \langle \nabla y(t), \nabla v \rangle + \langle q(t) y(t), v \rangle = \langle w(t), v \rangle, \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega), t \in]0, T[,$$

mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in § I.1.5. Darin ist ((1.15) vorausgesetzt) die Bedingung $\frac{\partial y}{\partial n}|_{\Sigma} = 0$ enthalten, denn aufgrund der Stetigkeit von $h \rightarrow \frac{\partial h}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ von $H^1(\Omega)$ in $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ist $\frac{\partial y}{\partial n}|_{\Sigma} \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ und $v \rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y(t)}{\partial n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} d(\partial\Omega)$ ist auf $H^1(\Omega)$ linear und stetig. Die Bedingung $\frac{\partial y}{\partial n}|_{\Sigma} = 0$ taucht dann in (1.19) nur formell auf, im Gegensatz zum Dirichlet-Fall, bei dem wir $y|_{\Sigma} = 0$ als Teil von $y \in X_{-\Delta}(0, T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ (es ist dann $y \in C(0, T; H_0^1(\Omega))$) verstehen.

In beiden Fällen ist die Gleichung (1.16) immer im distributionnellen Sinne erfüllt.

I.2.1.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz I.2.1

- Unter der Hypothese (\mathbf{h}_2) besitzt \mathbf{P}_D eine Lösung $y \in X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega))$ und die Abbildung $\{w, y^0, y^1\} \rightarrow y$ von $L^2(Q) \times V \times L^2(\Omega)$ in $X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega))$ ist linear und beschränkt. Anders gesagt, es existiert eine Konstante $C > 0$ so, daß

$$\|y\|_{X_{-\Delta}} \leq C \left(\|y^0\|_V^2 + \|y^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.20)$$

- Gilt außerdem (\mathbf{h}_3) , so ist die Lösung eindeutig.

Beweis

Wir benutzen die Faedo-Galerkin-Methode. Dazu bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ weiterhin sowohl das Dualitätsprodukt zwischen V und V^* als auch das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$. Wie schon in Bemerkung I.1.2 erwähnt, steht hier $-\langle \Delta y(t), v \rangle$ für $\langle \nabla y, \nabla v \rangle$ im Falle $V = H^1(\Omega)$.

① *A priori-Abschätzung*

(1.16) ist äquivalent zu

$$\langle y_{tt}(t), v \rangle - \langle \Delta y(t), v \rangle + \langle q(t) y(t), v \rangle = \langle w(t), v \rangle \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } t \in]0, T[.$$

Wir setzen formal $v = y_t(t)$ und erhalten

$$\frac{d}{dt} (\|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \langle \Delta y(t), y(t) \rangle) = 2(\langle w(t), y_t(t) \rangle - \langle q(t) y(t), y_t(t) \rangle).$$

Eine Integration von 0 bis t liefert:

$$\begin{aligned} \|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \langle \Delta y(t), y(t) \rangle &= \|y^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle \Delta y^0, y^0 \rangle + 2 \int_0^t \langle w(t), y_t(t) \rangle dt \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle q(t) y(t), y_t(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Nun haben wir

$$2 \int_0^t \langle w(t), y_t(t) \rangle dt \leq \int_0^T \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

und

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \langle q(t) y(t), y_t(t) \rangle dt \\ \leq C_0 \|q\|_{L^\infty(L^p(\Omega))} \int_0^T (\|y(t)\|_V^2 + \|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt. \end{aligned}$$

Wir haben hier den Sobolevschen Einbettungssatz benutzt.

Es gilt zum Beispiel für $N \geq 3$:

$$\begin{aligned} \|q y\|_{L^2(\Omega)} \|y_t\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|q\|_{L^{2s'}(\Omega)} \|y\|_{L^{2s}(\Omega)} \|y_t\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{mit } \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = 1 \\ &\leq \|q\|_{L^{2s'}(\Omega)} (\|y\|_V^2 + \|y_t\|_{L^2(\Omega)}^2), \end{aligned} \quad (1.21)$$

mit $s = \frac{N}{N-2}$ gesetzt und damit $\frac{1}{s'} + \frac{N-2}{N} = 1$. Wir haben dann $2s' = N$.

Wie wir in Bemerkung I.1.2 schon erwähnt haben ist hier (\mathbf{h}_1) erfüllt. Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} \|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y(t)\|_V^2 &\leq \|y^0\|_V^2 + \|y^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C_1 \int_0^T (\|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y(t)\|_V^2) dt. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt daraus

$$\|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y(t)\|_V^2 \leq C_2 \left(\|y^0\|_V^2 + \|y^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \quad (1.22)$$

② Existenz

Sei $\{\omega_i\}_{i=1,2,\dots}$ eine Basis von V . Wir definieren eine Näherungslösung von P_D durch $y^k(t) = \sum_{i=1}^k h^{k_i}(t)\omega_i$, wobei wir die h^{k_i} so wählen, daß

$$\langle y_{tt}^k(t), \omega_i \rangle - \langle \Delta y^k(t), \omega_i \rangle + \langle q(t) y^k(t), \omega_i \rangle = \langle \omega(t), \omega_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (1.23)$$

$$h^{k_i}(0) = \alpha^{k_i}, \quad h_t^{k_i}(0) = \beta^{k_i},$$

mit

$$\sum_{i=1}^k \alpha^{k_i} \omega_i = y^k(0) \longrightarrow y^0 \quad \text{in } V; \quad \text{für } k \longrightarrow +\infty, \quad (1.24)$$

und

$$\sum_{i=1}^k \beta^{k_i} \omega_i = y_t^k(0) \longrightarrow y^1 \quad \text{in } L^2(\Omega); \quad \text{für } k \longrightarrow +\infty.$$

Damit ist ein System von k gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der ω_i besitzt dieses eine eindeutige Lösung. Aus (1.23) folgt

$$\langle y_{tt}^k(t), y_t^k(t) \rangle - \langle \Delta y^k(t), y_t^k(t) \rangle + \langle q(t) y^k(t), y_t(t) \rangle = \langle \omega(t), y_t^k(t) \rangle.$$

Eine analoge Abschätzung wie im ersten Teil des Beweises liefert (unabhängig von k)

$$\|y^k(t)\|_V + \|y_t^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (1.25)$$

Damit ist y^k (bzw. y_t^k) in $L^\infty(0, T; V)$ (bzw. $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$) gleichmäßig beschränkt.

Es existiert dann eine Teilfolge $\{y^m\}$ und $h \in L^\infty(0, T; V)$ mit

$$y^m \rightharpoonup h \text{ in } L^\infty(0, T; V) \text{ schwach-stern.} \quad (1.26)$$

Das heißt

$$\int_0^T \langle y^m(t), \psi(t) \rangle \rightarrow \int_0^T \langle h(t), \psi(t) \rangle; \text{ für alle } \psi \in L^1(0, T; V^*).$$

Es ist $(L^1(0, T; V^*))^* = L^\infty(0, T; V)$.

Ebenso gilt

$$y_t^m \rightharpoonup g \text{ in } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ schwach-stern.} \quad (1.27)$$

Es ist $g = h_t$, denn:

Aus (1.26) folgt $y^m \rightharpoonup h$ in $\mathcal{D}'(0, T; V)$ und damit auch in $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ (wir haben $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$). Mit (1.27) gilt $y_t^m \rightharpoonup g$ in $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$. Wegen der Eindeutigkeit des schwachen Limes erhalten wir $g = h_t$.

Insbesondere folgt aus (1.25), (1.26) und (1.27)

$$h \in W(0, T; V, L^2(\Omega)) \text{ und } y^m \rightharpoonup h \text{ in } W(0, T; V, L^2(\Omega)). \quad (1.28)$$

Als nächstes werden wir sehen, daß h eine Lösung von P_D ist:

Es seien $\theta \in L^2(\Omega)$ beliebig fest und $l \in W(0, T; V, L^2(\Omega))$. Nach (1.1) ist $l \in C(0, T; L^2(\Omega))$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \langle l(0), \theta \rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \|l(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_3 \|l\|_{W(0, T; V, L^2(\Omega))} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Abbildung $l \mapsto \langle l(0), \theta \rangle$ von $W(0, T; V, L^2(\Omega))$ in \mathbb{R} ist linear und stetig. $y^m \rightharpoonup h$ in $W(0, T; V, L^2(\Omega))$ impliziert dann $\langle y^m(0), \theta \rangle \rightarrow \langle h(0), \theta \rangle$ für alle $\theta \in L^2(\Omega)$. Anders gesagt $y^m(0) \rightharpoonup h(0)$ in $L^2(\Omega)$. Wir erhalten dann mit (1.24),

$$h(0) = y^0.$$

Es sei nun $\varphi^i(t) = \varphi(t) \omega_i$, für ein $\varphi \in C^1(0, T)$ mit $\varphi(T) = 0$. Wir wählen $k = m$, und erhalten aus (1.23) nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\langle -y_t^m(t), \varphi_t^i(t) \rangle - \langle \Delta y^m(t), \varphi^i(t) \rangle + \langle q(t) y^m(t), \varphi^i(t) \rangle \right) dt \\ = \int_0^T \langle \omega(t), \varphi^i(t) \rangle dt + \langle h_t^m(0), \omega_i \rangle \varphi(0). \end{aligned}$$

Durch Limesübergang folgt daraus

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\langle -h_t(t), \omega_i \rangle \varphi_t(t) - \langle \Delta h(t), \omega_i \rangle \varphi(t) + \langle q(t) h(t), \omega_i \rangle \varphi(t) \right) dt \\ = \int_0^T \langle \omega(t), \omega_i \rangle \varphi(t) dt + \langle y^1, \omega_i \rangle \varphi(0). \end{aligned}$$

Wählt man hier $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, so erhält man

$$\langle h_{tt}(t), \omega_i \rangle - \langle \Delta h(t), \omega_i \rangle + \langle q(t) h(t), \omega_i \rangle = \langle \omega, \omega_i \rangle \quad \text{für alle } i.$$

Das heißt

$$h_{tt} - \Delta h + qh = \omega. \quad (1.29)$$

Aus (1.29) folgt $h \in X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega))$. Eine innere Produktbildung von (1.29) mit $\varphi(t) \omega_i$ liefert

$$\langle h_t(0), \omega_i \rangle \varphi(0) = \langle y^1, \omega_i \rangle \varphi(0), \quad \text{für alle } i,$$

und damit

$$h_t(0) = y^1.$$

③ Stetigkeit

Die in (1.22) erhaltene Abschätzung liefert für die Lösung h

$$\|h\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|h_t\|_{L^2(Q)}^2 \leq C_2' \left(\|y^0\|_V^2 + \|y^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \quad (1.30)$$

Wegen (1.29) haben wir außerdem

$$\begin{aligned} \|h_{tt} - \Delta h\|_{L^2(Q)} &\leq \|w\|_{L^2(Q)} + \|q h\|_{L^2(Q)}, \\ &\leq C_4 \left(\|w\|_{L^2(Q)} + \|q\|_{L^\infty(0, T; L^p(\Omega))} \|h\|_{L^2(0, T; V)} \right), \quad p \text{ wie in } (\mathbf{h}_2), \\ &\leq C_5 \left(\|w\|_{L^2(Q)} + \|h\|_{L^2(0, T; V)} \right). \end{aligned}$$

Dies, kombiniert mit (1.30), ergibt

$$\|h_{tt} - \Delta h\|_{L^2(Q)}^2 \leq C_6 \left(\|y^0\|_V^2 + \|y^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \quad (1.31)$$

Aus (1.30) und (1.31) folgt

$$\|h\|_{X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega))} \leq C_7 \left(\|y^0\|_V^2 + \|y^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}.$$

④ *Eindeutigkeit*

Auch hier benutzen wir eine für hyperbolische Probleme übliche Vorgehensweise. Es sei y eine Lösung von P_D mit $y^0 = y^1 = 0$ und $\omega = 0$. Zu zeigen ist, daß $y = 0$.

Es sei $a \in]0, T[$ beliebig. Wir setzen

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\int_t^a y(\sigma) d\sigma & , \quad t < a \\ 0 & , \quad t \geq a. \end{cases}$$

Dann ist

$$\varphi_t(t) = \begin{cases} y(t) & , \quad t < a \\ 0 & , \quad t \geq a. \end{cases}$$

Eine innere Produktbildung von (1.16) mit $\varphi(t)$ für $w = 0$ liefert

$$\int_0^a \frac{d}{dt} (\|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \langle \Delta \varphi(t), \varphi(t) \rangle) dt = -2 \int_0^a \langle q(t) \varphi_t(t), \varphi(t) \rangle dt.$$

Setzt man $r = \text{Min}\{p, s\}$, p und s wie in **(h₂)** und **(h₃)**, so gilt unter den zwei letztgenannten Bedingungen: $q \in \{\eta \in L^2(0, T; L^r(\Omega)) : \eta_t \in L^2(0, T; L^r(\Omega))\}$. Letzterer Raum ist in $C(0, T; L^r(\Omega))$ stetig eingebettet [17]. $q(0)$ ist somit wohldefiniert und es gilt $q(0) \in L^r(\Omega)$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^a \langle q(t) \varphi_t(t), \varphi(t) \rangle dt \\ & = \int_0^a \langle q_t(t) \varphi(t), \varphi(t) \rangle dt - \int_0^a \frac{d}{dt} \langle q(t) \varphi(t), \varphi(t) \rangle dt \\ & \leq k_1 \|q_t\|_{L^\infty(L^s(\Omega))} \int_0^a \|\varphi(t)\|_V^2 dt + \langle q(0) \varphi(0), \varphi(0) \rangle, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle q(0) \varphi(0), \varphi(0) \rangle & \leq \|q(0)\|_{L^r} \|\varphi(0)\|_V \|\varphi(0)\|_{L^2} \\ & \leq \frac{1}{8} \|\varphi(0)\|_V^2 + 2 \|q(0)\|_{L^r}^2 \|\varphi(0)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir durch Anwendung von **(h₁)**

$$\|y(a)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{7}{8} \|\varphi(0)\|_V^2 \leq k_2 \left[\int_0^a \|\varphi(t)\|_V^2 dt + \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

und damit

$$\|y(a)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi(0)\|_V^2 \leq k_3 \left[\int_0^a \|\varphi(t)\|_V^2 dt + \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Setzt man

$$\psi(t) = \int_0^t y(s) ds,$$

so können wir schreiben

$$\|y(a)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi(a)\|_V^2 \leq k_2 \left[\int_0^a \|\psi(t) - \psi(a)\|_V^2 dt + \|\psi(a)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

das heißt

$$(1 - 2k_2 a) \|\psi(a)\|_V^2 + \|y(a)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k_3 \int_0^a (\|\psi(t)\|_V^2 + \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt.$$

Es ist dann

$$\|\psi(a)\|_V^2 + \|y(a)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k_4 \int_0^a (\|\psi(t)\|_V^2 + \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt.$$

für alle a mit $a \leq a_0$, wobei a_0 so gewählt wird, daß $1 - 2k_2 a_0 > 0$. Das Gronwall-Lemma liefert $y = 0$ auf $[0, a_0]$. Dies kann analog sukzessive auf den Intervallen $[a_0, 2a_0]$, $[2a_0, 3a_0]$ usw.. erreicht werden. Man erhält $y = 0$ auf $[0, T]$.

Q.E.D

Als nächstes wollen wir die Idee der Lösung durch Transposition von \mathbf{P}_D erläutern. Dadurch wird eine "sehr schwache Lösung" für das Problem definiert.

V und q seien weiterhin wie in § I.2.1.1 definiert. Wir setzen

$$X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega)) = \{\varphi \in X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega)) : \varphi(\cdot, T) = \varphi_t(\cdot, T) = 0\}.$$

Damit ist ein Raum definiert, der mit der von $X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega))$ induzierten Topologie ein Hilbertraum ist. Durch Zeitinvertierung ($t := T - t$) in \mathbf{P}_D wissen wir mit Satz I.2.1, daß unter den Hypothesen (\mathbf{h}_2) und (\mathbf{h}_3) Folgendes gilt.

$$\partial_{tt} - \Delta + q : X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega)) \longrightarrow L^2(Q) \text{ ist isomorph.} \quad (1.32)$$

Für $\Gamma \in X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega))^*$ gegeben, ist dann $\Gamma (\partial_{tt} - \Delta + q)^{-1}$ eine stetige lineare Form auf $L^2(Q)$. Somit existiert nach dem Satz von Riesz genau ein $\bar{y} \in L^2(Q)$ mit

$$\Gamma (\partial_{tt} - \Delta + q)^{-1} \psi = \langle \bar{y}, \psi \rangle_{L^2(Q)}, \quad \text{für alle } \psi \in L^2(Q).$$

Wegen (1.32) ist dies äquivalent zu

$$\Gamma(\varphi) = \langle \bar{y}, (\partial_{tt} - \Delta + q)\varphi \rangle_{L^2(Q)}, \quad \text{für alle } \varphi \in X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega)).$$

Wir haben dann:

Satz I.2.2

Es sei $\Gamma \in X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega))^*$ und es seien (\mathbf{h}_2) und (\mathbf{h}_3) erfüllt. Dann existiert genau ein $\bar{y} \in L^2(Q)$ so, daß

$$\langle \bar{y}, \varphi_{tt} - \Delta\varphi + q\varphi \rangle_{L^2(Q)} = \Gamma(\varphi), \quad \text{für alle } \varphi \in X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega)). \quad (1.33)$$

Wir können nun einen Zusammenhang zwischen \bar{y} aus (1.33) und der Lösung y von \mathbf{P}_D erstellen.

Weil y Lösung von \mathbf{P}_D sein soll, gilt $y \in X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega))$. Wir haben also $y_t \in L^2(0, T; H)$ und $y_{tt} \in L^2(0, T; V^*)$. Für $\varphi \in X_{-\Delta}(0, T; V, L^2(\Omega))$ beliebig gegeben, gilt auch $\varphi_t \in L^2(0, T; H)$ und wegen Satz I.1.4 $\varphi \in C(0, T; V)$. Wir erhalten dann mit Lemma I.1.2 :

$$\int_0^T \langle y_{tt}(t), \varphi(t) \rangle dt + \int_0^T \langle y_t(t), \varphi_t(t) \rangle dt = \langle y_t(T), \varphi(T) \rangle - \langle y_t(0), \varphi(0) \rangle,$$

mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie im § I.1.2. Wir können y und φ vertauschen und haben dann auch

$$\int_0^T \langle \varphi_{tt}(t), y(t) \rangle dt + \int_0^T \langle \varphi_t(t), y_t(t) \rangle dt = \langle \varphi_t(T), y(T) \rangle - \langle \varphi_t(0), y(0) \rangle.$$

Für $\varphi \in X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega))$ erhalten wir insgesamt

$$\int_0^T \langle y_{tt}(t), \varphi(t) \rangle dt = \langle y(\cdot, 0), \varphi_t(\cdot, 0) \rangle - \langle y_t(\cdot, 0), \varphi(\cdot, 0) \rangle + \int_0^T \langle y(t), \varphi_{tt}(t) \rangle dt.$$

Zusammen mit der Symmetrie (siehe (\mathbf{h}_1)) des Operators $-\Delta$ gilt dann für die Lösung y von \mathbf{P}_D

$$\langle y, \varphi_{tt} - \Delta\varphi + q\varphi \rangle_{L^2(Q)} = \Gamma(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega)),$$

mit

$$\Gamma(\varphi) = \int_0^T \langle w(t), \varphi(t) \rangle dt + \langle y^1, \varphi(\cdot, 0) \rangle - \langle y^0, \varphi_t(\cdot, 0) \rangle.$$

Da $X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega)) \hookrightarrow C(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$, $w \in L^2(Q)$, $y^0 \in V$ und $y^1 \in L^2(\Omega)$ ist es klar, daß die soeben definierte Abbildung Γ eine stetige lineare Form

auf $X_{-\Delta, T}(0, T; V, L^2(\Omega))$ darstellt.

Wir wollen das als Folgerung von Satz I.2.2 festhalten.

Folgerung I.2.1

Es seien w , y^0 und y^1 wie in \mathbf{P}_D definiert und es gelten (\mathbf{h}_2) und (\mathbf{h}_3) . Dann erfüllt die Lösung von \mathbf{P}_D die Gleichung (1.33) für

$$\Gamma(\varphi) = \int_0^T \langle w(t), \varphi(t) \rangle dt + \langle y^1, \varphi(\cdot, 0) \rangle - \langle y^0, \varphi_t(\cdot, 0) \rangle.$$

Die durch (1.33) definierte Lösung \bar{y} mit Γ wie soeben dargestellt, ist die sogenannte "Lösung von \mathbf{P}_D durch Transposition".

I.2.1.3 Regularität

Der folgende Regularitätssatz liegt einigen Ergebnissen der nächsten Kapitel zugrunde.

Satz I.2.3 [18], S. 103

Es seien V wie in (1.19), $q \equiv 0$, $y^0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $y^1 \in V$ und $\omega \in H^{0,1}(Q)$. Dann besitzt das Problem definiert durch (1.16) – (1.19) eine eindeutige Lösung y mit $y \in L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega))$, $y_t \in L^2(0, T; V)$ und $y_{tt} \in L^2(Q)$.

I.2.2 Das inhomogene Dirichlet-Problem

Wir definieren hier ein nicht homogenes Problem vom Dirichlet-Typ und beweisen einen Existenzsatz dazu.

I.2.2.1 Problemstellung

Wir suchen

$$\widetilde{P}_D : \quad y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) , \quad y_t \in L^2(Q)$$

mit

$$y_{tt} - \Delta y + qy = \omega \quad \text{auf } Q, \quad (1.34)$$

$$y|_{\Sigma} = g,$$

$$\left. \begin{array}{l} y(\cdot, 0) = y^0 \\ y_t(\cdot, 0) = y^1 \end{array} \right\} \text{auf } \Omega,$$

wobei $\omega \in L^2(Q)$, $y^0 \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, $y^1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ und $g \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(\Sigma)$.

Wir setzen (\mathbf{h}_2) (S. 25) und

$$(\mathbf{K}_D) \quad : \quad \begin{array}{l} g(\cdot, 0) = y^0|_{\partial\Omega} \\ g_t(\cdot, 0) = y^1|_{\partial\Omega} \end{array}$$

voraus.

Wenn (\mathbf{h}_2) und $y \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ gelten, kann man genauso wie in Bemerkung I.2.1 mit $V = H^1(\Omega)$ und Benutzung von (1.34) zeigen, daß $y \in C(0, T; H^1(\Omega))$ und $y_t \in C(0, T; L^2(\Omega))$. Dies rechtfertigt die Anfangsbedingungen.

Weil $X_{-\Delta}(0, T; H^1(\Omega), L^2(\Omega)) \hookrightarrow H^{1,1}(Q)$, haben wir wegen Satz I.1.2 $y|_{\Sigma} \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$. Die Randbedingung ist somit wohl definiert.

(\mathbf{K}_D) gibt die (lokalen) Kompatibilitätsbedingungen an. Hinzu kommt die sogenannte globale Kompatibilitätsbedingung ([18], S. 113):

$$(\mathbf{K}_{gl}) \quad : \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |y^1(x', \sigma^2) - g_t(x', \sigma^2)|^2 dx' \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty,$$

die unter der Annahme formuliert wird, daß

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)\}. \quad (1.35)$$

Die Zurückführung auf den Fall (1.35) geht mit Hilfe von lokalen Karten (C^∞ -Atlas) und Partition der Einheit ([18], S. 19; Vgl. auch mit [17], S. 39) und ist möglich, wenn zum Beispiel Ω beschränkt und $\partial\Omega$ von der Klasse C^∞ ([17], S. 39) ist.

(\mathbf{K}_D) und (\mathbf{K}_{gl}) garantieren ([18], S. 21), daß ein $p \in H^{2,2}(Q)$ mit

$$p|_{\Sigma} = g, \quad p(\cdot, 0) = y^0 \quad \text{und} \quad p_t(\cdot, 0) = y^1 \quad (1.36)$$

gefunden werden kann. Dieses versetzt uns in die Lage, \widetilde{P}_D homogenisieren zu können und dient damit zum Beweis des nächsten Satzes.

I.2.2.2 Existenz- und Eindeigkeitssatz

Satz I.2.4

- Falls (\mathbf{h}_2) , (\mathbf{K}_D) und (\mathbf{K}_{g1}) gelten, dann besitzt \widetilde{P}_D eine Lösung $y \in X_{-\Delta}(0, T; H^1(\Omega), L^2(\Omega))$ und die Abbildung $(\omega, g, y^0, y^1) \mapsto y$ von $L^2(Q) \times H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(\Sigma) \times H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ in $X_{-\Delta}(0, T; H^1(\Omega), L^2(\Omega))$ ist linear und stetig.
- Gilt außerdem (\mathbf{h}_3) , so ist die Lösung eindeutig.

Beweis

Setzt man $\phi = y - p$, mit p wie in (1.36), so ist \widetilde{P}_D äquivalent zu

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \Delta\phi + q\phi &= \omega - (p_{tt} - \Delta p + qp) \quad (\in L^2(Q)), \\ \phi(\cdot, 0) &= 0, \\ \phi_t(\cdot, 0) &= 0, \\ \phi|_{\Sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz I.2.1 erhalten wir daraus die Existenz und Eindeigkeit der Lösung.

Wir werden nun sehen, daß hier sogar die Lipschitzstetigkeit vorliegt.

Wir bezeichnen mit τ die im Satz beschriebene Abbildung und betrachten

$s = (\omega, g, y^0, y^1)$, $\bar{s} = (\bar{\omega}, \bar{g}, \bar{y}^0, \bar{y}^1) \in L^2(Q) \times H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(\Sigma) \times H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ und $y, \bar{y} \in X_{-\Delta}(0, T; H^1(\Omega), L^2(\Omega))$ mit $\tau((\omega, g, y^0, y^1)) = y$ und $\tau((\bar{\omega}, \bar{g}, \bar{y}^0, \bar{y}^1)) = \bar{y}$. Wir setzen $z = y - \bar{y} = \tau(s - \bar{s})$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \partial_{tt}z - \Delta z + qz &= \omega - \bar{\omega}, \\ z|_{\Sigma} &= g - \bar{g}, \\ z(\cdot, 0) &= y^0 - \bar{y}^0, \\ \partial_t z(\cdot, 0) &= y^1 - \bar{y}^1. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Durch innere Produktbildung von (1.37) mit $\partial_t z_n$ und ähnliche Abschätzung, wie auf Seite 28 erhalten wir

$$\|\partial_t z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_0 \left(\|y^0 - \bar{y}^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|y^1 - \bar{y}^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\omega - \bar{\omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \quad (1.38)$$

Wir haben auch wegen (1.37)

$$\|\partial_{tt} z - \Delta z\|_{L^2(Q)} \leq C_1 \left(\|\omega - \bar{\omega}\|_{L^2(Q)} + \|z\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \right).$$

Dies zusammen mit (1.38) liefert

$$\|\partial_{tt} z - \Delta z\|_{L^2(Q)}^2 \leq C_2 \left(\|y^0 - \bar{y}^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|y^1 - \bar{y}^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\omega(t) - \bar{\omega}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \quad (1.39)$$

Mit (1.38) und (1.39) gilt dann

$$\|z\|_{X_{-\Delta}(0,T;H^1(\Omega),L^2(\Omega))} \leq C_3 \left(\|y^0 - \bar{y}^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|y^1 - \bar{y}^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\omega(t) - \bar{\omega}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}$$

und damit die Lipschitzstetigkeit von τ .

Q.E.D

Kapitel II

Verteilte Kontrolle

Wir studieren in diesem Kapitel Dirichlet-Probleme mit verteilten Kontrollen. Wir werden generell mit y die Zustandsvariable und mit u die Kontrollvariable bezeichnen. Wir setzen

$$X^v(0, T) = X_{-\Delta}(0, T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)).$$

Ab jetzt steht Ω für ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ mit einem hinreichend glatten Rand $\partial\Omega$. Falls nichts anders spezifiziert, werden wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowohl das Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$ als auch das Dualitätsprodukt zwischen $H_0^1(\Omega)$ und $H^{-1}(\Omega)$ bezeichnen.

II.1 Problemstellung

Es sei f eine nicht notwendig lineare Funktion mit

\mathbf{H}_0^V : f bildet $X^v(0, T)$ in $L^2(Q)$ ab.

Wir machen Gebrauch von dem Regularisierungsoperator $(-\Delta)^{-1}$ (mehr dazu unten) und definieren die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} e &= (e_1, e_2, e_3) & : & \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{F}, \\ e_1(y, u) & & = & (-\Delta)^{-1}[y_{tt} - \Delta y + f(y) - Bu], \\ e_2(y, u) & & = & y(\cdot, 0) - y^0, \\ e_3(y, u) & & = & y_t(\cdot, 0) - y^1, \end{aligned}$$

mit $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $Z = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\mathcal{A} = X^v(0, T) \times L^2(Q)$,
 $B \in \mathcal{L}(L^2(Q), L^2(Q))$ und $\mathcal{F} = L^2(0, T; Z) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Gelegentlich werden wir $x = (y, u)$ setzen. Ein zulässiges Paar (y, u) ist eines, welches

$$\mathbf{P}_0^V : \quad e(y, u) = 0$$

erfüllt.

\mathbf{P}_0^V ist sinnvoll gestellt:

Wir benutzen hier die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (= \sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}), \\ \langle \varphi, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)} &= \langle \varphi, (-\Delta)^{-1} \psi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \\ \langle \varphi, \psi \rangle_Z &= \langle \Delta \varphi, \Delta \psi \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Letzteres definiert (unter den angegebenen Voraussetzungen über $\partial\Omega$) eine Norm, die zu der von $H^2(\Omega)$ induzierten Norm äquivalent ist [4]. Von Bedeutung ist hier, daß

$$\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) \cap \mathcal{L}(Z, L^2(\Omega)) \cap \mathcal{L}(L^2(\Omega), Z^*)$$

und jeweils isomorph ist (wohl bemerkt, der Laplace Operator für das Dirichletproblem). Im Falle $\mathcal{L}(Z, L^2(\Omega))$ haben wir sogar mit einem isometrischen Isomorphismus zu tun. Der Satz I.1.4 rechtfertigt e_2 und e_3 . Damit ist der Operator e sinnvoll definiert.

Es seien nun \mathcal{H} ein gegebener Hilbertraum, $y_d \in \mathcal{H}$ und $C \in \mathcal{L}(X^v(0, T), \mathcal{H})$. Wir definieren

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \|Cy - y_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\beta}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2; \quad \beta \geq 0$$

Unser Kontrollproblem lautet

$$\mathbf{P}_1^V : \quad \begin{aligned} &\text{Min } J(y, u) \\ &e(y, u) = 0 \end{aligned}$$

Für numerische Zwecke (Kapitel V) werden wir auch, wenn es notwendig sein wird,

auf den Fall eingehen, in welchem wir y als abhängig von u auffassen ($y = y(u)$). Dies führt uns zu folgendem verwandten Problem.

$$\mathbf{p}^V : \quad \text{Min } j(u) ; \quad u \in L^2(Q).$$

Wobei $j(u) = J(x)$, $e(x) = 0$ mit $x = (y(u), u)$.

Wir setzen voraus

\mathbf{H}_1^V : Für jedes $u \in L^2(Q)$, es existiert ein eindeutiges $y \in X^v(0, T)$, so daß (y, u) Lösung von \mathbf{P}_0^V ist.

In Bemerkung II.2.1 werden wir einige Beispiele von Funktionen f angeben, für die \mathbf{H}_1^V erfüllt ist.

II.2 Existenz von Lösungen

Wir wollen hier zwei Existenzsätze für \mathbf{P}_1^V beweisen. Dafür brauchen wir:

\mathbf{H}_2^V : Falls $\{y^n\}$ Elemente in $X^v(0, T)$ sind und in $H_0^{1,1}(Q)$ schwach konvergieren mit Grenzwert y , so ist auch $f(y^n)$ schwach konvergent in $L^2(Q)$ mit Grenzwert $f(y)$.

\mathbf{H}_3^V : f führt beschränkte Folgen aus \mathcal{H} in beschränkte Folgen von $L^2(Q)$ über.

Anhand von Nichtlinearitäten polynomialer (y^k) und exponentialer Form (e^y) zeigen wir am Ende des Abschnitts, daß \mathbf{H}_2^V und \mathbf{H}_3^V erfüllt werden können.

Satz II.2.1

Es gelten die Bedingungen \mathbf{H}_0^V , \mathbf{H}_1^V und \mathbf{H}_2^V . Es sei außerdem $X^v(0, T) \hookrightarrow \mathcal{H}$, $\mathcal{H} \hookrightarrow H_0^{1,1}(Q)$ und C der Einbettungsoperator von $X^v(0, T)$ in \mathcal{H} . Dann besitzt \mathbf{P}_1^V für jedes $\beta > 0$ eine Lösung.

Beweis

Es sei $\{y^n, u^n\}$ eine zulässige Minimalfolge von \mathbf{P}_1^V . Wegen $J(y^n, u^n) < \infty$, haben wir

$$\|y^n\|_{\mathcal{H}} + \|u^n\|_{L^2(Q)} < \infty.$$

Mit $\mathcal{H} \hookrightarrow H_0^{1,1}(Q)$ folgt daraus

$$\|u^n\|_{L^2(Q)} + \|y^n\|_{L^2(H_0^1(\Omega))} + \|y_t^n\|_{L^2(Q)} < \infty.$$

Es existieren dann Teilfolgen y^n , y_t^n und u^n (genauso bezeichnet) und $(y^*, z, u^*) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^2(Q) \times L^2(Q)$, so daß:

$$\left. \begin{array}{l} y^n \rightharpoonup y^* \\ y_t^n \rightharpoonup z \\ u^n \rightharpoonup u^* \\ B u^n \rightharpoonup B u^* \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{in } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad n \longrightarrow \infty, \\ \\ \\ \text{in } L^2(Q), \quad n \longrightarrow \infty, \end{array}$$

und

$$\Delta y^n \rightharpoonup \Delta y^* \quad \text{in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad n \longrightarrow \infty.$$

Hierbei ist $z = y_t^*$, denn: Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ und $w \in H_0^1(\Omega)$. Wir haben

$$\int_0^T \langle \varphi_t(t) \cdot w, y^n(t) \rangle dt = - \int_0^T \langle \varphi(t) \cdot w, y_t^n(t) \rangle dt.$$

Ein Limesübergang liefert

$$\int_0^T \langle \varphi_t(t) \cdot w, y^*(t) \rangle dt = - \int_0^T \langle \varphi(t) \cdot w, z(t) \rangle dt.$$

Das heißt $z = y_t^*$. Damit haben wir $y^* \in H_0^{1,1}(Q)$ und $y^n \rightharpoonup y^*$ in $H_0^{1,1}(Q)$, wenn $n \longrightarrow \infty$. Nach unserer Voraussetzung gilt dann

$$f(y^n) \rightharpoonup f(y^*) \quad \text{in } L^2(Q), \quad n \longrightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Zulässigkeit von (y^*, u^*)

Wir wählen $\varphi \in C^1(0, T)$ mit $\varphi(T) = 0$, bilden das innere Produkt von $e_1(y^n, u^n) = 0$ mit $\varphi(t) \cdot \omega$, $\omega \in H_0^1(\Omega)$ und wenden die partielle Integration an. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle -y_t^n, \omega \rangle \varphi_t(t) dt + \int_0^T \langle -\Delta y^n(t), \omega \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle f(y^n)(t), \omega \rangle \varphi(t) dt \\ & = \int_0^T \langle B u^n(t), \omega \rangle \varphi(t) dt - \langle y^1, \omega \rangle \varphi(0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Wegen (2.1) können wir in (2.2) zum Limes übergehen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle -y_t^*, \omega \rangle \varphi_t(t) dt + \int_0^T \langle -\Delta y^*(t), \omega \rangle \varphi(t) dt \\ & + \int_0^T \langle f(y^*)(t), \omega \rangle \varphi(t) dt = \int_0^T \langle B u^*(t), \omega \rangle \varphi(t) dt - \langle y^1, \omega \rangle \varphi(0). \end{aligned}$$

Verlangen wir $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$, so folgt daraus durch partielle Integration

$$y_{tt}^* - \Delta y^* + f(y^*) = B u^*. \quad (2.3)$$

oder

$$(-\Delta)^{-1}[y_{tt}^* - \Delta y^* + f(y^*) - B u^*] = 0.$$

Als Nächstes wollen wir feststellen, daß $y^*(0) = y^0$:

Wir wählen $l \in H_0^{1,1}(Q)$ beliebig. Durch Benutzung von (1.1) und der Tatsache, daß $H_0^{1,1}(Q) \hookrightarrow W(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$, ist dann:

$$\begin{aligned} |\langle l(0), \theta \rangle| & \leq \|l(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}, \\ & \leq \|l\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}, \\ & \leq C \|l\|_{H_0^{1,1}(Q)} \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \theta \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Das heißt $l \mapsto \langle l(0), \theta \rangle$ ist linear und beschränkt von $H_0^{1,1}(Q)$ in \mathbb{R} . Aus $y^n \rightharpoonup y^*$ in $H_0^{1,1}(Q)$, $n \rightarrow \infty$ folgt dann $\langle y^n(0), \theta \rangle \rightarrow \langle y^*(0), \theta \rangle$, $n \rightarrow \infty$ für alle $\theta \in H_0^1(\Omega)$. Das heißt $y^n(0) \rightharpoonup y^*(0)$, $n \rightarrow \infty$. Wegen der Eindeutigkeit des schwachen Limes (es ist $y^n(0) = y^0$ für alle n) erhalten wir $y^*(0) = y^0$.

Wir können wieder das innere Produkt von (2.3) mit $\varphi(t) \cdot \omega$, $\varphi \in C^1(0, T)$ mit $\varphi(T) = 0$ bilden und partiell integrieren. Ein Vergleich mit (2.2) liefert

$$\langle y_t^*(0), \omega \rangle = \langle y^1, \omega \rangle, \quad \text{das heißt}$$

$$y_t^*(0) = y^1.$$

Damit ist (y^*, u^*) zulässig.

(y^*, u^*) ist Lösung

J ist als stetige konvexe Funktion schwach unterhalb-stetig. Wir setzen $J^* = \inf_{e(y,u)=0} J(y, u)$.

Es ist dann

$$J^* \leq J(y^*, u^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(y^n, u^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(y^n, u^n) = J^*.$$

Damit ist $J(y^*, u^*) = J^*$ und (y^*, u^*) Lösung von \mathbf{P}_1^V .

Q.E.D

Die Voraussetzung $\mathcal{H} \hookrightarrow H_0^{1,1}(Q)$ im letzten Satz dient zum Beschränken der Zustandsvariablen y (im Raum $H_0^{1,1}(Q)$). Im nächsten Satz stellt sich heraus, daß diese Forderung überflüssig ist, wenn zusätzlich \mathbf{H}_3^V verlangt wird.

Satz II.2.2

Es sei wieder $X^v(0, T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ und C der zugehörige Einbettungsoperator. Es gelten außerdem \mathbf{H}_i^V , $i = 0, 1, 2, 3$; so besitzt \mathbf{P}_1^V für jedes $\beta > 0$ eine Lösung.

Beweis

Sei $\{y^n, u^n\}$ eine Minimalfolge von \mathbf{P}_1^V . Wegen $J(y^n, u^n) < \infty$ haben wir $\|y^n\|_{\mathcal{H}} + \|u^n\|_{L^2(Q)} < \infty$. Daraus folgt $\|f(y^n)\|_{L^2(Q)} < \infty$ und $\|B u^n\|_{L^2(Q)} < \infty$.

Damit ist $y_{tt}^n - \Delta y^n = B u^n - f(y^n)$ auf $L^2(Q)$ gleichmäßig beschränkt. Wegen Satz I.3.1 ist dann

$$\|y^n\|_{L^2(H_0^1(\Omega))} + \|y_t^n\|_{L^2(Q)} < \|y^n\|_{X^v(0,T)} < \infty.$$

Man erhält insgesamt

$$\|u^n\|_{L^2(Q)} + \|y^n\|_{L^2(H_0^1(\Omega))} + \|y_t^n\|_{L^2(Q)} < \infty.$$

Der Rest verläuft wie im vorigen Beweis.

Q.E.D

Bemerkung II.2.1

- Wir entnehmen aus den Ausführungen von [15] S. 8 und S. 14, daß \mathbf{H}_1^V zum Beispiel erfüllt ist, wenn $f(y) = y^3$ mit $N \leq 3$ oder $f(y) = y^5$ mit $N \leq 2$ gilt.
- Falls f linear ist und $\mathcal{H} \hookrightarrow L^2(Q)$, so ist \mathbf{H}_3^V automatisch erfüllt.
- \mathbf{H}_2^V ist immer realisiert, wenn f linear ist.

Als Nächstes wollen wir zusätzliche Beispiele für \mathbf{H}_2^V und \mathbf{H}_3^V in Form von Lemmata geben.

Lemma II.2.1

Die Funktionen $f_1(y) = y^k$, $k \in \mathbb{N}$, $N \in \{1, 2\}$ und $f_2(y) = e^y$, $N = 1$ erfüllen \mathbf{H}_2^V .

Beweis

Es sei $\{y_n\} \subset X^v(0, T)$ mit $y_n \rightharpoonup y$ in $H_0^{1,1}(Q)$, für $n \rightarrow \infty$ ($\{y_n\}$ ist dann in $H_0^{1,1}(Q)$ und damit auch in $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ gleichmäßig beschränkt) und $\varphi \in L^2(Q)$ beliebig. Zu zeigen ist, daß $\langle \varphi, y_n^k - y^k \rangle_{L^2(Q)} \rightarrow 0$.

Weil die Menge P aller Polynome $p : [0, T] \rightarrow V$ mit Koeffizienten in V dicht in $L^2(Q)$ liegt [26] (S. 423), können wir auch hier $\varphi \in P$ wählen.

- f_1

$$\begin{aligned} \langle \varphi, y_n^k - y^k \rangle_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_{\Omega} \varphi(y_n - y) \sum_{j=0}^{k-1} y_n^{k-1-j} y^j dx dt, \\ &\leq C_0 \int_0^T \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|y_n - y\|_{L^2(\Omega)} \sum_{j=0}^{k-1} \|y_n\|_{L^{6(k-1-j)}(\Omega)}^{k-1-j} \|y\|_{L^{6j}(\Omega)}^j dt, \\ &\leq C_1 \int_0^T \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \|y_n - y\|_{L^2(\Omega)} \sum_{j=0}^{k-1} \|y_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{k-1-j} \|y\|_{H_0^1(\Omega)}^j dt. \end{aligned}$$

Wir haben hier Satz I.1.5 benutzt. Es ist klar, daß $P \subset C(0, T; H_0^1(\Omega))$. Wir erhalten mit Bemerkung I.1.3 (iii):

$$\begin{aligned} \langle \varphi, y_n^k - y^k \rangle_{L^2(Q)} &\leq C_2 \|y_n - y\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{C(0, T; H_0^1(\Omega))} \sum_{j=0}^{k-1} \|y_n\|_{L^2(H_0^1(\Omega))}^{k-1-j} \|y\|_{C(0, T; H_0^1(\Omega))}^j \\ &\rightarrow 0 ; \text{ wenn } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

- f_2

Die Behauptung folgt (bei ähnlicher Abschätzung wie oben) aus

$$e^y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \quad \text{und} \quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \quad \text{für} \quad N = 1.$$

Q.E.D

Lemma II.2.2

Seien wieder f_i , $i = 1, 2$ wie im vorigen Lemma (mit denselben Bedingungen an k und N) und $\mathcal{H} \hookrightarrow L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ (z.B. $\mathcal{H} = X^v(0, T)$), so erfüllen die Funktionen f_i , $i = 1, 2$ die Hypothese \mathbf{H}_3^V .

Beweis

Es sei $\{y_n\} \subset \mathcal{H}$ eine auf \mathcal{H} gleichmäßig beschränkte Folge. Nach Voraussetzung ist auch dann $\{y_n\}$ auf $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ gleichmäßig beschränkt.

- Die Behauptung bezüglich f_1 folgt aus

$$\begin{aligned} \|y_n^k\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^T \|y_n\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k} dt \\ &\leq C \|y_n\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^{2k}. \end{aligned}$$

- Bezüglich f_2 beruht die Behauptung darauf, daß wegen $e^y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$ und $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ für $N = 1$, die Folge $\{e^{y_n}\}$ dann auch auf $L^2(Q)$ gleichmäßig beschränkt ist.

Q.E.D

II.3 Regularität des Problems

Hier wird die Regularität von \mathbf{P}_1^V und \mathbf{p}^V studiert. Diese wird durch die Regularität von f bestimmt. Wir stellen die entsprechende generelle Bedingung \mathbf{H}_4^V an f und geben interessante Beispiele von Funktionen, die diese erfüllen. Anschließend wird die

Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$ untersucht. Wir werden hier annehmen, daß

\mathbf{H}_E^V : \mathbf{P}_1^V besitzt eine lokale Lösung $x^* = (y^*, u^*)$.

II.3.1 Die Systemgleichung und Beispiele von Nichtlinearitäten

Es gelte:

\mathbf{H}_4^V : $y \mapsto f(y)$ von $X^v(0, T)$ in $L^2(Q)$ ist zweimal stetig-differenzierbar und $y \mapsto f''(y)$ ist in einer Umgebung von y^* Lipschitz-stetig .

Aufgrund seiner Gestalt weist dann der Operator e analoge Eigenschaften auf. Das heißt:

$e : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$ ist zweimal stetig-differenzierbar und e'' ist Lipschitz-stetig in einer Umgebung von (y^*, u^*) .

Beispiele

- ① $f_1(y) = y^k$; $k \geq 0$; $N \in \{1, 2\}$,
- ② $f_2(y) = e^y$; $N = 1$,
- ③ $f_3(y) = y^3$; $N = 3$.

Satz II.3.1

Die Funktionen f_i , $i = 1, 2, 3$ erfüllen die Voraussetzung \mathbf{H}_4^V .

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned}
 & \| (y+h)^k - y^k - ky^{k-1}h \|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^v}^{-1} \\
 &= \left\| \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} y^{k-s} h^s - y^k - ky^{k-1}h \right\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^v}^{-1}, \\
 &= \left\| \sum_{s=2}^k \binom{k}{s} y^{k-s} h^s \right\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^v}^{-1}, \\
 &\leq \sum_{s=2}^k \binom{k}{s} \|y^{k-s} h^s\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^v}^{-1}.
 \end{aligned}$$

- Zu $f_1(y)$.

Sei nun $N \in \{1, 2\}$.

Falls $s \neq k$, haben wir

$$\begin{aligned} \|y^{k-s}h^s\|_{L^2(Q)} &\leq \left[\int_0^T \|y(t)\|_{L^{4(k-s)}(\Omega)}^{2(k-s)} \|h(t)\|_{L^{4s}(\Omega)}^{2s} dt \right]^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq C_1 \|h\|_{C(0,T;H_0^1(\Omega))}^s \|y\|_{C(0,T;H_0^1(\Omega))}^{k-s}, \\ &\leq C_2 \|h\|_{X^v}^s \|y\|_{X^v}^{k-s}. \end{aligned}$$

Falls $s = k$,

$$\|y^{k-s}h^s\|_{L^2(Q)} = \|h^s\|_{L^2(Q)} \leq k_1 \|h\|_{C(0,T;H_0^1(\Omega))}^s \leq k_2 \|h\|_{X^v}^s.$$

Wir erhalten generell

$$\|y^{k-s}h^s\|_{L^2(Q)} \leq C \|h\|_{X^v}^s \|y\|_{X^v}^{k-s}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|(y+h)^k - y^k - ky^{k-1}h\|_{L^2(Q)} &\|h\|_{X^v}^{-1} \\ &\leq C \sum_{s=2}^k \binom{k}{s} \|h\|_{X^v}^{s-1} \|y\|_{X^v}^{k-s} \longrightarrow 0, \quad \text{wenn } \|h\|_{X^v} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Differenzierbarkeit von f_1 gezeigt und es ist $f_1'(y) = ky^{k-1}$.

Auf dieselbe Weise gilt $f_1''(y) = k(k-1)y^{k-2}$.

Wir haben außerdem

$$\begin{aligned} \|y^k - z^k\|_{L^2(Q)} &= \|(y-z) \sum_{s=1}^k y^{k-s} z^{s-1}\|_{L^2(Q)}, \\ &\leq \|y-z\|_{C(0,T;H_0^1(\Omega))} \left\| \sum_{s=1}^k y^{k-s} z^{s-1} \right\|_{L^2(0,T;L^4(\Omega))}, \\ &\leq C_3 \|y-z\|_{X^v} \sum_{s=1}^k \|y^{k-s} z^{s-1}\|_{L^2(0,T;L^4(\Omega))}. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\|y^{k-s} z^{s-1}\|_{L^2(0,T;L^4(\Omega))} \leq C_4 \|y\|_{X^v}^{k-s} \|z\|_{X^v}^{s-1}.$$

Es ist dann:

$$\|y^k - z^k\|_{L^2(Q)} \leq C_5 \|y\|_{X^v}^{k-s} \|z\|_{X^v}^{s-1} \|y - z\|_{X^v} \quad (N \in \{1, 2\}).$$

Aus dieser Abschätzung lesen wir heraus, daß f_1 sowie dessen erste und zweite Ableitungen überall auf $X^v(0, T)$ stetig sind und f_1'' ist in einer Umgebung von y^* Lipschitzstetig.

- Wegen der Darstellung $e^y = \sum_{k=0}^{\infty} y^k/k!$ läßt sich aus dem Vorherigen auf die Differenzierbarkeit von e^y schließen. Wir haben $(e^y)' = (e^y)'' = e^y$.
- Der Beweis für das Beispiel $f_3(y)$ verläuft analog wie für $f_1(y)$.

Q.E.D

Wir verlangen im nächsten Abschnitt:

$$\mathbf{H}_5^V : f'(y^*) \in L^2(0, T; L^p(\Omega)) \text{ mit } \begin{cases} p \in (2, \infty] \text{ beliebig, falls } N \leq 2, \\ p = N, \text{ falls } N \geq 3 \end{cases}$$

und

$$\mathbf{H}_6^V : f''(y^*) \in L^2(0, T; L^p(\Omega)) \text{ mit } p = \frac{2s}{s-1}, \text{ wobei } \begin{cases} 1 \leq s < \infty \text{ beliebig, falls } N \leq 2, \\ 1 \leq s \leq \frac{N}{2N-4}, \text{ falls } 4 \geq N \geq 3. \end{cases}$$

Dadurch erreichen wir

$$f'(y^*) \varphi \in L^2(Q) \text{ für alle } \varphi \in X^v(0, T)$$

und

$$f''(y^*)(\varphi, \psi) \in L^2(Q) \text{ für } \varphi, \psi \in X^v(0, T). \quad (2.4)$$

Die Fréchet-Ableitung von e in $(y^*, u^*) \in \mathcal{A} = X^v(0, T) \times L^2(Q)$ in Richtung (h, v) ist dann:

$$e'(y^*, u^*)(h, v) = \left((-\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y^*)h - Bv]; h(\cdot, 0); h_t(\cdot, 0) \right) \in \mathcal{F}.$$

Wir haben hier

$$D_y e(x) : X^v(0, T) \longrightarrow \mathcal{F},$$

mit

$$D_y e(x)(h) = \begin{pmatrix} D_y e_1(x)(h) \\ D_y e_2(x)(h) \\ D_y e_3(x)(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y)h] \\ h(\cdot, 0) \\ h_t(\cdot, 0) \end{pmatrix}$$

und

$$D_{yy} e(x) : X^v(0, T) \longrightarrow \mathcal{L}(X^v(0, T), \mathcal{F}),$$

mit

$$D_{yy} e(x)(h, g) = \begin{pmatrix} D_{yy} e_1(x)(h, g) \\ D_{yy} e_2(x)(h, g) \\ D_{yy} e_3(x)(h, g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} f''(y) h g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes geht es im Zusammenhang mit \mathbf{p}^V um die Differenzierbarkeit von $y(u)$. Wir gehen davon aus:

\mathbf{h}_5 : $D_y e(x) : X^v(0, T) \longrightarrow \mathcal{F}$ ist isomorph.

Bemerkung II.3.1

Nach Satz I.2.1 ist (\mathbf{h}_5) erfüllt, wenn sich $f'(y)$ wie q in (\mathbf{h}_2) und (\mathbf{h}_3) (§ I.2.1.1) verhält.

Wegen (\mathbf{h}_5) und $e(y(u), u) = 0$, erhalten wir mit dem Satz über implizite Funktionen die Differenzierbarkeit von $y(u)$. Es gilt

$$y'(u)v = -[D_y e(y(u), u)]^{-1} D_u e(y(u), u)v; \quad v \in L^2(Q)$$

und

$$y''(u)(v, w) = -[D_y e(x)]^{-1} D_{yy} e(x)(y'(u)v, y'(u)w); \quad v, w \in L^2(Q), \quad (2.5)$$

wobei benutzt wird, daß die Kontrolle linear in das System eingeht. Wir werden damit die erste und zweite Ableitung des reduzierten Kostenfunktionals $j(u)$ im nächsten Abschnitt charakterisieren können. Man beachte, daß $y'(u)v \in X^v(0, T)$ und $y''(u)(v, w) \in X^v(0, T)$.

II.3.2 Kostenfunktionale

Die Abbildung $x \mapsto \|x\|^2$ ist auf Hilberträumen stetig–Fréchet–differenzierbar und somit auch die Funktion J . Man erhält

$$J'(y^*, u^*)(h, v) = D_{(y,u)}J(y^*, u^*)(h, v) = \langle Cy^* - y_d, Ch \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle u^*, v \rangle_{L^2(Q)}.$$

Es ist offensichtlich, daß letztere Ableitung wieder stetig differenzierbar ist. Wir haben

$$J''(y^*, u^*)(h, v)(g, w) = \langle Cg, Ch \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle w, v \rangle_{L^2(Q)}.$$

Die Abbildung $(y, u) \mapsto J''(y, u)$ ist als konstante Abbildung auf \mathcal{A} ($\mathcal{A} = X^v(0, T) \times L^2(Q)$) Lipschitz–stetig.

Bezüglich \mathbf{p}^V haben wir :

$$\langle j'(u), v \rangle_{L^2} = \langle D_y J(x), y'(u)v \rangle_{X^{v^*}, X^v} + \langle D_u J(x), v \rangle_{L^2}$$

und mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Abschnittes:

$$\langle j'(u), v \rangle_{L^2} = \langle -[D_u e(x)]^* [D_y e(x)]^{-*} D_y J(x) + D_u J(x), v \rangle_{L^2}. \quad (2.6)$$

(Hierbei ist $[D_y e(x)]^{-*} = ([D_y e(x)]^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^v(0, T)^*, \mathcal{F}^*)$) und weiter mit (2.5)

$$\begin{aligned} \langle j''(u)v, w \rangle_{L^2} &= \langle D_{yy} J(x) y'(u)v, y'(u)w \rangle_{X^{v^*}, X^v} + \langle D_y J(x), y''(u)(v, w) \rangle_{X^{v^*}, X^v} \\ &\quad + \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{L^2}, \\ &= \langle D_{yy} J(x) y'(u)v, y'(u)w \rangle_{X^{v^*}, X^v} + \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{L^2} \\ &\quad + \langle D_y J(x), -[D_y e(x)]^{-1} D_{yy} e(x)(y'(u)v, y'(u)w) \rangle_{X^{v^*}, X^v}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Wir werden in Kapitel II.4 $j'(u)$ und $j''(u)$ weiterbeschreiben.

II.3.3 Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$

Da der Operator $-\Delta$ den Raum Z in $L^2(\Omega)$ isomorph abbildet, können wir die Frage der Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$ auf die der Existenz von $(h, v) \in X^v(0, T) \times L^2(Q)$ mit

$$\mathbf{S}_1 \begin{cases} h_{tt} - \Delta h + f'(y^*)h - Bv = q, \\ h(\cdot, 0) = h^0, \\ h_t(\cdot, 0) = h^1, \\ \text{für beliebige } (q, h^0, h^1) \in L^2(Q) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \end{cases}$$

zurückführen.

Die Surjektivität ist hier insofern wichtig, daß dadurch die Existenz der Lagrange-Multiplikatoren gesichert ist.

Satz II.3.2

Es gelte

$$f'(y^*) \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \quad \text{mit}$$

$$\begin{cases} p \in (2, \infty] \text{ beliebig, falls } N \leq 2 \\ \text{und} \\ p = N, \text{ falls } N \geq 3. \end{cases}$$

Dann ist $e'(y^, u^*)$ surjektiv.*

Beweis

Für $v \in L^2(Q)$ beliebig gewählt, ist $Bv \in L^2(Q)$. Wir erhalten dann die Behauptung als Folgerung von Satz I.2.1.

Q.E.D

Wenn der Operator B surjektiv ist, können wir bezüglich der Forderung an $f'(y^*)$ im obigen Satz weniger verlangen. Wir haben

Satz II.3.3

Es gelte $\text{Im } B = L^2(Q)$ und es sei die Hypothese \mathbf{H}_5^V erfüllt. Dann ist $e'(y^, u^*)$ surjektiv.*

Beweis

Wegen Satz I.2.1 können wir immer $b \in X^v(0, T)$ finden mit:

$$\begin{aligned} b_{tt} - \Delta b &= 0, \\ b(\cdot, 0) &= h^0, \\ b_t(\cdot, 0) &= h^1. \end{aligned}$$

\mathbf{S}_1 ist dann äquivalent zur Suche von $(\psi, v) \in X^v(0, T) \times L^2(Q)$ mit:

$$\begin{aligned}\psi_{tt} - \Delta\psi + f'(y^*)\psi - Bv &= \hat{q}, \\ \psi(\cdot, 0) &= 0, \\ \psi_t(\cdot, 0) &= 0,\end{aligned}$$

wobei $h - \psi = b$ und $\hat{q} = -\Delta q - f'(y^*)b \in L^2(Q)$ wegen \mathbf{H}_5^V .

Wählen wir hier $\psi = 0$, so folgt die Behauptung aus der Surjektivität von B .

Q.E.D

Wegen Satz II.3.3 haben wir dann, wenn B surjektiv (etwa $B = Id_{L^2(Q)}$) ist, auch die Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$ für die folgenden Nichtlinearitäten.

- ① $f_1(y) = y^k, k \geq 0, N \in \{1, 2\}$,
- ② $f_2(y) = e^y, N = 1$,
- ③ $f_3(y) = y^3, N = 3$.

II.4 Optimalitätskriterien

In diesem Kapitel werden wir in einem ersten Teil das Optimalitätssystem für \mathbf{P}_1^V herleiten. Dieses stellt eine notwendige Optimalitätsbedingung dar. Wir studieren auch einige Eigenschaften der Lagrange-Multiplikatoren. Diese spielen im zweiten Teil, bei der Untersuchung der Positiv-Definitheit, eine zentrale Rolle. Diesbezüglich gehen wir auch auf das Problem \mathbf{p}^V ein.

II.4.1 Notwendige Optimalitätsbedingungen

Die Lagrange-Funktion zu \mathbf{P}_1^V ist

$$L : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned}L(y, u, \mu, \theta_1, \theta_2) &= J(y, u) + \langle \mu, (-\Delta)^{-1}[y_{tt} - \Delta y + f(y) - Bu] \rangle_{L^2(Z)} \\ &\quad + \langle \theta_1, y(\cdot, 0) - y^0 \rangle_{H_0^1} + \langle \theta_2, y_t(\cdot, 0) - y^1 \rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Wir haben (unter \mathbf{H}_5^V)

$$\begin{aligned} D_x L(y, u, \mu, \theta_1, \theta_2)(h, v) &= \langle Cy - y_d, Ch \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle u, v \rangle_{L^2(Q)} + \langle \theta_1, h(\cdot, 0) \rangle_{H_0^1} \\ &\quad + \langle \theta_2, h_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \mu, (-\Delta)^{-1} [h_{tt} - \Delta h + f'(y)h - Bv] \rangle_{L^2(Z)}. \end{aligned}$$

Wir machen die Annahme

\mathbf{H}_5^V : $e'(y^*, u^*)$ ist surjektiv.

Dann existieren nach dem Lagrange–Prinzip Multiplikatoren $(\mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*) \in \mathcal{F}$ so, daß $(y^*, u^*, \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)$ ein stationärer Punkt der Funktion L ist. Es gilt also

Satz II.4.1

Es sei (y^*, u^*) eine (lokale) Lösung von \mathbf{P}_1^V und es gelten die Bedingungen \mathbf{H}_0^V , \mathbf{H}_5^V und \mathbf{H}_5^V . Dann existieren Lagrange–Multiplikatoren $(\mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*) \in \mathcal{F}$ mit

$$\begin{aligned} &\langle Cy - y_d, Ch \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle u, v \rangle_{L^2(Q)} + \langle \theta_1, h(\cdot, 0) \rangle_{H_0^1} \\ &+ \langle \theta_2, h_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \mu, (-\Delta)^{-1} [h_{tt} - \Delta h + f'(y^*)h - Bv] \rangle_{L^2(Z)} = 0, \\ &\text{für alle } (h, v) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit Λ den kanonischen Isomorphismus von \mathcal{H} ("Observationsraum" in dem Kostenfunktional, Seite 40) auf \mathcal{H}^* . Wir können nun das Optimalitätssystem herleiten.

Satz II.4.2

Es gelten die Bedingungen von Satz II.4.1 und sei zusätzlich $C \in \mathcal{L}(L^2(Q), \mathcal{H})$ und $f'(y^*) \in L^\infty(Q)$. Dann ist der Lagrange–Multiplikator μ^* Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \Delta \mu_{tt} - \Delta^2 \mu + f'(y^*) \Delta \mu &= C^* \Lambda(Cy^* - y_d), \\ \Delta \mu(\cdot, T) &= 0, \\ \Delta \mu_t(\cdot, T) &= 0, \\ \Delta \mu|_{\Sigma} &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hierbei bezeichnet $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^*, L^2(Q))$ den zu C zugehörigen adjungierten Operator. Ferner gilt

$$\Delta \mu^* \in X^v(0, T), \tag{2.9}$$

$$\Delta\mu^*(\cdot, 0) = -\theta_2^* \quad \text{und} \quad \Delta\mu_t^*(\cdot, 0) = -\Delta\theta_1, \quad (2.10)$$

und damit

$$\Delta\theta_1 \in L^2(\Omega) \quad \text{und} \quad \theta_2^* \in H_0^1(\Omega).$$

Bemerkung II.4.1

Wegen Satz I.1.4 folgt aus (2.9), daß $\Delta\mu^* \in C(0, T; H_0^1(\Omega))$ und $\Delta\mu_t^* \in C(0, T; L^2(\Omega))$.

Zum Beweis von Satz II.4.2 brauchen wir das folgende Resultat.

Lemma II.4.1

Es seien U, V und W Hilberträume mit $V \hookrightarrow W \hookrightarrow V^*$, $U \hookrightarrow W \hookrightarrow U^*$ (zwei Gelfand-Tripel) und U ist stetig eingebettet und liegt dicht in V , dann gilt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{U^*, U} = \langle \varphi, \psi \rangle_{V^*, V}, \quad \text{für alle } \varphi \in V^* \text{ und } \psi \in U.$$

Beweis

Nach Voraussetzung ist $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W \hookrightarrow V^* \hookrightarrow U^*$ und jeder Raum liegt dicht im Nächsten. Sei nun $\varphi \in V^*$. Dann existiert eine Folge $\{\varphi_n\} \subset W$ mit $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in V^* . Wir haben

$$\langle \varphi_n, \psi \rangle_{U^*, U} = \langle \varphi_n, \psi \rangle_W = \langle \varphi_n, \psi \rangle_{V^*, V}, \quad \text{für alle } \psi \in U.$$

Die Behauptung folgt durch einen Limesübergang.

Q.E.D

Beweis von Satz II.4.2

Für die Lagrange-Multiplikatoren $(\mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*) \in \mathcal{F}$ gilt

$$D_x L(y^*, u^*, \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)(h, v) = 0, \quad \text{für alle } (h, v) \in \mathcal{A},$$

mit $\mathcal{A} = X^v(0, T) \times L^2(Q)$, wie oben eingeführt. Mit $v = 0$ gesetzt impliziert dies

$$\begin{aligned} & \langle Cy^* - y_d, Ch \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \theta_1^*, h(\cdot, 0) \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \theta_2^*, h_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} + \\ & \langle \mu^*, (-\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y^*)h] \rangle_{L^2(Z)} = 0, \quad \text{für alle } h \in X^v(0, T). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wir wählen $h(\cdot, t) = \varphi(t) \cdot \omega$, $\omega \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$. Damit ist $h \in X^v(0, T)$. Wir haben dann

$$\langle Cy^* - y_d, C\varphi \cdot \omega \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mu^*, (-\Delta)^{-1}[\varphi_{tt}\omega - \varphi\Delta\omega + f'(y^*)\varphi \cdot \omega] \rangle_{L^2(Z)} = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \mu^*, (-\Delta)^{-1}[\varphi_{tt}\omega - \varphi\Delta\omega + f'(y^*)\varphi \cdot \omega] \rangle_{L^2(Z)} &= \\ &= \langle \Delta\mu^*, -\varphi_{tt}\omega + \varphi\Delta\omega - f'(y^*)\varphi \cdot \omega \rangle_{L^2(Q)}, \\ &= \int_0^T \langle \Delta\mu^*(t), -\varphi_{tt}(t)\omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \langle \Delta\mu^*(t), \varphi(t)\Delta\omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt \\ &\quad - \int_0^T \langle \Delta\mu^*(t), f'(y^*)\varphi(t)\omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt, \\ &= \int_0^T \langle -\Delta\mu^*(t)\varphi_{tt}(t), \omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \langle \Delta\mu^*(t)\varphi(t), \Delta\omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt \\ &\quad - \int_0^T \langle \Delta\mu^*(t)f'(y^*)\varphi(t), \omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt, \\ &= \int_0^T \langle -\Delta\mu_{tt}^*(t)\varphi(t), \omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \langle \Delta^2\mu^*(t)\varphi(t), \omega \rangle_{Z^*, Z} \\ &\quad - \int_0^T \langle f'(y^*)\Delta\mu^*(t)\varphi(t), \omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt, \\ &= \left\langle \int_0^T [-\Delta\mu_{tt}^*(t) + \Delta^2\mu^*(t) - f'(y^*)\Delta\mu^*(t)]\varphi(t) dt, \omega \right\rangle_{Z^*, Z}. \end{aligned}$$

Für h , wie oben gewählt, gilt außerdem

$$\begin{aligned} \langle Cy^* - y_d, Ch \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \Lambda(Cy^* - y_d), Ch \rangle_{\mathcal{H}^*, \mathcal{H}}, \\ &= \langle C^*\Lambda(Cy^* - y_d), h \rangle_{L^2(Q)}, \\ &= \int_0^T \langle C^*\Lambda(Cy^* - y_d)\varphi(t), \omega \rangle_{L^2(\Omega)} dt, \\ &= \left\langle \int_0^T C^*\Lambda(Cy^* - y_d)\varphi(t) dt, \omega \right\rangle_{Z^*, Z}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\left\langle \int_0^T [C^*\Lambda(Cy^* - y_d)(t) - \Delta\mu_{tt}^*(t) + \Delta^2\mu^*(t) - f'(y^*)\Delta\mu^*(t)]\varphi(t) dt, \omega \right\rangle_{Z^*, Z} = 0,$$

und damit

$$\int_0^T [C^* \Lambda(Cy^* - y_d)(t) - \Delta \mu_{tt}^*(t) + \Delta^2 \mu^*(t) - f'(y^*) \Delta \mu^*(t)] \varphi(t) dt = 0, \quad \text{in } Z^*.$$

Es ist dann

$$C^* \Lambda(Cy^* - y_d) - \Delta \mu_{tt}^* + \Delta^2 \mu^* - f'(y^*) \Delta \mu^* = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, T; Z^*), \quad (2.12)$$

oder

$$\mu_{tt}^* - \Delta \mu^* + \Delta^{-1}[f'(y^*) \Delta \mu^*] - \Delta^{-1}[C^* \Lambda(Cy^* - y_d)] = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.13)$$

Wegen $f'(y^*) \Delta \mu^* \in L^2(Q)$ und $C^* \Lambda(Cy^* - y_d) \in L^2(Q)$ folgt aus (2.13), daß $\mu_{tt}^* \in L^2(Q)$. Wir erhalten, siehe [17] S. 19

$$\mu_t^* \in L^2(0, T; [Z, L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow L^2(Q).$$

Es gilt dann

$$\mu_t^* \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad [15] \text{ S. 7 .}$$

Damit haben wir insgesamt $\mu^* \in H_0^{1,1}(Q)$. Da $H_0^{1,1}(Q) \hookrightarrow C(0, T; L^2(\Omega))$ (Bemerkung I.1.3 (iii)), ist dann

$$\mu^* \in C(0, T; L^2(\Omega)).$$

Wir können nun die Anfangs- und Endbedingungen herleiten. Sei $h = \varphi \cdot \omega$ gegeben mit $\varphi \in C^2(0, T)$ und $\omega \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wegen Lemma I.1.2 gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \mu_{tt}^*(t), \Delta h(t) \rangle_{L^2(\Omega)} dt &= \langle \mu_t^*(\cdot, T), \Delta h(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mu_t^*(\cdot, 0), \Delta h(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \langle \mu^*(\cdot, 0), \Delta h_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mu^*(\cdot, T), \Delta h_t(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_0^T \langle \Delta \mu^*(t), h_{tt}(t) \rangle_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Durch innere Produktbildung von (2.13) mit Δh erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \mu_{tt}^*, \Delta h \rangle_{L^2(Q)} - \langle \Delta \mu^*, \Delta h \rangle_{L^2(Q)} + \langle \Delta^{-1}[f'(y^*) \Delta \mu^*], \Delta h \rangle_{L^2(Q)} \\ - \langle \Delta^{-1}[C^* \Lambda(Cy^* - y_d)], \Delta h \rangle_{L^2(Q)} = 0, \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mu^*, h_{tt} \rangle_{L^2(Q)} + \langle \mu_t^*(\cdot, T), \Delta h(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mu_t^*(\cdot, 0), \Delta h(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ + \langle \mu^*(\cdot, 0), \Delta h_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mu^*(\cdot, T), \Delta h_t(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta \mu^*, \Delta h \rangle_{L^2(Q)} \\ + \langle \Delta^{-1}[f'(y^*) \Delta \mu^*], \Delta h \rangle_{L^2(Q)} - \langle \Delta^{-1}[C^* \Lambda(Cy^* - y_d)], \Delta h \rangle_{L^2(Q)} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Falls $\varphi(T) = \varphi_t(T) = 0$, so ist $h(\cdot, T) = h_t(\cdot, T) = 0$ und es folgt aus (2.14):

$$\begin{aligned}
& \langle \Delta\mu^*, \Delta\Delta^{-1}h_{tt} \rangle_{L^2(Q)} + \langle \nabla\mu_t^*(\cdot, 0), \nabla h(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \mu^*(\cdot, 0), \Delta h_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} \\
& \quad - \langle \Delta\mu^*, \Delta h \rangle_{L^2(Q)} + \langle f'(y^*) \Delta\mu^*, h \rangle_{L^2(Q)} - \langle C^* \Lambda(Cy^* - y_d), h \rangle_{L^2(Q)}, \\
& = \langle \mu^*, \Delta^{-1}h_{tt} \rangle_{L^2(Z)} + \langle \mu_t^*(\cdot, 0), h(\cdot, 0) \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \Delta\mu^*(\cdot, 0), h_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} \\
& \quad - \langle \mu^*, h \rangle_{L^2(Z)} + \langle \Delta\mu^*, f'(y^*) h \rangle_{L^2(Q)} - \langle Cy^* - y_d, Ch \rangle_H, \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ein Vergleich von (2.15) und (2.11) liefert

$$\langle \theta_1^* + \mu_t^*(\cdot, 0), h(\cdot, 0) \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \theta_2^* + \Delta\mu^*(\cdot, 0), h_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Setzen wir etwa $\varphi(0) = 0$, so folgt nach partieller Integration im ersten Glied

$$\Delta\mu_t^*(\cdot, 0) = -\Delta\theta_1^* \quad \text{und} \quad \Delta\mu^*(\cdot, 0) = -\theta_2^*. \tag{2.16}$$

Wir können diese Werte wieder in (2.14) einsetzen und erhalten wegen (2.11)

$$\langle \mu_t^*(\cdot, T), \Delta h(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mu^*(\cdot, T), \Delta h_t(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} = 0,$$

und nach partieller Integration

$$\Delta\mu^*(\cdot, T) = \Delta\mu_t^*(\cdot, T) = 0. \tag{2.17}$$

Als Nächstes wollen wir (2.9) herleiten. Die homogene Dirichlet-Randbedingung für $\Delta\mu$ ist aufgrund von Bemerkung II.4.1 (wir hätten dann $\Delta\mu^* \in C(0, T; H_0^1(\Omega))$) darin enthalten. Diese wäre dann auch somit bewiesen.

Wir definieren dafür

$$\Gamma(h) = \langle C^* \Lambda(Cy^* - y_d), h \rangle_{L^2(Q)}$$

für

$$h \in X_0^v(0, T) = \{\varphi \in X^v(0, T) : \varphi(\cdot, 0) = \varphi_t(\cdot, 0) = 0\}.$$

Versehen mit der Norm von $X^v(0, T)$ ist $X_0^v(0, T)$ ein Hilbertraum. Die Gleichung (2.11) eingeschränkt auf $X_0^v(0, T)$ liefert

$$\langle \Delta\mu^*, h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h \rangle_{L^2(Q)} = \Gamma(h), \quad \text{für alle } h \in X_0^v(0, T). \tag{2.18}$$

Γ ist ein stetiges lineares Funktional auf $L^2(Q)$. Weil $X_0^v(0, T) \hookrightarrow L^2(Q)$, gilt dann auch

$$\Gamma \in X_0^v(0, T)^*.$$

Wenn wir Satz I.2.2 und Folgerung I.2.1 mit Zeitsinvertierung betrachten, so folgt aus (2.18), daß $\Delta\mu^*$ Lösung durch Transposition des folgenden Systems darstellt:

$$\begin{aligned} \lambda_{tt} - \Delta\lambda + f'(y^*)\lambda &= C^*\Lambda(Cy^* - y_d) \quad (\in L^2(Q)), \\ \lambda(\cdot, T) &= 0, \\ \lambda_t(\cdot, T) &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

In unserem Kontext handelt es sich in der ersten Zeile vom (2.19) um den Laplace Operator für das homogene Dirichlet-Problem. Dieses System besitzt im Raum $X^v(0, T)$ (Satz I.2.1 mit Zeitsinvertierung $t \rightarrow T - t$) eine eindeutige Lösung λ^* .

Da auch λ^* die Lösung durch Transposition von (2.19) und diese eindeutig ist (Satz I.2.2 und Folgerung I.2.1 mit Zeitsinvertierung) erhalten wir

$$\lambda^* = \Delta\mu^*.$$

und damit

$$\Delta\mu^* \in X_v(0, T).$$

Q.E.D

Der Operator $-\Delta : Z \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ (mit dem Definitionsbereich Z) ist isomorph und selbstadjungiert. Damit ist auch $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow Z$ selbstadjungiert. Es ist also

$$(-\Delta)^{-*} = [(-\Delta)^{-1}]^* = (-\Delta)^{-1}.$$

Dieses ist hilfreich, um die nächste Bemerkung nachzuvollziehen. Wir werden dort einen Zusammenhang zwischen dem Optimalitätssystem, den klassischen Lagrange-Multiplikatoren und deren Rieszsche Darstellungen herstellen. Letztere haben wir bei der Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen benutzt.

Bemerkung II.4.2

- Wir setzen für die (Rieszsche Darstellung) Lagrange-Multiplikatoren

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}.$$

Es sei $R_{\mathcal{F},v}$ der Rieszsche Isomorphismus von \mathcal{F}^* nach \mathcal{F} und

$$\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{pmatrix} = R_{\mathcal{F},v}^{-1} \Theta \in \mathcal{F}^*. \quad (2.20)$$

Wir haben damit

$$\langle \Theta, \eta \rangle_{\mathcal{F}} = \langle \bar{\Theta}, \eta \rangle_{\mathcal{F},\mathcal{F}^*}, \quad \text{für alle } \eta \in \mathcal{F}.$$

Man kann sich überzeugen, daß daraus der folgende Zusammenhang folgt:

$$\begin{pmatrix} \Delta\mu \\ \Delta\theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-\Delta)^{-1}\bar{\mu} \\ -\bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Es ist

$$\bar{\Theta} = -[D_y e(x)]^{-*} D_y J(x) \iff [D_y e(x)]^* \bar{\Theta} = -D_y J(x).$$

Wegen $D_y J(x) \in L^2(Q)$, folgt daraus

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-1}\bar{\mu}_{tt} - \Delta(-\Delta)^{-1}\bar{\mu} + f'(y^*)(-\Delta)^{-1}\bar{\mu} &= -C^* \Lambda(Cy^* - y_d), \\ (-\Delta)^{-1}\bar{\mu}(\cdot, T) &= 0, \\ (-\Delta)^{-1}\bar{\mu}_t(\cdot, T) &= 0, \\ (-\Delta)^{-1}\bar{\mu} &= 0 \quad \text{auf } \Sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{tt} - \Delta\lambda + f'(y^*)\lambda &= C^* \Lambda(Cy^* - y_d), \\ \lambda(\cdot, T) &= 0, \\ \lambda_t(\cdot, T) &= 0, \\ \lambda &= 0 \quad \text{auf } \Sigma, \end{aligned} \quad (2.22)$$

wobei $\lambda = -(-\Delta)^{-1}\bar{\mu}$.

Wegen (2.21) gilt aber auch

$$\lambda = \Delta\mu. \quad (2.23)$$

Wir erhalten

$$[D_y e(x)]^* \bar{\Theta} = -D_y J(x) \implies (2.22) \text{ gilt.} \quad (2.24)$$

- Damit erweist es sich als nützlich, wie schon im Beweis des vorigen Satzes geschehen, die Substitution $\lambda = \Delta\mu$ einzusetzen. Auch bei den numerischen Betrachtungen im letzten Kapitel wird dies hilfreich sein.

Es sei nun $\bar{\Theta}$ und $\bar{\mu}$ wie in (2.20) definiert. Wegen (2.6), (2.7) und voriger Bemerkung haben wir bezüglich dem reduzierten Kostenfunktional:

$$\langle j'(u), v \rangle_{L^2} = \langle D_u J(x) + [D_u e(x)]^* \bar{\Theta}, v \rangle_{L^2} \quad (2.25)$$

und

$$\begin{aligned} \langle j''(u)v, w \rangle_{L^2} &= \langle D_{yy} J(x) [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w \rangle_{X^{v^*}, X^v} \\ &\quad + \langle -[D_y e(x)]^{-*} D_y J(x), D_{yy} e(x) (-[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w) \rangle_{\mathcal{F}^*, \mathcal{F}} \\ &\quad + \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{L^2}, \\ &= \langle D_{yy} J(x) [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w \rangle_{X^{v^*}, X^v} \\ &\quad + \langle \bar{\Theta}, D_{yy} e(x) (-[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w) \rangle_{\mathcal{F}^*, \mathcal{F}} \\ &\quad + \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{L^2}, \\ &= \langle D_{yy} J(x) [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w \rangle_{X^{v^*}, X^v} \\ &\quad + \langle \Theta, D_{yy} e(x) (-[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w) \rangle_{\mathcal{F}} + \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{L^2}, \\ &= \langle D_{yy} J(x) [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w \rangle_{X^{v^*}, X^v} \\ &\quad + \langle \mu, D_{yy} e_1(x) (-[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w) \rangle_{L^2(Z)} \quad (2.26) \\ &\quad + \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{L^2}, \\ &= \langle C [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, C [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w \rangle_H \\ &\quad + \langle -\Delta\mu, f''(y) (-[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v) \rangle_{L^2(Q)} \\ &\quad + \langle \beta v, w \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Wir brauchen (2.26) später bei dem Beweis der Positiv-Definitheit von $j''(u)$ für das reduzierte Optimierungsproblem.

II.4.2 Positiv–Definitheit

Wir untersuchen nun die Positiv–Definitheit von $L''(x^*, \Theta^*) = L''(y^*, u^*; \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)$ auf $\text{Ker } e'(y^*, u^*)$. Das heißt, wir analysieren die Bedingung:

$$\mathbf{H}_{pos}^V : \quad L''(y^*, u^*; \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)(h, v)^2 \geq k\{\|h\|_{X^v}^2 + \|v\|_{L^2(Q)}^2\}, \quad k > 0$$

für alle $(h, v) \in \text{Ker } e'(y^*, u^*)$.

Diese ist hinreichend dafür, daß $x^* = (y^*, u^*)$ lokale Lösung des Problems \mathbf{P}_1^V ist. Es wird sich herausstellen, daß \mathbf{H}_{pos}^V erfüllt werden kann, wenn das Residuum $\|Cy^* - y_d\|$ hinreichend klein ist. Als nächstes werden wir die Betonung auf den Regularisierungsparameter β legen. Dort versuchen wir einen Bereich für β zu finden, für den obige Hypothese realisierbar ist. Zum Schluß des Kapitels erstellen wir einen Zusammenhang zwischen \mathbf{H}_{pos}^V und der Positiv-Definitheit der Hesse-Matrix des reduzierten Kostenfunktional. Diese ist eine der Bedingungen zum Gewährleisten der quadratischen Konvergenz des Newton-Verfahrens (Kapitel V).

Wir setzen \mathbf{H}_6^V (§ II.3.1) voraus.

II.4.2.1 Das Problem \mathbf{P}_1^V

Lemma II.4.2

Falls \mathbf{H}_6^V erfüllt ist, so gilt:

$$|\langle \lambda^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)}| \leq C_f \|\lambda^*\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^v(0,T)}^2 \|f''(y^*)\|_{L^2(L^p(\Omega))}, \quad \text{für alle } h \in X^v(0, T).$$

Dabei ist p wie in \mathbf{H}_6^V definiert und $C_f \geq 0$ eine von h unabhängige Konstante.

Beweis

Es sei $h \in X^v(0, T)$ gegeben und p und s wie in \mathbf{H}_6^V . Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^T \|f''(y^*) h^2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &\leq \int_0^T \left(\int_{\Omega} |f''(y^*)|^{\frac{2s}{s-1}} \right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\int_{\Omega} h^{4s} \right)^{\frac{1}{s}} dt, \\ &\leq C_0 \|f''(y^*)\|_{L^2(L^p(\Omega))}^2 \|h\|_{C(0,T;H_0^1(\Omega))}^4 \quad \text{und wegen Satz I.1.4,} \\ &\leq C_1 \|f''(y^*)\|_{L^2(L^p(\Omega))}^2 \|h\|_{X^v(0,T)}^4. \end{aligned}$$

Mit der Hölder-Ungleichung gilt dann insgesamt

$$\begin{aligned} |\langle \lambda^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)}| &\leq \left(\int_0^T \|\lambda^*\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|f''(y^*) h^2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}, \\ &\leq C_f \|\lambda^*\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^v}^2 \|f''(y^*)\|_{L^2(L^p(\Omega))}. \end{aligned}$$

Q.E.D

Es sei nun

$$X_\alpha^v(0, T) = \{\varphi \in X^v(0, T) : \varphi(\cdot, \alpha) = \varphi_t(\cdot, \alpha) = 0\}; \quad \alpha \in \{0, T\}.$$

Es ist klar, daß $X_\alpha^v(0, T)$ wohl definiert ist (siehe dazu Bemerkung I.2.1). $X_\alpha^v(0, T)$ ist mit der von $X^v(0, T)$ induzierten Norm ein Hilbertraum für jedes $\alpha \in \{0, T\}$.

Wir definieren die Operatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\alpha : X_\alpha^v(0, T) &\longrightarrow L^2(Q), \quad \alpha \in \{0, T\} \\ \mathcal{N}_\alpha h = q &\iff h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h = q, \end{aligned}$$

und verlangen von \mathcal{N}_0 :

$$\mathbf{H}_7^V \quad \mathcal{N}_0 : X_0^v(0, T) \longrightarrow L^2(Q) \text{ ist isomorph.}$$

Bemerkung II.4.3

Satz I.2.1 liefert mittels (\mathbf{h}_2) und (\mathbf{h}_3) (für $q = f'(y^*)$) hinreichende Bedingungen für \mathbf{H}_7^V . Andererseits impliziert \mathbf{H}_7^V die Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$. Dies kann man durch Homogenisierung von \mathbf{S}_1 feststellen. Damit sind die Bedingungen \mathbf{H}_7^V und \mathbf{H}_5^V bei den Beispielen f_1, f_2 und f_3 erfüllt.

Bemerkung II.4.4

Durch Zeitinvertierung ist \mathbf{H}_7^V äquivalent zur Isomorphie des Operators $N_T : X_T^v(0, T) \longrightarrow L^2(Q)$.

Gemäß seiner Definition haben wir wegen dem Optimalitätssystem und (2.23)

$$\mathcal{N}_T^{-1} C^* \Lambda(y^* - y_d) = \lambda^* \in X_0^v(0, T).$$

Da außerdem $X^v(0, T) \hookrightarrow L^2(Q)$ ist, existiert eine Konstante $K_s(y^*) > 0$, mit:

$$\|\lambda^*\|_{L^2(Q)} \leq K_s(y^*) \|C^* \Lambda(Cy^* - y_d)\|_{L^2(Q)}.$$

Man kann sich überzeugen, daß

$$\text{Ker } e'(y^*, u^*) = \{(h, v) \in X_0^v(0, T) \times L^2(Q) : \mathcal{N}_0 h = B v\},$$

und

$$L''(y, u; \mu, \theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} D_{yy}J(x) + \langle \mu, D_{yy}e_1(x)(\cdot, \cdot) \rangle_{L^2(Z)} & 0 \\ 0 & D_{uu}J(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathbb{R})). \quad (2.27)$$

Wir haben dann:

$$L''(y, u; \mu, \theta_1, \theta_2) \left(\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ w \end{pmatrix} \right) = D_{yy}J(x)(h, g) + \langle \mu, D_{yy}e_1(x)(h, g) \rangle_{L^2(Z)} \\ + D_{uu}J(x)(v, w),$$

für $(h, v), (g, w) \in \mathcal{A}$.

Speziell gilt

$$L''(y^*, u^*; \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)(h, v)^2 = \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta \|v\|_{L^2(Q)}^2 - \langle \Delta\mu^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)},$$

oder

$$L''(y^*, u^*; \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)(h, v)^2 = \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta \|v\|_{L^2(Q)}^2 - \langle \lambda^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)}.$$

Satz II.4.4

Es sei (y^*, u^*) eine (lokale) Lösung von \mathbf{P}_1^V , $C \in \mathcal{L}(L^2(Q), \mathcal{H})$ und es gelten die Bedingungen \mathbf{H}_4^V , \mathbf{H}_5^V , \mathbf{H}_6^V und \mathbf{H}_7^V . Es sei außerdem

$$\|Cy^* - y_d\|_{\mathcal{H}} < \frac{\beta \|B\|^{-2}}{2 \|\mathcal{N}_0^{-1}\|^2 \|f''(y^*)\|_{L^2(L^p(\Omega))} \|C^* \Lambda\| C_f K_s(y^*)}, \quad (2.28)$$

mit $K_s(y^*)$ (bzw. C_f) wie in Bemerkung II.4.4 (bzw. Lemma II.4.2) und p wie in \mathbf{H}_6^V . Dann ist \mathbf{H}_{pos}^V erfüllt.

Beweis

Sei $(h, v) \in \text{Ker } e'(y^*, u^*)$ und p wie in \mathbf{H}_6^V . Es ist

$$\begin{aligned} L''(y^*, u^*; \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)(h, v)^2 &= \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta \|v\|_{L^2(Q)}^2 - \langle \lambda^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)} \\ &\geq \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta \|v\|_{L^2(Q)}^2 - |\langle \lambda^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)}|. \end{aligned}$$

Wegen \mathbf{H}_7^V gilt $\|h\|_{X^v} \leq \|\mathcal{N}_0^{-1}\| \|B\| \|v\|_{L^2(Q)}$. Mit Lemma II.4.2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} L''(y^*, u^*; \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)(h, v)^2 &\geq \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\beta}{2} \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} \frac{\|h\|_{X^v}^2}{\|\mathcal{N}_0^{-1}\|^2 \|B\|^2} \\ &\quad - C_f \|\lambda^*\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^v}^2 \|f''(y^*)\|_{L^2(L^p(\Omega))}. \end{aligned}$$

Durch Weglassen des ersten Terms und Benutzung von Bemerkung II.4.4 gilt dann

$$\begin{aligned} L''(y^*, u^*; \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*)(h, v)^2 &\geq \frac{\beta}{2} \left[\|v\|_{L^2(Q)}^2 + \|h\|_{X^v}^2 \left(\|\mathcal{N}_0^{-1}\|^{-2} \|B\|^{-2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2C_f K_s(y^*) \beta^{-1} \|C^* \Lambda\| \|Cy^* - y_d\|_{\mathcal{H}} \|f''(y^*)\|_{L^2(L^p(\Omega))} \right) \right]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Q.E.D

Motiviert durch die Hypothese (2.28) im Satz II.4.4 und durch die Tatsache, daß $\|Cy^* - y_d\|$ monoton wachsend von β abhängt [3], untersuchen wir in diesem Abschnitt einen Fall, in dem (2.28) garantiert ist, wenn der Parameter β hinreichend klein ist. Hierfür müssen wir die Abhängigkeiten bezüglich β hervorheben: Wir ersetzen dann \mathbf{P}_1^V durch $\mathbf{P}_1^{V,\beta}$ und bezeichnen mit (y^β, u^β) (bzw. $\mu^\beta, \theta_1^\beta, \theta_2^\beta$) eine entsprechende globale Lösung (bzw. die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren). Analog ersetzen wir \mathcal{N}_α durch $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}$, $\alpha \in \{0, T\}$, $\beta \geq 0$, wobei hier y^* durch y^β ersetzt wird.

Wir verlangen:

\mathbf{V}_1 : $N = 1$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{H} = L^2(Q)$ und C ist die Identität auf $L^2(Q)$.

\mathbf{V}_2 : f überführt beschränkte Folgen von $L^2(Q)$ in beschränkte Folgen von $L^2(Q)$.

Satz II.4.5

Für jedes $\beta \geq 0$ sei (y^β, u^β) eine globale Lösung von $\mathbf{P}_1^{V,\beta}$, und es gelten die Bedingungen \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 und \mathbf{H}_4^V . Sei außerdem $\|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)}$ hinreichend klein. Dann existieren $K > 0$ und $\bar{\beta} > 0$, so daß

$$L''(y^\beta, u^\beta, \mu^\beta, \theta_1^\beta, \theta_2^\beta)(h, v)^2 \geq K\{\|h\|_{X^v}^2 + \|v\|_{L^2(Q)}^2\}, \text{ für alle } \beta \in [0, \bar{\beta}] \\ \text{und } (h, v) \in \text{Ker } e'(y^\beta, u^\beta).$$

- Wichtig in diesem Satz ist, daß (y^0, u^0) für das Problem $\mathbf{P}_1^{V,0}$, ($\beta = 0$) eine globale Lösung ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $y(u^0) = y_d$ gilt.
- Generell setzen wir voraus, daß (y^β, u^β) eine globale Lösung von $\mathbf{P}_1^{V,\beta}$ ist.
- Durch die Voraussetzung $N = 1$ ist die Einbettung $X^v(0, T) \hookrightarrow C(0, T; C(\bar{\Omega}))$ gesichert. Es gilt dann auch $X^v(0, T) \hookrightarrow L^\infty(Q)$.

Beweis von Satz II.4.5

Aufgrund der schon erwähnten Monotonie von $\beta \longrightarrow \|Cy^\beta - y_d\|$ [3] gilt

$$\|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)} \leq \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}, \quad \text{für alle } \beta \geq 0.$$

Wir haben dann

$$\|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} \|u^\beta\|_{L^2(Q)}^2 \leq \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} \|u^\beta\|_{L^2(Q)}^2 \\ \leq \|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} \|u^0\|_{L^2(Q)}^2.$$

Woraus folgt

$$\|u^\beta\|_{L^2(Q)} \leq \|u^0\|_{L^2(Q)}, \quad (2.29)$$

und

$$\|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}^2 \leq \|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} (\|u^0\|_{L^2(Q)}^2 - \|u^\beta\|_{L^2(Q)}^2). \quad (2.30)$$

Mit (2.29) können wir schreiben

$$\|B u^\beta\|_{L^2(Q)} < \infty, \quad \text{für alle } \beta \geq 0. \quad (2.31)$$

Damit ist $\{y^\beta\}$ für $\beta \geq 0$ auf $L^2(Q)$ gleichmäßig beschränkt. Es folgt daraus für $\beta \geq 0$, die gleichmäßige Beschränktheit von:

- $\{f(y^\beta)\}$ in $L^2(Q)$ wegen \mathbf{V}_2 ,
- $\{y_{tt}^\beta - \Delta y^\beta\}$ in $L^2(Q)$ aus $e_1(y^\beta, u^\beta) = 0$,
- $\{y^\beta\}$ in $X^v(0, T)$ wegen (2.31) und Satz I.3.1,
- $\{y^\beta\}$ in $C(0, T; C(\bar{\Omega}))$, denn wir haben für $N = 1$, $X^v(0, T) \hookrightarrow C(0, T; C(\bar{\Omega}))$.

Weil $f \in C^2(\mathbb{R})$, existiert $K_1 > 0$ (von $\beta \geq 0$ unabhängig) mit $\|f''(y^\beta)\|_{L^\infty(Q)} < K_1$ und

$$\|f'(y^\beta)\|_{L^\infty(Q)} < K_1, \quad \text{für alle } \beta \geq 0. \quad (2.32)$$

Letzteres impliziert wegen Satz I.2.1 (mit Zeitsinvertierung für $\alpha = T$) die uniforme Isomorphie von $\mathcal{N}_{\alpha, \beta} : X_\alpha^v(0, T) \longrightarrow L^2(Q)$, $\beta \geq 0$. Damit existiert $\bar{L} > 0$ mit

$$\|\mathcal{N}_{T, \beta}^{-1}\| \leq \bar{L}, \quad \text{für alle } \beta \geq 0 \quad (2.33)$$

und wir haben

$$\langle \Delta \mu^\beta, f''(y^\beta) h^2 \rangle \leq K_1 \|\Delta \mu^\beta\|_{L^\infty(Q)} \|h\|_{L^2(Q)}^2, \quad \text{für alle } \beta \geq 0.$$

Nun sind auch die Bedingungen von Satz II.4.2 erfüllt. Das zugehörige Optimalitätssystem können wir wie folgt schreiben

$$\mathcal{N}_{T, \beta}^{-1}(y^\beta - y_d) = \Delta \mu^\beta, \quad \beta \geq 0.$$

Wegen (2.33) ist dann

$$\|\Delta \mu^\beta\|_{X^v} \leq \bar{L} \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}, \quad \beta \geq 0$$

und damit

$$\|\Delta \mu^\beta\|_{L^\infty(Q)} \leq \bar{L} K_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}, \quad \beta \geq 0.$$

Hierbei bezeichnet K_2 die Einbettungskonstante von $X_T^v(0, T)$ in $L^\infty(Q)$.

Wir haben dann für $\beta \geq 0$:

$$\begin{aligned} L''(y^\beta, u^\beta, \mu^\beta, \theta_1^\beta, \theta_2^\beta)(h, v)^2 &= \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{L^2(Q)}^2 - \langle \Delta \mu^\beta, f''(y^\beta) h^2 \rangle_{L^2(Q)}, \\ &\geq \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{L^2(Q)}^2 - K_1 \|\Delta \mu^\beta\|_{L^\infty(Q)} \|h\|_{L^2(Q)}^2, \\ &\geq \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{L^2(Q)}^2 - K_1 \bar{L} K_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)} \|h\|_{L^2(Q)}^2, \\ &\geq (1 - K_1 \bar{L} K_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}) \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Wegen (2.32) ist aber auch $\mathcal{N}_{0,\beta}$, $\beta \geq 0$ gleichmäßig isomorph und es existiert eine von $\beta \geq 0$ unabhängige Konstante $K_3 > 0$ mit:

$$\|h\|_{X^v} \leq K_3 \|B\| \|v\|_{L^2(Q)}, \quad \text{für alle } (h, v) \in \text{Ker } e'(y^\beta, u^\beta).$$

Wegen (2.30) folgt daraus für $(h, v) \in \text{Ker } e'(y^\beta, u^\beta)$, $\beta \geq 0$

$$\begin{aligned} L''(y^\beta, u^\beta, \mu^\beta, \theta_1^\beta, \theta_2^\beta)(h, v)^2 &\geq \\ &\geq \left(1 - K_1 \bar{L} K_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}\right) \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2K_3^2 \|B\|^2} \|h\|_{X^v}^2, \\ &\geq \left(1 - K_1 \bar{L} K_2 \left[\|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)} + \sqrt{\frac{\beta}{2} (\|u^0\|_{L^2(Q)}^2 - \|u^\beta\|_{L^2(Q)}^2)} \right]\right) \|h\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \text{Min} \left\{1, \frac{1}{K_3^2 \|B\|^2}\right\} (\|v\|_{L^2(Q)}^2 + \|h\|_{X^v}^2). \end{aligned}$$

Hierbei ist $\|u^0\|_{L^2(Q)}^2 - \|u^\beta\|_{L^2(Q)}^2$ bezüglich β monoton wachsend und konvergiert gegen 0 für $\beta \rightarrow 0^+$ ([9]). Damit erhalten wir die Behauptung.

Q.E.D

II.4.2.2 Das reduzierte Problem p^V

Wir wollen in diesem Abschnitt die Äquivalenz zwischen \mathbf{H}_{pos}^V zur Positiv-Definitheit von $j''(u^*)$ auf $L^2(Q)$ feststellen.

Wir setzen

$$T(x) = \begin{pmatrix} -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x) \\ Id_{L^2(Q)} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(L^2(Q), \mathcal{A}), \quad (2.34)$$

mit $x = (y, u)$ wie bisher.

Es sei $(h, v) \in \mathcal{A}$ und $\tilde{v} \in L^2(Q)$ gegeben. Wir haben

$$T(x)\tilde{v} = (h, v) \iff -[D_y e(x)]^{-1} \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1}(-B\tilde{v}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h \quad \text{und} \quad \tilde{v} = v,$$

$$\iff \begin{cases} h_{tt} - \Delta h + f'(y)h &= Bv, \\ h(\cdot, 0) &= 0, \\ h_t(\cdot, 0) &= 0, \end{cases}$$

$$\iff \mathcal{N}_0 h = Bv,$$

$$\iff (h, v) \in \text{Ker } e'(y, u).$$

Damit gilt

$$\text{Ker } e'(y, u) = \text{Im } T(x). \quad (2.35)$$

Wegen (2.34) und (2.26) haben wir außerdem

$$j''(u) = T^*(x)L''(x, \Theta)T(x).$$

Das heißt

$$\langle j''(u)v, v \rangle_{L^2} = L''(x, \Theta)(T(x)v, T(x)v), \quad \text{für alle } v \in L^2(Q). \quad (2.36)$$

Satz II.4.6

Es gelte (\mathbf{h}_5) . Dann ist $L''(y^, u^*; \Theta^*)$ genau dann auf $\text{Ker } e'(y^*, u^*)$ positiv-definit, wenn $j''(u^*)$ auf $L^2(Q)$ positiv-definit ist.*

Beweis

Wir setzen $x^* = (y^*, u^*)$. Es ist klar nach Konstruktion von $T(x^*)$, daß $\text{Ker } T(x^*) = \{0\}$. Zusammen mit (2.35) bedeutet es, daß $T(x^*) \in \mathcal{L}(L^2(Q), \text{Ker } e'(y^*, u^*))$ invertierbar (wir versehen $\text{Ker } e'(y^*, u^*)$ mit der von \mathcal{A} induzierten Norm) und $\text{Im } T(x^*)$ abgeschlossen ist. Die Injektivität von $T(x^*)$ und die Abgeschlossenheit von $\text{Im } T(x^*)$ implizieren die Surjektivität von $T(x^*)^*$ und damit die Existenz einer Konstante $\varsigma > 0$ mit

$$\|T(x^*)v\|_{\mathcal{A}} \geq \varsigma \|v\|_{L^2(Q)}, \quad \text{für alle } v \in L^2(Q). \quad (2.37)$$

$T(x^*)^{-1}$ ist aber auch injektiv und $\text{Im } T(x^*)^{-1} = L^2(Q)$ abgeschlossen. Damit gibt es auch ein $\tilde{\varsigma} > 0$ mit

$$\|T(x^*)^{-1}w\|_{L^2(Q)} \geq \tilde{\varsigma} \|w\|_{\mathcal{A}}, \quad \text{für alle } w \in \text{Ker } e'(y^*, u^*). \quad (2.38)$$

Es sei dann $L''(y^*, u^*; \Theta^*)$ auf $\text{Ker } e'(y^*, u^*)$ positiv-definit. Mit (2.36) und (2.37) gilt

$$\begin{aligned} j''(u^*)(v, v) &= L''(y^*, u^*; \Theta^*)(T(x^*)v, T(x^*)v), \\ &\geq \kappa \|T(x^*)v\|_{\mathcal{A}}^2, \\ &\geq \kappa \zeta^2 \|v\|_{L^2(Q)}^2, \text{ für alle } v \in L^2(Q). \end{aligned}$$

Es sei umgekehrt $j''(u^*)$ auf $L^2(Q)$ positiv-definit. So haben wir

$$L''(y^*, u^*; \Theta^*)(T(x^*)v, T(x^*)v) = j''(u^*)(v, v) \geq \tilde{\kappa} \|v\|_{L^2(Q)}^2, \text{ für alle } v \in L^2(Q). \quad (2.39)$$

Für $w \in \text{Ker } e'(y^*, u^*)$ beliebig gegeben, existiert ($T(x^*)$ ist invertierbar) $v \in L^2(Q)$ mit $T(x^*)^{-1}w = v$. Wir erhalten dann mit (2.39) und (2.38)

$$\begin{aligned} L''(y^*, u^*; \Theta^*)(w, w) &\geq \tilde{\kappa} \|T(x^*)^{-1}w\|_{L^2(Q)}^2, \\ &\geq \tilde{\kappa} \zeta^2 \|w\|_{\mathcal{A}}^2, \text{ für alle } w \in \text{Ker } e'(y^*, u^*). \end{aligned}$$

Q.E.D

Kapitel III

Dirichlet-Kontrolle

Hier wird nach dem Schema des vorigen Kapitels das Dirichlet-Kontrollproblem untersucht. Wir werden sehen (Bemerkung III.2.2), daß auch hier die Beispiele aus § II gelten, und gehen deshalb nicht auf weitere Beispiele ein. Wir werden überall, wo solche Parallelen bestehen, kurz in der Ausführung sein.

III.1 Das Kontrollproblem

Es seien Ω , $\partial\Omega$ und Σ wie im vorigen Kapitel definiert. Auf der Grundlage von Satz I.2.4 (Existenz- und Eindeigkeitssatz für das Dirichlet-Problem) wählen wir als Kontrollraum

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \{\varphi \in H^{2,2}(\Sigma) : \varphi(\cdot, 0) = \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi(\cdot, T) = \varphi_t(\cdot, T) = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

In der nächsten Bemerkung geben wir weitere Gründe für diese spezielle Wahl von $\mathcal{R}(\Sigma)$. Wir definieren darauf das Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{R}} = \langle \varphi_{tt} + \Delta_{\partial\Omega}\varphi, \psi_{tt} + \Delta_{\partial\Omega}\psi \rangle_{L^2(\Sigma)},$$

wobei hier $\Delta_{\partial\Omega}$ den Laplace-Beltrami-Operator auf $\partial\Omega$ bezeichnet. Mit der zu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{R}}$ assoziierten Norm, die wir mit $\|\varphi\|_{\mathcal{R}}$ bezeichnen, ist $\mathcal{R}(\Sigma)$ ein Hilbertraum.

Wir setzen nun

$$X^d(0, T) = \{\varphi \in X_{-\Delta}(0, T; H^1(\Omega), L^2(\Omega)) : \varphi|_{\Sigma} \in \mathcal{R}(\Sigma), \varphi(\cdot, 0) = \varphi_t(\cdot, 0) = 0 \text{ auf } \Omega\}.$$

Versehen mit der Norm

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{X^d} &= [\|\varphi\|_{X_{-\Delta}(0,T;H^1(\Omega),L^2(\Omega))}^2 + \|\varphi|_{\Sigma}\|_{\mathcal{R}}^2]^{\frac{1}{2}}, \\ &= [\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|\varphi_t\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi_{tt} - \Delta\varphi\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi|_{\Sigma}\|_{\mathcal{R}}^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ist auch $X^d(0, T)$ ein Hilbertraum (dieses läßt sich ähnlich wie im Satz I.1.3 zeigen).

Wir verlangen

$$\mathbf{H}_0^D : \quad f \text{ bildet } X^d(0, T) \text{ in } L^2(Q) \text{ ab.}$$

Im Folgenden machen wir wieder von dem Regularisierungsoperator $(-\Delta)^{-1}$ (für das homogene Dirichlet-Problem) Gebrauch.

Wir definieren:

$$\mathbf{P}_0^D : \quad e(y, u) = 0$$

wobei

$$\begin{aligned}e &= (e_1, e_2) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{F}, \\ e_1(y, u) &= (-\Delta)^{-1}[y_{tt} - \Delta y + f(y)], \\ e_2(y, u) &= y|_{\Sigma} - u,\end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{A} = X^d(0, T) \times \mathcal{R}(\Sigma), \quad \mathcal{F} = L^2(0, T; Z) \times \mathcal{R}(\Sigma) \quad \text{und} \quad Z = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Wir benutzen weiterhin die Abkürzung $x = (y, u) = (y(u), u)$.

Bemerkung III.1.1

Bei dem soeben definierten Problem haben wir $y(\cdot, 0) = y_t(\cdot, 0) = 0$ als Anfangswerte gesetzt. Nach der Definition von $\mathcal{R}(\Sigma)$ ist es klar, daß die lokalen Kompatibilitätsbedingungen (\mathbf{K}_D) dann automatisch erfüllt sind. Wir wenden uns nun der globalen Kompatibilitätsbedingung (\mathbf{K}_{g1}) zu. In unserem konkreten Fall ist diese äquivalent zur folgenden Forderung an den Steuerungsparameter u :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u_t(x', \sigma^2)|^2 dx' \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \quad \text{für } u \in \mathcal{R}(\Sigma)$$

oder durch den Ansatz $r = \sigma^2$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u_t(x', r)|^2 dx' \frac{dr}{2r} < \infty. \quad (3.1)$$

Wir definieren nun

$${}_0H^1(0, T; L^2(\partial\Omega)) = \{\varphi : \varphi \in H^1(0, T; L^2(\partial\Omega)), \varphi(\cdot, 0) = 0\}$$

und

$${}_0H^{\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\partial\Omega)) = [{}_0H^1(0, T; L^2(\partial\Omega)), L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))]_{\frac{1}{2}}.$$

Mit Satz I.1.1 wissen wir

$${}_0H^1(0, T; L^2(\partial\Omega)) \subset {}_0H^{\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\partial\Omega)). \quad (3.2)$$

Da nach Definition

$$H^{2,2}(\Sigma) = H^0(0, T; H^2(\partial\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\partial\Omega)),$$

gilt für $u \in \mathcal{R}(\Sigma)$ gegeben, auch $u_t \in {}_0H^1(0, T; L^2(\partial\Omega))$ und damit (wegen (3.2))

$$u_t \in {}_0H^{\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\partial\Omega)). \quad (3.3)$$

Nun ist bekannt [17], S. 277, daß wegen (3.3) Folgendes gilt

$$\int_0^T t^{-1} \|u_t(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 dt < \infty. \quad (3.4)$$

Durch Zurückführung von Ω auf den Fall (1.35), wie schon in § I.2.2.1.1 erwähnt, ist offensichtlich, daß sich (3.1) dann aus (3.4) ergibt.

Damit ist unsere Wahl von $\mathcal{R}(\Sigma)$ als Kontrollraum dadurch zu begründen, daß einerseits der Operator e wohl definiert sein soll (siehe Satz I.2.4), und andererseits alle Kompatibilitätsbedingungen automatisch erfüllt sein müssen.

Unser Kostenfunktional ist

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \|Cy - y_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\beta}{2} \|u\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2,$$

wobei \mathcal{H} ein gegebener Hilbertraum ist, $y_d \in \mathcal{H}$ und $C \in \mathcal{L}(X^d(0, T), \mathcal{H})$. Wir machen die Hypothese

\mathbf{H}_1^D : Für $u \in \mathcal{R}(\Sigma)$ beliebig gegeben, existiert ein eindeutiges $y \in X^d(0, T)$, so daß (y, u) Lösung von \mathbf{P}_0^D ist,

und beschäftigen uns mit

$$\mathbf{P}_1^D : \quad \begin{aligned} &\text{Min } J(y, u) \\ &e(y, u) = 0 \end{aligned}$$

und dem zugehörigen reduzierten Problem

$$\mathbf{p}^D : \quad \begin{aligned} &\text{Min } j(u) \\ &u \in \mathcal{R}(\Sigma), \end{aligned}$$

wobei $j(u) = J(x)$ mit $e(x) = 0$ ist.

III.2 Existenzsätze

Wir beweisen hier zwei Existenzsätze für \mathbf{P}_1^D . Dazu führen wir folgende Bedingungen ein

\mathbf{H}_2^D : Für $\{y^n\} \subset X^d(0, T)$ mit $y^n \rightharpoonup y$ in $H^{1,1}(Q)$ folgt $f(y^n) \rightharpoonup f(y)$ in $L^2(Q)$.

\mathbf{H}_3^D : f führt beschränkte Folgen aus \mathcal{H} in beschränkte Folgen von $L^2(Q)$ über.

Satz III.2.1

Es gelten die Bedingungen \mathbf{H}_k^D , $k = 0, 1, 2$. Es sei außerdem $\mathcal{H} \hookrightarrow H^{1,1}(Q)$, $X^d(0, T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ und C der zugehörige Einbettungsoperator. Dann besitzt \mathbf{P}_1^D für jedes $\beta > 0$ eine Lösung.

Beweis

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne hier das Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$ oder das Dualitätsprodukt zwischen $H^1(\Omega)$ und $H^1(\Omega)^*$. Es sei nun (y^n, u^n) eine Minimalfolge für \mathbf{P}_1^D , so folgt aus $J(y^n, u^n) < \infty$,

$$\|y^n\|_{\mathcal{H}} + \|u^n\|_{\mathcal{R}} < \infty, \quad \text{uniform bezüglich } n,$$

und damit wegen $\mathcal{H} \hookrightarrow H^{1,1}(Q)$,

$$\|y^n\|_{H^{1,1}(Q)} + \|u^n\|_{\mathcal{R}} < \infty, \quad \text{uniform bezüglich } n. \quad (3.5)$$

Es existiert dann (y^*, u^*) mit

$$y^n \rightharpoonup y^* \text{ in } H^{1,1}(Q), \quad (3.6)$$

$$u^n \rightharpoonup u^* \text{ in } \mathcal{R}(\Sigma) \quad (3.7)$$

und

$$f(y^n) \rightharpoonup f(y^*) \text{ in } L^2(Q). \quad (3.8)$$

Durch eine innere Produktbildung von $e_1(y^n, u^n) = 0$ mit $\varphi(t) \cdot \omega$, mit $\varphi \in C^1(0, T)$, $\varphi(T) = 0$ und $\omega \in H_0^1(\Omega)$ und partielle Integration, erhalten wir:

$$\int_0^T \langle -y_t^n, \omega \rangle \varphi_t(t) dt + \int_0^T \langle \nabla y^n(t), \nabla \omega \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle f(y^n)(t), \omega \rangle \varphi(t) dt = 0.$$

Ein Limesübergang unter Benutzung von (3.6) und (3.8) liefert

$$\int_0^T \langle -y_t, \omega \rangle \varphi_t(t) dt + \int_0^T \langle \nabla y(t), \nabla \omega \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle f(y^*)(t), \omega \rangle \varphi(t) dt = 0. \quad (3.9)$$

Setzen wir $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$, so folgt daraus nach partieller Integration

$$y_{tt}^* - \Delta y^* + f(y^*) = 0. \quad (3.10)$$

Analog wie im Satz II.2.1 läßt sich zeigen, daß

$$y^n(0) \rightharpoonup y^*(0), \text{ wenn } n \longrightarrow \infty$$

und somit

$$y^*(0) = y^0$$

daraus folgt.

Das innere Produkt von (3.10) mit $\varphi(t) \cdot \omega$, für $\varphi \in C^1(0, T)$, $\varphi(T) = 0$ und $\omega \in H_0^1(\Omega)$ gefolgt von partieller Integration und Vergleich mit (3.9) liefert

$$y_t^*(0) = y^0.$$

Mit Satz I.1.2 wissen wir daß, die Abbildung $y \mapsto y|_\Sigma$ von $H^{1,1}(Q)$ in $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$ stetig ist. Es folgt dann aus (3.6)

$$y^n|_\Sigma \rightharpoonup y^*|_\Sigma \text{ in } H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma).$$

Da $H^{2,2}(\Sigma) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma)$, ist auch $\mathcal{R}(\Sigma) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma)$. Aus (3.7) folgt dann

$$u^n \rightharpoonup u^* \text{ in } H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma).$$

Dadurch gilt $y^*|_{\Sigma} = u^*$ und (y^*, u^*) ist damit zulässig. Wie im Beweis von Satz II.2.1 folgt aus der Schwach-Unterhalbstetigkeit von J , daß (y^*, u^*) eine Lösung von P_1^D ist.

Q.E.D

Im nächsten Satz verzichten wir auf die Bedingung $\mathcal{H} \hookrightarrow H^{1,1}(Q)$. Dafür setzen wir zusätzlich \mathbf{H}_3^D voraus.

Satz III.2.2

Falls \mathbf{H}_k^D , $k = 0, 1, 2, 3$ gelten und $X^d(0, T) \hookrightarrow \mathcal{H}$, wobei C der zugehörige Einbettungsoperator ist, so besitzt \mathbf{P}_1^D für jedes $\beta > 0$ eine Lösung.

Beweis

Es sei (y^n, u^n) eine Minimalfolge. So folgt aus $J(y^n, u^n) < \infty$, $\|y^n\|_{\mathcal{H}} + \|u^n\|_{\mathcal{R}} < \infty$. Wegen \mathbf{H}_3^D ist dann $f(y^n)$ in $L^2(Q)$ gleichmäßig beschränkt. Wir haben dann

$$\begin{aligned} y_{tt}^n - \Delta y^n &= -f(y^n) \text{ gleichmäßig in } L^2(Q) \text{ beschränkt, und} \\ y^n|_{\Sigma} &= u^n \text{ gleichmäßig in } \mathcal{R}(\Sigma) \text{ beschränkt.} \end{aligned}$$

Wegen dem Existenzsatz für das Dirichlet-Problem (Satz I.2.4) folgt daraus

$$\|y^n\|_{X^d} < \infty \text{ gleichmäßig bezüglich } n,$$

und damit (Es ist klar, daß $X^d(0, T) \hookrightarrow H^{1,1}(Q)$ gilt)

$$\|y^n\|_{H^{1,1}(Q)} < \infty \text{ gleichmäßig bezüglich } n.$$

Insgesamt erhalten wir uniform in n

$$\|y^n\|_{H^{1,1}(Q)} + \|u^n\|_{\mathcal{R}} < \infty.$$

Wir können dann wie im vorigen Satz weiterverfahren.

Q.E.D.

Bemerkung III.2.1

Weil ein linearer Operator schwach konvergente Folgen in schwach konvergenten Folgen abbildet, ist H_2^D automatisch erfüllt, wenn f linear ist. Ist zusätzlich $\mathcal{H} \hookrightarrow L^2(Q)$, so gilt H_3^D .

Bemerkung III.2.2

Im §II haben wir allein mit Hilfe des Sobolevschen Satzes und der Tatsache, daß $X^v(0, T) \hookrightarrow C(0, T; H_0^1(\Omega))$ gezeigt, daß die Beispiele f_i , $i = 1, 2, 3$ die Hypothesen \mathbf{H}_i^V , $i = 2, 3, 4$ und \mathbf{H}_S^V erfüllen. Der in diesem Kapitel neudefinierte Raum $X^d(0, T)$ ist offensichtlich in $X_{-\Delta}(0, T; H^1(\Omega), L^2(\Omega))$ stetig eingebettet und damit auch in $C(0, T; H^1(\Omega))$ (Satz I.1.4). Weil der Sobolevsche Einbettungssatz (Satz I.1.5) in dieser Form insbesondere für $H^1(\Omega)$ gilt, sind für diese Beispiele auch hier die Bedingungen \mathbf{H}_i^D , $i = 2, 3, 4$ und \mathbf{H}_S^D erfüllt.

III.3 Regularität des Problems

Hier wollen wir für das Problem \mathbf{P}_1^D sowohl die Differenzierbarkeit als auch die Lipschitz-Stetigkeit des Kostenfunktionales und der Systemgleichung untersuchen. Dabei gehen wir auch auf das reduzierte Problem \mathbf{p}^D ein. Zum Schluß beweisen wir einen Surjektivitätssatz für die linearisierte Nebenbedingung am Lösungspunkt (y^*, u^*) .

III.3.1 Kostenfunktional und Systemgleichung

Wir verlangen

\mathbf{H}_E^D : \mathbf{P}_1^D besitzt eine (lokale) Lösung (y^*, u^*) .

Wie wir in § II.3 gesehen haben, ist es klar, daß einerseits J zweimal stetig-differenzierbar, mit einer in einer Umgebung von (y^*, u^*) Lipschitz-stetigen zweiten Ableitung J'' , ist, und andererseits die Beispiele f_k , $k = 1, 2, 3$ (§II.3.1) bezüglich den neuen Räumen die nächste Hypothese erfüllen (letzte Bemerkung).

\mathbf{H}_4^D : $y \mapsto f(y)$ ist zweimal stetig-differenzierbar von $X^d(0, T)$ in $L^2(Q)$ und $y \mapsto f''(y)$ von $X^d(0, T)$ in $L^2(Q)$ ist in einer Umgebung von y^* Lipschitz-stetig.

\mathbf{H}_4^D impliziert, daß der Operator $e : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$ auch zweimal stetig-differenzierbar und e'' Lipschitz-stetig in einer Umgebung von (y^*, u^*) ist.

Wir setzen neben \mathbf{H}_4^D weiterhin \mathbf{H}_5^V und \mathbf{H}_6^V (§ II.3.1) voraus. Damit ist gesichert, daß

$$f'(y) \varphi \in L^2(Q) \text{ für alle } \varphi \in X^d(0, T),$$

und

$$f''(y)(\varphi, \psi) \in L^2(Q) \text{ für } \varphi, \psi \in X^d(0, T). \quad (3.11)$$

Wir haben dann

$$e'(y^*, u^*)(h, v) = ((-\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h], h|_{\Sigma} - v), \quad (h, v) \in X^d(0, T) \times \mathcal{R}(\Sigma).$$

Für

$$D_y e(x) : X^d(0, T) \rightarrow \mathcal{F}$$

findet man

$$D_y e(x)(h) = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y) h] \\ h|_{\Sigma} \end{pmatrix}$$

und für

$$D_{yy} e(x) : X^d(0, T) \rightarrow \mathcal{L}(X^d(0, T), \mathcal{F})$$

gilt

$$D_{yy} e(x)(h, g) = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} f''(y) h g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Unter der Voraussetzung

$$\mathbf{h}'_5 : D_y e(x) : X^d(0, T) \rightarrow \mathcal{F} \text{ ist isomorph,}$$

erhält man mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen

$$y'(u)v = - [D_y e(y(u), u)]^{-1} D_u e(y(u), u)v \quad ; \quad v \in \mathcal{R}(\Sigma)$$

und

$$y''(u)(v, w) = -[D_y e(x)]^{-1} D_{yy} e(x)(y'(u)v, y'(u)w) \quad ; \quad v, w \in \mathcal{R}(\Sigma).$$

Laut Satz I.2.4 gilt (\mathbf{h}'_5) , wenn zum Beispiel $f'(y)$ die Bedingungen von q in (\mathbf{h}_2) und (\mathbf{h}_3) (§ I.3.1.1) erfüllt.

Man erhält für die erste und zweite Ableitung des reduzierten Kostenfunktionals

$$\langle j'(u), v \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}} = \langle -[D_u e(x)]^* [D_y e(x)]^{-*} D_y J(x) + D_u J(x), v \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}}; \quad v \in \mathcal{R}(\Sigma). \quad (3.12)$$

und

$$\begin{aligned} \langle j''(u)v, w \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}} &= \langle D_{yy} J(x) y'(u)v, y'(u)w \rangle_{X^{d^*}, X^d} + \langle D_y J(x), y''(u)(v, w) \rangle_{X^{d^*}, X^d} \\ &\quad + \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}}, \\ &= \langle D_{yy} J(x) y'(u)v, y'(u)w \rangle_{X^{d^*}, X^d} \\ &\quad + \langle D_y J(x), -[D_y e(x)]^{-1} D_{yy} e(x)(y'(u)v, y'(u)w) \rangle_{X^{d^*}, X^d} \quad (3.13) \\ &\quad + \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}}; \quad v, w \in \mathcal{R}(\Sigma). \end{aligned}$$

III.3.2 Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$

Die Frage der Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$ ist äquivalent (der Operator $-\Delta \in \mathcal{L}(Z, L^2(\Omega))$ ist isomorph) zur Frage der Existenz von $(h, v) \in X^d(0, T) \times \mathcal{R}(\Sigma)$ mit

$$\mathbf{S}_D \quad \begin{cases} h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h = q \\ h|_{\Sigma} - v = \delta \end{cases}, \quad \text{für } (q, \delta) \in L^2(Q) \times \mathcal{R}(\Sigma) \text{ gegeben.}$$

Im folgenden Resultat wird eine hinreichende Bedingung für die Surjektivität gegeben.

Satz III.3.1

Es gelte

$$f'(y^*) \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} p \in (2, \infty] \text{ beliebig, falls } N \leq 2 \\ \text{und} \\ p = N, \text{ falls } N \geq 3. \end{cases}$$

Dann ist $e'(y^*, u^*)$ surjektiv.

Beweis

Für $v \in \mathcal{R}(\Sigma)$ beliebig gewählt, erhält man die Behauptung als Folgerung von Satz I.2.4.

Q.E.D

III.4 Optimalitätskriterien

Wir leiten hier das Optimalitätssystem für \mathbf{P}_D^1 her. Zum Schluß untersuchen wir eine hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung.

III.4.1 Notwendige Optimalitätskriterien

Die neue Lagrange-Funktion lautet

$$\begin{aligned} L(y, u, \mu, \theta) &= \frac{1}{2} \|Cy - y_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\beta}{2} \|u\|_{\mathcal{R}}^2 \\ &\quad + \langle \mu, (-\Delta)^{-1}[y_{tt} - \Delta y + f(y)] \rangle_{L^2(Z)} + \langle \theta, y|_{\Sigma} - u \rangle_{\mathcal{R}}, \\ &\text{für } (y, u, \mu, \theta) \in X^d(0, T) \times \mathcal{R}(\Sigma) \times L^2(0, T; Z) \times \mathcal{R}(\Sigma). \end{aligned}$$

Unter \mathbf{H}_5^V (§ II.3.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} D_{(y,u)}L(y, u, \mu, \theta)(h, v) &= \langle Ch, Cy - y_d \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle u, v \rangle_{\mathcal{R}} \\ &\quad + \langle \mu, (\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y)h] \rangle_{L^2(Z)} + \langle \theta, h|_{\Sigma} \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \theta, v \rangle_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Wir verlangen:

$$\mathbf{H}_S^D : \quad e'(y^*, u^*) \text{ ist surjektiv.}$$

Satz III.4.1

Sei (y^*, u^*) eine (lokale) Lösung von \mathbf{P}_1^D und es gelten \mathbf{H}_0^D , \mathbf{H}_5^V und \mathbf{H}_S^D . Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren

$$(\mu^*, \theta^*) \in L^2(Z) \times \mathcal{R}(\Sigma)$$

mit

$$\begin{aligned} \langle Ch, Cy^* - y_d \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle u^*, v \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \mu^*, (-\Delta)^{-1} [h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h] \rangle_{L^2(Z)} \\ + \langle \theta^*, h|_{\Sigma} \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \theta^*, v \rangle_{\mathcal{R}} = 0, \end{aligned}$$

für alle $(h, v) \in X^d(0, T) \times \mathcal{R}(\Sigma)$.

Beweis

Durch Anwendung des Lagrangeschen Prinzips.

Q.E.D

Es sei $X^v(0, T)$ wie in § II definiert und Λ der kanonische Isomorphismus von \mathcal{H} nach \mathcal{H}^* .

Satz III.4.2

Es sei $C \in \mathcal{L}(L^2(Q), \mathcal{H})$, $f'(y^*) \in L^\infty(Q)$ und es gelten die Bedingungen von Satz III.4.1, so ist μ^* Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta \mu_{tt} - \Delta^2 \mu + f'(y^*) \Delta \mu &= C^* \Lambda(Cy^* - y_d), \\ \Delta \mu(\cdot, T) &= 0, \\ \Delta \mu_t(\cdot, T) &= 0, \\ \Delta \mu|_{\Sigma} &= 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

und es gilt

$$\Delta \mu^* \in X^v(0, T).$$

Beweis

Wir werden an manchen Stellen im Beweis auf Details verzichten und uns dort auf Satz II.4.2 beziehen, dessen Beweis diesem ähnlich ist.

Es gilt für die Lagrange-Multiplikatoren $(\mu^*, \theta^*) \in \mathcal{F}$ ($= L^2(0, T; Z) \times \mathcal{R}(\Sigma)$)

$$D_x L(y^*, u^*, \mu^*, \theta^*)(h, v) = 0, \quad \text{für alle } (h, v) \in X^d(0, T) \times \mathcal{R}(\Sigma),$$

das heißt

$$\begin{aligned} \langle Ch, Cy^* - y_d \rangle_{\mathcal{H}} + \beta \langle u^*, v \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \mu^*, (-\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h] \rangle_{L^2(Z)} \\ + \langle \theta, h|_{\Sigma} \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \theta, v \rangle_{\mathcal{R}} = 0, \text{ für alle } (h, v) \in X^d(0, T) \times \mathcal{R}(\Sigma). \end{aligned}$$

Wir setzen $v = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \langle Ch, Cy^* - y_d \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mu^*, (-\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h] \rangle_{L^2(Z)} + \langle \theta, h|_{\Sigma} \rangle_{\mathcal{R}} = 0, \\ \text{für alle } h \in X^d(0, T). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Durch die Wahl $h(\cdot, t) = \varphi(t) \cdot \omega$, $\omega \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$ erhalten wir aus (3.15), analog wie im Beweis von Satz II.4.2

$$\Delta \mu_{tt}^* - \Delta^2 \mu^* + f'(y^*) \Delta \mu^*(t) - C^* \Lambda(Cy^* - y_d) = 0 \text{ auf } \mathcal{D}'(0, T; Z^*) \quad (3.16)$$

oder durch Verkettung mit $(-\Delta)^{-1}$,

$$\mu_{tt}^* - \Delta \mu^* + \Delta^{-1}[f'(y^*) \Delta \mu^*(t)] - \Delta^{-1}[C^* \Lambda(Cy^* - y_d)] = 0 \text{ auf } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.17)$$

und damit auch $\mu^* \in C(0, T; L^2(\Omega))$ und $\mu_t^* \in C(0, T; L^2(\Omega))$.

Durch innere Produktbildung von (3.17) mit Δh , wobei $h(\cdot, t) = \varphi(t) \cdot \omega$ mit $\varphi \in C^2(0, T)$, $\omega \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi(\cdot, 0) = \varphi_t(\cdot, 0) = 0$ (es ist dann $h \in X^d(0, T)$) und partielle Integration durch zweimalige Anwendung von Lemma I.1.2 ist dann:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mu^*, h_{tt} \rangle_{L^2(Q)} + \langle \mu_t^*(\cdot, T), \Delta h(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mu^*(\cdot, T), \Delta h_t(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta \mu^*, \Delta h \rangle_{L^2(Q)} \\ + \langle \Delta^{-1}[f'(y^*) \Delta \mu^*], \Delta h \rangle_{L^2(Q)} - \langle \Delta^{-1}[C^* \Lambda(Cy^* - y_d)], \Delta h \rangle_{L^2(Q)} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Oder

$$\begin{aligned} \langle \mu^*, (-\Delta)^{-1}[h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h] \rangle_{L^2(Z)} + \langle Ch, Cy^* - y_d \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mu_t^*(\cdot, T), \Delta h(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ - \langle \mu^*(\cdot, T), \Delta h_t(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (3.15) liefert

$$\langle \mu_t^*(\cdot, T), \Delta h(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mu^*(\cdot, T), \Delta h_t(\cdot, T) \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

und damit

$$\Delta \mu^*(\cdot, T) = \Delta \mu_t^*(\cdot, T) = 0.$$

Der Beweis von $\Delta\mu^* \in X^v(0, T)$ läuft fast genauso wie im Satz II.4.2 :

Zunächst stellen wir fest, daß aus (3.15) folgt

$$\begin{aligned} \langle \Delta\mu^*, h_{tt} - \Delta h + f'(y^*)h \rangle_{L^2(Q)} &= \Gamma(h) = \langle C^* \Lambda(Cy^* - y_d), h \rangle_{L^2(Q)}, \\ \text{für alle } h \in \{ \varphi \in X^d(0, T) : \varphi|_{\Sigma} &= 0, \} = \\ &= \{ \varphi \in X^v(0, T) : \varphi(\cdot, 0) = \varphi_t(\cdot, 0) = 0 \text{ auf } \Omega \}, \\ &= X_0^v(0, T). \end{aligned}$$

Es ist klar, daß $\Gamma \in X_0^v(0, T)^*$ ist. Es folgt daraus wegen Satz I.2.2 und Folgerung I.2.1 mit Zeitinvertierung, daß $\Delta\mu^*$ die Lösung durch Transposition des folgenden Systems ist:

$$\begin{aligned} \lambda_{tt} - \Delta\lambda + f'(y^*)\lambda &= C^* \Lambda(Cy^* - y_d) \quad (\in L^2(Q)), \\ \lambda(\cdot, T) &= 0, \\ \lambda_t(\cdot, T) &= 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

Auch hier handelt es sich in (3.19) um den Laplace Operator für das homogene Dirichlet-Problem. Dieses System besitzt dann in $X^v(0, T)$ (Satz I.2.1 mit Zeitinvertierung) eine eindeutige Lösung λ^* .

Da auch $\lambda^* \in X^v(0, T) (\subset L^2(Q))$ Lösung durch Transposition von (3.19) und diese eindeutig ist (Folgerung I.2.1), gilt

$$\lambda^* = \Delta\mu^* \in X^v(0, T).$$

Die homogene Dirichlet-Randbedingung für $\Delta\mu^*$ folgt daraus.

Q.E.D

Ähnlich wie in Bemerkung II.4.2 setzen wir

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{F} = L^2(0, T; Z) \times \mathcal{R}(\Sigma)$$

und

$$\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = R_{\mathcal{F}, d}^{-1} \Theta \in \mathcal{F}^*. \tag{3.20}$$

Hierbei bezeichnet $R_{\mathcal{F}, d}$ den Rieszschen Isomorphismus von \mathcal{F}^* auf \mathcal{F} . Aus

$$\langle \mu, \psi \rangle_{L^2(Z)} = \langle \bar{\mu}, \psi \rangle_{L^2(Z)^*, L^2(Z)}, \quad \text{für alle } \psi \in L^2(Z)$$

und

$$\langle \theta, \eta \rangle_{\mathcal{R}(\Sigma)} = \langle \bar{\theta}, \eta \rangle_{\mathcal{R}(\Sigma)^*, \mathcal{R}(\Sigma)}, \quad \text{für alle } \eta \in \mathcal{R}(\Sigma)$$

folgt

$$\begin{pmatrix} \Delta\mu \\ (\frac{\partial^4}{\partial t^4} + \Delta_{\partial\Omega}^2)\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-\Delta)^{-1}\bar{\mu} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Da in unserem Fall $D_y J(x) \in L^2(Q)$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} = -[D_y e(x)]^{-*} D_y J(x) &\iff [D_y e(x)]^* \bar{\Theta} = -D_y J(x), \\ &\lambda_{tt} - \Delta\lambda + f'(y^*)\lambda = C^* \Lambda(Cy^* - y_d), \\ &\lambda(\cdot, T) = 0, \\ \implies \lambda_t(\cdot, T) &= 0, \\ &\lambda = 0 \text{ auf } \Sigma, \end{aligned} \quad (3.22)$$

mit

$$\lambda = -(-\Delta)^{-1}\bar{\mu} \in X^v(0, T). \quad (3.23)$$

Aufgrund von (3.21) haben wir auch

$$\lambda = \Delta\mu. \quad (3.24)$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen vom Satz III.4.2 sind damit erfüllt, wenn

$$[D_y e(x)]^* \bar{\Theta} = -D_y J(x)$$

oder

$$\bar{\Theta} = -[D_y e(x^*)]^{-*} D_y J(x^*). \quad (3.25)$$

Unter \mathbf{H}_6^V haben wir mit (3.12) und (3.13)

$$\langle j'(u), v \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}} = \langle D_u J(x) + [D_u e(x)]^* \bar{\Theta}, v \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}}; \quad v \in \mathcal{R}(\Sigma) \quad (3.26)$$

und

$$\begin{aligned} \langle j''(u)v, w \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}} &= \langle D_{yy} J(x) [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, [D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w \rangle_{X^{d^*}, X^d} \\ &+ \langle -[D_y e(x)]^{-*} D_y J(x), D_{yy} e(x) (-[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x)w) \rangle_{\mathcal{F}^*, \mathcal{F}} \\ &+ \langle D_{uu} J(x)v, w \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle D_{yy}J(x)[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v, [D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)w \rangle_{X^{d^*}, X^d} \\
 &\quad + \langle \bar{\Theta}, D_{yy}e(x)(-[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)w) \rangle_{\mathcal{F}^*, \mathcal{F}} \\
 &\quad + \langle D_{uu}J(x)v, w \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}}, \\
 &= \langle D_{yy}J(x)[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v, [D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)w \rangle_{X^{d^*}, X^d} \\
 &\quad + \langle \Theta, D_{yy}e(x)(-[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)w) \rangle_{\mathcal{F}} \\
 &\quad + \langle D_{uu}J(x)v, w \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}}, \\
 &= \langle D_{yy}J(x)[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v, [D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)w \rangle_{X^{d^*}, X^d} \\
 &+ \langle \mu, D_{yy}e_1(x)(-[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)w) \rangle_{L^2(Z)} \quad (3.27) \\
 &\quad + \langle D_{uu}J(x)v, w \rangle_{\mathcal{R}^*, \mathcal{R}}; v, w \in \mathcal{R}(\Sigma), \\
 &= \langle C[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v, C[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)w \rangle_H \\
 &\quad \langle -\Delta\mu, f''(y)(-[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v, -[D_y e(x)]^{-1}D_u e(x)v) \rangle_{L^2(Q)} \\
 &\quad + \langle \beta v, w \rangle_{\mathcal{R}}.
 \end{aligned}$$

III.4.2 Positiv-Definitheit

Untersucht wird hier die Bedingung

$$\mathbf{H}_{pos}^D : \quad L''(y^*, u^*, \mu^*, \theta^*)(h, v)^2 \geq C \{ \|h\|_{X^d}^2 + \|v\|_{\mathcal{R}}^2 \}$$

für alle $(h, v) \in \text{Ker } e'(y^*, u^*)$.

Unter der Hypothese \mathbf{H}_6^V haben wir

$$\begin{aligned}
 L''(y^*, u^*; \mu^*, \theta^*) &= \begin{pmatrix} D_{yy}J(x^*) + \langle \mu^*, D_{yy}e_1(x^*)(\cdot, \cdot) \rangle_{L^2(Z)} & 0 \\ 0 & D_{uu}J(x^*) \end{pmatrix} \quad (3.28) \\
 &\in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathbb{R})).
 \end{aligned}$$

Es ist dann

$$L''(y^*, u^*, \mu^*, \theta^*)(h, v)^2 = \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta\|v\|_{\mathcal{R}}^2 - \langle \Delta\mu^*, f''(y^*)h^2 \rangle_{L^2(Q)}; (h, v) \in \mathcal{A}.$$

Wir definieren

$$\mathcal{M}_0 : X^d(0, T) \longrightarrow L^2(Q) \times \mathcal{R}(\Sigma)$$

mit

$$\mathcal{M}_0(h) = (g, v) \iff \begin{cases} h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h = g, \\ h|_{\Sigma} = v, \end{cases} \quad (3.29)$$

und

$$\mathcal{M}_T : X_T^d(0, T) \longrightarrow L^2(Q)$$

mit

$$\mathcal{M}_T(h) = g \iff h_{tt} - \Delta h + f'(y^*) h = g.$$

Dabei ist

$$X_T^d(0, T) = \{\varphi \in X^d(0, T) : \varphi|_{\Sigma} = 0; \varphi(\cdot, T) = \varphi_t(\cdot, T) = 0 \text{ auf } \Omega\}.$$

Satz III.4.3

Es mögen \mathbf{H}_6^V und die Bedingungen von Satz III.4.2 gelten. Falls außerdem \mathcal{M}_0 ein Isomorphismus ist und $\|Cy^* - y_d\|_{\mathcal{H}}$ hinreichend klein, dann ist \mathbf{H}_{opt}^D erfüllt.

Bemerkung III.4.1

Satz I.2.4 macht eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für Dirichlet-Probleme mit inhomogenen Randbedingungen. Daraus können wir schlußfolgern, daß \mathcal{M}_0 isomorph ist, wenn $f'(y^*)$ die Voraussetzungen von q in (\mathbf{h}_2) und (\mathbf{h}_3) erfüllt. Die Isomorphie von \mathcal{M}_0 impliziert aber auch die Isomorphie von \mathcal{M}_T ($v = 0$ in (3.29) setzen und den Zeitparameter invertieren) sowie die Surjektivität von $e'(y^*, u^*)$.

Beweis von Satz III.4.3

Für den hier benutzten Raum $L^p(\Omega)$ sei p wie in \mathbf{H}_6^V bestimmt.

Da $X^d(0, T) \hookrightarrow C(0, T; H^1(\Omega))$ (Siehe Bemerkung III.2.2) gilt auch hier, wie im Lemma II.4.2 :

$$|\langle \lambda^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)}| \leq C_f \|\lambda^*\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^d}^2 \|f''(y^*)\|_{L^2(0, T; L^p(\Omega))}, \text{ für alle } h \in X^d(0, T),$$

wobei C_f eine positive Konstante bezeichnet.

Wegen dem transformierten Optimalitätssystem (3.22), (3.24) und der Isomorphie von \mathcal{M}_T (obige Bemerkung) erreichen wir, wie in Bemerkung II.4.4

$$\|\lambda^*\|_{L^2(Q)} \leq K_s(y^*) \|C^* \Lambda(Cy^* - y_d)\|_{L^2(Q)}.$$

Wir haben dann die folgenden Abschätzungen.

$$\begin{aligned} L''(y^*, u^*, \mu^*, \theta^*)(h, v)^2 &= \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}}^2 - \langle \lambda^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)}, \\ &\geq \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}}^2 - |\langle \lambda^*, f''(y^*) h^2 \rangle_{L^2(Q)}|, \\ &\geq \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}}^2 - C_f \|\lambda^*\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^d}^2 \|f''(y^*)\|_{L^2(0,T;L^p(\Omega))}, \\ &\geq \|Ch\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}}^2 - C_f K_s(y^*) \|f''(y^*)\|_{L^2(0,T;L^p(\Omega))} \|C^* \Lambda(Cy^* - y_d)\|_{L^2(Q)} \|h\|_{X^d}^2. \end{aligned}$$

Wir stellen fest

$$\text{Ker } e'(y^*, u^*) = \{(h, v) \in \mathcal{A} : \mathcal{M}_0(h) = (0, v)\}$$

und erhalten wegen der Isomorphie von \mathcal{M}_0

$$\|h\|_{X^d} \leq \|\mathcal{M}_0^{-1}\| \|v\|_{\mathcal{R}} \quad , \quad \forall (h, v) \in \text{Ker } e'(y^*, u^*).$$

Durch Weglassen von $\|Ch\|_{\mathcal{H}}^2$ folgt für $(h, v) \in \text{Ker } e'(y^*, u^*)$

$$\begin{aligned} L''(y^*, u^*, \mu^*, \theta^*)(h, v)^2 &\geq \frac{\beta}{2} \|v\|_{\mathcal{R}}^2 + \frac{\beta}{2} \frac{\|h\|_{X^d}^2}{\|\mathcal{M}_0^{-1}\|^2} \\ &\quad - C_f K_s(y^*) \|f''(y^*)\|_{L^2(0,T;L^p(\Omega))} \|C^* \Lambda\| \|Cy^* - y_d\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{X^d}^2 \\ &= \frac{\beta}{2} \|v\|_{\mathcal{R}}^2 + \left[\frac{\beta}{2\|\mathcal{M}_0^{-1}\|^2} - C_f K_s(y^*) \|f''(y^*)\|_{L^2(0,T;L^p(\Omega))} \|C^* \Lambda\| \|Cy^* - y_d\|_{\mathcal{H}} \right] \|h\|_{X^d}^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Q.E.D

Im nächsten Satz benutzen wir die Bezeichnungen \mathbf{P}_D^β , (y^β, u^β) , $(\mu^\beta, \theta^\beta)$ und $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ anstelle von P_1^D , (y^*, u^*) , (μ^*, θ^*) und \mathcal{M}_α , $\alpha \in \{0, T\}$ und erhalten:

Satz III.4.4

(y^β, u^β) sei eine globale Lösung von \mathbf{P}_D^β , $\beta \geq 0$ und sei $\|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)}$ hinreichend klein. Es gelten außerdem die Bedingungen \mathbf{V}_1 und \mathbf{V}_2 vom § II.4.2.1. So gibt es ein $K > 0$ und $\bar{\beta}$, so daß

$$L''(y^\beta, u^\beta, \mu^\beta, \theta^\beta)(h, v)^2 \geq K [\|h\|_{X^d}^2 + \|v\|_{\mathcal{R}}^2],$$

für alle $\beta \in [0, \bar{\beta}]$ und $(h, v) \in \text{Ker } e'(y^\beta, u^\beta)$.

Beweis

Wir verfahren wie im Satz II.4.5 und halten aus diesem Grund die Beweisführung kurz.

Aus der Monotonie von $\beta \longrightarrow \|Cy^\beta - y_d\|$ folgt, daß

$$\begin{aligned} \|u^\beta\|_{\mathcal{R}} &\leq \|u^0\|_{\mathcal{R}}, \\ \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}^2 &\leq \|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} \left(\|u^0\|_{\mathcal{R}}^2 - \|u^\beta\|_{\mathcal{R}}^2 \right), \end{aligned}$$

und $\{y^\beta\}_{\beta>0}$ in $X^d(0, T)$ und damit auch in $C(0, T; C(\bar{\Omega}))$ gleichmäßig beschränkt ist.

Weil $f \in C^2(\mathbb{R})$, existiert dann eine von β unabhängige Konstante $K_1 > 0$ mit

$$\|f''(y^\beta)\|_{L^\infty(Q)} < K_1 \quad \text{und} \quad \|f'(y^\beta)\|_{L^\infty(Q)} < K_1, \quad \text{für alle } \beta \geq 0.$$

Somit ist wegen Satz I.2.4 (bzw. Satz I.2.1) die Abbildung $\mathcal{M}_{0,\beta} : X^d(0, T) \longrightarrow L^2(Q)$ (bzw. $\mathcal{M}_{T,\beta} : X_T^d(0, T) \longrightarrow L^2(Q)$) für alle $\beta \geq 0$ gleichmäßig isomorph.

Es existiert dann $L > 0$ mit

$$\|\mathcal{N}_{T,\beta}^{-1}\| \leq L, \quad \text{für alle } \beta \geq 0. \quad (3.30)$$

Wie im Satz II.4.5 gilt auch

$$\langle \Delta\mu^\beta, f''(y^\beta) h^2 \rangle \leq K_1 \|\Delta\mu^\beta\|_{L^\infty(Q)} \|h\|_{L^2(Q)}^2, \quad \text{für alle } \beta \geq 0$$

und mit (3.30)

$$\|\Delta\mu^\beta\|_{L^\infty(Q)} \leq LK_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}, \quad \beta \geq 0,$$

wobei K_2 die Einbettungskonstante von $X_T^d(0, T)$ in $L^\infty(Q)$ bezeichnet.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
L''(y^\beta, u^\beta, \mu^\beta, \theta^\beta)(h, v)^2 &= \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2 - \langle \Delta\mu^\beta, f''(y^\beta) h^2 \rangle_{L^2(Q)} \\
&\geq \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2 - K_1 \|\Delta\mu^\beta\|_{L^\infty(Q)} \|h\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\geq \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2 - K_1 L K_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)} \|h\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\geq (1 - K_1 L K_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}) \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2, \\
&\quad \text{für } \beta \geq 0.
\end{aligned}$$

Weil

$$\text{Ker } e'(y^\beta, u^\beta) = \{(h, v) \in \mathcal{A} : \mathcal{M}_{0,\beta}(h) = (0, v)\},$$

existiert auch wegen der uniformen Isomorphie von $\mathcal{M}_{0,\beta}$ eine von $\beta \geq 0$ unabhängige positive Konstante K_3 mit:

$$\|h\|_{X^d} \leq K_3 \|v\|_{\mathcal{R}(\Sigma)} \quad , \quad \text{für alle } (h, v) \in \text{Ker } e'(y^\beta, u^\beta).$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}
L''(y^\beta, u^\beta, \mu^\beta, \theta^\beta)(h, v)^2 &\geq (1 - K_1 L K_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}) \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \beta \|v\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2 \\
&= \left(1 - K_1 L K_2 \|y^\beta - y_d\|_{L^2(Q)}\right) \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} \|v\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2 + \frac{\beta}{2K_3^2} \|h\|_{X^d}^2 \\
&\geq \left(1 - K_1 \bar{L} K_2 \left[\|y^0 - y_d\|_{L^2(Q)} + \sqrt{\frac{\beta}{2} (\|u^0\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2 - \|u^\beta\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2)} \right]\right) \|h\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\quad + \frac{\beta}{2} \text{Min} \left\{1, \frac{1}{K_3^2}\right\} (\|v\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2 + \|h\|_{X^d}^2) ,
\end{aligned}$$

wobei auch hier $\|u^0\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2 - \|u^\beta\|_{\mathcal{R}(\Sigma)}^2$ bezüglich β monoton wachsend ist und gegen 0 für $\beta \rightarrow 0^+$ ([9]) konvergiert. Wir erhalten somit die Behauptung.

Q.E.D

Bezüglich des reduzierten Problems gilt

Satz III.4.5

Unter (\mathbf{h}_5) ist $L''(y^*, u^*; \Theta^*)$ genau dann auf $\text{Ker } e'(y^*, u^*)$ positiv-definit, wenn $j''(u^*)$ auf $\mathcal{R}(\Sigma)$ positiv-definit ist.

Beweis

Genauso wie im Satz II.4.6 mit

$$T(x) = \begin{pmatrix} -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x) \\ Id_{\mathcal{R}(\Sigma)} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(\Sigma), \mathcal{A}). \quad (3.31)$$

Q.E.D

Kapitel IV

Die Newton-Methode für hyperbolische Probleme

In diesem Kapitel wird die Newton-Methode auf hyperbolische Probleme angewendet. Diese werden hier in ihrer reduzierten Form betrachtet. Das heißt in der Variante, bei der die Zustandsvariable y als Funktion der Kontrollvariable u aufgefaßt wird. Auf diese Betrachtungsweise sind wir auch im Laufe der letzten Kapitel gelegentlich eingegangen und haben dort die Mittel, die wir hier benötigen bereitgestellt. Speziell konzentrieren wir uns auf Probleme mit verteilten Kontrollen. Das Vorgehen ist für die anderen Problemklassen ähnlich. Wir haben uns dabei an die Ausführungen in [7] angelehnt.

Das Lösen des reduzierten Problems hat u.a die Besonderheit, daß das Newton-Verfahren dort direkt angewendet werden kann. Dieses würden wir sonst (wenn y von u unabhängig ist) auf das Optimalitätssystem anwenden. Das wäre die sogenannte *SQP* (sequential quadratic programming)-Methode [8], [9]. In [7] findet man einen Vergleich beider Methoden. Wir werden das im Newton-Verfahren enthaltene lineare System (Newton-System) iterativ mit dem konjugierten Gradienten-Verfahren (CG-Verfahren) lösen. Das approximative Lösen dieses Systems ist für Probleme mit hoher Dimension besonders empfehlenswert, weil der Rechenaufwand für ein direktes Verfahren sehr groß sein kann. Wir werden feststellen, daß wir dabei ein direktes Auswerten von $j''(u)$ umgehen können und nur ihre Wirkung $j''(u) d$ auf Elemente des Kontrollraumes ermitteln müssen. Letzteres bedeutet das Lösen der linearisierten Systemgleichung vorwärts und rückwärts in der Zeit.

Die CG-Methode ist hier in einer Umgebung der Lösung u^* gerechtfertigt, denn wie wir in den vorigen Kapiteln gezeigt haben, ist die Hesse-Matrix $j''(u^*)$ positiv definit, wenn y^* hinreichend nahe von y_d (Observation) liegt.

Zunächst werden wir das Newton- und CG-Verfahren kurz vorstellen. Dann zeigen wir, wie wir $j''(u)$ und $j'(u)$ auswerten. Hier wird auch der resultierende Algorithmus vorgestellt. Numerische Tests werden anschließend durchgeführt.

Generell verlangen wir

V1: $\mathcal{H} = L^2(Q)$ und C ist die Identität in $L^2(Q)$.

IV.1 Allgemeines

IV.1.1 Über das Newton-Verfahren

Es sei H ein gegebener endlichdimensionaler Raum. Wir gehen von folgendem Problem aus:

$$\text{Min } j(u), \quad u \in H.$$

Das Newton-Verfahren versucht einen kritischen Punkt u^* (das heißt $j'(u^*) = 0$) zu finden. Wir setzen voraus:

j ist in einer Umgebung $U(u^*, \varepsilon)$ von u^* von der Klasse C^2 und $j''(u^*)$ ist positiv-definit.

Wir können dann die Funktion j in einer Umgebung jedes an u^* hinreichend nahe liegenden Punktes u_k quadratisch durch die Taylorentwicklung (mit Vernachlässigung des Restgliedes)

$$g(u) = j(u_k) + \langle j'(u_k), u - u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle j''(u_k)(u - u_k), u - u_k \rangle_H$$

approximieren. Statt $j(u) = 0$ zu minimieren, suchen wir nun eine Näherungslösung in Form des Minimums von $g(u)$. Dieses wird an einem eindeutig bestimmten Punkt u_{k+1} angenommen. Für diesen gilt also $g'(u_{k+1}) = 0$. Das heißt

$$j''(u_k)(u_{k+1} - u_k) = -j'(u_k).$$

Wir erhalten den folgenden Algorithmus

1. u_0 (in einer Umgebung von u^*) wählen und $k = 0$ setzen.
2. Durchführen bis zur Konvergenz

$$\begin{aligned} j''(u_k)d_k &= -j'(u_k), \\ u_{k+1} &= u_k + d_k, \\ k &= k + 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Es ist bekannt [19] S. 105, daß das Verfahren lokal quadratisch konvergiert, wenn die Hesse-Matrix $j''(u^*)$ positiv-definit und $j''(\cdot)$ in einer Umgebung von u^* Lipschitz-stetig ist.

IV.1.2 Über das konjugierte Gradienten-Verfahren

Zugrunde liegt das Lösen Folgenden Gleichungssystems

$$Qu = b; \quad u, b \in H. \tag{4.2}$$

Dabei ist H ein N -dimensionaler Raum und Q eine positiv-definite und symmetrische Matrix. Das System (4.2) ist äquivalent zu folgendem Minimierungsproblem

$$\text{Min } q(u) = \frac{1}{2} \langle Qu, u \rangle_H - \langle b, u \rangle_H; \quad u \in H. \tag{4.3}$$

Das konjugierte Gradienten Verfahren (CG) gehört zu der Klasse der konjugierten Richtungsverfahren. Diese sind Abstiegsrichtungsmethoden von folgender allgemeiner Gestalt

- u_0 (zulässig) wählen,
- $u_{k+1} = u_k + \alpha_k d_k$; $k = 0, \dots, N - 1$,
- $\alpha_k = \text{Arg} \{ \text{Min } q(u_k + \alpha d_k) \}$; $\alpha \in R$.

Dabei werden die (Abstiegsrichtungen) d_k so gewählt, daß sie zueinander Q -konjugiert sind. Das heißt

$$\langle Qd_i, d_j \rangle = 0; \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, N \text{ mit } i \neq j. \tag{4.4}$$

Die Varianten dieser Verfahrensklasse unterscheiden sich in der jeweiligen Art die konjugierten Richtungen zu bestimmen. Im Rahmen des CG-Verfahrens setzen wir

$$\begin{aligned} d_0 &= -q_0 \quad \text{und} \\ d_k &= -q_k + \beta_{k-1}d_{k-1}, \end{aligned}$$

wobei $q_k = q'(u_k) = Qu_k - b$ für alle k und die β_k so gewählt werden, daß (4.4) erfüllt ist. Man erhält

$$\beta_{k-1} = \frac{\langle q_k, q_k \rangle_H}{\langle q_{k-1}, q_{k-1} \rangle_H}.$$

Damit brauchen wir für die Ermittlung von d_k nur den aktuellen Gradienten und den aus dem vorhergegangenen CG-Iterationsschritt.

Durch gezielte Manipulationen läßt sich die Schrittweite analytisch ausrechnen. Es gilt

$$\alpha_k = \frac{-\langle q_k, d_k \rangle_H}{\langle Qd_k, d_k \rangle_H}.$$

Auf die zahlreichen Konvergenzaussagen des Verfahrens wollen wir hier nicht eingehen. Erwähnenswert ist jedoch, daß das CG-Verfahren aufgrund seiner Konstruktion theoretisch ein direktes Verfahren ist, daß spätestens nach N (Dimension von H) Iterationsschritten die Lösung findet.

IV.1.3 Ansatz eines Pseudo-Lagrange-Multiplikators

Für numerische Zwecke hat sich der Ansatz des transformierten Lagrange-Multiplikators $\lambda = \Delta\mu$ als vernünftig erwiesen. Wir übernehmen also die Schreibweise (2.22) für das Optimalitätssystem und erhalten unter der Bedingung (\mathbf{V}^1) für den zur Lösung von \mathbf{P}_1^V zugehörigen Lagrange-Multiplikator μ^*

$$\begin{aligned} \lambda_{tt}^* - \Delta\lambda^* + f'(y^*)\lambda^* &= y^* - y_d, \\ \lambda^*(\cdot, T) &= 0, \\ \lambda_t^*(\cdot, T) &= 0, \\ \lambda^* &= 0 \quad \text{auf } \Sigma, \end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei

$$\lambda^* = \Delta\mu^* \in X^v(0, T). \tag{4.6}$$

IV.2 Hesse-Matrix- und Gradientenauswertung

Wie schon erwähnt, werden wir das System (4.1) iterativ mit Hilfe der *CG*-Methode lösen. Diese setzt zur Ermittlung der Schrittweite der jeweiligen Iteration die Auswertung von Termen der Form $j''(u)d$ voraus. Hierbei bezeichnet d die konjugierte Richtung der aktuellen *CG*-Iteration (bzw. Startpunkt). Bei der hier beschriebenen Vorgehensweise ist es nicht notwendig die gesamte Hessematrix zu bestimmen. Wie es sich herausstellen wird, läßt sich $j''(u)d$ direkt ermitteln. Dafür muß das linearisierte System einmal vorwärts und einmal rückwärts in der Zeit gelöst werden.

Wir fassen die benötigte Notation (unter \mathbf{V}^1) zusammen:

Zu minimieren ist

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\beta}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2,$$

bzw.

$$j(u) = J(y(u), u),$$

unter der Nebenbedingung

$$e(y, u) = 0, \tag{4.7}$$

wobei

$$\begin{aligned} e &= (e_1, e_2, e_3) \quad : \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad \text{mit} \\ e_1(y, u) &= (-\Delta)^{-1}[y_{tt} - \Delta y + f(y) - Bu], \\ e_2(y, u) &= y(\cdot, 0) - y^0, \\ e_3(y, u) &= y_t(\cdot, 0) - y^1. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} y^0 \in H_0^1(\Omega), \quad y^1 \in L^2(\Omega), \quad Z = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \mathcal{A} = X^v(0, T) \times L^2(Q), \quad \text{und} \\ B \in \mathcal{L}(L^2(Q), L^2(Q)), \quad \mathcal{F} = L^2(0, T; Z) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \end{aligned}$$

IV.2.1 Die Hesse-Matrix $j''(u)$

Wir hatten in § II.4.2.2

$$j''(u) = T^*(x)L''(x; \mu, \theta_1, \theta_2)T(x),$$

wobei

$$T(x) = \begin{pmatrix} -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x) \\ Id_{L^2(Q)} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(L^2(Q), \mathcal{A})$$

und

$$L''(x; \mu, \theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} D_{yy} J(x) + \langle \mu, D_{yy} e_1(x)(\cdot, \cdot) \rangle_{L^2(Z)} & 0 \\ 0 & D_{uu} J(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathbb{R})).$$

Insbesondere haben wir

$$L''(x; \mu, \theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} I_{X^v} + \langle -\Delta \mu, f''(y)(\cdot, \cdot) \rangle_{L^2(Q)} & 0 \\ 0 & \beta I_{L^2(Q)} \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir $j''(u)d$, für $d \in L^2(Q)$ gegeben.

Dafür definieren wir eine Variable h wie folgt :

$$h = -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x) d \quad (\in X^v(0, T)). \quad (4.8)$$

Die Gleichung (4.8) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} h_{tt} - \Delta h + f'(y)h &= Bd, \\ h(\cdot, 0) &= 0, \\ h_t(\cdot, 0) &= 0, \\ h &= 0 \text{ auf } \Sigma. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wegen (4.8) haben wir

$$T(x)d = \begin{pmatrix} -[D_y e(x)]^{-1} D_u e(x) d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ d \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$L''(x, \mu, \theta_1, \theta_2)T(x)d = \begin{pmatrix} I_{X^v} h + \langle -\Delta \mu, f''(y)(h, \cdot) \rangle_{L^2(Q)} \\ \beta I_{L^2(Q)} d \end{pmatrix},$$

mit h und d wie in (4.9).

Wir setzen

$$z = I_{X^v} h + \langle -\Delta \mu, f''(y)(h, \cdot) \rangle_{L^2(Q)} \quad (\in X^v(0, T)^*) \quad (4.10)$$

und bezeichnen mit

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^*$$

die Lösung von

$$[D_y e(x)]^* P = -z. \quad (4.11)$$

Da wir unter \mathbf{H}_6^V sogar $z \in L^2(Q)$ haben, impliziert (4.11) ähnlich wie im Satz II.4.2 und Bemerkung II.4.2 Folgendes

$$\begin{aligned} p_{tt} - \Delta p + f'(y)p &= I_{X^v} h - \langle \lambda, f''(y)(h, \cdot) \rangle_{L^2(Q)} \quad (= z), \\ p(\cdot, T) &= 0, \\ p_t(\cdot, T) &= 0, \\ p|_{\Sigma} &= 0, \quad \text{wobei} \\ p &= -(-\Delta)^{-1} \bar{p}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Insgesamt erhalten wir für die Hesse-Matrix des reduzierten Funktionals

$$\begin{aligned} j''(u)d &= T^*(x)L''(x, \theta_1, \theta_2)T(x)d, \\ &= T^*(x) \begin{pmatrix} z \\ J_{uu}(x)d \end{pmatrix}, \\ &= -[D_u e(x)]^* [D_y e(x)]^{-*} z + J_{uu}(x)d, \\ &= [D_u e(x)]^* \bar{P} + J_{uu}(x)d, \\ &= [-(-\Delta)^{-1} B]^* \bar{p} + \beta I_{L^2(Q)} d, \\ &= -B^* (-\Delta)^{-1} \bar{p} + \beta I_{L^2(Q)} d, \\ &= B^* p + \beta d \in L^2(Q), \end{aligned}$$

wobei wir

$$[D_u e(x)]^* \bar{P} = [D_u e(x)]^* \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \end{pmatrix} = [D_u e_1(x)]^* \bar{p} = -B^* (-\Delta)^{-1} \bar{p} = B^* p, \quad (4.13)$$

benutzen. Die Ermittlung von $j''(u)d$ (d bekannt) ist dann äquivalent zur Hintereinanderführung folgender Operationen.

1. Zunächst berechnen wir

- h aus (4.9),
- p aus (4.12)

2. und setzen anschließend

$$j''(u)d = B^*p + \beta d.$$

IV.2.2 Der Gradient $j'(u)$

$j'(u)$ zu berechnen ist hier nichts Anderes als $y = y(u)$ aus $e(y, u) = 0$ (Systemgleichung), λ aus (4.5) zu ermitteln und anschließend wegen (2.6) $j'(u) = \beta u + B^*\lambda$ zu setzen. Dabei gilt, ähnlich, wie wir in (4.13) gesehen haben,

$$-[D_u e(x)]^* [D_y e(x)]^{-*} D_y J(x) = B^* \lambda.$$

IV.3 Algorithmus und Tests

IV.3.1 Der Algorithmus

1. Initialisierung (Newton)

u^0 wählen und $k = 0$ setzen.

2. Durchführen bis zur Newton-Konvergenz

(a) $j'(u^k)$ wie in § V.2.2 auswerten,

(b) Berechnung von d^{k+1} als Lösung von $j''(u^k)d = -j'(u^k)$ mit dem CG-Verfahren. Das heißt

- Initialisierung(CG)

d_0^k (Startpunkt) wählen,

$F_0 = j''(u^k)d_0^k + j'(u^k)$ (Residuum) und

$R_0 = -F_0$ (konjugierte Richtung) setzen.

- Durchführen bis zur *CG*-Konvergenz
 - i. $\alpha_n = \frac{F_n^T F_n}{R_n^T j''(u^k) R_n}$ (Schrittweite),
 - ii. $d_{n+1}^k = d_n^k + \alpha_n R_n$ (iterierte Lösung),
 - iii. $F_{n+1} = F_n + \alpha_n j''(u^k) R_n$,
 - iv. $\beta_{n+1} = \frac{F_{n+1}^T F_{n+1}}{F_n^T F_n}$,
 - v. $R_{n+1} = -F_{n+1} + \beta_{n+1} R_n$,
 - vi. $n = n + 1$,
- (c) $u^{k+1} = u^k + d^{k+1}$,
- (d) $k = k + 1$.

IV.3.2 Numerische Tests

Hier werden anhand von eindimensionalen Beispielen einige numerische Tests durchgeführt. Wir interessieren uns dabei insbesondere für das Konvergenzverhalten des Algorithmus und den Einfluß des Regularisierungsparameters β .

IV.3.2.1 Die Diskretisierungsmethode

Δx und Δt bezeichnen hier die Raum- und Zeitschrittweite und N_x (bzw. N_t) die Anzahl der Stützstellen in der x -Richtung (bzw. t -Richtung).

Wie wir dank der Ausführungen vom § V.2 feststellen konnten, benötigen wir für die Implementierung der Newton-Methode das Lösen von (4.12), der Systemgleichung (4.7) und deren Linearisierung (vorwärts und rückwärts).

Wir diskretisieren diese Systeme räumlich mit Hilfe der finiten Elementen-Methode. Im Falle der Systemgleichung (wir ersetzen dabei aus Bequemlichkeitsgründen $e_1(y, u) = 0$ durch die äquivalente Gleichung $-\Delta e_1(y, u) = 0$) approximieren wir die Nichtlinearität $f(y)$ mit der sogenannten Produktapproximationsmethode [13] S.336. Das heißt

$$f\left(\sum_{i=1}^{N_x} z_i(t) \varphi_i(x)\right) \approx \sum_{i=1}^{N_x} f(z_i(t)) \varphi_i(x), \quad (4.14)$$

wobei $\{\varphi_i\}_{i=1 \dots N_x}$ die finite Elemente-Basis darstellt. Diese besteht aus stetigen stückweise linearen Funktionen mit

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1 \dots N_x.$$

Dabei bezeichnen x_j , $j = 1 \cdots N_x$ die Stützstellen der Raumdiskretisierung.

$\sum_{i=1}^{N_x} z_i(t)\varphi_i(x)$ steht hier für ein Element in dem von der finiten Elemente-Basis aufgespannten Raum. Aus dieser Basis ergibt sich die folgende Massmatrix:

$$M = \Delta x \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Steifigkeitsmatrix lautet:

$$S = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beide sind $N_x \times N_x$ -dimensional, symmetrisch und positiv-definit.

Es entsteht daraus ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen zweiter Ordnung.

Zur Orientierung erhalten wir zum Beispiel im Falle der Systemgleichung (4.7) :

$$M Z_{tt} + S Z + M F(Z) = G, \tag{4.15}$$

mit

$$M Z(0) = Y^0 \tag{4.16}$$

und

$$M Z_t(0) = Y^1, \tag{4.17}$$

wobei

$$Y^0 = \left(\int_{\Omega} y^0(x)\varphi_i(x)dx \right)_{1 \dots N_x}^T,$$

$$\begin{aligned}
Y^1 &= \left(\int_{\Omega} y^1(x) \varphi_i(x) dx \right)_{1 \dots N_x}^T, \\
Z(t) &= (z_i(t))_{1 \dots N_x}^T; \quad z_i \text{ wie in (4.14)}, \\
G(t) &= \left(\int_{\Omega} B u(t, x) \varphi_i(x) dx \right)_{1 \dots N_x}^T,
\end{aligned}$$

und

$$F(Z) = (f(z_i))_{1 \dots N_x}^T.$$

Den Differentialoperator des erhaltenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems approximieren wir durch eine zentrierte Differenzen-Approximation in t -Richtung:

$$Z_{tt}(t) \approx (\Delta t)^{-2} [Z(t + \Delta t) - 2Z(t) + Z(t - \Delta t)].$$

Es resultiert daraus im Falle von (4.9) und (4.7) (bzw. (4.5) und (4.12)) ein vorwärts (bzw. rückwärts) definiertes explizites Verfahren. Das Verfahren ist explizit in dem Sinne, daß wir den gesuchten Wert (Vektor) als Funktion von schon errechneten Größen ausdrücken können.

Es folgt zum Beispiel aus (4.15):

$$M Z_{n+1} = (\Delta t)^2 S Z_n - (\Delta t)^2 M F(Z_n) + (\Delta t)^2 G_n + 2Z_n + Z_{n-1}, \quad (4.18)$$

oder (M ist invertierbar)

$$Z_{n+1} = M^{-1} [(\Delta t)^2 S Z_n + (\Delta t)^2 G_n + 2Z_n + Z_{n-1}] - (\Delta t)^2 F(Z_n). \quad (4.19)$$

In den letzten beiden Formeln symbolisiert der unten stehende Index die Zeitebene.

Da wir für die Bestimmung des aktuellen Wertes Z_{n+1} die Werte der zwei Vorhergegangenen Zeitebene benötigen, wollen wir noch anhand der Systemgleichung zeigen, wie dies zu Beginn der Berechnungen geht. Aus (4.16) können wir schon $Z_0 = Z(0)$ ermitteln. Die nächste Zeitebene Z_1 erhalten wir, in dem wir zunächst $Z_t(0)$ mit einer im Punkt $t = 0$ zentrierte finiten Differenzen-Approximation approximieren. Das heißt

$$Z_t(0) \approx \frac{Z_1 - Z_{-1}}{2\Delta t}.$$

Hierbei steht Z_{-1} für eine fiktive Größe, die dann wegen (4.17) den folgenden Ausdruck hat:

$$Z_{-1} = Z_1 - 2\Delta t M^{-1} Y^1.$$

Durch den Einsatz von Z_{-1} (für $n = 0$) in (4.18) haben wir dann

$$Z_1 = (M - I)^{-1}[(\Delta t)^2 S Z_0 + (\Delta t)^2 G_0 + 2Z_0 - 2\Delta t M^{-1}Y^1 - (\Delta t)^2 M F(Z_0)],$$

wobei hier I für die $N_x \times N_x$ -dimensionale Einheitsmatrix steht. Um die Invertierbarkeit von $M - I$ sehen zu können, schreiben wir zunächst M wie folgt.

$$M = -\frac{1}{6}\Delta x \tilde{M},$$

mit

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aus [26] S. 229 wissen wir schon, wie die Eigenwerte von Matrizen dieser Gestalt aussehen. Demnach sind

$$\tilde{\nu}_i = -4 - 2 \cos\left(\frac{i\pi}{N_x + 1}\right), \quad i = 1..N_x$$

die Eigenwerte von \tilde{M} . Daraus leiten wir

$$\nu_i = \frac{2}{3}\Delta x + \frac{1}{3}\Delta x \cos\left(\frac{i\pi}{N_x + 1}\right), \quad i = 1..N_x$$

als Eigenwerte von M her. Wir haben dann

$$|\nu_i| = \frac{1}{3}\Delta x |2 + \cos\left(\frac{i\pi}{N_x + 1}\right)| \leq \frac{1}{3}\Delta x \cdot 3 = \Delta x, \quad i = 1..N_x.$$

Für die Schrittweite Δx der Raumdiskretisierung ist davon auszugehen (für unsere Betrachtungen ist dies selbstverständlich), daß $\Delta x \ll 1$. Damit gilt

$$|\nu_i| < 1, \quad i = 1..N_x \tag{4.20}$$

und 1 ist somit kein Eigenwert von M . Hierbei ist die Matrix M als linearer Operator mit endlichem Rang kompakt. Aus der Spektraltheorie (siehe zum Beispiel die fredholmsche Alternative) wissen wir, daß der Operator $I - M$ dann eine Inverse besitzt.

Damit ist auch $M - I$ invertierbar.

Die übrigen Werte Z_i , $i = 2..N_t$ lassen sich nun mit (4.19) rekursiv ermitteln.

Im Rückwärtsfall ((4.5) und (4.12)) sind wir bei der Bestimmung der Werte Z_i ähnlich vorgegangen.

Der Einsatz von (4.14) hat es ermöglicht, daß wir hier

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\sum_{i=1}^{N_x} z_i(t)\varphi_i(x))\varphi_j(x)dx &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N_x} f(z_i(t))\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{N_x} f(z_i(t)) \int_{\Omega} \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = M F(Z) \end{aligned}$$

schreiben und damit die einfache rekursive Gleichung (4.18) erhalten konnten. Daß dadurch der Diskretisierungsfehler im Vergleich zu manchen anderen Integralapproximationsmethoden möglicherweise nicht kleiner ist, haben wir hingenommen. Letztere Methoden führen zu impliziten Systemen.

IV.3.2.2 Testbeispiele

Hier werden nun einige Beispiele getestet. Wir werden dabei die Realisierbarkeit einiger der im § II untersuchten Hypothesen prüfen. Zuzüglich zu **V1** verlangen wir bei allen Beispielen:

$$\mathcal{H} = L^2(Q),$$

$$Q = (-1, 1) \times (0, 1), \quad \text{das heißt } T = 1 \text{ und } \Omega = (-1, 1),$$

$$N_x = 80 \quad (\text{Stützstellenanzahl der Raumdiskretisierung}),$$

$$N_t = 70 \quad (\text{Stützstellenanzahl der Zeitdiskretisierung}) \text{ und}$$

$$y(0, t) \equiv 0 \quad (\text{Randbedingung}).$$

Der Startwert für die CG-Iterationen (innere Iterationen) setzen wir gleich Null.

Als Abbruchkriterien für die hier gewählten Verfahren verlangen wir:

$$g(k) = \|j'(u^k)\| \leq 10^{-6} \text{ für das Newtonverfahren und}$$

$$r(n) = \|j'(u^k) + j''(u^k)d_n^k\| \leq 10^{-9} \text{ (Residuum in der n-ten CG-Iteration der k-ten Newton-Iteration) für das CG-Verfahren, wobei hier, sowie in den Tabellen weiter unten, } \|\cdot\| \text{ für } \|\cdot\|_{L^2(Q)} \text{ steht.}$$

Wir haben alle Programme mit MATLAB VERSION 4.2b geschrieben.

IV.3.2.2.1 Beispiel 1

Hier definieren wir die Nichtlinearität als $f(y) = y^3$. Es ist dann $f'(y) = 3y^2$ und $f''(y) = 6y$. Neben den obigen allgemeinen Bedingungen wählen wir zusätzlich

$$B = Id_{L^2(Q)},$$

$$y(x, 0) = y^0(x) \equiv 0,$$

$$y_t(x, 0) = y^1(x) \equiv 0,$$

$$y_d(x, t) = (t - \exp t + 1) \sin(x^2 - 1),$$

und als Startwert für die Newton-Iterationen

$$u_0(x, t) = x^2 - 3e^x.$$

Man beachte hier, daß y_d zulässig ist. Das heißt es existiert u_d , so daß $e(y_d, u_d) = 0$. Dieses läßt sich durch Einsatz von y_d in die Systemgleichung bei den oben angegebenen Anfangs -und Randbedingungen leicht überprüfen. Das Paar (y_d, u_d) ist damit selbst eine potentielle Lösung.

Wir haben u.a mit Hilfe von Nichtlinearitäten polynomialen Typs in § II gezeigt, daß die dort gemachten Hypothesen erfüllbar sind. Zusammenfassend können wir Folgendes festhalten:

Aus Bemerkung II.2.1 wissen wir, daß die Bedingung \mathbf{H}_1^Y (Existenz und Eindeutigkeit von $y(u)$ mit $e(y(u), u) = 0$ für $u \in L^2(Q)$ beliebig gegeben) erfüllt ist. Wegen Satz II.3.1 gilt auch \mathbf{H}_4^Y (Regularitätsbedingungen an $f(y)$).

Weil $X^v(0, T) \hookrightarrow C(0, T; C(\bar{\Omega}))$ (Bemerkung I.1.4), gilt $f'(y) = 3y^2 \in L^\infty(Q)$ für alle $y \in X^v(0, T)$. Hieraus ergibt sich mit Satz II.3.2 die Hypothese \mathbf{H}_S^Y (Surjektivität von $e'(y, u)$).

Für das Beispiel 1 werden wir die Ergebnisse von zwei Tests protokollieren. Im ersten wählen wir $\beta = 10^{-2}$ (Regularisierungsparameter) und im zweiten $\beta = 10^{-3}$.

Die Tabellen IV.1 und IV.2 zeigen die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens für den jeweiligen Test. Die entsprechenden Graphen für \bar{y} , \bar{u} , y_d , $\bar{y} - y_d$ und $\bar{\lambda} = \Delta\bar{\mu}$ befinden sich in den Abbildungen IV.1 bis IV.3.

Newton-Schritt (k)	Anzahl CG-Schritte	$\ j'(u_k)\ $ (Residuum)	$\ y_k - y_d\ $	$\frac{\ u_{k+1}-u_k\ }{\ u_k-u_{k-1}\ }$	$j(u_k)$
1	—	2.7749150e-1	1.0818305	—	7.2934440e-1
2	17	1.2578943e-1	4.3536396e-1	3.5209097e-1	1.4076518e-1
3	16	3.8350901e-2	1.8122889e-1	2.5324541e-1	1.7793404e-2
4	15	6.4806253e-3	4.9820525e-2	1.8405200e-1	7.1485258e-3
5	14	1.010791e-3	6.5477585e-2	1.6532005e-1	6.8368581e-3
6	12	1.4581577e-4	6.2508122e-2	1.5139476e-1	6.8290175e-3
7	11	2.0095764e-5	6.2935252e-2	1.4242456e-1	6.8288558e-3
8	12	2.6763992e-6	6.2875728e-2	1.3657693e-1	6.8288518e-3
9	13	3.4734088e-7	6.2883703e-2	—	6.8288518e-3

Tabelle IV.1: Zu dem Beispiel 1 mit $\beta = 0.01$

Newton-Schritt (k)	Anzahl CG-Schritte	$\ j'(u_k)\ $ (Residuum)	$\ y_k - y_d\ $	$\frac{\ u_{k+1}-u_k\ }{\ u_k-u_{k-1}\ }$	$j(u_k)$
1	—	2.4315132e-1	1.0818305	—	5.9959527e-1
2	57	1.3533791e-1	6.3857830e-1	7.081959e-1	2.1559084e-1
3	54	9.2197614e-2	4.1074460e-1	5.5415233e-1	8.7754897e-2
4	80	2.9586134e-2	1.2170885e-1	3.8150050e-1	9.7662863e-3
5	73	8.5572769e-3	5.0352720e-2	3.6662349e-1	1.9488328e-3
6	78	1.8984118e-3	1.8057602e-2	3.2787042e-1	1.2518688e-3
7	80	3.1939406e-4	2.3302252e-2	2.6815637e-1	1.2065421e-3
8	66	2.6350757e-5	2.1622398e-2	2.2572786e-1	1.2042845e-3
9	29	1.9097524e-5	2.1941590e-2	1.6814726e-1	1.2041936e-3
10	32	9.3577773e-6	2.1907636e-2	1.5013376e-1	1.2041886e-3
11	24	3.2335695e-6	2.1900818e-2	—	1.2041877e-3

Tabelle IV.2: Zu dem Beispiel 1 mit $\beta = 0.001$

IV.3.2.2.2 Beispiel 2

Wir setzen diesmal:

$$f(y) = y^5,$$

$$y(x, 0) = -\frac{1}{2}(x^3 - x),$$

$$y_t(x, 0) = x^3 - x,$$

$$y_d(x, t) = (t - 0.5)(x^3 - x),$$

$$u_0(x, t) = \frac{1}{5}x^2 - 3, \text{ und weiterhin}$$

$$B = Id_{L^2(Q)}.$$

Wie man leicht feststellen kann, ist auch bei diesem Beispiel y_d erreichbar.

Bezüglich der Realisierbarkeit der Hypothesen von § II gilt auch für $f(y) = y^5$ alles was wir im obigen Beispiel über y^3 geschrieben haben.

Wir haben Testergebnisse für $\beta = 0.1$ und $\beta = 0.01$ protokolliert. Diese sind in den Tabellen IV.3 und IV.4 zu finden. Die Graphen von \bar{y} , \bar{u} , y_d , $\bar{y} - y_d$ und $\bar{\lambda} = \Delta\bar{\mu}$ befinden sich in den Abbildungen IV.4 bis IV.6.

Newton-Schritt (k)	Anzahl CG-Schritte	$\ j'(u_k)\ $ (Residuum)	$\ y_k - y_d\ $	$\frac{\ u_{k+1} - u_k\ }{\ u_k - u_{k-1}\ }$	$j(u_k)$
1	—	5.5677138e-1	7.5893790e-1	—	1.1713244
2	8	8.4802592e-2	1.7361343e-1	1.2451664e-1	3.3343770e-2
3	7	5.8317839e-3	1.3550468e-1	6.22837089e-2	1.0671934e-2
4	7	4.0357979e-4	1.3497415e-1	6.9197479e-2	1.0565752e-2
5	5	2.7880141e-5	1.3497716e-1	6.9083173e-2	1.0565238e-2
6	5	1.9250979e-6	1.3497703e-1	6.90490628e-2	1.0565236e-2
7	3	1.3288643e-7	1.3497704e-1	—	1.0565236e-2

Tabelle IV.3: Zu dem Beispiel 2 mit $\beta = 0.1$

Newton-Schritt (k)	Anzahl CG-Schritte	$\ j'(u_k)\ $ (Residuum)	$\ y_k - y_d\ $	$\frac{\ u_{k+1} - u_k\ }{\ u_k - u_{k-1}\ }$	$j(u_k)$
1	—	2.0193334e-1	7.5893790e-1	—	3.7632648e-1
2	16	1.3194181e-1	4.6857590e-1	4.5111668e-1	1.4548957e-1
3	16	2.9602163e-2	1.33642006e-1	2.0835315e-1	1.1873581e-2
4	17	4.6577360e-3	7.4002923e-2	1.6889257e-1	5.3764426e-3
5	14	6.9119774e-4	7.2694074e-2	1.5537865e-1	5.2125694e-3
6	11	9.7683077e-5	7.2647123e-2	1.4611068e-1	5.2088647e-3
7	12	1.3335775e-5	7.2644786e-2	1.3994961e-1	5.2087905e-3
8	30	1.7748530e-6	7.2645031e-2	1.3561566e-1	5.2087889e-3
9	10	2.3056905e-7	7.2645003e-2	—	5.2087889e-3

Tabelle IV.4: Zu dem Beispiel 2 mit $\beta = 0.01$

IV.3.2.2.3 Beispiel 3

Wir wählen hier $B = \chi_{\tilde{Q}}$ mit $\tilde{Q} = (-1, 0) \times (0, 1)$ und kontrollieren somit nur auf den Teil \tilde{Q} von Q . Außerdem setzen wir:

$$f(y) = y^3 + 1,$$

$$y(x, 0) = y^0(x) \equiv 0,$$

$$y_t(x, 0) = y^1(x) \equiv 0,$$

$$u_0(x, t) = x^2 - 3 \quad \text{und}$$

$$y_d(x, t) = \cos(2 - 6x).$$

In diesem Beispiel ist y_d nicht erreichbar.

Es ist klar, daß $f(y)$ dieselben Bedingungen wie y^3 im Beispiel 1 erfüllt.

Die Testergebnisse für $\beta = 0.01$ befinden sich in der Tabelle IV.5 und in der Tabelle IV.6 für $\beta = 0.001$.

Die Graphen von \bar{y} , \bar{u} , y_d , $\bar{y} - y_d$ und $\bar{\lambda} = \Delta\bar{u}$ liefern die Abbildungen IV.4 bis IV.6.

Newton-Schritt (k)	Anzahl CG-Schritte	$\ j'(u_k)\ $ (Residuum)	$\ y_k - y_d\ $	$\frac{\ u_{k+1}-u_k\ }{\ u_k-u_{k-1}\ }$	$j(u_k)$
1	—	9.9316111e-2	1.0980391	—	6.7639782e-1
2	11	1.7072425e-2	9.8209790e-1	1.0004841e-1	5.0317861e-1
3	11	2.0776282e-3	9.8015117e-1	1.304642e-1	4.9980473e-1
4	12	2.4603300e-4	9.8030737e-1	1.2268210e-1	4.9975372e-1
5	10	2.8376535e-5	9.8028176e-1	1.1790939e-1	4.9975292e-1
6	8	3.2029502e-6	9.8028467e-1	1.1489486e-1	4.9975291e-1
7	6	3.5617734e-7	9.8028131e-1	—	4.9975291e-1

Tabelle IV.5: Zu dem Beispiel 3 mit $\beta = 0.01$

Newton-Schritt (k)	Anzahl CG-Schritte	$\ j'(u_k)\ $ (Residuum)	$\ y_k - y_d\ $	$\frac{\ u_{k+1}-u_k\ }{\ u_k-u_{k-1}\ }$	$j(u_k)$
1	—	1.2044640e-1	1.2199463	—	7.5148982e-1
2	37	5.4751879e-2	9.4015197e-1	2.3471486e-1	4.9690208e-1
3	35	1.7667318e-2	9.1163380e-1	3.3751768e-1	4.5731902e-1
4	36	4.6853258e-3	9.0552187e-1	3.3415826e-1	4.5341183e-1
5	31	1.2210078e-3	9.0532135e-1	3.0395677e-1	4.5311126e-1
6	30	3.0639793e-4	9.0525694e-1	2.8516747e-1	4.5309075e-1
7	27	7.3573477e-5	9.0526187e-1	2.7259781e-1	4.5308900e-1
8	24	1.6858227e-5	9.0526235e-1	2.6201188e-1	4.5308897e-1
9	25	3.6456000e-6	9.0526296e-1	2.5248951e-1	4.5308895e-1
10	25	7.2939221e-7	9.0526281e-1	—	4.5308895e-1

Tabelle IV.6: Zu dem Beispiel 3 mit $\beta = 0.001$

IV.3.2.2.4 Interpretation der Ergebnisse und Graphiken

Die oben protokollierten Testergebnisse widerspiegeln die allgemeinen Beobachtungen, die wir in zahlreichen Tests mit unterschiedlichen Inputwerten ($f(y)$, y_d , y^0 , y^1 , β und Startwert) gemacht haben:

Innerhalb des Wertebereichs von β , für den Konvergenz für das jeweilige Beispiel statt-

findet, sinkt bei gleichem Startwert die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens, wenn β kleiner gewählt wird.

Weil wir es hier mit lokaler Konvergenz zu tun haben, haben wir die Wahl der oben angegebenen Startwerte hauptsächlich dannach orientiert, Konvergenz erzielen zu können. Wir haben bei jedem Beispiel verschiedene Startwerte getestet und haben im Konvergenzfall immer dieselbe Lösung erhalten.

In den drei Beispielen konnten wir Konvergenz für $\beta \in [1, 10^{-4}]$ erreichen, wobei im Bereich von $\beta = 10^{-4}$ die Anzahl der inneren Iterationen (CG-Iterationen) erheblich steigt.

Setzen wir $\beta = 10^{-5}$ in einem der drei Beispiele, so ist bei den angegebenen Startwerten die reduzierte Hesse-Matrix $j''(u_k)$ nicht positiv-definit. Dieses verändert sich auch nicht im Laufe der Iterationen und führt zu nicht numerischen Werten. Der Algorithmus bricht ab.

Wie man es auch an den obigen Tabellen erkennen kann, konnten wir generell im Konvergenzfall beobachten, daß sich der Wert des Kostenfunktional schnell (sehr oft nach der vierten oder fünften äußeren Iteration) nur noch geringfügig verändert. Spätestens dann ist auch die superlineare Konvergenz des Verfahrens zu erkennen.

Zu beobachten ist auch, daß y_d desto besser von \bar{y} approximiert wird, je kleiner β gewählt wird. Dieses wird in der nächsten Tabelle illustriert. Logischerweise ist diese Approximation generell schärfer, wenn y_d erreichbar ist.

	β	$\ \bar{y} - y_d\ $
Beispiel 1	0.01	6.2883703e-2
	0.001	2.1900818e-2
Beispiel 2	0.1	1.3497704e-1
	0.01	7.2645003e-2
Beispiel 3	0.01	9.8028131e-1
	0.001	9.0526281e-1

Tabelle IV.7: $\|\bar{y} - y_d\|$ als Funktion von β

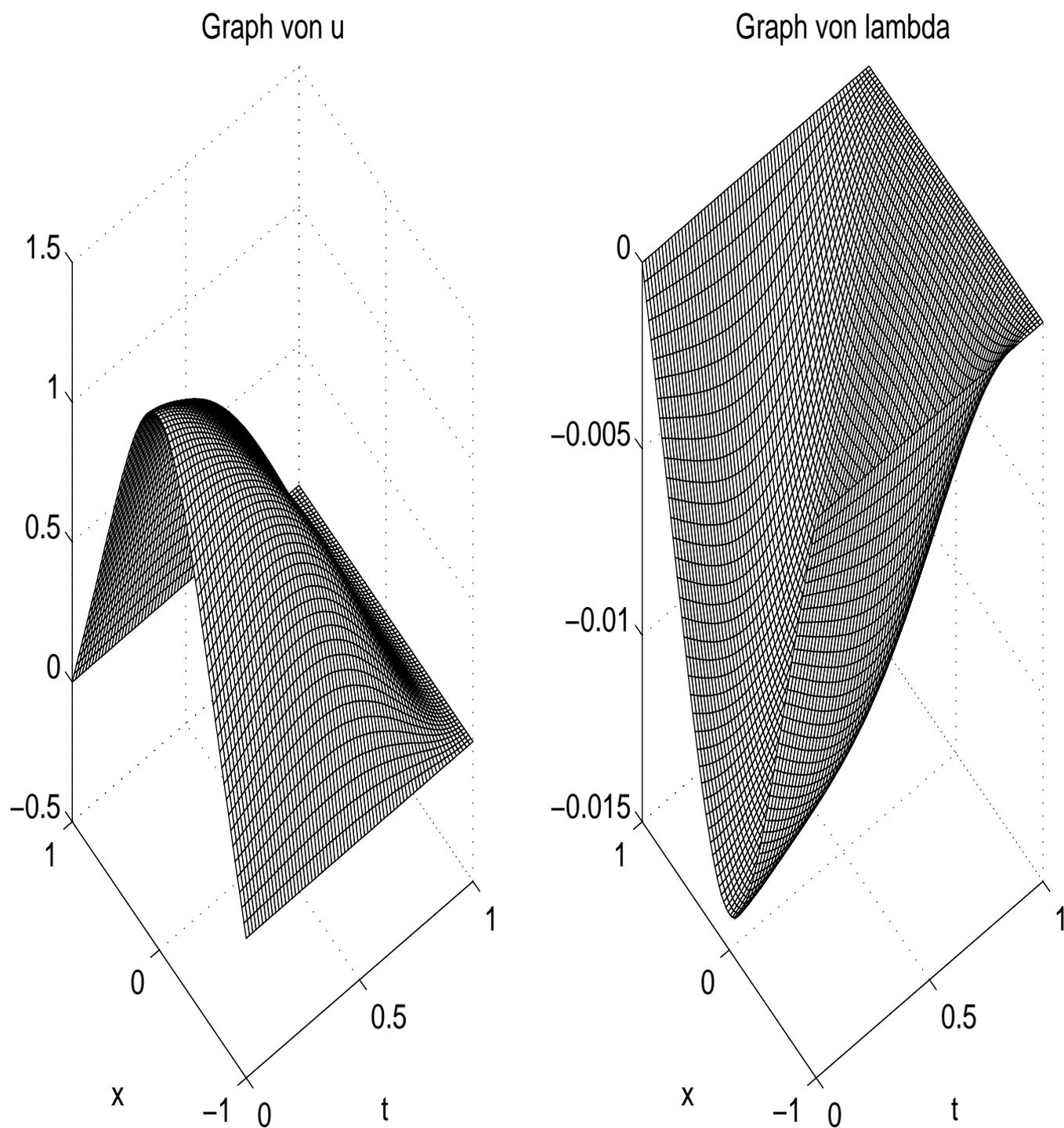
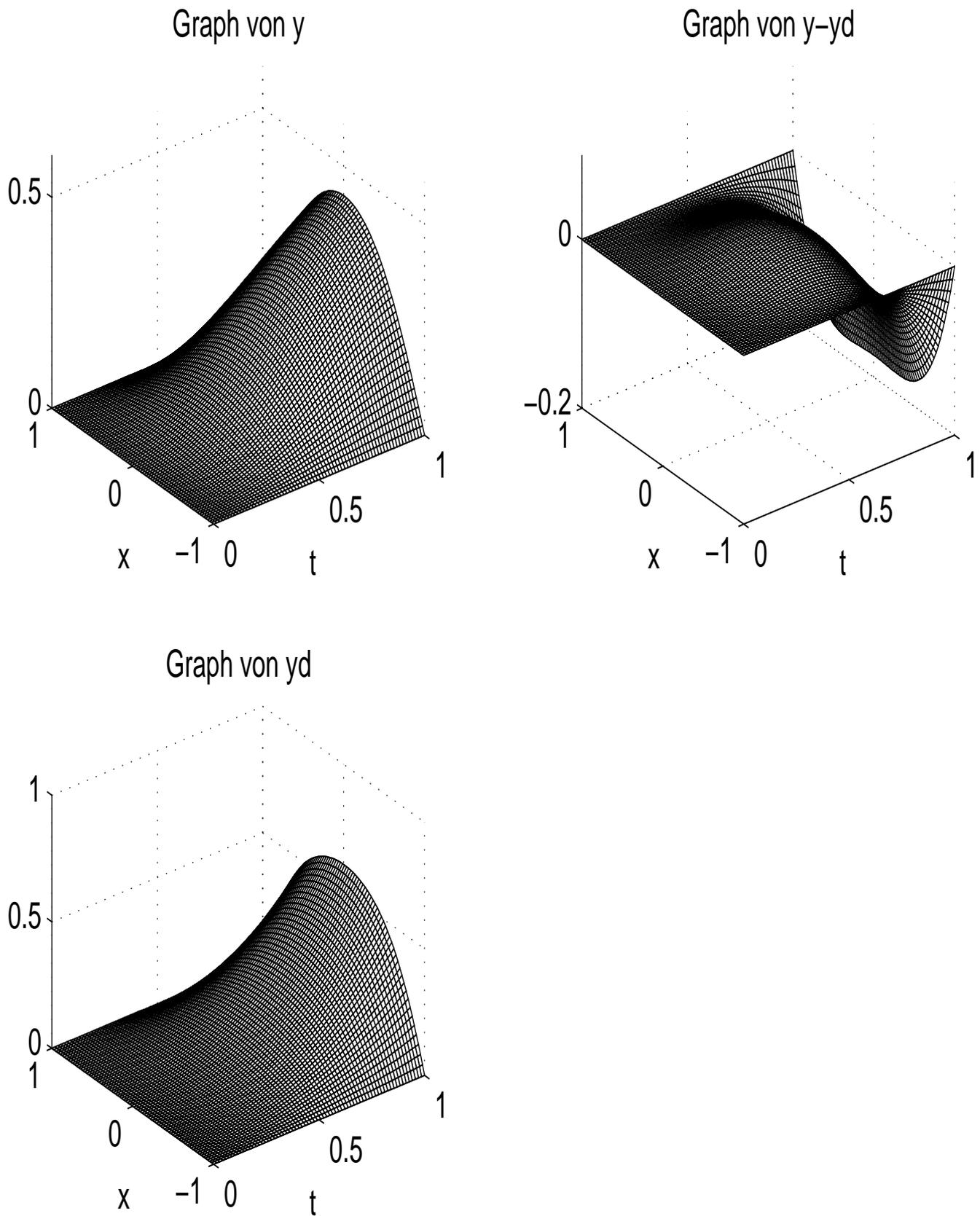


Abbildung IV.1: Beispiel 1 mit $\beta = 0.01$; Graphen von \bar{u} und $\bar{\lambda} = \Delta\bar{\mu}$

Abbildung IV.2: Beispiel 1 mit $\beta = 0.01$; Graphen von \bar{y} , y_d und $\bar{y} - y_d$

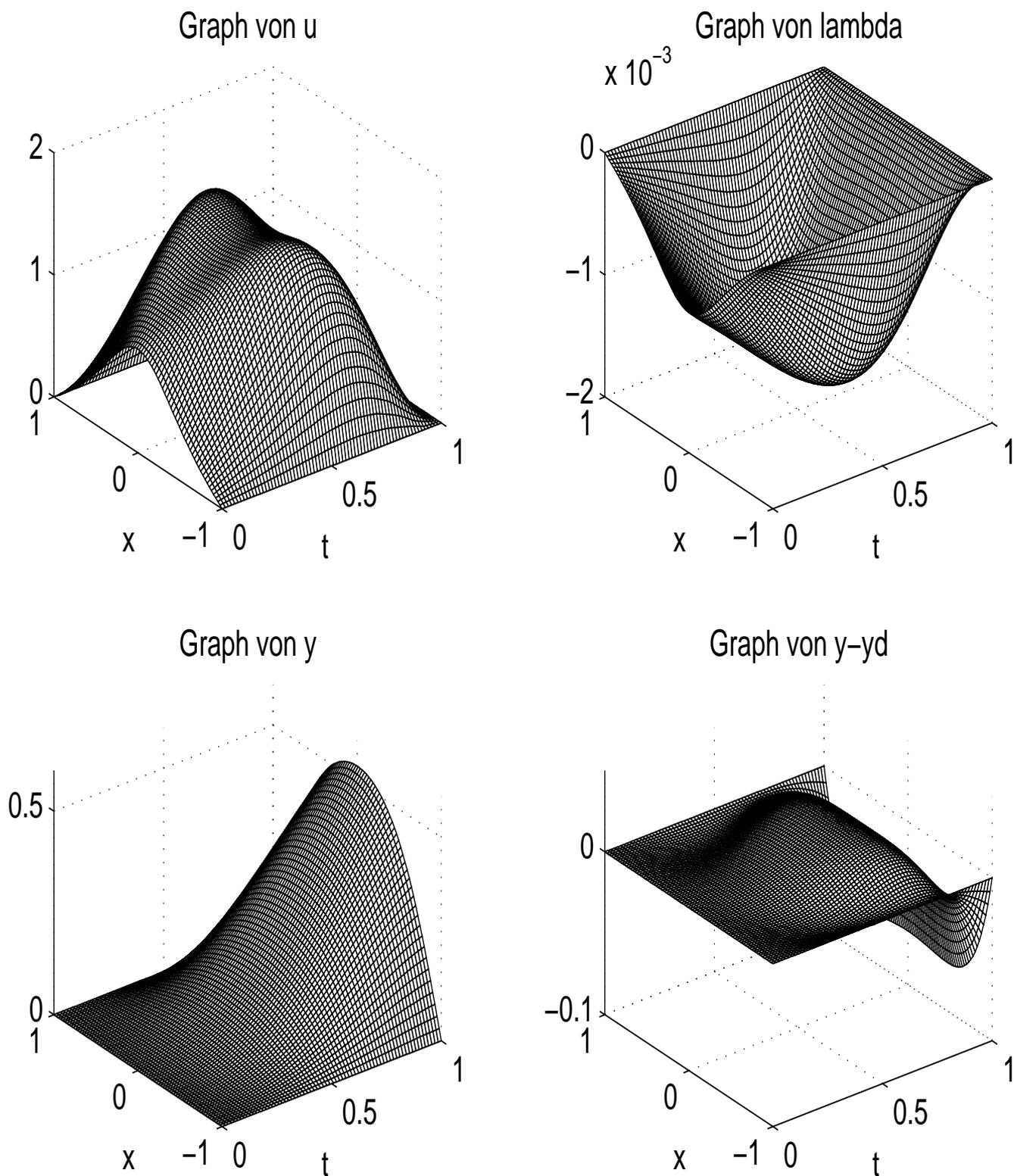
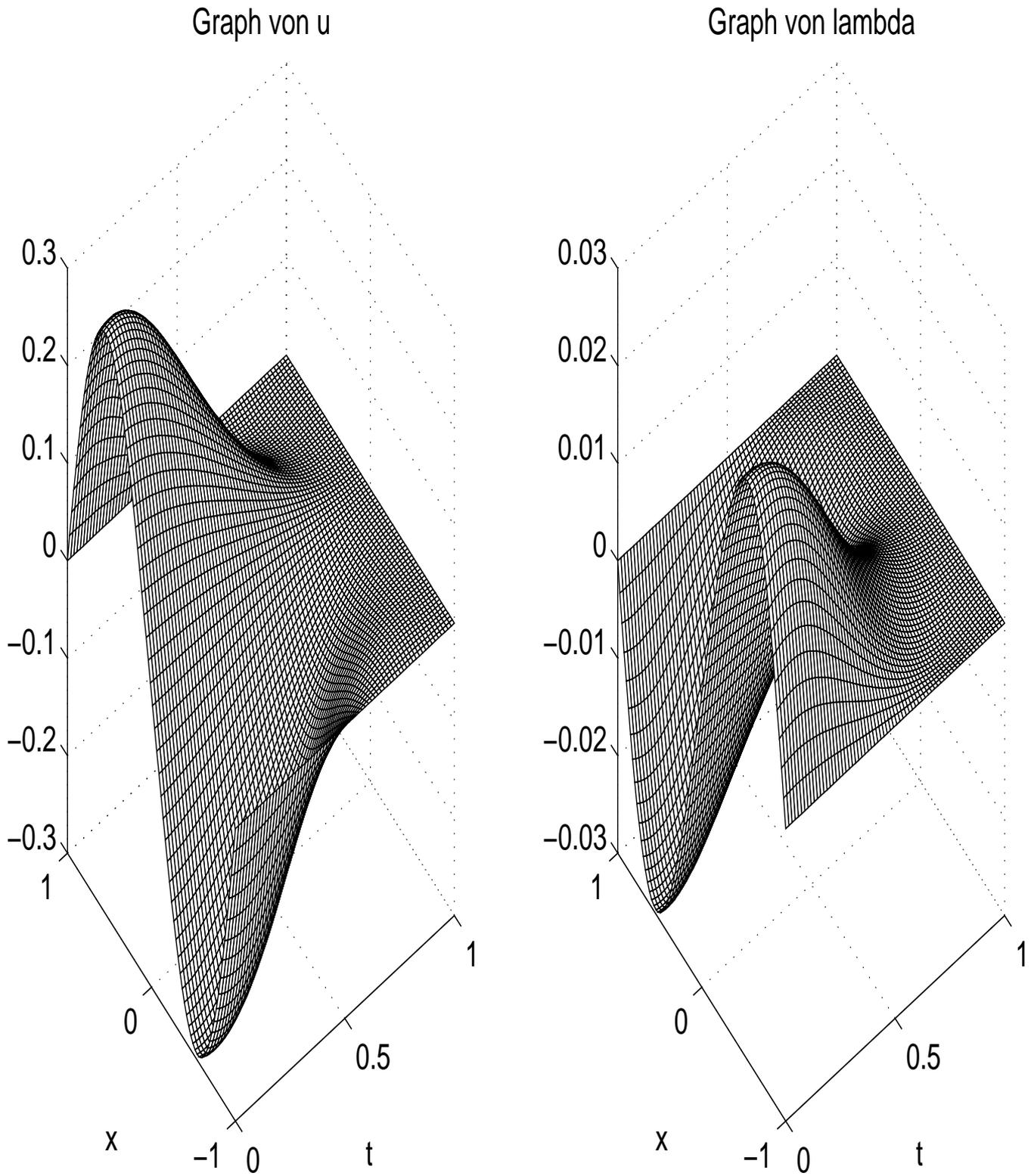
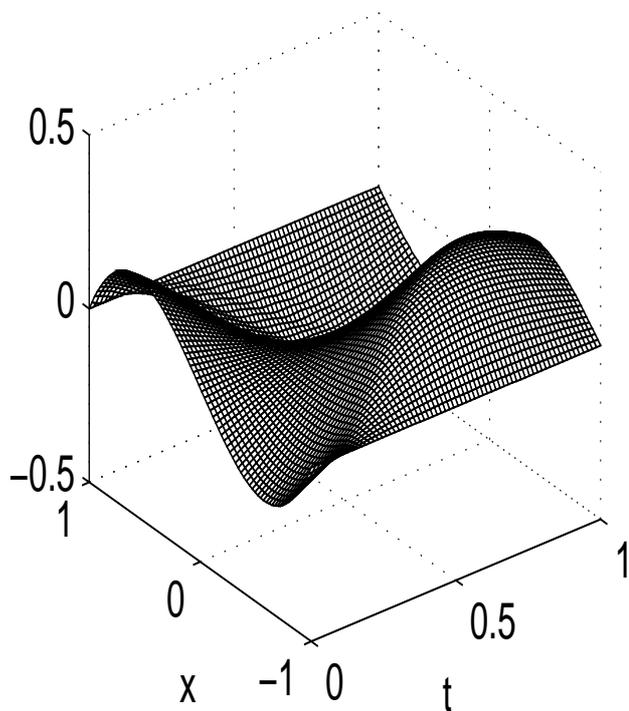


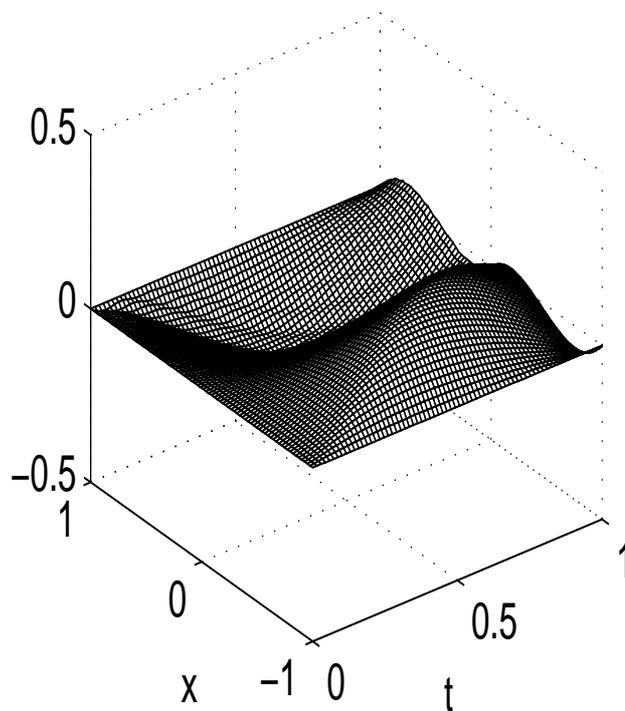
Abbildung IV.3: Beispiel 1 mit $\beta = 0.001$; Graphen von \bar{u} , $\bar{\lambda} = \Delta\bar{\mu}, \bar{y}$ und $\bar{y} - y_d$

Abbildung IV.4: Beispiel 2 mit $\beta = 0.1$; Graphen von \bar{u} und $\bar{\lambda} = \Delta\bar{u}$

Graph von y



Graph von $y - y_d$



Graph von y_d

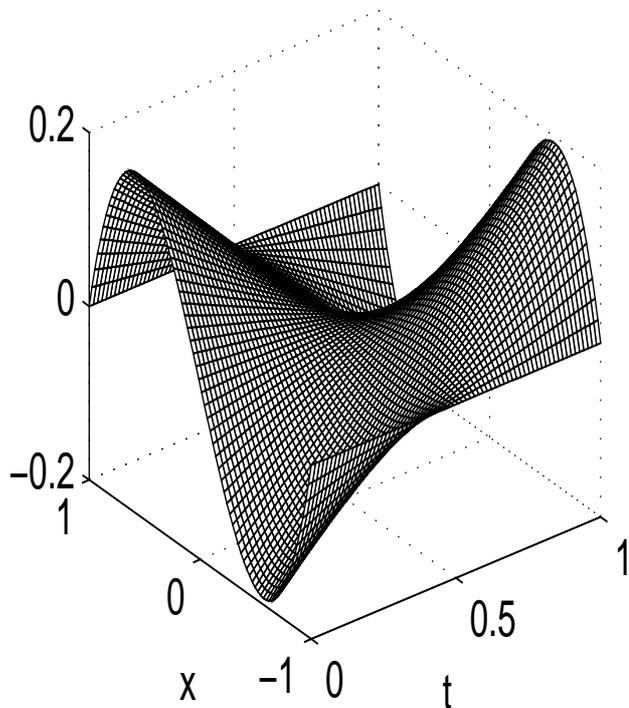
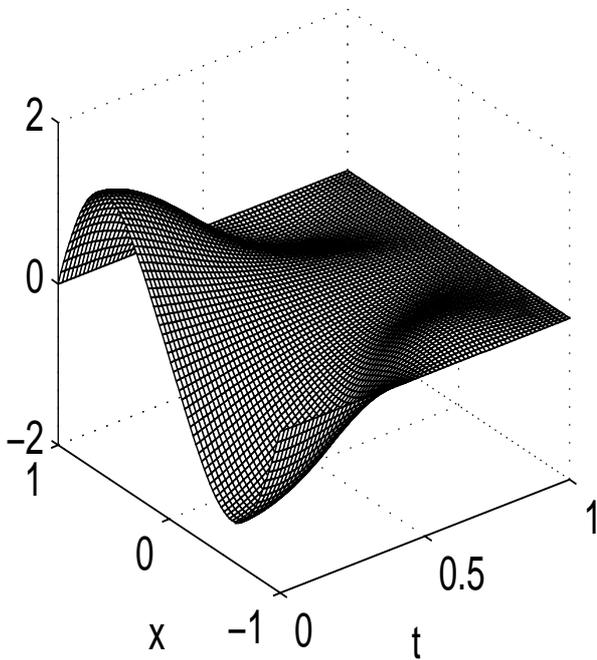
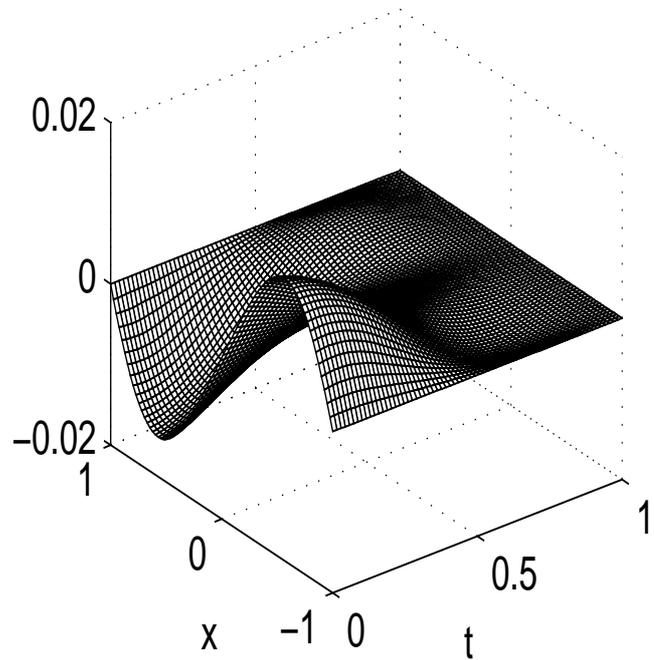
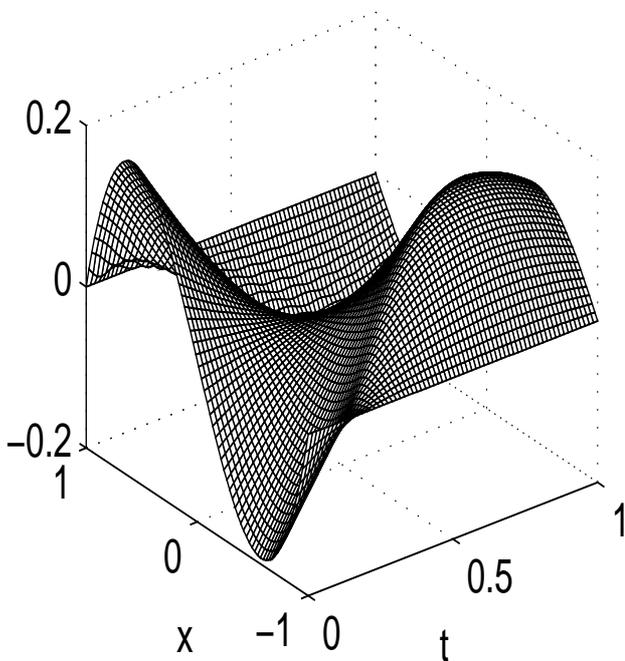
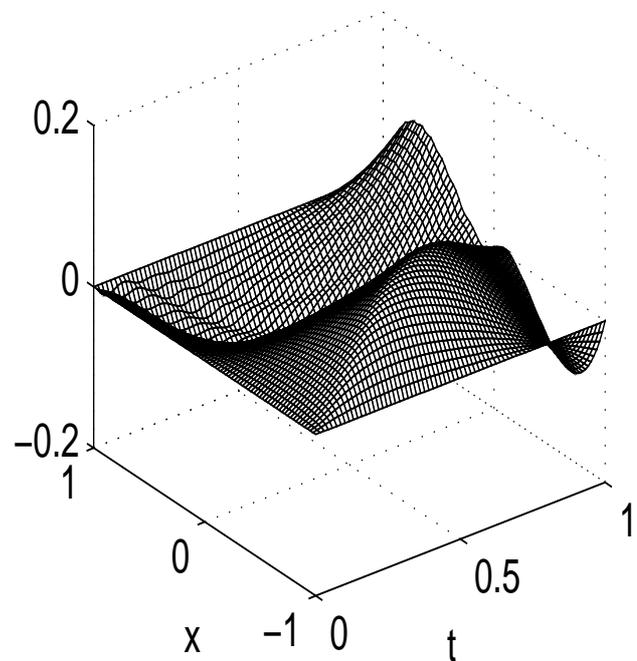


Abbildung IV.5: Beispiel 2 mit $\beta = 0.1$; Graphen von \bar{y}, y_d und $\bar{y} - y_d$

Graph von u Graph von λ Graph von y Graph von $y - y_d$ Abbildung IV.6: Beispiel 2 mit $\beta = 0.01$; Graphen von \bar{u} , $\bar{\lambda} = \Delta\bar{\mu}$, \bar{y} und $\bar{y} - y_d$

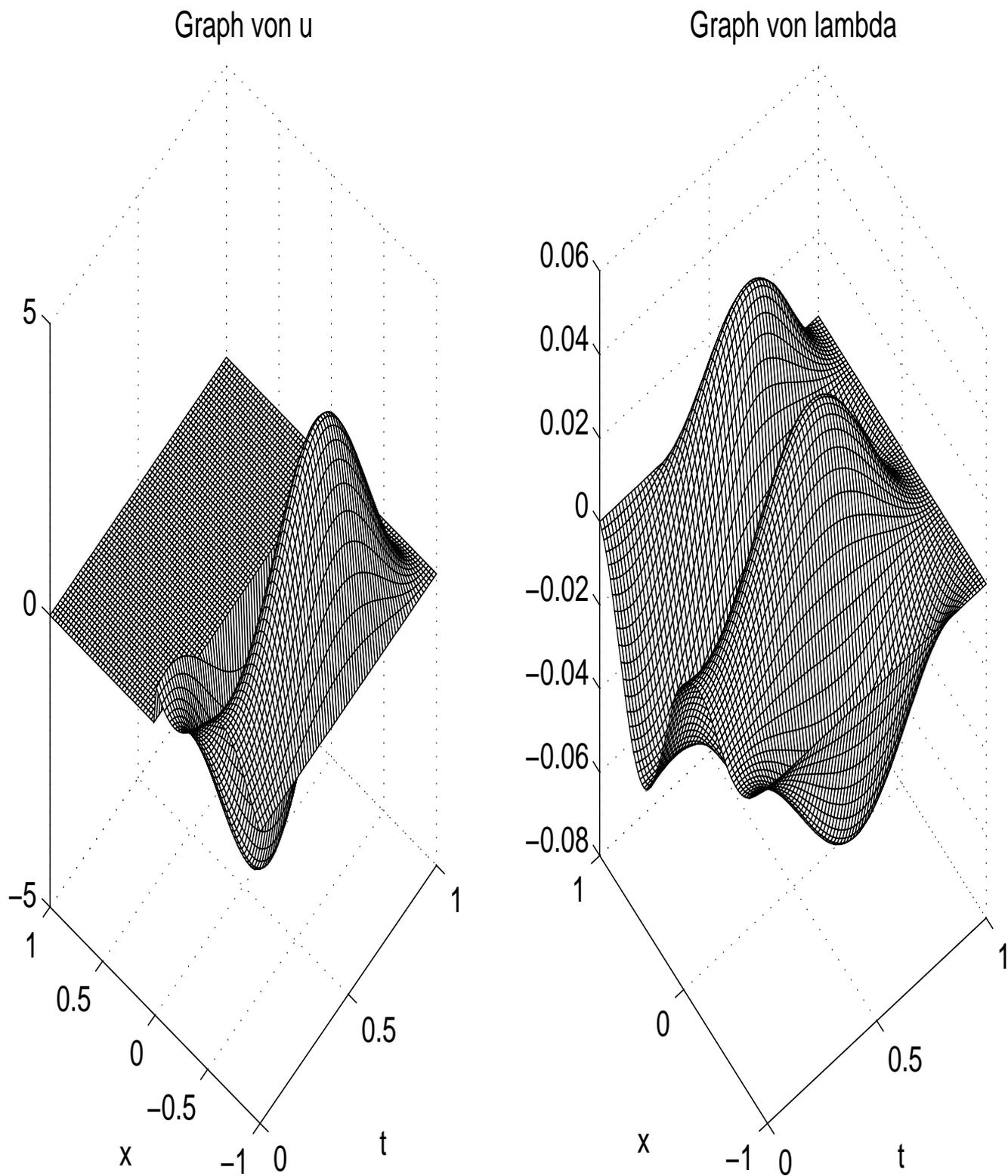
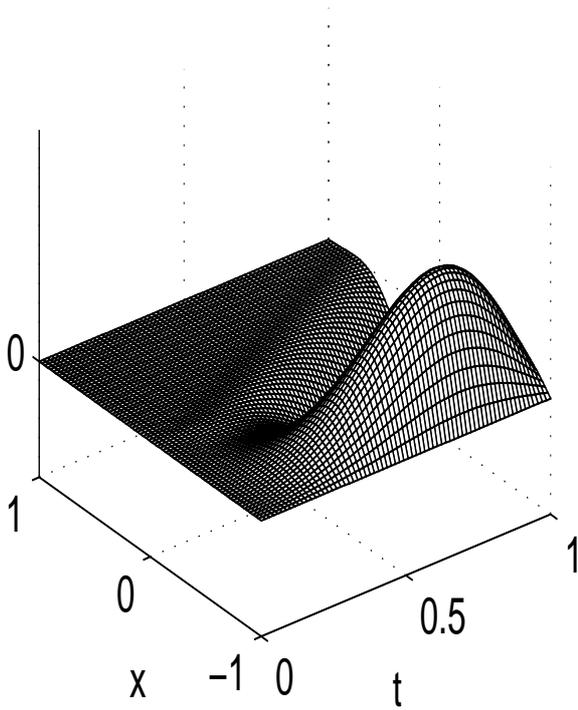
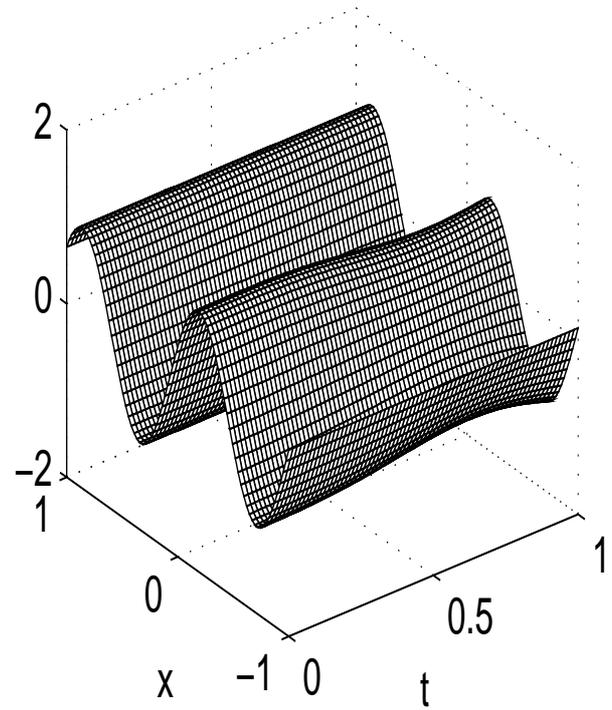
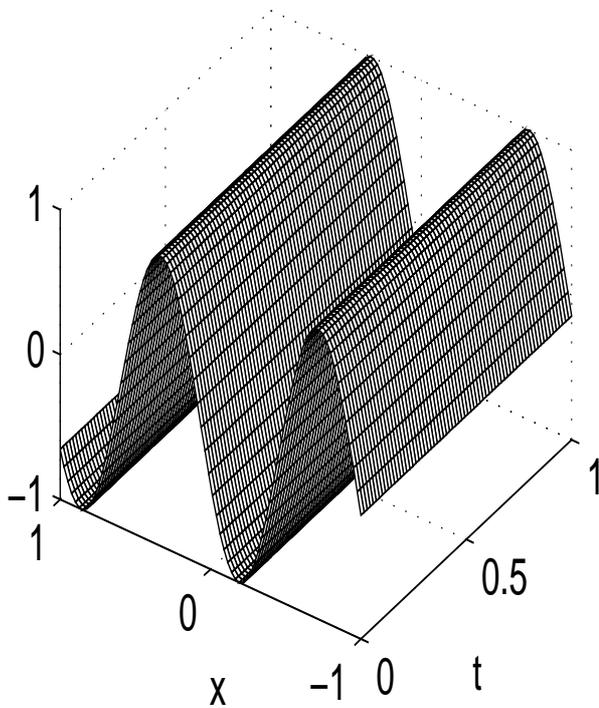


Abbildung IV.7: Beispiel 3 mit $\beta = 0.01$; Graphen von \bar{u} und $\bar{\lambda} = \Delta\bar{u}$

Graph von y Graph von $y - y_d$ Graph von y_d Abbildung IV.8: Beispiel 3 mit $\beta = 0.01$; Graphen von \bar{y} , y_d und $\bar{y} - y_d$

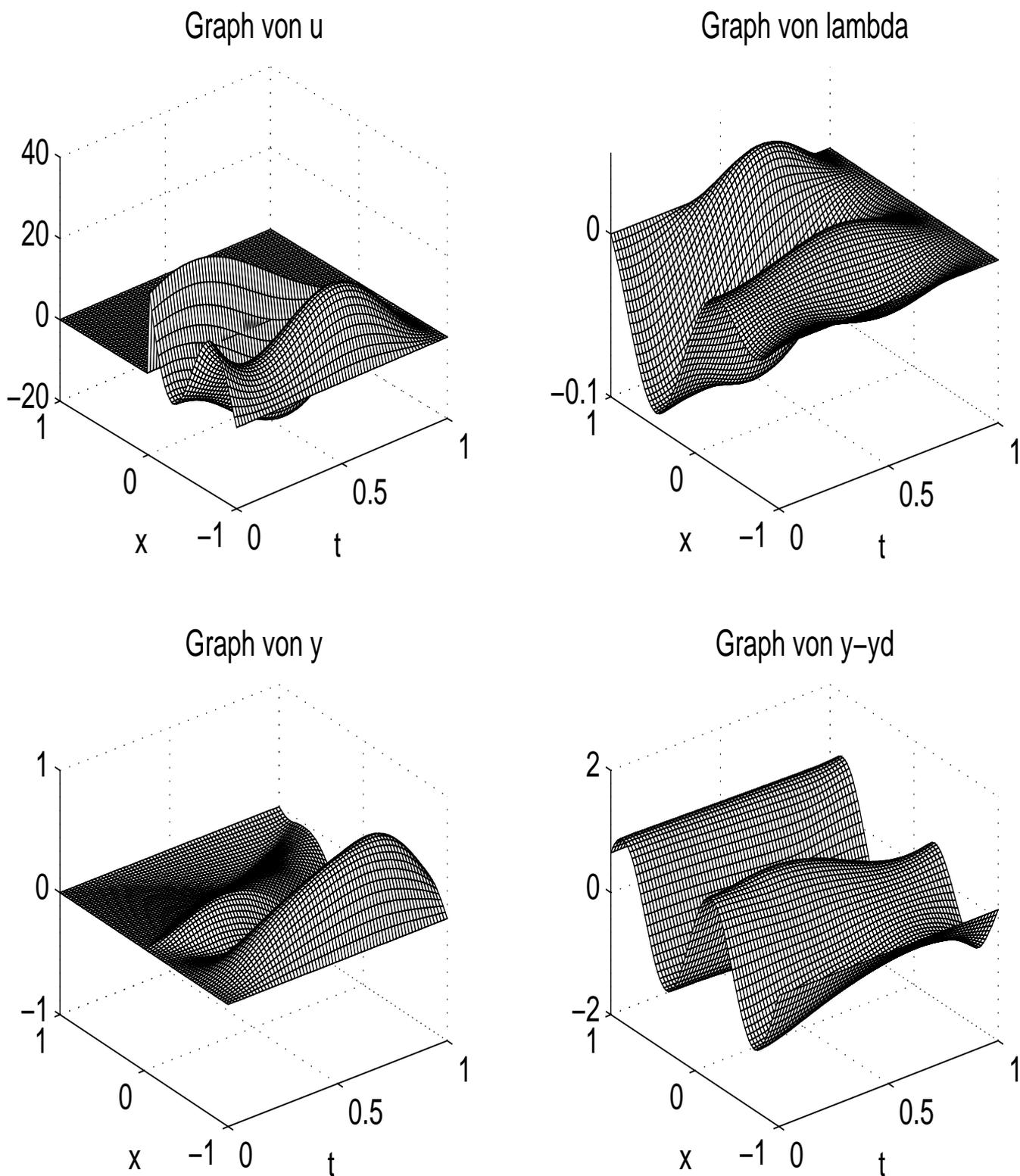


Abbildung IV.9: Beispiel 3 mit $\beta = 0.001$; Graphen von \bar{u} , $\bar{\lambda} = \Delta\bar{\mu}, \bar{y}$ und $\bar{y} - y_d$

Literaturverzeichnis

- [1] M.S. BERGER: *Nonlinearity and functional Analysis*. Academic Press. New York 1977.
- [2] D.P. BERTSEKAS: *Constrained Optimization and Lagrange multiplier Methods* Academic Press. New York 1982.
- [3] F. COLONIUS, K. KUNISCH: *Output least squares stability in elliptic Systems*. Appl. Math. Optim. 19, 33–63 (1989).
- [4] R. GLOWINSKI: *Numerical Methods for nonlinear variational Problems*. New York 1986.
- [5] M.D. GUNZBURGER, L. HOU, T.P. SVOBODNY: *Finite Element Approximations with the scalar Ginzburg–Landau Equation*. Computers Math. applic. Vol. 21, No. 2–3, pp. 123–131, 1991.
- [6] M.D. GUNZBURGER, L. HOU, T.P. SVOBODNY: *Analysis and finite Element Approximation of optimal Control Problems for the stationary Navier-Stokes Equations with distributed and Neumann Controls*. Mathematics of Computation. Vol. 57, Number 195 (1991), Pages. 123–151.
- [7] M. HINZE, K. KUNISCH: *Second order Methods for optimal Control of Time-dependent fluid flow*. Karl–Franzens–Universität Graz Spezialforschungsbereich F 003–Kontrolle und Optimierung; Bericht Nr. 165.
- [8] K. ITO, K. KUNISCH: *Augmented Lagrangian SQP–Methods for nonlinear optimal Control Problems of Tracking Type*. SIAM J. Control and Optimization, 34(3): 874–891, May 1996.

- [9] K. ITO, K. KUNISCH: *Augmented Lagrangian SQP-Methods in Hilbert Spaces and Applications to control in the coefficients Problems*. SIAM J. Control and Optimization, 6(1): 96-125, February 1996.
- [10] A. KAUFFMANN *Optimal Control of the Solid Fuel Ignition Model*. PhD Thesis, Fachbereich Mathematik, technische Universität Berlin, 1988
- [11] D. KLEIS, E. SACHS: *Convergence Rate of the Augmented Lagrangian SQP Method*. Forschungsbericht Nr. 95-19; Universität Trier Mathematik/Informatik, September 1995.
- [12] K. KUNISCH, G. PEICHL: *Estimation of a temporally and spatially varying Diffusion Coefficient in a Parabolic System by an augmented Lagrangian Technique*. Numer. Math. 59:473-509, 1991.
- [13] H.P. LANGTANGEN: *Computational Partial Differential Equations*. Springer-Verlag 1999.
- [14] J.L. LIONS: *Contrôle optimal de Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Paris 1968.
- [15] J.L. LIONS: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris 1969.
- [16] J.L. LIONS: *Contrôle des systèmes distribués singuliers*. Paris 1983.
- [17] J.L. LIONS, E. MAGENES: *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Volume 1, Paris 1968.
- [18] J.L. LIONS, E. MAGENES: *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Volume 2, Paris 1968.
- [19] M. MINOUX: *Mathematical Programming: Theorie and Algorithms*. 1986.
- [20] M. REED: *Abstract Non-Linear Wave Equations*. Springer-Verlag; Berlin 1976
- [21] H. TRIEBEL: *Interpolation Theory*. Function Spaces, Differential Operators; Berlin 1978.
- [22] S. VOLKWEIN *Mesh-Independence of an Augmented Lagrangian-SQP Method in Hilbert Spaces and Control Problems for the Burgers Equation*. PhD Thesis Fachbereich Mathematik, Technische Universität Berlin, 1987

- [23] J. WARGA: *Optimal Control of Differential and Functional Equations*. New York 1972.
- [24] J. WLOKA: *Partielle Differentialgleichungen*. Stuttgart, Teubner, 1982.
- [25] E. ZEIDLER: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A*. New York, 1990.
- [26] R. ZURMÜHL: *Matrizen und ihre Technischen Anwendungen*. Springer Verlag 1964.